Przedmiot wyrównawczy
semestr zimowy 2021/2022

Imię i nazwisko: ______________________

zadanie:	1a	1b	Σ:
punkty:	30	30	30
wynik:			
efekty:			

Poniżej przedstawione zostały dwa zadania. Wybierają Państwo jedno z zadań i przedstawiają je do oceny. Na rozwiązanie powinny składać się:
plik `.pdf` - przygotowany w LaTeX lub Markdown plik z opisem rozwiązania, zawierający niezbędną teorię/analizę problemu oraz wnioski płynące z zadania;
plik `.txt` - plik zawierający ewentualny kod programu, jeżeli jest on częścią rozwiązania; kod taki powinien być w dostateczny sposób opisany, aby jasnym było co jest obliczane.

Rozwiązania załączają Państwo w module Zadanie 1. na stronie kursu: plik pdf o nazwie `1_Imie_Nazwisko.pdf` oraz kod programu `1_Imie_Nazwisko.txt` (proszę podać własne imię i nazwisko).

Każde z zadań jest jednakowo punktowane (max. 30 punktów). Zadania rozwiązujemy samodzielnie. Zachęcam do wymiany wskazówek i podejścia do zagadnień, przeglądu literatury czy notatek z rachunku prawdopodobieństwa, itd. na forum kursu, jednak prace, które będą zbyt podobne do siebie w treści otrzymają po 0 punktów.

Zadanie 1a odwołuje się do podstawowej wiedzy z rachunku prawdopodobieństwa dot. rozkładu dwuwymiarowego, rozkładów brzegowych oraz elementów omówionych na dotychczasowych zajęciach (MPWL, CTG)

Zadanie 2a można potraktować jako bardziej eksperymentalne, tutaj w szczodry sposób punktowane jest przeprowadzenie nawet poprawnego częściowego rozumowania. Jeżeli nie uda się Państwu rozwiązać w całości zadania, ale dokładnie opiszą poprawne rozumowanie prowadzące do rozwiązania otrzymają Państwo dużą część punktów. Poprawne rozwiązanie bez żadnego opisu „teoretycznego” czy wyjaśnienia nie otrzyma punktów.

1. **całkowanie numeryczne oraz całkowanie Monte Carlo**

   Używając aproksymacji Riemanna i metody Monte Carlo wyznacz:

   (a) $P(0 < Z_1 \leqslant 1, 0 < Z_2 \leqslant 1)$, gdzie (Z_1, Z_2) jest wektorem o standardowym rozkładzie dwuwymiarowym normalnym (Z_1, Z_2 są niezależne).

   (b) $P(Z_1^2 + Z_2^2 < 1)$.

   (c) $P(Z_1 > 0, Z_2 > 0, Z_1 + Z_2 < 1)$, tj. objętość pod dwuwymiarową normalną gęstością nad trójkątem $(0,0), (0,1), (1,0)$.

   (d) Wyznacz analitycznie dokładne wartości powyższych całek.

   Dla $m = 10000$ (liczba podziałów odcinka, liczba losowanych wartości) porównaj wyniki. W rozwiązaniach przedstaw algorytm (pseudokod lub kod `R`). Zastanów się nad taką ew. modyfikacją algorytmu, by uzyskać najlepszą możliwą dokładność.

2. **generatory liczb pseudolosowych z zadanego rozkładu** *Zadanie to wymaga zachowania znacznego rygoru matematycznego (w porównaniu z zadaniem 1a).*

   Interesuje nas napisanie funkcji, która generuje liczby pseudolosowe o rozkładzie jednostajnym dwuwymiarowym na kole $K(0, 1)$.

   (a) Opisz charakterystyki rozkładu jednostajnego dwuwymiarowego na kole $K(0, 1)$ (funkcję gęstości, nośnik, być może wartość oczekiwaną i inne – to nie jest oczywiste, ale liczy się próba!).

(b) Przedstaw generator `gen1()` liczb z rozkładu jednostajnego dwuwymiarowego na kole metodą eliminacji. Wyznacz charakterystyki wygenerowanego wektora liczb, porównaj z „teoretycznymi” wielkościami. Ile „średnio” należy wygenerować punktów, aby w metodzie eliminacji otrzymać n punktów z zadanego rozkładu?

(c) Rozważ generator `gen2()`, który będzie generował liczby wyłącznie z koła $K(0, 1)$ (tzn. nie będzie, tak jak w metodzie eliminacji, generował „nieodpowiednich” wartości). W tym celu posłuż się współrzędnymi biegunowymi (r, θ). Zbadaj własności zbioru liczb pseudolosowych otrzymanych poprzez generowanie par punktów we współrzędnych (r, θ), gdzie r i θ mają rozkład jednostajny i są niezależne. Zapisz wnioski.

Generator `gen2()` oczywiście nie generuje rozkładu jednostajnego na $K(0, 1)$. Przeanalizuj otrzymany rozkład, w tym gęstości brzegowe rozkładu. W jaki sposób można zapewnić równomierny rozkład punktów? Zmodyfikuj rozkłady współrzędnych r i θ w taki sposób, aby otrzymać `gen3()` o wymaganym przez nas rozkładzie równomiernym na $K(0, 1)$.

(d) Zaproponuj opis generatora `gen4()` rozkładu równomiernego na $K(0, 1)$, w istotny sposób różnego od powyższych. Generator może pochodzić z literatury, może mieć zadany rozkład tylko w przybliżeniu, może być oparty o generatory innych rozkładów, w końcu może być zupełnie niepraktyczny w użyciu.

Pomysł 1.: przybliżamy koło jako sumę m trójkątów równoramiennych o wspólnym wierzchołku $(0, 0)$, losujemy „trójkąt” a następnie punkt wewnątrz trójkąta, dla pewnego dużego m.

Pomysł 2.: Jeśli się zastanowić jak wygląda granica, gdy $m \to \infty$, to otrzymamy właściwy generator zadanego rozkładu. Pomyślmy o nieskończenie wielu trójkątach równoramiennych o wierzchołku w punkcie $(0, 0)$, których krótszy bok jest nieskończenie mały. Losujemy jeden z takich trójkątów losując kąt θ. Rozważmy teraz losowanie punktu z takiego trójkąta: możemy pomyśleć o transformacji kwadratu o boku 1, $[0, 1] \times [0, 1]$, w romb, którego krótsza przekątna maleje do 0, a dłuższa przekątna rośnie do wartości 2. Zatem losując dwa punkty z rozkładu jednostajnego na bokach takiego rombu $x, y \sim U(0, 1)$, otrzymujemy punkt na dłuższej przekątnej $x + y$. Jeżeli teraz $x + y$ ma wartość większą od 1 (promienia okręgu) możemy przyjąć wartość $2 - x - y$.