邻域

4邻域

对角4邻域

$$
\begin{gathered}
f(p), f(q) \in V \\
q \in N_4(p) \\
q \in N_D(p); \\
\text{且}\ f(N_4(p) \cap N_4(q)) \cap V = \emptyset
\end{gathered}
$$

彩色图像处理

LMS长中短波视锥细胞，分别对RGB敏感

CIE国际照明委员会

CIE 1931 RGB 色彩空间（色域 color space）

CIE 1931 XYZ标准色度系统

1. 选取新坐标轴，使得所有波长点都在第一卦限
    1. 注意此轴不正交
2. 正交化坐标轴（各颜色点同时变换）
3. 归一化各颜色点亮度至1（将各点投影到x+y+z=1平面，等亮度平面）
    - xyz相互约束，省去z轴（将各点再投影到xOy平面，即色图的xy轴）
    - 色度图（色品图）的边缘为纯色，内部为混合
    - 白点：决定RGB最大亮度组合

色域标准：RGB原色点位置+白点位置

CIE 1931 Yxy色度图，最常见的色图

单色光轨迹线+紫红线=轮廓

黑体轨迹线

tristimulus 三刺激值

https://colorizer.org/

色彩模式

- RGB (red,green,blue)
- HSV/HSB (hue,saturation,value/brightness)表示色相、饱和度和明度
    - 色调，色相（H）是色彩的基本属性，就是平常所说的颜色名称，如红色、黄色等。[0, 360)
    - 饱和度（S）是指色彩的纯度，越高色彩越纯 (鲜艳)，低则逐渐变灰，0-100%, 0-255
    - 明度（V），取0-100%, 0-255
    - HSV是**倒锥形**，最粗处明度为1
    - $V = \max(R, G, B)$
- HSI Intensity 亮度
    - H 红色为0度
    - **双锥形**，中间最粗处亮度为0.5
    - I为从黑尖到白底锥轴
    - $I = 1/3(R + G + B)$
- HSL/HLS Lightness
    - 和HSI有点区别
    - 圆柱形（以Chroma为半径，可画成双锥）
    - $L = 1/2[\max(R, G, B) + \min(R, G, B)]$
- CMY，CMYK Cyan, Magenta, Yellow 品红（洋红），青，黄
    - CMY=[1,1,1]-[R,G,B]
- YUV (YCrCb)
    - Y是指亮度分量，Cb指蓝色色度分量(blue chrominance)，而Cr指红色色度分量(red chrominance)
    - 只留Y则是黑白，为了兼容黑白和彩色电视诞生
- Lab (CIE L*a*b)

S=0就是灰色，RGB体对角线，圆锥圆柱高

饱和度+明度统称：色调

七大色调：https://en.wikipedia.org/wiki/Tint,_shade_and_tone

1. 纯
2. 明：加白色，S变化
3. 淡：再加白色，饱和度S变化
4. 白色调
5. 灰：纯加黑色，明度变化
6. 暗：再加黑色
7. 黑色调

Brightness 亮度or 明度

亮度和明度的区别是：**明度值是相对1处而言，亮度值是相对0.5处而言。**

由此，两者的颜色模型也不同，HSI是双锥形，中间最粗处亮度为0.5；而HSV是倒锥形，最粗处明度为1

一种纯色的明度等于白色的明度，而纯色的亮度等于中度灰的亮度

圆形三角六边形

- HSV/HSB 为 色相，饱和度，明度 (brightness)
  - 设计师
- HSL 为 色相，饱和度，亮度 (lightness)
  - 双锥空间，程序员常用

RGB加色模型，发光：显示屏

CMYK减色模型，吸光：打印机

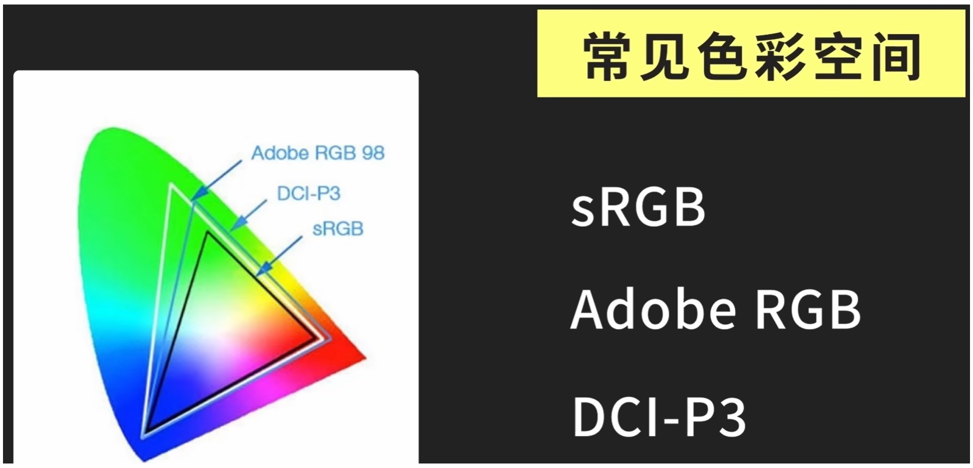
- 黄 Yellow
- 品 Magenta
- 青 Cyan
- 黑 blacK （BK）

色彩模型：RGB，CMYK，HSV，HSL

色域 Color Gamut：是色彩空间的子集，比如99%sRGB

色彩空间

- Adobe RGB
- DCI-P3
- sRGB
- SWOP CMYK（由大到小）



图像压缩

1. 变换编码：通常有损
2. 预测编码：通常无损

jpeg 有损

- 采用YUV，不适合压缩矢量图
- RGB to YCbCr
- DCT
- 量化：人眼对亮度敏感，CbCr采用更大的量化常数（允许更多损失）改压缩比就是在改量化表
- zigzag
- RLE
- Huffman

png 无损

- Filtering
- DEFLATE
  - LZSS (Lempel-Ziv-Storer-Szymanski) zip中也使用
  - Huffman

H.264 AVC Advanced Video Coding

- I iFrame
- P Predicted frames
- B Bidirectional Predicted Frames

压缩编码

Huffman

Shannon

- 信息论中的Shannon编码只指定编码长度为$l(x) = \lceil \log \frac{1}{p(x)} \rceil$

Fano、Shannon-Fano

- Cover信息论中叫Fano编码，DIP中习惯叫Shannon-Fano
- 按符号出现概率从大到小排，划分成两块概率和最接近的符号集合，递归

Shannon-Fano-(Ellias)

- Cover信息论给出了多个构造办法

算术编码 Arithmetic Coding

游程编码（RLE，Run Length Encoding）：基于字典的技术

L-Z (Lempel-Ziv) 编码

- LZW Lempel-Ziv-Welch
- 处理序列重复

LZSS (Lempel-Ziv-Storer-Szymanski)

- Search Buffer+Look Ahead Buffer=Sliding Window

➢LZW编码：

由Abraham Lempel、Jacob Ziv和Terry Welch提出的基于表查寻的文件压缩方法。LZW算法基于字典T，将输入字符串映射成定长（通常为12位）的码字。在12位4096种可能的代码中，256个灰度代表单字符，剩下3840给出现的字符串。

LZW编码算法具体步骤：

步骤1： 将词典初始化为包含所有可能的单字符，

当前前缀P初始化为空；

步骤2： 当前字符C的内容为输入字符流中的下一个字符；

步骤3： 判断P+C是否在词典中

（1） 如果“是”， 则用C扩展P，即让P=P＋C；

（2） 如果“否”， 则

①输出当前前缀P的码字到码字流；

②将P＋C添加到词典中；

③令前缀P = C（即现在的P仅包含一个字符C）；

步骤4： 判断输入字符流中是否还有码字要编码

（1） 如果“是”， 就返回到步骤2；

（2） 如果“否”

① 把当前前缀P的码字输出到码字流；

② 结束。

37

直方图

从左到右黑色，阴影，高光，白色

调色软件可以进行灰度变换（变化强烈的集中在一个区域，使用曲线工具），即在做直方图均衡

1. 直方图均衡化 Equalization
2. 直方图规定化（直方图匹配Matching，Specification）：希望得到直方图非平
    - 方法：将目标和原图都做均衡化，认为均衡结果相同。对原图均衡化结果作用目标图均衡化的反函数

图像变换

DCT

$$C(u,v)=a(u)b(v)\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{M-1}f(x,y)\cos[\frac{2\pi}{N}(2x+1)u]\cos[\frac{2\pi}{M}(2y+1)v]$$

$$a(u)=\{\begin{matrix}\sqrt{\frac{2}{N}},u=0,\\ \sqrt{\frac{1}{N}},else\end{matrix}$$

PCA

Hotelling 变换，K-L变换

e.g. 已知一幅图像的尺寸为 256*256,现将其分成4*4的小块，每一小块展开成 16维的矢量。请写出对这些矢量进行KL变换的过程。

共得到$N=64\times 64=4096$个$4\times 4=16$维向量

$$x_i\in\mathbb{R}^{16\times 1},i=1,\dots,4096$$

计算均值向量：

$$\mu=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$$

排列成矩阵，中心化：

$$X_c=[x_1-\mu,\dots,x_N-\mu]=X-\mu\mathbf{1}_{1\times N}\in\mathbb{R}^{16\times N}$$

计算协差阵：

$$\begin{aligned}C_X&=E\{(x-\mu)(x-\mu)^T\}\\&=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[(x_i-\mu)(x_i-\mu)^T]\\&=\frac{1}{N}X_cX_c^T\in\mathbb{R}^{16\times 16}\end{aligned}$$

协差阵为对称阵，一定正交相似于对角阵，对角化：

$$C_X=U\Lambda U^T,\text{orthogonal }U$$
$$\Lambda=\text{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_{16}),\lambda_1\geq\ldots\geq\lambda_{16}$$

U的**每一列为特征向量。**

变换：

$$Y=U^T(X-\mu\mathbf{1}_{1\times N})=U^TX_c$$

将Y各列提取为向量，按由原图排列成向量的逆顺序恢复成矩阵，从而得到变换后的图片。

Y的协差阵：

$$
\begin{aligned}
C_Y &= \frac{1}{N} Y Y^T \\
&= \frac{1}{N} U^T (X-\mu\mathbf{1})(X-\mu\mathbf{1})^T U \\
&= U^T C_X U \\
&= U^T U \Lambda U^T U \\
&= \Lambda
\end{aligned}
$$

若取前 k个最大特征值对应的特征向量（主成分），构成投影矩阵$U_k \in \mathbb{R}^{16\times 16}$(只有前k列非0)，则变换为有损压缩。

或者说，使用U_k，由Y近似重建X，均方误差MSE：

$$
\begin{aligned}
X &= UY + \mu\mathbf{1} \\
\hat{X} &= U_k Y + \mu\mathbf{1} \\
\text{MSE} &= \frac{1}{N} ||\hat{X} - X||_F^2 \\
&= \frac{1}{N} \text{tr} (\hat{X} - X)(\hat{X} - X)^T \\
&= \frac{1}{N} \text{tr} (U - U_k) Y Y^T (U - U_k)^T \\
&= \text{tr} (U - U_k) \Lambda (U - U_k)^T \\
&= \text{tr} (U - U_k)^T (U - U_k) \Lambda \\
&= \text{tr diag } (0, \dots, 0, 1, \dots, 1) \Lambda \text{ ,N-k个1} \\
&= \sum_{i=k+1}^{N} \lambda_i
\end{aligned}
$$

Hadamard变换

$$
\begin{gathered}
H_{2n} = H_2 \otimes H_n \text{ ,where } \otimes \text{ is the Kronecker Product} \\
H_n H_n^T = nI \text{ 故常用 } 1/\sqrt{n} \text{ 归一化定义 } H_n \\
H M H^T
\end{gathered}
$$

此处n表示矩阵阶数，也有以矩阵阶数的log2为下标表示的（如wiki）

自然排序

归一化定义的H_2：

$$
\begin{gathered}
H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
(H_n)_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{n}} (-1)^{i \cdot j} = \frac{1}{\sqrt{n}} (-1)^{\vec{b}(i) \cdot \vec{b}(j)}
\end{gathered}
$$

其中$\vec{b}(i) \cdot \vec{b}(j) = i \cdot j$表示i，j二进制表示的按位相乘 bit-wise product

注意行列从0开始编号

Walsh变换

仅仅是Hadamard按行重新排序，按**符号变换次数（列率）**从小到大：列率排序（Walsh序）

另法：将Hadamard矩阵行编号（0开始）按对应的Gray码比特倒置后从小到大排序。

$$
(W_n)_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{n}} (-1)^{\sum_{k=0}^{n-1} b_k(i) b_{n-1-k}(j)}
$$

由于Hadamard和Walsh仅行排序上有不同，也合称Hadamard-Walsh Transform (WHT)

3种排序方式

1. 自然排序 Hadamard
2. 列率排序 Walsh
3. 双积（佩利）排序 Dyadic (Paley) Ordered

二维WHT具有能量集中的特性，而月原始数据中数字越是均匀分布，经变换后的数据越集中于矩阵的边角上。因此，二维WHT可用于压缩图像信息

类似FFT，有FWHT 快速沃尔什（哈达马）变换

Haar变换

$$K_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \begin{bmatrix} K_n \otimes [1,1] \\ \sqrt{n} I_n \otimes [1,-1] \end{bmatrix}$$
$$\text{where } I_n \text{ is the n-dim Identity matrix}$$

里外根号是为了归一化，归一化后为正交阵

https://stackoverflow.com/questions/23869694/create-nxn-haar-matrix

上面的讨论给出了递归定义，参考自文章https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/36/24/316

$$K_{k+1} = (\frac{1}{\sqrt{2^{k+1}}}) \begin{bmatrix} K_k \otimes [1,1] \\ 2^{k/2} I_{2^k} \otimes [1,-1] \end{bmatrix}$$

这里矩阵阶数表示为2^k

系数分布：$[A, H; V, D]$，低频，Horizontal水平高频，Vertical竖直高频，Diagonal对角高频

注意：Hadamard Walsh Haar 按书上定义全都需要归一化

Mallat算法，也称为快速小波变换（Fast Wavelet Transform，FWT）

Kronecker Product

注意Kronecker积计算顺序，是将后面的矩阵乘到前面矩阵的每一个元素位置上

$$A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{p\times q}, C \in \mathbb{F}^{mp\times nq}$$

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & a_{1n}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & a_{1n}b_{21} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & a_{1n}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & a_{mn}b_{11} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & a_{mn}b_{p1} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}$$

STFT 短时傅里叶变换

加窗的FT, $w(t)$为窗函数

$$X(t,f) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t-\tau)x(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau$$

小波变换WT (Wavelet Transform)

CWT 连续小波变换

$$\text{小波基函数}\ \Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\Psi(\frac{x-b}{a})\ \text{母小波}$$

$$T(a,b) = \langle y, \Psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\Psi^*_{a,b}(t)\mathrm{dt}$$

a,b: scaling and translation parameters

变换核是复值函数，定义内积需要取共轭

$$\text{Morlet Wavelet: } \Psi(t) = ke^{i\omega_0 t}e^{-t^2/2}$$

可计算变换的模值，得到小波变换谱 (wavelet scalogram): 三维，t轴，f轴，颜色表示模值大小

Heisenburg Box

Admissibility Condition 容许性条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega}d\omega < +\infty$$

母小波也叫做小波函数（wavelet function），对应着细节系数的基，

父小波也叫做缩放函数（scaling function），对应着近似系数的基

DWT 离散小波变换

- 冗余小波变换（Redundant Wavelet Transform）
- 多重解析度分析（MRA）

$$a = a_0^m$$
$$b = ka_0^m b_0$$
$$\Psi_{a_0^m, kb_0}(t) = a_0^{-\frac{m}{2}} \Psi(a_0^{-m} t - kb_0)$$
$$\text{常取}\, a_0 = 2, b_0 = 1$$
$$\Psi_{m,k}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \Psi(2^{-m} t - k)\ \text{离散小波基}$$

傅里叶切片定理（Fourier Slice Theorem）的证明

证明

1. 定义 Radon 变换

$f(x, y)$ 在角度 θ 下的投影（Radon 变换）为：

$$p_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos\theta + y \sin\theta - t)\, dx\, dy$$

其中，$\delta(\cdot)$ 是 Dirac 冲激函数，表示积分沿直线 $x \cos\theta + y \sin\theta = t$。

也可以表达为：

$$g(\rho, \theta) = p_\theta(t), \rho = t$$

有时记Radon变换为：

$$\Re\{f(x, y)\} = g(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos\theta + y \sin\theta - t)\, dx\, dy$$

ρ表示投影方向直线到原点的距离，θ表示直线法线与x轴夹角。对g做Fourier变换时仅对ρ做变换：

$$G(\omega, \theta) = \mathscr{F}\{g(\rho, \theta)\}$$

2. 计算 $p_\theta(t)$ 的一维傅里叶变换

投影 $p_\theta(t)$ 的傅里叶变换为：

$$P_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\theta(t) e^{-j2\pi\omega t}\, dt$$

将 $p_\theta(t)$ 的表达式代入：

$$P_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos\theta + y \sin\theta - t)\, dx\, dy \right] e^{-j2\pi\omega t}\, dt$$

交换积分顺序：

$$P_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x \cos\theta + y \sin\theta - t) e^{-j2\pi\omega t}\, dt \right] dx\, dy$$

由于 $\delta(x \cos\theta + y \sin\theta - t)$ 仅在 $t = x \cos\theta + y \sin\theta$ 时有贡献，故：

$$P_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2\pi\omega(x\cos\theta + y\sin\theta)}\, dx\, dy$$

3. 与二维傅里叶变换的关系

$f(x,y)$ 的二维傅里叶变换为：

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2\pi(ux+vy)}\, dx\, dy$$

令 $u = \omega\cos\theta$，$v = \omega\sin\theta$，则：

$$F(\omega\cos\theta, \omega\sin\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2\pi\omega(x\cos\theta + y\sin\theta)}\, dx\, dy$$

这与 $P_\theta(\omega)$ 的表达式完全一致，因此：

$$P_\theta(\omega) = F(\omega\cos\theta, \omega\sin\theta)$$

物理意义

- **投影数据的傅里叶变换** $P_\theta(\omega)$ 给出了原始图像 $f(x,y)$ 的二维频谱 $F(u,v)$ 在方向 θ 上的切片。
- 通过采集多个角度的投影并计算其傅里叶变换，可以填充整个频率平面，从而通过逆傅里叶变换重建图像。

正弦图Sinusoidal

横轴$\rho \in [-r, r]$，纵轴$\theta \in [0, \pi]$

R-L滤波函数（Ramp-Lak滤波器，Ramp Filter）

$$H(\omega) = |\omega|$$

S-L滤波函数（Shepp-Logan滤波器）

$$H(\omega) = |\omega|\text{sinc}(\omega\frac{\pi}{2})$$

图像平滑

min remove salt(白点，灰度值大)

max   remove pepper(黑典，灰度值小)

midpoint = 1/2(min+max) remove Gauss?
median = 中位数，中值滤波： 去椒盐噪声

- 保留边缘
- 可以有不同形状的滤波器模板：方形，十字，X
- **中值滤波优势**：

- 非线性滤波，能有效消除离群值（极值点）而不模糊边缘。
- 通过取邻域中值，直接忽略异常像素值。

average 均值滤波：去Gauss噪声

- **均值滤波优势**：
    - 线性平滑可有效降低噪声方差（理论依据：大数定律）。
    - 对服从正态分布的噪声有最优抑制效果（最小均方误差准则）

alpha-trimmed mean filter 排序，去掉最大最小各α个后取均值。ppt公式可能有问题，**回去看书**

滤波可以不加padding

锐化

- 一阶
    - Roberts，Prewitt，Sobel 2个方向
    - Robinson Kirsch 8个方向
- 二阶
    - Laplacian
    - LoG: Laplacian of Gauss

同态滤波器?

$$
H_W(u,v)=\frac{1}{H(u,v)}\frac{|H(u,v)|^2}{|H(u,v)|^2+S_n(u,v)/S_f(u,v)}\ \mathrm{DIP}
$$

$$
H(j\omega)=\frac{S_s(\omega)}{S_s(\omega)+S_n(\omega)}\ \text{统计信号}
$$

$$
S_s(\omega)=S_f(\omega)|H(u,v)|^2
$$