DIP HW6

翁正朗 PB22000246

1. 简述CT发明过程

CT (Computed Tomography) 计算机断层扫描

1. 理论奠基（1917-1963）

- **1917年**：奥地利数学家**约翰·拉东（Johann Radon）**提出**拉东变换（雷登变换）**理论，证明通过无限多投影可重建物体内部结构，为CT奠定数学基础。
- **1956年**：美国物理学家**罗纳德·布雷斯韦尔（Ronald Bracewell）**首次将投影重建理论应用于射电天文学，为医学成像提供启发。

2. 原型研发（1967-1971）

- **1967年**：英国电子工程师**戈弗雷·豪斯菲尔德（Godfrey Hounsfield）**在EMI公司研究时，提出**"用X射线投影重建断层图像"**的设想，获得公司资助。
- **1968年**：豪斯菲尔德与神经放射学家**詹姆斯·安布罗斯（James Ambrose）**合作，开发首台实验设备，扫描第一例患者（大脑肿瘤），获得清晰断层图像。
- **1971年**：首台临床CT机（**EMI Mark I**）在伦敦阿特金森-莫利医院投入使用，仅限头部扫描，单次扫描需**30分钟**，重建图像需**2.5小时**。

3. 技术突破与推广（1972-1979）

- **1972年**：豪斯菲尔德在美国放射学会公布成果，引发医学界轰动。CT实现**厘米级分辨率**，显著优于传统X光。
- **1974年**：美国**罗伯特·莱德利（Robert Ledley）**开发出**全身CT扫描仪**（ACTA扫描仪），推动临床应用普及。
- **1979年**：豪斯菲尔德与南非物理学家**艾伦·科马克（Allan Cormack）**（独立完成重建算法）共享**诺贝尔生理学或医学奖**。

4. 现代发展（1980s至今）

- **1980s**：**螺旋CT**（连续旋转扫描）问世，扫描速度提升至秒级。
- **1990s**：**多层CT**（多排探测器）实现亚毫米分辨率。
- **2000s后**：能谱CT、光子计数CT等新技术持续革新诊断能力。

2. 试证明投影定理

傅里叶切片定理（Fourier Slice Theorem）的证明

证明

1. 定义 Radon 变换

$f(x, y)$ 在角度 θ 下的投影（Radon 变换）为：

$$p_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - t)\, dx\, dy$$

其中，$\delta(\cdot)$ 是 Dirac 冲激函数，表示积分沿直线 $x\cos\theta + y\sin\theta = t$。

也可以表达为：

$$g(\rho, \theta) = p_\theta(t), \rho = t$$

ρ表示投影方向直线到原点的距离，θ表示直线法线与x轴夹角。对g做Fourier变换时仅对ρ做变换：

$$G(\omega, \theta) = \mathscr{F}\{g(\rho, \theta)\}$$

2. 计算 $p_\theta(t)$ 的一维傅里叶变换

投影 $p_\theta(t)$ 的傅里叶变换为：

$$P_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\theta(t) e^{-j2\pi\omega t}\, dt$$

将 $p_\theta(t)$ 的表达式代入：

$$P_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - t)\, dx\, dy\right] e^{-j2\pi\omega t}\, dt$$

交换积分顺序：

$$P_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x\cos\theta + y\sin\theta - t) e^{-j2\pi\omega t}\, dt\right] dx\, dy$$

由于 $\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - t)$ 仅在 $t = x\cos\theta + y\sin\theta$ 时有贡献，故：

$$P_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi\omega(x\cos\theta + y\sin\theta)}\, dx\, dy$$

3. 与二维傅里叶变换的关系

$f(x, y)$ 的二维傅里叶变换为：

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)}\, dx\, dy$$

令 $u = \omega\cos\theta$，$v = \omega\sin\theta$，则：

$$F(\omega\cos\theta, \omega\sin\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi\omega(x\cos\theta + y\sin\theta)}\, dx\, dy$$

这与 $P_\theta(\omega)$ 的表达式完全一致，因此：

$$P_\theta(\omega) = F(\omega\cos\theta, \omega\sin\theta)$$

物理意义

- **投影数据的傅里叶变换** $P_\theta(\omega)$ 给出了原始图像 $f(x,y)$ 的二维频谱 $F(u,v)$ 在方向 θ 上的切片。
- 通过采集多个角度的投影并计算其傅里叶变换，可以填充整个频率平面，从而通过逆傅里叶变换重建图像。

R-L滤波函数（Ramp-Lak滤波器，Ramp Filter）

$$H(\omega) = |\omega|$$

S-L滤波函数（Shepp-Logan滤波器）

$$H(\omega) = |\omega|\mathrm{sinc}(\omega\frac{\pi}{2})$$