



# 统计信号分析与处理

## 第2章 随机信号与系统



# 本章内容

- 2.1 信号与系统概述
- 2.2 随机信号通过线性时不变系统
- 2.3 随机序列通过线性时不变系统
- 2.4 白噪声通过线性时不变系统
- 2.5 白噪声序列和平稳随机序列的参数模型
- 2.6 随机信号通过线性时变系统
- 2.7 随机信号通过非线性系统
- 2.8 随机信号的复表示
- 2.9 窄带高斯噪声通过检波器的输出



## 2.1 信号与系统概述

### 2.1.1 信号及其分类

### 2.1.2 系统及其分类



## 2.1.1 信号及其分类

- 信号概念：

信号是信息的表现形式，通常反映为随若干变量而变化的某种物理量。

在数学上，信号一般可以表示成单个或多个自变量的函数。

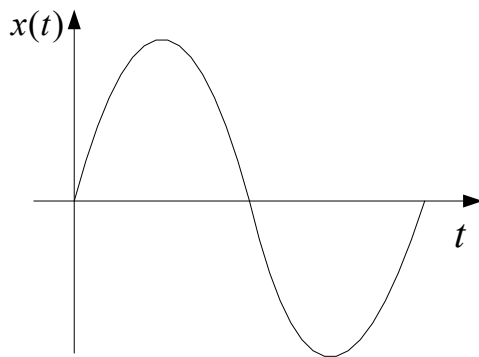
- 信号分类：

根据信号的函数特点及其频谱分布特性分类。

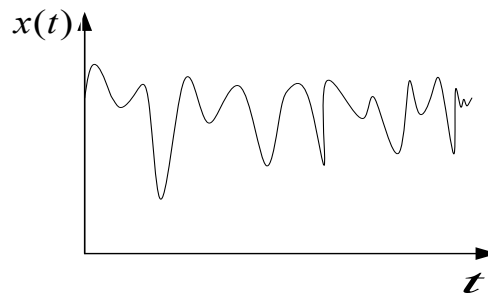


## 1. 根据信号变化规律是否预知

{ 确定信号：能够用确定的数学表达式  
来描述变化规律的信号  
随机信号：不能用确定的数学表达式  
来描述变化规律的信号



确定信号



随机信号



## 2. 根据函数自变量的取值是否连续

连续信号	模拟信号：时间连续，幅度连续
	量化信号：时间连续，幅度离散
离散信号	抽样信号：时间离散，幅度连续
	数字信号：时间离散，幅度离散



### 3. 根据信号按一定间隔是否周期重复

周期信号:  $s(t)$  按一定的时间间隔  $T$  周而复始的变化

$$s(t) = s(t + kT), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

非周期信号: 不具有这种周而复始变化特性的信号

如

- 周期信号  $\sin x$  , 周期  $T = 2\pi$
- 非周期信号  $e^{|x|}$



## 4. 根据信号的能量或功率是否为有限值

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{能量信号: 能量 } E = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt < +\infty \text{ 的信号} \\ \text{功率信号: 功率 } P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt < +\infty \text{ 的信号} \end{array} \right.$$

### 结论

- 能量信号的平均功率为零
- 周期信号一般是功率信号
- 非周期信号可能是能量信号或功率信号

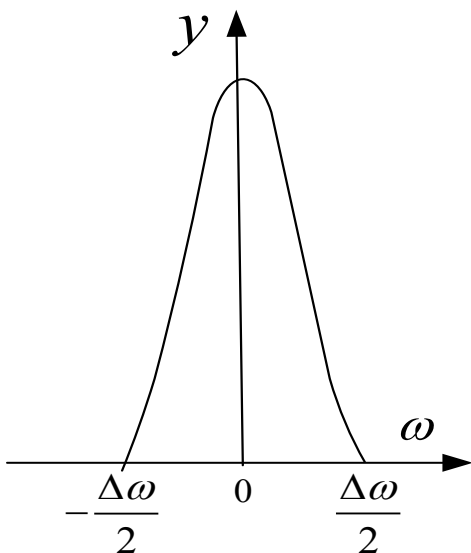




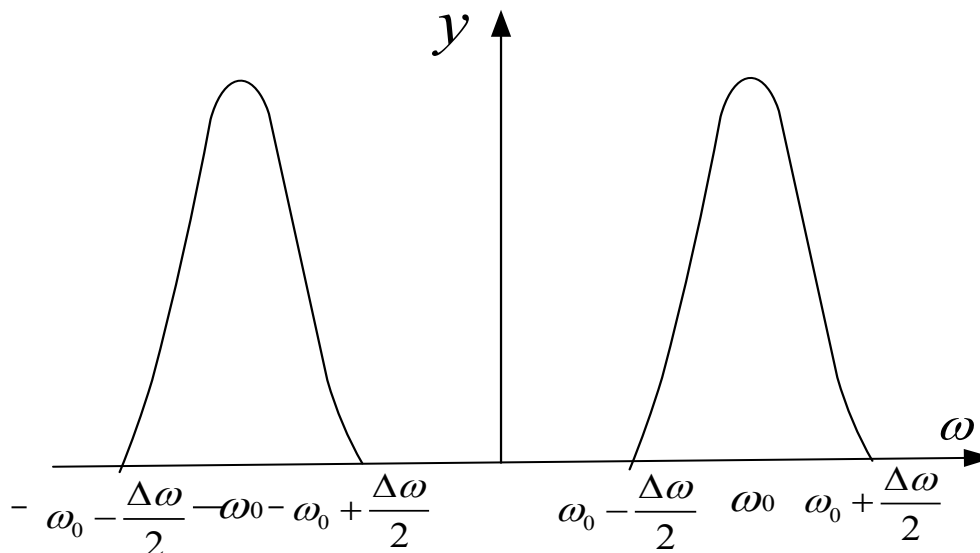
## 5. 根据信号频谱的分布特性

基带信号：频谱主要集中在零值附近

高频带通信号 { 窄带信号： $\Delta\omega/\omega_0 \leq 1\%$   
宽带信号： $1\% < \Delta\omega/\omega_0 \leq 20\%$   
超宽带信号： $\Delta\omega/\omega_0 > 20\%$



基带信号



高频带通信号



## 高频窄带信号形式：

$$s(t) = a(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)]$$

式中  $a(t)$  和  $\theta(t)$  相对于载波变化缓慢。

复信号形式：

$$\tilde{s}(t) = a(t) e^{j[\omega_0 t + \theta(t)]} = \tilde{a}(t) e^{j\omega_0 t}$$

其中  $\tilde{a}(t) = a(t) e^{j\theta(t)} = a(t) \cos \theta(t) + ja(t) \sin \theta(t) = s_I(t) + js_Q(t)$   
称为信号  $s(t)$  的复包络， $s_I(t)$  和  $s_Q(t)$  称为信号  $s(t)$  的两个正交分量。

希尔伯特变换是构成信号复表示的基本方法。



## 2.1.2 系统及其分类

- 系统概念：

在信号处理领域，系统可以看作是能够导致任何一种信号变换的过程，在数学上表示为函数形式。

- 系统分类：

根据系统处理的信号形式及具有的某些性质分为如下几类。



# 1. 连续系统与离散系统

{ 连续系统：系统输入输出均为连续信号  
离散系统：系统输入输出均为离散信号  
混合系统：由两种混合组成的系统



## 2. 记忆系统与无记忆系统

{ 无记忆系统：某时刻系统输出只与该时刻系统输入有关  
{ 记忆系统：某时刻系统输出还与其他时刻有关

如

- 无记忆系统，如电阻器、检波器、限幅器等。
- 记忆系统，如积分器、平滑器、累加器等。



### 3. 线性系统与非线性系统

{ 线性系统：同时满足齐次性和叠加性的系统  
非线性系统：不满足上述性质的系统

- 齐次性：是指当输入被扩大K倍后，系统的输出也相应地被扩大K倍；
- 叠加性：是指当有多个输入同时作用于系统时，系统的输出等于各个输入单独作用后系统的输出之和。

$$k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) \xrightarrow{?} k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$$



## 4. 时变系统与时不变系统

{ 时不变系统：系统的输出与输入的起始作用时间无关  
{ 时变系统：系统的输出与输入的起始作用时间有关

$$x(t - t_0) \xrightarrow{?} y(t - t_0)$$

## 5. 稳定系统与不稳定系统

{ 稳定系统：对于有界输入，系统输出也有界  
{ 不稳定系统：对于有界输入，系统输出为无限值



## 6. 因果系统与非因果系统

因果系统： 系统在任一时刻的输出只与该时刻及该时刻以前的输入有关

非因果系统： 输出不仅与当前时刻及以前时刻输入有关还与以后的输入有关

如

- 因果系统，如无记忆系统，积分器等。
- 非因果系统，如平滑器等。





## 7. 可逆系统与不可逆系统

{ 可逆系统：根据输出可唯一确定输入  
不可逆系统：根据输出不能唯一确定输入

## 8. 最小相移系统与非最小相移系统

{ 最小相移系统： 连续系统的所有零点和极点都在S平面虚轴左侧  
离散系统的所有零点和极点都在Z平面单位圆内  
非最小相位系统：只要有一个零点位于S平面虚轴右侧  
或Z平面单位圆外



- 滤波：已知一个输入信号，将其通过一个已知的系统来寻求输出信号。
- 逆滤波：根据一个已知系统的输出信号来恢复出系统的输入信号。
- 系统辨识：已知一个输入信号，根据其通过一个系统的输出信号来寻求系统传输函数。
- 盲分离和盲均衡：根据一个系统的输出信号确定系统传输函数并恢复输入信号。



## 2.2 随机信号通过线性时不变系统

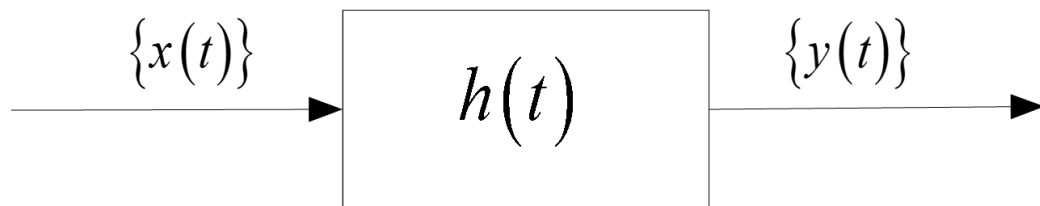
### 2.2.1 系统输出的均值

### 2.2.2 系统输出的自相关函数和功率谱密度函数

### 2.2.3 系统输入与输出的互相关函数和互功率谱密度函数



## 随机信号通过线性时不变系统



输出  $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$

- 对于稳定系统，有  $Y(\omega) = H(j\omega)X(\omega)$  。
- 系统输出端得到一系列新的样本函数  $y(t)$ ，这些样本函数的集合就构成随机信号  $\{y(t)\}$  。



## 2.2.1 系统输出的均值

输出  $\{y(t)\}$  的均值：

$$m_y(t) = E\{y(t)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)m_x(t-\tau)d\tau$$

当输入  $\{x(t)\}$  广义平稳时， $m_x(t) = m_x$ ，则：

$$m_y(t) = m_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)d\tau = m_x H(0) = m_y$$

可见，输出均值与时间无关。



## 2.2.2 系统输出的自相关函数和功率谱密度函数

输出  $\{y(t)\}$  的自相关函数：

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= E\{y(t_1)y(t_2)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)E\{x(t_1 - \tau_1)x(t_2 - \tau_2)\}d\tau_1d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_x(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 \\ &= h(t_1) * R_x(t_1, t_2) * h(t_2) \end{aligned}$$



当输入  $\{x(t)\}$  广义平稳,  $R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1 - t_2) = R_x(\tau)$

则

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) R_x(\tau - \tau_1 + \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= h(\tau) * \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau + \tau_2) h(\tau_2) d\tau_2 \\ &= h(\tau) * R_x(\tau) * h(-\tau) \\ &= R_y(\tau) \end{aligned}$$



输出  $\{y(t)\}$  的均方值，即平均功率为：

$$\begin{aligned} E\{y^2(t)\} &= R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) R_x(-\tau_1 + \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau_1) h(\tau_2) R_x(-\tau_1 + \tau_2)| d\tau_1 d\tau_2 \\ &\leq R_x(0) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau_1) h(\tau_2)| d\tau_1 d\tau_2 \\ &= R_x(0) \left( \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau \right)^2 < \infty \end{aligned}$$





根据维纳-辛钦定理，输出  $\{y(t)\}$  的功率谱密度函数：

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) e^{-j\omega\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) R_x(\tau - \tau_1 + \tau_2) d\tau_1 d\tau d\tau_2 \end{aligned}$$

定义  $R_1(t) = R_x(t) * h(t)$  ,

$R_1(t)$  的傅立叶变换为：  $H(j\omega)S_x(\omega)$

得到：

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) \int_{-\infty}^{+\infty} R_1(\tau + \tau_2) e^{-j\omega\tau} d\tau d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) H(j\omega) S_x(\omega) e^{j\omega\tau_2} d\tau_2 \\ &= H(-j\omega) H(j\omega) S_x(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_x(\omega) \end{aligned}$$



## 结论：

- 如果广义平稳随机信号  $\{x(t)\}$  通过线性时不变系统，输出随机信号也广义平稳。
- 广义平稳随机信号通过线性时不变系统，输出功率谱密度等于输入功率谱密度乘以系统传输函数模的平方。

$$S_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_x(\omega)$$

$$Y(\omega) = H(j\omega) X(\omega)$$



## 2.2.3 系统输入与输出的互相关函数和互功率谱密度函数

互相关函数：

$$\begin{aligned} R_{xy}(t_1, t_2) &= E\{x(t_1)y(t_2)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) E\{x(t_1)x(t_2 - \tau_2)\} d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) R_x(t_1, t_2 - \tau_2) d\tau_2 \\ &= h(t_2) * R_x(t_1, t_2) \end{aligned}$$

当输入  $\{x(t)\}$  广义平稳,  $R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1 - t_2) = R_x(\tau)$  , 则:

$$\begin{aligned} R_{xy}(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) R_x(\tau + \tau_2) d\tau_2 \\ &= h(-\tau) * R_x(\tau) = R_{xy}(\tau) \end{aligned}$$



同理

$$\begin{aligned} R_{yx}(t_1, t_2) &= E\{y(t_1)x(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) E\{x(t_2)x(t_1 - \tau_1)\} d\tau_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) R_x(t_1 - \tau_1, t_2) d\tau_1 = h(t_1) * R_x(t_1, t_2) \end{aligned}$$

当输入  $\{x(t)\}$  广义平稳，则：

$$\begin{aligned} R_{yx}(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) R_x(\tau - \tau_1) d\tau_1 \\ &= h(\tau) * R_x(\tau) = R_{yx}(\tau) = R_{xy}(-\tau) \end{aligned}$$

结论：

广义平稳随机信号通过线性时不变系统，其输入与输出联合广义平稳。



互功率谱密度函数：

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = H(-j\omega) S_x(\omega)$$

同理可得

$$S_{yx}(\omega) = H(j\omega) S_x(\omega)$$

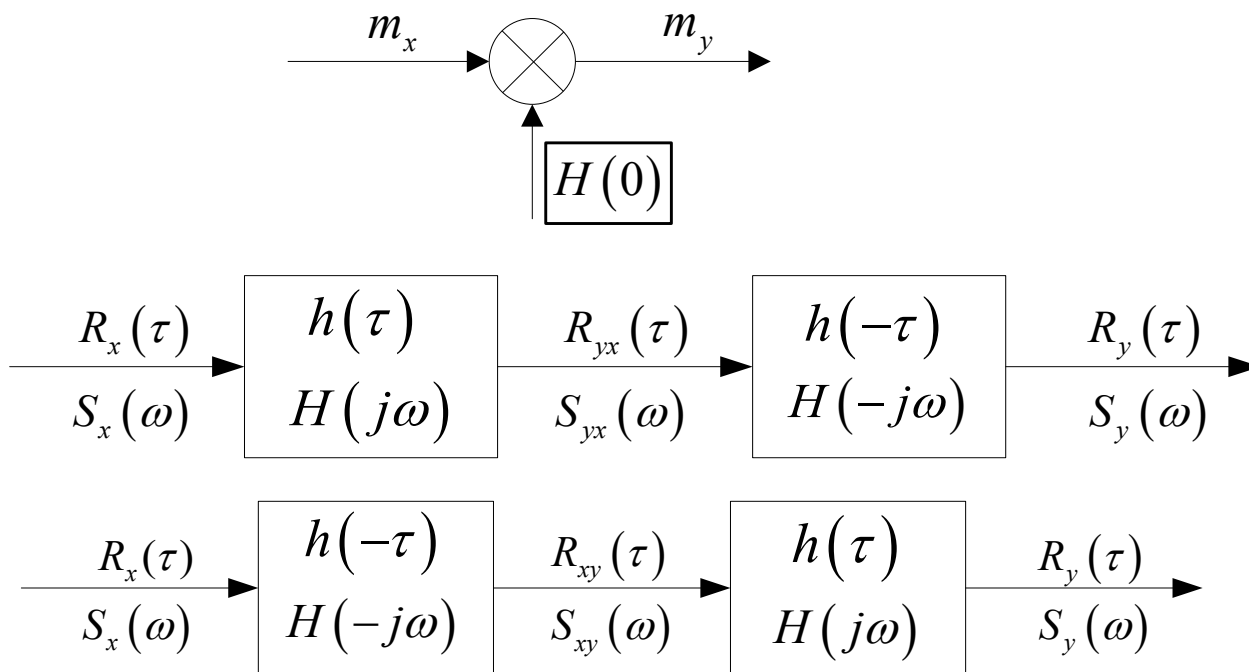
$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= H(-j\omega) H(j\omega) S_x(\omega) \\ &= H(j\omega) S_{xy}(\omega) \\ &= H(-j\omega) S_{yx}(\omega) \end{aligned}$$

结论：

当广义平稳随机信号通过线性时不变系统，系统输出广义平稳，且输出与输入联合广义平稳。



## 系统输入、输出之间的统计关系图：



## 结论：

上述分析虽然基于物理不可实现的线性时不变系统，但是当广义平稳随机信号通过物理可实现的线性时不变系统时，相关结论仍然成立，只是此时  $h(t) = 0, t < 0$ 。



当系统输入  $\{x(t)\}$  只从  $t = 0$  时刻开始加入，即

$$x(t) = 0, t < 0$$

输入输出特性为：

$$m_y(t) = E\{y(t)\} = \int_{-\infty}^t h(\tau) E\{x(t-\tau)\} d\tau = m_x \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

$$R_y(t_1, t_2) = E\{y(t_1)y(t_2)\} = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h(\tau_1)h(\tau_2)R_x(\tau - \tau_1 + \tau_2)d\tau_1d\tau_2$$

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)y(t_2)\} = \int_{-\infty}^{t_2} h(\tau_2)R_x(\tau + \tau_2)d\tau_2$$

结论：

尽管输入  $\{x(t)\}$  广义平稳，但输出  $\{y(t)\}$  不再是平稳的。



## 2.3 随机序列通过线性时不变系统

### 2.3.1 系统输出的均值

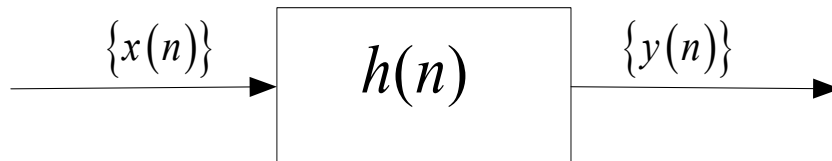
### 2.3.2 系统输出的自相关函数和功率谱密度函数

### 2.3.3 系统输入与输出的互相关函数和互功率谱密度函数





## 随机序列通过线性时不变系统示意图:



$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) x(n-k)$$

- 对于稳定系统:  $Y(\Omega) = H(j\Omega) X(\Omega)$
- 系统输出端得到一系列新的样本函数  $y(n)$  , 这些样本函数的集合就构成随机序列  $\{y(n)\}$  。



## 2.3.1 系统输出的均值

定义：

$$\begin{aligned} m_y(n) &= E\{y(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) E\{x(n-k)\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) m_x(n-k) \end{aligned}$$

当输入  $\{x(n)\}$  广义平稳， $m_x(n) = m_x$ ，则

$$m_y(n) = m_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) = m_x H(0) = m_y$$

可见，输出均值与时间无关。



## 2.3.2 系统输出的自相关函数和功率谱密度函数

系统输出的自相关函数：

$$\begin{aligned} R_y(n_1, n_2) &= E\{y(n_1)y(n_2)\} \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_1)h(k_2)R_x(n_1-k_1, n_2-k_2) \end{aligned}$$

当输入  $\{x(n)\}$  广义平稳

$$\begin{aligned} R_y(n_1, n_2) &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_1)h(k_2)R_x(m-k_1+k_2) \\ &= R_y(m) \end{aligned}$$



输出的均方值即平均功率为：

$$\begin{aligned} E\{y^2(n)\} &= R_y(0) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_1)h(k_2)R_x(-k_1+k_2) \\ &\leq \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} |h(k_1)h(k_2)R_x(-k_1+k_2)| \\ &\leq R_x(0) \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} |h(k_1)h(k_2)| = R_x(0) \left( \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} |h(k_1)| \right)^2 < +\infty \end{aligned}$$

结论：

当广义平稳随机序列  $\{x(n)\}$  从时刻  $-\infty$  开始就加入到线性时不变系统，其输出随机序列也广义平稳。



利用维纳-辛钦公式，可得输出  $\{y(n)\}$  的功率谱密度函数：

$$\begin{aligned} S_y(\Omega) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_y(m) e^{-j\Omega m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_2) e^{-j\Omega m} \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} h(k_1) R_x(m + k_2 - k_1) \\ &= \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_2) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-j\Omega m} R_1(m + k_2) = \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_2) H(j\Omega) S_x(\Omega) e^{j\Omega k_2} \\ &= H(j\Omega) S_x(\Omega) H(-j\Omega) = |H(j\Omega)|^2 S_x(\Omega) \end{aligned}$$

其中， $R_1(n) = R_x(n) * h(n)$ ， $S_x(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x(m) e^{-j\Omega m}$  为广义平稳输入的功率谱密度函数。

可见，输出功率谱密度只与系统的幅频特性有关，而与系统的相频特性无关。



## 2.3.3 系统输入与输出的互相关函数和互功率谱密度函数

$$R_{xy}(n_1, n_2) = E\{x(n_1)y(n_2)\} = \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_2)R_x(n_1, n_2 - k_2)$$

$$R_{yx}(n_1, n_2) = E\{y(n_1)x(n_2)\} = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} h(k_1)R_x(n_1 - k_1, n_2)$$

当输入  $\{x(n)\}$  广义平稳，有

$$R_x(n_1, n_2) = R_x(n_1 - n_2) = R_x(m)$$

则：

$$R_{xy}(n_1, n_2) = \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_2)R_x(m + k_2) = R_{xy}(m)$$

$$R_{yx}(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} h(k_1)R_x(m - k_1) = R_{yx}(m) = R_{xy}(-m)$$



## 互功率谱密度函数：

$$S_{xy}(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{xy}(m) e^{-j\Omega m} = H(-j\Omega) S_x(\Omega)$$

$$S_{yx}(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{yx}(m) e^{-j\Omega m} = H(j\Omega) S_x(\Omega)$$

$$S_y(\Omega) = H(-j\Omega) H(j\Omega) S_x(\Omega) = H(-j\Omega) S_{yx}(\Omega) = H(j\Omega) S_{xy}(\Omega)$$

## 结论：

- 当广义平稳随机序列  $\{x(n)\}$  从时刻  $-\infty$  开始就加入到线性时不变系统，则系统输出广义平稳，且输出与输入联合广义平稳。
- 如果广义平稳随机序列  $\{x(n)\}$  是从时刻  $n=0$  开始加入到系统，即  $x(n)=0, n<0$ ，系统输出不再平稳。



## 2.4 白噪声通过线性时不变系统

2.4.1 系统输出的一般特性及等效噪声带宽

2.4.2 白噪声通过理想低通系统

2.4.3 白噪声通过理想带通系统

2.4.4 白噪声通过具有高斯频率特性的带通系统





## 2.4.1 系统输出的一般特性

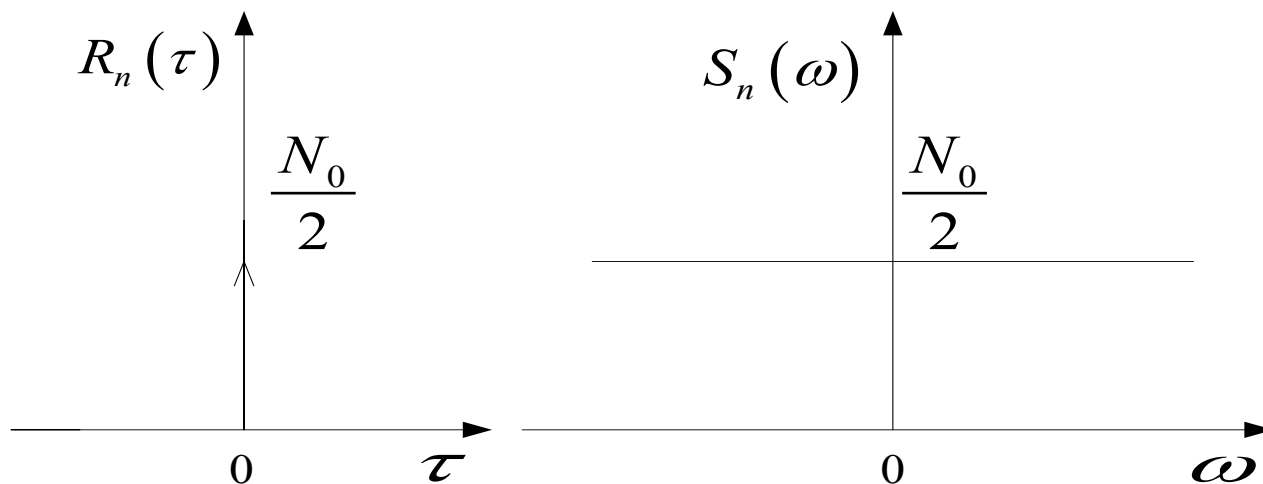
- 白噪声：均值为零、功率谱密度均匀分布在无限宽的频带范围内。
- 色噪声：不具有上述均匀功率谱的噪声。
- 带限白噪声：通常情况下，只要平稳随机过程的功率谱密度在比系统带宽大得多的频率范围内近似均匀分布，就可以将其视为白噪声。



根据维纳-辛钦定理，白噪声的自相关函数以及功率谱密度为：

$$R_n(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

$$S_n(\omega) = \frac{N_0}{2} \quad -\infty < \omega < +\infty$$





结论：

白噪声在任意相邻时刻的取值都是不相关的，且平均功率无限大。上述定义的白噪声只是一种理想化的噪声模型，在实际中是不可能存在的。



白噪声通过线性时不变系统输出的统计特性：

$$m_y = m_n \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau = m_n H(0) = 0$$

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) \delta(\tau - \tau_1 + \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) h(\tau + \tau_2) d\tau_2 \end{aligned}$$

$$S_y(\omega) = \frac{N_0}{2} |H(j\omega)|^2$$

$$R_{ny}(\tau) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2) \delta(\tau + \tau_2) d\tau_2 = \frac{N_0}{2} h(-\tau) = R_{yn}(-\tau)$$

$$S_{ny}(\omega) = \frac{N_0}{2} H(-j\omega) = S_{yn}(-\omega)$$



## 结论：

- 白噪声通过线性时不变系统后，输出一般是色噪声。
- 可用白噪声激励一个线性时不变系统，产生具有特定二阶统计特性的平稳随机过程。
- 用白噪声激励一个未知的线性时不变系统，可通过估计系统输出与输入的互相关函数（或互功率谱密度）辨识系统。
- 某些色噪声通过线性时不变系统（最小相位系统）后可得白噪声，即预白化。



输出噪声的平均功率为：

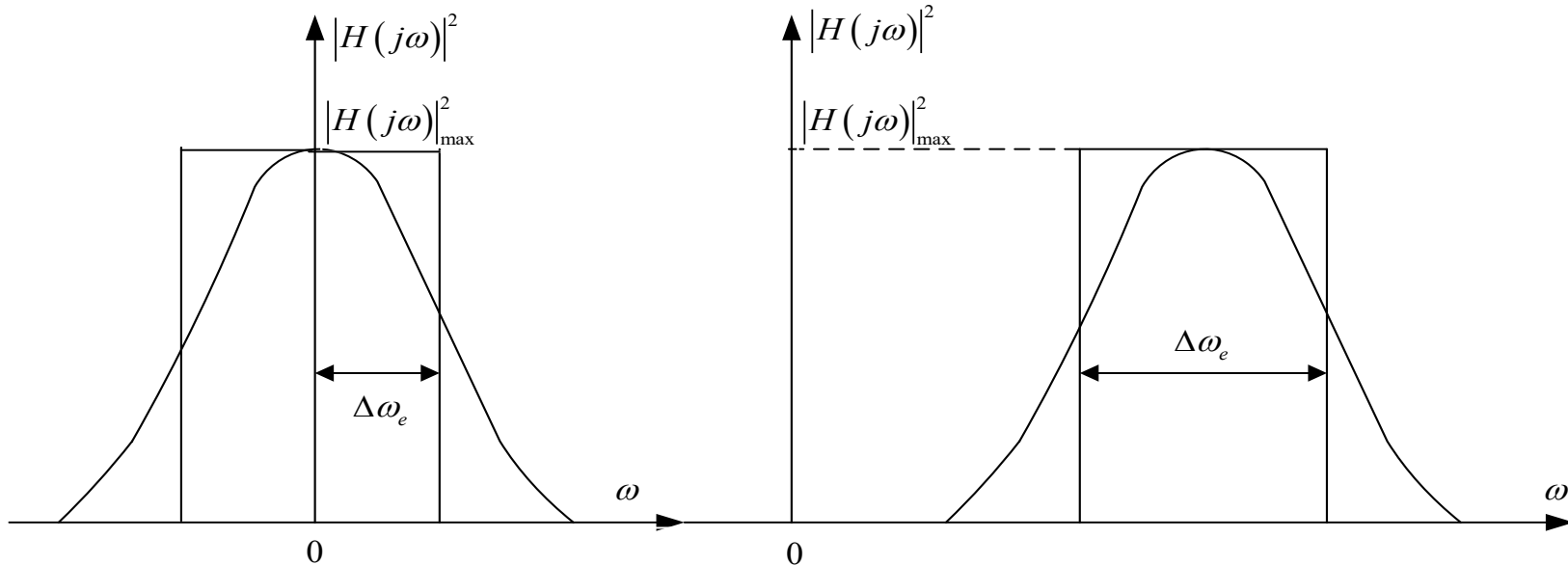
$$\begin{aligned} R_y(0) &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{N_0}{2\pi} \int_0^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

引入等效噪声带宽：

理想系统输出噪声的平均功率等于实际系统输出的平均功率，且理想系统在通带范围内的幅度值等于实际系统幅频响应的最大值，则理想系统的带宽就定义为实际系统的等效噪声带宽。



下图分别为低通系统（左图）和高通系统（右图）的等效噪声带宽





理想系统输出噪声的平均功率：

$$R_{y_e}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} |H_e(j\omega)|^2 d\omega = \frac{N_0}{2\pi} \Delta\omega_e |H(j\omega)|_{\max}^2$$

将：  $R_{y_e}(0) = R_y(0)$

解得：

$$\Delta\omega_e = \frac{1}{|H(j\omega)|_{\max}^2} \int_0^{+\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega$$

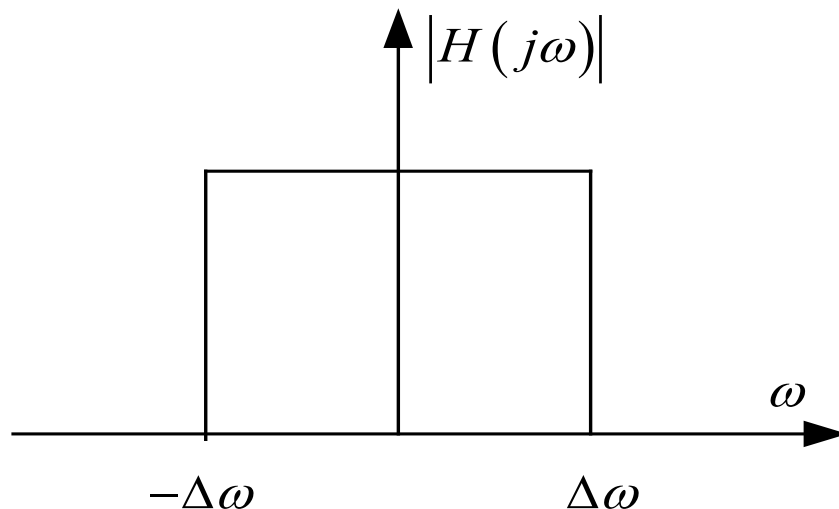




## 2.4.2 白噪声通过理想低通系统

理想低通系统的幅频响应为：

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} A & |\omega| \leq \Delta\omega \\ 0 & |\omega| > \Delta\omega \end{cases}$$





白噪声通过系统输出的功率谱密度和自相关函数为：

$$S_y(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0 A^2}{2} & |\omega| \leq \Delta\omega \\ 0 & |\omega| > \Delta\omega \end{cases}$$

$$R_y(\tau) = \frac{N_0 A^2}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} e^{j\omega\tau} d\omega = R_y(0) \cdot \frac{\sin \Delta\omega\tau}{\Delta\omega\tau}$$

此时，系统的等效噪声带宽为： $\Delta\omega_e = \frac{1}{A^2} \int_0^{\Delta\omega} A^2 d\omega = \Delta\omega$

结论：

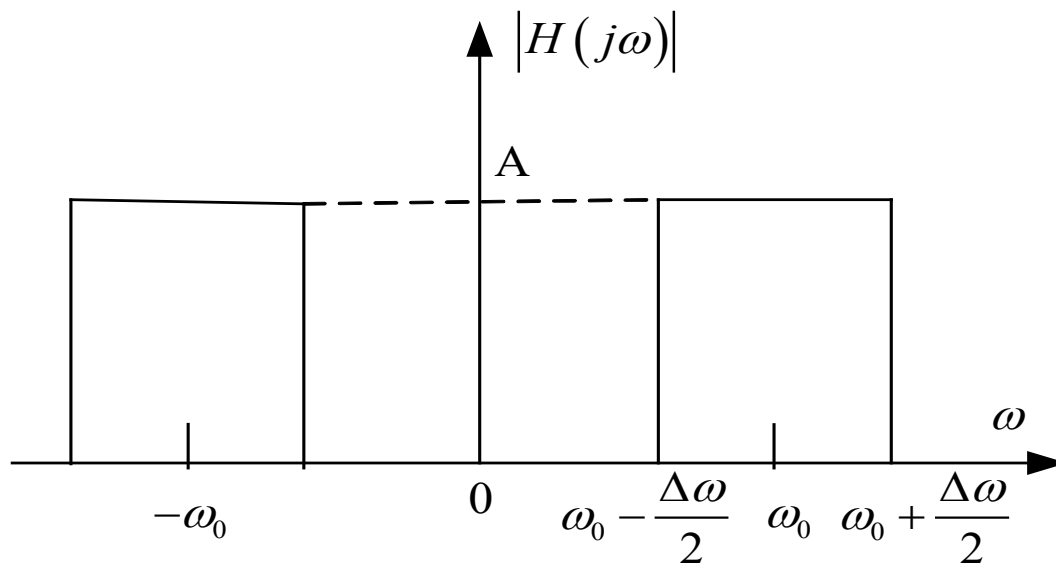
当  $\tau = k\pi/\Delta\omega, k = \pm 1, \pm 2, \dots$  时  $R_y(\tau) = 0$ ，即白噪声通过理想低通系统后，输出在间隔上抽样得到的各个样本之间是互不相关的。



## 2.4.3 白噪声通过理想带通系统

理想带通系统的幅频响应为：

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} A & |\omega \pm \omega_0| \leq \frac{\Delta\omega}{2} \\ 0 & |\omega \pm \omega_0| > \frac{\Delta\omega}{2} \end{cases}$$





白噪声通过系统输出的功率谱密度和自相关函数为：

$$S_y(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0 A^2}{2} & |\omega \pm \omega_0| \leq \frac{\Delta\omega}{2} \\ 0 & |\omega \pm \omega_0| > \frac{\Delta\omega}{2} \end{cases}$$

$$R_y(\tau) = \frac{N_0 A^2}{2\pi} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \cos \omega \tau d\omega = R_y(0) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta\omega \tau}{2}}{\frac{\Delta\omega \tau}{2}} \cos \omega_0 \tau$$

此时，系统的等效噪声带宽为：

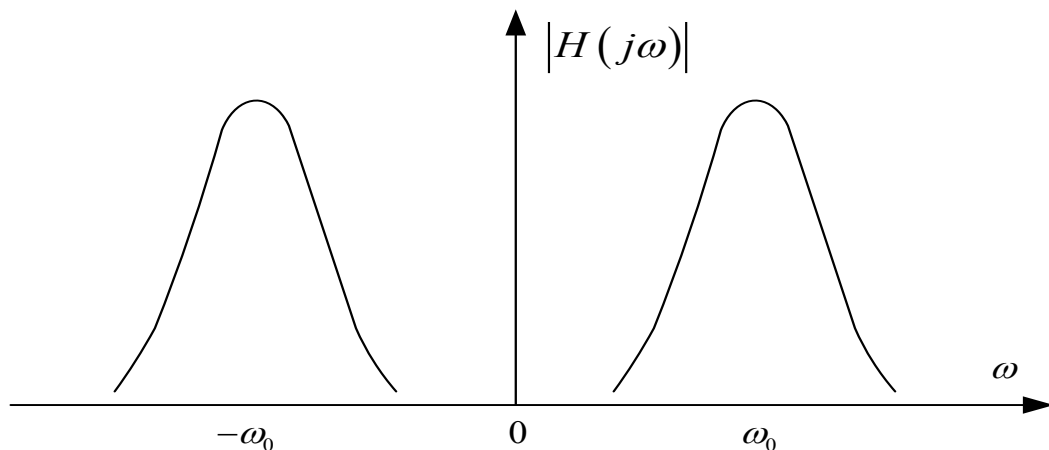
$$\Delta\omega_e = \frac{1}{A^2} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} A^2 d\omega = \Delta\omega$$



## 2.4.4 白噪声通过具有高斯频率特性的带通系统

由多级单调谐中频放大器级联构成的系统，其幅频特性近似具有高斯特性。具有高斯频率特性的带通系统的幅频响应为：

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} A \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\beta^2}\right] & \omega > 0 \\ A \exp\left[-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{2\beta^2}\right] & \omega < 0 \end{cases}$$





白噪声通过系统输出的功率谱密度函数为：

$$S_y(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0 A^2}{2} \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\beta^2}\right] & \omega > 0 \\ \frac{N_0 A^2}{2} \exp\left[-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{\beta^2}\right] & \omega < 0 \end{cases}$$

将上式看作是基带信号经过上变频后的带通信号

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2} S_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} S_1(\omega + \omega_0)$$

$$s_1(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} N_0 A^2 \exp\left(-\frac{\omega^2}{\beta^2}\right) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$R_y(\tau) = s_1(\tau) \cos \omega_0 \tau = \frac{N_0 A^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\omega^2}{\beta^2}\right) e^{j\omega\tau} d\omega \cos \omega_0 \tau$$



利用傅立叶变换对  $\exp(-a^2 t^2)$  和  $\frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a^2}\right)$ , 上式变为:

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \frac{N_0 A^2}{2\pi} \beta \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{\beta^2 \tau^2}{4}\right) \cos \omega_0 \tau \\ &= \frac{N_0 A^2 \beta}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\beta^2 \tau^2}{4}\right) \cos \omega_0 \tau \end{aligned}$$

此时, 系统的等效噪声带宽为:

$$\Delta\omega_e = \frac{1}{A^2} \int_0^{+\infty} A^2 \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\beta^2}\right] d\omega = \sqrt{\pi} \beta$$



## 2.5 白噪声序列和平稳随机序列的参数模型

2.5.1 自回归模型 (AR)

2.5.2 滑动平均模型 (MA)

2.5.3 自回归滑动平均模型 (ARMA)

2.5.4 三种模型间的联系





白噪声序列是具有如下统计特性的零均值广义平稳随机序列：

$$S_w(\Omega) = \sigma_w^2 \quad -\pi \leq \Omega \leq \pi$$

$$R_w(m) = \sigma_w^2 \delta(m)$$

线性时不变系统的传递函数通常用一个有限阶数的有理函数来近似表示，相应地，系统的输出序列也就可以用有限个参数来描述，该有理函数称为平稳随机序列的参数模型。



有限阶数的离散线性时不变系统：

$$H(j\Omega) = \frac{1 + \sum_{k=1}^q b_k e^{-j\Omega k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j\Omega k}} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k e^{-j\Omega k}}{\sum_{k=0}^p a_k e^{-j\Omega k}}$$

其中， $a_0 = b_0 = 1$ ，其他参数由输出序列的二阶统计特性（自相关函数或功率谱密度）决定。写成Z变换的形式：

$$H(z) = \frac{1 + \sum_{k=1}^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} = \frac{\prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^p (1 - \alpha_k z^{-1})}$$

其中  $\alpha_k, \beta_k$  分别为系统的极点和零点，为保证系统的因果稳定性，这里要求  $|\alpha_k| < 1$ 。



当白噪声序列激励上述系统后，系统输出与输入之间的关系可以如下表示：

$$Y(z) = H(z)W(z) = \frac{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^p a_k z^{-k}} W(z)$$

$$\sum_{k=0}^p a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^q b_k z^{-k} W(z)$$

$$\begin{aligned} y(n) &= -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \cdots - a_p y(n-p) \\ &\quad + w(n) + b_1 w(n-1) + b_2 w(n-2) + \cdots + b_q w(n-q) \\ &= \sum_{k=0}^q b_k w(n-k) - \sum_{k=1}^p a_k y(n-k) \end{aligned}$$



## 2.5.1 自回归模型 (AR)

当系数  $b_1, \dots, b_q$  均为零且  $a_p \neq 0$  时, 系统为全极点系统, 其传输函数和冲激响应分别为:

$$H(j\Omega) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j\Omega k}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^p a_k e^{-j\Omega k}}$$

$$h(n) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k h(n-k) + \delta(n) & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

此时系统输出:

$$y(n) = w(n) - \sum_{k=1}^p a_k y(n-k)$$

称为平稳随机序列  $\{y(n)\}$  的  $p$  阶 AR 模型, 记为  $\text{AR}(p)$ 。



系统输出的功率谱密度函数和自相关函数可表示为：

$$S_y(\Omega) = \frac{\sigma_w^2}{\left| \sum_{k=0}^p a_k e^{-j\Omega k} \right|^2}$$

$$R_y(m) = R_y(n_1, n_1 - m)$$

$$= E \left\{ \left[ w(n_1) - \sum_{k=1}^p a_k y(n_1 - k) \right] y(n_1 - m) \right\}$$

$$= R_{wy}(m) - \sum_{k=1}^p a_k R_y(m - k)$$

$$= E \left\{ w(n_1) \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) w(n_1 - m - k) \right\} - \sum_{k=1}^p a_k R_y(m - k)$$



$$\begin{aligned} R_y(m) &= \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) \sigma_w^2 \delta(m+k) - \sum_{k=1}^p a_k R_y(m-k) \\ &= \sigma_w^2 h(-m) - \sum_{k=1}^p a_k R_y(m-k) \\ &= \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k R_y(m-k), m > 0 \\ \sigma_w^2 - \sum_{k=1}^p a_k R_y(-k), m = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Yule-Walker方程



写成矩阵形式，求解模型参数

$$\begin{bmatrix} R_y(0) & R_y(-1) & \cdots & R_y(-p) \\ R_y(1) & R_y(0) & \cdots & R_y(1-p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_y(p) & R_y(p-1) & \cdots & R_y(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$



## 2.5.2 滑动平均模型 (MA)

当系数  $a_1, \dots, a_p$  均为零且  $b_q \neq 0$  时, 系统为全零点系统, 其传输函数和冲激响应分别为:

$$H(j\Omega) = 1 + \sum_{k=1}^q b_k e^{-j\Omega k} = \sum_{k=0}^q b_k e^{-j\Omega k}$$

$$h(n) = \begin{cases} b_n & 0 \leq n \leq q \\ 0 & n < 0, n > q \end{cases}$$

此时系统输出:

$$y(n) = w(n) + \sum_{k=1}^q b_k w(n-k) = \sum_{k=0}^q b_k w(n-k)$$

称为平稳随机序列  $\{y(n)\}$  的  $q$  阶 MA 模型, 记为  $\text{MA}(q)$ 。





系统输出的功率谱密度函数和自相关函数可表示为：

$$S_y(\Omega) = \sigma_w^2 \left| \sum_{k=0}^q b_k e^{-j\Omega k} \right|^2$$

$$R_y(m) = R_y(n_1, n_1 - m) = E \left\{ \sum_{k=0}^q b_k w(n_1 - k) y(n_1 - m) \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^q b_k R_{wy}(m - k) = \sigma_w^2 \sum_{k=0}^q b_k h(k - m)$$

$$= \begin{cases} \sigma_w^2 \sum_{k=m}^q b_k b_{k-m} & 0 \leq m \leq q \\ 0, & m > q \end{cases}$$



## 2.5.3 自回归滑动平均模型 (ARMA)

当系数  $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$  不全为零且  $a_p \neq 0, b_q \neq 0$  时, 系统为零极点系统, 其传输函数和冲激响应分别为:

$$H(j\Omega) = \frac{1 + \sum_{k=1}^q b_k e^{-j\Omega k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j\Omega k}} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k e^{-j\Omega k}}{\sum_{k=0}^p a_k e^{-j\Omega k}}$$
$$h(n) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k h(n-k) + b_n & 0 \leq n \leq q \\ -\sum_{k=1}^p a_k h(n-k) & n > q \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



此时系统输出：

$$y(n) = \sum_{k=0}^q b_k w(n-k) - \sum_{k=1}^p a_k y(n-k)$$

称为平稳随机序列  $\{y(n)\}$  的  $p$  阶自回归  $q$  阶滑动平均模型，记为 ARMA( $p, q$ )。

系统输出的功率谱密度函数为：

$$S_y(\Omega) = \sigma_w^2 \frac{\left| \sum_{k=0}^q b_k e^{-j\Omega k} \right|^2}{\left| \sum_{k=0}^p a_k e^{-j\Omega k} \right|^2}$$



系统输出的自相关函数为：

$$\begin{aligned} R_y(m) &= R_y(n_1, n_1 - m) \\ &= E \left\{ \left[ \sum_{k=0}^q b_k w(n_1 - k) - \sum_{k=1}^p a_k y(n_1 - k) \right] y(n_1 - m) \right\} \\ &= \sum_{k=0}^q b_k R_{wy}(m - k) - \sum_{k=1}^p a_k R_y(m - k) \\ &= \sigma_w^2 \sum_{k=0}^q b_k h(k - m) - \sum_{k=1}^p a_k R_y(m - k) \end{aligned}$$



## 2.5.4 三种模型间的联系

AR模型和MA模型是ARMA模型分别在不同条件下的特例，除此之外，这三种模型之间还可以相互等价。

考虑一个 $q$ 阶的MA模型：

$$y(n) = \sum_{k=0}^q b_k w(n-k)$$

$$Y(z) = H(z)W(z) = \prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1}) W(z), \quad |\beta_k| < 1$$

$$W(z) = \frac{1}{H(z)} Y(z) = \frac{Y(z)}{\prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z^{-1})}$$



利用关系式

$$\frac{1}{1 - \beta_k z^{-1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_k^i z^{-i} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_k^i z^{-i}$$

$$W(z) = \prod_{k=1}^q \left( 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_k^i z^{-i} \right) Y(z) = \left( 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i z^{-i} \right) Y(z)$$

$$y(n) = w(n) - \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i y(n-i)$$

结论：

一个可逆的有限阶MA模型或ARMA模型可以等价于一个无穷阶的AR模型；一个稳定的有限阶AR模型或ARMA模型也可以等价于一个无穷阶的MA模型。



## 2.6 随机信号通过线性时变系统

线性时变系统输出与输入之间的关系：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, \tau) x(\tau) d\tau$$

其中  $h(t, \tau)$  为时变系统的冲激响应， $\tau$  表示系统输入端出现冲激的时刻， $t$  表示响应出现的时刻。当该系统为因果系统时，有  $h(t, \tau) = 0, t < \tau$ 。



举例：分析冲激响应为  $h(t, \tau) = f(t) \delta(t - \tau)$  的幅度调制系统的一、二阶统计特性。

系统输出：

$$y(t) = f(t)x(t)$$

于是：

$$m_y(t) = E\{y(t)\} = f(t)m_x$$

$$R_y(t_1, t_2) = E\{y(t_1)y(t_2)\} = f(t_1)f(t_2)R_x(t_1 - t_2)$$

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)y(t_2)\} = f(t_2)R_x(t_1 - t_2)$$





结论：

即使输入  $\{x(t)\}$  广义平稳，输出  $\{y(t)\}$  的均值也不再是常数，而与时间  $t$  有关，且自相关函数和互相关函数跟时间  $t_1$   $t_2$  都有关，系统输出不再广义平稳。



## 2.7 随机信号通过非线性系统

### 2.7.1 直接算法

### 2.7.2 特征函数法

### 2.7.3 普赖斯(P r i c e)定理

### 2.7.4 级数展开法



对于无记忆的非线性系统，输出只与同一时刻的输入有关，而与输入的过去或未来值无关。其输入输出关系可用下式表述：

$$y(t) = g(x(t))$$



## 2.7.1 直接算法

根据无记忆非线性变换函数  $g(\cdot)$  及输入  $\{x(t)\}$  的有关统计性质直接去计算输出  $\{y(t)\}$  的统计特征。

$$m_y(t) = E\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_x(x; t) dx$$

$$E\{y^n(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g^n(x) f_x(x; t) dx$$

$$R_y(t_1, t_2) = E\{y(t_1)y(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1)g(x_2)f_x(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

式中  $X_1 = x(t_1)$ ,  $X_2 = x(t_2)$ ,  $f_x(x; t)$ ,  $f_x(x_1, x_2; t_1, t_2)$  分别为输入  $\{x(t)\}$  的一维和二维概率密度函数。



当输入  $\{x(t)\}$  平稳时

$$m_y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_x(x) dx = m_y$$

$$E\{y^n(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g^n(x) f_x(x) dx$$

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1) g(x_2) f_x(x_1, x_2; t_1 - t_2) dx_1 dx_2 \\ &= R_y(t_1 - t_2) = R_y(\tau) \end{aligned}$$

局限性：

这种方法需要计算二重积分，只适合于概率密度函数和 nonlinear 变换函数比较简单的情况。



例：零均值平稳高斯噪声  $\{x(t)\}$  输入到单向检波器，即

$$g(x) = \begin{cases} bx & x \geq 0, b > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

试求输出  $\{y(t)\}$  的均值、自相关函数及功率谱密度函数与输入之间的关系。



解：直接利用高斯噪声的概率密度函数、矩的定义以及维纳-辛钦定理来计算。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

$$f(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-\rho_x^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho_x(\tau)x_1x_2}{2\sigma_x^2 [1-\rho_x^2(\tau)]}\right\}$$

$$m_y = \frac{b}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \int_0^\infty x \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) dx = \frac{b\sigma_x}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{b^2 x_1 x_2}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1-\rho_x^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho_x(\tau)x_1x_2}{2\sigma_x^2 [1-\rho_x^2(\tau)]}\right\} dx_1 dx_2 \\ &= \frac{b^2\sigma_x^2}{2\pi} \left\{ [1-\rho_x^2(\tau)]^{1/2} + \frac{\pi}{2} \rho_x(\tau) \right\} \end{aligned}$$



## 计算输出功率谱密度函数

$$\sqrt{1-\gamma^2} = 1 - \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma^4}{2 \cdot 4} - \frac{\gamma^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots$$

$$R_y(\tau) = \frac{b^2 \sigma_x^2}{2\pi} \left[ 1 + \frac{\pi}{2} \rho_x(\tau) - \frac{1}{2} \rho_x^2(\tau) - \frac{1}{2 \times 4} \rho_x^4(\tau) + \dots \right]$$

$$\approx \frac{b^2 \sigma_x^2}{2\pi} + \frac{b^2 \sigma_x^2}{4} \rho_x(\tau) - \frac{b^2 \sigma_x^2}{4\pi} \rho_x^2(\tau)$$

$$= \frac{b^2 \sigma_x^2}{2\pi} + \frac{b^2}{4} R_x(\tau) - \frac{b^2}{4\pi \sigma_x^2} R_x^2(\tau)$$

$$S_y(\omega) \approx b^2 \sigma_x^2 \delta(\omega) + \frac{b^2}{4} S_x(\omega) - \frac{b^2}{4\pi \sigma_x^2} [S_x(\omega) * S_x(\omega)]$$





## 2.7.2 特征函数法

假设非线性变换  $g(x)$  的傅立叶变换存在：

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-j\omega x} dx$$

随机变量一维和二维特征函数的定义：

$$C_x(\omega) = E\{e^{j\omega x}\}$$

$$C_x(\omega_1, \omega_2) = E\{e^{j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)}\}$$



输出的均值和自相关函数为：

$$m_y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x; t) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) f_x(x; t) e^{j\omega x} dx d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) C_x(\omega) d\omega$$

$$R_y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1) g(x_2) f_x(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

$$= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega_1) G(j\omega_2) E \left\{ e^{j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} \right\} d\omega_1 d\omega_2$$

$$= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega_1) G(j\omega_2) C_x(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2$$



## 2.7.3 普赖斯(Price)定理

运用特征函数法，给出了输入为高斯信号时，输出自相关函数与输入相关系数之间的关系。

假定输入  $\{x(t)\}$  为高斯平稳信号，均值为  $\mu$ ，方差为  $\sigma_x^2$ ，相关系数为  $\rho_x(\tau)$ 。其二维概率密度函数和特征函数分别为：

$$f_x(x_1, x_2; \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2\sqrt{1-\rho_x^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{(x_1-\mu)^2 + (x_2-\mu)^2 - 2\rho_x(\tau)(x_1-\mu)(x_2-\mu)}{2\sigma_x^2[1-\rho_x^2(\tau)]}\right\}$$

$$C_x(\omega_1, \omega_2) = \exp[j\mu(\omega_1 + \omega_2)] \exp\left\{-\frac{\sigma_x^2}{2}[\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\rho_x(\tau)]\right\}$$



对上式两边求导：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^k C_x}{\partial \rho_x^k(\tau)} &= (-1)^k \sigma_x^{2k} \omega_1^k \omega_2^k \exp[j\mu(\omega_1 + \omega_2)] \exp\left\{-\frac{\sigma_x^2}{2}[\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\rho_x(\tau)]\right\} \\ &= (-1)^k \sigma_x^{2k} \omega_1^k \omega_2^k C_x(\omega_1, \omega_2)\end{aligned}$$

可得到如下结论：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^k R_y(\tau)}{\partial \rho_x^k(\tau)} &= \frac{\partial^k}{\partial \rho_x^k(\tau)} \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega_1) G(j\omega_2) C_x(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \right\} \\ &= \frac{(-1)^k \sigma_x^{2k}}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1^k \omega_2^k G(j\omega_1) G(j\omega_2) C_x(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2\end{aligned}$$



更进一步，因为：

$$g^{(k)}(x) = \frac{\partial^k g(x)}{\partial x^k} = \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) e^{j\omega x} d\omega \right] = \frac{j^k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^k G(j\omega) e^{j\omega x} d\omega$$

可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k R_y(\tau)}{\partial \rho_x^k(\tau)} &= \frac{(-1)^k \sigma_x^{2k}}{4\pi^2} \iint \omega_1^k \omega_2^k G(j\omega_1) G(j\omega_2) \iint f_x(x_1, x_2; \tau) e^{j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} dx_1 dx_2 d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \sigma_x^{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g^{(k)}(x_1) g^{(k)}(x_2) f_x(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

上式即是Price定理。这种“导数计算法”特别适用于非线性变换函数经多次求导后能得到冲激函数的情况，但前提是输入必须是高斯随机信号。



该微分方程的起始条件可由下式得到：

$$\left. \frac{\partial^r R_y(\tau)}{\partial \rho_x^r(\tau)} \right|_{\rho_x(\tau)=0} = \sigma_x^{2r} m_r^2 \quad r = 0, 1, \dots, k-1$$

式中，

$$m_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} g^{(r)}(x) \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}\right] dx$$



例：零均值平稳高斯噪声  $\{x(t)\}$  输入到理想硬限幅器，  
即，

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

试求输出  $\{y(t)\}$  的自相关函数与输入之间的关系。



解:  $g^{(1)}(x) = 2\delta(x)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial \rho_x(\tau)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\delta(x_1)\delta(x_2)}{2\pi\sqrt{1-\rho_x^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\rho_x(\tau)}{2\sigma_x^2[1-\rho_x^2(\tau)]}\right\} dx_1 dx_2 \\ &= \frac{2}{\pi\sqrt{1-\rho_x^2(\tau)}}\end{aligned}$$

$$R_y(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_x(\tau)}{\sqrt{1-\rho_x^2(\tau)}} = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \rho_x(\tau) + C_1$$





## 边界条件

$$\begin{aligned} R_y(\tau) \Big|_{\rho_x(\tau)=0} &= \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) dx \right]^2 \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \left[ \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) dx - \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) dx \right]^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$R_y(\tau) \Big|_{\rho_x(\tau)=0} = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \rho_x(\tau) + C_1 \Big|_{\rho_x(\tau)=0} = C_1$$

最终解得

$$R_y(\tau) = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \rho_x(\tau)$$



## 2.7.4 级数展开法

将非线性变换函数  $g(x)$  在  $x=0$  附近进行泰勒级数展开：

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

可根据需要，将  $g(x)$  近似表示为有限项之和，即

$$g(x) \approx \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$



输出的均值和自相关函数为：

$$m_y(t) = E\{y(t)\} \approx \sum_{k=0}^n a_k E\{x^k(t)\}$$

$$R_y(t_1, t_2) = E\{y(t_1)y(t_2)\} \approx \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n a_k a_i E\{x^k(t_1)x^i(t_2)\}$$

结论：

采用级数展开法，输出的均值和自相关函数可以直接表示为输入各阶矩的线性组合，但当级数展开的个数超过3个时，计算就会显得十分复杂。



例：零均值平稳高斯噪声  $\{x(t)\}$  输入到一指数系统，即，

$$g(x) = b^x, b > 0$$

试求输出  $\{y(t)\}$  的自相关函数与输入之间的关系。

解：

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln b)^k}{k!} x^k \\ &\approx 1 + (\ln b)x + \frac{(\ln b)^2}{2} x^2 \triangleq 1 + b_1 x + b_2 x^2 \end{aligned}$$



## 利用零均值高斯变量 的矩特性

$$E\{x^n\} = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1) \sigma_x^n & n = 2m \\ 0 & n = 2m + 1 \end{cases}$$

$$E\{x_1 x_2 x_3 x_4\} = E\{x_1 x_2\} E\{x_3 x_4\} + E\{x_1 x_3\} E\{x_2 x_4\} + E\{x_1 x_4\} E\{x_2 x_3\}$$

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &\approx \sum_{k=0}^2 \sum_{i=0}^2 b_k b_i E\{x^k(t_1) x^i(t_2)\} \\ &= 1 + b_2 E\{x^2(t_2)\} + b_1^2 E\{x(t_1) x(t_2)\} + b_2 E\{x^2(t_1)\} + b_2^2 E\{x^2(t_1) x^2(t_2)\} \\ &= 1 + 2b_2 \sigma_x^2 + b_1^2 \sigma_x^2 \rho_x(\tau) + b_2^2 \sigma_x^4 + 2b_2^2 \sigma_x^4 \rho_x^2(\tau) \end{aligned}$$



## 2.8 随机信号的复表示



### 2.8.1 确定信号的复表示

### 2.8.2 随机信号的复表示



## 2.8.1 确定信号的复表示

### 1. 正弦型信号的复表示方法

$$s(t) = a \cos(\omega_0 t + \theta) = a \cos \phi(t)$$

利用欧拉公式

$$s(t) = a \cos \phi(t) = \frac{1}{2} a \left[ e^{j\phi(t)} + e^{-j\phi(t)} \right]$$

频谱为

$$S(\omega) = \frac{1}{2} a \left[ e^{j\theta} \delta(\omega - \omega_0) + e^{-j\theta} \delta(\omega + \omega_0) \right]$$

正弦型信号包含正、负两种频谱分量，其频谱为在  $\pm\omega_0$  处的两根单一谱线。



若用复信号表示

$$\tilde{s}(t) = ae^{j\phi(t)} = ae^{j\theta} \cdot e^{j\omega_0 t} \triangleq \tilde{a}e^{j\omega_0 t}$$

式中  $\tilde{a}$  称为复包络。此时有  $s(t) = \text{Re}[\tilde{s}(t)]$ 。

$$\tilde{S}(\omega) = \tilde{a}\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\tilde{S}(\omega) = \begin{cases} 2S(\omega) & \omega = +\omega_0 \\ 0 & \omega = -\omega_0 \end{cases}$$

复信号具有单边带频谱的优点。展开可得：

$$\tilde{s}(t) = a \cos \phi(t) + ja \sin \phi(t) \triangleq s(t) + js'(t)$$





## 2. 任意信号的复表示方法

任何实信号  $s(t)$  都具有双边带的频谱。为了简化分析，我们要寻找一种复信号  $\tilde{s}(t)$ ，它同时满足以下两个条件：

$$s(t) = \text{Re}[\tilde{s}(t)]$$

$$\tilde{S}(\omega) = \begin{cases} 2S(\omega) & \omega \geq 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$$



首先 
$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^0 S(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \int_0^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right]$$

利用实信号频谱的对称性质，可得

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{+\infty} S(-\omega) e^{-j\omega t} d\omega + \int_0^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{+\infty} S^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega + \int_0^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] \\ &\triangleq A^* + A = 2 \operatorname{Re}[A] = \operatorname{Re}[2A] \\ &= \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} 2S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] \end{aligned}$$



现假定我们已经找到一个复信号 $\tilde{s}(t)$ ，它的频谱满足

$$\tilde{S}(\omega) = 2S(\omega)U(\omega)$$

则

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} 2S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

此时

$$s(t) = \text{Re} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} 2S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] = \text{Re} [\tilde{s}(t)]$$

以上说明，同时满足上述两个条件的复信号是存在的。



利用

$$U(\omega) \leftrightarrow \frac{1}{2} \left[ \delta(t) - \frac{1}{j\pi t} \right]$$

可推得

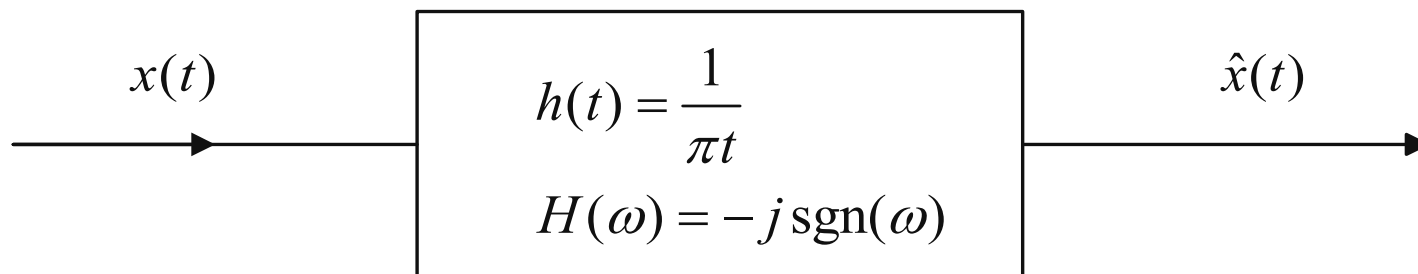
$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) &= s(t) * \left[ \delta(t) - \frac{1}{j\pi t} \right] = s(t) * \delta(t) + js(t) * \frac{1}{\pi t} \\ &= s(t) + j \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) \frac{1}{t - \tau} d\tau \\ &\triangleq s(t) + j\hat{s}(t) \end{aligned}$$

将  $\tilde{s}(t)$  称为  $s(t)$  的解析信号或预包络，其虚部  $\hat{s}(t)$  称为  $s(t)$  的希尔伯特(Hilbert)变换，记为  $\hat{s}(t) = H[s(t)]$ 。



### 3. 希尔伯特变换性质

(1) 希尔伯特变换相当于一个正交滤波器。



$$\hat{s}(t) = -j[\tilde{s}(t) - s(t)]$$

$$\hat{S}(\omega) = -j[2S(\omega)U(\omega) - S(\omega)]$$

$$= \begin{cases} -jS(\omega) & \omega \geq 0 \\ jS(\omega) & \omega < 0 \end{cases} = -j \operatorname{sgn}(\omega) S(\omega)$$



## (2) 希尔伯特逆变换

$$\begin{aligned} s(t) &= H^{-1}[\hat{s}(t)] = -H[\hat{s}(t)] = -\hat{s}(t) * \frac{1}{\pi t} \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{s}(t-\tau)}{\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{s}(t+\tau)}{\tau} d\tau \end{aligned}$$

理由

$$\begin{aligned} \hat{\hat{S}}(\omega) &= \begin{cases} -j\hat{S}(\omega) = -j(-jS(\omega)) & \omega \geq 0 \\ j\hat{S}(\omega) = j(jS(\omega)) & \omega < 0 \end{cases} \\ &= -S(\omega) \end{aligned}$$



## 2.8.2 随机信号的复表示

### 1. 随机信号的复表示——解析过程

定义：给定任一实随机信号 $\{x(t)\}$ ，定义一复随机信号 $\{\tilde{x}(t)\}$ 为

$$\tilde{x}(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

其中  $\hat{x}(t)$  是  $x(t)$  的希尔伯特变换， $\{\hat{x}(t)\}$  也是一实随机信号。

$$\hat{x}(t) = H[x(t)] = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

称 $\{\tilde{x}(t)\}$ 为实随机信号 $\{x(t)\}$ 的复解析表达式，或称为解析过程。



## 2. 解析过程的性质

(1) 若  $\{x(t)\}$  广义平稳, 则  $\{\hat{x}(t)\}$  也是广义平稳, 且  $\{x(t)\}, \{\hat{x}(t)\}$  联合平稳。

$$(2) R_{\hat{x}}(\tau) = R_x(\tau), \quad S_{\hat{x}}(\omega) = S_x(\omega)$$

$$(3) R_{\hat{x}x}(\tau) = \hat{R}_x(\tau), \quad R_{xx\hat{x}}(\tau) = -\hat{R}_x(\tau)$$

$$(4) R_{x\hat{x}}(\tau) = -R_{\hat{x}x}(\tau)$$

$$(5) R_{\hat{x}x}(-\tau) = -R_{\hat{x}x}(\tau)$$

$$(6) R_{\hat{x}x}(0) = 0$$

$$(7) R_{\tilde{x}}(\tau) = 2[R_x(\tau) + jR_{\hat{x}x}(\tau)]$$





$$(8) \quad S_{\hat{x}x}(\omega) = \begin{cases} -jS_x(\omega) & \omega \geq 0 \\ jS_x(\omega) & \omega < 0 \end{cases}$$

$$(9) \quad S_{\tilde{x}}(\omega) = \begin{cases} 4S_x(\omega) & \omega \geq 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$$



## 相关证明:

$$(2) S_{\hat{x}}(\omega) = S_x(\omega) |H(j\omega)|^2 = S_x(\omega) |-j \operatorname{sgn}(\omega)|^2 = S_x(\omega)$$

$$R_{\hat{x}}(\tau) = R_x(\tau)$$

$$(3) R_{\hat{x}x}(\tau) = E\{\hat{x}(t)x(t-\tau)\} = E\left\{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t-\eta)x(t-\tau)}{\eta} d\eta\right\}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_x(\tau-\eta)}{\eta} d\eta = \hat{R}_x(\tau)$$

$$(4) R_{\hat{x}x}(\tau) = \hat{R}_x(\tau) = -R_{x\hat{x}}(\tau)$$

$$(5) R_{\hat{x}x}(-\tau) = E\{\hat{x}(t-\tau)x(t)\} = E\left\{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t-\tau-\eta)x(t)}{\eta} d\eta\right\}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_x(\tau+\eta)}{\eta} d\eta = -\hat{R}_x(\tau) = -R_{\hat{x}x}(\tau)$$



$$(6) R_{\hat{x}x}(0) = -R_{\hat{x}x}(0) = 0$$

$$\begin{aligned}(7) R_{\tilde{x}}(\tau) &= E \left\{ \tilde{x}(t) \tilde{x}(t-\tau)^* \right\} \\ &= E \left\{ [x(t) + j\hat{x}(t)] [x(t-\tau) - j\hat{x}(t-\tau)] \right\} \\ &= R_x(\tau) + R_{\hat{x}}(\tau) + j[R_{\hat{x}x}(\tau) - R_{x\hat{x}}(\tau)] \\ &= 2R_x(\tau) + j2R_{\hat{x}x}(\tau)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(8) S_{\hat{x}x}(\omega) &= F \{ R_{\hat{x}x}(\tau) \} = F \{ \hat{R}_x(\tau) \} = F \left\{ R_x(\tau) * \frac{1}{\pi t} \right\} \\ &= -j \operatorname{sgn}(\omega) S_x(\omega)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(9) S_{\tilde{x}}(\omega) &= F \{ R_{\tilde{x}}(\tau) \} = F \{ 2R_x(\tau) + j2R_{\hat{x}x}(\tau) \} \\ &= 2S_x(\omega) + j2[-j \operatorname{sgn}(\omega) S_x(\omega)] = 4S_x(\omega)U(\omega)\end{aligned}$$



## 2.9 窄带高斯噪声通过检波器的输出

### 2.9.1 窄带随机信号

### 2.9.2 窄带高斯噪声通过检波器的输出

### 2.9.3 正弦信号加窄带高斯噪声通过平方检波器的输出



## 2.9.1 窄带随机信号

### 1. 窄带随机信号的正交分量表示

(高频) 窄带随机信号：指功率谱密度集中在中心频率  $\omega_0$  附近很窄的频带范围  $\Delta\omega$  以内，即  $\Delta\omega \ll \omega_0$ 。若  $\{n(t)\}$  是零均值的窄带随机信号，其样本函数可以如下表示

$$\begin{aligned} n(t) &= \operatorname{Re}\{\tilde{n}(t)\} = \operatorname{Re}\{\tilde{a}(t)e^{j\omega_0 t}\} \\ &= \operatorname{Re}\{[x(t) + jy(t)]e^{j\omega_0 t}\} \\ &= x(t)\cos\omega_0 t - y(t)\sin\omega_0 t \end{aligned}$$

上式中的  $x(t), y(t)$  称为  $\{n(t)\}$  的两个正交分量，上式通常称为  $\{n(t)\}$  的正交表示。



$\{n(t)\}$  也可以用预包络表示

$$n(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{n}(t)\} = \operatorname{Re}\{n(t) + j\hat{n}(t)\}$$

$$x(t) + jy(t) = [n(t) + j\hat{n}(t)]e^{-j\omega_0 t}$$

两个正交分量可以表示成

$$x(t) = n(t) \cos \omega_0 t + \hat{n}(t) \sin \omega_0 t$$

$$y(t) = -n(t) \sin \omega_0 t + \hat{n}(t) \cos \omega_0 t$$



## 2. 窄带平稳随机信号的性质

(1) 若  $\{n(t)\}$  是广义平稳窄带随机信号，则它的两个正交分量  $x(t), y(t)$  也是广义平稳。

$$(2) R_x(\tau) = R_y(\tau)$$

$$(3) R_x(0) = R_y(0) = R_n(0)$$

$$(4) R_{xy}(\tau) = -R_{xy}(-\tau), R_{xy}(0) = -R_{xy}(0) \equiv 0$$

(5) 如果  $S_n(\omega)$  是以  $\omega_0$  为中心频率的对称功率谱，即

$$S_n(\omega_0 + \omega) = S_n(\omega_0 - \omega), \quad 0 \leq \omega \leq \Delta\omega/2$$

$$S_n(\omega) = 0, \quad \omega > \omega_0 + \Delta\omega/2, \omega < \omega_0 - \Delta\omega/2$$

则  $R_{xy}(\tau) \equiv 0$



## 相关证明

$$(1) E\{x(t)\} = E\{y(t)\} = 0$$

$$\begin{aligned} E\{x(t)x(t-\tau)\} &= R_n(\tau) \cos \omega_0 t \cdot \cos \omega_0(t-\tau) \\ &+ R_{\hat{n}n}(\tau) \sin \omega_0 t \cdot \cos \omega_0(t-\tau) + R_{n\hat{n}}(\tau) \cos \omega_0 t \cdot \sin \omega_0(t-\tau) \\ &+ R_{\hat{n}}(\tau) \sin \omega_0 t \cdot \sin \omega_0(t-\tau) \\ &= R_n(\tau) \cos \omega_0 \tau + \hat{R}_n(\tau) \sin \omega_0 \tau \end{aligned}$$

$$E\{y(t)y(t-\tau)\} = R_n(\tau) \cos \omega_0 \tau + \hat{R}_n(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

$$(4) E\{x(t)y(t-\tau)\} = R_n(\tau) \sin \omega_c \tau - \hat{R}_n(\tau) \cos \omega_c \tau$$

$$E\{y(t)x(t-\tau)\} = -R_n(\tau) \sin \omega_c \tau + \hat{R}_n(\tau) \cos \omega_c \tau$$

$$R_{xy}(\tau) = -R_{yx}(\tau) = -R_{xy}(-\tau)$$





$$\begin{aligned}(5) S_{xy}(\omega) &= F\{R_{xy}(\tau)\} = F\{R_n(\tau)\sin\omega_0\tau\} - F\{\hat{R}_n(\tau)\cos\omega_0\tau\} \\&= \frac{S_n(\omega - \omega_0) - S_n(\omega + \omega_0)}{2j} \\&\quad - \frac{-jS_n(\omega - \omega_0)\operatorname{sgn}(\omega - \omega_0) - jS_n(\omega + \omega_0)\operatorname{sgn}(\omega + \omega_0)}{2} \\&= \frac{S_n(\omega - \omega_0)}{2j}[1 - \operatorname{sgn}(\omega - \omega_0)] - \frac{S_n(\omega + \omega_0)}{2j}[1 + \operatorname{sgn}(\omega + \omega_0)] \\&= \begin{cases} 0 & \omega \geq \omega_0 \\ -j[S_n(\omega - \omega_0) - S_n(\omega + \omega_0)] & -\omega_0 \leq \omega < \omega_0 \\ 0 & \omega < -\omega_0 \end{cases} \\&= 0 \\R_{xy}(\tau) &= 0\end{aligned}$$



## 2.9.2 窄带高斯噪声通过检波器的输出

### 1. 线性检波器

现输入零均值、方差为  $\sigma^2$  的窄带广义平稳高斯噪声  $\{n(t)\}$

$$n(t) = x(t) \cos \omega_0 t - y(t) \sin \omega_0 t$$

线性检波器的输出是窄带高斯噪声的包络  $\{z(t)\}$

$$z(t) = [x^2(t) + y^2(t)]^{1/2}$$

求任意  $t$  时刻对应的随机变量  $z$  的概率密度函数。



根据性质,  $\{x(t)\}, \{y(t)\}$  均为广义平稳高斯过程, 在任意 $t$ 时刻对应的随机变量  $x, y$  是均值为零, 方差为  $\sigma^2$ 的高斯随机变量, 且二者统计独立。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$f(x, y) = f(x)f(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$



引入变量变换, 令  $x = z \cos \phi, y = z \sin \phi$  , 有

$$z = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad z \geq 0$$

$$\phi = \tan^{-1}(y / x), \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

$$f(z, \phi) = f(x = z \cos \phi, y = z \sin \phi) |J| = \frac{z}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = z$$



$z$ 的概率密度函数，即为瑞利分布。

$$f(z) = \int_0^{2\pi} f(z, \phi) d\phi = \frac{z}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right), \quad z \geq 0$$

$\phi$  的概率密度函数，即为均匀分布。

$$f(\phi) = \int_0^{+\infty} f(z, \phi) dz = \frac{1}{2\pi}, \quad 2\pi \geq \phi \geq 0$$

$$f(z, \phi) = f(z)f(\phi)$$

结论：零均值窄带平稳高斯噪声经过线性检波，其输出的包络服从瑞利分布，相位服从均匀分布，且包络和相位在同一时刻是统计独立的。



## 2. 平方检波器

平方检波器的输出为

$$z'(t) = z^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$$

其概率密度函数为指数分布

$$f(z') = f\left(z = \sqrt{z'}\right)|J| = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{z'}{2\sigma^2}\right), \quad z' \geq 0$$



## 2.9.3 正弦信号加窄带高斯噪声通过检波器的输出

### 1. 线性检波器

现输入正弦信号  $\{s(t)\}$  加零均值、方差为  $\sigma^2$  的窄带广义平稳高斯噪声  $\{n(t)\}$ 。

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$$

其中  $A, \omega_0$  为确知量,  $\theta$  是  $(0, 2\pi)$  上均匀分布的随机变量。

$$s(t) + n(t) = \operatorname{Re}[\tilde{s}(t) + \tilde{n}(t)]$$

$$\tilde{s}(t) + \tilde{n}(t) = \left\{ [A \cos \theta + x(t)] + j[A \sin \theta + y(t)] \right\} e^{j\omega_0 t}$$

$$\triangleq [x'(t) + jy'(t)] e^{j\omega_0 t}$$

$$s(t) + n(t) = x'(t) \cos \omega_0 t - y'(t) \sin \omega_0 t$$



线性检波器的输出为

$$z(t) = [x'^2(t) + y'^2(t)]^{1/2}$$

在相位  $\theta$  已给定的情况下，显见  $\{x'(t)\}, \{y'(t)\}$  是平稳高斯随机过程。

$$E\{x'(t)\} = A \cos \theta$$

$$E\{y'(t)\} = A \sin \theta$$

$$\text{Var}\{x'(t)\} = \text{Var}\{y'(t)\} = \sigma^2$$

$$\text{Cov}\{x'(t), y'(t)\} = E\{x(t)y(t)\} = 0$$

任意  $t$  时刻对应的随机变量  $x', y'$  之间统计独立。





$$\begin{aligned} f(x', y' | \theta) &= f(x' | \theta) f(y' | \theta) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left[ -\frac{(x' - A \cos \theta)^2 + (y' - A \sin \theta)^2}{2\sigma^2} \right] \end{aligned}$$

引入变量变换，令  $x' = z \cos \phi$ ,  $y' = z \sin \phi$ ，有

$$z = (x'^2 + y'^2)^{1/2}, \quad z \geq 0$$

$$\phi = \tan^{-1}(y' / x'), \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} f(z, \phi | \theta) &= |J| f(x' = z \cos \phi, y' = z \sin \phi | \theta) \\ &= \frac{z}{2\pi\sigma^2} \exp \left[ -\frac{(z \cos \phi - A \cos \theta)^2 + (z \sin \phi - A \sin \theta)^2}{2\sigma^2} \right] \\ &= \frac{z}{2\pi\sigma^2} \exp \left[ -\frac{z^2 + A^2 - 2Az \cos(\theta - \phi)}{2\sigma^2} \right] \end{aligned}$$



在  $\theta$  一定的条件下,  $z$  的概率密度函数为

$$\begin{aligned} f(z|\theta) &= \int_0^{2\pi} f(z, \phi|\theta) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{z}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{z^2 + A^2 - 2Az\cos(\theta - \phi)}{2\sigma^2}\right] d\phi \end{aligned}$$

引入零阶修正贝赛尔函数

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[x\cos(\phi - \alpha)] d\phi$$

$$f(z|\theta) = \frac{z}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{z^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{Az}{\sigma^2}\right) \quad z \geq 0$$



$z$ 的概率密度函数，即为莱斯分布，又称为广义瑞利分布。

$$f(z) = \frac{z}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{z^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{Az}{\sigma^2}\right) \quad z \geq 0$$

令  $A/\sigma = \alpha$ ，讨论：

(1) 当  $\alpha \rightarrow 0, I_0(\alpha z / \sigma) \rightarrow 1$

$$f(z) = \frac{z}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right] \quad z \geq 0$$

在小信噪比的极限情况下，正弦信号加零均值窄带平稳高斯噪声经包络检波后，其输出趋于瑞利分布。

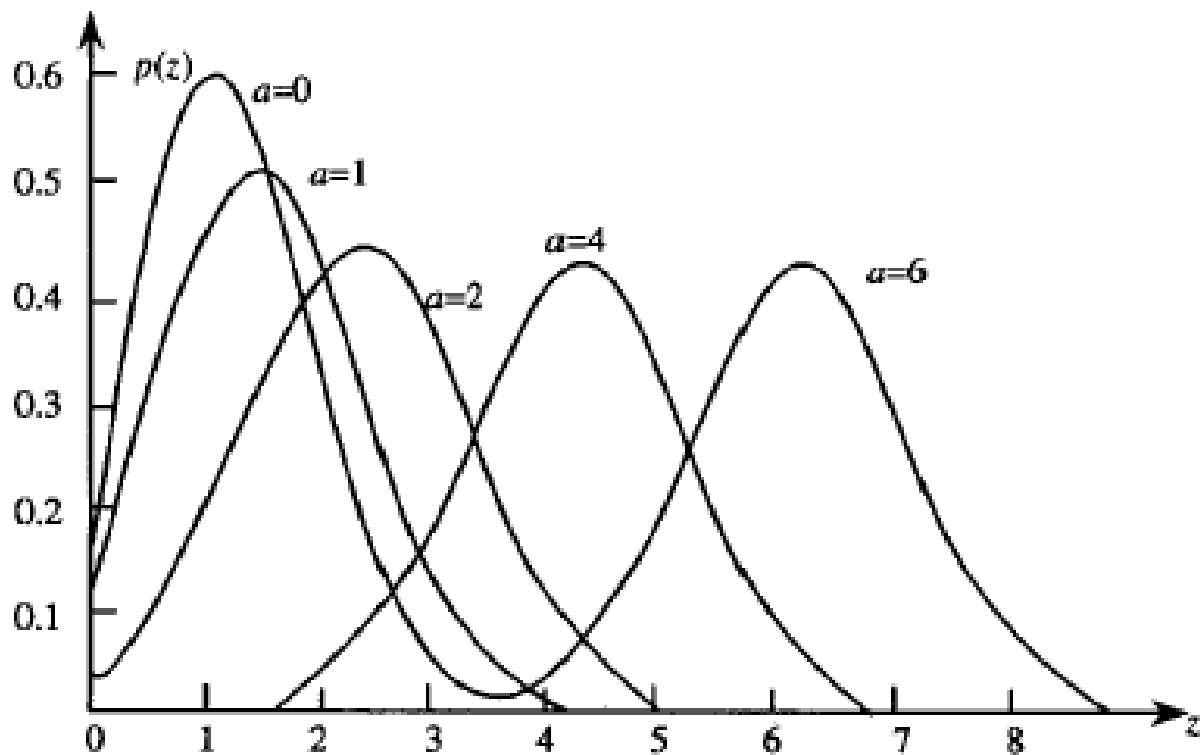


(2) 大信噪比情况下,

$$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad x \gg 1$$

$$f(z) \approx \sqrt{\frac{z}{2\pi A\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(z-A)^2}{2\sigma^2}\right]$$

此时, 包络 $z$  的分布在  $z = A$  的邻近区域上趋于高斯分布。



莱斯分布



在  $\theta$  一定的条件下,  $\phi$  的概率密度函数为

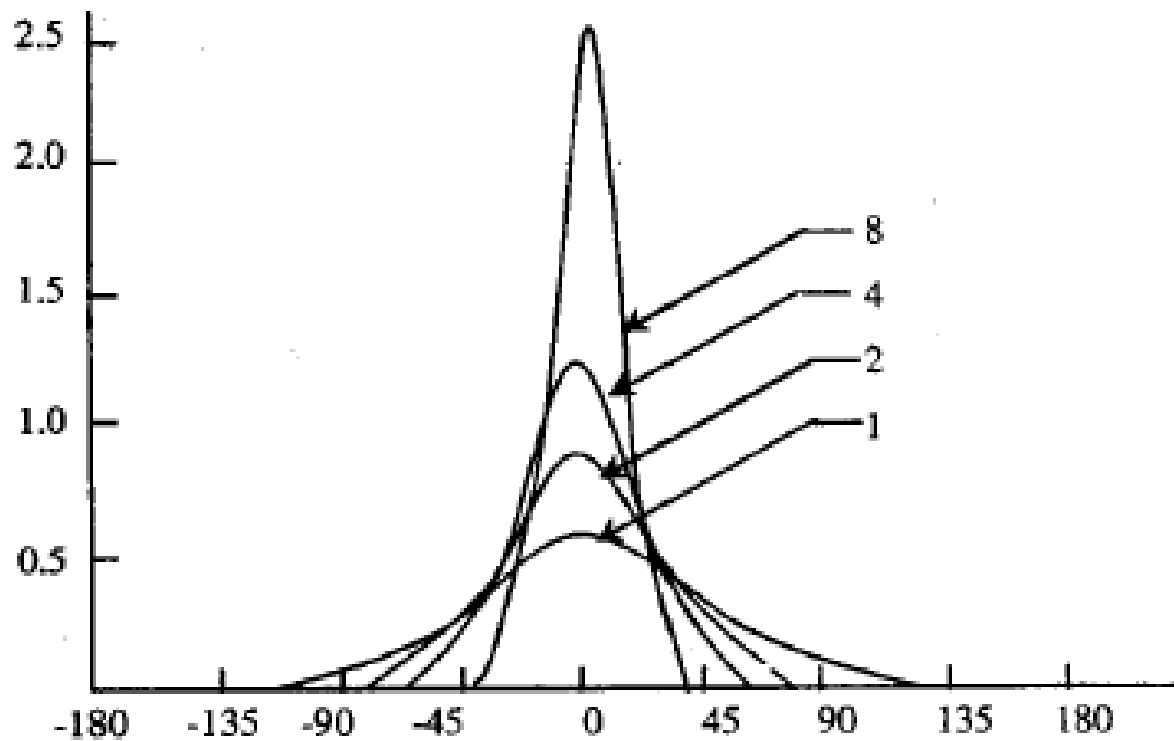
$$\begin{aligned} f(\phi | \theta) &= \int_0^\infty f(z, \phi | \theta) dz \\ &= \int_0^\infty \frac{z}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{z^2 + A^2 - 2Az \cos(\theta - \phi)}{2\sigma^2}\right] dz \end{aligned}$$

令  $\psi = \theta - \phi, A/\sigma = \alpha$

$$f(\psi | \theta) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) + \frac{\alpha \cos \psi}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha^2 \sin^2 \psi}{2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha \cos \psi}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

当  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $f(\psi | \theta) \rightarrow \frac{1}{2\pi}$

当  $\alpha \neq 0$ ,  $f(\psi | \theta)$  对称分布于零相位, 随着  $\alpha$  的增大, 逐渐趋于高斯分布。



$\theta$  条件下  $\psi$  的分布



## 2. 平方检波器

平方检波器的输出为

$$z'(t) = z^2(t) = x'^2(t) + y'^2(t)$$

其概率密度函数为两个自由度的非归一化非中心 $\chi^2$ 分布,  
非中心参量  $\lambda = A^2$  。

$$\begin{aligned} f(z') &= f(z = \sqrt{z'})|J| \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(z' + A^2)\right] I_0\left(\frac{A\sqrt{z'}}{\sigma^2}\right) \quad z' \geq 0 \end{aligned}$$