统计信号分析与处理

第1章 统计信号处理中的数学知识复习

本章内容

1.1 概率论概要

1.2 随机过程基础

1.1 概率论概要

1.1.1 随机事件及其概率

1.1.2 随机变量及其分布

1.1.3 多维随机变量

1.1.4 随机变量的数字特征

1.1.5 高斯随机变量

1.1.6 随机变量函数的分布

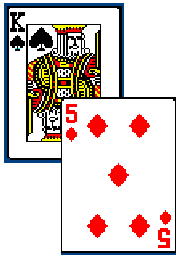
1.1.7 复随机变量

确定性现象与随机现象

- **确定性现象：** 在一定条件下必然会出现某一结果（或发生某一事件）的现象。

- **随机现象：** 在一定条件下可能出现不同结果（或发生不同事件），且不能准确预言究竟出现哪一种结果的现象。

如：掷硬币、抽牌、掷骰子



1.1.1 随机事件及其概率

- 基本事件，记为 ω 。
- 样本空间，记为 Ω 。
- 事件，记为 $A,B,C,\cdots$ 。

- 古典概率 $$P(A)=\frac{A\text{中的基本事件数}}{\Omega\text{中的基本事件总数}}$$
- 几何概率 $$P(A)=\frac{mA}{m\Omega}$$
- 统计概率 $$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

事件的概率：

设随机试验E的样本空间为Ω，对于随机试验E的每一随机事件A，都赋予唯一确定的实数$P(A)$，并且集合函数$P(\cdot)$满足下列条件：

（1）非负性：对每一个事件$A \subset \Omega$，都有$P(A) \geq 0$；

（2）规范性：$P(\Omega) = 1$；

（3）可列可加性：对任意互不相容的事件$A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

条件概率：

设A和B为任意两个随机事件，且 $P(B)>0$ ，称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件B发生条件下事件A发生的**条件概率**，也称A对B的概率。

乘法公式：

$$P(AB)=P(B)P(A|B)=P(A)P(B|A)$$

全概率公式：

设某随机试验的样本空间 Ω 中的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots$（有限个或可列个）构成一个完备事件组，且 $P(A_i) > 0,\ i = 1, 2, \cdots$ 则对任一事件B，有

$$P(B) = \sum_i P(A_i) P(B|A_i)$$

贝叶斯公式：

设某随机试验的样本空间 Ω 中的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots$（有限个或可列个）构成一个完备事件组，且 $P(A_i) > 0,\ i = 1, 2, \cdots$，则对任一事件 B，$P(B) > 0$，有

$$P(A_m|B) = \frac{P(A_m)P(B|A_m)}{\sum_i P(A_i)P(B|A_i)}, \quad m = 1, 2, \cdots$$

事件的独立性：

如果随机事件A与B满足关系 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件A与B是相互独立的。

性质：若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=1-\prod_{i=1}^{n} P\left(\bar{A}_i\right)$$

1.1.2 随机变量及其分布

随机变量：

设某随机试验的样本空间为 $\Omega=\{\omega\}$，对于每一个样本点 $\omega\in\Omega$ 都有惟一的实数 $X(\omega)$ 与之对应，这样就得到一个定义在 Ω 上的单值实函数 $X=X(\omega)$ 。如果对任意实数 x ，“$X(\omega)\le x$”都是一个随机事件，并有其确定的概率，则称 $X=X(\omega)$ 为随机变量。

$$\text{随机变量}\begin{cases}\text{离散型随机变量}\\ \text{连续型随机变量}\end{cases}$$

离散型随机变量：

随机变量X的全部可能取值为有限个或可列个。随机变量X所有可能的取值为 $x_i\left(i=1,2,\cdots\right)$，事件 $X=x_i$ 的概率为 $P\left(X=x_i\right)=p_i,\quad i=1,2,\cdots$

上式称为离散型随机变量X的**概率分布或分布率**。

设X 是一个随机变量，对任意实数 $x\left(-\infty<x<+\infty\right)$，令 $F\left(x\right)=P\left(X\le x\right)$，则称 $F\left(x\right)$ 为随机变量X 的**概率分布函数**。它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是$[0,1]$。

常见的离散型随机变量

0–1分布： 当一个随机试验只有两个可能结果 A与 $\bar{A}$ 时，随机变量

$$X = \begin{cases} 0, & 当\bar{A}出现时 \\ 1, & 当A出现时 \end{cases}$$

X 表示在试验中事件A出现的次数，并设$P(A) = p(0 < p < 1)$，则X的概率分布为

$$P(X = k) = p^k (1-p)^{1-k}, \quad k = 0,1$$

这时称 X 服从参数为 p 的0–1分布，记为 $X \sim B(1, p)$。

泊松分布： 如果随机变量X的分布为：

$$P\left(X=k\right)=\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda}$$

其中 $\lambda>0$ 为常数，则称X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为 $X\sim P\left(\lambda\right)$。

连续型随机变量：

如果对于随机变量X的分布函数$F(x)$，存在一个非负可积函数$f(x)(-\infty < x < +\infty)$，有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

则称X为**连续型随机变量**，函数$f(x)$为其**概率密度函数**。

常见的连续型随机变量

均匀分布： 如果连续型随机变量X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其中 a 和 b 为常数，则称X在区间 $[a,b]$ 上服从均匀分布，记为 $X\sim U(a,b)$。

高斯分布： 如果连续型随机变量X的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\exp\left\{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\},\quad -\infty<x<+\infty$$

其中m_X和σ_X为常数，且$\sigma_X>0$，则称X服从参数为m_X和σ_X的高斯分布，记为$X\sim N\left(m_X,\sigma_X^2\right)$。

瑞利分布： 如果连续型随机变量X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\mu^2}e^{-\frac{x^2}{2\mu^2}}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

其中μ为常数，且 $\mu>0$，则称X 服从参数为 μ 的瑞利分布。

χ^2**分布：** 如果连续型随机变量X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

其中n为正整数，则称 X 服从自由度为n的 χ^2分布。

莱斯分布： 如果连续型随机变量X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{\left(x^2+v^2\right)}{2\sigma^2}}I_0\left(\dfrac{xv}{\sigma^2}\right), & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

其中 σ 为常数，且 $\sigma>0$ ，$I_0(z)$ 是零阶第一类贝塞尔(Bessel)函数，则称X服从莱斯分布。

1.1.3 多维随机变量

定义：

设某随机试验的样本空间为 $\Omega=\{\omega\}$，如果每一个样本点 $\omega\in\Omega$，$X_1=X_1(\omega)$、$X_2=X_2(\omega)$ … $X_n=X_n(\omega)$，是定义在同一个样本空间 Ω 上的n个随机变量，则 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为***n*** **维随机变量**，其矢量形式 $[X_1,X_2,\cdots,X_n]^T$ 也称为**随机矢量**。

下面以二维为例进行说明，更高维以此类推。

联合分布函数：

设 (X,Y) 是二维随机变量，$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)$ 称为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数，或称随机变量 X 和 Y 的联合分布函数。

二维离散型随机变量：

二维随机变量 (X,Y) 所有可能的取值是有限对或可列无限多对，并且以确定的概率取各个不同的数对

$$P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots$$

称为 (X,Y) 的**联合概率分布**。

二维连续型随机变量：

二维随机变量 (X,Y) 的分布函数是 $F(x,y)$，存在非负函数 $f(x,y)$，使得对任意实数 x,y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$$

称 $f(x,y)$ 为二维连续型随机变量 (X,Y) 的**联合概率密度函数**。

边缘分布函数：

二维随机变量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$，随机变量X或Y的分布即为二维随机变量的边缘分布。它与二维变量的分布函数具有如下关系：

$$F_X(x)=P(X\le x,Y<+\infty)=F(x,+\infty)$$

$$F_Y(y)=P(X<+\infty,Y\le y)=F(+\infty,y)$$

条件概率：

对二维离散随机变量，在 $Y=y_i$ 条件下 $X=x_i$ 的**条件概率**为

$$P\left(X=x_i \middle| Y=y_i\right)=\frac{P\left(X=x_i,Y=y_i\right)}{P\left(Y=y_i\right)}$$

条件分布函数：

对**二维连续型随机变量**，设 y是定值，任意$\Delta y > 0$ ，$P\left(y-\Delta y < Y \le y+\Delta y\right) > 0$ ，若对任意实数x，极限

$$\lim_{\Delta y \to 0} P\left(X \le x \middle| y-\Delta y < Y \le y+\Delta y\right)$$

存在，则称此极限为在 $Y=y$ 条件下X 的条件分布函数，记为$P\left(X \le x \middle| Y=y\right)$。

对于二维连续型随机变量

$$P(X \le x | Y = y) = \lim_{\Delta y \to 0} P\left(X \le x | y - \Delta y < Y \le y + \Delta y \right)$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} \int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv}{\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} f(v)dv}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)du 2\Delta y}{f(y)2\Delta y}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)du}{f(y)}$$

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$$

对于二维离散型随机变量

$$P(X \le x | Y = y) = \frac{\sum_{i, x_i \le x} P(X = x_i, Y = y)}{P(Y = y)}$$

独立性：

若对任意实数x和y，有$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，则称随机变量X和Y是独立的。

若X与Y独立，显然有

$$P(X=x_i|Y=y_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_i)}{P(Y=y_i)}=P(X=x_i)$$

$$f(x|y)=f(x)$$

1.1.4 随机变量的数字特征

随机变量X的**数学期望（均值）：**

$$E\{X\}=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$E\{Y\}=\int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

$$E\{XY\}=\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy$$

方差：

$$
\begin{aligned}
Var\{X\} &= E\left\{\left[X - E\{X\}\right]^2\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(x - E\{X\}\right)^2 f(x)dx \\
&= E\{X^2\} - \left(E\{X\}\right)^2
\end{aligned}
$$

通常称 $\sqrt{Var\{X\}}$ 为随机变量 X 的均方差或标准差，习惯上用 σ_X^2 表示 $Var\{X\}$。

协方差：

对多维随机变量 $X=\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$，$X_i$ 与 X_j 的协方差：

$$C_{ij}=Cov\left\{X_i,X_j\right\}$$

$$=E\left\{\left(X_i-E\left\{X_i\right\}\right)\left(X_j-E\left\{X_j\right\}\right)\right\}$$

$$i,j=1,2,\cdots,n$$

显然

$$Var\left\{X_i\right\}=C_{ii}$$

相关系数：

“归一化”的协方差，称为**相关系数**：

$$\rho_{X_iX_j} = \frac{E\left\{\left(X_i - E\left\{X_i\right\}\right)\left(X_j - E\left\{X_j\right\}\right)\right\}}{\sqrt{E\left\{\left(X_i - E\left\{X_i\right\}\right)^2\right\} \cdot E\left\{\left(X_j - E\left\{X_j\right\}\right)^2\right\}}}$$

$$= \frac{C_{ij}}{\sqrt{Var\left\{X_i\right\}} \cdot \sqrt{Var\left\{X_j\right\}}}$$

$$\left|\rho_{X_iX_j}\right| \le 1$$

特征函数：

若X 是随机变量，则称复随机变量 $e^{j\omega X}$ 的均值

$$\varphi(\omega)=E\left\{e^{j\omega X}\right\}$$

为X 的特征函数。

（1）若X 是离散型随机变量，其可能取值为$x_1, x_2, \cdots$，

且 $P\left(X=x_k\right)=p_k$，则 $\varphi(\omega)=\sum_k e^{j\omega x_k} p_k$

（2）若X 是连续型随机变量，其概率密度函数为 $f(x)$，

则 $\varphi(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega x} f(x) dx$

特征函数:

多维随机变量 $\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$**的特征函数**:

$$\varphi\left(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\right) = E\left\{e^{j\left(\omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 + \cdots + \omega_n X_n\right)}\right\}$$

已知随机变量的特征函数，可以求出它的各阶矩，特征函数也被称为**矩生成函数**。

$$E\left\{X_1^{k_1} X_2^{k_2} \cdots X_n^{k_n}\right\} = (-j)^r \left.\frac{\partial^r \varphi\left(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\right)}{\partial \omega_1^{k_1} \partial \omega_2^{k_2} \cdots \partial \omega_n^{k_n}}\right|_{\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n = 0}$$

$$r = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$$

1.1.5 高斯随机变量

1. 一维高斯随机变量

一维高斯随机变量X 的**概率密度函数**：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\exp\left[-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right],\quad -\infty<x<+\infty$$

2. 多维高斯随机变量

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 组成n维高斯随机变量，令 $\mathrm{x} = \left[X_1, X_2, \cdots, X_n\right]^T$

均值矢量：

$$\mathbf{m}_{\mathbf{x}} = \left[E\{X_1\}, E\{X_2\}, \cdots, E\{X_n\}\right]^T = \left[m_{X_1}, m_{X_2}, \cdots, m_{X_n}\right]^T$$

协方差矩阵：

$$\mathbf{C}_{\mathbf{x}} = \left\{\left(\mathbf{x} - E\left\{\mathbf{x}\right\}\right)\left(\mathbf{x} - E\left\{\mathbf{x}\right\}\right)^T\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} E\left\{\left(X_1 - m_{X_1}\right)^2\right\} & \cdots & \cdots & E\left\{\left(X_1 - m_{X_1}\right)\left(X_n - m_{X_n}\right)\right\} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ E\left\{\left(X_n - m_{X_n}\right)\left(X_1 - m_{X_1}\right)\right\} & \cdots & \cdots & E\left\{\left(X_n - m_{X_n}\right)^2\right\} \end{bmatrix}$$

n 维高斯随机变量的**联合高斯概率密度函数：**

$$f(\mathbf{X})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|\mathbf{C_x}\right|^{1/2}}\exp\left[-\frac{(\mathbf{X}-\mathbf{m_x})^T\mathbf{C_x}^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{m_x})}{2}\right]$$

性质：

（1） n 维高斯随机变量经过线性变换后仍是高斯随机变量。

（2） n 维互不相关的高斯随机变量一定是彼此统计独立的。

1.1.6 随机变量函数的分布

1. 一维随机变量函数的分布

X是连续型随机变量，概率密度函数为 $f(x), -\infty < x < +\infty$ ，$g(x)$ 处处可导且有 $g'(x) > 0$（或恒有 $g'(x) < 0$ ），则 $Y = g(X)$ 也是一个连续型随机变量，其概率密度函数为

$$f(y) = \begin{cases} f(h(y))|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$, $\beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$, $X = h(Y)$。

$$f(y) = f(h_1(y))|h_1'(y)| + f(h_2(y))|h_2'(y)|$$

2. 多维随机变量函数的分布

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是概率密度函数为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的连续型n维随机变量，假设

（1） $Y_1 = g_1(X_1, X_2, \cdots, X_n), \cdots, Y_n = g_n(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是n维实数空间到自身的一对一映射；

（2） 变换g_i和它的逆变换h_i都是连续的；

（3） 偏导数 $\frac{\partial h_i}{\partial y_j}, i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, n$ 存在且连续；

（4） 逆变换的雅可比行列式

$$J(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial y_1} & \frac{\partial h_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

则 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 具有联合概率密度函数

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = |J| f(h_1(y_1, y_2, \cdots, y_n), \cdots, h_n(y_1, y_2, \cdots, y_n))$$

1. 1. 7 复随机变量

复随机变量 $Z = X_1 + jX_2$

概率密度函数 $f(z) = f(x_1, x_2)$

均值 $m_Z = E\{Z\} = E\{X_1 + jX_2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 + jx_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$

方差 $\sigma_Z^2 = E\left\{\left|Z - m_Z\right|^2\right\} = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 = E\left\{\left|Z\right|^2\right\} - m_Z^2$

对于两个复随机变量 $W = U_1 + jU_2, Z = X_1 + jX_2$

$$f(w,z) = f(x_1, x_2, u_1, u_2)$$

协方差

$$C_{WZ} = E\left\{(W - m_W)(Z - m_Z)^*\right\}$$

相关系数

$$\rho_{WZ} = \frac{C_{WZ}}{\sigma_W \sigma_Z}$$

对于复随机矢量 $\mathbf{w},\mathbf{z}$

协方差矩阵 $\mathbf{C}_Z = E\left\{\left(\mathbf{z}-\mathbf{m}_Z\right)\left(\mathbf{z}-\mathbf{m}_Z\right)^H\right\}$

互协方差矩阵 $\mathbf{C}_{WZ} = E\left\{\left(\mathbf{w}-\mathbf{m}_W\right)\left(\mathbf{z}-\mathbf{m}_Z\right)^H\right\}$

复高斯随机矢量的**概率密度函数**为

$$f\left(\mathbf{z}\right) = \frac{1}{\pi^n \left|\mathbf{C}_Z\right|} \exp\left[-\left(\mathbf{z}-\mathbf{m}_Z\right)^H \mathbf{C}_Z^{-1}\left(\mathbf{z}-\mathbf{m}_Z\right)\right]$$

1.2 随机过程基础

1.2.1　平稳与非平稳随机过程

1.2.2　随机过程的统计特性与维纳-辛钦定理

自然界存在一类随机现象，与之相联系的随机事件不能用一般的单维或多维随机变量去描述它。

如：

- 用 $x(t)$ 表示 t 时刻以前某通信站接到的呼唤次数，对于某个固定的 t，$x(t)$ 是一个随机量，但 $x(t)$ 这类随机量将随着 t 的变化而变化；
- 电网电压可看作随时间变化的随机量 $V(t)$ ；
- 雷达接收机的噪声输出 $n(t)$ 。

设 $T \subset \mathbb{R}^1$ ，对于每一个 $t \in T$, $x_t(\omega)$为一随机变量，其中 $\omega \in \Omega$ 。则 $\{x_t(\omega),\ t \in T\}$ 称为**随机过程**。简记为 $\{x(t)\},\ t \in T$。

$$\{x_\omega(t), \omega \in \Omega\} \qquad \{x_t(\omega), t \in T\}$$

用随机过程才能描述的随机现象，每做一次随机试验，随机试验的结果应是某一个随机现实，每一次随机试验之前，其试验结果究竟属于哪一种随机现实，事先不能预测。

一维分布函数和一维概率密度函数

$$F\left(x_1;t_1\right)=P\left(x(t_1)\le x_1\right) \qquad f\left(x_1;t_1\right)$$

n维分布函数和n维概率密度函数

$$F\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n\right)=P\left(x(t_1)\le x_1,x(t_2)\le x_2,\cdots,x(t_n)\le x_n\right)$$

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n\right)$$

1.2.1 平稳与非平稳随机过程

定义：

如果由 $\{x(t)\}$ 所确定的n维概率密度函数

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 满足

$$
\begin{aligned}
&f(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)\\
&=f(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau)
\end{aligned}
$$

称 $\{x(t)\}$ 为**严格平稳随机过程**，又称为**强平稳随机过程**或**狭义平稳随机过程**。

定义：

当 $E\left\{x^2(t)\right\}<+\infty$ 时，若满足：

$$E\left\{x(t)\right\}=E\left\{x(t+\tau)\right\}=m_x$$
$$E\left\{x(t_1)x(t_2)\right\}=E\left\{x(t_1+\tau)x(t_2+\tau)\right\}=R_x(t_1-t_2)$$

称 $\left\{x(t)\right\}$ 为**广义平稳随机过程**，又称为**弱平稳随机过程**或**宽平稳随机过程**。

讨论：当 $E\left\{x^2(t)\right\}<+\infty$ 时，严格平稳随机过程也是广义平稳的，但广义平稳随机过程不一定是严格平稳的。

有一类随机过程，其本质是随机过程，但其表示形式却类似确定过程，称为**准随机过程**。

例：$\left\{x(t)=\sum_{k=0}^{\tau}\xi_k t^k\right\}$，$\xi_k$ $(k=1,2,\cdots,\tau)$ 为随机变量；

$\left\{x(t)=A\sin(\omega_0 t+\theta)\right\}$， A,θ 为随机变量。

复随机过程：

$$\left\{z(t)=x(t)+jy(t)\right\}$$

其概率密度函数为

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n;t_1,t_2,\cdots,t_n\right)$$

随机过程的**独立性**：

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n;y_1,y_2,\cdots,y_m;t_1',t_2',\cdots,t_m'\right)$$
$$=f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n\right)f\left(y_1,y_2,\cdots,y_m;t_1',t_2',\cdots,t_m'\right)$$

称这两个随机过程 $\{x(t)\},\{y(t)\}$ 是相互独立的。

1.2.2 随机过程的统计特性与维纳–辛钦定理

1. 随机过程的统计特性

均值：

$$E\left\{x(t)\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}xf\left(x;t\right)dx=m_X\left(t\right)$$

方差：

$$E\left\{\left[x(t)-m_X\left(t\right)\right]^2\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-m_X\left(t\right)\right]^2 f\left(x;t\right)dx=\sigma_X^2\left(t\right)$$

自相关函数：

$$E\left\{x(t_1)x(t_2)\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2f\left(x_1,x_2;t_1,t_2\right)dx_1dx_2=R_X\left(t_1,t_2\right)$$

协方差函数：

$$C_X(t_1,t_2)=E\left\{\left(x(t_1)-m_X(t_1)\right)\left(x(t_2)-m_X(t_2)\right)\right\}=R_X(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2)$$

相关系数：
$$\rho_X(t_1,t_2)=\frac{C_X(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)}$$

互相关函数：

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E\left\{x(t_1)y(t_2)\right\}=\iint x_1y_2f(x_1,y_2;t_1,t_2)dx_1dy_2$$

互协方差函数：

$$C_{XY}(t_1,t_2)=E\left\{\left[x(t_1)-m_X(t_1)\right]\left[y(t_2)-m_Y(t_2)\right]\right\}$$
$$=R_{XY}(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_Y(t_2)$$

对于复随机过程：

方差：$$Var\left\{x(t)\right\}=E\left\{\left|x(t)-m_X(t)\right|^2\right\}$$

自相关函数：

$$E\left\{z(t_1)z^*(t_2)\right\}=E\left\{\left[x(t_1)+jy(t_1)\right]\left[x(t_2)+jy(t_2)\right]^*\right\}=R_Z(t_1,t_2)$$

若平稳 $R_Z(t_1-t_2)$

时间平均：

随机过程$\{x(t)\}$的第 k 个现实为 $x^{(k)}(t)$，相应有：

时间平均均值：

$$\left\langle x^{(k)}(t)\right\rangle = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^{(k)}(t)\,dt$$

时间平均二阶矩：

$$\left\langle \left[x^{(k)}(t)\right]^2\right\rangle = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[x^{(k)}(t)\right]^2 dt$$

时间平均相关函数：

$$\left\langle x^{(k)}(t)\,x^{(k)}(t-\tau)\right\rangle = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^{(k)}(t)\,x^{(k)}(t-\tau)\,dt$$

时间平均互相关：

$$\left\langle x^{(k)}(t)\,y^{(k)}(t-\tau)\right\rangle = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^{(k)}(t)\,y^{(k)}(t-\tau)\,dt$$

随机过程的各态历经性

平稳随机过程的所有各类集平均统计特征，以概率1等于由任意实现得到的相应的时间平均特征。

各态历经性的意义

2. 维纳-辛钦定理

随机信号的功率谱密度：

$$S(\omega)=E\left\{S_T(\omega)\right\}=E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|F_T(\omega)\right|^2\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E\left\{\int_{-T}^{T}x(t_1)e^{-j\omega t_1}dt_1\int_{-T}^{T}x(t_2)e^{j\omega t_2}dt_2\right\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_x(t_1,t_2)e^{-j\omega(t_1-t_2)}dt_2dt_1$$

维纳–辛钦定理

平稳随机信号的功率谱密度是其相关函数的傅里叶变换，即：

$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

此外，对于实平稳随机过程，有：

$$S_X^*(\omega)=S_X(\omega)=S_X(-\omega)$$

高斯随机过程

任意时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ ，随机过程 $\{x(t)\}$ 所形成的n维随机变量，其概率密度函数为高斯分布

$$f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \left|\mathbf{C_x}\right|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}-\mathbf{m_x}\right)^T \mathbf{C_X^{-1}}\left(\mathbf{x}-\mathbf{m_x}\right)\right]$$

称随机过程 $\{x(t)\}$ 为**高斯随机过程**。

性质：

（1）概率特性只需要均值和协方差矩阵就能确定。

（2）若高斯随机过程广义平稳的，则一定是严格平稳的。

（3）高斯随机过程经过线性变换，其输出仍是高斯随机过程。