信号统计分析

第6章 波形估计

本章内容

6.1 波形估计的分类

6.2 连续信号的维纳滤波

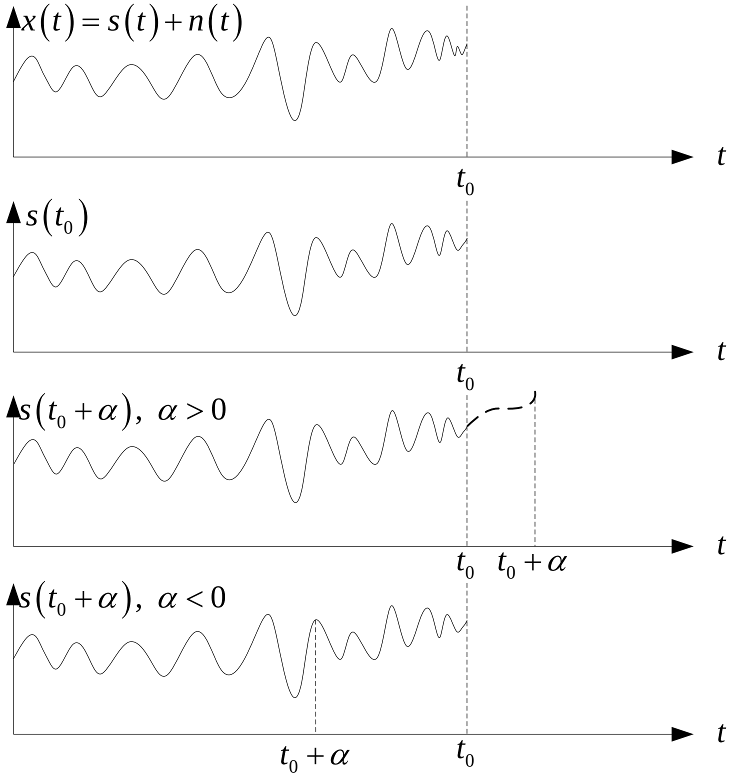
6.3 离散维纳滤波

6.4 $\alpha-\beta$ 滤波

6.5 卡尔曼滤波

6.1 波形估计的分类

假设观测信号为 $x(t)=s(t)+n(t)$ ，待估计信号为 $g(t)=s(t+\alpha)$ ，当前时刻为 t_0

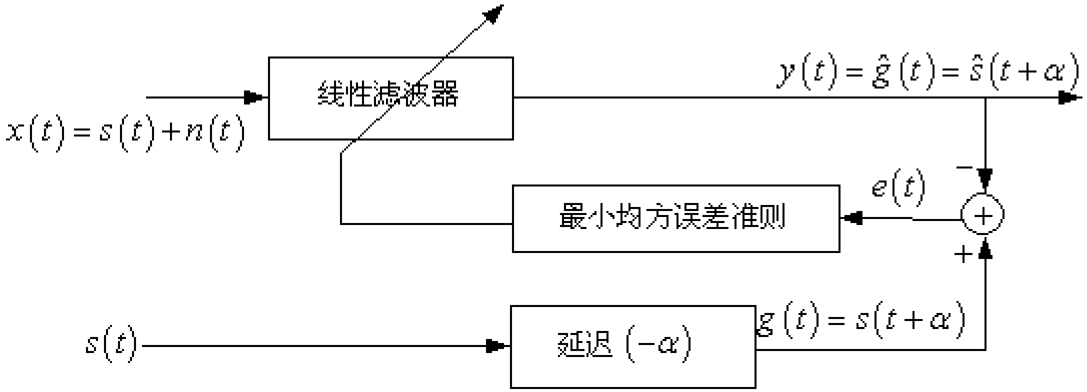


滤波：估计信号 $s(t_0)$

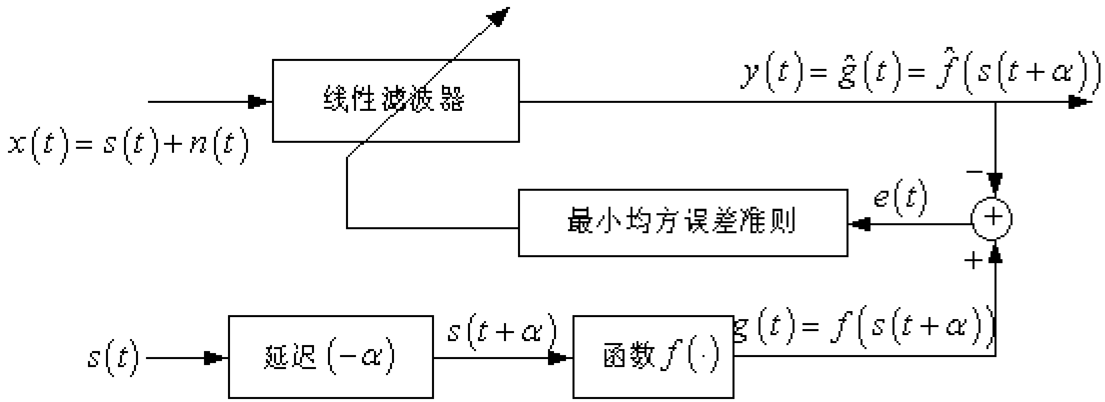
预测：估计信号 $s(t_0+\alpha)\ \alpha>0$

平滑：估计信号 $s(t_0+\alpha)\ \ \alpha<0$

波形估计目的：选取线性滤波器的冲激响应函数或传输函数，使估计的均方误差达到最小。



拓展：



6.2 连续信号的维纳滤波

基本思想：

寻找线性滤波器的最佳冲激响应或传输函数，使滤波器的输出波形作为输入信号波形的最佳估计，即使波形估计的均方误差达到最小。

主要内容：

6.2.1. 广义平稳随机信号的维纳滤波原理

6.2.2. 物理不可实现维纳滤波器的解

6.2.3. 物理可实现维纳滤波器的解

6.2.4. 最小均方误差

6.2.1 广义平稳随机信号的维纳滤波原理

假设信号和噪声均为零均值的广义平稳随机过程且互不相关，则观测信号 $x(t)=s(t)+n(t)$ 也是零均值广义平稳随机过程，且和 $g(t)$ 联合广义平稳。

线性滤波器的冲激响应为 $h(t)$，输出信号 $y(t)$ 为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)x(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

估计误差为： $e(t)=g(t)-\hat{g}(t)=g(t)-y(t)$

均方误差为： $E\left\{e^2(t)\right\}=E\left\{\left[g(t)-y(t)\right]^2\right\}\to\min$

利用线性最小均方误差估计的正交条件

$$E\left\{e(t)x(\tau')\right\}=0\ ,\quad -\infty<\tau'<+\infty$$

可得非因果广义平稳随机过程的维纳一霍夫方程

$$R_{gx}(\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\lambda)R_x(\eta-\lambda)d\lambda,\ -\infty<\eta<+\infty$$

因果广义平稳随机过程的维纳一霍夫方程

$$R_{gx}(\eta)=\int_{0}^{+\infty}h(\lambda)R_x(\eta-\lambda)d\lambda \qquad 0\le\eta<+\infty$$

6.2.2 物理不可实现维纳滤波器的解

由非因果维纳—霍夫方程，可得

$$S_{gx}(\omega)=H(j\omega)S_x(\omega)$$

即

$$H(j\omega)=\frac{S_{gx}(\omega)}{S_x(\omega)}$$

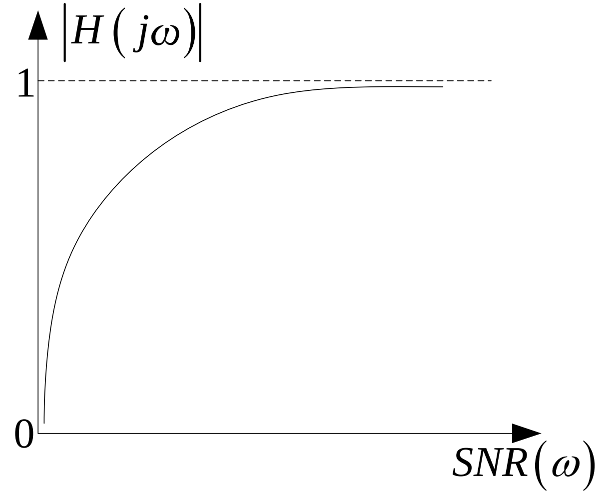
对于 $g(t)=s(t+\alpha)$，有

$$H(j\omega)=\frac{S_s(\omega)e^{j\omega\alpha}}{S_s(\omega)+S_n(\omega)}$$

维纳滤波器的幅频相应为

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{\left|S_s(\omega)/S_n(\omega)\right|}{\left|S_s(\omega)/S_n(\omega)+1\right|} \triangleq \frac{1}{\left|1+1/SNR(\omega)\right|}$$

其中 $SNR(\omega) = S_s(\omega)/S_n(\omega)$ 。



此时估计的最小均方误差为：

$$E\left\{e^2(t)\right\}_{\min} = R_g(0) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) R_{gx}(\lambda) d\lambda$$

例 6.1

考虑输入信号 $x(t)$ 为高斯-马尔可夫信号 $s(t)$ 和噪声 $n(t)$ 的叠加，假定信号和噪声统计独立，其功率谱分别为 $S_s(\omega)=\dfrac{3}{1+\omega^2}$ 和 $S_n(\omega)=1$ 。

求：α 分别取0，+1和-1时物理不可实现维纳滤波器的冲激响应及最小均方误差。

6.2.3 物理可实现维纳滤波器的解

对于因果的维纳-霍夫方程：

$$R_{gx}(\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\lambda)R_x(\eta-\lambda)d\lambda \qquad 0\le\eta<+\infty$$

其求解方法有如下两种：

1. 频谱因式分解法
2. 预白化法

1. 频谱因式分解法

引入一个新函数：$b(\eta)=\begin{cases}0 & \eta\ge 0\\ \text{形式不作具体规定} & \eta<0\end{cases}$

则有：

$$R_{gx}(\eta)+b(\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\lambda)R_x(\eta-\lambda)d\lambda \quad -\infty<\eta<+\infty$$

拉氏变换后得：

$$S_{gx}(s)+B(s)=H(s)S_x(s)$$

可知 $H(s),B(s)$ 的极点分别只存在于s的左半平面和右半平面内。

如果 $S_x(s)$ 满足佩利-维纳条件，则有：

$$S_x(s)=S_x^+(s)S_x^-(s)$$

由于 $S_x(\omega)=S_x^*(\omega)=S_x(-\omega)$ ，则

$$S_x^+(-s)=S_x^-(s)$$

于是有

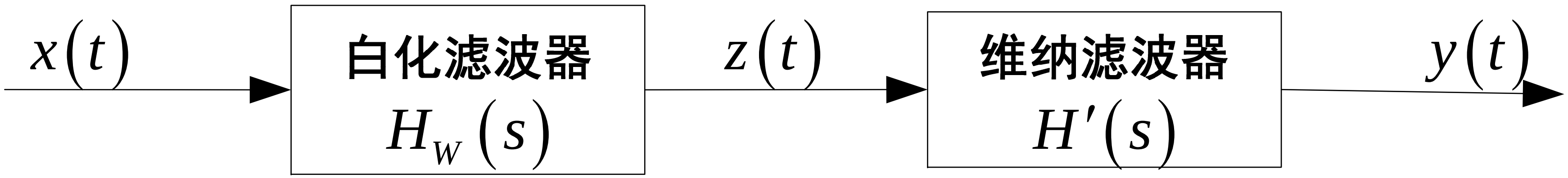
$$H(s)S_x^+(s)=\frac{S_{gx}(s)}{S_x^-(s)}+\frac{B(s)}{S_x^-(s)}=\left[\frac{S_{gx}(s)}{S_x^-(s)}\right]^+ +\left[\frac{S_{gx}(s)}{S_x^-(s)}\right]^- +\frac{B(s)}{S_x^-(s)}$$

故

$$H(s)=\frac{1}{S_x^+(s)}\left[\frac{S_{gx}(s)}{S_x^-(s)}\right]^+ =\frac{1}{S_x^+(s)}\left[\frac{S_{sx}(s)e^{\alpha s}}{S_x^-(s)}\right]^+$$

2. 预白化法

基本思想：先将输入信号进行预白化处理，然后让得到的白化信号通过其对应的维纳滤波器。



白化滤波器取为

$$H_W(s)=\frac{1}{S_x^+(s)}$$

对于白信号输入为 $z(t)$，有 $R_z(\tau)=\delta(\tau)$ ，其对应的维纳滤波器满足如下方程：

$$R_{gz}(\tau)=\int_0^{+\infty}h'(\lambda)R_z(\tau-\lambda)d\lambda=h'(\tau),\quad \tau\ge 0$$

有：

$$H'(s)=\int_0^{+\infty}h'(\tau)e^{-s\tau}d\tau=\left[S_{gz}(s)\right]^+=\left[H_W(-s)S_{gx}(s)\right]^+=\left[\frac{S_{gx}(s)}{S_x^-(s)}\right]^+$$

则：

$$H(s)=H_W(s)H'(s)=\frac{1}{S_x^+(s)}\left[\frac{S_{gx}(s)}{S_x^-(s)}\right]^+$$

最小均方误差为：

$$E\left\{e^2(t)\right\}_{\min}=E\left\{e(t)g(t)\right\}=R_s(0)-\int_0^{+\infty}h(\lambda)R_{gx}(\lambda)d\lambda$$

例 6.2

考虑输入信号 $x(t)$ 为高斯-马尔可夫信号 $s(t)$ 和噪声 $n(t)$ 的叠加，假定信号和噪声统计独立，其功率谱分别为 $S_s(\omega)=\dfrac{3}{1+\omega^2}$ 和 $S_n(\omega)=1$ 。

求：α 分别取0，+1和-1时物理可实现维纳滤波器的冲激响应及最小均方误差。

6.2.4 最小均方误差

物理可实现维纳滤波器的最小均方误差可以表示为：

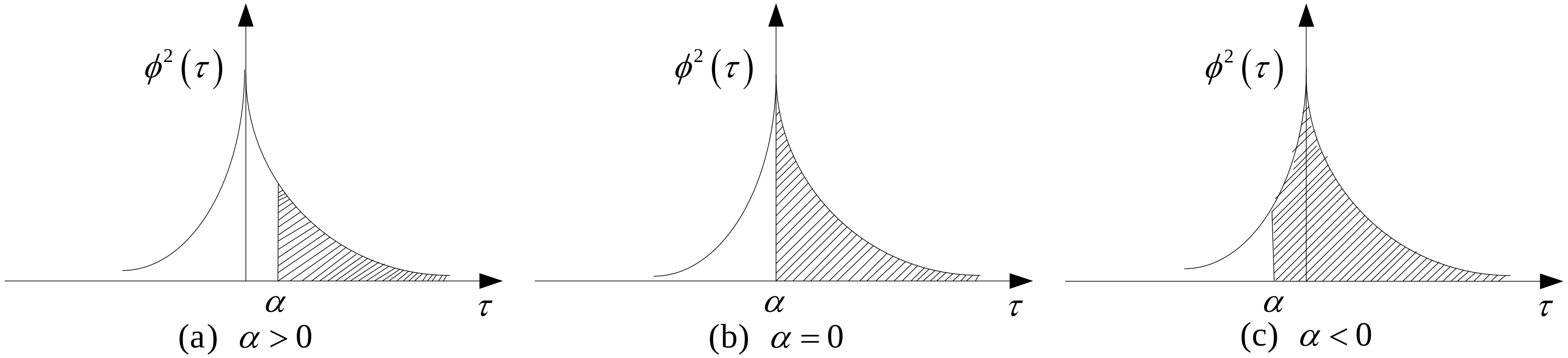
$$E\left\{e^2(t)\right\}_{\min} = R_s(0) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) R_{sx}(\alpha+\tau) d\tau$$

可推得：

$$E\left\{e^2(t)\right\}_{\min} = R_s(0) - \int_{\alpha}^{+\infty} \phi^2(\tau) d\tau$$

其中 $\phi(\tau) = R_{sz}(\tau) = E\left\{s(t)z(t-\tau)\right\}$ 。

可见：最小均方误差随着α 值的增大而单调地增大。



预测、滤波和平滑的性能示意图

结论：

平滑用到的数据最多，对应的阴影面积最大，其误差最小；而预测用到的数据最少，其对应的阴影面积最下，误差最大；滤波所用到的数据居中，其误差也位于前二者之间。

6.3 离散维纳滤波

对于随机输入序列 $x(k)=s(k)+n(k)$，待估计的信号序列为 $g(k)=s(k+\alpha)$。系统的输出为

$$y(k)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty} h(k-j)x(j)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty} h(j)x(k-j)$$

选取 $h(k)$ 使得 $y(k)$ 的估计均方误差

$$E\left\{e^2(k)\right\}=E\left\{\left[g(k)-y(k)\right]^2\right\}$$

达到最小，这时的离散线性系统称为随机序列的维纳滤波器。其解满足线性最小均方误差估计的正交条件：

$$E\left\{\left[g(k)-\sum_{j=-\infty}^{+\infty} h(j)x(k-j)\right]x(j')\right\}\equiv 0$$

有限观测样本的维纳滤波

每次对于$g(k)$的估计，只使用长度为 N 的观测样本，即

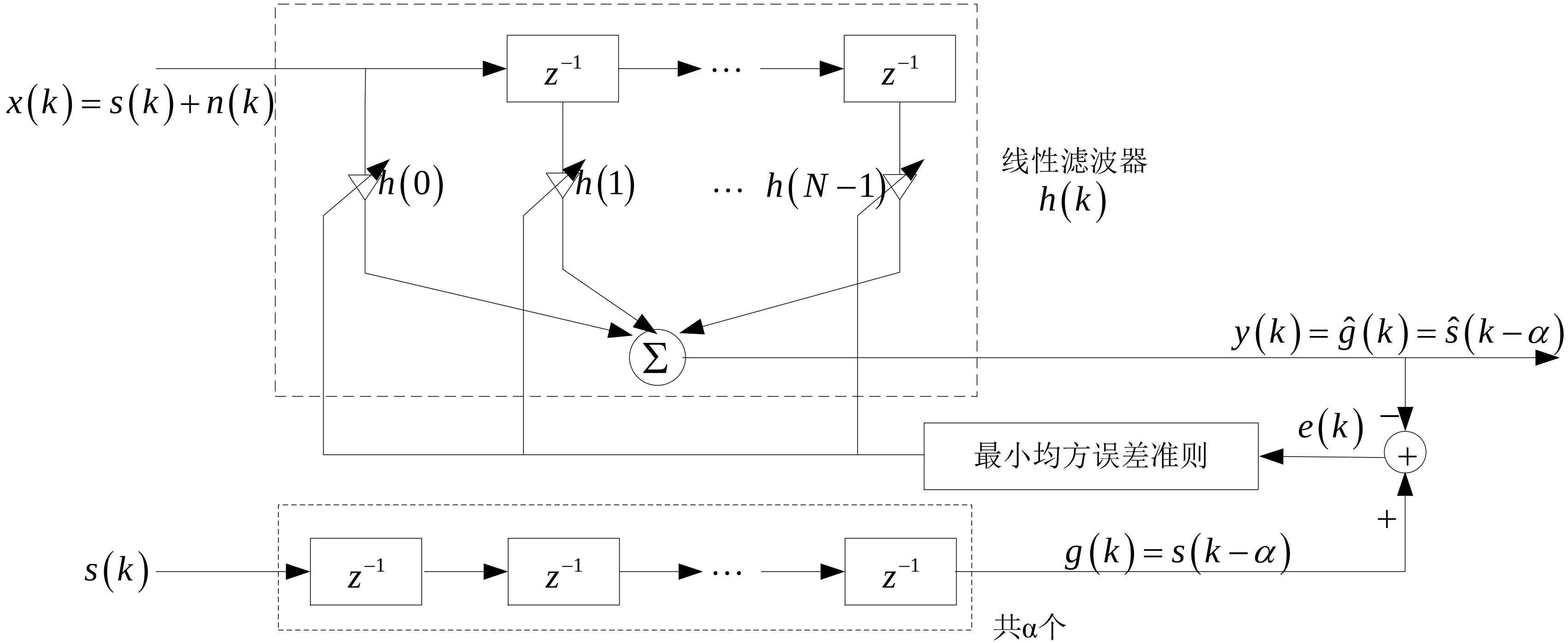
$$y(k)=\sum_{j=0}^{N-1}h(j)x(k-j)$$

则维纳滤波方程如下：

$$\sum_{i=0}^{N-1}h(i)R_x(l-i)=R_{gx}(l) \qquad l=0,1,\cdots,N-1$$

矢量形式为：$\mathbf{R}_x\mathbf{h}=\mathbf{r}_{gx}$ ，则：$\mathbf{h}=\mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{r}_{gx}$

均方误差为：$E\left\{e^2(k)\right\}_{\min}=R_g(0)-\sum_{j=0}^{N-1}h(j)R_{gx}(j)$


$x(k)=s(k)+n(k)$
z^{-1}
z^{-1}
$h(0)$
$h(1)$
$h(N-1)$
线性滤波器
$h(k)$
Σ
$y(k)=\hat{g}(k)=\hat{s}(k-\alpha)$
$e(k)$
最小均方误差准则
$s(k)$
z^{-1}
z^{-1}
z^{-1}
$g(k)=s(k-\alpha)$
共α个

6.4 $\alpha-\beta$滤波

下面通过举例引入 $\alpha-\beta$ 滤波。

假设常值信号中混杂了加性噪声，现用N 个观测样本 $x_k = s + n_k$ 来估计常值信号s 。

一种处理方法是：

1. 测量 x_1，存储 x_1，取样本均值估计量为 $\hat{s}_1 = x_1$；
2. 测量 x_2，存储 x_2，取样本均值估计量为 $\hat{s}_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$；
3. 依此类推，测量 x_N ，存储 x_N ，取样本均值估计量为

$$\hat{s}_N = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \cdots + x_N)$$ 。

另一种处理方法是：

1. 测量 x_1，取样本均值估计量为 $\hat{s}_1 = x_1$，存储 $\hat{s}_1$，清除 x_1；
2. 测量 x_2，取样本均值估计量为 $\hat{s}_2 = \frac{1}{2}(x_2 + \hat{s}_1)$，存储 $\hat{s}_2$，清除 $x_2, \hat{s}_1$；
3. 依此类推，测量 x_N，取样本均值估计量为 $\hat{s}_N = \frac{N-1}{N}\hat{s}_{N-1} + \frac{1}{N}x_N$，存储 $\hat{s}_N$，清除 $\hat{s}_{N-1}, x_N$。

例：

需要对一运动目标进行跟踪测量，估计出目标的位移与速度。假设目标在时刻t_k 的位移为 x_k ，采样间隔 T ，并且假设在时间区间$[t_k,\ t_k+T]$内目标作匀速直线运动。观测样本为 $y_k = x_k + n_k$

做法：用 $\hat{x}_k$表示对目标位移 x_k 的估计值，则 $\hat{\dot{x}}_k$ 为该时刻目标的速度估计值。

建立预测方程：

$$\hat{x}_{k+1}^{-} = \hat{x}_k + T\hat{\dot{x}}_k$$

$$\hat{\dot{x}}_{k+1}^{-} = \hat{\dot{x}}_k$$

利用新的观测值y_{k+1}建立更新方程：

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^{-} + \alpha\left(y_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^{-}\right)$$

$$\hat{\dot{x}}_{k+1} = \hat{\dot{x}}_{k+1}^{-} + \frac{\beta}{T}\left(y_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^{-}\right)$$

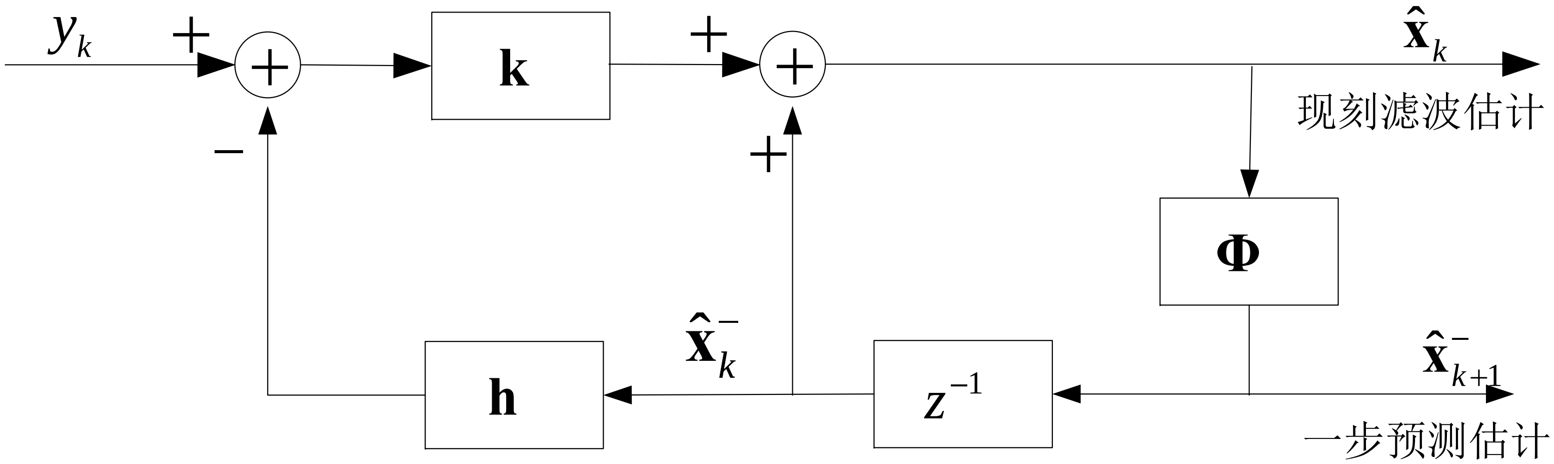
矢量形式：

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{k}\left(y_{k+1} - \mathbf{h}\mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{x}}_k\right) \qquad \hat{\mathbf{x}}_k = [\hat{x}_k, \hat{\dot{x}}_k]^T$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{k} = [\alpha \quad \beta / T]^T, \ \mathbf{h} = [1 \quad 0]$$

上述递推算法称为 $\alpha - \beta$ 滤波。

递推运算流程


y_k
+
−
k
+
+
$\hat{\mathbf{x}}_k$
现刻滤波估计
Φ
$\hat{\mathbf{x}}_k^-$
h
z^{-1}
$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$
一步预测估计

6.5 卡尔曼滤波

主要内容：

6.5.1 状态空间模型

6.5.2 离散卡尔曼滤波

6.5.1 状态空间模型

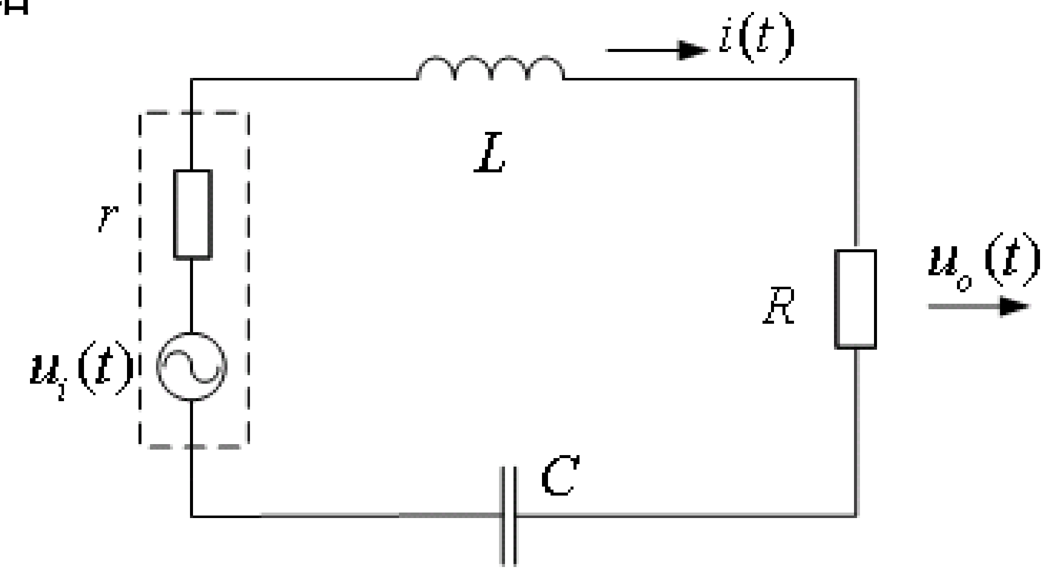
1. 状态变量、状态方程和观测方程

状态变量：描述系统状态的一组数目最少的变量

状态方程：状态变量所满足的一阶微分方程

观测方程：描述系统输出与状态变量之间关系的方程

例：RLC电路



由基尔霍夫定律： $u_i(t)=(R+r)\cdot i(t)+L\dfrac{di(t)}{dt}+\dfrac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$

$u_o(t)=R\cdot i(t)$

利用 $$i(t)=\frac{dq(t)}{dt},\quad q(t)=\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau$$

可得 $$L\frac{d^2q(t)}{dt^2}+(R+r)\frac{dq(t)}{dt}+\frac{1}{C}q(t)=u_i(t)$$

$$u_o(t)=R\frac{dq(t)}{dt}$$

令 $$q(t)=x_1(t),\quad \frac{dq(t)}{dt}=x_2(t),\quad y(t)=u_o(t)$$

可得 $$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-\dfrac{1}{LC}x_1(t)-\dfrac{R+r}{L}x_2(t)+\dfrac{u(t)}{L}\\ y(t)=Rx_2(t)\end{cases}$$

写出矢量形式

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/LC & -(R+r)/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}
\end{cases}
$$

一般的矢量形式

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{u}(t)$$ 状态方程

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t)$$ 观测方程

如何用状态空间模型来描述随机过程？

2. 状态方程的解

状态方程是一个一阶P元联立的线性微分方程组，其齐次方程组： $$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t)$$

有P个线性独立的解 $\mathbf{x}^1(t),\mathbf{x}^2(t),\cdots,\mathbf{x}^p(t)$

这组解构成的非奇异矩阵，称为上式的基本解阵

$$\mathbf{X}(t)=[\mathbf{x}^1(t),\mathbf{x}^2(t),\cdots,\mathbf{x}^p(t)]$$

满足微分方程

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt}=\mathbf{F}(t)\mathbf{X}(t)$$

定义：对于 $t,\tau \geq t_0$，矩阵 $\mathbf{\Phi}(t,\tau) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(\tau)$ 为系统的状态转移矩阵。

状态转移矩阵具有以下性质：

a. 对于$\tau \geq t_0$ $$\frac{\partial \mathbf{\Phi}(t,\tau)}{\partial t} = \mathbf{F}(t)\mathbf{\Phi}(t,\tau)$$

b. 对于$t \geq t_0$ $$\mathbf{\Phi}(t,t) = \mathbf{I}$$

c. 对于$t,\tau \geq t_0$ $$\mathbf{\Phi}^{-1}(t,\tau) = \mathbf{X}(\tau)\mathbf{X}^{-1}(t) = \mathbf{\Phi}(\tau,t)$$

d. 对于$t_1, t_2, t_3 \geq t_0$ $$\mathbf{\Phi}(t_3,t_2)\mathbf{\Phi}(t_2,t_1) = \mathbf{\Phi}(t_3,t_1)$$

e. 对于 $t,\tau \geq t_0$ $$\frac{\partial \mathbf{\Phi}(t,\tau)}{\partial \tau} = -\mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{F}(\tau)$$

对于因果系统，状态方程的唯一解可由状态转移矩阵表示为：

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}(t,t_0)\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

验证初始值：

$$\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{\Phi}(t_0,t_0)\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t_0}\mathbf{\Phi}(t_0,\tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau=\mathbf{x}_0$$

两侧对t 求导：

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\frac{\partial\mathbf{\Phi}(t,t_0)}{\partial t}\mathbf{x}_0+\mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau)\big|_{\tau=t}+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial\mathbf{\Phi}(t,\tau)}{\partial t}\mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$=\mathbf{F}(t)\mathbf{\Phi}(t,t_0)\mathbf{x}_0+\mathbf{G}(t)\mathbf{u}(t)+\mathbf{F}(t)\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$=\mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{G}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t,0)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

"零输入"解　　　"零状态"解

对于线性非时变系统，相关矩阵退化为常数矩阵：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \quad t \ge t_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t) \quad t \ge t_0$$

可以证明此时的解为：

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{\Phi}(t,\tau) = \mathbf{\Phi}(t-\tau) = e^{\mathbf{F}(t-\tau)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbf{F}^k (t-\tau)^k}{k!}$$

3. 离散状态方程和观测方程

对状态方程的时域解采样：

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{\Phi}(t_{k+1} - t_k)\mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{\Phi}(t_{k+1} - \tau)\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

可得：

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_{k+1,k}\mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k$$

6.5.2 离散卡尔曼滤波

一. 标量信号的卡尔曼滤波

状态方程： $x_k = a x_{k-1} + u_{k-1}$

观测方程： $y_k = x_k + n_k$

其中
$$E\{u_k\} = E\{n_k\} = E\{u_k n_j\} = 0$$
$$E\{u_k u_j\} = \sigma_u^2 \delta_{kj},\ E\{n_k n_j\} = \sigma_n^2 \delta_{kj}$$
$$E\{x_k\} = 0,\ E\{x_k^2\} = \sigma_x^2$$

利用最小均方误差估计准则，分别估计 $\hat{x}_k, \hat{x}_{k+1|k}$ 。

1. 递推滤波

如下定义线性递推滤波：

$$\hat{x}_k = a_k \hat{x}_{k-1} + b_k y_k$$

利用最小均方误差估计准则： $\xi_k = E\left\{\left(x_k - \hat{x}_k\right)^2\right\} \to \min$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi_k}{\partial a_k} = -2E\left\{(x_k - a_k \hat{x}_{k-1} - b_k y_k)\hat{x}_{k-1}\right\} = 0 \\ \dfrac{\partial \xi_k}{\partial b_k} = -2E\left\{(x_k - a_k \hat{x}_{k-1} - b_k y_k) y_k\right\} = 0 \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} E\left\{(x_k - \hat{x}_k)\hat{x}_{k-1}\right\} = 0 \quad (1) \\ E\left\{(x_k - \hat{x}_k) y_k\right\} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

正交条件

则： $\xi_k = E\left\{(x_k - \hat{x}_k)^2\right\} = E\left\{(x_k - \hat{x}_k)x_k\right\}$ (3)

由（1）可得： $a_k = a(1 - b_k)$

此时：

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_k &= a\hat{x}_{k-1} + b_k(y_k - a\hat{x}_{k-1}) \\
&= \hat{x}_{k|k-1} + b_k(y_k - \hat{x}_{k|k-1})
\end{aligned}
$$

由（2）可得：

$$
b_k = \frac{\xi_k}{\sigma_n^2} = \frac{A + a^2 b_{k-1}}{1 + A + a^2 b_{k-1}}, A = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_n^2}
$$

$\Rightarrow$ 归一化估计均方误差

由（3）可得：

$$\xi_k = E\left\{\left(x_k - \hat{x}_k\right)x_k\right\} = E\left\{x_k^2 - \hat{x}_k x_k\right\}$$

$$= E\left\{a^2 x_{k-1}^2\right\} + \sigma_u^2 - E\left\{(a_k \hat{x}_{k-1} + b_k y_k)(a x_{k-1} + u_{k-1})\right\}$$

$$= a^2 E\left\{x_{k-1}^2\right\} + \sigma_u^2 - a_k a E\{x_{k-1}\hat{x}_{k-1}\} - a b_k E\{y_k x_{k-1}\} - b_k E\{y_k u_{k-1}\}$$

$$= a^2 E\left\{x_{k-1}^2\right\} + \sigma_u^2 - a_k a E\{x_{k-1}\hat{x}_{k-1}\} - a b_k E\{(a x_{k-1} + u_{k-1} + n_k)x_{k-1}\} - b_k \sigma_u^2$$

$$= a^2 E\left\{x_{k-1}^2\right\} + \sigma_u^2 - a^2(1-b_k)E\{x_{k-1}\hat{x}_{k-1}\} - a^2 b_k E\left\{x_{k-1}^2\right\} - b_k \sigma_u^2$$

$$= a^2\left[E\left\{x_{k-1}^2\right\} - E\{x_{k-1}\hat{x}_{k-1}\}\right] + \sigma_u^2 - a^2 b_k\left[E\left\{x_{k-1}^2\right\} - E\{x_{k-1}\hat{x}_{k-1}\}\right] - b_k \sigma_u^2$$

$$= a^2 \xi_{k-1} + \sigma_u^2 - a^2 b_k \xi_{k-1} - b_k \sigma_u^2$$

初始条件：
$$\begin{cases} \hat{x}_0 = E\left\{x_0\right\} \\ e_0 = Var\left\{x_0\right\} \end{cases}$$

当动态噪声很小，即 $\sigma_u^2 = 0$，且 $a = 1$ ，则：

$$x_k = x_{k-1} = x$$

$$A = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_n^2} = 0$$

此时： $b_k = \frac{b_{k-1}}{1 + b_{k-1}} = \frac{\xi_{k-1}}{\sigma_n^2 + \xi_{k-1}}$ ⟹ 参量递推估计

当观测噪声很小，即 $\sigma_n^2 = 0$ ，则： $b_k \approx 1, a_k \approx 0$

此时： $\hat{x}_k \approx y_k$

2. 递推预测

如下定义线性递推一步预测：

$$\hat{x}_{k+1|k} = \alpha_k \hat{x}_{k|k-1} + \beta_k y_k$$

利用最小均方误差估计准则：

$$\xi_{k+1|k} = E\left\{(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})^2\right\} \to \min$$

得正交条件：

$$\begin{cases} E\left\{(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})\hat{x}_{k|k-1}\right\} = 0 & (1) \\ E\left\{(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})y_k\right\} = 0 & (2) \end{cases}$$

则：$\xi_{k+1|k} = E\left\{(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})x_{k+1}\right\} = \sigma_x^2 - E\left\{\hat{x}_{k+1|k}x_{k+1}\right\}$ (3)

由（1）可得：$\alpha_k = a - \beta_k$

此时：$\hat{x}_{k+1|k} = a\hat{x}_{k|k-1} + \beta_k(y_k - \hat{x}_{k|k-1})$

由（2）：

$$
\begin{aligned}
&E\left\{(ax_k + u_k - \hat{x}_{k+1|k})y_k\right\} = a\sigma_x^2 - E\left\{(\alpha_k\hat{x}_{k|k-1} + \beta_k y_k)y_k\right\} \\
&= a\sigma_x^2 - \alpha_k(\sigma_x^2 - \xi_{k|k-1}) - \beta_k(\sigma_x^2 + \sigma_n^2) \\
&= a\sigma_x^2 - (a - \beta_k)(\sigma_x^2 - \xi_{k|k-1}) - \beta_k(\sigma_x^2 + \sigma_n^2) = 0
\end{aligned}
$$

可得：

$$\beta_k = \frac{a\xi_{k|k-1}}{\xi_{k|k-1} + \sigma_n^2}$$

由于：
$$E\left\{\hat{x}_{k+1|k}x_{k+1}\right\}=E\left\{(\alpha_k\hat{x}_{k|k-1}+\beta_k y_k)x_{k+1}\right\}$$
$$=a\alpha_k(\sigma_x^2-\xi_{k|k-1})+\beta_k E\left\{(x_k+n_k)(ax_k+u_k)\right\}$$
$$=a\alpha_k(\sigma_x^2-\xi_{k|k-1})+a\beta_k\sigma_x^2$$

又：
$$\sigma_u^2=E\left\{(x_k-ax_{k-1})^2\right\}=\sigma_x^2+a^2\sigma_x^2-2aE\left\{x_k x_{k-1}\right\}$$
$$=\sigma_x^2+a^2\sigma_x^2-2aE\left\{(ax_{k-1}+u_{k-1})x_{k-1}\right\}$$
$$=\sigma_x^2+a^2\sigma_x^2-2a^2\sigma_x^2=\sigma_x^2-a^2\sigma_x^2$$

由（3）可得：
$$\xi_{k+1|k}=\sigma_x^2-a\alpha_k(\sigma_x^2-\xi_{k|k-1})-a\beta_k\sigma_x^2$$
$$=\sigma_x^2-a(\alpha_k+\beta_k)\sigma_x^2+a\alpha_k\xi_{k|k-1}$$
$$=a(a-\beta_k)\xi_{k|k-1}-a^2\sigma_x^2+\sigma_x^2$$
$$=a^2\xi_{k|k-1}-a\beta_k\xi_{k|k-1}+\sigma_u^2$$

3. 滤波与预测的关系

由： $x_{k+1}=ax_k+u_k$

得： $\hat{x}_{k+1|k}=a\hat{x}_k$

代入递推滤波：
$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= a\hat{x}_{k-1}+b_k(y_k-a\hat{x}_{k-1})\\ &= \hat{x}_{k|k-1}+b_k(y_k-\hat{x}_{k|k-1})\end{aligned}$$

则： $a\hat{x}_k=a\hat{x}_{k|k-1}+ab_k(y_k-\hat{x}_{k|k-1})$

比较递推预测得： $\beta_k=ab_k$

此外： $\xi_{k+1|k}=E\left\{(x_{k+1}-\hat{x}_{k+1|k})^2\right\}=E\left\{(ax_k+u_k-\hat{x}_{k+1|k})^2\right\}=a^2\xi_k+\sigma_u^2$

二. 矢量信号的卡尔曼滤波

状态方程： $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_{k+1,k}\mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k$

观测方程： $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{n}_{k+1}$

假设在时刻 t_k，基于该时刻以前所获得的全部知识，对状态变量 $\mathbf{x}_k$ 做一个预测估计 $\hat{\mathbf{x}}_k^-(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$ 。预测估计的误差为：

$$\mathbf{e}_k^- = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-$$

预测误差的协方差矩阵为：

$$\mathbf{C}_k^- = E\left\{\mathbf{e}_k^-\mathbf{e}_k^{-T}\right\} = E\left\{\left(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-\right)\left(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-\right)^T\right\}$$

利用 t_k 时刻的新观测数据 $\mathbf{y}_k$ 进一步改善对 $\mathbf{x}_k$ 的估计 $\hat{\mathbf{x}}_k$，称为更新估计。

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k\left(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k\hat{\mathbf{x}}_k^-\right)$$

更新估计的误差为：

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\right)\mathbf{e}_k^- - \mathbf{K}_k\mathbf{n}_k$$

更新估计的均方误差为：

$$E\left\{\mathbf{e}_k^T\mathbf{e}_k\right\} = E\left\{\left(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k\right)^T\left(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k\right)\right\} \xrightarrow{\mathbf{K}_k} \min$$

更新误差的协方差矩阵为：

$$\mathbf{C}_k = E\left\{\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T\right\} = E\left\{\left(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k\right)\left(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k\right)^T\right\}$$

$$= \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\right)\mathbf{C}_k^-\left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\right)^T + \mathbf{K}_k\mathbf{R}_k\mathbf{K}_k^T$$

其中： $E\left\{\mathbf{n}_k\mathbf{n}_i^T\right\} = \mathbf{R}_k\delta_{ik}$

令 $\mathbf{D}_k\mathbf{D}_k^T = \mathbf{H}_k\mathbf{C}_k^-\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$

可得 $\mathbf{C}_k = \mathbf{C}_k^- + \left(\mathbf{K}_k\mathbf{D}_k - \mathbf{A}\right)\left(\mathbf{K}_k\mathbf{D}_k - \mathbf{A}\right)^T - \mathbf{A}\mathbf{A}^T$

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}_k^-\mathbf{H}_k^T\left(\mathbf{D}_k^T\right)^{-1}$$

当 $\mathbf{K}_k\mathbf{D}_k - \mathbf{A} = \mathbf{0}$

此时 $\mathbf{C}_k$ 的主对角线元素之和达到最小

即 $\mathbf{K}_k = \mathbf{A}\mathbf{D}_k^{-1} = \mathbf{C}_k^-\mathbf{H}_k^T\left(\mathbf{D}_k^T\right)^{-1}\mathbf{D}_k^{-1} = \mathbf{C}_k^-\mathbf{H}_k^T\left(\mathbf{H}_k\mathbf{C}_k^-\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k\right)^{-1}$

此时 $\mathbf{C}_k = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{H}_k\right)\mathbf{C}_k^-$

下面利用 $\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{C}_k$ 预测估计 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-, \mathbf{C}_{k+1}^-$。

由状态方程 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_{k+1,k}\mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k$

可得 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{\Phi}_{k+1,k}\hat{\mathbf{x}}_k$

则 t_{k+1} 时刻的预测误差和协方差矩阵分别为

$$\mathbf{e}_{k+1}^- = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{\Phi}_{k+1,k}\mathbf{e}_k + \mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{C}_{k+1}^- = E\left\{\mathbf{e}_{k+1}^-\mathbf{e}_{k+1}^{-\,T}\right\} = \mathbf{\Phi}_{k+1,k}\mathbf{C}_k\mathbf{\Phi}_{k+1,k}^T + \mathbf{Q}_k$$

其中 $E\left\{\mathbf{u}_k\mathbf{u}_i^T\right\} = \mathbf{Q}_k\delta_{ik}$

卡尔曼滤波算法的递推过程

（1）设置初始化条件： $\hat{\mathbf{x}}_0 = E\left\{\mathbf{x}_0\right\}$， $\mathbf{C}_0 = Var\left\{\mathbf{x}_0\right\}$

（2）预测： $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{-} = \mathbf{\Phi}_{k+1,k}\hat{\mathbf{x}}_k$

（3）计算预测误差协方差矩阵： $\mathbf{C}_{k+1}^{-} = \mathbf{\Phi}_{k+1,k}\mathbf{C}_k\mathbf{\Phi}_{k+1,k}^{T} + \mathbf{Q}_k$

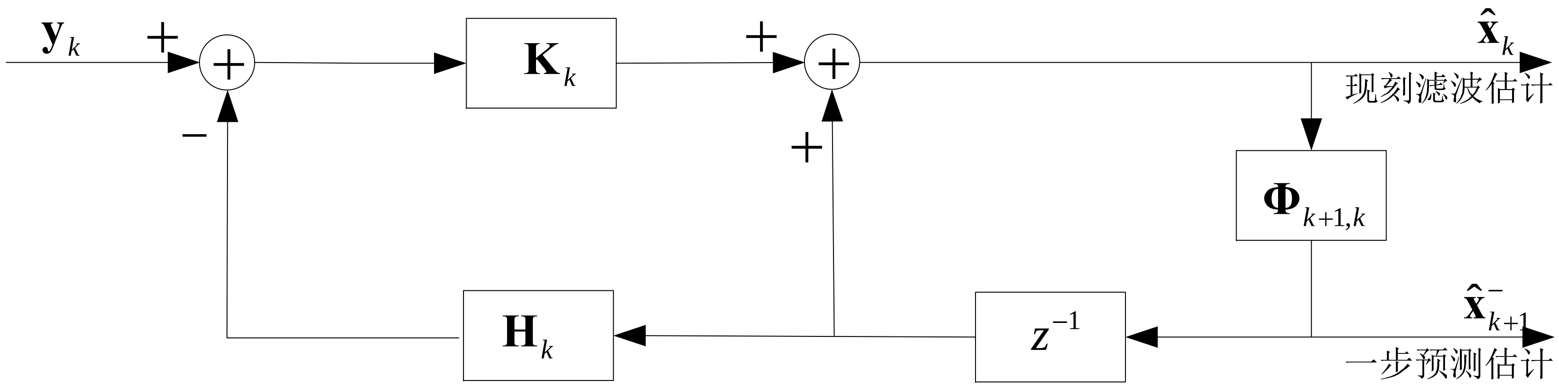
（4）计算卡尔曼增益： $\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{C}_{k+1}^{-}\mathbf{H}_{k+1}^{T}\left(\mathbf{H}_{k+1}\mathbf{C}_{k+1}^{-}\mathbf{H}_{k+1}^{T} + \mathbf{R}_{k+1}\right)^{-1}$

（5）更新： $\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{-} + \mathbf{K}_{k+1}\left(\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{-}\right)$

（6）计算更新误差协方差矩阵：$\mathbf{C}_{k+1}=\left(\mathbf{I}-\mathbf{K}_{k+1}\mathbf{H}_{k+1}\right)\mathbf{C}_{k+1}^{-}$

（7）令 $k=k+1$，重复步骤(2)-(6)直到当前时刻。

迭代框图：



例6.3：飞机相对于雷达作径向直线匀加速运动。目标与雷达站之间的斜距为 x_k 。目标相对于雷达的距离方程、速度方程和加速度方程为

$$x_k = x_{k-1} + T\dot{x}_{k-1} + \frac{T^2}{2}\ddot{x}_{k-1}, \quad \dot{x}_k = \dot{x}_{k-1} + T\ddot{x}_{k-1}, \quad \ddot{x}_k = \ddot{x}_{k-1}$$

式中，x_k 为 k 时刻目标的斜距，$\dot{x}_k$ 为 k 时刻目标的径向速度，$\ddot{x}_k$ 为 k 时刻目标的径向加速度，T 为采样时间间隔，$T=2s$。

已知 $E\{x_0\}=0,\quad Var\{x_0\}=8(km)^2$

$E\{\dot{x}_0\}=0,\quad Var\{\dot{x}_0\}=10(km/s)^2$

$E\{\ddot{x}_0\}=0.2,\quad Var\{\ddot{x}_0\}=5(km/s)^2$

且目标未受外界干扰，动态噪声 $u_k=0$, n_k 是零均值的白噪声，即 $E\{n_k\}=0,\quad Cov\{n_i,\ n_j\}=0.15\delta_{ij}(km)^2$

n_k 与 $x_k,\dot{x}_k,\ddot{x}_k$ 都不相关。当观测时刻 $k=1,2,\cdots,10$ 时，斜距的观测值 $y_k(km)$ 为：

0.30, 1.56, 3.64, 6.44, 10.5, 14.8, 20.0, 25.2, 32.2, 40.4

求： $x_k,\ \dot{x}_k,\ \ddot{x}_k$ 的估计以及估计误差的协方差矩阵。