第一次作业

2-1 自相关函数为 $R_x(\tau)=2e^{-4|\tau|}$ 的随机信号 $\{x(t)\}$ 通过冲激响应为 $h(t)=3e^{-3t}u(t)$ 的线性系统，输出为 $\{y(t)\}$，求：

(1) $\{y(t)\}$ 的自相关函数 $R_y(\tau)$；

(2) $\{x(t)\}$ 与 $\{y(t)\}$ 的互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 和 $R_{yx}(\tau)$ 及其在 $\tau=0$、$\tau=1$ 时的值。

解：

1) ∵ $y(t)=x(t)*h(t)$，且 $x(t)$ 为平稳随机信号

所以可得输出 $y(t)$ 的功率谱密度函数

$$S_y(\omega)=S_x(\omega)\left|H(j\omega)\right|^2$$

又有 $S_x(\omega)=\dfrac{16}{\omega^2+16}$，$H(j\omega)=\dfrac{3}{j\omega+3}$

所以 $S_y(\omega)=S_x(\omega)\left|H(j\omega)\right|^2=\dfrac{16}{\omega^2+16}\cdot\dfrac{9}{\omega^2+9}=\dfrac{144}{7}\left(\dfrac{1}{\omega^2+9}-\dfrac{1}{\omega^2+16}\right)$

$R_y(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_y(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\dfrac{24}{7}e^{-3|\tau|}-\dfrac{18}{7}e^{-4|\tau|}$

2) $$S_{xy}(\omega)=S_x(\omega)H(-j\omega)=\dfrac{16}{\omega^2+16}\cdot\dfrac{3}{-j\omega+3}$$

$$S_{yx}(\omega)=S_x(\omega)H(j\omega)=\dfrac{16}{\omega^2+16}\cdot\dfrac{3}{j\omega+3}$$

令 $s=j\omega$

$$S_{xy}(s)=\dfrac{16}{-s^2+16}\cdot\dfrac{3}{-s+3}=\dfrac{6}{7}\dfrac{1}{s+4}+\dfrac{48}{7}\dfrac{1}{-s+3}-\dfrac{6}{-s+4}$$

$$S_{yx}(s)=\dfrac{16}{-s^2+16}\cdot\dfrac{3}{s+3}=\dfrac{6}{7}\dfrac{1}{-s+4}+\dfrac{48}{7}\dfrac{1}{s+3}-\dfrac{6}{s+4}$$

∴ 作拉普拉斯反变换后可得，

$$R_{xy}(\tau)=\dfrac{6}{7}e^{-4\tau}u(\tau)+\dfrac{48}{7}e^{3\tau}u(-\tau)-6e^{4\tau}u(-\tau)$$

$$R_{yx}(\tau)=\dfrac{6}{7}e^{4\tau}u(-\tau)+\dfrac{48}{7}e^{-3\tau}u(\tau)-6e^{-4\tau}u(\tau)$$

代入 $\tau=0$，$\tau=1$ 即可得解。

2-3 积分器是一个线性系统，其冲激响应为 $h(t) = \int_{t-T}^{t} \delta(u)du, 0 \le t \le T$，功率密度函数为 $S_x(f)$ 的随机信号 $\{x(t)\}$ 通过该系统后的输出为 $y(t) = \int_{t-T}^{t} x(u)du$，求 $\{y(t)\}$ 的功率谱密度函数 $S_y(f)$ 以及 $\{x(t)\}$ 与 $\{y(t)\}$ 的互功率谱密度函数 $S_{yx}(f)$.

解：$h(t) = \int_{t-T}^{t} \delta(u)du = \int_{t-T}^{t} dU(u) = U(t) - U(t-T) = g_T(t - \frac{T}{2})$

$g_T(t) \leftrightarrow TSa(\frac{Tw}{2}) \therefore h(t) = g_T(t - \frac{T}{2}) \leftrightarrow TSa(\frac{Tw}{2})e^{-jwT/2} = H(jw)$
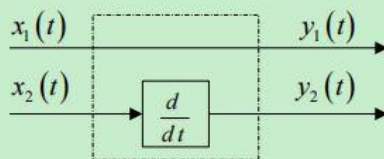
$H(jf) = TSa(T2\pi f/2)e^{-j2\pi fT/2}$

$S_y(f) = |H(jf)|^2 S_x(f) = T^2 Sa^2(\pi Tf)S_x(f)$

$S_{yx}(f) = H(jf)S_x(f) = TSa(\pi Tf)S_x(f)e^{-j\pi fT}$

2-7 假设线性系统如图 2.11 所示：输入端 $\{x_1(t)\}$ 与 $\{x_2(t)\}$ 为联合广义平稳随机过程，输出分别为 $\{y_1(t)\}$ 和 $\{y_2(t)\}$。

（1）求输出端互相关函数 $R_{y_1y_2}(\tau)$ 与输入端互相关函数 $R_{x_1x_2}(\tau)$ 的关系式；

（2）若 $\{x(t) = x_1(t) + x_2(t)\}$，作用到冲激响应为 $h(t)$ 的线性时不变系统，输出为 $\{y(t)\}$，求 $\{y(t)\}$ 的均值，自相关函数以及功率谱密度。

解：（1）输出端自相关函数：

$$R_{y_1 y_2}(\tau) = E\{y_1(t_1) y_2(t_2)\} = E\{x_1(t_1) \frac{d}{dt} x_2(t_2)\}$$

$$= E\{x_1(t_1) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_2(t_2 + \Delta t) - x_2(t_2)}{\Delta t}\}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{E\{x_1(t_1) x_2(t_2 + \Delta t) - x_1(t_1) x_2(t_2)\}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R_{x_1 x_2}(\tau - \Delta t) - R_{x_1 x_2}(\tau)}{\Delta t}$$

$$= -\frac{d}{dt} R_{x_1 x_2}(\tau)$$

（2）输出 $y(t) = x(t) * h(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t)$

均值

$$m_y(t) = E\{y(t)\} = E\{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x_1(t-\tau) d\tau\} + E\{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x_2(t-\tau) d\tau\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) m_{x_1}(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) m_{x_2}(t-\tau) d\tau$$

$$= h(\tau) * [m_{x_1}(t) + m_{x_2}(t)]$$

因为 $x_1(t), x_2(t)$ 为联合广义平稳随机过程，则

$$m_y(t) = (m_{x_1} + m_{x_2}) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau = (m_{x_1} + m_{x_2}) H(0)$$

自相关函数

$$R_y(t_1, t_2) = E\{y(t_1) y(t_2)\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) R_x(\tau - \tau_1 + \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) [R_{x_1}(\tau - \tau_1 + \tau_2) + R_{x_2}(\tau - \tau_1 + \tau_2) + R_{x_2 x_1}(\tau - \tau_1 + \tau_2) + R_{x_1 x_2}(\tau - \tau_1 + \tau_2)] d\tau_1 d\tau_2$$

功率谱密度函数

$$S_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_x(\omega)$$

又， $S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = S_{x_1}(\omega) + S_{x_1 x_2}(\omega) + S_{x_2 x_1}(\omega) + S_{x_2}(\omega)$

则 $S_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_x(\omega) = |H(j\omega)|^2 [S_{x_1}(\omega) + S_{x_1 x_2}(\omega) + S_{x_2 x_1}(\omega) + S_{x_2}(\omega)]$

2-11 均值为零、方差为 σ_x^2 的白噪声序列 $\{x(n)\}$ 通过图 2.12 的离散系统，其中 $h_1(n) = a^n u(n)$， $h_2(n) = b^n u(n)$ 且 $|a| < 1$ 和 $|b| < 1$，输出为 $\{z(n)\}$，求：
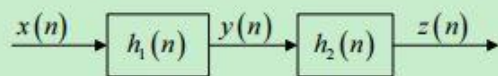
（1）$\{z(n)\}$ 的自相关函数；

（2）$\{z(n)\}$ 的功率谱密度。

图 2.12

解：

1) 由 $h_1(n) = a^n u(n) \Rightarrow y(n) = ay(n-1) + x(n)$，

以及 $h_2(n) = b^n u(n) \Rightarrow z(n) = bz(n-1) + y(n)$，

得 $z(n) - (a+b)z(n-1) + abz(n-2) = x(n)$，

$$H(j\Omega) = \frac{1}{1-(a+b)e^{-j\Omega}+abe^{-j2\Omega}} = \frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})(1-be^{-j\Omega})} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{1-ae^{-j\Omega}} - \frac{b}{1-be^{-j\Omega}}\right)$$

则可知 $h(n) = \frac{a}{a-b}a^n u(n) - \frac{b}{a-b}b^n u(n)$，又此系统属于 AR 模型，则 $R_z(m)$

满足递推条件：$R_z(m) = \sigma_x^2 h(-m) + (a+b)R_z(m-1) - abR_z(m-2)$，由递推

条件以及对称关系 $R_z(m) = R_z(-m)$ 可得 $R_z(m)$ 的显式表示，方法同上题。

2) 由 $S_x(\Omega) = \sigma_x^2$ 及 $H(j\Omega) = \frac{1}{1-(a+b)e^{-j\Omega}+abe^{-j2\Omega}}$，可得

$\{z(n)\}$ 的功率谱密度函数为

$$S_z(\Omega) = |H(j\Omega)|^2 S_x(\Omega) = \frac{\sigma_x^2}{\left|1-(a+b)e^{-j\Omega}+abe^{-j2\Omega}\right|^2}。$$

2.16 线性时不变系统输入 $\{x(n)\}$ 与输出 $\{y(n)\}$ 的关系为

$y(n) = x(n) + b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2)$，这是一个二阶 AR 模型，$\{x(n)\}$ 是零均值、方差为 σ_x^2 的白噪声序列。

（1）求使 $\{y(n)\}$ 平稳的条件；

（2）证明 $\{y(n)\}$ 的功率谱密度为：

$$S_y(\omega) = \sigma_x^2\left[1 + b_1^2 + b_2^2 - 2b_1(1-b_2)\cos\omega - 2b_2\cos2\omega\right]^{-1}$$

（3）求 $\{y(n)\}$ 的自相关函数。

解：（1）$y(n)$ 平稳，则需系统为因果稳定的。

系统的传输函数：

$$H(z) = \frac{1}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} = \frac{1}{(1 - \alpha_1 z^{-1})(1 - \alpha_2 z^{-1})}$$

极点为：

$$\alpha_{1,2} = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4b_2}}{2}$$

为使系统平稳，则需 $|\alpha_{1,2}| < 1$。

（2）输出的功率谱密度函数 $S_x(\omega) = \sigma_x^2$

系统传输函数 $H(j\omega) = \dfrac{1}{1 - b_1 e^{-j\omega} - b_2 z^{-j2\omega}}$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{(1 + b_1^2 + b_2^2 - 2b_1 \cos\omega - 2b_2 \cos 2\omega + 2b_1 b_2 \cos\omega)}$$

输出的功率谱密度函数：

$$S_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{(1 + b_1^2 + b_2^2 - 2b_1 \cos\omega - 2b_2 \cos 2\omega + 2b_1 b_2 \cos\omega)}$$

（3）冲激函数

$$h(n) = \begin{cases} b_1 h(n-1) + b_2 h(n-2) + \delta(n), & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

则输出的自相关函数

$$R_y(n) = \sigma_x^2 h(-n) + b_1 R_y(n-1) + b_2 R_y(n-2)$$

2-17 线性时不变系统输入 $\{x(n)\}$ 与输出 $\{y(n)\}$ 的关系为 $y(n) = x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2)$，这是一个二阶 MA 模型，若 $\{x(n)\}$ 的功率谱密度函数为 $S_x(\omega) = \sigma_x^2$，求 $\{y(n)\}$ 的自相关函数和功率谱密度。

解：

由 $y(n) = x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2)$

有 $Y(z) = X(z) + a_1 z^{-1} X(z) + a_2 z^{-2} X(z)$

则系统函数 $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$

系统冲激响应为 $h(n) = \delta(n) + a_1 \delta(n-1) + a_2 \delta(n-2)$

又 $S_x(w) = \sigma_x^2$ 则 $R_x(\tau) = \sigma_x^2 \delta(\tau)$，则

$R_y(n_1, n_2) = \displaystyle\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} h(k_1) h(k_2) R_x(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$

$= \displaystyle\sum_{k_1=0}^{a} \sum_{k_2=0}^{a} \left[\delta(k_1) + a_1 \delta(k_1 - 1) + a_2 \delta(k_1 - 2) \right]\left[\delta(k_2) + a_1 \delta(k_2 - 1) + a_2 \delta(k_2 - 2) \right] \cdot \sigma_x^2 \delta(n_1 - k_1 - n_2 + k_2)$

$= \displaystyle\sum_{k_1=0}^{2} \sum_{k_2=0}^{2} \left[\delta(k_2) + a_1 \delta(k_2 - 1) + a_2 \delta(k_2 - 2) \right] \cdot \sigma_x^2 \delta(n_1 - n_2 - k_1 + k_2)$

$\underline{\tau = n_1 - n_2}\ (1 + a_1^2 + a_2^2) \sigma_x^2 \delta(\tau) + a_1(1 + a_2) \sigma_x^2 \left[\delta(\tau - 1) + \delta(\tau + 1) \right] + a_2 \sigma_x^2 \left[\delta(\tau - 2) + \delta(\tau + 2) \right]$

$\Rightarrow R_y(\tau) = \begin{cases} 1 + a_1^2 + a_2^2 & \tau = 0 \\ a_1 + a_1 a_2 & \tau = \pm 1 \\ a_2 & \tau = \pm 2 \end{cases}$

由于 $H(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$，则

$H(\Omega) = 1 + a_1 e^{-j\Omega} + a_2 e^{-2j\Omega} = 1 + a_1 \cos\Omega - j a_1 \sin\Omega + a_2 \cos 2\Omega - j a_2 \sin 2\Omega$

$= (1 + a_1 \cos\Omega + a_2 \cos 2\Omega) - j(a_1 \sin\Omega + a_2 \sin 2\Omega)$

则

$|H(j\Omega)|^2 = (1 + a_1 \cos\Omega + a_2 \cos 2\Omega)^2 + (a_1 \sin\Omega + a_2 \sin 2\Omega)^2$

$= 1 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1(1 + a_2) \cos\Omega + 2a_2 \cos 2\Omega$

又 $S_x(\Omega) = \sigma_x^2$，故

$S_x(\Omega) = \sigma_x^2 \quad S_y(\Omega) = |H(j\Omega)|^2 S_x(\Omega) = \sigma_x^2 \left[1 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1(1 + a_2) \cos\Omega + 2a_2 \cos 2\Omega \right]$

第二次作业

3-1 二元假设如下：

$$H_0 : x = n$$
$$H_1 : x = s + n$$

其中 s 与 n 是统计独立的随机变量，它们的概率密度函数分别是

$$f_s(s) = \frac{1}{2} e^{-|s|}$$

$$f_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-n^2/2}$$

（1）求似然比统计量；
（2）若采用最小平均错误概率准则，求检测器的门限与假设先验概率之间的关系；
（3）若采用纽曼-皮尔逊准则，求检测门限与虚警概率的函数关系.

解：（1）最大似然函数为：

$$H_0 : f(x|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$H_1 : f(x|H_1) = f_s(x) * f_n(x)$$

$$
\begin{aligned}
H_1 : f(x|H_1) &= f_s(x) * f_n(x) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(x-n) f_n(n) dn \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|x-n|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-n^2/2} dn \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-x+n-n^2/2} dn + \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-n+x-n^2/2} dn \\
&= \frac{1}{2} e^{-x+\frac{1}{2}} \Phi(x-1) + \frac{1}{2} e^{x+\frac{1}{2}} [1 - \Phi(x+1)]
\end{aligned}
$$

$$\lambda(x) = \frac{f(x|H_1)}{f(x|H_0)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}} \Phi(x-1) + \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}} [1 - \Phi(x+1)]$$

（2）假设先验概率分别为 $P(H_0), P(H_1)$，则检测门限为

$$th = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

（3）设虚警概率为 α，则

$$\alpha = P(D_1|H_0) = \int_{th'}^{+\infty} f(x|H_0) dx = \int_{th'}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1 - \Phi(th')$$

其中 th' 为检测门限。

3-4 观测样本 x 在两种假设下分别服从均值不同的高斯分布

$$H_0 : \quad x \sim N(0, \sigma^2)$$
$$H_1 : \quad x \sim N(1, \sigma^2)$$

已知 $P(H_i) = 1/2 \ (i = 0,1)$。将样本 x 通过一个平方器，它的输出与输入之间满

足 $y = ax^2$。采用最小错误概率判决对 y 进行判决，求判决规则。

解：由 $y = ax^2$，可以求得 y 的概率密度函数表达式为：

$$f(y) = \frac{1}{2a\sqrt{\frac{y}{a}}} \left[f_x\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right) + f_x\left(-\sqrt{\frac{y}{a}}\right) \right]$$

可得：$f(y|H_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2ay\pi}} e^{-\frac{y}{2a\sigma^2}}$

$$f(y|H_1) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2ay\pi}} \left[e^{-\frac{(\sqrt{\frac{y}{a}}-1)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(-\sqrt{\frac{y}{a}}-1)^2}{2\sigma^2}} \right]$$

判决准则为：

$$\frac{f(y|H_1)}{f(y|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} = 1$$

化简得到判决规则为：

$$\ln\left(e^{\frac{\sqrt{\frac{y}{a}}}{\sigma^2}} + e^{-\frac{\sqrt{\frac{y}{a}}}{\sigma^2}}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln 2 + \frac{1}{2\sigma^2}$$

3-5 二元通信系统观测模型为

$$H_0 : x = -1 + n$$
$$H_1 : x = 1 + n$$

其中 n 是零均值，方差为 $\sigma_n^2 = 0.5$ 的高斯白噪声，若两种假设的先验概率相等，判决风险函数为

$$C_{00} = 1, C_{11} = 1, C_{10} = 5, C_{01} = 5$$

求贝叶斯判决规则和平均风险。

解：H_0 假设下 $x \sim N(-1, 0.5)$

H_1 假设下 $x \sim N(1, 0.5)$

H_0 假设下 $x \sim N(-1, 0.5)$

$$\frac{f(x|H_1)}{f(x|H_0)} = \exp\left(\frac{2x}{\sigma_n^2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)(C_{10} - C_{00})}{p(H_1)(C_{01} - C_{11})}$$

$$e^{4x} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1 = th \Rightarrow x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0 = th'$$

$$P(D_0 \mid H_0) = \int_{-\infty}^{0} f(x \mid H_0) dx = \Phi(\sqrt{2})$$

$$P(D_1 \mid H_0) = 1 - P(P(D_0 \mid H_0)) = 1 - \Phi(\sqrt{2})$$

$$P(D_0 \mid H_1) = \int_{0}^{+\infty} f(x \mid H_1) dx = 1 - \Phi(\sqrt{2})$$

$$P(D_1 \mid H_1) = 1 - P(P(D_0 \mid H_1)) = \Phi(\sqrt{2})$$

$$\therefore \overline{C} = P(H_0)[C_{00}P(D_0 \mid H_0) + C_{10}P(D_1 \mid H_0)] + P(H_1)[C_{01}P(D_0 \mid H_1) + C_{11}P(D_1 \mid H_1)]$$
$$= 5 - 4\Phi(\sqrt{2}) = 1.3148$$

3-8 在实际情况中，我们得到的两种假设下观测值的概率密度函数是离散的。如果在概率密度函数中使用冲激函数，同样可以推导似然比检验。假定在二元假设下得到的观测值服从泊松分布：

$$\begin{cases} P(x=n|H_0) = \dfrac{m_0^x}{x!}\exp(-m_0) \\ P(x=n|H_1) = \dfrac{m_1^x}{x!}\exp(-m_1) \end{cases} \qquad n=0,1,2,\dots$$

若 $m_1 > m_0, P(H_0)=P(H_1)$，试证明：

（1）似然判决规则是 $x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \dfrac{m_1-m_0}{\ln m_1 - \ln m_0}$；

（2）虚警概率为 $\alpha = 1 - \exp(-m_0)\sum\limits_{n=0}^{n_0-1}\dfrac{(m_0)^n}{n!}$，漏警概率 $\beta = \exp(-m_1)\sum\limits_{n=0}^{n_0-1}\dfrac{(m_1)^n}{n!}$，其中

$$n_0 = \left\lceil \frac{m_1-m_0}{\ln m_1 - \ln m_0} \right\rceil$$ 表示对 $\dfrac{m_1-m_0}{\ln m_1 - \ln m_0}$ 向上取整数。

证明：（1）$\lambda(x) = \dfrac{P(x=n|H_1)}{P(x=n|H_0)} = \dfrac{\dfrac{m_1^x}{x!}\exp(-m_1)}{\dfrac{m_0^x}{x!}\exp(-m_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \dfrac{P(H_0)}{P(H_1)} = 1$

$\left(\dfrac{m_1}{m_0}\right)^x \exp(m_0-m_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$

$\exp[x(\ln m_1 - \ln m_0)] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \exp(m_1-m_0)$

$\therefore x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \dfrac{m_1-m_0}{\ln m_1 - \ln m_0}$

（2）

$\alpha = 1 - P(D_0|H_0) = 1 - P(x=n<n_0|H_0) = 1 - \sum\limits_{n=0}^{n_0-1} P(x=n|H_0)$

$= 1 - \sum\limits_{n=0}^{n_0-1}\dfrac{m_0^n}{n!}\exp(-m_0) = 1 - \exp(-m_0)\sum\limits_{n=0}^{n_0-1}\dfrac{(m_0)^n}{n!}$

$\beta = P(D_0|H_1) = P(x=n<n_0|H_1) = \sum\limits_{n=0}^{n_0-1} P(x=n|H_1)$

$= \sum\limits_{n=0}^{n_0-1}\dfrac{m_1^n}{n!}\exp(-m_1) = \exp(-m_1)\sum\limits_{n=0}^{n_0-1}\dfrac{(m_1)^n}{n!}$

其中 $n_0 = \left\lceil \dfrac{m_1-m_0}{\ln m_1 - \ln m_0} \right\rceil$

3-9 设有如下二元假设

$$\begin{array}{ll} H_0: & x_i = n_i \\ H_1: & x_i = 1 + n_i \end{array} \quad i=1,2,\text{L},10$$

n_i 是均值为 0，方差为 0.09 的高斯白噪声。现令虚警概率 $\alpha = 10^{-8}$，如判决规则

定为

$$G = \sum_{i=1}^{10} x_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} G_T$$

试求 G_T 的值以及相应的检测概率。

解：由条件得：$G|H_0 \sim N(0, 0.9)$，$\quad G|H_1 \sim N(10, 0.9)$

$$p_{fa} = p(G|H_0) = \int_{G_T}^{+\infty} f(G|H_0) dG = 1 - \Phi\left(\frac{G_T}{\sqrt{0.9}}\right) = 10^{-8}$$

求得：$G_T = 5.3241$

从而可求：

$$p_D = p(G|H_1) = \int_{G_T}^{+\infty} f(G|H_1) dG = 1 - \Phi\left(\frac{G_T - 10}{\sqrt{0.9}}\right) = 1 - 4.135 \times 10^{-7}$$

第三次作业

3-13 二元假设如下：

$$H_0: f(x_i|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2}\right)$$

$$H_1: f(x_i|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x_i-1)^2}{2}\right], \quad i = 1, 2 \ldots$$

已知 $\alpha = \beta = 0.1$，$P(H_i) = 1/2 \ (i = 0, 1)$。

（1）求序贯检测的判决规则。
（2）求序贯检测所需的平均样本数。
（3）若采用固定样本数的检测器，求满足性能要求所需的样本数。

解：（1）观测样本为 i 时的似然比函数为：

$$\lambda(\vec{x_i}) = \prod_{j=1}^{i} \frac{f(\vec{x_i}|H_1)}{f(\vec{x_i}|H_0)} = \frac{\exp\left[-\sum_{j=1}^{i} \frac{(x_j-1)^2}{2}\right]}{\exp\left[-\sum \frac{x_j^2}{2}\right]} = \exp\left[\sum_{j=1}^{i} x_j - \frac{i}{2}\right]$$

取对数：$\ln \lambda(\vec{x}_i) = \sum_{j=1}^{i} x_j - \dfrac{i}{2}$

$th_1 = \dfrac{1-\beta}{\alpha} = 9$ ，$th_0 = \dfrac{1-\alpha}{\beta} = \dfrac{1}{9}$

$\ln th_0 = -2.197$ ，$\ln th_1 = 2.197$

对数似然比判决规则为：

$$\begin{cases} \ln \lambda\left(\vec{x}_i\right) \geq 2.197 & \text{判为} H_1 \\ \ln \lambda\left(\vec{x}_i\right) \leq -2.197 & \text{判为} H_0 \\ -2.197 < \ln \lambda\left(\vec{x}_i\right) < 2.197 & \text{接收下一个数据} \end{cases}$$

（2）$\ln \lambda(x) = x - \dfrac{1}{2}$

$E\{\ln \lambda(x) \mid H_0\} = \int_{-\infty}^{\infty} \ln \lambda(x) f(x \mid H_0) dx = -\dfrac{1}{2}$

$E\{\ln \lambda(x) \mid H_1\} = \int_{-\infty}^{\infty} \ln \lambda(x) f(x \mid H_1) dx = \dfrac{1}{2}$

$E\{N \mid H_1\} \approx \dfrac{(1-\beta)\ln th_1 + \alpha \ln th_0}{E\{\ln \lambda(x) \mid H_1\}} = 3.515$

$E\{N \mid H_0\} \approx \dfrac{\alpha \ln th_1 + (1-\alpha)\ln th_0}{E\{\ln \lambda(x) \mid H_0\}} = 3.515$

$E\{N\} = \dfrac{\alpha \ln th_1 + (1-\alpha)\ln th_0}{E\{\ln \lambda(x) \mid H_0\}} P(H_0)$

$\qquad + \dfrac{(1-\beta)\ln th_1 + \alpha \ln th_0}{E\{\ln \lambda(x) \mid H_1\}} P(H_1) = 3.515$

所以 N=4

（3）假设固定样本数为 N，似然比判决准则为：

$$\lambda\left(\vec{x}_N\right) = \dfrac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i \mid H_1)}{f(x_1, x_2, \ldots, x_i \mid H_0)} = \prod_{j=1}^{N} \dfrac{f(x_j \mid H_1)}{f(x_j \mid H_0)} \mathop{\gtrless}\limits_{H_0}^{H_1} \dfrac{p(H_0)}{p(H_1)}$$

$$\ln \lambda(\vec{x}_N) = \sum_{j=1}^{N} x_j - \dfrac{N}{2}$$

判决规则为：

$$G = \ln \lambda(\vec{x}_N) = \sum_{j=1}^{N} x_j - \dfrac{N}{2} \mathop{\gtrless}\limits_{H_0}^{H_1} 0$$

化简后有 $\bar{x} = \dfrac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} x_j}{N} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \dfrac{1}{2}$

新变量 $\bar{x}$ 的分布为 $f(\bar{x} \mid H_1)$：$N(1, \dfrac{1}{N})$， $f(\bar{x} \mid H_0)$：$N(0, \dfrac{1}{N})$。

由虚警和漏警条件：

$$p(D_1 \mid H_0) = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} f(\bar{x} \mid H_0) d\bar{x} \le 0.1$$

$$p(D_0 \mid H_1) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(\bar{x} \mid H_1) d\bar{x} \le 0.1$$

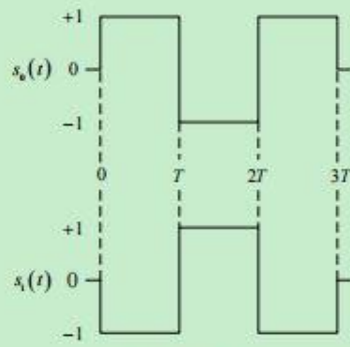经查表得 $N \ge 6.656$
故 N=7。

3-18 二元通信系统如下：

$$\begin{aligned} H_0 &: x(t) = s_0(t) + n(t) \\ H_1 &: x(t) = s_1(t) + n(t) \end{aligned} \quad 0 \le t \le 3T$$

其中信号 $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$ 如图 3.34 所示，$n(t)$ 是功率为 $N_0/2$ 的加性高斯白噪声。假设两种假设的先验概率相等，求最小错误概率准则下的判决规则。若 $E/N_0 = 4$，求错误判决概率。

信号波形

解： $f(x(t)|H_0) = F \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^{3T}[x(t)-s_0(t)]^2 dt\right\}$

$f(x(t)|H_1) = F \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^{3T}[x(t)-s_1(t)]^2 dt\right\}$

判决准则为：

$\ln \lambda(x(t)) = \ln\frac{f(x(t)|H_1)}{f(x(t)|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\frac{P(H_0)}{P(H_1)} = th'$

因为 $s_0(t) = -s_1(t)$

可得判决规则为： $\int_0^{3T} x(t)s_1(t)dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0$

或 $\int_0^{3T} x(t)s_0(t)dt \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} 0$

（2）因为 $s_0(t) = -s_1(t)$，所以 $\rho = -1$

$p_e = 1 - \Phi\left(\sqrt{(1-\rho)\frac{E}{N_0}}\right) = 1 - \Phi(\sqrt{8}) = 0.0023$

3-21 二元频移键控系统如下：

$$H_0 : x(t) = s_0(t) + n(t)$$
$$H_1 : x(t) = s_1(t) + n(t)$$, $0 \leq t \leq T$

式中，信号分别为 $s_0(t) = A\cos\left[\left(w_0 - \Delta w/2\right)t\right]$ 和 $s_1(t) = A\cos\left[\left(w_0 + \Delta w/2\right)t\right]$，

$w_0 \gg \Delta w$，$w_0 T = k\pi$，（k 为整数），$n(t)$ 是均值为 0，功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声。

（1）证明信号 $s_0(t)$ 与 $s_1(t)$ 之间的相关系数为 $\rho = \dfrac{\sin \Delta w T}{\Delta w T}$；

（2）求使 $s_0(t)$ 与 $s_1(t)$ 正交的最小的 Δw 的值；

（3）求使平均错判概率为最小的 Δw 的值；

（4）比较 2）和 3）两种情况下接收机的平均错误概率。

解：（1）由题意得：

$$\rho = \frac{1}{E} \int_0^T s_0(t) s_1(t) dt$$

$$E = \frac{1}{2}\left(E_0 + E_1\right)$$

$$E_0 = \int_0^T s_0^2(t) dt = A^2 \int_0^T \cos^2\left[\left(w_0 - \Delta w/2\right)t\right] dt$$

$Q\ w_0 \gg \Delta w$

$$\therefore E_0 = \frac{A^2}{2} \int_0^T \left[\cos 2w_0 t + 1\right] dt = \frac{A^2}{2} T$$

对于二元频移键控系统

$w_0 - w_1 = \dfrac{n\pi}{T}$，$w_0 + w_1 = \dfrac{m\pi}{T}$，$m, n$ 均为整数

$$\int_0^T s_0(t)s_1(t)dt = A^2 \int_0^T \cos\left[(w_0 - \Delta w/2)t\right]\cos\left[(w_0 + \Delta w/2)t\right]dt$$

$$= \frac{A^2}{2}\int_0^T \left[\cos(w_0 + w_1)t + \cos\Delta wt\right]dt$$

$$= \frac{A^2 \sin\Delta wT}{2\Delta w}$$

$$\therefore \rho = \frac{\sin\Delta wT}{\Delta wT}$$

（2） $s_0(t)$ 与 $s_1(t)$ 正交 $\rho = 0$ ，则 $\rho = \frac{\sin\Delta wT}{\Delta wT} = 0 \Rightarrow \Delta wT = \pi \Rightarrow \Delta w = \frac{\pi}{T}$

（3）二元通信系统的平均错误判决概率：

$$P_e = \int_{\frac{\alpha}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dt = 1 - \Phi\left(\sqrt{(1-\rho)E/N_0}\right)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\Delta w} = \frac{\cos\Delta wT \cdot \Delta wT^2 - \sin\Delta wT \cdot T}{(\Delta wT)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta wT = \tan\Delta wT$$

要使 P_e 最小，则 ρ 应去相应的最小值 $\rho = \frac{\sin\Delta wT}{\Delta wT}$

$-1 \le \sin\Delta wT \le 0$

Q $\Delta wT = \tan\Delta wT$

$\therefore \Delta wT = 1.4302\pi$

$\Delta w = \frac{4.4931}{T}$

（4）

可得（2）中的接收机的平均错误概率 $\overline{P_e} = 1 - \Phi\left(\sqrt{E/N_0}\right)$ ，（3）中的接收机的平均

错误概率 $\overline{P_e} = 1 - \Phi\left(\sqrt{1.1275E/N_0}\right)$

3-24 三元通信系统：

$$H_0：x(t)=n(t)$$
$$H_1：x(t)=\sin\omega_0 t+n(t)$$
$$H_2：x(t)=2\sin\omega_0 t+n(t) \qquad 0\leq t\leq T$$

式中，$\{n(t)\}$ 是功率谱密度为 $\dfrac{N_0}{2}$ 的高斯白噪声，ω_0 都是常数；已知

$P(H_i)=1/3\,(i=0,1,2)$。

（1）求最小错误概率准则下的判决规则。

（2）求三种假设下的条件正确判决概率。

解：

（1）令 $s_0(t)=0$，$s_1(t)=\sin\omega_0 t$，$s_2(t)=2\sin\omega_0 t$，$0\leq t\leq T$，

又有 $f(x(t)\,|\,H_i)=F\exp\left(-\dfrac{1}{N_0}\displaystyle\int_0^T\left(x(t)-s_i(t)\right)^2 dt\right)$，则可得

$$\lambda_{ij}(x(t))=\frac{\exp\left(-\dfrac{1}{N_0}\displaystyle\int_0^T\left[x(t)-s_i(t)\right]^2 dt\right)}{\exp\left(-\dfrac{1}{N_0}\displaystyle\int_0^T\left[x(t)-s_j(t)\right]^2 dt\right)},i\neq j,\quad th=\frac{P(H_j)}{P(H_i)}=1,\ \text{取对数可得}$$

$G_{ij}=\displaystyle\int_0^T\left[s_i(t)-s_j(t)\right]x(t)\,dt-\dfrac{1}{2}\int_0^T\left[s_i(t)-s_j(t)\right]^2 dt$ 大于等于 0 时判为 H_i，否则判为 H_j。

由于 $s_0(t) = 0, s_2(t) = 2s_1(t)$，可设 $G = \int_0^T x(t)\sin\omega_0 t\, dt$，

若判决为 H_0，则应有 $\begin{cases} G_{01} \geq 0 \\ G_{02} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G \leq \dfrac{T}{4} \\ G \leq \dfrac{T}{2} \end{cases} \Rightarrow G \leq \dfrac{T}{4}$，

若判决为 H_1，则应有 $\begin{cases} G_{10} \geq 0 \\ G_{12} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G \geq \dfrac{T}{4} \\ G \leq \dfrac{3T}{4} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{T}{4} \leq G \leq \dfrac{3T}{4}$，

若判决为 H_2，则应有 $\begin{cases} G_{20} \geq 0 \\ G_{21} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G \geq \dfrac{T}{2} \\ G \geq \dfrac{3T}{4} \end{cases} \Rightarrow G \geq \dfrac{3T}{4}$。

（2） $E(G|H_0) = E\left\{\int_0^T n(t)\sin\omega_0 t\, dt\right\} = 0$， $Var(G|H_0) = E\left\{\left[\int_0^T n(t)\sin\omega_0 t\, dt\right]^2\right\} = \dfrac{N_0 T}{4}$；

同理可得 $E(G|H_1) = \dfrac{T}{2}$， $Var(G|H_1) = \dfrac{N_0 T}{4}$， $E(G|H_2) = T$， $Var(G|H_2) = \dfrac{N_0 T}{4}$。

同时又可得 $f(G|H_i) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi Var(G|H_i)}}\exp\left(-\dfrac{(G - E(G|H_i))^2}{2Var^2(G|H_i)}\right)$，则三种假设下的条件

正确判决概率为

$P(D_0|H_0) = \int_{-\infty}^{\frac{T}{4}} f(G|H_0)\, dG = \Phi\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{T}{N_0}}\right)$；

$P(D_1|H_1) = \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} f(G|H_1)\, dG = 2\Phi\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{T}{N_0}}\right) - 1$；

$P(D_2|H_2) = \int_{\frac{3T}{4}}^{+\infty} f(G|H_2)\, dG = \Phi\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{T}{N_0}}\right)$。

3-27 已知白噪声背景下的确知信号

$$s(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

（1）匹配滤波器的输出峰值信噪比。
（2）若不用匹配滤波器，而用一个简化的线性滤波器

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求输出峰值信噪比，以及使输出峰值信噪比最大所对应的 α 值，并与（1）的匹配滤波器的性能作比较。

（3）若采用如下滤波器

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

求输出峰值信噪比，并证明此时的信噪比总是小于等于（2）中的信噪比。

（4）若采用高斯滤波器

$$h(t) = \frac{1}{\beta} \exp\left\{-\frac{(t-t_0)^2}{2\beta}\right\}, \quad -\infty < t < \infty, \, t_0 > 0$$

（注意到当 $t_0 ? \beta$ 时，上面的系统可以近似看作物理可实现的。）给出输出信噪比的表达式，并说明何时信噪比达到最大。

解：（1）$SNR_0 = \dfrac{2E}{N_0}, E = A^2 T$

$\therefore SNR_0 = \dfrac{2A^2 T}{N_0}$

（2）$SNR_0 = \dfrac{\left|s_0(t_0)^2\right|}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2}|H(jw)|^2 dw}$

$s_0(t) = s(t) * h(t)$

$= \int_0^T s(\tau) h(t-\tau) d\tau$

$= \begin{cases} \dfrac{A}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right), 0 \le t \le T \\ \dfrac{A}{\alpha}\left(e^{-\alpha(t-T)} - e^{-\alpha t}\right), T < t \le 2T \end{cases}$

当 $t = T$ 时，$s_0(t)$ 取得最大值 $\dfrac{A}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha T}\right)$。

$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2}|H(jw)|^2 dw = \dfrac{N_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi h^2(t) dt = \dfrac{N_0}{4\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha T}\right)$

$\therefore SNR_0 = \dfrac{4A^2}{\alpha N_0} \cdot \dfrac{1 - e^{-\alpha T}}{1 + e^{-\alpha T}}$

由 $\dfrac{dSNR_0}{d\alpha} = 0$ 得 $\alpha = 0$。SNR_0 取得最大值。

$$\lim_{\alpha \to 0} SNR_0 = \frac{2A^2 T}{N_0}$$

当 $\alpha = 0$ 时，与（1）输出的最大信噪比相等。

当 $\alpha > 0$ 时，性能比（1）差。

（3）由（2）易得，$s_0(t)_{max} = s_0(T) = \frac{A}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha T}\right)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}\left|H(jw)\right|^2 dw = \frac{N_0}{4\alpha}$$

$$\therefore SNR_{0max} = \frac{4A^2}{\alpha N_0}\left(1 - e^{-\alpha T}\right)^2$$

$$Q\left(1 - e^{-\alpha T}\right)^2 \leq \frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 + e^{-\alpha T}}$$

$$\therefore \frac{4A^2}{\alpha N_0}\left(1 - e^{-\alpha T}\right)^2 \leq \frac{4A^2}{\alpha N_0}\cdot\frac{1 - e^{-\alpha T}}{1 + e^{-\alpha T}}$$

（4）由题意知

$$s_0(t) = \int_0^T A\frac{1}{\beta}e^{-\frac{(t-\tau-t_0)^2}{2\beta}}d\tau = A\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}\left[\Phi\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\beta}}\right) - \Phi\left(\frac{t-T-t_0}{\sqrt{\beta}}\right)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}h^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\beta^2}e^{-\frac{(t-t_0)^2}{\beta}}dt = \sqrt{\frac{\pi}{\beta^3}}$$

$$s_0(t)_{max} = s_0\left(\frac{T+2t_0}{2}\right) = A\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}\left[2\Phi\left(\frac{T}{2\sqrt{\beta}}\right) - 1\right]$$

$\therefore$ 当 $t = t_0 + \frac{T}{2}$ 时，信噪比达到最大，为

$$SNR_0 = \frac{4A^2}{N_0}\sqrt{\pi\beta}\left[2\Phi\left(\frac{T}{2\sqrt{\beta}}\right) - 1\right]^2$$

第四次作业

3-30 考虑信号 $x(t)=1-\cos\omega_0 t$ $\left(0\le t\le\dfrac{2\pi}{\omega_0}\right)$ 及功率谱密度为 $S_n(\omega)=\dfrac{\omega_1^2}{\omega^2+\omega_1^2}$ 的噪声，

（1）设 $T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$，用预白化方法求广义匹配滤波器。

（2）求最大输出信噪比。

解：

（1）对于 $S_n(\omega)=\dfrac{\omega_1^2}{\omega^2+\omega_1^2}$，$S_n^+(\omega)=\dfrac{\omega_1}{\omega_1+j\omega}$，$S_n^-(\omega)=\dfrac{\omega_1}{\omega_1-j\omega}$，则预白化系统函数为

$H_1(\omega)=\dfrac{1}{S_n^+(\omega)}=\dfrac{\omega_1+j\omega}{\omega_1}$，匹配滤波器传输函数为 $H_2(\omega)=\dfrac{X^*(\omega)}{S_n^-(\omega)}e^{-j\omega T}$，则广义匹配

滤波器的传输函数为 $H(\omega)=H_1(\omega)H_2(\omega)=\dfrac{X^*(\omega)}{S_n(\omega)}e^{-j\omega T}=\left(1+\dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)X^*(\omega)e^{-j\omega T}$，则

$h(t)=F^{-1}\{H(\omega)\}=F^{-1}\{X^*(\omega)e^{-j\omega T}\}+\dfrac{1}{\omega_1^2}F^{-1}\{\omega^2 X^*(\omega)e^{-j\omega T}\}$

$=F^{-1}\{X^*(\omega)e^{-j\omega T}\}-\dfrac{1}{\omega_1^2}F^{-1}\{(j\omega)^2 X^*(\omega)e^{-j\omega T}\}$

$=x^*(T-t)-\dfrac{1}{\omega_1^2}\dfrac{d^2}{d^2 t}x^*(T-t)$

$=1-\cos\omega_0(T-t)-\dfrac{\omega_0^2}{\omega_1^2}\cos\omega_0(T-t)$

$=1-\dfrac{\omega_0^2+\omega_1^2}{\omega_1^2}\cos\omega_0\left(\dfrac{2\pi}{\omega_0}-t\right)=1-\dfrac{\omega_0^2+\omega_1^2}{\omega_1^2}\cos\omega_0(t)$。

（2）广义匹配滤波器输出最大信噪比为 $SNR_{max}=\dfrac{s_o^2(t)}{E\{n_o^2(t)\}}$，

又 $x(t)=1-\cos\omega_0 t$，则 $X(\omega)=2\pi\delta(\omega)-\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$，可得

$SNR_{o\,max}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{|X(\omega)|^2}{S_n(\omega)}d\omega=2\pi+\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\omega_0^2+\omega_1^2}{\omega_1^2}+\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\omega_0^2+\omega_1^2}{\omega_1^2}=\dfrac{\pi(3\omega_1^2+\omega_0^2)}{\omega_1^2}$。

注：应改为接收时间为 $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 为佳。

3-32 二元假设如下：

$$H_0: \ x(t)=n(t)$$
$$H_1: \ x(t)=s(t)+n(t) \qquad 0 \le t \le T$$

式中，$s(t)$ 是确知信号；$\{n(t)\}$ 是零均值，$R_n(\tau)=\sigma_0^2 e^{-\alpha|\tau|}$，若采用纽曼-皮尔逊准则及 K-L 展开最佳检测，求：最佳检测器检测性能计算公式。

解：

由 $R_n(\tau)=\sigma_0^2 e^{-\alpha|\tau|}$，可得 $S_n(\omega)=\dfrac{2\alpha\sigma_0^2}{\omega^2+\alpha^2}$，求解该有理核与本征函数 $f_k(t)$ 的过程参考教材 P148 的例 3.6。

求解方程 $\begin{cases} \dfrac{\gamma_k T}{2}\tan\dfrac{\gamma_k T}{2}=\dfrac{\alpha T}{2}, & k\text{为偶数} \\[2mm] \dfrac{\gamma_k T}{2}\cot\dfrac{\gamma_k T}{2}=-\dfrac{\alpha T}{2}, & k\text{为奇数} \end{cases}$，$k=1,2,L$，可得 γ_k 的值，则 $\lambda_k=\dfrac{2\alpha\sigma_0^2}{\gamma_k^2+\alpha^2}$。

由 γ_k 求解 $\begin{cases} \alpha a_k-\gamma_k b_k=0 \\ a_k\sigma_0^2(\gamma_i\sin\gamma_k T-\alpha\cos\gamma_k T)-b_k\sigma_0^2(\alpha\sin\gamma_k T+\gamma_k\cos\gamma_k T)=0 \end{cases}$ 可得 a_k 与 b_k 的值，

从而由 $f_k(t)=a_k\cos\gamma_k t+b_k\sin\gamma_k t$ 求得本征函数。

$x(t)$ 由 K-L 展开可得 $x(t)=\sum\limits_k x_k f_k(t)$，系数 $x_k=\int_0^T x(t)f_k^*(t)dt$，由本题的接收信号模型：

$s_0(t)=0$，$s_1(t)=s(t)$，则令 $\eta_i(t)=\int_0^T s_i(\tau)R_n^{-1}(t-\tau)d\tau$，显见 $\eta_0(t)=0$。

判决检验统计量为 $G=\int_0^T\left(x(t)-\dfrac{1}{2}s_1(t)\right)\eta_1(t)dt-\int_0^T\left(x(t)-\dfrac{1}{2}s_0(t)\right)\eta_0(t)dt$

$=\int_0^T\left(x(t)-\dfrac{1}{2}s(t)\right)\eta_1(t)dt$。

$\begin{cases} E\{G|H_1\}=\dfrac{1}{2}\int_0^T s_1(t)\eta_1(t)dt-\dfrac{1}{2}\int_0^T[2s_1(t)-s_0(t)]\eta_0(t)dt=\dfrac{1}{2}\int_0^T s(t)\eta_1(t)dt \\[2mm] E\{G|H_0\}=-\dfrac{1}{2}\int_0^T s_0(t)\eta_0(t)dt+\dfrac{1}{2}\int_0^T[2s_0(t)-s_1(t)]\eta_1(t)dt=-\dfrac{1}{2}\int_0^T s(t)\eta_1(t)dt \end{cases}$

令 $\sigma_G^2=\int_0^T\int_0^T[s_1(t)-s_0(t)]R_n^{-1}(t-x)[s_1(x)-s_0(x)]dtdx=\int_0^T\int_0^T s(t)R_n^{-1}(t-x)s(x)dtdx$，

可得 $E\{G|H_1\}=\dfrac{1}{2}\sigma_G^2$，$E\{G|H_0\}=-\dfrac{1}{2}\sigma_G^2$，$Var\{G|H_1\}=Var\{G|H_0\}=\sigma_G^2$。

因此，G 的条件概率密度分别为

$$f(G|H_1)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_G^2}}\exp\left[-\left(G-\dfrac{1}{2}\sigma_G^2\right)^2\Big/2\sigma_G^2\right] \qquad f(G|H_0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_G^2}}\exp\left[-\left(G+\dfrac{1}{2}\sigma_G^2\right)^2\Big/2\sigma_G^2\right]$$

第一类错误概率

$$P(D_1|H_0)=\int_0^\infty f(G|H_0)dG=\int_{\frac{\sigma_G}{2}}^\infty \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{z^2}{2}\right)dt$$

第二类错误概率

$$P\left(D_0 \mid H_1\right) = \int_\infty^0 f\left(G \mid H_1\right) dG = \int_{-\infty}^{-\frac{\sigma_G}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

综上，平均错误概率为

$$\bar{P}_e = \frac{1}{2}\left[P\left(D_1 \mid H_0\right) + P\left(D_0 \mid H_1\right)\right] = \int_{\frac{\sigma_G}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\sigma_G}{2}\right)$$

注：加条件 $P\left(H_0\right) = P\left(H_1\right) = \frac{1}{2}$。

3-33 在高斯白噪声中检测随机相位相位信号是经常遇到的一类问题。在雷达系统中，信号模型可以表示为

$$\begin{array}{ll} H_0: & x(t) = n(t) \\ H_1: & x(t) = A\sin\left(\omega_0 t + \theta\right) + n(t) \end{array}, \quad 0 \le t \le T$$

其中 A 为接收信号的振幅；频率 ω_0 已知，且满足 $\omega_0 T = 2n\pi$，n 为整数；θ 是 $[0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机相位；噪声 $n(t)$ 是零均值、功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声。

（1）如果我们在对接收信号 $x(t)$ 作相关运算时，把信号的相位 θ 作为零来处理，那么实际接收信号中的相位不为零，求作为相位 θ 函数的检测概率 $P_D(\theta)$。并把结果同相位确实为零的结果进行比较。

（2）证明：无论信噪比多大，检测概率都有可能小于虚警概率，这取决于 θ 的实际取值。如果信号的相位 θ 不是随机的，而是非零未知的，甚至是非零已知的，把它作为零来处理，是否同样存在检测概率可能小于虚警概率的问题？

解：

（1）当把信号的相位 θ 作为零来处理时有：

$$\lambda\left(x(t)\right) = \frac{f\left(x(t) \mid H_1\right)}{f\left(x(t) \mid H_0\right)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} th$$

即

$$\lambda\left(x(t)\right) = \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T \left(A^2 \sin^2 w_0 t - 2Ax(t)\sin w_0 t\right) dt\right\} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} th$$

化简得

$$G = \int_0^T Ax(t)\sin w_0 t\, dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} th' = \frac{N_0}{2}\ln th + \frac{A^2 T}{4}$$

当 θ 不为零时，为某一定值时，有

$$E(G|\theta,H_1) = E\left\{\int_0^T A\sin w_0 t\left[A\sin(w_0 t+\theta)+n(t)\right]dt\right\} = \frac{A^2 T}{2}\cos\theta$$

$$\mathrm{var}(G|\theta,H_1) = \frac{A^2 N_0 T}{4}$$

检验统计量 G 在 H_1 假设下服从高斯分布，概率密度函数为

$$\therefore f(G|\theta,H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{A^2 N_0 T}{4}}}\exp\left\{-\frac{\left(G-\frac{A^2 T\cos\theta}{2}\right)^2}{2\times\frac{A^2 N_0 T}{4}}\right\}$$

$$\therefore P_D(\theta) = 1-\int_{-\infty}^{th} f(G|\theta,H_1)dG$$

$$= 1-\Phi\left(\frac{N_0\ln th+\frac{A^2 T}{2}-A^2 T\cos\theta}{\sqrt{A^2 N_0 T}}\right)$$

$\theta=0$ 时，$P_D(\theta)$ 达到最大值，$\therefore P_D(\theta) = 1-\Phi\left(\frac{N_0\ln th-\frac{A^2 T}{2}}{\sqrt{A^2 N_0 T}}\right)$

$$\therefore P_D(\theta) \le P_D(0)$$

（2）$E(G|\theta,H_0) = 0$

$$\mathrm{var}(G|\theta,H_0) = \frac{A^2 N_0 T}{4}$$

检验统计量 G 在 H_0 假设下服从高斯分布，概率密度函数为

$$(G|\theta,H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{A^2 N_0 T}{4}}}\exp\left\{-\frac{G^2}{2\times\frac{A^2 N_0 T}{4}}\right\}$$

虚警概率为

$$P_{fa} = \int_{th}^{\infty} f(G|\theta,H_0)dG = 1-\Phi\left(\frac{N_0\ln th+\frac{A^2 T}{2}}{\sqrt{A^2 N_0 T}}\right)$$

$\therefore$ 当 $\cos\theta<0$ 时，$P_{fa}>P_D(\theta)$

3-35 M 元非相干频移键控问题。

$$H_0: x(t) = A_0\sin(\omega_0 t+\theta_0)+n(t)$$
$$H_1: x(t) = A_1\sin(\omega_1 t+\theta_1)+n(t)$$
$$\mathrm{M}$$
$$H_{M-1}: x(t) = A_{M-1}\sin(\omega_{M-1} t+\theta_{M-1})+n(t)$$

若每种假设的先验概率和代价函数相等，相位服从 $[0,2\pi)$ 上的均匀分布，$n(t)$ 是均值为零功率谱为 $\frac{N_0}{2}$ 高斯白噪声。

（1）若振幅相等，即 $A_i = A_0$ $i = 1,2...,M-1$，以最小错误概率准则设计接收机。

（2）如果接收机中滤波器的输出是统计独立的，求错误概率。

解：

（1）条件概率密度函数 $f\left(x(t)\mid\theta,H_i\right) = F\exp\left\{-\dfrac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-A_i\sin\left(\omega_i t+\theta_i\right)\right]^2 dt\right\}$，

且最小错误概率准则下的判决规则为：$\dfrac{f\left(x(t)\mid H_i\right)}{f\left(x(t)\mid H_j\right)}\geq 1, j=1,2,L\ M-1, j\neq i$ 时， 判为

H_i。

则

$$\frac{f\left(x(t)\mid H_i\right)}{f\left(x(t)\mid H_j\right)} = \frac{\int_0^{2\pi}f\left(x(t)\mid\theta,H_i\right)f(\theta_i)d\theta_i}{\int_0^{2\pi}f\left(x(t)\mid\theta,H_j\right)f(\theta_j)d\theta_j} = \frac{\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{-\dfrac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-A_i\sin\left(\omega_i t+\theta_i\right)\right]^2 dt\right\}d\theta_i}{\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{-\dfrac{1}{N_0}\int_0^T\left[x(t)-A_j\sin\left(\omega_j t+\theta_j\right)\right]^2 dt\right\}d\theta_j}$$

由于 $A_i = A_0, i=1,2,L\ M-1$，且由于 $2\pi/\omega_c = T$, $\int_0^T\sin^2(\omega_c+\theta)dt\approx T/2$，统计量为

$$\frac{f\left(x(t)\mid H_i\right)}{f\left(x(t)\mid H_j\right)} = \frac{e^{-\frac{A_0^2 T}{2N_0}}\exp\left\{-\dfrac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)dt\right\}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\dfrac{2A_0}{N_0}\int_0^T x(t)\sin(\omega_i t+\theta)dt\right\}\dfrac{d\theta}{2\pi}}{e^{-\frac{A_0^2 T}{2N_0}}\exp\left\{-\dfrac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)dt\right\}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\dfrac{2A_0}{N_0}\int_0^T x(t)\sin(\omega_j t+\theta)dt\right\}\dfrac{d\theta}{2\pi}}$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi}\exp\left\{\dfrac{2A_0}{N_0}\int_0^T x(t)\sin(\omega_i t+\theta)dt\right\}\dfrac{d\theta}{2\pi}}{\int_0^{2\pi}\exp\left\{\dfrac{2A_0}{N_0}\int_0^T x(t)\sin(\omega_j t+\theta)dt\right\}\dfrac{d\theta}{2\pi}}$$

将上式中的指数项中的正弦函数展开，

$$\int_0^T x(t)\sin(\omega_i t+\theta)dt = \int_0^T x(t)\left[\sin\omega_i t\cos\theta+\cos\omega_i t\sin\theta\right] = \cos\theta\int_0^T x(t)\sin\omega_i tdt+\sin\theta\int_0^T x(t)\cos\omega_i tdt$$

令 $\begin{cases} a_i = q_i\sin\theta_{0i} = \int_0^T x(t)\sin(\omega_i t)dt \\ b_i = q_i\cos\theta_{0i} = \int_0^T x(t)\cos(\omega_i t)dt \end{cases}$

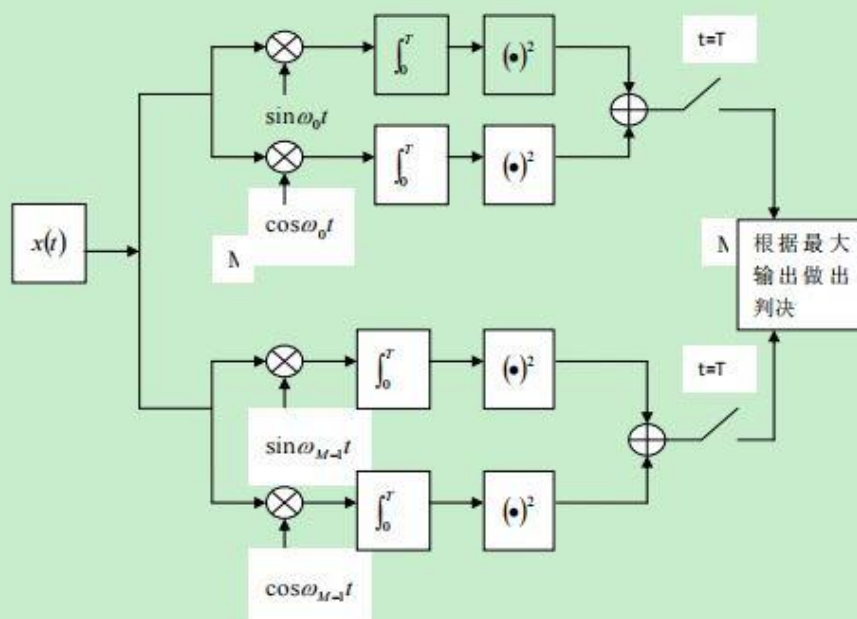于是 $q_i^2 = \left[\int_0^T x(t)\sin\omega_i tdt\right]^2 + \left[\int_0^T x(t)\cos\omega_i tdt\right]^2\geq 0$

检验统计量变为

$$\lambda_q = \frac{f\left(x(t)\mid H_i\right)}{f\left(x(t)\mid H_j\right)} = \frac{\int_0^{2\pi}\exp\left\{\dfrac{2A_0 q_i}{N_0}\cos(\theta-\theta_{0i})\right\}\dfrac{d\theta}{2\pi}}{\int_0^{2\pi}\exp\left\{\dfrac{2A_0 q_j}{N_0}\cos(\theta-\theta_{0j})\right\}\dfrac{d\theta}{2\pi}} = \frac{I_0\left(\dfrac{2A_0 q_i}{N_0}\right)}{I_0\left(\dfrac{2A_0 q_j}{N_0}\right)}$$

由前述的判决规则，$\lambda_{qj} \geq 1, j = 1, 2, L \; M - 1, j \neq i$，

可得 $I_0\left(\dfrac{2A_0 q_i}{N_0}\right) \geq I_0\left(\dfrac{2A_0 q_j}{N_0}\right)$，$j = 1, 2, L \; M - 1, j \neq i$，又由于 $I_0(\bullet)$ 为单调递增的，所以

最终的判决规则为 $q_i \geq q_j, j = 1, 2, L \; M - 1, j \neq i$

（2）参考教材 P158-P161，可求得 $f(q_i | H_i)$ 与 $f(q_j | H_i)$，$i \neq j$，则有

$$P(D_i | q_i = g, H_i) = P(q_0 < g, q_1 < g, \cdots, q_{i-1} < g, q_{i+1} < g, \cdots, q_{M-1} < g | q_i = g, H_i)$$

$$= \left[P(q_j < g | q_i = g, H_i)\right]^{M-1}$$

$$= \left[\int_0^g f(q_j | H_i) dq_j\right]^{M-1}, (j \neq i)$$

$$P_e = 1 - \sum_{i=0}^{M-1} P(D_i | H_i) P(H_i)$$

$$= 1 - P(D_i | H_i)$$

$$= 1 - \int_0^{+\infty} P(D_i | q_i = g, H_i) f(q_i = g | H_i) dg$$

$$= 1 - \int_0^{+\infty} \left[\int_0^g f(q_j | H_i) dq_j\right]^{M-1} f(q_i = g | H_i) dg, (j \neq i)$$

3-39 M元假设如下：

$$H_i: x(t) = A_0 \cos(\omega_i t + \theta_i) + n(t), 0 \le t \le T, i = 1, 2, \text{L}, M$$

已知 $P(H_i) = 1/M, i = 1, 2, \text{L}, M$；$\theta_i, i = 1, 2, \text{L}, M$ 是均匀分布统计独立随机变量；

$A_0, \omega_i, i = 1, 2, \text{L}, M$ 是确定量。若采用最小错误概率准则，求判决规则。

解： $f(x(t)/H_i, \theta_i) = F \exp\left\{-\dfrac{1}{N_0}\int_0^T \left[x(t) - A\cos(w_i t + \theta_i)\right]^2 dt\right\}$

$\lambda(x(t)) = \dfrac{\int_0^{2\pi} f(x(t)/H_i, \theta_i)\frac{d\theta_i}{2\pi}}{\int_0^{2\pi} f(x(t)/H_j, \theta_j)\frac{d\theta_j}{2\pi}} \ge \dfrac{P(H_j)}{P(H_i)} = 1$ 对 $\forall j \ne i$ 成立，则判为 H_i

$\int_0^{2\pi} f(x(t)/H_i, \theta_i)\dfrac{d\theta_i}{2\pi} = F\exp\left\{-\dfrac{A_0^2 T}{2N_0}\right\}\exp\left\{-\dfrac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)dt\right\}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\dfrac{2A_0}{N_0}\int_0^T x(t)\cos(w_i t + \theta_i)dt\right\}\dfrac{d\theta_i}{2\pi}$

其中最后一项中 $\int_0^T x(t)\cos(w_i t + \theta_i)dt = \cos\theta_i\int_0^T x(t)\cos w_i t dt - \sin\theta_i\int_0^T x(t)\sin w_i t dt$

令 $\begin{cases}\int_0^T x(t)\cos w_i t dt = q_i\cos\theta \\ -\int_0^T x(t)\sin w_i t dt = q_i\sin\theta\end{cases}$ 则 $\int_0^T x(t)\cos(w_i t + \theta_i)dt = q_i\cos(\theta - \theta_i)$

其中 $q_i^2 = \left[\int_0^T x(t)\cos w_i t dt\right]^2 + \left[\int_0^T x(t)\sin w_i t dt\right]^2$

故 $\int_0^{2\pi}\exp\left\{\dfrac{2A_0}{N_0}\int_0^T x(t)\cos(w_i t + \theta_i)dt\right\}\dfrac{d\theta_i}{2\pi} = I_0\left(\dfrac{2A_0 q_i}{N_0}\right)$

则 $\lambda(x(t)) = \dfrac{I_0\left(\dfrac{2A_0 q_i}{N_0}\right)}{I_0\left(\dfrac{2A_0 q_j}{N_0}\right)} \ge 1$ 时判为 H_i

又 $I_0(x)$ 为单调递增函数，故判决规则可化为 $q_i \ge q_j$ 对 $\forall j \ne i$ 成立，判为 i。

第五次作业

5-2 若观测方程为 $x_i = s + n_i$ $(i = 1, 2, \text{L}, N)$，其中信号 $s \sim N(0, \sigma_s^2)$，噪声 $n_i \sim N(0, \sigma_n^2)(i = 1, 2, \text{L}, N)$ 独立同分布，且信号与噪声满足 $E\{sn_i\} = 0$。求 s 的最

大后验概率估计 $\hat{s}_{MAP}$。

解：

依题意，以信号 s 为条件的观测样本的概率密度函数为

$$f\left(x_1, L, x_N \mid s\right) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{N/2}} \exp\left[-\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}\left(x_i - s\right)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

信号 s 的概率密度函数为 $f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}\right)$

则由上面两式可得

$$\frac{\partial}{\partial s}\ln f\left(x_1, L, x_N \mid s\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left\{\ln\left[\frac{1}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}\left(x_i - s\right)^2}{2\sigma_n^2}\right\}\right]\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left[\ln\frac{1}{\left(2\pi\sigma_n^2\right)^{N/2}} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{N}\left(x_i - s\right)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\ln f(s) = \frac{\partial}{\partial s}\left\{\ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} - \frac{s^2}{2\sigma_s^2}\right]$$

$$= -\frac{s}{\sigma_s^2}$$

最大后验概率准则为 $\hat{\theta}_{MAP} = \max\limits_{\theta} f(\theta \mid \mathbf{x})$，即 $\left[\frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta \mid \mathbf{x})\right]_{\theta=\hat{\theta}_{MAP}} = 0$，又可表示为

$\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\mathbf{x} \mid \theta) + \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\theta)\right]_{\theta=\hat{\theta}_{MAP}} = 0$，将之前结果带入其中可得

$\hat{s}_{MAP} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2 + N\sigma_s^2}\sum\limits_{i=1}^{N} x_i$。

5-4 已知观测信号 $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) + n(t)$ $(0 \le t \le T)$，式子中 $n(t)$ 是零均值，功率谱为 $\frac{N_0}{2}$ 的高斯白噪声，θ 是在 $[0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量，求 A 的最大似

然估计和估计量的均方误差。

解：

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) + n(t)$

$x(t)$ 的似然函数为：

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) + n(t)$

$$f(x \mid A, \theta) = F \cdot \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [x(t) - A\cos(\omega_0 t + \theta)]^2 dt\right\}$$

$$= F \cdot \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [x^2(t)dt - 2\int_0^T x(t)A\cos(\omega_0 t + \theta)dt + A^2\int_0^T \cos^2(\omega_0 t + \theta)dt]\right\}$$

$$= F \cdot \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [x^2(t)dt + \frac{2A}{N_0}\int_0^T x(t)\cos(\omega_0 t + \theta)dt - \frac{A^2 T}{2N_0}\right\}$$

因为 $f(\theta) = \dfrac{1}{2\pi}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$$f(x \mid A) = \int_0^{2\pi} f(x \mid A, \theta)f(\theta)d\theta$$

所以
$$= F \cdot \exp\{-\frac{A^2 T}{2N_0}\}\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [x^2(t)dt\right\} I_0\left(\frac{2Aq}{N_0}\right)$$

其中
$$q^2 = \left[\int_0^T x(t)\sin\omega_0 t\, dt\right]^2 + \left[\int_0^T x(t)\cos\omega_0 t\, dt\right]^2$$

$$\ln f(x \mid A) = \ln F - \frac{A^2 T}{2N_0} - \frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)dt + \ln I_0\left(\frac{2Aq}{N_0}\right)$$

令 $\dfrac{\partial \ln f(x \mid A)}{\partial A} = 0 \Rightarrow -\dfrac{AT}{N_0} + \dfrac{\partial}{\partial A}I_0\left(\dfrac{2Aq}{N_0}\right) + 0$　　　　（1）

假设 SNR，即 $\dfrac{2Aq}{N_0}$ 足够大，则 $I_0\left(\dfrac{2Aq}{N_0}\right) \approx \dfrac{2Aq}{N_0}$

$$(1) \Rightarrow -\frac{AT}{N_0} + \frac{2q}{N_0} = 0 \Rightarrow \hat{A}_{ML} = \frac{2q}{T}$$

由 $q^2 = \left[\int_0^T x(t)\sin\omega_0 t\, dt\right]^2 + \left[\int_0^T x(t)\cos\omega_0 t\, dt\right]^2$

知 $f(q) = \dfrac{q}{\sigma_T^2}\exp\left(-\dfrac{1}{2\sigma_T^2}(q^2 + \dfrac{A^2 T^2}{4})\right)I_0\left(\dfrac{qAT}{2\sigma_T^2}\right)$

所以 $E_q = \int_0^{+\infty} qf(q)dq$；$AT\left(\int_0^{+\infty}\dfrac{q^3}{\sigma_T^4}e^{-\frac{q^2}{2\sigma_T^2}}dq\right)e \xrightarrow{x = \frac{q}{\sigma_T}} AT\int_0^{+\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \dfrac{1}{2}AT$

所以 $E(\hat{A}_{ML}) = \dfrac{2}{T}E(q) = \dfrac{2}{T}\cdot\dfrac{1}{2}AT = A$ （无偏估计）

$\operatorname{var}(q) = \sigma_T^2 = \dfrac{N_0 T}{4}, \quad \operatorname{var}(\hat{A}_{ML}) = \dfrac{4}{T^2}g\dfrac{N_0 T}{4} = \dfrac{N_0}{T}$

5-11. 假定已知信号

$$s_1(t) = a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + a_p \cos p\omega t$$

$$s_2(t) = b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots + b_p \sin p\omega t$$

观测信号 $x(t) = s_1(t) + s_2(t) + n(t)$，$n(t)$ 是均值为 0、均方差为 1 的高斯白噪声。

1) 对 $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots b_p$ 作最小二乘估计。

2) 求 $\tilde{\theta}_{LS}$ 的概率密度函数

解：（1）

$$\mathbf{\theta} = [a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, \dots b_p]^T$$

$$\mathbf{h}(t) = [\cos wt, \cos 2wt, \dots \cos pwt, \sin wt, \dots, \sin pwt]$$

对于连续信号，

$$\xi(\mathbf{\theta}) = \int_0^T [x(t) - \mathbf{h}(t)\mathbf{\theta}]^2 dt$$

假设观察时间为一个周期 $T = 2\pi / w$，则

$$\frac{\partial \xi(\mathbf{\theta})}{\partial \mathbf{\theta}} = \int_0^T -2\mathbf{h}^T(t)[x(t) - \mathbf{h}(t)\mathbf{\theta}]dt$$

令 $\frac{\partial \xi(\mathbf{\theta})}{\partial \mathbf{\theta}} = 0$，得 $\int_0^T \mathbf{h}^T(t)x(t)dt = \int_0^T \mathbf{h}^T(t)\mathbf{h}(t)dt \cdot \hat{\mathbf{\theta}}_{LS}$

又 $\int_0^T \mathbf{h}^T(t)\mathbf{h}(t)dt = diag(\frac{\pi}{w}, \frac{\pi}{w}, \dots, \frac{\pi}{w})$

$$\therefore \hat{\mathbf{\theta}}_{LS} = \frac{w}{\pi}\int_0^T \mathbf{h}^T(t)x(t)dt$$

（2）由于 $x(t) = \mathbf{h}(t) \cdot \mathbf{\theta} + n(t)$，$n(t)$ 服从高斯分布，而 $\hat{\mathbf{\theta}}_{LS}$ 是 $\mathbf{h}^T(t)x(t)$ 的积分，故 $\hat{\mathbf{\theta}}_{LS}$ 服从多维高斯分布。

由于

$$E(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}) = E[\frac{w}{\pi}\int_0^T \mathbf{h}^T(t)x(t)dt] = E[\frac{w}{\pi}\int_0^T \mathbf{h}^T(t)(\mathbf{h}(t)\cdot\boldsymbol{\theta}+n(t))dt]$$

$$= \frac{w}{\pi}\int_0^T \mathbf{h}^T(t)\mathbf{h}(t)\cdot\boldsymbol{\theta}dt + \frac{w}{\pi}\int_0^T \mathbf{h}^T(t)E(n(t))dt$$

$$= \frac{w}{\pi}\int_0^T \mathbf{h}^T(t)\mathbf{h}(t)dt\cdot\boldsymbol{\theta}$$

$$= \boldsymbol{\theta}$$

故 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}$ 是无偏估计，$n(t)$ 项与 $\mathbf{h}(t)\cdot\boldsymbol{\theta}$ 相互独立，$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}$ 的协方差矩阵为

$$C_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}} = E[(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}-\boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}-\boldsymbol{\theta})^T]$$

$$= E[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}^T] - \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}^T$$

$$= E\{\frac{w}{\pi}\int_0^T \mathbf{h}^T(t)(\mathbf{h}(t)\cdot\boldsymbol{\theta}+n(t))dt\cdot\frac{w}{\pi}\int_0^T (\mathbf{h}(t)\cdot\boldsymbol{\theta}+n(t))^T\mathbf{h}(t)dt\} - \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}^T$$

$$= (\frac{w}{\pi})^2 E[\int_0^T \mathbf{h}^T(t)n^2(t)\mathbf{h}(t)dt]$$

$$= (\frac{w}{\pi})^2 \int_0^T \mathbf{h}^T(t)\mathbf{h}(t)E(n^2(t))dt$$

由 $\int_0^T \mathbf{h}^T(t)\mathbf{h}(t)dt = diag(\frac{\pi}{w},\frac{\pi}{w},...,\frac{\pi}{w})$，可得

$$C_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}} = diag(\frac{w}{\pi},\frac{w}{\pi},...,\frac{w}{\pi}), C_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}}^{-1} = (\frac{\pi}{w},\frac{\pi}{w},...,\frac{\pi}{w})$$

则

$$f(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}) = \frac{1}{(2\pi)^p(w/\pi)^p}\exp[-\frac{(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}-\boldsymbol{\theta})^T C_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{LS}-\boldsymbol{\theta})}{2}]$$

5-12 在乘性噪声和加性噪声中观测随机参数 s 为

$$x = \alpha_1 s + \alpha_2$$

其中

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s}\exp\left\{-\frac{(s-m_s)^2}{2\sigma_s^2}\right\}$$

$$f(\alpha_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(\alpha_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}$$

$$f(\alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(\alpha_2-m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}$$

求 s 的线性最小均方误差估计，并把结果推广到 N 次独立观测样本。

解：（1）对单次观察样本

$$\hat{s}_{LMS} = E\{s\} + \text{cov}\{s,x\}\text{cov}^{-1}\{x,x\}\big[x - E\{x\}\big]$$

其中，

$$E\{s\} = m_s, \quad E\{x\} = E\{\alpha_1 s + \alpha_2\} = m_1 m_s + m_2$$

$$\text{cov}\{s,x\} = E\big\{\big(s - E\{s\}\big)\big(x - E\{x\}\big)\big\}$$

$$= E\{sx\} - E\{s\}E\{x\} = m_1\sigma_s^2$$

$$\text{cov}\{x,x\} = E\{x^2\} - E^2\{x\}$$

$$= m_s^2\sigma_1^2 + m_1^2\sigma_s^2 + \sigma_1^2\sigma_s^2 + \sigma_2^2$$

所以，得到

$$\hat{s}_{LMS} = m_s + \frac{m_1\sigma_s^2}{m_s^2\sigma_1^2 + m_1^2\sigma_s^2 + \sigma_1^2\sigma_s^2 + \sigma_2^2}\big(x - m_1 m_s - m_2\big);$$

（2）对 N 次独立观察样本

$$\hat{s}_{LMS} = E\{s\} + \text{cov}\{s,\mathbf{x}\}\text{cov}^{-1}\{\mathbf{x},\mathbf{x}\}\big[\mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\}\big], \quad \mathbf{x} = [x_1, x_2, \mathrm{L}\ , x_N]^T$$

其中，

$$E\{s\} = m_s, \quad E\{\mathbf{x}\} = (m_1 m_s + m_2)[1,1,\mathrm{L}\ ,1]^T$$

$$\text{cov}\{s,\mathbf{x}\} = E\big\{\big(s - E\{s\}\big)\big(\mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\}\big)^T\big\}$$

$$= E\{s\mathbf{x}^T\} - E\{s\}E\{\mathbf{x}^T\} = m_1\sigma_s^2[1,1,\mathrm{L}\ ,1]$$

$$\text{cov}\{\mathbf{x},\mathbf{x}\} = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\} - E\{\mathbf{x}\}E^T\{\mathbf{x}\} = \big(c_{ij}\big)_{N\times N}$$

$$c_{ij} = \begin{cases} m_s^2\sigma_1^2 + m_1^2\sigma_s^2 + \sigma_1^2\sigma_s^2 + \sigma_2^2, & i = j \\ m_1^2\sigma_s^2, & i \neq j \end{cases}$$

所以，有

$$\hat{s}_{LMS} = m_s + m_1\sigma_s^2[1,1,\mathrm{L}\ ,1]\big(c_{ij}\big)_{N\times N}^{-1}\big[\mathbf{x} - (m_1 m_s + m_2)[1,1,\mathrm{L}\ ,1]^T\big]$$

$$= m_s - \frac{N m_1\sigma_s^2(m_1 m_s + m_2)}{m_s^2\sigma_1^2 + N m_1^2\sigma_s^2 + \sigma_1^2\sigma_s^2 + \sigma_2^2} + \frac{m_1\sigma_s^2}{m_s^2\sigma_1^2 + N m_1^2\sigma_s^2 + \sigma_1^2\sigma_s^2 + \sigma_2^2}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

5-18 若观测方程为

$$x_i = s + n_i, \quad i = 1,2,\dots,N$$

已知 n_i，$i = 1,2,\dots,N$ 是均值为零，方差为 σ_n^2 的彼此独立高斯噪声，s 是均值为 0，方差为 σ_s^2 的高斯随机变量。

（1）证明 $\hat{s}_{MAP} = \hat{s}_{MS} = \dfrac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \dfrac{\sigma_n^2}{N}}(\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i)$；

（2）判断估计量是否为无偏估计量

（3）求估计的方差，判断估计量是否为有效估计量

解：

（1）$\hat{s}_{MAP}$ 和 $\hat{s}_{MS}$ 的求法分别见 P228 和 P230，可得

$$\hat{s}_{MAP} = \hat{s}_{MS} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \dfrac{\sigma_n^2}{N}}(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i)$$

（2）由于

$$E(\hat{s}) = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \dfrac{\sigma_n^2}{N}}[\frac{1}{N}E(\sum_{i=1}^{N} x_i)] = 0$$

而 s 的均值也为零，故有 $E(\hat{s}) = E(s) = 0$，所以（1）中估计量为无偏估计量。

（3）依据 Cramer-Rao 规则，克拉美罗界给出了无偏估计的均方误差下界，而对随机单参量 s 而言，只需满足如下公式即可：

$$\frac{\partial \ln f(x,s)}{\partial s} = K(\hat{s} - s)，\hat{s} = \hat{s}_{MAP} = \hat{s}_{MS}$$

而

$$\frac{\partial \ln f(x,s)}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \ln f(x_1,\cdots,x_N \mid s) + \frac{\partial}{\partial s} \ln f(s)$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left\{\ln\left[\frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{N/2}}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - s)^2}{2\sigma_n^2}\right\}\right]\right\} + \frac{\partial}{\partial s}\left\{\ln\left[\frac{1}{(2\pi\sigma_s^2)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}\right\}\right]\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left[\ln\frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{N/2}} - \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - s)^2}{2\sigma_n^2}\right] + \frac{\partial}{\partial s}\left[\ln\frac{1}{(2\pi\sigma_s^2)^{1/2}} - \frac{s^2}{2\sigma_s^2}\right]$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - s)}{\sigma_n^2} - \frac{s}{\sigma_s^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{\sigma_n^2} - \frac{N\sigma_s^2 + \sigma_n^2}{\sigma_n^2\sigma_s^2}s$$

$$\hat{s} - s = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \dfrac{\sigma_n^2}{N}}(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i) - s = \frac{\sigma_s^2}{N\sigma_s^2 + \sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N} x_i - s$$

所以 $\dfrac{\partial \ln f(x,s)}{\partial s} = \dfrac{N\sigma_s^2 + \sigma_n^2}{\sigma_s^2\sigma_n^2}(\hat{s} - s)$，为有效估计。

第六次作业

6-1 设观测信号为 $x(t)=s(t)+n(t)$，其中信号 $s(t)$ 和噪声 $n(t)$ 互不相关，且它们的自相关函数分别为 $R_s(\tau)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|\tau|}$ 和 $R_n(\tau)=\delta(\tau)$. 求对 $s(t)$ 进行估计的非因果维纳滤波器，并计算最小均方误差.

6-1 $S_s(s)=\dfrac{1}{1-s^2}$ $S_n(s)=1$ $S_x(s)=S_s(s)+S_n(s)=\dfrac{2-s^2}{1-s^2}$

$H(s)=\dfrac{S_s(s)}{S_x(s)}$ $\Rightarrow$ $H(s)=\dfrac{1}{2-s^2}$

6-2 设观测信号为 $x(t)=s(t)+n(t)$，其中 $x(t)$ 仅在 $-\infty$ 到当前时刻有值，信号 $s(t)$ 和噪声 $n(t)$ 互不相关，且它们的功率谱密度函数分别为 $S_s(\omega)=\dfrac{2a}{-\omega^2+a^2}$ 和 $S_n(\omega)=1$. 求对 $s(t+\alpha)(\alpha>0)$ 进行估计的维纳滤波器.

6-2. 因果. $S_x(w)=S_s(w)+S_n(w)=\dfrac{a^2+2a-s^2}{a^2-s^2}=\dfrac{(\sqrt{2a+a^2}+s)(\sqrt{2a+a^2}-s)}{(a+s)(a-s)}=\dfrac{\sqrt{2a+a^2}+s}{a+s}\cdot\dfrac{\sqrt{2a+a^2}-s}{a-s}$

$\dfrac{S_{sx}(s)}{S_x^-(s)}=\dfrac{2a}{(a+s)(a-s)}\cdot\dfrac{a-s}{\sqrt{2a+a^2}-s}=\dfrac{2a}{(a+s)(\sqrt{2a+a^2}-s)}=\dfrac{A}{a+s}+\dfrac{B}{\sqrt{2a+a^2}-s}$ ($A=B=\dfrac{2a}{a+\sqrt{a^2+2a}}$)

$H(s)=\dfrac{1}{S_x^+(s)}\left[\dfrac{S_{sx}(s)e^{\alpha s}}{S_x^-(s)}\right]^+$

代入得. $H(s)=\dfrac{a+s}{\sqrt{2a+a^2}+s}\cdot\dfrac{A}{a+s}e^{\alpha s}=\dfrac{2a\cdot e^{\alpha s}}{(a+\sqrt{a^2+2a})(\sqrt{a^2+2a}+s)}$

6-3 设观测信号为 $x(t)=s(t)+n(t)$，其中信号 $s(t)$ 和噪声 $n(t)$ 互不相关且均值均为 0，它们的自相关函数分别为 $R_s(\tau)=\mathrm{e}^{-\alpha\tau}(\alpha>0)$ 和 $R_n(\tau)=\dfrac{N_0}{2}\delta(t)$. 求对 $s(t)$ 进行最优估计的物理不可实现滤波器的冲激响应和估计的均方误差.

解：物理不可实现（非因果）的连续维纳滤波器的频率响应为（6.3.15）式

$$H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{S_s(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\alpha}}{S_s(\omega)+S_n(\omega)}$$

根据傅里叶变换对 $\mathrm{e}^{-a|t|}\leftrightarrow\dfrac{2a}{\omega^2+a^2}$，可以计算出

$$S_s(\omega)=\dfrac{2a}{\omega^2+a^2}, \quad S_n(\omega)=\dfrac{N_0}{2}$$

所以

$$H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{\dfrac{2a}{\omega^2+a^2}}{\dfrac{2a}{\omega^2+a^2}+\dfrac{N_0}{2}}=\dfrac{4a}{N_0\omega^2+N_0a^2+4a}=\dfrac{2a}{N_0\sqrt{a^2+\dfrac{4a}{N_0}}}\dfrac{2\sqrt{a^2+\dfrac{4a}{N_0}}}{\omega^2+a^2+\dfrac{4a}{N_0}}\leftrightarrow\dfrac{2a}{N_0\sqrt{a^2+\dfrac{4a}{N_0}}}\mathrm{e}^{-\sqrt{a^2+\frac{4a}{N_0}}|t|}$$

作傅里叶反变换得到单位冲激响应

$$h(\tau)=\dfrac{2a}{N_0\sqrt{a^2+\dfrac{4a}{N_0}}}\mathrm{e}^{-\sqrt{a^2+\frac{4a}{N_0}}|t|}$$

最小均方误差为

$$\mathrm{E}\left\{e^2(t)\right\}_{\min}=R_s(0)-\int_{-\infty}^{+\infty}h(\lambda)R_s(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

6-5 观测信号为 $x(t)=s(t)+n(t)$，$x(t)$ 仅在负无穷到当前时刻有值.

（1）若信号 $s(t)$ 和噪声 $n(t)$ 互不相关，且它们的功率谱密度分别为

$S_s(\omega)=\dfrac{1}{1+\omega^2}$ 和 $S_n(\omega)=1$. 求对 $\dfrac{ds(t)}{dt}$ 进行估计的维纳滤波器。

（2）请问，$\dfrac{ds(t)}{dt}=\dfrac{d\hat{s}(t)}{dt}$ 是否成立？

解：（1）由题意知，$y(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)x(\tau)d\tau$，$h(t)$ 为物理可实现维纳滤波器

$$H(s)=\frac{1}{S_x^+(s)}[\frac{S_{gx}(s)}{S_x^-(s)}]^+$$

由于 $g(t)=\dfrac{ds(t)}{dt}$

$$
\begin{aligned}
R_{gx}(t_1-t_2) &= E\left[g(t_1)x(t_2)\right]\\
&=\frac{d}{dt_1}E\left[s(t_1)x(t_2)\right]\\
&=\frac{d}{dt_1}E\left[s(t_1)s(t_2)+s(t_1)n(t_2)\right]\\
&=\frac{d}{dt_1}R_s(t_1-t_2)\\
&=\frac{d}{d\tau}R_s(\tau)
\end{aligned}
$$

做拉氏变换得：

$$S_{gx}(s)=sS_s(s)=\frac{s}{1-s^2}$$
$$S_x(s)=\frac{1}{1-s^2}+1=\frac{(\sqrt{2}-s)(\sqrt{2}+s)}{1-s^2}$$
$$\diamondsuit H_1(s)=\frac{S_{gx}(s)}{S_x^-(s)}=\frac{s}{(\sqrt{2}-s)(s+1)}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\frac{1}{\sqrt{2}-s}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\frac{1}{s+1}$$

$$则 H_1^+(s)=-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\frac{1}{s+1}$$
$$又 Q\, S_x^+(s)=\frac{(\sqrt{2}+s)}{(1+s)}$$
$$\therefore H(s)=-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\frac{1}{s+\sqrt{2}}$$
$$h(t)=-\frac{1}{1+\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}t}U(t)$$

（2）由于 $G(s)=sS(s)$，$\hat{G}(s)=-\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\dfrac{1}{s+\sqrt{2}}X(s)$，$X(s)$ 中包含噪声频谱,故其应该是一

个随机变量,而 $\dfrac{ds(t)}{dt}$ 应该为一确定波形,故两者不能完全相同.

6-9 考虑离散情况下的维纳滤波.已知观测信号为 $x(k) = s(k) + n(k)$,信号 $s(k)$ 及噪声 $n(k)$ 均为广义平稳序列，且 $s(k)$ 和 $n(k)$ 互不相关，它们的离散功率谱密度函数分别为

$$P_s(z) = \frac{0.36}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)} \text{ 和 } P_n(z) = 1 \cdot \text{求物理可突现及物理不可实现的维纳滤波器.}$$

解：（不用计算最小均方误差）

$$P_x(z) = P_s(z) + P_n(z) = \frac{0.36}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)} + 1$$

$$= \frac{1.6 \times (1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.5z)}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)}$$

（1） 对于物理可实现维纳滤波器

$$P_x^+(z) = \frac{1.6 \times (1 - 0.5z^{-1})}{1 - 0.8z^{-1}}, \quad P_x^-(z) = \frac{1 - 0.5z}{1 - 0.8z}$$

$$\frac{P_{gx}(z)}{P_x^-(z)} = \frac{P_s(z)}{P_x^-(z)} = \frac{0.36}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.5z)} = \frac{0.6}{1 - 0.8z^{-1}} + \frac{0.6}{(1 - 0.5z)}$$

可得 $\left[\frac{P_{gx}(z)}{P_x^-(z)}\right]^+ = \frac{0.6}{1 - 0.8z^{-1}}$，得到

$$H(z) = \frac{1}{P_x^+(z)}\left[\frac{P_{gx}(z)}{P_x^-(z)}\right]^+ = \frac{1 - 0.8z^{-1}}{1.6 \times (1 - 0.5z^{-1})} \times \frac{0.6}{1 - 0.8z^{-1}} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

（2） 对于物理不可实现维纳滤波器

$$H(z) = \frac{P_{gx}(z)}{P_s(z) + P_n(z)} = \frac{P_s(z)}{P_s(z) + P_n(z)}$$

$$= \frac{\dfrac{0.36}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)}}{\dfrac{0.36}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)} + 1} = \frac{0.225}{(1 + 0.5z^{-1})(1 - 0.5z)}$$