例1：设零均值的平稳随机信号 $x(t)$ 输入到一个滤波器 $h(t)$，输出为 $y(t)$。令 x_1, x_2, x_3, x_4 为 $x(t)$ 的样本，并假设

$$E\{x_1x_2x_3x_4\} = E\{x_1x_2\}E\{x_3x_4\} + E\{x_1x_3\}E\{x_2x_4\} + E\{x_1x_4\}E\{x_2x_3\}$$

证明输出存在以下关系：

$$E\{y(t_1)y(t_2)y(t_3)y(t_4)\} = R_y(\Delta_{12})R_y(\Delta_{34}) + R_y(\Delta_{13})R_y(\Delta_{24}) + R_y(\Delta_{14})R_y(\Delta_{23})$$

式中 $\Delta_{ij} = t_i - t_j$

例2：设平稳随机序列 x_k 具有下列自相关函数

（1） $R_x(k)=0.5^{|k|}$ ，所有k

（2） $R_x(k)=0.5^{|k|}+(-0.5)^{|k|}$ ，所有k

请求产生此随机序列的模型。

例3：设噪声中存在L个具有随机相位的复正弦信号如下：

$$x_n = w_n + \sum_{i=1}^{L} A_i \exp\left[j\left(\omega_i n + \phi_i\right)\right]$$

式中 $\phi_i, i = 1, 2, \cdots, L$ 为均匀分布的随机相位，它们互相独立，

w_n 为零均值方差为 σ_w^2 的白噪声，且与相位互相独立。

(1) 证明 $E\left\{e^{j\phi_i} e^{-j\phi_k}\right\} = \delta_{ik}$

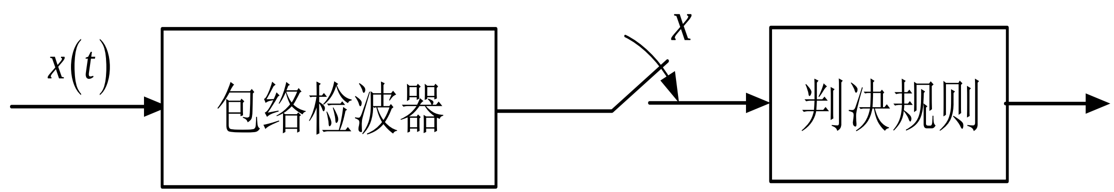
(2) 求 x_n 的自相关函数。

(3) 将 x_n 通过一个传递函数为 $H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_M z^{-M}$ 的滤波器，滤波后的输出为 y_n ，求输出平均功率。

例4：考虑下图所示的接收机，各假设：

$H_0: \quad x(t) = n(t)$

$H_1: \quad x(t) = s(t) + n(t)$



其中 $s(t)$和$n(t)$ 都是零均值的窄带高斯信号，相互统计独立，且方差分别为 σ_s^2和σ_n^2 。

(1) 如果用一个样本做检测，请设计似然比判决规则，并证明：

$$P(D_1|H_1) = P(D_1|H_0)^{\frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2+\sigma_n^2}}$$

(2) 如果用M个统计独立样本做检测，请设计似然比判决规则，并计算虚假概率和检测概率。

例5：观测值为 $y=\sum_{i=0}^{n} x_i$ ，其中 x_i 是独立同分布的高斯随机变量，均值为零方差为 σ^2 。样本数n是服从Poisson分布的随机变量。

$$P(n=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,\cdots$$

二元假设如下：

$$H_0: \ n\geq 2$$

$$H_1: \ n\leq 1$$

求似然比判决规则。

例6：考虑在噪声中检测类噪声信号问题：

$$H_0: \quad x(t) = n(t) \qquad\qquad 0 \le t \le T$$
$$H_1: \quad x(t) = s(t) + n(t)$$

其中 $s(t)$和$n(t)$ 都是零均值的高斯信号，相互统计独立。带宽限于 $|\omega| < \Omega = 2\pi B$ ，功率谱密度分别为 $\frac{S_0}{2}$和$\frac{N_0}{2}$ 。请设计似然比接收机。

例7：已知白噪声背景下的确知信号

$$s(t)=\begin{cases} A & 0\le t\le T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 求匹配滤波器的输出峰值信噪比。

(2) 若不用匹配滤波器，而用一个简化的线性滤波器 $\alpha\ge 0$

$$h(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & 0\le t\le T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求输出峰值信噪比，以及使输出峰值信噪比最大所对应的 α 值，并与 (1) 的匹配滤波器的性能作比较。

(3) 若采用如下滤波器

$$h(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & t\ge 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

求输出峰值信噪比，并证明此时的信噪比总是小于等于(2)中的信噪比。

(4) 若采用高斯滤波器

$$h(t)=\frac{1}{\alpha}\exp\left\{-\frac{(t-\tau_0)^2}{2\alpha^2}\right\},\quad -\infty<t<\infty,\ \tau_0>0$$

给出输出信噪比的表达式，并说明何时信噪比达到最大。

例8：考虑在白噪声和色噪声的混合中检测已知信号：

$$\begin{aligned} H_0: &\ x(t) = m(t) + n(t) \\ H_1: &\ x(t) = s(t) + m(t) + n(t) \end{aligned} \qquad 0 \le t \le T$$

其中 $s(t)$是已知信号，$m(t)$ 为零均值自相关函数为$R_m(\tau)$的高斯色噪声，$n(t)$为零均值功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声，相互统计独立。请利用纽曼-皮尔逊准则，设计最佳接收机。

例9：考虑如下形式窄带信号的检测：

$$
\begin{aligned}
H_0 &: x(t) = n(t) \\
H_1 &: x(t) = Af(t)\sin(\omega_c t + \theta) + n(t)
\end{aligned}
\qquad 0 \le t \le T
$$

其中包络 $f(t)$ 是慢变化的，$n(t)$是均值为零、功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声。信号幅度A和中心频率ω_c是常数，且 $2\pi/\omega_c \ll T$，信号相位 θ 是均匀分布的随机变量。请设计似然比接收机。

例10：考虑如下的二元假设检验问题。设：

$$\begin{aligned} H_0:&\quad x(t)=B\cos(\omega_0 t+\phi)+n(t) \\ H_1:&\quad x(t)=A\cos(\omega_1 t+\theta)+B\cos(\omega_0 t+\phi)+n(t) \end{aligned} \qquad 0\le t\le T$$

其中 A,B,ω_0,ω_1 为已知常数，$2\pi/\omega_0, 2\pi/\omega_1, 2\pi/(\omega_1-\omega_0)$ 均远小于T，θ,ϕ 均是均匀分布的随机变量，相互独立。$n(t)$ 是均值为零功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声。

(1) 请设计似然比接收机。

(2)信号 $B\cos(\omega_0 t+\phi)$ 对接收机性能有何影响。