MAIA 1: Topologie i przestrzenie metryczne

1 Zbiory

1. X - przestrzeń/zbiór
2. $A \subseteq X$
3. $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$
4. $\emptyset = X^c$ zbiór pusty/podzbioru
5. 2^X - rodzina podzbiorów X

$A^B \Rightarrow$ wszystkie funkcje $f : B \to A$

2 Dla $A_\alpha \subset X$

$\alpha \in I$ (dowolny zbiór indeksów)

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \in X : \exists_{\alpha \in I} x \in A_\alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \forall_{\alpha \in I} x \in A_\alpha\}$$

3 Dla $A_n \subset X,\ n \in \mathbb{N}, \ldots$

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \limsup_n A_n$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right)$$

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \liminf_n A_n$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k \geq n} A_k \right)$$

Fakt:

1. $\lim_n A_n \subset \liminf_n A_n$
2. $(\lim_n A_n)^c = \liminf_n A_n^c$
3. $(\lim_n A_n)^c = \liminf_n A_n^c$

Def: $\lim_n A_n = \lim_n A_n \Rightarrow \lim_n A_n = \liminf_n A_n = \limsup_n A_n$

4 CP

$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$

4.1 Topologia

4.1.1 Przestrzeń topo. (X, τ) $\rightarrow$ rodzina podzbiorów w sensie

(a) $A_\alpha \in \tau,\ \alpha \in I \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$

(b) $A_1, \ldots, A_n \in \tau,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \tau$

(c) $\emptyset, X \in \tau$

τ - topologia
$A \in \tau \Rightarrow$ open set
closed set: A^c

4.2 Funkcje ciągłe

given (X, τ_1), (Y, τ_2)
$f : X \rightarrow Y$ jest ciągła iff

$$\forall_{A \in \tau_2} f^{-1}[A] \in \tau_1$$

$$\{x \in X : f(x) \in A\}$$

5 Przestrzeń metryczna (X, d)

$d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ takie że:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in X \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

6 Kula

Dla $x_0 \in X,\ R > 0$

$$B(x_0, R) = \{x \in X : d(x_0, x) < R\}$$

closed ball, sphere

7 Zbiór $A \subset X$ jest otwarty w X iff

$$\forall x \in A\ \exists R > 0 \quad B(x, R) \subset A$$

Fakt: Tak zdef. rodzina zbiorów otwartych jest topologią.

przykład $X = \mathbb{R}^2$

$d_0((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} 0 & \text{if } (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$

d_1 - Euclidea d_2 - metryka taksówkowa

8 Przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{K}$

has addition and number defined
$\forall x, y \in X \ \forall \alpha, \beta \in X \quad \alpha x + \beta y \in X$

9 Przestrzeń unormowana

$(X, \|\cdot\|) \to \|\cdot\| : X \to [0, \infty)$

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x \in X \ \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3. $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Fakt: $d(x, y) = \|x - y\|$ jest metryką na X

przykład $X = \mathbb{R}^n \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

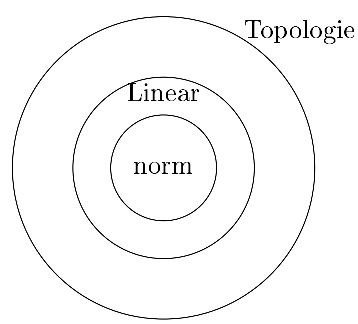
$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$$

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum x_i^p\right)^{1/p} \quad (p \geq 1)$$

$$\ell_p = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

$$\ell_\infty = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} : \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|\}$$

Topologie



10 Unitary Space $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

Linear space on $\mathbb{K}$

$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$

a) $\forall x, y \in X \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

b) $\forall y_1, y_2, \alpha, \beta, z \quad \langle \alpha x + \beta y_1, z \rangle$
$$= \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y_1, z \rangle$$

c) $\forall x \in X_{x \neq 0} \langle x, x \rangle > 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Fakt: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ is a norm

przykład: $X = \mathbb{R}^n, \langle x, y\rangle = \sum x_i \cdot y_i$
$\|x\| = \left(\sum x_i^2\right)^{1/2}$

11 Własności metryki przestrzeni

11.1 Nierówność Cauchy'ego-Schwarza

$\forall x, y \in X \quad |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

$$\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \in [-1, 1]$$

11.2 Tw. Pitagorasa $(x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2)$

$$\|\sum x_k\|^2 = \sum \|x_k\|^2$$

11.3 $f(y, y) = \arccos\left(\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}\right)$

zbiory ciągłe

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in X \; d(x_1, x_2) < \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, m > 0 \; d(x_1, x_m) < \varepsilon$

$(a) \Rightarrow (b) \quad (b) \Rightarrow (a)$ to przykład zupełnie

przykład
$X = [0, 1] \quad d(x, y) = |x - y| \quad x_n = \frac{1}{n}$