C187暑期2022

第2场 试题讲简

Maiev（网络流24题）

求最大的k，使1..k可以划分成n组，每组排序后相邻项之和是完全平方数

20%的数据，n≤5
50%的数据，n≤10
70%的数据，n≤100
100%的数据，n≤10000

Maiev

→ **暴力（枚举划分）：** $O(B_n)$，**50分**

打n=1..10的表找规律：$ans = f_n = \lfloor (n+1)^2/2 - 1 \rfloor$

→ **二分答案**

以$a < b$ & $a + b$是平方数的条件建图

转化为最小路径覆盖问题（模板题，拆点转为二分图匹配问题）

复杂度：$O(n^3 \log n)$，70分

→ **任意连续n+1个数中，一定有2数相邻，其和必须是平方数**

设答案为x，最大的一组平方数为r^2

$\lceil (r-1)^2/2 \rceil, .. \lfloor r^2/2 \rfloor$这段数中**任2个之和都非平方数**

则$\lfloor r^2/2 \rfloor - \lceil (r-1)^2/2 \rceil + 1 \le n \Leftrightarrow r - 1 \le n$

→ **另方面，**$x - n, .. x$**至少有2个相邻，**$(n-1)^2 \ge r^2 \ge 2x - 2n + 1$

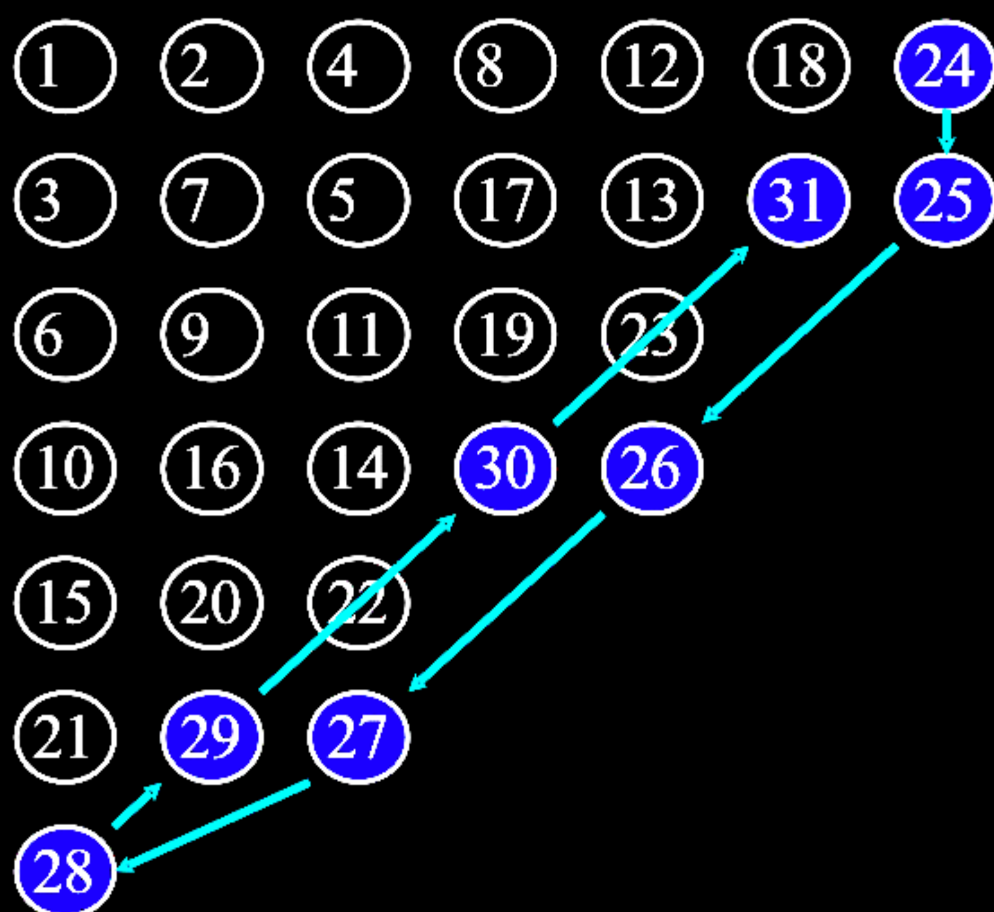
$\Leftrightarrow x \le \lfloor (n+1)^2/2 - 1 \rfloor$

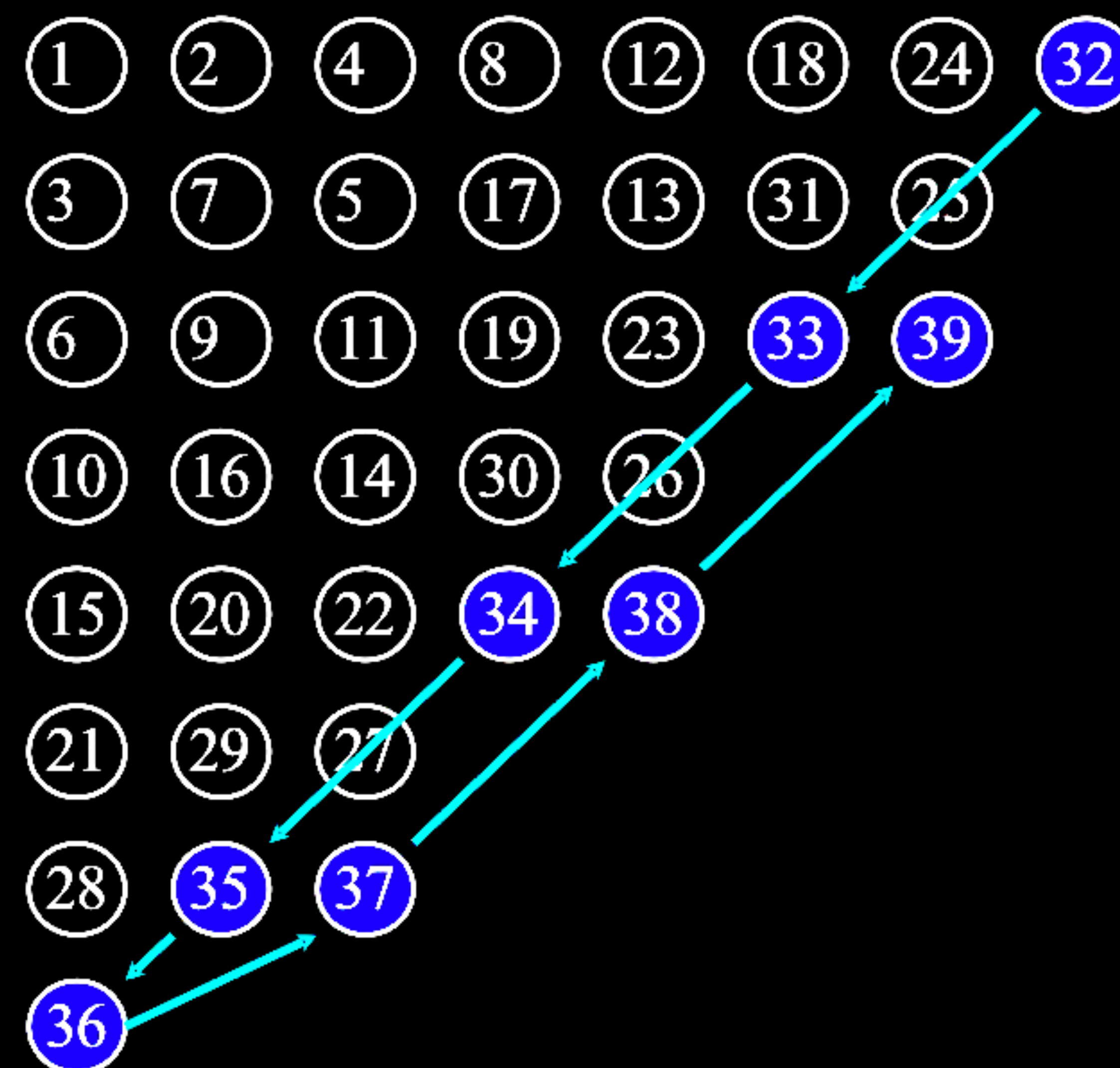
$$x \le \lfloor (n+1)^2/2 - 1 \rfloor$$

Maiev

→ **可行性：** 通过如下贪心思想构造

核心思想是相邻两趟反向顺序使公差正好抵消





Malfurion（COCI）

给定集合$\{h_1 .. h_n\}$，求其划分为2组使组内排序后都是等差数列。（有一些细节约束仅为保证方案唯一性）

20%的数据，n≤15

50%的数据，n≤300

100%的数据，2≤n≤100000，1≤h_i≤1e9

Maiev

→ **暴力：$O(2^n)$，20分**

用足对称性/可行性剪枝其实是基本可以过的，想想为什么

（期望性能还要高于正解，基本是线性的）

→ **头两项就决定了等差数列**

先将h排序，h_1, h_2, h_3至少有2项是同一组（玛组）前两项，枚举3种情况

则玛组（可能）的后续项都确定下来了

→ **把玛组以期望的值往后接，直到剩余的数也形成等差数列为止**

暴力判断等差数列：$O(n^2)$，50分

减量式判断等差数列（官方正解）：

维护2个set，分别存剩下的数和剩下的所有相邻数的差

每提走1个数，相邻数的差至多**删2个加1个**

复杂度：$O(n \log n)$

Kaelthas（6省联选）

→ 题意较长不复述了，直接看原题

→ $A = B = \infty$（不能调整）

$T = \max_{i=1}^{m} d_i$，$ans = C\sum_{j=1}^{n}\max(T - t_i, 0)$，10分

→ $B = \infty$（+10分）

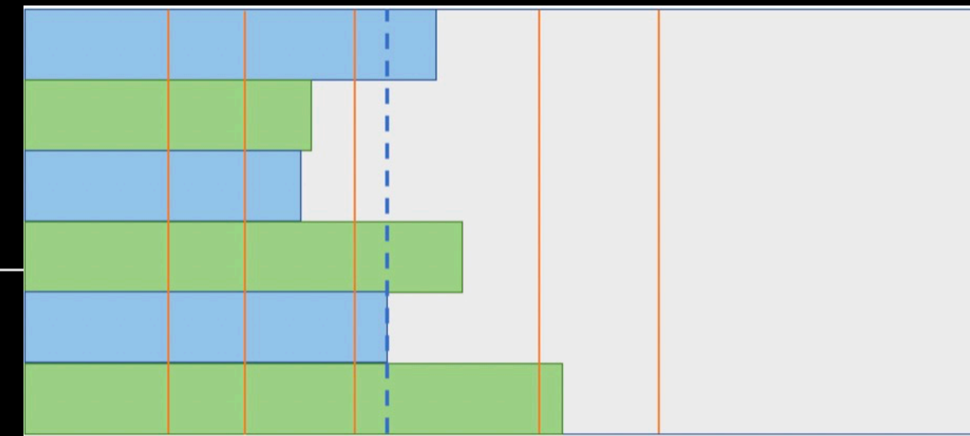
对同样的调整次数，目标函数只取决于T，不妨枚举T

因A类调整保持d的总和，故$\bar{d} \le T \le \max d_i$

$$ans = A\sum_{i=1}^{m}\max(b_i - T, 0) + C\sum_{j=1}^{n}\max(T - t_i, 0)$$

复杂度：$O(n)$

Kaelthas（6省联选）



→ $C=\infty$（不能逾期），+10分

$T=\min\limits_{i=1}^{n} t_i$，因$A\le B$，优先用A填，不够的再用B挖

→ 以上部分分已经基本把正解思路勾画出来了

枚举T，如$T\ge \bar{b}$

$$ans = A\sum_{i=1}^{m}\max(b_i - T, 0) + C\sum_{i=1}^{n}\max(T - t_i, 0)$$

否则$ans = A\sum_{i=1}^{m}\max(T - b_i, 0) + B\sum_{i=1}^{m}|T - b_i| + C\sum_{i=1}^{n}\max(T - t_i, 0)$

→ 暴力算这些式子是$O(n^2)$，60分

对绝对值、max之类，预先排序b_i, t_i，二分或蠕动找到分割点，再用前缀和

复杂度：$O(n\log n)\sim O(n)$（线性需要计数排序）

→ 事实上还可证明ans关于T分段下凸，可二分枚举T，但复杂度不会再优了

Dalaran（COCI）

给定一个带点权D_i的森林，总共n个顶点，选一个边子集，求其连接的点数最多，且这些点权和不超过S（多组问询S）

20%的数据，一条链，S_i≤1000
50%的数据，一条链
另30%的数据，n≤100
100%的数据，n≤1000, Q≤200000, D_i, S_i≤1e9

Dalaran（COCI）

→ **其实这个题还是挺常规的套路（虽然比较繁）**

→ **单链情形：** 序列DP

因S的值域较大，使用**优化目标转换**（如枚举S值域20分）

f_{ijx} = 处理到第i条边，选j个点，边i选不选为x，最小权和

这里以$(i, i+1)$为第i条边

决策： 上条边选不选

$$f_{ij0} = \min(f_{i-1,j,0}, f_{i-1,j,1})$$

$$f_{ij1} = \min(f_{i-1,j-2,0} + D_i + D_{i+1}, f_{i-1,j-1,1} + D_{i+1})$$

边界：$f_{0,0,0} = 0, f_{0,j>0,x} = f_{0,0,1} = \infty$

复杂度： $O(n^2)$（50分）

Dalaran（COCI）

→ **这种DP搬到树（森林）上也就是个常规套路（树上二次DP）**

森林加个虚拟的根，令$D_0 = \infty$或强制不能选

$f_{ujx} =$ 子树u，选j个点，u选不选为x，最小权和

边界：$f_{leaf,0,0} = 0, f_{leaf,j>0,x} == f_{leaf,0,1} = \infty$

→ **为求f，需决策j个点分解到各子树的拆分方案，又是1个内层DP**

$h_{ijx} =$ u及其前i个子树选j个点，u选不选为x，最小权和

对不同u，h可复用，故不需带维度u，$i \le deg(u)$

$$h_{ij0} = \min_{j'=0}^{j}(h_{i-1,j-j',0} + f_{v_i,j',0}, h_{i-1,j-j',0} + f_{v_i,j',1})\text{（}v_i = \text{u第i个儿子）}$$

$$h_{ij1} = \min_{j'=0}^{j}(h_{i-1,j-j',0} + f_{v_i,j',0} + D_u, h_{i-1,j-j',0} + f_{v_i,j',1})$$

边界：$h_{0,0,0} = 0, h_{0,j>0,x} = h_{0,0,1} = \infty$

Dalaran（COCI）

→ **这类复杂度记结论也行，粗放点就是**$O(n^3)$
精细控制就是$O(n^2)$，且必须用推动式的DP

→ **考虑对u的内层dp**

x只影响常数，$i \le deg_u,\ j - j' \le \sum_{k=1}^{i-1} sz_{v_k},\ j' \le sz_{v_i}$

$$\sum_{u=1}^{n}\sum_{i=1}^{deg_u}\left(sz_{v_i}\sum_{k=1}^{i-1} sz_{v_k}\right) = \sum_{u=1}^{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{deg_u} sz_{v_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{deg_u} sz_{v_i}^2\right)$$

$$= \sum_{u=1}^{n}\left(sz_u^2 - \sum_{i=1}^{deg_u} sz_{v_i}^2\right) = O(n^2)$$