

信奥算法



最短路问题

Floyd-Warshall算法

任意两点间最短路

多源多汇

城际高铁1

输入n个城市之间的直达高铁，从i号到j号城市是否有直达高铁用二维数组f[i][j]为1或0表示。求从任意城市i到城市j是否可以通过一系列高铁换乘而到达？ $n \leq 100$

输入样例

```
2
0 0
1 0
```

输出样例

```
0 0
1 0
```

输入样例

```
3
0 1 0
0 0 1
1 0 0
```

输出样例

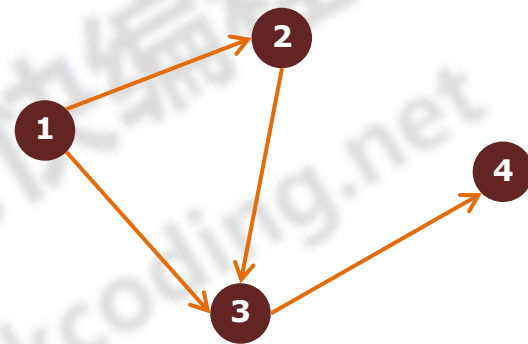
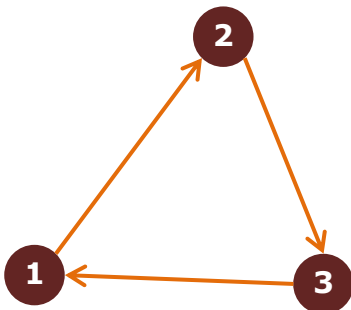
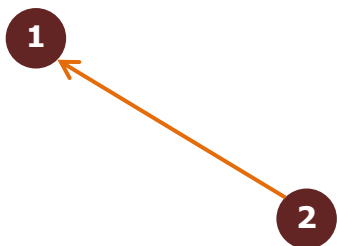
```
1 1 1
1 1 1
1 1 1
```

输入样例

```
4
0 1 1 0
0 0 1 0
0 0 0 1
0 0 0 0
```

输出样例

```
0 1 1 1
0 0 1 1
0 0 0 1
0 0 0 0
```



城际高铁1

输入 n 个城市之间的直达高铁，从 i 号到 j 号城市是否有直达高铁用二维数组 $f[i][j]$ 为1或0表示。求从任意城市 i 到城市 j 是否可以通过一系列高铁换乘而到达？ $n \leq 100$

每个节点代表
什么含义？

每条边代表
什么含义？

为什么是有向边？
为什么不是无向边？

输入样例

```
3
0 1 0
0 0 1
1 0 0
```

输出样例

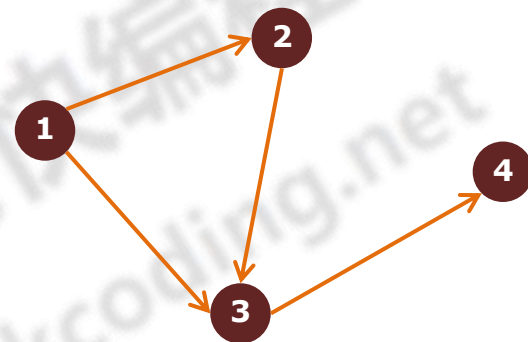
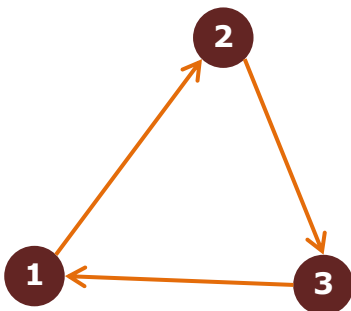
```
1 1 1
1 1 1
1 1 1
```

输入样例

```
4
0 1 1 0
0 0 1 0
0 0 0 1
0 0 0 0
```

输出样例

```
0 1 1 1
0 0 1 1
0 0 0 1
0 0 0 0
```



代码： 城际高铁1

```
1  #include<iostream>
2  using namespace std;
3  const int N=109;
4  int n,f[N][N];
5  int main(){
6      cin>>n;
7      for(int i=1;i<=n;i++)
8          for(int j=1;j<=n;j++)
9              cin>>f[i][j];
10     for(int k=1;k<=n;k++)
11         for(int i=1;i<=n;i++)
12             for(int j=1;j<=n;j++)
13                 f[i][j]=f[i][j]||f[i][k]&&f[k][j];
14     for(int i=1;i<=n;i++,cout<<endl)
15         for(int j=1;j<=n;j++)cout<<f[i][j]<<" ";
16     return 0;
17 }
```

思考f[i][j]的含义如何转变？

算法分析

思考 $f[i][j]$ 的含义如何转变?

输入后,三重循环前 $f[i][j]$ 代表从 i 到 j 有没有直达

```
10     for(int k=1;k<=n;k++)
11         for(int i=1;i<=n;i++)
12             for(int j=1;j<=n;j++)
13                 f[i][j]=f[i][j]||f[i][k]&&f[k][j];
```

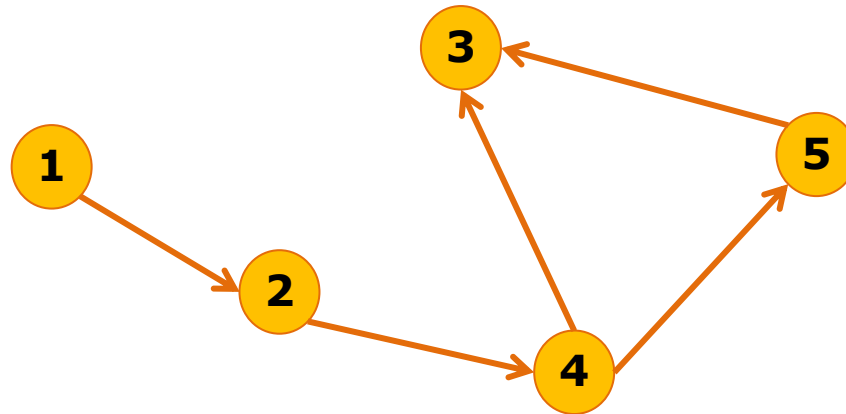
k 为1的循环结束后 $f[i][j]$ 代表从 i 到 j 能否借助1号城市到达

k 为2的循环结束后 $f[i][j]$ 代表从 i 到 j 能否借助1,2号城市到达

k 为3的循环结束后 $f[i][j]$ 代表从 i 到 j 能否借助1,2,3号城市到达

k 为 n 的循环结束后 $f[i][j]$ 代表从 i 到 j 能否借助1,2,..., n 号城市到达

0	1	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	0	1	0	0



0	1	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	0	1	0	0

k=1

0	1	0	1	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	0	1	0	0

k=2

0	1	0	1	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	0	1	0	0

k=3

0	1	1	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	0	1	0	0

k=4

0	1	1	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	0	1	0	0

k=5

$f[][]$ 数组不是邻接矩阵

邻接矩阵

$d[i][j]$ 代表从i到j能否直达

刚完成输入后

$f[i][j]$ 代表从i到j能否直达

k为1的循环结束后

$f[i][j]$ 代表从i到j能否借助1号城市到达

k为2的循环结束后

$f[i][j]$ 代表从i到j能否借助1,2号城市到达

k为3的循环结束后

$f[i][j]$ 代表从i到j能否借助1,2,3号城市到达

k为n的循环结束后

$f[i][j]$ 代表从i到j能否借助1,2,...,n号城市到达

因为f含义在变化
一般注释为最终含义

严格讲f数组应该是3维数组 $f[i][j][k]$
但是[k]维度被隐藏了

城际高铁2

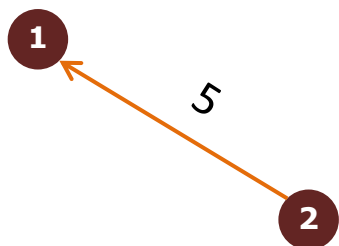
输入 n 个城市之间的直达高铁，从 i 号到 j 号城市直达高铁的时间用二维整数数组 $t[i][j]$ 表示。若 i 到 j 无法直达，则 $t[i][j]$ 为-1。求从任意城市 i 到城市 j 最少时间？ $n \leq 100$

输入样例

```
2
-1 -1
5 -1
```

输出样例

```
-1 -1
5 -1
```

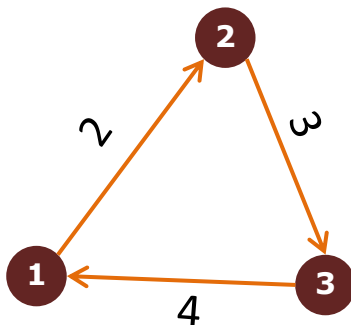


输入样例

```
3
-1 2 -1
-1 -1 3
4 -1 -1
```

输出样例

```
9 2 5
7 9 3
4 6 9
```

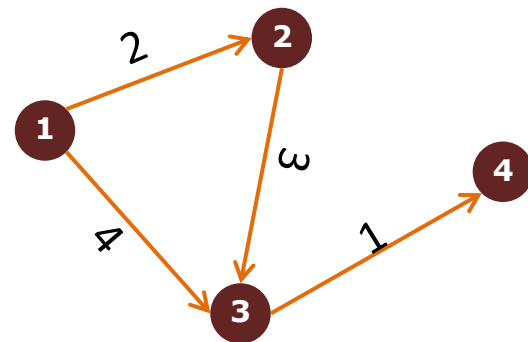


输入样例

```
4
-1 2 4 -1
-1 -1 3 -1
-1 -1 -1 1
-1 -1 -1 -1
```

输出样例

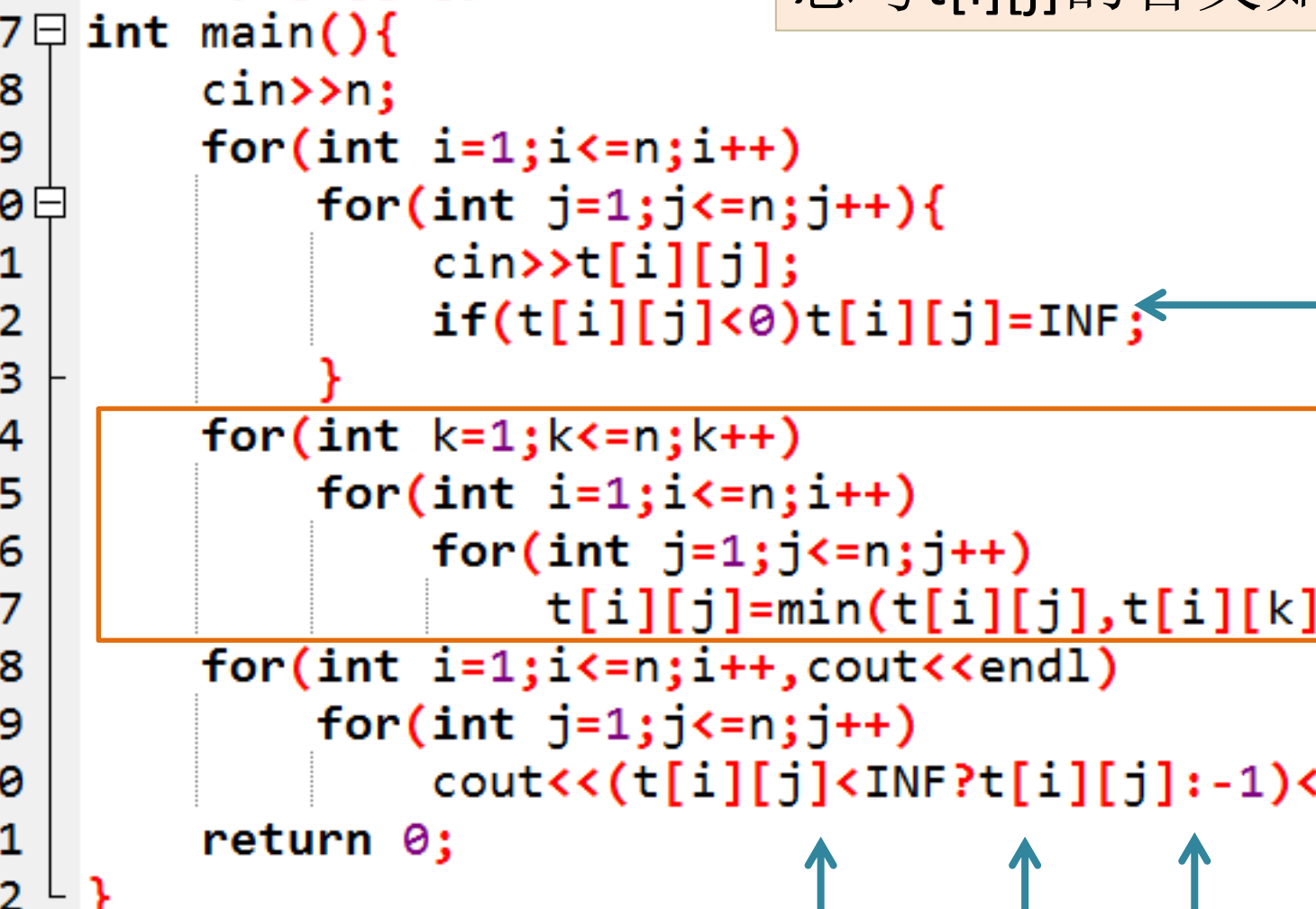
```
-1 2 4 5
-1 -1 3 4
-1 -1 -1 1
-1 -1 -1 -1
```



代码： 城际高铁2

思考 $t[i][j]$ 的含义如何转变？

```
1  #include<iostream>
2  #include<algorithm>
3  using namespace std;
4  const int N=109;
5  const int INF=1e8;
6  int n,t[N][N];
7  int main(){
8      cin>>n;
9      for(int i=1;i<=n;i++)
10         for(int j=1;j<=n;j++){
11             cin>>t[i][j];
12             if(t[i][j]<0)t[i][j]=INF;
13         }
14         for(int k=1;k<=n;k++)
15             for(int i=1;i<=n;i++)
16                 for(int j=1;j<=n;j++)
17                     t[i][j]=min(t[i][j],t[i][k]+t[k][j]);
18         for(int i=1;i<=n;i++,cout<<endl)
19             for(int j=1;j<=n;j++)
20                 cout<<(t[i][j]<INF?t[i][j]:-1)<<" ";
21         return 0;
22 }
```



代码：城际高铁2

思考 $t[i][j]$ 的含义如何转变？

输入后,三重循环前 $t[i][j]$ 代表从 i 到 j 有没有直达

```
14   for(int k=1;k<=n;k++)
15       for(int i=1;i<=n;i++)
16           for(int j=1;j<=n;j++)
17               t[i][j]=min(t[i][j],t[i][k]+t[k][j]);
```

k 为1的循环结束后 $t[i][j]$ 代表从 i 到 j 借助1号城市的最短路

k 为2的循环结束后 $t[i][j]$ 代表从 i 到 j 借助1,2号城市的最短路

k 为3的循环结束后 $t[i][j]$ 代表从 i 到 j 借助1,2,3号城市的最短路


k 为 n 的循环结束后 $t[i][j]$ 代表从 i 到 j 借助1,2,..., n 号城市的最短路

另类代码

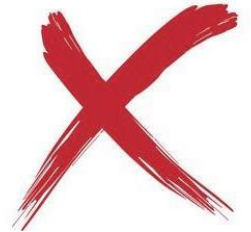
i,j,k循环变量的顺序是否可以改变？

以下代码哪个正确？ 哪个错误？

```
13 for(int k=1;k<=n;k++)  
14     for(int j=1;j<=n;j++)  
15         for(int i=1;i<=n;i++)  
16             t[i][j]=min(t[i][j],t[i][k]+t[k][j]);
```



```
13 for(int i=1;i<=n;i++)  
14     for(int j=1;j<=n;j++)  
15         for(int k=1;k<=n;k++)  
16             t[i][j]=min(t[i][j],t[i][k]+t[k][j]);
```



错误代码

请同学找一个
最简单的反例
使该程序出错

```
13 for(int i=1;i<=n;i++)
14     for(int j=1;j<=n;j++)
15         for(int k=1;k<=n;k++)
16             t[i][j]=min(t[i][j],t[i][k]+t[k][j]);
```



1号到3号应该是30

该程序误认为1号走不到3号

城际高铁3

输入n个城市之间的直达高铁，从i号到j号城市是否有直达高铁用二维数组f[i][j]为1或0表示。从哪些城市可以通过一系列高铁换乘再次回到该城市？如果没有就输出None

输入样例

```
2
0 0
1 0
```

输出样例

None

输入样例

```
3
0 1 0
0 0 1
1 0 0
```

输出样例

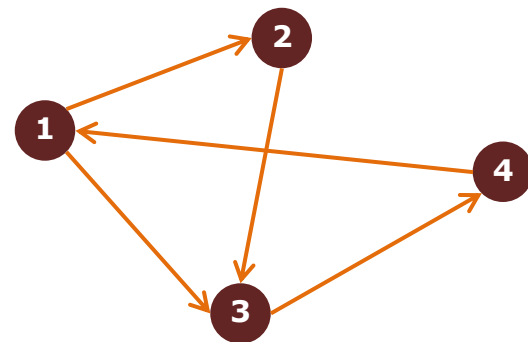
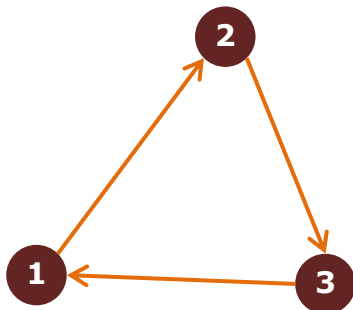
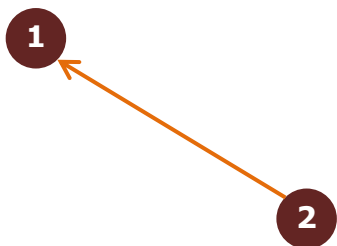
1 2 3

输入样例

```
4
0 1 1 0
0 0 1 0
0 0 0 1
1 0 0 0
```

输出样例

1 2 3 4



思考：如何找“环”？

代码： 城际高铁3

```
1 #include<iostream>
2 #include<algorithm>
3 using namespace std;
4 const int N=109;
5 const int INF=1e8;
6 int n,f[N][N];
7 int main(){
8     cin>>n;
9     for(int i=1;i<=n;i++)
10         for(int j=1;j<=n;j++)
11             cin>>f[i][j];
12     for(int k=1;k<=n;k++)
13         for(int i=1;i<=n;i++)
14             for(int j=1;j<=n;j++)
15                 f[i][j]=f[i][j]||f[i][k]&&f[k][j];
16     for(int i=1;i<=n;i++)
17         if(f[i][i])cout<<i<<" ";
18     return 0;
19 }
```

思考f[i][i]的含义？

None如何
处理？

图的分类

有向图

双向图

无向图

有权图

无权图

有向有权图，有向无权图
无向有权图，无向无权图

各例题分别是哪一类图？

图论建模

将原问题描述转换为
抽象的图论问题描述

现场挑战 快快编程535

快快编程
kkcoding.net

图论建模

输入

3

2 7

24 2

2 16

把原问题已知条件转为图论信息

每个节点代表什么含义

每条边代表什么含义

边有没有方向?

共有几个节点?

24

共有几条边?

m

把求解的问题转为图论的问题描述

求有向无权图里24号节点能到哪些节点
以及单源多汇的最短路长度

```
1  /* 姓名XXX
2  图论建模:
3  已知:
4  每个节点代表1年
5  每条有向无权边(u,v)代表
6  有时光机可以从第u年到第v年
7  共24个节点
8  共m条边
9
10 求解:
11 求有向无权图里24号节点能到哪些节点
12 以及单源多汇的最短路长度
13
14 f[i][j]最终值代表借助所有节点,i号到j号的最短路
15 若i号到j号不连通,f[i][j]为INF
16 */
```

请同学完成程序
开头的注释分析

2分钟后
老师检查

```
19 const int N=30;  
20 const int INF=10000;  
21 int m,f[N][N];
```

```
25     cin>>m;  
26     for(int i=1;i<=□;i++)  
27         for(int j=1;j<=□;j++)  
28             f[i][j]=□;  
29     for(int i=0;i<m;i++){  
30         int x,y;  
31         cin>>x>>y;  
32         f[x][y]=□  
33     }
```

```
34 for(int k=1;k<=24;k++)
35     for(int i=1;i<=24;i++)
36         for(int j=1;j<=24;j++)
37             f[i][j]=min(f[i][j],f[i][k]+f[k][j]);
38 bool ok=0;
39 for(int i=1;i<=  ;i++)
40     if() {
41         ok=1;
42         cout<<i<<" "<< <<endl;
43     }
44 if() cout<<"impossible"<<endl;
```


现场挑战

快快编程536

快快编程
kkcoding.net

图论建模

输入

4

$a > b$

$c > d$

$d < a$

$d < c$

把原问题已知条件转为图论信息

每个节点代表什么含义

每条边代表什么含义

边有没有方向?

共有几个节点?

26

共有几条边?

n

把求解的问题转为图论的问题描述

求有向无权图有没有环?

请同学完成程序
开头的注释分析

2分钟后
老师检查

```
1  /* 姓名XXX
2  图论建模:
3  已知:
4  每个节点代表1个 
5  每条有向无权边(u,v)代表 
6  共  个节点
7  共  条边
8
9  求解:
10 
11
12 f[i][j] 最终值代表 
13 若i号到j号不连通,f[i][j]为 
14 */
```

```
25 cin>>n;  
26 for(int i=0;i<n;i++){  
27     char x,y,z;  
28     cin>>x>>y>>z;  
29     int u=x-'a';  
30     int v=  
31     if(y=='>')f[u][v]=1;  
32     else   
33 }
```

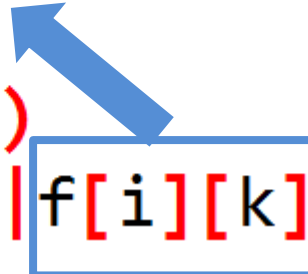
```
25 cin>>n;  
26 for(int i=0;i<n;i++){  
27     char x,y,z;  
28     cin>>x>>y>>z;  
29     int u=x-'a';  
30     int v=z-'a';  
31     if(y=='>')f[u][v]=1;  
32     else f[v][u]=1;  
33 }
```

```
34 for(int k=0;k<=□;k++)  
35     for(int i=0;i<=□;i++)  
36         for(int j=0;j<=□;j++)  
37             f[i][j]=□
```

代码优化1

f[i][j]最终值代表i能否到j

```
for(int k=1;k<=n;k++)  
    for(int i=1;i<=n;i++)  
        for(int j=1;j<=n;j++)  
            f[i][j]=f[i][j]||f[i][k]&&f[k][j];
```



```
for(int k=1;k<=n;k++)  
    for(int i=1;i<=n;i++) if(f[i][k])  
        for(int j=1;j<=n;j++)  
            f[i][j]=f[i][j]||f[k][j];
```

代码优化2

`t[i][j]`最终值代表*i*到*j*的最短路

```
for(int k=1;k<=n;k++)  
    for(int i=1;i<=n;i++)  
        for(int j=1;j<=n;j++)  
            t[i][j]=min(t[i][j],t[i][k]+t[k][j]);
```

请同学写出优化后代码

```
for(int k=1;k<=n;k++)  
    for(int i=1;i<=n;i++)if(t[i][k]<INF)  
        for(int j=1;j<=n;j++)  
            t[i][j]=min(t[i][j],t[i][k]+t[k][j]);
```


Floyd-Warshall讨论

负权边

若边权出现负数
FW算法能否正常运行?

最长路

若求解问题改成多源多汇最长路问题
FW算法如何求解?

查错方法

```
// for(int i=1;i<=nNode;i++,cout<<endl)  
//     for(int j=1;j<=nNode;j++)cout<<f[i][j]<<" ";
```

打印
表格



对照
手算
结果



定位
错误

自编题

仿照课堂例题，请自编一道编程题，要求以本节课的算法为核心求解步骤。鼓励加入各类算法元素，构成原问题的变种形式。本作业题的提交方式为：一个word文档发到课程微信群

word文档中需要提供：

题目描述

输入数据的范围

输入格式

输出格式

输入样例至少1组

输出样例至少1组

标准答案程序1份

快快编程作业

535

536

自编题

拓展题

637

只要求80分