

太戈编程
etiger.vip

信奥算法

对数

对数

对数是一个常用的数学概念，它是对求次方的逆运算。

我们以2为基本数来举例：

因为2的3次方是8，所以用2为底时，8的对数就是3。

因为2的4次方是16，所以用2为底时，16的对数就是4。

因为2的5次方是32，所以用2为底时，32的对数就是5。

...

因为2的10次方是1024，所以用2为底时，1024的对数就是10。

用数学符号表示：

$$\log_2(8)=3$$

$$\log_2(16)=4$$

$$\log_2(32)=5$$

$$\log_2(1024)=10$$

备注：数符号log出自拉丁文logarithm

对数

换底
公式

1024是几个
2的乘积?

$$\log_{32}(1024) = \frac{\log_2(1024)}{\log_2(32)}$$

1024是几个
32的乘积?

32是几个
2的乘积?

对数

输入正整数 n ，请你写程序求出 n 是2的几次方，也就是求出 $\log_2(n)$ ，结果向下取整。

```
1 #include<iostream>
2 #include<cmath>
3 using namespace std;
4 int main(){
5     int n;
6     cin>>n;
7     int p=log(n)/log(2);
8     cout<<p<<endl;
9     return 0;
10 }
```

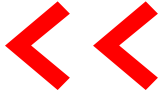
$\log(n)$ 返回值为浮点数

向下取整效果

位运算

速度更快

左移k位：乘以 2^k



二进制左移1位
右侧补零

$1 \ll 1$ 是2, $2 \ll 1$ 是4
 $3 \ll 1$ 是6, $5 \ll 4$ 是80

11111110000000000001111111000100

$\ll 4$

得到

111000000000000011111110001000000

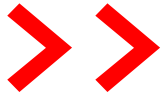
预测
结果

```
cout<<(1<<3)<<endl;  
cout<<(1<<4)<<endl;  
cout<<(2<<1)<<endl;  
cout<<(2<<2)<<endl;
```

```
cout<<(3<<1)<<endl;  
cout<<(3<<2)<<endl;  
cout<<(4<<1)<<endl;  
cout<<(5<<2)<<endl;
```

速度更快

右移k位：除以 2^k 取整



二进制右移1位
左侧补零

$2 \gg 1$ 是 1, $4 \gg 1$ 是 2
 $7 \gg 1$ 是 3, $11 \gg 2$ 是 2

11111110000000000001111111000100

$\gg 4$

得到

00001111111100000000000111111100

预测
结果

```
cout<<(1>>3)<<endl;  
cout<<(1>>4)<<endl;  
cout<<(2>>1)<<endl;  
cout<<(2>>2)<<endl;
```

```
cout<<(3>>1)<<endl;  
cout<<(3>>2)<<endl;  
cout<<(4>>1)<<endl;  
cout<<(5>>2)<<endl;
```


优先级

位运算的优先级非常低
建议位运算都使用括号

预测
结果

4

```
cout<<(1+1<<1)<<endl;
```

5

```
cout<<(1+(1<<1))<<endl;
```

6

```
cout<<(2+4>>1)<<endl;
```

7

```
cout<<(2+(4>>1))<<endl;
```

数据
结构

稀疏表

ST表(Sparse Table)

算
法

经典
问题

区间最值查询

RMQ

range min query

range max query

快快编程676

读题后请同学简述题意

无更新

段查询

静态问题

整段最值查询

Range Maximum Query
简称RMQ



算法对比

离线准备



方法	预计算	单次查询	总时间复杂度
在线枚举	无	$O(N)$	$O(MN)$
打表	$O(N^2)$	$O(1)$	$O(N^2+M)$
分块	$O(N)$	$O(\sqrt{N})$	$O(N+M\sqrt{N})$
稀疏表/ST表	$O(N\log N)$	$O(1)$	$O(N\log N+M)$



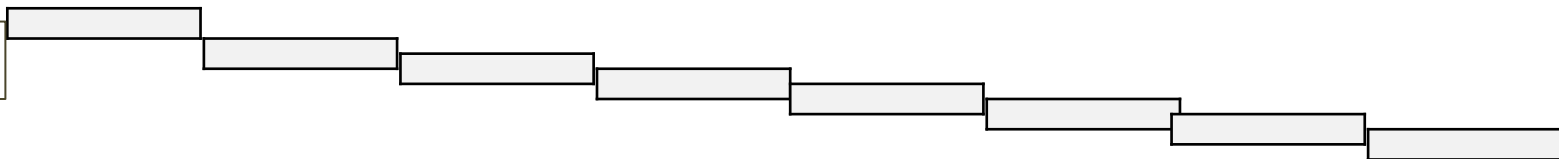
平衡不同操作
预处理vs查询

预计算ST表

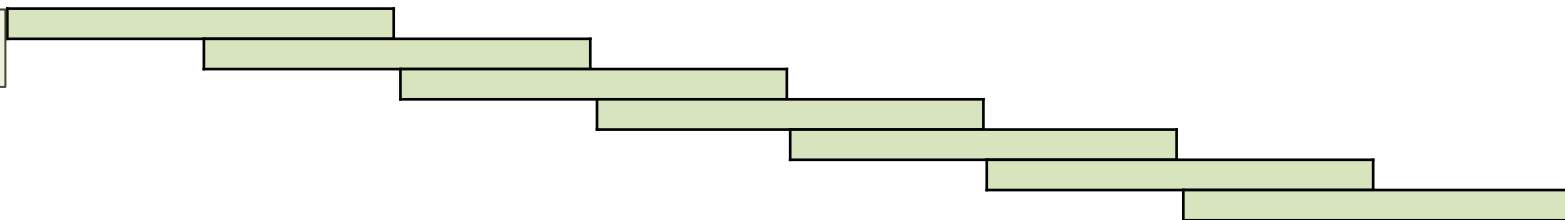
$st[p][i]$ 代表从 i 号开始共 2^p 个数的最大值
也就是 $[i, i+2^p-1]$ 区间内的最大值

数值	5	3	4	2	1	1	2	6
下标	1	2	3	4	5	6	7	8

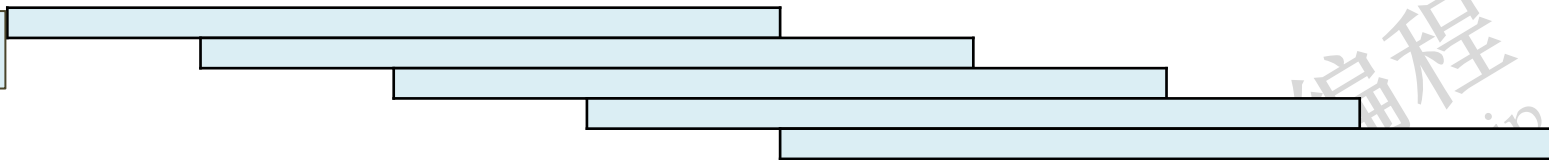
区间长度为1



区间长度为2



区间长度为4



区间长度为8



预计算ST表

$st[p][i]$ 代表从 i 号开始共 2^p 个数的最大值
也就是 $[i, i+2^p-1]$ 区间内的最大值

数值	5	3	4	2	1	1	2	6
----	---	---	---	---	---	---	---	---

ST表	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8
p=0	5	3	4	2	1	1	2	6
p=1	5	4	4	2	1	2	6	越界
p=2	5	4	4	2	6	越界	越界	越界
p=3	6	越界	越界	越界	越界	越界	越界	越界

用ST表回答RMQ

$st[p][i]$ 代表从 i 号开始共 2^p 个数的最
也就是 $[i, i+2^p-1]$ 区间内的最大值

求 $[1, r]$ 下标
范围内最大数值

```
13 int query(int l, int r){
14     int p=log(r-l+1)/log(2);
15     return max(st[p][l], st[p][r-(1<<p)+1]);
16 }
```

预计算ST表

$st[p][i]$ 代表从 i 号开始共 2^p 个数的最大值
也就是 $[i, i+2^p-1]$ 区间内的最大值

```
6 void ST(){
7     for(int i=1; i<=n; i++) st[0][i]=x[i];
8     int p=log(n)/log(2);
9     for(int k=1; k<=p; k++)
10         for(int i=1; i<=n-(1<<k)+1; i++)
11             st[k][i]=max(st[k-1][i], st[k-1][i+(1<<(k-1))]);
12 }
```

DP的二维递推

主函数

```
17 int main(){
18     cin>>n>>m;
19     for(int i=1;i<=n;i++)cin>>x[i];
20     ST();
21     for(int i=1;i<=m;i++){
22         cin>>l>>r;
23         cout<<query(l,r)<<endl;
24     }
25     return 0;
26 }
```

对数LOG2[]预计算

2的0次方是1

7

```
LOG2[1]=0;
```

8

```
for(int i=2;i<=n;i++)
```

9

```
    LOG2[i]=LOG2[i>>1]+1;
```

$$\begin{array}{l} \log_2(i) \\ \text{向下取整} \end{array} = \begin{array}{l} \log_2(i/2) \\ \text{向下取整} \end{array} + 1$$

快快编程837

离线RMQ

如何建立ST表？

今年的第1
去年排第5

今年的第2
去年排第4

今年的第3
去年排第3

今年的第4
去年排第1

今年的第5
去年排第2

输入样例

2 5

5 4 3 1 2

1 1

2 4

输出样例

4 2

去年的第1到第1之间的学生今年最高排第几？

去年的第2到第4之间的学生今年最高排第几？

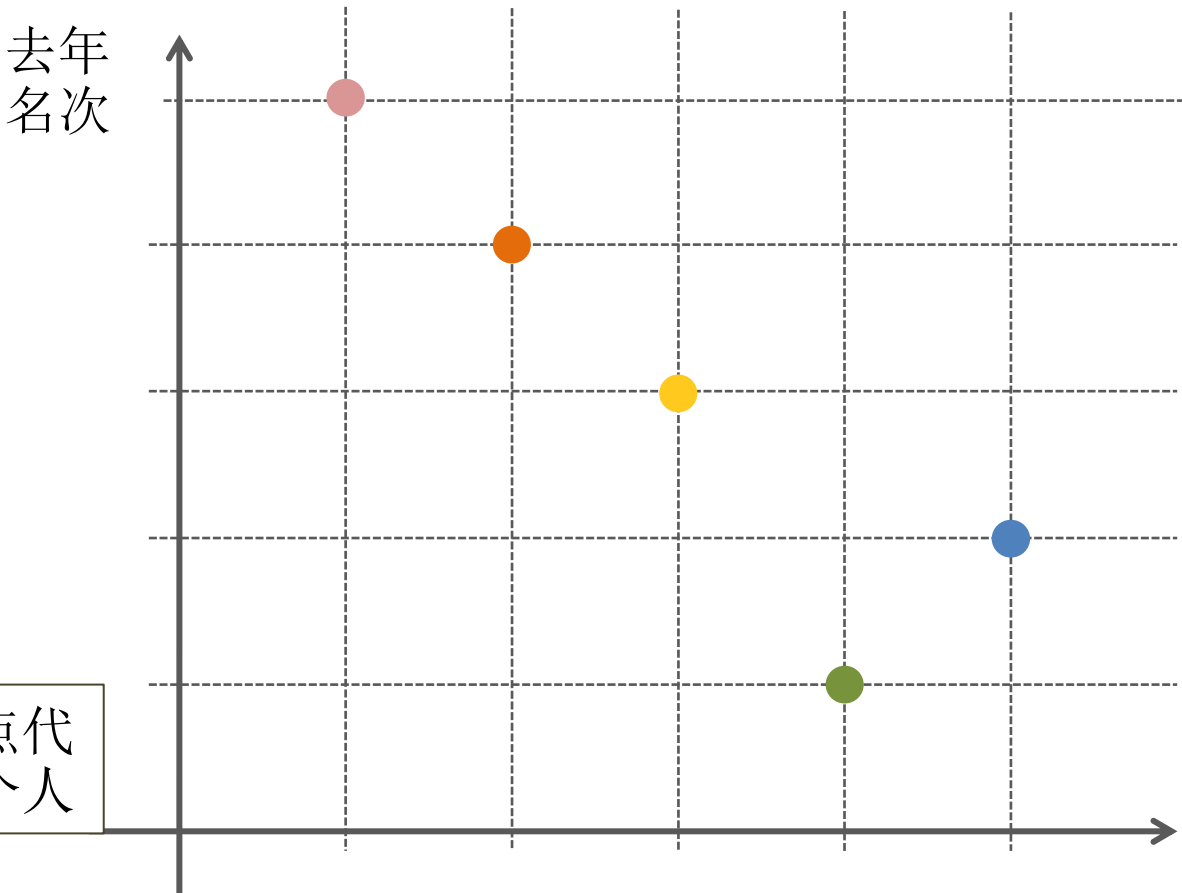
两个
维度

今年名次
去年名次

平面直角
坐标系

数组对应平面上的点集

下标 数组y	今年名次	数值	4	5	3	2	1
	去年名次	下标	y[1]	y[2]	y[3]	y[4]	y[5]
原始 数组x	去年名次	数值	5	4	3	1	2
	今年名次	下标	x[1]	x[2]	x[3]	x[4]	x[5]



每个点代表一个人

数组元素包含二维信息

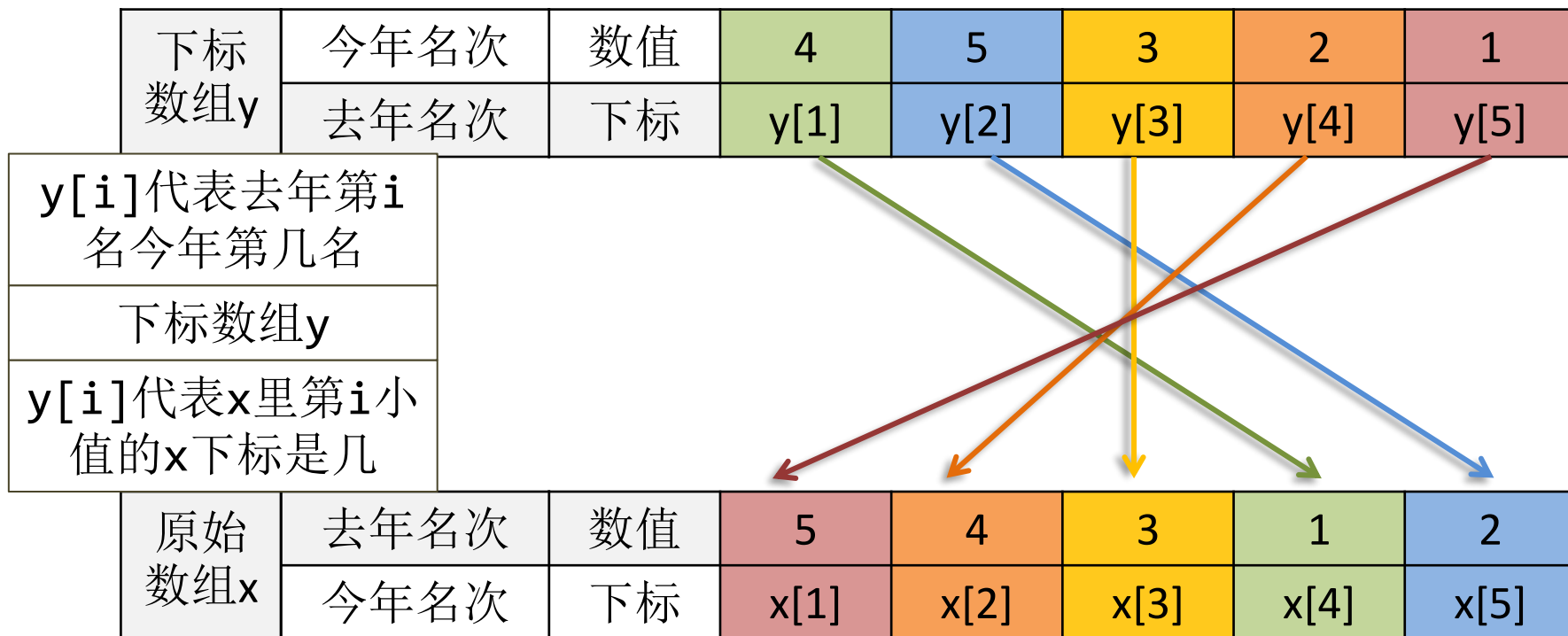
下标位置

+

数组大小

两个维度
RMQ

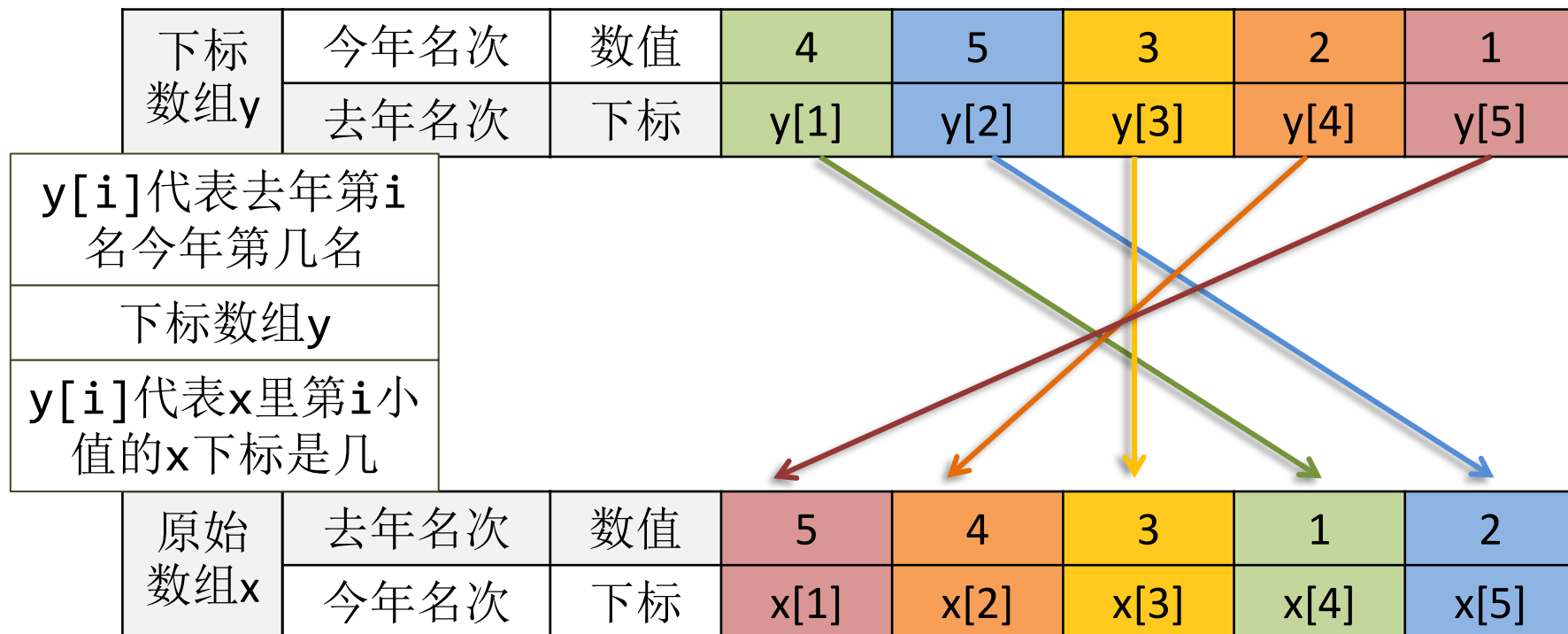
数组对应平面上的点集



$x[]$ 和 $y[]$
互为逆运算

$x[y[i]]$ 就是i
 $y[x[i]]$ 就是i

数组对应平面上的点集



```
21  cin>>m>>n;  
22  for(int i=1;i<=n;i++){  
23      cin>>x[i];  
24      y[x[i]]=i;  
25  }
```

对y数组建ST表
解决y维度的RMQ

太戈编程

676

835

837

拓展题

836, 1147, 1148

作业要求

需要用ST表完成