

太戈编程
etiger.vip

信奥算法

期望DP

皇家赌场2

请同学简述题意
突出核心要点



简化问题找灵感

$$a=1, b=1$$

$$\text{ans}=0.5$$

$$a=0, b=2$$

$$\text{ans}=0$$

$$a=2, b=0$$

$$\text{ans}=1$$

$$a=1, b=2$$

$$\text{ans}=1/3$$

$$a=2, b=1$$

$$\text{ans}=2/3$$

请同学提出猜想

动态规划 概率

定义
状态

自然定义法,也叫抄原题大法

题目问什么,状态含义就是什么

问题
答案

$p[a]$ 代表我现有 a 元,最终获胜概率

$p[i]$ 代表我现有 i 元,最终获胜概率

动态规划 概率

$p[i]$ 代表我现有*i*元,最终获胜概率

$$i=0$$

$$p[0]=0$$

$$i=n=a+b$$

$$p[n]=1$$

$$0 < i < a+b$$

$$p[i] = (p[i-1] + p[i+1]) / 2$$

解方程

$$2 * p[i] = p[i-1] + p[i+1]$$

$$p[i] - p[i-1] = p[i+1] - p[i]$$

$p[]$ 是个等差数列!

看边界条件

$$p[i] = i / (a+b)$$

请将上一页推导过程
写在编程软件中
给老师检查

DP小结

状态
定义

基于概率

自然状态

转移
方程

走一步看看

one-step analysis

当前状态依赖
走一步之后的状态

经典
结论

$p[i]=i/n$ 结论
用于其他难题

等差
数列

本书编程
tiger.vip

另一种理解

因为每一轮的收益期望为0
所以游戏结束时总收益期望也为0

游戏有两种
结束状态

你赢
b元

概率q

你输
a元

概率1-q

$$q*b + (1-q)*(-a) = 0$$

$$q = a / (a+b)$$

请将上一页推导过程
写在编程软件中
给老师检查

结论拓展

起点在 a , 终点 0 或 $a+b$

最终到 $a+b$ 概率: $q=a/(a+b)$



0

最终到 0 概率: $q=b/(a+b)$



1

固定 a , 让 b 增加到无限大

推论: 无限长一维数轴随机游走(random walk),
取任意点为目标, "一定"会到达, 无限多次

二维也有类似结论, 但三维及以上没有这个结论

"醉汉回家"问题

醉汉回家

有个醉汉走在回家路上，由于酒醉未醒，分不清家往哪边走。假如家在东面 n 的位置，酒吧在西边 0 位置处，醉汉处在 $m(m < n)$ 位置。醉汉每一个时间单位走一步，向东(家的方向)或者向西(酒吧的方向)的概率皆为 $1/2$ 。

(1) 如果醉汉到达酒吧，则在酒吧(停留)过夜。求醉汉回家的概率？

(2) 如果酒吧不收留醉汉，他只能继续游走，求醉汉回家的概率？

皇家赌场3

请同学简述题意
突出核心要点



简化问题找灵感

$a=1, b=1$

$ans=1$

$a=1, b=2$

$ans=2$

$a=1, b=3$

$ans=3$

$a=2, b=2$

$ans=4$

$a=2, b=3$

$ans=6$

请同学提出猜想

动态规划 期望DP

定义
状态

自然定义法,也叫抄原题大法

题目问什么,状态含义就是什么

问题
答案

$f[a]$ 代表我现有 a 元,到结束次数期望

$f[i]$ 代表我现有 i 元,到结束次数期望

用纸和笔写出边界条件+转移方程

动态规划 期望DP

$f[i]$ 代表我现有 i 元,到结束次数期望

猜 $f[i]$ 为 i 的
二次函数

$$i=0$$

$$f[0]=0$$

$$i=n=a+b$$

$$f[n]=0$$

$$0 < i < a+b$$

$$f[i] = (f[i-1] + f[i+1]) / 2 + 1$$

解方程

$$f[i+1] - f[i] = f[i] - f[i-1] - 2$$

用差分 $d[i] = f[i] - f[i-1]$ 化简

注意

$$d[1] = f[1]$$

$$d[n] = -f[n-1]$$

$$f[n-1] = f[1]$$

差分 $d[]$ 线性
所以 $f[]$ 二次

$$d[i+1] = d[i] - 2$$

$$d[n] = d[1] - 2(n-1)$$

$$-f[n-1] = f[1] - 2(n-1)$$

$$f[1] = n-1$$

动态规划 期望DP

$f[i]$ 代表我现有*i*元,到结束次数期望

猜 $f[i]$ 为*i*的
二次函数

$$i=0$$

$$f[0]=0$$

$$i=n=a+b$$

$$f[n]=0$$

$$0 < i < a+b$$

$$f[i] = (f[i-1] + f[i+1]) / 2 + 1$$

解方程

$$f[i+1] - f[i] = f[i] - f[i-1] - 2$$

$$f[n] - f[n-1]$$

$$= f[n-1] - f[n-2] - 2$$

$$= f[n-2] - f[n-3] - 4$$

.....

$$= f[1] - f[0] - 2(n-1)$$

注意

$$f[n-1] = f[1]$$

$$f[1] = n-1$$

动态规划 期望DP

$f[i]$ 代表我现有*i*元,到结束次数期望

猜 $f[i]$ 为*i*的
二次函数

$$i=0$$

$$f[0]=0$$

$$i=n=a+b$$

$$f[n]=0$$

$$0 < i < a+b$$

$$f[i] = (f[i-1] + f[i+1]) / 2 + 1$$

解方程

$$f[i+1] - f[i] = f[i] - f[i-1] - 2$$

$$f[1] = n - 1$$

$$f[i] - f[i-1] = f[1] - f[0] - 2(i-1) = n+1-2i$$

$$\begin{aligned} f[i] &= f[i] - f[i-1] + f[i-1] - f[i-2] \\ &\quad + \dots + f[1] - f[0] \\ &= (n+1)i - (i+1)i = (n-i)i \end{aligned}$$

$$f[a] = (n-a)a = ab$$

请将以上推导过程
写在编程软件中
给老师检查

DP小结

状态
定义

基于期望

自然状态

转移
方程

走一步看看

one-step analysis

当前状态依赖
走一步之后的状态

差分思想

经典
结论

$E[T]=a*b$ 结论
用于其他难题

二次
关系

本文编程
tiger.vip

1543.盲盒3

连中k个相同

卡牌收集问题里，共 m 种卡牌，目标：
连续 k 次抽卡结果都一样
求抽卡次数期望

定义
状态

$f[i]$ 代表已经 i 次相同
还需次数的期望

问题
答案

$f[0]$ 代表已经 0 次相同
还需次数的期望

纸和笔推导转移方程

连中k个相同

$f[i]$ 代表已经*i*次相同，还需次数的期望

$$i=k$$

$$f[k]=0$$

$$i=0$$

$$f[0]=f[1]+1$$

$$1 \leq i \leq k-1$$

$$f[i] = f[i+1]/m + f[1] * (m-1)/m + 1$$

消除紫色项
用差分

$$f[i-1] = f[i]/m + f[1] * (m-1)/m + 1$$

$$f[i-1] - f[i] = (f[i] - f[i+1])/m$$

$$f[0] - f[1] = 1$$

$$f[1] - f[2] = m$$

$$f[2] - f[3] = m^2$$

.....

$$f[k-1] - f[k] = m^{k-1}$$

$$\begin{aligned} f[0] - f[k] \\ = (m^k - 1) / (m - 1) \end{aligned}$$

请将以上推导过程
写在编程软件中
给老师检查

1550. 飞行棋

飞行棋

每轮走 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 格, 概率 $1/6$. 有 m 条飞行航线:
能从 x_i 号瞬移到 y_i 号, $0 < x_i < y_i \leq n$.
从 0 号要走到或超过 n 号格子, 求期望投骰子的次数.

定义
状态

$f[i]$ 代表从 i 号到结束的期望轮次

问题
答案

$f[0]$ 代表从 0 号到结束的期望轮次

纸和笔推导转移方程

飞行棋

$f[i]$ 代表从 i 号到结束的期望轮次

$i=n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$

$f[i]=0$

$0 \leq i \leq n-1$

$f[i] = (f[i+1] + f[i+2] + \dots + f[i+6]) / 6 + 1$

处理航线: $x_k \rightarrow y_k$

$f[x_k] = f[y_k]$

因为 $0 \leq x_i < y_i \leq n$, 所以依赖关系DAG有单向性, 可以递推

思考题: 若允许 $x_i > y_i$, 如何处理

```
11 cin>>n>>m;  
12 for(int i=1;i<=m;i++){  
13     int x,y;  
14     cin>>x>>y;  
15     p[x]=y;  
16 }
```

从x可以飞到p[x]

```
17 for(int i=n-1;i>=0;i--){
18     if(p[i]){
19         f[i]=
20         continue;
21     }
22     f[i]=1;
23     for(int k=1;k<=6;k++)
24         f[i]+=
25 }
```

太戈编程

1527

1528

1543

1550

拓展题

1544,1548,1549