C187暑期2022

第2场 试题讲简

Garithos

给定平面上n个点，选其中三个，使走一个循环的曼哈顿距离总和最长

20%的数据，n≤100
40%的数据，n≤1000
100%的数据，3≤n≤100000，$|x_i|,|y_i| \le 10^9$

→ 一定有1个点占据2个方向的最值，枚举这个点
其他点都落在这个点的同一象限
显然选此象限中2个维度分别取最值的
复杂度：$O(n)$
→ 另：也可证明所选点一定落在x+y和x-y的最大最小值上

Vashj（COCI）

一个树结构，初始只有孤立的根节点，支持Q次操作

新增一个（叶）节点，作为现有点x的儿子，边权=y
求从节点a到子树b内任意点的异或和最长路

10%的数据，Q≤200
30%的数据，Q≤2000
另30%的数据，b=1
100%的数据，Q≤200000, 保证x,a,b是已发现的编号，0≤y≤2^30

Vashj（COCI）

- → **暴力**：$O(Q^3)$，10分
- → **因输入不是强制在线，可预先知道最终整个树结构**

  以BFS预计算好两两距离，$O(Q^2)$（40分）
- → $b = 1$ **（终点任选）**

  $$ans = \max_{x=1}^{n} L_{ax} = \max_{u=1}^{n} L_{1a} \oplus L_{1x}$$

  对L_{1x}（增量式）建Trie树，以L_{1a}问询（Trie按位贪心模板题）

  复杂度：$O(Q \log y)$，+30分

Vashj（COCI）

→ **主要因素基本都已经齐了，一般情况**

$$ans = \max_{x \in subtree(b)} L_{1a} \oplus L_{1x}$$

子树条件可以序列化后区间表示：$dfn_b \le dfn_b < dfn_b + sz_b$

dfn,sz都可离线线性预计算

→ **Trie每个节点p维护一个set，表示子树p的dfn集合**

插入时，Trie每层多一次insert

查询时，在set中二分查找$[dfn_b, dfn_b + sz_b - 1]$

如交集为空，则该子树视为不存在

复杂度：$O(Q \log y \log n)$，100分

Magtheridon（COCI）

给定序列$A_1..A_n$，可消耗$|i-j|$代价来交换A_i, A_j，求在总代价不超过K的前提下，使$\sum_{i=L}^{R} A_i$最小

20%的数据，R=n≤13
50%的数据，R=n≤50
80%的数据，n≤50
100%的数据，1≤L≤R≤n≤100，0≤K≤10000，0≤A_i≤1000000

Magtheridon（COCI）

→ **R=n（最大化后缀和，其实是提示）**

纯暴搜自由度太大（swap顺序，每次swap哪两个）

→ **从结果出发换个角度划分整个过程（有点离线思想）**

终态与初态相比，一定是从$i \in [1,L)$换了一些值到$i \in [L,n]$

设换入$1 \le i_1 < i_2 .. < i_k < L$，换出$L \le j_1 < j_2 .. < j_k \le n$

显然代价至少为$\sum_{x=1}^{k} j_x - \sum_{x=1}^{k} i_x$且此下限可以达到

不妨指定方案为：$swap(i_x, j_x), x = 1..k$（其实怎么配对都一样，找方便的）

→ **这就显然可以DP了**

状态：f_{ijk} = 花不超过k代价，在$A_1..A_i$和$A_L..A_j$交换的最大收益

$f_{ijk} = \min(f_{i-1,j,k}, f_{i,j-1,k}, f_{i-1,j-1,k-|j-i|} + a_i - a_j)$

复杂度：$O(n^2K)$

→ **一般性情况，显然左右swap不会交叉，枚举个分割点即可**

Illidan（2021联合省选）

→ **题意较长参见原题**

纯暴力：$O(n^2m^2)$，16分

→ **先优化一次问询（给定图和u），哪些点i需要变身?**

1. $i \le u$
2. i与u不经编号小于i的点中转可以互达（Floyd的中间状态）

按中转点k从大到小Floyd，一遍可求出如下信息

$\forall i, j : g_{ij} =$ 只允许i+1..n中转，i,j能否互达（i≤j），$g_{i>j} = 0$

给定图结构，对所有u的答案总和= $\sum_{u=1}^{n}\sum_{i=1}^{u} g_{ij} \,\&\, g_{ji}$

复杂度：$O(mn^3)$（16~44分）

→ **关键问题**：Floyd算m遍太慢

Illidan（2021联合省选）

→ **需一次性（离线）处理/预计算逐条加边的事**

$\forall i, j, g_{ij}$在加边过程中值的**单调的**（只会由0→1）

→ **bool状态对某维度单调，改用此维度的分割点为新状态可降维**

$f_{ij} =$ 加第几条边后，g_{ij}由0→1

即加到至少第几条边，i只经>i点中转才到j

→ **可将边的编号视为边权，求f_{ij}变为最短边最长路（边是从大编号加起）**

$$f_{ij} = \max(f_{ij}, \min(f_{ik}, f_{kj}))$$

$$ans_e = \sum_{u=1}^{n} \sum_{i=1}^{u} [\min(f_{ij}, f_{ji}) \geq e], e = m\,..0$$

复杂度：$O(n^3 + mn^2)$，44-80分

Illidan（2021联合省选）

$$\rightarrow ans_e = \sum_{v=e}^{n}\left(\sum_{u=1}^{n}\sum_{i=1}^{u}[\min(f_{ij}, f_{ji}) = v]\right)$$

$h_v = \sum_{u=1}^{n}\sum_{i=1}^{u}[\min(f_{ij}, f_{ji}) = v]$可以$O(n^2)$预计算

ans是其后缀和，**复杂度：**$O(n^3 + m)$，100分