

# 信奥算法

动态规划



优化

# 最长上升子序列

**Longest Increasing Subsequence**

# LIS解法DP

答案为 $\max_i \{f[i]\}$

$f[i]$ :以 $i$ 号数字结尾的上升子序列最长长度

$$f[i] = \max_{j < i} \{f[j] | x[j] < x[i]\} + 1$$

$f[i]$ 依赖左侧若干格  
挑选符合 $x[j] < x[i]$ 条件里  
 $f[j]$ 的最大值

打擂台求最值

复杂度 $O(N^2)$   
能否优化

# LIS解法DP

$$f[i] = \max_{j < i} \{f[j] | x[j] < x[i]\} + 1$$

序列中  
每个数字  
对应3个属性

下标  
编号  
i

数值  
大小  
x[i]

LIS  
长度  
f[i]

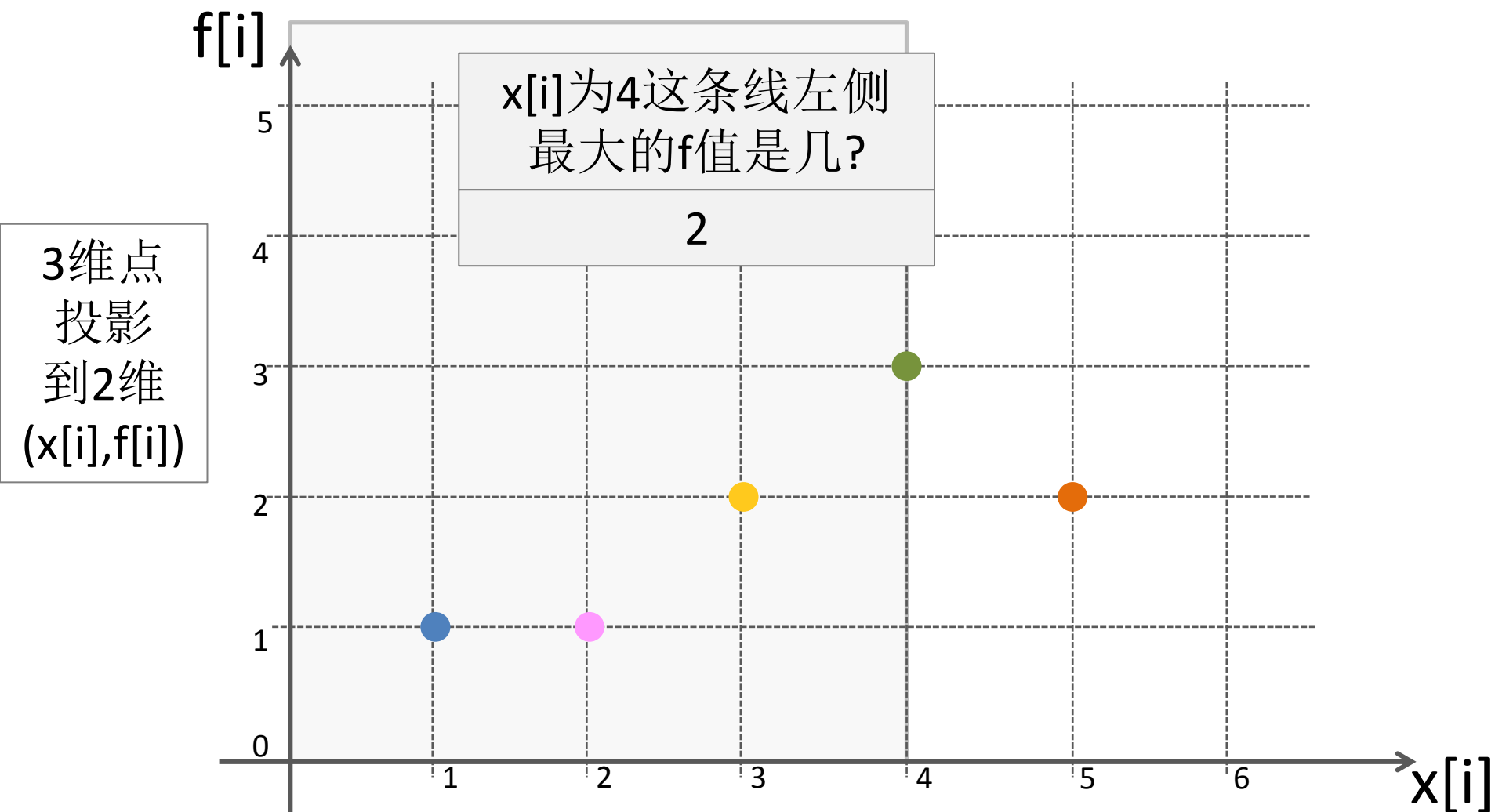
3个属性  
对应三维坐标点

为了探索思路  
直观地激发灵感

序列/数组  
无损可视化

i=	1	2	3	4	5	6
x[i]=	2	5	3	1	4	5
f[i]=						

$i =$	1	2	3	4	5	6
$x[i] =$	2	5	3	1	4	5
$f[i] =$	1	2	2	1	?	?



$i =$	1	2	3	4	5	6
$x[i] =$	2	5	3	1	4	5
$f[i] =$	1	2	2	1	3	4

按照 $i$ 从1到 $n$ 的顺序依次出现

对每个 $x[i]$ ，动态计算：

$$f[i] = x[i] \text{ 左侧最大的 } f \text{ 值 } + 1$$

前缀最大值问题  
prefix maximum query

用BIT动态维护PMQ

一个BIT, 编号1到7

`bit[k]`表示原数组`x`值为 $[k - \text{LSB}(k) + 1, k]$   
的元素里对应`f`值最大是几



```
13 int pmq(int x){
14     int ans=0;
15     while(x){
16         ans=max(ans,bit[x]);
17         x-=LSB(x);
18     }
19     return ans;
20 }
```

```
23 for(int i=0;i<n;i++){
24     x[i]+=10001;
25     f[i]=pmq(x[i]-1)+1;
26     update(x[i],f[i]);
27 }
```

注意值域对应

$\text{bit}[k]$ 表示原数组 $x$ 值为 $[k-\text{LSB}(k)+1, k]$   
的元素里对应 $f$ 值最大是几

```

7 void update(int x, int f){
8     while(x < M){
9         
10        x += LSB(x);
11    }
12 }

```

$\text{bit}[k]$  表示原数组  $x$  值为  $[k - \text{LSB}(k) + 1, k]$  的元素里对应  $f$  值最大是几

快快编程1924

快快编程  
kkcoding.net

# LCIS 最长公共上升子序列

状态  
定义

请同学写出 $f[i][j]$ 表示什么含义?

A

$f[i][j]$ 表示只用A序列前 $i$ 位  
和B序列前 $j$ 位中的LCIS

B

$f[i][j]$ 表示以A序列第 $i$ 位  
并且以B序列第 $j$ 位结尾的LCIS

C

$f[i][j]$ 表示只用A序列前 $i$ 位  
并且以B序列第 $j$ 位结尾的LCIS

1 /\*姓名XXX

2  $f[i][j]$ 表示用a1到 $a_i$ 和b1到 $b_j$ ,  
3 必须以 $b_j$ 结尾的最长公共上升子序列

4

5 a:1 7 3 5 7

6 b:1 7 5 3 5

7                   1     7     5     3     5

8                    $j=0, j=1, j=2, j=3, j=4, j=5$

9      $i=0$    0     0     0     0     0     0

10 1  $i=1$    0     1     0     0     0     0

11 7  $i=2$    0     1     2     0     0     0

12 3  $i=3$    0     1     2     0     2     0

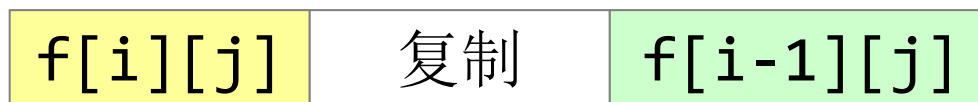
13 5  $i=4$    0     1     2     2     ?

14 7  $i=5$    0     1     2     2     ?

请完成1-14行

3分钟后老师检查

			1	7	5	3	5
		j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5
	i=0	0	0	0	0	0	0
1	i=1	0	1	0	0	0	0
7	i=2	0	1	2	0	0	0
3	i=3	0	1	2	0	2	0
5	i=4	0	1	2	2	2	3
7	i=5	0	1	2	2	2	3



a[i] != b[j] 时

			1	7	5	3	5
		j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5
	i=0	0	0	0	0	0	0
1	i=1	0	1	0	0	0	0
7	i=2	0	1	2	0	0	0
3	i=3	0	1	2	0	2	0
5	i=4	0	1	2	2	2	3
7	i=5	0	1	2	2	2	3

f[4][5]	依赖	f[3][4]	f[3][3]	f[3][2]	f[3][1]
---------	----	---------	---------	---------	---------

重大发现    f[4][5]比f[4][3]依赖的格子逐格增加

			1	7	5	3	5
		j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5
	i=0	0	0	0	0	0	0
1	i=1	0	1	0	0	0	0
7	i=2	0	1	2	0	0	0
3	i=3	0	1	2	0	2	0
5	i=4	0	1	2	2	2	3
7	i=5	0	1	2	2	2	3

f[4][5]	依赖	f[3][4]	f[3][3]	f[3][2]	f[3][1]
---------	----	---------	---------	---------	---------

第*i*行从左到右填写时f[i][j]依赖的有效格子逐步增加



$f[i][j]$ 表示只用A序列前*i*位  
并且以B序列第*j*位结尾的LCIS

```
34 cin>>n;
35 for(int i=1;i<=n;++i)cin>>a[i];
36 for(int i=1;i<=n;++i)cin>>b[i];
37 for(int i=1;i<=n;++i){
38     int bst=0;
39     for(int j=1;j<=n;++j){
40         if(a[i]!=b[j]) f[i][j]=f[i-1][j];
41         else f[i][j]=
42         if(b[j]<a[i]) bst=max(bst,f[i-1][j]);
43     }
44 }
45 int ans=*max_element(f[n]+1,f[n]+1+n);
```

快快编程1925

快快编程  
kkcoding.net

状态  
定义

请同学们写出 $f[i][j]$ 表示什么含义?

$f[i][j]$ 表示用前 $i$ 门炮只考虑前 $j$ 个僵尸最多得分

注意需要先按照炮的位置从左到右排序

```
35 struct info{int l,p,s;};
36 bool cmp(const info&a,const info&b){
37     return a.s<b.s;
38 }
39 info x[M];
```

```
44     cin>>n>>m;
45     for(int i=1;i<=m;++i)
46         cin>>x[i].l>>x[i].p>>x[i].s;
47     sort(x+1,x+1+m,cmp);
```

1 /\*姓名XXX

2  $f[i][j]$ 表示用前 $i$ 门炮只考虑前 $j$ 个僵尸最多得分  
3 8板,4人

4  $L1=3, P1=2, S1=2$

5  $L2=3, P2=2, S2=3$

6  $L3=3, P3=3, S3=5$

7  $L4=1, P4=1, S4=7$

8  $S1=2 \quad S2=3 \quad S3=5 \quad S4=7$

9  $j=0, j=1, j=2, j=3, j=4, j=5, j=6, j=7, j=8$

10  $i=0$  0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

11  $i=1$  0 0 4 6 6 6 6 6 6

12  $i=2$  0 0 4 6 8 10 10 10 10

13  $i=3$  0 0 4 6 8 13 15

14  $i=4$  0 0 4 6 8 13 15

请完成1-14行

5分钟后老师检查

?

?

?

?

8个僵尸,3门炮  
L1=3,P1=2,S1=2  
L2=3,P2=2,S2=3  
L3=3,P3=3,S3=5

$f[i][j]$ 表示用前*i*门炮  
只考虑前*j*个僵尸最多得分

S1      S2                  S3

f	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8
i=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i=1	0	0	4	6	6	6	6	6	6
i=2	0	0	4	6	8	10	10	10	10
i=3	0	0	4	6	8	13	15	17	17

$f[i][j]=\max\{\begin{array}{l} f[i-1][j], \\ f[i][j-1], \\ g[i][j] \end{array}\}$

← 第*i*门炮不用  
← 第*j*个僵尸不炸  
← 第*i*门炮炸到以第*j*个僵尸结尾

8个僵尸, 3门炮  
L1=3, P1=2, S1=2  
L2=3, P2=2, S2=3  
L3=3, P3=3, S3=5

$f[i][j]$ 表示用前*i*门炮  
只考虑前*j*个僵尸最多得分

S1      S2                  S3

f	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8
i=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i=1	0	0	4	6	6	6	6	6	6
i=2	0	0	4	6	8	10	10	10	10

$g[3][ ]$						13	15	17	17
-----------	--	--	--	--	--	----	----	----	----

$g[i][j]$ 表示第*i*门炮  
炸到以第*j*个僵尸  
结尾时的最大得分

$g[3][1], g[3][2], g[3][3], g[3][4]$   
都是无效状态

8个僵尸,3门炮  
L1=3,P1=2,S1=2  
L2=3,P2=2,S2=3  
L3=3,P3=3,S3=5

$f[i][j]$ 表示用前*i*门炮  
只考虑前*j*个僵尸最多得分

S1 S2 S3

f	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8
i=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i=1	0	0	4	6	6	6	6	6	6
i=2	0	0	4	6	8	10	10	10	10

$g[3][j]$						13	15	17	17
-----------	--	--	--	--	--	----	----	----	----

		决策	第 <i>i</i> 门炮轰炸僵尸的个数
$g[i][j]$ 表示第 <i>i</i> 门炮 炸到以第 <i>j</i> 个僵尸 结尾时的最大得分	$g[3][5]$	依赖	$f[2][4], f[2][3], f[2][2]$

4+3\*3得13



8个僵尸, 3门炮  
 $L1=3, P1=2, S1=2$   
 $L2=3, P2=2, S2=3$   
 $L3=3, P3=3, S3=5$

$f[i][j]$ 表示用前*i*门炮  
只考虑前*j*个僵尸最多得分

S1      S2                  S3

f	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8
i=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i=1	0	0	4	6	6	6	6	6	6
i=2	0	0	4	6	8	10	10	10	10
$g[3][\ ]$						13	15	17	17

		决策	第 <i>i</i> 门炮轰炸僵尸的个数
$g[i][j]$ 表示第 <i>i</i> 门炮 炸到以第 <i>j</i> 个僵尸 结尾时的最大得分	$g[3][6]$	依赖	$f[2][4], f[2][3]$
		6+3*3得15	

8个僵尸, 3门炮  
L1=3, P1=2, S1=2  
L2=3, P2=2, S2=3  
L3=3, P3=3, S3=5

$f[i][j]$ 表示用前*i*门炮  
只考虑前*j*个僵尸最多得分

S1      S2                  S3

f	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8
i=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i=1	0	0	4	6	6	6	6	6	6
i=2	0	0	4	6	8	10	10	10	10

$g[3][j]$						13	15	17	17
-----------	--	--	--	--	--	----	----	----	----

		决策	第 <i>i</i> 门炮轰炸僵尸的个数
$g[i][j]$ 表示第 <i>i</i> 门炮 炸到以第 <i>j</i> 个僵尸 结尾时的最大得分	$g[3][7]$	依赖	$f[2][4]$
	8+3*3得17		

8个僵尸, 3门炮  
L1=3, P1=2, S1=2  
L2=3, P2=2, S2=3  
L3=3, P3=3, S3=5

$f[i][j]$ 表示用前*i*门炮  
只考虑前*j*个僵尸最多得分

S1      S2                  S3

f	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8
i=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i=1	0	0	4	6	6	6	6	6	6
i=2	0	0	4	6	8	10	10	10	10

$g[3][\ ]$						13	15	17	17
------------	--	--	--	--	--	----	----	----	----

$g[i][j]$ 表示第*i*门炮  
炸到以第*j*个僵尸  
结尾时的最大得分

$g[i][\ ]$ 从左往右填写时依赖集逐步减小

$g[i][\ ]$ 从右往左填写时依赖集逐步扩大

8个僵尸, 3门炮  
 $L1=3, P1=2, S1=2$   
 $L2=3, P2=2, S2=3$   
 $L3=3, P3=3, S3=5$

$f[i][j]$ 表示用前 $i$ 门炮  
 只考虑前 $j$ 个僵尸最多得分

S1      S2                  S3

f	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8
i=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i=1	0	0	4	6	6	6	6	6	6
i=2	0	0	4	6	8	10	10	10	10

$g[3][j]$						13	15	17	17
-----------	--	--	--	--	--	----	----	----	----

若 $j \geq s[i]$ ,  
 决策 $k$ : 考虑第 $i$ 门  
 炮炸 $k+1$ 到 $j$ 号僵尸

$$g[i][j] = \max\{f[i-1][k] + p[i] * (j - k)\}$$

$$= \max\{f[i-1][k] - p[i] * k\} + p[i] * j$$

枚举 $k: j - 1[i] \leq k \leq s[i] - 1 \ \&\& \ 0 \leq k,$

$g[i][j]$ 从右往左填写, 依赖 $f[i-1][j]$

8个僵尸, 3门炮  
L1=3, P1=2, S1=2  
L2=3, P2=2, S2=3  
L3=3, P3=3, S3=5

$f[i][j]$ 表示用前*i*门炮  
只考虑前*j*个僵尸最多得分

S1      S2                  S3

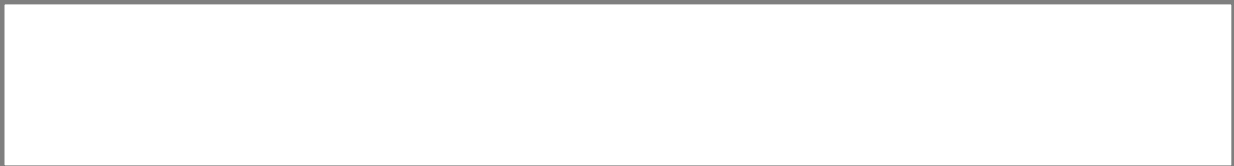
f	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	j=7	j=8
i=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i=1	0	0	4	6	6	6	6	6	6
i=2	0	0	4	6	8	10	10	10	10
i=3	0	0	4	6	8	13	15	17	17

$f[i][j] = \max\{\begin{aligned} &f[i-1][j], \\ &f[i][j-1], \\ &g[i][j] \end{aligned}\}$

- 第*i*门炮不用
- 第*j*个僵尸不炸
- 第*i*门炮炸到以第*j*个僵尸结尾

再从左往右  
算 $f[i][j]$

先从右往左  
算 $g[i][j]$

```
48 for(int i=1;i<=m;++i){
49     int bst=-INF,k=x[i].s-1;
50     for(int j=n;j>=x[i].s;--j){
51         while(k>=0&& k>=j-x[i].l){
52             
53         }
54         g[i][j]=bst+x[i].p*j;
55     }
56     for(int j=1;j<=n;++j){
57         f[i][j]=max(f[i-1][j],f[i][j-1]);
58         f[i][j]=max(f[i][j],g[i][j]);
59     }
60 }
61 }
```

# 快快编程作业

191

1924

1925

拓展题

515