信奥算法

概率与期望

1544盲盒4

请同学简述题意
突出核心要点

连中k个不同

卡牌收集问题里，共m种卡牌，目标：
连续k次抽卡结果都不一样
求抽卡次数期望

m=4,k=2

可能的情景

2 2 1 3 1 3 4 1 2

连中k个不同

卡牌收集问题里，共m种卡牌，目标：
连续k次抽卡结果都不一样
求抽卡次数期望

定义状态	请同学设计状态含义

g[i]表示目前已经出现连续i个不同时
要完成k个连续不同的任务还要抽的次数的期望

答案表示	g[0]

简化问题找灵感

m=2,k=2

g[2] = 0

g[1] = 2

g[0] = 3

简化问题找灵感

m=3,k=2

g[2] = 0

g[1] = 1.5

g[0] = 2.5

简化问题找灵感

m=4,k=2

g[2] = 0

g[1] = 4/3

g[0] = 7/3

边界条件	g[k]=0
边界条件	g[0]-g[1]=1

转移方程	走一步看看	one-step analysis
g[i]=1+1/m*(g[1]+g[2]+..+g[i])+(m-i)/m*g[i+1]		

抽1张额外的牌

抽中的牌是最近的i张不同的牌之一

抽中的牌不是最近的i张不同的牌之一

如何求解g[0]?

$$g[i]=1+1/m*(g[1]+g[2]+..+g[i])+(m-i)/m*g[i+1]$$

$$g[i-1]=1+1/m*(g[1]+g[2]+..+g[i-1])+(m-i+1)/m*g[i]$$

差分

$$g[i-1]-g[i]=(m-i)/m*(g[i]-g[i+1])$$

$$g[i]-g[i+1]=m/(m-i)*(g[i-1]-g[i])$$

$$g[i-1]-g[i]=m/(m-i+1)*(g[i-2]-g[i-1])$$

$$\cdots\ \cdots$$

$$g[1]-g[2]=m/(m-1)*(g[0]-g[1])$$

$$g[0]-g[1]=1$$

替换

$$g[i]-g[i+1]=m^{i}/[(m-1)(m-2)..(m-i)]$$

$$g[i]-g[i+1]=m^i/[(m-1)(m-2)..(m-i)]$$

差分累加

$$g[0]-g[k]=(g[0]-g[1])+(g[1]-g[2])+..+(g[k-1]-g[k])$$

```
ld ans=1,p=1;
for(ld i=1;i<=k-1;i++){
    
    ans+=p;
}
```

DP小结

状态定义	展望未来
	自然状态
转移方程	走一步看看
	one-step analysis
	当前状态依赖走一步之后的状态
	差分思想

1548.跳舞机1

跳舞机1

长度为n为字符串只含：o表示成功，x表示失败，?表示一半成功一半失败。得分为连续成功长度平方和，求得分期望值。

定义状态	f[i]代表前i个的得分期望
问题答案	f[n]代表前n个的得分期望

转移方程推导的核心在于f的差分

跳舞机1

长度为n为字符串只含：o成功，x失败，?一半成功一半失败。得分为连续成功长度平方和，求得分期望值f[n]

差分状态

a[i]代表第i格对得分期望的贡献

即a[i]=f[i]-f[i-1]为差分

问题答案

a[1]+a[2]+...+a[n]

纸和笔推导转移方程

期望分步走,一步一期望

a[i]代表第i格对得分期望的贡献

随机变量x_i为用第i格结尾的连续长度

概率$1-p_i$	$x_i=0$	概率p_i	$x_i=x_{i-1}+1$

$$
\begin{aligned}
a[i] &= (1-p_i)*0+p_i*(E[x_i^2]-E[x_{i-1}^2]) \\
&= p_i*(E[(x_{i-1}+1)^2]-E[x_{i-1}^2]) \\
&= p_i*(E[x_{i-1}^2+2x_{i-1}+1]-E[x_{i-1}^2]) \\
&= p_i*(2E[x_{i-1}]+1) \\
&= p_i*(2g[i-1]+1)
\end{aligned}
$$

g[i]代表用第i格结尾的连续长度的期望

$$g[i]=p_i*E[x_{i-1}+1]=p_i*(g[i-1]+1)$$

```
	for(int i=1;i<=n;i++){
		cin>>ch;
		if(ch=='x') a[i]=g[i]=0;
		else if(ch=='o'){
			g[i]=g[i-1]+1;
			a[i]=2*g[i-1]+1;
		} else {


		}
	}
	ld sum=0;
	for(int i=1;i<=n;i++)sum+=a[i];
```

1549.跳舞机2

跳舞机2

n次点击，已知第i次成功概率p_i。得分为连续成功长度立方和，求得分期望值f[n]

差分状态	a[i]代表第i格对得分期望的贡献 即a[i]=f[i]-f[i-1]为差分
问题答案	a[1]+a[2]+...+a[n]

期望分步走,一步一期望

请同学尝试
推导出递推公式

a[i]代表第i格对得分期望的贡献

随机变量x_i为用第i格结尾的连续长度

概率$1-p_i$	$x_i=0$	概率p_i	$x_i=x_{i-1}+1$

$$a[i]=(1-p_i)*0+p_i*(E[x_i^3]-E[x_{i-1}^3])$$
$$=p_i*E[(x_{i-1}+1)^3-x_{i-1}^3]=p_i*E[3x_{i-1}^2+3x_{i-1}+1]$$
$$=p_i*(3E[x_{i-1}^2]+3E[x_{i-1}]+1)=p_i*(3h[i-1]+3g[i-1]+1)$$

g[i]代表用第i格结尾的连续长度的期望

h[i]代表用第i格结尾的连续长度平方的期望

$$g[i]=p_i*E[x_{i-1}+1]=p_i*(g[i-1]+1)$$

$$h[i]=p_i*E[(x_{i-1}+1)^2]=p_i*(h[i-1]+2g[i-1]+1)$$

```
    for(int i=1;i<=n;i++){
        cin>>p;
        g[i]=p*(g[i-1]+1);
        h[i]=p*(h[i-1]+2*g[i-1]+1);
        a[i]=p*(3*h[i-1]+3*g[i-1]+1);
    }
    ld sum=0;
    for(int i=1;i<=n;i++)sum+=a[i];
```

太戈编程

1544,1548,1549