

# 信奥算法

# 01背包问题

01 knapsack problem

## 动态规划

dynamic programming



快快编程  
kkcoding.net

可行性版本

## 01凑和问题

有 $n$ 个正整数,第 $i$ 个数为 $x[i]$ ,  
每个数可以不使用或者使用一次,  
能否恰好凑出 $m$ ?

可行性版本

## 01背包问题

有 $n$ 件物品,第 $i$ 件重量 $w[i]$ ,  
每件物品可以不选或者选一次,  
能否恰好装满载重 $m$ 的包?

只有重量概念

快快编程  
kkcoding.net

1098

请同学概况题目大意  
已知什么求什么

快快编程  
kkcoding.net

$f[i][j]$ 表示只用前 $i$ 个数字能否凑出 $j$

$m=8$

$n=4$

$x[1]=3$

$x[2]=3$

$x[3]=3$

$x[3]=7$

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$
$i=0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$i=1$	1	0	0	1	0	0	0	0	0
$i=2$	1	0	0	1	0	0	1	0	0
$i=3$	1	0	0	1	0	0	1	0	0
$i=4$	1	0	0	1	0	0	1	1	0



为什么凑和只需要考虑 $m=8$ 以内?

数字总和的一半  $(3+3+3+7)/2$  得到 8

无法凑出8, 可以凑出7, 答案为 7和9

```

1  /*姓名XXX
2  输入n=4
3  x[1]=3
4  x[2]=3
5  x[3]=3
6  x[4]=7
7  f[i][j]表示只用前i个数字能否凑出j
8      j=0,j=1,j=2,j=3,j=4,j=5,j=6,j=7,j=8
9  i=0  1    0    0    0    0    0    0    0    0
10 i=1  1    0    0    1    0    0    0    0    0
11 i=2  1    0    0    1    0    0    1    0    0
12 i=3  1    0    0    1    0    0    1    0    0
13 i=4  1    0    0    1    0    0    1    1    0
14 */

```

电脑上完成此页注释

3分钟后老师检查

```
22 cin>>n;
23 for(int i=1;i<=n;i++) cin>>x[i];
24 int sum=0;
25 for(int i=1;i<=n;i++) sum+=x[i];
26 int half=sum/2;
27 f[0][0]=
28 for(int i=1;i<=n;i++)
29     for(int j=0; ;j++) {
30         if(j<x[i])
31             f[i][j]=
32         else
33             f[i][j]=
34     }
35 for(int j=half;j>=0;j--)
36     if( ){
37         cout<<j<<" "<<
38         break;
39     }
```



# 01背包 - 有价值版本

小偷来你家,他带的包只能装 $c$ 斤的物品。你家有 $n$ 种物品,分别重 $w_1, w_2, \dots, w_n$ 斤,价值分别为 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 元,请问小偷能带走**最大的总价值**是多少?

输入样例

```
4 3
3 50
1 30
2 35
```

输出样例

80

载重为4斤的包,共3件物品  
第一件重3斤,价值50元  
第二件重1斤,价值30元  
第三件重2斤,价值35元

物品有2个属性  
重量+价值

动态  
规划

请同学写出  
状态含义





动态  
规划

DP第一步  
设计状态

尝试

自然定义法  
抄原题大法

仿照题目问题  
设计状态含义

$f[n][c]$ 表示只装前 $n$ 种物品，  
用载重 $c$ 斤的包，最多能拿多少价值

$f[i][j]$ 表示只装前 $i$ 种物品，  
用载重 $j$ 斤的包，最多能拿多少价值

$f[i][j]$ 表示只装前*i*种物品，  
用载重*j*斤的包，最多能拿多少价值

c=4	n=3	$f[i][j]$	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4
		i=0	0	0	0	0	0
$w[1]=3, v[1]=50$		i=1	0	0	0	50	50
$w[2]=1, v[2]=30$		i=2	0	30	30	50	80
$w[3]=2, v[3]=35$		i=3	0	30	35	65	80

$$\begin{aligned}
 f[3][4] &= \max(f[2][4], f[2][4-w[3]]+v[3]) \\
 &= \max(f[2][4], f[2][2]+35) \\
 &= \max(80, 30+35)
 \end{aligned}$$

每一格只依赖上一行  
正上方邻居, 左上方某格

动态  
规划

DP第二步  
转移方程

若  $j < w[i]$

$$f[i][j] = f[i - 1][j]$$

若  $j \geq w[i]$

$$f[i][j] = \max\{f[i - 1][j], f[i - 1][j - w[i]] + v[i]\}$$

```


1  /*姓名XXX
2   $f[i][j]$ 表示只装前 $i$ 种物品,
3  用载重 $j$ 斤的包,最多拿多少价值
4   $c=4, n=3$ 
5   $w[1]=3, v[1]=50$ 
6   $w[2]=1, v[2]=30$ 
7   $w[3]=2, v[3]=35$ 
8
9       $j=0, j=1, j=2, j=3, j=4$ 
10  $i=0$     0    0    0    0    0
11  $i=1$     0    0    0    50   50
12  $i=2$     0    30   30   50   80
13  $i=3$     0    30   35   65   80
14 */

```

电脑上完成此页注释

3分钟后老师检查

```
21 int c,n;
22 cin>>c>>n;
23 for(int i=1;i<=n;i++)
24     cin>>w[i]>>v[i];
25 for(int i=1;i<=n;i++)
26     for(int j=0;j<=c;j++){
27         if(j<w[i]) ←
28             f[i][j]=f[i-1][j];
29         else
30             f[i][j]=max(f[i-1][j],f[i-1][j-w[i]]+v[i]);
31     }
32 cout<<f[n][c]<<endl;
```



136

请同学概况题目大意  
已知什么求什么

如何转换为01背包?  
 $w[i]$ 是什么?  
 $v[i]$ 是什么?

## 采药问题

有 $m$ 株草药，  
第 $i$ 株有两个属性  
采摘用时 $t[i]$ ，  
价值 $p[i]$ ，  
每株可以采或者不采，  
求在 $T$ 时间内采摘的最大总价值？

## 01背包问题

有 $m$ 件物品，  
第 $i$ 件两个属性  
重量 $w[i]$ ，  
价值 $v[i]$ ，  
每件物品可以不选或者选一次，  
载重 $c$ 的包最多能装多少价值？

$w[i]$  取值为  $t[i]$   
 $v[i]$  取值为  $p[i]$   
 $c$  取值为  $T$



## 数组 大小

输入第一行有两个整数

$T$  ( $1 \leq T \leq 1000$ )

$M$  ( $1 \leq M \leq 100$ )

```
const int M=  
const int C=  
int t[M],v[M],f[M][C];
```

$f[i][j]$ 表示只装前 $i$ 种物品，  
用载重 $j$ 斤的包，最多能拿多少价值

```
21 int T,m;  
22 cin>>T>>m;  
23 for(int i=1;i<=m;i++)  
24     cin>>t[i]>>v[i];  
25 for(int i=1; ; i++)  
26     for(int j=1; ; j++){  
27         f[i][j]=f[i-1][j];  
28         if(t[i]<=j)  
29             f[i][j]=  
30     }  
31 cout<< <<endl;
```

# 理解背包问题的本质

## 资源分配优化问题

约束条件

目标函数

决策

有某种稀缺资源待分配

最大化分配后的收益

选哪些对象组合

识别成本

识别收益

选择 $i$ 号对象，代价 $w[i]$

选择 $i$ 号对象，收获 $v[i]$

# 自编题

请以背包问题为原型，自编一道变种问题。  
可以参照网站第252,253,254,136题。

需要提供一个word文档，包含以下内容，发在课程群里：

1. 题目描述
2. 输入数据的范围
3. 输入格式
4. 输出格式
5. 输入样例至少1组
6. 输出样例至少1组
7. 标准答案程序1份

# 作业要求

写程序前请写明：

1. 二维数组每一格的含义
2. 手算样例对应表格

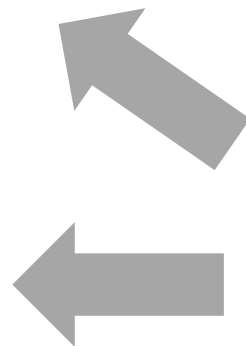
查错方法：

1. 打印二维数组
2. 和手算表格对比找不同

```
1  /*
2  f[i][j]代表
3      j=0,1,2,3,4,5
4  i=0
5  i=1
6  i=2
7  i=3
8  i=4
9  i=5
10 */
```



模版格式  
供参考



快快编程  
kkcoding.net

# 调试查错方法



```
30 // 查错代码
31 // for(int i=1;i<=n;++i,cout<<endl)
32 //     for(int j=0;j<=m;++j)cout<<h[i][j]<<" ";
```

# 快快编程作业

1098

133

136

拓展题

8,347