信奥算法

球盒问题

注意：不是"求和"问题

8类问题

把若干球放入若干盒子里
求方案总数量

3个问题要素

1 球是否相同

2 盒子是否相同

3 是否允许空盒子

所以共有$2^3=8$类不同的问题

8类问题

不允许空盒			允许空盒		
相同的球	放入	相同的盒子	相同的球	放入	相同的盒子
相同的球	放入	不同的盒子	相同的球	放入	不同的盒子
不同的球	放入	相同的盒子	不同的球	放入	相同的盒子
不同的球	放入	不同的盒子	不同的球	放入	不同的盒子

1

相同的球	放入	相同的盒子

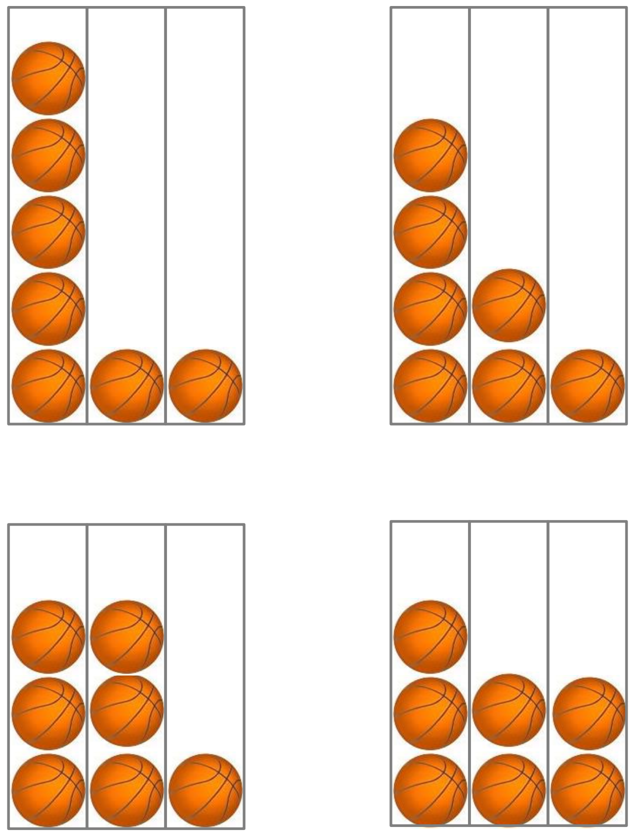
1 相同的球 放入 相同的盒子

将n个相同的球放入m个相同盒子里，要求盒子都不能空。请问有多少种方案? n<=15,m<=15

输入样例
7 3

输出样例
4

说明
7=5+1+1
7=4+2+1
7=3+3+1
7=3+2+2



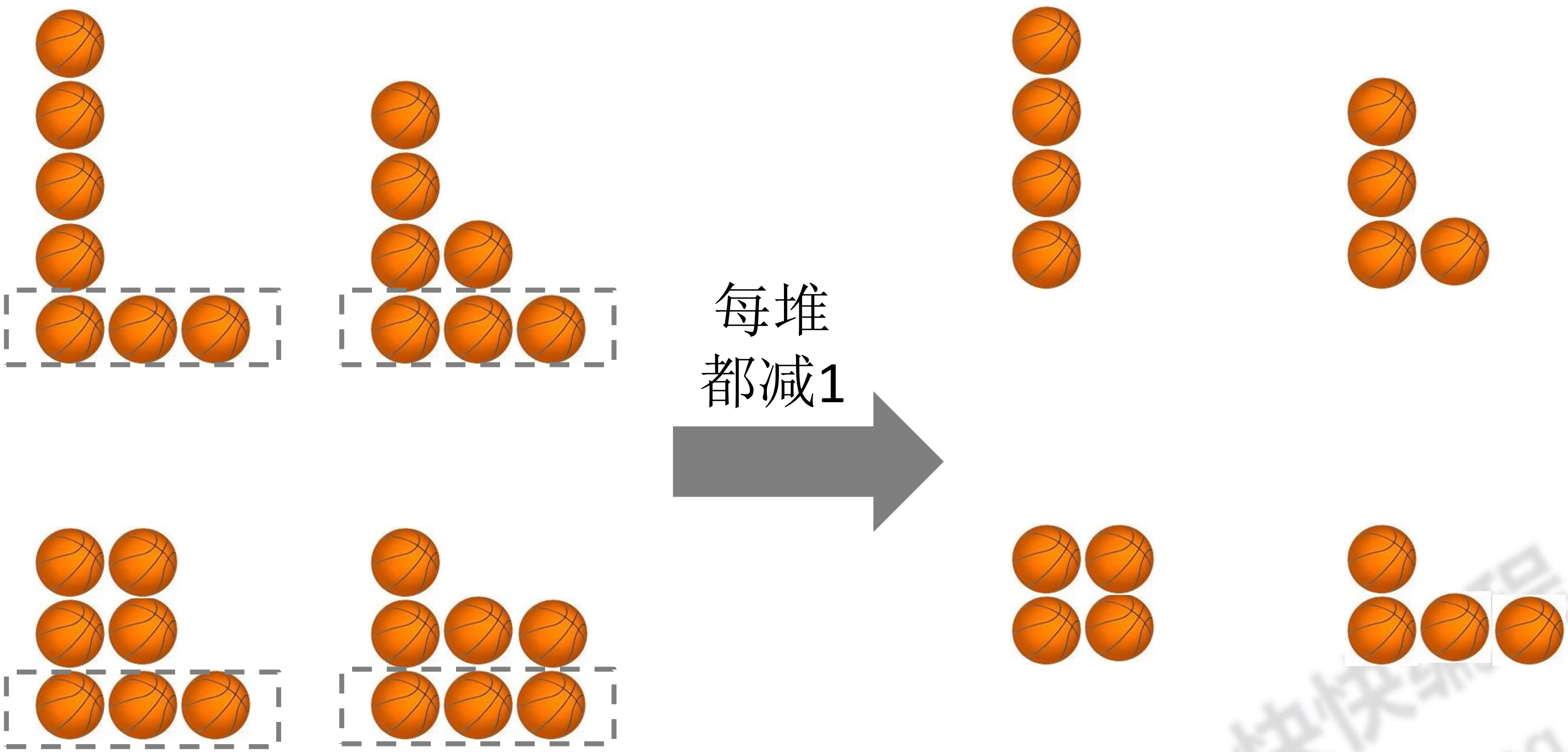
正整数拆分经典问题

f[i][j]代表将i拆分成j个正整数共几种方法

转移方程

f[i][j]代表将i拆分成j个正整数共几种方法

计算f[i][j]的递推式如何推导?



转移方程

f[i][j]代表将i拆分成j个正整数共几种方法

计算f[i][j]的递推式如何推导?

j个正整数都大于等于1

可以让每个数都减1,总数共减j

总数剩下i-j

$$f[i][j]=f[i-j][1]+f[i-j][2]+...+f[i-j][j-1]+f[i-j][j]$$

转移方程

f[i][j]代表将i拆分成j个正整数共几种方法

计算f[i][j]的递推式如何推导?

j个正整数都大于等于1

可以让每个数都减1,总数共减j

总数剩下i-j

f[i][j]=f[i-j][1]+f[i-j][2]+...+f[i-j][j-1]+f[i-j][j]

f[i-1][j-1]=f[i-j][1]+f[i-j][2]+...+f[i-j][j-1]

例如 f[9][4]=f[5][1]+f[5][2]+f[5][3]+f[5][4]

例如 f[8][3]=f[5][1]+f[5][2]+f[5][3]

转移方程

f[i][j]代表将i拆分成j个正整数共几种方法

计算f[i][j]的递推式如何推导?

j个正整数都大于等于1

可以让每个数都减1,总数共减j

总数剩下i-j

f[i][j]=f[i-1][j-1]+f[i-j][j]

例如 f[9][4]=f[8][3]+f[5][4]

依赖
关系

f[i][j]代表将i拆分成j个正整数共几种方法

	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4
i=0	0	0	0	0	0
i=1	0	1	0	0	0
i=2	0	1	1	0	0
i=3	0	1	1	1	0
i=4	0	1	2	1	1
i=5	0	1	2	2	1
i=6	0	1	3	3	2
i=7	0	1	3	4	3
i=8	0	1	4	5	5
i=9	0	1	4	7	6

每格依赖
左上方邻居
和
正上方某格

填表顺序

f[i][j]代表将i拆分成j个正整数共几种方法

	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4
i=0	0	0	0	0	0
i=1	0	1	0	0	0
i=2	0	1	1	0	0
i=3	0	1	1	1	0
i=4	0	1	2	1	1
i=5	0	1	2	2	1
i=6	0	1	3	3	2
i=7	0	1	3	4	3
i=8	0	1	4	5	5
i=9	0	1	4	7	6

推荐
一列一列
从左到右填

代码

```
cin>>n>>m;
if(n<m) {
    cout<<0<<endl;
    return 0;
}
for(ll i=1;i<=n;i++)f[i][1]=1;
for(ll j=2;j<=m;j++)
    for(ll i=j;i<=n;i++)
        f[i][j]=f[i-1][j-1]+f[i-j][j];
cout<<f[n][m]<<endl;
```

跟着老师翻译
理解每一行

特殊情况处理

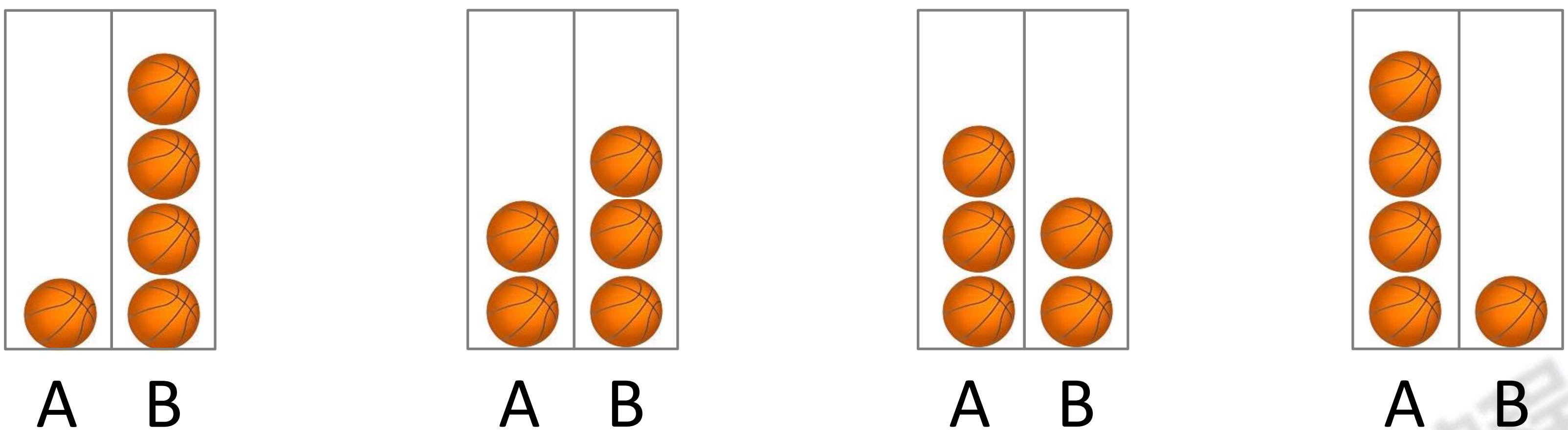
2

相同的球	放入	不同的盒子

2 相同的球 放入 不同的盒子

将n个相同的球放入m个不同盒子里，要求盒子都不能空。请问有多少种方案? n<=15,m<=15

输入样例	输出样例
5 2	4

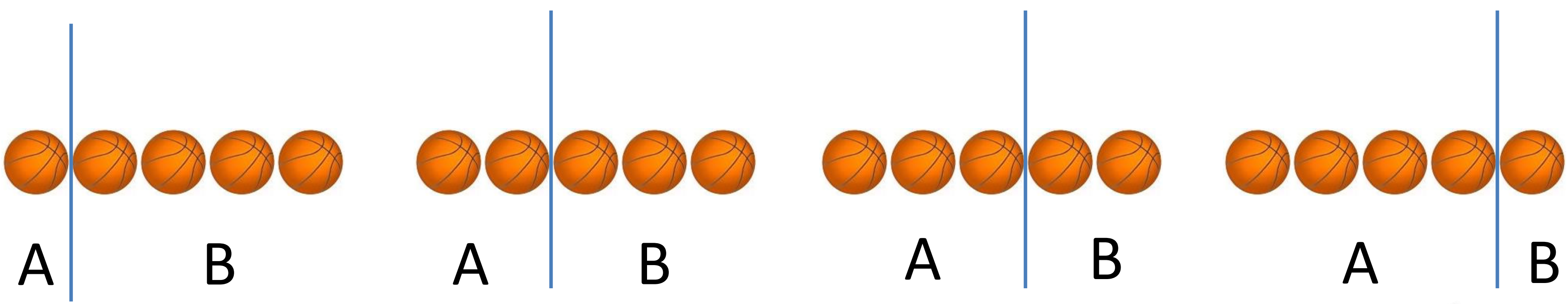


2

相同的球	放入	不同的盒子

将n个相同的球放入m个不同盒子里，要求盒子都不能空。请问有多少种方案? n<=15,m<=15

输入样例	输出样例
5 2	4

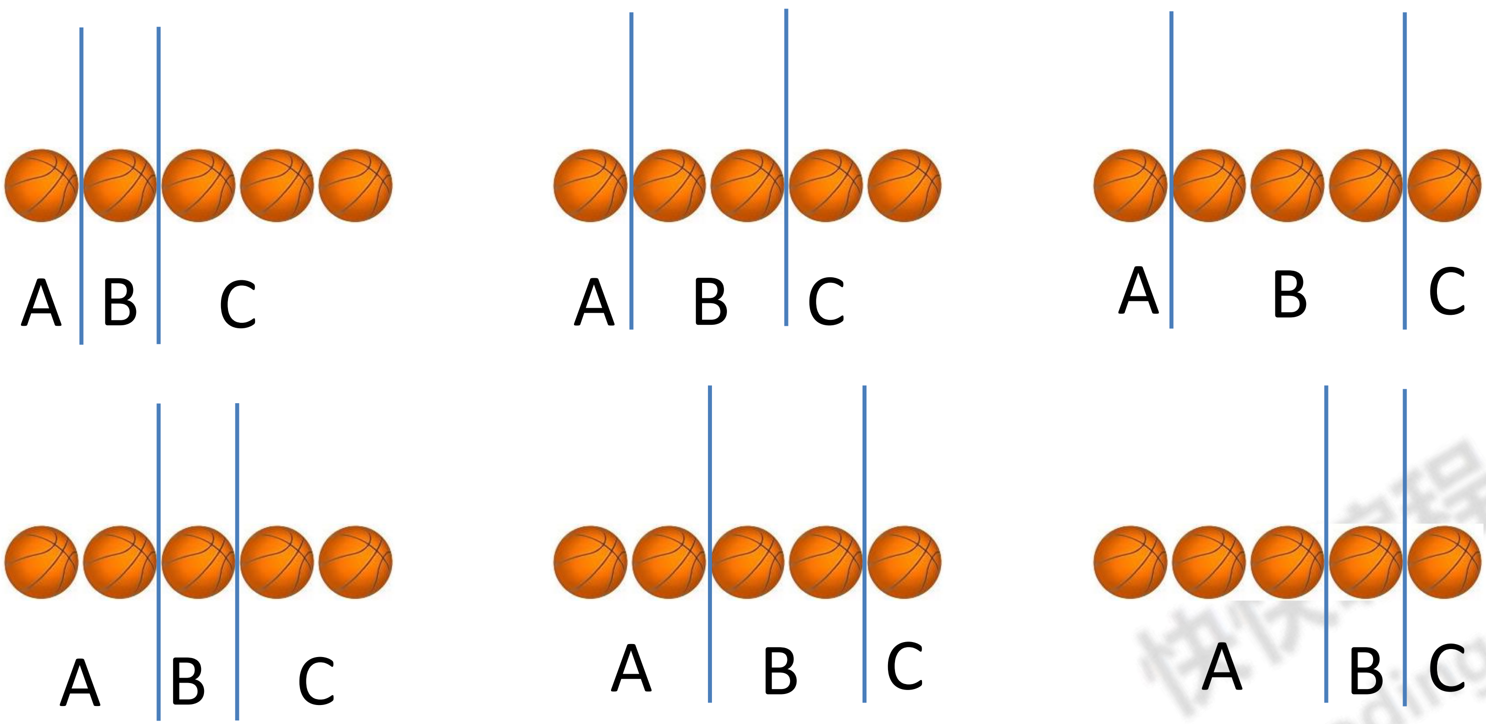


2

相同的球	放入	不同的盒子

将n个相同的球放入m个不同盒子里，要求盒子都不能空。请问有多少种方案? n<=15,m<=15

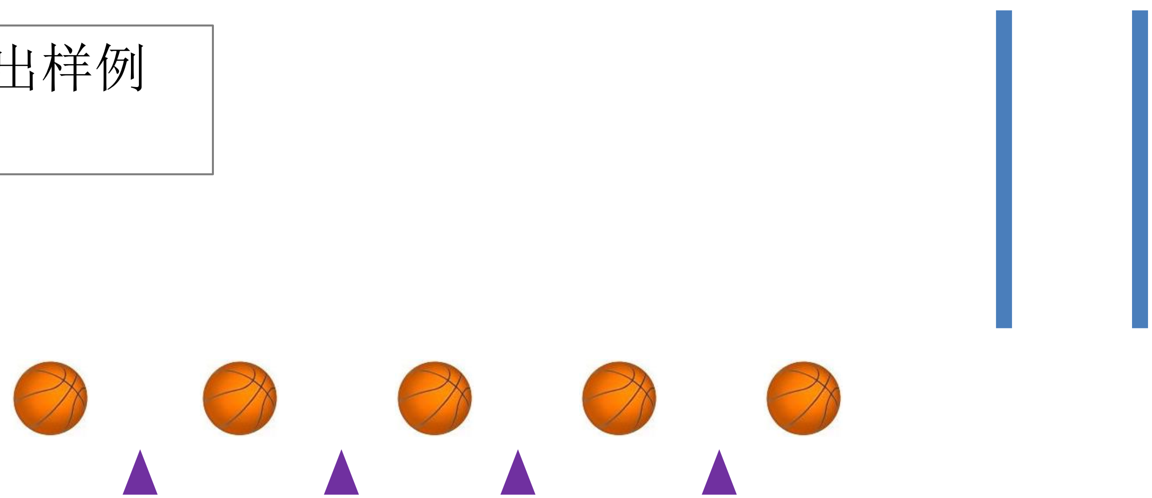
输入样例	输出样例
5 3	6



2 相同的球 放入 不同的盒子

将n个相同的球放入m个不同盒子里，要求盒子都不能空。请问有多少种方案? n<=15,m<=15

输入样例	输出样例
5 3	6



插板法

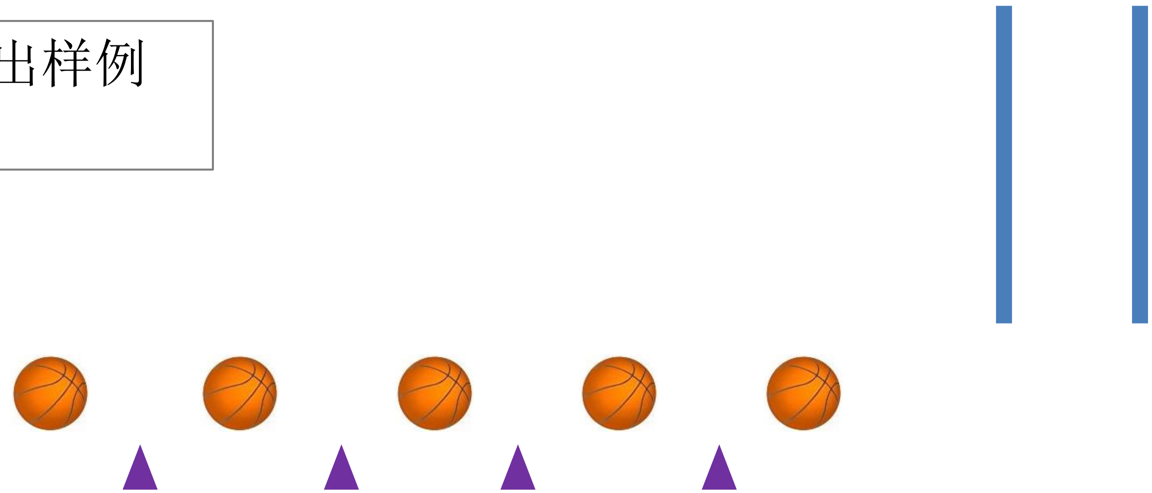
5个相同的球放入3个不同盒子{A,B,C}里

在4个空档里选2个位置插入隔板 | C(4,2)=6

2 相同的球 放入 不同的盒子

将n个相同的球放入m个不同盒子里，要求盒子都不能空。请问有多少种方案？ n<=15,m<=15

输入样例	输出样例
5 3	6



插板法

n个相同的球之间,有n-1个空档

要分到m个盒子,需要m-1个隔板 C(n-1,m-1)

代码

```
cin>>n>>m;
if(n<m) {
    cout<<0<<endl;
    return 0;
}
ll ans=1;
for(ll i=1;i<=m-1;i++){
    ans*=n-i;
    ans/=i;
}
cout<<ans<<endl;
```

跟着老师翻译理解每一行

特殊情况处理

3

不同的球	放入	相同的盒子

该问题的结果也称作
第二类斯特林数
Stirling's number

3　不同的球 放入 相同的盒子

将n个不同的球放入m个相同盒子里，要求盒子都不能空。请问有多少种方案? n<=15,m<=15

输入样例	输出样例
3 2	3

{1,2,3}三个球放入2个相同的盒子里：
1和2放一起，3独立放；
1和3放一起，2独立放；
2和3放一起，1独立放；

答案记作
S[3][2]

3　不同的球 放入 相同的盒子

将n个不同的球放入m个相同盒子里，要求盒子都不能空。请问有多少种方案? n<=15,m<=15

输入样例	输出几?
4 2	

已求出
S[3][2]=3

思考第4个球
如何放入?

请用纸和笔计算
枚举所有情况
限时3分钟

3 | 不同的球 | 放入 | 相同的盒子

将n个不同的球放入m个相同盒子里，要求盒子都不能空。请问有多少种方案? n<=15,m<=15

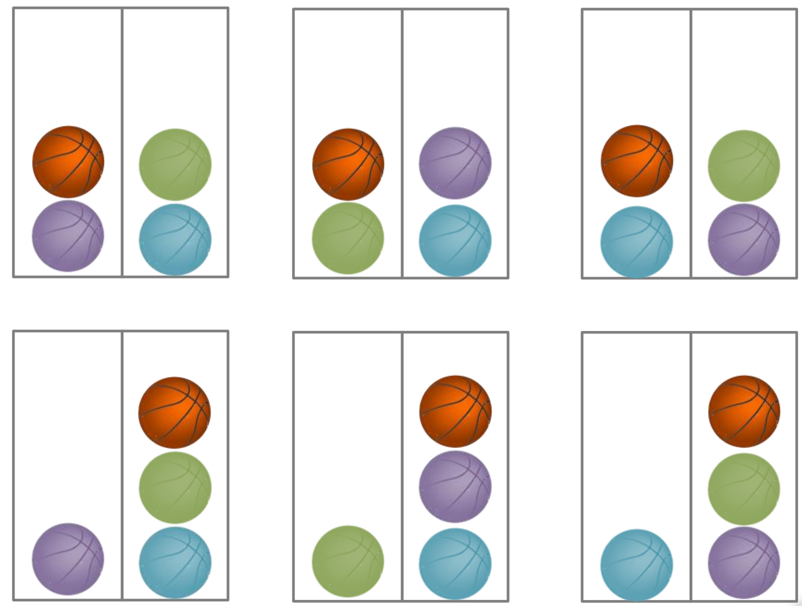
输入样例
4 2

输出几?

已求出
S[3][2]=3

前3个球 
先放好

第4个球 
有2种选择可以加入

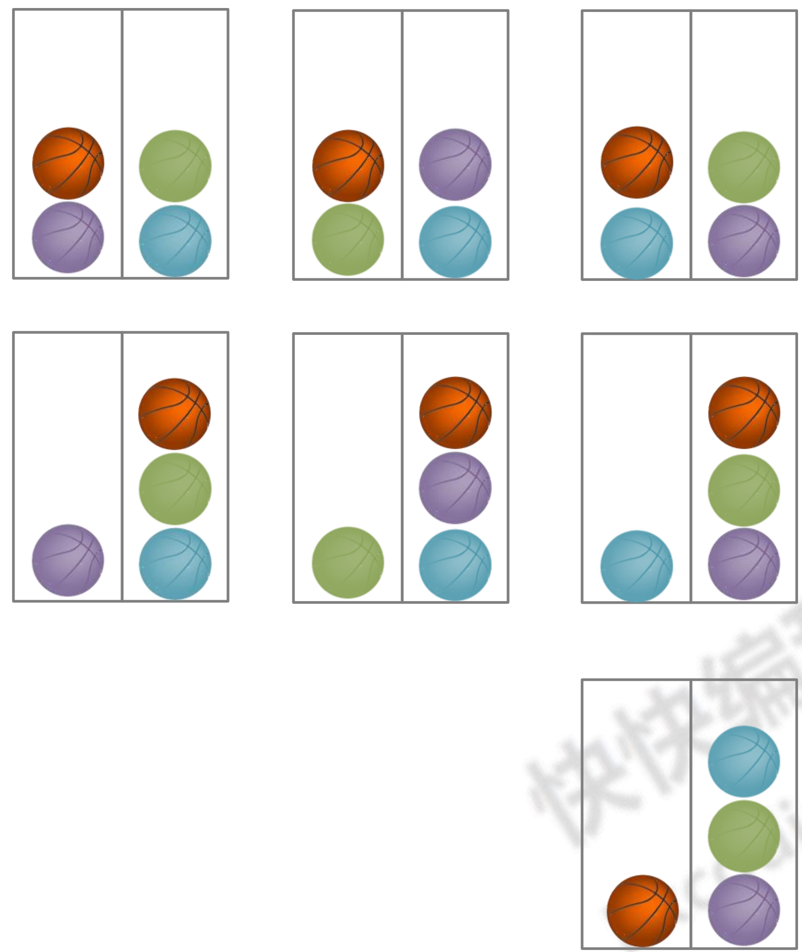


还遗漏一种
特殊情况

3 不同的球 放入 相同的盒子

将n个不同的球放入m个相同盒子里，要求盒子都不能空。请问有多少种方案? n<=15,m<=15

输入样例	输出7
4 2	



第4个球  单独放一盒

3 不同的球 放入 相同的盒子

推广到S[n][m]计算

思考第n个球如何放入? 共分2种情况讨论

第一种 第n个球单独放1个盒子,剩下n-1球放m-1盒子

S[n-1][m-1]

第二种 先让前n-1个球放m盒子,第n个球挑一盒加入

m*S[n-1][m]

$$S[n][m]=S[n-1][m-1]+m*S[n-1][m]$$

代码

跟着老师翻译
理解每一行

特殊情况处理

```
cin>>n>>m;
if(n<m) {
    cout<<0<<endl;
    return 0;
}
for(ll i=1;i<=n;i++)S[i][1]=1;
for(ll j=2;j<=m;j++)
    for(ll i=j;i<=n;i++)
        S[i][j]=S[i-1][j-1]+j*S[i-1][j];
cout<<S[n][m]<<endl;
```

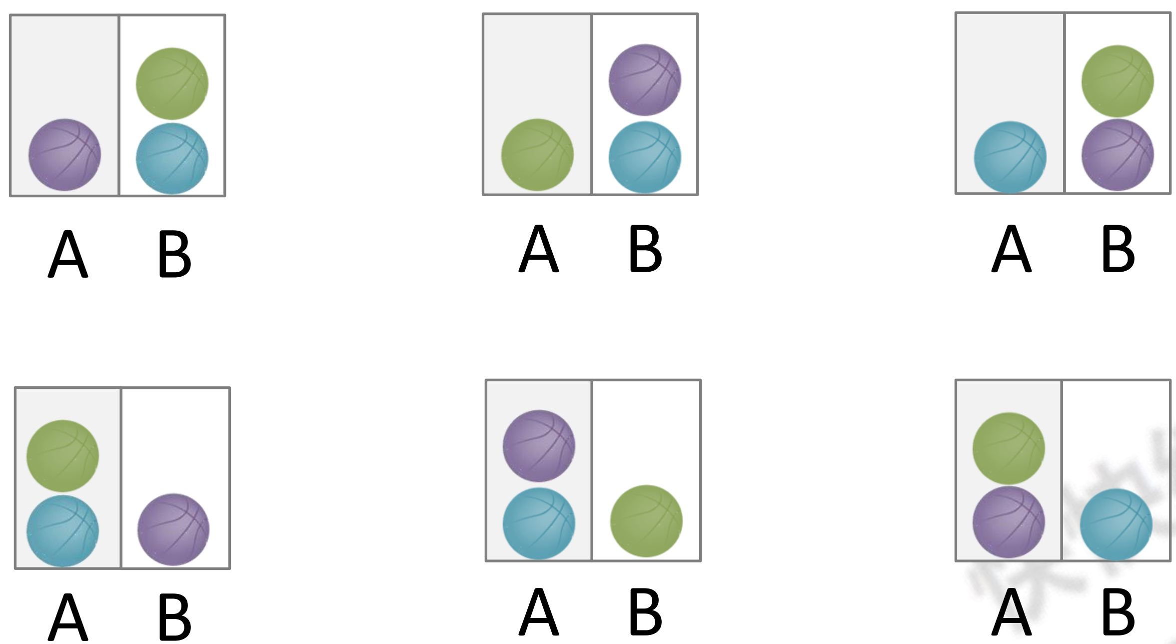
4	不同的球	放入	不同的盒子

4　不同的球　放入　不同的盒子

将n个不同的球放入m个不同盒子里，要求盒子都不能空。请问有多少种方案? n<=15,m<=15

输入样例	输出样例
3 2	6

难点:盒子不同



4

不同的球	放入	不同的盒子

将n个不同的球放入m个不同盒子里，要求盒子都不能空。请问有多少种方案? n<=15,m<=15

先假设m个盒子相同	S[n][m]
m个不同盒子 有多少种排列?	m!

本问题答案
=S[n][m]*m!

哪个最难

	不允许空盒		
1	相同的球	放入	相同的盒子
2	相同的球	放入	不同的盒子
3	不同的球	放入	相同的盒子
4	不同的球	放入	不同的盒子

请估计
哪个结果最大?

快快编程作业

1628

1629

1630

1631