信奥算法

博弈论

Game Theory

1928年，冯•诺依曼证明了博弈论的基本原理，从而宣告了博弈论的正式诞生。1944年，冯•诺依曼和摩根斯坦共著划时代巨著《博弈论与经济行为》将博弈论系统地应用于经济领域，从而奠定了这一学科的基础理论体系。

约翰·冯·诺依曼
John von Neumann

冯•诺依曼同时也被称为“计算机之父”

基本功	异或
	xor

另类理解	异或就是不进位的加法
	异或就是不借位的减法

^ 按位 异或

1^1是0，0^0是0
1^0是1，0^1是1

11011111101111011011111101111101100

^

10111100101100111111100010000001100

得到

01100011000001110000011001111100000

预测结果

```
int x=1;
int y=2;
cout<<(x^y)<<endl;
```

```
int a=7;
int b=3;
cout<<(a^b)<<endl;
```

```
cout<<(a xor b)<<endl;
```

口算

1^0	1^2^3
1^1	9^12^12
2^4	88^45^88
4^5	6^4^5^6^5

优先级

位运算的优先级非常低
建议位运算都使用括号

预测结果

```cpp
cout<<(1+(1^2))<<endl;
cout<<(1+1^2)<<endl;
```

```cpp
cout<<(2^2==0)<<endl;
cout<<((2^2)==0)<<endl;
```

口算

已知 1^2^3^4^5^6^7^8 结果为	8

求 1^2^3^5^6^7^8 结果为几?	12

1^2^3^5^6^7^8
= (1^2^3^4^5^6^7^8)^4
= 8^4 =12

求 1^2^3^4^5^6^8 结果为几?	15

1^2^3^5^6^7^8
= (1^2^3^4^5^6^7^8)^7
= 8^7 =15

基本功

集合运算

mex

mex S
代表不在集合S里的
最小非负整数

mex {0,1,2,3,5,7,9} = 4

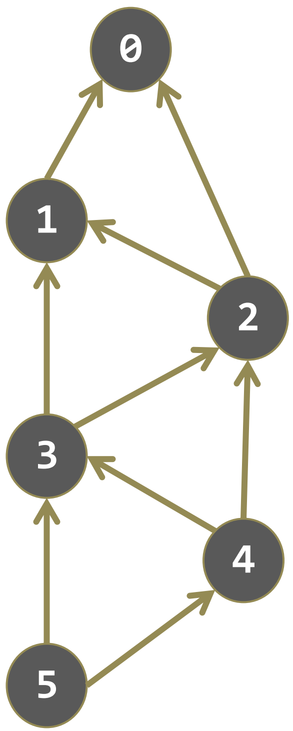
mex {1,2,3} = 0

mex {0} = 1

mex {0,1} = 2

有向无环图游戏

DAG Games



有1个DAG，棋子的起始位置为节点s

有2个完全理性玩家轮流操作

每个玩家只能将棋子从当前位置沿着有向边移动一步

状态转移

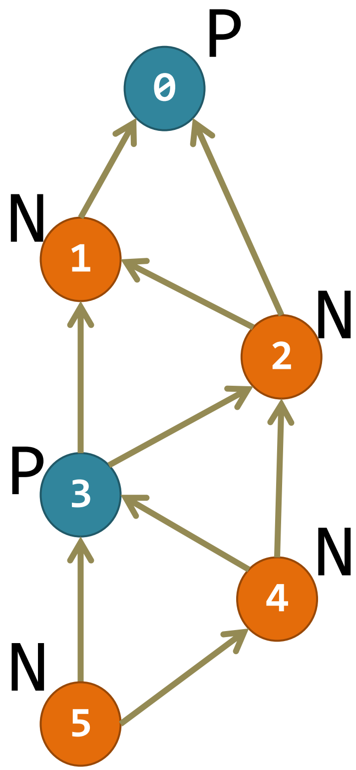
无法移动棋子的人算输

边界情况

若起点是5时，先手有没有必胜策略

起点编号	0	1	2	3	4	5
必胜/败	败	胜	胜	败	胜	胜

胜败
NP



先手必胜状态记作N
next的缩写 代表此状态 下一个动手者胜利

先手必败状态记作P
previous的缩写 代表此状态 上一个动手者胜利

起点编号	0	1	2	3	4	5
必胜/败	败	胜	胜	败	胜	胜
N/P	P	N	N	P	N	N

公平组合游戏

Impartial **C**ombinatorial **G**ames

1 2名玩家交替行动

2 合法行动和轮到谁无关

3 无法行动的玩家判负

ICG都可以转换为DAG游戏

节点代表状态,边代表合法行动

巴什博弈

Bash Game

请问先手有没有必胜策略?

共n颗石子,2人轮流取,每次可以取走石子的数量为1到k，取走最后1颗石子获胜。

一排共n+1个格子,编号0到n。棋子起始位置在n号,2人轮流取移动棋子,每次可以移动1到k格，移到0号格获胜。

2人轮流取报数,从1,2,3,...开始数字递增,每次可以报数的个数为1到k，报n的人获胜

巴什博弈

Bash Game

请问先手有没有必胜策略?

共n颗石子,2人轮流取,每次可以取走石子的数量为1到k，取走最后1颗石子获胜。

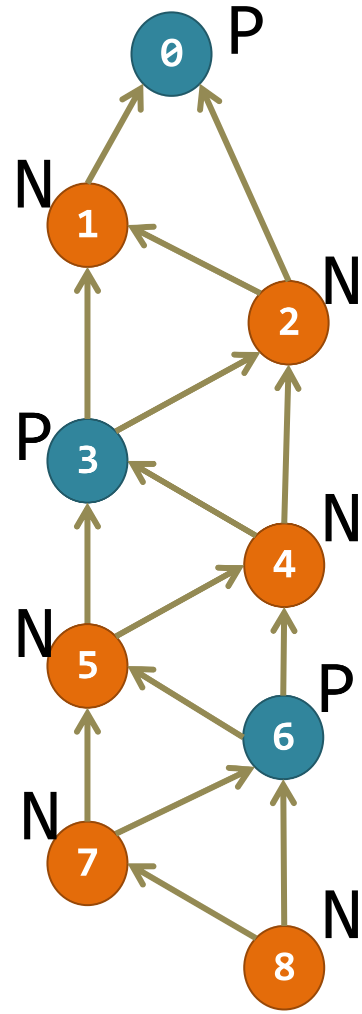
一排共n+1个格子,编号0到n。棋子起始位置在n号,2人轮流取移动棋子,每次可以移动1到k格，移到0号格获胜。

n=8,k=2

状态x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
必胜/败	败	胜	胜	败	胜	胜	败	胜	胜
N/P	P	N	N	P	N	N	P	N	N

巴什博弈

Bash Game



n=8,k=2

状态x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
必胜/败	败	胜	胜	败	胜	胜	败	胜	胜
N/P	P	N	N	P	N	N	P	N	N

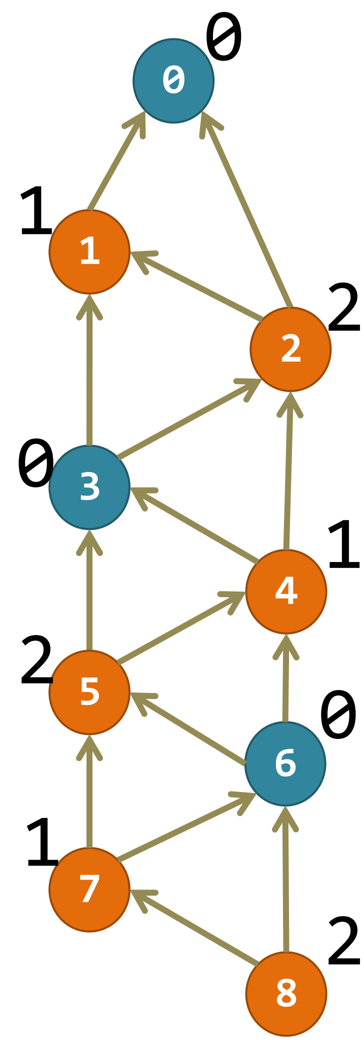
SG函数

Sprague-Grundy Function

$$SG(x)=mex\{SG(y)\}$$

y是x后继

SG(1)=mex{SG(0)}
SG(2)=mex{SG(1),SG(0)}
SG(3)=mex{SG(2),SG(1)}
SG(4)=mex{SG(3),SG(2)}



n=8,k=2

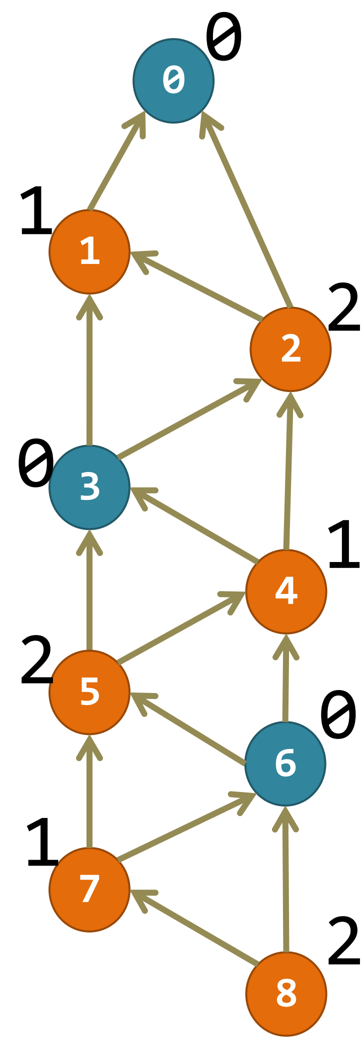
状态x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
SG(x)	0	1	2	0	1	2	0	1	2
N/P	P	N	N	P	N	N	P	N	N

SG函数

Sprague-Grundy Function

$$SG(x)=mex\{SG(y)\}$$

y是x后继



SG(x)非0时x为N状态必胜

SG(x)为0时x为P状态必败

n=8,k=2

状态x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
SG(x)	0	1	2	0	1	2	0	1	2
N/P	P	N	N	P	N	N	P	N	N

SG函数

Sprague-Grundy Function

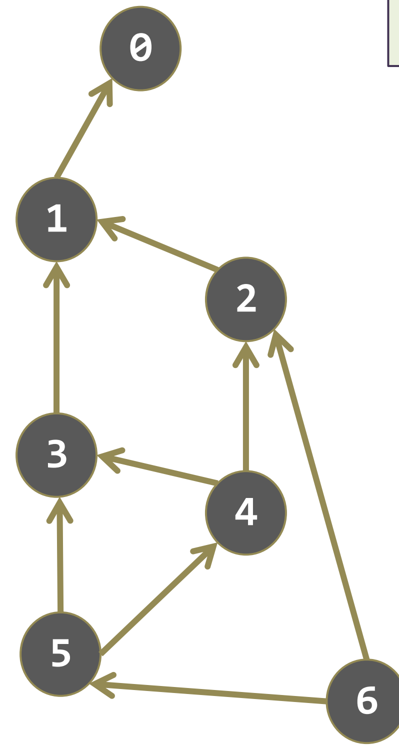
DAG
游戏

$$SG(x)=mex\{SG(y)\}$$

y是x后继

SG(x)非0时x为N状态必胜

SG(x)为0时x为P状态必败



状态x	0	1	2	3	4	5	6
SG(x)	?	?	?	?	?	?	?
N/P	?	?	?	?	?	?	?

SG函数

Sprague-Grundy Function

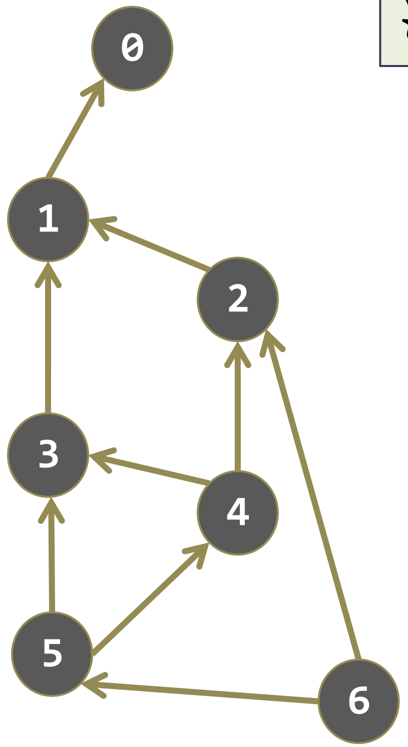
DAG
游戏

$$SG(x)=mex\{SG(y)\}$$

y是x后继

SG(x)非0时x为N状态必胜

SG(x)为0时x为P状态必败



状态x	0	1	2	3	4	5	6
SG(x)	0	1	0	0	1	2	1
N/P	P	N	P	P	N	N	N

SG函数

Sprague-Grundy Function

任取石子

$$SG(x)=mex\{SG(y)\}$$

y是x后继

1堆石子共x颗，2人轮流取，
每次可以取任意多颗，
取到最后1颗获胜

SG(x)非0时x为N状态必胜

SG(x)为0时x为P状态必败

状态x	0	1	2	3	4	5	6
SG(x)	?	?	?	?	?	?	?
N/P	?	?	?	?	?	?	?

SG函数

Sprague-Grundy Function

任取石子

$$SG(x)=mex\{SG(y)\}$$

y是x后继

1堆石子共x颗，2人轮流取，
每次可以取任意多颗，
取到最后1颗获胜

SG(x)非0时x为N状态必胜

SG(x)为0时x为P状态必败

状态x	0	1	2	3	4	5	6
SG(x)	0	1	2	3	4	5	6
N/P	P	N	N	N	N	N	N

SG函数

Sprague-Grundy Function

取石子
变种

1堆石子共x颗，2人轮流取，
每次只可以取1颗或3颗，
取到最后1颗获胜

一排共x个格子,编号0到x,
棋子初始在x号格,2人轮流移动棋子,
每次只可以移动1格或3格,
移到1号格获胜

状态x	0	1	2	3	4	5	6
SG(x)	?	?	?	?	?	?	?
N/P	?	?	?	?	?	?	?

SG函数

Sprague-Grundy Function

取石子变种

1堆石子共x颗，2人轮流取，
每次只可以取1颗或3颗，
取到最后1颗获胜

一排共x个格子，编号0到x，
棋子初始在x号格，2人轮流移动棋子，
每次只可以移动1格或3格，
移到1号格获胜

状态x	0	1	2	3	4	5	6
SG(x)	0	1	0	1	0	1	0
N/P	P	N	P	N	P	N	P

SG函数

Sprague-Grundy Function

$$SG(x)=\operatorname{mex}\{SG(y)\}$$

y是x后继

定义	SG(x)是不在x后继状态SG值集合里的最小非负数

推论	{0,1,2,..,SG(x)-1}全部都在x后继状态SG值的集合里

推论	状态x至少有SG(x)个后继状态
	SG(x)不超过节点总数N

NIM游戏2堆版

1 有两堆石子a_1和a_2颗
2名玩家交替取石子

2 可以选任1堆取走任意正数颗

3 取走最后1颗获胜
无法取的玩家判负

NIM
2堆

判断以下状态是N或P

1颗+2颗	N
2颗+2颗	P
3颗+3颗	P

若a_1和a_2相等	P必败	容易判断！
若a_1和a_2不等	N必胜	
	第1步使$a_1=a_2$	
	随后对手取完后你继续使$a_1=a_2$	

NIM游戏3堆版

1 有3堆石子a_1, a_2, a_3颗
2名玩家交替取石子

2 可以选任1堆取走任意正数颗

3 取走最后1颗获胜
无法取的玩家判负

NIM
3堆

判断以下状态是N或P

1颗+2颗+2颗	N
1颗+2颗+3颗	P
1颗+6颗+7颗	P

大胆猜测P状态特点		
	若a_1^a_2^a_3为0	P必败
	若a_1^a_2^a_3非0	N必胜

第1步使a_1^a_2^a_3为0
随后对手取完后 你继续使a_1^a_2^a_3为0

NIM
3堆

N必胜状态		P必败状态	
2颗	010	2颗	010
+		+	
3颗	011	3颗	011
+		+	
4颗	100	1颗	001

取3颗 →

2^3^4　　$(101)_2=5$　　2^3^1　　$(000)_2$

必胜策略第1步
怎么取?

NIM
3堆

N必胜状态			P必败状态	
1颗	0001		1颗	0001
+			+	
7颗	0111		7颗	0111
+		取2颗 →	+	
8颗	1000		6颗	0110

1^7^8　$(1110)_2$=14　　1^7^6　$(0000)_2$

必胜策略第1步怎么取?

选最大数8这堆。除了8这堆,
其他堆总异或值为14^8=6
所以8这堆修改目标为8^14=6
取走8-(8^14)=2颗

1^7=1^7^8^8
=14^8

NIM游戏经典版

1 有n堆石子$a_1, a_2, ..., a_n$颗
2名玩家交替取石子

2 可以选任1堆取走任意正数颗

3 取走最后1颗获胜
无法取的玩家判负

先手有没有必胜策略?

NIM游戏经典版

异或定理		
	若a_1^a_2^..^a_n为0	P必败
	若a_1^a_2^..^a_n=x非0	N必胜

第1步使a_1^a_2^..^a_n为0
随后对手取完后 你继续使a_1^a_2^..^a_n为0
x二进制的最高位1, 肯定来自至少1堆,设为a_i。 除了a_i这堆, 其他堆总异或值为x^a_i 所以a_i这堆修改目标为x^a_i 取走a_i-(x^a_i)

为什么
a_i>=(x^a_i)
一定成立?

有向图游戏的和

有n个有向图游戏$G_1, G_2, ..., G_n$
各游戏状态为$x_1, x_2, ..., x_n$

定义新游戏G为$G_1, G_2, ..., G_n$的和
其游戏状态为$x=(x_1, x_2, ..., x_n)$

G的行动规则：每次可在n个子游戏里选任1个游戏G_i，并在G_i上行动1步

SG定理

游戏和G在状态x的SG函数值为

n堆问题可化简为1堆问题

$SG(x)=SG(x_1)$^$SG(x_2)$ ^..^$SG(x_n)$

SG(x)非0时x为N状态必胜

SG(x)为0时x为P状态必败

有向图游戏的和

NIM游戏就是n堆的游戏和

$SG(x_1)=x_1$

$SG(x_2)=x_2$

...

$SG(x)=SG(x_1)\verb|^|SG(x_2)\verb|^|..\verb|^|SG(x_n)$

$=x_1\verb|^|x_2\verb|^|..\verb|^|x_n$

SG(x)非0时x为N状态必胜

SG(x)为0时x为P状态必败

补全程序

```
int x,sg=0;
for(int j=0;j<n;j++){
	cin>>x;
	
}
if(sg==0) cout<<"LOSE"<<endl;
else cout<<"WIN"<<endl;
```

现场挑战
快快编程1745

请同学概括题目大意
已知什么求什么

限时3分钟

游戏分裂

初始状态1堆石子共x颗, 2人轮流取,
每次可以挑选1堆分成2个非空堆,
或者挑选1堆,取走任意正整数颗,
取到最后1颗获胜

等效问题

一排共x+1个格子,编号0到x,
棋子初始在x号格,2人轮流移动棋子,
每次可挑选1颗棋子分成2颗,
或者挑选1颗棋子,左移任意正整数格,
全部移到0号格获胜,无法移动判败

状态x	0	1	2	3	4
SG(x)	?	?	?	?	?

游戏分裂

初始状态1堆石子共x颗，2人轮流取，
每次可以挑选1堆分成2个非空堆，
或者挑选1堆，取走任意正整数颗，
取到最后1颗获胜

SG(3)=mex{SG(0),SG(1),SG(2),SG(1)^SG(2)}
=mex{0,1,2,1^2}=mex{0,1,2,3}=4

SG(4)=mex{0,1,2,SG(3),SG(1)^SG(3),SG(2)^SG(2)}
=mex{0,1,2,4,1^4,2^2}=mex{0,1,2,4,5,0}=3

状态x	0	1	2	3	4
SG(x)	0	1	2	4	3

初始状态1堆石子共x颗，2人轮流取，
每次可以挑选1堆分成2个非空堆，
或者挑选1堆，取走任意正整数颗，
取到最后1颗获胜

状态x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
SG(x)	0	1	2	4	3	?	?	?	?

初始状态1堆石子共x颗，2人轮流取，
每次可以挑选1堆分成2个非空堆，
或者挑选1堆，取走任意正整数颗，
取到最后1颗获胜

SG(5)=mex{0,1,2,3,4,SG(1)^SG(4),SG(2)^SG(3)}
=mex{0,1,2,3,4,1^3,2^4}=mex{0,1,2,3,4,2,6}=5

能否总结出数学规律

状态x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
SG(x)	0	1	2	4	3	5	6	8	7

现场挑战
快快编程1409

请同学概括题目大意
已知什么求什么

限时3分钟

输入	输出
2	YES
4 5	1 1
2	
1 3	

共2堆,每堆数量为{4,5}

假设只有1堆共x个石子

只可以取走1个或3个

请计算SG(x)数值

状态x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
SG(x)	0	1	0	1	0	1	0	1	0

对于1堆情况
递推求sg[]数组

```
void getSG(){
	for(int x=1;x<R;x++){
		fill(ok,ok+N,0);
		for(int i=1;i<=m;i++)
			if(x-b[i]>=0)
				ok[sg[x-b[i]]]=1;
		for(int k=0;k<=1000;k++)
			if(!ok[k]){
				sg[x]=k;
				break;
			}
	}
}
```

若必胜，如何确定：
第一步取哪一堆，取走几颗

SG代表游戏和的
初始总SG值

SG^sg[a[i]]代表
除了i号堆以外的总SG值

```
	for(int i=1;i<=n;i++)
		for(int j=1;j<=m;j++){
			int nSG=(SG^sg[a[i]]^sg[a[i]-b[j]]);
			if(nSG==0) {
				printf("%d %d\n",i,b[j]);
				return 0;
			}
		}
```

nSG代表若从i号堆
取走b[j]颗后得到的总SG值

现场挑战
快快编程1408

请同学概括题目大意
已知什么求什么

限时3分钟

不能以堆作为独立游戏
而要以豆子为独立游戏

3堆:
0号堆2颗
1号格3颗
2号格1颗

=

6个游戏的和
游戏A:从0号移动到2号格
游戏B:从0号移动到2号格
游戏C:从1号移动到2号格
游戏D:从1号移动到2号格
游戏E:从1号移动到2号格
游戏F:从2号移动到2号格

1颗豆子分裂
出2颗豆子
如何处理?

讨论

既然最终判断NP赢输状态
SG()函数为什么不取0/1结果

快快编程作业

1409
1745
1408
整理SG定理证明发课程群

拓展题	334,453,1410