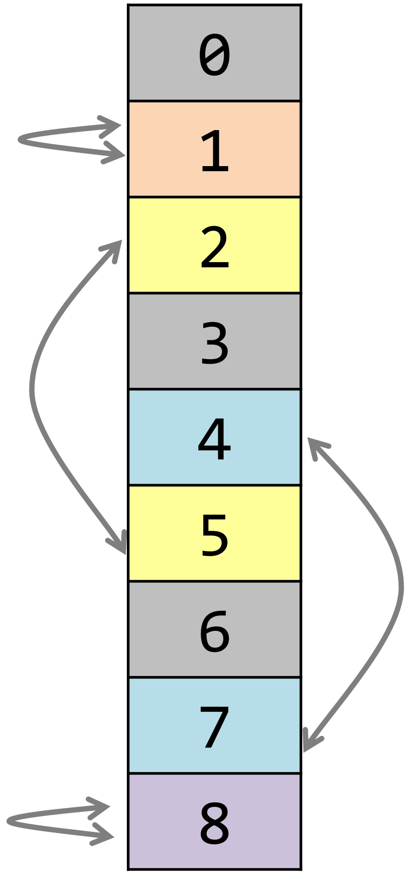
C++算法

逆元

inverse element

模意义下的乘法逆元

模9的世界



1*1 模9为1	在模9意义下,1的乘法逆元是1
2*5 模9为1	在模9意义下,2的乘法逆元是5

4*7 模9为1	在模9意义下,4的乘法逆元是7
5*2 模9为1	在模9意义下,5的乘法逆元是2

7*4 模9为1	在模9意义下,7的乘法逆元是4
8*8 模9为1	在模9意义下,8的乘法逆元是8

在模9意义下,为什么3和6都没有乘法逆元?

不互质

模9的世界

0
1
2
3
4
5
6
7
8

1*1 模9为1
2*5 模9为1

4*7 模9为1
5*2 模9为1

7*4 模9为1
8*8 模9为1

20/4≡20*7(mod 9)
20/5≡20*2(mod 9)

模意义下
逆元可以将除法变乘法

计算逆元的算法

问题描述	已知a和p，且a和p互质， 对于同余方程 $a*x\equiv 1 \pmod p$， 求a的逆元x

a=2，p=11，求x
a=3，p=11，求x
a=9，p=11，求x
a=20，p=11，求x
a=100，p=11，求x

有时a的逆元记作 a^{-1}，
满足 $a*a^{-1}\equiv 1 \pmod p$

问题描述	已知a和p,且a和p互质, 对于同余方程 a*x≡1(mod p), 求a的逆元x

存在整数y满足 a*x+p*y=1

求解二元一次不定方程
使用扩展欧几里得算法exgcd

模MOD意义下 求a的乘法逆元

```cpp
ll inverse(ll a,ll MOD){
    ll x,y;
    ll g=exgcd(a,MOD,x,y);
    if(g==1) return (x%MOD+MOD)%MOD;
    cout<<"ERROR"<<endl;
    return -1;
}
```

满足 $a*x+MOD*y=1$

```
/*
辗转相除 (a,b) -> (b,a%b)
bx'+(a-a/b*b)y'=gcd(a,b)
根据a,b分类整理
ay'+b(x'-a/b*y')=gcd(a,b)
所以x=y',y=x'-a/b*y'
*/
ll exgcd(ll a,ll b,ll&x,ll&y){
    if(b==0){
        x=1; y=0;
        return a;
    }
    ll xp,yp;
    ll g=exgcd(          );
    x=
    y=
    return g;
}
```

复习exgcd

时间复杂度

O(log(max(a,b))

求解

$ax+by=gcd(a,b)$

快快编程2384

模p意义下同余关系推导

逆元 逆元

$$C(n,m) \equiv \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \equiv n! \times (m!)^{-1} \times \left((n-m)!\right)^{-1}$$

$$\equiv (n!\,\%p) \times (m!\,\%p)^{-1} \times \left((n-m)!\,\%p\right)^{-1}$$

$$\equiv f[n] \times f[m]^{-1} \times f[n-m]^{-1}$$

$$\equiv f[n] \times inverse(f[m],p) \times inverse(f[n-m],p)$$

f[x]表示x!%p	inverse(x,p)表示在模p意义下x的乘法逆元

组合数取模

```cpp
ll C(ll n,ll m,ll p){
	f[0]=1;
	for(ll x=1;x<=n;++x)f[x]=f[x-1]*x%p;
	ll res=f[n];
	res=res*inverse(f[m],p)%p;
	res=res*inverse(f[n-m],p)%p;
	return res;
}
```

f[x]表示x!%p	inverse(x,p)表示在模p意义下x的乘法逆元

讨论题

输入n和质数p，求第n项卡特兰数模p

$C_1=1$
$C_2=2$
$C_3=5$
$C_4=14$
$C_5=42$
$C_6=132$

$$C_n = \frac{1}{n+1} C(2n, n)$$

类似组合数取模
利用乘法逆元

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}$$

现场挑战
快快编程273

请同学写出题目大意
已知什么求什么

限时2分钟

输入15	输出几?	45

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	总
1	√															1
2	√	√														2
3	√		√													2
4	√	√		√												3
5	√				√											2
6	√	√	√			√										4
7	√						√									2
8	√	√		√				√								4
9	√		√						√							3
10	√	√			√					√						4
11	√										√					2
12	√	√	√	√		√						√				6
13	√												√			2
14	√	√					√							√		4
15	√		√		√										√	4
总	15	7	5	3	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	45

思维角度转换

i是否为j的倍数
j是否为i的约数
i有几个约数
j有几个倍数

一行一行统计　　　　一列一列统计

$$\sum_{x=1}^{n} x\text{的约数个数} = \sum_{i=1}^{n} i\text{是}1\text{到}n\text{里几个整数的约数}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

```
ll ans=1;
for(ll x=2;x<=n;++x){
    ll i=1;
    for(;i*i<x;++i)
        if(x%i==0)ans+=2;
    if(i*i==x)++ans;
}
```

$$\sum_{x=1}^{n} x\text{的约数个数}$$

复杂度$O(n\sqrt{n})$

```
ll ans=0;
for(ll i=1;i<=n;++i)
    ans+=n/i;
```

$$\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor$$

复杂度$O(n)$

能否再加速?

合并同类项 | 分块

$$\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor$$

n=15

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor$	15	7	5	3	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1

n=20

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor$	20	10	6	5	4	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

整块计算比
逐格计算更快

合并同类项	分块

$$\sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

n=15

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$	15	7	5	3	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1

l r

```
for(ll l=1,r;l<=n;l=r+1){
    ll val=n/l;
    r=n/val;
    ans+=val*(r-l+1);
}
```

易错点:分母有可能为0吗?

复杂度?

复杂度$O(\sqrt{n})$

左侧i的个数不多

$\lfloor\sqrt{n}\rfloor$

右侧$\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor$的种类不多

n=15

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor$	15	7	5	3	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1

$$\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor=\sum_{i=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor+\sum_{i=\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor$$

左侧i的个数$O(\sqrt{n})$

右侧$\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor$的种类$O(\sqrt{n})$

根号分治

快快编程73

一行一行统计　　一列一列统计

$$solve(n)=\sum_{x=1}^{n} x\text{的约数和}=\sum_{i=1}^{n} i\times i\text{是1到}n\text{里几个整数的约数}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} i\times\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor$$

连续和转换为前缀和做差
solve(n)表示f(1)+f(2)+…+f(n)
f(X)+f(X+1)+…+f(Y) =solve(Y)-solve(X-1)

合并同类项 | 分块

$$\sum_{i=1}^{n} i \times \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

n=15

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$	15	7	5	3	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1

l r

```
ll solve(ll n){
    ll res=0;
    for(ll l=1,r;l<=n;l=r+1){
        ll val=n/l;
        r=n/val;
        res+=
    }
    return res;
}
```

快快编程77

$$\sum_{i=1}^{n} k\%i = \sum_{i=1}^{n}\left(k - \left\lfloor\frac{k}{i}\right\rfloor \times i\right) = \sum_{i=1}^{n} k - \sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{k}{i}\right\rfloor \times i$$

$$\boxed{n \times k - solve(n, k)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} k\%i = \sum_{i=1}^{n}\left(k - \left\lfloor\frac{k}{i}\right\rfloor \times i\right) = \sum_{i=1}^{n} k - \sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{k}{i}\right\rfloor \times i$$

$$\boxed{n \times k - solve(n, k)}$$

```
ll solve(ll n,ll k){
	ll res=0;
	for(ll l=1,r;l<=n;l=r+1){
		ll val=k/l;
		if(val) 
		else 
		res+=
	}
	return res;
}
```

讨论题

分块
相同数值val
所在区间[l,r]

$$\sum_{i=1}^{n}\left\lceil\frac{n}{i}\right\rceil$$

n=15

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\left\lceil\frac{n}{i}\right\rceil$	15	8	5	4	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	1

```
ll val=ceil(n*1.0/l);
```

```
if(val==1) r=n;
else if(n%(val-1))r=n/(val-1);
else r=n/(val-1)-1;
```

r是满足该方程最大的i

$$\left\lceil\frac{n}{i}\right\rceil = val$$

$$val-1<\frac{n}{i}\le val$$

$$i<\frac{n}{val-1}$$

快快编程作业

2383

2384

73

77