

信奥算法

现场挑战

986

请写出题目大意
已知什么求什么

写出算法步骤和复杂度
或者写出难点

限时5分钟

差分约束系统

差分约束
系统无解

约束图有
负权回路

$$\begin{array}{ll}
 \max & x_4 - x_1 \\
 s.t. & x_2 - x_1 \leq 2, \\
 & x_3 - x_2 \geq 2, \\
 & x_3 - x_1 \leq 3, \\
 & x_4 - x_2 \leq 2, \\
 & x_4 - x_3 \leq 1.
 \end{array}$$

请同学画出
约束图
并求出答案

$$\max \quad x_4 - x_1$$

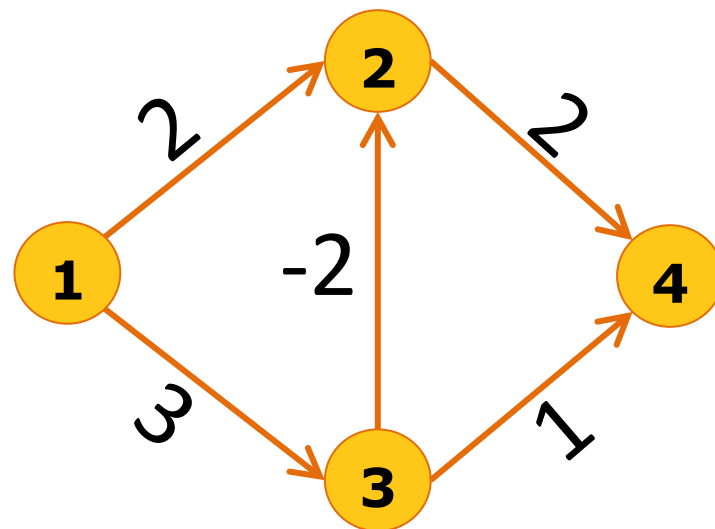
$$s. t. \quad x_2 - x_1 \leq 2,$$

$$x_3 - x_2 \geq 2,$$

$$x_3 - x_1 \leq 3,$$

$$x_4 - x_2 \leq 2,$$

$$x_4 - x_3 \leq 1.$$



$x_4 - x_1$ 最大值是3

例如 $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 3$

猜想

差分约束
系统可行解
中 $x_n - x_1$
的最大值

=

约束图里
从1号节点
到n号节点
最短路 d_n

请同学写出证明过程

或给出反例

证明的两个部分

1

差分约束
系统可行解
中 $x_n - x_1$
的最大值

\geq

约束图里
从1号节点
到n号节点
最短路 d_n

2

差分约束
系统可行解
中 $x_n - x_1$
的最大值

\leq

约束图里
从1号节点
到n号节点
最短路 d_n

哪一步更简单?

1

差分约束
系统可行解
中 $x_n - x_1$
的最大值

\geq

约束图里
从1号节点
到n号节点
最短路 d_n

因为约束图的单源最短路答案

d_1, d_2, \dots, d_n

一定满足差分约束系统
对任意边 $d_j - d_i \leq w_{ij}$ 成立
否则可以改进最短路

所以对于差分约束系统的可行解

d_1, d_2, \dots, d_n

$d_n - d_1$ 不可能超过最优解 $x_n^* - x_1^*$

2

差分约束
系统可行解
中 $x_n - x_1$
的最大值

\leq

约束图里
从1号节点
到n号节点
最短路 d_n

取出约束图的最短路径

$$P: d_{x1=1}, d_{x2}, d_{x3}, \dots, d_{xn}$$

对最短路径上的边 $d_j - d_i = w_{ij}$ 成立

累加这些等式得 $d_n - d_1 = \sum_{(i,j) \in P} w_{ij}$

最短路上的边对应的不等式组

只是约束系统一部分

所以 $d_n - d_1 = \sum_{(i,j) \in P} w_{ij}$
是 $x_n - x_1$ 一个上限

证明思想总结

两个步骤都是
从“最短路”性质出发
因为“最短路”更加具象
自带丰富的性质
而约束差分系统
代数关系相对抽象
较难利用

d[]变化过程

从INF逐步变小
直到满足约束系统
此瞬间就是最短路径
也是约束系统最优解

Duality
二元对立性

某个最小化问题 对应 另一个最大化问题

986

约束

第*i*条要求是，不能够出现*Ai*比*Bi*少拿超过*Ci*元
换句话说讲，*Bi*哪怕比*Ai*多拿，差距也不能超过*Ci*元

$$X_{Bi} - X_{Ai} \leq C_i$$



$$X_{Bi} \leq X_{Ai} + C_i$$



目标

你儿子奖金超过你自己的奖金最多可以是多少

$$\max x_2 - x_1$$



求源点1号到2号节点
最短路

986

```
32 scanf("%d %d",&n,&m);
33 for(int i=1;i<=m;i++){
34     int a,b,c;
35     scanf("%d %d %d",&a,&b,&c);
36     add(a,b,c);
37 }
38 dijkstra();
39 printf("%d\n",dst[2]);
```

现场挑战

987

请写出题目大意
已知什么求什么

写出算法步骤和复杂度
或者写出难点

限时5分钟

987

士兵间隔不能太远

$$X_{Bi} - X_{Ai} \leq C_i$$



$$X_{Bi} \leq X_{Ai} + C_i$$



士兵间隔不能太接近

$$X_{Bi} - X_{Ai} \geq C_i$$



$$X_{Ai} \leq X_{Bi} - C_i$$



还有一个隐藏约束!!
从左到右编号1到n

987

1号士兵就是你自己，n号士兵是副司令，希望你们两个分开越远越好以防止同时牺牲，请问你们两个最远可以相隔多远？如果可以无限远输出infinity，如找不到符合要求的排兵布阵输出impossible

$$\max x_n - x_1$$



求源点1号到n号节点
最短路

如找不到符合要求的排兵布阵输出impossible

负环

如果可以无限远输出infinity

不连通

现场挑战

988

请写出题目大意
已知什么求什么

写出算法步骤和复杂度
或者写出难点

限时5分钟

988

决策变量 f_i 代表 i 号台选不选，01决策

A_i 号到 B_i 号之间至少选 C_i 个



连续和

决策变量 S_i 代表前 i 台共选几个

前缀和

$$S_{B_i} - S_{A_i-1} \geq C_i$$



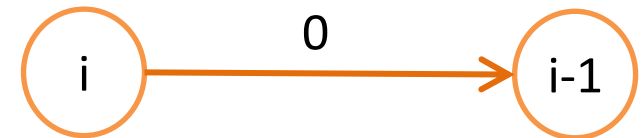
$$S_{A_i-1} \leq S_{B_i} - C_i$$

$$i=1,2,\dots,m$$

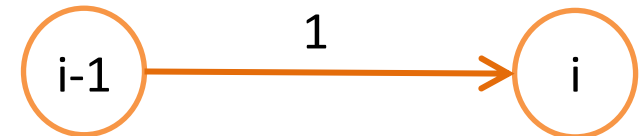


还有一个隐藏约束! 01约束!!

$$0 \leq S_i - S_{i-1} \leq 1 \quad i=1,2,\dots,n$$



$$S_{i-1} \leq S_i \quad S_i \leq S_{i-1} + 1$$



988

最少要在几个烽火台驻兵？

$$\min (S_n - S_0) = -\max (S_0 - S_n)$$

建立约束图后，源点设置为 S_n ，汇点为 S_0

求从 S_n 到 S_0 的最短路 $\text{dst}[0]$

输出 $-\text{dst}[0]$

建模要点

小于等于

大于等于

小于

大于

连续段

01约束

各种幺蛾子隐藏约束最坑人

建模建图时易错点有哪些?

快快编程作业

986

987

988

整理本课定理证明发课程群