C187暑期2022

第3场 试题讲简

Arthas（COCI）

输入一个小写字母组成的字符串，求其中 UV / len 最小的区间

20%的数据，n≤100

40%的数据，n≤2000

另20%的数据，字符串只包含ab

另20%的数据，字符串只包含abcde

100%的数据，n≤100000

Arthas（COCI）

- → **暴力（增量式算UV）：** $O(n^2)$，40分

  字符集小的40分已经没啥用了（都增量式算UV了）

- → **分子只有26中取值，可以枚举（控制变量法）**

  给定UV，求区间长度最大值（七龙珠），标准蠕动区间场景

  复杂度：$O(26n)$

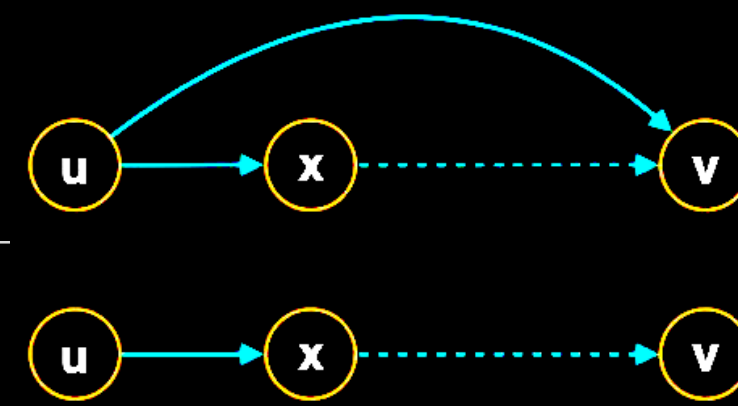
Sylvanas

给定一个有向无环图，求一个边数最少的子图，保持传递闭包不变。称这样的子图为传递基

30%的数据，$n \le 10$, $m \le 20$
60%的数据，$n \le 100$, $m \le 200$
80%的数据，$n \le 1000$, $m \le 2000$
100%的数据，$n \le 10000$, $m \le 20000$，$1 \le x < y \le n$

（自然编号就是拓扑排序，省了事了）

Sylvanas



→ **暴力：**$O(nm2^m)$，20分

→ **证明对DAG，答案是唯一的**

假设G两个极小子图$G_1 \neq G_2$，但传递闭包都与G同

将边u→v按先u降后v增排序。按此顺序比对G_1, G_2各边

有第1次出现某边$(u, v) \in G_1, (u, v) \notin G_2$（否则$G_1 = G_2$了）

而G_2中u→v连通（否则传递闭包不同）

则∃$(u, x) \in G_2$**且**G_2**中x→v连通**$, u < x < v$

根据比较顺序及(u, x)先于(u, v)

故$(u, x) \in G_1$且G_1中x→v也连通，则$G_1(u, v)$是多余的

即G_1不是极小的，矛盾

→ **贪心法：**每次尝试删1条边，使传递闭包不变，直到找不到

暴力：$O(m^3)$，60分

Sylvanas

→ **DAG上，传递基对拓扑排序的后缀有最优子结构**

传递基去掉点1（拓扑序最小点），余图也是原图余图的传递基

→ **可沿拓扑排序倒推**

已知子图$\{u+1..n\}$的传递基，**现增加点u，保留哪些出边$u \to v$**

→ **如通过其他路径$u \to v$可达，则不需要这条边**

v按从小到大顺序处理，则未处理的边不可能在$u \to v$的路径上

则$u \to v$不用保留，当且仅当通过已保留的边$u \to v$是否可达

→ **维护当前u可达的点集S_u**

如$v \in S_u$，则不保留此边；否则保留此边，并让$S_u = S_u \cup S_v$

用set实现S：$O(nm \log n)$，60~80分

S值域只有1..n，**用bool数组实现S**：$O(nm)$，80分

→ **压位优化/用bitset实现S**：$O(nm/30)$，100分

→ 压位优化/用bitset实现S：$O(nm/30)$，100分

Sylvanas

→ **传递基的其他性质**

对有环图，不一定唯一（如完全有向图任意n阶环都是）

→ **传递闭包相同是图全集的一个等价关系**

传递基可视为其等价类的代表元

Anubarak

给定序列$a_1 \ldots a_n$，每次可删除一个同值的子段，并获得其长度平方的收益。被删后右边元素自动左移补位（一维消消乐）。求可获的最大总收益

30%的数据，n≤15
另30%的数据，a_i≤2
100%的数据，1≤a_i≤n≤100

Anubarak

→ **暴力：约$O(n!)$，30分**

纯暴搜自由度太大（swap顺序，每次swap哪两个）

→ **初始同值的连续段始终是一个整体，先离散化一下**

$c_i, L_i =$ 第i个原始连续段的颜色和长度

（此步也可以不做，为叙述方便+常数优化）

→ **方块的相对顺序不变，任何时刻已被消的是原先的一些区间**

$f_{ij} =$ 消原始的i~j段，最大收益

→ **决策最后一段的消法**

1.直接消掉：$f_{i,j-1} + L_j^2$

2.等与前面第p段接上后一起消：$\forall c_{p<j} = c_j$, $f_{p+1,j-1} + f_{ip}??$

Anubarak

→ **出现只用i,j描述不了的中间状态，加维度**

最后那段消的时候，相当于是原始i~p段+以c_p色向右延长L_j

→ f_{ijk} = 消**原始i~j段+最后段加长**k单位的最大收益

$$f_{ijk} = \max_{p=i..j-2, c_p=c_j} \{f_{i,j-1,0} + (L_j + k)^2, f_{p+1,j-1,0} + f_{ip,k+L_j}\}$$

复杂度：$O(n^4)$

k一定是某些L_i相加，不总取得全1..n，用记忆化搜索实现会更快些

→ **本质上优化在哪?**

消的顺序虽然影响结果，但有些**相对顺序**不影响

选了一种不影响结果又有利的顺序（优先处理第j段）

Frostmourne（COCI）

→ 题意较长参见原题。纯暴力：$O(nQ)$，20分

∃对边$(i, i+n/2)$，点与多边形在两边的同侧（充要条件）

→ **随机找100组i测下，都不满足则认为NO**

→ 考虑固定点与所有线的关系

（点与多边形在同侧还是异侧）

要么永远在同侧

要么中途答案改变**2次且仅2次**

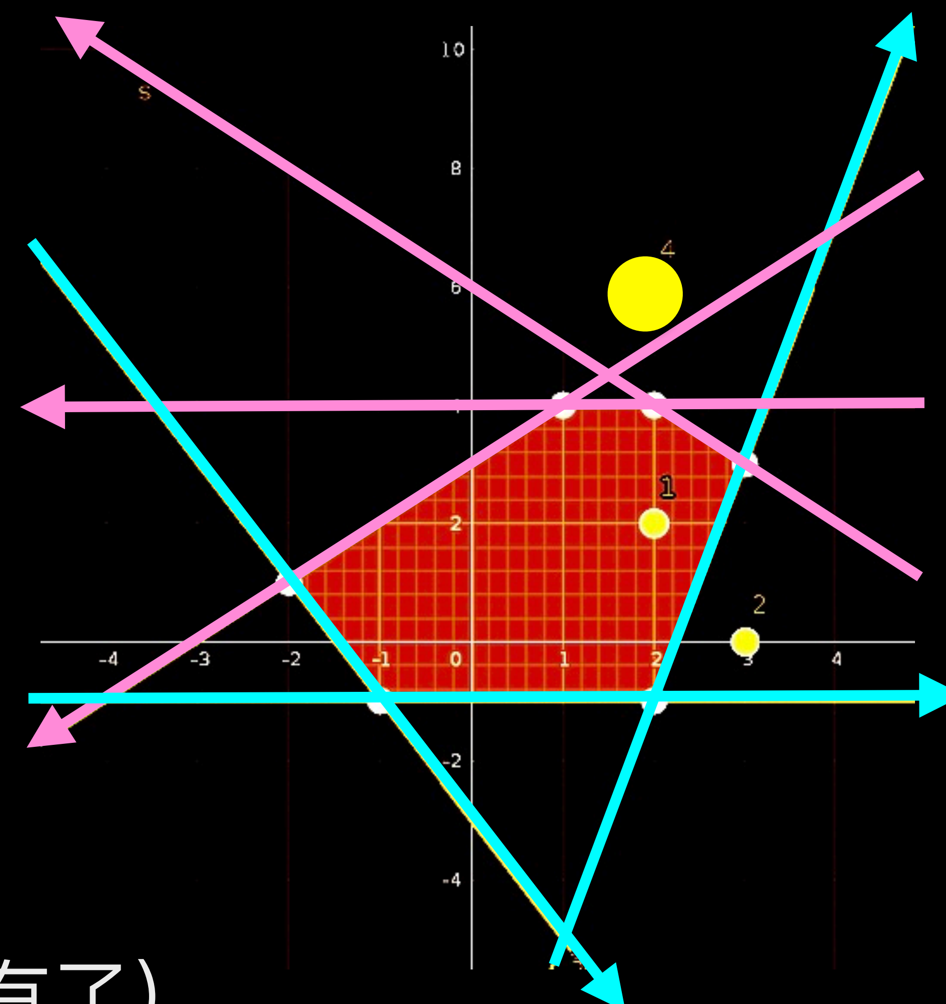
→ 结论：使点与多边形在同侧的边

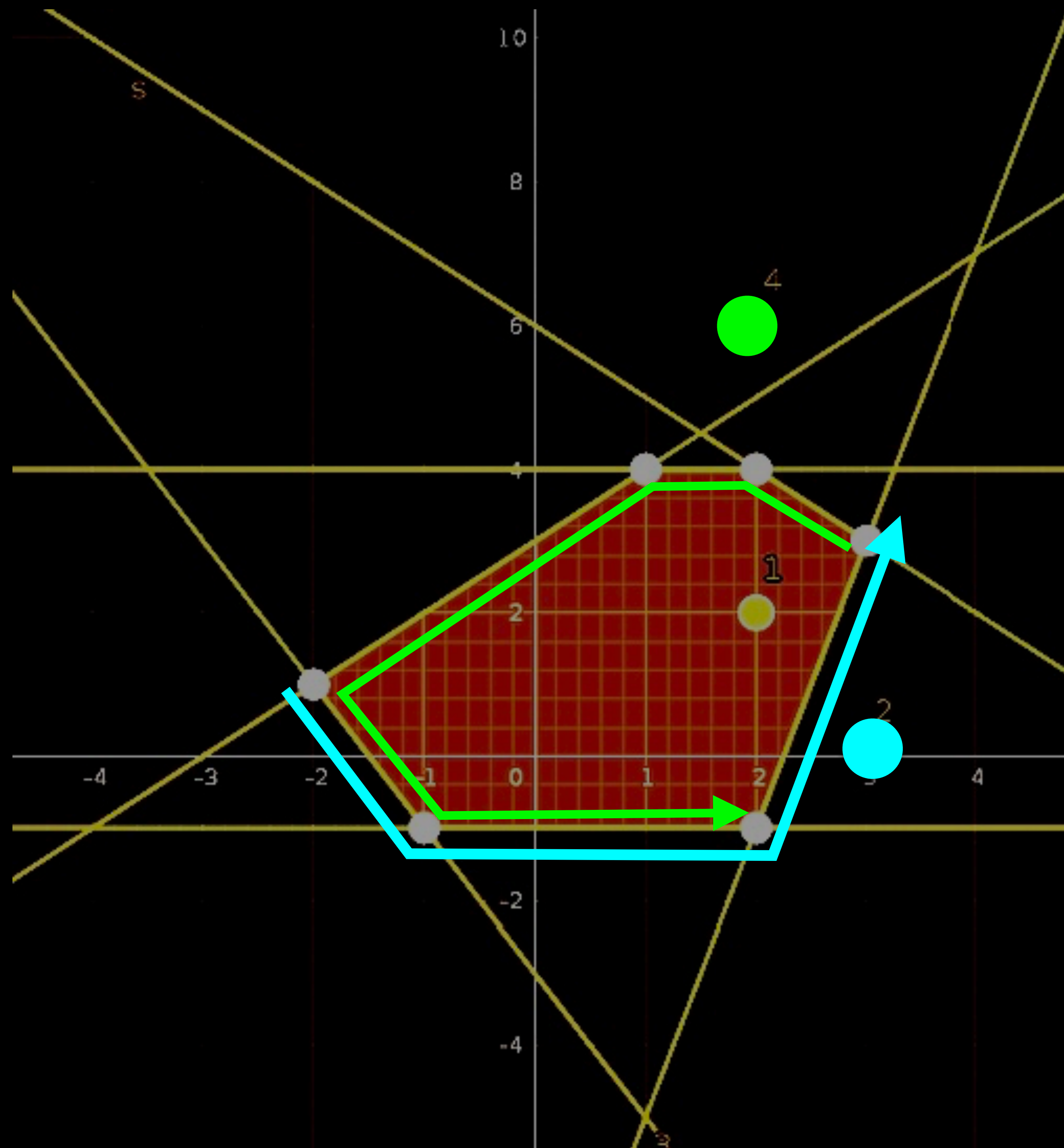
是**环上连续的一段**（模n意义下的区间）

→ 结合前面结论

点在并集中当且仅当这个区间长度>n/2

（区间端点大致可以二分出来，基本思路有了）





10
8
6
4
2
0
-2
-4
-4
-3
-2
-1
1
2
4
5
4
1
2
3

Frostmourne（COCI）

→ **具体实现**

→ **要二分，首先要找的2条答案不同边（1条同侧1条异侧）**

不妨就找对边$(1,1+n/2)$

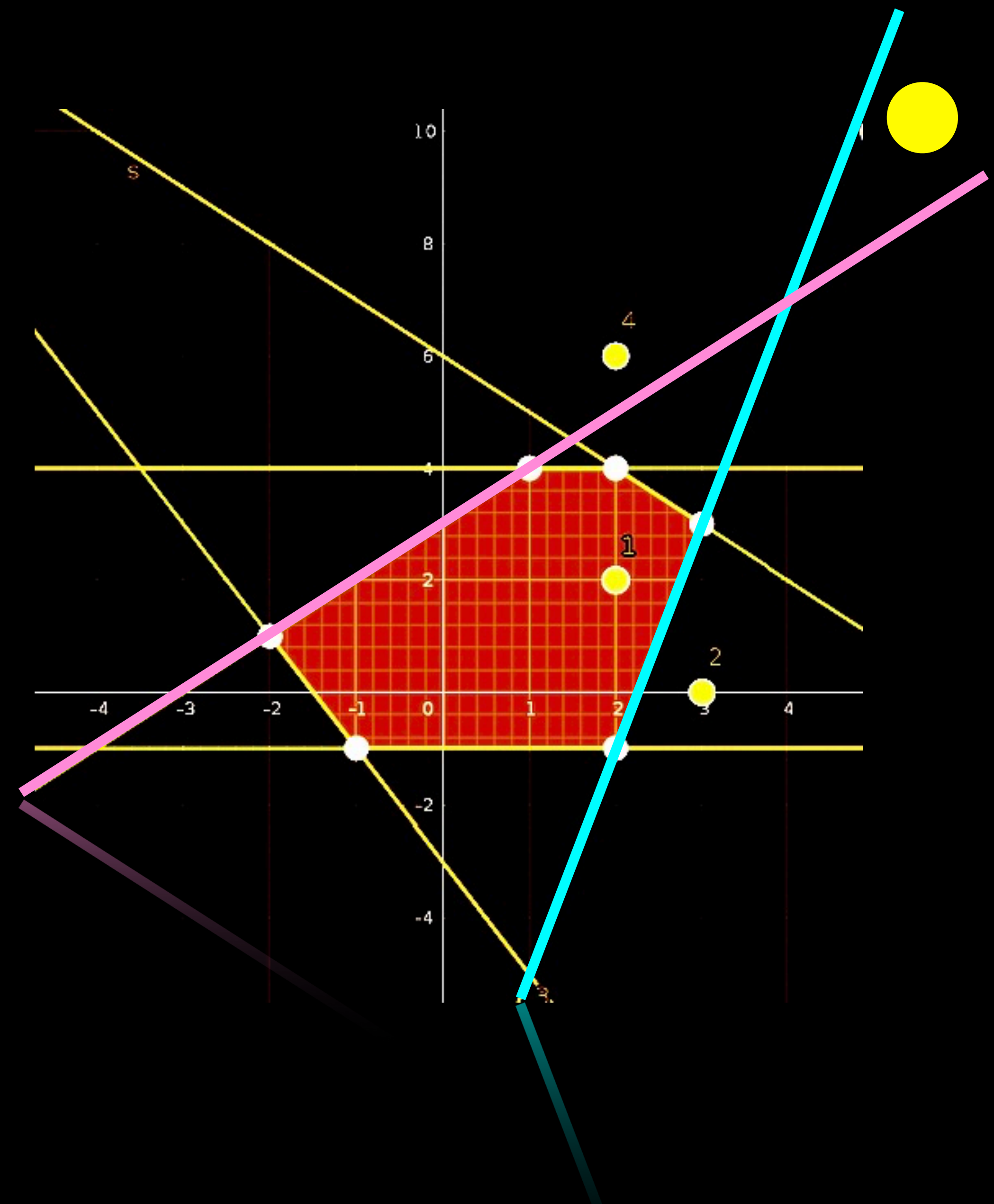
1. 如都在同侧，则直接YES

2. 如1个同侧1个异侧

则两边分别二分找的2个分割点

3. 如都在异侧

直接NO，否则答案变化至少出现4次



→ **复杂度：**$O(q\log n)$