



# 信奥算法

# 递推

## 动态规划

dynamic programming

依次

状态

计算

# 魔鬼步

魔鬼共有 $n$ 级楼梯要走，魔鬼有他的步伐，每一步他只可以向上走 $a$ 级楼梯或者 $b$ 级楼梯，请问能否正好走到第 $n$ 级？ $n \leq 90$

输入样例：

10  
3 6

输出样例：

No

输入样例：

10  
3 4

输出样例：

Yes

依次计算

能否正好走到第0级？

能否正好走到第1级？

能否正好走到第2级？

.....

能否正好走到第 $n$ 级？

$f[0]$

$f[1]$

$f[2]$

$f[n]$



# 魔鬼步

$f[i]$ 记录能否正好走到第 $i$ 级

bool  
类型

输入样例：  
10  
3 6

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f[i]	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0

输入样例：  
10  
3 4

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f[i]											

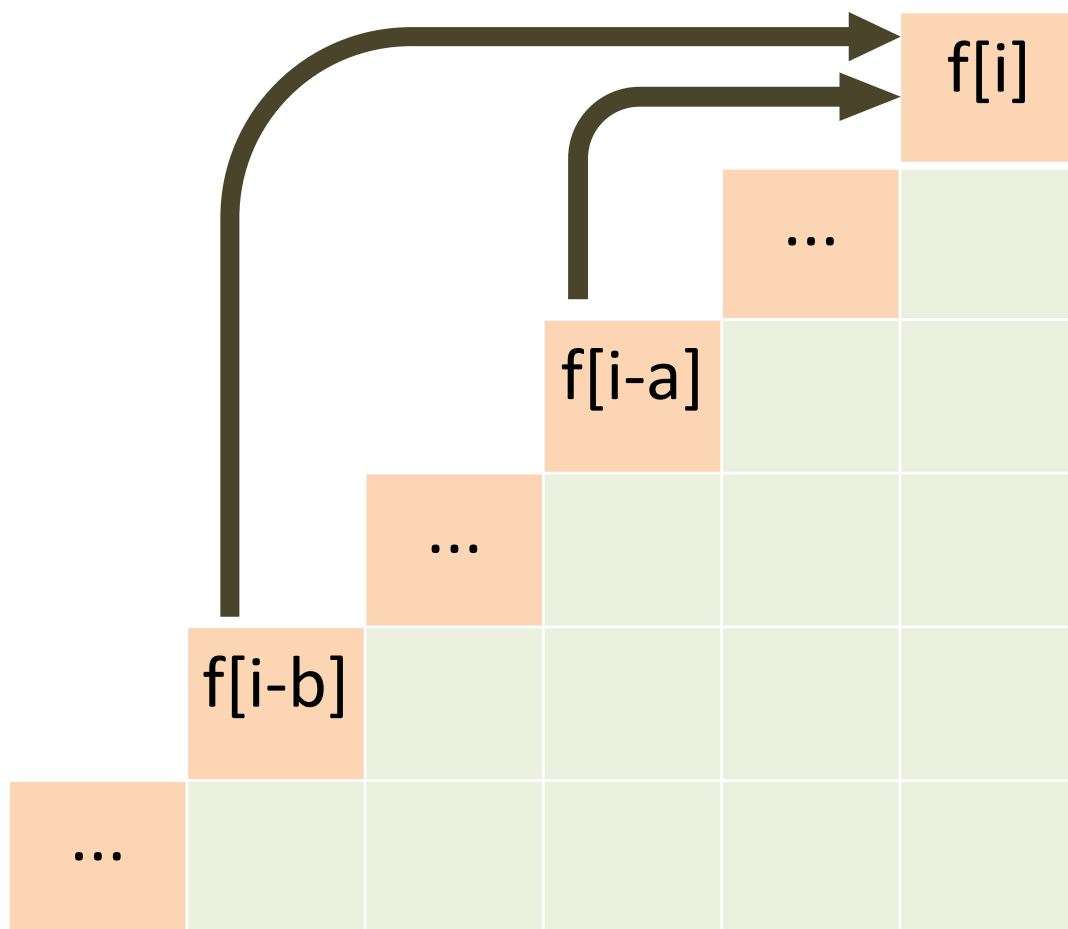
现场  
挑战

请在电脑上填写  
 $f[i]$ 各数值

# 魔鬼步

$f[i]$ 记录能否正好走到第 $i$ 级

能否正好走到第 $i$ 级  
取决于  
能否正好走到第 $i-a$ 级  
能否正好走到第 $i-b$ 级



# 魔鬼步

$f[i]$ 记录能否正好走到第*i*级

能否正好走到第*i*级  
取决于  
能否正好走到第*i-a*级  
能否正好走到第*i-b*级

若*i*==0

$$f[0] = 1$$

初始  
条件

若*i*>=1

$$f[i] = f[i - a] | i \geq a$$

or

$$f[i - b] | i \geq b$$

状态  
转移  
方程

```
1  /*
2  f[i] 记录能否正好走到第i级
3  输入样例n=10, a=3, b=4
4      i=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
5  f[i]=1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1
6  */
```

定义状态

手算样例

请现场完成  
第1-6行

老师检查

```

1  /*
2  f[i] 记录能否正好走到第i级
3  输入样例n=10,a=3,b=4
4      i=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10
5  f[i]=1,0,0,1,1,0,1,1,1,1,1
6  */
7  #include<iostream>
8  using namespace std;
9  bool f[51];
10 int n,a,b;
11 int main(){
12     cin>>n>>a>>b;
13     f[0]=1;
14     for(int i=1;i<=n;i++){
15         f[i]=0;
16         if(i>=a) f[i]=(f[i] or f[i-a]);
17         if(i>=b) f[i]=(f[i] or f[i-b]);
18     }
19     for(int i=0;i<=n;i++)
20         cout<<i<<": "<<f[i]<<endl;
21     return 0;
22 }

```

定义状态

手算样例

跟着老师翻译  
理解每一行

输出数组  
观察结果



# 自然状态

定义状态的核心问题：  $f[i]$  代表什么含义？

原题问题： 能否正好走到第  $n$  级？

$f[n]$  代表的就是原问题

能否正好走到第  $n$  级

$f[i]$  代表的是原问题的子问题

能否正好走到第  $i$  级

抄原题  
大法好！

最自然  
的状态

# 问题分类

## 可行性问题

共有 $n$ 级楼梯，只可以走 $a$ 级或 $b$ 级，  
能否正好走到第 $n$ 级？

## 计数问题

共有 $n$ 级楼梯，只可以走 $a$ 级或 $b$ 级，  
走到第 $n$ 级共几种走法？

## 最优化问题

共有 $n$ 级楼梯，只可以走 $a$ 级或 $b$ 级，  
最高能走到第几级？

共有 $n$ 级楼梯，只可以走 $a$ 级或 $b$ 级，  
走到第 $n$ 级，最少要几步？

# 走楼梯计数

共有 $n$ 级楼梯，只可以走 $a$ 级或 $b$ 级，  
走到第 $n$ 级共几种走法？  $n \leq 90$

输入样例：

5  
2 1

输出样例：

8

输入样例：

8  
2 3

输出样例：

4

依次计算

走到第0级共几种方法？

$g[0]$

走到第1级共几种方法？

$g[1]$

走到第2级共几种方法？

$g[2]$

.....

走到第 $n$ 级共几种方法？

$g[n]$



# 走楼梯计数

$g[i]$ 记录走到第 $i$ 级共几种方法

long long  
类型

输入样例:

5  
2 1

i	0	1	2	3	4	5
g[i]	1	1	2	3	5	8

输入样例:

10  
2 3

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g[i]											

现场  
挑战

请在电脑上填写  
 $g[i]$ 各数值

快快编程  
kkcoding.net

# 走楼梯计数

$g[i]$ 记录走到第*i*级共几种方法

到第*i*级共几种方法  
取决于  
到第*i-a*级共几种方法  
到第*i-b*级共几种方法

若*i*==0

$$g[0] = 1$$

初始  
条件

若*i*>=1

$$g[i] = g[i - a] \mid i \geq a \\ + \\ g[i - b] \mid i \geq b$$

状态  
转移  
方程

定义状态

手算样例

输出数组  
方便调试

```
1  /*
2  g[i] 记录正好走到第i级有几种走法
3  输入样例n=10,a=2,b=3
4      i=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10
5  g[i]=1,0,1,1,1,2,2,3,4,5,7
6  */
7  #include<iostream>
8  using namespace std;
9  long long n,a,b,g[100];
10 int main(){
11     cin>>n>>a>>b;
12     g[0]=1;
13     for(int i=1;i<=n;i++){
14         g[i]=0;
15         if(i>=a) g[i]+=g[i-a];
16         if(i>=b) g[i]+=g[i-b];
17     }
18     for(int i=0;i<=n;i++)
19         cout<<i<<": "<<g[i]<<endl;
20     return 0;
21 }
```

快快编程  
kkcoding.net

# 走楼梯最优化问题

共有 $n$ 级楼梯，只可以走 $a$ 级或 $b$ 级，  
最高能走到第几级？  $n \leq 90$

输入样例：

10

3 8

输出样例：

9

输入样例：

10

3 4

输出样例：

10

依次计算

共0级，最高能走到第几级？

共1级，最高能走到第几级？

共2级，最高能走到第几级？

.....

共 $n$ 级，最高能走到第几级？

$h[0]$

$h[1]$

$h[2]$

$h[n]$



# 走楼梯最优化问题

int  
类型

$h[i]$ 记录：共 $i$ 级时最高能走到第几级

输入样例：  
10  
3 8

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h[i]$	0	0	0	3	3	3	6	6	8	9	9

输入样例：  
10  
3 4

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h[i]$											

现场  
挑战

请在电脑上填写  
 $h[i]$ 各数值

快快编程  
kkcoding.net



# 走楼梯最优化问题

$h[i]$ 记录：共 $i$ 级时最高能走到第几级

若 $i=0$

$$h[0] = 0$$

初始  
条件

若 $i \geq 1$

$$h[i] = \max\{\begin{aligned} &h[i-1], \\ &(h[i-a] + a) | i \geq a, \\ &(h[i-b] + b) | i \geq b \end{aligned}\}$$

状态  
转移  
方程

```
1  /*
2  h[i] 记录: 共i级时最高能走到第几级
3  输入样例n=10, a=3, b=4
4      i=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
5  h[i]=0, 0, 0, 3, 4, 4, 6, 7, 8, 9, 10
6  */
```

定义状态

手算样例

请现场完成  
第1-6行

老师检查

```

1  /*
2  h[i] 记录: 共i级时最高能走到第几级
3  输入样例n=10,a=3,b=4
4      i=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10
5  h[i]=0,0,0,3,4,4,6,7,8,9,10
6  */
7  #include<iostream>
8  #include<algorithm>
9  using namespace std;
10 int n,a,b,h[100];
11 int main(){
12     cin>>n>>a>>b;
13     h[0]=0;
14     for(int i=1;i<=n;i++){
15         h[i]=h[i-1];
16         if(i>=a) h[i]=max(h[i],h[i-a]+a);
17         if(i>=b) h[i]=max(h[i],h[i-b]+b);
18     }
19     for(int i=0;i<=n;i++)
20         cout<<i<<": "<<h[i]<<endl;
21     return 0;
22 }

```

跟着老师翻译  
理解每一行

快快编程  
kkcoding.net

# 最优化 vs 可行性

可行性  
问题

$f[i]$ 记录：能否正好走到第 $i$ 级

最优化  
问题

$h[i]$ 记录：共 $i$ 级时最高能走到第几级

已知 $f$ 数组，  
能否推导出 $h$ 数组？

$i$	0	1	2	3	4	5	6
$f[i]$	1	0	0	1	0	1	1
$h[i]$	0	0	0	3	3	5	6

已知 $h$ 数组，  
能否推导出 $f$ 数组？

$i$	0	1	2	3	4	5	6
$h[i]$	0	0	2	2	4	4	6
$f[i]$	1	0	1	0	1	0	1

# 大胃王

大胃王的胃容量是 $n$ 升，眼前有2种饮料：  
第1种饮料每瓶 $a$ 升；第2种饮料每瓶 $b$ 升。这些饮料都有无限多瓶。  
大胃王可以选择其中若干瓶饮料来填充肚子。但是他做人有一个原则：浪费可耻。所以一旦他决定要喝某瓶饮料了，就一定会把这瓶喝完。请问大胃王最多能填充几升肚子的容量？

输入样例：

10  
3 8

输出样例：

9

该问题属于哪类问题

最优化问题

大胃王问题  
和  
走楼梯最优化问题  
有啥联系？



# 打游戏

小明沉溺于打手机游戏无法自拔，严重影响了他的身体健康。妈妈虽然仍然允许他适度地打游戏，但是加了一条限制条件：**不能连续两天都打游戏。**

输入第一行是一个正整数 $n$ 代表天数，第二行为 $n$ 个正整数代表这连续 $n$ 天每天可以打游戏的小时数。输出一个正整数，代表小明这些天**最多能打多少小时**时间的游戏。 $n \leq 100$

输入样例：

4

3 1 1 2

输出样例：

5

该问题属于哪类问题

最优化问题

请写出 $f[n]$ 的含义

请写出 $f[i]$ 的含义



邀你玩游戏  
你拒绝

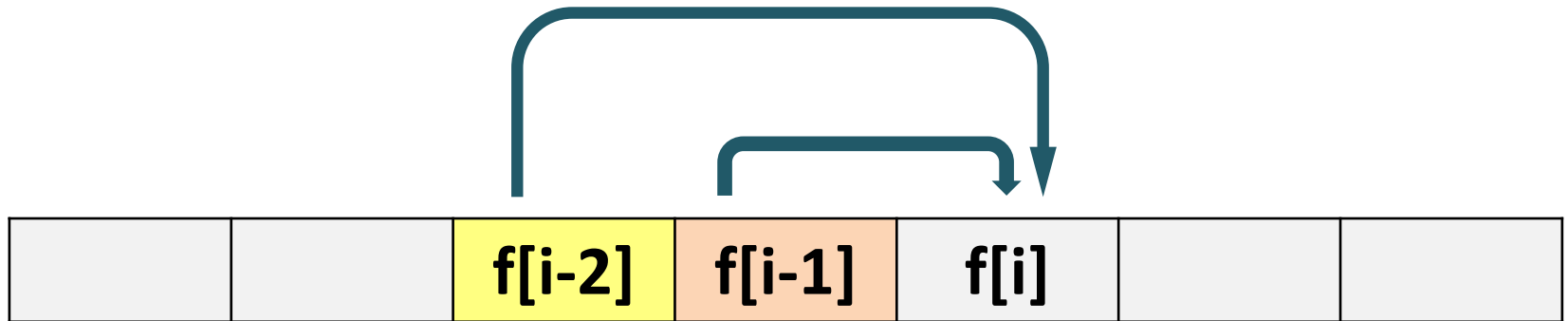
快快编程  
kkcoding.net

# 打游戏



女朋友没了的话  
你就可以专心打游戏了

$f[i]$ 代表前 $i$ 天最多打多久



有两种可能

第 $i$ 天不打

$$f[i-1]$$

第 $i$ 天打

$$f[i-2] + x[i]$$

# 打游戏

$f[i]$ 代表前 $i$ 天最多打多久

输入:  $x[i]$ 代表第 $i$ 天可以打几小时

若 $i==0$

$$f[0] = 0$$

若 $i==1$

$$f[1] = x[1]$$

初始  
条件

若 $i \geq 2$

$$f[i] = \max\{f[i-1], f[i-2] + x[i]\}$$

状态  
转移  
方程

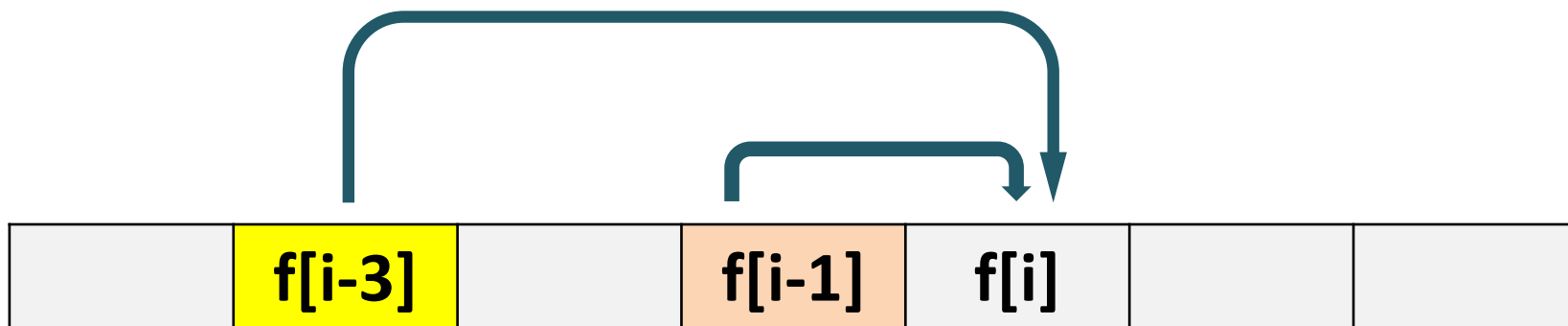


# 现场挑战

## 306

快快编程  
kkcoding.net

$f[i]$ 代表前*i*件里最大拿多少价值



有两种可能

第*i*件不拿

$$f[i - 1]$$

第*i*件拿

$$f[i - 3] + x[i]$$



# 快快306

$f[i]$ 代表前*i*件里最大拿多少价值

输入： $x[i]$ 代表第*i*件的价值

若*i*==0

$$f[0] = 0$$

若*i*==1

$$f[1] = x[1]$$

若*i*==2

$$f[2] = \max\{x[1], x[2]\}$$

初始  
条件

若*i*>=3

$$f[i] = \max\{f[i-1], f[i-2] + x[i]\}$$

状态  
转移  
方程

# 快快306

```
1  /*
2  f[i] 代表前i 件里最大拿多少价值
3  输入n=5
4      i= 0, 1, 2, 3, 4, 5
5  x[i]= 0, 7, 8, 8, 3, 1
6  f[i]= <input type="text" value="?" /><input type="text" value="?" /><input type="text" value="?" /><input type="text" value="?" /><input type="text" value="?" />
7  */
```

定义状态

手算样例

请现场完成  
第1-7行

老师检查

## 快快306

```
13  cin>>n;  
14  for(int i=1;i<=n;i++) cin>>x[i];  
15  f[0]=0;  
16  f[1]=x[1];  
17  f[2]=  
18  for(int i= ;i<=n;i++)  
19      f[i]=max(  
20  cout<< <<endl;
```

# 作业要求

写程序前请写明：

1. 数组每一格的含义
2. 手算样例对应表格

查错方法：

1. 打印数组
2. 和手算表格对比找不同

1 /\*

2  $f[i]$  代表

3 输入样例:

4  $i=0, 1, 2, 3, \dots$

5  $f[i]=$

6 \*/

模版格式  
供参考

快快编程  
kkcoding.net

# 调试查错



# 快快编程作业

305

1068

306

拓展题

307,452,742,629