

# 信奥算法

# 动态规划

Dynamic Programming

正整数拆分

计数问题

# 搭楼梯1

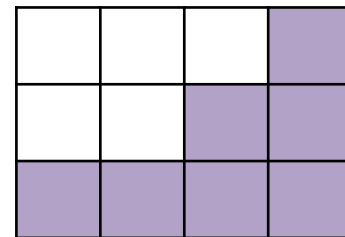
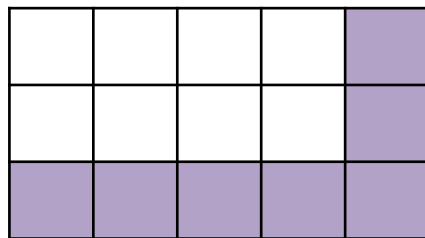
作为建筑师,你要用 $n$ 块砖头(高度为1)搭出高度正好为 $m$ 的楼梯,高度从左到右不能降低。输入 $n$ 和 $m$ , $m \leq n \leq 10$ ,请问共有几种方案?

输入样例

7 3

输出样例

4



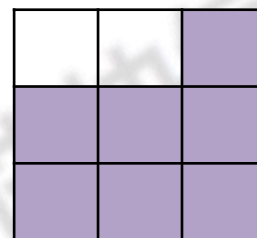
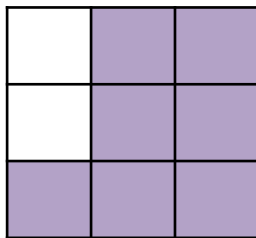
说明

$7=1+1+1+1+3$

$7=1+1+2+3$

$7=1+3+3$

$7=2+2+3$



# 正整数拆分1

作为数学家,你要把正整数 $n$ 拆分成若干个正整数,其中最大数正好为 $m$ 。

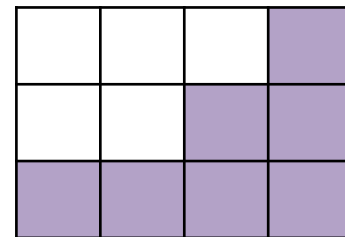
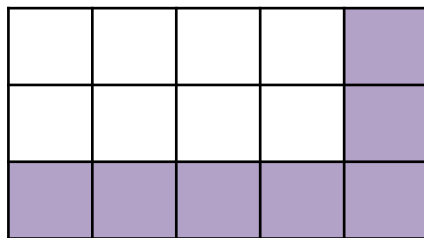
输入 $n$ 和 $m$ ,  $m \leq n \leq 10$ , 请问共有几种方案?

输入样例

7 3

输出样例

4



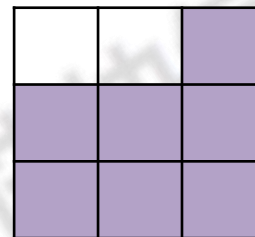
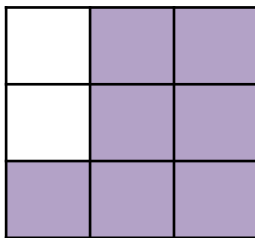
说明

$7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 3$

$7 = 1 + 1 + 2 + 3$

$7 = 1 + 3 + 3$

$7 = 2 + 2 + 3$



# 搭楼梯2

作为建筑师,你要用 $n$ 块砖头(高度为1)搭出正好 $m$ 个横向踏步的楼梯,高度从左到右不能上升。输入 $n$ 和 $m$ ,  $m \leq n \leq 10$ , 请问共有几种方案?

输入样例

7 3

输出样例

4

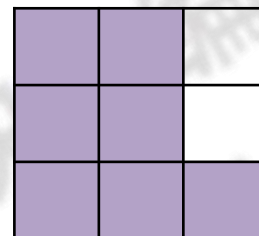
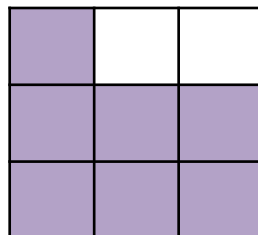
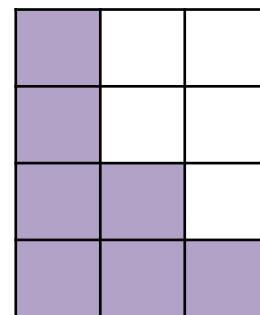
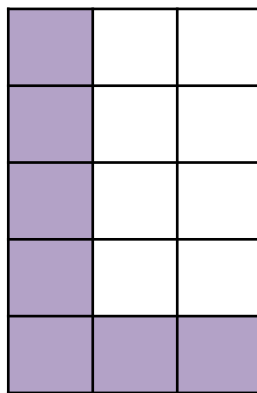
说明

$7=5+1+1$

$7=4+2+1$

$7=3+2+2$

$7=3+3+1$



# 正整数拆分2

作为数学家,你要把正整数 $n$ 拆分成正好 $m$ 个正整数。  
输入 $n$ 和 $m$ ,  $m \leq n \leq 10$ , 请问共有几种方案?

输入样例

7 3

输出样例

4

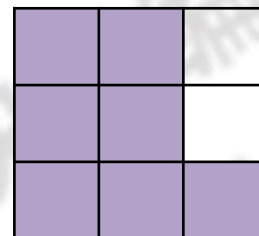
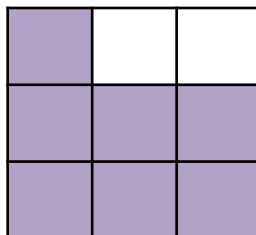
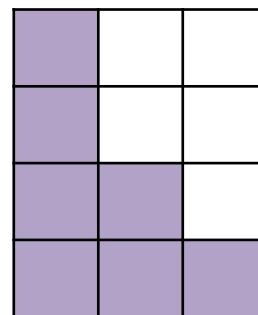
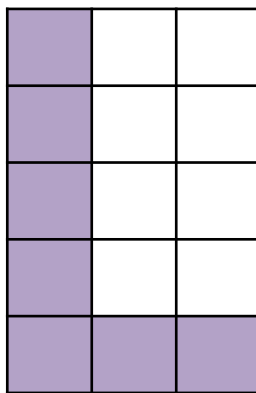
说明

$7=5+1+1$

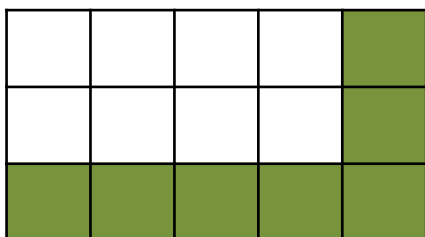
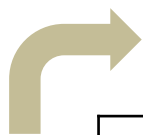
$7=4+2+1$

$7=3+2+2$

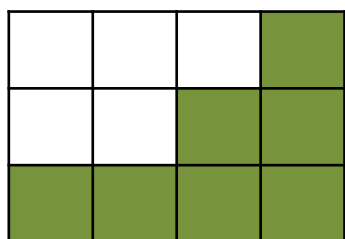
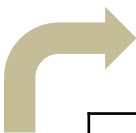
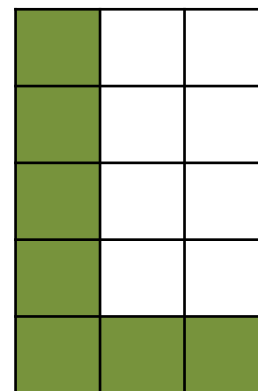
$7=3+3+1$



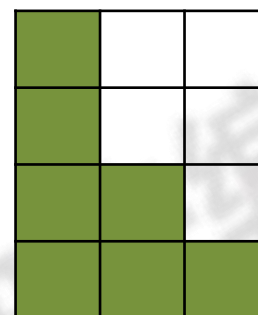
# Ferrers图



顺时针  
旋转




顺时针  
旋转



# 两类问题的统一

正整数 $n$ 拆分成  
最大数恰好为 $m$   
的若干个正整数  
的方案数



Ferrers图

正整数 $n$ 拆分成  
恰好 $m$ 个正整数  
的方案数

$n$ 的 $m$ 拆分数



# 正整数拆分

把正整数 $n$ 拆分成恰好 $m$ 个正整数的和, 请问共有几种方案?  
 $m \leq n \leq 10$ .

输入样例  
7 3

输出样例  
4

说明  
 $7=1+1+1+1+3$   
 $7=1+1+2+3$   
 $7=1+3+3$   
 $7=2+2+3$

使用动态规划

如何定义状态含义?

使用一维状态 $f[i]$   
还是二维状态 $f[i][j]$

请  
投  
票

$f[i][j]$ 表示什么含义?

# 正整数拆分

把正整数 $n$ 拆分成恰好 $m$ 个正整数的和, 请问共有几种方案?  
 $m \leq n \leq 10$ .

原问题

把 $n$ 分成恰好 $m$ 个正整数的方案数

抄原题  
大法好

$f[n][m]$ 表示把 $n$ 分成恰好 $m$ 个正整数的方案数

$f[i][j]$ 表示把 $i$ 分成恰好 $j$ 个正整数的方案数

```

1  /*姓名:XXX
2  f[i][j]表示把i分成恰好j个正整数的方案数
3      j=0,j=1,j=2,j=3
4  i=0      0      0      0      0
5  i=1      0      1      0      0
6  i=2      0      1      1      0
7  i=3      0      1      1      1
8  i=4      0      1      2      1
9  i=5      0      1      2      2
10 i=6      0      1      3      3
11 i=7      0      ??      ??      ??
12 */

```

二维DP核心步骤  
就是二维填表

电脑上完成此页注释

3分钟后老师检查

快快编程  
kkcoding.net

# 作业要求

写程序前请写明：

1. 二维数组每一格的含义
2. 手算样例对应表格

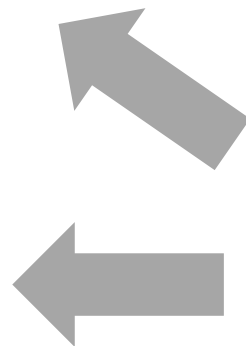
查错方法：

1. 打印二维数组
2. 和手算表格对比找不同

```
1  /*
2  f[i][j]代表
3      j=0,1,2,3,4,5
4  i=0
5  i=1
6  i=2
7  i=3
8  i=4
9  i=5
10 */
```



模版格式  
供参考



快快编程  
kkcoding.net

$f[i][j]$ 表示把 $i$ 分成恰好 $j$ 个正整数的方案数

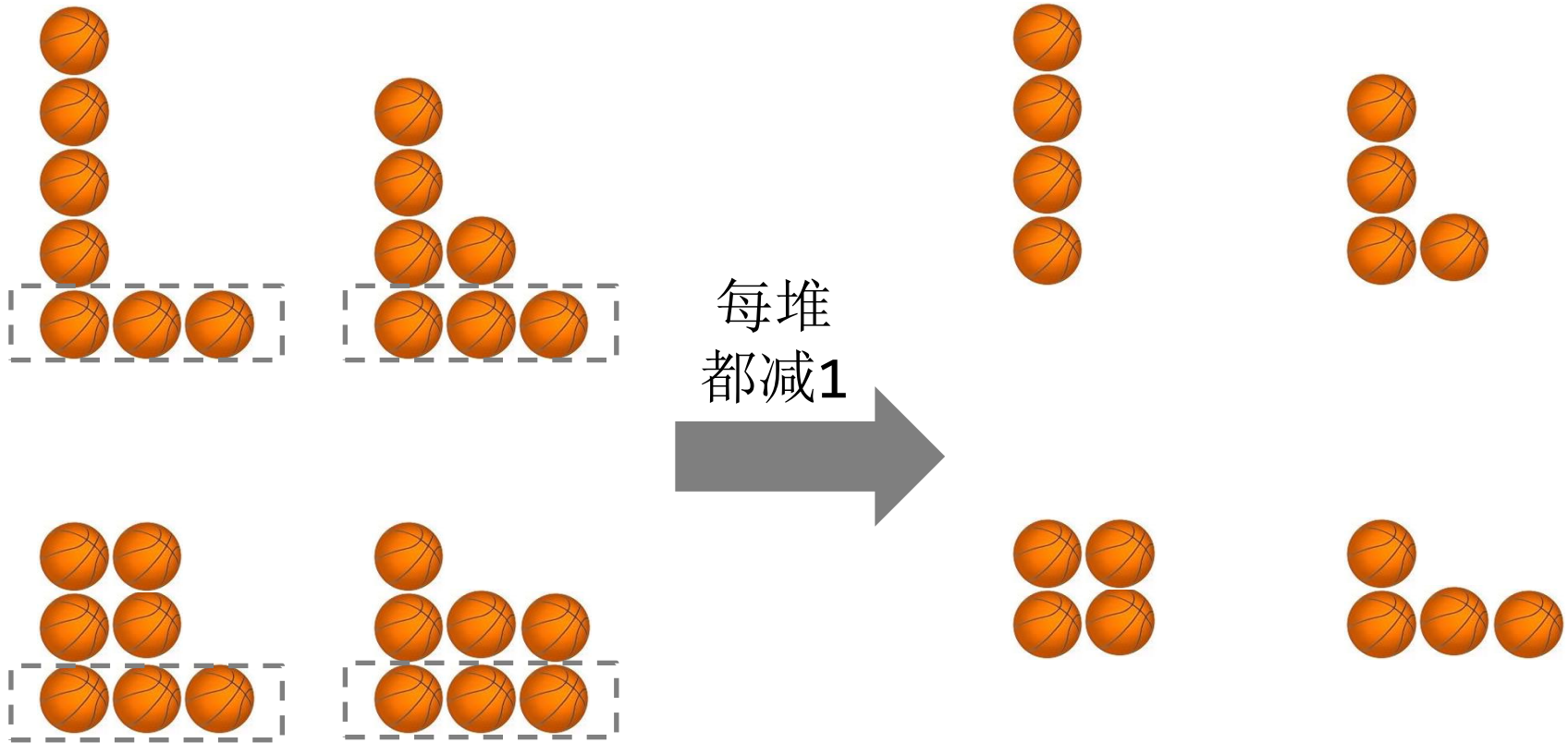
	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
$i=0$	0	0	0	0	0
$i=1$	0	1	0	0	0
$i=2$	0	1	1	0	0
$i=3$	0	1	1	1	0
$i=4$	0	1	2	1	1
$i=5$	0	1	2	2	1
$i=6$	0	1	3	3	2
$i=7$	0	1	3	4	3
$i=8$	0	1	4	5	5
$i=9$	0	1	4	7	6

聪明的你在  
表格中发现  
了哪些规律?

$f[i][j]$ 表示把 $i$ 分成恰好 $j$ 个正整数的方案数

计算 $f[i][j]$ 的递推式如何推导?

如何用 $f[i][j]$ 上方或左侧的格子推导 $f[i][j]$



$f[i][j]$ 表示把 $i$ 分成恰好 $j$ 个正整数的方案数

计算 $f[i][j]$ 的递推式如何推导?

如何用 $f[i][j]$ 上方或左侧的格子推导 $f[i][j]$

$j$ 个正整数都大于等于1

让每个数都减1,总数共减 $j$

总数剩下 $i-j$

剩下拆分成几个正整数不确定,可能:

剩下1个正整数

剩下2个正整数

剩下3个正整数

...

剩下 $j$ 个正整数

$f[i][j]$ 表示把 $i$ 分成恰好 $j$ 个正整数的方案数

计算 $f[i][j]$ 的递推式如何推导?

如何用 $f[i][j]$ 上方或左侧的格子推导 $f[i][j]$

$j$ 个正整数都大于等于1

让每个数都减1,总数共减 $j$

总数剩下 $i-j$

$$f[i][j]=f[i-j][1]+f[i-j][2]+\dots+f[i-j][j-1]+f[i-j][j]$$

例如  $f[9][4]=f[5][1]+f[5][2]+f[5][3]+f[5][4]$

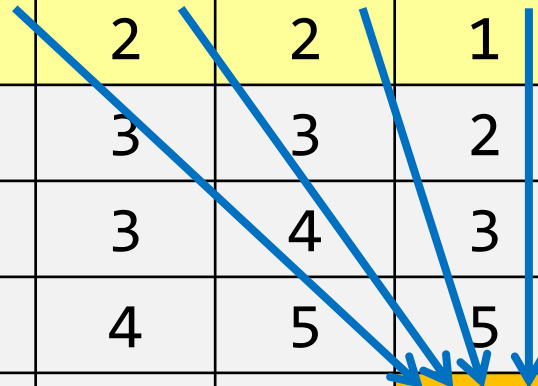
例如  $f[8][3]=f[5][1]+f[5][2]+f[5][3]$



$$f[9][4]=f[5][1]+f[5][2]+f[5][3]+f[5][4]$$

	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4
i=0	0	0	0	0	0
i=1	0	1	0	0	0
i=2	0	1	1	0	0
i=3	0	1	1	1	0
i=4	0	1	2	1	1
i=5	0	1	2	2	1
i=6	0	1	3	3	2
i=7	0	1	3	4	3
i=8	0	1	4	5	5
i=9	0	1	4	7	6

每格依赖  
上方某一行



$$f[8][3] = f[5][1] + f[5][2] + f[5][3]$$

	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4
i=0	0	0	0	0	0
i=1	0	1	0	0	0
i=2	0	1	1	0	0
i=3	0	1	1	1	0
i=4	0	1	2	1	1
i=5	0	1	2	2	1
i=6	0	1	3	3	2
i=7	0	1	3	4	3
i=8	0	1	4	5	5
i=9	0	1	4	7	6

每格依赖  
上方某一行

$$f[7][2]=f[5][1]+f[5][2]$$

	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4
i=0	0	0	0	0	0
i=1	0	1	0	0	0
i=2	0	1	1	0	0
i=3	0	1	1	1	0
i=4	0	1	2	1	1
i=5	0	1	2	2	1
i=6	0	1	3	3	2
i=7	0	1	3	4	3
i=8	0	1	4	5	5
i=9	0	1	4	7	6

每格依赖  
上方某一行

$f[i][j]$ 表示把 $i$ 分成恰好 $j$ 个正整数的方案数

计算 $f[i][j]$ 的递推式如何推导?

如何用 $f[i][j]$ 上方或左侧的格子推导 $f[i][j]$

$j$ 个正整数都大于等于1

让每个数都减1,总数共减 $j$

总数剩下 $i-j$

$$f[i][j]=f[i-j][1]+f[i-j][2]+\dots+f[i-j][j-1]+f[i-j][j]$$

$$f[i-1][j-1]=f[i-j][1]+f[i-j][2]+\dots+f[i-j][j-1]$$

$$\text{例如 } f[9][4]=f[5][1]+f[5][2]+f[5][3]+f[5][4]$$

$$\text{例如 } f[8][3]=f[5][1]+f[5][2]+f[5][3]$$

$f[i][j]$ 表示把 $i$ 分成恰好 $j$ 个正整数的方案数

计算 $f[i][j]$ 的递推式如何推导?

如何用 $f[i][j]$ 上方或左侧的格子推导 $f[i][j]$

$j$ 个正整数都大于等于1

让每个数都减1,总数共减 $j$

总数剩下 $i-j$

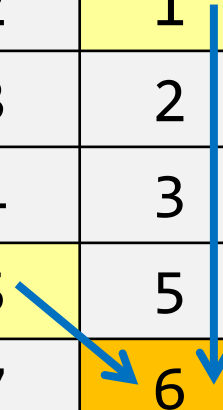
$$f[i][j]=f[i-1][j-1]+f[i-j][j]$$

例如  $f[9][4]=f[8][3]+f[5][4]$

$$f[9][4]=f[8][3]+f[5][4]$$

	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4
i=0	0	0	0	0	0
i=1	0	1	0	0	0
i=2	0	1	1	0	0
i=3	0	1	1	1	0
i=4	0	1	2	1	1
i=5	0	1	2	2	1
i=6	0	1	3	3	2
i=7	0	1	3	4	3
i=8	0	1	4	5	5
i=9	0	1	4	7	6

每格依赖  
左上方邻居  
和  
正上方某格



$f[i][j]$ 表示把 $i$ 分成恰好 $j$ 个正整数的方案数

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
$i=0$	0	0	0	0	0
$i=1$	0	1	0	0	0
$i=2$	0	1	1	0	0
$i=3$	0	1	1	1	0
$i=4$	0	1	2	1	1
$i=5$	0	1	2	2	1
$i=6$	0	1	3	3	2
$i=7$	0	1	3	4	3
$i=8$	0	1	4	5	5
$i=9$	0	1	4	7	6

推荐  
一列一列  
从左到右填

# 代码

```
19  cin>>n>>m;
20  for(int i=1;i<=n;i++)f[i][1]=1;
21  for(int j=2;j<=m;j++)
22      for(int i=j;i<=n;i++)
23          f[i][j]=f[i-1][j-1]+f[i-j][j];
24  cout<<f[n][m]<<endl;
```

初始化  
第1列

枚举列号j从2到m

枚举行号i从j到n



# DP查错方法

## 静态查错

写明二维数组元素 $f[i][j]$ 的含义

检查数组 $f[i][j]$ 的初始化和状态转移

检查数组下标准确性，包括越界可能

## 打印日志

打印二维数组中每个元素 $f[i][j]$

查看每一格是否填写正确

由错误的那个 $f[i][j]$ 元素定位程序错误

# 易错点：数据范围

思考：使用int或long long类型  
针对以下问题,可以求解多大的n而不溢出?

n的阶乘

第n项斐波那契数列

n的m拆分数

所以这些问题共同的易错点是什么?

# 拆分数问题变种

将新问题转换成老问题

利用老问题的解答

问题1

n拆分成正好m个正整数的方案数

$$f[n][m]$$

问题2

n拆分成最大数正好为m的方案数

$$f[n][m]$$

问题3

n拆分成不超过m个正整数的方案数

$$f[n][1]+f[n][2]+\dots+f[n][m]$$

枚举数字个数  $j=1, 2, \dots, m$

在表格中涉及哪些数字?

	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4
i=0	0	0	0	0	0
i=1	0	1	0	0	0
i=2	0	1	1	0	0
i=3	0	1	1	1	0
i=4	0	1	2	1	1
i=5	0	1	2	2	1
i=6	0	1	3	3	2

### 问题3

n拆分成不超过m个正整数的方案数

$$f[n][1] + f[n][2] + \dots + f[n][m]$$

填表后将第n行数字求和

问题1

n拆分成正好m个正整数的方案数

$$f[n][m]$$

问题2

n拆分成最大数正好为m的方案数

$$f[n][m]$$

问题3

n拆分成不超过m个正整数的方案数

$$f[n][1]+f[n][2]+\dots+f[n][m]$$

问题4

n拆分成最大数不超过m的方案数

$$f[n][1]+f[n][2]+\dots+f[n][m]$$

枚举最大数 $j=1, 2, \dots, m$

	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4
i=0	0	0	0	0	0
i=1	0	1	0	0	0
i=2	0	1	1	0	0
i=3	0	1	1	1	0
i=4	0	1	2	1	1
i=5	0	1	2	2	1
i=6	0	1	3	3	2

#### 问题4

n拆分成最大数不超过m的方案数

$$f[n][1] + f[n][2] + \dots + f[n][m]$$

填表后将第n行数字求和

# 现场挑战

## 快快编程457

快快编程  
kkcoding.net



将n小时拆分成若干天,每天不能超过k小时,训练量不能下降,共几种方案?

### 问题3

n拆分成不超过k个正整数的方案数

$$f[n][1]+f[n][2]+\dots+f[n][k]$$

填表后将第n行数字求和

```
10 cin>>n>>k;
11 for(ll i=1;i<=n;i++)f[i][1]=1;
12 for(ll j=2;j<=k;j++)
13     for( )
14         f[i][j]=f[i-1][j-1]+ ;
15 ll ans=0;
16 for(ll i=1;i<=k;i++)
17     ans+=f[n][i];
18 cout<<ans<<endl;
```

# 现场挑战

## 快快编程458

快快编程  
kkcoding.net

```
6      set<string> s;  
7      string a,b;  
8      int n;  
9      cin>>n;  
10     for(int i=1;i<=n;++i){  
11         cin>>a>>b;  
12         s.insert(a);  
13     }  
14     cin>>a>>b;  
15     if(s.count(a)) cout<<"No"<<endl;  
16     else cout<<"Yes"<<endl;
```

将n元拆分成若干天,不能超过m天,每天非负数但不能下降,共几种方案?

#### 问题4

n拆分成最大数不超过m的方案数

$$f[n][1]+f[n][2]+\dots+f[n][m]$$

填表后将第n行数字求和

```
10 cin>>m>>n;
11 for(ll i=1;i<=n;i++)f[i][1]=1;
12 for(ll j=2;j<=m;j++)
13     for(ll i=j;i<=n;i++)
14         f[i][j]=f[i-1][j-1]+f[i-j][j];
15 ll ans=0;
16 for(ll i=1; ;i++)
17     ans+= ;
18 cout<<ans<<endl;
```

问题1	n拆分成正好m个正整数的方案数
问题2	n拆分成最大数正好为m的方案数
	$f[n][m]$
问题3	n拆分成不超过m个正整数的方案数
问题4	n拆分成最大数不超过m的方案数
	$f[n][1]+f[n][2]+\dots+f[n][m]$
问题5	n拆分成若干个正整数的方案数
	$f[n][1]+f[n][2]+\dots+f[n][n]$
枚举数字个数 $j=1, 2, \dots, n$	

## 课后拓展

思考题	$n$ 拆分成正好 $m$ 个偶数的方案数
思考题	$n$ 拆分成正好 $m$ 个奇数的方案数
思考题	$n$ 拆分成 $m$ 个不同正整数的方案数
思考题	$n$ 拆分成若干个不同正整数的方案数
思考题	$n$ 拆分成若干个不同奇数的方案数



# 作业要求

写程序前请写明：

1. 二维数组每一格的含义
2. 手算样例对应表格

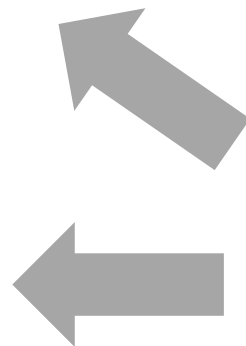
查错方法：

1. 打印二维数组
2. 和手算表格对比找不同

```
1  /*
2  f[i][j]代表
3      j=0,1,2,3,4,5
4  i=0
5  i=1
6  i=2
7  i=3
8  i=4
9  i=5
10 */
```



模版格式  
供参考



# 快快编程作业

456

457

458

拓展题

459