



# 信奥算法

# 前缀和应用

# 现场挑战 快快编程1582

# 不同问题,相同模型

一串字符串包含配对的圆括号( )  
以及其他符号

1 - ( 1 - ( 1 - x ) ) \* 2

爬山游玩包含配对的上山和下山  
以及其他游玩动作

玩玩上玩玩上玩玩玩下下玩玩

炒股包含配对的赚1元钱和亏1元  
以及其他数钱动作

数数赚数数赚数数数亏亏数数

透过现象  
看本质

脱掉马甲  
现原形

# 不同问题,相同模型

每个非括号字符被嵌套几层?

1 - ( 1 - (1 - x ) ) \* 2  
0 0    1 1    2 2 2    0 0

每个游玩动作所在高度?

玩玩上玩玩上玩玩玩下下玩玩  
0 0    1 1    2 2 2    0 0

每个数钱结果是几元?

数数赚数数赚数数数亏亏数数  
0 0    1 1    2 2 2    0 0

透过现象 看本质	脱掉马甲 现原形
-------------	-------------

本质	红色 +1	蓝色 -1	每格的答案 对应前缀和
----	----------	----------	----------------

```
8 cin>>n;  
9 string formula;  
10 getline(cin,formula); getline(cin,formula);
```

输入错误啦！

解决方案

易  
错  
点

cin流输入一行后  
getline()失效一次

因为cin>>n;后  
行末换行符  
被getline()输入  
做为空字符串

getline()两次！

```
8  cin>>n;
9  string formula;
10 getline(cin,formula); getline(cin,formula);

11 for(int i=0;i<n;i++){
12     if(formula[i]=='(') d[i+1]=1;
13     else if(formula[i]==')') d[i+1]=-1;
14     else d[i+1]=0;
15 }
```

请翻译12-14行

d[] 只有3种情况  
+1, -1, 0

为什么用d[i+1]  
而不是d[i]

```
8  cin>>n;
9  string formula;
10 getline(cin,formula); getline(cin,formula);

11 for(int i=0;i<n;i++){
12     if(formula[i]=='(') d[i+1]=1;
13     else if(formula[i]==')') d[i+1]=-1;
14     else d[i+1]=0;
15 }

16 for(int i=1;i<=n;i++)s[i]=s[i-1]+d[i];
```

s[]是d[]的前缀和数组



```

8  cin>>n;
9  string formula;
10 getline(cin,formula); getline(cin,formula);

11 for(int i=0;i<n;i++){
12     if(formula[i]=='(') d[i+1]=1;
13     else if(formula[i]==')') d[i+1]=-1;
14     else d[i+1]=0;
15 }

16 for(int i=1;i<=n;i++)s[i]=s[i-1]+d[i];

17 for(int i=1;i<=n;i++)
18     if( )cout<< <<" ";
19 cout<<endl;

```

用纸和笔  
补全第18行

# 现场挑战

## 快快编程345

# 质数判断数组

p[i]代表i是否为质数

```
6 bool isPrime(int x){
7     if(x<=1)return 0;
8     for(int i=2;i*i<=x;i++)
9         if(x%i==0)return 0;
10    return 1;
11 }

13 for(int i=2;i<N;i++)
14     p[i]=isPrime(i);
```

# 质数判断数组

$s[i]$ 代表1到 $i$ 共有几个质数

```
15 | for(int i=1;i<N;i++)s[i]=s[i-1]+p[i];
```

# 质数判断数组

$s[i]$ 代表1到 $i$ 共有几个质数

```
15 | for(int i=1;i<N;i++)s[i]=s[i-1]+p[i];
```

询问：从 $a$ 到 $b$ 中共有几个质数

```
16 | int m,a,b;  
17 | cin>>m;  
18 | for(int i=1;i<=m;i++){  
19 |     cin>>a>>b;  
20 |     cout<< < <<" ";  
21 | }
```

补全第20行

# 现场挑战 快快编程1583

# 简化问题

二维  
降一  
维

一维数组 $n$ 格, 有 $m$ 个问询:  
 $b$ 号元素到 $d$ 号元素连续和是多少?

RSQ

(range sum query)

连续和问题转换为前缀和做差

启发  
灵感

二维连续和问题  
也用前缀和!

思维  
方法

遇到二维数组问题  
首先降维成一维问题启发算法

编程  
ding.net

# 原问题

二维矩形连续和怎么求？

二维RSQ

算法1

矩形拆成多个一维数组分别求和

每个一维数组用一维前缀和做差

算法2

设计二维前缀和  
2D prefix sums



# 二维矩形连续和问题

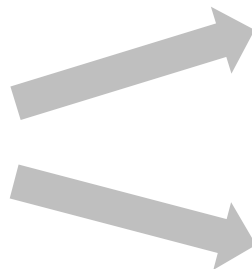
## 二维RSQ

算法1

拆成一维连续和问题  
预处理多个一维前缀和

# 算法1

	1	2	3	4	5
1	-6	-1	3	-6	-1
2	1	3	-1	1	3
3	-6	-1	3	-6	-1
4	1	3	-1	1	3



3	-1	1
---	----	---

-1	3	-6
----	---	----

从(2,2)到(3,4)的矩形里  
数字总和是多少

从(2,2)到(2,4)的长条里  
数字总和是多少

从(3,2)到(3,4)的长条里  
数字总和是多少

记笔记

$s[i][j]$ 代表第*i*行内从(*i*,1)到(*i*,*j*)的数字总和

# 算法1

```
9      for(int i=1;i<=n;i++)
10          for(int j=1;j<=n;j++)
11              cin>>f[i][j];
12      for(int i=1;i<=n;i++)
13          for(int j=1;j<=n;j++)
14              s[i][j]=f[i][j]+s[i][j-1];
```

记笔记

$s[i][j]$ 代表第*i*行内从(*i*,1)到(*i*,*j*)的数字总和

# 算法1

```
15 int ans=INT_MIN;
16 cin>>m;
17 for(int k=1;k<=m;k++){
18     cin>>a>>b>>c>>d;
19     int cnt=0;
20     for(int i=a;i<=c;i++)
21         cnt+=
22     ans=max(ans,cnt);
23 }
24 cout<<ans<<endl;
```

int类型  
最小值

补全第21行

记笔记

$s[i][j]$ 代表第 $i$ 行内从 $(i,1)$ 到 $(i,j)$ 的数字总和

# 二维矩形连续和问题 二维RSQ

算法2

设计二维前缀和

# 算法2

$$s[i][j] = f[i][j] + s[i][j-1] + s[i-1][j] - s[i-1][j-1]$$

j

i

-6	-1	3	-6	-1	3	-6	-1	3	-6	-1	3
1	3	-1	1	3	-1	1	3	-1	1	3	-1
-6	-1	3	-6	-1	3	-6	-1	3	-6	-1	3
1	3	-1	1	3	-1	1	3	-1	1	3	-1
-6	-1	3	-6	-1	3	-6	-1	3	-6	-1	3
1	3	-1	1	3	-1	1	3	-1	1	3	-1
-6	-1	3	-6	-1	3	-6	-1	3	-6	-1	3
1	3	-1	1	3	-1	1	3	-1	1	3	-1
-6	-1	3	-6	-1	3	-6	-1	3	-6	-1	3
1	3	-1	1	3	-1	1	3	-1	1	3	-1

# 算法2

	b						d					
a	-6	-1	3	-6	-1	3	-6	-1	3	-6	-1	3
	1	3	-1	1	3	-1	1	3	-1	1	3	-1
	-6	-1	3	-6	-1	3	-6	-1	3	-6	-1	3
	1	3	-1	1	3	-1	1	3	-1	1	3	-1
c	-6	-1	3	-6	-1	3	-6	-1	3	-6	-1	3
	1	3	-1	1	3	-1	1	3	-1	1	3	-1
	-6	-1	3	-6	-1	3	-6	-1	3	-6	-1	3
	1	3	-1	1	3	-1	1	3	-1	1	3	-1

$$s[c][d] - s[c][b-1] - s[a-1][d] + s[a-1][b-1]$$

## 算法2

```
for(int i=1;i<=n;i++)  
    for(int j=1;j<=n;j++)  
        s[i][j]=f[i][j]+  
int ans=INT_MIN;  
cin>>m;  
for(int k=1;k<=m;k++){  
    cin>>a>>b>>c>>d;  
    int cnt=  
    ans=max(ans,cnt);  
}
```



# 快快编程作业

1582

1583

345

拓展题

672