Shuxue
Jiaoxue Cankao Ziliao

普通高中

数学

教 学 参 考 资 料

必 修

第 一 册

上海教育出版社

Shuxue
Jiaoxue Cankao Ziliao

普通高中

数学

必修

第一册

教学参考资料

上海教育出版社

主　　编　李大潜　王建磐
副 主 编　应坚刚　鲍建生
本册编写人员　王伟叶　傅吉祥　王春明　王志强　潘　奋　吴泉水　高卫国　邱维元

责任编辑　张莹莹
装帧设计　周　吉

插图绘制　朱泽宇

普通高中　数学教学参考资料　必修　第一册
上海市中小学（幼儿园）课程改革委员会组织编写

出　　版　上海教育出版社有限公司（上海市闵行区号景路159弄C座）
发　　行　上海新华书店
印　　刷　常熟市华顺印刷有限公司
版　　次　2020年8月第1版
印　　次　2022年7月第3次
开　　本　890×1240　1/16
印　　张　8
字　　数　137 千字
书　　号　978-7-5720-0258-8/G·0197
定　　价　24.00 元

目　　录

绪　论

本套教学参考资料(以下统称“本套教参”)与李大潜、王建磐主编，上海教育出版社出版的《普通高中教科书·数学》(以下统称“本套教材”)配套使用，本套教材依据中华人民共和国教育部制定并颁布实施的《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》(以下简称“国家课程标准”)编制，并经国家教材委员会专家委员会审核通过.

一、本套教材的总体结构框架

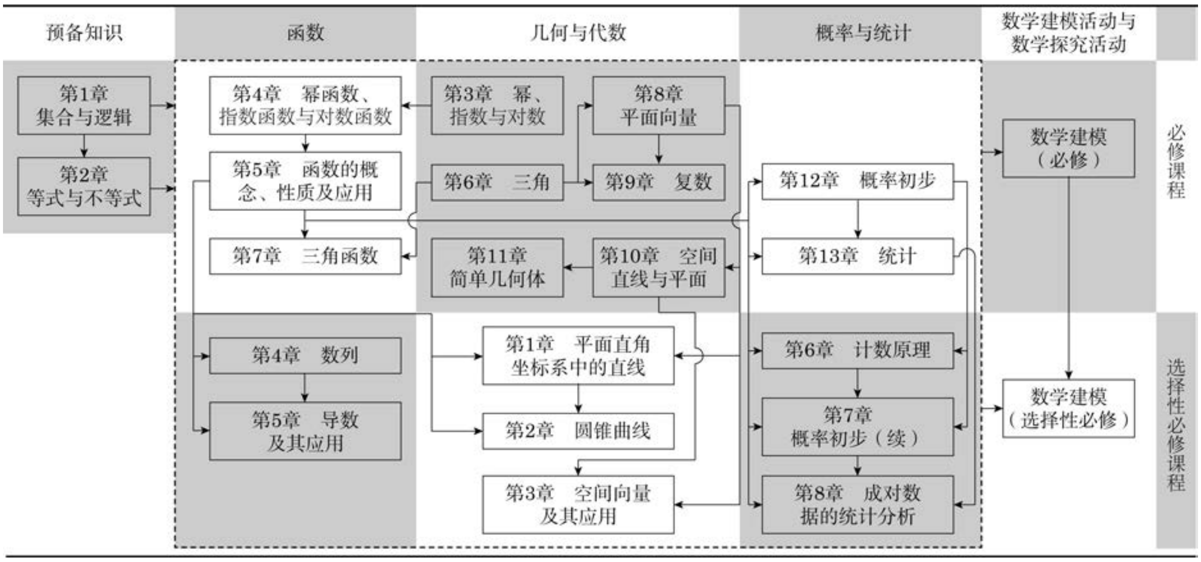
国家课程标准把高中数学课程分为必修课程、选择性必修课程和选修课程，并规定：必修课程为学生发展提供共同基础，是高中毕业的数学学业水平考试的基本内容，也是高考的内容要求；选择性必修课程是供学生选择的课程，也是高考的内容要求；选修课程为学生确定发展方向提供引导，为学生展示数学才能提供平台，为学生发展数学兴趣提供选择，为大学自主招生提供参考①.

本套教材仅包含必修课程和选择性必修课程.

国家课程标准把必修课程和选择性必修课程所囊括的数学内容分为预备知识、函数、几何与代数、概率与统计、数学建模活动与数学探究活动5个主题②. 本套教材把这5个主题及其具体要求组织成了必修课程13章和数学建模1册，选择性必修课程8章和数学建模1册. 这些章的标题以及各章之间的逻辑联系如下页图所示.

① 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S]. 北京：人民教育出版社，2020：9，11-12.

② 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S]. 北京：人民教育出版社，2020：13-14，36-37.



说明：（1）数学是一个整体，教材各章之间或多或少都存在联系，上图仅标出一些主要联系.

（2）预备知识主题下的两章为高中数学学习提供基本语言、基本工具和基本思维方式，因此它们是整个知识体系的基础；数学建模是给学生提供解决实际问题的训练和实践，可以建立在任何数学基础上.

（3）在数学建模活动与数学探究活动主题下，上图只列了两册数学建模，并没有列出数学探究的内容. 其实，数学探究的内容以“探究与实践”专栏、“课后阅读”专栏、“拓展与思考”的习题以及某些边框分散在教材中. 教师可以利用这些素材引导学生进行自主探究，也可以根据教学内容自行设计数学探究活动，让学生学得更加生动活泼.

（4）国家课程标准把幂、指数与对数的运算融在幂函数、指数函数与对数函数中，把三角的定义、三角恒等变换以及解三角形等非函数内容都归在三角函数标题下，所以相关的内容也就都在“函数”主题下了；本套教材把这些非函数的内容从函数标题下独立出来，形成了必修课程的第 3 章“幂、指数与对数”及第 6 章“三角”，把这两章归到“几何与代数”主题下是更顺理成章的. 当然，这两章内容与紧接在后面的函数的学习密切相连，在课程结构的安排上仍把它们归在函数主题一起考虑.

本套教材共有必修课程教材四册.

- 必修第一册：第 1 章至第 5 章；
- 必修第二册：第 6 章至第 9 章；
- 必修第三册：第 10 章至第 13 章；

- 必修第四册：数学建模.

本套教材共有选择性必修课程教材三册.

- 选择性必修第一册：第 1 章至第 4 章；
- 选择性必修第二册：第 5 章至第 8 章；
- 选择性必修第三册：数学建模.

除数学建模外的五册教材可以安排从高中一年级至高中三年级第一学期共五个学期教学. 每册内容没有撑足教学时数，留一定的机动课时供教师根据实际需要灵活掌握，可用作重点或难点的强化课、复习课、习题课、数学建模活动、数学探究活动等，也可用于安排选修课程或校本课程内容的学习. 数学建模内容与数学知识的逻辑结构没有直接的关系，两册数学建模教材不是前三册或前两册教材的后继，而是包含比教学课时数要求更多的内容，供各个年段灵活地、有选择地使用，以实现数学建模的教学目标.

二、本套教材的编写思想与主要特点

本套教材是在上海市教育委员会组织下，由设在复旦大学和华东师范大学的上海市数学教育教学研究基地(上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地)联合主持编写的，由李大潜、王建磐担任主编. 教材编写过程中，我们始终坚持正确的政治方向和价值导向，科学地处理了教学内容的编排，反复认真地打磨，努力做到结构严谨、体例活泼、特色鲜明，体现了理性精神和创新意识，有较高的科学品位和学科人文情怀，希望能为广大师生喜闻乐见，对学生学业水平的提升，数学学科核心素养发展和社会责任感的培育都有促进作用.

我们认为本套教材在编写思想上有所突破，在内容呈现上有一些特点. 具体体现在以下几个方面.

(1) 关注“立德树人”，课程育人. 通过各种素材与知识本体的有机融合，有效落实了立德树人的根本任务，明确体现了“四个自信”和社会主义核心价值观，注重培养学生严谨求实的科学态度.

章首图的选用让学生在最初一瞥中体会中国共产党的光辉历史和祖国社会主义建设的成就；用现代化建设的新成就作为情景引入数学概念，让学生在学习知识的同时看到祖国发展的日新月异；例习题和“探究与实践”“课后阅读”等专栏中包含了各种热

点问题和重大主题教育的内容；重视数学史在数学教育中的作用，许多题附有历史的简述，既体现人类文化知识的积累和创新的过程，也帮助学生理解和掌握相关的数学知识；在数学史阐述中，特别注意我国历代数学家及其成就以及西方数学的脉络中我国学者(在学术、传播或中国化等方面)的贡献.

(2) 体现“国家标准，上海特色，国际水平”. 基于国家课程标准，但同时也对上海两期课改的经验有所继承，对东部发达地区的国际化大型城市这一特点有所关注，对数学链条上缺失的关键节点有所弥补.

本套教材在吸收上海两期课改(“一期课改”和“二期课改”)中已经成熟的经验方面，比较典型的例子有：数学归纳法，这是国家课程标准中标有 * 号的选学内容，本套教材将其 * 号去掉，归入正常教学要求；无穷递缩等比数列的和作为极限思想的朴素表述，与求导呼应；把反函数、参数方程、极坐标方程等内容以标 * 号的方式加入到本套教材中，供学校和教师选用. 这些内容曾出现在上海“二期课改”的教材中，学生的接受度较高.

对一些数学链条中关键的节点做适当的弥补. 例如，引入反证法，希望以此简化部分数学证明，提高学生逻辑推理能力；比较全面地介绍了直线方程的各种形式，既夯实解析几何的基础，也建立解析几何与数学其他分支的联结点，如斜截式方程紧密联系一次函数，而直线的法向量与点法式方程是立体几何中平面法向量的预演.

(3) 以国家课程标准所描述的“函数”“代数与几何”“概率与统计”三个主题为教材发展的三条主线，主线内部一气呵成(除了跨越必修与选择性必修的必要隔断外)，形成层层递进的章节设计，体现了整体性和连贯性，避免在发展主线间的反复变换，使学生不仅能更好地了解数学整体的思想和结构，也能了解数学不同分支之间的差异，对培养学生的数学素养更有好处.

(4) 注重“从特殊到一般，再指导特殊”的认识论规律. 例如，在函数主线内部，没有从给出函数的一般定义入手，而是先让幂函数、指数函数、对数函数作为“特殊”出现，然后提出函数的一般概念，再在“一般”指导下进入三角函数的学习. 这种处理方法在其他专题上也可以找到踪影：学过直线方程、圆锥曲线方程后，引出曲线方程的严格定义，然后用例题和习题的形式求一些轨迹的方程，再介绍曲线的参数方程和极坐标方程；在“简单几何体”一章中，先讲柱体与锥体，然后讨论多面体与旋转体，再“特殊化”到球的学习；“数列”一章，在学过等差数列、等比数列后，介绍一般数列

的概念与性质，特别关注用递推公式表示的数列，然后引入了数学归纳法，全章最后落笔于用迭代方法求$\sqrt{2}$的近似值，这是用递推公式表示数列的实际例子.

（5）在必修课程第 10 章“空间直线与平面”中，给出“立体几何”相对完整严格的演绎法阐述，意在努力克服学生的空间直观想象和逻辑推理上的不足. 在选择性必修课程第 3 章“空间向量及其应用”的章末回到立体几何，用向量方法解决立体几何问题，从几何问题代数化的角度引出解题新思路，加深对立体几何的理解，反过来又很好地诠释了学习空间向量的意义.

（6）数学建模单独成册. 国家课程标准把数学建模活动与数学探究活动作为一条单列的主线，充分体现了对数学建模的重视程度. 数学建模与数学知识的关系是强调已经学得的知识(不一定是刚刚学得的，一般也并不指定哪些具体的知识点)在解决实际问题中的应用，因此数学建模活动和数学知识体系的发展并无直接的关联性，数学建模活动的教学不应依附于特定知识性内容的教学，而应该强调它的活动性、探索性和综合性，在过程中不断提高学生分析问题、解决问题的能力和综合应用数学知识的能力，并充分激发学生的创新精神和创造意识.

基于这种想法，把数学建模内容独立出来，按必修和选择性必修分别单独成册. 这样做符合课程标准的要求，符合数学建模内容的特点，并至少在以下四个方面凸显它的优势：

- 数学建模单独的物理存在给教师和学生在强调数学建模学习和数学建模核心素养培养上更为直观的感受，更能激起数学建模教与学的热情；
- 独立的数学建模分册明确地显示数学建模不是在数学学习的某一特定节点上的内容，也不是新增的数学知识，而是在数学教学过程中随时随地可以开展的教学实践活动；
- 单独成册的数学建模教材有较大的容量，可以提供更多的活动案例，让教师和学生可以依据自己的兴趣和特长做多样的选择；
- 单独成册的数学建模教材以它的相对系统性和完整性帮助教师理解数学建模的意义和特点，逐步体会并形成数学建模的教学规范，从而更好地帮助学生开展相应的数学建模活动，体验数学建模的全过程，领悟数学建模的真谛.

（7）本套教材另一个与众不同的地方是采用“娓娓道来”的叙事方式，它使得教材既是一个“教”本，也是一个“读”本，学生可以在阅读中了解数学，喜欢数学，学好数

学. 正文的这种叙事方式使教师和学生更加注重数学精髓，体验数学严谨，掌握数学要义，提高数学素养，引导教师在教学中避免“重解题、轻概念、轻思想”的倾向.

三、本套教参的主要特点

本套教参编撰的目的是使教师理解教科书编制所依据的《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》，体会教材的编制特色和主要思想，把握教材所包含的数学知识的体系和脉络，掌握教学过程的关键，从而很好地完成从课程标准和教材所描述的“期望课程”“潜在实施课程”到教学过程的“实施课程”和学生习得的“获得课程”的转变.

本套教参与教材分册和章节安排均一致，即教参的分册和章节目录均与教材一致. 但教参没有直接把教材复制在内，也不是平铺直叙地解释教材的内容. 教参着重讲出编写者的思想及体会，明确各章的定位，剖析重点和难点，厘清容易混淆的地方，帮助教师把握课程标准的基本理念和目标要求，强调数学核心素养的落实，等等，从而开拓教师思维，优化教学方法. 从这个角度讲，教参又是课本内容的深化和补充，成为教材(潜在实施课程)到教学(实施课程)的中介和桥梁.

教材前言强调，“在任何情况下，都要基于课程标准，贯彻‘少而精’‘简而明’的原则，精心选择与组织教材内容，抓住本质，返璞归真，尽可能给学生以明快、清新的感受，使学生能更深入地领会数学的真谛，让数学成为广大学生喜闻乐见的一门课程. ”这是本套教材坚持的基本特色. 教材的许多特色隐含在内容选取、编排和行文中. 教参将揭示和突出教材的基本特色以及教材编制过程落实这个特色所采取的具体措施和处理方式，并充分注意同一主题内前置和后续内容的衔接以及一个主题的内容与其他主题甚至其他学科内容的关联. 这种衔接和关联在章节导言、总结部分以及在相关知识内容阐述中有明确的交代. 这样做的目的是让教师更加深刻地体会整个高中阶段数学是一个知识的网络，并在教学中把这个认知传递给学生.

教参的每一章因所涉及的内容以及编写者的风格特点可能会有所差异，但我们追求每章总体结构基本统一，关键要素基本具备.

每一章的教参包括“本章概述”“教材分析与教学建议”“参考答案或提示”和“相关阅读材料”四个部分.

“本章概述”部分的主要栏目有“总体要求”“课时安排建议”“内容编排与特色”“教学提示”与“评价建议”等. 特别地，“总体要求”中通过与课程标准、“二期课改”教材

的联系与对比，围绕着本章内容的重要性、与前后知识的联系和课程目标等内容进行阐述.

“教材分析与教学建议”部分按节编写，每节有“教学重点”“内容分析”“注意事项”“教学建议”等栏目.

“参考答案或提示”是教参的常规内容，但我们希望能够尝试给出一些思想或方法的提示.

给出“相关阅读材料”是一个新的尝试，我们希望为教师和学生的课外阅读提供一些提示或指导. 所列文献、材料以中文为主，但也会包含少量英文文献.

四、必修教材第一册中的一些关注点

必修教材第一册一共五章，前两章是“预备知识”主题的内容. 如前所述，这两章为高中数学学习提供基本语言、基本工具和基本思维方式，因此它们是整个知识体系的基础.

在第 1 章中，逻辑部分要注意与“二期课改”教材的差异：按照国家课程标准，本教材不涉及“四个命题”(原命题、逆命题、否命题与逆否命题)，代之以“充分条件”“必要条件”与“充要条件”. 教学中教师要充分注意这一点. 这一章还包含了反证法的内容，是上海市“二期课改”经验的继承，希望用一些简单的例子引导学生学好这一有用的证明方法.

第 2 章讨论数学中最重要的关系：相等关系与不等关系. 等式与不等式的基本性质是直观的，在数学学习过程中学生也或多或少在自觉或不自觉地使用. 这里把它们明确列出，是让学生在更理性的基础上使用它们. 从朴素直观的视角走向理性的视角，这里迈出了重要一步，希望教师重视，千万不要认为这些知识学生“自然会”，而忽略了数学思想、数学方法上的引导.

第 3 章开启了高中数学最重要的主题“函数”的学习.

函数概念其实在初中教材中已经出现，并学过了一些基本初等函数，如正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数等. 初中教材中用变量之间的依赖关系来描述函数，而高中教材要用集合语言和对应关系来定义函数.

本套教材在这个主题的处理上至少有两个独特之处. 一是，不采用函数的一般定义先行，再讨论具体的函数的常用模式，而是先讨论了幂函数、指数函数与对数函数

这三类特殊的函数(以及初中学过的那些函数)，再总结抽象，给出函数的一般定义. 因此，函数的一般定义迟至第 5 章才出现. 这是上文所说的“从特殊到一般，再指导特殊”的认识论规律的第一次展现.

二是，把幂、指数与对数的运算从幂函数、指数函数与对数函数中剥离出来，独立成章，强调了“运算”独立存在的价值，不让“运算”仅作为“函数”的附庸出现. 另外，在讲到对数时，特别回顾了对数从发明及其后几个世纪里在科学技术发展中所发挥的不可替代作用的光辉历史. 尽管由于信息技术的发展，对数的这个作用已消逝，而只成为一个优美的数学研究对象，但这段历史所蕴含的认识论意义对今人还是有重要启示的.

第 1 章　集合与逻辑

一、本章概述

总体要求

“在高中数学课程中，集合是刻画一类事物的语言和工具. 本单元的学习，可以帮助学生使用集合的语言简洁、准确地表述数学的研究对象，学会用数学的语言表达和交流，积累数学抽象的经验.”

众所周知，数学语言十分精确，不容易产生歧义. 而用规范的数学语言来表述数学研究的对象时，集合的语言是一种被广泛认可的方式. 本章的主要目的是希望学生能够了解并应用朴素的集合语言与逻辑语言来准确、简洁地表述数学对象，并描述所研究的数学对象之间的相互关系.

集合是数学的语言，而数学的内容是用逻辑的方式来组织的. 联系一个个数学意义上的事实的纽带就是逻辑. 学习一些最基本的逻辑，有助于使学生在思考时更加理性，增强思辨能力.

在课程标准中，本章内容被定位为“预备知识”的一部分. 本章重点关注的是用大众所公认的方式，遵循一些特定的规则来进行数学的思考和表达. 学好本章是后续章节学习的基础，也是能更好地与他人开展交流的必要条件.

经历集合与常用逻辑用语的学习，对于培养与提升学生的数学抽象、逻辑推理等核心素养具有重要的意义.

课时安排建议

本章的课时安排建议为 7+1，共计 8 课时. 建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
1.1　集合初步	4	集合　1 课时
		集合的表示方法　1 课时

（续表）

章节名	建议课时	具体课时分配建议
		集合之间的关系　1 课时
		集合的运算　1 课时
1.2　常用逻辑用语	3	命题　1 课时
		充分条件与必要条件　1 课时
		反证法　1 课时
复习与小结	1	

内容编排与特色

本章内容共分为两节，分别是 1.1 集合初步，1.2 常用逻辑用语.

“1.1 集合初步”旨在介绍集合这一数学对象最基本的概念、关系及运算. 由于在高中阶段的数学学习中，学生所接触到的集合绝大部分都是数集、点集以及由它们所生成的集合，因此在编写本节教材内容时，我们采取了从实际生活中引入集合的概念，并在随后学习数学内容时不断展开与深入的模式. 在行文和选择例题、习题时，所涉及的大多是从生活实际中抽象而得到的数学内容(如申辉中学高一(1)班的全体学生组成一个集合，以学校不同社团的成员为例引入集合的运算等)，以及与简单的数、式和几何图形有关的例子(如 600 的正约数全体组成一个有限集，用矩形和平行四边形的关系来作为子集关系的一个例子等).

正如课程标准中所指出的，在本节的教学中，应关注学生是否学会用三种语言(自然语言、符号语言、图形语言)来表达数学研究的对象，以及能否相互转换. 在编写本节教材内容时，我们也力图渗透有关的思想(如利用数轴和文氏图来获取交集、并集、补集这些抽象运算的直观感受).

相较于以往的教材，本教材中集合是作为数学语言来学习的，因此在教材正文中并没有介绍“n 元集合的子集有 2^n 个”“集合运算的分配律”“德・摩根(de Morgan)律”“容斥原理”等内容.

“1.2 常用逻辑用语”是在学过初中相关内容的基础上，进一步明确数学中命题语言的精确含义. 我们编写了一个尽可能自洽的教学体系，其中逻辑学意义上的“闭命题”(基本上可以理解为“能判断真假的、不带有变元的陈述句”)在本教材中被称为“命题”，而逻辑学意义上的“开命题”(“含有变元的陈述句”)则称为“陈述句”. 把

数学上的充分条件和必要条件用两个“陈述句”(也就是开命题)之间的推出关系定义.

将“推出关系”和“充分条件、必要条件”分在两个课时里，是为了使学生有充足的时间来消化和习惯“推出关系”与推出符号(“$\Rightarrow$”)这种表述逻辑关系的简洁有力的工具.

加入“反证法”这部分内容是综合考虑之后的结果. 因为不想要求学生记忆太多的逻辑术语，我们将课程标准要求中的“全称量词命题的否定、存在量词命题的否定”等内容都融入到“反证法”这一课时的教学内容中. 此外，在后续章节的学习中，反证法是一种运用得相当广泛的论证方法，应该在本章将反证法这一内容适当地强调一下.

总的来说，这一章的内容是为开展后续内容的教学作准备的，主要目的是使学生通过学习，明确怎样“用数学的语言进行规范的表述”.

教学提示

初中阶段数学知识相对具体，高中阶段数学知识相对抽象. 教师应针对这一特征帮助学生完成从初中到高中数学学习的过渡，包括知识与技能、方法与习惯、能力与态度等方面.

在集合、常用逻辑用语的教学中，教师应创设合适的教学情境，以义务教育阶段学过的数学内容为载体，引导学生利用集合语言和常用逻辑，梳理、表达已学过的相关数学内容；应引导学生理解属于关系是集合概念中的一个重要的关系，了解元素 a 与由元素 a 组成的集合 $\{a\}$ 的差异，即 $a\in\{a\}$，a 与 $\{a\}$ 不相同. 在梳理过程中，可以针对学生的不同情况，采用自主学习与合作学习相结合的方式组织教学活动.

通过教学，使学生能够在现实情境或数学情境中，概括出数学对象的一般特征，并用集合语言予以表达. 初步学会用三种语言(自然语言、图形语言、符号语言)表达数学研究对象，并能进行相互转换. 掌握集合间的基本关系与基本运算. 能够借助常用逻辑用语进行数学表达、论证和交流，体会常用逻辑用语在逻辑推理中的作用.

评价建议

本章的教学评价应以过程性评价为主，终结性评价相对来说不是十分必要.

在过程性评价中，应密切关注学生口头与书面表达的规范性. 例如，是否能正确区分“属于”这一元素与集合的关系与“包含于”这一集合与集合之间的关系，并能准确

使用符号语言表示这些关系. 与课程标准要求的精神一致，在关注学生表达规范性的同时，也要关注学生逻辑推理的过程是否合乎规则. 对于不规范的表达与非逻辑的推理模式应当及时指出并努力纠正.

评价的内容应以本章的重点“集合语言”与“逻辑推理”为主，不宜使用后续章节的学习内容(如用二次函数与二次方程的关系、函数的性质，甚至是解析几何中曲线与方程等)作为载体，对本章所学内容进行评价.

本章所学内容涉及的数学知识点不是很多，终结性评价的必要性不大. 在学习后续章节时，本章的知识点还会被反复地使用，其终结性评价可以有机地融入到其他章节的评价之中.

本章重点考查数学抽象、逻辑推理等方面的核心素养.

二、教材分析与教学建议

1.1 集合初步

教学重点

集合的概念与表示，集合的基本关系，集合的基本运算：从实际情境中抽象出集合的概念，学会以规范的方式用集合来表示已经学过的数学对象，知道元素与集合之间的关系及集合的表示方法. 借助于文氏图及数轴等图形语言，理解和辨识集合之间的包含关系与相等关系. 知道交集、并集、补集的相应符号，理解这三种集合基本运算的意义；会在简单情形下进行有限个集合之间的交、并运算，会求一个集合的补集.

内容分析

集合是一种用来描述数学对象的重要语言，它简明、确定，是描述数学研究的对象及其相互关系的一个非常合适的工具. 高中数学所学的集合只是一种在朴素观点下的集合，即教材中所说的，“满足一定要求或具有一定特征的对象放在一起或归为一类”“把一些确定的对象的全体叫做集合”. 严格地说，这并不能算是集合的严格定义，

否则会产生一些逻辑上的悖论，如罗素(Russell)悖论等. 然而，使用这个朴素的集合概念已足以满足高中数学所提出的“用来表示数学对象”的要求了.

介绍完集合之后，给出属于关系的概念和相应的符号是非常自然的.

在以往教材中，讲集合的概念之后立即就会提到三个性质：确定性、互异性、无序性. 本教材没有采用这种“先讲性质、后举例子”的方式，这与本教材力图贯彻“从特殊到一般”的理念相符. 此外，“确定性”是因为集合本身所要求的，但“互异性”和“无序性”并不是，只是列举法表示集合的某种规则.

在以往教材中，两个集合相等的概念一般是在介绍了集合的包含关系之后，利用“两个集合相互包含”来定义集合相等的. 本教材作了不同的处理，根据集合论中的外延公理(axiom of extension)，将两个集合相等定义为“两个集合的组成元素完全相同”. 这样，在学习包含关系之前，就可以由此来验证两个构造比较简单的集合是否相等. 至于较为复杂的两个集合，如何说明它们的元素完全相同，这可能是相当困难的，但其难度并不来源于集合相等的定义.

例 1 旨在说明什么叫有限集，什么叫无限集，以及如何说明一个集合是无限集.

例 2 旨在帮助学生初步熟悉常用数集的符号. 在高中阶段，除了本节教材中提到的四个常用数集——自然集 **N**、整数集 **Z**、有理数集 **Q**、实数集 **R**，还有复数集 **C**. 本着“让学生少记一些符号和术语”的精神，以往教材中还有一些符号，如$\mathbf{N}^*$、$\mathbf{Z}^+$、$\mathbf{R}^-$等，都未在本教材中列出.

空集的引入对学生来说可能有些突兀，它的实际意义到学习集合运算的时候才能初步体现出来. 引入空集可以使集合的运算得以封闭. 例如，有了空集，两个集合的交集才总是一个集合.

第一课时的内容相对较少，可以利用剩余时间与学生互相熟悉，并且介绍课堂和作业常规等.

第二课时的内容是集合的表示方法，主要内容是列举法、描述法与表达某些实数集合的区间表示法. 与以往教材不同的是，本教材中把区间表示法从不等式一章提前到了集合这一节.

例 3 介绍如何用列举法表示集合. 在例 3 之前的文字中，提到了“不重复”“不考虑其元素的顺序”，就是以往教材中所说的列举法表示集合时的“互异性”与“无序性”.

在例 3 下面的文字中，指出了列举法也可以用来表示一些无限集，并给出了其表

示方法.

在用描述法表示集合时，正如边框中所说明的，所谓的“元素具有的共同特征”要从两个方面来解读：一是集合的元素都具有该特征，二是不在此集合中的元素都不具有这个特征.

例 4 旨在进一步展示列举法和描述法各自的适用范围. 另外，在第(2)小题中，很多学生可能并不认为 2 被 3 除是余 2 的，所以教师在这个地方应注意讲解清楚“被 3 除余 2 是指减去 2 之后是 3 的倍数”.

区间记号的引入使得表示一些实数集合的子集变得更加方便，无需引入一个新的符号来表示代表元. 需要注意的是，有些学生在学习完区间以后会把 $+\infty$ 及 $-\infty$ 当成是两个新的实数，前者大于已知的一切实数，后者小于已知的一切实数，这种理解是不正确的.

例 5 是用区间表示集合的一个初步的尝试.

数学对象之所以有意义，是因为它们之间有一些联系，并且可以进行适当的运算. 因此，本节的第三和第四课时分别介绍集合之间的关系与集合的运算(交、并、补).

第三课时的内容是集合之间的关系. 教材从分别代表实际问题、几何问题、代数问题和数论问题的四个例子中抽象出了共同的特征——一个集合的每个元素都是另一个集合的元素，从而引出包含关系的定义，并介绍了如何用文氏图来表示包含关系.

“空集是任何集合的子集”在教材中被书写为“规定”，这与学生的直观感觉是相符合的. 实际上，从逻辑的角度来说，按照包含关系的定义，空集自然是任何集合的子集. 也可以用如下的方式来理解：“集合 A 是 B 的子集，是指‘不存在在 A 中而不在 B 中的元素’.”这样，空集是任何集合的子集就非常自然了.

教材介绍了当集合 A 是集合 B 的子集时，如果 $A=B$ 不成立，就称 A 是 B 的真子集. 关于真包含关系的符号，教材选择了更为简洁的“$\subset$”，而没有选择“$\subsetneqq$”.

例 6 旨在帮助学生熟悉集合相等的概念，同时复习用列举法表示时，不考虑元素顺序这一规定.

例 7 的第(2)小题要求较高，难度较大，学生既要能在直观上判断，又要初步学会说理，而说理的时候要紧扣包含关系的定义和描述法表示集合的本质.

例 8 通过列举一个比较简单的集合的子集，初步渗透分类的思想. 本章中不打算

介绍有限集的子集个数，这个内容在乘法原理或二项式定理章节中展开似乎更加合适.

虽然第四课时“集合的运算”内容较多，但是交、并、补这三种运算都是足够直观的，选择的例题都是在简单情境下进行集合运算.

例 9 展示了在数学中引入交集的一个作用，也渗透了数形结合的思想.

并集定义中的“或”是需要谨慎对待的，因为日常生活中的“或”往往是排他的，而该定义中的“或”不是排他的，可以两者都成立.

例 10 旨在介绍如何用数轴来形象化地求两个实数集合的交集与并集. 在学生熟悉了求交集与并集的方法，并能进行抽象的思考之后，借助数轴并不是必要的.

例 11 是一个反问题，有较高的难度. 解答中的第一段——用元素是否在集合中来思考，这是解题过程的核心内容，我们可以引导学生说出并规范地表达这一思维过程. 相较而言，题目的答案则是次要的.

本教材选择了上横线的记号(如 $\overline{A}$)作为补集的符号，因此，在使用补集符号时，上下文中要交代清楚全集.

例 12 是在一个简单情境下进行集合的交、并、补运算的综合问题，解答并不难，但它反映了集合运算的德・摩根律. 类似地，练习 1.1(4)的第 3 题反映了集合运算的分配律. 这些性质都不是本教材力图重点介绍的，在学生学有余力的情况下，教师可以在这些地方稍作展开.

注意事项

公理化的集合概念和教材中所介绍的朴素的集合概念有一些区别，康托(Cantor)所开创的集合论实际上更多地倾向于前者，它是用来精确地处理“无穷”这一概念的. 在高中数学的范围内，不需要用到这样复杂而严格的概念，本节内容的定位只是为之后的学习提供一种语言工具.

由于空集是任一集合的子集，因此空集也是空集的子集. 所有的空集都是同一个集合.

教材第 7 页的边框将集合的包含关系与实数的大小关系做了一个类比. 这个类比有助于学生理解包含分为相等和真包含两种情况. 但是严格来说，集合之间的包含关系和实数集的大小关系不同，任意两个实数都可以用符号“$\leqslant$”来连接，但集合的“$\subseteq$”符号是不符合这一要求的.

教材第 9 页的交集的文氏图是用来强调两个集合的相互关系的. 事实上，图 1-1-4 的第一个图已足以表示两个集合的所有情况，包括某集合包含另一个集合，也包括没有公共元素. 这里之所以分三种类型是因为想要直观地让学生感受到在一些特殊的情况下，交集分别是什么. 在两个集合的关系未知的情况下，用图 1-1-4(1)中的文氏图来表示交集(有一些区域可以没有元素)是更加方便的选择. 对并集的直观表示也是同样的道理.

需要注意的是，文氏图只是一个示意图. 此外，用圆来表示集合的文氏图只适合用于表示少量(个数不超过 3 个)集合间的关系与运算.

教学建议

作为高中数学的起始课，“集合初步”旨在介绍一种较为严密、较少出现歧义的数学表达方式. 对集合性质的更加深入的研究将分散到以后的各个章节中，在进行本节内容的教学时不建议教师加入未学过的内容.

建议将“集合的关系与运算”教学中所牵涉的对象集中在容易理解的实际生活中的例子、简单的数集或点集上，方便学生更快、更好地熟悉集合的语言.

在教学时，建议培养学生借助文氏图、数轴等工具进行直观想象的能力，并关注学生在自然语言、符号语言及图形语言三者之间进行相互转换的能力.

要关注学生表达的规范性，不能用教师的讲解来代替学生的口头表达，更不能对学生的书面表达不提出任何要求. 在起始课上就关注学生的表达方式要远好于后期. 学生思维的严密性是教师在教学中要着力培养的.

1.2　常用逻辑用语

教学重点

命题(真命题、假命题)的概念，充分条件，必要条件，充要条件，反证法：知道命题的概念，会在简单情境下判断命题的真假，并能用正确的方法说明命题为真或为假的理由. 借助推出关系理解充分条件、必要条件以及充要条件的含义，并能在简单情境下作出准确的判断. 理解反证法，会用反证法证明一些典型的命题.

内容分析

本节和“集合初步”类似，也是为后续章节的学习奠定思维和语言的基础，帮助学生能用规范的方式更好地与他人沟通交流. 在思维方法上，推出关系与反证法是今后数学学习的基础；而在语言上，充分条件与必要条件是与他人沟通的必要术语.

“命题”同“集合”类似，也是一个无法用简单语言严格定义的概念．命题的相关概念有很多，如简单命题、复合命题、条件命题等．本教材则作了一个较为狭义的界定，规定“用自然语言、符号或式子表达，且可以判断其真假的语句叫做命题”．

例 1 中，(3)是祈使句，(6)是疑问句，它们都不是命题．(7)是含有变元的陈述句，在本教材的体系中，它与命题的关系类似解析式与数的关系，只有规定了变元的值，它才是一个命题．

而(1)(2)(4)(5)都是命题．其中，(1)和(2)采用了“所有的 S 都是(不是)P”的形式来表述；(4)和(5)采用了“若 α，则 β”的形式，数学中这种形式的命题更为常见．

本教材中对形如“若 α，则 β”的真命题用“推出”这一关系来描述，这一关系是数学中的逻辑推理的基础．

要说明一个形如“若 α，则 β”的命题是真命题，和说明集合之间的包含关系的方法是一致的，也就是要说明每一个满足条件的变元都满足结论．而要说明一个形如“若 α，则 β”的命题是假命题，只需要举出一个满足条件、但不满足结论的例子即可．

例 2 通过将一些命题转化为“若 α，则 β”的形式，进一步使学生熟悉判断其真假的方法．

在本教材中，充分条件和必要条件这两个概念是建立在推出关系的基础上的，在相应的定义中“条件”二字仅仅出现在这两个术语上．

教材将推出关系和“充分条件、必要条件”分在两个课时，可以分散难点．

例 3 旨在通过较为简单的实际例子使学生熟悉如何分辨充分条件与必要条件，并对说理也提出了要求．

例 4 通过一个简单的例子来说明如何证明一个陈述句是另一个陈述句的充要条件．

教材选择了“反证法”作为第三课时的内容，其原因有三：一是反证法是证明数学命题的一个重要方法；二是反证法可以承载课程标准中“能正确使用存在量词对全称量词命题进行否定”“能正确使用全称量词对存在量词命题进行否定”这两个要求；三是反证法的教学可以弥补课程标准中缺少“逆否命题”所带来的一些证明技巧上的缺失．

例 5 是一个简单的运用反证法证明命题的例子，旨在使学生了解反证法的思想以及反证法的表达方式．另外，例 5 也为之后的例 7 作了必要的铺垫．

例 5 之后，教材用一个表格(表 1-2)呈现了一些陈述句的否定形式. 陈述句的否定之否定就是其本身.

例 6 涉及表格(表 1-2)中的“α 或 β”的否定.

例 7 是历史上的一个著名命题及其证明. 传说毕达哥拉斯学派的一个门人通过证明等腰直角三角形的斜边长与直角边长的比例不可公度说明了无理数的存在，教材引用的就是他的证明方法.

本节的目的是让学生初步了解反证法的思想和表达方式，后续章节的学习中会不断接触到反证法说理或证明的过程，因此不必在此处多作展开.

注意事项

在使用“推出”关系时，我们甚至不需要要求“若 α，则 β”中的 α 能够成立. 在使用反证法时，我们通常假设一个实际上不可能成立的陈述句，再利用这个陈述句推出矛盾，以此来说明所给出的假设是不可能成立的.

在高中数学中，大部分的定理、性质都是以“若 α，则 β”的形式来表述的，充分条件、必要条件也是针对“若 α，则 β”形式的命题而言的. 但教师需要了解数学中的命题不仅仅只有这种形式，也有“存在 α，使得 β 成立”的形式.

当 α 能推出 β 时，称“α 是 β 的充分条件”是没问题的，但是称“β 的充分条件是 α”则不太妥当，应当称作“β 的一个充分条件是 α”.

在反证法中，所谓“得到矛盾”是指发现了某个命题既是真命题，又是假命题. 这个命题可以是假设的陈述句(假设其为真，但随后推理得到它为假)，也可以是前提条件，或其他已知为真的命题，如定理、性质等(已知其为真，但随后推理得到它是假命题).

教学建议

同上节“集合初步”一样，本节的教学目的在于使学生能用规范的语言来表达自己的思想，在沟通交流时减少歧义. 因此，在教学中，关注学生的口头与书面表达方式是非常重要的.

由于本节内容是预备知识，不应在内容上“深挖洞”. 对于逻辑用语的进一步的学习要求是要经过一段较长的时间的规范表达与思考的训练之后，学生才能逐步达到的，不适合在高中一年级开学之初就进行灌输.

在学习了逻辑用语之后，解决问题时建议要求学生用规范的语言来书写.

三、参考答案或提示

1.1 集合初步

练习 1.1(1)

1.（1）能组成集合，是有限集.　（2）能组成集合，是无限集.　（3）不能组成集合，因为“比较大”标准不明确.

2.（1）$\notin$.　（2）$\in$.　（3）$\in$.　（4）$\in$.

练习 1.1(2)

1.（1）$\{1,2,5,10\}$.　（2）$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

2.（1）$\{n \mid n=2k,\ k\in \mathbf{Z}\}$.　（2）$\{(x,0) \mid x\in \mathbf{R}\}$.

3.（1）$(-1,5]$.　（2）$(-\infty,-3)$.

练习 1.1(3)

1.（1）该说法正确. $A\subseteq B$ 的意义是“A 中的每一个元素都是 B 的元素”，因此 a 是 B 的元素.

（2）该说法错误. 例如，$A=\{0\}$，$B=\{0,1\}$，$C=\{0,2\}$. 满足 $A\subseteq B$ 且 $A\subseteq C$，但 B 与 C 不相等.

（3）该说法正确. 由 $A\subset B$ 及 $B\subseteq C$，可知 $A\subseteq C$. 另一方面，A 不可能等于 C，否则将导致 $C\subset B$ 且 $B\subseteq C$，这意味着 $C\subset B$ 且 $B=C$，这是不可能的. 因此 $A\subset C$.

2.（1）$\subset$.　（2）$\supset$.　（3）$=$.

3. 满足条件的集合 M 共有 6 个，分别为 $\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{a,d\}$，$\{a,b,c\}$，$\{a,b,d\}$，$\{a,c,d\}$.

练习 1.1(4)

1.（1）A.　（2）$\varnothing$.　（3）U.

2. $(-\infty,-2]\cup(1,+\infty)$.

3.（1）$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)=\{2,3,4,5,6\}$.

（2）$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)=\{3,4,5,6\}$.

习题 1.1

A 组

1.（1）$\{2,3,5,7\}$.　（2）$\{-1,0,1,2\}$.

2. (1) $\{n \mid n=3k+1, k\in\mathbf{N}\}$.　(2) $\{x \mid 1<x<10\}$.　(3) $\{(x,y) \mid xy=0\}$.

3. C.

4. (1) $A\subset B$.　(2) $A=B$.

5. 当 $A\subset B$ 时，1 是 B 的元素，因此 $1^2-3\times1+a=0$，得 $a=2$. 而当 $a=2$ 时，$B=\{x \mid x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$，此时 $A\subset B$ 成立. 因此满足条件的 a 存在，且 a 的值为 2.

6. $A=\left\{\dfrac{1}{2},1\right\}$.

7. $A\cap B=(-\infty,2)$，$A\cap C=(5,7]$，$A\cap(B\cap C)=\varnothing$.

8. $A\cap B=\{(1,0),(-2,3)\}$.

9. $[1,+\infty)$.

B 组

1. $a=-1$ 或 0.

2. $B\subset A$.

一方面，对于集合 B 中任意给定的元素 b，b 都可以表示为 $4n-1$ 的形式，其中 n 是整数，因此 b 也可以表示为 $2(2n-1)+1$ 的形式. 因为 n 是整数，所以 $2n-1$ 也是整数，因此 $b\in A$. 从而 $B\subseteq A$.

另一方面，$1=2\times0+1$，故 $1\in A$，但解 $1=4n-1$，得 $n=\dfrac{1}{2}\notin\mathbf{Z}$，因此 $1\notin B$. 从而 A 不是 B 的子集.

综上所述，$B\subset A$.

3. 存在，$a=0$，$\dfrac{2}{3}$或-1.

4. $x=-2$，0 或 2.

当 $x=-2$ 时，$A=\{-2,1,4\}$，$B=\{1,4\}$；当 $x=0$ 时，$A=\{0,1,4\}$，$B=\{0,1\}$；当 $x=2$ 时，$A=\{1,2,4\}$，$B=\{1,4\}$.

1.2 常用逻辑用语

练习 1.2(1)

1. 例如：一个星期有七天，是一个真命题；太阳是地球的卫星，是一个假命题.

2. (1) 假命题. 2 是偶数，也是素数.

（2）真命题. 根据真子集的定义.

（3）假命题. 0 不是一个集合.

（4）假命题. 例如，$A=B=\{0\}$，A 是 B 的子集，B 也是 A 的子集.

3.（1）$\alpha \Rightarrow \beta$.　　（2）$\beta \Rightarrow \alpha$.

练习 1.2(2)

1.（1）必要非充分.　　（2）充分非必要.　　（3）充要.

2. $[4,+\infty)$.

练习 1.2(3)

1. 假设结论"n 是奇数"不成立，即假设 n 是偶数. 由 n 是偶数，可设 $n=2k$，$k \in \mathbf{Z}$. 于是 $n^3=(2k)^3=8k^3=2(4k^3)$，得 n^3 是偶数，这与已知条件 n^3 是奇数矛盾. 所以假设不成立，即 n 是奇数.

2. 假设结论"$a \neq b$ 或 $b \neq c$"不成立，即假设"$a=b$ 且 $b=c$". 由相等关系的传递性，可知 $a=c$，这与已知条件 $a \neq c$ 矛盾. 所以假设不成立，即 $a \neq b$ 或 $b \neq c$.

习题 1.2

A 组

1.（1）是命题.　　（2）是命题.　　（3）不是命题.　　（4）是命题.　　（5）是命题.

2.（1）是真命题. 设 $a=2m+1$，$b=2n+1$，m、$n \in \mathbf{Z}$，则 $a+b=2(m+n+1)$，$m+n+1 \in \mathbf{Z}$，故 $a+b$ 是偶数.

（2）是假命题. 等腰梯形的一组对边平行，且两对角线相等.

（3）是真命题. 由 $A \cap B=A$，可得 $A \subseteq B$，故 $A \cup B=B$.

3. $\alpha \Rightarrow \beta$，$\alpha \Leftrightarrow \gamma$，$\beta \Leftarrow \gamma$.

4.（1）必要非充分.　　（2）充分非必要.　　（3）必要非充分.　　（4）充要.（5）必要非充分.

5. 不等价. 当 $l=m=1$ 时，$l+m=2$ 是偶数，但是"l、m 都是偶数"不成立.

6. 充分性：设对角线 AC 与 BD 交于点 O.

因为 $AB /\!/ CD$，所以 $\angle DCO=\angle BAO$，$\angle CDO=\angle ABO$.

又 $AB=CD$，所以 $\triangle AOB \cong \triangle COD$，

于是 $AO=CO$，$BO=DO$.

必要性：由 $AO=CO$，$BO=DO$ 及 $\angle AOB=\angle COD$，可得 $\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$ 全等，故 $\angle BAO=\angle DCO$，从而 AB 与 CD 平行.

同理，AD 与 BC 平行.

所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

综上所述，“四边形 $ABCD$ 是平行四边形”是“四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分”的充要条件.

B 组

1. (1)真命题. 理由略.　(2) 假命题. 理由略.

2. 一个充要条件为“$a\leqslant 1$”；一个充分非必要条件可以是“$a=-1$”；一个必要非充分条件可以是“$a\leqslant 2$”.

3. B.

4. (1) $m\leqslant -4$.　(2) $m>\frac{1}{4}$.

复习题

A 组

1. (1) {鼠,牛,虎,兔,龙,蛇,马,羊,猴,鸡,狗,猪}.　(2) {红,黄}.

2. (1) $\{(x,y)\mid y=x,\ x>0\}$.　(2) $\{n\mid n=3k,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

3. (1) 必要非充分.　(2) 充分非必要.

4. 所有子集共有 8 个：$\varnothing$，$\{-5\}$，$\{1\}$，$\{4\}$，$\{-5,1\}$，$\{-5,4\}$，$\{1,4\}$，$\{-5,1,4\}$.

5. $A\cup B=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$，而 $A\cap B=\varnothing$.

6. $\overline{A}=(-\infty,-1]\cup[2,3)$.

7. $p=2$，$q=1$，$r=-2$.

8. $(-\infty,1)$.

9. A.

10. 假设该梯形 $ABCD$ 是等腰梯形，其中 AB、CD 分别是上、下底. 因为点 A、B 到直线 CD 的距离相等，且 $AD=BC$，故 $\angle ADC=\angle BCD$，从而三角形 ADC 与三角形 BCD 全等，故 $AC=BD$，但这与该梯形的对角线不相等矛盾.

因此该梯形不是等腰梯形.

B 组

1. C.

2. 充分非必要，充分非必要.

3. $A=\{3,5,11,13\}$，$B=\{7,11,13,19\}$.

4. $(-\infty,3]$.

5. $(-\infty,-2)\cup[5,+\infty)$.

6. 存在，$a=1$ 或 $-\frac{1}{8}$. 当 $a=1$ 时，对应的两个子集为 $\varnothing$ 及 $\left\{\frac{2}{3}\right\}$；当 $a=-\frac{1}{8}$ 时，对应的两个子集为 $\varnothing$ 及 $\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

7. 假设 $\sqrt[3]{2}$ 是有理数，则可设 $\sqrt[3]{2}=\frac{m}{n}$，其中 m 与 n 是互素的正整数. 于是 $m=\sqrt[3]{2}n$，两边立方，得 $m^3=2n^3$. 所以 m^3 是偶数，于是 m 也是偶数. 设 $m=2k$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $4k^3=n^3$，所以 n^3 也是偶数，于是 n 也是偶数. 这样 m 与 n 有公因数 2，与 m、n 互素的假设矛盾.

所以假设不成立，即 $\sqrt[3]{2}$ 是无理数.

拓展与思考

1. 设 $a=3m+r_1$，$b=3n+r_2$，m、$n\in\mathbf{Z}$，r_1、$r_2\in\{0,1,2\}$.

$ab-1=(3m+r_1)(3n+r_2)-1=9mn+3mr_2+3nr_1+r_1r_2-1=3(3mn+mr_2+nr_1)+(r_1r_2-1)$，故 $ab-1$ 是 3 的倍数，当且仅当 r_1r_2-1 是 3 的倍数.

假设 $r_1\neq r_2$，不妨设 $r_1<r_2$，那么只有 $\begin{cases}r_1=0,\\r_2=1;\end{cases}\begin{cases}r_1=0,\\r_2=2;\end{cases}\begin{cases}r_1=1,\\r_2=2\end{cases}$ 这三种情况，此时 r_1r_2-1 分别为 -1、-1、1，都不是 3 的倍数，这与 $ab-1$ 是 3 的倍数矛盾. 因此假设不成立，故 $r_1=r_2$，即 a 与 b 被 3 除的余数相同.

2. (1) 由于 S 非空，故 S 中一定有元素. 设其中一个元素为 a，由题意，$0=a-a$ 一定是 S 的元素. 另一方面，$S=\{0\}$ 满足条件，因此任何非零实数都可以不是 S 的元素.

(2) 假设 S 中有非零元素 m，则 $m+m=2m$，$2m+m=3m$，依次类推，形如 $mk(k\in\mathbf{N}$，$k>0)$ 的所有实数都是 S 的元素，与 S 是有限集矛盾. 因此 $S=\{0\}$.

(3) 首先，类似(2)，5 的正整数倍一定是 S 的元素.

其次，由于 $-x=0-x$，$0\in S$，故当 $x\in S$ 时，一定有 $-x\in S$，因此所有形如 $5k(k\in\mathbf{Z})$ 的数都是 S 的元素.

最后，假设 S 中有形如 $5k+r(k\in\mathbf{Z},\ r\in(0,5))$ 的元素，那么 $(5k+r)-5k=r\in S$，这与 S 中最小的正数为 5 矛盾.

综上所述，$S=\{n\mid n=5k,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

四、相关阅读材料

参考文献

[1] COPI I M. Introduction to Logic(13th edition)[M]. Prentice Hall，2009.

[2] HALMOS P R. Naive Set Theory[M]. Springer，1998.

第 2 章　等式与不等式

一、本章概述

总体要求

数量关系是数学重要的研究对象，相等关系与不等关系是最基本的数量关系，而等式和不等式则是表示相应数量关系的基本工具. 等式与不等式的知识在日常生活中有着广泛的应用.

本章内容——等式与不等式，作为初中数学向高中数学的过渡内容，起着承上启下的作用. 同时，本章内容又是深入学习后续高中数学内容的基础和工具，属于高中数学预备知识板块，对于提高学生的数学抽象、逻辑推理和数学运算等素养具有基础性作用. 这是本章内容在整套教材中的基本定位. 希望学生尽快适应高中阶段的数学学习，感悟高中阶段数学课程的特征，循序渐进地提高数学学习能力，为后续课程的学习打下基础.

课程标准中强调："教学中，要根据内容的定位和教育价值，关注数学学科核心素养的培养. 要让学生逐渐养成借助直观理解概念、进行逻辑推理的思维习惯，以及独立思考、合作交流的学习习惯，引导学生感悟高中阶段数学课程的特征，适应高中阶段的数学学习."在本章中，可以通过相等关系和不等关系的类比，提高观察、比较、归纳、概括的能力；通过正确表示方程和不等式的解集以及建立不等式的过程，发展数学抽象的核心素养；通过解方程和求解不等式的过程，理解等价转化、分类讨论、化归思想的重要作用，落实数学运算核心素养；通过证明不等式发展逻辑推理能力，通过学习基本不等式理解相等与不等关系的相互转化，树立辩证思维；通过探究与实践活动以及数学史和数学文化的学习，提升兴趣，提高素养，促进发展.

课时安排建议

本章的课时安排建议为 12＋2，总计 14 课时. 建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
2.1　等式与不等式的性质	4	等式的性质与方程的解集　1 课时
		一元二次方程的解集及根与系数的关系　1 课时
		不等式的性质　2 课时
2.2　不等式的求解	5	一元一次不等式及一元一次不等式组的求解　0.5 课时
		一元二次不等式的求解　2.5 课时
		分式不等式的求解　1 课时
		含绝对值不等式的求解　1 课时
2.3　基本不等式及其应用	3	平均值不等式及其应用　2 课时
		三角不等式　1 课时
复习与小结	2	

内容编排与特色

相较于课程标准的内容要求，本教材中增加了以下内容：(1)一元二次方程根与系数的关系；(2)分式不等式的求解；(3)含绝对值不等式的求解；(4)三角不等式. 增加的内容要么是“二期课改”教材中的内容，要么是为后续学习打好必要的基础. 课时与“二期课改”教材相当，难度基本持平.

在内容处理上，本教材中以一元二次不等式的求解为基础求解其他不等式，突出等价变形、化归思想，强调不等式之间的联系和转化；将“二期课改”教材中不等式的证明内容分散化处理，突出比较法的思想，对于“二期课改”教材中常用的综合法、分析法等，不再强调其名称，而是在整套教材的有关内容的证明或表述过程中，作为自然的逻辑推理方式，加以展示和灵活运用.

本章内容共分为三节，分别是 2.1 等式与不等式的性质，2.2 不等式的求解，2.3 基本不等式及其应用.

“2.1 等式与不等式的性质”，首先在系统梳理等式性质的基础上，学习方程的解集、恒等式以及一元二次方程根与系数的关系. 这是对初中相关内容的复习、巩固与提升，由此引导学生进入高中阶段的不等式学习. 其次在建立实数大小关系的基础

上，引导学生用类比的方法，由等式的基本性质类比得到不等式的基本性质，并提示学生比较和思考等式性质和不等式性质之间的异同点，由此展开对不等关系的学习.

“2.2 不等式的求解”，首先是在复习初中所学的一元一次不等式和不等式组求解的基础上，运用不等式的性质求解一元二次不等式；然后以一元二次不等式的求解为基础，将分式不等式转化为一元一次不等式、一元二次不等式或不等式组求解；最后介绍含绝对值的不等式的求解. 其中，不同于课程标准的内容安排，本节教材直接从不等式性质出发来研究和处理一元二次不等式的求解，而非借助一元二次函数来求解(用函数的观点求解方程和不等式安排在第 5 章函数中)，从而切实加强代数教学.

“2.3 基本不等式及其应用”，先是在学习了不等式性质的基础上，介绍在后续学习中具有重要作用的基本不等式，包括平均值不等式和三角不等式；再利用这些基本不等式证明其他一些不等式以及求简单的最值，使学生逐步掌握数学证明的一些基本思想和方法，并树立起等价转化的辩证思维. 鉴于三角不等式在高等数学中的重要性，并结合高中学生的实际学习能力，本教材对三角不等式予以突出，并安排一个课时的内容加以系统学习.

在探究与实践部分，教材提供了由等式证明不等式方面的探索和实践活动，旨在增进对等式和不等式相互转化的理解.

在课后阅读部分，教材引入了调和平均值的概念以及调和平均值与算术平均值不等式，还介绍了平均值不等式在科学史上具有重要地位的迈克耳孙-莫雷实验设计中的应用. 借此强调了理论来源于实践并指导实践的思想，突出了数学在科学研究、社会实践以及生产和生活中的作用，以期激发兴趣，开阔视野，增进理解，促进思考.

本教材按照循序渐进、由浅入深的原则选编了适量的练习、习题及复习题. 认真完成这些习题，对于巩固基础，熟练技能，增进理解，培养数学抽象、直观想象、数学运算、逻辑推理等核心素养都非常必要.

总的来说，这样的内容安排有利于突出不等式的性质，有利于掌握不等式等价变形的思想，有利于数学运算、逻辑推理等数学核心素养的培养，有利于初高中不等式内容的衔接，有利于巩固第一章中的集合运算和表达，有利于后续函数等内容的展开，有继承，有发展，且过渡自然、前后一贯.

教学提示

本章内容——等式与不等式，既是初中数学向高中数学的过渡内容，又是深入学

习后续高中数学内容的基础和工具. 教师应针对这一特征，从知识和技能、方法和习惯、能力和素养等方面，帮助学生尽快适应高中阶段的数学学习，引导学生感悟高中阶段数学课程的特征，循序渐进地提高学生数学的学习能力，逐渐养成借助直观进行逻辑推理、独立思考、合作交流等学习习惯，顺利完成初中到高中的过渡，并为后续课程的学习打下基础.

在教学中，通过类比等式与不等式的性质，进一步探索等式和不等式的共性与差异；增强语言过渡，逐步由自然语言、图形语言向集合语言、符号语言过渡，努力使表达既严谨规范又通俗易懂；渗透变量的意识、相等和不等的转化、数和形的自然结合，聚焦数学抽象、逻辑推理和数学运算等核心素养的培养；结合学生的实际情况布置不同的任务，采用自主学习与合作学习相结合的方式组织教学活动，鼓励学生自主探索、合作研究.

等式及其基本性质是对初中内容的回顾，用集合表示方程和方程组的解集是对相应内容的提升，有利于从整体和结构上把握相应的解. 韦达定理揭示了一元二次方程根与系数的关系，是代数中的重要内容，具有重要的意义. 恒等式在后续函数及三角等内容的学习中经常出现，应逐步加深对其意义的理解，区分恒等与有条件相等之间的差别.

实数的大小关系是研究不等关系的出发点，而不等式的基本性质则是证明和求解不等式的基础. 高中阶段不等式的证明无论在抽象的水平还是推理的严谨性，都较初中阶段有很大的提高. 教学中应注意把握节奏和难度，使学生尽快适应高中数学学习.

不同于课程标准中对本章的内容建议——从函数的观点来处理一元二次不等式的求解，本章教材中采取的是纯粹从不等式的性质，按照代数的观点来求解一元二次不等式. 这样能够和初中的方法相衔接，可望降低本阶段的学习难度，使学生更好地适应高中数学学习. 具体地说，在一元一次不等式和一元一次不等式组求解的基础上，教材从求解特殊的一元二次不等式出发，运用因式分解以及集合交与并的思想，将一元二次不等式转化为一元一次不等式组求解，然后遵循从特殊到一般的思想，总结出一般情形下一元二次不等式的求解方法. 这样的设计能将不等式的求解与因式分解、配平方等初中代数知识结合起来，使思想与方法融为一体，同时也巩固了第一章中所学的集合的交、并等概念. 总体来说，这样的设计更为自然，也更符合学生的认知规律. 至于从函数的观点，即借助于二次函数图像及其零点来求解一元二次不等式的内

容，将在教材第五章函数的应用部分，作为函数零点应用的一个特例加以落实. 相关的内容在后续的导数及其应用一章中，还有进一步加深与拓展. 这样的编排设计对学生从整体上理解和认识函数、方程、不等式及其之间的关系是有帮助的.

关于分式不等式的求解，是以一元二次不等式的求解为基础，将其转化为一元二次(或一次)不等式或不等式组来求解. 这体现了不等式性质的运用，突出了不等式等价变形的思想，有利于数学运算、逻辑推理等数学核心素养的培养. 同时，结合实际情境，抽象出不等式并进行求解的过程，可使学生了解求解不等式以及所得结果的现实意义.

关于含绝对值的不等式的求解，首先，利用绝对值的几何意义，分别给出两个最基本的含绝对值的不等式$|x|<a$及$|x|>a(a>0)$的解集，它们是处理其他含绝对值的不等式的基础. 其次，对形如$|x-a|+|x-b|>c(<c)$的不等式，采用对含绝对值的项讨论符号以去除绝对值的方法，按照不同零点所划分的区间范围进行分类讨论，从而转化为一元一次不等式或不等式组来进行求解. 这是求解含绝对值的不等式的基本思路，有利于培养分类讨论的数学思想，并为后续的函数、解析几何等内容的学习做好必要的准备.

基本不等式及其应用这一节是本章中的难点. 基本不等式在估计与证明、比较大小以及求解一些最大值和最小值问题方面都有应用. 在教学时，对算术平均和几何平均概念的情景引入应直观、自然. 本教材将平均值不等式、常用不等式和三角不等式统称为基本不等式，这与“二期课改”教材中基本不等式的含义不尽相同，应予以区分. “三角不等式”一词在课程标准和“二期教改”教材中均未出现，为兼顾高中和大学高等数学名称的统一，将$|a+b|\leqslant|a|+|b|(a、b\in\mathbf{R})$称为三角不等式. 基本不等式等号成立的条件易为初学者忽视，在教学中应予以特别关注.

除了不等式的基本性质(传递性、加法性质、乘法性质)以外，不等式的一些常用性质(如同向可加性、乘方性质等)，也被列入教材第二章的内容提要栏目，可以直接使用，无需另外加以证明.

不等式的求解本质上利用了一种程序化的思想，关键是等价变形，化繁为简、化难为易，直至化为基本的模型进行求解. 在关于不等式求解的教学过程中，应注意引导学生在数轴上画出图示，直观地表示相应的解集，并准确运用区间记号规范地表达不等式的解集.

不等式的证明方法往往因题而异，灵活多变，因此要具体问题具体分析. 在关于不等式证明的教学过程中应帮助学生分析思路和方法，并严谨规范地表达证明过程. 在初学时，要注意控制难度，思路应朴素、自然，不提倡运用过难的变形、放缩等技巧. 教学过程中，也可鼓励学生一题多解，分组讨论学习，以及运用互联网资源进行学习.

评价建议

评价原则

考查的重点内容是不等式性质的运用、不等式求解、不等式的论证、基本不等式及其应用以及数学思维与表达. 重点考查学生对知识的理解以及数学抽象、数学运算、直观想象、逻辑推理等核心素养.

应编制有助于考查基本概念理解，以及抽象、运算、推理论证等方面素养的题目. 适当考查反证法证明. 注重通性、通法、数学应用等方面的考查.

避免编制过难、过繁，运算量过大，讨论层次过多，过于偏重技巧，思想方法超前的题目.

应用题的情景设置应自然合理，避免编制脱离实际的人为应用题.

应重视过程评价，关注学生日常学习的发展和变化，关注学生的学习态度，以评价促进学习，促进发展，促进教学.

评价目标与要求

理解恒等的意义，会求解恒等式中的未知系数.

会运用一元二次方程的韦达定理，求解简单对称多项式的值.

会用集合符号正确表达方程和方程组的解集.

会运用不等式的基本性质比较实数或代数式值的大小.

会运用比较大小的方法证明一些较简单的不等式.

掌握不等式等价变形的方法，正确求解不等式，正确表达方程(组)和不等式(组)的解集.

会运用基本不等式求解简单的最大值和最小值问题.

会建立不等式模型求解简单的实际问题.

具体评价内容

考查数学表达：

通过理解和表示方程和方程组的解集，考查抽象水平.

通过运用不等式的基本性质证明不等式和比较代数式值的大小，考查简单推理的表达水平.

考查数学运算：

通过根据一元二次方程根的不同情况表达一元二次不等式的解集，考查理解层次和水平.

通过比较求解分式方程与求解分式不等式变形方法的差异，考查运算素养.

通过分式不等式的求解，考查不等式等价变形的技能.

通过求解含绝对值的不等式，考查分类讨论的思想以及等价变形的技能.

通过基本不等式求解最大值和最小值，考查合理转化、合理变形的运算素养.

考查数学抽象和逻辑推理：

通过恒等式、算术平均值、几何平均值概念以及基本不等式中取得等号的条件，考查对数学概念的内涵及相互关系的理解.

通过不等式的证明、充要条件的证明、代数式值的大小比较考查逻辑推理能力.

通过基本不等式的运用，考查逻辑推理能力.

设置合适的情景，通过建立不等式、求解不等式、论证不等式，考查抽象、运算及推理能力.

二、教材分析与教学建议

2.1　等式与不等式的性质

教学重点

解集的表示，根与系数的关系，不等式的性质，比较大小：会用集合表示一元一次方程、一元二次方程和方程组的解集. 理解一元二次方程根与系数的关系；已知根会构造相应的一元二次方程；已知二次方程会求用根表示的简单二元对称多项式的值. 掌握实数的大小关系和不等式的基本性质，会运用不等式的基本性质证明一些较

简单的不等式. 会比较两个代数式值的大小.

内容分析

本节是对初中学过的等式和不等式性质的加深和提高. 在初中阶段等式和不等式的性质以文字语言表述为主；而到了高中阶段，则以符号语言(集合与逻辑用语)表述相应性质为主，提高了抽象的层次，但使用更方便.

等式部分包含等式的基本性质、恒等式、方程的解集、方程组的解集、一元二次方程根与系数的关系，是初中数学到高中数学的过渡.

恒等式在高中数学学习中会经常出现，且非常有用. 表达式 $f(x)$与 $g(x)$恒等是指对任何使两者都有意义的 x 值，$f(x)$与 $g(x)$的值都相等. 教材中给出的一元二次多项式恒等的结论，可推广到高次的情形，即两个一元多项式恒等当且仅当其对应幂次项系数相等.

用集合语言准确表示方程与方程组的解，是一种规范的数学表达，可以从整体上把握研究对象，加深理解，方便使用.

韦达定理揭示了一元二次方程的根与系数之间的关系，是代数中的重要定理. 教材中韦达定理的证明以考察等式恒成立的方法进行，这一做法具有一般性，对于高次方程以及复系数方程都可统一处理，便于以后的学习. 为便于学生理解，在边框中提示可以用求根公式加以验证.

实数的大小关系是研究一切不等式的基础. 不等式的性质是结合运算表达的，其中传递性、加法性质及乘法性质是最基本的性质. 其他比较常用的性质，如同向可加性用黑体字予以突出，可作为依据直接使用.

以下为本章 2.1 节的全部例题和部分习题解析.

例 1 通过判断命题的真假，学习数学论证的两种基本形式：直接证明或举反例. 复习巩固常用的一些结论，其中：(1)是等式加法性质的推广；(2)是等式乘法性质的推广；(3)是倒数性质；(4)是乘方性质；(5)是通过举反例强化消去律成立的条件；(6)是复习“若非负实数之和为零，则各部分实数均为零”这一常用的结论.

例 2、例 4 用集合表示方程 $ax=b$ 以及一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$的解集，以进一步熟悉集合语言.

例 3 用集合表示一次方程组的解集. 通过表示方程组的解的过程，进一步体会空集的重要作用.

例 5 介绍恒等式以及恒等式成立的充要条件. 边框解释了恒等式的含义. 在必要性的证明过程中，介绍了用赋值法处理恒等式的一般思想，即选取适当的 x 值，代入恒等式两端，得到关于系数的方程组，从而求出系数的方法.

例 5 中的必要性还可以用反证法进行证明：

等式 $a_1x^2+b_1x+c_1=a_2x^2+b_2x+c_2$ 恒成立，等价于 $(a_1-a_2)x^2+(b_1-b_2)x+c_1-c_2=0$ 对所有实数 x 都成立. 假设 $a_1\neq a_2$，则该方程为关于 x 的二次方程，它至多有两个实数根，这和它对所有实数 x 都成立矛盾，从而 $a_1-a_2=0$，即 $a_1=a_2$. 同理，$b_1-b_2=c_1-c_2=0$，即 $b_1=b_2$，$c_1=c_2$.

例 6 及练习 2.1(2)的第 2 题旨在用二元基本对称多项式 x_1+x_2，x_1x_2 表示一些对称多项式并求出其数值. 用基本对称多项式表示其他的对称多项式是代数中的重要内容，这可以复习初中学过的代数运算公式，还可以学习降次的方法. 例如，设二次方程 $2x^2+4x-3=0$ 的两个根为 x_1、x_2，求 $x_1^3+x_2^3$，就可通过 $x^2=\dfrac{3-4x}{2}$ 降次化简，改写为 $x_1^3+x_2^3=x_1\left(\dfrac{3-4x_1}{2}\right)+x_2\left(\dfrac{3-4x_2}{2}\right)$，就使高次降为低次.

例 7、例 8、例 9、例 10、例 11、例 12 以例题的形式进一步学习不等式的运算性质. 例 7 是不等式的移项法则. 例 8 讲不等式的同向可加性. 例 10 是不等式的倒数性质，结合练习 2.1(3)第 2 题就给出了“倒数性质”成立的充要条件.

例 11 分别给出了不等式的同正同向的可乘性及不等式的乘方性质. 需要说明的是，例 11(2)中的乘方性质是乘法性质的推广，其证明由 $a>b>0$ 推出 $a^2>b^2>0$，再由 $a^2>b^2>0$ 推出 $a^3>b^3>0$，反复做乘法运算，最终就得到 $a^n>b^n$. 在教学中，可取 n 为某个确定值，例如 $n=5$，帮助学生理解证明过程.

例 12 是不等式的开方性质. 注意到教材中在第三章才出现方根的概念，在本章关于不等式开方性质的教学中，不宜用“$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ ($n\geqslant 2$，n 为正整数)”来表达开方性质，而是以“若 $a^n>b^n$，则 $a>b$ (a、$b>0$)”的形式较好. 当然，这在学过方根概念后，就没有必要了.

常用不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 是实数平方非负这一重要性质的反映，教材中通过该定理的证明及例 13，介绍了通过作差判断符号的方法来比较两个代数式值的大小.

习题 2.1A 组第 13 题是最基本的排序不等式，可举例帮助理解其意义，但无需推

广到更复杂情形.

习题 2.1B 组第 9 题是由生活情境建立不等式并加以证明的典型问题，应启发思考，并可以适当推广. 例如：对于正数 a_1、a_2、b_1、b_2，若 $\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}<1$，则 $\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}<\frac{a_2}{b_2}<1$.

习题 2.1B 组第 7 题是联系等式和不等式情形的典型问题，可以有效训练数学表达.

注意事项

本章所述的等式的性质不是初中已学过内容的简单重复，而是有所深化，体现在用字母表示抽象关系和性质. 符号化的表示旨在引导学生逐步适应高中的数学学习，熟悉高中的表达要求，逐步加深抽象的层次.

高中阶段的不等式由不等式的性质、不等式的求解、不等式的证明、基本不等式四部分内容构成. 但不等式的证明未单独设节，而是将其分散于不等式的性质、不等式求解、基本不等式等内容之中，以不断使用并逐步加深理解的方式学习不等式的证明. 这是因为证明不等式本质上是一种技能，证明方法因情况而异，在后续函数性质、导数应用等内容的学习中还将进一步深化.

基本不等式也是证明不等式的重要工具，本章第三节还将对不等式证明进行进一步的训练. 不等式的证明是不等式学习中的一个难点，也是一个不断深化的过程. 特别对于充要条件的证明，学生会有一些困难.

对于充要条件的证明，应注意问题的表述形式，正确区分充分性和必要性. 如求证 A 成立的一个充要条件是 B，则必要性是证明 $A \Rightarrow B$，而充分性是证明 $B \Rightarrow A$. 如果问题的表述是求证 A 是 B 的充要条件，那么必要性是证明 $B \Rightarrow A$，而充分性是证明 $A \Rightarrow B$.

教材中所给出的韦达定理证明方法同样可以用于高次方程的情形. 边框中提示了可以用二次方程的求根公式验证韦达定理，但对于不存在根式解的高次方程，该方法失效.

以 x_1、x_2 为根的所有一元二次方程为 $a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]=0(a \neq 0)$. 不做特别说明时，一般是讨论首项系数为 1 的一元二次方程，即 $x^2-(x_1+x_2)x+$

$x_1x_2=0$.

用二元基本对称多项式 $x_1+x_2(=p)$ 及 $x_1x_2(=q)$ 表达关于 x_1、x_2 的一些二元对称多项式，如 $x_1^2+x_2^2$，$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$，$x_1x_2^3+x_2x_1^3$，$|x_1-x_2|$等，是代数中的一项基本内容，在本章应予以必要的训练.

教学中应关注并指导学生的数学表述. 例如，当判断 A 是 B 的什么条件时，如果语句 A 或 B 较长，可以用引号将 A、B 分别括起来；但若语句 A、B 较短或不会混淆，就不必添加引号.

需要注意，在比较大小问题中，对于大于等于($\geqslant$)和小于等于($\leqslant$)的情形需要明确指出相等情形成立的条件.

教学建议

现实世界中存在大量的相等关系和不等关系. 教学中宜结合自然或科学的情景引入相等和不等关系，体现数学是研究现实世界中的数量关系的学科，现实对象经过抽象成为数学的研究对象.

应通过类比的方法学习等式和不等式的基本性质，比较其异同. 相等关系具有对称性，而不等关系不具有对称性.

不等式的证明是教学中的难点，应注意分析思路、规范表达，以便更好培养学生的逻辑推理素养. 重点要掌握比较法. 用比较法证明不等式的步骤是：作差、变形、判断符号. 根据问题的特点，一般先用因式分解、配方等方法变形后判断符号.

不等式的证明方法可以多种多样. 如例 10 第(2)小题，已知 $a>b>0$，$c>d>0$，求证：$\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$，教材中是用不等式的传递性证明的. 也可以用比较的方法证明：$\dfrac{a}{d}-\dfrac{b}{c}=\dfrac{ac-bd}{cd}$，又由于 $ac-bd=ac-bc+bc-bd=c(a-b)+b(c-d)>0$，且 $cd>0$，从而$\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$. 应启发学生思考，做到具体问题具体分析，尽可能使证明思路合理、自然，表达简洁，不宜过分强调一些特殊的技巧.

在不等式证明过程中，建议先用分析的方法探寻不等式证明的思路，然后用综合的方法写出证明过程. 例如，要证明命题 $\alpha\Rightarrow\beta$，可寻求使 β 成立的充分条件，把证明过程转化为不断寻求充分条件的过程，如果 $\alpha_1\Rightarrow\beta$，…，$\alpha_n\Rightarrow\alpha_{n-1}$，最后又有 $\alpha\Rightarrow\alpha_n$，

那么可按 $\alpha \Rightarrow \alpha_n \Rightarrow \alpha_{n-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \beta$ 书写证明过程.

恒等式在后续函数、解析几何等内容中经常出现，可通过分析解集，举例说明恒等式、方程的意义. 赋值法是处理恒等式的重要方法，合理赋值能够有效地简化运算.

2.2 不等式的求解

教学重点

一元二次不等式的求解，分式不等式的求解，含绝对值的不等式的求解：理解一元二次不等式的求解原理，熟练掌握一元二次不等式的求解方法. 理解分式不等式求解的思想方法，能熟练求解分式不等式. 理解含绝对值的不等式的求解方法，会解较简单的含绝对值的不等式.

内容分析

“2.2 不等式的求解”包括一元一次不等式及一元一次不等式组的求解、一元二次不等式的求解、分式不等式的求解、含绝对值的不等式的求解四部分内容.

1. 一元一次不等式及一元一次不等式组的求解

将初中的数字系数一元一次不等式及一元一次不等式组的求解扩展为字母系数的情形，渗透了参数意识和数形结合思想，是对初中内容的回顾和适当提升.

2. 一元二次不等式的求解

多数教材是通过一元二次函数的图像结合零点，用图像法求解一元二次不等式. 其优点是直观，容易理解和记忆，缺点是观点提升较早，和不等式的性质以及初中已知的一元一次不等式的求解方法联系不够紧密，逻辑上依赖图像，先有图像后再根据图像研究性质. 本套教材遵循由式到函数、由静到动、由特殊到一般的认识规律，因此将数形结合求解一元二次不等式的思想方法移到函数一章，那时再运用二次函数的零点并结合图像总体上把握不等式的求解，使学生观念的提升更加自然、顺畅. 同时，也强化了数学运算，加强了不等式性质的训练. 这既与初中求解一元一次不等式的方法体系一脉相承，又能很好地巩固集合交和并的概念，使抽象的概念得到落实和强化，更好培养学生逻辑推理、数学运算等方面的素养.

一元二次不等式的求解是不等式求解部分的核心和关键. 教材遵循由特殊到一般的认识规律，由具体的例子出发，归纳总结出一般的求解方法.

首先，处理二次项系数为正时的情形，按照一元二次方程判别式 Δ 的符号，分为 $\Delta>0$，$\Delta=0$，$\Delta<0$ 及不等号 $>$，$<$，$\geqslant$，$\leqslant$ 共十二种情形，分别加以讨论(在实际教学中，可重点讲若干典型的情况，其余的由学生自己思考与总结).

设 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的两根为 x_1、$x_2(x_1\leqslant x_2)$.

情形(1)：$\Delta>0$ 时，$x_1<x_2$.

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

$$a(x-x_1)(x-x_2)>0 \Leftrightarrow x<x_1 \text{ 或 } x>x_2;$$

$$a(x-x_1)(x-x_2)<0 \Leftrightarrow x_1<x<x_2;$$

$$a(x-x_1)(x-x_2)\geqslant 0 \Leftrightarrow x\leqslant x_1 \text{ 或 } x\geqslant x_2;$$

$$a(x-x_1)(x-x_2)\leqslant 0 \Leftrightarrow x_1\leqslant x\leqslant x_2.$$

情形(2)：$\Delta=0$ 时，$x_1=x_2$.

$$a(x-x_1)(x-x_2)=a\,(x-x_1)^2.$$

$$a(x-x_1)^2>0 \Leftrightarrow x\neq x_1;$$

$$a(x-x_1)^2\geqslant 0 \Leftrightarrow x\in \mathbf{R};$$

$$a(x-x_1)^2<0 \Leftrightarrow x\in \varnothing;$$

$$a(x-x_1)^2\leqslant 0 \Leftrightarrow x=x_1.$$

情形(3)：$\Delta<0$ 时，无实根.

$$ax^2+bx+c=a\,(x+m)^2+n(n>0).$$

$$a(x+m)^2+n>0 \Leftrightarrow x\in \mathbf{R};$$

$$a(x+m)^2+n\geqslant 0 \Leftrightarrow x\in \mathbf{R};$$

$$a(x+m)^2+n<0 \Leftrightarrow x\in \varnothing;$$

$$a(x+m)^2+n\leqslant 0 \Leftrightarrow x\in \varnothing.$$

3. 分式不等式的求解

分式不等式的求解有两种基本思路，一是转化为不等式组求解，二是转化为整式不等式求解，在本节的导入部分对这两种思路都做了说明. 分式不等式求解的基本类型是分子和分母都是一次式的情形，其求解可以看做是一元二次不等式求解的应用，关键是根据不等式的具体形式正确转化为一元二次不等式或不等式组.

$$\frac{f(x)}{g(x)}>0 \Leftrightarrow f(x)g(x)>0;$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}<0 \Leftrightarrow f(x)g(x)<0;$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x)\geqslant 0, \\ g(x)\neq 0; \end{cases}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x)\leqslant 0, \\ g(x)\neq 0. \end{cases}$$

其中，$f(x)$、$g(x)$为关于 x 的一元多项式.

4. 含绝对值不等式的求解

求解含绝对值的不等式的基本方法是根据绝对值的定义、几何意义和不等式的性质，去掉式中的绝对值符号，化为不含绝对值的不等式求解.

含绝对值的不等式的求解的两种最基本的情形，即

$$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a\,(a>0)$$

及

$$|x|\geqslant a \Leftrightarrow x\geqslant a \text{ 或 } x\leqslant -a\,(a>0).$$

实际上这两种基本情形可以推广为

$$|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x); \tag{1}$$

$$|f(x)|\geqslant g(x) \Leftrightarrow f(x)\geqslant g(x)\text{或 } f(x)\leqslant -g(x). \tag{2}$$

其中，$f(x)$、$g(x)$为关于 x 的一元多项式.

类似可得

$$|f(x)|\leqslant g(x) \Leftrightarrow -g(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x); \tag{3}$$

$$|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow f(x)>g(x)\text{或 } f(x)<-g(x). \tag{4}$$

下面证明(1)(2). (3)(4)的证明是类似的.

设集合 $A=\{x \mid |f(x)|<g(x), x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x \mid -g(x)<f(x)<g(x), x\in\mathbf{R}\}$. 为证明(1)，要证明 $A=B$. 因为

$$x_0\in A\Rightarrow |f(x_0)|<g(x_0)\Rightarrow -g(x_0)<f(x_0)<g(x_0)\Rightarrow x_0\in B;$$

反之

$$x_0\in B\Rightarrow -g(x_0)<f(x_0)<g(x_0)\Rightarrow |f(x_0)|<g(x_0)\Rightarrow x_0\in A.$$

从而 $A=B$.

由于 $A=B$，从而 $\overline{A}=\overline{B}$，于是

$\{x \mid |f(x)| \geqslant g(x), x \in \mathbf{R}\} = \{x \mid f(x) \geqslant g(x)$ 或 $f(x) \leqslant -g(x), x \in \mathbf{R}\}$，

于是，$|f(x)| \geqslant g(x) \Leftrightarrow f(x) \geqslant g(x)$ 或 $f(x) \leqslant -g(x)$，从而(2)成立.

对于较复杂的含绝对值的不等式，可以用换元的手段进行不等式的等价化简及变形，将其转化为基本的情形，再用基本方法求解.

以下为本章 2.2 节全部例题的解析.

例 1 复习和巩固一元一次型不等式求解的基本方法，并正确表示其解集. 这是求解不等式单元的过渡和准备，旨在温故知新、推陈出新.

例 2 的目的是复习用交集求一次不等式组解集的基本方法，巩固交集的概念，并为后续不等式求解作准备.

例 3、例 4 由特殊例子出发，提炼出在判别式 $\Delta > 0$ 时，不等号为大于或小于两种基本情形下的求解方法，并进一步归纳出表 2-1 所示的一般性结果.

例 5 的目的是介绍在二次项系数为负时的等价变形方法. 此时，在不等式两端同乘 -1，将二次项系数的符号转化为正，同时改变不等号的方向，从而转化为基本类型，并按表 2-1 所示进行求解.

例 6 中第(1)(2)小题考虑的是 $\Delta = 0$，且不等号为大于($>$)或小于等于($\leqslant$)的情形.

例 6 中第(3)(4)小题考虑的是 $\Delta < 0$，且不等号为大于等于($\geqslant$)或小于等于($\leqslant$)的情形.

一元二次不等式求解的程序是：(1)二次项系数化为正；(2)求出两根；(3)由不等式符号写出解集. 应注意所处理的都是一元二次不等式中二次项系数为正数的情形，在二次项系数为负数的情形需要先转化为正数情形，再进行求解.

例 7 是一元二次不等式组求解. 教学中应重点引导学生在数轴上正确找出两个不等式解集的公共部分，正确地表示其交集.

例 8、例 9 是不等式求解的逆向问题，即在已知解集的情形下，求系数所满足的关系或者系数值. 这是韦达定理及一元二次不等式求解的综合运用.

例 10 是分式不等式求解的最基本类型. 将其正确转化为二次不等式就能求解，旨在突出求解的原理.

例 11 旨在强调不等式的等价变形方法：先移项将其一端化为零，再化为不等式组求解.

例 12 说明对于分式的分子或分母中恒正的二次式，可以通过直接约分或去分母化简不等式. 本例分母二项式是恒正的，可直接去分母，化为整式不等式求解.

例 11、例 12 是强调不等式求解中三种基本的等价变形方法：(1)移项后所得不等式与原不等式等价；(2)不等式两端同乘正数所得不等式与原不等式等价；同乘负数并改变不等号方向所得不等式与原不等式等价；(3)不等式两端同乘或同除以恒正的多项式所得不等式与原不等式等价.

例 13 是应用题，重点是根据实际问题的意义建立相应的不等式组求解，是分式不等式的具体应用. 教学中应注意实际问题中的字母含义对其取值范围的限定，以及变量的单位和求解精度要求.

与初中代数相比，分式不等式的求解对学生的运算能力要求有较大提高，应加强必要的训练，以期切实熟练掌握，更好落实数学运算方面的核心素养.

例 14、例 15 是含绝对值的不等式求解的两种最基本情形的简单实例，旨在说明所用的方法.

例 16、例 17 旨在介绍去掉绝对值符号的步骤和方法. 这种分区域讨论不等式的求解方法，虽然初中有所涉及，但现在的要求更高，应先分段取交再各段取并，从而求出解集. 教学中应注意分段的标准，各段解的得出方法与表达形式，以及以解集的形式表述原不等式的解，简化书写过程.

初学时，不建议用下面的方法处理例 16：

$$|2x-1|>x \Leftrightarrow 2x-1>x \text{ 或 } 2x-1<-x$$

$$\Leftrightarrow x>1 \text{ 或 } x<\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\ \frac{1}{3}\right)\cup(1,\ +\infty).$$

理由是不等式右端不是常数，不同于$|2x-1|>a$，学生理解起来可能有较大困难.

注意事项

高中数学不等式求解的重点是一元二次不等式，它是求解其他复杂不等式的基础，应熟练掌握. 在二次不等式求解问题中，一些较复杂的问题，如已知解集求系数所满足的条件等逆向问题，需借助二次函数来解决，建议放入第五章函数的应用部分处理. 现阶段教学的重点是掌握数字系数不等式的求解.

$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a(a>0)$及$|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant a$ 或 $x \leqslant -a(a>0)$是含绝对值的不等式求解的基本模型，应熟练掌握.

在分类讨论求解含绝对值的不等式时，应注意逻辑关系，先分类再做交，最后取并集. 在每一分类部分，求得的不等式要和分类所得的前提做交集，此时用不等式表示解集比用区间一般更为简洁. 然后对各类取并集，最后将求得的解集用区间形式表示.

求解分式不等式$\dfrac{f(x)}{g(x)}>h(x)$有两种变形的策略：(1)转化为不等式组求解：$\begin{cases} f(x)>g(x)h(x), \\ g(x)>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x)<g(x)h(x), \\ g(x)<0; \end{cases}$ (2)转化为整式不等式求解：$\dfrac{f(x)}{g(x)}>h(x) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-g(x)h(x)}{g(x)}>0 \Leftrightarrow g(x)(f(x)-g(x)h(x))>0$. 应根据运算量的大小选择合适的策略.

不等式等价变形的基本方法有：移项；不等式两端同乘正数；不等式两端同乘或同除以恒正的代数式. 在同乘负数时要改变不等号的方向.

本章从不等式性质的角度学习不等式的求解方法，在第五章中还将学习从函数角度求解不等式，教学中应注意学习的阶段性和层次性.

教学建议

复习一元一次不等式及一元一次不等式组求解，正确求出不等式组的解集.

从熟悉的情景中引入一元二次不等式，明确一元二次不等式的概念.

从特殊情形下的一元二次不等式的求解出发，归纳、总结出一般的求解规律，引导发现、讲清道理. 现阶段不宜用二次函数的图像来说明一元二次不等式的求解规律，该方法将在第五章函数的应用部分讨论.

运用不等式的性质，将一元二次不等式转化为一元一次不等式组求解，是教材中处理一元二次不等式的基本思想. 一元二次不等式的求解过程体现了从特殊到一般的思考过程，教材从特例出发提炼共性、总结归纳一般规律，并以这种规律为指导求解具体的不等式. 这种由特殊到一般再到特殊的过程，体现了数学中的归纳与演绎过程，体现了数学的研究规律，教学中应加以启发、引导，落实有关数学素养的培养.

一元二次不等式求解的规律及结论反映在教材表 2-1 及表 2-2 中. 求解程序是：

(1)二次项系数化正；(2)求出对应方程的实根；(3)结合根的情况和不等式的符号写出解集.

一元二次不等式是分式不等式求解的基础，分式不等式$\dfrac{ax+b}{cx+d}>0$(a、b、c、$d\in\mathbf{R}$)等的求解可以视为一元二次不等式的应用. 将分式不等式$\dfrac{ax+b}{cx+d}>0$(a、b、c、$d\in\mathbf{R}$)等价变形，化为二次不等式$(ax+b)(cx+d)>0$，要比化为不等式组$\begin{cases}ax+b>0,\\cx+d>0\end{cases}$或$\begin{cases}ax+d<0,\\cx+d<0\end{cases}$求解简单. 教学中应强调分式不等式等价变形的基本思想，注意与分式方程求解的比较. 需要特别指出，由于方程的根的个数一般是有限的，可以通过检验的方法排除分式方程化为整式方程时的增根，而分式不等式的解通常含有无限个元素，无法一一检验，必须采用等价变形. 学生要体会处理等式与不等式时的异同.

分式不等式求解的关键是等价变形. 在不等式两端同乘或同除以一个量时要注意与等式时的区别. 在等式情形，只要该量不等于零，得到的式子就与原来的式子等价，但在不等式的情形，同乘正的量后才能保持原来的不等号方向不变，而在乘负的量时，必须改变原有不等号的方向. 如果不能确定所乘量的符号，就要分别讨论. 可举例说明$\dfrac{f(x)}{g(x)}>h(x)$化成$f(x)>g(x)h(x)$这一错误变形的原因，以及正确的变形方法.

对含绝对值不等式的求解，教材中给了两种基本模型：$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a(a>0)$和$|x|>a\Leftrightarrow x>a$或$x<-a(a>0)$，并以$|x+a|+|x+b|<c$型不等式的求解为例，介绍了根据零点和绝对值的定义，分类讨论脱去绝对值符号进行求解的基本思想. 教学中应注意分类的标准、逻辑关系以及表达方法，建议在每一子类中用不等式表示解，最后综合得出用区间形式表示的解集.

2.3 基本不等式及其应用

教学重点

算术平均值与几何平均值，平均值不等式，三角不等式：理解两个正数的算术平均值、几何平均值的概念及其意义. 理解平均值不等式及其中取等号的条件，会运用平均值不等式求解较简单的最大值和最小值问题，能运用平均值不等式比较大小及证

明一些简单的不等式. 理解三角不等式及其中取等号的条件，会运用三角不等式证明一些不等式，并求解一些简单的最大值或最小值问题.

内容分析

平均值不等式内容包括算术平均值$\frac{a+b}{2}$(a、$b>0$)和几何平均值$\sqrt{ab}$(a、$b>0$)的概念，平均值不等式和常用的不等式即$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$($a$、$b>0$)与$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab$的证明，并将其应用于求简单的最大或最小值，和证明其他的一些不等式.

三角不等式$|a+b|\leqslant|a|+|b|$(a、$b\in\mathbf{R}$)，其名称来源于三角形两边之和大于第三边这一几何事实，在后续课程(如向量、复数)乃至高等数学的学习中具有重要作用. 课程内容包括三角不等式的概念及证明，并将其用于求简单的最大或最小值，和证明其他的一些不等式.

以下为本章 2.3 节全部例题和部分习题的解析.

例 1 和例 2 是用不同形式表示一个正数和其倒数的和大于等于 2，是平均值不等式的直接应用.

例 3 是直接运用常用不等式求最大值的例子. 可与配方法求二次函数的最大值进行比较，提高理解及运算水平.

例 4 通过比较代数式值的大小，学习使用平均值不等式的基本变形技巧，变形的方向围绕求解目标配凑定值，以循序渐进地提高运算能力.

例 5 是运用平均值不等式求最大与最小值的经典问题，在理论和实践中都有重要的意义. 在平均值不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$中，当积$ab$是定值时，和$a+b$有最小值；当和$a+b$是定值时，积$ab$有最大值.

例 6 是运用平均值不等式模型求解实际问题的例子，体现了数学模型的建立和求解过程，以及实际问题中对求解精确度的要求.

例 7 是运用三角不等式证明其他不等式的简单例子，目的在于说明使用三角不等式的基本方法.

例 8、例 9 在于强调变形转化为可运用三角不等式的方法， 并突出不等式取得等号的条件.

习题 2.3B 组第 1、3、4 题旨在训练运用平均值不等式证明其他一些不等式，可

在习题课中选择讲解.

复习题A组第12题和第13题给出了基本不等式的直观解释.

注意事项

与“二期课改”教材基本不等式的含义不同，本章教材中将平均值不等式、常用不等式和三角不等式统称为基本不等式，突出了三角不等式在后续学习中的地位与作用，应予以注意.

三角不等式是本教材的新增内容. 理解和证明三角不等式本身并不困难，但对它的认识和应用，有个逐步提高的过程. 三角不等式不仅是一个常用的基本不等式，并且它在向量、复数，以及高等数学中都会出现，有着十分重要的意义，增加这部分内容是十分必要的. 在第二章，教学的要求包括三角不等式的概念及证明，并将其用于求简单的最大或最小值和证明其他的一些不等式.

三角不等式名称的来源目前不必特别强调，初学只要知道其名称即可，在后续向量、复数等内容的学习中会进一步加深理解.

要注意不等式$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab$与不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$成立的条件不同，前者对任意实数$a$、$b$都成立，而后者仅对非负实数$a$、$b$成立. 不能从后一个不等式直接平方得到前一个不等式. 不等式$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab$在解决具体问题中运用更加方便.

对于任意给定的正数a、b，如下不等式成立：

$$\min\{a,b\}\leqslant\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leqslant\max\{a,b\}.$$

一组正数的任何平均值总是介于这组数的最大值和最小值之间.

三角不等式$|a+b|\leqslant|a|+|b|$(a、$b\in\mathbf{R}$)中等号成立的充要条件是$ab\geqslant 0$. 该不等式可以推广到多个变量的情形.

基本不等式是估计和证明其他一些不等式的重要工具. 使用多个基本不等式求最值时，这些不等式中的等号必须同时成立. 学会灵活运用基本不等式，对提高数学运算、数学推理等核心素养有很大作用. 但教学中应循序渐进地提高运算水平，注意控制训练的强度与难度，不可能一蹴而就.

二元算术平均和几何平均都可以推广到n元的情形. 设a_1，a_2，…，a_n为n个正数，称$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$为这$n$个数的算术平均值，而$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$为这$n$个数的几何

平均值. n 元平均值不等式仍成立：$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$时等号成立.

教学建议

建议设计合适的情景引入算术平均值和几何平均值，由此体会平均值的意义. 例如，可以按教材所述，从测量误差的角度引入算术平均值，从求面积等于已知矩形面积的正方形边长引入几何平均值.

还可以从经济学环比平均增长率的角度引入几何平均值：设某种商品的初始产量为 m 单位，接连两期的增长率分别为 a、b，而每期平均增长率为 x，则有 $m(1+a)(1+b)=m(1+x)^2$，由此 $1+x=\sqrt{(1+a)(1+b)}$. 记 $1+a=A$，$1+b=B$，$1+x=X$ 就是A、B 的几何平均值.

平均值不等式也可以从二次函数的性质来得到：设正数 a、b 满足 $a+b=2l$，其中 l 为定值. 不妨令 $a=l+t(0\leqslant t<l)$，则有 $b=l-t$ 及 $ab=l^2-t^2$.因为 l^2-t^2 随 t 的增大而减小，显然 $ab=l^2-t^2\leqslant l^2$，即 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，当且仅当 $t=0$，即 $a=b$ 时，等号成立. 由于 $a-b=2t$，这表明两个正数相差越大时，其乘积越小，而相差越小时，其乘积越大. 另外，从几何直观上来看，观察周长固定的矩形面积的变化情况，亦能帮助理解平均值不等式.

运用平均值不等式求最值有两种基本情形：对于两个正的变量 x、y，(1)当其和 $x+y=s$ 为定值时，其乘积 xy 当且仅当 $x=y=\frac{s}{2}$时，取得最大值$\frac{s^2}{4}$；(2)当其乘积 $xy=p$ 为定值时，其和 $x+y$ 当且仅当 $x=y=\sqrt{p}$ 时，取得最小值 $2\sqrt{p}$.

运用平均值不等式求最值，要注意：只有当平均值不等式中的等号成立时，才能取得相应的最值.

多次运用平均值不等式求最值时，必须保证所有不等式中的等号都成立才行. 教学中可以举例说明，指出造成错误的原因以及正确的解题方法. 例如，可分析下例的求解错在何处.

已知 x、y 为正数，$x+2y=3$，求$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的最小值. 解答：因为 $3=x+2y\geqslant2\sqrt{x\cdot 2y}\Rightarrow xy\leqslant\frac{9}{8}$，所以$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant\frac{2}{\sqrt{xy}}\geqslant2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$. 因此$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的最小值为$\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

此解答中第一次运用平均值不等式时等号成立的条件是 $x=2y$，第二次运用平均值不等式时等号成立的条件是$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$即 $x=y$，由于 x、y 是正数，这两个条件不可能同时满足，因而上述两个不等式中等号不可能同时成立，所以据此求得的最小值是错误的. 下面给出一个正确解答.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}\times\frac{x+2y}{x}+\frac{1}{3}\times\frac{x+2y}{y}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}+2\right)=\frac{1}{3}\left(3+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{3}\left(3+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{x}{y}}\right)=\frac{3+2\sqrt{2}}{3}.$$

当且仅当$\frac{2y}{x}=\frac{x}{y}$，即 $x=\sqrt{2}\,y$，也就是 $x=3(\sqrt{2}-1)$，$y=\frac{3}{2}(2-\sqrt{2})$时，原式取得最小值$\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$.

运用三角不等式证明其他的不等式时，一般是先构造等式，再由等式放缩得到三角不等式. 如复习 B 组第 10 题证明$|a|+|b|\leqslant|a+b|+|a-b|$. 首先

$$2a=(a+b)+(a-b)\Rightarrow|2a|=|(a+b)+(a-b)|\leqslant|a+b|+|a-b|,$$

同理

$$2b=(b+a)+(b-a)\Rightarrow|2b|=|(b+a)+(b-a)|$$

$$\leqslant|b+a|+|b-a|=|a+b|+|a-b|.$$

两式相加并同除以 2 即得要证的不等式. 用放缩法证明不等式，方法灵活多样，教学中应加强分析，启发引导，并注意控制难度.

探究与实践活动是在教师指导下的学生自主学习板块. 教材以中国数学史中的弦图为载体，介绍了由等式通过放缩导出不等式的方法. 相等和不等是数量间的两种关系，它们并不是截然对立的，在一定条件下可以相互转化. 教材通过复习多项式乘法运算，自然地得到了三元平均值不等式和二元柯西不等式，为后续数学建模学习作了铺垫. 教学时，建议在小结复习阶段根据实际情况安排 1 课时，结合不等式证明和基本不等式的复习进行选择性讲解，以进一步加深对相等与不等关系的理解.

在课后阅读部分，教材首先通过船只在河道中顺流上行和逆流下行的平均速度引出调和平均值的概念，再与静水中船只的速度(相当于上行和下行速度的算术平均值)相比较，得到了调和平均值总小于等于算术平均值的结论. 此外，教材还介绍了以调和平均值与算术平均值不等式为原理设计的迈克耳孙-莫雷实验. 这一历史上的著名

实验解决了当年普遍困惑物理学界的问题，而其基本思想竟是平均值不等式这一初等数学的知识！这个例子充分体现了数学在推动人类文明发展进程中所发挥的重要作用，说明了初等数学不仅仅是学习科学的基础，而且在实际工作中运用得当也会有意想不到的效果. 这样融数学知识和数学文化于一体的课后阅读内容，可以激发学生的兴趣，提升学生的素养. 教师在教学中应结合实际，引导学生自主阅读，具备条件的也可将其作为拓展内容进行讲解，并鼓励优秀学生尝试进行相关的探究实践活动.

三、参考答案或提示

2.1 等式与不等式的性质

练习 2.1(1)

1. (1)假命题；(2)(3)(4)真命题.

2. 当 $a\neq 1$ 时，解集为$\{a+1\}$；当 $a=1$ 时，解集为 $\mathbf{R}$.

3. 当 $k\neq 0$ 时，解集为$\left\{\left(-\dfrac{2}{k},\ -1\right)\right\}$；当 $k=0$ 时，解集为$\varnothing$.

练习 2.1(2)

1. 当 $a<2$ 且 $a\neq 0$ 时，解集为$\left\{\dfrac{2-\sqrt{4-2a}}{a},\dfrac{2+\sqrt{4-2a}}{a}\right\}$；当 $a=2$ 时，解集为$\{1\}$；当 $a>2$ 时，解集为$\varnothing$.

2. (1) 3.　(2) $\dfrac{4}{3}$.　(3) 7.　(4) -17.

练习 2.1(3)

1. (1) 假命题.　(2) 假命题.　(3) 真命题.　(4) 假命题.　(5) 假命题. 理由略.

2. 证明略.

练习 2.1(4)

1. (1) 真命题.　(2) 假命题.　(3) 真命题. 理由略.

2. $x^2+4\geqslant 4x$，当 $x=2$ 时，$x^2+4=4x$；当 $x\neq 2$ 时，$x^2+4>4x$.

习题 2.1

A 组

1. 当 $a\neq 0$ 时，解集为$\left\{\dfrac{2}{a}\right\}$；当 $a=0$ 时，解集为$\varnothing$.

2. 当 $k\neq -2$ 时，解集为$\left\{\left(\dfrac{4}{k+2}，\dfrac{k-6}{k+2}\right)\right\}$；当 $k=-2$ 时，解集为$\varnothing$.

3. $\{a+2, a-2\}$.

4. $a=1$，$c=4$.

5. 证明略.

6.（1）$x^2-3x-3=0$. （2）$x^2+4x-17=0$. （3）$x^2-x-\dfrac{1}{3}=0$. （4）$x^2-15x+9=0$.

7.（1）真命题. （2）真命题. （3）假命题. （4）真命题. （5）真命题. （6）假命题.

8.（1）C. （2）B. （3）C.

9. 证明略.

10. $(x+1)(x^2-x+1)>(x-1)(x^2+x+1)$.

11.（1）$3+\sqrt{3}>2+\sqrt{5}$. （2）$\sqrt{3}+\sqrt{5}>\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

12. $a^2+b^2\geqslant 2a-2b-2$. 当且仅当 $a=1$，$b=-1$ 时，$a^2+b^2=2a-2b-2$.

13. 证明略.

14. 证明略.

15. 当且仅当 $a=b$ 时，等号成立. 证明略.

B 组

1. 当 $a\neq 2$ 时，解集为$\{a+2\}$；当 $a=2$ 时，解集为 **R**.

2. 当 $m=-1$ 时，解集为$\left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$；当 $m<\dfrac{1}{8}$ 且 $m\neq -1$ 时，解集为$\left\{\dfrac{-3m-\sqrt{1-8m}}{m+1}，\dfrac{-3m+\sqrt{1-8m}}{m+1}\right\}$；当 $m=\dfrac{1}{8}$时，解集为$\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$；当 $m>\dfrac{1}{8}$时，解集为$\varnothing$.

3. -1.

4. 证明略.

5. (1) $x^2+2x+\frac{3}{4}=0$. (2) $x^2-\frac{17}{2}x+\frac{33}{2}=0$. (3) $x^2+\frac{13}{6}x+1=0$.

(4) $x^2-\frac{97}{16}x+\frac{81}{16}=0$.

6. $m=1$ 或 $m=-\frac{1}{2}$.

7. 证明：

$$a>b>c\Rightarrow\begin{cases}a>b,\\a>c,\\a=a\end{cases}\Rightarrow 3a>a+b+c.$$ 又 $a+b+c=0$，故 $3a>0$，得 $a>0$；

$$a>b>c\Rightarrow\begin{cases}c<a,\\c<b,\\c=c\end{cases}\Rightarrow 3c<a+b+c.$$ 又 $a+b+c=0$，故 $3c<0$，得 $c<0$.

8. $p+1>s>2$.

证明：$a>1$ 且 $b>1\Leftrightarrow\begin{cases}a-1>0,\\b-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)+(b-1)>0,\\(a-1)(b-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow s>2$ 且 $p+1>s$.

9. 证明略.

2.2 不等式的求解

练习 2.2(1)

1. 当 $a>1$ 时，解集为 $(-\infty,a+1)$；当 $a<1$ 时，解集为 $(a+1,+\infty)$.

2. (1) $(-3,2)$. (2) $(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$. (3) $(-\infty,-3]\cup[2,+\infty)$.

3. (1) $(-\infty,-2]\cup\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$. (2) $(-\infty,-1-\sqrt{5})\cup(-1+\sqrt{5},+\infty)$.

练习 2.2(2)

1. (1) 解集为 **R**. (2) 解集为 $\varnothing$. (3) 解集为 $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$.

(4) 解集为 $\varnothing$. (5) 解集为 **R**. (6) 解集为 **R**.

2. 二次项系数为 1 时的答案为：(1) $x^2-6x+7<0$. (2) $x^2-6x+7\geqslant0$.

(3) 例如 $x^2+1>0$. (4) 例如 $x^2<0$.

练习 2.2(3)

1. (1) 解集为 $(3,+\infty)$. (2) 解集为 $[5,6)$.

2. m 的取值范围为$\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$.

3. $a=5$，$b=-6$，解集为$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$.

练习 2.2(4)

(1) 解集为$(-\infty,1)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$.　(2) 解集为$\left(-2,\frac{1}{2}\right]$.　(3) 解集为$(1,+\infty)$.　(4) 解集为$(-2,0]$.　(5) 解集为$(2,3)$.　(6) 解集为$\varnothing$.

练习 2.2(5)

(1) 解集为$(-7,1)$.　(2) 解集为$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.　(3) 解集为$(1,+\infty)$.　(4) 解集为$(-\infty,-2)\cup(5,+\infty)$.

习题 2.2

A 组

1. (1) 解集为$(-\infty,0)$.　(2) 解集为$(2,+\infty)$.

2. (1) 解集为$(-\infty,a+2)$.　(2) 解集为$(-\infty,m^2+m+1)$.　(3) 当 $p>q$ 时，解集为$(-\infty,p+q)$；当 $p<q$ 时，解集为$(p+q,+\infty)$.

3. (1) 解集为$(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$.　(2) 解集为$[-2,3]$.　(3) 解集为$(1,2)$.　(4) 解集为$(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$.

4. (1) $A\cup B=(-\infty,1)\cup[3,+\infty)$.　(2) $A\cap B=(-2,-1]$.　(3) $\overline{A\cap B}=(-\infty,-2]\cup(-1,+\infty)$.　(4) $\overline{A}\cup\overline{B}=(-\infty,-2]\cup(-1,+\infty)$.

5. (1) k 的取值范围为$(-1,3)$.　(2) k 的取值范围为$(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$.

6. (1) k 的取值范围为$(-\infty,-6]\cup[2,+\infty)$.　(2) k 的取值范围为$[-1,2]$.

7. (1) 解集为$\{3\}$.　(2) 解集为 $\mathbf{R}$.　(3) 解集为$\varnothing$.　(4) 解集为 $\mathbf{R}$.

8. (1) 解集为 $\mathbf{R}$.　(2) 解集为 $\mathbf{R}$.　(3) 解集为$\varnothing$.　(4) 解集为$\varnothing$.

9. a 的取值范围为$(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$.

10. $a=4$，$b=3$.

11. (1) 解集为$(-4,-3]$.　(2) 解集为$\varnothing$.　(3) 解集为$(-\infty,-1]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right)\cup(3,+\infty)$.

12. (1) 解集为$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.　(2) 解集为$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

（3）解集为$\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$.　（4）解集为$(-\infty,-2)\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.　（5）解集为$(1,8)$.

13.（1）k 的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{7}{2}\right)\cup(0,+\infty)$.　（2）$k$ 的取值范围为$\left(-\frac{7}{2},0\right)$.

14.（1）解集为$\left(-1,\frac{3}{2}\right)$.　（2）解集为$\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$.　（3）解集为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[3,+\infty)$.　（4）解集为$(-3,4)$.

15. 提示：设船速为 x km/h，则$\frac{75}{x+4}+\frac{126}{x-4}\leqslant\frac{9}{2}$. 船速至少为 46 km/h.

B 组

1. 当 $a>0$ 时，解集为$\left(\frac{b}{a},\ +\infty\right)$.

当 $a<0$ 时，解集为$\left(-\infty,\ \frac{b}{a}\right)$.

当 $a=0$ 时：（1）若 $b\geqslant 0$，解集为$\varnothing$.　（2）若 $b<0$，解集为 $\mathbf{R}$.

2.（1）当 $a>-3$ 时，解集为$(-\infty,-3]\cup[a,+\infty)$；

当 $a=-3$ 时，解集为 $\mathbf{R}$；

当 $a<-3$ 时，解集为$(-\infty,a]\cup[-3,+\infty)$.

（2）当 $a>0$ 时，解集为$(-\infty,a)\cup(2a,+\infty)$；

当 $a=0$ 时，解集为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；

当 $a<0$ 时，解集为$(-\infty,2a)\cup(a,+\infty)$.

（3）解集为$(-\infty,a]\cup[a+1,+\infty)$.

3. $b=-\frac{5}{2}$，$c=1$；解集为$\left[-2,\ -\frac{1}{2}\right]$.

4.（1）解集为$\left[\frac{4}{9},\frac{1}{2}\right)$.　（2）解集为$(-\infty,-1)\cup(0,1)$.　（3）解集为$\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]\cup(4,+\infty)$.

5.（1）解集为$\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.　（2）解集为$[1,2)\cup(2,+\infty)$.

6.（1）解集为$[-3,0)\cup(1,4]$.　（2）解集为$(-4,-1)\cup(5,8)$.　（3）解集为$\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup(4,+\infty)$.　（4）解集为$(-1,0)$.

7. a 的取值范围为$\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$.

8. 提示：考虑 $k=0$ 和 $k>0$ 两种情况. k 的取值范围为$[0,1)$.

2.3 基本不等式及其应用

练习 2.3(1)

1. 证明略.

2. 当且仅当 $x=-1$ 时等号成立，证明略.

练习 2.3(2)

1. 当且仅当长与宽都等于$\frac{l}{4}$时，矩形的面积最大.

2. 当且仅当内接矩形为正方形时，面积取得最大值；其最大值为 2，此时边长为$\sqrt{2}$.

练习 2.3(3)

1. 证明：$|a+b|+|a-b|=|a+b|+|b-a|\geqslant|(a+b)+(b-a)|=2|b|$.

2. 证明：(1) $|a+b|\leqslant|a|+|b|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. (2) $|a-b|\leqslant|a|+|-b|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

习题 2.3

A 组

1. D.

2. $b<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<a$. 理由略.

3. 当且仅当 $a=b$ 时等号成立. 证明略.

4. 证明略.

5. 最大值为 4.

6. 最大值为 25 cm^2.

7. 证明：$|a-b|=|a-c+c-b|\leqslant|a-c|+|c-b|$.

8. 提示：$|x-2|+|2x-3|=|3x-5|\Leftrightarrow(x-2)(2x-3)\geqslant0$，解集为$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]\cup\left[2,+\infty\right)$.

B 组

1. $a<2ab<\frac{1}{2}<a^2+b^2<b$. 理由略.

2. 当 $a\neq1$ 时，$\frac{a^2+2a+1}{a}>4$；当 $a=1$ 时，$\frac{a^2+2a+1}{a}=4$.

3. 证明略.

4. 证明略.

5. 证明略.

6. 证明：

$$\begin{aligned}d(B,C)+d(C,A)&=|x_2-x_3|+|y_2-y_3|+|x_3-x_1|+|y_3-y_1|\\&\geqslant|x_2-x_3+x_3-x_1|+|y_2-y_3+y_3-y_1|\\&=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|=d(A,B).\end{aligned}$$

7. 证明：$|a+b+c|\leqslant|a+b|+|c|\leqslant|a|+|b|+|c|$.

8. 证明：原不等式等价于 $|x-1|\leqslant|x+2|+3$. 注意到 $x-1=(x+2)+(-3)$，令 $a=x+2$，$b=-3$，应用三角不等式 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，原不等式即可得证. 等号当且仅当 $(x+2)(-3)\geqslant0$，即 $x\leqslant-2$ 时成立.

复习题

A 组

1. (1) $\frac{5}{2}$. (2) $-\frac{35}{4}$.

2. $\frac{b+2a}{a+2b}<\frac{a}{b}$.

3. 证明略.

4. $a=-2$，解集为 $\left(-\infty,\frac{5}{3}\right)$.

5. (1) 解集为 $(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$. (2) 解集为 $\left(-\frac{2}{3},5\right)$. (3) 解集为 $\left[\frac{3-\sqrt{19}}{5},\frac{3+\sqrt{19}}{5}\right]$. (4) 解集为 $[-4-2\sqrt{6},-4+2\sqrt{6}]$. (5) 解集为 $\{9\}$. (6) 解集为 $\mathbf{R}$.

6. (1) $x^2-2\sqrt{2}x+2>0$. (2) $x^2-4x+1\leqslant0$.

7. 正整数解为 3，4，5.

8.（1）解集为$(-\infty,-7)\cup\left(-\frac{22}{5},+\infty\right)$.　（2）解集为$[1,2]$.

9.（1）$A\cap B$.　（2）$\overline{A}\cap B$.　（3）$\overline{A}\cap\overline{B}$.

10.（1）解集为$\left[\frac{1}{3},1\right]$.　（2）解集为$\left(-\frac{7}{3},3\right)$.

11. 证明：$\sqrt{(1+a)(1+b)}\geqslant 1+\sqrt{ab}\Leftrightarrow(1+a)(1+b)\geqslant 1+2\sqrt{ab}+ab$

$$\Leftrightarrow a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0.$$

12.（1）$AD=\sqrt{ab}$，$AE=\frac{a+b}{2}$.　（2）$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$.

13.（1）$M\left(\frac{a+b}{2},\ 0\right)$，$|MQ|=\left|\frac{a+b}{2}\right|$，$|MN|=\frac{|a|+|b|}{2}$.

（2）$\left|\frac{a+b}{2}\right|\leqslant\frac{|a|+|b|}{2}$.

B 组

1. $p=-1$.

2. m 的取值范围为$(-3,-1]$.

3. 解集为$(-\infty,-1)$.

4.（1）解集为$\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right)\cup\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$.　（2）解集为$[-4,-3)\cup(1,2]$.

5. a 的取值范围为$[0,1]$.

6. 证明略.

7. 最小值为 2.

8. 证明：$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$

$$\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}=6.$$

9. 不妨设 x，y 同号. 由 $1=|x+y|$，得 $1=|x|+|y|$，$xy=|xy|\leqslant\left(\frac{|x|+|y|}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，当且仅当$|x|=|y|$，即 $x=y=\pm\frac{1}{2}$时，等号成立. 所以，xy 的最大值为$\frac{1}{4}$.

10. 证明：由 $|a|\leqslant\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|$，$|b|\leqslant\left|\frac{b+a}{2}\right|+\left|\frac{b-a}{2}\right|$，可得 $|a|+|b|\leqslant|a+b|+|a-b|$，当且仅当 $(a+b)(a-b)\geqslant0$ 并且 $(a+b)(b-a)\geqslant0$，即 $|a|=|b|$ 时，等号成立.

另证：

（1）$ab\geqslant0$ 时，$|a|+|b|=|a+b|\leqslant|a+b|+|a-b|$.

（2）$ab<0$ 时，$|a|+|b|=|a-b|\leqslant|a+b|+|a-b|$.

当且仅当 $a=b$ 或 $a=-b$ 时，等号成立.

11. 证明：

（1）$a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geqslant0$，当且仅当 $\begin{cases}a+\frac{1}{2}b=0,\\ b=0,\end{cases}$ 即 $a=b=0$ 时，等式成立.

（2）$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

因为 $a>b$，所以 $a-b>0$；并且 $a^2+ab+b^2>0$，所以 $a^3>b^3$.

拓展与思考

1.（1）解集为 $(-\infty,3)\cup(3,4]\cup[5,+\infty)$.　　（2）解集为 $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]\cup[4,+\infty)$.

提示：本题旨在强化等价变形，并且两小题都有两种解法.（1）既可以先移项，化为分式 $\leqslant0$ 的形式，也可以两边同乘分母，化为一元二次不等式，但需要注意分母为零的情形.（2）既可以采用按零点分段，讨论符号的方式去除两边的绝对值符号再求解，也可以采用两边平方的方式去掉绝对值符号来求解.

2. $p=-1$，$q=-6$. 提示：本题旨在根据解集的性质反过来确定参数的取值，是不等式求解的逆向问题.

3. 证明：由于 $0<a<b$，可得 $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$；

$$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}\Leftrightarrow2\sqrt{ab}<a+b\Leftrightarrow\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2};$$

$$\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{2}\right)^2<\frac{a^2+b^2}{2}\Leftrightarrow(a+b)^2<2(a^2+b^2)\Leftrightarrow(a-b)^2>0;$$

因为 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<\sqrt{\frac{b^2+b^2}{2}}=b$，

所以 $a<\dfrac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}<\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}<b$.

提示：本题给出了正数四种平均值之间的大小关系（调和平均值≤几何平均值≤算术平均值≤平方平均值），旨在加深对平均值的认识.

4. 不等式 $(x-1)(x-2)(x-3)>0$ 的解集为 $(1,2)\cup(3,+\infty)$.

不等式 $(x-1)(x-2)(x-3)<0$ 的解集为 $(-\infty,1)\cup(2,3)$.

更为一般地，首先求解不等式 $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)>0$，需按如下情形讨论：

（1）$x_1<x_2<x_3$ 时，解集为 $(x_1,x_2)\cup(x_3,+\infty)$；

（2）$x_1<x_2=x_3$ 时，原不等式化为 $(x-x_1)(x-x_2)^2>0$，解集为 $(x_1,x_2)\cup(x_2,+\infty)$；

（3）$x_1=x_2<x_3$，原不等式化为 $(x-x_1)^2(x-x_3)>0$，解集为 $(x_3,+\infty)$；

（4）$x_1=x_2=x_3$ 时，原不等式化为 $(x-x_1)^3>0$，解集为 $(x_1,+\infty)$.

其次，求解不等式 $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)<0$，需分如下情形讨论：

（1）$x_1<x_2<x_3$ 时，解集为 $(-\infty,x_1)\cup(x_2,x_3)$；

（2）$x_1<x_2=x_3$ 时，原不等式化为 $(x-x_1)(x-x_2)^2<0$，解集为 $(-\infty,x_1)$；

（3）$x_1=x_2<x_3$ 时，原不等式化为 $(x-x_1)^2(x-x_3)<0$，解集为 $(-\infty,x_1)\cup(x_1,x_3)$；

（4）$x_1=x_2=x_3$ 时，原不等式化为 $(x-x_1)^3<0$，解集为 $(-\infty,x_1)$.

提示：本题旨在引导学生了解如何利用分段讨论表达式符号的方式来求解三次不等式，此外，在分类讨论时还需注意有重根的情形. 用数轴标根法直接得出不等式解集的做法，可在第五章中再加以补充.

四、相关阅读材料

参考文献

[1] 史济怀. 平均[M]. 北京：科学出版社，2002.

第 3 章　幂、指数与对数

一、本章概述

总体要求

幂、指数与对数是数学中重要的概念，在众多数学分支及其他科学领域中一直发挥着重要的作用. 指数运算与对数运算互为逆运算，在 16 世纪末，随着当时天文、航海及工程实践的迅速发展，大量多位数乘除及开方的计算困扰着那时的科学家和工程师，在简化计算的迫切需求下，对数得以诞生，并在实际计算中得以广泛的应用. 在计算机已经普及的今天，以往对数在计算中的功用虽已淡化，但对数在现代数学和其他科学领域中的作用却有增无减，始终占据着重要的位置.

在初中已经学过了正整数指数幂、整数指数幂及其基本的运算性质. 本章在初中学习的基础上通过定义分数指数幂，将指数从整数拓展到有理数，再通过引入无理数指数幂，最终将指数从有理数拓展到实数. 在此基础上，通过指数运算的逆运算，定义了对数这一个新的概念，为下一章用幂函数、指数函数与对数函数描述变量之间的相应关系作准备.

通过本章的学习，帮助学生了解指数幂的拓展过程；理解指数与对数的概念及它们的相互关系与基本性质；运用这些性质解决简单的实际问题，体会对数在计算中所起的作用. 经历指数幂的拓展、对数的概念及其运算性质的学习过程，对于培养与提升学生的数学抽象、逻辑推理等方面的核心素养有着重要的意义，而运用运算性质解决实际的问题，对培养数学运算的素养也会起到重要的作用.

课时安排建议

本章的课时安排建议为 5＋1，共计 6 课时. 建议如下：

<table>
<tr><th>章节名</th><th>建议课时</th><th>具体课时分配建议</th></tr>
<tr><td>3.1　幂与指数</td><td>2</td><td>指数幂的拓展　2 课时</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3.2　对数</td><td rowspan="3">3</td><td>对数的定义　1 课时</td></tr>
<tr><td>对数的运算性质　1 课时</td></tr>
<tr><td>对数的换底　1 课时</td></tr>
<tr><td>复习与小结</td><td>1</td><td></td></tr>
</table>

内容编排与特色

本章内容分为两节，分别是“3.1 幂与指数”和“3.2 对数”.

“3.1 幂与指数”. 学生在初中已学习了正整数指数幂、零指数幂、负整数指数幂以及整数指数幂的运算性质. 本节对这部分内容的处理方式是“分析回顾，适当拓展”，通过再次经历从正整数指数幂推广到整数指数幂的过程，感受指数幂的拓展的必要性和合理性，并在此基础上通过类比思想，将定义整数指数幂的方法推广到定义有理数指数幂及实数指数幂，使学生能更加系统地了解指数幂的拓展过程.

在本节中给出了幂的基本不等式，这是知识的新增长点. 在第 4 章中将通过幂的基本不等式，实现对幂函数、指数函数和对数函数的严格单调性的证明，从而在数学抽象的基础上实现了由几何直观到数学符号语言的表述再到严格论证的过程，体现了数学思维的严谨性.

“3.2 对数”. 本节内容主要由对数的定义、运算性质及应用组成，这与“二期课改”教材大体一致. 但是，为什么要讲对数？对数在人类文明的发展史上到底有哪些石破天惊的作用？对数在当今社会中到底还有哪些重要性？本节教材从数学文化的层面，深入地阐述了对数的起源及其在数学和其他科学领域中的作用，让学生不仅从知识层面上了解对数，更从意义层面上了解对数，感受对数的“灵魂”，从而增加学习的兴趣和自觉性.

本章最大的特点是将“幂、指数与对数”从“幂函数、指数函数与对数函数”中分离出来，独立成章，从而将运算从函数中剥离出来，使运算不再作为函数的依附，而是

运算先行，再引入函数的观点. 这可以让学生更为系统地了解指数幂的推广过程，深入了解指数与对数的关系，更加熟练地掌握指数与对数的运算性质，在提升学生数学运算素养的同时，也更符合知识的有机体系和学生学习的进程.

教学提示

要关注幂、指数与对数的整体处理框架，引导学生先了解指数幂的拓展过程，建立幂与指数的概念，再从指数运算与对数运算互为逆运算入手，从指数引入对数概念及其运算性质，系统地建立指数与对数的知识体系.

幂与指数的教学，应关注指数幂的运算性质，引导学生经历从整数指数幂到有理数指数幂、再到实数指数幂的拓展过程，掌握指数幂的运算性质.

对数的教学应从实例入手，关注其在简化运算中的作用. 可从数学文化的层面适当加入对数的起源与其在数学及其他科学领域所起到的作用.

教学中可适当加入信息技术. 例如，可采取从特殊到一般的方法，先利用计算器探索对数的运算性质及规律之后，再进行严格的证明.

鼓励学生收集、阅读对数概念的形成与发展的历史资料，撰写小论文，论述对数发明的过程以及对数对简化运算的作用.

评价建议

本章的评价应关注以下几点：

1. 对于指数幂的拓展，要关注学生是否能体会指数幂拓展的着眼点是保持原有的运算性质，自主地感受到拓展过程的合理性. 但是，对正无理数指数幂的定义的证明不宜作为重点，可不作评价.

2. 学生能否从整体上了解幂、指数和对数的联系与区别.

3. 对于数学运算素养的评价，应侧重在确定了运算对象后，能否选择合适的运算法则，明确运算思路，求得运算结果. 例如，在对数运算中，若遇到不同底数时，能否考虑到换底，再选择合适的对数运算性质进行运算等. 但对一些复杂的换底公式的应用不作要求.

4. 对于数学文化部分的评价，应侧重于所递交的小论文是否能准确论述对数发明的过程，理解对数在简化运算中的作用，感受对数对数学及其他学科领域所起到的重要作用，根据不同的层次水平，给出具体评价结果.

二、教材分析与教学建议

3.1　幂与指数

教学重点

指数幂的拓展，指数幂的运算性质：在初中学习了正整数指数幂、整数指数幂的基础上，通过对有理数指数幂 $a^{\frac{m}{n}}$（$a>0$，且$a\neq 1$；m、n 为整数，且 $n>0$）、实数指数幂a^{x}（$a>0$，且 $a\neq 1$；$x\in\mathbf{R}$）含义的认识，了解指数幂的拓展过程，掌握指数幂的运算性质.

内容分析

初中已经学习了正整数指数幂及其基本的运算性质，并经历了将正整数指数幂推广到整数指数幂的过程. 本节通过引入方根概念定义分数指数幂，将指数从整数拓展到有理数，再引入无理数指数幂，最终将指数从有理数拓展到实数，为对数概念的引入以及用函数思想来描述变量之间的关系作好准备.

通过本节课的教学，不仅应对指数幂的拓展过程有了解，同时对思维方式的推广、逻辑思维能力的培养、数学运算素养的提升都有着重要的意义.

例 1、例 2 是方根与根式的简单应用. 例 1 旨在说明有时可依据乘方与开方互为逆运算的关系，求一个实数的 n 次方根. 特别要提醒的是，正数的偶数次方根有两个，要防止在求偶数次方根时失根. 可以从例 2 出发探究$\sqrt[n]{a^{n}}=a$ 是否对一切大于 1 的正整数 n 都成立；如果不一定，那么其结果是什么？以培养学生从特殊到一般的数学思想. 习题 3.1A 组的第 1、2 题，B 组的第 1 题是该组例题的配套习题，其中 A 组的第 1、2 题旨在巩固概念、夯实基础；而 B 组的第 1 题是该例题的拓展.

例 3、例 4 是为巩固有理数指数幂的定义及其运算性质而设计的. 特别要注意的是，要控制例 4 这类题的难度，其设计不是为了进行烦琐的根式运算，而是为了熟悉有理数指数幂与根式的互化，掌握有理数指数幂的概念. 习题 A 组的第 3、4、5、6 题是该组例题的配套习题，旨在巩固概念、夯实基础.

例 5 是为了理解与掌握实数指数幂的概念及其运算性质. 例 5 的第(2)小题要严格按照例题的解题步骤进行：首先是系数相乘除，其中要注意符号；然后是同底数幂相

乘除. 习题A组的第7题，B组的第2题是该组习题的配套习题，其中A组的第7题旨在巩固概念、夯实基础，而B组的第2题是该例题的拓展.

注意事项

在幂与指数的教学中，应突出指数幂的拓展过程，让学生体会到指数幂的拓展的必要性与合理性. 而要领会这一点，必须让学生重新经历由正整数指数幂推广到整数指数幂的过程，领会指数幂的拓展是建立在保证幂的三条运算性质仍然成立的基础上的，一定要加以分析领会，切不可简单回顾.

在定义有理数指数幂时，通常先直接定义 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$，($m$、$n$ 均为正整数)再进一步定义 $a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$. 本教材采用了两次定义的方式：设 $a>0$，s 为有理数，为定义 a^s，先当 $s=\dfrac{1}{n}$ 且 n 是正整数时，定义 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$；再当 $s=\dfrac{m}{n}$，m 是一个整数且 n 是一个大于1的整数时，定义 $a^{\frac{m}{n}}=(a^m)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$. 这样定义有理数指数幂，避开了对正、负分数指数幂的分别定义，而利用整数指数幂及根式进行定义，更能体现指数幂拓展的合理性.

需要指出的是，定义正数的无理数指数幂时，要用到无理数由有理数逼近的性质，且利用了实数的完备性，不仅相当烦琐，而且在中学阶段实际上是难以讲清楚的，教学中不宜展开，只要知道有关的结论就可以了. 下面是如何定义 $2^{\sqrt{2}}$ 的思路，供参考.

结论：任意两个有理数之间一定存在无理数.

证明：任意给定 r_1、$r_2\in\mathbf{Q}$，不妨设 $r_1<r_2$.

注意到 $0<\dfrac{\sqrt{2}}{2}<1$，有 $0<\dfrac{\sqrt{2}}{2}(r_2-r_1)<r_2-r_1$，从而 $r_1<r_1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}(r_2-r_1)<r_2$.

因为 $r_1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}(r_2-r_1)$ 是无理数，所以结论成立.

先取指数 $\sqrt{2}$ 的不足近似值 t_n 和 $\sqrt{2}$ 的过剩近似值 s_n，见表3-1. 那么指数 $\sqrt{2}$ 一定在每个对应区间内，即成立

$$t_n<\sqrt{2}<s_n.$$

表 3-1

n	1	2	3	4	5	……
t_n	1	1.4	1.41	1.414	1.414 2	……
s_n	2	1.5	1.42	1.415	1.414 3	……

相应地有

表 3-2

n	1	2	3	4	5	……
2^{t_n}	2^1	$2^{1.4}$	$2^{1.41}$	$2^{1.414}$	$2^{1.4142}$	……
2^{s_n}	2^2	$2^{1.5}$	$2^{1.42}$	$2^{1.415}$	$2^{1.4143}$	……

$2^{\sqrt{2}}$应在实数2^{t_n}与2^{s_n}之间. 观察表 3-2 中2^{t_n}和2^{s_n}的变化规律，可以发现：在n无限增大的过程中，2^{t_n}越来越大，2^{s_n}越来越小，而相应的区间长度$2^{s_n}-2^{t_n}$也越来越小，且无限逼近于0. 这样，随着n的无限增大，2^{t_n}与2^{s_n}无限逼近同一个实数，从而就可以定义这个实数为$2^{\sqrt{2}}$. 这实际上是用到了极限的思想.

在分别定义了整数指数幂、有理数指数幂、无理数指数幂之后，教材中都指出所有幂的运算性质(1)到(3)依然成立. 但有关的证明过程可以淡化，不必为此花过多的时间，只要让学生有所体会即可.

与“二期课改”教材不同的是，本教材增加了幂的基本不等式，为下一章证明幂函数、指数函数、对数函数是严格单调函数作准备，其证明过程也用到了极限思想. 以下给出证明的思路：

(1) 当s为正整数时，由不等式的常用性质的第五条，可知：由$a>1$，得$a^{\frac{1}{s}}>1$.

(2) 当s为正有理数时， 存在两个正整数m、n，使得$a^s=a^{\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$. 由(1)，得$a^s>1$.

(3) 当s为正实数时，由无理数可以由有理数逼近的性质，存在两个正整数m、n，使得$\frac{m}{n}<s<\frac{m+1}{n}$. 由(2)，得$a^{\frac{m}{n}}>1$，$a^{\frac{m+1}{n}}>1$，因$a^s$介于这二者之间，从而$a^s>1$.

教学建议

初中已经学过正整数指数幂和整数指数幂，在教学中要避免简单回顾，一定要注重分析，让学生体会拓展的必要性与合理性.

教学中可创设适当的情境，让学生感受指数幂拓展的必要性.

在掌握了整数指数幂的定义之后，引导学生自主尝试定义有理数指数幂.

在引入无理数指数幂的定义时，学有余力的学生可借助计算器体验运算中的逼近思想.

3.2 对数

教学重点

对数的定义和运算性质，对数的换底公式：经历从指数引入对数的概念、从幂指数的运算性质推出对数的运算性质的过程，理解和掌握对数的概念和对数的运算性质. 理解对数的换底公式的推导过程，在进行和对数有关的计算时，懂得用换底公式将不同底的对数互相转换，体会换底公式的作用.

内容分析

本节是在学习了幂、指数及其运算性质之后，通过具体的实际背景，由指数引入对数的概念；在强调了对数运算是指数运算的逆运算之后，再由幂指数的运算性质推出了对数的运算性质. 由于在实际问题中往往会碰到不同底数的对数，对数换底公式可起到将不同底数的对数化为同底的对数的作用，从而可以简化问题.

通过本节课的教学，对转化与化归、对立与统一思想的形成以及逻辑推理、数学运算等素养的提升，都有着重要的作用.

例 1 与例 2 有助于对数概念的理解. 通过指数式与对数式的互化，进一步熟悉与掌握如何求一个正数的对数和对数式中真数的含义. 特别是例 1 要规范解题过程，严格将对数式化为指数式后求解. 习题 A 组的第 1 题至第 4 题，B 组的第 1 题都是该组例题的配套习题. 其中，A 组的第 1 题至第 3 题旨在巩固概念、夯实基础；A 组的第 4 题，B 组的第 1 题是例 2 的变式与拓展，旨在让学生在例 2 的基础上，进一步熟悉对数式中真数、底数及对数的含义.

例 3 至例 5 旨在巩固对数的运算性质，掌握简单对数的计算. 其中，例 3 和例 4 要求灵活运用对数的运算性质解题. 需要说明的是，教材例题中给出的解题方法并不是唯一的，如例 3 的第(1)小题也可以先用指数幂的运算性质，将真数化为 3^{10} 后再取对数. 在教学中可鼓励学生尝试用不同的思路求解. 例 5 是对数的应用问题，旨在能熟练应用对数的运算性质解决实际的问题，体会对数在生活中的广泛应用. 值得指出的是，例 5 的第(2)小题要通过分析让学生体会，求两个正数的商，可转化为求这两

个正数的对数的差. 将乘除化为加减是对数的特性，是对数可以用于简化计算的重要依据. 习题 A 组第 5、6、8 题，B 组第 2、3 题是该组例题的配套习题，有助于熟悉与掌握对数的运算性质.

例 6 与例 7 旨在让学生掌握对数的换底公式，会用换底公式进行化简和证明. 对于例 6，学生常犯的错误是直接利用对数的运算性质解题. 要提醒学生，使用对数运算性质的前提是同底，在对数运算中，利用对数的换底公式将不同的底换成同底是一种常用的方法. 例 6 说明了可以把所有的对数换成同一个底，如例 6 的第(2)小题也可换成以 3 为底. 例 7 的结论有着比较广泛的应用，可以适当强调. 值得提醒的是，教学中要控制利用换底公式化简和证明的难度，让学生体会换底公式在运算中所起的作用就可以了. 习题 A 组第 7 题，B 组第 4 至 6 题是该组例题的配套习题. 其中，A 组第 7 题是基础训练，B 组第 4 至 6 题是该组例题的拓展.

注意事项

本教材是从银行贷款问题入手，经过抽象后，提出在 $a>0$，$a\neq1$，且 $N>0$ 的情况下，唯一满足 $a^x=N$ 的数 x，称为 N 以 a 为底的对数. 在教学中应突出指数式与对数式的对应关系，从指数式入手，通过对应关系理解对数式中的真数、底数及对数的定义. 对于底数和真数的取值范围，本教材从存在性和唯一性出发，在 $a>0$ 的条件下，说明这是使方程 $a^x=N$ 存在唯一解所应满足的条件. 教学中虽应说明这部分的内容，但是要把握好度，对存在性和唯一性不必证明，只需直观了解即可.

对数是一种数学运算，同时也是一个运算结果. 在教学中应该从这两方面给予解释，不可只强调其中的一方面；要善于利用教材中已有的材料加强对这两方面的认识，如对数恒等式的引入、对数的运算性质及对数换底公式等都可以从这两方面加以认识.

对数的运算性质的教学，切不可只停留在运算本身，要让学生体会到对数对于简化运算的功能，可结合本节的课后阅读材料“用对数简化计算”进行教学，让学生充分体会对数的作用，这是以往教材所忽略的.

对数的运算性质是本节的重点之一. 教材通过指数的运算性质引入对数的运算性质 1(对数化乘为加). 这是对数最基本的性质，由它可以推出对数的其他性质.

需要特别指出的是，不论在对数概念的引入还是在对数的计算中，对计算器的使用需掌握好度，切不可用计算器代替思维，舍本求末.

教学建议

对数的教学可结合一定的生活实例，让学生充分体会对数在生活中的重要作用，体会对数的应用价值.

对数的教学可从结合数学文化的层面进行，适当加入对数的起源与其在数学及其他科学领域所起到的作用. 在引入新课时，可让学生阅读本节的课后阅读材料“对数简史”，体会对数在人类的发展史上所起到的石破天惊的作用，感受引入对数概念的必要性；亦可在对数的运算性质的教学中，结合本节的课后阅读材料“用对数简化计算”进行教学，加强对对数简化运算的作用的认识.

可尝试设计一定的问题情境，结合信息技术进行教学. 例如，可采取从特殊到一般的方法，先利用计算器探索对数的运算性质及规律，再进行严格的证明.

可根据实际情况，鼓励学生收集、阅读对数概念的形成与发展的历史资料，撰写小论文，论述对数发明的过程以及对数对简化运算的作用.

三、参考答案或提示

3.1 幂与指数

练习 3.1(1)

1. 因为$\left(-\dfrac{2}{3}\right)^5=-\dfrac{32}{243}$，所以$\sqrt[5]{-\dfrac{32}{243}}=-\dfrac{2}{3}$.

2. 因为任何正数的偶次方根有两个，又因为$(\pm\sqrt{3})^4=9$，所以 9 的 4 次方根为$\pm\sqrt[4]{9}=\pm\sqrt{3}$.

3. (1) $\sqrt[5]{(-4)^5}=-4$.　　(2) 因为 $a<b$，所以$\sqrt[6]{(a-b)^6}=|a-b|=b-a$.

练习 3.1(2)

1. (1) $100^{\frac{1}{2}}=(10^2)^{\frac{1}{2}}=10^1=10$.　　(2) $8^{-\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}=\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

2. (1) $a^{\frac{10}{3}}\cdot\sqrt[5]{a^3}=a^{\frac{10}{3}}\cdot a^{\frac{3}{5}}=a^{\frac{10}{3}+\frac{3}{5}}=a^{\frac{59}{15}}$.　　(2) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}=\left(a\cdot a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{4}{9}}$.

3. (1) $(a^{3+\sqrt{3}})^{3-\sqrt{3}}=a^{(3+\sqrt{3})\times(3-\sqrt{3})}=a^{6}$.

(2) $\dfrac{4a^{\frac{2}{3}}b^{2}}{\left(a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}\right)\left(-\dfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}b\right)}=4\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}b^{2-\frac{5}{6}-1}=-6a^{0}b^{\frac{1}{6}}=-6b^{\frac{1}{6}}$.

4. 因为 $0<a<1$，所以$\dfrac{1}{a}>1$. 又因为 $s>0$，由幂的基本不等式，得$\left(\dfrac{1}{a}\right)^{s}>1$，故 $0<a^{s}<1$.

习题 3.1

A 组

1. (1) 因为$(-4)^{3}=-64$，所以$\sqrt[3]{-64}=-4$.

(2) 因为任何正数的偶次方根有两个，又因为$(\pm4)^{4}=256$，所以 256 的 4 次方根为$\pm\sqrt[4]{256}=\pm4$.

2. (1) $\sqrt[5]{\dfrac{243}{32}}=\dfrac{3}{2}$.　　(2) $-\sqrt[3]{0.125}=-0.5$.　　(3) $\sqrt[7]{(-2)^{7}}=-2$.

(4) $\sqrt[6]{(-27)^{2}}=\sqrt[6]{3^{6}}=3$.

3. (1) $\sqrt[3]{x^{5}}=x^{\frac{5}{3}}$.　　(2) $\sqrt[5]{x^{3}}=x^{\frac{3}{5}}$.　　(3) $\sqrt[7]{x^{3}y^{4}}=x^{\frac{3}{7}}y^{\frac{4}{7}}$.

(4) $\sqrt[7]{\dfrac{x^{3}}{y^{4}}}=x^{\frac{3}{7}}y^{-\frac{4}{7}}$.

4. (1) $a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^{2}}$.　　(2) $a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^{3}}$.　　(3) $a^{-\frac{2}{5}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^{2}}}$.

(4) $a^{-\frac{5}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{a^{5}}}\left(\text{或 } a^{-\frac{5}{2}}=\dfrac{1}{a^{2}\sqrt{a}}\right)$.

5. (1) $x=27^{\frac{1}{3}}=3$.

(2) 由 $x^{4}=121$，得 $x=\pm\sqrt[4]{121}=\pm\sqrt{11}$. 又 $x>0$，所以 $x=\sqrt{11}$.

(3) $x=1\,000^{\frac{2}{3}}=(10^{3})^{\frac{2}{3}}=10^{2}=100$.

(4) 由 $x^{\frac{4}{3}}=\dfrac{625}{16}$，得 $x=\pm\sqrt[4]{\left(\dfrac{625}{16}\right)^{3}}=\pm\sqrt[4]{\left[\left(\dfrac{5}{2}\right)^{4}\right]^{3}}=\pm\left(\dfrac{5}{2}\right)^{3}=\pm\dfrac{125}{8}$. 又 $x>0$，所以 $x=\dfrac{125}{8}$.

6. (1) $a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=a^{\frac{7}{12}}$.　　(2) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}=\left(a\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{2}}$.

(3) $\left(a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{3}{8}}\right)^{8}=a^{\frac{1}{4}\times 8}b^{-\frac{3}{8}\times 8}=a^{2}b^{-3}$.

(4) $\left(\dfrac{a^{-3}b^{4}}{\sqrt{b}}\right)^{-\frac{1}{3}}=a^{(-3)\times\left(-\frac{1}{3}\right)}b^{\left(4-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right)}=ab^{-\frac{7}{6}}$.

7. (1) $\dfrac{\left(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)\left(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}\right)}{3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}}=-4a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}=-4a$.

(2) $(a^{2-\sqrt{3}}b)^{2+\sqrt{3}}\cdot b^{2-\sqrt{3}}=a^{(2-\sqrt{3})\times(2+\sqrt{3})}b^{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}=ab^{4}$.

B 组

1. 因为 $x<0$，所以$|x|+\sqrt[6]{x^{6}}+2\sqrt[3]{x^{3}}=|x|+|x|+2x=2|x|+2x=-2x+2x=0$.

2. 因为$\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}+a^{-x}}=\dfrac{(a^{x}+a^{-x})(a^{2x}+a^{-2x}-1)}{a^{x}+a^{-x}}=a^{2x}+a^{-2x}-1$，又因为 $a^{2x}=2$，所以 $a^{2x}+a^{-2x}-1=a^{2x}+\dfrac{1}{a^{2x}}-1=2+\dfrac{1}{2}-1=\dfrac{3}{2}$.

3. 证明：因为 $a>b>0$，所以$\dfrac{a}{b}>1$，且$\dfrac{a-b}{2}>0$. 由幂的基本不等式，得$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}}>1$. 因此$\dfrac{a^{a}b^{b}}{(ab)^{\frac{a+b}{2}}}=a^{\frac{a-b}{2}}b^{\frac{b-a}{2}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}}>1$，又因为$(ab)^{\frac{a+b}{2}}>0$，所以 $a^{a}b^{b}>(ab)^{\frac{a+b}{2}}$.

3.2 对数

练习 3.2(1)

1. A.

2. (1) 因为 $5^{2}=25$，所以 $\log_{5}25=2$.

(2) 因为$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}=27$，所以 $\log_{\frac{1}{3}}27=-3$.

(3) 因为 $4^{\frac{1}{4}}=\sqrt{2}$，所以 $\log_{4}\sqrt{2}=\dfrac{1}{4}$.

(4) $2^{\log_{2}3}=3$.

3. (1) 由 $\log_{4}x=2$，得 $x=4^{2}=16$.

(2) 由 $\log_{x}4=2$，得 $x^{2}=4$. 又因为 $x>0$，$x\neq 1$，所以 $x=2$.

练习 3.2(2)

1. (1) $\log_{a}xy=\log_{a}x+\log_{a}y=A+B$.

(2) $\log_{a}\dfrac{x^{2}}{\sqrt{y}}=2\log_{a}x-\dfrac{1}{2}\log_{a}y=2A-\dfrac{1}{2}B$.

2. (1) $\log_{15}3+\log_{15}5=\log_{15}15=1$.

(2) $\log_2\sqrt[3]{4}=\log_2 2^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}\log_2 2=\dfrac{2}{3}$.

(3) $\log_5\sqrt{10}-\dfrac{1}{2}\log_5 250=\log_5\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{250}}=\log_5\dfrac{1}{\sqrt{25}}=\log_5 5^{-1}=-\log_5 5=-1$.

3. 因为 $7^b=2$，所以 $\log_7 2=b$. 因此

$$\log_7 72=\log_7(2^3\times 3^2)=3\log_7 2+2\log_7 3=3b+2a.$$

练习 3.2(3)

1. (1) $\log_8\dfrac{1}{4}=\log_{2^3}2^{-2}=-\dfrac{2}{3}\log_2 2=-\dfrac{2}{3}$.

(2) $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=\dfrac{\lg b}{\lg a}\cdot\dfrac{\lg c}{\lg b}\cdot\dfrac{\lg a}{\lg c}=1$.

(3) $3^{2+\log_9 4}=3^2\times 3^{\log_3 2}=9\times 2=18$.

(4) $\dfrac{\log_5 2\times\log_7 9}{\log_5\dfrac{1}{3}\times\log_7 2}=\log_{\frac{1}{3}}2\times\log_2 9=(-\log_3 2)\times(2\log_2 3)=-2$.

2. $\log_2 96=\dfrac{\log_3 96}{\log_3 2}=\dfrac{\log_3(2^5\times 3)}{\log_3 2}=\dfrac{5\log_3 2+\log_3 3}{\log_3 2}=\dfrac{5a+1}{a}=5+\dfrac{1}{a}$.

3. 证明：应用换底公式，将底数 b 换成底数 a，并利用 $\log_a a=1$，得

$$\log_b a=\frac{\log_a a}{\log_a b}=\frac{1}{\log_a b}.$$

习题 3.2

A 组

1. (1) 将指数式 $3^4=81$ 写成对数式为 $\log_3 81=4$.

(2) 将指数式 $5^{-\frac{1}{2}}=x$ 写成对数式为 $\log_5 x=-\dfrac{1}{2}$.

2. (1) 将对数式 $\log_{\frac{1}{3}}27=-3$ 写成指数式为 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}=27$.

(2) 将对数式 $\log_2\dfrac{1}{8}=-3$ 写成指数式为 $2^{-3}=\dfrac{1}{8}$.

3. (1) 因为 $3^3=27$，所以 $\log_3 27=3$.

(2) 因为 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}=8$，所以 $\log_{\frac{1}{2}}8=-3$.

(3) $\ln\frac{1}{e}+\lg\sqrt{10}=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$.

4. (1) 由 $\log_2 x=5$，得 $x=2^5=32$.

(2) 由 $\log_{\sqrt{5}}\frac{1}{125}=x$，得 $(\sqrt{5})^x=\frac{1}{125}$. 又因为 $(\sqrt{5})^{-6}=\frac{1}{125}$，所以 $x=-6$.

(3) 由 $\log_x 4=\frac{1}{2}$，得 $x^{\frac{1}{2}}=4$. 因此 $x=4^2=16$.

5. (1) $\log_2(2\times\sqrt[3]{2})=\log_2\left(2^{1+\frac{1}{3}}\right)=\frac{4}{3}\log_2 2=\frac{4}{3}$.

(2) $\log_{21}3+\log_{21}7=\log_{21}21=1$.

(3) $\log_5\sqrt{6}-\frac{1}{2}\log_5 150=\log_5\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{150}}=\log_5\frac{1}{\sqrt{25}}=\log_5\frac{1}{5}=-1$.

(4) $3^{\log_3 1}+\log_2 48-\log_2 3=1+\log_2 16=1+4=5$.

(5) $3\log_3\frac{3}{2}-\log_3\frac{7}{4}+\frac{1}{2}\log_3 4+\log_3 7=\log_3\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\times\frac{4}{7}\times 4^{\frac{1}{2}}\times 7\right]=\log_3 27=3$.

6. (1) $\log_a(xy^2)=\log_a x+2\log_a y=A+2B$.

(2) $\log_a\frac{xy}{\sqrt{z}}=\log_a x+\log_a y-\frac{1}{2}\log_a z=A+B-\frac{1}{2}C$.

(3) $\log_a(x^2y^2)+\log_a(y\sqrt{x})=2\log_a x+2\log_a y+\log_a y+\frac{1}{2}\log_a x$

$$=\frac{5}{2}\log_a x+3\log_a y=\frac{5}{2}A+3B.$$

7. (1) $\log_4 2\sqrt{2}=\log_{2^2}2^{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{2}\log_2 2=\frac{3}{4}$.

(2) $\log_2 3\times\log_9 2=\frac{\lg 3}{\lg 2}\times\frac{\lg 2}{\lg 9}=\frac{\lg 3}{2\lg 3}=\frac{1}{2}$.

(3) $\frac{3}{\log_2 6}+\frac{3}{\log_3 6}=3(\log_6 2+\log_6 3)=3\log_6 6=3$.

(4) $(\log_4 3+\log_8 3)(\log_3 2+\log_9 2)+\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{32}$

$=\left(\frac{1}{2}\log_2 3+\frac{1}{3}\log_2 3\right)\left(\log_3 2+\frac{1}{2}\log_3 2\right)-\frac{5}{4}$

$=\frac{5}{6}\log_2 3\times\frac{3}{2}\log_3 2-\frac{5}{4}=\frac{5}{4}-\frac{5}{4}=0$.

8. $\lg 2=1-\lg 5=1-a$；$\lg 20=\lg(2\times 10)=\lg 2+1=1-a+1=2-a$.

B 组

1.（1）因为 $1-3x>0$，所以 $x<\frac{1}{3}$.　（2）因为 $x^2+x>0$，所以 $x<-1$ 或 $x>0$.

2.（1）$\log_4 8-\log_{\frac{1}{9}}3-\log_{\sqrt{2}}4=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-4=-2$.　（2）$2^{\log_6 5}\times 3^{\log_6 5}=6^{\log_6 5}=5$.

（3）原式 $=(\lg 50)^2+2\lg 2\times\lg 50+(\lg 2)^2=(\lg 2+\lg 50)^2=(\lg 100)^2=4$.

3. 设 6.9 级地震和 7.8 级地震的相对能量程度分别为 I_1 和 I_2，由题意，得

$$\begin{cases}\frac{2}{3}\lg I_1+2=6.9,\\ \frac{2}{3}\lg I_2+2=7.8.\end{cases}$$

两式相减，得 $0.9=\frac{2}{3}(\lg I_2-\lg I_1)=\frac{2}{3}\lg\frac{I_2}{I_1}$，即 $\lg\frac{I_2}{I_1}=1.35$，所以 $\frac{I_2}{I_1}=10^{1.35}\approx 22$.

因此 7.8 级地震和 6.9 级地震的相对能量比值为 22.

4. $\log_2 3=\frac{\lg 3}{\lg 2}=\frac{b}{a}$；

$\log_{12}25=\frac{\lg 25}{\lg 12}=\frac{2\lg 5}{2\lg 2+\lg 3}=\frac{2(1-\lg 2)}{2\lg 2+\lg 3}=\frac{2-2a}{2a+b}$.

5. 因为 $5.4^x=3$，$0.6^y=3$，所以 $x=\log_{5.4}3$，$y=\log_{0.6}3$.

因此 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{\log_{5.4}3}-\frac{1}{\log_{0.6}3}=\log_3 5.4-\log_3 0.6=\log_3 9=2$.

6. 因为 a、c 均不为 1，所以 $\lg a\neq 0$，且 $\lg c\neq 0$.

利用换底公式，得 $\log_a b\cdot\log_c d=\frac{\lg b}{\lg a}\cdot\frac{\lg d}{\lg c}=\frac{\lg d}{\lg a}\cdot\frac{\lg b}{\lg c}=\log_a d\cdot\log_c b$.

复习题

A 组

1.（1）$\sqrt[3]{5}$；　$\log_3 5$.　（2）$a^{\frac{1}{3}}$.　（3）$\frac{1}{4}$.　（4）125.

2.（1）B.　（2）D.

3. $10^{\alpha+\beta}=10^{\alpha}\cdot 10^{\beta}=3\times 4=12$.

$10^{\alpha-\frac{\beta}{2}}=10^{\alpha}\cdot 10^{-\frac{\beta}{2}}=10^{\alpha}\cdot(10^{\beta})^{-\frac{1}{2}}=3\times(4)^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$.

4. (1) $\frac{1}{4^x+1}+\frac{1}{4^{-x}+1}=\frac{1}{4^x+1}+\frac{4^x}{1+4^x}=\frac{1+4^x}{1+4^x}=1.$

(2) $4^{\sqrt{2}+1}\times 2^{3-2\sqrt{2}}\times 8^{-\frac{2}{3}}=2^{2\sqrt{2}+2}\times 2^{3-2\sqrt{2}}\times 2^{-2}=2^{2\sqrt{2}+2+3-2\sqrt{2}-2}=2^3=8.$

5. $\sqrt{(\lg a)^2-\lg\frac{a^2}{10}}=\sqrt{(\lg a)^2-(2\lg a-\lg 10)}=\sqrt{(\lg a)^2-2\lg a+1}=\sqrt{(\lg a-1)^2}=|\lg a-1|.$

因为 $\lg a<1$，所以 $|\lg a-1|=1-\lg a$.

6. 因为 $m=\log_2 10$，所以 $2^m-m\lg 2-4=2^{\log_2 10}-\log_2 10\times\lg 2-4=10-1-4=5.$

B 组

1. (1) -3.　(2) 64.　(3) 1.

2. B.

3. 因为 $\log_{0.2}a>0$，$\log_{0.2}b>0$，所以

$$\log_{0.2}(ab)=\log_{0.2}a+\log_{0.2}b\geqslant 2\sqrt{\log_{0.2}a\cdot\log_{0.2}b}=2,$$

当且仅当 $\log_{0.2}a=\log_{0.2}b$，即 $a=b$ 时等号成立.

因此 $\log_{0.2}(ab)$的最小值为 2.

4. 因为 $x\neq 0$，所以 $2^x\neq 1$. 分子、分母同乘 $1-2^x$，得

$$\frac{(1+2^x)(1+2^{2x})(1+2^{4x})(1+2^{8x})(1+2^{16x})}{(1-2^{32x})}$$

$$=\frac{(1-2^x)(1+2^x)(1+2^{2x})(1+2^{4x})(1+2^{8x})(1+2^{16x})}{(1-2^x)(1-2^{32x})}$$

$$=\frac{1-2^{32x}}{(1-2^x)(1-2^{32x})}=\frac{1}{1-2^x}.$$

5. 证明：因为 $a^{2b+k}-2a^{b+k}+a^k=a^k(a^{2b}-2a^b+1)=a^k(a^b-1)^2$，又因为 $a>0$，所以对任意的实数 k，均有 $a^k>0$.

而 $a>1$，$b>0$，由幂的基本不等式，可得 $a^b>1$.

因此 $a^k(a^b-1)^2>0$，故 $a^{2b+k}-a^{b+k}>a^{b+k}-a^k$.

拓展与思考

1. 将原方程整理成$(\log_2 x)^2+b\log_2 x+c=0$.

由题意，得 $\log_2\frac{1}{4}\times\log_2\frac{1}{8}=c$，且 $\log_2\frac{1}{2}+\log_2 64=-b$，解得 $c=6$，$b=-5$.

代入方程，得$(\log_2 x)^2-5\log_2 x+6=0$，故 $\log_2 x=2$ 或 $\log_2 x=3$，即 $x=4$ 或 $x=8$.

2. 证明：因为 a、b、c 是不为 1 的正数，所以 $a^{\frac{1}{\lg b}+\frac{1}{\lg c}}\cdot b^{\frac{1}{\lg c}+\frac{1}{\lg a}}\cdot c^{\frac{1}{\lg a}+\frac{1}{\lg b}}>0$，

$$\lg\left(a^{\frac{1}{\lg b}+\frac{1}{\lg c}}\cdot b^{\frac{1}{\lg c}+\frac{1}{\lg a}}\cdot c^{\frac{1}{\lg a}+\frac{1}{\lg b}}\right)=\left(\frac{1}{\lg b}+\frac{1}{\lg c}\right)\lg a+\left(\frac{1}{\lg c}+\frac{1}{\lg a}\right)\lg b+\left(\frac{1}{\lg a}+\frac{1}{\lg b}\right)\lg c,$$

$$=\frac{\lg b+\lg c}{\lg a}+\frac{\lg a+\lg c}{\lg b}+\frac{\lg a+\lg b}{\lg c}.$$

又因为 $\lg a+\lg b+\lg c=0$，所以

$$\frac{\lg b+\lg c}{\lg a}+\frac{\lg a+\lg c}{\lg b}+\frac{\lg a+\lg b}{\lg c}=\frac{-\lg a}{\lg a}+\frac{-\lg b}{\lg b}+\frac{-\lg c}{\lg c}=-3.$$

故 $a^{\frac{1}{\lg b}+\frac{1}{\lg c}}\cdot b^{\frac{1}{\lg c}+\frac{1}{\lg a}}\cdot c^{\frac{1}{\lg a}+\frac{1}{\lg b}}=\frac{1}{1\,000}$.

四、相关阅读材料

参考文献

[1] 李大潜. 漫话 e [M]. 北京：高等教育出版社，2011.

第 4 章　幂函数、指数函数与对数函数

一、本章概述

总体要求

幂函数、指数函数与对数函数是基本的初等函数，可作为进一步学习一般函数概念的基础. 同时，作为初等数学中常见的函数模型，它们与生活实践、科学研究均有着密切的联系，并在这些领域中有着广泛的应用.

初中阶段学过一些基本的初等函数，如正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数等，已初步体会了函数是描述客观世界中变量之间的相互关系和变化规律的重要语言和工具. 本章将在上一章学习幂、指数和对数的基础上，先定义幂函数、指数函数和对数函数，再通过图像和代数的方法研究它们的性质，为下一章以它们为代表抽象出一般函数的概念，并进一步研究一般函数的性质及应用奠定基础.

通过幂函数、指数函数和对数函数的学习，可以帮助学生学会用函数图像和代数运算研究函数的性质，了解它们各自蕴含的规律；运用这些函数建立相应的数学模型，解决简单的实际问题，体会这些函数在解决实际问题中的作用.

经历幂函数、指数函数和对数函数图像与性质的研究过程，对于培养与提升学生的数学抽象、逻辑推理、直观想象等方面的核心素养有着重要的意义，而建立幂函数、指数函数和对数函数的模型，并利用这些模型解决实际生活中的问题，对体会数学的应用价值，培养数学建模的素养亦会起到重要的作用.

课时安排建议

本章的课时安排建议为 8+1，共计 9 课时. 建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
4.1　幂函数	2	幂函数的定义与图像　1 课时
		幂函数的性质　1 课时
4.2　指数函数	3	指数函数的定义与图像　1 课时
		指数函数的性质　2 课时
4.3　对数函数	3	对数函数的定义与图像　1 课时
		对数函数的性质　2 课时
复习与小结	1	

内容编排与特色

本章内容分为三节，分别是“4.1 幂函数”“4.2 指数函数”和“4.3 对数函数”.

“4.1 幂函数”. 区别于“二期课改”教材，本教材中幂函数、指数函数与对数函数安排在“一般函数”之前，因此，幂函数的地位与作用也发生了相应的变化. 作为高中阶段学生接触的第一类函数，幂函数起到了初高中函数概念的过渡与衔接的作用. 本节先从正比例函数 $y=x$、反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$、二次函数 $y=x^2$ 中抽象出幂函数的概念；然后选择三个具有代表性的指数所对应的幂函数$\left(y=x^{\frac{1}{2}}，y=x^3，y=x^{-\frac{2}{3}}\right)$，用描点法作出它们的大致图像；再在抽象出幂函数在第一象限的图像特征后，通过图像概括出幂函数的性质；最后用代数的方法给予证明. 这为研究函数性质提供了一个基本的途径. 通过幂函数的学习，可以让学生初步体会利用图像与代数运算是研究函数性质的重要方法.

“4.2 指数函数”. 在定义了指数函数之后，教材继续沿用研究幂函数性质的方法，研究指数函数的性质，让学生再次体会到利用图像与代数运算是研究函数的重要方法. 与“二期课改”教材不同的是，本教材中指数函数在 $\mathbf{R}$ 上是严格单调函数这一结论，不再是从特殊到一般的推广，而是通过幂的基本不等式给予了证明，这实现了从几何直观到数学符号语言的表述、再到严格论证的过程，体现了数学思维的严谨性.

“4.3 对数函数”. 教材继续采用研究幂函数、指数函数的方法，研究了对数函数，同时从“对数运算是指数运算的逆运算”的角度出发，指出“作为函数，对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数”，从本质上阐明了对数函数与指数函数的联系，为

研究对数函数提供了另外的途径.

总的来说，本章在第三章的基础上，通过在等式 $a^b=c$ 的三个量 a、b、c 中固定一个量，研究另两个量的相互关系和变化规律，定义三种基本而又应用广泛的函数——幂函数、指数函数和对数函数，在体现了简洁美和统一美的同时，能更好地体会函数是刻画变量与变量之间的相互关系的数学语言和工具，为下一章一般函数的学习奠定基础. 此外，因为幂的基本不等式的引入，从代数的角度证明了幂函数、指数函数和对数函数的单调性，避免了以往教材中仅仅从观察得到有关结论的不足与尴尬，在数学抽象的基础上实现了由几何直观到严格论证的过程，体现了数学的严谨性.

教学提示

可以在上一章“幂、指数与对数”的基础上，把幂函数、指数函数和对数函数作为一个整体，引导学生从等式 $a^b=c$ 出发，固定其中一个量，研究另两个量之间的相互关系和变化规律，引导学生理解这三个函数之间的联系与区别.

本章的教学建立在上一章“幂、指数与对数”和初中所学的函数知识的基础上，旨在通过本章的学习建立初高中函数学习之间的桥梁，为学习下一章“函数的图像、性质及应用”奠定基础. 本章的教学要在使学生掌握幂函数、指数函数与对数函数的图像、性质与应用的同时，让学生体会运用图像与代数运算是研究函数性质的一般方法.

对于幂函数、指数函数和对数函数的图像与性质的研究，可以采取从特殊到一般的方法，进行概括与抽象. 对于幂函数、指数函数和对数函数的单调性的教学，在抽象之后要给予证明，实现从直观到严格论证的过程.

要充分关注和利用幂函数、指数函数和对数函数所具有的丰富的现实背景和应用价值，这不仅有利于对幂函数、指数函数和对数函数的概念的理解，同时能帮助学生感受如何用函数描述客观世界事物的变化规律，培养与提升他们的数学建模素养. 比如，可以从学生熟悉的生活问题，构建一些幂函数、指数函数和对数函数；又如，在学生初步学习了这三个函数的定义、图像与性质之后，可以通过具体的实例，感受幂函数模型、指数函数模型和对数函数模型在生活中的广泛应用.

鼓励学生运用信息技术学习、探索和解决问题. 例如，利用计算器列表画出幂函数、指数函数和对数函数的图像，探索它们的变化规律，研究它们的函数性质等.

在探究与实践的教学中，可结合具体的实例，让学生感受到在现实生活中不仅要关

注数量的递增，还要关注递增的快慢程度，体会严格单调函数递增(减)的快慢是严格单调函数的重要性质. 建议在教学中，以在区间$(0,+\infty)$上严格递增的幂函数、指数函数和对数函数为例进行探究. 先列出在$x>0$时，自变量与函数值的对应值表，并充分利用计算器，在同一平面直角坐标系中作出它们的图像，让学生直观地感受到虽然它们在区间$(0,+\infty)$上都是严格增函数，但增长速度是不同的，归纳总结出幂函数、指数函数与对数函数的增长差异.

评价建议

要注意学生能否从整体上理解幂、指数与对数，以及幂函数、指数函数与对数函数的联系和区别，例如幂、指数与对数是运算，幂函数、指数函数与对数函数是其对应的函数；通过固定等式$a^b=c$三个量a、b、c中的一个，研究另两个量的相互关系和变化规律，由此定义幂函数、指数函数和对数函数等.

在研究幂函数、指数函数和对数函数的图像与性质时，要注意学生能否充分利用创设的问题与背景，自主抽象出这三个函数的性质. 例如，在研究幂函数的图像与性质时，能否利用例题所列出的三个具体函数，抽象出幂函数在第一象限的图像特征与函数性质；又如，能否在已经学习过幂函数与指数函数的图像与性质的基础上，通过类比思想，自主定义对数函数，并在此基础上抽象出对数函数的图像与性质等.

要注意学生能否体会图像与代数运算是研究函数性质的重要方法.

学生能否利用幂函数、指数函数和对数函数的模型解决和解释现实生活中相应问题，体会函数作为基本的数学语言和工具，在解决实际问题中的重要作用. 例如，能否寻找生活中的“直线上升”“对数增长”“指数爆炸”的实例，并用函数的观点解释现象，对未来可能出现的情况作出预期等.

二、教材分析与教学建议

4.1 幂函数

教学重点

幂函数的定义与图像，幂函数的性质：能从具体的幂函数出发，理解幂函数的概

念，作出具体的幂函数的图像.

能利用从特殊到一般的方法，归纳幂函数的图像特征，并在图像的基础上，用代数运算的方法研究幂函数的性质.

内容分析

初中已经学过 $y=x$、$y=\dfrac{1}{x}$和 $y=x^2$ 这三个函数，本节从这三个具体的幂函数出发，发现与总结幂函数具有“指数固定，幂随着底数的变化而变化”的特征，并据此抽象出幂函数的概念. 在定义了幂函数之后，教材选取了三个具有代表性的指数所对应的幂函数，在研究了它们的定义域的基础上，借助描点法作出它们的大致图像. 以这三个幂函数的图像为基础，教材通过对幂函数的定义域和函数值的简单分析，指出幂函数在第一象限总有图像，并针对它们在第一象限中图像的不同，将幂函数分为指数大于 0 和指数小于 0 两种情况分别进行研究.

通过观察幂函数在第一象限的图像，发现幂函数的图像在指数大于(小于)0 时，图像由左至右是上升(下降)的. 在用数学符号语言给予了表征之后，利用幂的基本不等式证明了幂函数在区间$(0,+\infty)$上是严格增(减)函数. 同时也指出无论指数取何值，幂函数的图像均经过定点(1,1).

例 1 旨在通过求幂函数的定义域，加深对幂函数的概念的理解，但重点并非求幂函数的定义域，建议在教学时，不要加大这部分的难度. 要注意的是：初中是用不等式表示函数定义域的，而例 1 是用集合表示，这也是由初中函数概念向高中函数概念的一个过渡.

例 2 与例 3 旨在理解幂函数的定义与图像. 习题 4.1A 组第 2 题，B 组第 1 题为该例题的配套习题，其中习题 4.1A 组第 2 题旨在巩固概念、夯实基础，而 B 组第 1 题是该组习题的延展.

例 4 主要的目的是利用指数大于 0 的幂函数在区间$(0,+\infty)$上是严格增函数，比较两个数的大小，熟悉幂函数的性质. 解决该问题的难点在于，要建立用函数的观点解决问题的意识，特别是在解决第(2)小题时，学生可能会直接说幂函数在指数大于 0 时是严格增函数，忽略了在区间$(0,+\infty)$上这一条件，此时一定要及时加以纠正，让学生明确单调性是针对定义域中的某个区间而言的，是一个局部的性质. 习题 4.1A 组第 4、5 题，B 组第 2 题是该例题的配套习题，其中习题 4.1A 组第 4、5 题旨在巩固

概念、夯实基础，而 B 组第 2 题是该例题的拓展.

例 5 与例 6 目的在于研究函数 $y=(x+m)^a$、$y=x^a+b$ 和 $y=x^a$ 图像之间的关系. 可以在本组例题之后根据班级的具体情况，决定是否归纳函数平移的一般情况. 值得注意的是，区别于“二期课改”教材，本组例题的解答从正反两个方面讲述了两个函数图像之间的平移关系，使解答更为严谨. 习题 4.1A 组第 6 题，B 组第 4 题是该组例题的配套习题，其中习题 4.1A 组第 6 题旨在巩固概念、夯实基础，而 B 组第 2 题是该组例题的延展.

注意事项

以往教材采用的是一般函数在前，幂函数、指数函数、对数函数在后的编排顺序，而本教材在顺序的处理上是与之相反的，即先讲幂函数、指数函数、对数函数等具体函数，再由它们作为具体的实例抽象出一般函数的概念. 这样的调整，体现了由具体到抽象、由特殊到一般的原则，并不仅仅是简单意义上顺序的调整，在观念及很多问题的处理上要作相应的改变.

幂函数是学生在高中阶段接触的第一类具体函数，起承前启后的作用. 应把幂函数作为载体，让学生初步体会“用函数图像和代数运算的方法研究函数”是研究函数性质的重要手段，为下一章引入一般函数的概念、性质与应用奠定基础.

在函数概念的处理上，幂函数是从初中的函数概念向高中函数概念的过渡. 区别以往教材中把幂函数作为实数集合之间的对应关系的处理方式，本教材中幂函数的概念侧重于把幂函数理解为变量与变量的某种依赖关系. 教材中出现了对定义域的描述，但并没有出现值域这一概念，而是用函数值替代. 值域概念的提出将放在第五章，在本章教学中应予以淡化. 特别要注意的是，出于整体性的考虑，本教材中虽规定幂函数中指数的范围为 $\mathbf{R}$，但教师在教学中应淡化对指数为无理数情况的讨论.

在幂函数图像的处理上，教材将第一象限的图像就指数大于 0 和指数小于 0 两种情况分别进行讨论，目的是为“幂函数在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调函数”的教学作准备. 没有再细分指数大于 1、指数等于 1 和指数大于 0 且小于 1 这三种图像的情况，因为只要指数大于 0，这些函数在区间 $(0,+\infty)$ 上都是严格增函数.

对幂函数在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格增(减)函数的处理，教材从“图像由左至右是上升(下降)的”直观描述，过渡到“随着 x 的增大，函数值 y 也增大(减小)”这种数学语言的描述，更有利于用代数的方法进行检验. 应处理好这一过渡，更好地帮助学生

理解幂函数在区间$(0,+\infty)$上是严格增(减)函数这一难点. 特别要注意的是，为将来更好地和大学教材接轨，教材中提到的严格增(减)函数，就是以往教材中所说的增(减)函数. 但这里提出的严格增(减)函数，只是针对幂函数来说的，并不是针对一般函数. 在处理这部分内容时，不要过早抽象到一般函数的情况.

教学建议

在引入幂函数概念时，可结合生活中的一些实例，让学生体会幂函数的现实背景和应用价值.

可充分利用例 2 和例 3 中所示的三个函数开展教学，充分体现“数形结合”和“从特殊到一般”的数学思想方法. 但值得强调的是，要培养数学思维的严谨性，教学中要使学生树立“直观之后说理”的意识，因为观察所得的直观结论，在数学上并不一定总是正确的.

“在指数大于 0 时，幂函数在区间$(0,+\infty)$上是严格增函数”和“在指数小于 0 时，幂函数在区间$(0,+\infty)$上是严格减函数”的定义方式是完全类似的，在介绍指数大于 0 的情况之后，应尝试让学生自主给出指数小于 0 时幂函数在区间$(0,+\infty)$上是严格减函数的定义与推导过程.

教学中可适当借助计算器探究函数的图像与性质. 例如，用描点法作函数图像时，可适当借助计算器列表描点；再如，在研究部分幂函数的图像“关于 y 轴成轴对称”或“关于原点成中心对称”时，可先借助计算器观察图形后，再进行证明.

4.2　指数函数

教学重点

指数函数的定义与图像，指数函数的性质：能从具体的实例感受指数函数的应用价值，理解指数函数的概念，作出具体的指数函数的图像. 能利用从特殊到一般的方法，归纳指数函数的图像特征，并在图像表示的基础上，用代数运算的方法研究指数函数的性质，进一步体会运用图像和代数运算是研究函数性质的一般方法. 能建立相应的指数函数模型，解决和解释现实生活中的有关问题.

内容分析

本节从具体的折纸问题入手，引入指数函数的概念，体会指数函数具有“底数固定，幂随着指数的变化而变化”的特征. 通过类比，将研究幂函数的图像与性质的方

法，用于指数函数的图像与性质的研究. 利用“由特殊到一般”“分类讨论”的数学思想方法，在底数 $a>1$ 和 $0<a<1$ 两种不同的情况下，探究指数函数的图像与性质，并利用幂的基本不等式，证明指数函数在底数大于 1 时的单调性.

为了使学生了解指数函数模型的实际背景，认识数学与现实生活及其他学科的联系，在本节的最后讲述了“种群问题”，旨在让学生进一步认识数学的应用价值，树立用数学解决现实问题的意识.

例 1 旨在通过解方程，求指数函数的函数表达式，加深对指数函数概念的理解. 习题 4.2A 组第 1 题是该例题的配套习题，旨在巩固概念、夯实基础.

例 2 与例 3 旨在研究指数函数的定义与图像. 习题 4.2A 组第 3 题，B 组第 1 题是该组例题的配套习题. 其中，4.2A 组第 3 题在考察指数函数图像的同时，也考察了图像的平移；4.2B 组第 1 题是该组习题的延展，要求学生在不同的情况下学会分析图像的各种可能性.

例 4 至例 6 旨在体会指数函数单调性的应用.

例 4 旨在应用指数函数的单调性“比较两个数的大小”，进而熟悉指数函数的性质. 解决该问题的难点在于要建立用函数的观点解决问题的意识，特别是在解决第(2)小题时，两个数的底数不相等，建立合适的函数模型是解决该问题的关键. 第(3)小题的目的是培养学生分类讨论的思想.

例 5 旨在应用指数函数的单调性解不等式，引导学生学会将底数“化异为同”的方法.

例 6 旨在利用指数函数的单调性解决闭区间上的最值问题.

习题 4.2A 组第 6、7、8 题，B 组第 4、5 题是该组例题的配套习题，其中 A 组第 6、7、8 题，旨在巩固概念、夯实基础，B 组第 4、5 题是该组例题的延展.

例 7 旨在让学生体会指数增长，初步感受指数爆炸的含义. 在建立入侵物种的种群数量增长模型之后，利用该模型对未来作出预期，以便采取有效的措施及早进行干预. 习题 4.2A 组第 9 题，B 组第 2 题是该组例题的配套习题.

注意事项

在指数函数的教学中，不仅要让学生理解指数函数的图像与性质，更要以此为载体，进一步学会用函数图像和代数运算揭示函数的主要性质.

区别于以往的教材，本节补充了对指数函数底数范围的说明. 对于指数函数之所

以要求底数大于0，可在教学中适当举例，帮助学生理解. 例如，当 $a<0$ 时，指数 x 取 $\frac{1}{2}$，a^x 无意义；又如，当 $a=0$ 时，指数 x 取负数，a^x 无意义. 需注意的是，以上的举例只能说明，要保证对所有的实数 x，a^x 都有意义，a 不能小于或等于0. 但 $a>0$ 时，是否对所有的实数 x，a^x 都有意义，仍与实数指数幂的定义有关，不必过分强调.

在证明“指数函数 $y=a^x$ 的图像与指数函数 $y=(a^{-1})^x$ 的图像关于 y 轴对称”时，要明确其与证明“幂函数 $y=x^{-\frac{2}{3}}$ 的图像关于 y 轴对称”的区别，前者是针对两个函数之间的图像特征，后者是针对某个函数自身的，不可混为一谈.

本节对指数函数的定义还是侧重于变量与变量之间的依赖关系，很多问题的处理要区别于“二期课改”教材的处理方式. 例如，教材中并没有定义指数函数的值域，只是强调了指数函数的函数值恒正，这与指明指数函数的值域为 $(0,+\infty)$ 是有区别的，前者只是后者的必要条件. 教学中要淡化值域，避免过早引入值域概念.

例6旨在说明指数函数的单调性的应用. 要弱化最值概念，这里对最值的理解还是停留于初中时“图像最高点(低)点的纵坐标是函数的最大(小)值”.

指数函数的应用，不仅是用指数函数解决数学问题，也指用指数函数解决实际问题.

教学建议

在引入指数函数时，可适当复习幂函数的概念，提示学生“幂函数具有指数固定，幂随着底数的变化而变化的特征”，启发学生发现指数函数的变化规律.

教学中要注意站在系统与整体的高度组织教学，力求让学生对知识的发生、发展有较为全面的认识.

在教学中要充分体现“数形结合”“从特殊到一般”和“类比”的数学思想方法. 对学有余力的学生，可创设适当的问题情境，对部分性质和内容，如函数值的分布等，进行自主探究. 若学生在学习中遇到障碍，可适当复习回顾幂函数的图像与性质.

“当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格增函数”和“当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格减函数”的探究方式，与幂函数情形是完全类似的，可视学生的具体情况，设计不同的探究活动. 例如，可让学生自主探究在上述两种情况下指数函数的单调性；亦可在介绍 $a>1$ 的情况之后，让学生自主探究在 $0<a<1$ 时，指数函数在 $\mathbf{R}$ 上是严格减函数的定义与推导过程.

教学中可借助信息技术探究指数函数的图像与性质. 例如，引导学生用图形计算器多作几个指数函数的图形，然后通过底数 a 的动态变化展示函数图像的分布情况. 这有利于发现指数函数的图像在底数 $a>1$ 和 $0<a<1$ 两种情况下有什么不同，使学生比较容易地概括出指数函数的性质.

在引入指数函数概念时，可结合生活中的实例，让学生体会指数函数的现实背景. 鼓励学生收集、阅读一些现实生活、生产实际或经济领域中的指数函数模型，体会指数函数的应用价值，培养与提升数学建模的素养.

4.3 对数函数

教学重点

对数函数的定义与图像，对数函数的性质：能在幂函数、指数函数的基础上，利用对数引入对数函数，理解对数函数的概念，作出具体的对数函数的图像. 能利用从特殊到一般、类比的思想方法，探究对数函数的图像特征，进一步用图像和代数运算的方法研究对数函数的性质，并利用这些性质解决实际问题. 知道对数函数与指数函数互为反函数，这两个函数的图像关于直线 $y=x$ 对称. 通过实例，了解对数函数的应用价值，加强数学的应用意识.

内容分析

本节在幂函数、指数函数的基础上，通过对数引入对数函数的概念，归纳出对数函数的特征为“底数固定，对数的值随着真数的变化而变化”. 通过类比思想，探究对数函数在底数大于 1 和底数大于 0 且小于 1 这两种情况下的图像与性质，并在引入了对数的基本不等式之后，证明对数函数在底数大于 1 时的单调性. 最后，用“火箭的最大速度问题”和“银行存款问题”让学生体会对数函数在科学领域及生活中的重要作用.

例 1 旨在通过求函数的定义域加深对对数函数的概念的理解，但重点并非求对数函数的定义域，在教学时不要加大这部分的难度. 习题 4.3A 组的第 1 题，B 组的第 2 题是该例题的配套习题. 其中，A 组第 1 题旨在巩固概念、夯实基础，B 组第 2 题是该例题的拓展.

例 2 与例 3 旨在研究对数函数的定义与图像. 习题 4.3A 组第 3 题是该例题的配套习题，在复习对数函数图像的同时，也了解了图像的平移.

例 4 和例 5 旨在应用对数函数的单调性“比较两个数的大小”，熟悉对数函数的性质.

例 4 第(2)小题目的是体现分类讨论的思想. 例 4 第(3)小题旨在用换底公式先将两个底数不相等的对数换成同底，再利用对数函数的单调性比较大小.

例 5 是在对题设的两个大数取对数之后，再利用对数函数的单调性比较这两个数的大小，旨在熟悉对数函数的单调性的同时，体会到对数对简化运算所起到的作用. 建议在解题之初，先让学生利用计算器判断这两个数的大小，当发现计算器无法解决该问题时，再提出能否利用对数简化运算的作用解决该问题.

习题 4.3A 组第 5、6、7 题，B 组第 3、4 题，是该组例题的配套习题. 其中，A 组第 5、6 题旨在巩固概念、夯实基础，A 组第 7 题与 B 组第 3、4 题是该组例题的拓展.

例 6 的目的是为了应用对数函数的单调性估算对数 $\log_2 3$ 的第一位小数的值. 教学时，要将教学的重点放在如何选择合适的算法解决该问题，不要让计算器替代思维. 习题 4.3B 组第 5 题是该例题的配套习题.

例 7 与例 8 主要的目的在于让学生体会对数函数模型在科学领域和日常生活中的应用，学会建立对数函数模型，并据此分析与解决一些实际问题. 例 7 是火箭最大速度问题，旨在通过火箭的燃料质量和火箭质量的倍数的计算，认识数学在科学领域中的作用. 例 8 解决了必修 3.2 节一开始提出的银行复利问题，以此体会数学在生活中的实际应用. 习题 4.3B 组第 6 题是该组例题的配套习题.

注意事项

对数函数的概念是以幂函数、指数函数和对数的概念为基础的. 从形式上看，对数函数的引入没有直接采用“固定等式 $a^b=c$ 中的一个量，研究另两个量的相互变化关系”的做法，但是由于对数概念的引入，指数式中的指数与幂，就是对数式中的对数与真数，二者在本质上是一致的.

由于学生已经学过了幂函数、指数函数以及对数的概念及其运算性质，教学中要充分利用学生的认知基础，一方面要充分利用研究幂函数与指数函数时所获得的经验来研究对数函数，同时要注意加强与指数函数的联系，帮助学生形成良好的知识结构，提高认识能力.

值得指出的是，教材通过“对数运算是指数运算的逆运算，作为函数，称对数函

数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数”的观点引入了反函数，但此时对此不必过分强调，反函数的一般概念将在下一章学习.

教材中引入了对数的基本不等式，其证明的出发点是指数的性质及幂的基本不等式. 可以让学生尝试用直接法进行证明，从而体会反证法的便捷之处.

讲对数函数的单调性时，一定要强调这是针对定义域中的某个区间而言的，是一个局部的性质. 教学中应弱化复合函数的单调性的教学，将重点放在对对数函数单调性的理解上，为今后引入一般函数的单调性打好基础.

本节的最后解释了“对数换底公式其实就是两个底数不同的对数函数实际上只相差一个常数倍”这个事实. 在教学中应侧重从函数的观点解释这一事实，而不必过分强调结论本身.

教学建议

在引入对数函数概念时，可适时启发学生回顾幂函数、指数函数揭示的“固定等式 $a^b=c$ 中的一个量，研究另两个量的相互变化关系”的规律，并问对数函数是否具有类似的规律，进一步建立这三个函数的联系与区别.

教学中应注意知识间的联系. 例如，将研究幂函数、指数函数的图像与性质的方法，继续用于对数函数的图像与性质的研究；又如，可利用对数函数与指数函数互为反函数，建立对数函数与指数函数间的联系. 这样做可使学生形成良好的知识结构，提高认知能力.

教学中可充分利用信息技术进行探究. 例如，可利用图形计算器，让学生先直观地发现同底的指数函数与对数函数的图像是关于直线 $y=x$ 对称的，再进行一般化的证明，增加学生对指数函数与对数函数互为反函数的直观感觉.

教材的例 7“火箭的最大速度”问题可结合本节最后的课后阅读一起教学，体会对数函数模型在科学领域中的应用，增强用数学解决实际问题的意识.

可让学生收集、了解生活中运用对数函数模型的例子，体会如何借助函数模型刻画实际问题，感悟数学模型中有关参数的现实意义. 对学有余力的学生，也可启发他们主动发现现实生活中的有关问题，建立相应的对数函数模型解决该问题，以提高数学建模素养.

三、参考答案或提示

4.1　幂函数

练习 4.1(1)

1. 将点$(3,\sqrt{3})$代入幂函数$y=x^a$，得$3^a=\sqrt{3}$，解得$a=\dfrac{1}{2}$，所以此幂函数的表达式为$y=x^{\frac{1}{2}}$.

2. (1) 对一切实数x，该函数都有意义，所以其定义域是$\mathbf{R}$. 图略.

(2) $y=x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，当$x>0$时，该函数才有意义，所以其定义域是$(0,+\infty)$. 图略.

(3) $y=x^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{x^4}$，对一切实数$x$，该函数都有意义，所以其定义域是$\mathbf{R}$. 图略.

3. 由题意，得$-m^2+2m+3>0$，解得$-1<m<3$.又因为m为整数，所以m的取值为0、1、2.

练习 4.1(2)

1. (1) 将函数$y=x^{\frac{2}{3}}$的图像向右平移一个单位就得到函数$y=(x-1)^{\frac{2}{3}}$的图像. 将函数$y=(x-1)^{\frac{2}{3}}$的图像向左平移一个单位就得到函数$y=x^{\frac{2}{3}}$的图像. 图略.

(2) 将函数$y=x^{\frac{2}{3}}$的图像向上平移一个单位就得到函数$y=x^{\frac{2}{3}}+1$的图像. 将函数$y=x^{\frac{2}{3}}+1$的图像向下平移一个单位就得到函数$y=x^{\frac{2}{3}}$的图像. 图略.

2. (1) 考虑幂函数$y=x^{-3}$. 因为指数小于0的幂函数在区间$(0,+\infty)$上是严格减函数，所以$2.5^{-3}>3.1^{-3}$.

(2) 考虑幂函数$y=x^{\frac{3}{2}}$. 因为指数大于0的幂函数在区间$(0,+\infty)$上是严格增函数，所以$1.7^{\frac{3}{2}}>1.6^{\frac{3}{2}}$.

3. 图略.

习题 4.1

A 组

1. 将点$(\sqrt[4]{3},3)$代入幂函数$y=x^a$，得$(\sqrt[4]{3})^a=3$，解得$a=4$，所以此幂函数的表达式为$y=x^4$.

2. （1）对一切实数 x，该函数都有意义，所以其定义域是 **R**. 图略.

（2）函数 $y=x^{-2}=\dfrac{1}{x^{2}}$，当 $x\neq 0$ 时，该函数才有意义，所以其定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 图略.

（3）函数 $y=x^{-\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^{3}}}$，当 $x>0$ 时，该函数才有意义，所以其定义域是 $(0,+\infty)$. 图略.

3. 根据题意，设 $v=kr^{4}(k\neq 0)$，将 $r=3$，$v=400$ 代入该式，得 $400=3^{4}k$，解得 $k=\dfrac{400}{81}$. 此时 $v=\dfrac{400}{81}r^{4}$. 于是，当 $r=5$ 时，$v=\dfrac{400}{81}\times 5^{4}\approx 3\,086(\mathrm{cm}^{3}/\mathrm{s})$.

4. （1）考虑幂函数 $y=x^{-\frac{1}{2}}$. 因为指数小于 0 的幂函数在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格减函数，所以 $3.1^{-\frac{1}{2}}>3.2^{-\frac{1}{2}}$；

（2）$(a+2)^{\frac{1}{3}}>a^{\frac{1}{3}}$.

5. ②.

6. 图略.

B 组

1. （1）第一和第二.　　（2）$s<1$.

2. D.

3. $y=x^{-2}$.（答案不唯一）

4. 将函数 $y=\dfrac{ax+1}{x+2}$ 整理变形，得 $y=a+\dfrac{1-2a}{x+2}$. 要求该函数在区间 $[1,+\infty)$ 上是严格减函数，并且函数值不恒为负，所以 $1-2a>0$，且当 $x=1$ 时，函数值 $\dfrac{a+1}{3}\geqslant 0$. 因此，$-1\leqslant a<\dfrac{1}{2}$. 又因为 a 为整数，所以 $a=0$ 或 -1.

4.2　指数函数

练习 4.2(1)

1. 是指数函数的有(3)(5)(6)；是幂函数的有(1)(2)(4).

2. （1）对一切实数 x，该函数都有意义，所以其定义域是 **R**.

（2）当 $x-2\neq 0$ 时，该函数才有意义，所以其定义域是 $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

3. 图略.

练习 4.2(2)

1.（1）考虑指数函数 $y=1.4^x$. 因为底大于 1 的指数函数 $y=a^x$ 在 **R** 上是严格增函数，所以 $1.4^{0.3}<1.4^{0.4}$.

（2）考虑指数函数 $y=0.3^x$. 因为底小于 1 大于 0 的指数函数 $y=a^x$ 在 **R** 上是严格减函数，所以 $0.3^{1.4}>0.3^{1.5}$.

（3）因为 $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\pi}=a^{-\pi}$，当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 在 **R** 上是严格减函数，所以 $a^{-3.14}<a^{-\pi}$，即 $a^{-3.14}<\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\pi}$；当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 在 **R** 上是严格增函数，所以 $a^{-3.14}>a^{-\pi}$，即 $a^{-3.14}>\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\pi}$.

2. 因为 $m>n$，且 $a^m<a^n$，所以 $0<a<1$.

3.（1）因为指数函数 $y=3^x$ 在 **R** 上是严格增函数，所以 $x>0.5$. 故此不等式的解集为$(0.5,+\infty)$.

（2）将0.2^x 写成 5^{-x}，25 写成 5^2. 因为指数函数 $y=5^x$ 在 **R** 上是严格增函数，所以$-x<2$，即 $x>-2$. 故此不等式的解集为$(-2,+\infty)$.

练习 4.2(3)

1. 当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 在区间$[1,2]$上是严格减函数. 所以，该指数函数在区间$[1,2]$上取到的最小值为 a^2，此时 $x=2$；该指数函数在区间$[1,2]$上取到的最大值为 a，此时 $x=1$. 由题意，得 $a-a^2=\dfrac{a}{3}$，解得 $a=\dfrac{2}{3}$.

2. 设促销活动开始后的第 n 天，甲服装的售价为 $y_1=175(1-5\%)^n$；乙服装的售价为 $y_2=200(1-7\%)^n$. 根据函数式列表：

第 n 天	甲服装的售价/元	乙服装的售价/元
1	166.25	186
2	157.93	172.98
3	150.04	160.87
4	142.53	149.61
5	135.41	139.13

（续表）

第 n 天	甲服装的售价/元	乙服装的售价/元
6	128.64	129.39
7	122.2	120.34
8	116.09	111.91
9	110.29	104.08
10	104.77	96.796

可以看出，7 天后甲服装的售价将高于乙服装的售价.

习题 4.2

A 组

1. ②③⑤.

2. (1) 当 $3-x\geqslant 0$ 时，该函数才有意义，所以其定义域是$(-\infty,3]$.

(2) 当 $x\neq 0$ 时，该函数才有意义，所以其定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

3. 图略.

函数 $y=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$ 的图像与函数 $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ 的图像关于 y 轴对称.

将函数 $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ 的图像向下移一个单位就得到函数 $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x-1$ 的图像. 将函数 $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x-1$ 的图像向上平移一个单位就得到函数 $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ 的图像.

4. 因为指数函数 $y=(m-2)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格减函数，所以 $0<m-2<1$，解得 $2<m<3$.

5. 因为无论 $a(a>0$ 且 $a\neq 1)$取何值，均成立 $a^0=1$，所以函数 $y=a^{2-x}$ 的图像恒经过一个定点，其坐标为$(2,1)$.

6. (1) 考虑指数函数 $y=1.2^x$. 因为底大于 1 的指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格增函数，所以$1.2^{2.6}<1.2^{2.61}$.

(2) 因为$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=(\sqrt{3})^{-\frac{1}{2}}$，且底大于 1 的指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格增函数，所以$(\sqrt{3})^{-\frac{1}{3}}>(\sqrt{3})^{-\frac{1}{2}}$，即$(\sqrt{3})^{-\frac{1}{3}}>\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

7. (1) 因为指数函数 $y=3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格增函数，所以 $x^2-2x+3<2x$，解得 $1<x<3$. 故此不等式的解集为$(1,3)$.

(2) 将$\frac{1}{81}$写成$\left(\frac{1}{3}\right)^4$. 因为指数函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格减函数，所以$\sqrt{x}\geqslant 4$，即 $x\geqslant 16$. 故此不等式的解集为$[16,+\infty)$.

8. 当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 在区间$[1, 2]$上是严格减函数. 所以，当 $x=2$ 时，该指数函数取到最小值 a^2；而当 $x=1$ 时，该指数函数取到最大值 a. 由题意，得 $a+a^2=6$，解得 $a=-3$ 或 $a=2$，均不满足 $0<a<1$，所以舍去.

当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 在区间$[1,2]$上是严格增函数. 所以，当 $x=2$ 时，该指数函数取到最大值 a^2；而当 $x=1$ 时，该指数函数取到最小值 a. 由题意，得 $a+a^2=6$，解得 $a=2$.

因此 $a=2$.

9. 从今年起的第 10 年新购置的平板电脑数为 $50\times(1+5\%)^{10}\approx 81$ 台.

B 组

1. C.

2. D.

3. 因为 $x>0$ 时，指数函数 $y=(a^2-1)^x$ 的值总大于 1，所以 $a^2-1>1$，解得 $a<-\sqrt{2}$或$a>\sqrt{2}$.

4. 因为$-1<x<0$，所以 $2x<x<-x$. 又因为指数函数 $y=3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格增函数，所以 $3^{2x}<3^x<3^{-x}$.

5. 因为 $a>1$，所以指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格增函数，因此 $x^2+2x+1<2x^2-3x+1$，整理得 $x^2-5x>0$，解得 $x<0$ 或 $x>5$.

6. 因为函数 $y=5^{x+1}+m$ 的图像不经过第二象限，所以 $5+m\leqslant 0$，即 $m\leqslant -5$.

4.3 对数函数

练习 4.3(1)

1. 因为对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)的图像经过点$(4,2)$，所以 $\log_a 4=2$，解得 $a=2$. 故此对数函数的表达式为 $y=\log_2 x$.

2. (1) 当$\frac{2+x}{1-x}>0$，即$-2<x<1$ 时，该函数才有意义. 所以该函数的定义域是

$(-2,1)$.

（2）当 $4-x^2>0$ 时，即 $-2<x<2$ 时，该函数才有意义，所以该函数定义域是 $(-2,2)$.

3. 图略.

练习 4.3(2)

1. 因为无论 a（$a>0$ 且 $a\neq1$）取何值，均成立 $\log_a 1=0$，所以函数 $y=\log_a(x-1)$ 的图像必经过一个定点，其坐标为 $(2,0)$.

2.（1）因为 $0<a<1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格减函数，所以 $\log_{0.2}3>\log_{0.2}6$.

（2）由换底公式，得 $\log_{0.2}3=\dfrac{1}{\log_3 0.2}$，$\log_{0.3}3=\dfrac{1}{\log_3 0.3}$，其分母 $\log_3 0.2<\log_3 0.3<0$，故 $\log_{0.2}3>\log_{0.3}3$.

3. 证明：当 $0<a<1$ 时，$\dfrac{1}{a}>1$. 若 $x_2>x_1>0$，那么 $\dfrac{x_2}{x_1}>1$，由对数的基本不等式，得 $\log_a\dfrac{x_2}{x_1}=-\log_{\frac{1}{a}}\dfrac{x_2}{x_1}<0$，即 $\log_a x_2<\log_a x_1$. 这说明对数函数 $y=\log_a x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格减函数.

练习 4.3(3)

1.（1）$y=a(1-0.012\%)^t(t>0)$.

（2）$0.9\geqslant(1-0.012\%)^t$，解得 $t\geqslant877.95$，即至少经过 878 年，^{14}C 的含量才能低于原来的 90%.

2. 因为 $2^2=4<5<8=2^3$，由对数函数的单调性，有 $2<\log_2 5<3$.

又因为 $25<32$，即 $5<4\sqrt{2}=2^{2.5}$，再次由对数函数单调性，得 $\log_2 5<2.5$.

现在比较 $\log_2 5$ 与 2.3. 这等价于比较 5 与 $2^{2.3}=2^{\frac{23}{10}}$，即比较 5^{10} 与 2^{23}，因为 $5^{10}=9\,765\,625>8\,388\,608=2^{23}$，所以 $5>2^{2.3}$. 再由对数函数单调性，得 $\log_2 5>2.3$.

随后我们比较 $\log_2 5$ 与 2.4. 这等价于比较 5 与 $2^{2.4}=2^{\frac{12}{5}}$，即比较 5^5 与 2^{12}，因为 $5^5=3\,125<4\,096=2^{12}$，所以 $5<2^{2.4}$. 再由对数函数单调性，得 $\log_2 5<2.4$. 最后得到 $2.3<\log_2 5<2.4$.

因此 $\log_2 5$ 的第一位小数是 3.

习题 4.3

A 组

1. （1）当 $x+12>0$，即 $x>-12$ 时，该函数才有意义，因此该函数定义域是 $(-12,+\infty)$.

（2）当 $\frac{1}{x^2-2x+5}>0$ 时，即当 $x^2-2x+5>0$ 时，该函数才有意义，又因为恒成立 $x^2-2x+5>0$，所以该函数定义域是 **R**.

2. 因为对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的图像经过点 $(3,2)$，所以 $\log_a 3=2$，即 $a^2=3$，解得 $a=\sqrt{3}$. 又因为点 $P(b,4)$ 为此函数图像上的点，所以 $\log_{\sqrt{3}} b=4$，即 $b=(\sqrt{3})^4=9$.

3. 图略.

函数 $y=\log_3 x$ 的图像与函数 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的图像关于 x 轴对称.

函数 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的图像与函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

4. 因为无论 a（$a>0$ 且 $a\neq1$）取何值，函数 $y=\log_a x-1$ 的图像必经过一个定点，此定点的坐标为 $(1,-1)$.

5. （1）因为 $\log_a 0.2<\log_a 0.1$，所以 $0<a<1$.

（2）因为 $\log_a \pi>\log_a \mathrm{e}$，所以 $a>1$.

6. 因为 $y=\log_{a^2-1} x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格减函数，所以 $0<a^2-1<1$，解得 $-\sqrt{2}<a<-1$ 或 $1<a<\sqrt{2}$.

7. 当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 在区间 $[1,2]$ 上是严格增函数. 所以，当 $x=2$ 时，该对数函数取到最大值 $\log_a 2$；而当 $x=1$ 时，该对数函数取到最小值 $\log_a 1=0$. 由题意，得 $\log_a 2-0=1$，解得 $a=2$.

B 组

1. ②③.

2. 当 $a-a^x>0$，即 $a>a^x$ 时，该函数才有意义. 当 $a>1$ 时，解得 $x<1$，因此该函数定义域是 $(-\infty,1)$；当 $0<a<1$ 时，解得 $x>1$，因此该函数定义域是 $(1,+\infty)$.

3. （1）因为 $\log_3 m<\log_3 n$，所以 $m<n$.

（2）当 $a>1$ 时，因为 $\log_a m<\log_a n$，所以 $m<n$；当 $0<a<1$ 时，因为 $\log_a m<$

$\log_a n$，所以 $m>n$.

（3）因为 $0<m<1$，$0<n<1$，$0<N<1$，所以 $\log_m N=\dfrac{1}{\log_N m}>0$，$\log_n N=\dfrac{1}{\log_N n}>0$，故有 $0<\dfrac{1}{\log_N m}<\dfrac{1}{\log_N n}$，即 $\log_N m>\log_N n$. 又因为 $0<N<1$，所以 $m<n$.

4. 因为 $\log_a(4x^2-1)<\log_a(-2x^2+x+1)$ 且 $0<a<1$，所以 $4x^2-1>-2x^2+x+1>0$，解得 $\dfrac{2}{3}<x<1$.

5. 取以 10 为底的对数，由对数函数单调性，只需要比较两个对数 $\lg 22^{23}$（$=23\lg 22$）与 $\lg 23^{22}$（$=22\lg 23$）的大小就足够了. 由计算器得 $23\lg 22\approx 30.88$，$22\lg 23\approx 29.96$，因为 $30.88>29.96$，所以 $22^{23}>23^{22}$.

6. 设 $^{237}\mathrm{U}$ 在不断的裂变中，每天所剩留质量是上一天剩留质量的 q 倍，由题意，得 $q^7=50\%$，解得 $q=(50\%)^{\frac{1}{7}}$. 设经过 x 天裂变，剩留质量小于原来的 10%，所以 $q^x<10\%$，即 $(50\%)^{\frac{x}{7}}<10\%$，解得 $x>7\times\log_{0.5}0.1\approx 23.25$，即至少经过 24 天的裂变，剩留质量才小于原来的 10%.

复习题

A 组

1.（1）$y=x^{\frac{1}{2}}$；$y=(\sqrt[4]{2})^x$；$y=\log_{\sqrt[4]{2}}x$.　（2）$k<0$.　（3）$(2,2)$.

2.（1）C.　（2）C.

3.（1）函数 $y=(x-1)^{\frac{5}{2}}=\sqrt{(x-1)^5}$，只要 $x-1\geqslant 0$，该函数都有意义，所以其定义域是 $[1,+\infty)$.

（2）当 $x-1\geqslant 0$，即 $x\geqslant 1$ 时，该函数才有意义，所以其定义域是 $[1,+\infty)$.

（3）当 $\dfrac{1+x}{1-x}>0$，即 $-1<x<1$ 时，该函数才有意义，所以其定义域是 $(-1,1)$.

4.（1）考虑幂函数 $y=x^{0.7}$，因为指数大于 0 的幂函数在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格增函数，所以 $0.1^{0.7}<0.2^{0.7}$.

（2）考虑指数函数 $y=0.7^x$，因为底小于 1 且大于 0 的指数函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格减函数，所以 $0.7^{0.1}>0.7^{0.2}$.

（3）因为 $0<a<1$ 的对数函数 $y=\log_a x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格减函数，所以 $\log_{0.7}0.1>\log_{0.7}0.2$.

5. 由题意，得$(\sqrt{2})^a=2$，且$(-2)^b=\frac{1}{4}$，解得 $a=2$ 且 $b=-2$. 因此得 $x^2=x^{-2}$，解得 $x=\pm1$.

6. 因为 $x>1$，所以 $\log_{\frac{2}{3}}x<0<\left(\frac{2}{3}\right)^x<1<x^{\frac{3}{2}}$，因此 $\log_{\frac{2}{3}}x<\left(\frac{2}{3}\right)^x<x^{\frac{3}{2}}$，即 $c<a<b$.

7. 当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a(x+1)$在区间$[0,1]$上是严格增函数. 所以，当 $x=0$ 时，该函数取到最小值，此时 $y=\log_a 1=0$；当 $x=1$ 时，该函数取到最大值，此时 $y=\log_a 2=1$，解得 $a=2$.

当 $0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a(x+1)$在区间$[0,1]$上是严格减函数. 所以，当 $x=0$ 时，该函数取到最大值，而此时 $y=\log_a 1=0$，故无解.

因此 $a=2$.

8. 设至少需要将 n 块这样的玻璃重叠起来才能满足要求. 由题意，得$(1-10\%)^n<\frac{1}{3}$，解得 $n>\log_{0.9}\frac{1}{3}\approx10.43$. 所以，至少需要 11 块这样的玻璃重叠起来，才能使通过它们的光线强度低于原来的$\frac{1}{3}$.

B 组

1. (1) 1 或 3.　(2) 一.

2. (1) B.　(2) A.

3. 因为函数 $y=\left(\log_a\frac{3}{5}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格增函数，所以 $\log_a\frac{3}{5}>1$，又因为 $0<a<1$，所以$\frac{3}{5}<a<1$.

4. 因为函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像与函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$的图像的交点个数为 1 个，所以方程$\left(\frac{1}{2}\right)^x=x^{\frac{1}{2}}$的解的个数为 1 个. 图略.

5. 因为 $A=\{x\mid1<x\leqslant4\}$，所以 $B=\{y\mid y=\log_3x，x\in(1,4]且 y\in\mathbf{Z}\}$，因此用列举法表示的集合为 $B=\{1\}$.

拓展与思考

1. $\log_2 3$ 不是有理数.

证明：假设 $\log_2 3$ 是有理数，那么它可以写成既约分数的形式 $\log_2 3=\frac{m}{n}$，其中 m、n 均为正整数. 它等价于 $2^{\frac{m}{n}}=3$，因此 $3^n=2^m$. 因为对任意的正整数 m，2^m 为 m 个 2 相乘，所以 2^m 均是偶数，而对任意的正整数 n，3^n 均为奇数，说明 $3^n\neq 2^m$，与 $3^n=2^m$ 矛盾. 这说明 $\log_2 3$ 不可能是有理数.

2. 因为 $\log_2 3$ 的第一位小数为 5，所以首先比较 $\log_2 3$ 与 1.55，这等价于比较 3 与 $2^{1.55}=2^{\frac{31}{20}}$，即比较 3^{20} 与 2^{31}. 由于 $3^{20}=3\ 486\ 784\ 401>2\ 147\ 483\ 648=2^{31}$，所以 $3>2^{1.55}$. 由对数函数的单调性，得 $\log_2 3>1.55$.

再比较 $\log_2 3$ 与 1.58. 这等价于比较 3 与 $2^{1.58}=2^{\frac{79}{50}}$，即比较 3^{50} 与 2^{79}. 因为 $3^{50}>7.178\ 979\ 876\times 10^{23}>6.044\ 629\ 099\times 10^{23}>2^{79}$，所以 $3>2^{1.58}$. 由对数函数的单调性得 $\log_2 3>1.58$.

最后比较 $\log_2 3$ 与 1.59. 这等价于比较 3 与 $2^{1.59}=2^{\frac{159}{100}}$，即比较 3^{100} 与 2^{159}. 因为 $3^{100}<5.153\ 775\ 208\times 10^{47}<7.307\ 508\ 186\times 10^{47}<2^{159}$，所以 $3<2^{1.59}$. 由对数函数的单调性得 $\log_2 3<1.59$.

因此 $1.58<\log_2 3<1.59$，$\log_2 3$ 的第二位小数为 8.

四、相关阅读材料

参考文献

[1] 李大潜. 漫话 e [M]. 北京：高等教育出版社，2011.

第 5 章　函数的概念、性质及应用

一、本章概述

总体要求

“函数是现代数学最基本的概念，是描述客观世界中变量关系和规律的最为基本的数学语言和工具，在解决实际问题中发挥重要作用. 函数是贯穿高中数学课程的主线.”函数是由初等数学走向高等数学的一个重要概念. 函数概念的引入使数学工具可以对动态的对象进行定量的研究，如微积分的主要研究对象也是函数. 另外，函数在实际生产、生活中也有相当广泛的应用，这些应用是数学建模的一部分.

在初中和上一章中学习过的一次函数、反比例函数、二次函数、幂函数、指数函数及对数函数都是一些具体函数的例子. 本章旨在将这些具体函数中的共性进行归纳，提炼出函数的一般概念，这一过程是“数学抽象”核心素养的具体体现；并在此基础上明确：可以从什么角度去研究一个函数？以及有了函数这个概念和工具之后，我们能够做些什么？为之后三角函数的学习作好充分的准备.

高中阶段所学习的函数概念是初中阶段所学的函数概念的继承与精确化. 与历史上函数概念的发展过程类似，本章所采用的函数概念摆脱了“函数由曲线或由表达式来描述”的原始定义，较为准确地将函数描述为非空实数集合到实数集合的满足某些特性的对应关系. 有了函数的概念，在考察许多其他数学对象(如方程、不等式)的时候，就有了一种新的、利用函数图像这一工具的视角，而数形结合的思想正是核心素养中“直观想象”的一个体现.

通过本章的学习，“可以帮助学生建立完整的函数概念，不仅把函数理解为刻画变量之间依赖关系的数学语言和工具，也把函数理解为实数集合之间的对应关系；能用代数运算和函数图像揭示函数的主要性质；在现实问题中，能利用函数模型解决问

题.”在学习一些具体函数的基础上，本章归纳出一般函数的概念，讨论函数的基本性质，并在第七章又重新回到对三角函数这一具体函数的学习. 这一“从具体到抽象，再回到具体”的过程，符合学生的认知规律，也有助于培养学生的数学抽象素养.

函数是数形结合的典范. 一方面可以通过函数表达式，培养学生数学运算和逻辑推理的核心素养；另一方面也可以通过函数图像整体把握函数的变化特征，培养学生直观想象的数学素养. 此外，函数是一类重要的数学模型，通过本章的学习，可使学生在实际情境中初步学会选择合适的函数类型，以刻画现实世界某一方面的变化规律.

课时安排建议

本章的课时安排建议为 10＋2＋1，共计 13 课时. 建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
5.1　函数	2	函数　1 课时
		函数的表示方法　1 课时
5.2　函数的基本性质	5	函数的奇偶性　2 课时
		函数的单调性　2 课时
		函数的最值　1 课时
5.3　函数的应用	3	函数关系的建立　1 课时
		用函数观点求解方程与不等式　1 课时
		用二分法求函数的零点　1 课时
5.4　(选学)反函数	2	反函数的概念　1 课时
		反函数的图像　1 课时
复习与小结	1	

内容编排与特色

本章内容共分为四节，分别是 5.1 函数，5.2 函数的基本性质，5.3 函数的应用，5.4 反函数.

“5.1 函数”着力于从已经学过的函数的公共属性中抽象出函数的一般概念. 在本节中，教材对“函数”和“表达式”的概念比以往的教材做了更明确的区分：表达式更多指向代数层面，是由数和字母以及一些约定的运算构成的算式；而函数更多指向分析层面，是指数与数之间的对应关系. 本节介绍了函数的三种表示方法——解析法、列

表法和图像法，并且在解析法中介绍了函数的分段表示法，这些与“二期课改”教材基本一致. 不同之处是，本教材中函数的图像不再通过“用光滑的曲线连接一些点”的模糊的方式来定义，而是用平面直角坐标系中的相应点集来定义. 这样的定义方式更加抽象，其优点是能为之后函数图像的对称性等性质的说理过程提供依据.

在本节的末尾，提供了一篇课后阅读材料——“函数概念的形成和发展”，通过列举函数概念发展史上的重大事件，为学生了解函数概念发展的历史提供参考.

“5.2 函数的基本性质”包含函数的奇偶性、单调性及最值这三部分内容，是已学过的函数特性的抽象. 在函数的奇偶性部分，教材证明了“一个函数是偶函数当且仅当该函数的图像关于 y 轴对称”，在几何直观与代数表达之间建立起一座桥梁，并为学生规范地表达自己的思想提供了一个范例. 在函数的单调性部分，教材详细分析了二次函数的单调性，这既是对初中所学的二次函数知识的一次总结与升华，也为后面“5.3 函数的应用”一节中用函数观点求解二次不等式打下了基础. 函数的最值部分主要处理二次函数的最值和已知单调性的函数的最值，力求阐明“单调性可以决定最值”这一较为本质的特征. 本节中所展示的例题在研究方法或者表达方式上都是有代表性的，同时也被严格控制了难度.

“5.3 函数的应用”主要由两部分组成. 第一部分是函数关系的建立，着眼于在简单的生产、生活问题中建立相应的函数模型，着重说明在对实际问题进行建模时，数学意义上的解答所包含的远远不止算式，必要的思考和恰当的文字表述也是解答的重要组成部分. 第二部分是用函数观点求解方程与不等式，这是“二期课改”教材中力图潜在地渗透但没有明确指出的. 随着课程标准的调整，本教材也将这部分内容作为一个重要组成部分，试图通过精心选择的内容，使学生明白如何从分析的角度审视方程与不等式. 作为这两部分的有机整合，在介绍连续函数介值性质(零点存在性质)的基础上，通过一个实际问题展示数值计算中求函数零点的二分法. 教材在呈现用二分法求函数近似零点这一内容时，用表格代替了大段雷同的文字，使之更加简洁明了.

“5.4 反函数”在课程标准中列为选学内容，因此教材也进行了标注选学[①]的处理. 本节旨在介绍反函数的概念，以及如何在较简单的情形下(代数意义上方程可求解时)求已知函数的反函数，另外，也较严格地给出了函数与其反函数的图像关于直线

① 本套教材中对选学内容都用 * 号进行了标注，如“*5.4 反函数”.

$y=x$ 对称这一事实的证明.

总的来说，因为本章把函数作为从幂函数、指数函数、对数函数及其他已经学过的函数发展出来的一个数学抽象产物，所以能够抛开函数的具体形式，更加游刃有余地对一般的函数进行研究，并且借助充足的实例来支撑这些研究，加深学生对研究结果的理解.

教学提示

教师应把本章内容视为一个整体，引导学生从变量之间的依赖关系、实数集合之间的对应关系以及函数图像的几何直观等角度整体地认识函数概念；通过梳理函数的奇偶性(对称性)、单调性及最值等内容，认识函数的整体性质；经历运用函数解决实际问题的过程.

函数概念的引入，可以以学生熟悉的例子为背景进行抽象. 例如，从学生过去熟悉的函数定义入手，通过生活或数学中的问题引导学生构建函数的一般概念，体会用对应关系定义函数的必要性，感悟数学抽象的思维方式与作用.

函数单调性的教学，要引导学生正确使用符号语言清晰地刻画函数的性质. 在有关函数定义域、值域以及函数性质的教学过程中，应避免偏题、怪题及烦琐的技巧训练.

函数应用的教学，要引导学生理解如何用函数描述客观世界一些事物的变化规律.

在用函数观点求解一元二次方程和一元二次不等式的教学中，可以先讨论具体的一元二次函数的函数值的变化情况，引导学生发现一元二次函数与一元二次方程的关系，回顾一元二次不等式的概念；然后进一步引导学生探索一般的一元二次函数与一元二次方程、一元二次不等式的关系，归纳总结用一元二次函数解一元二次不等式的方法和步骤.

鼓励学生运用信息技术学习、探索和解决有关函数的问题. 例如，利用计算器或计算机绘制幂函数、指数函数、对数函数、三角函数(在第七章学习相关知识之后)等的图像，探索、比较它们的变化规律，研究函数的性质，求方程的近似解等.

可以组织学生收集、阅读有关函数概念形成与发展的历史资料，撰写相关报告，论述其发展过程、重要结果、主要人物、关键事件及其对人类文明的贡献.

评价建议

在过程性评价中，应关注学生的思维. 例如，学生对函数概念的理解是已经达到了从数集到数集的对应关系这一层次，还是仅仅停留在“表达式”的层面上？另外，对学生的书面表达和口头表达也应密切关注，避免学生无逻辑或似是而非地堆砌事实，以此“解决”数学问题.

在终结性评价中，建议更多地从基本概念的理解层面开展考查. 考查内容不仅应覆盖初中所学的一次函数、反比例函数与二次函数，而且应覆盖前一章所学的幂函数、指数函数与对数函数. 建议以考查具体函数的有关性质为主，以考查抽象的一般函数的性质为辅.

可以从函数概念的理解程度等角度来考查数学抽象的核心素养；在进行和函数有关的运算的过程中，可以考查数学运算的核心素养；数学建模这一核心素养的考查主要在“函数的应用”一节中体现；而逻辑推理、直观想象这两个核心素养的考查在整章中是体现得比较充分的. 例如，在研究函数的基本性质的时候，在判断函数是否具有某些性质的过程中，直观地通过图像来进行分析就依赖于直观想象这一核心素养，而之后进行论证则依赖于逻辑推理这一核心素养.

二、教材分析与教学建议

5.1 函数

教学重点

函数的概念，函数的表示方法：在初中用变量之间的依赖关系描述函数的基础上，用集合语言和对应关系来精确地刻画函数，建立完整的函数概念；充分体会集合语言和对应关系在刻画函数概念中的作用；了解构成函数的几个要素，能在简单情形下求函数的定义域. 在实际情境中，能够根据不同的需要选择恰当的方法(如图像法、列表法、解析法)表示函数；理解函数图像的作用；通过具体实例了解函数的分段表示法，并能简单应用.

内容分析

初中阶段的函数概念强调两个变量之间的依赖关系，高中阶段则进一步强调这是两个变量所在集合中的元素之间的一个对应关系. 初中阶段一般使用 y 关于 x 的一个表达式来表示函数；而高中阶段则明确了函数所体现的对应关系可以用各种不同的方式来表示，两个函数只要将相同的自变量的值对应到了相同的函数值，即使对应关系的表示形式不同，它们就是同一个函数.

例 1 旨在说明如何通过解不等式来求用解析法表示的函数的定义域.

例 2 旨在例示如何证明两个函数是相同的，以及如何说明两个函数不是相同的. 需要指出的是：函数是否相同不取决于它们的具体表示形式，而完全由定义域和对应关系是否相同来决定.

例 3 旨在说明在非常简单的情形下如何求函数的值域. 需要注意的是，“2^x 的取值范围为 $(0,+\infty)$”不宜写成“$2^x>0$”或“$2^x\in(0,+\infty)$”等，因为前者表示集合 $\{y\mid y=2^x,\ x\in\mathbf{R}\}=(0,+\infty)$，而后者表示 $\{y\mid y=2^x,\ x\in\mathbf{R}\}\subseteq(0,+\infty)$，两者的含义是完全不同的. 在教学中，教师应努力纠正学生可能出现的“意思差不多”的不规范表述. 练习 5.1(1)的第 3 题是该例题的延伸，其中第(2)小题是否要求学生说理可根据教学班的具体情况决定.

函数的表示方法中，解析法、列表法、图像法各有优势.

解析法将定义域与值域之间的对应关系用表达式来表示. 它的优点是简明、概括，用代数的方法研究函数的性质比较容易. 图像法借助笛卡尔坐标系刻画两个变量之间的对应关系. 虽然纸上、电脑屏幕上展现出的通常是函数的大致图像，但是它们在反映变量的变化规律时是非常直观的工具. 列表法对于表示定义域是有限集的函数(如经济与金融中数据组成的时间序列)是非常方便的.

教材将以往的“分段函数”的提法改成了函数的“分段表示法”. 这一改动旨在明确“分段”并不是函数的本质属性，而只是为了表示方便所采取的一个方式. 例如，函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是一种分段表示，而它也可以表示成 $y=|x|$，或 $y=\sqrt{x^2}$.

例 4 旨在使学生经历用描点法绘制不熟悉的函数的大致图像的过程.

例 5 旨在使学生理解笛卡尔坐标系中的曲线是一个函数的图像所需满足的充要条件(也称为垂线判别法(vertical line test)).

例 6 是对函数的不同表示方法作一次对比. 同时，也引入了取整函数$y=[x]$，它在实际生产、生活中是常被用到的.

课后阅读“函数概念的形成和发展”介绍了函数概念在历史上的演变过程.

习题 B 组的第 1、2 两题包含了一些初步的分类讨论思想，这对培养学生思维的完整性和严谨性是有好处的.

与“二期课改”教材不同，本教材未将“函数的运算”作为单独一课时的内容，这一方面是因为课程标准中没有提及该内容，另一方面是因为“函数的运算”是一个自然的操作，已定义过数的运算，再定义函数的运算已没有太大的必要. 至于一般函数与线性函数的复合，通过几个例子简要地说明一下此时函数是如何运算的就可以了. 至于函数的运算(如和与积)对函数图像的影响，这与描点法作图没有太大的差别，均属于直观感受与符号表述之间的关系这一范畴.

注意事项

在函数的教学中建议突出定义域及相应的对应关系，淡化值域. 这是因为值域相比于定义域和对应关系，在函数的概念中处于从属地位：一旦定义域和对应关系确定了，值域就随之确定(虽然未必很容易求出). 从初等数学的观点来看，函数的值域问题本质上是带有参数 y 的方程 $f(x)=y$ 何时在定义域中有解的问题；而从更高的观点来看，对于连续函数，求值域的问题还可以依赖于函数的最值及介值性质. 无论从哪种观点来看，对于大部分函数(如幂函数、指数函数、对数函数)的值域，学生目前只能做到“结合函数的图像大体上确定”，而无法严格地求出.

在求函数的值域时，一定要避免简单地利用不等式来得到值域. 例如，函数$y=2x$，$x\in[0,1]$的值域为$[0,2]$，不仅仅是因为 $0\leqslant y\leqslant 2$，还因为$[0,2]$中的每一个值都能作为函数值. 这是教学上的一个难点，也是众多参考书中没有写清楚的部分. 教师如果要深入讲清值域，应在这一点上下功夫，而不是过多地关注求值域的一些技巧.

需要指出的是，函数值域的集合表示为$\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$. 一个数 y_0 在值域中，当且仅当存在 $x\in D$，使得 $y_0=f(x)$；而不是当且仅当对任意给定的 $x\in D$，都成立 $y_0=f(x)$. 这在以往的教学中往往是被忽视的. 类似的例子还有：对于集合$\{x\mid x=2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$，元素 x_0 在集合中是指存在 $k\in\mathbf{Z}$，使得 $x_0=2k\pi$；而对于集合$\{x\mid x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$，元素 x_0 在集合中是指对任意给定的 $k\in\mathbf{Z}$，都成立 $x_0\neq 2k\pi$.

与以往教材通过描点法“用光滑的曲线连接标出的点”的定义方式相区别，本教材给出了函数图像的准确定义：$G=\{(x, y) \mid y=f(x),\ x \in D\}$，为之后研究函数的性质提供了理论上的依托. “用光滑的曲线连接标出的点”在本教材中仅仅是绘制（足够光滑的）函数的大致图像的一个方法，由于有很多不光滑的函数存在，因此一概说“用光滑的曲线连接”显得过于笼统.

教学建议

因为一些特殊的函数（如幂函数、指数函数、对数函数）及其基本性质在上一章中已经学习过，所以在引入函数的概念以及学习函数的基本性质时，要更多地利用这些已经学过的函数作为素材，避免“空对空”地进行函数概念的教学. 例如，在进行了函数概念的教学之后，可以用多个具体函数的例子向学生解释函数这一概念及其相关概念（如定义域、对应关系、值域等）.

在进行了函数概念的教学之后，可以让学生举出一些生活中函数的实例，加深学生对函数概念的理解，并进一步推动学生用数学的眼光观察世界.

本节旨在介绍函数的一般概念，一共只安排了 2 个课时，目的是使学生明了关于函数的一些基本概念与术语，不宜多作展开.

5.2 函数的基本性质

教学重点

函数的奇偶性，函数的单调性，函数的最值：理解偶函数与奇函数的概念与图像特征，会在简单情形下利用定义判断函数的奇偶性. 理解单调函数、单调区间的概念与图像特征，会在简单情形下利用定义判断函数的单调性. 理解函数最值的概念，会在简单情形下求函数的最值.

内容分析

偶函数的引入来自于函数图像的几何直观——图像关于 y 轴成轴对称. 由于初中关于“轴对称”缺少严格的、可以用来进行代数检验的定义，因此在本教材中用一句话点明了轴对称的实质. 同样地，在引入奇函数时也给出了“中心对称”的严格定义.

在给出偶函数的定义之前，教材从代数的角度先揭示了“函数的图像关于 y 轴成轴对称”时，该函数应满足的一个充要条件. 这比“图像对称”更容易验证，从而就可以用符号语言来给出偶函数的定义.

例 1 和例 2 旨在例示如何在简单的情形下证明一个函数是偶(奇)函数.

例 3 旨在通过分析来说明的确存在既是奇函数又是偶函数的函数. 例 3 的分析过程比结论更加重要. 另外，如果没有“定义域为 $\mathbf{R}$”这一条件，那么任何一个函数值恒为零、定义域关于原点对称的函数都满足本例的要求.

例 4 中，第(1)小题旨在说明可以通过举例的方式说明一个等式不恒成立，从而说明一个函数不是奇(偶)函数. 第(2)小题旨在例示如何证明一个用分段表示法表示的函数是奇(偶)函数. 在第(2)小题的证明过程中，根据定义，我们既要验证当 $x>0$ 时，$g(-x)=-g(x)$成立，也要验证当 $x<0$ 时，$g(-x)=-g(x)$成立. 实际上，当定义域关于原点对称时，验证了前者，后者必然自动成立，但这应在学生对奇偶性有进一步的理解之后再去探讨，初学奇偶性的时候仍应当按照定义依次说明理由.

例 5 是一个带有参数的问题. 教材“先处理必要性”，通过代入定义域中的数去寻找参数必须满足的条件，进而在得到参数的有限个可能值之后，再去验证充分性. 这一过程对于学生更好地认识到“函数不仅仅是表达式，也是数集到数集的对应关系”是有益的.

例 6 旨在呈现奇偶性在函数性质研究中的作用. 两个问题层层递进：第(1)小题是求具体的函数值，第(2)小题是求函数的表达式. 第(2)小题的解答的第一段是在寻求一个必要条件(如果这样的奇函数存在，那么其表达式只能是怎样的)，教学时建议将自变量 x 设在 $x<0$ 处，这样得到表达式更加方便；第一段之后的部分是验证第一段所求出的函数的确是奇函数. 相应的边框解释了例 4 中未提及的“当定义域关于原点对称时，验证了 $x>0$ 时等式成立之后，$x<0$ 时的相应等式是自动成立的”，实际上是例 4 的一种深化.

单调性定义中的“任意”两字非常重要，它恰如其分地表示了图像上“y 随 x 的增大而增大(减小)”的特性.

例 7 给出了在简单情形下证明函数单调性的规范表达. 它可以被视为对初中所学的基于函数图像及图像变换的二次函数的增减性的一个更加准确的再认识.

例 8 是函数单调性的判断及证明. 需要指出的是，在证明函数的单调性时，并不一定要使用作差的方法来比较函数值的大小.

在正文中，单调区间并没有“最大”的要求，对此，在边框中给了一个解释.

例 9 旨在说明在研究函数单调性时，可能会遇到在不同的区间上有不同单调性的

函数.

例 10 旨在说明奇偶性在单调性的研究中能发挥重要的作用：只要知道函数在“一半”的定义域上的单调性，就能够自然地得到其在“另一半”上的结论. 在讲解例 10 时可以适当地结合函数图像的几何直观，方便学生理解证明的实质.

练习 5.2(4)的第 1 题显示了函数图像的几何直观对判断函数单调性所带来的帮助.

练习 5.2(4)的第 3 题中的第(2)小题旨在指出单调性相同的区间如有公共元素是可以连接起来的. 此题的求解过程比结论更重要，因为它能很好地体现“分类讨论”这一处理数学问题的重要思想.

例 11 旨在说明如何用配方法解决二次函数的最值问题.

例 12 与例 13 旨在说明如何利用单调性来解决函数的最值问题. 在解决例 13 时，借助函数的图像(这里当 a 变化时，函数的图像是一个动态的变化过程)是十分有利的，教师在教学时应注意把握合适的时机培养学生直观想象素养. 与之相匹配的练习 5.2(5)的第 3 题，对于初学最值概念的学生而言是有一定难度的，教师应启发学生借助函数的图像来思考.

注意事项

教师在教学时应注意指出，“图像关于 y 轴成轴对称”与“对于定义域 D 中任意给定的实数 x，都有 $-x\in D$，并且 $f(-x)=f(x)$”是函数的同一个特性的两种不同的表述方式. 同样地，“图像关于原点成中心对称”与“对于定义域 D 中任意给定的实数 x，都有 $-x\in D$，并且 $f(-x)=-f(x)$”也是函数的同一个特性的两种不同的表述方式. 在这两组表述中，前者是一种直观的描述，而后者是用符号语言对同一特性的描述. 教师在教学时既要尊重和保护学生对于对称这一概念的直观认识，又要注意从直观中抽象出符号语言的描述，因为符号语言的描述更容易用数学方法检验. 这也体现了核心素养中“数学抽象”的要求.

处理含参数的函数的奇偶性问题时，应尽量避免把必要性和充分性混为一谈. 这是因为学生对于含有参数的“恒等于”的理解可能是片面的，往往只考虑恒等式成立的充分条件，而不去考虑其必要性. 例如，绝大部分学生会天然地认为“对任意 $x\in D$，都成立 $ax=x$”和“$a=1$”是等价的，却忽视了当 $D=\{0\}$ 时，前者仅仅是后者的必要条件，而不是充分条件. 这是因为绝大部分学生对函数的认识还是停留在“表达式”的层

面，将 $ax=x$ 中的等号理解为两个多项式的相等. 而这恰恰是在函数的教学中需要认真思考的.

为了和大学数学学习接轨，教材中区分了“严格单调”和“单调”这两个概念. 以往高中教材中的“增函数、减函数”就是本教材中的“严格增函数、严格减函数”；而本教材中的“增函数、减函数”的概念比之前更加宽泛一些，它允许函数在一些区间上是常数.

在求函数的最值时，比较常见的处理方式是借助不等式，或者借助函数的单调性. 需要注意的是：根据最大(小)值的定义，说明某一个数是函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的最大(小)值，除了要说明值域中的每一个数都不大于(小于)该数之外，还要说明这个数确实是一个函数值. 例如，为了说明 3 是函数 $y=x^2+3$ 的最小值，除了说明 $x^2+3\geqslant 3$ 恒成立外，还需要说明存在 $x=0\in\mathbf{R}$，使得 $x^2+3=3$. 这一存在性可以通过求出自变量的具体值来达到，在某些场合下也可以通过一些其他的方式来实现. 我们可以协助学生分辨“能取到”与“在何时取到”之间的区别，后者是更强的要求. 在求最值时，除非被要求指出“在何时取到”，否则仅需要说明“能取到”就可以了.

在解决与函数有关的问题时，本教材提倡采用“数形结合”的方法. 然而在实际操作“数形结合”时，图像背后所蕴含的函数的性质必须是充分、且可以用语言描述清楚的，仅靠图像大致观察得到的结论在数学上很可能是站不住脚的.

教学建议

因为有了大量较为具体的函数作为实例，所以本教材对函数基本性质的概括，是建立在已经学习过的函数的有关性质的基础上的. 例如，函数的奇偶性是从二次函数与幂函数中概括的，函数的单调性是从自由落体运动等实际的变化过程与指数函数、对数函数中概括的. 在教学时应注意遵循这种“从特殊到一般”的处理方式.

奇函数的定义方式和偶函数的定义方式是完全类似的，鼓励教师在初步完成偶函数概念的教学之后，尝试让学生自主地给出奇函数(图像关于原点成中心对称的函数)用符号语言表示的定义.

学习奇偶性是为了能够利用“对称”这一工具更方便地研究一些函数的性质. 但是在初学的时候，不建议教师将其他的对称性(如关于直线 $x=1$ 对称等)用符号语言的表示直接告知学生，但这可以作为一个探究问题留给学生自行思考与解决.

在分析较为复杂的函数的性质的时候，注意到函数是数集到数集的一种对应关

系，“尝试—猜想—证明”在研究函数性质的过程中是非常重要的. 在进行尝试的时候，教师可以向学生有意识地普及使用计算器的一些方法，如列表等.

在开展单调性定义的教学时，教师应使学生明确单调性是针对定义域中的某个区间而言的，是一个相对局部的性质.

在例 7 之后，教材用了将近一页的篇幅解决了一般二次函数的单调性问题. 这一结论是学生在初中就通过对抛物线的直观认识而熟知的，这里为这一直观认识提供了一个准确的证明. 教师可以尝试让学生自己完成这一证明过程.

不宜将例 8 的要求上升到对一般复合函数的单调性判断上. 简单复合函数的单调性的分析过程远比所谓“同增异减”的结论重要.

在利用单调性求函数最值的问题中，如果定义域中带有参数，建议函数的表达式应尽可能地简单，避免将判断单调性的难点与分类讨论的难点叠加在一起.

5.3 函数的应用

教学重点

实际生活中的函数模型，用函数观点求解方程与不等式，二分法求函数的近似零点：理解函数模型是描述客观世界中变量关系和规律的一个重要数学语言和工具；在实际情境中，会选择合适的函数类型刻画现实问题中有关量的变化规律. 了解函数的零点与方程的解的关系；在较简单的情形下，能借助函数的性质求解方程与不等式，能借助函数的图像解释求解的过程. 了解连续函数的零点存在定理，理解用二分法求方程近似解的思想及算法.

内容分析

“函数的应用”包含两部分内容：一是函数这一工具在生产、生活中的应用；二是函数作为一个数学概念，在其他数学研究中的应用. 可以看到，无论是哪种情况，引入适当的函数都可以使我们对所考察问题的认识更加深入.

例 1 和例 2 是来自平面几何的例子. 例 1 提出了定义域方面的要求. 例 2 由于在不同的情形下对应关系的来源有区别，最后得到的函数是通过分段表示法来表示的. 解决例 2 中的问题之后，可以进一步从直观上探寻函数的一些性质(如单调性)，并利用函数的分段表达式来验证直观上的发现. 这可以进一步形成“利用函数可以定量地解释某些现象”的观念，培养学生的数学抽象素养.

例 3 旨在通过一个简单的例题给出建模过程的一个范式.

例 4 的建模过程比较困难，需要用到物理学中的知识. 另外，在解答过程中如何为所建立的数学模型说清道理，也是例 4 想要呈现的一个重要方面.

在进行零点这一概念的教学的时候，建议指出零点本质上不是点，而是数(当然，这个数在数轴上可表示为相应的点). 要向学生阐明函数的零点与相应方程的解是同一个事物的两种不同的说法.

例 5 旨在呈现如何利用函数的单调性证明一个方程无解. 该方法也可以用于确定一个方程的解的大致范围.

在例 5 之后，教材用了一页多的篇幅介绍如何借助二次函数的性质(通过二次函数的图像来呈现)求解一元二次不等式. 此前，在教材的第二章中已经介绍了如何通过因式分解求解一元二次不等式(在判别式非负的情形下)，并给出了一般情况下的解集；以及如何通过配方法求解一元二次不等式(在判别式为负数的情形下). 此处重提一元二次不等式，一方面是为了使学生学会利用函数性质，更便捷地进行一元二次不等式的求解；另一方面也为利用函数求解更一般的不等式作铺垫.

例 6 展示了如何利用函数的单调性求解更为一般的不等式. 在教学时，求解不等式建议与函数的图像结合起来，使学生能更好地明白单调性的用处. 对于解答中的“当且仅当”，教师应引导学生清楚理解“当且仅当”的含义：“根据函数 $y=x^4+x$ 在区间$(0,+\infty)$上的单调性，当 $x>1$ 时，不等式成立；当 $x\leqslant 1$ 时，不等式不成立.”其中后一点尤其重要，却恰恰是容易忽略的.

本节的最后一课时介绍了两个较为重要的事实：一是连续函数的零点存在定理，二是求连续函数零点的二分法.

本节呈现了一个建模的过程，在求解模型时介绍了二分法求近似零点的思想. 这是数学在信息时代中重要作用的一个体现. 虽然二分法的提出已有久远的历史，但是其“不断重复类似过程，愈来愈逼近”的思想恰恰体现了信息时代借助计算机解决问题的算法思想.

注意事项

函数和许多其他数学分支有着非常密切的联系. 对于高一年级的学生来说，在解方程和解不等式时原本使用的基本是代数的方法，即通过因式分解、配方等方法求解. 这些求解的过程并没有把含有未知数 x 的代数式看成是 x 的函数. 如果将方程或

不等式两边的代数式看成是未知数 x 的函数，就可以借助函数的性质来求解方程和不等式了.

在利用二次函数求解一元二次不等式的过程中，当判别式 $\Delta>0$ 时，所依赖的函数性质可以不是单调性，而只是函数值的符号，因此在求解时甚至都不需要作出函数的大致图像，只需要作出符号的示意图，明确 x 在取不同值时 y 的符号即可.

连续函数这一概念依赖于函数的极限，只能直观上用“图像是连续不断的曲线”这一模糊的概念来陈述，但是这并不是连续函数的精确定义. 教材第 143 页的边框中不加证明地给出了一些常见的连续函数，而连续函数的四则运算与复合所得的函数在定义域的任一子区间上仍然是连续的.

零点存在定理之所以重要，一是因为它能指导用二分法求函数的零点，保证这一算法总是能够使零点的范围被限制到一个足够小的区间内；二是因为结合零点存在定理求连续函数的值域时，只需要求得最大值和最小值，就能说明以两者为端点的区间内的每一个值都能取到，从而求得值域. 例如，函数 $y=x^5+x+1$，$x\in[1,2]$在定义域上是连续的严格增函数，其最小值为 3，最大值为 35. 如果没有零点存在定理，我们只能得知该函数的值域是$[3,35]$的一个子集，但是借助零点存在定理，我们知道$[3,35]$中的每一个值都能作为函数值，从而值域就是$[3,35]$. 由此可见，零点存在定理对求值域带来了一种新的、也更为便捷的视角.

需要注意的是，零点存在定理中的条件 $f(a)\cdot f(b)<0$ 只是连续函数在(a,b)上存在零点的一个充分条件，但并不是必要的.

直观上来说，零点存在定理是“显然”成立的，但是严格来说其成立的原因需要追溯到实数的结构，这不是能向高中学生简单地解释清楚的.

教学建议

很多来自生产、生活中的问题，所建立的数学模型是一个相应的函数模型. 在建立函数模型时，要合理地选取自变量. 在将实际问题抽象为用数学语言表述的数学问题时，对学生阅读文字材料的能力要提出一定的要求，教师不宜越俎代庖.

在用函数观点审视一元二次不等式的求解之后，应引导学生对所学过的三种解一元二次不等式的方法(因式分解、配方、利用二次函数)进行比较和评估.

在进行二分法求函数零点的近似值教学时，建议充分发挥计算器的作用，不宜依靠纸笔进行重复的计算. 即使依靠计算器，也不宜在此处安排过多的例题与习题，只需极少量的能够说明问题的例题与习题，让学生能感受到二分法的作用就足够了. 例

如，教材第 144 页的边框中的思考，鼓励有兴趣和特长的学生进行编程实验，应该是一个可以面向部分学生开展的数学活动.

5.4 (选学)反函数

教学重点

反函数的概念，反函数的图像：理解反函数的概念，会在较简单的情形下求反函数. 知道函数与其反函数的图像之间的对称关系，并理解形成这种关系的原因.

内容分析

例 1 旨在体现函数与其反函数的对应关系，强化对“如果 $f^{-1}(x)=y$，那么 $f(y)=x$”的理解.

例 2 通过由简单到复杂的三个函数，给出求反函数的一般过程.

练习 5.4(1)的第 3 题是求一个分段表示的函数的反函数. 根据反函数的概念，这样的函数在求反函数时也应当分段来求.

在证明函数与其反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称时，教材借助“垂直平分线是到线段的两端点距离相等的点的集合”这一几何性质，证明了点(a,b)与点(b,a)的垂直平分线是直线 $y=x$，因此这两个点关于直线 $y=x$ 对称. 进而，利用这个结论证明了在同一平面直角坐标系中，函数与其反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 3 通过一个特殊的例子，指出了一些幂函数的反函数也是幂函数，并提示了其幂指数之间的关系.

例 4 的求解利用了函数与其反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称这一事实(这反映了反函数的对应关系与原来函数的对应关系恰好是进行了自变量与函数值所相应变量之间的交换，这实际上也是两者图像关于直线 $y=x$ 对称的原因所在)，不需要求其反函数，通过解方程就能得到 a 和 b 的值.

练习 5.4(2)的第 3 题是为了澄清 $y=f^{-1}(x+1)$的确切含义，它是这样一个对应关系：自变量是 x，函数值是将 $x+1$ 代入函数 $y=f^{-1}(x)$所得到的结果，而不是函数 $y=f(x+1)$的反函数. 实际上，$y=f(x+1)$的反函数是 $y=f^{-1}(x)-1$.

注意事项

反函数是构造新的函数的重要方式，在很多数学以及实际生活的应用中都涉及反函数. 例如，对数运算与指数运算互为逆运算，它们分别对应的对数函数与指数函数

就互为反函数. 今后学习解三角形时，为了表示一些已知其三角函数值、但不是特殊角的角的大小，也必须使用反函数来表示这些角. 对于呈正态分布的随机变量，由概率值求随机变量的值的过程中，也需要用到累积分布函数的反函数.

证明函数与其反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称的过程中，利用了“反函数的反函数必是原来的函数本身”这一性质，从而减少了一半的工作量，其中体现了化归这一重要的数学思想.

教学建议

给出反函数的概念之后，不可避免地应讨论怎样的函数才有反函数. 事实上，根据反函数的定义，“不同的自变量的值不能对应到同一个函数值”这一特性是一个函数有反函数的充要条件. 需要注意的是，教材中提到的“严格增函数与严格减函数均存在反函数”，不能反过来理解为“存在反函数的一定是严格增函数或严格减函数”，如函数 $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 是存在反函数的，但它在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上既不是严格增函数，也不是严格减函数.

函数与其反函数的性质之间的联系在“拓展与思考”的第 4 题中有所反映，学有余力的学生可以对此进行一些探讨.

三、参考答案或提示

5.1 函数

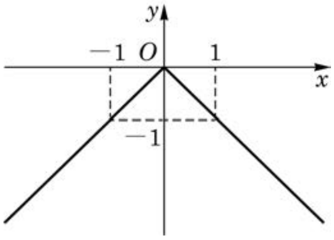
练习 5.1(1)

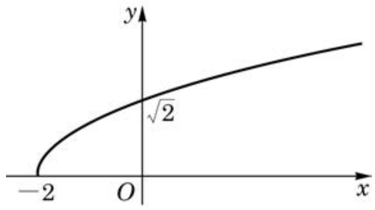
1. (1) $(-\infty,\ -3]\cup[2,\ +\infty)$.　　(2) $\{x\mid x\geqslant 1,\ x\neq 2\}$.

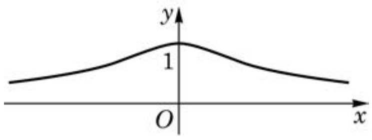
2. C.

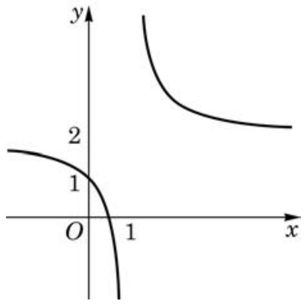
3. (1) $[1,+\infty)$.　　(2) $\left[-\dfrac{1}{3},1\right]$.

练习 5.1(2)

1. (1) 

(2) 

(3) 

(4) 

2. $y=\begin{cases}3x+10, & -3\leqslant x\leqslant -2,\\ 4, & -2<x\leqslant 2,\\ -3x+10, & 2<x\leqslant 3.\end{cases}$

习题 5.1

A 组

1. (1) $\{x\mid x\in\mathbf{R},\ x\neq 1,\ x\neq -3\}$.　(2) $[-4,1]$.　(3) $[2,+\infty)$.

(4) $(-2,-1)\cup(-1,5)$.

2. 6.

3. (1) $[0,1]\cup\{2\}$.　(2) $[0,2]$.　(3) $[-1,3]$.

B 组

1. (1) 当 $a>0$ 时，$D=\{x\mid x\in\mathbf{R},\ x\neq -a,\ x\neq a\}$；当 $a=0$ 时，$D=\{x\mid x\in\mathbf{R},\ x\neq 0\}$；当 $a<0$ 时，$D=\mathbf{R}$.

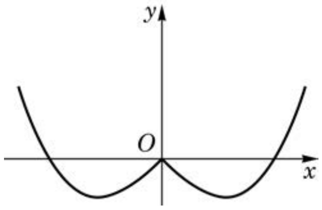
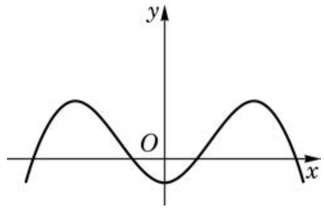
(2) 当 $a>0$ 时，$D=(-\infty,0]\cup[a,+\infty)$；当 $a=0$ 时，$D=\mathbf{R}$；当 $a<0$ 时，$D=(-\infty,a]\cup[0,+\infty)$.

2. $f(2)=20$，$f(-4)=-56$，$f(-a)=\begin{cases}2a^2-6a, & a\leqslant 0,\\ -2a^2-6a, & a>0.\end{cases}$

5.2　函数的基本性质

练习 5.2(1)

1. 都不是，0 不一定在定义域中.

2.（1）　　（2）

3.（1）函数 $y=2^x-2^{-x}$ 的定义域为 **R**. 在 **R** 中任取一个实数 x，都有 $-x\in$ **R**. 记 $f(x)=2^x-2^{-x}$，则有 $f(-x)=2^{-x}-2^x=-(2^x-2^{-x})=-f(x)$. 因此 $y=2^x-2^{-x}$ 是奇函数.

（2）类似(1)，证明略.

练习 5.2(2)

1.（1）偶函数，理由略.

（2）奇函数，理由略.

（3）既不是奇函数，又不是偶函数，因为-3在定义域中，而3不然.

（4）既是奇函数又是偶函数，理由略.

2.（1）不存在，因1在值域中，而-1不然.　　（2）存在，取 $a=0$ 即满足要求.

练习 5.2(3)

1. 不正确. 例如，$y=f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{2}, & x>1 \end{cases}$ 满足条件，但它在$[0,+\infty)$上不是严格增函数.

2. 证明略.

3. $y=x^2-10x$，(答案不唯一)理由略.

练习 5.2(4)

1.（1）单调区间有$[-3,-2]$，$[-2,1]$，$[1,2]$，$[2,3]$. 该函数在区间$[-3,-2]$和$[1,2]$上是严格减函数，在$[-2,1]$和$[2,3]$上是严格增函数.

（2）单调区间有 $\left[-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$. 该函数在区间 $\left[-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right]$ 和 $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 上是严格增函数，在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是严格减函数.

2. $y=\begin{cases} -x-1, & -2\leqslant x\leqslant -1, \\ x+1, & -1\leqslant x\leqslant 2. \end{cases}$ 设 x_1、x_2 是区间$[-2,-1]$上任意给定的两个实

数，且 $x_1<x_2$，有 $y_1=-x_1-1>-x_2-1=y_2$. 类似地，设 x_3、x_4 是区间 $[-1,2]$ 上任意给定的两个实数，且 $x_3<x_4$，有 $y_3=x_3+1<x_4+1=y_4$.

因此函数 $y=|x+1|$，$x\in[-2,2]$ 在区间 $[-2,-1]$ 上是严格减函数，在区间 $[-1,2]$ 上是严格增函数.

3. (1) 设 x_1、x_2 是区间 $[0,3)$ 上任意给定的两个实数，且 $x_1<x_2$，则 $-x_1$、$-x_2\in(-3,0]$，且 $-x_1>-x_2$. 根据函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-3,0]$ 上的单调性，可得 $f(-x_1)>f(-x_2)$. 又根据 $y=f(x)$ 的奇偶性，可得 $-f(x_1)=f(-x_1)>f(-x_2)=-f(x_2)$，因而 $f(x_1)<f(x_2)$.

因此，$y=f(x)$ 在区间 $[0,3)$ 上是严格增函数.

(2) $y=f(x)$ 在区间 $(-3,3)$ 上也是严格增函数.

提示：对自变量的值分三类情况进行讨论.

练习 5.2(5)

1. 最大值为 $\frac{1}{2}$，最小值为 $\frac{1}{8}$.

2. (1) 最大值为 1，最小值不存在.　　(2) 最大值为 1，最小值为 -3.

(3) 最大值不存在，最小值为 -8.　　(4) 最大值为 0，最小值为 -6.

3. 当 $-2<a\leqslant 2$ 时，该函数的最大值为 5；当 $a>2$ 时，该函数的最大值为 a^2+1.

习题 5.2

A 组

1. D.

2. (1) 证明略.　　(2) 证明略.

3. (1) 证明略.　　(2) 证明略.

4. (1) 奇函数，理由略.

(2) 偶函数，理由略.

(3) 既不是奇函数，又不是偶函数，理由略.

(4) 既不是奇函数，又不是偶函数，因为定义域中含有 1，而不含有 -1.

(5) 奇函数，理由略.

5. 设 x_1、x_2 是区间 $(-\infty,0)$ 上任意给定的两个实数，且 $x_1<x_2$，则 $-x_1>-x_2>0$，因而 $\frac{1}{-x_1}<\frac{1}{-x_2}$，即 $-\frac{1}{x_1}<-\frac{1}{x_2}$. 由不等式的性质，可知 $x_1-\frac{1}{x_1}<$

$x_2-\dfrac{1}{x_2}$，因此 $y=x-\dfrac{1}{x}$，$x\in(-\infty,0)$是严格增函数.

6. 设 x_1、x_2 是定义域$(-\infty,1)$上任意给定的两个实数，且 $x_1<x_2$. 则 $1-x_1>1-x_2>0$. 由对数函数的性质，可知 $\lg(1-x_1)>\lg(1-x_2)$. 因此函数 $y=\lg(1-x)$ 是严格减函数.

7.（1）最小值为-6，当且仅当 $x=2$ 时取到，不存在最大值.

（2）最大值为 3，当且仅当 $x=1$ 时取到，不存在最小值.

（3）最大值为 1，当且仅当 $x=-2$ 时取到；最小值为-8，当且仅当 $x=1$ 时取到.

（4）最大值为 5，当且仅当 $x=-2$ 时取到；最小值为-3，当且仅当 $x=0$ 时取到.

8. 最大值与最小值分别是-2 与-3.

9. 最大值是 8.

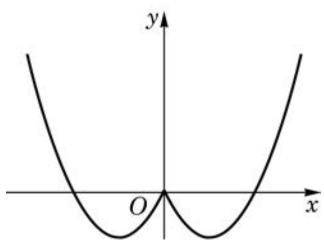
B 组

1. $a=0$，$b=-2$.

2.（1）奇函数，理由略.　　（2）偶函数，理由略.

3. $|x+1|$.（答案不唯一）

4. 大致图像如下：



其定义域为 **R**；它是一个偶函数；在区间$(-\infty,-1]$以及$[0,1]$上是严格减函数，在区间$[-1,0]$以及$[1,+\infty)$上是严格增函数；最小值为-1.

5. 该函数的定义域为 **R**.

记 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，对定义域 **R** 中的任意给定的实数 x，都有 $-x\in\mathbf{R}$，并且

$f(-x)=\dfrac{1}{1+(-x)^2}=\dfrac{1}{1+x^2}=f(x)$，因此该函数是偶函数.

设 x_1、x_2 是区间$[0,+\infty)$上任意给定的两个实数，且 $x_1<x_2$，有 $0<1+x_1^2<1+x_2^2$，故$\dfrac{1}{1+x_1^2}>\dfrac{1}{1+x_2^2}$，即 $f(x_1)>f(x_2)$. 因此该函数在区间$[0,+\infty)$上是严格减函数. 设 x_1、x_2 是区间$(-\infty,0]$上任意取定的两个实数，且 $x_1<x_2$，有 $1+x_1^2>1+x_2^2>0$，故$\dfrac{1}{1+x_1^2}<\dfrac{1}{1+x_2^2}$，即 $f(x_1)<f(x_2)$. 因此该函数在区间$(-\infty,0]$上是严格增函数.

根据单调性，可知该函数的最大值为 1.

6. $[2,+\infty)$.

7. 当 $t<2$ 时，该函数的最小值为 0；当 $2\leqslant t<4$ 时，该函数的最小值为 $2^{t+1}-8$.

5.3 函数的应用

练习 5.3(1)

1. $y=6-\dfrac{1}{2}x$，$x\in(0,6)$.

2. $S=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2, & 0<t\leqslant 1,\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2+2\sqrt{3}t-\sqrt{3}, & 1<t<2.\end{cases}$

3. $y=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 500,\\ 0.9x, & 500<x\leqslant 1\,000,\\ 0.7x+200, & x>1\,000.\end{cases}$

练习 5.3(2)

1. 类似教材第 140～141 页内容，当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，解集为$(-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)$(其中 x_1 及 $x_2(x_1<x_2)$是对应的一元二次方程的两根)；当 $\Delta=b^2-4ac\leqslant 0$ 时，解集为 $\mathbf{R}$.

2. $(1,+\infty)$.

练习 5.3(3)

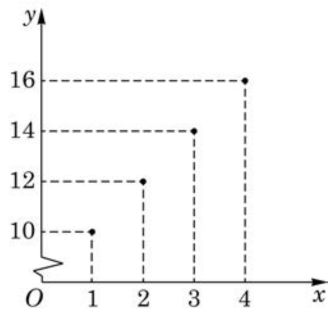
1. 可能有零点. 例如，$f(x)=x^2-1$，当 $a=-2$，$b=2$ 时，$f(a)f(b)>0$，但是在区间$(-2,2)$上 $y=f(x)$有两个零点.

2. 1.6.

习题 5.3

A 组

1. 定义域为$\{1,2,3,4\}$，其大致图像如下：



2. $y=\begin{cases}0.2, & 0<t\leqslant 3,\\ 0.1k, & k<t\leqslant k+1,\ k\geqslant 3,\ k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$

3. 4.

4. 0.5.

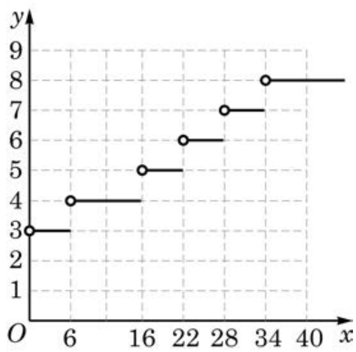
B 组

1.（1）$P=\dfrac{2}{3}v^2$，$0<v\leqslant 48$.

（2）$y=(P+864)\cdot\dfrac{100}{v}=\dfrac{200}{3}v+\dfrac{86\,400}{v}$，$0<v\leqslant 48$.

（3）当船速为 36 海里/时的时候，船从甲地到乙地所需的总费用最少.

2.（1）大致图像如下：



（2）不能超过 22 km.

3. $y=-200x+10\,600$，$x\in\{4,5,6,7,8,9,10\}$.

4. 提示：证明该函数是增函数，进而利用 $x=7$ 及 $x=8$ 处的函数值证明结论.

5. 当 $x<0$ 时，$\dfrac{2}{x^2}>0$，而 $3x-1<-1<0$，因此$(-\infty,0)$中的一切实数都是该不等式的解.

$x=0$ 不是该不等式的解.

当 $x>0$ 时，$y=\dfrac{2}{x^2}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格减函数，而 $y=3x-1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格增函数，且当 $x=1$ 时，$y=\dfrac{2}{x^2}$ 与 $y=3x-1$ 的函数值相等：$\dfrac{2}{1^2}=3\times1-1$. 因此，当 $0<x<1$ 时，$\dfrac{2}{x^2}>2>3x-1$，而当 $x>1$ 时，$\dfrac{2}{x^2}<2<3x-1$.

综上所述，该不等式的解集为 $(-\infty,0)\cup(0,1]$.

*5.4 反函数

练习 5.4(1)

1. $[0,+\infty)$.

2. (1) $y=\dfrac{x-2}{3}$.　(2) $y=-\dfrac{3}{x}$.　(3) $y=-\sqrt{x}$.　(4) $y=(x-1)^2$，$x\geqslant1$.

3. 存在反函数 $y=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant0,\\ 1-x, & 0<x<1.\end{cases}$

练习 5.4(2)

1. 不存在反函数，因为 $x=1$ 和 $x=-1$ 时函数值相等.

2. C.

3. 可以不互为反函数，如 $f(x)=2x$ 时.

习题 5.4

A 组

1. $f(1)=f(3)=-8$，因此该函数不存在反函数.

2. (1) $y=-\sqrt[3]{x}$.　(2) $y=\dfrac{2x}{1-x}$.　(3) $y=-\sqrt{x-1}$，$x>1$.

3. (1) $y=\lg(x-1)$.　(2) $y=2^x-1$.　(3) $y=2^{x-1}$.

4. 16.

5. 1.

复习题

A 组

1. $(-\infty,-1]\cup[1,2)\cup(2,+\infty)$.

2. (1) 偶函数，理由略.

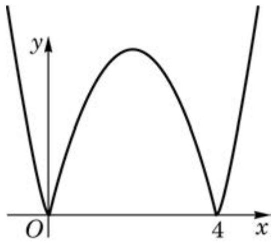
（2）奇函数，理由略.

（3）当 $k=-2$ 时，是偶函数，理由略；当 $k\neq-2$ 时，既不是奇函数又不是偶函数，因为定义域不关于原点对称.

3. $m=1$，$n=2$.

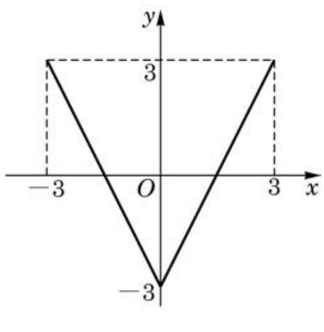
4. 在区间 $(-\infty,-2]$ 和区间 $[2,+\infty)$ 上是严格增函数，而在区间 $[-2,0)$ 和区间 $(0,2]$ 上是严格减函数.

5.（1）大致图像如下：



在区间 $(-\infty,0]$ 和区间 $[2,4]$ 上是严格减函数，在区间 $[0,2]$ 和区间 $[4,+\infty)$ 上是严格增函数.

（2）大致图像如下：



在区间 $(-\infty,0]$ 上是严格减函数，在区间 $[0,+\infty)$ 上是严格增函数.

6. $f(-1)>f(2)$.

7. $k=-4$ 时，$(\alpha+1)^2+(\beta+1)^2$ 取到最小值.

8. $y=\begin{cases}0.8(k+1), & 20k<x\leqslant 20(k+1),\ k\in\{0,1,2,3,4\},\\ 4+2m, & 100m<x\leqslant 100(m+1),\ m\in\{1,2,3,\cdots,19\}.\end{cases}$

50 g 重的邮件收 2.4 元邮费，500 g 重的邮件收 12 元邮费.

9. $[1,19)$.

B 组

1. 奇函数，从定义域和函数值两个角度进行说理.

2. $(-\infty,-13]$.

3. -1 或 2.

4. -4.

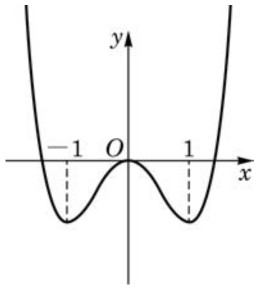
5. $(0,1)$.

6. 1.

拓展与思考

1. 在区间$(-\infty,-1)$，$(-1,1)$，$(1,+\infty)$上分别是严格增函数.

2. 大致图像如下：



猜测该函数在区间$(-\infty,-1]$和区间$[0,1]$上是严格减函数，而在区间$[-1,0]$和$[1,+\infty)$上为严格增函数.

对任意给定的两个实数 x_1、x_2，都有 $y_1-y_2=(x_1^2-1)^2-(x_2^2-1)^2=(x_1^2-x_2^2)(x_1^2+x_2^2-2)=(x_1-x_2)(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2-2)$. 当 $x_1<x_2\leqslant-1$ 时，$x_1-x_2<0$，$x_1+x_2<0$，$x_1^2+x_2^2-2>0$，因此 $y_1>y_2$，该函数在区间$(-\infty,-1]$上为严格减函数.

其余区间上单调性的证明从略.

3. $f(x)=x^2+|x-1|+|x+1|+3$，$g(x)=|x-1|-|x+1|$.

4. (1) 在函数 $y=f^{-1}(x)$的定义域 $f(\mathbf{R})$中任取一个数 x，因 $y=f^{-1}(x)$的定义域是 $y=f(x)$的值域，故存在 $y=f(x)$的定义域 $\mathbf{R}$ 中的一个数 t，使得 $x=f(t)$.

因 $y=f(x)$是奇函数，故 $f(-t)=-f(t)=-x\in f(\mathbf{R})$，从而$-x$ 也在 $y=f^{-1}(x)$的定义域中. 由于 $f^{-1}(x)=t$，且 $f^{-1}(-x)=-t$，它们互为相反数，因此 $y=f^{-1}(x)$是奇函数.

(2) 对于 $f(\mathbf{R})$ 中的任意给定的两个实数 x_1、x_2，设 $t_1=f^{-1}(x_1)$，$t_2=f^{-1}(x_2)$，即 $f(t_1)=x_1$，$f(t_2)=x_2$. 如果 $y=f(x)$ 是严格增函数，那么当 $x_1<x_2$ 时，$f(t_1)<f(t_2)$.

如果 $t_1\geqslant t_2$，根据 f 的单调性得 $f(t_1)\geqslant f(t_2)$，与 $f(t_1)<f(t_2)$ 矛盾，因此必有 $t_1<t_2$，即 $f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$. 这说明 $y=f^{-1}(x)$ 是一个严格增函数.

四、相关阅读材料

阅读材料

在 20 世纪之初，国际上发生了第一次影响比较大的数学教育改革运动，称为“贝利一克莱因运动”. 其间，英国皇家理科大学的数学家贝利(J. Perry，1850—1920)发表了“论数学教学”的著名演讲，提出了“数学教育应该面向大众”“数学教育必须重视应用”的思想. 与此同时，著名数学家克莱因(F. Klein，1849—1925)也在各种场合发表自己对数学教育的看法. 克莱因认为中小学的数学课程应该以函数为纲，并提出了所谓的“米兰大纲”：

教材的选择、排列需适应学生心理的自然发展；

融合数学的各分科，加强与其他学科的密切联系；

不过分强调形式的训练；

强调实用的方面；

将养成函数思想与空间观察能力作为数学教学的基础.

为了提高中学数学教师的数学素养，克莱因根据自己在哥廷根大学多年为德国中学数学教师及在校学生开设的讲座，撰写了一套基础数学普及读物《高观点下的初等数学》. 全书共分 3 卷，第一卷：算术、代数、分析；第二卷：几何；第三卷：精确数学与近似数学. 该书反映了克莱因对数学的许多观点，向人们生动地展示了一流大师的遗风，出版后被译成多种文字，是一部数学教育的不朽杰作，影响至今不衰.

参考文献

［1］KLEINER I. Evolution of the Function Concept：A Brief Survey[J]. College Mathematics Journal，1989，20(4)：282－300.

［2］菲利克斯·克莱因. 高观点下的初等数学[M]. 舒湘芹，等译. 上海：复旦大学出版社，2008.

后　　记

本套教学参考资料与李大潜、王建磐主编，上海教育出版社出版的《普通高中教科书·数学》配套使用，本套教材根据中华人民共和国教育部制定并颁布实施的《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》编制，并经国家教材委员会专家委员会审核通过.

本套教材是由设在复旦大学和华东师范大学的两个上海市数学教育教学研究基地(上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地)联合主持编写的. 编写工作依据高中数学课程标准的具体要求，努力符合教育规律和高中学生的认知规律，结合上海城市发展定位和课程改革基础，并力求充分体现特色. 希望我们的这一努力能经得起实践和时间的检验，对扎实推进数学的基础教育发挥积极的作用.

本书是与必修第一册教材配套的教学参考资料，共为五章，各章编写人员分别为

王伟叶、傅吉祥(第 1 章)

王春明、王志强(第 2 章)

潘奋、吴泉水、高卫国(第 3 章、第 4 章)

王伟叶、邱维元(第 5 章)

限于编写者的水平，也由于新编教材尚缺乏教学实践的检验，不妥及疏漏之处在所难免，恳请广大师生及读者不吝赐教. 宝贵意见请通过邮箱 gaozhongshuxue@seph.com.cn 反馈，不胜感激.

2020 年 7 月

经上海市中小学教材审查委员会审查
准予使用　　准用号 Ⅱ-GJ-2020005

中国环境标志
CHINA ENVIRONMENTAL LABELLING

绿色印刷产品

ISBN 978-7-5720-0258-8

9 787572 002588 >

定　价：　24.00元