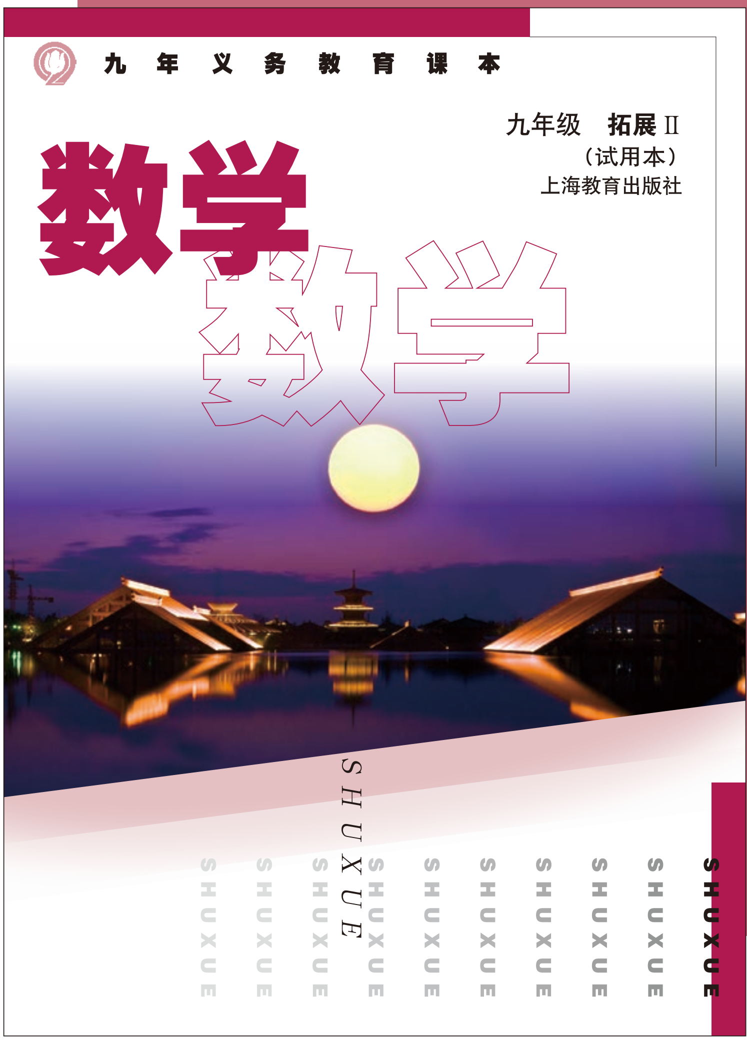
九 年 义 务 教 育

九年级 拓展Ⅱ

（试用本）

数学

教学参考资料



上海教育出版社

目　录

注1　标有“*”号的章名均配有原课本的缩小文本.

注2　括号“(　)”内页码为课本相应页码.

课 本 简 介

一、初中数学拓展内容整体设计

1. 数学课程结构的基本框架

数学课程内容的构成，包括“基本内容”“拓展内容”“专题研究与实践”等三个部分.这三个部分是依据《上海市普通中小学课程方案》提出的，它们分别为数学学习领域中的基础型课程部分、拓展型课程部分、研究（探究）型课程部分.“基本内容”是全体学生必备的、共同的数学基础，所有学生必学；“拓展内容”着重于帮助学生开拓数学视野、发展兴趣爱好、充实与其个性发展相适应的数学基础，提供学生自主选择修习；“专题研究与实践”注重于学生的过程经历和体验，让学生在教师指导下探究学习或自主选择学习.在这三部分内容中，“基本内容”居于核心地位，“拓展内容”和“专题研究与实践”体现了基础知识扩充、基本能力提高、学习方式多样等要求.各部分内容通盘安排、形成套筒、相辅相补，共同为实现数学课程目标服务.

2. 初中数学拓展系列的构建设想

数学拓展内容是数学课程的一个组成部分，在各学段、各年级适当安排，提供学生选择学习，以满足不同学生对数学学习的不同需要.《上海市中小学数学课程标准（试行本）》（简称“数学课程标准”）中指明，初中数学拓展内容分为拓展Ⅰ和拓展Ⅱ两类，其中拓展Ⅰ为非定向拓展内容，学生可按自己的兴趣爱好任意选学；拓展Ⅱ为定向拓展内容，规定希望在初中毕业后进入普通高中的学生必须修习.

关于初中数学拓展Ⅰ，数学课程标准中提出了若干学习主题，分布在初中各年级.这些学习主题，不是拓展Ⅰ的全部课题或基本课题，仅仅是拓展Ⅰ内容的举例.学校可根据拓展型课程的功能定位和拓展Ⅰ的性质特征，从学生实际出发，自行选取学习主题和编选教学内容，具体组织拓展Ⅰ的教学.

关于初中数学拓展Ⅱ，数学课程标准中有确定的安排，提出了“二次函数与一元二次方程”和“圆”两个学习主题，并指明了具体的学习内容和要求.初中数学内容的组织，其基本格局是“二二分段，九年级分层”；拓展Ⅱ指定为九年级数学内容，体现了“分层”处理的需要，同时有利于做好初、高中数学的衔接和过渡.

3. 初中数学拓展内容的教学组织

对于初中数学拓展内容的教学组织，拓展Ⅰ有较大的任意性，它完全由学校自主确定，学生在学校所安排的内容系列中自由选择学习，其课时通常在拓展型课程学科类教学课时中统筹安排；拓展Ⅱ则有明确的指定性，凡是希望在初中毕业后进入普通高中学习的学生必须修习，各学校在九年级组织实施教学，有通用的基本教材，其课时含在九年级基本内容教学的课时中（一般控制为每周 2 节）.

组织进行数学拓展Ⅱ的教学，着重点是满足今后进入普通高中学习的学生对数学基础的需要，并与高中数学学习内容相衔接.另外，在数学拓展Ⅰ中提出了“初中数学思想方法选讲”的学习主题，要求以基本的数学思想和方法为主线来组织内容，将这一主题的学习与初中数学基本内容的复习整理相结合.“初中数学思想方法选讲”可作为着重于初中数学复习的拓展性内容，提供给打算进入非普通高中的各类学校学习的学生选学.这样，在九年级数学的拓展内容教学中，通过由“初中数学思想方法选讲”和拓展Ⅱ所成的分层安排，具体地显示出有差别的数学，体现不同学生学习不同的数学，以进一步适应不同个性方向发展的学生对数学的需要.

二、本册课本内容编写说明

1. 编写思路

学生在六年级到九年级所学的数学基本内容中，获得了“实数知识基础”“初等代数知识基础”“平面几何知识基础与向量初步知识”“初等代数函数的基础与分析初步”“概率与统计初步知识”.这些知识内容，是学生进一步学习和参与社会生活必备的数学基础.但是，对于将要进入普通高中学习的学生，其数学知

识基础的准备还存在不足．例如在高中数学中，关于一元二次不等式解法的探讨，需要运用二次函数的图像与 x 轴的位置关系特征；关于函数解析性质的研究和理解，需要借助于二次函数直观性质的研究进行奠基；关于集合与命题的讨论、正弦定理的推广以及在直角坐标平面内深入进行关于圆的研究等，还需要更多的有关圆的知识准备．初中数学拓展Ⅱ的内容，必须体现进一步充实有关二次函数、圆的基础知识的要求．

依据数学课程标准的规定，初中数学拓展Ⅱ课本（以下简称本册课本）的编写，注重于初中数学基础知识的充实和内容结构的完善，关注学生进入普通高中学习数学基本内容的需要，以帮助希望进入普通高中学习的学生充实数学基础知识，获得学习高中数学所必需的知识和方法．与此同时，重视与初中必学数学课本中有关内容建立紧密的联系，体现内容的整体性；注意保持初中必学数学课本的编写特点，注意把握有关内容的基础性要求，注意改善内容呈现的方式和体现数学学习的过程．

本册课本内容的重点，是关于一元二次方程、二次函数和圆的基础知识的扩充．内容的呈现方式，主要采用“过程模式”，通过“问题——活动”的安排，引导学生探索求知；设计“问题”“思考”“操作”“想一想”“议一议”等栏目以及边款点拨、方框解说等版式，指导学生开展数学活动，帮助学生把握重点和释疑解难，促进学生生动、活泼、主动地学习，深入地思考．

练习部分中的习题安排，重视基本训练，也有层次性．“试一试”栏目下的题目，一般有较高的难度，这样的题目不要求所有学生都去做，主要提供给有学习兴趣的学生进行研究和讨论，进一步培养他们的探究意识和钻研精神．

2．内容提要

本册课本含两章内容，还有配合各章内容的练习部分．

第一章是“一元二次方程与二次函数”．在必学课本中讨论一元二次方程与二次函数的基础上，本章着重研究一元二次方程的根与系数的关系、二次函数的图像相对于 x 轴的位置与相应一元二次方程的根的判别式之间的关系、二次函数解析式的确定、求二次函数的图像与 x 轴的交点坐标，以及它们的简单运用．同时，通过建立二次函数与一元二次方程之间的联系，促进学生多角度地理解这两部分知识内容并形成整体性的认知结构，领悟数学的思想和方法．本章对一元二次方程的根与系数关系进行探究，既有理论意义（一元 n 次方程的根与系数关系定理是方程基本理论中的重要内容），又有运用价值（可直接用于研究和解决相关问题）；而观察、发现、证明一元二次方程的根与系数关系定理的过程，也是对学生探究学习的引导．建立二次函数与一元二次方程的联系，让学生运用函数的思想理解方程，运用一元二次方程的知识研究二次函数的图像，不仅有助于提升学生的数学观点，同时使学生对二次函数的图像与 x 轴的位置关系获得理性的认识．关于二次函数解析式的确定，在必学内容中只涉及已知条件是函数的三组对应值（即图像上的三点坐标）的情况，这里扩展为已知条件与函数图像特征或性质有关，既突出了待定系数法的运用，又有利于学生对有关基本内容的理解．

第二章是“直线和圆”．在必学课本中讨论直线、圆的基本知识以及直线与圆的位置关系的基础上，本章着重研究：圆的切线的判定定理和性质定理，切线长定理；两圆的公切线及公切线的长；圆周角和圆周角定理，弦切角和弦切角定理；相交弦定理，割线定理，切割线定理；还有四点共圆等．这些内容，把直线与圆的位置关系从数量关系特征讨论转到定性研究，从一条直线与圆的位置关系讨论扩展到两条直线与圆的位置关系研究；还把“不共线的三点确定一个圆”引到“四点共圆”的研究．本章确立了一系列关于直线与圆的关系定理，学生通过本章的学习，可以获得关于圆的基础知识的必要补充，同时进一步得到演绎推理、分类讨论、化归等思想方法的演练．本章内容的处理，特别强调基础性和实用性；有关定理的运用，一般限为直接用于解决问题，对综合运用的难度有严格控制．

3．课时安排

各章教学的课时数建议如下：

第一章　一元二次方程与二次函数　13 课时

第二章　直线和圆　16 课时

第一章　一元二次方程与二次函数

一、教学目标

1. 经历对于一元二次方程的根与系数关系的观察、分析和发现过程，知道一元二次方程的根与系数是紧密联系的．掌握一元二次方程的根与系数关系的证明以及它的基本运用．

2. 经历确定二次函数解析式所需独立条件个数的探索过程，知道二次函数解析式的三种基本形式，会用待定系数法求二次函数解析式．掌握待定系数法的基本运用．

3. 建立起二次函数与一元二次方程之间的联系，能以函数的观点来理解一元二次方程，能根据与二次函数相应的一元二次方程的根的判别式来判断二次函数的图像与 x 轴的位置关系和公共点的个数．

4. 通过二次函数用于解决简单实际问题的举例，初步学会二次函数的基本应用，体会二次函数的应用价值．

二、课时安排

本章教学共 13 课时，建议分配如下：

1.1　一元二次方程的根与系数关系	3 课时
1.2　二次函数与一元二次方程	3 课时
1.3　二次函数解析式的确定	5 课时
本章小结	2 课时

三、设计说明

本章内容是在学生已学一元二次方程与二次函数基本内容的基础上，对一元二次方程与二次函数的基础知识进行必要的扩充，并把一元二次方程与二次函数相互联系起来．

本章首先是对一元二次方程根与系数的关系进行探究，得到关于一元二次方程的根与系数关系的定理；在知道了这一知识的直接应用后，又介绍了利用整体代入方法求关于两个字母对称的代数式的值，以及利用一元二次方程根与系数的关系建立新方程或者求已知和与积的两个未知数的值．

其次是建立了一元二次方程与二次函数之间的联系，由二次函数的图像发现：如果图像与 x 轴有公共点，那么公共点的纵坐标为 0．由 $y=0$，得到相应的一元二次方程，则这个方程的实数根就是函数图像与 x 轴的公共点的横坐标．在学生能够利用这一知识直接求二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图像与 x 轴的公共点坐标的基础上，进一步发现抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与 x 轴公共点的个数与相应的一元二次方程根的判别式之间的联系，从而不需画出抛物线就能由相应的一元二次方程根的判别式的符号来判断此抛物线与 x 轴公共点的个数．

从认识数学的过程来看，这是在学生学习了函数与二次函数的新知识后，引导学生以新的视角对已有知识一元二次方程重新进行审视．一元二次方程实际上是二次函数在变化过程中的“瞬时”状态，即二次函数的值取某一常数（如等于零）这“一瞬”相应的等量关系式；一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根，也就是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的“零点”．这样将静态形式的一元二次方程置于二次函数的动态过程中进行研究，从而可利用二次函数的图像，直观地理解一元二次方程的意义．类似地，还可进一步建立一元二次不等式与二次函数的联系．实际上，在八年级第二学期学习“一次函数与一元一次方程、一元一次不等式的关系”时，学生已经获得了这种认识数学的经历．

最后介绍了确定二次函数解析式的三种方法．在九年级第一学期数学课本中，已讲述了由已知二次函数图像经过直角坐标平面上三点的条件确定其解析式的方法．本章先对这一方法进行复习巩固，再讲述其他两种确定其解析式的方法：由已知二次函数图像的顶点坐标加上其他一个条件；由已知二次函数图像与 x 轴两个交点坐标加上其他一个条件．这样，关于确定二次函数解析式的方法就比较多样了，可按已知条

件中的有关特征(如“三点”;“顶点”“对称轴”;“两根”等)选取二次函数解析式的适当形式,再运用待定系数法来确定这个解析式.

课本中关于二次函数的应用,主要体现在两个方面:一是与几何知识的综合应用,二是在实际生活中的初步应用.从而,帮助学生加深理解二次函数的基础知识,把握知识之间的基本联系,扩展知识的基本应用;帮助学生学习将实际问题转化为数学问题,体验数学建模,在解决实际问题的过程中,感受数学知识“源于实践,又用于实践”.

本章内容是中学数学中进行数形结合思想方法教学的重要载体之一,应充分发挥其功能.一元二次方程根与系数的关系,是一元 n 次方程根与系数的关系定理(韦达定理)的特例,是方程理论中的重要内容之一,在高中数学中也有较多的应用.二次函数及其性质,在进入高中后还要从解析的角度进一步研究;初中阶段所学的二次函数内容,是高中阶段继续学习函数内容的不可或缺的基础.因此,本章内容是希望进入普通高中学习的学生所必须修习的.

在本章的学习中,重点是掌握一元二次方程与二次函数之间的联系;难点是如何发现一元二次方程与二次函数之间的联系.教学中要充分展示知识发生和形成的过程,让学生从形、数两方面理解一元二次方程与二次函数之间的内在联系,贯通有关知识.

四、教学建议

1. 重视学生的探索学习过程. 要在激发学生产生探究一元二次方程根与系数的关系、一元二次方程与二次函数之间的联系等新知识的欲望方面多下功夫,让学生积极参与探索活动和进行数学思考,真正感受知识发生的过程.应鼓励学生积极思维,大胆发表意见和进行交流,让学生感受逆用一元二次方程根与系数关系建立新方程的不唯一性、有关题目解题方法的多样性,培养学生的发散性思维能力.

2. 注意运用类比、数形结合和化归的数学思想. 在新知识的教学过程中,可利用函数图像的直观性,帮助学生建立新旧知识之间的联系,促进学生将已学知识向新知识过渡和发展.如课本中指出:“二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图像与 x 轴有公共点,那么公共点的纵坐标为 0.由 $y=0$,得相应的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$,则这个方程的实数根就是函数图像与 x 轴的公共点的横坐标”;“抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与 x 轴的公共点的个数,由相应的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 确定;反过来,由抛物线与 x 轴的公共点的个数,也可以确定判别式的值的符号”.对这些内容的教学,要利用图像为学生提供直观认识的支持,形成抽象思维的基础,引导学生通过对代数的表达形式和几何的表达形式进行比较、分析,逐步归纳结论.

3. 重视知识应用的教学. 课本中安排了有关知识的基本应用和实际应用的内容,在教学中要重视对问题的分析和解题思路的探索,关注如何建立知识之间的联系及其相互转化,关注如何将实际问题转化为数学问题,以利于学生的数学理解能力和应用能力的培养.

4. 切实把握学习难度. 本章学习的内容,是数学基础知识的组成部分,有明确的定向要求,应充分注意到它与高中数学的衔接,切实关注学生进入高中数学学习的需要.教学中,必须认真落实教学基本要求,但不要再增加难度,不要盲目拔高,可以课本的练习与习题的难度为准.

五、评价建议

1. 关注学生基础知识和基本技能的获得. 重视学生对一元二次方程的根与系数的关系、一元二次方程与二次函数的联系等知识的理解和掌握,以及有关技能的形成;注重检测学生落实教学基本要求的情况,引导学生夯实必要的、扎实的知识基础.

2. 关注学生对数学思想方法的体会和感悟. 在课堂教学的讲评与小结中,要重视对数形结合、分类讨论、运动变化等数学思想方法的点拨和交流,促进学生进行数学思想方法的反思和总结;对学生的学习评价,应体现对于有关数学思想方法教学的要求.

3. 关注学生思维的灵活性. 在一元二次方程根与系数的关系及其应用中,在确定二次函数解析式的问题解决中,要引导学生重视方法的合理选择和对于不同解法的比较,提供机会让学生进行交流和小结;

对学生提出的不同解法，应给予鼓励性评价.

4. 关注学生对一元二次方程和二次函数的联系及知识系统的完善. 学生在前面已经分别学习了一元二次方程和二次函数的知识，而对两者之间的联系，是在本章学习的过程中逐步认识的. 要引导和鼓励学生对所学知识进行系统整理，把握一元二次方程与二次函数的有关知识的内在联系，并将其纳入学习评价范围.

5. 关注学生学习方式和方法的改善. 引导学生积极主动学习，类比八年级第二学期学习“一次函数与一元一次方程、一元一次不等式的关系”，运用已有的一元二次方程和二次函数的基础知识，探究一元二次方程和二次函数的联系，并进行归纳总结；鼓励学生提出问题和开展探究活动，在获取知识的过程中学会学习、学会思考.

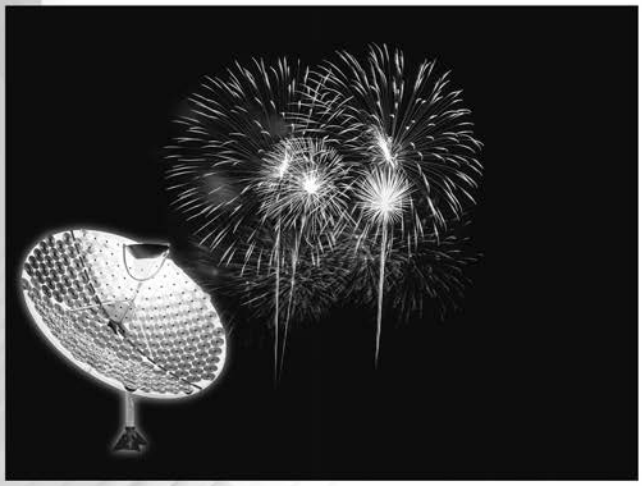
章头图由烟花绽放的效果图和太阳灶装置的实物图拼成，展现出生活中的抛物线形象.

章头语中，强调抛物线在现实生活中有广泛的应用，指出对抛物线这一图形的研究，与二次函数有着密切的联系.然后进一步指出，本章着重于建立一元二次方程与二次函数之间的联系，从而一方面用函数的思想深入理解一元二次方程，另一方面用一元二次方程的知识深入研究二次函数.

可并排写出二次函数的解析式 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 与一元二次方程的一般式 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，让学生对它们的表示形式进行比较分析，直观地感知一元二次方程与二次函数之间有必然的联系，引出本章所要讨论的主要问题，帮助学生了解学习本章的目的和任务，把握学习要求.

Yiyuan Erci Fangcheng
Yu Erci Hanshu

1 第一章　一元二次方程与二次函数



喜庆的烟花，在空中划出一条条抛物线，呈现精彩；节能的太阳灶，有一个由一段抛物线旋转而成的抛物面，集聚光热；……对抛物线的形象，我们并不陌生.关于抛物线的研究，与二次函数密切相联.

形如 $y=ax^2+bx+c$ （其中 a、b、c 是常数，且 $a\neq 0$）的函数是二次函数，而 $ax^2+bx+c=0$（其中 a、b、c 是常数，且 $a\neq 0$）则是一元二次方程的一般式.由此想到，二次函数与一元二次方程之间有什么联系？怎样以函数的思想来深入理解一元二次方程？怎样用一元二次方程的知识来研究二次函数？这正是本章要讨论的主要问题.

Yiyuan Erci Fangcheng De Gen Yu Xishu Guanxi

第一节 一元二次方程的根与系数关系

1.1 一元二次方程的根与系数关系

一元二次方程有两个实数根时，求根公式表达了方程的每一个根与系数之间的关系. 现在我们进一步研究一元二次方程的两个根与方程系数之间的关系.

操作

解下列方程，并把方程的根填入表 1.1－1.

表 1.1－1

一元二次方程	x_1	x_2
$x^2-5x+6=0$		
$x^2+5x-6=0$		
$x^2-4x-12=0$		
$x^2-(a+b)x+ab=0$		

思考

（1）表 1.1－1 中的每一个方程的两根 x_1、x_2 的“和”与方程的系数之间有什么样的关系？它们的“积”呢？

（2）由（1）得到的结论，是否适用于表 1.1－2 中的方程？

表 1.1－2

一元二次方程	x_1	x_2	x_1+x_2	$x_1 \cdot x_2$
$x^2-11x+18=0$				
$16x^2-9=0$				
$5x^2+6x+1=0$				
$2x^2+3x-5=0$				

（3）如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 有两个实数根 x_1、x_2，那么 x_1+x_2、$x_1 \cdot x_2$ 与这个方程的系数之间有什么样的关系？

2 第一章 一元二次方程与二次函数

【本课重点】

引导学生探究、发现和推导一元二次方程的根与系数的关系，得到根与系数关系的定理并进行初步的运用.

操作

让学生在表 1.1－1 中填写二次项系数为 1 的整系数一元二次方程的两个根，为学生观察、分析方程的两根与这个方程的系数之间的联系提供简明素材，从而比较容易地形成猜想.

思考

问题（1）是引导学生在已有操作的基础上，发现方程两根的和、积分别与方程的系数之间的关系，形成猜想；问题（2）是让学生对由（1）形成的猜想进行验证；问题（3）是将问题（1）、（2）引向一般化，让学生导出一元二次方程的根与系数关系的一般结论.

这三个问题的逐一提出，展现了“从特殊到一般”探究策略和“实验—猜想—论证”研究过程.

【教学目标】

（1）经历观察、分析和发现一元二次方程的根与系数关系并导出定理的过程，获得探索新知的体验，感受一元二次方程的根与系数关系的简洁、和谐之美.

（2）掌握一元二次方程的根与系数关系的定理，并会用于求关于一元二次方程两根的对称式的值，以及构建其根符合已知条件的一元二次方程等.

（3）在参与数学活动和解决问题的过程中，领会化归、整体代入和分类讨论等数学思想.

【注意事项】

（1）在本大节开始时，可提出如下问题作为教学的引入：对于一个一元二次方程，“如果已知方程的系数，那么可知它的实数根的情况吗？”反过来，“如果已知方程的两个实数根，那么可知它的系数吗？”前一个问题是“正问题”，我们已经解决；后一个问题是“反问题”，正是本大节所要讨论的问题.

（2）对于一元二次方程的根与系数关系的探究，教师要安排充裕的时间，不要急于提示. 要让学生自己发现一元二次方程的根与系数的关系，经历数学抽象和符号化的过程，享受探究性学习的成功喜悦.

一般地，设 x_1、x_2 分别是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 的两个实数根，则

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad x_1+x_2&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a},\\x_1\cdot x_2&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.\end{aligned}$$

由此得到关于一元二次方程的根与系数关系的定理：

定理 如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 的两个实数根分别是 x_1、x_2，那么

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

一元二次方程的根与系数关系的定理又称为韦达定理. 法国数学家韦达(1540—1603)在研究和推广这个定理中，作出了卓越的贡献.

例题1 写出下列一元二次方程的两个实数根的和与积.

(1) $x^2-4x+\sqrt{5}=0$；　　(2) $2x^2-\sqrt{3}x-3=0$；

(3) $-\sqrt{2}x^2=x-4$.

解 设一元二次方程的两个实数根是 x_1、x_2.

(1) $x_1+x_2=-(-4)=4$，$x_1\cdot x_2=\sqrt{5}$.

(2) $x_1+x_2=-\frac{-\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}$.

(3) 将原方程变形为 $\sqrt{2}x^2+x-4=0$，得

$$x_1+x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad x_1\cdot x_2=\frac{-4}{\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}.$$

对于题(3)，必须将原方程化为一元二次方程的一般式后，再确定 a、b、c 的值. 这个方程也可化为 $-\sqrt{2}x^2-x+4=0$.

例题2 已知关于 x 的方程 $2x^2-5x+p=0$ 的一个根为 $\frac{1}{2}$，求方程的另一个根及 p 的值.

解 设方程的另一个根是 x_1，由根与系数的关系，得

$$\begin{cases}x_1+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}, & ①\\ x_1\cdot\frac{1}{2}=\frac{p}{2}. & ②\end{cases}$$

由①得　$x_1=2$.

把 $x_1=2$ 代入②，得　$2\times\frac{1}{2}=\frac{p}{2}$.

本题也可将已知的一个根代入原方程，得到关于 p 的方程，求出 p 的值；再代入原方程，解出原方程的另一个根.

第一节　一元二次方程的根与系数关系　3

在初中阶段对一元二次方程的研究是在实数范围内进行的. 在一元二次方程有实数根的情况下，利用求根公式可将两根用方程的系数表示出来，再分别计算这两根的和与积，导出一元二次方程的根与系数关系的定理.

可适当介绍韦达及“韦达定理”的史料，进行数学文化的教育.

例题 1

帮助学生熟悉一元二次方程的根与系数关系定理，体会它的直接运用. 应指出运用的关键在于将所给一元二次方程化为一般式.

例题 2

本题由已知一元二次方程的一个根求另一个根及方程中的一个待定系数，解题时突出了根与系数关系的运用，依此建立以未知根与待定系数为元的二元一次方程组，通过解这个方程组来解决问题. 学生可从中感受到新学知识的桥梁作用和转化的思想方法，学习根与系数关系定理的基本运用.

本题有多种解法. 边款中提示了一种解法，还可提出其他解题思路. 可让学生尝试不同方法，再进行比较，从中体会知识的灵活运用.

【注意事项】

（1）要展现关于一元二次方程的根与系数关系的探究过程，让学生通过两次填表和在问题引导下，对具体一元二次方程的根与系数进行观察和分析，发现方程两根的和、积分别与方程中项的系数(或常数项)之间的关系；从特殊到一般，导出一元二次方程的根与系数关系的定理. 要鼓励学生自主活动，让学生获得“实验—猜想—论证”的科学研究过程的经历，激发学生的学习兴趣，培养学生的归纳、发现与论证能力.

（2）应强调一元二次方程的根与系数关系的定理是对方程的一般式而言的，运用定理时要将非一般式的一元二次方程化为一般式；应指出初中阶段对一元二次方程的研究是在实数范围内进行的，这时方程的根是指实数根，要注意一元二次方程存在实数根的条件，通常可利用根的判别式判断方程是否存在实数根. 根据根与系数关系定理，可直接得到两根的和与积，要提醒学生注意两根的和是一次项系数除以二次项系数所得商的“相反数”.

（3）一元 n 次方程的根与系数的关系的定理是一个重要的定理，也称为韦达定理. 这个定理中，一元 n 次方程的次数 n 为任意正整数，方程的根并不限于实数根. 因此课本中关于一元二次方程的根与系数关系的定理，不是完整意义下的韦达定理；而指明“方程有实数根”，是由于初中学生现有的代数知识所限. 对本节定理的教学要有发展的眼光，为学生进一步学习和运用韦达定理留有余地.

解得　$p=2$.

所以，方程的另一个根是 2，p 的值是 2.

练习 1.1(1)

1. (口答)说出下列各方程的两根的和与两根的积：

(1) $x^2-2x-2=0$；　(2) $12x^2+8x=0$；

(3) $2x^2-3x+\frac{1}{2}=0$；　(4) $2x^2-7=0$；

(5) $x^2+2=2\sqrt{2}x$；　(6) $\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x=6$.

2. (1) 已知方程$2x^2-5x-3=0$的一个根是3，不解方程，求这个方程的另一个根；

(2) 已知方程$2x^2-2x-1=0$的一个根是$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，不解方程，求这个方程的另一个根.

3. (1) 已知关于 x 的方程 $2x^2+kx+3=0$ 的一个根是$\frac{1}{2}$，求方程的另一个根及 k 的值；

(2) 已知关于 x 的方程 $3x^2+15x+m=0$ 的一个根为 1，求方程的另一个根及 m 的值.

例题3　已知方程 $2x^2+6x-3=0$ 的两根是 x_1、x_2，利用根与系数的关系求下列各式的值：

(1) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$；　(2) $x_1^2+x_2^2$；

(3) $(x_1-x_2)^2$.

题中关于 x_1、x_2 的代数式都是关于 x_1、x_2 的对称式，即式中 x_1、x_2 相互替换后代数式不变. 利用根与系数的关系求关于 x_1、x_2 的代数式的值时，通常先把代数式化为由 x_1+x_2 和 $x_1\cdot x_2$ 表示的形式，然后再代入求值.

解　方程的两个根是 x_1、x_2，由根与系数的关系，得

$$x_1+x_2=-3,\quad x_1\cdot x_2=-\frac{3}{2}.$$

(1) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{-3}{-\frac{3}{2}}=2$.

(2) $$\begin{aligned}x_1^2+x_2^2&=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\\&=(-3)^2-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)\\&=12.\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}(x_1-x_2)^2&=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\\&=(-3)^2-4\times\left(-\frac{3}{2}\right)\\&=15.\end{aligned}$$

4　第一章　一元二次方程与二次函数

练习 1.1(1)

1. 略.

2. (1) $-\frac{1}{2}$；

(2) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

3. (1) 3，-7；

(2) -6，-18.

【本课重点】

让学生学会利用一元二次方程的根与系数关系求关于两根的对称式的值，并在求值的过程中领会化归、整体代入和分类讨论等数学思想.

例题 3

本题是利用一元二次方程的根与系数关系求关于两根的对称式的值.

解这类题的关键是将关于 x_1、x_2 的对称式用 x_1+x_2、x_1x_2 表示.

【注意事项】

利用一元二次方程的根与系数关系求关于方程两根的对称式的值，对学生进行代数式恒等变形的技能有较高的要求. 在教学中，要注意指导学生正确把握代数式变形的方向和保持恒等的要求，将关于方程两根的对称式化为由这两根的和与积表示的形式，然后求代数式的值. 在这一过程中，渗透了化归和整体代入的数学思想方法，要帮助学生加深体会.

例题4 已知关于 x 的方程 $x^2-(m-3)x+m+8=0$ 的两个实数根的平方和等于13，求 m 的值及方程的两根.

解 设方程 $x^2-(m-3)x+m+8=0$ 的两个实数根分别为 x_1、x_2，那么 $\Delta\geqslant 0$，且 $x_1+x_2=m-3$，$x_1\cdot x_2=m+8$.

根据题意，得

$$x_1^2+x_2^2=13.$$

$$\because\quad x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(m-3)^2-2(m+8)=m^2-8m-7,$$

$$\therefore\quad m^2-8m-7=13.$$

解得 $m_1=10$，$m_2=-2$.

当 $m=10$ 时，方程 $x^2-(m-3)x+m+8=0$ 即

$$x^2-7x+18=0,$$

这时，$\Delta=(-7)^2-4\times 18<0$，不合题意.

当 $m=-2$ 时，方程 $x^2-(m-3)x+m+8=0$ 即

$$x^2+5x+6=0,$$

这时，解得 $x_1=-2$，$x_2=-3$.

所以，m 的值为 -2，方程的两根分别为 -2 和 -3.

由已知方程两根之间的关系，求方程的字母系数的值时，常常可以利用根与系数的关系，建立关于相应字母的方程，从而求得字母系数的值. 注意，一元二次方程有实数根 $\Leftrightarrow \Delta\geqslant 0$.

练习 1.1(2)

1. 已知方程 $2x^2+4x-3=0$ 的两个实数根是 x_1、x_2，利用根与系数的关系求下列各式的值：
   (1) $x_1^2x_2+x_1x_2^2$；　(2) $x_1^2+x_2^2$；
   (3) $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$；　(4) $(x_1-2)(x_2-2)$.
2. 已知关于 x 的方程 $x^2+(k-5)x-(k+4)=0$ 的两个实数根是 x_1、x_2，且 $(x_1+1)(x_2+1)=-8$，求 k 的值及方程的两根.

思考

已知一个一元二次方程，当判别式 $\Delta\geqslant 0$ 时，可以求得这个方程的实数根. 反过来，已知一元二次方程的两个实数根，是否能作出这个方程呢？

如果一个一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的两个实数根是 x_1、x_2，那么二次三项式 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. 于是，这个方程可表示为 $a(x-x_1)(x-x_2)=0$，即

$$a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]=0,$$

例题 4

本题是求一元二次方程两根的对称式的值的逆用，在已知方程两根一个对称式的值的条件下，利用方程的根与系数关系求方程中的系数所含字母的值及方程的两根.

练习 1.1(2)

1. (1) 3；(2) 7；
   (3) $5\dfrac{1}{2}$；(4) $6\dfrac{1}{2}$.
2. $k=5$，两根为 ± 3.

【本课重点】

让学生学会逆用一元二次方程的根与系数关系，构建其根符合已知条件的一元二次方程.

思考

通过问题的提出和解决，让学生了解一元二次方程的根与系数关系定理是可以逆用的.

【注意事项】

在例题4的已知条件中，指明了一元二次方程有两个实数根，隐含着根的判别式 $\Delta\geqslant 0$ 的条件. 解题过程中，首先要注意方程有实数根的前提，说明必有 $\Delta\geqslant 0$；再由已知两根平方和的值，利用根与系数关系得到一个关于系数中所含字母的方程，从而求出这个字母的值；然后确定这个已知方程，求出方程的根.

在教学中，要指导学生把握 $\Delta\geqslant 0$ 这个隐含条件. 方程中系数所含字母的取值，必须确保 $\Delta\geqslant 0$. 解题时，指出了 m 的取值应使 $\Delta\geqslant 0$ 以后，就可由已知两根平方和的值并利用根与系数关系，得到一个关于 m 的方程，求出 m 的值，再检验所得 m 的值是否满足 $\Delta\geqslant 0$ 这个条件. 如果满足 $\Delta\geqslant 0$，则 m 可取这个值；如果出现 $\Delta<0$，则舍去 m 的这个值. 这样的解题和表达是严谨的、简明的. 要引导学生进行反思小结，从中感受化归思想和方程思想，领会分类讨论思想，体会数学知识之间的联系和数学的严密性. 还要让学生知道，解题时也可在指出 $\Delta\geqslant 0$ 以后，先解关于 m 的不等式 $\Delta\geqslant 0$，求出 m 的取值范围；然后由已知两根平方和的值得到一个关于 m 的方程，再确定 m 的值. 但其过程较繁难，因为解关于 m 的不等式 $\Delta\geqslant 0$ 通常比检验 m 的值是否满足 $\Delta\geqslant 0$ 难，而且本题中关于 m 的不等式 $\Delta\geqslant 0$ 是一个一元二次不等式，尚未学过它的解法.

其中 $a\neq0$. 由于 a 的值不确定，所以这样的一元二次方程有无数个，但所有的这些方程的根都是 x_1、x_2.

如果只要作一个两根分别为 x_1、x_2 的一元二次方程，那么可取 $a=1$，方程 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$ 就是所求作的一个方程.

也可直接作方程 $(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$，得到以 x_1、x_2 为两根的一个一元二次方程. 这时，通常应将所作方程再化成一般式.

例题5 求作一个一元二次方程，使它的两个根分别是 $2+\sqrt{3}$ 和 $2-\sqrt{3}$.

解 设 $x_1=2+\sqrt{3}$，$x_2=2-\sqrt{3}$，得

$$x_1+x_2=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4,$$

$$x_1\cdot x_2=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1.$$

则 $x^2-4x+1=0$ 是所求作的一个方程.

想一想

如果例题 5 中加上“使所作的方程的二次项系数为 $\frac{1}{2}$”的条件，那么这个方程是什么？

例题6 已知方程 $2x^2-4x-1=0$，利用根与系数的关系求作一个一元二次方程，使它的两根分别是已知方程的两根的平方.

解 设方程 $2x^2-4x-1=0$ 的两个根是 x_1、x_2，则

$$x_1+x_2=2,\quad x_1\cdot x_2=-\frac{1}{2}.$$

设所求作的方程的两个根分别是 y_1、y_2，则 $y_1=x_1^2$，$y_2=x_2^2$. 得

$$\begin{aligned}y_1+y_2&=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\\&=2^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=5,\\y_1\cdot y_2&=x_1^2\cdot x_2^2=(x_1x_2)^2\\&=\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

因此，$y^2-5y+\frac{1}{4}=0$ 是所求作的一个方程.

所求得的这个方程可化为整数系数方程 $4y^2-20y+1=0$.

议一议

对于例题 6，可作出多少个符合要求的一元二次方程？怎样表示这些方程？

例题7 已知两个数的和是 2，它们的积是 -1，求这两个数.

解 设这两个数分别是 x_1、x_2，根据题意得

6 第一章 一元二次方程与二次函数

例题 5

本题要求作出一个以给定两个实数为根的一元二次方程. 逆用根与系数关系，可直接写出一个符合要求的方程. 要注意这样的方程有无数个，通常取二次项的系数为 1 的一个.

想一想

引导学生在例题 5 的结论上根据条件变式. 让学生明确方程“$x^2+px+q=0$”与“$a(x^2+px+q)=0$，其中 $a\neq0$”有相同的根.

例题 6

本题要求作出一个其根与已知方程两个实数根有特定关系的一元二次方程.

议一议

让学生明确符合要求的新方程有无数个，并学会正确表达.

【注意事项】

(1) 要让学生了解：如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0, b^2-4ac\geqslant0)$ 的两个实数根是 x_1、x_2，那么 $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$ 成立；如果 x_1、x_2 是一个一元二次方程的两个实数根，那么这个一元二次方程可写作 $a(x-x_1)(x-x_2)=0$，即 $a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]=0$，其中 $a\neq0$. 由于 a 的值不确定，所以这样的方程有无数个. 以已知实数 x_1、x_2 为根的一元二次方程不唯一，为学生提供了发散思维的空间.

(2) 例题 6 涉及一元二次方程的根与系数关系正逆两向的运用，可能是学生学习中的一个难点. 教学时要关注学生思考问题的过程，将难点分解，化难为易；要帮助学生理清思路，先设原方程的两根，建立原方程的根与系数的关系；再设新方程的两根，根据题意建立新方程两根与原方程两根之间的联系；然后求出新方程两根和与积的值，逆用一元二次方程的根与系数关系，建立新方程. 要注意原方程的两根与新方程的两根应分别用不同的字母表示.

例题 7

本题的解法是利用一元二次方程的根与系数关系建立一个新方程，通过解新方程求出这两个数. 要让学生从中感受一元二次方程的根与系数关系的应用及其解决问题的简捷性.

练习 1.1(3)

1. -3，4.

2. (1) $2y^2+3y-6=0$；

(2) $y^2-7y+1=0$.

3. (1) 7，-3；

(2) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$.

$$x_1+x_2=2,$$
$$x_1\cdot x_2=-1.$$

可知 x_1、x_2 是一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 的两个根.

解这个方程，得　$x_1=1+\sqrt{2}$，　$x_2=1-\sqrt{2}$.

所以，这两个数分别是 $1+\sqrt{2}$ 和 $1-\sqrt{2}$.

也可以设这两个数分别为 x_1、x_2，得 $\begin{cases}x_1+x_2=2,\\ x_1x_2=-1.\end{cases}$ 通过解这个二元二次方程组，求得这两个数的值.

练习 1.1(3)

1. 已知一个一元二次方程的二次项系数为 $\frac{1}{2}$，这个方程的两个根是 2 和 4，写出它的一次项系数和常数项.
2. 不解方程，求作一个新的一元二次方程，使它的两个根：
   (1) 分别是方程 $6x^2-3x-2=0$ 的两根的倒数；
   (2) 分别是方程 $x^2-3x+1=0$ 的两根的平方.
3. 已知两数的和与积，求这两个数.
   (1) 和等于 4，积等于 -21；
   (2) 和等于 $\sqrt{2}$，积等于 $-\frac{1}{4}$.

【注意事项】

例题 7 还有其他解法. 比如：根据题意，可设两个元，建立二元二次方程组，解方程组得到这两个数. 但这一解题过程比较复杂. 而利用一元二次方程的根与系数关系，则使问题的解决较为简单和方便.

Erci Hanshu De Jiexishi

第二节 二次函数的解析式

1.2 二次函数与一元二次方程

我们来探讨二次函数与一元二次方程之间的联系.

问题1

已知二次函数① $y=x^2-4x+3$，② $y=x^2-4x+4$，③ $y=x^2-4x+5$，当它们的自变量 x 分别取何值时函数值为零？

函数值为零，即 $y=0$.

对于函数①，$y=0$ 就是 $x^2-4x+3=0$，解这个一元二次方程，得 $x_1=1$，$x_2=3$. 可知当自变量 x 的值为 1 或 3 时，它的函数值为零.

对于函数②，$y=0$ 就是 $x^2-4x+4=0$，解这个一元二次方程，得 $x_1=x_2=2$. 可知当自变量 x 的值为 2 时，它的函数值为零.

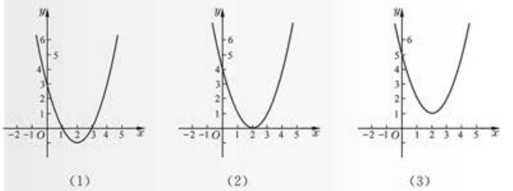
对于函数③，$y=0$ 就是 $x^2-4x+5=0$，这个方程没有实数根. 可知无论自变量 x 取什么实数值，它的函数值都不为零.

一般地，对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$，给定 $y=m$，就得到一个关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=m$. 解这个方程，可求得函数值为 m 时所对应的自变量 x 的值或判定函数值不可能为 m.

当 $m=0$ 时，得一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$.

问题2

已知二次函数① $y=x^2-4x+3$，② $y=x^2-4x+4$，③ $y=x^2-4x+5$ 的图像分别如图 1-1(1)(2)(3)所示.



(1)　(2)　(3)

图 1-1

【本课重点】

引导学生探讨二次函数与一元二次方程之间的联系，并正确认识它们之间的联系，学会求二次函数图像与 x 轴的公共点的坐标.

问题 1

通过提出问题，引起学生对二次函数与一元二次方程的联系的思考，可以放手让学生解答.

问题 2

引导学生探讨二次函数图像与 x 轴的公共点个数及公共点的坐标，这是“问题 1”的深化，也是“问题 1”所得结论的初步运用.

【教学目标】

(1) 知道二次函数与一元二次方程之间的联系，能以函数的观点来理解一元二次方程的有关知识，能用方程的知识来讨论二次函数的一些问题.

(2) 会求二次函数的图像与 x 轴的公共点的坐标，能根据相应一元二次方程的根的情况分析二次函数的图像特征.

(3) 经历探究二次函数与一元二次方程的联系的过程，体会联系、转化的辩证思想以及化归、类比、数形结合和分类讨论的数学思想.

【注意事项】

(1) 在“问题 1”的教学中，教师可向学生指出，二次函数描述了一个动态变化的过程，函数值随着自变量的值变化而变化；给定二次函数的一个值，就得到一个以自变量为元的一元二次方程，可见一元二次方程所表达的是二次函数的某一特定状态，反映了给定的函数值与对应的自变量的值之间的关系，或者给定的函数值是不可能达到的.

(2) 在“问题 2”的教学中，可利用多媒体或其他直观手段展示三个已知函数的图像，提供充裕的时间让学生观察、发现、讨论，从中看到二次函数图像与 x 轴的公共点个数可能有两个、只有一个，或者没有公共点；再根据 x 轴的点的纵坐标为 0 的特征，导出求图像与 x 轴的公共点的横坐标的方法，进而确定公共点的坐标.

观察图 1－1 中的三个图像，回答问题：

函数的图像与 x 轴是否有公共点？如果有公共点，那么其坐标是什么？

如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴有公共点，那么公共点的纵坐标为 0. 由 $y=0$，得相应的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，则这个方程的实数根就是函数图像与 x 轴的公共点的横坐标.

例题1 求下列二次函数的图像与 x 轴的公共点的坐标.

(1) $y=x^2-3x+2$； (2) $y=2x^2-5x-3$.

解 (1) 由 $y=0$，得 $x^2-3x+2=0$.

解得 $x_1=1$，$x_2=2$.

所以函数 $y=x^2-3x+2$ 的图像与 x 轴的公共点的坐标分别是(1，0)和(2，0).

(2) 由 $y=0$，得 $2x^2-5x-3=0$.

解得 $x_1=3$，$x_2=-\frac{1}{2}$.

所以函数 $y=2x^2-5x-3$ 的图像与 x 轴的公共点的坐标分别是(3，0)和$\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

例题2 已知二次函数 $y=-x^2+4x-1$，求：

(1) 二次函数的图像与 y 轴的公共点的坐标；

(2) 二次函数的图像与直线 $y=2$ 的公共点的坐标.

分析 二次函数的图像与 y 轴的公共点的横坐标 $x=0$，纵坐标就是当自变量 $x=0$ 时，函数 $y=-x^2+4x-1$ 的函数值. 二次函数的图像与直线 $y=2$ 的公共点的纵坐标为 2，横坐标就是 $y=2$ 时相应一元二次方程 $-x^2+4x-1=2$ 的实数根.

解 (1) 当 $x=0$ 时，$y=-x^2+4x-1=-1$.

所以二次函数的图像与 y 轴的公共点的坐标是(0，－1).

(2) 由 $y=2$，得 $-x^2+4x-1=2$.

整理得 $x^2-4x+3=0$.

解得 $x_1=1$，$x_2=3$.

所以函数 $y=-x^2+4x-1$ 的图像与直线 $y=2$ 的公共点的坐标分别是(1，2)和(3，2).

一般地，关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=m$ $(a\neq0)$ 的实数根是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=m$ 的公共点的横坐标.

第二节 二次函数的解析式 9

例题 1

本题展示了求二次函数图像与 x 轴的公共点的坐标的一般过程和表达要求. 可让学生先解题，然后通过讲评进一步明确解题过程和方法.

例题 2

本题目的是引进求二次函数的图像与 y 轴或平行于 x 轴的直线的公共点的坐标的方法. 要重视解题思路的分析，帮助学生理解题意，把握知识点之间的联系，举一反三，灵活运用知识.

边款中所指出的一般性结论不要求学生掌握.

练习 1.2(1)

1. 求下列二次函数的图像与 x 轴的公共点的坐标.

(1) $y=x^2-5$;　　(2) $y=x^2+3x$;

(3) $y=2x^2-3x+1$;　　(4) $y=-x^2+2x+3$.

2. 求下列二次函数的图像与直线 $y=-2$ 的公共点的坐标.

(1) $y=x^2+3x-6$;　　(2) $y=x^2-2x-10$.

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像就是抛物线 $y=ax^2+bx+c$,它与 x 轴的公共点的个数有三种情况:有两个公共点;有且只有一个公共点;没有公共点.

思考

怎样判断抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴公共点的个数?

由于抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的公共点的横坐标是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根,而一元二次方程的实数根的情况可根据这个方程的判别式来判断,由此得到:

抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的公共点的个数,由相应的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 确定;反过来,由抛物线与 x 轴的公共点的个数,也可以确定判别式的值的符号.即

(1) $\Delta>0 \Leftrightarrow$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有两个公共点;

(2) $\Delta=0 \Leftrightarrow$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有且只有一个公共点;

(3) $\Delta<0 \Leftrightarrow$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴没有公共点.

当抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有两个公共点时,可称公共点为它们的交点.
当抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有且只有一个公共点时,这个公共点就是抛物线的顶点.

例题3 判断下列抛物线与 x 轴的公共点的个数:

(1) $y=2x^2+5x+4$;　　(2) $y=2x^2+5x-4$;

(3) $y=2x^2-2\sqrt{6}x+3$.

解 (1) 对于方程 $2x^2+5x+4=0$,

$$\Delta=5^2-4\times2\times4=-7<0.$$

所以抛物线 $y=2x^2+5x+4$ 与 x 轴没有公共点.

(2) 对于方程 $2x^2+5x-4=0$,

$$\Delta=5^2+4\times2\times4=57>0.$$

所以抛物线 $y=2x^2+5x-4$ 与 x 轴有两个公共点.

(3) 对于方程 $2x^2-2\sqrt{6}x+3=0$,

10 第一章　一元二次方程与二次函数

练习 1.2(1)

1. (1) $(\sqrt{5},0),(-\sqrt{5},0)$;

(2) $(0,0),(-3,0)$;

(3) $(1,0),\left(\frac{1}{2},0\right)$;

(4) $(-1,0),(3,0)$.

2. (1) $(-4,-2),(1,-2)$;

(2) $(4,-2),(-2,-2)$.

【本课重点】

引导学生利用一元二次方程的知识研究二次函数的图像与 x 轴的公共点的个数,建立其公共点个数与相应一元二次方程的根的判别式之间的联系.

思考

在学生对抛物线与 x 轴的公共点个数情况已有具体认识的基础上,让学生探讨根据抛物线的表达式来判断与 x 轴公共点的个数的方法.

可组织学生进行讨论;先让学生归纳和表述结论,然后再进行整理和完善.

例题 3

本题是运用相应的一元二次方程根的判别式判断抛物线与 x 轴公共点的个数,帮助学生掌握判断的方法.

【注意事项】

(1) 在“思考”栏目的问题讨论中,要引导学生抓住新旧知识之间的实质性联系:抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴公共点的横坐标就是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根,判断抛物线与 x 轴公共点的个数其实就是判断相应一元二次方程的实数根情况.于是,可运用一元二次方程根的判别式来解决问题.

(2) “边款”中指出,抛物线与 x 轴有两个公共点时,可称公共点为它们交点,要让学生知道;抛物线与 x 轴有且只有一个公共点时,这个公共点是抛物线的顶点,要提醒学生注意.

例题 4

本题是根据抛物线与 x 轴公共点的个数情况，探求抛物线表达式中系数所含字母 m 需满足的条件. 解题思路是由相应的一元二次方程根的判别式的值的符号特征，得到关于 m 的不等式，通过解不等式确定 m 的取值范围.

练习 1.2(2)

1. （1）两个；（2）一个；
（3）没有.

2. （1）$k<1$ 且 $k\neq0$；
（2）$k=1$；（3）$k>1$.

【本课重点】

通过由抛物线与 x 轴的公共点情况判断抛物线的位置特征或求抛物线表达式中的待定系数的举例，让学生进一步了解一元二次方程知识在二次函数中的基本运用.

例题 5

本题是代数证明题. 证明思路的分析过程是："抛物线在 x 轴的上方"，只需"抛物线开口向上且与 x 轴没有公共点"，于是只需"抛物线表达式中的二次项系数大于零且相应一元二次方程的根的判别式小于零".

$$\Delta=(2\sqrt{6})^2-4\times2\times3=0.$$

所以抛物线 $y=2x^2-2\sqrt{6}x+3$ 与 x 轴有且只有一个公共点.

例题4 当 m 满足什么条件时，抛物线 $y=(m+1)x^2+4mx+4m-3$ 与 x 轴的公共点的情况是：

（1）有两个公共点？

（2）有且只有一个公共点？

（3）没有公共点？

解 由抛物线的表达式可知 $m+1\neq0$.

对于一元二次方程 $(m+1)x^2+4mx+4m-3=0$，

$$\Delta=(4m)^2-4(m+1)(4m-3)=-4(m-3).$$

（1）当 $-4(m-3)>0$ 且 $m+1\neq0$，即 $m<3$ 且 $m\neq-1$ 时，这条抛物线与 x 轴有两个公共点.

（2）当 $-4(m-3)=0$ 且 $m+1\neq0$，即 $m=3$ 时，这条抛物线与 x 轴有且只有一个公共点.

（3）当 $-4(m-3)<0$ 且 $m+1\neq0$，即 $m>3$ 时，这条抛物线与 x 轴没有公共点.

练习 1.2(2)

1. 试判断下列抛物线与 x 轴的公共点的个数：
（1）$y=x^2-2x-1$；
（2）$y=x^2-2x+1$；
（3）$y=x^2-2x+2$.
2. 当 k 取何值时，抛物线 $y=kx^2+2(k-1)x+k-1$ 与 x 轴的公共点的情况是：
（1）有两个公共点？
（2）有且只有一个公共点？
（3）没有公共点？

例题5 求证：抛物线 $y=x^2-mx+m^2+1$ 在 x 轴的上方.

分析 抛物线 $y=x^2-mx+m^2+1$ 的开口向上，可知当抛物线与 x 轴没有公共点时，它的所有的点都在 x 轴的上方.

> 抛物线在 x 轴的上方是指抛物线上所有的点都在 x 轴的上方.

证明 ∵ 二次项系数 $1>0$，

∴ 抛物线 $y=x^2-mx+m^2+1$ 的开口向上.

对于方程 $x^2-mx+m^2+1=0$，

$$\Delta=m^2-4(m^2+1)=-3m^2-4.$$

∵ $-3m^2\leqslant0$，$-4<0$，

第二节 二次函数的解析式 11

【注意事项】

（1）在例题 4 的教学中，要强调解题的表达格式. 解题过程的表达按照"$\Delta>0$"推得"抛物线 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$ 与 x 轴有两个公共点"的形式呈现，m 的取值范围是充分条件.

（2）对于例题 5，初学者可能在理解题意上存在一定的困难. 在教学中，重点应放在证明思路的分析上. 可以画一个符合条件的草图，让学生进行观察和思考，发现"抛物线在 x 轴的上方"的特征就是"抛物线开口向上且与 x 轴没有公共点". 于是，只要根据抛物线的表达式能断定抛物线开口向上且与 x 轴没有公共点，就能推出结论.

证题后，可引导学生思考"抛物线在 x 轴下方"的情况，进一步获得规律性的认识.

$\therefore\ \ \Delta<0.$

可知抛物线 $y=x^2-mx+m^2+1$ 与 x 轴没有公共点.

$\therefore$ 抛物线 $y=x^2-mx+m^2+1$ 在 x 轴的上方.

例题6 已知抛物线 $y=x^2+4x+m$ 与 x 轴有两个公共点 A、B,且线段 $AB=6$,求 m 的值.

解 不妨设点 A 在点 B 的左侧,点 A 的坐标为 $(x_1,0)$.

因为线段 $AB=6$,所以点 B 的坐标为 $(x_1+6,0)$.

这时,x_1、x_1+6 是相应的一元二次方程 $x^2+4x+m=0$ 的两个实数根,得

$$x_1+(x_1+6)=-4,\quad ①$$

$$x_1\cdot(x_1+6)=m.\quad ②$$

由①解得 $x_1=-5$,再代入②,

解得 $m=-5$.

例题 6 也可以这样解:

设 $A(x_1,0)$,$B(x_2,0)$,则 x_1、x_2 是方程 $x^2+4x+m=0$ 的两个不相等的实数根. 这时应有 $\Delta>0$,即 $16-4m>0$,得 $m<4$.

解方程 $x^2+4x+m=0$,得

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4m}}{2}=-2\pm\sqrt{4-m}.$$

$\therefore\ \ AB=|x_1-x_2|$

$=\left|(-2+\sqrt{4-m})-(-2-\sqrt{4-m})\right|=2\sqrt{4-m}.$

$\because\ \ AB=6$,

$\therefore\ \ 2\sqrt{4-m}=6.$

解得 $m=-5$.

经检验,$m=-5$ 满足 $m<4$ 的条件,并且是方程 $2\sqrt{4-m}=6$ 的根.

所以 $m=-5$.

我们还可以利用一元二次方程的根与系数的关系,得到 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$. 于是,$AB=\sqrt{16-4m}$,再求出 m 的值.

练习 1.2(3)

1. 已知二次函数 $y=x^2-(k+4)x+2k-1$,求证:无论 k 取何值,它的图像与 x 轴总有两个公共点.
2. 已知抛物线 $y=x^2-kx+k-2$ 与 x 轴有两个公共点 A、B,且 $AB=2$. 求抛物线的表达式及 A、B 的坐标.

12 第一章 一元二次方程与二次函数

例题 6

本题由已知抛物线截 x 轴所得线段长求其表达式系数中所含字母的值,对知识运用的要求具有综合性和灵活性.

本题有多种解法,课本中给出了两种基本解法,可以进行比较和讲评. 第一种解法中,设点 A 在点 B 的左边,结合线段 $AB=6$ 的条件,简化了解题过程;第二种解法中,利用了 $AB=|x_1-x_2|$ 这一关系式,要注意表达的严密性.

练习 1.2(3)

1. $\Delta=k^2+20>0$.
2. $y=x^2-2x$,
   $(0,0)$,$(2,0)$.

【注意事项】

在例题 6 解题后,"边款"中提示可进一步得到 $AB=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$;另外,可得 $AB=|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$(其中 $\Delta=b^2-4ac>0$).

还可对例题 6 提出其他解法. 如:由抛物线 $y=x^2+4x+m$ 的对称轴是直线 $x=-2$,线段 $AB=6$,可设 A、B 两点的坐标分别为 $(-5,0)$ 和 $(1,0)$,可知 -5 和 1 是一元二次方程 $x^2+4x+m=0$ 的两个实数根,所以 $m=(-5)\times1=-5$. 这一解法涉及轴对称性质的运用,学生不太熟悉,因此课本中没有给出,可鼓励学生尝试.

【本课重点】

引导学生复习由已知二次函数图像上三点的坐标求函数解析式的方法，并进一步掌握二次函数图像的基本特征.

例题 1

本题是帮助学生复习由已知二次函数图像上三点的坐标求函数解析式、由二次函数解析式研究它的图像特征的方法.

可让学生自主活动和解决问题.

例题 2

本题着重于由二次函数解析式研究它的图像特征，帮助学生进一步掌握二次函数图像的基本特征.

在例题 1 的基础上研究二次函数图像的性质，与正比例函数图像的性质不同的是，图像上升或下降是由抛物线的对称轴和开口方向所决定的.

1.3 二次函数解析式的确定

确定二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的解析式，就是要确定 a、b、c 的值. 如果已知二次函数图像上三个点的坐标（或自变量与函数值的三组对应值），那么可列出关于 a、b、c 的方程组，通过解方程组求得 a、b、c 的值.

例题1 已知二次函数的图像经过 $A(4,5)$、$B(2,-3)$、$C(0,-3)$ 三点.

（1）求这个二次函数的解析式；

（2）指出图像的开口方向、对称轴和顶点坐标，以及图像的变化趋势.

解 （1）设所求二次函数的解析式为 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$.

根据题意，得 $\begin{cases}16a+4b+c=5,\\4a+2b+c=-3,\\c=-3.\end{cases}$

解这个方程组，得 $a=1,\ b=-2,\ c=-3$.

所以，所求二次函数的解析式为 $y=x^2-2x-3$.

（2）$y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，二次项系数 $1>0$.

因此，这个二次函数的图像开口向上，对称轴是直线 $x=1$，顶点坐标是 $(1,-4)$.

图像在直线 $x=1$ 左侧的这部分曲线下降，在右侧的这部分曲线上升；顶点是图像的最低点（图像如图 1－2 所示）.

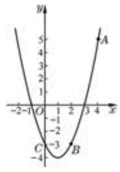


图 1－2

图像上升或下降，是指沿着 x 轴的正方向看图像时，图像上点的位置变化的态势.
于是可知，图像上升（或下降），y 的值随 x 的值增大而增大（或减小）.

例题2 指出下列二次函数图像的开口方向、最高点或最低点的坐标，以及图像的变化趋势.

（1）$y=-x^2+4x-6$；（2）$y=2x^2-5x-3$.

解 （1）$y=-x^2+4x-6=-(x-2)^2-2$，二次项系数 $-1<0$.

所以二次函数 $y=-x^2+4x-6$ 的图像开口向下，最高点即顶点的坐标是 $(2,-2)$；图像在直线 $x=2$ 左侧的这部分曲线上升，在右侧的这部分曲线下降.

（2）$y=2x^2-5x-3=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{49}{8}$，二次项系数 $2>0$.

所以二次函数 $y=2x^2-5x-3$ 的图像开口向上，最低点即顶点的坐标是 $\left(\frac{5}{4},-\frac{49}{8}\right)$；图像在直线 $x=\frac{5}{4}$ 左侧的这部分曲线下降，在右侧的这部分曲线上升.

【教学目标】

（1）经历对于确定二次函数解析式所需独立条件的个数的探索过程，体会待定系数的个数与所需独立条件的个数之间的关系.

（2）对于一个二次函数，能根据它的解析式说出图像的基本特征；在已知图像上三点坐标、或已知图像顶点的坐标和另一条件、或已知图像与 x 轴两交点的坐标以及另一条件的情况下，会用待定系数法求这个函数的解析式.

（3）通过解决现实生活中简单实际问题的举例，体会二次函数的基本应用.

一般地，二次函数 $y=a(x+m)^2+k$ 的图像有以下特征：

图像的对称轴是直线 $x=-m$，顶点坐标是 $(-m,k)$.

当 $a>0$ 时，图像开口向上；图像在直线 $x=-m$ 的左侧部分的曲线下降，在右侧部分的曲线上升；顶点是图像上的最低点.

当 $a<0$ 时，图像开口向下；图像在直线 $x=-m$ 的左侧部分的曲线上升，在右侧部分的曲线下降；顶点是图像上的最高点.

二次函数 $y=a(x+m)^2+k$ 的图像上升、下降的特征，直观地表达了这个二次函数的函数值随着自变量的值变化而变化的情况.

> 在讨论函数值的变化情况时，自变量 x 的取值范围也可以分为 $x<-m$ 和 $x\geqslant -m$；或 $x\leqslant -m$ 和 $x\geqslant -m$；或 $x<-m$ 和 $x>-m$.

当 $a>0$ 时，在 $x\leqslant -m$ 的范围内，y 的值随 x 的值增大而减小；在 $x>-m$ 的范围内，y 的值随 x 的值增大而增大.

当 $a<0$ 时，在 $x\leqslant -m$ 的范围内，y 的值随 x 的值增大而增大；在 $x>-m$ 的范围内，y 的值随 x 的值增大而减小.

例题3 已知二次函数 $y=-x^2+4x-3$.

(1) 判断点 $A(2,1)$、$B(4,3)$ 是否在函数图像上；

(2) 求出函数图像与坐标轴的公共点的坐标；

(3) 指出函数图像的开口方向、顶点坐标及函数值的增减变化情况.

解 (1) 当 $x=2$ 时，$y=-2^2+4\times 2-3=1$.

所以点 $A(2,1)$ 在这个函数图像上.

当 $x=4$ 时，$y=-4^2+4\times 4-3=-3\neq 3$.

所以点 $B(4,3)$ 不在这个函数图像上.

(2) 当 $x=0$ 时，$y=-3$.

所以函数图像与 y 轴的公共点坐标是 $(0,-3)$.

当 $y=0$ 时，得 $-x^2+4x-3=0$.

解得 $x_1=1$，$x_2=3$.

所以函数图像与 x 轴的公共点坐标分别是 $(1,0)$ 和 $(3,0)$.

(3) $y=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$，二次项系数 $-1<0$.

所以，函数图像的开口向下；顶点坐标是 $(2,1)$；在 $x\leqslant 2$ 的范围内，y 的值随 x 的值增大而增大；在 $x>2$ 的范围内，y 的值随 x 的值增大而减小.

练习 1.3(1)

1. 已知二次函数图像上三点的坐标，求二次函数的解析式：

(1) $(0,10)$，$(1,5)$，$(2,2)$；

(2) $(-1,6)$，$(-2,0)$，$(-3,-2)$；

(3) $(-1,2)$，$\left(0,\frac{3}{2}\right)$，$(1,0)$.

14 第一章 一元二次方程与二次函数

通过例 2 的讨论，对二次函数图像的基本特征进行复习整理，还提出了“函数值随自变量的值增大而增大或减小”的性质，让学生直观认识“函数值的增减变化情况”.

例题 3

本题是根据二次函数的解析式讨论有关这个函数图像的一些基本问题，帮助学生复习和巩固有关知识.

练习 1.3(1)

1. (1) $y=x^2-6x+10$；

   (2) $y=2x^2+12x+16$；

   (3) $y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$.

2. (1) 开口向上，顶点坐标是 $\left(\frac{3}{2},-8\frac{1}{4}\right)$；在 $x\leqslant\frac{3}{2}$ 的范围内，y 的值随 x 的值增大而减小；在 $x>\frac{3}{2}$ 的范围内，y 的值随 x 的值增大而增大；点 A、B 都在图像上.

【注意事项】

关于“函数值的增减变化情况”，是函数单调性的直观描述. 这是为今后研究函数单调性奠基，现在只要求学生了解. 教师要对这一性质适当讲解，并结合例题 3，指导学生初步学会它的运用和表达.

2. 指出下列二次函数图像的开口方向、顶点坐标以及函数值的增减变化情况，并判断点 $A(-2,4)$、$B(3,-6)$ 是否在函数图像上.

(1) $y=x^2-3x-6$；　　(2) $y=2x^2-5x-9$.

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 可化为 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式. 它的图像是抛物线，a 的值决定了抛物线的开口方向与开口大小，顶点 $(-m,k)$ 决定了抛物线的位置；同时，抛物线的其他特征也是明确的.

想一想

我们知道，二次函数 $y=a(x+m)^2+k$ 的图像的对称轴是直线 $x=-m$，顶点坐标是 $(-m,k)$. 如果已知二次函数图像的顶点坐标及一个其他条件，能确定这个函数的解析式吗？

例题4 已知二次函数图像的顶点坐标为 $(2,-3)$，且过点 $A(3,-1)$，求这个函数的解析式.

解 由二次函数图像的顶点坐标为 $(2,-3)$，可设这个函数的解析式为 $y=a(x-2)^2-3$.

∵ 图像过点 $A(3,-1)$，

∴ $a(3-2)^2-3=-1$.

解得 $a=2$.

所以这个函数的解析式为 $y=2(x-2)^2-3$，即

$$y=2x^2-8x+5.$$

如果已知二次函数图像的顶点坐标为 (p,q)，那么可设函数解析式为

$$y=a(x-p)^2+q.$$

这时只要再有一个条件，就可以确定二次函数的解析式（即确定 a 的值）.

例题5 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像过点 $A(1,0)$ 和 $B(0,3)$，对称轴是直线 $x=-1$，求这个函数的解析式.

解 由二次函数图像的对称轴为直线 $x=-1$，可设这个函数的解析式为 $y=a(x+1)^2+k$.

∵ 图像过 $A(1,0)$、$B(0,3)$ 两点，

∴ $\begin{cases} a\cdot 2^2+k=0, \\ a+k=3. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=-1, \\ k=4. \end{cases}$

所以这个函数的解析式为 $y=-(x+1)^2+4$，即

$$y=-x^2-2x+3.$$

第二节　二次函数的解析式　15

(2) 开口向上，顶点坐标是 $\left(\frac{5}{4},-12\frac{1}{8}\right)$；在 $x\leqslant\frac{5}{4}$ 范围内，y 的值随 x 的值增大而减小；在 $x>\frac{5}{4}$ 的范围内，y 的值随 x 的值增大而增大；点 A 不在图像上，点 B 在图像上.

【本课重点】

让学生学会运用待定系数法，在已知二次函数图像的顶点或对称轴的情况下，结合其他条件，求这个函数的解析式.

想一想

让学生思考，已知二次函数图像的顶点坐标和其他一个条件确定函数解析式的方法.

例题 4

本题展现了在已知二次函数图像的顶点坐标和另一点坐标的条件下，求函数解析式的过程.

例题 5

本题展现了在已知二次函数图像的对称轴及图像上两点的坐标的条件下，求函数解析式的过程.

【注意事项】

在例题 4 或例题 5 所给定的已知条件下，运用待定系数法求函数解析式时，通常设这个函数的解析式为 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式，其中 m、k 已知或 m 已知；再结合其他已知条件求出解析式中的待定系数. 实际上，已知函数图像的顶点坐标，就是已知这个式中的 m 和 k 两个待定系数，也就是给出了两个独立的已知条件.

在教学中，要充分展示解题思路的分析和形成的过程，引导学生灵活运用所学知识解题，在知识的运用中加深理解. “边款”对例题 4 的解题方法进行了归纳，要让学生掌握.

例题6 已知二次函数 $y=x^2+2(m-3)x+9$ 图像的顶点在坐标轴上，求这个函数的解析式.

解 二次函数 $y=x^2+2(m-3)x+9$ 图像的顶点在坐标轴上，有两种情况：顶点在 x 轴上；顶点在 y 轴上.

由 $y=x^2+2(m-3)x+9=(x+m-3)^2-m^2+6m$，可知图像的顶点坐标为 $(-m+3, -m^2+6m)$.

（1）当顶点在 x 轴上时，$-m^2+6m=0$.

解得 $m=0$ 或 $m=6$.

则二次函数的解析式为 $y=x^2-6x+9$ 或 $y=x^2+6x+9$.

（2）当顶点在 y 轴上时，$-m+3=0$.

解得 $m=3$.

则二次函数的解析式为 $y=x^2+9$.

综上所述，二次函数的解析式为

$$y=x^2-6x+9, \text{或 } y=x^2+6x+9, \text{或 } y=x^2+9.$$

例题 6 在指出图像的顶点有两种位置情况后，也可以这样解：

（1）当顶点在 x 轴上时，相应的一元二次方程 $x^2+2(m-3)x+9=0$ 有两个相同的实数根.

所以 $\Delta=[2(m-3)]^2-4\times 9=0$.

解得 $m=0$ 或 $m=6$.

则二次函数的解析式为 $y=x^2-6x+9$ 或 $y=x^2+6x+9$.

（2）当顶点在 y 轴上时，一次项系数 $2(m-3)=0$.

解得 $m=3$.

则二次函数的解析式为 $y=x^2+9$.

然后再综述结论.

设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点为 M，则
（1）顶点 M 在 x 轴上 $\Leftrightarrow$ 方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=0$；
（2）顶点 M 在 y 轴上 $\Leftrightarrow b=0$.

练习 1.3(2)

1. （1）如果二次函数图像的顶点坐标为 (2, 3)，且图像过点 $M(3, 1)$，求这个函数的解析式；
   （2）已知二次函数图像的顶点坐标为 (−1, −8)，图像与 x 轴的一个公共点 A 的横坐标为 −3，求这个函数的解析式.
2. 已知二次函数的图像过点 $A(-2, 0)$ 和 $B(0, -3)$，对称轴是直线 $x=2$，求这个函数的解析式.
3. 已知二次函数 $y=x^2+2mx+9$ 图像的顶点在 x 轴上，求这个函数的解析式.

16 第一章 一元二次方程与二次函数

例题 6

本题其实是确定二次函数解析式系数中所含字母的值，帮助学生掌握二次函数“图像的顶点在坐标轴上”的代数特征.

在教学中，要引导学生认真审题，理解“图像的顶点在坐标轴上”这一条件的含义，并联想到坐标轴上的点的坐标特征、顶点坐标与解析式中系数的关系，形成解题思路.

要注意“坐标轴”是 x 轴和 y 轴的统称，所以要分两种情况进行讨论. 在解题过程中，体现了分类讨论思想.

练习 1.3(2)

1. （1）$y=-2x^2+8x-5$；
   （2）$y=2x^2+4x-6$.
2. $y=\dfrac{1}{4}x^2-x-3$.
3. $y=x^2+6x+9$ 或 $y=x^2-6x+9$.

【注意事项】

例题 6 给出了两种不同的解法，反映了两个不同方向的思考方法. 在教学中，要让学生充分思考和发表意见，自主尝试解决问题；再通过讲评，完善解法，培养学生思维的严密性和灵活性.

【本课重点】

让学生学会运用待定系数法，在已知二次函数图像与 x 轴的两个公共点的情况下，结合其他条件，求这个函数的解析式.

例题 7

本题展现了在已知二次函数图像与 x 轴的两个公共点的坐标以及另一条件的情况下，求这个函数的解析式的过程.

例题 8

本题是几何与代数的综合题，要求学生通过相似三角形的判定与性质的运用，得到抛物线与坐标轴的交点坐标，归结为如同例题 7 的问题求解. 由已知几何条件确定点的坐标，是教学的难点，要适当进行指导.

如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴有 $A(x_1,0)$ 和 $B(x_2,0)$ 两个公共点，那么 x_1、x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根. 这时，$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. 于是，这个二次函数的解析式就可以表示为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，其中 x_1、x_2 是图像与 x 轴公共点的横坐标.

例题7 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴的两个公共点的横坐标分别是 3、-1，图像与 y 轴公共点的纵坐标是 $-\frac{3}{2}$. 求这个函数的解析式.

解 设所求的二次函数的解析式为 $y=a(x-3)(x+1)$.

$\because$ 图像与 y 轴公共点的坐标是 $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$，

$\therefore$ $a(0-3)(0+1)=-\frac{3}{2}$.

解得 $a=\frac{1}{2}$.

所以这个函数的解析式是 $y=\frac{1}{2}(x-3)(x+1)$，即

$$y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}.$$

本题也可由已知三个点的坐标，用待定系数法求这个函数的解析式. 试比较，哪种方法更简便些？

例题8 如图 1－3，已知 Rt$\triangle ABC$ 的斜边 AB 在 x 轴上，斜边上的高 OC 在 y 轴正半轴上，且 $OA=1$，$OC=2$. 求过 A、B、C 三点的抛物线的表达式.

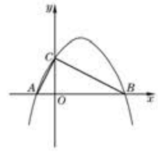


图 1－3

分析 只需求出 A、B、C 三点的坐标，就可求得抛物线的表达式.

解 由 OC 是 Rt$\triangle ABC$ 斜边上的高，可知 Rt$\triangle AOC \backsim$ Rt$\triangle COB$，得

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OC}{OB}.$$

由 $OA=1$，$OC=2$，得 $OB=4$.

$\because$ 点 A、B 在 x 轴上，且点 A、B 分别在原点的左、右侧，点 C 在 y 轴的正半轴上，

$\therefore$ $A(-1,0)$，$B(4,0)$，$C(0,2)$.

设所求抛物线的表达式为 $y=a(x+1)(x-4)$，由抛物线过点 $C(0,2)$，得

$$a(0+1)(0-4)=2.$$

解得 $a=-\frac{1}{2}$.

所以所求抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{2}(x+1)(x-4)$，即

$$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2.$$

第二节 二次函数的解析式 17

【注意事项】

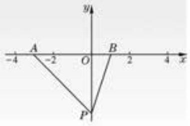
（1）通过例题 7 的教学，可指出在已知二次函数图像与 x 轴的两个公共点的坐标时，一般设这个函数的解析式为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，其中只有 a 是待定系数，再利用另一已知条件可确定 a 的值. 例题 7 也可归结为已知二次函数图像上三点的坐标求函数解析式的问题，这时解题的方法不如课本的方法简便，可对比进行讲评.

（2）用待定系数法求二次函数的解析式时，所设解析式可以是 $y=ax^2+bx+c$ 或 $y=a(x+m)^2+k$、$y=a(x-x_1)(x-x_2)$. 要指导学生注意分析已知条件的特点，选用适当的形式. 为方便表述，这三种形式的解析式可约定分别称为“一般式”“顶点式”“两根式”，但不要作为专门的“术语”，课本中也没有引入. 学生只要知道，这三种形式的解析式中分别都有三个待定系数，需要三个独立条件才能确定；可根据已知条件的特点，适当选用其中一种形式设为二次函数的解析式.

练习 1.3(3)

1. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴有 $A(-2,0)$、$B(4,0)$ 两个公共点，与 y 轴的公共点是 $C(0,4)$，求这个函数的解析式.

2. 已知抛物线与 x 轴交于 $A(-3,0)$、$B(1,0)$ 两点，与 y 轴的负半轴交于点 P，$\triangle ABP$ 的面积为 6，求抛物线的表达式.



（第 2 题）

例题9 已知一个二次函数的图像经过点 $P(-2,7)$，对称轴是直线 $x=1$，图像在 x 轴上截得的线段长为 8，求这个函数的解析式.

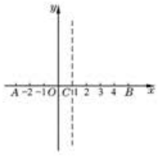


图 1-4

解　如图 1-4，设直线 $x=1$ 与 x 轴的公共点为 C，图像在 x 轴上截得的线段 $AB=8$，点 A 在点 B 的左边.

由二次函数的图像关于直线 $x=1$ 对称，可知 $AC=BC=4$ 即 $AO+OC=OB-OC=4$.

因为 $OC=1$，所以 $AO=3$，$OB=5$，且 A、B 分别在原点的左、右侧.

可得 $A(-3,0)$，$B(5,0)$.

设这个二次函数的解析式为 $y=a(x+3)(x-5)$.

$\because$　图像过点 $P(-2,7)$，

$\therefore$　$a(-2+3)(-2-5)=7$.

解得　$a=-1$.

所以，这个函数的解析式为 $y=-(x+3)(x-5)$，即

$$y=-x^2+2x+15.$$

本题利用了二次函数图像的对称性，求得图像与 x 轴的公共点的坐标，再求函数解析式. 计算过程较简便.

想一想

如果直接设函数解析式为 $y=a(x-1)^2+k$，可利用另两个条件确定这个解析式吗？

例题10 已知抛物线 $y=\frac{1}{10}x^2+mx+n$ 的对称轴是直线 $x=10$，并且过点 $M(30,20)$.

(1) 求这条抛物线的表达式；

(2) 如图 1-5，矩形 $OCBA$ 的边 OA、OC 分别在 x 轴和 y 轴上，顶点 B、C 在这条抛物线上，求点 B、C 的坐标；

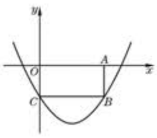


图 1-5

18 第一章　一元二次方程与二次函数

练习 1.3(3)

1. $y=-\frac{1}{2}x^2+x+4$.

2. $y=x^2+2x-3$.

【本课重点】

让学生在确定二次函数的解析式和研究二次函数的过程中，感受二次函数与平面几何知识的综合运用，提高数学思维的能力和品质.

例题 9

本题是由二次函数的图像特征确定函数的解析式.

根据题中已知条件，分析二次函数图像的几何特征，可由已知条件得到图像与 x 轴的两个公共点坐标. 于是，问题转化为“由二次函数图像与 x 轴的两个公共点以及图像上另一点的坐标求函数解析式”，这是学生已经熟悉的.

要通过对解题的讲评和反思，让学生体会二次函数图像的轴对称性的有效运用.

想一想

对例题 9 提出了一种新的解法，可让学生在课外进行尝试，再与给出的解法作比较，从中体会图像的对称性所起的作用.

【注意事项】

在例题 9 的教学中，由已知截得线段长为 8 和图像的对称性得到图像与 x 轴的两个公共点坐标，是一个难点. 可画一个草图进行分析，帮助学生理解确定两个公共点坐标的过程.

课本中上一节的例题 6，利用图像的轴对称性来解题是很好的方法，但学生不容易想到，因此回避了这样的难点，前面已有说明. 而例题 9 中给出了图像的对称轴，具有启发作用，由图像的轴对称性来解题是较好的方法，因此不再回避，并希望学生能从中获得关于图像轴对称性的运用的经验.

例题 10

本题是在二次函数的背景下研究几何图形，对有关知识和方法的综合运用有较高的要求. 它分设三个小题，形成层次，旨在培养学生综合运用的意识和能力.

在教学中，要引导学生分析，题(1)是有关确定二次函数解析式的基本方法的运用；题(2)是进行几何关系与代数关系的转化；题(3)判断$\triangle PBC$的形状可从这个三角形的三边长度关系考虑.

题(3)中的$\triangle PBC$显然是一个等腰三角形，还要进一步考察它是否是直角三角形，可利用勾股定理的逆定理判断.

练习 1.3(4)

1. $y=2x^2+4x-6$.

2. (1) $y=-\frac{1}{2}x^2+2$；

(2) $p=-x^2-4x+4$ $(-2<x<0)$；

(3) 这个矩形的周长不可能等于 9. 这是因为：设$-x^2-4x+4=9$，得方程$x^2+4x+5=0$，由$\Delta=16-4\times5<0$，可知这个方程无解.

(3) 设抛物线的顶点为 P，试判断$\triangle PBC$的形状.

解 (1) ∵ 抛物线 $y=\frac{1}{10}x^2+mx+n$ 的对称轴是直线 $x=10$，

∴ 可设抛物线的表达式为 $y=\frac{1}{10}(x-10)^2+k$.

∵ 抛物线经过点 $M(30,20)$，

∴ $\frac{1}{10}(30-10)^2+k=20$.

解得 $k=-20$.

所以，抛物线的表达式是 $y=\frac{1}{10}(x-10)^2-20$，即

$$y=\frac{1}{10}x^2-2x-10.$$

(2) ∵ 点 C 是抛物线 $y=\frac{1}{10}x^2-2x-10$ 与 y 轴的公共点，

∴ 点 C 的坐标是$(0,-10)$.

∵ $BC/\!/x$ 轴，

∴ 点 B 的纵坐标为-10.

由 $\frac{1}{10}x^2-2x-10=-10$，

解得 $x_1=0$，$x_2=20$.

根据题意，取 $x=20$.

所以，点 B 的坐标为$(20,-10)$.

(3) ∵ $y=\frac{1}{10}x^2-2x-10$

$=\frac{1}{10}(x-10)^2-20$，

∴ 抛物线的顶点 P 的坐标为$(10,-20)$.

又 $B(20,-10)$，$C(0,-10)$，

∴ $PB=\sqrt{(10-20)^2+(-20+10)^2}=10\sqrt{2}$，

$PC=\sqrt{(10-0)^2+(-20+10)^2}=10\sqrt{2}$，

$BC=|20-0|=20$.

∴ $PB=PC$，$PB^2+PC^2=BC^2$.

所以，$\triangle PBC$是等腰直角三角形.

练习 1.3(4)

1. 已知一个二次函数图像的对称轴是直线 $x=-1$，图像在 x 轴上截得的线段长为 4，与 y 轴的公共点的纵坐标为-6，求这个函数的解析式.

第二节 二次函数的解析式 19

【注意事项】

(1) 解例题 10(1)时，也可将抛物线的表达式化为 $y=\frac{1}{10}(x+5m)^2-\frac{5m^2}{2}+n$，由已知条件，得 $\begin{cases}-5m=10,\\ \frac{1}{10}\times30^2+30m+n=20,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-2,\\ n=-10.\end{cases}$ 所以，抛物线的表达式为 $y=\frac{1}{10}x^2-2x-10$. 要鼓励学生灵活运用有关知识解题，积累经验.

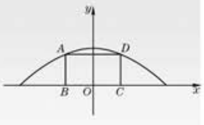
(2) 利用待定系数法求二次函数的解析式，当解析式中待定系数的个数与给定二次函数有关独立条件的个数一样时，从理论上来说这个解析式总可以确定. 但有时很难建立等量关系式，或会遇到复杂的计算、变形、解方程(组)问题，因此课本中有关确定二次函数解析式的内容要求，仍限于较为简单的情况，要注意控制难度.

2. 如图，已知二次函数 $y=-mx^2+4m$ 图像的顶点坐标为 $(0,2)$，矩形 $ABCD$ 的顶点 B、C 在 x 轴上（点 B 在点 C 的左边），顶点 A、D 在图像上且位于 x 轴上方.

(1) 求这个函数的解析式；

(2) 设点 A 的坐标为 (x,y)，求矩形 $ABCD$ 的周长 p 关于自变量 x 的函数解析式；

(3) 矩形 $ABCD$ 的周长是否可能等于 9？

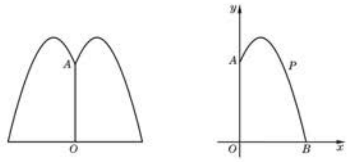


（第 2 题）

例题11 某公园要建造一个圆形的喷水池，在水池中央竖一根垂直于水面的水管，顶端安装一个喷头向外喷水. 设计方案中，以图 1-6(1)示意，OA 表示水管，喷头 A 离水面的高度为 2.25 米，水流在各个方向上沿抛物线路径落下. 在图 1-6(2)所示的平面直角坐标系 xOy 中，曲线 APB 表示落点 B 离点 O 最远的一条水流，其上的水珠的高度 y(米)关于水平距离 x(米)的函数解析式是 $y=-x^2+4x+\frac{9}{4}$.

(1) 水流 APB 上的水珠离水面的最大高度是多少米？

(2) 如果不考虑其他因素，那么圆形水池的半径至少为多少米时，才能使喷出的水流不落在水池外？



(1)　(2)

图 1-6

解 (1) 由 $y=-x^2+4x+\frac{9}{4}=-(x-2)^2+\frac{25}{4}$，可知抛物线 $y=-x^2+4x+\frac{9}{4}$ 的顶点坐标为 $\left(2,\frac{25}{4}\right)$.

因为水流 APB 的路径是抛物线 $y=-x^2+4x+\frac{9}{4}$ 的一段且经过这一抛物线的顶点，所以水流 APB 上的水珠离水面的最大高度是 $\frac{25}{4}$ 米.

(2) 由 $y=0$，得 $-x^2+4x+\frac{9}{4}=0$.

20 第一章 一元二次方程与二次函数

【本课重点】

举例展示二次函数在解决实际问题中的应用，让学生获得知识应用的过程体验，培养学生的数学应用意识和能力.

例题 11

本题是关于喷水池设计的一个实际问题. 学生对问题背景的理解有一定的生活经验基础，但如何将实际问题转化为数学问题会感到困难.

题中给出了示意图和描述水流路径的抛物线表达式，教学时可结合图形（必要时可利用多媒体）分析题意，帮助学生建立“水珠离水面的最大高度”与“抛物线顶点纵坐标”之间、“喷水池的最小半径长”与“线段 OB 的长度”之间的联系，把问题转化为求抛物线的顶点纵坐标和点 B 的横坐标.

要注意喷头中喷出的水流经过的路径是抛物线的一部分.

【注意事项】

在例 11 的教学中，给出的实际背景是学生见过的喷头喷水，但如何将这一实际问题转化为数学问题，再适当建立坐标系，构建出符合条件的解析式，对学生来说有一定的难度. 在分析和解决问题的过程中，要抓住问题的本质，引导学生体会喷水池的一面的水呈现的形状是抛物线的一部分，将喷水柱所在直线作为纵轴，地面的水平线作为横轴是最合理的选择，确立了坐标系，给出的条件就很容易转化为点的坐标，解析式的得到对学生来说就比较容易理解了.

解得　$x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{9}{2}$.

根据题意得　$x=\frac{9}{2}$.

所以圆形水池的半径至少为$\frac{9}{2}$米，才能使喷出的水流不落在水池外.

例题12　有一座抛物线型拱桥，已知水位正常时，桥下水面的宽度为 20 米，拱顶距水面 5 米. 图 1－7 是拱桥的截面图，其中桥拱截线是一段抛物线，平面直角坐标系 xOy 的原点 O 是桥拱截线与水位正常的水面截线相交处的一点，x 轴在水面截线上；AB 是警戒线，拱顶到 AB 的距离为 1.8 米.

(1) 求桥拱截线所在抛物线的表达式；

(2) 求达到警戒线 AB 位置时水面的宽度.

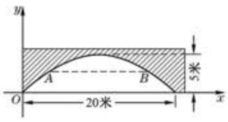


图 1－7

解　(1) 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线的顶点坐标为(10,5)，抛物线与 x 轴的公共点坐标为(0,0)和(20,0).

设抛物线的表达式为 $y=a(x-10)^2+5$.

∵　原点 $O(0,0)$ 在抛物线上，

∴　$a(0-10)^2+5=0$.

解得　$a=-\frac{1}{20}$.

所以，抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{20}(x-10)^2+5$，即

$$y=-\frac{1}{20}x^2+x.$$

(2) 由拱顶到警戒线 AB 的距离以及到 x 轴的距离分别为 1.8米和 5 米，可知点 A 的纵坐标为 3.2.

∵　点 A 在抛物线 $y=-\frac{1}{20}x^2+x$ 上，

∴　$-\frac{1}{20}x^2+x=3.2$，

即　　$x^2-20x+64=0$.

第二节　二次函数的解析式　21

例题 12

本题以抛物线型的拱桥为背景，题(1)为题(2)作铺垫；给出平面直角坐标系，是为将实际问题数学化提供思考方法.

在分析题意的过程中，要引导学生正确理解已知条件中的有关数量；再根据这些数量及其关系，在平面直角坐标系中确定有关点的坐标. 这样，题(1)就转化为在已知抛物线的顶点和另一点的坐标的情况下求它的表达式的问题；题(2)就归结为在已知抛物线上一点的纵坐标求它的横坐标的问题，这都是学生容易解决的数学问题.

【注意事项】

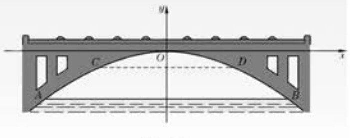
(1) 将数学知识用于解决实际问题，通常都是教学的难点. 在例题 11 和例题 12 中，所提出的实际问题已经进行了一些数学化的处理，目的是适当降低解决问题的难度. 在实际应用问题的教学中，要注重于学生的数学应用意识的培养，关注学生从中所获得的过程与方法的体验；而问题的难度应合理地控制，以提高学生的学习兴趣和信心.

(2) 在例题 12 中，提出问题时已建立了直角坐标系. 解题后，教师可引导学生思考，本题是否还有其他的建立平面直角坐标系的方法？怎样建立平面直角坐标系才是较好的方法？然后让学生尝试在不同的直角坐标系中解决问题，从中看到直角坐标系的建立可以有不同的选择；在不同的直角坐标系中抛物线的表达形式也不同，解决问题的过程也有差别. 这样有利于学生体会直角坐标系的工具价值和适当建立直角坐标系的意义，同时培养学生的优化意识.

解得　$x_1=16$，$x_2=4$.
可得 $A(4, 3.2)$，$B(16, 3.2)$.
$AB=16-4=12$(米).
所以，达到警戒线 AB 位置时水面的宽度为 12 米.

练习 1.3(5)

1. 如果在距地面高度 h_0 米处将一个物体以 v_0 米/秒的速度竖直上抛，那么物体的高度 h(米)与运动时间 t(秒)的关系可以用公式 $h=-4.9t^2+v_0t+h_0$ 表示. 现将一个小球从地面开始以 24.5 米/秒的速度竖直向上抛起，它经过多少时间落到地面？
2. 一座抛物线型拱桥的截面如图所示，其中桥拱截线是一段抛物线，AB 表示正常水位时桥下水面的宽，CD 表示水位上升 3 米时水面的宽，$AB=20$ 米，$CD=10$ 米. 平面直角坐标系 xOy 的原点是抛物线的顶点 O，x 轴是水平线.
   (1) 求桥拱截线所在抛物线的表达式；
   (2) 求拱顶离正常水位 AB 的高度.



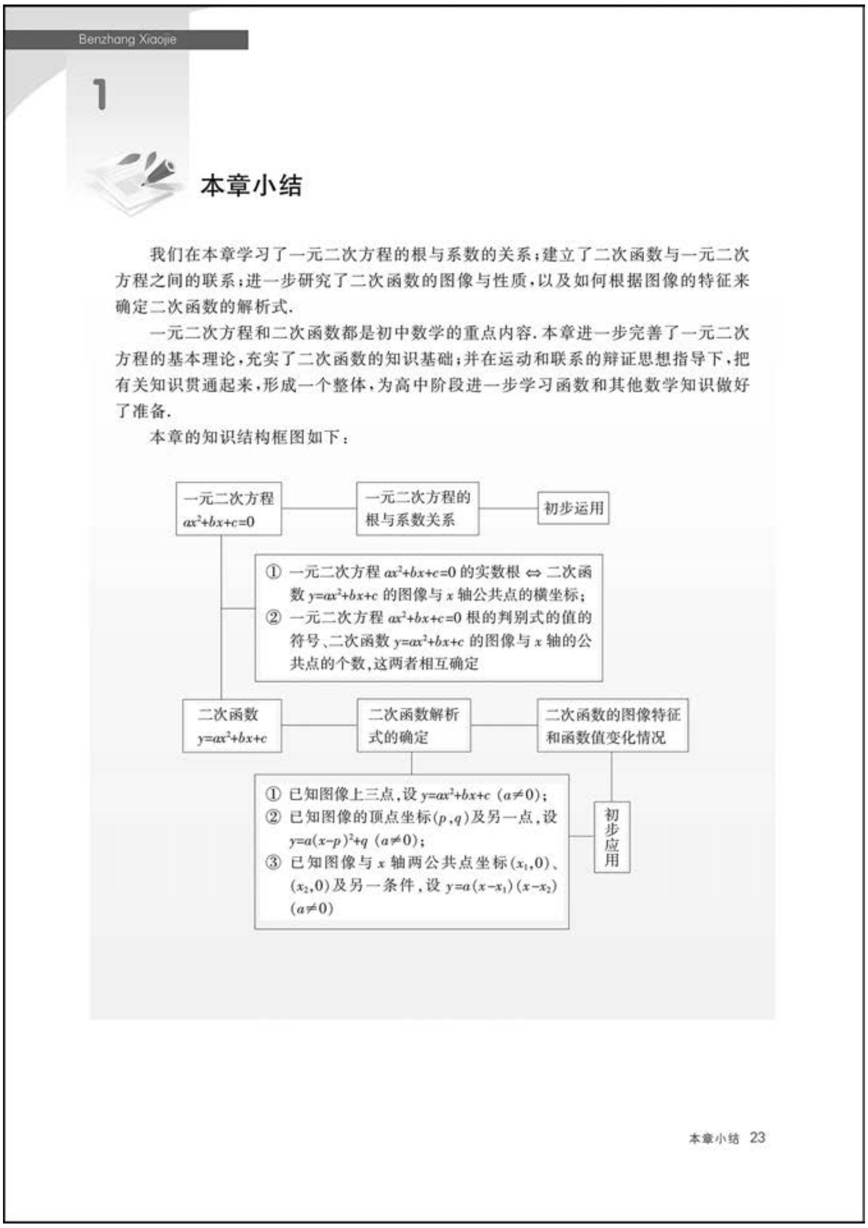
(第 2 题)

练习 1.3(5)

1. $t=5$.
2. (1) $y=-\dfrac{1}{25}x^2$；
   (2) 4 米.

一元二次方程和二次函数，是初中数学的重要内容，是学习高中数学的必要基础.

对本章的学习进行小结，一方面要帮助学生系统整理有关知识，熟悉一元二次方程的根与系数关系的基本运用，掌握确定二次函数解析式的基本方法和研究函数图像特征的实施要点，了解二次函数的初步应用；另一方面要引导学生体会数形结合的数学思想以及用函数描述变化过程中两个变量的依赖关系、用方程处理变量在变化过程中的“瞬间”情况等数学观点，由此，理解一元二次方程与二次函数之间的联系，对一元二次方程形成基于函数思想的新认识，对二次函数的图像与 x 轴的位置关系会用方程知识进行判断和描述，完善基础知识，深化数学理解.



1

本章小结

我们在本章学习了一元二次方程的根与系数的关系；建立了二次函数与一元二次方程之间的联系；进一步研究了二次函数的图像与性质，以及如何根据图像的特征来确定二次函数的解析式.

一元二次方程和二次函数都是初中数学的重点内容. 本章进一步完善了一元二次方程的基本理论，充实了二次函数的知识基础；并在运动和联系的辩证思想指导下，把有关知识贯通起来，形成一个整体，为高中阶段进一步学习函数和其他数学知识做好了准备.

本章的知识结构框图如下：

Tanjiu Huodong

1

探究活动

公路隧道设计的可行性分析

某一新建公路要穿越一座大山，对隧道的设计要求是，确保宽度不超过 2 米、高度不超过 2.8 米的汽车可同时来往通过，汽车通行时上部与隧道顶部的间距不少于 0.2 米. 为节省建筑成本并兼顾美观，还要求隧道的最大高度不超过4.5 米、宽度不超过 6 米；隧道顶部横截线为抛物线，两侧为直立面，中间不加支柱.

有一个方案设计的隧道截面如图 1－8 所示. 这个截面由一段抛物线和矩形 $ABCD$ 中的三边围成，图形关于 BC 的垂直平分线成轴对称. 抛物线顶点 M 到 BC 的距离为 4.25 米，矩形的边 AB 的长为 2 米，BC 的长为 6 米. 试思考以下问题：

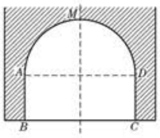


图 1－8

(1) 这一设计符合汽车通行的要求吗？

(2) 为保障行车安全，车道不能过于靠近隧道两侧，在这一设计方案中，车道边界与隧道一侧的最小距离约为多少米？

(3) 在特殊情况下，如一辆宽度为 2.6 米、高度达到 3.6 米的汽车，可以单行通过吗？

提示：

(1) 适当建立平面直角坐标系 xOy，求出抛物线的顶点 M 和点 D 的坐标.

(2) 求出这一段抛物线的表达式 $y=f(x)$.

(3) 适当取一些 a 的值，通过计算有关 $f(a)$ 的值进行分析、判断.

24 第一章 一元二次方程与二次函数

【设计意图】

让学生通过对公路隧道的一个设计方案的可行性分析，体会数学知识的实际应用，获得提出分析方法、进行操作实施、作出合理判断的过程经历，培养学生的探究精神、合作精神以及数学应用意识、质量和效率意识，锻炼学生分析问题和解决问题的能力.

【活动建议】

学生在本章学习中，对二次函数在隧道设计中的简单应用已有初步的了解. 这一探究活动，在知识应用的层次上有所提高，而如何进行可行性分析和选用适当方法进行实施，则是学生面临的新问题.

建议组织有兴趣的学生，采用小组讨论的方式开展活动.

如果学生对提出分析方法感到困难，可指导学生根据“提示”进行讨论.

要求学生按活动小组写出可行性分析报告，再组织成果交流，进行鼓励性评价.

【问题答案】

(1) 这一设计符合汽车通行的要求.

(2) 车道边界与隧道一侧的最小距离约 0.76 米.

(3) 可以单行通过.

第二章 直线和圆

一、教学目标

1. 掌握圆的切线的判定定理与性质定理,掌握切线长定理;理解三角形内切圆的概念,会求特殊三角形的内切圆的半径长;了解两圆位置关系与两圆公切线条数间的关联,会求两圆公切线的长.

2. 理解圆周角的概念,初步掌握圆周角定理及其推论;知道弦切角的概念以及弦切角定理;初步会用弦切角定理解决一些简单的问题.

3. 知道相交弦定理、割线定理、切割线定理,初步会用这些定理解决一些简单的计算问题,知道这些定理揭示了两条相交直线与圆有特殊位置关系时所成图形的度量性质.

4. 知道圆内接四边形和四点共圆的概念,知道圆内接四边形的性质定理和判定定理,初步会用判定定理证明简单的四点共圆问题.

5. 在圆的研究中进一步体验由实验归纳到推理论证的过程,体会几何研究的基本方法;了解圆的知识内容的基本结构,进一步领悟转化、分类讨论等数学思想方法.

二、课时安排

本章教学共16课时,建议分配如下:

2.1 圆的切线	6课时
2.2 与圆有关的角	4课时
2.3 与圆有关的比例线段	2课时
2.4 圆内接四边形	2课时
本章小结	2课时

三、设计说明

本章内容是九年级第二学期数学课本中"圆与正多边形"一章内容的扩充,是在学习了圆的基本性质以及直线与圆、圆与圆的位置关系等内容的基础上,进一步学习由直线与圆所构成的图形的一些基本性质以及平面几何研究的基本思想方法,拓展平面几何的知识基础.

整个初中平面几何的内容,遵循了由"实验几何"逐步进入"论证几何"的发展过程,通过实验几何对平面几何进行探源和奠基,在论证几何中对平面几何逐步进行严格化和系统化. 本章内容是初中平面几何的最末一章,主要在论证几何的层面上展开.本章的编写,更加注重"论证几何"中"定义→判定与性质→运用"的基本结构特征,更加强调几何演绎的思想方法;同时注意体现"实验几何"与"论证几何"之间的联系与发展,展现几何研究的完整过程和几何学习的教育价值. 平面几何的许多结论首先来自于实践经验,实验归纳是认识几何的起点,所以本章在形成概念、发现结论、探索证明思路的过程中,仍重视几何实验方法的运用.同时,特别关注的是论证几何对发展学生逻辑思维能力有重要作用,平面几何有其自身处理问题的基本方式,而且几何中的许多结论可以通过理性分析发现或者通过纯思辨得到,所以在本章更加重视运用理性思考、逻辑推理的方法来演绎结论,如从判定定理的逆命题出发,探索其性质定理.

在本章内容的处理上,注意运用"动态几何"的思想观点. 我们将图形间的不同位置关系理解为由图形的相对运动而形成的,并且可以用某些量来加以描述;不同位置关系间的转换可视为某个量由一个取值范围进入了另一个取值范围.例如相交弦定理与割线定理,都可看成是由一个圆的两条相交割线交点和这两条割线与圆的四个交点分别联结所得的四条线段之间的一种线段等积关系,区别在于割线交点从圆内移动到圆外.这也从某种意义上反映了数与形的内在一致性. 本章第2节关于与圆有关的角和线段,总体上是以运动的观点来引出有关概念,如弦切角概念的引入,采用的是由圆周角来逼近,体现量变到质变的思想.

对于几何问题的处理，注意运用化繁为简、以简御繁的策略思想．几何问题的研究，通常是由简单到复杂，同时对复杂问题总是设法分解为简单问题来解决．学生在九年级第二学期数学课本中，学习了最简单的直线与圆、圆与圆的位置关系.本章学习的内容中，很多是在两直线与圆、两圆与直线的特殊位置关系情况下的有关判定、性质以及度量关系，这体现了数学研究不断深化的过程；同时对于更为复杂的问题，则是通过将其分解进而转化为一些简单的基本问题来解决的，如圆周角定理所揭示的是两相交直线与圆在特殊位置情况下关于角度的数量关系，而对圆外角、圆内角、弦切角等的有关角度大小问题，都是设法化归为圆周角来加以解决．

四、教学建议

1．把握核心内容，建立知识结构．本章的核心内容，一是圆的切线的判定与性质定理；二是圆周角与圆周角定理．圆的切线的判定与性质，是九年级第二学期数学课本中圆与直线相切关系的延续，同时它也是进一步学习切线长定理与有关公切线计算的前提与基础.圆周角与圆周角定理，是研究一个圆与两条相交直线所成图形的立足点，圆内角、圆外角、弦切角的研究都是化归为圆周角问题来加以处理的.相交弦定理、割线定理、切割线定理的证明，都依赖于圆周角，它们只是从另一个角度来研究一个圆与两条相交直线的度量关系；圆内接四边形的性质与判定的研究，也是从圆周角切入．由此可见，本章的知识结构是以这两个内容为核心建立起来的，把握住核心内容的教学，全章内容的教学才能顺利展开和整体落实.

2．重视“问题驱动”，提高教学有效性．“问题”是数学研究的中心，一般地说，任何数学方法都是为解决问题而存在的；同时，“问题”也是学生学习数学的兴趣与动力所在，如果学生感受不到数学学习的价值与目的，那么他的学习态度通常是消极、被动的，最终也必然是失败的．因此在教学中，要注意“问题”的设计，尤其是在教学的引入部分.“问题”能给学生以明确的目标，能吸引学生的注意力，提高学习兴趣.当然这里所指的“问题”，可以是一些实际问题，也可以是数学内在问题．另外，在“问题”的设计上应注意适切性，要考虑学生的现有能力．本章编写中已设计了一些“问题”，引导学生探究学习.在具体教学中，也可根据学生的实际情况自行设计一些问题，不必对课本设计的问题生搬硬套．要强调“问题”设计的导向性和适切性，学生一旦明确了“问题”的目标所在，那么在解决问题的过程中就能有效地调动已有的知识和方法开展数学活动，主动积极地探索求知，并将所获得的知识、技能有机地纳入已有的数学认知结构中，或将已有的认知结构改造成更先进、更完善的新认知结构.这样有利于学生对教学内容的掌握，提高课堂教学效率.

3．把握教学要求，控制运用难度．本章作为拓展Ⅱ中的内容，是为进入普通高中的学生进一步学习数学提供必要的数学基础.对于圆的切线的判定与性质、圆周角与圆周角定理等核心内容，务必要求学生掌握；而其他一些知识，一般以了解或初步掌握为主，但应让学生经历基于核心内容演绎其他内容的过程，充分展开数学思想方法的教学.要抓住本章知识发展的基本线索及其特点，并注意发挥定理推导过程的载体作用（特别如圆周角定理、弦切角定理），引导学生关注图形的运动变化，把握知识之间的内在联系，理性地思考、由表及里地分析，大胆猜想、严格论证，让学生从中切实感受理性精神和逻辑推理的威力，深刻体会化归、分类讨论等思想方法的运用.

同时，在教学中应注意对例题、习题难度的把握.本章作为拓展内容，可满足学生为今后学习高中数学奠基的需要，课本中有关例题、习题的难度要求是教学目标要求的体现，不要盲目拔高教学要求和提高训练难度.

五、评价建议

1．注重为学习高中数学充实必备基础的教学要求，关注几何知识结构体系.本章教学的重要任务，是为学生学习高中数学充实平面几何知识基础.例如，圆的切线的判定与性质定理，是解析几何中研究直线与圆的关系的基础；圆周角与圆周角定理，是用几何方法推广正弦定理的基础；本章的其他一些知识内容，对学生学习高中数学也有帮助.对学生学习本章内容的情况，要进行检测和评价，并将检测的结果纳入综合评价的内容范围.在检测中，要依据教学目标全面提出考查要求，但重点应放在圆的切线的判定与性质

定理、圆周角定理等内容上，考查学生对这些内容掌握的程度. 另外，要鼓励学生对本章的学习进行反思和总结，促进学生整体认识本章知识的结构体系，领会有关数学思想方法的运用，把握注重逻辑演绎的论证几何的特点，感受几何学习的价值.

2. 加强学习的过程评价，促进学生良好学习习惯的养成. 要及时评价学生在参与教学活动中的态度、行为表现，鼓励学生积极思维、主动学习；要积极评价学生在学习过程中的认知收获和情感体验，鼓励学生不断进取、主动发展. 由于本章图形背景较复杂，逻辑推理要求提高，思维量增加，学生面临的困难较多，学习的差距有可能拉大，因此不能急于求成. 在评价过程中，要尊重真实的学习过程，保护学生学习的积极性，重视对学生的引导和激励. 要强化正面的、肯定性的评价，促进学生自觉保持良好的学习状态；要重视学习活动的讲评和学习方法的指导，要特别关注学生数学思维的逻辑性和严密性、数学表达的条理性和简明性，帮助学生改善学习，养成良好的学习习惯.

Zhixian He Yuan

2 第二章 直线和圆

“大漠孤烟直”,“长河落日圆”.直线和圆的形象存在于生活的画卷中,引人遐想.

直线和圆,都是我们已经熟悉的几何图形.我们在平面几何的学习中,从直线形到圆形,逐步认识了常见的基本图形的性质;从实验归纳到推理论证,初步掌握了几何研究的基本方法.本章主要以由直线和圆构成的图形为研究对象,探讨它们的基本性质,进一步展示平面几何研究的思想方法,完善平面几何的知识基础.

章头图是一幅自然景观图片,图中可见圆、直线和其他曲线的形象.

章头语中,首先说明了直线与圆的形象是在生活中常见的,并在人类文化中留着深深的烙印.然后,引导学生回顾以往学习平面几何的历程,以及通过学习所获得的知识、经验和方法.最后,简要说明了本章的学习内容以及学习的意义.

本章作为拓展内容,它是对整个初中平面几何的一种完善,也是为进入普通高中学习提供必要的准备.

Yuan De Qiexian

第一节　圆的切线

2.1　圆的切线

直线和圆的位置关系有三种：相交、相切、相离.

我们知道，如果一条直线和圆只有一个公共点，那么就说这条直线与圆相切，这个公共点是切点，这条直线称为圆的切线. 根据圆心到一条直线的距离是否等于这个圆的半径长，可以判断这条直线是不是圆的切线.

我们还知道判定切线的定理：

经过半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线（如图2－1）.

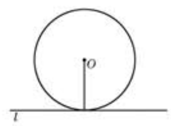


图2－1

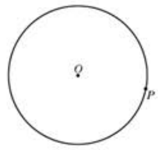


图2－2

先作出以点 P 为外端的半径；再过点 P 作垂直于这条半径的直线，则这条直线就是圆的切线，且只有一条.

已知⊙O 及⊙O 上的一点 P（如图2－2），可利用切线的判定定理，作出以点 P 为切点的圆的切线.

下面再来讨论切线的判定定理的运用.

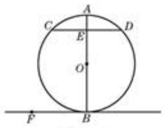


图2－3

例题1　已知：如图2－3，AB 是⊙O 的直径，弦 CD 与 AB 相交于点 E，$CE=DE$，直线 $BF/\!/CD$.

求证：BF 是⊙O 的切线.

证明　∵　AB 是⊙O 的直径，$CE=DE$，

∴　$CD\perp AB$.

又　∵　$BF/\!/CD$，

∴　$BF\perp OB$.

∵　BF 过⊙O 半径 OB 的外端，

∴　BF 是⊙O 的切线.

26　第二章　直线和圆

【本课重点】

引导学生进一步学习圆的切线的判定定理及其运用.

学生在九年级第二学期数学基本内容的学习中，已经知道圆的切线及其判定定理，可先进行复习整理，再举例运用.

例题1

本题是切线判定定理的基本运用.

在证明过程中，先利用“垂径定理”导出直线 BF 与圆的半径垂直的条件，再指出 BF 过这一半径外端，从而推出结论.

要注意论证中的严密性：由已知 CD 是弦并结合图形，可认定 CD 非直径；指出切线过半径的外端.

【教学目标】

（1）掌握圆的切线的判定定理和性质定理，能运用这些定理解决与圆的切线有关的简单问题.

（2）理解切线长的定义，掌握切线长定理；了解三角形内切圆的概念，会运用切线长定理等知识求特殊三角形的内切圆半径长.

（3）了解两圆位置关系与它们公切线条数间的内在联系；理解公切线长的概念，会求两圆公切线的长.

（4）在探索圆的切线性质、运用圆的切线有关定理解决问题的过程中，进一步体会演绎推理的思考方法和几何论证的规范表达，并提高观察、归纳、猜测、提问的能力.

【注意事项】

“边款”中给出了过圆上一点作圆的切线的方法，要求学生掌握.

例题2 已知：如图 2-4，在$\triangle ABE$中，$AB=AE$，以AB为直径的$\odot O$与BE相交于点C，$CD\perp AE$，垂足为点D.

求证：CD是$\odot O$的切线.

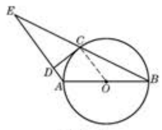


图 2-4

证明　联结OC.

$\because$ $OB=OC$,

$\therefore$ $\angle B=\angle OCB$.

$\because$ $AB=AE$,

$\therefore$ $\angle B=\angle E$.

于是得 $\angle OCB=\angle E$,

$\therefore$ $OC\parallel AE$.

$\because$ $CD\perp AE$,

$\therefore$ $CD\perp OC$.

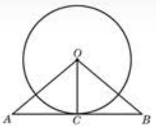
$\because$ CD过$\odot O$半径OC的外端,

$\therefore$ CD是$\odot O$的切线.

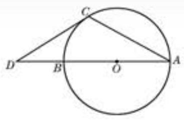
联结过切点的半径，是常用的添辅助线方法.

练习 2.1(1)

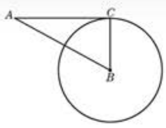
1. 已知：如图，在$\triangle ABO$中，$AO=BO$，C是AB的中点，$\odot O$是以O为圆心、OC为半径的圆.
   求证：AB是$\odot O$的切线.
2. 已知：如图，AB是$\odot O$的直径，C是$\odot O$上的一点，D是AB延长线上的一点，$CD=CA$，$\angle CAD=30°$.
   求证：CD是$\odot O$的切线.



（第1题）



（第2题）



（第3题）

3. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$\angle B=60°$，$AB=2BC$，$\odot B$经过点C.
   求证：AC是$\odot B$的切线.

问题1

切线的判定定理的逆命题是真命题吗？圆的切线有什么性质？

切线的判定定理的逆命题可以表述为：如果一条直线与一个

第一节　圆的切线　27

例题 2

本题着重提示学生，在切线判定定理的运用中，关键是判断直线与圆的一条半径具有垂直关系，可见基本图形中应有一条与直线交于圆上一点的半径，由此引进一种添辅助线的常用方法.

练习 2.1(1)

1. 提示：由等腰三角形性质，得$OC\perp AB$.
2. 提示：联结OC，可得$\angle OCA=\angle CAD=\angle D=30°$，推出$OC\perp CD$.
3. 提示：设AB交$\odot B$于点D. 联结CD，得等边三角形BCD，再证$\angle A=30°$，推出$BC\perp CA$.

【本课重点】

引进切线的性质定理及其推论，并进行简单的运用.

问题 1

引导学生从研究判定定理的逆命题着手，探讨圆的切线的性质. 这里采用了几何研究的一种常见方式进行提问.

【注意事项】

（1）圆的切线的判定，也可依据切线的定义，选择何种途径要根据问题中的具体条件而定. 但在本课中，注重于判定定理的运用，并要求学生掌握判定定理的基本运用.

（2）在例题 1 和例题 2 的教学中，展开的方式可以有所不同. 对于例题 1，可多一些教师的讲授，让学生对切线判定定理的运用有一个初步的认识；对于例题 2，要让学生有更多的时间思考，尤其是辅助线的添置，最好由学生自己添辅助线和完成证明，并通过讲评强调“边款”中的提示.

可让学生写出切线判定定理的逆命题；再由师生共同完成这个逆命题为真的证明；然后加以概括，得到圆的性质定理.

例题 3

本题是圆的切线性质定理的基本运用.“联结切点与圆心”是解决这类问题时常见的辅助线，要通过讲评进行强化.

分析圆的切线与过切点的半径所在直线的位置关系特征，导出切线性质定理的推论 1 和推论 2.

例题 4

本题是切线的性质定理在几何计算中的运用.“联结 OD”是形成解题思路关键，为“求 $\odot O$ 的半径长”直接提供了思考的依据.

要让学生注意，在一般情况下运用切线的性质定理时，常涉及“过切点的半径”.

圆相切，那么这条直线垂直于过切点的半径.下面我们来证明这个命题是真命题.

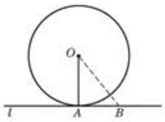


图 2－5

已知：如图 2－5，直线 l 是 $\odot O$ 的切线，切点为 A.

求证：直线 $l \perp$ 半径 OA.

证明　过圆心 O 作 $OB \perp l$，垂足为点 B，则圆心 O 到直线 l 的距离等于 OB 的长.

$\because$　直线 l 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore$　OB 的长等于 $\odot O$ 的半径长.

可知点 B 在 $\odot O$ 上，即点 B 是直线 l 与 $\odot O$ 的公共点.

$\because$　直线 l 与 $\odot O$ 只有唯一的公共点，即切点 A，

$\therefore$　点 B 一定与点 A 重合，得 OB 与 OA 重合.

$\therefore$　直线 $l \perp$ 半径 OA.

由此得到，圆的切线有如下性质：

切线的性质定理　圆的切线垂直于经过切点的半径.

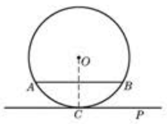


图 2－6

例题3　已知：如图 2－6，AB 是 $\odot O$ 的弦，C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，CP 是 $\odot O$ 的切线，C 是切点.

求证：$AB /\!/ CP$.

证明　联结 OC.

$\because$　C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，

$\therefore$　$OC \perp AB$.

$\because$　CP 是 $\odot O$ 的切线，C 是切点，

$\therefore$　$OC \perp CP$.

$\therefore$　$AB /\!/ CP$.

根据切线的性质定理可知，经过圆心和切点的直线垂直于切线；而在平面上过一点与已知直线垂直的直线有且只有一条，于是可得到下列推论：

推论 1　经过圆心且垂直于切线的直线必经过切点.

推论 2　经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心.

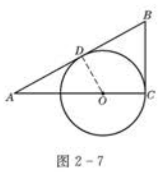


图 2－7

例题4　已知：如图 2－7，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=30°$，$\angle ACB=90°$，$BC=1$，点 O 在边 AC 上，以 OC 为半径的 $\odot O$ 与 AB 相切于点 D.求 $\odot O$ 的半径长.

解　联结 OD.

$\because$　AB 是 $\odot O$ 的切线，D 是切点，OD 为 $\odot O$ 的半径，

$\therefore$　$AB \perp OD$，即 $\angle ADO=90°$.

设 $\odot O$ 的半径长为 r.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，由 $\angle A=30°$，得 $AO=2DO=2r$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，由 $\angle A=30°$，$\angle ACB=90°$，$BC=1$，得 $AC=\sqrt{3}$.

28 第二章　直线和圆

【注意事项】

（1）课本中对切线的性质定理的证明，采用了“同一法”，教师需要讲解证明的思路.但对于“同一法”，学生只要了解和认可，不必作进一步的解释和运用，也不必出现“同一法”的名称.

（2）切线的性质定理及其推论所描述的是：一条直线的位置特征具有①垂直于切线、②过切点、③过圆心这三项中的任意两项，则必具有第三项.要帮助学生在理解的基础上进行记忆，而对它们在解题中的具体运用，可让学生在解题活动中逐步体会.

∵ $AC=AO+OC$,

∴ $2r+r=\sqrt{3}$.

解得 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

∴ ⊙O 的半径长是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

例题5 已知：如图 2-8，AB 是⊙O 的直径，AD 是弦，BC 是⊙O 的切线，切点为 B，$OC/\!/AD$.

求证：DC 是⊙O 的切线.

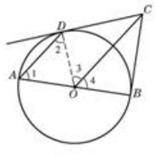


图 2-8

证明 联结 OD.

∵ BC 是⊙O 的切线，切点是 B，AB 是⊙O 的直径，

∴ $BC\perp AB$，即$\angle ABC=90°$.

∵ $OC/\!/AD$,

∴ $\angle 1=\angle 4$，$\angle 2=\angle 3$.

∵ $OA=OD$,

∴ $\angle 1=\angle 2$.

得 $\angle 3=\angle 4$.

又 ∵ $OC=OC$，$OD=OB$,

∴ $\triangle COD\cong\triangle COB$.

得 $\angle CDO=\angle ABC$.

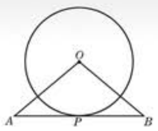
∴ $\angle CDO=90°$，即 $CD\perp OD$.

又 ∵ CD 过⊙O 半径 OD 的外端，

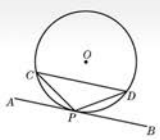
∴ DC 是⊙O 的切线.

练习 2.1(2)

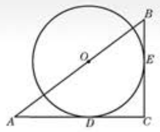
1. 已知：如图，AB 是⊙O 的切线，切点是 P，且 $PA=PB$.
   求证：$\angle A=\angle B$.
2. 如图，AB 与⊙O 相切于点 P，弦 $CD/\!/AB$.
   求证：$CP=DP$.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，已知$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=4$，$BC=3$，O 是边 AB 上一点，以 O 为圆心的⊙O 与边 AC、BC 都相切，切点分别是 D、E. 求⊙O 的半径长.

在例题 4 的解法中，体现了方程思想的运用.

例题 5

本题涉及圆的切线的判定与性质以及全等三角形等有关知识的运用，有一定的综合性.

在证题思路的分析中，首先要明确需考虑找出或画出一条过直线 DC 与圆的公共点的半径，于是“联结 OD”；然后设法证明“$DC\perp OD$”.

练习 2.1(2)

1. 提示：联结 OP.
2. 提示：联结 OP，可得 $OP\perp AB$，推出 $OP\perp CD$；再利用垂径定理导出结论.
3. 提示：联结 OD、OE，可得 正方形 $ODCE$，求得⊙O 的半径长为$\frac{12}{7}$.

【注意事项】

（1）关于切线的判定与性质定理的运用，在教学中应控制难度，一般不超过如例题 5 体现的要求.

（2）本课例题、练习题中的已知切线都给出了切点，因此有了切线的性质定理的运用. 关于切线性质定理的推论的运用，可暂不涉及；也可根据学生实际情况适当调整例题或题中条件，选用推论解题.

【本课重点】

让学生经历引进切线长和从圆外一点所作圆的两条切线的性质定理的过程，理解切线长概念并初步学会定理的运用.

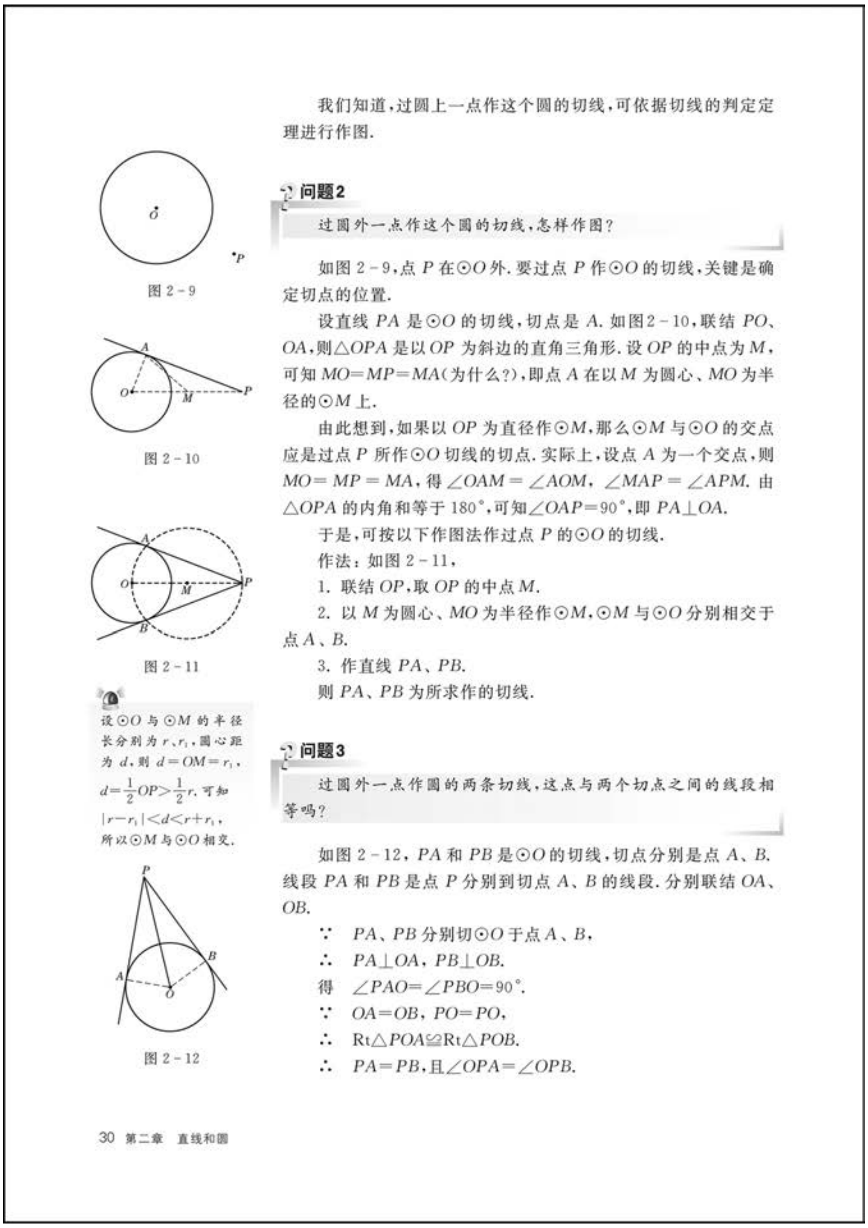
问题 2

引导学生探索过圆外一点作圆的切线的方法.

如何确定切点的位置，可通过假设这个切点已知再进行分析，教师要多加引导和讲解.

问题 3

引导学生探究从圆外一点所作圆的两条切线的性质. 重点关注这点与切点之间的线段，为引进切线长作铺垫.



我们知道，过圆上一点作这个圆的切线，可依据切线的判定定理进行作图.

图 2－9

问题2

过圆外一点作这个圆的切线，怎样作图？

如图 2－9，点 P 在$\odot O$外. 要过点 P 作$\odot O$的切线，关键是确定切点的位置.

设直线 PA 是$\odot O$的切线，切点是 A. 如图2－10，联结 PO、OA，则$\triangle OPA$是以 OP 为斜边的直角三角形. 设 OP 的中点为 M，可知 $MO=MP=MA$(为什么?)，即点 A 在以 M 为圆心、MO 为半径的$\odot M$上.

图 2－10

由此想到，如果以 OP 为直径作$\odot M$，那么$\odot M$与$\odot O$的交点应是过点 P 所作$\odot O$切线的切点. 实际上，设点 A 为一个交点，则 $MO=MP=MA$，得$\angle OAM=\angle AOM$，$\angle MAP=\angle APM$. 由$\triangle OPA$的内角和等于 180°，可知$\angle OAP=90°$，即 $PA\perp OA$.

于是，可按以下作图法作过点 P 的$\odot O$的切线.

作法：如图 2－11，

1. 联结 OP，取 OP 的中点 M.
2. 以 M 为圆心、MO 为半径作$\odot M$，$\odot M$与$\odot O$分别相交于点 A、B.
3. 作直线 PA、PB.

则 PA、PB 为所求作的切线.

图 2－11

设$\odot O$与$\odot M$的半径长分别为 r、r_1，圆心距为 d，则 $d=OM=r_1$，$d=\frac{1}{2}OP>\frac{1}{2}r$. 可知 $|r-r_1|<d<r+r_1$，所以$\odot M$与$\odot O$相交.

问题3

过圆外一点作圆的两条切线，这点与两个切点之间的线段相等吗？

如图 2－12，PA 和 PB 是$\odot O$的切线，切点分别是点 A、B. 线段 PA 和 PB 是点 P 分别到切点 A、B 的线段. 分别联结 OA、OB.

∵ PA、PB 分别切$\odot O$于点 A、B，
∴ $PA\perp OA$，$PB\perp OB$.
得 $\angle PAO=\angle PBO=90°$.
∵ $OA=OB$，$PO=PO$，
∴ $Rt\triangle POA\cong Rt\triangle POB$.
∴ $PA=PB$，且$\angle OPA=\angle OPB$.

图 2－12

30 第二章 直线和圆

【注意事项】

(1) 在过圆外一点作圆的切线的探索过程中，利用了有关直角三角形、等腰三角形、三角形内角和的性质. 以后可让学生重新认识，其作法的探索可由圆周角定理的推论直接获得.

(2) 在过点 P 作$\odot O$的切线的作法中，“$\odot M$与$\odot O$总相交”是需要证明的，在“边款”中已有提示，但对学生不作要求. 下面证明供参考：

设$\odot O$的半径长为 r，$\odot M$的半径长为 r_1，则两圆的圆心距 $OM= r_1$.

∵ 点 P 在$\odot O$外， ∴ $OP>r$，可知 $r_1=OM=\frac{1}{2}OP>\frac{1}{2}r$. ∵ $r_1<r_1+r$， ∴ $OM<r_1+r$.

当 $r_1>r$ 时，$|r_1-r|=r_1-r=OM-r<OM$；当 $r_1<r$ 时，$|r_1-r|=r-r_1<r-\frac{1}{2}r=\frac{1}{2}r<OM$.

因此，$|r_1-r|<OM<r_1+r$ 总成立，即$\odot M$与$\odot O$总相交.

(3) 在过圆外一点作出两条切线后，这两条切线的有关性质(定理 1 和定理 2 的结论)可先让学生通过观察和分析获得，然后再加以论证.

(4) 要让学生区分切线与切线长这两个不同的概念，切线是一条直线，是几何图形；切线长是一条线段的长度，是数量. 要指出“切线长”有特定的含义，不能理解为“切线的长度”.

圆的切线上一点与切点间的线段的长叫做这点到圆的**切线长**. 图 2－12 中，线段 PA 和 PB 的长是点 P 到⊙O 的切线长.

通过上面的讨论，得到以下定理：

定理 1（切线长定理） 从圆外一点作圆的两条切线，切线长相等.

定理 2 从圆外一点作圆的两条切线，它们的夹角被这一点与圆心的连线平分.

例题6 如图 2－13，已知点 P 在⊙O 外，PA、PB 是⊙O 的两条切线，切点分别为 A、B，$\angle APB=60°$，⊙O 的半径长为 1. 求点 P 到⊙O 的切线长.

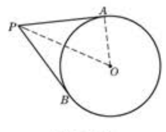


图 2－13

解 分别联结 OP 和 OA.

∵ PA 是⊙O 的切线，切点是 A，

∴ $OA \perp AP$，得 $\angle PAO=90°$.

∵ PA、PB 是⊙O 的切线，$\angle APB=60°$，

∴ $\angle OPA=\frac{1}{2}\angle APB=30°$.

在 Rt△OAP 中，$OA=1$，$PA=OA\cdot\cot\angle OPA=\sqrt{3}$.

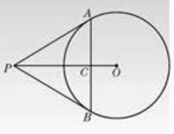
所以，点 P 到⊙O 的切线长为 $\sqrt{3}$.

练习 2.1(3)

1. 填空题：

(1) 若 A 是⊙O 外一点，则过点 A 的⊙O 的切线有______条；若 B 是⊙O 上一点，则过点 B 的⊙O 的切线有______条；若 C 是⊙O 内一点，则过点 C 的⊙O 的切线有______条.

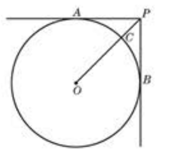
(2) 如图，PA、PB 是⊙O 的切线，切点分别为 A、B，OP 与 AB 相交于点 C，如果 $\angle APB=70°$，那么 $\angle PAB=$________度，$\angle ACP=$________度.



（第 1(2)题）

2. 已知⊙O 的半径长为 2 厘米，点 P 到圆心 O 的距离为 4 厘米，求经过点 P 的⊙O 的两条切线的夹角及切线长.

3. 如图，已知⊙O 的半径长为 1，PA、PB 是⊙O 的切线，切点分别为 A、B，$\angle APB=90°$，PO 与 $\overset{\frown}{AB}$ 交于点 C. 求线段 PC 的长.



（第 3 题）

在讨论问题 2 和问题 3 的基础上，引进切线长概念和定理 1、定理 2.

可引导学生由图 2－11 利用圆的对称性获得定理；利用图 2－12 归纳过圆外一点所作圆的两条切线关于这点与圆心的连线对称，以加深对定理 1、定理 2 的理解.

例题 6

本题是切线长概念、定理 2 以及切线性质定理的运用.

本题所添置的辅助线属于圆的常用辅助线，这两条辅助线在解题中的重要作用是：添线后就能利用切线的性质和切线长的性质，从而构造含 30°角的直角三角形.

练习 2.1(3)

1. (1) 2，1，0；(2) 55，90.
2. 所求夹角为 60°，切线长等于 $2\sqrt{3}$.
3. 提示：联结 OA、OB，可得 正方形 $OAPB$，求得 CP 长为 $\sqrt{2}-1$.

【注意事项】

(1) 在讨论问题 2 的基础上，可提出“过一点作圆的切线可以作几条”的问题让学生思考. 由点与圆的三种不同位置关系，可得所作切线的条数也不同，为以后探索两圆不同位置关系与两圆公切线的条数间的关系作铺垫.

(2) 已知过圆外一点所作圆的切线，由切线的性质定理可知，以圆外这点、圆心和切点这三点为顶点的三角形是直角三角形（切点是直角顶点），这是一个基本图形.

【本课重点】

引进三角形的内切圆及内心概念，并围绕内切圆展开切线长定理的运用.

在引进三角形的内切圆定义之前，要指出与一个三角形的三边都相切的圆存在.

例题 7

本题是在三角形的内切圆的背景下，关于切线长定理的直接运用. 解题中，利用了方程组来求解.

通过列方程(组)来解几何计算题，是常用的方法.

想一想

提出将例题 7 的结论一般化的要求，可由师生共同完成.

例题 8

本题是在已知直角三角形两直角边长的条件下，探求它的内切圆半径长，为进行一般性研究作铺垫.

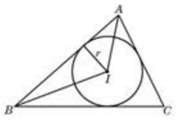


图 2－14

三角形的三条角平分线交于一点，其中两条角平分线的交点唯一确定这个三角形的内心.

如图 2－14，在△ABC 中，已知 I 是∠ABC 和∠BAC 两角的平分线的交点，点 I 到 AB 的距离为 r，⊙I 的半径长等于 r. 可知点 I 到 AC、BC 的距离也等于 r(为什么?)，则⊙I 与 AB、AC、BC 三边都相切.

如果一个圆与一个三角形的三边都相切，那么这个圆叫做这个三角形的**内切圆**，这个三角形叫做这个圆的**外切三角形**；三角形的内切圆的圆心叫做**三角形的内心**.

以三角形中两角的平分线的交点为圆心、交点到三角形一边的距离为半径所作的圆，是这个三角形的内切圆. 每个三角形有且只有一个内切圆.

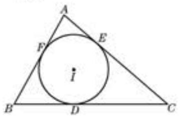


图 2－15

事实上，AF、BD、CE 三条线段的和，就是△ABC 的周长的一半.

例题7 如图 2－15，已知△ABC 中，$AB=7$ 厘米，$BC=9$ 厘米，$CA=8$ 厘米，I 是△ABC 的内心，⊙I 与 BC、CA、AB 分别相切于点 D、E、F. 求线段 AF、BD、CE 的长.

解　设 $AF=x$ 厘米，$BD=y$ 厘米，$CE=z$ 厘米.

∵　⊙I 与 BC、CA、AB 分别相切于点 D、E、F，

∴　$AE=AF$，$BF=BD$，$CD=CE$.

由题意得关于 x、y、z 的方程组

$$\begin{cases}x+y=7,\\y+z=9,\\z+x=8.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=3,\\y=4,\\z=5.\end{cases}$

所以 AF、BD、CE 的长分别为 3 厘米、4 厘米、5 厘米.

想一想

一般地，如果△ABC 中，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，那么顶点 A、B、C 到这个三角形的内切圆的切线长分别是多少(用 a、b、c 表示)?

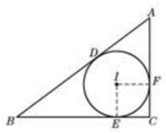


图 2－16(1)

例题8 如图 2－16(1)，已知在△ABC 中，∠$C=90°$，$AC=3$，$BC=4$，⊙I 是△ABC 的内切圆. 求内切圆的半径长.

解　设⊙I 与 AB、BC、CA 分别切于点 D、E、F.

分别联结 IE、IF，则 $IE\perp BC$，$IF\perp AC$，且 $IE=IF$.

又　∵　∠$C=90°$，

∴　四边形 $IECF$ 是正方形，其边长是⊙I 的半径长.

设⊙I 的半径长为 r，由切线长定理，得

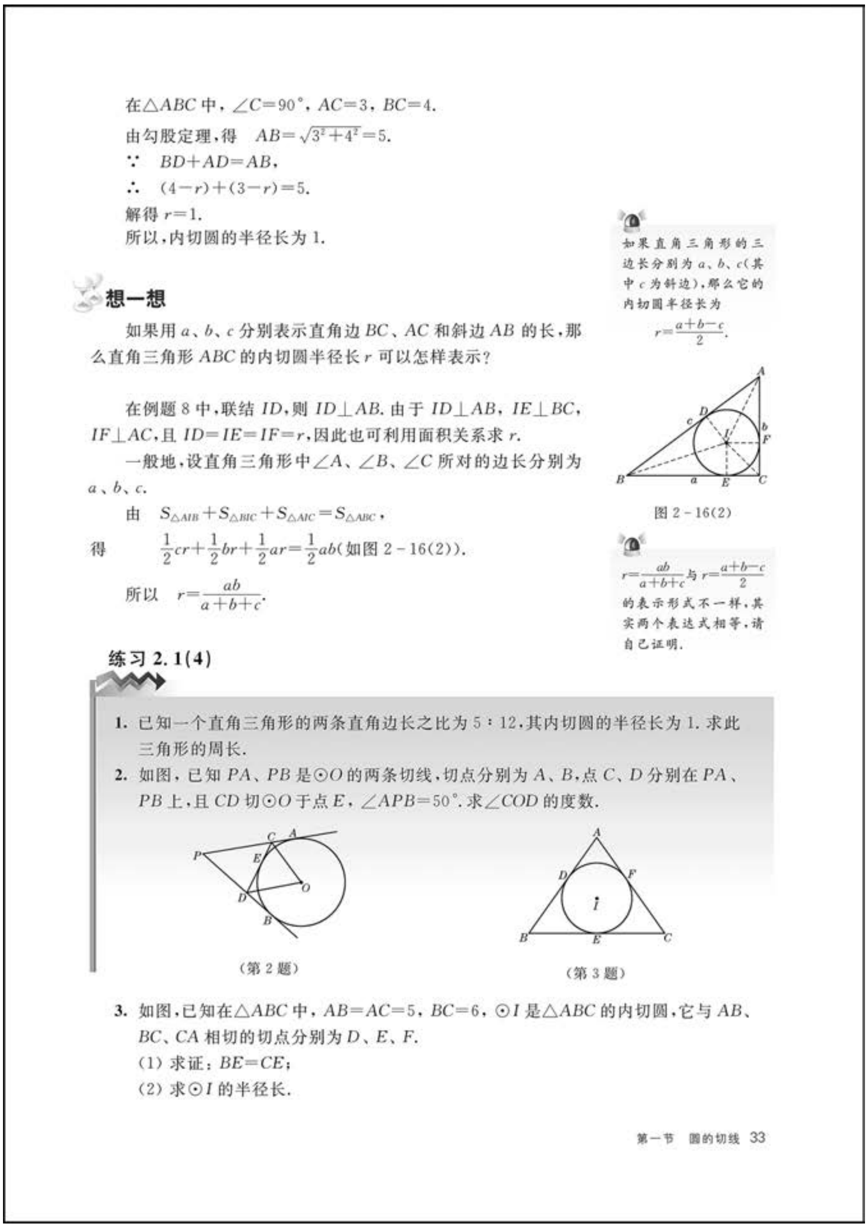
$$BD=BE=4-r，AD=AF=3-r.$$

32 第二章　直线和圆

【注意事项】

(1) 可从任一三角形有且只有一个外接圆引出关于三角形内切圆的讨论. 在引进三角形的内切圆和内心的基础上，可再结合三角形的重心、垂心，对三角形的“四心”进行梳理，明确它们各自的几何特征，让学生获得比较完整的认识.

(2) 在例题 7 的基础上，通过想一想，由已知三角形的三边长，设为 a、b、c，得到三角形的三个顶点分别到这个三角形内切圆的切线长之和为$\dfrac{a+b+c}{2}$，即等于半周长；各顶点到这个三角形内切圆的切线长分别为$\dfrac{b+c-a}{2}$、$\dfrac{a+c-b}{2}$、$\dfrac{a+b-c}{2}$.


在△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=4$.

由勾股定理，得　$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

$\because$　$BD+AD=AB$，

$\therefore$　$(4-r)+(3-r)=5$.

解得 $r=1$.

所以，内切圆的半径长为 1.

如果直角三角形的三边长分别为 a、b、c(其中 c 为斜边)，那么它的内切圆半径长为 $r=\frac{a+b-c}{2}$.

想一想

如果用 a、b、c 分别表示直角边 BC、AC 和斜边 AB 的长，那么直角三角形 ABC 的内切圆半径长 r 可以怎样表示？

在例题 8 中，联结 ID，则 $ID\perp AB$. 由于 $ID\perp AB$，$IE\perp BC$，$IF\perp AC$，且 $ID=IE=IF=r$，因此也可利用面积关系求 r.

一般地，设直角三角形中 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边长分别为 a、b、c.

由　$S_{\triangle AIB}+S_{\triangle BIC}+S_{\triangle AIC}=S_{\triangle ABC}$，

得　$\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}ar=\frac{1}{2}ab$(如图 2-16(2)).

所以　$r=\frac{ab}{a+b+c}$.

图 2-16(2)

$r=\frac{ab}{a+b+c}$ 与 $r=\frac{a+b-c}{2}$ 的表示形式不一样，其实两个表达式相等，请自己证明.

练习 2.1(4)

1. 已知一个直角三角形的两条直角边长之比为 5∶12，其内切圆的半径长为 1. 求此三角形的周长.
2. 如图，已知 PA、PB 是⊙O 的两条切线，切点分别为 A、B，点 C、D 分别在 PA、PB 上，且 CD 切⊙O 于点 E，$\angle APB=50°$. 求 $\angle COD$ 的度数.

(第 2 题)　　(第 3 题)

3. 如图，已知在△ABC 中，$AB=AC=5$，$BC=6$，⊙I 是△ABC 的内切圆，它与 AB、BC、CA 相切的切点分别为 D、E、F.
   (1) 求证：$BE=CE$；
   (2) 求⊙I 的半径长.

第一节　圆的切线　33

想一想

让学生探求用直角三角形三边长表示直角三角形内切圆半径长的公式.

“边款”中给出了公式 $r=\frac{a+b-c}{2}$，可要求学生记住，并理解其推导过程，能作简单运用.

利用面积关系探求三角形内切圆的半径长，是一种好方法. 在直角三角形中，得公式 $r=\frac{ab}{a+b+c}$.

练习 2.1(4)

1. 15.
2. 65°.
3. (1) 提示：由 $AB=AC$，$AD=AF$，得 $BD=CF$；又 $BD=BE$，$CE=CF$，得 $BE=CE$.

   (2) $r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{3}{2}$.

【注意事项】

(1) 用直角三角形三边长表示直角三角形内切圆半径长的公式有两个，它们其实是一样的. 推导如下：

$$r=\frac{ab}{a+b+c}=\frac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)(a+b-c)}=\frac{ab(a+b-c)}{a^2+2ab+b^2-c^2}=\frac{a+b-c}{2}.$$

(2) 已知直角三角形的两边长可知它的第三边长，从而可利用公式求出它的内切圆的半径长.

(3) 对于一个非直角三角形，设它的三边长为 a、b、c，面积为 S，利用面积关系可得公式 $r=\frac{2S}{a+b+c}$. 对此不作为教学要求.

【本课重点】

引进两圆公切线的概念，并让学生认识两圆的位置关系与两圆的公切线条数之间的联系，认识两圆的半径及圆心距对两圆公切线定位的作用.

让学生结合图形，理解两圆的公切线、外公切线、内公切线的概念.

操作

让学生通过画两圆公切线的操作活动，从中发现两圆的位置关系不同则这两圆的公切线的条数也不同，并且它们之间相互确定.

这里对两圆公切线的画法不作严格要求，可指导学生根据“切”的意义通过移动直尺画图，不必介绍两圆公切线的作图方法.

如图 2－17，直线 AB 与 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 都相切.

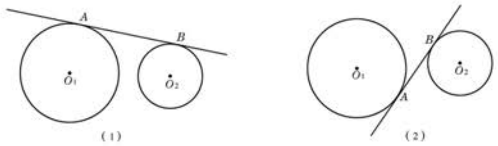


图 2－17

和两个圆都相切的直线叫做两圆的**公切线**.

如果两个圆在公切线的同旁，那么这条公切线叫做两圆的**外公切线**(如图 2－17(1)).

如果两个圆在公切线的两旁，那么这条公切线叫做两圆的**内公切线**(如图 2－17(2)).

操作

两圆的五种位置关系如图 2－18 所示. 根据两圆公切线的特征，通过移动直尺大致画出各种位置关系中两圆的外公切线、内公切线，并填写下表.

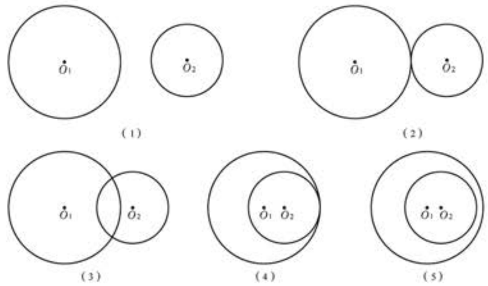


图 2－18

两圆位置关系	外公切线条数	内公切线条数	公切线条数
外离			
外切			
相交			
内切			
内含			

想一想

两圆的位置关系与这两圆的公切线条数之间有什么联系？

例题9 如图 2-19，已知$\odot O_1$和$\odot O_2$外离，$O_1O_2=d$，两圆的半径长分别为r_1、r_2，且$r_1<r_2$. 直线l是两圆的一条外公切线，分别与$\odot O_1$、$\odot O_2$相切于A、B两点，与直线O_1O_2相交于点P. 求线段PO_1的长.

解 分别联结O_1A和O_2B.

$\because$ 直线l是$\odot O_1$和$\odot O_2$的公切线，A、B分别是切点，

$\therefore$ $O_1A\perp l$，$O_2B\perp l$.

得 $\angle PAO_1=\angle PBO_2=90^\circ$.

$\therefore$ $O_1A /\!/ O_2B$.

于是 $\dfrac{PO_1}{PO_2}=\dfrac{O_1A}{O_2B}$， 得 $\dfrac{PO_1}{PO_1+d}=\dfrac{r_1}{r_2}$.

$\therefore$ $PO_1=\dfrac{r_1d}{r_2-r_1}$.

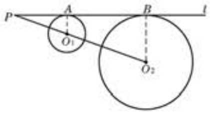


图 2-19

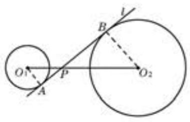


图 2-20

如图 2-20，$\odot O_1$和$\odot O_2$外离，直线l是它们的一条内公切线，分别与$\odot O_1$、$\odot O_2$相切于A、B两点，l与直线O_1O_2相交于点P. 设$O_1O_2=d$，$\odot O_1$和$\odot O_2$的半径长分别为r_1、r_2，这时线段PO_1的长也能用r_1、r_2、d表示.

同例题 9 一样，分别联结O_1A和O_2B，则$O_1A /\!/ O_2B$.

得 $\dfrac{PO_1}{PO_2}=\dfrac{O_1A}{O_2B}$， 即 $\dfrac{PO_1}{d-PO_1}=\dfrac{r_1}{r_2}$.

$\therefore$ $PO_1=\dfrac{r_1d}{r_1+r_2}$.

这里的$\dfrac{r_1}{r_1+r_2}$是一个小于 1 的正数，它的实际意义表示PO_1与圆心距d的比.

在例题 9 中可见PO_1的长虽然与d、r_1、r_2的大小有关，但当两圆的位置关系改为外切或相交时，结论仍然正确.

还可以看到，半径长相等的两圆，无论它们的位置关系是外离、外切还是相交，这两圆的两条外公切线一定平行于两圆的连心线.

另外，外切两圆的内公切线以及内切两圆的外公切线，是过切点且垂直于连心线的直线(为什么?).

两圆所成的图形关于连心线对称. 如果直线l是两圆的公切线，那么直线l关于连心线对称的直线也是这两圆的公切线.

第一节 圆的切线 35

想一想

引导学生利用操作和填表所得的结果，归纳两圆的位置关系与两圆的公切线条数之间的联系.

例题 9

本题是为了让学生感受到两圆的半径长及圆心距对两圆公切线定位的作用. 给定相离的两圆，则它们的外(内)公切线与连心线的交点定位可借助于两圆的半径长与圆心距所成的关系式，从而公切线的位置可确定.

【注意事项】

(1) 在例题 9 的教学的基础上，要引导学生举一反三，用类似的方法，对不同位置关系情况下的两圆的公切线定位进行思考，推广结论. 并让学生从度量计算中进一步看到，两圆公切线的位置由这两圆的半径长及圆心距完全确定. 有了这一铺垫，后面再研究两圆公切线的长，就有了逻辑上的基础.

(2)“边款”中指出了两圆所成的图形的轴对称性. “两圆所成的图形”就是将这两个圆看成一个图形；由于一个圆关于它的任一直径所在的直线对称，可知两圆所成的图形关于连心线对称.

例题 10

本题是一道几何计算题，重点在于引导学生关注点 P 位置的分类讨论及其规范表述.

通过本题要让学生注意到，内切两圆的公切线上的点具有数量方面的特征，以引起学生对“从数量关系方面研究图形性质”的关注.

分析中已指出了本题需分两种情形进行讨论. 还可进一步指出两种不同情形下的外显几何形态：当点 P 与点 T 重合时，P、T、O_1 三点及 P、T、O_2 三点都分别在同一直线上，以这三点为顶点的三条线段不能构成三角形；当点 P 与点 T 不重合时，以 P、T、O_1 三点或 P、T、O_2 三点为顶点都能构成直角三角形.

“边款”中将例题 10 的结论推广到一般，体现了“从特殊到一般”的数学研究方法.

练习 2.1(5)

1. (1) 外离，公切线 4 条；

(2) 相交，公切线 2 条；

(3) 内切，公切线 1 条；

(4) 外离，公切线 4 条；

(5) 内含，公切线 0 条；

(6) 内切，公切线 1 条.

2. 提示：$PO_1^2-PO_2^2=TO_1^2-TO_2^2=18$.

例题10 如图 2－21，已知$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 内切于点 T，直线 MN 是经过点 T 的公切线，$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径长分别为 5 和 3，P 是 MN 上的一个动点. 求 $PO_1^2-PO_2^2$ 的值，并指出这个值是否与点 P 的位置有关.

图 2－21

分析　由于点 P 是一个动点，因此可分为点 P 重合于切点 T 和点 P 不重合于切点 T 两种情形加以讨论.

解　∵ $\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 内切于切点 T，

∴ 连心线 O_1O_2 必经过点 T.

(1) 当 P 重合于切点 T(如图 2－21)时，

$$PO_1^2-PO_2^2=TO_1^2-TO_2^2=5^2-3^2=16.$$

(2) 当 P 不重合于切点 T(如图 2－22)时，

$O_1O_2\perp MN$，点 T 为垂足.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PO_1T$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle PO_2T$ 中，

$$PO_1^2=PT^2+O_1T^2,$$
$$PO_2^2=PT^2+O_2T^2.$$

∴ $PO_1^2-PO_2^2=(PT^2+O_1T^2)-(PT^2+O_2T^2)=TO_1^2-TO_2^2=16$.

综上所述，$PO_1^2-PO_2^2$ 的值等于 16.

$PO_1^2-PO_2^2$ 是一个常数，与点 P 的位置无关.

图 2－22

当$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的半径长分别为 r_1 和 r_2，且 $r_1>r_2$ 时，可得一般的结论：$PO_1^2-PO_2^2=r_1^2-r_2^2$.

练习 2.1(5)

1. 设 R、r、d 分别表示两圆的半径长及圆心距，根据下列条件，判断两圆的位置关系，并指出公切线的条数.

(1) $R=1$，$r=1$，$d=3$；

(2) $R=2$，$r=3$，$d=3$；

(3) $R=4$，$r=1$，$d=3$；

(4) $R=2$，$r=1$，$d=4$；

(5) $R=3$，$r=1$，$d=1$；

(6) $R=2$，$r=1$，$d=1$.

2. 如图，已知$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 外切于点 T，MN 是经过切点 T 的一条公切线. $O_1O_2=9$，$\odot O_1$ 的半径长比$\odot O_2$ 的半径长大 2. P 是 MN 上的一个动点，求 $PO_1^2-PO_2^2$ 的值.

(第 2 题)

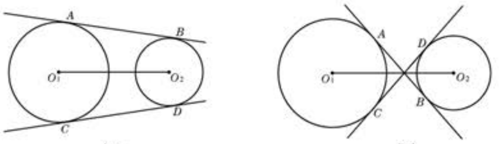
36 第二章　直线和圆

【注意事项】

例题 10 与练习 2.1(5)第 2 题是同类型的题，它们本质上研究运动变化中的不变量，它是几何研究的一个重要方面.

两圆的一条公切线上两个切点间的距离叫做**公切线的长**.

如图 2-23,在(1)中 AB、CD 是 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的两条外公切线,在(2)中 AB、CD 是 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的两条内公切线,A、B、C、D 是切点. 那么线段 AB、CD 的长都是这两圆的公切线的长. 由 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 关于连心线 O_1O_2 对称,可知 $AB=CD$.



(1)　　　　(2)

图 2-23

例题11 如图 2-24,已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外离,AB 是它们的外公切线,切点分别是 A、B,$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的半径长分别为 r_1、r_2,且 $r_1>r_2$,$O_1O_2=d$. 求外公切线 AB 的长(用 r_1、r_2、d 表示).

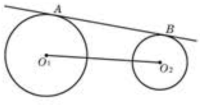


图 2-24

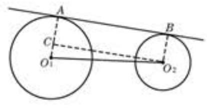


图 2-25

分析　由切线的性质定理可知,$O_1A\perp AB$,$O_2B\perp AB$. 因此可考虑平移线段 AB,构造直角三角形,通过解直角三角形来解决问题.

解　如图 2-25,分别联结 O_1A、O_2B,得 $O_1A=r_1$,$O_2B=r_2$;再过 O_2 作 $O_2C\perp O_1A$,垂足为点 C,则 $\angle O_1CO_2=90°$.

$\because$ AB 是 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的外公切线,切点分别是 A、B,

$\therefore$ $O_1A\perp AB$,$O_2B\perp AB$.

得　$\angle O_1AB=\angle O_2BA=90°$.

所以四边形 ACO_2B 是矩形.

得　$O_2C=AB$,$O_1C=O_1A-CA=r_1-r_2$.

在 $\text{Rt}\triangle O_1O_2C$ 中,由勾股定理得

$$O_2C=\sqrt{O_1O_2^2-O_1C^2}.$$

又　$O_1O_2=d$,

所以 $AB=O_2C=\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}$.

想一想

在例题 11 中,如果 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 外切,那么结论可用 r_1、r_2 表

第一节　圆的切线　37

【本课重点】

引进公切线的长,探索用两圆的半径长和圆心距表示公切线的长的计算公式;研究与两圆公切线有关的综合问题.

结合图形,帮助学生理解公切线的长的概念

例题 11

本题为引出用两圆的半径长和圆心距表示外离两圆外公切线的长的计算公式.

将求公切线的长的问题转化到直角三角形中去加以解决,这是一个重要的几何解题策略. 本题所得的结论,可作为求两圆外公切线的长的公式.

在教学中,要让学生关注所构成的直角三角形中三条边的特点:斜边是联结两圆心的线段,一条直角边是联结外公切线上两切点的线段,另一条直角边是两圆的半径的差.

想一想

引导学生进一步探究外切两圆外公切线的长、外离两圆内公切线的长的计算公式.

【注意事项】

(1) 由例题 11 的解题过程,可得到作外离两圆的外公切线一种方法:以大圆的圆心为圆心、以两圆半径差为半径长作一个新圆;再过小圆的圆心作这个新圆的切线并得切点;然后过所得切点作大圆的半径,过这半径的外端作已有新圆切线的平行线,那么所作平行线是外离两圆的外公切线(若外离两圆是等圆,可直接作与连心线平行、相距为半径长的直线,得到外公切线). 对于这种作外公切线的方法可向学生介绍,但不要求掌握.

(2) 对于外离两圆的内公切线的长的计算公式,可让学生自己去探索. 学生可以从中得到关于求公切线的长的一些规律性的认识,并体会转化的思想和方法.

(3) 在探索用两圆的半径长和圆心距表示公切线的长的计算公式的过程中,在两圆的不同位置情况下,构造了如图 2-25 中的 $\text{Rt}\triangle O_1O_2C$ 这样的基本图形,对此要让学生熟悉. 许多与两圆公切线有关的计算问题,常要利用这样的基本图形,通过解直角三角形来解决.

例题 12

本题是与外切两圆的外公切线有关的计算问题，有一定的综合性.

对解题思路的分析，首先要考虑把问题转化为解直角三角形的问题，然后联想在上一课讨论与两圆的外公切线的长时得到的基本图形，于是尝试添置辅助线. 注意到所构造的直角三角形是可解的，本题就迎刃而解.

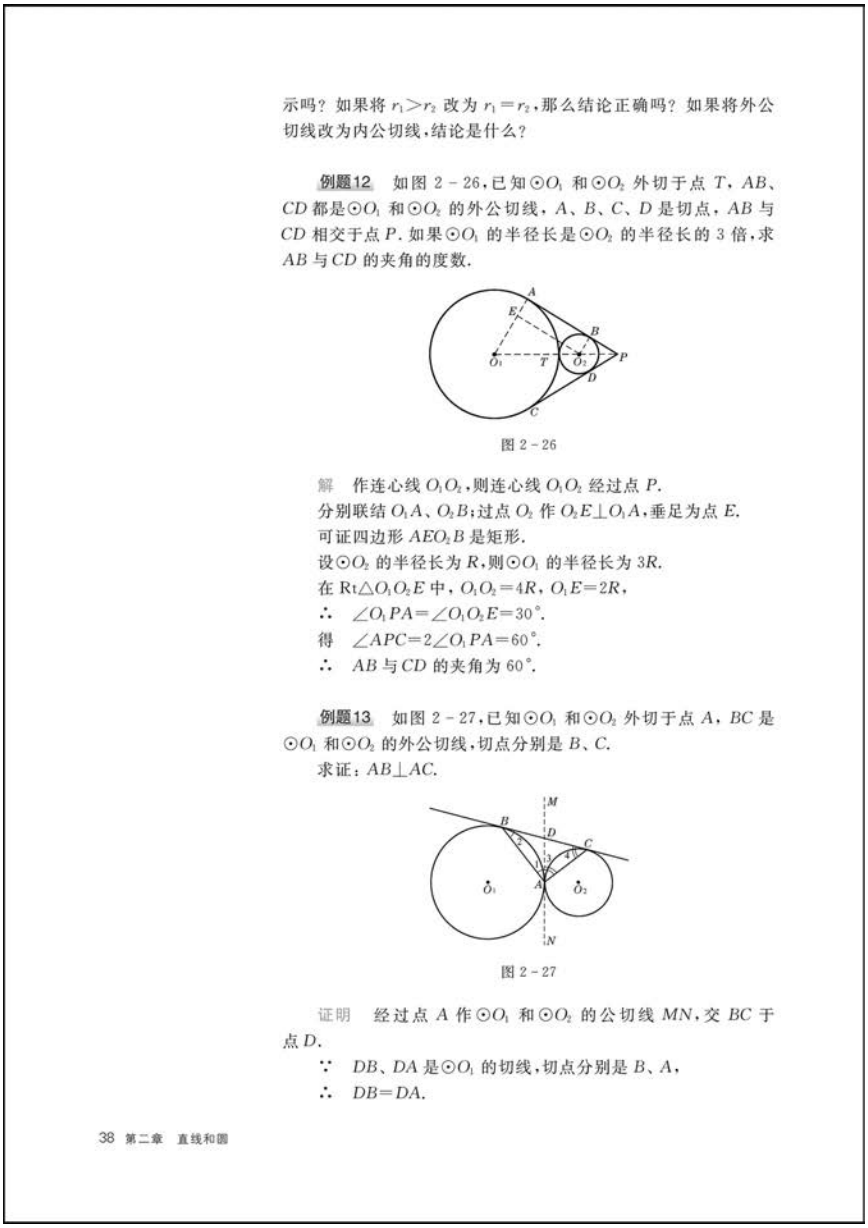
例题 13

本题是与外切两圆的外公切线有关的证明问题，也有一定的综合性.

对证明思路的分析，需要教师多加引导.

画出$\odot O_1$与$\odot O_2$的内公切线作为辅助线，是形成课本中证明方法的关键. 可从$\triangle ABC$中分析，要证$\angle BAC=90^\circ$，只要证$\angle BAC=\angle ABC+\angle ACB$. 于是考虑分割$\angle BAC$，想到画出两圆的内公切线.

证题后要让学生在反思中认识外切两圆的内公切线所起的桥梁作用，它也是常用的辅助线之一.



示吗？如果将$r_1>r_2$改为$r_1=r_2$，那么结论正确吗？如果将外公切线改为内公切线，结论是什么？

例题12　如图 2 - 26，已知$\odot O_1$和$\odot O_2$外切于点T，AB、CD都是$\odot O_1$和$\odot O_2$的外公切线，A、B、C、D是切点，AB与CD相交于点P. 如果$\odot O_1$的半径长是$\odot O_2$的半径长的 3 倍，求AB与CD的夹角的度数.

图 2 - 26

解　作连心线O_1O_2，则连心线O_1O_2经过点P.

分别联结O_1A、O_2B；过点O_2作$O_2E\perp O_1A$，垂足为点E.

可证四边形AEO_2B是矩形.

设$\odot O_2$的半径长为R，则$\odot O_1$的半径长为$3R$.

在$\mathrm{Rt}\triangle O_1O_2E$中，$O_1O_2=4R$，$O_1E=2R$，

$\therefore$　$\angle O_1PA=\angle O_1O_2E=30^\circ$.

得　$\angle APC=2\angle O_1PA=60^\circ$.

$\therefore$　AB与CD的夹角为60°.

例题13　如图 2 - 27，已知$\odot O_1$和$\odot O_2$外切于点A，BC是$\odot O_1$和$\odot O_2$的外公切线，切点分别是B、C.

求证：$AB\perp AC$.

图 2 - 27

证明　经过点A作$\odot O_1$和$\odot O_2$的公切线MN，交BC于点D.

$\because$　DB、DA是$\odot O_1$的切线，切点分别是B、A，

$\therefore$　$DB=DA$.

38 第二章　直线和圆

【注意事项】

例题 12 和例题 13 是两圆公切线与有关知识的综合运用. 在教学中，要展示解题思路的分析过程，做好解题后的讲评小结，帮助学生认识图形中的一些基本的位置关系和度量关系以及解决问题的思考方法.

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$.

同理可证 $\angle 3=\angle 4$.

$\because$ $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180^\circ$,

$\therefore$ $2(\angle 1+\angle 3)=180^\circ$.

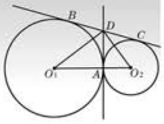
得 $\angle 1+\angle 3=90^\circ$.

$\therefore$ $AB\perp AC$.

也可分别联结 O_1B、O_2C、O_1O_2，利用切线的性质、平行线的判定和性质、等腰三角形的性质等推出 $AB\perp AC$.

练习 2.1(6)

1. 已知两圆的半径长分别为 3 和 8，圆心距为 13，求两圆的外公切线的长.
2. 已知两圆的半径长分别为 1 和 2，圆心距为 6，求两圆的内公切线的长及两条内公切线的夹角的度数.
3. 已知：如图，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 外切于点 A，BC 是 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的外公切线，切点分别是 B、C，两圆的内公切线交 BC 于点 D. 求证：$O_1D\perp O_2D$.



（第 3 题）

“边款”中提出的证明方法，可让学生尝试，以进一步熟悉有关基本图形.

练习 2.1(6)

1. 12.
2. 内公切线的长为 $3\sqrt{3}$，夹角的度数为 60°.
3. 提示：
   $\angle O_1DA=\angle O_1DB$，
   $\angle O_2DA=\angle O_2DC$，
   可得 $\angle O_1DO_2=90^\circ$.

【注意事项】

例题 13 的证明，可让学生自主进行探索，提出思路进行讨论，再确定证明方法进行实施. 基于学生已有的解题经验，可能较容易提出如“边款”所示的证明方法. 这时，还要引导学生探讨课本所展现的证明方法并完成证明，帮助学生熟悉外切两圆的内公切线的运用和桥梁作用，如本题由外切两圆的内公切线与外公切线，得到以其交点为圆外一点和过这点作圆的两条切线的图形，从而建立了外切两圆的新的联系和展现出问题转化的新途径.

【本课重点】

复习圆心角，引进圆周角和圆周角定理及其推论；让学生经历导出圆周角定理的过程和获得运用圆周角定理的初步体验.

学生已经学过圆心角，对圆心角有关知识进行复习整理，是进一步学习圆周角的必要准备.

“边款”中的说明是一种约定.

操作

为引进圆周角及圆周角定理提供直观认识的基础.

在度量操作中，获得的测量数据会有一定误差，在此只是借以猜测出圆心角与圆周角的数量关系.

结合图形，帮助学生理解圆周角、圆周角所对的弧、弧所对的圆周角等概念.

Yu Yuan Youguan De
Jiao Ji Bili Xianduan

第二节 与圆有关的角及比例线段

2.2 与圆有关的角

一个角有一个顶点和两条边，顶点和边相对于一个圆的位置关系分别有各种情况，由此得到不同类型的与圆有关的角.

当所讨论的圆心角大于平角或弧是优弧时，必须特别指明.

1. 圆心角

我们已经知道，顶点在圆心的角叫做**圆心角**. 圆心角的两边都与圆相交，两边所夹的弧是这个圆心角所对的弧. 如图 2－28，$\angle AOB$ 是圆心角，它所对的弧是$\overset{\frown}{AB}$.

在圆周上给定一条弧，由分别过弧的端点的两条半径所确定的圆心角，是这条弧所对的圆心角.

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等；相等的弧所对的圆心角相等.

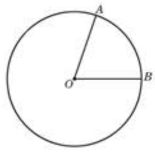


图 2－28

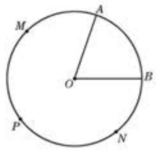


图 2－29

2. 圆周角

操作

如图 2－29，圆心角$\angle AOB=70°$，M、N 是$\overset{\frown}{APB}$上的任意两点. 试分别作出$\angle AMB$、$\angle ANB$，并量出这两个角的度数.

如上所作的$\angle AMB$ 和$\angle ANB$，它们的顶点都在$\odot O$ 上，两边都与圆相交. 分别度量这两个角，所得角度都是 35°，说明它们都等于$\angle AOB$ 的度数的一半.

顶点在圆周上并且两边都与圆相交的角叫做**圆周角**(angle of circumference).

圆周角的两边所夹的弧，是这个圆周角所对的弧；由圆周上一

【教学目标】

(1) 理解圆周角的概念，初步掌握圆周角定理，会利用圆周角定理解决有关的简单问题.

(2) 知道弦切角的概念以及弦切角定理，并初步会用弦切角定理解决一些简单问题.

(3) 经历圆周角定理、弦切角定理的探究过程，增强数学探索精神，体会处理问题中所体现的化归思想与分类讨论思想，提高数学思维品质.

【注意事项】

本课的引入，可利用多媒体，以两条相交直线与圆的位置关系为背景，提出与圆有关的角的概念，并让学生直观地看到存在不同类型的与圆有关的角(不必进行具体分类). 要注意引导学生用“运动”的观点来认识与圆有关的角，然后，对圆心角的有关知识进行简要的复习整理，帮助学生调动已有的知识经验.

点分别与弧的两端点的连线确定的圆周角，是这条弧所对的圆周角.

在图 2-29 中，$\angle AMB$ 和 $\angle ANB$ 是圆周角；它们所对的弧都是 $\overset{\frown}{AB}$，与圆心角 $\angle AOB$ 所对的弧相同.

如果圆周角与圆心角所对的弧相同，那么这两个角之间的大小有以下关系：

圆周角定理　一条弧所对的圆周角等于这条弧所对的圆心角的一半.

试一试

在 $\odot O$ 上取一点 A，以 A 为顶点画一些圆周角；再观察圆心与圆周角的位置关系，有几种可能的情况？

通过画图可见，圆心与圆周角的位置关系有三种情况：圆心在圆周角的一边上，圆心在圆周角的内部，圆心在圆周角的外部.

对于圆心与圆周角位置关系的三种情况，分别画圆周角；再画出与圆周角所对的弧相同的圆心角，如图 2-30 所示.

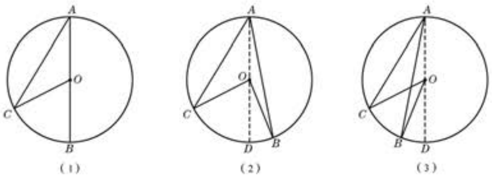


图 2-30

下面，我们来证明圆周角定理.

已知：如图 2-30，在 $\odot O$ 中，$\overset{\frown}{BC}$ 所对的圆周角是 $\angle BAC$，所对的圆心角是 $\angle BOC$.

求证：$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

分析：如果圆心 O 在圆周角 $\angle BAC$ 的一边上，如图 2-30(1)，这时圆心角 $\angle BOC$ 恰为等腰三角形 AOC 的外角，可推出结论；如果圆心 O 在 $\angle BAC$ 的内部或外部，如图 2-30(2)(3)，那么可考虑构造如图 2-30(1)的图形，将问题转化.

证明：(1) 当圆心 O 在 $\angle BAC$ 的一边上时，不妨设在 AB 上，

在前面操作实验（必要时可再安排类似的操作）的基础上，提出关于圆周角定理的猜想，然后引导学生探讨定理的证明.

试一试

提出的有关圆周角的操作与思考要求，是为证明圆周角定理作铺垫.

可让学生按“试一试”中提出的要求活动，发现和归纳圆心与圆周角的位置关系的三种情况；再引导学生探索证明圆周角定理的思路. 先对如图 2-30(1)的情况进行分析，明确证明的途径；然后讨论其他两种情况，提出添置辅助线的方法和进行化归的路径.

要重视证明思路的形成过程，让学生从中获得研究新问题的体验和经验，体会分类讨论和化归等思想方法，也为后面证明弦切角定理打下研究基础.

【注意事项】

(1) 圆周角定理揭示了圆心角与圆周角间的关系，是处理其他与圆有关角的基础. 圆周角定理中的弧是指圆周角所对的弧，可以是优弧.

(2) 在圆周角定理的教学中，要让学生经历“实验—猜测—论证”的几何研究过程. 关于圆周角定理的证明，学生较难形成完整的证明思路. 要给学生提供探索、思考的时间和归纳、交流的机会，让学生提出思路和逐步完善，并在“证明之前有分析”“分析之前有操作”的活动过程中体会几何实验与几何论证的联系.

关于证明过程的表述，需要教师适当地讲解. 一要指出将圆周角按它与圆心的位置关系分类，其不同情况有且只有三种，没有遗漏和重复；二要强调对这三种情况分别都导出了结论以后，还需有总括性结论，注意完整性；三要提出关于几何语言运用的规范性和严密性的要求，并进行有针对性的指导.

根据圆周角定理，结合圆心角与弧的关系，可得到圆周角定理的推论，可让学生自行证明.

利用推论 2，容易导出过圆外一点作圆的切线的方法. 要注意推论 2 的运用，今后还将用于高中数学中.

如图 2-30(1).

∵ $OA=OC$,

∴ $\angle A=\angle C$.

∵ $\angle BOC=\angle A+\angle C$,

∴ $\angle BOC=2\angle A$.

∴ $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

(2) 当圆心 O 在 $\angle BAC$ 的内部时，作直径 AD，如图 2-30(2).

由(1)可知

$$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD,\ \angle CAD=\frac{1}{2}\angle COD.$$

得 $\angle BAD+\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BOD+\frac{1}{2}\angle COD$.

所以 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

(3) 当圆心 O 在 $\angle BAC$ 的外部时，作直径 AD，如图 2-30(3).

由(1)可知

$$\angle CAD=\frac{1}{2}\angle COD,\ \angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD.$$

得 $\angle CAD-\angle BAD=\frac{1}{2}\angle COD-\frac{1}{2}\angle BOD$.

所以 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

综上所述，总有 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

研究问题的过程中，如果所涉及的对象出现多种可能情况，通常要对所有可能情况分别进行讨论，即运用分类讨论的数学思想方法来研究.

由圆周角定理，可以得到以下推论：

推论 1　同弧或等弧所对的圆周角相等；同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧也相等（如图 2-31(1)）.

推论 2　半圆(或直径)所对的圆周角是直角；90°的圆周角所对的弦是直径（如图 2-31(2)）.

想一想，怎样证明这两个推论？

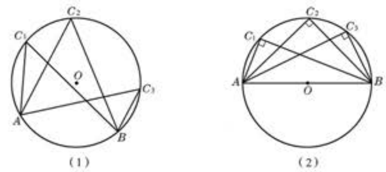


图 2-31

【注意事项】

圆周角定理的证明，充分体现了分类讨论这一数学思想方法的重要运用，它是学生学习和领会分类讨论思想方法的良好素材. 在此要把握机会进行分类讨论思想的教学，让学生认识到当研究的对象出现多种情况时通常有必要进行分类讨论，而且这是行之有效的方法，但不必深入研究如何分类.

例题1 已知 A、B、C 是 $\odot O$ 上的三点，圆心角 $\angle AOB=100°$，求 $\angle ACB$ 的度数.

分析　点 A、B 将 $\odot O$ 分成两部分，即优弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与劣弧 $\overset{\frown}{AB}$；而点 C 位于哪一部分并不确定，因此需分两种情况讨论.

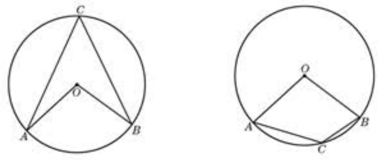
解　点 C 的位置有两种情况.

(1) 当点 C 在优弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上时，如图 2-32(1).

$\because$ 圆周角 $\angle ACB$ 和圆心角 $\angle AOB$ 所对的弧相同，

$\therefore$ $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$.

$\therefore$ $\angle ACB=\frac{1}{2}\times 100°=50°$.



(1)　　(2)

图 2-32

(2) 当点 C 在劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上时，如图 2-32(2).

$\because$ 圆周角 $\angle ACB$ 所对的弧是优弧 $\overset{\frown}{AB}$，圆心角 $\angle AOB$ 所对的弧是劣弧 $\overset{\frown}{AB}$，

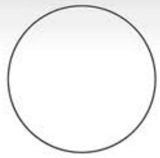
$\therefore$ $\angle ACB=\frac{1}{2}(360°-\angle AOB)$.

$\therefore$ $\angle ACB=\frac{1}{2}\times(360°-100°)=130°$.

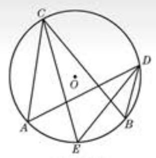
综上所述，$\angle ACB$ 等于 $50°$ 或 $130°$.

练习 2.2(1)

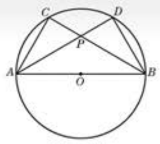
1. 现在只给你铅笔和带有直角的三角尺两样作图工具，请你设法作出所给圆的圆心，并说明理由.



(第 1 题)



(第 2 题)



(第 3 题)

例题 1

本题是圆周角定理的直接运用，其中涉及分类讨论的要求.

可让学生先尝试求解，再进行讲评和完善，帮助学生增强分类讨论的意识.

练习 2.2(1)

1. 略.
2. 提示：$\angle BDE=\angle BCE=\angle ACE=\angle ADE$.
3. 提示：$\angle BAD=\angle DAC=\angle DBC=\angle ABC=30°$.
   (1) $AC=BD$；
   (2) $\angle APB=120°$.

【本课重点】

利用圆心角和圆周角知识来研究其他与圆有关的一些角以及解决一些简单的问题.

例题 2

本题是圆周角定理的直接运用,同时让学生认识圆内角并体会可将圆内角的问题转化为有关圆周角的问题来处理.

在学习例题 2 的基础上引进圆内角和圆外角的概念,让学生了解.

例题 3

本题中运用了垂径定理与圆周角定理的推论 2. 在分析时可进一步指明,要证“$AC=BC$”,即证点 C 平分 $\odot O$ 的弦 AB. 联想垂径定理,于是联结 OC,只要证“$OC\perp AB$”. 而添置辅助线 OC 后,得到的 $\angle OCA$ 是 $\odot O_1$ 的直径 AO 所对的圆周角,由此可推出“$OC\perp AB$”.

2. 已知:如图,点 A、B、C、D、E 在 $\odot O$ 上,CE 平分 $\angle ACB$.
求证:DE 平分 $\angle ADB$.

3. 如图,已知 AB 是 $\odot O$ 的直径,AD 平分 $\angle BAC$,BC 平分 $\angle ABD$,AD 与 BC 相交于点 P.
(1) 求证:$AC=BD$;
(2) 求 $\angle APB$ 的度数.

圆心角和圆周角是研究其他与圆有关角的基础,其他与圆有关的角可以转化为圆心角和圆周角加以研究.

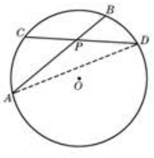


图 2-33

试一试,通过例题 2 的讨论,能归纳出用有关圆周角的大小表示圆内角大小的关系式吗?圆外角呢?

例题2 已知:如图 2-33,$\odot O$ 的两条弦 AB 与 CD 相交于圆内的一点 P.
求证:$\angle APC$ 等于 $\overset{\frown}{AC}$ 所对圆周角与 $\overset{\frown}{BD}$ 所对圆周角的和.
证明 联结 AD.
$\because$ $\angle APC$ 是 $\triangle PAD$ 的外角,
$\therefore$ $\angle APC=\angle ADP+\angle DAP$.
$\because$ $\angle ADP$ 是 $\overset{\frown}{AC}$ 所对圆周角,$\angle DAP$ 是 $\overset{\frown}{BD}$ 所对圆周角,
$\therefore$ $\angle APC$ 等于 $\overset{\frown}{AC}$ 所对圆周角与 $\overset{\frown}{BD}$ 所对圆周角的和.

顶点位于圆内的角叫做**圆内角**;圆心角是特殊的圆内角. 顶点在圆外,两边与圆相切或相交的角叫做**圆外角**.

例题 2 中的 $\angle APC$ 是 $\odot O$ 的一个圆内角.

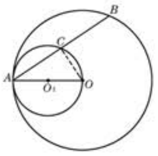


图 2-34

例题3 已知:如图 2-34,以 $\odot O$ 的半径 OA 为直径作 $\odot O_1$,$\odot O$ 的弦 AB 交 $\odot O_1$ 于点 C.
求证:$AC=BC$.
分析 由 AB 是 $\odot O$ 的弦,可考虑利用垂径定理来证明结论.
证明 联结 OC.
$\because$ OA 是 $\odot O_1$ 的直径,
$\therefore$ $\angle OCA=90^\circ$(直径所对的圆周角是直角),
得 $OC\perp AC$.
又 $\because$ AB 是 $\odot O$ 的弦,
$\therefore$ $AC=BC$.

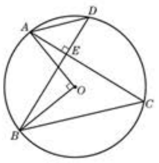


图 2-35

例题4 已知:如图 2-35,在 $\odot O$ 中,OA 和 OB 是半径,AC 和 BD 是弦,$OA\perp OB$,$AC\perp BD$,垂足是点 E.
求证:$AD /\!/ BC$.

44 第二章 直线和圆

【注意事项】

在“边款”中,提示学生可以导出用有关圆周角的大小表示圆内角大小、圆外角大小的关系式. 对于数学基础较好的学生,可引导他们去探索一般化的结论,但不要求掌握所得结论.

证明　由 $OA \perp OB$，得 $\angle AOB=90^\circ$，

$\therefore\ \angle C=\frac{1}{2}\angle AOB=45^\circ$.

$\because\ \angle D=\angle C$，

$\therefore\ \angle D=45^\circ$.

由 $AC \perp BD$，得 $\angle AED=90^\circ$.

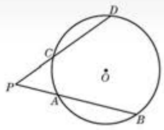
$\therefore\ \angle DAE=90^\circ-45^\circ=45^\circ$.

得　$\angle C=\angle DAE$.

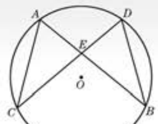
$\therefore\ AD /\!/ BC$.

练习 2.2(2)

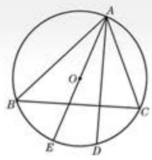
1. 已知：如图，由⊙O 外一点 P 作⊙O 的两条割线 PAB 与 PCD.
   求证：$\angle P$ 等于 $\overset{\frown}{BD}$ 所对圆周角与 $\overset{\frown}{AC}$ 所对圆周角的差.
2. 已知：如图，⊙O 的弦 AB 与 CD 相交于点 E，且 $AC=BD$.
   求证：$EB=EC$.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 已知：如图，$\triangle ABC$ 内接于⊙O，弦 AD 与 BC 垂直，AE 是⊙O 的直径.
   求证：$\angle BAE=\angle CAD$.

3. 弦切角

如图 2－36，$\angle APB$ 是圆周角，点 A、B 在⊙O 上. 当顶点 P 在 $\overset{\frown}{APB}$ 上移动并向点 B 逐渐靠近时，得到一系列的圆周角，如 $\angle AP_1B$、$\angle AP_2B$、$\angle AP_3B$……这一系列的圆周角所对的弧都是 $\overset{\frown}{AB}$.

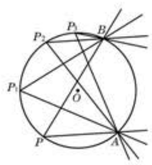


图 2－36

想一想

如图 2－36，点 P 越来越靠近点 B，射线 PA 和 PB 分别绕着

第二节　与圆有关的角及比例线段　45

例题 4

本题是圆周角定理及其推论的基本运用.

在教学中，可让学生自主探索证明思路，体会其中有关角大小关系的转化.

练习 2.2(2)

1. 略.
2. 提示：$\triangle ACE \cong \triangle DBE$.
3. 提示：联结 BE，可知 $\angle AEB+\angle BAE=90^\circ$，$\angle AEB=\angle ACB$.
   又由 $AD \perp BC$ 可得 $\angle ACB+\angle CAD=90^\circ$，再推出结论.

【本课重点】

引进弦切角和弦切角定理；让学生获得推导弦切角定理的过程经历和运用弦切角定理的初步体验.

想一想

引导学生从运动的角度去认识弦切角. 可利用多媒体或其他直观手段演示图形的运动变化情况.

让学生通过对图形的观察和对有关问题的思考，发现弦切角与圆的位置关系的特征，并建立弦切角与圆心角的动态联系．然后给出弦切角的定义．

问题

从运动的观点来看，弦切角是圆周角的一种特殊状态．通过提出问题，引导学生探索弦切角与相关圆周角的大小关系．

提出关于弦切角定理的猜想，然后让学生探索如何证明．

弦切角与圆心的位置关系情况，也可让学生通过画图活动进行归纳．

引导学生联想圆周角定理的证明，讨论弦切角定理的证明思路．

点 A、点 B 转动．当点 P 到达与点 B 重合的位置时，如图 2－37 所示，原来的射线 PB 到达什么样的位置？如果将此时形成的角记为 $\angle APC$，那么 $\angle APC$ 还是圆周角吗？

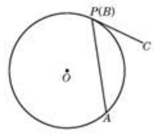


图 2－37

当点 P 与点 B 重合时，原来的射线 PB 为⊙O 的过点 B 的切线．

顶点在圆上，一条边与圆相交而另一条边与圆相切的角叫做**弦切角**(angle between chord and tangent)．

在圆上位于弦切角内部的那段弧是这个弦切角所夹的弧．

在顶点 P 移动的过程中，相应的一系列圆周角所对的弧都是 $\overset{\frown}{AB}$，可知它们的大小关系相等．而弦切角 $\angle APC$ 所夹的弧也是 $\overset{\frown}{AB}$，由此猜想它与 $\angle APB$ 的大小相等．

问题

在图 2－36 中，圆周角 $\angle APB$ 的位置随着顶点 P 在 $\overset{\frown}{APB}$ 上移动的变化，在这一过程中它的大小发生变化吗？当点 P 到达与点 B 重合的位置时，如图 2－37 所示，圆周角 $\angle APB$ 变成弦切角 $\angle APC$，它们之间有怎样的大小关系？

弦切角与它所夹的弧所对的圆周角有以下大小关系：

弦切角定理　弦切角等于它所夹的弧所对的圆周角．

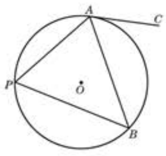


图 2－38

在图 2－38 中，$\angle BAC$ 的边 AB 是⊙O 的弦，AC 与⊙O 相切，则 $\angle BAC$ 是⊙O 的弦切角，$\overset{\frown}{AB}$ 是弦切角 $\angle BAC$ 所夹的弧，$\angle APB$ 是 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角．

我们来探索如何证明这个定理．

类似于圆周角与圆心的三种位置关系，弦切角与圆心的位置关系也有三种：圆心在弦 AB 上(这时 AB 是怎样的弦?)；圆心在弦切角 $\angle BAC$ 的外部；圆心在弦切角 $\angle BAC$ 的内部．因此定理证明需要分类讨论．

圆心与弦切角的位置关系可能是：圆心在弦切角的外部、一边上或内部．

已知：$\angle BAC$ 是⊙O 的弦切角，AC 与⊙O 相切，$\angle BAC$ 所夹的弧是 $\overset{\frown}{AB}$，$\angle APB$ 是 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角．

求证：$\angle BAC=\angle APB$．

证明　(1) 当圆心 O 在 $\angle BAC$ 的弦 AB 上时，如图 2－39(1)．

∵　AC 与⊙O 相切于点 A，AB 是⊙O 的直径，

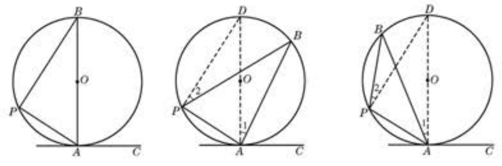
∴　$AB\perp AC$．

得　$\angle BAC=90°$．

46　第二章　直线和圆

【注意事项】

要提供活动的时间，并辅以用多媒体动画或其他直观手段的演示，让学生从运动的角度去探寻弦切角与圆周角之间的关系．要引导学生从两个方面去观察图形的运动变化，一是如图 2－36 中割线向切线变化的过程；二是在变化过程中圆周角的变化情况，这样能提高观察的有效性．



(1)　　(2)　　(3)

图 2-39

∵ $\overset{\frown}{AB}$是半圆，$\angle APB$ 是$\overset{\frown}{AB}$所对的圆周角，

∴ $\angle APB=90°$.

∴ $\angle BAC=\angle APB$.

(2) 当圆心 O 在$\angle BAC$ 的外部时，如图 2-39(2)，作$\odot O$ 的直径 AD，再联结 PD.

由(1)得 $\angle DAC=\angle APD$，

即 $\angle 1+\angle BAC=\angle 2+\angle APB$.

∵ $\angle 1=\angle 2$，

∴ $\angle BAC=\angle APB$.

(3) 当圆心 O 在$\angle BAC$ 的内部时，如图 2-39(3)，作$\odot O$ 的直径 AD，联结 PD.

由(1)得 $\angle DAC=\angle APD$.

∵ $\angle 1=\angle 2$，

∴ $\angle 1+\angle DAC=\angle 2+\angle APD$.

即 $\angle BAC=\angle APB$.

综上所述，总有$\angle BAC=\angle APB$.

例题5 已知：如图 2-40，PE 是$\odot O$ 的切线，切点为 E，PBA 为$\odot O$ 的割线，$\angle APE$ 的平分线 PC 分别交 AE、BE 于 C、D 两点.

求证：$\angle ECD=\angle EDC$.

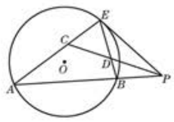


图 2-40

分析　观察图形可见，$\angle ECD$ 是$\triangle CAP$ 的外角，$\angle EDC$ 是$\triangle DPE$ 的外角；弦切角$\angle PEB$ 所夹的弧与圆周角$\angle A$ 所对的弧相同. 又已知 PC 平分$\angle APE$，于是可推出$\angle ECD=\angle EDC$.

证明　∵ PE 是$\odot O$ 的切线，

∴ $\angle PEB$ 是弦切角.

得 $\angle PEB=\angle A$.

第二节　与圆有关的角及比例线段　47

弦切角与圆心的位置关系有三种情况，证明弦切角定理时需分类讨论.

教学时，弦切角定理证明中的第一种情况，可由师生一起合作完成；然后，让学生自己去探索和实施其余两种情况下的证明，再通过讲评加以完善.

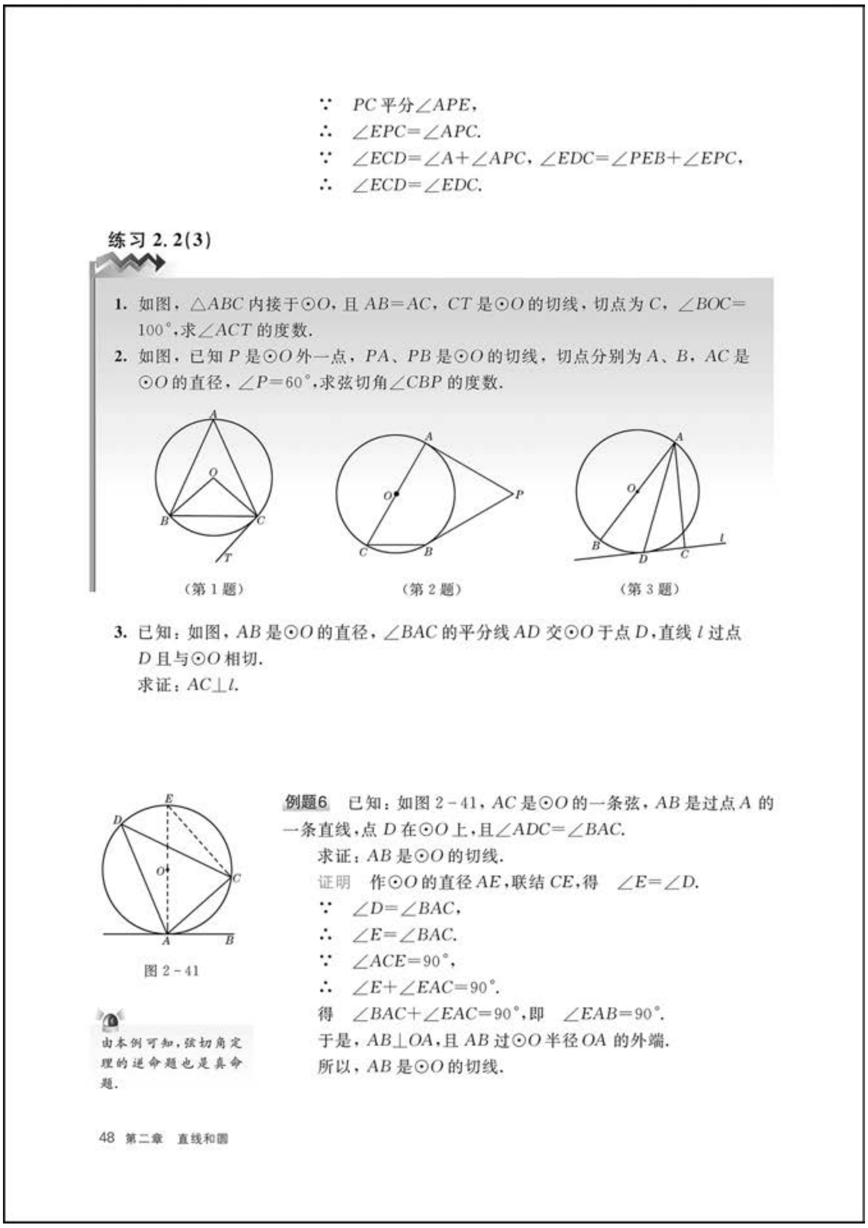
例题 5

本题是帮助学生熟悉弦切角的概念和体会弦切角定理的运用.

在分析证明思路时，可指出待证结论中的$\angle ECD$ 与$\angle EDC$ 都是圆内角，难以找出它们之间的直接关系，因此要引导学生分析与这两角相关的角，特别是相关的圆周角或弦切角，以建立$\angle ECD$ 与$\angle EDC$ 之间的联系，然后导出这两个角的相等关系.

【注意事项】

关于弦切角定理证明的教学，如同圆周角定理的教学一样，要给予思考的时间，特别关注学生对分类讨论和化归思想的体验.



∵ PC 平分$\angle APE$，

∴ $\angle EPC=\angle APC$.

∵ $\angle ECD=\angle A+\angle APC$，$\angle EDC=\angle PEB+\angle EPC$，

∴ $\angle ECD=\angle EDC$.

练习 2.2(3)

1. 如图，$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，且 $AB=AC$，CT 是$\odot O$ 的切线，切点为 C，$\angle BOC=100°$，求$\angle ACT$ 的度数.
2. 如图，已知 P 是$\odot O$ 外一点，PA、PB 是$\odot O$ 的切线，切点分别为 A、B，AC 是$\odot O$ 的直径，$\angle P=60°$，求弦切角$\angle CBP$ 的度数.

（第 1 题）　（第 2 题）　（第 3 题）

3. 已知：如图，AB 是$\odot O$ 的直径，$\angle BAC$ 的平分线 AD 交$\odot O$ 于点 D，直线 l 过点 D 且与$\odot O$ 相切.

求证：$AC\perp l$.

例题6　已知：如图 2-41，AC 是$\odot O$ 的一条弦，AB 是过点 A 的一条直线，点 D 在$\odot O$ 上，且$\angle ADC=\angle BAC$.

求证：AB 是$\odot O$ 的切线.

证明　作$\odot O$ 的直径 AE，联结 CE，得　$\angle E=\angle D$.

∵ $\angle D=\angle BAC$，

∴ $\angle E=\angle BAC$.

∵ $\angle ACE=90°$，

∴ $\angle E+\angle EAC=90°$.

得　$\angle BAC+\angle EAC=90°$，即　$\angle EAB=90°$.

于是，$AB\perp OA$，且 AB 过$\odot O$ 半径 OA 的外端.

所以，AB 是$\odot O$ 的切线.

图 2-41

由本例可知，弦切角定理的逆命题也是真命题.

48 第二章　直线和圆

练习 2.2(3)

1. 115°.
2. 150°.
3. 提示：联结 OD，证 $OD\perp l$，$AC/\!/OD$.
   或联结 BD，得$\angle ADB=90°$，再证$\angle DAC+\angle ADC=90°$.

【本课重点】

引导学生学习圆周角定理、弦切角定理以及分类讨论思想方法的基本运用.

例题 6

本题是从弦切角定理的逆命题的角度提出的，其证明思路与弦切角定理的证明思路有类似的地方，对学生进行探究性学习有引导作用.

在教学时，可引导学生分析："要证 AB 是$\odot O$ 的切线，只要证什么？""不添置辅助线能行吗？""如果不行，那么如何添置辅助线？"以此启发学生联想弦切角定理的证明过程，调动已有的经验，探索本题证明的思路.

【注意事项】

例题 6 的结论不可作为定理来使用，对它也不要求进一步运用.

例题7 已知 P 是 $\odot O$ 外一点，PB、PC 是 $\odot O$ 的两条切线，切点分别为 B、C，$\angle P=80^\circ$，点 A 在 $\odot O$ 上但与点 B、C 不重合. 求 $\angle BAC$ 的度数.

解　点 A 在 $\odot O$ 上的位置有两种情况，需分别讨论.

(1) 当点 A 在优弧 $\overset{\frown}{CB}$ 上时，如图 2-42(1)，联结 BC.

$\because$ PB、PC 为 $\odot O$ 的切线，

$\therefore$ $PB=PC$.

在等腰三角形 PBC 中，$\angle P=80^\circ$.

得 $\angle PBC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle P)=50^\circ$.

$\therefore$ $\angle BAC=\angle PBC=50^\circ$.

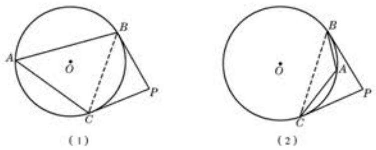


图 2-42

(2) 当点 A 在劣弧 $\overset{\frown}{CB}$ 上时，如图 2-42(2)，联结 BC.

同(1)，可知 $\angle PBC=\angle PCB=50^\circ$.

又 $\angle ACB=\angle ABP$，

$$
\begin{aligned}
\therefore\ \angle BAC &= 180^\circ-(\angle ABC+\angle ACB)\\
&= 180^\circ-(\angle ABC+\angle ABP)\\
&= 180^\circ-\angle PBC\\
&= 130^\circ.
\end{aligned}
$$

综上所述，$\angle BAC$ 等于 50° 或 130°.

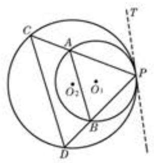


图 2-43

例题8 已知：如图 2-43，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 内切于点 P，过点 P 的两条直线分别交 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 于 A、B、C、D 四点.

求证：$AB\parallel CD$.

证明　过点 P 作两圆的公切线 PT，则

$\angle ABP=\angle APT$，$\angle CDP=\angle CPT$.

得 $\angle ABP=\angle CDP$.

$\therefore$ $AB\parallel CD$.

两圆相切时，过切点的公切线是传递两圆有关角度关系的纽带.

例题 7

本题着重于让学生体会分类讨论思想方法的运用.

由于题中未指明点 A 在优弧上还是劣弧上，所以需进行分类讨论.

本题也可联结圆心与切点，利用切线性质和圆周角定理来解决.

例题 8

本题是弦切角定理的基本运用.

本题是在两圆内切的条件下展开的. 分别在两个圆中的圆周角，通过它们的公切线得以传递.

如果将本题改为在两圆外切条件下展开，而其他条件不变，那么结论仍然成立. 这就是练习 2.2(4)第 1 题.

【注意事项】

(1) 关于弦切角的教学，应注重于形成弦切角概念和推导弦切角定理的过程，让学生获得过程的经历和体验；不要对弦切角定理的运用提出过高的要求，弦切角定理与其他知识的综合运用要严格控制难度.

(2) 通过例题 8 的教学后，可让学生反思“两圆相切时添加经过切点的公切线的作用”，从而认识到这样的辅助线是联系两圆的桥梁，并能产生位于两圆中的同角或等角；再让学生体会边款中对这种公切线的结论性评价，其理解会更加深刻些.

练习 2.2(4)

1. 提示：作两圆的内公切线.
2. 35°.
3. 提示：由 $DE=DC$，得 $\angle DCE=\angle DEC$；又 $\angle DCE=\angle DCA+\angle ACE$，$\angle DEC=\angle BCE+\angle B$，且 $\angle DCA=\angle B$，可知 $\angle ACE=\angle BCE$，从而推出结论.

【本课重点】

以与圆相交的两条相交直线为背景，研究所形成的有关线段之间的数量关系，导出相交弦定理与割线定理，并进行简单运用.

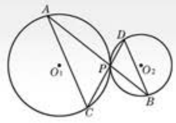
问题 1

引导学生探讨相交弦被交点分成的四条线段之间的数量关系，导出相交弦定理.

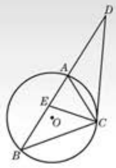
“边款”中的说明，有助于认识相交弦定理与割线定理的内在一致性.

练习 2.2(4)

1. 已知：如图，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于点 P，过点 P 的两条直线分别交 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 于 A、C、D、B 四点.
求证：$AC /\!/ BD$.



(第 1 题)



(第 3 题)

2. 已知直线 l 与 $\odot O$ 相切于点 A，B 是 l 上的一点，OB 交 $\odot O$ 于点 C，$\angle ABO=20^\circ$. 求 $\angle BAC$ 的度数.
3. 已知：如图，CD 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线，C 为切点，BA 的延长线与切线 CD 相交于点 D，点 E 在边 AB 上，且 $DE=DC$.
求证：CE 平分 $\angle ACB$.

2.3 与圆有关的比例线段

在研究了直线与圆的位置关系的基础上，我们以两条相交直线及其交点与圆的位置关系为背景，讨论了与圆有关的角，现在讨论与圆有关的比例线段.

1. 相交割线上的有关比例线段

如果一个圆的两条割线相交，那么交点与圆的位置关系有三种情况：在圆内、在圆外和在圆上.

当两条割线相交于圆内一点时，得到两条相交弦，它们的交点把每条弦分为两条线段.

讨论中只涉及割线上与圆有关的线段.

问题 1

两条相交弦被交点分成的四条线段之间有怎样的数量关系?

如图 2-44，$\odot O$ 的弦 AB 与 CD 相交于点 P，线段 AP、PB、

【教学目标】

(1) 知道相交弦定理，会直接运用相交弦定理进行简单计算.

(2) 知道割线定理与切割线定理，会直接运用这些定理进行简单计算，体会这些定理间的内在联系.

(3) 知道与圆有关的角的定理和与圆有关的线段的定理，其实是分别从角度和长度两个方面反映了两条相交直线与圆在不同位置关系时的度量特征. 在证明过程中体会相似三角形与圆的有关知识的运用.

CP、PD 是点 P 分两弦所得的线段. 根据这四条线段的位置特征，可考虑构造三角形来探究它们之间的数量关系.

分别联结 AD 与 BC，得 $\triangle PAD$ 和 $\triangle PCB$.

因为 $\angle A$ 与 $\angle C$ 都是 $\overset{\frown}{DB}$ 所对的圆周角，$\angle D$ 与 $\angle B$ 都是 $\overset{\frown}{AC}$ 所对的圆周角，

所以 $\angle A=\angle C$，$\angle D=\angle B$， 得 $\triangle PAD\backsim\triangle PCB$.

因此，$\dfrac{AP}{PD}=\dfrac{CP}{PB}$，或表示为 $AP\cdot PB=CP\cdot PD$.

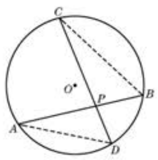


图 2－44

由问题 1 所得的结论，概括相交弦定理.

推导问题 1 的结论的过程，也是相交弦定理的证明.

其证明的难点在于构造两个相似三角形，需要在教师的启发、引导下进行突破.

我们把上面的结论概括为：

相交弦定理　圆的两条相交弦中，每条弦被交点分成的两条线段的乘积相等.

当圆的两条相交弦在特殊的位置时，如图 2－45，AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD\perp AB$，垂足是点 P，则 $CP=PD=\dfrac{1}{2}CD$，这时 $AP\cdot PB=CP^2$. 也就是说，如果弦和直径垂直相交，那么弦的一半是它分直径所得的两条线段的比例中项.

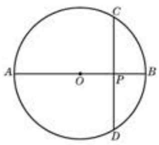


图 2－45

当弦与直径垂直相交时，由相交弦定理可推出特殊的结论. 这是相交弦定理的直接运用，不要求归结为推论.

我们再来讨论两条割线相交于圆外一点时的有关比例线段.

如图 2－46，$\odot O$ 的两条割线 PAB、PCD 交于圆外一点 P，得弦 AB、CD 以及有关线段 PA、PB、PC、PD.

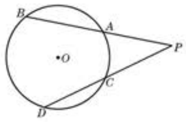


图 2－46

相交弦定理可以看作是当两条割线交于圆内一点时，对有关线段的数量关系的概括. 将两条割线的交点位置改在圆外时，就得到图 2－46.

思考

由相交弦定理联想，在图 2－46 中，是否仍有 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$?

思考

引导学生通过改变相交弦定理中的已知条件探索新的命题.

类似于相交弦定理的推导，可得同样的结论.

如图 2－47，分别联结 AD 与 BC.

$\because$ $\angle ADC$ 与 $\angle ABC$ 所对的弧都是 $\overset{\frown}{AC}$，

$\therefore$ $\angle ADC=\angle ABC$.

又 $\because$ $\angle P=\angle P$，

$\therefore$ $\triangle PAD\backsim\triangle PCB$.

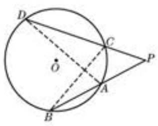


图 2－47

第二节　与圆有关的角及比例线段　51

学生已有证明相交弦定理的经验，可让学生尝试自主解决“思考”中的问题，然后进行概括，得到割线定理.

【注意事项】

当一个圆的两条割线相交时，这两条割线的交点可能在圆内、在圆外或在圆上. 如果交点在圆上，那么所得到的与圆有关的线段是两条弦，这时两条弦构成一个圆周角，而这两条弦的长度之间通常只有相等或不相等的关系. 因此，课本中对于相交割线上与圆有关线段的讨论，针对交点在圆内和在圆外这两种情况.

要展现关于割线定理的命题提出和推导过程，让学生从中体会割线定理与相交弦定理之间的内在联系，获得整体性的认识.

例题 1

本题是相交弦定理的简单运用. 题中两圆的公共弦是传递两圆中有关线段的数量关系的桥梁.

例题 2

本题是割线定理的简单运用. 可让学生自主解决，再进行讲评.

得 $\frac{PA}{PD}=\frac{PC}{PB}$.

∴ $PA \cdot PB=PC \cdot PD$.

于是，得到以下定理：

割线定理　从圆外一点引圆的两条割线，这一点到每条割线与圆交点的两条线段的积相等.

例题1　已知：如图 2－48，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于点 A、B，直线 O_1O_2 与 AB 交于点 P，又分别与 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 相交于点 C、D 和点 E、F.

求证：$PC \cdot PD=PE \cdot PF$.

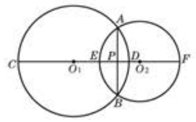


图 2－48

证明　在 $\odot O_1$ 中，

∵　弦 AB 与 CD 相交于点 P，

∴　$PA \cdot PB=PC \cdot PD$.

同理，得　$PA \cdot PB=PE \cdot PF$.

∴　$PC \cdot PD=PE \cdot PF$.

例题2　如图 2－49，已知 C 是 $\odot O$ 的直径 AB 延长线上的一点，$BC=\frac{1}{2}AB=1$，过点 C 作 $\odot O$ 的割线，交 $\odot O$ 于 D、E 两点，且 D 是 CE 的中点. 求弦 DE 的长.

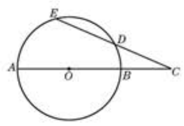


图 2－49

解　由割线定理，得　$CB \cdot CA=CD \cdot CE$.

52 第二章　直线和圆

【注意事项】

相交弦定理与割线定理揭示了圆的两条相交割线中有关四条线段间的一个数量关系. 在教学中，关于这两个定理的运用可参照例题的要求，切实控制难度与综合度.

∵ $BC=\frac{1}{2}AB=1$,

∴ $CA=3$.

设 $DE=a(a>0)$,又 D 是 CE 的中点,则 $CD=a$.

于是 $1\cdot 3=a\cdot 2a$.

解得 $a=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

所以,弦 DE 的长为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

例题3 如图 2-50,$\odot O$ 的弦 AB 垂直于直径 CD,M 为垂足.已知 $AM=4$,$CM=2$.求直径 CD 的长.

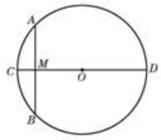


图 2-50

解 ∵ $CD\perp AB$,CD 是直径,

∴ $AM=BM$.

∵ $AM\cdot BM=CM\cdot DM$,

∴ $AM^2=CM\cdot DM$.

又 ∵ $AM=4$,$CM=2$,

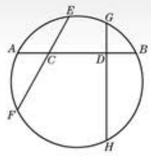
∴ $4^2=2\cdot DM$.

解得 $DM=8$.

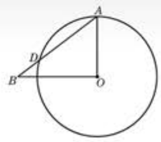
∴ $CD=CM+DM=2+8=10$.

练习 2.3(1)

1. 已知在圆中有两条相交弦,其中一条弦被交点分成 6 厘米和 9 厘米两段,另一条弦被交点分成 3∶8 的两段,求另一条弦的长.
2. 已知:如图,C、D 是 $\odot O$ 的弦 AB 上的两点,且 $AC=BD$,弦 EF 过点 C,弦 GH 过点 D.
求证:$CE\cdot CF=DG\cdot DH$.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图,在△AOB 中,$\angle O=90°$,$OA=6$,$OB=8$,以 O 为圆心、OA 长为半径长作 $\odot O$,交 AB 于点 D,求弦 AD 的长.

例题 3

本题是相交弦定理在特殊情形下的简单运用.可让学生自主解决,再进行讲评.

练习 2.3(1)

1. 16.5 厘米.
2. 提示:
$CE\cdot CF$
$=AC\cdot CB$
$=BD\cdot DA$
$=DG\cdot DH$.
3. 7.2.

【本课重点】

引进切割线定理,并进行简单运用.

问题 2

在图形的运动变化中,将切线看作特殊的割线,引导学生探索与圆有关的线段之间的数量关系,提出猜想再进行证明,从而引出切割线定理.

关于切割线定理的证明思路,可引导学生联想割线定理的证明,把切线看作特殊的割线(与圆的两个交点重合为一点),于是一样添辅助线并利用相似三角形进行推导.

“边款”中指出三个定理统称为圆幂定理,说明它们存在着内在的统一性. 可指导学生阅读附在本章后面的材料《圆的幂和两圆的等幂轴》.

2. 相交切割线上的有关比例线段

过圆外一点 P 任意作圆的割线 PDE 和割线 PFG,分别与圆交于点 D、E、F、G,则 $PD \cdot PE = PF \cdot PG$. 由此可见,等式中各乘积的大小是确定的,其大小只与点 P 和圆的相对位置有关,而与所作割线的位置无关.

现在我们来讨论过圆外一点的切线、割线上的有关比例线段.

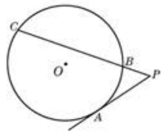


图 2-51

如图 2-51,过⊙O 外一点 P 分别作⊙O 的切线 PA 和割线 PBC,其中 A 为切点,B、C 是割线与⊙O 的交点,得线段 PA、PB、PC 以及弦 BC.

问题2

在图 2-51 中,线段 PA、PB、PC 之间有怎样的数量关系?

如果将割线 PFG 绕点 P 旋转,使割线与圆的两个交点越来越靠近,到两个交点重合时,这条割线变成了圆的切线.

把切线 PA 看作一条割线 PFG 绕点 P 旋转所得的直线,即它是割线 PFG 旋转到点 F、G 重合于点 A 时的位置. 由割线定理可知,$PB \cdot PC = PF \cdot PG$. 对于割线 PBC 和切线 PA,猜想应有 $PB \cdot PC = PA^2$.

我们来证明这一猜想是正确的.

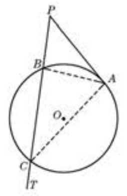


图 2-52

已知:如图 2-52,P 为⊙O 外一点,PA 是⊙O 的切线,切点为 A,PT 是⊙O 的割线,PT 交⊙O 于点 B、C.

求证:$PA^2 = PB \cdot PC$.

证明:分别联结 AB 和 AC.

∵ PA 为⊙O 的切线,切点为 A,

∴ $\angle PAB = \angle BCA$.

又 ∵ $\angle P = \angle P$,

∴ $\triangle APB \backsim \triangle CPA$.

得 $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{PC}{PA}$.

∴ $PA^2 = PB \cdot PC$.

于是得到:

切割线定理 从圆外一点引圆的切线和割线,切线长是这点到割线与圆交点的两条线段的比例中项.

相交弦定理、割线定理和切割线定理,统称为圆幂定理.

【注意事项】

(1) 从圆外一个定点任意作圆的两条割线,得到一条割线上与圆有关的两线段长的乘积是定值,这是引进切割线定理的教学的起点,也是难点. 可利用多媒体动态地演示图形,例如固定其中一条而变动另一条,引导学生通过观察图形和分析割线定理中的数量关系式,并注意到固定的这一条割线的位置可任意选定,从而确认这个定值. 在此基础上,提出进一步探讨这个定值的特殊表示.

(2) 对于相交切割线上的有关线段的讨论,是相交割线上有关线段的讨论的自然发展. 关于“问题 2”的探究过程,是先由割线定理通过运动变化引出猜想,再利用相似三角形的判定和性质进行证明. 在“问题 2”的思考和解决过程中,渗透了运动、联系的观点和极限的思想,要让学生有所体会.

例题4 如图 2-53，已知 PAB 是⊙O 的割线，PT 切⊙O 于点 T，且 $PA=4$，$PT=6$，求弦 AB 的长.

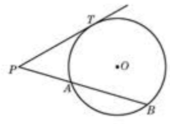


图 2-53

解 ∵ PT 切⊙O 于点 T，

∴ $PT^2=PA\cdot PB$.

又 ∵ $PA=4$，$PT=6$，

∴ $6^2=4\cdot PB$.

解得 $PB=9$.

∴ $AB=PB-PA=9-4=5$.

例题5 如图 2-54，已知弦 AD 和 CE 相交于⊙O 内一点 F，延长 EC，与过点 A 的切线相交于点 B，$AB=BF=FD$，$BC=1$，$CE=8$. 求线段 AF 的长.

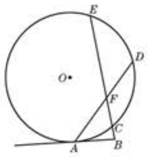


图 2-54

解 ∵ AB 是⊙O 的切线，BCE 是⊙O 的割线，

∴ $BA^2=BC\cdot BE=1\times(1+8)=9$，即 $BA=3$.

得 $DF=BF=AB=3$.

又 ∵ $CF=BF-BC=3-1=2$，

∴ $EF=CE-CF=8-2=6$.

∵ AD 与 CE 是⊙O 的两条弦，且相交于点 F，

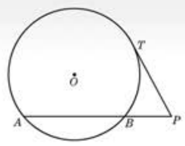
∴ $AF\cdot FD=CF\cdot FE$.

得 $AF\cdot 3=2\cdot 6$.

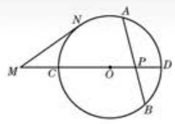
∴ $AF=4$.

练习 2.3(2)

1. 已知⊙O 的弦 $AB=3$，延长 AB 到点 P，使 $BP=1$，过点 P 作⊙O 的切线 PC，C 为切点. 求 PC 的长.
2. 如图，已知 P 是⊙O 外一点，PT 是⊙O 的切线，切点为 T，PBA 是⊙O 的割线，$AB=6$，$PT=4$. 求 PB 的长.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，已知⊙O 的弦 AB 和直径 CD 相交于点 P，M 是 DC 延长线上的一点，MN 是⊙O 的切线，N 是切点，$AP=8$，$PB=6$，$PD=4$，$MC=6$. 求 MN 的长.

第二节 与圆有关的角及比例线段 55

例题 4

本题是切割线定理的简单运用.

例题 5

本题是圆幂定理的综合运用，本质上的表现是有关线段长度间的数量传递.

练习 2.3(2)

1. 2.

2. 2.

3. $2\sqrt{33}$.

【注意事项】

利用圆幂定理，可以解决许多与圆有关的线段的长度计算问题，在教学中，对定理运用的难度要有效控制，一般只要求学生认识到圆幂定理所揭示的是有关线段之间的一个等量关系. 还可引导学生从数量关系的侧面认识两条相交直线与圆的位置关系特征，体会其中关于“事物互相联系”“变与不变”等辩证思想.

Yuan Neijie Sibianxing

第三节　圆内接四边形

2.4　圆内接四边形

过一个三角形的三个顶点的圆有且只有一个，这个三角形是圆的内接三角形，这个圆是三角形的外接圆.

如果一个多边形的所有顶点都在同一个圆上，那么这个多边形叫做**圆的内接多边形**，这个圆叫做**多边形的外接圆**.

如图 2－55(1)(2)(3)，它们分别表示△ABC、四边形$ABCD$、六边形$ABCDEF$与圆的相接关系.

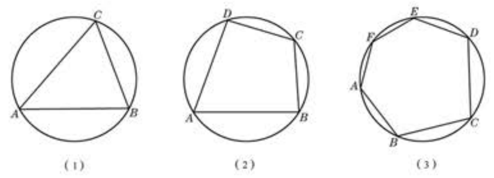


图 2－55

问题1

观察图 2－55 中的圆内接四边形，它的每一个内角都是圆周角. 那么，圆内接四边形的内角之间有什么特殊的数量关系呢？

在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$ 所对的弧是$\overset{\frown}{BCD}$，$\angle C$ 所对的弧是$\overset{\frown}{BAD}$；而$\overset{\frown}{BCD}$与$\overset{\frown}{BAD}$合起来正好是圆周. 因此，$\overset{\frown}{BCD}$所对的圆心角与$\overset{\frown}{BAD}$所对的圆心角之和是一个周角，利用圆周角定理，得$\angle A+\angle C=180°$. 同理，$\angle B+\angle D=180°$. 可见，圆内接四边形 $ABCD$ 的每组对角互补.

因为四边形的一个外角与它相邻的内角互补，所以还可进一步得到，这个外角等于与它相邻内角的对角.

上面的讨论可概括为：

圆内接四边形的性质定理　圆内接四边形的对角互补，并且任一个外角都等于它的内对角.

【本课重点】

引进圆的内接四边形及其性质定理，并进行简单的运用.

可从圆的内接三角形导出圆的内接多边形的概念，再指出本节主要研究圆的内接四边形.

问题 1

引导学生从内角的数量关系方面探讨圆内接四边形的性质.

利用圆周角定理推导圆内接四边形的性质，可让学生先猜想结论再进行说理.

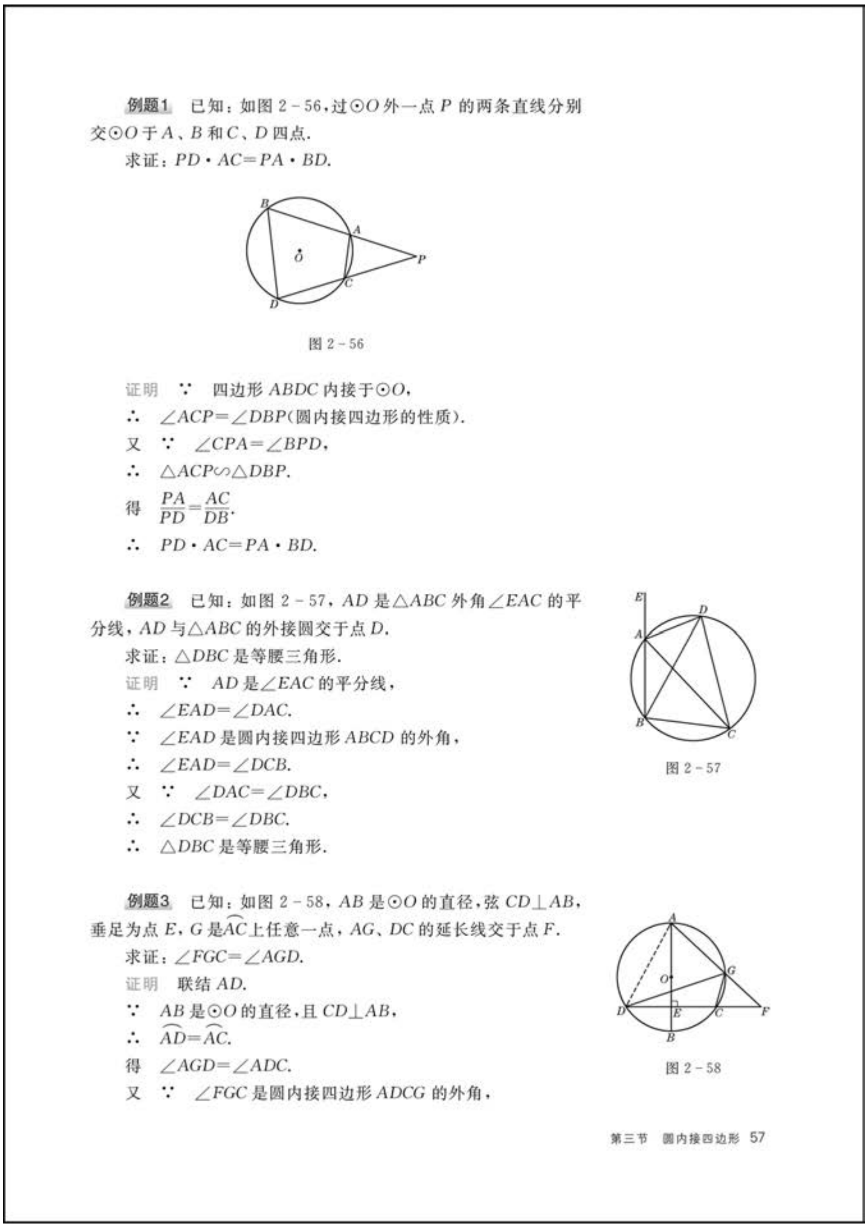
师生共同概括，得到圆内接四边形的性质定理.

关于这个定理的证明过程，可要求按命题证明的格式呈现. 先让学生在自己说理的基础上加以规范；再通过交流和讲评进行完善，师生共同完成定理的证明.

【教学目标】

（1）知道圆内接四边形及其性质定理，会运用圆内接四边形的性质定理解决简单的问题.

（2）知道圆内接四边形的判定定理，能在简单的情形中运用定理判定一个四边形内接于圆或判定四点共圆 .



例题1 已知：如图 2-56，过⊙O 外一点 P 的两条直线分别交⊙O 于 A、B 和 C、D 四点.

求证：$PD\cdot AC=PA\cdot BD$.

图 2-56

证明 ∵ 四边形 $ABDC$ 内接于⊙O，

∴ $\angle ACP=\angle DBP$（圆内接四边形的性质）.

又 ∵ $\angle CPA=\angle BPD$，

∴ $\triangle ACP\backsim\triangle DBP$.

得 $\dfrac{PA}{PD}=\dfrac{AC}{DB}$.

∴ $PD\cdot AC=PA\cdot BD$.

例题2 已知：如图 2-57，AD 是 $\triangle ABC$ 外角 $\angle EAC$ 的平分线，AD 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 D.

求证：$\triangle DBC$ 是等腰三角形.

证明 ∵ AD 是 $\angle EAC$ 的平分线，

∴ $\angle EAD=\angle DAC$.

∵ $\angle EAD$ 是圆内接四边形 $ABCD$ 的外角，

∴ $\angle EAD=\angle DCB$.

又 ∵ $\angle DAC=\angle DBC$，

∴ $\angle DCB=\angle DBC$.

∴ $\triangle DBC$ 是等腰三角形.

图 2-57

例题3 已知：如图 2-58，AB 是⊙O 的直径，弦 $CD\perp AB$，垂足为点 E，G 是 $\overset{\frown}{AC}$ 上任意一点，AG、DC 的延长线交于点 F.

求证：$\angle FGC=\angle AGD$.

证明 联结 AD.

∵ AB 是⊙O 的直径，且 $CD\perp AB$，

∴ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AC}$.

得 $\angle AGD=\angle ADC$.

又 ∵ $\angle FGC$ 是圆内接四边形 $ADCG$ 的外角，

图 2-58

第三节 圆内接四边形 57

例题 1

本题是圆内接四边形的性质定理的简单运用，同时运用了相似三角形的判定和性质定理来解决问题.

在分析证题思路时，可从待证结论出发，即要证 $PD\cdot AC=PA\cdot BD$，即证 $\dfrac{PA}{PD}=\dfrac{AC}{DB}$，只要证 $\triangle ACP\backsim\triangle DBP$；然后结合图形，注意到这两个三角形有一个公共角，只要再找到一对相等的角，就可判定这两个三角形相似.

例题 2

本题也是圆内接四边形的性质定理的简单运用，结合运用了圆周角定理等知识来解决问题.

圆内接四边形的性质定理的运用是角度的等量传递，本质上是圆周角定理的推广.

例题 3

本题通过添辅助线再进行圆内接四边形性质定理的简单运用.

在证明过程中，$\angle ADC$ 是连接所证两角的桥梁，因此联结 AD 是关键，同时为运用圆内接四边形的性质定理创造了条件.

【注意事项】

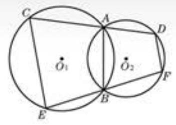
例题 1、2、3 是圆内接四边形性质定理的简单运用，涉及与其他知识的运用相结合的要求，只是简单情形下的综合. 关于圆内接四边形性质定理的运用，要切实控制难度. 教学中要注重于学生对定理的理解，让学生体会到圆内接四边形一定具有“对角互补”“任一外角都等于它的内对角”的特征.

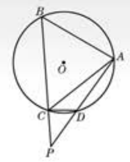
∴ $\angle FGC=\angle ADC$.

∴ $\angle FGC=\angle AGD$.

练习 2.4(1)

1. 已知四边形 $ABCD$ 内接于圆，且$\angle A:\angle B:\angle C=3:4:6$. 求$\angle D$的度数.
2. 已知：如图，AB 是$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 的公共弦，分别过点 A、B 的两条直线与两圆相交于 C、D、E、F 四点.
   求证：$CE/\!/DF$.


（第 2 题）


（第 3 题）

3. 已知：如图，四边形 $ABCD$ 是$\odot O$ 的内接四边形，$AB=AC$，又 AD 与 BC 两边的延长线交于点 P.
   求证：$\angle P=\angle ACD$.

如果一个四边形有外接圆，那么它的外接圆是唯一确定的.

我们知道，不在同一直线上的三个点唯一确定一个圆. 对于一个四边形，由它的三个顶点所确定的圆不一定过第四个顶点，所以不是任何一个四边形都有外接圆.

问题2

满足什么条件的四边形才有外接圆？

假如一个四边形有外接圆，那么这个四边形就具有圆内接四边形的性质. 因此，可从圆内接四边形性质定理的逆命题考虑，来探索有外接圆的四边形需满足的条件.

圆内接四边形性质定理的一个逆命题可叙述为：如果一个四边形的对角互补，那么这个四边形是圆内接四边形.

我们来尝试证明上述逆命题是真命题.

58 第二章 直线和圆

练习 2.4(1)

1. 100°.
2. 提示：
   $\angle D+\angle C=\angle ABE+\angle ABF=180°$.
3. 提示：
   由$\angle P=\angle ACB-\angle CAP$，$\angle ACD=\angle PDC-\angle PAC$，又$\angle PDC=\angle B=\angle ACB$，推出$\angle P=\angle ACD$.

【本课重点】

引进圆内接四边形的判定定理，并进行简单的运用.

问题 2

在明确了不是任何四边形都有外接圆的基础上，引导学生探讨一个四边形有外接圆所要满足的条件，再导出圆内接四边形的判定定理.

从圆内接四边形的性质定理的逆命题出发来研究问题 2，采用了几何研究的常用方法.

【注意事项】

要让学生经历引出圆内接四边形判定定理的过程，对几何研究的思想方法加深体会.

已知：四边形 $ABCD$ 中，$\angle B+\angle D=180°$.

求证：四边形 $ABCD$ 内接于圆.

分析：要证明四边形 $ABCD$ 内接于圆，就是要证明 A、B、C、D 四点在同一个圆上. 因为 A、B、C 三点不在同一直线上，它们可以确定一个圆，所以只要证明第四个点 D 也在这个圆上即可. 但直接证明点 D 在圆上比较困难，可采用间接证明的方法.

证明：过四边形 $ABCD$ 的三个顶点 A、B、C 作⊙O.

设⊙O 与边 CD 所在直线的交点为 E.

如图 2－59(1)或(2)，联结 AE.

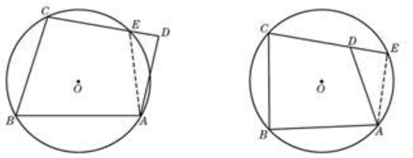


图 2－59

∵　四边形 $ABCE$ 内接于⊙O,

∴　$\angle B+\angle AEC=180°$.

又　∵　$\angle B+\angle D=180°$,

∴　$\angle AEC=\angle D$.

可知 AE 与 AD 一定平行或重合.

∵　AE 与 AD 有公共点 A，它们一定不平行，

∴　AE 与 AD 一定重合.

而直线 AD 与 CD 只有唯一的交点 D，

∴　点 E 与点 D 也一定重合.

∵　点 E 在⊙O 上，

∴　点 D 在⊙O 上.

> 证明的过程还可以按照如下思路表述：假设点 D 不在圆上；经过推理论证，得出错误的结论；指出这个假设是错误的，从而肯定点 D 在圆上. 这样的证明方法称为反证法.

这样就得到以下定理：

圆内接四边形的判定定理　对角互补的四边形内接于圆.

还可以得到以下定理：

如果一个四边形的一个外角等于它的内对角，那么这个四边形内接于圆(如图 2－60).

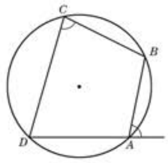


图 2－60

平面上的四个点在同一个圆上，称为**四点共圆**. 上述定理可以用来判定四点共圆.

第三节　圆内接四边形　59

在圆内接四边形的性质定理的这个逆命题是真命题的证明过程中，运用了“同一法”. 对于证明思路的分析和证明过程的表达，可采用教师讲解为主的方式.

“边款”中提示，这一证明也可用“反证法”，教师在讲解时可酌情选用. 但对于“同一法”或“反证法”，在这里都不必专门介绍，只需让学生理解所示证明的过程是严密的.

通过证明，得到了圆内接四边形的一个判定定理. 第二个判定定理，可在提出圆内接四边形的性质定理的另一个逆命题的基础上直接引进，不再进行证明.

【注意事项】

(1) 要让学生了解“四点共圆”的含义，并建立“四点共圆”与“一个四边形是圆内接四边形”之间的联系. 知道“四点共圆”也可以说是“以这四点为顶点的四边形是圆内接四边形”，而“圆内接四边形的四个顶点共圆”是显而易见的，从而确认“四点共圆”与“圆内接四边形”有通用的判定定理.

(2) 关于圆内接四边形的判定，还有其他的定理，在这里不作进一步的探讨.

例题 4

本题是圆内接四边形的性质定理与判定定理的直接运用. 可让学生先分析探求证题思路，然后自主完成证明，再进行交流和讲评. 证明过程要求简洁、规范.

例题 5

本题是圆内接四边形的判定定理在几何证明中的简单运用.

利用圆内接四边形的判定定理推出四边形 $ADOE$ 内接于圆后，则 OD、OE 成为这个圆的弦，利用圆的有关定理容易导出结论，这一证明过程显得十分简捷.

本题也可以利用全等三角形来证明，但证明的过程比较繁琐.

练习 2.4(2)

1. 提示：$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$.

2. 提示：$\angle D=\angle B=\angle BFE$.

3. 略.

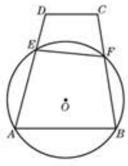


图 2-61

例题4 已知：如图 2-61，在梯形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ CD$，AB 是 $\odot O$ 的弦，AD、BC 分别与 $\odot O$ 相交于点 E、F.

求证：四边形 $CDEF$ 内接于圆.

证明 $\because$ 四边形 $ABFE$ 内接于 $\odot O$，

$\therefore$ $\angle CFE=\angle A$.

$\because$ $AB /\!/ CD$，

$\therefore$ $\angle D+\angle A=180°$.

得 $\angle D+\angle CFE=180°$.

$\therefore$ 四边形 $CDEF$ 内接于圆.

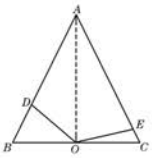


图 2-62

例题5 已知：如图 2-62，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，O 是边 BC 的中点，点 D、E 分别在边 AB、AC 上，且 $\angle DOE+\angle A=180°$.

求证：$OD=OE$.

证明 联结 AO.

$\because$ $\angle DOE+\angle A=180°$，

$\therefore$ 四边形 $ADOE$ 内接于圆.

$\because$ $AB=AC$，且 O 是 BC 的中点，

$\therefore$ $\angle BAO=\angle CAO$.

得 $\overset{\frown}{OD}=\overset{\frown}{OE}$.

$\therefore$ $OD=OE$.

练习 2.4(2)

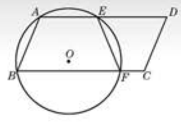
1. 已知：点 D、E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AC、AB 上，且 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$.

求证：B、C、D、E 四点共圆.

2. 已知：如图，$\square ABCD$ 中，$\odot O$ 经过点 A、B，分别与边 AD、BC 相交于点 E、F.

求证：C、D、E、F 四点共圆.

3. 证明：锐角三角形(非等腰)各边的中点和一边上的高的垂足共圆.



(第 2 题)

60 第二章 直线和圆

【注意事项】

例题 4 和例题 5 是圆内接四边形判定定理的基本运用，用来帮助学生熟悉定理，在教学中，要关注基本要求的落实，不要扩展内容和拔高要求.

Benzhang Xiaojie

2

本章小结

本章首先讨论了一条直线与一个圆相切这种特殊的位置关系，并着重研究了直线与圆相切的判定和性质. 然后研究了一条直线与两个圆都相切的位置关系，涉及内公切线与外公切线的概念，以及公切线长及其计算. 接着，运用运动的观点，讨论了两条相交直线与圆形成的有关的角、有关的比例线段. 关于与圆有关的角，引入了圆心角、圆周角、弦切角等概念，研究了圆周角、弦切角分别与相应圆心角之间的数量关系；关于与圆有关的比例线段的研究，得到了相交弦定理、割线定理、切割线定理. 最后，讨论了圆的内接四边形，着重研究了圆的内接四边形的性质与判定.

这些知识内容是平面几何基础的组成部分，其中贯穿着图形的运动和变化，体现了演绎思想. 通过学习，我们的逻辑推理能力得到了进一步的提高，同时进一步学习数学的知识准备更加充实.

在圆周角定理和弦切角定理的证明过程中，运用了分类讨论思想和化归思想. 分类讨论和化归作为分析问题、解决问题的思想方法，不仅在数学学科中有广泛应用，而且在其他学科的学习、研究以及日常的工作中，也是有用的.

本章的知识结构框图如下：

本章小结 61

对本章进行小结时，可让学生根据知识结构框图的线索，整理有关概念和定理，并从图形运动变化的视角，认识本章研究直线与圆构成的图形的过程. 要引导学生了解本章知识之间的逻辑关系，理解知识的系统和结构，进一步体会几何演绎思想.

本章内容是平面几何基础知识的进一步完善，是今后学习普通高中数学的必要的知识准备. 要引导学生将本章内容与九年级第二学期数学课本中“圆与正多边形”一章的内容有机地融合起来，形成对于“圆”的整体性认识.

【设计意图】

课本中将相交弦定理、割线定理与切割线定理统称为“圆幂定理”，但没有指出“圆幂”的含义.通过本阅读材料，一方面让学生了解“圆幂”的有关知识，知道“圆幂定理”的由来，知道“等幂轴”的特性；另一方面帮助学生从“圆幂”的角度获得对于所学三个定理的统一认识，进一步体会在图形的运动变换下相关性质的内在统一性.

【活动建议】

结合课本的边款中关于“圆幂定理”的说明，指导学生在课外阅读本材料.只要求学生对本材料的内容有所了解.

Yuedu Cailiao

2

阅读材料

圆的幂和两圆的等幂轴

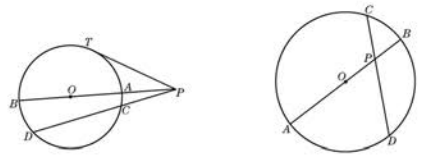
在“与圆有关的比例线段”一节中，提出了相交弦定理、割线定理和切割线定理，并指出它们统称为圆幂定理.

为什么称为圆幂定理？那就要先知道“圆幂”的含义.

设⊙O的半径长为R，点P与圆心O的距离为d，则d^2-R^2叫做点P对于⊙O的幂.

当点P在圆外时，如图2-63(1)，从点P分别作过圆心O的割线PAB和任意一条割线PCD；再作⊙O的切线PT，T为切点.由割线和切割线定理，得

$$PT^2=PC\cdot PD=PA\cdot PB=(d-R)(d+R)=d^2-R^2.$$



(1)　　(2)

图2-63

当点P在圆内时，如图2-63(2)，过点P分别作一条直径AB和任意一条弦CD.由相交弦定理，得

$$CP\cdot PD=AP\cdot PB=(R+d)(R-d)=-(d^2-R^2).$$

当点P在圆上时，$d=R$，得$d^2-R^2=0$.

由此可见，相交弦定理、割线定理和切割线定理共同表达了一个点对于圆的幂的几何意义，所以把它们统称为圆幂定理.

还可进一步得到以下结论：

设一个圆的半径长为R，一点P与圆心的距离为d，且$d\neq R$.

(1) 如果过点P的一条直线与圆相交于C、D两点，那么

$$PC\cdot PD=\begin{cases}d^2-R^2\text{，当点 }P\text{ 在圆外时；}\\-(d^2-R^2)\text{，当点 }P\text{ 在圆内时.}\end{cases}$$

(2) 如果过点P的一条直线与圆相切于点T，那么

$$PT^2=d^2-R^2.$$

这样，我们可以更加清楚地看到，相交弦定理、割线定理和切割线定理的结论中，两条线

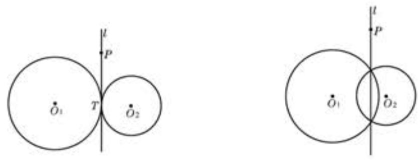
62 第二章　直线和圆

段的乘积的大小只与点 P 相对于圆的位置有关，它是一个定值. 这个定值是点 P 对于圆的幂(当点 P 在圆外时)或点 P 对于圆的幂的相反数(当点 P 在圆内时).

再来讨论一个点分别对于两个圆的幂. 如图 2-64(1)，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于点 T，直线 l 是它们的内公切线. 设 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的半径长分别为 R_1、R_2，点 P 是直线 l 上的任意一点，$PO_1=d_1$，$PO_2=d_2$，则

$$PT^2=d_1^2-R_1^2=d_2^2-R_2^2.$$

这就是说，直线 l 上的任意一点对于两圆的幂相等.



(1) (2)

图 2-64

如果一条直线上的任意一点对于两圆的幂相等，那么这条直线叫做这两圆的等幂轴.

一般地，

当两圆相切时，过它们的切点的公切线是这两圆的等幂轴.

当两圆相交时，过它们的两个交点的直线是这两圆的等幂轴(如图 2-64(2)).

关于以上结论，可仿照两圆外切的情形验证.

当两圆相离(非同心圆)时，这两圆的等幂轴是垂直于它们的连心线的一条直线. 具体位置的确定，运用以后高中学习的解析几何的知识比较容易解决.

圆幂定理所反映的是几何研究中对于不变量的寻找和确定. 在初中平面几何中，类似于这样的内容并不多见，而关于不变量的研究却是平面几何研究中的一个重要方面. 这份阅读材料，对大部分学生而言只要有所了解，但对于一些数学基本功较强、对数学有兴趣又有探索精神的学生，教师可引导他们在初中平面几何范围内去探索一些“不变量”问题.

练习部分参考答案

第一章　一元二次方程和二次函数

习题 1.1(1)

1. (1) 2,-3； (2) $\frac{3}{4}$,$\frac{1}{8}$； (3) 0,$-\frac{7}{4}$； (4) $-\frac{7}{6}$,0；

(5) $\frac{6}{5}$,$\frac{1}{5}$； (6) -3,$-\frac{7}{4}$； (7) $-p$,q.

2. (1) 3； (2) $-1-\sqrt{2}$.

3. (1) 另一根为$\sqrt{2}+1$,$p=-2\sqrt{2}$； (2) 另一根为$-\frac{8}{3}$,$k=\pm 3$.

4. $a=0$,另一根为-3;或 $a=-3$,另一根为$\frac{3}{2}$.

习题 1.1(2)

1. (1) $-\frac{1}{2}$； (2) -2； (3) $\frac{5}{2}$； (4) 3； (5) $5\frac{1}{2}$； (6) -4.

2. $m=3$,$x_1=1$,$x_2=-5$.

3. (1) $\Delta=4m+1>0$,所以方程有两个不相等的实数根； (2) $m=1$.

4. $m=2$,$AC=3$,$BC=4$.

习题 1.1(3)

1. (1) $4y^2+8y-5=0$； (2) $y^2-6y+7=0$.

2. (1) -2,5； (2) $-3\sqrt{2}$,$\sqrt{2}$； (3) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$,$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$.

3. (1) $y^2+4y-2=0$； (2) $4y^2-48y+9=0$；

(3) $3y^2-y-2=0$； (4) $y^2-3y-11=0$.

习题 1.2(1)

1. (1) $\left(\frac{3}{2},0\right)$,$\left(-\frac{3}{2},0\right)$,$(0,-9)$； (2) $(0,0)$,$(3,0)$；

(3) $(2,0)$,$(-5,0)$,$(0,-10)$； (4) $(1,0)$,$\left(-\frac{1}{3},0\right)$,$(0,-1)$.

2. (1) $(-2,-2)$,$(-3,-2)$； (2) $(-2,-2)$,$(5,-2)$；

(3) $(-1,-2)$,$\left(\frac{5}{3},-2\right)$.

3. (1) $(1,1)$,$(3,1)$； (2) $(2,0)$； (3) 无.

4. (1) $A(-1,0)$,$B(-3,0)$,$C(0,\sqrt{3})$； (2) 相似.

习题 1.2(2)

1. (1) 有,$(-2,0)$,$(-4,0)$； (2) 有,$(-3,0)$； (3) 无； (4) 无.

2. $\Delta>0$,二次函数的图像与 x 轴有两个公共点.

3. (1) $a=1$,公共点为$(0,0)$;或 $a=-3$,公共点为$(-2,0)$；

(2) $k=-3$,公共点为$\left(-\frac{1}{3},0\right)$;或 $k=2$,公共点为$\left(\frac{1}{2},0\right)$.

4. $m<\frac{1}{4}$.

5. (1) $k>\frac{7}{8}$且 $k\neq 1$； (2) $k=\frac{7}{8}$； (3) $k<\frac{7}{8}$.

习题 1.2(3)

1. 因为 $\Delta=k^2+16>0$，所以此二次函数的图像与 x 轴有两个不同的公共点.

2. 因为 $\Delta=8m^2\geqslant 0$，所以此二次函数的图像与 x 轴一定有公共点.

3. 因为 $\Delta=-3k^2-4<0$，所以此二次函数的图像与 x 轴无公共点.

又因为 $a<0$，所以抛物线在 x 轴的下方.

4. $m=10$，$(-1,0)$，$(-5,0)$ 或 $m=-6$，$(-1,0)$，$(3,0)$.

5. $m=12$，$(3,0)$，$(6,0)$ 或 $m=-2$，$(-1,0)$，$(-4,0)$.

习题 1.3(1)

1. (1) $y=x^2-4x-1$； (2) $y=2x^2-3x+1$； (3) $y=-2x^2-x+3$.

2. (1) 点 A 在此函数图像上，点 B 不在此函数图像上；

(2) $(4,0)$，$(-2,0)$，$(0,-8)$；

(3) 此函数图像开口向上，顶点的坐标是 $(1,-9)$；

图像在直线 $x=1$ 左侧的这部分曲线下降，图像在直线 $x=1$ 右侧的这部分曲线上升.

3. (1) 点 B 的坐标是 $(4,0)$； (2) 此函数的解析式为 $y=-x^2+3x+4$；

(3) 顶点的坐标是 $\left(\frac{3}{2},\frac{25}{4}\right)$，图像在直线 $x=\frac{3}{2}$ 左侧的这部分曲线上升，图像在直线 $x=\frac{3}{2}$ 右侧的这部分曲线下降.

习题 1.3(2)

1. (1) $y=x^2-6x+7$； (2) $y=-2x^2-4x+1$.

2. $y=-x^2-4x-1$.

3. $y=-2x^2+8x-8$.

4. $y=2x^2-8x+8$.

5. $y=x^2+25$ 或 $y=x^2+10x+25$ 或 $y=x^2-10x+25$.

习题 1.3(3)

1. (1) $y=2x^2+6x-8$； (2) $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+3$； (3) $y=x^2-6x+5$.

2. $y=\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}$.

3. $y=-x^2-2x+3$.

4. $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+2$ 或 $y=-x^2-x+2$.

习题 1.3(4)

1. $y=-x^2+4x+5$.

2. $y=-x^2+4x-3$.

3. $y=-x^2-4x$.

4. $y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$ 或 $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$.

习题 1.3(5)

1. $y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$，$OB$ 的长是 10 米.

2. (1) $y=-0.1x^2+20x+8\,000$，其中 x 是 10 的正整数倍；

(2) x 是 10 的正整数倍且不大于 100.

3. (1) $y=-\frac{1}{9}x^2+4$；

(2) 当 $x=2$ 时，$y=3\frac{5}{9}$，因为 $3\frac{5}{9}-2.5>0.5$，所以货车能通过.

复习题

A 组

1. (1) $1,-\frac{3}{2}$； (2) $-\frac{1}{6},0$； (3) $0,-\frac{3}{4}$； (4) $2\sqrt{5},-7$.

2. (1) 不正确； (2) 正确.

3. 另一根为 -2，$m=1$.

4. $6y^2+y-2=0$.

5. $a=2$，图像与 x 轴的公共点是 $(1,0)$.

6. (1) $y=x^2-4x-3$，抛物线开口向上，最低点的坐标是 $(2,-7)$，在直线 $x=2$ 的左侧，y 的值随 x 的值增大而减小；在直线 $x=2$ 的右侧，y 的值随 x 的值增大而增大.

(2) $y=3x^2-2x+1$，抛物线开口向上，最低点的坐标是 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，在直线 $x=\frac{1}{3}$ 的左侧，y 的值随 x 的值增大而减小；在直线 $x=\frac{1}{3}$ 的右侧，y 的值随 x 的值增大而增大.

(3) $y=-x^2+x+6$，抛物线开口向下，最高点的坐标是 $\left(\frac{1}{2},6\frac{1}{4}\right)$，在直线 $x=\frac{1}{2}$ 的左侧，y 的值随 x 的值增大而增大；在直线 $x=\frac{1}{2}$ 的右侧，y 的值随 x 的值增大而减少.

(4) $y=-2x^2-2x+4$，抛物线开口向下，最高点的坐标是 $\left(-\frac{1}{2},4\frac{1}{2}\right)$，在直线 $x=-\frac{1}{2}$ 的左侧，y 的值随 x 的值增大而增大；在直线 $x=-\frac{1}{2}$ 的右侧，y 的值随 x 的值增大而减少.

7. $y=-4x^2-16x-12$.

8. $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+4$.

9. $y=2x^2+4x-6$.

10. 题中销售单价 40 元为最低价.

(1) 销售量为 450 把，销售利润为 $(55-40)\times(500-5\times10)=15\times450=6\,750$ 元；

(2) $y=(50+x-40)(500-10x)$，即 $y=-10x^2+400x+5\,000$；

(3) 由 $-10x^2+400x+5\,000=8\,000$，解得 $x_1=10$，$x_2=30$.

当 $x=10$ 时，进货成本为 $40\times(500-100)=16\,000>10\,000$，不符合题意，舍去；

当 $x=30$ 时，进货成本为 $40\times(500-300)=8\,000<10\,000$，符合题意.

所以销售单价应定为 $50+30=80$ 元.

B 组

1. (1) $15\frac{1}{2}$； (2) 6； (3) $\frac{5}{2}$； (4) 2.

2. (1) $\Delta=(m+6)^2\geqslant0$，所以抛物线与 x 轴总有公共点；

(2) 当 $m=6$ 或 $m=-2$ 时，抛物线与 x 轴两个交点之间的距离为 2.

3. $y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+4$.

4. (1) $y=-\frac{25}{6}(x-0.4)^2+\frac{2}{3}$，即 $y=-\frac{25}{6}x^2+\frac{10}{3}x$；

(2) $x=3\frac{3}{5}-2=\frac{8}{5}$ 时，$y=-\frac{16}{3}$. 因为 $10-\frac{16}{3}=\frac{14}{3}<5$，所以运动员会出现失误.

第二章 直线和圆

习题 2.1(1)

1. A.

2. 提示：由$\angle CAD=\angle C=\angle B=30°$，得$\angle BAD=90°$.

3. 提示：联结OC，由C是AB中点，得$OC\perp AB$.

4. 提示：过点C作$CH\perp AB$于点H，在$Rt\triangle ACH$中，由$\angle A=30°$，得$CH=\frac{1}{2}AC$.

又D是AC中点，$CD=\frac{1}{2}AC$，得$CD=CH$.

习题 2.1(2)

1. A.

2. $OA=5$.

3. 提示：联结OC，由$OC\perp AB$，$EG\perp AB$，得$OC\parallel EG$，则$\angle OCD=\angle G=56°$.

又$OD=OC$，则$\angle D=\angle OCD=56°$，得$\angle E=180°-2\times 56°=68°$.

4. 提示：联结OD，作$OH\perp AC$于点H，由$\odot O$与AB相切，得$OD\perp AB$.

联结OA，$AB=AC$，则OA平分$\angle BAC$，得$OD=OH$.

习题 2.1(3)

1. $AB=11$，$BC=12$，$CA=9$.

2. 提示：(1) $\triangle PAC\cong\triangle PBC$； (2) $\triangle PAE\cong\triangle PBD$.

3. 提示：设切点为A，联结O_2A，在$Rt\triangle O_1O_2A$中，$O_1A=\sqrt{O_1O_2^2-O_2A^2}=4$.

习题 2.1(4)

1. (1) $\sqrt{2}$； (2) 40.

2. 提示：利用切线长定理.

3. 提示：联结OA，证$\angle BOP=\angle AOP=\angle OAC=\angle C$.

4. 提示：(1) 联结AO，$\odot O$与AB、AC均相切，得$\angle BAO=\angle CAO$. 又$AB=AC$，则$BO=CO$；

(2) 联结OD，得$OD\perp AB$. 在$Rt\triangle AOB$中，$AO=\sqrt{AB^2-BO^2}=3$，则$OD=\frac{OA\cdot OB}{AB}=\frac{12}{5}$.

习题 2.1(5)

1. (1) 4； (2) 3； (3) 2； (4) 1； (5) 0.

2. $O_1P=4$ cm，$O_2P=6$ cm.

3. $\sqrt{13^2-(8-3)^2}=12$.

4. $\sqrt{10^2-(5+3)^2}=6$.

5. 提示：$\odot P$与$\odot O$只有一条公切线，则$\odot P$与$\odot O$内切，设$\odot P$的半径为r，得$|r-8|=5$，则$r=3$或13.

习题 2.1(6)

1. $r=9$厘米，$\tan\alpha=\frac{5}{12}$.

2. $8\sqrt{2}$.

3. 提示：联结O_1B、O_2C，由$O_1B\parallel O_2C$，得$\angle BO_1O_2+\angle CO_2O_1=180°$.

由$O_1A_1=O_1B$，得$\angle BA_1O_1=\frac{180°-\angle BO_1A_1}{2}$，同理$\angle CA_2O_2=\frac{180°-\angle CO_2A_2}{2}$.

则$\angle PA_1A_2+\angle PA_2A_1=90°$，得$\angle A_1PA_2=90°$($P$为$BA_1$与$CA_2$的交点).

4. 提示：有三种状态，$O_1O_2=3\sqrt{2}$或$2\sqrt{10}$或$2\sqrt{2}$.

习题 2.2(1)

1. 共6对．如$\angle ABD=\angle ACD$，$\angle APB=\angle DPC$，$\angle BAC=\angle BDC$等.

2. $\angle AOC=130°$.

3. 不一定是.

4. 圆心角等于 $360°\times\frac{1}{4}=90°$，圆周角等于 $45°$.

习题 2.2(2)

1. 提示：联结 OE. 在 $Rt\triangle OEM$ 中，$OE=OC=2OM$，则 $\angle OEM=30°$，可推得 $\angle ABE=15°$，$\angle CBE=30°$.

2. $120°$.

3. $32.5°$.

4. 提示：联结 BG，证 $\triangle BDH\cong\triangle BDG$.

习题 2.2(3)

1. $\angle D=50°$.

2. $\angle OAB=57°$.

3. 提示：在 $Rt\triangle ACD$ 中，$AC=\sqrt{3^2+4^2}=5$，由 $\triangle ABC\backsim\triangle ACD$，得 $AB=\frac{25}{4}$.

4. $\angle A'=66°$，$\angle B'=48°$，$\angle C'=66°$.

习题 2.2(4)

1. 提示：联结 AD，证 $\angle DAB=\angle DCB=\angle DCA=\angle ADL$.

2. 提示：联结 AD. 由 AC 是 $\odot O$ 的直径，得 $\angle ADC=90°$.
又 ED、EA 均是 $\odot O$ 的切线，推得 $EA=ED$，得 $\angle EAD=\angle EDA=\angle C$.
又 $\angle B+\angle C=90°$，$\angle BDE+\angle EDA=90°$，得 $\angle B=\angle EDB$，则 $DE=BE$.

3. 提示：联结 OC，证 $\angle OAC=\angle OCA=\angle CAD$.

4. 提示：$\angle BAC=\angle BCM=\angle NCM=\angle DCP=\angle DAC$（$P$ 为 CM 反向延长线上一点）.

习题 2.3(1)

1. $PC:PD=\frac{3}{2}$ 或 $\frac{2}{3}$.

2. $CE=1$.

3. $PC=\frac{\sqrt{13}-1}{2}$.

4. $EF=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

习题 2.3(2)

1. $BC=3\sqrt{6}$.

2. $PE=4\sqrt{3}$.

3. $MD=3$.

4. $AC=3\frac{1}{2}$.

习题 2.4(1)

1. $\angle A:\angle C=\frac{8}{5}$.

2. $\angle A=65°$，$\angle C=115°$，$\angle D=130°$.

3. 提示：联结 AB. 由 $\angle E=\angle BAD=\angle F$，得 $CE\parallel DF$.

4. 提示：证 $\triangle ADC\cong\triangle EBC$.

习题 2.4(2)

1. 共 6 组. 有 (A,E,H,F)，(B,C,E,F)，(B,D,H,F) 等.

2. 提示：联结 DE、FG.
(1) 先证 $\triangle ADF\backsim\triangle AEG$，再证 $\triangle AED\backsim\triangle AFG$，得 $\angle ADE=\angle EFG$；
(2) 由(1)知 $\angle ADE=\angle EFG$，又 DE 为中位线，得 $DE\parallel BC$，

则$\angle ADE=\angle B=\angle EFG$，则 B、C、F、G 四点共圆.

3. 提示：由$\angle A=\angle C$，$\angle A+\angle C=180^\circ$，得$\angle A=\angle C=90^\circ$.
同理$\angle B=\angle D=90^\circ$，则平行四边形是矩形.

复习题

A 组

1. 提示：联结 OD. 证 $OD /\!/ AC$.

2. $AD=\dfrac{15}{4}$.

3. $\angle DEF:\angle EFD=\dfrac{7}{6}$.

4. $\dfrac{r}{r'}=3-2\sqrt{2}$.

5. 提示：联结 AB. 由$\angle ABE=\angle C=\angle D$，可推出 $CE /\!/ DF$.

6. 略.

7. 提示：过 P 作$\odot O_1$ 的切线 PT，则 PT 也是$\odot O_2$ 的切线. 设直线与切线交于点 T. 由$\angle ACP=\angle TPC$，$\angle B=\angle APT$，得$\angle APC=\angle BPC$.（注：当平行公切线时不需学生考虑）

8. 提示：(1) 由 $AD\cdot AE=AI\cdot AH$，得 $DE=IH$；
(2) 由 $BF\cdot BG=BE\cdot BD=CH\cdot CI=CG\cdot CF$，得 $BF=CG$.

9. 提示：联结 BG. 证$\angle CAG=\angle CBE=\angle CBG$.

B 组

1. $r=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$.

2. $CE=3$.

3. 略.

4. 提示：设 $CP=a$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ADP$ 中，$AP=5a$. 作 $OH\perp AP$ 于点 H，联结 OA、OP.
由 $S_{梯形ABCP}=S_{\triangle ABO}+S_{\triangle OCP}+S_{\triangle AOP}$，得 $OH=2a=OB$，则 AP 为$\odot O$ 的切线.

5. 提示：联结 AO 并延长交小圆于 C、D 两点.
则 $AM\cdot AN=AC\cdot AD=(R-r)(R+r)=R^2-r^2$. 同理，$BP\cdot BQ=R^2-r^2$.

6. 提示：联结 O_2A、O_1D，作 $PH\perp AD$ 于点 H. 由 AC 是$\odot O_2$ 的切线，得 $O_2A\perp AC$.
又 D 是 AC 中点，得 $O_1D\perp AC$，则 $O_2A /\!/ PH /\!/ O_1D$.
又 P 为 O_1O_2 的中点，得点 H 为 AD 中点，则 $PA=PD$.

说　　明

本册教材根据上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会制定的课程方案和《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》编写,供九年义务教育九年级试用.

本教材由上海师范大学主持编写,经上海市中小学教材审查委员会审查准予试用.

本册教材的编写人员有:

主　编:邱万作　　　　分册主编:叶锦义

特约撰稿人:(按姓氏笔画为序)邵世开　陆海兵　陈慧珍　顾跃平

2019 年教材修订组成员:叶锦义　邵世开　沈　洁　陆海兵　徐晓燕　顾跃平

欢迎广大师生来电来函指出教材的差错和不足,提出宝贵意见.出版社电话:021-64319241.

插图绘制:黄国荣、顾云明

图书在版编目（CIP）数据

九年义务教育数学教学参考资料. 九年级拓展. Ⅱ :试用本 / 上海市中小学（幼儿园）课程改革委员会编. — 上海:上海教育出版社, 2019.7（2024.7重印）
ISBN 978−7−5444−9331−4

Ⅰ. ①九… Ⅱ. ①上… Ⅲ. ①中学数学课 – 初中 – 教学参考资料 Ⅳ. ①G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第147171号

经上海市中小学教材审查委员会审查
准予试用　准用号 Ⅱ-CJ-2019005

责任编辑　章佳维

九年义务教育

数学教学参考资料

九年级　拓展Ⅱ

(试用本)

上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会

上海世纪出版股份有限公司 上海教育出版社 出版

(上海市闵行区号景路159弄C座　　邮政编码:201101)

上海新华书店发行　　上海信老印刷厂印刷

开本 890×1240　1/16　印张 5

2019年7月第1版　　2024年7月第6次印刷

ISBN 978-7-5444-9331-4/G·7692

定价:12.00元

此书如有印、装质量问题,请向本社调换　上海教育出版社电话:021-64373213

中国环境标志
CHINA ENVIRONMENTAL LABELLING
绿色印刷产品

ISBN 978-7-5444-9331-4