九 年 义 务 教 育 课 本

七年级 第一学期

（试用本）

上海教育出版社

数学

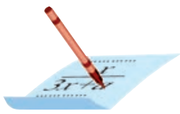
数学

MATHEMATICS

MATHEMATICS

目　录

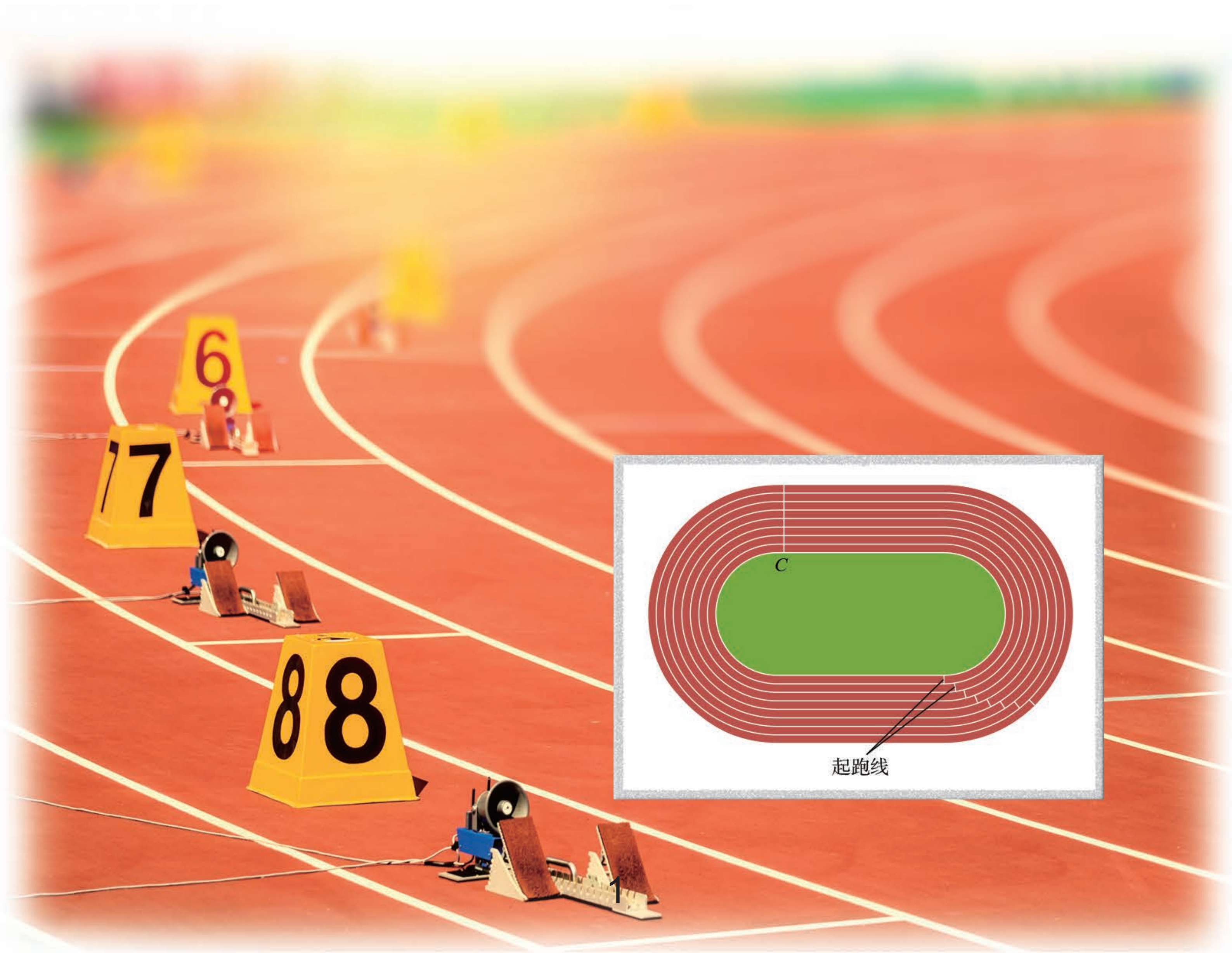
第九章　整式



第十一章　图形的运动

第九章　整　式

学校在运动场上举行 200 米的赛跑，每条跑道的道宽为 1.22 米，比赛的终点线定在如图所示的 C 处. 由于不同跑道上的运动员要经过不同的弯道，因此他们不应从同一起跑线上起跑，相邻两条跑道上运动员的起跑线应相隔多远才比较公平?



9

第 1 节　整式的概念

9.1　字母表示数

问题 1

我们知道

$2+3=3+2$,

$2.1+(-4.2)=(-4.2)+2.1$,

这种加法的交换律对任何两个数都是成立的.你能将满足加法交换律的所有数都列举完吗?

一般地,加法的交换律表示为:

$$a+b=b+a\ (a、b\text{表示有理数}).$$

问题 2

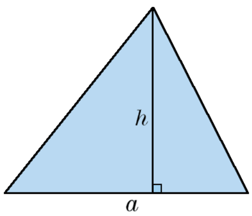


图 9-1

在省略乘号时,要把数字写在字母的前面,如 $a\times 2$ 写成 $2a$,一般不要写成 $a2$.当数字是带分数时,常写成假分数.如 $1\frac{1}{2}a$ 一般写成 $\frac{3}{2}a$.

还记得三角形面积公式、圆面积公式吗?

如图9-1,如果三角形的底边的长是a,底边上的高是h,三角形的面积为S,那么$S=\frac{1}{2}ah$.

如果圆的半径是r,圆的面积为S,那么$S=\pi r^2$.

问题 3

如图9-2,游乐场的大转盘的最高点、最低点分别离地面110米、10米,那么这个大转盘的半径是多少米?

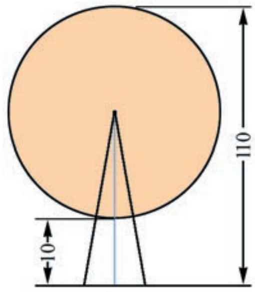


图 9－2

这里的字母r是一个满足等式的数.

设大转盘的半径是r米，据题意，可以列出方程：

$$10+2r=110,$$

解得$r=50$（米）.

问题 4

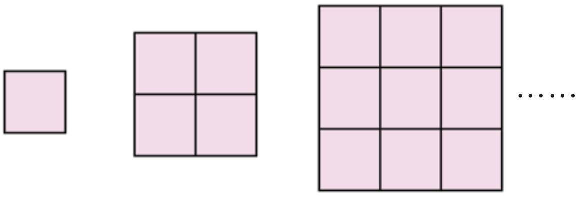


图 9－3

如图 9－3，用若干个大小相同的小正方形，依次拼成大的正方形，第 5 个和第 10 个大正方形需几个小正方形拼成？第n个大正方形需几个小正方形拼成？

请你完成下表：

	1	2	3	4	5	…	9	10	…	n
小正方形的个数	1	4	9	16		…	81		…	

以上问题的讨论中用到了“字母表示数”. 如问题1中的字母a和b表示有理数；问题2中的字母a、h和S表示正数，π表示圆周率. 用字母表示数，可以把数或数量关系简明地表示出来.

字母π表示圆周率时它是一个常数；问题3所列方程中的字母r表示一个未知的定数.

如果字母表示的数可在指定范围内任意取值，就说字母的取值可变，这个字母表示变数（或变元）.

例题1 1千克橘子的价格为a元，小明买了10千克橘子，用字母a表示小明买的橘子的总价.

解 橘子的总价=1千克橘子的价格×橘子的千克数

$=a\times 10$

$=10a$（元）.

例题2 设某数为x，用x表示下列各数：

(1) 比某数的一半还多2的数；

(2) 某数减去3的差与5的积；

(3) 某数与3的和除以某数所得的商；

(4) 某数的60%除以m的商.

解 (1) $\frac{1}{2}x+2$.

(2) $5(x-3)$.

(3) $\frac{x+3}{x}$.

(4) $\frac{60\%x}{m}$.

乘式中含有字母时通常将数字写在字母前.

练习9.1

1. (1) 已知长方形的长为a，宽为b，用a、b表示长方形的周长是________.

   (2) 已知圆的半径为r，用r表示圆的周长是________.

   (3) 已知三角形的三边长分别为a、b、c，用a、b、c表示三角形的周长是________.

   (4) 已知长方形的长是a，宽是b，用a、b表示长方形的面积是________.

2. 设某数是a，用a表示下列各数：

   (1) 某数的$\frac{3}{4}$减去$\frac{2}{3}$的差；

   (2) 某数的立方的相反数；

   (3) 8减去某数的2倍的差；

   (4) 8减去某数的差的2倍.

3. 用字母表示两个已学过的公式和运算法则.

9.2 代数式

在上节中$10a$、πr^2、$5(x-3)$、$\frac{1}{2}x+2$、$\frac{x+3}{x}$等，这些用字母表示数的式子都是由运算符号、括号、数、字母连接而成的，它能简明地表示数量关系.

单独一个数或者一个字母也是代数式，如$\frac{1}{3}$、0、x、h等.

用运算符号和括号把数或表示数的字母连接而成的式子叫做**代数式**(algebraic expression).

例题1 用代数式表示：

(1) 比a的3倍还多2的数；

(2) b的$\frac{4}{3}$倍的相反数；

(3) x的平方的倒数减去$\frac{1}{2}$的差；

(4) 9减去y的$\frac{1}{3}$的差；

(5) x的立方与2的和.

解 (1) $3a+2$.

(2) $-\frac{4}{3}b$.

(3) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}$.

(4) $9-\frac{1}{3}y$.

(5) x^3+2.

例题2 设甲数是m，乙数是n，用代数式表示：

(1) 甲乙两数的和的5倍；

(2) 甲减去乙的差与甲的相反数的积；

(3) 甲乙两数平方的和；

(4) 甲乙两数和的立方.

解 (1) $5(m+n)$.

(2) $(m-n)\cdot(-m)$.

(3) m^2+n^2.

(4) $(m+n)^3$.

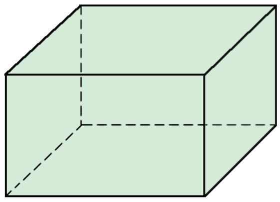


图 9－4

例题3　如图9－4，一个长方体的高为h，底面是一个边长为a的正方形，用代数式表示这个长方体的体积.

分析　长方体的体积=底面积×高.

底面是一个边长为a的正方形，它的面积是a^2.

解　这个长方体的体积是a^2h.

练习9.2

1. 用代数式表示：

   (1) 比a的2倍还少3的数；　　(2) a与b的差的平方；

   (3) x的2倍与y的$\frac{1}{5}$的差；　　(4) m与n的平方差.

2. 小明妈妈买了国库券a元，年利率为p%，一年到期利息是多少？本利和是多少？

3. 铅笔的单价是a元，钢笔的单价是b元，小明买了x支铅笔和y支钢笔，总共应付多少元？

4. 某商场进行换季打折销售，上衣按原价a元的3折销售，长裤按原价b元的对折销售，小明的妈妈买了3套打折服装，共要付多少元？

9.3　代数式的值

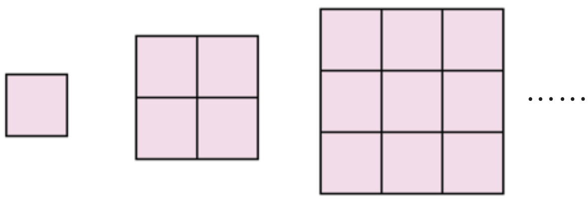


图 9－5

如图9－5，用若干个大小相同的小正方形，依次拼成大的正

方形，第 n 个大正方形可以由n^2个小正方形拼成．

当$n=4$时，即第4个大正方形，需用小正方形

$$n^2=4^2=16（个）；$$

当$n=10$时，即第10个大正方形，需用小正方形

$$n^2=10^2=100（个）；$$

当$n=30$时，即第30个大正方形，需用小正方形

$$n^2=30^2=900（个）．$$

当n取不同数值时，由代数式n^2可计算出相应的值．

用数值代替代数式里的字母，按照代数式中的运算关系计算得出的结果叫做代数式的值．

例如，100是代数式n^2在$n=10$时的值．

例题1 当a分别取下列值时，求代数式$\dfrac{3a(a+1)}{2}$的值．

(1) $a=2$；　　(2) $a=-3$；　　(3) $a=\dfrac{1}{2}$．

解 (1) 当$a=2$时，

$$\frac{3a(a+1)}{2}=\frac{3\times 2\times(2+1)}{2}=9.$$

(2) 当$a=-3$时，

$$\frac{3a(a+1)}{2}=\frac{3\times(-3)\times(-3+1)}{2}=9.$$

(3) 当$a=\dfrac{1}{2}$时，

$$\frac{3a(a+1)}{2}=\frac{3\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+1\right)}{2}=\frac{9}{8}.$$

例题2 当$x=-2$，$y=-\dfrac{1}{2}$时，求下列各代数式的值．

(1) $3x^2-6xy+4y^2$；　　(2) $\dfrac{1}{x+3y}$．

解 (1) 当$x=-2$，$y=-\frac{1}{2}$时，

$$3x^2-6xy+4y^2$$

$$=3\times(-2)^2-6\times(-2)\times\left(-\frac{1}{2}\right)+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=12-6+1$$

$$=7.$$

(2) 当$x=-2$，$y=-\frac{1}{2}$时，

$$\frac{1}{x+3y}=\frac{1}{-2+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{-\frac{7}{2}}=-\frac{2}{7}.$$

例题3 如图9-6是一个长、宽分别是a米、b米的长方形绿化地，中间圆形区域计划做成花坛，它的半径是r米，其余部分种植绿草.

(1) 需种植绿草的面积是多少平方米?

(2) 当$a=10$，$b=4$，$r=\frac{2}{3}$时，求需种植绿草的面积.（π取3.14，精确到0.01平方米）

解 草地面积=长方形面积−圆面积.

(1) $ab-\pi r^2$（平方米）.

答：需种植绿草的面积是（$ab-\pi r^2$）平方米.

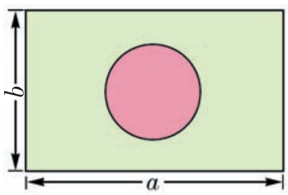


图9-6

(2) 当$a=10$，$b=4$，$r=\frac{2}{3}$时，

$$ab-\pi r^2$$

$$=10\times4-3.14\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$=40-3.14\times\frac{4}{9}$$

$$\approx38.60\text{（平方米）}.$$

答：当$a=10$，$b=4$，$r=\frac{2}{3}$时，需种植绿草的面积是38.60平方米.

练习9.3

1. 当x分别取下列值时，求代数式x^2+2x-1的值.

(1) $x=3$；　　(2) $x=\frac{1}{2}$.

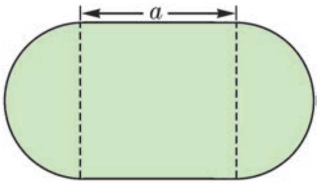
2. 当$a=\frac{1}{2}$，$b=-3$时，求下列各代数式的值.

(1) $2a+b$；　　(2) $4a^2-b^2$；　　(3) $a^2-2ab+b^2$.

3. 如图，一个田径场由两个半圆和一个正方形组成.

(1) 用a表示该田径场的面积；

(2) 当$a=80$米时，求这个田径场的面积.（π取3.14，精确到0.01平方米）



（第3题）

9.4　整式

思考

(1) $2x$、$-2a^2$、ab^2、$-\frac{4}{3}x^2y^2$ 这些代数式包含哪些运算?

(2) $2x+3$、a^2+2a-1、$3a^2-b^2+2a-3$这些代数式包含哪些运算？

单独一个数也是单项式，如1、$\frac{1}{3}$、$-\frac{2}{5}$等.

由数与字母的积或字母与字母的积所组成的代数式叫做**单项式**(monomial).

单项式中的数字因数叫做这个单项式的**系数**(coefficient).

例如，$-2a^2$的系数是-2，ab^2的系数是1，$-\frac{4}{3}x^2y^2$的系数是$-\frac{4}{3}$.

一个单项式中，所有字母的指数的和叫做这个单项式的次数（degree）.

单项式ab^2对于字母a是一次，对于字母b是二次，对于单项式ab^2是三次.

例如，$2x$的次数是1，$2x$是一次单项式；

ab^2的次数是字母a与b的指数的和，即$1+2=3$，ab^2是三次单项式.

由几个单项式的和组成的代数式叫做多项式（polynomial）. 在多项式中的每个单项式叫做多项式的项（term），不含字母的项叫做常数项（constant term）.次数最高项的次数就是这个多项式的次数.

例如，多项式a^2+2a-1是单项式a^2、$2a$与-1三项的和，代数式中次数最高的项是a^2，所以这个多项式的次数是2.

单项式、多项式统称为整式(integral expression).

例题1 下列代数式中哪些是单项式?哪些是多项式?

$$ab^2,\ 2a+3b,\ -4a^2b^4,\ \frac{2a-5b}{7}.$$

解 ab^2、$-4a^2b^4$都是数与字母或字母与字母的积，所以它们是单项式.

$\frac{2a-5b}{7}=\frac{2a}{7}-\frac{5b}{7}$.

$2a+3b$、$\frac{2a-5b}{7}$都是由两个单项式的和所组成，所以它们是多项式.

为了计算需要，可以将多项式各项的位置根据加法交换律按照其中某一个字母的指数大小顺序来排列.

在重新排列多项式时，要注意各项的符号.

例如，把多项式$x^2+5x+4x^4-3x^3+2$按字母x的指数从大到小的顺序排列，写成$4x^4-3x^3+x^2+5x+2$，这叫做把多项式按字母x降幂排列.

或按字母x的指数从小到大的顺序排列，写成$2+5x+x^2-3x^3+4x^4$，这叫做把多项式按字母x升幂排列.

例题2 将多项式$3+6x^2y-2xy-5x^3y^2-4x^4y$先按字母$x$升幂排列，再按字母$x$降幂排列.

解 按字母x升幂排列是：$3-2xy+6x^2y-5x^3y^2-4x^4y$.

按字母x降幂排列是：$-4x^4y-5x^3y^2+6x^2y-2xy+3$.

问题

你能将下列多项式按字母x先升幂排列，再按字母x降幂排列吗？

(1) $2+3x^3-5x+7x^2$；

(2) $xy^2-2x^2y+x^3+4y^3-1$.

练习9.4

1 下列代数式中哪些是单项式？哪些是多项式？

(1) $-3m^2n^2$； (2) x^2+y^2；

(3) $\frac{a+b}{3}$； (4) $\frac{a+b}{3a}$；

(5) $-\frac{2}{3}$； (6) $3m+6n$.

2 填表：

单项式	$-5x^2$	$-7xy^2$	$6abx^2$	$-4x^3y^2$	$2ab^2c^2$
系数					
次数					

3 将下列多项式先按字母x升幂排列，再按字母x降幂排列：

(1) $-2x^2+x+6+5x^3$；

(2) $3x^2-6x-5-2x^4+x^3$；

(3) $x^2-3x^3y+2xy^2-y^3$；

(4) $2x^2-y^2+xy-4x^3y^3$.

4 请你根据所给出的x、-2、y^2组成一个单项式和多项式.

9

第 2 节　整式的加减

9.5　合并同类项

如图9－7，正方形A、正方形B的边长分别是a、$3a$，那么这两个正方形的周长一共是多少？面积一共是多少？

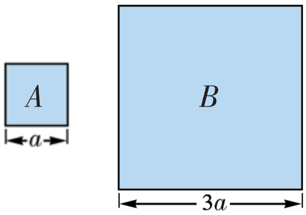


图9－7

正方形A的周长是$4a$，

正方形B的周长是$12a$，

正方形A、正方形B的周长一共是

$$4a+12a=(4+12)a=16a;$$

正方形A、正方形B的面积一共是

$$a^2+9a^2=(1+9)a^2=10a^2.$$

由$4a+12a=16a$与$a^2+9a^2=10a^2$可以看到，$4a$、$12a$都是只含有相同字母a的一次单项式，a^2、$9a^2$都是只含有相同字母a的二次单项式.

几个常数项也是同类项.

所含的字母相同，且相同字母的指数也相同的单项式叫做**同类项**（like terms）.

问题

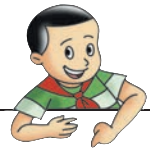
下列各组单项式是不是同类项？

(1) $3x^2y$与$2y^2x$；

(2) $2a^2b^2$与$-3b^2a^2$；

(3) $2xy$与$2x$；

(4) $2.3a$与$-4.5a$.



$2a^2b^2$与$-3b^2a^2$字母排列顺序不同，所以它们不是同类项.

$2xy$与$2x$这两项中都有字母x，所以它们是同类项.

你赞同小明、小丽的想法吗?

在六年级时，我们已学习了解一元一次方程，如解方程

$2x-1=\frac{x}{3}$.

$2x$与$-\frac{x}{3}$是同类项.

先移项　$2x-1-\frac{x}{3}=0$.

用交换律及逆用乘法分配律，可得

$$\left(2-\frac{1}{3}\right)x-1=0,$$

即　$\frac{5}{3}x-1=0$，解得　$x=\frac{3}{5}$.

在解方程的过程中，$2x$、$-\frac{x}{3}$两项合并成了一项$\frac{5}{3}x$.

把多项式中的同类项合并成一项，叫做**合并同类项**.一个多项式合并后含有几项，这个多项式就叫做**几项式**.

合并同类项的法则是

把同类项的系数相加的结果作为合并后的系数，字母和字母的指数不变.

例如，a^2+9a^2合并同类项为$10a^2$.

$\frac{5}{3}x-1$是二项式.

$2x^2-x-1$是三项式.

$2x^2-x-1$的最高次数是二次，这个多项式也叫做二次三项式.

例题1　合并同类项：

(1) $2x^3+3x^3-4x^3$;

(2) $\frac{1}{2}ab^2-2ab^2+\frac{3}{4}ab^2$；

(3) $2x^2-xy+3y^2+4xy-4y^2-x^2$.

解 (1) $2x^3+3x^3-4x^3$

$=(2+3-4)x^3$

$=x^3$.

(2) $\frac{1}{2}ab^2-2ab^2+\frac{3}{4}ab^2$

$=\left(\frac{1}{2}-2+\frac{3}{4}\right)ab^2$

$=-\frac{3}{4}ab^2$.

> 多项式的同类项可以运用交换律、结合律、分配律合并.

(3) $2x^2-xy+3y^2+4xy-4y^2-x^2$

$=(2x^2-x^2)+(-xy+4xy)+(3y^2-4y^2)$

$=(2-1)x^2+(-1+4)xy+(3-4)y^2$

$=x^2+3xy-y^2$.

例题 2 求代数式的值：

(1) $3x-2y-4x+6y+1$，其中 $x=2$，$y=3$；

(2) $2x^2-xy-3y^2+4xy+5+2y^2-6x-3$，其中 $x=\frac{1}{2}$，$y=2$.

解 (1) $3x-2y-4x+6y+1$

$=(3x-4x)+(-2y+6y)+1$

$=-x+4y+1$.

当 $x=2$，$y=3$ 时，

原式 $=-2+4\times3+1=11$.

(2) $2x^2-xy-3y^2+4xy+5+2y^2-6x-3$

$=2x^2+(-xy+4xy)+(-3y^2+2y^2)-6x+(5-3)$

$=2x^2+3xy-y^2-6x+2$.

当 $x=\frac{1}{2}$，$y=2$ 时，

> 在本例中是否可以把 x、y 的值直接代入代数式中进行计算？
> 先合并再代入和直接代入计算哪一种方法较简捷？

原式 $=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\frac{1}{2}\times2-2^2-6\times\frac{1}{2}+2=-1\frac{1}{2}$.

练习9.5

1. 在多项式$2a+\frac{1}{2}-3a^2b+2ab^2-3a-\frac{1}{2}a^2b-3ab^2-1+a+2a^2b$中哪些项是同类项?为什么?

2. 判断以下合并是否正确:

(1) $-2x-3x=-5$;
(2) $2x+3y=5xy$;
(3) $3x^2-2x^2=x$;
(4) $-5xy+2xy=7xy$.

3. 合并同类项:

(1) $ab+a-2ab-3a-b$;
(2) $3a^2+5a-4a^2-6a+2a^2-3$;
(3) $10x^2y-7xy^2+4xy-9yx^2-2xy$;
(4) $2xy^2z-4xyz-3xzy^2+2xyz$.

4. 求代数式的值:

(1) $-4m^2-2n^2+3m^2+2mn+n^2$,其中$m=5$,$n=4$;
(2) $2x^2y+3xy^2-4yx^2-6xy^2+3x-5-5x$,其中$x=2$,$y=-\frac{1}{2}$.

9.6 整式的加减

问题 1

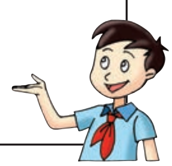
你会做以下的有理数计算吗?

$$\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}+\frac{37}{71}\right)、\frac{2}{5}+\left(\frac{3}{34}-\frac{2}{5}\right).$$

根据六年级学习的有理数混合运算去括号法则,可得

$$\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}+\frac{37}{71}\right)=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}-\frac{37}{71}=-\frac{37}{71},$$

$$\frac{2}{5}+\left(\frac{3}{34}-\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{5}+\frac{3}{34}-\frac{2}{5}=\frac{3}{34}.$$



观察

因为　$3a+(5a-a)=3a+4a=7a$，　①

$3a+5a-a=8a-a=7a$，　②

所以　$3a+(5a-a)=3a+5a-a$.

因为　$3a-(5a-a)=3a-4a=-a$，　③

$3a-5a+a=-2a+a=-a$，　④

所以　$3a-(5a-a)=3a-5a+a$.

①、③中的等式左边的式子都有括号，而②、④中的等式没有括号，你能得到有关整式的去括号法则吗？

$a+(b+c-d)$
$=a+b+c-d$，
$a-(b+c-d)$
$=a-b-c+d$.

去括号法则：

括号前面是“+”号，去掉“+”号和括号，括号里的各项不变号；

括号前面是“−”号，去掉“−”号和括号，括号里的各项都变号.

例题1　先去括号，再合并同类项：

(1) $2x-(3x-2y+3)-(5y-2)$；

(2) $-(3a+2b)+(4a-3b+1)-(2a-b-3)$.

解　(1) $2x-(3x-2y+3)-(5y-2)$

$=2x-3x+2y-3-5y+2$

$=(2x-3x)+(2y-5y)+(-3+2)$

$=-x-3y-1$.

(2) $-(3a+2b)+(4a-3b+1)-(2a-b-3)$

$=-3a-2b+4a-3b+1-2a+b+3$

$=(-3a+4a-2a)+(-2b-3b+b)+(1+3)$

$=-a-4b+4$.

整式的加减就是单项式、多项式的加减，可利用去括号法则和合并同类项来完成整式的加减运算.

例题 2 求整式 $2a+3b-1$ 与 $3a-2b+2$ 的和.

解 $(2a+3b-1)+(3a-2b+2)$

$=2a+3b-1+3a-2b+2$

$=(2a+3a)+(3b-2b)+(-1+2)$

$=5a+b+1$.

例题 3 求整式 $3x^2-2x+1$ 减去 $-x^2+x-3$ 的差.

解 $(3x^2-2x+1)-(-x^2+x-3)$

$=3x^2-2x+1+x^2-x+3$

$=4x^2-3x+4$.

问题 2

在六年级学习解方程时，我们已遇到了整式的加减运算.你能举例说明吗?

练习9.6

1. 化简：

(1) $\frac{1}{2}x^2-(x^2-2x+3)+(x-2)-\left(-\frac{2}{3}x^2-2x+\frac{1}{2}\right)$；

(2) $\frac{1}{2}ab^2+(3a^2b-ab^2)-\left(-\frac{1}{4}a^2b+2a\right)-(5a-3)$.

2. 求整式$3x+5y-\frac{1}{4}$与$\frac{1}{2}x-3y+\frac{1}{2}$的和.

3. 求整式$\frac{1}{2}x^2-2xy+\frac{1}{4}$减去$-\frac{2}{3}x^2+xy-\frac{2}{3}$的差.

4. 求值：

(1) $-2x^2+6-(3-2x+x^2)+(3x^2-4x)$，其中$x=2$；

(2) $\frac{1}{2}x-\left[x^2+2y^2-\left(\frac{1}{2}x-3\right)\right]+(2x^2+3y^2+4)$，其中$x=\frac{1}{2}$，$y=1$.

5. 请写出两个整式，使它们的和为$2x^2-3x-1$.

9

第 3 节　整式的乘法

9.7　同底数幂的乘法

我们知道 $a \cdot a \cdot a$ 可以写成 a^3（读作“a的三次方”或“a的立方”）.

同样$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \cdot a}_{n个a}$可以写成$a^n$(读作“$a$的$n$次方”)，其中$a$表示底数，正整数$n$表示指数，$a$的$n$次乘方的结果叫做$a$的$n$次幂.

请完成下表：

$3^2 \times 3^4=(3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)=3^6$	$3^{2+4}=3^6$
$(-2)^3 \times (-2)^4=$　　　　$=$	$(-2)^{3+4}=$
$a^4 \cdot a^2=$　　　　$=$	$a^{4+2}=$

思考 1

由上表左右两列的结果，你发现什么规律吗？

观察$3^2 \times 3^4=3^{2+4}=3^6$，可以看到两个同底数的幂$3^2$、$3^4$相乘，它的计算结果是底数3不变，指数相加，即6=2+4.

一般地，如果m、n是正整数，那么

$$a^m \cdot a^n=\underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{m个a} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{n个a}$$

$$=\underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{(m+n)个a}$$

$$=\underline{\qquad\qquad}.$$

同底数的幂相乘有如下法则：

> 同底数的幂相乘，底数不变，指数相加．
>
> $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$．(m、n都是正整数)

例题1 计算下列各式，结果用幂的形式表示：

(1) $6^5 \times 6^6$；　　(2) $x^5 \cdot x^4$；

(3) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3$；　　(4) $(a+b)^2 \cdot (a+b)^3$；

(5) $y \cdot y^2 \cdot y^4$；　　(6) $(x-y)^3 \cdot (x-y)^4 \cdot (x-y)^2$．

解 (1) $6^5 \times 6^6 = 6^{5+6} = 6^{11}$．

(2) $x^5 \cdot x^4 = x^{5+4} = x^9$．

(3) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{2+3} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^5$．

(4) $(a+b)^2 \cdot (a+b)^3 = (a+b)^{2+3} = (a+b)^5$．

字母y的指数是1，而不是0！

(5) $y \cdot y^2 \cdot y^4 = y^{1+2} \cdot y^4 = y^3 \cdot y^4 = y^{3+4} = y^7$．

(6) $(x-y)^3 \cdot (x-y)^4 \cdot (x-y)^2$

$= (x-y)^{3+4} \cdot (x-y)^2$

$= (x-y)^7 \cdot (x-y)^2$

$= (x-y)^{7+2}$

$= (x-y)^9$．

例题2 计算下列各式，结果用幂的形式表示：

(1) $(-3)^3 \times 3^6$；

(2) $9^3 \times (-9)^4$；

(3) $(a-b)^2 \cdot (b-a)^3$．

解 (1) $(-3)^3 \times 3^6 = -3^3 \times 3^6 = -(3^3 \times 3^6) = -3^9 = (-3)^9$．

(2) $9^3 \times (-9)^4 = 9^3 \times 9^4 = 9^7$．

$(a-b)^2$
$=[-(b-a)]^2$
$=(b-a)^2$.

(3) $(a-b)^2 \cdot (b-a)^3$

$= (b-a)^2 \cdot (b-a)^3$

$= (b-a)^5$．

例题 3 计算：

(1) $a^2 \cdot a^4 + a^3 \cdot a^3$；

(2) $(-x)^3 \cdot x^2 + x \cdot x^4$.

解 (1) $a^2 \cdot a^4 + a^3 \cdot a^3 = a^6 + a^6 = 2a^6$.

(2) $(-x)^3 \cdot x^2 + x \cdot x^4 = -x^5 + x^5 = 0$.

思考 2

三个或三个以上同底数的幂相乘，是否也符合上述法则？

$a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 =$ ________ .

$a^m \cdot a^n \cdot a^p =$ ________ .(m、n、p都是正整数)

练习9.7

1. (口答)指出下列各幂的底数和指数：

   (1) 10^3；　(2) $\left(-\frac{4}{3}\right)^4$；

   (3) $(-a)^5$；　(4) $(x+y)^6$.

2. 下列计算正确吗？错误的请改正：

   (1) $x^2 + x^2 = x^4$；　(2) $x^4 \cdot x = x^4$；

   (3) $(-3)^4 \times (-3)^6 = 3^{10}$；　(4) $(-a)^3 \cdot (-a)^4 = a^7$.

3. 计算下列各式，结果用幂的形式表示：

   (1) $8^4 \times 8^3$；　(2) $(-10)^4 \times (-10)^3$；

   (3) $\left(-\frac{3}{7}\right)^5 \times \left(-\frac{3}{7}\right)^3$；　(4) $-x \cdot x^2 \cdot x^4$；

   (5) $(x+y)^3 \cdot (x+y)^5$；　(6) $(-a^3) \cdot (-a^2) \cdot a^4$.

4. 计算：

   (1) $a^2 \cdot (-a)^2 - a^3 \cdot a$；　(2) $a^3 \cdot (-a)^2 + a \cdot (-a)^4$.

9.8 幂的乘方

5^3是5的3次幂，$(5^3)^2$可以看作是5^3的2次幂，即5的3次幂的平方，这就是幂的乘方．

请完成下表：

$(5^3)^2=5^3\times5^3=5^{3+3}=5^{3\times2}=5^6$	$5^{3\times2}=5^6$
$(3^4)^3=$	$3^{4\times3}=$
$[(-2)^3]^4=$	$(-2)^{3\times4}=$
$(a^2)^5=$	$a^{2\times5}=$

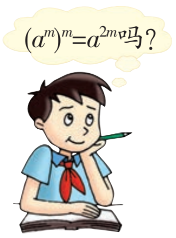
思考 1

由上表左右两列的结果，你能找到幂的乘方的规律吗？

一般地，如果m、n是正整数，那么

$$(a^m)^n=\underbrace{a^m\cdot a^m\cdot\cdots\cdot a^m}_{n个a^m}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

幂的乘方有如下法则：



> 幂的乘方，底数不变，指数相乘，即
>
> $(a^m)^n=a^{mn}$．(m、n是正整数)

例题1 计算下列各式，结果用幂的形式表示：

(1) $(7^3)^2$； (2) $(a^2)^3$；

(3) $[(-2)^3]^4$； (4) $-(b^3)^3$.

解 (1) $(7^3)^2=7^{3\times2}=7^6$.

(2) $(a^2)^3=a^{2\times3}=a^6$.

(3) $[(-2)^3]^4=(-2)^{3\times4}=(-2)^{12}=2^{12}$.

(4) $-(b^3)^3=-b^{3\times3}=-b^9=(-b)^9$.

例题 2 计算下列各式，结果用幂的形式表示：

(1) $(x^2)^3\cdot(x^3)^4$；

(2) $-y^2\cdot(-y)^3\cdot[(-y)^2]^3$；

(3) $[(a+b)^2]^3$；

(4) $(x+y)^3\cdot[(x+y)^2]^2$.

解 (1) $(x^2)^3\cdot(x^3)^4=x^{2\times3}\cdot x^{3\times4}=x^6\cdot x^{12}=x^{6+12}=x^{18}$.

(2) $-y^2\cdot(-y)^3\cdot[(-y)^2]^3=-y^2\cdot(-y^3)\cdot y^6=y^{2+3+6}=y^{11}$.

(3) $[(a+b)^2]^3$

$=(a+b)^{2\times3}$

$=(a+b)^6$.

(4) $(x+y)^3\cdot[(x+y)^2]^2$

$=(x+y)^3\cdot(x+y)^{2\times2}$

$=(x+y)^3\cdot(x+y)^4$

$=(x+y)^7$.

例题 3 计算：

(1) $a^3\cdot a^4\cdot a^2+(a^3)^3$；

(2) $(-x)^2\cdot(-x)^4+(x^2)^3$.

解 (1) $a^3\cdot a^4\cdot a^2+(a^3)^3$

$=a^{3+4+2}+a^{3\times3}$

$=a^9+a^9$

$=2a^9$.

(2) $(-x)^2\cdot(-x)^4+(x^2)^3$

$=(-x)^{2+4}+x^{2\times3}$

$=x^6+x^6$

$=2x^6$.

思考 2

$(a^m)^n$与$(a^n)^m$相等吗？

练习9.8

1. (口答)计算,结果用幂的形式表示:

(1) $(10^2)^3$;　　(2) $10^3\times10^5$;

(3) $(b^3)^m$;　　(4) $b^2\cdot b^m$;

(5) $[(-a)^3]^3$;　　(6) $[(-a)^2]^3$.

2. 计算,结果用幂的形式表示:

(1) $[(-2)^3]^3$;　　(2) $(-10^2)^4$;

(3) $[(-x)^3]^4$;　　(4) $[(-x)^2]^3$;

(5) $(x^4)^3\cdot x^2$;　　(6) $[(-x)^3]^5\cdot(-x)^3$.

3. 计算:

(1) $y^3\cdot(y^2)^3\cdot(y^3)^2$;　　(2) $-x\cdot x^3\cdot[(-x)^2]^3$;

(3) $[(x-y)^3]^2$;　　(4) $[(a+1)^3]^4\cdot(a+1)^3$.

4. 当正整数n分别满足什么条件时,$(-a)^n=a^n$,$(-a)^n=-a^n$?

9.9　积的乘方

观察

$(3\times5)^2=(3\times5)\times(3\times5)$……幂的意义

$=(3\times3)\times(5\times5)$……乘法交换律、结合律

$=3^2\times5^2$.

按以上方法,完成下列填空:

$(2\times5)^2=$________________$=$______.

$(xy)^4=$________________$=$______.

思考 1

按照上述计算,你能归纳出积的乘方法则吗?

$$(ab)^n=\underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\cdots\cdot(ab)}_{n\text{个}ab}$$

$$=\underbrace{(a\cdot a\cdot\cdots\cdot a)}_{n\text{个}a}\cdot\underbrace{(b\cdot b\cdot\cdots\cdot b)}_{n\text{个}b}$$

$$=a^n\cdot b^n.\ (n\text{是正整数})$$

积的乘方有如下法则：

> 积的乘方等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘，即
>
> $$(ab)^n=a^nb^n.\ (n\text{为正整数})$$

例题1 计算：

(1) $(3a)^4$；　　(2) $(-2mx)^3$；

(3) $(-xy^2)^3$；　　(4) $\left(\frac{2}{3}xy^2\right)^2$.

解 (1) $(3a)^4=3^4\cdot a^4=81a^4$.

(2) $(-2mx)^3=(-2m)^3\cdot x^3=(-2)^3\cdot m^3x^3=-2^3m^3x^3=-8m^3x^3$.

$(-x)^3=(-1)^3\cdot x^3$.

(3) $(-xy^2)^3=(-x)^3\cdot(y^2)^3=-x^3y^6$.

(4) $\left(\frac{2}{3}xy^2\right)^2=\left(\frac{2}{3}x\right)^2\cdot(y^2)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot x^2\cdot(y^2)^2=\frac{4}{9}x^2y^4$.

例题2 计算：

(1) $(-a)^3\cdot(-a)^4$；

(2) $3(x^2y^2)^3-2(x^3y^3)^2$；

(3) $(3x^3)^2+(2x^2)^3$.

解 (1) $(-a)^3\cdot(-a)^4=(-a)^7=(-1)^7\cdot a^7=-a^7$.

(2) $3(x^2y^2)^3-2(x^3y^3)^2=3x^6y^6-2x^6y^6=x^6y^6$.

(3) $(3x^3)^2+(2x^2)^3=9x^6+8x^6=17x^6$.

思考 2

上面的法则对三个或三个以上因式积的乘方是否也适合？

$$(abc)^n=\underline{\qquad\qquad}.\ (n\text{为正整数})$$

练习9.9

1. (口答)计算：

(1) $(3a)^2$；　　(2) $(a^2b)^3$；

(3) $(2ab^2)^2$；　　(4) $(-2a^2b^2)^3$.

2. 判断下列计算是否正确：

(1) $(2a)^2=2a^2$；　　(2) $(-3x)^3=27x^3$；

(3) $(xy^2)^3=x^3y^5$；　　(4) $\left(\frac{2}{3}a\right)^2=\frac{4}{3}a^2$.

3. 计算：

(1) $(-x^3y^2)^3$；　　(2) $\left(\frac{3}{4}xy^2\right)^2$；

(3) $(-x^2y)^4$；　　(4) $(-2a^2)^3+9a^2\cdot a^4$.

4. 填空：

(1) $a^3b^6=(\quad)^3$；　　(2) $36a^6b^{10}=(\quad)^2$；

(3) $2^5\times5^5=(\quad)^5=10^{(\quad)}$；　　(4) $4^3\times25^3=(\quad)^3=10^{(\quad)}$.

5. 用简便方法计算下列各题：

(1) $2^3\times5^3$；　　(2) $4^6\times2.5^6$；　　(3) $4^6\times5^{12}$.

9.10　整式的乘法

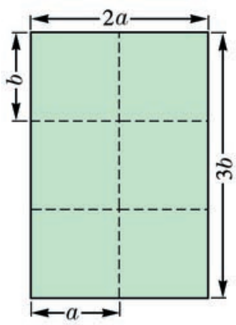


图9-8

1. 单项式与单项式相乘

如图9-8，长方形的长是$2a$，宽是$3b$，它的面积是$2a\cdot3b$，如何计算$2a\cdot3b$？

从图9-8中可以看到长方形可以分成6个长为a、宽为b的小长方形，而每个小长方形的面积都是ab，因此这个长方形的面积是$2a\cdot3b=6ab$.

这里$2a$、$3b$都是单项式，$2a\cdot3b$是单项式乘以单项式.

运用乘法交换律、结合律计算可得

$$2a\cdot 3b=(2\times 3)(a\cdot b)=6ab.$$

同样，$6a^2\cdot 4ab=(6\times 4)(a^2\cdot a)\cdot b=24a^3b$.

一般地，单项式与单项式相乘有如下法则：

单项式与单项式相乘，把它们的系数、同底数幂分别相乘的积作为积的因式，其余字母连同它的指数不变，也作为积的因式.

例题1 计算：

(1) $3x\cdot 4x^3$； (2) $\frac{1}{2}xy^2\cdot(-4x^2y^4)$；

(3) $(-4ax^2)\cdot(-3a^2x^3)$； (4) $(-2x)^3\cdot(5x^2y)^2$.

解 (1) $3x\cdot 4x^3=(3\times 4)(x\cdot x^3)=12x^4$.

(2) $\frac{1}{2}xy^2\cdot(-4x^2y^4)$

$=\left[\frac{1}{2}\times(-4)\right](x\cdot x^2)\cdot(y^2\cdot y^4)$

$=-2x^3y^6$.

(3) $(-4ax^2)\cdot(-3a^2x^3)$

$=[(-4)\times(-3)](a\cdot a^2)\cdot(x^2\cdot x^3)$

$=12a^3x^5$.

(4) $(-2x)^3\cdot(5x^2y)^2$

$=(-8x^3)\cdot(25x^4y^2)$

$=(-8\times 25)(x^3\cdot x^4)\cdot y^2$

$=-200x^7y^2$.

例题2 计算：

(1) $(-2x^2y)\cdot 5xy^3\cdot\left(-\frac{3}{5}x^2y^2\right)$；

(2) $4(xy)^2\cdot xy^2+\left(-\frac{3}{5}xy^3\right)\cdot\frac{5}{3}x^2y$.

解 (1) $(-2x^2y)\cdot 5xy^3\cdot\left(-\frac{3}{5}x^2y^2\right)$

$=\left[-2\times5\times\left(-\frac{3}{5}\right)\right](x^2\cdot x\cdot x^2)\cdot(y\cdot y^3\cdot y^2)$

$=6x^5y^6$.

(2) $4(xy)^2\cdot xy^2+\left(-\frac{3}{5}xy^3\right)\cdot\frac{5}{3}x^2y$

$=4x^2y^2\cdot xy^2+\left(-\frac{3}{5}\times\frac{5}{3}\right)(x\cdot x^2)\cdot(y^3\cdot y)$

$=4x^3y^4-x^3y^4$

$=3x^3y^4$.

练习9.10(1)

1 计算：

(1) $3a\cdot\frac{2}{9}ab$；

(2) $2x^2\cdot(-5xy)$；

(3) $\frac{5}{12}ab^2\cdot 3ab$；

(4) $-2.5x^2y^2\cdot 4x^3$.

2 计算：

(1) $(2ab)^2\cdot(-3a)$；

(2) $(-x^2y)\cdot(2xy)^3$；

(3) $3ab\cdot\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)+\frac{3}{4}a\cdot 2a^2b^2$.

2. 单项式与多项式相乘

思考

如何计算 $(a+3)\cdot(2b)$？

这里 $a+3$ 是多项式，$2b$ 是单项式，$(a+3)\cdot(2b)$ 是单项式与多项式相乘.运用乘法分配律、交换律计算，可以得到

$$(a+3)\cdot(2b)=a\cdot 2b+3\cdot 2b=2ab+6b.$$

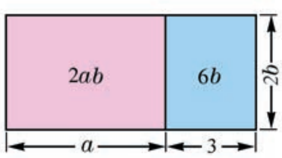
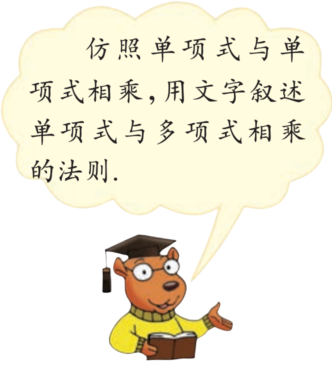


图9－9

如图 9－9，长方形的长是 $a+3$，宽是 $2b$，它的面积是$(a+3)\cdot(2b)$.

把这个长方形如图分成两个小长方形，它们的面积分别是



$2ab$ 与 $6b$，可知长方形的面积为 $2ab+6b$，验证了上面计算的结果正确.

同样，

$$-3x\cdot(ax^2-2x)=(-3x)\cdot(ax^2)+(-3x)\cdot(-2x)=-3ax^3+6x^2.$$

一般地，单项式与多项式相乘有如下的法则：

> 单项式与多项式相乘，用单项式乘以多项式的每一项，再把所得的积相加.

如 $(p+q)\cdot b=bp+bq$ 或 $b\cdot(p+q)=bp+bq$.

例题3 计算：

(1) $2ab\cdot(3a^2b-2ab^2)$；

(2) $\left(\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}x^2y\right)\cdot(-12xy)$.

解 (1) $2ab\cdot(3a^2b-2ab^2)$

$=2ab\cdot 3a^2b+2ab\cdot(-2ab^2)$

$=6a^3b^2-4a^2b^3$.

(2) $\left(\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}x^2y\right)\cdot(-12xy)$

$=\frac{1}{4}x\cdot(-12xy)+\left(-\frac{2}{3}x^2y\right)\cdot(-12xy)$

$=-3x^2y+8x^3y^2$.

练习9.10(2)

1. (口答)计算：

(1) $2x\cdot 5x^3$； (2) $3x^3\cdot\left(-\frac{1}{3}x\right)$；

(3) $3x\cdot(-2x^2)$； (4) $a\cdot(x-y)$；

(5) $x^2\cdot(1-x-x^2)$； (6) $(a^2+2ab+3b^2)\cdot(2ab)$.

2. 计算：

(1) $(-2\times10^3)\times(3\times10^4)$；

(2) $4a^4b^2\cdot3a^2b$；

(3) $xy\cdot x^2y\cdot xy^2$；

(4) $\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)^3\cdot\left(\dfrac{2}{3}xy^2\right)$；

(5) $(-2a^2)\cdot(-ab^2)^3\cdot(2a^2b^3)$；

(6) $a^2\cdot(-3ab)\cdot(-5b^2)$.

3. 计算：

(1) $-2x\cdot(x^2+2x-2)$；

(2) $-2a^2\cdot(a^2-3ab+b^2)$；

(3) $\left(\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)$；

(4) $(4a^3-2a+1)\cdot(-2a)^2$.

4. 计算：

(1) $b(a+b)-a(b-a)$；

(2) $x(x-y)-y(x-y)$；

(3) $a(a^2+a+1)+(-1)(a^2+a+1)$；

(4) $x(x^2-x-1)+2(x^2+1)-\dfrac{1}{3}x(3x^2+6x)$.

3. 多项式与多项式相乘

思考

如何计算$(a+m)\cdot(b+n)$?

这里 $a+m$、$b+n$ 都是多项式，$(a+m)\cdot(b+n)$是多项式与多项式相乘.

可以把 $b+n$ 看成是一个整体，再运用单项式与多项式相乘的法则计算，得

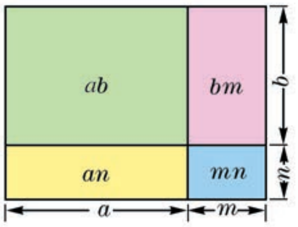


图9－10

$$(a+m)\cdot(b+n)=a\cdot(b+n)+m\cdot(b+n)=ab+an+bm+mn.$$

也可以看作：

$$(a+m)\cdot(b+n)=(a+m)\cdot b+(a+m)\cdot n=ab+bm+an+mn.$$

如图 9－10，大长方形的边长分别是 $a+m$ 和 $b+n$，它的面积为 $(a+m)\cdot(b+n)$.

把这个大长方形如图分成四个小长方形，可知它们的面积分别是 ab，an，bm，mn.大长方形的面积等于这四个小长方形面积的和，验证了上面计算的结果正确.

上面计算的过程也可以看作：

$$(a+m)(b+n)=ab+an+bm+mn.$$

一般地，多项式与多项式相乘有如下的法则：

> 多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项乘以另一个多项式的每一项，再把所得的积相加.

例题4 计算：

(1) $(a+3)(b+5)$；

(2) $(3x-y)(2x+3y)$；

(3) $(a-b)(a+b)$；

(4) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

多项式与多项式相乘的结果中，如果有同类项，要合并同类项.

解 (1) $(a+3)(b+5)$

$=ab+5a+3b+15$.

(2) $(3x-y)(2x+3y)$

$=6x^2+9xy-2xy-3y^2$

$=6x^2+7xy-3y^2$.

(3) $(a-b)(a+b)$

$=a^2+ab-ab-b^2$

$=a^2-b^2$.

(4) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$

$=a^3-b^3$.

例题 5 计算：

(1) $(3x-2)(2x-3)(x+2)$；

(2) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$.

解 (1) $(3x-2)(2x-3)(x+2)$

$=(6x^2-9x-4x+6)(x+2)$

$=(6x^2-13x+6)(x+2)$

$=6x^3+12x^2-13x^2-26x+6x+12$

$=6x^3-x^2-20x+12$.

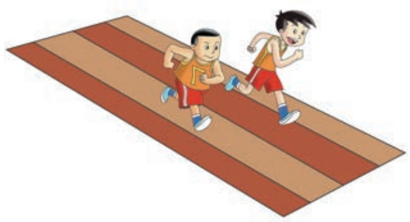
(2) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

$=(a^2+ab-ab-b^2)(a^2+b^2)$

$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

$=a^4+a^2b^2-a^2b^2-b^4$

$=a^4-b^4$.



例题 6 学校在运动场上举行 200 米的赛跑，每条跑道的道宽为 1.22 米，比赛的终点线定在如图 9－11 所示的 C 处，由于不同跑道上的运动员要经过不同的弯道，因此，他们不应从同一起跑线上起跑，第一、第二两条跑道上运动员的起跑线应相隔多远才比较公平？（π 取 3.14，精确到 0.01 米）

分析 由于弯道是半圆周，设弯道的半径为 r，根据给出的图形可知，在第一道的运动员沿弯道内侧跑了 πr 米，在第二道的运动员沿弯道内侧跑了 $\pi(r+1.22)$米，两个运动员沿弯道内侧所跑的路程的差，就是两个运动员起跑时相隔的距离．

解  $\pi(r+1.22)-\pi r=\pi r+1.22\pi-\pi r$

$=1.22\pi\approx 3.83$(米).

答：第一、第二两条跑道上运动员的起跑线应相隔约 3.83 米比较公平．

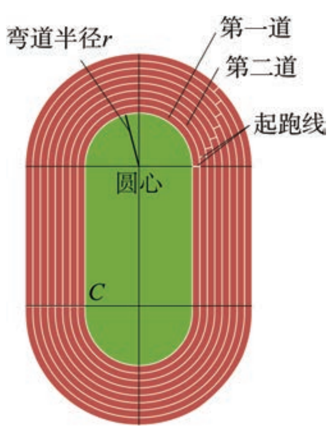


图9－11

练习9.10(3)

1. 计算：

(1) $(x+2)(x+1)$；　　(2) $(x-2)(x+1)$；

(3) $(x+4)(x+1)$；　　(4) $(x-4)(x+1)$.

2. 计算：

(1) $(3a+b)(3a-b)$；　　(2) $(x^2+1)(2+x^2)$；

(3) $(x+2)^2$；　　(4) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

3. 计算：

(1) $(x+1)(x-2)(2x-1)$；　　(2) $(a-1)(a+1)(a^2+1)$；

(3) $\left(\frac{1}{3}+a\right)\left(\frac{1}{3}-a\right)\left(\frac{1}{9}+a^2\right)$；　　(4) $(4+y^2)(2+y)(2-y)$.

4. 计算：

(1) $(x+a)(x+b)$；　　(2) $(x-a)(x-b)$.

第 4 节　乘法公式

9.11　平方差公式

思考 1

计算下列各题，并观察下列乘式与结果的特征：

(1) $(y+2)(y-2)=$

(2) $(3-a)(3+a)=$

(3) $(2a+b)(2a-b)=$

通过计算你发现了什么规律？

比较等号两边的代数式可以看到

公式中的a、b可以是任意的数或代数式.

你能推导出这个公式吗？

两个数的和与这两个数的差的乘积等于这两个数的平方差，即

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

这个公式叫做平方差公式.

思考 2

你能根据图9－12中图形的面积关系来说明平方差公式吗？

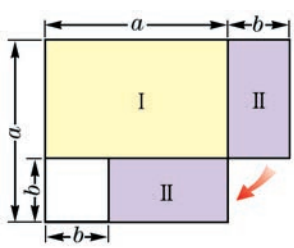


图9－12

例题1　计算：

(1) $(2x+y)(2x-y)$；

(2) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)$；

(3) $(-x+3y)(-x-3y)$；

(4) $(2a+b)(2a-b)(4a^2+b^2)$.

解 (1) $(2x+y)(2x-y)$

$=(2x)^2-y^2$

$=4x^2-y^2$.

(2) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)$

$=\left(\frac{1}{2}x\right)^2-\left(\frac{1}{3}y\right)^2$

$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2$.

注意：$\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2$

$(a\ +\ b)\ (a\ -\ b)=a^2-b^2$

将$(-x)$看作平方差公式中的a,$(3y)$看作b.

(3) $(-x+3y)(-x-3y)$

$=(-x)^2-(3y)^2$

$=x^2-9y^2$.

(4) $(2a+b)(2a-b)(4a^2+b^2)$

$=(4a^2-b^2)(4a^2+b^2)$

$=16a^4-b^4$.

例题2 计算：

(1) 102×98； (2) 30.2×29.8.

解 (1) 102×98

$=(100+2)(100-2)$

$=100^2-2^2$

$=10\ 000-4$

$=9\ 996$.

(2) 30.2×29.8

$=(30+0.2)(30-0.2)$

$=30^2-0.2^2$

$=900-0.04$

$=899.96$.

练习9.11

1. 计算：

(1) $(2x+5)(2x-5)$；

(2) $(1-2a)(1+2a)$；

(3) $\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b\right)$；

(4) $\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}\right)$；

(5) $(-2x-3y)(-2x+3y)$；

(6) $(-2a-3b)(2a-3b)$；

(7) $(a+2)(a-2)(a^2+4)$；

(8) $\left(\frac{1}{9}y^2+x^2\right)\left(\frac{1}{3}y-x\right)\left(\frac{1}{3}y+x\right)$.

2. 计算：

(1) 103×97；

(2) 79×81；

(3) 50.2×49.8；

(4) $10\frac{1}{7}\times9\frac{6}{7}$.

3. 化简：

(1) $(a-b)(a+b)-(a+3b)(a-3b)$；

(2) $(x-2y)(x+2y)+(2x-y)(2x+y)$；

(3) $(x^2+2)(x^2-2)-(x-2)(x+2)$.

9.12 完全平方公式

思考 1

计算下列各题，并观察乘式与结果的特征：

(1) $(a+b)^2=$

(2) $(2a+3b)^2=$

(3) $(x-y)^2=$

仿照平方差公式,你能用文字叙述这一规律吗?

(4) $(2x-3y)^2=$

通过计算你发现什么规律?

比较等号两边的代数式,可以看到

两数和(或差)的平方,等于它们的平方和,加上(或减去)它们积的两倍,即

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

在以后的学习中你将经常运用乘法公式.

这两个公式叫做完全平方公式.平方差公式和完全平方公式也叫做乘法公式.

思考 2

你能根据图9-13和图9-14中的图形来说明完全平方公式吗?

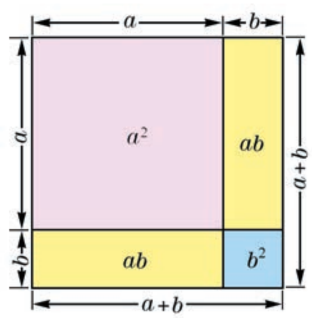


图9-13

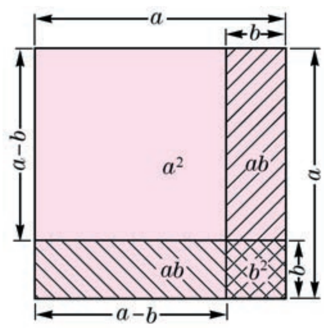


图9-14

例题1 计算:

(1) $(2x+3y)^2$; (2) $(6x-5)^2$;

(3) $(-2a+b)^2$; (4) $(-3a-2b)^2$.

解 (1) $(2x+3y)^2$

$=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2$

$=4x^2+12xy+9y^2$.

(2) $(6x-5)^2$

$=(6x)^2-2(6x)5+5^2$

$=36x^2-60x+25$.

也可以这样做：

$(-2a+b)^2$

$=(b-2a)^2$

$=b^2-2b(2a)+(2a)^2$

$=b^2-4ab+4a^2$.

(3) $(-2a+b)^2$

$=(-2a)^2+2(-2a)b+b^2$

$=4a^2-4ab+b^2$.

也可以这样做：

$(-3a-2b)^2$

$=[-(3a+2b)]^2$

$=(3a+2b)^2$

$=9a^2+12ab+4b^2$.

(4) $(-3a-2b)^2$

$=[(-3a)-2b]^2$

$=(-3a)^2-2(-3a)(2b)+(2b)^2$

$=9a^2+12ab+4b^2$.

例题2 计算：

(1) $(a+b+c)^2$；

(2) $(x+y-2)(x-y+2)$.

解 (1) $(a+b+c)^2$

$=[(a+b)+c]^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$.

$(a+b+c)^2$也可以化为$[a+(b+c)]^2$，然后利用乘法公式完成.

(2) $(x+y-2)(x-y+2)$

$=[x+(y-2)][x-(y-2)]$

$=x^2-(y-2)^2$

$=x^2-(y^2-4y+4)$

$=x^2-y^2+4y-4$.

例题3 甲乙两家商店9月份的销售额均为a万元，在10月份和11月份这两个月份中，甲商店的销售额平均每月增长$x\%$，乙商店的销售额平均每月减少$x\%$，11月份甲商店的销售额比乙商店的销售额多多少万元?

解 由题意，11月份甲商店的销售额为$a(1+x\%)^2$(万元)，11月份乙商店的销售额为$a(1-x\%)^2$(万元).所以，甲商店与乙商店的销售额的差为

$a(1+x\%)^2-a(1-x\%)^2$

$$=a\left(1+\frac{2x}{100}+\frac{x^2}{10\,000}\right)-a\left(1-\frac{2x}{100}+\frac{x^2}{10\,000}\right)$$

$$=a+\frac{2ax}{100}+\frac{ax^2}{10\,000}-a+\frac{2ax}{100}-\frac{ax^2}{10\,000}$$

$$=\frac{4ax}{100}$$

$$=\frac{ax}{25}(\text{万元}).$$

答：11月份甲商店的销售额比乙商店的销售额多$\frac{ax}{25}$万元.

练习9.12

1. 判断下列各式的计算是否正确，错误的请加以改正.

(1) $(a+b)^2=a^2+b^2$；

(2) $(a+2b)^2=a^2+2ab+b^2$；

(3) $(a-2b)^2=a^2-4ab-4b^2$；

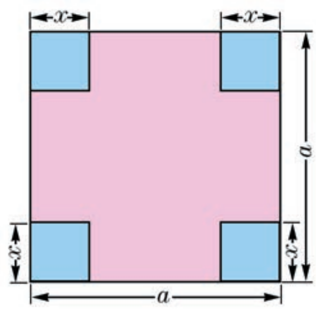
(4) $(7-a)^2=49-a^2$.

2. 计算：

(1) $(2x+y)^2$；　　(2) $(-a-b)^2$；

(3) $\left(\frac{1}{3}m+\frac{1}{2}n\right)^2$；　　(4) $\left(\frac{1}{4}a-\frac{2}{3}b\right)^2$.

3. 如图，将一张边长为a cm的正方形纸板的四角各剪去一个边长为x cm的小正方形，然后将它折成一个纸盒，求纸盒的容积.(纸板的厚度忽略不计，结果用含有a、x的代数式表示)



(第 3 题)

4. 计算：

(1) $(a+b-c)^2$；

(2) $(2x-y+1)(2x+y-1)$.

9

第 5 节　因式分解

9.13　提取公因式法

你还记得小学时学过的乘法对加法的分配律吗?

$$a(b+c)=ab+ac.$$

但有时,我们却需要逆用乘法对加法的分配律.如计算:

$$3\times\frac{99}{4}+3\times\frac{1}{4}.$$

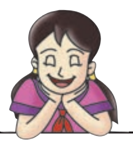
可以得到

$$3\times\frac{99}{4}+3\times\frac{1}{4}=3\times\left(\frac{99}{4}+\frac{1}{4}\right)=3\times 25=75.$$

观察

比较表格中每行左右两个等式.

$m(a+b)=ma+mb$	$ma+mb=m(a+b)$
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$



$m(a+b)=ma+mb$ 是整式的乘法运算,而 $ma+mb=m(a+b)$ 是反过来把多项式 $ma+mb$ 化为两个整式 m 与 $a+b$ 的乘积.

每行左右两个等式恰好是互逆的等式变形.

把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做把这个多项式因式分解，也叫做把这个多项式分解因式.

因式分解和整式乘法的过程正好相反.

由$ma+mb=m(a+b)$可以知道m是$ma+mb$各项都含有的相同的因式.

一个多项式中每一项都含有的因式叫做这个多项式的公因式.

m就是$ma+mb$的一个公因式.

思考

如何把多项式$6xy^2+9xy$分解因式?

分析 多项式$6xy^2+9xy$有两项，这两项的系数都是整数，它们的公因数是3，还有相同的因式xy，所以这个多项式各项有公因式$3xy$，就是

想一想：另一个因式$2y+3$是如何得到的？

$$6xy^2+9xy=3xy\cdot 2y+3xy\cdot 3=3xy(2y+3).$$

如果一个多项式的各项含有公因式，那么可以把该公因式提取出来作为多项式的一个因式，提出公因式后的式子放在括号里，作为另一个因式.这种分解因式的方法叫做提取公因式法.

例题1 分解因式：$10a^3bc^2+15a^2b^2c$.

分析 观察多项式的两项，找出它们的公因式：

$$10a^3bc^2=5a^2bc\cdot 2ac,$$

$$15a^2b^2c=5a^2bc\cdot 3b,$$

$10a^3bc^2$ 与 $15a^2b^2c$ 的公因式是怎样确定的？

这两项有公因式 $5a^2bc$，因此，用提取公因式法分解因式．

解 $10a^3bc^2+15a^2b^2c$

$=5a^2bc\cdot 2ac+5a^2bc\cdot 3b$

$=5a^2bc(2ac+3b)$．

你知道如何检验因式分解的正确性吗？

提取的公因式应是各项系数的最大公因数（系数都是整数时）与各项都含有的相同字母的最低次幂的积．

例题2 分解因式：

(1) $6a^2-8a^3$；

(2) $15a^2b+3ab$；

(3) $-4x^2y+6xy^2-2xy$；

(4) $-3ax+6ab-12ay$．

解 (1) $6a^2-8a^3$

$=2a^2\cdot 3-2a^2\cdot 4a$

$=2a^2(3-4a)$．

(2) $15a^2b+3ab$

$=3ab\cdot 5a+3ab\cdot 1$

$=3ab(5a+1)$．

提取 $3ab$ 后，括号内第二项1不能遗漏．

(3) $-4x^2y+6xy^2-2xy$

$=-(4x^2y-6xy^2+2xy)$

$=-(2xy\cdot 2x-2xy\cdot 3y+2xy\cdot 1)$

$=-2xy(2x-3y+1)$．

(4) $-3ax+6ab-12ay$

$=-(3ax-6ab+12ay)$

$=-(3a\cdot x-3a\cdot 2b+3a\cdot 4y)$

$=-3a(x-2b+4y)$．

练习9.13(1)

1. (口答)下列等式中，哪些从左到右的变形是因式分解？为什么？

(1) $1+2x+3x^2=1+x(2+3x)$；

(2) $3x(x+y)=3x^2+3xy$；

(3) $6a^2b+3ab^2-ab=ab(6a+3b-1)$；

(4) $3xy-4x^2y+5x^2y^2=xy(3-4x+5xy)$.

2. (口答)说出下列多项式各项的公因式：

(1) $2ax+4ay$；

(2) $3x^2+6x$；

(3) $4a^2-6a$；

(4) $4x^2y-12xy$；

(5) $-5a^2x+15ax^2$；

(6) $-x^3+2x^2-3x$.

3. 分解因式：

(1) $2ax^3+6a^2x^2$；

(2) $-3ab+6abc-9ac$；

(3) $-15a-10ab+5abc$；

(4) $27a^2bc-9ab^2c+3abc^2$.

例题3 分解因式：$a(x+y)+b(x+y)$.

分析 因为$a(x+y)+b(x+y)$中各项有公因式$x+y$，所以可以用提取公因式法来分解因式.

把$x+y$看作一个整体！

解 $a(x+y)+b(x+y)$

$=(x+y)(a+b)$.

例题4 分解因式：$-6(2a-b)^2-4(2a-b)$.

分析 因为$-6(2a-b)^2-4(2a-b)$中各项有公因式$-2(2a-b)$，所以

可以用提取公因式法来分解因式.

解 $-6(2a-b)^2-4(2a-b)$

$=-2(2a-b)[3(2a-b)+2]$

$=-2(2a-b)(6a-3b+2)$.

例题5 分解因式:

(1) $x(a-b)^2-y(b-a)^3$;

(2) $x(a-b)+y(b-a)-3(b-a)$;

(3) $6(x+y)^2-2(x-y)(x+y)$.

$x(a-b)^2-y(b-a)^3$ 也可以化为 $x(b-a)^2-y(b-a)^3$.

解 (1) $x(a-b)^2-y(b-a)^3$

$=x(a-b)^2+y(a-b)^3$

$=(a-b)^2(x+ay-by)$.

(2) $x(a-b)+y(b-a)-3(b-a)$

$=x(a-b)-y(a-b)+3(a-b)$

$=(a-b)(x-y+3)$.

(3) $6(x+y)^2-2(x-y)(x+y)$

$=2(x+y)[3(x+y)-(x-y)]$

$=2(x+y)(3x+3y-x+y)$

$=2(x+y)(2x+4y)$

$=4(x+y)(x+2y)$.

练习9.13(2)

1. 填空:

(1) $2m(y-x)^2=(\quad)(x-y)^2$;

(2) $-2m(y-x)^3=(\quad)(x-y)^3$;

(3) $(x+y)(y-x)=-(x+y)(\quad)$;

(4) $-m(y-x^2)=m(\quad)$.

2. 分解因式:

(1) $3a(m-n)-2b(m-n)$;

(2) $a(x-2)-b(x-2)+(2-x)$;

(3) $9(a-b)(a+b)-3(a-b)^2$;

(4) $-2(b-2a)^2+(b-2a)$;

(5) $3(x+y)(y-x)-(x-y)^2$;

(6) $-3(x-y)^2-(y-x)^3$.

9.14　公式法

思考 1

如何将a^2-b^2、$4x^2-9y^2$分解因式?

由乘法公式中的平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，反过来将a^2-b^2分解因式，可得$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

> 逆用乘法公式将一个多项式分解因式的方法叫做公式法.

1. 平方差公式

由平方差公式反过来可得

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

这个公式叫做因式分解的平方差公式.

这就是说，如果一个多项式能写成两个数的平方差的形式，那么就可以运用平方差公式把它因式分解，它等于这两个数的和与这两个数的差的积.

例如，$4x^2-9y^2$中，$4x^2$可以看作$(2x)^2$，$9y^2$可以看作$(3y)^2$，这样$4x^2-9y^2=(2x)^2-(3y)^2=(2x+3y)(2x-3y)$.

例题1　分解因式：

(1) $1-9x^2$;

(2) $-9x^2+y^2$;

(3) $\dfrac{16}{25}x^4-\dfrac{9}{16}y^2$;

(4) $(a+b)^2-(a+c)^2$.

解　(1) $1-9x^2$

$=1-(3x)^2$

$=(1+3x)(1-3x)$.

也可以这样分解因式

$-9x^2+y^2$

$=-(9x^2-y^2)$

$=-(3x+y)(3x-y)$.

(2) $-9x^2+y^2$

$=y^2-(3x)^2$

$=(y+3x)(y-3x)$.

(3) $\dfrac{16}{25}x^4-\dfrac{9}{16}y^2$

$=\left(\dfrac{4}{5}x^2\right)^2-\left(\dfrac{3}{4}y\right)^2$

$=\left(\dfrac{4}{5}x^2+\dfrac{3}{4}y\right)\left(\dfrac{4}{5}x^2-\dfrac{3}{4}y\right)$.

(4) $(a+b)^2-(a+c)^2$

$=[(a+b)+(a+c)][(a+b)-(a+c)]$

$=(2a+b+c)(b-c)$.

例题2 分解因式：

(1) $3x^3-12x$；

(2) x^4-16.

因式分解时要注意最后的结果要分解到不能再分解为止，例如，x^2-4还能分解为$(x+2)(x-2)$.

解 (1) $3x^3-12x$

$=3x(x^2-4)$

$=3x(x+2)(x-2)$.

(2) x^4-16

$=(x^2)^2-4^2$

$=(x^2+4)(x^2-4)$

$=(x^2+4)(x+2)(x-2)$.

练习9.14(1)

1. 下列多项式能用平方差公式分解因式吗？如果可以，请分解因式：

(1) a^2+4b^2； (2) $4a^2-(-b)^2$；

(3) $-4+a^2$； (4) $-4-a^2$；

(5) $x^2-\dfrac{1}{4}$； (6) $x^2+\dfrac{1}{4}$.

2 分解因式：

(1) x^2-9； (2) $a^2-\frac{4}{25}b^2$；

(3) $16x^2-4y^2$； (4) $9a^2b^2-81a^2$；

(5) $6a^2b-54b$； (6) x^4-81y^4.

3 用简便方法计算：

(1) $999^2-1\ 001^2$；

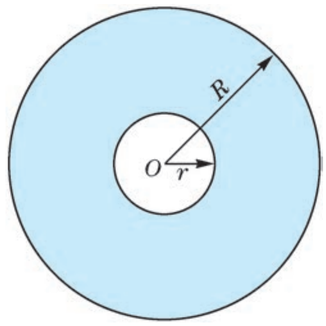
(2) $\left(99\frac{1}{2}\right)^2-\left(100\frac{1}{2}\right)^2$.

4 分解因式：

(1) $(2a+b)^2-(2a-b)^2$；

(2) $9(x-2y)^3-(x-2y)$.

5 如图，已知$R=5.6$，$r=1.4$，求圆环的面积.（π取3.14）



(第5题)

2. 完全平方公式

思考 2

$a^2+2ab+b^2$、x^2+6x+9、$4x^2-12xy+9y^2$如何分解因式？

由乘法公式中完全平方公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

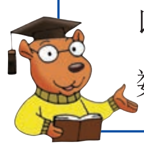
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$

反过来可得

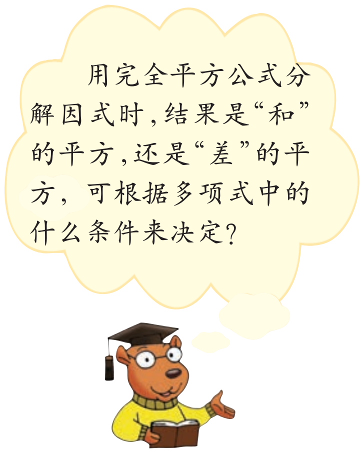
$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

这两个公式叫做因式分解的完全平方公式.



这就是说，如果一个多项式能写成两个数的平方和，加上(或减去)这两个数的积的两倍，那么就可以运用完全平方公式把它分解因式，它等于这两个数的和(或差)的平方.



多项式$a^2+2ab+b^2$与$a^2-2ab+b^2$叫做完全平方式．在运用上述公式分解因式时，关键在于判断这个多项式是否为完全平方式．例如：

$$x^2+6x+9=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=(x+3)^2.$$

$$a^2+2\ a\ \ b\ +b^2=(a+b)^2$$

又如：

$$4x^2-12xy+9y^2=(2x)^2-2\cdot(2x)\cdot(3y)+(3y)^2=(2x-3y)^2.$$

$$a^2\ \ -2\ \ a\ \ \ b\ +\ b^2\ =(a-b)^2$$

可以看到，用完全平方公式分解因式时，可以按照两数积的两倍前面的符号来选择运用哪一个完全平方公式．

例题3　分解因式：

(1) $9x^2-12x+4$；

(2) $4x^2+20xy+25y^2$；

(3) $\frac{1}{4}a^2-\frac{3}{5}ab+\frac{9}{25}b^2$；

(4) $-x^2+\frac{2}{3}xy-\frac{1}{9}y^2$.

解　(1) $9x^2-12x+4$

$=(3x)^2-2\cdot(3x)\cdot 2+2^2$

$=(3x-2)^2$.

(2) $4x^2+20xy+25y^2$

$=(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot(5y)+(5y)^2$

$=(2x+5y)^2$.

(3) $\frac{1}{4}a^2-\frac{3}{5}ab+\frac{9}{25}b^2$

$=\left(\frac{1}{2}a\right)^2-2\cdot\left(\frac{1}{2}a\right)\cdot\left(\frac{3}{5}b\right)+\left(\frac{3}{5}b\right)^2$

$=\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{5}b\right)^2$.

注意应先提取负号.

(4) $-x^2+\frac{2}{3}xy-\frac{1}{9}y^2$

$=-\left(x^2-\frac{2}{3}xy+\frac{1}{9}y^2\right)$

$=-\left(x-\frac{1}{3}y\right)^2$.

例题4 分解因式：

(1) $2ax^2-12axy+18ay^2$；

(2) $(x+y)^2+8(x+y)+16$.

因式分解时，应先提取公因式，然后用公式法分解因式.

把$(x+y)$看作a，把4看作b.

解 (1) $2ax^2-12axy+18ay^2$

$=2a(x^2-6xy+9y^2)$

$=2a(x-3y)^2$.

(2) $(x+y)^2+8(x+y)+16$

$=(x+y)^2+2\cdot(x+y)\cdot4+4^2$

$=(x+y+4)^2$.

练习9.14(2)

1. 按照完全平方公式填空：

(1) $a^2-12a+(\quad)=(\qquad)^2$；

(2) $16-(\quad)+9b^2=(\qquad)^2$；

(3) $(\quad)^2+4xy+4=(\qquad)^2$；

(4) $(x-y)^2+6(x-y)+(\quad)=(\qquad)^2$.

2. 分解因式：

(1) $m^2+m+\frac{1}{4}$；

(2) $x^2-16xy+64y^2$；

(3) $9x+\frac{1}{4}+81x^2$；

(4) $-m^2n^2-16+8mn$.

③ 分解因式：

(1) $3a^2+12ab+12b^2$；

(2) $(2x-y)^2-10(2x-y)+25$；

(3) $8ax^2+16a^2x+8a^3$；

(4) $-6x^2y-3x^3-3xy^2$.

9.15 十字相乘法

这两个式子不能用公式法，也没有公因式可以提取，怎样分解因式呢?

思考

如何将x^2+3x+2、x^2-5x+6分解因式?

这两个多项式都是二次三项式x^2+px+q，但是都不是完全平方式，不能用完全平方公式来分解因式.

由多项式与多项式相乘的法则，可知

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$$

反过来可得

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b).$$

如果二次三项式x^2+px+q中的常数项q能分解成两个因数a、b的积，而且一次项系数p又恰好是$a+b$，那么x^2+px+q就可以进行如下的因式分解，即

$$x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b).$$

例如，x^2+3x+2中常数项是2，可以分解为2×1，而且$2+1=3$，恰好等于一次项系数，所以

$$x^2+3x+2=(x+2)(x+1).$$

2也可以分解为$(-2)\times(-1)$，那么x^2+3x+2是否可分解为$(x-2)(x-1)$呢?

在对多项式x^2+3x+2分解因式时，也可以借助画十字交叉线来分解．x^2分解为$x\cdot x$，常数项2分解为2×1，把它们用交叉线来表示：

$$\begin{array}{ll} x & +2 \\ x & +1 \end{array}$$

按十字交叉相乘，它们积的和就是$2x+x=3x$. 所以$x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$.

一般地，$x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$可以用十字交叉线表示：

$$\begin{array}{ccc} x & & +a \\ & \times & \\ x & & +b \end{array}$$

> 对 $x^2+2ax+a^2$ 是否可用十字相乘法分解因式？

> 利用十字交叉线来分解系数，把二次三项式分解因式的方法叫做**十字相乘法**.

又如x^2-5x+6用十字相乘法因式分解，常数项6可以分解为以下两个整数的积：

第一组：2×3，

第二组：1×6，

第三组：$(-2)\times(-3)$，

第四组：$(-1)\times(-6)$.

究竟选择哪一组关键在于判断哪两个整数的和等于一次项系数-5. 因为$(-2)+(-3)=(-5)$，所以选择第三组. 用十字交叉线表示：

$$\begin{array}{ccc} x & & -2 \\ & \times & \\ x & & -3 \end{array}$$

按十字交叉相乘得$(-3x)+(-2x)=-5x$，恰好是一次项，于是有$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$.

在用十字相乘法分解因式时，因为常数项的因数分解有多种情况，所以通常要经过多次的尝试才能确定采用哪组因数分解来进行分解因式.

例题1 分解因式：

(1) $x^2-7x+12$；

(2) $x^2-4x-12$；

(3) $x^2+8x+12$；

(4) $x^2-11x-12$.

解 (1) $x^2-7x+12$

$=(x-3)(x-4)$.

$$\begin{array}{ll} x & -3 \\ x & -4 \end{array}$$

(2) $x^2-4x-12$

$=(x-6)(x+2)$.

$$\begin{array}{ll} x & -6 \\ x & +2 \end{array}$$

(3) $x^2+8x+12$

$=(x+2)(x+6)$.

$$\begin{array}{ll} x & +2 \\ x & +6 \end{array}$$

(4) $x^2-11x-12$

$=(x-12)(x+1)$.

$$\begin{array}{ll} x & -12 \\ x & +1 \end{array}$$

例题2 分解因式：

(1) $x^2+5xy-24y^2$；

(2) x^4-5x^2-36；

(3) $(2x+y)^2+6(2x+y)-27$.

解 (1) $x^2+5xy-24y^2$

$=(x+8y)(x-3y)$.

$$\begin{array}{ll} x & +8y \\ x & -3y \end{array}$$

把x^2看作一个整体.

(2) x^4-5x^2-36

$=(x^2+4)(x^2-9)$

$=(x^2+4)(x+3)(x-3)$.

$$\begin{array}{ll} x^2 & +4 \\ x^2 & -9 \end{array}$$

把$(2x+y)$看作一个整体.

(3) $(2x+y)^2+6(2x+y)-27$

$=(2x+y+9)(2x+y-3)$.

$$\begin{array}{ll} (2x+y) & +9 \\ (2x+y) & -3 \end{array}$$

练习9.15

1. 分解因式：

(1) x^2+3x-4；

(2) x^2-3x-4；

(3) $x^2+8x-20$；

(4) $x^2-5x-24$；

(5) $x^2+12x+27$；

(6) $x^2-8x+12$.

2. 分解因式：

(1) $x^2+6xy-16y^2$；

(2) $x^2-11xy+24y^2$；

(3) x^4+13x^2+36；

(4) ax^4-14ax^2-32a；

(5) $(a+b)^2-15(a+b)+56$；

(6) $(a^2+a)^2-8(a^2+a)+12$.

9.16 分组分解法

思考 1

如何将多项式$ax+ay+bx+by$和$a^2+2ab+b^2-1$分解因式呢？

这两个多项式有什么特征？

多项式$ax+ay+bx+by$前面两项和后面两项分别有公因式a、b，多项式$a^2+2ab+b^2-1$前三项为完全平方式.

可以把多项式$ax+ay+bx+by$分成$(ax+ay)$与$(bx+by)$两组，从前一组$ax+ay$中提取公因式a，得到另一个因式$x+y$；从后一组$bx+by$中提取公因式b，得到另一个因式也是$x+y$. 这样，就可以把这个多项式分解因式.

$$
\begin{aligned}
&ax+ay+bx+by\\
=&(ax+ay)+(bx+by)\\
=&a(x+y)+b(x+y)\\
=&(x+y)(a+b).
\end{aligned}
$$

如果把这个多项式分成$(ax+bx)$与$(ay+by)$两组，再分解因式，结果是否相同呢?

对于多项式$a^2+2ab+b^2-1$，可以将$a^2+2ab+b^2$作为一组，它是一个完全平方式，即$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，然后用公式法分解因式，即

$$
\begin{aligned}
&a^2+2ab+b^2-1\\
=&(a^2+2ab+b^2)-1\\
=&(a+b)^2-1\\
=&(a+b+1)(a+b-1).
\end{aligned}
$$

利用分组来分解因式的方法叫做**分组分解法**.

例题1 分解因式：$2ac-6ad+bc-3bd$.

分析 把这个多项式适当分成两组，例如将前两项分为一组，后两项分为一组. 第一组提取公因式$2a$后另一个因式是$c-3d$；第二组提取公因式b后另一个因式也是$c-3d$. 这样就可以分解因式了.

解
$$
\begin{aligned}
&2ac-6ad+bc-3bd\\
=&(2ac-6ad)+(bc-3bd)\\
=&2a(c-3d)+b(c-3d)\\
=&(c-3d)(2a+b).
\end{aligned}
$$

例题2 分解因式：$6k^2+9km-6mn-4kn$.

解 $6k^2+9km-6mn-4kn$

$=(6k^2+9km)-(6mn+4kn)$

$=3k(2k+3m)-2n(3m+2k)$

$=(2k+3m)(3k-2n)$.

例题3 分解因式：$2x^3-2x^2y+8y-8x$.

解 $2x^3-2x^2y+8y-8x$

$=2(x^3-x^2y+4y-4x)$

$=2\,[(x^3-x^2y)+(4y-4x)]$

$=2\,[x^2(x-y)-4(x-y)]$

$=2(x-y)(x^2-4)$

$=2(x-y)(x+2)(x-2)$.

思考 2

如何把$x^2-4xy+4y^2-4$分解因式？

练习9.16

1. 填空：

(1) $2(a+b)+3a(a+b)=(\qquad)(a+b)$；

(2) $x(a-b)-y(a-b)=(a-b)(\qquad)$；

(3) $-(x-y)^2-(x-y)=-(x-y)(\qquad)$.

2. 分解因式：

(1) $ab-ac+b-c$；

(2) $a^2-ab-2a+2b$；

(3) $3a-9b+2ac-6bc$；

(4) $3x^2y+6xy-4x-8$.

3. 分解因式：

(1) $x^2+3y-xy-3x$；

(2) $x^3+2x^2y-9x-18y$；

(3) $(y+2)x^2+(y+2)x-12y-24$；

(4) $m^2x^2+n^2y^2-m^2y^2-n^2x^2$.

第 6 节　整式的除法

9.17　同底数幂的除法

问题

你会计算$(-5)^5\div(-5)^2$吗?

$(-5)^5\div(-5)^2$

$=\dfrac{(-5)^5}{(-5)^2}$

$=\dfrac{(-5)(-5)(-5)(-5)(-5)}{(-5)(-5)}$.

我有简便方法,根据同底数幂的乘法,

$(-5)^2\times(-5)^3=(-5)^5$,

所以$(-5)^5\div(-5)^2=(-5)^3$.

这不就是说

$(-5)^5\div(-5)^2=(-5)^{5-2}$

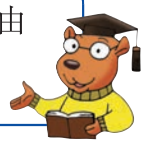
$=(-5)^3$吗?

观察

$3^8\div3^3=3^5=3^{8-3}$,即$3^8\div3^3=3^{8-3}$.

$a^{15}\div a^7=a^8=a^{15-7}$,即$a^{15}\div a^7=a^{15-7}(a\neq0)$.

可以看到,两边幂的底数相同,指数在做减法.由此你能概括出一般的结论吗?



概括

还记得同底数幂的乘法法则吗?

$a^m\div a^n=a^{m-n}$(m、n是正整数且$m>n$,$a\neq0$).

同底数幂相除,底数不变,指数相减.

特别，当$m=n$时，$a^m \div a^n = a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0$，

而$a^m \div a^m = 1$，所以规定$a^0 = 1 (a \neq 0)$.

任何不等于零的数的零次幂为1，即

$$a^0 = 1 (a \neq 0).$$

例题　计算：

(1) $(-3)^{15} \div (-3)^{12}$；

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^8 \div \left(\frac{2}{3}\right)^5$；

(3) $-a^7 \div a^6$；

(4) $7^{100} \div 7^{100}$.

解　(1) $(-3)^{15} \div (-3)^{12} = (-3)^{15-12} = (-3)^3 = -27$.

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^8 \div \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

(3) $-a^7 \div a^6 = -(a^7 \div a^6) = -a^{7-6} = -a$.

(4) $7^{100} \div 7^{100} = 7^{100-100} = 7^0 = 1$.

也可以

$7^{100} \div 7^{100} = 1$.

练习9.17

1. 计算：

(1) $3^5 \div 3^3$；　　(2) $(-2)^{12} \div (-2)^{10}$；

(3) $5^{50} \div 5^{50}$；　　(4) $-4^6 \div 4^5$.

2. 计算：

(1) $a^{10} \div a^7$；

(2) $-x^{102} \div x^{102}$；

(3) $\left(\frac{3}{4}\right)^6 \div \left(\frac{3}{4}\right)^4$.

9.18 单项式除以单项式

问题

还记得1.5×10^8、3×10^5表示数的方法吗？

地球与太阳的距离约是1.5×10^8千米，光的速度约是每秒3×10^5千米，太阳光射到地球大约需要多少时间？

$(1.5\times10^8)\div(3\times10^5)$
$=\dfrac{1.5\times10^8}{3\times10^5}$.

这是一个除法运算的问题，所求时间大约为

$$(1.5\times10^8)\div(3\times10^5).$$

我们可以先算$(1.5\div3)$，接着算$(10^8\div10^5)$，然后将商相乘，得到计算结果.

你会用单项式与单项式的乘法验证以上结果吗？

$$\begin{aligned}&(1.5\times10^8)\div(3\times10^5)\\=&(1.5\div3)\times(10^8\div10^5)\\=&0.5\times10^3\\=&500(\text{秒}).\end{aligned}$$

如果用字母x代替底数10，那么这时就是单项式除以单项式的问题，用以上方法计算，即

$$\begin{aligned}&1.5x^8\div3x^5\\=&(1.5\div3)(x^8\div x^5)\\=&0.5x^{8-5}\\=&0.5x^3.\end{aligned}$$

思考

$$-6x^6y^9z\div3x^2y^4=?$$

$3x^2y^4$不含字母z，可以认为$z^0=1$，$3x^2y^4=3x^2y^4z^0$.

由单项式的乘法，

$$\begin{aligned}&3x^2y^4\cdot(-2x^4y^5z)\\=&[3\times(-2)]\,x^{2+4}y^{4+5}z\\=&-6x^6y^9z,\end{aligned}$$

那么

$$-6x^6y^9z\div 3x^2y^4=-2x^4y^5z$$

z^{1-0} y^{9-4} x^{6-2}

-6 $\div 3$ -2 底数不变 指数相减

系数相除

一般地，单项式除以单项式有如下法则：

> 两个单项式相除，把系数、同底数幂分别相除作为商的因式，对于只在被除式里含有的字母，则连同它的指数作为商的一个因式．

例题 计算：

(1) $16x^5y^8\div 4x^2y^3$；

(2) $3a^3b^6\div 6ab^3$；

(3) $-7x^4y^2\div(-21x^2y^2)$；

(4) $a^4bx^7\div\left(-\dfrac{3}{4}ax\right)$．

解 (1) $16x^5y^8\div 4x^2y^3$

$=(16\div 4)x^{5-2}y^{8-3}$

$=4x^3y^5$．

(2) $3a^3b^6\div 6ab^3$

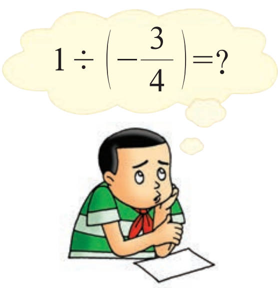
$=(3\div 6)a^{3-1}b^{6-3}$

$=\dfrac{1}{2}a^2b^3$．

(3) $-7x^4y^2\div(-21x^2y^2)$

$=[(-7)\div(-21)]\ x^{4-2}y^{2-2}$

$=\dfrac{1}{3}x^2$．



(4) $a^4bx^7\div\left(-\dfrac{3}{4}ax\right)$

$=\left[1\div\left(-\dfrac{3}{4}\right)\right]a^{4-1}bx^{7-1}$

$=-\dfrac{4}{3}a^3bx^6$．

练习9.18

1. 计算：

(1) $9a^5 \div 3a^3$；

(2) $-4x^6y^4 \div 2x^5y^2$；

(3) $2a^3b^6 \div 4a^2b^4$；

(4) $15ab^2 \div (-3b^2)$.

2. 填空：

(1) $(\quad\quad) \div 2ab = 6ab^2$；

(2) $(\quad\quad) \div (-5xy^2) = 15xy$；

(3) $125a^2x^3 \div (\quad\quad) = 5a$；

(4) $24a^3b^2 \div (\quad\quad) = -3ab$.

9.19 多项式除以单项式

思考

怎样计算$(ma+mb+mc) \div m$呢？

这是一个多项式除以单项式的问题．其实就是求一个代数式，使它与m的积是$ma+mb+mc$.

因为$(a+b+c)m=ma+mb+mc$，所以

$$(ma+mb+mc) \div m = a+b+c.$$

而$ma \div m + mb \div m + mc \div m = a+b+c$，因此

$$(ma+mb+mc) \div m = ma \div m + mb \div m + mc \div m.$$

一般地，多项式除以单项式有如下法则：

> 多项式除以单项式，先把多项式的每一项除以单项式，再把所得的商相加．

例题 计算：

(1) $(9a^6-6a^4+12a^3)\div 3a^3$；

(2) $(4x^2y^3+8x^2y^2-2xy^2)\div 2xy^2$.

解 (1) $(9a^6-6a^4+12a^3)\div 3a^3$

$=9a^6\div 3a^3-6a^4\div 3a^3+12a^3\div 3a^3$

$=3a^3-2a+4$.

(2) $(4x^2y^3+8x^2y^2-2xy^2)\div 2xy^2$

$=4x^2y^3\div 2xy^2+8x^2y^2\div 2xy^2-2xy^2\div 2xy^2$

$=2xy+4x-1$.

练习9.19

1. 计算：

(1) $(4a^3-2a^2+2a)\div 2a$；

(2) $(12ax^3-27ax)\div 3ax$；

(3) $(-18x^3y^2+12x^2y^3-6x^2y^2)\div(-3x^2y^2)$.

2. 计算：

(1) $6a(2a^3+3a^2+4a)\div 12a^2$；

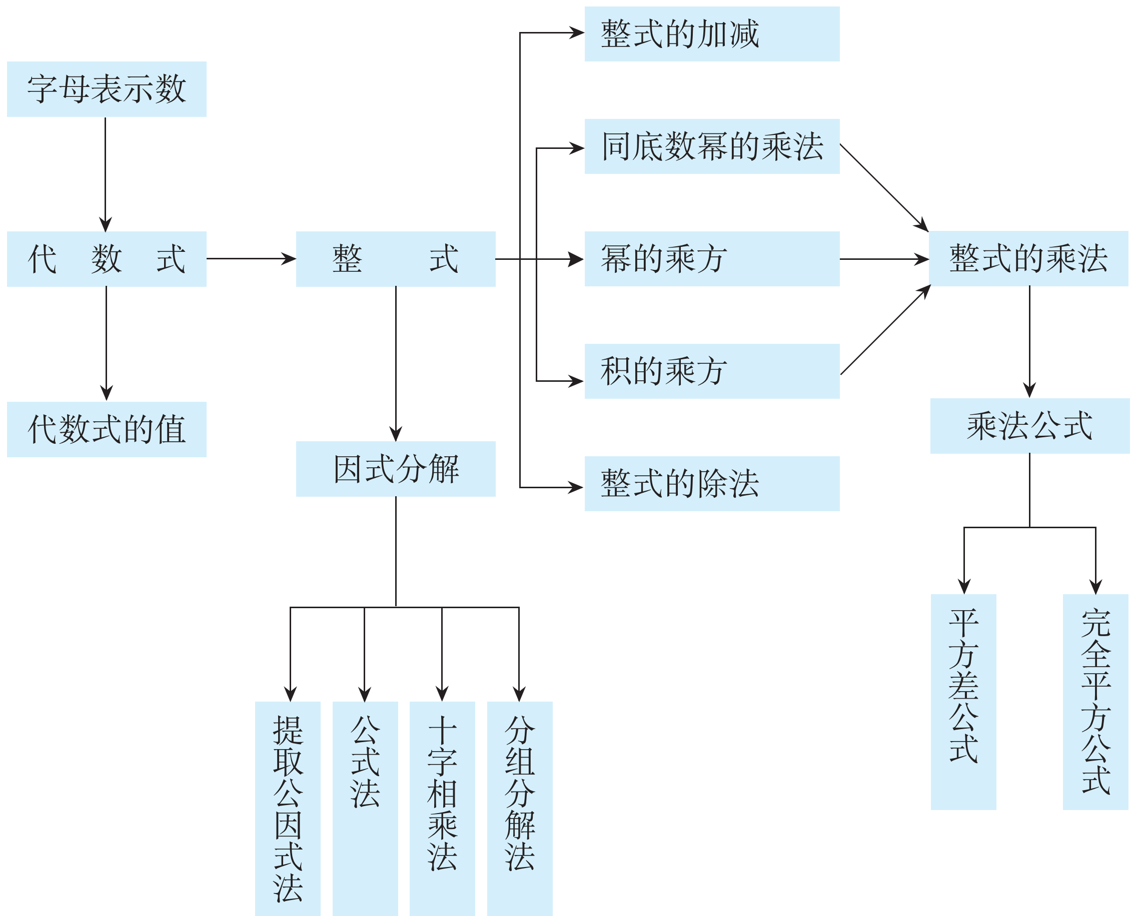
(2) $(18x^2y^2-30x^3y^2)\div 3x\div 2y^2$.

本章小结

我们在小学阶段学习了数的运算，本章首先学习了“字母表示数”，从而奠定了本章教学内容的基础．接着又学习了整式的加减乘除运算以及多项式的因式分解．因为其算式中含有字母，所以这是关于用字母表示的数的运算及变形．

“字母表示数”是一种重要的基本数学思想．有了它，就可以用字母简捷地表示有关运算法则及运算律，简明地表述许多数学定理、公式等；有了它，就可以用字母巧妙地表示已知或未知数量，建立代数式，建立方程等；有了它，就有了以字母及数学符号为要素构成的符号语言，而这种语言形态丰富了数学的表述力，同时还便于更灵活地进行数学交流、更有效地形成数学理解．

本章的知识框架如下：



探究活动一

一组平方数规律的探究

观察以下的平方数：

$$21^2=441,$$
$$22^2=484,$$
$$23^2=529,$$
$$24^2=576,$$
$$25^2=625,$$
$$26^2=676,$$
$$27^2=729,$$
$$28^2=784,$$
$$29^2=841.$$

你能发现在25^2附近的两个平方数有什么规律吗？

$$26^2-24^2=100,27^2-23^2=200,28^2-22^2=300,\cdots\cdots$$

一般地，$(25+n)^2-(25-n)^2=100n$.

你能用这一公式说明上面所发生的奇妙规律吗？

对于以下的平方数：

$$41^2=1\ 681,$$
$$42^2=1\ 764,$$
$$43^2=1\ 849,$$
$$44^2=1\ 936,$$
$$45^2=2\ 025,$$
$$46^2=2\ 116,$$
$$47^2=2\ 209,$$
$$48^2=2\ 304,$$
$$49^2=2\ 401.$$

你有没有简便的计算方法呢？

对于47^2的结果，小杰是这样计算的：

$$47^2=(25-3)\times100+3^2=2\ 209.$$

他所用的方法是否正确呢？如果正确，请大家一起讨论，写出一个正确的计算公式，并用它来验证所给出的其他平方数的结果.

探究活动二

探究能被3、9整除的数的规律

通过计算，我们可以知道312、465、522是能被3整除的三位数，那么任意一个三位数$\overline{abc}$满足什么条件，它一定能被3整除呢？（$\overline{abc}$表示百位上、十位上、个位上的数分别是a、b、c.）

如果三位数$\overline{abc}$能被3整除，只要

$100a+10b+c=3p$，其中p为正整数，a、b、c表示0～9的一个数，且$a\neq 0$.

$$\begin{aligned} a+b+c &= 3p-99a-9b \\ &= 3(p-33a-3b), \end{aligned}$$

所以当$a+b+c$是3的倍数时，$\overline{abc}$一定能被3整除.

可以将此结论推广到更多位数，我们有

如果一个正整数各个数位上数的和能被3整除，那么这个数就能被3整除.

你能根据上述方法，寻找到三位数$\overline{abc}$被9整除的条件吗？你能证明这个结论吗？

根据以上结论判断以下整数哪些能被3或9整除：

531、231、810、139、112、342.

阅读材料

贾宪三角

我们已经学习了多项式乘以多项式,可以计算以下的式子,

$$(a+b)^0=1,$$
$$(a+b)^1=a+b,$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$
$$\cdots\cdots$$

你能发现以上等式右边的各项系数有何规律?

这些系数的规律早在11世纪就已被我国数学家贾宪发现.

1261年,我国宋代数学家杨辉在他所著的《详解九章算法》中给出一个“开方作法本源图”,如图1所示,并指明,“开方作法本源图出自《释锁算书》,贾宪用此术”.贾宪是北宋时期的数学家,大约生活在11世纪上半叶.图1被后人称为“贾宪三角”.

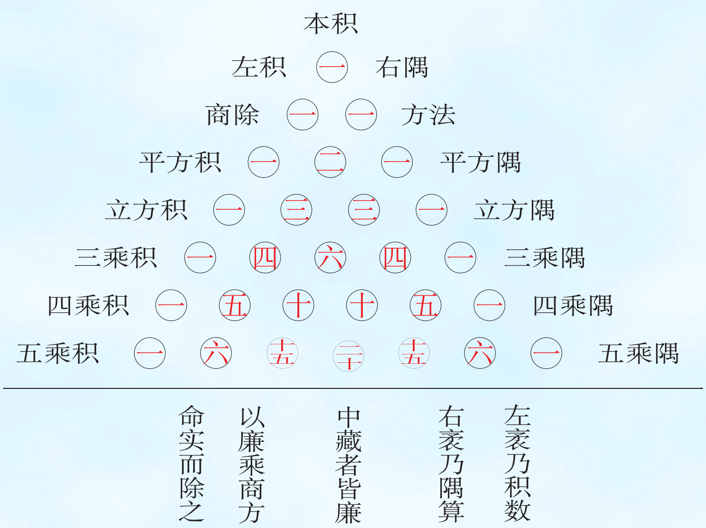


图1

贾宪三角中还蕴含了许多数字产生的规律.你也许已经发现,这个三角形的两条斜的边都是由数字1所组成的,而其他数都等于它肩上的两个数的和.按此规律,这个数字三角形可以写到任意层.这样一种$(a+b)^n$的展开式中各项系数的规律,在西方数学史上被称为“帕斯卡三角形”.帕斯卡是法国数学家,他在1654年所著的书中给出了类似于“贾宪三角”的数字三角形表.

仔细观察,你也许还会发现“贾宪三角”中数字的其他规律.

拓展

多项式除以多项式——长除法

类比于两数相除可以用竖式运算，多项式除以多项式也可以用竖式运算. 其步骤是：

（i）把被除式和除式按同一字母的降幂排列(若有缺项用零补齐).

（ii）用竖式进行运算.

（iii）当余式的次数低于除式的次数时，运算终止，得到商式和余式.

例题 求$(5x^4+3x^3+2x-4)\div(x^2+1)$的商式和余式.

解

$$
\begin{array}{r|r}
 & 5x^2+3x-5 \\ \cline{2-2}
x^2+0x+1 & 5x^4+3x^3+0x^2+2x-4 \\
 & 5x^4+0x^3+5x^2 \\ \cline{2-2}
 & 3x^3-5x^2+2x \\
 & 3x^3+0x^2+3x \\ \cline{2-2}
 & -5x^2-x-4 \\
 & -5x^2+0x-5 \\ \cline{2-2}
 & -x+1
\end{array}
$$

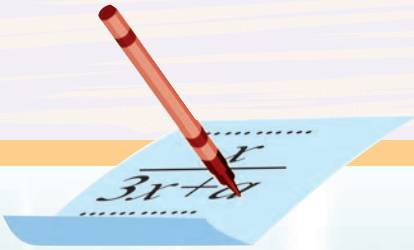
答：商式是$5x^2+3x-5$，余式是$-x+1$.

说明：上述运算过程也可简化为只写出多项式的系数，具体表示如下，此法称为分离系数法.

$$
\begin{array}{r|r}
 & 5+3-5 \\ \cline{2-2}
1+0+1 & 5+3+0+2-4 \\
 & 5+0+5 \\ \cline{2-2}
 & 3-5+2 \\
 & 3+0+3 \\ \cline{2-2}
 & -5-1-4 \\
 & -5+0-5 \\ \cline{2-2}
 & -1+1
\end{array}
$$

所以商式是$5x^2+3x-5$，余式是$-x+1$.

思考：已知$x^4+x^3+ax^2+x+b$能被x^2+x+1整除，你能根据以上的方法分别求出a、b的值吗？



第十章　分　式

上海至南京的铁路路程约 300 千米.如果行驶在这路段的高铁动车与普通快客的车速之比为 5∶3,高铁动车比普通快客快 1 小时到达,那么上海至南京的高铁动车与普通快客的速度各是多少?

你会列出相应的方程吗?你会解所列出的方程吗?

通过学习本章有关分式的内容,你就可以解决这个问题了.

10

第 1 节 分 式

10.1 分式的意义

问题 1

一名极限跳伞运动员在某摩天大厦跳伞，从350米的高度跳下，到落地时用了t秒，那么他的平均降落速度是每秒多少米？

一个长方形的面积是S平方米，长为x米，那么宽是多少米？

一名篮球运动员在一个赛季中罚球罚进a个，2分球投进b个，3分球投进c个，那么这名篮球运动员3分球得分占其总得分的几分之几？

上面问题的结果依次为$\dfrac{350}{t}$，$\dfrac{S}{x}$，$\dfrac{3c}{a+2b+3c}$．这些代数式中都含有表示变数的字母．

> 对于两个整式A、B，其中$B\neq0$，它们相除即$A\div B$时可以表示为$\dfrac{A}{B}$．如果B中含有表示变数的字母，那么$\dfrac{A}{B}$叫做**分式**(fraction)，A叫做**分式的分子**，B叫做**分式的分母**.

> 分式中分母B不等于零，是指B中变数的取值不能使B的值等于零．

例题1 下列各式中的分母都不为零，这时哪些是整式？哪些是分式？

$$\frac{4}{x},\quad \frac{x+y}{3},\quad \frac{xy}{x-y},\quad \frac{x}{a+2b+3c}.$$

解 $\frac{x+y}{3}$是整式；$\frac{4}{x}$、$\frac{xy}{x-y}$、$\frac{x}{a+2b+3c}$是分式.

例题2 当$x=-3$，$y=2$时，分别计算下列分式的值：

(1) $\frac{3x-2y}{x}$；　　　　(2) $\frac{y-3}{x+7}$.

解 (1) $\frac{3x-2y}{x}=\frac{3\times(-3)-2\times 2}{-3}=\frac{-13}{-3}=\frac{13}{3}$.

(2) $\frac{y-3}{x+7}=\frac{2-3}{-3+7}=\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}$.

问题 2

计算例题2第(2)小题中分式的值时，x的值能取-7吗？

例题3 求下列分式中字母x的取值范围.

(1) $\frac{x^2+1}{2x}$；　　　　(2) $\frac{x+5}{x+2}$.

解 (1) 因为分式中分母不能为0，得 $2x\neq 0$，所以 $x\neq 0$.

(2) 因为分式中分母不能为0，得 $x+2\neq 0$，所以 $x\neq -2$.

例题4 x取什么值时，分式$\frac{2x+1}{3x-1}$的值为零？

分析 在分式中，只有当分子的值为零且分母不为零时，分式的值为零.

解 由分子$2x+1=0$，得$x=-\frac{1}{2}$.

当$x=-\frac{1}{2}$时，

分母$3x-1=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1=-2\frac{1}{2}\neq 0$.

所以，当$x=-\frac{1}{2}$时，分式$\frac{2x+1}{3x-1}$的值为零.

例题5 如图10-1是由一个半径为r的半圆和一个长方形组成的一扇窗.根据设计要求，整扇窗的面积应为4平方米.

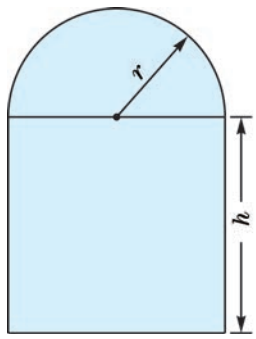


图10-1

(1) 用r的代数式表示h；

(2) 当$r=1.1$米时，求出窗高.（π取3.14，精确到0.01米）

解 (1) $\frac{1}{2}\pi r^2+2rh=4$,

$2rh=4-\frac{1}{2}\pi r^2$,

$h=\frac{1}{2r}\left(4-\frac{1}{2}\pi r^2\right)$,

$h=\frac{2}{r}-\frac{1}{4}\pi r$.

(2)  $h=\frac{2}{1.1}-\frac{1}{4}\times 3.14\times 1.1\approx 0.95$（米）.

窗高为$h+r=0.95+1.1=2.05$(米).

答：窗高为2.05米.

练习10.1

1. 将下列式子表示为分式：

(1) $3\div x$；　(2) $2ax\div by$；

(3) $(x^2+1)\div x$；　(4) $2x\div(3x+5)$.

2. 下列各式中的分母都不为零，这时哪些是整式？哪些是分式？

(1) $\dfrac{1}{a+2}$；　(2) x^2-2y；

(3) $\dfrac{2x+1}{x^2-x+3}$；　(4) $\dfrac{2x-y}{3x+2y}$.

3. 当$x=-1$，$y=-4$时，计算以下分式的值：

(1) $\dfrac{y}{x}$；　(2) $\dfrac{x-y}{x+y}$；

(3) $\dfrac{2x-3y}{x^2+y}$.

4. 从代数式201、a、$2a+3$、$x+y$、$3x-4y$中任意选取两个分别组成一个整式，一个分式.

5. 对于分式$\dfrac{x-y}{x+2y}$：

(1) 如果$x=1$，那么y取值范围是什么？

(2) 如果$y=1$，那么x取值范围是什么？

(3) 该分式中x与y的取值应满足怎样的数量关系？

(4) 如果$x=-1$，那么y取什么值时，分式的值为零？

10.2　分式的基本性质

问题

$\dfrac{9}{15}=\dfrac{3\times3}{3\times5}=\dfrac{3}{5}$.

分数$\dfrac{9}{15}$、$\dfrac{-15}{-25}$、$\dfrac{36}{60}$、$\dfrac{3}{5}$、$-\dfrac{-6}{10}$是否相等，其中哪一个分数是最简分数？

还记得分数的基本性质吗?

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}=\frac{a\div n}{b\div n}(b\neq 0,m\neq 0,n\neq 0).$$

类似的,分式也有这样的性质:

分式的分子和分母都乘以(或除以)同一个不为零的整式,分式的值不变,即

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot M}{B\cdot M}=\frac{A\div N}{B\div N},$$

其中M、N为整式,且$B\neq 0,M\neq 0,N\neq 0$.

例如,

分子、分母同除以$3x$.

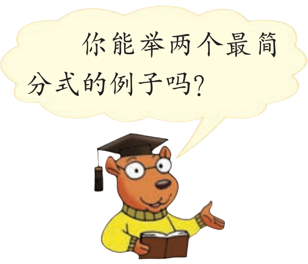
$$\frac{9x}{15x}=\frac{3(3x)}{5(3x)}=\frac{3}{5},$$

分子、分母同除以$2xy$.

$$\frac{-6xy^2}{10x^2y}=\frac{-3y(2xy)}{5x(2xy)}=\frac{-3y}{5x}=-\frac{3y}{5x}.$$

把一个分式的分子与分母中相同的因式约去的过程,叫做**约分**.

如果一个分式的分子与分母没有相同的因式(1除外),那么这个分式叫做**最简分式**.



例如,$-\frac{3y}{5x}$就是最简分式.

例题1 化简:

(1) $\frac{6x^2y}{9xy^2}$;

(2) $\frac{x+y}{x^2-y^2}$;

(3) $\frac{-2x+3x^2}{2x}$.

相同因式是$3xy$.

解 (1) $\frac{6x^2y}{9xy^2}=\frac{2x(3xy)}{3y(3xy)}=\frac{2x}{3y}$.

相同因式是$x+y$.

(2) $\dfrac{x+y}{x^2-y^2}=\dfrac{x+y}{(x-y)(x+y)}=\dfrac{1}{x-y}$.

相同因式是x.

(3) $\dfrac{-2x+3x^2}{2x}=\dfrac{x(-2+3x)}{2x}=\dfrac{-2+3x}{2}$.

由例题1可以看出约分可以化简分式.

化简分式时,如果分式的分子和分母都是单项式,约分时约去它们系数的最大公因数、相同因式的最低次幂.如果分子、分母是多项式,先分解因式,再约分.

化简分式时要将分式化成最简分式或整式.

例题2 化简:

(1) $\dfrac{x-2}{x^2-4x+4}$;

(2) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$;

(3) $\dfrac{15b-5a}{2a-6b}$.

解 (1) $\dfrac{x-2}{x^2-4x+4}=\dfrac{x-2}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{x-2}$.

(2) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}=\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{x+2}{x+3}$.

(3) $\dfrac{15b-5a}{2a-6b}=\dfrac{5(3b-a)}{2(a-3b)}=-\dfrac{5(a-3b)}{2(a-3b)}=-\dfrac{5}{2}$.

练习10.2

1 填空:

(1) $\dfrac{3x^2y}{xy^2}=\dfrac{(\quad)}{y}$;

(2) $\dfrac{y}{2x}=\dfrac{(\quad)}{2xy}$.

2 下列分式中，哪些是最简分式？

$$\frac{20}{15x},\quad \frac{3x+2}{6x+4},\quad \frac{5(2x-1)}{2x},\quad \frac{6ab}{5a^2},\quad \frac{3(a^2-b^2)}{a+b},\quad \frac{x+1}{2x+1},\quad \frac{x-1}{3x-3}.$$

3 将下列分式分别化成最简分式：

(1) $\frac{6m^2n^3}{3mn}$；

(2) $\frac{-20x}{25x^2}$；

(3) $\frac{9ab}{12a^2}$；

(4) $\frac{2(x+y)^2}{x+y}$.

4 化简：

(1) $\frac{x-5}{15-3x}$；

(2) $\frac{x^2-2x}{4-2x}$；

(3) $\frac{x^2+5x+6}{x+2}$；

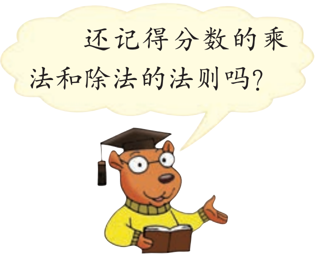
(4) $\frac{x^2-x-2}{x^2+6x+5}$.

10

第 2 节　分式的运算

10.3　分式的乘除

观察



(1) $\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{4\times3}{5\times2}$, $\frac{16}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{16\times3}{5\times4}$,

你会计算$\frac{x^2}{5}\cdot\frac{3}{x}$吗?

(2) $\frac{4}{5}\div\frac{3}{25}=\frac{4}{5}\times\frac{25}{3}$, $\frac{4}{7}\div\frac{3}{49}=\frac{4}{7}\times\frac{49}{3}$,

你会计算$\frac{4}{x}\div\frac{3}{x^2}$吗?

将自己计算的结果与同学交流.

分式的乘除法则与分数的乘除法则类似:

> 两个分式相乘,将分子相乘的积作分子,分母相乘的积作分母.
>
> 分式除以分式,将除式的分子和分母颠倒位置后,再与被除式相乘.

用式子表示为:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD},$$

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}.$$

例题1 计算：

(1) $\dfrac{2a^2}{3}\cdot\dfrac{b}{4a}$；

(2) $\dfrac{3y(x+3)}{x-3}\cdot\dfrac{2(x-3)}{9y^2}$；

(3) $\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{b}{a}$.

分子、分母同除以$2a$.

解 (1) $\dfrac{2a^2}{3}\cdot\dfrac{b}{4a}=\dfrac{2a^2b}{3\cdot 4a}=\dfrac{ab}{6}$.

分子、分母同除以$3y(x-3)$.

(2) $\dfrac{3y(x+3)}{x-3}\cdot\dfrac{2(x-3)}{9y^2}$

$=\dfrac{6y(x+3)(x-3)}{9y^2(x-3)}$

$=\dfrac{2(x+3)}{3y}$.

(3) $\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{b}{a}=\dfrac{b\cdot b}{a\cdot a}=\dfrac{b^2}{a^2}$.

例题2 计算：

(1) $\left(\dfrac{-5m}{n}\right)\div\dfrac{10m^2}{3n}$；

(2) $\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}\div\dfrac{x+1}{x-1}$；

(3) $\dfrac{2a-b}{a^2-2ab+b^2}\div\dfrac{4a^2-b^2}{ab^2-a^2b}$.

解 (1) $\left(\dfrac{-5m}{n}\right)\div\dfrac{10m^2}{3n}$

$=\left(\dfrac{-5m}{n}\right)\cdot\dfrac{3n}{10m^2}$

$=\dfrac{-15mn}{10nm^2}$

$=-\dfrac{3}{2m}$.

(2) $\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}\div\dfrac{x+1}{x-1}$

先分解因式.

$$=\frac{x+1}{(x+3)(x-1)}\div\frac{x+1}{x-1}$$

$$=\frac{x+1}{(x+3)(x-1)}\cdot\frac{x-1}{x+1}$$

$$=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{1}{x+3}.$$

(3) $\dfrac{2a-b}{a^2-2ab+b^2}\div\dfrac{4a^2-b^2}{ab^2-a^2b}$

$$=\frac{2a-b}{(a-b)^2}\div\frac{(2a-b)(2a+b)}{ab(b-a)}$$

$$=\frac{2a-b}{(a-b)^2}\cdot\frac{ab(b-a)}{(2a-b)(2a+b)}$$

$$=\frac{ab(2a-b)(b-a)}{(a-b)^2(2a-b)(2a+b)}$$

$$=-\frac{ab}{(a-b)(2a+b)}.$$

分式的运算结果一般化简成最简分式或整式.

思考

$\left(\dfrac{b}{a}\right)^2$与$\dfrac{b^2}{a^2}$相等吗?

练习10.3

1 计算:

(1) $\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{x}{4}$;

(2) $\dfrac{3x^2y}{4}\cdot\dfrac{y}{6x}$;

(3) $\dfrac{3x-2}{x-1}\cdot\dfrac{x-1}{2-3x}$;

(4) $\dfrac{2}{2x+1}\cdot\dfrac{1}{2x+1}$.

2 计算：

(1) $\frac{x^2-4}{x+1}\cdot\frac{2x+2}{2-x}$；

(2) $\frac{x^2-4xy+4y^2}{x+2y}\cdot\frac{x}{x-2y}$.

3 计算：

(1) $3\div\frac{2}{x}$；

(2) $\frac{3}{x}\div\frac{6}{x^2}$；

(3) $\frac{2x+1}{x}\div\frac{6+12x}{5}$；

(4) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x+2}\div\frac{x-2}{x+1}$.

4 计算：

(1) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$；　(2) $\left(\frac{2x}{y}\right)^2$；　(3) $a\cdot\frac{1}{a^2}\div a^2$.

10.4　分式的加减

计算：

$\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=$________，

$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=$________.

思考 1

同分母分数的加减法则是否可以推广到同分母分式的加减呢？

如何计算

$\frac{2}{x}+\frac{1}{x}$、$\frac{3}{x}-\frac{1}{x}$、$\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}$、$\frac{3x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}$？

与同学讨论计算的结果，并交流同分母分式的加减法法则.

> 同分母分式相加减，分母不变，分子相加减.

例题1 计算：

(1) $\dfrac{x}{3x-1}+\dfrac{3}{3x-1}$；

(2) $\dfrac{2}{x^2-4}-\dfrac{x}{x^2-4}$；

(3) $\dfrac{3x^2-1}{x^2-3x+2}-\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}+\dfrac{1-2x^2}{x^2-3x+2}$.

解 (1) $\dfrac{x}{3x-1}+\dfrac{3}{3x-1}$

$=\dfrac{x+3}{3x-1}$.

(2) $\dfrac{2}{x^2-4}-\dfrac{x}{x^2-4}$

$=\dfrac{2-x}{x^2-4}$

$=\dfrac{2-x}{(x-2)(x+2)}$

$=-\dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)}$

$=-\dfrac{1}{x+2}$.

> 计算的结果化简成最简分式，有时是整式.

(3) $\dfrac{3x^2-1}{x^2-3x+2}-\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}+\dfrac{1-2x^2}{x^2-3x+2}$

$=\dfrac{3x^2-1-(x+2)+1-2x^2}{x^2-3x+2}$

$=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$

$=\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x-1)}$

$=\dfrac{x+1}{x-1}$.

练习10.4(1)

1. 计算：

(1) $\frac{2}{5}-\frac{3}{5}$；　　(2) $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}$；

(3) $\frac{3}{11}+\frac{8}{11}$；　　(4) $\frac{4}{15}-\frac{8}{15}$.

2. 计算：

(1) $\frac{2}{x}+\frac{3}{x}$；　　(2) $\frac{2}{3x}-\frac{1}{3x}$；

(3) $\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x-y}$；　　(4) $\frac{2a+1}{ab}-\frac{1}{ab}$.

计算：

(1) $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=$________；

(2) $\frac{3}{8}+\frac{1}{12}=$________；

(3) $\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=$________；

(4) $\frac{2}{5}-\frac{1}{25}=$________.

思考 2

异分母分数的加减法是否可以推广到异分母分式的加减呢？

如何计算

$$\frac{3}{2x}+\frac{1}{3x}、\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}?$$

类似于异分母分数的加减法，

$\dfrac{3}{2x}+\dfrac{1}{3x}$中两个异分母分式的分母是$2x$、$3x$，$6x$是公分母，

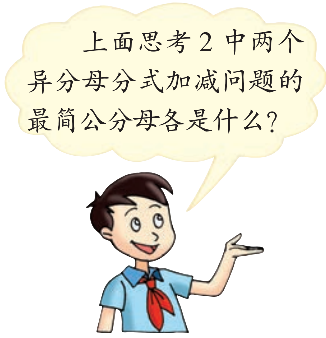
$\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}$ 中两个异分母分式的分母是x、x^2，x^2是公分母，

所以，$\dfrac{3}{2x}+\dfrac{1}{3x}=\dfrac{3\cdot3}{3\cdot2x}+\dfrac{2\cdot1}{2\cdot3x}=\dfrac{9}{6x}+\dfrac{2}{6x}=\dfrac{11}{6x}$，

$$\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{2x-1}{x^2}.$$

异分母分式相加减，先将它们化为相同分母的分式，然后进行加减.

将几个异分母的分式分别化为与原来分式的值相等的同分母分式的过程叫做**通分**.

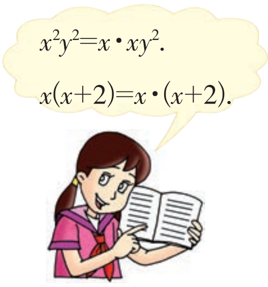


通分先要确定公分母，如果各分母的系数是整数，通常取各分母系数的最小公倍数与字母因式的最高次幂的积作公分母.这样的公分母叫做最简公分母.

例题2 将分式$\dfrac{x+1}{x}$化成分母分别为下列整式的分式：

(1) $2x$；　　(2) xy；

(3) x^2y^2；　　(4) $x(x+2)$.



解 (1) $\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{2}{2}=\dfrac{2(x+1)}{2x}$.

(2) $\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{y}{y}=\dfrac{(x+1)y}{xy}$.

(3) $\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{xy^2}{xy^2}=\dfrac{(x+1)xy^2}{x^2y^2}$.

(4) $\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{x+2}{x+2}=\dfrac{(x+1)(x+2)}{x(x+2)}$.

例题3 计算：

(1) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$；

(2) $\dfrac{1}{6x}+\dfrac{2}{9x^2}$；

(3) $\dfrac{x}{x^2-y^2}-\dfrac{1}{x+y}$；

(4) $\dfrac{y}{2x}+\dfrac{x}{y}-\dfrac{2x-1}{y^2}$.

解 (1) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$

最简公分母是$2x$.

$$=\frac{x\cdot x}{2x}+\frac{2\times 2}{2x}$$

$$=\frac{x^2+4}{2x}.$$

(2) $\dfrac{1}{6x}+\dfrac{2}{9x^2}$

最简公分母是$18x^2$.

$$=\frac{3x}{6x\cdot 3x}+\frac{2\times 2}{9x^2\cdot 2}$$

$$=\frac{3x+4}{18x^2}.$$

(3) $\dfrac{x}{x^2-y^2}-\dfrac{1}{x+y}$

最简公分母是x^2-y^2.

$$=\frac{x}{x^2-y^2}-\frac{x-y}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{x-x+y}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{y}{x^2-y^2}.$$

(4) $\dfrac{y}{2x}+\dfrac{x}{y}-\dfrac{2x-1}{y^2}$

最简公分母是$2xy^2$.

$$=\frac{y\cdot y^2}{2x\cdot y^2}+\frac{x\cdot(2xy)}{y\cdot(2xy)}-\frac{(2x-1)\cdot(2x)}{y^2\cdot(2x)}$$

$$=\frac{y^3+2x^2y-4x^2+2x}{2xy^2}.$$

练习10.4(2)

1. 计算：

(1) $\dfrac{2}{a}-\dfrac{1}{2a}$；

(2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}$；

(3) $\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{1}{3-x}$；

(4) $\dfrac{2}{3x}-\dfrac{3}{4x}$.

2. 计算：

(1) $\dfrac{a}{3}+\dfrac{3}{a}$；

(2) $\dfrac{2}{4x^2}-\dfrac{2}{3x}$；

(3) $\dfrac{2x}{x+2}-\dfrac{3}{x}$；

(4) $\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}$；

(5) $\dfrac{1}{t+2}-\dfrac{1}{t-2}$；

(6) $\dfrac{2}{x-y}+\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{x}$.

10.5 可以化成一元一次方程的分式方程

问题

上海至南京的铁路路程约300千米.如果行驶在这路段的高铁动车与普通快客的车速之比为5∶3,高铁动车比普通快客快1小时到达,那么上海至南京的高铁动车与普通快客的速度各是多少?

因为　路程＝时间×速度，所以 $\dfrac{\text{路程}}{\text{速度}}$＝时间.

设高铁动车的速度为 $5x$ 千米/时，普通快客的速度为 $3x$ 千米/时，根据题意可列出以下等量关系：

$$\frac{300}{3x}-\frac{300}{5x}=1.$$

可以设法去掉方程中分式的分母，转化为以前学过的方程来求解.

这个方程的分母中含有未知数，与以前学过的方程不同，如何解这个方程呢?

也可对方程左边两个分式先约分再解.

方程两边同时乘以 $15x$，得

$$300\times 5-300\times 3=15x.$$

解得 $x=40$(千米/时).

于是，得 $5x=200$(千米/时)，$3x=120$(千米/时).

所以高铁动车的速度为 200 千米/时，普通快客的速度为 120 千米/时.

以前学过的像一元一次方程、二元一次方程等这类分母中不含未知数的方程叫做整式方程.

分母中含有未知数的方程叫做**分式方程**.

例题1 解方程 $\dfrac{2x-1}{3x+1}=\dfrac{1}{2}$.

方程的两边同时乘以$3x+1$可以吗?

解 方程两边同时乘以$2(3x+1)$，得

$$2(2x-1)=3x+1.$$

去括号，得$4x-2=3x+1$.

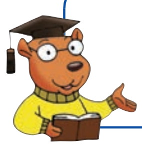
移项，化简得$x=3$.

检验，将$x=3$代入原方程，得

$$左边=\frac{2\times 3-1}{3\times 3+1}=\frac{1}{2}=右边.$$

所以$x=3$是原方程的解.

因此，原方程的解是$x=3$.



解这个分式方程的关键是去分母，将其转化为已学过的整式方程再求解.

一元方程的解也叫做方程的**根**(root).

如$x=3$也可以说是方程$\dfrac{2x-1}{3x+1}=\dfrac{1}{2}$的根.

例题2 解方程 $\dfrac{x}{x-1}+1=\dfrac{1}{x-1}$.

解 方程两边同乘以$x-1$，得$x+x-1=1$，

移项,化简得$x=1$.

检验,将$x=1$代入原方程,结果使方程中分式的分母为零,分式无意义.

所以$x=1$不是原方程的解.原方程无解.

在分式方程变形时,有时可能产生不适合原分式方程的根,这种根叫做原分式方程的**增根**(extraneous root).

$x=1$就是分式方程$\dfrac{x}{x-1}+1=\dfrac{1}{x-1}$的增根.

分式方程化为整式方程的过程必须两边乘以一个适当的整式.由于这个整式可能为零,使本不相等的两边也相等了,这时就可能产生增根.所以解分式方程必须检验,而检验的方法只需看所得的解是否使所乘的式子为零.

例题3 一小包柠檬茶冲剂,用235克开水可冲泡成浓度为6%的饮料,这包柠檬茶冲剂有多少克?

也可根据溶质=浓度×溶液列方程.

分析 根据浓度$=\dfrac{溶质}{溶液}$,可以列出方程.

解 设这包柠檬茶冲剂有x克.根据题意,得

$$\frac{x}{x+235}=6\%,$$

方程两边同时乘以$100(x+235)$,得

$$100x=6(x+235),$$

解方程,得$x=15$(克).

经检验,$x=15$是原方程的根,并符合题意.

答:这包柠檬茶冲剂有15克.

练习10.5

1. 下列方程中，哪些是分式方程？

(1) $x+\dfrac{1}{x}=3$；　　(2) $\dfrac{1}{x}=2$；

(3) $\dfrac{2x-5}{4}+\dfrac{x}{3}=\dfrac{1}{2}$；　　(4) $\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{1}{x-1}$.

2. 解方程：

(1) $\dfrac{2}{x}=5$；　　(2) $\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{1}{x}$；

(3) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2x}=1$；　　(4) $\dfrac{4}{x-3}=\dfrac{1}{3-x}+2$.

3. $x=2$是下列哪个分式方程的一个解？

(1) $\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{5}{2}$；　　(2) $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$；　　(3) $\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{4}{x+2}$.

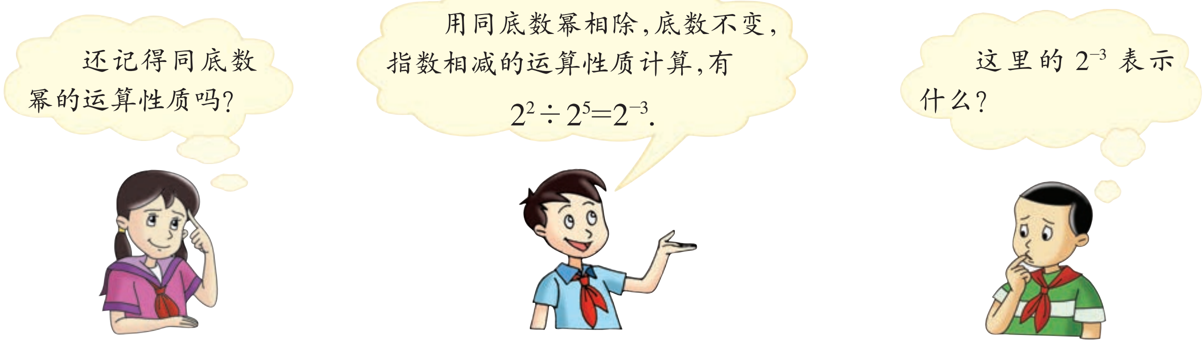
4. 小丽、小明练习打字，小丽比小明每分钟多打 35 个字，小丽打 400 个字的时间与小明打 300 个字的时间相同.小丽、小明每分钟分别可打多少字？

10.6　整数指数幂及其运算

思考 1

用同底数幂的运算性质，怎样计算

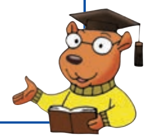
$$2^2 \div 2^5?$$



如果用除法与分数的关系计算，有

$$2^2\div 2^5=\frac{2^2}{2^5}=\frac{1}{2^3}.$$

因此有$2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}$.



例如，

$10^{-2}=\dfrac{1}{10^2}$，

$(-5)^{-3}=\dfrac{1}{(-5)^3}$，

$x^{-6}=\dfrac{1}{x^6}$.

为了使同底数幂相除的性质在m、n是正整数，且$m<n$时仍成立，规定$a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}$（其中$a\neq 0$，p是自然数）.

这样，到现在为止，在$a\neq 0$时，a^n中的指数n可以是正整数、零和负整数．这就是说，a^n是整数指数幂．

例题1 计算：

(1) $2^6\div 2^8$；

(2) $10^{101}\div 10^{104}$；

(3) $5^{12}\div 5^{12}$.

也可以按照分数与除法的关系计算

$2^6\div 2^8=\dfrac{2^6}{2^8}=\dfrac{2^6}{2^6\times 2^2}$

$=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$.

解 (1) $2^6\div 2^8=2^{6-8}=2^{-2}=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$.

(2) $10^{101}\div 10^{104}=10^{101-104}=10^{-3}=\dfrac{1}{10^3}=\dfrac{1}{1\ 000}$.

(3) $5^{12}\div 5^{12}=5^{12-12}=5^0=1$.

例题2 将下列各式写成只含有正整数指数幂的形式：

(1) x^{-3}；

(2) $a^{-3}b^4$；

(3) $(x+2y)^{-2}$.

解 (1) $x^{-3}=\dfrac{1}{x^3}$.

(2) $a^{-3}b^4=\dfrac{b^4}{a^3}$.

(3) $(x+2y)^{-2}=\dfrac{1}{(x+2y)^2}$.

例题3 计算：

(1) $a^2 \div a \cdot a^3$；　　(2) $(-a)^3 \div a^5$.

解 (1) $a^2 \div a \cdot a^3 = a^{2-1} \cdot a^3 = a \cdot a^3 = a^{1+3} = a^4$.

$-a^{-2} = -\dfrac{1}{a^2}$.

(2) $(-a)^3 \div a^5 = -a^3 \div a^5 = -a^{3-5} = -a^{-2} = -\dfrac{1}{a^2}$.

思考 2

请再举几个例子，用计算器验算你的结论.

我们知道$2^2 \times 2^5 = 2^{2+5}$，

那么$2^2 \times 2^{-5}$是否等于$2^{2+(-5)}$？

$(-2)^{-3} \times (-2)^2$是否等于$(-2)^{-3+2}$？

你能进一步猜出更一般的结论吗？

思考 3

请再举几个例子，用计算器验算你的结论.

我们知道$(2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4$，$(2^3)^2 = 2^{3 \times 2}$，

那么$(2 \times 3)^{-4}$是否等于$2^{-4} \times 3^{-4}$呢？

$(2^2)^{-3}$是否等于$2^{2 \times (-3)}$呢？

你能进一步猜出更一般的结论吗？

在数学中，对于整数指数幂，有

$a^m a^n = a^{m+n}$(m、n为整数，$a \neq 0$)；

$(ab)^m = a^m b^m$(m为整数，$a \neq 0$，$b \neq 0$)；

$(a^m)^n = a^{mn}$(m、n为整数，$a \neq 0$).

也就是说，前面学过的正整数幂的运算性质对整数指数幂仍然成立.

例题4 计算：

(1) $x^{-5} \cdot x^2$；　(2) $(2^{-2})^3$；　(3) $10^0 \div 3^{-3}$.

解 (1) $x^{-5} \cdot x^2 = x^{(-5)+2} = x^{-3}$.

(2) $(2^{-2})^3 = 2^{(-2) \times 3} = 2^{-6} = \dfrac{1}{64}$.

(3) $10^0 \div 3^{-3} = 1 \div \dfrac{1}{3^3} = 1 \times 3^3 = 27$.

还记得科学记数法吗？

例题5 把下列各数表示为$a\times10^n$的形式($1\leqslant|a|<10$，n为整数)：

(1) 0.001 2；

(2) 6 100 000；

(3) $-0.000\,010\,32$.

解 (1) $0.001\,2=1.2\times10^{-3}$.

(2) $6\,100\,000=6.1\times10^{6}$.

(3) $-0.000\,010\,32=-1.032\times10^{-5}$.

有了负整数指数幂，科学记数法不仅可以表示绝对值较大的数，也可以表示绝对值较小的数.

例题6 杆状细菌的长、宽分别约为2微米和1微米(1微米$=10^{-4}$厘米).如果一只手上有1千个杆状细菌，它们连成一线，那么这些连成一线的细菌最长是多少厘米?(结果用科学记数法表示)

解 1千个连成一线的杆状细菌最长是

$$2\times10^{-4}\times1\times10^{3}=2\times10^{-1}(\text{厘米}).$$

答：这些连成一线的杆状细菌最长是2×10^{-1}厘米.

例题7 计算：

(1) $(x^{-1}+y^{-1})\div(x^{-1}-y^{-1})$；

(2) $\left(\dfrac{x}{y^2}\right)^{-3}$.

解 (1) $(x^{-1}+y^{-1})\div(x^{-1}-y^{-1})$

$$=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\div\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$$

$$=\left(\frac{y+x}{xy}\right)\div\left(\frac{y-x}{xy}\right)$$

$$=\left(\frac{y+x}{xy}\right)\cdot\left(\frac{xy}{y-x}\right)$$

$$=\frac{y+x}{y-x}.$$

$$(2)\ \left(\frac{x}{y^2}\right)^{-3}=(x\cdot y^{-2})^{-3}=x^{-3}y^{(-2)\times(-3)}=\frac{y^6}{x^3}.$$

练习10.6

1 计算：

(1) $3^5\div 3^8$；　(2) $x^4\div x^{10}$；

(3) 2^{-4}；　(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

2 计算：

(1) $3^{-2}\times 3^2$；　(2) $2^2\times 2^{-1}$；

(3) $2^{-5}\times 2$；　(4) $3^{-2}\times 3^{-1}$.

3 下列计算正确吗？错误的请改正：

(1) $2^3\times 2^4=2^{3\times 4}$；　(2) $a^4\cdot a^{-3}=a^{4\div 3}$；

(3) $3^{-1}=-3$；　(4) $(-10)^0=-1$；

(5) $(3\times 4)^3=3^3\times 4^3$.

4 将下列各式写成只含有正整数指数幂的形式：

(1) a^{-8}；　(2) $2x^3y^{-2}$；　(3) $3^{-2}(x-y)^{-3}$.

5 计算：

(1) $[(-2)^3]^2$；　(2) $[(-2)^{-3}]^2$；　(3) $[(-2)^{-3}]^{-2}$.

6 下列各数用科学记数法表示：

(1) 102 400；　(2) 0.000 456；　(3) −0.006 07.

7 计算：

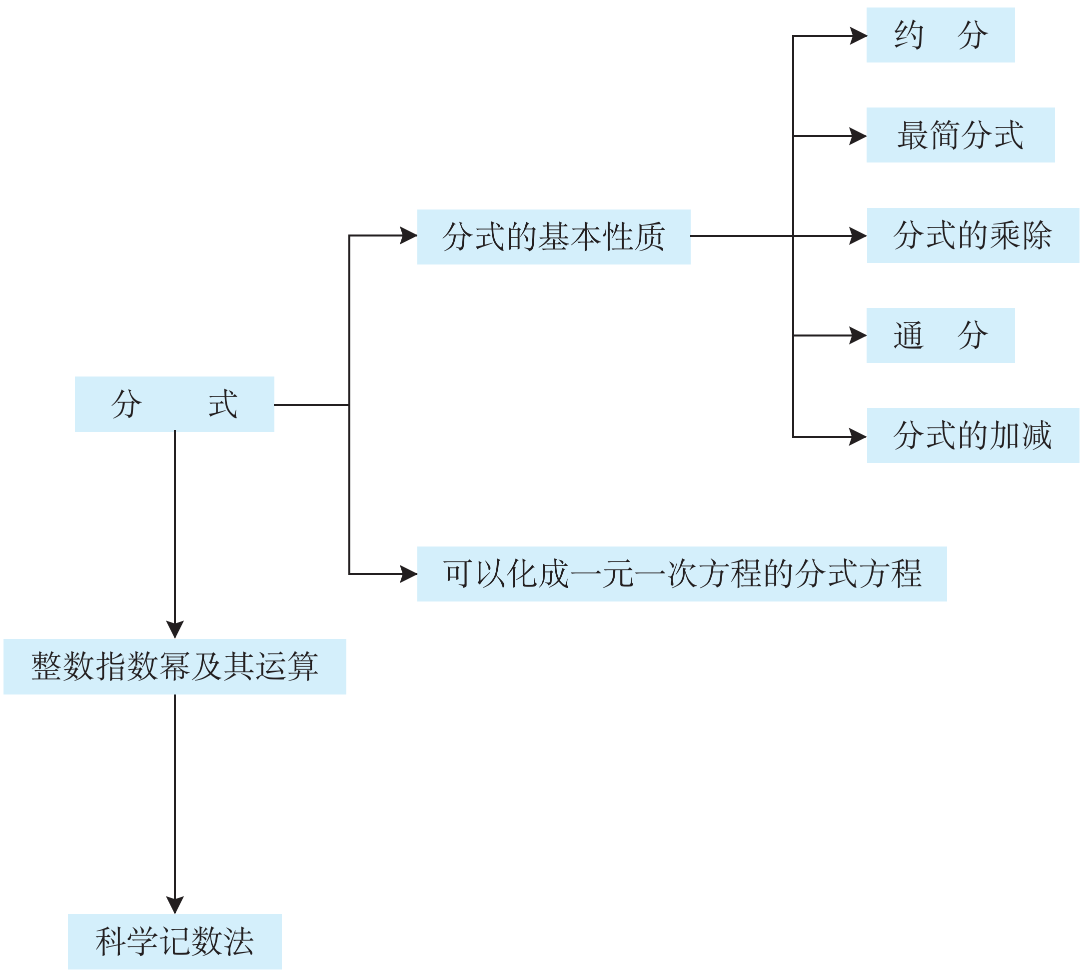
(1) $(a^{-2}b)^2$；　(2) $\left(\frac{2}{a}\right)^4$；　(3) $\left(\frac{2a^{-2}}{3b}\right)^{-2}$.

8 实验证明，钢轨温度每变化1℃，每一米钢轨就伸缩0.000 011 8米，如果一年中气温上下相差40℃，那么对于100米长的铁路，最长可伸长多少米？（结果用科学记数法表示）

本章小结

本章学习了分式的概念；类比分数，我们又得到了分式的基本性质；运用一般化的思想，将分数的运算类比迁移到分式的运算，并运用转化的思想求出可以化为一元一次方程的分式方程的根；通过整数指数幂的学习完善了同底数幂的运算性质和科学记数法，学习了用科学记数法来表示绝对值较小的数.

本章知识的结构框架如下：



探究活动

对一类特殊分式的探究

用简捷的方法计算下列算式：

$\frac{1}{1\times 2}=$__________，

$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}=$__________，

$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}=$__________，

……

$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{98\times 99}+\frac{1}{99\times 100}=$__________，

其实以上的算式可以运用$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$这个等式计算.

进一步，你能将分式$\frac{1}{x(x+2)}$写成$\frac{A}{x}-\frac{B}{x+2}$($A$、$B$为确定的有理数)这样的形式吗?

要使$\frac{1}{x(x+2)}=\frac{A}{x}-\frac{B}{x+2}$恒成立，可将$x=1$，$x=-1$分别代入上式，得方程组

$$\begin{cases}A-\frac{B}{3}=\frac{1}{3},\\ -A-B=-1,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}A=\frac{1}{2},\\ B=\frac{1}{2},\end{cases}$ 即 $\frac{1}{x(x+2)}=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2(x+2)}$.

请用上述方法将$\frac{1}{(x+1)(x-2)}$写成$\frac{A}{x+1}-\frac{B}{x-2}$($A$、$B$为确定的有理数)的形式.

思考

(1) 如何化简下列算式：

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\cdots+\frac{1}{(x+2\,004)(x+2\,005)}?$$

(2) 如何求解下面的分式方程：

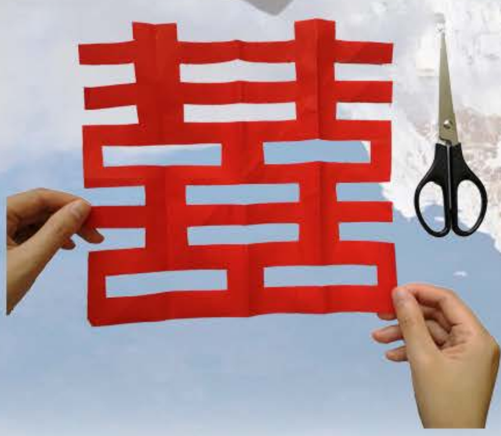
$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}-\frac{1}{2x}=1?$$

第十一章　图形的运动

有些物体运动,物体只是改变了位置,而它的形状、大小都没有改变.例如:站在自动扶梯上的乘客,由扶梯移送到下一层;风力发电机的叶片绕着轴心转动;将红纸对折剪出一个“囍”字.

如果将上述人、物的形体抽象或想象成平面几何图形,那么这些场景就成了平面图形运动,简称图形运动.这三种图形运动,分别是图形的平移、旋转和翻折.它们的共性是经过这三种图形运动后,图形的形状、大小都不变.

平移、旋转和翻折这三种图形运动的含义分别是什么?各自有什么性质?一些对称图形与这三种图形运动有何关系?这些都是本章的主要学习内容.



11

第 1 节　图形的平移

11.1　平移

如果你家有移门，那么你会发现，开移门时，移门会沿轨道移动到另一个位置.

如果把移门看作长方形围成的一个图形，那么移门的移动就是将这个图形移动到另一个位置，如图11-1.

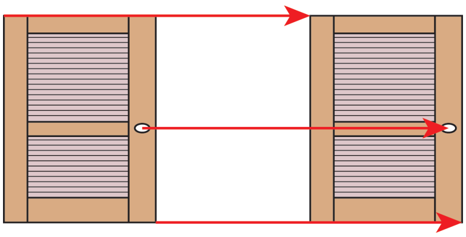


图11-1

问题 1

(1) 移动移门时，门的大小会改变吗?

(2) 如果移门的把手向右平移0.5米，那么移门的其他部分向什么方向移动，移动多少距离?

> 平面内，图形沿着一定的方向移动一定的距离，这样的图形运动叫做图形的平移，简称平移(translation). “一定的方向”称为平移的方向，“一定的距离”称为平移的距离.

图形的平移，可以看成：平移前的图形经过平移，与平移后的图形互相重合. 对于平移前图形中的任意一点 P，在平移后的图形中有一点P_1与它重合. 这时，点 P 与点P_1就是一对对应点，射线

PP_1的方向是平移方向，线段 PP_1的长是平移距离．

如图11－2，平移三角形ABC就可以得到三角形$A_1B_1C_1$．

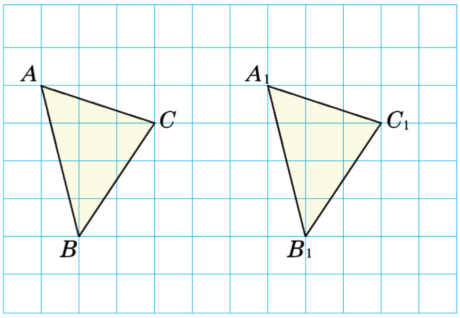


图11－2

也就是说，平移前的三角形 ABC 能与平移后的三角形$A_1B_1C_1$互相重合．点 A 与点 A_1 是对应点，线段 AB 与线段 A_1B_1 是对应线段，$\angle A$ 与 $\angle A_1$ 是对应角．

点 B 所对应的点是__________．

线段 AC 所对应的线段是__________．

$\angle C$ 所对应的角是__________．

思考 1

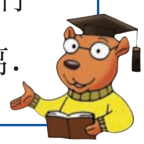
在图11－2中，平移三角形ABC得到三角形$A_1B_1C_1$．

(1) 联结AA_1、BB_1、CC_1，这几条线段有着怎样的位置关系？怎样的大小关系？

(2) 如果AB的中点是D，那么你能确定它的对应点的位置吗？

图形平移后，每一对对应线段的长度相等，每一对对应角的大小相等；这个图形的大小、形状不变．

图形平移后，每一对对应点的联结线段互相平行(或在同一条直线上)，并且相等，其长度等于平移距离．

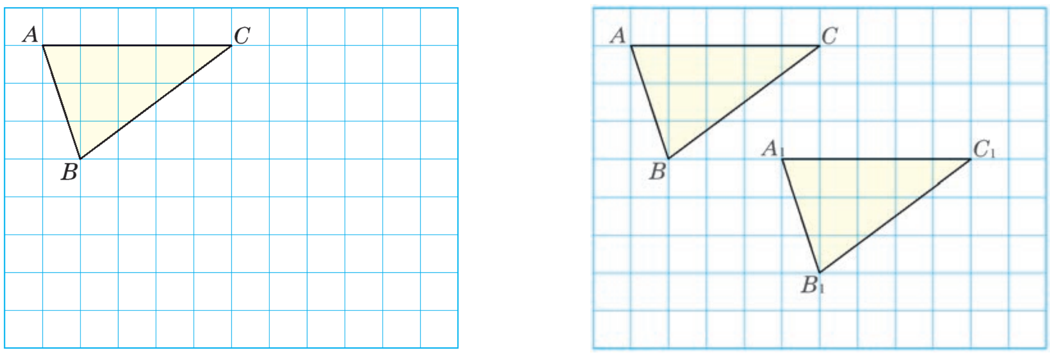


思考 2

你能计算出图11－2中图形平移的距离吗？

下面的左图是由若干个基本图形（右图）构成的，其中任意一个基本图形都可以平移到另一个基本图形的位置.

例题　如图11－3(1)，画出三角形ABC向右平移4格，向下平移3格后的图形.



(1)　　　　(2)

图11－3

分析　由于三角形ABC平移后所得图形仍是三角形，因此只需分别画出A、B、C三点平移后的对应点，再联结各点，就可以得到要画的图形.

解　(ⅰ) 如图11-3(2)，分别画出A、B、C向右平移4格、向下平移3格后所对应的点A_1、B_1、C_1；

(ⅱ) 联结A_1B_1、B_1C_1、A_1C_1，得三角形$A_1B_1C_1$．三角形$A_1B_1C_1$就是三角形ABC向右平移4格、向下平移3格后的图形．

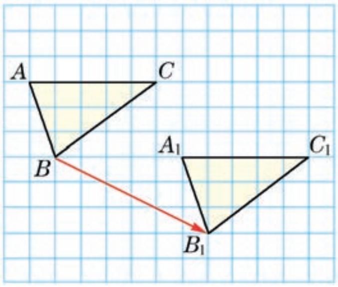


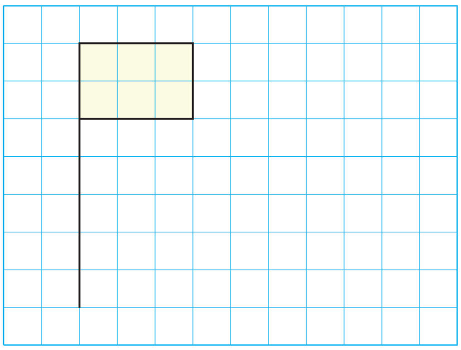
图11-4

问题 2

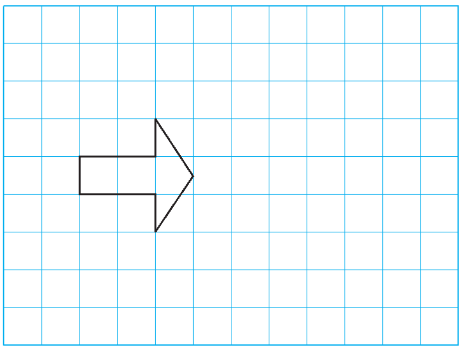
你能画出图11-4中三角形ABC的平移方向，并量出平移的距离吗？

练习11.1

1. 如图，把旗状图形向右平移2格，画出平移后的图形．



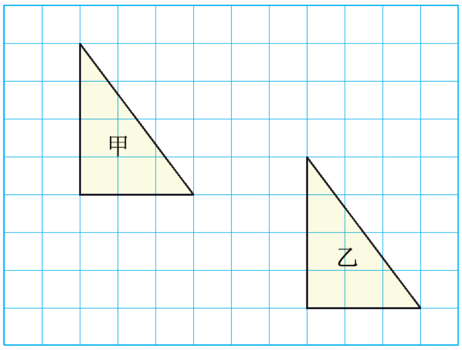
(第1题)



(第2题)

2. 如图，把箭头状图形向右平移4格，向下平移2格，画出平移后的图形．

3. 如图，怎样将三角形甲平移到三角形乙的位置？画出平移的方向，量出平移的距离．(精确到0.1厘米)



(第3题)

11

第 2 节　图形的旋转

11.2　旋转

观察

下列图形有哪些特征?

如图11-5,时钟的分针、时针都是绕着中心O旋转的.

图11-5

如图11-6,电扇的叶片从位置A绕点O转到位置B,给我们以图形旋转的形象.

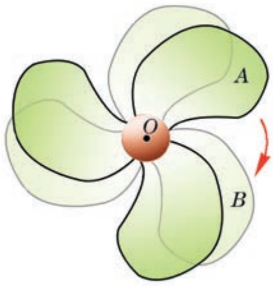


图11-6

在平面内，图形绕着一个定点按照某个方向转动一定大小的角α,这样的运动叫做图形的旋转(rotation).这个定点叫做旋转中心,角α叫做旋转角($0° < \alpha < 360°$).

“某个方向”是指“顺时针方向”或者“逆时针方向”.图形的旋转,可以看成:旋转前的图形经过旋转,与旋转后的图形互相重合.对于旋转前的图形中的任意一点P,在旋转后的图形中有一点P_1与它重合,这时,点P与点P_1就是一对对应点.

问题 1

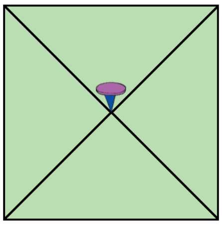


图11－7

如图11－7，将一张正方形纸片平放在纸上，沿四边画出它的初始位置和正方形的两条对角线，在对角线的公共点上用大头针钉住．旋转正方形，最少旋转几度可以使它与初始位置的正方形重合？每转多少度会重复上述现象？

问题 2

在两张透明的纸上分别用圆规画出两个大小相同的圆A、圆B，然后把其中的一张纸盖在另一张上，使圆A、圆B完全重合，如图11－8；选一点F，用一根大头针钉在这点上，旋转圆B，直到圆B第一次完全盖住圆A．这时圆B旋转了多少度？

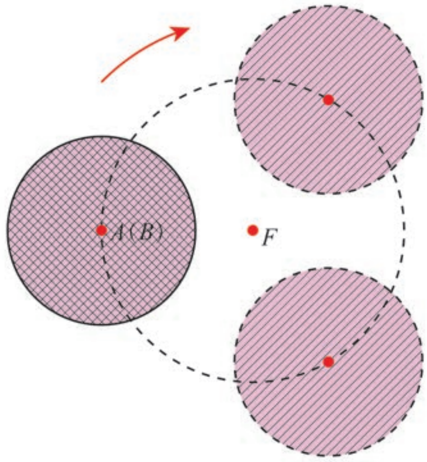
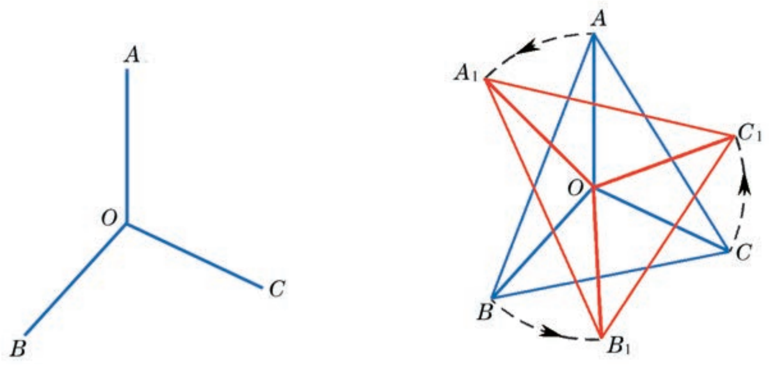


图11－8

操作

如图11－9(1)，在画有线段OA、OB、OC的纸上放一张透明纸，描出线段OA、OB、OC，用一枚图钉钉在点O处．把纸绕着点O旋转到新的位置，如图11－9(2)，使点A旋转到点A_1，点B旋转到点B_1，点C旋转到点C_1．图中，点A与A_1、点B与B_1、点C与C_1分别是一对对应点；OA与OA_1、OB与OB_1、OC与OC_1分别是对应的两点与旋转中心O的联结线段，其长度就是对应的两点与旋转中心O的距离；$\angle AOA_1$、$\angle BOB_1$、$\angle COC_1$是旋转角．

点O是旋转中心．



(1)　　　　(2)

图11－9

联结AB、BC、AC和A_1B_1、B_1C_1、A_1C_1．这样，可以把三角形$A_1B_1C_1$看成是三角形ABC绕定点O旋转后得到的图形，对于这个旋转，AB与A_1B_1是一对对应线段，$\angle ABC$与$\angle A_1B_1C_1$是一对对应角．

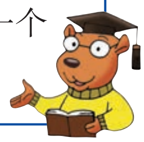
你还能在图中找出其他对应线段、对应角吗？

如果OA绕着点O按顺时针方向旋转90°，那么OB旋转的角度是多少？OC旋转的角度是多少？

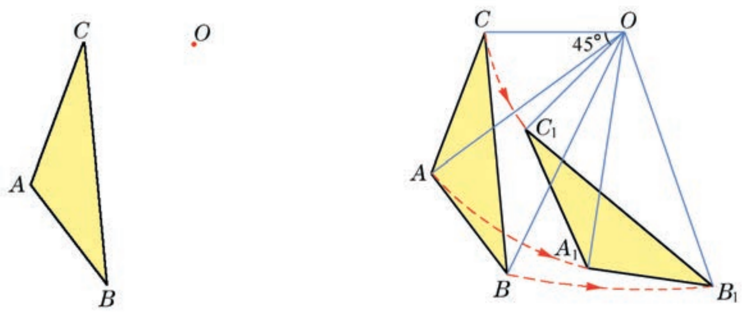
图形旋转后对应的线段长度、角的大小有变化吗？

图形旋转后，每一对对应线段的长度相等，每一对对应角的大小相等，这个图形的大小、形状不变．

图形旋转后，每一对对应点到旋转中心的距离相等；每一对对应点与旋转中心所连线段的夹角是一个定角，其大小等于旋转角（或周角与旋转角之差）．



例题　在图11－10（1）中，画出三角形ABC绕点O按逆时针方向旋转45°后的图形．



(1)　　　　(2)

图11－10

分析　因为旋转图形不改变图形的形状，三角形旋转后仍是三角形，所以只需画出A、B、C绕点O旋转后所对应的点A_1、B_1、C_1即可．

解　（ⅰ）联结OA、OB、OC；

（ⅱ）以OA为始边，逆时针方向作45°角，在角的终边上截取线段OA_1，使$OA_1=OA$，得到点A_1；

（ⅲ）同样分别可得B、C的对应点B_1、C_1；

（ⅳ）联结A_1B_1、B_1C_1、A_1C_1．

图11－10(2)所得到的三角形$A_1B_1C_1$就是三角形ABC绕点O按逆时针方向旋转45°后的图形．

思考

(1) 如图11－11，点A绕点O按逆时针方向旋转90°后，它经过的路线是怎样的图形？

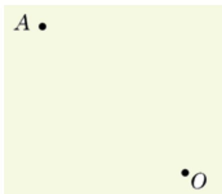


图11－11

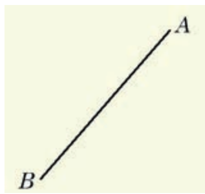
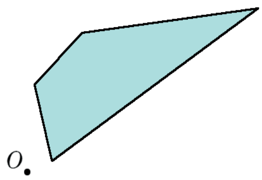


图11－12

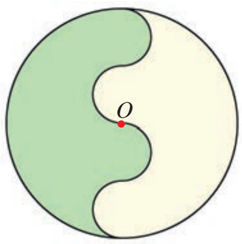
(2) 如图11－12，线段AB绕点A按顺时针方向旋转45°后，它所扫过的平面部分是怎样的图形？画出这个图形．

练习11.2

1. 画一个直角，并画出这个直角绕它的顶点按逆时针方向旋转120°后的图形．
2. 画出下图以点O为旋转中心按逆时针方向旋转60°、120°、240°、360°后的图形．



（第2题）



（第3题）

3. 如图，绿色图形绕点O按逆时针方向旋转几度后能与黄色图形重合？

11.3 旋转对称图形与中心对称图形

观察

下列图形有哪些特征?

如图11-13所示的五角星绕点O按逆时针方向旋转72°后与初始五角星重合.

图11-13

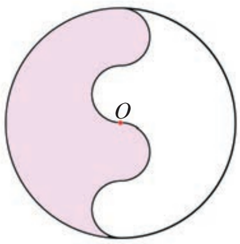


图11-14

为什么旋转对称图形的旋转角要小于360°?

在平面内,如果一个图形绕着一个定点旋转一定大小的角α后,能与原图形重合,那么这个图形叫做**旋转对称图形**,这个定点叫做**旋转对称中心**,角α叫做**旋转角**$(0°<\alpha<360°)$.

如图11-14,它是旋转对称图形,旋转角是180°.

中心对称图形就是旋转角大小为180°的旋转对称图形.

如果一个图形绕着所在平面内的一个定点旋转180°后,能与原图形重合,那么这个图形叫做**中心对称图形**,这个点叫做**对称中心**(center of symmetry).

思考

如图11－15，正三角形、正方形、正五边形、正六边形、等腰梯形是不是旋转对称图形和中心对称图形？

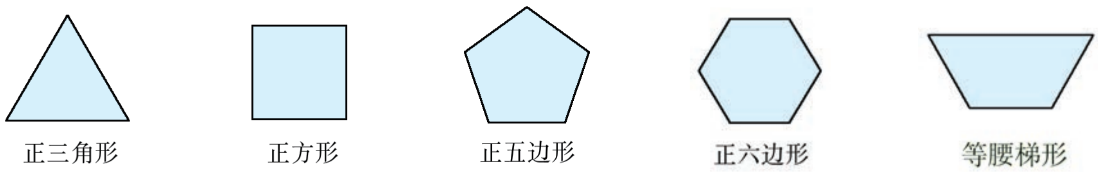
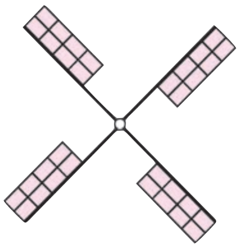


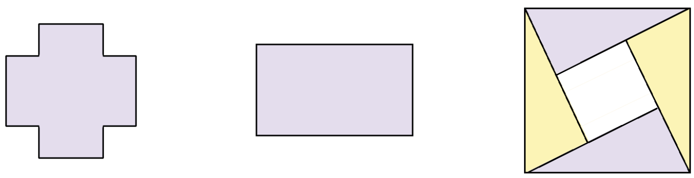
图11－15

练习11.3

1. 如图，一个四叶风车，每叶最少旋转多少度可以与其他叶重合？



（第1题）



（第2题）

2. 如图，哪些是旋转对称图形，哪些是中心对称图形？
3. 画出一个旋转角为120°的旋转对称图形，它是否为中心对称图形？

11.4　中心对称

如图11－16是黑白两个形状、大小完全相同的图形．黑色图形绕点O旋转180°后与白色图形重合．

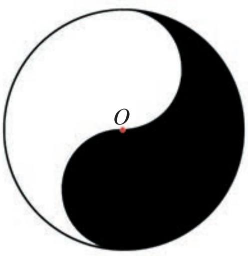


图11－16

平面内，一个图形绕着一个定点旋转180°后，能与另一个图形重合，叫做这**两个图形关于这个定点对称**，也叫做这**两个图形成中心对称**(central symmetry)，这个定点叫做**对称中心**．

如果两个图形关于点O成中心对称，那么对于一个图形中的任意一点P绕点O旋转180°后，点P就与另一个图形中的一点P'重合．这时，点P与点P'是这两个成中心对称的图形的对应点，也叫做**关于点O的对称点**．

如图11－17，三角形ABC与三角形EFD关于点O成中心对称，那么点A的对称点是点E，线段AB的对应线段是线段EF，$\angle BAC$的对应角是$\angle FED$.

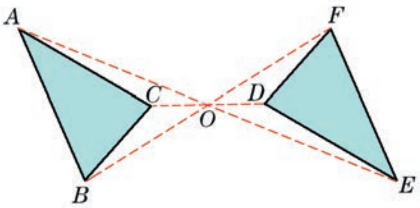


图11－17

你能写出其他的对称点、对应线段、对应角吗?

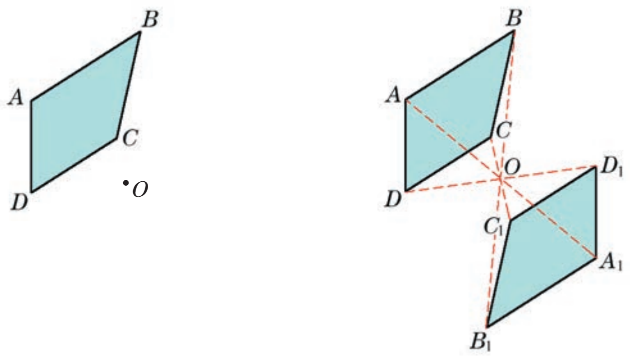
> 如果两个图形关于一点成中心对称，那么这两个图形对应线段平行（或在同一条直线上）且相等.
>
> 如果两个图形关于一点成中心对称，那么对称点的联结线段都经过对称中心，并且被对称中心平分.

例题　画出如图11－18(1)所示的四边形$ABCD$关于点O的中心对称的图形.

解　（ⅰ）如图11－18(2)，联结AO并延长到A_1，使$OA_1=OA$，得到点A的对称点A_1；

（ⅱ）同样分别作出点B、C、D的对称点B_1、C_1、D_1；

（ⅲ）依次联结A_1B_1、B_1C_1、C_1D_1、A_1D_1，得到四边形$A_1B_1C_1D_1$.



(1)　　(2)

图11－18

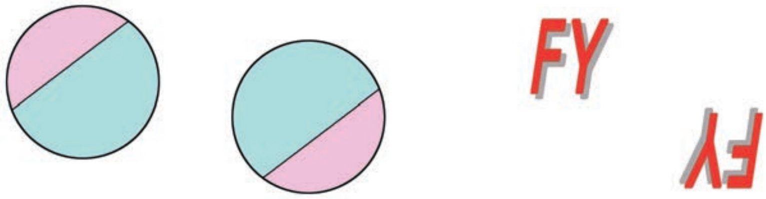
四边形$ABCD$和四边形$A_1B_1C_1D_1$是关于点O的中心对称的图形.

这种方法可以用来画出任意图形的中心对称的图形，并可以找到中心对称的图形的对称中心.

> 寻找对称中心，只需分别联结两对对应点，所得两条直线的交点就是对称中心.

操作

如图11－19，请找出下列图中的对称中心.



(1)　　(2)

图11－19

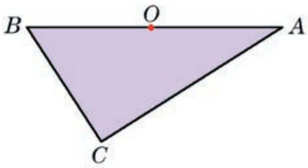


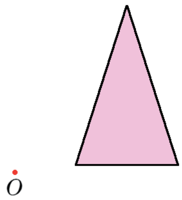
图11－20

思考

把图11－20中的三角形ABC绕着AB边的中点O旋转180°，画出旋转后的图形，这个组合图形是以前学过的哪一种几何图形？

练习11.4

1. 画出图中的三角形关于点O的中心对称的图形.



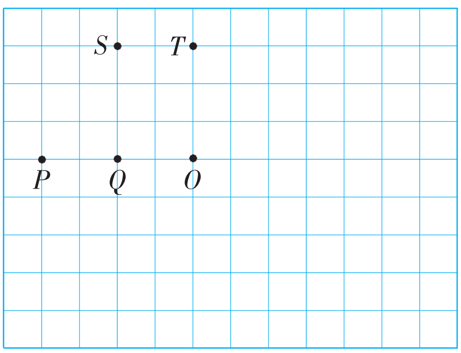
(第1题)

2. 线段是中心对称图形吗？对称中心的位置在哪里？射线是否也是中心对称图形呢？
3. 如图，有O、P、Q、S、T五点.

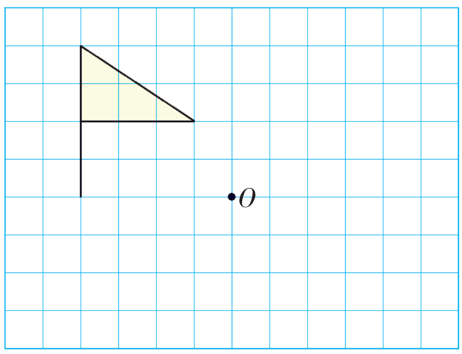
(1) 画出点P、Q、S、T关于点O的中心对称的点；

(2) 画出线段PS关于点O的中心对称的图形；

(3) 画出四边形$PQTS$关于点O的中心对称的图形.



(第3题)



(第4题)

4. 画出如图所示的旗子关于点O的中心对称的图形.

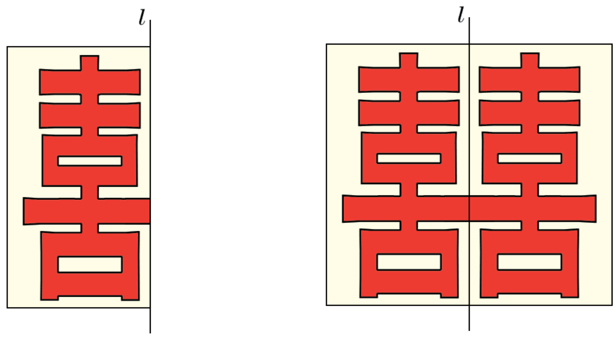
11

第 3 节　图形的翻折

11.5　翻折与轴对称图形

观察 1

剪纸是一门手工艺，为了剪一个民间表示喜庆的“双喜”图案“囍”，可以将一张长方形的纸一折二，然后剪下“𠮷”，再将两层“𠮷”摊开，就得到了“囍”，如图11－21所示，也可以认为将“𠮷”字绕直线l翻折后，成为“囍”字.



(1)　　(2)

图11－21

> 图11－22中，三角形ABC作平移运动后的图形与翻折后的图形是否相同?

如图11－22，三角形ABC沿直线l翻折得三角形$A_1B_1C_1$，点A与点A_1叫做对应点，线段AB与线段A_1B_1叫做对应线段，$\angle A$与$\angle A_1$叫

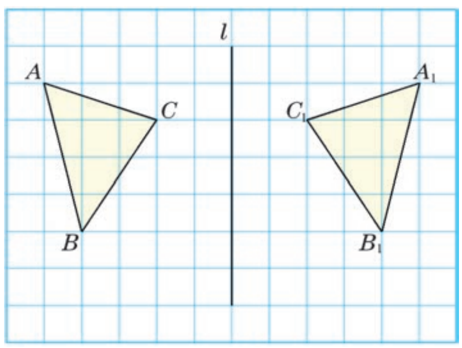


图11－22

做对应角，点B的对应点是__________；线段AC的对应线段是__________；$\angle C$的对应角是__________.

观察 2

以下这些艺术摄影作品有什么共同的特征呢？

图11－23

如图11－23，在京剧的脸谱中，如果将直线l的左边部分沿l翻折，它与右边部分重合.

观察中的图形都有这个特征.

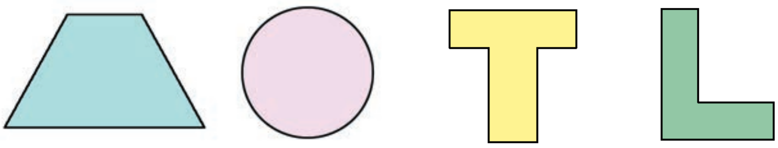
> 把一个图形沿某一条直线翻折过来，直线两旁的部分能够相互重合，这个图形叫做**轴对称图形**，这条直线就是它的**对称轴**.

你能确定观察2中的图形的对称轴吗？

线段、等边三角形是轴对称图形吗？

思考

(1) 图11－24中的哪些图形是轴对称图形？



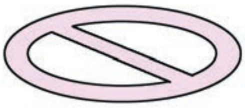
(1)　(2)　(3)　(4)

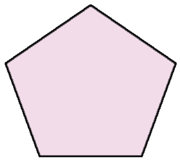
图11－24

(2) 图11－24中的图形如果是轴对称图形，画出它的一条对称轴，对称轴是不是只有一条？

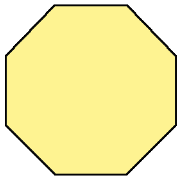
练习11.5

1. 举出两个生活中轴对称图形的例子.
2. 把一张纸对折，任意剪出一个图形，然后展开，所得到的图形是一个轴对称图形吗?
3. 利用纸的对折剪出一个图形，然后展开，使它成为一个等腰三角形.
4. 三角形ABC是正三角形，它有没有对称轴?如果有，有几条对称轴?
5. 在以下图形中找出轴对称图形，并画出一条对称轴：


(1)


(2)


(3)


(4)

(第5题)

11.6　轴对称

观察

下列图形，你能发现什么共同的特征?

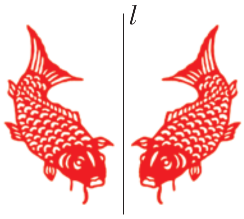


图11－25

如图11－25，左、右两个图形中，左边的图形沿直线l翻折后，可以与右边的图形重合．

如果把一个图形沿某一条直线翻折，能与另一个图形重合，那么叫做这两个图形关于这条直线成轴对称，这条直线叫做对称轴，两个图形中的对应点叫做关于这条直线的对称点．

如图11－26，三角形ABC沿着直线MN翻折后，它与三角形$A_1B_1C_1$重合，三角形ABC与三角形$A_1B_1C_1$关于直线MN对称，直线MN是对称轴，点A与A_1、点B与B_1、点C与C_1是关于直线MN的对称点．

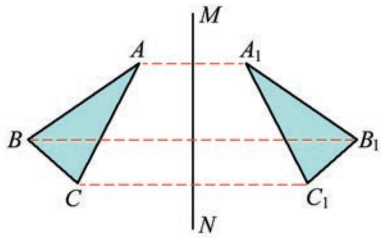


图11－26

两个图形关于一条直线成轴对称，这两个图形对应线段的长度相等，对应角的大小相等，它们的形状相同，大小不变．

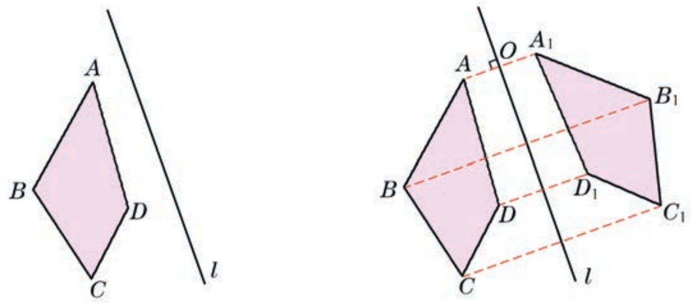
两个图形关于一条直线成轴对称，对称点的联结线段被对称轴垂直平分；如果对应线段（或其延长线）相交，那么它们的交点在对称轴上．

例题　如图11－27(1)，画出一个四边形$ABCD$关于直线l的轴对称的图形．

解　（ⅰ）过点A作直线l的垂线AO，并延长到A_1，使$OA_1= OA$，得到点A的对称点A_1；

（ⅱ）同样分别可以作出点B、C、D的对称点B_1、C_1、D_1；

（ⅲ）依次联结A_1B_1、B_1C_1、C_1D_1、A_1D_1，可以得到四边形$A_1B_1C_1D_1$，如图11－27(2)所示．



(1) (2)

图11－27

四边形$A_1B_1C_1D_1$就是四边形$ABCD$关于直线l的轴对称的图形.

用这种方法可以画出一个图形的轴对称的图形.

思考

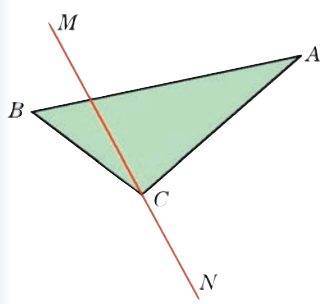
在成轴对称的两个图形中，分别联结两对对应点，取中点，联结两个中点所得的直线就是对称轴.

图11－28中的两个图形成轴对称，如何画出它们的对称轴呢？

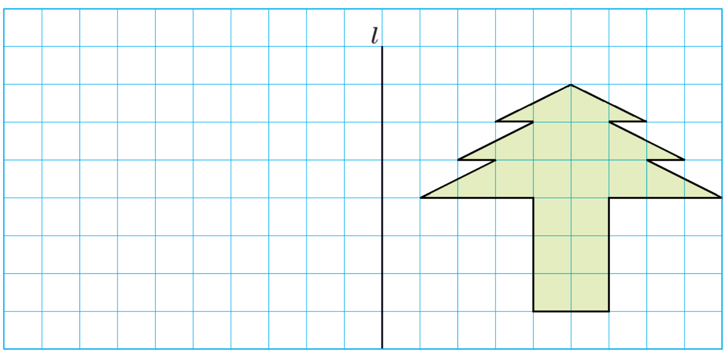
图11－28

练习11.6

1. 画出如图所示的三角形ABC关于直线MN的轴对称的图形.



（第1题）



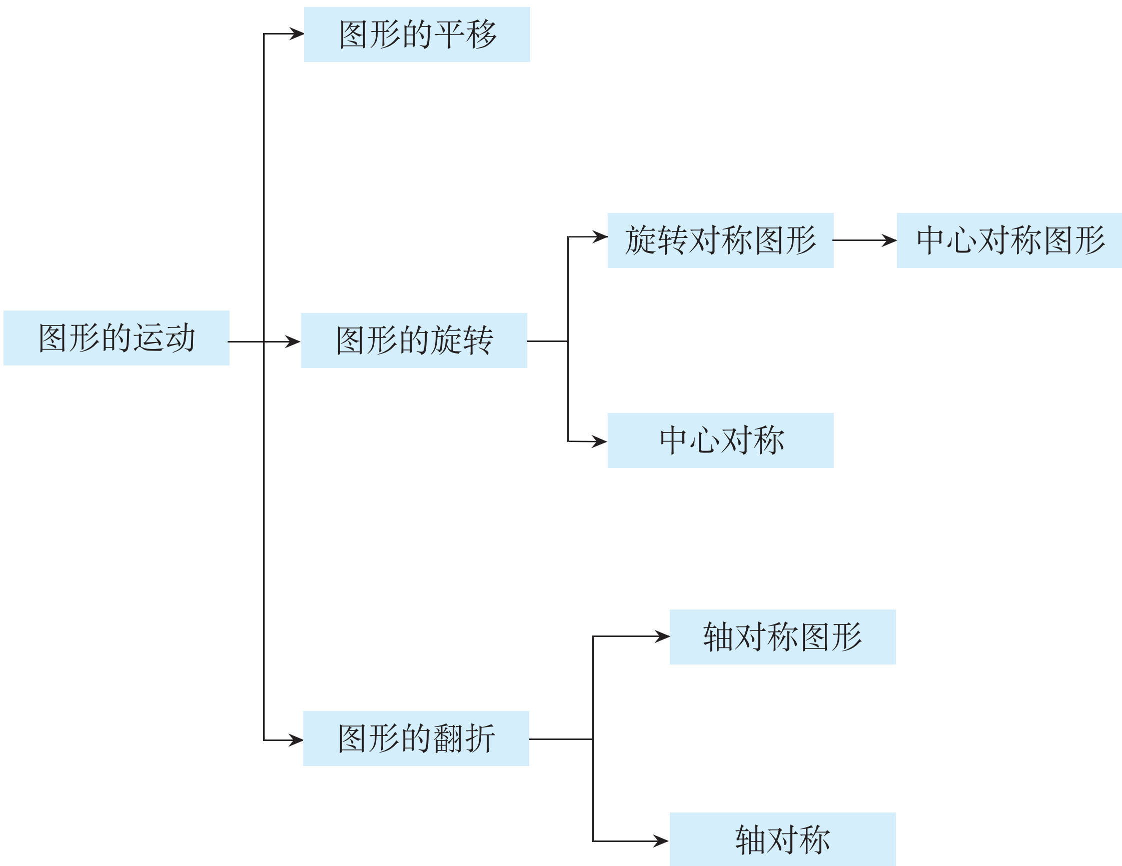
（第2题）

2. 树状图形是否为轴对称图形？画出该图形关于直线l的轴对称的图形.

本章小结

本章通过日常生活中常见的图形,学习了图形的运动以及有关的概念.图形通过平移、旋转和翻折可以形成新的图形.对于这些图形运动问题应能正确地寻找到对应点、对应线段和对应角,应知道这些运动不会改变图形中线段的长度和角的度数,图形的形状与大小也不会改变,改变的只是图形的位置.学习本章将为今后学习平面几何奠定基础.

本章知识结构框图如下:



探究活动

平面图形的设计

图1是一个基本图形，将它平移、旋转后，可产生一个更大的图形．由于运动方式不一样，可能产生不同的效果．以下给出运动后所形成的图形．

图1

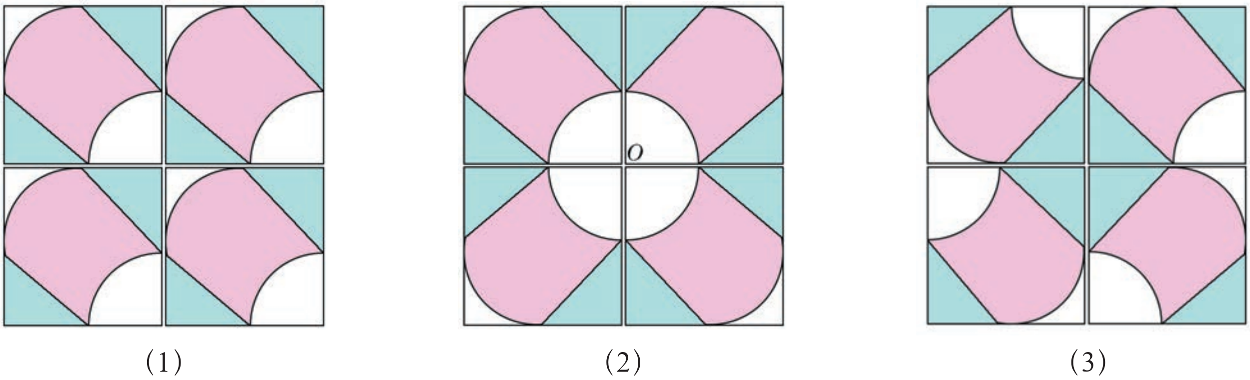


图2

你能够说出图2中各图形是由图1经过怎样的运动形成的吗？请你自己设计一个基本图形，通过平移、旋转或翻折运动后形成一个更大的漂亮图案．

平 面 镶 嵌

在第八章的阅读材料中你已了解了荷兰艺术家埃舍尔的一些艺术作品，他的作品中出现了许多现实中不可能的图形，其实他还有一些运用数学中的平移、旋转和轴对称制作的平面镶嵌作品.平面镶嵌就是用一种或几种平面图形无缝隙而又不重叠地铺满整个平面.

只需用正三角形、正六边形和正方形中的一种图形，就可简单地完成平面的镶嵌，也可以用其中几种图形来镶嵌，如图1所示：

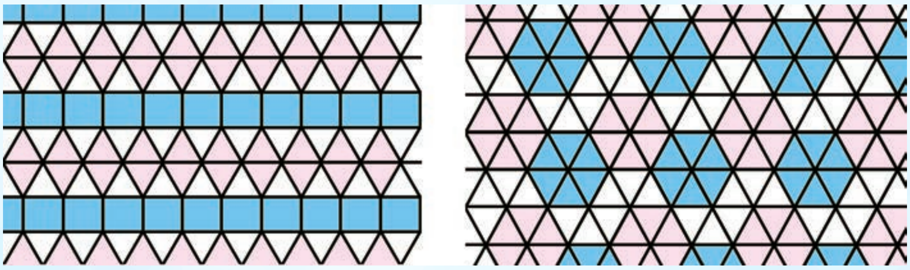
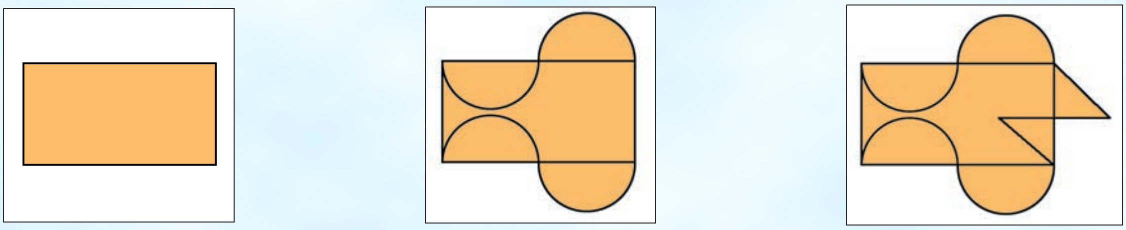


图1

还可以用其他的图形来镶嵌平面，图2是埃舍尔的一幅平面镶嵌作品，它是由同样大小的骑士镶嵌而成的.

图2

其实制作平面镶嵌作品并不难，以下就介绍一个平面镶嵌作品的制作过程.



(1)　　(2)　　(3)

图3

按图3所示的制作过程，可得图4.

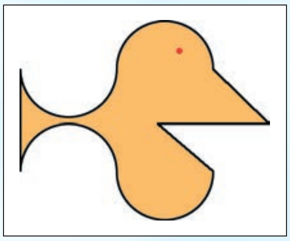


图4

用若干个图4就可镶嵌成美丽的图案，如图5所示.如果你有兴趣，不妨也制作一个镶嵌作品.

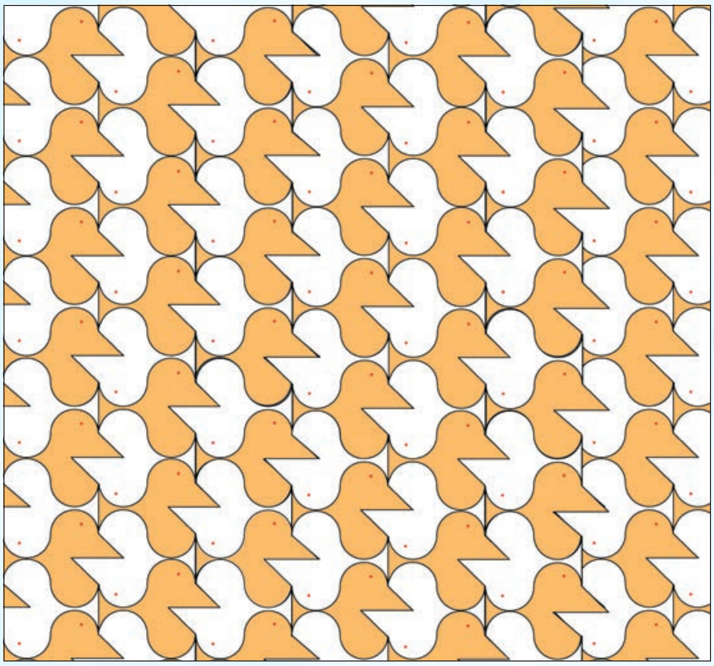


图5

说　明

本册教材根据上海市中小学（幼儿园）课程改革委员会制定的课程方案和《上海市中小学数学课程标准（试行稿）》编写，供九年义务教育七年级第一学期试用.

本教材由上海师范大学主持编写，经上海市中小学教材审查委员会审查准予试用.

本册教材的编写人员有：

主编：邱万作　　　分册主编：黄　华

特约撰稿人：（按姓氏笔画为序）张　云　周　齐　黄　华　等

2019年教材修订组成员：叶锦义　邵世开　沈　洁

陆海兵　徐晓燕　顾跃平

本册教材图片提供信息：

图虫网（封面一幅图，P1一幅图，P57一幅图，P66一幅图，P88一幅图，P92两幅图，P93一幅图，P97一幅图，P106三幅图）；壹图网（P3一幅图，P82一幅图）；其他图片由上海教育出版社提供.

插图绘制：王捷、周吉、黄国荣、顾云明、张惠卿等

经上海市中小学教材审查委员会审查
准予试用　准用号Ⅱ-CB-2019005

责任编辑　张莹莹

九年义务教育课本

数　学

七年级第一学期

(试用本)

上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会

上海世纪出版股份有限公司
上　海　教　育　出　版　社 出版

（上海市闵行区号景路159弄C座　　邮政编码:201101）

上海新华书店发行　　上海锦佳印刷有限公司印刷

开本 890×1240　1/16　印张 7.5

2019年7月第1版　　2023年6月第5次印刷

ISBN 978-7-5444-9338-3/G·7699

定价:9.55元

全国物价举报电话:12315

如发现内容质量问题，请拨打 021-64319241

如发现印、装问题，请拨打 021-64373213，我社负责调换

绿色印刷产品

ISBN 978-7-5444-9338-3