义务教育教科书

（五·四学制）

数学

教学参考资料

七年级

下册

上海教育出版社

义务教育教科书

（五·四学制）

数学

教学参考资料

七年级

下册

主编　李大潜

上海教育出版社

图书在版编目（CIP）数据
义务教育教科书：五·四学制. 数学教学参考资料 七年级 下册 / 李大潜主编. — 上海：上海教育出版社，2024.12. — ISBN 978-7-5720-3341-4
I. G633
中国国家版本馆CIP数据核字第20249MQ111号

主　　编：李大潜
本册主编：徐斌艳
本册编写人员：金荣生　王春明　王松萍　陶志诚　陆立强　朱　雁　王海生

责任编辑：项征御　周明旭
装帧设计：王　捷　周　吉

义务教育教科书（五·四学制）　数学教学参考资料　七年级　下册

出　版　上海教育出版社（上海市闵行区号景路159弄C座）
发　行　上海新华书店
印　刷　上海中华印刷有限公司
版　次　2025年1月第1版
印　次　2025年1月第1次印刷
开　本　787 毫米×1092 毫米　1/16
印　张　16.25
字　数　385 千字
书　号　ISBN 978-7-5720-3341-4/G·2978
定　价　51.00 元

目　录

绪　论

本套《数学教学参考资料》与李大潜主编的《义务教育教科书（五·四学制）数学》（六年级至九年级）（以下简称“本套教科书”）配套使用. 本套教科书依据教育部制定并颁布实施的《义务教育数学课程标准（2022 年版）》（以下简称《课标 2022 年版》）编制，并经国家教材委员会专家委员会审核通过.

一、本套教科书的总体结构框架

1. 教科书结构体系

根据“五四”学制特点，义务教育初中阶段包括六年级至九年级，每个年级两个学期，简述为上、下学期，因此本套教科书包括六年级至九年级的教科书，每个年级分上、下两册，共计八册.

本套教科书依据《课标 2022 年版》的要求，将教学内容按照主题进行划分并依次呈现，突出数与代数、图形与几何、统计与概率、综合与实践四个领域，这四个领域也贯穿了整套教科书. 对于每个领域的内容编排，将整个领域视为一个整体，有序地呈现相应知识点，并兼顾知识点之间的有机联系，按照知识发生发展的规律和学生的认知水平循序渐进、逐次展开. 本套教科书的结构体系如表一所示.

表一　教科书结构体系

<table>
<tr><th>年级/册次</th><th>数与代数</th><th>图形与几何</th><th>统计与概率</th><th>综合与实践</th></tr>
<tr><td rowspan="4">六年级
上册</td><td>第 1 章　有理数</td><td></td><td></td><td rowspan="4">• 你的膳食健康吗?
• 上海一日游计划制订</td></tr>
<tr><td>第 2 章　简单的代数式</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>第 3 章　一元一次方程</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>第 4 章　线段与角</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">六年级
下册</td><td>第 5 章　比与比例</td><td></td><td></td><td rowspan="5">• 旋转的齿轮
• 中国的能源生产与消费</td></tr>
<tr><td></td><td>第 6 章　圆与扇形</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>第 7 章　可能性与统计图表</td></tr>
<tr><td></td><td>第 8 章　圆柱与圆锥</td><td></td></tr>
<tr><td>第 9 章　二元一次方程组</td><td></td><td></td></tr>
</table>

（续表）

年级/册次	数与代数	图形与几何	统计与概率	综合与实践
七年级上册	第 10 章　整式的加减			• 从传统连续纹样到现代镶嵌图案 • 制订“阅读之星”评选方案
	第 11 章　整式的乘除			
	第 12 章　因式分解			
	第 13 章　分式			
		第 14 章　图形的运动		
七年级下册	第 15 章　一元一次不等式			• 积木可以叠多远？ • 田径比赛中的数学
		第 16 章　相交线与平行线		
		第 17 章　三角形		
		第 18 章　等腰三角形		
八年级上册	第 19 章　实数			• 理财小课堂 • “勾股定理”证明中的中国智慧
	第 20 章　二次根式			
	第 21 章　一元二次方程			
		第 22 章　直角三角形		
八年级下册		第 23 章　四边形		• 折纸与数学 • 神奇的密码
		第 24 章　平面直角坐标系		
	第 25 章　一次函数			
	第 26 章　反比例函数			
九年级上册	第 27 章　二次函数			• 探寻测量高度的方法 • 城市原点
		第 28 章　相似三角形		
		第 29 章　三角初步		
		第 30 章　投影与视图		
九年级下册		第 31 章　圆		• 碳足迹——无所不在的二氧化碳排放 • 血型的秘密
			第 32 章　抽样与数据分析	
			第 33 章　概率初步	

2. 教科书的基本体例

本套教科书的基本体例采用单元(章)结构，每个单元呈现一个完整的知识模块. 在以数学核心内容为主的数与代数、图形与几何、统计与概率领域，相应章节的编写结构层次为：章—节—课时，以课时为基本单位. 在每个基本单位中有固定的栏目〔如概念(定义、性质、定理、法则等)、问题、例题、课堂练习、节习题〕，特色小栏目(观察、操作、思考、探究、讨

论、归纳). 在每一章又设计章的固有栏目(如章首图、章首语、阅读材料、内容提要、复习题).

在培养学生综合运用所学知识和方法解决实际问题的综合与实践领域，每册有 2 个实践活动，以活动为基本单位. 在每个基本单位中有针对主题的问题情境引入语、活动串(任务串、问题串)、拓展反思等栏目，其中每个活动串包含活动任务要求或问题、学生活动要求等内容.

3. 栏目功能定位及编写说明

本套教科书呈现上大致可分为基本栏目板块、特色小栏目板块以及各章固有栏目板块. 教科书在栏目设置上一方面借鉴了上海“二期课改”教科书中具有较高使用价值的栏目，修改、提升和进一步完善其具体内容的设计；另一方面结合《课标 2022 年版》要求，增设若干特色小栏目，以满足义务教育阶段数学课程改革的需求.

(1) 基本栏目板块

概念 （定义、性质、定理、法则等） 以文字叙述的形式呈现一节课要求学生必须掌握的核心内容，包括概念、定义、性质、公理、定理、法则、公式、原理等，帮助学生准确把握本节课的核心知识. 该板块内容一般安排在例题之前或者例题之间. 六、七年级教科书多以描述性语言的形式表述，而八、九年级教科书的表述逐步强调严谨性.

例题 为学生及时巩固理解数学概念(定义、性质、定理、法则等)提供平台，加强概念在数学或实际问题中的运用. 学生通过参与分析和解答典型题目，及时加深对概念(定义、性质、定理、法则等)的理解和运用，经历理解问题、分析问题、解决问题、拓展性思考问题的过程，要求学生能够在教师的引导与讲解下，深度参与题目的分析、解答和讨论.

课堂练习 旨在通过适度(兼顾难度和时间)的练习题，巩固学生对新知的掌握，并对学生的学习效果进行检测. 学生通过完成课堂练习获得及时巩固所学知识的机会，深化对知识的理解. 习题选编与课堂例题的题型、难度基本匹配，从而满足学生对本课时新授内容的基本训练需求.

(2) 特色小栏目板块

针对《课标 2022 年版》提出的课程目标，即培养学生数学素养，会用数学的眼光观察现实世界(主要表现为抽象能力、几何直观、空间观念与创新意识)，会用数学的思维思考现实世界(主要表现为运算能力、推理意识或推理能力)，会用数学的语言表达现实世界(主要表现为数据意识或数据观念、模型观念、应用意识)，对上海“二期课改”教科书上的小栏目进行补充和优化，本套教科书中的小栏目定位见表二.

表二　小栏目功能定位及编写说明

栏目名称	功能定位与编写说明
观察	本栏目作为数学活动的一种形式体现，为后续知识的引入、介绍或应用等奠定基础. 要求学生通过观察图形或现象等，发现其中蕴含的共同点或不同点、特征和性质等，从而归纳推理得出合适的数学结论. 教师引导学生在观察的过程中深入理解知识要点，体会数学思想和方法. 本栏目要帮助学生“会用数学的眼光观察现实世界”，基于观察学会发现客观世界或现象中的数学关系或特征.

（续表）

栏目名称	功能定位与编写说明
操作	本栏目为学生直观感知并理解数学结论提供实践操作的机会，有助于提高学生的动手实践能力. 学生根据操作的步骤流程及相应要求，通过实验、绘图等方式探究数学规律或验证数学性质、定理等，并基于具体操作抽象出数学知识. 本栏目要求学生能够切实动手操作，以激发学生在现实世界中亲自实践的兴趣，从而引导学生通过具体操作活动感知如何从数学的角度发现问题，逐渐尝试“会用数学的眼光观察现实世界”.
思考	本栏目是以问题或问题串的形式为结论的推出搭建合适的脚手架. 学生通过思考简短且指向性明确(即指向某个具体细节或关键点)的问题(串)，或引发对新知的感悟，或拓展数学思维. 本栏目以问题适时启发学生思考，引导学生“会用数学的思维思考现实世界”.
探究	本栏目是以问题或活动的形式为学生经历数学知识内容的“再发现”过程提供探索的机会. 学生通过参与探究活动，尝试学会问题解决的策略、思想和方法，获得对数学概念、性质、定理等的理解. 本栏目旨在让学生“会用数学的思维思考现实世界”，要求学生更多地参与且经历相对独立的思考过程，从而发现数学事实及规律.
讨论	本栏目作为学生合作学习的载体，为学生沟通交流对数学知识内容的理解与感悟创设平台，旨在激发学生的求知欲和表达欲. 学生通过对问题素材的思考与分析，参与小组交流、班级交流等不同形式的同伴讨论，在互相沟通表达的过程中拓宽知识内容的广度和深度，领悟数学思想方法. 本栏目要求学生深度参与数学语言的表达与交流活动，在参与中“会用数学的语言表达现实世界”，发展数学表达与交流能力.
归纳	本栏目是为学生提炼、概括并表达数学结论提供机会. 学生在观察和操作等实践活动基础上，对经猜想验证的数学结论或知识进行提炼总结，并使用数学的语言表述为严谨的数学概念、性质或规则等. 本栏目要求学生“会用数学的语言表达现实世界”，在总结归纳数学知识的过程中逐渐养成用数学语言表达的习惯，能逐渐用严谨的数学语言陈述自己得到的结论，解释结论的合理性等，提升总结提炼能力.

（3）各章固有栏目板块

章首　以图文相结合的形式作为每一单元(章)的开头部分，旨在引导学生带着探究的热情进入新知的学习. 文字性表述围绕本章内容在数学中的地位和意义，与其他章的关联，以及学习重点展开. 章首图的设计和选用，结合单元内容特点，有机融入重大主题的教育内容，力图展现在党的领导下，我国现代化建设在各个领域取得的伟大成就.

提示　以解释性文字、拓展性介绍或启发性思考内容的形式对正文内容进行补充，为学生进一步理解正文内容提供支持与帮助. 学生通过栏目的内容延伸，深化对知识内容的认识，拓宽知识视野. 以书页的样式伴文排列，在内容上除了可以是对数学知识的进一步补充，还可以体现一些学科的拓展和现实情境的延伸等.

内容提要　通过概念梳理，系统回顾并概括本章学习内容，列出本章重要的知识点、结论与公式，帮助学生整理复习数学知识，建构自身的数学内容体系.

阅读材料　以图文并茂的形式提供史料、背景材料、知识应用及课外活动题材等阅读材料，供学生选择阅读或使用，开阔数学视野. 主要呈现数学文化、数学史、数学趣题、科普知识、中华优秀传统文化等，旨在提高学生的科学文化素养，集中体现数学课程的育人价值.

二、本套教科书的编写思想和主要特点

在教科书编写过程中，我们始终坚持正确的政治方向和育人为本的价值导向，全面贯彻党的教育方针和政策，围绕立德树人根本任务，努力实现义务教育阶段的培养目标，在提高数学学习质量的同时，落实学科核心素养，使得人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展. 我们希望编写一套经得起历史和实践检验的优秀教科书，将教科书作为推进教学改革的载体，通过教科书改变教学，通过教科书引导考试，让数学成为广大师生喜闻乐见的一门课程.

在编写过程中，我们注重吸收上海两期课改（"一期课改"和"二期课改"）的经验，同时依据《课标 2022 年版》科学地处理教学内容的编排. 本套教科书结构严谨、体例活泼、特色鲜明，体现了理性精神和人文情怀，有望促进学生数学核心素养的发展、创新意识的提高和社会责任感的增强.

本套教科书的编写思想和主要特点，具体体现在如下几个方面.

（1）遵循课程标准，吸取课改经验. 我们努力遵循国家课程标准的基本精神及指导思想，参照国家课程标准中的具体安排与建议，吸收上海在"五四"学制课程教材研究与实践中的有益经验，将已有的初中数学教科书作为本次编写的迭代初始值，在可能的范围内有的放矢地调整、提升与改进.

（2）内容削枝强干、提质减负，表述简明扼要、单刀直入. 教科书内容应该掌握到怎样的程度，是教科书的编写者及讲课的教师必须面临且迫切需要解决的一个问题. 对初中阶段的教科书，我们尽可能对内容精准定位、降低难度，关注数学的本质内容、内在发展和数学的应用，避免片面地追求严格化；用朴实无华且单刀直入的方式加以呈现，增加亲和力. 既提高质量，帮助学生打好必要的基础，又把时间和自由留给学生，切实减轻学生的负担，实现双赢的目标.

（3）整体架构科学合理，重视衔接和交叉. 根据《课标 2022 年版》中"数与代数""图形与几何""统计与概率"这三大知识领域内在的逻辑关系和知识链条，相对集中地安排各领域内容. 各分册兼顾了不同领域，精心设计领域交叉或承上启下的章节. 例如，为更充分地发挥平面几何在培养逻辑推理中的独特作用，从七年级下册开始，将"相交线与平行线""三角形""等腰三角形""直角三角形""四边形""相似三角形""圆"等与几何推理密切相关的内容，以 3 至 4 章为一个小板块，相对集中进行教学. 又如，根据八、九年级的学习要求，结合学生认知的特点和能力，在八年级上册依次呈现实数、二次根式、一元二次方程、直角三角形（含勾股定理），联系紧密，八年级下册有平面直角坐标系、一次函数、反比例函数，紧接着在九年级上册将二次函数作为初中函数的收官. 与高中关系密切的三角初步、圆、投影与视图、抽样与数据分析、概率初步依次安排在九年级上册和九年级下册.

（4）小初高整体设计，前后呼应且顺畅. 按照《课标 2022 年版》对小学和初中数学课程的一体化标准，强调小学与初中的衔接. 充分考虑到上海教育的实际情况和"五四"学制的特殊性，在学段内容划分及与小学、高中数学教科书的有效衔接上，做了精细设计. 例如，在六年

级上册的“第 1 章有理数”中，首先巩固了小学分数和有限小数的四则运算和互相转化. 在介绍有理数的同时回顾和整理了小学中对数的认识，并顺势过渡到“第 2 章简单的代数式”，作为初中代数学习的开端. 在“一元一次方程”中，在引入一元一次方程、二元一次方程组解决实际问题时，与小学的算术解法作对比，以体现方程解法的优越性. 例如，在“一元二次方程”中，出现涉及可化为一元二次方程的分式方程的应用，为新编高中教科书中求解可化为一元二次不等式的分式不等式作铺垫，体现了从初中到高中递进的学习规律.

（5）加强逻辑推理，提升几何和代数推理能力. 针对初中阶段学生的数学认识将从以感性与直观为主上升到以理性与推理为主的特点和要求，加强对学生逻辑思维、推理能力、论证表达的培养. 例如，突出初中几何在培养逻辑思维中的关键作用，加强几何论证的学习. 在“相交线与平行线”中，从简单命题的证明开始，给出逻辑清晰、推理严格的证明示范. 在每个例题中，都力求论证逻辑思路清晰，表达清楚，随着知识的深入，循序渐进地逐步提高论证的要求，让学生在潜移默化之中学会推理论证的思想方法. 又如，在“整式乘除的性质”“负整数指数幂的乘法性质”“二次根式的乘法性质”“根式运算性质的推导”等知识点中，都增加了代数推理的内容.

（6）科学界定重要概念的内涵，调整重要结论的定位与分层. 坚持科学性、适宜性和一致性，同时考虑学生的理解、接受程度和使用的便利性，重新界定一部分概念和性质. 调整了一些重要结论的定位和分层. 例如，明确一些重要概念：整式也称多项式，单项式是特殊的多项式；分式也称有理式，整式是特殊的分式；梯形是一组对边平行的四边形，平行四边形是特殊的梯形. 又如，调整一些结论的定位：“垂线段最短”由基本事实(公理)改为定理，在“直角三角形”中作为定理加以证明；“平行线分线段成比例”，由基本事实(公理)改为定理，在“相似三角形”中作为定理加以证明；“一个内角等于 60°的等腰三角形是等边三角形”由定理改为例题；“直角三角形中的 30°角所对直角边是斜边的一半”由定理改为例题.

（7）“综合与实践”的内容情境丰富、跨学科特征鲜明. 按照《课标 2022 年版》对“综合与实践”的要求，灵活采用“主题式学习”和“项目式学习”两种“综合与实践”的呈现方式. 例如，六年级上册的“你的膳食健康吗?”是主题式活动，“上海一日游计划制订”是主题式与项目式相结合的学习活动. 这同时实现了从小学到初中对“综合与实践”不同要求的过渡. 情境设计丰富，有跨学科特征，活动意图明确，任务清晰，具有可操作性. 例如，为“综合与实践”设计丰富的任务情境，包括社会生活(如“理财小课堂”)、科学技术(如“旋转的齿轮”)和数学文化(如“‘勾股定理’证明中的中国智慧”)等. 同时还兼顾跨学科内容的设计，包括营养学(如“你的膳食健康吗?”)、物理学(如“积木可以叠多远?”)、金融学(如“理财小课堂”)、工程学(如“旋转的齿轮”)、艺术(如“从传统连续纹样到现代镶嵌图案”)等.

三、本套教学参考资料的编写意图与结构

本套教学参考资料编撰的目的是使教师理解教科书编制所依据的《课标 2022 年版》，体会教科书的编制特色和主要思想，把握教科书所包含的数学知识的体系和脉络，掌握教学过程的关键，从而很好地完成从课程标准和教科书所描述的“期望课程”“可实施课程”到教学过程

的“实施课程”和学生习得的“获得课程”的转变. 教学参考资料侧重给出编写者的思想及体会，明确各章的定位，剖析重点和难点，厘清容易混淆的地方，帮助教师把握《课标 2022 年版》的基本理念和目标要求，强调数学核心素养的落实，从而开拓教师思维，优化教学方法. 从这个角度讲，教学参考资料又是对教科书内容的深化和补充，成为教科书(可实施课程)到教学(实施课程)的中介和桥梁.

在任何情况下，教科书都要基于《课标 2022 年版》，贯彻“少而精”“简而明”的原则. 精心选择与组织教科书内容，抓住本质，返璞归真，尽可能给学生以明快、清新的感受，使学生能更深入地领会数学的真谛，让数学成为广大学生喜闻乐见的一门课程. 这是本套教科书坚持的基本特色. 教科书的许多特色隐含在内容的选取、编排和行文中. 教学参考资料将揭示和突出教科书的基本特色以及教科书编制过程落实这个特色所采取的具体措施和处理方式，并充分注意同一主题内前置和后续内容的衔接以及一个主题的内容与其他主题甚至其他学科内容的关联. 这种衔接和关联在章首语、内容提要以及在相关知识内容阐述中有明确的交代. 这样做的目的是让教师更加深刻地体会整个初中阶段数学是一个知识的网络，并在教学中把这种认知传递给学生.

本套教学参考资料与教科书的分册和章节安排一致，即教学参考资料的分册和章节目录均与教科书一致. 每册教学参考资料由四个主要部分组成：绪论部分、总论部分、分论部分和附录部分，具体结构如下：

（1）绪论部分

主要介绍整套教科书的总体结构框架、编写理念，以及本册教科书的编写说明和特色等.

（2）总论部分

针对《义务教育教科书(五·四学制)数学》的每一章内容，教学参考资料从“总体要求”“课时安排建议”“内容编排与特色”“教学提示”“评价建议”5 个方面，对各章的内容进行细致的阐述和说明. 其中，在“总体要求”中，该部分强调每一章内容的重要性及与前后章节的联系，明确课程内容要求和素养目标，与课程标准对应，指引教师把握教学方向. 在“课时安排建议”中，根据章节内容，提供课时分配建议，包括章末小结和阶段性习题课等环节，确保教学完整性和节奏合理性. 在“内容编排与特色”中，阐述章节内容的编排思路和特色，提炼教科书编写特点，帮助教师理解整体框架和逻辑. 在“教学提示”中，基于课程标准，为每一章教学提供具体提示和建议，涉及内容顺序、问题情境、核心概念把握及信息技术运用，优化教学方法. 在“评价建议”中，结合章节内容，从知识、素养、数学思想文化等方面提出评价建议，关注数学过程、概念本质、思维表达及应用，为课程评价提供指导.

（3）分论部分

为了帮助教师更好地理解和把握教科书内容，本部分将按照“章—节—课时”的形式，对教科书进行细致的解析. 其中，包含了以节为单位的“本节教学目标”和以课时为单位的“本课教学重点”“本课教学建议”“本课内容分析”栏目.

“本节教学目标”中明确提出学生通过本节学习后应达到的具体预期效果. 这些目标的设定，紧密围绕《课标 2022 年版》的内容要求和学业要求展开，强调学生对知识点的掌握，关注对其素养、能力的培养和提升.

“本课教学重点”中指出本节课教学中需要特别强调和关注的内容. 这些重点通常是教学中的核心知识点或关键能力，对于实现教学目标具有重要意义.

“本课教学建议”为教师使用本套教科书进行教学，提供具体的教学方法和策略指导. 这些建议基于课程标准、教材内容和学生实际情况，旨在帮助教师更有效地组织课堂教学活动.

“本课内容分析”深入解读本节课的教科书内容，旨在帮助教师全面把握教材编排，包括说明概念表述、例题设计、思考观察等栏目的教学建议，以及教学过程中可能存在的难点和教学注意事项等.

（4）附录部分

本次教材的编制包括了三个品种：教科书(课本)、教学参考资料、练习部分(练习册). 其中，教科书中的课堂练习、节习题、章复习题与练习部分中的习题，形成了一个完整的习题训练和检测系统. 而这些习题的答案或解答提示都呈现在教学参考资料中，以便教师能完整全面地检测和评价教学效果.

四、教科书特色小栏目和固有栏目的教学建议

根据教科书特色小栏目板块的功能定位，在教学中可以参照如下建议使用小栏目：

观察　教师组织学生关注这个栏目呈现的表达式、图形或问题等,通过直观或者归纳等发现数学性质、特征或者数学结论等.

操作　教师组织学生参考这个栏目给出的步骤流程，进行实验、绘图等实践活动，感受和探究数学规律或验证数学性质、定理等.

思考　教师组织学生对栏目给出的内容进行思考、分析或解答，其目的是对之前所学内容的延伸，或者通过问题引出后续进一步学习的内容.

探究　教师组织学生对这个栏目给出的内容进行探索，其目的是加深学生对数学概念、性质、定理等的理解，让学生经历独立思考过程. 本栏目的内容在深度、综合性、开放性方面要求很高，有些属于初高衔接内容，教师不一定在课堂上给出答案，可以鼓励学生在课后进一步思考.

讨论　教师组织学生针对这个栏目提出的问题，进行全班集体的交流和讨论，或者学生在小组中展开数学交流.

归纳　教师组织学生根据之前学习的内容，让学生提炼概括出可能的数学概念、性质或者定理，并进行表达. 教师应对学生的表达进行规范化，必要时给予纠正.

本教科书的各章有若干相对固有的栏目，在教学中可以灵活处理.

章首语　教师可以在每章开始时，组织学生阅读并讨论章首语，让学生初步了解每章要学习的内容，为每章学习做好准备. 在每章结束时，再回顾章首页进一步体会.

提示　教师组织学生结合教科书正文阅读或浏览提示部分的说明，拓展学生对所学内容的理解.

内容提要　教师组织学生在每章结束时，阅读内容提要，复习每章所学的概念、性质、定理等. 需要特别指出的是，几何章节中内容提要里出现的性质和定理，是进行几何推理的起

点，可以直接使用.

阅读材料　教师在完成课时内容学习以后，鼓励学生使用阅读材料，了解数学文化和数学史，或者见识数学趣题，开阔数学视野，帮助学生提高文化素养、陶冶道德情操.

五、七年级下册教科书编写特色

我们根据《课标2022年版》共编写了初中(六年级至九年级)数学教科书八册. 七年级下册由“一元一次不等式”“相交线与平行线”“三角形”“等腰三角形”“综合与实践”5个单元(章)组成.

第15章属于“数与代数”，介绍不等式. 第16～18章属于“图形与几何”，从证明“对顶角相等”开始，开启论证几何之旅.

第15章　一元一次不等式

本章通过类比与归纳给出不等式的5条性质，并以这些性质为基础介绍一元一次不等式与一元一次不等式组的解法. 其中，借助数轴解释不等式的性质、表示不等式的解和求不等式组的解集，充分体现了数形结合的思想.

第16章　相交线与平行线

本章是中学平面几何知识系统的新起点，从本章开始，要以平面几何为载体，学习演绎推理.

其中，同位角、内错角、同旁内角这三个概念不同时出现，而是穿插在平行线的性质和判定中. 先给出“同位角”的概念，学习与同位角相关的平行线的判定与性质，把“同位角”讲清楚；再给出“内错角”的概念，证明及运用与内错角相关的平行线的判定与性质；最后通过例题给出与同旁内角相关的平行线的判定与性质.

第17章　三角形

本章第1部分介绍三角形的有关概念、三角形的三边之间的关系及三角形的内角和定理，明确将“三角形任意两边的和大于第三边”作为公理并称之为“三角不等式”.

第2部分介绍三角形全等的概念、性质与判定，将“边边边”“边角边”“角边角”作为全等判定的3个公理，并学习以它们为依据进行尺规作图，以及应用它们证明三角形中的边、角相等.

第18章　等腰三角形

本章介绍等腰三角形、等边三角形以及线段的垂直平分线的性质与判定. 其中，“有一个内角等于60°的等腰三角形是等边三角形”只作为例题出现，不作为等边三角形的判定定理.

综合与实践

本册安排两个内容：“积木可以叠多远?”“田径比赛中的数学”.

“积木可以叠多远?”取材于“里拉斜塔”实验，是与物理学科相结合的实践活动，引导学生在活动过程中逐步理解和掌握多块积木最远延伸长度的计算方法，从中感悟从简单到复杂的探究思路.

“田径比赛中的数学”是与体育相结合的实践活动，通过对田赛中的成绩测量和径赛中的

跑道起点设置方法的考查，引导学生运用所学的数学知识理解和解决实际问题，用数学的眼光观察身边的世界.

本册教科书聚焦逻辑推理，循序渐进地提高论证要求，旨在让学生逐步形成严密的逻辑思维，培养他们的逻辑表达能力. 本册教科书中引进了两种几何论证的书写格式. 为了便于学生书写及教师批改与纠正，除了通常的数学证明格式外，在例题的证明中，引进符号“∵”和“∴”，将推理的条件与结论分行书写，并将一些重要的推理依据写在结论后面的括号中. 对于推理依据，在本册教学中可要求学生写明本册教科书中出现的定义、定理、公理等重要性质或结论，在八年级的教学中可要求学生写明当前章节中学习的定义、定理、公理等重要性质或结论，在九年级时则只需在必要时写明即可.

第 15 章　一元一次不等式

一、本章概述

1. 总体要求

数量之间可能相等，也可能不相等. 相等关系与不等关系是最基本的数量关系，等式与不等式分别是表示相应数量关系的基本工具. 学生在六年级已经学习了用数轴上的点表示有理数及借助数轴比较两个有理数的大小，对不等式的意义已经有了初步了解. 本章的任务是引导学生类比等式探索不等式的基本性质，能用不等式的基本性质对不等式进行变形，并在此基础上学会解数字系数的一元一次不等式与一元一次不等式组，能在数轴上表示出解集. 同时，学生还应学会列一元一次不等式解一些简单的实际问题. 本章知识是学习函数等后续初中内容的重要基础，也是高中继续学习不等式的铺垫.

解一元一次不等式与一元一次不等式组，是一个依据规则推出结论的过程. 要引导学生在学习过程中发展运算能力，发展模型观念，帮助学生逐步养成重论据、合逻辑的思维习惯和一丝不苟、严谨求实的科学态度.

2. 课时安排建议

本章共 10 课时，具体课时分配建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
15.1 不等式及其性质	2	不等式及其性质　2 课时
习题课	1	
15.2 一元一次不等式	3	不等式的解和解集　1 课时
		解一元一次不等式　1 课时
		一元一次不等式的应用　1 课时
习题课	1	
15.3 一元一次不等式组	2	一元一次不等式组　2 课时
复习与小结	1	

3. 内容编排与特色

本章内容分为三节，分别是“15.1 不等式及其性质”“15.2 一元一次不等式”和“15.3 一元一次不等式组”.

关于“不等式的性质”，主要是借助数轴和特例，由等式的性质类比得到. 先由“数轴上的两点，一点或者在另一点的左边、或者在另一点的右边、或者与另一点重合，三种情形有且只有一种情形成立”这一事实，得到不等式性质 1：对于任意给定的两个数 a、b，在 $a>b$、$a<b$、$a=b$ 三种情形中，有且仅有一种情形成立. 再借助数轴得到不等式性质 2：大于关系具有传递性. 不等式性质 3、4、5 对应上海“二期课改”教科书中的“不等式性质 1、2、3”，实质是不等式的运算性质. 考虑到学生的年龄特征及接受能力，此处只通过个别例子加以说明，将严格的证明留到高中.

关于“一元一次不等式”，类比一元一次方程，先给出不等式的解、一元一次不等式、不等式的解集等概念，并在数轴上表示解集. 再通过例子归纳出解一元一次不等式的步骤：(1)将不等式化为 $ax>b$(或 $ax<b$、$ax\geqslant b$、$ax\leqslant b$)的形式；(2)不等式的两边同除以系数 a 得到解集. 最后利用一元一次不等式解决简单的实际问题.

关于“一元一次不等式组”，先通过实际问题引出一元一次不等式组和不等式组的解集的概念，再通过例子归纳出解一元一次不等式组的步骤，点明其关键环节：利用数轴确定各个不等式的解集的公共部分.

本章特色是较为完整地呈现了不等式性质.

4. 教学提示

注意知识之间的区别与联系. 例如，不等式的性质可以由等式的性质类比引入，但要关注到不等式性质与等式性质的相同点与不同点，特别是，等号没有“方向”，而不等号是有“方向”的，不等式两边乘同一个负数，不等号的方向改变. 又如，对比解一元一次不等式与解一元一次方程，抓住两者的区别，这样学生在已经掌握一元一次方程的基础上，就比较容易掌握解一元一次不等式的步骤和有关的概念、原理.

重视数形结合思想的运用. 数轴可以让抽象的不等号直观化，要引导学生充分用好这一工具. 例如，借助数轴来理解不等式的性质、在数轴上表示一元一次不等式的解集、借助数轴求解一元一次不等式组等.

准确把握教学的深度与广度. 本章学习不等式性质主要是为了给解一元一次不等式(组)提供依据，不等式性质本身的推理论证和利用不等式性质证明不等式，不是这一阶段的学习目标. 不等式的解集中包含的数，实际上不全是有理数. 如 $x>1$ 的解集是指大于 1 的全体实数，数轴上“1”右面的点所对应的数都是该不等式的解. 由于本章内容安排在有理数之后、实数之前，因此不必在此时就解集中的数是否一定是有理数等问题展开讨论. 将来学习实数之后，学生会更好地理解其含义.

5. 评价建议

准确利用不等式性质对不等式进行变形，能解数字系数的一元一次不等式，会用数轴确定两个一元一次不等式组成的不等式组的解集，能根据具体问题中的数量关系，列一元一次不等式解决简单的实际问题，这些是本章的基本要求. 这些要求要在教学评价中根据学生的实际情况予以落实，但不宜拔高. 如含字母系数的一元一次不等式解的讨论、解三个及三个以上的不等式组成的不等式组，在现阶段不是必要的.

要鼓励学生使用不等式的有关符号、概念与性质进行思考与表达，逐步养成言必有据的思维习惯和一丝不苟的科学态度.

二、教科书分析与教学建议

15.1 不等式及其性质

本节教学目标

（1）结合具体问题，了解不等式的意义，探索不等式的基本性质，会运用这些性质对不等式进行简单变形，发展推理能力.

（2）在用不等式表达数量关系和运用不等式性质的过程中，养成言必有据的科学态度与思维习惯.

（以下分析对应课本第 2～3 页）

本课教学重点

理解不等号的含义，会用不等式表示数量间的不等关系.

本课教学建议

（1）对于“$\geqslant$”和“$\leqslant$”，教学中要结合学生熟悉的具体问题展开说明，可通过相应的文字语言“不小于”“不大于”“大于或等于”“小于或等于”等来帮助理解. 例如，“x 是非负数”可表示为“$x\geqslant 0$”，其含义是“x 是正数或 $x=0$”. 教学中要让学生对此有准确的理解，例如，在逻辑上，$3\geqslant 0$、$0\geqslant 0$ 都是正确的.

（2）对于不等式性质 1、2，可以先复习用数轴上的点表示有理数和有理数的大小比较的有关内容，从而借助数轴帮助学生从直观上确认这两条性质的合理性与可靠性.

15.1 不等式及其性质

在自然界和日常生活中存在着各种大小关系，如月球的质量比地球的小，飞机的速度比汽车的快，直角大于锐角，商品打折后的价格比原价低，等等. 可以说，数量的大小比较无处不在，而表示数量的大小关系需要用到不等式.

对于数 a、b，符号 $a>b$ 表示 a 大于 b；符号 $b<a$ 表示 b 小于 a. $b<a$ 就是 $a>b$.

除“$>$”和“$<$”外，不等号还有“$\geqslant$”和“$\leqslant$”. $a\geqslant b$ 表示 $a>b$ 或 $a=b$，读作“a 大于(或)等于 b”. 同样地，$a\leqslant b$ 表示 $a<b$ 或 $a=b$，读作“a 小于(或)等于 b”.

用等号“$=$”连接的式子叫作等式，类似地，用不等号“$>$”“$<$”“$\geqslant$”“$\leqslant$”连接的式子，叫作不等式. 不等式与等式一样，都是研究数量关系的工具.

例 1 用适当的不等式表示下列关系：

(1) x 的 2 倍大于 1；

(2) a 的绝对值大于等于 a；

(3) 圆周率 π 大于 3 且小于 4.

解 (1) $2x>1$.

(2) $|a|\geqslant a$.

(3) $3<\pi<4$.

数的大小关系可以用其在数轴上对应的点的位置关系来表示. 数轴上右边的点所表示的数比左边的点所表示的数大. 设数 a、b、c 在数轴上对应的点分别为 A、B、C，点 A 或者在点 B 的右边、或者在点 B 的左边、或者与点 B 重合. 由此可以得出：

不等式性质 1 对于任意给定的两个数 a、b，在 $a>b$、$a<b$、$a=b$ 三种情形中，有且只有一种情形成立.

2 第15章 一元一次不等式

本课内容分析

此前，学生已学过有理数的大小比较、线段的大小比较、角的大小比较.

在 $a\geqslant b$ 中，只要“$>$”和“$=$”两个中的一个成立，不等式 $a\geqslant b$ 就成立了.

例 1 用适当的不等式表示大小关系，将文字语言转化为符号语言.

不等式性质 1 被称为三岐性. 可以借助数轴上两个点的位置关系直观地认识这一性质.

若点 A 在点 B 的右边，点 B 在点 C 的右边，则点 A 在点 C 的右边. 由此可以得出：

不等式性质 2　如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$.

如同相等关系具有传递性，不等式性质 2 表明大于关系也具有传递性. 同样地，“$\geqslant$”“$\leqslant$”与“$<$”也具有传递性.

思考

写出用不等号“$<$”表示的传递性.

课堂练习 15.1(1)

1. 用适当的不等式表示下列关系：

(1) a 与 5 的和大于 -3；

(2) a 的 4 倍小于等于 12；

(3) a 的 3 倍减去 2 的差是一个非负数；

(4) a 的一半小于 a 与 b 的积.

2. 用适当的不等号填空：

(1) 如果 a 是正数，那么 a________0；

(2) 如果 a 是负数，那么 a________0；

(3) 如果 $a\geqslant b$，$b\geqslant c$，那么 a________c.

在等式的两边同加(或减)一个数，等式仍成立；在等式的两边同乘(或除以不等于 0 的)一个数，等式仍成立. 不等式是否存在类似的性质呢？观察几个具体例子：

(1) 在 $5>2$ 的两边同加 3，$8>5$ 成立；在 $1<8$ 的两边同减 3，$-2<5$ 成立.

(2) 在 $5>2$ 的两边同乘 3，$15>6$ 成立；在 $12>-8$ 的两边同除以 4，$3>-2$ 成立.

不等式性质 2 是不等号的传递性. 在此特别指出，“$\neq$”不具有传递性，不能由 $a\neq b$，$b\neq c$ 推出 $a\neq c$.

课堂练习 15.1(1)

1. (1) $a+5>-3$.

(2) $4a\leqslant 12$.

(3) $3a-2\geqslant 0$.

(4) $\frac{1}{2}a<ab$.

2. (1) $>$.

(2) $<$.

(3) $\geqslant$.

（以下分析对应课本第 3～5 页）

本课教学重点

通过具体实例，探索不等式性质 3、性质 4 和性质 5. 能运用这些性质对不等式进行变形.

本课教学建议

（1）对不等式性质 5，学生容易出错，教学中要充分重视. 要让学生明白不等号是有方向的. 可以多举几个例子，并借助数轴帮助理解. 例如，在不等式 $3>2$ 两边同乘 -1 后，结果怎么样？$5\geqslant -6$ 两边同乘 -1 后结果会是什么？

（2）与解方程类似，移项是解不等式的基本操作，应掌握.

（3）教学中宜多举几个不等式变形的例子，追问变形的理由. 例如，由 $a>b$ 得出 $ac^2>bc^2$，错在何处？通过正面和反面的例子，掌握不等式变形的方法.

（4）注意比较等式和不等式在变形化简方面的异同之处.

若点 A 在点 B 的右边，点 B 在点 C 的右边，则点 A 在点 C 的右边. 由此可以得出：

不等式性质 2 如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$.

如同相等关系具有传递性，不等式性质 2 表明大于关系也具有传递性. 同样地，“$\geqslant$”“$\leqslant$”与“$<$”也具有传递性.

思考

写出用不等号“$<$”表示的传递性.

课堂练习 15.1(1)

1. 用适当的不等式表示下列关系：

(1) a 与 5 的和大于 -3；

(2) a 的 4 倍小于等于 12；

(3) a 的 3 倍减去 2 的差是一个非负数；

(4) a 的一半小于 a 与 b 的积.

2. 用适当的不等号填空：

(1) 如果 a 是正数，那么 a________0；

(2) 如果 a 是负数，那么 a________0；

(3) 如果 $a\geqslant b$，$b\geqslant c$，那么 a________c.

在等式的两边同加(或减)一个数，等式仍成立；在等式的两边同乘(或除以不等于 0 的)一个数，等式仍成立. 不等式是否存在类似的性质呢？观察几个具体例子：

(1) 在 $5>2$ 的两边同加 3，$8>5$ 成立；在 $1<8$ 的两边同减 3，$-2<5$ 成立.

(2) 在 $5>2$ 的两边同乘 3，$15>6$ 成立；在 $12>-8$ 的两边同除以 4，$3>-2$ 成立.

15.1 不等式及其性质 | 3

本课内容分析

教科书是从有理数运算实例出发，类比等式的性质归纳出不等式的运算性质的.

(3) 在 $5>2$ 的两边同乘 -1，发现 $-5<-2$；在 $-10<4$ 的两边同除以 -2，发现 $5>-2$.

一般地，不等式有下述性质. 我们以“$>$”为例表述这些性质，其他不等号类似.

不等式性质 3 不等式的两边同加(或减)一个数，不等号的方向不变.

比如，如果 $a>b$，那么 $a+m>b+m$，$a-m>b-m$.

不等式性质 4 不等式的两边同乘(或除以)一个正数，不等号的方向不变.

比如，如果 $a>b$，$m>0$，那么 $am>bm$，$\frac{a}{m}>\frac{b}{m}$.

不等式性质 5 不等式的两边同乘(或除以)一个负数，不等号的方向改变.

比如，如果 $a>b$，$m<0$，那么 $am<bm$，$\frac{a}{m}<\frac{b}{m}$.

不等式的这些性质，是我们研究和求解不等式的基础.

例 2 设 $a<b$，用适当的不等号填空，并说明理由：

(1) $a-b$________0；

(2) $-2a$________$-2b$；

(3) $2a+3$________$2b+3$.

解 (1) 填“$<$”，即 $a-b<0$.

理由：在 $a<b$ 的两边同减 b，就得到 $a-b<0$.

(2) 填“$>$”，即 $-2a>-2b$.

理由：在 $a<b$ 的两边同乘 -2，就得到 $-2a>-2b$.

(3) 填“$<$”，即 $2a+3<2b+3$.

4 第15章 一元一次不等式

不等式性质 3、4 和等式相应性质类似，但不等式性质 5 则不然. 在不等式的两边同乘(或除以)一个负数，不等号的方向要改变，如大于号变成小于号、大于等于号变成小于等于号等，这点在教学中要加以强调.

根据学生的实际情况，也可以借助数轴上点的位置和四则运算的几何意义(例如，加 3，相当于把相应的点往右边平移 3 个单位；乘 -1，相当于找出原数的相反数在数轴上对应的点)，直观地认识这些性质.

通过在例 2 中填写适当的不等号和在例 3 中陈述变形理由，掌握如何运用不等式性质. 其中，例 2(1)(2)分别仅使用不等式性质一次，例 2(3)连用不等式性质两次.

例 3(1)指出了不等式中的移项方法.

课堂练习 15.1(2)

1. (1) $<$；不等式性质 5.

(2) $>$；不等式性质 3.

(3) $>$；不等式性质 4.

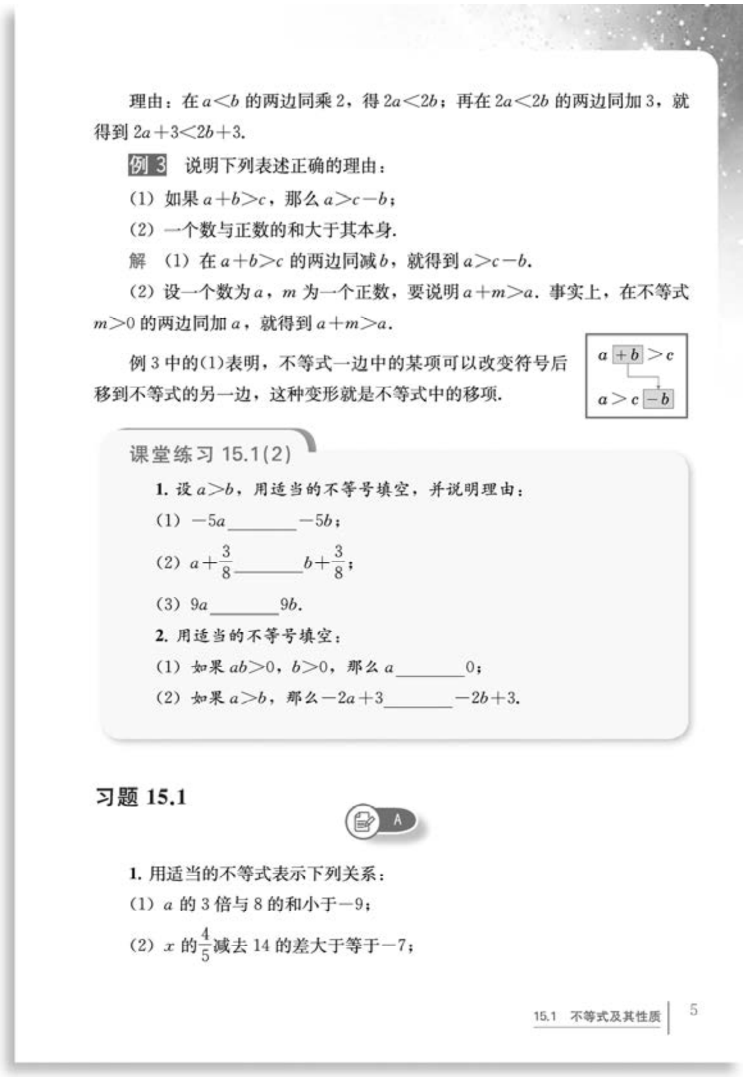
2. (1) $>$.

(2) $<$.

习题 15.1

1. (1) $3a+8<-9$.

(2) $\frac{4}{5}x-14\geqslant-7$.



理由：在 $a<b$ 的两边同乘 2，得 $2a<2b$；再在 $2a<2b$ 的两边同加 3，就得到 $2a+3<2b+3$.

例 3 说明下列表述正确的理由：

(1) 如果 $a+b>c$，那么 $a>c-b$；

(2) 一个数与正数的和大于其本身.

解 (1) 在 $a+b>c$ 的两边同减 b，就得到 $a>c-b$.

(2) 设一个数为 a，m 为一个正数，要说明 $a+m>a$. 事实上，在不等式 $m>0$ 的两边同加 a，就得到 $a+m>a$.

例 3 中的(1)表明，不等式一边中的某项可以改变符号后移到不等式的另一边，这种变形就是不等式中的移项.

$a\boxed{+b}>c$

$a>c\boxed{-b}$

课堂练习 15.1(2)

1. 设 $a>b$，用适当的不等号填空，并说明理由：

(1) $-5a$______$-5b$；

(2) $a+\frac{3}{8}$______$b+\frac{3}{8}$；

(3) $9a$______$9b$.

2. 用适当的不等号填空：

(1) 如果 $ab>0$，$b>0$，那么 a______0；

(2) 如果 $a>b$，那么 $-2a+3$______$-2b+3$.

习题 15.1

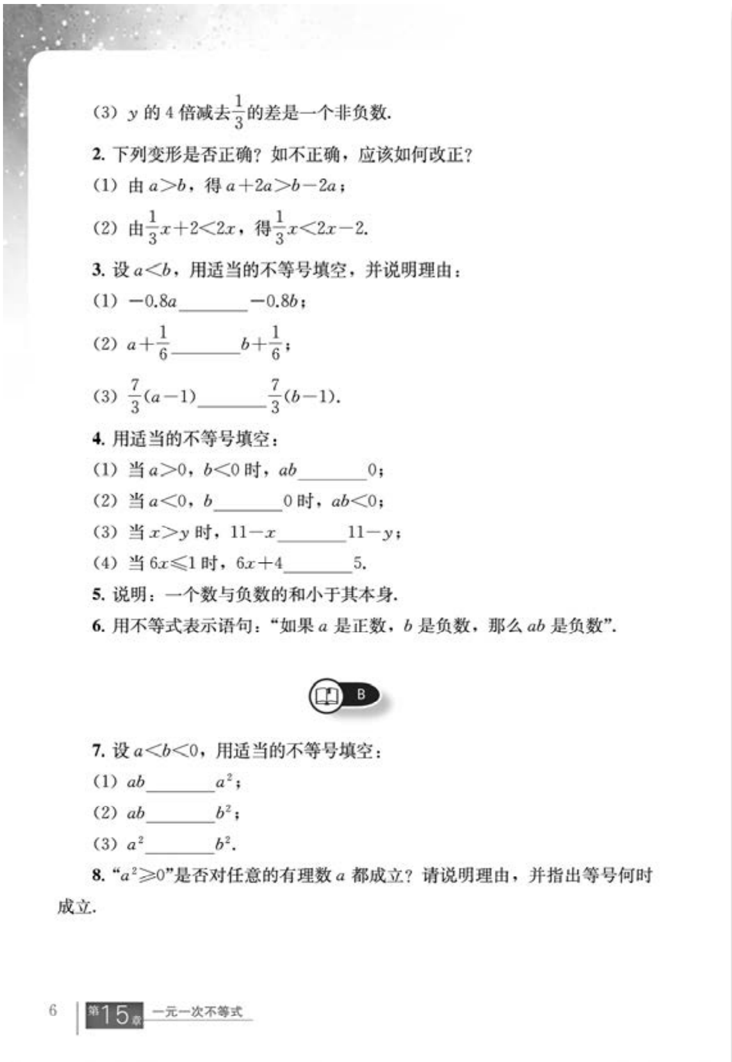
A

1. 用适当的不等式表示下列关系：

(1) a 的 3 倍与 8 的和小于 -9；

(2) x 的 $\frac{4}{5}$ 减去 14 的差大于等于 -7；

15.1 不等式及其性质 5



(3) y 的 4 倍减去$\frac{1}{3}$的差是一个非负数.

2. 下列变形是否正确？如不正确，应该如何改正？

(1) 由 $a>b$，得 $a+2a>b-2a$；

(2) 由$\frac{1}{3}x+2<2x$，得$\frac{1}{3}x<2x-2$.

3. 设 $a<b$，用适当的不等号填空，并说明理由：

(1) $-0.8a$_______$-0.8b$；

(2) $a+\frac{1}{6}$_______$b+\frac{1}{6}$；

(3) $\frac{7}{3}(a-1)$_______$\frac{7}{3}(b-1)$.

4. 用适当的不等号填空：

(1) 当 $a>0$，$b<0$ 时，ab_______0；

(2) 当 $a<0$，b_______0 时，$ab<0$；

(3) 当 $x>y$ 时，$11-x$_______$11-y$；

(4) 当 $6x\leqslant1$ 时，$6x+4$_______5.

5. 说明：一个数与负数的和小于其本身.

6. 用不等式表示语句："如果 a 是正数，b 是负数，那么 ab 是负数".

B

7. 设 $a<b<0$，用适当的不等号填空：

(1) ab_______a^2；

(2) ab_______b^2；

(3) a^2_______b^2.

8. "$a^2\geqslant0$"是否对任意的有理数 a 都成立？请说明理由，并指出等号何时成立.

6 第15章 一元一次不等式

(3) $4y-\frac{1}{3}\geqslant0$.

2. (1) 不正确，应改为 $a+2a>b+2a$ 或者 $a-2a>b-2a$.

(2) 正确.

3. (1) $>$；不等式性质 5.

(2) $<$；不等式性质 3.

(3) $<$；不等式性质 3 和不等式性质 4.

4. (1) $<$.

(2) $>$.

(3) $<$.

(4) $\leqslant$.

5. 设 a 是任意一个数，b 是一个负数. 因为 b 是负数，所以 $b<0$. 根据不等式性质 3，$b+a<0+a$，即 $a+b<a$.

6. 如果 $a>0$，$b<0$，那么 $ab<0$.

7. (1) $<$.

(2) $>$.

(3) $>$.

8. 对任意的有理数 a，$a^2\geqslant0$ 都成立. 因为如果 $a>0$，那么 $a^2>0\times a$，即 $a^2>0$；如果 $a<0$，那么 $a^2>0\times a$，即 $a^2>0$；如果 $a=0$，那么 $a^2=0$. 当且仅当 $a=0$ 时，等号成立.

15.2　一元一次不等式

本节教学目标

（1）能解数字系数的一元一次不等式，并能在数轴上表示不等式的解集.

（2）能根据具体问题中的数量关系，列出一元一次不等式，解决简单的实际问题. 在这一过程中，发展模型观念.

（以下分析对应课本第 7～9 页）

本课教学重点

（1）理解不等式的解和解集，知道它们之间的关系.

（2）会在数轴上表示出不等式的解集.

本课教学建议

（1）与一元一次方程的相关知识作类比，比较解方程和解不等式方法上的异同.

（2）区别解和解集. 本套教科书中，不等式的一个解是指某个具体数值，解的全体是解集. 解不等式不是求出它的一个解，而是要求出解集.

（3）根据不等号中是否包含等号，在数轴上选取空心或实心点来表示不等式的解集. 形式不同的不等式可能有相同解集，具有相同解集的不等式可以有无数个.

（4）现阶段不等式中的数字系数都是有理数，涉及无理数系数的不等式，如 $\pi x>2$ 等，不必在此时提出.

15.2 一元一次不等式

1. 不等式的解和解集

对于方程，我们要研究方程的解和解方程的方法．对于含有未知数的不等式，同样也要研究不等式的解和解不等式的方法．

类比方程的解的意义，在含有未知数的不等式中，能使不等式成立的未知数的值，叫作不等式的解．在不等式 $2x-1>3$ 中，将 $x=3$，$x=5.6$ 代入验算，该不等式都成立，因此这些值都是该不等式的解；但 $x=2$，$x=0$ 却不能使该不等式成立，因而不是该不等式的解．

只含有一个未知数且未知数的次数是 1 的不等式叫作一元一次不等式．一元一次方程只有一个解，但一元一次不等式可能有无数个解．一个不等式的解的全体叫作不等式的解集．

不等式的解集可以在数轴上直观地表示出来，如不等式 $x<4$ 的解集在数轴上的表示如图 15-2-1 所示：

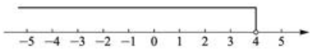


图 15-2-1

在表示 4 的点上画空心圈，表示 4 不包含在解集中．在表示 −5 的点上画实心点，表示 −5 包含在解集中．

不等式 $x\geqslant-5$ 的解集在数轴上的表示如图 15-2-2 所示：

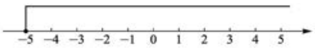


图 15-2-2

求不等式的解集的过程叫作解不等式．

例 1 求下列不等式的解集，并把它们分别在数轴上表示出来：

(1) $x-2<0$；

(2) $3x\geqslant-15$．

本课内容分析

因为学生还未学过集合的概念，所以教科书中用“解集”表达解的全体，不用“解的集合”这种表述．

需要指出，和方程 $x=2$ 的解是一个确定的有理数不同，不等式 $x>2$ 的解集应是大于 2 的一切实数．由于实数尚未学习，从学生角度所理解的是大于 2 的有理数．将来学过实数后，理解就会更加准确．

通过例 1 说明在数轴上表示不等式解集的方法．

解　(1) 不等式的两边同加 2，得 $x<2$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 15-2-3 所示：

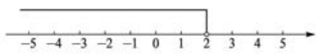


图 15-2-3

(2) 不等式的两边同除以 3，得 $x\geqslant -5$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 15-2-4 所示：

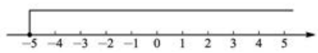


图 15-2-4

通过例 2 加深对在数轴上表示不等式的解集的理解.

例 2　分别写出一个关于 x 的不等式，使其解集在数轴上的表示如图 15-2-5、图 15-2-6 所示：

(1)

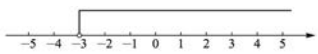


图 15-2-5

(2)

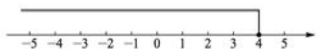


图 15-2-6

解　(1) $x>-3$.

(2) $x\leqslant 4$.

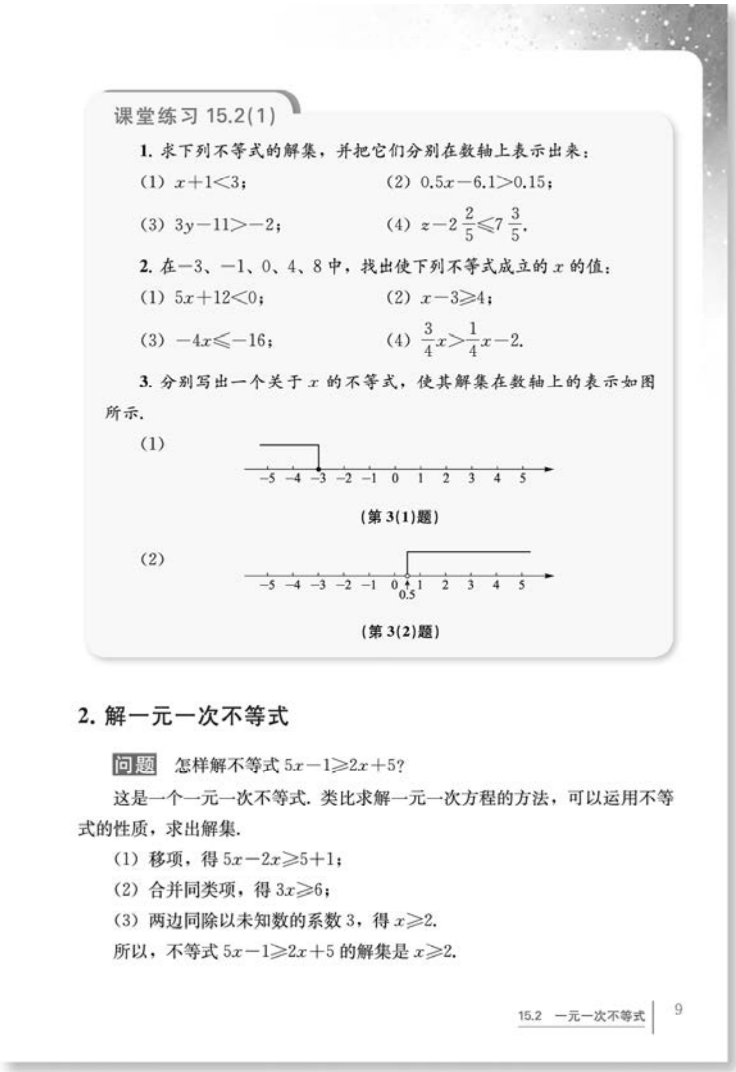
思考　具有相同解集的不等式有无数个.

思考

写出两个解集为 $x>-3$ 的不等式.

$x>-3$ 是不等式 $2x>-6$ 的解集，也是不等式 $-x<3$ 的解集. 不同的方程可能有相同的解，类似地，不同的不等式也可能有相同的解集.

8　第 15 章　一元一次不等式


课堂练习 15.2(1)

1. 求下列不等式的解集，并把它们分别在数轴上表示出来：

(1) $x+1<3$；　　(2) $0.5x-6.1>0.15$；

(3) $3y-11>-2$；　　(4) $z-2\frac{2}{5}\leqslant 7\frac{3}{5}$.

2. 在-3、-1、0、4、8 中，找出使下列不等式成立的 x 的值：

(1) $5x+12<0$；　　(2) $x-3\geqslant 4$；

(3) $-4x\leqslant -16$；　　(4) $\frac{3}{4}x>\frac{1}{4}x-2$.

3. 分别写出一个关于 x 的不等式，使其解集在数轴上的表示如图所示.

(1)

(第 3(1)题)

(2)

(第 3(2)题)

2. 解一元一次不等式

问题　怎样解不等式 $5x-1\geqslant 2x+5$？

这是一个一元一次不等式. 类比求解一元一次方程的方法，可以运用不等式的性质，求出解集.

(1) 移项，得 $5x-2x\geqslant 5+1$；

(2) 合并同类项，得 $3x\geqslant 6$；

(3) 两边同除以未知数的系数 3，得 $x\geqslant 2$.

所以，不等式 $5x-1\geqslant 2x+5$ 的解集是 $x\geqslant 2$.

15.2 一元一次不等式　9

课堂练习 15.2(1)

1.（1）$x<2$.

（2）$x>12.5$.

（3）$y>3$.

（4）$z\leqslant 10$.

数轴上的表示略.

2.（1）-3.

（2）8.

（3）4、8.

（4）-3、-1、0、4、8.

3.（1）$x\leqslant -3$.

（2）$x>0.5$.

（以下分析对应课本第 9～11 页）

本课教学重点

能解一元一次不等式，并能在数轴上表示解集.

本课教学建议

（1）教学中应强调，将不等式化成形如 $ax>b$ 的形式后，两边同除以系数 a 时，要注意 a 的符号，正号时不等号方向不变，负号时不等号方向改变，这是正确解不等式的关键.

（2）应认识到解不等式的依据是不等式性质，不等式变形时应步步有依据.

（3）可以选择系数为整数、分数或小数的不等式进行练习. 教学中应注意去分母、去括号、移项、合并同类项等环节，引导学生熟练、正确地解不等式，并能在数轴上表示解集，发展学生的运算能力.

课堂练习 15.2(1)

1. 求下列不等式的解集，并把它们分别在数轴上表示出来：

(1) $x+1<3$；　　(2) $0.5x-6.1>0.15$；

(3) $3y-11>-2$；　　(4) $z-2\frac{2}{5}\leqslant 7\frac{3}{5}$.

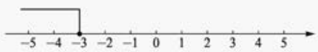
2. 在-3、-1、0、4、8 中，找出使下列不等式成立的 x 的值：

(1) $5x+12<0$；　　(2) $x-3\geqslant 4$；

(3) $-4x\leqslant -16$；　　(4) $\frac{3}{4}x>\frac{1}{4}x-2$.

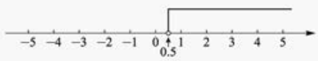
3. 分别写出一个关于 x 的不等式，使其解集在数轴上的表示如图所示.

(1)



(第 3(1) 题)

(2)



(第 3(2) 题)

2. 解一元一次不等式

问题　怎样解不等式 $5x-1\geqslant 2x+5$?

这是一个一元一次不等式. 类比求解一元一次方程的方法，可以运用不等式的性质，求出解集.

(1) 移项，得 $5x-2x\geqslant 5+1$；

(2) 合并同类项，得 $3x\geqslant 6$；

(3) 两边同除以未知数的系数 3，得 $x\geqslant 2$.

所以，不等式 $5x-1\geqslant 2x+5$ 的解集是 $x\geqslant 2$.

15.2 一元一次不等式　9

本课内容分析

通过实例，归纳解一元一次不等式的方法和步骤.

解一元一次不等式的一般步骤是：

(1) 化简不等式(去分母、去括号、移项、合并同类项)成 $ax>b$(或 $ax<b$ 等)的形式；

(2) 两边同除以未知数的系数，得到不等式的解集.

不等式的两边同除以未知数的系数时，要考查系数 a 的正负. 当 $a>0$ 时，不等号的方向不变；当 $a<0$ 时，不等号的方向改变.

通过例 3、例 4，掌握一元一次不等式的解法.

例 3 解不等式 $3x+12>40-x$，并在数轴上表示出它的解集.

解 移项，得

$$3x+x>40-12,$$

即

$$4x>28.$$

两边同除以 x 的系数 4，得

$$x>7.$$

所以，原不等式的解集是 $x>7$. 它在数轴上的表示如图 15-2-7 所示：

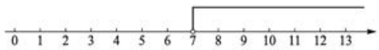


图 15-2-7

例 4 化简后，不等式中未知数的系数是负数. 也可以先化成 $30x\leqslant-45$，再求解.

例 4 解不等式 $\dfrac{2x-5}{16}\geqslant\dfrac{4x+3}{2}+1$，并在数轴上表示出它的解集.

解 不等式的两边同乘 16，得

$$2x-5\geqslant8(4x+3)+16.$$

去括号，得

$$2x-5\geqslant32x+40.$$

移项、合并同类项，得

$$-30x\geqslant45.$$

两边同除以 x 的系数 -30，得

$$x\leqslant-\frac{3}{2}.$$

10 | 第15章 一元一次不等式

所以，原不等式的解集是 $x \leqslant -\frac{3}{2}$. 它在数轴上的表示如图 15-2-8 所示：

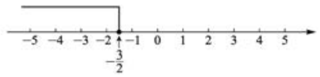


图 15-2-8

课堂练习 15.2(2)

1. 下列解法中，正确的是 （　）

A. $-x \geqslant -5$，两边同乘 -1，得 $x \geqslant 5$；

B. $-x \leqslant -5$，两边同乘 -1，得 $x \leqslant 5$；

C. $2x \geqslant -6$，两边同除以 -2，得 $x \leqslant 3$；

D. $-2x \geqslant -6$，两边同除以 -2，得 $x \leqslant 3$.

2. 解下列不等式，并分别在数轴上表示出它们的解集：

(1) $7x < 6x - 3$；　　(2) $5x - 12 < 8x - 33$；

(3) $\frac{5}{4}x + 4 \leqslant \frac{8}{3}x - 1$；　　(4) $3(6x+7) \geqslant 8 - 2(5x-9)$.

3. 一元一次不等式的应用

方程和不等式都是解决实际问题的基本工具.

例 5 某校七年级师生共 284 人乘车外出春游，如果每辆车可乘 48 人，那么至少需要多少辆车？

解　设需要 x 辆车，根据题意，得

$$48x \geqslant 284.$$

解这个不等式，得

$$x \geqslant \frac{71}{12}.$$

该解集在数轴上的表示如图 15-2-9 所示：

课堂练习 15.2(2)

1. D.

2. (1) $x < -3$.

(2) $x > 7$.

(3) $x \geqslant \frac{60}{17}$.

(4) $x \geqslant \frac{5}{28}$.

数轴上的表示略.

（以下分析对应课本第 11～13 页）

本课教学重点

根据具体问题中的数量关系，列出一元一次不等式，解决简单的实际问题.

本课教学建议

应用不等式求解实际问题，首先要分析问题中涉及的量以及这些量之间的数量关系，再设合适的未知数，用未知数参与运算表示有关的量，然后用不等式表示相应的不等关系，最后，在求出不等式的解集后，还应结合具体情形，给出符合实际的答案. 这和用方程解决实际问题的思想是一致的. 所不同的是，方程表示相等关系，不等式表示不等关系.

所以，原不等式的解集是 $x \leqslant -\frac{3}{2}$. 它在数轴上的表示如图 15-2-8 所示：

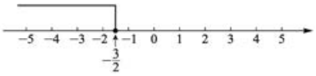


图 15-2-8

课堂练习 15.2(2)

1. 下列解法中，正确的是 （ ）

A. $-x \geqslant -5$，两边同乘 -1，得 $x \geqslant 5$；

B. $-x \leqslant -5$，两边同乘 -1，得 $x \leqslant 5$；

C. $2x \geqslant -6$，两边同除以 -2，得 $x \leqslant 3$；

D. $-2x \geqslant -6$，两边同除以 -2，得 $x \leqslant 3$.

2. 解下列不等式，并分别在数轴上表示出它们的解集：

（1）$7x < 6x - 3$； （2）$5x - 12 < 8x - 33$；

（3）$\frac{5}{4}x + 4 \leqslant \frac{8}{3}x - 1$； （4）$3(6x+7) \geqslant 8 - 2(5x-9)$.

3. 一元一次不等式的应用

方程和不等式都是解决实际问题的基本工具.

例 5 某校七年级师生共 284 人乘车外出春游，如果每辆车可乘 48 人，那么至少需要多少辆车？

解 设需要 x 辆车，根据题意，得

$$48x \geqslant 284.$$

解这个不等式，得

$$x \geqslant \frac{71}{12}.$$

该解集在数轴上的表示如图 15-2-9 所示：

15.2 一元一次不等式 11

本课内容分析

教科书通过例题，以例说理，学习应用一元一次不等式解决实际问题的步骤和方法.

例 5 涉及用不等式表达含有“至少”“至多”等字样的不等关系，是个比较简单的问题，但应注意满足不等式的最小整数才是问题的答案.

例 6 要注意解集中的最小正整数解才是问题的答案.

例 7 数量之间的关系相对复杂，重点关注如何选择合适的未知量设元，正确表达有关的数量及它们之间的关系. 先正确求得学生数，再得出奖品至少有多少个.

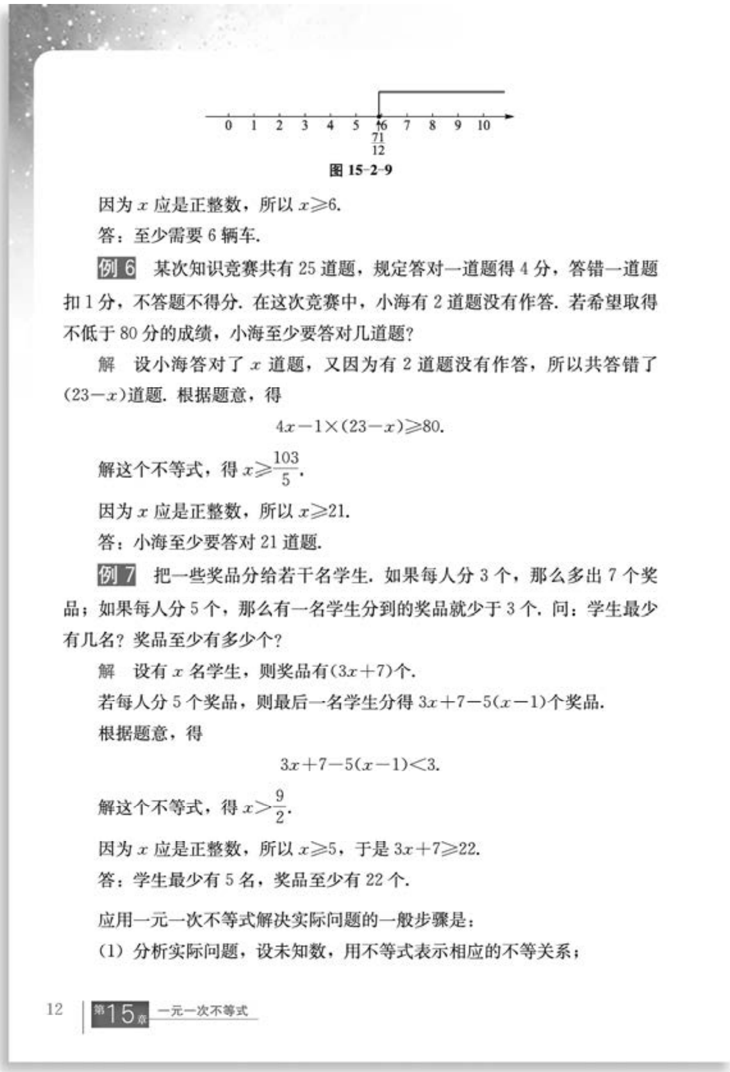


图 15-2-9

因为 x 应是正整数，所以 $x\geqslant 6$.

答：至少需要 6 辆车.

例 6 某次知识竞赛共有 25 道题，规定答对一道题得 4 分，答错一道题扣 1 分，不答题不得分. 在这次竞赛中，小海有 2 道题没有作答. 若希望取得不低于 80 分的成绩，小海至少要答对几道题?

解 设小海答对了 x 道题，又因为有 2 道题没有作答，所以共答错了 $(23-x)$ 道题. 根据题意，得

$$4x-1\times(23-x)\geqslant 80.$$

解这个不等式，得 $x\geqslant\frac{103}{5}$.

因为 x 应是正整数，所以 $x\geqslant 21$.

答：小海至少要答对 21 道题.

例 7 把一些奖品分给若干名学生. 如果每人分 3 个，那么多出 7 个奖品；如果每人分 5 个，那么有一名学生分到的奖品就少于 3 个. 问：学生最少有几名？奖品至少有多少个?

解 设有 x 名学生，则奖品有 $(3x+7)$ 个.

若每人分 5 个奖品，则最后一名学生分得 $3x+7-5(x-1)$ 个奖品.

根据题意，得

$$3x+7-5(x-1)<3.$$

解这个不等式，得 $x>\frac{9}{2}$.

因为 x 应是正整数，所以 $x\geqslant 5$，于是 $3x+7\geqslant 22$.

答：学生最少有 5 名，奖品至少有 22 个.

应用一元一次不等式解决实际问题的一般步骤是：

(1) 分析实际问题，设未知数，用不等式表示相应的不等关系；

12 第 15 章 一元一次不等式

（2）解不等式；

（3）结合实际情形，检验并确定最终结论.

课堂练习 15.2(3)

1. 一部电梯的额定载重量为 1 000 kg，某人用这部电梯把一批相同质量的货物从底层搬到顶层. 该人体重为 65 kg，每箱货物的质量为 60 kg. 问：每次最多能搬运多少箱货物？

2. 根据篮球赛的规则，在三分线外投篮命中可得 3 分，在三分线内投篮命中可得 2 分. 某球队在一场篮球赛中不算罚篮共投中 40 个球，罚篮得 10 分，并且总分超过 100 分. 该球队至少投中了多少个三分球？

习题 15.2

A

1. 将下列数填入它们所在的解集中：

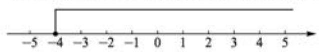
$$7、-5、3.2、-\frac{3}{4}、0、2\,023、-20.$$

（1）$x\geqslant -5$：________________；

（2）$x<5$：________________.

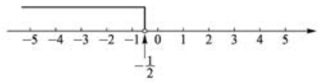
2. 分别写出一个关于 x 的不等式，使其解集在数轴上的表示如图所示.

（1）



（第 2(1)题）

（2）



（第 2(2)题）

课堂练习 15.2(3)

1. 设每次搬运 x 箱货物，依题意，$60x+65\leqslant 1\,000$. 解得 $x\leqslant\frac{187}{12}$. 因此每次最多能搬运 15 箱货物.

2. 设球队投中了 x 个三分球，依题意，$3x+2(40-x)+10>100$. 解得 $x>10$. 因此球队至少投中了 11 个三分球.

习题 15.2

1.（1）-5、$-\frac{3}{4}$、0、3.2、7、2 023.

（2）-20、-5、$-\frac{3}{4}$、0、3.2.

2.（1）$x\geqslant -4$.

（2）$x<-\frac{1}{2}$.

3. 设每千克苹果 x 元，则有 $4x+3\times 14\leqslant 100$. 解得 $x\leqslant 14.5$. 因此苹果每千克不能超过 14.5 元.

4. 设(3)班的捐款额为 x 元，则有 $\dfrac{420+468+x}{3}>450$. 解得 $x>462$. 因此(3)班的捐款额应超过 462 元.

5. (1) $x<3$.

(2) $x\geqslant -6$.

(3) $y\leqslant -9$.

(4) $z>-4$.

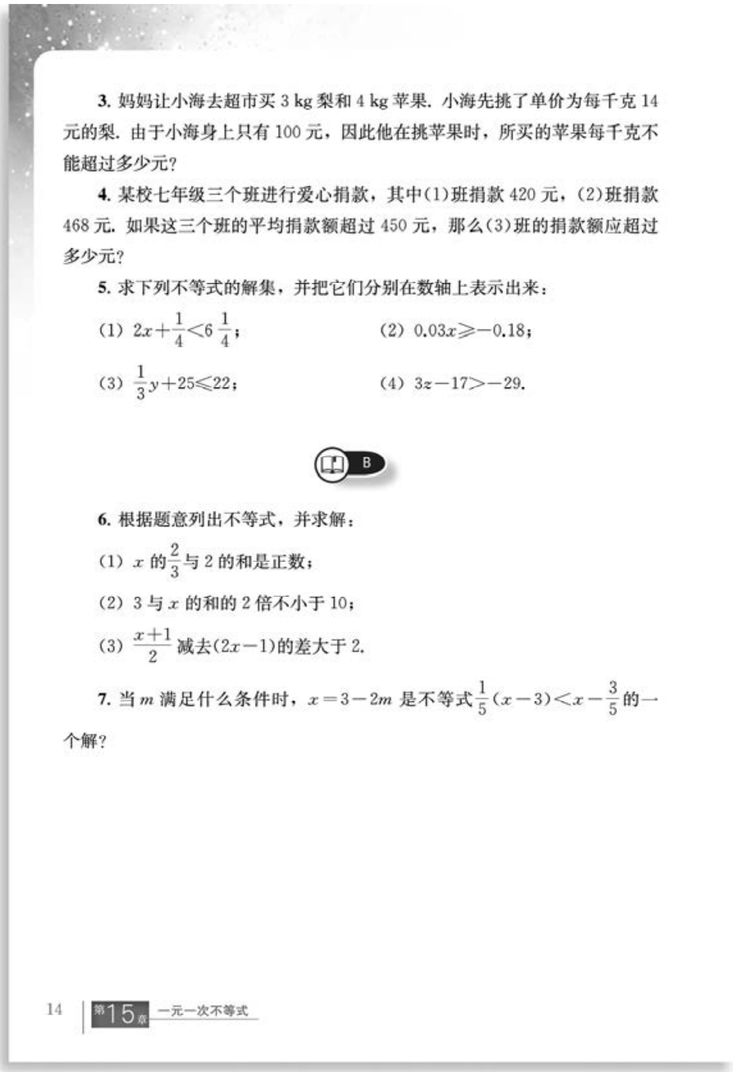
数轴上的表示略.

6. (1) $\dfrac{2}{3}x+2>0$，解集为 $x>-3$.

(2) $2(3+x)\geqslant 10$，解集为 $x\geqslant 2$.

(3) $\dfrac{x+1}{2}-(2x-1)>2$，解集为 $x<-\dfrac{1}{3}$.

7. $m<\dfrac{3}{2}$.



3. 妈妈让小海去超市买 3 kg 梨和 4 kg 苹果. 小海先挑了单价为每千克 14 元的梨. 由于小海身上只有 100 元，因此他在挑苹果时，所买的苹果每千克不能超过多少元？

4. 某校七年级三个班进行爱心捐款，其中(1)班捐款 420 元，(2)班捐款 468 元. 如果这三个班的平均捐款额超过 450 元，那么(3)班的捐款额应超过多少元？

5. 求下列不等式的解集，并把它们分别在数轴上表示出来：

(1) $2x+\frac{1}{4}<6\frac{1}{4}$；　　(2) $0.03x\geqslant -0.18$；

(3) $\frac{1}{3}y+25\leqslant 22$；　　(4) $3z-17>-29$.

B

6. 根据题意列出不等式，并求解：

(1) x 的 $\frac{2}{3}$ 与 2 的和是正数；

(2) 3 与 x 的和的 2 倍不小于 10；

(3) $\frac{x+1}{2}$ 减去 $(2x-1)$ 的差大于 2.

7. 当 m 满足什么条件时，$x=3-2m$ 是不等式 $\frac{1}{5}(x-3)<x-\frac{3}{5}$ 的一个解？

14　第15章 一元一次不等式

15.3　一元一次不等式组

本节教学目标

（1）会用数轴确定两个一元一次不等式组成的不等式组的解集.

（2）建立不等式组的解集与数轴之间的联系，发展几何直观.

（以下分析对应课本第 15～17 页）

本课教学重点

（1）理解一元一次不等式组的解和解集的概念.

（2）会借助数轴确定不等式组的解集.

本课教学建议

（1）解不等式组的关键是会求不等式组中所有不等式解集的公共部分，即在数轴上确定几个集合的交集. 教学中应结合实例引导学生理解其步骤和方法.

（2）可以通过具体实例，如解不等式组$\begin{cases}x>1,\\x\geqslant 2,\end{cases}$$\begin{cases}x\geqslant 1,\\x>2,\end{cases}$$\begin{cases}x\geqslant 1,\\x\geqslant 2\end{cases}$和$\begin{cases}x\leqslant 2,\\x\geqslant 2\end{cases}$等，让学生了解求“公共部分”的方法. 要让学生明确，如果不等式组中不等式的解集没有公共部分，那么该不等式组无解.

（3）在数轴上表示不等式组的解集时，应注意端点是空心还是实心.

本课内容分析

通过具体问题引入一元一次不等式组的概念，并在不等式的解的基础上，介绍不等式组的解集.

和方程组类似，大括号“{”表示括号后的两个不等式都要成立.

例 1 介绍了在数轴上表示两个不等式解集的公共部分的四种基本情形.

15.3 一元一次不等式组

问题 一件商品的成本是 30 元. 若按原价的八八折销售，至少可获得 10% 的利润；若按原价的九折销售，能获得不足 20% 的利润. 商品的原价满足什么条件?

分析　设这件商品的原价为 x 元，根据题意，x 必须同时满足下列两个不等式：

$$88\%x \geqslant 30+30\times10\% \text{ 和 } 90\%x<30+30\times20\%.$$

可以写为：
$$\begin{cases}88\%x\geqslant30+30\times10\%,\\90\%x<30+30\times20\%.\end{cases}$$

由几个含有同一个未知数的一元一次不等式组成的一组不等式叫作一元一次不等式组.

方程组中的未知数一般多于一个，如二元一次方程组 $\begin{cases}x+y=1,\\x-y=2\end{cases}$ 有两个未知数——x 和 y，但一元一次不等式组中的未知数只有一个.

不等式组中所有不等式的解集的公共部分叫作不等式组的解集.

例如，对于不等式组 $\begin{cases}2x+1>3,\\x\leqslant4,\end{cases}$ $x=2$ 同时满足两个不等式，它是这个不等式组的解. 虽然 $x=5$ 满足第一个不等式 $2x+1>3$，但不满足第二个不等式 $x\leqslant4$，因此 $x=5$ 不是这个不等式组的解. 类似地，$x=1$ 满足第二个不等式，但不满足第一个不等式，因此也不是这个不等式组的解.

求不等式组的解集的过程叫作解不等式组.

例 1 利用数轴确定下列不等式组的解集：

(1) $\begin{cases}x>4,\\x>8;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x<4,\\x<-3;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x<4.5,\\x>-3;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x>4,\\x<-3\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

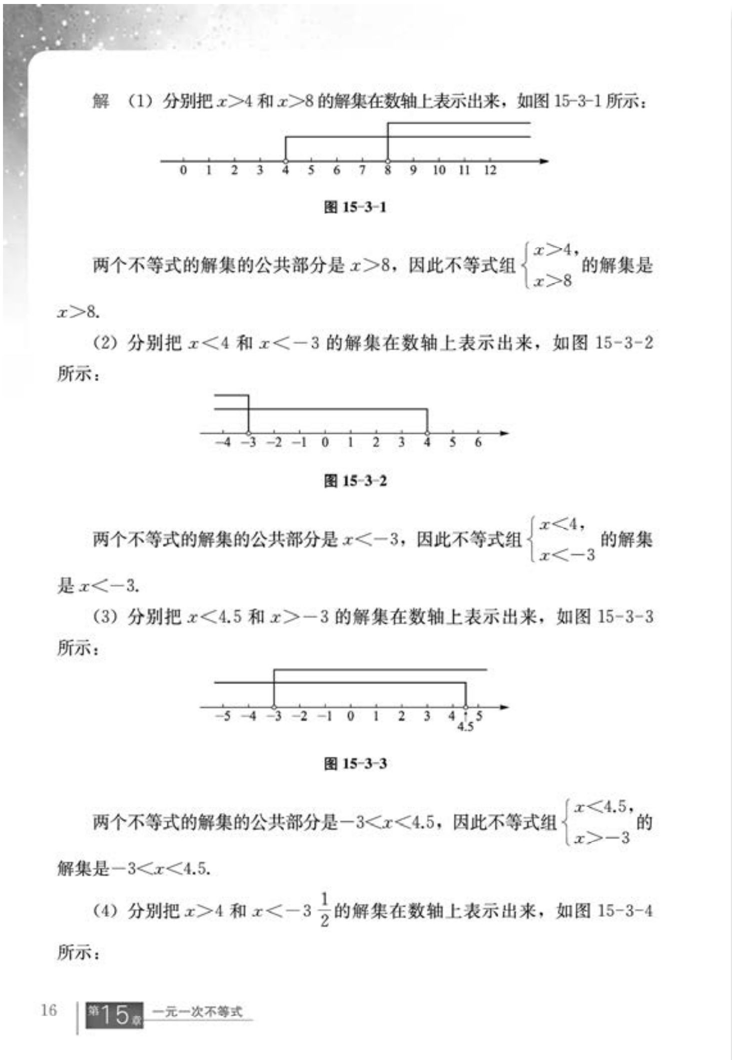

解 (1) 分别把 $x>4$ 和 $x>8$ 的解集在数轴上表示出来，如图 15-3-1 所示：

图 15-3-1

两个不等式的解集的公共部分是 $x>8$，因此不等式组 $\begin{cases} x>4, \\ x>8 \end{cases}$ 的解集是 $x>8$.

(2) 分别把 $x<4$ 和 $x<-3$ 的解集在数轴上表示出来，如图 15-3-2 所示：

图 15-3-2

两个不等式的解集的公共部分是 $x<-3$，因此不等式组 $\begin{cases} x<4, \\ x<-3 \end{cases}$ 的解集是 $x<-3$.

(3) 分别把 $x<4.5$ 和 $x>-3$ 的解集在数轴上表示出来，如图 15-3-3 所示：

图 15-3-3

两个不等式的解集的公共部分是 $-3<x<4.5$，因此不等式组 $\begin{cases} x<4.5, \\ x>-3 \end{cases}$ 的解集是 $-3<x<4.5$.

(4) 分别把 $x>4$ 和 $x<-3\frac{1}{2}$ 的解集在数轴上表示出来，如图 15-3-4 所示：

16 第15章 一元一次不等式

本节中出现了连用两个不等号表示解集的例子，如解集 $-3<x<4.5$，表示 $x>-3$ 且 $x<4.5$.

通过实例归纳出解一元一次不等式组的步骤.

课堂练习 15.3(1)

1.（1）$x>2$.

（2）$x<-5$.

（3）$-0.5<x\leqslant 2\frac{1}{3}$.

（4）无解.

数轴上的表示略.

2.（1）$x<a$.

（2）$x>b$.

（3）$a<x<b$.

（4）无解.

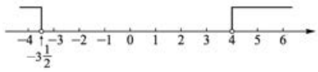


图 15-3-4

两个不等式的解集没有公共部分，因此不等式组$\begin{cases}x>4,\\x<-3\frac{1}{2}\end{cases}$无解.

解一元一次不等式组的一般步骤：

(1) 求出不等式组中各个不等式的解集，并分别在数轴上表示出来；

(2) 确定各个不等式的解集的公共部分，得到不等式组的解集.

课堂练习 15.3(1)

1. 利用数轴确定下列不等式组的解集：

(1) $\begin{cases}x>0,\\x>2;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x<1\frac{1}{2},\\x<-5;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x\leqslant 2\frac{1}{3},\\x>-0.5;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x\leqslant -7,\\x\geqslant 2\frac{2}{3}.\end{cases}$

2. 设 $a<b$，求下列不等式组的解集：

(1) $\begin{cases}x<a,\\x<b;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x>a,\\x>b;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x>a,\\x<b;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x<a,\\x>b.\end{cases}$

例 2 解不等式组：$\begin{cases}4x>2x-6, & ①\\10+3x>7x-30. & ②\end{cases}$

解　由①，得

15.3　一元一次不等式组　17

（以下分析对应课本第 17～19 页）

本课教学重点

解一元一次不等式组.

本课教学建议

（1）可改变例题中不等式组中的不等号，做变式训练.

（2）可根据学生的实际水平，适当补充求不等式组的整数解、正整数解的问题以及与不等式组相关的应用问题.

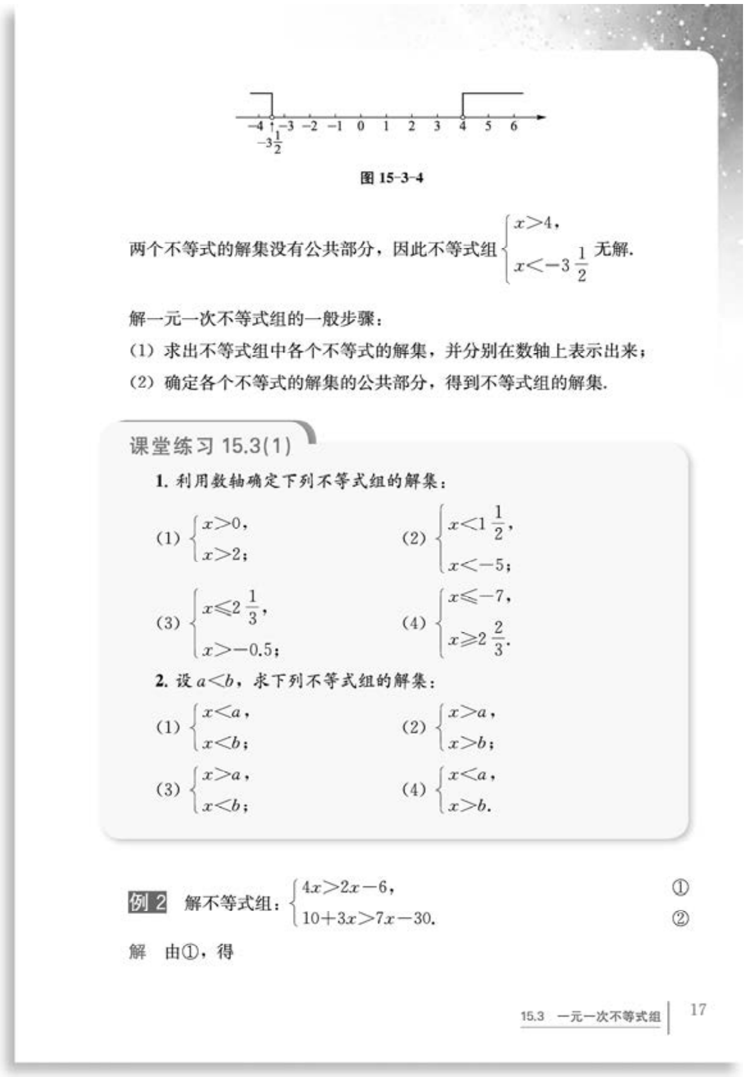


图 15-3-4

两个不等式的解集没有公共部分，因此不等式组$\begin{cases} x>4, \\ x<-3\dfrac{1}{2} \end{cases}$无解.

解一元一次不等式组的一般步骤：

(1) 求出不等式组中各个不等式的解集，并分别在数轴上表示出来；

(2) 确定各个不等式的解集的公共部分，得到不等式组的解集.

课堂练习 15.3(1)

1. 利用数轴确定下列不等式组的解集：

(1) $\begin{cases} x>0, \\ x>2; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x<1\dfrac{1}{2}, \\ x<-5; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x\leqslant 2\dfrac{1}{3}, \\ x>-0.5; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x\leqslant -7, \\ x\geqslant 2\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

2. 设 $a<b$，求下列不等式组的解集：

(1) $\begin{cases} x<a, \\ x<b; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x>a, \\ x>b; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x>a, \\ x<b; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x<a, \\ x>b. \end{cases}$

例 2 解不等式组：$\begin{cases} 4x>2x-6, & ① \\ 10+3x>7x-30. & ② \end{cases}$

解　由①，得

15.3　一元一次不等式组　17

本课内容分析

通过例 2 展示解不等式组的步骤和方法.

$$2x>-6.$$

解得

$$x>-3.$$

由②，得

$$-4x>-40.$$

解得

$$x<10.$$

不等式①②的解集在数轴上的表示如图 15-3-5 所示：

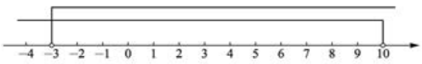


图 15-3-5

两个不等式的解集的公共部分是 $-3<x<10$，因此原不等式组的解集是 $-3<x<10$.

下面，我们来回答本节开头的“问题”.

例 3 解不等式组：$\begin{cases} 88\%x\geqslant 30+30\times 10\%, \\ 90\%x<30+30\times 20\%. \end{cases}$

解　不等式 $88\%x\geqslant 30+30\times 10\%$ 可化为 $88x\geqslant 3\,000+300$，其解集是 $x\geqslant 37.5$.

不等式 $90\%x<30+30\times 20\%$ 可化为 $90x<3\,000+600$，其解集是 $x<40$.

在数轴上分别将不等式 $x\geqslant 37.5$ 和 $x<40$ 的解集表示出来，如图 15-3-6 所示：

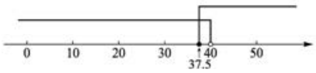


图 15-3-6

由此可得，原不等式组的解集是 $37.5\leqslant x<40$.

因此，本节“问题”中商品的原价在 37.5 元和 40 元之间(含 37.5 元，不含 40 元).

18　第15章　一元一次不等式

例 3 给出了本节开头的“问题”中的不等式组的解，呈现了根据现实情境，建立模型、求不等式组的解集、回答实际问题的过程.

课堂练习 15.3(2)

1.（1）$x>4$.

（2）$\frac{3}{2}<x<3$.

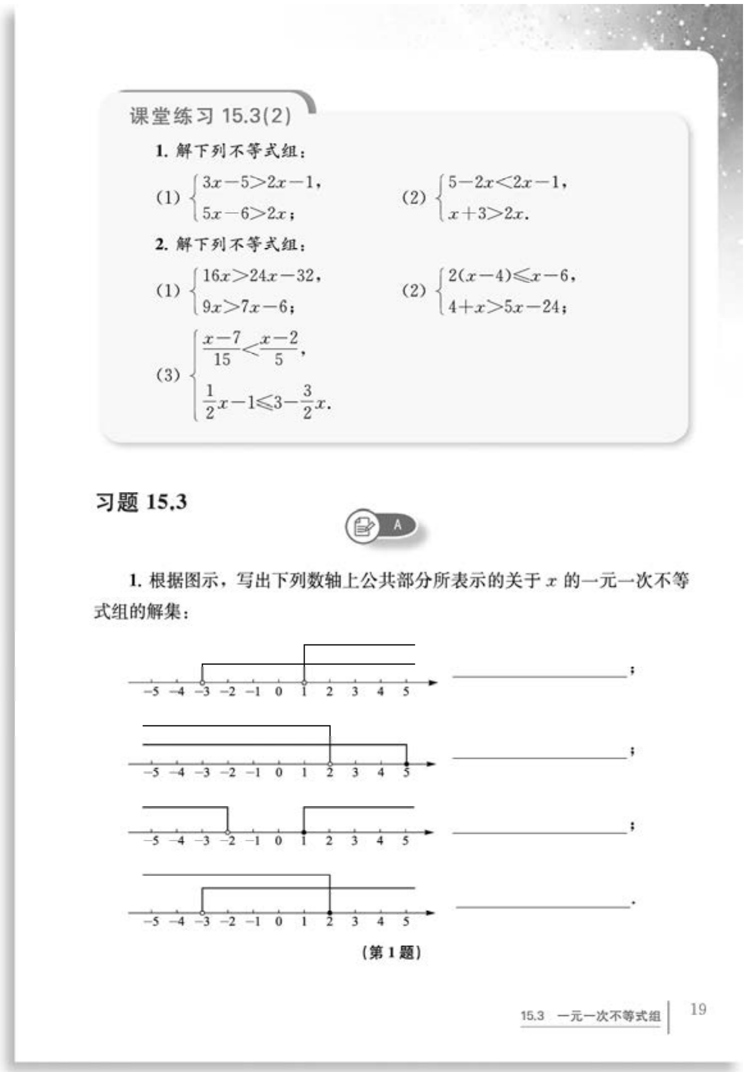
2.（1）$-3<x<4$.

（2）$x\leqslant 2$.

（3）$-\frac{1}{2}<x\leqslant 2$.

习题 15.3

1. $x>1$；$x<2$；无解；$-3<x\leqslant 2$.



课堂练习 15.3(2)

1. 解下列不等式组：

（1）$\begin{cases}3x-5>2x-1,\\5x-6>2x;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}5-2x<2x-1,\\x+3>2x.\end{cases}$

2. 解下列不等式组：

（1）$\begin{cases}16x>24x-32,\\9x>7x-6;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}2(x-4)\leqslant x-6,\\4+x>5x-24;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}\frac{x-7}{15}<\frac{x-2}{5},\\\frac{1}{2}x-1\leqslant 3-\frac{3}{2}x.\end{cases}$

习题 15.3

A

1. 根据图示，写出下列数轴上公共部分所表示的关于 x 的一元一次不等式组的解集：

______；

______；

______；

______.

（第 1 题）

15.3 一元一次不等式组　19

2. 利用数轴确定下列不等式组的解集：

(1) $\begin{cases} x>-4, \\ x>-2.5; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x\leqslant 5\frac{1}{4}, \\ x<-2.5; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x\leqslant 4\frac{1}{2}, \\ x>-5; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x\geqslant 6, \\ x\leqslant -2\frac{1}{3}. \end{cases}$

3. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 4x-15>2x-3, \\ 5x-7>3x; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 4-3x<3x-2, \\ x+4>3x. \end{cases}$

4. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 2x>3.14, \\ \frac{1}{2}x+3>5; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x+1<1.41, \\ \frac{2-x}{3}+1\geqslant x. \end{cases}$

B

5. 请写出一个不等式组，使它的解集是 $-1\leqslant x<0$. 你认为这样的不等式组有多少个？

6. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x<m+1, \\ x>2m-1 \end{cases}$ 无解，求 m 应满足的条件.

7. 用浓度分别为 10% 和 0.9% 的两种盐水配制 10 kg 新盐水，要求配得的新盐水的浓度既不低于 4% 又不超过 6%. 求浓度为 10% 的盐水用量满足的条件（结果精确到 0.01 kg）.

20 第15章 一元一次不等式

2.（1）$x>-2.5$.

（2）$x<-2.5$.

（3）$-5<x\leqslant 4\frac{1}{2}$.

（4）无解.

数轴上的表示略.

3.（1）$x>6$.

（2）$1<x<2$.

4.（1）$x>4$.

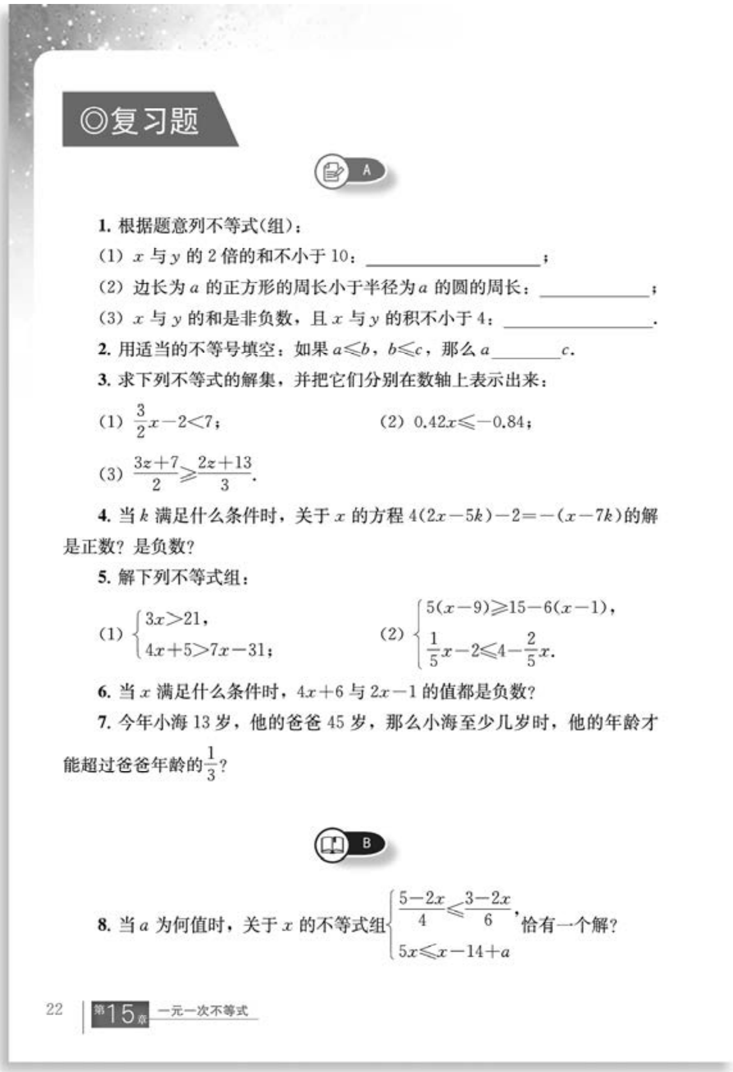
（2）$x<0.205$.

5. $\begin{cases} x\geqslant -1, \\ x<0. \end{cases}$ 不等式组不唯一，有无数个.

6. 令 $2m-1\geqslant m+1$，解得 $m\geqslant 2$. 因此，原不等式组无解的条件是 $m\geqslant 2$.

7. 设浓度为 10% 的盐水用量为 x kg，依题意得，$\begin{cases} 10\%x+(10-x)\times 0.9\%\geqslant 10\times 4\%, \\ 10\%x+(10-x)\times 0.9\%\leqslant 10\times 6\%. \end{cases}$ 解得 $\frac{310}{91}\leqslant x\leqslant \frac{510}{91}$. 因此，10% 的盐水用量的取值范围是 $3.41\leqslant x\leqslant 5.60$.

复习题


◎复习题

A

1. 根据题意列不等式(组)：

(1) x 与 y 的 2 倍的和不小于 10：________；

(2) 边长为 a 的正方形的周长小于半径为 a 的圆的周长：________；

(3) x 与 y 的和是非负数，且 x 与 y 的积不小于 4：________.

2. 用适当的不等号填空：如果 $a\leqslant b$，$b\leqslant c$，那么 a______c.

3. 求下列不等式的解集，并把它们分别在数轴上表示出来：

(1) $\frac{3}{2}x-2<7$；　　(2) $0.42x\leqslant -0.84$；

(3) $\frac{3z+7}{2}\geqslant\frac{2z+13}{3}$.

4. 当 k 满足什么条件时，关于 x 的方程 $4(2x-5k)-2=-(x-7k)$ 的解是正数？是负数？

5. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}3x>21,\\4x+5>7x-31;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}5(x-9)\geqslant 15-6(x-1),\\\frac{1}{5}x-2\leqslant 4-\frac{2}{5}x.\end{cases}$

6. 当 x 满足什么条件时，$4x+6$ 与 $2x-1$ 的值都是负数？

7. 今年小海 13 岁，他的爸爸 45 岁，那么小海至少几岁时，他的年龄才能超过爸爸年龄的 $\frac{1}{3}$？

B

8. 当 a 为何值时，关于 x 的不等式组 $\begin{cases}\frac{5-2x}{4}\leqslant\frac{3-2x}{6},\\5x\leqslant x-14+a\end{cases}$ 恰有一个解？

22　第15章　一元一次不等式

1. (1) $x+2y\geqslant 10$.

(2) $4a<2\pi a$.

(3) $\begin{cases}x+y\geqslant 0,\\xy\geqslant 4.\end{cases}$

2. $\leqslant$.

3. (1) $x<6$.

(2) $x\leqslant -2$.

(3) $z\geqslant 1$.

数轴上的表示略.

4. 解关于 x 的方程 $4(2x-5k)-2=-(x-7k)$，得 $x=3k+\frac{2}{9}$. 因此 x 是正数即是说 $3k+\frac{2}{9}>0$；x 是负数即是说 $3k+\frac{2}{9}<0$. 解这两个不等式，得到：当 $k>-\frac{2}{27}$ 时，解是正数；当 $k<-\frac{2}{27}$ 时，解是负数.

5. (1) $7<x<12$.

(2) $6\leqslant x\leqslant 10$.

6. 当 $x<-\frac{3}{2}$ 时，$4x+6$ 与 $2x-1$ 的值都是负数.

7. 小海至少 17 岁时，他的年龄才能超过爸爸年龄的 $\frac{1}{3}$.

8. 当 $a=32$ 时，原不等式组恰有一个解.

9. 一队战士以 8 km/h 的速度前进. 队尾的通信兵需要把一份急件交给队首的队长，他以 10 km/h 的速度赶到队首后马上又以同样的速度返回，一共用时不超过 15 min. 求队伍至多有多长.

10. 已知 $a\neq1$，解关于 x 的不等式 $(a-1)x\leqslant a^2-1$.

复习题 | 23

9. 设队伍长 x km，依题意，$\dfrac{x}{10-8}+\dfrac{x}{10+8}\leqslant\dfrac{15}{60}$. 解得 $x\leqslant0.45$. 因此队伍至多长 0.45 km.

10. 当 $a>1$ 时，$x\leqslant a+1$；当 $a<1$ 时，$x\geqslant a+1$.

第 16 章　相交线与平行线

一、本章概述

1. 总体要求

直线是平面几何的一个基本研究对象，也是构成平面图形的基本元素之一. 平面上两条不重合的直线的位置关系，是平面几何所要研究的基本问题. 本章之前，学生对线段、角等基本图形已有初步认识，并对线段长度、角的大小的度量与计算等已有初步体验；学生对相交线与平行线也不陌生，但对其认识通常仅停留在直观、感性认识的层面. 本章主要任务是引导学生由表及里，深入认识两直线相交与平行的本质特征，理解对顶角、垂线、平行线等基本概念，掌握“对顶角相等”“在同一平面上，经过一点有且只有一条直线垂直于已知直线”、平行公理、平行线的判定与性质等重要事实. 这些基本的几何知识是后续研究三角形、四边形等必不可少的基础.

本章是平面几何知识系统的新起点，前后内容之间、新旧概念之间的逻辑联系要更加清晰，推理论证和表达要达到一定要求. 要认识到对数学对象的研究，只凭观察、测量等方法获得的结论是不能让人完全信服的. 从本章开始，要以平面几何为载体，学习演绎推理与论证. 这就是说，要从已知条件出发，依据已被承认的定义、公理、定理等，通过逻辑推理去探索并证明新的事实. 为此，除了学习具体的知识外，还要着重学习概念的定义、命题的陈述及证明的展现与表达，并加强逻辑推理的训练.

2. 课时安排建议

本章共 14 课时，具体课时分配建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
16.1 相交线	2	对顶角　1 课时
		垂线　1 课时
习题课	1	

（续表）

章节名	建议课时	具体课时分配建议
16.2 平行线	6	平行公理　1 课时
		平行线的判定与性质　5 课时
习题课	1	
16.3 命题与证明	2	命题　1 课时
		证明　1 课时
复习与小结	2	

3. 内容编排与特色

本章内容分为三节，分别是“16.1 相交线”“16.2 平行线”和“16.3 命题与证明”.

关于“相交线”，主要从相交所成角的大小进行观察和分析. “对顶角”是以下定义的方式给出的概念，“对顶角相等”是第一个定理，此处顺带呈现公理、定义、证明、定理的意义. 垂直关系是特殊的相交关系，对其进行研究有着重要的意义，以此为基础引出“点到直线的距离”.

与上海“二期课改”教科书相比，删去了“邻补角”“斜线”等名称，将学生目前还不能证明的“垂线段最短”移到了“第 22 章直角三角形”，将“线段的垂直平分线”的概念移到了“第 18 章等腰三角形”，将“平行线之间的距离”的概念移到了“第 23 章四边形”.

“平行线”这部分先用不相交定义平行，然后作图体验平行线的存在性，再引入平行公理，进而导出平行的传递性，最后研究平行线的判定与性质. 把“同位角相等，两直线平行”作为公理，然后推出其他判定与性质分别作为定理.

与上海“二期课改”教科书相比，“同位角、内错角、同旁内角”不再作为单独一节出现，而是穿插在平行线的判定与性质中，并将平行线的判定与性质穿插安排，先集中学习“同位角相等，两直线平行”和“两直线平行，同位角相等”，把“同位角”讲清楚后，再由其推导出平行线的其他判定定理与性质定理.

在学习了相交线与平行线的相关内容，积累了一些具体的平面几何命题与几何证明的经验之后，“命题与证明”这一节引导学生区分命题的条件和结论，识别两个互逆的命题，知道证明的意义和证明的必要性，明确几何证明的步骤.

本章的最大特色是跳出以往实验几何的模式，走逻辑论证之路，从“对顶角相等”开始，直接用证明确认命题的正确性，而不是“说理”.

4. 教学提示

注重发展学生对几何的学习兴趣. 由于几何论证结构清晰、逻辑严谨、图形直观、应用广泛且具有一定的挑战性，会使学生产生浓厚的兴趣，激发学生强烈的求知欲. 但几何内容的抽象性与证明的严谨性，也会让一些学生望而生畏. 良好的开端是成功的一半，教师要结合学生

的认知特点和不同水平学生的基础，设计有针对性的教学活动. 对几何概念、基本事实、基本性质的引入，可按照教科书中“操作”“观察”等栏目的设计开展，也可从实际出发另行设计. 要注意循序渐进，从简单开始，让学生在“思考”“讨论”和解题中体验严谨思考与表达的必要性和成就感. 要精心创设问题情境，通过信息技术动态展示等活动，引导学生认识几何图形的简洁、和谐与对称的美.

切实把握核心知识内容. 本章知识的重点是对顶角、垂线的概念及性质，平行线的判定方法与性质. 这些知识在几何论证中常常用到. 同位角、内错角、同旁内角，是研究平行线的判定与性质的知识基础，对这三类角的认识与辨析要在平行线的背景下，除此之外无须过多练习，避免增加学生负担. 相交线的夹角、点到直线的距离，是定量描述两条直线或点与直线之间的相对位置情况的几何量，在本章引入这两个概念，有利于学生完整地认识这些几何对象间的位置关系，并为后续学习提供概念基础，但在本章教学中，只要求学生了解即可.

初步形成逻辑推理能力. 作为几何论证的起始章，本章蕴含了逻辑推理的初步要求，依据《课标 2022 年版》，“需要引导学生理解欧几里得平面几何的基本思想，感悟几何体系的基本框架：通过定义确定论证的对象，通过公理确定论证的起点，通过证明确定论证的逻辑，通过命题确定论证的结果”. 在教学中可首先引导学生对照图形，分清条件与结论，用符号语言正确写出已知与求证；然后学会依据定义、公理、定理等，寻求解决问题的思路；最后学会写出由条件推出结论的完整过程. 在课堂练习与课后习题的安排上，对证明书写的要求也要循序渐进，先是安排“填空”补全证明，到平行线的判定与性质的第 4 课时，再要求学生独立完成几何证明.

规范使用图形符号语言. 教师应规范地使用数学语言，同时引导学生理解图形、文字、符号之间的联系，进行文字语言、符号语言、图形语言之间的“互译”. 首先是能够看懂图形所代表的几何意义，如观察图形中角的大小以及它们之间的相对关系；然后是将文字描述的几何对象转化为正确、清晰、直观的几何示意图，如利用绘图工具画垂线、平行线等；再是运用符号语言描述图形和问题；最后要形成初步的空间想象能力，能够在脑海中构建出平面几何图形.

5. 评价建议

重视学生对几何基础知识的正确理解和基本运用. 本章内容是平面几何的基础和入门，要求学生理解对顶角、垂线、平行线等概念，掌握“对顶角相等”、平行线的判定与性质等定理，在理解和应用这些知识的过程中，逐步养成言必有据的习惯，并能够在简单情况下进行逻辑推理. 对学生的学习评价应积极引导并有效促进学生实现本章学习的基本要求.

重视学生良好学习习惯的养成. 在几何论证学习的初始阶段，在直观感知、逻辑分析、数学思考和规范表达等方面，学生可能会面临许多困难，要通过评价活动，引导学生重视画图和图形直观，认真、正确地画出图形；重视讲理和言必有据，正确、简明、有条理地表达；重视反思和学习小结，逐步积累经验，提高探索、分析和推理能力. 同时要关注学生学习兴趣的持久性、运用数学语言的自觉性和对待困难的意志力，鼓励学生自信和快乐地学习.

二、教科书分析与教学建议

16.1　相交线

本节教学目标

（1）通过具体实例，了解公理、定义、定理、证明的意义.

（2）掌握公理：两点确定一条直线.

（3）理解对顶角的概念，通过证明掌握对顶角相等，初步感受数学论证的逻辑，体会数学思维的严谨性.

（4）理解垂线、垂线段等概念，会用不同的数学语言(文字、图形、符号)表述垂直关系，体会数学表达的准确性和严谨性. 能用三角尺或量角器过一点画已知直线的垂线.

（5）掌握公理：在同一平面上，经过一点有且只有一条直线垂直于已知直线.

（6）了解点到直线的距离的意义，能度量点到直线的距离，发展几何直观和空间观念.

（以下分析对应课本第 25～28 页）

本课教学重点

通过“对顶角相等”的直观判断和推理证实，初步了解逻辑推理的方法和过程.

本课教学建议

（1）本课内容是运用逻辑推理证明几何命题的起始. 这种推理方法是古希腊人的创举，其中蕴含着丰富的数学文化，可适当作一些介绍，帮助学生认识其深远意义.

（2）用逻辑推理推导“对顶角相等”，以及利用该性质进行几何论证，从形成思路到完成表达，对学生而言是全新的，也是有困难的，教师要发挥主导作用，重视对图形和解题思路的分析.

（3）本课给出的公理、定义、定理、证明等术语的意义，是基于学生的现有认知水平和学习需要的一种表述，只需了解即可.

本课内容分析

学生对直线已有初步认识，知道“两点确定一条直线”这一基本事实．在这一节中，将“两点确定一条直线”作为平面几何的第一个公理再次呈现，并以此解释公理的意义．这样做的目的是让学生了解公理化的思想，知道逻辑推理需要起点．

16.1 相交线

1. 对顶角

观察

用一枚钉子将一根木条钉在墙上，木条可以绕着钉子转动，如图 16-1-1(1)所示．当用两枚钉子把木条钉在墙上时，木条就被固定住了，如图 16-1-1(2)所示．

(1)　　(2)

图 16-1-1

这表明，经过一点有无数条直线，如图16-1-2(1)所示．经过两点有一条直线，并且只有一条直线，如图 16-1-2(2)所示．

(1)　　(2)

图 16-1-2

像这样从实践经验中总结出来的事实还有很多．在几何里，挑选其中一些基本事实，承认其正确性，将其作为用逻辑推理证实其他事实的原始依据．这些基本事实称为公理．①

> **公理**　经过两点有一条直线，并且只有一条直线．

① 公理的选择方式并不是唯一的，本套教科书中所列出的公理，与欧几里得的《几何原本》中的公理并不完全一致，与其他教科书中所列出的公理也可能不尽相同，但对学习推理及论证，均能起到同样的作用．

简单地说：两点确定一条直线.

如图 16-1-3，将两根木条 a、b 用一枚钉子钉在一起，给我们以两条直线相交的形象.

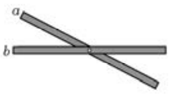


图 16-1-3

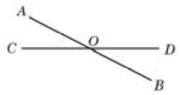


图 16-1-4

当两条直线有一个公共点时，就称这两条直线相交，或称它们是相交直线. 这个公共点叫作它们的交点. 在图 16-1-4 中，直线 AB、CD 相交，O 是它们的交点.

思考

两条直线能有两个或两个以上的交点吗?

如无特殊说明，本套教科书中两条直线指的是两条不重合的直线.

两条直线相交，只有一个交点.

原因如下：假设两条直线相交，有两个交点，那么经过这两个交点就有了两条直线，这与“两点确定一条直线”的公理相矛盾. 所以两条直线不可能有两个或两个以上的交点.

如图 16-1-5，直线 AB、CD 相交于点 O，构成以 O 为顶点的四个角：$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$ 和 $\angle 4$，它们是直线 AB、CD 相交所成的角. 其中 $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 有一个公共顶点 O，并且 $\angle 1$ 的两边 OA、OD 分别与 $\angle 3$ 的两边 OB、OC 互为反向延长线，具有这种关系的两个角叫作对顶角. 有时也称它们互为对顶角. 例如，$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 是对顶角，$\angle 2$ 和 $\angle 4$ 也是对顶角.

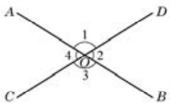


图 16-1-5

这样就明确界定了对顶角这个概念. 像这样界定一个概念的语句叫作定义，一般写成下面的形式.

定义 有公共顶点，且其中一个角的两边分别是另一个角的两边的反向

26 第16章 相交线与平行线

由公理推出“两条直线相交，只有一个交点”，这里是初次用“反证法”进行推理.

对顶角的“对顶”是说其中一个角的两边分别是另一个角两边的反向延长线. 我们只考虑大于 0°且小于 180°角的对顶角. 几何对象在本套教科书中大致分为三类：第一类不给出定义，如“反向延长线”；第二类给出描述性定义，只是从具体的图形或实例中抽象出来，如将要学习的“同位角”；第三类给出准确定义，如“对顶角”. 因此这里出现“定义”的定义，并将“对顶角”的概念以定义的形式呈现.

关于定理“对顶角相等”的证明，先画出图形，写出已知、求证，再进行严格的逻辑推理. 此处的书写是数学证明的一种较为规范的表达形式. 作为对《课标 2022 年版》要求“知道可以用不同的形式表述证明的过程，会用综合法的证明格式”的回应，本套教科书对几何定理的论证，大多数采用这种书写格式.

例 1、例 2 是对顶角的定义和性质的基本运用，给出了通过几何论证有根据地进行计算的过程示范.

延长线的两个角叫作对顶角.

通过观察，猜想对顶角总是相等的. 由于观察及测量总会有误差，怎么才能说明这个猜想一定是正确的呢？数学上要求从已知条件出发，依据已被确认的事实(包括定义、公理等)，通过逻辑推理说明猜想的正确性，这个过程叫作证明. 被证明的猜想可以作为定理.

定理 对顶角相等.

如图 16-1-5，已知：直线 AB、CD 相交于点 O，$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 是对顶角.

求证：$\angle 1=\angle 3$.

证明 因为直线 AB、CD 相交于点 O，所以

$$\angle 1+\angle 2=180^\circ,\ \angle 2+\angle 3=180^\circ.$$

根据等式性质，得 $\angle 1=180^\circ-\angle 2$，$\angle 3=180^\circ-\angle 2$.

因此，$\angle 1=\angle 3$.

例 1 如图 16-1-6，已知直线 AB、CD 相交于点 O，$\angle AOC=50^\circ$. 求 $\angle BOD$、$\angle AOD$ 的度数.

解 因为直线 AB、CD 相交于点 O，所以 $\angle BOD$ 与 $\angle AOC$ 是对顶角. 由“对顶角相等”，可得

$$\angle BOD=\angle AOC=50^\circ.$$

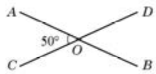


图 16-1-6

因为点 O 在直线 CD 上，所以

$$\angle AOD=180^\circ-\angle AOC=180^\circ-50^\circ=130^\circ.$$

因此，$\angle BOD=50^\circ$，$\angle AOD=130^\circ$.

例 2 如图 16-1-7，已知直线 AB、CD 相交于点 O，OE 平分 $\angle BOC$，$\angle BOE=65^\circ$. 求 $\angle AOD$ 的度数.

解 因为 OE 平分 $\angle BOC$，$\angle BOE=65^\circ$，所以

$$\angle BOC=2\angle BOE=2\times 65^\circ=130^\circ.$$

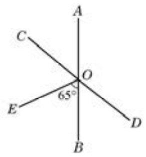
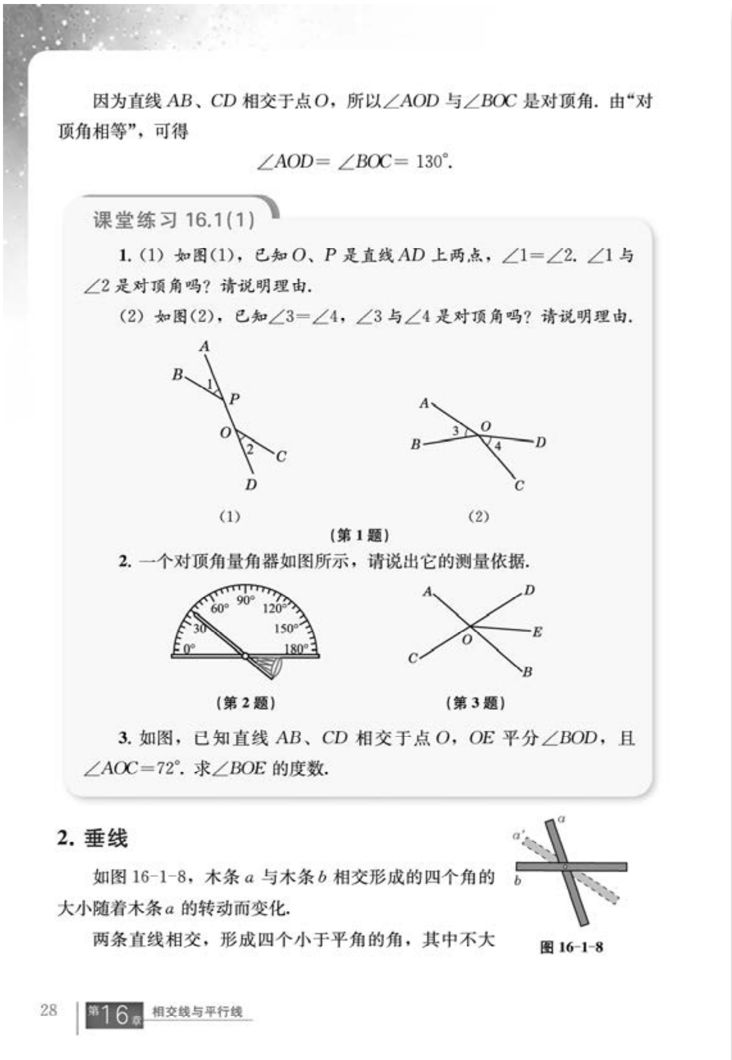


图 16-1-7

16.1 相交线 27


因为直线 AB、CD 相交于点 O，所以 $\angle AOD$ 与 $\angle BOC$ 是对顶角. 由“对顶角相等”，可得

$$\angle AOD = \angle BOC = 130^\circ.$$

课堂练习 16.1(1)

1. (1) 如图(1)，已知 O、P 是直线 AD 上两点，$\angle 1=\angle 2$. $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是对顶角吗？请说明理由.

(2) 如图(2)，已知 $\angle 3=\angle 4$，$\angle 3$ 与 $\angle 4$ 是对顶角吗？请说明理由.

(1)　(2)

（第 1 题）

2. 一个对顶角量角器如图所示，请说出它的测量依据.

（第 2 题）　（第 3 题）

3. 如图，已知直线 AB、CD 相交于点 O，OE 平分 $\angle BOD$，且 $\angle AOC=72^\circ$. 求 $\angle BOE$ 的度数.

2. 垂线

如图 16-1-8，木条 a 与木条 b 相交形成的四个角的大小随着木条 a 的转动而变化.

两条直线相交，形成四个小于平角的角，其中不大

图 16-1-8

28　第 16 章　相交线与平行线

课堂练习 16.1(1)

1. (1) $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 不是对顶角，因为 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 的顶点不重合.

(2) $\angle 3$ 与 $\angle 4$ 不是对顶角，因为 $\angle 3$ 与 $\angle 4$ 的边不互为反向延长线.

2. 对顶角相等.

3. $\angle BOE=36^\circ$.

（以下分析对应课本第 28～33 页）

本课教学重点

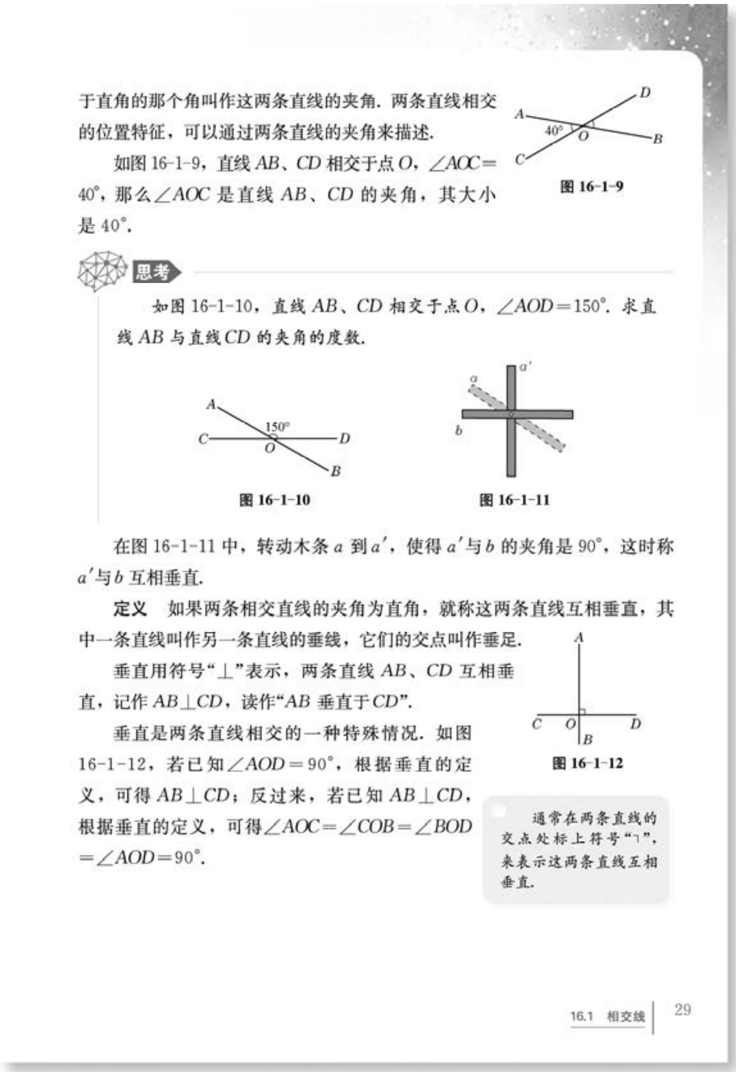
理解垂线的概念，掌握“在同一平面上，经过一点有且只有一条直线垂直于已知直线”.

本课教学建议

（1）为了简明表示两条直线互相垂直的位置关系，一般在图中的垂足处标上字母及符号. 要提醒学生注意并理解符号的意义，正确识图和标图.

（2）可引导学生归纳出“在同一平面上，经过一点有且只有一条直线垂直于已知直线”. 明确“有且只有”的意义，让学生体会数学语言的精确与简约. 离开了“在同一平面上”这一条件，经过一点可以作无数条直线与已知直线垂直（可能并不相交），但在平面几何的学习中对此不必过分强调. 在本课的旁注中已经指出：本章研究的图形限于平面图形，即所有的点、线都在同一平面上.

（3）点与直线的位置关系有：点在直线上，点在直线外. 点到直线的距离，定量地指明了这个点与直线的相对位置情况. 本课只需了解点到直线的距离的定义即可，将来在应用过程中，特别是在学习与证明了“垂线段最短”之后，会加深对该定义合理性的理解.



于直角的那个角叫作这两条直线的夹角．两条直线相交的位置特征，可以通过两条直线的夹角来描述．

如图 16-1-9，直线 AB、CD 相交于点 O，$\angle AOC=40^\circ$，那么$\angle AOC$ 是直线 AB、CD 的夹角，其大小是 40°．

图 16-1-9

思考

如图 16-1-10，直线 AB、CD 相交于点 O，$\angle AOD=150^\circ$．求直线 AB 与直线 CD 的夹角的度数．

图 16-1-10　　图 16-1-11

在图 16-1-11 中，转动木条 a 到 a'，使得 a' 与 b 的夹角是 90°，这时称 a' 与 b 互相垂直．

定义　如果两条相交直线的夹角为直角，就称这两条直线互相垂直，其中一条直线叫作另一条直线的垂线，它们的交点叫作垂足．

垂直用符号"⊥"表示，两条直线 AB、CD 互相垂直，记作 $AB\perp CD$，读作"AB 垂直于 CD"．

垂直是两条直线相交的一种特殊情况．如图 16-1-12，若已知$\angle AOD=90^\circ$，根据垂直的定义，可得 $AB\perp CD$；反过来，若已知 $AB\perp CD$，根据垂直的定义，可得$\angle AOC=\angle COB=\angle BOD=\angle AOD=90^\circ$．

图 16-1-12

通常在两条直线的交点处标上符号"┐"，来表示这两条直线互相垂直．

16.1 相交线　29

本课内容分析

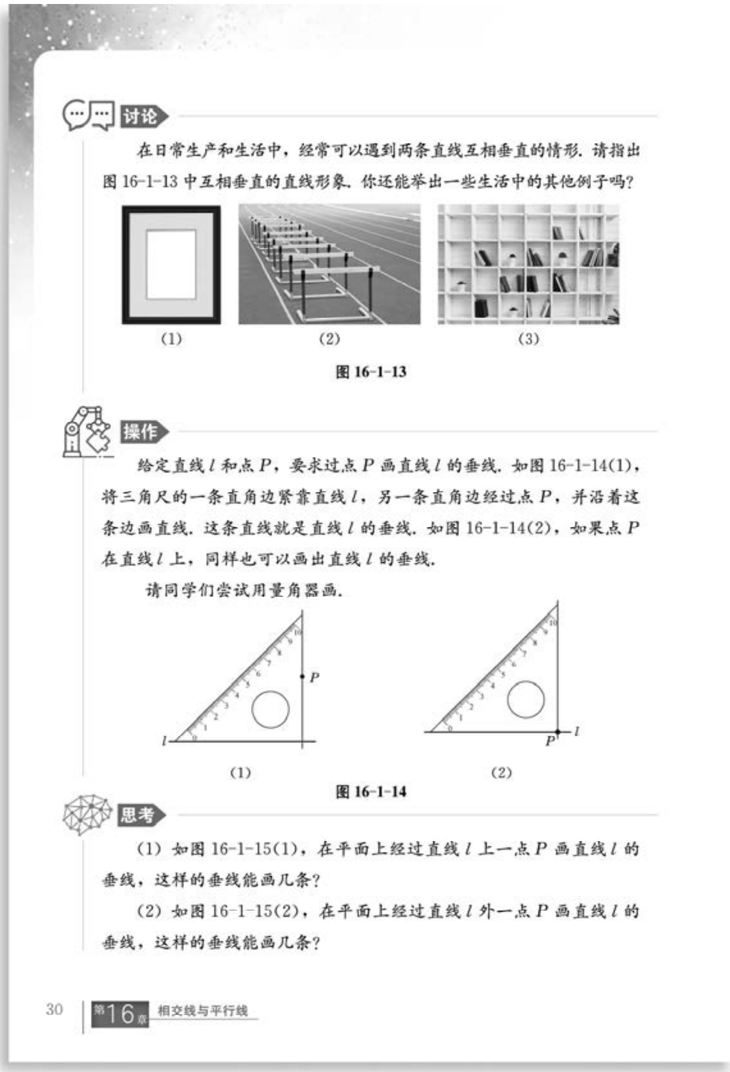
引进两条直线的夹角的概念，对定性描述的"相交"进行定量刻画．要认识到给定两条相交直线，其夹角的大小是唯一确定的．

思考　直线 AB、CD 的夹角是 $\angle AOC$（或 $\angle BOD$），其大小是 30°，要注意相交线的夹角的大小按规定不超过直角．

通过观察直线旋转这一动态过程，理解垂直是相交的特殊情形，要注意垂直关系的表述，重视文字语言、图形语言、符号语言的互相转化，给学生"看图说话"的机会．如果两条相交直线的夹角是直角，那么它们所形成的四个角都是直角．

讨论　只要留心观察，生产和生活中，随处可见平面上垂线的形象．通过举实例相互交流的方式，增强对垂线的直观认识，积累几何图形的相关知识源于生活又用于生活的直观体验．

操作　利用三角尺或量角器画垂线，有利于感知所画垂线的存在性与唯一性．



讨论

在日常生产和生活中，经常可以遇到两条直线互相垂直的情形．请指出图 16-1-13 中互相垂直的直线形象．你还能举出一些生活中的其他例子吗？

(1)　(2)　(3)

图 16-1-13

操作

给定直线 l 和点 P，要求过点 P 画直线 l 的垂线．如图 16-1-14(1)，将三角尺的一条直角边紧靠直线 l，另一条直角边经过点 P，并沿着这条边画直线．这条直线就是直线 l 的垂线．如图 16-1-14(2)，如果点 P 在直线 l 上，同样也可以画出直线 l 的垂线．

请同学们尝试用量角器画．

(1)　(2)

图 16-1-14

思考

(1) 如图 16-1-15(1)，在平面上经过直线 l 上一点 P 画直线 l 的垂线，这样的垂线能画几条？

(2) 如图 16-1-15(2)，在平面上经过直线 l 外一点 P 画直线 l 的垂线，这样的垂线能画几条？

30　第16章　相交线与平行线

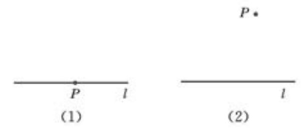


图 16-1-15

本章研究的图形限于平面图形，即所有的点、线都在同一平面上.

在平面上，经过任意一个定点 P 都能画出一条直线与已知直线 l 垂直，而且只能画出一条直线与已知直线 l 垂直. 这一基本事实在本套教科书中作为公理.

公理 在同一平面上，经过一点有且只有一条直线垂直于已知直线.

如图 16-1-16，$PO\perp l$，垂足为 O，线段 PO 叫作点 P 到直线 l 的垂线段.

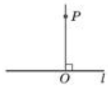


图 16-1-16

定义 直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫作点到直线的距离. 如果一个点在直线 l 上，那么就说这个点到直线 l 的距离为 0.

例 3 如图 16-1-17，已知：直线 AB、CD 分别交直线 EF 于点 H、G，$CD\perp EF$，$\angle FHA=\angle EGC$.

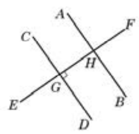


图 16-1-17

求证：$AB\perp EF$.

证明 ∵ $CD\perp EF$，

∴ $\angle EGC=90^\circ$（垂直的定义）.

又∵ $\angle FHA=\angle EGC$，

∴ $\angle FHA=90^\circ$.

∴ $AB\perp EF$（垂直的定义）.①

① 本套教科书在像例 3 这样的几何计算或证明中，常引进符号“∵”“∴”(分别读作“因为”“所以”，并与其同义)，将推理的条件与结论分行显示，并将一些重要的推理依据用括号注在结论的后面，这样做是为了便于书写. 对于像“对顶角相等”这种定理的证明，则采用了更为正式的数学证明格式.

16.1 相交线 31

本套教科书采取了扩大公理体系的做法，把原本在严格公理体系中可以证明的定理，如“在同一平面上，经过一点有且只有一条直线垂直于已知直线”也明确列为公理. 这样处理使初学几何的学生不必一开始就接触繁琐困难的证明.

补充规定“直线上的点到这条直线的距离为 0”，是对“点到直线的距离”的定义的完善.

例 3 的证明过程中，引进符号“∵”和“∴”，将推理的条件与结论分行呈现，并将一些重要的推理依据用括号注在结论的后面. 这是为了便于学生书写及教师批改与纠正.

例 4，借助垂直、垂线段的长度、距离等概念训练图形语言、符号语言、文字语言的转化.

课堂练习 16.1(2)

1.（1）AB；CD.

（2）CE；AB；O.

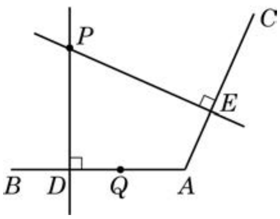
2. 70.

3.（1)(2）如图.

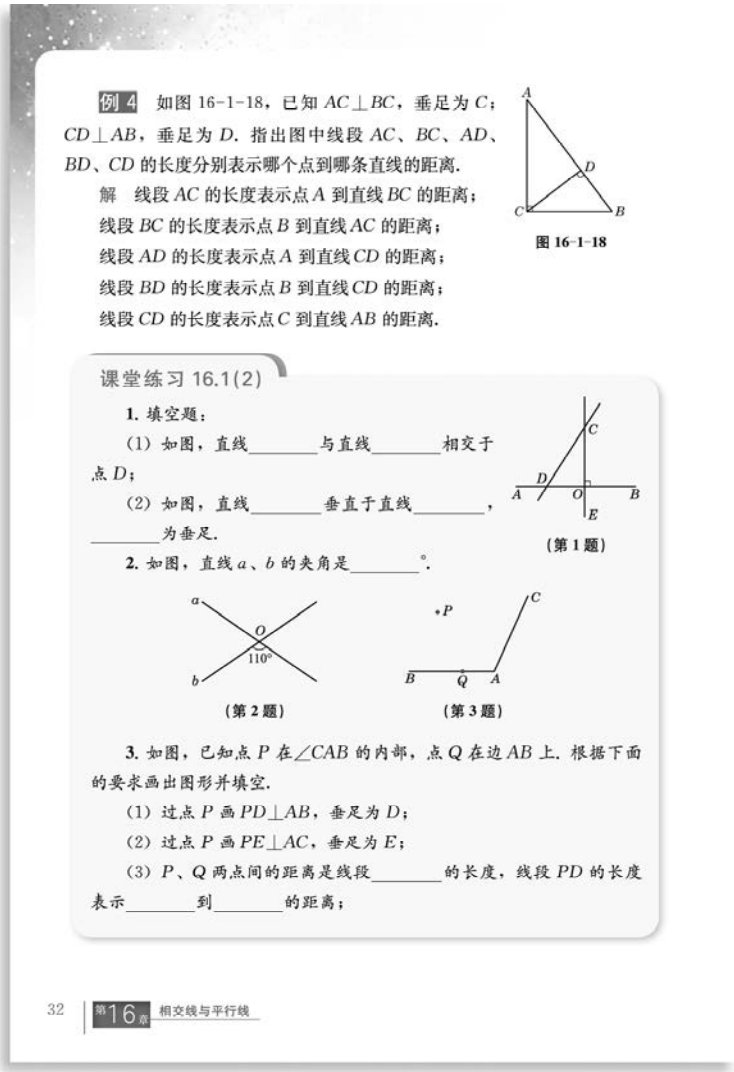
（3）PQ；点 P；直线 AB.

（4）PE.

（5）0.



（第 3 题）



例 4 如图 16-1-18，已知 $AC \perp BC$，垂足为 C；$CD \perp AB$，垂足为 D. 指出图中线段 AC、BC、AD、BD、CD 的长度分别表示哪个点到哪条直线的距离.

解 线段 AC 的长度表示点 A 到直线 BC 的距离；
线段 BC 的长度表示点 B 到直线 AC 的距离；
线段 AD 的长度表示点 A 到直线 CD 的距离；
线段 BD 的长度表示点 B 到直线 CD 的距离；
线段 CD 的长度表示点 C 到直线 AB 的距离.

图 16-1-18

课堂练习 16.1(2)

1. 填空题：

（1）如图，直线______与直线______相交于点 D；

（2）如图，直线______垂直于直线______，______为垂足.

（第 1 题）

2. 如图，直线 a、b 的夹角是______°.

（第 2 题）　　（第 3 题）

3. 如图，已知点 P 在 $\angle CAB$ 的内部，点 Q 在边 AB 上. 根据下面的要求画出图形并填空.

（1）过点 P 画 $PD \perp AB$，垂足为 D；

（2）过点 P 画 $PE \perp AC$，垂足为 E；

（3）P、Q 两点间的距离是线段______的长度，线段 PD 的长度表示______到______的距离；

32　第16章 相交线与平行线

(4) 点 P 到直线 AC 的距离是线段________的长度；

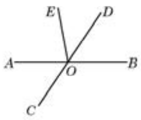
(5) 点 Q 到直线 AB 的距离是________.

习题 16.1

A

1. 如图，当光线从空气射入水中时，光线的传播方向发生了改变，这就是光的折射现象. $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是对顶角吗？

（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，直线 AB、CD 相交于点 O，$\angle AOE=80°$，且 $\angle COE=3\angle EOD$. 求 $\angle BOC$ 的度数. 把以下解答过程补充完整.（注：若 $\angle 1$ 的大小是 $\angle 2$ 的 k 倍，则用 $\angle 1=k\angle 2$ 表示.）

解：∵ 直线 AB、CD 相交于点 O，

∴ $\angle COE+\angle$________$=180°$.

∵ $\angle COE=3\angle EOD$，

∴ ________+________$=180°$，

即 $\angle$________=________°.

∵ $\angle AOE=80°$，

∴ $\angle AOD=$________°.

∴ $\angle BOC=\angle AOD=$________°（________________）.

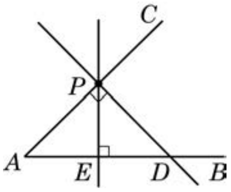
16.1 相交线 33

习题 16.1

1. $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 不是对顶角.

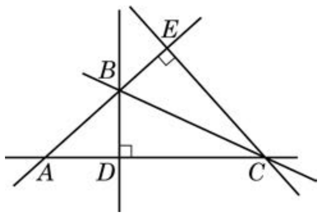
2. EOD；$3\angle EOD$；$\angle EOD$；EOD；45；125；125；对顶角相等.

3. 如图.



（第 3 题）

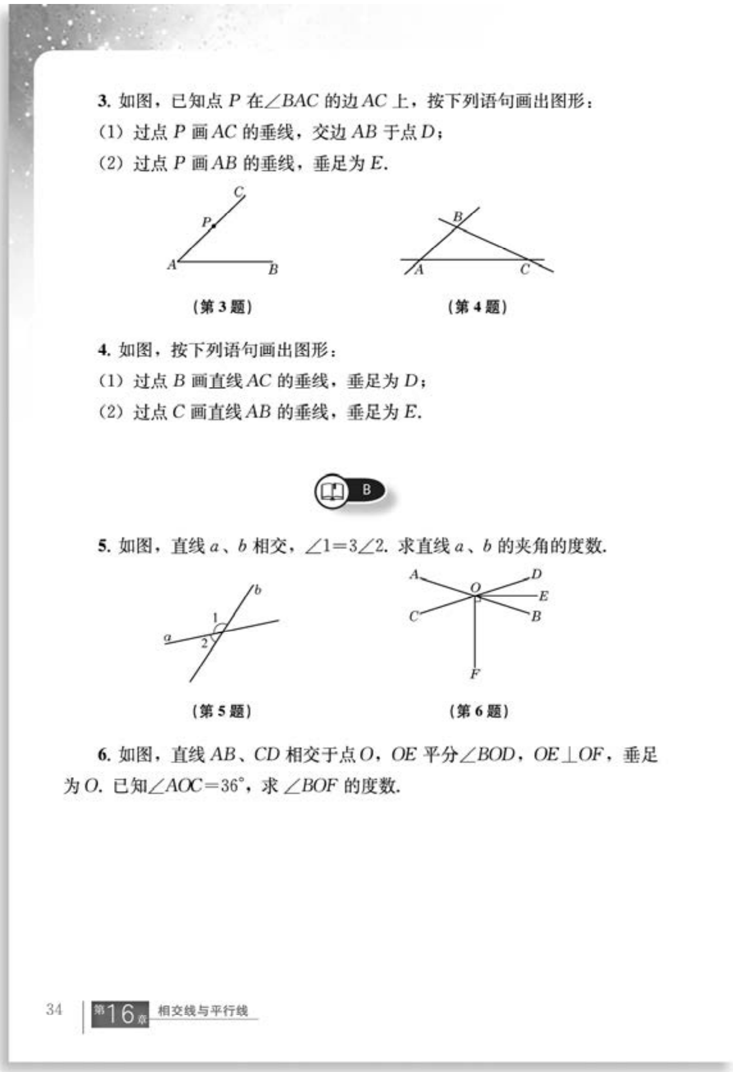
4. 如图.



（第 4 题）

5. 直线 a、b 的夹角为 $45°$.

6. $\angle BOF=72°$.



3. 如图，已知点 P 在 $\angle BAC$ 的边 AC 上，按下列语句画出图形：

(1) 过点 P 画 AC 的垂线，交边 AB 于点 D；

(2) 过点 P 画 AB 的垂线，垂足为 E.

（第 3 题）　（第 4 题）

4. 如图，按下列语句画出图形：

(1) 过点 B 画直线 AC 的垂线，垂足为 D；

(2) 过点 C 画直线 AB 的垂线，垂足为 E.

B

5. 如图，直线 a、b 相交，$\angle 1=3\angle 2$. 求直线 a、b 的夹角的度数.

（第 5 题）　（第 6 题）

6. 如图，直线 AB、CD 相交于点 O，OE 平分 $\angle BOD$，$OE\perp OF$，垂足为 O. 已知 $\angle AOC=36°$，求 $\angle BOF$ 的度数.

34　第 16 章　相交线与平行线

16.2 平行线

本节教学目标

（1）理解平行线的定义，能用三角尺和直尺过已知直线外一点画这条直线的平行线.

（2）掌握平行公理：经过直线外的一点，有且只有一条直线与该直线平行.

（3）了解平行的传递性，通过实例体会反证法的含义，通过反证法论证的过程，体会其方法和逻辑，形成初步的推理能力.

（4）识别同位角、内错角、同旁内角.

（5）掌握平行线的判定公理：同位角相等，两直线平行.

（6）掌握平行线的性质定理：两直线平行，同位角相等. 了解该定理的证明.

（7）掌握平行线的判定定理：内错角相等(或同旁内角互补)，两直线平行.

（8）掌握平行线的性质定理：两直线平行，内错角相等(或同旁内角互补).

（9）经历平行线判定定理和性质定理的发现和证明的过程，感悟归纳推理和演绎推理的过程，发展几何直观，增强推理能力.

（以下分析对应课本第 35～37 页）

本课教学重点

用三角尺和直尺过已知直线外一点画这条直线的平行线. 掌握平行公理.

本课教学建议

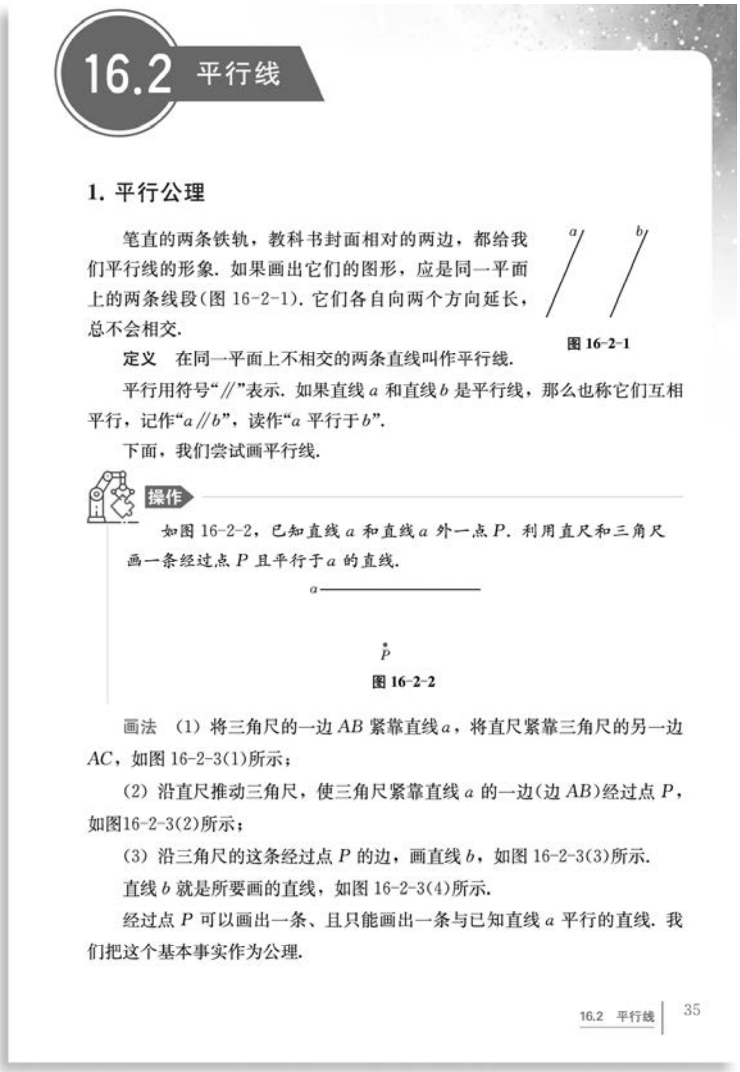
（1）平行公理在几何公理体系中的地位十分重要. 认可平行线的这一基本性质就是欧氏几何，否则是非欧几何，教师对此需有所了解. 在教学中，宜通过画平行线帮助学生切实理解“有且只有”，从直观上认可平行公理.

（2）平行的传递性的证明中使用了“反证法”，并出现了“反证法”的定义，一些学生在理解上会有一定困难，可以通过生活中相关的例子帮助解释，但初中阶段不要求学生独立用反证法证明几何命题.

本课内容分析

人们所看见的平行线的形象，其实都是平行线段. 所以，平行线定义的描述含有数学的抽象与想象，通过“否定”同一平面上的两条直线相交，来说明这两条直线平行.

操作 给出了画已知直线的平行线的一种方法，这是今后画平行线示意图的常用方法.



16.2 平行线

1. 平行公理

笔直的两条铁轨，教科书封面相对的两边，都给我们平行线的形象. 如果画出它们的图形，应是同一平面上的两条线段(图 16-2-1). 它们各自向两个方向延长，总不会相交.

图 16-2-1

定义 在同一平面上不相交的两条直线叫作平行线.

平行用符号“//”表示. 如果直线 a 和直线 b 是平行线，那么也称它们互相平行，记作“$a // b$”，读作“a 平行于 b”.

下面，我们尝试画平行线.

操作

如图 16-2-2，已知直线 a 和直线 a 外一点 P. 利用直尺和三角尺画一条经过点 P 且平行于 a 的直线.

图 16-2-2

画法 (1) 将三角尺的一边 AB 紧靠直线 a，将直尺紧靠三角尺的另一边 AC，如图 16-2-3(1)所示；

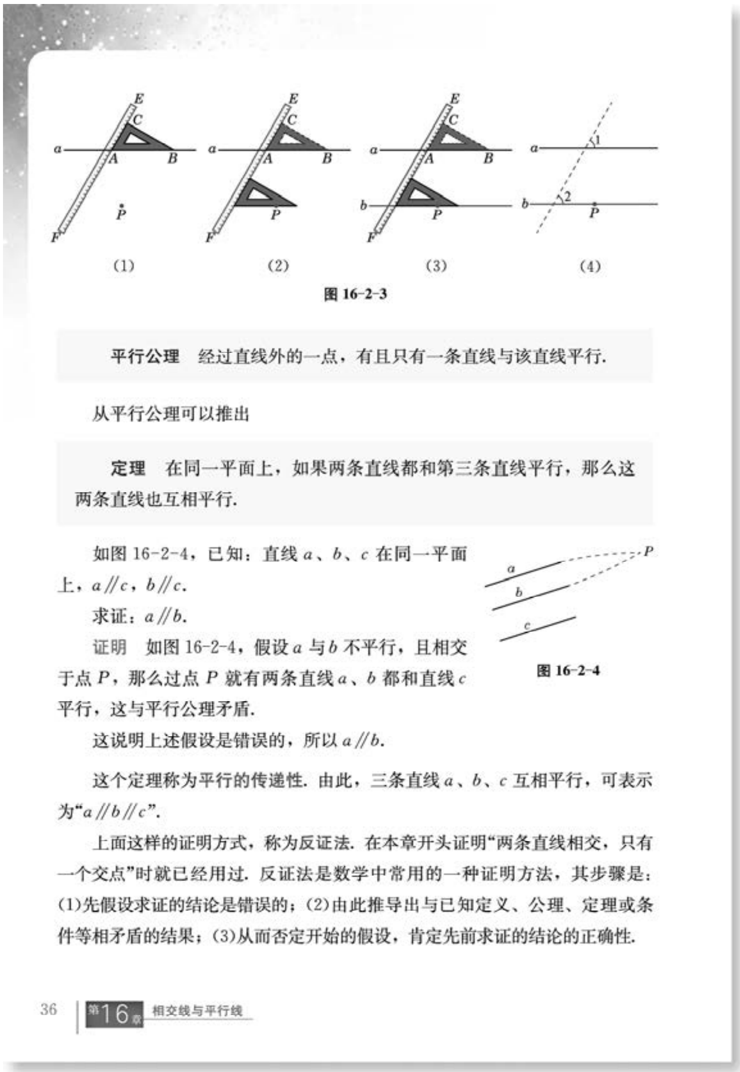
(2) 沿直尺推动三角尺，使三角尺紧靠直线 a 的一边(边 AB)经过点 P，如图16-2-3(2)所示；

(3) 沿三角尺的这条经过点 P 的边，画直线 b，如图 16-2-3(3)所示.

直线 b 就是所要画的直线，如图 16-2-3(4)所示.

经过点 P 可以画出一条、且只能画出一条与已知直线 a 平行的直线. 我们把这个基本事实作为公理.

16.2 平行线 35



(1)　(2)　(3)　(4)

图 16-2-3

平行公理　经过直线外的一点，有且只有一条直线与该直线平行.

从平行公理可以推出

定理　在同一平面上，如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

如图 16-2-4，已知：直线 a、b、c 在同一平面上，$a /\!/ c$，$b /\!/ c$.

求证：$a /\!/ b$.

证明　如图 16-2-4，假设 a 与 b 不平行，且相交于点 P，那么过点 P 就有两条直线 a、b 都和直线 c 平行，这与平行公理矛盾.

这说明上述假设是错误的，所以 $a /\!/ b$.

图 16-2-4

这个定理称为平行的传递性. 由此，三条直线 a、b、c 互相平行，可表示为"$a /\!/ b /\!/ c$".

上面这样的证明方式，称为反证法. 在本章开头证明"两条直线相交，只有一个交点"时就已经用过. 反证法是数学中常用的一种证明方法，其步骤是：(1)先假设求证的结论是错误的；(2)由此推导出与已知定义、公理、定理或条件等相矛盾的结果；(3)从而否定开始的假设，肯定先前求证的结论的正确性.

36　第16章　相交线与平行线

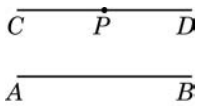
"经过直线外的一点，有且只有一条直线与该条直线平行"是欧几里得的《几何原本》中第五公设的等价命题，本章把它作为一个公理.

是否具有传递性是对二元关系的一个重要考量，它决定了这种关系是否满足从一个元素到另一个元素，再到第三个元素的连续传递性质，在阐明各种二元关系中起着关键作用. 此处用反证法证明了平面上平行的传递性，如果用后续学习的平行线的判定与性质证明平行的传递性，会产生是否能作一条与直线 a、b、c 都相交的直线的疑问. 在高中数学教科书立体几何部分，一般把空间三条直线平行的传递性作为公理.

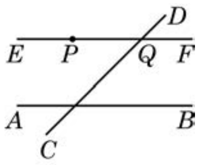
课堂练习 16.2(1)

1.（1）如图(1).

（2）如图(2).



（1）



（2）

（第 1 题）

2. 平行的传递性（或：在同一平面上，如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行）.

3.（1）不正确.

（2）不正确.

课堂练习 16.2(1)

1. 根据下列语句画出图形：

（1）P 是直线 AB 外一点，直线 CD 经过点 P，且与直线 AB 平行；

（2）直线 AB、CD 是相交直线，P 是直线 AB、CD 外一点，直线 EF 经过点 P，且与直线 AB 平行，与直线 CD 相交于点 Q.

2. 填空：已知 $AB /\!/ EF$，$CD /\!/ EF$，根据____________，可得 $AB /\!/ CD$.

3. 已知直线 a、b、c 在同一平面上，以下推理是否正确？

（1）因为直线 a 与直线 b 垂直，直线 b 与直线 c 垂直，所以直线 a 与直线 c 垂直；

（2）因为直线 a 与直线 b 相交，直线 b 与直线 c 相交，所以直线 a 与直线 c 相交.

2. 平行线的判定与性质

如何判断两条直线是否平行?

由于直线是向两边无限延伸的，而我们所能看到的实际上只是直线的一部分，因此要用“不相交”去判定两条直线平行是十分困难的. 于是考虑借助第三条直线，利用它与这两条直线相交所成的角的大小，来判定两条直线是否平行.

如图 16-2-5，在同一平面上，直线 a、b 与直线 l 分别相交（也可以说：直线 a、b 被直线 l 所截），构成如图所示的八个角. 如∠1 与∠2，它们分别在直线 a、b 的相同的一侧，并且在截线 l 的同侧，这样的一对角叫作同位角. ∠3 与∠4、∠5 与∠6、∠7 与∠8 也分别是同位角.

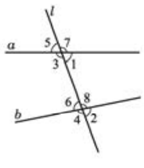


图 16-2-5

前面画平行线(图 16-2-3)时，将直尺的边看成截

（以下分析对应课本第 37～39 页）

本课教学重点

识别同位角，初步感受同位角对平行线研究的作用. 掌握平行线的判定公理：同位角相等，两直线平行.

本课教学建议

（1）教师要对教科书的编排用意有充分的认识. 判断两条直线是否平行“无法直接观察”，因此要寻找等效的观测方法，于是考虑引入与这两条直线都相交的第三条直线，观察同位角、内错角、同旁内角，来探讨平行线的判定与性质. 但是，对几何定理不分轻重，面面俱到，会增加学生负担，达不到深入了解的目的. 因此在本套教科书中突出了“同位角”，先重点讲清与“同位角”相关的判定与性质；再给出内错角的定义，并利用“同位角”的结论推导与“内错角”相关的判定与性质；由于与“同旁内角”相关的判定与性质均可通过“同位角”或“内错角”得到，因此教科书中对“同旁内角”只做简单的介绍，在例题中呈现. 在讲解平行线的判定与性质之后，给出有一定综合性的例题，以求学以致用，引导学生进行几何论证的学习.

（2）同位角是伴随着研究平行线的需要而出现的. 识别同位角的训练宜在平行线的背景中进行.

本课内容分析

将“同位角相等，两直线平行”定为公理，是本套教科书的选择.

思考 说明任选一对同位角证明其相等，就能推出两直线平行.

例 1 是垂直的定义及平行线判定公理的应用. 例 2 是“对顶角相等”、平行的传递性及平行线判定公理的应用. 要重视对证明思路的分析. 根据任意一对同位角相等，就能证明两直线平行. 因此可选择与教科书中不同的方法来证明.

线，只要同位角$\angle 1$与$\angle 2$相等，画出的直线 a、b 就是平行线. 我们把这个基本事实作为判定两条直线平行的公理.

公理 两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行.

简单地说：同位角相等，两直线平行.

思考

两条直线被第三条直线所截得到的四对同位角中，只要有一对相等，那么另外三对也一定对应相等. 为什么？

例 1 如图 16-2-6，已知：a、b、c 是直线，$a \perp c$，$b \perp c$.

求证：$a \parallel b$.

证明 如图 16-2-6，$\because$ $a \perp c$，$b \perp c$，

$\therefore$ $\angle 1=90°$，$\angle 2=90°$.

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$.

$\therefore$ $a \parallel b$（同位角相等，两直线平行）.

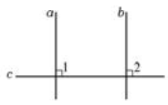


图 16-2-6

例 2 如图 16-2-7，已知：直线 l 与直线 a、b、c 分别相交，且$\angle 1=\angle 2=\angle 3$.

求证：$a \parallel b \parallel c$.

分析 由$\angle 1=\angle 2$，可推出 $a \parallel b$. 要证明 $a \parallel b \parallel c$，只要再证 $a \parallel c$（或 $b \parallel c$），而这只要找到一对相等的同位角即可.

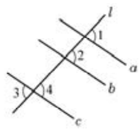


图 16-2-7

证明 如图 16-2-7，将$\angle 3$的对顶角记作$\angle 4$.

$\because$ $\angle 1=\angle 2$，

$\therefore$ $a \parallel b$（同位角相等，两直线平行）.

$\because$ $\angle 3=\angle 4$（对顶角相等），$\angle 3=\angle 1$，

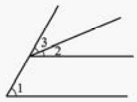
$\therefore$ $\angle 1=\angle 4$.

∴ $a/\!/c$（同位角相等，两直线平行）.

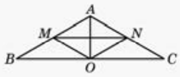
∴ $a/\!/b/\!/c$（平行的传递性）.

课堂练习 16.2(2)

1. 如图，$\angle1$ 与 $\angle2$ 是同位角吗？ $\angle1$ 与 $\angle3$ 呢？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，为了加固房屋，要在人字形屋架上加一条横梁 MN. 如果 $\angle ABC=29°$，那么 $\angle AMN$ 等于多少度时，横梁 MN 与 BC 平行？

3. 如图，如果 $\angle1=110°$，$\angle2=70°$，那么 $AB/\!/CD$ 吗？为什么？把以下解答过程补充完整.

解：如图，将与 $\angle1$ 相邻的一个补角记作 $\angle3$.

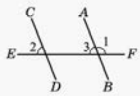
∵ $\angle1=110°$，

∴ $\angle3=180°-\angle1=70°$.

又∵ $\angle2=70°$，

∴ ________.

∴ $AB/\!/CD$（____________________）.



（第 3 题）

利用同位角相等，可以判定两条直线平行. 反过来，如果两条直线平行，同位角相等吗？我们可以证明下面的平行线的性质定理.

定理 两条平行直线被第三条直线所截，同位角相等.

简单地说：两直线平行，同位角相等.

16.2 平行线 39

课堂练习 16.2(2)

1. $\angle1$ 与 $\angle2$ 不是同位角，$\angle1$ 与 $\angle3$ 是同位角.

2. $\angle AMN=29°$.

3. $\angle2=\angle3$；同位角相等，两直线平行.

（以下分析对应课本第 39～42 页）

本课教学重点

掌握平行线的性质定理：两直线平行，同位角相等.

本课教学建议

（1）添加辅助线，用反证法来证明“两直线平行，同位角相等”，对于几何入门阶段的学生是困难的，对学生的要求仅为“了解”. 对部分学有余力的学生，也可以在此处介绍“同一法”：当想要证明某图形具有某种唯一的性质时，可以先作出一个满足这种特性的图形，然后证明所作的图形就是先前题设中的图形.

（2）平行线的判定与性质是第一次对图形的判定与性质进行系统研究，对今后学习其他图形的判定与性质有示范作用，要引导学生识别“判定”与“性质”之间的区别. 在数学中，判定定理和性质定理是两种重要的定理类型. 判定定理是指用于确定一个数学对象的定理，如由内错角相等去判定两条直线平行，是平行线的判定定理. 而性质定理是指说明一个数学对象具有某种性质的定理，如由两条直线平行得到同位角相等，是平行线的性质定理.

由于一对同位角相等，可以推出其他三对同位角也对应相等，因此只要证明一对同位角相等即可.

如图 16-2-8(1)，已知：$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是直线 AB、CD 被直线 EF 截出的同位角，EF 分别交 AB、CD 于点 M、N，$AB/\!/CD$.

求证：$\angle 1=\angle 2$.

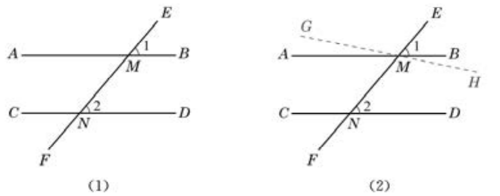


图 16-2-8

证明　用反证法. 假设 $\angle 1\neq\angle 2$，那么可以过点 M 画一条直线 GH，使得 $\angle EMH=\angle 2$，如图 16-2-8(2)所示. 根据"同位角相等，两直线平行"，可得到 $GH/\!/CD$. 又因为 $AB/\!/CD$，这样经过点 M 存在两条直线 AB、GH 都与直线 CD 平行，与平行公理矛盾.

这说明 $\angle 1\neq\angle 2$ 这一假设是不成立的，所以 $\angle 1=\angle 2$.

例 3　如图 16-2-9，已知：a、b、c 是直线，$a/\!/b$，$a\perp c$.

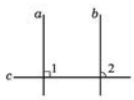


图 16-2-9

求证：$b\perp c$.

证明　如图 16-2-9，$\because$ $a/\!/b$，

$\therefore$ $\angle 2=\angle 1$（两直线平行，同位角相等）.

$\because$ $a\perp c$，

$\therefore$ $\angle 1=90°$.

$\therefore$ $\angle 2=90°$.

$\therefore$ $b\perp c$.

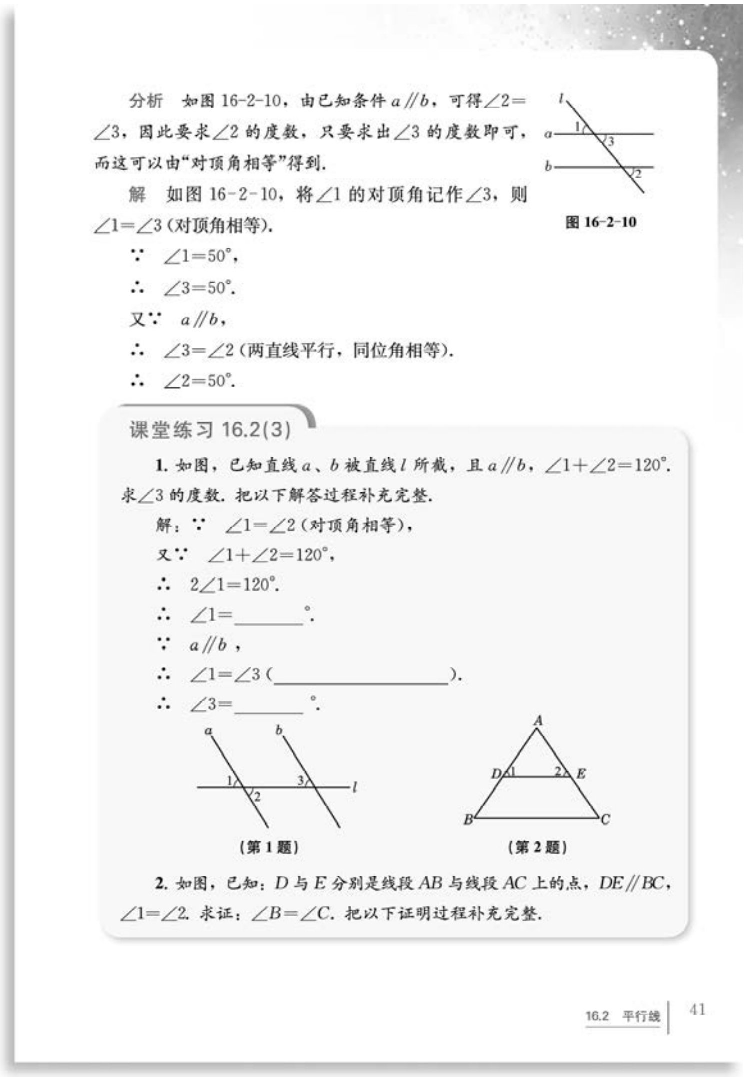
例 4　如图 16-2-10，已知直线 a、b 被直线 l 所截，$a/\!/b$，$\angle 1=50°$. 求 $\angle 2$ 的度数.

40　第16章　相交线与平行线

本课内容分析

"两直线平行，同位角相等"是本套教科书中平行线的第一个性质定理，其证明需要添辅助线，并用到反证法. 之所以没有将其定为公理，是为了发展学生的逻辑思维能力，也是对《课标 2022 年版》中"了解该定理的证明"和"通过实例体会反证法的含义"的落实.

例 3 是垂直的定义及本课所学的平行线性质的应用，与上一课中例 1 相对应. 例 4 是"对顶角相等"及本课所学的平行线性质的应用. 要重视思路分析与教师的书写示范.



分析　如图 16-2-10，由已知条件 $a /\!/ b$，可得$\angle 2=\angle 3$，因此要求$\angle 2$ 的度数，只要求出$\angle 3$ 的度数即可，而这可以由“对顶角相等”得到.

图 16-2-10

解　如图 16-2-10，将$\angle 1$ 的对顶角记作$\angle 3$，则$\angle 1=\angle 3$（对顶角相等）.

∵　$\angle 1=50°$，

∴　$\angle 3=50°$.

又∵　$a /\!/ b$，

∴　$\angle 3=\angle 2$（两直线平行，同位角相等）.

∴　$\angle 2=50°$.

课堂练习 16.2(3)

1. 如图，已知直线 a、b 被直线 l 所截，且 $a /\!/ b$，$\angle 1+\angle 2=120°$. 求$\angle 3$ 的度数. 把以下解答过程补充完整.

解：∵　$\angle 1=\angle 2$（对顶角相等），

又∵　$\angle 1+\angle 2=120°$，

∴　$2\angle 1=120°$.

∴　$\angle 1=$________°.

∵　$a /\!/ b$，

∴　$\angle 1=\angle 3$（________________）.

∴　$\angle 3=$________°.

（第 1 题）　　（第 2 题）

2. 如图，已知：D 与 E 分别是线段 AB 与线段 AC 上的点，$DE /\!/ BC$，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$\angle B=\angle C$. 把以下证明过程补充完整.

16.2　平行线　41

课堂练习 16.2(3)

1. 60；两直线平行，同位角相等；60.

2. 两直线平行，同位角相等；$\angle B=\angle C$.

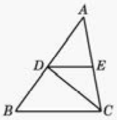
证明：∵ $DE \parallel BC$，

∴ $\angle 2 = \angle C$（________________）.

同理，$\angle 1 = \angle B$.

∵ $\angle 1 = \angle 2$，

∴ __________.



（第 3 题）

3. 如图，D、E 分别是线段 AB、AC 上的点，CD 平分 $\angle ACB$，$DE \parallel BC$，$\angle AED = 80^\circ$. 求 $\angle BCD$ 的度数.

如图 16-2-11，直线 a、b 被直线 l 所截，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 在直线 a、b 的内侧，且交错在截线 l 的两旁，像这样的一对角叫作内错角.

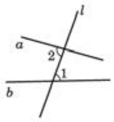


图 16-2-11

思考

两条直线被第三条直线所截，可以得到两对内错角. 如果其中一对内错角相等，那么另外一对内错角是否也相等？

利用同位角相等可以判定两条直线平行，那么是否也可以由内错角相等来判定两条直线平行呢？结论是肯定的，由此得到平行线的另一种判定方法.

定理 两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行.

简单地说：内错角相等，两直线平行.

如图 16-2-12(1)，已知：直线 a、b 被直线 l 所截，$\angle 1 = \angle 2$.

求证：$a \parallel b$.

分析 我们已经知道“同位角相等，两直线平行”，为了证明 $a \parallel b$，从 $\angle 1 = \angle 2$ 出发，找出一对相等的同位角.

3. $\angle BCD = 40^\circ$.

（以下分析对应课本第 42～44 页）

本课教学重点

识别内错角，推导“内错角相等，两直线平行”和“两直线平行，内错角相等”.

本课教学建议

（1）与同位角一样，内错角的出现也是研究平行线的需要，让学生识别内错角时，宜置于平行线的背景中.

（2）同位角相等与内错角相等之间只有一步之遥. 当学生掌握有关同位角的平行线的判定与性质后，学习平行线的其他判定方法与性质，是顺理成章且相对容易的. 根据学生的实际水平，可以引导学生自主探索本课中平行线的判定方法与性质.

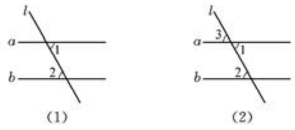


图 16-2-12

证明　如图 16-2-12(2)，将∠1 的对顶角记作∠3. 因为对顶角相等，所以∠1=∠3. 又已知∠1=∠2，从而有∠2=∠3.

根据“同位角相等，两直线平行”，得 $a /\!/ b$.

例 5　如图 16-2-13，已知：直线 DE 经过点 A，∠1=40°，∠B=40°.

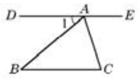


图 16-2-13

求证：$DE /\!/ BC$.

证明　∵　∠1=40°，∠B=40°，

∴　∠1=∠B.

∴　$DE /\!/ BC$（内错角相等，两直线平行）.

思考

当两直线平行时，内错角的大小有什么关系呢？

定理　两条平行直线被第三条直线所截，内错角相等.

简单地说：两直线平行，内错角相等.

如图 16-2-14，已知：∠1 与∠2 是直线 a、b 被直线 l 所截得到的一对内错角，$a /\!/ b$.

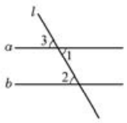


图 16-2-14

求证：∠1=∠2.

证明　如图 16-2-14，将∠1 的对顶角记作∠3.

由“对顶角相等”，得 ∠1=∠3.

根据“两直线平行，同位角相等”，由 $a /\!/ b$，得∠3=∠2.

因此∠1=∠2.

16.2 平行线　43

本课内容分析

例 5 是“内错角相等，两直线平行”这一平行线的判定定理的直接应用.

例 6 的分析部分给出了“分别从问题的条件与结论出发，通过逐步推导，到中间节点相遇”这种探索解题途径的示范.

课堂练习 16.2(4)

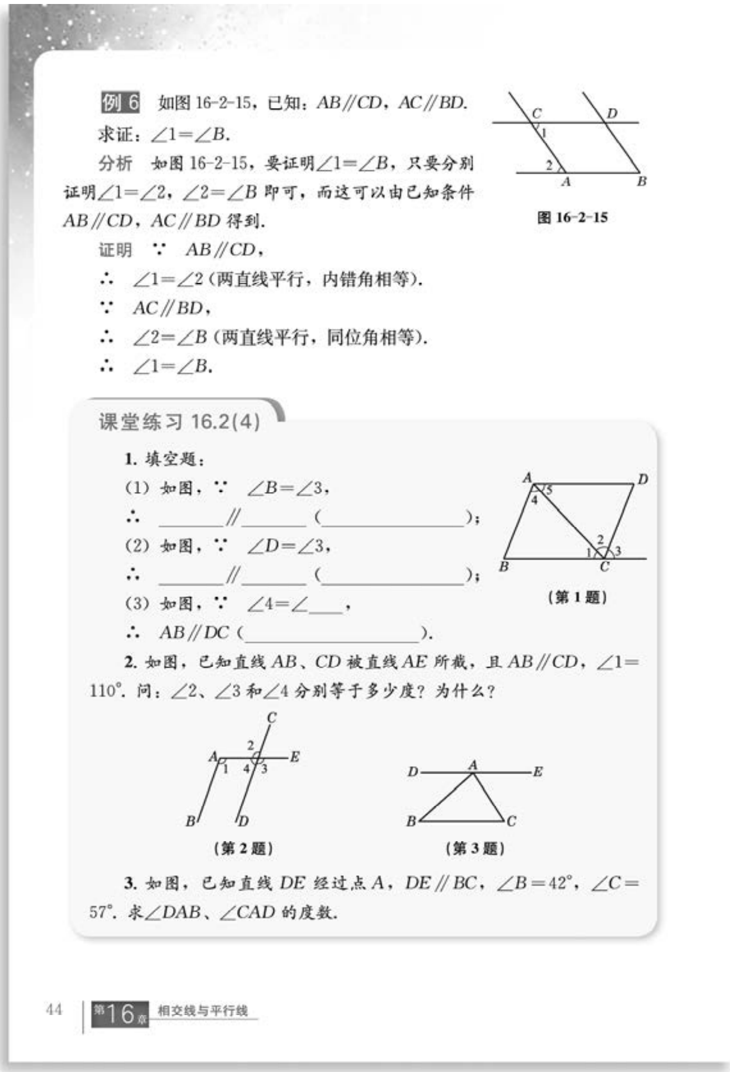
1. (1) AB；DC；同位角相等，两直线平行.

(2) AD；BC；内错角相等，两直线平行.

(3) 2；内错角相等，两直线平行.

2. $\angle 2=110^\circ$，$\angle 3=110^\circ$，$\angle 4=70^\circ$. 理由略.

3. $\angle DAB=42^\circ$，$\angle CAD=123^\circ$.



例 6 如图 16-2-15，已知：$AB/\!/CD$，$AC/\!/BD$.

求证：$\angle 1=\angle B$.

分析 如图 16-2-15，要证明$\angle 1=\angle B$，只要分别证明$\angle 1=\angle 2$，$\angle 2=\angle B$即可，而这可以由已知条件$AB/\!/CD$，$AC/\!/BD$得到.

图 16-2-15

证明 ∵ $AB/\!/CD$，

∴ $\angle 1=\angle 2$（两直线平行，内错角相等）.

∵ $AC/\!/BD$，

∴ $\angle 2=\angle B$（两直线平行，同位角相等）.

∴ $\angle 1=\angle B$.

课堂练习 16.2(4)

1. 填空题：

(1) 如图，∵ $\angle B=\angle 3$，

∴ ______ $/\!/$ ______ (____________)；

(2) 如图，∵ $\angle D=\angle 3$，

∴ ______ $/\!/$ ______ (____________)；

(3) 如图，∵ $\angle 4=\angle$____，

∴ $AB/\!/DC$ (____________).

（第 1 题）

2. 如图，已知直线 AB、CD 被直线 AE 所截，且 $AB/\!/CD$，$\angle 1=110^\circ$. 问：$\angle 2$、$\angle 3$ 和$\angle 4$分别等于多少度？为什么？

（第 2 题） （第 3 题）

3. 如图，已知直线 DE 经过点 A，$DE/\!/BC$，$\angle B=42^\circ$，$\angle C=57^\circ$. 求$\angle DAB$、$\angle CAD$的度数.

44 第16章 相交线与平行线

（以下分析对应课本第 45～46 页）

本课教学重点

运用平行线的判定与性质证明简单的几何问题，提升逻辑推理能力.

本课教学建议

（1）教学中不必刻意补充有关同旁内角的练习，削枝是为了强干，淡化实际用处并不大的内容，以减轻学生不必要的记忆负担，从而有时间加强逻辑思维的训练.

（2）通过前面几节课的训练，如填空完善证明过程、对关键的几何计算步骤给出推理论证，可帮助学生熟悉几何论证的书写过程. 从本课的课堂练习开始，要求学生独立完成几何证明题. 要关注学生的差异，对部分基础较为薄弱的学生，鼓励他们从模仿教师与教科书的书写开始，也可以将独立书写几何证明的时间适当延后.

本课内容分析

例 7 即平行线的判定定理“同旁内角互补，两直线平行”. 而性质定理“两直线平行，同旁内角互补”的证明在其后的“讨论”中出现.

例 8 是“内错角相等，两直线平行”及角平分线的定义的应用. 分析部分给出了如何寻找解题途径的示范.

例 7 如图 16-2-16，已知：直线 a、b 被直线 l 所截，$\angle 1+\angle 2=180°$.

求证：$a/\!/b$.

分析 从$\angle 1$、$\angle 2$ 出发，去寻找一对相等的同位角或一对相等的内错角.

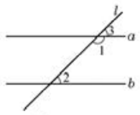


图 16-2-16

证明 如图 16-2-16，将与$\angle 1$ 相邻的一个补角记作$\angle 3$，则$\angle 1+\angle 3=180°$.

∵ $\angle 1+\angle 2=180°$，

∴ $\angle 2=\angle 3$.

∴ $a/\!/b$（同位角相等，两直线平行）.

如图 16-2-16，$\angle 1$、$\angle 2$ 在直线 a、b 的内侧，且都在截线 l 的同旁，像这样的一对角叫作同旁内角.

本题的结论表明：同旁内角互补，两直线平行.

反过来也是正确的，即：两直线平行，同旁内角互补.

讨论

能利用“内错角相等，两直线平行”来证明“同旁内角互补，两直线平行”吗？如何证明“两直线平行，同旁内角互补”？

例 8 如图 16-2-17，已知：BE 平分$\angle ABC$，$\angle 1=\angle 2$.

求证：$DE/\!/BC$.

分析 如图 16-2-17，将$\angle EBC$ 记作$\angle 3$，要证明 $DE/\!/BC$，只要证明$\angle 2=\angle 3$. 已知 BE 平分$\angle ABC$，即有$\angle 1=\angle 3$，又已知$\angle 1=\angle 2$，由此可得$\angle 2=\angle 3$.

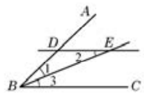


图 16-2-17

证明 如图 16-2-17，∵ BE 平分$\angle ABC$，

∴ $\angle 1=\angle 3$.

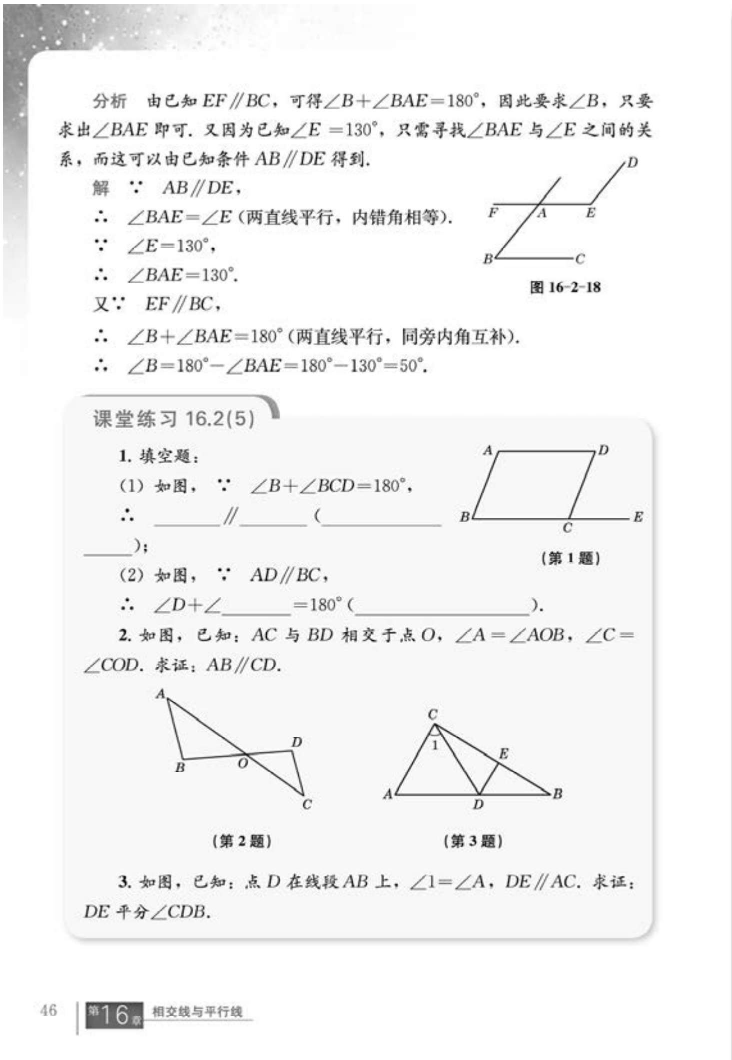
又∵ $\angle 1=\angle 2$，

∴ $\angle 2=\angle 3$.

∴ $DE/\!/BC$（内错角相等，两直线平行）.

例 9 如图 16-2-18，直线 EF、AB 相交于点 A，$AB/\!/DE$，$EF/\!/BC$，$\angle E=130°$. 求$\angle B$ 的度数.

16.2 平行线 45



分析　由已知 $EF \parallel BC$，可得 $\angle B+\angle BAE=180^\circ$，因此要求 $\angle B$，只要求出 $\angle BAE$ 即可．又因为已知 $\angle E=130^\circ$，只需寻找 $\angle BAE$ 与 $\angle E$ 之间的关系，而这可以由已知条件 $AB \parallel DE$ 得到．

解　∵　$AB \parallel DE$，

∴　$\angle BAE=\angle E$（两直线平行，内错角相等）．

∵　$\angle E=130^\circ$，

∴　$\angle BAE=130^\circ$．

又∵　$EF \parallel BC$，

∴　$\angle B+\angle BAE=180^\circ$（两直线平行，同旁内角互补）．

∴　$\angle B=180^\circ-\angle BAE=180^\circ-130^\circ=50^\circ$．

图 16-2-18

课堂练习 16.2(5)

1. 填空题：

(1) 如图，∵　$\angle B+\angle BCD=180^\circ$，

∴　______$\parallel$______（______________）；

(2) 如图，∵　$AD \parallel BC$，

∴　$\angle D+\angle$______$=180^\circ$（______________）．

（第 1 题）

2. 如图，已知：AC 与 BD 相交于点 O，$\angle A=\angle AOB$，$\angle C=\angle COD$．求证：$AB \parallel CD$．

（第 2 题）　　（第 3 题）

3. 如图，已知：点 D 在线段 AB 上，$\angle 1=\angle A$，$DE \parallel AC$．求证：DE 平分 $\angle CDB$．

46　第 16 章　相交线与平行线

可以在例 9 的图中添加字母或辅助线，探讨更多的求解途径.

课堂练习 16.2(5)

1. (1) AB；DC；同旁内角互补，两直线平行.

(2) DCB；两直线平行，同旁内角互补.

2. ∵　$\angle A=\angle AOB$，

$\angle C=\angle COD$，

又∵　$\angle AOB=\angle COD$（对顶角相等），

∴　$\angle A=\angle C$.

∴　$AB \parallel CD$（内错角相等，两直线平行）.

3. ∵　$DE \parallel AC$，

∴　$\angle 1=\angle CDE$（两直线平行，内错角相等）.

$\angle A=\angle EDB$（两直线平行，同位角相等）.

∵　$\angle 1=\angle A$，

∴　$\angle CDE=\angle EDB$.

∴　DE 平分 $\angle CDB$.

（以下分析对应课本第 47～48 页）

本课教学重点

综合运用平行线的判定与性质解题，进行推理训练.

本课教学建议

（1）对例题的处理要照顾不同层次的学生. 对基础较弱的学生，帮助他们克服畏难情绪、提高信心；对部分学有余力的学生，可以适当增加挑战性. 例如，在例 11 的教学之后，删去图中的射线 FE，由条件“$AB \parallel CD$”，求证“$\angle AFC = \angle A + \angle C$”，此时需添加辅助线.

（2）证明过程的书写可以将思维过程呈现出来，其中起决定作用的是证明思路的探索，即分析过程. 在课堂中应鼓励学生表达，说出思考过程.

例 10 如图 16-2-19，已知：$\angle B=\angle D$，$AB/\!/CD$.

求证：$DE/\!/BF$.

分析　要证明 $DE/\!/BF$，只要证明 $\angle AOE=\angle B$. 因为已知 $\angle B=\angle D$，所以只需证明 $\angle AOE=\angle D$，而这可以由已知条件 $AB/\!/CD$ 得到.

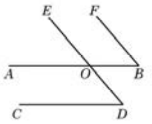


图 16-2-19

证明　∵　$AB/\!/CD$，

∴　$\angle AOE=\angle D$（两直线平行，同位角相等）.

又∵　$\angle B=\angle D$，

∴　$\angle AOE=\angle B$.

∴　$DE/\!/BF$（同位角相等，两直线平行）.

例 11 如图 16-2-20，已知：$AB/\!/CD$，$\angle 1=\angle A$.

求证：$\angle 2=\angle C$.

分析　要证明 $\angle 2=\angle C$，只要证明 $EF/\!/CD$，又因为 $AB/\!/CD$，即证 $EF/\!/AB$.

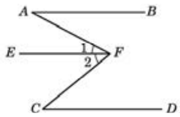


图 16-2-20

证明　∵　$\angle 1=\angle A$，

∴　$EF/\!/AB$（内错角相等，两直线平行）.

又∵　$AB/\!/CD$，

∴　$EF/\!/CD$（平行的传递性）.

∴　$\angle 2=\angle C$（两直线平行，内错角相等）.

例 12 如图 16-2-21，已知：D、E、F 分别是线段 AC、AB、BC 上的点，$DF/\!/AB$，$\angle DFE=\angle A$.

求证：$\angle EFB=\angle C$.

分析　要证明 $\angle EFB=\angle C$，即证 $EF/\!/AC$，只要寻找 EF 与 AC 被直线 AB(或直线 DF)所截得到的一对相等的同位角(或一对相等的内错角，或一对互补的同旁内角).

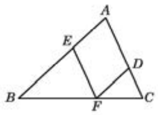


图 16-2-21

证明　∵　$DF/\!/AB$，

本课内容分析

本课例题有一定的综合性. 前面已经学习了 3 个平行线的判定定理(或公理)和 3 个平行线的性质定理，为寻找尽可能多和尽可能简洁的方法奠定了基础.

例 10 的图形中，“$\angle B=\angle D$”“$AB/\!/CD$”和“$DE/\!/BF$”这三者中知道两个，就可以推出另一个.

例 11 可进一步推出 $\angle AFC=\angle A+\angle C$.

例 12 的分析中指出了证明的多种途径.

课堂练习 16.2(6)

1. $\angle CAB$、$\angle AGE$、$\angle ACD$.

2. ∵ $AB /\!/ CD$，

∴ $\angle B=\angle C$（两直线平行，内错角相等）.

∵ $\angle B+\angle D=180°$，

∴ $\angle C+\angle D=180°$.

∴ $CB /\!/ DE$（同旁内角互补，两直线平行）.

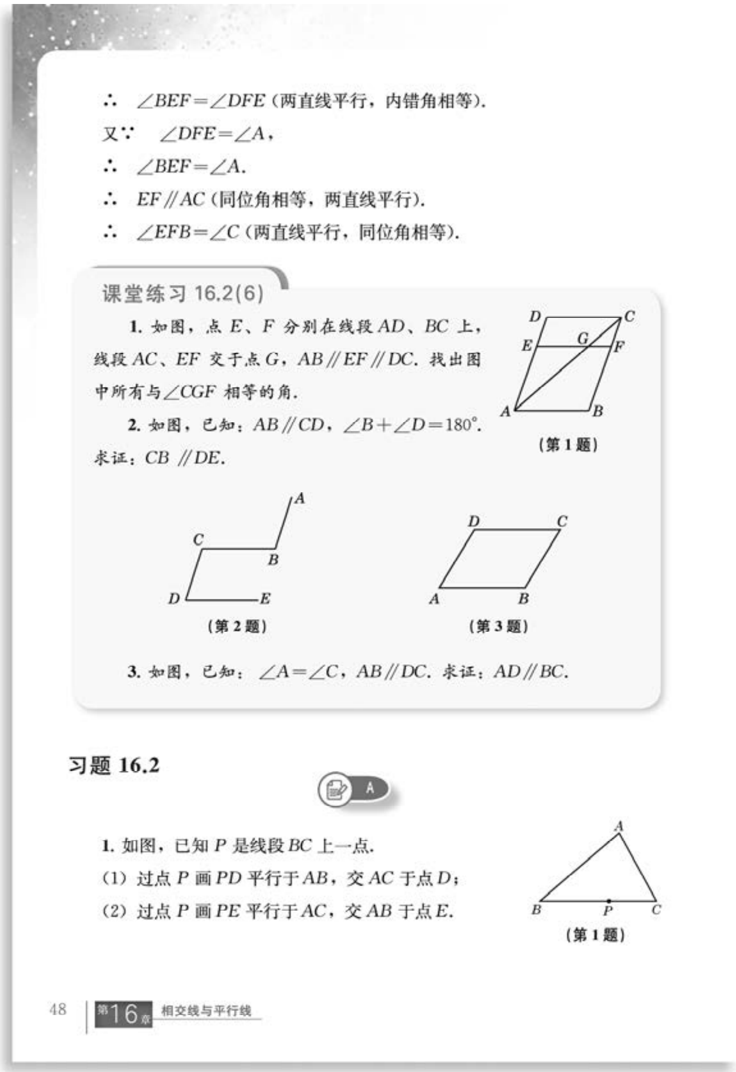
3. ∵ $AB /\!/ CD$，

∴ $\angle A+\angle D=180°$（两直线平行，同旁内角互补）.

∵ $\angle A=\angle C$，

∴ $\angle C+\angle D=180°$.

∴ $AD /\!/ BC$（同旁内角互补，两直线平行）.



∴ $\angle BEF=\angle DFE$（两直线平行，内错角相等）.

又∵ $\angle DFE=\angle A$，

∴ $\angle BEF=\angle A$.

∴ $EF /\!/ AC$（同位角相等，两直线平行）.

∴ $\angle EFB=\angle C$（两直线平行，同位角相等）.

课堂练习 16.2(6)

1. 如图，点 E、F 分别在线段 AD、BC 上，线段 AC、EF 交于点 G，$AB /\!/ EF /\!/ DC$. 找出图中所有与 $\angle CGF$ 相等的角.

（第 1 题）

2. 如图，已知：$AB /\!/ CD$，$\angle B+\angle D=180°$. 求证：$CB /\!/ DE$.

（第 2 题）　（第 3 题）

3. 如图，已知：$\angle A=\angle C$，$AB /\!/ DC$. 求证：$AD /\!/ BC$.

习题 16.2

A

1. 如图，已知 P 是线段 BC 上一点.

(1) 过点 P 画 PD 平行于 AB，交 AC 于点 D；

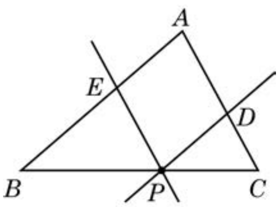
(2) 过点 P 画 PE 平行于 AC，交 AB 于点 E.

（第 1 题）

48　第16章 相交线与平行线

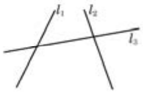
习题 16.2

1. 如图.

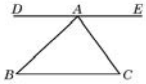


（第 1 题）

2. 如图，两条直线 l_1、l_2 被直线 l_3 所截，图中的同位角有________对，内错角有________对，同旁内角有________对.



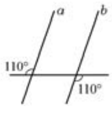
（第 2 题）



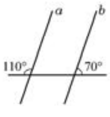
（第 3 题）

3. 如图，直线 DE、BC 被直线 AB 所截，与$\angle B$ 成内错角的是________，与$\angle B$ 成同旁内角的是________. 直线 DE、BC 被直线 AC 所截，与$\angle C$ 成内错角的是________.

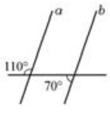
4. 下列图中不能判定直线 a、b 平行的是 （　　）



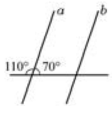
A.



B.



C.



D.

5. 如图，已知：$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，求证：$AB/\!/CD$，$EF/\!/MN$. 把以下解答过程补充完整.

解：∵ $\angle 1=\angle 2$，

$\angle 1=\angle 4$(______________)，

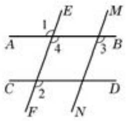
∴ $\angle$________$=\angle$________.

∴ $AB/\!/CD$ (______________________).

又∵ $\angle 1=\angle 3$，

∴ $\angle$________$=\angle$________.

∴ $EF/\!/MN$ (______________________).



（第 5 题）

16.2 平行线 | 49

2. 4；2；2.

3. $\angle DAB$；$\angle BAE$；$\angle EAC$.

4. D.

5. 对顶角相等；2；4；同位角相等，两直线平行；4；3；同位角相等，两直线平行.

6.（1）AD；BC；内错角相等，两直线平行.

（2）ED；BC；同位角相等，两直线平行.

（3）AB；DC；同旁内角互补，两直线平行.

7. ∵ $\angle BAP+\angle APD=180^\circ$，

∴ $AB\parallel CD$（同旁内角互补，两直线平行）.

∴ $\angle BAP=\angle APC$（两直线平行，内错角相等）.

∵ $\angle 1=\angle 2$，

∴ $\angle BAP-\angle 1=\angle APC-\angle 2$.

∴ $\angle EAP=\angle FPA$.

∴ $AE\parallel PF$（内错角相等，两直线平行）.

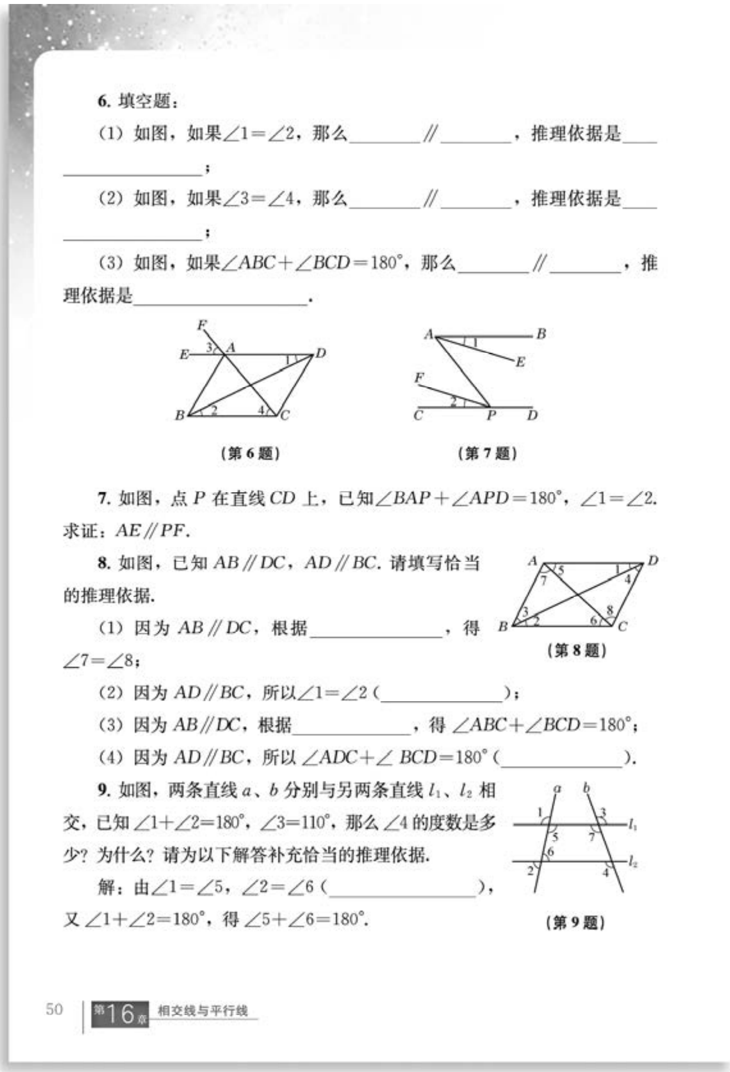
8.（1）两直线平行，内错角相等.

（2）两直线平行，内错角相等.

（3）两直线平行，同旁内角互补.

（4）两直线平行，同旁内角互补.

9. 对顶角相等；同旁内角互补，两直线平行；两直线平行，同位角相等；对顶角相等.



6. 填空题：

（1）如图，如果$\angle 1=\angle 2$，那么______$\parallel$______，推理依据是__________；

（2）如图，如果$\angle 3=\angle 4$，那么______$\parallel$______，推理依据是__________；

（3）如图，如果$\angle ABC+\angle BCD=180^\circ$，那么______$\parallel$______，推理依据是__________.

（第 6 题）　（第 7 题）

7. 如图，点 P 在直线 CD 上，已知$\angle BAP+\angle APD=180^\circ$，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$AE\parallel PF$.

8. 如图，已知 $AB\parallel DC$，$AD\parallel BC$. 请填写恰当的推理依据.

（1）因为 $AB\parallel DC$，根据__________，得$\angle 7=\angle 8$；

（2）因为 $AD\parallel BC$，所以$\angle 1=\angle 2$（__________）；

（3）因为 $AB\parallel DC$，根据__________，得$\angle ABC+\angle BCD=180^\circ$；

（4）因为 $AD\parallel BC$，所以$\angle ADC+\angle BCD=180^\circ$（__________）.

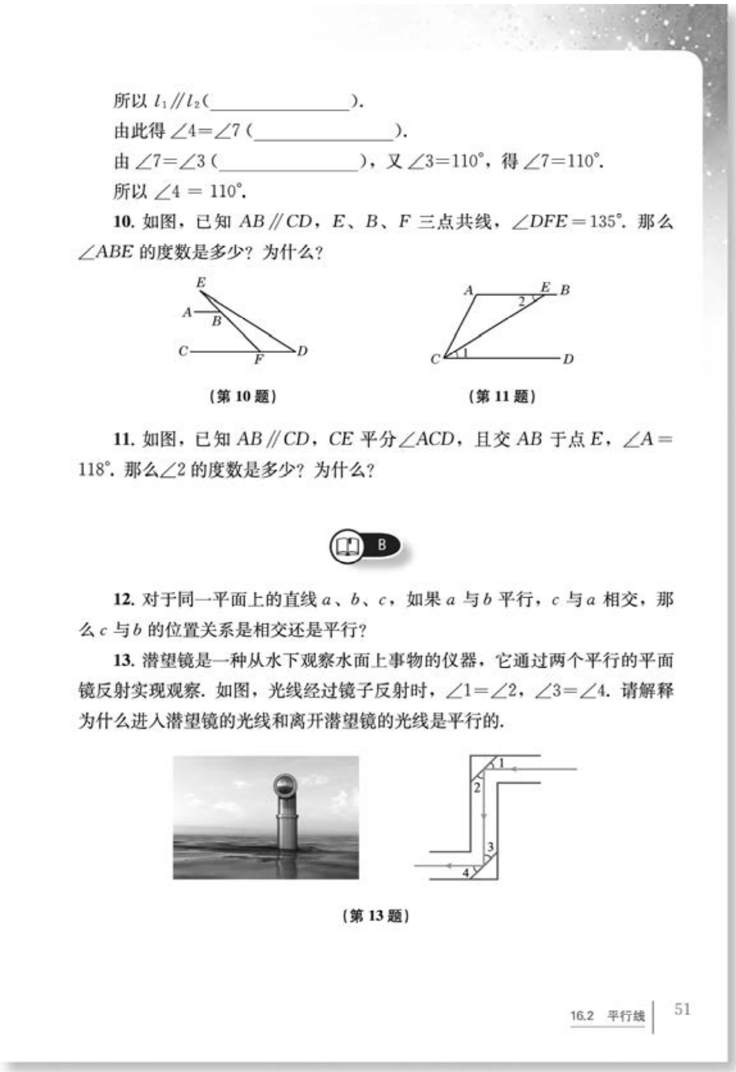
（第 8 题）

9. 如图，两条直线 a、b 分别与另两条直线 l_1、l_2 相交，已知$\angle 1+\angle 2=180^\circ$，$\angle 3=110^\circ$，那么$\angle 4$的度数是多少？为什么？请为以下解答补充恰当的推理依据.

解：由$\angle 1=\angle 5$，$\angle 2=\angle 6$（__________），又$\angle 1+\angle 2=180^\circ$，得$\angle 5+\angle 6=180^\circ$.

（第 9 题）

50　第16章　相交线与平行线


所以 $l_1 \parallel l_2$（__________）.

由此得 $\angle 4=\angle 7$（__________）.

由 $\angle 7=\angle 3$（__________），又 $\angle 3=110^\circ$，得 $\angle 7=110^\circ$.

所以 $\angle 4 = 110^\circ$.

10. 如图，已知 $AB \parallel CD$，E、B、F 三点共线，$\angle DFE=135^\circ$. 那么 $\angle ABE$ 的度数是多少？为什么？

（第 10 题）　（第 11 题）

11. 如图，已知 $AB \parallel CD$，CE 平分 $\angle ACD$，且交 AB 于点 E，$\angle A=118^\circ$. 那么 $\angle 2$ 的度数是多少？为什么？

B

12. 对于同一平面上的直线 a、b、c，如果 a 与 b 平行，c 与 a 相交，那么 c 与 b 的位置关系是相交还是平行？

13. 潜望镜是一种从水下观察水面上事物的仪器，它通过两个平行的平面镜反射实现观察. 如图，光线经过镜子反射时，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$. 请解释为什么进入潜望镜的光线和离开潜望镜的光线是平行的.

（第 13 题）

16.2 平行线　51

10. $\angle ABE=45^\circ$. 理由略.

11. $\angle 2=31^\circ$. 理由略.

12. c 与 b 相交.

13. 如图，$\angle BCD=180^\circ-\angle 1-\angle 2$，$\angle ABC=180^\circ-\angle 3-\angle 4$.

∵ $EF \parallel GH$，

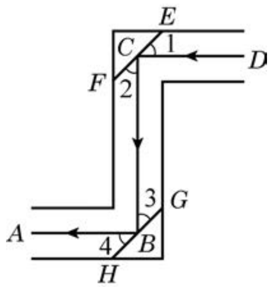
∴ $\angle 2=\angle 3$（两直线平行，内错角相等）.

又∵ $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，

∴ $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$.

∴ $\angle BCD=\angle ABC$.

∴ $AB \parallel CD$（内错角相等，两直线平行）.



（第 13 题）

14. $\because$ DE平分$\angle CDA$，

$\therefore$ $\angle 1=\frac{1}{2}\angle CDA$.

$\because$ BF 平分$\angle CBA$，

$\therefore$ $\angle 3=\frac{1}{2}\angle CBA$.

$\because$ $\angle CDA=\angle CBA$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 3$.

$\because$ $\angle 1=\angle 2$，

$\therefore$ $\angle 2=\angle 3$.

$\therefore$ $DE \parallel FB$（同位角相等，两直线平行）.

15. $\because$ $AD \parallel BC$，

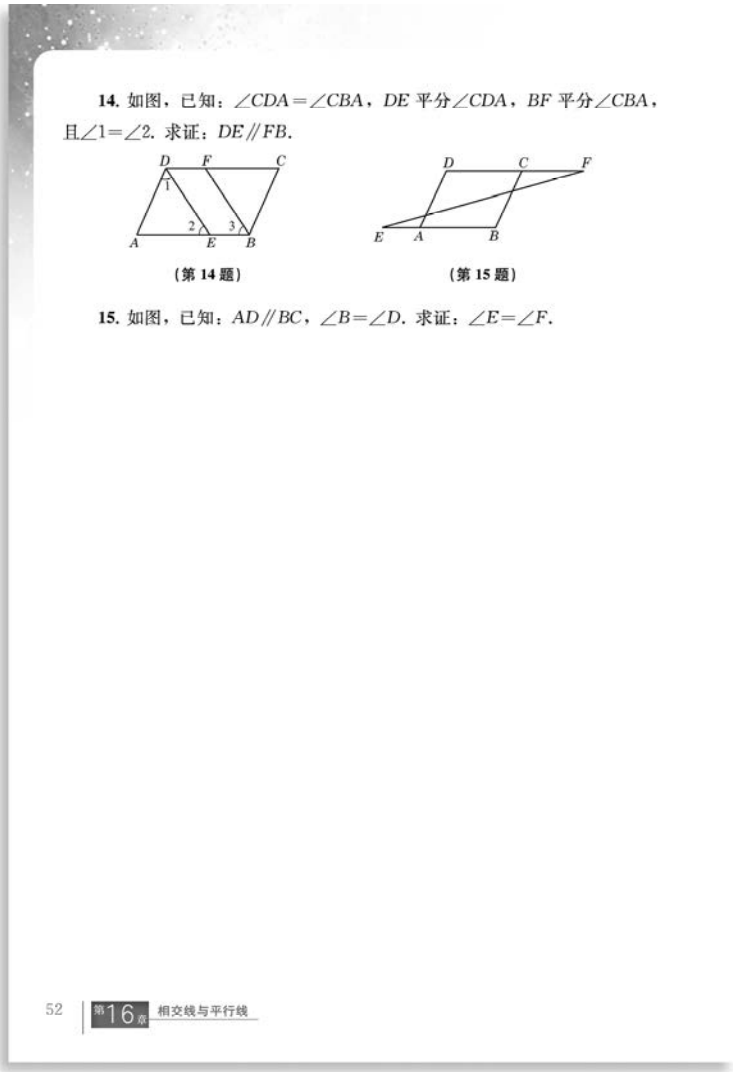
$\therefore$ $\angle B=\angle DAE$（两直线平行，同位角相等）.

$\because$ $\angle B=\angle D$，

$\therefore$ $\angle D=\angle DAE$.

$\therefore$ $DF \parallel EB$（内错角相等，两直线平行）.

$\therefore$ $\angle E=\angle F$（两直线平行，内错角相等）.



14. 如图，已知：$\angle CDA=\angle CBA$，DE 平分$\angle CDA$，BF 平分$\angle CBA$，且$\angle 1=\angle 2$. 求证：$DE \parallel FB$.

（第 14 题）　（第 15 题）

15. 如图，已知：$AD \parallel BC$，$\angle B=\angle D$. 求证：$\angle E=\angle F$.

52　第16章　相交线与平行线

16.3 命题与证明

本节教学目标

（1）通过具体实例，了解命题的意义，会区分命题的条件和结论，了解原命题及其逆命题的概念，理解命题的结构. 会识别两个互逆的命题，知道原命题成立其逆命题不一定成立.

（2）了解证明的意义和证明的必要性，知道数学思维要合乎逻辑，在探索并表述论证的过程中，感悟推理过程的逻辑性，知道可以用不同的形式表述证明的过程，会用综合法的证明格式，初步掌握推理的基本形式和规则，发展推理能力.

（3）了解反例的作用，知道利用反例可以判断一个命题是错误的.

（以下分析对应课本第 53～54 页）

本课教学重点

观察命题中语句的句式结构特点，了解命题的意义，区分命题的条件和结论.

本课教学建议

（1）命题的定义有多种版本，初中阶段不宜在“命题”这样的抽象概念的定义上做详细的推敲，也不必让学生判断一个陈述句是不是命题. 对于定义、公理、定理、命题这些概念，宜粗不宜细，因此本套教科书没有集中呈现，而是在学习过程中通过实例逐一解读.

（2）本课的内容中逻辑术语较多，会让部分学生感到抽象和困难. 可从一些具体、熟悉的例子入手，如相交线与平行线中出现的例子，组织学生讨论以形成正确的认识.

（3）有些命题的条件和结论并不明显，如平行公理，不必要求学生写出这些命题的条件与结论. 对于数学中必须引入的这类命题，为了帮助学生更好地理解，可以通过结合图形、添上被省略的词语、强调关键词等方法降低理解难度.

本课内容分析

为了有效且直接地判定引例中“已知 a、b 是任意两个数，如果 $a^2=b^2$，那么$a=b$”是假命题，采用了举反例的方法. 反例的定义将在下一课给出.

引例及例 1 中给出的命题，都是学生已经接触过的.

16.3 命题与证明

1. 命题

前面我们见过一些可以判断真假的语句. 例如：

(1) 两个有理数相乘，同号得正，异号得负；

(2) 已知 a、b 是任意两个数，如果 $a^2=b^2$，那么 $a=b$；

(3) 对顶角相等；

(4) 两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行；

(5) 两条平行直线被第三条直线所截，内错角相等.

像这样，用自然语言、符号或式子表达，且可以判断其真假的语句叫作命题. 正确的命题叫作真命题，错误的命题叫作假命题. 上述命题中，(1)(3)(4)(5)都可以被证明是真命题；而(2)是假命题，比如，$a=1$，$b=-1$，虽然 $a^2=b^2=1$，但是 $a\neq b$.

数学命题通常由条件、结论两部分组成. 命题常可以写成“如果……，那么……”的形式. 其中，用“如果”开始的部分是条件，用“那么”开始的部分是结论.

命题(3)“对顶角相等”是一个简洁表述的命题，它也可以改写成“如果……，那么……”的形式，叙述为“如果两个角是对顶角，那么这两个角相等”.

由观察、实验、归纳和类比等方法得出的命题，可能是真命题，也可能是假命题.

例 1 说出下列命题的条件和结论，并指出它们是真命题还是假命题：

(1) 如果 $a=b$，那么 $a+c=b+c$；

(2) 如果 $a+c=b+c$，那么 $a=b$；

(3) 对顶角相等；

(4) 相等的角是对顶角.

解 (1) 这个命题的条件是：$a=b$；结论是：$a+c=b+c$. 它是真命题.

(2) 这个命题的条件是：$a+c=b+c$；结论是：$a=b$. 它是真命题.

(3) 这个命题的条件是：两个角是对顶角；结论是：这两个角相等. 它是真命题.

（4）这个命题可以写成：如果两个角相等，那么这两个角是对顶角. 所以，这个命题的条件是：两个角相等；结论是：这两个角是对顶角. 它是假命题.

思考

怎样说明“相等的角是对顶角”是假命题？

例 1 中，命题(1)的条件和结论恰好分别是命题(2)的结论和条件；命题(3)的条件和结论也恰好分别是命题(4)的结论和条件. 像这样，在两个命题中，如果第一个命题的条件是第二个命题的结论，且第一个命题的结论又是第二个命题的条件，那么这两个命题叫作互逆命题. 如果把其中一个命题叫作原命题，那么另外一个命题就叫作它的逆命题.

例 1 中，命题(1)和命题(2)就是互逆命题，如果命题(1)是原命题，那么命题(2)就是命题(1)的逆命题，这两个命题都是真命题. 命题(3)和命题(4)也是互逆命题，其中命题(3)是真命题，而命题(4)是假命题.

原命题是真命题时，其逆命题不一定是真命题.

课堂练习 16.3(1)

1. 请举出一些命题，并指出它们是真命题还是假命题.

2. 判断下列命题是真命题还是假命题：

（1）两直线平行，同旁内角互补；

（2）经过直线外一点，有且只有一条直线与该直线平行；

（3）同位角相等；

（4）两个锐角的和是钝角；

（5）ab 与 $-\frac{1}{2}ba$ 是同类项；

（6）方程 $5x-2=7+2x$ 的解是 $x=3$.

3. 写出命题“如果两个角是同一个角的余角，那么这两个角相等”的逆命题. 这个逆命题是真命题还是假命题？

思考 可通过举反例说明该命题是假命题.

课堂练习 16.3(1)

1. 略.

2.（1）真命题.

（2）真命题.

（3）假命题.

（4）假命题.

（5）真命题.

（6）真命题.

3. 逆命题是“如果两个角相等，那么这两个角是同一个角的余角”. 是假命题.

（以下分析对应课本第 55～57 页）

本课教学重点

通过具体实例，掌握证明一个命题的步骤，能合理、规范地书写推理过程.

本课教学建议

（1）在强调言必有据地进行合乎逻辑的推理的同时，也要关注证明过程书写的格式与规范. 先要通过分析明确解题的大致思路，再去书写规范的论证过程.

（2）通过“纠错型”习题(如习题 16.3 第 6 题)，呈现学生常见的论证错误，让学生思考与讨论，这有利于学生从本质上去认识证明.

2. 证明

思考

我们知道，下列命题都是真命题：

(1) 如果$\frac{1}{3}a=\frac{1}{3}b$，那么$a=b$；

(2) 如果$-2a=-2b$，那么$a=b$.

小海由此得到一个猜想：已知任意三个数m、a、b，如果$ma=mb$，那么$a=b$. 你认为小海的猜想是真命题吗？为什么？

除了公理之外，真命题需要经过证明才能确认.

证明一个命题为真，先明确“已知”“求证”，再“证明”. 其中，“已知”是命题的条件，“求证”是命题的结论，“证明”是在“已知”和“求证”之间建立逻辑联系的完整推理过程. 在初中平面几何中，通常遵循步骤：

(1) 根据题意画出示意图；

(2) 根据条件和结论，参照示意图，写出“已知”和“求证”；

(3) 写出由条件推出结论的完整过程.

下面，我们以证明命题“两条平行直线被第三条直线所截，一对内错角的平分线互相平行”为例来说明.

如图 16-3-1，已知：$AB /\!/ CD$，直线EF分别与AB、CD相交于点G、H，GM、HN分别平分$\angle AGH$、$\angle DHG$.

求证：$GM /\!/ HN$.

分析　如图 16-3-1，要证明$GM /\!/ HN$，只要证明$\angle 1=\angle 2$. 由已知条件GM、HN分别平分$\angle AGH$、$\angle DHG$，只需证明$\angle AGH=\angle DHG$，而这可以由已知条件$AB /\!/ CD$得到.

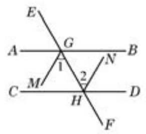


图 16-3-1

证明　如图 16-3-1，$\because$ $AB /\!/ CD$，

$\therefore$ $\angle AGH=\angle DHG$（两直线平行，内错角相等）.

又$\because$ GM、HN分别平分$\angle AGH$、$\angle DHG$，

16.3 命题与证明 | 55

本课内容分析

人们生活中所说的证明，如“实践证明”“历史证明”“实验证明”“举例证明”等，其含义较广，很多时候只不过是一种合情推理. 而数学证明是通过逻辑推理得出结论的过程，它可以是对一个特定的数学命题的证实或者否定.

思考　指出不完全归纳只是合情推理，进一步体会证明的意义和证明的必要性.

相交线、平行线的例题已经对证明过程做出了示范，本课先归纳初中几何证明的书写步骤，然后通过两个例题再一次给出书写的示范，进一步让学生明白怎样才是正确的论证和表达.

$\therefore\ \angle 1=\frac{1}{2}\angle AGH$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle DHG$.

$\therefore\ \angle 1=\angle 2$，

$\therefore$ $GM /\!/ HN$（内错角相等，两直线平行）.

例 2 如图 16-3-2，已知：$\angle A=\angle D$，$\angle C=\angle F$.

求证：$\angle FBA=\angle C$.

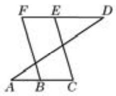


图 16-3-2

分析　要证明 $\angle FBA=\angle C$，只要证明 $\angle F=\angle FBA$，从而只需证明 $AC /\!/ FD$，而这可以由已知条件 $\angle A=\angle D$ 得到.

证明　$\because\ \angle A=\angle D$，

$\therefore$ $AC /\!/ FD$（内错角相等，两直线平行）.

$\therefore$ $\angle F=\angle FBA$（两直线平行，内错角相等）.

又 $\because\ \angle C=\angle F$，

$\therefore\ \angle FBA=\angle C$.

要判定一个命题是假命题，有时只需举出一个符合命题的条件，但不满足命题的结论的例子. 这样的例子通常称为反例.

例如，前面“思考”中小海猜想的命题“已知任意三个数 m、a、b，如果 $ma=mb$，那么 $a=b$”是假命题，可以举出一个反例：当 $m=0$ 时，有 $0\times 2=0\times 4$，但是 $2\neq 4$.

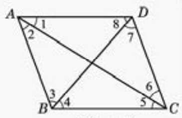
又如，“互为补角的两个角中一定有一个锐角”是假命题，可以举出反例：两个直角互为补角，但它们都不是锐角.

课堂练习 16.3(2)

1. 如图，请利用 $\angle 1$ 到 $\angle 8$ 这 8 个角，根据题目中的条件，补全结论，并给予证明.

（1）已知 $AB /\!/ DC$，可以推出哪些角相等？

（2）已知 $AD /\!/ BC$，可以推出哪些角相等？



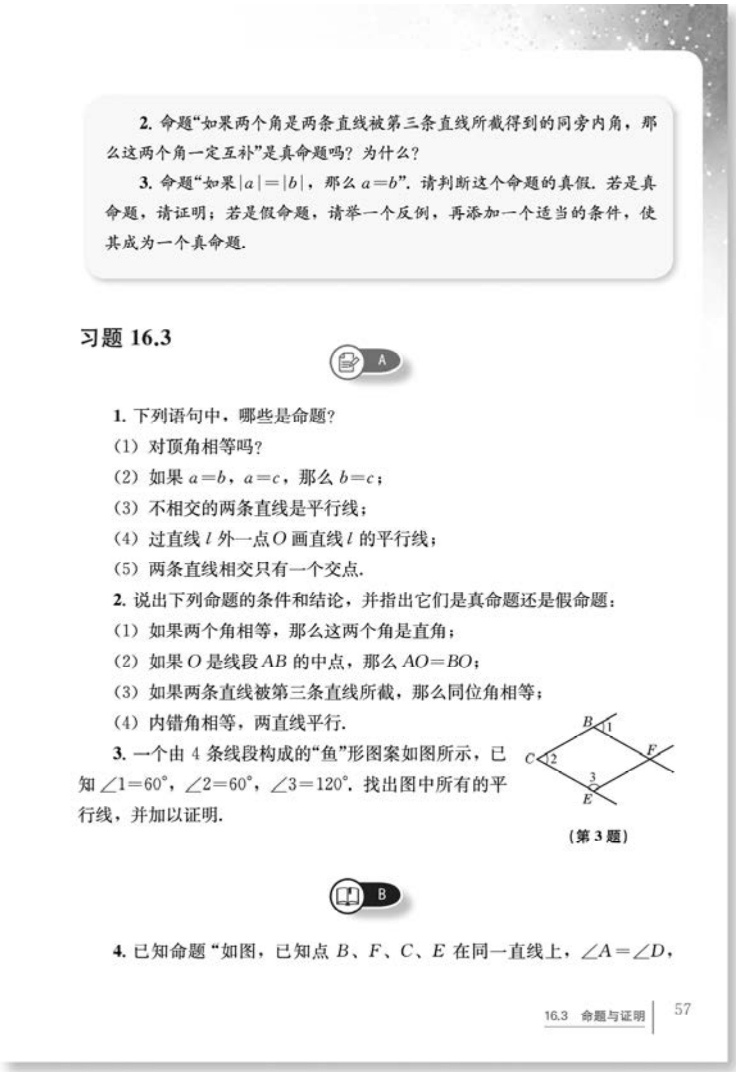
（第 1 题）

举反例是判定命题为假命题的常用方法. 同时，通过举反例，学生可以更好地了解数学语言的力量.

课堂练习 16.3(2)

1.（1）$\angle 2=\angle 6$，$\angle 3=\angle 7$. 证明略.

（2）$\angle 1=\angle 5$，$\angle 8=\angle 4$. 证明略.



2. 命题“如果两个角是两条直线被第三条直线所截得到的同旁内角，那么这两个角一定互补”是真命题吗？为什么？

3. 命题“如果 $|a|=|b|$，那么 $a=b$”. 请判断这个命题的真假. 若是真命题，请证明；若是假命题，请举一个反例，再添加一个适当的条件，使其成为一个真命题.

习题 16.3

A

1. 下列语句中，哪些是命题？

（1）对顶角相等吗？

（2）如果 $a=b$，$a=c$，那么 $b=c$；

（3）不相交的两条直线是平行线；

（4）过直线 l 外一点 O 画直线 l 的平行线；

（5）两条直线相交只有一个交点.

2. 说出下列命题的条件和结论，并指出它们是真命题还是假命题：

（1）如果两个角相等，那么这两个角是直角；

（2）如果 O 是线段 AB 的中点，那么 $AO=BO$；

（3）如果两条直线被第三条直线所截，那么同位角相等；

（4）内错角相等，两直线平行.

3. 一个由 4 条线段构成的“鱼”形图案如图所示，已知 $\angle1=60°$，$\angle2=60°$，$\angle3=120°$. 找出图中所有的平行线，并加以证明.

（第 3 题）

B

4. 已知命题“如图，已知点 B、F、C、E 在同一直线上，$\angle A=\angle D$，

16.3 命题与证明 57

2. 不是真命题. 例如，在三角形 ABC 中，$\angle A$ 与 $\angle B$ 分别为直线 AC、BC 被直线 AB 所截得到的同旁内角，但 $\angle A+\angle B<180°$.

3. 是假命题. 一个反例是：$|1|=|-1|$，但 $1\neq-1$（答案不唯一）. 可添加的条件不唯一，如“$ab>0$”“$a+b\neq0$”等.

习题 16.3

1.（2）（3）（5）是命题.

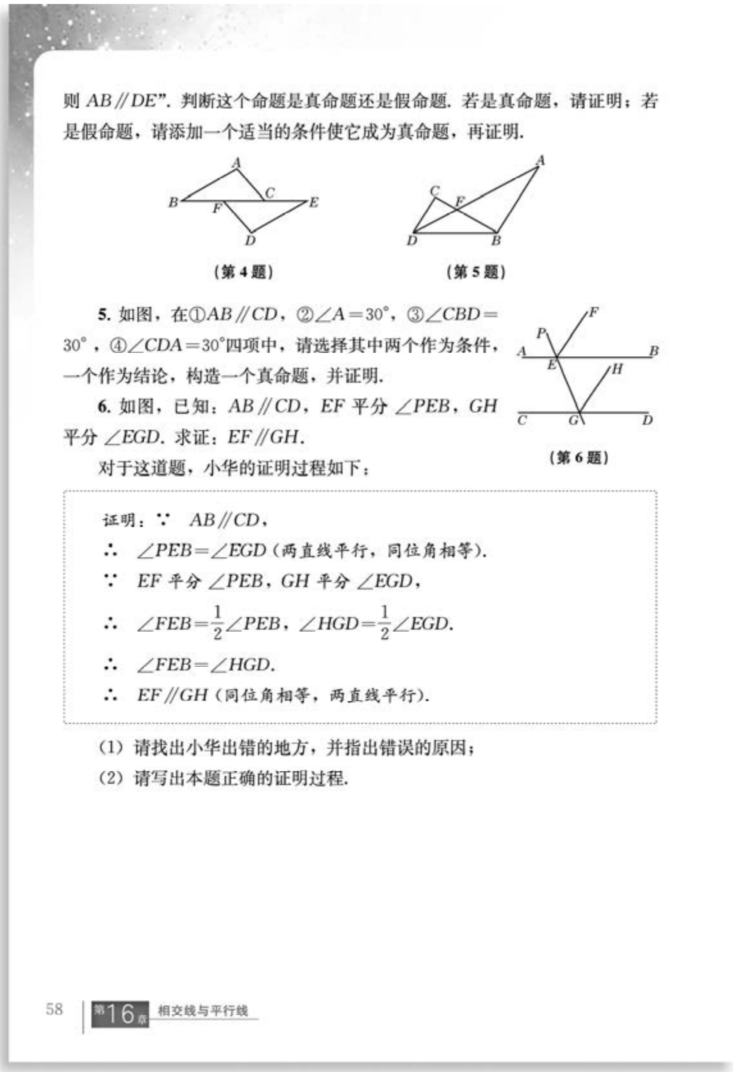
2.（1）这个命题的条件是：两个角相等；结论是：这两个角是直角. 它是假命题.

（2）这个命题的条件是：O 是线段 AB 的中点；结论是：$AO=BO$. 它是真命题.

（3）这个命题的条件是：两个角是两条直线被第三条直线所截得到的同位角；结论是：这两个角相等. 它是假命题.

（4）这个命题的条件是：两个角是两条直线被第三条直线所截得到的内错角，且这两个角相等；结论是：这两条直线平行. 它是真命题.

3. $BF\parallel CE$，$BC\parallel FE$. 证明略.


则 $AB \parallel DE$". 判断这个命题是真命题还是假命题. 若是真命题，请证明；若是假命题，请添加一个适当的条件使它成为真命题，再证明.

（第4题）　　（第5题）

5. 如图，在① $AB \parallel CD$，② $\angle A=30°$，③ $\angle CBD=30°$，④ $\angle CDA=30°$ 四项中，请选择其中两个作为条件，一个作为结论，构造一个真命题，并证明.

6. 如图，已知：$AB \parallel CD$，EF 平分 $\angle PEB$，GH 平分 $\angle EGD$. 求证：$EF \parallel GH$.

（第6题）

对于这道题，小华的证明过程如下：

证明：∵ $AB \parallel CD$，

∴ $\angle PEB=\angle EGD$（两直线平行，同位角相等）.

∵ EF 平分 $\angle PEB$，GH 平分 $\angle EGD$，

∴ $\angle FEB=\frac{1}{2}\angle PEB$，$\angle HGD=\frac{1}{2}\angle EGD$.

∴ $\angle FEB=\angle HGD$.

∴ $EF \parallel GH$（同位角相等，两直线平行）.

（1）请找出小华出错的地方，并指出错误的原因；

（2）请写出本题正确的证明过程.

58　第16章　相交线与平行线

4. 这个命题是假命题. 可添加的条件不唯一，如"$\angle B=\angle E$""$\angle ACB=\angle DFE$"或"$AC \parallel FD$"等. 若添加"$\angle B=\angle E$"，证明如下：

∵ $\angle B=\angle E$，

∴ $AB \parallel DE$（内错角相等，两直线平行）.

5. 从①②④中任选2个作为条件，余下的1个作为结论即可. 证明略.

6.（1）最后一步证明错了，$\angle FEB$ 与 $\angle HGD$ 不是同位角.

（2）∵ $AB \parallel CD$，

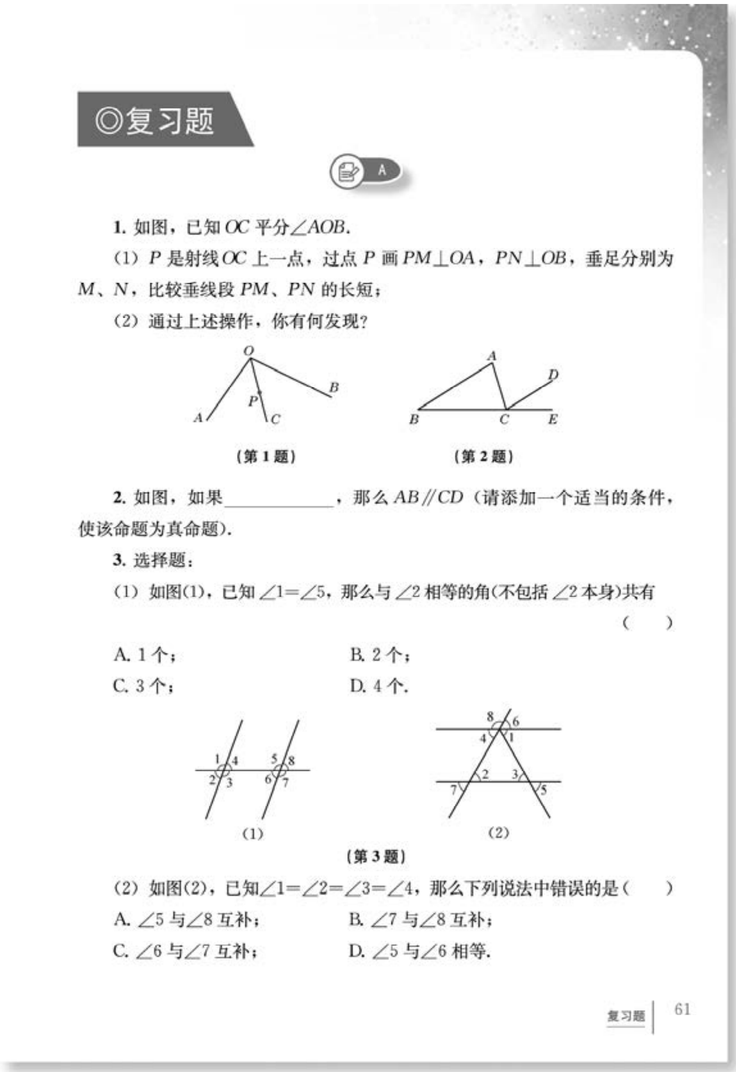
∴ $\angle PEB=\angle EGD$（两直线平行，同位角相等）.

∵ EF 平分 $\angle PEB$，GH 平分 $\angle EGD$，

∴ $\angle FEP=\frac{1}{2}\angle PEB$，$\angle HGE=\frac{1}{2}\angle EGD$.

∴ $\angle FEP=\angle HGE$.

∴ $EF \parallel GH$（同位角相等，两直线平行）.



◎复习题

A

1. 如图，已知 OC 平分 $\angle AOB$.

（1）P 是射线 OC 上一点，过点 P 画 $PM \perp OA$，$PN \perp OB$，垂足分别为 M、N，比较垂线段 PM、PN 的长短；

（2）通过上述操作，你有何发现？

（第 1 题）　　（第 2 题）

2. 如图，如果__________，那么 $AB /\!/ CD$（请添加一个适当的条件，使该命题为真命题）.

3. 选择题：

（1）如图(1)，已知 $\angle 1=\angle 5$，那么与 $\angle 2$ 相等的角(不包括 $\angle 2$ 本身)共有（　　）

A. 1 个；　　B. 2 个；

C. 3 个；　　D. 4 个.

(1)　　(2)

（第 3 题）

（2）如图(2)，已知 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$，那么下列说法中错误的是（　　）

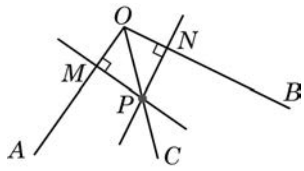
A. $\angle 5$ 与 $\angle 8$ 互补；　　B. $\angle 7$ 与 $\angle 8$ 互补；

C. $\angle 6$ 与 $\angle 7$ 互补；　　D. $\angle 5$ 与 $\angle 6$ 相等.

复习题　61

复习题

1.（1）如图.



（第 1 题）

$PM=PN$.

（2）角平分线上的点到角两边的距离相等.

2. $\angle B=\angle DCE$（答案不唯一）.

3.（1）C.

（2）C.

（3）C.

4. ∵ $\angle A=\angle B$，

∴ $AC /\!/ DB$（内错角相等，两直线平行）.

∴ $\angle C=\angle D$（两直线平行，内错角相等）.

5.（1）$90°$.

（2）$144°$.

（3）$60°$.

6.（1）有，②④是互逆命题.

（2）有，③是假命题.

7. $\angle D=130°$.

（3）如果两条平行直线被第三条直线所截，那么下列说法中错误的是（　　）

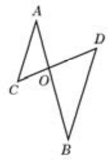
A. 一对同位角的平分线互相平行；

B. 一对内错角的平分线互相平行；

C. 一对同旁内角的平分线互相平行；

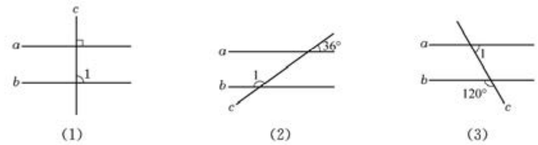
D. 一对同旁内角的平分线互相垂直.

4. 如图，已知：AB、CD 相交于点 O，$\angle A=\angle B$. 求证：$\angle C=\angle D$.



（第 4 题）

5. 在下列各图中，直线 c 分别与直线 a、b 相交. 已知 $a /\!/ b$，分别计算 $\angle 1$ 的度数.



（第 5 题）

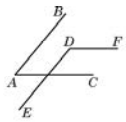
6. 已知下面 4 个命题：①钝角大于直角；②同位角相等，两直线平行；③相等的角都是钝角；④两直线平行，同位角相等.

回答下列问题：

（1）这些命题中有互逆命题吗？若有，指出哪两个命题是互逆命题（写出序号即可）.

（2）这些命题中有假命题吗？若有，指出其中的假命题（写出序号即可）.

7. 如图，已知 $\angle A$ 的两边与 $\angle D$ 的两边分别平行，且 $\angle D$ 比 $\angle A$ 的 3 倍少 $20°$. 求 $\angle D$ 的度数.

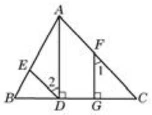


（第 7 题）

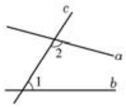
62　第16章　相交线与平行线

B

8. 如图，已知：$AD\perp BC$，$FG\perp BC$，垂足分别为 D、G，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$ED/\!/AC$.



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 用反证法证明. 如图，已知：直线 a、b 被直线 c 所截，$\angle 1+\angle 2\neq 180°$. 求证：$a$ 与 b 不平行.

证明：假设____________，则根据____________，可得 $\angle 1+\angle 2=180°$.

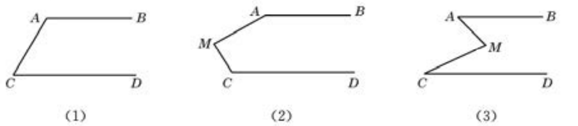
这与____________矛盾，故假设不成立，a 与 b 不平行.

10. 请回答下列问题：

(1) 如图(1)，已知 $AB/\!/CD$，那么 $\angle A+\angle C$ 等于多少度？为什么？

(2) 如图(2)，已知 $AB/\!/CD$，那么 $\angle A+\angle AMC+\angle C$ 等于多少度？为什么？

(3) 如图(3)，已知 $AB/\!/CD$，那么 $\angle A$、$\angle C$ 及 $\angle AMC$ 有怎样的数量关系？为什么？



（第 10 题）

复习题 63

8. ∵ $AD\perp BC$，

$FG\perp BC$，

∴ $\angle ADC=\angle FGC=90°$.

∴ $AD/\!/FG$（同位角相等，两直线平行）.

∴ $\angle 1=\angle DAC$（两直线平行，同位角相等）.

∵ $\angle 1=\angle 2$，

∴ $\angle 2=\angle DAC$.

∴ $DE/\!/AC$（内错角相等，两直线平行）.

9. $a/\!/b$；两直线平行，同旁内角互补；$\angle 1+\angle 2\neq 180°$.

10. (1) $\angle A+\angle C=180°$. 理由略.

(2) $\angle A+\angle AMC+\angle C=360°$. 理由略. 提示：过点 M 作 AB 的平行线.

(3) $\angle AMC=\angle A+\angle C$. 理由略. 提示：过点 M 作 AB 的平行线.

三、参考资料

欧几里得第五公设是“一条直线与另外两条直线相交，同侧的内角和小于两直角时，这两条直线就在这一侧相交”，其等价命题为“经过直线外的一点，有且只有一条直线与该直线平行”，本套教科书把该等价命题作为公理，实际上是在欧几里得几何的背景下研究几何.

值得注意的是，欧几里得第五公设相较于其他四个公设，在内容和表述上较为复杂，在《几何原本》中的应用也较晚. 两千多年来，不断有数学家试图用其他四个公设证明它，使其成为一个定理，但始终未能成功.

随着对第五公设研究的不断深入，罗巴切夫斯基(Lobachevsky)用“在同一平面上，过直线外一点可作两条直线与这条直线平行”来代替第五公设，得出三角形的内角和小于 180° 的结论；黎曼(Riemann)则采用“在同一平面上，过直线外任一点不存在直线与这条直线平行”来代替第五公设，得出三角形的内角和大于 180° 的结论. 他们创立的几何学均称为非欧几何学.

第 17 章　三　角　形

一、本章概述

1. 总体要求

三角形是最简单、最基本的直线型封闭图形. 在本章之前学生已经了解了一些三角形的初步知识，积累了一些对三角形的直观认识. 本章的任务主要是：理解三角形的有关概念，掌握三角不等式及三角形的内角和定理；理解三角形全等的概念，掌握判定三角形全等的三个公理(“边边边”“边角边”“角边角”)与一个定理(“角角边”)；了解尺规作图的概念，能依据三角形全等的判定与性质，用尺规作图作出一些基本图形. 本章知识是后续学习等腰三角形、直角三角形、四边形和相似形等几何内容必不可少的基础.

本章内容对提升逻辑思维能力起着重要作用. 依据三角形全等的判定与性质，识别并证明在不同位置的两个三角形全等，进而发现并证明几何图形中的某些线段相等、角相等，是平面几何中证明线段相等、角相等的一种基本思路. 要在这一过程中发展学生的几何直观、空间观念和推理能力.

2. 课时安排建议

本章共 17 课时，具体课时分配建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
17.1 三角形的有关概念	2	三角形的有关概念　2 课时
17.2 三角形的内角和	3	三角形的内角和　1 课时
		三角形的外角及其性质　2 课时
习题课	1	
17.3 全等三角形及其性质	1	全等三角形及其性质　1 课时
17.4 三角形全等的判定	8	三角形全等的判定　8 课时
复习与小结	2	

3. 内容编排与特色

本章内容分为四节，分别是“17.1 三角形的有关概念”“17.2 三角形的内角和”“17.3 全等三角形及其性质”与“17.4 三角形全等的判定”.

关于“三角形的有关概念”，先给出三角形的概念，再通过操作发现三角不等式，然后给出直角三角形、等腰三角形等特殊三角形以及三角形的高、中线与角平分线的概念. 与上海“二期课改”教科书相比，三角形的定义有改动，将“由不在同一直线上的三条线段首尾顺次联结所组成的图形”改为“不在同一直线上的三点用线段两两连接所组成的图形”；将“三角形任意两边的和大于第三边”作为公理而不是定理，并指出此公理称为“三角不等式”；删去了“不等边三角形”的概念.

关于“三角形的内角和”，先通过将三角形纸片的三个角撕下再拼在一起的操作，发现三角形的内角和等于 180°，再进行严格的推理论证. 在定义了三角形的外角后，推导三角形外角的性质.

关于“全等三角形”，先由“一个图形经过平移、旋转、翻折后，与另一个图形能够完全重合”来定义全等形，指出全等三角形是全等形的一类特例，然后从定义出发得到性质：全等三角形的对应边相等、对应角相等，最后给出全等三角形的判定及其应用. 与上海“二期课改”教科书相比，三角形全等的判定的出现次序进行了调整，先“边边边”，然后“边角边”和“角边角”，将三者直接作为公理，最后通过证明得到“角角边”. 此外，在“边边边”之后，插入尺规作图的内容.

4. 教学提示

全等三角形的教学是整个平面几何教学的关键. 可通过画图、测量、折叠等操作，使学生确信全等三角形三个判定公理的合理性与可靠性，并通过“边边角”不一定能推出三角形全等的事实从反面加深学生的认识. 寻找两个三角形的对应元素是一个难点，根据全等三角形的性质，在全等三角形中对应角一定相等，对应边也一定相等，因此对应角、对应边应该在相等的角或边中去寻找. 在两个三角形全等的书写格式上，通常按对应顶点的顺序书写. 关于全等三角形证明题的训练，应该从简单的开始，从只需证明一次全等且不需要添辅助线的问题逐步过渡到较复杂的、需要证明两次全等或添加一条辅助线的问题.

帮助学生理解证明的逻辑，经历规范书写逻辑推理的过程，既是本章教学的重点，也是困难所在. 学生的困难主要有以下方面：对证明前的分析过程缺乏必要的了解与训练，对基本的推理不熟悉，对知识缺乏系统理解与掌握，不能有条理地叙述证明过程等. 教师要针对学生的具体情况给予帮助. 如果学生独立书写证明过程确有困难，可先通过填写证明过程中的理由或缺漏的步骤，来提高其书写表达能力.

尺规作图源于古希腊. 将作图工具限制为不带刻度的直尺和圆规，用最少的工具作出尽可能多的几何图形，恰如从最少的公理出发推导尽可能多的定理，可以很好地训练逻辑思维. 尺

规作图问题需要手脑并用，可以有效地帮助学生将几何直观与逻辑推理结合在一起，应予重视.

5. 评价建议

理解三角形及其内角、外角、高、中线、角平分线的概念，理解全等三角形的概念，掌握三角不等式、三角形的内角和定理、三角形全等的性质与判定，掌握用尺规作图作出一些基本图形，是本章教学的基本要求. 这些要求要在教学评价予以落实. 需要添加多条辅助线或需要证明三次以上的全等的问题，不宜作为对全体学生的要求进行考查. 在尺规作图中，应要求学生了解作图原理并保留作图痕迹，但不要求写出作法.

重视对学生的个性化评价. 随着几何学习的深入、概念的增加和推理论证要求的提高，可能出现一些学生跟不上、一些学生“吃不饱”的现象. 要注意保护学生对几何的学习热情，评价结果要更多地关注学生的进步. 鼓励跟不上的学生克服困难，并提供有效的帮助，使他们迎头赶上. 同时也要关注“吃不饱”的学生，可以对他们提出更高的要求，如以“一题多证”等方式来激发其学习的成就感.

二、教科书分析与教学建议

17.1　三角形的有关概念

本节教学目标

（1）理解三角形及其内角、外角、中线、高、角平分线的概念，发展几何直观和空间观念.

（2）探索并掌握三角不等式，发展推理能力.

（以下分析对应课本第 65～68 页）

本课教学重点

探索并掌握三角不等式.

本课教学建议

（1）对于长为 a、b、c（$a \leqslant b \leqslant c$）的三条线段，如果 $a+b \leqslant c$，那么依据“三角形的任意两边之和大于第三边”，这三条线段不能通过首尾顺次连接围成三角形. 如果 $a+b>c$，那么这三条线段一定能通过首尾顺次连接围成三角形吗？结论是肯定的. 这一点可以通过画图让学生直观理解.

（2）要引导学生准确理解“三角形的任意两边之和大于第三边”“三角形任意两边之差小于第三边”中“任意”的含义，明确“三角形的任意两边之和大于第三边”等价于“三角形任意两边之差小于第三边”，也等价于“三角形中较小的两边之和大于第三边”.

17.1 三角形的有关概念

定义 不在同一直线上的三点用线段两两连接而成的图形叫作三角形. 其中，三个点叫作三角形的顶点；连接顶点的三条线段叫作三角形的边，边的长度叫作边长；顶点处两边组成的角叫作三角形的内角，简称三角形的角.

如图 17-1-1，线段 AB、BC、CA 是三角形的边；点 A、B、C 是三角形的顶点；$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 是三角形的内角.

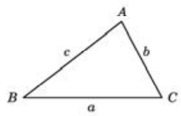


图 17-1-1

顶点是 A、B、C 的三角形，记作"$\triangle ABC$"，读作"三角形 ABC". 顶点 A、B、C 所对的边通常分别用 a、b、c 表示，如图 17-1-1 所示.

不在同一直线上的三点可以用线段两两连接构成一个三角形，是不是任意三条线段都可以组成一个三角形呢？

操作

给定三条线段，尝试用直尺和圆规作出一个三角形.

(1) 线段的长分别是 7 cm、12 cm、15 cm；

(2) 线段的长分别是 7 cm、9 cm、15 cm；

(3) 线段的长分别是 7 cm、8 cm、15 cm；

(4) 线段的长分别是 7 cm、7 cm、15 cm.

通过操作可以知道，第(1)(2)组中的三条线段能作出三角形，第(3)(4)组中的三条线段不能作出三角形.

思考

三条线段的长度必须具备怎样的条件才能作出一个三角形呢？

如果两条线段之和小于等于第三条线段，那么这三条线段不能组成一个

17.1 三角形的有关概念 65

本课内容分析

这样给三角形下定义，立足于直观，是自然和易于接受的.

引导学生通过用直尺和圆规作图，归纳得到三角形三边之间的关系.

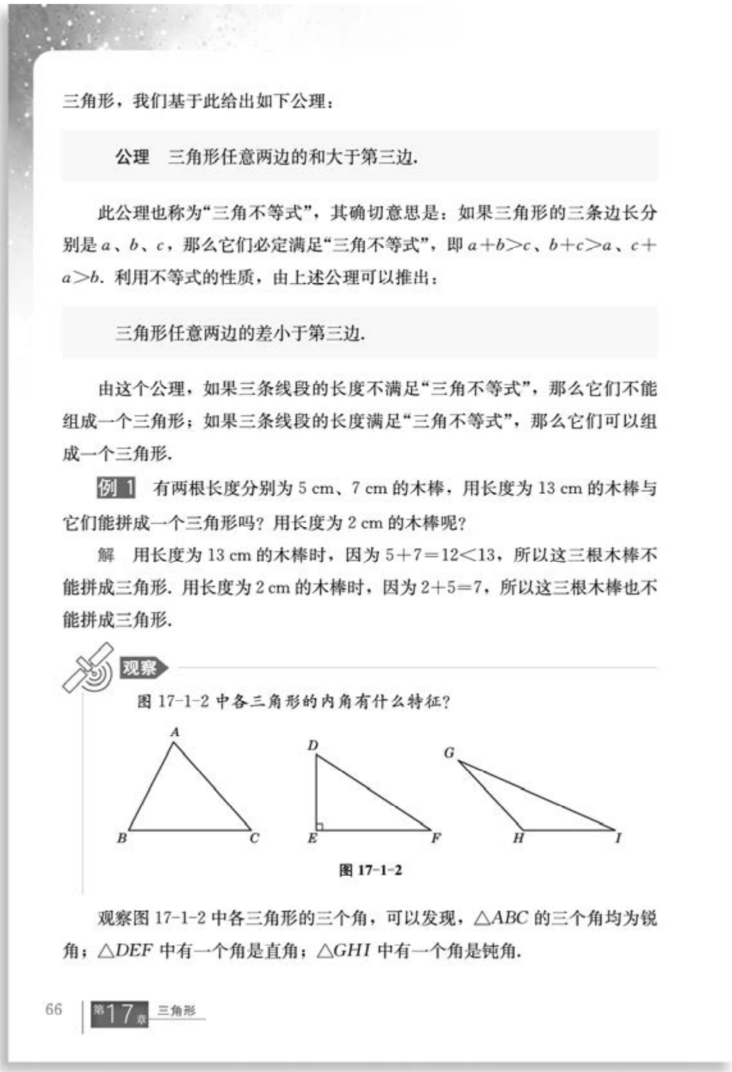
此处将“三角形任意两边之和大于第三边”作为公理. 有些教科书中将“两点之间线段最短”作为公理，推出“三角形两边之和大于第三边”，并将其作为定理. 但“两点之间线段最短”不是严谨的表达，未说清楚线段的比较对象是折线段还是所有可求长的曲线.

“三角不等式”在有些文献中被称为“三角形不等式”，在数学中有重要的地位.

该公理的逆命题“满足三角不等式的三条线段可以围成三角形”也是正确的，可通过用直尺和圆规作图加以理解.

例 1 是“三角不等式”的直接应用.

观察　通过观察三角形三个内角的特征，对三角形进行分类.


三角形，我们基于此给出如下公理：

公理　三角形任意两边的和大于第三边.

此公理也称为“三角不等式”，其确切意思是：如果三角形的三条边长分别是 a、b、c，那么它们必定满足是“三角不等式”，即 $a+b>c$、$b+c>a$、$c+a>b$. 利用不等式的性质，由上述公理可以推出：

三角形任意两边的差小于第三边.

由这个公理，如果三条线段的长度不满足“三角不等式”，那么它们不能组成一个三角形；如果三条线段的长度满足“三角不等式”，那么它们可以组成一个三角形.

例 1　有两根长度分别为 5 cm、7 cm 的木棒，用长度为 13 cm 的木棒与它们能拼成一个三角形吗？用长度为 2 cm 的木棒呢？

解　用长度为 13 cm 的木棒时，因为 $5+7=12<13$，所以这三根木棒不能拼成三角形. 用长度为 2 cm 的木棒时，因为 $2+5=7$，所以这三根木棒也不能拼成三角形.

观察

图 17-1-2 中各三角形的内角有什么特征？

A B C D E F G H I

图 17-1-2

观察图 17-1-2 中各三角形的三个角，可以发现，$\triangle ABC$ 的三个角均为锐角；$\triangle DEF$ 中有一个角是直角；$\triangle GHI$ 中有一个角是钝角.

66 第 17 章 三角形

定义 三个角都是锐角的三角形叫作锐角三角形；有一个角是直角的三角形叫作直角三角形；有一个角是钝角的三角形叫作钝角三角形.

这样，三角形可分为锐角三角形、直角三角形和钝角三角形这三类，每个三角形属于且只属于其中的一类.

在直角三角形中，直角的两条边叫作直角边，直角所对的边叫作斜边. 直角三角形可用符号“Rt△”表示，例如直角三角形 ABC 可以表示为“Rt△ABC”，读作“直角三角形 ABC”.

定义 有两边相等的三角形叫作等腰三角形，特别地，三边都相等的三角形叫作等边三角形.

图 17-1-3 中，△ABC 的三边互不相等，不是等腰三角形；△DEF 中有两条边 DE、DF 相等，是等腰三角形；△GHI 的三边都相等，是等边三角形.

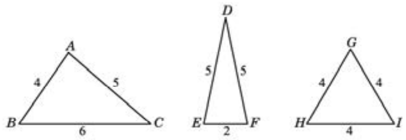


图 17-1-3

既是等腰三角形又是直角三角形的三角形叫作等腰直角三角形. 例如，有 45°角的三角尺的形状是等腰直角三角形.

课堂练习 17.1(1)

1. 下列长度的三根铁条能首尾顺次连接做成三角形框架的是（　　）

A. 23 cm、10 cm、8 cm；

B. 15 cm、23 cm、8 cm；

C. 18 cm、10 cm、23 cm；

D. 18 cm、10 cm、8 cm.

引导学生准确地表达定义中的量词，如“三个角”“一个角”.

还可以给出等价形式的定义，例如，最大内角是锐角的三角形是锐角三角形.

“不等边三角形”这一名词，从字面理解容易引起歧义，本套教科书不引入这一名称.

课堂练习 17.1(1)

1. C.

2. 5 cm、7 cm 或 6 cm、6 cm.

（以下分析对应课本第 68～70 页）

本课教学重点

理解三角形的高、中线和角平分线的含义，掌握这些基本线段的画法.

本课教学建议

（1）三角形的中线、角平分线和高是三角形中的基本线段. 建议教学时通过画图明确：三角形的高有三种情况，可能在三角形内，也有可能是三角形的边，还有可能在三角形外.

（2）三角形的三条中线(或三条角平分线，或三条高所在直线)交于一点. 教学时可以借助信息技术动态演示，验证这一结论. 在这一教学过程中要注意发展学生的几何直观和空间观念.

2. 如果一个等腰三角形的一边长为 5 cm，周长为 17 cm，那么其他两边的长分别可能是多少？

定义 给定一个三角形，从一个顶点向它的对边所在的直线画垂线，此顶点和垂足之间的线段叫作三角形(此边上)的高. 连接一个顶点及其对边中点的线段叫作三角形(此边上)的中线. 三角形一个内角的平分线与这个角的对边相交，这个角的顶点与交点之间的线段叫作三角形(此角)的角平分线.

严格地说，三角形的高、中线与角平分线均需明确所在的边或角，但在不会引起混淆时也可以省略.

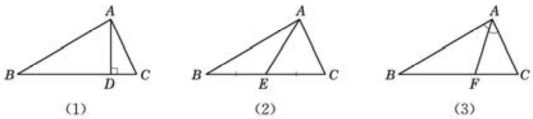


图 17-1-4

在图 17-1-4(1)中，$AD \perp BC$，垂足为 D，线段 AD 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的高，也可以写成"线段 AD 是 $\triangle ABC$ 的高"；在图 17-1-4(2)中，点 E 在边 BC 上，$BE=CE$，线段 AE 是 $\triangle ABC$ 的中线；在图17-1-4(3)中，$\angle BAF=\angle CAF$，线段 AF 是 $\triangle ABC$ 的角平分线.

操作

(1) 在图 17-1-5(1)(2)(3)中，分别画三个三角形的三条中线；

(2) 在图 17-1-5(4)(5)(6)中，分别画三个三角形的三条角平分线；

(3) 在图 17-1-5(7)(8)(9)中，分别画三个三角形的三条高.

本课内容分析

给出三角形的高、中线、角平分线的概念后，要强调它们都是线段，且各有三条.

要注意区别：三角形的角平分线是线段，而角的平分线是射线.

在理解三角形分类的基础上，画按角分类的各种三角形的中线、角平分线和高.

通过画图和比较，加深对三角形的中线、角平分线和高的认识. 发现三条中线、三条角平分线和三条高(或其所在直线)分别交于一点，并归纳交点所在的位置.

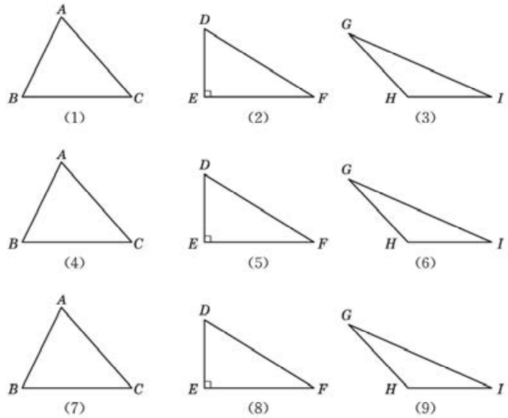


图 17-1-5

观察所画图形可以发现：

三角形的三条中线相交于三角形内一点. 三角形的三条角平分线相交于三角形内一点. 三角形的三条高所在直线相交于一点，它的位置情况如下：锐角三角形时在三角形内；直角三角形时在直角顶点；钝角三角形时在三角形外.

例 2(1)是画三角形的高的逆向问题，根据三角形高的定义，发现 AE 是图中所有三角形的高. 例 2(2)是三角形的中线和高的定义等知识的综合应用.

例 2 如图 17-1-6，在$\triangle ABC$ 中，AD 是边 BC 上的中线，$AE\perp BC$，垂足为 E.

(1) AE 是图 17-1-6 中哪几个三角形的高?

(2) 找出图 17-1-6 中面积相等的两个三角形，并加以证明.

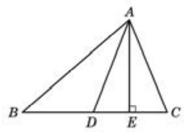


图 17-1-6

解 (1) AE 是$\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle ABE$、$\triangle ADC$、$\triangle ADE$ 和$\triangle AEC$ 的高.

(2) $\triangle ABD$ 与$\triangle ACD$ 的面积相等. 证明如下：

17.1 三角形的有关概念 69

∵ AD 是边 BC 上的中线，

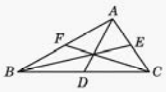
∴ $BD=DC$.

∴ $\frac{1}{2}BD \cdot AE=\frac{1}{2}DC \cdot AE$.

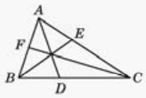
由三角形的面积公式，可知△ABD 与△ACD 的面积相等.

课堂练习 17.1(2)

1. 如图，AD、BE、CF 是△ABC 的三条中线，那么 $AB=$ 2______$=$2______，$BD=\frac{1}{2}$______，$AE=$______.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，AD、BE、CF 是△ABC 的三条角平分线，那么∠$BAD=$______，∠$ABE=\frac{1}{2}$______，∠$ACB=2$______$=2$______.

习题 17.1

A

1. 以下列长度的各组线段为边能组成三角形的是　　（　　）

A. 2 cm、4 cm、6 cm；

B. 2 cm、5 cm、6 cm；

C. 2 cm、9 cm、6 cm；

D. 10 cm、4 cm、6 cm.

70 | 第17章 三角形

课堂练习 17.1(2)

1. AF；BF；BC；CE.

2. $\angle CAD$；$\angle ABC$；$\angle ACF$；$\angle BCF$.

习题 17.1

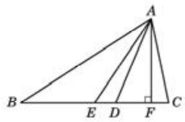
1. B.

2. AFB；AFC；BAD；CAD；BE；CE.

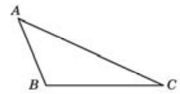
3. 画图略. Rt$\triangle ABD$、Rt$\triangle BCD$；$\triangle ACE$ 与$\triangle BCE$.

4. 能拼成一个三边长分别为 4 cm、7 cm、7 cm 的等腰三角形. 若三段木棒能拼成一个等腰三角形，且该等腰三角形有一边长为 4 cm，则其余两边相等或其中有一边长也为 4 cm. 如果是前者，那么三段木棒长分别为 4 cm、7 cm、7 cm，满足三角不等式，可以拼成三角形. 如果是后者，三段木棒长分别为 4 cm、4 cm、10 cm，不满足三角不等式，不能拼成三角形.

2. 如图，如果 AD、AE、AF 分别是$\triangle ABC$ 的角平分线、中线和高，那么$\angle$______$=\angle$______$=90°$，$\angle$______$=\angle$______，线段______$=$______.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，画出$\triangle ABC$ 的边 AC 上的高 BD，再写出所得图形中的直角三角形；画出$\triangle ABC$ 的边 AB 上的中线 CE，再写出所得图形中面积相等的两个三角形.

B

4. 把一根长为 18 cm 的细木棒锯成三段，拼成一个等腰三角形. 能拼成多少种有一边长为 4 cm 的等腰三角形？为什么？

17.2　三角形的内角和

本节教学目标

（1）探索并掌握三角形的内角和定理.

（2）掌握三角形的内角和定理的推论：三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和.

（3）在证明与运用三角形的内角和定理的过程中，发展推理能力.

（以下分析对应课本第 72～73 页）

本课教学重点

探索并证明三角形的内角和定理，掌握运用三角形的内角和定理进行初步的判断、证明和计算.

本课教学建议

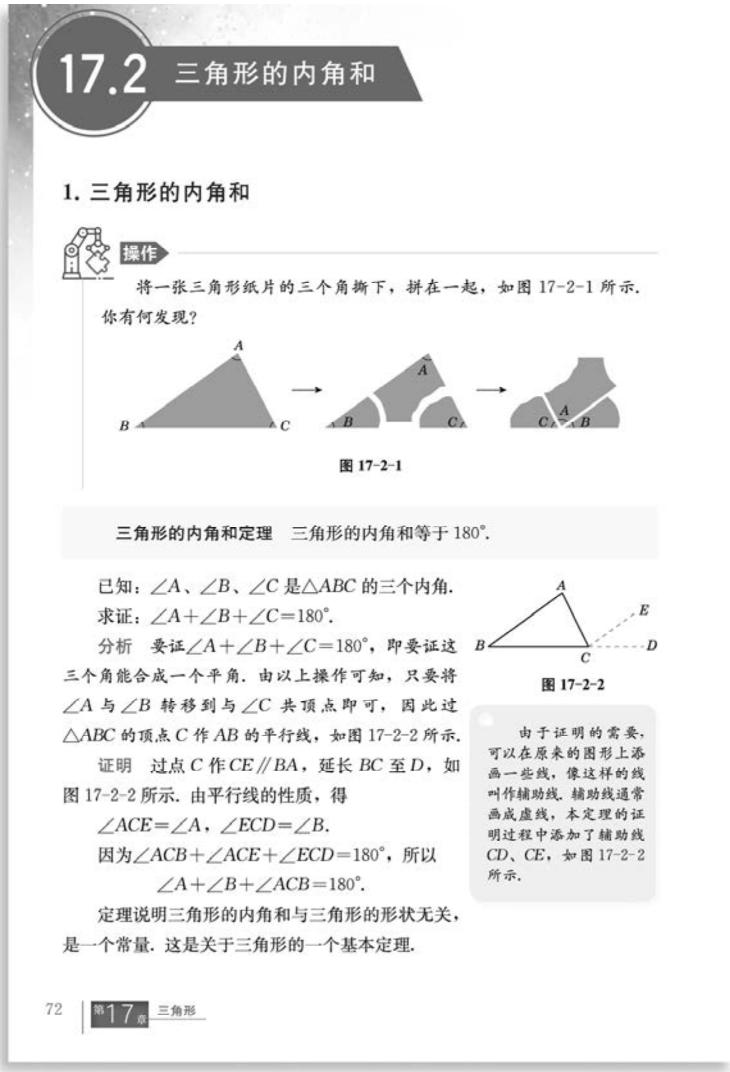
通过不同的操作(如将三个角拼成一个平角)，探索三角形的内角和定理. 会用多种方法添加辅助线证明三角形的内角和定理.

本课内容分析

操作　角的和、差的代数意义是度数的加减，几何意义是图形的拼叠. 这个操作实验也是三角形的内角和定理证明中辅助线添加方法的一个灵感来源.

教学中，注意让学生经历实验、猜测、证明的全过程，并让学生从中体会证明的意义与作用.

辅助线的作法不唯一，例如，也可以过点 A 画 BC 的平行线作为辅助线.



17.2 三角形的内角和

1. 三角形的内角和

操作

将一张三角形纸片的三个角撕下，拼在一起，如图 17-2-1 所示. 你有何发现?

图 17-2-1

三角形的内角和定理　三角形的内角和等于 180°.

已知：$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 是 $\triangle ABC$ 的三个内角.

求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.

分析　要证 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$，即要证这三个角能合成一个平角. 由以上操作可知，只要将 $\angle A$ 与 $\angle B$ 转移到与 $\angle C$ 共顶点即可，因此过 $\triangle ABC$ 的顶点 C 作 AB 的平行线，如图 17-2-2 所示.

证明　过点 C 作 $CE\parallel BA$，延长 BC 至 D，如图 17-2-2 所示. 由平行线的性质，得

$\angle ACE=\angle A$，$\angle ECD=\angle B$.

因为 $\angle ACB+\angle ACE+\angle ECD=180^\circ$，所以

$$\angle A+\angle B+\angle ACB=180^\circ.$$

定理说明三角形的内角和与三角形的形状无关，是一个常量. 这是关于三角形的一个基本定理.

图 17-2-2

由于证明的需要，可以在原来的图形上添画一些线，像这样的线叫作辅助线. 辅助线通常画成虚线，本定理的证明过程中添加了辅助线 CD、CE，如图 17-2-2 所示.

72　第17章　三角形

思考

一个三角形的三个内角中最多有几个钝角？几个直角？

例 1 在$\triangle ABC$中，$\angle B=35°$，$\angle C=55°$. 求$\angle A$的度数，并判断$\triangle ABC$的形状.

解 $\because$ $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$是$\triangle ABC$的三个内角，

$\therefore$ $\angle A+\angle B+\angle C=180°$（三角形的内角和等于 180°）.

又$\because$ $\angle B=35°$，$\angle C=55°$，

$\therefore$ $\angle A=180°-\angle B-\angle C=180°-35°-55°=90°$.

$\therefore$ $\triangle ABC$是一个直角三角形.

例 2 在$\triangle ABC$中，$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$，求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的度数.

解 根据题意，可设$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的度数分别为$x°$、$2x°$、$3x°$.

$\because$ $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$是$\triangle ABC$的三个内角，

$\therefore$ $\angle A+\angle B+\angle C=180°$（三角形的内角和等于 180°），

即
$$x+2x+3x=180.$$

$\therefore$ $x=30$.

$\therefore$ $\angle A=30°$，$\angle B=60°$，$\angle C=90°$.

课堂练习 17.2(1)

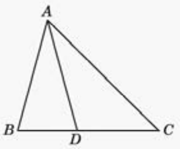
1. 已知$\triangle ABC$中两个内角的度数，判断$\triangle ABC$的形状：

(1) $\angle A=30°$，$\angle B=40°$；

(2) $\angle B=32°$，$\angle C=58°$；

(3) $\angle A=60°$，$\angle C=50°$.

2. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=60°$，$\angle C=45°$，AD是$\triangle ABC$的角平分线. 求$\angle ADC$的度数.



（第 2 题）

例 1 直接运用三角形的内角和定理进行计算，要关注推理过程的书写，帮助学生养成严谨表达的习惯.

例 2 先根据已知条件设未知数，再根据三角形的内角和定理建立方程求解.

课堂练习 17.2(1)

1.（1）钝角三角形.

（2）直角三角形.

（3）锐角三角形.

2. 105°.

（以下分析对应课本第 74～76 页）

本课教学重点

理解三角形的外角的概念，能运用“三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和”进行简单的证明和计算.

本课教学建议

借助图示明确“三角形的外角”和“与它不相邻的两个内角”等概念.

2. 三角形的外角及其性质

如图 17-2-3，延长$\triangle ABC$ 的一边 BC，得到$\angle ACD$. 像这样，三角形一个内角的一边与另一边的反向延长线所组成的角叫作三角形(与此内角相邻)的外角. $\angle ACD$ 是$\triangle ABC$ 的一个外角，$\angle ACB$ 是与它相邻的内角，另外两个内角$\angle A$、$\angle B$ 是与它不相邻的内角.

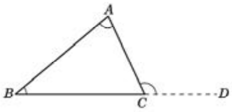


图 17-2-3

思考

在一个三角形中，与一个内角相邻的外角有几个？它们有何关系？

如图 17-2-4，作 BC 的延长线CD，作 AC 的延长线 CE，可知$\angle ACD$、$\angle BCE$ 都是与$\angle ACB$ 相邻的外角. 这两个外角是对顶角，它们的大小相等.

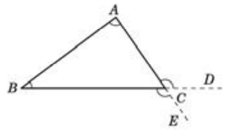


图 17-2-4

思考

如图 17-2-3，在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=75^\circ$，$\angle B=40^\circ$，$\angle ACD$ 是$\triangle ABC$ 的一个外角. 可以由$\angle A$、$\angle B$ 求出$\angle ACD$ 吗？若可以，$\angle ACD$ 与$\angle A$、$\angle B$ 之间有怎样的数量关系？任意一个三角形的一个外角与它不相邻的两个内角是否都有这种关系？

由三角形的内角和定理可以推出下面的结论：

推论 三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和.

推论是由定理直接推出的结论，可以作为进一步推理的依据.

74 第17章 三角形

本课内容分析

三角形中的内角和与其相邻的外角互为补角. 与一个内角相邻的外角有两个，它们是一对对顶角.

后续几何论证过程写推理依据时，可以写“三角形的内角和定理的推论”，也可以写“三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和”.

如图 17-2-5，已知：$\angle ACD$ 是 $\triangle ABC$ 的一个外角.

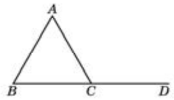


图 17-2-5

求证：$\angle ACD=\angle A+\angle B$.

证明 因为 $\angle ACD+\angle ACB=180^\circ$，又根据三角形的内角和定理，有 $\angle A+\angle B+\angle ACB=180^\circ$，所以 $\angle ACD+\angle ACB=\angle A+\angle B+\angle ACB$. 从而 $\angle ACD=\angle A+\angle B$.

由此，容易得到三角形的外角有如下的性质：

> 三角形的外角大于任何一个与它不相邻的内角.

例 3 通过运用三角形的内角和定理的推论计算角度，加深对该推论的理解.

例 3 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=30^\circ$，$\angle C=50^\circ$. 求分别与 $\angle ABC$、$\angle ACB$ 相邻的外角的度数.

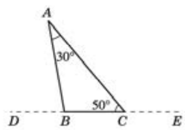


图 17-2-6

解 如图 17-2-6，作 CB 的延长线 BD，则 $\angle ABD$ 是与 $\angle ABC$ 相邻的一个外角.

∵ $\angle ABD=\angle A+\angle ACB$（三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和），

又∵ $\angle A=30^\circ$，$\angle ACB=50^\circ$，

∴ $\angle ABD=30^\circ+50^\circ=80^\circ$.

作 BC 的延长线 CE，则 $\angle ACE$ 是与 $\angle ACB$ 相邻的一个外角.

∵ $\angle ACE+\angle ACB=180^\circ$，

∴ $\angle ACE=180^\circ-\angle ACB=180^\circ-50^\circ=130^\circ$.

例 4 涉及多个三角形的内角与外角的关系，要注意结合图形，合理地利用三角形的内角和定理及其推论进行计算.

例 4 如图 17-2-7，$\angle BAC=70^\circ$，D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上一点，且 $\angle CAD=\angle C$，$\angle ADB=80^\circ$.

(1) 求 $\angle C$ 的度数；

(2) 求 $\angle B$ 的度数.

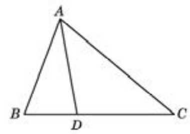
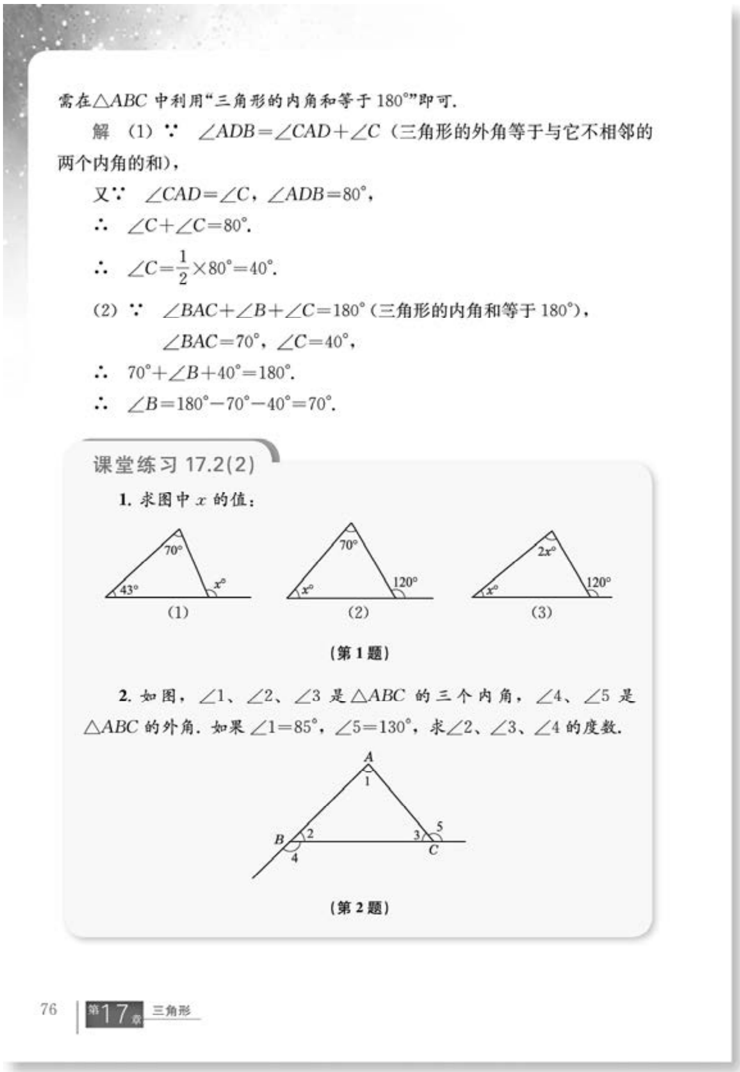


图 17-2-7

分析 考虑到 $\triangle ADC$ 中与 $\angle ADB$ 不相邻的两个内角 $\angle CAD$、$\angle C$ 相等，所以利用“三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和”即可求得 $\angle C$ 的度数；再求 $\angle B$ 的度数，只

17.2 三角形的内角和　75


需在$\triangle ABC$中利用“三角形的内角和等于180°”即可.

解 (1) ∵ $\angle ADB=\angle CAD+\angle C$（三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和），

又∵ $\angle CAD=\angle C$，$\angle ADB=80°$，

∴ $\angle C+\angle C=80°$.

∴ $\angle C=\frac{1}{2}\times 80°=40°$.

(2) ∵ $\angle BAC+\angle B+\angle C=180°$（三角形的内角和等于180°），

$\angle BAC=70°$，$\angle C=40°$，

∴ $70°+\angle B+40°=180°$.

∴ $\angle B=180°-70°-40°=70°$.

课堂练习 17.2(2)

1. 求图中x的值：

(1) (2) (3)

（第1题）

2. 如图，$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$是$\triangle ABC$的三个内角，$\angle 4$、$\angle 5$是$\triangle ABC$的外角. 如果$\angle 1=85°$，$\angle 5=130°$，求$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$的度数.

（第2题）

76 第17章 三角形

课堂练习 17.2(2)

1.（1）113.

（2）50.

（3）40.

2. $\angle 2=45°$，$\angle 3=50°$，$\angle 4=135°$.

（以下分析对应课本第 77～79 页）

本课教学重点

（1）掌握三角形的内角和定理及其推论的基本运用，能正确书写推理过程.

（2）理解“三角形的外角和等于 360°”.

本课教学建议

三角形的外角和指从与三角形每一内角相邻的两个外角中各取一个得到的三个外角的和，而非所有六个外角的和，借助图形让学生正确理解“外角和”的含义.

例 5 如图 17-2-8，在 $\triangle ABC$ 中，D 是边 BC 上一点，且 $\angle ADE=\angle B$. $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 相等吗？为什么？

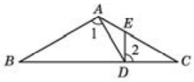


图 17-2-8

分析　考虑到 $\angle ADC=\angle ADE+\angle 2$，且 $\angle ADC$ 是 $\triangle ABD$ 的一个外角，利用“三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和”即可推出 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 相等.

解　$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 相等. 理由如下：

∵　$\angle ADC=\angle ADE+\angle 2$，

又∵　$\angle ADC=\angle B+\angle 1$（三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和），

∴　$\angle ADE+\angle 2=\angle B+\angle 1$.

又∵　$\angle ADE=\angle B$，

∴　$\angle 1=\angle 2$.

例 6 如图 17-2-9，已知直线 AB、CD 相交于点 O，$\angle B=\angle C$，$\angle A=40°$. 求 $\angle D$ 的度数.

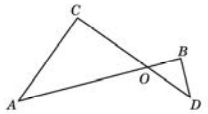


图 17-2-9

分析　要求 $\angle D$ 的度数，根据“三角形的内角和定理”，并利用等量代换即可.

解　∵　$\angle A+\angle C+\angle AOC=180°$，

$\angle D+\angle B+\angle BOD=180°$（三角形的内角和等于 180°），

∴　$\angle A+\angle C+\angle AOC=\angle D+\angle B+\angle BOD$.

又∵　$\angle AOC=\angle BOD$（对顶角相等），$\angle C=\angle B$，

∴　$\angle A=\angle D$.

又∵　$\angle A=40°$，

∴　$\angle D=40°$.

本课内容分析

例 5 也可以用三角形的内角和定理直接证明：

∵　$\angle 1+\angle B+\angle ADB=180°$（三角形内角和等于 180°），

$\angle 2+\angle ADE+\angle ADB=180°$.

∴　$\angle 1+\angle B+\angle ADB=\angle 2+\angle ADE+\angle ADB$.

∵　$\angle ADE=\angle B$，

∴　$\angle 1=\angle 2$.

例 6 也可以由 $\angle BOC=\angle A+\angle C=\angle B+\angle D$ 来解.

先说明三角形外角和的含义，然后引导学生探索“三角形的外角和等于 360°”.

三角形外角和的结论可以推广到 $n(n\geqslant 3)$ 边形：n 边形的外角和等于 360°，其值与 n 无关.

讨论

可否借助“三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和”求出例 6 中 $\angle D$ 的度数？

对于三角形的每个内角，从与它相邻的两个外角中取一个，这样取得的三个外角相加所得的和，叫作三角形的外角和.

思考

三角形的内角和等于 180°，那么三角形的外角和等于多少度？

例 7 如图 17-2-10，$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$ 是 $\triangle ABC$ 的外角，求 $\angle 1+\angle 2+\angle 3$.

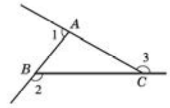


图 17-2-10

解 ∵ $\angle 1+\angle BAC=180°$,

$\angle 2+\angle ABC=180°$,

$\angle 3+\angle ACB=180°$,

∴ $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=3\times 180°=540°$.

又∵ $\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=180°$（三角形的内角和等于 180°），

∴ $\angle 1+\angle 2+\angle 3+180°=540°$,

∴ $\angle 1+\angle 2+\angle 3=360°$.

由此，我们得到：

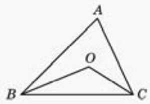
三角形的外角和等于 360°.

78 | 第 17 章 三角形

课堂练习 17.2(3)

1. 如图，在$\triangle ABC$中，D是边BC上一点，且$\angle 1=\angle B$. $\angle BAC$与$\angle 2$相等吗？为什么？

（第 1 题）



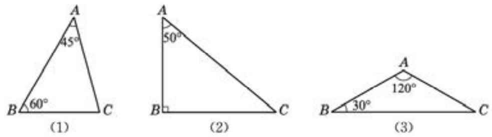
（第 2 题）

2. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A=70^\circ$，$\angle ABC$、$\angle ACB$的平分线OB、OC相交于点O. 求$\angle BOC$的度数.

习题 17.2

A

1. 求下列各三角形中$\angle C$的度数：



（第 1 题）

2. 下列命题中正确的是 （　）

A. 锐角三角形的三个内角都是锐角；

B. 钝角三角形的三个内角都是钝角；

C. 钝角三角形的内角和大于锐角三角形的内角和；

D. 三角形中最小的两个内角的和必定大于 90°.

17.2 三角形的内角和 79

课堂练习 17.2(3)

1. 相等. 提示：可依据三角形的内角和定理的推论进行证明.

2. 125°. 提示：可以对$\triangle ABC$与$\triangle OBC$分别使用三角形内角和定理；也可以延长BO交AC于D，再利用三角形的内角和定理的推论.

习题 17.2

1. (1) 75°.

(2) 40°.

(3) 30°.

2. A.

3. $\angle 1=65^\circ$，$\angle 2=70^\circ$，$\angle 3=110^\circ$.

4. 24°.

5. $\angle EBD$；三角形的内角和等于 180°；三角形的内角和等于 180°.

6.（1）相等. 理由如下：

∵ $\angle A+\angle B+\angle AOB=180^\circ$，$\angle C+\angle D+\angle COD=180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

∴ $\angle A+\angle B+\angle AOB=\angle C+\angle D+\angle COD$.

又∵ $\angle A=\angle C$，$\angle AOB=\angle COD$，

∴ $\angle B=\angle D$.

（2）平行. 理由如下：

∵ $\angle A+\angle B+\angle AOB=180^\circ$，$\angle C+\angle D+\angle COD=180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

$\angle AOB=\angle COD$，

∴ $\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$.

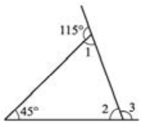
又∵ $\angle A=\angle B$，$\angle C=\angle D$，

∴ $2\angle A=2\angle D$.

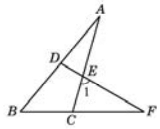
∴ $\angle A=\angle D$.

∴ $AB\parallel CD$（内错角相等，两直线平行）.

3. 如图，求∠1、∠2、∠3 的度数.



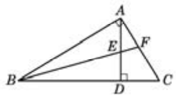
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，直线 DF 与 $\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 分别相交于 D、E 两点，与 BC 的延长线相交于点 F，$\angle B=50^\circ$，$\angle 1=76^\circ$，$\angle F=30^\circ$. 求 $\angle A$ 的度数.

5. 如图，已知：在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AD\perp BC$，垂足为 D，BF 平分 $\angle ABC$，且交 AD 于点 E，交 AC 于点 F. 求证：$\angle BED=\angle AFB$. 把以下解答过程补充完整.



（第 5 题）

解：因为 BF 平分 $\angle ABC$，所以 $\angle ABF=$______.

在 $\triangle ABF$ 中，

$\angle AFB+\angle ABF+\angle BAF=180^\circ$（____________________）.

在 $\triangle BDE$ 中，

$\angle BED+\angle EBD+\angle BDE=180^\circ$（____________________）.

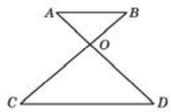
由 $AD\perp BC$，得 $\angle BDE=90^\circ$.

又因为 $\angle BAC=90^\circ$，所以 $\angle BED=\angle AFB$.

6. 如图，AD 与 BC 相交于点 O.

（1）如果 $\angle A=\angle C$，那么 $\angle B$ 与 $\angle D$ 相等吗？为什么？

（2）如果 $\angle A=\angle B$，$\angle C=\angle D$，那么 AB 与 CD 平行吗？为什么？

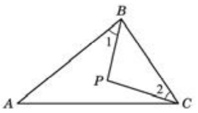


（第 6 题）

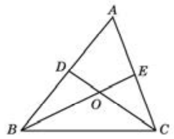
80 第17章 三角形

B

7. 如图，P 是 $\triangle ABC$ 内一点，$\angle ABC=85^\circ$，$\angle 1=\angle 2$. 求$\angle BPC$ 的度数.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，在$\triangle ABC$ 中，D、E 分别是边 AB、AC 上的点，BE、CD 相交于点 O. 如果 $\angle A=60^\circ$，$\angle ACD=35^\circ$，$\angle ABE=25^\circ$，求$\angle BDC$ 和$\angle COE$ 的度数.

7. ∵ $\angle ABC=85^\circ$，

∴ $\angle 1+\angle PBC=85^\circ$.

又∵ $\angle 1=\angle 2$，

∴ $\angle 2+\angle PBC=85^\circ$.

又∵ $\angle P+\angle 2+\angle PBC=180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

∴ $\angle P=180^\circ-(\angle 2+\angle PBC)=180^\circ-85^\circ=95^\circ$.

8. ∵ $\angle A=60^\circ$，$\angle ACD=35^\circ$，

∴ $\angle BDC=\angle A+\angle ACD=60^\circ+35^\circ=95^\circ$.

又∵ $\angle ABE=25^\circ$，且 $\angle BDC+\angle ABE+\angle BOD=180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

∴ $\angle BOD=180^\circ-95^\circ-25^\circ=95^\circ=60^\circ$.

又∵ $\angle COE=\angle BOD$，

∴ $\angle COE=60^\circ$.

17.3　全等三角形及其性质

本节教学目标

（1）理解全等三角形的概念，能识别全等三角形的对应边、对应角.

（2）在辨析全等三角形的过程中，发展几何直观与空间观念.

（以下分析对应课本第 82～84 页）

本课教学重点

理解全等三角形的有关概念和性质，会用符号语言表示两个三角形全等并表述其性质.

本课教学建议

（1）用符号“≌”或文字“全等”表示两个三角形全等时包含对应关系．如$\triangle ABC\cong\triangle DEF$或$\triangle ABC$与$\triangle DEF$全等，应表明$A$与$D$、$B$与$E$、$C$与$F$分别是对应点，无需再分类讨论.

（2）用“完全重合”来定义全等形与全等三角形，可以直接推出全等三角形的性质：对应边相等、对应角相等以及全等的传递性等．但不宜用“完全重合”来证明全等.

17.3 全等三角形及其性质

定义 如果一个图形经过平移、旋转、翻折后，与另一个图形能够完全重合，那么这两个图形叫作全等形. 是全等形的两个三角形叫作全等三角形.

思考

图 17-3-1 中有四对三角形，每对中的$\triangle ABC$通过怎样的运动能与另一个三角形重合？

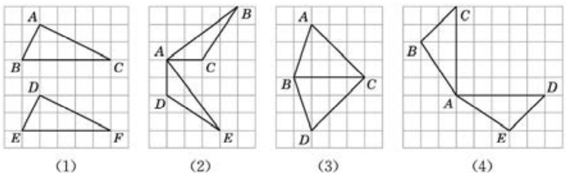


图 17-3-1

把两个全等三角形重合到一起，重合的顶点叫作对应顶点，重合的边叫作对应边，重合的角叫作对应角.

例如，图 17-3-1(1)中，$\triangle ABC$和$\triangle DEF$是全等三角形，记作$\triangle ABC\cong\triangle DEF$，符号“$\cong$”表示全等，读作“全等于”. 其中，点 A 和点 D、点 B 和点 E、点 C 和点 F 分别是对应顶点；边 AB 和边 DE、边 BC 和边 EF、边 AC 和边 DF 分别是对应边；$\angle A$ 和$\angle D$、$\angle B$ 和$\angle E$、$\angle C$ 和$\angle F$ 分别是对应角.

> 全等三角形指两个三角形全等. 在叙述时，通常把对应顶点的字母写在对应的位置上.

由全等三角形的定义可知：

> 全等三角形的对应边相等，对应角相等.

本课内容分析

思考 引导学生说出每组图形中的一个图形经过怎样的运动才能与另一个图形重合，感知全等形的概念，感知对应顶点、对应边、对应角的含义，获得对全等形的感性认识.

注意区分“对应边”“对应角”与“对边”“对角”.

借助方格图背景，有利于学生观察和想象.

让学生体会，抓住对应顶点是用符号表示三角形全等的关键.

类似于“相等”和“平行”的传递性，“全等”也有传递性.本章未涉及“三角形全等的传递性”的运用.

例 1 利用全等三角形的性质和三角形的内角和定理求值，要求把计算与证明相结合，进一步学习含推理论证的几何计算.

例如，图 17-3-1(1)中，$\triangle ABC\cong\triangle DEF$，$AB$ 与 DE 是对应边，由全等三角形的对应边相等，得 $AB=DE$. 同样地，我们还可以得到 $BC=EF$，$AC=DF$. 由全等三角形的对应角相等，可得 $\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$.

讨论

在图 17-3-1(2)、图 17-3-1(3)、图 17-3-1(4)中，分别都有两个三角形全等，请分别说出它们的对应边、对应角的相等关系.

由全等三角形的定义可以得到：

> 如果两个三角形都与第三个三角形全等，那么这两个三角形全等.

这个性质叫作三角形全等的传递性.

例 1 如图 17-3-2，已知 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$，$AB=2$ cm，$\angle A=60^\circ$，$\angle B=70^\circ$. 求 DE 的长，$\angle D$ 和 $\angle F$ 的度数.

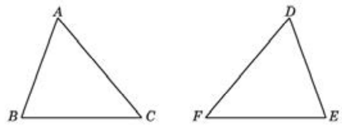


图 17-3-2

解 $\because$ $\triangle ABC\cong\triangle DEF$，顶点 A、B、C 分别与顶点 D、E、F 对应，

$\therefore$ $AB=DE$（全等三角形的对应边相等），

$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$（全等三角形的对应角相等）.

$\because$ $AB=2$ cm，$\angle A=60^\circ$，$\angle B=70^\circ$，

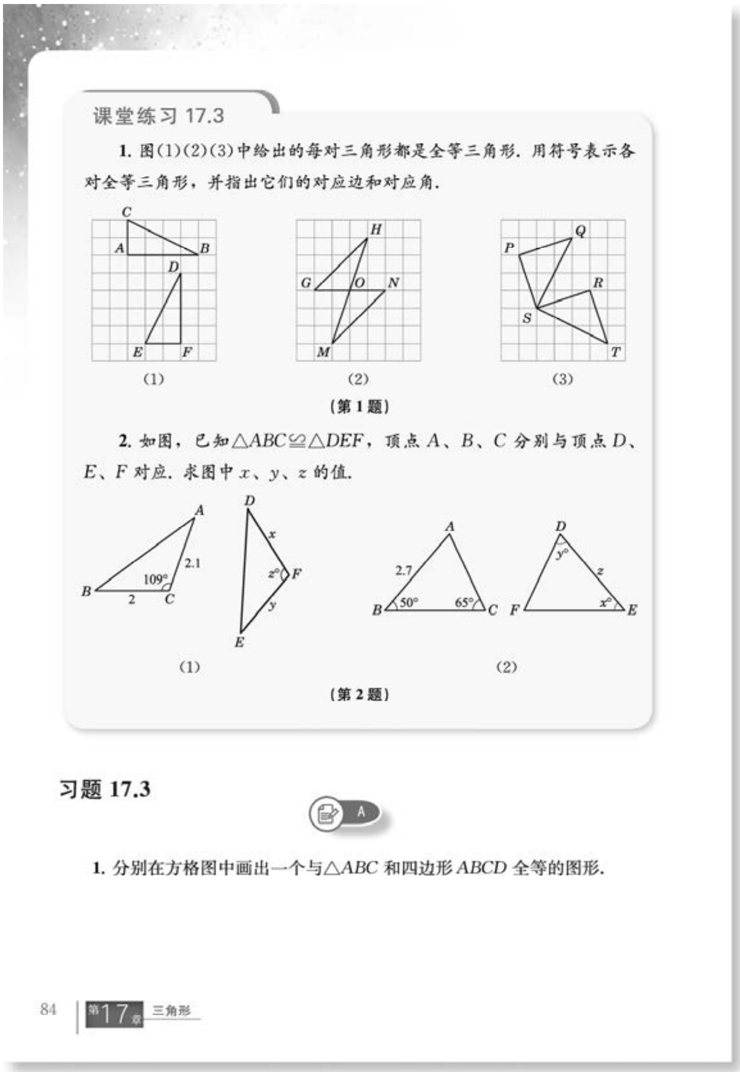
$\therefore$ $DE=2$ cm，$\angle D=60^\circ$，$\angle E=70^\circ$.

又$\because$ $\angle D+\angle E+\angle F=180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

$\therefore$ $\angle F=50^\circ$.

$\therefore$ $DE=2$ cm，$\angle D=60^\circ$，$\angle F=50^\circ$.

17.3 全等三角形及其性质 83



课堂练习 17.3

1. 图(1)(2)(3)中给出的每对三角形都是全等三角形. 用符号表示各对全等三角形，并指出它们的对应边和对应角.

(1)　(2)　(3)

(第 1 题)

2. 如图，已知$\triangle ABC\cong\triangle DEF$，顶点 A、B、C 分别与顶点 D、E、F 对应. 求图中 x、y、z 的值.

(1)　(2)

(第 2 题)

习题 17.3

A

1. 分别在方格图中画出一个与$\triangle ABC$ 和四边形 $ABCD$ 全等的图形.

84 | 第17章 三角形

课堂练习 17.3

1.（1）$\triangle ABC\cong\triangle FDE$，对应边和对应角略.

（2）$\triangle OGH\cong\triangle ONM$，对应边和对应角略.

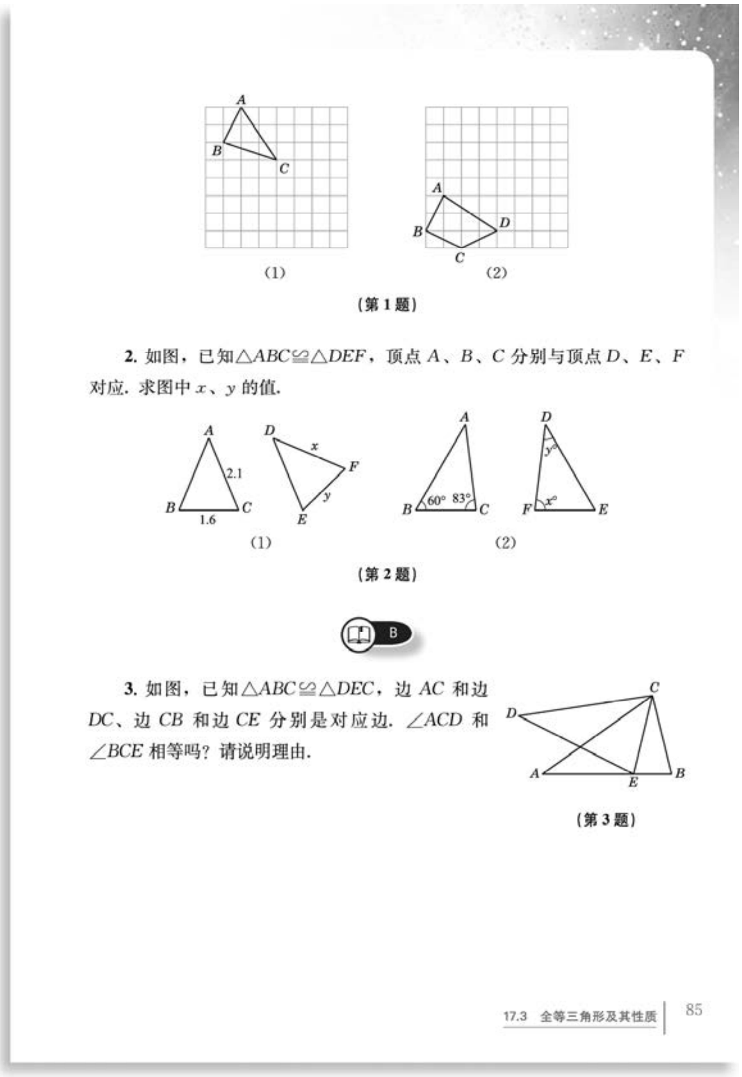
（3）$\triangle SPQ\cong\triangle SRT$，对应边和对应角略.

2.（1）$x=2.1$，$y=2$，$z=109$.

（2）$x=50$，$y=65$，$z=2.7$.

习题 17.3

1. 略.


(1)　　(2)

（第 1 题）

2. 如图，已知$\triangle ABC\cong\triangle DEF$，顶点 A、B、C 分别与顶点 D、E、F 对应．求图中 x、y 的值．

(1)　　(2)

（第 2 题）

B

3. 如图，已知$\triangle ABC\cong\triangle DEC$，边 AC 和边 DC、边 CB 和边 CE 分别是对应边．$\angle ACD$ 和 $\angle BCE$ 相等吗？请说明理由．

（第 3 题）

17.3 全等三角形及其性质　85

2.（1）$x=2.1$，$y=1.6$.

（2）$x=83$，$y=37$.

3. $\angle ACD=\angle BCE$．理由如下：$\because$ $\triangle ABC\cong\triangle DEC$，

$\therefore$ $\angle ACB=\angle DCE$（全等三角形的对应角相等）．

$\therefore$ $\angle DCE-\angle ACE=\angle ACB-\angle ACE$．

$\therefore$ $\angle ACD=\angle BCE$．

17.4　三角形全等的判定

本节教学目标

（1）掌握公理：三边对应相等的两个三角形全等.

（2）掌握公理：两边及其夹角对应相等的两个三角形全等.

（3）掌握公理：两角及其夹边对应相等的两个三角形全等.

（4）掌握定理：两角对应相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等.

（5）能完成尺规作图：作一个角等于已知角；过直线外一点作这条直线的平行线；已知三边、两边及其夹角或两角及其夹边作三角形.

（6）了解三角形的稳定性.

（7）在运用三角形全等进行推理论证的过程中，发展推理能力.

（以下分析对应课本第 86～88 页）

本课教学重点

掌握全等三角形的判定公理“边边边”，能用其证明简单的几何问题.

本课教学建议

（1）“边边边”在教科书作为公理呈现，不需要通过“说理”来说明它的正确性，但要注意其符号语言的表述和在证明中的简单运用.

（2）要引导学生体会“三边对应相等”中的“对应”两字的含义.

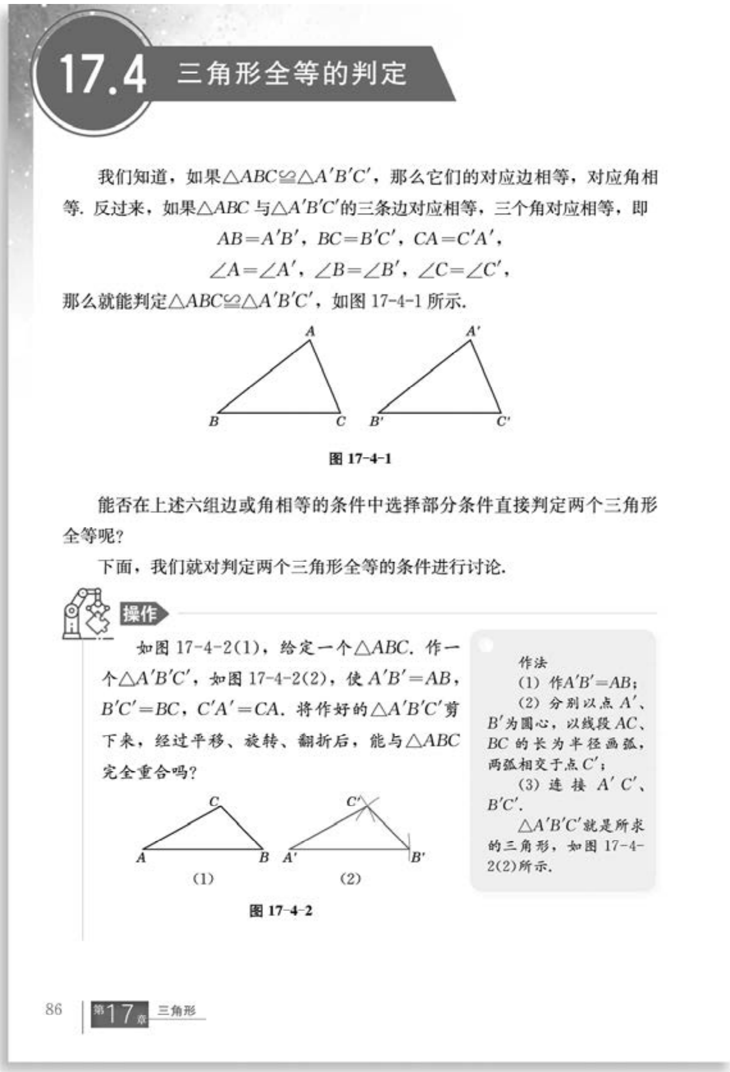
本课内容分析

三条边对应相等，三个角对应相等的两个三角形，其中一个通过平移、旋转、翻折后能够与另一个“完全重合”，即这两个三角形全等. 这是一个朴素的直观认识，直接将其作为公理去判定三角形全等比较麻烦，因此要从中选择部分条件，看是否足够判定三角形全等.

引导学生从确定一个三角形形状和大小的条件出发，去寻找判定两个三角形全等的条件.

虽然“尺规作图”要在下一课时介绍，但此处利用圆规截取一条长度等于已知线段长度的线段的操作，学生应已掌握.

此处感知经过图形的运动后，两个三角形能完全重合，从而根据定义，判定两个三角形全等. 这一过程并不是严格的论证.



17.4 三角形全等的判定

我们知道，如果$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，那么它们的对应边相等，对应角相等. 反过来，如果$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的三条边对应相等，三个角对应相等，即

$$AB=A'B',\ BC=B'C',\ CA=C'A',$$
$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C',$$

那么就能判定$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，如图 17-4-1 所示.

图 17-4-1

能否在上述六组边或角相等的条件中选择部分条件直接判定两个三角形全等呢?

下面，我们就对判定两个三角形全等的条件进行讨论.

操作

如图 17-4-2(1)，给定一个$\triangle ABC$. 作一个$\triangle A'B'C'$，如图 17-4-2(2)，使$A'B'=AB$，$B'C'=BC$，$C'A'=CA$. 将作好的$\triangle A'B'C'$剪下来，经过平移、旋转、翻折后，能与$\triangle ABC$完全重合吗?

作法

(1) 作$A'B'=AB$;

(2) 分别以点A'、B'为圆心，以线段AC、BC的长为半径画弧，两弧相交于点C';

(3) 连接$A'C'$、$B'C'$.

$\triangle A'B'C'$就是所求的三角形，如图 17-4-2(2)所示.

(1) (2)

图 17-4-2

86 | 第17章 三角形

公理 三边对应相等的两个三角形全等（简记为“边边边”或“SSS”）.

S 为英文中 side（边）的缩写，“SSS”即“边边边”.

如图 17-4-2，在△ABC 和△$A'B'C'$中，已知 $AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$CA=C'A'$，那么△ABC≌△$A'B'C'$.

如果一个三角形的三条边长固定，那么这个三角形的形状和大小就完全确定了. 三角形的这个性质叫作三角形的稳定性. 三角形的稳定性在生产实践中有广泛的应用. 例如，桥梁拉杆、电视塔架底座、高压电线塔等都有三角形结构.



例 1 如图 17-4-3，已知：在△ABC 中，$AB=AC$，D 是 BC 的中点.

求证：△ABD≌△ACD.

分析 要证△ABD≌△ACD，根据上面的公理，只需证这两个三角形的三边对应相等.

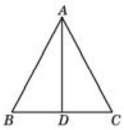


图 17-4-3

证明 ∵ D 是 BC 的中点，

∴ $BD=CD$.

在△ABD 和△ACD 中，

$$\because \begin{cases} AB=AC, \\ BD=CD, \\ AD=AD, \end{cases}$$

∴ △ABD≌△ACD（SSS）.

例 2 如图 17-4-4，已知：点 A、B、C、D 在同一直线上，$AC=DB$，$AE=CF$，$BE=DF$.

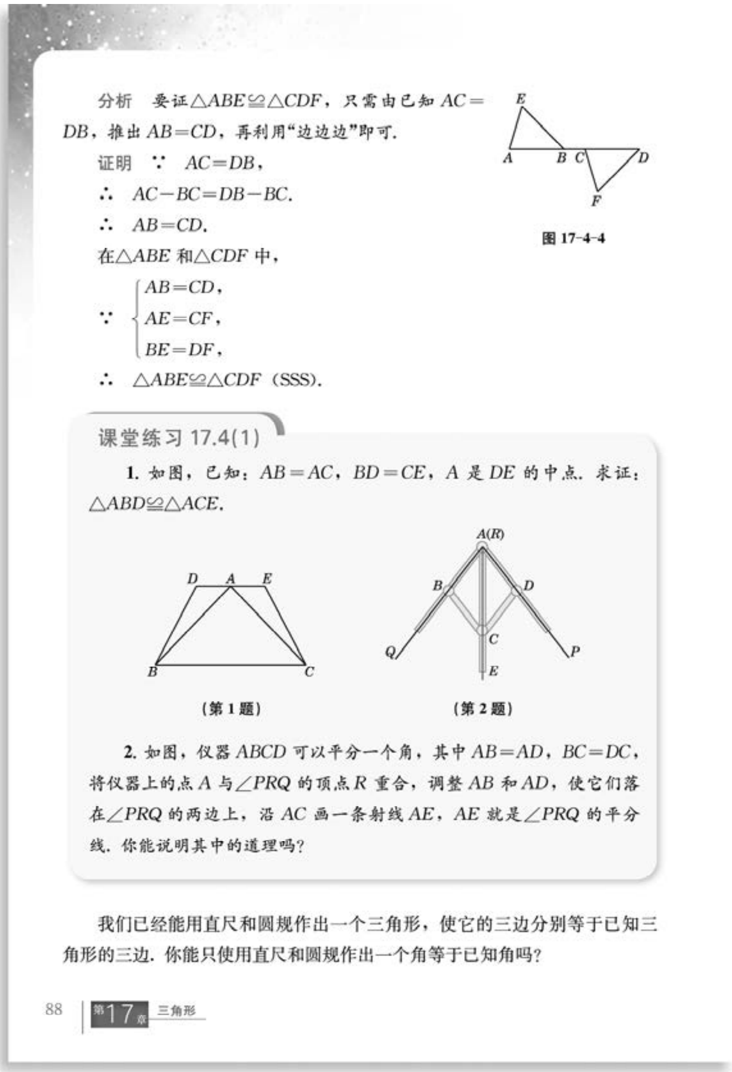
求证：△ABE≌△CDF.

17.4 三角形全等的判定 87

“边边边”在《课标 2022 年版》中作为基本事实，在本套教科书中作为公理.

可以让学生再举一些实例，了解三角形稳定性的实际应用，激发学习兴趣，增强应用意识.

例 1、例 2 是三角形全等的判定公理“边边边”的简单运用.



分析　要证$\triangle ABE\cong\triangle CDF$，只需由已知$AC=DB$，推出$AB=CD$，再利用"边边边"即可.

证明　$\because$ $AC=DB$，

$\therefore$ $AC-BC=DB-BC$.

$\therefore$ $AB=CD$.

在$\triangle ABE$和$\triangle CDF$中，

$$\because \begin{cases} AB=CD, \\ AE=CF, \\ BE=DF, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABE\cong\triangle CDF$ (SSS).

图 17-4-4

课堂练习 17.4(1)

1. 如图，已知：$AB=AC$，$BD=CE$，A是DE的中点. 求证：$\triangle ABD\cong\triangle ACE$.

（第 1 题）　　（第 2 题）

2. 如图，仪器$ABCD$可以平分一个角，其中$AB=AD$，$BC=DC$，将仪器上的点A与$\angle PRQ$的顶点R重合，调整AB和AD，使它们落在$\angle PRQ$的两边上，沿AC画一条射线AE，AE就是$\angle PRQ$的平分线. 你能说明其中的道理吗？

我们已经能用直尺和圆规作出一个三角形，使它的三边分别等于已知三角形的三边. 你能只使用直尺和圆规作出一个角等于已知角吗？

88　第17章　三角形

课堂练习 17.4(1)

1. $\because$ 点A是线段DE中点，

$\therefore$ $DA=EA$.

在$\triangle ABD$和$\triangle ACE$中，

$$\because \begin{cases} BD=CE, \\ DA=EA, \\ AB=AC, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACE$ (SSS).

2. 在$\triangle ABC$和$\triangle ADC$中，

$$\because \begin{cases} AB=AD, \\ BC=DC, \\ AC=AC, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle ADC$ (SSS).

$\therefore$ $\angle BAC=\angle DAC$（全等三角形的对应角相等），

即AE是$\angle PRQ$的平分线.

（以下分析对应课本第 89～91 页）

本课教学重点

掌握用尺规作图作一个角等于已知角和过直线外一点作已知直线的平行线.

本课教学建议

（1）教科书在本课给出了“尺规作图”的概念，可以适当补充尺规作图的规则及其文化价值. 学习尺规作图的目的不仅在于作图本身，还在于训练学生的逻辑推理能力，通过分析作图原理和证明作图的正确性，帮助学习几何性质及其应用.

（2）要规范尺规作图的作法及证明的书写. 在练习中一般只要求学生保留作图痕迹并写出结论.

本课内容分析

将作一个角等于已知的$\angle\alpha$，转化为作一个三角形，使其与一个有一个内角等于$\angle\alpha$的三角形全等.

依据“边边边”尺规作图，让学生体会作图的合理性.

例 3 作一个角等于已知角.

如图 17-4-5，已知$\angle\alpha$，作$\angle AOB=\angle\alpha$.

分析　设法使已知$\angle\alpha$成为某三角形的一个内角，再利用直尺和圆规作出一个与该三角形全等的三角形，此三角形中$\angle\alpha$的对应角就是所求的角.

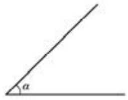


图 17-4-5

作法

(1) 以$\angle\alpha$的顶点为圆心、以任意长度a为半径作弧，分别交$\angle\alpha$的两边于点C、D，如图 17-4-6(1)所示；

(2) 过点O作一条任意射线OA，以点O为圆心、以a的长为半径作弧，交OA于点M；

(3) 以点M为圆心、以CD的长为半径作弧，交前弧于点N；

(4) 经过点N作射线OB.

$\angle AOB$就是所求的角，如图 17-4-6(2)所示.

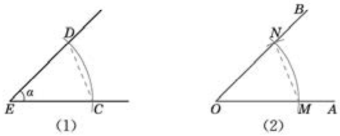


图 17-4-6

证明　记$\angle\alpha$的顶点为E，连接CD、MN.

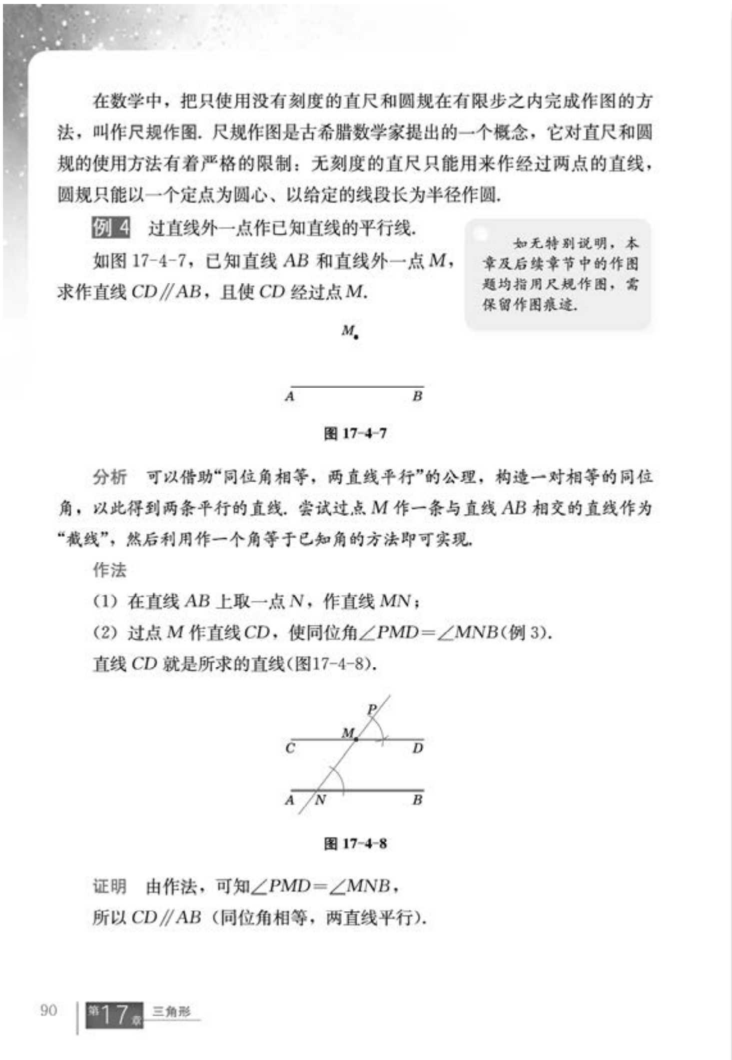
由作法，可知在$\triangle CDE$和$\triangle MNO$中，

$$\because \begin{cases} DE=NO, \\ CE=MO, \\ CD=MN, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle CDE\cong\triangle MNO$ (SSS).

$\therefore$ $\angle MON=\angle CED$（全等三角形的对应角相等），

即$\angle AOB=\angle\alpha$.



在数学中，把只使用没有刻度的直尺和圆规在有限步之内完成作图的方法，叫作尺规作图. 尺规作图是古希腊数学家提出的一个概念，它对直尺和圆规的使用方法有着严格的限制：无刻度的直尺只能用来作经过两点的直线，圆规只能以一个定点为圆心、以给定的线段长为半径作圆.

例 4 过直线外一点作已知直线的平行线.

如图 17-4-7，已知直线 AB 和直线外一点 M，求作直线 $CD/\!/AB$，且使 CD 经过点 M.

如无特别说明，本章及后续章节中的作图题均指用尺规作图，需保留作图痕迹.

图 17-4-7

分析　可以借助“同位角相等，两直线平行”的公理，构造一对相等的同位角，以此得到两条平行的直线. 尝试过点 M 作一条与直线 AB 相交的直线作为“截线”，然后利用作一个角等于已知角的方法即可实现.

作法

(1) 在直线 AB 上取一点 N，作直线 MN；

(2) 过点 M 作直线 CD，使同位角 $\angle PMD=\angle MNB$（例 3）.

直线 CD 就是所求的直线（图17-4-8）.

图 17-4-8

证明　由作法，可知 $\angle PMD=\angle MNB$，

所以 $CD/\!/AB$（同位角相等，两直线平行）.

90　第17章　三角形

通过例 3 引出“尺规作图”的概念.

尺规作图是古希腊数学家提出的一种几何作图方法，通常将以下几条规则称为作图公法：

1. 过两个已知点可以作一条直线；

2. 若两条已知直线相交，则可以作出它们的交点；

3. 已知一圆的圆心与半径，可以作出此圆；

4. 若两个已知圆相交，则可以作出它们的交点；

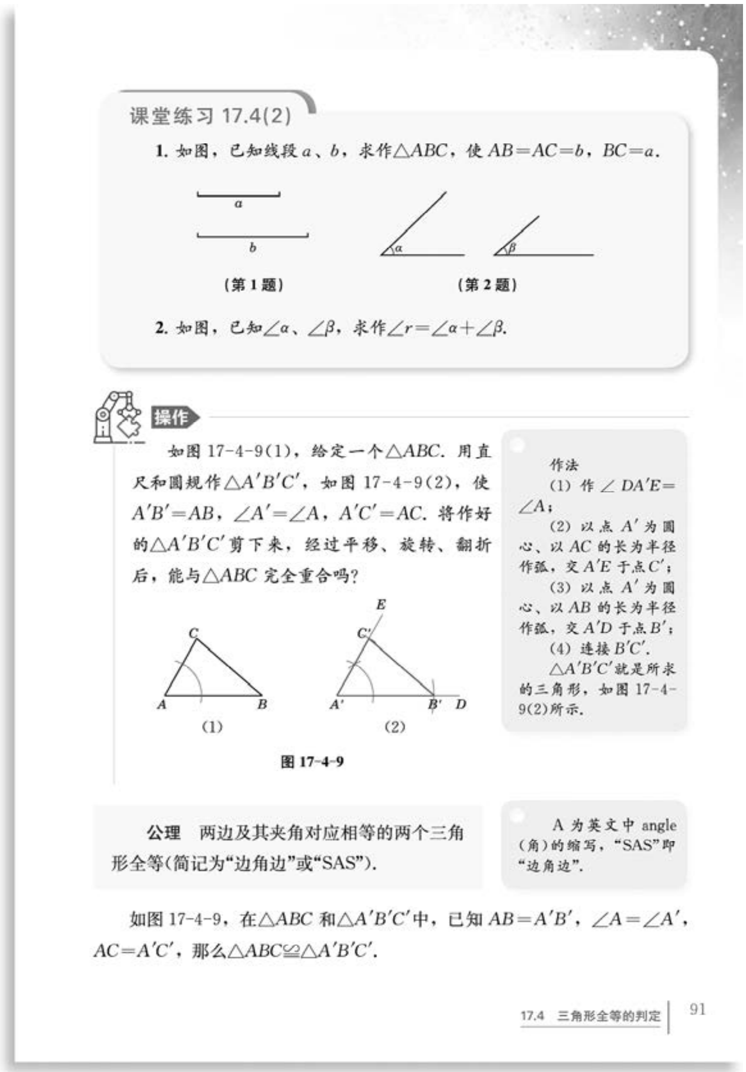
5. 若一已知直线与一已知圆相交，则可以作出它们的交点.

尺规作图并非万能，例如，经典的三等分任意角、倍立方体和化圆为方问题都已被证明不能用尺规作图完成. 但对这些问题的研究催生了新的数学思想，推动了数学的发展.

课堂练习 17.4(2)

1. 略.

2. 略.



课堂练习 17.4(2)

1. 如图，已知线段 a、b，求作$\triangle ABC$，使 $AB=AC=b$，$BC=a$.

(第1题)　　(第2题)

2. 如图，已知$\angle\alpha$、$\angle\beta$，求作$\angle r=\angle\alpha+\angle\beta$.

操作

如图 17-4-9(1)，给定一个$\triangle ABC$. 用直尺和圆规作$\triangle A'B'C'$，如图 17-4-9(2)，使 $A'B'=AB$，$\angle A'=\angle A$，$A'C'=AC$. 将作好的$\triangle A'B'C'$剪下来，经过平移、旋转、翻折后，能与$\triangle ABC$完全重合吗？

作法

(1) 作$\angle DA'E=\angle A$；

(2) 以点 A' 为圆心、以 AC 的长为半径作弧，交 $A'E$ 于点 C'；

(3) 以点 A' 为圆心、以 AB 的长为半径作弧，交 $A'D$ 于点 B'；

(4) 连接 $B'C'$.

$\triangle A'B'C'$就是所求的三角形，如图 17-4-9(2)所示.

(1)　(2)

图 17-4-9

公理　两边及其夹角对应相等的两个三角形全等(简记为“边角边”或“SAS”).

A 为英文中 angle (角)的缩写，“SAS”即“边角边”.

如图 17-4-9，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，已知 $AB=A'B'$，$\angle A=\angle A'$，$AC=A'C'$，那么$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

17.4 三角形全等的判定　91

（以下分析对应课本第 91～93 页）

本课教学重点

掌握三角形全等判定公理“边角边”，能用其证明简单的几何问题.

本课教学建议

（1）引导学生准确表述“边角边”公理，理解“对应”的含义.

（2）通过例题教学，让学生掌握判定三角形全等的证明过程和书写规范：①指明针对哪两个三角形；②列出所具备的条件；③作出两个三角形全等的判断并说明所依据的判定方法.

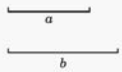
本课内容分析

操作　既是对“尺规作图”的复习巩固，也是叙述公理之前的“引子”.

《课标 2022 年版》中将“边角边”作为基本事实.

课堂练习 17.4(2)

1. 如图，已知线段 a、b，求作△ABC，使 $AB=AC=b$，$BC=a$.



（第 1 题）

（第 2 题）

2. 如图，已知∠α、∠β，求作∠r=∠α+∠β.

操作

如图 17-4-9(1)，给定一个△ABC. 用直尺和圆规作△$A'B'C'$，如图 17-4-9(2)，使 $A'B'=AB$，∠A'=∠A，$A'C'=AC$. 将作好的△$A'B'C'$剪下来，经过平移、旋转、翻折后，能与△ABC 完全重合吗?

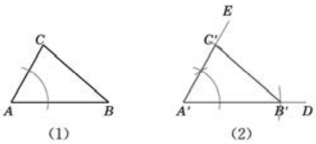


图 17-4-9

作法

(1) 作∠$DA'E$=∠A;

(2) 以点 A' 为圆心、以 AC 的长为半径作弧，交 $A'E$ 于点 C';

(3) 以点 A' 为圆心、以 AB 的长为半径作弧，交 $A'D$ 于点 B';

(4) 连接 $B'C'$.

△$A'B'C'$ 就是所求的三角形，如图 17-4-9(2)所示.

公理　两边及其夹角对应相等的两个三角形全等(简记为“边角边”或“SAS”).

A 为英文中 angle (角)的缩写，“SAS”即“边角边”.

如图 17-4-9，在△ABC 和△$A'B'C'$中，已知 $AB=A'B'$，∠A=∠A'，$AC=A'C'$，那么△ABC≌△$A'B'C'$.

17.4　三角形全等的判定　91

例 5 如图 17-4-10，已知：$AB=DC$，$\angle ABC=\angle DCB$.

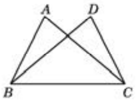


图 17-4-10

求证：$\triangle ABC \cong \triangle DCB$.

证明 在$\triangle ABC$和$\triangle DCB$中，

$$\because \begin{cases} AB=DC, \\ \angle ABC=\angle DCB, \\ BC=CB, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (SAS).

例 6 如图 17-4-11，已知：AB 与 CD 相交于点O，$OA=OB$，$OC=OD$.

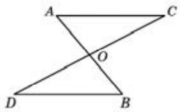


图 17-4-11

求证：$\triangle AOC \cong \triangle BOD$.

证明 在$\triangle AOC$和$\triangle BOD$中，

$$\because \begin{cases} OA=OB, \\ \angle AOC=\angle BOD\ (\text{对顶角相等}), \\ OC=OD, \end{cases}$$

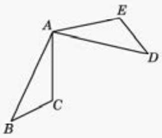
$\therefore$ $\triangle AOC \cong \triangle BOD$ (SAS).

探究

“两边分别相等且其中一组等边的对角相等的两个三角形全等”是真命题吗？为什么？

课堂练习 17.4(3)

1. 如图，已知：$AB=AD$，$AC=AE$，$\angle BAC=\angle DAE$. 求证：$\triangle BAC \cong \triangle DAE$.



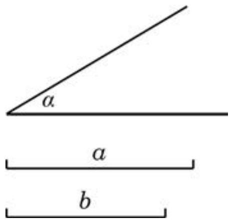
(第 1 题)

例 5、例 6 都是三角形全等的判定公理“边角边”的简单运用，教学中要注意识图和证明过程的规范书写.

例 5 判定$\triangle ABC$与$\triangle DCB$全等所需的第三个条件隐含在图中，可引导学生讨论，通过观察图形找出“公共边”这个隐含条件.

例 6 判定$\triangle AOC$与$\triangle BOD$全等所需的第二个条件隐含在图中，可引导学生讨论，通过观察找出“对顶角相等”这个隐含条件.

探究 “边边角”不能判定三角形全等. 可以提出下面的问题，供学生思考：如图，已知$\angle\alpha$和线段a、b. 作$\triangle ABC$，使得$\angle B=\angle\alpha$，$AB=a$，$AC=b$. 这样的三角形能作几个？



课堂练习 17.4(3)

1. 略.

2. 略.

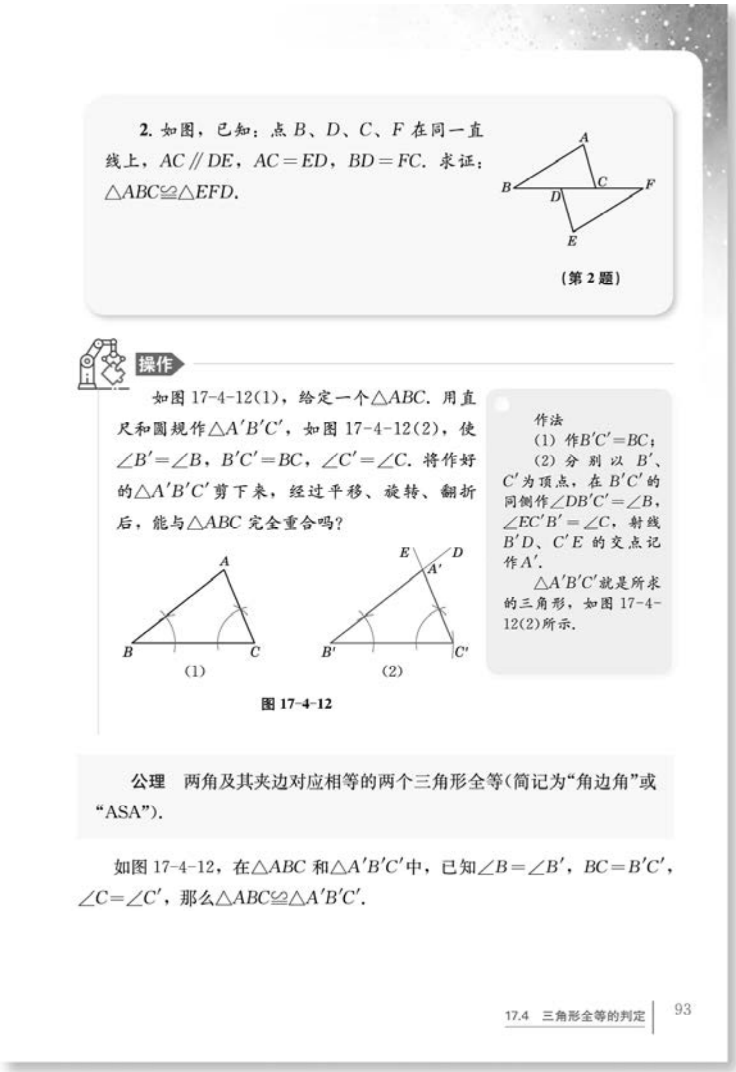
（以下分析对应课本第 93～95 页）

本课教学重点

掌握三角形全等的判定公理“角边角”，能用其证明简单的几何问题.

本课教学建议

与“边边边”“边角边”判定公理的教学类似，引导学生准确表述“角边角”公理，并能运用它进行简单的几何证明.



2. 如图，已知：点 B、D、C、F 在同一直线上，$AC /\!/ DE$，$AC=ED$，$BD=FC$. 求证：$\triangle ABC \cong \triangle EFD$.

（第 2 题）

操作

如图 17-4-12(1)，给定一个$\triangle ABC$. 用直尺和圆规作$\triangle A'B'C'$，如图 17-4-12(2)，使$\angle B'=\angle B$，$B'C'=BC$，$\angle C'=\angle C$. 将作好的$\triangle A'B'C'$剪下来，经过平移、旋转、翻折后，能与$\triangle ABC$完全重合吗？

作法

(1) 作$B'C'=BC$；

(2) 分别以 B'、C'为顶点，在 $B'C'$的同侧作$\angle DB'C'=\angle B$，$\angle EC'B'=\angle C$，射线 $B'D$、$C'E$ 的交点记作A'.

$\triangle A'B'C'$就是所求的三角形，如图 17-4-12(2)所示.

(1) (2)

图 17-4-12

公理 两角及其夹边对应相等的两个三角形全等（简记为“角边角”或“ASA”）.

如图 17-4-12，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，已知$\angle B=\angle B'$，$BC=B'C'$，$\angle C=\angle C'$，那么$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

17.4 三角形全等的判定 93

本课内容分析

操作 根据条件用尺规作图作$\triangle A'B'C'$. 通过操作，让学生对“角边角”这一公理有感性认识.

《课标 2022 年版》中将“角边角”作为基本事实.

例 7、例 8 是三角形全等的判定公理“角边角”的简单运用，注意证明过程的规范书写.

例 7 如图 17-4-13，已知：AB 与 CD 相交于点 O，$AO=BO$，$\angle A=\angle B$.

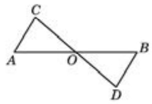


图 17-4-13

求证：$\triangle AOC\cong\triangle BOD$.

证明　在$\triangle AOC$ 和$\triangle BOD$ 中，

$$\because \begin{cases}\angle A=\angle B,\\ AO=BO,\\ \angle AOC=\angle BOD\ (\text{对顶角相等}),\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle AOC\cong\triangle BOD$ (ASA).

例 8 如图 17-4-14，已知：点 B、E、F、D 在同一直线上，$\angle B=\angle D$，$\angle AEB=\angle CFD$，$BF=DE$.

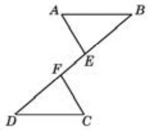


图 17-4-14

求证：$\triangle ABE\cong\triangle CDF$.

分析　要证$\triangle ABE\cong\triangle CDF$，考虑已知条件，根据“角边角”，只需将“$BF=DE$”转化为“$BE=DF$”即可.

证明　$\because$ $BF=DE$，

$\therefore$ $BF-EF=DE-EF$.

$\therefore$ $BE=DF$.

在$\triangle ABE$ 和$\triangle CDF$ 中，

$$\because \begin{cases}\angle B=\angle D,\\ BE=DF,\\ \angle AEB=\angle CFD,\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABE\cong\triangle CDF$ (ASA).

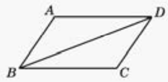
课堂练习 17.4(4)

1. 提示：ASA.

2. 提示：$\triangle ABC\cong\triangle ADE$（ASA）.

课堂练习 17.4(4)

1. 如图，已知：$\angle ABD=\angle CDB$，$\angle ADB=\angle CBD$. 求证：$\triangle ABD\cong\triangle CDB$.



（第 1 题）

94　第17章　三角形

（以下分析对应课本第 95～97 页）

本课教学重点

掌握三角形全等的判定定理“角角边”，能用其证明简单的几何问题.

本课教学建议

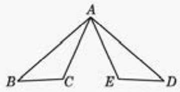
（1）让学生认识到“角角边”是定理不是公理，需要证明.

（2）可引导学生总结：从三对边、三对角中选出满足什么条件的三组元素，这三组元素对应相等可以判定三角形全等.

本课内容分析

例 9 推导得到全等三角形的“角角边”定理.

2. 如图，已知：$\angle B=\angle D$，$\angle BAE=\angle DAC$，$AB=AD$. 求证：$BC=DE$.



（第 2 题）

例 9 如图 17-4-15，已知：在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$BC=B'C'$.

求证：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

分析 要证$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，只需证明$\angle C=\angle C'$.

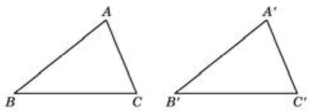


图 17-4-15

证明 ∵ $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

∴ $\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B$.

同理，$\angle C'=180^\circ-\angle A'-\angle B'$.

又∵ $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，

∴ $\angle C=\angle C'$.

在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，

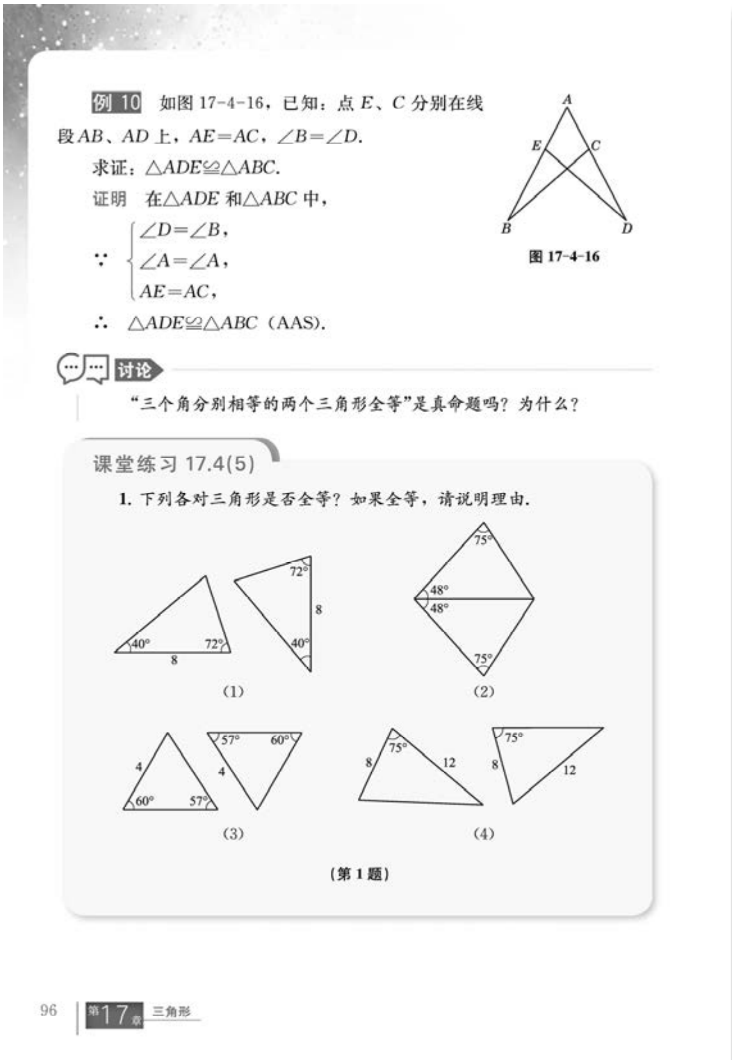
$$\because \begin{cases}\angle B=\angle B',\\ BC=B'C',\\ \angle C=\angle C',\end{cases}$$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$（ASA）.

本题的结论表明：

定理 两角对应相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等（简记为“角角边”或“AAS”）.

17.4 三角形全等的判定 95



例 10 如图 17-4-16，已知：点 E、C 分别在线段 AB、AD 上，$AE=AC$，$\angle B=\angle D$.

求证：$\triangle ADE\cong\triangle ABC$.

证明 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 中，

$$\because \begin{cases} \angle D=\angle B, \\ \angle A=\angle A, \\ AE=AC, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ADE\cong\triangle ABC$（AAS）.

图 17-4-16

讨论

"三个角分别相等的两个三角形全等"是真命题吗？为什么？

课堂练习 17.4(5)

1. 下列各对三角形是否全等？如果全等，请说明理由.

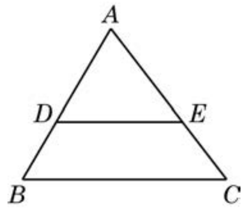
（1） （2） （3） （4）

（第 1 题）

96 第17章 三角形

例 10 是"角角边"定理的简单运用. 通过观察图形，由 $\angle A$ 是两个三角形的公共角，得到另一组角相等.

讨论 可以举出反例：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$DE\parallel BC$，可知 $\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$，又 $\angle A=\angle A$，但显然 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 不全等.

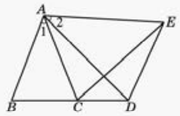


课堂练习 17.4(5)

1. 图(1)(2)中的三角形分别全等，理由分别是 ASA、AAS. 图(3)(4)中的三角形不全等.

2. BAD；CAE；BAD；CAE；AAS；全等三角形的对应边相等.

2. 如图，已知：$\angle 1=\angle 2$，$AD=AE$，$\angle B=\angle ACE$，且 B、C、D 三点在同一直线上. 求证：$BD=CE$. 把以下证明过程补充完整.



（第 2 题）

证明：∵ $\angle 1=\angle 2$，

∴ $\angle 1+\angle CAD=\angle 2+\angle CAD$.

∴ $\angle$______$=\angle$______.

在$\triangle ABD$ 和$\triangle ACE$ 中，

∵ $\begin{cases}\angle B=\angle ACE,\\ \angle \_\_\_\_\_\_=\angle \_\_\_\_\_\_,\\ AD=AE,\end{cases}$

∴ $\triangle ABD\cong\triangle ACE$（____________）.

∴ $BD=CE$（________________）.

例 11 如图 17-4-17，已知：$AB=AC$，$AD=AE$，$\angle BAC=\angle DAE$.

求证：$\triangle DAB\cong\triangle EAC$.

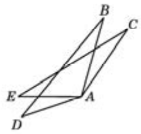


图 17-4-17

分析 要证$\triangle DAB\cong\triangle EAC$，已知有两组边对应相等，根据“边角边”，只需证这两组边的夹角相等即可.

证明 ∵ $\angle BAC=\angle DAE$，

∴ $\angle BAC+\angle BAE=\angle DAE+\angle BAE$.

∴ $\angle EAC=\angle DAB$.

在$\triangle DAB$ 和$\triangle EAC$ 中，

∵ $\begin{cases}AB=AC,\\ \angle DAB=\angle EAC,\\ AD=AE,\end{cases}$

∴ $\triangle DAB\cong\triangle EAC$（SAS）.

17.4 三角形全等的判定 97

（以下分析对应课本第 97～99 页）

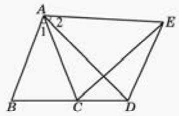
本课教学重点

选择适当的判定方法，证明两个三角形全等.

本课教学建议

要重视论证思路的寻求过程. 引导学生根据要证的结论，结合图形，先找出两个三角形的对应边与对应角；再对照已知条件，认清哪些是已知的，哪些是可以通过证明得到的；最后选择适当的判定方法证明两个三角形全等.

2. 如图，已知：$\angle 1=\angle 2$，$AD=AE$，$\angle B=\angle ACE$，且 B、C、D 三点在同一直线上．求证：$BD=CE$．把以下证明过程补充完整．



（第 2 题）

证明：$\because$ $\angle 1=\angle 2$，

$\therefore$ $\angle 1+\angle CAD=\angle 2+\angle CAD$．

$\therefore$ $\angle$_______$=\angle$_______．

在$\triangle ABD$ 和$\triangle ACE$ 中，

$$\because \begin{cases} \angle B=\angle ACE, \\ \angle\_\_\_\_\_=\angle\_\_\_\_\_, \\ AD=AE, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACE$（____________）．

$\therefore$ $BD=CE$（________________）．

例 11 如图 17-4-17，已知：$AB=AC$，$AD=AE$，$\angle BAC=\angle DAE$．

求证：$\triangle DAB\cong\triangle EAC$．

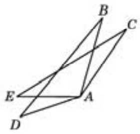


图 17-4-17

分析　要证$\triangle DAB\cong\triangle EAC$，已知有两组边对应相等，根据“边角边”，只需证这两组边的夹角相等即可．

证明　$\because$ $\angle BAC=\angle DAE$，

$\therefore$ $\angle BAC+\angle BAE=\angle DAE+\angle BAE$．

$\therefore$ $\angle EAC=\angle DAB$．

在$\triangle DAB$ 和$\triangle EAC$ 中，

$$\because \begin{cases} AB=AC, \\ \angle DAB=\angle EAC, \\ AD=AE, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle DAB\cong\triangle EAC$（SAS）．

17.4　三角形全等的判定　97

本课内容分析

例 11 可以引导学生从图形旋转的视角来认识这两个三角形的关系．

例 12 如图 17-4-18，已知：在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC$，点A在DE上，$\angle D=90^\circ$，$\angle E=90^\circ$.

(1) 求证：$\angle BAD=\angle ACE$；

(2) 求证：$\triangle BDA\cong\triangle AEC$.

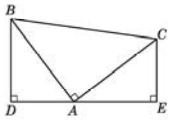


图 17-4-18

证明 (1) $\because$ 点A在DE上，

$\therefore$ $\angle BAD+\angle BAC+\angle CAE=180^\circ$.

又$\because$ $\angle BAC=90^\circ$，

$\therefore$ $\angle BAD+\angle CAE=90^\circ$.

$\because$ $\angle ACE+\angle CAE+\angle E=180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

又$\because$ $\angle E=90^\circ$，

$\therefore$ $\angle ACE+\angle CAE=90^\circ$.

$\therefore$ $\angle BAD=\angle ACE$.

(2) $\because$ $\angle D=90^\circ$，$\angle E=90^\circ$，

$\therefore$ $\angle D=\angle E$.

在$\triangle BDA$和$\triangle AEC$中，

$$\because \begin{cases}\angle D=\angle E,\\ \angle BAD=\angle ACE,\\ AB=AC,\end{cases}$$

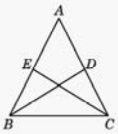
$\therefore$ $\triangle BDA\cong\triangle AEC$（AAS）.

课堂练习 17.4(6)

1. 如图，已知：在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=\angle ACB$，BD、CE分别平分$\angle ABC$、$\angle ACB$. 求证：$BD=CE$. 把以下证明过程补充完整.

证明：$\because$ BD、CE分别平分$\angle ABC$、$\angle ACB$，

$\therefore$ $\angle DBC=\frac{1}{2}$______，$\angle ECB=\frac{1}{2}$______.



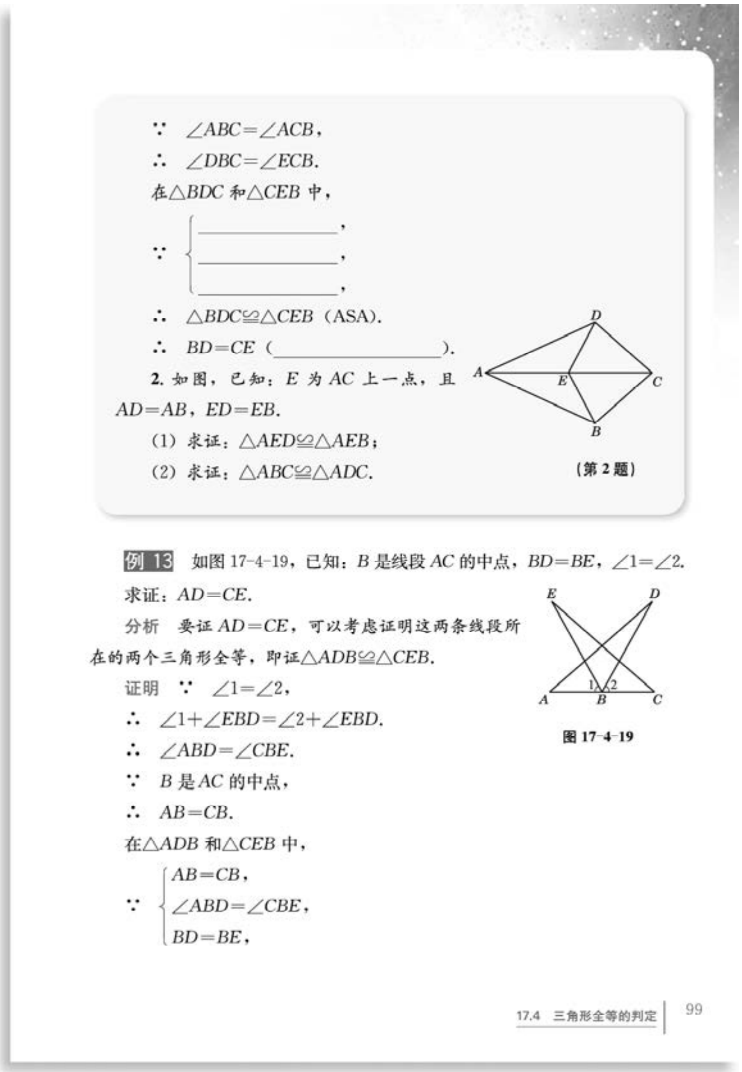
（第 1 题）

98 第17章 三角形

例 12(1)是(2)的台阶，为(2)的证明提供条件.

课堂练习 17.4(6)

1. $\angle ABC$；$\angle ACB$；$\angle DBC=\angle ECB$；$BC=CB$；$\angle ABC=\angle ACB$；全等三角形的对应边相等.



∵ $\angle ABC=\angle ACB$，

∴ $\angle DBC=\angle ECB$.

在$\triangle BDC$和$\triangle CEB$中，

∵ $\begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \end{cases}$

∴ $\triangle BDC\cong\triangle CEB$（ASA）.

∴ $BD=CE$（____________）.

2. 如图，已知：E 为 AC 上一点，且 $AD=AB$，$ED=EB$.

（1）求证：$\triangle AED\cong\triangle AEB$；

（2）求证：$\triangle ABC\cong\triangle ADC$.

（第 2 题）

例 13 如图 17-4-19，已知：B 是线段 AC 的中点，$BD=BE$，$\angle 1=\angle 2$.

求证：$AD=CE$.

分析 要证 $AD=CE$，可以考虑证明这两条线段所在的两个三角形全等，即证$\triangle ADB\cong\triangle CEB$.

证明 ∵ $\angle 1=\angle 2$，

∴ $\angle 1+\angle EBD=\angle 2+\angle EBD$.

∴ $\angle ABD=\angle CBE$.

∵ B 是 AC 的中点，

∴ $AB=CB$.

在$\triangle ADB$和$\triangle CEB$中，

∵ $\begin{cases} AB=CB, \\ \angle ABD=\angle CBE, \\ BD=BE, \end{cases}$

图 17-4-19

17.4 三角形全等的判定 99

2. （1）在$\triangle AED$和$\triangle AEB$中，

∵ $\begin{cases} AD=AB, \\ AE=AE, \\ ED=EB, \end{cases}$

∴ $\triangle AED\cong\triangle AEB$（SSS）.

（2）∵ $\triangle AED\cong\triangle AEB$，

∴ $\angle EAD=\angle EAB$（全等三角形的对应角相等）.

在$\triangle ABC$和$\triangle ADC$中，

∵ $\begin{cases} AD=AB, \\ \angle EAD=\angle EAB, \\ AC=AC, \end{cases}$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle ADC$（SAS）.

（以下分析对应课本第 99～101 页）

本课教学重点

复习和巩固全等三角形的判定方法和通过证明两个三角形全等得到对应边相等或对应角相等的方法.

本课教学建议

要重视论证思路的寻求过程. 引导学生根据要证的结论与已知条件，结合图形，找出两个全等的三角形，再证明要证的边相等或角相等.

本课内容分析

例 13 将证明线段相等转化为证明两个三角形全等. 可以引导学生从图形翻折的视角来认识这两个三角形的关系.

∵ $\angle ABC=\angle ACB$，

∴ $\angle DBC=\angle ECB$.

在$\triangle BDC$和$\triangle CEB$中，

∵ $\begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \end{cases}$

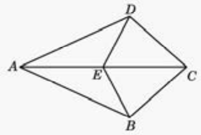
∴ $\triangle BDC\cong\triangle CEB$（ASA）.

∴ $BD=CE$（____________）.

2. 如图，已知：E 为 AC 上一点，且 $AD=AB$，$ED=EB$.

（1）求证：$\triangle AED\cong\triangle AEB$；

（2）求证：$\triangle ABC\cong\triangle ADC$.



（第 2 题）

例 13 如图 17-4-19，已知：B 是线段 AC 的中点，$BD=BE$，$\angle 1=\angle 2$.

求证：$AD=CE$.

分析　要证 $AD=CE$，可以考虑证明这两条线段所在的两个三角形全等，即证$\triangle ADB\cong\triangle CEB$.

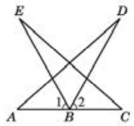


图 17-4-19

证明　∵ $\angle 1=\angle 2$，

∴ $\angle 1+\angle EBD=\angle 2+\angle EBD$.

∴ $\angle ABD=\angle CBE$.

∵ B 是 AC 的中点，

∴ $AB=CB$.

在$\triangle ADB$和$\triangle CEB$中，

∵ $\begin{cases} AB=CB, \\ \angle ABD=\angle CBE, \\ BD=BE, \end{cases}$

17.4 三角形全等的判定　99

∴ $\triangle ADB \cong \triangle CEB$（SAS）.

∴ $AD=CE$（全等三角形的对应边相等）.

例 14 如图 17-4-20，已知：在$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C$，点 D、E、F 分别在边 BC、AC、AB 上，且 $BD=CE$，$BF=CD$.

求证：$\angle FDE=\angle B$.

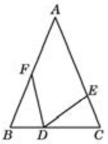


图 17-4-20

分析 由已知条件可证$\triangle BDF \cong \triangle CED$，可知$\angle BFD=\angle CDE$. 考虑到$\angle FDE$是$\triangle BDF$的外角$\angle FDC$的一部分，再利用“三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和”即可.

证明 在$\triangle BDF$和$\triangle CED$中，

$$\because \begin{cases} BD=CE, \\ \angle B=\angle C, \\ BF=CD, \end{cases}$$

∴ $\triangle BDF \cong \triangle CED$（SAS）.

∴ $\angle BFD=\angle CDE$（全等三角形的对应角相等）.

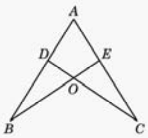
∵ $\angle FDC=\angle B+\angle BFD$（三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和），

∴ $\angle FDE+\angle CDE=\angle B+\angle BFD$.

∴ $\angle FDE=\angle B$.

课堂练习 17.4(7)

1. 如图，已知：BE 与 CD 相交于点 O，且 $BO=CO$，$\angle ADC=\angle AEB$. 求证：$BD=CE$.



（第 1 题）

100 第17章 三角形

例 14 中所要证明相等的两个角并不是两个全等三角形的对应角，但可以先证明一组全等三角形的对应角相等，再推导出该结论.

课堂练习 17.4(7)

1. 提示：由$\angle ADC=\angle AEB$可得$\angle BDO=\angle CEO$，于是可证$\triangle BDO \cong \triangle CEO$（AAS 或 ASA）.

2. 提示：由三角形的内角和定理的推论，$\angle FDC=\angle B+\angle BFD$. 又$\angle FDE=\angle B$，因此$\angle BDF=\angle CDE$. 于是可证$\triangle DFB \cong \triangle EDC$（SAS）.

（以下分析对应课本第 101～103 页）

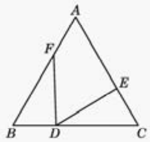
本课教学重点

选择适当的方法证明两个三角形全等，通过证明三角形全等得到对应的边相等或角相等.

本课教学建议

本节课两个例题综合度较高，如果学生独立寻找证明思路有困难，可以铺设适当的台阶，以降低难度.

2. 如图，已知：在△*ABC* 中，点 *D*、*E*、*F* 分别在边 *BC*、*AC*、*AB* 上，且 $FD=DE$，$BF=CD$，$\angle FDE=\angle B$. 求证：$\angle B=\angle C$.



（第 2 题）

例 15 如图 17-4-21，已知：线段 *AD*、*BC* 相交于点 *O*，$OA=OD$，$OB=OC$，点 *E*、*F* 在线段 *AD* 上，且$\angle ABE=\angle DCF$.

求证：$BE\parallel CF$.

分析 要证 $BE\parallel CF$，只要证$\angle BEO=\angle CFO$. 已知有$\angle ABE=\angle DCF$，又可知$\angle BEO=\angle A+\angle ABE$，$\angle CFO=\angle D+\angle DCF$，因此只要证$\angle A=\angle D$，即证△*AOB*≌△*DOC* 即可.

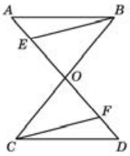


图 17-4-21

证明 在△*AOB* 和△*DOC* 中，

$$\because \begin{cases} OA=OD, \\ \angle AOB=\angle DOC\ (\text{对顶角相等}), \\ OB=OC, \end{cases}$$

∴ △*AOB*≌△*DOC*（SAS）.

∴ $\angle A=\angle D$（全等三角形的对应角相等）.

又∵ $\angle ABE=\angle DCF$，

∴ $\angle A+\angle ABE=\angle D+\angle DCF$.

又∵ $\angle BEO=\angle A+\angle ABE$，$\angle CFO=\angle D+\angle DCF$（三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和），

∴ $\angle BEO=\angle CFO$.

∴ $BE\parallel CF$（内错角相等，两直线平行）.

本课内容分析

例 15 综合了平行线和全等三角形的知识. 本题也可以通过证明$\angle EBO=\angle FCO$ 等其他途径得到 $BE\parallel CF$.

例 16 先根据题意画图，再用符号语言表述已知和求证. 要证明两次三角形全等. 可进一步引导学生探索“两对应边相等，且第三边上的中线也相等的两个三角形是否全等”.

例 16 证明：两边对应相等且其中一组等边上的中线相等的两个三角形全等.

如图 17-4-22，已知：在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$AB=A'B'$，$BC=B'C'$，AD、$A'D'$分别是边BC、$B'C'$上的中线，且$AD=A'D'$.

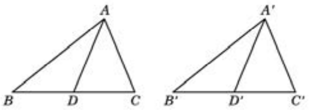


图 17-4-22

求证：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

分析 要证明$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，由于已知$AB=A'B'$，$BC=B'C'$，因此只需要证明$\angle B=\angle B'$. 为此考虑证明$\triangle ABD$和$\triangle A'B'D'$全等.

证明 ∵ AD、$A'D'$分别是边BC、$B'C'$上的中线，

∴ $BD=\frac{1}{2}BC$，$B'D'=\frac{1}{2}B'C'$.

又∵ $BC=B'C'$，

∴ $BD=B'D'$.

在$\triangle ABD$和$\triangle A'B'D'$中，

$$\because \begin{cases} AB=A'B', \\ BD=B'D', \\ AD=A'D', \end{cases}$$

∴ $\triangle ABD\cong\triangle A'B'D'$ (SSS).

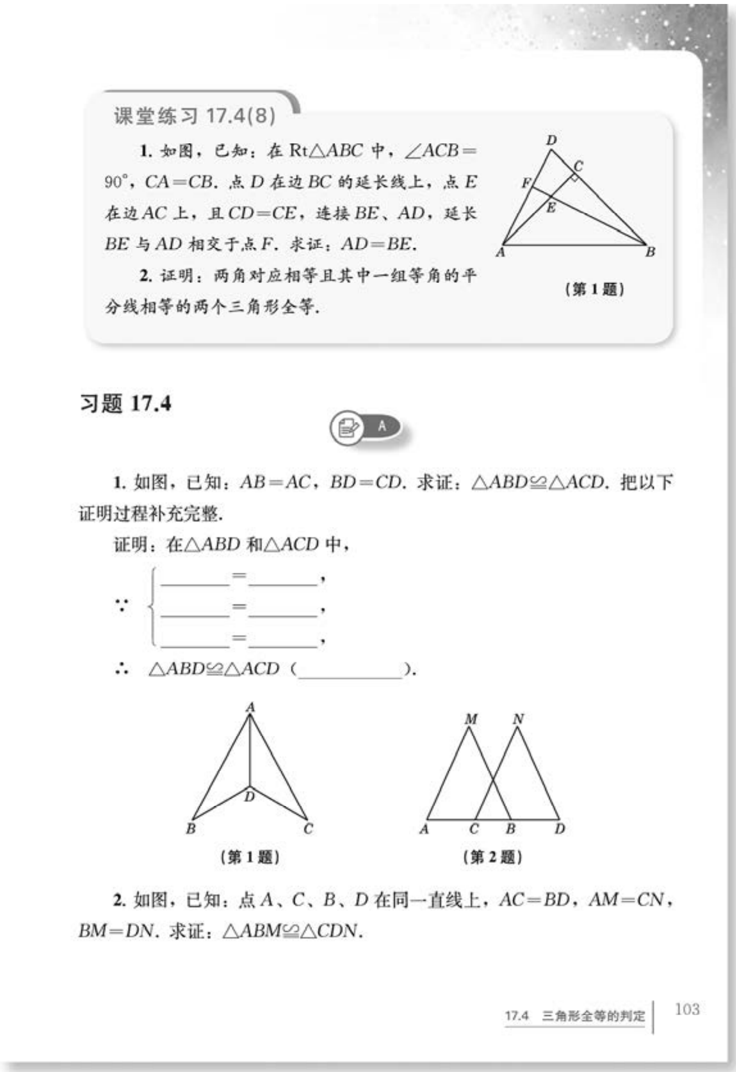
∴ $\angle B=\angle B'$ (全等三角形的对应角相等).

在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，

$$\because \begin{cases} AB=A'B', \\ \angle B=\angle B', \\ BC=B'C', \end{cases}$$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$ (SAS).

102 第17章 三角形



课堂练习 17.4(8)

1. 如图，已知：在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CA=CB$. 点 D 在边 BC 的延长线上，点 E 在边 AC 上，且 $CD=CE$，连接 BE、AD，延长 BE 与 AD 相交于点 F. 求证：$AD=BE$.

2. 证明：两角对应相等且其中一组等角的平分线相等的两个三角形全等.

（第 1 题）

习题 17.4

A

1. 如图，已知：$AB=AC$，$BD=CD$. 求证：$\triangle ABD \cong \triangle ACD$. 把以下证明过程补充完整.

证明：在△ABD 和△ACD 中，

$$\because \begin{cases} \_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_, \\ \_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_, \\ \_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle ACD$（________）.

（第 1 题）　（第 2 题）

2. 如图，已知：点 A、C、B、D 在同一直线上，$AC=BD$，$AM=CN$，$BM=DN$. 求证：$\triangle ABM \cong \triangle CDN$.

17.4 三角形全等的判定　103

课堂练习 17.4(8)

1. $\because$ $\angle ACB=90°$，

$\therefore$ $\angle DCA=90°$，$\angle ECB=90°$.

$\therefore$ $\angle DCA=\angle ECB$.

在△DCA 和△ECB 中，

$$\because \begin{cases} CA=CB, \\ \angle DCA=\angle ECB, \\ CD=CE, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle DCA \cong \triangle ECB$（SAS）.

$\therefore$ $AD=BE$（全等三角形的对应边相等）.

2. 提示：参考例 16，需要证两次全等.

习题 17.4

1. AB；AC；BD；CD；AD；AD；SSS.

2. $\because$ $AC=BD$，

$\therefore$ $AC+BC=BD+BC$，

即 $AB=CD$.

在△ABM 和△CDN 中，

$$\because \begin{cases} AM=CN, \\ AB=CD, \\ BM=DN, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABM \cong \triangle CDN$（SSS）.

3. 略.

4. 略.

5. AC；FD；$\angle A$；$\angle F$；AB；FE；SAS；全等三角形的对应边相等.

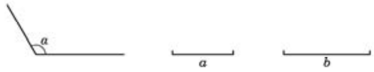
6. 提示：ASA.

7. 提示：SAS.

3. 如图，已知$\angle\alpha$和线段a，求作$\triangle ABC$，使$\angle B=\angle C=\angle\alpha$，$BC=a$.

（第 3 题）

4. 如图，已知$\angle\alpha$和线段a、b，求作$\triangle ABC$，使$\angle C=\angle\alpha$，$BC=a$，$AC=b$.



（第 4 题）

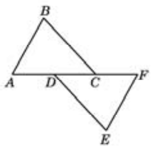
5. 如图，已知：点A、D、C、F在同一直线上，且$AC=FD$，$AB=FE$，$\angle A=\angle F$. 求证：$BC=ED$. 把以下证明过程补充完整.

证明：在$\triangle ABC$和$\triangle FED$中，

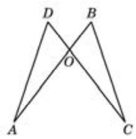
$$\because \begin{cases} \_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_, \\ \_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_, \\ \_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle FED$（________）.

$\therefore$ $BC=ED$（____________）.



（第 5 题）

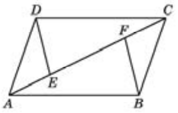


（第 6 题）

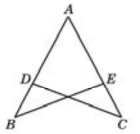
6. 如图，已知：AB与CD相交于点O，$\angle A=\angle C$，$OA=OC$. 求证：$\triangle AOD\cong\triangle COB$.

7. 如图，已知：E、F是AC上的两点，且$AF=CE$，$BF=DE$，$DE/\!/BF$. 求证：$\triangle ABF\cong\triangle CDE$.

104 第17章 三角形



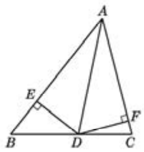
（第 7 题）



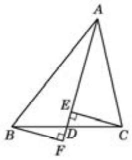
（第 8 题）

8. 如图，已知：点 D 在 AB 上，点 E 在 AC 上，$AB=AC$，$\angle B=\angle C$. 求证：$BD=CE$.

9. 如图，已知：AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为 E、F. 求证：$AE=AF$.



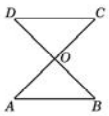
（第 9 题）



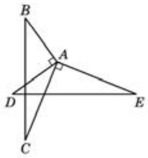
（第 10 题）

10. 如图，已知：AD 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线，$CE\perp AD$，$BF\perp AD$，垂足分别为 E、F. 求证：$\triangle CDE\cong\triangle BDF$.

11. 如图，已知：AC 与 BD 相交于点 O，且 O 是 BD 的中点，$AB/\!/DC$. 求证：$AB=CD$.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 如图，已知：$AB=AD$，$AC=AE$，$AB\perp AD$，$AC\perp AE$，垂足均为 A. 求证：$\triangle ABC\cong\triangle ADE$.

17.4 三角形全等的判定 | 105

8. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$$\because \begin{cases}\angle B=\angle C,\\ AB=AC,\\ \angle A=\angle A,\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABE\cong\triangle ACD$（ASA）.

$\therefore$ $AD=AE$（全等三角形的对应边相等）.

又 $\because$ $AB=AC$，

$\therefore$ $AB-AD=AC-AE$，即 $BD=CE$.

9. $\because$ $DE\perp AB$，$DF\perp AC$，

$\therefore$ $\angle AED=90^\circ$，$\angle AFD=90^\circ$，

$\therefore$ $\angle AED=\angle AFD$.

$\because$ AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$\therefore$ $\angle DAE=\angle DAF$.

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ADF$ 中，

$$\because \begin{cases}\angle AED=\angle AFD,\\ \angle DAE=\angle DAF,\\ AD=AD,\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ADE\cong\triangle ADF$（AAS）.

$\therefore$ $AE=AF$（全等三角形的对应边相等）.

10. $\because$ $CE\perp AD$，$BF\perp AD$，

$\therefore$ $\angle F=\angle CED=90^\circ$.

$\because$ D 是 BC 的中点，

$\therefore$ $BD=CD$.

在 $\triangle CDE$ 和 $\triangle BDF$ 中，

$$\because \begin{cases}\angle CED=\angle F,\\ \angle CDE=\angle BDF\text{（对顶角相等）},\\ CD=BD,\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle CDE\cong\triangle BDF$（AAS）.

11. $\because$ 点 O 是 BD 的中点，

$\therefore$ $OB=OD$.

$\because$ $AB /\!/ CD$，

$\therefore$ $\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$（两直线平行，内错角相等）.

在$\triangle OAB$ 和$\triangle OCD$ 中，

$$\because \begin{cases} \angle A=\angle C, \\ \angle B=\angle D, \\ OB=OD, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle OAB\cong\triangle OCD$（AAS）.

$\therefore$ $AB=CD$（全等三角形的对应边相等）.

12. $\because$ $AB\perp AD$，$AC\perp AE$，

$\therefore$ $\angle BAD=\angle CAE=90^\circ$.

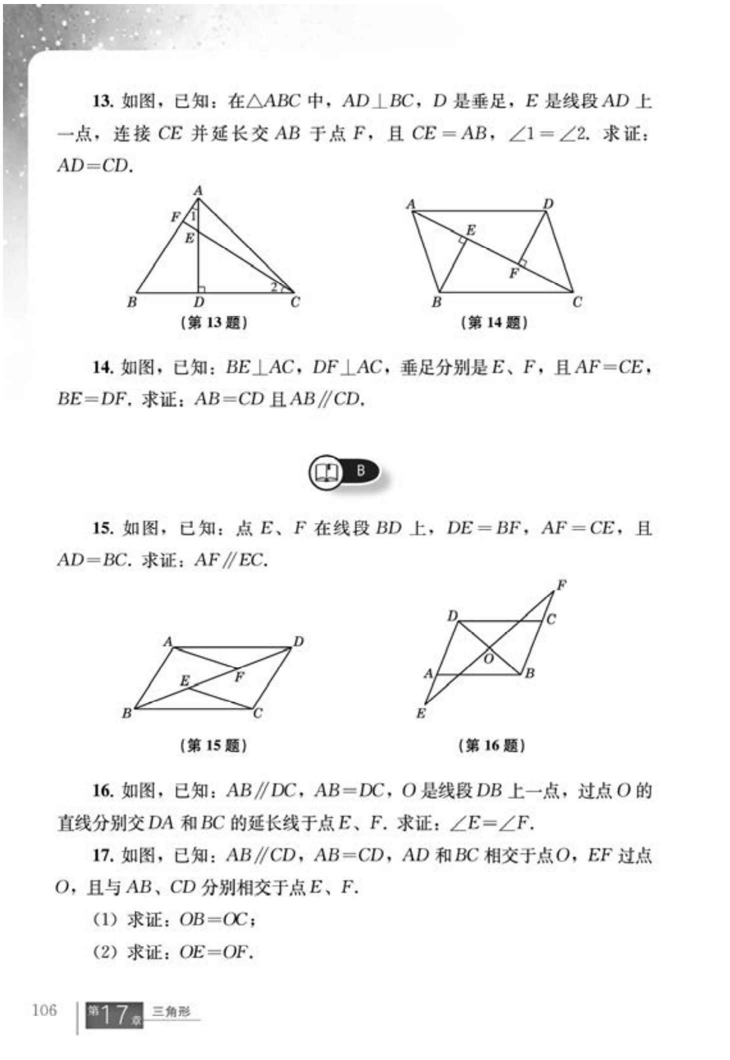
$\therefore$ $\angle BAD+\angle DAC=\angle CAE+\angle DAC$，

即$\angle BAC=\angle DAE$.

在$\triangle ABC$ 和$\triangle ADE$ 中，

$$\because \begin{cases} AB=AD, \\ \angle BAC=\angle DAE, \\ AC=AE, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle ADE$（SAS）.



13. 如图，已知：在$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$，D是垂足，E是线段AD上一点，连接CE并延长交AB于点F，且$CE=AB$，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$AD=CD$.

（第13题）　（第14题）

14. 如图，已知：$BE\perp AC$，$DF\perp AC$，垂足分别是E、F，且$AF=CE$，$BE=DF$. 求证：$AB=CD$且$AB/\!/CD$.

B

15. 如图，已知：点E、F在线段BD上，$DE=BF$，$AF=CE$，且$AD=BC$. 求证：$AF/\!/EC$.

（第15题）　（第16题）

16. 如图，已知：$AB/\!/DC$，$AB=DC$，O是线段DB上一点，过点O的直线分别交DA和BC的延长线于点E、F. 求证：$\angle E=\angle F$.

17. 如图，已知：$AB/\!/CD$，$AB=CD$，AD和BC相交于点O，EF过点O，且与AB、CD分别相交于点E、F.

(1) 求证：$OB=OC$；

(2) 求证：$OE=OF$.

106　第17章　三角形

13. ∵ $AD\perp BC$，

∴ $\angle ADB=\angle CDE=90^\circ$.

在$\triangle ABD$和$\triangle CED$中，

∵ $\begin{cases}\angle ADB=\angle CDE,\\ \angle 1=\angle 2,\\ AB=CE,\end{cases}$

∴ $\triangle ABD\cong\triangle CED$（AAS）.

∴ $AD=CD$（全等三角形的对应边相等）.

14. ∵ $BE\perp AC$，$DF\perp AC$，

∴ $\angle AEB=\angle CFD=90^\circ$.

∵ $AF=CE$，

∴ $AF-EF=CE-EF$，

即$AE=CF$.

在$\triangle ABE$和$\triangle CDF$中，

∵ $\begin{cases}AE=CF,\\ \angle AEB=\angle CFD,\\ BE=DF,\end{cases}$

∴ $\triangle ABE\cong\triangle CDF$（SAS）.

∴ $AB=CD$（全等三角形的对应边相等），

$\angle BAE=\angle DCF$（全等三角形的对应角相等）.

∴ $AB/\!/CD$（内错角相等，两直线平行）.

15. ∵ $DE=BF$，

∴ $DE-EF=BF-EF$，

即$DF=BE$.

在$\triangle ADF$和$\triangle CBE$中，

∵ $\begin{cases}DF=BE,\\ AF=CE,\\ AD=CB,\end{cases}$

∴ $\triangle ADF\cong\triangle CBE$（SSS）.

∴ $\angle AFD=\angle CEB$（全等三角形的对应角相等）.

$\therefore\ \angle AFB=\angle CED$.

$\therefore\ AF\parallel EC$（内错角相等，两直线平行）.

16. $\because\ AB\parallel DC$，

$\therefore\ \angle ABD=\angle CDB$（两直线平行，内错角相等）.

在$\triangle ABD$ 和$\triangle CDB$ 中，

$$\because\ \begin{cases}AB=CD,\\ \angle ABD=\angle CDB,\\ BD=DB,\end{cases}$$

$\therefore\ \triangle ABD\cong\triangle CDB$（SAS）.

$\therefore\ \angle ADB=\angle CBD$（全等三角形的对应角相等）.

$\therefore\ AD\parallel BC$（内错角相等，两直线平行）.

$\therefore\ \angle E=\angle F$（两直线平行，内错角相等）.

17. $\because\ AB\parallel CD$，

$\therefore\ \angle A=\angle D$，$\angle B=\angle C$（两直线平行，内错角相等）.

（1）在$\triangle OAB$ 和$\triangle ODC$ 中，

$$\because\ \begin{cases}\angle A=\angle D,\\ AB=DC,\\ \angle B=\angle C,\end{cases}$$

$\therefore\ \triangle OAB\cong\triangle ODC$（ASA）.

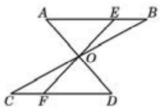
$\therefore\ OB=OC$（全等三角形的对应边相等）.

（2）在$\triangle OBE$ 和$\triangle OCF$ 中，

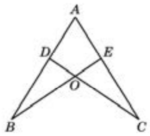
$$\because\ \begin{cases}\angle BOE=\angle COF\text{（对顶角相等）},\\ OB=OC,\\ \angle B=\angle C,\end{cases}$$

$\therefore\ \triangle OBE\cong\triangle OCF$（ASA）.

$\therefore\ OE=OF$（全等三角形的对应边相等）.



（第 17 题）



（第 18 题）

18. 如图，已知：$AB=AC$，BE 和 CD 相交于点 O，$\angle B=\angle C$. 求证：$OD=OE$.

17.4 三角形全等的判定 107

18. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$$\because \begin{cases} \angle A=\angle A, \\ AB=AC, \\ \angle B=\angle C, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABE\cong\triangle ACD$（ASA）.

$\therefore$ $AE=AD$（全等三角形的对应边相等）.

$\therefore$ $AB-AD=AC-AE$，即 $BD=CE$.

在$\triangle OBD$ 和$\triangle OCE$ 中，

$$\because \begin{cases} \angle DOB=\angle EOC \\ \text{（对顶角相等）}, \\ \angle B=\angle C, \\ BD=CE, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle OBD\cong\triangle OCE$（AAS）.

$\therefore$ $OD=OE$（全等三角形的对应边相等）.

复习题

1. (1) B.

(2) C.

(3) A.

◎复习题

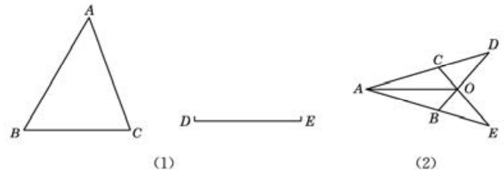
A

1. 选择题：

(1) 如图(1)，已知$\triangle ABC$的三边长互不相等，$DE=BC$，以D、E为两个顶点画位置不同的三角形，使所画三角形与$\triangle ABC$全等. 这样的三角形最多可画 (　　)

A. 2个；　　B. 4个；

C. 6个；　　D. 8个.



(第1题)

(2) 如图(2)，点B、C分别在线段AE、AD上，BD与CE相交于点O. 如果$AB=AC$，$AD=AE$，那么图中的全等三角形共有 (　　)

A. 2对；　　B. 3对；

C. 4对；　　D. 5对.

(3) 下列命题中，假命题是 (　　)

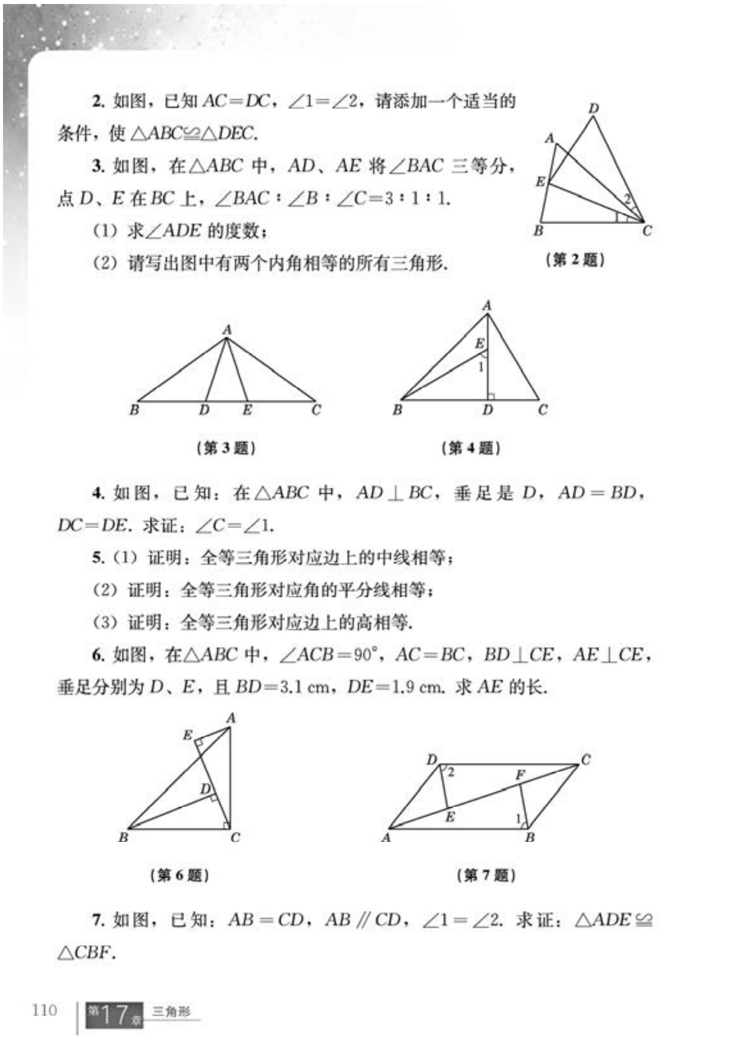
A. 面积相等的两个三角形全等；

B. 全等三角形的周长相等；

C. 全等三角形的面积相等；

D. 两角对应相等且其中一组等角对边上的高相等的两个三角形全等.

复习题　109



2. 如图，已知 $AC=DC$，$\angle 1=\angle 2$，请添加一个适当的条件，使 $\triangle ABC \cong \triangle DEC$.

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD、AE 将 $\angle BAC$ 三等分，点 D、E 在 BC 上，$\angle BAC : \angle B : \angle C = 3:1:1$.

(1) 求 $\angle ADE$ 的度数；

(2) 请写出图中有两个内角相等的所有三角形.

（第 2 题）

（第 3 题）　　（第 4 题）

4. 如图，已知：在 $\triangle ABC$ 中，$AD \perp BC$，垂足是 D，$AD=BD$，$DC=DE$. 求证：$\angle C=\angle 1$.

5. (1) 证明：全等三角形对应边上的中线相等；

(2) 证明：全等三角形对应角的平分线相等；

(3) 证明：全等三角形对应边上的高相等.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，$BD \perp CE$，$AE \perp CE$，垂足分别为 D、E，且 $BD=3.1$ cm，$DE=1.9$ cm. 求 AE 的长.

（第 6 题）　　（第 7 题）

7. 如图，已知：$AB=CD$，$AB \parallel CD$，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$\triangle ADE \cong \triangle CBF$.

110 第17章 三角形

2. $BC=EC$ 或 $\angle A=\angle D$ 或 $\angle ABC=\angle DEC$.

3. (1) $72°$.

(2) $\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle ADE$、$\triangle AEC$、$\triangle ABE$、$\triangle ACD$.

4. 略.

5. 略.

6. 1.2 cm.

7. ∵ $AB \parallel CD$，

∴ $\angle BAC=\angle DCA$（两直线平行，内错角相等）.

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle CDE$ 中，

∵ $\begin{cases} \angle BAC=\angle DCA, \\ AB=CD, \\ \angle 1=\angle 2, \end{cases}$

∴ $\triangle ABF \cong \triangle CDE$（ASA）.

∴ $BF=DE$，$AF=CE$（全等三角形的对应边相等），

$\angle AFB=\angle CED$（全等三角形的对应角相等）.

∴ $\angle BFC=\angle DEA$，$AF-EF=CE-EF$，即 $AE=CF$.

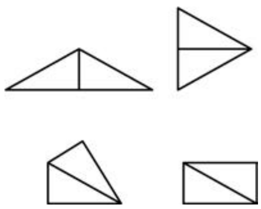
在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CBF$ 中，

∵ $\begin{cases} AE=CF, \\ \angle DEA=\angle BFC, \\ DE=BF, \end{cases}$

∴ $\triangle ADE \cong \triangle CBF$（SAS）.

8. ①②或①③. 推理过程略.

9. 如图.



（第 9 题）

10. $AB=DE$，$AE=DB$，$BC=EC$，$AF=DF$，$BF=EF$.

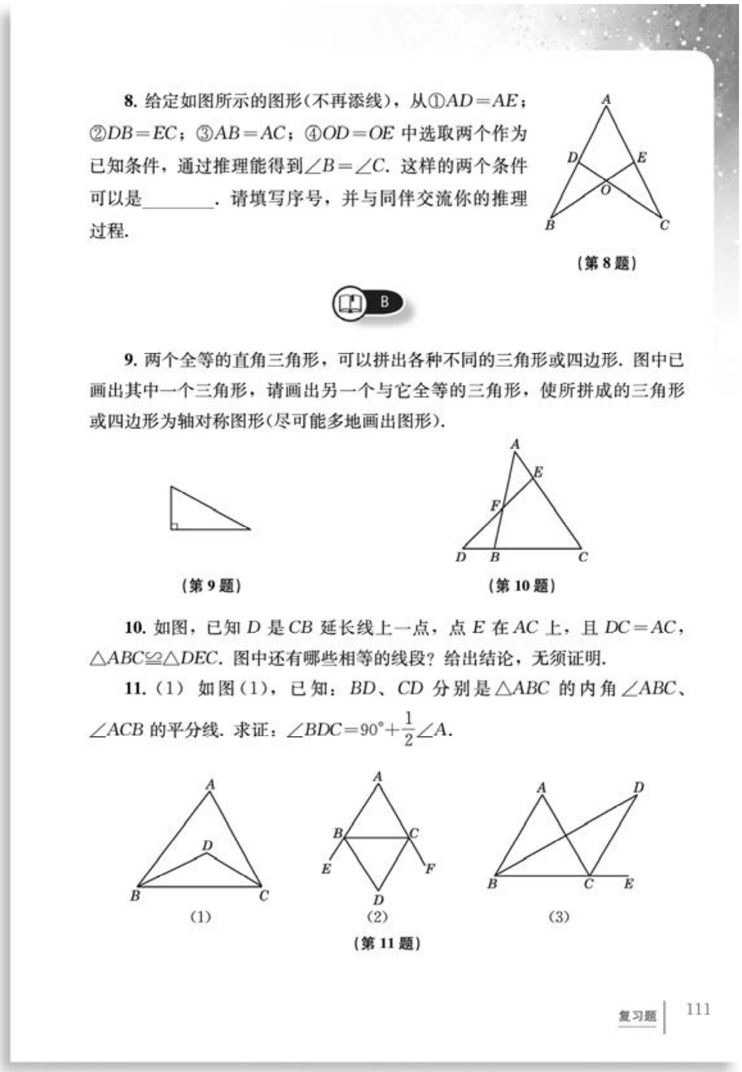
11.（1）∵ BD、CD 分别是$\triangle ABC$ 的内角$\angle ABC$、$\angle ACB$ 的平分线，

∴ $\angle ABD=\angle CBD$，$\angle ACD=\angle BCD$.

∵ $\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180^\circ$（三角形的内角和定理），

∴ $\angle A+2\angle CBD+2\angle BCD=180^\circ$，

即$\angle CBD+\angle BCD=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$.



8. 给定如图所示的图形(不再添线)，从①$AD=AE$；②$DB=EC$；③$AB=AC$；④$OD=OE$ 中选取两个作为已知条件，通过推理能得到$\angle B=\angle C$. 这样的两个条件可以是________. 请填写序号，并与同伴交流你的推理过程.

(第 8 题)

B

9. 两个全等的直角三角形，可以拼出各种不同的三角形或四边形. 图中已画出其中一个三角形，请画出另一个与它全等的三角形，使所拼成的三角形或四边形为轴对称图形(尽可能多地画出图形).

(第 9 题)　　(第 10 题)

10. 如图，已知 D 是 CB 延长线上一点，点 E 在 AC 上，且 $DC=AC$，$\triangle ABC\cong\triangle DEC$. 图中还有哪些相等的线段? 给出结论，无须证明.

11. (1) 如图(1)，已知：BD、CD 分别是$\triangle ABC$ 的内角$\angle ABC$、$\angle ACB$ 的平分线. 求证：$\angle BDC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$.

(1)　(2)　(3)

(第 11 题)

复习题　111

又∵ $\angle BDC+\angle CBD+\angle BCD=180^\circ$（三角形的内角和定理），

∴ $\angle BDC=180^\circ-(\angle CBD+\angle BCD)=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{1}{2}\angle A\right)=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$.

（2）$\angle BDC$ 与$\angle A$ 之间的关系是：$\angle BDC=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$.

证明：∵ BD、CD 是$\triangle ABC$ 的两个外角的平分线，

∴ $\angle EBD=\angle DBC$，$\angle FCD=\angle DCB$.

∴ $\angle ABC=180^\circ-2\angle DBC$，$\angle ACB=180^\circ-2\angle DCB$.

∵ $\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180^\circ$（三角形的内角和定理），

∴ $\angle A+180^\circ-2\angle DBC+180^\circ-2\angle DCB=180^\circ$，

即$\angle A-2(\angle DBC+\angle DCB)=-180^\circ$.

又∵　$\angle DBC+\angle DCB+\angle BDC=180^\circ$（三角形的内角和定理），

∴　$\angle DBC+\angle DCB=180^\circ-\angle BDC$.

∴　$\angle A-2(180^\circ-\angle BDC)=-180^\circ$.

∴　$\angle BDC=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$.

（3）$\angle BDC$ 与$\angle A$ 之间的关系是：$\angle BDC=\frac{1}{2}\angle A$.

证明：∵　BD、CD 分别是$\triangle ABC$ 的一个内角$\angle ABC$ 和一个外角$\angle ACE$ 的平分线，

∴　$\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle DCE=\frac{1}{2}\angle ACE$.

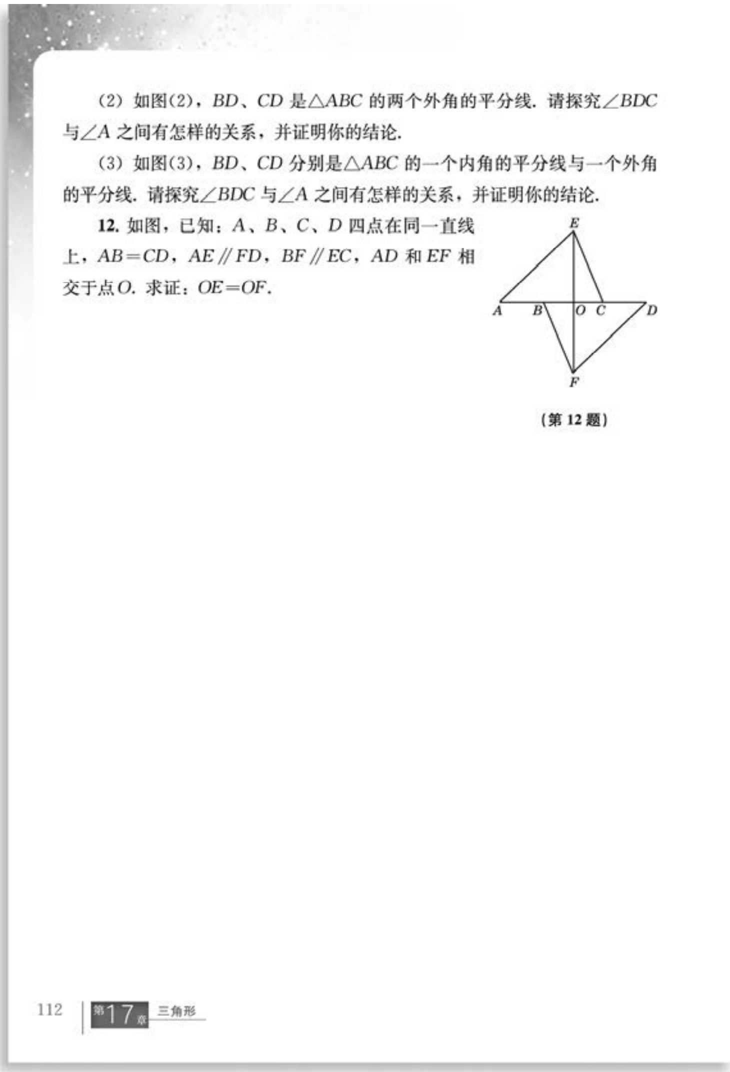
∵　$\angle ACE=\angle A+\angle ABC$（三角形的内角和定理的推论），

∴　$2\angle DCE=\angle A+2\angle DBC$.

又∵　$\angle DCE=\angle DBC+\angle BDC$（三角形的内角和定理的推论），

∴　$2\angle DBC+2\angle BDC=\angle A+2\angle DBC$.

∴　$\angle BDC=\frac{1}{2}\angle A$.



(2) 如图(2)，BD、CD 是$\triangle ABC$ 的两个外角的平分线. 请探究$\angle BDC$ 与$\angle A$ 之间有怎样的关系，并证明你的结论.

(3) 如图(3)，BD、CD 分别是$\triangle ABC$ 的一个内角的平分线与一个外角的平分线. 请探究$\angle BDC$ 与$\angle A$ 之间有怎样的关系，并证明你的结论.

12. 如图，已知：A、B、C、D 四点在同一直线上，$AB=CD$，$AE\parallel FD$，$BF\parallel EC$，AD 和 EF 相交于点 O. 求证：$OE=OF$.

（第 12 题）

12. ∵ $AB=CD$，

∴ $AB+BC=CD+BC$，

即 $AC=DB$.

∵ $AE\parallel DF$，

∴ $\angle A=\angle D$（两直线平行，内错角相等）.

同理$\angle ACE=\angle DBF$.

在$\triangle ACE$ 和$\triangle DBF$ 中，

$$∵\begin{cases}\angle A=\angle D,\\ AC=DB,\\ \angle ACE=\angle DBF,\end{cases}$$

∴ $\triangle ACE\cong\triangle DBF$（ASA）.

∴ $CE=BF$（全等三角形的对应边相等）.

又∵ $BF\parallel EC$，

∴ $\angle OCE=\angle OBF$，$\angle OEC=\angle OFB$（两直线平行，内错角相等）.

在$\triangle OCE$ 和$\triangle OBF$ 中，

$$∵\begin{cases}\angle OCE=\angle OBF,\\ CE=BF,\\ \angle OEC=\angle OFB,\end{cases}$$

∴ $\triangle OCE\cong\triangle OBF$（ASA）.

∴ $OE=OF$（全等三角形的对应边相等）.

第 18 章　等腰三角形

一、本章概述

1. 总体要求

等腰三角形是一类特殊且重要的三角形，具有轴对称性，等边三角形是其特例. 除了三角形的一般性质外，等腰三角形还具有底角相等，底边上的高、中线与顶角的平分线三线合一等性质. 这些性质可用于证明几何图形中线段相等、角相等和直线相互垂直. “等边对等角”“等角对等边”两个重要定理，深刻揭示了三角形中边与角之间的联系，是后续学习直角三角形、四边形、圆等内容的基础.

线段的垂直平分线与等腰三角形有密切的联系. 由“线段的垂直平分线上的点到该线段两端点的距离相等”可以立即得到“一边上的高与中线重合的三角形是等腰三角形”. “到线段两端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上”可以由“等腰三角形的三线合一”推得. 线段的垂直平分线的性质定理及其逆定理还可用于证明线段相等和用尺规作图作直角.

在本章，要引导学生探索并掌握等腰三角形、等边三角形和线段的垂直平分线的性质与判定方法，并在此过程中，继续学习演绎推理的思维方法，掌握数学证明的格式和要求，进一步增强几何直观、空间观念和推理能力.

2. 课时安排建议

本章共 11 课时，具体课时分配建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
18.1 等腰三角形的性质	2	等腰三角形的性质　2 课时
习题课	1	
18.2 等腰三角形的判定	2	等腰三角形的判定　2 课时
习题课	1	
18.3 等边三角形	1	等边三角形　1 课时
18.4 线段的垂直平分线	2	线段的垂直平分线　2 课时
复习与小结	2	

3. 内容编排与特色

本章内容分为四节，分别是“18.1 等腰三角形的性质”“18.2 等腰三角形的判定”“18.3 等边三角形”和“18.4 线段的垂直平分线”.

研究等腰三角形的次序是先性质、后判定. 关于等腰三角形的性质，从折叠一张等腰三角形的纸片使两腰重合的操作入手，发现等腰三角形的性质：两底角相等. 在这个性质的证明过程中，可以自然地发现等腰三角形的另一个重要性质：等腰三角形是轴对称图形，且底边上的高、中线与顶角的平分线三线合一. 关于等腰三角形的判定，从“等边对等角”的逆命题入手，提出“等角对等边”，证明并加以应用.

“等边三角形的每个内角都等于 60°”“三个内角都相等的三角形是等边三角形”这两个定理都是显然的，教科书中留给学生自行证明. “有一个内角等于 60°的等腰三角形是等边三角形”这一命题在一些教科书中作为定理. 但由于条件“有一个内角等于 60°的等腰三角形”与条件“三个内角都相等”仅一步之遥，因此本套教科书不将其作为定理，而是作为例题.

关于“线段的垂直平分线”，首先证明其性质定理“线段的垂直平分线上的任意一点到该线段的两个端点的距离相等”，然后证明其逆命题“与线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上”也成立，并将之作为定理.以此为依据，可以用尺规作图作给定线段的垂直平分线.

本章所讲述的定理对学生是直观且易于接受的，因此在一些定理的引入时减少了实验、归纳等环节，把重点放在定理的证明与应用上.

4. 教学提示

等腰三角形的轴对称性质是认识和研究等腰三角形的关键. 如果等腰三角形顶角的平分线所在的直线是其对称轴，那么沿该直线翻折后的两部分图形应是完全重合的，从而可以进一步得到两底角相等、三线合一等性质. 掌握“等边对等角”和“等腰三角形的三线合一”的性质，有助于加深对等腰三角形的轴对称性的认识. 但论证等腰三角形是轴对称图形是较为抽象与困难的. 考虑到现阶段平面几何的学习要求，教学中不必严格证明等腰三角形是轴对称图形.

由于证明线段或角相等的工具逐渐丰富，本章中的许多定理和例题，在分析探讨证明途径时，往往有多条路可走，辅助线的添加往往也有多种思路. 教学时，应鼓励学生猜想、尝试，教师不宜过早地给出答案.

“大边对大角”与“大角对大边”，刻画了三角形的边角关系，有广泛的应用. 教科书中作为例题呈现，并可作为证明的依据，但其应用不是本章的重点.

5. 评价建议

等腰三角形、等边三角形和线段的垂直平分线的性质与判定是本章的重点知识，掌握这些定理的证明与应用是本章的基本要求，在教学评价中要重视这些基本要求是否得以落实.

本章仍属于平面几何的入门阶段，必须重视发展学生几何直观、空间观念与推理能力的目标，也要认识到目标的达成是长期的任务. 证明之前的思路分析、证明过程的严密表达、证明之后的反思小结等，是发展推理能力的基本环节，要通过积极的过程性评价，促进各个环节有效发挥作用.

二、教科书分析与教学建议

18.1　等腰三角形的性质

本节教学目标

（1）理解等腰三角形的概念，探索并掌握等腰三角形的性质定理：等腰三角形的两底角相等；顶角平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合. 理解等腰三角形的轴对称性质.

（2）在探索、证明与运用等腰三角形的性质的过程中，发展几何直观、空间观念与推理能力.

（以下分析对应课本第 114～117 页）

本课教学重点

等腰三角形的性质定理的证明及初步运用.

本课教学建议

（1）学生已经接触过等腰三角形，因此教科书中直接给出了等腰三角形的定义和有关的腰、底角等概念. 教学中可根据学生的实际情况，适当举一些例子来巩固这些概念.

（2）“等腰三角形的两底角相等”的证明方法很多，教师可根据实际情况适当向学生介绍. 教科书中使用添加顶角平分线作为辅助线来证明，也可以添加等腰三角形底边上的中线作为辅助线. 学生如果尝试通过作底边上的高来证明，那么可能要用到勾股定理和直角三角形全等的判定等现阶段未学习的知识，在此处并不合适.

18.1 等腰三角形的性质

等腰三角形是有两边相等的三角形．如图 18-1-1，$\triangle ABC$ 是等腰三角形，$AB=AC$．边 AB 和 AC 是它的腰，BC 是底边；$\angle A$ 是它的顶角，$\angle B$ 和 $\angle C$ 是底角．

图 18-1-1

图 18-1-2

取一张等腰三角形纸片，把两腰 AB、AC 叠合在一起(图 18-1-2)，我们发现，两个底角互相重合．这说明等腰三角形的两个底角相等．下面我们来证明这个性质．

定理 等腰三角形的两底角相等．

简单地说：等边对等角．

如图 18-1-3，已知：在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$．

求证：$\angle B=\angle C$．

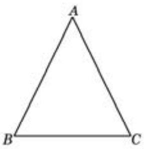


图 18-1-3

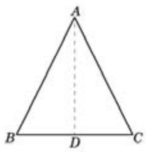


图 18-1-4

114 第18章 等腰三角形

本课内容分析

通过折叠等腰三角形的纸片发现等腰三角形的性质，同时也为添加辅助线提供了思路，让学生经历实验、猜想、论证这一研究几何问题的过程．

证明“等边对等角”也可以不添加辅助线．将等腰三角形 ABC 想象成两个三角形，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACB$ 中，因为 $AB=AC$，$\angle A=\angle A$，$AC=AB$，所以 $\triangle ABC\cong\triangle ACB$ (SAS)．因此 $\angle B=\angle C$．

学生可能难以直接描述清楚等腰三角形“三线合一”的性质．教学中可以尝试提问等腰三角形的对称轴是哪条直线，期望得到多种答案，如：顶角的平分线所在的直线、底边上的高所在的直线或底边上的中线所在的直线，再说明这些答案描述的是同一条直线，由此引出三线合一这一性质．要让学生注意到，三线合一实际上包含了顶角平分线与底边上的中线重合、顶角平分线与底边上的高重合及底边上的中线与高重合三个命题．

对于等腰三角形是轴对称图形这一性质，教科书并未给出证明，但可以直接应用．

例 1 要鼓励学生直接运用等腰三角形的性质解答，克服通过全等三角形去证明的惯性．

证明　如图 18-1-4，作$\triangle ABC$的顶角平分线AD，有$\angle BAD=\angle CAD$．又由于$AB=AC$，AD是公共边，由“边角边”，得$\triangle ABD\cong\triangle ACD$，从而$\angle B=\angle C$．

由$\triangle ABD\cong\triangle ACD$，还可得出$BD=CD$，$\angle ADB=\angle ADC=90°$．因此$AD$平分$BC$，且$AD\perp BC$．

由此可见，线段AD既是等腰三角形ABC的顶角平分线，又是底边BC上的中线，也是底边BC上的高．

等腰三角形的这个性质可表述为：

定理　等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合．

简单地说：等腰三角形三线合一．

上面的证明过程还表明：

等腰三角形是轴对称图形，它的对称轴是顶角平分线（底边上的中线、底边上的高）所在的直线．

例 1　如图 18-1-5，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=110°$，AD是$\triangle ABC$的中线．

(1) 求$\angle 1$和$\angle B$的度数；

(2) 求证：$AD\perp BC$．

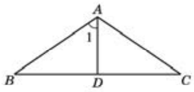


图 18-1-5

解　(1) $\because$ $AB=AC$，

$\therefore$ $\angle B=\angle C$（等边对等角）．

又$\because$ AD是$\triangle ABC$的中线，

$\therefore$ $\angle 1=\frac{1}{2}\angle BAC$（等腰三角形三线合一）．

$\because$ $\angle BAC=110°$，

$\therefore$ $\angle 1=55°$．

又∵ $\angle B+\angle C+\angle BAC=180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

∴ $\angle B=\dfrac{180^\circ-110^\circ}{2}=35^\circ$.

∴ $\angle 1$ 和 $\angle B$ 的度数分别为 55° 和 35°.

（2）∵ $AB=AC$，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，

∴ $AD\perp BC$（等腰三角形三线合一）.

例 2 如图 18-1-6，已知：$AB=AC$，$DB=DC$.

求证：$\angle B=\angle C$.

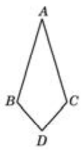


图 18-1-6

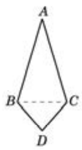


图 18-1-7

分析 从已知条件 $AB=AC$，$DB=DC$ 出发，考虑连接 BC 构造两个等腰三角形.

证明 如图 18-1-7，连接 BC.

∵ $AB=AC$，

∴ $\angle ABC=\angle ACB$（等边对等角）.

同理，$\angle DBC=\angle DCB$.

∴ $\angle ABC+\angle DBC=\angle ACB+\angle DCB$.

∴ $\angle ABD=\angle ACD$.

讨论

例 2 是否还有其他证明方法？

116 第18章 等腰三角形

例 2 有多种添加辅助线的方法. 连接 BC，可利用等腰三角形的性质来证明；连接 AD，则可利用全等三角形的性质推出结论. 教学时，应启发学生猜想、尝试，提出自己的想法，体会辅助线的作用.

课堂练习 18.1(1)

1. ∵ $AB=AC$，

∴ $\angle B=\angle C$（等边对等角）.

∵ $AD=AE$，

∴ $\angle ADE=\angle AED$（等边对等角），

又∵ $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$，$\angle A+\angle ADE+\angle AED=180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

∴ $\angle B=\angle ADE$.

∴ $DE /\!/ BC$（同位角相等，两直线平行）.

2. $\triangle ABC$ 的三个内角分别为 36°、72°、72°.

3. 连接 OC、OD.

∵ $OA\perp AC$，$OB\perp BD$，

∴ $\angle A=\angle B=90^\circ$.

在 $\triangle OAC$ 和 $\triangle OBD$ 中，

$$∵\begin{cases} OA=OB, \\ \angle A=\angle B, \\ AC=BD, \end{cases}$$

∴ $\triangle OAC\cong\triangle OBD$（SAS）.

∴ $OC=OD$，$\angle COA=\angle DOB$.

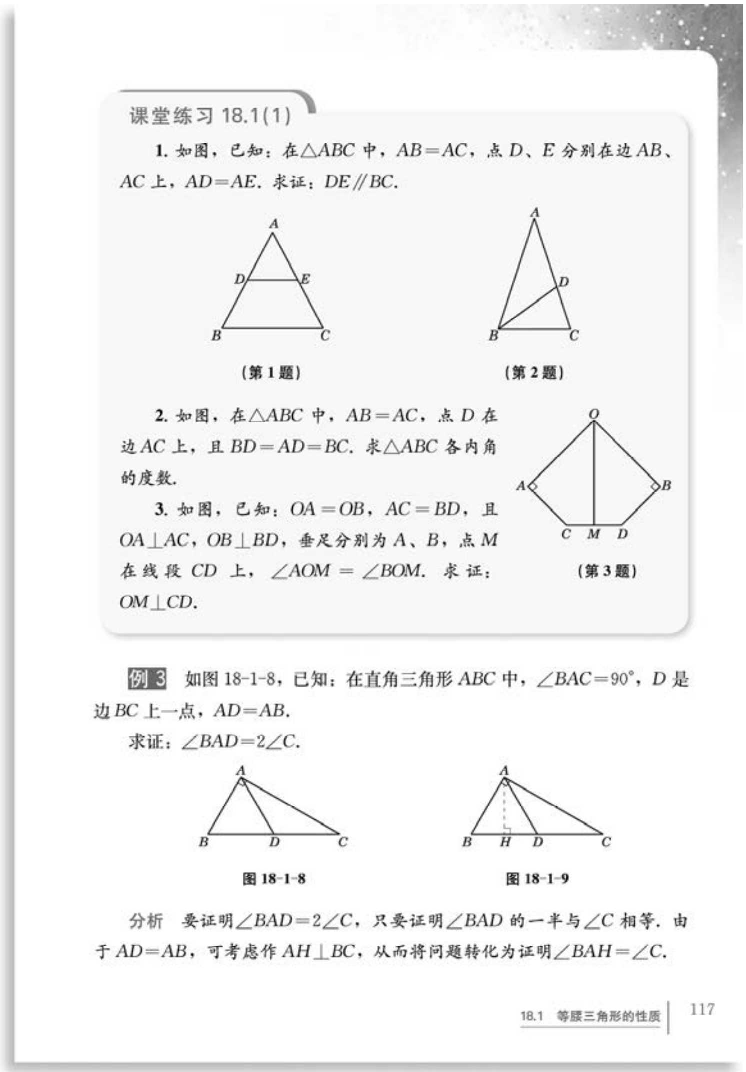
又∵ $\angle AOM=\angle BOM$，

∴ $\angle AOM-\angle COA=\angle BOM-\angle DOB$，

即 $\angle COM=\angle DOM$.

又∵ $OC=OD$，

∴ $OM\perp CD$（等腰三角形三线合一）.



课堂练习 18.1(1)

1. 如图，已知：在△ABC 中，AB=AC，点 D、E 分别在边 AB、AC 上，AD=AE. 求证：DE∥BC.

（第 1 题）　（第 2 题）

2. 如图，在△ABC 中，AB=AC，点 D 在边 AC 上，且 BD=AD=BC. 求△ABC 各内角的度数.

3. 如图，已知：OA=OB，AC=BD，且 OA⊥AC，OB⊥BD，垂足分别为 A、B，点 M 在线段 CD 上，∠AOM=∠BOM. 求证：OM⊥CD.

（第 3 题）

例 3　如图 18-1-8，已知：在直角三角形 ABC 中，∠BAC=90°，D 是边 BC 上一点，AD=AB.

求证：∠BAD=2∠C.

图 18-1-8　图 18-1-9

分析　要证明∠BAD=2∠C，只要证明∠BAD 的一半与∠C 相等. 由于 AD=AB，可考虑作 AH⊥BC，从而将问题转化为证明∠BAH=∠C.

18.1 等腰三角形的性质　117

（以下分析对应课本第 117～120 页）

本课教学重点

等腰三角形性质的运用.

本课教学建议

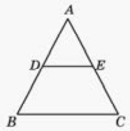
鼓励学生一题多解，寻求不同的证明方法.

本课内容分析

例 3 要证明两个角的倍半关系，可以通过作辅助线转化为证明两个角的相等关系.

课堂练习 18.1(1)

1. 如图，已知：在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点D、E分别在边AB、AC上，$AD=AE$. 求证：$DE/\!/BC$.

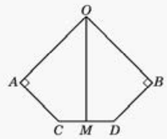


（第 1 题）

（第 2 题）

2. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点D在边AC上，且$BD=AD=BC$. 求$\triangle ABC$各内角的度数.

3. 如图，已知：$OA=OB$，$AC=BD$，且$OA\perp AC$，$OB\perp BD$，垂足分别为A、B，点M在线段CD上，$\angle AOM=\angle BOM$. 求证：$OM\perp CD$.



（第 3 题）

例 3 如图 18-1-8，已知：在直角三角形ABC中，$\angle BAC=90°$，D是边BC上一点，$AD=AB$.

求证：$\angle BAD=2\angle C$.

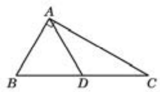


图 18-1-8

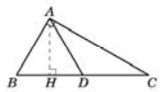
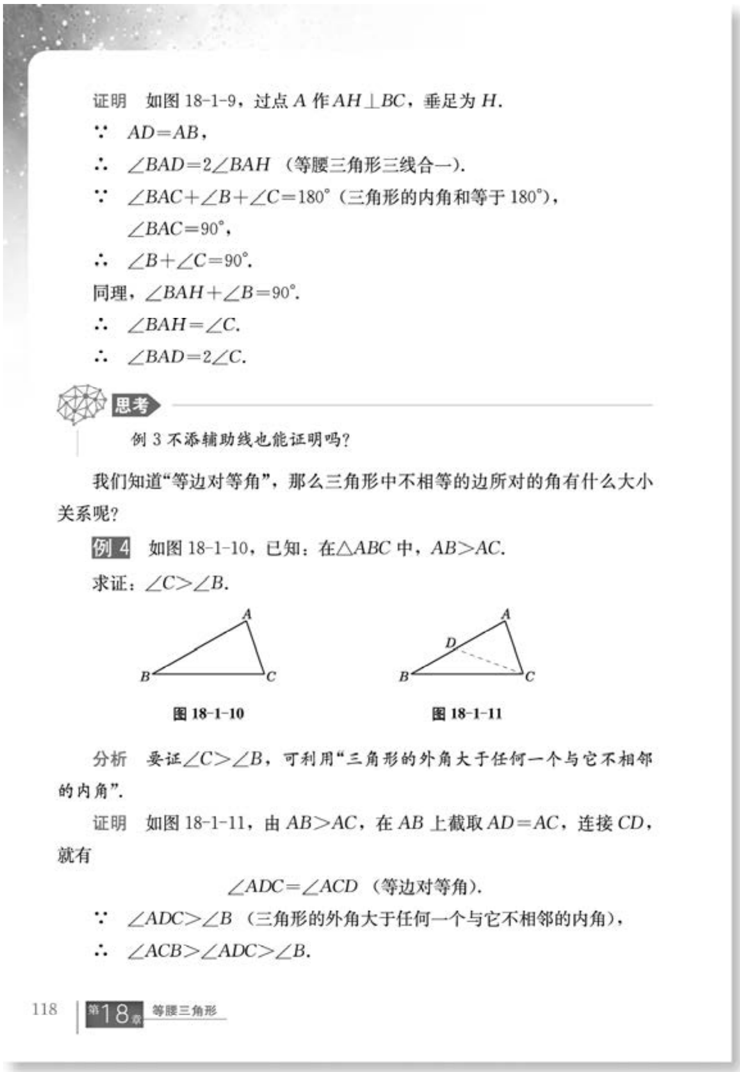


图 18-1-9

分析 要证明$\angle BAD=2\angle C$，只要证明$\angle BAD$的一半与$\angle C$相等. 由于$AD=AB$，可考虑作$AH\perp BC$，从而将问题转化为证明$\angle BAH=\angle C$.

18.1 等腰三角形的性质 117



证明　如图 18-1-9，过点 A 作 $AH\perp BC$，垂足为 H.

∵　$AD=AB$，

∴　$\angle BAD=2\angle BAH$（等腰三角形三线合一）.

∵　$\angle BAC+\angle B+\angle C=180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

$\angle BAC=90^\circ$，

∴　$\angle B+\angle C=90^\circ$.

同理，$\angle BAH+\angle B=90^\circ$.

∴　$\angle BAH=\angle C$.

∴　$\angle BAD=2\angle C$.

思考

例 3 不添辅助线也能证明吗？

我们知道"等边对等角"，那么三角形中不相等的边所对的角有什么大小关系呢？

例 4　如图 18-1-10，已知：在△ABC 中，$AB>AC$.

求证：$\angle C>\angle B$.

图 18-1-10　　图 18-1-11

分析　要证$\angle C>\angle B$，可利用"三角形的外角大于任何一个与它不相邻的内角".

证明　如图 18-1-11，由 $AB>AC$，在 AB 上截取 $AD=AC$，连接 CD，就有

$$\angle ADC=\angle ACD\ （等边对等角）.$$

∵　$\angle ADC>\angle B$（三角形的外角大于任何一个与它不相邻的内角），

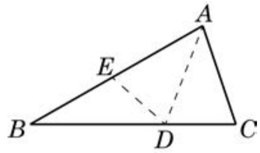
∴　$\angle ACB>\angle ADC>\angle B$.

118　第18章　等腰三角形

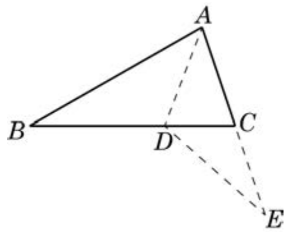
例 3 也可以不添加辅助线，用求角度的方法进行证明：因为 $\angle CAD+\angle C=\angle ADB=\angle B=90^\circ-\angle C$，所以 $2\angle C=90^\circ-\angle CAD=\angle BAD$.

例 4 也可以通过添加如下图的辅助线加以证明.

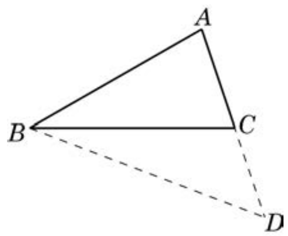
（1）如图，画$\angle CAB$ 的平分线 AD，交 BC 于点 D，在 AB 上截取 $AE=AC$，连接 DE.



（2）如图，画$\angle CAB$ 的平分线 AD，交 BC 于点 D，延长 AC 至点 E，使 $AE=AB$. 连接 DE.



（3）如图，延长 AC 至点 D，使 $AD=AB$，连接 BD.



课堂练习 18.1(2)

1. ∵ $AB=AC$，

∴ $\angle B=\angle C$（等边对等角）.

∵ $AD=AE$，

∴ $\angle ADE=\angle AED$（等边对等角）.

又∵ $\angle ADE=\angle BAD+\angle B$，$\angle AED=\angle CAE+\angle C$（三角形的内角和定理的推论），

∴ $\angle BAD=\angle CAE$.

在△ABD 和△ACE 中，

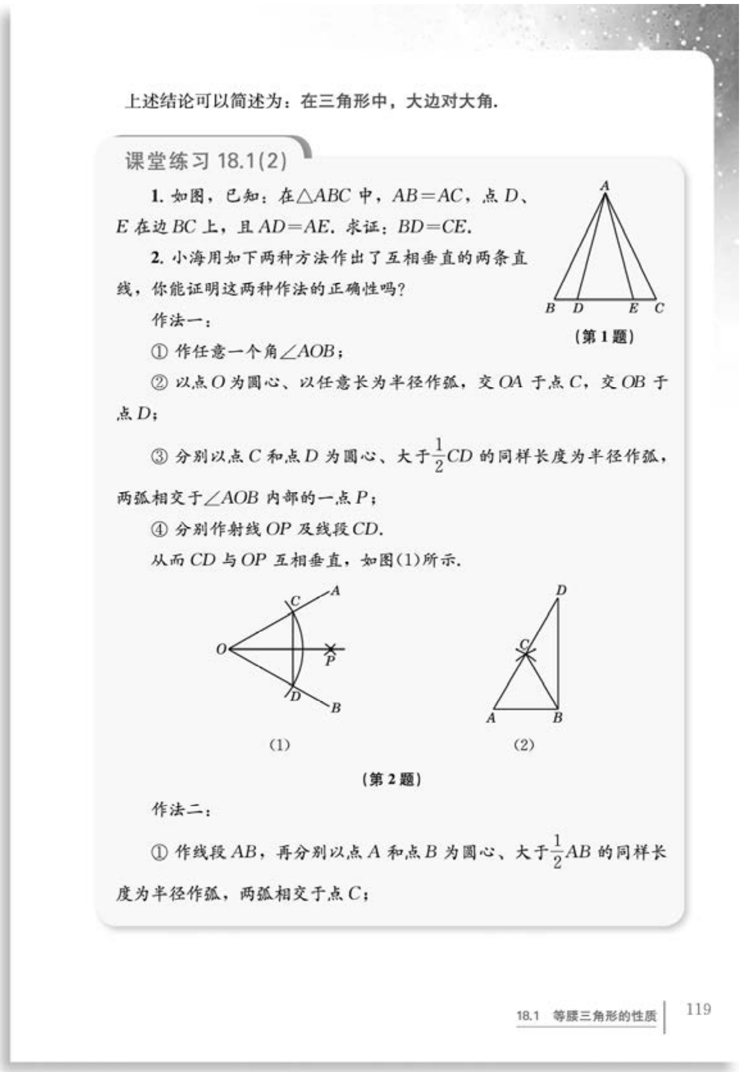
∵ $\begin{cases} AB=AC, \\ \angle BAD=\angle CAE, \\ AD=AE, \end{cases}$

∴ $\triangle ABD\cong\triangle ACE$（SAS），

∴ $BD=CE$.

（亦可通过作底边上的高，用等腰三角形三线合一的性质来证明．）

2. 略.



上述结论可以简述为：在三角形中，大边对大角.

课堂练习 18.1(2)

1. 如图，已知：在△ABC 中，$AB=AC$，点 D、E 在边 BC 上，且 $AD=AE$. 求证：$BD=CE$.

2. 小海用如下两种方法作出了互相垂直的两条直线，你能证明这两种作法的正确性吗？

作法一：

① 作任意一个角$\angle AOB$；

② 以点 O 为圆心、以任意长为半径作弧，交 OA 于点 C，交 OB 于点 D；

③ 分别以点 C 和点 D 为圆心、大于$\frac{1}{2}CD$ 的同样长度为半径作弧，两弧相交于$\angle AOB$ 内部的一点 P；

④ 分别作射线 OP 及线段 CD.

从而 CD 与 OP 互相垂直，如图(1)所示.

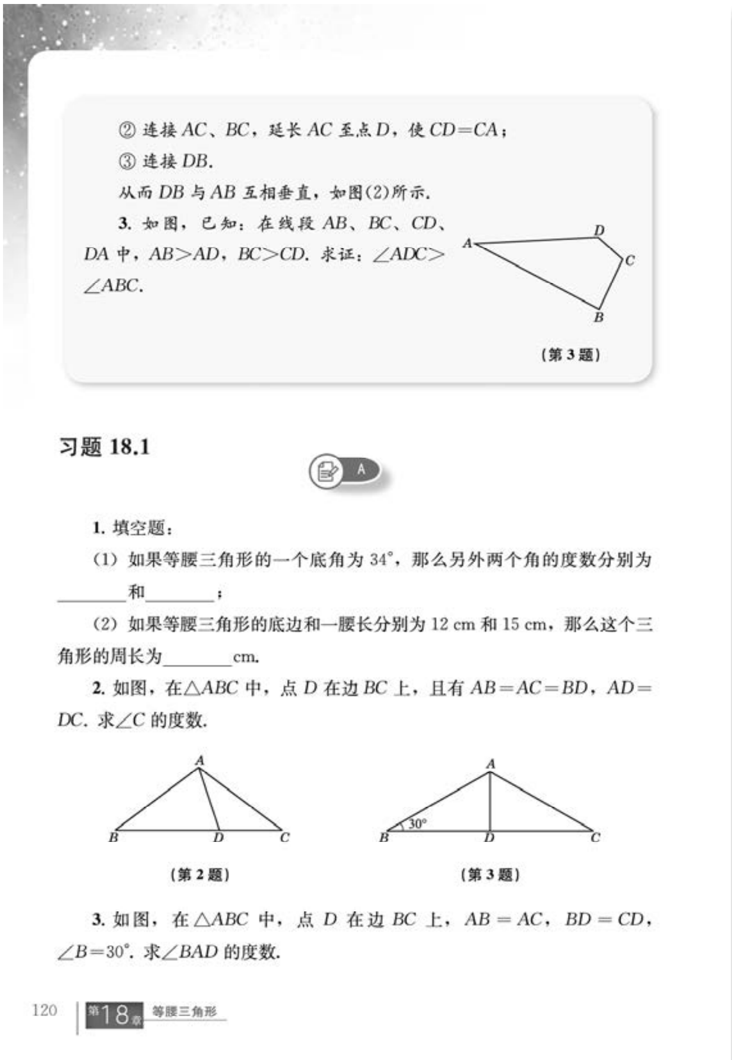
（第 1 题）

（第 2 题）

作法二：

① 作线段 AB，再分别以点 A 和点 B 为圆心、大于$\frac{1}{2}AB$ 的同样长度为半径作弧，两弧相交于点 C；

18.1 等腰三角形的性质 119


② 连接 AC、BC，延长 AC 至点 D，使 $CD=CA$；

③ 连接 DB.

从而 DB 与 AB 互相垂直，如图(2)所示.

3. 如图，已知：在线段 AB、BC、CD、DA 中，$AB>AD$，$BC>CD$. 求证：$\angle ADC>\angle ABC$.

（第 3 题）

习题 18.1

A

1. 填空题：

(1) 如果等腰三角形的一个底角为 34°，那么另外两个角的度数分别为_______和_______；

(2) 如果等腰三角形的底边和一腰长分别为 12 cm 和 15 cm，那么这个三角形的周长为_______cm.

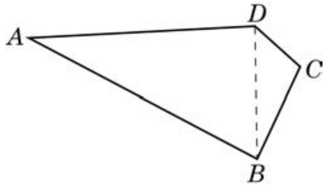
2. 如图，在△ABC 中，点 D 在边 BC 上，且有 $AB=AC=BD$，$AD=DC$. 求∠C 的度数.

（第 2 题）　　（第 3 题）

3. 如图，在△ABC 中，点 D 在边 BC 上，$AB=AC$，$BD=CD$，$\angle B=30°$. 求∠BAD 的度数.

120　第18章　等腰三角形

3. 如图，连接 DB.



（第 3 题）

在△ABD 中，

∵ $AB>AD$，

∴ $\angle ADB>\angle ABD$（三角形中，大边对大角）.

在△CBD 中，

∵ $BC>CD$，

∴ $\angle CDB>\angle CBD$（三角形中，大边对大角）.

∴ $\angle ADB+\angle CDB>\angle ABD+\angle CBD$，

即 $\angle ADC>\angle ABC$.

习题 18.1

1.（1）34°；112°.

（2）42.

2. $\angle C=36°$.

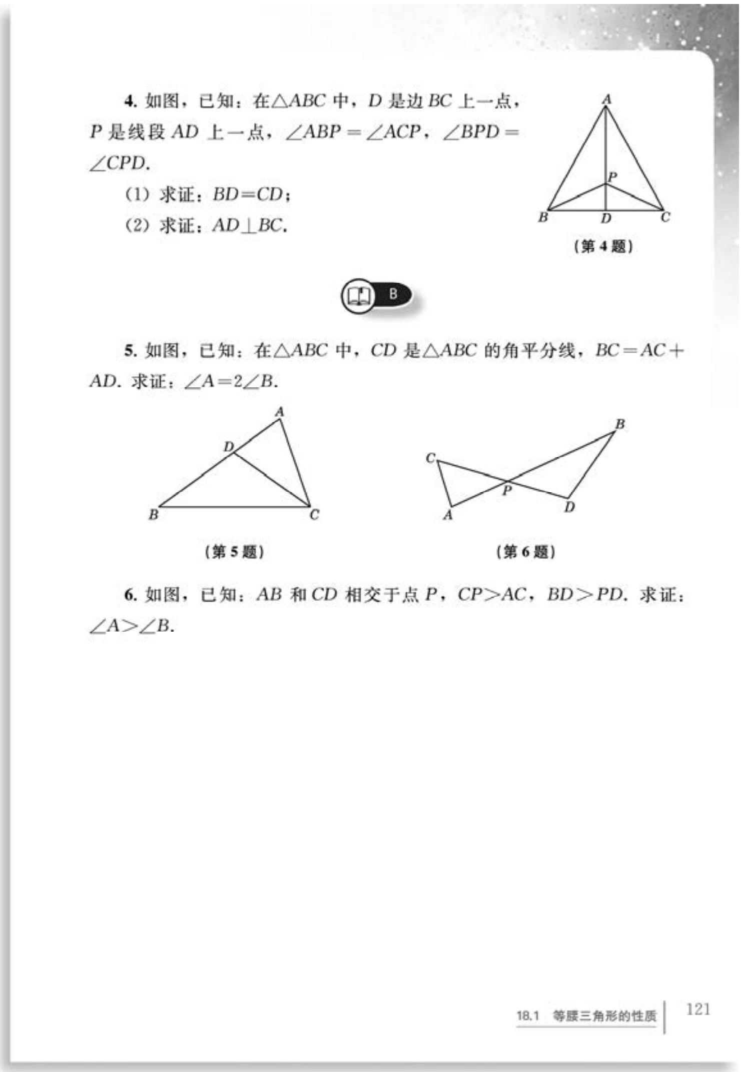
3. ∵ $AB=AC$，$BD=CD$，

∴ $AD\perp BC$（等腰三角形三线合一）.

∴ $\angle ADB=90°$.

又∵ $\angle B+\angle ADB+\angle BAD=180°$（三角形的内角和等于 180°），$\angle B=30°$，

∴ $\angle BAD=60°$.



4. 如图，已知：在$\triangle ABC$中，D是边BC上一点，P是线段AD上一点，$\angle ABP=\angle ACP$，$\angle BPD=\angle CPD$.

(1) 求证：$BD=CD$；

(2) 求证：$AD\perp BC$.

（第4题）

B

5. 如图，已知：在$\triangle ABC$中，CD是$\triangle ABC$的角平分线，$BC=AC+AD$. 求证：$\angle A=2\angle B$.

（第5题）　　（第6题）

6. 如图，已知：AB和CD相交于点P，$CP>AC$，$BD>PD$. 求证：$\angle A>\angle B$.

18.1 等腰三角形的性质　121

4. 提示：由$\triangle ABP\cong\triangle ACP$（AAS），得$AB=AC$，$\angle BAP=\angle CAP$.

5. 如图，在BC上截取$CE=CA$，连接DE.

$\because$ $BE+EC=BC=AC+AD$，

$\therefore$ $BE=AD$.

$\because$ CD是$\triangle ABC$的角平分线，

$\therefore$ $\angle ACD=\angle ECD$.

在$\triangle ACD$和$\triangle ECD$中，

$$\because \begin{cases} AC=EC, \\ \angle ACD=\angle ECD, \\ CD=CD. \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ACD\cong\triangle ECD$（SAS）.

$\therefore$ $AD=ED$，$\angle A=\angle DEC$.

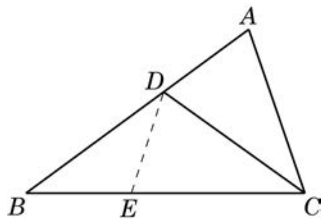
$\because$ $BE=AD$，

$\therefore$ $BE=ED$.

$\therefore$ $\angle B=\angle EDB$（等边对等角）.

又$\because$ $\angle DEC=\angle B+\angle EDB=2\angle B$，

$\therefore$ $\angle A=2\angle B$.



（第5题）

6. 在$\triangle ACP$中，

$\because$ $CP>AC$，

$\therefore$ $\angle A>\angle CPA$（三角形中，大边对大角）.

在$\triangle BDP$中，

$\because$ $BD>PD$，

$\therefore$ $\angle BPD>\angle B$（三角形中，大边对大角）.

又$\because$ $\angle CPA=\angle BPD$，

$\therefore$ $\angle A>\angle B$.

18.2　等腰三角形的判定

本节教学目标

探索并掌握等腰三角形的判定定理：有两个角相等的三角形是等腰三角形，发展几何直观、空间观念与推理能力.

（以下分析对应课本第 122～123 页）

本课教学重点

等腰三角形的判定定理的证明及运用.

本课教学建议

可引导学生用多种方法证明“等角对等边”.

本课内容分析

从性质定理的逆命题是否成立出发来探究判定定理，是研究几何图形的常用思路.

“等角对等边”与“等边对等角”的证明过程类似，只是其中判定两个三角形全等的依据不同. 如果将底边上的中线作为辅助线，那么会得到两个三角形对应相等的“边边角”，不能直接得到两个三角形全等.

通过例 1 熟悉等腰三角形的判定定理的运用.

18.2 等腰三角形的判定

等腰三角形的两底角相等的逆命题也是一个真命题，可以作为等腰三角形的判定定理.

定理 如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等.

简单地说：等角对等边.

如图 18-2-1，已知：在$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C$.

求证：$AB=AC$.

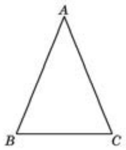


图 18-2-1

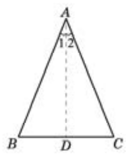


图 18-2-2

证明 如图 18-2-2，作$\angle BAC$的平分线AD，有$\angle 1=\angle 2$. 又由于$\angle B=\angle C$，AD是公共边，由“角角边”，得$\triangle ABD\cong\triangle ACD$，从而$AB=AC$.

讨论

是否还有其他证明上述定理的方法?

例 1 如图 18-2-3，已知：在$\triangle ABC$中，BD、CE分别是边AC、AB上的高，且$\angle DBC=\angle ECB$.

求证：$\triangle ABC$是等腰三角形.

证明 ∵ BD、CE分别是边AC、AB上的高，

∴ $\angle BDC=\angle CEB=90°$.

在$\triangle CBD$和$\triangle BCE$中，

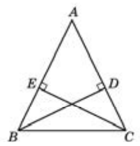
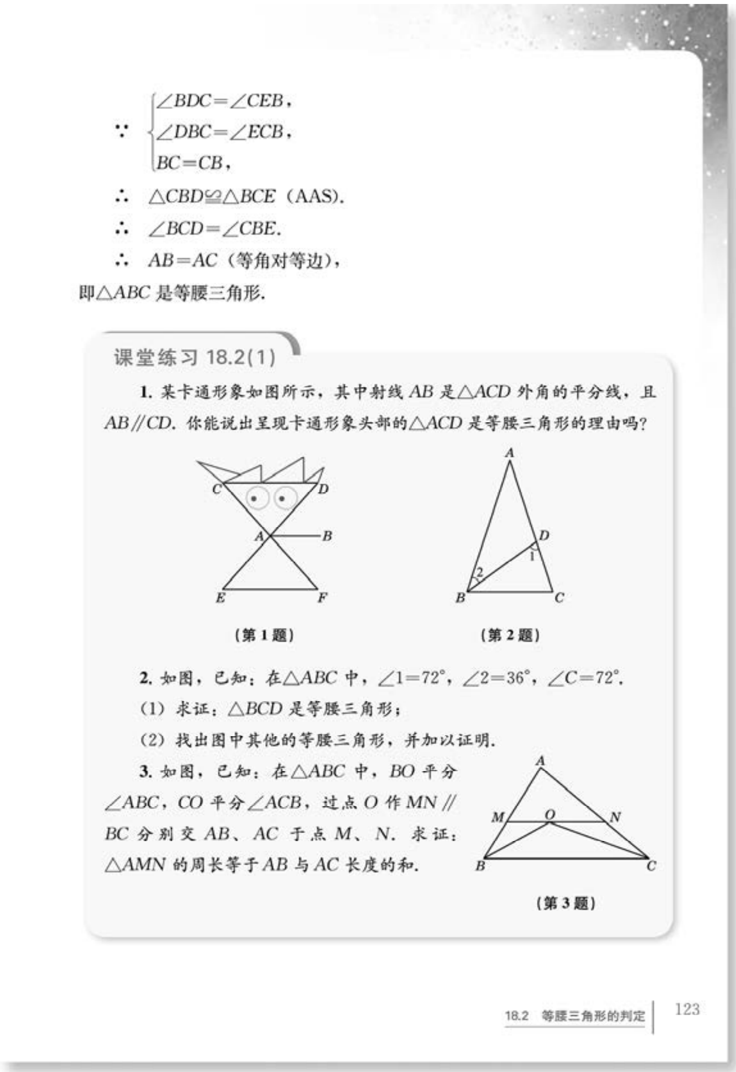


图 18-2-3



$$\because \begin{cases} \angle BDC=\angle CEB, \\ \angle DBC=\angle ECB, \\ BC=CB, \end{cases}$$

∴ $\triangle CBD \cong \triangle BCE$（AAS）.

∴ $\angle BCD=\angle CBE$.

∴ $AB=AC$（等角对等边），

即$\triangle ABC$是等腰三角形.

课堂练习 18.2(1)

1. 某卡通形象如图所示，其中射线AB是$\triangle ACD$外角的平分线，且$AB /\!/ CD$. 你能说出呈现卡通形象头部的$\triangle ACD$是等腰三角形的理由吗？

（第1题）　　（第2题）

2. 如图，已知：在$\triangle ABC$中，$\angle 1=72°$，$\angle 2=36°$，$\angle C=72°$.

（1）求证：$\triangle BCD$是等腰三角形；

（2）找出图中其他的等腰三角形，并加以证明.

3. 如图，已知：在$\triangle ABC$中，BO平分$\angle ABC$，CO平分$\angle ACB$，过点O作$MN /\!/ BC$分别交AB、AC于点M、N. 求证：$\triangle AMN$的周长等于AB与AC长度的和.

（第3题）

18.2 等腰三角形的判定　123

课堂练习 18.2(1)

1. ∵ $AB /\!/ CD$，

∴ $\angle DCA=\angle BAF$（两直线平行，同位角相等），

$\angle CDA=\angle BAD$（两直线平行，内错角相等）.

又∵ 射线AB是$\triangle ACD$的外角平分线，

∴ $\angle BAF=\angle BAD$，

∴ $\angle DCA=\angle CDA$，

∴ $AC=AD$（等角对等边），

即$\triangle ACD$是等腰三角形.

2.（1）∵ $\angle 1=72°$，$\angle C=72°$，

∴ $\angle 1=\angle C$，

∴ $BD=BC$（等角对等边），

即$\triangle BCD$是等腰三角形.

（2）图中$\triangle DAB$、$\triangle ABC$也是等腰三角形. 证明略.

3. ∵ BO平分$\angle ABC$，

∴ $\angle MBO=\angle OBC$.

∵ $MN /\!/ BC$，

∴ $\angle MOB=\angle OBC=\angle MBO$（两直线平行，内错角相等）.

∴ $MB=MO$（等角对等边）.

同理$NO=NC$.

∴ $\triangle AMN$的周长为$AM+MO+NO+AN=AM+MB+AN+NC=AB+AC$，

即$\triangle AMN$的周长等于AB与AC长度的和.

（以下分析对应课本第 124～126 页）

本课教学重点

等腰三角形的判定定理的运用.

本课教学建议

本课中的两道例题均需添加辅助线，有一定的难度，教师可根据学生的实际情况，铺设适当的台阶，帮助学生找到证明方法.

例 2 如图 18-2-4，已知：在$\triangle ABC$中，D是边BC的中点，$\angle 1=\angle 2$.

求证：$AB=AC$.

图 18-2-4　　图 18-2-5

分析　在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，虽然有$\angle 1=\angle 2$，$AD=AD$，$BD=CD$这三个条件，但不能直接推出$\triangle ABD$和$\triangle ACD$全等.

证明　如图 18-2-5，延长AD至点E，使$DE=AD$，连接CE.

在$\triangle ABD$和$\triangle ECD$中，

$$\because \begin{cases} BD=CD, \\ \angle ADB=\angle EDC\text{（对顶角相等）}, \\ AD=ED, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ECD$ (SAS).

$\therefore$ $AB=EC$，$\angle 1=\angle E$（全等三角形的对应边相等，对应角相等）.

又$\because$ $\angle 1=\angle 2$，

$\therefore$ $\angle 2=\angle E$.

$\therefore$ $AC=EC$（等角对等边）.

$\therefore$ $AB=AC$.

探究

是否还有其他证明例 2 的结论的方法？

例 3 如图 18-2-6，已知：在$\triangle ABC$中，$\angle C>\angle B$.

求证：$AB>AC$.

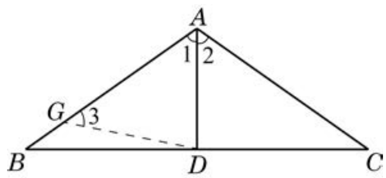
124　第18章　等腰三角形

本课内容分析

例 2 事实上是要证明：有一个角的角平分线与其对边的中线重合的三角形是等腰三角形. 所给条件是“边边角”对应相等，不能直接得到两个三角形全等，因此需要添加辅助线. 如何想到要添加的辅助线是解决问题的关键.

注意到点D是线段BC的中点，将$\triangle ADB$绕点D旋转180°得到$\triangle EDC$，这样使$\angle 1$与$\angle 2$成为同一个三角形中相等的内角，这是教科书中的解答思路.

本题还可以用反证法来证明. 如图，若AB与AC不相等，不失一般性，则不妨设$AB>AC$. 在AB上截取$AG=AC$，连接DG. 通过 SAS 可证$\triangle ADG\cong\triangle ADC$，得到$\angle 3=\angle C$，$DG=DC=BD$，从而有$\angle B=\angle BGD$. 又因为$\angle BGD+\angle 3=180^\circ$，所以$\angle B+\angle C=180^\circ$. 这与三角形内角和为$180^\circ$矛盾. 因此假设不成立，$AB=AC$得证.



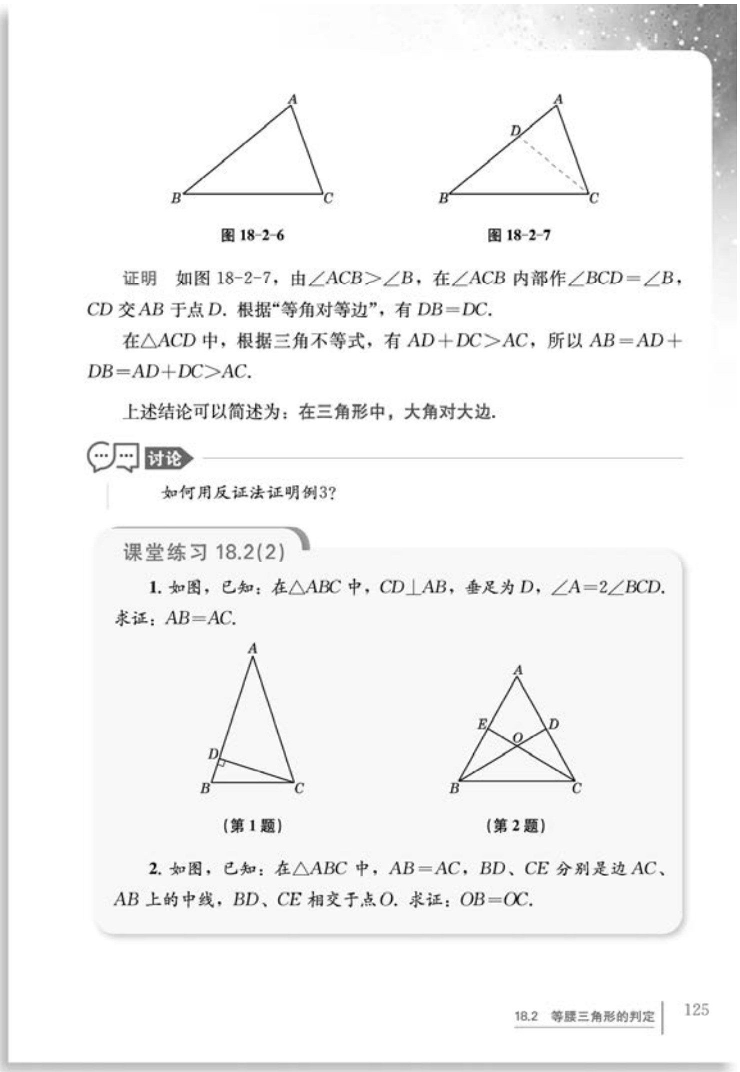


图 18-2-6　　　　图 18-2-7

证明　如图 18-2-7，由$\angle ACB>\angle B$，在$\angle ACB$内部作$\angle BCD=\angle B$，CD交AB于点D. 根据“等角对等边”，有$DB=DC$.

在$\triangle ACD$中，根据三角不等式，有$AD+DC>AC$，所以$AB=AD+DB=AD+DC>AC$.

上述结论可以简述为：在三角形中，大角对大边.

讨论

如何用反证法证明例3？

课堂练习 18.2(2)

1. 如图，已知：在$\triangle ABC$中，$CD\perp AB$，垂足为D，$\angle A=2\angle BCD$. 求证：$AB=AC$.

（第 1 题）　　（第 2 题）

2. 如图，已知：在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，BD、CE分别是边AC、AB上的中线，BD、CE相交于点O. 求证：$OB=OC$.

18.2　等腰三角形的判定　125

例 3 可用反证法简证如下：若$AB=AC$，则根据“等边对等角”，得$\angle B=\angle C$；若$AB<AC$，则根据“在三角形中，大边对大角”，得$\angle B>\angle C$. 无论哪种情况，都与已知$\angle C>\angle B$矛盾. 因此$AB>AC$.

课堂练习 18.2(2)

1. 设$\angle BCD=x^\circ$，则$\angle A=2x^\circ$.

$\because\ CD\perp AB$，

$\therefore\ \angle BDC=\angle ADC=90^\circ$.

又$\because\ \angle B+\angle BDC+\angle BCD=180^\circ$，$\angle A+\angle ADC+\angle ACD=180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

$\therefore\ \angle B=90-x^\circ$，$\angle ACD=90^\circ-2x^\circ$.

$\therefore\ \angle ACB=\angle ACD+\angle BCD=90^\circ-2x^\circ+x^\circ=90^\circ-x^\circ$.

$\therefore\ \angle B=\angle ACB$.

$\therefore\ AB=AC$（等角对等边）.

2. $\because\ BD$、CE分别是边AC、AB上的中线，

$\therefore\ BE=\dfrac{1}{2}AB$，$CD=\dfrac{1}{2}AC$.

$\because\ AB=AC$，

$\therefore\ BE=CD$，$\angle ABC=\angle ACB$（等边对等角）.

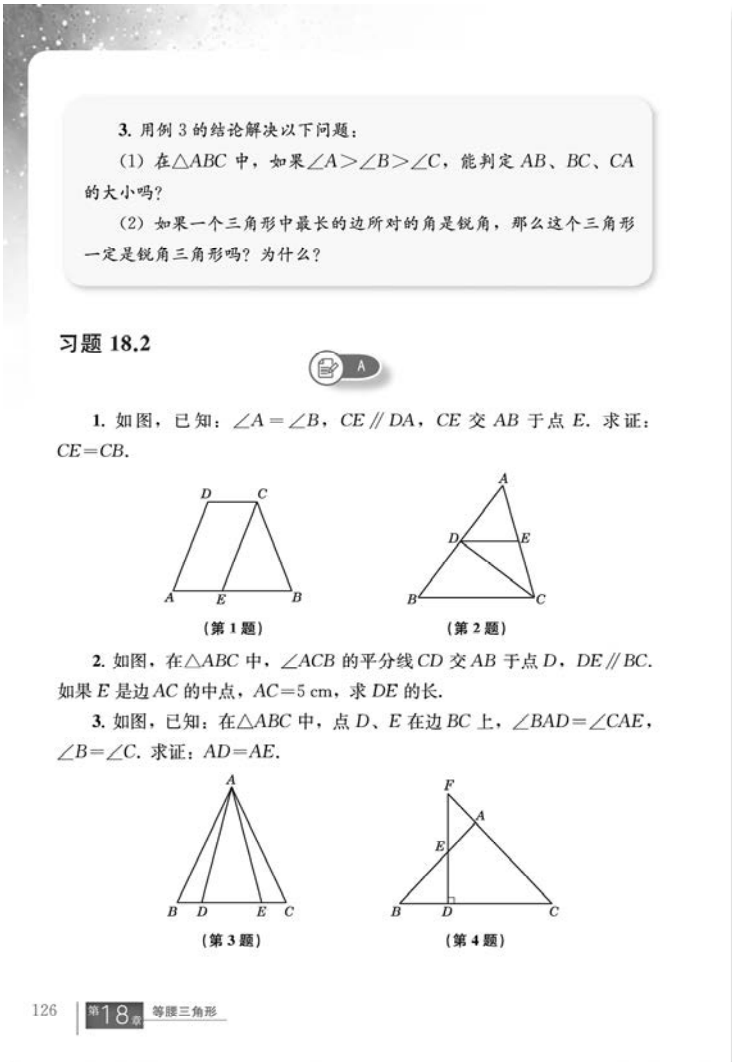
在$\triangle BCE$和$\triangle CBD$中，

$$\because \begin{cases} BE=CD, \\ \angle ABC=\angle ACB, \\ BC=CB, \end{cases}$$

$\therefore\ \triangle BCE\cong\triangle CBD$（SAS）.

$\therefore\ \angle OCB=\angle OBC$.

$\therefore\ OB=OC$（等角对等边）.


3. 用例 3 的结论解决以下问题：

(1) 在△ABC 中，如果$\angle A>\angle B>\angle C$，能判定 AB、BC、CA 的大小吗？

(2) 如果一个三角形中最长的边所对的角是锐角，那么这个三角形一定是锐角三角形吗？为什么？

习题 18.2

A

1. 如图，已知：$\angle A=\angle B$，$CE\parallel DA$，CE 交 AB 于点 E. 求证：$CE=CB$.

(第 1 题)　　(第 2 题)

2. 如图，在△ABC 中，$\angle ACB$ 的平分线 CD 交 AB 于点 D，$DE\parallel BC$. 如果 E 是边 AC 的中点，$AC=5$ cm，求 DE 的长.

3. 如图，已知：在△ABC 中，点 D、E 在边 BC 上，$\angle BAD=\angle CAE$，$\angle B=\angle C$. 求证：$AD=AE$.

(第 3 题)　　(第 4 题)

126 第18章 等腰三角形

3. (1) 能，$BC>CA>AB$.

(2) 一定. 根据“三角形中，大边对大角”，最大的边对最大的角. 若一个三角形中最大的角是锐角，那么这个三角形一定是锐角三角形.

习题 18.2

1. ∵ $CE\parallel DA$，

∴ $\angle A=\angle CEB$（两直线平行，同位角相等）.

又∵ $\angle A=\angle B$，

∴ $\angle CEB=\angle B$.

∴ $CE=CB$（等角对等边）.

2. ∵ CD 平分$\angle ACB$，

∴ $\angle ECD=\angle BCD$.

∵ $DE\parallel BC$，

∴ $\angle EDC=\angle BCD$（两直线平行，内错角相等），

∴ $\angle ECD=\angle EDC$.

∴ $EC=ED$（等角对等边）.

∵ 点 E 是边 AC 的中点，$AC=5$ cm，

∴ $CE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 5=2.5$ cm.

∴ $DE=2.5$ cm.

3. ∵ $\angle ADE=\angle BAD+\angle B$，$\angle AED=\angle CAE+\angle C$，$\angle BAD=\angle CAE$，$\angle B=\angle C$，

∴ $\angle ADE=\angle AED$.

∴ $AD=AE$（等角对等边）.

4. 提示：$\angle F=\angle BED=\angle AEF$.

5. ∵ $AB=AC$，

∴ $\angle B=\angle ACB$（等边对等角）.

∵ $\angle ACB=\angle D+\angle CFD$，$\angle AEF=\angle D+\angle B$（三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和），

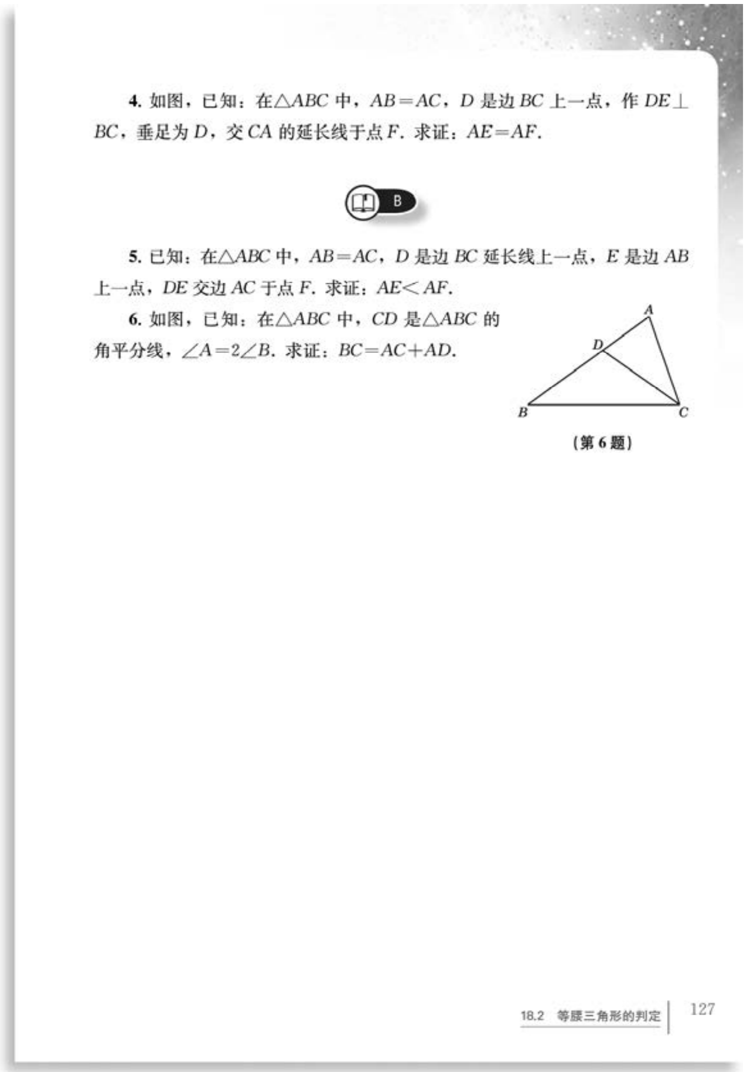
∴ $\angle AEF=2\angle D+\angle CFD$，

∴ $\angle CFD<\angle AEF$.

又∵ $\angle CFD=\angle AFE$，

∴ $\angle AFE<\angle AEF$.

∴ $AE<AF$（三角形中，大角对大边）.



4. 如图，已知：在△ABC 中，$AB=AC$，D 是边 BC 上一点，作 $DE\perp BC$，垂足为 D，交 CA 的延长线于点 F. 求证：$AE=AF$.

B

5. 已知：在△ABC 中，$AB=AC$，D 是边 BC 延长线上一点，E 是边 AB 上一点，DE 交边 AC 于点 F. 求证：$AE<AF$.

6. 如图，已知：在△ABC 中，CD 是△ABC 的角平分线，$\angle A=2\angle B$. 求证：$BC=AC+AD$.

（第 6 题）

18.2 等腰三角形的判定 127

6. 如图，在 BC 上截取 $CE=AC$，连接 DE.

∵ CD 是△ABC 的角平分线，

∴ $\angle ACD=\angle ECD$.

在△ACD 和△ECD 中，

∵ $\begin{cases} AC=EC, \\ \angle ACD=\angle ECD, \\ CD=CD, \end{cases}$

∴ △ACD≌△ECD（SAS）.

∴ $\angle A=\angle DEC$，$AD=ED$.

又∵ $\angle A=2\angle B$，$\angle DEC=\angle B+\angle BDE$，

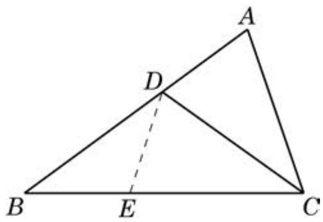
∴ $\angle B=\angle BDE$.

∴ $EB=ED$（等角对等边）.

∴ $EB=AD$.

∵ $BC=EC+EB$，

∴ $BC=AC+AD$.



（第 6 题）

18.3　等边三角形

本节教学目标

（1）掌握等边三角形的性质：等边三角形每个内角都等于 60°.

（2）掌握等边三角形的判定：三个内角都相等的三角形是等边三角形.

（3）在理解等边三角形的性质与判定的过程中，进一步发展几何直观、空间观念与推理能力.

（以下分析对应课本第 128～130 页）

本课教学重点

掌握等边三角形的性质定理与判定定理.

本课教学建议

可以让学生类比等腰三角形的性质与判定，自主探索得到等边三角形的性质定理与判定定理.

18.3 等边三角形

等边三角形是一类特殊的等腰三角形，它的三边都是相等的.

思考

等边三角形的三个内角分别等于多少度？

一个三角形的内角满足什么条件时，这个三角形是等边三角形？

由等腰三角形的性质，得到：

定理 等边三角形的每个内角都等于 60°.

由等腰三角形的判定定理，得到：

定理 三个内角都相等的三角形是等边三角形.

请自行证明上面两个定理.

例 1 证明：有一个内角等于 60° 的等腰三角形是等边三角形.

分析 在图 18-3-1 中，设 $AB=AC$，需要对三个内角分别等于 60° 的各种情况进行讨论，其中 $\angle B=60^\circ$ 和 $\angle C=60^\circ$ 是类似的，故只要分两种情况讨论.

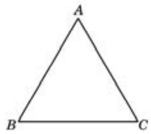


图 18-3-1

如图 18-3-1，已知：在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$.

(1) 当 $\angle B=60^\circ$ 时，求证：$\triangle ABC$ 是等边三角形；

(2) 当 $\angle A=60^\circ$ 时，求证：$\triangle ABC$ 是等边三角形.

证明 (1) $\because$ $AB=AC$，$\angle B=60^\circ$，

$\therefore$ $\angle C=\angle B=60^\circ$（等边对等角）.

又$\because$ $\angle A=180^\circ-\angle C-\angle B=60^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

$\therefore$ $\angle A=\angle B=\angle C$.

$\therefore$ $\triangle ABC$ 是等边三角形（三个内角都相等的三角形是等边三角形）.

(2) $\because$ $AB=AC$，

128 第18章 等腰三角形

本课内容分析

例 1 是等边三角形判定定理的直接运用. 由于已知的等于 60° 的内角可能是等腰三角形的顶角或底角，因此需要分类讨论. 本题的结论在本套教科书中不作为定理和论证依据.

∴ $\angle C=\angle B$（等边对等角）.

又∵ $\angle A+\angle C+\angle B=180°$（三角形的内角和等于 $180°$），

$\angle A=60°$，

∴ $\angle B=\angle C=\angle A=60°$.

∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形（三个内角都相等的三角形是等边三角形）.

例 2 如图 18-3-2，已知：在等边三角形 ABC 的边 BC 上任取一点 D，以 CD 为边向外作等边三角形 CDE，连接 AD、BE.

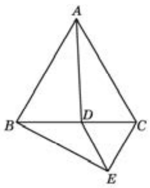


图 18-3-2

求证：$BE=AD$.

分析 要证 $BE=AD$，只需要证明 $\triangle BEC\cong\triangle ADC$.

证明 ∵ $\triangle CDE$ 和 $\triangle ABC$ 均是等边三角形，

∴ $CE=CD$，$BC=AC$，$\angle BCE=\angle ACD=60°$（等边三角形的每个内角都等于 $60°$）.

在 $\triangle BEC$ 和 $\triangle ADC$ 中，

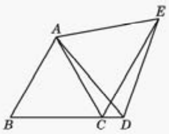
∵ $\begin{cases} CE=CD, \\ \angle BCE=\angle ACD, \\ BC=AC, \end{cases}$

∴ $\triangle BEC\cong\triangle ADC$（SAS）.

∴ $BE=AD$.

课堂练习 18.3

1. 如图，已知：$\triangle ABC$ 是等边三角形，D 为边 BC 延长线上一点，CE 平分 $\angle ACD$，$CE=BD$. 求证：$\triangle DAB\cong\triangle EAC$.



（第 1 题）

18.3 等边三角形 129

例 2 综合运用了等边三角形的性质定理和三角形全等的判定公理. 本题还可以有许多变形. 例如，以 CD 为边向等边 $\triangle ABC$ 内作等边 $\triangle DEC$ 或作任意等边 $\triangle DEC$（此时点 D 不一定在边 BC 上，可用信息技术工具将等边 $\triangle DEC$ 绕顶点 C 进行旋转），观察 BE、AD 是否依然相等.

课堂练习 18.3

1. ∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $AB=AC$，$\angle B=\angle ACB=60°$（等边三角形的每个内角都等于 $60°$）.

∴ $\angle ACD=180°-60°=120°$.

又∵ CE 平分 $\angle ACD$，

∴ $\angle ACE=\frac{1}{2}\angle ACD=\frac{1}{2}\times120°=60°$.

∴ $\angle B=\angle ACE$.

在 $\triangle DAB$ 和 $\triangle EAC$ 中，

∵ $\begin{cases} AB=AC, \\ \angle B=\angle ACE, \\ BD=CE, \end{cases}$

∴ $\triangle DAB\cong\triangle EAC$（SAS）.

2. ∵ $\triangle ABC$、$\triangle DCE$ 都是等边三角形，

∴ $AC=BC$，$CE=CD$，$\angle ACB=\angle DCE=60^\circ$（等边三角形的每个内角都等于 60°）.

∴ $\angle ACB+\angle ACD=\angle DCE+\angle ACD$，

即 $\angle BCD=\angle ACE$.

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCD$ 中，

∵ $\begin{cases} AC=BC, \\ \angle ACE=\angle BCD, \\ CE=CD, \end{cases}$

∴ $\triangle ACE \cong \triangle BCD$（SAS）.

3. $\triangle ABC$ 是等边三角形.

∵ $\triangle DEF$ 是等边三角形，

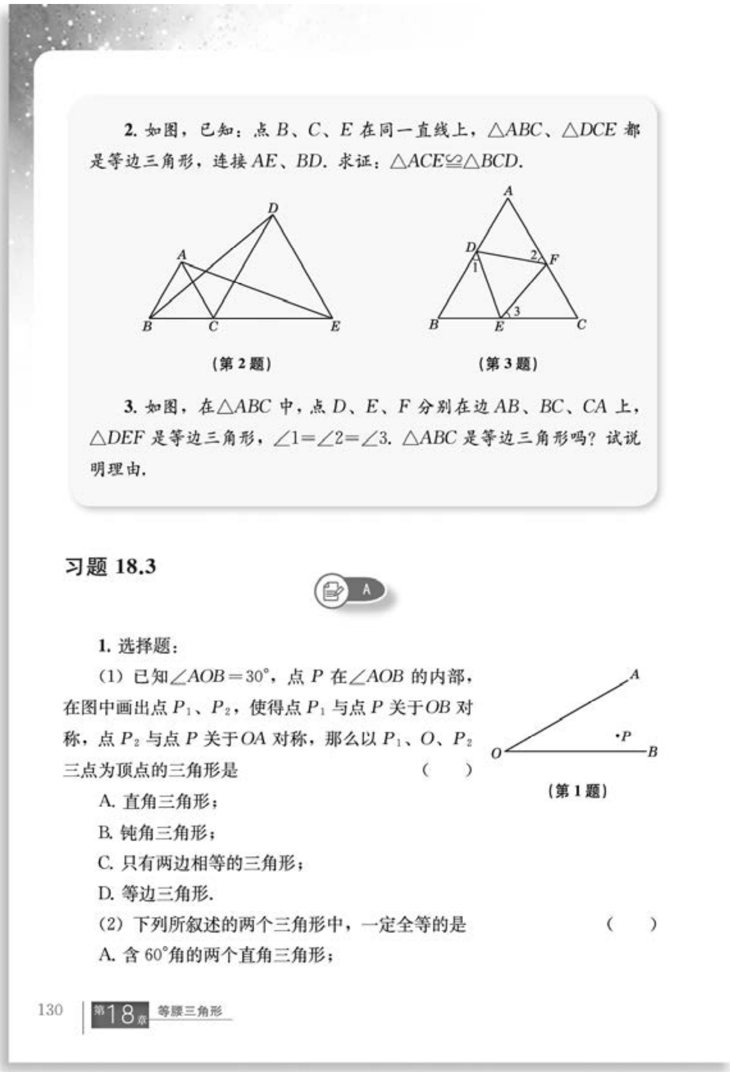
∴ $\angle DEF=60^\circ$（等边三角形的每个内角都等于 60°）.

又∵ $\angle DEF+\angle 3=\angle DEC=\angle B+\angle 1$，且 $\angle 1=\angle 3$，

∴ $\angle B=\angle DEF=60^\circ$.

同理 $\angle A=\angle C=60^\circ=\angle B$.

∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形（三个内角都相等的三角形是等边三角形）.



2. 如图，已知：点 B、C、E 在同一直线上，$\triangle ABC$、$\triangle DCE$ 都是等边三角形，连接 AE、BD. 求证：$\triangle ACE \cong \triangle BCD$.

（第 2 题）　　（第 3 题）

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E、F 分别在边 AB、BC、CA 上，$\triangle DEF$ 是等边三角形，$\angle 1=\angle 2=\angle 3$. $\triangle ABC$ 是等边三角形吗？试说明理由.

习题 18.3

A

1. 选择题：

（1）已知 $\angle AOB=30^\circ$，点 P 在 $\angle AOB$ 的内部，在图中画出点 P_1、P_2，使得点 P_1 与点 P 关于 OB 对称，点 P_2 与点 P 关于 OA 对称，那么以 P_1、O、P_2 三点为顶点的三角形是（　）

（第 1 题）

A. 直角三角形；

B. 钝角三角形；

C. 只有两边相等的三角形；

D. 等边三角形.

（2）下列所叙述的两个三角形中，一定全等的是（　）

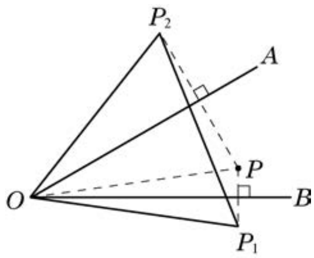
A. 含 60° 角的两个直角三角形；

130　第18章　等腰三角形

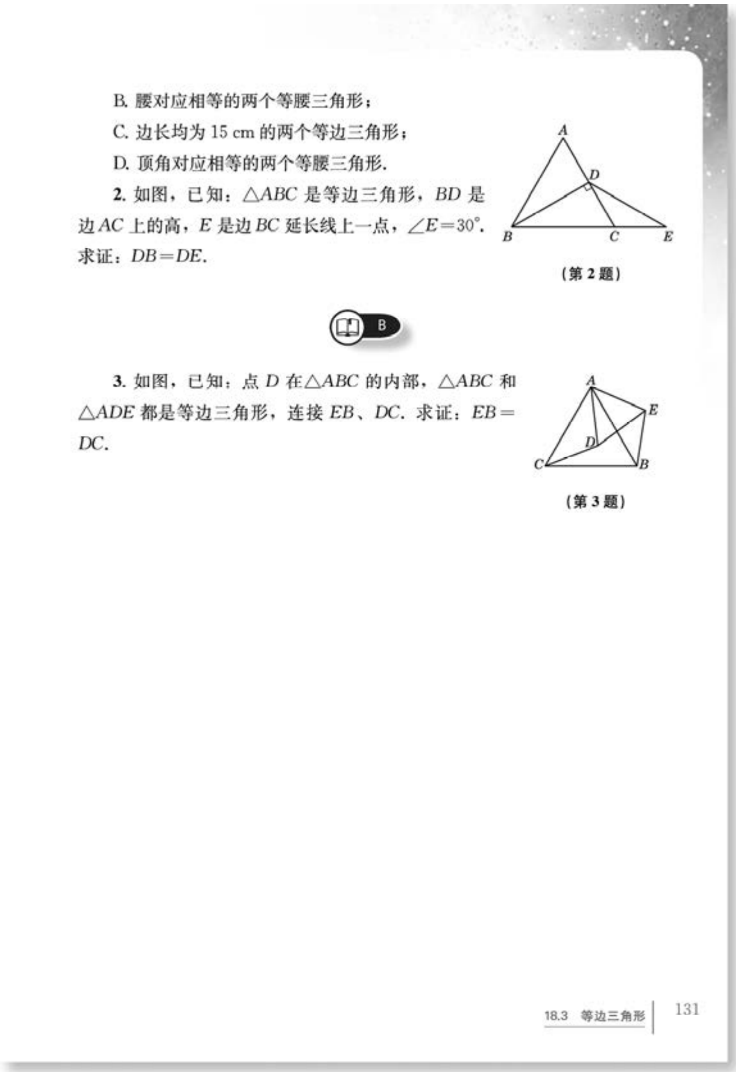
习题 18.3

1.（1）D.　提示：点 P_1、P_2 的位置如图所示，连接 OP，有 $\angle P_2OA=\angle POA$，$\angle P_1OB=\angle POB$.

（2）C.



（第 1 题）



B. 腰对应相等的两个等腰三角形；

C. 边长均为 15 cm 的两个等边三角形；

D. 顶角对应相等的两个等腰三角形.

2. 如图，已知：$\triangle ABC$ 是等边三角形，BD 是边 AC 上的高，E 是边 BC 延长线上一点，$\angle E=30^\circ$. 求证：$DB=DE$.

（第 2 题）

B

3. 如图，已知：点 D 在$\triangle ABC$ 的内部，$\triangle ABC$ 和$\triangle ADE$ 都是等边三角形，连接 EB、DC. 求证：$EB=DC$.

（第 3 题）

18.3 等边三角形 131

2. ∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $\angle ACB=60^\circ$（等边三角形的每个内角都等于 60°）.

∵ BD 是边 AC 上的高，

∴ $\angle BDC=90^\circ$.

∴ $\angle DBC=180^\circ-\angle ACB-\angle BDC=180^\circ-60^\circ-90^\circ=30^\circ$.

∵ $\angle E=30^\circ$，

∴ $\angle DBC=\angle E$.

∴ $DB=DE$（等角对等边）.

3. ∵ $\triangle ABC$、$\triangle ADE$ 都是等边三角形，

∴ $AC=AB$，$AD=AE$，$\angle CAB=\angle DAE=60^\circ$（等边三角形的每个内角都等于 60°）.

∴ $\angle CAB-\angle DAB=\angle DAE-\angle DAB$.

∴ $\angle CAD=\angle BAE$.

在$\triangle ACD$ 和$\triangle ABE$ 中，

$$\because \begin{cases} AC=AB, \\ \angle CAD=\angle BAE, \\ AD=AE, \end{cases}$$

∴ $\triangle ACD\cong\triangle ABE$（SAS）.

∴ $EB=DC$.

18.4 线段的垂直平分线

本节教学目标

（1）理解线段的垂直平分线的概念，探索并掌握线段垂直平分线的性质定理及其逆定理.

（2）能用尺规作图：作一条线段的垂直平分线；过一点作已知直线的垂线；已知底边和底边上的高作等腰三角形. 经历这些作图的思路形成过程，体会几何推理在其中的作用.

（3）了解三角形外心的定义.

（以下分析对应课本第 132～134 页）

本课教学重点

掌握线段的垂直平分线的性质定理及其逆定理. 能用尺规作图作线段的垂直平分线.

本课教学建议

先明确线段的垂直平分线的性质定理及其逆定理的条件与结论，再着手去证明. 明确“任意”的含义，“线段的垂直平分线上的任意一点”，这个点可能在线段上，也可能在线段外. “与一条线段两个端点距离相等的点”，隐含着“任意”，即“与一条线段两个端点距离相等的任意的点”. 同样，这个点可能在线段上，也可能不在线段上.

18.4 线段的垂直平分线

我们已经知道，等腰三角形是轴对称图形，它的对称轴是顶角平分线(底边上的中线、底边上的高)所在的直线.

定义 过线段中点且垂直于这条线段的直线叫作这条线段的垂直平分线，简称中垂线.

如图 18-4-1，如果直线 CD 是线段 AB 的垂直平分线，垂足为 O，那么 $OA=OB$，且 $CD\perp AB$.

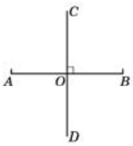


图 18-4-1

我们有下面的线段垂直平分线的性质定理：

定理 线段的垂直平分线上的任意一点到该线段两个端点的距离相等.

如图 18-4-2，已知：直线 MN 是线段 AB 的垂直平分线，垂足为 C，点 P 在直线 MN 上.

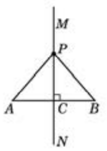


图 18-4-2

求证：$PA=PB$.

证明 因为直线 MN 是线段 AB 的垂直平分线，垂足为 C，所以 $MN\perp AB$，$AC=BC$.

如果点 P 不在线段 AB 上，由 $MN\perp AB$，得 $\angle PCA=\angle PCB=90^\circ$. 又因为 PC 是公共边，由“边角边”，得 $\triangle PCA\cong\triangle PCB$. 由此推出 $PA=PB$.

如果点 P 在线段 AB 上，那么点 P 与点 C 重合，仍有 $PA=PB$.

这个定理的逆命题也是成立的，即有：

定理 与一条线段的两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上.

本课内容分析

我们已经证明了“等腰三角形三线合一”和“有一条角平分线与中线重合的三角形是等腰三角形”，此处“线段的垂直平分线上的点到该线段两端点的距离相等”表明“一条边的中线与高重合的三角形是等腰三角形”，还可以证明“有一条角平分线与高重合的三角形是等腰三角形”.

根据“与线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上”这一性质和“两点确定一条直线”，要判定一条直线是线段的垂直平分线，只需要在该直线上找到两个到线段两端点距离相等的点. 这就是例 1“作已知线段的垂直平分线”的作图依据.

如图 18-4-3，已知：线段 AB 和一点 Q，且 $QA=QB$.

求证：点 Q 在线段 AB 的垂直平分线上.

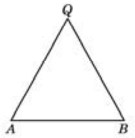


图 18-4-3

分析　要证点 Q 在线段 AB 的垂直平分线上，可以先经过点 Q 作线段 AB 的垂线，然后证明该垂线平分线段 AB.

证明　如果点 Q 在线段 AB 上，由 $QA=QB$，可知 Q 为线段 AB 的中点，即点 Q 必在线段 AB 的垂直平分线上.

也可以先平分线段 AB，如设线段 AB 的中点为 C，连接 QC，然后证明 QC 垂直于线段 AB.

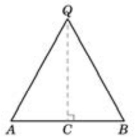


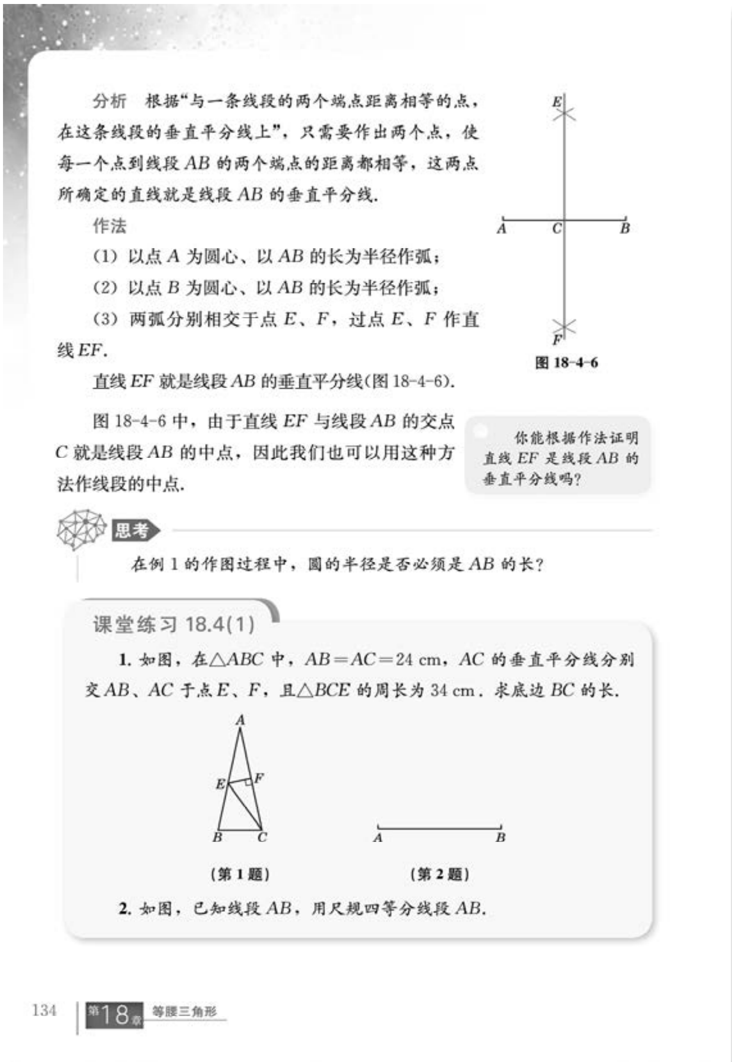
图 18-4-4

如果点 Q 不在线段 AB 上，过点 Q 作 $QC\perp AB$，垂足为 C(图 18-4-4). 由 $QA=QB$，$QC\perp AB$，根据“等腰三角形三线合一”，可得 $AC=BC$，即 C 是线段 AB 的中点. 由此可见，点 Q 在线段 AB 的垂直平分线上.

例 1　作已知线段的垂直平分线.

如图 18-4-5，已知线段 AB，求作线段 AB 的垂直平分线.

图 18-4-5



分析　根据“与一条线段的两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上”，只需要作出两个点，使每一个点到线段 AB 的两个端点的距离都相等，这两点所确定的直线就是线段 AB 的垂直平分线.

作法

(1) 以点 A 为圆心、以 AB 的长为半径作弧；

(2) 以点 B 为圆心、以 AB 的长为半径作弧；

(3) 两弧分别相交于点 E、F，过点 E、F 作直线 EF.

图 18-4-6

直线 EF 就是线段 AB 的垂直平分线(图 18-4-6).

图 18-4-6 中，由于直线 EF 与线段 AB 的交点 C 就是线段 AB 的中点，因此我们也可以用这种方法作线段的中点.

你能根据作法证明直线 EF 是线段 AB 的垂直平分线吗？

思考

在例 1 的作图过程中，圆的半径是否必须是 AB 的长？

课堂练习 18.4(1)

1. 如图，在△ABC 中，$AB=AC=24$ cm，AC 的垂直平分线分别交 AB、AC 于点 E、F，且△BCE 的周长为 34 cm．求底边 BC 的长.

（第 1 题）　　（第 2 题）

2. 如图，已知线段 AB，用尺规四等分线段 AB.

134　第 18 章　等腰三角形

当(1)(2)中所选择的相同长度的半径大于线段 AB 长的一半时，两段弧就有交点. 作图时半径的选择以学生能理解、方便为准.

课堂练习 18.4(1)

1. ∵　EF 是线段 AC 的垂直平分线，

∴　$EA=EC$（线段的垂直平分线上的任意一点到该线段两个端点的距离相等).

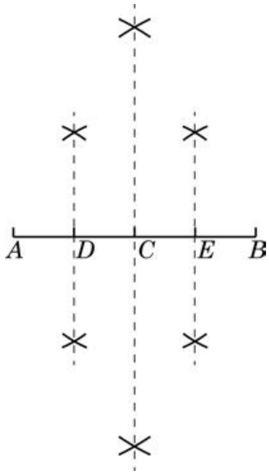
∴　△BCE 的周长$=BE+EC+BC=BE+EA+BC=AB+BC=34$ cm.

又∵　$AB=24$ cm，

∴　$BC=10$ cm，

即底边 BC 的长为 10 cm.

2. 如图，点 D、C、E 为所求作的线段 AB 的四等分点.



（第 2 题）

（以下分析对应课本第 135～137 页）

本课教学重点

用尺规作图的方法过一点作已知直线的垂线，已知底边和底边上的高作等腰三角形.

本课教学建议

尺规作图对发展学生的逻辑思维与几何直观都有着重要的意义，是一个有趣且有挑战性的学习内容. 在教学中应该给学生充分的时间去尝试和探索，鼓励他们积极思考和勇于实践.

例 2 过直线外一点作已知直线的垂线.

如图 18-4-7，已知直线 l 和 l 外一点 P，过点 P 求作直线 l 的垂线.

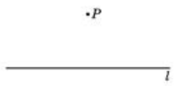


图 18-4-7

分析　只需在直线 l 上找出两点 A 和 B，使点 P 在线段 AB 的垂直平分线上，就可以将问题转化为作线段 AB 的垂直平分线.

作法

(1) 任意取一点 K，使点 K 和点 P 分别在直线 l 的两侧；

(2) 以点 P 为圆心、以 PK 的长为半径作弧，与直线 l 相交于点 A、B；

(3) 作线段 AB 的垂直平分线 CD.

直线 CD 就是所求的垂线(图 18-4-8).

请自行完成证明.

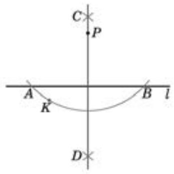


图 18-4-8

思考

1. 例 2 的作法中，为什么要使所取的点 K 与已知点 P 在直线 l 的两侧？点 K 与点 P 必须在直线 l 的两侧吗？

2. 如何过直线上一点作该直线的垂线？

例 3 已知底边和底边上的高作等腰三角形.

如图 18-4-9，已知线段 a、h. 求作△ABC，使 $AB=AC$，且 $BC=a$，高 $AD=h$.

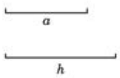


图 18-4-9

分析　先画出符合条件的示意图，根据 $BC=a$，可以确定点 B、C 的位置. 由"等腰三角形三线合一"，作 BC 的垂直平分线 MN，交 BC 于点 D. 由 $AD=h$，可知点 D 到点 A 的距离为 h，这就是说，点 A 在以定点 D 为圆心、以 h 为半径的圆上. 因此，这个圆与 MN 的交点就是 A.

本课内容分析

例 2 作法的本质是通过作线段的垂直平分线作直角，为此首先要在直线 l 上确定一条线段 AB，使要作的垂线为 AB 的垂直平分线.

点 K 的位置保证了所作圆弧与直线 l 有两个交点 A、B.

先画出符合条件的示意图，借助示意图分析图形的特征，再寻找尺规作图的步骤，是一种解决较复杂的尺规作图问题的思路.

对外心的研究将在九年级圆的教学中继续展开，例 4 的教学目的主要是帮助学生掌握线段的垂直平分线性质定理及其逆定理的运用.

作法

(1) 作线段 $BC=a$；

(2) 作线段 BC 的垂直平分线 MN，MN 与 BC 相交于点 D；

(3) 以点 D 为圆心、以 h 的长为半径作弧，交 MN 于点 A；

(4) 分别连接 AB、AC.

$\triangle ABC$ 就是所求的三角形(图 18-4-10).

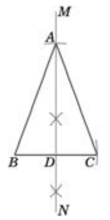


图 18-4-10

例 4 如图 18-4-11，已知：在$\triangle ABC$ 中，OM、ON 分别是边 AB、AC 的垂直平分线，OM 与 ON 相交于点 O.

求证：点 O 在边 BC 的垂直平分线上.

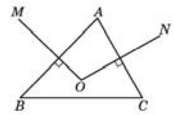


图 18-4-11

证明 如图 18-4-12，分别连接 OB、OA、OC.

∵ OM、ON 分别是边 AB、AC 的垂直平分线，

∴ $OA=OB$，$OC=OA$（线段垂直平分线的性质定理).

∴ $OB=OC$.

∴ 点 O 在边 BC 的垂直平分线上（与一条线段的两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上).

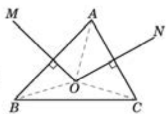
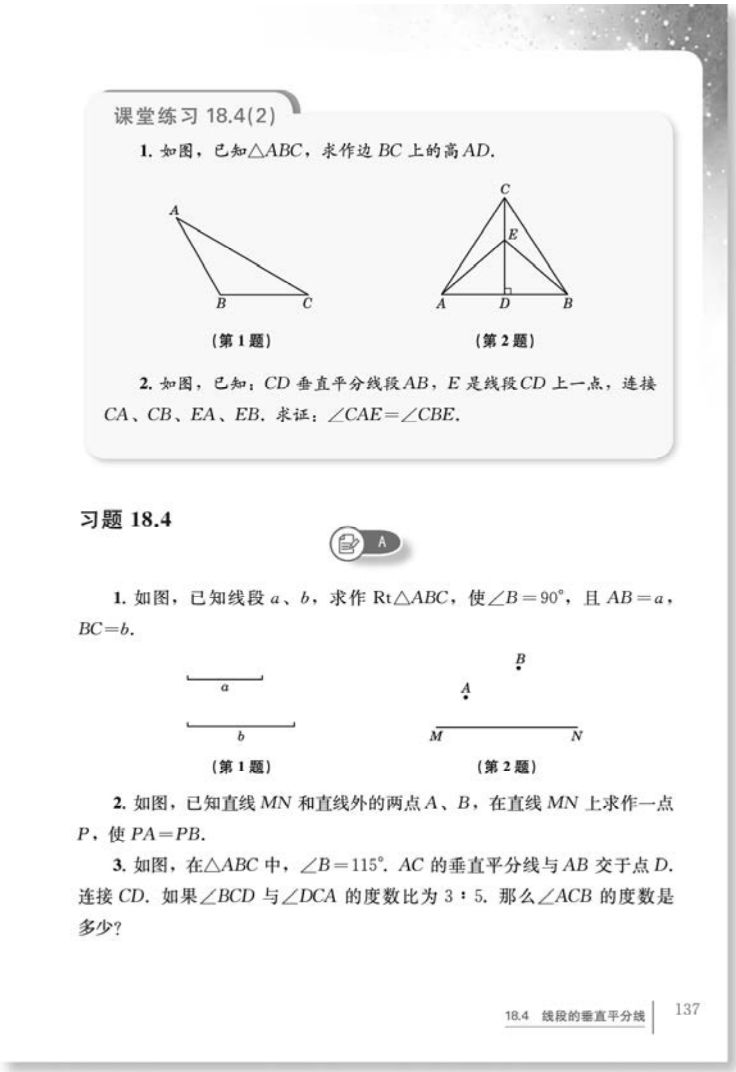


图 18-4-12

本题的结论表明：三角形的三条边的垂直平分线相交于一点，这个交点叫作三角形的外心.



课堂练习 18.4(2)

1. 如图，已知△ABC，求作边 BC 上的高 AD.

（第 1 题）　　（第 2 题）

2. 如图，已知：CD 垂直平分线段 AB，E 是线段 CD 上一点，连接 CA、CB、EA、EB. 求证：∠CAE＝∠CBE.

习题 18.4

A

1. 如图，已知线段 a、b，求作 Rt△ABC，使∠B＝90°，且 AB＝a，BC＝b.

（第 1 题）　　（第 2 题）

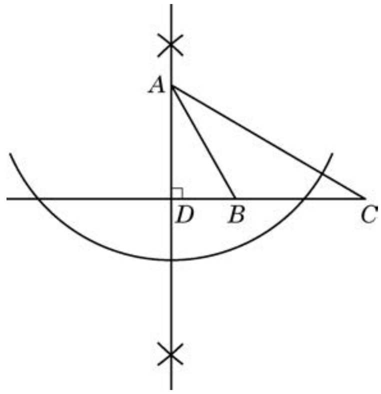
2. 如图，已知直线 MN 和直线外的两点 A、B，在直线 MN 上求作一点 P，使 PA＝PB.

3. 如图，在△ABC 中，∠B＝115°. AC 的垂直平分线与 AB 交于点 D. 连接 CD. 如果∠BCD 与∠DCA 的度数比为 3∶5. 那么∠ACB 的度数是多少？

18.4 线段的垂直平分线　137

课堂练习 18.4(2)

1. 如图，线段 AD 就是所求作的边 BC 上的高.



（第 1 题）

2. ∵ CD 是线段 AB 的垂直平分线，且点 E 在 CD 上，

∴ $CA=CB$，$EA=EB$（线段的垂直平分线上的任意一点到该线段两个端点的距离相等）.

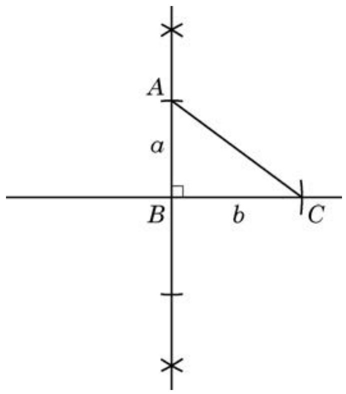
∴ $\angle CAB=\angle CBA$，$\angle EAB=\angle EBA$（等边对等角）.

∴ $\angle CAB-\angle EAB=\angle CBA-\angle EBA$，

即$\angle CAE=\angle CBE$.

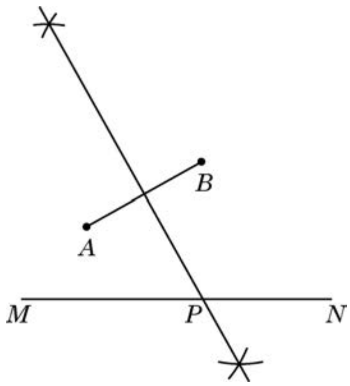
习题 18.4

1.



（第 1 题）

2.



（第 2 题）

3. 设$\angle BCD=3x^\circ$，则$\angle DCA=5x^\circ$.

$\because$ D 在线段 AC 的垂直平分线上，

$\therefore$ $AD=CD$.

$\therefore$ $\angle DAC=\angle DCA=5x^\circ$.

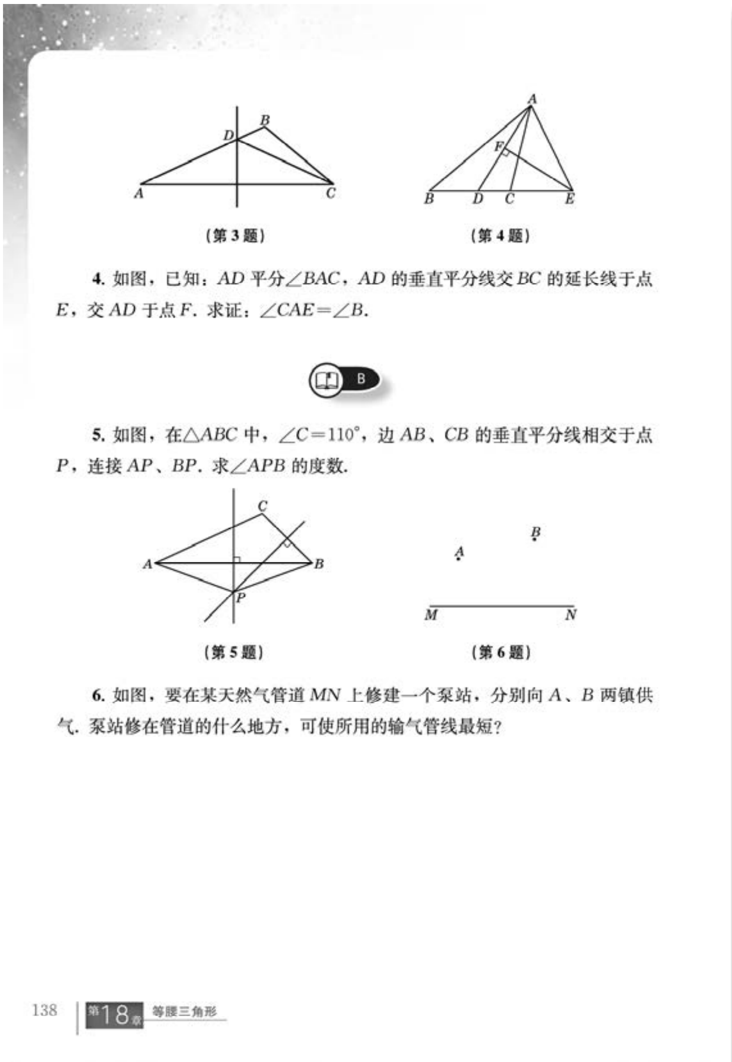
$\therefore$ $\angle BDC=\angle DAC+\angle DCA=10x^\circ$（三角形的内角和定理的推论）.

$\because$ $\angle BDC+\angle BCD+\angle B=180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

$\therefore$ $10x^\circ+3x^\circ+115^\circ=180^\circ$.

$\therefore$ $x=5$.

$\therefore$ $\angle ACB=\angle BCD+\angle DCA=8x^\circ=40^\circ$.


(第 3 题)　　(第 4 题)

4. 如图，已知：AD 平分$\angle BAC$，AD 的垂直平分线交 BC 的延长线于点 E，交 AD 于点 F. 求证：$\angle CAE=\angle B$.

B

5. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=110°$，边 AB、CB 的垂直平分线相交于点 P，连接 AP、BP. 求$\angle APB$ 的度数.

(第 5 题)　　(第 6 题)

6. 如图，要在某天然气管道 MN 上修建一个泵站，分别向 A、B 两镇供气. 泵站修在管道的什么地方，可使所用的输气管线最短？

138　第18章　等腰三角形

4. ∵ EF 垂直平分 AD，

∴ $EA=ED$（线段的垂直平分线上的任意一点到该线段两个端点的距离相等）.

∴ $\angle DAE=\angle ADE$.

∵ AD 平分$\angle BAC$，

∴ $\angle BAD=\angle CAD$.

又∵ $\angle ADE=\angle B+\angle BAD$（三角形的内角和定理的推论），

$\angle DAE=\angle CAE+\angle CAD$，

∴ $\angle CAE=\angle B$.

5. 连接 PC.

∵ 点 P 是线段 AB、CB 的垂直平分线的交点，

∴ $PA=PB$，$PB=PC$（线段的垂直平分线上的任意一点到该线段两个端点的距离相等）.

∴ $PA=PB=PC$，

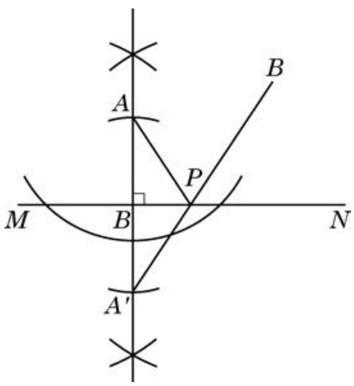
∴ $\angle PAC=\angle PCA$，$\angle PCB=\angle PBC$.

∴ $\angle PAC+\angle PBC=\angle PCA+\angle PCB=\angle ACB=110°$.

∵ $\angle PAB+\angle PBA+\angle APB=180°$，$\angle CAB+\angle CBA+\angle ACB=180°$，

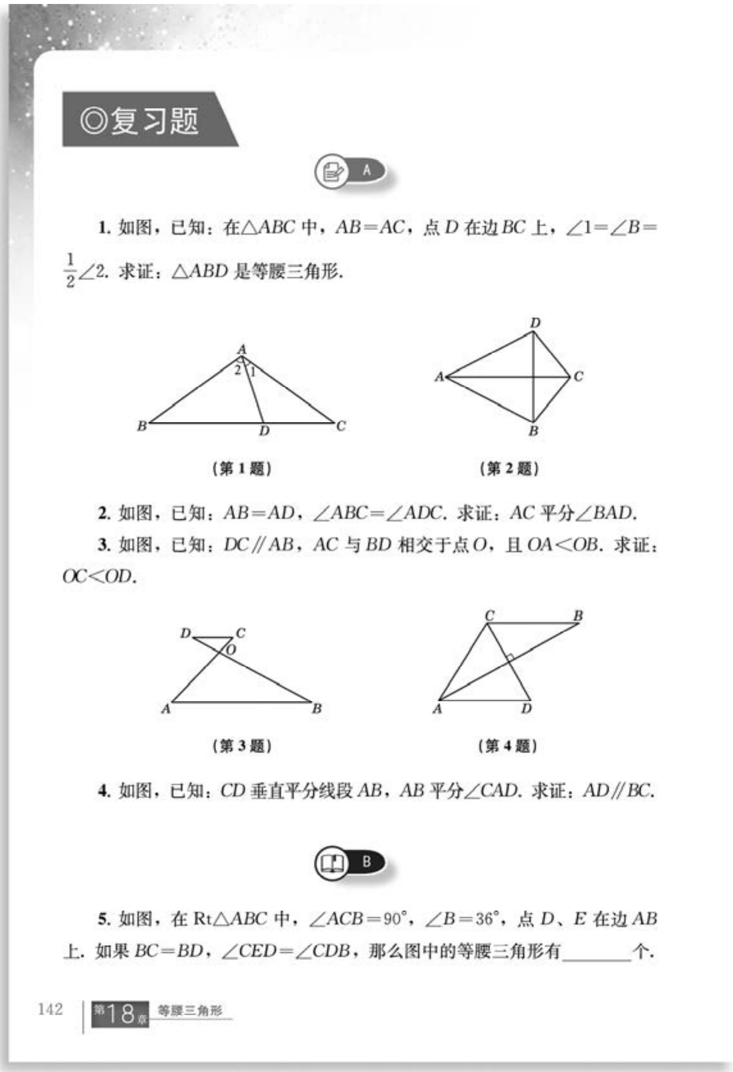
∴ $\angle APB=180°+180°-(\angle PAB+\angle PBA)-(\angle CAB+\angle CBA+\angle ACB)=360°-(\angle PAC+\angle PBC)-\angle ACB=360°-110°-110°=140°$.

6. 如图，泵站应建在点 P 处.



(第 6 题)

复习题



◎复习题

A

1. 如图，已知：在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点D在边BC上，$\angle 1=\angle B=\frac{1}{2}\angle 2$. 求证：$\triangle ABD$是等腰三角形.

（第1题）

（第2题）

2. 如图，已知：$AB=AD$，$\angle ABC=\angle ADC$. 求证：AC平分$\angle BAD$.

3. 如图，已知：$DC/\!/AB$，AC与BD相交于点O，且$OA<OB$. 求证：$OC<OD$.

（第3题）

（第4题）

4. 如图，已知：CD垂直平分线段AB，AB平分$\angle CAD$. 求证：$AD/\!/BC$.

B

5. 如图，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle B=36^\circ$，点D、E在边AB上. 如果$BC=BD$，$\angle CED=\angle CDB$，那么图中的等腰三角形有______个.

142 第18章 等腰三角形

1. 提示：由$\angle ADB=\angle 1+\angle C=\angle 2$，得$AB=DB$.

2. ∵ $AB=AD$，

∴ $\angle ABD=\angle ADB$（等边对等角）.

又∵ $\angle ABC=\angle ADC$，

∴ $\angle ABC-\angle ABD=\angle ADC-\angle ADB$，

即$\angle DBC=\angle BDC$.

∴ $CD=CB$（等角对等边）.

在$\triangle ADC$和$\triangle ABC$中，

∵ $\begin{cases} AD=AB, \\ CD=CB, \\ AC=AC, \end{cases}$

∴ $\triangle ADC \cong \triangle ABC$（SSS）.

∴ $\angle DAC=\angle BAC$，

即AC平分$\angle BAD$.

3. 提示：证明$\angle D<\angle C$.

4. ∵ CD垂直平分线段AB，

∴ $CA=CB$（线段的垂直平分线上的任意一点到该线段两个端点的距离相等）.

∴ $\angle CAB=\angle B$（等边对等角）.

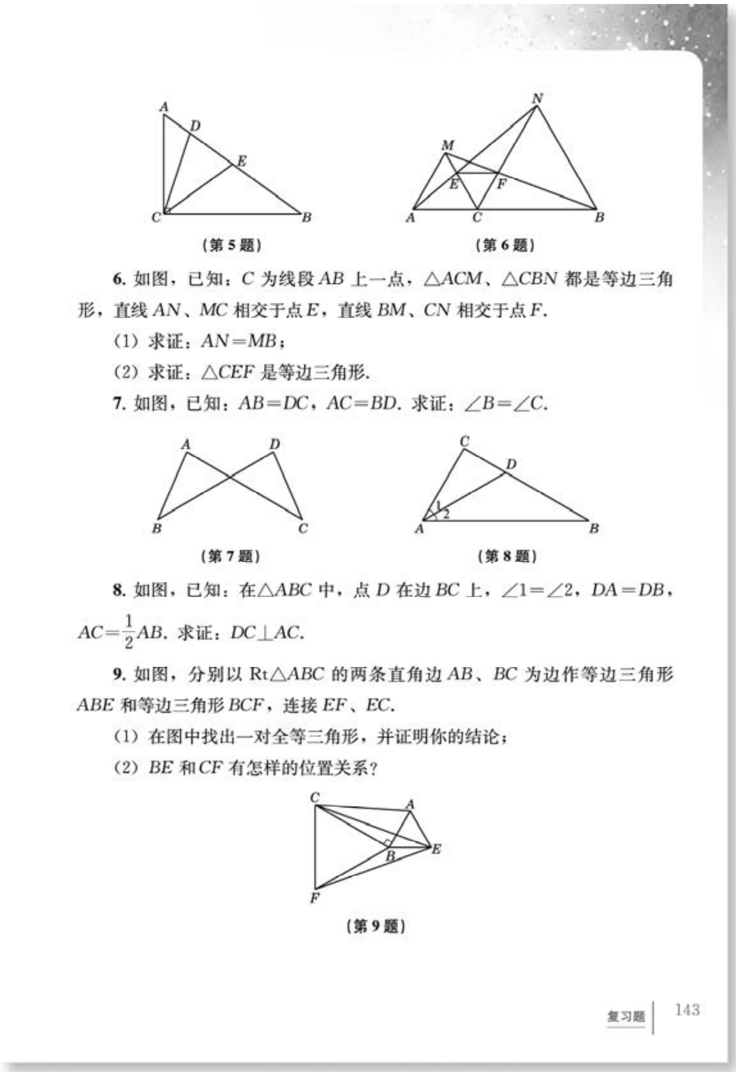
∵ AB平分$\angle CAD$，

∴ $\angle CAB=\angle DAB$.

∴ $\angle B=\angle DAB$.

∴ $AD/\!/BC$（内错角相等，两直线平行）.

5. 4个，$\triangle BCD$、$\triangle CDE$、$\triangle ECB$、$\triangle EAC$.



（第 5 题）　　（第 6 题）

6. 如图，已知：C 为线段 AB 上一点，$\triangle ACM$、$\triangle CBN$ 都是等边三角形，直线 AN、MC 相交于点 E，直线 BM、CN 相交于点 F.

(1) 求证：$AN=MB$；

(2) 求证：$\triangle CEF$ 是等边三角形.

7. 如图，已知：$AB=DC$，$AC=BD$. 求证：$\angle B=\angle C$.

（第 7 题）　　（第 8 题）

8. 如图，已知：在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上，$\angle 1=\angle 2$，$DA=DB$，$AC=\frac{1}{2}AB$. 求证：$DC\perp AC$.

9. 如图，分别以 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的两条直角边 AB、BC 为边作等边三角形 ABE 和等边三角形 BCF，连接 EF、EC.

(1) 在图中找出一对全等三角形，并证明你的结论；

(2) BE 和 CF 有怎样的位置关系？

（第 9 题）

复习题 | 143

6. (1) ∵ $\triangle ACM$、$\triangle CBN$ 都是等边三角形，

∴ $AC=MC$，$CN=CB$，$\angle ACM=\angle NCB=60^\circ$（等边三角形的内角都等于 60°）.

∴ $\angle ACM+\angle MCN=\angle NCB+\angle MCN$，即 $\angle ACN=\angle MCB$.

在 $\triangle ACN$ 和 $\triangle MCB$ 中，

∵ $\begin{cases} AC=MC, \\ \angle ACN=\angle MCB, \\ CN=CB, \end{cases}$

∴ $\triangle ACN \cong \triangle MCB$（SAS）.

∴ $AN=MB$.

(2) ∵ $\triangle ACN\cong\triangle MCB$，

∴ $\angle NAC=\angle BMC$.

∵ $\angle ACM+\angle MCN+\angle NCB=180^\circ$，$\angle ACM=\angle NCB=60^\circ$，

∴ $\angle MCN=60^\circ=\angle ACM$.

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle MCF$ 中，

∵ $\begin{cases} \angle NAC=\angle BMC, \\ AC=MC, \\ \angle ACM=\angle MCN, \end{cases}$

∴ $\triangle ACE \cong \triangle MCF$（ASA）.

∴ $CE=CF$.

∴ $\angle CEF=\angle CFE$（等边对等角）.

又∵ $\angle CEF+\angle CFE+\angle MCN=180^\circ$，

∴ $\angle CEF=\angle CFE=60^\circ=\angle MCN$.

∴ $\triangle CEF$ 是等边三角形（三个内角都相等的三角形是等边三角形）.

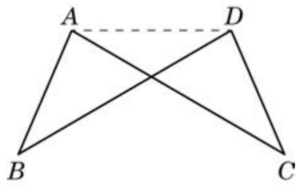
7. 如图，连接 AD.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle DCA$ 中，

$\because \begin{cases} AB=DC, \\ BD=CA, \\ AD=DA, \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle DCA$（SSS）.

$\therefore$ $\angle B=\angle C$.

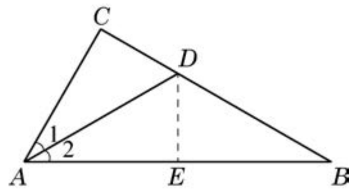


（第 7 题）

8. 如图，取 AB 的中点 E，连接 DE. $AE=BE=\frac{1}{2}AB$.

$\because$ $AC=\frac{1}{2}AB$,

$\therefore$ $AE=AC$.



（第 8 题）

在$\triangle CAD$ 和$\triangle EAD$ 中，

$\because \begin{cases} AC=AE, \\ \angle 1=\angle 2, \\ AD=AD, \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle CAD\cong\triangle EAD$（SAS）.

$\therefore$ $\angle C=\angle DEA$.

$\because$ $DA=DB$，$AE=BE$，

$\therefore$ $DE\perp AB$（等腰三角形三线合一）.

$\therefore$ $\angle DEA=90^\circ=\angle C$，

$\therefore$ $DC\perp AC$.

9.（1）$\triangle CBE\cong\triangle FBE$.

$\because$ $\triangle ABE$、$\triangle BCF$ 都是等边三角形，

$\therefore$ $BC=BF$，$\angle CBF=\angle ABE=60^\circ$（等边三角形的每个内角都等于 60°）.

$\therefore$ $\angle CBE=\angle CBA+\angle ABE=90^\circ+60^\circ=150^\circ$.

$\because$ $\angle FBE=360^\circ-\angle CBF-\angle CBA-\angle ABE=360^\circ-60^\circ-90^\circ-60^\circ=150^\circ$，

$\therefore$ $\angle CBE=\angle FBE$.

在$\triangle CBE$ 和$\triangle FBE$ 中，

$\because \begin{cases} BC=BF, \\ \angle CBE=\angle FBE, \\ BE=BE, \end{cases}$

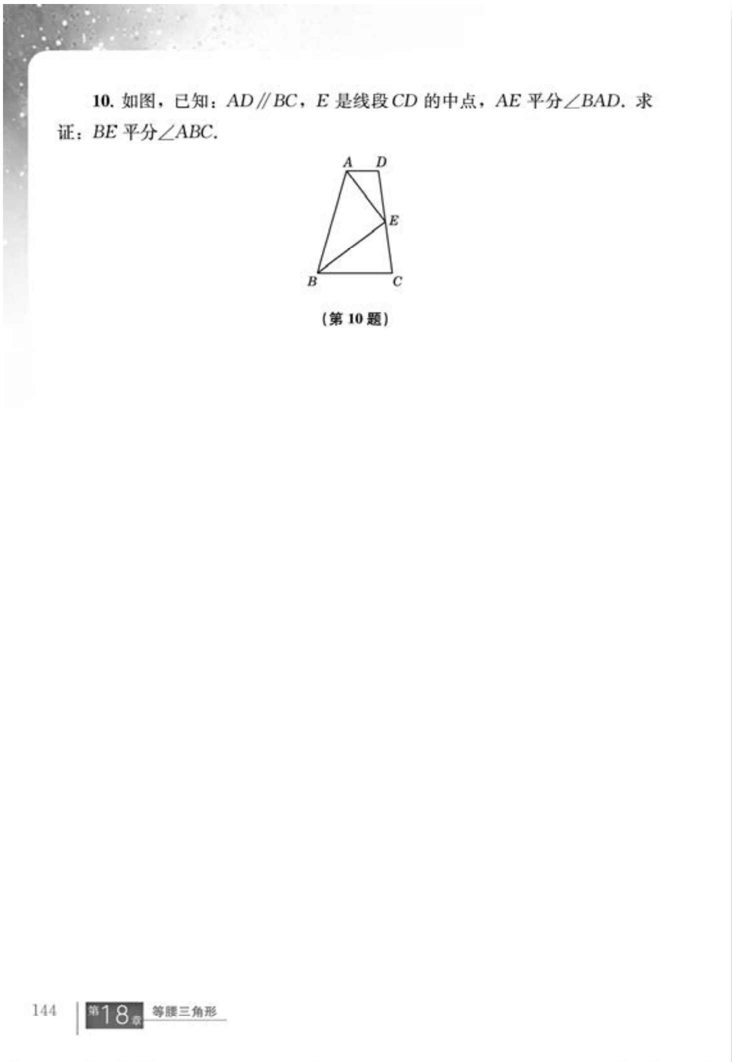
$\therefore$ $\triangle CBE\cong\triangle FBE$（SAS）.

（2）$BE\perp CF$.

$\because$ $\triangle CBE\cong\triangle FBE$，

$\therefore$ $EC=EF$，$\angle CEB=\angle FEB$.

$\therefore$ $BE\perp CF$（等腰三角形三线合一）.

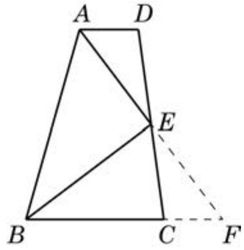


10. 如图，已知：$AD /\!/ BC$，E 是线段 CD 的中点，AE 平分$\angle BAD$. 求证：BE 平分$\angle ABC$.

（第 10 题）

144 第18章 等腰三角形

10. 如图，延长 AE、BC 交于点 F.



（第 10 题）

∵ AE 平分$\angle BAD$，

∴ $\angle DAE=\angle BAE$.

又∵ $AD /\!/ BC$，

∴ $\angle DAE=\angle F$（两直线平行，内错角相等）.

∴ $\angle BAE=\angle F$.

∴ $AB=BF$（等角对等边）.

在$\triangle ADE$ 和$\triangle FCE$ 中，

∵ $\begin{cases}\angle DAE=\angle F,\\ \angle AED=\angle FEC,\\ DE=EC,\end{cases}$

∴ $\triangle ADE \cong \triangle FCE$（AAS）.

∴ $AE=EF$，

即 BE 是$\triangle BAF$ 的中线.

∴ BE 平分$\angle ABC$（等腰三角形三线合一）.

综合与实践

积木可以叠多远?

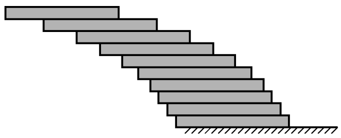
情境与主题分析

在一些视频网站可以看到名为“里拉斜塔”的有趣实验，其过程可概述如下：

大小和材质相同的长方体积木一层接着一层叠起并不断向外延伸. 神奇的是，随着积木越叠越多，最上层的积木已经越过最下层积木的边缘，但这些积木整体依然没有倒塌.

图 1 是上面描述的示意图，自然引出下面的问题：

- 如何解释这种现象?
- 如何延伸才能保证积木整体不倒塌?（此处积木均指材质均匀、大小相等的长方体，以下不再赘述.）
- 如果积木个数不限，能无限延伸吗?



（图 1）

本实践活动试图从初中生的角度出发对这些问题作一些探究，以丰富学生数学知识，提高科学素养.

活动过程分析

本实践活动是结合物理学科的项目式学习案例，虽然场景并不复杂，但是答案却并不显而易见. 考虑到七年级(下)学生的知识储备，我们将积木形状简化为长为 l、宽为 h 的长方形，并且只要求分析 5 块积木(延伸其中 4 块，第五块积木作为支撑固定)的情况. 活动过程对数学思维和表达均有较高的要求，因此，准备活动需要教师仔细讲解和及时总结，为后续活动开展打下基础.

准备活动

- **内容**

查看相关视频，准备实验材料，在教师指导下研究延伸 1 块积木的方法.

- **意图**

引导学生体会如何从最简单的问题出发，归纳解决一般问题的方法.

活动 1 延伸 2 块积木

- **内容**

研究积木①②组合的重心的初始位置和该组合延伸至最远时的重心位置，求出积木的最大延伸长度.

- **意图**

学习如何从 1 块积木的结果出发，研究 2 块积木组合的情况，引导学生体会如何从简单到复杂，逐步思考解决问题.

活动 2 延伸 3 块积木

- **内容**

研究积木①②③组合的重心的初始位置和该组合延伸至最远时的重心位置，求出积木的最大延伸长度.

- **意图**

学习如何从 2 块积木的结果出发，研究 3 块积木组合的情况，引导学生体会如何从简单到复杂，逐步思考解决问题.

活动 3 延伸 4 块积木

- **内容**

研究积木①②③④组合的重心的初始位置和该组合延伸至最远时的重心位置，求出积木的最大延伸长度.

- **意图**

独立探索如何从 3 块积木的结果出发，研究 4 块积木组合的情况，引导学生掌握如何从简单到复杂，逐步思考解决问题.

拓展活动

- **内容**

研究 n 块积木的情况，回答“是否可以将积木组合延伸至无穷远”的问题.

- **意图**

引导学生体会从具体到一般的思维过程和从有限到无限的数学思想.

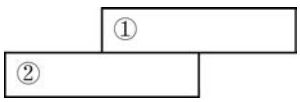
教学过程设计

本实践活动大约需要 3 个课时，可参考如下教学安排.

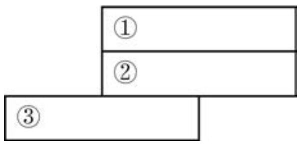
◎ **准备活动**

不难发现单个积木的重心在长方形中心位置，如教科书图 3(1)中的点 N_1 是积木①的重心. 两块积木叠在一起，如果上层积木的重心不越过下层积木的边缘，那么上层积木不会倒下；否则就会倒下. 除了活动 1，其余活动都涉及移动数块积木，为了方便教学和严密地推理，引入了“积木组合”这个名词，并将教科书第 147 页的三个预备知识提前列举如下.

定义：若干块叠在一起的积木称为积木组合，如图 2 所示.

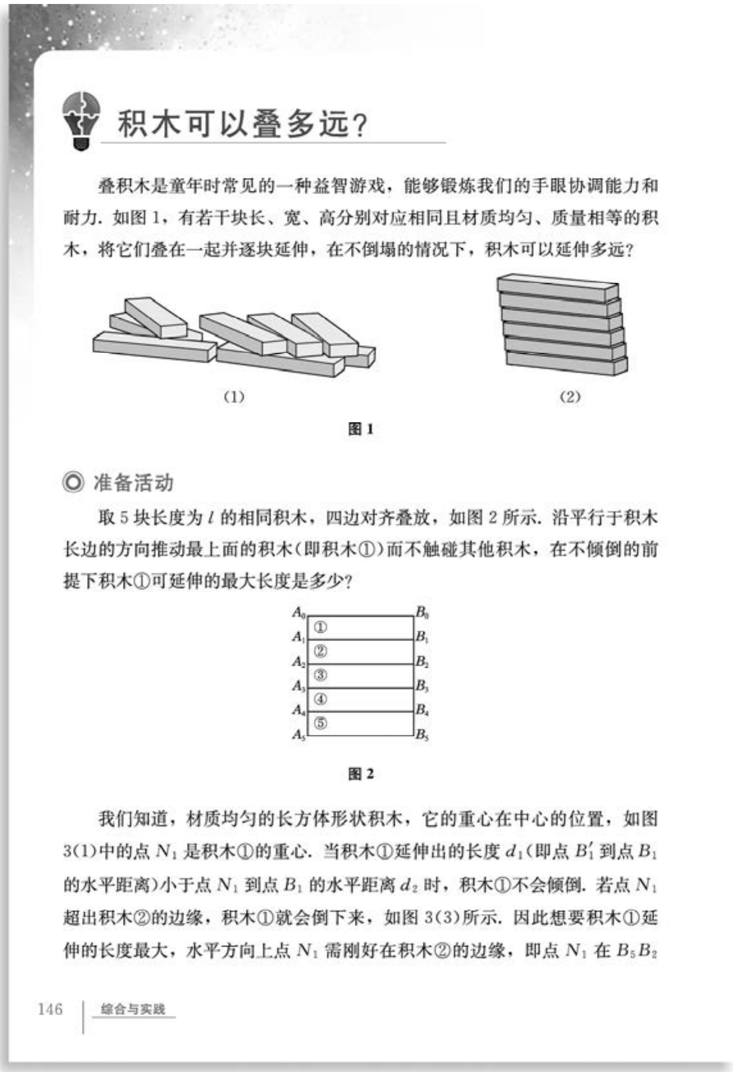


（积木①②组合）



（积木①②③组合）

（图 2）



积木可以叠多远?

叠积木是童年时常见的一种益智游戏，能够锻炼我们的手眼协调能力和耐力. 如图 1，有若干块长、宽、高分别对应相同且材质均匀、质量相等的积木，将它们叠在一起并逐块延伸，在不倒塌的情况下，积木可以延伸多远?

(1) (2)

图 1

◎ 准备活动

取 5 块长度为 l 的相同积木，四边对齐叠放，如图 2 所示. 沿平行于积木长边的方向推动最上面的积木(即积木①)而不触碰其他积木，在不倾倒的前提下积木①可延伸的最大长度是多少?

A_0 B_0 ① A_1 B_1 ② A_2 B_2 ③ A_3 B_3 ④ A_4 B_4 ⑤ A_5 B_5

图 2

我们知道，材质均匀的长方体形状积木，它的重心在中心的位置，如图 3(1)中的点 N_1 是积木①的重心. 当积木①延伸出的长度 d_1(即点 B_1' 到点 B_1 的水平距离)小于点 N_1 到点 B_1 的水平距离 d_2 时，积木①不会倾倒. 若点 N_1 超出积木②的边缘，积木①就会倒下来，如图 3(3)所示. 因此想要积木①延伸的长度最大，水平方向上点 N_1 需刚好在积木②的边缘，即点 N_1 在 B_5B_2

146 综合与实践

预备知识：

1. 积木组合的重心偏离最下层积木重心的水平距离，等于组合中各积木的重心偏离最下层积木重心的水平距离的平均数.

2. 积木组合重心的高度等于组合中各积木重心高度的平均数.

3. 两个积木组合叠在一起，如果上层积木组合的重心不越过最下层积木组合的边缘，那么上层积木组合不会倒下；否则就会倒下.

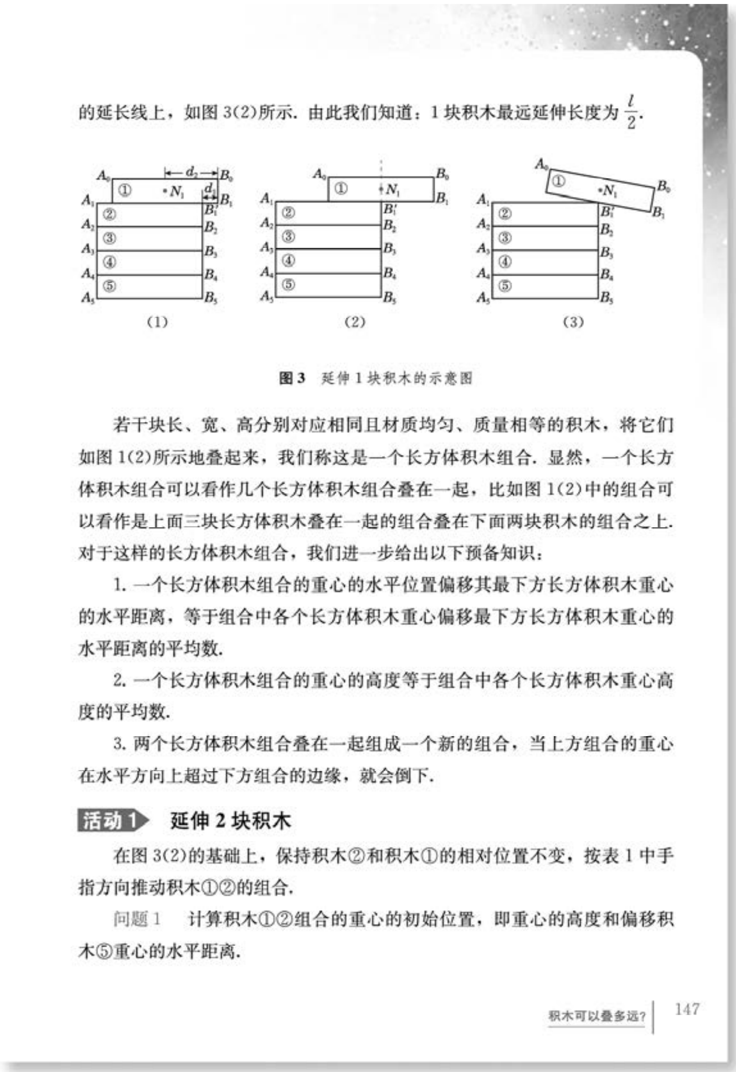

的延长线上，如图 3(2)所示．由此我们知道：1 块积木最远延伸长度为 $\frac{l}{2}$.

图 3　延伸 1 块积木的示意图

若干块长、宽、高分别对应相同且材质均匀、质量相等的积木，将它们如图 1(2)所示地叠起来，我们称这是一个长方体积木组合．显然，一个长方体积木组合可以看作几个长方体积木组合叠在一起，比如图 1(2)中的组合可以看作是上面三块长方体积木叠在一起的组合叠在下面两块积木的组合之上．对于这样的长方体积木组合，我们进一步给出以下预备知识：

1. 一个长方体积木组合的重心的水平位置偏移其最下方长方体积木重心的水平距离，等于组合中各个长方体积木重心偏移最下方长方体积木重心的水平距离的平均数．

2. 一个长方体积木组合的重心的高度等于组合中各个长方体积木重心高度的平均数．

3. 两个长方体积木组合叠在一起组成一个新的组合，当上方组合的重心在水平方向上超过下方组合的边缘，就会倒下．

活动 1　延伸 2 块积木

在图 3(2)的基础上，保持积木②和积木①的相对位置不变，按表 1 中手指方向推动积木①②的组合．

问题 1　计算积木①②组合的重心的初始位置，即重心的高度和偏移积木⑤重心的水平距离．

积木可以叠多远？　147

这样，将积木①看作上层组合，积木②③④⑤看作下层组合，在延伸过程中，如果点 N_1 不超过积木②的边缘，那么根据预备知识 3，积木①不会倒下．这意味着，当积木①的延伸长度 d_1（即点 B_1' 到点 B_1 的水平距离）小于点 N_1 到点 B_1 的水平距离 $d_2=\frac{1}{2}l$ 时，积木①不会倒下．否则，积木①就会倒下（如教科书图 3(3) 所示）．而重心的最大延伸长度就是积木的最大延伸长度，因此，当 N_1 移至积木②的边缘时，积木①延伸长度最大，为 $d_1=d_2=\frac{1}{2}l$（如教科书图 3(2)所示）．于是有：1 块积木的最大延伸长度等于 $\frac{1}{2}l$.

- **注意事项**

1. 单个积木延伸过程比较简单，但因为涉及最基本的物理原理和判别准则，需要教师仔细讲解，说明道理．特别地，教师需要讲明“积木组合”的意义，这是为了准确描述叠积木过程中“上层”的延伸部分和“下层”的不动部分．

2. 教师可以启发学生或者直接给出如下三个思维要点：

（1）通过计算所移动的积木①的重心与下层积木②③④⑤组合的重心的水平距离，也就是与最下层积木⑤的重心的水平距离，决定积木①重心的水平位置．

（2）将判断“所移动的积木①的重心是否超过下方积木边缘”转化为判断“重心的延伸长度是否大于 $\frac{1}{2}l$”．

（3）所移动的积木①的最大延伸长度等于其重心的最大延伸长度．

以上三个要点将在后续活动中发挥关键作用．

- **建议课时**　1 课时

活动 1

问题 1：活动 1 的初始状态就是准备活动的结果，此时，积木①和积木②的重心相对于积木⑤的高度分别等于 $\frac{7}{2}h$、$\frac{5}{2}h$. 根据预备知识 2，积木①②组合重心的高度＝(积木①重心的高度＋积木②重心的高度)÷2＝$3h$.

在初始状态，积木①和积木②的重心偏离积木②重心的水平距离分别等于 $\frac{1}{2}l$、0. 根据预备知识 1，积木①②组合的重心偏离积木②重心的水平距离 $=\dfrac{\frac{1}{2}l+0}{2}=\frac{1}{4}l$. 因为此时积木②与积木⑤的重心处于相同的水平位置，所以积木①②组合的重心偏离积木⑤重心的水平距离也是 $\frac{1}{4}l$.

的延长线上，如图 3(2)所示. 由此我们知道：1 块积木最远延伸长度为 $\frac{l}{2}$.

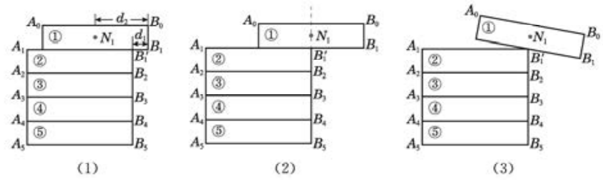


图 3 延伸 1 块积木的示意图

若干块长、宽、高分别对应相同且材质均匀、质量相等的积木，将它们如图 1(2)所示地叠起来，我们称这是一个长方体积木组合. 显然，一个长方体积木组合可以看作几个长方体积木组合叠在一起，比如图 1(2)中的组合可以看作是上面三块长方体积木叠在一起的组合叠在下面两块积木的组合之上. 对于这样的长方体积木组合，我们进一步给出以下预备知识：

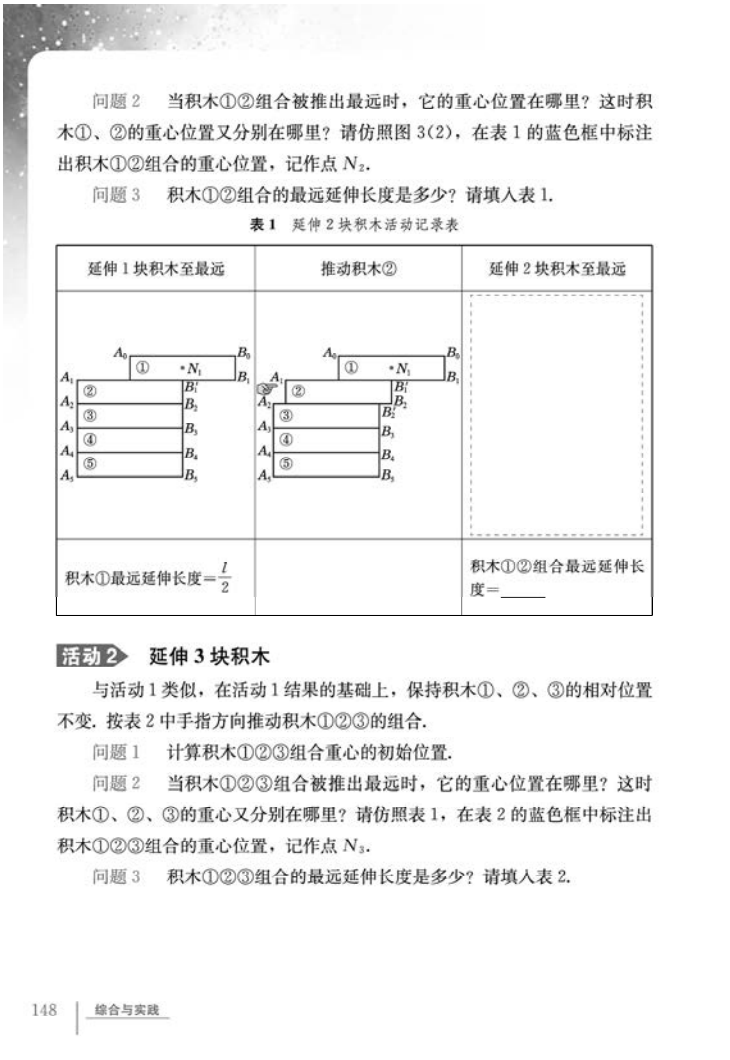
1. 一个长方体积木组合的重心的水平位置偏移其最下方长方体积木重心的水平距离，等于组合中各个长方体积木重心偏移最下方长方体积木重心的水平距离的平均数.
2. 一个长方体积木组合的重心的高度等于组合中各个长方体积木重心高度的平均数.
3. 两个长方体积木组合叠在一起组成一个新的组合，当上方组合的重心在水平方向上超过下方组合的边缘，就会倒下.

活动 1 **延伸 2 块积木**

在图 3(2)的基础上，保持积木②和积木①的相对位置不变，按表 1 中手指方向推动积木①②的组合.

问题 1　计算积木①②组合的重心的初始位置，即重心的高度和偏移积木⑤重心的水平距离.

积木可以叠多远？ 147



问题 2　当积木①②组合被推出最远时，它的重心位置在哪里？这时积木①、②的重心位置又分别在哪里？请仿照图 3(2)，在表 1 的蓝色框中标注出积木①②组合的重心位置，记作点 N_2.

问题 3　积木①②组合的最远延伸长度是多少？请填入表 1.

表 1　延伸 2 块积木活动记录表

延伸 1 块积木至最远	推动积木②	延伸 2 块积木至最远
积木①最远延伸长度 $=\frac{l}{2}$		积木①②组合最远延伸长度 $=$______

活动 2　**延伸 3 块积木**

与活动 1 类似，在活动 1 结果的基础上，保持积木①、②、③的相对位置不变. 按表 2 中手指方向推动积木①②③的组合.

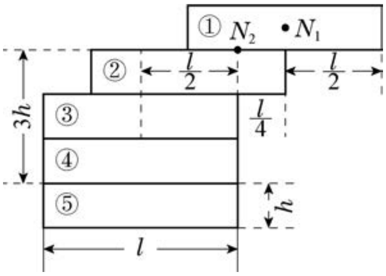
问题 1　计算积木①②③组合重心的初始位置.

问题 2　当积木①②③组合被推出最远时，它的重心位置在哪里？这时积木①、②、③的重心又分别在哪里？请仿照表 1，在表 2 的蓝色框中标注出积木①②③组合的重心位置，记作点 N_3.

问题 3　积木①②③组合的最远延伸长度是多少？请填入表 2.

148　综合与实践

问题 2：由预备知识 3，当积木①②组合被推出最远时，重心位置应在积木③④⑤组合的右侧边缘，此时偏离积木⑤重心的水平距离等于 $\frac{1}{2}l$，而水平方向延伸不改变重心高度，所以表 1 蓝框中可填入图 3，其中 N_2 标记积木①②组合的重心位置.



(图 3)

此时组合重心平移了 $\frac{1}{2}l-\frac{1}{4}l=\frac{1}{4}l$，积木①和积木②重心偏离积木⑤重心的水平距离也增加了 $\frac{1}{4}l$，分别为 $\frac{1}{2}l+\frac{1}{4}l=\frac{3}{4}l$ 和 $0+\frac{1}{4}l=\frac{1}{4}l$.

问题 3：积木①单个已延伸 $\frac{1}{2}l$，组合又延伸 $\frac{1}{4}l$，所以此时最远延伸长度 $=\frac{1}{2}l+\frac{1}{4}l=\frac{3}{4}l$.

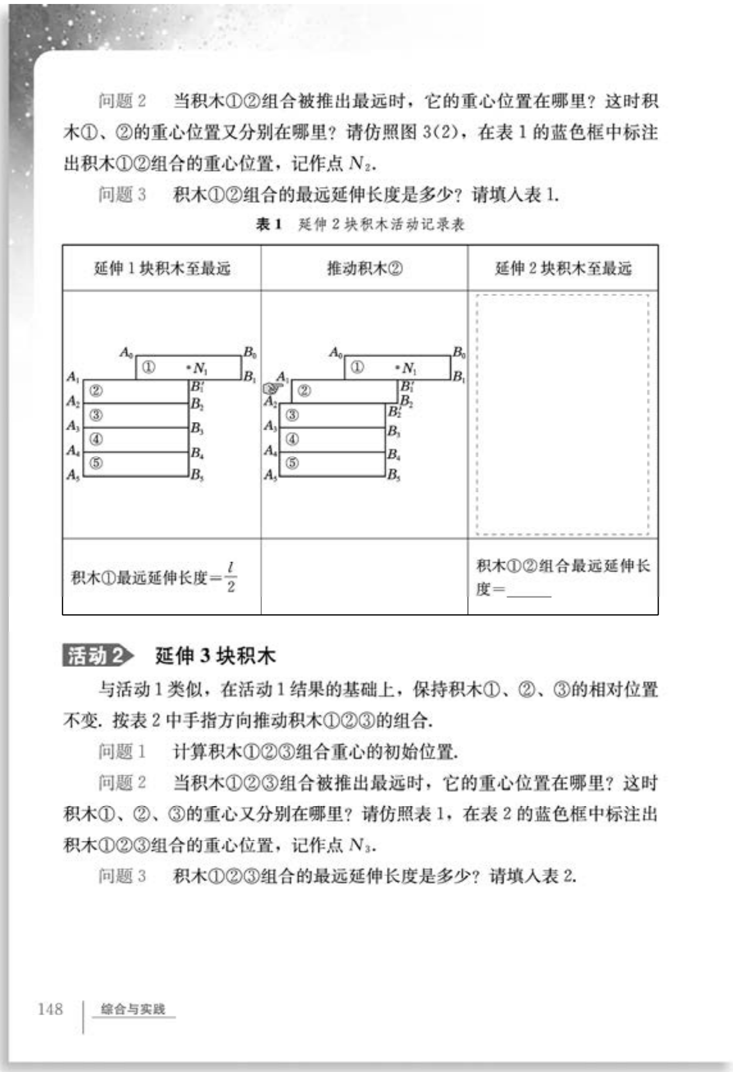
- **注意事项**

本活动主要在教师的指导下完成，过程中要给学生适当的思考时间，启发他们根据问题和预备知识，理解前述的三个思维要点，尝试自主找到解题思路，并给出书面表述.

- **建议课时**　1 课时

活动 2

问题 1：在初始位置，积木①、积木②和积木③的重心相对于积木⑤的高度分别等于 $\frac{7}{2}h$、$\frac{5}{2}h$、$\frac{3}{2}h$. 根据预备知识 2，积木①②③组合重心的高度 $=\dfrac{\frac{7}{2}h+\frac{5}{2}h+\frac{3}{2}h}{3}=\frac{5}{2}h$. 积木①、积木②和积木③的重心偏离积木⑤重心的水平距离分别等于 $\frac{3}{4}l$、$\frac{1}{4}l$、0，根据预备知识 1，积木①②③组合重心偏离积木⑤重心的水平距离 $=\dfrac{\frac{3}{4}l+\frac{1}{4}l+0}{3}=\frac{1}{3}l$.



问题 2　当积木①②组合被推出最远时，它的重心位置在哪里？这时积木①、②的重心位置又分别在哪里？请仿照图 3(2)，在表 1 的蓝色框中标注出积木①②组合的重心位置，记作点 N_2.

问题 3　积木①②组合的最远延伸长度是多少？请填入表 1.

表 1　延伸 2 块积木活动记录表

延伸 1 块积木至最远	推动积木②	延伸 2 块积木至最远
积木①最远延伸长度 $=\frac{l}{2}$		积木①②组合最远延伸长度 $=$______

活动 2　**延伸 3 块积木**

与活动 1 类似，在活动 1 结果的基础上，保持积木①、②、③的相对位置不变. 按表 2 中手指方向推动积木①②③的组合.

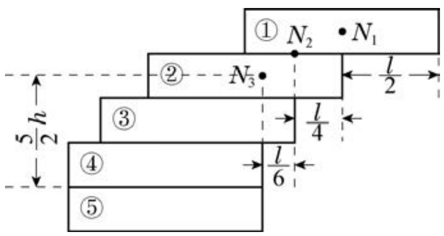
问题 1　计算积木①②③组合重心的初始位置.

问题 2　当积木①②③组合被推出最远时，它的重心位置在哪里？这时积木①、②、③的重心又分别在哪里？请仿照表 1，在表 2 的蓝色框中标注出积木①②③组合的重心位置，记作点 N_3.

问题 3　积木①②③组合的最远延伸长度是多少？请填入表 2.

148　综合与实践

问题 2：由预备知识 3，当积木①②③组合被推出最远时，重心位置应在积木④⑤组合的右侧边缘，此时偏离积木⑤重心的水平距离等于 $\frac{l}{2}$，而水平方向延伸不改变重心高度，所以表 2 蓝框中可填入图 4，其中积木①②③组合的重心如 N_3 所标记.



(图 4)

由于组合重心平移了 $\frac{1}{2}l-\frac{1}{3}l=\frac{1}{6}l$，各积木重心也平移同样距离，积木①、积木②和积木③重心偏离积木⑤重心的水平距离也增加了 $\frac{1}{6}l$，分别为 $\frac{3}{4}l+\frac{1}{6}l=\frac{11}{12}l$、$\frac{1}{4}l+\frac{1}{6}l=\frac{5}{12}l$、

$0+\frac{1}{6}l=\frac{1}{6}l.$

问题 3：相应地，最远延伸长度$=\frac{3}{4}l+\frac{1}{6}l=\frac{11}{12}l.$

- **注意事项**

在活动 1 的基础上，在过程中，教师可给予学生更多的自主思考时间，鼓励更多的学生参与到问题的求解过程，提高学生的积极性和参与度.

- **建议课时** 0.5 课时

活动 3

问题 1：在初始位置，积木①、积木②、积木③和积木④的重心相对于积木⑤的高度分别等于 $\frac{7}{2}h$、$\frac{5}{2}h$、$\frac{3}{2}h$、$\frac{1}{2}h$. 根据预备知识 2，积木①②③④组合重心的高度 $=\dfrac{\frac{7}{2}h+\frac{5}{2}h+\frac{3}{2}h+\frac{1}{2}h}{4}=2h$. 积木①、积木②、积木③和积木④的重心偏离积木⑤重心的水平距离分别等于 $\frac{11}{12}l$、$\frac{5}{12}l$、$\frac{1}{6}l$、0. 根据预备知识 1，积木①②③④组合重心偏离积木⑤重心的水平距离 $=\dfrac{\frac{11}{12}l+\frac{5}{12}l+\frac{1}{6}l+0}{4}=\frac{3}{8}l$.

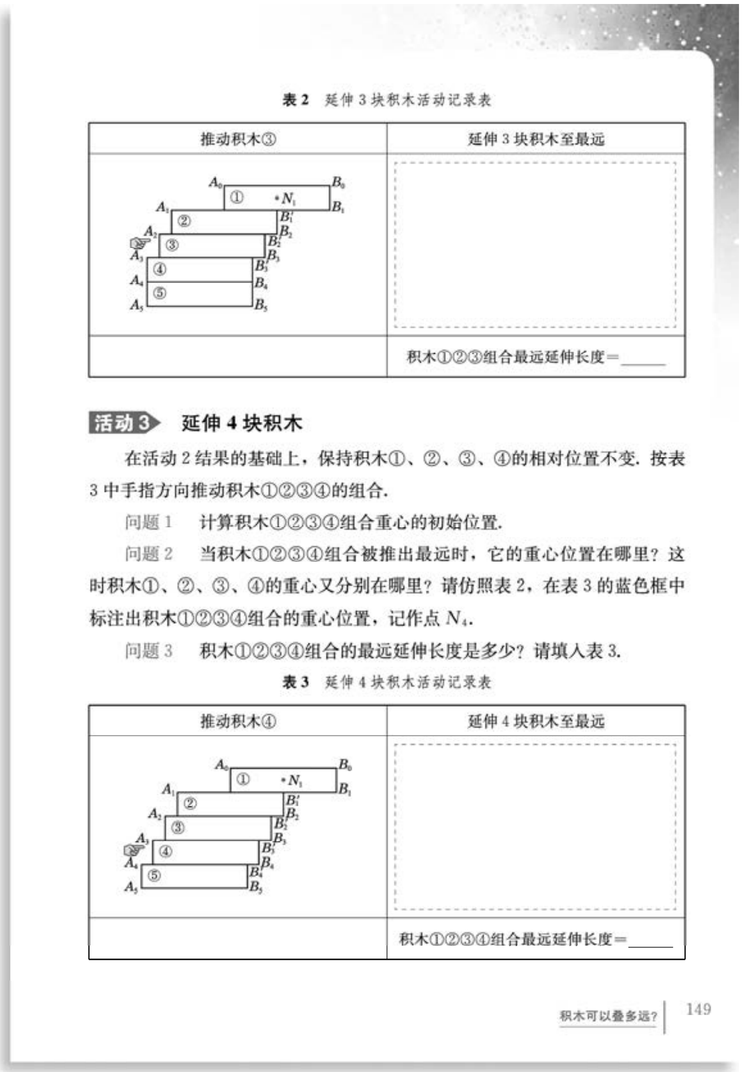


表 2　延伸 3 块积木活动记录表

推动积木③	延伸 3 块积木至最远
	积木①②③组合最远延伸长度=______

活动3　**延伸 4 块积木**

在活动 2 结果的基础上，保持积木①、②、③、④的相对位置不变. 按表 3 中手指方向推动积木①②③④的组合.

问题 1　计算积木①②③④组合重心的初始位置.

问题 2　当积木①②③④组合被推出最远时，它的重心位置在哪里？这时积木①、②、③、④的重心又分别在哪里？请仿照表 2，在表 3 的蓝色框中标注出积木①②③④组合的重心位置，记作点 N_4.

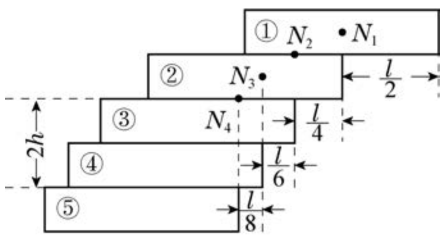
问题 3　积木①②③④组合的最远延伸长度是多少？请填入表 3.

表 3　延伸 4 块积木活动记录表

推动积木④	延伸 4 块积木至最远
	积木①②③④组合最远延伸长度=______

积木可以叠多远？　149

问题 2：由预备知识 3，当积木①②③④组合被推出最远时，重心位置应在积木⑤右侧边缘，此时偏离积木⑤重心的水平距离等于 $\frac{l}{2}$，而水平方向延伸不改变重心高度. 因此表 3 蓝框中可填入图 5，其中 N_4 标记积木①②③④组合的重心.



（图 5）

由于组合重心平移了 $\frac{1}{2}l-\frac{3}{8}l=\frac{1}{8}l$，各积木重心也平移同样距离，积木①、积木②、

积木③和积木④重心偏离积木⑤重心的水平距离也增加了$\frac{1}{8}l$，分别为$\frac{11}{12}l+\frac{1}{8}l=\frac{25}{24}l$、$\frac{5}{12}l+\frac{1}{8}l=\frac{13}{24}l$、$\frac{1}{6}l+\frac{1}{8}l=\frac{7}{24}l$、$0+\frac{1}{8}l=\frac{1}{8}l$.

问题 3：相应地，最远延伸长度$=\frac{11}{12}l+\frac{1}{8}l=\frac{25}{24}l$.

- **注意事项**

基于活动 1、活动 2 的经验，本活动可安排学生分组进行，自主探索问题的求解并报告结果.

- **建议课时**　0.5 课时

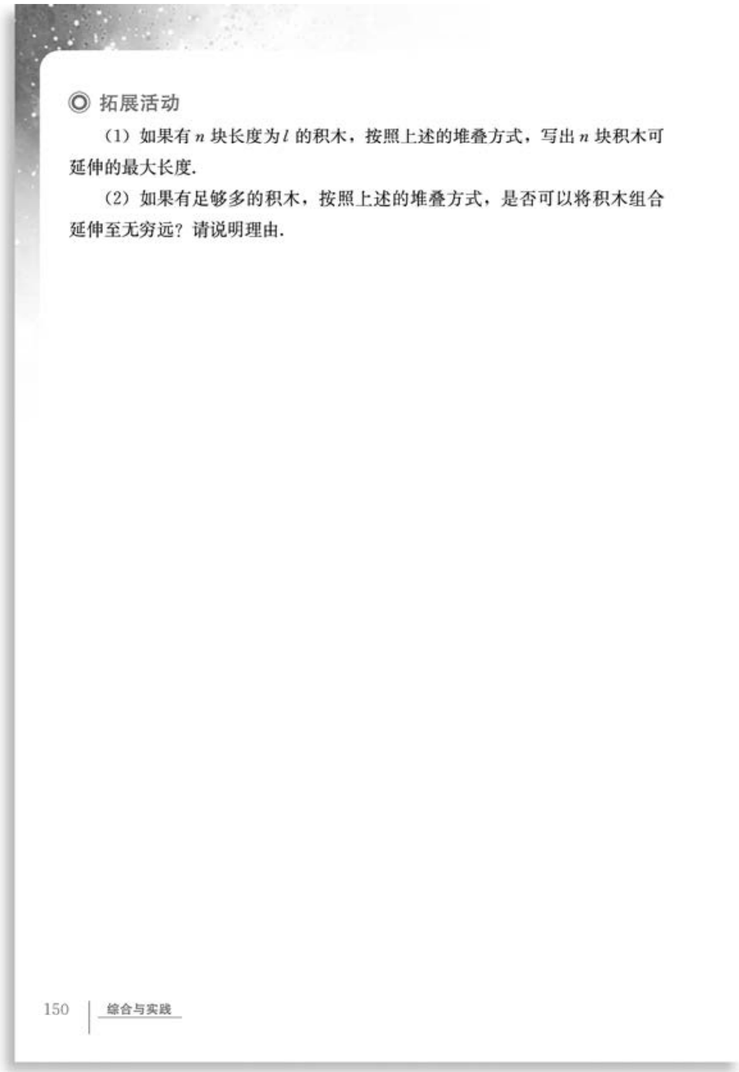
◎ **拓展活动**

（1）如下表一.

（2）当 n 无限增大时，数列 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ 变成调和级数 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$. 根据微积分知识，可以知道这个级数将趋于无穷大. 这意味着，如果不考虑其他因素，积木是可以无限延伸的，由此，开始的第三个问题也得到解答.

• **注意事项**

本拓展活动内容远超初中要求，仅适合少部分有兴趣的学生.


◎ 拓展活动

（1）如果有 n 块长度为 l 的积木，按照上述的堆叠方式，写出 n 块积木可延伸的最大长度.

（2）如果有足够多的积木，按照上述的堆叠方式，是否可以将积木组合延伸至无穷远？请说明理由.

150 | 综合与实践

表一

积木数	最大延伸长度
1	$\frac{1}{2}l$
2	$\frac{1}{2}l+\frac{1}{4}l=\frac{1}{2}l+\frac{1}{2\times2}l$
3	$\frac{1}{2}l+\frac{1}{4}l+\frac{1}{6}l=\frac{1}{2}l+\frac{1}{2\times2}l+\frac{1}{2\times3}l$
4	$\frac{1}{2}l+\frac{1}{4}l+\frac{1}{6}l+\frac{1}{8}l=\frac{1}{2}l+\frac{1}{2\times2}l+\frac{1}{2\times3}l+\frac{1}{2\times4}l$
…	…
n	$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)l$

评价建议

本实践活动主要通过教师课堂讲解和引导，由学生个人完成，评价主要根据三个活动中学生对各个问题的解答正确程度，分别由学生和教师进行打分(最高 5 分，最低 1 分).

表二　学生自评

学生姓名：						
活动	**问题**	**评分**				
		5	**4**	**3**	**2**	**1**
活动 1	问题 1					
	问题 2					
	问题 3					
活动 2	问题 1					
	问题 2					
	问题 3					
活动 3	问题 1					
	问题 2					
	问题 3					

表三　教师评价

学生姓名：						
活动	**问题**	**评分**				
		5	**4**	**3**	**2**	**1**
活动 1	问题 1					
	问题 2					
	问题 3					
活动 2	问题 1					
	问题 2					
	问题 3					
活动 3	问题 1					
	问题 2					
	问题 3					

最后，教师可综合以上两个表格对每名学生在本次活动中的表现作出评价.

田径比赛中的数学

情境与主题分析

在青少年教育中，体育发挥了重要作用，不仅有助于青少年身体健康，也有利于发展他们积极向上的人格和合作共赢的团队精神. 随着生活水平的不断提高，人们参与体育运动的热情日益高涨，各种类型的体育公共设施如雨后春笋般出现在城市的各个角落，从大型的体育场馆到小型的社区内体育健身场所，极大地方便了市民参与体育运动，满足了群众体育健身的需要.

青少年处于身心发展的特殊阶段，对体育运动尤为热忱. 田径运动由于对场地和技术的入门要求较低，成为青少年参与的最常见的体育项目. 但是，看似平淡无奇的田径赛场，从铅球、跳远、跳高等田赛项目成绩的测定，到径赛跑道的起跑线和终点线的设置，都蕴含了相当丰富的数学知识.

活动过程分析

本实践活动以“田径比赛中的数学”为任务情境，引导学生了解田赛中的铅球、跳远、跳高比赛的成绩的评定过程，以及径赛跑道的设置，帮助学生形成用数学眼光观察现实世界的素养.

田赛项目成绩确定中的数学

- **内容**

活动 1：师生共同研究铅球比赛成绩测定的方法，寻找其中的数学依据“两点之间的距离”.

活动 2、活动 3：学生可以借助书籍或网络了解跳远比赛和跳高比赛的成绩测量方法，自主总结归纳出其中的数学依据，分别为“点到直线的距离”和“两条平行线间的距离”.

- **意图**

1. 学生能够用几何知识解释铅球、跳远、跳高等项目的成绩测定.
2. 学生逐渐形成用数学的眼光观察现实世界的素养.

径赛跑道中的数学

- **内容**

活动 1：学生自由分组，建议每组 3 或 4 人. 分组后自主通过书籍或网络查询相关资料，完成表格的填写.

活动 2：各小组根据活动 1 得到的数据计算第 1 跑道与第 2 跑道的 400 米起跑线之间的距离.

活动 3：各小组根据实际情况选择跑道进行实际测量，给出判断.

- **意图**

1. 学生能够引用所学的圆周长和弧长公式计算跑道长度.

2. 学生通过实际测量跑道 400 米起跑线之间的距离，掌握简单的测量工具的使用.

3. 通过分组合作，发展学生团队合作的意识和能力.

绘制示意图

• **内容**

活动 1、活动 2：学生分组合作，利用尺规按照一定的比例在白纸上画出跑道和铅球(或实心球)投掷区的平面示意图.

活动 3：在班级中进行展示，并且进行互评.

• **意图**

1. 学生进一步理解和掌握比例尺在绘图中的应用.

2. 学生能用尺规画线段、圆、弧等基本几何图形.

教学过程设计

本综合与实践活动由个人活动和小组活动组成. 个人活动，旨在独立寻找解释铅球、跳远、跳高比赛成绩确定的数学依据，小组活动要完成跑道中的数学问题和跑道、铅球赛场平面示意图的绘制.

田径比赛中的数学

我国田径运动员在国际体育赛事中屡获佳绩，我们在为运动员的精彩表现鼓掌时有没有想过田径比赛和数学的关系？

田赛项目成绩确定中的数学

活动 1 **铅球比赛成绩的确定**

学校的铅球场地，由投掷区、抵趾板和落地区组成，如图 1 所示．运动员推出的铅球着地后会留下痕迹．裁判员会按照如下步骤测量并给出成绩：

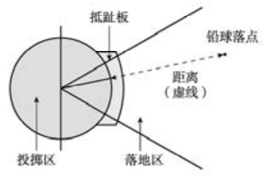


图 1 铅球场地平面图

1. 将皮尺的零刻度线拉至铅球落点；
2. 将皮尺的另一端拉长并经过投掷区的圆心；
3. 将皮尺拉直，读取皮尺上落在投掷区抵趾板内沿处的数值，作为运动员的成绩．

从上面的步骤中，你能找到铅球比赛成绩确定的数学依据吗？请用数学语言表示铅球运动员的成绩．

活动 2 请查阅资料，叙述跳远比赛成绩的确定方法，并说明其依据的数学原理．

活动 3 请查阅资料，叙述跳高比赛成绩的确定方法，并说明其依据的数学原理．

田径比赛中的数学 151

田赛项目成绩确定中的数学

- **教学设计**

1. 教师进行主题活动引入，询问班级学生对田径比赛中各项比赛的了解程度.

2. 教师提出本节课的活动任务：了解田赛项目成绩确定中的数学.

3. 教师组织学生了解铅球比赛场地的示意图，并深入理解铅球比赛的规则与成绩确定的方法.

4. 师生合作，给出铅球比赛成绩确定的数学依据.

5. 教师再提出活动 2 和活动 3，由学生自主进行探究，找到其中的数学依据，并且在班级层面进行交流.

- **注意事项**

1. 教师在主题活动引入时可以借助多种方式展现我国运动员在田赛中各项比赛的精彩场面，激发学生的兴趣.

2. 在活动 2 和活动 3 的探究过程中，教师要及时地给予帮助，引导学生根据所学的几何知识进行分析和解释. 其中，“两条平行线间的距离”的概念将在八年级的教科书中给出，此处教师可以适当补充.

3. 在学生阐述活动 2 和活动 3 的数学依据时，教师应该关注学生语言的准确性.

4. 在完成 3 个活动后，教师还可以引导学生思考其他田赛项目成绩确定的数学依据.

- **建议课时** 1 课时

径赛跑道中的数学

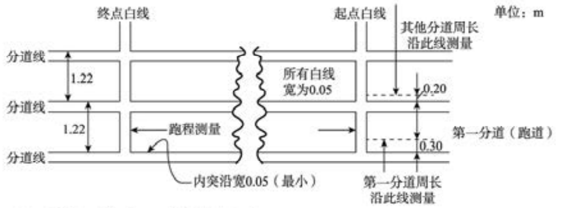
我们在观看田径比赛时，会注意到径赛跑道上有很多标志线. 例如 400 m 比赛的起跑线在每个赛道上是不同的，这是为什么呢?

图 2　田径赛场

活动 1 请查阅 400 m 标准跑道的相关数据，并填空.

名称(400 m 标准跑道)	长度或宽度(单位：m)	数据来源
第一分道(跑道)(最内侧)周长测量线的长度		
分道线(白线)的宽度		
一条分道的标准宽度(沿跑进方向的右侧分道线的宽度计入每条分道的宽度)		
弯道最内侧半径		
一侧弯道最内侧长度(两侧弯道长度相等)		
直道长度		

径赛规则规定，第一分道(跑道)周长的测量线是距离内突沿的外沿 0.30 m 处，其余各条分道的周长测量线是距离里侧分道线的外沿 0.20 m 处.



注：图中比例未统一，数据仅供参考.

图 3　跑道长度测量点位示意图

(引用：国家市场监督管理总局和国家标准化管理委员会发布. 体育场地使用要求及检验方法第 6 部分：田径场地. 2020 - 11 - 19 发布，第 12 页.)

152 | 综合与实践

径赛跑道中的数学

- **教学设计**

1. 教师组织学生分组，可以自愿组合，也可以用抽签等其他方法. 每一小组建议以 3 或 4 人为宜.

2. 小组内推选组长，确定小组名字.

3. 自主通过书籍或网络查询相关资料，并且完成教科书中表格的填写.

4. 各小组根据活动 1 得到的数据计算第 1 跑道与第 2 跑道的 400 米起跑线之间的距离.

5. 各小组根据实际情况选择跑道进行实地测量，给出判断.

- **注意事项**

1. 在活动 1 的探究过程中，教师应及时关注学生所得数据.

2. 教师应该选择在适当的时机帮助学生复习圆周长和弧长的计算公式.

3. 活动 3 可以安排在课内 10 分钟或者课后进行，教师可以根据实际情况进行选择.

4. 实际测量的工具应该提前准备.

- **建议课时**　1 课时
- **参考数据(表一)**

表一

名称(400 m 标准跑道)	长度或宽度(单位：m)	数据来源
第一分道(跑道)(最内侧)周长测量线的长度	400	
分道线(白线)的宽度	0.05	
一条分道的标准宽度(沿跑进方向的右侧分道线的宽度计入每条分道的宽度)	1.22	

（续表）

名称(400 m 标准跑道)	长度或宽度(单位：m)	数据来源
弯道最内侧半径	36.5	
一侧弯道最内侧长度(两侧弯道长度相等)	231.1	
直道长度	84.4	

第 1 跑道和第 2 跑道 400 m 起跑线之间的距离＝(36.5＋1.22＋0.2)×3.14×2－231.1＝7.04 m.

说明：由于查阅的途径不同，数据存在误差，答案不唯一.

活动2 请根据活动1的数据，通过计算，确定400 m比赛时，第2跑道的起跑线与第1跑道的起跑线应该相差多少(结果精确到0.01 m)?

活动3 请通过实际测量，判断你所在学校或附近体育场馆的跑道比赛起跑线的设置是否规范，如果不规范，请给出合理的修改建议.

绘制示意图

活动1 测量你所在的学校或附近体育场馆的跑道数据，根据测量所得数据绘制平面示意图.

活动2 测量你所在的学校的铅球(或实心球)投掷区的数据，根据测量所得数据绘制平面示意图.

活动3 制作展示海报，在班级进行交流，互相学习，总结不足，并改进示意图.

绘制示意图

- **教学设计**

1. 学生分组合作，利用尺规按照一定的比例在白纸上画出跑道和铅球(或实心球)投掷区的平面示意图.

2. 各小组进行所绘图形的分享交流.

3. 教师组织小组与小组之间的分析和点评. 教师提供平面示意图的评价表.

4. 各小组在班级其他学生点评的基础上进一步完善所绘示意图.

- **注意事项**

1. 实地测量的时候应注意安全，教师应指导学生关注测量数据的精度.

2. 图形应该手工绘制，再拍照(扫描)为电子稿，不建议用电脑绘图.

3. 在每小组平面示意图展示后，教师应启发和鼓励学生，并讨论是否有改进的需要.

- **建议课时** 1课时

评价建议

本实践活动结合了个人活动和小组活动．各小组需要分工合作，统筹考虑各种因素．因此可以从小组成员活动情况和小组活动结果两个方面来评价学生的综合与实践活动表现．

表二　小组成员活动情况表

<table>
<tr><td colspan="2">学生姓名：</td><td colspan="4">所在小组名称：</td></tr>
<tr><td colspan="6">小组分工（主要负责哪些任务）：</td></tr>
<tr><th rowspan="2">活动内容</th><th colspan="5">评分</th></tr>
<tr><th>5</th><th>4</th><th>3</th><th>2</th><th>1</th></tr>
<tr><td>团队合作</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>独立思考</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>数学运算</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>数学表达</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>活动兴趣</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>总体表现</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

表三　小组活动结果评价表

<table>
<tr><td colspan="2">学生姓名：</td><td colspan="4">所在小组名称：</td></tr>
<tr><th rowspan="2">活动内容</th><th colspan="5">评分</th></tr>
<tr><th>5</th><th>4</th><th>3</th><th>2</th><th>1</th></tr>
<tr><td>平面示意图的规范性</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>平面示意图的科学性</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>平面示意图的美观性</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>汇报表现</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>团队表现</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

最后，教师综合以上两个表格对每名学生在本次活动中的表现作出评价．

附录

《练习部分》参考答案与提示

第 15 章　一元一次不等式

15.1　不等式及其性质

课后练习 15.1(1)

1.（1）$a^2+2>2a$．（2）$|a|\geqslant 0$．（3）$3x+2<4$．（4）$1-a^2\leqslant 1$．

2.（1）$\frac{2}{11}<\frac{3}{11}<\frac{5}{11}$．（2）$\frac{7}{15}<\frac{7}{13}<\frac{7}{3}$．（3）$\frac{3}{4}<\frac{4}{5}<\frac{5}{6}$．

3.（1）×．（2）×．（3）√．

4. 5.

课后练习 15.1(2)

1. ①②.

2.（1）$>$．（2）$<$．（3）$\geqslant$．（4）$\leqslant$．

3.（1）不等式性质 2．（2）不等式性质 3．（3）不等式性质 5．（4）不等式性质 4．

4.（1）√．（2）×．（3）√．（4）×．（5）√．

5.（1）由 $a\leqslant 3$，推得 $2a\leqslant 6$，从而 $2a+1\leqslant 7$．

（2）由 $a^2+b^2\geqslant c^2+2ab$，得 $a^2+b^2-2ab\geqslant c^2$，所以$(a-b)^2\geqslant c^2$，即 $c^2\leqslant(a-b)^2$．

15.2　一元一次不等式

课后练习 15.2(1)

1.（1）4.5、4.999．（2）3、-4.2、0、$-4\frac{3}{5}$．（3）4.5、4、4.999．

2.（1）3．（2）-4、-2、1.999、2、$-\frac{10}{3}$．

3.（1）√．（2）√．（3）√．（4）√．

4. 2.

5. 是．根据不等式的解的意义有 $2p>3$，$2q>3$，于是由不等式性质 2，得 $2p+2q>6$，从而 $2\left(\frac{p+q}{2}\right)>3$，所以$\frac{p+q}{2}$是不等式 $2x>3$ 的解．

课后练习 15.2(2)

1. (1) $x>\frac{2}{3}$. (2) $x\geqslant\frac{2}{3}$.

2. (1) $x<-\frac{5}{2}$. (2) $x>\frac{7}{5}$.

3. (1) $x>\frac{7}{5}$. (2) $x\leqslant\frac{7}{5}$.

4. (1) $x<-3$. (2) $x\leqslant-3$. 数轴上的表示略.

5. 不等式 $ax>4x+a$ 即 $(a-4)x>a$，其与 $x>5$ 的解集相同，所以 $a-4>0$ 且 $\frac{a}{a-4}=5$，由此得 $a=5$. 因而不等式 $ax+2a>2(3x+4)$ 化为 $5x+10>6x+8$，其解集为 $x<2$.

课后练习 15.2(3)

1. 设该书有 x 页. 依题意，得 $x-8\times15\leqslant\frac{1}{7}x$，解得 $x\leqslant140$.

答：该书最多有 140 页.

2. 设这个锐角为 x °，则其余角为 $(90-x)°$.

依题意，得 $x\leqslant90-x$，解得 $x\leqslant45$.

答：这个锐角最大为 45°.

3. 设圆柱和圆锥的高为 x m，则圆柱和圆锥的体积分别为 $25\pi x$ m³ 和 $\frac{25\pi x}{3}$ m³.

依题意，得 $25\pi x-\frac{25\pi x}{3}\geqslant8\pi$，解得 $x\geqslant\frac{12}{25}$，即 $x\geqslant0.48$.

答：高最少为 0.48 m.

4. 设合唱队原有 x 人，则新合唱队有 $(x+5)$ 人.

依题意，得 $\frac{1}{3}x+5\geqslant\frac{4}{9}(x+5)$，解得 $x\leqslant25$. 所以 $x+5\leqslant30$.

答：新合唱队最多有 30 人.

5. 设三个连续正偶数分别为 $2x$、$2(x+1)$、$2(x+2)$. 依题意，得 $2x+2(x+1)+2(x+2)\geqslant1\,000$，解得 $2x\geqslant\frac{994}{3}$.

因为 x 是正整数，所以 $2x$ 的最小值是 332.

答：其中满足条件的最小正偶数是 332.

15.3　一元一次不等式组

课后练习 15.3(1)

1. (1) $x>2$. (2) $x<-2$. (3) $x=3$. (4) $-3\leqslant x<2$.

2. (1) $x>4$. (2) $x<0.205$.

3. 3.

4. 2.

5. $m>9$. 提示：方程组的解为 $\begin{cases} x=2m-1, \\ y=m+8. \end{cases}$ 因为 $x>y$，所以 $2m-1>m+8$，解得 $m>9$.

课后练习 15.3(2)

1.（1）不等式组的解集为 $-\frac{4}{7}\leqslant x<6$，又因为 x 是整数，所以 x 可取 0、1、2、3、4、5.

（2）不等式组的解集为 $-\frac{8}{3}<x\leqslant\frac{3}{2}$，又因为 x 是整数，所以 x 可取 -2、-1、0、1.

2. $4\leqslant a<5$. 提示：借助数轴求解.

3. 设原长方形另一边长为 x，则 $4x\leqslant(4+2)(x+2)-4x<2\times4x$，解得 $2<x\leqslant6$. 由于 x 是整数，因此原长方形另一边的长为 3、4、5 或 6.

4. 设 $n<a\leqslant n+1$，其中 n 是正整数，即 a 介于两个相邻整数 n 与 $(n+1)$ 之间. 依题意，得 $(n+1-20)\times800\times1.5\%=120$，解得 $n=29$，所以 $29<a\leqslant30$.

第 16 章　相交线与平行线

16.1　相交线

课后练习 16.1(1)

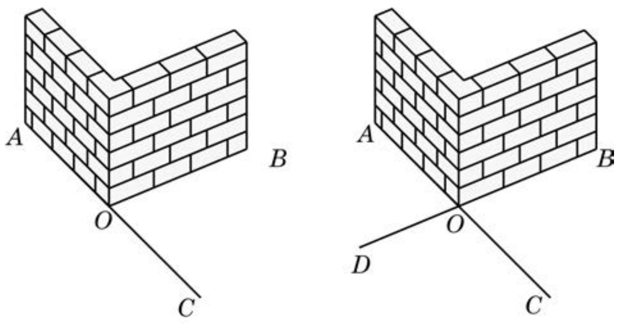
1. 有公共顶点的两个角不一定是对顶角. 如图所示的 $\angle1$ 和 $\angle2$ 不是对顶角.

（第 1 题）

2.（1）对顶角；补角；余角. （2）40；50；140.

3.（1）$\angle3$、$\angle7$. （2）$\angle8=\angle120^\circ$.

4. 方法一：如图(1)，延长 AO 到点 C，测量 $\angle BOC$ 的度数，利用相邻补角的数量关系求 $\angle AOB$，$\angle AOB=180^\circ-\angle BOC$.



(1)　　(2)

（第 4 题）

方法二：如图(2)，延长 AO 到点 C，延长 BO 到点 D，测量 $\angle DOC$ 的度数，利用“对顶角相等”求 $\angle AOB$，$\angle AOB=\angle DOC$.

5.（1）对顶角；对顶角相等；BOD；20.

（2）因为$\angle COE=80^\circ$，$\angle AOC=20^\circ$，所以$\angle AOE=\angle AOC+\angle COE=20^\circ+80^\circ=100^\circ$.

因为 OF 平分$\angle AOE$，所以$\angle AOF=\frac{1}{2}\angle AOE=50^\circ$.

所以$\angle COF=\angle AOF-\angle AOC=50^\circ-20^\circ=30^\circ$.

6. 略.

课后练习 16.1(2)

1. C.

2. 在同一平面上，经过一点有且只有一条直线垂直于已知直线.

3. (1)(2)(3)略. （4）PC. （5）PD.

4. $\angle COD$、$\angle BOE$. 提示：由 $OD\perp AB$，得$\angle AOD=\angle BOD=90^\circ$，所以$\angle AOC$ 与$\angle COD$ 互余，$\angle DOE$ 与$\angle BOE$ 互余. 由 $OC\perp OE$，得$\angle COE=90^\circ$，所以$\angle DOC$ 与$\angle DOE$ 互余. 由“同角的余角相等”，得$\angle AOC=\angle DOE$，因此$\angle AOC$ 与$\angle BOE$ 互余（也可从$\angle AOC+\angle BOE=180^\circ-90^\circ=90^\circ$得到此结论）.

5. $AB\perp GH$，$CD\perp EF$. 理由略.

6.（1）$\angle DOE=45^\circ$.

（2）$\angle DOE$ 的大小不变. 理由如下：

因为 $AO\perp OB$，所以$\angle AOB=90^\circ$. 因为 OD、OE 分别平分$\angle AOC$ 和$\angle BOC$，所以$\angle COD=\frac{1}{2}\angle AOC$，$\angle COE=\frac{1}{2}\angle BOC$，所以$\angle DOE=\angle COD+\angle COE=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle COB=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle COB)=\frac{1}{2}\angle AOB=45^\circ$.

所以$\angle DOE$ 的大小不变.

16.2 平行线

课后练习 16.2(1)

1. C.

2. ②④.

3. 经过直线外的一点，有且只有一条直线与该直线平行.

4. 略.

5.（1）平行；经过直线外的一点，有且只有一条直线与该直线平行. （2）平行；平行；平行的传递性.

课后练习 16.2(2)

1. AD；BC；AB.

2. D.

3. $\angle 1$；$\angle 2$；同位角相等，两直线平行.

4. 180；$\angle 1$；$\angle 3$；同位角相等，两直线平行.

5. 180；DAC；DAC；DAC；$\angle B$；$\angle DAE$；同位角相等，两直线平行.

课后练习 16.2(3)

1. 64.

2. 同位角相等，两直线平行；a；c；平行的传递性；两直线平行，同位角相等；60.

3. $\angle 1$；$\angle 3$；EM；AD；同位角相等，两直线平行；$\angle M$；$\angle 2$；两直线平行，同位角相等.

4. 180；$\angle B$；$\angle C$；DAE；DAE；$\angle B$；$\angle C$；两直线平行，同位角相等.

5. $\angle ABC=\angle DEF$. 理由如下：

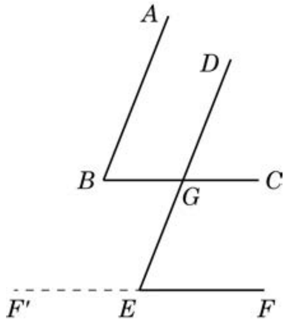
∵ $AB /\!/ DE$，

∴ $\angle ABC=\angle DGC$（两直线平行，同位角相等）.

∵ $BC /\!/ EF$，

∴ $\angle DGC=\angle DEF$（两直线平行，同位角相等）.

∴ $\angle ABC=\angle DEF$.



（第 5 题）

小华的想法不正确. 这两个角除相等外，也可能是互补关系. 如图，在原图上延长 FE 至点 F'，此时$\angle F'ED$ 与$\angle ABC$ 也满足角的两边分别平行，但它们是互补关系.

课后练习 16.2(4)

1. AB；CD；BD.

2. D.

3. B.

4.（1）两直线平行，内错角相等；$\angle EBC$；$\angle BCF$；两直线平行，内错角相等；$\angle ABC$；$\angle EBC$；$\angle BCD$；$\angle BCF$.

（2）∵ $AB /\!/ CD$，

∴ $\angle ABC=\angle BCD$（两直线平行，内错角相等）.

∵ $\angle 1=\angle 2$，

∴ $\angle ABC-\angle 1=\angle BCD-\angle 2$.

∴ $\angle EBC=\angle BCF$.

∴ $BE /\!/ CF$（内错角相等，两直线平行）.

（3）∵ $\angle ABC=\angle BCD$，

∴ $AB /\!/ CD$（内错角相等，两直线平行）.

∵ BE 平分$\angle ABC$，

∴ $\angle CBE=\dfrac{1}{2}\angle ABC$.

同理，$\angle BCF=\dfrac{1}{2}\angle BCD$.

∵ $\angle ABC=\angle BCD$，

∴ $\angle CBE=\angle BCF$.

∴ $BE\parallel CF$（内错角相等，两直线平行）.

5. ∵ CB 平分$\angle DCH$，

∴ $\angle BCD=\angle BCH$.

∵ $AC\perp BC$，

∴ $\angle ACD+\angle BCD=90°$.

又∵ $\angle ACD+\angle BCD+\angle ACG+\angle BCH=180°$，

∴ $\angle ACG+\angle BCH=90°$.

∴ $\angle ACD=\angle ACG$.

∵ $\angle ACD$ 比$\angle BCH$ 的 2 倍少 3°，

∴ $\angle ACG=\angle ACD=2\angle BCH-3°$.

∴ $2\angle BCH-3°+\angle BCH=90°$.

∴ $\angle BCH=31°$.

∴ $\angle ACG=59°$.

∵ $EF\parallel GH$，

∴ $\angle DAC=\angle ACG$（两直线平行，内错角相等）.

∴ $\angle DAC=59°$.

课后练习 16.2(5)

1. B.

2. 答案不唯一，合理即可. 提示：若给出$\angle BAD=\angle B$，用“内错角相等，两直线平行”证明 $DE\parallel BC$；若给出$\angle BAE+\angle B=180°$，用“同旁内角互补，两直线平行”证明 $DE\parallel BC$.

3. (1) ∵ BF、DE 分别平分$\angle ABD$、$\angle BDC$，

∴ $\angle ABD=2\angle 1$，$\angle BDC=2\angle 2$.

∵ $AB\parallel CD$，

∴ $\angle ABD+\angle BDC=180°$（两直线平行，同旁内角互补）.

∴ $2\angle 1+2\angle 2=180°$.

∴ $\angle 1+\angle 2=90°$.

(2) ∵ $\angle 2=40°$，

又由(1)，知$\angle 1+\angle 2=90°$，

∴ $\angle 1=90°-\angle 2=50°$.

∵ $AB\parallel CD$，

∴ $\angle 1+\angle 3=180°$（两直线平行，同旁内角互补）.

∴ $\angle 3=180°-\angle 1=130°$.

4. $\angle 2$；内错角相等，两直线平行；两直线平行，同旁内角互补.

5. 不发生变化. 提示：过点 B 作 $BG\parallel AE$，再由 $CD\parallel AE$，可得 $CD\parallel BG\parallel AE$. 再证

$\angle BAE+\angle ABC+\angle BCD=360°$，从而$\angle ABC+\angle BCD=270°$.

课后练习 16.2(6)

1. A.

2. B.

3.（1）$\angle 1+\angle 2=90°$时，$AB/\!/CD$．理由如下：

∵ EG 平分$\angle BEF$，FH 平分$\angle DFE$，

∴ $\angle BEF=2\angle 1$，$\angle DFE=2\angle 2$.

∵ $\angle 1+\angle 2=90°$，

∴ $\angle BEF+\angle DFE=180°$.

∴ $AB/\!/CD$（同旁内角互补，两直线平行）.

（2）$\angle 1=\angle 2$ 时，$AB/\!/CD$．理由如下：

∵ EG 平分$\angle BEM$，FH 平分$\angle DFE$，

∴ $\angle BEM=2\angle 1$，$\angle DFE=2\angle 2$.

∵ $\angle 1=\angle 2$，

∴ $\angle BEM=\angle DFE$.

∴ $AB/\!/CD$（同位角相等，两直线平行）.

（3）$\angle 1=\angle 2$ 时，$AB/\!/CD$．理由如下：

∵ EG 平分$\angle AEF$，FH 平分$\angle DFE$，

∴ $\angle AEF=2\angle 1$，$\angle DFE=2\angle 2$.

∵ $\angle 1=\angle 2$，

∴ $\angle AEF=\angle DFE$.

∴ $AB/\!/CD$（内错角相等，两直线平行）.

4. ∵ $DE/\!/BA$，

∴ $\angle DEC=\angle A$（两直线平行，同位角相等）.

∵ $\angle FDE=\angle A$，

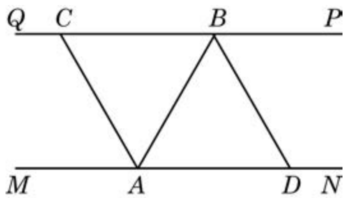
∴ $\angle FDE=\angle DEC$.

∴ $DF/\!/CA$（内错角相等，两直线平行）.

5.（1）60.

（2）设当灯 A 发出的光束转动 t s时，两灯发出的光束互相平行．易知当两灯发出的光束第一次互相平行时，$0<t\leqslant 90$，如图，$\angle CAM=(2t)°$，$\angle PBD=(30+t)°$.

因为 $PQ/\!/MN$，所以由“两直线平行，内错角相等”，得$\angle PBD=\angle BDA$．因为 $AC/\!/BD$，所以由“两直线平行，同位角相等”，得$\angle CAM=\angle BDA$．所以$\angle CAM=\angle PBD$，所以 $2t=30+t$，解得 $t=30$．所以当灯 A 发出的光束转动 30 s 时，两灯发出的光束第一次互相平行.



（第 5 题）

16.3　命题与证明

课后练习 16.3(1)

1. D.

2. A.

3. C.

4.（1）如果两个角相等，那么它们的补角相等；真命题.

（2）如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线平行；真命题.

（3）如果两个角是对顶角，那么它们的平分线成一条直线；真命题.

（4）如果两个角的两边分别平行，那么它们相等；假命题.

课后练习 16.3(2)

1. B.

2. ②③.　提示：① 由 $ab>0$，可得 a、b 同号，又因为 $a+b>0$，所以 $a>0$ 且 $b>0$，故①为真命题；② 令 $a=-1$，$b=-2$，则 $ab=2>0$，且 $b<a<0$，故②为假命题；③ 若 $a\neq b$，$c=0$，也有 $ac=bc$，故③为假命题；④ 若一个锐角为 α，其补角为 $180^\circ-\alpha$，余角为 $90^\circ-\alpha$，则 $180^\circ-\alpha-(90^\circ-\alpha)=90^\circ$，所以一个锐角的补角比它的余角大 90°，故④为真命题.

3.（1）3.

（2）① 已知：$\angle 1=\angle 2$，$\angle C=\angle D$. 求证：$\angle A=\angle F$.

证明：$\because$　$\angle 1=\angle 2$，$\angle 2=\angle AGC$（对顶角相等），

$\therefore$　$\angle 1=\angle AGC$.

$\therefore$　$DB/\!/EC$（同位角相等，两直线平行）.

$\therefore$　$\angle C=\angle ABD$（两直线平行，同位角相等）.

又$\because$　$\angle C=\angle D$，

$\therefore$　$\angle D=\angle ABD$.

$\therefore$　$DF/\!/AC$（内错角相等，两直线平行）.

$\therefore$　$\angle A=\angle F$（两直线平行，内错角相等）.

② 已知：$\angle 1=\angle 2$，$\angle A=\angle F$. 求证：$\angle C=\angle D$.

证明：$\because$　$\angle 1=\angle 2$，$\angle 2=\angle AGC$（对顶角相等），

$\therefore$　$\angle 1=\angle AGC$.

$\therefore$　$DB/\!/EC$（同位角相等，两直线平行）.

$\therefore$　$\angle C=\angle ABD$（两直线平行，同位角相等）.

$\because$　$\angle A=\angle F$，

$\therefore$　$DF/\!/AC$（内错角相等，两直线平行）.

$\therefore$　$\angle D=\angle ABD$（两直线平行，内错角相等）.

$\therefore$　$\angle C=\angle D$.

③ 已知：$\angle C=\angle D$，$\angle A=\angle F$. 求证：$\angle 1=\angle 2$.

证明：$\because$ $\angle A=\angle F$，

$\therefore$ $DF/\!/AC$（内错角相等，两直线平行）.

$\therefore$ $\angle D=\angle ABD$（两直线平行，内错角相等）.

又$\because$ $\angle C=\angle D$，

$\therefore$ $\angle ABD=\angle C$.

$\therefore$ $DB/\!/EC$（同位角相等，两直线平行）.

$\therefore$ $\angle 1=\angle AGC$（两直线平行，同位角相等）.

又$\because$ $\angle 2=\angle AGC$（对顶角相等），

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$.

4. 提示：由题意，知 $\overline{bc}=4k$，k 是整数. 又因为 $\overline{abc}=100a+\overline{bc}=4(25a+k)$，所以 $\overline{abc}$ 是 4 的倍数.

第 17 章　三角形

17.1　三角形的有关概念

课后练习 17.1(1)

1. C.

2. $-5<a<-2$.

3.（1）10 cm.（2）5 cm 或 8 cm.

4. 原式$=(a-c)^2-b^2=(a-c+b)(a-c-b)$.

$\because$ $a+b>c$，$b+c>a$，

$\therefore$ $(a-c+b)(a-c-b)<0$.

$\therefore$ $a^2-b^2+c^2-2ac$ 的值为负数.

课后练习 17.1(2)

1. B.

2. 略.

3.（1）略.（2）$\triangle ABD$ 的面积是$\triangle BCD$ 的面积的两倍.

4. 设线段 AD 的长为 x cm，则 $CD=x$ cm，$AB=2x$ cm. 设 $BC=y$ cm，则有$\begin{cases}2x+x=15,\\x+y=6\end{cases}$或$\begin{cases}2x+x=6,\\x+y=15.\end{cases}$ 分别解方程组，得$\begin{cases}x=5,\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=2,\\y=13\end{cases}$（舍去）. 所以边 BC 的长为 1 cm.

17.2　三角形的内角和

课后练习 17.2(1)

1. D.

2. (1) 91°. (2) 40°；60°；80°. (3) 40°；80°.

3. $\angle A=90°$.

4. $\angle DAE=4°$.

5. 此三角形是钝角三角形. 理由如下：

由$\angle A>3\angle B$，$\angle A>\frac{3}{2}\angle C$，得$\angle B<\frac{1}{3}\angle A$，$\angle C<\frac{2}{3}\angle A$，可知$\angle A$ 是$\triangle ABC$ 的最大内角.

根据“三角形的内角和等于 180°”，得$\angle A+\angle B+\angle C=180°$. 所以$\angle A+\frac{1}{3}\angle A+\frac{2}{3}\angle A>180°$，即 $2\angle A>180°$，亦即$\angle A>90°$. 因此，此三角形是钝角三角形.

课后练习 17.2(2)

1. (1) 30. (2) 15.

2. $\angle DPC=75°$.

3. $\angle A=30°$.

4. $\angle 1=25°$，$\angle 2=25°$，$\angle 3=115°$.

5. 设$\angle B=x°$，则$\angle D=\angle BAC=x°$.

∵ $\angle ACD=\angle B+\angle BAC=(2x)°$（三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和），

∴ $\angle CAD=\angle ACD=(2x)°$，$\angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=(3x)°$.

∵ $\angle B+\angle BAD+\angle D=180°$（三角形的内角和等于 180°），

∴ $x+3x+x=180$.

∴ $x=36$.

∴ $\angle BAD=108°$.

课后练习 17.2(3)

1. B.

2. (1) 230. (2) 35. (3) 360.

3. $\angle DFE=115°$.

4. $\angle ABC$ 和$\angle BDC$. 理由略.

5. 提示：由$\angle A=38°$，$\angle O=90°$，$\angle B=25°$，知$\angle ACB=153°\neq 150°$. 所以这个机器零件不合格.

17.3 全等三角形及其性质

课后练习 17.3

1. 略.

2. D.

3. $\angle DEF$；$\angle EFD$；DE；DF；EF；CE.

4. ∵ $\angle P+\angle Q+\angle R=180°$（三角形的内角和等于 180°），$\angle Q=41°$，$\angle R=62°$，

∴ $\angle P=180°-41°-62°=77°$.

又∵ $\triangle ABC\cong\triangle PQR$，

∴ $\angle A=\angle P$，$AC=PR$（全等三角形的对应角相等，对应边相等）.

∴ $\angle A=77°$，$AC=15$ cm.

5. ∵ $\triangle ABC\cong\triangle EBD$，

∴ $\angle A=\angle BED$，$\angle C=\angle D$（全等三角形的对应角相等）.

又∵ $\angle D=20°$，

∴ $\angle C=20°$.

∵ $\angle CGF+\angle CFG+\angle C=180°$（三角形的内角和等于 180°），且$\angle CFG=90°$，

∴ $\angle CGF=180°-\angle CFG-\angle C=180°-90°-20°=70°$.

∵ $\angle CBE=18°$，且$\angle BFE=\angle CFG=90°$（对顶角相等），

∴ $\angle BED=\angle CBE+\angle BFE=18°+90°=108°$（三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和）.

∴ $\angle A=108°$.

17.4　三角形全等的判定

课后练习 17.4(1)

1. 略.

2. 在$\triangle ABD$ 与$\triangle CDB$ 中，

∵ $\begin{cases} AB=CD, \\ AD=CB, \\ BD=DB, \end{cases}$

∴ $\triangle ABD\cong\triangle CDB$（SSS）.

∴ $\angle A=\angle C$（全等三角形的对应角相等）.

3. AC；AC；SSS；全等三角形的对应角相等.

4. AE；CF；AD；CB；SSS；全等三角形的对应角相等.

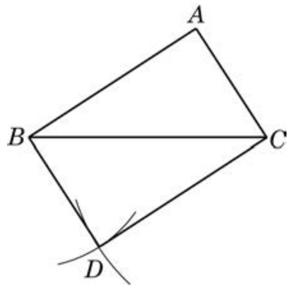
5. 3 个，图略.

课后练习 17.4(2)

1. 略.

2. 略.

3. 略.



（第 4 题）

4. 作图如图所示. 根据作法，可知 $AC=BD$，$AB=DC$.

在$\triangle ABC$ 与$\triangle DCB$ 中，

∵ $\begin{cases} AC=DB, \\ AB=DC, \\ BC=CB, \end{cases}$

∴ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$（SSS）.

5. 提示：根据“三角形的内角和定理”，可知$\angle C=180^\circ-(\angle\alpha+\angle\beta)$．由已知$\angle\alpha$、$\angle\beta$，利用直尺和圆规可以作出$\angle C$，所以该问题转化为已知两角$\angle B$、$\angle C$及其夹边$a$作三角形的问题.

课后练习 17.4(3)

1. 略.

2. ∵ $\angle 1=\angle 2$，

∴ $\angle 1+\angle BAC=\angle 2+\angle BAC$.

∴ $\angle EAC=\angle DAB$.

在$\triangle ABD$与$\triangle ACE$中，

$$\because \begin{cases} AB=AC, \\ \angle DAB=\angle EAC, \\ AD=AE, \end{cases}$$

∴ $\triangle ABD \cong \triangle ACE$（SAS）.

∴ $\angle D=\angle E$（全等三角形的对应角相等）.

3. AM；AN；$\angle DAM$；$\angle EAN$；AD；AE；SAS；全等三角形的对应角相等；DAM，三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和；EAN；三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和.

4. ∵ AB、CD的中点都是O，

∴ $AO=BO$，$CO=DO$.

在$\triangle AOC$和$\triangle BOD$中，

$$\because \begin{cases} AO=BO, \\ \angle AOC=\angle BOD\text{（对顶角相等）}, \\ CO=DO, \end{cases}$$

∴ $\triangle AOC \cong \triangle BOD$（SAS）.

∴ $AC=BD$（全等三角形的对应边相等）.

因此，只要测得AC的长，就可知工件内径BD的长.

课后练习 17.4(4)

1. 略.

2. 两直线平行，同位角相等；两直线平行，同位角相等.

$$\because \begin{cases} \angle B=\angle FDC, \\ BD=DC, \\ \angle BDE=\angle C, \end{cases}$$

∴ $\triangle BDE \cong \triangle DCF$（ASA）.

∴ $BE=DF$（全等三角形的对应边相等）.

3. ∵ $AC /\!/ BD$，

∴ $\angle A=\angle B$（两直线平行，内错角相等）.

∵ O 是线段 AB 的中点，

∴ $AO=BO$.

在$\triangle AOC$ 和$\triangle BOD$ 中，

∵ $\begin{cases}\angle A=\angle B,\\ AO=BO,\\ \angle AOC=\angle BOD\text{（对顶角相等）},\end{cases}$

∴ $\triangle AOC\cong\triangle BOD$（ASA）.

∴ $AC=BD$（全等三角形的对应边相等）.

4. 可以. 带第③块碎片去. 因为它保留了原三角形的两个角及其夹边，根据三角形全等的判定方法——“角边角”，可以作出一个与原三角形全等的三角形.

课后练习 17.4(5)

1. $\angle D$；$\angle B$；OA；OC；AAS；全等三角形的对应边相等.

2. ∵ $PM\perp AB$，$PN\perp BC$，

∴ $\angle PMB=90^\circ$，$\angle PNB=90^\circ$.

∴ $\angle PMB=\angle PNB$.

在$\triangle BDM$ 与$\triangle PDN$ 中，

∵ $\begin{cases}\angle BDM=\angle PDN\text{（对顶角相等）},\\ \angle BMD=\angle PND,\\ BM=PN,\end{cases}$

∴ $\triangle BDM\cong\triangle PDN$（AAS）.

∴ $BD=PD$（全等三角形的对应边相等）.

3. ∵ $\angle BED=\angle CED$，

∴ $180^\circ-\angle BED=180^\circ-\angle CED$.

∴ $\angle AEB=\angle AEC$.

在$\triangle ABE$ 与$\triangle ACE$ 中，

∵ $\begin{cases}\angle ABE=\angle ACE,\\ \angle AEB=\angle AEC,\\ AE=AE,\end{cases}$

∴ $\triangle ABE\cong\triangle ACE$（AAS）.

∴ $BE=CE$（全等三角形的对应边相等）.

4. ∵ $FC\parallel AB$，

∴ $\angle A=\angle ECF$，$\angle ADE=\angle F$（两直线平行，内错角相等）.

在$\triangle ADE$ 与$\triangle CFE$ 中，

∵ $\begin{cases}\angle A=\angle ECF,\\ \angle ADE=\angle F,\\ DE=FE,\end{cases}$

∴ $\triangle ADE \cong \triangle CFE$（AAS）.

∴ $AE = CE$（全等三角形的对应边相等）.

5.（1）答案不唯一，合理即可. 提示：若添加条件 $AB = AC$，$AD = AE$，根据“边角边”，可以判定$\triangle ABD \cong \triangle ACE$；若添加条件 $AB = AC$，$\angle ABD = \angle ACE$，根据“角边角”，可以判定$\triangle ABD \cong \triangle ACE$；若添加条件 $AB = AC$，$\angle ADB = \angle AEC$，根据“角角边”，可以判定$\triangle ABD \cong \triangle ACE$；等等.

（2）答案不唯一，合理即可. 提示：若添加条件 $EB = DC$，$EC = DB$，根据“边边边”，可以判定$\triangle EBC \cong \triangle DCB$；若添加条件 $EB = DC$，$\angle EBC = \angle DCB$，根据“边角边”，可以判定$\triangle EBC \cong \triangle DCB$；若添加条件$\angle BEC = \angle CDB$，$\angle EBC = \angle DCB$，根据“角角边”，可以判定$\triangle EBC \cong \triangle DCB$；等等.

（3）答案不唯一，合理即可. 提示：若添加条件 $OE = OD$，$OB = OC$，根据“边角边”，可以判定$\triangle EBO \cong \triangle DCO$；若添加条件 $OE = OD$，$\angle BEO = \angle CDO$，根据“角边角”，可以判定$\triangle EBO \cong \triangle DCO$；若添加条件 $EB = DC$，$\angle BEO = \angle CDO$，根据“角角边”，可以判定$\triangle EBO \cong \triangle DCO$；等等.

课后练习 17.4(6)

1. B.

2. ∵ AD 是$\triangle ABC$ 的角平分线，

∴ $\angle BAD = \angle DAC$.

∵ $\angle ADC = \angle ABD + \angle BAD$（三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和）.

又∵ $\angle DBE = \angle BAD$，

∴ $\angle ADC = \angle ABD + \angle DBE$.

又∵ $\angle ABE = \angle ABD + \angle DBE$，

∴ $\angle ABE = \angle ADC$.

在$\triangle ABE$ 与$\triangle ADC$ 中，

$$\because \begin{cases} \angle ABE = \angle ADC, \\ AB = AD, \\ \angle BAE = \angle DAC, \end{cases}$$

∴ $\triangle ABE \cong \triangle ADC$（ASA）.

∴ $BE = DC$（全等三角形的对应边相等）.

3. ∵ $AF = DE$，

∴ $AF - EF = DE - EF$.

∴ $AE = DF$.

∵ $AB \parallel CD$，

∴ $\angle A = \angle D$（两直线平行，内错角相等）.

在$\triangle ABE$ 与$\triangle DCF$ 中，

$\because \begin{cases} AB=DC, \\ \angle A=\angle D, \\ AE=DF, \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle ABE \cong \triangle DCF$（SAS）.

$\therefore$ $\angle AEB=\angle DFC$（全等三角形的对应角相等）.

又$\because$ $\angle BEF+\angle AEB=\angle CFE+\angle DFC=180^\circ$，

$\therefore$ $\angle BEF=\angle CFE$.

$\therefore$ $BE /\!/ CF$（内错角相等，两直线平行）.

4. 两个真命题为：① 若 $AB=EF$，$AC=DF$，$BD=CE$，则 $AB /\!/ EF$；② 若 $AB /\!/ EF$，$AB=EF$，$BD=CE$，则 $AC=DF$. 证明略.

课后练习 17.4(7)

1. $\because$ CD 是$\triangle ABC$ 的中线，

$\therefore$ $AD=BD$.

$\because$ $AE /\!/ BF$，

$\therefore$ $\angle DAE=\angle DBF$，$\angle AED=\angle BFD$（两直线平行，内错角相等）.

在$\triangle ADE$ 与$\triangle BDF$ 中，

$\because \begin{cases} \angle AED=\angle BFD, \\ \angle DAE=\angle DBF, \\ AD=BD, \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle ADE \cong \triangle BDF$（AAS）.

2. $\because$ $AD \perp AB$，$AE \perp AC$，

$\therefore$ $\angle DAB=90^\circ$，$\angle CAE=90^\circ$.

$\therefore$ $\angle DAB=\angle CAE$.

$\therefore$ $\angle DAB-\angle BAC=\angle CAE-\angle BAC$.

$\therefore$ $\angle DAC=\angle BAE$.

在$\triangle ADC$ 与$\triangle ABE$ 中，

$\because \begin{cases} AD=AB, \\ \angle DAC=\angle BAE, \\ AC=AE, \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle ADC \cong \triangle ABE$（SAS）.

$\therefore$ $DC=BE$（全等三角形的对应边相等）.

3. $\because$ $AB \perp BD$，$ED \perp BD$，

$\therefore$ $\angle B=\angle D=90^\circ$.

在$\triangle ABC$ 与$\triangle CDE$ 中，

$\because \begin{cases} AB=CD, \\ \angle B=\angle D, \\ BC=DE, \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle CDE$（SAS）.

$\therefore$ $\angle A = \angle ECD$（全等三角形的对应角相等）.

$\because$ $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），$\angle B = 90^\circ$，

$\therefore$ $\angle A + \angle ACB = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

$\therefore$ $\angle ECD + \angle ACB = 90^\circ$.

又$\because$ $\angle ACB + \angle ACE + \angle ECD = 180^\circ$，

$\therefore$ $\angle ACE = 180^\circ - (\angle ECD + \angle ACB) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

$\therefore$ $AC \perp CE$.

4. 由题意，知$\angle PMO = \angle QNO = 90^\circ$.

$\because$ O 是 MN 的中点，

$\therefore$ $OM = ON$.

在$\triangle OPM$ 与$\triangle OQN$ 中，

$$\because \begin{cases} \angle POM = \angle QON \text{（对顶角相等）}, \\ OM = ON, \\ \angle PMO = \angle QNO, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle OPM \cong \triangle OQN$（ASA）.

$\therefore$ $MP = NQ$（全等三角形的对应边相等）.

因此，线段 NQ 的长即为灯塔离岸的距离.

课后练习 17.4(8)

1. 由题意，得$\triangle ACD \cong \triangle ECD$，所以根据“全等三角形的对应边相等”，得 $AD = ED$，$AC = EC$.

所以$\triangle DBE$ 的周长$= BD + DE + BE = BD + AD + BC - EC = AB + BC - AC = 5 + 8 - 6 = 7$(cm).

2. 在$\triangle ACB$ 与$\triangle ADB$ 中，

$$\because \begin{cases} AC = AD, \\ BC = BD, \\ AB = AB, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ACB \cong \triangle ADB$（SSS）.

$\therefore$ $\angle C = \angle D$（全等三角形的对应角相等）.

$\because$ E、F 分别是 BC、BD 的中点，

$\therefore$ $CE = \dfrac{1}{2}BC$，$DF = \dfrac{1}{2}BD$.

又$\because$ $BC = BD$，

$\therefore$ $CE = DF$.

在$\triangle ACE$ 与$\triangle ADF$ 中，

$\because \begin{cases} AC=AD, \\ \angle C=\angle D, \\ CE=DF, \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle ACE \cong \triangle ADF$（SAS）.

$\therefore$ $AE=AF$（全等三角形的对应边相等）.

3. $\because$ $AB \parallel CD$,

$\therefore$ $\angle A=\angle D$（两直线平行，内错角相等）.

$\because$ O 是 AD 的中点，

$\therefore$ $OA=OD$.

在$\triangle AOB$ 与$\triangle DOC$ 中，

$\because \begin{cases} \angle A=\angle D, \\ OA=OD, \\ \angle AOB=\angle DOC \text{（对顶角相等）}, \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle AOB \cong \triangle DOC$（ASA）.

$\therefore$ $OB=OC$（全等三角形的对应边相等）.

在$\triangle BOE$ 与$\triangle COF$ 中，

$\because \begin{cases} OB=OC, \\ \angle BOE=\angle COF \text{（对顶角相等）}, \\ OE=OF, \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle BOE \cong \triangle COF$（SAS）.

$\therefore$ $\angle OEB=\angle OFC$（全等三角形的对应角相等）.

$\therefore$ $BE \parallel CF$（内错角相等，两直线平行）.

4.（1）$\because$ AD 是边 BC 上的中线，

$\therefore$ $BD=CD$.

在$\triangle BDE$ 与$\triangle CDA$ 中，

$\because \begin{cases} BD=CD, \\ \angle BDE=\angle CDA \text{（对顶角相等）}, \\ ED=AD, \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle BDE \cong \triangle CDA$（SAS）.

$\therefore$ $BE=CA$，$\angle E=\angle DAC$（全等三角形的对应边相等，对应角相等）.

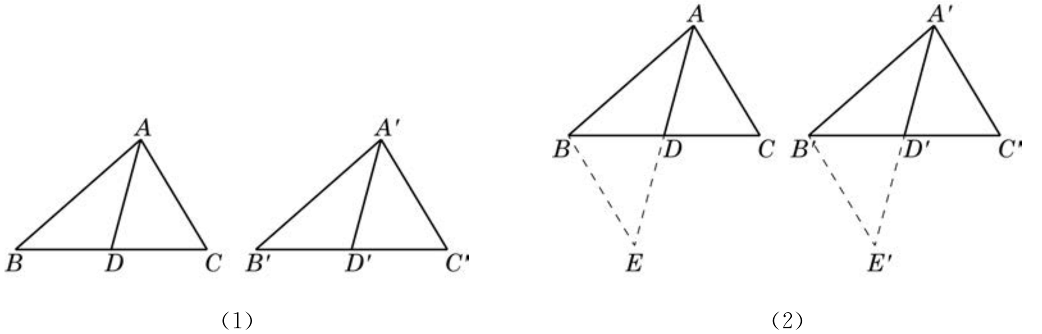
（2）如图(1)，已知：在$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$中，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，AD、$A'D'$分别是边 BC、$B'C'$上的中线，且 $AD=A'D'$. 求证：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

证明：如图(2)，延长 AD 至点 E，使得 $DE=AD$，延长 $A'D'$至点 E'，使得 $D'E'=A'D'$，连接 BE、$B'E'$，则 $AE=A'E'$.

由(1)，知 $BE=CA$，$\angle E=\angle DAC$.

同理，$B'E'=C'A'$，$\angle E'=\angle D'A'C'$.

又$\because$ $AC=A'C'$,



(第 4 题)

∴ $BE=B'E'$.

在$\triangle ABE$与$\triangle A'B'E'$中，

∵ $\begin{cases} AB=A'B', \\ BE=B'E', \\ AE=A'E', \end{cases}$

∴ $\triangle ABE \cong \triangle A'B'E'$ (SSS).

∴ $\angle BAE=\angle B'A'E'$，$\angle E=\angle E'$（全等三角形的对应角相等）.

∴ $\angle DAC=\angle D'A'C'$.

∴ $\angle BAE+\angle DAC=\angle B'A'E'+\angle D'A'C'$.

∴ $\angle BAC=\angle B'A'C'$.

在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，

∵ $\begin{cases} AB=A'B', \\ \angle BAC=\angle B'A'C', \\ AC=A'C', \end{cases}$

∴ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (SAS).

第 18 章　等腰三角形

18.1　等腰三角形的性质

课后练习 18.1(1)

1. 3.

2. 设$\angle DBC=x^\circ$.

∵ BD 平分$\angle ABC$，

∴ $\angle ABC=2\angle DBC=(2x)^\circ$.

∵ $AB=AC$，

∴ $\angle C=\angle ABC=(2x)^\circ$（等边对等角）.

∵ $\angle ADB=108°$，$\angle ADB=\angle DBC+\angle C$（三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和），

∴ $x+2x=108$.

∴ $x=36$.

∴ $\angle ABC=\angle C=72°$.

∴ $\angle A=180°-\angle ABC-\angle C=180°-72°-72°=36°$（三角形的内角和等于 180°）.

3. ∵ $AC=BC$，CD 为边 AB 上的中线，

∴ $\angle ACD=\angle BCD$，$CD\perp AB$（等腰三角形三线合一）.

∴ $\angle CDB=90°$.

∵ $EF\perp AB$，

∴ $\angle EFB=90°$.

∴ $\angle CDB=\angle EFB$.

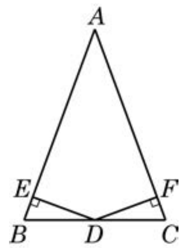
∴ $CD\parallel EF$（同位角相等，两直线平行）.

∴ $\angle BCD=\angle BEF$（两直线平行，同位角相等）.

又∵ $\angle ACD=\angle BCD$，

∴ $\angle ACD=\angle BEF$.

4. 如图，已知：在等腰三角形 ABC 中，$AB=AC$，D 是边 BC 的中点，过点 D 作 $DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为 E、F. 求证：$DE=DF$.



（第 4 题）

证明：∵ $AB=AC$，

∴ $\angle B=\angle C$（等边对等角）.

∵ $DE\perp AB$，$DF\perp AC$，

∴ $\angle BED=\angle CFD=90°$.

∵ D 是边 BC 的中点，

∴ $BD=CD$.

在△DBE 和△DCF 中，

∵ $\begin{cases}\angle BED=\angle CFD,\\ \angle B=\angle C,\\ BD=CD,\end{cases}$

∴ $\triangle DBE\cong\triangle DCF$（AAS）.

∴ $DE=DF$（全等三角形的对应边相等）.

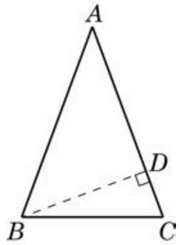
5. (1) 因为 D 是 BC 的中点，所以 $BD=DC$，又因为 $AB=AC$，根据“等腰三角形三线合一”，可得 $AD\perp BC$.

(2) 这时 BC 处于水平位置，因为 $AD\perp BC$，且 AD 与水平面垂直，从而由“同位角相等，两直线平等”可得 BC 与水平面平行.

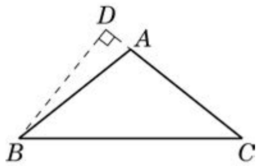
课后练习 18.1(2)

1. B. 提示：如图(1)，易知$\angle DBC=90°-\angle C=90°-\dfrac{180°-\angle A}{2}=\dfrac{1}{2}\angle A$；如图(2)，

易知$\angle DBC=90^\circ-\angle C=90^\circ-\dfrac{180^\circ-\angle A}{2}=\dfrac{1}{2}\angle A$．所以等腰三角形一腰上的高与底边所成的角等于顶角的一半．



（1）



（2）

（第 1 题）

2. ∵　$AB>AC$，

∴　$\angle C>\angle B$（在三角形中，大边对大角）．

∵　$AD\perp BC$，

∴　$\angle ADB=\angle ADC=90^\circ$．

∵　$\angle B+\angle BAD+\angle ADB=180^\circ$，$\angle C+\angle CAD+\angle ADC=180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

∴　$\angle B+\angle BAD+\angle ADB=\angle C+\angle CAD+\angle ADC$．

∴　$\angle BAD>\angle CAD$．

3. 连接 AC、AD．

在$\triangle ABC$ 和$\triangle AED$ 中，

∵　$\begin{cases} AB=AE, \\ \angle B=\angle E, \\ BC=ED, \end{cases}$

∴　$\triangle ABC\cong\triangle AED$（SAS）．

∴　$\angle ACB=\angle ADE$，$AC=AD$（全等三角形的对应角相等，对应边相等）．

∴　$\angle ACD=\angle ADC$（等边对等角）．

∴　$\angle ACB+\angle ACD=\angle ADE+\angle ADC$．

∴　$\angle BCD=\angle EDC$．

4. 方法一：如图(1)，作 $DE\perp AB$，垂足为 E．

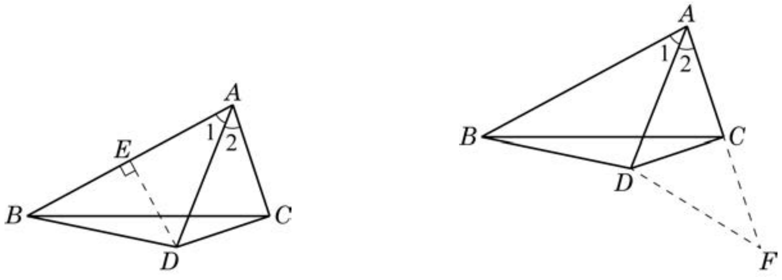
根据“等腰三角形三线合一”，可得 $AB=2AE$．

又∵　$AB=2AC$，

∴　$AC=AE$．

可证$\triangle AED\cong\triangle ACD$，得$\angle ACD=\angle AED=90^\circ$（全等三角形的对应角相等）．

∴　$CD\perp AC$．



（1）　　　　　　　　　　　　（2）

（第 4 题）

方法二：如图(2)，延长 AC 到点 F，使得 $AF=AB$，连接 DF.

可证$\triangle ADF\cong\triangle ADB$.

$\therefore$　$DF=DB=DA$，$AF=AB=2AC$（全等三角形的对应边相等）.

$\therefore$　C 为 AF 的中点.

$\therefore$　$CD\perp AC$（等腰三角形三线合一）.

5.（1）$\because$　线段 AD 绕点 A 按逆时针方向旋转 n°，得点 D 的对应点 E，$\angle CAB=n^\circ$，

$\therefore$　$AD=AE$，$\angle DAE=\angle CAB$.

$\therefore$　$\angle CAB-\angle CAD=\angle DAE-\angle CAD$.

$\therefore$　$\angle BAD=\angle CAE$.

在$\triangle BAD$ 和$\triangle CAE$ 中，

$$\because\ \begin{cases}AB=AC,\\ \angle BAD=\angle CAE,\\ AD=AE,\end{cases}$$

$\therefore$　$\triangle BAD\cong\triangle CAE$（SAS）.

$\therefore$　$BD=CE$（全等三角形的对应边相等）.

（2）$\because$　$n=90$，

由旋转的性质，可知 $AD=AE$，$\angle DAE=\angle CAB=90^\circ$.

$\therefore$　$\angle CAB+\angle CAD=\angle DAE+\angle CAD$.

$\therefore$　$\angle BAD=\angle CAE$.

在$\triangle BAD$ 和$\triangle CAE$ 中，

$$\because\ \begin{cases}AB=AC,\\ \angle BAD=\angle CAE,\\ AD=AE,\end{cases}$$

$\therefore$　$\triangle BAD\cong\triangle CAE$（SAS）.

$\therefore$　$BD=CE$，$\angle B=\angle ACE$（全等三角形的对应边相等，对应角相等）.

$\because$　$\angle CAB=n^\circ=90^\circ$，$\angle CAB+\angle B+\angle ACB=180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

$\therefore$　$\angle B+\angle ACB=90^\circ$.

又∵　$AB=AC$，

∴　$\angle B=\angle ACB=45^\circ$（等角对等边）.

∴　$\angle BCE=\angle ACB+\angle ACE=\angle ACB+\angle B=45^\circ+45^\circ=90^\circ$.

∴　$BD\perp CE$.

18.2　等腰三角形的判定

课后练习 18.2(1)

1. B.

2. 5.

3. 在$\triangle ECB$和$\triangle DBC$中，

∵　$\begin{cases} BE=CD, \\ \angle 1=\angle 2, \\ BC=CB, \end{cases}$

∴　$\triangle ECB\cong\triangle DBC$（SAS）.

∴　$\angle ECB=\angle DBC$（全等三角形的对应角相等）.

∴　$AB=AC$（等角对等边）.

∴　$\triangle ABC$是等腰三角形.

4. ∵　BP是$\angle ABC$的平分线，

∴　$\angle PBD=\angle PBA$.

∵　$PD\parallel AB$，

∴　$\angle DPB=\angle PBA$（两直线平行，内错角相等）.

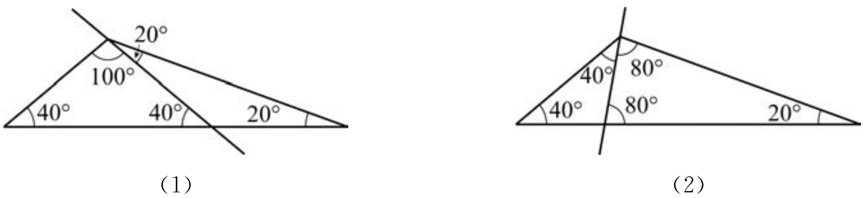
∴　$\angle PBD=\angle DPB$.

∴　$PD=BD$（等角对等边）.

同理，$PE=CE$.

∴　$\triangle PDE$的周长$=PD+DE+PE=BD+DE+CE=BC=5$(cm).

5. 两种情况，分别如图(1)(2)所示.



（第 5 题）

课后练习 18.2(2)

1. 如图，连接BC.

∵　$AB=AC$，

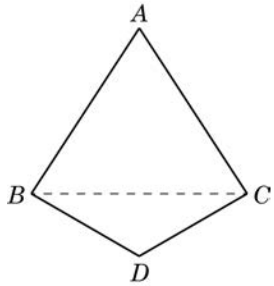
∴　$\angle ABC=\angle ACB$（等边对等角）.

∵　$\angle ABD=\angle ACD$，

∴　$\angle ABD-\angle ABC=\angle ACD-\angle ACB$.

∴　$\angle DBC=\angle DCB$.

∴　$BD=CD$（等角对等边）.



（第 1 题）

2. ∵　$AB>AC$，

∴　$\angle ACB>\angle ABC$（在三角形中，大边对大角）.

∵　$BD=AB$，

∴　$\angle D=\angle DAB$（等边对等角）.

∴　$\angle ABC=\angle D+\angle DAB=2\angle D$（三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和）.

同理，$\angle ACB=2\angle E$.

∴　$\angle E>\angle D$.

∴　$AD>AE$（在三角形中，大角对大边）.

3. ∵　$CD\perp AB$，

∴　$\angle CDB=90^\circ$.

∵　$\angle FBD+\angle FDB+\angle BFD=180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

∴　$\angle FBD+\angle BFD=90^\circ$.

同理，$\angle CBE+\angle CEB=90^\circ$.

∵　BE 平分$\angle CBA$，

∴　$\angle FBD=\angle CBE$.

∴　$\angle BFD=\angle CEB$.

又∵　$\angle BFD=\angle CFE$（对顶角相等），

∴　$\angle CEB=\angle CFE$.

∴　$CE=CF$（等角对等边）.

又∵　G 是 EF 中点，

∴　$CG\perp EF$（等腰三角形三线合一）.

4. ∵　F 为 BE、CG 的中点，

∴　$EF=BF$，$GF=CF$.

在$\triangle GFE$ 和$\triangle CFB$ 中，

$$\because\ \begin{cases}GF=CF,\\ \angle GFE=\angle CFB\ (\text{对顶角相等}),\\ EF=BF,\end{cases}$$

∴　$\triangle GFE\cong\triangle CFB$（SAS）.

∴　$GE=BC$，$\angle EGF=\angle C$（全等三角形的对应边相等，对应角相等）.

∵　$\angle A=\angle EGF$，$\angle AGD=\angle EGF$（对顶角相等），

∴　$\angle A=\angle C$，$\angle A=\angle AGD$.

∴　$BA=BC$，$DA=DG$（等角对等边）.

又∵ $BA=BD+DA$，$DE=DG+GE$，

∴ $DE=AD+BC=AD+BA=AD+BD+AD=2AD+DB$.

∵ $DB=5$，$DE=8$，

∴ $AD=\frac{1}{2}\times(8-5)=\frac{3}{2}$.

18.3 等边三角形

课后练习 18.3

1. ①④.

2. ∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $AB=BC=CA$，$\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$（等边三角形的每个内角都等于 60°）.

∵ $AD=BE=CF$，

∴ $AB-AD=BC-BE$.

∴ $BD=CE$.

在$\triangle BDE$ 与$\triangle CEF$ 中，

∵ $\begin{cases} BD=CE, \\ \angle B=\angle C, \\ BE=CF, \end{cases}$

∴ $\triangle BDE\cong\triangle CEF$（SAS）.

∴ $DE=EF$（全等三角形的对应边相等）.

同理，$EF=DF$.

∴ $DE=DF=EF$.

∴ $\triangle DEF$ 是等边三角形.

3. ∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $AB=AC$，$\angle BAC=\angle C=60^\circ$（等边三角形的每个内角都等于 60°）.

在$\triangle ABE$ 和$\triangle CAD$ 中，

∵ $\begin{cases} AB=CA, \\ \angle EAB=\angle C, \\ AE=CD, \end{cases}$

∴ $\triangle ABE\cong\triangle CAD$（SAS）.

∴ $\angle ABE=\angle CAD$（全等三角形的对应角相等）.

∵ $\angle BAD+\angle CAD=60^\circ$，

∴ $\angle BAD+\angle ABE=60^\circ$.

∵ $\angle BFD=\angle BAD+\angle ABE$（三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和），

∴ $\angle BFD=60^\circ$.

4. (1) ∵ $\triangle ABC$、$\triangle DCE$ 都是等边三角形，

∴ $BC=AC$，$CD=CE$，$\angle BCA=\angle DCE=60°$（等边三角形的每个内角都等于 60°）.

∴ $\angle BCA+\angle ACD=\angle DCE+\angle ACD$.

∴ $\angle BCD=\angle ACE$.

在$\triangle BCD$ 和$\triangle ACE$ 中，

$$∵\begin{cases}BC=AC,\\ \angle BCD=\angle ACE,\\ CD=CE,\end{cases}$$

∴ $\triangle BCD\cong\triangle ACE$（SAS）.

(2) ∵ $\triangle BCD\cong\triangle ACE$，

∴ $BD=AE$，$\angle DBC=\angle EAC$（全等三角形的对应边相等，对应角相等）.

∵ M、N 分别是线段 AE、BD 的中点，

∴ $AM=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}BD=BN$.

在$\triangle BCN$ 和$\triangle ACM$ 中，

$$∵\begin{cases}BC=AC,\\ \angle DBC=\angle EAC,\\ BN=AM,\end{cases}$$

∴ $\triangle BCN\cong\triangle ACM$（SAS）.

∴ $CN=CM$，$\angle BCN=\angle ACM$（全等三角形的对应边相等，对应角相等）.

∴ $\angle NCM=\angle ACM-\angle ACN=\angle BCN-\angle ACN=\angle BCA=60°$.

∴ $\angle CMN+\angle CNM=180°-\angle NCM=180°-60°=120°$（三角形的内角和等于 180°）.

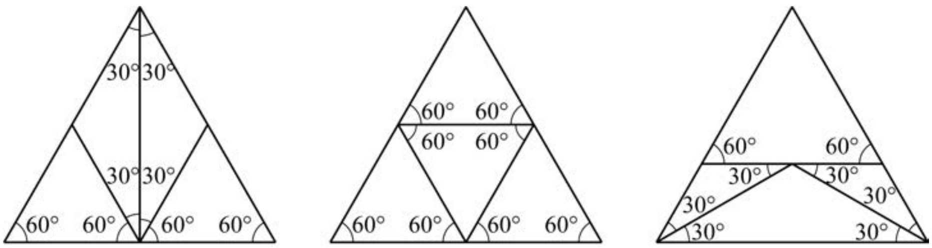
又∵ $CN=CM$，

∴ $\angle CMN=\angle CNM=60°$（等边对等角）.

∴ $\angle NCM=\angle CMN=\angle CNM$.

∴ $\triangle CMN$ 是等边三角形（三个内角都相等的三角形是等边三角形）.

5. 如图所示.



（第 5 题）

18.4　线段的垂直平分线

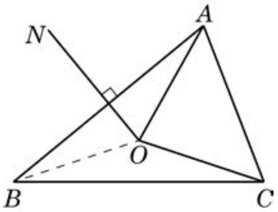
课后练习 18.4(1)

1. 22.

2. 如图，连接 OB.

∵　ON 是边 AB 的垂直平分线，

∴　$OA=OB$（线段的垂直平分线上的任意一点到该线段两个端点的距离相等）.



（第 2 题）

∵　$OA=OC$，

∴　$OC=OB$.

∴　点 O 在边 BC 的垂直平分线上（与一条线段的两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上）.

3. ∵　EM 垂直平分线段 BD，

∴　$BE=ED$（线段的垂直平分线上的任意一点到该线段两个端点的距离相等）.

∴　$\angle B=\angle D$（等边对等角）.

∵　$\angle ACB=90°$，

∴　$\angle FCD=180°-\angle ACB=90°$.

又∵　$\angle B+\angle A+\angle ACB=180°$，$\angle D+\angle CFD+\angle FCD=180°$（三角形的内角和等于 $180°$），

∴　$\angle B+\angle A=90°$，$\angle D+\angle CFD=90°$.

∴　$\angle A=\angle CFD$.

又∵　$\angle EFA=\angle CFD$（对顶角相等），

∴　$\angle EFA=\angle A$.

∴　$EF=EA$（等角对等边）.

∴　点 E 在线段 AF 的垂直平分线上（与一条线段的两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上）.

4. ∵　AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

∴　$\angle EAD=\angle DAC$.

∵　$DE\parallel AC$，

∴　$\angle EDA=\angle DAC$（两直线平行，内错角相等）.

∴　$\angle EAD=\angle EDA$.

∴　$AE=DE$（等角对等边）.

又∵　$EF\perp AD$，

∴　EF 垂直平分 AD（等腰三角形三线合一）.

∴　$AF=DF$（线段的垂直平分线上的任意一点到该线段两个端点的距离相等）.

∴　$\angle FAD=\angle ADF$（等边对等角）.

∵　$\angle ADF=\angle B+\angle BAD$（三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和），

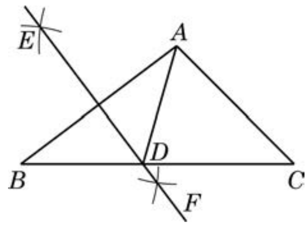
$\angle FAD=\angle CAD+\angle FAC$，

∴　$\angle B+\angle BAD=\angle CAD+\angle FAC$.

∴　$\angle B=\angle FAC$.

5.（1）有两边相等的三角形是等腰三角形.

（2）尺规作图如图所示.



（第 5 题）

∵　$\angle B=37°$，$\angle C=45°$，

∴　$\angle BAC=180°-\angle B-\angle C=180°-37°-45°=98°$（三角形的内角和等于 180°）.

由作图，可知 EF 垂直平分 AB，

∴　$DA=DB$（线段的垂直平分线上的任意一点到该线段两个端点的距离相等）.

∴　$\angle DAB=\angle B=37°$（等边对等角）.

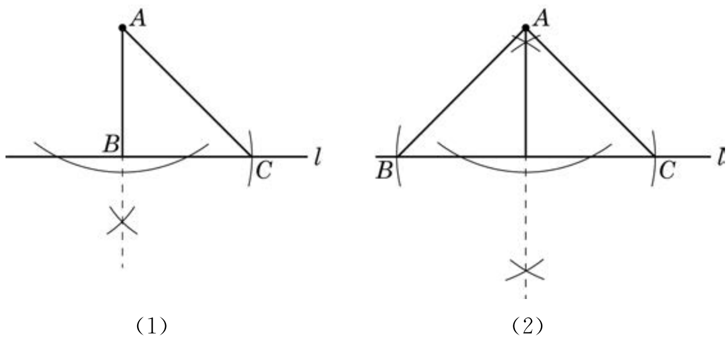
∴　$\angle DAC=\angle BAC-\angle DAB=98°-37°=61°$.

课后练习 18.4(2)

1. ①②③.

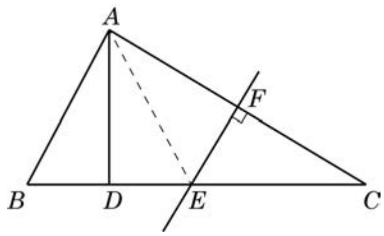
2. 图略.　提示：三角形两边垂直平分线的交点即为凳子应放的最适当的位置.

3. (1)(2)如图所示.



（第 3 题）

4. 如图，连接 AE.



（第 4 题）

∵　EF 是边 AC 的垂直平分线，

∴　$AE=CE$（线段的垂直平分线上的任意一点到该线段两个端点的距离相等）.

∴　$\angle EAC=\angle C$（等边对等角）.

∵　$AB=EC$，

∴　$AB=AE$.

又∵　D 是 BE 的中点，$\angle BAD=28°$，

∴　$\angle EAD=\angle BAD=28°$，$\angle ADE=90°$（等腰三角形三线合一）.

∴ $\angle AED = 180° - \angle ADE - \angle EAD = 180° - 90° - 28° = 62°$（三角形的内角和等于 180°）.

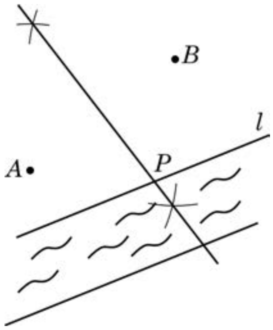
∵ $\angle AED = \angle EAC + \angle C = 62°$（三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和），

∴ $\angle EAC = \angle C = 31°$.

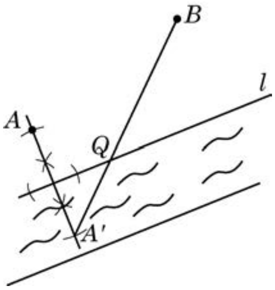
∴ $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAE + \angle EAC = 28° + 28° + 31° = 87°$.

5.（1）如图(1)，作 AB 的垂直平分线，交直线 l 于点 P，则点 P 为厂址.

（2）如图(2)，点 A' 为点 A 关于直线 l 的对称点，连接 $A'B$ 交直线 l 于点 Q，则点 Q 为厂址.



（1）



（2）

（第 5 题）

后　记

本套教学参考资料与李大潜主编、上海教育出版社出版的《义务教育教科书(五·四学制)数学》配套使用.

本册教学参考资料是七年级下册. 在主编李大潜的主持下，由徐斌艳任本册主编，参与编写人员为：

王春明、金荣生(第 15 章)

王松萍、金荣生(第 16 章)

陶志诚、金荣生(第 17 章)

王松萍、金荣生(第 18 章)

朱雁、王海生、陆立强(综合与实践)

感谢编写团队的团结协作和不懈努力. 编写过程中，上海市课程教育教学研究基地(中小学课程方案基地)、上海市心理教育教学研究基地、上海基础教育教材建设重点研究基地、两个上海市数学教育教学研究基地(分别设在复旦大学和华东师范大学)等上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地对编写工作给予了大力支持，在此表示衷心的感谢.

我们要感谢一直支持、关心和帮助我们工作的同志和朋友们. 大家的热忱指导和帮助，我们定会铭记于心，并化为我们的工作动力.

欢迎广大师生来电来函提出宝贵的意见.

联系电话：021－64319241(内容)　021－64373213(印刷或装订)

电子邮箱：jcjy@seph.com.cn

地　　址：上海市闵行区号景路 159 弄 C 座上海教育出版社(201101)

SHUXUE
JIAOXUE CANKAO ZILIAO

经上海市教材审查和评价委员会审查
准予使用　准用号 SD-CJ-2024025

数学　教学参考资料

七年级　下册

中国环境标志
CHINA ENVIRONMENTAL LABELLING
绿色印刷产品

ISBN 978-7-5720-3341-4
9 787572 033414 >
定　价： 51.00 元