国家教材委员会专家委员会审核通过
2024

义务教育教科书

（五·四学制）

数学

八年级
上册

上海教育出版社

义务教育教科书

（五·四学制）

数学

八年级
上册

主编　李大潜

上海教育出版社

主　　编：李大潜
本册主编：王志强
本册编写人员：周子翔　鲁海燕　王春明　朱　雁　金荣生　胡　军　徐　颖　顾跃平

责任编辑：周明旭
装帧设计：王　捷　周　吉

本册教科书中的图片由视觉中国、图虫·创意等图片网站提供

义务教育教科书（五·四学制）　数学　八年级　上册

出　版　上海教育出版社（上海市闵行区号景路159弄C座）
发　行　上海新华书店
印　刷　上海中华印刷有限公司
版　次　2025年6月第1版
印　次　2025年6月第1次印刷
开　本　787 毫米×1092 毫米　1/16
印　张　9.75
字　数　144 千字
书　号　ISBN 978−7−5720−3449−7/G·3082
定　价　10.00 元

如发现内容质量问题，请拨打 021−64319241
如发现印、装问题，请拨打 021−64373213，我社负责调换
价格依据文件：沪价费〔2017〕15 号

主编的话

世间的万事万物都有数和形这两个侧面，数学这门学科是忽略了事物的其他属性，仅仅从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界的．

初中的数学，介于小学数学与高中数学之间，以往偏向于直观的数学教学将开始逐步走向理性的阶段，对学生逻辑思维的训练会提出较高的要求，其认识也将不断得到深化．

数学是一门重理解和思考的学科．数学学得好，主要看三条：一是理解要深入，二是运作要熟练，三是表达要清晰．这儿所提的“运作”，泛指推理及计算．这三者中最重要的是理解，只有理解深入，才能实现运作熟练和表达清晰这样一些外在层面上的表现，才能真正掌握数学的精髓．

这些年参加了上海市的一些基础数学教科书的编写工作，常常听到一种说法：数学是绝大多数学生一生中学得最多的一门功课，不少学生对数学是喜欢和热爱的，但不太注意对数学真正的理解和感悟，花费了不少时间去刷题，学习负担虽重，却远未达到应有的收获；还有相当一部分学生觉得数学抽象、难懂、神秘，从而望而生畏，甚至避之唯恐不及．所有这些，都不是我们希望看到的．

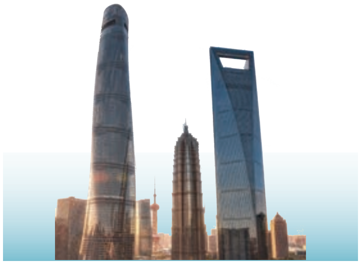
我们希望通过教师及学生的共同努力，使数学成为一门容易为学生接受，真正喜闻乐见、可近可亲的课程；不仅负担不重，而且愈学愈想学，愈学愈有趣味，愈学愈觉得数学内容丰富、奥妙无穷，深深地为其吸引和陶醉．这是我们的一个理想，并相信它是一定可以实现的．

为了实现我们的理想，我们希望这套教科书能真正抓住初中数学的真谛，用朴实无华且单刀直入的方式展现初中阶段应该学习的基本数学内容，努力给学生带来明确而清晰的印象，真正帮助他们理解与掌握有关的数学内容，使学生的数学知识随着年龄的增长逐步增进，充分体现数学学科的育人价值．

在已学习了有理数及其运算的基础上，从本册开始认识实数并学习二次根式的运算，然后学习一元二次方程的解法、判别式、根与系数的关系以及有关的应用问题．在“直角三角形”一章中，学习直角三角形的性质、判定及全等的判定，角平分线的作法和性质，以及著名的勾股定理．在综合与实践中，将从数学角度研究理财问题、体验“勾股定理”证明中的中国智慧．

目　录

第 22 章 直角三角形



综合与实践

附录

第 19 章

实　数

在之前的学习中，我们已经认识了自然数、整数和有理数. 历史上人们曾认为一切数均可表示为整数和整数之比（即有理数），后来发现边长为 1 的正方形的对角线的长度并不是有理数，从而发现了一类新的数，称之为无理数. 实际上，圆周率 π 就是一个无理数. 无理数的发现是数学史上一个重要的里程碑.

有理数和无理数统称为实数. 本章我们将学习平方根和立方根，了解 2 的算术平方根是无理数，揭示实数与数轴上的点一一对应，体会数系的扩充，并把有理数的运算法则、性质及大小比较等内容推广到实数范畴.

19.1 平方根与立方根

1. 算术平方根

问题 1 已知一个正方形的边长，可以通过平方运算求出它的面积. 反过来，已知正方形的面积，它的边长应该如何计算?

例如，要裁一张面积为 100 cm^2 的正方形纸片，它的边长应该取多少呢? 设正方形纸片的边长为 x cm（$x>0$），根据已知条件，得 $x^2=100$. 因为 $10^2=100$，所以这张正方形纸片的边长是 10 cm. 这实际上是“已知一个正数的平方，求这个正数”的问题.

一般地，如果一个正数 x 的平方等于 a，即 $x^2=a$，那么这个正数 x 叫作 a 的**算术平方根**. a 的算术平方根记为“$\sqrt{a}$”，读作“根号 a”. a 叫作**被开方数**.

因为 0 的平方是 0，所以规定 **0 的算术平方根是 0**，记为 $\sqrt{0}=0$.

例 1 求下列各数的算术平方根：

（1）64；　（2）121；　（3）$\dfrac{9}{25}$；　（4）$\dfrac{100}{81}$.

解 （1）因为 $8^2=64$，所以 64 的算术平方根是 8，即 $\sqrt{64}=8$.

（2）因为 $11^2=121$，所以 121 的算术平方根是 11，即 $\sqrt{121}=11$.

（3）因为 $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$，所以 $\dfrac{9}{25}$ 的算术平方根是 $\dfrac{3}{5}$，即 $\sqrt{\dfrac{9}{25}}=\dfrac{3}{5}$.

（4）因为 $\left(\dfrac{10}{9}\right)^2=\dfrac{100}{81}$，所以 $\dfrac{100}{81}$ 的算术平方根是 $\dfrac{10}{9}$，即 $\sqrt{\dfrac{100}{81}}=\dfrac{10}{9}$.

例 2 化简：

（1）$\sqrt{49}$；　（2）$\sqrt{\dfrac{1}{16}}$；　（3）$\sqrt{2\dfrac{1}{4}}$；　（4）$\sqrt{13^2}$.

解 （1）$\sqrt{49}=7$.

(2) $\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$.

(3) $\sqrt{2\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$.

(4) $\sqrt{13^2}=13$.

例 3 化简：

(1) $\sqrt{4}$； (2) $\sqrt{400}$； (3) $\sqrt{40\ 000}$； (4) $\sqrt{4\ 000\ 000}$.

解 (1) $\sqrt{4}=2$.

(2) $\sqrt{400}=20$.

(3) $\sqrt{40\ 000}=200$.

(4) $\sqrt{4\ 000\ 000}=2\ 000$.

我们知道，如果 $x^2=a$，那么 $(10x)^2=100a$. 这说明一个数扩大为原来的 10 倍，它的平方就扩大为原来的 100 倍. 反过来，一个数扩大为原来的 100 倍，它的算术平方根就扩大为原来的 10 倍.

例 4 化简：

(1) $\sqrt{25}$； (2) $\sqrt{0.25}$； (3) $\sqrt{0.002\ 5}$； (4) $\sqrt{0.000\ 025}$.

解 (1) $\sqrt{25}=5$.

(2) $\sqrt{0.25}=0.5$.

(3) $\sqrt{0.002\ 5}=0.05$.

(4) $\sqrt{0.000\ 025}=0.005$.

一个数缩小为原来的 $\frac{1}{100}$，它的算术平方根就缩小为原来的 $\frac{1}{10}$.

被开方数的小数点向右或者向左移动两位，它的算术平方根的小数点相应地向右或者向左移动一位.

例 5 化简：

(1) $\sqrt{90\ 000}$； (2) $\sqrt{225\ 000\ 000}$；

(3) $\sqrt{0.003\ 6}$； (4) $\sqrt{0.000\ 169}$.

解 (1) 因为 $\sqrt{9}=3$，所以 $\sqrt{90\ 000}=300$.

(2) 因为 $\sqrt{225}=15$，所以 $\sqrt{225\ 000\ 000}=15\ 000$.

(3) 因为 $\sqrt{36}=6$，所以 $\sqrt{0.003\ 6}=0.06$.

(4) 因为 $\sqrt{169}=13$，所以 $\sqrt{0.000\ 169}=0.013$.

课堂练习 19.1(1)

1. 判断下列说法是否正确，正确的在括号里打“√”，错误的在括号里打“×”：

(1) 2 是 4 的算术平方根； ( )

(2) -3 是 9 的算术平方根； ( )

(3) 0.01 是 0.1 的算术平方根； ( )

(4) 0.04 是 0.016 的算术平方根. ( )

2. 求下列各数的算术平方根：

(1) 196； (2) 0.81； (3) $\frac{9}{64}$； (4) $1\frac{7}{9}$.

3. 化简：

(1) $\sqrt{360\ 000}$； (2) $\sqrt{25\ 600}$；

(3) $\sqrt{0.000\ 1}$； (4) $\sqrt{0.000\ 049}$.

2. 平方根

问题 2 已知一个数的平方等于 100，那么这个数是多少？

设这个数是 x，根据已知条件，得

$$x^2=100.$$

因为 $10^2=100$，$(-10)^2=100$，所以这个数是 10 或 -10. 这实际上是“已知一个数的平方，求这个数”的问题.

一般地，如果一个数 x 的平方等于 a，即 $x^2=a$，那么这个数 x 叫作 a 的**平方根**，也称为二次方根. a 叫作**被开方数**.

求一个数 a 的平方根的运算叫作**开平方**. 例如，求 64 的平方根，就是要对 64 进行开平方运算，64 是被开方数.

例 6 求下列各数的平方根：

(1) 4； (2) 0.16； (3) $\frac{9}{25}$.

解 (1) 因为 $2^2=4$，$(-2)^2=4$，所以 4 的平方根是 ± 2.

(2) 因为 $0.4^2=0.16$，$(-0.4)^2=0.16$，所以 0.16 的平方根是 ± 0.4.

(3) 因为 $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$，$\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$，所以 $\frac{9}{25}$ 的平方根是 $\pm\frac{3}{5}$.

思考

正数的平方根有什么特点？0 有平方根吗？负数有平方根吗？

正数有两个平方根，它们互为相反数，其中正的平方根就是这个数的算术平方根；0 有平方根，0 的平方根是 0；负数没有平方根，因为在我们现在所认识的数中，任何一个正数、0 或负数的平方都不是负数.

> 正数有两个平方根，它们互为相反数；
> 0 的平方根是 0；
> 负数没有平方根.

正数 a 的两个平方根可以用符号“$\pm\sqrt{a}$”表示. 其中，“$+\sqrt{a}$”表示 a 的正的平方根，即 a 的算术平方根；“$-\sqrt{a}$”表示 a 的负的平方根，读作“负根号 a”.

0 的平方根记为“$\sqrt{0}$”，$\sqrt{0}=0$.

例 7　化简：

（1）$\sqrt{225}$；　（2）$-\sqrt{0.49}$；　（3）$\pm\sqrt{\frac{1}{81}}$.

解　（1）$\sqrt{225}=15$.

（2）$-\sqrt{0.49}=-0.7$.

（3）$\pm\sqrt{\frac{1}{81}}=\pm\frac{1}{9}$.

思考

根据一个数的算术平方根，可以写出它的负的平方根吗？为什么？

课堂练习 19.1(2)

1. 判断下列说法是否正确，正确的在括号里打“√”，错误的在括号里打“×”：

（1）4 的平方根是 2；　（　　）

（2）-4 的平方根是 -2；　（　　）

（3）2 是 4 的一个平方根；　（　　）

（4）$(-2)^2$ 的算术平方根是 2.　（　　）

2. 求下列各数的平方根：

（1）25；　（2）$\frac{64}{121}$；

（3）0.36；　（4）1 690 000.

3. 化简：

（1）$\sqrt{144}$；　（2）$-\sqrt{|-2.25|}$；

（3）$\pm\sqrt{\frac{9}{16}}$；　（4）$\sqrt{(-6)^2}$.

3. 立方根

问题 3 有一个体积为 1 000 cm^3 的正方体纸盒，它的棱长是多少?

设这个正方体纸盒的棱长是 x cm，根据已知条件，得 $x^3=1\ 000$. 因为 $10^3=1\ 000$，所以这个正方体纸盒的棱长是 10 cm. 这实际上是“已知一个数的立方，求这个数”的问题.

一般地，如果一个数 x 的立方等于 a，即 $x^3=a$，那么这个数 x 叫作 a 的**立方根**，也称为三次方根. a 叫作**被开方数**.

求一个数 a 的立方根的运算叫作**开立方**. 例如，求 64 的立方根，就是要对 64 进行开立方运算，64 是被开方数.

例 8 求下列各数的立方根:

(1) 27;　　(2) $-1\ 000$;　　(3) $\dfrac{64}{125}$;　　(4) 0.

解 (1) 因为 $3^3=27$，所以 27 的立方根是 3.

(2) 因为 $(-10)^3=-1\ 000$，所以 $-1\ 000$ 的立方根是 -10.

(3) 因为 $\left(\dfrac{4}{5}\right)^3=\dfrac{64}{125}$，所以 $\dfrac{64}{125}$ 的立方根是 $\dfrac{4}{5}$.

(4) 因为 $0^3=0$，所以 0 的立方根是 0.

思考

正数、0、负数的立方根各有什么特点?

正数的立方是正数，0 的立方是 0，负数的立方是负数. 在我们现在所认识的数中，任何一个数都有立方根，且只有一个立方根.

> 正数的立方根是正数;
> 0 的立方根是 0;
> 负数的立方根是负数.

类似平方根，数 a 的立方根用符号“$\sqrt[3]{a}$”表示.

例 9 化简：

（1）$\sqrt[3]{216}$；　　（2）$\sqrt[3]{-216}$；

（3）$\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$；　　（4）$\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$.

解 （1）$\sqrt[3]{216}=6$.

（2）$\sqrt[3]{-216}=-6$.

（3）$\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$.

（4）$\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}$.

一般地，$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$.

例 10 化简：

（1）$\sqrt[3]{27\ 000}$；　　（2）$\sqrt[3]{-125\ 000}$；　　（3）$\sqrt[3]{-1\ 000\ 000}$.

解 （1）$\sqrt[3]{27\ 000}=30$.

（2）$\sqrt[3]{-125\ 000}=-50$.

（3）$\sqrt[3]{-1\ 000\ 000}=-100$.

例 11 化简：

（1）$\sqrt[3]{-0.008}$；　　（2）$\sqrt[3]{0.064}$；　　（3）$\sqrt[3]{0.000\ 001}$.

解 （1）$\sqrt[3]{-0.008}=-0.2$.

（2）$\sqrt[3]{0.064}=0.4$.

（3）$\sqrt[3]{0.000\ 001}=0.01$.

思考

（1）将被开方数扩大为原来的 1 000 倍，它的立方根如何变化？

（2）将被开方数缩小为原来的$\frac{1}{1\ 000}$，它的立方根如何变化？

被开方数的小数点向右或者向左移动三位，它的立方根的小数点相应地向右或者向左移动一位.

课堂练习 19.1(3)

1. 已知 $a^3=125$，$b^3=-\dfrac{1}{216}$，$c^3=0.008$. 求 a、b、c 的值.

2. 化简：

(1) $\sqrt[3]{64}$；　　(2) $\sqrt[3]{-125}$；

(3) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{27}}$；　　(4) $\sqrt[3]{3\dfrac{3}{8}}$.

3. 化简：

(1) $\sqrt[3]{8\,000\,000}$；　　(2) $\sqrt[3]{0.125}$；

(3) $\sqrt[3]{-216\,000}$；　　(4) $\sqrt[3]{-0.000\,027}$.

习题 19.1

A

1. 判断下列说法是否正确，正确的在括号里打“√”，错误的在括号里打“×”：

(1) 1 的平方根是 1；（　　）

(2) 0 的平方根是 0；（　　）

(3) -1 的平方根是 -1；（　　）

(4) $\sqrt{\dfrac{16}{25}}=\pm\dfrac{4}{5}$；（　　）

(5) $\sqrt{(-2)^2}=-2$；（　　）

(6) $|-4|$的平方根是 2.（　　）

2. 求下列各数的算术平方根：

(1) 36；　　(2) $\dfrac{100}{121}$；　　(3) 0.000 4；　　(4) 22 500.

3. 求下列各数的平方根：

(1) 49；　　(2) $2\dfrac{7}{9}$；　　(3) 1.96；　　(4) 1 440 000.

4. 求下列各数的立方根：

(1) 1；　　(2) $-\dfrac{8}{27}$；　　(3) -0.064；　　(4) 216 000.

5. 化简：

(1) $\sqrt{900}$；　　(2) $-\sqrt{3\dfrac{1}{16}}$；　　(3) $\sqrt{0.0081}$；　　(4) $\pm\sqrt{1\ 210\ 000}$.

6. 化简：

(1) $\sqrt[3]{-27}$；　　(2) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{64}}$；　　(3) $\sqrt[3]{15\dfrac{5}{8}}$；　　(4) $\sqrt[3]{-8^2}$.

B

7. 下列说法是否正确？如果不正确，请说明理由.

(1) 互为相反数的两个数的立方根也互为相反数；

(2) 立方根是它本身的数只有 0；

(3) 算术平方根是它本身的数只有 0；

(4) 平方根与立方根相等的数只有 0.

8. 根据下表回答问题：

x	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9
x^2	9.61	10.24	10.89	11.56	12.25	12.96	13.69	14.44	15.21
x^3	29.791	32.768	35.937	39.304	42.875	46.656	50.653	54.872	59.319

(1) 13.69 的平方根是________，$\sqrt{10.24}=$________；

(2) 35.937 的立方根是________，$\sqrt[3]{59.319}=$________；

(3) 根据表中的数据，你能分别写出下列各式的值吗？如果能，请写出这个值；如果不能，请说明理由.

① $\sqrt{12\ 960\ 000}$；　　② $\sqrt{0.000\ 152\ 1}$；

③ $\sqrt[3]{2\ 979\ 100\ 000}$；　　④ $\sqrt[3]{0.000\ 046\ 656}$.

19.2 实数

1. 有理数的小数形式

我们知道，有理数是能够写成分数 $\frac{b}{a}$（a、b 是整数，$a \neq 0$）的数，请把下列有理数写成小数的形式，你有什么发现？

$$\frac{5}{2}、-\frac{4}{5}、\frac{22}{7}、-\frac{16}{9}、\frac{3}{22}.$$

我们发现，这些有理数都可以写成有限小数或无限循环小数的形式，即

$$\frac{5}{2}=2.5,\quad -\frac{4}{5}=-0.8,\quad \frac{22}{7}=3.\dot{1}42\,85\dot{7},\quad -\frac{16}{9}=-1.\dot{7},\quad \frac{3}{22}=0.1\dot{3}\dot{6}.$$

在小学，我们曾经学习过分数与小数的互化，知道分数化成小数即用分子除以分母. 当分子除以分母能够除尽时，分数可以化成有限小数，例如，$\frac{5}{2}=5\div 2=2.5$.

当分子除以分母除不尽时，分数为什么一定能化成无限循环小数呢？我们以 $\frac{3}{22}$ 为例加以说明，下面是 $\frac{3}{22}$ 化成小数的过程：

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & 0.13636 \\
22 \,\big) & 3.0 \\
 & 22 \\ \hline
 & \;\;80 \\
 & \;\;66 \\ \hline
 & \;\;140 \\
 & \;\;132 \\ \hline
 & \quad\;\;80 \\
 & \quad\;\;66 \\ \hline
 & \quad\;\;140 \\
 & \quad\;\;132 \\ \hline
 & \qquad\;\;8
\end{array}$$

由于除法中余数一定小于除数，因此在除数确定的情况下，出现的余数只有有限种可能，如除数是 22 时，出现的余数只有 0、1、2、…、21，共 22

种可能. 如果永远除不尽，那么相同的余数一定会重复出现，如 $3\div22$，相同的余数 8 和 14 依次重复出现. 一旦出现相同的余数，补 0 后再继续相除，商也一定会出现循环，如 $\frac{3}{22}=3\div22=0.1\dot{3}\dot{6}$，在相同的余数 8 和 14 依次重复出现后，商相应出现循环节 36. 所以当分子除以分母除不尽时，分数一定能化成无限循环小数.

可以把整数看成小数点后是 0 的小数，于是任何一个有理数都可以写成有限小数或无限循环小数的形式.

反过来，任何有限小数或无限循环小数也都是有理数. 在小学，我们已经学习了如何把有限小数化成分数，如 $0.9=\frac{9}{10}$，$2.12=2\frac{12}{100}=2\frac{3}{25}$. 那么，无限循环小数如何化成分数呢？这个问题将在高中数学学习中作更深入的研究，这里仅介绍一种将无限循环小数化成分数的方法.

* **例 1** 将 $0.\dot{5}$ 化成分数.

解 设 $x=0.\dot{5}$，那么 $10x=5.\dot{5}$.

因为 $5.\dot{5}=5+0.\dot{5}$，所以 $10x=5+x$.

化简，得 $9x=5$，解得 $x=\frac{5}{9}$.

所以，$0.\dot{5}=\frac{5}{9}$.

* **例 2** 将 $1.\dot{5}\dot{3}$ 化成分数.

解 设 $x=0.\dot{5}\dot{3}$，那么 $100x=53.\dot{5}\dot{3}$.

因为 $53.\dot{5}\dot{3}=53+0.\dot{5}\dot{3}$，所以 $100x=53+x$.

化简，得 $99x=53$，解得 $x=\frac{53}{99}$.

所以，$1.\dot{5}\dot{3}=1\frac{53}{99}$.

说明：带“*”的内容为选学内容.

*例 3　将 $0.15\dot{0}\dot{3}$ 化成分数.

解　设 $x=0.\dot{5}0\dot{3}$，那么 $1\,000x=503.\dot{5}0\dot{3}$.

因为 $503.\dot{5}0\dot{3}=503+0.\dot{5}0\dot{3}$，所以 $1\,000x=503+x$.

化简，得 $999x=503$，解得 $x=\dfrac{503}{999}$.

又因为 $0.1\dot{5}0\dot{3}=0.1+0.0\dot{5}0\dot{3}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}\times0.\dot{5}0\dot{3}=\dfrac{1+x}{10}$，所以 $0.1\dot{5}0\dot{3}=\dfrac{1\,502}{9\,990}=\dfrac{751}{4\,995}$.

至此我们知道：

有理数必为有限小数或无限循环小数；反过来，有限小数或无限循环小数必为有理数.

课堂练习 19.2(1)

1. 判断下列说法是否正确，并说明理由：

（1）有限小数一定是有理数；

（2）有理数一定是有限小数；

（3）无限循环小数一定是有理数；

（4）有理数是有限小数或无限循环小数.

2. 将下列有理数化成小数：

（1）$\dfrac{11}{16}$；　（2）$\dfrac{4}{27}$；　（3）$3\dfrac{2}{15}$；　（4）$-\dfrac{17}{22}$.

*__3.__ 将下列无限循环小数化成分数：

（1）$4.\dot{1}0\dot{2}$；　（2）$0.3\dot{1}\dot{6}$.

2. 无理数

如图 19-2-1，把边长为 1 的两个正方形分别沿着它们的一条对角线剪开，得到四个形状、大小都相同的等腰直角三角形，它们的面积都是$\frac{1}{2}$；再把这四个等腰直角三角形拼成一个四边形 $ABCD$，那么我们就得到一个面积为 2 的正方形.

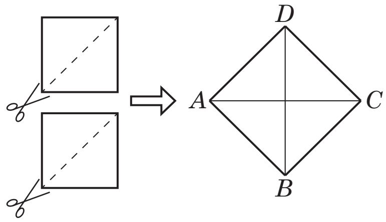


图 19-2-1

问题 1 图 19-2-1 中，正方形 $ABCD$ 的边长是多少？

设正方形 $ABCD$ 的边长为 x，则

$$x^2=2.$$

由算术平方根的意义，得 $x=\sqrt{2}$.

所以正方形 $ABCD$ 的边长是 $\sqrt{2}$.

* **问题 2** 图 19-2-1 中，正方形 $ABCD$ 的边长是一条线段的长，即 $\sqrt{2}$ 表示一个数，那么 $\sqrt{2}$ 是有理数吗？

事实上，$\sqrt{2}$ 不是有理数. 可以用反证法证明如下：

假设 $\sqrt{2}$ 是一个有理数，那么存在互素的正整数 a、b，使 $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$. 两边平方，得 $2=\left(\frac{a}{b}\right)^2$，即 $a^2=2b^2$.

于是 a^2 是 2 的倍数，所以 a 也是 2 的倍数.

设 $a=2m$，其中 m 是正整数，就有 $(2m)^2=2b^2$，即 $b^2=2m^2$.

于是 b^2 是 2 的倍数，所以 b 也是 2 的倍数.

由此可见，a 与 b 不是互素的，与假设的 a 与 b 互素相矛盾. 因此 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

这样，我们就得到了 $\sqrt{2}$ 不是有理数，也就是说，$\sqrt{2}$ 既不是有限小数，也不是无限循环小数，那么 $\sqrt{2}$ 一定是无限不循环小数. 实际上，很多数的平方根和立方根都是无限不循环小数.

无限不循环小数又叫作**无理数**. 例如，$\sqrt{3}$、$-\sqrt{5}$、$\sqrt[3]{2}$ 等都是无理数，π 也是无理数.

探究

$\sqrt{2}$ 究竟有多大？

虽然 $\sqrt{2}$ 是无理数，但我们可以用有理数估计它的大致范围. 我们知道，边长越大的正方形的面积越大；反之，面积越大的正方形的边长也越大. 所以被开方数越大，对应的算术平方根也越大，即如果 $a>b\geqslant0$，那么 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$. 利用这个结论，我们可以估计 $\sqrt{2}$ 的大小：

表 19－1

2 所在的范围	$\sqrt{2}$ 所在的范围
$1^2<2<2^2$	$1<\sqrt{2}<2$
$1.4^2<2<1.5^2$	$1.4<\sqrt{2}<1.5$
$1.41^2<2<1.42^2$	$1.41<\sqrt{2}<1.42$
$1.414^2<2<1.415^2$	$1.414<\sqrt{2}<1.415$
$1.414\ 2^2<2<1.414\ 3^2$	$1.414\ 2<\sqrt{2}<1.414\ 3$
$1.414\ 21^2<2<1.414\ 22^2$	$1.414\ 21<\sqrt{2}<1.414\ 22$
$1.414\ 213^2<2<1.414\ 214^2$	$1.414\ 213<\sqrt{2}<1.414\ 214$
…	…

如果表 19－1 继续下去，可以得到 $\sqrt{2}$ 的更精确的近似值. 我们可以用计算器求出一个数的平方根或其近似值.

例 4 用计算器求值(近似值保留三位小数)：

(1) $\sqrt{2}$； (2) $\sqrt{4\,489}$；

(3) $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$； (4) $\sqrt{0.039\,2}$.

解 (1) $\sqrt{2}\approx 1.414$.

(2) $\sqrt{4\,489}=67$.

(3) $\sqrt{\dfrac{3}{7}}\approx 0.655$.

(4) $\sqrt{0.039\,2}\approx 0.198$.

> 用计算器求一个数的平方根时，按键顺序与计算器的型号有关，具体操作可以参考计算器的使用说明书.

同样地，我们也可以用计算器求一个数的立方根或其近似值.

例 5 用计算器求值(近似值保留四位小数)：

(1) $\sqrt[3]{24}$； (2) $\sqrt[3]{17\,576}$；

(3) $\sqrt[3]{-3.96}$； (4) $\sqrt[3]{2\dfrac{2}{3}}$.

解 (1) $\sqrt[3]{24}\approx 2.884\,5$.

(2) $\sqrt[3]{17\,576}=26$.

(3) $\sqrt[3]{-3.96}\approx -1.582\,1$.

(4) $\sqrt[3]{2\dfrac{2}{3}}\approx 1.386\,7$.

课堂练习 19.2(2)

1. 无限小数一定是无理数吗？无理数一定是无限小数吗？请说明理由.

2. 下列无理数分别介于哪两个相邻的整数之间？

(1) $\sqrt{10}$； (2) $-\sqrt{21}$.

3. 用计算器求值(近似值保留三位小数)：

(1) $-\sqrt{5}$；　　(2) $\sqrt[3]{1\,728}$；

(3) $\pm\sqrt{6\dfrac{8}{13}}$；　　(4) $\sqrt[3]{-1\,937.7}$.

3. 实数与数轴

有理数和无理数统称为**实数**. 有理数为有限小数或无限循环小数，无理数为无限不循环小数. 不是有理数的实数就是无理数. 实数可以这样分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left\{\left.\begin{array}{l}\text{正有理数}\\0\\\text{负有理数}\end{array}\right\}\right.\text{有限小数或无限循环小数}\\[2ex]\text{无理数}\left\{\left.\begin{array}{l}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{array}\right\}\right.\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

实数也可以分为正实数、0、负实数.

例 6　下列各数中，哪些是有理数？哪些是无理数？

0、-2、$\sqrt{2}$、4、$3.141\,6$、$-0.\dot{2}\dot{3}$、$\dfrac{22}{7}$、π、$-0.373\,773\,777\,3\cdots$(位数无限且相邻两个“3”之间依次增加 1 个“7”).

解　有理数有：0、-2、4、$3.141\,6$、$-0.\dot{2}\dot{3}$、$\dfrac{22}{7}$.

无理数有：$\sqrt{2}$、π、$-0.373\,773\,777\,3\cdots$(位数无限且相邻两个“3”之间依次增加 1 个“7”).

我们知道，每一个有理数都可以对应数轴上的一个点，那么一个无理数可以对应数轴上的一个点吗？

问题 3　$\sqrt{2}$能用数轴上的一个点对应表示吗?

利用计算机技术，可以求出$\sqrt{2}=1.414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 801\ 688\ 724\ 209\ 698\ 078\ 569\ 671\ 875\ 376\ 948\ 073\ 176\ 679\cdots$，其值在有理数 1～2 之间，进一步在 1.4～1.5 之间，1.41～1.42 之间，……(如表 19－1 所示).

如图 19-2-2，在数轴上，以上面各对有理数所对应的点为端点的线段的长度依次为 1、0.1、0.01、…，这些线段的长度越来越小，最终收缩为一点，这个点就是数轴上与$\sqrt{2}$对应的唯一的一个点.

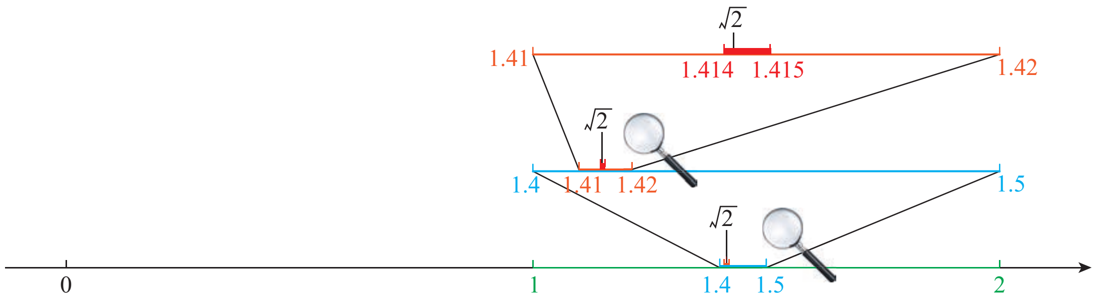


图 19-2-2

类似地，任何一个无理数都可以用数轴上的一个点对应表示. 这样，除任意一个有理数在数轴上有唯一的对应点外，任意一个无理数在数轴上也有唯一的对应点，从而任意一个实数在数轴上有唯一的对应点. 反之，数轴上任意给定的一点可对应一个有理数或一个无理数. 所以，**实数与数轴上的点一一对应**.

例 7　在数轴上分别标出$-\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$所对应的点的大致位置.

> 一个无理数在数轴上所对应的点，可以利用这个无理数的近似值(有理数)所对应的点来大致确定.

解　用计算器可得$-\sqrt{3}\approx-1.732$，$\sqrt{5}\approx2.236$，它们在数轴上所对应的点的大致位置如图 19-2-3 所示.

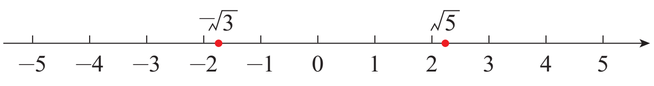


图 19-2-3

课堂练习 19.2(3)

1. 判断下列说法是否正确，并说明理由：

（1）正实数包括正有理数和正无理数；

（2）实数可以分为正实数和负实数两类；

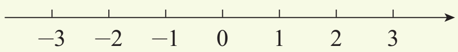
（3）所有有理数都可以对应数轴上的点；

（4）数轴上的所有点都对应有理数.

2. 下列各数中，哪些是有理数？哪些是无理数？

$-\pi$、3.14、$-\sqrt{2}$、$\dfrac{63}{20}$、$\dfrac{355}{113}$、$\dfrac{1}{3}$、$0.\dot{9}$、$0.0\dot{3}$、$0.313\,113\,111\,3\cdots$(位数无限且相邻两个“3”之间依次增加 1 个“1”).

3. 在如图所示的数轴上分别标出 $-\sqrt{2}$、$\sqrt[3]{5}$ 所对应的点的大致位置.



（第 3 题）

4. 实数的绝对值和大小比较

借助数轴，可以将有理数的绝对值、大小比较推广到实数. 有理数关于相反数和绝对值的意义同样适合于实数.

一个实数在数轴上所对应的点到原点的距离，叫作这个实数的**绝对值**. 实数 a 的绝对值记作 $|a|$.

绝对值相等、符号相反的两个实数互为**相反数**；0 的相反数是 0. 非零实数 a 的相反数是 $-a$.

一个正实数的绝对值是它本身，0 的绝对值是 0，一个负实数的绝对值是它的相反数. 设 a 表示一个实数，则

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{当 } a>0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } a=0 \text{ 时;} \\ -a, & \text{当 } a<0 \text{ 时.} \end{cases}$$

例 8 （1）分别写出 $\sqrt{10}$、$\sqrt[3]{-27}$ 的绝对值；

（2）分别写出 $-\sqrt{2}$、$\pi-3.14$ 的相反数；

（3）已知一个数的绝对值是 $\sqrt{15}$，求这个数.

解 （1）因为 $\sqrt{10}>0$，$\sqrt[3]{-27}=-3<0$，所以 $|\sqrt{10}|=\sqrt{10}$，$|\sqrt[3]{-27}|=3$.

（2）因为 $-(-\sqrt{2})=\sqrt{2}$，$-(\pi-3.14)=3.14-\pi$，所以 $-\sqrt{2}$、$\pi-3.14$ 的相反数分别是 $\sqrt{2}$、$3.14-\pi$.

（3）因为 $|\sqrt{15}|=\sqrt{15}$，$|-\sqrt{15}|=\sqrt{15}$，所以绝对值是 $\sqrt{15}$ 的数是 $\sqrt{15}$ 或 $-\sqrt{15}$.

两个实数也可以比较大小，其大小顺序的规定同有理数一样.
从数轴上看，右边的点对应的实数总比左边的点对应的实数大.
负实数小于 0；0 小于正实数；负实数小于正实数.
两个正实数，绝对值大的数较大；两个负实数，绝对值大的数较小.

例 9 不用计算器，比较下列各组数的大小：

（1）$\sqrt{5}$ 与 $-\sqrt{6}$；

（2）$\sqrt{5}$ 与 $\sqrt{6}$；

（3）$-\sqrt{5}$ 与 $-\sqrt{6}$.

解 （1）因为负数小于正数，所以 $-\sqrt{6}<\sqrt{5}$.

（2）因为 $5<6$，所以 $\sqrt{5}<\sqrt{6}$.

（3）因为 $|-\sqrt{5}|=\sqrt{5}$，$|-\sqrt{6}|=\sqrt{6}$，又 $\sqrt{5}<\sqrt{6}$，所以 $-\sqrt{5}>-\sqrt{6}$.

例 10 如图 19-2-4，已知数轴上的三点 A、B、C 所对应的实数依次是 $\sqrt{2}$、$-\frac{2}{3}$、$2\frac{1}{2}$，O 为原点.

（1）求线段 OA、OB、OC 的长；

（2）求线段 BC、AC 的长.

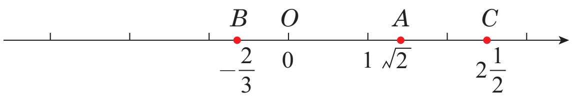


图 19-2-4

解　(1) 线段 OA 的长就是点 A 到原点 O 的距离，所以

$$OA=|\sqrt{2}|=\sqrt{2}.$$

同理，得
$$OB=\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3},$$

$$OC=\left|2\frac{1}{2}\right|=2\frac{1}{2}.$$

(2) 结合图 19-2-4，可知

$$BC=OB+OC=\frac{2}{3}+2\frac{1}{2}=3\frac{1}{6},$$

$$AC=OC-OA=2\frac{1}{2}-\sqrt{2}.$$

探究

在数轴上，如果点 A、B 对应的实数分别是 a、b，那么线段 AB 的长与 $|a-b|$ 之间有什么关系？

课堂练习 19.2(4)

1. 写出下列各数的相反数与绝对值：

(1) $-\sqrt{3}$；　(2) $\sqrt[3]{10}$；　(3) 0；　(4) $2-\sqrt{5}$；　(5) $\pi+1$.

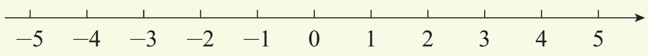
2. 不用计算器，比较下列各组数的大小：

(1) 10 与 $\sqrt{64}$；　(2) -2 与 $-\sqrt{5}$；

(3) $-\sqrt{12}$ 与 -8；　(4) $\sqrt[3]{7}$ 与 2.

3. 已知数轴上的四点 A、B、C、D 所对应的实数依次是 -1.2、$-3\frac{1}{3}$、$\frac{3}{4}$、4.3.

(1) 在如图所示的数轴上标出点 A、B、C、D；



(第 3 题)

(2) 求线段 AB、CD、AC 的长.

5. 实数的运算

实数的加、减、乘、除、乘方运算的意义，和有理数运算的意义一样. 我们学过的有理数的运算法则、运算律以及运算顺序的规定，在实数范围内同样适用.

若 a、b、c 为实数，则有

加法交换律：$a+b=b+a$.

加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$.

乘法交换律：$ab=ba$.

乘法结合律：$(ab)c=a(bc)$.

乘法对加法的分配律：$a(b+c)=ab+ac$.

实数之间不仅可以进行加、减、乘、除、乘方运算，而且正数和 0 可以进行开平方运算，任意一个实数可以进行开立方运算. 实数混合运算的顺序为：先乘方和开平(立)方，再乘除，最后加减.

对于涉及无理数的实数运算，如果没有指明运算结果保留几位小数，那么通常是利用实数的运算法则和运算律对算式进行化简，其结果可能是一个化简了的算式，如 $2+\sqrt{3}$、$2\sqrt{3}$.

$2\sqrt{3}=2\times\sqrt{3}$.

例 11 计算：

(1) $2\sqrt{7}+3\sqrt{7}-\sqrt{7}$；

(2) $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\div\frac{1}{\sqrt{2}}$；

(3) $\sqrt{(-3)^2+(\sqrt{7})^2}$；

(4) $(-2\sqrt{3}+2+3\sqrt{3})\times\sqrt{3}$.

解 (1) $2\sqrt{7}+3\sqrt{7}-\sqrt{7}$

$=(2+3-1)\times\sqrt{7}$ （乘法对加法的分配律）

$=4\sqrt{7}$.

(2) $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\div\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}$

$=(\sqrt{2})^2\times\sqrt{3}$ （乘法交换律）

$=2\sqrt{3}$.

(3) $\sqrt{(-3)^2+(\sqrt{7})^2}$

$=\sqrt{9+7}$

$=\sqrt{16}$

$=4$.

(4) $(-2\sqrt{3}+2+3\sqrt{3})\times\sqrt{3}$

$=(-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}+2)\times\sqrt{3}$ （加法交换律）

$=(\sqrt{3}+2)\times\sqrt{3}$

$=(\sqrt{3})^2+2\times\sqrt{3}$ （乘法对加法的分配律）

$=3+2\sqrt{3}$.

一星期有 7 天，1 cm=0.01 m，2 的算术平方根是 $\sqrt{2}$，圆周率是 π，这里的 7、0.01、$\sqrt{2}$、π 都是精确的数. 但是，一年约有 365.24 天，某个轮子的直径约是 0.66 m，$\sqrt{2}$ 约为 1.414，圆周率约为 3.14，这里的 365.24、0.66、1.414、3.14 都不精确，是近似数.

对于涉及无理数的实数运算，很多时候需要对结果取近似值. 这时，可以先对算式进行适当化简，然后一般用“四舍五入法”，按照所要求的精确度取近似值.

例 12 计算(结果保留两位小数)：

(1) $(\pi+2\sqrt{2})-\sqrt{2}$；

(2) $[(\sqrt{5})^2-1]\times\sqrt{3}$.

解 (1) $(\pi+2\sqrt{2})-\sqrt{2}$

$=\pi+(2\sqrt{2}-\sqrt{2})$ (加法结合律)

$=\pi+\sqrt{2}$

≈ 4.56.

(2) $[(\sqrt{5})^2-1]\times\sqrt{3}$

$=(5-1)\times\sqrt{3}$

$=4\sqrt{3}$

≈ 6.93.

例 13 伞兵脱离飞机打开降落伞前下降的高度 h(单位：m)与下降的时间 t(单位：s)近似地满足 $h=4.9t^2$(不计空气阻力). 某伞兵在打开降落伞前下降了 920 m，问：大约经过了多少时间(结果精确到 1 s)?

解 由 $h=4.9t^2$，$h=920$，得 $t^2=\dfrac{920}{4.9}$.

因为 $t>0$，所以 $t=\sqrt{\dfrac{920}{4.9}}\approx 14$(s).

答：大约经过了 14 s.

探究

（1）如果 a、b 都是有理数，分别通过加、减、乘、除四则运算，得到的结果一定是有理数吗？

（2）如果 a、b 都是无理数，分别通过加、减、乘、除四则运算，得到的结果一定是无理数吗？

（3）除了之前出现的无理数，你还能找出其他的一些无理数吗？

课堂练习 19.2(5)

1. 计算：

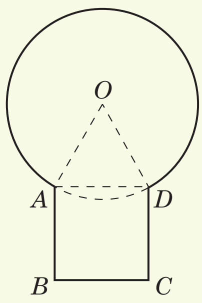
（1）$2\sqrt{6}+3\sqrt{6}-4\sqrt{6}$；　（2）$\sqrt{2}\times(1+\sqrt{2})$；

（3）$\sqrt{5}\div\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2\sqrt{2}$；　（4）$\sqrt{\sqrt{5}\times\left(\sqrt{5}-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$.

2. 计算（结果保留两位小数）：

（1）$[(\sqrt{2})^3-2\sqrt{3}]+\sqrt{3}$；　（2）$\sqrt{7}\times[2-(\sqrt{10})^2]$.

3. 如图，在地面上有一个花坛，其底部外周由一段圆弧与正方形的三条边组成. 已知圆弧的半径和正方形的边长相等，正方形 $ABCD$ 的面积为 30 m^2. 求花坛底部的周长（π 取 3.14，结果精确到 0.1 m）.



（第 3 题）

6. 科学记数法

在科学研究和日常生活中，人们往往会遇到绝对值较大或较小的数，如光在真空中的传播速度约为 300 000 000 m/s，1 nm 等于 0.000 000 001 m. 这些数直接写起来很不方便，可以用 10 的整数次幂的形式来表示，如 $300\ 000\ 000=3\times10^{8}$，$0.000\ 000\ 001=1\times10^{-9}$.

把一个数表示成 $a\times10^{n}$ $(1\leqslant|a|<10$，a 是整数或小数，n 是整数$)$的形式，这种记数方法叫作**科学记数法**. 当 $a=1$ 或 $a=-1$ 时，“1”常省略不写，如 $0.000\ 000\ 001=10^{-9}$，$-1\ 000\ 000=-10^{6}$.

用科学记数法表示绝对值较大或较小的数给表达和计算带来了方便. 对于绝对值较大的数，可以直观地表示这个数的整数的位数，如 3.2×10^{5} 有六个整数位. 对于绝对值较小的数，可以直观地表示这个数的小数点与左起第一个非零数字之间 0 的个数，如 1.23×10^{-4} 的小数点与左起第一个非零数字 1 之间有三个 0.

例 14 用科学记数法表示下列各数：

（1）9 600 000；（2）$-1\ 300\ 000\ 000$；

（3）0.000 031 42；（4）$-0.000\ 000\ 037$.

解 （1）$9\ 600\ 000=9.6\times10^{6}$.

（2）$-1\ 300\ 000\ 000=-1.3\times10^{9}$.

（3）$0.000\ 031\ 42=3.142\times10^{-5}$.

（4）$-0.000\ 000\ 037=-3.7\times10^{-8}$.

例 15 用科学记数法表示下列各数：

（1）地球的表面积约为 510 000 000 km^2；

（2）月球的质量约为 7 350 000 000 000 000 万吨；

（3）在全球范围内，我国北斗卫星导航系统的授时精度优于 0.000 000 02 s.

解 （1）$510\ 000\ 000=5.1\times10^{8}$.

（2）$7\ 350\ 000\ 000\ 000\ 000=7.35\times10^{15}$.

（3）$0.000\ 000\ 02=2\times10^{-8}$.

例 16 根据 2021 年 5 月 11 日发布的《第七次全国人口普查公报(第二号)》，2020 年 11 月 1 日零时，全国总人口约为 1.44×10^9 人. 如果平均每人每天食用粮食 0.5 kg，那么上述人口普查公报中的所有人一天食用多少吨粮食？如果一年按 365 天计算，一年食用多少吨粮食？(结果用科学记数法表示)

解 $0.5\times1.44\times10^9=7.2\times10^8(\text{kg})=7.2\times10^5(\text{t})$，

$7.2\times10^5\times365=2.628\times10^8(\text{t})$.

答：上述人口普查公报中的所有人一天食用 7.2×10^5 t 粮食，一年食用 2.628×10^8 t 粮食.

例 17 已知 1 m^3 的铁的质量是 7.9×10^3 kg. 现在有一个铁制的零件，它的体积是 3 mm^3，那么它的质量是多少千克(结果用科学记数法表示)？

解 $1\ \text{mm}=10^{-3}\ \text{m}$，$1\ \text{mm}^3=10^{-9}\ \text{m}^3$.

$7.9\times10^3\times3\times10^{-9}=2.37\times10^{-5}(\text{kg})$.

答：这个零件的质量是 2.37×10^{-5} kg.

课堂练习 19.2(6)

1. 用科学记数法表示下列各数：

(1) 261 500；　　(2) −10 200 000；

(3) 0.000 76；　　(4) −0.000 010 32.

2. (1) 2.023×10^8有______个整数位；

(2) -6.91×10^7有______个整数位；

(3) 1.98×10^{-5}的小数点与左起第一个非零数字之间有______个 0；

(4) -4.372×10^{-6}的小数点与左起第一个非零数字之间有______个 0.

3. 一天有 8.64×10^4 s，如果一年按 365 天计算，一年有多少秒(结果用科学记数法表示)？

习题 19.2

A

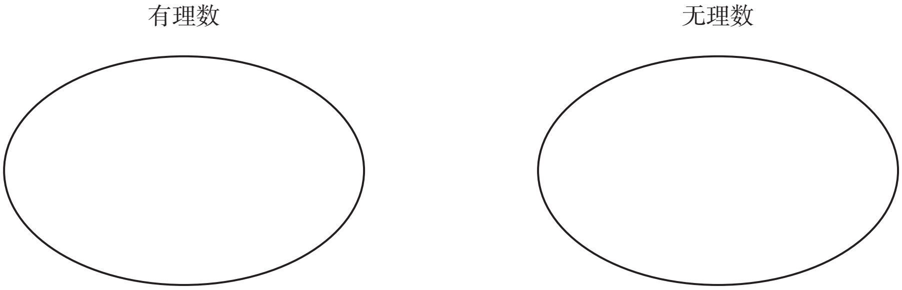
1. 填空题：

（1）将$\dfrac{5}{11}$化成小数是________；

*（2）将 $0.\dot{2}\dot{3}$ 化成分数是________.

2. 将下列各数填入适当的圈内：

2.5、$\sqrt{3}$、$-1\dfrac{1}{7}$、π、$\sqrt{11}$、$0.\dot{3}$、$0.102\ 030\ 405\ 060\ 708\cdots$（位数无限且从 1 开始不断增大的每两个连续正整数间都有一个 0）.

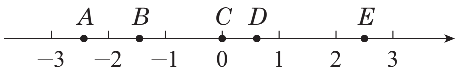


3. 用计算器求值（结果保留三位小数）：

（1）$\sqrt{7}$；　　（2）$\sqrt[3]{21}$；

（3）$\sqrt{2\dfrac{3}{7}}$；　　（4）$\sqrt[3]{1.002}$.

4. 已知实数 $0.\dot{6}$、$-\sqrt{6}$、$-\sqrt{2}$、2.5、0，它们在数轴上所对应的点如图所示：



（第 4 题）

试指出点 A、B、C、D、E 所对应的实数.

5. 化简：

(1) $|2-\sqrt{3}|$；　　(2) $|\sqrt{5}-\sqrt{7}|$；

(3) $|3-\sqrt{3}|+|2+\sqrt{3}|$；　　(4) $|\sqrt{7}-2|+2$.

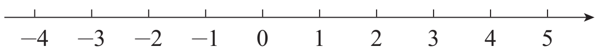
6. 不用计算器，比较下列各组数的大小：

(1) $\sqrt{10}$与$\sqrt{12}$；　　(2) $-\sqrt{10}$与-3；

(3) $-2\sqrt{2}$与$-2\sqrt{3}$；　　(4) $\dfrac{\sqrt{8}}{2}$与$\dfrac{3}{2}$.

7. 已知数轴上的点 A、B、C、D 所对应的实数依次是-1.4、$3\dfrac{2}{3}$、2.75、$-\sqrt{10}$.

(1) 在如图所示的数轴上标出点 A、B、C 的位置和点 D 的大致位置；



(第 7 题)

(2) 求线段 AB、BC、AD 的长.

8. 计算：

(1) $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-7\sqrt{2}-2\sqrt{2}$；

(2) $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}-\dfrac{5}{4}\sqrt{3}+\dfrac{1}{4}\sqrt{3}+\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$；

(3) $\sqrt{10}\times\sqrt{3}\div2\sqrt{10}\div\sqrt{3}$；

(4) $\sqrt[3]{-1\ 000}-\sqrt{100}+\sqrt[3]{0.001}+\sqrt{36}$.

9. 人站在距地面 h km 的高处，能看到的最远距离 d 近似满足 $d=\sqrt{2Rh}$，其中 R 是地球的半径. 上海“东方明珠”太空舱距地面的高度约为 350 m，如果没有障碍物的影响，站在太空舱的人可以看到多远(R 取 6 371 km，结果精确到 0.1 km)？

10. 用科学记数法表示下列各数：

(1) 17 020 000；　　(2) $-2\ 300\ 000$；

(3) 0.000 456；　　　　(4) $-0.006\ 07$.

B

11. 判断下列说法是否正确，并说明理由：

(1) 无理数与无理数的和一定是无理数；

(2) 无理数与无理数的积一定是无理数；

(3) 有理数与无理数的和一定是无理数；

(4) 有理数与无理数的积一定是无理数.

* **12.** 试说明 $\sqrt{3}$ 是无理数的理由.

13. 我们知道，正方形的面积越大，其边长也越大，即如果两个正方形的面积分别为 a 和 b，且 $a<b$，那么 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$.

因为 $1^2<3<2^2$，所以 $1<\sqrt{3}<2$，可知 $\sqrt{3}$ 的整数部分是 1. 取 1 和 2 的中间值 $\frac{1+2}{2}=1.5$，由 $1.5^2=2.25<3$，得 $1.5<\sqrt{3}<2$；取 1.5 和 2 的中间值 $\frac{1.5+2}{2}=1.75$，由 $1.75^2=3.062\ 5>3$，得 $1.5<\sqrt{3}<1.75$；……

请继续上面的方法和步骤，确定 $\sqrt{3}$ 的十分位上的数字.

◎内容提要

1. 基本概念：算术平方根，平方根，立方根，无理数，实数.

2. 平方根和立方根：

（1）正数有两个平方根，它们互为相反数；0 的平方根是 0；负数没有平方根.

（2）正数的立方根是正数；0 的立方根是 0；负数的立方根是负数.

3. 实数：

（1）有理数必为有限小数或无限循环小数；反过来，有限小数或无限循环小数必为有理数.

（2）无限不循环小数又叫作无理数.

（3）有理数和无理数统称为实数. 实数与数轴上的点一一对应.

（4）有理数的运算法则、运算律以及运算顺序的规定，在实数范围内同样适用. 实数混合运算的顺序为：先乘方和开平(立)方，再乘除，最后加减.

4. 科学记数法：

把一个数表示成 $a\times10^n$ $(1\leqslant|a|<10$，a 是整数或小数，n 是整数)的形式，这种记数方法叫作科学记数法.

◎复习题

A

1. 填空题：

（1）$\frac{25}{81}$的平方根是________；

（2）$-\frac{64}{125}$的立方根是________；

（3）15 的两个平方根的积是________；

（4）将$\frac{7}{12}$化成小数是________；

*（5）将 $0.\dot{1}3\dot{5}$ 化成分数是________；

（6）比较大小：$\sqrt{80}$________9(填不等号)；

（7）在数轴上，实数 $2-\sqrt{2}$ 对应的点在原点的________侧；

（8）面积为 2 的正方形的周长是________，体积是 2 的正方体的所有棱长之和是________.

2. 选择题：

（1）$\sqrt{(-3)^2}$ 的平方根是　　　　（　　）

A. ±3；　　　　B. 3；

C. $\pm\sqrt{3}$；　　　　D. $\sqrt{3}$.

（2）下列等式中正确的是　　　　（　　）

A. $-\sqrt{(-8)^2}=-8$；

B. $(-\sqrt{8})^2=64$；

C. $\sqrt{(-25)^2}=\pm25$；

D. $\sqrt{9\frac{1}{16}}=3\frac{1}{4}$.

（3）下列说法中正确的是 （　　）

A. 数轴上的每一个点都有一个有理数与它对应；

B. 不带根号的数一定是有理数；

C. 负数没有立方根；

D. $-\sqrt{17}$是 17 的一个平方根.

3. 用计算器求下列各数的值（结果保留三位小数），并分别写出它们的相反数及绝对值.

（1）$\sqrt{11}$；（2）$\sqrt[3]{-4}$；（3）$-\sqrt{3}$；（4）$\sqrt[3]{3}$.

4. 计算：

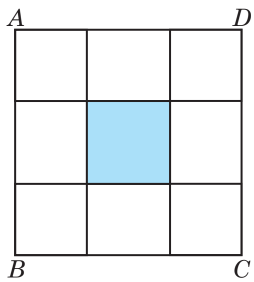
（1）$\sqrt{15}-\frac{3}{2}\sqrt{15}+\frac{1}{4}\sqrt{15}$；（2）$(3-\sqrt{3})\div\sqrt{3}$.

5. 根据实验数据，钢轨温度每变化 1 ℃，每一米钢轨就伸缩约 0.000 012 m. 如果一年中气温相差 40 ℃，那么 100 m 长的铁路最多可伸缩多少（结果用科学记数法表示）？

6. 用 480 m 长的篱笆在空地上围一个绿化场地，有两种设计方案：一种是围成正方形；另一种是围成圆形. 选用哪一种方案围成的场地面积较大？大多少（π 取 3.14，结果精确到 1 m^2）？

B

7. 如图，面积为 30 m^2 的正方形 $ABCD$ 的四个角都是面积为 3 m^2 的小正方形，用计算器求阴影部分正方形的边长（结果精确到 0.01 m）.



（第 7 题）

8. 给定按一定规律排列的一列数：1、$\sqrt{2}$、$-\sqrt{3}$、2、$\sqrt{5}$、$-\sqrt{6}$、$\sqrt{7}$、….

（1）写出第 100 个数.

（2）如果从 1 开始依次连续取若干个数，使它们的和大于 5，那么至少要选多少个数？将算式及结果写出来(可以使用计算器).

9. 请利用计算器探究：

（1）任取一个大于 1 的数，先对它开平方，再对得到的算术平方根开平方，……，若将这样的开平方运算持续进行下去，其结果向什么数靠近？写出你的探究过程和结论.

（2）任取一个小于 1 且大于 0 的数先对它开平方，再对得到的算术平方根开平方，……，若将这样的开平方运算持续进行下去，其结果向什么数靠近？写出你的探究过程和结论.

第20章

二次根式

在六、七年级学习代数式的概念时，所涉及的运算局限于加、减、乘、除及乘方，所出现的代数式也局限于有理式. 由于在“实数”一章中已引进了数的开方运算，因此代数式的类型也随之扩展，产生了根式.

本章将学习二次根式的概念、性质和运算. 将二次根式化为最简二次根式，不仅是简化表达的需要，还可以帮助识别那些表示形式不同但实质相同的二次根式.

本章将为后续学习一元二次方程等内容奠定基础.

20.1 二次根式及其性质

在“实数”一章，我们学习了开平方运算，知道了当 $a \geqslant 0$ 时，$\sqrt{a}$ 表示 a 的算术平方根.

形如 $\sqrt{a}$ 的代数式(其中 a 为有理式)，叫作**二次根式**. 例如，$\sqrt{2}$、$\sqrt{\dfrac{2}{3}}$、$\sqrt{a^2+1}$、$\sqrt{b^2-4ac}$、$\sqrt{\dfrac{1}{x-2}}$ 等，都是二次根式.

在实数范围内，负数没有平方根，所以如 $\sqrt{-3}$、$\sqrt{b}\,(b<0)$ 这样的式子没有意义，$\sqrt{a}$ 有意义的条件是代数式 a 的值不小于 0，即 $a \geqslant 0$.

例 1 设 x 是实数，当 x 满足什么条件时，下列各式有意义?

(1) $\sqrt{2x-1}$；　　(2) $\sqrt{2-x}$；

(3) $\sqrt{\dfrac{1}{x}}$；　　(4) $\sqrt{1+x^2}$.

解 (1) 由 $2x-1 \geqslant 0$，得 $x \geqslant \dfrac{1}{2}$.

所以，当 $x \geqslant \dfrac{1}{2}$ 时，$\sqrt{2x-1}$ 有意义.

(2) 由 $2-x \geqslant 0$，得 $x \leqslant 2$.

所以，当 $x \leqslant 2$ 时，$\sqrt{2-x}$ 有意义.

(3) 由 $\dfrac{1}{x} \geqslant 0$，得 $x>0$.

所以，当 $x>0$ 时，$\sqrt{\dfrac{1}{x}}$ 有意义.

(4) 不论 x 是什么实数，都有 $1+x^2>0$.

所以，当 x 是任意实数时，$\sqrt{1+x^2}$ 都有意义.

> 如无特别说明，本章出现的二次根式的变形与运算总是在二次根式有意义的前提下进行.

因为 $\sqrt{a}$ 表示 a 的算术平方根，所以 $\sqrt{a}$ 的平方等于 a. 现在把这个结论作

为二次根式的性质：

性质 1 $(\sqrt{a})^2=a \quad (a\geqslant 0)$.

思考

$\sqrt{a^2}$ 与 a 一定相等吗？为什么？

$\sqrt{a^2}$ 是 a^2 的算术平方根，是一个非负数，而 a 可能为负数，所以 $\sqrt{a^2}$ 与 a 不一定相等，如 $\sqrt{(-1)^2}\neq -1$. 当 $a>0$ 时，a^2 的算术平方根为 a；当 $a=0$ 时，a^2 的算术平方根为 0；当 $a<0$ 时，a^2 的算术平方根为 $-a$. 这是二次根式的又一性质：

性质 2 $\sqrt{a^2}=|a|$.

例 2 求下列二次根式的值：

(1) $\sqrt{(3-\pi)^2}$；

(2) $\sqrt{x^2-2x+1}$，其中 $x=-\sqrt{3}$.

解 (1) $\sqrt{(3-\pi)^2}=|3-\pi|=\pi-3$.

(2) $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$.

当 $x=-\sqrt{3}$ 时，原式 $=\left|-\sqrt{3}-1\right|=\sqrt{3}+1$.

课堂练习 20.1(1)

1. 设 x 是实数，当 x 满足什么条件时，下列各式有意义？

(1) $\sqrt{\dfrac{1}{3}-2x}$；　　(2) $\sqrt{-\dfrac{2}{x}}$；　　(3) $\sqrt{x^2-2x+1}$.

2. 求下列二次根式的值：

(1) $\sqrt{-\frac{c}{a}}$，其中 $a=2$，$c=-\frac{1}{2}$；

(2) $\sqrt{\frac{1}{(m+2)^2}}$，其中 $m=-5$.

3. 设 a、b、c 分别是三角形三边的长，化简：

$$\sqrt{(a-b+c)^2}+\sqrt{(b-c-a)^2}.$$

思考

$\sqrt{6}$ 与 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ 相等吗？$\sqrt{\frac{3}{2}}$ 与 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 相等吗？为什么？

当 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$ 时，$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2=ab$，根据算术平方根的意义，得 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$. 当 $a\geqslant0$，$b>0$ 时，也可以推出 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. 我们把这两个结论也作为二次根式的性质：

性质 3 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\quad(a\geqslant0,\ b\geqslant0)$.

性质 4 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\quad(a\geqslant0,\ b>0)$.

在二次根式的运算或变换中，可以根据性质 3、性质 4 进行转化. 例如：

$$\sqrt{18}=\sqrt{2\times3^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{3^2}=3\sqrt{2},$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

一般地，根据性质 3，设 $a\geqslant0$，那么

$$\sqrt{ab^2}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b^2}=|b|\sqrt{a}.$$

这说明，如果二次根式里被开方数是几个因式的积，其中有的因式是完全平方式，那么这样的因式可用它的算术平方根代替后移到根号外面.

形如 A^2（A 为整式）的代数式称为完全平方式，如 b^2、$(a+b)^2$.

根据性质 4，设 $\frac{a}{b}\geqslant0$，那么

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{a\cdot b}{b\cdot b}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{|b|}.$$

这说明，如果二次根式里被开方数含有分母，那么可以将分子和分母同乘一个代数式，使分母变为完全平方式，再将分母用它的算术平方根代替后移到根号外面作为新的分母，从而化去被开方数中的分母.

把二次根式里被开方数所含因式中的完全平方式移到根号外，或者化去被开方数的分母的过程，称为“化简二次根式”.

为了方便，我们常把形如 $b\sqrt{a}$（其中 a、b 为有理式）的代数式也称为二次根式，如 $3\sqrt{2}$、$\frac{\sqrt{6}}{4}$、$-\sqrt{3}$等.

例 3 化简下列二次根式：

（1）$\sqrt{72}$； （2）$\sqrt{12a^3}$； （3）$\sqrt{18x^2}$（$x\geqslant0$）.

解 （1）$\sqrt{72}=\sqrt{6^2\times2}=6\sqrt{2}$.

（2）由 $12a^3\geqslant0$，可知 $a\geqslant0$.

所以$\sqrt{12a^3}=\sqrt{2^2\times3\times a^2\times a}=\sqrt{(2a)^2\cdot3a}=2|a|\sqrt{3a}=2a\sqrt{3a}$.

（3）$\sqrt{18x^2}=\sqrt{3^2\times2\times x^2}=3\sqrt{2}|x|$.

因为 $x\geqslant0$，所以$\sqrt{18x^2}=3\sqrt{2}x$.

例 4 化简下列二次根式：

（1）$\sqrt{\frac{a}{3}}$； （2）$\sqrt{\frac{5}{2x}}$； （3）$\sqrt{\frac{b^2}{9a}}$（$b>0$）.

解 (1) $\sqrt{\dfrac{a}{3}}=\sqrt{\dfrac{3a}{3^2}}=\dfrac{\sqrt{3a}}{\sqrt{3^2}}=\dfrac{\sqrt{3a}}{3}$.

(2) 由 $\dfrac{5}{2x}\geqslant 0$，可知 $x>0$.

所以 $\sqrt{\dfrac{5}{2x}}=\sqrt{\dfrac{5\cdot 2x}{2^2\cdot x^2}}=\dfrac{\sqrt{10x}}{\sqrt{(2x)^2}}=\dfrac{\sqrt{10x}}{2|x|}=\dfrac{\sqrt{10x}}{2x}$.

(3) 已知 $b>0$，又由 $\dfrac{b^2}{9a}\geqslant 0$，可知 $a>0$.

所以 $\sqrt{\dfrac{b^2}{9a}}=\sqrt{\dfrac{b^2\cdot a}{3^2\cdot a^2}}=\dfrac{\sqrt{b^2\cdot a}}{\sqrt{(3a)^2}}=\dfrac{|b|\sqrt{a}}{3|a|}=\dfrac{b\sqrt{a}}{3a}$.

观察

将例 3、例 4 中的二次根式化简前后相比较，化简后的二次根式，如 $6\sqrt{2}$、$2a\sqrt{3a}$、$\dfrac{\sqrt{3a}}{3}$ 等，其被开方数有什么共同特点？

由以上观察，可以发现：

(1) 被开方数中各因式的指数都为 1；

(2) 被开方数不含分母.

> 被开方数中的因式是指因式分解和素因数分解后的因式和因数.

我们把满足上述两个条件的二次根式，叫作**最简二次根式**.

在二次根式的运算中，一般要把结果化成最简二次根式.

例 5 判断下列二次根式是不是最简二次根式：

(1) $\sqrt{\dfrac{5a}{3}}$； (2) $\sqrt{42a}$；

(3) $\sqrt{24x^3}$； (4) $\sqrt{3(a^2+2a+1)}$.

解 (1) 因为被开方数 $\dfrac{5a}{3}$ 含分母 3，所以 $\sqrt{\dfrac{5a}{3}}$ 不是最简二次根式.

(2) 因为被开方数可分解为 $42a=2\times 3\times 7\times a$，各因式的指数都为 1，所以 $\sqrt{42a}$ 是最简二次根式.

(3) 因为被开方数含因式 x^3，它的指数不为 1，所以$\sqrt{24x^3}$不是最简二次根式.

(4) 因为被开方数可分解为 $3(a^2+2a+1)=3(a+1)^2$，其中因式$(a+1)^2$的指数为 2，所以 $\sqrt{3(a^2+2a+1)}$ 不是最简二次根式.

思考

如何将例 5 中(1)(3)(4)的二次根式化成最简二次根式？

课堂练习 20.1(2)

1. 判断下列二次根式中，哪些是最简二次根式：

$$\sqrt{\frac{1}{3}}、\sqrt{ab}、\sqrt{2c^2}、\sqrt{\frac{y}{x}}、\sqrt{4a^2+4a+1}、\sqrt{a^2+b^2}.$$

2. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{32}$； (2) $\sqrt{27x^2}$ $(x\geqslant 0)$； (3) $\frac{1}{2}\sqrt{24mn^2}$ $(n>0)$.

3. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{2\frac{2}{3}}$； (2) $\sqrt{\frac{a}{4}}$； (3) $6\sqrt{\frac{y}{12x^2}}$ $(x>0)$.

习题 20.1

A

1. 设 x 是实数，当 x 满足什么条件时，下列各式有意义？

(1) $\sqrt{x-1}$； (2) $\sqrt{2x+3}$；

(3) $\sqrt{\frac{x+3}{2}}$； (4) $\sqrt{\frac{1}{2-3x}}$.

2. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{(-1.5)^2}$； (2) $\sqrt{(a-3)^2}$ $(a<3)$；

(3) $\sqrt{(b-4)^2}$ $(b>4)$；　　(4) $\sqrt{(m-n)^2}$ $(m\geqslant n)$.

3. 找出下列二次根式中的非最简二次根式，并把它们化成最简二次根式.

$$\sqrt{6}、\sqrt{45}、\sqrt{3a^3}、\sqrt{0.5}、\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

4. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{48}$；　　(2) $\sqrt{2.5}$；　　(3) $\sqrt{\frac{12}{5}}$；

(4) $\frac{1}{6}\sqrt{18}$；　　(5) $10\sqrt{\frac{3}{8}}$.

B

5. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{5\times18\times225}$；　　(2) $\sqrt{0.3\times0.27}$；

(3) $\sqrt{\frac{3}{5}-\frac{1}{3}}$；　　(4) $\frac{1}{3}\sqrt{24a^2b^3}$ $(a<0,\ b\geqslant0)$；

(5) $8\sqrt{\frac{n}{12m^5}}$.

6. 已知 $3<x<5$，化简：$\sqrt{(3-x)^2}+|x-5|$.

20.2 二次根式的运算

实数的运算律和运算顺序，在二次根式运算中同样适用.

观察

把$\sqrt{\frac{1}{2}}$与$\sqrt{18}$化成最简二次根式，所得结果有什么相同之处？

$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$. 二次根式$\frac{\sqrt{2}}{2}$与$3\sqrt{2}$的被开方数相同，都是2.

几个二次根式化成最简二次根式后，如果被开方数相同，那么这几个二次根式叫作**同类二次根式**. 例如，$\sqrt{\frac{1}{2}}$与$\sqrt{18}$是同类二次根式，而$\sqrt{2}$与$\sqrt{3}$不是同类二次根式.

例 1 下列二次根式中，哪些是同类二次根式？

$\sqrt{12}$、$\sqrt{24}$、$\sqrt{\frac{1}{27}}$、$\sqrt{a^4b}$ $(a\neq0)$、$2\sqrt{a^3b}$ $(a>0)$、$-\sqrt{ab^3}$ $(a>0)$.

解 把二次根式化成最简二次根式，得

$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times3}=2\sqrt{3}$；

$\sqrt{24}=\sqrt{2^2\times2\times3}=2\sqrt{6}$；

$\sqrt{\frac{1}{27}}=\sqrt{\frac{3}{9^2}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$；

$\sqrt{a^4b}=a^2\sqrt{b}$ $(a\neq0)$；

$2\sqrt{a^3b}=2\sqrt{a^2\cdot ab}=2a\sqrt{ab}$ $(a>0)$；

$-\sqrt{ab^3}=-\sqrt{ab\cdot b^2}=-b\sqrt{ab}$（由$a>0$，可知$b\geqslant0$）.

所以，$\sqrt{12}$与$\sqrt{\frac{1}{27}}$是同类二次根式，$2\sqrt{a^3b}$ $(a>0)$与$-\sqrt{ab^3}$ $(a>0)$也是同类二次根式.

二次根式的加减同整式的加减类似，归结为合并同类二次根式．为了合并同类二次根式，应当先把各个二次根式化成最简二次根式．

例 2 合并下列各式中的同类二次根式：

（1）$2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{2}+\sqrt{3}$；（2）$3\sqrt{x}-a\sqrt{x}$．

解 （1）$2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$$=\left(2+\frac{1}{3}\right)\sqrt{2}+\left(-\frac{1}{2}+1\right)\sqrt{3}$$

$$=\frac{7}{3}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

（2）$3\sqrt{x}-a\sqrt{x}=(3-a)\sqrt{x}$．

例 3 计算：

（1）$3\sqrt{75}+\frac{\sqrt{48}}{2}$；（2）$\left(\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{12}\right)$．

解 （1）$3\sqrt{75}+\frac{\sqrt{48}}{2}$

$$=3\sqrt{5^2\times3}+\frac{\sqrt{4^2\times3}}{2}$$

$$=15\sqrt{3}+2\sqrt{3}=17\sqrt{3}.$$

（2）$\left(\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{12}\right)$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}}-2\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{12}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}+2\sqrt{3}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\sqrt{2}+\left(2-\frac{2}{3}\right)\sqrt{3}=\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

课堂练习 20.2(1)

1. 判断下列各组中的二次根式是不是同类二次根式：

（1）$\sqrt{32}$、$\sqrt{50}$、$2\sqrt{\dfrac{1}{18}}$；

（2）$\sqrt{4x^3}$、$2\sqrt{2x}$、$\sqrt{8x^2}$ $(x\geqslant 0)$；

（3）$\sqrt{3x}$、$\sqrt{3a^2x^3}$ $(a>0)$、$\sqrt{\dfrac{xy^2}{3}}$ $(y>0)$.

2. 计算：

（1）$2\sqrt{5}-6\sqrt{5}$；

（2）$\sqrt{12}+2\sqrt{48}-3\sqrt{75}$；

（3）$\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\sqrt{5}+\sqrt{\dfrac{1}{6}}$.

3. 计算：

（1）$6\sqrt{3}-\left(\sqrt{0.12}-\sqrt{1\dfrac{1}{3}}\right)$；

（2）$\sqrt{8x}-2\sqrt{\dfrac{x}{2}}+\sqrt{0.5x}$.

问题 如图 20-2-1，将一个正方形分割成面积分别为 x 和 $2x$ 的两个小正方形和面积为 y 的两个长方形，用含 x 的代数式表示 y.

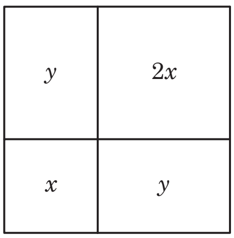


图 20-2-1

分析 图 20-2-1 中，面积为 y 的长方形的相邻两边的长分别等于面积为 x 和 $2x$ 的两个小正方形的边长，即 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{2x}$，其中 $x>0$，由此可知 $y=\sqrt{x}\cdot\sqrt{2x}$.

由二次根式的性质 3，可得 $y=\sqrt{x}\cdot\sqrt{2x}=\sqrt{x\cdot 2x}=\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}\,x$.

应用二次根式的性质 3 从右向左进行转化，即得二次根式相乘的法则：

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}.$$

例 4 计算：

(1) $\sqrt{12}\times\sqrt{32}$；

(2) $\sqrt{\frac{1}{6}}\times\sqrt{48}$；

(3) $3\sqrt{2}\times2\sqrt{6}$；

(4) $\sqrt{b}\cdot\sqrt{4b}$.

解 (1) $\sqrt{12}\times\sqrt{32}=\sqrt{12\times32}=\sqrt{2^2\times3\times2^5}=\sqrt{(2^3)^2\times2\times3}=2^3\times\sqrt{2\times3}=8\sqrt{6}$.

(2) $\sqrt{\frac{1}{6}}\times\sqrt{48}=\sqrt{\frac{1}{6}\times48}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$.

(3) $3\sqrt{2}\times2\sqrt{6}=3\times2\times\sqrt{2\times6}=6\times2\sqrt{3}=12\sqrt{3}$.

(4) $\sqrt{b}\cdot\sqrt{4b}=\sqrt{b\cdot4b}=\sqrt{2^2\cdot b^2}=2|b|$.

因为$\sqrt{b}$有意义，所以 $b\geqslant0$.

因此，$\sqrt{b}\cdot\sqrt{4b}=2b$.

同样地，二次根式的性质 4 给出了二次根式相除的法则，即

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

例 5 计算：

(1) $\sqrt{3}\div\sqrt{2}$；

(2) $\sqrt{\frac{4}{3}}\div\sqrt{\frac{1}{15}}$；

(3) $2\sqrt{18}\div4\sqrt{3}$.

解 (1) $\sqrt{3}\div\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{3\times2}{2\times2}}=\sqrt{\frac{6}{2^2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

(2) $\sqrt{\frac{4}{3}}\div\sqrt{\frac{1}{15}}=\sqrt{\frac{4}{3}\div\frac{1}{15}}=\sqrt{\frac{4}{3}\times 15}=\sqrt{4\times 5}=2\sqrt{5}$.

(3) $2\sqrt{18}\div 4\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{18}}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{18}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

课堂练习 20.2(2)

1. 计算：

(1) $2\sqrt{15}\div\sqrt{3}$；

(2) $\sqrt{0.1}\times\sqrt{0.07}$；

(3) $\sqrt{13}\div\sqrt{\frac{104}{4}}$.

2. 计算：

(1) $\sqrt{4b}\div\sqrt{6b}$；

(2) $\sqrt{35}\times\sqrt{\frac{5}{2}}\div\sqrt{\frac{4}{7}}$；

(3) $\sqrt{24}\div(\sqrt{12}\div\sqrt{27})$.

3. 如果一个圆的面积与一个正方形的面积相等，那么该圆的周长与该正方形周长的比值是多少？

观察

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{6}}{2},$$

上式中 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 的分母是 $\sqrt{2}$，$\frac{\sqrt{6}}{2}$ 的分母是 2，分母中的 $\sqrt{2}$ 是怎样化为 2 的？

把分母中的根号化去的过程称为分母有理化．分母有理化的方法，一般是把分子和分母都乘同一个适当的代数式，使分母不含根号．

例 6 计算：

(1) $\sqrt{2}\div\sqrt{12}$；

(2) $a\div\sqrt{a}$；

(3) $\dfrac{2\sqrt{18}}{\sqrt{45}}$.

分析 (1)(2)先写成“分式”的形式，再分母有理化.

解 (1) $\sqrt{2}\div\sqrt{12}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

(2) $a\div\sqrt{a}=\dfrac{a}{\sqrt{a}}=\dfrac{a\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}=\dfrac{a\sqrt{a}}{a}=\sqrt{a}$.

(3) $\dfrac{2\sqrt{18}}{\sqrt{45}}=\dfrac{2\times3\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.

例 7 如图 20-2-2，在面积为 $2a$ 的正方形 $ABCD$ 中，截得面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ 的直角三角形 ABE. 求 BE 的长.

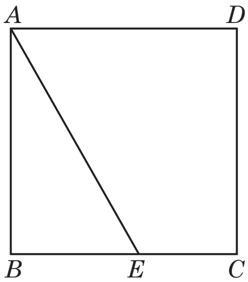


图 20-2-2

解 因为正方形 $ABCD$ 的面积为 $2a$，所以它的边长为 $\sqrt{2a}$. 设 $BE=x$，根据题意，得

$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{2a}=\frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

所以，$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\div\dfrac{\sqrt{2a}}{2}$

$$=\frac{2\sqrt{3}a}{3\sqrt{2a}}=\frac{2\sqrt{3}a\cdot\sqrt{2a}}{3\sqrt{2a}\cdot\sqrt{2a}}$$

$$=\frac{2a\sqrt{6a}}{6a}=\frac{\sqrt{6a}}{3},$$

即 $BE=\dfrac{\sqrt{6a}}{3}$.

思考

如何将 $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 分母有理化？

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

观察等式$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1$，其左边是两个含有二次根式的代数式相乘，而右边不含二次根式. 像这样，两个含有二次根式的非零代数式相乘，如果它们的积不含有二次根式，那么就说这两个代数式互为有理化因式. 例如，$\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 与 $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 互为有理化因式，$\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{a}$ 互为有理化因式.

讨论

一个含有二次根式的非零代数式的有理化因式是唯一的吗？

例 8 把下列各式分母有理化：

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$；

(2) $\dfrac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$；

(3) $\dfrac{m-1}{\sqrt{m}+1}\ (m\neq 1)$.

解 (1) $$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{(\sqrt{3})^2-\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

(2) $$\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{(4\sqrt{3}+3\sqrt{2})(4\sqrt{3}-3\sqrt{2})}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{(4\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{30}.$$

（3）已知式中 $m\neq 1$，所以

$$\frac{m-1}{\sqrt{m}+1}=\frac{(m-1)(\sqrt{m}-1)}{(\sqrt{m}+1)(\sqrt{m}-1)}$$

$$=\frac{(m-1)(\sqrt{m}-1)}{m-1}$$

$$=\sqrt{m}-1.$$

例 8 中的(3)还可以按如下方式解答：

$$\frac{m-1}{\sqrt{m}+1}=\frac{(\sqrt{m}+1)(\sqrt{m}-1)}{\sqrt{m}+1}=\sqrt{m}-1,$$

且此解题过程中 m 可以等于 1.

课堂练习 20.2(3)

1. 把下列各式分母有理化：

（1）$\frac{2}{\sqrt{3}}$；（2）$\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{18}}$；（3）$\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$.

2. 写出下列各式的一个有理化因式：

$$1-\sqrt{2}、\sqrt{a-1}、\sqrt{x}-\sqrt{y}、2\sqrt{u}+\sqrt{v}.$$

3. 把下列各式分母有理化：

（1）$\frac{2}{1-\sqrt{3}}$；（2）$\frac{1}{1-\sqrt{n}}$；（3）$\frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-3}$.

例 9 计算：

(1) $\dfrac{10}{\sqrt{5}}-\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$；

(2) $\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$.

解 (1) $$\frac{10}{\sqrt{5}}-\frac{4}{\sqrt{5}-1}=\frac{10\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}-\frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$
$$=\frac{10\sqrt{5}}{5}-\frac{4(\sqrt{5}+1)}{4}$$
$$=2\sqrt{5}-(\sqrt{5}+1)$$
$$=\sqrt{5}-1.$$

(2) $$\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=(\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$$
$$=a+2+\frac{1}{a}.$$

例 10 已知 $x=3-2\sqrt{2}$，求 $\dfrac{x^2-6x+2}{x-3}$ 的值.

分析 可以把 $x=3-2\sqrt{2}$ 直接代入计算，但把 $(x-3)$ 看作整体代入，比较简便.

解 因为 $x-3=-2\sqrt{2}$，所以
$$\frac{x^2-6x+2}{x-3}=\frac{(x-3)^2-7}{x-3}$$
$$=\frac{(-2\sqrt{2})^2-7}{-2\sqrt{2}}$$
$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

例 11 解方程：$\sqrt{3}-2\sqrt{6}x=-2\sqrt{2}$.

解 由 $\sqrt{3}-2\sqrt{6}x=-2\sqrt{2}$，得
$$-2\sqrt{6}x=-2\sqrt{2}-\sqrt{3}.$$

于是
$$x=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}.$$
因为
$$\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})\times\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{12},$$
所以原方程的解是 $x=\frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{12}$.

例 12 解不等式：$\sqrt{2}x-1<\sqrt{3}x$.

解 移项、合并同类项，得
$$(\sqrt{2}-\sqrt{3})x<1.$$
因为 $\sqrt{2}-\sqrt{3}<0$，所以
$$x>\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}.$$
又
$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=-\sqrt{2}-\sqrt{3},$$
所以原不等式的解集是 $x>-\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

课堂练习 20.2(4)

1. 解下列方程或不等式：

(1) $3\sqrt{5}x+6\sqrt{3}=\sqrt{5}x$； (2) $\sqrt{6}x+2\sqrt{2}<0$.

2. 计算：

(1) $(\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2$； (2) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$；

(3) $\sqrt{x}\div\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$.

3. 设长方形的面积为 S，相邻两边长分别为 a、b. 已知 $S=4\sqrt{6}$，$b=\sqrt{10}$. 求 a.

习题 20.2

A

1. 当 n 取 4、6、8、12、16、18 中的哪些数时，$\sqrt{n}$ 和 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式？

2. 计算：

（1）$-\frac{3}{4}\sqrt{5}+\frac{3}{5}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{3}{10}\sqrt{5}$；

（2）$\left(3\sqrt{m}-\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)-\left(\frac{5}{6}\sqrt{m}-\frac{1}{6}\sqrt{2}\right)$.

3. 计算：

（1）$2\sqrt{12}-\sqrt{27}$；

（2）$3\sqrt{5}-\sqrt{\frac{1}{5}}$；

（3）$\sqrt{32}-\sqrt{18}+\sqrt{2}$；

（4）$3\sqrt{8}-2\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. 计算：

（1）$3\sqrt{48}\times(-\sqrt{24})$；

（2）$\sqrt{2x}\cdot\sqrt{x}$；

（3）$\sqrt{\frac{a}{8}}\cdot\sqrt{2}$.

5. 计算：

（1）$2\sqrt{6}\div\sqrt{2}$；

（2）$5x\div\sqrt{x}$；

（3）$\sqrt{27a}\div\sqrt{3}$.

6. 把下列各式分母有理化：

（1）$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$；

（2）$\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{6}}$；

（3）$\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

7. 把下列各式分母有理化：

（1）$\frac{1}{\sqrt{2}-1}$；

（2）$\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$；

(3) $\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$.

8. 计算：

(1) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$；

(2) $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})$；

(3) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})\div(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$.

9. 解下列方程或不等式：

(1) $\sqrt{5}-2\sqrt{3}x=-\sqrt{2}$；

(2) $\sqrt{3}x+3>\sqrt{5}x-1$.

10. 当 $x=2$ 时，求代数式$\left(\sqrt{x}+\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)\sqrt{3x}$的值.

B

11. 已知 $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$，求 $\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ 的值.

◎内容提要

1. 基本概念：二次根式，最简二次根式.

2. 二次根式的性质：

(1) $(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$；

(2) $\sqrt{a^2}=|a|$；

(3) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$；

(4) $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geqslant 0,\ b>0)$.

3. 分母有理化：把分母中的根号化去的过程. 一般通过分子、分母同乘分母的有理化因式来实现.

4. 二次根式的四则运算：

二次根式相加减：合并同类二次根式；

二次根式相乘：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$；

二次根式相除：$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

◎复习题

A

1. 实数 x 满足什么条件时，下列各式有意义？

(1) $\sqrt{5-x}$；　(2) $\sqrt{x^2+2}$；　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$；　(4) $\sqrt{-\dfrac{3}{x}}$.

2. 写出下列等式成立的条件：

(1) $\sqrt{(x-2)(x-3)}=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-3}$；

(2) $\sqrt{\dfrac{3-x}{2-x}}=\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{2-x}}$.

3. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{288}$；　(2) $\sqrt{\dfrac{3}{8}}$；　(3) $\dfrac{3}{5}\sqrt{1\dfrac{2}{3}}$；

(4) $\sqrt{0.08\times2.16}$；　(5) $\sqrt{\dfrac{3}{2x^2}}$；　(6) $\sqrt{\dfrac{3a^3}{10}}$.

4. 计算：

(1) $3\sqrt{3}-2\sqrt{12}+\sqrt{48}$；　(2) $3\sqrt{20}\times\dfrac{\sqrt{5}}{4}\div2\sqrt{3}$；

(3) $(3\sqrt{2}+\sqrt{6})(3\sqrt{2}-\sqrt{6})$；　(4) $\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}-\dfrac{5}{\sqrt{27}}\right)\div(\sqrt{6}-\sqrt{3})$；

(5) $\sqrt{27c}+\sqrt{12c}-\sqrt{75c}$；　(6) $\dfrac{1}{(\sqrt{5}+2)^2}$.

5. 解方程：$\dfrac{1}{x}=7+4\sqrt{3}$.

6. 解不等式：$\sqrt{8}x<1+\sqrt{18}x$.

B

7. 已知 $a=\sqrt{3}-1$，求代数式 $\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}-2}$ 的值.

8. 设 $1\leqslant x\leqslant 3$，化简：$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$.

9. 落地钟的钟摆摆动一个来回所需要的时间称为一个周期 T，其计算公式为 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，其中 l 表示摆长（单位：m），$g=9.8\ \text{m/s}^2$. 如果一台落地钟摆长为 1.8 m，它摆动一个来回发出一次嘀嗒声，那么听到 10 次嘀嗒声大约需要多少时间（π 取 3.14，结果精确到 1 s）？

10. 已知 n 是正整数，且 $\sqrt{756n}$ 是整数. 求 n 的最小值.

第21章

一元二次方程

现实生活中所涉及的方程并非都是一次的，许多问题中的数量关系可以抽象为一元二次方程.

本章将探索一元二次方程的解法，学习一元二次方程的判别式以及根与系数的关系，并通过建立一元二次方程的数学模型解决有关的实际问题，进一步体会数学与现实世界的联系.

一元二次方程是进一步学习其他数学知识必不可少的基础，也是运用数学知识解决实际问题的重要工具.

21.1 一元二次方程的概念

我们已经学过一元一次方程的解法．在此基础上，可以解决一些实际问题．但是，基于实际问题列出的方程并不限于一元一次方程．

问题 一块长方形绿地的面积为 1 200 m^2，且已知长比宽多 10 m．问：长和宽各为多少？

分析 设这块长方形绿地的宽为 x m，它的长就是$(x+10)$m．因为绿地面积为 1 200 m^2，所以 $x(x+10)=1\ 200$．

去括号，得

$$x^2+10x=1\ 200.$$

在上面的等式中，有一个用字母 x 表示的未知数，可知它是一个关于 x 的一元方程；等号的两边都是整式，这样的方程是一个整式方程，其中未知数 x 的最高次数是 2．求出这个方程中未知数 x 的值，就可以求得长方形绿地的宽．

一般地，只含有一个未知数，且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫作**一元二次方程**．一元二次方程的一般形式是

$$ax^2+bx+c=0\ （a、b、c\ 为已知数，且\ a\neq 0），$$

其中 ax^2 叫作二次项，a 是二次项系数；bx 叫作一次项，b 是一次项系数；c 叫作常数项．

例如，$(x+5)^2=12$，$2y^2+3y=-1$，$x^2+5x=0$ 都是一元二次方程，必要时可以通过移项及化简把它们化成一般形式．

上述绿地面积问题中出现的方程 $x^2+10x=1\ 200$，可通过移项化成一般形式 $x^2+10x-1\ 200=0$，其中二次项系数 a 是 1，一次项系数 b 是 10，常数项 c 是 $-1\ 200$．

例 1 把下列一元二次方程化成一般形式，并写出方程中的各项与各项的系数：

（1） $x(x-1)=3x-4$；

(2) $y+\sqrt{3}=\sqrt{2}(y^2+2)$.

解 (1) 去括号，得 $x^2-x=3x-4$.

移项并合并同类项，得 $x^2-4x+4=0$.

因此，方程中的二次项是 x^2，即 $1\cdot x^2$（1 通常省略不写），所以二次项系数是 1；一次项是 $-4x$，一次项系数是 -4；常数项是 4.

(2) 去括号，得 $y+\sqrt{3}=\sqrt{2}y^2+2\sqrt{2}$.

移项，得 $-\sqrt{2}y^2+y+\sqrt{3}-2\sqrt{2}=0$.

因此，方程中的二次项是 $-\sqrt{2}y^2$，二次项系数是 $-\sqrt{2}$；一次项是 y，一次项系数是 1；常数项是 $\sqrt{3}-2\sqrt{2}$.

满足方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的实数 x 叫作这个方程的**实数根**（或者实数解），简称**实根**或者**根**. 对于一个一元二次方程，可以依据根的意义，判断一个未知数的值是不是这个方程的根.

例 2 判断 -4、$\frac{1}{2}$、2 是不是一元二次方程 $x^2+2x-8=0$ 的根.

解 把 $x=-4$ 代入方程 $x^2+2x-8=0$ 的左边，得左边的值为

$$(-4)^2+2\times(-4)-8=0,$$

而右边的值为 0.

因为方程左右两边的值相等，所以 $x=-4$ 是这个一元二次方程的根.

把 $x=\frac{1}{2}$ 代入方程 $x^2+2x-8=0$ 的左边，得左边的值为

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{1}{2}-8=-6\frac{3}{4},$$

而右边的值为 0.

因为方程左右两边的值不相等，所以 $x=\frac{1}{2}$ 不是这个一元二次方程的根.

类似地，把 $x=2$ 代入方程的左边，发现方程左右两边的值相等，可知 $x=2$ 也是这个一元二次方程的根.

课堂练习 21.1

1. 判断下列方程哪些是一元二次方程：

（1）$x^2-16=0$；

（2）$3y^2-4y=0$；

（3）$x-\dfrac{1}{x}=0$；

（4）$\sqrt{3}x^2-\dfrac{1}{3}x+1=0$；

（5）$(x+3)(x-3)+4=0$.

2. 将下列一元二次方程化成一般形式，并分别指出它们的二次项系数、一次项系数和常数项：

（1）$\dfrac{1}{5}x^2+1=3x$；

（2）$\sqrt{3}y=\sqrt{5}y^2$；

（3）$2x(x-1)=3(x+5)-4$；

（4）$5x^2-mx+n=0$（m、n 是已知数）.

3. 当 m 满足什么条件时，方程 $mx^2-3x=x^2-mx+2$ 是关于 x 的一元二次方程？

习题 21.1

A

1. 判断下列方程是不是一元二次方程，是的在括号里打“√”，不是的在括号里打“×”：

（1）$1-2x^2=x$；（　　）

（2）$3x^2-\sqrt{2}x=7$；（　　）

（3）$x^2+\dfrac{1}{2x^2}=0$；（　　）

（4）$(3x-2)(x+6)=3x^2-7$.（　　）

2. 填表：

把下列一元二次方程化成一般形式，并填写各项的系数和常数项：

方程	一般形式	二次项系数	一次项系数	常数项
$5-3x+2x^2=0$				
$x(x-2)=1$				
$(x-2)^2=(3x+2)(x-5)$				
$(1-\sqrt{2})x^2=(1+\sqrt{2})x$				

B

3. $x=-\dfrac{3}{2}$是不是关于 x 的一元二次方程 $2x^2-(2a-3)x-3a=0$ 的根？为什么？

4. 写出一个一元二次方程，使这个方程的一个根是 1，且它的一次项系数为-1；并写出你构造这个方程的方法.

21.2 一元二次方程的解法

1. 特殊的一元二次方程的解法

怎样解第 21.1 节的“问题”中出现的一元二次方程 $x^2+10x=1\,200$ 呢？

我们从常数项为 0 的特殊形式入手，讨论怎样解一元二次方程.

问题 1 怎样解方程 $x^2+10x=0$？ ①

我们已经学习过一元一次方程的解法，那么方程①能否转化为一元一次方程求解呢？

观察方程①，其右边为 0，左边可以因式分解，于是这个方程可变形为

$$x(x+10)=0.$$

此时，这个方程的左边是两个因式的积，右边是 0.

> 当 $A\cdot B=0$ 时，必有 $A=0$ 或 $B=0$；反之，当 $A=0$ 或 $B=0$ 时，必有 $A\cdot B=0$.

我们知道，如果两个因式的积等于 0，那么这两个因式中至少有一个等于 0；反之，如果两个因式中至少有一个等于 0，那么这两个因式的积也等于 0.

由此得 $x=0$ 或 $x+10=0$.

解得 $x=0$ 或 $x=-10$.

所以，原方程的根是 $x_1=0$，$x_2=-10$.

> 未知数为 x 的一元二次方程的两个根通常用 x_1、x_2 表示.

例 1 解下列方程：

(1) $5x^2-4x=0$；

(2) $2x(1-x)=3(1-x)$.

解 (1) 将方程的左边因式分解，得

$$x(5x-4)=0.$$

由此得 $x=0$ 或 $5x-4=0$.

解得 $x=0$ 或 $x=\frac{4}{5}$.

所以，原方程的根是 $x_1=0$，$x_2=\frac{4}{5}$.

(2) 通过移项，原方程可变形为

$$2x(1-x)-3(1-x)=0.$$

将方程的左边因式分解，得

$$(1-x)(2x-3)=0.$$

由此得 $1-x=0$ 或 $2x-3=0$.

解得 $x=1$ 或 $x=\frac{3}{2}$.

所以，原方程的根是 $x_1=1$，$x_2=\frac{3}{2}$.

可以发现，上述解法中，通过因式分解，把一元二次方程化成两个一次因式的积等于 0 的形式，从而把解一元二次方程的问题转化为解一元一次方程的问题.

像上面这样解一元二次方程的方法叫作**因式分解法**.

因式分解法适用于解某些特殊的一元二次方程.

例 2 解下列方程：

(1) $x^2-7x+12=0$；

(2) $2y(y-2)=y^2+5$；

(3) $3(x-2)=5(x-2)^2$.

解 (1) 将方程的左边因式分解，得

$$(x-4)(x-3)=0.$$

由此得 $x-4=0$ 或 $x-3=0$.

解得 $x=4$ 或 $x=3$.

所以，原方程的根是 $x_1=4$，$x_2=3$.

(2) 整理原方程，得

$$y^2-4y-5=0.$$

将方程的左边因式分解，得

$$(y-5)(y+1)=0.$$

由此得 $y-5=0$ 或 $y+1=0$.

解得 $$y=5 \text{ 或 } y=-1.$$

所以，原方程的根是 $y_1=5$，$y_2=-1$.

（3）移项，得

$$3(x-2)-5(x-2)^2=0.$$

将方程的左边因式分解，得

$$(x-2)[3-5(x-2)]=0,$$

即 $$(x-2)(13-5x)=0.$$

由此得 $$x-2=0 \text{ 或 } 13-5x=0.$$

解得 $$x=2 \text{ 或 } x=\frac{13}{5}.$$

所以，原方程的根是 $x_1=2$，$x_2=\frac{13}{5}$.

请同学们尝试用因式分解法求解方程 $x^2+10x=1\ 200$.

课堂练习 21.2(1)

1. （口答）说出下列方程的根：

（1）$x(x+4)=0$；

（2）$(x-1)(x+15)=0$；

（3）$(5x+1)(2x-\sqrt{2})=0$；

（4）$(x-a)(x+b)=0$（a、b 是已知数）.

2. 用因式分解法解下列方程：

（1）$x^2-x-2=0$；

（2）$x^2-8x+12=0$；

（3）$x^2+2=3x$；

（4）$x^2+4x=21$.

3. 小海与小华同时在解方程 $3(x-3)=(x-3)^2$：

小海：	小华：
两边同除以$(x-3)$，得 $3=x-3$. 解得 $x=6$.	移项，得 $3(x-3)-(x-3)^2=0$. 提取公因式，得$(x-3)(3-x+3)=0$. 由此得 $x-3=0$ 或 $3-x+3=0$. 解得 $x_1=3$，$x_2=6$.

你认为谁的解法正确？正确的请在框内打“√”；不正确的请指出错误的地方及错误原因.

下面，我们继续探讨一元二次方程的解法.

问题 2 怎样解方程 $x^2=1\ 200$？ ②

分析 根据平方根的定义，可知 x 是 1 200 的平方根，所以解方程②就是求 1 200 的平方根，为此只要将方程两边开平方即可.

解 两边开平方，得 $x=\pm 20\sqrt{3}$.

所以方程②有两个根：$x_1=20\sqrt{3}$，$x_2=-20\sqrt{3}$.

如果我们将方程②改成

$$x^2=-1\ 200 \quad ③$$

的形式，这个方程③该怎么解呢？

分析 根据上面的分析，可知“解方程③就是求$-1\ 200$ 的平方根”. 因为负数在实数范围内没有平方根，所以方程③没有实数根.

上述解法中，我们利用了平方根的定义求解相应的方程.

可以像上面这样，直接通过求平方根来解某些特殊的一元二次方程.

例 3 解下列方程：

(1) $9x^2-4=0$；　　(2) $2x^2+5=0$.

解 (1) 移项，得 $9x^2=4$.

两边同除以 9，得 $$x^2=\frac{4}{9}.$$

两边开平方，得 $$x=\pm\frac{2}{3}.$$

所以，原方程的根是 $x_1=\frac{2}{3}$，$x_2=-\frac{2}{3}$.

（2）移项，得 $$2x^2=-5.$$

两边同除以 2，得 $$x^2=-\frac{5}{2}.$$

因为任何一个实数的平方不可能是负数，所以原方程没有实数根.

归纳

形如 $ax^2+c=0$（a、c 为已知数，且 $a\neq 0$）的一元二次方程有根吗？如果有，你能求出它的根吗？

一元二次方程 $ax^2+c=0$（$a\neq 0$）可以变形为 $x^2=-\frac{c}{a}$. 若将 $-\frac{c}{a}$ 记为 d，则原方程转化为 $x^2=d$.

（1）当 $d>0$ 时，方程有两个不相等的实数根：$x_1=\sqrt{d}$，$x_2=-\sqrt{d}$；

（2）当 $d=0$ 时，方程有两个相等的实数根：$x_1=x_2=0$；

（3）当 $d<0$ 时，方程没有实数根.

问题 3 对照方程②的求解过程，你能解方程 $(x+5)^2=12$ 吗？

分析 如果把 $(x+5)$ 看成一个整体，即看成一个未知数 y，那么方程 $(x+5)^2=12$ 就可以看成方程 $y^2=12$.

解 两边开平方，得

$$x+5=2\sqrt{3} \text{ 或 } x+5=-2\sqrt{3}.$$

分别求这两个一元一次方程的根，得

$$x=2\sqrt{3}-5 \text{ 或 } x=-2\sqrt{3}-5.$$

所以，原方程的根是 $x_1=2\sqrt{3}-5$，$x_2=-2\sqrt{3}-5$.

例 4 解下列方程：

(1) $(2x-5)^2=9$； (2) $2(x+3)^2-49=0$.

解 (1) 两边开平方，得

$$2x-5=3 \text{ 或 } 2x-5=-3.$$

解得 $$x=4 \text{ 或 } x=1.$$

所以，原方程的根是 $x_1=4$，$x_2=1$.

(2) 原方程可化为

$$(x+3)^2=\frac{49}{2}.$$

两边开平方，得

$$x+3=\frac{7}{2}\sqrt{2} \text{ 或 } x+3=-\frac{7}{2}\sqrt{2}.$$

解得 $$x=\frac{7}{2}\sqrt{2}-3 \text{ 或 } x=-\frac{7}{2}\sqrt{2}-3.$$

所以，原方程的根是 $x_1=\frac{7}{2}\sqrt{2}-3$，$x_2=-\frac{7}{2}\sqrt{2}-3$.

课堂练习 21.2(2)

1. (口答)说出下列方程的根：

(1) $x^2=144$； (2) $x^2-\frac{25}{36}=0$；

(3) $5x^2+2=0$； (4) $64y^2=1$；

(5) $-2y^2+4=0$.

2. 解下列方程：

(1) $\frac{1}{2}x^2-8=0$； (2) $1-0.1x^2=0$；

(3) $(x+2)^2=25$； (4) $3(5-x)^2=36$；

(5) $\frac{1}{3}(2x-3)^2=25$.

2. 一般的一元二次方程的解法

我们知道，第 21.1 节的“问题”中出现的一元二次方程 $x^2+10x=1\,200$ 可以用因式分解法求解，但是，对于下面的方程④，用因式分解法求解就不容易了，需要继续探索一元二次方程的一般解法.

问题 4 怎样解方程 $x^2+10x=12$? ④

我们已经会解“问题 3”中的方程 $(x+5)^2=12$，因为它是 $y^2=d(d\geqslant 0)$ 的形式，可以直接通过开平方求解. 那么，能否将方程 $x^2+10x=12$ 转化为 $y^2=d(d\geqslant 0)$ 的形式呢?

分析 观察方程④的左边 x^2+10x，它与 $(x+5)^2$ 的展开式相差一个常数 25. 如果在方程④的两边同加上一次项系数一半的平方，即 25，那么方程④可化成 $(x+5)^2=37$ 的形式，然后两边开平方求解即可.

解方程④的过程可以表示如下：

原方程	$x^2+10x=12$.
方程的两边同加上 25	$x^2+10x+25=12+25$.
将左边写成完全平方式	$(x+5)^2=37$.
两边开平方	$x+5=\sqrt{37}$ 或 $x+5=-\sqrt{37}$.
解一元一次方程	$x_1=\sqrt{37}-5$，$x_2=-\sqrt{37}-5$.

像这样给 x^2+10x 加上 25 配成完全平方式 $(x+5)^2$ 的过程，简称“配方”.

例 5 解下列方程：

(1) $x^2-2x=4$； (2) $x^2+3x-\dfrac{7}{4}=0$.

解 (1) 在原方程两边同加上一个数，使方程左边配成完全平方式. 为此，加上 1，原方程可化为

$$x^2-2x+1=4+1,$$

即 $$(x-1)^2=5.$$

两边开平方，得

$$x-1=\sqrt{5} \text{ 或 } x-1=-\sqrt{5}.$$

解得 $$x=1+\sqrt{5} \text{ 或 } x=1-\sqrt{5}.$$

所以，原方程的根是 $x_1=1+\sqrt{5}$，$x_2=1-\sqrt{5}$.

（2）移项，得

$$x^2+3x=\frac{7}{4}.$$

再在两边同加上一个数，使方程左边配成完全平方式. 为此，加上$\left(\frac{3}{2}\right)^2$，原方程可化为

$$x^2+3x+\frac{9}{4}=\frac{7}{4}+\frac{9}{4},$$

即 $$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=4.$$

两边开平方，得

$$x+\frac{3}{2}=2 \text{ 或 } x+\frac{3}{2}=-2.$$

解得 $$x=\frac{1}{2} \text{ 或 } x=-\frac{7}{2}.$$

所以，原方程的根是 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{7}{2}$.

像上面这样，通过“配方”来解一元二次方程的方法，可称为**配方法**.

请同学们尝试用配方法求解方程 $x^2+10x=1\,200$.

例 6 用配方法解方程：$2x^2-3x+\frac{1}{2}=0$.

分析 观察该方程，由于二次项系数为 2，为了便于配方，往往先将二次项系数化为 1，为此将方程的两边同除以 2.

解 移项，得

$$2x^2-3x=-\frac{1}{2}.$$

将二次项系数化为 1，得

$$x^2-\frac{3}{2}x=-\frac{1}{4}.$$

配方，得

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{5}{16}.$$

两边开平方，得

$$x-\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{5}}{4} \text{ 或 } x-\frac{3}{4}=-\frac{\sqrt{5}}{4}.$$

解得 $$x=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4} \text{ 或 } x=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}.$$

所以，原方程的根是 $x_1=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}$，$x_2=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}$.

讨论

当一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 的二次项系数 $a\neq 1$ 时，能用配方法解该方程吗？如果能，那么该如何配方呢？

课堂练习 21.2(3)

1. 填空题：

(1) x^2+6x+____$=(x+$____$)^2$；

(2) x^2-7x+____$=(x-$____$)^2$；

(3) $x^2+\frac{3}{2}x+$____$=(x+$____$)^2$；

(4) $x^2-\frac{2}{5}x+$____$=(x-$____$)^2$；

(5) x^2+bx+____$=(x+$____$)^2$；

(6) $x^2+\frac{b}{a}x+$____$=(x+$____$)^2$.

2. 用配方法解下列方程：

（1）$x^2+8x-2=0$；

（2）$x^2-x-1=0$；

（3）$2x^2-5x+1=0$；

（4）$4x^2-2x-1=0$.

3. 乐乐在解方程 $x^2-4x-2=0$ 时出现了错误，他的解答过程如下：

解：① 移项，得 $x^2-4x=-2$.

② 配方，得$(x-2)^2=2$.

③ 两边开平方，得 $x-2=\sqrt{2}$ 或 $x-2=-\sqrt{2}$.

④ 所以 $x_1=2+\sqrt{2}$，$x_2=2-\sqrt{2}$.

（1）乐乐的解答过程是从第________步开始出错的，其错误原因是________________；

（2）请写出正确的解答过程.

3. 一元二次方程的求根公式

问题 5 对于任意给定的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$，如何用配方法求解？

观察前面“配方”的过程，可以知道这种方法对任意的一元二次方程都是适用的. 下面我们利用配方法来解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$.

把原方程的常数项移到方程右边，得

$$ax^2+bx=-c.$$

方程两边同除以二次项系数，得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

方程两边同加上$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$，把左边配成完全平方式，得

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

整理，得

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

对上面这个方程进行分类讨论：

因为 $a\neq0$，所以 $4a^2>0$.

(1) 当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，$\frac{b^2-4ac}{4a^2}\geqslant0$.

通过开平方，可得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}},$$

则

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

即

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

(2) 当 $b^2-4ac<0$ 时，$\frac{b^2-4ac}{4a^2}<0$. 这时，在实数范围内，x 取任何数都不能使方程 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 左右两边的值相等，所以原方程没有实数根.

由上述讨论可以得到：

> 对一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$，当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，它的实数根可以写成 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 的形式. 这个式子叫作一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的**求根公式**.

在求根公式中，如果 $b^2-4ac=0$，那么 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$，即方程有两个相等的实数根(重根).

在解一元二次方程时，把方程化成一般形式 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$），如果 $b^2-4ac\geqslant0$，那么把 a、b、c 的值代入求根公式，就可以求得方程的实数根；如果 $b^2-4ac<0$，那么原方程没有实数根. 这种解一元二次方程的方法称为**公式法**.

公式法适用所有的一元二次方程.

例 7 用公式法解下列方程：

（1）$5x^2+6x+1=0$；

（2）$y(y+4)=8$.

> 用公式法解一元二次方程时，应根据方程的一般形式确定 a、b、c 的值，特别要注意 a、b、c 的符号.

解 （1）原方程中，$a=5$，$b=6$，$c=1$.

$$b^2-4ac=6^2-4\times5\times1=16.$$

由求根公式，得 $x=\dfrac{-6\pm\sqrt{16}}{2\times5}=\dfrac{-6\pm4}{10}$，

即 $$x=-\frac{1}{5}\text{或 }x=-1.$$

所以，原方程的根是 $x_1=-\dfrac{1}{5}$，$x_2=-1$.

（2）把原方程化成一般形式，得

$$y^2+4y-8=0,$$

其中 $a=1$，$b=4$，$c=-8$.

$$b^2-4ac=4^2-4\times1\times(-8)=48.$$

由求根公式，得 $$y=\frac{-4\pm\sqrt{48}}{2\times1}=\frac{-4\pm4\sqrt{3}}{2},$$

即 $$y=-2+2\sqrt{3}\text{或 }y=-2-2\sqrt{3}.$$

所以，原方程的根是 $y_1=-2+2\sqrt{3}$，$y_2=-2-2\sqrt{3}$.

例 8 用公式法解下列方程：

（1）$x^2-2(\sqrt{5}x-3)=1$；

（2）$2x^2+4=-5x$.

解 （1）把原方程化成一般形式，得

$$x^2-2\sqrt{5}x+5=0,$$

其中 $a=1$，$b=-2\sqrt{5}$，$c=5$.

$$b^2-4ac=(-2\sqrt{5})^2-4\times1\times5=0.$$

由求根公式，得 $$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2\sqrt{5}}{2\times1}=\sqrt{5}.$$

所以，原方程的根是 $x_1=x_2=\sqrt{5}$.

（2）把原方程化成一般形式，得

$$2x^2+5x+4=0,$$

其中 $a=2$，$b=5$，$c=4$.

$$b^2-4ac=5^2-4\times2\times4=-7<0.$$

所以，原方程没有实数根.

回到第 21.1 节中的“问题”，这块长方形绿地的宽 x 满足方程

$$x^2+10x=1\ 200,$$

即 $$x^2+10x-1\ 200=0.$$

用公式法解这个方程，得

$$x=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\times1\times(-1\ 200)}}{2\times1}=\frac{-10\pm\sqrt{4\ 900}}{2}=\frac{-10\pm70}{2},$$

即 $$x_1=30,\ x_2=-40.$$

经检验，在这两个根中，只有 $x_1=30$ 符合实际意义，因此这块长方形绿地的宽为 30 m，它的长为 40 m.

在列方程解决应用问题时，要检验方程的根是否符合实际意义.

讨论

围绕方程 $x^2+10x=1\ 200$，我们一共探索了几种解法？你能说说这几种解法各自的特点吗？

课堂练习 21.2(4)

1. 用公式法解下列方程：

(1) $2x^2+x-6=0$；

(2) $x^2-2\sqrt{3}x-4=0$；

(3) $\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x=6$；

(4) $2x^2+3x+10=8x-1$.

2. 用公式法解下列方程：

(1) $x^2+2=2\sqrt{2}x$；

(2) $9x^2-12x+4=0$；

(3) $x(x-5)=(2x-3)^2-6$；

(4) $y-\frac{y^2-1}{2}=-\frac{1}{2}$.

3. 欢欢在解方程 $x^2-5x=1$ 时出现了错误，她的解答过程如下：

解：① 原方程中，$a=1$，$b=-5$，$c=1$.

② $b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times1=21>0$.

③ 由求根公式，得 $x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

④ 所以，原方程的根是 $x_1=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$，$x_2=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$.

(1) 欢欢的解答过程是从第________步开始出错的，其错误原因是________________________；

(2) 请写出正确的解答过程.

习题 21.2

A

1. 解下列方程：

(1) $x^2=121$；

(2) $4x^2-64=0$；

(3) $(x-5)^2=18$；

(4) $3(50+y)^2-12=0$.

2. 用因式分解法解下列方程：

（1）$4x^2-2x=0$；（2）$x^2+2x-3=0$；

（3）$-x^2+3x+18=0$；（4）$x^2-12x=4x$.

3. 用配方法解下列方程：

（1）$x^2-4x-21=0$；（2）$x^2+3x+1=0$；

（3）$3x^2+6x-1=0$；（4）$\frac{1}{2}x^2-3x-5=0$.

4. 用公式法解下列方程：

（1）$x^2+7x+3=0$；（2）$2x^2-5x+1=0$；

（3）$-3x^2-5x+7=0$；（4）$6x^2-3=x$.

B

5. 用适当的方法解下列方程：

（1）$2(x+1)^2=3$；（2）$\frac{(2x-1)^2}{3}=\frac{1-2x}{4}$；

（3）$4x(x+1)=15$；（4）$2\sqrt{3}x=\sqrt{2}(x^2+1)$；

（5）$(x+2)^2=-2x$；（6）$\frac{3}{2}y\left(y-\frac{8}{3}\right)=3y-4$.

6. 解关于 x 的方程：$x^2-4x-k^2=0$（k 是已知数）.

7. 已知二次三项式 x^2-6x+5.

（1）当 x 为何值时，这个二次三项式的值为零？

（2）当 x 为何值时，这个二次三项式的值等于 $x+4$ 的值？

8. 三个连续整数中，第一个与第三个整数的平方和正好是 100. 求这三个连续整数.

21.3 一元二次方程的判别式

由前面的公式法我们知道，根据 b^2-4ac 的符号可以判断一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$的根的情况，我们把 b^2-4ac 叫作该一元二次方程的**判别式**，通常用符号“Δ”(读作“/ˈdeltə/”)来表示，记作 $\Delta=b^2-4ac$.

利用判别式，可以不解方程就能判断一个一元二次方程是否有实数根，以及有实数根时两根是否相等.

> 对一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$：
>
> 当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；
>
> 当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根；
>
> 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根.

上述判断反过来说也是正确的，即

> 当方程有两个不相等的实数根时，$\Delta>0$；
>
> 当方程有两个相等的实数根时，$\Delta=0$；
>
> 当方程没有实数根时，$\Delta<0$.

例 1 不解方程，判断下列方程的实数根的情况：

(1) $4x^2-5x-3=0$；

(2) $2x^2+4x+3=0$；

(3) $2x^2+3=2\sqrt{6}x$.

解 (1) 因为 $\Delta=(-5)^2-4\times 4\times(-3)=73>0$，所以此方程有两个不相等的实数根.

(2) 因为 $\Delta=4^2-4\times 2\times 3=-8<0$，所以此方程没有实数根.

(3) 把原方程变形为

$$2x^2-2\sqrt{6}x+3=0.$$

因为 $\Delta=(-2\sqrt{6})^2-4\times2\times3=0$，所以此方程有两个相等的实数根.

例 2 关于 x 的方程 $x^2+(m-1)x-m=0$（m 是实数）一定有实数根吗？为什么？

解 $\Delta=(m-1)^2-4\times1\times(-m)$

$=m^2+2m+1=(m+1)^2.$

因为 m 是实数，所以 $(m+1)^2\geqslant0$，即 $\Delta\geqslant0$.

所以此方程一定有实数根.

一元二次方程有实数根指的是方程有两个不相等的实数根或有两个相等的实数根.

课堂练习 21.3(1)

1. 不解方程，判断下列方程的实数根的情况：

(1) $64x^2-5x-4=0$；

(2) $\frac{1}{4}x^2-3x+9=0$；

(3) $0.2x^2+0.6x+0.05=0$；

(4) $3x(x-2)=-7$；

(5) $9x^2=4(3x-1)$；

(6) $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x+1=0$.

2. 关于 x 的方程 $mx^2+(m+1)x+1=0$（$m\neq0$）一定有实数根吗？为什么？

例 3 当 m 分别满足什么条件时，关于 x 的方程 $x^2+(m-2)x+\frac{1}{4}m^2-1=0$ 的根的情况如下：

(1) 方程有两个不相等的实数根？

(2) 方程有两个相等的实数根？

(3) 方程没有实数根？

解 $\Delta=(m-2)^2-4\left(\frac{1}{4}m^2-1\right)=-4m+8.$

(1) 当 $\Delta=-4m+8>0$，即 $m<2$ 时，方程有两个不相等的实数根.

(2) 当 $\Delta=-4m+8=0$，即 $m=2$ 时，方程有两个相等的实数根.

（3）当 $\Delta=-4m+8<0$，即 $m>2$ 时，方程没有实数根.

例 4 已知关于 x 的方程 $x^2-4kx+(2k-1)^2=0$ 有实数根，求 k 所满足的条件及方程的根（用含 k 的代数式表示）.

解 $\Delta=(-4k)^2-4(2k-1)^2=16k-4$.

因为方程有实数根，所以 $16k-4\geqslant 0$，即 $k\geqslant\frac{1}{4}$.

方程的根是

$$x=\frac{4k\pm\sqrt{16k-4}}{2},$$

即 $$x_1=2k+\sqrt{4k-1},\quad x_2=2k-\sqrt{4k-1}.$$

例 5 已知关于 x 的方程 $4x^2-(k+2)x+k=1$ 有两个相等的实数根，求 k 的值及方程的根.

解 把原方程变形为 $4x^2-(k+2)x+k-1=0$.

$\Delta=[-(k+2)]^2-4\times4\times(k-1)=k^2-12k+20$.

因为方程有两个相等的实数根，所以 $\Delta=0$.

由 $$k^2-12k+20=0,$$

得 $$(k-2)(k-10)=0.$$

解得 $$k=2 \text{ 或 } k=10.$$

把 $k=2$ 代入原方程，得

$$4x^2-4x+1=0,$$

即 $$(2x-1)^2=0.$$

原方程的根是 $x_1=x_2=\frac{1}{2}$.

把 $k=10$ 代入原方程，得

$$4x^2-12x+9=0,$$

即 $$(2x-3)^2=0.$$

原方程的根是 $x_1=x_2=\frac{3}{2}$.

课堂练习 21.3(2)

1. 当 k 取何值时，关于 x 的方程 $x^2-k(x+1)+x=0$ 有两个相等的实数根?

2. 当 m 分别满足什么条件时，关于 x 的方程 $x^2+2mx+(m-2)^2=x$ 的根的情况如下：

(1) 方程有两个不相等的实数根?

(2) 方程有两个相等的实数根?

(3) 方程没有实数根?

(4) 方程有一个根为 0?

习题 21.3

A

1. 判断下列语句是否正确，正确的在括号里打“√”，错误的在括号里打“×”：

(1) 方程 $x^2-8=0$ 有两个相等的实数根； (　　)

(2) 方程 $5x^2=-2x$ 没有实数根； (　　)

(3) 如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个实数根，那么 $\Delta>0$； (　　)

(4) 如果 a、c 异号，那么关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根. (　　)

2. 填空题：

(1) 关于 x 的一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的判别式是__________；

(2) 如果关于 x 的方程 $4x^2-mx+1=0$ 有两个相等的实数根，那么 m 的值是__________；

(3) 如果关于 x 的方程 $(x+1)^2=1-k$ 没有实数根，那么 k 所满足的条件是__________；

（4）如果关于 x 的方程 $2x^2-3x+2m=0$ 有两个实数根，那么 m 所满足的条件是__________.

3. 不解方程，判断下列方程的实数根的情况：

（1）$3x^2-25x+10=0$；　　（2）$\frac{1}{2}x^2+7x+28=0$；

（3）$16x^2+9=24x$；　　（4）$x^2+2(\sqrt{3}+1)x+2\sqrt{3}=0$.

4. 当 m 分别满足什么条件时，关于 x 的一元二次方程 $(m+1)x^2+2x=1$（m 是实数）的根的情况如下：

（1）方程有两个不相等的实数根？

（2）方程有两个相等的实数根？

（3）方程没有实数根？

B

5. 已知关于 x 的方程 $x^2+2x-a+1=0$ 没有实数根，试判断关于 x 的方程 $x^2+ax+a=1$ 是否一定有两个不相等的实数根，并说明理由.

6. 已知关于 x 的方程 $(2-k)x^2-2kx+1=0$ 有两个相等的实数根，求 k 的值及方程的根.

21.4 一元二次方程的根与系数的关系

我们知道一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 的根的情况完全是由系数 a、b、c 确定的，判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的符号与其实数根的情况有密切关系，当 $\Delta\geqslant0$ 时，求根公式 $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 表达了方程的每一个根与系数之间的关系．现在我们进一步研究一元二次方程的两个根与系数之间的关系．

我们试着计算两根之和与两根之积．

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 的两个根 x_1、x_2 满足

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a},$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

由此得到下述关于一元二次方程的根与系数关系的定理：

韦达定理　如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 的两个实数根分别是 x_1、x_2，那么

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

例 1　已知下列方程均有两个实数根，求两根的和与积：

(1) $x^2-4x+\sqrt{5}=0$；　　(2) $2x^2-\sqrt{3}x-3=0$；

(3) $\dfrac{1}{2}x^2+2x=0$；　　(4) $-\sqrt{2}x^2=x-4$.

解　设一元二次方程的两个实数根分别是 x_1、x_2.

(1) 由韦达定理，得 $x_1+x_2=-(-4)=4$，$x_1\cdot x_2=\sqrt{5}$.

(2) 由韦达定理，得 $x_1+x_2=-\dfrac{-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{-3}{2}=-\dfrac{3}{2}$.

(3) 由韦达定理，得 $x_1+x_2=-\dfrac{2}{\dfrac{1}{2}}=-4$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{0}{\dfrac{1}{2}}=0$.

(4) 将原方程变形为 $\sqrt{2}x^2+x-4=0$，由韦达定理，得

$$x_1+x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}，\quad x_1\cdot x_2=\frac{-4}{\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}.$$

例 2 已知关于 x 的方程 $2x^2-5x+p=0$ 的一个根为 $\frac{1}{2}$，求此方程的另一个根及 p 的值.

解 设此方程的另一个根是 x_1，由韦达定理，得

$$\begin{cases} x_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}, & ① \\ x_1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{p}{2}. & ② \end{cases}$$

由①，得 $x_1=2$.

把 $x_1=2$ 代入②，得 $2\times\frac{1}{2}=\frac{p}{2}$.

解得 $p=2$.

所以，此方程的另一个根是 $x_1=2$，p 的值是 2.

课堂练习 21.4(1)

1. (口答)已知下列方程均有两个实数根，求两根的和与积：

(1) $x^2-2x-2=0$；　(2) $12x^2+8x=0$；

(3) $2x^2-3x+\frac{1}{2}=0$；　(4) $2x^2-7=0$；

(5) $x^2+2=2\sqrt{2}x$；　(6) $\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x=6$.

2. (1) 已知方程 $2x^2-5x-3=0$ 的一个根是 3，不解方程，求此方程的另一个根；

(2) 已知方程 $2x^2-2x-1=0$ 的一个根是 $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$，不解方程，求此方程的另一个根.

3. (1) 已知关于 x 的方程 $2x^2+kx+3=0$ 的一个根是 $\dfrac{1}{2}$，求此方程的另一个根及 k 的值；

(2) 已知关于 x 的方程 $3x^2+15x+m=0$ 的一个根为 1，求此方程的另一个根及 m 的值.

例 3 已知方程 $2x^2+6x-3=0$ 有两个实数根 x_1、x_2，利用韦达定理求下列各式的值：

(1) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$；

(2) $x_1^2+x_2^2$；

(3) $(x_1-x_2)^2$.

利用韦达定理求关于 x_1、x_2 的代数式的值时，通常先把代数式化为由 x_1+x_2 和 $x_1 \cdot x_2$ 表示的形式，再代入求值.

解 由韦达定理，得

$$x_1+x_2=-3,\quad x_1 \cdot x_2=-\frac{3}{2}.$$

(1) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\dfrac{-3}{-\dfrac{3}{2}}=2.$

(2) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-3)^2-2\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=12.$

(3) $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(-3)^2-4\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=15.$

例 4 已知关于 x 的方程 $x^2-(m-3)x+m+8=0$ 的两个实数根的平方和等于 13，求 m 的值及此方程的两根.

解 设方程 $x^2-(m-3)x+m+8=0$ 的两个实数根分别为 x_1、x_2，那么 $\Delta\geqslant 0$，且 $x_1+x_2=m-3$，$x_1\cdot x_2=m+8$.

根据题意，得
$$x_1^2+x_2^2=13.$$

因为
$$\begin{aligned}x_1^2+x_2^2&=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\\&=(m-3)^2-2(m+8)\\&=m^2-8m-7,\end{aligned}$$

所以
$$m^2-8m-7=13,$$

即
$$m^2-8m-20=0.$$

解得
$$m_1=10,\ m_2=-2.$$

当 $m=10$ 时，方程 $x^2-(m-3)x+m+8=0$，即
$$x^2-7x+18=0,$$

这时，$\Delta=(-7)^2-4\times 18<0$，不符合题意.

当 $m=-2$ 时，方程 $x^2-(m-3)x+m+8=0$，即
$$x^2+5x+6=0,$$

这时，解得 $x_1=-2$，$x_2=-3$.

所以，m 的值为 -2，方程的两根分别为 $x_1=-2$，$x_2=-3$.

课堂练习 21.4(2)

1. 已知方程 $2x^2+4x-3=0$ 有两个实数根 x_1、x_2，利用韦达定理求下列各式的值：

(1) $x_1^2x_2+x_1x_2^2$； (2) $(x_1-2)(x_2-2)$；

(3) $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$； (4) $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}$.

2. 已知关于 x 的方程 $x^2+(k-5)x-(k+4)=0$ 有两个实数根 x_1、x_2，且 $(x_1+1)(x_2+1)=-8$. 求 k 的值及此方程的两根.

习题 21.4

A

1. (1) 已知方程 $2x^2-7x-4=0$ 的一个根是 $-\dfrac{1}{2}$，不解方程，求此方程的另一个根；

(2) 已知方程 $x^2+2x-1=0$ 的一个根是 $-1+\sqrt{2}$，不解方程，求此方程的另一个根.

2. (1) 已知关于 x 的方程 $x^2+px+1=0$ 的一个根是 $\sqrt{2}-1$，求此方程的另一个根及 p 的值；

(2) 已知关于 x 的方程 $3x^2+5x-k^2+1=0$ 的一个根是 1，求此方程的另一个根及 k 的值.

3. 设 x_1、x_2 是方程 $2x^2-2x-1=0$ 的两个实数根，利用韦达定理求下列各式的值：

(1) $x_1^2x_2+x_1x_2^2$；　　(2) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$；

(3) $x_1^2-x_1x_2+x_2^2$；　　(4) $(x_1-x_2)^2$；

(5) $(x_1-3)(x_2-3)$；　　(6) $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$.

4. 已知 x_1、x_2 是关于 x 的方程 $x^2+2(m-1)x+2m^2-23=0$ 的两个实数根，且 $x_1^2+x_2^2=26$. 求 m 的值及此方程的两根.

B

5. 已知关于 x 的方程 $(a+1)x^2+3x+a^2+3a=0$ 的一个根为 0，求此方程的另一个根及 a 的值.

21.5 一元二次方程的应用

1. 二次三项式的因式分解

我们曾经在有理数范围内讨论过整式的因式分解．现在，我们将在实数范围内讨论二次三项式 ax^2+bx+c 的因式分解．

在解一元二次方程 $2x^2-10x+12=0$ 时，可以先把方程左边因式分解，得 $2(x-3)(x-2)=0$，从而解得方程的两个根 $x_1=3$，$x_2=2$．

反过来，也可以通过求出一元二次方程的根把二次三项式因式分解．

设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根是 x_1、x_2，那么根据韦达定理可以知道：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，即$\frac{b}{a}=-(x_1+x_2)$，$\frac{c}{a}=x_1x_2$．

所以
$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\&=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]\\&=a(x-x_1)(x-x_2).\end{aligned}$$

这就是说，要将二次三项式 ax^2+bx+c 因式分解，如果 $b^2-4ac\geqslant 0$，可以用求根公式求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根 x_1、x_2，然后得到

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

但如果 $b^2-4ac<0$，那么二次三项式 ax^2+bx+c 在实数范围内就不能因式分解．

例 1 在实数范围内因式分解：

（1）$3x^2-10x+7$；

（2）$2x^2+4x-3$．

解 （1）对于方程 $3x^2-10x+7=0$，

$$\Delta=(-10)^2-4\times3\times7=16>0.$$

此方程的两个实数根是

$$x_1=\frac{7}{3}，x_2=1.$$

所以 $3x^2-10x+7=3\left(x-\frac{7}{3}\right)(x-1)$.

（2）对于方程 $2x^2+4x-3=0$，

$$\Delta=4^2-4\times2\times(-3)=40>0.$$

此方程的两个实数根是

$$x_1=\frac{-2+\sqrt{10}}{2}，x_2=\frac{-2-\sqrt{10}}{2}.$$

所以 $2x^2+4x-3=2\left(x-\frac{-2+\sqrt{10}}{2}\right)\left(x-\frac{-2-\sqrt{10}}{2}\right)$.

课堂练习 21.5(1)

1. 在实数范围内因式分解：

（1）$x^2-8=$____________________；

（2）$4x^2-7=$____________________；

（3）$x^2+3x-28=$____________________；

（4）$3x^2-11x+10=$____________________.

2. 在实数范围内因式分解：

（1）$2x^2+4x+1$；　　（2）$x^2-2ax-a^2$.

2. 列方程解应用题

例 2 某建筑工程队利用一段长 80 m 的旧墙，用铁栅栏靠墙围一个所占地面为长方形的建筑垃圾临时堆放点．如果所使用的铁栅栏总长为 120 m，且只围三边，那么是否可以围出符合下列要求的长方形堆放点？如果可以，分别求出长方形的两条邻边的长．

（1）长方形的面积是 2 000 m^2；

（2）长方形的面积是 1 800 m^2；

（3）长方形的面积是 1 152 m^2.

分析 如图 21-5-1，只围三边的长方形，其中有两边垂直于墙，一边平行于墙. 不妨设垂直于墙的一边长为 x m，则平行于墙的一边长为（$120-2x$）m.

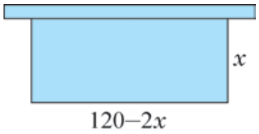


图 21-5-1

解 设长方形垂直于墙的一边长为 x m，则平行于墙的一边长为（$120-2x$）m.

（1）根据题意，得方程

$$(120-2x)x=2\ 000.$$

整理，得
$$x^2-60x+1\ 000=0.$$

这是一个一元二次方程，因为 $\Delta=-400<0$，所以此方程没有实数根.

答：仅用 120 m 长的铁栅栏围三边，围不出面积为 2 000 m^2 的长方形堆放点.

（2）根据题意，得方程

$$(120-2x)x=1\ 800.$$

整理，得
$$x^2-60x+900=0.$$

解得
$$x_1=x_2=30.$$

当 $x=30$ 时，$120-2x=60$.

经检验，$x=30$ 符合实际意义.

答：用 120 m 长的铁栅栏围三边，可以围出面积为 1 800 m^2 的长方形堆放点，长方形垂直于墙的一边长为 30 m，平行于墙的一边长为 60 m.

（3）根据题意，得方程

$$(120-2x)x=1\ 152.$$

整理，得
$$x^2-60x+576=0.$$

解得
$$x_1=12，x_2=48.$$

当 $x=12$ 时，$120-2x=96$；

当 $x=48$ 时，$120-2x=24$.

经检验，旧墙只有 80 m，而 $96>80$，不符合实际意义，$x=12$ 应舍去；$x=48$ 符合实际意义.

答：用 120 m 长的铁栅栏围三边，可以围出面积为 1 152 m^2 的长方形堆放点，长方形垂直于墙的一边长为 48 m，平行于墙的一边长为 24 m.

例 3 有一张边长为 10 cm 的正方形硬纸板，在硬纸板的四个角上剪去四个相同的小正方形，再折叠成一个无盖的长方体盒子(图 21-5-2). 如果这个长方体盒子的底面面积与一个侧面的面积恰好相等，求剪去的小正方形的边长.

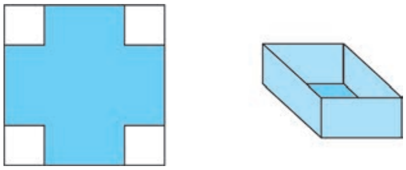


图 21-5-2

分析 长方体盒子的底面是正方形，四个侧面是相同的长方形，底面正方形的边长是侧面长方形的一边，侧面长方形的另一边是长方体盒子的高，也就是剪去的小正方形的边长.

解 设剪去的小正方形的边长为 x cm，则长方体盒子底面正方形的边长为 $(10-2x)$ cm.

根据题意，得方程

$$(10-2x)^2=(10-2x)x.$$

整理，得

$$(10-2x)(10-3x)=0.$$

解得

$$x_1=5，x_2=\frac{10}{3}.$$

经检验，当 $x_1=5$ 时，正方形硬纸板直接被剪成四个小正方形，不能折叠成盒子，不符合实际意义，$x_1=5$ 应舍去；$x_2=\frac{10}{3}$ 符合实际意义.

答：剪去的小正方形的边长为 $\frac{10}{3}$ cm.

课堂练习 21.5(2)

1. 用 100 cm 长的铁丝弯折出一个长方形的模型，要使铁丝恰好用完. 问：是否可以折成符合下列要求的长方形？如果可以，分别求出长方形的两条邻边的长.

(1) 长方形的面积是 525 cm^2；

(2) 长方形的面积是 625 cm^2；

(3) 长方形的面积是 700 cm^2.

2. 一张长方形图片的长和宽分别为 25 cm 和 20 cm，在它四周外围镶上宽度相等的边框. 已知边框的面积为 196 cm^2，求边框的宽度.

3. 已知两个相邻正奇数的积是 143，求这两个数.

例 4 小华将 2 000 元人民币按一年定期存入某银行，到期后取出 1 000 元购买图书和文具，剩下的 1 000 元及利息又全部按一年定期存入该银行. 如果这两年存款的年利率不变，那么到期后本金和利息共 1 045.45 元. 求这种存款方式的年利率.

分析 存款到期后的利息＝本金×利率×存期.

本利和＝本金＋利息.

由此可得：如果将这种存款方式的年利率用 x 表示，那么第一年到期后的本利和为 $2\,000(1+x)$，第二年的本金为 $[2\,000(1+x)-1\,000]$.

这样，可列出方程求解.

解 设这种存款方式的年利率为 x. 根据题意，得方程

$$[2\,000(1+x)-1\,000](1+x)=1\,045.45.$$

整理，得 $\quad 2\,000(1+x)^2-1\,000(1+x)-1\,045.45=0.$

记 $y=1+x$，得 $2\,000y^2-1\,000y-1\,045.45=0.$

解得 $y=1.015$ 或 $y=-0.515$.

于是 $\quad x+1=1.015$ 或 $x+1=-0.515$，

即 $x=0.015$ 或 $x=-1.515$（负值不符合实际意义，舍去）.

答：这种存款方式的年利率为 1.5%.

思考

如果第一年到期后直接转存，那么怎样计算第二年期满后的本利和呢？

例 5 某商场每副护目镜的进货价为 20 元，售价在 25 元至 40 元之间. 调查表明：如果每副护目镜售价为 25 元，平均每月能售出 800 副；如果售价每上涨 1 元，月销售量会减少 10 副. 已知某月该护目镜的销售利润为 10 500 元，求每副护目镜的售价.

分析 每月的销售利润＝单个货品的销售利润×货品的月销售量.

由此可得：护目镜的每月销售利润＝(护目镜的售价－进货价)×护目镜的月销售量. 而护目镜的售价＝原售价(25 元)＋售价上涨部分.

如果将每副护目镜售价上涨的部分用 x 元表示，那么每副护目镜的销售利润为 $(25+x-20)$ 元，护目镜的月销售量为 $(800-10x)$ 副.

这样，可列出方程求解.

解 设每副护目镜售价上涨 x 元. 根据题意，得方程

$$(25+x-20)(800-10x)=10\,500.$$

整理，得

$$x^2-75x+650=0.$$

解得 $x_1=10$，$x_2=65$（售价超出 25 元至 40 元的范围，不符合题意，舍去）.

当 $x=10$ 时，$25+x=35$.

答：每副护目镜的售价为 35 元.

例 6 学校组织围棋比赛，比赛中，每名选手都与其他选手恰好比赛一局，每局赢的选手记 2 分，输的选手记 0 分；如果平局，两名选手各记 1 分. 最终，统计得到所有参赛选手的总得分为 2 070. 求这次比赛共有多少名选手参加.

分析 如果共有 x 名选手参加比赛，那么每名选手都要与 $(x-1)$ 名选手比赛一局，因此实际比赛总局数应为 $\dfrac{x(x-1)}{2}$. 由于每局共计 2 分，因此全部

选手总得分为 $x(x-1)$.

解 设这次比赛共有 x 名选手参加. 根据题意，得方程

$$2\cdot\frac{x(x-1)}{2}=2\,070.$$

整理，得 $(x-46)(x+45)=0.$

解得 $x_1=46$，$x_2=-45$(不符合实际意义，舍去).

答：这次比赛共有 46 名选手参加.

课堂练习 21.5(3)

1. 某种产品原来每件价格为 800 元，经过两次降价，且每次降价的百分率相同，现在每件售价为 578 元. 求每次降价的百分率.

2. 某学校 1 161 名学生在操场上列队，已知每列人数都相同，且每列人数比总列数少 16. 求每列人数.

在七年级学习“分式”这一章时，我们认识了分式方程，讨论了可化为一元一次方程的分式方程的解法. 例如，分式方程 $\frac{2}{x+1}=3$ 和 $\frac{1}{x}=\frac{3}{x-1}$，通过去分母都可转化为一元一次方程求解.

问题 学校组织“爱心义卖”活动，八(1)班与八(2)班各得义卖款 1 200 元与 1 120 元. 在计算各班人均义卖款时发现：八(1)班比八(2)班人均义卖款多 5 元，八(1)班的人数比八(2)班少 2. 问：两个班人均义卖款分别是多少？

如果设八(1)班人均义卖款是 x 元，那么八(2)班人均义卖款是$(x-5)$元，而两个班的人数可以分别表示为 $\frac{1\,200}{x}$ 与 $\frac{1\,120}{x-5}$.

于是，可列出方程

$$\frac{1\,200}{x}=\frac{1\,120}{x-5}-2.$$

这是分式方程，可按照已掌握的解分式方程的方法求它的解.

方程两边同乘 $x(x-5)$，去分母得

$$1\,200(x-5)=1\,120x-2x(x-5).$$

整理，得 $$x^2+35x-3\,000=0.$$

这是一元二次方程，利用本章学习的知识可解得，$x_1=40$，$x_2=-75$.

代入上面的分式方程检验，可知 $x_1=40$，$x_2=-75$ 都是其根，但-75 不符合实际意义，应舍去.

所以，八(1)班与八(2)班人均义卖款分别是 40 元和 35 元.

在求解上面的分式方程时，去分母后所得到的整式方程是一个一元二次方程，所以上面的分式方程是可化为一元二次方程的分式方程，其求解步骤与解可化为一元一次方程的分式方程类似.

例 7 解方程：$\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$.

解 方程两边同乘$(x-1)(x+1)$，去分母得

$$x(x+1)=2.$$

整理，得 $$x^2+x-2=0.$$

解这个整式方程，得 $x_1=-2$，$x_2=1$.

检验：当 $x=-2$ 时，代入原方程，等式成立；当 $x=1$ 时，代入原方程，右端分母为 0，无意义，即 $x=1$ 为增根，应舍去.

所以，原方程的根是 $x=-2$.

例 8 解方程：$\dfrac{2s}{s^2+2s-3}+\dfrac{1}{s+3}=1$.

解 原方程可变形为$\dfrac{2s}{(s-1)(s+3)}+\dfrac{1}{s+3}=1$.

方程两边同乘$(s-1)(s+3)$，去分母得

$$2s+s-1=(s-1)(s+3).$$

整理，得 $$s^2-s-2=0.$$

解这个整式方程，得 $s_1=2$，$s_2=-1$.

检验：当 s 分别为 2 与-1 时，代入原方程，等式均成立.

所以，原方程的根为 $s_1=2$，$s_2=-1$.

讨论

在用“去分母”的方法解分式方程时，为什么可能产生增根？在“验根”时，如果只检验整式方程的根是否使“去分母”时方程两边同乘的代数式的值为0，可以吗？

课堂练习 21.5(4)

1. 下列方程中，哪些是分式方程？

(1) $\frac{1}{x}=2x$；　　(2) $\frac{1}{2}x+\frac{2}{x}=1$；

(3) $\frac{x^2-1}{5}+\frac{x}{2}=3$；　　(4) $\frac{4}{x}-\frac{1}{x-1}=1$.

2. 解下列方程：

(1) $\frac{2}{x}-x=1$；　　(2) $\frac{y^2}{y-4}-2=\frac{16}{y-4}$；

(3) $\frac{x-2}{x+2}=\frac{3}{x-3}$；　　(4) $\frac{1}{t-2}-\frac{4}{t^2-4}=1$；

(5) $\frac{y+1}{y^2-1}-\frac{1}{3y}=\frac{1}{3y-3}$.

例 9 某市交通部门对一条长 15 km 的主干道进行综合整治，整治后该路段车辆通行的平均速度提高了 3 km/h，车辆通过该路段的平均时间比整治前少 15 min．问：整治后车辆通过该路段的平均时间是多少？

分析 行程问题有三个基本量：时间 t、速度 v 与路程 s，它们间的基本关系是

$$s=vt.$$

题中涉及整治前后两种状态，路程都是 15 km，如果设整治后车辆通过该路段的平均时间为 t h，那么整治前的平均时间为 $(t+0.25)$h，利用整治前后的速度关系可列出方程.

解 设整治后车辆通过该路段的平均时间是 t h. 根据题意，可列方程

$$\frac{15}{t}=\frac{15}{t+0.25}+3.$$

去分母并整理，得 $$4t^2+t-5=0.$$

解得 $$t_1=1,\ t_2=-\frac{5}{4}.$$

经检验，$t_1=1$，$t_2=-\frac{5}{4}$都是原方程的根，但负值不符合实际意义，应舍去.

答：整治后车辆通过该路段的平均时间是 1 h.

例 10 某市为了美化环境，计划在一定的时间内增加 200 km² 绿化面积. 后来市政府调整了原定计划，不但绿化面积要在原计划的基础上增加 20%，而且要提前 1 年完成任务. 经测算，要完成新的计划，平均每年的绿化面积必须比原计划多 20 km². 求原计划平均每年的绿化面积.

分析 根据题意，可知

$$\begin{array}{ccccc}
\begin{array}{c}\text{完成原计划 200 km}^2\\ \text{绿化面积所需时间}\end{array} & - & \begin{array}{c}\text{完成新计划 200(1+20\%) km}^2\\ \text{绿化面积所需时间}\end{array} & = & \text{提前的时间}\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\dfrac{200}{\begin{array}{c}\text{原计划平均}\\ \text{每年绿化面积}\end{array}} & & \dfrac{200(1+20\%)}{\begin{array}{c}\text{新计划平均}\\ \text{每年绿化面积}\end{array}} & & 1\text{ 年}\\
 & & \downarrow & & \\
 & & \dfrac{200(1+20\%)}{\begin{array}{c}\text{原计划平均}\\ \text{每年绿化面积}\end{array}+20} & &
\end{array}$$

解 设原计划平均每年的绿化面积为 x km². 根据题意，可列方程

$$\frac{200}{x}-\frac{200(1+20\%)}{x+20}=1.$$

去分母并整理，得

$$x^2+60x-4\ 000=0.$$

解得 $$x_1=40,\ x_2=-100.$$

经检验，$x_1=40$，$x_2=-100$ 都是原方程的根. 但因为绿化面积不能为负数，所以取 $x=40$.

答：原计划平均每年的绿化面积为 40 km^2.

课堂练习 21.5(5)

1. 某校组织学生步行到科技展览馆参观. 学校与展览馆相距 6 km，返回时，由于步行速度比去时平均每小时少 1 km，结果时间比去时多用了半小时. 求学生返回时步行的速度.

2. 小华到一文具店用 12 元买某款练习本若干本. 隔了一段时间再去该店，发现这种练习本正在“让利销售”中，每本降价 0.2 元，这样用 12 元可以比上次多买 3 本. 问：小华第一次买了多少本这款练习本?

3. 为了落实“十分珍惜、合理利用土地和切实保护耕地”的基本国策，某地区计划若干年内经开发改造后可利用土地的面积达到360 km^2. 实际改造中，第一年比原计划每年开发的土地面积多 2 km^2，如果按此进度继续开发，预计可提前 6 年完成任务. 求实际改造中每年开发土地的面积.

习题 21.5

A

1. 填空题：

(1) 方程 $x^2-3x+1=0$ 的根是 $x_1=$________，$x_2=$________，把二次三项式 x^2-3x+1 因式分解，得________________________；

(2) 方程 $3x^2-7x-1=0$ 的根是 $x_1=$________，$x_2=$________，把二次三项式 $3x^2-7x-1$ 因式分解，得________________________；

(3) 把二次三项式 $4x^2-12x+1$ 因式分解，得________________________.

2. 选择题：

（1）将方程 $\dfrac{x-3}{x^2-x}+\dfrac{2}{x-1}=1$ 去分母后所得的方程是 （　　）

A. $x-3+2x=1$；　　B. $x-3+2=x^2-x$；

C. $x-3+2x=x^2-x$；　　D. $x(x-3)+2x=x-1$.

（2）甲、乙两组志愿者参加植树造林. 已知甲组每天比乙组多种 5 棵树，且甲组种 120 棵树所用的天数比乙组种 70 棵树所用的天数多 1. 如果设乙组每天种树 x 棵，那么列出的方程是 （　　）

A. $\dfrac{120}{x-5}=\dfrac{70}{x}+1$；　　B. $\dfrac{120}{x}=\dfrac{70}{x+5}+1$；

C. $\dfrac{120}{x+5}=\dfrac{70}{x}+1$；　　D. $\dfrac{120}{x}=\dfrac{70}{x-5}+1$.

（3）一列火车到某站已经晚点 6 min，如果将速度每小时加快 10 km，那么继续行驶 20 km 刚好正点到达下一站. 设这列火车原来行驶的速度为 x km/h，则所列出的方程是 （　　）

A. $\dfrac{20}{x}-\dfrac{20}{x+10}=6$；　　B. $\dfrac{20}{x}-\dfrac{20}{x+10}=\dfrac{6}{60}$；

C. $\dfrac{20}{x+10}-\dfrac{20}{x}=6$；　　D. $\dfrac{20}{x+10}-\dfrac{20}{x}=\dfrac{6}{60}$.

3. 在实数范围内因式分解：

（1）x^2+2x-4；　　（2）x^2-4x-1.

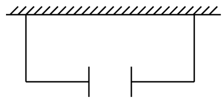
4. 解下列方程：

（1）$\dfrac{10}{x}+3=x$；　　（2）$\dfrac{2}{y-3}+1=\dfrac{3}{y^2-9}$；

（3）$\dfrac{x}{x^2+4x+3}-\dfrac{2}{x+3}=1$；　　（4）$\dfrac{1}{y+2}+\dfrac{4y}{y^2-4}+\dfrac{2}{2-y}=1$.

5. 已知一个长方形的长是一个正方形边长的 2 倍，宽比正方形的边长少 2 cm，且面积比正方形的面积大 96 cm^2. 求正方形的边长及长方形的长和宽.

6. 如图，要建一个面积为 140 m^2 的仓库，仓库的一边靠墙，这堵墙长 16 m；在与墙平行的一边，要开一扇 2 m 宽的门. 已知需要新建的墙总长为 32 m，求这个仓库的长和宽.



（第 6 题）

7. 一件商品由原售价连续两次降价，每次下降的百分率相同. 已知原售价是 875 元，降价两次后的售价是 560 元. 问：每次下降的百分率是多少？

8. 将一块长方形铁皮的四个角截去四个相同的小正方形，然后把四边折起来做成一个无盖的盒子. 已知长方形铁皮长 25 cm、宽 15 cm，做成盒子的底面积为 231 cm^2. 求这个盒子的容积.

9. 某教育设备厂原计划用 6 m^3 的木材为希望小学制作学生使用的课桌椅若干套. 由于改进了技术，每套课桌椅可以节约 $\frac{1}{55}$ m^3 的木材，因此多做了 3 套. 问：实际做了多少套？

B

10. 在实数范围内因式分解：

（1）$2x^2+3x-1$；　　（2）$-a^2+5a+2$.

11. 将一根长为 56 cm 的铁丝剪成两段，将两段各做成一个正方形，在不考虑接口、不计损耗的前提下，能使两个正方形的面积之和等于 20 cm^2 吗？如果能，请说明怎么剪；如果不能，请说明理由. 能使两个正方形的面积之和分别等于 100 cm^2、196 cm^2 吗？

12. 先验证下列结论的正确性：

① 方程 $x-\frac{1}{x}=2-\frac{1}{2}$的根是 $x_1=2$，$x_2=-\frac{1}{2}$；

② 方程 $x-\frac{1}{x}=3-\frac{1}{3}$的根是 $x_1=3$，$x_2=-\frac{1}{3}$；

③ 方程 $x-\frac{1}{x}=3+\frac{3}{4}$的根是 $x_1=4$，$x_2=-\frac{1}{4}$；

④ 方程 $x-\frac{1}{x}=4+\frac{4}{5}$的根是 $x_1=5$，$x_2=-\frac{1}{5}$.

再观察上述方程及其根的特征，猜想方程 $x-\frac{1}{x}=8\frac{8}{9}$的根，并验证你的猜想.

13. 下面分别是小海和小华解分式方程 $\frac{1}{x+2}=\frac{2}{x^2+3x+2}$ 的具体过程.

小海的解题过程：

$$x^2+3x+2=2x+4.$$

$$x^2+x-2=0.$$

$$x_1=-2，x_2=1.$$

检验：$x=-2$ 为增根.

所以，原方程的根为 $x=1$.

小华的解题过程：

$$\frac{1}{x+2}=\frac{2}{(x+2)(x+1)}.$$

$$x+1=2.$$

$$x=1.$$

检验：$x=1$ 非增根.

所以，原方程的根为 $x=1$.

请先判断小海和小华的解法是否正确，再谈谈你对他们两人解法的看法.

◎阅读材料

一元高次方程的求解之路

"未知数参与运算"，这个现在看来很自然的事，在数学发展史上却是一种经历长期摸索才产生的数学思想. 同样，解方程也经历了不断发展完善的过程. 同学们都知道一元一次方程、一元二次方程的一般解法，但一元三次方程、一元四次方程怎么解呢？

16 世纪时，意大利数学家塔尔塔利亚（Tartaglia，原名为 Niccolò Fontana，约 1499—1557）和卡尔达诺（Gerolamo Cardano，1501—1576）等人发现了一元三次方程的求根公式. 1545 年，在《大术》（*Ars Magna*）一书中，卡尔达诺指出了一元三次方程有三个根并给出了一个实数根的表达式. 之后，卡尔达诺的学生费拉里（Ludovico Ferrari，1522—1565）找到了一元四次方程的求解方法. 自一元四次方程的一般解公式公布之后，数学家们曾非常乐观，以为马上就可以写出五次方程、六次方程，甚至更高次方程的一般解公式了. 然而，在之后几百年的时间里，人们一直没有找出这样的公式. 1824 年，22 岁的挪威学者阿贝尔（Niels Henrik Abel，1802—1829）严格地证明了高于四次的一般代数方程不可能有一般形式的代数解. 不过，他没有指出哪些特殊的方程存在着代数解. 这个问题被同时期的法国年轻数学家伽罗瓦（Évariste Galois，1811—1832）所解决，伽罗瓦不仅证明了高于四次的代数方程一般不能用根式求解，而且还建立了代数方程是否可用根式求解的判别准则.

在一元三次方程求根公式与解法的探索过程中，我国的数学家也作出了巨大的贡献. 在 1247 年成书的数学巨著《数书九章》中，南宋数学家秦九韶（约 1208—约 1261）发表了一元三次方程与任何高次方程的解法——正负开方术.

◎内容提要

1. 基本概念：一元二次方程，判别式.

2. 求根公式：

当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

3. 判别式：

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式为 $\Delta=b^2-4ac$.

当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；

当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根；

当 $\Delta<0$ 时，方程没有实数根.

上述判断反过来说也是正确的.

4. 韦达定理：

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根分别是 x_1、x_2，那么

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

5. 实数范围内二次三项式的因式分解：

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根分别是 x_1、x_2，那么

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

◎复习题

A

1. 选择题：

（1）下列方程中，是一元二次方程的是（　　）

A. $2x+1=3$；　　B. $x^2+y=2$；

C. $3x^2+2x=4$；　　D. $x^2+\dfrac{1}{x}=1$.

（2）已知关于 y 的方程 $(2y+m)(y-3)=0$ 有一个根是 $-\dfrac{5}{2}$，那么 m 的值等于（　　）

A. -5；　　B. 5；

C. $\dfrac{2}{5}$；　　D. $\dfrac{5}{2}$.

（3）如果关于 x 的二次三项式 ax^2+3x+4 在实数范围内不能因式分解，那么 a 所满足的条件是（　　）

A. $0<a<\dfrac{9}{16}$ 或 $a<0$；　　B. $a\neq 0$；

C. $a>\dfrac{9}{16}$；　　D. $a<\dfrac{3}{4}$ 且 $a\neq 0$.

2. 填空题：

（1）方程 $2x^2+x+1=0$ 实数根的情况是________________；

方程 $(x-4)^2+2(x-1)-5=0$ 实数根的情况是________________；

方程 $x^2+2x-4=0$ 实数根的情况是________________.

（2）方程 $6x^2+x=0$ 的两根之和是________，两根之积是________；

方程 $-\sqrt{2}x^2+4x=2$ 的两根之和是________，两根之积是________.

（3）在实数范围内因式分解：

$x^2+4x+2=$________________；

$2x^2+3x-6=$____________________.

3. 解下列方程：

(1) $x^2+3x-18=0$；

(2) $(2x+1)^2-4=0$；

(3) $x^2-4\sqrt{2}x-1=0$；

(4) $3x^2-(x-2)^2=12$；

(5) $(4x-1)^2-10(4x-1)-24=0$；

(6) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-2}=-\dfrac{8}{x^2-4}$.

4. 小海与小华分别在解下面的方程：

小海：

(1) $x(3x+2)-6(3x+2)=0$.

解：$(3x+2)(x-6)=0$.

$3x+2=0$ 或 $x-6=0$.

解得 $x=-\dfrac{2}{3}$ 或 $x=6$.

所以，原方程的根是 $x_1=-\dfrac{2}{3}$，$x_2=6$.

小华：

(2) $(x+3)(x-10)=1$.

解：$x+3=1$ 或 $x-10=1$.

解得 $x=-2$ 或 $x=11$.

所以，原方程的根是 $x_1=-2$，$x_2=11$.

你认为他们的解法正确吗？如果正确，请在框内打“√”；如果不正确，请找出错误的地方，指出错误原因，并写出正确的解法.

5. 当 k 满足什么条件时，关于 x 的方程 $x^2-(2k-1)x+k^2=0$ 有两个不相等的实数根？

6. 无论 m 取何值，关于 x 的方程 $2x^2-(4m-1)x-m^2-m=0$ 一定有两个不相等的实数根吗？为什么？

7. 如果关于 x 的方程 $x^2+(m+2)x+2=0$ 的一个根为 -1，求此方程的另一个根及 m 的值.

8. 请尝试解决南宋数学家杨辉提出的一个问题："直田积八百六十四步，只阔不及长一十二步. 问阔及长各几步."（其大意为：长方形的面积是 864 平方步，宽比长少 12 步. 求这个长方形的长和宽.）

9. 一块长方形空地的长是 24 m，宽是 12 m，现要在它的中央划一个小长方形区域种植花卉，四周植草. 已知四周所留的宽度相同，小长方形面积是原长方形面积的$\frac{5}{9}$. 求小长方形的长和宽.

10. 某木器厂今年一月份生产了课桌 500 张；后因管理不善，二月份的产量减少了 10%；从三月份起加强了管理，产量逐月上升，四月份产量达到 648 张. 如果三、四月份的月增长率相同，求这个增长率.

B

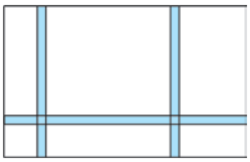
11. 已知关于 x 的方程 $2x^2-\sqrt{3}x+m=0$ 没有实数根，那么 m 可取的最小整数值是多少？

12. 已知方程 $2x^2+4x+1=0$ 的两根是 x_1、x_2，利用韦达定理，求下列各式的值：

(1) $(x_1-3)(x_2-3)$；　　(2) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$；

(3) $x_1^2+x_2^2-x_1x_2$；　　(4) $(x_1-x_2)^2$.

13. 如图，在宽为 20 m、长为 32 m 的长方形耕地上，修筑同样宽的三条道路（两条纵向，一条横向，横向与纵向互相垂直），把耕地分成大小不等的六块实验田. 为使实验田总面积为 570 m²，道路的宽应为多少？



（第 13 题）

14. 某工厂在第一季度的生产中，一月份的产值是 250 万元，二、三月份产值的月增长率相同. 已知第一季度的总产值是 843.6 万元，求二、三月份的月增长率.

15. 某工程队中甲、乙两组承包一段路基的改造工程，规定在若干天内完成. 已知甲组单独完成这项工程所需时间比规定时间的 2 倍多 4 天，乙组单独完成这项工程所需时间比规定时间的 2 倍少 16 天，而甲、乙两组合做需要 24 天完成. 问：甲、乙两组合做能否在规定时间内完成？

第22章

直角三角形

直角三角形是一类特殊而重要的三角形．著名的勾股定理定量地反映了直角三角形三边之间的关系，是人类理性文明的结晶，在数学上有着重要的地位与作用．

在本章中，我们还要学习直角三角形的性质、判定、全等的判定等知识，并得到角平分线的性质．它们将为进一步学习四边形、平面直角坐标系和三角初步做必要的准备．

22.1 直角三角形

1. 直角三角形的性质

直角三角形有一个角是直角，根据三角形的内角和定理，可推出直角三角形的一个性质定理：

定理　直角三角形的两个锐角互余.

其逆命题也是正确的，即得到直角三角形的一个判定定理：

定理　两个锐角互余的三角形是直角三角形.

请自行证明上面两个定理.

下面我们来研究直角三角形的另一些性质.

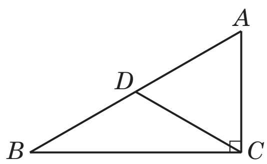


图 22-1-1

如图 22-1-1，在 Rt△ABC 中，作射线 CD 与边 AB 交于点 D，将$\angle ACB$ 分成两个角，使$\angle ACD=\angle A$，就有$\angle BCD=\angle B$，可见 Rt△ABC 被分成了两个等腰三角形.

基于上面的分析，可以得到直角三角形的另一个性质定理：

定理　直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

如图 22-1-2，已知：在 Rt△ABC 中，CD 是斜边 AB 上的中线.

求证：$CD=\dfrac{1}{2}AB$.

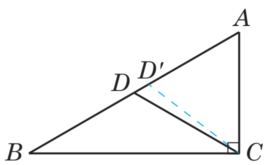


图 22-1-2

证明　如图 22-1-2，过点 C 作射线 CD'交边 AB 于点 D'，使$\angle ACD'=\angle A$，根据题意，可知$\angle ACD'+\angle BCD'=90°$，由“直角三角形的两个锐角互余”，可得$\angle A+\angle B=90°$，从而推出$\angle BCD'=\angle B$.

所以，$CD'=AD'=BD'$，即线段 AB 的中点 D 与点 D'重合. 因此，

$CD=AD=BD$，即 $CD=\frac{1}{2}AB$.

探究

用反证法证明上述定理．如果 $AD>CD$ 可推出什么矛盾？如果 $AD<CD$ 呢？

例 1 如图 22-1-3，已知：CD 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的中线，且 $CD=\frac{1}{2}AB$.

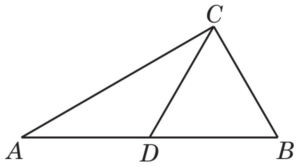


图 22-1-3

求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

证明 $\because$ CD 是边 AB 上的中线，且 $CD=\frac{1}{2}AB$，

$\therefore$ $CD=AD=BD$.

$\therefore$ $\angle A=\angle ACD$，$\angle B=\angle BCD$.

$\because$ $\angle A+\angle B+\angle ACB=180^\circ$，

$\therefore$ $\angle A+\angle B+\angle ACD+\angle BCD=180^\circ$.

$\therefore$ $\angle A+\angle B=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$.

$\therefore$ $\triangle ABC$ 是直角三角形（两个锐角互余的三角形是直角三角形）.

例 2 如图 22-1-4，已知：在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$.

求证：$BC=\frac{1}{2}AB$.

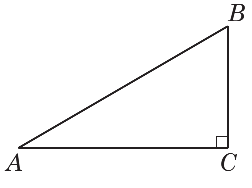


图 22-1-4

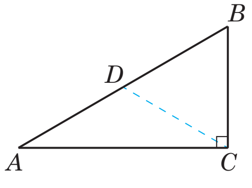


图 22-1-5

证明 如图 22-1-5，作斜边 AB 上的中线 CD.

$\because$ $\angle ACB=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，

$\therefore$ $\angle B=60^\circ$（直角三角形的两个锐角互余）.

$\because$ CD 是斜边 AB 上的中线，

$\therefore$ $CD=AD=BD=\dfrac{1}{2}AB$（直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半）.

$\therefore$ $\angle DCB=\angle B=60^\circ$.

$\therefore$ $\angle BDC=60^\circ$.

$\therefore$ $\triangle CDB$ 是等边三角形.

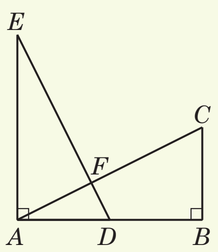
$\therefore$ $BC=CD=\dfrac{1}{2}AB$.

课堂练习 22.1(1)

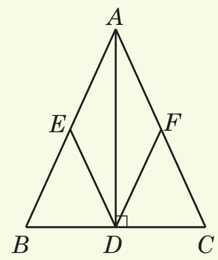
1. 如图，已知 D 为线段 AB 的中点，$EA\perp AB$，$CB\perp AB$，垂足分别为 A、B，$AE=AB=2BC$，那么下列结论中不正确的是（　　）

A. $DE=AC$；　　B. $\angle E+\angle C=90^\circ$；

C. $\angle CAB=30^\circ$；　　D. $\angle EAF=\angle ADE$.



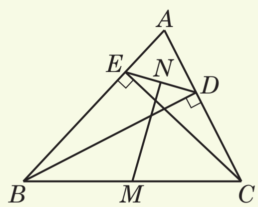
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知：在$\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$，垂足为 D，E、F 分别是边 AB、AC 的中点，且 $DE=DF$. 求证：$AB=AC$.

3. 如图，已知：BD、CE 分别是$\triangle ABC$ 的高，M、N 分别是 BC、DE 的中点. 求证：$MN\perp ED$.



（第 3 题）

2. 直角三角形全等的判定

在“三角形”一章中，我们已经知道，在两个三角形中如果仅已知两边分别相等且一组等边的对角相等，一般不能判定这两个三角形全等. 但如果这两个三角形对应相等的角是直角，它们全等吗？

操作

如图 22-1-6，已知线段 b、c（$c>b$）.

求作 Rt$\triangle ABC$，使 $\angle ACB=90°$，$AB=c$，$AC=b$.

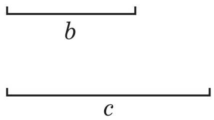


图 22-1-6

作法

（1）作线段 $AC=b$；

（2）过点 C 作直线 $MN\perp AC$；

（3）以点 A 为圆心、以 c 的长为半径作弧，交直线 MN 于点 B；

（4）连接 AB.

$\triangle ABC$ 就是所求的直角三角形（图 22-1-7）.

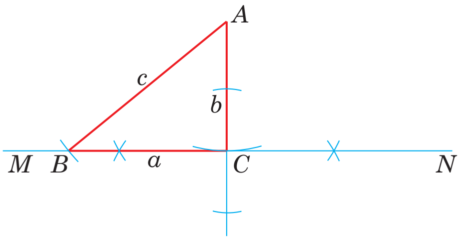


图 22-1-7

思考

上面以点 A 为圆心、以 c 的长为半径作弧，还可交直线 MN 于另一点 B'，从而作出了满足要求的另一个直角三角形$\triangle AB'C$（图 22-1-8），它与$\triangle ABC$ 全等吗？为什么？

如图 22-1-8，$\triangle ABB'$是等腰三角形，从而$\angle B=\angle B'$. 又由$\angle ACB=\angle ACB'$，$AB=AB'$，即可证得$\triangle ABC\cong\triangle AB'C$.

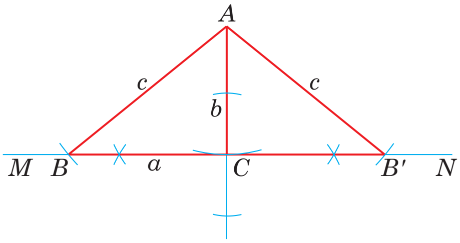


图 22-1-8

进一步可以证明直角三角形全等的判定定理：

定理 如果两个直角三角形的斜边和一条直角边对应相等，那么这两个直角三角形全等.

如图 22-1-9，已知：在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$中，$\angle C=\angle C'=90°$，$AC=A'C'$，$AB=A'B'$.

求证：Rt$\triangle ABC\cong$Rt$\triangle A'B'C'$.

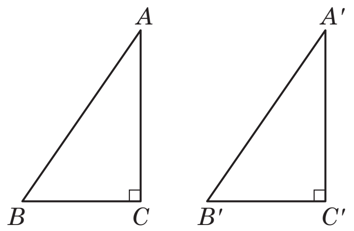


图 22-1-9

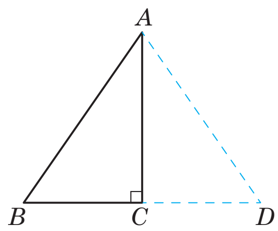


图 22-1-10

证明 如图 22-1-10，延长 BC 到点 D，使得 $CD=C'B'$，连接 AD. 又因为$\angle ACD=\angle A'C'B'=90°$，$AC=A'C'$，所以$\triangle ACD\cong\triangle A'C'B'$. 由此得 $AD=A'B'$.

又因为 $AB=A'B'$，所以 $AB=AD$. 于是，$\triangle ABD$ 是等腰三角形，由"等腰三角形三线合一"，因为 AC 是$\triangle ABD$ 的高，所以 $CB=CD$. 又因为$\angle ACB=\angle ACD=90°$，$AC$ 是公共边，所以$\triangle ACB\cong\triangle ACD$.

根据"三角形全等的传递性"，得$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

例 3 如图 22-1-11，已知：在$\triangle ABC$ 中，$BD\perp AC$，$CE\perp AB$，垂足分别为 D、E，$BD=CE$.

求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

证明 在 Rt$\triangle EBC$ 和 Rt$\triangle DCB$ 中，

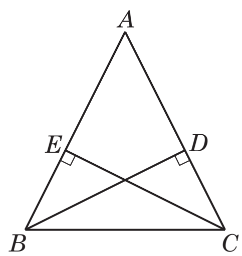


图 22-1-11

$\because \begin{cases} CE=BD, \\ BC=CB, \end{cases}$

$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle EBC \cong \mathrm{Rt}\triangle DCB$（直角三角形全等的判定定理）.

$\therefore$ $\angle EBC=\angle DCB$.

$\therefore$ $AB=AC$，

即$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

例 4 证明：有一条直角边和斜边上的高对应相等的两个直角三角形全等.

如图 22-1-12，已知：在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$中，$\angle ACB=\angle A'C'B'=90°$，$AC=A'C'$，$CD\perp AB$，$C'D'\perp A'B'$，垂足分别为 D、D'，$CD=C'D'$.

求证：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

图 22-1-12

证明 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle A'C'D'$中，

$\because \begin{cases} AC=A'C', \\ CD=C'D', \end{cases}$

$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle ACD\cong\mathrm{Rt}\triangle A'C'D'$（直角三角形全等的判定定理）.

$\therefore$ $\angle A=\angle A'$.

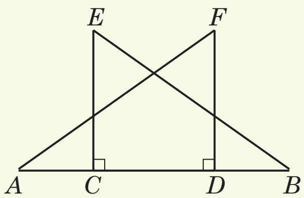
在$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$中，

$\because \begin{cases} \angle A=\angle A', \\ AC=A'C', \\ \angle ACB=\angle A'C'B', \end{cases}$

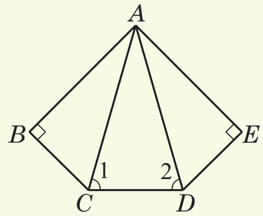
$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

课堂练习 22.1(2)

1. 如图，已知：$EC\perp AB$，$FD\perp AB$，垂足分别为 C、D，$AF=BE$，$FD=EC$. 求证：$AC=BD$.



（第 1 题）



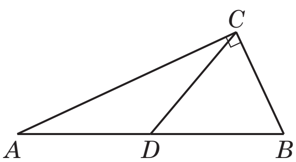
（第 2 题）

2. 如图，已知：$AB\perp BC$，$AE\perp ED$，垂足分别为 B、E，$AB=AE$，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$BC=ED$.

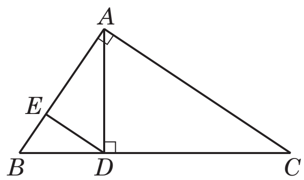
习题 22.1

A

1. 如图，CD 是 Rt$\triangle ABC$ 的中线，$\angle ACB=90°$，$\angle CDA=130°$. 求$\angle B$ 的度数.



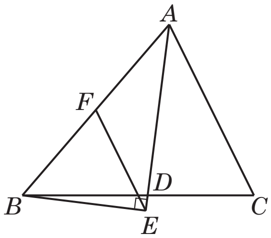
（第 1 题）



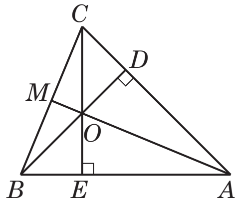
（第 2 题）

2. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$\angle B=56°$，$AD\perp BC$，垂足为 D，$DE\parallel AC$，交边 AB 于点 E. 求$\angle ADE$ 的度数.

3. 如图，已知：AD 是$\triangle ABC$ 的角平分线，$BE\perp AD$，BE 交 AD 的延长线于点 E，F 是边 AB 的中点. 求证：$FE/\!/AC$.



（第 3 题）

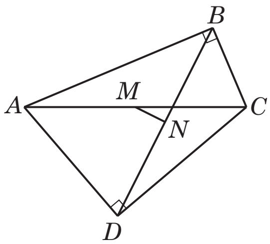


（第 4 题）

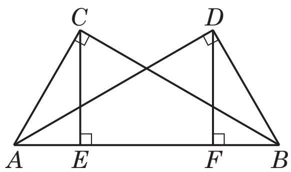
4. 如图，$\triangle ABC$ 的高 BD 与 CE 相交于点 O，$OD=OE$，AO 的延长线交边 BC 于点 M. 求证：$AB=AC$.

B

5. 如图，已知：$\angle ABC=\angle ADC=90°$，$M$、$N$ 分别是 AC、BD 的中点. 求证：$MN\perp BD$.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，已知：$AC\perp BC$，$AD\perp BD$，垂足分别为 C、D，$AD=BC$，$CE\perp AB$，$DF\perp AB$，垂足分别为 E、F. 求证：$CE=DF$.

22.2 角平分线

操作

我们知道，角是轴对称图形，它的对称轴是角平分线所在的直线。已知一个角，你能用直尺和圆规作出它的平分线吗？

如图 22-2-1，已知$\angle AOB$，求作$\angle AOB$的平分线.

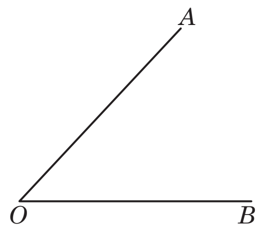


图 22-2-1

作法

（1）以点 O 为圆心、以任意长度 a 为半径作弧，分别交 OA、OB 于点 D、E；

（2）分别以点 D、E 为圆心，以 DE 的长为半径作弧，两弧相交于$\angle AOB$内的一点 C；

（3）作射线 OC.

射线 OC 就是$\angle AOB$的平分线（图 22-2-2）.

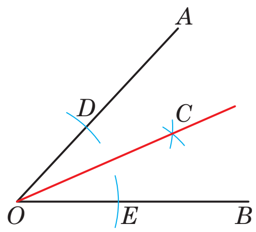


图 22-2-2

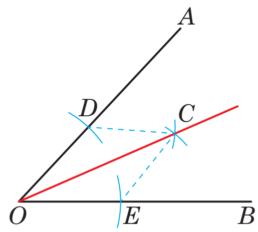


图 22-2-3

证明　如图 22-2-3，连接 CD、CE.

在$\triangle OCD$和$\triangle OCE$中，

$$\because \begin{cases} OD=OE, \\ OC=OC, \\ CD=CE, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle OCD \cong \triangle OCE$.

∴　$\angle COD=\angle COE$，

即 OC 平分 $\angle AOB$.

如图22-2-4，设 OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，在 OC 上任取一个不与点 O 重合的点 P，过点 P 分别向 OA、OB 作垂线段，那么这两条垂线段的长相等.

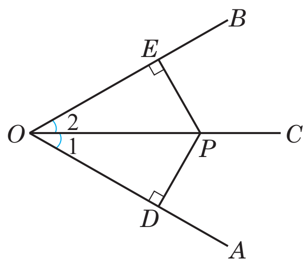


图 22-2-4

研究角平分线有关问题时，约定所涉及的角小于平角.

归纳上述事实，得到角平分线的性质定理：

定理　角平分线上的点到这个角的两边所在直线的距离相等.

显然，角平分线的端点到这个角的两边所在直线的距离相等，都为 0.

如图 22-2-4，已知：OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，P 是 OC 上一点(点 P 不与点 O 重合)，$PD\perp OA$，$PE\perp OB$，垂足分别为 D、E.

求证：$PD=PE$.

证明　因为 OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，所以 $\angle 1=\angle 2$. 因为 $PD\perp OA$，$PE\perp OB$，所以 $\angle PDO=\angle PEO=90°$. 又因为 $\angle 1=\angle 2$，$\angle PDO=\angle PEO$，OP 为公共边，所以 $\triangle PDO\cong\triangle PEO$. 由此推出 $PD=PE$.

反过来，则得到：

定理　在角的内部，到角的两边所在直线距离相等的点，均在这个角的平分线上.

如图 22-2-5，已知：Q 为$\angle AOB$ 内部一点，$QD \perp OA$，$QE \perp OB$，垂足分别为 D、E，$QD=QE$.

求证：点 Q 在$\angle AOB$ 的平分线上.

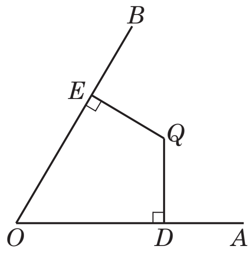


图 22-2-5

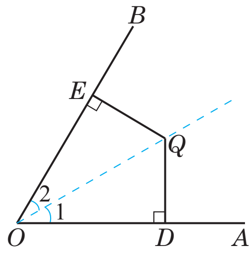
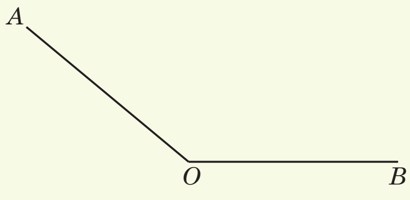


图 22-2-6

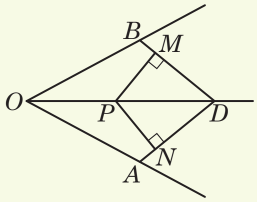
证明 如图 22-2-6，作射线 OQ. 因为 $QD \perp OA$，$QE \perp OB$，所以$\angle QDO=\angle QEO=90°$. 又因为 $QD=QE$，OQ 为公共边，根据直角三角形全等的判定定理，得 $\mathrm{Rt}\triangle QDO \cong \mathrm{Rt}\triangle QEO$. 由此推出$\angle 1=\angle 2$，即 OQ 是$\angle AOB$ 的平分线，由此可见点 Q 在$\angle AOB$ 的平分线上.

课堂练习 22.2(1)

1. 如图，已知$\angle AOB$，用尺规四等分$\angle AOB$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知：点 P、D 在$\angle AOB$ 的平分线上，$OA=OB$，$PM \perp BD$，$PN \perp AD$，垂足分别是 M、N. 求证：$PM=PN$.

例 1　如图 22-2-7，已知：在$\triangle ABC$中，AO、BO分别是$\angle BAC$、$\angle ABC$的平分线，$OD\perp BC$，$OE\perp AB$，垂足分别为D、E.

求证：点O在$\angle C$的平分线上.

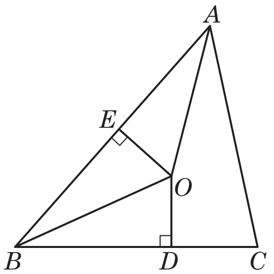


图 22-2-7

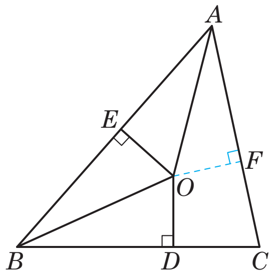


图 22-2-8

证明　如图 22-2-8，过点O作$OF\perp AC$，垂足为F.

$\because$　AO是$\angle BAC$的平分线，$OE\perp AB$，$OF\perp AC$，

$\therefore$　$OE=OF$（角平分线的性质定理）.

同理，可得$OE=OD$.

$\therefore$　$OD=OF$.

又$\because$　$OD\perp BC$，$OF\perp AC$，

$\therefore$　点O在$\angle C$的平分线上（在角的内部，到角的两边所在直线距离相等的点，均在这个角的平分线上）.

本题结论表明：三角形的三个内角的平分线相交于一点，这个交点叫作**三角形的内心**.

例 2　如图 22-2-9，已知：在$\triangle ABC$中，AD是$\angle BAC$的平分线，且$BD=CD$.

求证：$\angle B=\angle C$.

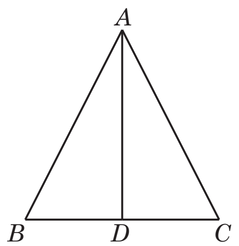


图 22-2-9

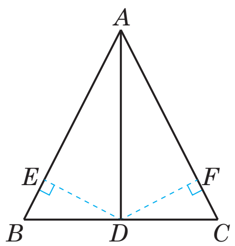


图 22-2-10

证明 如图 22-2-10，过点 D 作 $DE \perp AB$，$DF \perp AC$，垂足分别为 E、F.

$\because$ AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，$DE \perp AB$，$DF \perp AC$，

$\therefore$ $DE = DF$（角平分线的性质定理）.

在 Rt$\triangle BDE$ 和 Rt$\triangle CDF$ 中，

$$\because \begin{cases} DE = DF, \\ BD = CD, \end{cases}$$

$\therefore$ Rt$\triangle BDE \cong$ Rt$\triangle CDF$（直角三角形全等的判定定理）.

$\therefore$ $\angle B = \angle C$.

例 3 如图 22-2-11，已知 $\angle AOB$ 及其内部一点 C.

求作 $\angle AOB$ 内部一点 P，使 $PC = PO$，且点 P 到直线 OA、OB 的距离相等.

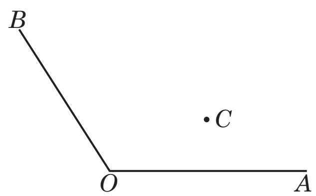


图 22-2-11

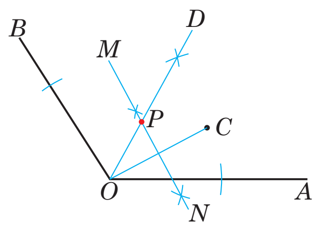


图 22-2-12

分析 假定点 P 已经作出，由 $PC = PO$，可知点 P 一定在线段 OC 的垂直平分线上. 又由点 P 在 $\angle AOB$ 内部且到直线 OA、OB 的距离相等，可知点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上. 因此，P 应是线段 OC 的垂直平分线与 $\angle AOB$ 的平分线的交点.

作法

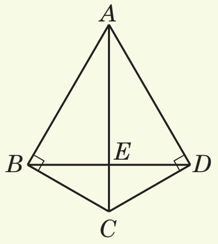
（1）连接 OC，作线段 OC 的垂直平分线 MN；

（2）作 $\angle AOB$ 的平分线 OD，OD 与 MN 相交于点 P.

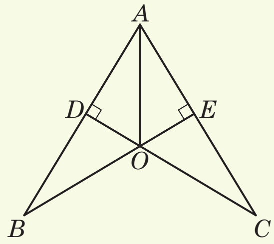
P 就是所求的点(图 22-2-12).

课堂练习 22.2(2)

1. 如图，已知：在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$，连接 AC、BD 相交于点 E，$\angle CBD=\angle CDB$. 求证：CA 平分$\angle BCD$.



(第 1 题)



(第 2 题)

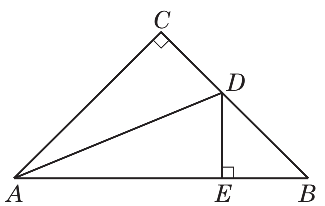
2. 如图，已知：$CD\perp AB$，$BE\perp AC$，垂足分别为 D、E，BE、CD 相交于点 O，且 AO 平分$\angle BAC$. 求证：$OB=OC$.

习题 22.2

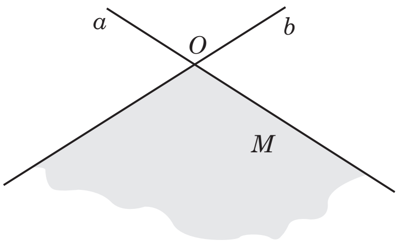
A

1. 用尺规作$\angle AOB=45^\circ$.

2. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=BC$，点 D 在边 BC 上，$DE\perp AB$，E 为垂足，且 $DE=DC$，连接 AD. 求$\angle ADB$ 的度数.



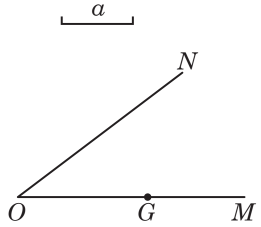
(第 2 题)



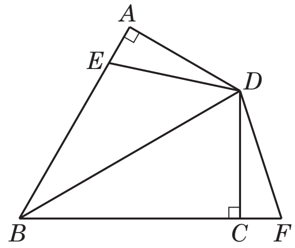
(第 3 题)

3. 如图，两条公路 a、b 相交于点 O，要在 M 区(阴影部分)建一个购物中心 G，使它到两条公路的距离相等，且与点 O 相距 1 000 m，这个购物中心应建于何处(在图上标出点 G 的位置，比例尺 1∶50 000)?

4. 如图，已知线段 a 及$\angle MON$，点 G 在 OM 上，在$\angle MON$ 的内部求作点 P，使点 P 到直线 OM、ON 的距离相等，且 $PG=a$.



（第 4 题）

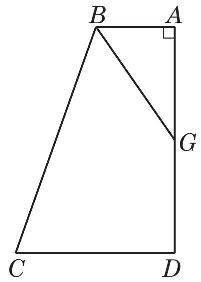


（第 5 题）

5. 如图，已知：在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=\angle BCD=90^\circ$，$BD$ 平分$\angle ABC$. 点 E 在边 AB 上，点 F 在边 BC 的延长线上，连接 DE、DF，$DE=DF$. 求证：$\angle BED+\angle DFB=180^\circ$.

B

6. 如图，已知：$AB\parallel CD$，$\angle A=90^\circ$，G 为线段 AD 的中点，BG 平分$\angle ABC$. 求证：点 G 在$\angle BCD$ 的平分线上.



（第 6 题）

22.3 勾股定理

我们来研究直角三角形三边之间的关系.

定理 在直角三角形中，斜边大于直角边.

如图 22-3-1，已知：在 Rt$\triangle ACB$ 中，$\angle C=90^\circ$.

求证：$BC<AB$，$AC<AB$.

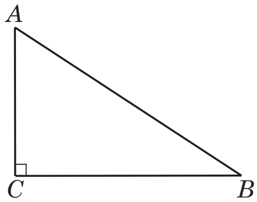


图 22-3-1

证明 根据“直角三角形的两个锐角互余”，可得$\angle A+\angle B=90^\circ$，进而推出$\angle A<\angle C$. 由“在三角形中，大角对大边”，可得 $BC<AB$，同理可知 $AC<AB$.

如果把直角边 AC 看作点 A 到直线 BC 的垂线段，那么根据上述定理，可以推得

定理 连接直线外一点与直线上各点的所有线段中，垂线段最短.

简单地说：**垂线段最短**.

这样，直线外一点到直线的距离就是连接该点与该直线上各点所得线段长度的最小值.

操作

如图 22-3-2，在由边长为 1 的小正方形构成的方格网中，作出几个以格点为顶点的直角三角形(两条直角边的长分别记为 a、b，斜边长记为 c)，分别以三角形的各边为正方形的一边，向三角形外作正方形. 请计算每张图中各小正方形的面积并填写在表 22-1 中.

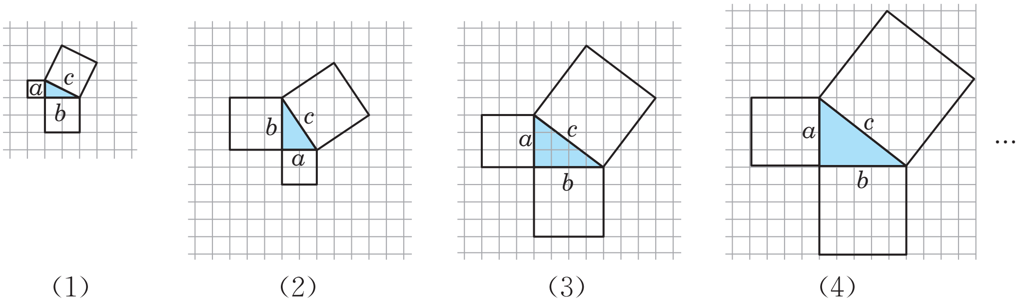


图 22-3-2

表 22－1

	(1)	(2)	(3)	(4)	…
a^2					
b^2					
c^2					

直角三角形斜边的长可由两条直角边的长确定，它们有怎样的关系呢？在上面的例子中，都有 $a^2+b^2=c^2$. 一般地，我们有：

勾股定理 直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方.

如图 22-3-3，在我国古代，称直角三角形的直角边中较短的一边为“勾”，较长的一边为“股”，斜边为“弦”. 勾股定理揭示了直角三角形三边之间的关系，是几何中著名的定理，有着极其广泛的应用.

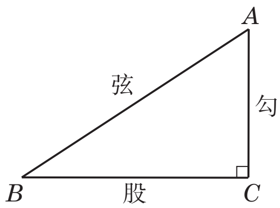


图 22-3-3

我们可以通过计算图形分、合、移、补前后的面积来证明勾股定理. 关于面积有下面的性质：

(1) 如果两个图形全等，那么它们的面积相等；

(2) 一个图形的面积等于它的各部分面积的和.

已知：直角三角形的两条直角边长分别为 a 及 b，斜边长为 c.

求证：$a^2+b^2=c^2$.

下面是古代数学家的一种巧妙证法：

图 22-3-4(1)和(2)都是边长为$(a+b)$的正方形，从中分别去掉四个全等的直角三角形(蓝色部分)，由上述关于面积的性质，可知这两个正方形中剩余部分的面积一定相等.

图 22-3-4 中每个直角三角形的两直角边长分别为 a 及 b. 因为这些直角三角形全等，而直角三角形的两个锐角互余，所以图 22-3-4(1)中的剩余部分是边长为 c 的正方形，而图 22-3-4(2)中的剩余部分是边长分别为 a 及 b 的两个正方形. 因此，

$$a^2+b^2=c^2.$$

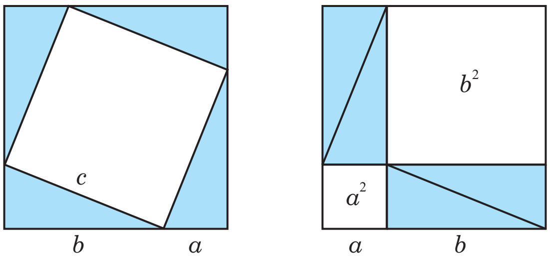


图 22-3-4

例 1 求边长为 1 的等边三角形的面积.

解 如图 22-3-5，等边三角形 ABC 的边长为 1. 过点 A 作 $AD\perp BC$，垂足为 D.

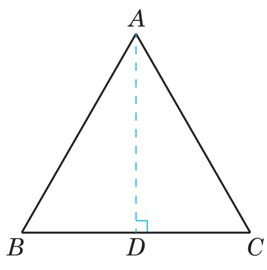


图 22-3-5

$\because$ $AB=BC=CA=1$，$AD\perp BC$，

$\therefore$ $BD=CD=\dfrac{1}{2}$.

在 Rt$\triangle ABD$ 中，

$\because$ $\angle ADB=90°$，

$\therefore$ $AB^2=AD^2+BD^2$ (勾股定理).

$$\therefore \quad AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \quad S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

因此，边长为 1 的等边三角形的面积是 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

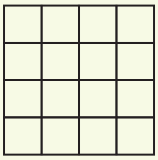
思考

如果等边三角形的边长为 a，那么其面积 S 是多少(用含 a 的代数式表示)？

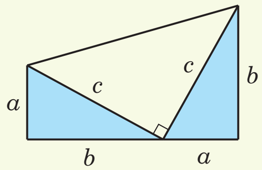
课堂练习 22.3(1)

1. 已知等边三角形 ABC 的边长为 3 cm，求$\triangle ABC$ 的面积.

2. 如图，设每个小方格的面积为 1，分别画出一条以格点为端点且长度为$\sqrt{5}$、5、$2\sqrt{5}$的线段.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，涂色部分是两个直角边长为 a、b，斜边长为 c 的直角三角形，且两斜边的夹角是直角. 请利用这个图形验证勾股定理.

我们来研究勾股定理的逆命题.

勾股定理的逆定理　如果三角形的一条边的平方等于其他两条边的平方和，那么这个三角形是直角三角形.

如图 22-3-6，已知：在$\triangle ABC$中，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，且$a^2+b^2=c^2$.

求证：$\triangle ABC$是直角三角形.

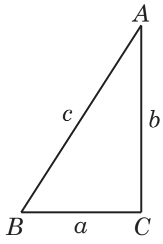


图 22-3-6

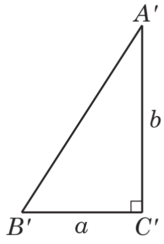


图 22-3-7

分析 构造一个直角边长为a、b的直角三角形，证明它与$\triangle ABC$全等.

证明 如图 22-3-7，作$\triangle A'B'C'$，使$\angle C'=90°$，$B'C'=a$，$A'C'=b$，由勾股定理，可得$A'B'^2=B'C'^2+A'C'^2=a^2+b^2$. 又因为$a^2+b^2=c^2$，所以$A'B'^2=c^2$，即$A'B'=c$.

因此，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的三边对应相等，从而$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$. 由“全等三角形的对应角相等”，可得$\angle C=\angle C'=90°$，即$\triangle ABC$是直角三角形.

例 2 在$\triangle ABC$中，$BC=8$，$AC=15$，$AB=17$. 试判断$\triangle ABC$是不是直角三角形.

解 $\because$ $BC^2+AC^2=8^2+15^2=289$，$AB^2=17^2=289$，

$\therefore$ $AB^2=BC^2+AC^2$.

$\therefore$ $\triangle ABC$是直角三角形（勾股定理的逆定理）.

我们已经知道，$3^2+4^2=5^2$，$8^2+15^2=17^2$，如果正整数a、b、c满足$a^2+b^2=c^2$，那么a、b、c称为一组勾股数. 以勾股数中的三个数为三边长的三角形一定是直角三角形.

例 3 图 22-3-8 是一块四边形绿地的示意图，其中 AB 长 24 m，BC 长 15 m，CD 长 20 m，DA 长 7 m，$\angle C=90^\circ$. 求绿地 $ABCD$ 的面积.

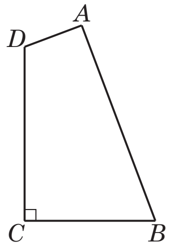


图 22-3-8

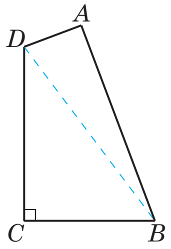


图 22-3-9

解 如图 22-3-9，连接 BD.

在$\triangle BCD$ 中，

$\because$ $\angle C=90^\circ$,

$\therefore$ $BD^2=BC^2+CD^2$（勾股定理）.

$\because$ $BC=15$，$CD=20$,

$\therefore$ $BD^2=15^2+20^2=225+400=625$.

在$\triangle ABD$ 中，

$\because$ $AD=7$，$AB=24$,

$\therefore$ $AD^2+AB^2=7^2+24^2=49+576=625$.

$\therefore$ $BD^2=AD^2+AB^2$.

$\therefore$ $\angle A=90^\circ$（勾股定理的逆定理）.

$$\therefore\ S_{\text{四边形}ABCD}=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ABD}$$
$$=\frac{1}{2}BC\cdot CD+\frac{1}{2}AD\cdot AB$$
$$=\frac{1}{2}\times15\times20+\frac{1}{2}\times7\times24$$
$$=150+84=234.$$

答：绿地 $ABCD$ 的面积是 234 m^2.

课堂练习 22.3(2)

1. 判断下列说法是否正确，正确的在括号里打“√”，错误的在括号里打“×”：

（1）以 0.3、0.4、0.5 为三边长的三角形不是直角三角形；（　　）

（2）以 50、120、130 为三边长的三角形是直角三角形．（　　）

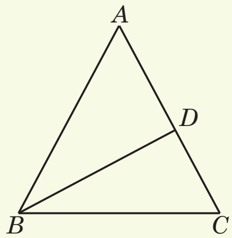
2. 以下列 a、b、c 为边的三角形是不是直角三角形？如果是，那么哪一个角是直角？

（1）$a=8$，$b=13$，$c=11$；

（2）$a=6.5$，$b=2.5$，$c=6$；

（3）$a=40$，$b=41$，$c=7$.

3. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 是边 AC 上一点，$CD=8$，$BC=17$，$BD=15$. 求 AB 的长.



（第 3 题）

例 4　请尝试解决《九章算术》“勾股”章第 6 题“引葭(jiā)赴岸”：“今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺．引葭赴岸，适与岸齐．问水深、葭长各几何.”该题意是：有一个水面是正方形的水池，边长为 1 丈．如图 22-3-10，一棵葭 AB（竖直）生长在水池中央，葭露出水面的部分 CB 长 1 尺．如将葭引向（最近的）岸边（CD 长为 0.5 丈，即 5 尺），葭尖恰好碰到岸（$AB=AD$）．求水深 AC、葭长 AB 各是多少（丈、尺是长度单位，1 丈=10 尺）？

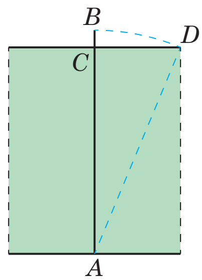


图 22-3-10

解　根据题意，如图 22-3-10，$AB\perp CD$，$AB=AD$，$CD=5$（尺），$CB=1$（尺）.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$AD=AC+1$（尺）．由勾股定理，可知 $AC^2+CD^2=AD^2$，即有

$$AC^2+5^2=(AC+1)^2.$$

解得 $AC=12$(尺).

于是 $AB=AD=13$(尺).

答：水深 12 尺，葭长 13 尺.

例 5 给出单位长度 1，作长为$\sqrt{3}$的线段.

分析 根据勾股定理，可知两条直角边长都为 1 的直角三角形，它的斜边长等于$\sqrt{2}$；两条直角边长分别为$\sqrt{2}$、1 的直角三角形，它的斜边长就等于$\sqrt{3}$.

作法 如图 22-3-11.

(1) 作两条直角边长都为 1 的直角三角形 ACB_1，其中$\angle C=90°$；

(2) 以斜边 AB_1 为一直角边，作另一直角边长为 1 的直角三角形 AB_1B_2.

斜边 AB_2 的长度是$\sqrt{3}$，它就是所求的线段.

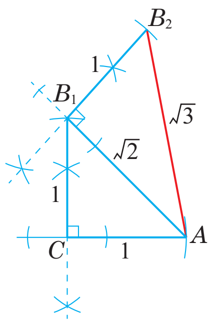


图 22-3-11

探究

利用勾股定理，给出单位长度 1，如何作出长度为$\sqrt{n}$(n 是大于 1 的整数)的线段？

例 6 如图 22-3-12，在$\triangle ABC$ 中，$AB=10$，$BC=24$，$AC=26$，M 是边 AC 的中点.

(1) 求 B、M 两点的距离；

(2) 求点 B 到直线 AC 的距离.

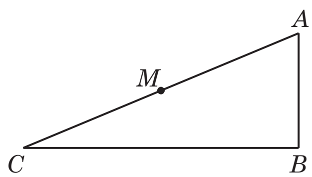


图 22-3-12

分析 运用勾股定理的逆定理可以判断$\triangle ABC$是直角三角形，于是转化为“求直角三角形斜边上的中线长和高”的问题.

解 在$\triangle ABC$中，

$\because$ $AB=10$，$BC=24$，$AC=26$，

$\therefore$ $AB^2+BC^2=10^2+24^2=100+576=676$.

又$\because$ $AC^2=26^2=676$，

$\therefore$ $AC^2=AB^2+BC^2$.

$\therefore$ $\angle ABC=90^\circ$（勾股定理的逆定理）.

（1）如图 22-3-13，连接 BM.

$\because$ M是边AC的中点，$\angle ABC=90^\circ$，

$\therefore$ $BM=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 26=13$（直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半），

即B、M两点的距离为 13.

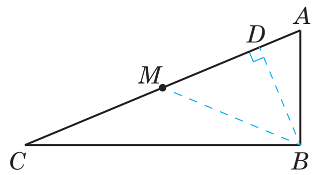


图 22-3-13

（2）如图 22-3-13，过点B作$BD\perp AC$，垂足为D.

$\because$ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}\times 10\times 24=120$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times 26\times BD=13BD$，

$\therefore$ $13BD=120$.

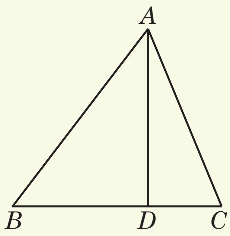
$\therefore$ $BD=\frac{120}{13}$，

即点B到直线AC的距离等于$\frac{120}{13}$.

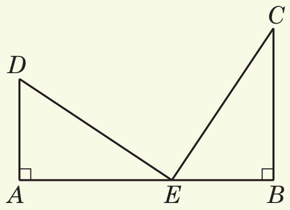
课堂练习 22.3(3)

1. 在△ABC 中，$AC=20$，$BC=21$，$AB=29$. 求这个三角形的面积.

2. 如图，在△ABC 中，D 是边 BC 上一点，$AB=15$，$AC=13$，$AD=12$，$CD=5$. 求 BC 的长.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，公路上 A、B 两站相距 25 km，C、D 为两村庄，$DA\perp AB$，$CB\perp AB$，垂足分别为 A、B. 已知 DA 长为 10 km，CB 长为 15 km，现要在公路 AB 上建一个商场 E，使得 C、D 两村庄到商场 E 的距离相等，那么商场 E 应建在离 A 站多远处?

习题 22.3

A

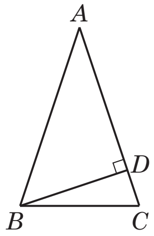
1. 以下列 a、b、c 为边的三角形是不是直角三角形? 如果是，那么哪一个角是直角?

（1）$a=8$，$b=15$，$c=17$；　　（2）$a=24$，$b=25$，$c=7$；

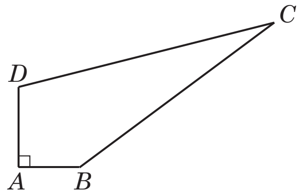
（3）$a=41$，$b=9$，$c=40$；　　（4）$a=\sqrt{3}$，$b=1$，$c=2$.

2. 在△ABC 中，$AB=5$，$BC=13$，$AC=12$，$AD\perp BC$，垂足为 D. 求 AD 的长.

3. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC=5$，$CD=1$，$BD\perp AC$，垂足为D. 求BC的长.



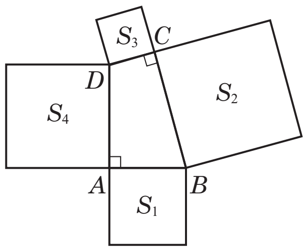
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle A=90°$，$AB=3$，$BC=12$，$CD=13$，$DA=4$. 求四边形$ABCD$的面积.

5. 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle DAB=\angle BCD=90°$，分别以四边形$ABCD$的四条边为边向外作四个正方形，面积分别为$S_1$、$S_2$、$S_3$、$S_4$. 如果$S_1=48$，$S_2=110$，$S_3=25$，求$S_4$的值.

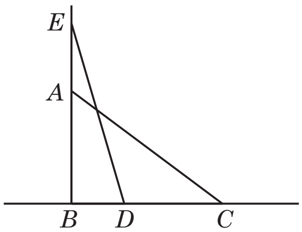


（第 5 题）

B

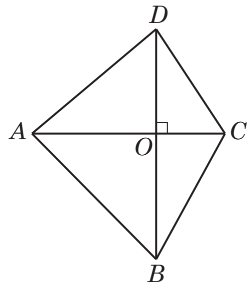
6. 在$\triangle ABC$中，$BC=6$，$AC=3$，$AB=3\sqrt{3}$. 求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的度数.

7. 如图，一架2.5 m长的梯子AC斜靠在一面墙BE上，梯子底端C离墙2 m. 要将梯子的顶端A上升0.9 m至E处（梯子长度不变），求梯子底部C在水平方向滑动到D的距离.



（第 7 题）

8. 如图，已知：$AC \perp BD$，垂足为 O，连接 AD、DC、CB、AB. 求证：$AB^2 - AD^2 = CB^2 - CD^2$.



（第 8 题）

9. 设 m、n 都是正整数，且 $m > n$. 求证：$m^2 - n^2$、$2mn$、$m^2 + n^2$ 是一组勾股数.

◎阅读材料

勾股定理简史

勾股定理是人类伟大的科学发现，有十分悠久的历史，是几何中的一个基本定理.

我国对这一数学定理的认识和应用，可以追溯到公元前一千多年.《周髀算经》记载了一段史实：在周朝初期(约公元前 1100 年)，商高回答周公关于天高地广的问题时，曾说:“故折矩以为勾广三，股修四，径隅五.”〔意思是在方尺上截取勾(短直角边)长为 3，股(长直角边)长为 4，则这端到那端的径(斜边)长必为 5.〕这实际上是勾股定理的一个特例，是对勾股定理的初步认识，所以勾股定理又称商高定理. 三国时期，赵爽(约 3 世纪)在为《周髀算经》所作的注中，把勾股定理描述成“勾股各自乘，并之为弦实，开方除之即弦”. 他利用“弦图”(图 1)给出了勾股定理的证明:“案：弦图又可以勾股相乘为朱实二，倍之为朱实四，以勾股之差自乘为中黄实，加差实亦成弦实.”

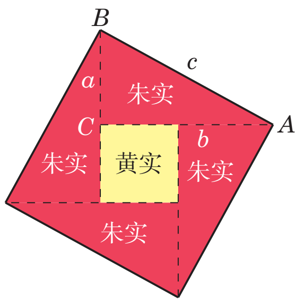


图 1

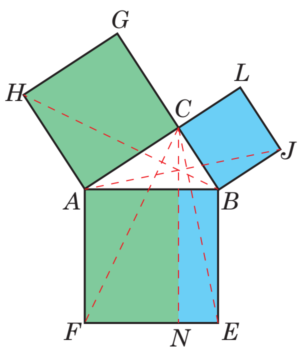


图 2

勾股定理在西方被称为“毕达哥拉斯定理”(Pythagoras theorem). 毕达哥拉斯(Pythagoras，公元前 580 至前 570 之间—约前 500)是古希腊数学家、哲学家，相传他于公元前 550 年发现了这一定理，当时他的学派宰牛百头，广

设盛宴，以示庆贺．古希腊数学家欧几里得(Euclid，约公元前330—前275)在《几何原本》中给出了这个定理的一种证明(图2)．

勾股定理是全人类的共同财富，是世界文明宝库中的一颗璀璨明珠．千百年来，许多数学家和数学爱好者对证明勾股定理兴趣盎然，各种证明方法层出不穷．

◎内容提要

1. 基本概念：直角三角形，角平分线，三角形的内心.

2. 直角三角形的性质：

直角三角形的两个锐角互余.

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

在直角三角形中，斜边大于直角边.

勾股定理：直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方.

3. 直角三角形的判定：

两个锐角互余的三角形是直角三角形.

勾股定理的逆定理：如果三角形的一条边的平方等于其他两条边的平方和，那么这个三角形是直角三角形.

4. 直角三角形全等的判定：

如果两个直角三角形的斜边和一条直角边对应相等，那么这两个直角三角形全等.

5. 角平分线：

（1）性质定理：角平分线上的点到这个角的两边所在直线的距离相等.

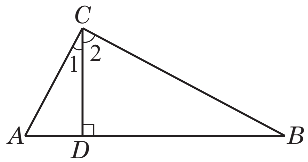
（2）在角的内部，到角的两边所在直线距离相等的点，均在这个角的平分线上.

（3）三角形的三个内角的平分线相交于一点，这个交点叫作三角形的内心.

◎复习题

A

1. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$，垂足为D. 下列说法中不正确的是（　　）



（第 1 题）

A. 若$\angle A=2\angle 1$，则$\angle B=30^\circ$；

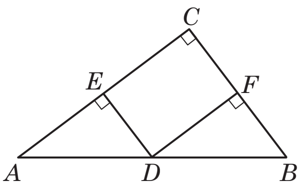
B. 点B到CD的距离是线段BD的长度；

C. $\angle 1=\angle B$；

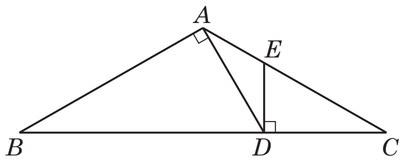
D. 与$\angle 1$互余的角只有$\angle 2$.

2. 一个直角三角形斜边上的中线的长为5，斜边上的高为4. 求此三角形的面积.

3. 如图，直角三角形ABC的面积为4，D是斜边AB的中点，过点D作$DE\perp AC$，$DF\perp BC$，垂足分别为E、F. 求四边形$DFCE$的面积.



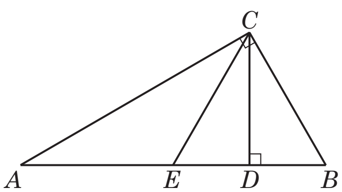
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，已知：在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=120^\circ$，过点A作$AD\perp BA$交边BC于点D，过点D作$DE\perp BC$交边AC于点E. 求证：$AE=DE$.

5. 如图，已知：在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，CD是斜边AB上的高，CE是斜边AB上的中线，$\angle A=30^\circ$. 求证：$BD=DE$.

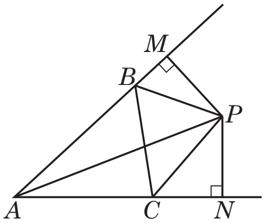


（第 5 题）

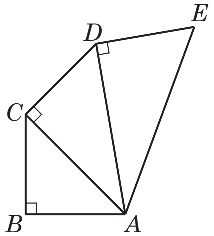
6. 如图，已知：BP、CP 分别是△ABC 的外角平分线，$PM \perp AB$，$PN \perp AC$，垂足分别为 M、N.

（1）求证：$PM=PN$；

（2）求证：AP 平分∠MAN.



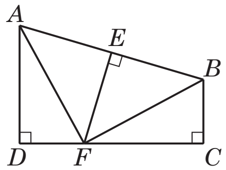
（第 6 题）



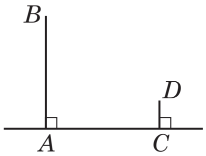
（第 7 题）

7. 如图，$AB=BC=CD=DE=1$，$AB \perp BC$，$AC \perp CD$，$AD \perp DE$，垂足分别为 B、C、D. 求 AE 的长.

8. 如图，已知 $AD \perp CD$，$BC \perp CD$，垂足分别为 D、C，AB 的垂直平分线 EF 交 AB 于点 E，交 CD 于点 F，$BC=DF$. 求证：$AD=FC$.



（第 8 题）

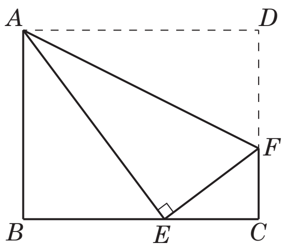


（第 9 题）

9. 如图，AB、CD 表示两棵树，树高分别为 8 m 和 2 m，两树相距 8 m. 一只小鸟从一棵树的树梢飞到另一棵树的树梢，小鸟至少飞了多远？

B

10. 如图，在长方形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=5$，F 为 CD 上一点，将长方形沿折痕 AF 折叠，点 D 恰好落在 BC 上的点 E 处. 求△CFE 的面积.

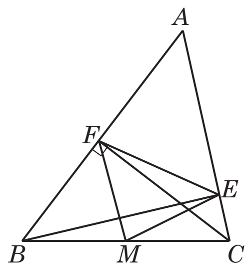


（第 10 题）

11. 如图，在△ABC 中，$CF\perp AB$，垂足为 F，M 为 BC 的中点，E 为 AC 上一点，且 $ME=MF$.

（1）求证：$BE\perp AC$；

（2）若$\angle A=50^\circ$，求$\angle FME$ 的度数.



（第 11 题）

综合与实践

理财小课堂

“勾股定理”证明中的中国智慧

理财小课堂

理财能力是现代社会对人的基本要求之一，掌握基本的理财知识，有助于培养合理的消费观念和对个人未来、家庭的责任心，为一生的行稳致远打好基础.

假设你现在有 10 000 元现金，以下 3 个理财方案，你会选择哪个？

方案 1：本金 10 000 元，年利率 5%，存期 2 年，逐年计息.

方案 2：本金 10 000 元，1 年后返回 6 000 元，2 年后返回 5 025 元.

方案 3：本金 10 000 元，1 年后返回 5 000 元，2 年后返回 6 025 元.

活动 1　单利法与复利法

存款金额等于本金加利息，利息计算有两种方式：

单利法：每期依据本金计算利息，不考虑前期利息所产生的利息. 例如，100 元的本金，年利率为 5%，存期 2 年，逐年计息，2 年后可取回金额等于本金加 2 年的利息，即 $100+100\times5\%+100\times5\%=110$（元）.

复利法：每期依据本金和前期利息之和计算利息. 以上定期存款，按照复利法，2 年后可取回金额为 $100+100\times5\%+(100+100\times5\%)\times5\%=110.25$（元）.

问题 1　请按单利法，逐次计算方案 1 中的存款在 1 年、2 年后的金额.

问题 2　请按复利法，逐次计算方案 1 中的存款在 1 年、2 年后的金额.

问题 3　设本金为 P，年利率为 r，请分别写出依据单利法和复利法计算 3 年后总金额的公式.

问题 4　设条件与问题 3 相同，请分别写出依据单利法和复利法计算 n 年后总金额的公式.

通过活动 1，可以发现：在年利率相同的情况下，复利法计算金额不少于

单利法计算所得.

活动 2 折现

通过活动 1 我们可以发现，同一笔存款在 1 年、2 年乃至未来 n 年后的金额不同，且逐年增加. 这意味着，对于同一理财计划，不宜将不同时刻的金额直接作比较. 例如，理财方案 2、3 都是分两次取回，且总金额相同，看似没有区别，但因为每次取回的金额不同，所以两个方案还是不同的.

如何解决以上的矛盾呢？金融业务中需要将不同时刻的金额折算到同一时间点后，再作比较，这个时间点，一般选为当前时刻. 设年利率为 5%，本金为 1 元，则 1 年后的总金额 $1\times(1+5\%)=1.05$(元)，相当于当前时刻的 1 元. 进一步，1 年后的 1 元就相当于当前时刻的 $1\div(1+5\%)\approx0.95$ (元). 这种将未来某个时间点上的金额折算成当前时刻的价值的做法，称为折现，其中的比率则称为折现率，以上我们取折现率为 5%.

问题 1　假设折现率为 t，1 年后的 P 元在当前时刻的价值为多少？2 年后的 P 元呢？3 年后的呢？n 年后的呢？

问题 2　设折现率为 5%，分别计算理财方案 2、3 所取回金额在当前时刻的价值.

问题 3　你找到比较三种理财方案优劣的方法了吗？比较结果是什么？

活动 3 基于收益率的理财方案比较

理财方案 2 和 3 本身并未规定折现率，活动 2 中，我们为了比较，假设折现率等于存款年利率.

对于类似方案 2、3 这种只规定取回金额，未指定折现率的理财计划，折现率究竟为多少才合理呢？

金融业务中：合理的折现率应该使取回金额折现后的总金额等于其本金. 此时该折现率也称为理财方案的收益率. 以方案 2 为例，本金为 10 000 元，设折现率为 r，1 年后取回金额折现等于 $\frac{6\,000}{1+r}$，2 年后取回金额折现等于 $\frac{5\,025}{(1+r)^2}$，则该方案的收益率应该满足方程

$$\frac{6\ 000}{1+r}+\frac{5\ 025}{(1+r)^2}=10\ 000.$$

问题 1　请求解以上方程，得出方案 2 的收益率.

问题 2　请计算方案 3 的收益率.

问题 3　方案 1 的收益率是多少？

问题 4　请根据收益率比较三种方案的优劣，比较结果和活动 2 一样吗？

“勾股定理”证明中的中国智慧

回顾人类文明历史，勾股定理所揭示的直角三角形三边关系早已被广泛应用在天体测距、建筑测高等活动中，因而被认为是人类最早发现、最基本以及应用最广的数学定理之一.

历史上不同时代、不同国家的人士(不仅是数学家)先后给出了各种证明方法，据统计已有数百种，其中中国历代数学家的贡献独树一帜. 下面我们来领略一二.

活动 1 刘徽(约 225—约 295)的证明

将直角三角形的直角边(长)分别记为勾和股，斜边记为弦，以勾、股和弦为边长制作三个正方形，如图 1 所示.

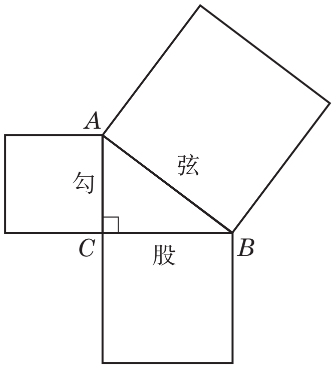


图 1

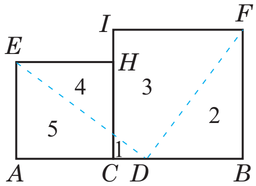


图 2

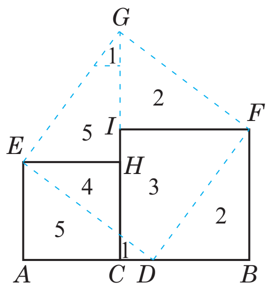


图 3

步骤 1：将以勾和股为边长的正方形按图 2 排列，则它们的面积和$=$勾$^2+$股^2.

步骤 2：如图 2，在 AB 上取一点 D，使得 $DB=AC$，连接 DF、DE，则两个正方形被分割成 5 块(分别用数字 1～5 标记)，它们面积之和$=$勾$^2+$股^2.

步骤 3：如图 3，将 5 与 1 看作一个直角三角形，将其与 4 合成一个三角形；2 自成一个直角三角形，与 3 合成一个梯形，由此得到一个新的四边形 $DFGE$.

步骤 4：请说明四边形 $DFGE$ 是边长为弦的正方形，并由此完成“勾$^2+$股$^2=$弦^2”的证明.

活动 2　赵爽(约 3 世纪)的证明

制作四个全等的直角三角形，直角边长分别记为 a、b ($b\geqslant a$)，斜边长记为 c. 将四个直角三角形拼成如图 4 所示的四边形.

步骤 1：说明图 4 所得四边形是面积为 c^2 的正方形.

步骤 2：分别求出四个直角三角形的面积之和、中间小正方形的面积.

步骤 3：根据以上两步结果，不难得到勾股定理，请给出证明过程.

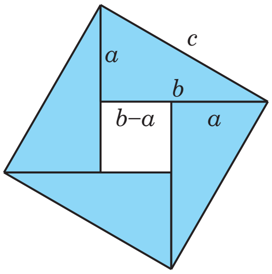


图 4

活动 3　李善兰(1811—1882)的证明

步骤 1：在图 4 的基础上，分别添加以 a 和 b 为边长的两个正方形(图 5)，得到以 a、b、c 为边长的三个正方形.

步骤 2：请指出步骤 1 中添加的两个正方形所覆盖区域和原来的正方形覆盖区域的差别.

步骤 3：基于步骤 2，请找出并证明图 5 中三对全等三角形.

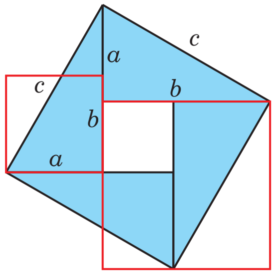


图 5

步骤 4：以上三对三角形的位置有什么特点？请据此证明 $a^2+b^2=c^2$.

总结

以上三个活动中的证明方法看似不同，但本质上都是通过对平面图形作分割、平移、旋转等操作拼出新的图形，再根据“新图形的面积之和等于原图形的面积”完成勾股定理的证明. 这种思想在中国古代数学文献中称为“出入相补”，它有别于欧几里得公理体系的证明方法，在世界数学史中彰显了中国智慧.

课外活动

请查阅资料，补充用“出入相补”原理证明数学公式的案例.

附　录

部分中英文词汇索引

19. 实数

21. 一元二次方程

22. 直角三角形

后　记

本套教科书根据教育部颁布的《义务教育数学课程标准（2022 年版）》编写．

本册教科书是八年级上册．在主编李大潜的主持下，由王志强任本册主编，各章的具体分工为：

鲁海燕、王春明、周子翔、朱雁、徐斌艳（第 19 章），张海燕、金荣生、周子翔（第 20 章），胡军、徐颖、顾跃平、陈月兰、朱雁、周子翔（第 21 章），张海燕、高洁、金荣生、周子翔（第 22 章），朱雁、陆立强（综合与实践）．

感谢编写团队的团结协作和不懈努力，并对王建磐教授的协助表示衷心的谢忱．

编写过程中，上海市课程教育教学研究基地（中小学课程方案基地）、上海市心理教育教学研究基地、上海基础教育教材建设重点研究基地、两个上海市数学教育教学研究基地（分别设在复旦大学和华东师范大学）等上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地对教科书编写工作给予了大力支持，在此表示衷心的感谢．

我们要感谢一直支持、关心和帮助我们工作的同志和朋友们．大家的热忱指导和帮助，我们定会铭记于心，并化为我们的工作动力．

欢迎广大师生来电来函提出宝贵意见．

联系电话：021–64319241（内容）　021–64373213（印刷或装订）

电子邮箱：jcjy@seph.com.cn

地　　址：上海市闵行区号景路 159 弄 C 座上海教育出版社（201101）

SHUXUE

数学

八年级 上册

绿色印刷产品

ISBN 978-7-5720-3449-7

定 价: 10.00 元