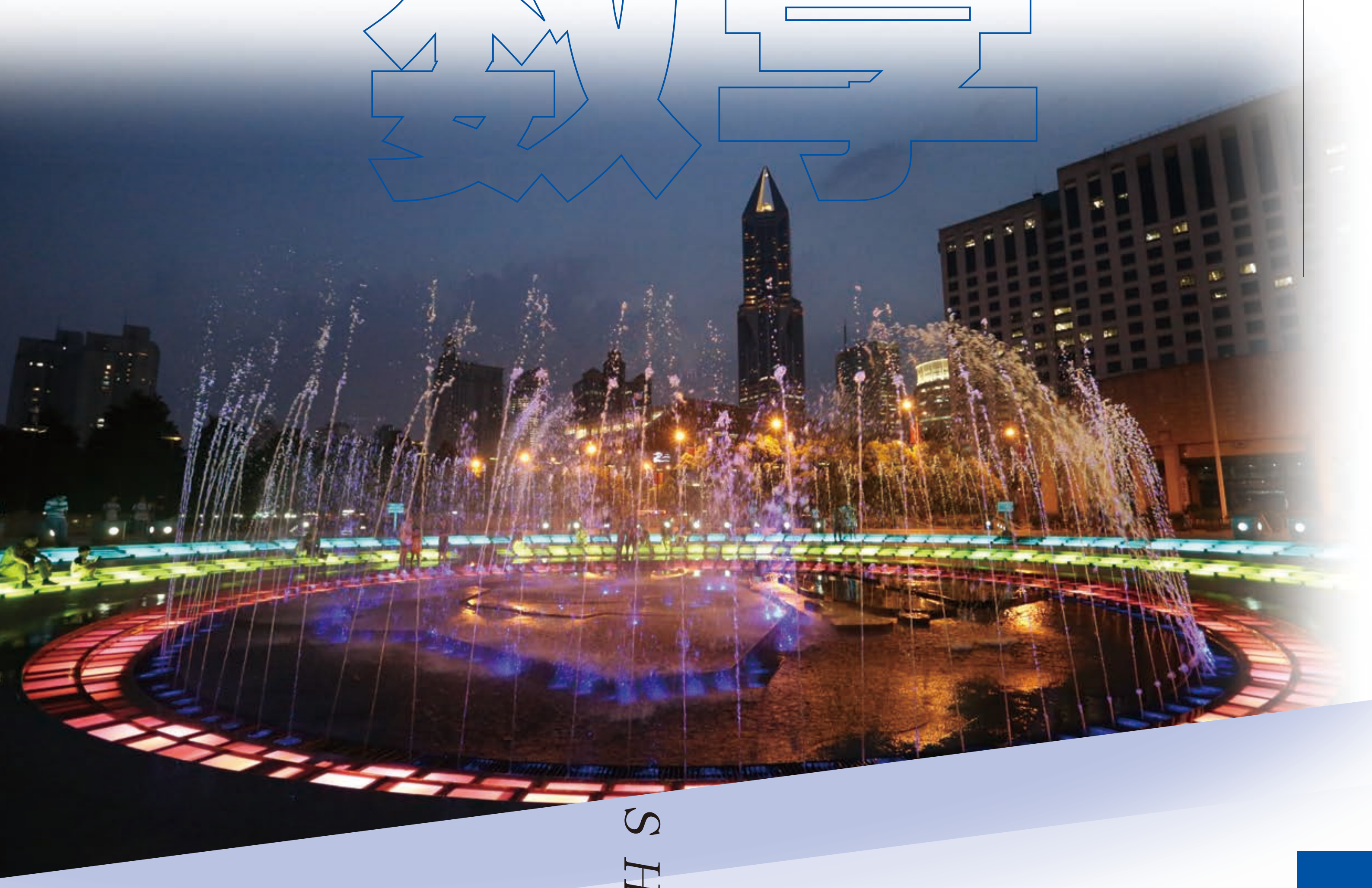
九 年 义 务 教 育 课 本

九年级 第一学期

（试用本）

上海教育出版社

数学



SHUXUE

目录

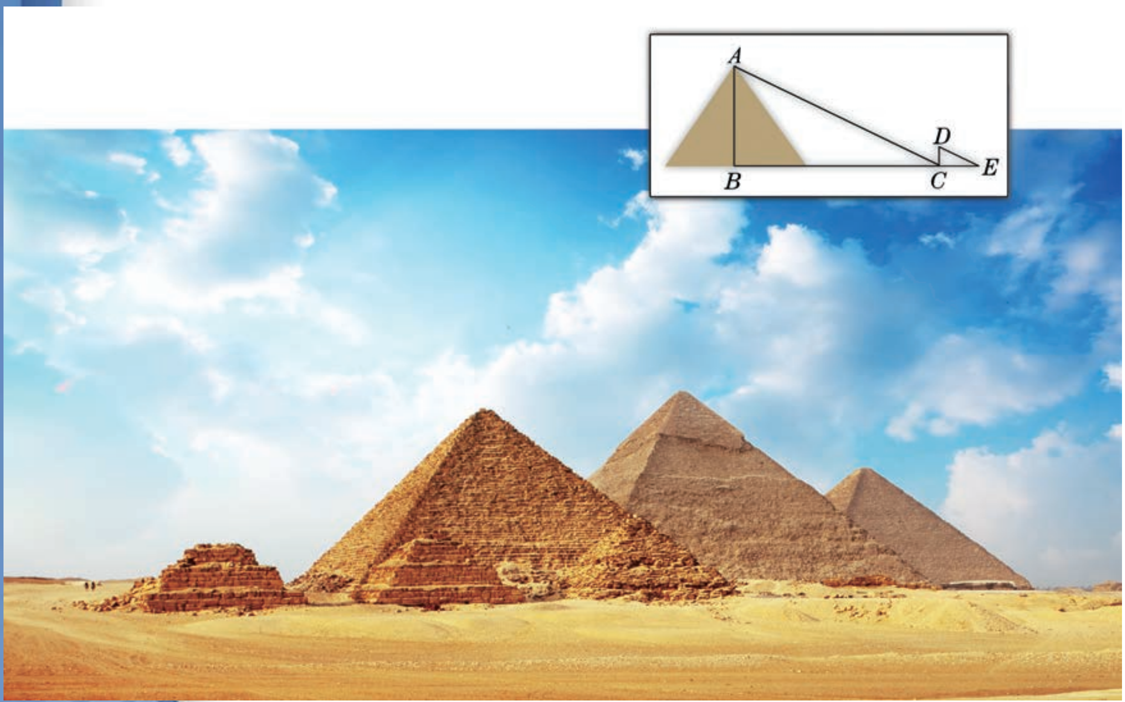
24

25

26

Xiangsi Sanjiaoxing

24 第二十四章　相似三角形



用同一底片冲印出两张不同尺寸的景物照片，这两张照片中的景物“相似”.

一个图形经过“放大”或“缩小”，就得到一个与它相似的图形.这个图形相对于原来的图形，形状一样，但大小发生了变化.那么，当已知图形的大小变化时，哪些量会变？哪些量不变？其中有什么规律？这是引人关注的问题.

“相似”是图形运动变化的一种方式.分析两个图形是否相似，利用相似形的性质来把握图形变化的规律，抓住变化中的不变量，这是研究图形的一种方法，也是解决实际问题的一条有效途径. 据说，在距今 2 500 多年前，古希腊数学家就利用相似三角形较准确地测出了埃及大金字塔的高度.

我们在本章将对相似的图形进行研究，重点是研究相似三角形.

第一节　相似形

24.1　放缩与相似形

观察下面两组图片：图 24－1 是三颗五角星，这三颗五角星中一颗大两颗小，但形状相同；图 24－2 中是两个大小不同的圆，它们的大小不同，但形状相同.

图 24－1

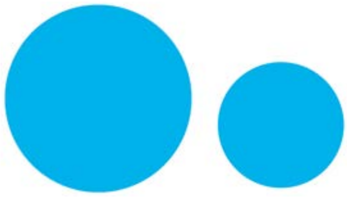


图 24－2

日常生活中，可以看到许多像这样形状相同、大小不一定相同的图形.

也可以用放缩运动来说明图 24－1 中任意两个五角星之间的关系.

对于图 24－3 中的三个四边形，通常可以说，缩小四边形 $ABCD$，得到四边形 $A_1B_1C_1D_1$；放大四边形 $ABCD$，得到四边形 $A_2B_2C_2D_2$.

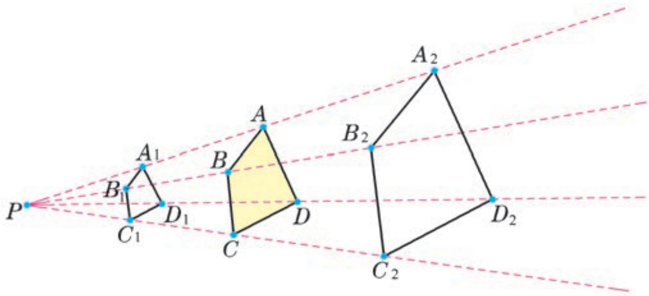


图 24－3

图形的放大或缩小，称为图形的放缩运动. 将一个图形放大或缩小后，就得到与它形状相同的图形. 图 24－3 中，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 和四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 都与四边形 $ABCD$ 形状相同. 我们把形状相同的两个图形说成是**相似的图形**，或者就说是**相似形**.

相似的图形，它们的大小不一定相同. 对于大小不同的两个相似形，可以看作大的图形由小的图形放大而得到，或小的图形由大的图形缩小而得到. 对于大小相同的两个相似形，它们可以重合，这时它们是全等形.

如图 24－4，$\triangle A_1B_1C_1$ 是$\triangle ABC$ 通过放大后得到的图形，这两个三角形的形状相同，它们是相似形.

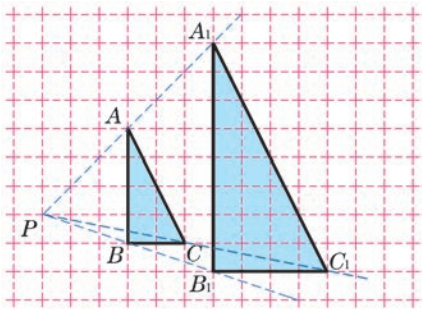


图 24－4

问题

对$\triangle ABC$ 和$\triangle A_1B_1C_1$ 进行观察和测量，可以发现$\angle A_1$ 与$\angle A$、$\angle B_1$ 与$\angle B$、$\angle C_1$ 与$\angle C$ 分别有怎样的大小关系？A_1B_1 与 AB、B_1C_1 与 BC、A_1C_1 与 AC 这三组边的长度的比值之间有怎样的大小关系？

通过测量及计算，可以得到：$\angle A_1$ 与$\angle A$、$\angle B_1$ 与$\angle B$、$\angle C_1$ 与$\angle C$ 对应相等；$\dfrac{A_1B_1\text{ 的长度}}{AB\text{ 的长度}}=\dfrac{B_1C_1\text{ 的长度}}{BC\text{ 的长度}}=\dfrac{A_1C_1\text{ 的长度}}{AC\text{ 的长度}}$. 由各组边的长度的对应比值相等，可知这两个三角形的边的长度对应成比例.

$\triangle ABC$ 放大为$\triangle A_1B_1C_1$ 后，$\triangle ABC$ 的角的大小不变，而它的各边“同样程度”地放大了. 我们说$\triangle A_1B_1C_1$ 与$\triangle ABC$ 的形状相同，就是指它们的角对应相等，边的长度对应成比例.

试一试

在图 24－3 中，考察四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 的角和边，能否得到“它们的角对应相等，边的长度对应成比例”的结论？

例如对$\angle A$ 与$\angle A_2$、$\angle B$ 与$\angle B_2$ 以及边 AB 与 A_2B_2、边 AD 与 A_2D_2 等进行度量，并计算各组边的长度的比值，然后进行考察.

一般来说，两个多边形是相似形，就是说它们同为 n 边形而且形状相同. 也就是这两个多边形的角对应相等，边的长度对应成比例.

图 24－3 中的四边形 $ABCD$ 和四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 是相似形，这时我们说，点 A 与点 A_2 是对应顶点；AB 与 A_2B_2 是对应边；$\angle C$ 与$\angle C_2$ 是对应角.

想一想

在这两个四边形中，还有哪些对应顶点、对应边、对应角？

根据多边形相似的含义，得到：

如果两个多边形是相似形，那么这两个多边形的对应角相等，对应边的长度成比例.

当两个相似的多边形是全等形时，它们的对应边的长度的比值都是 1.

例题 如图 24－5，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 是相似的图形，点 A 与点 A'、点 B 与点 B'、点 C 与点 C'、点 D 与点 D' 分别是对应顶点，已知 $BC=3$，$CD=2.4$，$A'B'=2.2$，$B'C'=2$，$\angle B=70°$，$\angle C=110°$，$\angle D=90°$，求边 AB、$C'D'$ 的长和 $\angle A'$ 的度数.

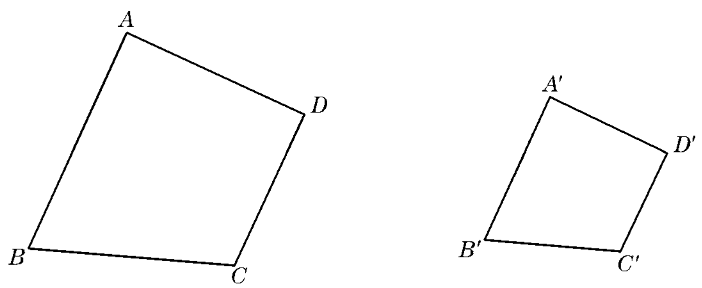


图 24－5

解 ∵ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 是相似的图形，点 A 与点 A'、点 B 与点 B'、点 C 与点 C'、点 D 与点 D' 分别是对应顶点，

∴ $\angle A=\angle A'$，$\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{C'D'}{CD}$（两个相似多边形的对应角相等，对应边的长度成比例）.

由 $BC=3$，$CD=2.4$，$A'B'=2.2$，$B'C'=2$，

得
$$\frac{2.2}{AB}=\frac{2}{3}=\frac{C'D'}{2.4}.$$

解得 $AB=3.3$，$C'D'=1.6$.

在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$.

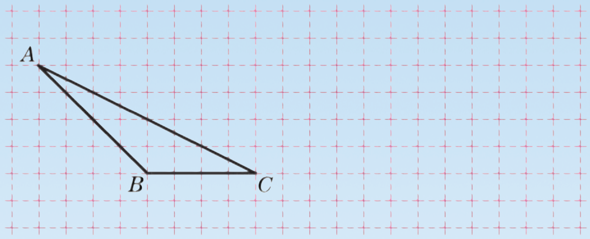
由 $\angle B=70°$，$\angle C=110°$，$\angle D=90°$，

得 $\angle A=360°-(70°+110°+90°)=90°$.

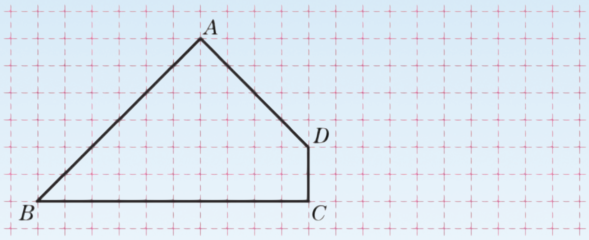
于是 $\angle A'=90°$.

练习 24.1

1. 举出日常生活中图形放大或缩小的实例.
2. 在下列方格图中,分别画出$\triangle ABC$和四边形$ABCD$的一个相似图形.



(1)



(2)

3. 已知四边形$ABCD$与四边形$A'B'C'D'$是相似的图形,并且点A与点A'、点B与点B'、点C与点C'、点D与点D'分别是对应顶点,其中AB、BC、CD、DA的长分别为12厘米、16厘米、16厘米、20厘米,$A'B'$的长为9厘米,求$B'C'$、$C'D'$、$D'A'$的长.

第二节　比例线段

24.2　比例线段

图形的相似与线段长度的比及比例有密切关联，为了研究相似形，需要先研究比例线段.

一般来说，两个数或两个同类的量 a 与 b 相除，叫做 a 与 b 的比，记作 $a:b\left(或表示为\dfrac{a}{b}\right)$，其中 $b\neq0$. a 除以 b 所得的商叫做比值. 如果 $a:b$ 的比值等于 k，那么 $a=kb$.

如果 $a:b=c:d\left(或\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\right)$，那么就说 a、b、c、d 成比例.

两条线段的长度的比叫做**两条线段的比**.

求两条线段的比时，对这两条线段一定要用同一长度单位来度量. 因为线段的长度是正量，所以两条线段的比值总是正数.

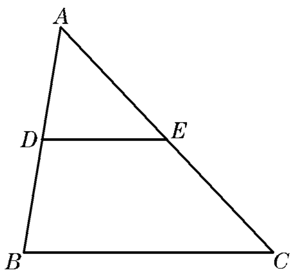


图 24－6

在图 24－6 中，DE 是△ABC 的中位线. 线段 DE 与 BC 的比可记作$\dfrac{DE}{BC}$（或 $DE:BC$），于是得到$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{1}{2}$.

对于四条线段 a、b、c、d，如果 $a:b=c:d\left(或表示为\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\right)$，那么 a、b、c、d 叫做**成比例线段**，简称**比例线段**（proportional segments）. 这时，线段 a、d 是比例外项，线段 b、c 是比例内项.

表述比例线段时，要注意顺序.

例如图 24－6 中，根据 DE 是△ABC 的中位线的条件，可得$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}$，则线段 DE、BC、AD、AB 是比例线段.

我们知道，比例线段有以下基本性质：

两个外项的积等于两个内项的积. 即

$$如果\frac{a}{b}=\frac{c}{d}，那么\ ad=bc.$$

还可以得到：

$$如果\frac{a}{b}=\frac{c}{d}，那么\frac{b}{a}=\frac{d}{c}，\frac{a}{c}=\frac{b}{d}，\frac{c}{a}=\frac{d}{b}.$$

因为线段的长度是正量，所以 a、b、c、d 都不为 0.

思考

比例线段除了具有上述性质以外，还有其他性质吗？

我们先来讨论：如果线段 a、b、c、d 满足 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ 是否成立？

由已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，不妨设比值为 k，即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，可得 $a=kb$，$c=kd$. 所以

$$\frac{a+b}{b}=\frac{kb+b}{b}=k+1,\ \frac{c+d}{d}=\frac{kd+d}{d}=k+1.$$

因此，$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ 成立.

于是得到：

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.　①

由 $\frac{a-b}{b}=\frac{kb-b}{b}=k-1$，$\frac{c-d}{d}=\frac{kd-d}{d}=k-1$，可知②成立.

类似地，可得：

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.　②

我们把结论①和②叫做比例的**合比性质**.

再运用类似的方法，由已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，可得 $\frac{a+c}{b+d}=\frac{kb+kd}{b+d}=k$，因此 $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$. 也就是说：

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，那么 $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$.　③

对于其他的同类量，也有与线段一样的比例性质. 但在实数范围内，要注意式中的分母不能为零. 如 $b+d\neq0$，$b_1+b_2+b_3\neq0$ 等.

结论③叫做**比例的等比性质**.

等比性质可以推广到任意有限多个相等的比的情形. 例如：

如果 $$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=k,$$

那么 $$\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=k.$$

例题1　已知：如图 24－7 中，$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

求证：(1) $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$；(2) $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$.

证明　(1) ∵ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，

∴ $\frac{AD+DB}{DB}=\frac{AE+EC}{EC}$（合比性质），

即 $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$.

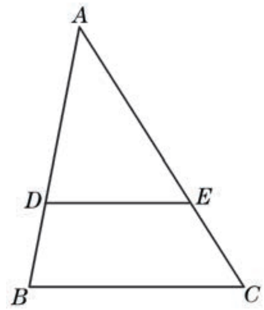


图 24－7

(2) $\because \dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$,

$\therefore \dfrac{DB}{AD}=\dfrac{EC}{AE}$.

$\therefore \dfrac{DB+AD}{AD}=\dfrac{EC+AE}{AE}$(合比性质),

即 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$.

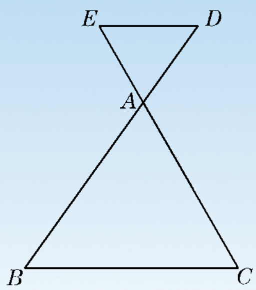
练习 24.2(1)

1. 已知点 B 在线段 AC 上,$BC=2AB$. 求下列各组线段的比值:

(1) $AB:BC$; (2) $AC:AB$; (3) $BC:AC$.

2. 已知:如图,线段 BD 与 CE 相交于点 A,$\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AE}{CE}$.

求证:(1) $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$; (2) $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AD}{AE}$.



(第 2 题)

3. 已知 $x:y=5:2$,求$(x+y):y$ 的值.

4. 已知$\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{4}=\dfrac{c}{5}$,$a+b+c=36$,求 a、b、c 的值.

例题2 已知:如图 24-8,四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 交于点 O,$S_{\triangle AOD}=S_{\triangle BOC}$.

求证:$\dfrac{DO}{OB}=\dfrac{CO}{OA}$.

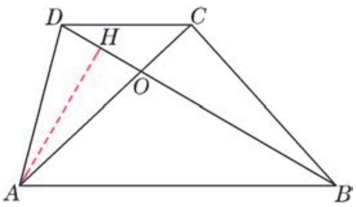


图 24-8

分析 从图 24-8 中可以发现,$\triangle AOD$ 与 $\triangle AOB$ 是分别以 DO、OB 为底边的同高的三角形;$\triangle BOC$ 与 $\triangle AOB$ 是分别以 CO、OA 为底边的同高的三角形. 由于同高(或等高)的两个三角形的面积之比等于对应底边的比,因此可以把三角形面积的比转化为对应底边的比.

证明 过点 A 作 $AH\perp BD$,垂足为点 H.

$\because S_{\triangle AOD}=\dfrac{1}{2}DO\cdot AH$, $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}OB\cdot AH$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle AOB}}=\frac{\frac{1}{2}DO\cdot AH}{\frac{1}{2}OB\cdot AH}=\frac{DO}{OB}.$$

同理可得 $\dfrac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOB}}=\dfrac{CO}{OA}$.

∵ $S_{\triangle AOD}=S_{\triangle BOC}$,

∴ $\dfrac{DO}{OB}=\dfrac{CO}{OA}$.

由 $DC \parallel AB$，可知$\triangle DAB$与$\triangle CAB$同底等高，可推出原来的结论正确．从例题2可知，平行线、三角形等积、比例线段这三者之间有内在联系．

想一想

如果将本题已知条件中的“$S_{\triangle AOD}=S_{\triangle BOC}$”换成“$DC \parallel AB$”，其他条件不变，能证明原来的结论正确吗？

例题3 如图 24－9，已知线段 AB 的长度是 l，点 P 是线段 AB 上的一点，$\dfrac{PB}{AP}=\dfrac{AP}{AB}$，求线段 AP 的长．

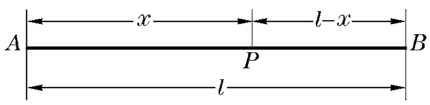


图 24－9

解 设线段 AP 的长为 x，那么线段 PB 的长为 $l-x$．

由$\dfrac{PB}{AP}=\dfrac{AP}{AB}$，得到关于 x 的方程

$$\frac{l-x}{x}=\frac{x}{l},$$

即

$$x^2+lx-l^2=0.$$

解得 $x=\dfrac{-l\pm\sqrt{5l^2}}{2}=\dfrac{-l\pm\sqrt{5}l}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}l$.

因为 $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}l>0$， $x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}l<0$（舍去），

所以，线段 AP 的长是$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}l$.

本例运用了方程思想，通过设未知数、列方程和解方程来求线段长．

由 $AB=l$，$AP=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}l$， 得$\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$.

在比例式$\dfrac{PB}{AP}=\dfrac{AP}{AB}$中，两个内项都是线段 AP，这时线段 AP 称为线段 AB 与 PB 的比例中项．

如果比例的两个内项（或两个外项）相同，那么这个相同的项叫做比例中项．如 $a:b=b:c$（或 $b:a=c:b$）时，b 叫做 a 和 c 的比例中项．这时，$b^2=ac$.

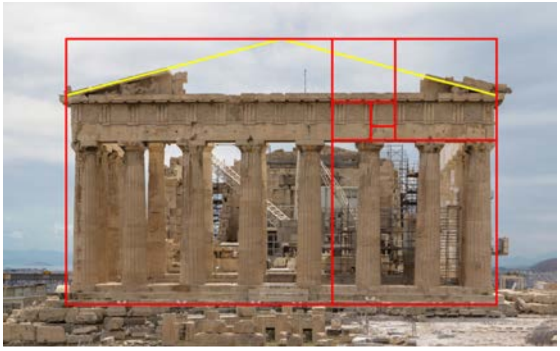
如果点 P 把线段 AB 分割成 AP 和 PB（$AP>PB$）两段（如图 24－9），其中 AP 是 AB 和 PB 的比例中项，那么称这种分割为**黄金分割**（golden section），点 P 称为线段 AB 的**黄金分割点**．

一般来说，一条线段的黄金分割点有两个．

AP 与 AB 的比值$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$称为**黄金分割数**（简称**黄金数**）．黄金分割数是一个无理数，在应用时常取它的近似值 0.618．

黄金分割和勾股定理，被誉为几何学中的“双宝”.

古今中外，人们把黄金分割誉为“天赋的比例法则”. 符合这种分割的物体或几何图形，使人感到和谐悦目，被认为是最优美的. 黄金分割被广泛地应用于建筑设计、美术、音乐、艺术及几何作图等方面. 例如古希腊的帕特农神殿（见下图），是黄金分割应用的杰作，成为人类建筑史中的经典建筑.

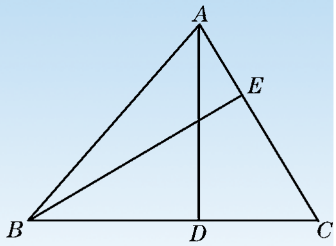


练习 24.2(2)

1. 已知线段 $a=4$ 厘米，$c=9$ 厘米，求线段 a 和 c 的比例中项 b.

2. 已知：如图，AD、BE 是 $\triangle ABC$ 的两条高.

求证：$\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{BE}{AD}$.



（第 2 题）

3. 已知线段 MN 的长为 2 厘米，点 P 是线段 MN 的黄金分割点，则较长线段 MP 的长是__________厘米，较短线段 PN 的长是__________厘米.

24.3　三角形一边的平行线

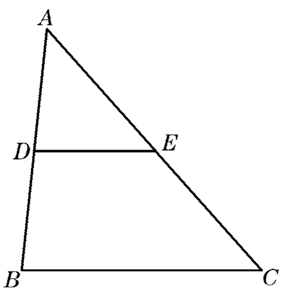


图 24－10

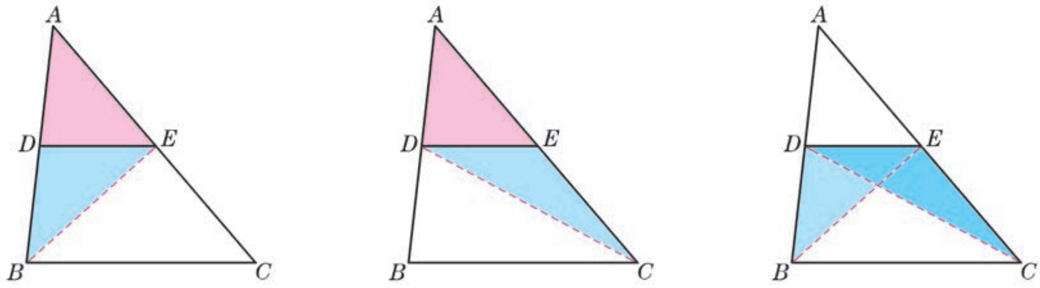
三角形的中位线是联结两边中点的线段，中位线所在的直线与第三边所在的直线平行. 如图 24－10，DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，这时 $\dfrac{AD}{DB}=1$，$\dfrac{AE}{EC}=1$，可知 $DE/\!/BC$.

问题 1

在图 24－10 中，如果 $\dfrac{AD}{DB}=1$，$DE/\!/BC$，那么 $\dfrac{AE}{EC}$ 是否等于 1？

在上一节例题 2 中，我们为证明四条线段成比例，利用了“同高（或等高）的两个三角形的面积之比与对应底边的比相等”的性质. 这个性质指出了线段比与面积比之间的联系，于是我们可考虑利用两个三角形面积的比来尝试解决问题.

要把两条线段的比转化为两个三角形的面积比，首先要找到或构造分别以这两条线段为边的两个三角形.



（1）　　（2）　　（3）

图 24－11

如图 24－11(1)，联结 EB，得$\triangle EDB$，它与$\triangle EAD$ 同高，可知

$$\frac{S_{\triangle EAD}}{S_{\triangle EDB}}=\frac{AD}{DB}=1.$$

同样，如图 24－11(2)，联结 DC，可得

$$\frac{S_{\triangle EAD}}{S_{\triangle EDC}}=\frac{AE}{EC}.$$

比较上面两式可知，如果 $S_{\triangle EDB}=S_{\triangle EDC}$，那么就能得到 $\frac{AE}{EC}=1$. 如图 24－11(3)，因为 BC 平行于 DE，可知$\triangle EDB$ 与$\triangle EDC$ 同底等高，所以$\triangle EDB$ 的面积与$\triangle EDC$ 的面积相等. 于是，得

$$\frac{AE}{EC}=\frac{S_{\triangle EDA}}{S_{\triangle EDC}}=\frac{S_{\triangle EAD}}{S_{\triangle EDB}}=\frac{AD}{DB}=1.$$

对问题 1 结论的推导，也可采用下述方法：取边 AC 的中点 E'，联结 DE'，可知 $DE'/\!/BC$，推出 DE' 与 DE 重合，得 E' 与 E 重合. 因此 $\frac{AE}{EC}=1$.

问题 2

如图 24－12，如果将直线 l 保持与 BC 平行而进行移动，l 与边 AB、AC 分别相交于点 D、E，那么 $\frac{AE}{EC}$ 与 $\frac{AD}{DB}$ 相等吗？

我们来探讨问题 2 的结论.

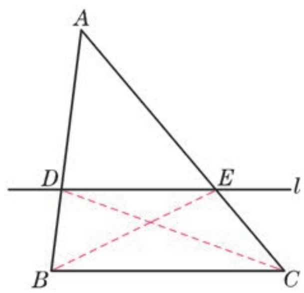


图 24－12

已知$\triangle ABC$，直线 l 与边 AB、AC 分别相交于点 D、E，且 $l/\!/BC$，试证明 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

证明：如图 24－12，分别联结 EB、DC.

设点 E 到 AB 的距离为 h，则

$$S_{\triangle EAD}=\frac{1}{2}AD\cdot h,\quad S_{\triangle EDB}=\frac{1}{2}DB\cdot h,$$

得

$$\frac{S_{\triangle EAD}}{S_{\triangle EDB}}=\frac{AD}{DB}.$$

同理可得

$$\frac{S_{\triangle EAD}}{S_{\triangle EDC}}=\frac{AE}{EC}.$$

证明过程中运用了面积割补的思想方法，这一思想方法源于我国古代数学中的“出入相补原理”.

$\because \quad DE /\!/ BC,$

$\therefore \quad S_{\triangle EDB} = S_{\triangle EDC},$

得 $$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}.$$

议一议

根据证明所得的结论，利用比例的性质，还可以得到哪些比例线段？

在图 24－12 中，还可以得到 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，$\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$ 等.

问题3

已知 $\triangle ABC$，直线 l 与边 AB、AC 的延长线分别相交于点 D、E，且 $l /\!/ BC$，那么 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ 成立吗？

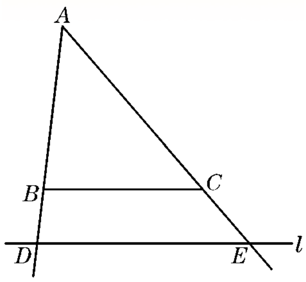
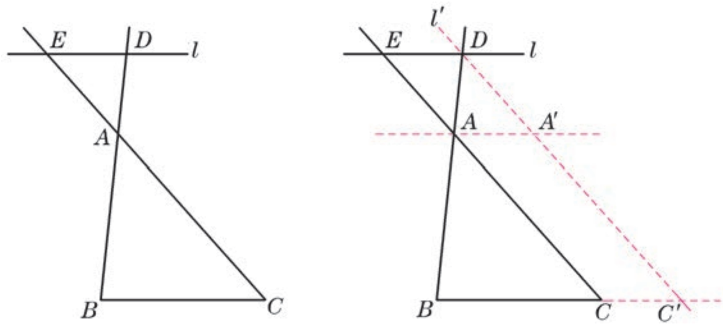


图 24－13

如图 24－13，可以看作 $\triangle ADE$ 的两边 AD、AE 被平行于 DE 的直线 BC 所截，由以上证明可知 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ 成立.



（1）　　　　（2）

图 24－14

如图 24－14(1)，直线 l 与边 BA、CA 的延长线分别相交于点 D、E. 这时，如图 24－14(2)，过点 D 作直线 AC 的平行线 l'，设直线 l' 与直线 BC 相交于点 C'；再过点 A 作直线 l 的平行线，交直线 l' 于点 A'，得 $AE=A'D$，$EC=DC'$. 在 $\triangle DBC'$ 中，由 $AA' /\!/ BC'$，得 $\frac{AD}{DB}=\frac{A'D}{DC'}$，可知 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ 也成立.

通过以上讨论，我们得到：

三角形一边的平行线性质定理　平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线，截得的对应线段成比例.

例题1 如图 24 - 15，已知 $DE \parallel BC$，$AB=15$，$AC=10$，$BD=6$. 求 CE.

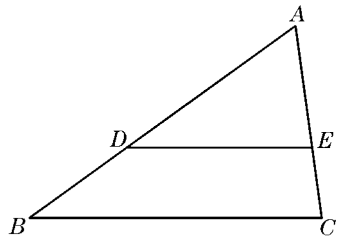


图 24 - 15

解 ∵ $DE \parallel BC$，

∴ $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AC}{CE}$(三角形一边的平行线性质定理).

由 $AB=15$，$AC=10$，$BD=6$，得

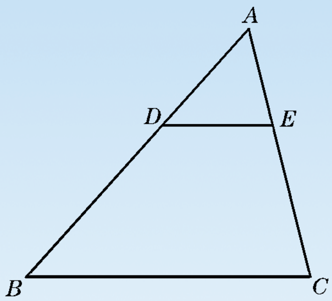
$$\frac{15}{6}=\frac{10}{CE}.$$

∴ $CE=4$.

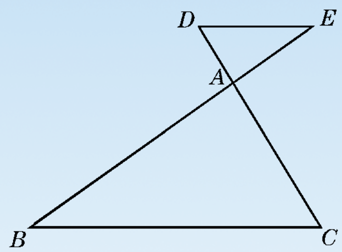
在证明(或解)的过程中，今后不再要求把推理依据写在括号内. 课本中仍指出推理依据，是为了帮助阅读理解.

练习 24.3(1)

1. 如图，在△ABC 中，$DE \parallel BC$，DE 与边 AB 相交于点 D，与边 AC 相交于点 E.
   (1) 已知 $AD=6$，$BD=8$，$AE=4$，求 CE、AC 的长；
   (2) 已知 $AE:AC=2:5$，$AB=10$，求 AD 的长.

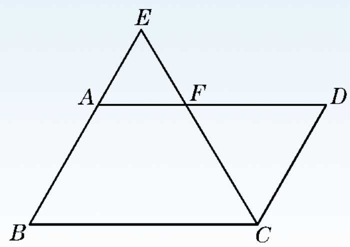


(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，点 D、E 分别在△ABC 的边 CA、BA 的延长线上，且 $DE \parallel BC$.
   (1) 已知 $AB=18$，$AD=5$，$AE=9$，求 AC 的长；
   (2) 已知 $AB=18$，$CD=15$，$AE=9$，求 AC 的长.
3. 已知：如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，F 是 AD 上一点，CF 交 BA 的延长线于点 E.
   求证：$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{FD}$.



(第 3 题)

思考

如图 24 - 16，如果点 D、E 分别在△ABC 的边 AB、AC 上，$DE \parallel BC$，那么，$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$ 成立吗?

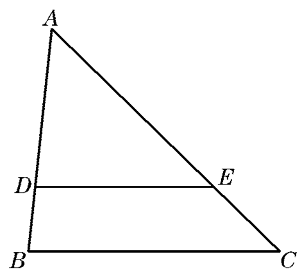


图 24 - 16

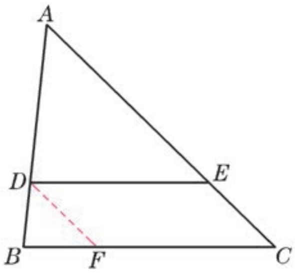


图 24－17

三角形一边的平行线性质定理是判断线段成比例的一个依据. 这个定理的条件中有一条平行于三角形一边的直线，结论中有关的比例线段分别在三角形两边所在的直线上. 因此考虑将 DE 平移到 BC 边上去，然后尝试证明 $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ 成立.

如图 24－17，过点 D 作 $DF\parallel AC$，交边 BC 于点 F.

又∵ $DE\parallel BC$，

∴ 四边形 $DFCE$ 为平行四边形，得 $FC=DE$.

∵ $DF\parallel AC$，

∴ $\frac{FC}{BC}=\frac{AD}{AB}$（三角形一边的平行线性质定理）.

∴ $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}$.

由 $DE\parallel BC$，得 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，

∴ $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$.

于是，我们证明了 $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ 成立.

类似于本节问题 3 的讨论，当点 D、E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 的延长线上时，可证明结论同样成立.

点 D、E 分别在边 AB、AC 的延长线上时，出现的图形如同图 24－13 或 24－14.

由此得到：

三角形一边的平行线性质定理推论　平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线，截得的三角形的三边与原三角形的三边对应成比例.

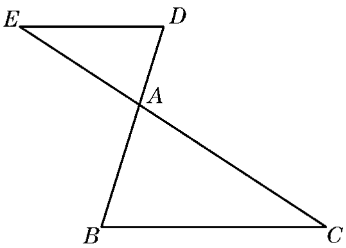


图 24－18

例题2　如图 24－18，线段 BD 与 CE 相交于点 A，$ED\parallel BC$，已知 $2BC=3ED$，$AC=8$，求 AE 的长.

解　∵ $ED\parallel BC$，

∴ $\frac{AE}{AC}=\frac{ED}{BC}$（三角形一边的平行线性质定理的推论）.

由 $2BC=3ED$，得 $\frac{ED}{BC}=\frac{2}{3}$，

∴ $\frac{AE}{AC}=\frac{2}{3}$.

∵ $AC=8$，

∴ $AE=\frac{2}{3}AC=\frac{2}{3}\times 8=\frac{16}{3}$.

例题3 已知：如图 24－19，BE、CF 是△ABC 的中线，交于点 G.

求证：$\dfrac{GE}{GB}=\dfrac{GF}{GC}=\dfrac{1}{2}$.

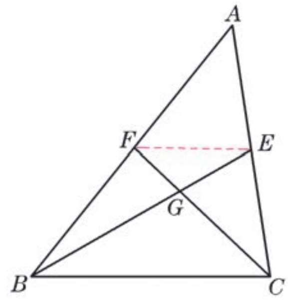


图 24－19

分析 要证明$\dfrac{GE}{GB}=\dfrac{GF}{GC}$，只要证明 $EF /\!/ BC$. 根据已知条件，可知 EF 是△ABC 的中位线，由此可推出所要证明的结论.

证明 联结 EF.

由 BE、CF 是△ABC 的中线，可知 EF 是△ABC 的中位线.

∴ $EF /\!/ BC$；$EF=\dfrac{1}{2}BC$，即 $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{1}{2}$.

∵ $EF /\!/ BC$，

∴ $\dfrac{GE}{GB}=\dfrac{GF}{GC}=\dfrac{EF}{BC}$（三角形一边的平行线性质定理的推论）.

∴ $\dfrac{GE}{GB}=\dfrac{GF}{GC}=\dfrac{1}{2}$.

想一想

在图 24－19 中，如果△ABC 的另一条中线 AD 与 BE 相交于点 G'，如图 24－20 所示，那么这个交点 G' 与交点 G 是否为同一个点？

通过联结 DE，运用例题 3 的证明方法，可得 $\dfrac{G'E}{G'B}=\dfrac{G'D}{G'A}=\dfrac{1}{2}$.

因为点 G' 与点 G 同在中线 BE 上，$\dfrac{G'E}{G'B}=\dfrac{1}{2}$，且 $\dfrac{GE}{GB}=\dfrac{1}{2}$，所以点 G' 与点 G 是同一点. 这就是说，**三角形的三条中线交于一点**.

三角形三条中线的交点叫做**三角形的重心**（barycenter of a triangle）.

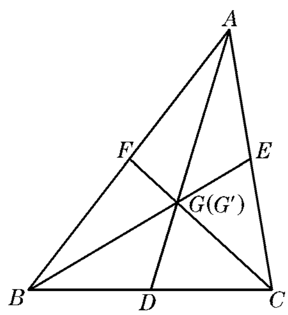
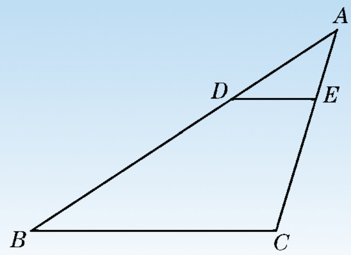


图 24－20

三角形的重心到一个顶点的距离，等于它到这个顶点对边中点的距离的两倍.

练习 24.3(2)

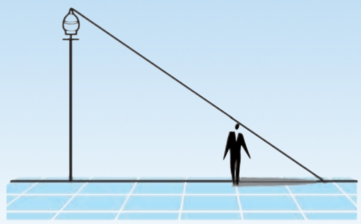
1. 如图，已知 D、E 分别是△ABC 的边 AB、AC 上的点，且 $DE /\!/ BC$.
   (1) 如果 $DE=2$，$BC=6$，$AD=3$，求 AB 的长；
   (2) 如果 $DE=2$，$BC=6$，$BD=8$，求 AD、AB 的长；
   (3) 如果 $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{3}{5}$，求 $\dfrac{DE}{BC}$ 的值.



（第 1 题）

2. 已知 AD、BE 是△ABC 的中线，AD、BE 相交于点 F，$AD=5$，求 AF、DF 的长.

3. 如图，已知小明的身高是 1.6 米，他在路灯下的影长为 2 米，小明距路灯灯杆的底部 3 米，则路灯灯泡距地面的高度是________米.



（第 3 题）

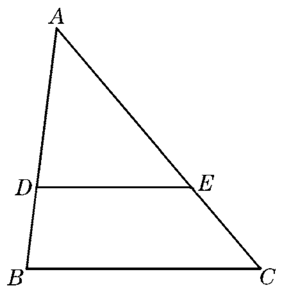


图 24－21

我们再来探讨三角形一边的平行线性质定理的逆命题是否正确.

如图 24－21，在△ABC 中，点 D、E 分别在边 AB、AC 上，如果 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，那么 $DE /\!/ BC$ 吗？

要肯定上述问题的结论正确，只要证明有一个平行四边形的相对两边分别在直线 DE 和 BC 上.

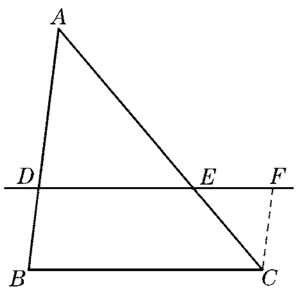


图 24－22

如图 24－22，过点 C 作平行于 AB 的直线 CF，交直线 DE 于点 F，得四边形 $BCFD$.

∵ $CF /\!/ AB$，

∴ $\frac{AD}{CF}=\frac{AE}{EC}$（三角形一边平行线性质定理推论）.

又∵ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，

∴ $\frac{AD}{CF}=\frac{AD}{DB}$，得 $CF=DB$.

由 $CF /\!/ DB$，$CF=DB$，可知四边形 $BCFD$ 是平行四边形，

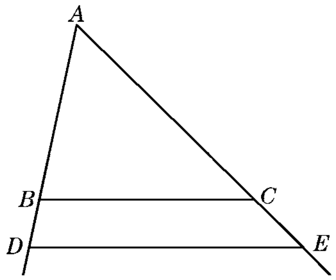
所以 $DF /\!/ BC$，即 $DE /\!/ BC$.

为证明 $DE /\!/ BC$，也可作 $DE' /\!/ BC$（点 E' 在边 AC 上），再证 DE' 与 DE 重合.

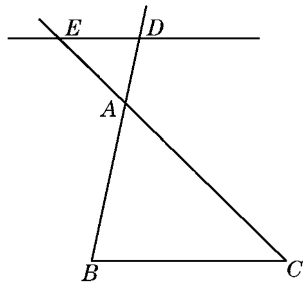
根据比例的性质可知，在关系式① $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$、② $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$、③ $\frac{BD}{AB}=\frac{CE}{AC}$ 中，由其中一个可推出其余两个. 因此，以关系式①②③之一为已知条件，都可推出 $DE /\!/ BC$. 这样，就得到以下定理：

三角形一边的平行线判定定理　如果一条直线截三角形的两边所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边.

如图 24－23，如果点 D、E 分别在射线 AB、AC 上或分别在它们的反向延长线上，且具备条件①②③之一，那么也可以用上述同样的方法推出 $DE /\!/ BC$.



（1）



（2）

图 24－23

由此又得到：

三角形一边的平行线判定定理推论　如果一条直线截三角形两边的延长线（这两边的延长线在第三边的同侧）所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边.

议一议

如图 24－24，点 D、E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上. 如果 $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}$，那么能否得到 $DE /\!/ BC$，为什么？

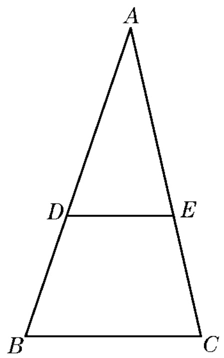


图 24－24

例题4　已知：如图 24－25，点 D、F 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上，点 E 在边 AC 上，且 $DE /\!/ BC$，$\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{AD}{AB}$.

求证：$EF /\!/ DC$.

分析　要证明 $EF /\!/ DC$，只要证明 $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AF}{AD}$.

证明　$\because$ $DE /\!/ BC$，

$\therefore$ $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$（三角形一边的平行线性质定理）.

$\because$ $\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{AD}{AB}$，

$\therefore$ $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AF}{AD}$.

$\therefore$ $EF /\!/ DC$（三角形一边的平行线判定定理）.

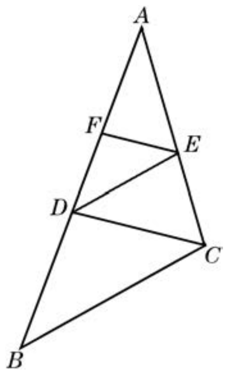
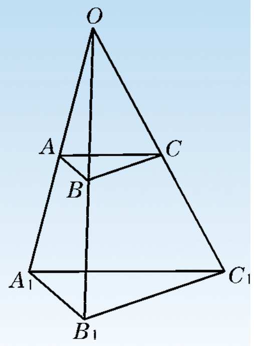


图 24－25

练习 24.3(3)

1. 在△ABC 中，点 D、E 分别在边 AB、AC 上，根据下列给定的条件，试判断 DE 与 BC 是否平行.
   (1) $AD=3$ cm，$DB=4$ cm，$AE=1.8$ cm，$CE=2.4$ cm；
   (2) $AD=6$ cm，$BD=9$ cm，$AE=4$ cm，$AC=10$ cm；
   (3) $AD=8$ cm，$AC=16$ cm，$AE=6$ cm，$AB=12$ cm；
   (4) $AB=2BD$，$AC=2CE$.
2. 已知：如图，点 A_1、B_1、C_1 分别在射线 OA、OB、OC 上，且 $AB/\!/A_1B_1$，$BC/\!/B_1C_1$.
   求证：$AC/\!/A_1C_1$.



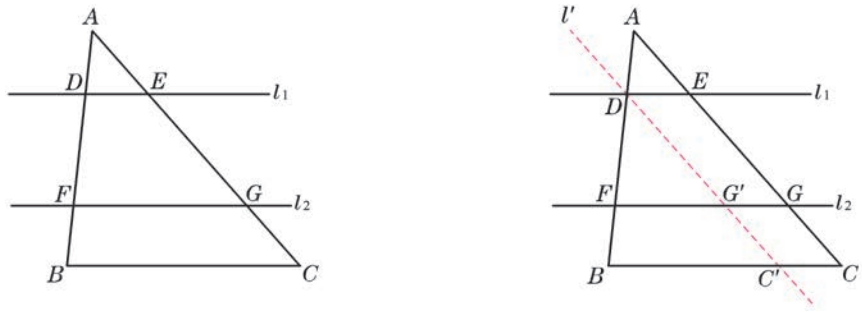
（第 2 题）

下面对三角形一边的平行线性质定理中的条件作适当的改变，探讨相应的结论是否改变.

思考

相对于性质定理，增加了一条平行于 BC 的直线.

如图 24－26(1)，已知△ABC，直线 l_1 与边 AB、AC 分别相交于点 D、E，直线 l_2 与边 AB、AC 分别相交于点 F、G，$l_1/\!/l_2/\!/BC$. 那么所截得的对应线段是否成比例？



(1)　　(2)

图 24－26

对于这个问题，只需讨论$\dfrac{DF}{FB}=\dfrac{EG}{GC}$是否成立.

也可不添辅助线，直接利用三角形一边的平行线性质定理和比例的性质进行推导.

如图 24－26(2)，过点 D 作直线 AC 的平行线 l'，设直线 l' 与 BC、l_2 分别相交于点 C'、G'，则 $DG'=EG$，$G'C'=GC$. 利用三角形一边的平行线性质定理和等量代换，可得$\dfrac{DF}{FB}=\dfrac{EG}{GC}$.

根据上述结论，再利用比例的性质，可知所截得的对应线段成比例.

将△ABC的边AB、AC、BC改为三条直线，则上述结论可表述为：直线DB与EC被三条平行的直线所截，截得的对应线段成比例，如图24－27所示.

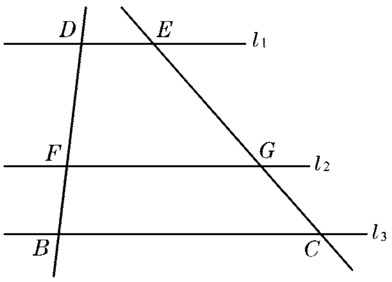


图24－27

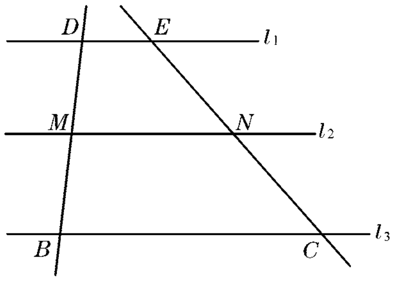


图24－28

如果直线DB与EC平行，那么直接利用平行四边形性质，可知结论仍然正确.

于是得到：

平行线分线段成比例定理　两条直线被三条平行的直线所截，截得的对应线段成比例.

当图24－27中的直线l_2过线段DB的中点M，即$DM=MB$时（如图24－28），则$EN=NC$. 也就是说：

两条直线被三条平行的直线所截，如果在一条直线上截得的线段相等，那么在另一条直线上截得的线段也相等.

这是“平行线分线段成比例定理”的特例，也称为平行线等分线段定理.

例题5　如图24－29，已知$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，$AB=3$，$AC=8$，$DF=10$. 求$DE$、$EF$的长.

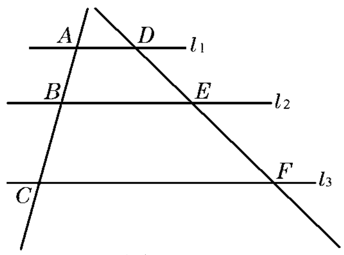


图24－29

解　∵　$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，

∴　$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DE}{DF}$（平行线分线段成比例定理）.

又∵　$AB=3$，$AC=8$，$DF=10$，

∴　$\dfrac{3}{8}=\dfrac{DE}{10}$.

∴　$DE=\dfrac{15}{4}$；$EF=DF-DE=\dfrac{25}{4}$.

例题6　已知线段a、b、c（如图24－30(1)所示）. 求作线段x，使$a:b=c:x$.

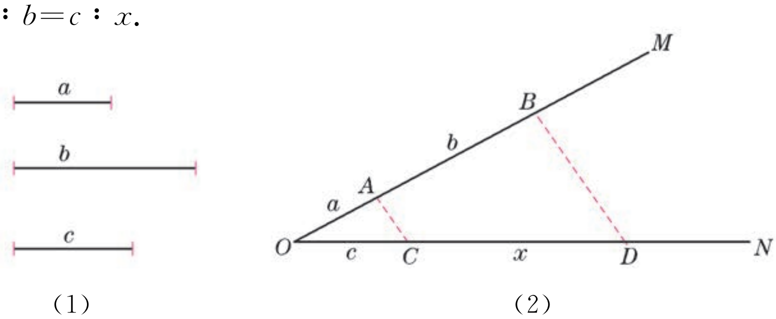


图24－30

作法　如图24－30(2)所示，

作图的依据是平行线分线段成比例定理；利用这一定理可证明所作线段符合要求.

1. 作以点 O 为端点的射线 OM 和 ON.
2. 在 OM 上顺次截取 $OA=a$，$AB=b$.
3. 在 ON 上截取 $OC=c$.
4. 联结 AC，过点 B 作 $BD/\!/AC$，交 ON 于点 D.

线段 CD 就是所求的线段 x.

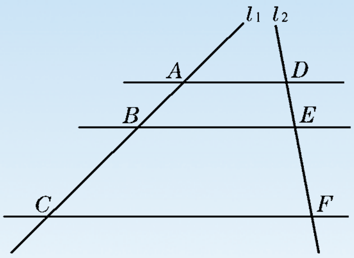
例题 6指明了“已知比例线段中的三条线段，求作另一条未知线段”的方法.

练习 24.3(4)

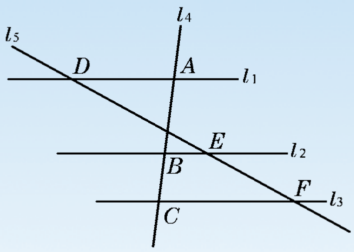
1. 如图，已知 $AD/\!/BE/\!/CF$，它们依次交直线 l_1、l_2 于点 A、B、C 和点 D、E、F.

(1) 如果 $AB=6$，$BC=10$，$EF=8$，求 DE 的长；

(2) 如果 $DE:EF=3:5$，$AC=24$，求 AB、BC 的长.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，直线 l_1、l_2、l_3 分别交直线 l_4 于点 A、B、C，交直线 l_5 于点 D、E、F，且$l_1/\!/l_2/\!/l_3$. 已知$AB=3$，$AC=5$，$DF=9$，求 DE、EF 的长.

3. 如图，已知线段 AB，在线段 AB 上求作一点 C，使$AC:CB=1:2$.

（第 3 题）

第三节　相似三角形

24.4　相似三角形的判定

如果一个三角形的三个角与另一个三角形的三个角对应相等，且它们各有的三边对应成比例，那么这两个三角形叫做**相似三角形**(similar triangles).

在两个相似三角形中，对应相等的角及其顶点分别是它们的对应角和对应顶点，以对应顶点为端点的边是它们的对应边.

两个三角形是相似三角形，也可以表述为“两个三角形相似”，或“一个三角形与另一个三角形相似”.

如图 24－31，已知 DE 是$\triangle ABC$ 的中位线，那么在$\triangle ADE$ 与$\triangle ABC$ 中，$\angle A=\angle A$，$\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$；$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{1}{2}$. 由相似三角形的定义，可知这两个三角形相似. 用符号来表示，记作$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，其中点 A 与点 A、点 D 与点 B、点 E 与点 C 分别是对应顶点；符号“$\backsim$”读作“相似于”.

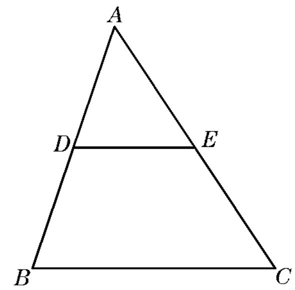


图 24－31

用符号表示两个相似三角形时，通常把对应顶点的字母分别写在三角形记号“△”后相应的位置上.

相似三角形的对应角相等、对应边成比例.

两个相似三角形的对应边的比，叫做这两个三角形的**相似比**(或**相似系数**).

图 24－31 中，$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{1}{2}$，因此$\triangle ADE$ 与$\triangle ABC$ 的相似比 $k=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{1}{2}$，而$\triangle ABC$ 与$\triangle ADE$ 的相似比 $k'=\dfrac{AB}{AD}=2$.

两个相似三角形的相似比与表述这两个三角形相似的顺序有关.

设$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$的相似比为 k，$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$ 的相似比为 k'，则 $k'=\dfrac{1}{k}$.

当两个相似三角形的相似比 $k=1$ 时，这两个相似三角形就成为全等三角形. 反过来，两个全等三角形一定是相似三角形，它们的相似比等于 1. 因此，全等三角形是相似三角形的特例.

想一想

如果$\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle ABC$，$\triangle A_2B_2C_2\backsim\triangle ABC$，那么$\triangle A_1B_1C_1$

可根据相似三角形的定义进行分析.

与$\triangle A_2B_2C_2$相似吗？为什么？

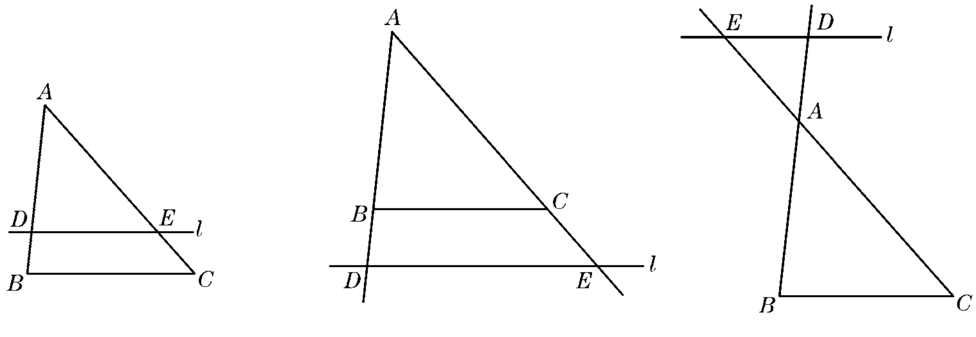
由相似三角形的对应角相等、对应边成比例，可以推出：

如果两个三角形分别与同一个三角形相似，那么这两个三角形也相似.

这个命题也可称为三角形相似的传递性.

思考

由图 24－31 联想，如果点 D、E 分别在直线 AB 和 AC 上，$DE /\!/ BC$，如图 24－32 所示，那么$\triangle ADE$与$\triangle ABC$相似吗？为什么？



（1）　　（2）　　（3）

图 24－32

如图 24－32(1)，点 D、E 分别在$\triangle ABC$的边 AB 和 AC 上，这时$\triangle ADE$是$\triangle ABC$被平行于 BC 的直线 DE 所截得的三角形.

由 $DE /\!/ BC$，得 $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$；$\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$. 又$\angle DAE=\angle BAC$，因此$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

在如图 24－32(2)(3)的情况下，同理可得$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

由此得到：

相似三角形的预备定理　平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线，截得的三角形与原三角形相似.

根据相似三角形的定义来判定两个三角形相似，需要验证它们的角对应相等，同时它们的边对应成比例.

全等三角形各判定定理中的条件分别是“边角边”“角边角”“角角边”“边边边”.

是否可以通过验证其中的几个条件来判定两个三角形相似呢？联想全等三角形的四个判定定理，我们可类似地对判定两个三角形相似所需的条件进行分析.

“角边角”和“角角边”的条件中只涉及一组边，不能构成比例，由此提出问题 1.

问题 1

在$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$中，已知$\angle A=\angle A_1$、$\angle B=\angle B_1$，能证明$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$相似吗？

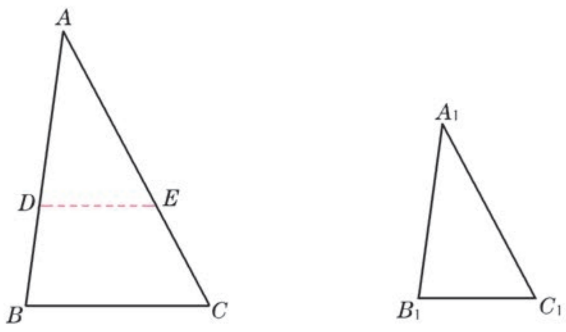


图 24 - 33

分析　相似三角形的预备定理，给我们提供了证明两个三角形相似的一条思路和依据. 由此考虑移动其中一个三角形，构造出具有预备定理的图形特征的图形.

> 移动其中一个三角形，就是作一个与它全等的三角形. 选择方法时，要结合已知条件和运用预备定理所需要的条件进行分析.

证明　如图 24 - 33，在射线 AB 上截取 $AD=A_1B_1$，再过点 D 作 $\angle ADE=\angle B_1$，DE 与射线 AC 相交于点 E.

$\because$　$AD=A_1B_1$，$\angle A=\angle A_1$，$\angle ADE=\angle B_1$，

$\therefore$　$\triangle ADE\cong\triangle A_1B_1C_1$.

$\because$　$\angle B=\angle B_1$，

$\therefore$　$\angle ADE=\angle B$，　得　$DE\parallel BC$.

$\therefore$　$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$（相似三角形的预备定理）.

$\therefore$　$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.

> 还有其他的添辅助线的方法吗？试一试.

这样，就得到相似三角形的一个判定定理：

相似三角形判定定理 1　**如果一个三角形的两角与另一个三角形的两角对应相等，那么这两个三角形相似.**

判定定理 1 可简述为：

两角对应相等，两个三角形相似.

> 判定定理 1 中的条件只涉及两对角，实际上余下的一对角也一定对应相等. 所以三角形的形状由它的任意两个内角确定.

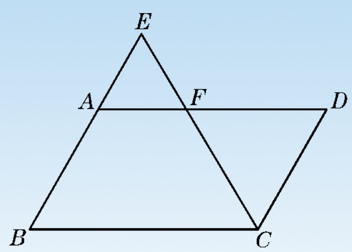
练习 24.4(1)

1. 依据下列条件判定$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 是否相似，并说明理由. 如果相似，那么用符号表示出来.

（1）$\angle A=\angle D=70^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\angle E=50^\circ$；

（2）$\angle A=40^\circ$，$\angle B=80^\circ$，$\angle E=80^\circ$，$\angle F=60^\circ$.

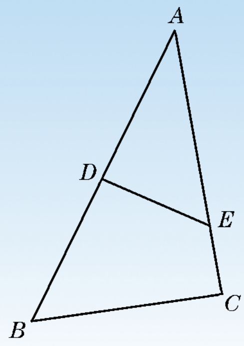
2. 如图，E 是平行四边形 $ABCD$ 的边 BA 延长线上的一点，CE 交 AD 于点 F. 图中有哪几对相似三角形？



（第 2 题）

3. 已知：如图，D、E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上的点，且 $\angle AED = \angle B$.

求证：$AE \cdot AC = AD \cdot AB$.



（第 3 题）

全等三角形判定定理中的条件，也可以是“边角边”. 类似地，我们提出问题 2 来讨论.

问题 2

如图 24－34，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，如果 $\angle A = \angle A_1$，$\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$，那么 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 相似吗？为什么？

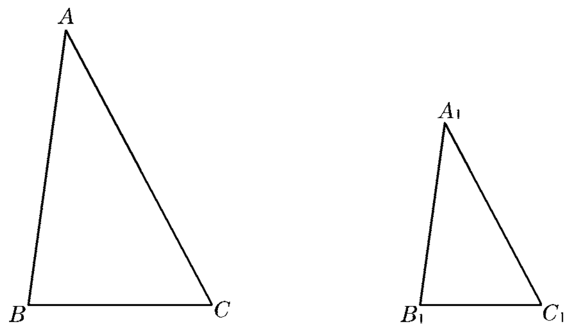


图 24－34

类似证明判定定理 1 的思考和分析，分别在射线 AB、AC 上截取 $AD = A_1B_1$，$AE = A_1C_1$，构造 $\triangle ADE$，则 $\triangle ADE \cong \triangle A_1B_1C_1$. 如果所得图形中有相似三角形预备定理条件中的平行线，那么这个图形就具有预备定理的图形特征.

试一试

这个问题的结论是肯定的，请完成它的证明.

于是，又得到相似三角形的一个判定定理：

相似三角形判定定理 2　如果一个三角形的两边与另一个三角形的两边对应成比例，并且夹角相等，那么这两个三角形相似.

判定定理 2 可简述为：

两边对应成比例且夹角相等，两个三角形相似.

例题1　已知：如图 24－35，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$OA=1$，$OB=1.5$，$OC=3$，$OD=2$.

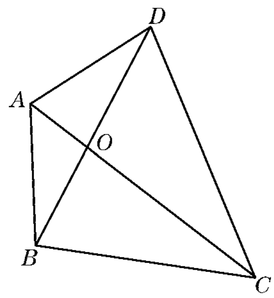


图 24－35

求证：$\triangle OAD$ 与 $\triangle OBC$ 是相似三角形.

证明　$\because$　$OA=1$，$OB=1.5$，$OC=3$，$OD=2$，

$\therefore$　$\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{1}{1.5}=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{OD}{OC}=\dfrac{2}{3}$.

得　$\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{OD}{OC}$.

在 $\triangle OAD$ 与 $\triangle OBC$ 中，

$$\begin{cases}\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{OD}{OC},\\ \angle AOD=\angle BOC,\end{cases}$$

$\therefore$　$\triangle OAD\backsim\triangle OBC$（两边对应成比例且夹角相等，两个三角形相似）.

议一议

图 24－35 中还有其他的相似三角形吗？如果有，那么用符号将它们表示出来.

例题2　已知：如图 24－36，点 D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的一点，且 $AC^2=AD\cdot AB$.

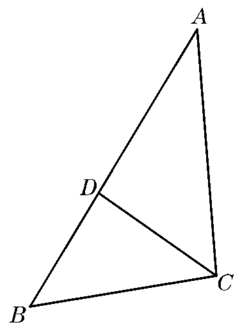


图 24－36

求证：$\triangle ACD\backsim\triangle ABC$.

分析　已知条件 $AC^2=AD\cdot AB$ 是一个乘积式，将它改写成比例式，得 $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AC}{AB}$. 观察这个比例式中的四条线段，结合图形可知，可依据相似三角形判定定理 2 推出结论.

证明　$\because$　$AC^2=AD\cdot AB$，

$\therefore$　$\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AC}{AB}$.

在 $\triangle ACD$ 与 $\triangle ABC$ 中，

$$\begin{cases}\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AC}{AB},\\ \angle A=\angle A,\end{cases}$$

$\therefore$　$\triangle ACD\backsim\triangle ABC$（两边对应成比例且夹角相等，两个三角形相似）.

练习 24.4(2)

1. 根据下列条件,判断$\triangle ABC$和$\triangle DEF$是否是相似三角形;如果是,那么用符号表示出来.

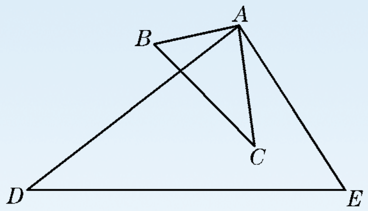
(1) $\angle A=45^\circ$,$AB=12$ cm,$AC=15$ cm,
$\angle D=45^\circ$,$DE=16$ cm,$DF=20$ cm;

(2) $\angle A=45^\circ$,$AB=12$ cm,$AC=15$ cm,
$\angle E=45^\circ$,$ED=20$ cm,$EF=16$ cm;

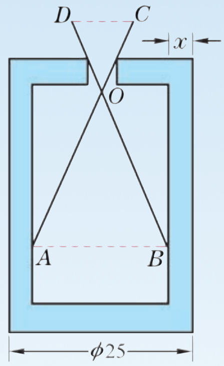
(3) $\angle A=45^\circ$,$AB=12$ cm,$AC=15$ cm,
$\angle D=45^\circ$,$ED=16$ cm,$EF=20$ cm.

2. 已知:如图,在$\triangle ABC$与$\triangle AED$中,$\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AC}{AD}$,$\angle BAD=\angle CAE$.

求证:$\triangle ABC \backsim \triangle AED$.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图是一个零件的剖面图,已知零件的外径为 25 毫米,为求出它的厚度 x,需先求出内孔的直径 AB,但不能直接量出 AB. 现用一个交叉卡钳(AC 和 BD 的长相等)去量,若 $\dfrac{OC}{OA}=\dfrac{OD}{OB}=\dfrac{1}{3}$,且量得 CD 长为 7 毫米,求零件的厚度 x.

全等三角形判定定理中的条件,还可以是"边边边".由此,我们提出问题 3 来讨论.

问题3

在$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$中,如果$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{CA}{C_1A_1}$,那么$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$相似吗?为什么?

这个问题的结论也是肯定的,同样可以利用相似三角形预备定理来证明.

证明如下:

如图 24-37,在射线 AB 上截取 $AB_2=A_1B_1$;在射线 AC 上截取 $AC_2=A_1C_1$,联结 B_2C_2.

$\because$ $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}$,$AB_2=A_1B_1$,$AC_2=A_1C_1$,

$\therefore$ $\dfrac{AB}{AB_2}=\dfrac{AC}{AC_2}$.

得 $B_2C_2 /\!/ BC$(三角形一边的平行线判定定理),

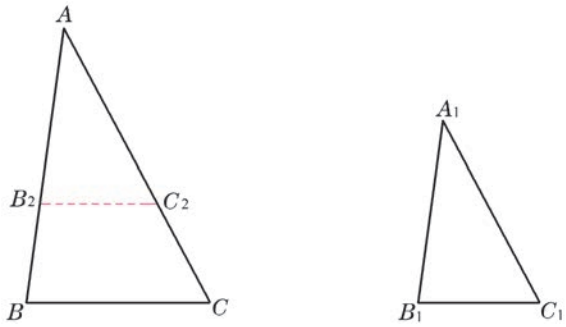


图 24－37

$\therefore \quad \dfrac{BC}{B_2C_2}=\dfrac{AB}{AB_2}$(平行于三角形一边的直线性质定理推论).

由 $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$，即 $\dfrac{AB}{AB_2}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$，得 $\dfrac{BC}{B_2C_2}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$，

$\therefore \quad B_2C_2=B_1C_1$.

$\therefore \quad \triangle AB_2C_2\cong\triangle A_1B_1C_1$.

$\because \quad B_2C_2 /\!/ BC$，

$\therefore \quad \triangle ABC\backsim\triangle AB_2C_2$(相似三角形预备定理).

$\therefore \quad \triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.

由此得到：

相似三角形判定定理 3　如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应成比例，那么这两个三角形相似.

判定定理 3 可简述为：

三边对应成比例，两个三角形相似.

例题3　已知：如图 24－38，D、E、F 分别是$\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 的中点.

求证：$\triangle DEF\backsim\triangle ABC$.

分析　DE、EF、FD 是$\triangle ABC$ 的中位线，利用中位线的性质，可得$\triangle DEF$ 与$\triangle ABC$ 的三边对应成比例.

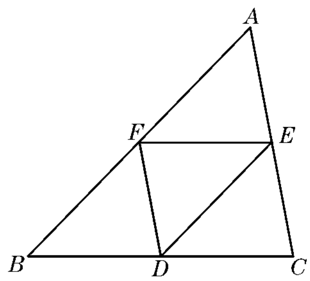


图 24－38

证明　$\because \quad D$、E 分别是$\triangle ABC$ 的边 BC、CA 的中点，

$\therefore \quad DE$ 是$\triangle ABC$ 的中位线.

得　$DE=\dfrac{1}{2}AB$，即 $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{1}{2}$.

同理可得 $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{FD}{AC}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore \quad \dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{FD}{AC}$.

在$\triangle DEF$ 与$\triangle ABC$ 中，

$$\frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BC}=\frac{FD}{CA},$$

$\therefore \quad \triangle DEF\backsim\triangle ABC$(三边对应成比例，两个三角形相似).

练习 24.4(3)

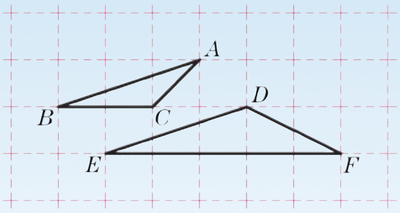
1. 根据下列条件判定$\triangle ABC$和$\triangle DEF$是否相似，如果是，那么用符号表示出来.

(1) $AB=2$ cm，$BC=3$ cm，$CA=4$ cm，
$DE=10$ cm，$EF=15$ cm，$FD=20$ cm；

(2) $AB=1$ cm，$BC=2$ cm，$CA=1.5$ cm，
$DE=6$ cm，$EF=4$ cm，$FD=8$ cm.

2. 一个三角形框架模型的边长分别为 20 厘米、30 厘米、40 厘米，木工要以一根长 60 厘米的木条为一边，做一个与模型相似的三角形. 木工应该怎样选择其他两条边的长，才能使制作的三角形与模型三角形相似？三角形边长的选取方法可以有哪些？

3. 如图，$\triangle ABC$和$\triangle DEF$在边长为 1 个单位的方格纸中，它们的顶点在小正方形顶点位置，试判定$\triangle ABC$和$\triangle DEF$是否相似，为什么？



（第 3 题）

直角三角形全等，有特殊的判定定理. 同样，我们要探讨判定直角三角形相似的特殊定理.

直角三角形中有一个角是直角，于是，由相似三角形判定定理可知：有一锐角对应相等的两个直角三角形相似；两直角边对应成比例的两个直角三角形相似. 那么，斜边、直角边对应成比例的两个直角三角形一定相似吗？

问题 4

如图 24－39，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle A_1B_1C_1$ 中，$\angle C=\angle C_1=90^\circ$，$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$. $\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$相似吗？为什么？

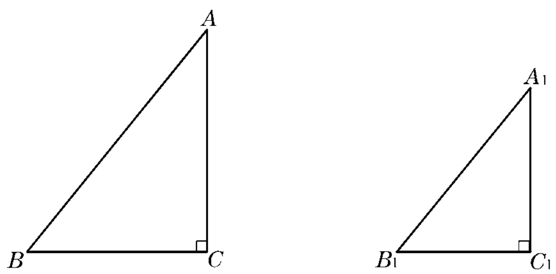


图 24－39

将问题中的已知条件与相似三角形判定定理 3 中的条件比较，可见要推出这两个直角三角形相似，只要 $\dfrac{CA}{C_1A_1}$ 与 $\dfrac{AB}{A_1B_1}$ $\left(或 \dfrac{BC}{B_1C_1}\right)$ 相等. 我们可以这样来推导：

设 $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=k$，则 $AB=kA_1B_1$，$BC=kB_1C_1$.

∵ $\angle C=90°$，$\angle C_1=90°$，

∴ $CA^2=AB^2-BC^2$，$C_1A_1^2=A_1B_1^2-B_1C_1^2$，

得 $CA^2=k^2(A_1B_1^2-B_1C_1^2)=k^2C_1A_1^2$.

∴ $CA=kC_1A_1$，即 $\dfrac{CA}{C_1A_1}=k$.

在△ABC 与△$A_1B_1C_1$ 中，

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1},$$

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.

也可由 $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$，得 $\dfrac{AB^2}{A_1B_1^2}=\dfrac{BC^2}{B_1C_1^2}$，再利用比例的性质和勾股定理进行推导.

因此，直角三角形相似的判定，有以下定理：

直角三角形相似的判定定理　如果一个直角三角形的斜边及一条直角边与另一个直角三角形的斜边及一条直角边对应成比例，那么这两个直角三角形相似.

这个定理可简述为：

斜边和直角边对应成比例，两个直角三角形相似.

例题4　已知：如图 24－40，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAC=\angle ADC=90°$，$AD=a$，$BC=b$，$AC=\sqrt{ab}$.

求证：$DC\perp BC$.

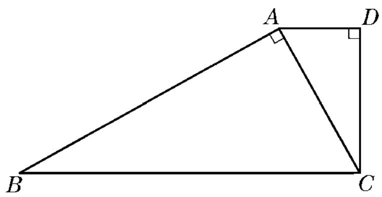


图 24－40

证明　∵ $\angle BAC=\angle ADC=90°$，

∴ △ABC 和△ACD 都是直角三角形.

∵ $AD=a$，$BC=b$，$AC=\sqrt{ab}$，

∴ $AC^2=AD\cdot BC$，

得 $$\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{BC}.$$

在 Rt△ACD 与 Rt△ABC 中，

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{BC},$$

∴ Rt△$DCA\backsim$Rt△ABC（斜边和直角边对应成比例，两个直角三角形相似）.

可知 $\angle DCA=\angle B$.

∵ $\angle B+\angle ACB=90°$，

∴ $\angle DCA+\angle ACB=90°$，　即　$\angle DCB=90°$.

∴ $DC\perp BC$.

练习 24.4(4)

1. 在 Rt△ABC 和 Rt△DEF 中，$\angle C=\angle F=90°$. 依据下列各组条件判定这两个三角形是否相似，并说明理由.

(1) $\angle A=55°$，$\angle D=35°$；

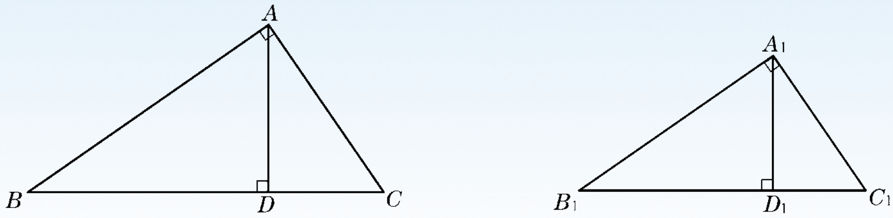
(2) $AC=9$，$BC=12$，$DF=6$，$EF=8$；

(3) $AC=3$，$BC=4$，$DF=6$，$DE=8$；

(4) $AB=10$，$AC=8$，$DE=15$，$EF=9$.

2. 已知：如图，在 Rt△ABC 与 Rt△$A_1B_1C_1$ 中，$\angle A=\angle A_1=90°$，$AD\perp BC$，$A_1D_1\perp B_1C_1$，垂足分别为点 D、D_1，且 $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AD}{A_1D_1}$.

求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.



（第 2 题）

例题5 已知：如图 24－41，△ABC 与△$A_1B_1C_1$ 是锐角三角形，$AD\perp BC$，$A_1D_1\perp B_1C_1$，垂足 D、D_1 分别在边 BC、B_1C_1 上，且 $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AD}{A_1D_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}$.

求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.

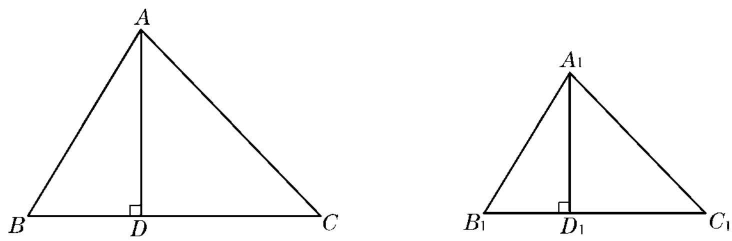


图 24－41

证明 ∵ $AD\perp BC$，$A_1D_1\perp B_1C_1$，垂足 D、D_1 分别在边 BC、B_1C_1 上，

∴ $\angle ADB=\angle A_1D_1B_1=90°$.

在 Rt△ABD 与 Rt△$A_1B_1D_1$ 中，

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AD}{A_1D_1},$$

∴ Rt△$ABD\backsim$Rt△$A_1B_1D_1$（斜边和直角边对应成比例，两

个直角三角形相似).

∴ $\angle B=\angle B_1$.

同理可得 $\angle C=\angle C_1$.

在$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$中,

$$\begin{cases}\angle B=\angle B_1,\\ \angle C=\angle C_1,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$(两角对应相等,两个三角形相似).

例题6 已知:如图 24-42,点 A_1、B_1、C_1 分别在射线 PM、PN、PT 上,$AB/\!/A_1B_1$,$BC/\!/B_1C_1$.

求证:$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.

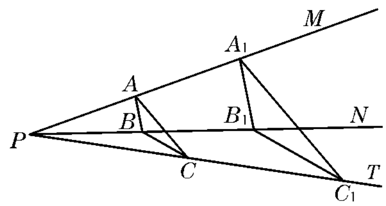


图 24-42

证明 ∵ $AB/\!/A_1B_1$,

∴ $\dfrac{PB}{PB_1}=\dfrac{AB}{A_1B_1}$(三角形一边的平行线性质定理推论);

且 $\angle ABN=\angle A_1B_1N$.

∵ $BC/\!/B_1C_1$,

∴ $\dfrac{PB}{PB_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$(三角形一边的平行线性质定理推论);

且 $\angle CBN=\angle C_1B_1N$.

于是,得 $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$;

且 $\angle ABN+\angle CBN=\angle A_1B_1N+\angle C_1B_1N$,

即 $\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$.

在$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$中,

$$\begin{cases}\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1},\\ \angle ABC=\angle A_1B_1C_1,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$(两边对应成比例且夹角相等,两个三角形相似).

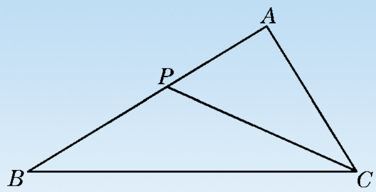
本例也可以利用相似三角形判定定理1或定理3进行证明.

练习 24.4(5)

1. 如图,已知$\triangle ABC$中,$\angle ACB>\angle ABC$,P(与点B不重合)是边AB上的一点,那么

   (1) 当$\angle ACP$满足什么条件时,$\triangle ABC$与$\triangle ACP$相似?

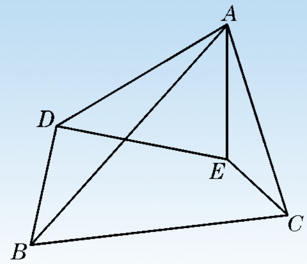
   (2) 当AC与AP、AB满足怎样的数量关系时,$\triangle ABC$与$\triangle ACP$相似?



(第1题)

2. 已知：如图，$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$.

求证：$\triangle ADB \backsim \triangle AEC$.



（第 2 题）

24.5　相似三角形的性质

根据相似三角形的定义，可以直接得到相似三角形的性质：

相似三角形的对应角相等，对应边成比例.

如果两个三角形相似，那么这两个三角形的对应高的比、对应中线的比、对应角平分线的比，分别与相似比有什么关系？

问题 1

如图 24－43，已知$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$，顶点 A、B、C 分别与 A_1、B_1、C_1 对应，$\triangle ABC$ 与$\triangle A_1B_1C_1$ 的相似比为 k，AD、A_1D_1 分别是$\triangle ABC$、$\triangle A_1B_1C_1$ 的角平分线. 那么 $\dfrac{AD}{A_1D_1}$ 的值是否也等于 k？为什么？

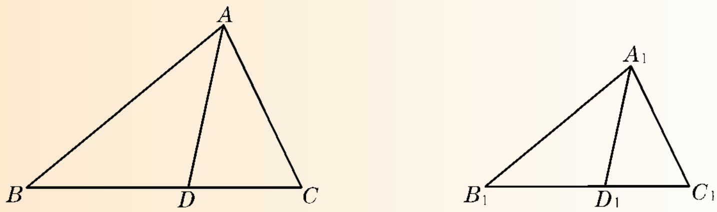


图 24－43

由已知条件可知$\triangle ABD$、$\triangle A_1B_1D_1$ 有两个角对应相等，于是可推出结论是肯定的. 推导过程如下：

∵　$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$，顶点 A、B、C 分别与 A_1、B_1、C_1 对应，

∴　$\angle B=\angle B_1$，$\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$（相似三角形的对应角相等）.

∵　AD、A_1D_1 分别是$\triangle ABC$、$\triangle A_1B_1C_1$ 的角平分线，

即　$\angle BAD=\dfrac{1}{2}\angle BAC$，$\angle B_1A_1D_1=\dfrac{1}{2}\angle B_1A_1C_1$，

∴　$\angle BAD=\angle B_1A_1D_1$.

在$\triangle ABD$ 与$\triangle A_1B_1D_1$ 中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle B_1,\\ \angle BAD=\angle B_1A_1D_1,\end{cases}$$

∴　$\triangle ABD \backsim \triangle A_1B_1D_1$(两角对应相等,两个三角形相似).

得　$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AD}{A_1D_1}$(相似三角形的对应边成比例),

即　$\dfrac{AD}{A_1D_1}=k$.

用类似的方法可以得到,相似三角形的对应高的比、对应中线的比也等于相似比.由此归纳得到:

相似三角形性质定理 1　相似三角形对应高的比、对应中线的比和对应角平分线的比都等于相似比.

例题1　已知:如图 24-44,在$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$中,$\angle C=\angle C_1$,AD、BE是$\triangle ABC$的高,A_1D_1、B_1E_1是$\triangle A_1B_1C_1$的高,点D、E、D_1、E_1分别在边BC、AC、B_1C_1、A_1C_1上,且$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AD}{A_1D_1}$.

求证:$\dfrac{AD}{A_1D_1}=\dfrac{BE}{B_1E_1}$.

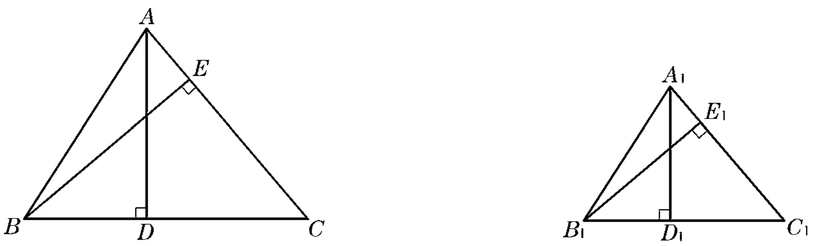


图 24-44

分析　要证明结论正确,只要证明$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

证明　∵　AD、A_1D_1分别是$\triangle ABC$、$\triangle A_1B_1C_1$的高,

∴　$\angle ADB=\angle A_1D_1B_1=90^\circ$.

在$Rt\triangle ABD$与$Rt\triangle A_1B_1D_1$中,

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AD}{A_1D_1},$$

∴　$Rt\triangle ABD \backsim Rt\triangle A_1B_1D_1$(斜边和直角边对应成比例,两个直角三角形相似).

得　$\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$(相似三角形的对应角相等).

在$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$中,

$$\begin{cases}\angle C=\angle C_1,\\ \angle ABC=\angle A_1B_1C_1,\end{cases}$$

∴　$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$(两角对应相等,两个三角形相似).

∵　AD、BE是$\triangle ABC$的高,A_1D_1、B_1E_1是$\triangle A_1B_1C_1$的高,

∴　$\dfrac{AD}{A_1D_1}=\dfrac{BE}{B_1E_1}=\dfrac{AB}{A_1B_1}$(相似三角形对应高的比等于相似比).

练习 24.5(1)

1. 已知$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，顶点 A、B、C 分别与 A_1、B_1、C_1 对应，$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{3}{2}$，$BE$、$B_1E_1$ 分别是它们的对应中线，且 $BE=6$. 求 B_1E_1 的长.
2. 已知$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，顶点 A、B、C 分别与 A_1、B_1、C_1 对应，$AC=12$，$A_1C_1=9$，$\angle A_1$ 的平分线 A_1D_1 的长为 6，求$\angle A$ 的平分线的长.
3. 求证：相似三角形对应高的比等于相似比.

三角形的周长是三边长之和，面积可用一边及这边上的高来表示. 可见两个相似三角形的周长比、面积比与相似比之间有直接关系.

问题 2

如图 24－45，已知$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，顶点 A、B、C 分别与 A_1、B_1、C_1 对应，$\triangle ABC$ 与$\triangle A_1B_1C_1$ 的相似比为 k，把这两个三角形的周长分别记作 $C_{\triangle ABC}$、$C_{\triangle A_1B_1C_1}$，那么 $\dfrac{C_{\triangle ABC}}{C_{\triangle A_1B_1C_1}}$ 的值是否等于 k？为什么？

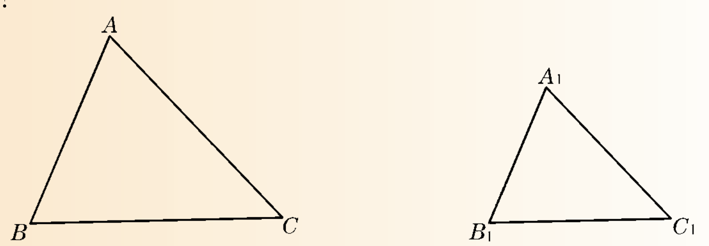


图 24－45

这个结论可直接利用比例的等比性质证明.

可以推出 $\dfrac{C_{\triangle ABC}}{C_{\triangle A_1B_1C_1}}=k$. 推导过程如下：

$\because$ $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，顶点 A、B、C 分别与 A_1、B_1、C_1 对应，$\triangle ABC$ 与$\triangle A_1B_1C_1$ 的相似比为 k，

$$\therefore \quad \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}=k.$$

得 $AB=kA_1B_1$，$BC=kB_1C_1$，$CA=kC_1A_1$.

$$\therefore \quad \frac{C_{\triangle ABC}}{C_{\triangle A_1B_1C_1}}=\frac{AB+BC+CA}{A_1B_1+B_1C_1+C_1A_1}$$

$$=\frac{kA_1B_1+kB_1C_1+kC_1A_1}{A_1B_1+B_1C_1+C_1A_1}=k.$$

性质定理 1 和定理 2 可以概括为：
相似三角形中对应线段（高、中线、角平分线）及周长的比都等于相似比.

于是得到：

相似三角形性质定理 2　相似三角形的周长的比等于相似比.

问题3

如图 24－46，已知$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$，顶点 A、B、C 分别与 A_1、B_1、C_1 对应，$\triangle ABC$ 与$\triangle A_1B_1C_1$ 的相似比为 k，把这两个三角形的面积分别记作 $S_{\triangle ABC}$ 及 $S_{\triangle A_1B_1C_1}$，那么 $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}}$ 的值是否也等于 k？ 为什么？

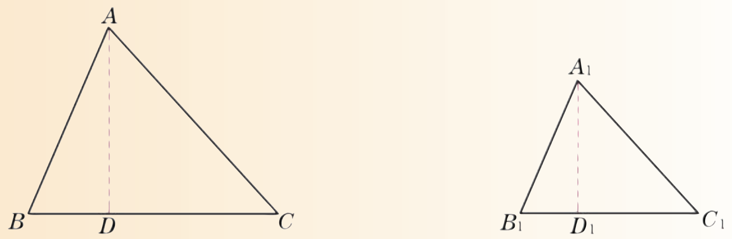


图 24－46

作$\triangle ABC$ 的高 AD，再作$\triangle A_1B_1C_1$ 的高 A_1D_1，则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD,\quad S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}B_1C_1\cdot A_1D_1.$$

由相似三角形对应高的比等于相似比，可知

$$\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AD}{A_1D_1}=k，得\ BC=kB_1C_1,AD=kA_1D_1.$$

所以$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}}=\dfrac{\frac{1}{2}BC\cdot AD}{\frac{1}{2}B_1C_1\cdot A_1D_1}=\dfrac{\frac{1}{2}kB_1C_1\cdot kA_1D_1}{\frac{1}{2}B_1C_1\cdot A_1D_1}=k^2.$

于是得到：

相似三角形性质定理 3　相似三角形的面积的比等于相似比的平方.

例题2　已知$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$，顶点 A、B、C 分别与 A_1、B_1、C_1 对应，它们的周长分别为 48 和 60，且 $AB=12$，$B_1C_1=25$. 求 BC、A_1B_1 的长.

解　$\because$　$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$，顶点 A、B、C 分别与 A_1、B_1、C_1 对应，

$\therefore$　$\dfrac{C_{\triangle ABC}}{C_{\triangle A_1B_1C_1}}=\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$(相似三角形的周长的比等于相似比).

由 $C_{\triangle ABC}=48$，$C_{\triangle A_1B_1C_1}=60$，$AB=12$，$B_1C_1=25$，得

$$\frac{48}{60}=\frac{12}{A_1B_1}=\frac{BC}{25}.$$

$\therefore$　$A_1B_1=15$，$BC=20$.

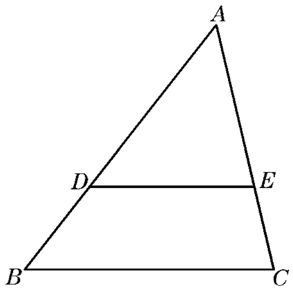


图 24 - 47

例题3 如图 24 - 47,已知点 D、E 分别在$\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 上,$DE\parallel BC$,$DE=6$,$BC=9$,$S_{\triangle ADE}=16$.求 $S_{\triangle ABC}$ 的值.

解 ∵ $DE\parallel BC$,

∴ $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$(相似三角形的预备定理).

得 $\dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\dfrac{DE}{BC}\right)^2$(相似三角形的面积的比等于相似比的平方).

由 $DE=6$,$BC=9$,$S_{\triangle ADE}=16$,得

$$\frac{16}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{6}{9}\right)^2.$$

∴ $S_{\triangle ABC}=36$.

练习 24.5(2)

1. 已知两个三角形相似,根据下列数据填表:

相似比	$\frac{1}{2}$	5					
周长的比			$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{30}$			
面积的比					$\frac{9}{4}$	100	0.01

2. (1) 如果把一个三角形的三边的长扩大为原来的 100 倍,那么这个三角形的面积扩大为原来的________倍;

(2) 如果一个三角形保持形状不变但面积扩大为原来的 100 倍,那么这个三角形的边长扩大为原来的________倍.

3. 已知:D、E、F 分别是$\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 的中点.

求证:$S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle DEF}$.

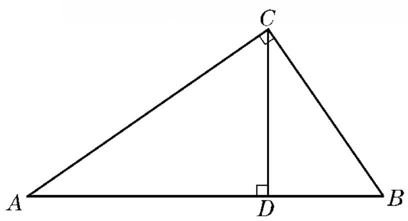


图 24 - 48

例题4 已知:如图 24 - 48,在$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90^\circ$,CD 是边 AB 上的高.

求证:(1) $AC^2=AD\cdot AB$;

(2) $CD^2=AD\cdot BD$.

证明 (1)∵ $\angle ACB=90^\circ$,CD 是$\triangle ABC$ 的边 AB 上的高,

∴ $\angle ADC=\angle ACB=90^\circ$.

在$\triangle ACD$ 与$\triangle ABC$ 中,

$$\begin{cases}\angle A=\angle A,\\ \angle ADC=\angle ACB,\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ACD \backsim \triangle ABC$(两角对应相等，两个三角形相似).

得 $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AD}{AC}$(相似三角形的对应边成比例).

$\therefore$ $AC^2=AD\cdot AB$.

(2) $\because$ $\angle ACB=90^\circ$,

$\therefore$ $\angle A+\angle B=90^\circ$.

$\because$ CD 是边 AB 上的高，

$\therefore$ $\angle ADC=90^\circ$，得 $\angle A+\angle ACD=90^\circ$.

$\therefore$ $\angle A+\angle B=\angle A+\angle ACD$.

$\therefore$ $\angle B=\angle ACD$.

在$\triangle ADC$与$\triangle CDB$中，

$$\begin{cases}\angle ADC=\angle CDB,\\ \angle ACD=\angle B,\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ADC \backsim \triangle CDB$(两角对应相等，两个三角形相似).

得 $\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{AD}{CD}$(相似三角形的对应边成比例).

$\therefore$ $CD^2=AD\cdot BD$.

想一想

在图 24－48 中，由 Rt$\triangle ABC$ 的直角边 AC 平方的表达式，猜想直角边 BC 与线段 BD、AB 之间具有怎样的数量关系. 并证明所猜想的结论.

例题5 如图 24－49，已知点 D、E 分别在$\triangle ABC$的边 AB 和 AC 上，$DE\parallel BC$，$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{1}{3}$，四边形 $DBCE$ 的面积等于 16. 求$\triangle ABC$的面积.

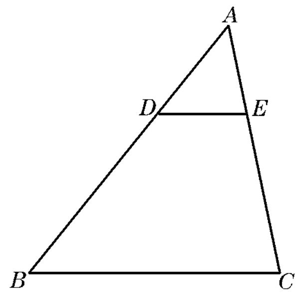


图 24－49

解 $\because$ $DE\parallel BC$,

$\therefore$ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$(相似三角形的预备定理).

得 $\dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\dfrac{DE}{BC}\right)^2$(相似三角形的面积的比等于相似比的平方).

$\because$ $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{1}{3}$,

$\therefore$ $\dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{1}{9}$.

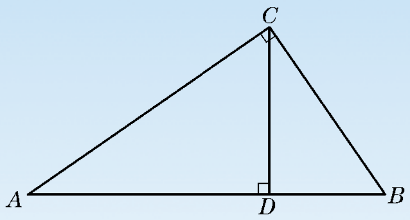
设 $S_{\triangle ADE}=x$，则 $S_{\triangle ABC}=9x$.

由 $S_{四边形DBCE}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ADE}$，得 $9x-x=16$，解得 $x=2$.

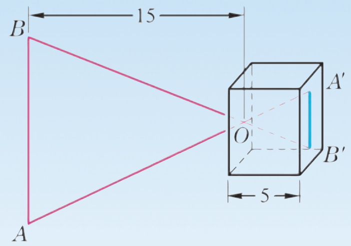
$\therefore$ $S_{\triangle ABC}=18$.

练习 24.5(3)

1. 如图，$\triangle ABC$ 中 $\angle C=90^\circ$，CD 是 AB 边上的高.
   (1) 已知 $BD=4$ cm，$CD=6$ cm，求 AD 的长；
   (2) 已知 $BD=9$ cm，$BC=15$ cm，求 AB 的长.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. （洞孔成像）如图，$AB // A'B'$，根据图中尺寸，可知物像 $A'B'$ 的长是物 AB 的长的 $\frac{1}{3}$. 你能说出其中的道理吗？

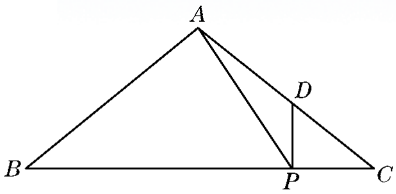


图 24－50

例题6 如图 24－50，已知 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=10$，$BC=16$，点 P、D 分别在边 BC、AC 上，$BP=12$，$\angle APD=\angle B$. 求 CD 的长.

解 ∵ $\angle APC=\angle B+\angle PAB$，$\angle APC=\angle APD+\angle DPC$，

又 $\angle APD=\angle B$，

∴ $\angle PAB=\angle DPC$.

∵ $AB=AC$，

∴ $\angle B=\angle C$.

在 $\triangle ABP$ 与 $\triangle PCD$ 中，

$$\begin{cases}\angle PAB=\angle DPC,\\ \angle B=\angle C,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABP \backsim \triangle PCD$（两角对应相等，两个三角形相似）.

得 $\dfrac{BP}{CD}=\dfrac{AB}{PC}$ （相似三角形的对应边成比例）.

由 $AB=10$，$BP=12$，$BC=16$，$PC=BC-PB$，得

$$\frac{12}{CD}=\frac{10}{16-12}.$$

∴ $CD=4.8$.

例题7 如图 24－51，正方形 $DEFG$ 的边 EF 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，顶点 D、G 分别在边 AB、AC 上. 已知 $\triangle ABC$ 的边 BC 长 60 厘米，高 AH 为 40 厘米，求正方形 $DEFG$ 的边长.

分析 由正方形 $DEFG$ 的边 DG 与 BC 平行，可知

$\triangle ADG \backsim \triangle ABC$;由 $AH \perp DG$,可用 AH 与 GF 的差来表示$\triangle ADG$ 的高. 这样,就可建立正方形 $DEFG$ 的边长与已知条件的联系.

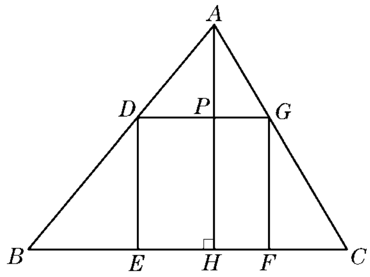


图 24-51

解 设$\triangle ABC$ 的高 AH 与 DG 相交于点 P,正方形 $DEFG$ 的边长为 x 厘米.

∵ 四边形 $DEFG$ 是正方形,EF 在 BC 上,

∴ $DG /\!/ BC$.

得 $\triangle ADG \backsim \triangle ABC$(相似三角形的预备定理).

∵ AH 是$\triangle ABC$ 的高,

∴ $AH \perp BC$.

得 $AP \perp DG$,即 AP 是$\triangle ADG$ 的高.

∴ $\dfrac{AP}{AH}=\dfrac{DG}{BC}$(相似三角形的对应高的比等于相似比).

∵ $PH \perp BC$,$GF \perp BC$,

∴ $PH=GF$,$AP=AH-PH=AH-GF$.

∴ $\dfrac{AH-GF}{AH}=\dfrac{DG}{BC}$.

由 $BC=60$ 厘米,$AH=40$ 厘米,$GF=DG=x$ 厘米,

得 $\dfrac{40-x}{40}=\dfrac{x}{60}$, 解得 $x=24$(厘米).

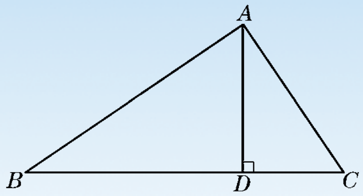
∴ 正方形 $DEFG$ 的边长是 24 厘米.

议一议

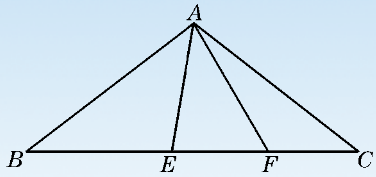
在例题 7 中,如果改变$\triangle ABC$ 的形状,但保持边 BC 与高 AH 的长不变,正方形 $DEFG$ 的边 EF 在直线 BC 上,顶点 D、G 分别在边 AB、AC 上. 正方形 $DEFG$ 的边长会变化吗? 为什么?

练习 24.5(4)

1. 已知:如图,AD 是$\triangle ABC$ 的边 BC 上的高,且 AD 是 BD、DC 的比例中项.
求证:$\triangle ABC$ 是直角三角形.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 已知:如图,在$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,点 E、F 在边 BC 上,$\angle EAF=\angle B$.
求证:$BF \cdot CE=AB^2$.

第四节　平面向量的线性运算

24.6　实数与向量相乘

我们知道，几个相同的数连加的运算是乘法，n 个 a 连加就表示为 na（其中 n 为正整数）.

思考

几个相同的向量连加，是否能像几个相同的数连加一样，把它表示为乘法运算的形式？

我们先讨论一个具体事例：

已知非零向量 $\vec{a}$，那么

$$\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}=?$$

$$(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})=?$$

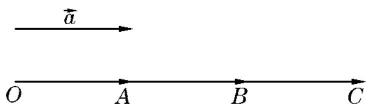


图 24－52

运用向量加法运算的法则，如图 24－52，在平面内取一点 O，作向量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，则$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$.

这个向量$\overrightarrow{OC}$的方向与 $\vec{a}$ 的方向相同；它的长度是$|\vec{a}|$的 3 倍，即$|\overrightarrow{OC}|=3|\vec{a}|$.

我们就把$\overrightarrow{OC}$表示为$\overrightarrow{OC}=\vec{a}\cdot 3=3\vec{a}$，即

$$\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}=3\vec{a}.$$

类似地，设$(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})=\vec{b}$，则 $\vec{b}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相反；它的长度是$|\vec{a}|$的 3 倍，即$|\vec{b}|=3|\vec{a}|$. 于是，得 $\vec{b}=-\overrightarrow{OC}$. 这时，就把 $\vec{b}$ 表示为$\vec{b}=(-\vec{a})\cdot 3=-(3\vec{a})=-3\vec{a}$，即

$$(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})=-3\vec{a}.$$

在图 24－52 中，向量$\overrightarrow{OB}$的方向与$\overrightarrow{OC}$的方向相同；它的长度是$|\overrightarrow{OC}|$的 $\frac{2}{3}$，即$|\overrightarrow{OB}|=\frac{2}{3}|\overrightarrow{OC}|$. 这时，就说$\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$.

一般地，设 n 为正整数，$\vec{a}$ 为向量，那么我们用 $n\vec{a}$ 表示 n 个 $\vec{a}$ 相加；用$-n\vec{a}$ 表示 n 个$-\vec{a}$ 相加. 又当 m 为正整数时，$\frac{n}{m}\vec{a}$ 表示与 $\vec{a}$ 同向且长度为 $\frac{n}{m}|\vec{a}|$的向量.

> 设 p 为一个正数，实际上，$p\vec{a}$ 就是将 $\vec{a}$ 的长度进行放缩，而方向保持不变；$-p\vec{a}$ 也是将 $\vec{a}$ 的长度进行放缩，但方向变为反向.

在上面认识的基础上，我们来规定向量的一种新的运算，即实数与向量相乘的运算.

设 k 是一个实数，$\vec{a}$ 是向量，那么 k 与 $\vec{a}$ 相乘所得的积是一个向量，记作 $k\vec{a}$.

如果 $k\neq 0$，且 $\vec{a}\neq\vec{0}$，那么 $k\vec{a}$ 的长度 $|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$；$k\vec{a}$ 的方向：当 $k>0$ 时 $k\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同方向；当 $k<0$ 时 $k\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反方向（图 24－53）.

如果 $k=0$ 或 $\vec{a}=\vec{0}$，那么 $k\vec{a}=\vec{0}$.

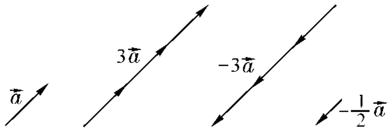


图 24－53

根据实数与向量相乘的意义，可知 $k\vec{a}\parallel\vec{a}$.

$k\vec{a}$ 也表示实数 k 与向量 $\vec{a}$ 相乘的运算. 规定应把实数写在向量前面并省略乘号；注意不要将表示向量的箭头写在数字上面.

例题1 已知非零向量 $\vec{a}$，求作 $\frac{5}{2}\vec{a}$，$-\sqrt{3}\vec{a}$.

解 如图 24－54，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$.

在射线 OA 上，取 $OB=\frac{5}{2}OA$，则 $\overrightarrow{OB}=\frac{5}{2}\vec{a}$；

在射线 OA 的反向延长线上，取 $OC=\sqrt{3}OA$，则 $\overrightarrow{OC}=-\sqrt{3}\vec{a}$.

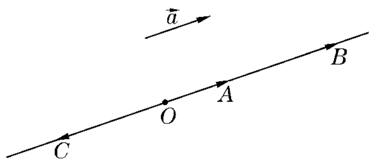


图 24－54

$\sqrt{3}OA$ 可用几何方法（运用勾股定理）准确作出. 一般可通过取 $\sqrt{3}$ 的近似值作接近于 $\sqrt{3}OA$ 的线段.

例题2 如图 24－55，在平行四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别为各边的中点，EG 与 FH 相交于点 O. 设 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BA}=\vec{b}$，试用向量 $\vec{a}$ 或 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{OE}$、$\overrightarrow{OF}$，并写出图中与 $\overrightarrow{OE}$ 相等的向量.

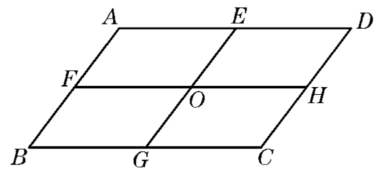


图 24－55

解 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，且 E、F、G、H 分别为各边的中点，由平行四边形的判定与性质可知，EG、AB、DC 互相平行且相等，FH、BC、AD 互相平行且相等；EG 与 FH 互相平分于点 O. 所以

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{FA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\vec{b};$$

$$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{EA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\vec{a}.$$

与 $\overrightarrow{OE}$ 相等的向量有：$\overrightarrow{BF}$、$\overrightarrow{FA}$、$\overrightarrow{GO}$、$\overrightarrow{CH}$、$\overrightarrow{HD}$.

例题3 如图 24－56，已知点 D、E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上，$DE\parallel BC$，$7AD=4AB$，试用向量 $\overrightarrow{BC}$ 表示向量 $\overrightarrow{DE}$.

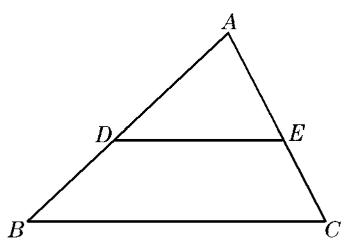


图 24－56

解 ∵ $DE\parallel BC$，

∴ $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{4}{7}$（三角形一边的平行线性质定理）.

得 $DE=\frac{4}{7}BC$.

∵ $|\overrightarrow{DE}|=DE=\frac{4}{7}BC=\frac{4}{7}|\overrightarrow{BC}|$，$\overrightarrow{DE}$与$\overrightarrow{BC}$同向，

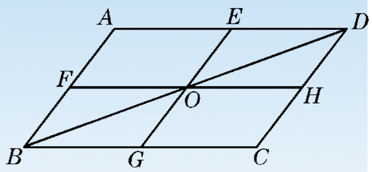
∴ $\overrightarrow{DE}=\frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$.

练习 24.6(1)

1. 已知非零向量 $\vec{a}$，求作：(1) $\frac{7}{4}\vec{a}$；(2) $-2\vec{a}$.

2. 以非零向量 $\vec{a}$ 为参照，分别说出向量 $4\vec{a}$、$-\frac{5}{3}\vec{a}$、$-2(-\vec{a})$ 的方向和长度.

3. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别为各边的中点. 设$\overrightarrow{BG}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BF}=\vec{b}$，试用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示向量$\overrightarrow{FH}$、$\overrightarrow{DC}$和$\overrightarrow{BD}$.



（第 3 题）

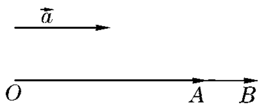


图 24－57(1)

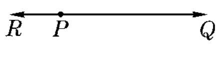


图 24－57(2)

例题4 已知非零向量 $\vec{a}$，求作：

(1) $2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{a}$； (2) $\frac{3}{2}\vec{a}-2\vec{a}$.

解 (1) 如图 24－57(1)，作向量$\overrightarrow{OA}=2\vec{a}$，再作$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{a}$，则

$$\overrightarrow{OB}=2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{a}.$$

(2) $\frac{3}{2}\vec{a}-2\vec{a}=\frac{3}{2}\vec{a}+(-2\vec{a})$.

如图 24－57(2)，作向量$\overrightarrow{PQ}=\frac{3}{2}\vec{a}$，再作$\overrightarrow{QR}=-2\vec{a}$，则

$$\overrightarrow{PR}=\frac{3}{2}\vec{a}-2\vec{a}.$$

议一议

在例题 4 中，将向量$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{PR}$分别与向量$\vec{a}$ 比较，它们的方向之间有什么关系？长度之间有什么关系？

观察图 24－57，可见$\overrightarrow{OB}$与$\vec{a}$ 同方向，$\overrightarrow{PR}$与$\vec{a}$ 反方向. 而

$$OB=OA+AB=2|\vec{a}|+\frac{1}{2}|\vec{a}|=\frac{5}{2}|\vec{a}|;$$

$$PR=QR-PQ=2|\vec{a}|-\frac{3}{2}|\vec{a}|=\frac{1}{2}|\vec{a}|.$$

由此，可以进一步得到：$\overrightarrow{OB}=\frac{5}{2}\vec{a}$；$\overrightarrow{PR}=-\frac{1}{2}\vec{a}$. 即

$$2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{5}{2}\vec{a};$$

$$\frac{3}{2}\vec{a}-2\vec{a}=-\frac{1}{2}\vec{a}.$$

同向的两个向量相加，和向量的方向取同向，长度取和；反向的两个向量相加，和向量的方向同较长向量，长度取差（正）；相反向量的和向量为零向量.

思考

实数的乘法满足交换律、结合律以及乘法对加法的分配律，实数与向量相乘有类似的运算律吗？

通过以上讨论，可得

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)\vec{a}=2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{a};$$

$$\left(\frac{3}{2}-2\right)\vec{a}=\frac{3}{2}\vec{a}-2\vec{a}.$$

一般地，如果 m、n 是非零实数，$\vec{a}$ 是非零向量，那么

$$(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}.$$

这个等式是实数与向量相乘对于实数加法的分配律.

证明这个分配律，可通过对 m、n 的符号分类讨论，指出等式左右两边表示的向量同向等长. 这里不作要求.

例题5 已知非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$.

（1）等式 $3(\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}+3\vec{b}$ 成立吗？试作图验证所得的结论；

（2）设实数 $k>0$，指出对算式 $k(\vec{a}+\vec{b})$ 去括号的法则.

解 （1） $3(\vec{a}+\vec{b})$

$=(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}+\vec{b})$ ……… 实数与向量相乘的意义

$=(\vec{a}+\vec{a}+\vec{a})+(\vec{b}+\vec{b}+\vec{b})$ ……… 向量加法的交换律与结合律

$=3\vec{a}+3\vec{b}$. ……………………………… 实数与向量相乘的意义

作图验证：如图 24－58，在平面上任取一点 O，作向量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$.

在射线 OA 上取 $OA_1=3OA$；再过点 A_1 作 AB 的平行线 A_1B_1，它与射线 OB 相交于点 B_1.

在$\triangle OA_1B_1$ 中，因为 $AB/\!/A_1B_1$，所以

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{OB_1}{OB}=\frac{OA_1}{OA}=3\text{（三角形一边的平行线性质定理推论）}.$$

再由作图可知，

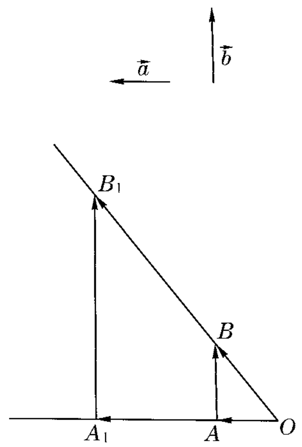


图 24－58

$$\overrightarrow{OA_1}=3\overrightarrow{OA}=3\vec{a};$$

$$\overrightarrow{A_1B_1}=3\overrightarrow{AB}=3\vec{b};$$

$$\overrightarrow{OB_1}=3\overrightarrow{OB}=3(\vec{a}+\vec{b}).$$

又 $\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}$，所以

$$3(\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}+3\vec{b}.$$

（2）对于实数 $k>0$，$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$.

任意给定实数 $k>0$，类似于题（1）作图，同样可验证上述结论正确.

这个等式成立，可像例题5（1）那样，只要在射线 OA 的反向延长线上取 OA_1，再作图验证.

想一想

如果实数 $k<0$，那么等式 $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ 仍然成立吗？

一般来说，对任意实数 $k\neq0$ 和非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，总有

$$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b},$$

这个等式是实数与向量相乘对于向量加法的分配律.

另外，如 $2(3\vec{a})$、$(2\times3)\vec{a}$、$6\vec{a}$，它们都与向量 $\vec{a}$ 同向；又 $|2(3\vec{a})|=2|3\vec{a}|=2\times3|\vec{a}|=6|\vec{a}|$，$|(2\times3)\vec{a}|=6|\vec{a}|$，而 $|6\vec{a}|=6|\vec{a}|$，可知

$$2(3\vec{a})=(2\times3)\vec{a}=6\vec{a}.$$

$-3\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向；$-2(-3\vec{a})$ 与 $-3\vec{a}$ 反向.

类似地，通过比较有关向量的方向和长度，可得

$$2(-3\vec{a})=[2\times(-3)]\vec{a}=-6\vec{a};$$

$$-2(-3\vec{a})=[(-2)\times(-3)]\vec{a}=6\vec{a}.$$

对于任意非零实数 m、n 和非零向量 $\vec{a}$，总有

$$m(n\vec{a})=(mn)\vec{a}.$$

这是实数与向量相乘的结合律.

证明结合律，可通过对 m、n 的符号分类讨论，指出等式左右两边表示的向量同向等长. 这里不作要求.

归纳以上讨论的结果，可知实数与向量相乘满足下列运算律：

设 m、n 为实数，则

（1）$m(n\vec{a})=(mn)\vec{a}$；

（2）$(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$；

（3）$m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$.

当 m 或 n 为零以及 $\vec{a}$ 或 $\vec{b}$ 为零向量时，可直接验证各等式成立.

例题6 计算：

（1）$3(\vec{a}+5\vec{b})$；

（2）$-\frac{3}{2}\vec{a}+\left(\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}\right)$；

（3）$(\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c})-2(\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c})$.

解 (1) $3(\vec{a}+5\vec{b})=3\vec{a}+3(5\vec{b})=3\vec{a}+15\vec{b}$.

(2) $$-\frac{3}{2}\vec{a}+\left(\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}\right)=\left(-\frac{3}{2}\vec{a}+\vec{a}\right)-\frac{3}{2}\vec{b}$$
$$=\left(-\frac{3}{2}+1\right)\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$$
$$=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}.$$

(3) $$(\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c})-2(\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c})$$
$$=\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}+(-2)\vec{a}+(-2)\cdot 3\vec{b}+(-2)\cdot(-\vec{c})$$
$$=\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}-2\vec{a}-6\vec{b}+2\vec{c}$$
$$=(1-2)\vec{a}+(1-6)\vec{b}+(-3+2)\vec{c}$$
$$=-\vec{a}-5\vec{b}-\vec{c}.$$

想一想

对含向量加法、减法、数与向量相乘等运算的算式进行计算，与多项式的运算类似吗？有什么体会？

练习 24.6(2)

1. 计算：

(1) $3(2\vec{a}-\vec{b})+5(2\vec{a}-3\vec{b})$；

(2) $3(2\vec{a}-\vec{b}-2\vec{c})-(3\vec{a}+2\vec{b})$；

(3) $\frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b}-2\vec{c})+\frac{1}{4}(2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c})-\frac{1}{2}\vec{b}$.

2. 已知不平行的两个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，求作向量 $-2(\vec{a}+\vec{b})$.

3. 如果向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{x}$ 满足关系式 $3\vec{a}+4(\vec{b}-\vec{x})=\vec{0}$，试用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示向量 $\vec{x}$.

如果 $\vec{a}$ 是一个非零向量，$\vec{b}=m\vec{a}(m\neq0)$，那么根据实数与向量相乘的意义，可知向量 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向或反向，得 $\vec{b}/\!/\vec{a}$.

设 $\overrightarrow{AE}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BF}=\vec{b}$，由 $\vec{b}=m\vec{a}$ 还可以进一步看到，直线 BF 与 AE 平行或重合. 而由 $|\vec{b}|=|m\vec{a}|=|m||\vec{a}|$，可知线段 $BF=|m|AE$.

利用"实数与向量相乘"的意义来研究几何中的两直线平行及线段长度问题，这是一种新的思路.

上述结论可用于研究几何中有关两直线平行及线段长度的问题.

例如，在图 24-59 中，EF 是$\triangle ABC$ 的中位线.

由 E、F 分别是边 AB、AC 的中点，得

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

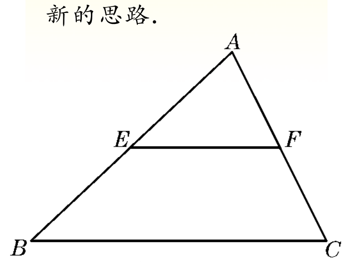


图 24-59

$\because \quad \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$,

$\therefore \quad \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

根据$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，且点 E 不在直线 BC 上，可知 $EF /\!/ BC$，且 $EF=\frac{1}{2}BC$.

以上是证明三角形中位线定理的一种新思路.

问题

如图 24－60，梯形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，EF 是梯形的中位线，$AD=2$，$BC=3$. 设$\overrightarrow{AD}=\vec{a}$，能将向量$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{FE}$用 $\vec{a}$ 表示出来吗？

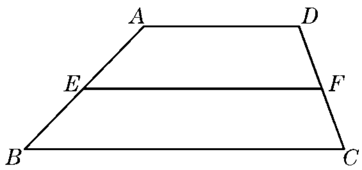


图 24－60

根据已知条件，可知 $AD /\!/ BC /\!/ EF$，得$\overrightarrow{AD} /\!/ \overrightarrow{BC} /\!/ \overrightarrow{FE}$；还可知 $EF=\frac{1}{2}(AD+BC)=\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}$.

结合图形，得到$\overrightarrow{BC}$与 $\vec{a}$ 同向，$\overrightarrow{FE}$与 $\vec{a}$ 反向.

又 $|\vec{a}|=2$，$|\overrightarrow{BC}|=3$，$|\overrightarrow{FE}|=\frac{5}{2}$，

得 $\quad \frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\vec{a}|}=\frac{3}{2}$，$\frac{|\overrightarrow{FE}|}{|\vec{a}|}=\frac{5}{4}$，

所以 $\quad \overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{FE}=-\frac{5}{4}\vec{a}$.

议一议

已知 $\vec{a}$ 是非零向量，如果 $\vec{b} /\!/ \vec{a}$，那么 $\vec{b}$ 能用 $\vec{a}$ 表示出来吗？

如果 $\vec{b}$ 是非零向量，那么由 $\vec{b} /\!/ \vec{a}$ 可知 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向或反向. 设 $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}=k$，得 $|\vec{b}|=k|\vec{a}|$. 所以，当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向时，$\vec{b}=k\vec{a}$；当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向时，$\vec{b}=-k\vec{a}$；

如果 $\vec{b}=\vec{0}$，那么 $\vec{b}=0\vec{a}$.

于是，我们得到：

平行向量定理　如果向量 $\vec{b}$ 与非零向量 $\vec{a}$ 平行，那么存在唯一的实数 m，使 $\vec{b}=m\vec{a}$.

定理中，$|m|=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$，关于 m 的符号，由 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向还是反向来确定.

我们再引进一种特殊的向量.

长度为 1 的向量叫做**单位向量**. 设$\vec{e}$为单位向量，则$|\vec{e}|=1$.

单位向量有无数个；不同的单位向量，是指它们的方向不同. 对于任意非零向量 $\vec{a}$，与它同方向的单位向量记作$\overrightarrow{a_0}$. 由实数与向

在实数中，0 和 1 是特殊的数；在向量中，$\vec{0}$和 $\vec{e}$ 是特殊的向量.

量的乘积，可知

$$\vec{a}=|\vec{a}|\overrightarrow{a_0},\ \overrightarrow{a_0}=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}.$$

例题7 如果 $\vec{a}+\vec{b}=2\vec{c}$，$\vec{a}-\vec{b}=3\vec{c}$，其中$\vec{c}$是非零向量，那么 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是平行向量吗？

分析 已知条件是两个向量的关系式，其中有三个向量. 为判断 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是否平行，一种思路是利用已知两个向量的关系式，消去 $\vec{c}$，找出 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 之间的关系式；另一种思路是把这两个向量的关系式看作关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的向量方程，通过解由它们组成的向量方程组，可将这两个向量用$\vec{c}$表示出来.

解 方法一：由 $\vec{a}+\vec{b}=2\vec{c}$，$\vec{a}-\vec{b}=3\vec{c}$，

得 $$3(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}-\vec{b}),$$

即 $$3\vec{a}+3\vec{b}=2\vec{a}-2\vec{b}.$$

所以 $$\vec{a}=-5\vec{b}.$$

根据实数与向量相乘的意义，可知 $\vec{a}/\!/\vec{b}$.

方法二：把已知的向量关系式看作关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的方程，得向量方程组

$$\begin{cases}\vec{a}+\vec{b}=2\vec{c},\\ \vec{a}-\vec{b}=3\vec{c}.\end{cases}$$

解这样的向量方程组的方法，与解二元一次方程组的方法类似.

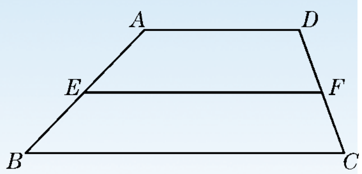
解得 $\vec{a}=\frac{5}{2}\vec{c}$，$\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{c}$.

根据实数与向量相乘的意义，可知 $\vec{a}/\!/\vec{c}$，$\vec{b}/\!/\vec{c}$.

所以 $\vec{a}/\!/\vec{b}$.

练习 24.6(3)

1. 用单位向量$\vec{e}$表示下列向量：
   (1) $\vec{a}$ 与$\vec{e}$的方向相同，且长度为 6；
   (2) $\vec{b}$ 与$\vec{e}$的方向相反，且长度为 3；
   (3) $\vec{c}$与$\vec{e}$的方向相反，且长度为 $\frac{1}{2}$.
2. 已知 $2\vec{a}+\vec{b}=3\vec{c}$，$3\vec{a}-\vec{b}=2\vec{c}$，其中$\vec{c}\neq\vec{0}$，那么向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是否平行？
3. 如图，梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，EF 是梯形的中位线.
   (1) 化简：$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}$， $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}$；
   (2) 化简：$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}$；



（第 3 题）

(3) 试用向量$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BC}$表示$\overrightarrow{EF}$；

(4) 根据$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{BC}$同向，可知$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$的方向及长度与$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BC}$的方向及长度有什么关系？

(5) 根据$\overrightarrow{EF}$与$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BC}$的向量关系式，可得到中位线 EF 与 AD、BC 之间有什么样的位置关系和长度关系？

24.7 向量的线性运算

我们已经学习了向量加法、减法以及实数与向量相乘等运算，并且知道，向量的减法可以转化为加法运算；向量加法以及实数与向量相乘，有类似于实数加法和乘法的运算律. 这些运算还可以组合起来，如果没有括号，那么运算的顺序是先将实数与向量相乘，再进行向量的加减.

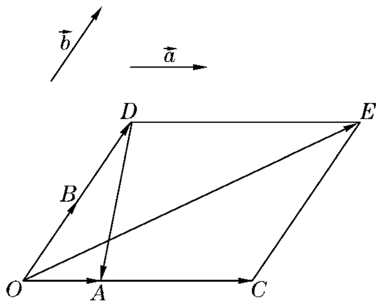


图 24－61

例题1 已知两个不平行的向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$.

求作：$3\vec{a}+2\vec{b}$，$\vec{a}-2\vec{b}$.

解 如图 24－61，在平面内任取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$；再作$\overrightarrow{OC}=3\vec{a}$，$\overrightarrow{OD}=2\vec{b}$.

以 OC、OD 为邻边，作平行四边形 $OCED$，则

$$\overrightarrow{OE}=3\vec{a}+2\vec{b}.$$

作向量$\overrightarrow{DA}$，则

$$\overrightarrow{DA}=\vec{a}-2\vec{b}.$$

向量加法、减法、实数与向量相乘以及它们的混合运算叫做向量的**线性运算**. 如 $3\vec{a}+2\vec{b}$、$\vec{a}-2\vec{b}$、$3(\vec{a}+5\vec{b})$、$-\frac{3}{2}\vec{a}+\left(\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}\right)$等，都是向量的线性运算.

先将算式化简，再选择适当的方法画图.

例题2 已知两个不平行的向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$.

求作：$(\vec{a}+\vec{b})-\left(\frac{7}{2}\vec{a}-2\vec{b}\right)$.

解 $(\vec{a}+\vec{b})-\left(\frac{7}{2}\vec{a}-2\vec{b}\right)=\vec{a}+\vec{b}-\frac{7}{2}\vec{a}+2\vec{b}=3\vec{b}-\frac{5}{2}\vec{a}$.

如图 24－62，在平面内取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\frac{5}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=3\vec{b}$；再作$\overrightarrow{AB}$，则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=3\vec{b}-\frac{5}{2}\vec{a}.$$

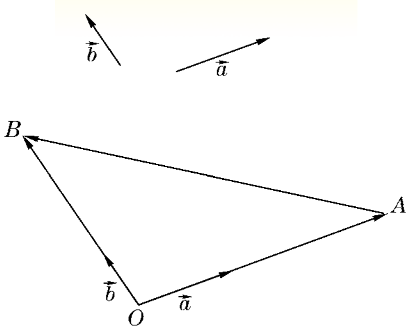


图 24－62

一般来说，如果 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 是两个不平行的向量，$\vec{c}$ 是平面内的一个向量，那么 $\vec{c}$ 可以用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示，并且通常将其表达式整理成 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$的形式，其中 x、y 是实数.

例题3 如图 24－63，点 M 是$\triangle CAB$ 的边 AB 的中点. 设$\overrightarrow{CA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CB}=\vec{b}$，试用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的线性组合表示向量$\overrightarrow{CM}$.

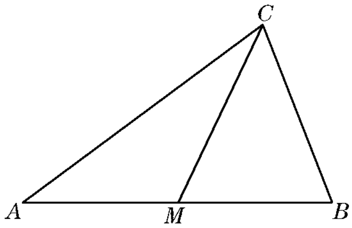


图 24－63

解 $\because$ M 是线段 AB 的中点，

$\therefore$ $AM=\frac{1}{2}AB$，得$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

$\because$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\vec{b}-\vec{a}$，

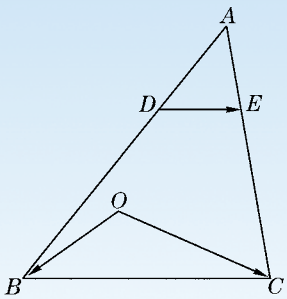
$$\therefore\ \overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$=\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$
$$=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$$
$$=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}.$$

或由 $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}$，
$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}$，
及 $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$，得
$2\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\vec{a}+\vec{b}$.

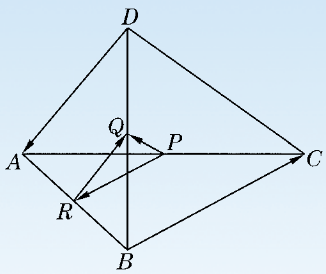
练习 24.7(1)

1. 已知两个不平行的向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，求作：(1) $2\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$；(2) $3\vec{a}-2\vec{b}$.

2. 如图，已知 O 为$\triangle ABC$ 内一点，点 D、E 分别在边 AB 和 AC 上，且 $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}$，$DE\parallel BC$. 设$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，试用 $\vec{b}$、$\vec{c}$表示$\overrightarrow{DE}$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，已知四边形 $ABCD$，点 P、Q、R 分别是对角线 AC、BD 和边 AB 的中点. 设$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DA}=\vec{b}$，试用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示向量$\overrightarrow{PQ}$.

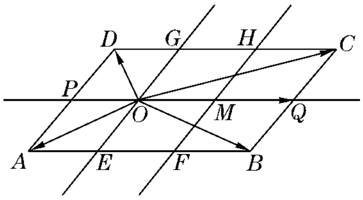


图 24 - 64

例题4 如图 24 - 64，已知平行四边形 $ABCD$，点 E、F 在边 AB 上，$AE=EF=FB$，点 P 是边 AD 的中点；直线 EG、FH 都与 AD 平行，分别交 DC 于点 G、H；直线 PQ 与 AB 平行，分别交 EG、FH、BC 于点 O、M、Q. 设 $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OG}=\vec{b}$，试用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示向量：$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OQ}$.

解 根据已知条件和平行线分线段成比例定理，可知

$$OP=OM,\ OE=OG,\ OQ=2OM.$$

得 $\overrightarrow{OP}=-\vec{a}$，$\overrightarrow{OE}=-\vec{b}$，$\overrightarrow{OQ}=2\vec{a}$.

所以 $\overrightarrow{OC}=2\vec{a}+\vec{b}$； $\overrightarrow{OD}=-\vec{a}+\vec{b}$；

$\overrightarrow{OA}=-\vec{a}-\vec{b}$； $\overrightarrow{OB}=2\vec{a}-\vec{b}$；

$\overrightarrow{OQ}=2\vec{a}$.

$\overrightarrow{OQ}=2\vec{a}$
$=2\vec{a}+0\vec{b}$.

想一想

在图 24 - 64 中，任取一点 Z，作向量 $\overrightarrow{OZ}$，能用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OZ}$ 吗？

如果 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 是两个不平行的向量，$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$（$m$、$n$ 是实数），那么向量 $\vec{c}$ 就是向量 $m\vec{a}$ 与 $n\vec{b}$ 的合成；也可以说向量 $\vec{c}$ 分解为 $m\vec{a}$、$n\vec{b}$ 两个向量，这时，向量 $m\vec{a}$ 与 $n\vec{b}$ 是向量 $\vec{c}$ 分别在 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 方向上的分向量，$m\vec{a}+n\vec{b}$ 是向量 $\vec{c}$ 关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的分解式.

如例题 4 中，$\overrightarrow{OB}$ 在 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 方向上的分向量分别是 $2\vec{a}$ 和 $-\vec{b}$；$\overrightarrow{OB}$ 关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的分解式是 $2\vec{a}-\vec{b}$.

问题

给定两个不平行的向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，对于平面内任意一个向量 $\vec{c}$，都可以确定它关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的分解式吗？

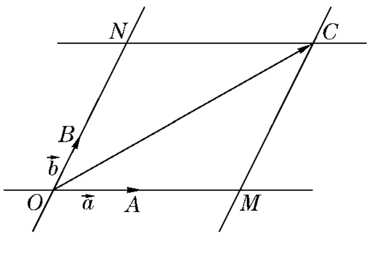


图 24 - 65

如图 24 - 65，在平面内取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$；再作直线 OA、OB.

设点 C 不在直线 OA 和 OB 上. 过点 C 分别作直线 OA、OB 的平行线，由于向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 不平行，可知所作两直线分别与直线 OB、OA 有唯一的交点，记为 N、M. 作向量 $\overrightarrow{OM}$、$\overrightarrow{ON}$.

因为 $\overrightarrow{OM}\parallel\vec{a}$，所以存在唯一的实数 x，使 $\overrightarrow{OM}=x\vec{a}$；

因为 $\overrightarrow{ON}\parallel\vec{b}$，所以存在唯一的实数 y，使 $\overrightarrow{ON}=y\vec{b}$.

而四边形 $OMCN$ 是平行四边形，因此

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=x\vec{a}+y\vec{b},$$

即
$$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}.$$

如果点 C 在直线 OA 或 OB 上，那么 $\vec{c}\parallel\vec{a}$，或 $\vec{c}\parallel\vec{b}$. 这时得

$$\vec{c}=x\vec{a}=x\vec{a}+0\vec{b}\quad 或\quad \vec{c}=y\vec{b}=0\vec{a}+y\vec{b}.$$

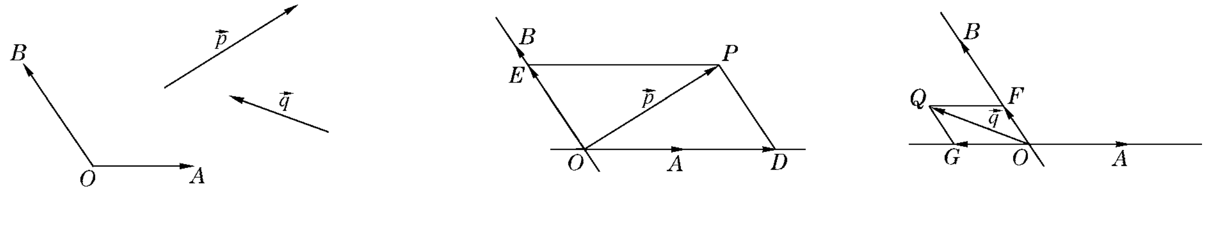
所以 $\vec{c}$ 关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的分解式总是确定的.

由此可知，平面上任意一个向量都可以在给定的两个不平行向量的方向上分解. 用上面的方法画图，可以作出这个向量在给定的两个不平行向量的方向上的分向量.

例题5　如图 24－66(1)，已知向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 和 $\vec{p}$、$\vec{q}$，求作：

(1) 向量 $\vec{p}$ 分别在 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 方向上的分向量；

(2) 向量 $\vec{q}$ 分别在 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 方向上的分向量.



(1)　(2)　(3)

图 24－66

解　(1) 如图 24－66(2)，作向量 $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$；再过点 P 分别作 $PE\parallel OA$，$PD\parallel OB$，E 为直线 PE 与直线 OB 的交点，D 为直线 PD 与直线 OA 的交点.

作向量 $\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OE}$.

则 $\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OE}$ 是向量 $\vec{p}$ 分别在 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 方向上的分向量.

(2) 如图 24－66(3)，作 $\overrightarrow{OQ}=\vec{q}$；再过点 Q 分别作 $QF\parallel OA$，$QG\parallel OB$，F 为直线 QF 与直线 OB 的交点，G 为直线 QG 与直线 OA 的交点.

作向量 $\overrightarrow{OG}$、$\overrightarrow{OF}$.

则 $\overrightarrow{OG}$、$\overrightarrow{OF}$ 是向量 $\vec{q}$ 分别在 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 方向上的分向量.

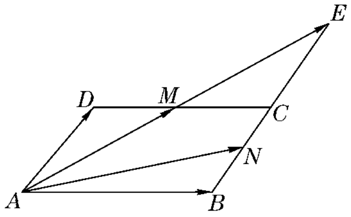


图 24－67

例题6 如图 24－67，已知平行四边形 $ABCD$，点 M、N 分别是边 DC、BC 的中点，射线 AM 与 BC 相交于点 E. 设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，分别求向量 $\overrightarrow{AM}$、$\overrightarrow{AN}$、$\overrightarrow{AE}$ 关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的分解式.

解 ∵ 点 M、N 分别是平行四边形 $ABCD$ 的边 DC、BC 的中点，

$$\therefore\quad DM=MC=\frac{1}{2}DC,\ BN=\frac{1}{2}BC.$$

又由 $AD//BC$，得 $AM=ME$.

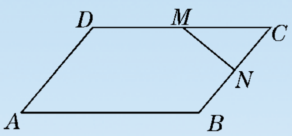
$$\therefore\quad \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b};$$

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b};$$

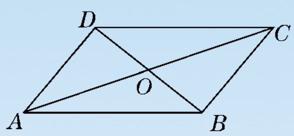
$$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AM}=2\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}+2\vec{b}.$$

练习 24.7(2)

1. 如图，已知平行四边形 $ABCD$，点 M、N 是边 DC、BC 的中点，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，分别求向量 $\overrightarrow{MN}$、$\overrightarrow{BN}$ 关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的分解式.



（第 1 题）



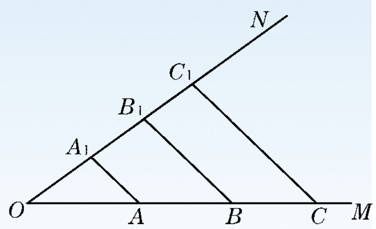
（第 2 题）

2. 如图，已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，分别求向量 $\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$ 关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的分解式.

3. 如图，已知点 A、B、C 在射线 OM 上，点 A_1、B_1、C_1 在射线 ON 上，$\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{OB_1}{OA_1}=k_1$，$\dfrac{OC}{OA}=\dfrac{OC_1}{OA_1}=k_2$. 设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OA_1}=\vec{b}$.

（1）分别求向量 $\overrightarrow{AA_1}$、$\overrightarrow{BB_1}$、$\overrightarrow{CC_1}$ 关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的分解式；

（2）判断向量 $\overrightarrow{AA_1}$、$\overrightarrow{BB_1}$、$\overrightarrow{CC_1}$ 是否平行，再指出直线 AA_1、BB_1、CC_1 的位置关系.



（第 3 题）

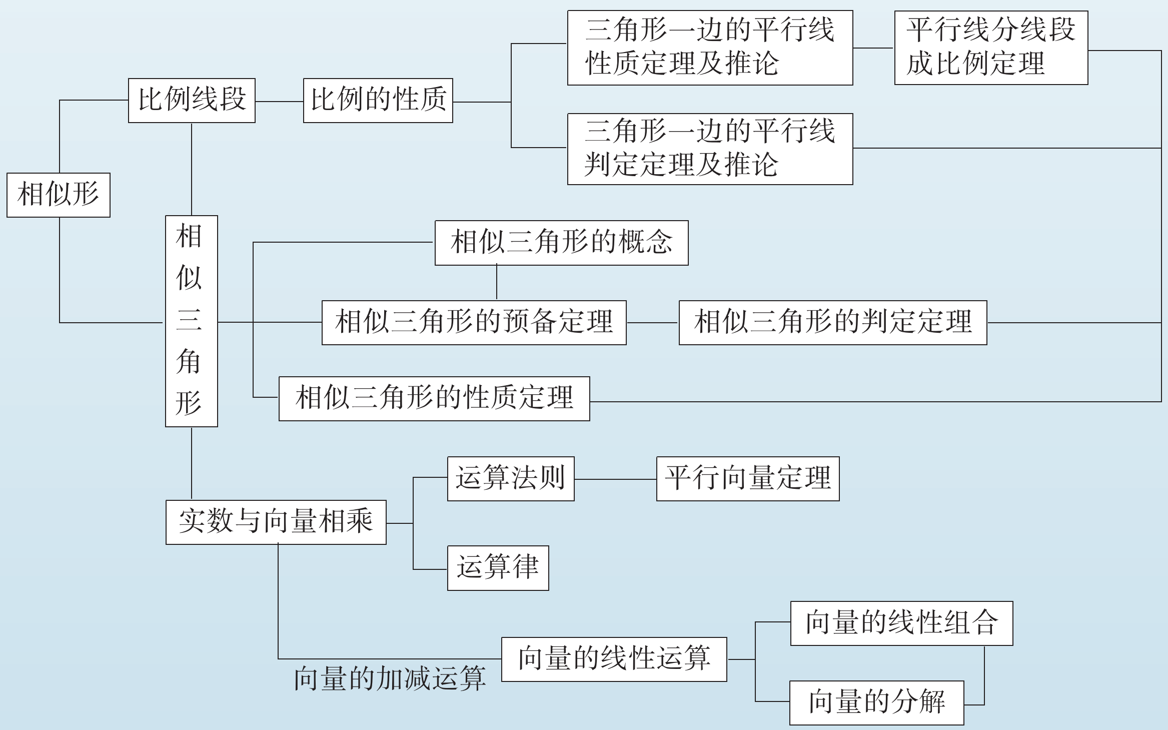
本章小结

我们在本章主要学习了相似三角形的概念、判定和性质;还学习了比例线段,这是研究相似三角形的知识基础.实数与向量相乘的运算是“相似”概念的运用,又与相似三角形有密切的联系;向量的线性运算以及向量的合成与分解,是向量初步知识的整理,在物理中有重要应用.

本章在研究三角形一边的平行线性质与判定等的过程中,贯穿着图形运动变化的思想.图形以平移、旋转或翻折的方式运动,它的形状和大小始终不变,这样的运动是“保形”的;相似形之间的关系其实是图形的放大或缩小,放缩是图形运动的又一种方式.放缩运动不改变图形的形状,但会改变图形的大小.在放缩运动(相似变换)中,“角”是不变量,平行线、相交线分别保持原来的位置关系;线段的比也是不变量.通过本章的学习,扩展了我们对图形运动的认识.

全等三角形是相似三角形的特例,我们通过类比全等三角形,通过对判定全等三角形所需条件的分析来探究相似三角形的判定,又一次领略了从特殊到一般的数学思考方法;再把全等三角形统一到相似三角形中去,从中可以感受到数学知识发展的脉络.

本章知识结构框图如下:



阅读材料一

话说“黄金分割”

我们知道，黄金分割是指“将一条线段分为不相等的两部分，使较长部分为原线段和较短部分的比例中项”. 如果点 P 是线段 AB 的一个黄金分割点，且 $AP>PB$，那么 $AP^2=AB\cdot PB$. 这时，$AP=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$，$AP$ 与 AB 的比值 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 称为黄金数.

怎样用尺规把线段 AB 黄金分割呢？下面给出一种方法.

作法：如图 24－68，

1. 过点 B 作 $BC\perp AB$，使 $BC=\frac{1}{2}AB$.
2. 联结 AC，在线段 AC 上截取 $CD=CB$.
3. 在线段 AB 上截取 $AP=AD$.

则 $AP^2=AB\cdot PB$.

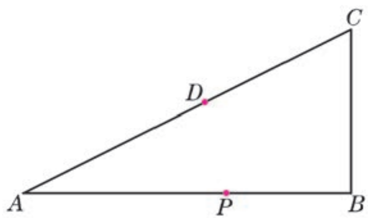


图 24－68

下面我们证明这种作图方法的正确性.

证明：在 Rt△ABC 中，

$$BC=\frac{1}{2}AB,\quad AC=AD+CD=AP+CB=AP+\frac{1}{2}AB.$$

由勾股定理，有 $AC^2=AB^2+BC^2$，

即
$$\left(AP+\frac{1}{2}AB\right)^2=AB^2+\left(\frac{1}{2}AB\right)^2.$$

整理，得 $AP^2+AP\cdot AB=AB^2$.

$$AP^2=AB^2-AP\cdot AB=AB(AB-AP)=AB\cdot PB.$$

所以点 P 是线段 AB 的一个黄金分割点.

黄金数 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$；黄金数的倒数 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 称为黄金比 ϕ，$\phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1.618$. 在上面的黄金分割中，$\frac{AB}{AP}=\phi$，$\frac{AP}{PB}=\phi$.

黄金分割体现出部分与部分及部分与整体之间的协调一致性，既美又真.

例如，如果一个矩形的短边与长边的比是黄金数，那么这个矩形称为黄金矩形（如图 24－69）. 人们觉得，在矩形中，黄金矩形最为赏心悦目. 顶角为 36° 的等腰三角形称为黄金三角形，它的底边与腰的比是黄金比. 在正五角星中就包含了许多黄金三角形，许多线段之间构成了黄金比，因此正五角星得到了古今中外人们的喜爱，在许多艺术品中都能见到它的“身影”（如图 24－70）.

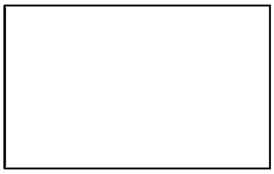


图 24－69

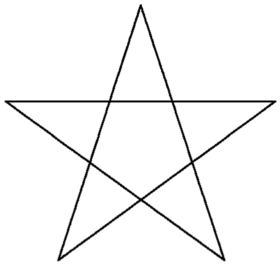


图 24－70

黄金分割的应用很多. 例如在著名的维纳斯女神像以及太阳神阿波罗的塑像中，在达·芬奇、提香等众多著名艺术家的作品中，都隐含着许多黄金比. 在科学实验中，为减少试验步骤而得到最佳结果，常用优选法，其中 0.618 法就是以黄金数为核心. 在日常生活中，人们也喜欢应用黄金分割. 如在拍风景照时，常把主要景物摄在接近于画面的黄金分割点处，使整个画面协调好看；舞台上报幕员总是站在接近于舞台的黄金分割点处，既显得自然大方，又使音响效果较好；芭蕾舞演员踮起脚尖起舞，使腰部成为整个身形的黄金分割点，给观众带来美的享受；在设计长方形工艺品或日用品时，常设计成黄金矩形的形态，这样更具美感.

黄金分割是一条公认的美学规律，在数学、美学、艺术等领域中显示出巨大的魅力.

阅读材料二

漫谈“出入相补原理”

我国古代数学的成就之一，就是善于在实践的基础上，抽象概括出解决问题的一般方法和原理. 例如出入相补原理，是我国古代数学家在解决测量问题的过程中，总结提炼出来的简单明白的原理.

出入相补原理指明了这样的几何事实：一个平面图形从一处移置他处，面积不变；如果把图形分割成若干块，那么各部分面积的和等于原来图形的面积，因而图形移置前后诸面积间的和与差有简单的相等关系. 对立体图形的体积，这条事实也成立.

可以这样说，出入相补原理中，“出”意味着面积（或体积）减少，“入”意味着面积（或体积）增加；出入相补，即面积（体积）间的和差关系不变. “出入相补原理”也称割补原理或等积变换原理.

下面举一例，通过用出入相补原理解决有关线段比例的问题，说明古代数学中出入相补原理的应用.

如图 24－71，设 O 是矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 上任意一点，过点 O 分别作一组邻边的平行线 PQ、SR，直线 PQ 分别与边 AD、BC 交于点 P、Q，直线 RS 分别与边 AB、DC 交于点 R、S，那么 $PO \cdot OS = RO \cdot OQ$. 说理如下：

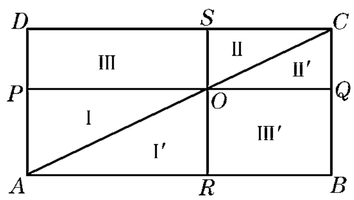


图 24－71

在图 24－71 中，如果把图形看作由 $\triangle ACD$ 移置到 $\triangle ACB$ 处，同时Ⅰ、Ⅱ各移到Ⅰ′、Ⅱ′，那么依据出入相补原理，得

$$\text{Ⅲ} = \text{Ⅲ}' \quad (\text{指面积相等}).$$

所以 $PO \cdot OS = RO \cdot OQ$.

现在，这个结论通常表示为 $\dfrac{PO}{OQ} = \dfrac{RO}{OS}$.

在我国古代几何中，由出入相补原理得到的结论是解决测量问题的基本依据.

例题 1 如图 24－72，为了测量一根旗杆有多高，可用一根标杆 RO 试插在适当的位置，使点 R 在 AD 上，且使标杆 RO 的顶端 O 的影子恰好和旗杆顶端 B 的影子 D 相重合. 设标杆 RO 为 2 米，旗杆的影子 AD 长为 a 米，RO 的影子长 RD 为 b 米，求旗杆 AB 的长.

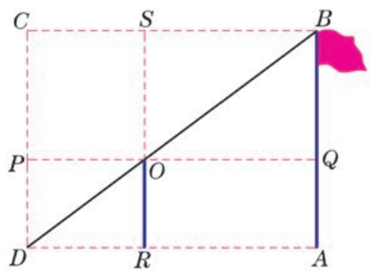


图 24－72

分析 如果把旗杆 AB 和它的影子 AD 当作一个矩形的两边，那么从 B 到 D 的光线就是矩形的对角线 BD. 于是，根据出入相补原理可以得到等量关系.

解 如图 24－72，作辅助矩形 $ABCD$，再过点 O 分别作矩形一组邻边的平行线. 设

$AB=x$ 米，由 $RO=2$ 米，$AD=a$ 米，$RD=b$ 米，得 $OS=(x-2)$ 米，$PO=b$ 米，$OQ=(a-b)$ 米.

根据出入相补原理，可知 $PO\cdot OS=RO\cdot OQ$，

得 $b(x-2)=2(a-b)$.

所以 $x=\dfrac{2a}{b}$.

答：旗杆 AB 的长为 $\dfrac{2a}{b}$ 米.

例题2 如图 24－73，为了测量一条河的宽 AB，可在河岸边先从点 B 处沿着与 AB 垂直的方向走到点 P 处，测量得 PB 为 18 米；再从点 P 处沿 BP 方向走到点 C 处；又测得 PC 为 6 米. 然后，由点 C 处出发，沿着与 BC 垂直的方向一直走到点 D 处，使 A、P、D 三点在一条直线上，且测出 CD 为 a 米，求河宽 AB.

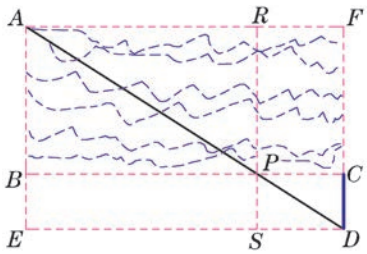


图 24－73

解 作辅助矩形 $AEDF$，则点 P 在矩形 $AEDF$ 的对角线 AD 上.

根据出入相补原理，可知 $BP\cdot PS=PC\cdot PR$.

设 $AB=x$ 米，得 $18a=6x$.

所以 $x=3a$.

答：河宽 AB 为 $3a$ 米.

在我国的古代几何中，出入相补原理除了用于解决线段比例的问题外，还在勾股定理、体积理论、球体体积乃至数的开方等方面，有非常经典的运用.

出入相补原理起源于《算数书》、《九章算术》编纂的时代，是我国劳动人民智慧的结晶. 不过，现传最早的记载在赵爽《周髀算经注》的勾股圆方图说与刘徽《九章算术注》的方田、少广、商功、勾股等章中. 通过把这一原理应用于解决多种多样的问题，我国古代建立了相应的几何体系，形成了几何学的一个特色.

24

探究活动

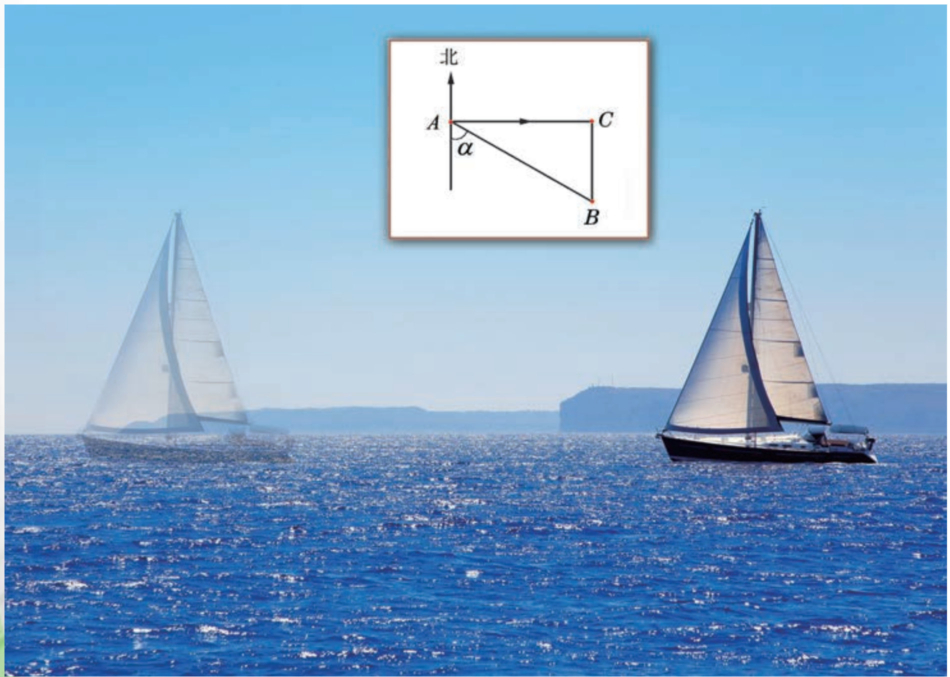
分割三角形

下图表示一张蓝色的$\triangle ABC$纸片和一张红色的$\triangle DEF$纸片，其中$\angle A=\angle D=90^\circ$，且$\triangle ABC$与$\triangle DEF$不相似.

是否存在这样的直线分割，能把$\triangle ABC$与$\triangle DEF$分别分割成两个三角形，使分得的每一个蓝色三角形分别与一个红色三角形相似？如果存在，写出你的设计方案，并证明方案的正确性；如果不存在，请简要说明理由.

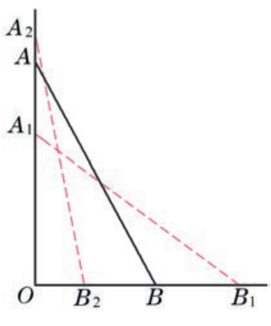
Ruijiao De Sanjiaobi

25 第二十五章　锐角的三角比



将一把梯子的下端放在地面上，它的上端靠着墙面.把墙面和地面所成的角画成一个直角，梯子画成一条线段 AB，得到一个直角三角形 AOB（如下图）.

如果将梯子 AB 的两端分别沿着墙面和地面滑动，那么仍得到直角三角形，如图中的 $\mathrm{Rt}\triangle A_1OB_1$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle A_2OB_2$.相对于 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$，滑动后所得直角三角形的斜边长度不变，而两条直角边的长度发生了变化，锐角的大小也相应在变化.



观察图中的直角三角形，由 $OA_1<OA$，$OB_1>OB$，可知 $\frac{OA_1}{OB_1}<\frac{OA}{OB_1}<\frac{OA}{OB}$，这时 $\angle A_1B_1O<\angle ABO$；同理可知 $\frac{OA_2}{OB_2}>\frac{OA}{OB}$，这时 $\angle A_2B_2O>\angle ABO$.由此可见，直角三角形的锐角的大小，与两直角边长度的比值的大小有关.

怎样定量地刻画直角三角形的锐角大小与两边长度的比值之间的关系？

对于三角形（包括球面三角形）边角关系的定量考察，是“三角学”的起源；这方面的研究，始于古代人类在天文观察、航海中的测量.锐角的三角比，揭示了直角三角形中边角之间的联系，这是我们在本章所要学习的知识.

第一节　锐角的三角比

25.1　锐角的三角比的意义

我们先来看一看，古希腊数学家怎样利用相似三角形的性质测量埃及大金字塔的高.

如图 25－1 所示，设 AB 是大金字塔的高. 在某一时刻，阳光照射下的大金字塔在地面上投下了一个清晰的阴影，塔顶 A 的影子落在地面上的点 C 处，BC 与金字塔底部一边垂直于点 K. 与此同时，直立地面上的一根标杆 DO 留下的影子是 OE. 由于射向地面的太阳光线（如 AC、DE）可以看作是平行线（$AC /\!/ DE$），因此图中的 $\angle ACB$ 与 $\angle DEO$ 相等.

$BC = BK + KC$. 其中 BK 是大金字塔底部正方形边长的一半.

于是，$\text{Rt}\triangle ABC \backsim \text{Rt}\triangle DOE$，得 $\dfrac{AB}{DO} = \dfrac{BC}{OE}$. 这样，只要量出 BC、DO、OE 的长，就可以算出塔高 AB.

进一步分析上述测量过程. 标杆 DO 的长度可以自主选定，标杆 DO 的影长 OE 随 DO 确定.

把比例式 $\dfrac{AB}{DO} = \dfrac{BC}{OE}$ 改写为 $\dfrac{DO}{OE} = \dfrac{AB}{BC}$，可见在 $\text{Rt}\triangle DOE$ 中，$\dfrac{DO}{OE}$ 的值是确定的.

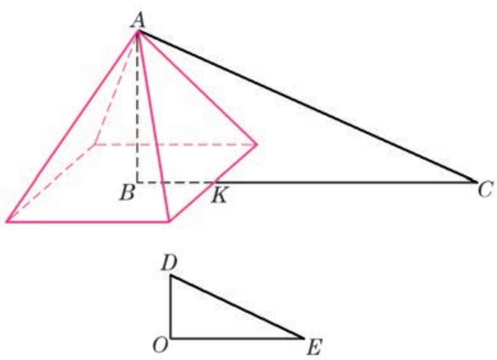


图 25－1

问题 1

对于一个直角三角形，如果给定了它的一个锐角的大小，那么它的两条直角边的比值是否是一个确定的值？

如图 25－2 所示，任意画一个锐角 A，在角 A 的一边上任意取点，例如取 B_1、B_2、B_3 三点，再分别过这三个点向另一边作垂线，垂足依次为点 C_1、C_2、C_3，从而得到三个直角三角形，即 $\triangle AB_1C_1$、$\triangle AB_2C_2$ 和 $\triangle AB_3C_3$.

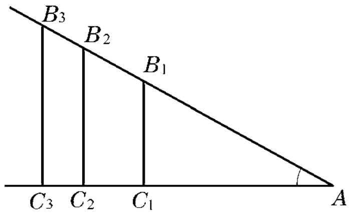


图 25－2

因为这三个直角三角形有公共的锐角 A，所以

$$\triangle AB_1C_1 \backsim \triangle AB_2C_2 \backsim \triangle AB_3C_3.$$

于是得

$$\frac{B_1C_1}{AC_1}=\frac{B_2C_2}{AC_2}=\frac{B_3C_3}{AC_3}.$$

由此可见，如果给定直角三角形的一个锐角，那么这个锐角的对边与邻边的长度的比值就是一个确定的数.

问题2

在图 25－2 中，当直角三角形中一个锐角的大小变化时，这个锐角的对边与邻边的长度的比值随着变化吗？

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，直角边 BC 和 AC 分别叫做 $\angle A$ 的对边和邻边.

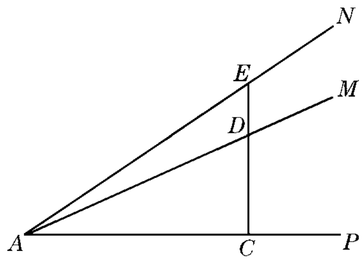


图 25－3

如图 25－3 所示，当锐角 MAP 变化为锐角 NAP 时，在 AP 上任取一点 C，过点 C 作 $CE \perp AP$，垂足为点 C，CE 分别交 AM、AN 于点 D、E，得 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$，这时

$$\frac{\angle DAC \text{ 的对边}}{\angle DAC \text{ 的邻边}}=\frac{DC}{AC};$$

$$\frac{\angle EAC \text{ 的对边}}{\angle EAC \text{ 的邻边}}=\frac{EC}{AC}.$$

显然，$\frac{DC}{AC}$与$\frac{EC}{AC}$这两个比值是不同的，说明直角三角形中，一

个锐角的对边与邻边的长度的比值随着这个锐角的大小的变化而变化.

通过上面的讨论，可以得到：如图 25－4，在 Rt△ABC 中（$\angle C=90°$），当锐角 A 的大小确定后，不论 Rt△ABC 的边长怎样变化，$\angle A$ 的对边 BC 与邻边 AC 的比值总是确定的，即

$$\frac{\text{锐角 }A\text{ 的对边}}{\text{锐角 }A\text{ 的邻边}}=\text{一个确定的值}.$$

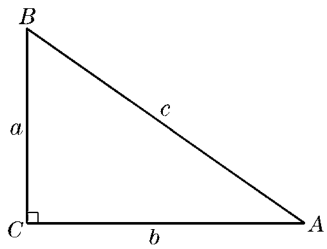


图 25－4

我们把直角三角形中一个锐角的对边与邻边的比叫做这个锐角的**正切**（tangent）. 如图 25－4，锐角 A 的正切记作 $\tan A$，这时

$$\tan A=\frac{\text{锐角 }A\text{ 的对边}}{\text{锐角 }A\text{ 的邻边}}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b}.$$

在 △ABC 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边通常分别用 a、b、c 表示.

例题1　在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=2$，求 $\tan A$ 和 $\tan B$ 的值（如图 25－4）.

解　在 Rt△ABC 中，

∵　$AC=3$，$BC=2$，

∴　$\tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{2}{3}$，

　　$\tan B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{3}{2}$.

当直角三角形的一个锐角的大小确定时，这个锐角的邻边与对边的比值也是确定的.

我们把直角三角形中一个锐角的邻边与对边的比叫做这个锐角的**余切**（cotangent）. 如图 25－4，锐角 A 的余切记作 $\cot A$，这时

$$\cot A=\frac{\text{锐角 }A\text{ 的邻边}}{\text{锐角 }A\text{ 的对边}}=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}.$$

根据正切与余切的意义，可以得到

$$\tan A=\frac{1}{\cot A}.$$

想一想

在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，锐角 B 的余切用哪两条边的比表示？$\cot B$ 与 $\tan A$ 有什么关系？

在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，可知 $\angle A+\angle B=90^\circ$，$\cot B=\tan A$.

例题2　如图 25－5，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=4$，$AB=5$，求 $\cot A$ 与 $\cot B$ 的值.

解　在 Rt△ABC 中，由勾股定理得

$$AB^2=AC^2+BC^2.$$

$\because$　$BC=4$，$AB=5$，

$\therefore$　$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

$\therefore$　$\cot A=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{3}{4}$，

$\cot B=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{4}{3}$.

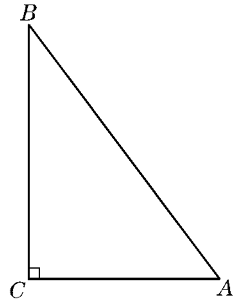
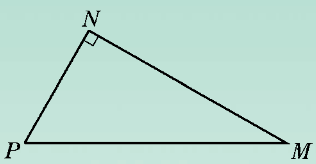


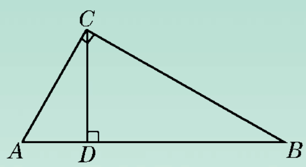
图 25－5

练习 25.1(1)

1. 如图，在 Rt△MNP 中，$\angle N=90^\circ$，$\angle P$ 的对边是______，$\angle P$ 的邻边是______；$\angle M$ 的对边是______，$\angle M$ 的邻边是______.



（第 1 题）



（第 2 题）

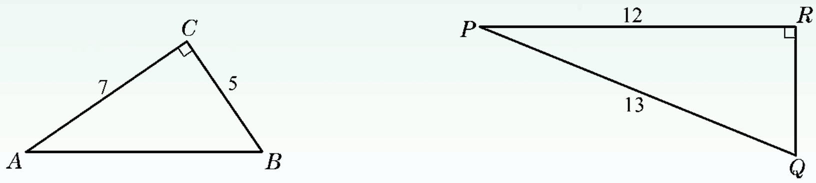
2. 如图，在△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$，垂足为点 D.

（1）在 Rt△ABC 中，$\angle A$ 的对边是______，$\angle A$ 的邻边是______；在Rt△ACD 中，$\angle A$ 的对边是______，$\angle A$ 的邻边是______.

（2）在 Rt△______中，$\angle B$ 的对边是 AC；在 Rt△______中，$\angle B$ 的邻边是 BD.

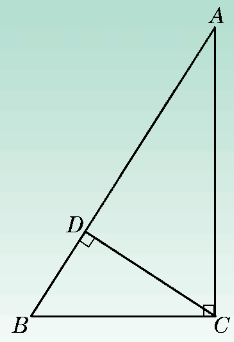
（3）$\angle ACD$ 的邻边是______，$\angle BCD$ 的对边是______.

3. 如图，△ABC 和△PQR 都是直角三角形，$\angle C=\angle R=90^\circ$，$AC=7$，$BC=5$，$PQ=13$，$PR=12$. 求：(1) $\tan B$、$\cot A$；　(2) $\cot P$、$\cot Q$.



（第 3 题）

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$，垂足为点 D. 则 $\frac{CD}{BD}=$______，$\frac{AC}{BC}=$______，$\frac{AD}{CD}=$______.（用正切或余切表示）



（第 4 题）

在图 25－2 中，我们还可以得到下列等式：

$$\frac{B_1C_1}{AB_1}=\frac{B_2C_2}{AB_2}=\frac{B_3C_3}{AB_3};$$

$$\frac{AC_1}{AB_1}=\frac{AC_2}{AB_2}=\frac{AC_3}{AB_3}.$$

这就是说，如果直角三角形的一个锐角是确定的，那么它的对边（或邻边）与斜边的比也是确定的.

我们定义：

直角三角形中一个锐角的对边与斜边的比叫做这个锐角的**正弦**（sine）.

直角三角形中一个锐角的邻边与斜边的比叫做这个锐角的**余弦**（cosine）.

如图 25－4，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，锐角 A 的正弦记作 $\sin A$，这时

$$\sin A=\frac{\text{锐角 }A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c};$$

锐角 A 的余弦记作 $\cos A$，这时

$$\cos A=\frac{\text{锐角 }A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}.$$

想一想

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，锐角 B 的余弦用哪两条边的比表示？$\cos B$ 与 $\sin A$ 有什么关系？

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，可知 $\angle A+\angle B=90^\circ$，$\cos B=\sin A$.

一个锐角的正切、余切、正弦、余弦统称为这个锐角的**三角比**（trigonometric ratio）.

任何一个锐角的三角比的值都是正实数，其中正弦和余弦的值小于 1（为什么？）.

锐角 A 的三角比 $\tan A$、$\cot A$、$\sin A$、$\cos A$ 中，

$$\tan A>0，\cot A>0；$$

$$0<\sin A<1，0<\cos A<1.$$

三角比的符号表示中，锐角的标记通常可取它的顶点字母（无歧义情况下），有时也用 $\cot\angle BAC$、$\cos\alpha$ 等表示. 还有，例如 $\tan 30^\circ$，它表示 30° 角的正切.

例题3 如图 25-6，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AB=17$，$BC=8$. 求 $\sin A$ 和 $\cos A$ 的值.

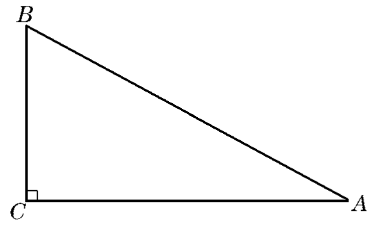


图 25-6

解 在 Rt△ABC 中，

∵ $AB=17$，$BC=8$，

∴ $\sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{8}{17}$.

又 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{17^2-8^2}=15$，

∴ $\cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{15}{17}$.

例题4 如图 25-7，在直角坐标平面内有一点 $P(3,4)$. 求 OP 与 x 轴正半轴的夹角 α 的正切、正弦和余弦的值.

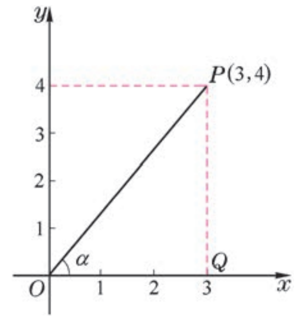


图 25-7

解 过点 P 向 x 轴引垂线，垂足为点 Q，则 $\angle OQP=90^\circ$.

由点 P 的坐标为 $(3,4)$，得 $OQ=3$，$QP=4$.

在 Rt△OPQ 中，$OP=\sqrt{OQ^2+PQ^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

∴ $\tan\alpha=\dfrac{PQ}{OQ}=\dfrac{4}{3}$，

$\sin\alpha=\dfrac{PQ}{OP}=\dfrac{4}{5}$，

$\cos\alpha=\dfrac{OQ}{OP}=\dfrac{3}{5}$.

例题5 如图 25-8，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=6$，$\sin A=\dfrac{3}{4}$. 求：(1) AB 的长；(2) $\sin B$ 的值.

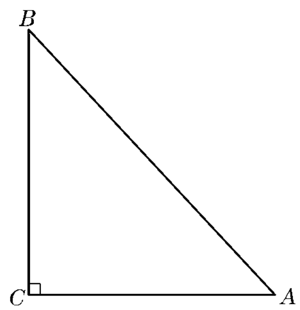


图 25-8

解 (1) 在 Rt△ABC 中，

∵ $\sin A=\dfrac{BC}{AB}$，

∴ $AB=\dfrac{BC}{\sin A}$.

又 $BC=6$，$\sin A=\dfrac{3}{4}$，

∴ $AB=\dfrac{6}{\frac{3}{4}}=8$.

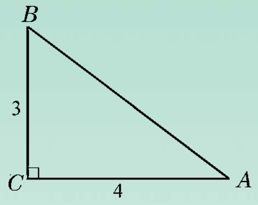
(2) 由勾股定理，得

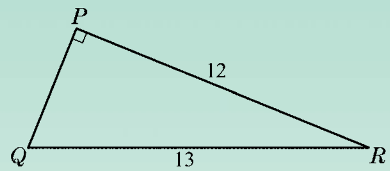
$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}.$$

∴ $\sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{2\sqrt{7}}{8}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

练习 25.1(2)

1. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle PQR$ 是直角三角形，$\angle C=\angle P=90^\circ$，$AC=4$，$BC=3$，$PR=12$，$QR=13$. 求：(1) $\sin A$，$\cos A$； (2) $\sin Q$，$\cos Q$.



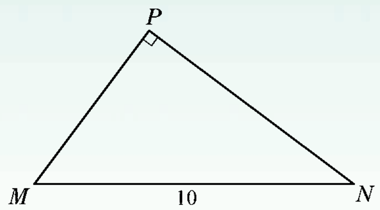


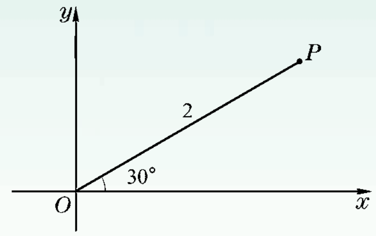
（第 1 题）

2. 在直角坐标平面内有一点 $A(3,1)$，点 A 与原点 O 的连线与 x 轴的正半轴的夹角为 α，求 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\tan\alpha$ 和 $\cot\alpha$.

3. (1) 如下左图，在 $\mathrm{Rt}\triangle MNP$ 中，$\angle P=90^\circ$，$MN=10$，$\cos M=\dfrac{3}{5}$，求 MP 的长和 $\sin M$ 的值；

   (2) 如下右图，在直角坐标平面内，点 P 与原点 O 的距离 $OP=2$，点 P 与原点 O 的连线与 x 轴的正半轴的夹角为 30°，求点 P 的坐标以及 $\cos 30^\circ$、$\cot 30^\circ$ 的值.





（第 3 题）

25.2 求锐角的三角比的值

1. 特殊锐角的三角比的值

我们来研究 30°、45° 和 60° 这些特殊锐角的三角比的值.

试一试

根据含 45°(或 30°)角的直角三角形三边长之间的关系，求 45°(或 30°)角的正切、余切、正弦、余弦.

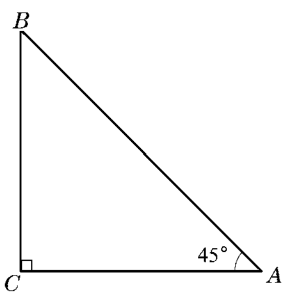


图 25－9

如图 25－9，已知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=45^\circ$. 设 $BC=a$，则 $AC=a$，$AB=\sqrt{2}a$.

由三角比的定义，得

$$\tan45^\circ=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{a}=1;\quad \cot45^\circ=\frac{AC}{BC}=\frac{a}{a}=1;$$

$$\sin45^\circ=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \cos45^\circ=\frac{AC}{AB}=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

再通过下面的填空，求 30°、60°角的三角比的值.

如图 25 - 10，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，那么$\angle B$ ＝________.

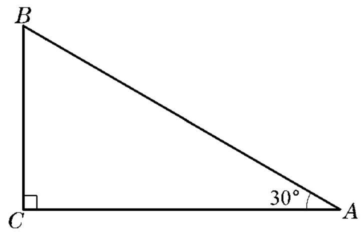


图 25 - 10

设 $BC=a$，则 $AB=$________ a，$AC=$________ a.

由三角比的定义，得

$$\tan30^\circ=\frac{(\qquad)}{(\qquad)}=\_\_\_\_\_\_;\ \cot30^\circ=\frac{(\qquad)}{(\qquad)}=\_\_\_\_\_\_;$$

$$\sin30^\circ=\frac{(\qquad)}{(\qquad)}=\_\_\_\_\_\_;\ \cos30^\circ=\frac{(\qquad)}{(\qquad)}=\_\_\_\_\_\_.$$

同理可得

$$\tan60^\circ=\frac{(\qquad)}{(\qquad)}=\_\_\_\_\_\_;\ \cot60^\circ=\frac{(\qquad)}{(\qquad)}=\_\_\_\_\_\_;$$

$$\sin60^\circ=\frac{(\qquad)}{(\qquad)}=\_\_\_\_\_\_;\ \cos60^\circ=\frac{(\qquad)}{(\qquad)}=\_\_\_\_\_\_.$$

求特殊锐角的三角比的值，一般步骤是：(1) 将直角三角形的某边长设为 a，用 a 的代数式表示其他两边的长；(2) 根据三角比的定义求值.

列出特殊锐角的三角比的值，如下表：

α	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
30°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	1	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

想一想

观察表中特殊锐角的三角比的值，两个相等的值相关的三角比名称及角度数各有什么特点？每一列三角比的值有什么特点或规律？

例题 1 求下列各式的值：

(1) $\sin30^\circ\cdot\tan30^\circ+\cos60^\circ\cdot\cot30^\circ$;

(2) $\dfrac{2\sin^2 60^\circ-\cos60^\circ}{\tan^2 60^\circ-4\cos45^\circ}$.

$\sin^2 A$ 表示 $(\sin A)^2$，其余类同.

解 (1) $\sin30^\circ\cdot\tan30^\circ+\cos60^\circ\cdot\cot30^\circ$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\times\sqrt{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(2) $\dfrac{2\sin^2 60^\circ - \cos 60^\circ}{\tan^2 60^\circ - 4\cos 45^\circ}$

$$= \frac{2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}}{(\sqrt{3})^2 - 4\times\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{3-2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{3-2\sqrt{2}} = 3+2\sqrt{2}.$$

练习 25.2(1)

1. 填空：

$\tan 30^\circ =$ ________；$\cot 45^\circ =$ ________；$\sin 60^\circ =$ ________；$\cos 45^\circ =$ ________.

2. 用特殊锐角的三角比填空：

$\frac{\sqrt{3}}{2} =$ ________ $=$ ________；$1 =$ ________ $=$ ________；

$\frac{\sqrt{2}}{2} =$ ________ $=$ ________；$\sqrt{3} =$ ________ $=$ ________.

3. 求下列各式的值：

(1) $3\sin 60^\circ - 2\cos 30^\circ + \tan 60^\circ$；

(2) $\dfrac{\sin 45^\circ - \cot 45^\circ}{\sin^2 45^\circ}$；

(3) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$.

4. 我们知道，$\frac{1}{2} = \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \sin^2 45^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\cot 30^\circ} = \tan 45^\circ - \cos 60^\circ$.

试一试，用含特殊锐角的三角比的式子填空：

$\sqrt{2} =$ ________ $=$ ________ $=$ ________.

$\sqrt{3} =$ ________ $=$ ________ $=$ ________.

2. 使用计算器求锐角的三角比的值

特殊锐角三角比的值，可以通过几何计算求得. 任意锐角的三角比的值，通常利用计算器求得.

只要计算器上有 sin 、 cos 、 tan （或 tg ）键，就可以用来求锐角三角比的值. 通常，计算器所显示的这个三角比的值是它的近似值.

由于我们现在遇到的表示锐角的大小的单位都是“度、分、秒”，因此在使用计算器求锐角三角比的值时，首先必须进入 DEG （角度）模式.

计算器的型号较多，使用方法不完全相同，具体操作可参阅其使用说明书.

如：在计算器面板上，按$\boxed{\text{MODE}}$键，屏幕显示：

然后按$\boxed{1}$键，计算器即进入了 DEG 模式.

例题2 求 $\sin15°$和 $\cos20°$的值（精确到 0.000 1）.

解 在 DEG 模式下，按下面的顺序依次按键：

$\boxed{\sin}$ $\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$

屏幕显示：

$\therefore$ $\sin15°\approx0.258\,8$.

再按下面的顺序依次按键：

$\boxed{\cos}$ $\boxed{2}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$

屏幕显示：

$\therefore$ $\cos20°\approx0.939\,7$.

一般计算器上没有$\boxed{\cot}$键，我们可以利用

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$$

来求 $\cot\alpha$ 的值.

例题3 求 $\cot75°$的值（精确到 0.000 1）.

解 按下面的顺序依次按键：

$\boxed{1}$ $\div$ $\boxed{\tan}$ $\boxed{7}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$

屏幕显示：

$\therefore$ $\cot75°\approx0.267\,9$.

如果按$\boxed{\text{MODE}}$键一次，屏幕未显出图示的画面，那么反复按$\boxed{\text{MODE}}$键，直到显示出来为止.

“DEG”表示角度的单位制为“度、分、秒”.

也可以按下面的顺序依次按键：

$\boxed{\tan}$ $\boxed{7}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{x^{-1}}$ $\boxed{=}$

屏幕显示：

例题4 求下列各三角比的值(精确到 0.000 1)：

(1) $\sin 73°42'$； (2) $\cot 71°12'35''$.

解 (1) 按下面的顺序依次按键：

$\boxed{\sin}$ $\boxed{7}$ $\boxed{3}$ $\boxed{°\,'\,''}$ $\boxed{4}$ $\boxed{2}$ $\boxed{°\,'\,''}$ $\boxed{=}$

屏幕显示：

∴ $\sin 73°42' \approx 0.959\ 8$.

(2) 按下面的顺序依次按键：

$\boxed{1}$ $\div$ $\boxed{\tan}$ $\boxed{7}$ $\boxed{1}$ $\boxed{°\,'\,''}$ $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{°\,'\,''}$ $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{°\,'\,''}$ $\boxed{=}$

屏幕显示：

∴ $\cot 71°12'35'' \approx 0.340\ 2$.

> 当角的大小表示中只用到单位“度”时，输入角的大小数值后，可以不按 $\boxed{°\,'\,''}$ 键. 如例题 2 和例题 3.
> 当角的大小表示需要用到单位“度”以及“分”或“秒”时，输入“度”(或“分”或“秒”)的大小数值后，必须按 $\boxed{°\,'\,''}$ 键. 如例题 4.

如果已知一个锐角的一个三角比的值，那么这个锐角的大小是确定的. 例如，已知一个锐角的正弦值等于 $\frac{1}{2}$，那么这个锐角就等于 30°. 当已知的三角比的值不是特殊锐角的三角比的值时，通常可使用计算器来求相应锐角度数的近似值.

下面举例说明.

例题5 已知 $\sin\alpha = 0.621\ 7$，求锐角 α(精确到 $1''$).

解 按下面的顺序依次按键：

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin^{-1}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{.}$ $\boxed{6}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$ $\boxed{7}$ $\boxed{=}$

$\boxed{°\,'\,''}$

屏幕显示：

∴　$\alpha \approx 38°26'25''$.

例题6　已知 $\cot\alpha = 1.3025$，求锐角 α（精确到 $1''$）.

解　按下面的顺序依次按键：

$\boxed{\text{SHIFT}}$　$\boxed{\tan^{-1}}$　$\boxed{(}$　$\boxed{1}$　$\boxed{\div}$　$\boxed{1}$　$\boxed{.}$　$\boxed{3}$　$\boxed{0}$　$\boxed{2}$　$\boxed{5}$

$\boxed{)}$　$\boxed{=}$　$\boxed{°\,'\,''}$

屏幕显示：

∴　$\alpha \approx 37°30'55''$.

例题7　在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$AC = 15$，$BC = 9$，求 $\angle A$ 的度数（精确到 $1'$）.

解　∵　$\angle C = 90°$，$AC = 15$，$BC = 9$，

∴　$\tan A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{9}{15} = 0.6$.

利用计算器，得　$\angle A \approx 30°58'$.

练习 25.2(2)

1. 用计算器求下列各三角比的值（精确到 0.000 1）：
   （1）$\sin 80°$；　　（2）$\cos 35°$；
   （3）$\tan 70°$；　　（4）$\cot 68°$.
2. 用计算器求下列各三角比的值（精确到 0.000 1）：
   （1）$\tan 23°21'$；　　（2）$\sin 51°42'20''$；
   （3）$\cos 13°12'9''$；　　（4）$\cot 78°45'25''$.
3. 已知锐角 α 的三角比的值，用计算器求锐角 α（精确到 $1''$）：
   （1）$\sin\alpha = 0.4924$；　　（2）$\cos\alpha = 0.5742$；
   （3）$\tan\alpha = 0.8416$；　　（4）$\cot\alpha = 2.75$.
4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$.
   （1）已知 $b = 20$，$\angle B = 64°29'$，求 c（精确到 0.1）.
   （2）已知 $b = 9.6$，$c = 12.5$，求 $\angle A$（精确到 $1''$）.

第二节　解直角三角形

25.3　解直角三角形

我们知道，一个三角形共有三条边、三个角六个元素. 直角三角形中有一个角是直角.

思考

直角三角形的三条边和两个锐角这五个元素之间有哪些关系？

在 Rt△ABC 中，如果∠C＝90°，那么它的三条边和两个锐角这五个元素之间有以下的关系：

（1）三边之间的关系：

$$a^2+b^2=c^2.$$

（2）锐角之间的关系：

$$\angle A+\angle B=90^\circ.$$

（3）边角之间的关系：

$$\tan A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}},\quad \cot A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\angle A\text{ 的对边}},$$

$$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}},\quad \cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}.$$

将上面关系式中的∠A 换成∠B，就是∠B 与边的关系式.

问题

对于一个直角三角形，除直角外的五个元素中，至少需要知道几个元素，才能求出其他的元素？

直角三角形中除直角外的五个元素之间有特定的关系，可利用上面所列的关系式，由已知元素求未知元素.

但是，如果只知道五个元素中的一个，例如一个锐角或一条边，显然不能全部求出其他的元素，因为这样的直角三角形的大小（甚至于形状）是不确定的.

如果知道五个元素中的两个，其中一个元素是一条边，那么这个直角三角形的形状和大小都确定. 也就是说，只要知道一条边和一个锐角，或者知道两条边，就可以求其他元素.

例题1 在 Rt$\triangle ABC$ 中，已知$\angle C=90^\circ$，$\angle B=38^\circ$，$a=8$，求这个三角形的其他边和角.

解 $\because$ $\angle A+\angle B=90^\circ$，

$\therefore$ $\angle A=90^\circ-\angle B=90^\circ-38^\circ=52^\circ$.

$\because$ $\cos B=\dfrac{a}{c}$，

$\therefore$ $c=\dfrac{a}{\cos B}=\dfrac{8}{\cos 38^\circ}\approx 10.15$.

$\because$ $\tan B=\dfrac{b}{a}$，

$\therefore$ $b=a\tan B=8\tan 38^\circ\approx 6.250$.

求直角三角形的边长和角度时，常会遇到近似计算，如不加说明，则边长保留四个有效数字，角度精确到$1'$.

通过例题 1，我们已经看到，知道直角三角形中除直角外的两个元素（至少有一个元素是边），就可以求出这个直角三角形的其他三个元素.

在直角三角形中，由已知元素求出所有未知元素的过程，叫做**解直角三角形**.

解直角三角形所需要的条件，与确定一个直角三角形所需要的条件（即直角三角形全等的有关判定定理的条件）是一致的.

例题2 在 Rt$\triangle ABC$ 中，已知$\angle C=90^\circ$，$c=7.34$，$a=5.28$，解这个直角三角形.

解 在 Rt$\triangle ABC$ 中，

$\because$ $\angle C=90^\circ$， $\therefore$ $a^2+b^2=c^2$，

得 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{7.34^2-5.28^2}\approx 5.099$.

$\because$ $\sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{5.28}{7.34}\approx 0.719\,3$，

$\therefore$ $\angle A\approx 46^\circ 0'$.

$\therefore$ $\angle B=90^\circ-\angle A\approx 90^\circ-46^\circ 0'=44^\circ 0'$.

也可以先求$\angle A$，再利用 $b=c\cos A$ 求边 b 的长.

过去，我们只能解一些特殊的直角三角形（如有一个锐角为 30°或 45°）. 运用锐角三角比，就可以对任意的直角三角形，在给定的条件下解这个直角三角形. 锐角三角比是从数量方面研究直角三角形的重要工具.

练习 25.3(1)

1. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，由下列条件解直角三角形：

(1) $\angle A=60^\circ$，$a=10$（结果保留根号）；

(2) $\angle B=43^\circ 21'$，$c=27.01$.

2. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，由下列条件解直角三角形：

(1) $b=4.32$，$c=6.18$；

(2) $a=7.096$，$b=12.16$.

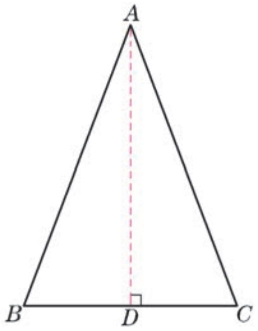


图 25－11

如果作腰上的高，能解$\triangle ABC$吗？

如果一个三角形不是直角三角形，那么要由已知元素求未知元素时，常常把它化归为解直角三角形的问题.

例题3 在等腰三角形 ABC 中，已知 $AB=AC$，$\angle A=45°$，$BC=6$，求它的腰长和底角.

分析 根据三角形内角和定理，可求得底角的大小. 如图 25－11，作底边上的高，由等腰三角形“三线合一”的性质，可知底边被高平分，于是得到两个全等的直角三角形. 因此在其中任意一个直角三角形中，知道了一个锐角、一条直角边，可解这个直角三角形，从而得到等腰三角形的腰长.

解 在$\triangle ABC$中，

$$\angle B=\angle C=\frac{1}{2}(180°-\angle A)$$

$$=\frac{1}{2}(180°-45°)=67.5°=67°30'.$$

过点 A 作 $AD\perp BC$，垂足为点 D.

$\because$ $AB=AC$，

$\therefore$ $BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 6=3.$

在 Rt$\triangle ABD$ 中，

$\because$ $\cos B=\frac{BD}{AB}$，

$\therefore$ $AB=\frac{BD}{\cos B}=\frac{3}{\cos 67°30'}\approx 7.839.$

所以，这个等腰三角形的腰长约为 7.839，底角为 $67°30'$.

试一试

在等腰三角形中，已知 $AB=AC=5$，$BC=6$，求它的顶角和底角.

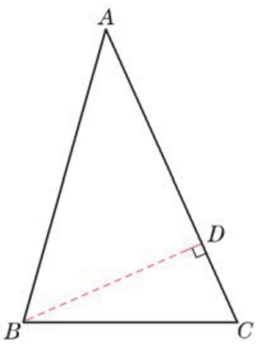


图 25－12

例题4 在$\triangle ABC$中，$AC=9$，$AB=8.5$，$\angle A=38°$. 求 AC 边上的高及$\triangle ABC$的面积.

分析 作出 AC 边上的高 BD，得 Rt$\triangle ABD$. 通过解直角三角形，可求出 BD 的长，再求$\triangle ABC$的面积.

解 如图 25－12，过点 B 作 $BD\perp AC$，垂足为点 D.

在 Rt$\triangle ABD$ 中，

$\because$ $\sin A=\frac{BD}{AB}$，

$\therefore$ $BD=AB\cdot\sin A=8.5\times\sin 38°\approx 5.233.$

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times 9\times 5.233\approx 23.55.$

所以，AC 边上的高约为 5.233，$\triangle ABC$ 的面积约为 23.55.

练习 25.3(2)

1. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC=10$，$\angle A=80°$，求BC的长及$S_{\triangle ABC}$.
2. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC=15$，$BC=24$，求：
   (1) $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$；　　(2) $S_{\triangle ABC}$.
3. 在$\triangle ABC$中，$AB=5$，$BC=8$，$\angle B=60°$，求$S_{\triangle ABC}$(结果保留根号).

25.4　解直角三角形的应用

在现实生活中，解直角三角形有着广泛的应用，我们通过举例来说明.

在测量过程中，常常会遇到仰角和俯角. 如图 25－13，当我们进行测量时，在视线与水平线所成的角中，视线在水平线上方的角叫做仰角，视线在水平线下方的角叫做俯角.

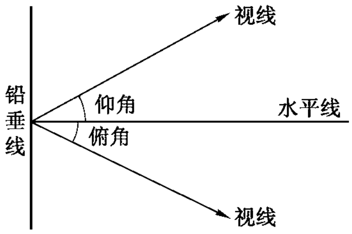


图 25－13

例题1　如图 25－14，在地面上离旗杆BC底部 10 米的A处，用测角仪测得旗杆顶端C的仰角为$52°$，已知测角仪AD的高为 1.5 米，求旗杆BC的高（精确到 0.1 米）.

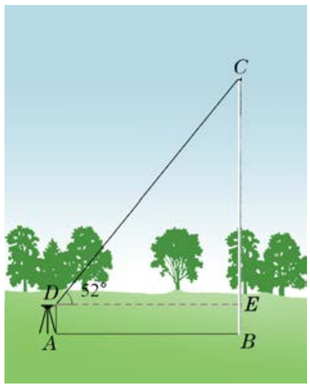


图 25－14

解　从测角仪的D处作$DE\parallel AB$，交BC于点E.

根据题意，可知

$DE=AB=10$(米)，$BE=AD=1.5$(米)，$\angle CDE=52°$.

在 Rt$\triangle DCE$中，$\tan\angle CDE=\dfrac{CE}{DE}$，得

$CE=DE\cdot\tan\angle CDE=10\cdot\tan 52°\approx 12.80$(米).

$\therefore\quad BC=BE+CE$

$\approx 1.5+12.80\approx 14.3$(米).

答：旗杆BC的高约为 14.3 米.

在近似计算中，通常将中间运算的结果比规定的精确度多保留一个有效数字或一位小数.

例题2　如图 25－15，甲乙两幢楼之间的距离CD等于 40 米，现在要测乙楼的高BC($BC\perp CD$)，所选观察点A在甲楼一窗口处，$AD\parallel BC$. 从A处测得乙楼顶端B的仰角为$32°$，底部C的俯角为$25°$. 求乙楼的高度(精确到 1 米).

解　从观察点A处作$AE\parallel CD$，交BC于点E.

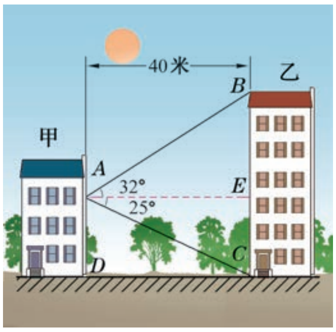


图 25－15

根据题意，可知

$AE=CD=40$(米)，$\angle BAE=32°$，$\angle CAE=25°$.

在 Rt$\triangle ABE$ 中，$\tan\angle BAE=\dfrac{BE}{AE}$，得

$BE=AE\cdot\tan\angle BAE=40\times\tan 32°\approx 25.0$(米).

在 Rt$\triangle ACE$ 中，$\tan\angle CAE=\dfrac{CE}{AE}$，得

$CE=AE\cdot\tan\angle CAE=40\times\tan 25°\approx 18.7$(米).

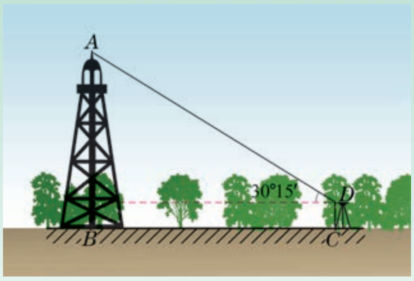
$\therefore\quad BC=BE+CE$

$\approx 25.0+18.7=43.7\approx 44$(米).

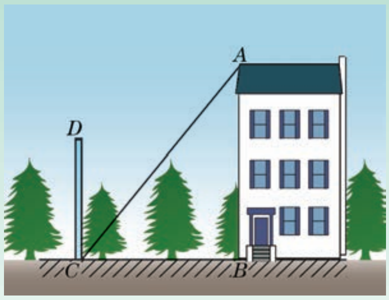
答：乙楼的高度约为 44 米.

练习 25.4(1)

1. 如图，为了测量铁塔的高度，在离铁塔底部 160 米的 C 处，用测角仪测得塔顶 A 的仰角为 $30°15'$，已知测角仪的高 CD 为 1.2 米，求铁塔的高度 AB（精确到 1 米）.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，测绘员在楼顶 A 处测得电线杆 CD 底部 C 的俯角为 $55°38'$，下楼后测得 C 到楼房 A 处下方的底部 B（在点 A 处正下方）的距离为 9.65 米. 根据这些数据，能求出楼高 AB 吗？如果能，请求出楼高（精确到 0.1 米）；如果不能，你认为还需要测哪些量，才能求出楼高？

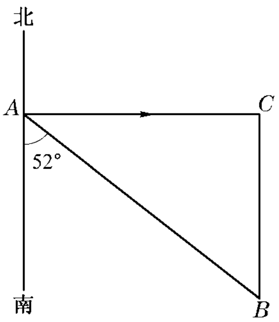


图 25－16

例题3 如图 25－16，在港口 A 的南偏东 52°方向有一座小岛 B，一艘船以每小时 24 千米的速度从港口 A 出发，沿正东方向行驶，20 分钟后，这艘船在 C 处且测得小岛 B 在船的正南方向. 小岛 B 与港口 A 相距多少千米（精确到 0.1 千米）？

解 根据题意，可知

$\angle CAB=90°-52°=38°$，$\angle ACB=90°$，$AC=24\times\dfrac{20}{60}=8$(千米).

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\cos\angle CAB=\dfrac{AC}{AB}$，得

$AB=\dfrac{AC}{\cos\angle CAB}=\dfrac{8}{\cos 38°}\approx 10.2$(千米).

答：小岛 B 与港口 A 相距约 10.2 千米.

例题4 如图 25－17，为了测量河宽，在河的一边沿岸选取 B、C 两点，对岸岸边有一块石头 A. 在△ABC 中，测得 $\angle C=62°$，$\angle B=49°$，$BC=33.5$ 米，求河宽（精确到 0.1 米）.

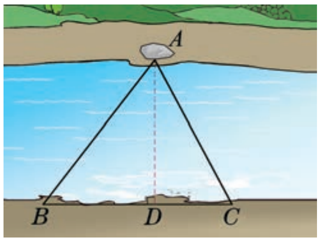


图 25－17

解 过点 A 作 $AD\perp BC$，垂足为点 D，河宽就是 AD 的长.

在 Rt△ABD 中，$\cot B=\dfrac{BD}{AD}$，得

$BD=AD\cdot\cot B=AD\cdot\cot 49°$.

在 Rt△ACD 中，$\cot C=\dfrac{CD}{AD}$，得

$CD=AD\cdot\cot C=AD\cdot\cot 62°$.

∵ $BD+CD=BC$，

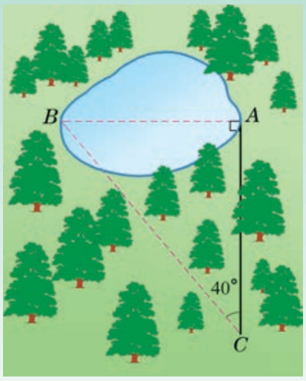
∴ $AD\cdot\cot 49°+AD\cdot\cot 62°=33.5$.

∴ $AD=\dfrac{33.5}{\cot 49°+\cot 62°}\approx 23.9$（米）.

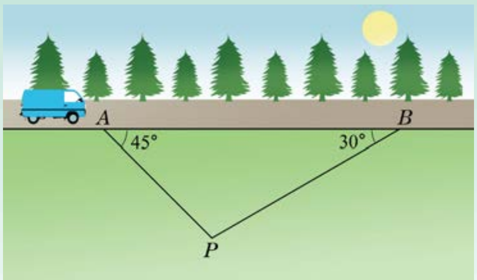
答：河宽约为 23.9 米.

练习 25.4(2)

1. 如图，为了测量池塘边 A、B 两点之间的距离，在与直线 AB 垂直的方向上选取点 C，构成 Rt△ABC. 在点 C 处测得 $\angle C$ 为 40°，AC 长为 83.5 米. 求 A、B 之间的距离（精确到 0.1 米）.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 某条道路上通行车辆限速为 60 千米/时，在离道路 50 米的点 P 处建一个监测点，道路的 AB 段为监测区（如图）. 在△ABP 中，已知 $\angle A=45°$，$\angle B=30°$，车辆通过 AB 段的时间在多少秒以内时，可认定为超速（精确到 0.1 秒）？

在修路、挖河、开渠等设计图纸上，都需要注明斜坡的倾斜程度.

如图 25－18，坡面的铅垂高度 h 和水平宽度 l 的比叫做坡面的坡度（或坡比），记作 i，即 $i=\dfrac{h}{l}$.

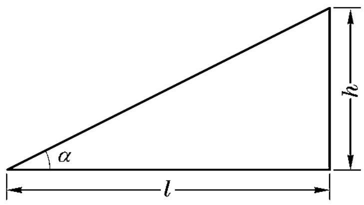


图 25－18

坡度通常写成 $1:m$ 的形式，如 $i=1:1.5$.

坡面与水平面的夹角叫做坡角，记作 α. 坡度 i 与坡角 α 之间的关系从图 25 - 18 中可以得出：

$$i=\frac{h}{l}=\tan\alpha.$$

例题5 如图 25 - 19，一座大楼前的残疾人通道是斜坡，用 AB 表示，沿着通道走 3.2 米可进入楼厅，楼厅比楼外的地面高 0.4米，求残疾人通道的坡度与坡角(角度精确到 $1'$，其他近似数取四个有效数字).

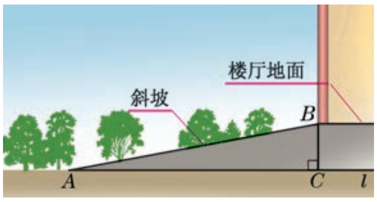


图 25 - 19

解 过点 A 作水平线 l，再作 $BC\perp l$，垂足为点 C.

根据题意，可知 $AB=3.2$ 米，$BC=0.4$ 米.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，

$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{3.2^2-0.4^2}\approx 3.1749$(米).

$\therefore\quad i=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{0.4}{3.1749}\approx 1:7.938.$

$\because\quad \tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{0.4}{3.1749}\approx 0.12599,$

$\therefore\quad \angle A\approx 7°11'.$

答：残疾人通道的坡度约为 $1:7.938$，坡角约为 $7°11'$.

例题6 如图 25 - 20(图中单位：米)，一段铁路路基的横断面为等腰梯形 $ABCD$，路基顶宽 BC 为 2.8 米，路基高为 1.2 米，斜坡 AB 的坡度 $i=1:1.6$.

(1) 计算路基的下底宽(精确到 0.1 米)；

(2) 求坡角(精确到 1°).

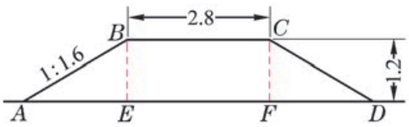


图 25 - 20

解 分别过点 B、C 作 $BE\perp AD$、$CF\perp AD$，垂足分别为点 E、F. 根据题意，可知

$BE=1.2$(米)，$AE=DF$，$EF=BC=2.8$(米).

在 Rt$\triangle ABE$ 中，

$\because\quad \dfrac{BE}{AE}=\dfrac{1}{1.6},$

$\therefore\quad AE=1.6BE=1.6\times 1.2=1.92$(米).

(1) $AD=AE+EF+DF=2AE+EF$

$\qquad=2\times 1.92+2.8=6.64\approx 6.6$(米).

(2) 设坡角为 α，则

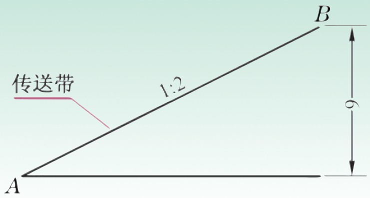
$$i=\tan\alpha=\frac{1}{1.6}=0.625,$$

$\therefore\quad \alpha\approx 32°.$

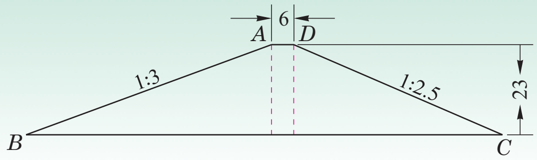
答：路基下底宽约为 6.6 米，坡角约为 32°.

练习 25.4(3)

1. 如图，传送带和地面所成斜坡的坡度为 $1:2$，它把物体从地面送到离地面 9 米高的地方，求物体所经过的路程（精确到 0.1 米）.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，某水库大坝的横断面是梯形 $ABCD$，坝顶宽 AD 是 6 米，坝高是 23 米，背水坡 AB 的坡度为 $1:3$，迎水坡 CD 的坡度为 $1:2.5$，求：
   (1) 背水坡 AB 与坝底 BC 的长度（精确到 0.1 米）；
   (2) 迎水坡 CD 的坡角 α（精确到 1°）.

例题7 图 25－21 所示的工件叫做燕尾槽，它的横断面是一个等腰梯形，$\angle B$ 叫做燕尾角，AD 叫做外口，BC 叫做里口，AE 叫做燕尾槽深度. 已知 AD 长 180 毫米，BC 长 300 毫米，AE 长 70 毫米，那么燕尾角 B 的大小是多少（精确到 $1'$）？

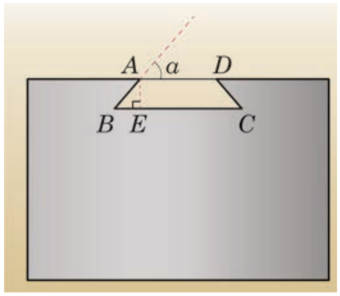


图 25－21

解 根据题意，可知

$BE=\frac{1}{2}(BC-AD)=\frac{1}{2}\times(300-180)=60$（毫米）.

在 Rt$\triangle ABE$ 中，

$\because$ $\tan B=\frac{AE}{BE}=\frac{70}{60}\approx1.167$，

$\therefore$ $\angle B\approx49°24'$.

答：燕尾角 B 的大小约为 $49°24'$.

例题8 如图 25－22，一条细绳系着一个小球在平面内摆动. 已知细绳从悬挂点 O 到球心的长度为 50 厘米，小球在左、右两个最高位置时，细绳相应所成的角为 40°. 求小球在最高位置和最低位置时的高度差（精确到 0.1 厘米）.

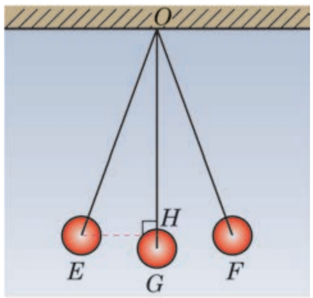


图 25－22

解 过点 E 作 $EH\perp OG$，垂足为点 H. 小球在最高位置和最低位置时的高度差就是 GH 的长. 根据题意，可知

$$\angle EOH=\frac{1}{2}\angle EOF=20°.$$

在 Rt$\triangle EOH$ 中，

$\because$ $\cos\angle EOH=\frac{OH}{OE}$，

$\therefore$ $OH=OE\cdot\cos\angle EOH=50\times\cos20°\approx46.98$（厘米）.

$\therefore\quad GH=OG-OH=50-46.98=3.02\approx3.0$(厘米).

答:小球在最高位置和最低位置时的高度差约为 3.0 厘米.

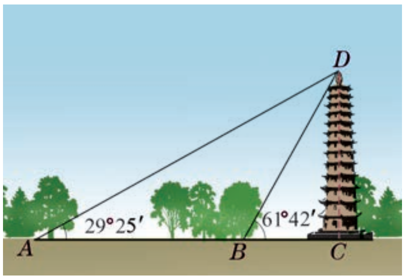


图 25－23

例题9 如图 25－23,小明想测量塔 CD 的高度.塔在围墙内,小明只能在围墙外测量,这时无法测得观察点到塔的底部的距离,于是小明在 A 处仰望塔顶,测得仰角为 $29°25'$,再往塔的方向前进 50 米至 B 处,测得塔顶的仰角为 $61°42'$(点 A、B、C 在一直线上),小明能测得塔的高度吗(小明的身高忽略不计,结果精确到0.1米)?

分析 设 $CD=x$,用 x 的代数式分别表示 BC、AC,然后列出方程求解.

解 设 $CD=x$.

在 Rt$\triangle ADC$ 中,

$\because\quad \cot A=\dfrac{AC}{CD}$,

$\therefore\quad AC=CD\cdot\cot A=x\cot29°25'$.

在 Rt$\triangle BDC$ 中,

$\because\quad \cot\angle DBC=\dfrac{BC}{CD}$,

$\therefore\quad BC=CD\cdot\cot\angle DBC=x\cot61°42'$.

$\because\quad AB=AC-BC$,

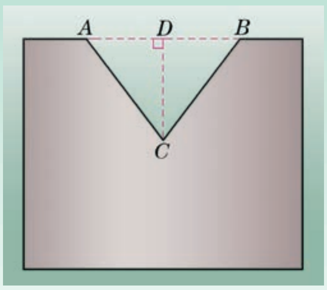
$\therefore\quad x\cot29°25'-x\cot61°42'=50$,

$$x=\frac{50}{\cot29°25'-\cot61°42'}\approx40.5(\text{米}).$$

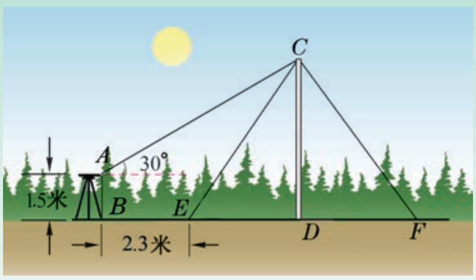
答:塔的高度约为 40.5 米.

练习 25.4(4)

1. 如图,工件上有一个 V 形槽,测得它的上口宽 $AB=20$mm,深 $CD=19.2$mm,$AC=BC$.求 V 形角($\angle ACB$)的大小 (精确到 $1'$).



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图,在电线杆上的 C 处引拉线 CE 和 CF 固定电线杆.在离电线杆 6 米的 B 处安置测角仪(点 B、E、D 在一直线上),在 A 处测得电线杆上 C 处的仰角为 $30°$.已知测角仪的高 AB 为 1.5 米,$BE=2.3$ 米,求拉线 CE 的长(精确到 0.1 米).

25

本章小结

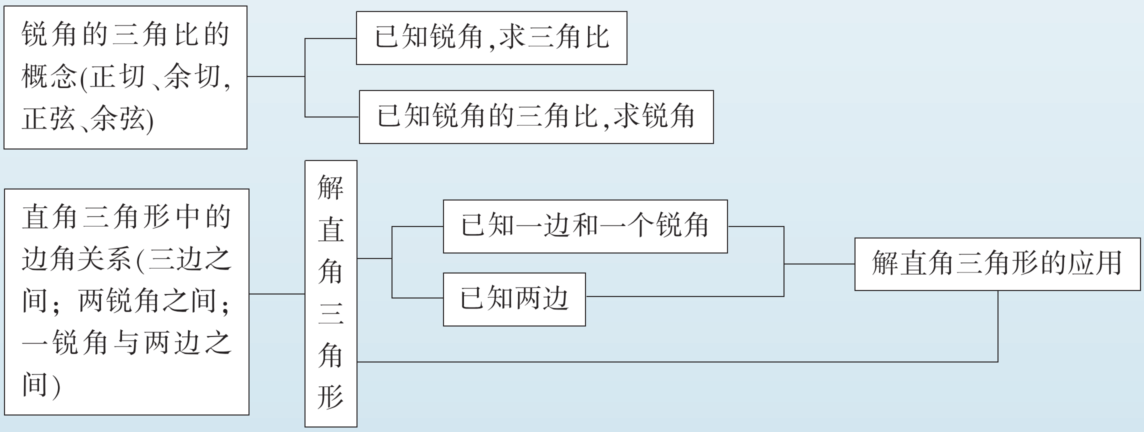
我们在本章学习了锐角的三角比的概念以及解直角三角形.锐角三角比定量地描述了在直角三角形中边角之间的联系.在直角三角形中,一个锐角的大小与两条边长的比值相互唯一确定,因此边长与角的大小之间可以相互转化.利用锐角的三角比以及勾股定理,可以对直角三角形进行定量的分析,这是以前对直角三角形进行定性研究的深入,同时为研究几何图形开辟了新的途径.

知道了直角三角形中锐角大小与边长之间的关系,进一步会联想到:在任意三角形中,内角的大小与边长之间有怎样的联系?这个问题将在高中数学学习中解决.

解直角三角形是解决任意三角形中的计算问题的基础.解直角三角形所需要的条件,可通过对判定直角三角形全等所需要的条件进行分析得到.这样的思想方法,今后也可用于对解任意三角形的研究.

通过解决实际问题,我们对解直角三角形的应用已经有了初步了解.在应用时,找到或适当构造直角三角形是前提,正确分析和把握直角三角形中的边角关系是关键.在实际生活中,解直角三角形的应用非常广泛.

本章知识的结构框图如下:



25

实践活动

测 量 活 动

活动内容

（A） 测量学校操场上旗杆的高度；

（B） 测量学校附近小河的宽度；

（C） 在学校的操场上，测量学校围墙外的高楼（或其他较高物体，如电线杆）的高度.

（可在上述各项中选择一项开展活动）

活动方式

分小组活动.

集体讨论，分工合作，共同完成测量任务.

活动要求

1. 设计测量方案：

（1） 画测量草图；

（2） 确定需测的几何量；

（3） 准备需要的测量仪器（平板仪，水平仪，测角仪，皮尺等）.

2. 实地测量.

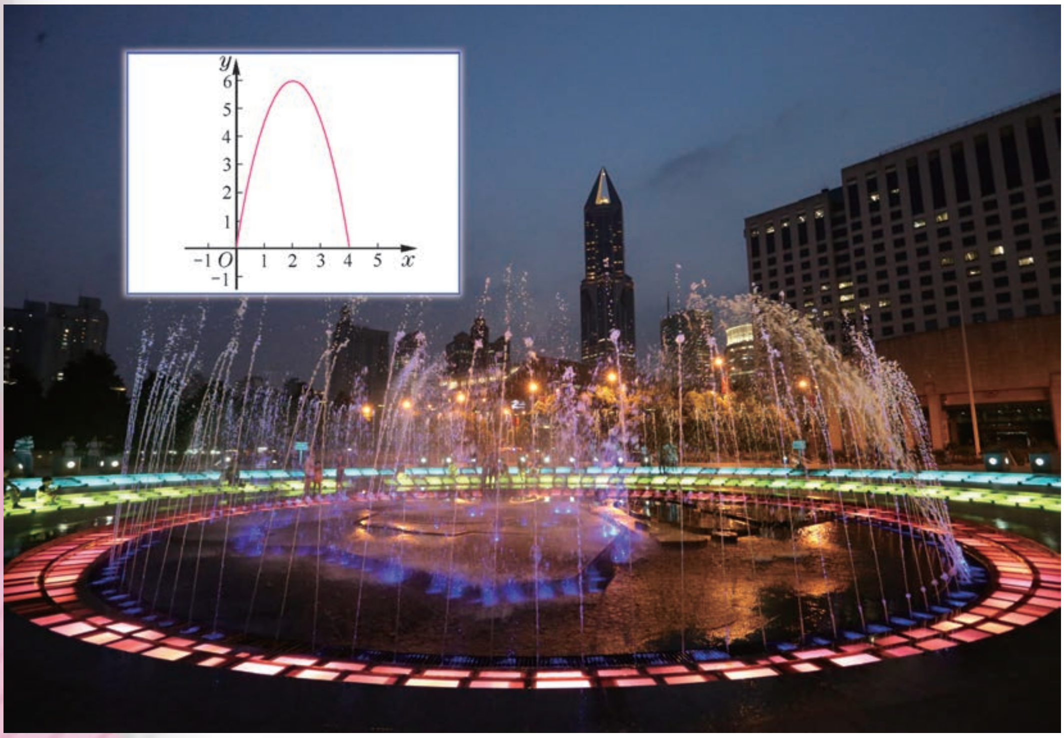
3. 计算.

4. 撰写实践活动报告.

5. 组织汇报交流.

Erci Hanshu

26 第二十六章　二次函数



广场上的喷水池周边，一个个喷头喷射出一条条水线，生动而优美.这样的水线与数学中的什么图形相联系呢？

这些水线的形象不是直线，但是呈现一定的规律.如果把一条水线看作一个函数的图像，那么这个函数肯定不是一次函数.

不过，我们对水线的形象并不陌生，例如推出的铅球、投出的篮球，它们运动的路线与水线类似.这种形态的曲线，称为抛物线.如果物体运动的路线是抛物线，那么其运动的规律可用二次函数来表示.在现实世界和实际生活中，用二次函数来描述事物变化或物体运动规律的事例有很多.

我们在本章将研究二次函数，主要内容是二次函数的概念、图像、直观性质及其简单应用.

第一节　二次函数的概念

26.1　二次函数的概念

如果正方形的边长是 x 厘米，那么它的面积 y 平方厘米是边长 x 厘米的函数，y 关于 x 的函数解析式是 $y=x^2$.

问题

（1）一个边长为 4 厘米的正方形，若它的边长增加 x 厘米，则面积随之增加 y 平方厘米，那么 y 关于 x 的函数解析式是什么？

（2）把一根 40 厘米长的铁丝分为两段，再分别把每一段弯折成一个正方形. 设其中一段铁丝长为 x 厘米，两个正方形的面积和为 y 平方厘米，那么 y 关于 x 的函数解析式是什么？

上述问题（1）得到的函数解析式是

$$y=(x+4)^2-4^2,$$

即

$$y=x^2+8x.$$

问题（2）得到的函数解析式是

$$y=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{40-x}{4}\right)^2,$$

即

$$y=\frac{1}{8}x^2-5x+100.$$

关于 x 的二次整式的一般形式是 ax^2+bx+c（其中 a、b、c 是常数，且 $a\neq0$）.

在函数解析式 $y=x^2$，$y=x^2+8x$ 和 $y=\frac{1}{8}x^2-5x+100$ 中，用来表示函数的式子都是关于自变量的二次整式.

一般地，解析式形如 $y=ax^2+bx+c$（其中 a、b、c 是常数，且 $a\neq0$）的函数叫做**二次函数**（quadratic function）.

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的定义域为一切实数.

函数的表达中涉及函数解析式和定义域. 在具体问题中，有时只研究函数解析式. 需要研究函数的定义域时，如果未加说明，那么函数的定义域由解析式确定；否则，必须指明函数的定义域.

例题1　圆柱的体积 V 的计算公式是 $V=\pi r^2h$，其中 r 是圆柱底面的半径，h 是圆柱的高.

（1）当 r 是常量时，V 是 h 的什么函数？

（2）当 h 是常量时，V 是 r 的什么函数？

解　（1）当 r 是常量时，πr^2h 是关于 h 的一次整式，所以 V 是 h 的一次函数.

（2）当 h 是常量时，πr^2h 是关于 r 的二次整式，所以 V 是 r 的二次函数.

例题2 某厂七月份的产值是100万元，设第三季度每个月产值的增长率相同，都为 $x(x>0)$，九月份的产值为 y 万元，写出 y 关于 x 的函数解析式.

解 七月份产值为100万元，月产值增长率为 x，则

八月份产值为 $100(1+x)$ 万元；

九月份产值为 $100(1+x)^2$ 万元.

所以 y 关于 x 的函数解析式是

$$y=100x^2+200x+100\ (x>0).$$

例题3 用长为20米的篱笆，一面靠墙（墙的长度超过20米），围成一个矩形花圃，如图26-1所示. 设 AB 边的长为 x 米，花圃的面积为 y 平方米，求 y 关于 x 的函数解析式及函数的定义域.

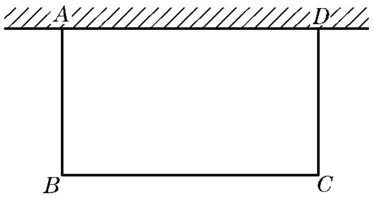


图 26-1

解 矩形 $ABCD$ 中，$AB=x$，则 $BC=20-2x$. 所以，面积 y 关于 x 的函数解析式是

$$y=x(20-2x)=-2x^2+20x.$$

由 $x>0$，$20-2x>0$，解得 $0<x<10$.

所以函数的定义域是 $0<x<10$.

在实际应用问题中，要注意函数的定义域. 自变量 x 的取值应符合实际意义.

练习 26.1

1. （口答）下列函数中哪些是二次函数？

（1）$y=\frac{3}{4}x$；　（2）$y=-0.5x^2+1$；　（3）$y=x(2x-1)$；

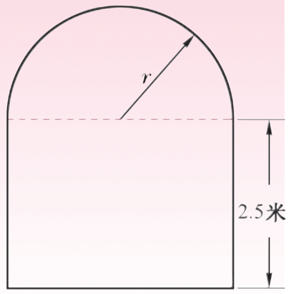
（4）$y=(x+2)^2-3$；　（5）$y=(x+4)^2-x^2$.

2. 已知二次函数 $y=2x^2-3x-2$.

（1）当 $x=-\frac{2}{3}$ 时，求函数 y 的值；

（2）当 x 取何值时，函数值为0？

3. 一条隧道的横截面如图所示，它的上部是一个半圆，下部是一个矩形，矩形的一边长为2.5米. 如果隧道下部的宽度大于5米但不超过10米，求隧道横截面积 S（平方米）关于上部半圆半径 r（米）的函数解析式及函数的定义域.



（第3题）

第二节　二次函数的图像

26.2　特殊二次函数的图像

对一次函数的研究，是从特殊的一次函数——正比例函数开始，围绕概念、图像、性质展开的.

在一次函数的研究中，我们采用了从特殊到一般的方法，经历了利用图像直观地探索函数基本性质的过程. 在已有经验的基础上，我们来研究二次函数，着重研究它的图像.

1. 二次函数 $y=ax^2$ 的图像

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$(其中 a、b、c 是常数，且 $a\neq0$)图像的研究，就从特殊形式的二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$入手.

操作

在平面直角坐标系 xOy 中，按照下列步骤画二次函数 $y=x^2$ 的图像.

观察表格中的数据，当自变量 x 取互为相反数的两个数时，它们所对应的函数值有什么关系？

(1) 列表：取自变量 x 的一些值，计算出相应的函数值 y，如下表所示：

x	…	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	…
$y=x^2$	…	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	…

(2) 描点：分别以所取 x 的值和相应的函数值 y 作为点的横坐标和纵坐标，描出这些坐标所对应的各点.

(3) 连线：用光滑的曲线把所描出的这些点顺次联结起来，得到函数 $y=x^2$ 的图像，如图 26－2 所示.

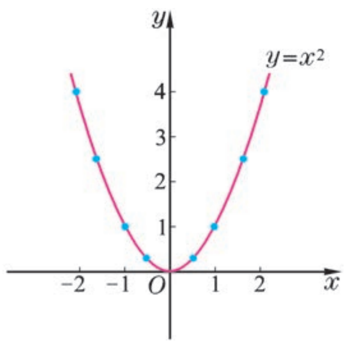


图 26－2

二次函数 $y=x^2$ 的图像是一条曲线，分别向左上方和右上方无限伸展. 它属于一类特殊的曲线，这类曲线称为**抛物线**(parabola).

二次函数 $y=x^2$ 的图像就称为抛物线 $y=x^2$.

观察

抛物线 $y=x^2$(如图 26－2)的形状、位置有哪些特征？

通过观察可以看到，抛物线 $y=x^2$ 经过原点 O 且位于 y 轴的左右两侧，向上无限伸展；抛物线上凡是横坐标互为相反数的两点总有相同的纵坐标，可知联结这样两点的线段被 y 轴垂直平分，因此若以 y 轴为折痕将抛物线 $y=x^2$ 翻折，则左右两部分可以完全重合.

归纳

抛物线 $y=x^2$ 的开口方向向上；它是轴对称图形，对称轴是 y 轴，即直线 $x=0$.

抛物线 $y=x^2$ 与 y 轴的交点是原点 O；除这个交点外，抛物线上的所有点都在 x 轴的上方，这个交点是抛物线的最低点.

抛物线与它的对称轴的交点叫做抛物线的**顶点**. 抛物线 $y=x^2$ 的顶点是原点 $O(0,0)$.

试一试

用上述方法画出函数 $y=-x^2$ 的图像，再归纳它的图像特征.

> 分别在 $y=-x^2$ 与 $y=x^2$ 的图像上且横坐标相同的任意两点，它们的纵坐标互为相反数，可知两个图像关于 x 轴对称. 可利用它们的对称性，由其中一个函数的图像画另一个函数的图像.

例题 在同一平面直角坐标系 xOy 中，分别画出二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图像.

解 (1) 列表：取自变量 x 的一些值，计算出相应的函数值 y，如下表所示：

x	…	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	2	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…	2	$\frac{9}{8}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{8}$	2	…
$y=-\frac{1}{2}x^2$	…	-2	$-\frac{9}{8}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{8}$	-2	…

(2) 描点：分别以所取 x 的值和相应的函数值 y 为点的横坐标和纵坐标，描出这些坐标所对应的各点.

(3) 连线：用光滑的曲线把描出的位于 x 轴上方及 x 轴上的点顺次联结起来，得到函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像；用光滑的曲线把描出的位于 x 轴下方及 x 轴上的点顺次联结起来，得到函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图像.

> 也可以利用 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图像关于 x 轴的对称性，由函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像画出函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图像.

这两个函数的图像如图 26 - 3 所示，它们可分别称为抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$.

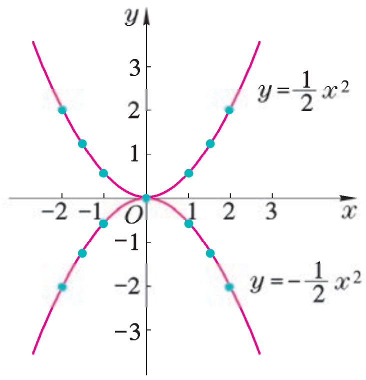


图 26 - 3

议一议

图 26 - 3 中，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 有什么共同特征，又有什么不同？

从已讨论过的例题中可以看出，抛物线 $y=ax^2$ 和抛物线 $y=-ax^2$ 关于 x 轴对称.

抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的共同特征是：它们都是以 y 轴为对称轴的轴对称图形，顶点都是原点.

这两条抛物线的不同点是：

抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 开口向上，并分别向左上方和右上方无限伸展；沿着 x 轴正方向看，这条抛物线在 y 轴左侧的部分是下降的，在 y 轴右侧的部分是上升的；顶点是抛物线的最低点.

抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 开口向下，并分别向左下方和右下方无限伸展；沿着 x 轴正方向看，这条抛物线在 y 轴左侧的部分是上升的，在 y 轴右侧的部分是下降的；顶点是抛物线的最高点.

二次函数的解析式系数特征与图像性质特征可以相互推出. 后面类同.

一般地，二次函数 $y=ax^2$（其中 a 是常数，且 $a\neq0$）的图像是抛物线，称为抛物线 $y=ax^2$. 这时，$y=ax^2$ 是这条抛物线的表达式.

抛物线 $y=ax^2$（其中 a 是常数，且 $a\neq0$）的对称轴是 y 轴，即直线 $x=0$；顶点是原点. 抛物线的开口方向由 a 所取值的符号决定，当 $a>0$ 时，它的开口向上，顶点是抛物线的最低点；当 $a<0$ 时，它的开口向下，顶点是抛物线的最高点.

练习 26.2(1)

1. 在同一平面直角坐标系 xOy 中，画出下列函数的图像：

   (1) $y=3x^2$；　　　　(2) $y=-\dfrac{1}{3}x^2$.

2. 抛物线 $y=\dfrac{1}{3}x^2$ 与抛物线 $y=-\dfrac{1}{3}x^2$ 有什么共同特征和不同点？这两条抛物线有怎样的对称性？如何用简便的方法画这两个函数的图像？

3. 已知关于 x 的二次函数 $y=(1+2k)x^2$，当 k 为何值时，它的图像开口向上？当 k 为何值时，它的图像开口向下？

2. 二次函数 $y=ax^2+c$ 的图像

函数 $y=ax^2+c$(其中 a、c 是常数，且 $a\neq0$)也是特殊形式的二次函数.

操作

在同一平面直角坐标系 xOy 中，画出二次函数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 和 $y=\dfrac{1}{2}x^2+2$的图像.

我们按照列表、描点、连线的步骤来画它们的图像.

取自变量 x 的一些值，计算出相应的函数值 y，列表如下：

x	…	-2	$-\dfrac{3}{2}$	-1	0	1	$\dfrac{3}{2}$	2	…
$y=\dfrac{1}{2}x^2$	…	2	$\dfrac{9}{8}$	$\dfrac{1}{2}$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{9}{8}$	2	…
$y=\dfrac{1}{2}x^2+2$	…	4	$\dfrac{25}{8}$	$\dfrac{5}{2}$	2	$\dfrac{5}{2}$	$\dfrac{25}{8}$	4	…

依据表中第一、二行各组对应值描点，然后画出函数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 的图像.

依据表中第一、三行各组对应值描点，再画出函数 $y=\dfrac{1}{2}x^2+2$ 的图像.

这两个函数的图像都是抛物线，如图 26－4 所示.

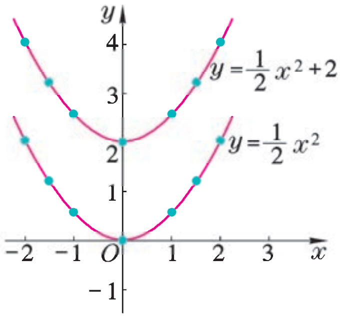


图 26－4

思考

观察在上面操作过程中所列的表格和画出的图像，可以发现分别在函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 的图像上且有相同横坐标的任意两点的纵坐标之间有什么关系？再运用图形运动来分析，这两个函数的图像之间有什么关系？

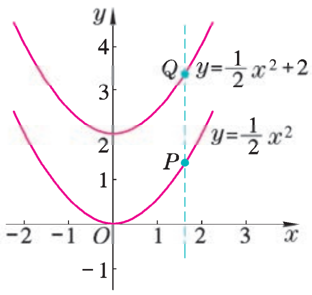


图 26－5

对于函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像上任意一点 P，设它的坐标为 (x_1, y_1)，则 $y_1=\frac{1}{2}x_1^2$. 如图 26－5，过点 P 作垂直于 x 轴的直线，与函数 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 的图像的交点记为 Q，可知点 Q 与点 P 有相同的横坐标，设点 Q 的坐标为 (x_1, y_2)，则 $y_2=\frac{1}{2}x_1^2+2$. 于是，得 $y_2=y_1+2$. 由此可知，点 P 向上平移 2 个单位就与点 Q 重合.

因为 P 是函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像上的任意一点，所以将函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像向上平移 2 个单位，就与函数 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 的图像重合. 也就是说，将函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像向上平移 2 个单位，就得到函数 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 的图像.

想一想

将函数 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 的图像与函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像进行比较，可知函数 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 的图像有哪些特征？

二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 的图像是一条抛物线，这条抛物线的开

口向上；它是轴对称图形，对称轴是 y 轴；它的顶点坐标是(0，2)；这个顶点是抛物线的最低点.

议一议

函数 $y=-\frac{1}{2}x^2-2$ 的图像与函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图像如图26－6所示，运用图形运动来分析，这两个图像之间有怎样的关系？函数 $y=-\frac{1}{2}x^2-2$ 的图像有哪些特征？

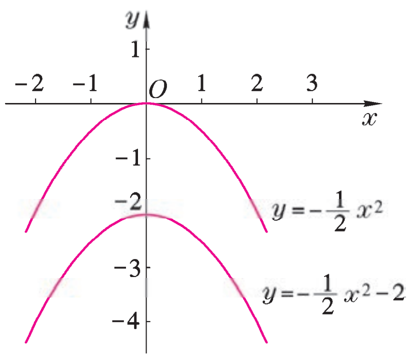


图 26－6

一般地，二次函数 $y=ax^2+c$ 的图像是抛物线，称为抛物线 $y=ax^2+c$，它可以通过将抛物线 $y=ax^2$ 向上($c>0$ 时)或向下($c<0$ 时)平移 $|c|$ 个单位得到.

由此可知：

抛物线 $y=ax^2+c$(其中 a、c 是常数，且 $a\neq0$)的对称轴是 y 轴，即直线 $x=0$；顶点坐标是$(0，c)$. 抛物线的开口方向由 a 所取值的符号决定，当 $a>0$ 时，它的开口向上，顶点是抛物线的最低点；当 $a<0$ 时，它的开口向下，顶点是抛物线的最高点.

用描点法画函数图像是常用的基本方法. 利用平移可由已知抛物线得到新抛物线，这有助于我们认识新抛物线的特征.

练习 26.2(2)

1. 说出下列函数的图像如何由抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2$ 平移得到，再分别指出图像的开口方向、对称轴和顶点坐标.

   (1) $y=\frac{1}{3}x^2+1$；　　　　(2) $y=\frac{1}{3}x^2-1$.

2. 抛物线 $y=-3x^2+2$ 的开口方向__________，对称轴是__________，顶点坐标是__________.

3. 将抛物线 $y=2x^2$ 向下平移 5 个单位，所得到的抛物线的表达式是什么？

3. 二次函数 $y=a(x+m)^2$ 的图像

解析式 $y=a(x+m)^2$（其中 a、m 是常数，且 $a\neq 0$）所表达的是一个二次函数，就其表达形式而言，也是特殊的二次函数.

思考

二次函数 $y=a(x+m)^2$ 的图像可以通过二次函数 $y=ax^2$ 的图像平移得到吗？

我们通过具体的函数来探讨. 在平面直角坐标系 xOy 中，先给出函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像，再画函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的图像.

为了便于观察和分析，列表如下：

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…	8	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8	…
$y=\frac{1}{2}(x+1)^2$	…	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8	$\frac{25}{2}$	…

依据表中第一、三行各组的对应值，通过描点、连线，画出函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的图像，这个图像是一条抛物线.

函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的图像，即抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$，如图 26－7 所示.

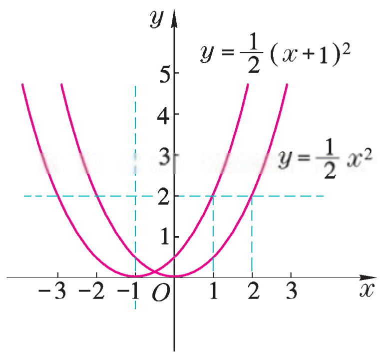


图 26－7

观察图 26－7 可见，抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 可以通过将抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向左平移得到，分析表中各列的数值可得，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向左平移 1 个单位，它一定与抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 重合. 也就是说，抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 可通过将抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向左平移 1 个单位得到.

可通过操作实验来验证这两条抛物线重合. 若要严格说理，需由这两条抛物线上对应部分的点有相同纵坐标时推出它们的横坐标之差总是 1，这里不作要求.

抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的特征，可通过与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的特征进行比较分析得到.

抛物线	开口方向	对　称　轴	顶点坐标
$y=\frac{1}{2}x^2$	向上	y 轴	(0,0)
$y=\frac{1}{2}(x+1)^2$	向上	过点(−1,0)且平行于 y 轴的直线，即直线 $x=-1$.	(−1,0)

原点(0,0)向左平移 1 个单位，所得点的纵坐标不变、横坐标减 1.

试一试

画出二次函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图像，运用图形运动来分析它与函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像之间有怎样的关系；通过比较，分析函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图像有哪些特征.

二次函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图像是抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$，它可以通过将抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向右平移 1 个单位得到. 抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的开口向上，对称轴是过点(1,0)且平行于 y 轴的直线，即直线 $x=1$，顶点坐标是(1,0).

一般地，抛物线 $y=a(x+m)^2$（其中 a、m 是常数，且 $a\neq 0$）可以通过将抛物线 $y=ax^2$ 向左（$m>0$ 时）或向右（$m<0$ 时）平移 $|m|$ 个单位得到. 由此可知：

抛物线 $y=a(x+m)^2$（其中 a、m 是常数，且 $a\neq 0$）的对称轴是过点$(-m,0)$且平行（或重合）于 y 轴的直线，即直线 $x=-m$；顶点坐标是$(-m,0)$. 当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，顶点是抛物线的最低点；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，顶点是抛物线的最高点.

练习 26.2(3)

1. (1) 如何将抛物线 $y=-3x^2$ 平移，可以分别得到抛物线 $y=-3(x+2)^2$ 和抛物线 $y=-3(x-4)^2$？

(2) 分别说出抛物线 $y=-3(x+2)^2$ 和抛物线 $y=-3(x-4)^2$ 的开口方向、对称轴和顶点坐标.

2. 说出抛物线 $y=a(x-3)^2$（a 是常数，且 $a\neq 0$）的开口方向、对称轴和顶点坐标.

26.3 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像

通过上一节的学习，我们知道，二次函数 $y=ax^2$、$y=ax^2+c$ 和$y=a(x+m)^2$的图像都是抛物线.将抛物线 $y=ax^2$ 适当地进行上下平移或左右平移，可以得到抛物线 $y=ax^2+c$ 或抛物线$y=a(x+m)^2$.

问题 1

如果将抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 向上平移 3 个单位，所得的抛物线的表达式是什么？

函数图像上每一点的坐标都适合这个函数的解析式；坐标适合函数解析式的所有点都在这个函数的图像上.

将抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 向上平移 3 个单位，得到一条新抛物线.如图 26－8，设 $P(u,v)$是新抛物线上的任意一点，过点 P 作垂直于 x 轴的直线，与抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 交于点 Q，可知点 P 与点 Q 有相同的横坐标，且点 P 的纵坐标比点 Q 的纵坐标大 3.点 Q 的横坐标为 u，则它的纵坐标是$\frac{1}{2}(u+1)^2$，点 P 的纵坐标是$\frac{1}{2}(u+1)^2+3$.所以，新抛物线上的任意一点 P 的坐标(u,v)满足关系式 $v=\frac{1}{2}(u+1)^2+3$.这表明新抛物线的表达式是 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2+3$.

由此可见，将抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 向上平移 3 个单位，那么所得抛物线是函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2+3$ 的图像，如图 26－8 所示.

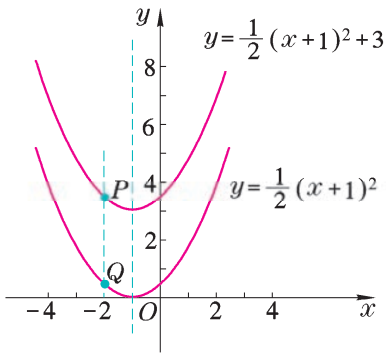


图 26－8

抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的顶点坐标是$(-1,0)$，抛物线向上平移 3 个单位后，这个顶点的对应点坐标是$(-1,3)$.由此可知抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2+3$ 的对称轴是直线 $x=-1$，顶点坐标是$(-1,3)$.

于是，抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2+3$ 可以通过将抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 进行两次平移得到. 如：

$$\text{抛物线 } y=\frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{\text{向左平移 1 个单位}} \text{抛物线 } y=\frac{1}{2}(x+1)^2$$

$$\xrightarrow{\text{向上平移 3 个单位}} \text{抛物线 } y=\frac{1}{2}(x+1)^2+3$$

将抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 先向上平移 3 个单位，再向左平移 1 个单位，同样得到抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2+3$.

议一议

怎样将抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 通过左右、上下两次平移，分别得到下列抛物线？

（1） $y=\frac{1}{2}(x-3)^2+2$； （2） $y=\frac{1}{2}(x-3)^2-2$；

（3） $y=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$.

通过对上面问题的讨论，我们看到二次函数 $y=a(x+m)^2+k$（其中 a、m、k 是常数，且 $a\neq 0$）的图像即抛物线 $y=a(x+m)^2+k$，可以通过将抛物线 $y=ax^2$ 进行两次平移得到. 这两次平移可以是：先向左（$m>0$ 时）或向右（$m<0$ 时）平移 $|m|$ 个单位，再向上（$k>0$ 时）或向下（$k<0$ 时）平移 $|k|$ 个单位.

利用图形平移的性质，可知：

抛物线 $y=a(x+m)^2+k$（其中 a、m、k 是常数，且 $a\neq 0$）的对称轴是过点 $(-m,0)$ 且平行（或重合）于 y 轴的直线，即直线 $x=-m$；顶点坐标是 $(-m,k)$. 当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，顶点是抛物线的最低点；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，顶点是抛物线的最高点.

练习 26.3(1)

1. 下列抛物线可由抛物线 $y=-2x^2$ 分别经过两次平移得到，说出平移的方向和距离：

（1） $y=-2(x+5)^2-\frac{3}{2}$； （2） $y=-2\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+4$.

2. 指出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标：

（1） $y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1$； （2） $y=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1$；

（3） $y=(x+3)^2-4$； （4） $y=-(x-3)^2+4$.

3. 已知 m 是常数.

(1) 如果抛物线$y=(m+1)x^2$的最高点是坐标轴的原点，那么m的取值范围是__________;

(2) 如果抛物线 $y=x^2+m+1$ 的顶点是坐标轴的原点，那么 m 的值是__________;

(3) 如果抛物线$y=(x+m)^2+m+1$的对称轴是$x=1$，那么它的顶点坐标是__________;

(4) 如果抛物线$y=m(x+1)^2+m+1$的顶点坐标是$(-1,-2)$，那么它的开口方向__________.

例题1 已知抛物线 $y=2(x-1)^2-1$.

(1) 指出它的开口方向、对称轴和顶点坐标；

(2) 在平面直角坐标系 xOy 中画出这条抛物线.

解 (1) 在抛物线 $y=2(x-1)^2-1$ 的表达式中，

$$a=2>0,\ m=-1,\ k=-1.$$

所以，这条抛物线的开口向上，对称轴是直线 $x=1$，顶点坐标是$(1,-1)$.

(2) 列表：

x	…	-1	-0.5	0	1	2	2.5	3	…
$y=2(x-1)^2-1$	…	7	3.5	1	-1	1	3.5	7	…

从例题 1 中的列表可见，对 x 所取的值，要使由 x、y 的各组对应值所确定的点中，有一个是顶点，其余的点两两关于所画对称轴对称.

描点、连线，画出抛物线 $y=2(x-1)^2-1$，如图 26－9 所示.

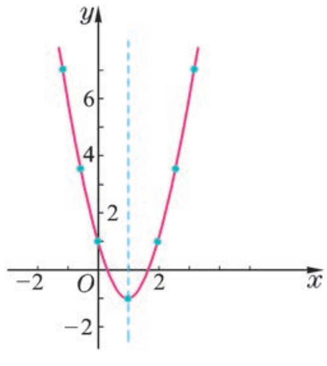


图 26－9

用描点法画抛物线 $y=a(x+m)^2+k$，通常先依据常数 a、m、k 确定这条抛物线的位置特征；画图时先画出对称轴（用虚线表示），有利于直观地检验所画抛物线的对称性.

例题2 在平面直角坐标系 xOy 中，画出二次函数 $y=-\dfrac{1}{2}(x-2)^2-3$的图像.

解　函数 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2-3$ 的图像是抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2-3$. 由 $a=-\frac{1}{2}<0$，$m=-2$，$k=-3$，可知抛物线开口向下，对称轴是直线 $x=2$，顶点坐标是 $(2,-3)$.

列表：

x	…	0	1	2	3	4	…
$y=-\frac{1}{2}(x-2)^2-3$	…	-5	$-\frac{7}{2}$	-3	$-\frac{7}{2}$	-5	…

例题 2 表明了画二次函数 $y=a(x+m)^2+k$ 的图像的一般过程.

描点、连线，画出二次函数 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2-3$ 的图像，如图 26－10 所示.

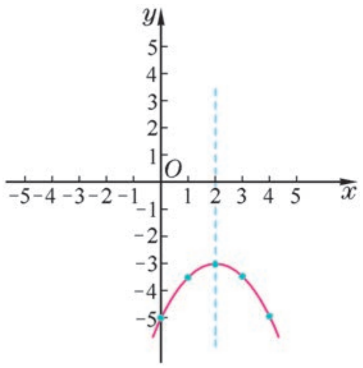


图 26－10

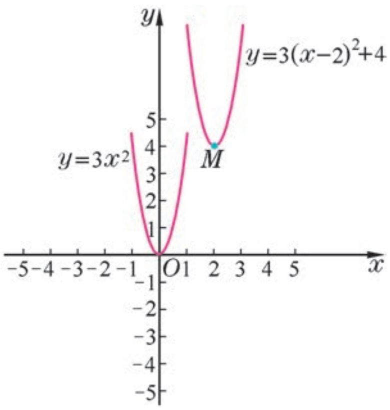


图 26－11

例题3　已知抛物线 $y=3x^2$，将这条抛物线平移，当它的顶点移到点 $M(2,4)$ 的位置时，所得新抛物线的表达式是什么？

解　抛物线 $y=3x^2$ 的顶点是原点 $O(0,0)$，将顶点移到点 $M(2,4)$ 的位置，其过程可以是先向右平移 2 个单位，再向上平移 4 个单位. 抛物线 $y=3x^2$ 经过这样的两次平移，所得的抛物线的表达式是 $y=3(x-2)^2+4$，如图 26－11 所示.

所以新抛物线的表达式是 $y=3(x-2)^2+4$.

练习 26.3(2)

1. 指出抛物线 $y=-2(x+1)^2+3$ 的开口方向、对称轴和顶点坐标，并画出这条抛物线.
2. 画出二次函数 $y=\frac{1}{3}(x-2)^2-1$ 的图像.
3. 将抛物线 $y=-2x^2$ 平移，使顶点移到点 $P(-3,1)$ 的位置，求所得新抛物线的表达式.

下面，我们来讨论二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像.

以向左或向右、向上或向下为平移方向，将抛物线 $y=x^2$ 进行两次平移，可以得到表达式形如 $y=(x+m)^2+k$ 的抛物线.

通过配方，把 x^2-4x+5 化为 $(x-2)^2+1$ 的形式.

例如，对于二次函数 $y=x^2-4x+5$，因为 $y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$，可知将抛物线 $y=x^2$ 先向右平移 2 个单位，再向上平移 1 个单位，所得抛物线就是二次函数 $y=x^2-4x+5$ 的图像.

任意一个二次函数 $y=ax^2+bx+c$（其中 a、b、c 是常数，且 $a\neq 0$），都可以运用配方法，把它的解析式化为 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式.

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像称为抛物线 $y=ax^2+bx+c$，这个函数的解析式就是这条抛物线的表达式.

例题4 用配方法把下列函数解析式化为 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式：

(1) $y=2x^2+4x+5$；　　(2) $y=-\frac{1}{3}x^2-2x+5$.

当二次项系数 a 不是 1 时，先把二次项和一次项结合在一起变形为 $a(x^2+px)$，然后配方. 要注意正确运算.
配方时，利用了等式：

$$x^2+px=x^2+2\cdot x\cdot\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

解 (1)

$$\begin{aligned} y&=2x^2+4x+5\\ &=2(x^2+2x)+5\\ &=2(x^2+2x+1)-2+5\\ &=2(x+1)^2+3. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} y&=-\frac{1}{3}x^2-2x+5\\ &=-\frac{1}{3}(x^2+6x)+5\\ &=-\frac{1}{3}(x^2+6x+9)+3+5\\ &=-\frac{1}{3}(x+3)^2+8. \end{aligned}$$

例题5 指出下列二次函数图像的开口方向、对称轴和顶点坐标：

(1) $y=x^2-x$；

(2) $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$；

(3) $y=1-x-3x^2$.

通常先把二次函数的解析式 $y=ax^2+bx+c$ 化为 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式，再讨论它的图像特征.

解 (1)

$$\begin{aligned} y&=x^2-x\\ &=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

其中 $a=1>0$，$m=-\frac{1}{2}$，$k=-\frac{1}{4}$.

因此，二次函数 $y=x^2-x$ 图像的开口向上，对称轴是直线 $x=\frac{1}{2}$，顶点坐标是 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

(2) $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$

$=\frac{1}{2}(x+3)^2-2.$

其中 $a=\frac{1}{2}>0$，$m=3$，$k=-2$.

因此，二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$ 图像的开口向上，对称轴是直线 $x=-3$，顶点坐标是 $(-3,-2)$.

(3) $y=1-x-3x^2$

$=-3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{13}{12}.$

其中 $a=-3<0$，$m=\frac{1}{6}$，$k=\frac{13}{12}$.

因此，二次函数 $y=1-x-3x^2$ 图像的开口向下，对称轴是直线 $x=-\frac{1}{6}$，顶点坐标是 $\left(-\frac{1}{6},\frac{13}{12}\right)$.

例题6 指出二次函数 $y=x^2-4x+3$ 图像的开口方向、对称轴和顶点坐标，并画出这个函数的图像.

解 $y=x^2-4x+3$

$=(x^2-4x+4)-4+3$

$=(x-2)^2-1.$

其中 $a=1>0$，$m=-2$，$k=-1$.

所以抛物线 $y=x^2-4x+3$ 的开口向上，对称轴是直线 $x=2$，顶点坐标是 $(2,-1)$.

列表：

x	…	0	1	2	3	4	…
$y=x^2-4x+3$	…	3	0	-1	0	3	…

描点、连线，画出抛物线 $y=x^2-4x+3$，如图 26 - 12 所示.

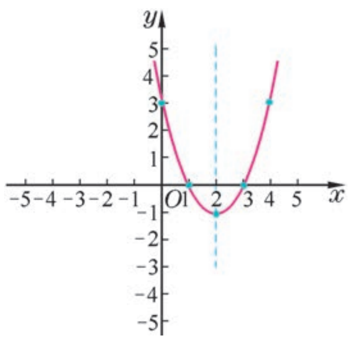


图 26 - 12

练习 26.3(3)

1. 先用配方法把下列函数的解析式化为 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式，再指出每个函数图像的开口方向、对称轴和顶点坐标：

(1) $y=x^2+4x$； (2) $y=-2x^2-3x$；

(3) $y=-3x^2+6x-7$； (4) $y=\frac{1}{2}x^2-4x+5$.

2. 画函数 $y=-x^2-4x-5$ 的图像.

问题2

已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$，能把这个函数图像的对称轴和顶点坐标用常数 a、b、c 表示出来吗？

对二次整式 ax^2+bx+c 配方，得

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

所以 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$.

将上式与 $y=a(x+m)^2+k$ 作比较，得

$$m=\frac{b}{2a},\quad k=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

由此可知：

抛物线 $y=ax^2+bx+c$(其中 a、b、c 是常数，且 $a\neq0$)的对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. 当 $a>0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口向上，顶点是抛物线的最低点；当 $a<0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口向下，顶点是抛物线的最高点.

例题7 指出二次函数 $y=-2x^2-6x+4$ 图像的开口方向、顶点坐标和对称轴，并画出这个函数的图像.

解 函数 $y=-2x^2-6x+4$ 的解析式中，

$$a=-2<0,b=-6,c=4.$$

$$-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\times(-2)}=-\frac{3}{2},$$

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times(-2)\times4-(-6)^2}{4\times(-2)}=\frac{17}{2}.$$

所以，这个函数的图像是抛物线 $y=-2x^2-6x+4$，它的开口向下，顶点坐标是 $\left(-\frac{3}{2},\frac{17}{2}\right)$，对称轴是直线 $x=-\frac{3}{2}$.

> 也可以运用配方法，得
> $y=-2x^2-6x+4$
> $=-2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{2}$，
> 然后指出结论.

列表：

x	…	-3	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	…
$y=-2x^2-6x+4$	…	4	$\frac{13}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{13}{2}$	4	…

描点、连线，画出抛物线 $y=-2x^2-6x+4$，如图 26－13 所示.

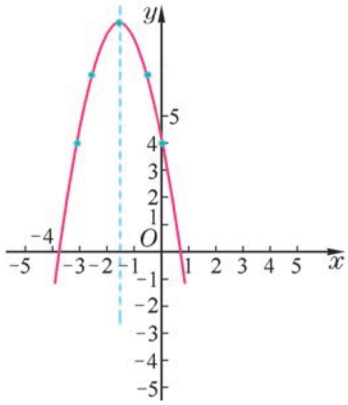


图 26－13

画抛物线 $y=-2x^2-6x+4$ 时，可先确定顶点的位置，再画出它的对称轴.
列表时要注意选取一些特殊点，如取 $x=0$，可得抛物线与 y 轴的交点坐标 $(0, 4)$，然后利用轴对称性取它的对称点 $(-3, 4)$.
描出顶点和有关特殊点后，参照对称轴，可画出这条抛物线.

观察图 26－13 中的抛物线 $y=-2x^2-6x+4$，沿着 x 轴正方向看，这条抛物线在对称轴$\left(\text{即直线 } x=-\frac{3}{2}\right)$左侧的部分是上升的，在对称轴右侧的部分是下降的.

一般地，对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$，沿着 x 轴正方向看，可见它的变化情况如下：

当 $a>0$ 时，抛物线在对称轴$\left(\text{即直线 } x=-\frac{b}{2a}\right)$左侧的部分是下降的，在对称轴右侧的部分是上升的；

当 $a<0$ 时，抛物线在对称轴$\left(\text{即直线 } x=-\frac{b}{2a}\right)$左侧的部分是上升的，在对称轴右侧的部分是下降的.

图像上升或下降，是对图像变化情况的直观描述. 规定以 x 轴正方向为参照. 一般不再说明.

练习 26.3(4)

1. 指出下列二次函数图像的开口方向、对称轴和顶点坐标：

(1) $y=x^2+6x-3$；　(2) $y=2x^2-5x+2$；

(3) $y=\frac{5}{2}x-2-3x^2$；　(4) $y=3x^2+2x$.

2. 指出抛物线 $y=-2x^2-5x+7$ 的开口方向、对称轴和顶点坐标，并画出这条抛物线，试说明这条抛物线的变化情况.

例题8 已知函数 $y=-(x+1)(x-3)$.

(1) 指出这个函数图像的开口方向、顶点坐标和对称轴，以及它的变化情况；

(2) 画出这个函数的图像.

> 二次函数的解析式形如 $y=a(x+p)(x+q)$ 时，可先化成 $y=ax^2+bx+c$ 的形式，再研究它的图像特征.

解 (1) $y=-(x+1)(x-3)$

$$=-x^2+2x+3.$$

其中 $a=-1<0$，$b=2$，$c=3$.

$$-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\times(-1)}=1,$$

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times(-1)\times3-2^2}{4\times(-1)}=4.$$

所以，二次函数 $y=-(x+1)(x-3)$ 的图像是抛物线 $y=-x^2+2x+3$，它的开口向下，顶点坐标是 $(1,4)$，对称轴是直线 $x=1$；图像在直线 $x=1$ 左侧的部分是上升的，右侧的部分是下降的.

(2) 列表：

x	…	-1	0	1	2	3	…
$y=-x^2+2x+3$	…	0	3	4	3	0	…

> 坐标为 $(-1,0)$、$(3,0)$ 的点在 x 轴上，它们是特殊点. 画函数 $y=a(x+p)(x+q)$ 的图像时，通常应描出点 $(-p,0)$ 和 $(-q,0)$.

描点、连线，画出抛物线 $y=-x^2+2x+3$，如图 26－14 所示.

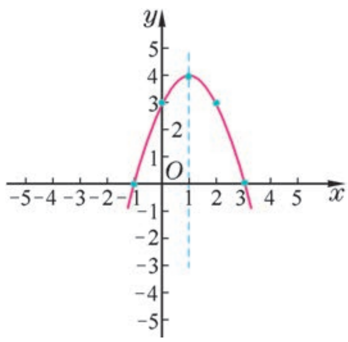


图 26－14

例题9 已知一个二次函数的图像经过 $A(0,1)$、$B(1,3)$、$C(-1,1)$ 三点，求这个函数的解析式.

> 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像必经过点 $(0,c)$；反过来，如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过点 $(0,m)$，则必有 $c=m$.

解 设所求的二次函数解析式为

$$y=ax^2+bx+c\ (a\neq0).$$

由这个函数的图像过 $A(0,1)$，可知

$$c=1.$$

再由这个函数的图像过点 $B(1,3)$ 和 $C(-1,1)$，得

$$\begin{cases} a\cdot 1^2+b\cdot 1+1=3, \\ a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+1=1. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} a=1, \\ b=1. \end{cases}$$

因此，所求二次函数的解析式为 $y=x^2+x+1$.

求这个函数解析式所采用的方法是待定系数法，其中 a、b、c 是待定系数. 一般可由已知图像上三点的坐标，得到关于 a、b、c 的一个三元一次方程组，通过解方程组，可确定 a、b、c 的值.

练习 26.3(5)

1. 指出下列二次函数图像的开口方向、对称轴和顶点坐标：

(1) $y=2x^2-12x+13$；　　(2) $y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)$.

2. 已知一个二次函数的图像经过 $(-1,0)$、$(3,0)$、$(1,-5)$ 三点，求这个二次函数的解析式.

例题10　在一块等腰直角三角形铁皮上截一块矩形铁皮. 如图 26-15，已有的铁皮是等腰直角三角形 ABC，它的底边 AB 长 20 厘米. 要截得的矩形 $EFGD$ 的边 FG 在 AB 上，顶点 E、D 分别在边 CA、CB 上. 设 EF 的长为 x 厘米，矩形 $EFGD$ 的面积为 y 平方厘米，试写出 y 关于 x 的函数解析式及定义域，并求当 EF 的长为 4 厘米时所截得的矩形的面积.

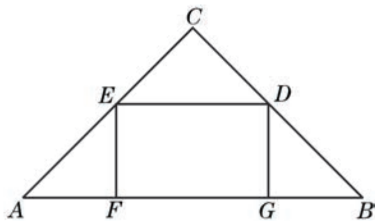


图 26-15

解　因为 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，所以 $\triangle AFE$ 和 $\triangle DGB$ 都是等腰直角三角形，于是

$$AF=EF=x, GB=DG=x,$$
$$FG=AB-AF-GB=20-2x.$$

矩形 $EFGD$ 的面积 $y=(20-2x)x=-2x^2+20x$.

由 $0<FG<AB$，得 $0<20-2x<20$，解得 $0<x<10$.

所以，y 关于 x 的函数解析式是 $y=-2x^2+20x$，定义域是 $0<x<10$.

当 $x=4$ 时，$y=-2\times 4^2+20\times 4=48$.

即当 EF 的长为 4 厘米时，所截得的矩形的面积为 48 平方厘米.

例题11 一位运动员推铅球，铅球运行时离地面的高度 y（米）是关于水平距离 x（米）的二次函数．已知铅球刚出手时离地面的高度为 $\frac{5}{3}$ 米；铅球出手后，运行水平距离 4 米时到达离地面 3 米的高度，运行水平距离 10 米时落到地面．如图 26－16 建立平面直角坐标系，求这个二次函数的解析式和定义域．

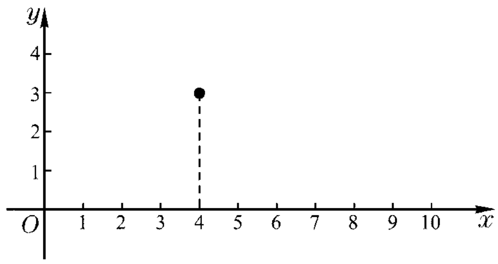


图 26－16

解 根据题意，可设二次函数的解析式为 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，并可知这个函数的图像经过 $\left(0,\frac{5}{3}\right)$，$(4,3)$，$(10,0)$ 三点．于是，得

$$\begin{cases} a\cdot 4^2+b\cdot 4+c=3, \\ a\cdot 10^2+b\cdot 10+c=0, \\ c=\dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} a=-\dfrac{1}{12}, \\ b=\dfrac{2}{3}, \\ c=\dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

所以，所求二次函数的解析式为 $y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$．

因为铅球运行的水平距离最大为 10 米，所以这个函数的定义域为 $0\leqslant x\leqslant 10$．

想一想

在例题 11 中，如果建立不同的平面直角坐标系，所求得的二次函数解析式是否一样？你对如图 26－16 这样建立平面直角坐标系的合理性有什么看法？

例题12 广场上喷水池中的喷头微露水面，喷出的水线呈一条抛物线，水线上水珠的高度 y(米)关于水珠与喷头的水平距离 x(米)的函数解析式是 $y=-\frac{3}{2}x^2+6x(0\leqslant x\leqslant 4)$.

(1) 当水珠的高度达到最大时，水珠与喷头的水平距离为多少？最大的高度是多少？

(2) 画出 y 关于 x 的函数图像，并利用图像验证(1)所得的结果.

解 (1) 在 y 关于 x 的函数解析式 $y=-\frac{3}{2}x^2+6x(0\leqslant x\leqslant 4)$ 中，二次项系数 $-\frac{3}{2}<0$，所以抛物线 $y=-\frac{3}{2}x^2+6x$ 的开口向下. 抛物线的顶点是它的最高点.

由 $y=-\frac{3}{2}x^2+6x=-\frac{3}{2}(x-2)^2+6$，得抛物线的顶点坐标是 $(2,6)$.

因为 $x=2$ 在函数的定义域内，所以，水珠的高度达到最大时，水珠与喷头的水平距离为 2 米，此时的最大高度为 6 米.

(2) 列表：

x	0	1	2	3	4
$y=-\frac{3}{2}x^2+6x$	0	$\frac{9}{2}$	6	$\frac{9}{2}$	0

描点、连线，画出函数 $y=-\frac{3}{2}x^2+6x(0\leqslant x\leqslant 4)$ 的图像，如图 26－17 所示.

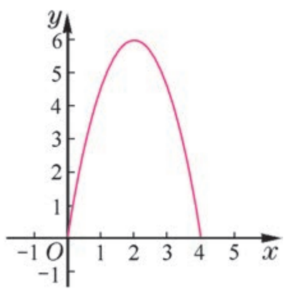


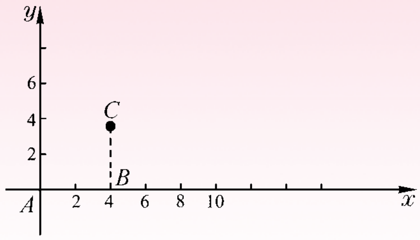
图 26－17

函数 $y=-\frac{3}{2}x^2+6x(0\leqslant x\leqslant 4)$ 的图像是抛物线 $y=-\frac{3}{2}x^2+6x$ 在 x 轴上方及 x 轴上的一段. 抛物线的顶点在这个函数的图像上，这个顶点的纵坐标比图像上其他点的纵坐标都大，可见(1)的结果正确.

练习 26.3(6)

1. 等边三角形的周长为 C,面积为 S,写出它的面积 S 关于周长 C 的函数解析式.

2. 在足球队进行射门训练时,一球员正对球门,从离球门 32 米的地面 A 处起脚将球吊进球门,球的飞行路线呈现抛物线形. 当球飞越的水平距离 AB 为 4 米时,它离地面的高度 BC 为 3.75 米;当球刚进球门时,它离地面的高度为 2 米. 以 A 为原点,以垂直于球门线的直线为 x 轴,如图建立平面直角坐标系,求此抛物线的表达式.



(第 2 题)

本章小结

我们在本章主要学习了二次函数的概念、图像、直观性质及其简单应用，对二次函数有了初步的了解，同时加深了对函数的认识.

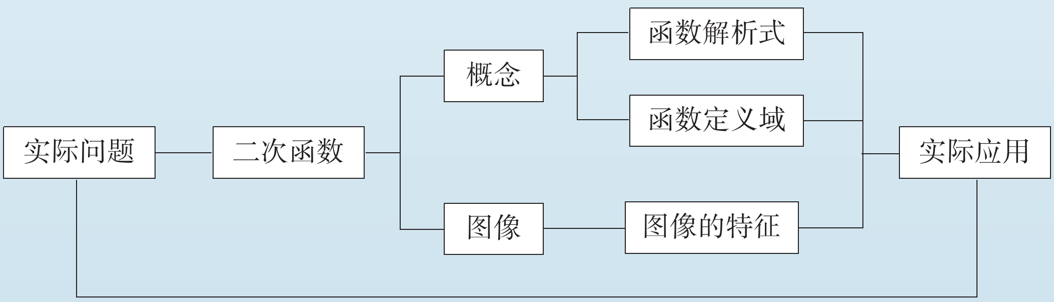
经历了从正比例函数、反比例函数到一次函数、二次函数的学习过程，我们可以切实感受到，函数概念是从广泛的现实生活中抽象出来的，函数知识是分析和研究事物运动变化规律的重要工具.

在已学过的函数解析式中，如 $kx+b$，ax^2+bx+c，$\dfrac{k}{x}$ 等，都是我们熟悉的代数式，只是其中的字母 x 表示“变量”，其他字母表示“常数”. 当 $k\neq0$、$a\neq0$ 时，$kx+b$、ax^2+bx+c 分别是关于 x 的一次整式和二次整式，则相应解析式分别表示一次函数和二次函数；类似地，$y=\dfrac{k}{x}$（k 是不等于零的常数）表示一个分式函数，这种特殊形式的分式函数称为反比例函数. 把握函数解析式与代数式之间的这种联系，有助于我们理解函数的概念.

我们对二次函数图像的探讨，是从简单的二次函数 $y=ax^2$ 的图像入手，通过平移，得到了一般的二次函数的图像. 在认识 $y=ax^2$ 的图像特征的基础上，还是利用平移，获得了对一般的二次函数图像特征的认识. 这种从特殊到一般以及利用图形运动研究图像的方法，简明而有效，在今后的学习中还将继续运用.

根据图像的特征，可以直观地认识函数的一些性质，其中体现了数形结合的思想方法.

本章的知识结构框图如下：



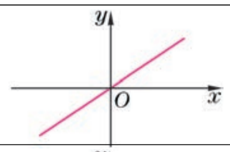
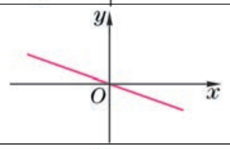
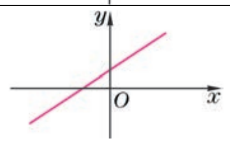
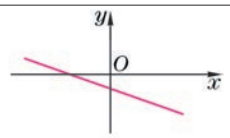
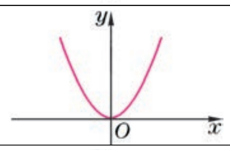
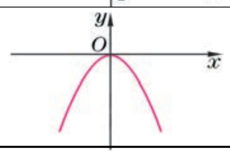
阅读材料

利用函数的图像研究函数

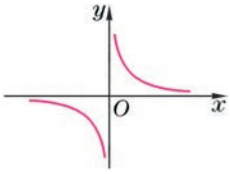
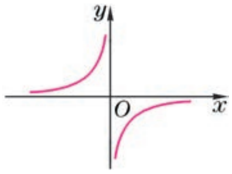
函数是刻画事物运动变化过程和发展规律的数学模型，应用非常广泛. 解析法、列表法、图像法是表示函数的三种常用方法，这几种表示方法各有特点. 我们对函数进行分析和研究，要学会利用它的不同表示方法的优点.

用图像法表示函数，具有直观性. 利用函数的图像研究函数，是一种最基本的初等方法，可以把它称为“图像的方法”. 用图像的方法研究函数，主要是通过观察图像的特征，获得对函数的表象的直观认识. 这是“看图形识函数”，是数形结合的思想方法的有效运用.

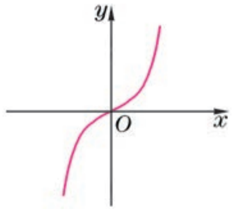
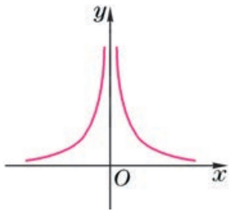
对函数 $y=f(x)$ 在平面直角坐标系 xOy 中的图像进行观察，现在主要关注以下问题. 从整体看：图像是否有间断，是否向某一个或几个方向不断伸展，是否与 x 轴、y 轴相交，是否关于某一直线或原点对称，是否有最高点或最低点等；沿着 x 轴的正方向看：图像是否有上升、下降的变化，如有升降还要看哪几段上升、哪几段下降、在哪里转折等. 由此归纳出图像的一些特征，从中得到有关这个函数性质的信息. 我们利用图像的方法，对正比例函数、一次函数、二次函数以及反比例函数有了直观的认识. 例如下表：

函数 $y=f(x)$	图像		图像特征	函数性质
正比例函数 $y=kx$	$k>0$		直线. 过原点，上升.（关于原点对称）	y 随着 x 增大而增大.
	$k<0$		直线. 过原点，下降.（关于原点对称）	y 随着 x 增大而减小.
一次函数 $y=kx+b$	$k>0$		直线. 上升.	y 随着 x 增大而增大.
	$k<0$		直线. 下降.	y 随着 x 增大而减小.
二次函数 $y=ax^2$	$a>0$		抛物线. 关于 y 轴对称；y 轴之左降、之右升，顶点最低.	在 $x\leqslant0$ 时，y 随着 x 增大而减小；在 $x>0$ 时，y 随着 x 增大而增大.
	$a<0$		抛物线. 关于 y 轴对称；y 轴之左升、之右降，顶点最高.	在 $x\leqslant0$ 时，y 随着 x 增大而增大；在 $x>0$ 时，y 随着 x 增大而减小.

（续表）

函数 $y=f(x)$	图像		图像特征	函数性质
反比例函数 $y=\frac{k}{x}$	$k>0$		双曲线．两支各下降．（关于原点对称）	在 $x<0$ 和 $x>0$ 时，分别有 y 随着 x 增大而减小．
	$k<0$		双曲线．两支各上升．（关于原点对称）	在 $x<0$ 和 $x>0$ 时，分别有 y 随着 x 增大而增大．

不妨再尝试一下，用图像的方法来研究函数 $y=x^3$ 和 $y=\frac{1}{x^2}$：

函数	图像	图像特征	函数性质
$y=x^3$			
$y=\frac{1}{x^2}$			

用图像的方法研究函数，形象直观．在现实生活，我们就常用图像的方法研究函数．例如，气温随着时间变化、血压随着时间变化、股票随着时间变化等，就常用图像法把函数关系表示出来，然后利用图像进一步分析它们的变化情况．

用图像的方法研究函数，必要的前提是知道这个函数的图像．如果已知函数的解析式，那么可用“描点法”大致画出这个函数的图像；还可借助于计算机或图形计算器，快捷地画出图像．这样，我们利用图像，可以初步了解这个函数的性质，为深入分析函数的性质提供思考的基础．但是，“描点法”的描点，个数总是有限的，画出来的图像往往不够精确，也不完整；利用机器画出来的图像通常也是局部的．所以，图像的方法对函数的研究很实用，但有局限性，也不完全可靠．

我国著名数学家华罗庚先生说：“数无形时少直觉，形少数时难入微；数形结合百般好，隔离分家万事休．”可见，有了“数”与“形”的结合，数学才能展翅高飞．

说　　明

本册教材根据上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会制定的课程方案和《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》编写,供九年义务教育九年级第一学期试用.

本教材由上海师范大学主持编写,经上海市中小学教材审查委员会审查准予试用.

本册教材的编写人员有:

主编:邱万作　　　分册主编:蔡则彪

特约撰稿人:(按姓氏笔画为序)王　华　史荣铨　邵世开　章　健

2019年教材修订组成员:叶锦义　邵世开　沈　洁

陆海兵　徐晓燕　顾跃平

本册教材图片提供信息:

图虫网(封面一幅图,目录P1一幅图,目录P2一幅图,P10一幅图,P55两幅图,P59一幅图,P78一幅图,P83一幅图);壹图网(目录P1一幅图,P1一幅图);上海教育出版社(P69四幅图,P70三幅图,P71两幅图)

插图绘制:黄国荣、顾云明、周吉

经上海市中小学教材审查委员会审查
准予试用　准用号Ⅱ-CB-2019009

责任编辑　章佳维

九年义务教育课本
数　学
九年级第一学期
(试用本)
上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会

上海世纪出版股份有限公司
上　海　教　育　出　版　社 出版
（上海市闵行区号景路159弄C座　　邮政编码：201101）
上海新华书店发行　　上海中华印刷有限公司印刷

开本 890×1240　1/16　印张 7
2019年7月第1版　　2025年6月第7次印刷
ISBN 978-7-5444-9339-0/G·7700

定价：9.00元
价格依据文件：沪价费〔2017〕15号
如发现内容质量问题，请拨打 021-64319241
如发现印、装问题，请拨打 021-64373213，我社负责调换

绿色印刷产品

ISBN 978-7-5444-9339-0