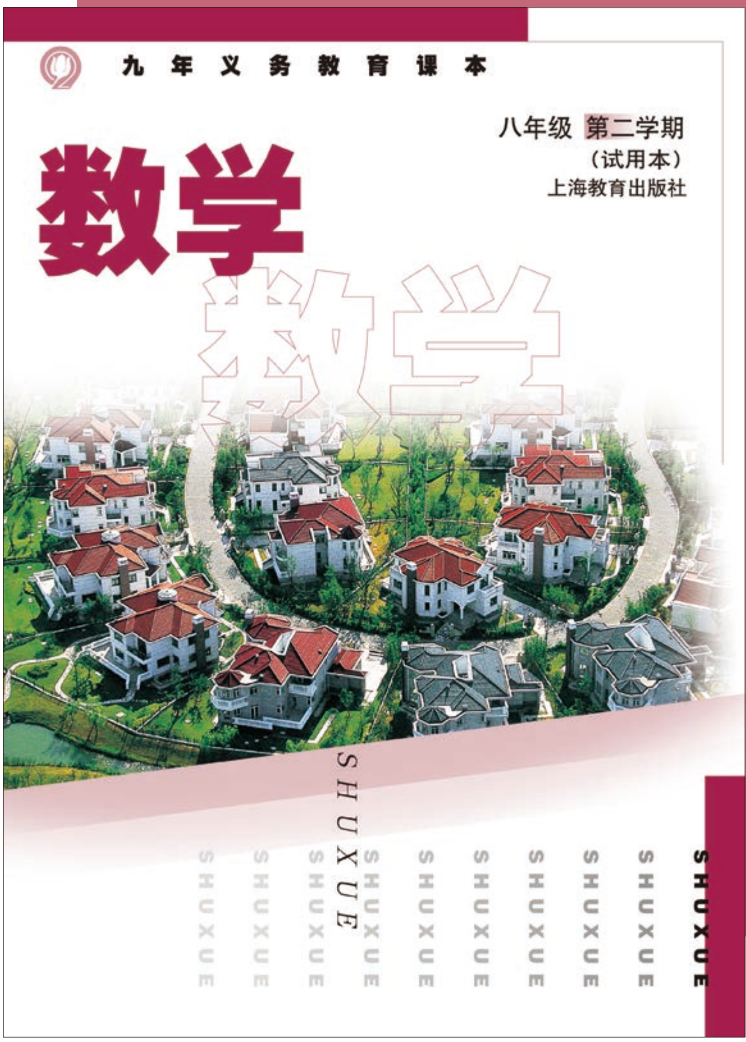
九 年 义 务 教 育

八年级 第二学期

（试用本）

数学

教学参考资料



上海教育出版社

目　录

注 1　标有“*”号的章名均配有原课本的缩小文本.

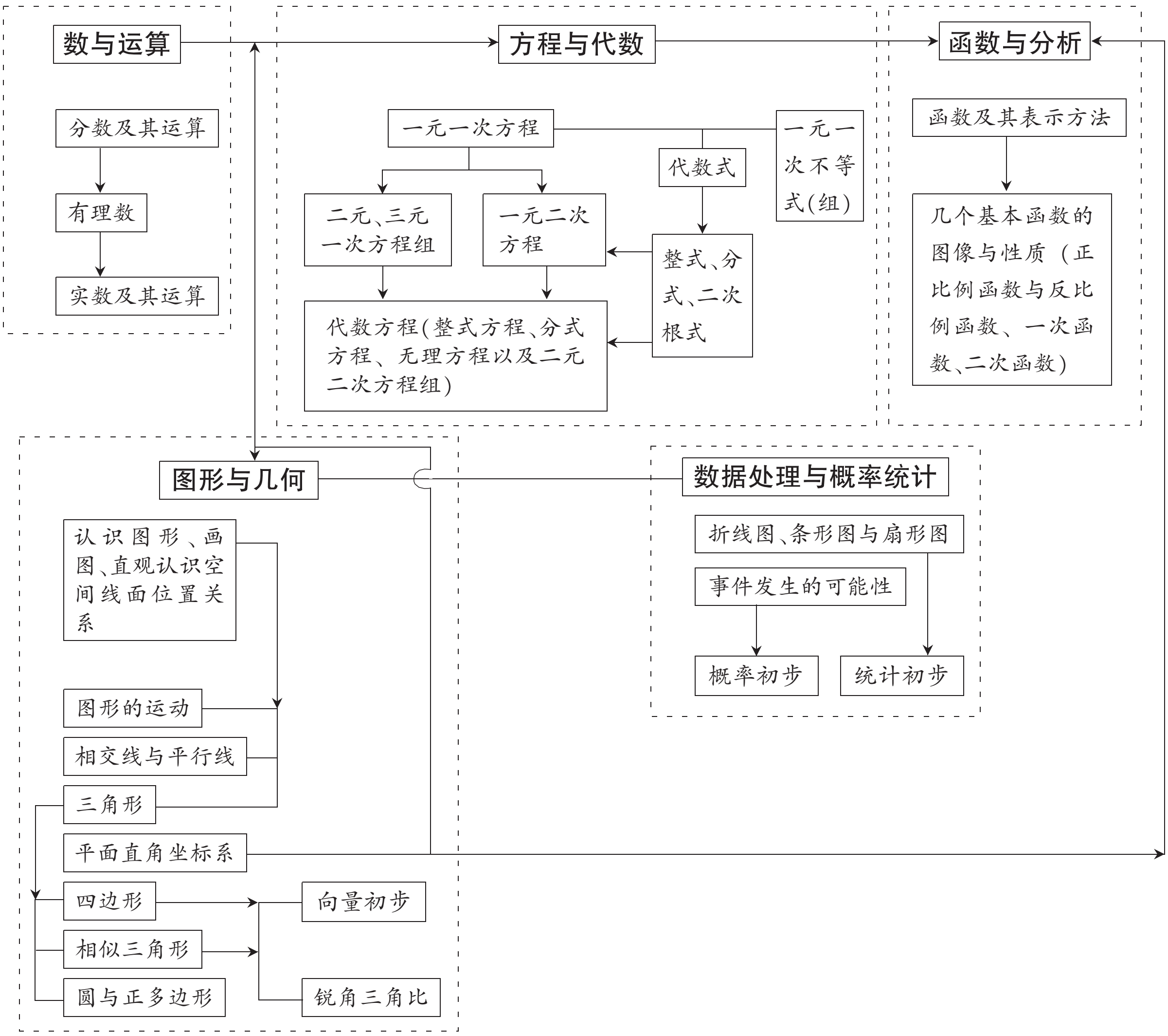
注 2　括号“(　)”内页码为课本相应页码.

课本简介

一、初中数学课本内容框架体系

1. 知识内容框图

《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》中指明,数学课程内容包括"基本内容""拓展内容"和"专题研究与实践"三类.其中"基本内容"是所有学生必备的、共同的数学基础;这些内容按其所属知识领域,分为"数与运算""方程与代数""图形与几何""函数与分析""数据处理与概率统计"等五个部分,它们自成体系,又相互联系,构成一个有机的整体.根据数学知识内容"通盘设计、分阶段安排"的原则,初中数学基本内容的框图如下:



2. 各年级内容安排

数学基本内容各部分设计为若干个学习主题,组成学习序列.初中数学课本的编写,在把握各部分内容的发展主线和相互联系的基础上,采取"多线有序并进、螺旋上升,内容互相穿插、混合编排"的方式.另外,为做好初、高中数学的衔接,设置了数学"拓展Ⅱ",提供希望进入普通高中的学生进行学习.各年级课

本内容安排如下：

<table>
<tr><td rowspan="2">年级</td><td colspan="5">基　本　内　容</td></tr>
<tr><td>数与运算</td><td>方程与代数</td><td>图形与几何</td><td>函数与分析</td><td>数据处理与概率统计</td></tr>
<tr><td>六年级</td><td>数的整除性
分数及其运算
比和比例
有理数及其运算
数轴
有理数的大小比较
科学记数法</td><td>一元一次方程
二元、三元一次方程组
一元一次不等式（组）</td><td>圆与扇形
基本图形的画法
长方体的再认识</td><td></td><td rowspan="2">在数的运算、字母表示数等学习中，渗透可能性大小问题和一些统计量计算；结合扇形、画图等内容，学习画条形图、折线图、扇形图</td></tr>
<tr><td>七年级</td><td>实数
实数的运算
n 次方根
有理数指数幂</td><td>代数式
整式及其运算
因式分解
分式及其运算</td><td>图形运动
相交线与平行线
三角形
平面直角坐标系</td><td></td></tr>
<tr><td>八年级</td><td></td><td>二次根式
一元二次方程
整式方程
分式方程
无理方程
二元二次方程组</td><td>几何证明
四边形
向量及其加减法</td><td>函数及其表示法
正比例函数
反比例函数
一次函数</td><td>确定事件与随机事件
概率的意义
等可能试验
简单事件的概率</td></tr>
<tr><td rowspan="3">九年级</td><td></td><td></td><td>相似三角形
实数与向量的乘法
圆与正多边形
锐角三角比</td><td>二次函数</td><td>数据整理与统计图表
统计的意义
表示一组数据平均水平的量
表示一组数据波动程度的量
表示一组数据分布的量</td></tr>
<tr><td colspan="5">【拓展Ⅱ】——定向拓展内容</td></tr>
<tr><td></td><td>一元二次方程的根与系数的关系</td><td>直线与圆再研究
与圆有关的角及线段
四点共圆</td><td>二次函数再研究
二次函数应用</td><td></td></tr>
</table>

3. 内容变化重点

依据《上海市中小学数学课程标准（试行稿）》，初中数学课本内容的组织和处理，相对于上海市原来的初中数学课本进行了一些调整.内容变化的主要方面如下：

（1）在引进计算器和建立数字化数学活动平台的背景下，在确保学生获得关于数及式的运算、解方程、画图等基本技能的切实训练的前提下，删减用纸笔进行繁复的数值计算的内容；削减孤立的加、减、乘、除、乘方、开方的繁复演练；精简关于式的运算、变形、求值以及单纯解方程（组）训练的繁难内容；削减复杂的求函数定义域和用描点法画复杂函数图像的内容.同时，有关内容的教学重点相应发生转移，如数与式的运算，侧重于引导学生体会算理，理解和掌握运算法则、运算性质、运算顺序，寻找和选择合理、有效的运算途径；方程的学习，侧重于引导学生探究解法，体会解方程的基本原理和一般过程，获得列方程解应用题的过程体验和经验；函数的研讨，侧重于引导学生树立运动、变化的观点，懂得运用函数思想和数形结合思想分析问题，了解函数研究的内容、方法及其基本应用.

（2）在数与运算中，渗透数系扩展的基本思想和原则，突出数系通性；在一元一次方程中，通过运用有

理数的运算性质和等式性质解方程，展示以通性求通解的代数主题，同时提供学习代数式的经验基础；在一元二次方程中，强化代数主题以及化归的思想、策略和方法；通过进一步研究简单的高次方程、分式方程、无理方程和二元二次方程组以及方程的应用，深化对方程的基础知识和解方程的基本思想的认识.

(3) 降低认识函数的起点，以两个变量存在确定的相互依赖关系来描述函数，突出函数的本质；利用函数图像，直观认识函数的基本性质.

(4) 把圆柱、圆锥和球的有关内容移到高中，在图形运动中对等腰三角形、平行四边形和圆的有关性质不展开讨论；改善实验几何到论证几何的衔接，展现“实验—归纳—猜测—论证”的过程；对圆的有关知识内容进行分层处理，对几何论证的难度加强控制；在论证几何中，重视发挥图形研究过程对学生学习演绎推理方法的载体作用和对培育学生的理性精神、逻辑推理能力所具有的教育价值.

(5) 结合有关几何内容，引进向量及其线性运算；结合有关数的运算和图形的知识，引进“可能性”和“数据整理”问题，再集中学习“概率”和“统计”的初步知识.

(6) 加强数学与现实生活的联系，重视数学模型及其应用；增设“阅读材料”，加强数学与文化的整合，进行人文精神的教育；安排“探究活动”和“实践活动”，促进学生的体验性学习和探究性学习.

(7) 设置“拓展Ⅱ”板块，把“一元二次方程的根与系数的关系”“二次函数解析式的确定及其与一元二次方程的联系”“圆与直线位置关系定理以及与圆有关的角和四点共圆”等列为定向拓展内容，规定今后要进入普通高中的学生必须学习.

4. 课本使用要点

(1) 全面把握课程目标.

数学教育在发展和完善人的教育活动中，在形成人类理性思维和促进个人智力发展的过程中，发挥着独特的、不可替代的作用.要充分认识数学的育人功能，确立正确的数学教育目的观.数学课程及其教学，不仅要关注学生对数学知识、技能、思想方法的掌握，关注其数学能力的发展，而且要有助于学生理解数学的社会价值，领略数学文化的内涵，体验数学思维方式和方法，形成良好的数学思维品质，促使学生的数学素养全面提高；要让学生学习自主获取数学知识的方法，体会数学思考和创造的过程，增强学习的兴趣和自信心，不断提高自主学习的能力，帮助学生确立终身学习的愿望，奠定终身发展的基础.

数学课程目标体系含有“知识与技能”“过程与方法”“情感态度与价值观”三个维度，分为总目标和学段目标两个层次，它们通过全程的数学教学整体实现.课程内容主题的学习要求，是课程目标的具体化体现和形成性标志；恰当制订、有效落实各章和每节课的教学目标，是逐步达成课程目标的根本保证.

数学课程目标对数学教学具有定向和引导的意义.每课教学目标的制订，要全面关注三个维度，针对教学实际，指向明确，定位准确，切实可行.

(2) 精心组织教学内容.

数学课本是课程内容的重要载体，为教学提供了基本素材，具有系统性、通用性；课本内容的安排，显示了对教学材料进行组织的一条基本线索和一种可取形式，有借鉴性也有局限性.不同班级、不同学生使用同样的课本，必须有区别地对待、有适当的调整.所以，具体教学中的内容组织，既要尊重课本，更要活用课本，整体把握课本要求，创造性地使用课本素材.要在研读课本、分析学生的基础上，从达成目标的需要着眼，从学生学习的实际出发，恰当选取和组织每节课教学的素材内容.要体现内容与目标的一致性以及与学生现有认知水平的适切性；要重视内容的基础性、层次性、结构性和可接受性；要有助于学生对数学的认识和理解，有助于激发学生学习数学的兴趣和信心.

教学内容的组织还要强调应更多地关注教学的主体目标和重点内容，关注数学的基本运用及其与现实生活的联系，注重于打好基础、促进发展；不要在细枝末节上纠缠，不要搞过于繁杂和技巧性过强的统一训练.

(3) 合理安排教学过程.

数学教学是学生在教师指导下主动学习课程的真实过程.在教学过程中，教师、学生、教学内容、教学环境等众多因素共同作用、相互影响，推动教学的实施.教学过程的设计，要确立和尊重学生的学习主体地位，坚持“教”为“学”服务的原则；要强调有效发挥学生在学习活动中的主动、能动作用，发挥教师对学生学

习的指导、促进作用，体现教师主导与学生主动相统一，师生互动，共同发展；要切实加强数学基础教学，重视过程教学，遵循学生认识数学的一般规律和数学发展的逻辑顺序，展现有效落实数学基本知识、基本技能、基本能力和基本应用的教学途径，同时把接受性学习与探究性学习、个体学习与合作学习等多种方式适当组合运用于其中，将体验探索、发现过程和经历数学化、再创造过程等目标要求有机整合于其中；要创设良好的认知环境，适切应用现代信息技术，构建民主、平等、和谐的师生关系，提供开放自主的活动空间和丰富多样的学习资源，促进学生积极、自由地思维，生动、活泼地发展.

数学课本的编写力求体现过程模式，展现知识的发生、发展和形成的过程，通过“问题—活动”引导学生探索求知.课本内容的呈现方式，为改善教学过程提供了一定的思考基础和有利条件.教学实施过程的具体安排，与教师、学生、环境等各方面因素有关.要对课本内容进行教学法的加工，要注意课堂生成资源的利用，要注意及时反馈和调节，使教学过程充满活力；要为学生自主活动提供机会和条件，发挥师生的积极性、创造性和营造良好的认知环境，激活课堂.

(4) 切实改进学习评价.

数学学习评价是对学生通过数学学习所取得的成果和达到的水平作出评判，同时对学生改进学习和完善自我进行导向；它又是实施教学反馈、评估和决策的重要环节.学习评价应强化其教育功能和激励作用，更多地肯定进步、鼓励成功、鼓舞信心；评价的结果应更多地用于帮助师生改进数学的教与学，引导师生正确把握目标、能动发展，鼓励学生努力学习、奋发上进.

学习评价活动有期中、期末测试和章节测验，还包括对每节课达成学习目标的情况分析和对学生日常学习表现的考察，这些都是形成性评价活动.初中毕业考试及学业评定，是学段的终结性评价.

形成性评价，其立足点是“形成、改进”，着眼点是“引导、促进”.形成性学习评价的实施，不仅要评价学生通过数学学习所取得的成果和达到的水平，更要重视学生在学习过程中的变化和发展，关注学生在学习活动中所表现出来的主体精神、进取态度、行为习惯、思维品质和学习潜力.由此，学习评价的方式和方法应多种多样，评价结果的报告和解释应重视定性与定量相结合、统一性与灵活性相结合，体现评价的全面性、动态性、综合性和激励性.

长期以来，学习评价活动偏重于书面考试和分数评定，注重于认知发展的水平，因此必须改进和完善学习评价.要端正学习评价的目的，建立起“主体多元、方法多样”的评价体系，加强过程性评价，实施发展性评价.

必须强调，形成性学习评价，应更多地关注学生在学习过程中的变化和发展，注重对学生达成课程目标的启发和引导.应重视对学生课堂学习情况的分析和日常学习表现的观察，加强评价者与被评价者之间的沟通和交流；应加强对测试命题的研究，关于数学基础知识和基本技能的考查，要把握基本要求，突出教学重点，注重理解实质，体现数学思想方法，发挥测试命题对用好数学课本、加强数学基础教学的积极导向作用.

二、本册课本内容编写说明

八年级第二学期数学课本(以下简称本册课本)，包含“一次函数”“代数方程”“四边形”“概率初步”等四章内容，还有配合各章内容的练习部分.

1. 编写思路

本册课本基本内容的确定，其依据是《上海市中小学数学课程标准(试行本)》.课本编写的整体思路是：把握内在联系，体现精中求简，突出数学思想，关注学习过程.在具体编写中，强调高观点、低起点，抓主线、重结构，展现过程、提供经历，简明说理、适度严谨，联系实际、加强应用.

(1) 把握内在联系，依序顺理成章.

把握内在联系，主要指知识内容的形成和发展有清晰的线索，承前启后，符合逻辑；逐步递进，有序展开.

在八年级第一学期数学课本中，安排了“二次根式”和“一元二次方程”两章，基本完善了关于代数式和方程的基础性研究；还通过“几何证明”一章的教学，基本实现了从实验几何到论证几何的跨越，并形成了

演绎推理的基础；通过“正比例函数与反比例函数”一章的教学，基本完成了从常量数学到变量数学的转折和函数研究的入门.这样，既为学生进一步学习代数方程、初等函数、论证几何奠定了必要的基础，同时又展现出数学知识发展的线索.

从正比例函数到一次函数，从一元低次方程到高次方程，从整式方程到分式方程和无理方程，从三角形到四边形等，这是知识内容发展的必然，也是构建数学基础的需要.本册课本按照数学知识发展的逻辑顺序和学生认识数学的规律，顺理成章地确定了前三章的内容.另外，把“向量及其加减运算”整合于“四边形”中，是基于这一部分内容与“平行线”“三角形”“平行四边形”有密切的联系，而且向量加法的交换律与平行四边形的判定及性质定理具有等价关系；同时也考虑到物理学习需要数学提供向量工具.关于“概率初步”的安排，既充分注意到学生对于“可能性大小”已有的初步认识，又切实注意到学生初步形成概率意识所必需的基本知识，因此把前期对有关概念的孕育和有关思想方法的渗透，在此进行集中整理和适当提升，从而建立概率知识和方法的初步基础.

(2) 体现精中求简，力求平易近人.

体现精中求简，是指知识内容的组织不仅具有精干的“基础性”，而且具有简明的“结构性”.

本册内容的选取，重视体现数学课程标准中有关学习主题的“内容和要求”；内容的组织，着力于建立以最基本的数学知识为主干、以基本的数学思想方法为内核的结构.

“一次函数”内容的重点是一次函数的概念、图像及其基本性质.从整体来看，根据学生的年龄特点和认知心理，对函数与分析的学习，可以提早起步但不能过高要求，必须降低起点、铺设台阶、逐步递进.上一册课本中安排的第十八章中“正比例函数”内容，是学生认识一次函数和初等分析的重要铺垫；学生通过学习，对函数的概念以及函数研究的内容和方法获得了初步的体验.本册“一次函数”的内容，如同“正比例函数”一样，仍是围绕函数的概念、图像和直观性质展开，展现了从特殊到一般的演进过程.这一章的编写，重视利用学生已有的知识经验，着重体现基于直观认识的分析与说理；重视引导学生进一步理解函数的意义，体会研究函数的方法，并使学生获得一次函数的基础知识.与此同时，本章注意使学生形成对函数解析式 $y=kx+b$(k、b 为常数)的完整认识，即当 $k\neq 0$ 时，它是一次函数解析式，k、b 分别是直线 $y=kx+b$ 的斜率和截距；当 $k=0$ 时，它是常值函数解析式.另外，还涉及一次函数与一元一次方程、一元一次不等式之间相互关联的讨论，引导学生用联系的观点和数形结合的观点看问题，将相关的基本知识相互贯通、融合.

“代数方程”一章所涉及的方程，是整式方程、分式方程、无理方程中一些基本的、特殊的方程，注重建立代数方程的知识基础.这一章的内容，体现了对初等代数方程研究的发展方向和基本思路，如方程的次数从低到高，方程中所含的式从整式到分式和根式，方程中元的个数逐渐增多等；而所强调的是初等代数方程中一些基本的、特殊的方程的求解过程和基本解法.

“四边形”的内容，以平行四边形和等腰梯形为重点，着重于展示演绎推理的思想方法，建立基本的知识结构.有关“向量”和“概率”的知识，强调“必要”和“初步”；其内容的表述，较多是通过举例进行分析和说明；所运用的语言，尽可能浅显、明白.

(3) 突出数学思想，注重数学知识内涵.

突出数学思想，是指知识内容的难度可以适当降低，而数学思想方法的教学要求必须明确并得到加强.

本册课本中各章内容的阐述，注意展开数学思考的过程，展现数学思想方法的运用，关注知识内容的本质.

例如“一次函数”的内容，是从特例正比例函数到一般形式的一次函数的扩展，是关于函数研究的再一次演练，帮助学生进一步认识函数是描述变化过程中两个变量之间相互依赖关系的工具，认识数形结合是研究函数的一种基本方法.

“代数方程”中所涉及的方程多种多样，方程的解法各有不同.本章以基本的、简明的方程(组)为载体，通过探究具体方程(组)的解法，展现解代数方程(组)的基本思想方法，如高次方程“低次化”、分式方程“整式化”、无理方程“有理化”以及对多元方程组进行“消元”“降次”等，引导学生在解题活动中学、在实践体验

中悟，体会数学思想和方法的运用.对于解分式方程、无理方程的一般步骤及其验根的必要性，课本中利用例题进行具体讲解，通过简明的说理，帮助学生理性地认识解方程的过程和可能产生增根的原因；让学生经历验根的过程，初步掌握检验的方法.

在“四边形”中，关于平行四边形性质定理的导出，凸显了从平行四边形的边、角、对角线的有关特征进行分析的思考方法；而对平行四边形的判定定理的研究，则通过分析平行四边形性质定理的逆命题，提出猜想然后加以证明；对特殊的平行四边形以及等腰梯形的性质定理和判定定理的探讨，采用了类似的方法.有关定理的证明，更加强调以已知的概念和几何事实为逻辑思考的基点及推理的依据，引导学生进一步体会演绎思想.有关向量的内容，教学要求不高，但认知领域全新，从数量到向量、从数的运算到向量的运算，是数学知识的迁移和发展，也是数学观念的变化和提升.

(4) 关注学习过程，促进学生主动学习.

关注学习过程，是指知识内容的呈现以“过程模式”为主导，重视引导学生积极思维、探索求知.

本册课本内容的呈现，所体现的基本方式是“问题—活动—归纳”.一般的过程是：提出问题，导出学习主题；安排活动，开展探索研究；简要归纳，形成基本结论.

课本中保持有“问题”“思考”“操作”“想一想”“议一议”等栏目，有边款点拨、方框解说等版式，以指导学生开展数学活动，帮助学生把握重点和释疑解难，促进学生生动、活泼、主动地学习，深入地思考.

在各章的末尾，配备有“阅读材料”或“探究活动”，旨在丰富数学文化、扩大数学视野、加强数学实践活动和引导学生探究学习.

数学练习部分中的习题安排，重视基本训练，也有一些开放性问题、探究性问题、实践性问题等；注意训练要求分层，有统一性也有多样性.“活动与探究”或“试一试”栏目下的题目，一般有较高的难度，这样的题目并不要求所有学生都去做，主要提供给有学习兴趣的学生进行研究和讨论，进一步培养学生的探究意识和钻研精神，满足不同学生的学习需要.

2. 内容提要

本册课本的内容，是对方程的研究进行整理和拓宽，对论证几何和函数的基础知识进行扩展；还有，在学生知道事件发生的“可能性”有大有小的基础上，简单介绍有关“概率”的基本知识，让学生初步了解随机性数学，开阔数学视野，拓展数学观念.

第二十章“一次函数”内容的安排，首先给出实际问题中的函数解析式，通过分析解析式的特征，归纳一次函数的概念，并指出正比例函数与一次函数的关系；然后，讨论一次函数解析式的确定、图像的画法；再利用图像的直观，归纳一次函数的基本性质；最后举例说明一次函数的简单应用.

第二十一章“代数方程”，主要内容是关于特殊的一元高次方程、可化为一元二次方程的简单的分式方程、仅含二次根式的简单的无理方程以及简单的二元二次方程组的基本概念和解法.按照精中求简的要求，本章以解含字母系数的一元一次、一元二次方程为起点，在复习和整理已有方程知识的基础上，选取各类方程中最基本的、简单的方程(组)进行讨论；在注重于方程(组)解法探究的过程中，突出化归思想及其方法的运用，逐步建立起关于初等代数方程的基础知识系统.对各类简单方程(组)的解法，本章用基本步骤的语句或流程框图的形式，进行了归纳总结.对于应用代数方程解决简单的实际问题，采取了相对集中的安排，帮助学生学习分析问题、解决问题的方法，获得建立方程模型、进行求解和解释的过程体验.

第二十二章“四边形”，主要内容是平行四边形和梯形，还有平面向量及其加减运算.在上一册“几何证明”中，学生已经学习了演绎证明，并运用演绎推理方法对三角形、重点是直角三角形进行了研究.本章以四边形为载体，继续学习演绎推理.关于向量的内容，在学生的物理知识基础比较单薄的情况下，课本中通过描述平面上两点的相对位置(位置差)和图形的平移运动(位移)，引进向量的概念和几何表示；对向量加减运算，着重于明确运算的意义、法则和归纳加法的运算律，学习通过画图求“和向量”“差向量”的方法.

第二十三章“概率初步”，从认识事件和事件发生的可能性开始，引进概率的概念，然后对等可能试验以及相应的简单事件概率进行初步讨论.这些内容，是概率的最基本的知识，是学生初步形成概率意识的认识基础；主要取向是帮助学生认识随机现象和体会概率意义，学习用所学的概率知识解释生活中的简单概率问题；有关概率的计算，是为这一取向服务的.

3. 课时安排

各章教学的课时数建议如下：

第二十章	一次函数	9 课时
第二十一章	代数方程	16 课时
第二十二章	四边形	25 课时
第二十三章	概率初步	8 课时

第二十章　一 次 函 数

一、教学目标

1. 理解一次函数的概念，会判断两个变量之间的关系是否为一次函数关系.

2. 会画一次函数的图像，并借助图像的直观，理解一次函数的性质.

3. 了解两条平行直线的表达式之间的关系，能以运动的观点来认识这种关系.

4. 能借助一次函数的图像认识一元一次方程的解、一元一次不等式的解集，理解一元一次方程、一元一次不等式与一次函数之间的内在联系.

5. 能应用一次函数知识解决一些简单的有关的实际问题；获得将实际问题转化为数学问题的体验，了解建立简单函数模型的意义.

6. 在解决问题的过程中，增强一次函数的应用意识，体验数形结合的数学思想，提高由图像获取信息进而解决问题的能力.

二、课时安排

本章教学共 9 课时，建议分配如下：

20.1　一次函数的概念	1 课时
20.2　一次函数的图像	3 课时
20.3　一次函数的性质	2 课时
20.4　一次函数的应用	2 课时
本章小结	1 课时

三、设计说明

学生在第十八章学习了函数的概念，研究了两个特殊函数：正比例函数与反比例函数.本章在此基础上学习一次函数.一次函数是一个简单的初等函数，课本着重从概念、图像、性质、应用这几个角度引导学生去认识.

为帮助学生建立一次函数的概念，课本中从实际例子出发，通过建立函数解析式、归纳解析式特点，再给出一次函数的定义，让学生体验数学源于生活，高于生活.建立了一次函数概念后，再通过例题的分析和解决，促进学生理解概念，从中体会由特殊到一般再由一般到特殊的思维方法，并培养良好的思维习惯.

关于一次函数的定义，与以前定义正比例函数、反比例函数、一元二次方程等一样采用形式定义，着重指明一次函数的解析式的特征，这样符合学生已有的认知基础.同时强调，如果只给出一次函数的解析式而不加说明，那么这个一次函数的定义域是一切实数；如果一次函数的定义域不是一切实数，那么在给出解析式的同时必须给出定义域.然后，课本中揭示了正比例函数与一次函数的关系是“特殊”与“一般”的关系，即正比例函数是一次函数，但一次函数不一定是正比例函数.

在学生理解一次函数概念后，再引导学生进一步思考：一次函数所表示的两个变量之间的依赖关系具有怎样的特点？为此，让学生先学会画一次函数的图像，然后利用图像研究一次函数的性质.这样，既为学生理解一次函数的性质提供直观认识的支持，又使学生有机会经历观察、发现、归纳、表达的探究学习过程.

在第十八章中，无论是正比例函数还是反比例函数，画函数的图像，都是通过“列表、描点、连线”三个步骤完成的.这种画函数图像的方法，是认识一个陌生函数的有效方法.所以在画一次函数图像时，我们采用同样的方法，通过画出一些具体的一次函数的图像，归纳出一次函数 $y=kx+b$ 的图像是一条直线；再

进一步指出，只要确定了图像上的两个点，就可以画出一次函数图像.对于一次函数 $y=kx+b$，给定 k 和 b 的值，这个函数就唯一确定，相应就有一条直线是它的图像.由此可见，k、b 对一次函数图像的位置有决定性作用.于是，让学生通过画图，看到一次函数图像相对于 x 轴正方向的倾斜程度与 k 的值有关；而图像与 y 轴交点的位置由 b 的值确定，从中体会 k、b 的几何意义；同时，给出了“斜率”提供引用，并引进了截距的概念.

通过画一次函数的图像，知道了一次函数可以用直角坐标平面上的直线表达，显现出它的几何特征；于是就把一次函数 $y=kx+b$ 的图像称为直线 $y=kx+b$，引导学生再从几何的角度进一步认识一次函数.通过画直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 与直线 $y=-\frac{1}{2}x$，并展示类似的 k 值相同的两条直线上下平移的动态过程，让学生观察、探究这样的两条直线的位置关系，再归纳一般意义下两条平行直线的表达式的系数之间的关系，加深对一次函数解析式的认识.

从一次函数的解析式容易联想到一元一次方程和一元一次不等式，实际上它们之间也是有密切联系的.由此，课本安排了对一元一次方程、一元一次不等式与一次函数之间关系的讨论，利用一次函数图像帮助学生直观认识和深入理解一元一次方程的根以及一元一次不等式的解集.在内容编排上，依然遵从由特殊到一般、由具体到抽象、由直观感知到得出一般结论这样的认识过程.让学生通过这一内容的学习，体验和领悟函数思想和方法，理解方程、不等式与函数的联系，拓宽思路，并为进一步学习二次函数打下基础.

一次函数性质的内容编排，是从形与数两个角度展开的.首先让学生对一些具体的一次函数图像进行观察与思考，从中发现“沿着 x 轴正方向来观察，直线是上升还是下降”这一几何特征与 k 的正负有关，由此归纳出一次函数图像的直观性质；然后进行抽象概括，用代数语言描述一次函数的性质，再通过例题帮助学生对所得的性质进行理解和巩固；讨论了一次函数的变化趋势后，又从几何的角度探究了直线 $y=kx+b$ 的位置(经过哪些象限)与系数 k、b 的关系.

本章在最后通过例题和问题的分析，介绍了一次函数知识的实际应用.有关内容的设计涉及四个方面：一是如何根据实际问题建立函数解析式；二是如何通过建立函数模型，对变量的变化趋势作出预测；三是如何灵活应用一次函数知识解决生活中的问题；四是如何应用一次函数知识与一次函数图像帮助分析问题，正确作出决策.通过四个问题的分析和解决，让学生体验数学源于生活又服务于生活，数学与生活密切相连，从而认识数学的实际应用的价值.

四、教学建议

1. 对教材的处理要有整体观念，统筹安排.课本中无论是整个章节的安排，还是每一小节知识的编排，都注意到整体性.所以在教学过程中，要用整体的观念来认识和设计教学内容.

就章节来讲，首先是一次函数的定义，让学生理解一次函数的概念；接着是对函数的进一步认识和研究，其中包括函数图像与函数性质；最后是一次函数知识的应用.在函数知识的应用中，除了对实际问题的分析和处理是应用外，通过一次函数的图像揭示一元一次方程的根与一元一次不等式的解集的几何特征，也是函数知识的重要应用，要引导学生从中体会函数思想与方法.

对于每一小节的知识来讲，课本中也是相应成一个整体，按认知顺序编排教学内容，在教学处理时应当整体把握.另外，不能孤立地看待和处理每一小节的知识，要注意知识之间的内在联系.

2. 引导学生进行操作、观察、思考与归纳，经历知识形成的过程.考虑到学生的知识基础与认知基础，课本中对于一次函数的很多知识，都是建立在操作、观察的基础上.其处理方法是通过观察具体函数的特点，归纳出一般的结论；注意说理但一般不给予严格的证明.例如，关于如何得到一次函数的图像是直线、如何得到一次函数的性质等，都是不完全归纳，而且不加证明.在教学中，要重视学生的操作与实践，可以应用多媒体帮助展示操作的过程.对于归纳得到的结论，由于学生现有知识和能力的限制，因此现在不加证明但完全确认，告知学生可直接运用.

3. 重视运用运动变化和数形结合的数学思想.要用运动变化的观点来认识和理解函数概念，也要用运动变化的观点来分析和处理函数问题.例如，关于直线的平行移动、直线相对于 x 轴正方向的倾斜程度、直线上点的运动变化等，都可以借助于多媒体来展现变化过程.

数形结合的数学思想，是研究函数和运用函数知识分析、处理问题的重要方法.在探讨函数的图像、函数的性质时，要注意引导学生体验如何以“数”定“形”、又如何以“形”识“数”，其中“数”是指函数的代数表示形式和解析性质，“形”是指函数的几何表示形式和图像特征.在函数知识应用时，要突出图像的重要性，帮助学生学会如何从图像中获得有用的信息，如何利用图像分析和解决问题.

4. 引导学生学会分析问题和解决问题，养成良好的思维习惯.对于新的数学知识的学习，要关注探索知识、获取知识的过程；要充分展现对知识的认识和探究过程，重视对知识的理解.课本中体现了由具体到抽象、由特殊到一般和再由一般到特殊这样研究和认识新知识的规律，要引导学生加深体会，以提高学生分析问题和解决问题的能力，养成良好的思维习惯.

5. 适当开展研究性学习.为进一步培养学生分析问题、解决问题的探究能力，可以结合一些知识，适当开展研究性学习.如：关于一次函数与一元一次方程、一元一次不等式的关系的讨论，关于直线 $y=kx+b$ 位置的讨论，关于平行直线表达式的关系的讨论等，都可以根据学生实际适当开展研究性学习.

6. 切实关注知识的实际应用，让学生感到数学是有用的.现实生活中充满了函数关系，其中有很多是一次函数关系.在教学过程中，要善于从实际问题出发，创设问题情境开展数学学习，让学生体验数学源于生活、高于生活又服务于生活，让学生感到数学知识是活生生的而且是有用的.

五、评价建议

1. 通过课后练习题及时检查教学效果和进行反馈与巩固.针对每一部分知识，课本中配备有练习，在“练习部分”安排了相应的习题.这些练习题主要是帮助学生巩固所学习知识与方法，同时也有对每一课时教学情况进行即时检测和反馈的作用.当然，针对不同程度的学生，对练习题的使用可以灵活处理；有的练习题也可在下一节课课前用于对知识进行复习和巩固.

2. 关注学生对知识本质的理解.无论是在本章学习过程中对学习效果的检测，还是在学习结束后对学习效果的评价，都应该关注学生对所学习知识本质的理解.本章的核心知识有一次函数的概念、一次函数的图像、一次函数的性质，在教学评价中，要关注对这些知识的理解.对概念的理解不是指能背诵定义，而是要能用自己的语言表述概念的本质，能灵活应用所学的概念解决问题.例如，对一次函数概念的理解，不能满足于能背诵一次函数的定义，而是要能够根据定义判断一个函数是否是一次函数.

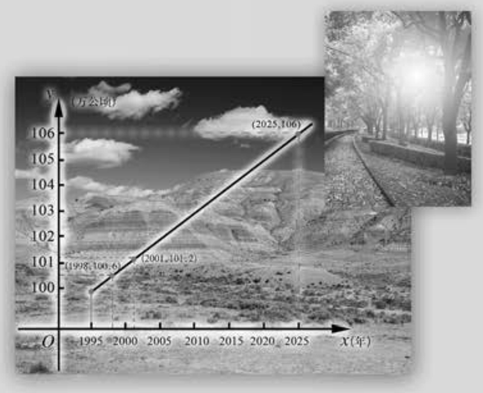
对一个概念的理解，通常需要一个过程.评价时要关注学生在获得知识的过程中，对概念理解的逐步深化.

3. 关注学生对函数思想方法和数形结合思想方法的领悟.对本章的学习评价，不仅要关注学生对具体知识的理解和掌握，更要关注对这些知识中所蕴含的数学思想方法的领悟.在本章学习中，要重视学生的函数观念的形成和对数形结合思想方法的体验，如：初步会用运动的观点分析和处理函数知识，能从两个变量之间的依赖关系去认识和理解一次函数；获得一般地认识和研究函数的基本方法；在理解和应用一次函数的过程中，进一步领会数形结合思想方法.同时，把这些要求作为学习评价的重要方面.

4. 关注学生对函数概念认知的进步.函数是学生进入变量数学学习的一个奠基性概念，它的形成有一个孕育和发展的过程，对这个概念的理解也有一个逐步清晰和加深的过程.初中阶段对函数概念的教学是起步的教学，注重于描述性、朴实性方面的要求；但是学生要接受和理解函数概念，仍然会遇到困难和问题.一次函数作为一类最基本的函数，对学生学习函数概念具有引导和铺垫作用.在一次函数的教学中，要指导学生用心体会函数的概念，从变量之间的依赖关系深入认识和研究函数；在学习评价中，要注重学生对函数概念本质的理解，肯定学生在认识和研究函数过程中所取得的进步，鼓励学生继续深入理解函数概念.

Yici Hanshu

20 第二十章　一次函数



我们在第十八章学习了函数的有关概念，研究了正比例函数和反比例函数.认识到函数是刻画客观世界中的事物运动、变化规律的重要数学模型，广泛地应用于现实生活之中.

例如，当今世界每年有大片土地发生沙漠化，给人类的生存带来严重的威胁.据报道，某地区从1995年底开始，每年增加的沙漠面积几乎相同，1998年该地区的沙漠面积约100.6万公顷，2001年扩展到101.2万公顷，如果不进行有效治理，那么到2025年该地区的沙漠面积将增加到106万公顷，后果堪忧.因此，必须抓紧治理沙漠、大力保护环境.对该地区2025年沙漠面积的预测，不是危言耸听，而是通过建立函数模型$y=kx+b\,(k\neq 0)$推算出来的.这样的预测，对人们正确决策有积极意义.

上面用于作出预测的函数模型，就是本章所要学习的一次函数.我们在本章主要学习一次函数的概念、图像、基本性质和简单应用，从中进一步体验研究、应用函数的过程，体会函数的思想.

章头语对实际生活中的沙漠化预测，展现了函数在实际生活中的应用，同时引出一次函数的概念.在介绍这个问题时，要注意所设的条件是“每年增加的沙漠面积几乎相同”，引导学生体会实际问题的数学化过程.

章头图以沙漠和绿化的鲜明对照，引起学生对环境保护的重视.图中直角坐标系中的直线，展现了一次函数的图像特征.

【注意事项】

函数作为一种数学模型，它在实际生活中有广泛的应用.因为一次函数知识是在学生初步理解函数概念、熟悉正比例函数和反比例函数后，学习的又一类具体函数，所以章头语首先回顾了学生已有的函数概念及这两个具体函数；在此基础上，进一步从数学模型的角度指出函数是“刻画客观世界中的事物运动、变化规律的重要数学模型”.这种说法突出建模的数学思想，在后面的教学中要注意渗透这一思想方法.

提出某地区的“沙漠化”问题，一方面含有环境保护教育的要求，另一方面体现了“问题驱动”的特点.对于图中反映“沙漠化”趋势的直线，可用以引导学生学习从图像中获取信息，培养学生读图的习惯和能力.

Yici Hanshu De Gainian

第一节　一次函数的概念

通过第十八章中已列出的汽车油箱剩余油量与汽车行驶路程的函数关系，引出对新课题的思考；再提出问题，组织讨论.

20.1　一次函数的概念

在八年级学习函数概念时，我们通过讨论，知道汽车油箱里剩余的油量 y(升)是汽车行驶的路程 x(千米)的函数. 如果汽车油箱里原有汽油 120 升，每行驶 10 千米耗油 2 升，那么 y 与 x 的函数解析式是

$$y=120-0.2x.$$

由解析式可知，这个函数不是正比例函数.

我们再来讨论下面的问题：

问题

本问题重在函数解析式的建立. 在教学过程中，要充分展现函数关系的获得过程.

问题

某人驾车从甲地出发前往乙地，汽车行驶到离甲地 80 千米的 A 处发生故障，修好后以 60 千米/时的速度继续行驶. 以汽车从 A 处驶出的时刻开始计时，设行驶的时间为 t(时)，某人离开甲地所走过的路程为 s(千米)，那么 s 与 t 的函数解析式是什么？

让学生对所得的函数解析式的特征进行观察和讨论，归纳它们的共同点，再给出一次函数的定义.

这个问题中，函数解析式是 $s=60t+80$. 它与 $y=120-0.2x$ 的一个共同点是：用来表示函数的式子都是关于自变量(指表示自变量的字母)的一次整式.

一般地，解析式形如 $y=kx+b$(k、b 是常数，且 $k\neq 0$)的函数叫做**一次函数**(linear function).

一次函数 $y=kx+b$ 的定义域是一切实数.

当一个函数以解析式表示时，如果对函数的定义域未加说明，那么定义域由这个函数的解析式确定；否则，应指明函数的定义域.

当 $b=0$ 时，解析式 $y=kx+b$ 就成为 $y=kx$(k 是常数，且 $k\neq 0$)，这时 y 是 x 的正比例函数. 所以，正比例函数是一次函数的特例.

例题 1

本题是帮助学生熟悉依据定义判断一个函数关系是否是一次函数. 在解决例题 1 的过程中，要紧扣一次函数的定义，即解析式形如 $y=kx+b$.

例题1　根据变量 x、y 的关系式，判断 y 是否是 x 的一次函数.

(1) $y=2x$；　　(2) $y=1-\frac{1}{2}x$；

(3) $x-\frac{1}{3}y=2$；　　(4) $y=\frac{2}{x}+3$.

解　(1) 因为 y 是 x 的正比例函数，所以 y 是 x 的一次函数.

(2) 因为 $1-\frac{1}{2}x$ 是一次整式，所以 y 是 x 的一次函数.

(3) 由 $x-\frac{1}{3}y=2$，得 $y=3x-6$. 因为 $3x-6$ 是一次整式，所以 y 是 x 的一次函数.

2　第二十章　一次函数

【教学目标】

(1) 通过一些具体的函数实例，理解一次函数的概念；理解一次函数与正比例函数、常值函数的关系.

(2) 会判断两个变量之间的关系是否是一次函数；能用待定系数法确定一次函数的解析式.

(3) 在判断一次函数的过程中体验分类讨论的数学思想.

【注意事项】

(1) 在对由引例和“问题”得到的函数解析式进行观察和归纳的过程中，要关注解析式结构的共同点；同时要引导学生注意，虽然“问题”中的自变量与因变量没有用 x、y 表示，但反映两个变量之间关系的函数解析式同样也是自变量的一次整式.

(2) 建立一次函数的定义后，要指出这类函数与学过的正比例函数之间的关系，以此巩固一次函数的概念，加深对一次函数的认识.

(3) 由例题 1(3) 可以指出，如果从函数角度看一个二元一次方程，把方程中的两个未知数看作变量，那么由一个二元一次方程所反映的两个变量之间的关系是一次函数(方程中两个未知数的系数都不等于 0，这时，可将变量 x、y 的关系式化为 $y=f(x)$ 的形式).

(4) 因为$\frac{2}{x}+3$不是整式，所以 y 不是 x 的一次函数.

例题2 已知一个一次函数，当自变量 $x=2$ 时，函数值 $y=-1$；当 $x=5$ 时，$y=8$. 求这个函数的解析式.

解 设所求一次函数的解析式为 $y=kx+b(k\neq0)$.

由 $x=2$ 时 $y=-1$，得

$$-1=2k+b;$$

由 $x=5$ 时 $y=8$，得

$$8=5k+b.$$

解二元一次方程组$\begin{cases}2k+b=-1,\\5k+b=8,\end{cases}$

得

$$\begin{cases}k=3,\\b=-7.\end{cases}$$

所以，这个一次函数的解析式是 $y=3x-7$.

这里求一次函数解析式的方法是待定系数法. 解析式中 k、b 是待定系数，利用两个已知条件列出关于 k、b 的方程组再求解，可确定它们的值.

例题3 已知变量 x、y 之间的关系式是 $y=(a+1)x+a$（其中 a 是常数），那么 y 是 x 的一次函数吗？

解 当 $a+1\neq0$，即 $a\neq-1$ 时，$(a+1)x+a$ 是关于 x 的一次整式，这时 y 是 x 的一次函数；

当 $a=-1$ 时，得 $y=-1$，这时 y 不是 x 的一次函数.

"$y=-1$"表示：不论 x 的值怎样变化，y 的值总是 -1. 这时，我们仍然认为 y 与 x 之间有确定的依赖关系，并说 y 是 x 的函数.

一般地，我们把函数 $y=c$（c 为常数）叫做**常值函数**（constant function）. 它的自变量由所讨论的问题确定.

如 $y=-1$，$y=\pi$，$f(x)=\sqrt{2}$ 等，均为常值函数；其中，$f(x)=\sqrt{2}$ 已指出自变量为 x.

练习 20.1

1. （口答）下列函数中，哪些是一次函数？

   (1) $y=\frac{1}{x}+1$；　　(2) $y=-2x$；

   (3) $y=x^2+2$；　　(4) $y=kx+b$（k、b 是常数）.

2. 已知一次函数 $f(x)=\frac{1}{2}x-2$.

   (1) 求 $f(-1)$，$f(2)$；

   (2) 如果 $f(a)=4$，求实数 a 的值.

3. 已知一个一次函数，当自变量 $x=-3$ 时，函数值 $y=11$；当 $x=5$ 时，$y=-5$. 求这个函数的解析式.

例题 2

这是由已知条件确定一次函数解析式问题，是待定系数法在新情境下的运用.

例题 3

本题是为了帮助学生更好地掌握如何判断一次函数关系的思考方法，并引导学生学习和体验分类讨论的数学思想. 在此基础上，引入常值函数的概念.

对于常值函数，只要学生知道，它也反映了一个变化过程，只是在自变量变化时，函数值取同一个常数，但这也是一个确定的依赖关系.

练习 20.1

1. (2)是一次函数；
(1)(3)(4)不是一次函数.

2. (1) $f(-1)=-\frac{5}{2}$，
$f(2)=-1$；
(2) $a=12$.

3. $y=-2x+5$.

【注意事项】

(1) 关于一次函数定义的教学，可以通过列举更多的实例，由例中所反映的函数关系及其解析式特征，通过观察、比较和归纳，抽象出一次函数的定义.

(2) 在一次函数的定义中，有"形如"两字，要指出这是为了避免产生一些错误理解. 如错误地认为一次函数的两个变量只能用字母 x、y 表示；以为函数 $S=5t+3$、$h=2n+1$ 不是一次函数；等等.

(3) 要向学生指出，每一个函数都有它的定义域. 用解析法给出一次函数时，如果对函数的定义域不加以说明，那么就意味着定义域由解析式确定为一切实数；如果给出的这个一次函数的定义域不是一切实数，那么必须指明定义域.

【本课重点】

通过列表、描点、连线三个步骤的操作活动，学习画一次函数的图像；在此基础上归纳得到一次函数的图像是直线，并给出直线的截距概念.帮助学生学会如何求直线的截距及如何求直线与坐标轴的交点坐标.

操作 1

画一次函数图像，是在学生已掌握了如何画正比例、反比例函数图像基础上进行的.

要让学生再次经历包括列表、描点、连线三个步骤的画图像过程；通过画出一次函数的图像，巩固描点法.

直接指出所画的一次函数图像是一条直线；再说明直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 和直线的表达式的含义.

让学生明确，根据“两点确定一条直线”的基本性质，画一次函数的图像时只需描出图像上的两个点，再过这两点画直线.

Yici Hanshu De Tuxiang Yu Xingzhi

第二节 一次函数的图像与性质

20.2 一次函数的图像

我们知道，正比例函数是特殊的一次函数，它的图像是一条直线. 那么，一次函数的图像都是直线吗？

操作 1

在平面直角坐标系 xOy 中，按照下列步骤画一次函数 $y=\frac{1}{2}x+3$ 的图像.

描点法是画函数图像的基本方法.

(1) 列表：取自变量 x 的一些值，计算出相应的函数值 y，如下表：

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$y=\frac{1}{2}x+3$	…	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5	…

(2) 描点：分别以所取 x 的值和相应的函数值 y 作为点的横坐标和纵坐标，描出这些坐标所对应的点.

(3) 连线：用光滑的曲线（包括直线）把描出的这些点联结起来.

如同画正比例函数的图像一样，得到函数 $y=\frac{1}{2}x+3$ 的图像是一条直线. 如图 20－1 所示.

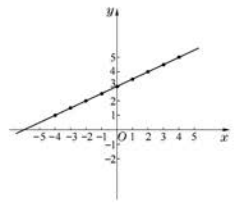


图 20－1

一般地，一次函数 $y=kx+b$（k、b 是常数，且 $k\neq0$）的图像是一条直线. 一次函数 $y=kx+b$ 的图像也称为直线 $y=kx+b$，这时，我们把一次函数的解析式 $y=kx+b$ 称为这条直线的表达式.

4 第二十章 一次函数

【教学目标】

(1) 了解一次函数的图像是直线，会用描点法画一次函数的图像；理解直线的截距的意义，掌握求一次函数图像与坐标轴交点的方法.

(2) 知道两条平行直线的表达式之间的关系，能运用这种关系确定直线表达式.

(3) 知道一元一次方程、一元一次不等式与一次函数之间的联系，能以函数的观点来认识一元一次方程的解与一元一次不等式的解集.

(4) 通过直线相对于 x 轴正方向的倾斜程度及两条平行直线表达式的关系的研究，经历观察、分析与探索的思维过程，提高以运动变化的观点处理问题的能力.

(5) 通过研究一元一次方程、一元一次不等式与一次函数之间的关系，体会数形结合的数学思想，初步领略用函数知识分析问题的方法.

画一次函数 $y=kx+b$ 的图像时，只需描出图像上的两个点，然后过这两点作一条直线.

例题1 在平面直角坐标系 xOy 中，画一次函数 $y=\frac{2}{3}x-2$ 的图像.

解　由 $y=\frac{2}{3}x-2$ 可知，当 $x=0$ 时，$y=-2$；当 $x=3$ 时，$y=0$. 所以 $A(0,-2)$、$B(3,0)$ 是函数 $y=\frac{2}{3}x-2$ 的图像上的两点.

过点 A、B 画直线，则直线 AB 就是函数 $y=\frac{2}{3}x-2$ 的图像.如图 20－2 所示.

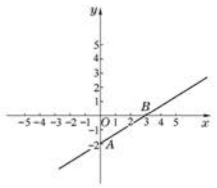


图 20－2

图 20－2 中，由点 A 的横坐标 $x=0$，可知点 A 在 y 轴上；由点 B 的纵坐标 $y=0$，可知点 B 在 x 轴上. 又点 A、B 在直线 $y=\frac{2}{3}x-2$ 上，所以点 A、B 是直线 $y=\frac{2}{3}x-2$ 分别与 y 轴、x 轴的交点.

画直线 $y=kx+b$ 时，通常先描出直线与 x 轴、y 轴的交点. 本例讲述了求直线与坐标轴交点的方法.

一条直线与 y 轴的交点的纵坐标叫做这条直线在 y 轴上的截距，简称直线的截距.

一般地，直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 与 y 轴的交点坐标是 $(0,b)$. 直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 的截距是 b.

例题2 写出下列直线的截距：

(1) $y=-4x-2$；　　(2) $y=8x$；

(3) $y=3x-a+1$；　　(4) $y=(a+2)x+4(a\neq-2)$.

解　(1) 直线 $y=-4x-2$ 的截距是 -2.

(2) 直线 $y=8x$ 的截距是 0.

(3) 直线 $y=3x-a+1$ 的截距是 $-a+1$.

(4) 直线 $y=(a+2)x+4(a\neq-2)$ 的截距是 4.

第二节　一次函数的图像与性质　5

例题 1

介绍如何由一次函数图像上的两点画图像的方法.

在选取函数图像上的两个点时，可以取图像与坐标轴的交点，也可以取其他的两个距离较远的点.

在教学过程中，要引导学生关注如何确定函数图像上点的坐标，体验其中对应的思想.

引进直线与坐标轴的交点，给出直线的截距的概念.要让学生了解求直线与坐标轴的交点坐标的方法.

一般来讲，直线与 x 轴交点的横坐标叫做直线的横截距，直线与 y 轴交点的纵坐标叫做直线的纵截距.为降低知识的难度，初中阶段仅介绍纵截距概念，并简称为截距.

教学过程中，应强调截距不是距离，而是一个点的纵坐标，它可以取正值、负值或零.

例题 2

帮助学生理解直线的截距的概念，能由直线的表达式直接确定直线的截距.

【注意事项】

(1) 在归纳一次函数图像是直线时，可以用描点法多画几个一次函数的图像，在此基础上再进行归纳和小结.与正比例函数图像是直线一样，由于知识的限制，对于一次函数的图像为什么是直线不加证明(到高中再证)，只能利用图形的直观来归纳结论.

(2) 画一次函数图像时，一般先确定图像上两个点，再作经过这两个点的直线.在这个过程中，可以先复习如何判断一个点在函数图像上，再总结如何选择图像上的两个点.对两个点的选择，通常选择图像与坐标轴的交点，此时要突出如何求图像与坐标轴交点.还要知道，画一次函数图像时，如果图像经过原点，或者图像与坐标轴的两个交点非常接近(如 $y=2x+\frac{1}{8}$ 的图像)，那么应适当另取函数图像上的点，使所得两个点相距较远些.

(3) 关于直线 $y=kx+b$ 的截距 b，要指导学生联系直线与 y 轴的交点坐标 $(0,b)$ 一起学习和理解，从中体会截距的作用和一次函数解析式中 b 的几何意义.

例题 3

本题是帮助学生巩固待定系数法和熟悉求直线与坐标轴的交点坐标的方法.

练习 20.2(1)

1. (1) 2;

(2) $-\sqrt{5}$;

(3) $1-\sqrt{2}$.

2. 与 x 轴交点的坐标为 $(3,0)$,与 y 轴交点的坐标为 $(0,2)$.

3. $y=2x-5$.

4. 截距为 $\frac{8}{3}$.

【本课重点】

通过对多条截距相同的直线进行画图和观察,归纳直线相对于 x 轴正方向的倾斜程度与 k 的关系;通过例题的分析与解决,揭示一次函数 $y=kx+b$ 的图像与正比例函数 $y=kx$ 的图像之间的关系,并进一步得到两条平行直线的表达式之间的关系,利用这种关系确定直线表达式.

例题3 已知直线 $y=kx+b$ 经过 $A(-20,5)$、$B(10,20)$ 两点,求:(1) k、b 的值;(2) 这条直线与坐标轴的交点的坐标.

解 (1) 因为直线 $y=kx+b$ 经过点 $A(-20,5)$ 和 $B(10,20)$,所以

$$\begin{cases}-20k+b=5,\\10k+b=20.\end{cases}$$

解这个方程组,得 $\begin{cases}k=\frac{1}{2},\\b=15.\end{cases}$

(2) 这条直线的表达式为 $y=\frac{1}{2}x+15$.

由 $y=\frac{1}{2}x+15$,令 $y=0$,得 $\frac{1}{2}x+15=0$,解得 $x=-30$;令 $x=0$,得 $y=15$.

所以,这条直线与 x 轴的交点的坐标为 $(-30,0)$,与 y 轴的交点的坐标为 $(0,15)$.

练习 20.2(1)

1. (口答)说出下列直线的截距:
(1) 直线 $y=\sqrt{3}x+2$; (2) 直线 $y=-2x-\sqrt{5}$; (3) 直线 $y=3x+1-\sqrt{2}$.
2. 在平面直角坐标系 xOy 中,画出函数 $y=-\frac{2}{3}x+2$ 的图像,并求这个图像与坐标轴的交点的坐标.
3. 已知直线经过点 $M(3,1)$,截距是 -5,求这条直线的表达式.
4. 已知直线 $y=kx+b$ 经过点 $A(-1,2)$ 和 $B\left(\frac{1}{2},3\right)$,求这条直线的截距.

操作2

在同一直角坐标系中画出下列直线:

(1) 直线 $y=\frac{1}{3}x+2$; (2) 直线 $y=3x+2$;

(3) 直线 $y=-2x+2$; (4) 直线 $y=-\frac{1}{3}x+2$.

这四条直线的截距都是 2,可知它们都过点 $M(0,2)$;再由各直线相应的一次函数解析式,可知点 $A(3,3)$、$B(1,5)$、$C(2,-2)$、$D(3,1)$ 分别在(1)(2)(3)(4)所要画出的直线上.

在直角坐标系中,分别描出点 M、A、B、C、D,再画出直线 MA、MB、MC、MD,则直线 MA、MB、MC、MD 依次为(1)(2)(3)

【注意事项】

本节例题 3 有一定的综合性要求,它其实是对前面所学知识的巩固和提高.在教学过程中,可回顾相关的 20.1 节例题 3 以及 20.2 节例题 1 的解题过程.

将本节例题 3 与 20.1 节例题 3 对照,它们都用了待定系数法,条件也类似,但两个例题中题设的表述不相同.20.1 节例题 3 是从代数角度表述,本节例题 3 是从几何角度表述,应强调“如果点在函数的图像上,那么这点的坐标满足这个函数的解析式”,引导学生从数和形两个角度思考和解决问题,领会数形结合的思想.

(4) 所要求画出的直线，如图 20－3 所示.

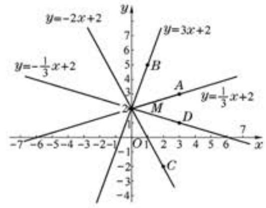


图 20－3

在坐标平面上画直线 $y=kx+b(k\neq 0)$，截距 b 相同的直线经过同一点 $(0,b)$；而由于 k 的值不同，则直线相对于 x 轴正方向的倾斜程度不同. 这个常数 k 称为直线的斜率. 关于斜率的确切定义和几何意义，将在高中数学中讨论.

例题4 在同一直角坐标系中画出直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 与直线 $y=-\frac{1}{2}x$，并判断这两条直线之间的位置关系.

解 直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 与 x 轴的交点是 $A(4,0)$，与 y 轴的交点是 $B(0,2)$. 画出直线 AB.

直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 过原点 $O(0,0)$ 和点 $C(2,-1)$. 画出直线 OC.

则直线 AB、直线 OC 分别就是直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 与直线 $y=-\frac{1}{2}x$，如图 20－4 所示.

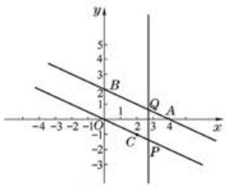


图 20－4

在图 20－4 中，观察点 B 相对于点 O 的位置，可知点 O 向上平移 2 个单位就与点 B 重合.

对于直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 上的任意一点 P，设它的坐标为 (x_1, y_1)，则 $y_1=-\frac{1}{2}x_1$. 过点 P 作垂直于 x 轴的直线，与直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 的交点记为 Q，可知点 Q 与点 P 有相同的横坐标，设点 Q 的坐标为 (x_1, y_2)，则 $y_2=-\frac{1}{2}x_1+2$.

由 $y_2-y_1=\left(-\frac{1}{2}x_1+2\right)-\left(-\frac{1}{2}x_1\right)=2$，可知点 Q 在点 P 上

第二节 一次函数的图像与性质 7

操作 2

画出一系列直线的图形，引导学生观察这些直线相对于 x 轴正方向的倾斜程度，从它们的倾斜程度的不同了解 k 的几何意义.

例题 4

本题是具体研究两条直线，通过操作、观察和说理，确认这两条直线平行；由特殊再到一般，得到直线 $y=kx+b$ 与直线 $y=kx$ 之间关系的一般结论.

在教学过程中，观察和探索直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 与直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 之间的位置关系时，可以通过描出更多的具体的点，观察得到两条直线之间的上下平移关系；也可以借助多媒体进行直观展示. 要注意引导学生体会运动变化的观点以及由特殊到一般的分析和思考问题的方法.

由于点 P 是直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 上的任意一点，因此点 P 代表了直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 上所有的点；而点 Q 实际上是点 P 向上平移的“对应点”，于是点 Q 代表了直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 上所有的点，因此点 P 与点 Q 以及这两点之间固有的性质具有一般性.

【注意事项】

(1) 关于直线相对于 x 轴正方向的倾斜程度，只是让学生通过画图和观察从而了解倾斜程度与表达式中的系数 k 有关，对直线的斜率的概念不作教学要求.

(2) 可以利用几何画板等计算机软件，展现直线的倾斜程度随 k 的值变化而变化的情况.

(3) 例题 4 中利用点的平移进行说理的过程，只要求学生了解. 学生在解同类题时，只要写出有关结论，而利用点的平移进行说理的过程不作表述要求；边款中提示可利用三角形全等证明两条直线平行，要求较高，可视学生具体情况进行取舍.

方且相距 2 个单位，即点 P 向上平移 2 个单位就与点 Q 重合.

要判断直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 与直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 平行，也可在图 20-4 中，过点 A 作 y 轴的平行线 l，设 l 与直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 交于点 D，可推出 $\triangle AOB \cong \triangle OAD$，得 $\angle OAB=\angle AOD$.

因为 P 是直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 上的任意一点，所以把直线 $y=-\frac{1}{2}x$“向上平移 2 个单位”，就与直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 重合. 因此，直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 与直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 平行.

一般地，一次函数 $y=kx+b(b\neq0)$ 的图像可由正比例函数 $y=kx$ 的图像平移得到. 当 $b>0$ 时，向上平移 b 个单位；当 $b<0$ 时，向下平移 $|b|$ 个单位.

还可以进一步得到：

如果 $b_1\neq b_2$，那么直线 $y=kx+b_1$ 与直线 $y=kx+b_2$ 平行.

反过来，如果直线 $y=k_1x+b_1$ 与直线 $y=k_2x+b_2$ 平行，那么 $k_1=k_2$，$b_1\neq b_2$.

可利用直线 $y=kx$ 和平行的传递性进行说理.

例题5 已知一次函数的图像经过点 $A(2,-1)$，且与直线 $y=\frac{1}{2}x+1$ 平行，求这个函数的解析式.

解 设一次函数的解析式为 $y=kx+b(k\neq0)$.

因为直线 $y=kx+b$ 与直线 $y=\frac{1}{2}x+1$ 平行，所以

$$k=\frac{1}{2}.$$

因为直线 $y=kx+b$ 经过点 $A(2,-1)$，又 $k=\frac{1}{2}$，所以

$$\frac{1}{2}\times2+b=-1.$$

解得 $$b=-2.$$

所以，这个函数的解析式为 $y=\frac{1}{2}x-2$.

在例题 5 中，采用了待定系数法求函数解析式. 如果一次函数 $y=kx+b$ 中的 k 和 b 都是待定系数，那么要有两个独立的条件才能确定.

练习 20.2(2)

1. 指出下列直线中互相平行的直线：
   ① 直线 $y=5x+1$； ② 直线 $y=-5x+1$； ③ 直线 $y=x+5$；
   ④ 直线 $y=5x-3$； ⑤ 直线 $y=x-3$； ⑥ 直线 $y=-5x+5$.
2. 已知直线 $y=(m-1)x+m$ 与直线 $y=2x+1$ 平行.
   (1) 求 m 的值；
   (2) 求直线 $y=(m-1)x+m$ 与 x 轴的交点坐标.
3. 已知一次函数的图像经过点 $M(-3,2)$，且平行于直线 $y=4x-1$.
   (1) 求这个函数的解析式；
   (2) 求这个函数图像与坐标轴围成的三角形的面积.

8 第二十章 一次函数

例题 5

在解题过程中，要关注以下知识的巩固：

(1) 如果一个点在直线上，那么这个点的坐标满足这条直线的表达式；(2) 两条互相平行的直线表达式之间的关系的运用；(3) 待定系数法的运用.

练习 20.2(2)

1. ①④平行；②⑥平行；③⑤平行.
2. (1) $m=3$；
   (2) 与 x 轴的交点的坐标为 $\left(-\frac{3}{2},0\right)$.
3. (1) $y=4x+14$；
   (2) 三角形的面积为 $\frac{49}{2}$.

【注意事项】

(1) 对于结论：“如果 $b_1\neq b_2$，那么直线 $y=kx+b_1$ 与直线 $y=kx+b_2$ 平行；反之，如果直线 $y=k_1x+b_1$ 与直线 $y=k_2x+b_2$ 平行，那么 $k_1=k_2$，$b_1\neq b_2$”，不作证明要求，可以利用直线 $y=kx$ 进行说明.

以说明原命题为例：因为 $b_1\neq b_2$，所以 b_1、b_2 中有一个不等于 0，不妨设 $b_1\neq0$，所以直线 $y=kx+b_1$ 与直线 $y=kx$ 平行；又直线 $y=kx+b_2$ 与直线 $y=kx$ 平行或重合（$b_2=0$ 时），所以直线 $y=kx+b_1$ 与直线 $y=kx+b_2$ 平行.

在教学过程中，也可结合图形直观进行说理.

(2) 利用直线的表达式来讨论两条直线平行，是数形结合思想的具体体现，要让学生从中获得用代数方法研究几何问题的初步体会，感知数与形之间的联系与转化. 但在教学中要严格控制有关内容的范围和难度，可按例题和练习题的要求进行把握，不要扩展.

对于一次函数 $y=kx+b$，由它的函数值 $y=0$ 就得到关于 x 的一元一次方程 $kx+b=0$，解这个方程得 $x=-\frac{b}{k}$，于是可以知道一次函数 $y=kx+b$ 的图像与 x 轴的交点坐标为 $\left(-\frac{b}{k},0\right)$. 反之，若已知一次函数 $y=kx+b$ 的图像与 x 轴的交点坐标，也可以知道这个交点的横坐标是一元一次方程 $kx+b=0$ 的根. 由此可见，关于 x 的一元一次方程 $kx+b=0$ 与一次函数 $y=kx+b$ 之间有密切联系.

现在我们来讨论一元一次不等式与一次函数之间的关系.

问题1

如图 20－5，已知直线 l 经过点 $A(0,-1)$ 和 $B(2,0)$，那么直线 l 在 x 轴上方的点的横坐标的取值范围是什么？在 x 轴下方的点呢？

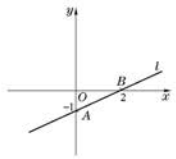


图 20－5

观察图 20－5，可见在直线 l 上且位于 x 轴上方的点，它们的横坐标的取值范围是 $x>2$；而在直线 l 上且位于 x 轴下方的点，它们的横坐标的取值范围是 $x<2$.

我们换一个角度来讨论问题 1.

由直线 l 经过点 $(0,-1)$ 和点 $(2,0)$ 可知，以直线 l 为图像的一次函数解析式为 $y=\frac{1}{2}x-1$.

设直线 l 上的点的坐标为 (x,y)，那么 $y=\frac{1}{2}x-1$.

在直线 l 上且位于 x 轴上方的点的纵坐标 $y>0$，也就是

$$\frac{1}{2}x-1>0.$$

解这个不等式，得 $x>2$.

在直线 l 上且位于 x 轴下方的点的纵坐标 $y<0$，也就是

$$\frac{1}{2}x-1<0.$$

解这个不等式，得 $x<2$.

所以，直线 l 在 x 轴上方的点的横坐标的取值范围是 $x>2$，在 x 轴下方的点的横坐标的取值范围是 $x<2$.

问题2

关于 x 的一元一次不等式 $kx+b>0$、$kx+b<0$ 与一次函数 $y=kx+b$ 之间有什么关系？

第二节　一次函数的图像与性质　9

【本课重点】

从“形”和“数”两个角度，探讨一元一次方程、一元一次不等式与一次函数之间的关系；帮助学生利用一次函数图像分析和认识一元一次方程的根与一元一次不等式的解集.

问题 1

在阐明了一元一次方程的根与一次函数图像的关系的基础上，引导学生通过具体事例探讨一元一次不等式的解集与一次函数图像之间的关系.

先从“形”的角度直观观察，让学生从图像中获得信息，感知结论；再从“数”的角度进行分析，帮助学生形成理性认识，为归纳一般结论作铺垫.

问题 2

引导学生把在探讨问题 1 中所获得的具体结论进行一般化总结.

对于一元一次不等式与一次函数之间的关系的一般结论，要结合一次函数 $y=kx+b$ 的图像进行讲解.

【注意事项】

（1）在观察图 20－5 探求结论时，可向学生说明：对于一次函数图像上的点，已知横坐标（或纵坐标），可以根据解析式求出相应的纵坐标（或横坐标），因此要指出图像上的某一部分，只需指出这一部分内所有点的横坐标的取值范围.

（2）在教学中，要指导学生从“数”和“形”两个角度来分析.由一次函数的解析式 $y=kx+b$，可把一元一次方程及不等式分别与函数值 y 等于零、大于或小于零联系起来，再建立方程的根及不等式的解集与自变量的取值之间的关系；由直线的表达式 $y=kx+b$，可把一元一次方程及不等式与直线上点的纵坐标 y 等于零、大于或小于零联系起来，再建立方程的根及不等式的解集与直线上的点的横坐标 x 的取值之间的联系.数形结合，相辅相成，从而正确认识一元一次方程、一元一次不等式与一次函数之间的关系.

由一次函数 $y=kx+b$ 的函数值 y 大于 0(或小于 0)，就得到关于 x 的一元一次不等式 $kx+b>0$(或 $kx+b<0$). 在一次函数 $y=kx+b$ 的图像上且位于 x 轴上方(或下方)的所有点，它们的横坐标的取值范围就是不等式 $kx+b>0$(或 $kx+b<0$)的解集.

例题6 已知函数 $y=\frac{2}{3}x+1$.

(1) 当 x 取何值时，函数值 $y=5$?

(2) 当 x 取何值时，函数值 $y>5$?

(3) 在平面直角坐标系 xOy 中，在直线 $y=\frac{2}{3}x+1$ 上且位于 x 轴下方的所有点，它们的横坐标的取值范围是什么？

解 (1) 要使函数 $y=\frac{2}{3}x+1$ 的值 $y=5$，只要使 $\frac{2}{3}x+1=5$.

解方程 $\frac{2}{3}x+1=5$，得 $x=6$.

所以，当 $x=6$ 时，函数值 $y=5$.

(2) 要使函数 $y=\frac{2}{3}x+1$ 的值 $y>5$，只要使 $\frac{2}{3}x+1>5$.

解不等式 $\frac{2}{3}x+1>5$，得 $x>6$.

所以，当 $x>6$ 时，函数值 $y>5$.

(3) 因为所求的点在直线 $y=\frac{2}{3}x+1$ 上且位于 x 轴下方，所以它们的纵坐标 y 应小于零，得 $\frac{2}{3}x+1<0$. 解得 $x<-\frac{3}{2}$.

所以，所有这样的点的横坐标的取值范围是小于 $-\frac{3}{2}$ 的一切实数.

对例题 6 进一步分析，如图 20－6 所示，在直线 $y=\frac{2}{3}x+1$ 上，$M(6,5)$ 是以题(1)中所得的 x 的值为横坐标的点，以题(2)所得的 x 的值为横坐标的点都位于这条直线上点 M 朝上一侧.

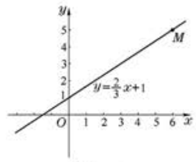


图 20－6

10 第二十章 一次函数

例题 6

本题为帮助学生理解和把握一元一次方程、一元一次不等式与一次函数的关系.

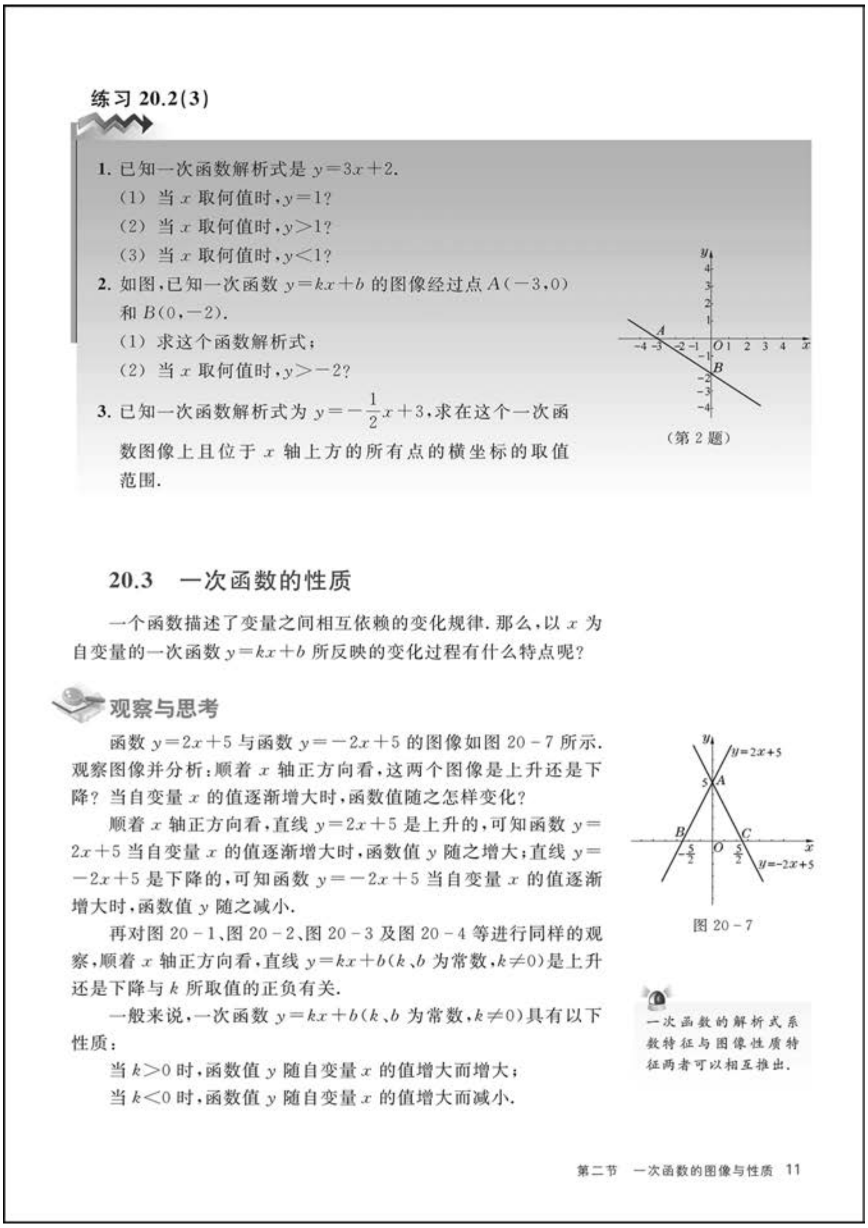
对题(1)、题(2)，主要从代数角度思考，通过式的代换与运算来解决问题.

题(3)引导学生从图形的角度进一步探讨一元一次方程、一元一次不等式与一次函数的关系，有助于学生对三者关系加深认识.

在教学中，可画出直线 $y=\frac{2}{3}x+1$，利用图形的直观性，帮助分析和解题.

【注意事项】

要切实安排探讨一元一次方程、一元一次不等式与一次函数之间关系的活动，并通过例题 6 的教学加深学生的认识.这项活动是运用函数思想和数形结合思想的实践；由此得到的结论，有助于学生建立相关知识之间的联系.要关注学生从中获得的过程经历和活动经验，这对以后探讨二次函数的图像与 x 轴的位置关系、解一元二次不等式等有积极的意义.可对三者之间的关系进行整体思考，从实际出发重新设计问题，开展研究性学习.



练习 20.2(3)

1. 已知一次函数解析式是 $y=3x+2$.

(1) 当 x 取何值时, $y=1$?

(2) 当 x 取何值时, $y>1$?

(3) 当 x 取何值时, $y<1$?

2. 如图,已知一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过点 $A(-3,0)$ 和 $B(0,-2)$.

(1) 求这个函数解析式;

(2) 当 x 取何值时, $y>-2$?

3. 已知一次函数解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+3$,求在这个一次函数图像上且位于 x 轴上方的所有点的横坐标的取值范围.

(第 2 题)

20.3 一次函数的性质

一个函数描述了变量之间相互依赖的变化规律. 那么,以 x 为自变量的一次函数 $y=kx+b$ 所反映的变化过程有什么特点呢?

观察与思考

函数 $y=2x+5$ 与函数 $y=-2x+5$ 的图像如图 20-7 所示. 观察图像并分析:顺着 x 轴正方向看,这两个图像是上升还是下降?当自变量 x 的值逐渐增大时,函数值随之怎样变化?

顺着 x 轴正方向看,直线 $y=2x+5$ 是上升的,可知函数 $y=2x+5$ 当自变量 x 的值逐渐增大时,函数值 y 随之增大;直线 $y=-2x+5$ 是下降的,可知函数 $y=-2x+5$ 当自变量 x 的值逐渐增大时,函数值 y 随之减小.

再对图 20-1、图 20-2、图 20-3 及图 20-4 等进行同样的观察,顺着 x 轴正方向看,直线 $y=kx+b$(k、b 为常数,$k\neq0$)是上升还是下降与 k 所取值的正负有关.

图 20-7

一般来说,一次函数 $y=kx+b$(k、b 为常数,$k\neq0$)具有以下性质:

当 $k>0$ 时,函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大;

当 $k<0$ 时,函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小.

一次函数的解析式系数特征与图像性质特征两者可以相互推出.

第二节 一次函数的图像与性质 11

练习 20.2(3)

1. (1) $x=-\frac{1}{3}$;

(2) $x>-\frac{1}{3}$;

(3) $x<-\frac{1}{3}$.

2. (1) $y=-\frac{2}{3}x-2$;

(2) $x<0$.

3. $x<6$.

【本课重点】

通过观察多个一次函数图像所反映的函数值随自变量变化而变化的活动,归纳、总结一次函数的基本性质,并运用性质解决相关问题.

观察与思考

引导学生观察一次函数图像的上升或下降情况,再归纳、总结函数值随自变量变化而变化的规律.

对于观察所得结果的归纳和总结,要注意“形”与“数”两个角度的表述:一是直线相对于 x 轴正方向呈上升还是下降的趋势,二是函数值随自变量的值的变化呈现怎样的变化.

【教学目标】

(1) 掌握一次函数的基本性质,能运用一次函数的性质解决一些简单的问题.

(2) 理解直线 $y=kx+b$ 中的常数 k 与 b 的正负与直线在坐标平面内的位置之间的联系.

(3) 在探索直线 $y=kx+b$ 在坐标平面内的位置特征与常数 k、b 的符号之间关系的过程中,体会数形结合的数学思想,领会由特殊到一般的分析问题和解决问题的思维方法.

例题 1

本题帮助学生熟悉根据一次函数 $y=kx+b$ 中 k 的正负判断函数值随自变量的值增大所呈现的变化，巩固所学的一次函数性质.

例题 2

本题是一次函数性质的灵活运用.其中，题(1)是根据函数 $y=kx+b$ 中函数值变化的性质判断 k 的正负情况；题(2)是关于函数图像与坐标轴的交点坐标的确定及交点位置的判断.

例题 3

本题在于引导学生关注一次函数性质的灵活运用.比较实数大小有很多方法，利用一次函数性质来比较实数大小体现了函数思想.

想一想

本题还可以求出 a、b 再比较大小.由题意，得

$$a=-\frac{2}{3}\times(-1)+m=\frac{2}{3}+m,$$

$$b=-\frac{2}{3}\times 1+m=-\frac{2}{3}+m.$$

因为 $a-b=\frac{4}{3}>0$，

所以 $a>b$.

例题1 已知一次函数 $y=kx+2$ 的图像经过点 $A(-1,1)$.

(1) 求常数 k 的值；

(2) 当自变量 x 的值逐渐增大时，函数值 y 随之增大还是减小?

解 (1) 因为一次函数 $y=kx+2$ 的图像经过点 $A(-1,1)$，

所以 $1=-k+2$.

解得 $k=1$.

(2) 因为 $k>0$，所以函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大.

例题2 已知一次函数 $y=(1-2m)x+m+1$，函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小.

(1) 求 m 的取值范围；

(2) 在平面直角坐标系 xOy 中，这个函数的图像与 y 轴的交点 M 位于 y 轴的正半轴还是负半轴?

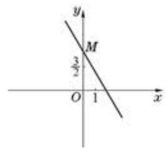


图 20-8

点 $M(0,m+1)$ 在 y 轴的正半轴上且位于坐标为 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ 的点的上方.

解 (1) 由已知条件，得 $1-2m<0$. 解得 $m>\frac{1}{2}$.

所以，m 的取值范围是大于 $\frac{1}{2}$ 的一切实数.

(2) 直线 $y=(1-2m)x+m+1$ 在 y 轴上的截距是 $m+1$，可知这条直线与 y 轴交点 M 的坐标是 $(0,m+1)$.

由 $m>\frac{1}{2}$，得 $m+1>\frac{3}{2}$，可知点 $M(0,m+1)$ 在 y 轴的正半轴上(如图 20-8 所示).

例题3 已知点 $A(-1,a)$ 和 $B(1,b)$ 在函数 $y=-\frac{2}{3}x+m$ 的图像上，试比较 a 与 b 的大小.

解 在函数解析式 $y=-\frac{2}{3}x+m$ 中，$k=-\frac{2}{3}$，可知函数值 y 随 x 的值增大而减小.

因为点 $A(-1,a)$ 和 $B(1,b)$ 在这个函数的图像上，所以当 x 分别取 -1、1 时，对应的函数值分别为 a、b.

由 $-1<1$，得 $a>b$.

想一想

在例题 3 中，还有其他方法比较 a 与 b 的大小吗?

12 第二十章 一次函数

【注意事项】

(1) 一次函数的基本性质是通过观察一次函数图像以后归纳得到的，归纳的基础应是大量的具体例子.因此，要适当补充一些例子，提供归纳的基础和验证所得的结论.

(2) 直线相对于 x 轴正方向上升或下降，是一种直观认识；一次函数的函数值随自变量的值增大而增大或减小，是对于直线上升或下降的数学描述.教学中，要注意把直观的形象转化为科学的数学语言.关于一次函数的增减性，现在是利用图形的直观性归纳得到的；在高中数学中将给出增函数和减函数的定义，同时对一次函数的增减性进行严格证明.

(3) 在讨论一次函数性质的过程中，要引导学生关注由形到数、由数到形的转化，体会数形结合的思想和研究函数性质的方法.

练习 20.3(1)

1. 如果一次函数 $y=(k+2)x+1$ 的函数值 y 随 x 的值增大而减小，那么 k 的取值范围是（　　）
(A) $k>2$；　(B) $k<2$；　(C) $k>-2$；　(D) $k<-2$.

2. 已知函数：① $y=-3x+1$；② $y=2x$；③ $y=x-1$；④ $y=\frac{1}{5}x-5$. 在这些函数中，函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大的函数有____________.

3. 已知函数 $y=(m-2)x+m$（m 是常数）.
(1) 当 m 取何值时，函数值 y 随 x 的值增大而增大？
(2) 当 m 取何值时，函数值 y 随 x 的值增大而减小？

例题4　已知一次函数 $y=kx+b(b\neq0)$ 的图像是与直线 $y=4x$ 平行的直线.

(1) 随着自变量 x 的值的增大，函数值 y 增大还是减小？

(2) 直线 $y=kx+2$ 经过哪几个象限？

(3) 直线 $y=kx+b(b\neq0)$ 经过哪几个象限？

解　(1) 因为直线 $y=kx+b(b\neq0)$ 与直线 $y=4x$ 平行，所以 $k=4$，这个一次函数的解析式为 $y=4x+b(b\neq0)$.

由 $k>0$ 可知，函数值 y 随着自变量 x 的值的增大而增大.

(2) 直线 $y=4x+2$ 过点 $M(0,2)$，即与 y 轴交于正半轴. 因为直线 $y=4x+2$ 与直线 $y=4x$ 平行，而直线 $y=4x$ 经过原点和第一、三象限，所以直线 $y=4x+2$ 经过第一、二、三象限.

(3) 直线 $y=4x+b(b\neq0)$ 过点 $P(0,b)$，与直线 $y=4x$ 平行. 如图 20－9 所示.

当 $b>0$ 时，点 $P(0,b)$ 在 y 轴的正半轴上，可知这时直线 $y=4x+b$ 经过第一、二、三象限；

当 $b<0$ 时，点 $P(0,b)$ 在 y 轴的负半轴上，可知这时直线 $y=4x+b$ 经过第一、三、四象限.

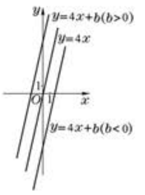


图 20－9

议一议

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=kx+b(k\neq0,b\neq0)$ 的位置与 k、b 的符号有什么关系？

直线 $y=kx+b(k\neq0,b\neq0)$ 过点 $(0,b)$ 且与直线 $y=kx$ 平行. 由直线 $y=kx$ 在直角坐标平面内的位置情况（如图 20－10）可知：

当 $k>0$，且 $b>0$ 时，直线 $y=kx+b$ 经过第一、二、三象限；

当 $k>0$，且 $b<0$ 时，直线 $y=kx+b$ 经过第一、三、四象限；

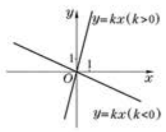


图 20－10

第二节　一次函数的图像与性质　13

练习 20.3(1)

1. D.
2. ②③④.
3. (1) $m>2$；
(2) $m<2$.

【本课重点】

探索直线 $y=kx+b$ 在直角坐标平面内的位置与常数 k 与 b 的正负符号之间的关系.

例题 4

本题承前启后，在复习前面所学知识的基础上，讨论直线 $y=kx+b$ 在直角坐标平面内的位置特征.

其中，题(1)是复习两条平行线表达式之间的关系和一次函数的增减性；题(2)是具体讨论一直线在直角坐标平面内的位置；题(3)将题(2)的讨论初步引向一般，让学生体验分类讨论与数形结合方法的运用.

议一议

引导学生探索和归纳直线 $y=kx+b(k\neq0,b\neq0)$ 在直角坐标平面内的位置与 k、b 的符号之间的关系.

【注意事项】

(1) 对例题 4(2)(3)的分析与讨论，可以运用直线平移的知识.如因为直线 $y=4x+2$ 可以由直线 $y=4x$ 向上平移 2 个单位得到，而直线 $y=4x$ 经过原点和第一、二象限，所以直线 $y=4x+2$ 经过第一、二、三象限.类似地，讨论直线 $y=4x+b$ 时，注意由平移直线 $y=4x$ 的方向及距离与 b 有关，可借助多媒体来演示.

(2) 对例题 4 安排由“确定 $y=4x+2$ 所经过的象限”到“确定 $y=4x+b$”的象限，再通过“议一议”引到“探究直线 $y=kx+b(k\neq0,b\neq0)$ 经过的象限”，体现了由特殊到一般对问题进行分析和研究的思维方法.在教学中，可安排学生进行探究性学习活动和讨论.

当 $k<0$，且 $b>0$ 时，直线 $y=kx+b$ 经过第一、二、四象限；
当 $k<0$，且 $b<0$ 时，直线 $y=kx+b$ 经过第二、三、四象限.
把上述判断反过来叙述，也是正确的.

例题5 已知一次函数 $y=(2-a)x-3$ 的函数值 y 随着自变量 x 的值增大而增大.

(1) 求实数 a 的取值范围；

(2) 指出这个函数的图像所经过的象限.

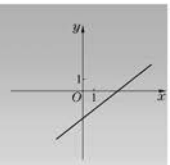
解 (1) 因为函数值 y 随 x 的值增大而增大，所以 $2-a>0$，得 $a<2$.

所以 a 的取值范围是 $a<2$.

(2) 在这个一次函数的解析式中，因为一次项系数 $2-a>0$，截距 $-3<0$，所以这个函数的图像经过第一、三、四象限.

练习 20.3(2)

1. 如果一次函数 $y=kx+b$ 的图像如图所示，那么 (　　)
   (A) $k<0$，且 $b>0$；　(B) $k>0$，且 $b<0$；
   (C) $k<0$，且 $b<0$；　(D) $k>0$，且 $b>0$.



(第 1 题)

2. 直线 $y=2x+1$ 的截距等于______；这条直线不经过第______象限.
3. 已知直线 $y=(1-3m)x+(2m-1)$. 分别根据下列条件求 m 的值或 m 的取值范围：
   (1) 这条直线经过原点；
   (2) 这条直线与已知直线 $y=-3x+5$ 平行；
   (3) 这条直线经过第二、三、四象限.

例题 5

本题帮助学生理解和巩固前面所学知识.题(1)由一次函数的增减性确定解析式中一次项系数的正负；题(2)由解析式中的系数判断图像所经过的象限，是前面所学知识的基本运用.

练习 20.3(2)

1. B.

2. 1；四.

3. (1) $m=\dfrac{1}{2}$；

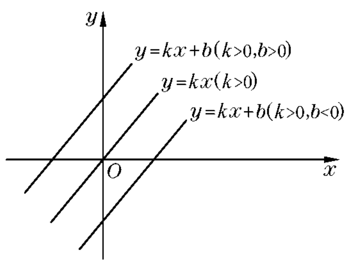
(2) $m=\dfrac{4}{3}$；

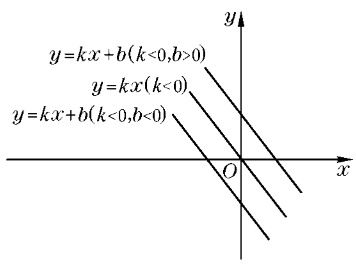
(3) $\dfrac{1}{3}<m<\dfrac{1}{2}$.

【注意事项】

(1) 讨论直线 $y=kx+b(k\neq0,b\neq0)$ 所经过的象限时，可参考例题 4 的解题过程，也可通过观察直线与坐标轴交点的位置，归纳得到结论.

(2) 对于图 20-10，可以增补一些直线，按下图所示详细分类：





(3) 根据直线 $y=kx+b(k\neq0,b\neq0)$ 所经过的象限与 k、b 的符号之间的关系，可由 k、b 的符号判断直线经过的象限(如例题 5)；也可由直线经过的象限判断 k、b 的符号(如练习 20.3(2)中第 1 小题).

Yici Hanshu De Yingyong

第三节　一次函数的应用

20.4　一次函数的应用

一次函数在现实生活中有广泛的应用，现在我们利用一次函数来解决一些简单的实际问题.

例题1　某市为鼓励市民节约用水和加强对节水的管理，制定了以下每月每户用水的收费标准：

(1) 用水量不超过 50 立方米时，每立方米收费 1.8 元，并加收每立方米 1 元的污水处理费；

(2) 用水量超过 50 立方米时，在(1)的基础上，超过 50 立方米的部分，每立方米收费 3.2 元，并加收每立方米 1.4 元的污水处理费.

设某户一个月的用水量为 x 立方米，应交水费 y 元. 试分别对(1)(2)两种情况，写出 y 关于 x 的函数解析式，并指出函数的定义域.

分析　根据收费标准，在(1)的情况下，$0 \leqslant x \leqslant 50$，这时每立方米应收费 $1.8+1=2.8$(元)，可知 $y=(1.8+1) \cdot x=2.8x$.

在(2)的情况下，$x>50$，这时，有 50 立方米的用水按(1)应收费 140 元；超过 50 立方米的部分每立方米水收费 $3.2+1.4=4.6$(元)，应收费 $4.6(x-50)$(元)，可知 $y=140+4.6(x-50)=4.6x-90$.

解　(1) y 关于 x 的函数解析式是 $y=2.8x$，函数的定义域为 $0 \leqslant x \leqslant 50$.

(2) y 关于 x 的函数解析式是 $y=4.6x-90$，函数的定义域为 $x>50$.

函数 $y=2.8x(0 \leqslant x \leqslant 50)$ 和函数 $y=4.6x-90(x>50)$，它们的定义域是部分实数，图像分别如图 20－11(1)(2)所示.

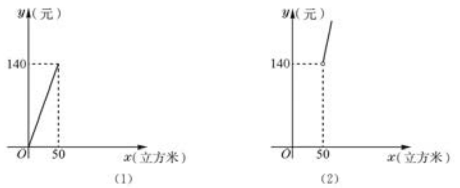


图 20－11

函数 $y=2.8x(0 \leqslant x \leqslant 50)$ 的图像是一条线段；函数 $y=4.6x-90(x>50)$ 的图像是一条射线(除端点外).

我们再来讨论本章开始时提出的某地区沙漠面积预测问题.

第三节　一次函数的应用　15

【本课重点】

让学生通过解决实际问题的活动，学习如何根据实际问题中两个变量之间的关系建立一次函数解析式，以及运用一次函数模型解决实际问题.

例题 1

本题的背景是城市居民用水的收费问题，学生有一定的生活经验.学生通过建立一个月的水费与用水量之间的函数关系，从中可以获得实际问题数学化的过程经历和学习建立函数解析式的方法.

在建立函数解析式的过程中，由于收费标准与用水量有关，所以本题如要整体描述它们之间的函数关系就会出现分段函数.为了避免出现分段函数，特意分设两个小题；在书写函数关系时，要分开表达，此时更要注意函数的定义域.另外，图 20－11 可以帮助学生认识和理解所得的函数关系.

在教学中，可以引导学生思考水费随用水量的增加如何变化；还可以进一步研究由水费如何计算用水量、由用水量如何确定水费等问题.

【教学目标】

(1) 通过探求实际问题的函数关系，体验一次函数知识的应用，能确定简单实际问题的一次函数解析式及函数定义域.

(2) 经历运用一次函数的知识分析和解决问题的过程，初步掌握通过建立函数模型作出预测与决策的基本方法.

(3) 在利用一次函数的图像分析和解决问题的活动中，提高从函数图像中获取信息的能力，体验数形结合的数学思想.

例题 2

本题是章头语中提出的问题，提供学生学习如何根据实际问题中的变量关系建立一次函数模型，并运用所建模型预测数据的变化趋势.

利用一次函数模型作出预测，是一次函数知识实际应用的体现之一.

练习 20.4(1)

1. $y=2x+1\,000$，6 个月后的本息和为1 012元.
2. $y=x-30\ (x>30)$，图像略.
3. 1 250.

【本课重点】

让学生通过两个问题的讨论，学习如何运用一次函数的解析式与图像分析和解决实际问题.

问题 1

本题的背景是物理现象，其实是数学知识的应用.问题的解决在于确定弹簧长度与所挂重物质量之间的函数关系；要关注学生运用一次函数知识分析问题与解决问题的能力的培养.

> $y=ax+100.6$ 是描述这个实际问题的函数模型. 求出常数 a 后，根据函数解析式可以预测未来某一年的沙漠面积.
>
> 本题也可以这样解：
> 以 1999 年为第 1 年，设第 x 年的沙漠面积为 y 万公顷，则
> $y=kx+b.$
> 再由 $x=0$ 时 $y=100.6$，$x=3$ 时 $y=101.2$，确定 k、b 的值；然后求解.
>
> **例题2** 据报道，某地区从 1995 年底开始，每年增加的沙漠面积几乎相同，1998 年该地区的沙漠面积约 100.6 万公顷，2001 年扩展到 101.2 万公顷，如果不进行有效的治理，试估计到 2025 年该地区的沙漠面积.
>
> **解** 设该地区每年增长的沙漠面积为 a 万公顷，以 1999 年为第 1 年，第 x 年的沙漠面积为 y 万公顷，那么 y 与 x 之间的函数关系为 $y=ax+100.6.$
>
> 2001 年是第 3 年，当 $x=3$ 时，$y=101.2$（万公顷），即
> $$101.2=3a+100.6.$$
> 解得 $a=0.2.$
> 所以 $y=0.2x+100.6.$
> 2025 年是第 27 年，当 $x=27$ 时，
> $$y=0.2\times27+100.6=106.$$
> 答：估计到 2025 年该地区的沙漠面积为 106 万公顷.
>
> **练习 20.4(1)**
>
> 1. 某种储蓄的月利率是 0.2%. 如果存入 1 000 元本金，不计复利，求本利和（本金与利息之和）y（元）与所存月数 x 之间的函数解析式，并计算 6 个月后的本利和.
> 2. 某长途汽车运输公司对乘客携带行李作如下规定：一个乘客可免费携带 30 千克行李，如果超过 30 千克，那么超过部分每千克收行李费 1 元. 设一个乘客的行李质量为 x 千克（$x>30$），试写出行李费 y（元）关于行李质量 x（千克）的函数解析式及定义域，并画出函数图像.
> 3. 已知某汽车油箱中的剩余油量 y（升）与该汽车行驶里程数 x（千米）是一次函数关系. 当汽车加满油后，行驶 200 千米，油箱中还剩油 126 升；行驶 250 千米，油箱中还剩油 120 升. 这辆汽车加满油最多能行驶多少千米？
>
> 在实际生活中，运用一次函数的知识还可以帮助我们分析和处理一些较为复杂的问题.
>
> **问题1**
>
> 已知弹簧在一定限度内，它的长度 y（厘米）与所挂重物质量 x（千克）是一次函数关系. 如果有一根弹簧、一把刻度尺和一个质量为 2.5 千克的物体（在弹性限度内），你能用这根弹簧制作一把简单的弹簧秤吗？
>
> 制作弹簧秤的关键是要确定弹簧长度与所挂重物质量之间的函数解析式. 有了一把刻度尺，我们可以量出弹簧不挂重物时的长度，又可以量出弹簧挂上 2.5 千克重物时的长度. 也就是知道了两
>
> 16 第二十章 一次函数

【注意事项】

(1) 例题 1 的教学着重于引导学生建立函数关系，要让学生体会如何根据实际问题建立变量之间的关系以及如何根据实际情况确定函数的定义域.

(2) 例题 2 体现了函数知识中的数学建模思想，让学生进一步学习如何建立函数关系，并应用函数模型对实际问题作出简单预测.对于函数解析式的建立，除了课本提出的两种方法外，也可以直接根据 1998 年的沙漠面面积与 2001 年的沙漠面积，计算出沙漠面积每年的增长速度，直接写出函数解析式.

(3) 在例题 1 和例题 2 的教学过程中，要注意它们的侧重点和连贯性；也可以根据学生的实际情况对两个例题作适当的引申.

组自变量的值与对应函数值，这样就可以确定这个函数解析式.

试一试

如果经过测量，不挂重物时弹簧长度是 6（厘米），挂上 2.5 千克重物时弹簧长度是 7.5（厘米），那么弹簧长度 y（厘米）与所挂重物的质量 x（千克）的函数解析式是________.

如果挂了一个重物时量出弹簧长度是 7（厘米），那么这个重物的质量是________千克.

问题2

一家公司招聘销售员，给出以下两种薪金方案供求职人员选择：
方案甲：每月的底薪为 1 500 元，再加每月销售额的 10%；
方案乙：每月的底薪为 750 元，再加每月销售额的 20%.
如果你是应聘人员，你认为应该选择怎样的薪金方案？

我们先列出在这两种方案中，月薪 y（元）与月销售额 x（元）的函数关系：

方案甲：$y=1\,500+\frac{1}{10}x\ (x\geqslant 0)$；

方案乙：$y=750+\frac{1}{5}x\ (x\geqslant 0)$.

由此可见，月薪的高低取决于销售额的大小.

再计算销售额 x 为多少时，这两种方案所定的月薪相同：

解方程组 $\begin{cases} y=1\,500+\frac{1}{10}x, \\ y=750+\frac{1}{5}x, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=7\,500, \\ y=2\,250. \end{cases}$

可知，当销售额为 7 500 元时，这两种方案所定的月薪相同.

如果销售额不是 7 500 元，那么可对这两种方案所定月薪的高低作比较：

在同一直角坐标系中画出两种方案中 y 关于 x 的函数图像，如图 20－12.

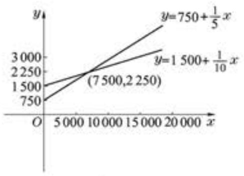


图 20－12

想一想，应该选择怎样的薪金方案呢？

第三节　一次函数的应用　17

试一试

根据对问题 1 的分析，在此提出一个具体的问题，让学生尝试解决.

根据条件推导出的函数解析式是 $y=\frac{3}{5}x+6$；如果挂了一个重物时，量出弹簧长度为 7 厘米，那么重物的质量是 $\frac{5}{3}$ 千克.

问题 2

这是一个决策问题，让学生体验如何运用数学知识作出正确的决策.

问题中涉及对两个薪金方案的分析和比较.在解题过程中，要让学生体会先建立函数解析式、再画函数图像、最后根据图像作出决策的过程.

本题的解决，也可以直接解不等式 $1\,500+\frac{1}{10}x>750+\frac{1}{5}x$ 来完成.

本题的结论是：当每月销售额低于7 500元时，方案甲的薪金高；当每月销售额高于7 500元时，方案乙的薪金高.

【注意事项】

（1）在问题 1 的教学过程中，要让学生充分体验思维过程；教师要有数学实验意识，尽可能提供演示实验，并鼓励学生动手制作.

（2）问题 2 提供了一个较为复杂的现实背景.在分析和解决问题的过程中，要抓住问题的本质，即建立两种方案中的月薪 y 与销售额 x 的函数解析式，再运用函数知识对两种方案分析比较.在分析比较两种方案的过程中，课本采用图像帮助分析和决策，这样直观、易懂.在这个过程中，要引导学生体会如何从函数图像中获取信息，体验“数形结合”的数学思想.

（3）在对问题 2 的分析和解决过程中，一方面要明确，选择较高的薪金方案是合理的决策；另一方面要注意培养学生正确的价值观，要从实现自身价值的角度正确看待问题.

练习 20.4(2)

1. 当租期超过 40 个月时，选择乙房屋；当租期少于 40 个月时，选择甲房屋；当租期是 40 个月时，都可以选择.
2. (1) 每月行驶 1 500 千米时，两家公司的租车费用相同；

   (2) 每月行驶超过 1 500千米时，租用甲公司的车合算；

   (3) 租用甲公司的车合算.

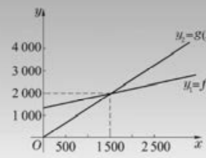
练习 20.4(2)

1. 张先生准备租一处临街房屋开一家电脑公司. 现有甲乙两家房屋出租，甲屋已装修好，每月租金 3 000 元；乙屋没有装修，每月租金 2 000 元，但要装修成甲屋的模样，需要花费 4 万元. 如果你是张先生，你该如何选择?
2. 某公司急需用车，但暂时无力购买，于是准备与出租车公司签订租车合同. 以每月行驶 x 千米计算，甲出租车公司的月租车费用是 y_1 元，乙出租车公司的月租车费用是 y_2 元，如果 $y_1=f(x)$、$y_2=g(x)$，这两个函数的图像如图所示，那么：

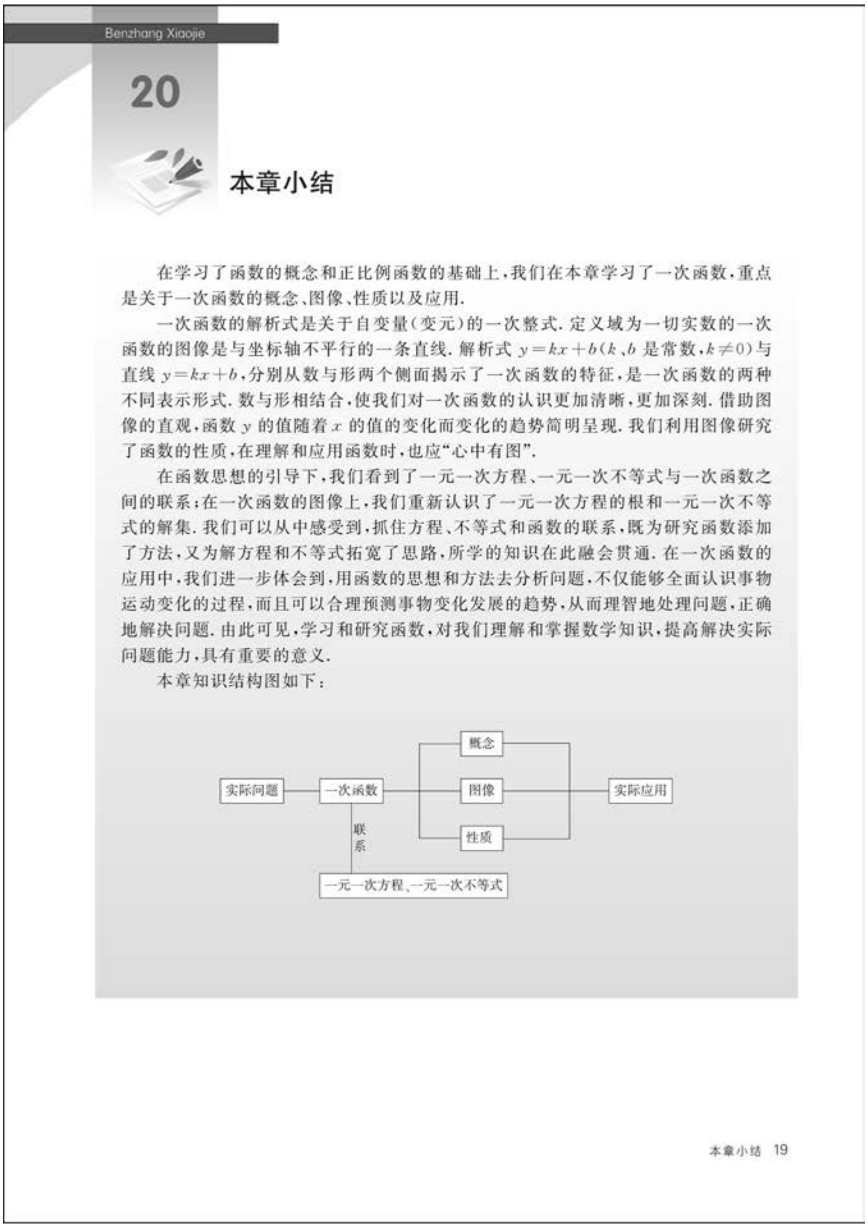
   (1) 每月行驶多少路程时，两家公司的租车费用相同?

   (2) 每月行驶多少路程时，租用甲公司的车合算?

   (3) 如果每月用车的路程约为 2 300 千米，那么租用哪家的车合算?



(第 2 题)



Benzhang Xiaojie

20

本章小结

在学习了函数的概念和正比例函数的基础上，我们在本章学习了一次函数，重点是关于一次函数的概念、图像、性质以及应用.

一次函数的解析式是关于自变量（变元）的一次整式. 定义域为一切实数的一次函数的图像是与坐标轴不平行的一条直线. 解析式 $y=kx+b$（k、b 是常数，$k\neq 0$）与直线 $y=kx+b$，分别从数与形两个侧面揭示了一次函数的特征，是一次函数的两种不同表示形式. 数与形相结合，使我们对一次函数的认识更加清晰，更加深刻. 借助图像的直观，函数 y 的值随着 x 的值的变化而变化的趋势简明呈现. 我们利用图像研究了函数的性质，在理解和应用函数时，也应“心中有图”.

在函数思想的引导下，我们看到了一元一次方程、一元一次不等式与一次函数之间的联系：在一次函数的图像上，我们重新认识了一元一次方程的根和一元一次不等式的解集. 我们可以从中感受到，抓住方程、不等式和函数的联系，既为研究函数添加了方法，又为解方程和不等式拓宽了思路，所学的知识在此融会贯通. 在一次函数的应用中，我们进一步体会到，用函数的思想和方法去分析问题，不仅能够全面认识事物运动变化的过程，而且可以合理预测事物变化发展的趋势，从而理智地处理问题，正确地解决问题. 由此可见，学习和研究函数，对我们理解和掌握数学知识，提高解决实际问题能力，具有重要的意义.

本章知识结构图如下：

本章小结 19

在本章小结的教学中，要注意培养学生的整体意识和提升学生的数学观念.

指导学生从整体上把握函数的知识和研究函数的方法；领会数形结合的数学思想和运动变化的观点；体会函数思想及数学建模思想.

【注意事项】

（1）一次函数是一类简单的初等函数，其学习顺序的安排是按“定义—性质—应用”.这也是研究函数的一般顺序，今后在学习其他类型的函数时也会遵照这个顺序，所以要有整体意识.这种研究函数的顺序，从本质上来说，是一种研究函数的“数学方式”.在初中阶段，强调借助函数图像的直观性对函数进行研究，其学习顺序呈现为“定义—图像—性质—应用”.

（2）数形结合是重要的数学思想方法；函数知识是培养数形结合能力的有效载体.本章从解析式 $y=kx+b$（k、b 是常数，$k\neq 0$）与直线 $y=kx+b$ 两个角度，让学生认识和研究一次函数，体现了数形结合的数学思想，要引导学生仔细体会.函数是学生接触的第一个变量意义下的概念，对它的认识需要一个过程；对一次函数所反映的变量之间的依赖关系，要指导学生用运动变化的观点来看待，这样也有利于学生对函数概念的正确理解.

（3）函数不仅是知识，更重要的是它本身也是一种重要的思想方法，我们可以应用函数方法研究数学问题，也可以应用函数知识解决实际问题.同时，在解决一些实际问题时，函数又常常被看作一个数学模型，要注意培养学生的数学建模能力.

Yuedu Cailiao

20

阅读材料

直线型经验公式

一定质量的气体,在体积不变的情况下,压强随温度的变化而变化.压强 P(千帕)与温度 t(℃)之间具有一次函数关系:$P=kt+b$(k、b 是常数,与气体种类相关).

小强决定通过实验来探求某种气体相关的常数 k 与 b,从而确定这个函数的解析式.

小强知道,从理论上讲,只要采集两组数据,就可以确定 k 与 b 的值.为了减小实验误差对 k 与 b 产生的影响,他决定多采集几组数据.以下是小强采集的实验数据:

t(℃)	0	10	20	30	40	50
P(千帕)	99	106	113	118	123	131

该选取哪两组数据来解决问题呢?

小强运用所学的函数知识,考虑借助于图像来分析.于是,他在直角坐标系中将上述六组数据所对应的六个点描出,如图 20-13 所示.观察这六个点,它们不在同一条直线上,这是实验误差所造成的.小强一时不知如何是好.

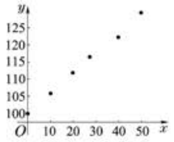


图 20-13

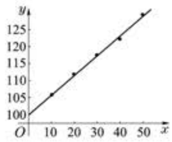


图 20-14

以下是一种常用的处理方法.

(1) 画一条直线,使得所描出的点尽可能均匀地分布在这条直线的两侧或在直线上,如图 20-14 所示.

(2) 如果有两个点在直线上,那么就由这两个点的坐标确定这条直线所表示的一次函数的解析式;如果没有两个点在所画直线上,那么就在直线上选取两个点,先估算这两点的坐标,再确定这条直线所表示的一次函数的解析式.

采用这种方法所求出的函数解析式,通常称为直线型经验公式.

据此,可求出上述问题的一个直线型经验公式.

请你与小强一起来解决这个问题吧.

20 第二十章 一次函数

【设计意图】

本材料是向学生介绍与一次函数密切相关的直线型经验公式,内容的背景是物理知识.让学生通过对一系列数据的分析和处理,学习和体验在实际问题中如何处理呈现出直线型特点的数据,如何确定最能反映数据呈现特点的“最佳”函数(或方程),为决策提供科学依据.

【活动建议】

在活动过程中,要让学生动手,自己描出相关的点;让学生观察这些点呈现的特点,思考如何画出直线,如何确定直线的表达式.必要时,可以组织学生讨论,尤其是如何确定直线的表达式,可以用多种方法,并对这些方法作分析和比较.

【注意事项】

(1) 由于学生的知识所限,在阅读材料中没有介绍寻找和确定函数(或方程)的更好的方法,仅仅介绍了一种简单方法,主要是让学生体验这种寻找“最佳”函数(或方程)的朴素思想.

(2) 在活动过程中,还可以由学生自己选择其他的实际问题中的数据,再选择操作性强的方法,确定直线表达式,帮助分析和处理问题.

第二十一章　代 数 方 程

一、教学目标

1. 知道一元整式方程的概念；会解含有字母系数的一元一次方程与一元二次方程，体会分类讨论的思想方法.

2. 知道高次方程的概念；会用计算器求二项方程的实数根(近似根).

3. 理解分式方程、无理方程的概念；掌握简单的可化为一元二次方程的分式方程(组)和简单的无理方程的解法，知道“验根”是解分式方程(组)和无理方程的重要步骤，掌握验根的基本方法；领会分式方程整式化、无理方程有理化的化归思想.

4. 知道二元二次方程和二元二次方程组的概念；会用代入消元法解由一个二元一次方程与一个二元二次方程所组成的二元二次方程组，会用因式分解法解两个方程中至少有一个容易变形为二元一次方程的二元二次方程组；掌握“消元”和“降次”的基本方法，进一步领会化归思想.

5. 会列出一元整式方程或分式方程(组)、无理方程解简单的实际问题，增强分析问题、解决问题的能力.

6. 经历“问题情境—建立方程模型—求解与解释”的过程，体会方程模型的思想，增强数学应用意识和能力，感受数学的实际应用价值.

二、课时安排

本章教学共16课时，建议分配如下：

21.1	一元整式方程	1课时
21.2	二项方程	1课时
21.3	可化为一元二次方程的分式方程	3课时
21.4	无理方程	2课时
21.5	二元二次方程和方程组	1课时
21.6	二元二次方程组的解法	2课时
21.7	列方程(组)解应用题	4课时
本章小结		2课时

三、设计说明

初中阶段所研究的方程属于初等代数方程的范畴，即方程中涉及未知数的运算是有限次的加、减、乘、除、乘方或开方运算.初等代数方程(简称“代数方程”)包括有理方程和无理方程两大类，在有理方程中，涉及未知数的运算只有加、减、乘、除或乘方运算；在无理方程中，一定涉及未知数的开方运算.也就是说，代数方程的分类与方程中所含的关于未知数的代数式类型相关.有理方程中所含关于未知数的代数式都是整式或分式，只含关于未知数的整式则为整式方程；若含关于未知数的分式则为分式方程.无理方程中一定含关于未知数的根式.

代数方程中未知数的个数可以是一个、两个或多个，所含关于未知数的代数式的类型又多种多样，因此构成的代数方程系统是庞大而复杂的.初中阶段所要研究的代数方程，只能是这个代数方程系统中具有奠基意义的一些类型的方程，而且关注的重点是建立方程知识的基础和获得方程研究的方法.

对代数方程的基础性研究，是从一元一次方程开始的，随后是二元、三元一次方程(组)、一元二次方程

等.对基础性研究的进一步扩展,其基本思路是一元方程的次数增加,或者二次整式方程的元的个数增加;还有,就是进行分式方程、无理方程的初步研究.本章是在学生学习了一元一次、二次方程以及多元一次方程组和可化为一元一次方程的分式方程的基础上,对方程的研究进行扩展,涉及一元高次方程、分式方程、无理方程和二元二次方程(组),主要探讨其中一些特殊的、基本的方程的解法.

本章内容按所研究的方程类型分设四大节,还有一大节是关于方程(组)的应用.内容的选取,注重于构建方程知识基础的需要,以及展示方程的研究方法和体现方程的基本应用的需要.内容的呈现,以“问题—活动—归纳”为基本方式,引导学生参与知识的探索和形成过程.内容的素材,强调应是基本的、典型的,既能为达成教学目标有效服务,又能被学生普遍接受;同时注意联系实际,尽可能贴近学生生活、有时代气息.内容的展开,力求符合学生的认知规律,与学习的一般过程保持一致性;具体安排通常是从问题出发导入学习主题,通过观察、操作、比较、分析等活动展现探究过程,然后归纳、概括结论,再组织进行例题学习.本章有关方程或方程组的概念,基本上都是通过具体实例引出;有关方程或方程组的解法,都是通过尝试解决具体问题以后得到;有关列方程(组)解应用题的实施,都是从分析实际问题中的数量关系着手.在内容的表述中,注意突出从特殊到一般、从具体到抽象的研究思路,注重体现化归思想方法的运用和方程模型思想的渗透.课本中提出了利用计算器解二项方程的要求,重视信息技术(计算器)的运用.

本章的主要内容是二项方程以及简单的分式方程、无理方程、二元二次方程组的解法,以及有关方程(组)的基本应用.学生对一元一次、二次方程和二元一次方程组的解法的掌握,是学习本章内容的必备基础;他们对化归的思想方法的领悟,是学好本章内容的一个关键.学生对解分式方程和无理方程有可能产生增根的理解以及对实际问题中数量关系的分析,是本章学习的难点,课本中适当进行了讲解,教师也有必要加强学习指导.

四、教学建议

1. 要从具体事例和学生已有的知识出发,对各类方程及方程组进行基本概念教学.在扩展方程基本类型的概念教学中,要以关于具体事例的讨论和相关知识的复习为基本出发点;让学生根据实际问题中的数量关系列出方程,在对新方程的分析以及与旧方程的比较中形成概念;让学生感受到学习方程知识的实际意义,并体会到已有方程知识的不足,认识到确有必要进一步地拓展和探究方程知识.这样,才能更好地调动学生学习的积极性,并增强将方程用于解决实际问题的意识.

到本章为止,一元代数方程的基本知识已经大体完整,教学时可帮助学生对方程的概念系统进行适当地整理,可作下面的分类:

$$\text{代数方程}\begin{cases}\text{有理方程}\begin{cases}\text{整式方程}\begin{cases}\text{一次方程}\\\text{二次方程}\\\text{高次方程}\end{cases}\\\text{分式方程}\end{cases}\\\text{无理方程}\end{cases}$$

2. 要重视过程教学.在本章教学中,要积极体现“问题驱动”的原则,有效组织学生开展探究活动,让学生经历对有关方程(组)解法进行探索的过程,而不是简单、直接地传授各种解法,让学生去套用.在探索各类方程(组)解法的过程中,要引导学生积极思考、不断总结,逐步领会其中蕴含的数学思想,掌握解方程(组)的基本方法;要防止脱离教学基本要求而另外补充单纯追求技巧的其他解法.

3. 要突出数学思想方法的教学,提高学生的数学素质.本章内容中贯穿了“化归”思想,同时给出了一些具体的“化归”策略和方法,教学时要突出“化归”思想的运用.“化归”的常用方法以及应注意的问题,可结合教学过程逐步指明,再列出下表来总结.

<table>
<tr><th>方程(组)</th><th>解方程(组)
的基本思想</th><th>化归的基本策略</th><th>基 本 方 法</th><th>应 注 意 的 问 题</th></tr>
<tr><td>分式方程</td><td rowspan="3">化归思想</td><td>“整式化”:化归为整式方程</td><td>去分母法,换元法</td><td rowspan="2">可能会产生增根,必须进行验根.</td></tr>
<tr><td>无理方程</td><td>“有理化”:化归为有理方程</td><td>同次乘方去根号</td></tr>
<tr><td>简单的二元二次方程组</td><td>“消元”:化归为一元方程
“降次”:化归为一次方程组</td><td>代入消元法,因式分解法</td><td>在保证同解条件下实行转化</td></tr>
</table>

还有,本章所蕴含的分类讨论思想(如含字母系数的一元一次、二次方程的求解)、数学建模思想(如列方程解应用题)等,要在教学时结合相关内容引导学生深入领会.

4. 要加强学习指导,帮助学生突破难点.学生在本章学习的过程中,可能遇到的主要困难是“验根”和“列方程解应用题”.

解分式方程和无理方程有可能会产生增根,根本原因是在解方程的过程中常常扩大了未知数允许取值的范围.对于分式方程,去分母时方程两边所乘的代数式其值可能为零;对于含二次根式的无理方程,在方程两边平方后则解除了原二次根式中被开方数必须非负的约束,同时可能使原二次根式只有非负值的特性失去.教学过程中,可针对具体方程的求解过程,深入浅出地说明有关增根的问题,让学生认识验根是解分式方程和无理方程的重要步骤,并掌握它们的验根方法.由于课本对同解方程的概念和同解原理不作要求,因此对产生增根原因的分析要求不能过高,也不宜深究.

在列方程解应用题的教学中,对实际问题中数量关系的分析,首先要帮助学生理解题意,把握这一问题所涉及的基本的等量关系式;然后对问题中的等量关系进行梳理,抓住未知量与已知量之间的实质性联系,建立方程(组).可借助图、表和多媒体等,以加强直观性;可从普通语言的表述逐步转到符号语言的表达,展现数学化过程.要让学生通过解应用题的活动,获得分析问题的经验和方法,并掌握一些常见类型问题中的基本的等量关系式;而对于解应用题的套路应该淡化.

5. 要重视进行辩证法的教育,加强数学与现实的联系.本章中不同类型的简单方程和方程组,都可以用适当的方法转化为一元二次方程或一次方程组来解.因此,教学时要让学生感受到:事物的矛盾是可以转化的,不同的矛盾要用不同的方法解决;要努力创造条件,寻找切实的方法,促成矛盾的转化,达到解决矛盾的目的,进而逐步树立在一定的条件下事物之间相互转化的辩证观点.

本章中有很多联系实际的内容,要引导学生关注周围世界,增强数学应用意识;在列方程解应用题的教学中,要关注学生对方程思想的领会和数学建模的体验,提高分析问题和解决问题的能力,体会方程的应用价值.

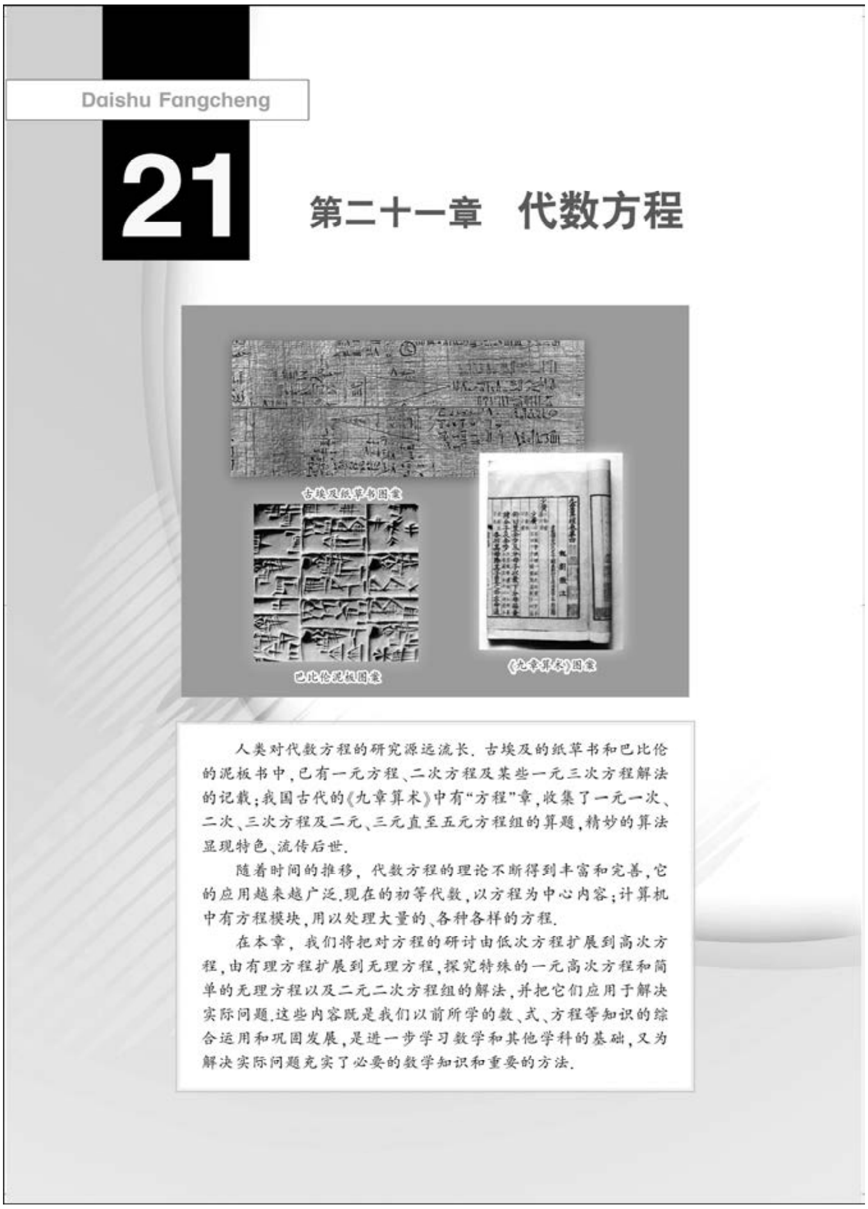
6. 要关注学生个体差异,注意满足不同学生的需求.由于多种原因,学生的分析问题、解决问题能力存在一定的差异.要特别关注数学学习有困难的学生,与他们多交流,鼓励他们积极参与学习活动,引导他们积极融入集体的学习中去,提高学习兴趣;帮助他们掌握各基本类型的简单方程(组)及其解法,增强进一步学习和研究方程的信心.对于学有余力的学生,可以提供必要的素材,鼓励他们作进一步的自主探索和学习,在能力上得到更进一步的发展.

五、评价建议

1. 关注学生对代数方程基础知识系统的构建和完善,恰当评价学生对基本知识和基本技能的理解与掌握.初中阶段学习方程,主要内容是简单的整式方程、分式方程、无理方程.学生对代数方程的认识有一个逐步完善的过程,要引导和鼓励学生对所学的方程基础知识系统地进行整理,并将此纳入学习评价范围.关于基本内容学习情况的检测,应注重学生对各基本类型方程有关重要概念的理解、基本解法的熟练掌握和基本应用的掌握,所涉及的方程是简单的,数学思想方法是突出的;同时关注学生思维合理性、表达规范性的锤炼和基本能力的培养,如学生能否选择合适的方法解有关方程或方程组,能否有条理地、完整地表达解题过程,能否正确分析和处理新情境中的问题以及解决简单的实际问题等.

教学中要重视计算器的运用，培养学生利用计算器处理较复杂的数值计算问题的意识和技能，同时也要在学习评价中体现出来.

2. 关注学习过程评价，促进学生主动学习、提高数学基本素养. 对于学生的学习评价，要加强过程性，如学生参与方程概念形成、解法探索等活动的积极性，学生与他人合作交流的主动性，学生思维参与的程度和创新精神的表现等；要鼓励学生自主活动、独立思考，鼓励学生提出问题、发表见解和解决问题.在讲评、小结中，要重视有关数学思想方法的点拨和交流，促进学生对数学思想方法学习的反思和总结.


Daishu Fangcheng

21 第二十一章 代数方程

古埃及纸草书图案

巴比伦泥板图案

《九章算术》图案

人类对代数方程的研究源远流长. 古埃及的纸草书和巴比伦的泥板书中,已有一元方程、二次方程及某些一元三次方程解法的记载;我国古代的《九章算术》中有"方程"章,收集了一元一次、二次、三次方程及二元、三元直至五元方程组的算题,精妙的算法显现特色、流传后世.

随着时间的推移, 代数方程的理论不断得到丰富和完善,它的应用越来越广泛.现在的初等代数,以方程为中心内容;计算机中有方程模块,用以处理大量的、各种各样的方程.

在本章, 我们将把对方程的研讨由低次方程扩展到高次方程,由有理方程扩展到无理方程,探究特殊的一元高次方程和简单的无理方程以及二元二次方程组的解法,并把它们应用于解决实际问题.这些内容既是我们以前所学的数、式、方程等知识的综合运用和巩固发展,是进一步学习数学和其他学科的基础,又为解决实际问题充实了必要的数学知识和重要的方法.

方程是一个古老的数学课题,又是古代数学的重要内容.章头图就是古代数学中有关方程研究的史料图片.

在章头语中,简单介绍了方程研究的历史和发展进程,提出了本章学习的主要内容,说明了本章学习的重要性.教学时,建议教师事先查阅相关史料和人文材料,充分利用这些素材激发学生学习本章的兴趣,尽可能发挥史料对提升学生数学素养的作用,同时,也可以通过对中国古代在方程研究方面的突出成就介绍,激发学生的民族自豪感,教育学生奋发图强,努力学习.

Zhengshi Fangcheng

第一节　整式方程

21.1　一元整式方程

通过对一元一次、二次方程相关内容的简单回顾和复习，为学习本课作好铺垫.

我们已经学习过一元一次方程和一元二次方程的有关概念以及解方程的基本方法和步骤.

例如，方程 $3x=\frac{1}{2}x+1$、$x^2+4x-12=0$，它们含未知数 x 的项的系数以及常数项都是数字. 对这样的数字系数方程，很容易辨别它们分别是一元一次方程和一元二次方程；也会选用适当的方法，求出它们的解.

下面我们进一步扩展方程的有关知识.

问题 1

提供实际问题情境，让学生感受到问题思考的现实意义；通过列方程的活动，引导学生认识含字母系数的一元一次、二次方程.

问题1

解下列问题时所列出的方程属于哪一种类型？

（1）买 a（a 是正整数）本同样的练习本共需 12 元钱，求练习本的单价；

（2）一个正方形的面积的 b（$b>0$）倍等于 $2s$（平方单位），求这个正方形的边长.

对于问题(1)，设练习本的单价是 x 元，根据题意可列出方程

$$ax=12\ (a \text{ 是正整数}). \qquad ①$$

在方程①中，x 是未知数，a 是用字母表示的已知数. 于是，在项 ax 中，字母 a 是项的系数，我们把 a 叫做字母系数. 这个方程是含字母系数的一元一次方程.

对于问题(2)，如果设这个正方形的边长是 x，那么所列出的方程是

$$bx^2=2s\ (b>0). \qquad ②$$

在方程①②中指明了 x 是未知数，它们是关于 x 的方程.

在方程②中，x 是未知数，b 和 s 是用字母表示的已知数. 同样地，字母 b 是字母系数；$2s$ 是常数项，字母 s 也叫做字母系数. 这个方程是含字母系数的一元二次方程.

22　第二十一章　代数方程

【教学目标】

（1）知道一元整式方程与高次方程的有关概念.

（2）经历从具体问题中的等量关系引进含字母系数的方程的过程，知道含字母系数的一元一次方程、一元二次方程的概念，初步掌握它们的基本解法.

（3）通过解含字母系数的一元一次方程、一元二次方程，体会分类讨论的思想以及由特殊到一般、一般到特殊的辩证思想.

例题1 解下列关于 x 的方程：

(1) $ax+b^2=bx+a^2(a\neq b)$；

(2) $bx^2=2s(b>0,s>0)$.

解 (1) 移项，得

$$ax-bx=a^2-b^2.$$

合并同类项，得

$$(a-b)x=a^2-b^2.$$

因为 $a\neq b$，所以 $a-b\neq 0$.

两边同除以 $a-b$，得

$$x=\frac{a^2-b^2}{a-b},$$

即

$$x=a+b.$$

所以，原方程的根是

$$x=a+b.$$

用一个整式去除方程两边时，必须对这个整式的取值是否可能为零进行判断.

(2) 因为 $b>0$，所以可在两边同除以 b，得

$$x^2=\frac{2s}{b}.$$

又因为 $s>0$，

所以 $\frac{s}{b}>0$，即 $\frac{2s}{b}>0$.

两边同时开平方，得

$$x=\pm\sqrt{\frac{2s}{b}},$$

即

$$x=\pm\frac{\sqrt{2sb}}{b}.$$

所以，原方程的根是

$$x_1=\frac{\sqrt{2sb}}{b},x_2=-\frac{\sqrt{2sb}}{b}.$$

在实数范围内实施开平方运算，必须先判断被开方数是否为非负数.

例题2 解下列关于 x 的方程：

(1) $(3a-2)x=2(3-x)$；

(2) $bx^2-1=1-x^2(b\neq -1)$.

第一节 整式方程 23

例题 1

本题让学生初步感知含字母系数的一元一次方程和一元二次方程的解法.在教学中，首先要引导学生区分方程中的未知数与字母系数，认识方程的类型，再让学生运用早已熟悉的方法来解这两个方程.

【注意事项】

(1) 对于问题1以及后面的问题2，分析其中的数量关系以及列出方程都不困难，一般的学生能在已有知识经验的基础上独立完成.教学时，要重视这两个问题的使用，由此引进有关概念.教师还可以根据学生的实际情况，适当增补一些学生感兴趣的素材，促使学生更多地关注数学与现实的联系，体会进一步学习方程知识的现实意义.

(2) 在例题1的教学中，要让学生运用“字母表示数”的思想，充分注意到方程中的字母系数其实质是一个数；还要注意在运用等式性质时对某些有关的数的限制条件.如方程两边同除以一个数时，这个除数不能为零，当这个数的表示形式是一个“式”时，就要判断这个数是否为零.为降低难度，题中分别给出了(1) $a\neq b$ 及(2) b、s 均为正数的条件，因此可直接分析相关式子的取值情况进而作出相应的判断，不涉及分类讨论.

例题 2

本题展示了解含字母系数的一元一次方程、一元二次方程的基本方法和过程，教学中要把握基本要求，要为学生学习如何对字母的取值进行分类讨论和完整表达解题过程提供必要的帮助.

想一想

引导学生归纳解含字母系数的方程的一般步骤.要组织学生进行思考和交流，归纳得到有关结论，明确有关注意事项.要重视由特殊到一般、一般到特殊的辩证思想教育，提升学生的思想观点.

解 (1) 去括号，得

$$3ax-2x=6-2x.$$

移项，得

$$3ax-2x+2x=6.$$

合并同类项，得

$$3ax=6. \qquad ③$$

当 $a\neq 0$ 时，方程③是一元一次方程，解得

$$x=\frac{2}{a};$$

当 $a=0$ 时，方程③变成 $0\cdot x=6$，这时不论 x 取什么值，等式 $0\cdot x=6$ 都不成立，因此方程无解.

所以，当 $a\neq 0$ 时，原方程的根是 $x=\frac{2}{a}$；当 $a=0$ 时，原方程无解.

方程③是一元一次方程吗？为什么要分“$a\neq 0$”与“$a=0$”这两种情况讨论？
这里蕴含了什么数学思想？

(2) 移项，得

$$bx^2+x^2=1+1.$$

合并同类项，得

$$(b+1)x^2=2.$$

因为 $b\neq -1$，所以

$$b+1\neq 0.$$

两边同除以 $b+1$，得

$$x^2=\frac{2}{b+1}. \qquad ④$$

当 $b+1>0$，即 $b>-1$ 时，由方程④解得

$$x=\pm\frac{\sqrt{2b+2}}{b+1};$$

当 $b+1<0$，即 $b<-1$ 时，方程④中 $\frac{2}{b+1}<0$，这时方程没有实数根.

所以，当 $b>-1$ 时，原方程的根是

$$x_1=\frac{\sqrt{2b+2}}{b+1},\ x_2=-\frac{\sqrt{2b+2}}{b+1};$$

当 $b<-1$ 时，原方程没有实数根.

为什么要对“$b+1$”进行分类讨论？
如果题中没有 $b\neq -1$ 的条件，那么解题时还要讨论什么？

注意：用含字母系数的式子去乘或除方程的两边时，这个式子的值不能等于零；在实数范围内对含字母系数的式子开平方时，这个式子的值不能小于零.

想一想

利用一元一次方程或一元二次方程的解法，解含字母系数的方程与解数字系数的方程的一般的步骤一样吗？需要注意些什么？

24 第二十一章 代数方程

【注意事项】

在例题 2 的教学中，要让学生联想解数字系数方程的一般步骤，在新情景下合理运用所学过的方法尝试求解；再针对解题过程和学生可能出现的问题，解说为什么要进行分类讨论和怎样进行分类讨论，师生共同总结经验.本题对解题过程的表述，除了解方程的一般规范要求外，还有分述和综述的要求，教师应认真做好板书示范.

问题2

有一块边长为 10 分米的正方形薄铁皮，在它的四个角上分别剪去大小一样的一个小正方形，然后做成一个容积为 48 立方分米的无盖长方体物件箱，如图 21 - 1 所示. 设小正方形的边长为 x 分米，试根据题意列方程；再观察这个方程，它与一元一次方程及一元二次方程有什么相同点和不同点？

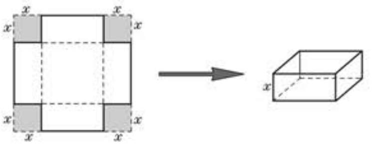


图 21 - 1

由问题 2，列出的方程是

$$x(10-2x)^2=48,$$

即

$$x^3-10x^2+25x-12=0. \quad ⑤$$

方程⑤与一元一次方程、一元二次方程一样，未知数只有一个，方程中所含的代数式都是关于未知数的整式；但是方程⑤中含未知数的项的最高次数是 3.

如果方程中只有一个未知数且两边都是关于未知数的整式，那么这个方程叫做**一元整式方程**.

如果经过整理的一元整式方程中含未知数的项的最高次数是 n（n 是正整数），那么这个方程就叫做**一元 n 次方程**；其中次数 n 大于 2 的方程统称为一元高次方程，本章简称**高次方程**.

例如 $\frac{1}{2}x^5-16x^3+x-1=0$、$x^4-5x^2+4=0$ 等，都是高次方程.

例题3 判断下列关于 x 的方程，哪些是整式方程？这些整式方程分别是一元几次方程？

① $\frac{1}{2}x^2+a^3x-1=0$；

② $4x^3+81=0$；

③ $3a+2x=5x-\frac{1}{a}$；

第一节 整式方程 25

问题 2

提出问题让学生讨论，从中认识高次方程的存在，感受到扩展方程类型的必要性.

这里描述了一元整式方程的相关概念，教学中不要过分追求形式化；课本中没有给出一元 n 次方程的一般形式，也不必引入.

例题 3

本题是帮助学生认识有关的整式方程. 教学时要紧扣相关概念，注意不要人为地复杂化.

【注意事项】

（1）本节中出现的有关概念，如含字母系数的一元一次、二次方程，一元整式方程、高次方程等，只要求学生联系已有的方程知识，能够接受和识别它们；不要强调形式化的定义，也不应要求死记硬背这些概念.

关于一元整式方程的概念，课本中强调方程“两边都是关于未知数的整式”，如果方程中有一边不含未知数，那么这一边的整式就是一个“数”，这时也说它是“关于未知数的整式”. 同时还要注意，如果要进一步判定一个一元整式方程的“次数”，那么必须先对这个方程进行整理（主要是指将方程两边表示为多项式或单项式，再合并同类项），然后以含未知数的项中这个未知数的最高次数为方程的“次数”. 所以，一元 n 次方程是对一元整式方程合并“同类项”以后所得方程而言的，需要向学生进行说明.

（2）对于整式方程，可以进一步按“次”分类. 一个整式方程的“元”数和“次”数，一般都要在这个方程化为最简形式后才能判定. 如方程 $x^3+2x=x(x^2-x)+1$，表面形式上是一元三次方程，但化简所得方程为 $2x=-x^2+1$，所以这个方程其实是一元二次方程.

练习 21.1

1. (1) $y=\dfrac{1}{a^2+1}$；

(2) $b\neq 0$ 时，$x=\dfrac{4-3b}{b}$；

$b=0$ 时，无解；

(3) $x_1=\dfrac{\sqrt{a^2+4}}{a^2+4}$，

$x_2=-\dfrac{\sqrt{a^2+4}}{a^2+4}$；

(4) $b>0$ 时，$y_1=\dfrac{\sqrt{b}}{b}$，

$y_2=-\dfrac{\sqrt{b}}{b}$；$b<0$

时，无实数根.

2. 略.

3. $a=0$ 且 $b\neq 0$.

④ $\dfrac{x+2}{2x}=\dfrac{1}{3}$；

⑤ $\dfrac{2}{x}+x=a^2-2a-3$；

⑥ $x^4+7x^2-8=0$.

解　方程①②③⑥是整式方程；其中方程①是一元二次方程，方程②是一元三次方程，方程③是一元一次方程，方程⑥是一元四次方程.

练习 21.1

1. 解下列关于 x 或 y 的方程：

(1) $a^2y+y=1$；

(2) $b(x+3)=4$；

(3) $(ax)^2+4x^2=1$；

(4) $by^2+1=2(b\neq 0)$.

2. 试写出两个一元整式方程，三个高次方程；再写一个项数(项为 0 除外)为 2 的一元四次方程.

3. 想一想，如果关于 x 的方程 $ax=b$ 无解，那么实数 a、b 满足什么条件？

21.2 二项方程

我们对于解一元一次方程、一元二次方程进行过系统的讨论，并且得到了这两类方程的求根公式. 解一元高次方程，一般来说是比较困难的. 现在，我们只对特殊的高次方程的解法进行探讨.

观察

方程$\frac{1}{2}x^5-16=0$、$5x^3+118=0$、$2x^4-3=0$、$x^6+1=0$ 都是一元高次方程，这些方程有什么共同的特点？

这四个方程的左边只有两项，其中一项含未知数 x，这项的次数就是方程的次数；另一项是常数项；方程的右边是 0.

如果一元 n 次方程的一边只有含未知数的一项和非零的常数项，另一边是零，那么这样的方程就叫做**二项方程**.

关于 x 的一元 n 次二项方程的一般形式为

$$ax^n+b=0 \quad (a\neq 0, b\neq 0, n \text{ 是正整数}).$$

$ax^n=0(a\neq 0)$是非常特殊的 n 次方程，它的根是 0.

思考

怎样解二项方程 $ax^n+b=0(a\neq 0, b\neq 0)$？

这里所涉及的二项方程的次数不超过 6 次.

我们以解方程①$\frac{1}{2}x^5-16=0$ 和②$5x^3+118=0$ 为例，来讨论这个问题.

利用等式的性质，可把方程①变形为

$$x^5=32,$$

可知 x 是 32 的五次方根. 因此，通过开方运算来求方程的根.

因为$\sqrt[5]{32}=2$，所以方程①的根是 $x=2$.

在初中阶段，解方程都是在实数范围内进行.

类似地，方程②可变形为

$$x^3=-\frac{118}{5}.$$

所以方程②的根是

$$x=\sqrt[3]{-\frac{118}{5}}.$$

一般地，二项方程 $ax^n+b=0\ (a\neq 0, b\neq 0)$可变形为

$$x^n=-\frac{b}{a}.$$

因此，解一元 $n(n>2)$次二项方程，可转化为求一个已知数的 n 次方根.

第一节 整式方程 27

【本课重点】

让学生理解解一元 n 次二项方程的基本方法是化归为求一个实数的 n 次方根，会用计算器求二项方程的实数根（近似根）.

观察

让学生通过观察实例，归纳二项方程的概念.

可进行适当地引导，如：观察方程的项数、含未知数的项的次数等；要让学生具体认识二项方程的主要特征，再对二项方程进行一般描述.

思考

意在引导学生探索二项方程解法.

可如例所示，给出具体的方程，让学生自主进行解方程的活动，运用化归思想和已有知识来解决新问题，从中获得过程体验和学习经验.

【教学目标】

（1）知道二项方程的概念，会用计算器求二项方程的实数根（近似根）.

（2）经历二项方程解法的探索过程，体会从特殊到一般、从具体到抽象的思考过程，体验整体思想及解高次方程的降次策略.

例题 1

本题是利用计算器解二项方程.教学时要指导学生学习和掌握计算器的使用方法,并提出解题表述的规范.

例题1 利用计算器解下列方程(近似根保留三位小数):

利用计算器求 n 次方根的操作方法,参见所用计算器的使用说明书.

(1) $x^3=15\frac{5}{8}$;

(2) $3x^5-68=0$.

解 (1) 方程两边同时开立方,得

$$x=\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}.$$

利用计算器,得

$$x=2.5.$$

所以,原方程的根是

$$x=2.5.$$

(2) 原方程可变形为

$$x^5=\frac{68}{3},$$

得

$$x=\sqrt[5]{\frac{68}{3}}.$$

利用计算器,得

$$\sqrt[5]{\frac{68}{3}}\approx 1.867.$$

所以,原方程的根是

$$x\approx 1.867.$$

例题 2

本题是帮助学生进一步掌握二项方程的解法和计算器的使用.教学时,应强调解二项方程应先把方程变形为 $x^n=-\frac{b}{a}$,判断方程有根后,再利用计算器求出它的根或近似根.

教学中,要注意引导学生通过例题 2 观察"n 的奇偶性"与"方程的根的情况"之间的关系,再归纳一般二项方程的根的情况.

例题2 利用计算器解下列方程(近似根保留三位小数):

(1) $x^3-64=0$;

(2) $2x^4-18=0$;

(3) $\frac{1}{2}x^5+\frac{3}{2}=0$;

(4) $x^6+1=0$.

解 (1) 原方程可变形为

$$x^3=64,$$

得

$$x=\sqrt[3]{64}.$$

利用计算器,得

$$\sqrt[3]{64}=4.$$

所以,原方程的根是

$$x=4.$$

28 第二十一章 代数方程

【注意事项】

(1) 一元一次方程、一元二次方程都有一般的解法,并且还有求根公式,这两类方程是解其他类型方程的基础.对于解一元高次方程,一般来说是比较困难的(尽管对于一元三次方程和一元四次方程也有求根公式,但不在中学数学学习的范围),只有某些特殊的高次方程,我们才能通过化归求解,要让学生明白.

(2) 要重视引导学生经历概念的形成及解法的探索过程.对于二项方程要让学生通过观察、分析,认识和归纳方程的特征;然后尝试解这种特殊的高次方程,再进行归纳总结.要注意说明解法的依据和揭示其中蕴含的数学思想方法,并引导学生认真体会.对于解特殊的高次方程,要严格控制在课本中介绍的用计算器解二项方程这种类型中,不要突破.

(2) 原方程可变形为

$$x^4=9,$$

得

$$x=\pm\sqrt[4]{9}.$$

利用计算器，得

$$\sqrt[4]{9}\approx 1.732.$$

所以，原方程的根是

$$x_1\approx 1.732,\ x_2\approx -1.732.$$

(3) 原方程可变形为

$$x^5=-3,$$

得

$$x=\sqrt[5]{-3}.$$

利用计算器，得

$$\sqrt[5]{-3}\approx -1.246.$$

所以，原方程的根是

$$x\approx -1.246.$$

(4) 原方程可变形为

$$x^6=-1.$$

因为在实数范围内负数的偶次方根不存在，所以原方程没有实数根.

对于二项方程

$$ax^n+b=0(a\neq 0,b\neq 0),$$

当 n 为奇数时，方程有且只有一个实数根.

当 n 为偶数时，如果 $ab<0$，那么方程有两个实数根，且这两个根互为相反数；如果 $ab>0$，那么方程没有实数根.

例题3 利用计算器解下列方程（近似根保留三位小数）：

(1) $(x+1)^3-4=0$;

(2) $2(1-3x)^4-10=0$;

(3) $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^5+5=0$.

分析　分别将 $x+1$、$1-3x$ 和 $\frac{1}{2}x-1$ 看作一个“整体”，那么原方程就可看作以这个“整体”为新“元”的方程.

解　(1) 原方程可变形为

$$(x+1)^3=4,$$

第一节　整式方程　29

例题 3

本题是解形如 $a(x+c)^n+b=0(a\neq 0,b\neq 0,n$ 是正整数)的方程，这是解二项方程的延伸.

【注意事项】

例题 2 中的第(4)题用计算器求解时，计算器会显示“Error”字样，说明原方程在实数范围内没有实数根.

得

$$x+1=\sqrt[3]{4}.$$

解这个一元一次方程，得

$$x=\sqrt[3]{4}-1.$$

利用计算器，得

$$\sqrt[3]{4}\approx 1.587.$$

所以，原方程的根是

$$x\approx 0.587.$$

(2) 原方程可变形为

$$(1-3x)^4=5,$$

得

$$1-3x=\pm\sqrt[4]{5},$$

即

$$1-3x=\sqrt[4]{5},\quad 1-3x=-\sqrt[4]{5}.$$

分别解这两个一元一次方程，得

$$x=\frac{1-\sqrt[4]{5}}{3},x=\frac{1+\sqrt[4]{5}}{3}.$$

利用计算器，得

$$\frac{1-\sqrt[4]{5}}{3}\approx -0.165,\frac{1+\sqrt[4]{5}}{3}\approx 0.832.$$

所以，原方程的根是

$$x_1\approx -0.165,\quad x_2\approx 0.832.$$

(3) 原方程可变形为

$$\left(\frac{1}{2}x-1\right)^5=-5,$$

得

$$\frac{1}{2}x-1=\sqrt[5]{-5}.$$

解这个一元一次方程，得

$$x=2-2\sqrt[5]{5}.$$

利用计算器，得

$$2-2\sqrt[5]{5}\approx -0.759.$$

所以，原方程的根是

$$x\approx -0.759.$$

【注意事项】

例题 3 中的两个方程虽然不是二项方程，但可以转化为如同例题 2 一样进行求解，其中体现了整体思想和化归思想.教学时，要启发学生注意方程的形式特征，把握特征往往是找出合适解法的重要突破口；要突出整体思想和化归思想的运用，并让学生体会.

练习 21.2

1. 判断下列方程是不是二项方程：

(1) $\frac{1}{2}x^3+8=0$；

(2) $x^4+x=0$；

(3) $x^5=9$；

(4) $x^3+x=1$.

2. 利用计算器解下列方程(近似根保留三位小数)：

(1) $x^5+243=0$；

(2) $2x^3+\frac{1}{54}=0$；

(3) $\frac{2}{3}x^4-10=0$.

3. 利用计算器解下列方程(近似根保留三位小数)：

(1) $(x+2)^3=7$；

(2) $(2x+3)^4-12=0$；

(3) $\left(\frac{1}{3}x+1\right)^5-6=0$.

练习 21.2

1. (1) 是； (2) 不是；
(3) 是； (4) 不是.

2. (1) $x=-3$；
(2) $x\approx-0.210$；
(3) $x_1\approx1.968$，
$x_2\approx-1.968$.

3. (1) $x\approx-0.087$；
(2) $x_1\approx-0.569$，
$x_2\approx-2.431$；
(3) $x\approx1.293$.

Fenshi Fangcheng

第二节 分式方程

21.3 可化为一元二次方程的分式方程

> 如果方程中只含分式和整式，且分母中含有未知数，那么这个方程是分式方程.

在七年级学习“分式”这一章时，我们认识了分式方程，讨论了可化为一元一次方程的分式方程的解法. 如方程

$$\frac{2}{x+1}=3,\quad \frac{1}{x}=\frac{3}{x-1},$$

它们都是分式方程. 这两个分式方程通过去分母，可化为一元一次方程. 于是，解这两个方程化归为解相应的一元一次方程.

试一试

解上面两个分式方程.

问题1

在一次献爱心募捐活动中，某单位的共青团员们准备捐款1 200元，这笔钱大家平均分担. 实际捐款时又有2名青年同事参加，但总费用不变，于是每人少捐30元. 问共有多少人参加捐款.

在这个问题中，一个基本的等量关系是：

实际人均捐款(元)＝原定人均捐款(元)－30(元).

如果设实际参加捐款的人数为 x，那么原来捐款的人数为 $(x-2)$. 从而得到实际人均捐款为 $\frac{1\,200}{x}$(元)，原定人均捐款为 $\frac{1\,200}{x-2}$(元).

于是，可列出方程

$$\frac{1\,200}{x}=\frac{1\,200}{x-2}-30. \qquad ①$$

> 解分式方程的基本思路是：通过“去分母”把它转化为一个整式方程，再求解.

方程①是一个分式方程，两边同时乘以 $x(x-2)$，得

$$1\,200(x-2)=1\,200x-30x(x-2).$$

整理，得 $x^2-2x-80=0.$ ②

方程②是一个一元二次方程，它是由方程①变形得到的. 也就是说，方程①是可化为一元二次方程的分式方程.

解分式方程①归结为解一元二次方程②.

想一想

方程②的根一定是方程①的根吗？方程①的根一定是原来问题的答案吗？

32 第二十一章 代数方程

【本课重点】

引导学生探索可化为一元二次方程的分式方程的解法，归纳得到解分式方程的一般步骤；使学生获得探索过程的经历，领会分式方程“整式化”的化归思想和方法.

问题 1

通过实例引出了可以化为一元二次方程的分式方程，使学生感受到有必要进一步学习和研究可化为一元二次方程的分式方程.

列出方程以后，让学生尝试解这个方程.

想一想

让学生通过对所列问题的思考和讨论，认识到把一个分式方程转化为一个整式方程来解，需要进行“验根”；同时还要注意所得的根是否符合实际意义.

【教学目标】

(1) 经历探索分式方程解法的过程，知道解分式方程的一般步骤；会解简单的分式方程，会根据方程的特点选择适当的解法；知道解分式方程时“去分母”可能产生增根，掌握验根的方法.

(2) 通过将简单的分式方程转化为一元二次方程进行求解，领会分式方程“整式化”的化归思想和方法.

【注意事项】

在问题1的教学中，要展示“列方程解应用题”的过程. 对所列出的方程求解时，要调动学生在解可化为一元一次方程的分式方程中获得的经验；应突出通过“去分母”把分式方程转化为整式方程(这里是一元二次方程)来解的基本思路，明确“化归”思想.

通过去分母将分式方程化成整式方程，利用了等式的性质. 但是，化成整式方程后，未知数的允许取值范围扩大了.因此，可以肯定原分式方程的根是变形所得整式方程的根，但所得整式方程的根不一定是原分式方程的根，必须进行检验.

> 等式性质：在等式两边乘以同一个整式后，等式仍然成立.

根据实际问题中的等量关系列方程，由这个方程所确定的未知数允许取值范围，通常比实际意义所决定的未知数允许取值范围大，因此所列方程的根也不一定是原实际问题的答案.

在上述问题中，由方程②解得 $x_1=10$，$x_2=-8$；将它们分别代入代数式 $x(x-2)$ 中，这个代数式的值都不等于 0，即它们在方程①的未知数允许取值范围内. 经检验，它们都是方程①的根.

> 由检验过程可知，x_1、x_2 不会使分式中的分母为 0，说明它们在未知数的允许取值范围内.

而根据未知数表示的实际意义，可知 x 的允许取值范围是大于 2 的整数. 经检验，x_1 符合实际意义，而 x_2 不符合实际意义，应舍去.

所以，原来问题的答案是：参加捐款的人数有 10 人.

问题2

解分式方程的一般步骤是什么？

我们以解分式方程 $\frac{x}{x-1}=\frac{2}{x^2-1}$ 为例，来讨论这个问题.

先尝试解这个方程：

(1) 考虑去掉方程中各分式的分母，把分式方程转化为整式方程.

> $(x+1)(x-1)$ 是原方程中所含两个分式的最简公分母.

因为 $x^2-1=(x+1)(x-1)$，所以，在方程两边同时乘以 $(x+1)(x-1)$ 可约去各个分母. 原方程化为

$$x(x+1)=2.$$

(2) 对上面这个整式方程求解.

方程 $x(x+1)=2$，即 $\quad x^2+x-2=0$.

解得 $\quad x_1=1$，$x_2=-2$.

(3) 判断所求得的整式方程的根是不是原方程的根.

只要检验当 x 的值分别取 1、-2 时，原方程两边同乘的那个代数式 $(x+1)(x-1)$ 的值是不是等于零.

当 $x=1$ 时，$(x+1)(x-1)=0$；

当 $x=-2$ 时，$(x+1)(x-1)\neq 0$，

可知 1 不是原方程的根，即它是增根；-2 是原方程的根.

所以，原方程的根是 $\quad x=-2$.

> 如果在解整式方程时没有差错，那么所求得的整式方程的根中，能使“去分母”时所乘代数式的值不为 0 的根一定是原方程的根；否则是增根.
> 当然，把解整式方程所得的根代入原方程进行“验根”，总是一种有效的方法.

归纳

解分式方程，可以通过方程两边同乘以方程中各分式的最简公分母，约去分母，转化为整式方程来解.

> 分式方程
> $\downarrow$ 去分母
> 整式方程

第二节　分式方程　33

问题 2

在已有解分式方程的经验和解决了问题 1 的基础上，引导学生对解分式方程的步骤进行整理.

通过对一个具体的可化为一元二次方程的分式方程求解的进一步尝试，归纳得到解分式方程的一般步骤，再用“流程图”进行表述.

边款中对“验根”的方法进行了说明，指出可检验所求得的整式方程的根是否会使原分式方程中的分母（或去分母时所乘的整式）为零；也可直接代入原分式方程进行检验. 教学中，要具体指导学生进行“验根”，帮助学生学会检验的方法和表达.

【注意事项】

(1) 分式方程的主要特征是分母中含有未知数. 教学时，可通过复习让学生进一步理解分式方程的概念，但对概念的辨析不是本节的重点内容.

(2) 解分式方程的过程体现了化归的思想，通过“去分母”将分式方程转化为整式方程是化归的一种方法.

(3) 关于分式方程的增根，课本中通过具体的解方程过程，进行了直观性的说明. 值得注意的是：① “增根”与解分式方程的过程有关，在这个过程中，解分式方程化成了解一个整式方程的问题；② “增根”与解分式方程过程中的这个整式方程有关，它一定是这个整式方程的根但不是原分式方程的根. 也就是说，不能离开解分式方程过程以及所解的整式方程来讨论“增根”问题. 关于产生增根的原因，教师知道这是由于在解方程过程中实施的变形不是同解变形所致，但在教学中不要深究，只要学生明白：通过将分式方程转化为整式方程来求解，有可能产生增根，因此需要“验根”，这时检验的步骤不可缺少.

为归纳解分式方程的一般步骤，可引导学生反思解决问题2以及以前解分式方程的过程.对于流程图的表述，要向学生进行适当的解释.

解分式方程的一般步骤，也可如下归纳和表述：

（1）将原方程化成一个整式方程；

（2）解这个整式方程；

（3）对所得的整式方程的根进行检验；

（4）确定原方程的根或原方程无解.

想一想

让学生通过思考和讨论，认识到在解分式方程过程中验根的重要性，了解验根的方法.

练习 21.3(1)

1.（1）是；（2）是；（3）不是；（4）是.

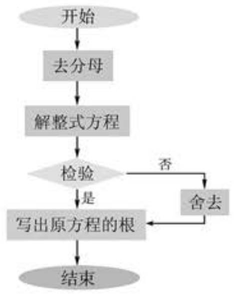
2. 略.

3. $x=1$ 或 $x=2$.

解分式方程的一般步骤，可用流程图表述为：

在方程的两边同时乘以方程中各分式的最简公分母，将原方程化成整式方程.

把求得的整式方程的根代入最简公分母，判断它的值是不是等于零.使最简公分母的值不为零的根是原方程的根；使最简公分母的值为零的根是增根，必须舍去.



想一想

在解分式方程的过程中，为什么要有“检验”的步骤？检验的方法有哪些？

练习 21.3(1)

1. 下列方程中，哪些是分式方程？

（1）$\frac{1}{x}=2x$；（2）$\frac{1}{2}x+\frac{2}{x}=1$；

（3）$\frac{x^2-1}{5}+\frac{x}{2}=3$；（4）$\frac{4}{x}-\frac{1}{x-1}=1$.

2. 填空：

在横线上填写适当的式、数、符号，完整表达解方程的过程.

解分式方程 $\frac{1}{x-2}=\frac{4}{x^2-4}+1$.

解 方程两边同时乘以__________，约去分母，得____________________.

解这个整式方程，得

$x_1=$______，$x_2=$______.

把 $x=$______代入__________，它的值____0；

把 $x=$______代入__________，它的值____0.

经检验，$x=$____是增根，舍去.

所以，原方程的根是__________.

3. 当 x 取何值时，分式方程 $\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x-2}=1$ 中各分式的最简公分母的值等于零？

34 第二十一章 代数方程

下面，我们来解可化为一元二次方程的分式方程.

例题1 解方程：$\dfrac{1}{1-x}+1=\dfrac{2}{1+x}$.

解 方程两边同时乘以$(1-x)(1+x)$，得

$$1+x+(1-x)(1+x)=2(1-x).$$

整理，得 $x^2-3x=0$.

解这个整式方程，得 $x_1=0$，$x_2=3$.

检验：当$x=0$时，$(1-x)(1+x)=(1-0)(1+0)=1\neq0$；

当$x=3$时，$(1-x)(1+x)=(1-3)(1+3)=-8\neq0$.

所以，原方程的根是 $x_1=0$，$x_2=3$.

> 去分母时，方程两边的每一"项"都要乘以最简公分母，要注意常数项不要漏乘.

例题2 解方程：$\dfrac{2x}{x^2+2x-3}+\dfrac{1}{x+3}=1$.

解 把分母x^2+2x-3分解因式，原方程变形为

$$\frac{2x}{(x-1)(x+3)}+\frac{1}{x+3}=1.$$

方程两边同时乘以$(x-1)(x+3)$，得

$$2x+x-1=(x-1)(x+3).$$

整理，得 $x^2-x-2=0$.

解这个整式方程，得 $x_1=-1$，$x_2=2$.

检验：当$x=-1$时，$(x-1)(x+3)=(-1-1)(-1+3)=-4\neq0$；

当$x=2$时，$(x-1)(x+3)=(2-1)(2+3)=5\neq0$.

所以，原方程的根是 $x_1=-1$，$x_2=2$.

> 把分母x^2+2x-3分解因式，是为了找出最简公分母.

例题3 解方程：$\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{16}{x^2-4}=\dfrac{1}{x+2}$.

解 方程两边同时乘以$(x+2)(x-2)$，得

$$(x+2)^2-16=x-2.$$

整理，得 $x^2+3x-10=0$.

解这个整式方程，得 $x_1=2$，$x_2=-5$.

检验：当$x=2$时，$(x+2)(x-2)=(2+2)(2-2)=0$；

当$x=-5$时，$(x+2)(x-2)=(-5+2)(-5-2)=21\neq0$.

可知$x_1=2$是增根，舍去.

所以，原方程的根是 $x=-5$.

议一议

解分式方程时应注意什么？

第二节 分式方程 35

【本课重点】

让学生学会通过"去分母"来解可化为一元二次方程的分式方程，并熟悉解题过程的表达.

例题 1

本题是解简单的分式方程的演练，提出了两边同乘以"最简公分母"进行"去分母"时要注意的问题.

例题 2

本题也是解简单的分式方程的演练，提出了为"去分母"而找"最简公分母"时要注意的问题.

例题 3

通过本题让学生进一步熟悉通过"去分母"来解简单的分式方程及其表达.

议一议

引导学生对例题 1、2、3 的解题过程进行反思和交流.

【注意事项】

（1）在例题 1、2、3 的教学中，可让学生按照解分式方程的一般步骤自主解题，然后进行讲评；教师对解题过程的表述要作讲解和提出规范性的要求.

（2）解分式方程过程中，为"去分母"而找"最简公分母"时，如有的分母可分解因式，一般应先分解因式，然后确定最简公分母.可结合例题 2、3 对学生进行指导.

练习 21.3(2)

1. (1) $y_1=1, y_2=2$；

(2) $y=-2$；

(3) $x_1=0, x_2=11$；

(4) $x=-1$.

2. (1) $x_1=0, x_2=-\frac{1}{2}$；

(2) $x_1=0, x_2=-12$；

(3) 无实数根.

【本课重点】

让学生学会用换元法解简单的分式方程和分式方程组，熟悉解题过程的表达，并从中领会整体思想与化归思想.

思考

引导学生探究特殊分式方程的解法，初步尝试用“换元法”解分式方程.

让学生在解方程的活动中，体验“换元法”的思考方法和操作过程.

练习 21.3(2)

1. 解下列方程：

(1) $\frac{2}{y}+y=3$；　　(2) $\frac{y^2}{y-4}-2=\frac{16}{y-4}$；

(3) $\frac{x-2}{x+1}=\frac{6}{x-3}$；　　(4) $\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}=1$.

2. 解下列方程：

(1) $x+1=\frac{-1}{2x-1}$；　　(2) $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x^2-4}{3x^2-5x-2}=1$；

(3) $\frac{x+1}{x^2-1}-\frac{1}{3x}=\frac{1}{3x-3}$.

思考

怎样解分式方程$\frac{2}{x^2}+x^2=3$?

观察这个方程，可以看到左边所含分式$\frac{2}{x^2}$的分母就是左边所含的整式x^2，而且方程中没有其他的含未知数的项. 根据方程的这个特点，可设$x^2=y$，则原方程化为

$$\frac{2}{y}+y=3.$$

再解上面这个方程，得到它的根是

$$y_1=1,\ y_2=2.$$

然后“回代”，当$y=1$时，得$x^2=1$，解得$x=\pm1$；当$y=2$时，得$x^2=2$，解得$x=\pm\sqrt{2}$.

经检验，$x=\pm1$，$x=\pm\sqrt{2}$都是原方程的根.

所以，原方程的根是$x_1=1, x_2=-1, x_3=\sqrt{2}, x_4=-\sqrt{2}$.

以上解方程的过程中，用了一个新未知数y代替方程中的x^2，得到一个关于y的新方程$\frac{2}{y}+y=3$. 这里采用的方法是换元法.

例题4　解方程：$\frac{3x}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{x}=\frac{7}{2}$.

分析　观察方程左边的两个分式，可见$\frac{3x}{x^2-1}=3\cdot\frac{x}{x^2-1}$，且

$\frac{x}{x^2-1}$与$\frac{x^2-1}{x}$互为倒数. 于是，可通过“换元”把原方程化成较简单的分式方程.

解　设$\frac{x}{x^2-1}=y$，则原方程可化为

$$3y+\frac{1}{y}=\frac{7}{2}.$$

两边同时乘以 $2y$，整理得

$$6y^2-7y+2=0.$$

解这个关于 y 的方程，得

$$y_1=\frac{2}{3},\ y_2=\frac{1}{2}.$$

(1) 当 $y=\frac{2}{3}$时，得方程$\frac{x}{x^2-1}=\frac{2}{3}$.　　①

去分母、整理，得

$$2x^2-3x-2=0.$$

解得　$x=-\frac{1}{2}$　或　$x=2$.

(2) 当 $y=\frac{1}{2}$时，得方程$\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{2}$.　　②

去分母、整理，得

$$x^2-2x-1=0.$$

解得　$x=1+\sqrt{2}$　或　$x=1-\sqrt{2}$.

经检验，方程①和方程②的根都是原方程的根.

所以，原方程的根是

$$x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=2,$$

$$x_3=1+\sqrt{2},\ x_4=1-\sqrt{2}.$$

从例题 4 可以看到，用“换元法”可将某些特殊的方程化繁为简；并且在解分式方程的过程中，避免了出现解高次方程的问题，实际上起到了“降次”的作用.

想一想

用“换元法”解分式方程，要注意哪些问题？

例题5　解方程组：$\begin{cases}\frac{5}{x+y}+\frac{1}{x-y}=7,\\ \frac{3}{x+y}-\frac{1}{x-y}=1.\end{cases}$

分析　这是一个分式方程组. 观察方程组中所含的分式，它们的分母是 $x+y$ 或 $x-y$. 联想“换元”的方法，如果把$\frac{1}{x+y}$与$\frac{1}{x-y}$看作两个不同的“整体”，分别用 u、v 代替，即设$\frac{1}{x+y}=u$，$\frac{1}{x-y}=v$，

第二节　分式方程　37

例题 4

本题是为学生提供用“换元法”解特殊的分式方程的过程经历.

教学时要注意培养学生的观察能力，指导学生发现这个方程中所含两个分式的特点和相互关系；然后，通过“换元”，把原方程变成可化为一元二次方程的分式方程再求解.要完整展示解题过程，帮助学生明确思路、把握关键，分清层次、学会表达.

想一想

引导学生对例题 4 的解题过程进行反思，总结用“换元法”解特殊分式方程的经验，注意要通过“换元”达到简化方程的目的，并在求出新未知数的值以后要“回代”.

例题 5

本题是介绍用换元法解特殊的分式方程组.

【注意事项】

(1) 例题 4 体现了“换元法”对于解某些特殊的分式方程的有效性.教学时，可让有的学生尝试通过“去分母”来解这个方程，这时他们就会发现，使用这一解法不但计算很繁，而且得到的整式方程次数高、求解难.再指出对本题进行“换元”，这时原方程就变成了一个可化为一元二次方程的分式方程，解这个新方程后，通过“回代”可求得原方程的根.这样，可以帮助学生对“换元法”的功效加深认识.

(2) 在例题 4 的教学中，要指出：求出 y 的值以后必须“回代”，再解关于 x 的方程，从而达到对原方程求根的目的.

课本中解例题 4 进行的“验根”，是通常解分式方程的一个例行步骤，是按照解分式方程一般步骤而确定的规范表达要求.其实可以证明，当一个分式方程通过换元化为形如 $ay+\frac{b}{y}=c$（其中 a、b 不为零）的关于 y 的方程（倒数方程）后，解这个新方程是不会产生增根的；而解形如$\frac{f(x)}{g(x)}=m$（其中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互质，$m\neq 0$）的方程也不会产生增根，所以解类似于例题 4 这样的分式方程，如果采用换元法来解，是不会产生增根的.由于学生没有学过方程同解原理，同时学生也难于理解上面关于解方程的过程中不会产生增根的说明，因此解例题 4 的过程中仍将“验根”作为例行步骤表达出来.

例题 5 的教学，可采用讨论的方式，让学生发表意见.

学生有了对例题 4 的解题经验，一般能够形成用“换元法”解这个方程组的思路；然后放手让他们解题，再加以完善.

如果学生通过“去分母”来对这个方程组进行转化，那么可得到一个二元二次方程组，但现在解这个整式方程组会有困难；这时，再引导学生重新考虑用“换元法”来解题.

那么原方程组可化为

$$\begin{cases}5u+v=7,\\3u-v=1.\end{cases}$$

这是一个二元一次方程组. 解这个方程组，再将求得的解“回代”，解原方程组的问题就可以解决.

解　设 $\frac{1}{x+y}=u$，$\frac{1}{x-y}=v$，则原方程组可化为

$$\begin{cases}5u+v=7,\\3u-v=1.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}u=1,\\v=2.\end{cases}$

于是，得 $\begin{cases}\frac{1}{x+y}=1,\\\frac{1}{x-y}=2.\end{cases}$

因此 $\begin{cases}x+y=1,\\x-y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

解这个方程组，得 $\begin{cases}x=\frac{3}{4},\\y=\frac{1}{4}.\end{cases}$

检验：把 $x=\frac{3}{4}$，$y=\frac{1}{4}$ 代入原方程组中所含各分式的分母，各分母的值都不为零.

所以，原方程组的解是 $\begin{cases}x=\frac{3}{4},\\y=\frac{1}{4}.\end{cases}$

练习 21.3(3)

1. 填空：

（1）用换元法解方程 $\left(\frac{x}{x+2}\right)^2-5\left(\frac{x}{x+2}\right)+6=0$ 时，如果设 $\frac{x}{x+2}=y$，那么原方程可变形为________________；

（2）用换元法解方程 $\frac{3x}{x-1}+\frac{2x-2}{x}+3=0$ 时，如果设 $\frac{x}{x-1}=y$，那么将原方程变形

38 第二十一章　代数方程

【注意事项】

（1）安排例题 5，为学生学习和运用“换元法”提供了一种新的情境.教学时，应让学生先探索和尝试解题，再进行反思总结；要指导学生注意养成观察、分析的习惯，重视知识的灵活运用，从而提高解题活动能力.

（2）关于含两个未知数的分式方程组，课本中所涉及的内容不多，所讨论的方程组具有特殊性，注重于前面已有知识和方法在新情境中的运用.在教学中，要严格控制解分式方程组的难度，一般要求可转化为二元一次方程组来解.

（3）用“换元法”解特殊的分式方程组，通常在“回代”后仍是分式方程组.解类似于例题 5 这样的分式方程组的过程是不会产生增根的，检验所得的解是原分式方程组的解，是例行的步骤，要表达出来.

后表示为一元二次方程一般形式是__________；

(3) 用换元法解方程组 $\begin{cases}\dfrac{5}{x}-\dfrac{6}{y+1}=1,\\ \dfrac{1}{x}=1-\dfrac{2}{y+1}\end{cases}$ 时，如果设________$=u$，________$=v$，那么原方程组可化为二元一次方程组________________.

2. 用换元法解下列方程：

(1) $\dfrac{x-2}{x}-\dfrac{3x}{x-2}=2$；

(2) $\dfrac{x^2+1}{5x}+\dfrac{5x}{x^2+1}=\dfrac{5}{2}$.

3. 用换元法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4};\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{4}{x+y}+\dfrac{6}{x-y}=3,\\ \dfrac{9}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}=1.\end{cases}$

练习 21.3(3)

1. (1) $y^2-5y+6=0$；

(2) $3y^2+3y+2=0$；

(3) 答案不唯一，如 $\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{1}{y+1}$，$\begin{cases}5u-6v=1,\\ u=1-2v.\end{cases}$

2. (1) $x_1=1$，$x_2=-1$；

(2) $x_1=5+2\sqrt{6}$，$x_2=5-2\sqrt{6}$，$x_3=\dfrac{1}{2}$，$x_4=2$.

3. (1) $\begin{cases}x=6,\\ y=12;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=4,\\ y=-2.\end{cases}$

【本课重点】

引进无理方程的概念，让学生经历探索无理方程解法，归纳、总结解无理方程的一般步骤.

问题 1

设计这一问题，是为了引入无理方程的概念.

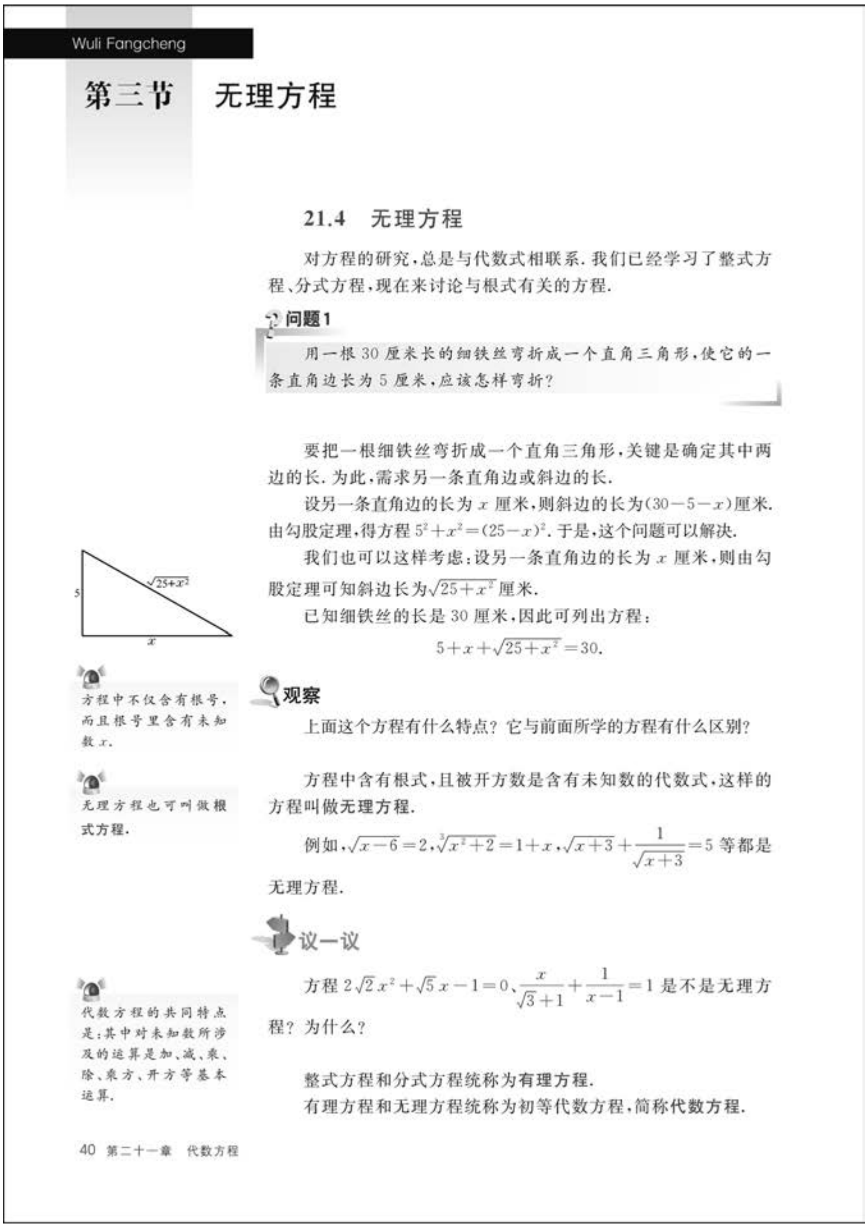
由于这个问题比较简单，因此学生列出的方程有可能是 $5^2+x^2=(25-x)^2$. 为引入无理方程，这时可提示学生：“还有其他思路吗?”或“还可以列出其他形式的方程吗?”教学中，要注意引导和发现学生的不同思考；要重视实例的作用，使学生感受到无理方程的存在和学习它的必要.

观察

引导学生观察由问题 1 所得方程的特点，再归纳无理方程的概念.

议一议

让学生对无理方程进行概念辨析，以加深认识.



Wuli Fangcheng

第三节 无理方程

21.4 无理方程

对方程的研究，总是与代数式相联系. 我们已经学习了整式方程、分式方程，现在来讨论与根式有关的方程.

问题1

用一根 30 厘米长的细铁丝弯折成一个直角三角形，使它的一条直角边长为 5 厘米，应该怎样弯折?

要把一根细铁丝弯折成一个直角三角形，关键是确定其中两边的长. 为此，需求另一条直角边或斜边的长.

设另一条直角边的长为 x 厘米，则斜边的长为 $(30-5-x)$ 厘米. 由勾股定理，得方程 $5^2+x^2=(25-x)^2$. 于是，这个问题可以解决.

我们也可以这样考虑：设另一条直角边的长为 x 厘米，则由勾股定理可知斜边长为 $\sqrt{25+x^2}$ 厘米.

已知细铁丝的长是 30 厘米，因此可列出方程：

$$5+x+\sqrt{25+x^2}=30.$$

方程中不仅含有根号，而且根号里含有未知数 x.

观察

上面这个方程有什么特点? 它与前面所学的方程有什么区别?

方程中含有根式，且被开方数是含有未知数的代数式，这样的方程叫做无理方程.

无理方程也可叫做根式方程.

例如，$\sqrt{x-6}=2$，$\sqrt[3]{x^2+2}=1+x$，$\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}=5$ 等都是无理方程.

议一议

方程 $2\sqrt{2}x^2+\sqrt{5}x-1=0$、$\dfrac{x}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{x-1}=1$ 是不是无理方程? 为什么?

代数方程的共同特点是：其中对未知数所涉及的运算是加、减、乘、除、乘方、开方等基本运算.

整式方程和分式方程统称为有理方程.

有理方程和无理方程统称为初等代数方程，简称代数方程.

40 第二十一章 代数方程

【教学目标】

(1) 理解无理方程的概念，会识别无理方程；知道有理方程及代数方程的概念.

(2) 经历探索无理方程解法的过程，领会无理方程“有理化”的化归思想.

(3) 知道解无理方程的一般步骤，会解简单的无理方程(方程中只含一个或两个关于未知数的二次根式)；知道验根是解无理方程的重要步骤，掌握验根的常用方法.

(4) 通过解无理方程，进一步体会事物之间相互转化的关系，领略辩证观点.

【注意事项】

类似于问题 1 这样的简单问题，通常总可以通过列整式方程来解决，而通过列无理方程来解决只是可行但未必可取. 由于用复杂的问题作为引例有可能造成“列方程”的较大困难和其他不便，因此课本中选用问题 1，在教学中要注意无理方程的导入. 当然，也可以参照问题 1，改用或补充其他实例.

下面，我们来探讨简单的无理方程的解法.

问题2

怎样解方程 $x=\sqrt{3x+4}$？

应考虑去掉无理方程中所含根式的根号，把无理方程化为有理方程.

方程变形的基本依据是等式的性质，联想到“如果 $p=q$，那么 $p^2=q^2$”以及 $(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$ 的性质，因此可通过方程两边同时平方，把方程 $x=\sqrt{3x+4}$ 化为有理方程.

对于方程 $\quad x=\sqrt{3x+4}$， ①

两边同时平方，得 $\quad x^2=3x+4$，

即 $\quad x^2-3x-4=0$. ②

解方程②，得 $\quad x_1=4$，$x_2=-1$.

从方程①变形为方程②，方程①中未知数的允许取值范围是 $x\geqslant 0$（这时已有 $3x+4\geqslant 0$），方程②中未知数的允许取值范围是一切实数.未知数的允许取值范围扩大，可能产生增根. 这时需要判断方程②的根是不是方程①的根. 可以将方程②的根代入方程①进行检验.

当 $x=4$ 时，方程①左边 $=4$，右边 $=\sqrt{3\times4+4}=\sqrt{16}=4$，可知 $x=4$ 是方程①的根；

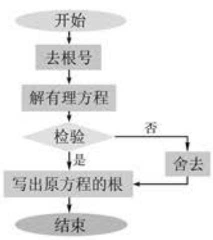
当 $x=-1$ 时，方程①左边 $=-1$，而右边不可能是负数，可知 $x=-1$ 是增根，应舍去.

所以，方程①的根是 $\quad x=4$.

归纳

解简单的无理方程，可以通过去根号转化为有理方程来解.

解简单无理方程的一般步骤，可用流程图表述为：



当方程中只有一个含未知数的二次根式时，可先把方程变形，使这个二次根式单独在一边；然后方程两边同时平方，将这个方程化成有理方程.

由于这一步骤必需且可能产生增根，因此验根是必不可少的步骤.

第三节　无理方程　41

问题 2

本问题是引导学生探索无理方程的解法.

教学时，应让学生参与求解这个无理方程的分析过程，形成解题思路以后，再具体解决问题.

在学生对于解无理方程有了具体感受和实践经验后，师生再一起归纳解无理方程的一般步骤，然后用流程图进行表述.在后面的例题教学中，可结合解方程的实践，再对有关步骤进行具体的说明.

关于解无理方程的过程中可能产生增根的问题，要有针对性地进行适当的解说，使学生对“验根”的必要性有明确的认识，从而在解方程时认真实施“检验”的步骤.

【注意事项】

（1）课本中通过实例引出了无理方程，描述了它的含义.要让学生知道，无理方程中不仅含有根式，而且根号内含有未知数.本节所研究的无理方程是简单的无理方程，即方程中所含与未知数有关的根式是二次根式且其个数不超过两个；主要是让学生通过解简单的无理方程，体会解无理方程的基本思路和原理.

（2）在无理方程概念引入后，可联系代数式的分类，对所学过的方程进行分类，帮助学生形成关于代数方程系统的整体认识.

（3）解无理方程有可能产生增根，其中的原因比分式方程复杂，教学时不必作一般的论述.学生只要知道，对于只含二次根式的无理方程，解方程时通常需要通过“两边平方”将它变形为有理方程，而平方以后所得方程中的未知数允许取值范围可能扩大，这样就有可能产生增根，因此需要“验根”.

练习 21.4(1)

1. ②③⑤.
2. 略.
3. C.
4. $x^2-1=4x^2$.

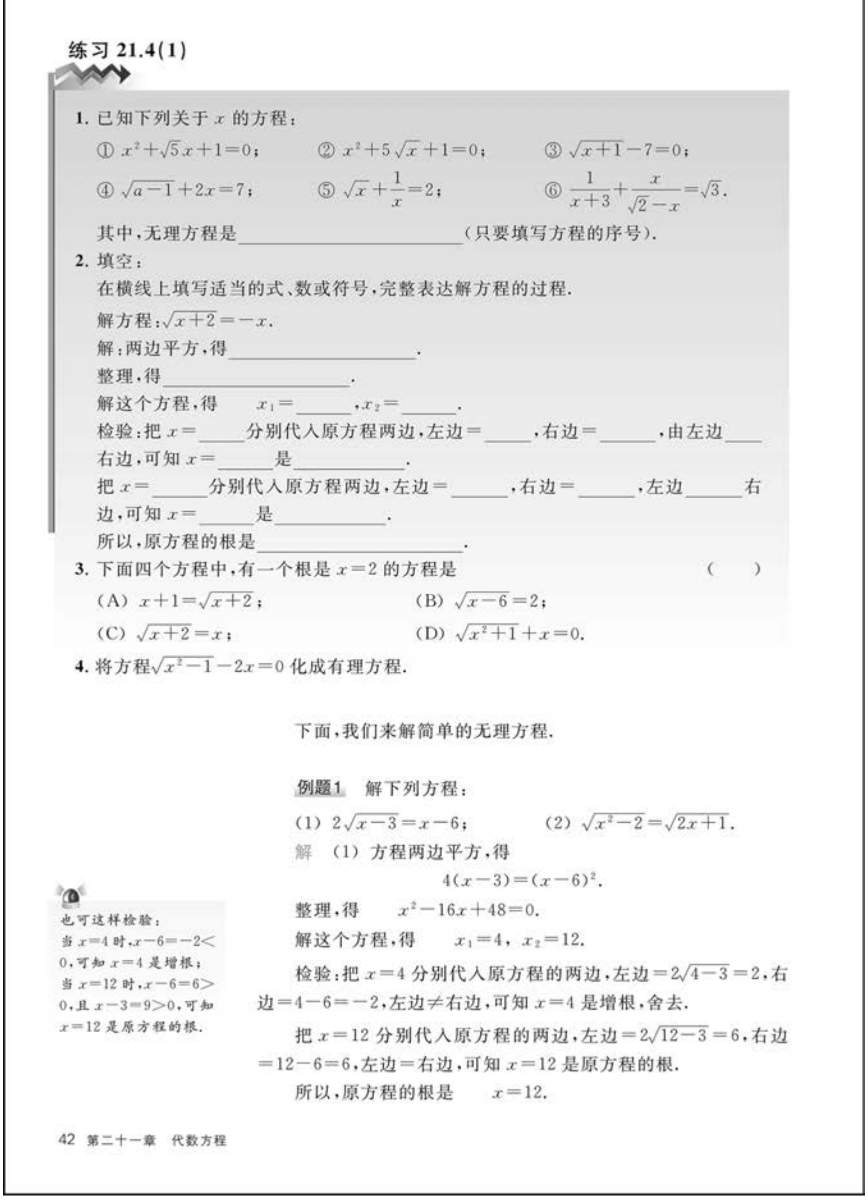
【本课重点】

让学生学会解简单的无理方程，从中体会解无理方程的基本思路和原理.

例题 1

本题中解无理方程，只需将方程两边直接平方就可以去掉根号，从而转化为一元二次方程再求解.教学时，可让学生先尝试，教师再讲解.

要提醒学生注意“验根”，课本中采用的“验根”方法是“代入原方程检验”，这种方法应要求学生掌握.



练习 21.4(1)

1. 已知下列关于 x 的方程：

① $x^2+\sqrt{5}x+1=0$； ② $x^2+5\sqrt{x}+1=0$； ③ $\sqrt{x+1}-7=0$；

④ $\sqrt{a-1}+2x=7$； ⑤ $\sqrt{x}+\frac{1}{x}=2$； ⑥ $\frac{1}{x+3}+\frac{x}{\sqrt{2}-x}=\sqrt{3}$.

其中，无理方程是____________（只要填写方程的序号）.

2. 填空：

在横线上填写适当的式、数或符号，完整表达解方程的过程.

解方程：$\sqrt{x+2}=-x$.

解：两边平方，得____________.

整理，得____________.

解这个方程，得 $x_1=$______，$x_2=$______.

检验：把 $x=$______分别代入原方程两边，左边$=$______，右边$=$______，由左边______右边，可知 $x=$______是________.

把 $x=$______分别代入原方程两边，左边$=$______，右边$=$______，左边______右边，可知 $x=$______是________.

所以，原方程的根是____________.

3. 下面四个方程中，有一个根是 $x=2$ 的方程是 （　　）

(A) $x+1=\sqrt{x+2}$； (B) $\sqrt{x-6}=2$；

(C) $\sqrt{x+2}=x$； (D) $\sqrt{x^2+1}+x=0$.

4. 将方程 $\sqrt{x^2-1}-2x=0$ 化成有理方程.

下面，我们来解简单的无理方程.

例题1 解下列方程：

(1) $2\sqrt{x-3}=x-6$； (2) $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{2x+1}$.

解 (1) 方程两边平方，得

$$4(x-3)=(x-6)^2.$$

整理，得 $x^2-16x+48=0$.

解这个方程，得 $x_1=4$，$x_2=12$.

检验：把 $x=4$ 分别代入原方程的两边，左边$=2\sqrt{4-3}=2$，右边$=4-6=-2$，左边$\neq$右边，可知 $x=4$ 是增根，舍去.

把 $x=12$ 分别代入原方程的两边，左边$=2\sqrt{12-3}=6$，右边$=12-6=6$，左边$=$右边，可知 $x=12$ 是原方程的根.

所以，原方程的根是 $x=12$.

也可这样检验：当 $x=4$ 时，$x-6=-2<0$，可知 $x=4$ 是增根；当 $x=12$ 时，$x-6=6>0$，且 $x-3=9>0$，可知 $x=12$ 是原方程的根.

42 第二十一章 代数方程

【注意事项】

(1) 解无理方程的基本思路是把它转化为解有理方程的问题.将无理方程“有理化”的基本方法是通过“方程两边同时乘方”从而去掉根号；对于简单的无理方程，可以通过“方程两边平方”来实施.解无理方程的基本思路体现了化归的数学思想，教学中应让学生认真体会化归思想，学会在简单情形中运用化归的基本方法.

(2) 针对例题 1(1)解方程的检验，边款中指出可利用二次根式及其被开方数必须满足的条件进行“验根”.采用这一方法“验根”，通常比“代入原方程检验”简便，但是学生不容易理解其分析的过程，因此只要求学生知道有这一“验根”方法.

(2) 方程两边平方，得

$$x^2-2=2x+1.$$

整理，得 $x^2-2x-3=0$.

解这个方程，得 $x_1=-1$，$x_2=3$.

检验：把 $x=-1$ 代入原方程的左边，左边根号内的数是负数，由于在实数范围内负数没有平方根，可知 $x=-1$ 是增根，舍去.

把 $x=3$ 分别代入原方程两边，左边 $=\sqrt{3^2-2}=\sqrt{7}$，右边 $=\sqrt{2\times3+1}=\sqrt{7}$，左边 $=$ 右边，可知 $x=3$ 是原方程的根.

所以，原方程的根是 $x=3$.

例题2 解下列方程：

(1) $3-\sqrt{2x-3}=x$； (2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x}=1$.

解 (1) 原方程可变形为 $3-x=\sqrt{2x-3}$.

两边平方，得 $(3-x)^2=2x-3$.

整理，得 $x^2-8x+12=0$.

解得 $x_1=2$，$x_2=6$.

检验：把 $x=2$ 分别代入原方程两边，左边 $=3-\sqrt{2\times2-3}=2$，右边 $=2$，左边 $=$ 右边，可知 $x=2$ 是原方程的根.

把 $x=6$ 分别代入原方程两边，左边 $=3-\sqrt{2\times6-3}=0$，右边 $=6$，左边 $\neq$ 右边，可知 $x=6$ 是增根，舍去.

所以，原方程的根是 $x=2$.

(2) 原方程可变形为 $\sqrt{x+2}=1+\sqrt{x}$.

两边平方，得 $x+2=1+2\sqrt{x}+x$.

整理，得 $2\sqrt{x}=1$.

再两边平方，得 $4x=1$.

解得 $x=\frac{1}{4}$.

检验：把 $x=\frac{1}{4}$ 分别代入原方程两边，左边 $=\sqrt{\frac{1}{4}+2}-\sqrt{\frac{1}{4}}=1$，右边 $=1$，左边 $=$ 右边，可知 $x=\frac{1}{4}$ 是原方程的根.

所以，原方程的根是 $x=\frac{1}{4}$.

例题 2(1) 的方程可变形为 $3-x=\sqrt{2x-3}$，转化为如例题 1(1) 的形式.

例题 2(2) 的方程中含有两个二次根式，变形为 $\sqrt{x+2}=1+\sqrt{x}$ 后，两边平方，就可以变形为如例题 2(1) 只含一个二次根式的方程的形式.

想一想

不解方程 $\sqrt{x+1}+1=0$，你能断定这个方程没有实数根吗？理由是什么？

第三节 无理方程 43

例题 2

本题中解无理方程，要先将原方程变形，转化为例题 1 的形式后再求解.

教学时要让学生从中体会，解简单的无理方程，基本思路是通过“方程两边平方”将它转化为解有理方程（整式方程）的问题；而例题 1 中方程的形式，是实施这一基本思路的最基本形式，因此在新的问题情境中，应考虑将原方程变形为例题 1 中方程的形式.

想一想

提出这一问题引导学生思考，其用意是让学生知道“观察分析”也是解无理方程的一种方法，在某些特殊情况下这是好方法.

【注意事项】

(1) 在例题 1、2 的教学中，要重视解题的示范，还要引导学生对如何简化无理方程的解题过程进行反思小结.解简单的无理方程，当方程中只含一个与未知数有关的二次根式或者含有两个与未知数有关的二次根式而没有其他项时，通常将方程化成例题 1 的形式，通过两边平方化为有理方程（整式方程）；当方程中含有两个与未知数有关的二次根式且还有其他“项”时，通常如同例题 2(2) 那样进行变形，将两个二次根式分别放在等号两边，然后两边平方再整理成例题 1 的形式.这样变形不仅可以顺利解题，而且过程合理；否则，可能导致解题过程复杂，不易求解.要让学生通过例题 1、2 的学习，获得解简单的无理方程的经验，掌握基本方法.

(2) 在“想一想”中，判断无理方程 $\sqrt{x+1}+1=0$ 没有实数根，是依据“对于二次根式 $\sqrt{a}$，有 $a\geqslant0$，$\sqrt{a}\geqslant0$”得到的.由 $\sqrt{x+1}\geqslant0$，可知方程左边 $\geqslant1$，而方程右边 $=0$，因此这个方程无实数根.要鼓励学生灵活思维，学会“观察分析”，自己发现结论.

(3) 关于解无理方程，限于方程中含有未知数的二次根式不超过两个，而且不要求用换元法进行求解.

练习 21.4(2)

1. (1) $x=-1$;

(2) $x=1$.

2. (1) $x=3$;

(2) $x=4$;

(3) $x=16$.

3. C.

4. 12 厘米.

练习 21.4(2)

1. 解下列方程:

(1) $\sqrt{2x+3}=-x$;　　(2) $\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{1-x}$.

2. 解下列方程:

(1) $x-\sqrt{x+1}-1=0$;　　(2) $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-3}-\sqrt{2}=0$;

(3) $\sqrt{x-7}+\sqrt{x}=7$.

3. 下列方程中,有实数根的方程是　　(　　)

(A) $\sqrt{x-1}+4=0$;　　(B) $\sqrt{x^2+1}=0$;

(C) $\sqrt{x}=-x$;　　(D) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=0$.

4. 在本节开头提出的问题 1 中,列出方程 $5+x+\sqrt{25+x^2}=30$ 后,可求得另一直角边的长是多少?

44 第二十一章　代数方程

【注意事项】

在练习 21.4(2)中,第 1、2 题是解简单的无理方程的基本训练;解答第 3 题,可利用“观察分析”的方法,或直接看到方程(C)有实数根 0,或通过判断选项(A)(B)(D)中的方程没有实数根而选(C)中的方程;在确定选项的过程中,可让学生说明为什么选项(A)(B)(D)中的方程没有实数根,以加深对二次根式及其有关性质的认识.

Eryuan Erci Fangchengzu

第四节 二元二次方程组

21.5 二元二次方程和方程组

问题1

如图 21－2，有一个大正方形，是由四个全等的直角三角形与中间的小正方形拼成的. 如果大正方形的面积是 13，小正方形的面积是 1，那么直角三角形的两条直角边长分别是多少？

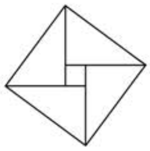


图 21－2

这个问题中待求的未知量有两个，不妨引进两个未知数.

设直角三角形较短的直角边的长为 x，较长的直角边的长为 y，则斜边长为 $\sqrt{x^2+y^2}$，得大正方形的面积为 x^2+y^2.

根据题意，可列出方程 $y=x+1$ 和方程 $x^2+y^2=13$；再将它们联立成方程组：

$$\begin{cases} y=x+1, & ① \\ x^2+y^2=13. & ② \end{cases}$$

解这个方程组，可以求得两条直角边的长.

问题2

某剧场管理人员为了让观众有更舒适的欣赏环境，对座位进行了调整. 已知剧场原有座位 500 个，每排的座位数一样多；现在每排减少了 2 个座位，并减少了 5 排，剧场座位数相应减少为 345 个. 剧场原有座位的排数是多少？每排有多少个座位？

设剧场原有座位的排数为 x，每排座位数为 y. 根据题意可列出方程 $xy=500$ 和方程 $(x-5)(y-2)=345$，即 $xy-2x-5y=335$；再将它们联立成方程组：

$$\begin{cases} xy=500, & ③ \\ xy-2x-5y=335. & ④ \end{cases}$$

解这个方程组，可求得剧场原来座位的排数与每排的座位数.

观察

在上面问题 1 与问题 2 列出的方程中，方程②③④有什么特点？它们与方程①有什么区别？

方程①是一个二元一次方程，我们以前已经认识. 方程②③④

第四节 二元二次方程组 45

问题 1

由解决实际问题的需要，引入二元二次方程和二元二次方程组；所得的二元二次方程组由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成.

问题 2

通过列方程解决实际问题，引入由两个二元二次方程组成的二元二次方程组.

观察

让学生经历二元二次方程和二元二次方程组的概念形成的过程.

教师要耐心引导学生观察，若有需要，可适时指点观察方向. 教学时，要展现“观察—概括—比较—表述”的全过程.

【教学目标】

（1）知道二元二次方程和方程组的概念；知道二元二次方程的一般形式，能识别二次项、一次项和常数项.

（2）知道二元二次方程和方程组的解的意义，能判断给出的“一对未知数的取值”是不是已知二元二次方程或方程组的解.

（3）经历二元二次方程（组）的概念以及二元二次方程（组）的解的概念的形成过程，发展观察、归纳能力，体会类比的思想方法.

通过对具体方程的观察，归纳二元二次方程及方程组的概念.

关于二元二次方程，要求学生理解它的描述性定义.给出它的一般形式，是为了便于讲述方程的项及系数.

关于二元二次方程组，也是着重于学生对它的描述性定义的理解.

教学时，可与二元一次方程(组)的概念进行对比，让学生了解方程(组)中的“元”“次”及其变化.要指出二元二次方程是整式方程中的一类，帮助学生从元数、次数的角度扩展对整式方程的认识.

操作

让学生通过“操作”活动，直观地认识二元二次方程的解.知道方程中两个未知数的取值是互相联系和互相制约的；知道方程的一个解由两个未知数的一组对应值构成且能使方程左右两边的值相等.

都是整式方程，它们都仅含有两个未知数，并且含有未知数的项的最高次数是2.它们与方程①的差别是含有未知数的项的最高次数不同.

仅含有两个未知数，并且含有未知数的项的最高次数是2的整式方程，叫做**二元二次方程**.

上面的方程②③④都是二元二次方程.

关于 x、y 的二元二次方程的一般形式是：

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

(a、b、c、d、e、f 都是常数，且 a、b、c 中至少有一个不是零；当 b 为零时，a 与 d 以及 c 与 e 分别不全为零).

其中，ax^2、bxy、cy^2 叫做这个方程的二次项，a、b、c 分别叫做二次项系数；dx、ey 叫做这个方程的一次项，d、e 分别叫做一次项系数；f 叫做这个方程的常数项.

再进一步观察，可见问题1中得到的方程组是由一个二元一次方程与一个二元二次方程所组成的；问题2中得到的方程组是由两个二元二次方程所组成的.

对每个方程组而言，它们有共同特点：

仅含有两个未知数，各方程是整式方程，并且含有未知数的项的最高次数为2.

像这样的方程组叫做**二元二次方程组**.

操作

对于二元二次方程 $x^2+y^2=13$，取定 x 的一些值，分别代入这个方程，求出相应 y 的值，填入下表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=\pm\sqrt{13-x^2}$	…								…

表中 x、y 的每一组对应值，如：

$\begin{cases}x=-3,\\y=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3,\\y=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\y=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\y=-3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=-3;\end{cases}$ …

都能使方程 $x^2+y^2=13$ 左右两边的值相等.

像这样，能使二元二次方程左右两边的值相等的一对未知数的值，叫做**二元二次方程的解**.

上面所列的 x、y 的每一组对应值，都是二元二次方程②的一个解.这个方程还有其他的解.

二元一次方程有无数个实数解；二元二次方程的实数解的个数有多种情况.

46 第二十一章 代数方程

【注意事项】

(1) 课本中没有给出二元二次方程组的一般形式，教学时不必补充引入.

(2) 一个二元一次方程有无数个实数解，但是二元二次方程的实数解的个数不一定是无数个，“边款”中已指出有多种情况.如：课本中的方程②有无数个实数解；方程 $(x-1)^2+(y+2)^2=0$ 只有一个实数解；方程 $x^2+y^2+1=0$ 没有实数解.对此，可根据学生实际情况给予适当说明，但不必深究.

在方程①和方程②的解中，如

$$\begin{cases}x=-3,\\y=-2;\end{cases}\quad\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}$$

它们既是方程①的解，又是方程②的解，即它们是这两个方程的公共解.

方程组中所含各方程的公共解叫做这个方程组的解.

对于由方程①和方程②组成的二元二次方程组，$\begin{cases}x=-3,\\y=-2\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=2,\\y=3\end{cases}$ 都是这个方程组的解.

由问题1中所设 x、y 的实际意义，可知 $\begin{cases}x=2,\\y=3\end{cases}$ 是问题1的解，即直角三角形的一条直角边的长为2，另一条直角边的长为3.

练习 21.5

1. 下列方程中，哪些是二元二次方程？

(1) $x^2+y=1$；　(2) $3-2y^2+y=0$；

(3) $\dfrac{1}{xy}+2y^2-x=0$；　(4) $x+y+3^2=1$.

2. 下列方程组中，哪些是二元二次方程组？

(1) $\begin{cases}3y=2,\\x^2+xy-x=2;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}xy+x=20,\\xy+y=18;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x+5=y,\\3x-y=-1;\end{cases}$　(4) $\begin{cases}3y^2=x-1,\\\sqrt{x}+3y=5.\end{cases}$

3. 已知下面三对数值：

$$\begin{cases}x=-1,\\y=1;\end{cases}\quad\begin{cases}x=0,\\y=-1;\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,\\y=0.\end{cases}$$

(1) 哪几对数值是方程 $x^2+xy+y^2=1$ 的解？

(2) 哪几对数值是方程组 $\begin{cases}x-y=1,\\x^2+xy+y^2=1\end{cases}$ 的解？

4. 试写出一个二元二次方程，使该方程有一个解是 $\begin{cases}x=2,\\y=-1.\end{cases}$

21.6　二元二次方程组的解法

解二元一次方程组的基本思想是"消元"，把它转化为解一元方程的问题. 那么，怎样解二元二次方程组呢？

第四节　二元二次方程组　47

"二元二次方程组的解"与"二元一次方程组的解"的含义类似.教学时，要引导学生联想"二元一次方程组的解"进行认识.

可能有学生把"二元二次方程(组)的解"称为"二元二次方程(组)的根"，应进行纠正.

练习 21.5

1. 方程(1).

2. 方程组(1)和(2).

3. (1) $\begin{cases}x=-1,\\y=1,\end{cases}\begin{cases}x=0,\\y=-1,\end{cases}\begin{cases}x=1,\\y=0;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=0,\\y=-1,\end{cases}\begin{cases}x=1,\\y=0.\end{cases}$

4. 略.

【本课重点】

让学生学会用代入消元法解由一个二元二次方程和二元一次方程组成的方程组，体验化归的思想以及"消元"的策略.

【教学目标】

(1) 经历探索简单的二元二次方程组解法的过程；会用代入消元法解由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组，会用因式分解法解由特殊的两个二元二次方程组成的方程组.

(2) 通过解二元二次方程组的活动，体验化归的思想以及"消元"和"降次"的策略方法；体会数学知识之间的内在联系，养成深入观察、分析的良好习惯.

以 21.5 节问题 1 所得方程组为引例，让学生运用已有知识经验对简单的二元二次方程组的解法进行探索；通过师生共同讨论，明确“代入消元法”的思路.

例如，解方程组：

$$\begin{cases} y=x+1, & ① \\ x^2+y^2=13. & ② \end{cases}$$

观察方程①，未知数 y 由含未知数 x 的代数式 $x+1$ 表示. 将方程②中的 y 同样用 $x+1$ 表示，得

$$x^2+(x+1)^2=13.$$

整理，得　$x^2+x-6=0$.

这是一个一元二次方程，解这个方程，得

$$x_1=-3,\ x_2=2.$$

将 $x_1=-3$ 代入方程①，得　$y_1=-2$；

将 $x_2=2$ 代入方程①，得　$y_2=3$.

所以，原方程组的解是　$\begin{cases} x_1=-3, \\ y_1=-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=2, \\ y_2=3. \end{cases}$

上述解方程组的过程，与用“代入消元法”解二元一次方程组的过程一样. 这样解二元二次方程组的方法，同样叫做代入消元法.

例题 1

通过本题让学生进一步学习和体验代入消元法的运用.教学中，要适当解说解这一类方程组的过程及其表述要求等.

例题1　解方程组：$\begin{cases} x^2+2y^2-1=0, & ① \\ x-y+1=0. & ② \end{cases}$

如果一个二元二次方程组是由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成，那么可用代入消元法解这个方程组.

分析　这个方程组中，方程②是二元一次方程，可把其中一个未知数用含另一个未知数的代数式表示.

解　由方程②，得　$x=y-1$.　③

将③代入①，得　$(y-1)^2+2y^2-1=0$.

整理，得　$3y^2-2y=0$.

解这个方程，得　$y_1=0,\ y_2=\dfrac{2}{3}$.

将 $y_1=0$ 代入③，得　$x_1=-1$；

将 $y_2=\dfrac{2}{3}$ 代入③，得　$x_2=-\dfrac{1}{3}$.

所以，原方程组的解是　$\begin{cases} x_1=-1, \\ y_1=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-\dfrac{1}{3}, \\ y_2=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

议一议

让学生通过讨论以后知道，对方程组中的那个二元一次方程变形时，可用含 x 的代数式表示 y，或用含 y 的代数式表示 x，代入二元二次方程以后都能实现“消去一个元”的目的.这时，注意适当选用其中一个表示形式，有可能会使解题过程简便些.

议一议

在例题 1 中，如果方程②用含 x 的代数式来表示 y，一样能解这个方程组吗？试一试，再与上面的解法进行比较，哪一种解法简便些？另外，为什么不考虑利用方程①来“代入消元”？

【注意事项】

（1）关于解二元二次方程组的问题，初中阶段主要涉及两种简单的类型，第一类是由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组；第二类是由两个二元二次方程组成的方程组，但其中有一个方程易分解成两个二元一次方程.在教学中，着重于让学生通过解简单的二元二次方程组的，体验解二元二次方程组的基本思想和方法.

（2）对于本课引例的讲解，要指出方程组中的方程①和②是互相联系、互相制约的，解这个方程组就是求方程①和②的公共解；让学生注意方程①是一个二元一次方程，于是可如同以前解二元一次方程组那样，采用代入消元法来解这个方程组.所以在解这类方程组的教学中，应充分调动学生已有的经验和方法，突出化归思想的运用；注意解这类方程组的过程与解二元一次方程组的共同之处，关注学生对“用含有一个未知数的整式去表示另一个未知数”的掌握.

例题2 解方程组：$\begin{cases}4x^2-9y^2=15, & ①\\ 2x-3y=5. & ②\end{cases}$

解 由方程②，得 $x=\dfrac{3y+5}{2}$. ③

将③代入①，得 $4\left(\dfrac{3y+5}{2}\right)^2-9y^2=15$.

整理，得 $3y+1=0$.

解这个方程，得 $y=-\dfrac{1}{3}$.

将 $y=-\dfrac{1}{3}$ 代入③，得 $x=2$.

所以，原方程组的解是 $\begin{cases}x=2,\\ y=-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

如果对例题 2 中的两个方程进一步观察和分析，可见方程②的左边是方程①左边的一个因式．于是，可利用"等量代换"，对原方程组进行变形，得到以下解法：

方程①可变形为 $(2x-3y)(2x+3y)=15$. ④

由方程② $2x-3y=5$，可把方程④化为 $5(2x+3y)=15$，即 $2x+3y=3$. ⑤

于是，原方程组化为

$$\begin{cases}2x+3y=3,\\ 2x-3y=5.\end{cases}$$

解这个二元一次方程组，得

$$\begin{cases}x=2,\\ y=-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

所以，原方程组的解是 $\begin{cases}x=2,\\ y=-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

这里利用了"等量代换"，采用"整体代入"的方法，将二元二次方程①化为二元一次方程．这是一种"降次"的策略．

想一想

上面解二元二次方程组的方法，是在把握方程①和②之间的特殊关系的基础上形成的特殊解法．通过解例题 1 和例题 2，你对解二元二次方程组的基本思想和方法有什么认识？

归纳

解二元二次方程组的基本思想是"消元"，把它转化为解一元方程的问题．

对于含一个二元一次方程的二元二次方程组，采用代入消元法解方程组的一般步骤，可用流程图表述为：

例题 2

本题是为帮助学生学会在更一般的情况下运用代入消元法解第一类二元二次方程组．

对本题给出了两种解法，其中前一种是基本解法，要求学生必须掌握；后一种解法是由两个方程之间具有特殊关系而形成的，要引导学生注意灵活运用知识以及体会"整体代入"的方法．

想一想

引导学生对例题 1、2 的解题活动进行反思和总结．

在学生思考和交流、讨论的基础上，进一步明确解第一类二元二次方程组的基本思路，归纳用代入消元法解这类二元二次方程组的一般步骤，再用流程图表述．

【注意事项】

（1）在用代入消元法解二元二次方程组的教学中，要强调利用方程组中两个方程之间的联系将"二元"转化为"一元"的思路．

（2）用代入消元法解二元二次方程组，要提醒学生在"代入"时不要"盲目乱代"．要避免出现如下的错误情况：① 将由二元一次方程变形所得的代数式又代入这个二元一次方程（代入错），如例题 1 中将 $x=y-1$ 代入方程 $x-y+1=0$，结果出现 $y-1-y+1=0$，达不到消元的目的．② 将求出的一个未知数的值代入到原方程组的二元二次方程中再求另一个未知数的值（回代不当），如例题 1 中，求得 $y_1=0$ 后代入 $x^2+2y^2-1=0$ 中求 x 的值，这样就相应得到 $\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-1,\\ y_2=0,\end{cases}$ 其中第一组值必须舍去但未舍去，造成错误．

将表达式代入二元二次方程，消去一个未知数，得到一个一元方程（次数不超过二次）.

练习 21.6(1)

1. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x-3y=0, \\ x^2+y^2=20; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-2y=5, \\ x^2-y^2+2x+3y+7=0; \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} x+y=7, \\ xy=12. \end{cases}$

2. 有一位同学，对本节例题 1 的解题过程与课本有所不同.他在求得 $y_1=0$，$y_2=\frac{2}{3}$后，后面的解题过程如下：

把 $y_1=0$ 代入①，得　　$x^2+2\times0^2-1=0$，

解这个方程，得　　$x=\pm1$.

把 $y_2=\frac{2}{3}$代入①，得　　$x^2+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-1=0$.

解这个方程，得　　$x=\pm\frac{1}{3}$.

所以，方程组的解是

$$\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=0; \end{cases}\quad \begin{cases} x_2=-1, \\ y_2=0; \end{cases}\quad \begin{cases} x_3=\frac{1}{3}, \\ y_3=\frac{2}{3}; \end{cases}\quad \begin{cases} x_4=-\frac{1}{3}, \\ y_4=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

这位同学的解法正确吗？为什么？

3. 从方程组$\begin{cases} x^2+y^2=8, \\ x+y=m \end{cases}$中消去 y，得到关于 x 的二次方程. 当 $m=3$ 时，这个关于 x 的方程有几个实数解？当 $m=4$ 时呢？当 $m=5$ 时呢？

50 第二十一章 代数方程

练习 21.6(1)

1. (1) $\begin{cases} x_1=3\sqrt{2}, \\ y_1=\sqrt{2}, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-3\sqrt{2}, \\ y_2=-\sqrt{2}; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=-2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-9, \\ y_2=-7; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=4, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=4, \\ y_2=3. \end{cases}$

2. 不正确.原因略.

3. 当 $m=3$ 时，有两个不相等的实数解；当 $m=4$ 时，有两个相等的实数解 2 和 2；当 $m=5$时，无实数解.

【注意事项】

用代入消元法解第一类二元二次方程组时，由于“回代不当”而导致方程组的解出错的情况，学生不容易认识.教学中，一方面要强调正确的回代方法，另一方面要向学生适当解释“回代不当”可能错在何处、原因何在、如何纠正等.可结合学生在练习中出现的错误，进行分析和指导.

观察

方程组$\begin{cases}x^2-3xy+2y^2=0, & ①\\ x^2+y^2=5 & ②\end{cases}$

中的两个方程有什么特点?

问题

怎样解上面这个二元二次方程组?

方程①的左边是关于 x、y 的二次三项式，右边为 0，而且左边可以进行因式分解，则方程①可变形为两个一次因式的积等于零的形式. 于是，由方程①可得到两个二元一次方程，它们的解的全体与方程①的解的全体是相同的. 因此，如果将这两个二元一次方程分别与方程②联立成方程组，那么这两个新方程组的解的全体就是原方程组的解.

基本思路是利用方程①的特点"降次"，把原方程组化归为由一个二元一次方程与一个二元二次方程所组成的方程组.

解上面这个二元二次方程组的过程如下：

将方程①的左边分解因式，方程①可变形为

$$(x-y)(x-2y)=0.$$

得 $x-y=0$ 或 $x-2y=0$.

将它们与方程②分别组成方程组，得

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}x-y=0,\\ x^2+y^2=5\end{cases} \quad \text{或} \quad (\text{Ⅱ})\begin{cases}x-2y=0,\\ x^2+y^2=5.\end{cases}$$

如果二元二次方程组中有一个方程可变形为两个一次因式的积等于零的形式，那么解这个方程组的问题可转化为解由一个二元一次方程和一个二元二次方程所组成的方程组.

解方程组(Ⅰ)，得

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}\sqrt{10},\\ y_1=\frac{1}{2}\sqrt{10};\end{cases} \quad \begin{cases}x_2=-\frac{1}{2}\sqrt{10},\\ y_2=-\frac{1}{2}\sqrt{10}.\end{cases}$$

解方程组(Ⅱ)，得

$$\begin{cases}x_3=2,\\ y_3=1;\end{cases} \quad \begin{cases}x_4=-2,\\ y_4=-1.\end{cases}$$

所以，原方程组的解是

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}\sqrt{10},\\ y_1=\frac{1}{2}\sqrt{10};\end{cases} \quad \begin{cases}x_2=-\frac{1}{2}\sqrt{10},\\ y_2=-\frac{1}{2}\sqrt{10};\end{cases} \quad \begin{cases}x_3=2,\\ y_3=1;\end{cases} \quad \begin{cases}x_4=-2,\\ y_4=-1.\end{cases}$$

像这样解特殊的二元二次方程组的方法是**因式分解法**.

例题3 解方程组：

$$\begin{cases}x^2-9y^2=0, & ①\\ x^2-2xy+y^2=4. & ②\end{cases}$$

第四节 二元二次方程组 51

【本课重点】

让学生经历探索第二类二元二次方程组解法的过程，学会用因式分解法来解这类特殊的方程组.

问题

引导学生在观察到所给方程组中方程①的特点的基础上，对这个方程组的解法进行探索.

让学生注意到方程①左边可以分解成两个一次因式的积而右边为零；再联想以前用"因式分解法"解特殊的一元二次方程的经验，形成在新情境中用"因式分解法"解这个特殊的二元二次方程组的思路；然后，师生共同完成解题，并在"边款"的指引下归纳解这类特殊的方程组的基本思路、一般过程和方法.

例题 3

本题方程组中两个二元二次方程都可以通过因式分解(或两边开平方)分别化为两个二元一次方程，让学生通过解这个方程组的活动，学会一般解法.

【注意事项】

(1) 第二类特殊的二元二次方程组，所含的两个方程中至少有一个方程容易化成"两个一次因式的积等于零"的形式.本课着重让学生体会"因式分解法"对于解特殊方程(组)是一种有效的"降次"策略和方法；学会这类简单的二元二次方程组的解法.

(2) 运用"因式分解法"解第二类二元二次方程组时，通常把原方程组化为两个第一类方程组，或者化为四个二元一次方程组，再利用已有的知识和方法求出原方程组的解.这一过程，具体体现了"化归"思想，要让学生认真体会；同时，要向学生指出，"原方程组的解"与"所化成两个第一类方程组(或四个二元一次方程组)的解并在一起"是一样的，这里只要简单分析一下而不必讲同解原理.

议一议

让学生对解简单的二元二次方程组的基本思路和方法进行总结.

练习 21.6(2)

1. $\begin{cases} x-y=0, \\ x^2+y^2=8, \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$

2. (1) $\begin{cases} x_1=\dfrac{3\sqrt{21}}{7}, \\ y_1=\dfrac{\sqrt{21}}{7}, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-\dfrac{3\sqrt{21}}{7}, \\ y_2=-\dfrac{\sqrt{21}}{7}, \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=-1, \\ y_3=1, \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=1, \\ y_4=-1; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=\dfrac{3}{2}, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=0, \\ y_2=-\dfrac{3}{2}, \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=-3, \\ y_3=3, \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=3, \\ y_4=-3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=1, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-1, \\ y_2=-2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=\dfrac{5}{2}, \\ y_3=\dfrac{1}{2}, \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=-\dfrac{1}{2}, \\ y_4=-\dfrac{5}{2}. \end{cases}$

分析　方程①可变形为两个一次因式的积等于零的形式，因此，可用上面解方程组的方法解这个方程组.

如果再观察方程②，注意到它的左边是完全平方式，右边是 2 的平方，联想“若 $p^2=q^2$ 则 $p=\pm q$”，那么也可通过对方程②两边开平方，把方程②化为两个一次方程. 于是，由方程①所得的两个一次方程中的每一个分别与由方程②所得的两个一次方程组成方程组，这些方程组的解的全体就是原方程组的解的全体.

解　将方程①的左边分解因式，方程①可变形为

$$(x+3y)(x-3y)=0.$$

得　$x+3y=0$　或　$x-3y=0$.

方程②可变形为　$(x-y)^2=4$.

两边开平方，得　$x-y=2$　或　$x-y=-2$.

因此，原方程组可化为四个二元一次方程组：

$\begin{cases} x+3y=0, \\ x-y=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x+3y=0, \\ x-y=-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x-3y=0, \\ x-y=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x-3y=0, \\ x-y=-2. \end{cases}$

分别解这四个方程组，得原方程组的解是

$\begin{cases} x_1=\dfrac{3}{2}, \\ y_1=-\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-\dfrac{3}{2}, \\ y_2=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=3, \\ y_3=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=-3, \\ y_4=-1. \end{cases}$

议一议

解二元二次方程组的基本思路是“消元”“降次”，那么怎样利用方程组中方程的特点进行消元和降次？要注意什么？

练习 21.6(2)

1. 解方程组 $\begin{cases} (x-y)(x+y)=0, \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$ 时，可以根据其特点把它化成两个方程组，这两个方程组分别是：

________________，________________.

2. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0, \\ x^2-xy+y^2=3; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x^2+4xy+4y^2=9, \\ x^2+xy=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=9, \\ (x-y)^2-3(x-y)+2=0. \end{cases}$

52 第二十一章　代数方程

【注意事项】

在例题 3 的教学中，可让学生先尝试解答本题，这时可能会出现多种解法和某些错误；再组织交流和讨论，对不同的解法进行比较和分析，使学生获得更多的体验，认识本题所给解法的优越性，同时对反思和优化解题过程引起重视.

Lie Fangcheng Jie Yingyongti

第五节 列方程(组)解应用题

21.7 列方程(组)解应用题

方程是刻画现实世界中等量关系的重要工具. 列方程(组)、解方程(组)是解决实际问题的重要方法. 在一元一次方程、一次方程组、一元二次方程等的实际应用中，我们曾经归纳列方程(组)解应用题的一般步骤是：(1) 审题；(2) 设元；(3) 列方程(组)；(4) 解方程(组)；(5) 检验；(6) 解释. 现在，我们在已有的学习基础上，应用简单的代数方程来解决一些简单的实际问题.

例题1 一辆汽车，新车购买价 20 万元，第一年使用后折旧 20%，以后该车的年折旧率有所变化，但它在第二、三年的年折旧率相同. 已知在第三年年末，这辆车折旧后价值 11.56 万元，求这辆车第二、三年的年折旧率.

分析 本题中的一个基本等量关系是：

第三年末车的价值(万元)	=	新车购买价(万元)	×	第一年折旧后的剩余价值率	×	第二、三年两次折旧后的剩余价值率
11.56		20		(1−20%)		(1− 第二、三年的年折旧率)^2

解 设这辆车第二、三年的年折旧率为 x. 根据题意，可列出方程

$$11.56=20(1-20\%)(1-x)^2.$$

整理，得 $(1-x)^2=0.722\,5$.

两边开平方，得 $1-x=\pm 0.85$.

解得 $x_1=0.15$，$x_2=1.85$(不合题意，舍去).

所以 $x=0.15$，即 $x=15\%$.

答：这辆车第二、三年中的年折旧率为 15%.

例题2 为了配合教学的需要，某教具厂的木模车间要制作 96 个一样大小的正方体模型，准备用一块长 128 厘米、宽 64 厘米、高 48 厘米的长方体木材来下料. 经教具生产设计师的精心设计，

第五节 列方程(组)解应用题 53

【本课重点】

着重于让学生体验列整式方程(一元二次方程或高次方程等)解决简单实际问题的过程.

例题 1

本题是关于百分率(折旧率)的应用题. 由于学生在六年级已经学习过关于百分率的应用题，因此教学时要注意“温故知新”；还要注意列出方程以后解方程的方法，如本题的方程一般用“开方法”来解较简便.

另外，要检验方程的解是否符合应用题的实际意义，再对问题作出回答.

例题 2

本题等积变形的问题，列出的方程是高次方程. 计算时可使用计算器.

【教学目标】

(1) 进一步体验列方程解应用题的一般方法，会分析简单的实际问题中的数量关系，会列方程(组)解决简单的实际问题.

(2) 经历“实际问题—建立方程—方程求解—解释应用”的过程，体会方程思想，感知数学模型思想.

(3) 在应用方程(组)解决实际问题的过程中，提高分析问题和解决实际问题的能力，体会方程的应用价值，增强数学应用意识，提高学习数学的兴趣.

【注意事项】

学生在此前已有列方程(组)解应用题的经验，在本节教学开始时，要将列方程(组)解应用题的一般步骤进行复习和整理，为学生进一步学习列方程(组)解应用题和开展探究活动做准备.

在本题教学中，应提醒学生重视对方程的解是否是应用题的解进行检验.本题在解出方程的解为 $x=16$ 后，必须检验16是否是长方体木材的长、宽、高各数值的公因数，只有当16是它们的公因数时，才能使下料符合“木材恰好用完”的要求，否则不能.

若不计损耗，则该木材恰好用完，没有剩余. 求每个正方体模型的棱长是多少厘米.

由于不计损耗，所以木材的体积大小不变.

分析　本题的一个基本等量关系是：

96×一个正方体模型的体积 = 长方体木材的体积

96×棱长³　　　　长×宽×高

128×64×48

解　设正方体模型的棱长为 $x(x>0)$ 厘米. 根据题意，可列出方程

$$96x^3=128\times64\times48,$$

即　　$x^3=4\,096.$

解得　　$x=16.$

已知长方体木材的长128厘米、宽64厘米、高48厘米，当正方体的棱长为16厘米时，因为16是128、64、48的公因数，所以可以下料.

为什么要说明16是128、64、48的公因数？

答：每个正方体模型的棱长是16厘米.

练习 21.7(1)

1. 在元旦前夕，某公司的每位员工都向本公司的其他员工发出了1条祝贺元旦的短信. 已知全公司共发出短信1 190条，求该公司员工的人数.
2. 在一块长方形镜面玻璃的四周，镶上与它的周长相等的边框，制成一面镜子，镜子的长与宽的比是 3∶1. 已知镜面玻璃的价格是每平方米100元，边框的价格是每米20元，另外制作这面镜子还需要加工费55元. 如果制作这面镜子共花了210元，那么这面镜子的长和宽分别是多少米？
3. 某企业的年产值在三年内从1 000万元增加到1 331万元，如果这三年中每年的增长率相同，那么这三年中每年的年增长率是多少？

练习 21.7(1)

1. 35个.

2. 略.

3. 略.

例题3　某市为了美化环境，计划在一定的时间内完成绿化面积200万亩的任务. 后来市政府调整了原定计划，不但绿化面积要在原计划的基础上增加20%，而且要提前1年完成任务. 经测算，要完成新的计划，平均每年的绿化面积必须比原计划多20万亩，求原计划平均每年的绿化面积.

54　第二十一章　代数方程

【本课重点】

着重于让学生体验列分式方程解简单实际问题的过程.

【注意事项】

(1) 列方程(组)解应用题是方程应用的一个重要方面，教学时要重视引导学生参与数学化活动，经历将“未知”转化为“已知”的过程，不要把应用题的教学变成套路化的教学；要注意鼓励学生发挥创造性，如果学生采用其他正确的方法应给予肯定.

(2) 在列方程(组)解应用题的过程中，要抓住分析数量关系列代数式和寻找等量关系列方程(组)这两个关键.在分析例题时，要引导学生注意：① 弄清题中涉及哪些量，已知量是什么，求什么；② 抓住题目中的重要语句，找出已知量与未知量之间有哪些主要的数量关系和等量关系；③ 将等量关系式用符号语言表示出来，即将等量关系式由文字语言转化为符号语言.在分析的基础上，再让学生列出方程(组)和求解.

(3) 列方程解应用题的教学重点应放在分析题意、布列方程(组)上，而对于解方程(组)的过程，可根据班级学生实际水平把握步骤的详略，涉及较为繁琐的计算时可使用计算器.

分析　本题中的一个基本等量关系是：

工作时间$=\dfrac{\text{工作总量}}{\text{工作效率}}$

解　设原计划平均每年完成绿化面积 x 万亩. 根据题意，可列出方程

$$\frac{200}{x}-\frac{200(1+20\%)}{x+20}=1.$$

两边同时乘以 $x(x+20)$，再整理，得

$$x^2+60x-4\,000=0.$$

解得　　$x_1=40$，$x_2=-100$.

经检验，$x_1=40$，$x_2=-100$ 都是原方程的根. 因为绿化面积不能为负数，所以取 $x=40$.

答：原计划平均每年完成绿化面积 40 万亩.

通过列方程来解某些实际问题，应注意检验. 不仅要检验求得的解是否适合方程，还要检验所得的解是否符合实际意义.

例题4　某中学八年级学生到离学校 15 千米的青少年营地举行庆祝十四岁生日活动，先遣队与大部队同时出发. 已知先遣队的行进速度是大部队行进速度的 1.2 倍，预计比大部队早半小时到达目的地. 求先遣队与大部队的行进速度.

分析　本题中的一个基本等量关系是：

路程 s	=	速度 v	×	时间 t	.

由此可知，大部队与先遣队行进 15 千米所用的时间分别是 $\dfrac{15}{v_{先遣队}}$小时与$\dfrac{15}{v_{大部队}}$小时.

另外，本题还存在两个等量关系：

$$v_{先遣队}=1.2v_{大部队},$$

$$t_{先遣队}=t_{大部队}-\frac{1}{2}.$$

解　设大部队的行进速度为 x 千米/时，则先遣队的行进速度

第五节　列方程(组)解应用题　55

例题 3

本题是工程问题，这是日常生活和生产中经常遇到的一类应用题. 教学时，可先复习工程问题中有哪些基本数量，这些数量之间的基本关系式，并可利用“列表法”分析数量关系.

例题 4

本题是行程问题，这也是日常生活和生产中经常遇到的一类应用题. 教学时可利用“图示法”分析应用题中的数量关系，利用线段图的直观性帮助学生准确理解题意.

【注意事项】

列分式方程解应用题，其中的“检验”步骤有两个方面的要求，一是解分式方程是否产生了增根；二是这个分式方程的根是否符合题意.

为$1.2x$千米/时. 根据题意，可列出方程

$$\frac{15}{1.2x}=\frac{15}{x}-\frac{1}{2}.$$

解得　　$x=5$.

经检验，$x=5$是原方程的根，且符合题意.

当$x=5$时，$1.2x=1.2\times5=6$.

答：大部队的行进速度为5千米/时，先遣队的行进速度为6千米/时.

练习 21.7(2)

1. 某校组织学生步行到科技展览馆参观. 学校与展览馆相距6千米，返回时，由于步行速度比去时每小时少1千米，结果时间比去时多用了半小时. 求学生返回时步行的速度.
2. 小丽到一文具店用12元钱买某种练习本若干本. 隔了一段时间再去那个店，发现这种练习本正在“让利销售”中，每1本降价0.2元，这样用12元可以比上次多买3本. 小丽第一次买了多少本练习本?
3. 为了落实“珍惜和合理利用每一寸土地”的基本国策，某地区计划若干年内开发“改造后可利用土地”的面积达到360平方千米. 实际施工中，第一年比原计划每年开发的土地面积多2平方千米，如果按此进度继续开发，预计可提前6年完成任务. 实际施工中每年开发土地多少平方千米?

例题5　有两块正方形的瓷砖，其中小的一块瓷砖的面积比大的瓷砖面积小40平方分米. 已知大瓷砖的边长比小瓷砖的边长长4分米，求这两块瓷砖的面积分别是多少.

分析　本题中的一个基本等量关系是：

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{\text{大瓷砖的边长}} & - & \boxed{\text{小瓷砖的边长}} & = & \boxed{4(\text{分米})} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \boxed{\sqrt{\text{小瓷砖的面积}+40}} & & \boxed{\sqrt{\text{小瓷砖的面积}}} & & \end{array}$$

正方形的边长$=\sqrt{\text{正方形的面积}}$

解　设小瓷砖的面积为x平方分米，则大瓷砖的面积为$(x+40)$平方分米. 根据题意，可列出方程

$$\sqrt{x+40}-\sqrt{x}=4.$$

解得　　$x=9$.

经检验，$x=9$是原方程的根，且符合题意.

当$x=9$时，$x+40=9+40=49$.

答：这两块瓷砖的面积分别是9平方分米和49平方分米.

56 第二十一章　代数方程

练习 21.7(2)

1. 3千米/时.

2. 12本.

3. 12平方千米.

【本课重点】

着重于让学生体验列无理方程解简单实际问题的过程.

例题 5

本题利用大小两个正方形的边长之间的数量关系，列出了一个无理方程，然后解决问题.

抓住题中的等量关系式并用符号语言表示出来，就把这个实际问题化成了一个解无理方程的数学问题，这就是一个数学化的过程.

【注意事项】

(1) 为解例题5，也可利用其他数量关系列方程.如利用大小两个正方形的面积之间的数量关系式，可得到一元一次方程，此时所设未知数为间接设元.教学时，可以让学生尝试不同解法，比较异同，感受在列方程解应用题时，找出数量关系式并合理选择列方程的等式的重要性.

(2) 与列分式方程解应用题一样，列无理方程解应用题中的“检验”步骤也有两个方面的要求.

例题6 如图 21－3，l_1 是一条东西方向的道路，l_2 是一条南北方向的道路，这两条道路相交于点 O. 有一棵古树位于图中点 P 处，从古树到 l_1、l_2 的距离分别为 3 千米和 2 千米. 分别以 l_1 与 l_2 所在的直线为坐标轴（以 1 千米为长度单位）建立平面直角坐标系，如图 21－4 所示.

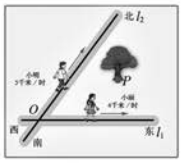


图 21－3

小明和小丽从点 O 处同时出发，其中小明沿着 l_2 以 5 千米/时的速度由南向北前进，小丽沿着 l_1 以 4 千米/时的速度由西向东前进.

（1）试用坐标表示这两人出发后经过 t 小时分别所到达的位置；

（2）两人出发后经过了多少时间，他们分别所在的位置与古树的距离恰好相等？

解 （1）设两人出发后经过 t 小时，小丽和小明分别所到达的位置为点 A 和点 B.

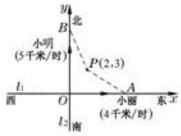


图 21－4

因为 $v_{小丽}=4$ 千米/时，$v_{小明}=5$ 千米/时，

所以 $OA=4t$，$OB=5t$，得点 $A(4t,0)$，点 $B(0,5t)$.

（2）古树的位置可表示为点 $P(2,3)$.

小丽经过 t 小时所到达的位置与古树的距离为

$$AP=\sqrt{(4t-2)^2+(0-3)^2}.$$

小明经过 t 小时所到达的位置与古树的距离为

$$BP=\sqrt{(0-2)^2+(5t-3)^2}.$$

当 $AP=BP$ 时，得

$$\sqrt{(4t-2)^2+9}=\sqrt{4+(5t-3)^2}.$$

解得 $t_1=0$，$t_2=\dfrac{14}{9}$.

经检验，t_1、t_2 都是原方程的根，但 $t_1=0$ 不合题意，舍去.

答：经过 $\dfrac{14}{9}$ 小时，两人与古树的距离恰好相等.

议一议

例题 5、例题 6 都是通过列哪种方程来求解的？它们与前面学过的列方程解应用题有什么相同点与不同点？

练习 21.7(3)

1. 有一个数，它的正平方根比它的倒数的正平方根的 3 倍多 2，求这个数.
2. 某学校修建两块面积相等的绿地，一块是长方形，另一块是正方形. 已知长方形绿地的长比宽多 14 米，且这两块绿地的周长之和为 196 米，那么长方形绿地的宽是多少米？

例题 6

本题对数学知识和方法的运用有一定的综合要求，在列方程时需要借助于平面直角坐标系. 教学时要引导学生深入分析题意，用联系的观点、数形结合思想来探索解题思路.

议一议

要鼓励学生充分发表意见，引导学生反思和总结，提高分析问题、解决问题的能力.

练习 21.7(3)

1. 9.

2. 18 米.

3. 20 米.

【注意事项】

（1）例题 6 题目的叙述很长，其中给出了平面直角坐标系，又设计为两个小题，这是为了降低难度. 由 $AP=BP$ 列出关于 t 的方程，可以是无理方程，也可以写成一元二次方程，课本中特意列出一个无理方程，是为了体现无理方程的实际应用.

（2）将实际问题“数学化”，是解决问题的起点也是难点，其教学要求较高. 如果让学生通过分析例题 6 的实际情景、自主建立平面直角坐标系，把这个实际问题转化为一个数学问题来求解，那么能较充分地体现数学模型的思想和数学化的过程，但是教学的难度可能会大大增加. 对于数学基础好的班级，可尝试让学生自主建模求解.

【本课重点】

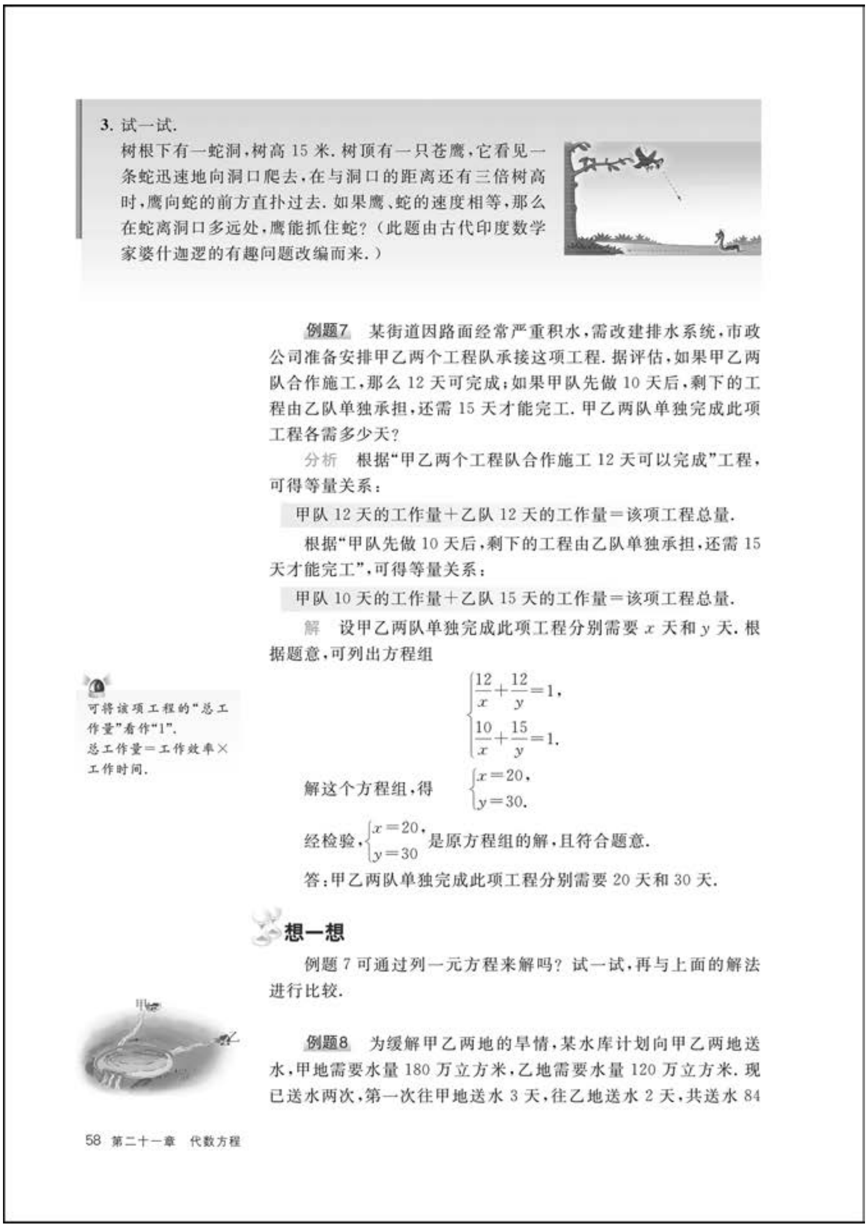
着重于让学生体验列分式方程组解简单实际问题的过程.

例题 7

本题实质上是工程问题.在工程问题中,有的是给出了总工程量的具体数量,如前面的例题 3 及后面的例题 8;有的是不给出总工程量的具体数量,如本题,这时可以把工程量设为“1”,再分析问题中的等量关系.

想一想

本题也可列一元方程求解.教学时,可以引导学生尝试不同解法,体验“优化”策略.一般地,在实际问题中有两个待求的量时,引进两个“元”列方程组,通常比列一元方程更容易一些.



3. 试一试.

树根下有一蛇洞,树高 15 米.树顶有一只苍鹰,它看见一条蛇迅速地向洞口爬去,在与洞口的距离还有三倍树高时,鹰向蛇的前方直扑过去.如果鹰、蛇的速度相等,那么在蛇离洞口多远处,鹰能抓住蛇?(此题由古代印度数学家婆什迦逻的有趣问题改编而来.)

例题7 某街道因路面经常严重积水,需改建排水系统,市政公司准备安排甲乙两个工程队承接这项工程.据评估,如果甲乙两队合作施工,那么 12 天可完成;如果甲队先做 10 天后,剩下的工程由乙队单独承担,还需 15 天才能完工.甲乙两队单独完成此项工程各需多少天?

分析 根据“甲乙两个工程队合作施工 12 天可以完成”工程,可得等量关系:

甲队 12 天的工作量+乙队 12 天的工作量=该项工程总量.

根据“甲队先做 10 天后,剩下的工程由乙队单独承担,还需 15 天才能完工”,可得等量关系:

甲队 10 天的工作量+乙队 15 天的工作量=该项工程总量.

解 设甲乙两队单独完成此项工程分别需要 x 天和 y 天.根据题意,可列出方程组

$$\begin{cases}\dfrac{12}{x}+\dfrac{12}{y}=1,\\ \dfrac{10}{x}+\dfrac{15}{y}=1.\end{cases}$$

可将该项工程的“总工作量”看作“1”.
总工作量=工作效率×工作时间.

解这个方程组,得 $\begin{cases}x=20,\\ y=30.\end{cases}$

经检验,$\begin{cases}x=20,\\ y=30\end{cases}$ 是原方程组的解,且符合题意.

答:甲乙两队单独完成此项工程分别需要 20 天和 30 天.

想一想

例题 7 可通过列一元方程来解吗?试一试,再与上面的解法进行比较.

例题8 为缓解甲乙两地的旱情,某水库计划向甲乙两地送水,甲地需要水量 180 万立方米,乙地需要水量 120 万立方米.现已送水两次,第一次往甲地送水 3 天,往乙地送水 2 天,共送水 84

58 第二十一章 代数方程

【注意事项】

通过列方程组来解决的实际问题,通常在问题中含有较多的未知量和数量关系,导致多数学生会感到有一定的困难.因此,在教学中不能急于求成,应循序渐进,充分调动学生已有的列二元一次方程组的经验,引导学生在分析问题和解决问题的过程中不断摸索,积累经验,逐步提高能力.

万立方米；第二次往甲地送水 2 天，往乙地送水 3 天，共送水 81 万立方米. 如果向两地送水分别保持每天的送水量相同，那么完成往甲地、乙地送水任务还各需多少天？

分析　本题中的基本等量关系是：

往甲地送水 3 天的水量＋往乙地送水 2 天的水量＝84（万立方米）.

往甲地送水 2 天的水量＋往乙地送水 3 天的水量＝81（万立方米）.

解　设完成往甲地送水任务还需 x 天，完成往乙地送水任务还需 y 天. 根据题意，可列出方程组

$$\begin{cases}\dfrac{180}{x+5}\times 3+\dfrac{120}{y+5}\times 2=84,\\ \dfrac{180}{x+5}\times 2+\dfrac{120}{y+5}\times 3=81.\end{cases}$$

整理，得

$$\begin{cases}\dfrac{45}{x+5}+\dfrac{20}{y+5}=7,\\ \dfrac{40}{x+5}+\dfrac{40}{y+5}=9.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases}x=5,\\ y=3.\end{cases}$$

经检验，$\begin{cases}x=5,\\ y=3\end{cases}$ 是原方程组的解，且符合题意.

答：完成往甲地、乙地的送水任务还各需要 5 天和 3 天.

某地需水量＝某地每天的送水量×完成往某地送水任务的天数.

本题也可以通过间接设元，列出二元一次方程组求解，且解题过程更为简单，不妨试一试.

议一议

例题 7、例题 8 与前面学过的列方程解应用题有什么相同点与不同点？

在实际问题中，经常会遇到有多个未知量的问题，我们可以列方程组来求解.

练习 21.7(4)

1. 小杰与小丽分别从相距 27 千米的 A、B 两地同时出发相向而行，3 小时后相遇. 相遇后两人按原来的速度继续前进，小杰到达 B 地比小丽到达 A 地早 1 小时 21 分. 小杰与小丽的行进速度分别是多少？

例题 8

本题实质上也是“工程”问题.“某地需水量”看作“工作总量”,“某地每天的送水量”看作“工作效率”,“完成往某地送水任务的天数”看作“工作时间”.因此，教学时可借助于工程问题的基本数量关系式来解释本题中的相关数量关系式，帮助学生理解.

有些学生解本题所列出方程组，可能会感到困难.教师要对解这个方程组的过程，适当地进行讲解和演示，指导学生学习.

练习 21.7(4)

1. 小杰的速度是5 千米/时，小丽的速度是 4 千米/时.

【注意事项】

解例题 8 时，边款中已经指出通过设间接未知数列出一个二元一次方程组，比较容易求解.如果学生能提出列二元一次方程组来解题，应予以充分肯定和热情鼓励.在教学过程中要开放思维空间，让学生多思考和发表意见，用不同的方法解决问题，培养学生思维的广阔性和灵活性.

2. 甲队单独完成需 30 天，乙队单独完成需 120 天.

3. 从甲地购进这种商品 60 件，从乙地购进这种商品 100 件.

2. 甲乙两个工程队修建某段公路. 如果甲乙两队合作，24 天可以完成；如果甲队单独做 20 天后，剩下的工程由乙队独做，还需 40 天才能完成. 甲乙两队单独完成此段公路的修建各需要多少天？

3. 试一试.

小丽的叔叔分别用 900 元和 1 200 元钱从甲乙两地购进数量不等的同一商品，已知乙地商品比甲地商品每件便宜 3 元，当他按每件 20 元销售完时，可赚1 100元. 小丽的叔叔从甲乙两地分别购进这种商品多少件？

Benzhang Xiaojie

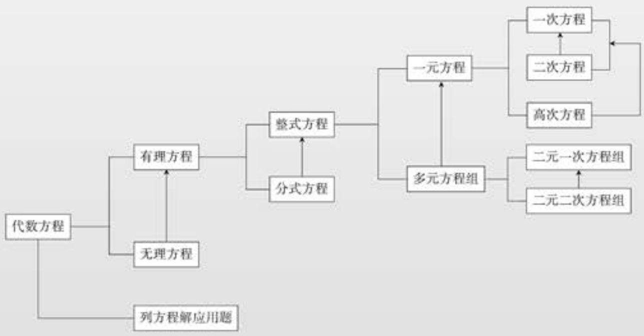
21

本章小结

本章学习了简单的高次方程、分式方程、无理方程以及简单的二元二次方程(组)的概念及其解法，学习了列方程解应用题. 到本章为止，可以说初等代数方程的基本知识内容已经大体完整.

在探索各类方程(组)的解法的过程中，基本的思路是“高次化低次、分式化整式、无理化有理、多元化一元”，把解新方程的问题转化为解熟悉的方程，其中体现了数学的“化归”思想. 对方程(组)解法的具体探讨，重视运用等式的性质和数的运算性质，运用“降次”“消元”等基本策略；采用了“换元法”“代入法”“因式分解法”等数学方法. 由于分式方程和无理方程在“转化”过程中可能会产生增根，因此，在解这两类方程时，对变形后的方程求得的解必须进行检验. 另外，学习列方程解应用题时，经历了将实际问题转化为数学问题的“数学化”过程，从中可以感受到“数学抽象”在处理实际问题中的作用.

本章知识结构图如下：



本章小结 61

学生通过对本章的学习，经历了整式方程从低次到高次以及从整式方程到分式方程、再到无理方程的扩展过程，探索并获得了各类简单方程的解法，感受到方程在解决实际问题中的作用.在小结中，要引导学生认识初等代数方程的基本构成与联系，掌握简单方程的基本解法与初步应用，领会贯穿其中的数学思想方法(如化归思想，消元、降次的方法等).

本章包含的内容和方法较多，可指导学生按照知识结构框图的线索进行整理，把握教学基本要求，切实加强基础.

【设计意图】

本阅读材料着重介绍两类特殊的一元高次方程的解法，一类是“双二次方程”，另一类是“容易通过因式分解进行变形的高次方程”.主要用意是让学生领略解一元高次方程的一种基本策略——“降次”、两种基本方法——“换元法”和“因式分解法”，从中体会数学思想方法的运用，提高对于一元高次方程进行学习和研究的兴趣.

【活动建议】

可让学生自主阅读本材料，了解两类特殊的一元高次方程及其解法，领会解一元高次方程的基本数学思想和方法；教师适当进行指导，帮助学生加深认识.

可组织学生交流学习体会，并对材料中提出的有关思考问题开展讨论，进行解题.

Yuedu Cailiao

21

阅读材料

一些特殊的一元高次方程的解法

设

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

其中 $a_0\neq 0$，n 是大于 2 的整数，那么 $f(x)=0$ 是一个关于 x 的一元高次方程.

我们来讨论一些特殊的一元高次方程的解法.

问题1

怎样解方程 $x^4-5x^2+4=0$? ①

探究

由方程①的形式，可以联想一元二次方程. 如果将方程①中的 x^2 用辅助未知数 y 代替，同时 x^4 用 y^2 代替，那么方程①就转化为一个一元二次方程

$$y^2-5y+4=0. \quad ②$$

由方程②求出 y 的值，再用 x^2 代替 y（即“回代”），可求出 x 的值，即方程①的根.

解方程②，得

$$y_1=1, y_2=4.$$

由 $y_1=1$，得 $x^2=1$，解得

$$x=\pm 1;$$

由 $y_2=4$，得 $x^2=4$，解得

$$x=\pm 2.$$

所以，方程①的根是

$$x_1=1, x_2=-1, x_3=2, x_4=-2.$$

归纳

在四次方程①中，左边是三项式，各项的次数分别是 4 次、2 次和 0 次（常数项不是 0 时，规定它的次数为 0），即都是偶数次；右边是 0.

一般地，只含有未知数的偶数次项的一元四次方程，叫做双二次方程.

62 第二十一章 代数方程

解关于 x 的双二次方程 $ax^4+bx^2+c=0$(其中 a、b、c 全不为零)时，可将原方程转化为关于 y 的一元二次方程 $ay^2+by+c=0$，然后解这个关于 y 的方程，再求原方程的根. 其一般过程是：(1) 换元；(2) 解一元二次方程；(3) 回代.

这种用辅助未知数解方程的方法，叫做换元法.

思考

是否能用换元法解关于 x 的一元高次方程 $ax^{2k}+bx^k+c=0$(a、b、c 全不为零，k 是大于 2 的整数)？

试一试，解方程 $3x^6-2x^3-1=0$(近似根精确到 0.01).

问题2

怎样解方程 $x^3-x^2-2x=0$? ③

探究

观察方程③，左边是一个容易分解因式的多项式，右边是 0. 联想解特殊的一元二次方程的类似情况，可把解高次方程③转化为解次数较低的方程.

将方程③左边分解因式，得

$$x^3-x^2-2x=x(x^2-x-2)=x(x-2)(x+1).$$

于是方程③可变形为

$$x(x-2)(x+1)=0,$$

得

$$x=0 \text{ 或 } x-2=0 \text{ 或 } x+1=0.$$

解得

$$x=0 \text{ 或 } x=2 \text{ 或 } x=-1.$$

所以，方程③的根是

$$x_1=0, x_2=2, x_3=-1.$$

归纳

解方程③时，对方程的一边进行了因式分解(另一边是 0). 这种解一元高次方程的方法叫做因式分解法.

一般地，如果一个一元高次方程的一边是 0 而另一边易于分解因式，那么可以用因式分解法来解这个高次方程.

对于一元高次方程 $f(x)=0$，如果易知

$$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\cdots\cdot f_k(x),$$

那么解原方程可转化为分别解方程

$$f_1(x)=0, f_2(x)=0, \cdots, f_k(x)=0.$$

解这些方程所得的根都是原方程的根.

解高次方程的基本思想，通常是采用有效的方法进行“降次”，从而化归为解次数较低的方程的问题. 常用的“降次”方法有开方、配方、换元、分解因式等.

思考

怎样解方程 $(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)-15=0$?

尝试用两种方法求解并进行比较.

【问题解答】

解方程 $(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)-15=0$，可采用如下两种方法：

一、换元法. 设 $x^2+2x=y$，则原方程化为 $y^2-14y-15=0$，解得 $y_1=15$，$y_2=-1$. 再由 $x^2+2x=15$，得 $x_1=-5$，$x_2=3$；由 $x^2+2x=-1$，得 $x_3=x_4=-1$. 所以原方程的根是 $x_1=-5$，$x_2=3$，$x_3=x_4=-1$.

二、因式分解法. 原方程可变形为 $(x^2+2x-15)(x^2+2x+1)=0$，得 $x^2+2x-15=0$ 或 $x^2+2x+1=0$，这两个方程的根都是原方程的根（解略）.

第二十二章　四　边　形

一、教学目标

1. 理解多边形及其有关概念，经历探索和归纳多边形内角和、外角和的过程，掌握多边形的内角和定理与多边形的外角和定理，领会“从特殊到一般”以及转化的思想方法.

2. 理解平行四边形的概念，掌握平行四边形的性质定理和判定定理，会用平行四边形的性质定理与判定定理来解决简单的几何证明和计算问题.

3. 经历将探索平行四边形性质转化为研究全等三角形问题的过程，经历从平行四边形性质的“逆向思维”来探索平行四边形判定方法的过程，从中体会分类讨论思想，感受类比迁移的方法.

4. 理解矩形、菱形、正方形的概念，知道它们之间的内在关系，体会集合思想；掌握矩形、菱形、正方形的特殊性质和判别方法，并能运用这些知识进行简单的有关证明和计算；结合特殊四边形性质和判定方法以及相关问题的证明，进一步发展逻辑思维能力和推理论证能力.

5. 理解梯形的有关概念，掌握等腰梯形的性质和判定，掌握三角形中位线定理和梯形中位线定理，建立梯形和三角形之间的联系，从中体会对立统一的思想观点.

6. 通过探索特殊四边形性质和判定，获得从事数学活动的经验和体验，提高合情推理能力；通过分析四边形与特殊四边形、以及平行四边形与各种特殊平行四边形概念之间的联系与区别，认识特殊与一般的关系，从中体会事物之间总是互相联系又互相区别的辩证唯物主义观点.

7. 理解有向线段、向量及其有关的概念；初步掌握向量加法运算的三角形法则、平行四边形法则以及多个向量相加的多边形法则，会用画图的方法求和向量；初步掌握向量减法的三角形法则，并能类比有理数减法将向量减法转化为向量加法，会用画图的方法求差向量；知道向量加法的交换律与结合律，会利用有关运算法则和运算律化简向量加减的算式.

二、课时安排

本章教学共 25 课时，建议分配如下：

22.1	多边形	2 课时
22.2	平行四边形	4 课时
22.3	特殊的平行四边形	5 课时
22.4	梯形	1 课时
22.5	等腰梯形	2 课时
22.6	三角形、梯形的中位线	2 课时
22.7	平面向量	2 课时
22.8	平面向量的加法	2 课时
22.9	平面向量的减法	2 课时
本章小结		3 课时

三、设计说明

学生通过八年级第一学期的几何学习，初步学会了演绎证明，获得了演绎推理的基础性训练，基本完善了有关平行线和三角形的几何知识基础.本章以四边形为研究对象，为学生进一步学习论证几何提供载体，主要学习平行四边形和梯形的基本知识，并结合对相关定理的推理证明，进一步发展逻辑思维能力和

合情推理能力;另外,为拓展学生的数学观念和为学生学习物理提供数学工具,本章还引进了平面向量及其加减运算,把平面向量初步知识与平行四边形整合在一起.

本章首先讲述了多边形及其有关概念,导出了多边形的内角和定理及外角和定理;然后展开对四边形的讨论,再介绍平面向量的初步知识.

将“四边形”按对边之间的平行关系分类,可分成三类:两组对边分别平行的四边形,即平行四边形;一组对边平行但另一组对边不平行的四边形,即梯形;还有两组对边都不平行的四边形.本章着重研究了平行四边形和梯形这两类特殊的四边形.在平行四边形中,先导出了一般平行四边形的性质定理和判定定理,再对特殊的平行四边形——矩形、菱形以及正方形进行了重点研究;在梯形中,主要研究了等腰梯形的性质和判定,在此基础上研究三角形和梯形的中位线.

平行四边形的定义、性质和判定,是本章的核心内容.矩形、菱形、正方形都是特殊的平行四边形,它们的性质和判定基本上都是在平行四边形的基础上构建的;对它们进行探索的方法,也都与平行四边形性质和判定的探索方法一脉相承.关于等腰梯形的性质、三角形中位线定理等的推导,是以平行四边形的有关定理为依据,是平行四边形知识的综合运用.向量加法法则的合理性及其交换律的推导,要运用平行四边形的知识.平行四边形的有关定理,也是证明两条线段相等、两角相等、两直线平行或垂直的重要依据.所以,掌握平行四边形的概念、性质和判定,并能运用这些知识解决问题,是学好本章的关键.

有关平行四边形的内容,课本中按照图形概念的从属关系,把它分为三个层次,安排了两个小节.第一小节“平行四边形”为第一个层次,主要研究平行四边形的概念、性质和判定方法.第二小节“特殊的平行四边形”中包含两个层次,一是对平行四边形分别在角、边两要素上进行一次特殊化,得到矩形和菱形;二是分别对矩形、菱形在边或角要素上再进行一次特殊化,从而都得到正方形,或者说通过对平行四边形在角与边两要素上同时进行一次特殊化则得到正方形.矩形和菱形都是有一个特殊条件的平行四边形,主要研究矩形和菱形的概念、性质和判定方法.正方形是同时具有一个角是直角和一组邻边相等这样两个特殊条件的平行四边形,课本中先给出了正方形的概念,再让学生研究和得到它的性质及判定方法.

在梯形的研究中,课本中注重建立梯形和三角形的联系,并以此拓宽研究梯形的思路.等腰梯形是特殊的梯形,对它的性质的探究,是从它的边、角、对角线三个方面进行的,类似于探索平行四边形性质;同时,还注意通过将等腰梯形与等腰三角形类比来构建知识,在等腰梯形的轴对称性的研究中用到了等腰三角形的轴对称性.

三角形和梯形的中位线定理的推导,其依据是平行四边形的有关定理,其过程是平行四边形知识的综合运用.在内容的展开中,重视数学思想方法的运用,比如:把三角形中位线性质的研究转化为平行四边形性质的研究;把梯形中位线性质的研究转化为三角形中位线性质的研究.

本章有关平面向量的概念及其加减运算等内容,以平行线、平行四边形和平移等知识为基础,以直观认识、操作体验、能算会画为要求,注重“基本”,强调“初步”.课本中从一些生活实例引发思考,依托生活经验(人在运动中位置的移动),引入“有向线段”“向量”“向量的加法”等概念,通过“两点的相对位置”“平移”等进行数学解释;对于向量加法运算律以及减法的研讨,利用了学生学习数的运算的经验以及平行四边形的有关知识,自然展开、简明说理、归纳结论,力求符合学生的认知发展水平和具有适度的严谨性.

平面向量及其运算,是初中学生进一步学习数学和物理所必需的准备知识.向量在数学学科中有重要的地位和作用,在物理研究和解决现实问题中是有力的工具,学生将在以后逐步体会.

四、教学建议

1. 要突出图形性质的探索过程,重视直观经验和逻辑推理的有机结合.

本章重点研究了一些特殊四边形,由于涉及的图形比较多,因此所涉及的图形性质和判定方法也比较多.在呈现内容时,应突出图形性质的探索过程,重视直观经验与逻辑推理的有机结合.

要让学生通过观察、操作、图形运动等多种多样的活动,探索和发现图形的性质.例如,通过操作活动,把多边形分割成三角形,归纳出多边形的内角和公式;通过剪拼操作与分析结合,利用三角形的旋转,发现三角形的中位线的性质;通过变动四边形实物模型,认识四边形的不稳定性,并探究平行四边形的判定方

法等.在学生归纳得到图形的性质后,再对性质进行证明从而严格化.有了直观经验和逻辑推理的有机结合,推理论证就成为实验探究活动的自然的而且是必须的延续.

也有些性质是要求学生通过理性实验和合理思考来获得.例如,课本中对平行四边形性质的探究,通过画出平行四边形的一条对角线得到两个全等的三角形,发现对平行四边形的对边相等、对角相等;通过画出平行四边形的两条对角线得到两对分别全等的三角形,发现对角线互相平分的性质.再如课本中对平行四边形判定方法的探索,是直接提出问题引导学生思考,通过将平行四边形的性质"逆"过来,提出对边相等、对角相等或对角线互相平分的四边形是不是平行四边形的问题;菱形和矩形的性质和判定方法也是如此.还有,对于正方形,要求学生直接根据正方形的定义以及它同矩形和菱形的关系,思考正方形的性质和判定方法等.学生通过理性分析得到结论以后,同样需要加以"证明"、进行规范和完善.

有一些文字叙述的证明题,要求学生自己写出已知、求证,再进行证明.这对学生的推理能力有较高要求,难度也有增加,但能激发学生的学习兴趣,活跃学生的思维,对发展学生的思维能力有好处.教学中要注意启发和引导,使学生在熟悉"规范证明"的同时,推理论证能力有所提高和发展.

还要注意,本章内容是平行线和三角形知识的深入和运用,在推导四边形、平行四边形和梯形的有关定理以及解决某些问题时,反复运用了平行线和三角形的有关知识.学生通过对四边形有关内容的学习以后,原有的定理系统扩大了,解决问题的途径和方法增多了,这时要引导学生直接运用所获得的新知识来解决有关问题,不能总在熟悉的平行线、三角形中兜圈子.

2. 要重视数学思想方法教学,提高学生学习数学的能力.

在研究四边形的过程中,经常是通过添加辅助线,把四边形的问题转化为三角形的问题.例如,利用对角线把平行四边形分割成两个全等的三角形,由全等三角形的性质得出平行四边形的性质.反过来,在研究三角形的中位线时,又通过构造出平行四边形,利用平行四边形的性质得出三角形中位线定理.对于梯形的问题,常常通过平行移动梯形的一个腰或一条对角线,把梯形的问题转化为平行四边形或三角形的问题.在教学时,要让学生体会转化的思想,引导学生适当添加辅助线,把未知转化为已知,用已经掌握的知识来解决新问题,提高学生分析问题和解决问题的能力.

在研究有关图形的判定方法时,较多地以分析性质定理的逆命题为出发点,从边、角、对角线三个要素进行考察从而得到判定定理.这种对比迁移、分类讨论的思想,有助于提高解决问题的效率,帮助学生将知识结构化,发展学生的理性思维和创新能力,在教学中要引起重视.

本章的概念比较多,概念之间联系密切,关系复杂.对概念进行分类,是明确概念的一种逻辑方法.通过分类可以帮助学生更好地掌握概念,同时也从中学习分类的一些方法.在本章的小结中,通过图示给出了本章主要概念之间的关系,要让学生注意这些概念之间的区别和联系,进一步体会分类的思想.

在几何证明的教学过程中,要引导学生学会如何探索证题思路,领会基本的分析方法,养成良好的思维习惯,发展逻辑思维和几何论证能力.

3. 要重视概念教学,适当运用图表帮助学生梳理知识内容.

本章中对一些问题的研究,思路和方法类似,推理论证的难度也不太大.相对来说,平行四边形与各种特殊平行四边形之间的联系与区别,是教学中的一个难点.有的学生可能不知道正方形是矩形又是菱形,也是平行四边形,往往搞不清楚它们的共性、特性及其从属关系,有时掌握了它们的特殊性质又忽视了共同性质.教学时不仅要讲清矩形、菱形、正方形的特殊性质,尤其要强调它们与平行四边形的从属关系和共同性质.可利用图示,帮助学生弄清这些概念之间的关系.例如,整理四边形知识时,给出各种四边形以及它们相互关系的示意图;研究正方形时给出它与矩形、菱形之间包含关系的"文氏图".

要适时地引导学生对所学内容进行梳理,可将主要内容列表呈现.例如,正方形的有关内容可列表如下:

<table>
<tr><td rowspan="9">正方形</td><td>定　　义</td><td colspan="2">有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形.</td></tr>
<tr><td rowspan="7">性质</td><td>边的性质</td><td>对边平行,四边相等</td></tr>
<tr><td>角的性质</td><td>四个角都是直角</td></tr>
<tr><td rowspan="4">对角线的性质</td><td>两条对角线相等</td></tr>
<tr><td>两条对角线互相垂直</td></tr>
<tr><td>两条对角线互相平分</td></tr>
<tr><td>每条对角线平分一组对角</td></tr>
<tr><td>对称性</td><td>轴对称图形、中心对称图形</td></tr>
<tr><td>判定方法</td><td colspan="2">证明它是矩形且有一组邻边相等,或证明它是菱形具有一个角是直角</td></tr>
</table>

类似地,可让学生将平行四边形、矩形、菱形、等腰梯形等图形的概念、性质、判定方法等列表,帮助学生理解这些概念.

4. 要关注知识的内在联系和实际应用,促进学生深入理解知识.

在本章教学中,要围绕对于特殊四边形的认识,加强与以前学过的数学内容的联系,有机地进行整合.例如,在研究了各种特殊四边形在边、角、对角线方面所具有的性质后,要引导学生从"图形运动"的视角认识较复杂的图形;在证明思路的探索中,要引导学生联系"图形运动"进行思考或添加辅助线.课本中有意安排了一些与以前的知识内容相沟通的例题和习题,如利用特殊四边形的性质在平面直角坐标系中探求平行四边形的顶点坐标的问题、运用方程思想进行几何计算的问题、简单的几何作图题等,要指导学生通过解题活动,把握知识之间的联系,增强整体意识;还可以根据学生的实际情况,对有关题目适当进行引申,帮助学生加深认识,提高分析问题的能力和综合运用知识的能力.另外,学生在小学已经学过一些四边形的知识,如一些特殊四边形的概念、平行四边形和梯形的高及面积计算等;在中学阶段,学生又系统地学过三角形的有关知识.在教学时,可从学生实际出发,进行适当的复习,建立新旧知识之间的联系,使学生温故知新,同时对学过的知识进一步加深理解.

在人们日常生活和生产中,四边形是应用较广的一种几何图形,尤其是平行四边形、矩形、菱形、正方形、等腰梯形等特殊四边形.课本中在引入概念时,提供了一些实际背景;在例题和习题中,有一些实际应用的问题.要重视数学与现实的联系,注意从实例出发引入概念,在实际应用中激活知识,通过有关内容的教学,帮助学生学习如何运用所学知识解决实际问题,增强知识应用的意识和能力.

5. 要平实组织向量教学,帮助学生顺利起步.

向量不仅有大小,而且有方向,它与学生熟悉的数量(标量)有根本性的区别.由于学生的知识积累和生活经验不足,学习"向量"难免会有困难.但是,学生学习向量,已经具有必要的认知基础,只要充分地发掘和利用,同时正确把握向量学习的起点和要求,学生是可以达成预期目标的.

为了帮助学生克服学习向量的困难,一要加强直观性和现实性;二要充分利用学生已有的知识和经验;三要降低理论难度、注重操作实践;四要热情鼓励、耐心指导.

教学中应以课本内容为线索,充实直观事例,强化操作活动,深入浅出,宁低勿高.比如向量概念的引进和向量加法的提出,要多列举生活中的一些实例,作好铺垫;向量加法运算法则的建立,要从实际经验中提炼、在画图操作中解说;向量减法的引入以及将减法转化为加法,要类比数的减法给以简明提示,再抓住向量减法与加法的联系导出向量减法的三角形法则.又如对于向量概念、加减运算法则的学习要求,应关注学生的直观认识和操作体验,会用有向线段表示向量,会按照加减运算法则画图.再如关于自由向量的说明,只是表明一种观点,不要深究,学生也不必真正明白;关于两点相对位置、平移运动的讨论,只是为学生认识向量提供数学方面的知识基础,并让学生知道向量不是凭空而来,知道向量只有大小和方向两个要素,而不要用向量去解释新的数学问题;关于向量加法的运算律,只是直观性地归纳而不进行严格地证明,只要学生确认和会用;关于用向量方法解决几何问题,一般不必涉及.

总的来说,本章中对于向量的教学,是学生学习向量的起步,应适当降低知识的难度和避免枝节的纠缠,力求浅显易懂;必须严格把握基本要求,不可拔高.学生在九年级将进一步学习实数与向量相乘,构建

向量的线性运算知识基础；而向量知识系统的形成和向量应用的展开，安排在高中阶段；本章的向量教学，要为学生进一步学习向量打好基础、增强信心.

五、评价建议

1. 关注学生的学习兴趣以及数学思考和表达能力的发展.

本章内容的展开更多地体现了论证几何的要求，注重于在理性分析的基础上符合逻辑地演绎，重视严格的数学证明.同时，充分尊重学生认知发展的过程和思维发展的水平，常借助于操作实验活动为学生进行探究学习和理性思考提供支持，为学生获得过程与方法的体验提供机会.

相对于实验几何，论证几何的教学要求有所不同，数学思维的难度有所提高，学生面临的困难和问题会更多一些.因此，在教学中要关注学生的学习兴趣的激发和保持，调动学生的积极性；同时对学生的数学思维活动加强指导.在学习评价中同样也要重视引发学生的学习兴趣，重视对学生的几何学习正确导向.

在日常教学中，要关注对学生参与数学活动的态度的评价，观察学生与同伴能否积极地交流，交流中是否有自己的发现与见解；还要关注学生在分析证题思路和表达论证过程时，是否具有条理性，能否正确进行数学语言形态的转换和符合逻辑地表达.在测试命题中，要强调考查基础，重视定理、法则的基本运用，重视基本方法和规范表达；同时，要做好测试情况分析，帮助学生改进学习.测试命题的难度必须严格控制，应注重对于教学基本要求落实情况的检测.

2. 关注学生对数学思想方法的领悟以及数学思维的灵活性.

在四边形的性质和判定的探索过程中，要关注学生对“逆向思考”方法、“逻辑演绎”思想等的感悟，促进学生学会运用正确的思想方法进行知识的“生成”；在证题思路的分析和形成过程中，要关注学生对分析问题的方法、转化的思想的体会.通过反思、总结和评价，激励学生从思维的角度感受数学思想方法的基本运用.

本章中许多例题、习题可以有多种解法，应通过评价鼓励学生从不同的角度进行思考，培养思维的灵活性；同时通过比较和反思总结，提出最优解法，渗透“优化思想”.

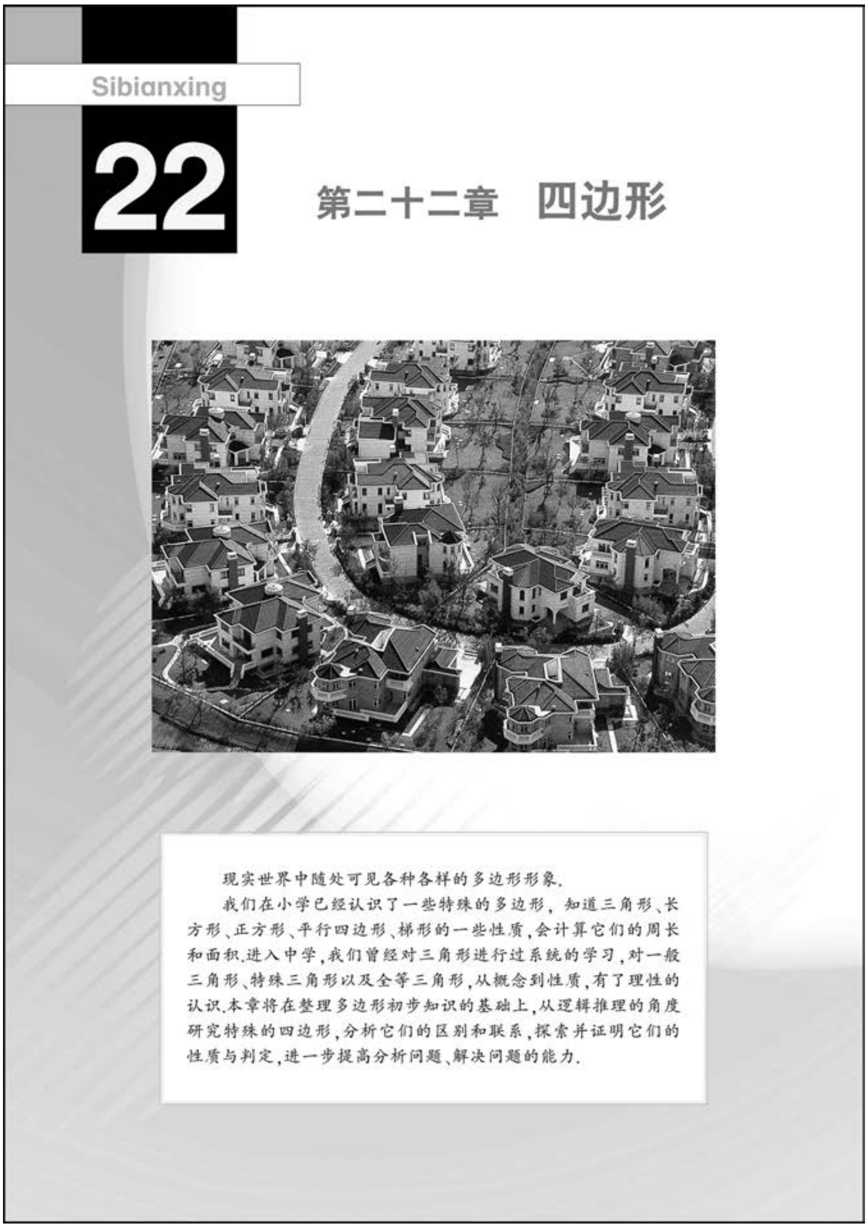
3. 关注学生的个性差异和学习能力的发展.

八年级学生处在生理发育和智力发育的转折期，在学习准备上又存在差异性，导致这个阶段的学生的思维发展极其不平衡.本章知识内容具有层次性和结构性，在教学中要有层次地推进，使不同学习水平的学生在教学进程的各个阶段各有所获.所以，对于学习基础不同的学生，应提出不同的学习目标，引导学生打好共同基础，同时鼓励学生追求卓越，不断提高和发展；在学习评价中，要充分尊重学生的差异性，保护学生的自尊心，建立多元的评价方式，鼓励学生积极参与学习过程，并全面评价学生的发展.

章头图以居民生活小区中的住房建筑为背景，让学生直观感知现实世界中到处有多边形的形象，体会数学和生活的联系.

章头语首先引导学生回顾以前所认识的一些特殊的多边形和初步学习的知识内容，回顾学习三角形的过程和研究三角形的方法；然后提出了本章所要研究的内容和解决的问题，并强调了以逻辑推理为研究问题的主要方法，指出了本章的学习对学生的数学能力发展有重要作用.

教学中可让学生读一读、议一议，从中引出学习多边形的课题和研究四边形的任务.

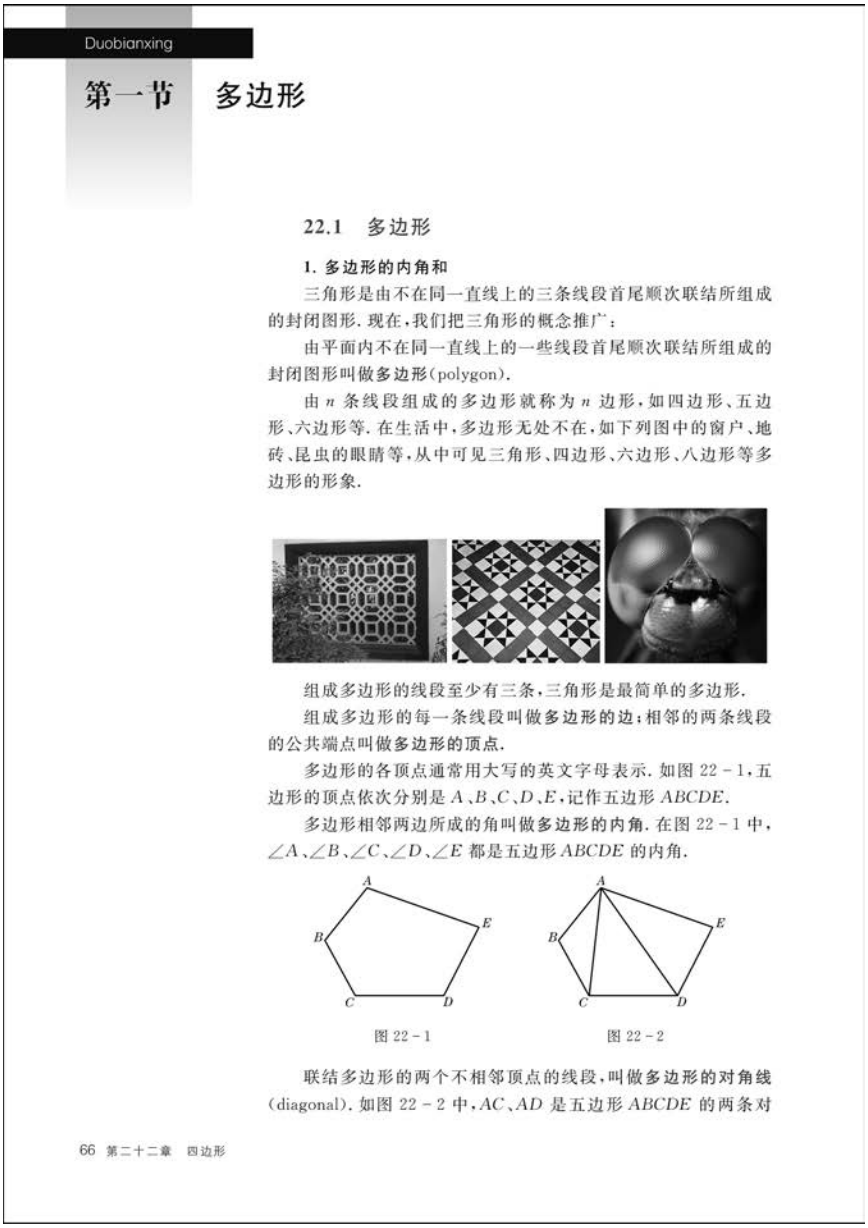


Sibianxing

22 第二十二章　四边形

现实世界中随处可见各种各样的多边形形象.

我们在小学已经认识了一些特殊的多边形，知道三角形、长方形、正方形、平行四边形、梯形的一些性质，会计算它们的周长和面积.进入中学，我们曾经对三角形进行过系统的学习，对一般三角形、特殊三角形以及全等三角形，从概念到性质，有了理性的认识.本章将在整理多边形初步知识的基础上，从逻辑推理的角度研究特殊的四边形，分析它们的区别和联系，探索并证明它们的性质与判定，进一步提高分析问题、解决问题的能力.


Duobianxing

第一节　多边形

22.1　多边形

1. 多边形的内角和

三角形是由不在同一直线上的三条线段首尾顺次联结所组成的封闭图形. 现在,我们把三角形的概念推广:

由平面内不在同一直线上的一些线段首尾顺次联结所组成的封闭图形叫做**多边形**(polygon).

由 n 条线段组成的多边形就称为 n 边形,如四边形、五边形、六边形等. 在生活中,多边形无处不在,如下列图中的窗户、地砖、昆虫的眼睛等,从中可见三角形、四边形、六边形、八边形等多边形的形象.

组成多边形的线段至少有三条,三角形是最简单的多边形.

组成多边形的每一条线段叫做**多边形的边**;相邻的两条线段的公共端点叫做**多边形的顶点**.

多边形的各顶点通常用大写的英文字母表示. 如图 22－1,五边形的顶点依次分别是 A、B、C、D、E,记作五边形 $ABCDE$.

多边形相邻两边所成的角叫做**多边形的内角**. 在图 22－1 中,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$、$\angle E$ 都是五边形 $ABCDE$ 的内角.

图 22－1　　　　图 22－2

联结多边形的两个不相邻顶点的线段,叫做**多边形的对角线**(diagonal). 如图 22－2 中,AC、AD 是五边形 $ABCDE$ 的两条对

66 第二十二章　四边形

【本课重点】

通过类比三角形的有关概念,明确多边形的有关概念;让学生经历多边形内角和定理的推导过程并掌握这个定理.

引导学生先回顾三角形的定义,然后对概念进行推广,让学生从特殊到一般,形成多边形的概念.

可让学生再举一些生活中的多边形实例,使学生感受到数学和生活的联系.

关于多边形的边、顶点、内角等概念,同样可以通过类比三角形引入;关于多边形的对角线,可直接进行定义.对这些概念的描述,要结合图形解说,同时明确表达要求.

【教学目标】

(1) 理解多边形及其有关概念,掌握多边形内角和定理和多边形外角和定理,并会运用这两个定理解决简单的计算与证明问题.

(2) 经历多边形及其有关概念的形成过程,体验类比思想;经历多边形内角和与外角和的探索过程,体验化归思想与归纳推理的方法.

(3) 体会多边形内角和计算公式中所蕴含的函数思想;感受多边形内角和的"变"与外角和的"不变"所体现的辩证思想.

要利用图形的直观性引导学生感知凸、凹多边形外观的特点，再结合图形介绍凸、凹多边形的概念，让学生知道但不要求学生根据定义对两类多边形进行辨析.

问题 1

通过提出的问题，引起学生对多边形内角和的思考和探索.

引导学生把求多边形内角和的问题转化为关于三角形内角和的问题.

探究

可让学生先尝试探求四边形的内角和；获得经验后，逐一增加边数，得到四、五、六边形的内角和，填入表内.再让学生猜测七边形的内角和，然后进行验证；最后，推出 n 边形的内角和，得到定理.

想一想

鼓励学生采用多种方法求多边形内角和，提高学生的发散思维能力.

角线.

对于一个多边形，画出它的任意一边所在的直线，如果其余各边都在这条直线的一侧，那么这个多边形叫做**凸多边形**；否则叫做**凹多边形**. 如图 22－3 是凸四边形，图 22－4 是凹四边形.

本章所讨论的多边形都是凸多边形.

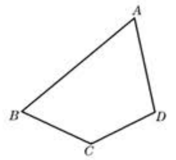


图 22－3

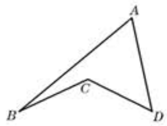


图 22－4

问题1

我们已经知道三角形的内角和为 180°，那么四边形的内角和等于多少度？五边形呢？六边形呢？能推出 n 边形的内角和等于多少度吗？

在四边形中，一条对角线把这个四边形分成两个三角形，这样四边形的内角和就归结为两个三角形的内角和. 由此想到，如图 22－5，可通过画出多边形的对角线，把求多边形内角和的问题转化成三角形内角和的问题.

图 22－5

探究

根据图 22－5 完成下列表格：

多边形的边数	4	5	6	7	…	n
分成的三角形的个数						
多边形的内角和度数						

由 n 边形内角和的推导，得到以下定理：

多边形内角和定理　n 边形的内角和等于 $(n-2)\cdot 180°$.

想一想

上面通过从多边形的一个顶点出发画出相应的各条对角线，

第一节　多边形 67

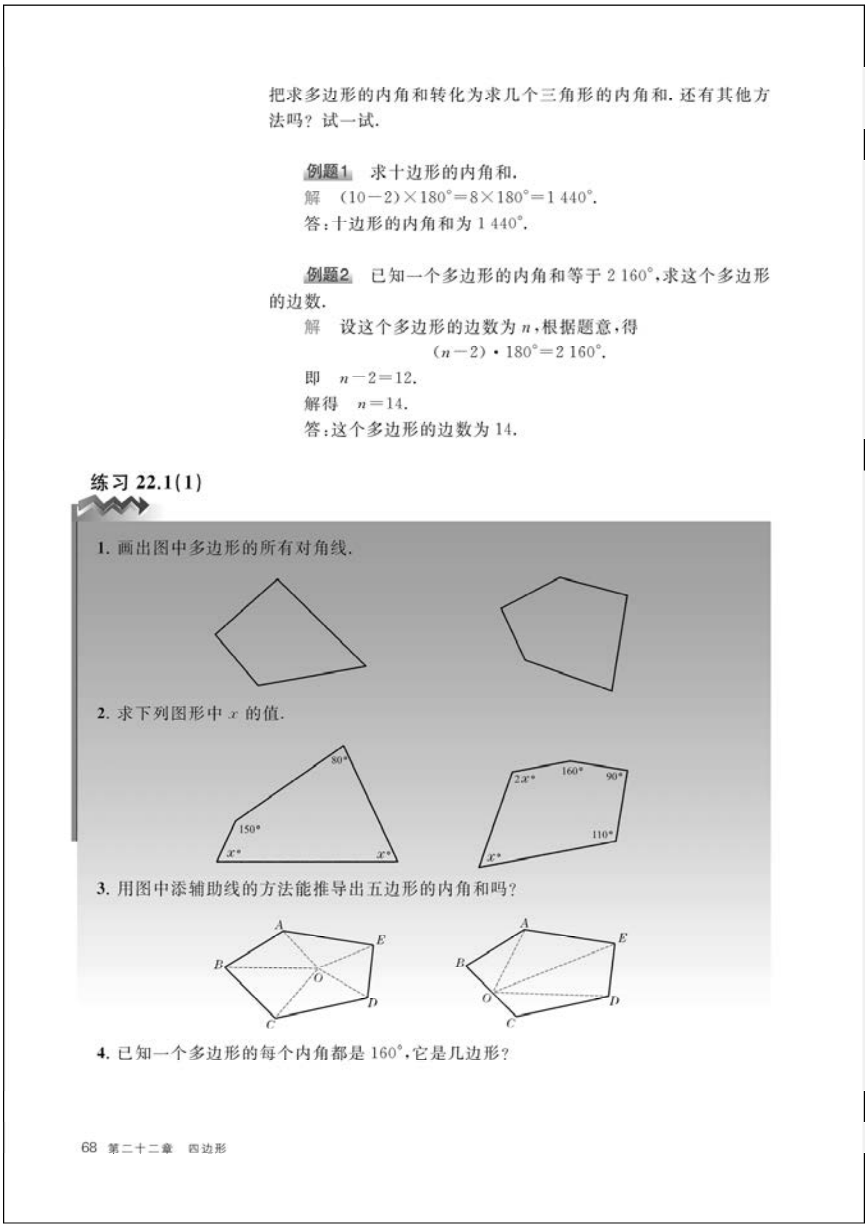
【注意事项】

（1）凸多边形的定义也可把“其所有对角线都在多边形内部”作为特征性质，但这时需要补充说明三角形也是凸多边形.课本中的定义不仅没有缩小概念的外延，而且还有直观性.

（2）课本中展示的关于多边形内角和的探索过程，也是多边形内角和定理的推导过程，但是没有将证明定理的过程按格式要求进行表达，教学时可板书出来（① 三角形内角和等于 180°；② 设 $n\geqslant 4$，画出 n 边形中以一个顶点为公共端点的所有对角线；③ n 边形被分割为 $(n-2)$ 个三角形；④ n 边形的内角和），注意回避用数学归纳法.

多边形的内角和与边数之间具有确定的依赖关系，可引导学生用函数的观点来认识.事实上，多边形的内角和是边数 n 的一次函数，它的定义域是不小于 3 的整数.

（3）本课内容是三角形有关知识的扩展，由于学生对三角形的认知比较充分，因此应鼓励学生表述多边形的有关概念和自主探究多边形的内角和，培养学生积极思考、探索的精神，以及合作、交流的能力.


把求多边形的内角和转化为求几个三角形的内角和. 还有其他方法吗？试一试.

例题1 求十边形的内角和.

解 $(10-2)\times180°=8\times180°=1\,440°$.

答：十边形的内角和为 $1\,440°$.

例题2 已知一个多边形的内角和等于 $2\,160°$，求这个多边形的边数.

解 设这个多边形的边数为 n，根据题意，得

$$(n-2)\cdot180°=2\,160°.$$

即 $n-2=12$.

解得 $n=14$.

答：这个多边形的边数为 14.

练习 22.1(1)

1. 画出图中多边形的所有对角线.

2. 求下列图形中 x 的值.

3. 用图中添辅助线的方法能推导出五边形的内角和吗？

4. 已知一个多边形的每个内角都是 $160°$，它是几边形？

68 第二十二章 四边形

例题 1

这是多边形内角和定理的直接运用，可让学生自己完成.

例题 2

这是多边形内角和定理的基本运用，要注意解题过程的表达.

练习 22.1(1)

1. 略.
2. 65，60.
3. 能(过程略).
   $5\times180°-360°=540°$；
   $4\times180°-180°=540°$.
4. 由 $(n-2)\times180=n\times160$，得 $n=18$. 所以，它是十八边形.

【注意事项】

(1) 将多边形分割成三角形，有多种方法. 学生可能在探索多边形内角和的过程中，已经采用了不同于课本的方法，应及时加以肯定；再通过“想一想”，结合练习 22.1(1)第 3 题，进行讲评小结，促进学生灵活思维、加深过程体验.

(2) 对于数学基础较好的学生，可举五边形为例，将五边形分割成一个四边形和一个三角形，由已知结论获得关于五边形内角和的新结论；依此类推，把 n 边形分割成一个 $(n-1)$ 边形和一个三角形，进而推出 n 边形的内角和. 这一推导方法可在“想一想”或练习 22.1(1)第 3 题的讨论中引出，让学生体会.

【本课重点】

帮助学生理解多边形的外角及外角和的概念；探究并获得多边形外角和等于 360° 的结论.

2. 多边形的外角和

多边形的一个内角的邻补角叫做**多边形的外角**. 如图 22－6，DF 是边 DC 的反向延长线，可知$\angle EDF$ 与$\angle EDC$ 互为邻补角，则$\angle EDF$ 是五边形 $ABCDE$ 的一个外角；$\angle EDC$ 是与这个外角相邻的内角. 多边形的外角中，与同一个内角相邻的外角有两个，这两个角互为对顶角，它们的大小相等. 如图 22－7 中，$\angle CDG$ 与$\angle EDF$ 是五边形 $ABCDE$ 的外角中具有这种关系的两个外角.

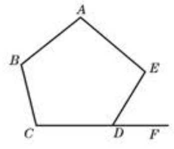


图 22－6

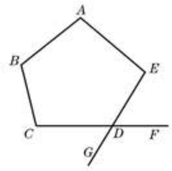


图 22－7

对多边形的每一个内角，从与它相邻的两个外角中取一个，这样取得的所有外角的和，叫做**多边形的外角和**.

问题 2

在学习多边形外角和概念的基础上，引导学生思考多边形外角和的大小是否与边数有关，激发探究的兴趣.

问题2

多边形的内角和随着边数的增加而增大，那么多边形的外角和是否也是随着边数的变化而变化呢？

探究

以六边形为例，用三个小问题搭“脚手架”，引导学生探索六边形外角和的度数.

探究

我们先以六边形为例，来探究多边形的外角和.

对六边形 $ABCDEF$ 的每一个内角，分别取一个与它相邻的外角，如图 22－8，则$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6$ 是这个六边形的外角和.

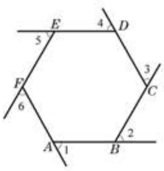


图 22－8

思考以下问题：

(1) 任一外角与同它相邻的内角之和是多少度？

(2) 这六个外角的和与六个内角的和相加，所得的总和是多少度？

(3) 六边形的内角和是多少度？

多边形的任一外角与同这个外角相邻的内角互补.

多边形的外角和与多边形的边数的多少无关，是一个不变量.

从特殊到一般，让学生分析和归纳 n 边形的外角和的度数，得到一般结论.

通过对上述问题的探究可以得到，六边形的外角和等于

$$6\times180^\circ-(6-2)\times180^\circ=2\times180^\circ=360^\circ.$$

对于一个 n 边形，因为任一外角与同它相邻的内角之和等于 180°，所以 n 边形的外角和加内角和等于 $n\cdot180^\circ$，则外角

【注意事项】

(1) 关于多边形的外角及外角和概念的描述，要类比三角形的相关概念，并结合具体图形适当进行解释，帮助学生理解.

(2) 对于多边形的外角和的探究，可从三角形、四边形开始，让学生获得经验和方法；再尝试六边形，然后导出任意一个多边形的外角和都是 360°的结论.

(3) 多边形的外角和是一个定值，当多边形的边数 n 变化时，多边形的外角和总等于 360°，这个量是不变的.用函数的观点来看待多边形的外角和与边数 n 之间的依赖关系，可见多边形的外角和是关于边数 n 的常值函数，其定义域是不小于 3 的整数.可引导学生以此进一步认识多边形的外角和，感知多边形的这一重要特征.

和等于

$$n \cdot 180^\circ-(n-2) \cdot 180^\circ=360^\circ.$$

于是得到：**多边形的外角和等于 360°.**

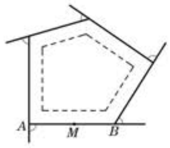


图 22-9

例题3 某城市的外环线呈五边形，如图 22-9 所示. 一辆汽车从外环线 AB 段的 M 处出发，按逆时针方向在外环线上行驶一周，汽车转弯的角度和是多少度？为什么？

解 汽车从五边形的边 AB 上一点 M 处出发，沿着五边形的各边行驶一周，然后回到 M 处，行程中只是在各个顶点处改变了方向，每次转弯所成的角是这个五边形的一个外角. 所以，汽车转弯的角度和等于五边形的外角和，即 360°.

汽车沿着任一多边形行驶一周，其行驶的方向恰好转动了一个周角. 这个简明的事实，可以看作是多边形的外角和等于 360° 的一种直观解释.

例题4 一个多边形的每个外角都是 72°，这个多边形是几边形？

解 设多边形的边数为 n，根据题意，得

$$n \cdot 72^\circ=360^\circ.$$

解得 $n=5$.

答：这个多边形是五边形.

这个多边形的每个内角都是 108°，因此也可利用内角和公式求它的边数.

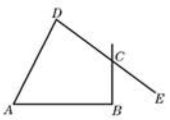


图 22-10

例题5 如图 22-10，$\angle BCE$ 是四边形 $ABCD$ 的一个外角，如果 $\angle BCE=\angle A$，求 $\angle B+\angle D$ 的度数.

解 ∵ $\angle BCE+\angle BCD=180^\circ$，$\angle BCE=\angle A$，

∴ $\angle A+\angle BCD=180^\circ$.

∵ $\angle A+\angle B+\angle BCD+\angle D=360^\circ$（四边形的内角和等于 360°），

∴ $\angle B+\angle D=360^\circ-(\angle A+\angle BCD)$
$=360^\circ-180^\circ$
$=180^\circ$.

想一想

图 22-10 中，如果 $\angle B$ 与 $\angle D$ 互为补角，那么 $\angle BCE$ 与 $\angle A$ 的大小相等吗？

练习 22.1(2)

1. 如果一个多边形的内角和与外角和相等，那么这个多边形的边数是多少？
2. 如果一个多边形的每个外角都等于 20°，那么这个多边形的内角和是多少度？
3. 在一个多边形中，它的内角中最多有几个是锐角？

70 第二十二章 四边形

例题 3

本题提供的实际背景，有助于学生直观地理解多边形的外角和等于 360°，认识外角和大小的不变性.

例题 4

本题是多边形外角和结论的直接运用，也可用内角和定理来解.

例题 5

四边形的内角和与外角和都是 360°，因此当对角互补时，外角等于内对角. 本题是将外角与内角有关知识进行简单的综合运用，对学生今后学习四点共圆等知识有铺垫作用.

想一想

所提出的问题是引导学生在例题 5 的基础上，发现“$\angle BCE=\angle A$”与“$\angle B+\angle D=180^\circ$”具有相互推出的关系.

练习 22.1(2)

1. 4.
2. 2 880°.
3. 多边形的外角中最多有三个钝角，可知内角中最多有三个锐角.

【注意事项】

(1) 在探索多边形外角和时，也可在例题 3 的背景下思考. 汽车在外环线上行驶一周，相当于它行驶的方向转动了 360°，这个角度数正是这个五边形的外角和，而且对任何一个多边形环线都是如此，可知多边形的外角和等于 360°. 这样进行探索，有较强的直观性；但是要将推导结论的过程进行数学地表达则不方便，因此它可改作探索外角和的引例，但需另再推导外角和.

(2) 练习 22.1(2)第 3 题，可组织学生进行适当讨论，引导学生从多边形外角和的不变性来认识多边形的特征.

【本课重点】

使学生获得平行四边形的概念和平行四边形性质定理 1、定理 2,会运用概念以及这两个定理解决简单的计算或证明问题.

用实例引出平行四边形的定义,再说明它的表示方法.

问题 1

通过“问题”引导学生探索平行四边形的对边之间、对角之间的等量关系.

在解决问题 1 的基础上,概括平行四边形性质定理 1 和定理 2.

议一议

让学生理性地认识平行线之间的距离的概念.

Pingxing Sibianxing

第二节　平行四边形

22.2　平行四边形

教室里的黑板、房间里的玻璃窗、小区门口的移动门等,都给我们以平行四边形的形象.

两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形(parallelogram).

平行四边形用符号“▱”表示. 如图 22－11 所示的平行四边形 $ABCD$,记作“▱$ABCD$”.

1. 平行四边形的性质

平行四边形是特殊的四边形,它的基本特征是两组对边分别平行. 我们再来分析它的其他特征.

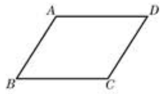


图 22－11

问题 1

如图 22－12,▱$ABCD$ 被对角线 BD 分为△ABD 和△BCD. 这两个三角形是否全等? 如果它们全等,那么可以得到▱$ABCD$ 的对边之间、对角之间有什么等量关系?

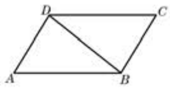


图 22－12

在△ABD 和△BCD 中,BD 是公共边,而且∠ABD ＝∠CDB(为什么?),∠ADB ＝ ∠CBD(为什么?),所以△ABD≌△CDB(为什么?).

利用全等三角形的性质,可知

$$AB=CD, AD=BC; \angle A=\angle C.$$

又由∠ABD＋∠CBD＝∠CDB＋∠ADB,可得

$$\angle ABC=\angle ADC.$$

我们把以上等量关系概括为平行四边形的性质:

平行四边形性质定理 1　如果一个四边形是平行四边形,那么这个四边形的两组对边分别相等.

简述为:平行四边形的对边相等.

平行四边形性质定理 2　如果一个四边形是平行四边形,那么这个四边形的两组对角分别相等.

简述为:平行四边形的对角相等.

回顾问题 1 的分析过程,你能证明性质定理 1 和 2 吗?

议一议

如图 22－13,如果 $l_1 /\!/ l_2$,AB、CD 是夹在 l_1、l_2 之间的任意两条平行线段,那么 AB 与 CD 一定相等吗? 为什么?

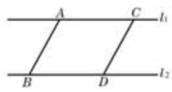


图 22－13

第二节　平行四边形　71

【教学目标】

(1) 理解平行四边形的概念,掌握平行四边形的性质定理和判定定理.

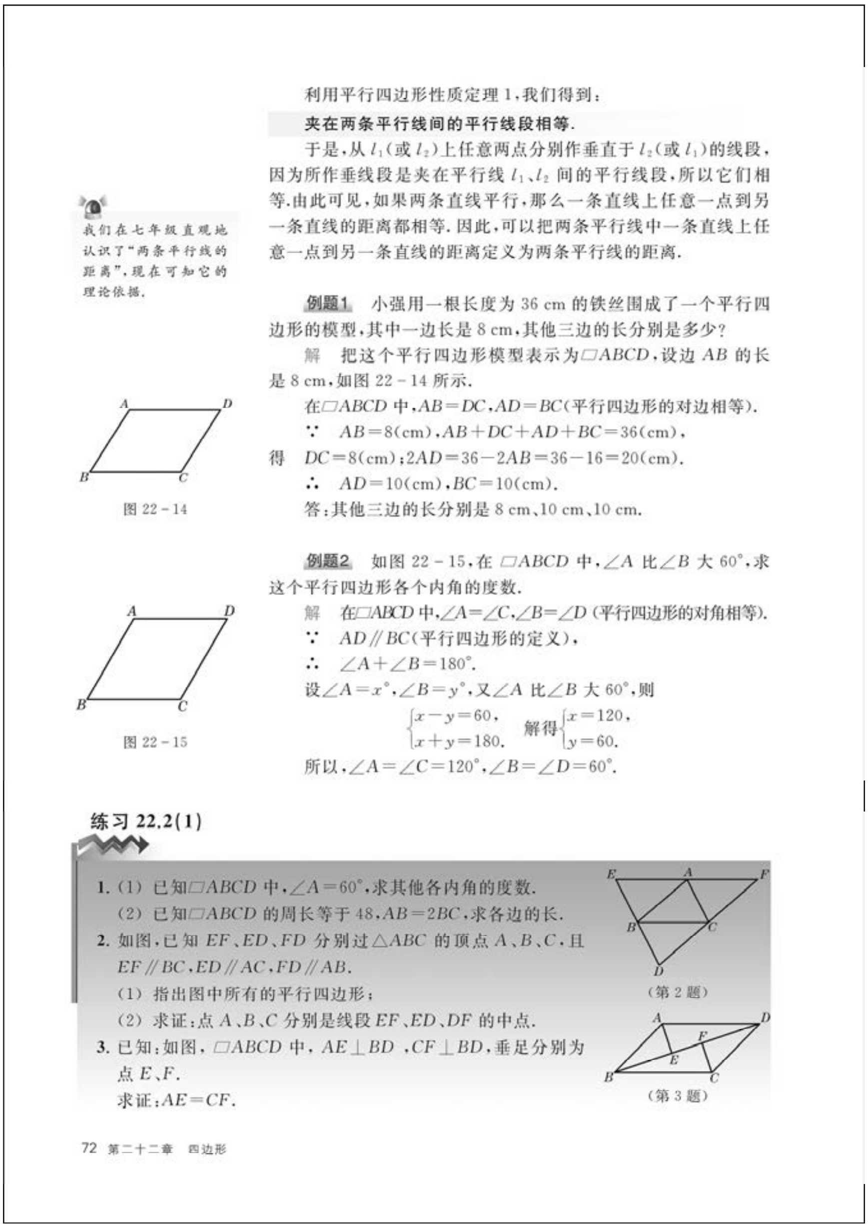
(2) 理解平行四边形判定定理与性质定理的区别与联系,能综合运用平行四边形的性质定理和判定定理解决有关计算或证明问题,发展推理论证的探索分析能力和逻辑表达能力.

(3) 经历平行四边形性质的探索过程,领会转化、分类的思想;经历平行四边形的判定方法的探究过程,体会类比、逆向思维的方法.

【注意事项】

(1) 在论证几何中对平行四边形性质的研究,不能只凭数学直觉而是需要数学推理,这也体现了论证几何与实验几何的不同思维要求;其研究思路是转化为三角形的问题来处理,在教学中要注意引导学生理性分析,同时感受转化思想和有序分类的方法.

(2) 课本中没有将性质定理 1 和定理 2 的证明过程按格式要求进行表达,教学时可板书出来.



利用平行四边形性质定理1，我们得到：

夹在两条平行线间的平行线段相等.

于是，从 l_1（或 l_2）上任意两点分别作垂直于 l_2（或 l_1）的线段，因为所作垂线段是夹在平行线 l_1、l_2 间的平行线段，所以它们相等.由此可见，如果两条直线平行，那么一条直线上任意一点到另一条直线的距离都相等. 因此，可以把两条平行线中一条直线上任意一点到另一条直线的距离定义为两条平行线的距离.

我们在七年级直观地认识了“两条平行线的距离”，现在可知它的理论依据.

例题1 小强用一根长度为 36 cm 的铁丝围成了一个平行四边形的模型，其中一边长是 8 cm，其他三边的长分别是多少？

解 把这个平行四边形模型表示为▱$ABCD$，设边 AB 的长是 8 cm，如图 22 - 14 所示.

图 22 - 14

在▱$ABCD$ 中，$AB=DC$，$AD=BC$（平行四边形的对边相等）.

∵ $AB=8(\text{cm})$，$AB+DC+AD+BC=36(\text{cm})$，

得 $DC=8(\text{cm})$；$2AD=36-2AB=36-16=20(\text{cm})$.

∴ $AD=10(\text{cm})$，$BC=10(\text{cm})$.

答：其他三边的长分别是 8 cm、10 cm、10 cm.

例题2 如图 22 - 15，在▱$ABCD$ 中，$\angle A$ 比 $\angle B$ 大 60°，求这个平行四边形各个内角的度数.

解 在▱$ABCD$ 中，$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$（平行四边形的对角相等）.

∵ $AD\parallel BC$（平行四边形的定义），

∴ $\angle A+\angle B=180^\circ$.

设 $\angle A=x^\circ$，$\angle B=y^\circ$，又 $\angle A$ 比 $\angle B$ 大 60°，则

$$\begin{cases}x-y=60,\\x+y=180.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}x=120,\\y=60.\end{cases}$$

所以，$\angle A=\angle C=120^\circ$，$\angle B=\angle D=60^\circ$.

图 22 - 15

练习 22.2(1)

1. (1) 已知▱$ABCD$ 中，$\angle A=60^\circ$，求其他各内角的度数.
   (2) 已知▱$ABCD$ 的周长等于 48，$AB=2BC$，求各边的长.
2. 如图，已知 EF、ED、FD 分别过 $\triangle ABC$ 的顶点 A、B、C，且 $EF\parallel BC$，$ED\parallel AC$，$FD\parallel AB$.
   (1) 指出图中所有的平行四边形；
   (2) 求证：点 A、B、C 分别是线段 EF、ED、DF 的中点.
3. 已知：如图，▱$ABCD$ 中，$AE\perp BD$，$CF\perp BD$，垂足分别为点 E、F.
   求证：$AE=CF$.

（第 2 题）

（第 3 题）

72 第二十二章 四边形

由“议一议”所得到的结论，是性质定理 1 的推论，可直接运用.边款中已指出它是定义平行线距离的理论依据.

例题 1

这是性质定理 1 的基本运用.

例题 2

这是性质定理 2 的基本运用.

练习 22.2(1)

1. (1) $\angle B=\angle D=120^\circ$，$\angle C=60^\circ$；

(2) $AB=CD=16$，$BC=AD=8$.

2. (1) ▱$ABCF$，▱$EBCA$，▱$ABDC$；

(2) 由(1)可知 $EA=BC=AF$，$DC=BA=CF$，$EB=AC=BD$.

3. 提示：利用平行四边形的性质证明 $\angle ADB=\angle CBD$，$AD=CB$.再证明 $\triangle AED\cong\triangle CFB$.

【注意事项】

(1) 要让学生知道，平行四边形的定义是判定四边形为平行四边形的基本依据，而“两组对边分别平行”是平行四边形的一个性质.

(2) 在探索平行四边形的性质时，要引导学生从边（对边平行且相等）、角（对角相等）、对角线（互相平分）等要素进行分类，有序地展开，为今后探索平行四边形的判定方法时进行有序联想打下基础.

(3) 关于几何计算，在课本中没有单独列出章节，而是进行分散处理.例题 1 和例题 2 是利用平行四边形的性质进行边或角计算的简单问题，教学时要让学生明确几何计算的表达要求；例题 2 中的计算过程中运用了方程思想，要引导学生注意设元、用符号表示未知量、列方程和求解的过程.

【本课重点】

使学生获得平行四边形性质定理 3、定理 4，学会运用平行四边形的概念和性质定理解决简单的计算或证明问题.

问题 2

让学生通过对所提问题的思考和分析，发现平行四边形被它的两条对角线分割成两对全等三角形.

议一议

让学生讨论和概括平行四边形性质定理 3 和定理 4.

例题 3

本题是关于线段相等的证明，将平行四边形性质定理 3 的基本运用与全等三角形的基本运用进行了简单的综合.

问题2

平行四边形的两条对角线把这个平行四边形分为四个三角形. 如图 22－16，▱$ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于点 O，由 AC 和 BD 分▱$ABCD$ 所得的四个三角形中，有全等三角形吗？如果有，是哪几对？

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 中，

由 AB 和 CD 是▱$ABCD$ 的对边，可知 $AB=CD$；

由 $\angle AOB$ 和 $\angle COD$ 是对顶角，可知 $\angle AOB=\angle COD$.

再由平行四边形的定义，得 $AB \parallel CD$，可知 $\angle OAB=\angle OCD$（为什么）.

因此，$\triangle AOB \cong \triangle COD$（为什么）.

同理可得 $\triangle AOD \cong \triangle COB$.

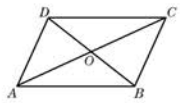


图 22－16

议一议

利用问题 2 的结论，可以得到对角线 AC 和 BD 中含有哪些等量关系？▱$ABCD$ 具有某种对称性吗？

由 $\triangle AOB \cong \triangle COD$，可得

$$AO=OC,\ BO=OD.$$

再由点 O 是对角线 AC 的中点，也是对角线 BD 的中点，可以知道，如果将▱$ABCD$ 绕点 O 旋转 $180°$，那么点 A 与点 C 重合、点 B 与点 D 重合，因此▱$ABCD$ 与自身重合，即▱$ABCD$ 关于点 O 对称.

我们把上述结论也概括为平行四边形的性质.

平行四边形性质定理 3　如果一个四边形是平行四边形，那么这个四边形的两条对角线互相平分.

简述为：平行四边形的两条对角线互相平分.

平行四边形性质定理 4　平行四边形是中心对称图形，对称中心是两条对角线的交点.

回顾问题 2 的分析和讨论过程，你能证明性质定理 3 吗？

平行四边形的性质定理是推理的依据，下面举例来说明它们的基本运用.

例题3　已知：如图 22－17，▱$ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O，EF 过点 O 且与边 AB、CD 分别相交于点 E、F.

求证：$OE=OF$.

分析　要证明 $OE=OF$，只要证明它们分别所在的两个三角形全等.

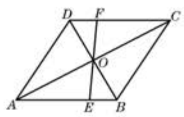


图 22－17

第二节　平行四边形 73

【注意事项】

（1）课本中没有将平行四边形性质定理 3 的证明过程按格式要求进行表达，教学时可板书出来.

（2）平行四边形是一个简明的中心对称图形，可结合平行四边形性质定理 4 的教学，帮助学生进一步认识中心对称图形的特征和性质.

证明 ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $OB=OD$(平行四边形的两条对角线互相平分)；

且 $AB /\!/ DC$(平行四边形的定义)，

得 $\angle EBO=\angle FDO$.

又∵ $\angle BOE=\angle DOF$，

∴ $\triangle BEO \cong \triangle DFO$(A.S.A).

∴ $OE=OF$.

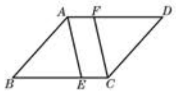


图 22－18

例题4 已知：如图 22－18，▱$ABCD$ 中，E、F 分别是 BC、AD 上的点，且 $AE /\!/ CF$.

求证：$\angle BAE=\angle DCF$.

分析 要证明$\angle BAE=\angle DCF$，可证明它们分别所在的两个三角形全等；也可直接运用平行四边形的定义和性质证明.

证明 ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD /\!/ BC$(平行四边形的定义)；

$\angle BAD=\angle DCB$(平行四边形的对角相等).

又∵ $AE /\!/ CF$，

∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形(平行四边形的定义).

得 $\angle EAF=\angle FCE$ (平行四边形的对角相等).

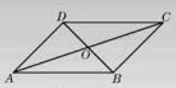
∵ $\angle BAE=\angle BAD-\angle EAF$，

$\angle DCF=\angle DCB-\angle FCE$，

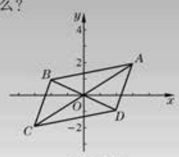
∴ $\angle BAE=\angle DCF$.

练习 22.2(2)

1. 已知：如图，▱$ABCD$ 中，$AD=4$ cm，$AC=10$ cm，$BD=6$ cm，$\triangle AOD$ 的周长是多少？$\triangle AOD$ 和$\triangle AOB$ 的面积有什么关系？为什么？

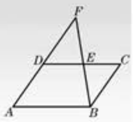


(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，在直角坐标平面内，▱$ABCD$ 的对角线的交点正好与坐标原点重合，且点 A、B 的坐标分别为(3，2)、(－2，1). 求点 C、D 的坐标.
3. 如图，在▱$ABCD$ 中，E 为 CD 的中点，联结 BE 并延长，交 AD 的延长线于点 F，求证：E 是 BF 的中点，D 是 AF 的中点.



(第 3 题)

74 第二十二章 四边形

在例题 3 的证明中，运用了平行四边形性质定理 3 为推导三角形全等提供条件.

例题 4

本题是关于两角相等的证明.在证明过程中，运用了平行四边形的定义和性质定理 2，有一定的综合要求.教学时要注意引导学生进行证题思路的探索，体验证题分析的方法.

练习 22.2(2)

1. 12 cm，相等，等底同高.

2. $C(-3,-2)$，$D(2,-1)$.

3. 提示：

证明$\triangle FDE \cong \triangle BCE$.

【注意事项】

(1) 例题 3 可利用平行四边形性质定理 4 进行证明，但是学生对于中心对称图形的性质可能不熟悉，因此课本中没有采用，教学时可根据学生实际情况处理.

(2) 例题 4 也可通过先证明$\triangle ABE \cong \triangle CDF$ 再推出结论，如有学生采用这一证法，可让学生将两种证法进行比较和总结，并鼓励学生运用新学的知识.当学生提出多种证题方法时，既要赞赏学生积极思维的表现和肯定方法的多样性，同时又要注意渗透优化思想.

【本课重点】

让学生经历平行四边形判定定理 1 的探索过程；学习和掌握判定定理 1 和定理 2，初步学会它们的运用.

观察

利用四边形所具有的不稳定性，让学生在平行四边形的变动过程中，发现它的两组对边分别保持相等所起的决定作用，直观地认识到可从“边”应具备的条件来考虑平行四边形的判定方法.

问题 3

引导学生从平行四边形性质定理 1 的逆命题出发，探寻平行四边形的判定定理.

探究

以解决问题 3 为过程，导出平行四边形判定定理 1.

2. 平行四边形的判定

在前面的学习中，我们通过对平行四边形的边、角、对角线的有关特征进行分析，得到了平行四边形的性质. 反过来，具有什么样的性质的四边形一定是平行四边形呢？

观察

用四根细木条做一个平行四边形的框架，并在相邻的两根木条叠交处各钉一枚小钉来固定. 如图 22-19 所示，所搭框架为平行四边形 $ABCD$（小钉位于顶点），这时它的两组对边分别相等.

图 22-19

推移这个框架的边，使它的形状改变. 由于小钉的固定作用，可见框架保持为四边形且两组对边分别相等. 在直观上还感觉到，这个四边形的形状始终保持为平行四边形. 这一直觉是否正确，需要有判定的依据. 联想平行四边形性质定理 1，我们来研究它的逆命题.

四边形不具有稳定性，给定四边形各边的长，其形状和大小不确定.

问题3

平行四边形性质定理 1 的逆命题是什么？这个逆命题是真命题吗？

逆命题是“如果一个四边形的两组对边分别相等，那么这个四边形是平行四边形”.

探究

要判断一个命题为真命题，需要进行证明. 我们来尝试证明这个逆命题是真命题.

已知：如图 22-20，四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，$AD=BC$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

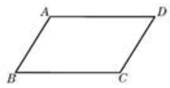


图 22-20

要证明一个四边形是平行四边形，现在只能依据平行四边形的定义，即要证明这个四边形的两组对边分别平行. 于是，考虑利用平行线的判定定理，这就需要添加辅助线.

基于以上思考，这个命题的证明如下：

如图 22-21，联结 AC.

在△ABC 和△CDA 中，

∵ $AB=CD$，$BC=DA$，$AC=CA$，

∴ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

得 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 4=\angle 3$.

∴ $AB \parallel CD$，$AD \parallel BC$.

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形（平行四边形的定义）.

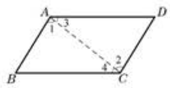


图 22-21

【注意事项】

（1）在论证几何中，常运用实验几何的研究方法探索结论和为证明思路的分析提供认识基础.课本中对平行四边形判定定理的探索，是从“观察”开始，通过对推移一个平行四边形框架的观察活动，引起学生思考，有所发现；还可利用本节开头的移门图片及其他实例组织活动，使学生的发现获得更多的具体经验支持.

（2）关于探索平行四边形判定方法的理性实验，课本的设计是以平行四边形的性质定理为思考起点，分别从四边形的边、角、对角线应具备的特征进行分析，获得对平行四边形判定方法的猜想，再进行证明从而得到判定定理.这种逆向思考的方法在后面的特殊四边形的研究中还要出现，在本课教学中要帮助学生总结经验.

通过证明，可以确定平行四边形性质定理 1 的逆命题是真命题，因此可用它来判定一个四边形是平行四边形.

平行四边形判定定理 1　如果一个四边形的两组对边分别相等，那么这个四边形是平行四边形.

简述为：两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

从边的方面来考虑平行四边形的判定方法，还可以提出下面的问题：

如果一个四边形的一组对边平行且相等，那么这个四边形是平行四边形吗？

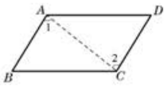


图 22－22

你能用平行四边形的定义证明吗？

我们猜想结论成立，并尝试进行证明.

已知：四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，且 $AB=CD$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

证明：如图 22－22，联结 AC.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中，

∵　$AB \parallel CD$，

∴　$\angle 1=\angle 2$.

又∵　$AB=CD$，$AC=CA$，

∴　$\triangle ABC \cong \triangle CDA$.　得　$BC=DA$.

∴　四边形 $ABCD$ 是平行四边形（两组对边分别相等的四边形是平行四边形）.

由此，我们又得到了平行四边形的一个判定定理.

平行四边形判定定理 2　如果一个四边形的一组对边平行且相等，那么这个四边形是平行四边形.

简述为：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

例题5　已知：如图 22－23，▱$ABCD$ 中，点 E、F 分别在边 AB 和 CD 上，$AE=CF$.

求证：四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

分析　根据已知条件，可知 $EB \parallel DF$，且 $EB=DF$. 利用平行四边形判定定理 2，可以推出结论.

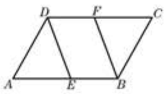


图 22－23

证明　∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴　$AB \parallel CD$（平行四边形的定义）；

$AB=CD$（平行四边形的对边相等）.

又∵　点 E、F 分别在边 AB 和 CD 上，$AE=CF$，

76　第二十二章　四边形

平行四边形判定定理 2 还是以“边”的关系为条件.为引出定理，需要进行启发和引导.

判定定理 2 的证明，可用已有的判定定理 1 或平行四边形定义为依据.可让学生提出证明方法，完成证明后再进行讲评.

例题 5

这是平行四边形判定定理的初步运用.教学时要让学生先分析思路，再进行证明.可提出“要判定一个四边形为平行四边形，有哪些方法?”“分析本题的已知条件，用哪种方法比较恰当?”等问题进行引导；要对学生采用的不同证法进行讲评和鼓励.

【注意事项】

（1）为引出平行四边形判定定理 2，可在判定定理 1 的基础上提出，从“边”应具备的条件再考虑平行四边形的判定，还可构造什么样的命题？通过构造新命题获得猜想.也可增加适当的实验活动来引发学生的猜想，如教师在黑板上“平行移动粉笔”，“扫出”一个四边形图形让学生进行观察和思考.实际上，判定定理 2 是真命题“平行四边形的对边平行且相等”的逆定理，如果事先提出了这个真命题，那么同样可从它的逆命题引出猜想.

（2）平行四边形的定义、性质和判定，是研究特殊平行四边形的知识基础，学生应切实掌握并能运用，否则会影响学生后继学习.教学中要及时反馈学生的学习情况，帮助学生解决存在的问题，夯实基础，提高学习能力和知识运用能力.

议一议

要让学生充分展开讨论和交流，获得对例题 5 的多种证法的了解，鼓励学生灵活思维；同时对不同证法进行比较，渗透优化思想.

练习 22.2(3)

1. 提示：先证 $BE=CF$ 且 $BE \parallel CF$，得平行四边形 $EFCB$，推出 $EF=BC$.
2. 提示：证明 $\triangle FBE \cong \triangle HDG$ 得 $EF=HG$，同理可证 $EH=FG$，再利用判定定理 1 推出结论.

【本课重点】

组织学生继续探索平行四边形的判定方法，使学生掌握判定定理 3 和定理 4 并初步学会运用.

思考

提出思考问题，引导学生探索平行四边形的新判定方法.

∴ $DF \parallel EB$，$DF=EB$.

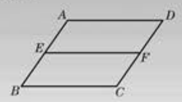
∴ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形（一组对边平行且相等的四边形是平行四边形）.

议一议

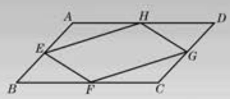
现在我们判定一个四边形是平行四边形，可依据平行四边形的定义、判定定理 1 或判定定理 2. 例题 5 可利用平行四边形的定义或判定定理 1 来证明吗？试一试，再将几种证明方法进行比较.

练习 22.2(3)

1. 已知：如图，▱$ABCD$ 中，E、F 分别是边 AB 和 CD 的中点.
   求证：$EF=BC$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，▱$ABCD$ 中，E、F、G、H 分别是边 AB、BC、CD、DA 的中点.
   求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

思考

"平行四边形的两条对角线互相平分"这一性质定理的逆命题是真命题吗？

平行四边形性质定理 3 的逆命题是"如果一个四边形的两条对角线互相平分，那么这个四边形是平行四边形".

已知：如图 22－24，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于点 O，$AO=OC$，$BO=OD$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

证明：在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 中，

∵ $AO=CO$，$\angle AOB=\angle COD$，$BO=DO$，

∴ $\triangle AOB \cong \triangle COD$. 得 $AB=CD$.

同理可得 $BC=DA$.

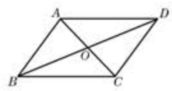


图 22－24

【注意事项】

练习 22.2(3)是平行四边形的定义、判定定理 1 和判定定理 2 的基本运用，在运用中要引导学生根据条件灵活选择恰当的判定方法.

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形(两组对边分别相等的四边形是平行四边形).

由此可见,平行四边形性质定理 3 的逆命题是真命题,它也是平行四边形的判定定理.

平行四边形判定定理 3 如果一个四边形的两条对角线互相平分,那么这个四边形是平行四边形.

简述为:对角线互相平分的四边形是平行四边形.

想一想,平行四边形性质定理 2 的逆命题是什么?

再来证明"平行四边形对角相等"这一性质定理的逆命题也是真命题.

已知:如图 22-25,四边形 $ABCD$ 中,$\angle A=\angle C$,$\angle B=\angle D$.

求证:四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

证明:在四边形 $ABCD$ 中,

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$(多边形的内角和公式).

又∵ $\angle A=\angle C$,$\angle B=\angle D$,

∴ $\angle A+\angle B=\angle C+\angle D=180^\circ$,

$\angle A+\angle D=\angle B+\angle C=180^\circ$,

得 $AD\parallel BC$,$AB\parallel CD$.

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形(平行四边形的定义).

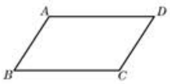


图 22-25

于是得到:

平行四边形判定定理 4 如果一个四边形的两组对角分别相等,那么这个四边形是平行四边形.

简述为:两组对角分别相等的四边形是平行四边形.

例题6 已知:如图 22-26,▱$ABCD$ 中,E、F 是对角线 AC 上的两点,且 $AE=CF$.

求证:四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

分析 观察图形,根据已知条件,可推出 $\triangle AED\cong\triangle CFB$,$\triangle AEB\cong\triangle CFD$.

于是,可以得到利用平行四边形的定义、判定定理 1、判定定理 2 或判定定理 4 来证明结论所需要的条件.因此,有多种证明方法可以选用.

注意 E、F 是对角线 AC 上的两点,从判定定理 3 所需的条件

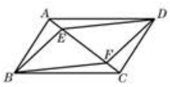


图 22-26

78 第二十二章 四边形

平行四边形判定定理 3 是从性质定理 3 的逆命题引出的.要展示判定定理 3 的获得过程,对它的证明可让学生讨论和自主完成.

由平行四边形性质定理 2,引出并证明判定定理 4.

例题 6

这是平行四边形判定定理的基本运用.本题的证明方法有多种,教学时要让学生在自主分析的基础上提出证明思路,通过交流和讨论,选择比较简捷的方法.

课本中利用判定定理 3 推出结论,是一种较好的方法,但需添加辅助线,要注意对学生进行必要的启发和帮助.

【注意事项】

(1) 关于平行四边形的判定,其依据有平行四边形的定义和四个判定定理.在判定平行四边形时,要重视分析过程和选用方法.这四个判定定理分别与平行四边形有关性质互为逆定理,它们从正逆两个方面与边、内角、对角线三个视角揭示了平行四边形的本质特征,要指导学生从联系的角度深入认识和把握.

(2) 由平行四边形判定定理 2 和定理 4,容易联想到把边、角的条件进行其他组合提出问题,如四边形中"一组对边平行、另一组对边相等",或"一组对边平行、一组对角相等""一组对边相等、一组对角相等"等,能推出这个四边形是平行四边形吗?让有兴趣学生在课外进行研究,以获得探究性学习的过程和方法的体验.

例题 7

本题证明一个四边形是平行四边形，综合运用了平行四边形的性质和判定（定义）.

想一想

除了运用定义以外，用判定定理 1 和判定定理 2 也是比较简捷的方法.可让学生充分表达自己的见解，开放思维.

考虑，想到联结 BD. 设 BD 与 AC 相交于点 O，则只需证明 $OE=OF$，从而可推出结论.

证明　如图 22－27，联结 BD，设 BD 与 AC 相交于点 O.

∵　四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴　$OB=OD$，$OA=OC$（平行四边形的对角线互相平分）.

∵　$AE=CF$，

∴　$OE=OA-AE=OC-CF=OF$.

∴　四边形 $BFDE$ 是平行四边形（对角线互相平分的四边形是平行四边形）.

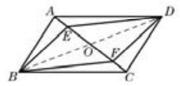


图 22－27

例题7　已知：如图 22－28，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，AE、CF 分别是 $\angle BAD$、$\angle BCD$ 的平分线，分别交边 BC 和 AD 于点 E、F.

求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形.

分析　由已知条件，可得 $AD\parallel BC$，又可知 $\angle EAD$ 和 $\angle BCF$ 相等. 注意到 $\angle BCF=\angle EAD=\angle AEB$，可推出 $AE\parallel FC$. 依据平行四边形的定义，可证明结论.

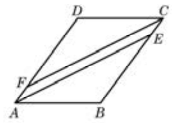


图 22－28

证明　∵　四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴　$AD\parallel BC$（平行四边形的对边平行）；

$\angle BAD=\angle BCD$（平行四边形的对角相等）.

∵　AE 和 CF 分别是 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$ 的平分线，

∴　$\angle EAD=\frac{1}{2}\angle BAD$，$\angle BCF=\frac{1}{2}\angle BCD$.

得　$\angle EAD=\angle BCF$.

又由 $AD\parallel BC$，得　$\angle EAD=\angle AEB$，

∴　$\angle AEB=\angle BCF$.

∴　$AE\parallel FC$.

又∵　$AF\parallel EC$，

∴　四边形 $AECF$ 是平行四边形（平行四边形的定义）.

想一想

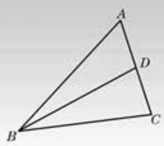
在例题 7 中，还可考虑依据平行四边形的判定定理来判断结论吗？试一试，再比较各种证明方法的特点.

【注意事项】

例题 7 的证明有多种思路，教学时可通过提问来引导学生采取比较简捷的方法进行证明.

练习 22.2(4)

1. 用两个全等的三角形(每个三角形的三边互不相等),按照不同的方法可以拼成一些不同的四边形.
   这些四边形都是平行四边形吗? 为什么?
2. 如图,BD 是$\triangle ABC$ 的中线. 按以下要求画图:
   ① 延长 BD 至点 E,使 $DE=BD$;
   ② 联结 AE、CE.
   四边形 $ABCE$ 是平行四边形吗? 为什么?
3. 已知:四边形 $ABCD$ 中,$\angle A$ 和$\angle B$ 互补,$\angle A=\angle C$.
   求证:四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



(第 2 题)

练习 22.2(4)

1. 略.

2. 四边形 $ABCE$ 是平行四边形,其依据是对角线互相平分的四边形是平行四边形.

3. 提示:推出 $AD \parallel BC$、$AB \parallel CD$,得四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

【本课重点】

使学生理解矩形、菱形的概念，知道它们与平行四边形之间的区别和联系，让学生探索并获得矩形和菱形的性质.

可利用图 22 - 29，帮助学生直观理解矩形和菱形的概念以及它们与平行四边形之间的区别和联系.

引导学生从矩形和菱形的角、边、对角线等三个方面，有序地探索矩形和菱形所具有的特殊性质.

对于矩形和菱形的性质的研究，是并列进行的.这样既突出了研究方法，又有利于比较它们的性质.

22.3 特殊的平行四边形

1. 矩形和菱形

特殊的平行四边形是从平行四边形的边或角所具有的特征来定义的.

有一个内角是直角的平行四边形叫做矩形(rectangle).

有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形(rhombus).

矩形、菱形与平行四边形的关系如图 22 - 29 所示.

类比在三角形中对等腰三角形、直角三角形的研究.

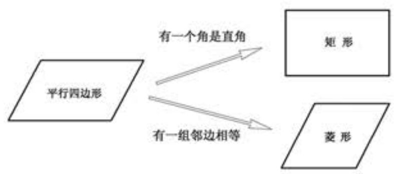


图 22 - 29

因为矩形和菱形是特殊的平行四边形，所以它们具有平行四边形的所有性质. 另外，它们还有一些特殊的性质，我们仍然从它们的边、角和对角线来进行研究.

1. 研究矩形、菱形的内角.

(1) 由矩形的定义，可知它有一个内角是直角. 如图 22 - 30，矩形 $ABCD$ 中，$\angle A$ 是直角.

图 22 - 30

因为矩形 $ABCD$ 是平行四边形，所以

$\angle A=\angle C=90°$，$\angle B=\angle D$；$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$.

可知 $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$.

(2) 由菱形的定义可知，它的内角没有特殊的性质.

通过以上研究，得到矩形的一个特殊性质：

矩形性质定理 1　矩形的四个角都是直角.

2. 研究矩形、菱形的边.

(1) 由矩形的定义，可知它的边没有特殊的性质.

(2) 由菱形的定义，可知它有一组邻边相等. 如图 22 - 31，菱形 $ABCD$ 中，$AD=CD$.

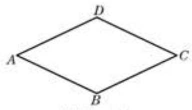


图 22 - 31

因为菱形 $ABCD$ 是平行四边形，所以

$$AB=CD,\ BC=AD.$$

可知 $AB=BC=AD=CD$.

通过以上研究，得到菱形的一个特殊性质：

菱形性质定理 1　菱形的四条边都相等.

第二节　平行四边形　81

【教学目标】

(1) 理解矩形、菱形的概念，掌握矩形、菱形的性质定理和判定定理，能运用它们进行有关的证明和计算.

(2) 经历从平行四边形到矩形、菱形的研究过程，体验“从一般到特殊”的研究方法，知道矩形、菱形之间的关系以及它们与平行四边形的联系与区别；经历矩形、菱形特殊性质的探索过程，感悟类比思想、分类讨论思想.

【注意事项】

在矩形和菱形定义的教学中，可将课本中导入平行四边形判定时所用的教具改良为其中的一条边能够按照要求移动，通过演示，使学生对矩形、菱形和平行四边形的区别和联系获得比较深刻的印象.

3. 研究矩形、菱形的对角线.

(1) 分析图 22－32 中矩形 $ABCD$ 的对角线：

由 $AB=DC$，$BC=CB$，得 $Rt\triangle ABC \cong Rt\triangle DCB$.

可知　$AC=BD$.

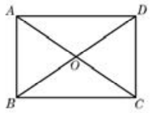


图 22－32

(2) 分析图 22－33 中菱形 $ABCD$ 的对角线：

设 AC 与 BD 相交于点 O，可知

$$OA=OC，OB=OD（为什么？）.$$

在 $\triangle ACD$ 中，$AD=CD$，得

$$DO\perp AC，\angle ADO=\angle CDO（为什么？）.$$

同理，可得 $\angle ABO=\angle CBO$，$\angle DAO=\angle BAO$，$\angle BCO=\angle DCO$.

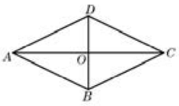


图 22－33

于是，我们得到矩形、菱形还有如下特殊性质：

矩形性质定理 2　矩形的两条对角线相等.

菱形性质定理 2　菱形的对角线互相垂直，并且每条对角线平分一组对角.

也可以通过证明 $\triangle ABO \cong \triangle CBO \cong \triangle CDO \cong \triangle ADO$ 来证明菱形性质定理 2.

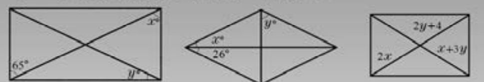
想一想

平行四边形是中心对称图形，矩形和菱形当然都是中心对称图形. 进一步分析矩形和菱形，它们是轴对称图形吗？

矩形和菱形都是轴对称图形，它们分别有两条对称轴. 试画出它们的对称轴，再用语言叙述.

练习 22.3(1)

1. 根据图形求出相应的 x、y 的值（第 1、3 个图是矩形，第 2 个图是菱形；第 3 个图中的 $2x$、$2y+4$、$x+3y$ 分别表示矩形对角线一半的长）：



（第 1 题）

2. 下列命题中，假命题是（　　）
   (A) 矩形的对角线互相平分且相等；
   (B) 菱形的对角线互相平分且垂直；
   (C) 矩形的两条对角线把矩形分成四个直角三角形；
   (D) 菱形的两条对角线把菱形分成四个直角三角形.
3. 利用矩形的性质，证明：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

82 第二十二章　四边形

把握矩形和菱形的定义，从矩形有一个角是直角、菱形有一组邻边相等的本质特征，分别导出矩形和菱形性质定理 1；再推导它们关于对角线的性质定理 2.

对于矩形和菱形的这些特殊性质的探讨，可让学生自主进行，教师提供必要的指导和帮助.

想一想

让学生获得矩形和菱形都是轴对称图形的认识，还要按照边款的要求组织活动，帮助学生对矩形和菱形的这一特性加深认识.

练习 22.3(1)

1. 65，25；26，64；3，1.
2. C.
3. 提示：由已知直角三角形构造矩形，再利用矩形的对角线的性质推导结论.

【注意事项】

(1) 矩形和菱形的定义，是通过平行四边形附加一些条件扩大概念的内涵、减少概念的外延来引出新的概念；这种思路也体现在以平行四边形为基础从边、角、对角线三个方面并列对比研究矩形和菱形的性质的过程中.

(2) 运用矩形的对角线性质，可得到证明直角三角形性质的另一种方法，如 22.3(1)第 3 题.教师可加以引导，让学生比较和分析，从而感受几何的内在结构.

(3) 矩形的一条对角线把矩形分成两个全等的直角三角形，两条对角线把它分成两对分别全等的等腰三角形；菱形的一条对角线把菱形分成了两个全等的等腰三角形，两条对角线把它分成四个全等的直角三角形.在探索了矩形和菱形性质定理 2 后，可以结合图形的对称性引导学生从上述视角深入认识矩形和菱形的特性.

【本课重点】

帮助学生学会矩形和菱形的性质的基本运用.

例题 1

本题是运用矩形的性质进行几何计算.

矩形的两条对角线把矩形分成了四个等腰三角形；如果一个三角形中有一个内角为 60°，那么它和所对的三角形都是等边三角形，

例题 2

本题是运用菱形的对角线性质进行面积计算.

菱形的两条对角线把菱形分割成四个全等的直角三角形.在例题 2 的面积计算过程中利用了图形的分割.

我们利用矩形和菱形的性质，来解决一些简单的问题.

例题1 如图 22-34，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O. 已知 $\angle AOD=120^{\circ}$，$AB=4$ cm，求 AC、BD 的长.

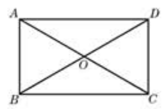


图 22-34

解 ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AC=BD$ (矩形的对角线相等).

又∵ $OA=OC=\frac{1}{2}AC$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD$（平行四边形的对角线互相平分），

∴ $OA=OB$.

∵ $\angle AOD=120^{\circ}$，

∴ $\angle AOB=60^{\circ}$，得$\triangle AOB$ 是等边三角形.

∴ $OA=OB=AB=4$(cm).

∴ $AC=2OA=8$(cm).

因此，$BD=AC=8$ cm.

例题2 如图 22-35，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O. 已知 $AB=13$ cm，$AC=24$ cm，求这个菱形的面积.

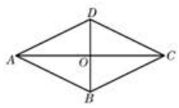


图 22-35

分析 由菱形的对角线互相垂直平分，可知 $AC\perp BD$，点 O 是 AC 与 BD 的中点. 由$\triangle AOB$ 是直角三角形，求出 BO 的长，就可求得菱形 $ABCD$ 的面积.

解 ∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AO=OC$，$BO=OD$(菱形的对角线互相平分)；

$AC\perp BD$ (菱形的对角线互相垂直).

∵ $AC=24$，

∴ $AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 24=12$.

在 $Rt\triangle AOB$ 中，$AO^2+BO^2=AB^2$(勾股定理).

又 $AB=13$，得 $BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$.

因为菱形 $ABCD$ 的面积等于$\triangle ABC$ 与$\triangle ADC$ 的面积和，所以

$$S_{菱形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot BO+\frac{1}{2}AC\cdot DO$$
$$=\frac{1}{2}AC\cdot(BO+DO)$$
$$=AC\cdot BO=24\times 5=120\ (cm^2).$$

第二节 平行四边形 83

【注意事项】

解几何计算题，学生比较重视计算的结果，常忽略言必有据.在例题 1 和例题 2 的教学中，要向学生强调计算过程中应有必要的逻辑推理步骤.要让学生懂得，几何计算题应是具有推理论证要求的计算题，而不是仅仅显示“计算”步骤的计算题.

$\frac{1}{2}AC\cdot(BO+DO)=\frac{1}{2}AC\cdot BD$. 所以，菱形的面积等于两条对角线长的乘积的一半.

想一想

如果已知菱形的两条对角线的长，那么可以直接求出这个菱形的面积吗？

例题3 已知：如图 22－36，菱形 $ABCD$ 中，$\angle B=60°$，点 E、F 分别在边 BC、CD 上，且 $\angle EAF=60°$.

求证：$AE=AF$.

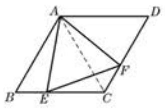


图 22－36

分析 已知四边形 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle B=60°$，由此联想到等边三角形. 联结对角线 AC，要证明 $AE=AF$，只要证明它们分别所在的两个三角形全等.

证明 如图 22－36，联结对角线 AC.

在菱形 $ABCD$ 中，

$AB=BC=CD=DA$（菱形的四条边都相等），

$\angle B=\angle D=60°$（平行四边形的对角相等），

∴ $\triangle ABC$、$\triangle ADC$ 是等边三角形.

得 $AB=AC$，$\angle BAC=60°$.

∵ $\angle EAF=60°$，

∴ $\angle FAC=\angle EAF-\angle EAC=60°-\angle EAC$.

又 $\angle BAE=\angle BAC-\angle EAC=60°-\angle EAC$，

∴ $\angle BAE=\angle FAC$.

而 $\angle B=\angle BAC=\angle ACF$，

于是，得 $\triangle ABE\cong\triangle ACF$.

∴ $AE=AF$.

练习 22.3(2)

1. 已知矩形的对角线相交所成的锐角是 60°，较短的边长为 12 cm，求它的对角线的长.
2. 一个菱形的两条对角线的长分别是 12 和 $6\sqrt{5}$，求它的面积.
3. 已知菱形的边长为 6 cm，一个角为 60°，求菱形的两条对角线的长.

想一想

引导学生反思例题 2 的解题过程，总结出“菱形的面积等于对角线长的乘积的一半”的结论. 这个结论以后可直接运用.

例题 3

本题是菱形性质的运用. 注意到菱形被它的一条对角线分割成两个等腰三角形，它又有一个内角为 60°，于是得两个等边三角形，这是添加辅助线的思考依据.

练习 22.3(2)

1. 24 cm.

2. $36\sqrt{5}$.

3. 6 cm，$6\sqrt{3}$ cm.

【注意事项】

完成例题 3 的证明以后，可引导学生从图形的旋转运动来看 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACF$ 之间的关系. 如果一个 $60°$ 的角绕着这个菱形的顶点 A 旋转，那么在运动过程中，所得的 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACF$ 总是全等形.

【本课重点】

引导学生经历探索矩形和菱形的判定方法的过程,掌握矩形和菱形的判定定理,并初步学会它们的运用.

思考

引导学生从矩形和菱形的性质定理的逆命题出发,对矩形和菱形的判定方法进行探索.

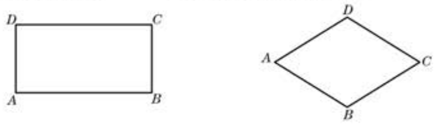
分别从四边形的角和边进行考察,导出矩形判定定理 1 和菱形判定定理 1.

再从四边形的对角线进行考察,导出矩形判定定理 2 和菱形判定定理 2.

思考

矩形和菱形具有一些特殊的性质,是否能从它们的性质定理所揭示的图形特征中,找到判定矩形和菱形的简捷、有效的方法?

1. 对于四边形 $ABCD$,从它的角或边进行考察.



(1) (2)

图 22 - 37

(1) 如图 22 - 37(1),如果四边形 $ABCD$ 有三个角是直角,那么它的第四个角一定也是直角(为什么?).由此可得这个四边形的两组对角相等,可知它是平行四边形,而且是矩形.

(2) 如图 22 - 37(2),如果四边形 $ABCD$ 的四条边相等,那么它的两组对边当然是相等的.由此可知这个四边形是平行四边形,而且是菱形.

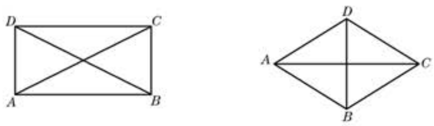
对矩形和菱形的有关性质定理的逆命题进行分析和探究.

这样,我们得到以下判定定理:

矩形判定定理 1　有三个内角是直角的四边形是矩形.

菱形判定定理 1　四条边都相等的四边形是菱形.

2. 在四边形 $ABCD$ 是平行四边形的基础上,从它的对角线进行考察.



(1) (2)

图 22 - 38

(1) 如图 22 - 38(1),如果$\square ABCD$ 的两条对角线相等,即 $AC=BD$,那么可以推出$\triangle DAB \cong \triangle CBA$,得$\angle DAB=\angle CBA$.又由 $AD /\!/ BC$,可知$\angle DAB+\angle CBA=180^\circ$,得$\angle DAB=90^\circ$.所以,$\square ABCD$ 是矩形.

(2) 如图 22 - 38(2),如果$\square ABCD$ 的两条对角线互相垂直,即 $AC \perp BD$,那么可以推出 BD 是 AC 的垂直平分线(为什么?),得 $DA=DC$.所以,$\square ABCD$ 是菱形.

这样,我们又得到以下判定定理:

【注意事项】

(1) 矩形和菱形的性质定理,分别从某一个侧面表明了图形的特征.由此想到,一个平行四边形为矩形或菱形,就必须具有矩形或菱形的特殊性质.由于矩形和菱形分别以角和边的特征来定义,于是结合平行四边形的有关判定定理,可提出问题:"四个角都是直角的四边形是矩形吗?""四条边相等的四边形是菱形吗?";再进一步思考,四边形中"三个角都是直角与四个角都是直角相当",由此导出矩形判定定理 1;类似地,导出菱形判定定理 1.

(2) 从对角线的特征提出问题时,以平行四边形为前提条件会简捷些:如"对角线相等的平行四边形是矩形吗?""对角线垂直的平行四边形是菱形吗?";由此导出矩形和菱形判定定理 2.也可结合平行四边形的有关判定定理提问,这时以四边形为判定的对象,要增加"对角线互相平分的条件",如练习 22.3(3)第 2 题,是对矩形一个判定的论证.

矩形判定定理 2　对角线相等的平行四边形是矩形.

菱形判定定理 2　对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

想一想

制作门窗或矩形零件时，在得到其两组对边分别相等后，可通过测量两条对角线长度来检验四个角是否符合要求，其依据是什么？

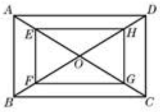


图 22－39

例题4　已知：如图 22－39，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，点 E、F、G、H 分别在 AO、BO、CO、DO 上，且 $AE=BF=CG=DH$.

求证：四边形 $EFGH$ 是矩形.

证明　∵　四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴　$AC=BD$（矩形的对角线相等）；

$AO=CO=\frac{1}{2}AC$，$BO=DO=\frac{1}{2}BD$（矩形的对角线互相平分）.

得　$AO=BO=CO=DO$.

由　$AE=BF=CG=DH$，得　$OE=OF=OG=OH$，

∴　四边形 $EFGH$ 是平行四边形（对角线互相平分的四边形是平行四边形）.

∵　$EO+OG=FO+OH$，即 $EG=FH$，

∴　四边形 $EFGH$ 是矩形（对角线相等的平行四边形是矩形）.

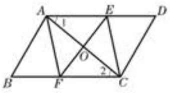


图 22－40

例题5　已知：如图 22－40，EF 是▱$ABCD$ 的对角线 AC 的垂直平分线，EF 与边 AD、BC 分别交于点 E、F.

求证：四边形 $AFCE$ 是菱形.

分析　已知 $EF\perp AC$，所以要证明四边形 $AFCE$ 是菱形，只要证明四边形 $AFCE$ 是平行四边形.

证明　∵　四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴　$AE/\!/FC$（平行四边形的对边平行），得 $\angle 1=\angle 2$.

∵　EF 垂直平分 AC，

∴　$AO=OC$，$\angle AOE=\angle COF=90°$.

∴　$\triangle AOE\cong\triangle COF$，　得　$EO=FO$.

∴　四边形 $AFCE$ 是平行四边形（对角线互相平分的四边形是平行四边形）.

又∵　$EF\perp AC$，

∴　四边形 $AFCE$ 是菱形（对角线互相垂直的平行四边形是菱形）.

本例也可以利用菱形判定定理 1 来证明，试一试.

86 第二十二章　四边形

想一想

通过问题引导学生关注矩形判定定理 2 在实际生活中的应用.

例题 4

本题是矩形判定定理 2 的运用，并与矩形的性质、平行四边形的判定等综合.分析过程中，可从已知条件和图形直观引导学生联想，形成证题思路.

例题 5

本题是菱形判定定理 2 的运用，也有一定的综合要求.在分析证题思路时，可引导学生关注已知条件与四边形 $AFCE$ 的对角线的联系，从而想到运用菱形判定定理 2.

另外，由垂直平分线的条件，可知 $AE=EC$，$AF=FC$；只要证明 $AE=CF$，就可利用菱形判定定理 1 推出结论.可让学生进行尝试.

【注意事项】

(1) 在例题 4 和例题 5 的教学中，要让学生体会根据已知条件和图形直观进行联想，探索证题思路.

(2) 练习 22.3(3)中的题目，是矩形和菱形的判定定理的基本运用.其中第 1 题通过一个操作，让学生感知菱形的判定方法的实用性，体会数学与生活的联系，感受生活中蕴含的数学.

练习 22.3(3)

1. 是菱形.可依据菱形判定定理 1 或 2 推导.
2. 提示:先证这个四边形是平行四边形,再推出它是矩形.
3. 是矩形.可先证这个四边形中有三角是直角,再推出结论.

【本课重点】

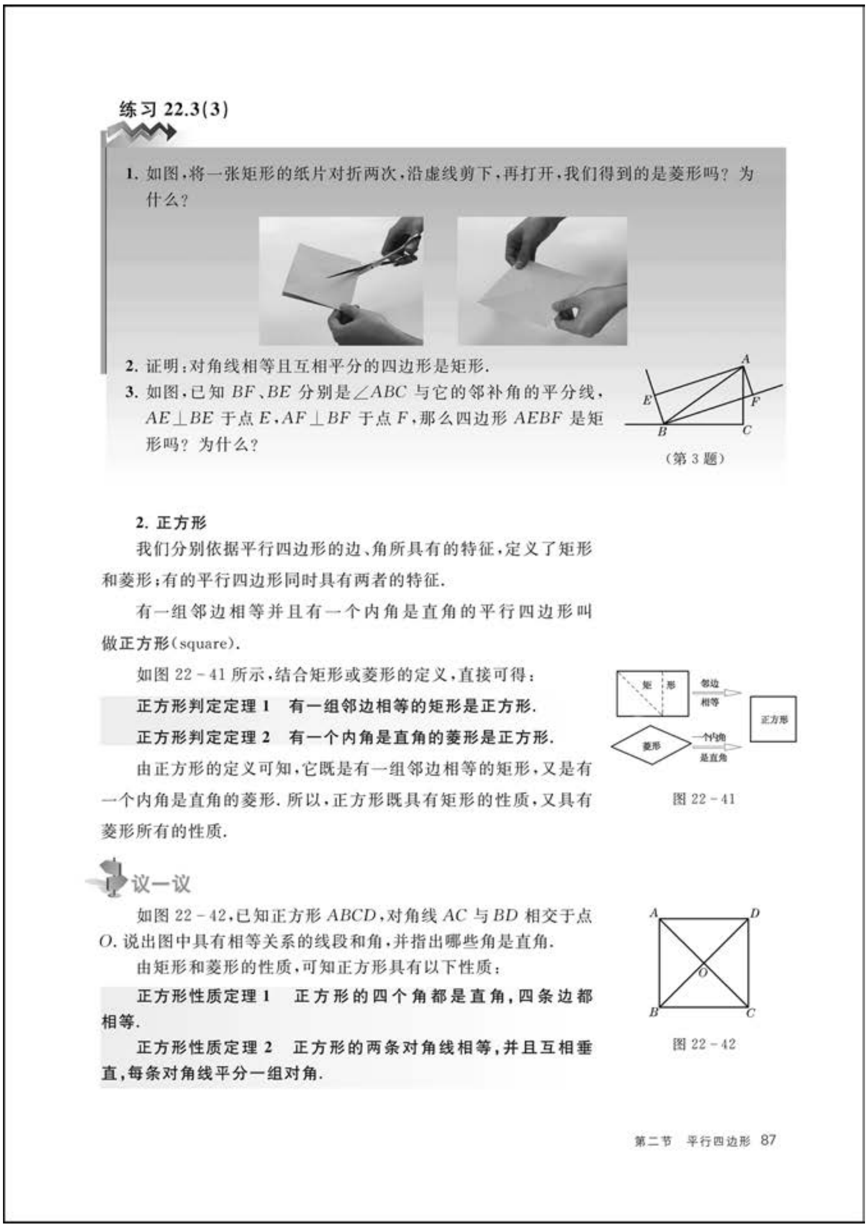
使学生理解正方形的定义,知道它与平行四边形、矩形、菱形的联系;掌握正方形的性质及其基本运用.

正方形是特殊的矩形,又是特殊的菱形.可让学生结合矩形或菱形的定义,概括正方形的判定定理.

议一议

让学生自主探索和分析正方形的性质.

由正方形的定义,只需将平行四边形、矩形、菱形这三种图形的性质进行综合,就得到正方形的性质.



练习 22.3(3)

1. 如图,将一张矩形的纸片对折两次,沿虚线剪下,再打开,我们得到的是菱形吗?为什么?
2. 证明:对角线相等且互相平分的四边形是矩形.
3. 如图,已知 BF、BE 分别是 $\angle ABC$ 与它的邻补角的平分线,$AE \perp BE$ 于点 E,$AF \perp BF$ 于点 F,那么四边形 $AEBF$ 是矩形吗?为什么?

(第 3 题)

2. 正方形

我们分别依据平行四边形的边、角所具有的特征,定义了矩形和菱形;有的平行四边形同时具有两者的特征.

有一组邻边相等并且有一个内角是直角的平行四边形叫做正方形(square).

如图 22-41 所示,结合矩形或菱形的定义,直接可得:

正方形判定定理 1　有一组邻边相等的矩形是正方形.

正方形判定定理 2　有一个内角是直角的菱形是正方形.

图 22-41

由正方形的定义可知,它既是有一组邻边相等的矩形,又是有一个内角是直角的菱形.所以,正方形既具有矩形的性质,又具有菱形所有的性质.

议一议

如图 22-42,已知正方形 $ABCD$,对角线 AC 与 BD 相交于点 O.说出图中具有相等关系的线段和角,并指出哪些角是直角.

由矩形和菱形的性质,可知正方形具有以下性质:

正方形性质定理 1　正方形的四个角都是直角,四条边都相等.

正方形性质定理 2　正方形的两条对角线相等,并且互相垂直,每条对角线平分一组对角.

图 22-42

第二节　平行四边形　87

【教学目标】

(1) 理解正方形的概念,知道它与矩形、菱形、平行四边形之间的内在联系,体会集合思想.掌握正方形的特殊性质与判定方法,并能运用这些知识进行有关的证明和计算.

(2) 经历从矩形和菱形的性质到正方形的性质的归纳过程,从矩形和菱形的判定到正方形的判定的归纳过程,进一步感悟"从一般到特殊"的研究方法,以及类比思想、分类讨论思想.

例题6 已知：如图 22－43，正方形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，点 E 在 OB 的延长线上，且 $\angle ECB=15°$.

求证：$\triangle AEC$ 是等边三角形.

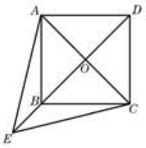


图 22－43

证明 ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $AC\perp BD$（正方形的对角线互相垂直）；

$OA=OC$（正方形的对角线互相平分）.

∵ DE 是 AC 的垂直平分线，

∴ $EA=EC$.

∵ $\angle BCD=90°$（正方形的四个内角都是直角），

∴ $\angle ACB=\angle ACD=45°$（正方形的每条对角线平分一组对角）.

又∵ $\angle ACE=\angle ACB+\angle BCE$，$\angle BCE=15°$，

∴ $\angle ACE=60°$.

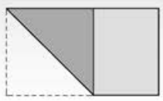
∴ $\triangle AEC$ 是等边三角形.

练习 22.3(4)

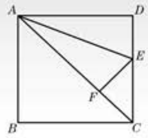
1. 根据图形求出相应的 x、y、z 的值（两个图都是正方形，第 2 个图中的 x 表示正方形对角线一半的长）：

（第 1 题）

2. 把一张长方形纸片如图那样折一下，就可以裁出正方形纸片，为什么？
3. 下列四边形是不是正方形？
   (1) 对角线互相垂直且相等的平行四边形；
   (2) 对角线互相垂直的矩形；
   (3) 对角线相等的菱形；
   (4) 对角线互相垂直平分且相等的四边形.
4. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 a，AE 平分 $\angle DAC$，$EF\perp AC$，点 F 为垂足. 求 FC 的长.



（第 2 题）



（第 4 题）

例题 6

本题是正方形性质的运用，有一定的综合要求.

解题后可引导学生从对称性的视角进一步认识正方形的性质，即正方形关于对角线所在直线成轴对称图形.

练习 22.3(4)

1. $x=y=45$，$z=90$；
   $x=3\sqrt{2}$，$y=4$.
2. 翻折后可知这个四边形中有三个直角，又有一组邻边相等，所以它是正方形.
3. 可得到四个小题的结论都是正方形.说理略.
4. 提示：设 $FC=x$，由题意得 $FE=DE=x$，$EC=\sqrt{2}x$，所以 $a=x+\sqrt{2}x$，解得 $x=(\sqrt{2}-1)a$.

【注意事项】

(1) 在正方形概念的教学中，可从定义入手，用“结构图”和“集合文氏图”的方式，引导学生探讨各种特殊平行四边形的从属关系，渗透集合思想，帮助学生弄清正方形与平行四边形、菱形、矩形的内在联系，进一步加深对“特殊与一般”的认识，也有助于学生通过“议一议”得出正方形的性质.

(2) 对照图 22－42，让学生熟悉在这个基本图形中，正方形的一条对角线把正方形分成了两个全等的等腰直角三角形；正方形的两条对角线把正方形分成了四个全等的等腰直角三角形.

(3) 正方形性质定理 2 中共有四个结论（包括对角线互相平分），在引用定理时，涉及哪个结论就选取这个结论，不必列出全部结论.

【本课重点】

帮助学生梳理正方形的判定方法，初步学会综合运用正方形以及矩形、菱形的有关知识解决简单的问题.

例题 7

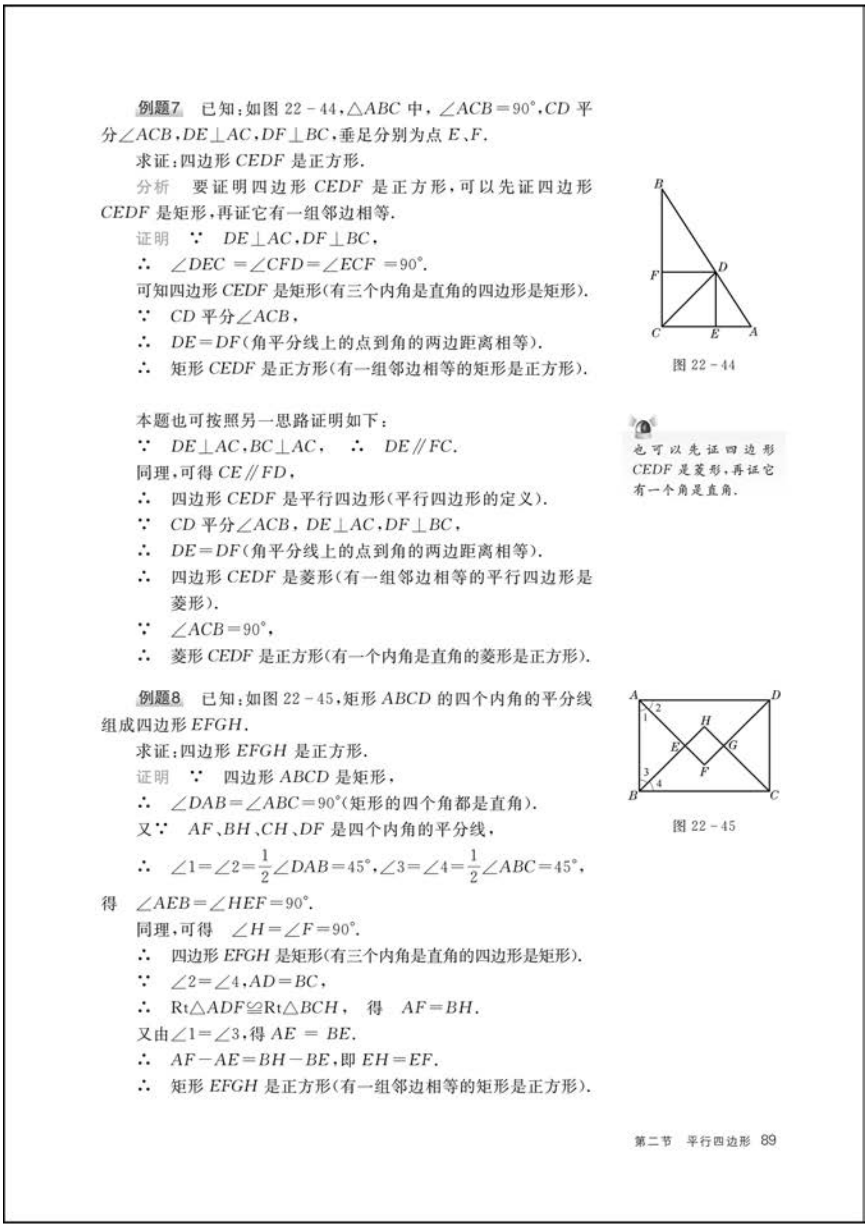
本题着重于帮助学生初步掌握正方形的判定方法.

对于怎样判定一个四边形是正方形的讨论，课本中主要通过例题进行展开.本题提供了两种证法，其思考依据是正方形的定义.

通常只要能判定一个四边形既是矩形，又是菱形，根据定义可知这个四边形是正方形.

例题 8

本题有助于学生进一步掌握正方形的判定方法.在证明过程中，综合运用了多方面的知识，要注意证题思路的分析.



例题7　已知：如图 22-44，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，CD 平分$\angle ACB$，$DE\perp AC$，$DF\perp BC$，垂足分别为点 E、F.

求证：四边形 $CEDF$ 是正方形.

分析　要证明四边形 $CEDF$ 是正方形，可以先证四边形 $CEDF$ 是矩形，再证它有一组邻边相等.

证明　$\because$　$DE\perp AC$，$DF\perp BC$，

$\therefore$　$\angle DEC=\angle CFD=\angle ECF=90^\circ$.

可知四边形 $CEDF$ 是矩形（有三个内角是直角的四边形是矩形）.

$\because$　CD 平分$\angle ACB$，

$\therefore$　$DE=DF$（角平分线上的点到角的两边距离相等）.

$\therefore$　矩形 $CEDF$ 是正方形（有一组邻边相等的矩形是正方形）.

图 22-44

本题也可按照另一思路证明如下：

$\because$　$DE\perp AC$，$BC\perp AC$，　$\therefore$　$DE/\!/FC$.

同理，可得 $CE/\!/FD$，

$\therefore$　四边形 $CEDF$ 是平行四边形（平行四边形的定义）.

$\because$　CD 平分$\angle ACB$，$DE\perp AC$，$DF\perp BC$，

$\therefore$　$DE=DF$（角平分线上的点到角的两边距离相等）.

$\therefore$　四边形 $CEDF$ 是菱形（有一组邻边相等的平行四边形是菱形）.

$\because$　$\angle ACB=90^\circ$，

$\therefore$　菱形 $CEDF$ 是正方形（有一个内角是直角的菱形是正方形）.

也可以先证四边形 $CEDF$ 是菱形，再证它有一个角是直角.

例题8　已知：如图 22-45，矩形 $ABCD$ 的四个内角的平分线组成四边形 $EFGH$.

求证：四边形 $EFGH$ 是正方形.

证明　$\because$　四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore$　$\angle DAB=\angle ABC=90^\circ$（矩形的四个角都是直角）.

又$\because$　AF、BH、CH、DF 是四个内角的平分线，

$\therefore$　$\angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\angle DAB=45^\circ$，$\angle 3=\angle 4=\frac{1}{2}\angle ABC=45^\circ$，

得　$\angle AEB=\angle HEF=90^\circ$.

同理，可得　$\angle H=\angle F=90^\circ$.

$\therefore$　四边形 $EFGH$ 是矩形（有三个内角是直角的四边形是矩形）.

$\because$　$\angle 2=\angle 4$，$AD=BC$，

$\therefore$　$\text{Rt}\triangle ADF\cong\text{Rt}\triangle BCH$，　得　$AF=BH$.

又由$\angle 1=\angle 3$，得 $AE=BE$.

$\therefore$　$AF-AE=BH-BE$，即 $EH=EF$.

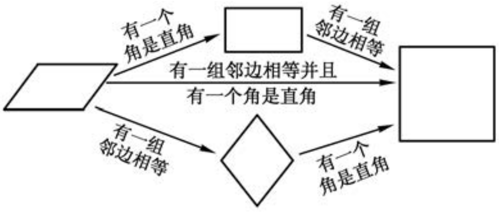
$\therefore$　矩形 $EFGH$ 是正方形（有一组邻边相等的矩形是正方形）.

图 22-45

第二节　平行四边形　89

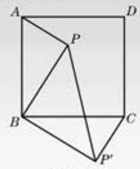
【注意事项】

关于正方形的判定，其思考基础是正确理解正方形的定义，搞清楚正方形、矩形、菱形之间的从属关系.教学时，可先复习正方形的定义，并利用结构图和集合文氏图理顺关系，再让学生根据定义讨论如何判定一个四边形是正方形.

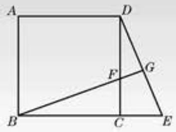


练习 22.3(5)

1. 如图，P 是正方形 $ABCD$ 内一点，将△ABP 绕点 B 顺时针方向旋转后与△CBP' 重合，若 $PB=3$，则 $PP'=$________.
2. 有下列图形：
①平行四边形(非矩形、菱形)，②矩形(邻边不等)，③菱形(内角不等于直角)，④正方形. 其中，中心对称图形有________(填写图形前的序号，下同)；轴对称图形有_________；对角线互相垂直平分的有_________；对角线互相平分且相等的有_________；对角线互相垂直平分且相等的有________.
3. 已知：如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 为 BC 延长线上的一点，F 是 CD 上的一点，且 $CF=CE$，BF 的延长线交 DE 于点 G. 求证：$BF\perp DE$.



(第 1 题)



(第 3 题)

90 第二十二章 四边形

练习 22.3(5)

1. $3\sqrt{2}$.
2. ①②③④；②③④；③④；②④；④.
3. 提示：
证明△DCE≌△BFC，得到∠FBC=∠EDC，可推得∠$DGF=90°$.

【注意事项】

在练习 22.3(5)第 3 题的证明完成以后，可引导学生从图形运动的视角再作分析，由于正方形图形的特殊性，可见边 CB 绕着点 C 顺时针旋转 90°后与边 CD 重合，同时线段 CF 与线段 CE 重合；于是△BCF 与△DCE 重合，即△BCF 与△DCE 是关于点 C 的旋转对称图形(旋转角 90°).引导学生关注正方形图形的特殊性，体会图形运动的思想，提高识图能力.

课本从四边形分类的角度引进梯形的概念，可举实例帮助学生直观认识.也可由生活中的实物模型进行抽象概括，建立梯形的概念.

梯形中互相平行的两边叫梯形的底，将它们区分为上底和下底，是习惯性的说法，但要注意对它们的区分是依据长度而不是依据位置.

思考

引导学生认识梯形与三角形的联系.梯形可由三角形截得.

直角三角形被平行于一直角边的直线分割成一个直角三角形和一个直角梯形；等腰三角形被平行于底边的直线分割成一个等腰三角形和一个等腰梯形.这些认识，有利于学生在高中阶段通过类比建立棱台与棱锥的联系，以及学习棱台的画图.

Tixing

第三节　梯形

22.4　梯形

四边形的两组对边的位置关系有三种：一是两组对边分别平行；二是有一组对边平行，另一组对边不平行；三是两组对边都不平行. 第一种情况下的四边形是平行四边形，现在来研究第二种情况下的四边形.

一组对边平行而另一组对边不平行的四边形叫做**梯形**(trapezium). 在梯形中，平行的两边叫做梯形的**底**(通常把较短的底叫做上底，较长的底叫做下底)；不平行的两边叫做梯形的**腰**；两底之间的距离叫做梯形的**高**(如图 22－46(1)).

如图 22－46(2)(3)，有一个角是直角的梯形叫做**直角梯形**(right-angled trapezium)；两腰相等的梯形叫做**等腰梯形**(isosceles trapezium)，它们都是特殊的梯形.

(1)　(2)　(3)

图 22－46

思考

如图 22－47，任意画一个三角形 EBC；再画一条直线，使它与边 BC 平行，且与边 BE、CE 分别相交于点 A 和 D(与点 E 不重合)，得△EAD 和四边形 $ABCD$. 四边形 $ABCD$ 是梯形吗？

△EBC 中，如果∠$BCE=90°$，那么如上截得的梯形 $ABCD$ 一定是直角梯形吗？如果△BCE 中 $EB=EC$，那么截得的梯形 $ABCD$ 一定是等腰梯形吗？为什么？

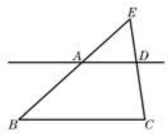


图 22－47

通过画图可见，梯形与三角形之间有什么联系？

例题1　如图 22－48，已知梯形 $ABCD$ 中，$AB∥CD$，$DE∥CB$，点 E 在边 AB 上，且 $EB=4$，△AED 的周长是 18，求梯形 $ABCD$ 的周长.

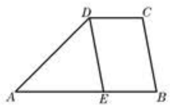


图 22－48

解　∵$AB∥CD$，$DE∥BC$，

∴　四边形 $EBCD$ 是平行四边形(平行四边形的定义)，

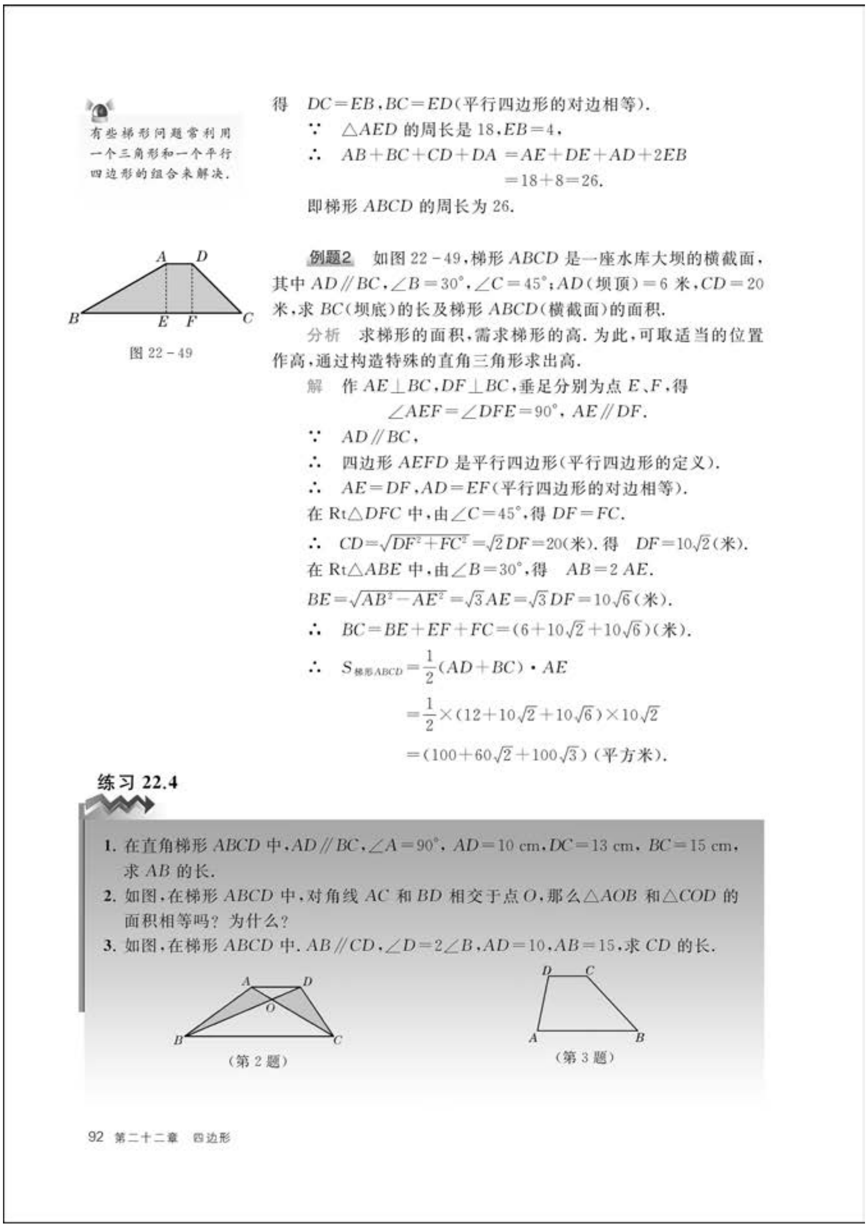
第三节　梯形　91

【教学目标】

(1) 理解梯形及其有关概念，理解等腰梯形和直角梯形的概念.

(2) 知道梯形与平行四边形的区别和联系，理解三角形和梯形的之间的联系；会添加适当的辅助线将梯形问题转化成三角形、平行四边形等熟知的几何图形来解决问题.

(3) 会计算梯形中的有关角度、线段以及梯形的面积.



有些梯形问题常利用一个三角形和一个平行四边形的组合来解决.

得 $DC=EB$，$BC=ED$(平行四边形的对边相等).

$\because$ $\triangle AED$ 的周长是 18，$EB=4$，

$\therefore$ $AB+BC+CD+DA=AE+DE+AD+2EB$
$=18+8=26$.

即梯形 $ABCD$ 的周长为 26.

图 22-49

例题2 如图 22-49，梯形 $ABCD$ 是一座水库大坝的横截面，其中 $AD\parallel BC$，$\angle B=30^\circ$，$\angle C=45^\circ$；AD(坝顶)$=6$ 米，$CD=20$ 米，求 BC(坝底)的长及梯形 $ABCD$(横截面)的面积.

分析 求梯形的面积，需求梯形的高. 为此，可取适当的位置作高，通过构造特殊的直角三角形求出高.

解 作 $AE\perp BC$，$DF\perp BC$，垂足分别为点 E、F，得
$\angle AEF=\angle DFE=90^\circ$，$AE\parallel DF$.

$\because$ $AD\parallel BC$，

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形(平行四边形的定义).

$\therefore$ $AE=DF$，$AD=EF$(平行四边形的对边相等).

在 Rt$\triangle DFC$ 中，由 $\angle C=45^\circ$，得 $DF=FC$.

$\therefore$ $CD=\sqrt{DF^2+FC^2}=\sqrt{2}DF=20$(米). 得 $DF=10\sqrt{2}$(米).

在 Rt$\triangle ABE$ 中，由 $\angle B=30^\circ$，得 $AB=2AE$.

$BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{3}AE=\sqrt{3}DF=10\sqrt{6}$(米).

$\therefore$ $BC=BE+EF+FC=(6+10\sqrt{2}+10\sqrt{6})$(米).

$\therefore$ $S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot AE$
$=\frac{1}{2}\times(12+10\sqrt{2}+10\sqrt{6})\times10\sqrt{2}$
$=(100+60\sqrt{2}+100\sqrt{3})$(平方米).

练习 22.4

1. 在直角梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle A=90^\circ$，$AD=10$ cm，$DC=13$ cm，$BC=15$ cm，求 AB 的长.
2. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，对角线 AC 和 BD 相交于点 O，那么 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 的面积相等吗？为什么？
3. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$\angle D=2\angle B$，$AD=10$，$AB=15$，求 CD 的长.

(第 2 题) (第 3 题)

92 第二十二章 四边形

例题 1

本题是梯形周长的计算问题，通过“腰的平移”，将梯形转化成平行四边形和三角形的问题来解决.教学时应向学生强调“转化”思想和方法.

例题 2

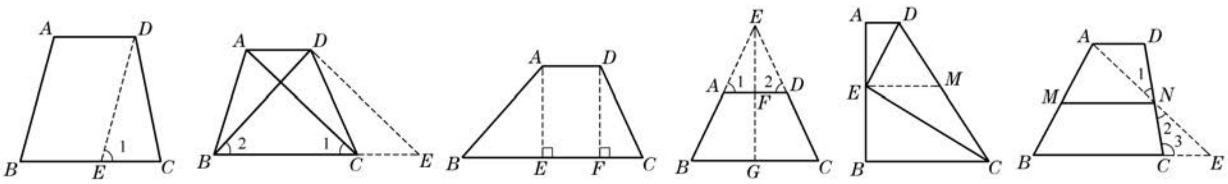
本题是梯形面积的计算问题.通过“画出梯形的高”构造直角三角形，求出梯形的高；通过所得平行四边形和两个直角三角形求未知的底边长，从而求出这个梯形的面积.教学时应向学生说明这也是研究梯形问题的基本思路和方法.

练习 22.4

1. 12 cm.
2. 相等，因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DBC}$.
3. 5.

【注意事项】

通过添加适当的辅助线，把梯形中的问题转化成平行四边形和三角形的问题来解决，是常用的思考方法.常见的添辅助线如图所示，有平移梯形腰，平移对角线，作出梯形高，延长两腰交于一点，画出中位线，或以腰中点为中心旋转半周等.有关添辅助线的方法，后面将以例题或习题的方式逐步展现.



【本课重点】

引导学生类比等腰三角形的性质，探究和掌握等腰梯形的性质，并初步会用等腰梯形的性质定理进行几何计算或证明.

探究

通过提出问题引导学生探究等腰梯形的性质.

教学时可从“等腰梯形与等腰三角形的联系”引出问题：“等腰三角形的两个底角相等，那么等腰梯形是否也具有类似性质呢?”；通过对问题的探究和解决，导出等腰梯形性质定理1.

想一想

让学生对性质定理1的证明提出新方法.要展开充分的讨论，鼓励学生用多种方法.

例题3

本题是等腰梯形性质定理1的初步运用.

22.5 等腰梯形

联想“等腰三角形的底角相等”，我们来研究等腰梯形是否有类似的性质.

一个等腰三角形被平行于底边且与两腰相交(交点非顶点)的直线所截，截得的四边形一定是等腰梯形.

探究

如果四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，其中 $AD \parallel BC$，$AB=DC$，能推出 $\angle B=\angle C$ 吗?

分析问题中的条件和结论，我们想到，可以把梯形的一腰平行移动到与另一腰共顶点的位置，把问题转化成一个等腰三角形中的问题.

如图 22－50，过点 D 作 $DE \parallel AB$，DE 交 BC 于点 E，得到四边形 $ABED$ 和 $\triangle DEC$.

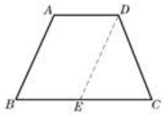


图 22－50

因为 $AD \parallel BC$，$DE \parallel AB$，

所以四边形 $ABED$ 是平行四边形(平行四边形的定义).

得　$DE=AB$(平行四边形的对边相等).

再由 $AB=CD$，得 $DE=DC$，所以 $\angle DEC=\angle C$.

而由 $DE \parallel AB$，可知 $\angle DEC=\angle B$，于是推出 $\angle C=\angle B$.

进一步还可以得到 $\angle A=\angle ADC$.

因此，等腰梯形有以下性质：

利用“夹在两条平行线间的平行线段相等”，可由 $AD \parallel BC$、$DE \parallel AB$，直接得 $DE=AB$.

等腰梯形性质定理1　等腰梯形在同一底上的两个内角相等.

想一想

还有其他方法证明等腰梯形性质定理1吗? 如图 22－51 添加辅助线，试一试.

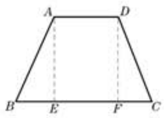


图 22－51

例题3　已知：如图 22－52，等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，腰 BA 和 CD 的延长线相交于点 E.

求证：$\triangle EAD$ 是等腰三角形.

证明　$\because$　四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，$AD \parallel BC$，

$\therefore$　$\angle B=\angle C$(等腰梯形在同一底上的两个内角相等).

$\because$　$AD \parallel BC$，

$\therefore$　$\angle 1=\angle B$，$\angle 2=\angle C$，

得　$\angle 1=\angle 2$.

$\therefore$　$\triangle EAD$ 是等腰三角形.

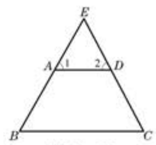


图 22－52

第三节　梯形　93

【教学目标】

(1) 掌握等腰梯形的性质定理和判定定理，并会用于进行计算和证明.

(2) 会通过添加辅助线，将等腰梯形问题转化为三角形、平行四边形等几何图形中的问题来解决.

(3) 经历探索等腰梯形的性质和判定的过程，体会类比、分类讨论和转化等数学思想方法，提高类比、归纳等能力.

【注意事项】

关于等腰梯形性质定理1的证明有多种方法.课本对这一定理的证明放在问题解决的过程中，通过“平移一腰”构造等腰三角形进行转化和推导.还可以构造两个全等的直角三角形来证明结论，如图 22－51 所示.要让学生体会探索这一性质证明方法的基本思路是把梯形问题转化为平行四边形或三角形中的问题，添加辅助线的方法多种多样，可鼓励学生进行尝试.

在图 22－52 中，作$\angle E$ 的平分线，则它既垂直平分 AD，又垂直平分 BC，即$\angle E$ 的平分线所在的直线经过 AD 的中点 O_1 和 BC 的中点 O_2，如图 22－53 所示.

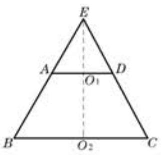


图 22－53

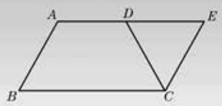
我们知道，等腰三角形是轴对称图形，顶角平分线所在的直线是它的对称轴. 通过例题 3 可以看到，等腰梯形 $ABCD$ 关于直线 O_1O_2 对称，而任一等腰梯形都可以同样作出它所在的等腰三角形，因此我们得到：等腰梯形是一个轴对称图形，对称轴就是两底的中点的连线所在的直线.

等腰梯形有两条对角线，这两条对角线相等. 这是等腰梯形的性质定理 2，我们把它的证明留作练习.

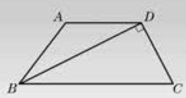
等腰梯形性质定理 2　等腰梯形的两条对角线相等.

练习 22.5(1)

1. 求证：等腰梯形的两条对角线相等.
2. 已知：如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AB=DC$，E 是 AD 延长线上一点，$CE=CD$. 求证：$\angle E=\angle B$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AD=AB$，$BD\perp DC$，求$\angle C$ 的度数.

下面，我们来研究等腰梯形的判定方法.

问题

如果一个梯形同一底上的两个内角相等，那么这个梯形一定是等腰梯形吗？

上述问题的结论是肯定的. 如果在梯形 $ABCD$ 中，$BC\parallel AD$，那么利用图 22－50，由“三角形中等角对等边”，可得 $DE=DC$，再推出 $AB=DC$. 于是，得到以下定理：

等腰梯形判定定理 1　在同一底上的两个内角相等的梯形是等腰梯形.

94 第二十二章　四边形

在完成例题 3 证明的基础上，要让学生体会，任何一个等腰梯形总有相应的一个等腰三角形. 于是，由等腰三角形的轴对称性质可导出等腰梯形是轴对称图形.

关于等腰梯形性质定理 2，可从学生研究平行四边形性质的已有经验提出，再让学生自主完成定理的证明.

练习 22.5(1)

1. 提示：先将命题改写成符号语言，再利用三角形全等推导结论.
2. 提示：利用等腰梯形、等腰三角形和平行线的性质.
3. 提示：设$\angle ABD=x^\circ$，可推出$\angle DBC=\angle ADB=x^\circ$，$\angle C=(2x)^\circ$，得 $x=30$.

【本课重点】

引导学生探究等腰梯形的判定方法，使学生掌握等腰梯形的判定定理并学会它的基本运用.

【注意事项】

（1）在例题 3 的设计中有以下考虑：① 帮助学生进一步认识梯形与三角形之间的联系，对于等腰梯形，它可由等腰三角形截得，反之延长等腰梯形两腰可得这个梯形原来所在的等腰三角形；② 为引导学生利用等腰三角形的对称性来研究等腰梯形的对称性打下基础；③ 让学生从中感知“延长梯形两腰交于一点”这种常用的添辅助线方法.

（2）要让学生经历探索等腰梯形判定方法的过程. 可引导学生通过对等腰梯形性质定理的逆向考察，提出问题进行探究；通过问题的解决，获得等腰梯形的判定定理.

通过“问题”的讨论得到等腰梯形判定定理1.

判定定理1的证明比较简单且与前面相类似，课本中没有展开，可让学生自主完成证明.

关于判定定理2，先由性质定理2的逆命题引入，再进行证明.在证明过程中出现“平移对角线”这种添辅助线的方法，教学时要注意引导学生从图形运动的角度进行思考，并领会这种方法的运用.

例题4

本题是帮助学生加深对基本图形的认识和巩固平行四边形、等腰梯形基本知识的运用.

例题5

本题是几何作图题，注重于梯形判定定理的实践运用，引进了“三角形奠基法”.

我们再来讨论等腰梯形性质定理2的逆命题：

已知：梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$BD=AC$.

求证：梯形 $ABCD$ 是等腰梯形.

分析：要证明梯形 $ABCD$ 是等腰梯形，只要证明 $AB=CD$. 为此，可先证明 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 全等，它们已有两边分别对应相等，故还需证明其夹角对应相等.

证明：如图22－54，过点 D 作 $DE \parallel AC$，DE 与 BC 的延长线交于点 E.

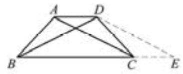


图22－54

$\because$ $AD \parallel BC$，$DE \parallel AC$，

$\therefore$ $DE=AC$（夹在两条平行线间的平行线段相等）；

且 $\angle ACB=\angle E$.

$\because$ $BD=AC$，

$\therefore$ $BD=DE$，得 $\angle E=\angle DBC$.

$\therefore$ $\angle ACB=\angle DBC$.

又 $\because$ $BC=CB$，

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$，得 $AB=CD$.

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 是等腰梯形（等腰梯形的定义）.

由此得到：

在图22－54中，分别过 A、D 作 $AE \perp BC$ 于点 E、$DF \perp BC$ 于点 F，构造 $Rt\triangle ACE$ 和 $Rt\triangle DBF$，能证明等腰梯形判定定理2吗？

等腰梯形判定定理2　对角线相等的梯形是等腰梯形.

例题4　如图22－55，已知梯形 $ABCD$ 中，$BC \parallel AD$，$DE \parallel AB$，$DE=DC$，$\angle A=110°$，求梯形的其他三个内角的度数.

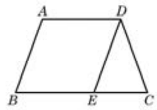


图22－55

证明　$\because$ $BC \parallel AD$，$DE \parallel AB$，

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是平行四边形.

$\therefore$ $AB=DE$（平行四边形的对边相等）.

又 $\because$ $DE=DC$，

$\therefore$ $AB=DC$.

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 是等腰梯形（等腰梯形的定义）.

$\therefore$ $\angle B=\angle C=180°-\angle A=70°$，$\angle ADC=\angle A=110°$.

例题5　已知梯形的两底和两腰，求作这个梯形.

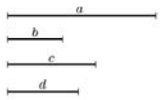


图22－56

已知：线段 a、b、c、d，其中 $a>b$（如图22－56）.

求作：梯形 $ABCD$，使 $AB \parallel DC$，$AB=a$，$DC=b$，$DA=c$，$CB=d$.

分析　假设梯形 $ABCD$ 已经作出. 作 $DE \parallel CB$，交 AB 于点 E，可知四边形 $EBCD$ 为平行四边形，于是 $DE=BC=d$，$EB=DC=b$. 这时，在 $\triangle AED$ 中，$AE=a-b$，$DE=d$，$DA=c$. 根据给定的条件，可由 AE、DA、DE 为边作出 $\triangle AED$，再作平行四边形 $EBCD$，

【注意事项】

（1）课本中没有专设几何作图章节，而是与有关内容结合分散介绍.几何作图是培养学生的分析能力和综合运用能力的良好载体，在教学中要引起重视，但是应严格控制要求，通常以学生进行实践体验为主，不要求会写作法.

（2）在例题5的教学中，要展示分析的过程，引导学生体会关于特殊四边形作图的基本方法.如：先假设图形已经作出，通过对图形的分析找到一个能由已知条件确定的三角形；然后画出这个三角形，在此基础上作出符合要求的图形.这种作图方法通常称为“三角形奠基法”，通过例题5的教学应让学生初步了解.

（3）例题5中的已知条件辅以图形给出，因此用于奠基的三角形可以作出并且唯一确定.对于数学基础较好的学生，可引导他们反思已知条件应满足的要求.

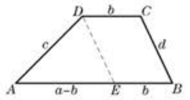


图 22－57

就可以得到所求作的梯形.

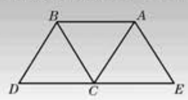
作法　如图 22－57 所示，

1. 作$\triangle AED$，使 $AE=a-b$，$DA=c$，$DE=d$.
2. 延长 AE 到点 B，使得 $EB=b$.
3. 分别过点 B、D 作 $BC\parallel DE$，$DC\parallel AB$，BC、DC 相交于点 C.

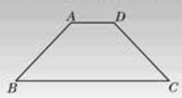
四边形 $ABCD$ 就是所求作的梯形.

练习 22.5(2)

1. 如图，四边形 $ABDE$ 由三个全等的等边三角形组成，它是一个等腰梯形吗？为什么？



（第 1 题）



（第 3 题）

2. 画一个等腰梯形，使得它的上、下底分别是 5 cm、13 cm，高为3 cm，并求出它的周长.
3. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD<BC$，$AB=DC$，$\angle B=\angle C$.
求证：四边形 $ABCD$ 是等腰梯形.

22.6　三角形、梯形的中位线

问题1

一张三角形纸片，可用一条平行于这个三角形一边的直线，把它分割成一个梯形和一个小三角形. 如果所得的梯形和小三角形恰好拼成一个平行四边形，那么这条用于分割的直线与三角形另外两边的交点在什么位置？

如图 22－58(1)，$\triangle ABC$ 被平行于边 BC 的直线 l 分成梯形 $DBCE$ 和小三角形 ADE. 如果梯形 $DBCE$ 和$\triangle ADE$ 恰好能拼成一个平行四边形 $BCFD$，如图 22－58(2)，那么必有$\triangle CFE\cong\triangle ADE$(为什么?)，可知 $AE=EC$，$AD=CF$，$DE=EF$. 这时，E 为 AC 的中点；又 $CF=BD$，得 $AD=BD$，即 D 为 AB 的中点.

所以，用于分割的直线与三角形另两边的交点分别是这两边的中点.

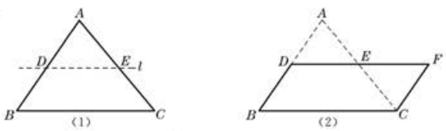


图 22－58

96 第二十二章　四边形

练习 22.5(2)

1. 它是等腰梯形. 可先证这个四边形中一组对边平行且不相等、另一组对边相等再作推断.
2. 提示：可运用“三角形奠基法”画图. 这个等腰梯形的周长等于 28 cm.
3. 提示：先证 $AD\parallel BC$，判定四边形 $ABCD$ 是梯形，再推断结论.

【本课重点】

引进三角形中位线的概念；让学生探索三角形中位线的性质并掌握三角形中位线定理，初步学会这个定理的运用.

问题 1

引导学生思考对三角形的一种特殊分割，引出三角形的中位线. 通过对问题的讨论，也为学生探索三角形中位线的提供了认识基础.

通过师生共同讨论，确定用于分割的直线经过三角形另外两边的中点.

【教学目标】

(1) 理解三角形中位线和梯形中位线的概念，知道三角形中位线和中线的区别.

(2) 经历三角形中位线、梯形中位线性质的探索过程，体会转化的思想方法，能以运动变化的观点认识三角形中位线、梯形中位线之间的区别和联系.

(3) 掌握三角形中位线定理、梯形中位线定理，能运用它们进行简单的几何计算和论证；能综合运用三角形和特殊四边形的有关知识解决简单的数学问题和一些实际问题.

【注意事项】

对于数学基础较差的班级，可直接引进三角形中位线的概念. 在基础较好的班级教学时，可将问题 1 改为更具挑战些的问题：“是否能把一个三角形分割成一个梯形和一个小三角形，且使所得的梯形和三角形可拼成一个平行四边形？”这时，可先假设有一个分割符合要求，再分析这个分割应满足的条件；然后证明满足这些条件的分割符合要求.

想一想

这是对问题1的延展思考，通过分析，得到关于三角形中位线性质的猜想.

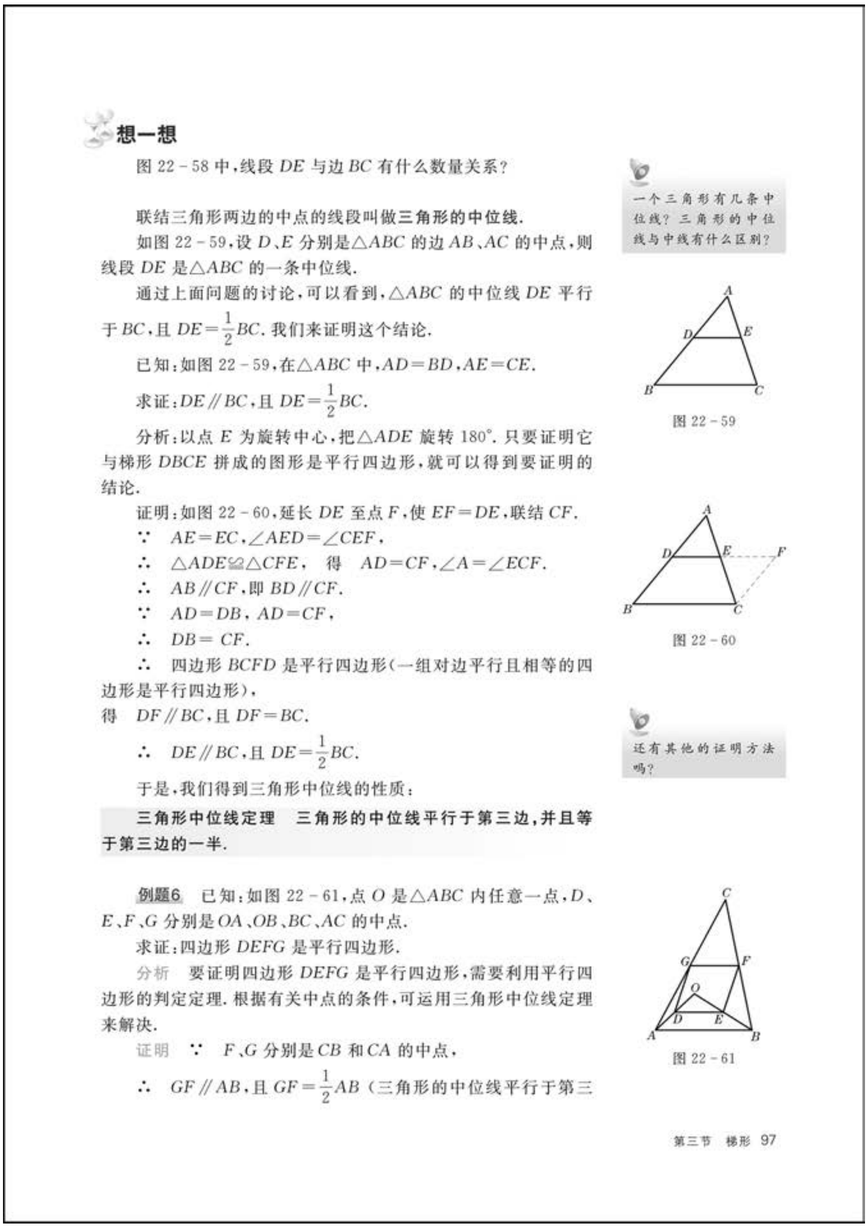
引进三角形中位线的概念以后，要让学生讨论边款中提出的问题.

以问题1的情境作为铺垫，提出关于三角形中位线性质的命题；通过证明，得到三角形中位线定理.

对定理的证明思路的分析，要让学生充分发表意见，提出不同的证明方法进行尝试，活跃学生的思维.

例题6

本题是三角形中位线定理的基本运用.



想一想

图22－58中，线段 DE 与边 BC 有什么数量关系？

联结三角形两边的中点的线段叫做三角形的中位线.

如图22－59，设 D、E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 的中点，则线段 DE 是 $\triangle ABC$ 的一条中位线.

一个三角形有几条中位线？三角形的中位线与中线有什么区别？

通过上面问题的讨论，可以看到，$\triangle ABC$ 的中位线 DE 平行于 BC，且 $DE=\frac{1}{2}BC$. 我们来证明这个结论.

已知：如图22－59，在 $\triangle ABC$ 中，$AD=BD$，$AE=CE$.

求证：$DE\parallel BC$，且 $DE=\frac{1}{2}BC$.

图22－59

分析：以点 E 为旋转中心，把 $\triangle ADE$ 旋转180°. 只要证明它与梯形 $DBCE$ 拼成的图形是平行四边形，就可以得到要证明的结论.

证明：如图22－60，延长 DE 至点 F，使 $EF=DE$，联结 CF.

∵ $AE=EC$，$\angle AED=\angle CEF$，

∴ $\triangle ADE\cong\triangle CFE$， 得 $AD=CF$，$\angle A=\angle ECF$.

∴ $AB\parallel CF$，即 $BD\parallel CF$.

∵ $AD=DB$，$AD=CF$，

∴ $DB=CF$.

∴ 四边形 $BCFD$ 是平行四边形（一组对边平行且相等的四边形是平行四边形），

得 $DF\parallel BC$，且 $DF=BC$.

∴ $DE\parallel BC$，且 $DE=\frac{1}{2}BC$.

图22－60

还有其他的证明方法吗？

于是，我们得到三角形中位线的性质：

三角形中位线定理　三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半.

例题6　已知：如图22－61，点 O 是 $\triangle ABC$ 内任意一点，D、E、F、G 分别是 OA、OB、BC、AC 的中点.

求证：四边形 $DEFG$ 是平行四边形.

分析　要证明四边形 $DEFG$ 是平行四边形，需要利用平行四边形的判定定理. 根据有关中点的条件，可运用三角形中位线定理来解决.

证明　∵ F、G 分别是 CB 和 CA 的中点，

∴ $GF\parallel AB$，且 $GF=\frac{1}{2}AB$（三角形的中位线平行于第三

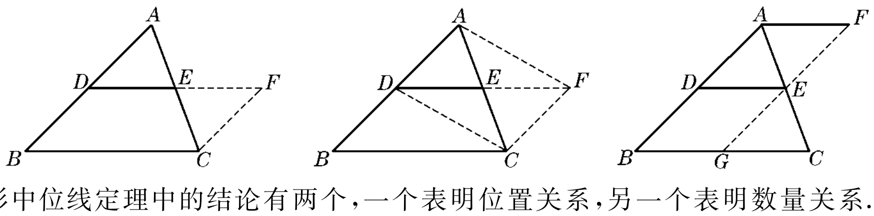
图22－61

第三节　梯形　97

【注意事项】

（1）对三角形中位线定理的证明思路的分析，要适当指导.建议从证明两线段的数量关系入手，引导学生通过截长或补短的方法转化成证明两条线段的相等关系；再探讨两线段的平行关系的证明.注意让学生运用图形运动的观点来认识添辅助线的过程和作用.

（2）证明三角形的中位线定理，关键在于添加辅助线.证明方法有多种，要渗透优化思想，选用比较简捷的方法.下面列举几种添辅助线方法供参考，讲解证明时要揭示其基本思路，即运用中心对称思想把三角形问题转化成平行四边形问题来解决.



（3）三角形中位线定理中的结论有两个，一个表明位置关系，另一个表明数量关系.在运用这个定理时，可以根据需要选用结论.

边,并且等于第三边的一半).

同理,可得 $DE /\!/ AB$,且 $DE=\frac{1}{2}AB$.

∴ $GF /\!/ DE$,且 $GF=DE$.

∴ 四边形 $DEFG$ 是平行四边形(一组对边平行且相等的四边形是平行四边形).

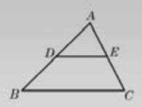
练习 22.6(1)

1. 如图,已知 $AD=DB$,$AE=EC$.

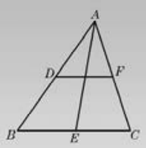
(1) 如果 $BC=\sqrt{3}$,那么 $DE=$________;

(2) 如果 $DE=5$,那么 $BC=$________.

2. 已知:如图,$\triangle ABC$ 中,D、E、F 分别是 AB、BC、CA 三边的中点. 求证:中位线 DF 和中线 AE 互相平分.



(第 1 题)



(第 2 题)

3. 如图,B、C 两点被海水隔开,在 B、C 外选择一点 A,找到 AB、AC 的中点 E、F,测量得 $EF=22$ 米,这样就能求出 B、C 两点间的距离. 请说出这是为什么?

4. 求证:顺次联结四边形四条边的中点,所得的四边形是平行四边形.

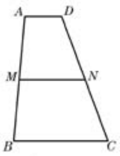


图 22-62

与三角形的中位线相类似,我们把联结梯形两腰的中点的线段叫做**梯形的中位线**.

如图 22-62,设点 M、N 分别是 AB、CD 的中点,则线段 MN 是梯形 $ABCD$ 的中位线.

观察图 22-62,类比三角形中位线的性质,我们从梯形 $ABCD$ 的中位线 MN 与它的两底的位置关系和数量关系来讨论梯形中位线的性质.

98 第二十二章 四边形

练习 22.6(1)

1. (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;(2) 10.

2. 提示:利用三角形中位线定理推出四边形 $ADEF$ 是平行四边形.

3. 因为 EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线,利用三角形中位线定理可求出 BC 的长.

4. 提示:先画出图形,符号语言表示命题;再利用三角形中位线定理推出结论.

【本课重点】

引进梯形的中位线的概念;让学生探索梯形中位线的性质并掌握梯形中位线定理,初步学会这个定理的运用.

关于梯形中位线的概念描述和性质探索,要注意类比三角形的中位线进行思考.

【注意事项】

(1) 在练习 22.6(1)中,第 2 题是通过构造三角形的中位线来证明平行四边形,题中同时出现三角形的中线和中位线,有助于学生进行区别和联系,形成结构性的认识;第 3 题是三角形中位线定理在测量问题中的应用,在教学处理时,对数学基础较好的班级可让学生根据实际背景自行设计方案解决问题;第 4 题可以进行引申发展,比如对原四边形进行特殊化(如改为矩形、菱形、正方形、等腰梯形或筝形等),讨论所得"中点四边形"是何种特殊平行四边形;也可以对结论进行特殊化(如要使所得"中点四边形"是矩形、菱形或正方形),讨论原四边形的对角线要满足的条件.

(2) 要重视从三角形中位线到梯形中位线的引导,促进学生正确进行知识迁移.

已知：如图 22-62，梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AM=MB$，$DN=NC$.

求证：$MN \parallel BC$，且 $MN=\frac{1}{2}(AD+BC)$.

猜想：$MN \parallel AD \parallel BC$，且 $MN=\frac{1}{2}(AD+BC)$.

分析：如果平移 AD 到 BC 的延长线上，把 $AD+BC$ 转化为 BE，那么待证的结论与三角形的中位线性质在形式上一致. 由此想到，要构造三角形，使 BE 为这个三角形的一边，且 MN 是它的中位线.

证明：如图 22-63，联结 AN 并延长，交 BC 的延长线于点 E.

∵ $AD \parallel BC$，

∴ $\angle DAN=\angle NEC$，$\angle ADN=\angle ECN$.

又∵ $DN=NC$，

∴ $\triangle ADN \cong \triangle ECN$， 得 $AN=EN$，$AD=EC$.

∵ $AM=MB$，

∴ MN 是 $\triangle ABE$ 的中位线.

∴ $MN \parallel BC$，$MN=\frac{1}{2}BE$（三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半）.

∵ $BE=BC+CE=BC+AD$，

∴ $MN=\frac{1}{2}(BC+AD)$.

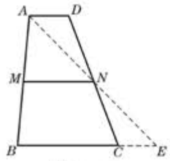


图 22-63

因此，梯形的中位线具有以下性质：

梯形中位线定理　梯形的中位线平行于两底，并且等于两底和的一半.

例题7　一把梯子如图 22-64 所示，其中四边形 $AKLB$ 是梯形. 已知 $AC=CE=EG=GK$，$BD=DF=FH=HL$，$AB=0.6$ m，$CD=0.7$ m，求 EF、GH、KL 的长.

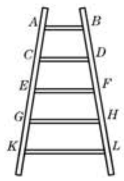


图 22-64

解　∵ $AC=CE=EG=GK$，$AC+CE=AE$，$EG+GK=EK$，

∴ $AE=EK$.

同理，可得　$BF=FL$.

∴EF 是梯形 $AKLB$ 的中位线.

得 $EF \parallel AB \parallel KL$，$EF=\frac{1}{2}(AB+KL)$（梯形的中位线平行于两底，并且等于两底和的一半）.

同理，可得　$CD=\frac{1}{2}(AB+EF)$，$GH=\frac{1}{2}(EF+KL)$.

∵ $AB=0.6(\text{m})$，$CD=0.7(\text{m})$，

∴ $EF=2CD-AB=2\times0.7-0.6=0.8(\text{m})$；

$KL=2EF-AB=2\times0.8-0.6=1(\text{m})$；

对梯形中位线定理的证明思路的分析，关键是抓住待证结论中线段间的数量关系，用一条线段表示 $AD+BC$，从而想到平移上底 AD 到下底 BC 的延长线上，把问题的解决转化成三角形中位线定理的运用. 教学时要突出证明思路的分析过程和思考方法.

例题 7

本题是梯形中位线定理的基本运用，用于解决有简单实际背景的几何计算问题.

本题可看作制造梯子时如何剪裁材料，体现了数学和生活的联系.

$$GH=\frac{1}{2}(EF+KL)=\frac{1}{2}\times(0.8+1)=0.9(\text{m}).$$

因此，$EF=0.8$ m，$GH=0.9$ m，$KL=1$ m.

例题8 已知：梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，E 为 AB 中点，$AD+BC=DC$.

求证：DE 平分$\angle ADC$，CE 平分$\angle BCD$，$DE\perp CE$.

分析 由已知条件，联想到利用梯形 $ABCD$ 的中位线，并且可知中位线的长是 DC 的一半；又梯形中位线与上、下底平行，于是可以从几对等角中获得结论.

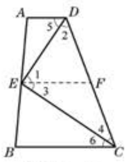


图 22－65

证明 如图 22－65，取 DC 中点 F，联结 EF.

已知 E 为 AB 中点，则 EF 为梯形的中位线，

得 $EF\parallel AD\parallel BC$，$EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$（梯形的中位线平行于两底，并且等于两底和的一半）.

$\therefore$ $\angle 1=\angle 5$，$\angle 3=\angle 6$.

$\because$ $DC=AD+BC$，

$\therefore$ $EF=\frac{1}{2}DC=DF=CF$. 得$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

$\therefore$ $\angle 2=\angle 5$，$\angle 4=\angle 6$，

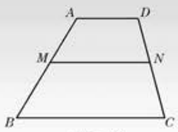
即 DE 平分$\angle ADC$，CE 平分$\angle BCD$.

又$\because$ $\angle 1+\angle 3+\angle 2+\angle 4=180°$，得 $\angle 1+\angle 3=90°$，

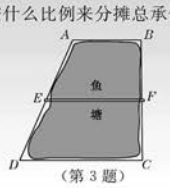
$\therefore$ $DE\perp CE$.

练习 22.6(2)

1. 如图，梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，MN 是它的中位线.
   (1) 如果 $AD=3$，$BC=5$，那么 $MN=$________；
   (2) 如果 $AD=5$，$MN=7$，那么 $BC=$________；
   (3) 如果 $BC=a$，$MN=3$，那么 $AD=$________.
2. 已知梯形的中位线长为 m 米，高为 h 米，那么梯形的面积是多少平方米？
3. 如图是一个形如直角梯形的鱼塘，已知 $AB=200$ m，$BC=400$ m，$CD=250$ m，E、F 分别是 AD、BC 的中点. 现要在 E、F 处建一道隔离栏，把鱼塘分给两家渔民进行承包，并且约定承包费用按照水面面积分摊，那么应按什么比例来分摊总承包金额？



（第 1 题）



（第 3 题）

例题 8

例题 8 是梯形中位线定理在几何证明中的运用，有一定的综合要求.题中的图形是一个基本图形，有丰富内涵.

本题的证明思路是通过联想梯形中位线形成的，直接引向梯形中位线定理的运用.

练习 22.6(2)

1. (1) 4；(2) 9；(3) $6-a$.
2. mh 平方米.
3. 17 ∶ 19.（提示：实际上是求等高的两个梯形面积之比.）

【注意事项】

(1) 例题 8 的证明，也可以通过构造等腰三角形来解决.如：延长 DE 交 CB 的延长线于点 G，先证$\triangle BGE\cong\triangle ADE$，得 $BG=AD$，$EG=ED$，$\angle G=\angle 5$；推出$\triangle CDG$ 是等腰三角形；再利用等腰三角形的性质导出结论.

(2) 在数学基础较好的班级，可对例题 8 进行变式研究.如：将题中的条件“$AD+BC=DC$”与结论“$DE\perp EC$”互换，其他不变；或将题中的条件“$AD+BC=DC$”与结论“DE 平分$\angle ADC$，EC 平分$\angle BCD$”互换，其他不变.

(3) 练习 22.6(2)中第 3 题，等高的两个梯形面积之比由这两个梯形的底边长确定，与直角梯形的条件和 BC 的长无关.

【本课重点】

通过实例让学生认识描述“位置移动”和“两点位置差别”的要素；引进有向线段的概念，并使学生学会画有向线段.

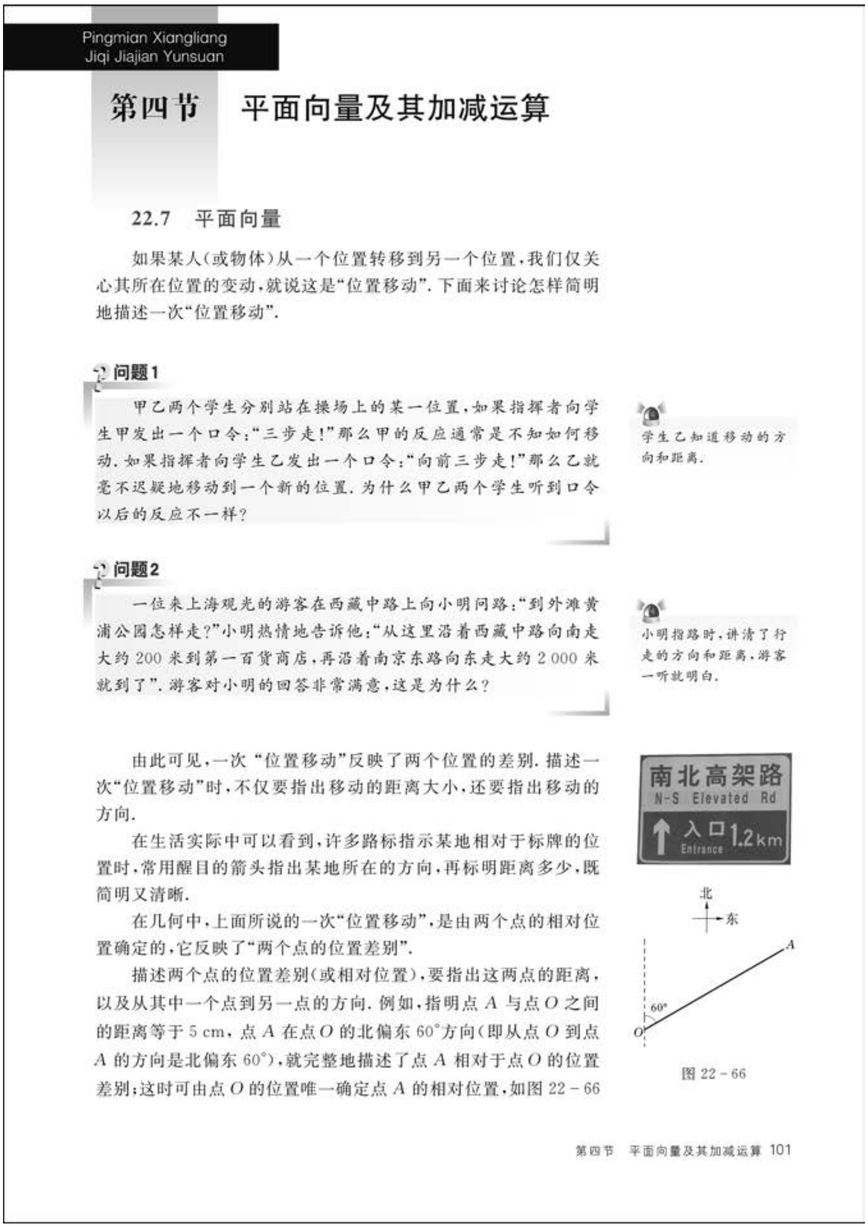
问题 1

利用生活中的事例引导学生思考如何简明地描述一次“位置移动”.

问题 2

提供“问路”和“指路”的情境，让学生思考“为什么”.以此引导学生联系生活中的经验和“路标”，从中体会“距离”和“方向”是刻画某些量的特征的要素.

通过举例，让学生具体认识关于两点位置差别的描述.要强调“距离”和“方向”两个要素.



Pingmian Xiangliang
Jiqi Jiajian Yunsuan

第四节 平面向量及其加减运算

22.7 平面向量

如果某人(或物体)从一个位置转移到另一个位置，我们仅关心其所在位置的变动，就说这是“位置移动”. 下面来讨论怎样简明地描述一次“位置移动”.

问题1

甲乙两个学生分别站在操场上的某一位置，如果指挥者向学生甲发出一个口令：“三步走!”那么甲的反应通常是不知如何移动. 如果指挥者向学生乙发出一个口令：“向前三步走!”那么乙就毫不迟疑地移动到一个新的位置. 为什么甲乙两个学生听到口令以后的反应不一样?

学生乙知道移动的方向和距离.

问题2

一位来上海观光的游客在西藏中路上向小明问路：“到外滩黄浦公园怎样走?”小明热情地告诉他：“从这里沿着西藏中路向南走大约 200 米到第一百货商店，再沿着南京东路向东走大约 2 000 米就到了”. 游客对小明的回答非常满意，这是为什么?

小明指路时，讲清了行走的方向和距离，游客一听就明白.

由此可见，一次“位置移动”反映了两个位置的差别. 描述一次“位置移动”时，不仅要指出移动的距离大小，还要指出移动的方向.

在生活实际中可以看到，许多路标指示某地相对于标牌的位置时，常用醒目的箭头指出某地所在的方向，再标明距离多少，既简明又清晰.

在几何中，上面所说的一次“位置移动”，是由两个点的相对位置确定的，它反映了“两个点的位置差别”.

描述两个点的位置差别(或相对位置)，要指出这两点的距离，以及从其中一个点到另一点的方向. 例如，指明点 A 与点 O 之间的距离等于 5 cm，点 A 在点 O 的北偏东 60°方向(即从点 O 到点 A 的方向是北偏东 60°)，就完整地描述了点 A 相对于点 O 的位置差别；这时可由点 O 的位置唯一确定点 A 的相对位置，如图 22 - 66

图 22 - 66

第四节 平面向量及其加减运算 101

【教学目标】

(1) 理解有向线段的概念，会画有向线段并用于表示生活中一些既有距离又有方向的量.

(2) 经历建立向量概念的过程，理解向量的概念，会用有向线段表示向量；知道向量在现实生活中以及数学、物理学科中有重要的应用.

(3) 理解向量的长度、相等向量、相反向量、平行向量等概念，并会用符号进行表示.

所示.

在问题 2 中，小明为游客指路其实是描述了两次“位置移动”.

操作 1

画一个“小明指路”的示意图.

取比例尺为 1∶20 000，按以下方法操作：

(1) 在平面上取一点 A 表示游客问路时所在的位置，从点 A 向南画一条射线，并在所画射线上截取线段 $AB=1$ 厘米，这时点 B 表示“第一百货商店”所在的位置，在点 B 处画一个箭头.

(2) 从点 B 向东画一条射线，并在所画射线上截取线段 $BC=10$ 厘米，这时点 C 表示“外滩黄浦公园”所在的位置，在点 C 处画一个箭头.

这样就画出了“小明指路”的示意图，如图 22－67.

图中用线段的长度表示距离 200 米或 2 000 米时，不能如实画出，因此要先定比例尺. 由比例尺为 1∶20 000，可知线段长 1 厘米表示实际距离 200 米.

图 22－67

在图 22－67 中，线段 AB、BC 分别带有一个箭头，指明线段 AB 具有从 A 到 B 的方向(即向南)，线段 BC 具有从 B 到 C 的方向(即向东)；线段的长度是按照它与实际距离之比为 1∶20 000 来确定的.

规定了方向的线段叫做**有向线段**(directed line segment). 有向线段的方向是从一点到另一点的指向，这时线段的两个端点有顺序，我们把前一点叫做**起点**，另一点叫做**终点**，画图时在终点处画上箭头表示它的方向.

图 22－67 中的线段 AB、BC 都是有向线段. “有向线段 AB”以 A 为起点、B 为终点，用符号标记为 $\overrightarrow{AB}$. 这时，$\overrightarrow{AB}$ 表示点 B 相对于点 A 的位置差别，可表述为：点 B 在点 A 的南方，距离 200 米. 类似地，“有向线段 BC”记作 $\overrightarrow{BC}$，它表示点 C 相对于点 B 的位置差别.

注意，用两个字母标记有向线段时，起点字母必须写在终点字母的前面.

想一想

线段 PQ 与线段 QP 一样吗？有向线段 $\overrightarrow{PQ}$ 与有向线段 $\overrightarrow{QP}$ 一样吗？如果不一样，那么它们有什么差别？

102 第二十二章　四边形

操作 1

让学生通过画图操作，学习如何用图形直观地表示“距离”和“方向”. 教师要解说画图的方法.

在学生具有感性认识的基础上，引进有向线段及其符号表示.

想一想

提出问题让学生思考线段与有向线段的区别.

要强调有向线段的两个端点具有顺序性，注意“边款”中的提示.

【注意事项】

在画图操作时，教师要向学生讲述为什么要用比例尺、怎样适当选取比例尺、如何按比例尺定线段长度等. 关于有向线段的画法，不要求学生写出.

问题 3

给出一个“平移”，让学生思考如何用有向线段表示.一方面建立新旧知识之间的联系；另一方面利用有向线段的直观性，帮助学生进一步理解“平移”的意义.

操作 2

把问题 3 中所给出的“平移”用有向线段表示出来，让学生进一步体验画有向线段的过程.

归纳画有向线段的一般步骤，帮助学生掌握画有向线段的方法.

例题 1

让学生利用有向线段进一步理解“平移”的概念，并体会两条有向线段“同向且等长”的含义.

问题3

我们在七年级学习了“图形的运动”，知道“平移”是指“图形上的所有点按照某个方向作相同距离的位置移动”. 如果有一个平移，它的方向是南偏东 30°，移动距离是 4 cm，这个平移可以用有向线段来表示吗?

假设图形上的一点 M 通过这个平移而到点 M' 的位置，那么可作有向线段 $\overrightarrow{MM'}$. 这时线段的长等于 4 cm；从 M 到 M' 的指向是南偏东 30°. 同样地，还可由图形上其他任意一点 P 和它平移后所对应的点 P' 作有向线段 $\overrightarrow{PP'}$. 当然，$\overrightarrow{PP'}$ 与 $\overrightarrow{MM'}$ 一定“同向且等长”. 可见，描述一个平移的要素是距离大小和方向.

操作2

画一条表示上述平移的有向线段.

画法如下：

(1) 在平面内任取一点 A，按照南偏东 30° 的方向作射线 AT；

(2) 在射线 AT 上截取线段 AB，使 $AB=4$ cm；

(3) 在 B 处画上箭头.

$\overrightarrow{AB}$ 就是表示这个平移的有向线段，如图 22 - 68 所示.

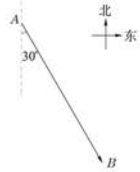


图 22 - 68

$\overrightarrow{AB}$ 的图形，直观、形象地显示了这个平移的本质特征.

通过两次操作，可归纳画有向线段的一般步骤是：(1) 定比例尺(当比例尺为 1∶1 时可省略这一步)；(2) 取定其起点并以它为端点按指定方向画一条射线；(3) 按比例尺确定的长度在所画射线上从端点开始截取一条线段；(4) 在截得的线段的另一端点处画上一个箭头.

例题1 如图 22 - 69，已知 $\triangle ABC$ 与有向线段 $\overrightarrow{EF}$，作出 $\triangle ABC$ 按有向线段 $\overrightarrow{EF}$ 表示的平移移动后所得的 $\triangle A'B'C'$.

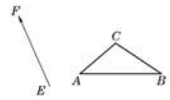


图 22 - 69

解　如图 22 - 70.

(1) 作有向线段 $\overrightarrow{AA'}$、$\overrightarrow{BB'}$、$\overrightarrow{CC'}$，使它们分别与有向线段 $\overrightarrow{EF}$ 同向且等长；

(2) 顺次联结 $A'B'$、$B'C'$、$C'A'$.

$\triangle A'B'C'$ 就是所求作的三角形.

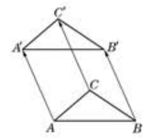
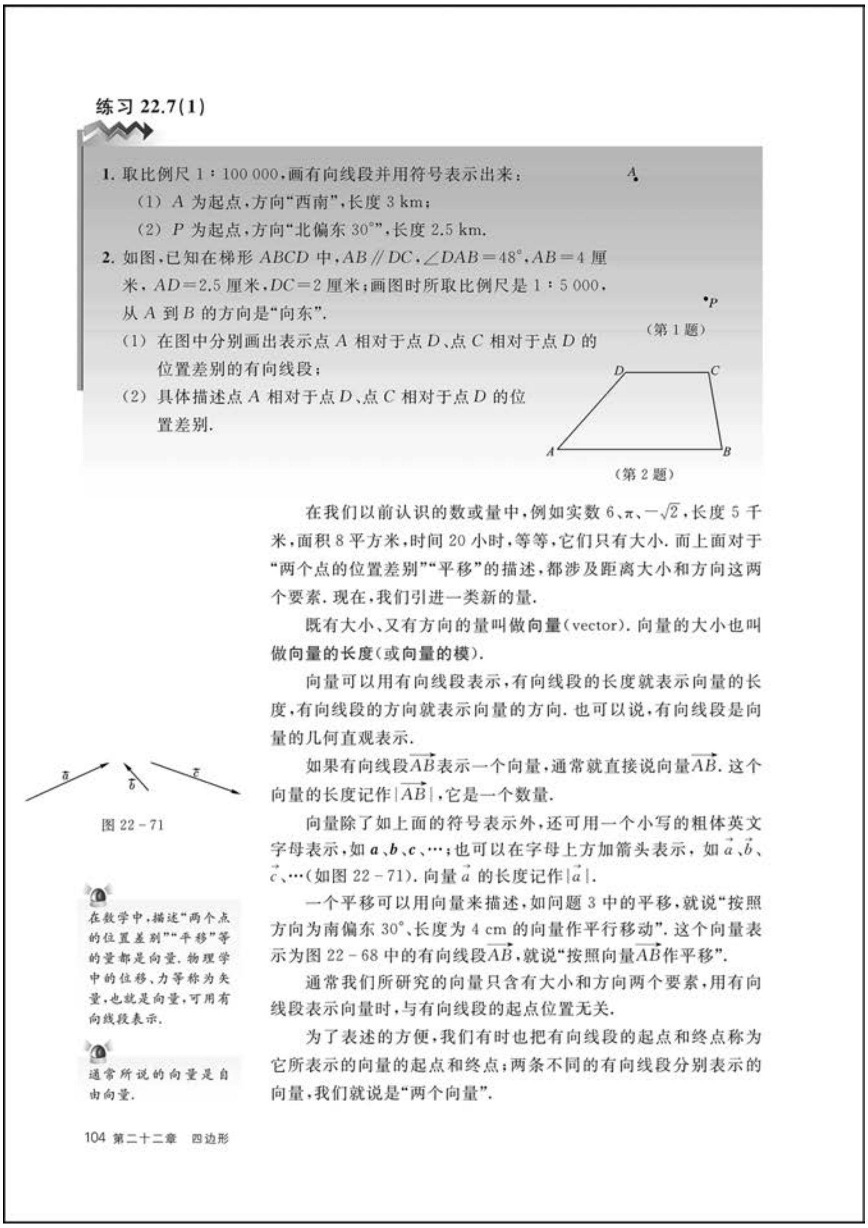


图 22 - 70

【注意事项】

在向量教学中，有向线段是必要的铺垫，并为学生提供认识准备.要重视引进有向线段的过程教学和组织画有向线段的活动，让学生通过实例和操作实践，直观认识和具体感知有向线段.要指导学生认真操作和体验过程，使学生获得表示向量的实践基础.



练习 22.7(1)

1. 取比例尺 1∶100 000，画有向线段并用符号表示出来：
   (1) A 为起点，方向“西南”，长度 3 km；
   (2) P 为起点，方向“北偏东 30°”，长度 2.5 km.

(第 1 题)

2. 如图，已知在梯形 $ABCD$ 中，$AB // DC$，$\angle DAB=48°$，$AB=4$ 厘米，$AD=2.5$ 厘米，$DC=2$ 厘米；画图时所取比例尺是 1∶5 000，从 A 到 B 的方向是“向东”.
   (1) 在图中分别画出表示点 A 相对于点 D、点 C 相对于点 D 的位置差别的有向线段；
   (2) 具体描述点 A 相对于点 D、点 C 相对于点 D 的位置差别.

(第 2 题)

在我们以前认识的数或量中，例如实数 6、π、$-\sqrt{2}$，长度 5 千米，面积 8 平方米，时间 20 小时，等等，它们只有大小. 而上面对于“两个点的位置差别”“平移”的描述，都涉及距离大小和方向这两个要素. 现在，我们引进一类新的量.

既有大小、又有方向的量叫做向量(vector). 向量的大小也叫做**向量的长度(或向量的模)**.

向量可以用有向线段表示，有向线段的长度就表示向量的长度，有向线段的方向就表示向量的方向. 也可以说，有向线段是向量的几何直观表示.

如果有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示一个向量，通常就直接说向量 $\overrightarrow{AB}$. 这个向量的长度记作 $|\overrightarrow{AB}|$，它是一个数量.

向量除了如上面的符号表示外，还可用一个小写的粗体英文字母表示，如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、…；也可以在字母上方加箭头表示，如 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、…(如图 22－71). 向量 $\vec{a}$ 的长度记作 $|\vec{a}|$.

图 22－71

一个平移可以用向量来描述，如问题 3 中的平移，就说“按照方向为南偏东 30°、长度为 4 cm 的向量作平行移动”. 这个向量表示为图 22－68 中的有向线段 $\overrightarrow{AB}$，就说“按照向量 $\overrightarrow{AB}$ 作平移”.

通常我们所研究的向量只含有大小和方向两个要素，用有向线段表示向量时，与有向线段的起点位置无关.

为了表述的方便，我们有时也把有向线段的起点和终点称为它所表示的向量的起点和终点；两条不同的有向线段分别表示的向量，我们就说是“两个向量”.

在数学中，描述“两个点的位置差别”“平移”等的量都是向量. 物理学中的位移、力等称为矢量，也就是向量，可用有向线段表示.

通常所说的向量是自由向量.

104 第二十二章　四边形

练习 22.7(1)

1. 略.

2. (1) 略；

(2) 点 A 在点 D 的南偏西 42° 方向，距离 125 米；点 C 在点 D 的东方，距离 100 米.

【本课重点】

引进向量的有关概念，帮助学生掌握向量的表示方法，并学会辨识图形中的相等向量、相反向量、平行向量.

对于自由向量来说，所有同向且等长的有向线段，其实是表示同一向量.

【注意事项】

(1) 向量是一个量，它既有大小又有方向. 从数量到向量，是学生认识过程中的一个跨跃，他们对向量的概念虽然可以接受但不易理解. 所以在引进向量时，要作好铺垫，要细化处理. 课本中列举了一些生活中的具体事例和数学中的几何事实，让学生看到它们的本质特征是既有“距离”又有“方向”，获得对向量的感性认识；教学时可进一步充实具体事例和结合学生已知的一些物理量(例如“力”)，为学生提供认识向量的经验基础.

(2) 在数学研究中，讨论的向量一般都是“自由向量”，只有大小、方向两个要素，与向量的几何表示的起点无关. 但在向量的几何运用中，有时要涉及向量的几何表示的起点；而在实际问题中，可能向量本身就有起点；另外，还有其他的特殊向量. 现在，我们只讲向量的一般概念，对向量进行一般研究，因此不考虑上述具体情况，也不必对“自由向量”多加说明.

具体表述两个点的位置差别时，要注意相对性.用向量表示时，通常指终点相对于起点的位置差别.

例题 2

本题要求学生认识用有向线段表示的向量并会用符号表示；同时让学生感知“方向”与“平行”之间的联系.

通过例题 2，为引进相等向量、相反向量、平行向量等概念提供归纳基础.另外，要让学生充分注意由本题提出的关于“方向”与“平行”相互关系的命题.

结合例题 2 的图形，指导学生理解相等向量、相反向量、平行向量等概念并掌握它们的表示方法.

想一想

让学生明确$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BA}$表示两个不同的向量(这时不考虑点 A 与点 B 重合的情况)，它们互为相反向量，$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

也有些量用向量来描述时，需要指明向量的起点. 例如在图 22－66中作向量$\overrightarrow{OA}$，这里指定以 O 为向量的起点，以$\overrightarrow{OA}$表示点 A 相对于点 O 的位置差别，表明点 A 在点 O 的“北偏东 60°，距离5 cm”的位置. 又如物理学中的“力”用向量来表示时，也要考虑这个向量的起点.

例题2 如图 22－72，四边形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 分别是平行四边形和梯形，梯形中 $EF \parallel HG$. 图中有向线段都表示向量，它们的起点和终点分别是所在四边形的顶点.

(1) 用符号表示各个向量；

(2) 每个四边形的对边上的两个向量，它们的方向是否相同或相反？它们的长度是否相等？

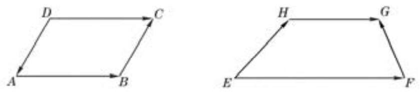


图 22－72

解 (1) 图中的向量有：

$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{EF}$、$\overrightarrow{FG}$、$\overrightarrow{HG}$、$\overrightarrow{EH}$.

(2) 向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DC}$的方向相同，长度相等；向量$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{DA}$的方向相反，长度相等；向量$\overrightarrow{EF}$与$\overrightarrow{HG}$的方向相同，长度不相等；向量$\overrightarrow{FG}$与$\overrightarrow{EH}$的方向既不相同也不相反，长度不相等.

例题 2 告诉我们：用有向线段表示的两个向量，如果两条有向线段分别所在的直线平行(或重合)，那么这两个向量的方向相同或相反. 这个命题的逆命题也是正确的.

可见“方向”与“平行”有深刻的内在联系.

方向相同且长度相等的两个向量叫做**相等的向量**.

方向相反且长度相等的两个向量**互为相反向量**.

方向相同或相反的两个向量叫做**平行向量**.

图 22－72 的向量中，

向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DC}$是相等的向量，记作$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$；

向量$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{DA}$互为相反向量，记作$\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{DA}$；

向量$\overrightarrow{EF}$与$\overrightarrow{HG}$是平行向量，记作$\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{HG}$. 还有$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{DA}$也是平行向量，即$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DA}$.

想一想

向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BA}$是什么关系的向量？用符号表示出来.

第四节 平面向量及其加减运算 105

例题3 已知$\triangle ABC$和点P，如图22－73(1)．以点P为起点，分别画有向线段表示下列向量：

（1）与$\overrightarrow{AB}$相等的向量；

（2）与$\overrightarrow{BC}$互为相反向量的向量；

（3）与$\overrightarrow{AC}$互为相反向量的向量．

（1）（2）

图22－73

解　如图22－73(2)．

（1）作有向线段$\overrightarrow{PQ}$，使$\overrightarrow{PQ}$与有向线段$\overrightarrow{AB}$同向且等长．有向线段$\overrightarrow{PQ}$就表示与$\overrightarrow{AB}$相等的向量．

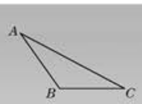
（2）作有向线段$\overrightarrow{PM}$，使$\overrightarrow{PM}$与有向线段$\overrightarrow{BC}$反向且等长．有向线段$\overrightarrow{PM}$就表示与$\overrightarrow{BC}$互为相反向量的向量．

（3）类似（2），有向线段$\overrightarrow{PN}$就表示与$\overrightarrow{AC}$互为相反向量的向量．

上面画有向线段分别表示与$\overrightarrow{AB}$相等的向量、与$\overrightarrow{BC}$互为相反向量的向量的过程，可简单表述为：作向量$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}$，作向量$\overrightarrow{PM}=-\overrightarrow{BC}$．

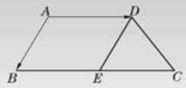
练习22.7(2)

1. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=4$厘米，$BC=3.6$厘米，$AC=6.5$厘米．试在图中画出表示向量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CA}$的有向线段，并分别指出这三个向量的长度（用符号表示）．



（第1题）

2. 如图，已知梯形$ABCD$，$AD\parallel BC$，$AB=DC$，点E在BC上，$DE\parallel AB$．如果把图中线段都画成有向线段，那么在这些有向线段表示的向量中，指出（用符号表示）：
   （1）所有与$\overrightarrow{AB}$相等的向量；
   （2）所有与$\overrightarrow{AB}$互为相反向量的向量；
   （3）所有与$\overrightarrow{AD}$平行的向量．



（第2题）

3. 如果表示两个向量的有向线段具有同一起点，那么
   （1）当两个向量相等时，两个有向线段的终点是否一定相同？
   （2）当两个向量不相等时，两个有向线段的终点是否可能相同？

22.8　平面向量的加法

长度、面积、体积等是“数量”，又称为“标量”．

长度、面积、体积这些量，在确定度量单位以后，它们只有大小，可以用一个数来表示．这些量中的同一类量，都可以进行加减运算，实际上也就是实数的加减运算．而向量不仅有大小，还有方向，两个向量可以相加吗？

106 第二十二章　四边形

例题3

本题让学生通过画图，进一步理解相等向量、相反向量的意义和图形特征．

在画图时，可由学生按画有向线段的步骤自主进行，教师在必要时进行指导；解答中不必详细表述画图过程，只要说明画图的要求．

作出与已知向量相等或相反的向量，是有向线段画法的基本应用，其画图过程可简单表述，今后也是如此要求．

练习22.7(2)

1. 画图略；$|\overrightarrow{AB}|=4$厘米，$|\overrightarrow{BC}|=3.6$厘米，$|\overrightarrow{CA}|=6.5$厘米．
2. （1）$\overrightarrow{DE}$；（2）$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{ED}$；（3）$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{CB}$．
3. （1）相同；（2）不可能．

【本课重点】

引进平面向量的加法，使学生掌握向量加法的三角形法则，会用作图的方法求两个向量的和向量，知道向量加法满足交换律和结合律．引进零向量，使学生掌握零向量的表示和知道零向量的特性．

【注意事项】

要注意利用图形进行向量的学习，由“看图说话”逐步上升为“读文画图”；同时注意文字语言、图形语言、符号语言的相互转化，培养学生数形结合的能力．

【教学目标】

（1）经历引进向量加法的过程，初步掌握向量加法的三角形法则，会用作图的方法求两个向量的和向量．

（2）知道向量的加法满足交换律与结合律，会利用它们进行向量运算．

（3）知道零向量的意义以及零向量的特性．

（4）初步掌握几个向量相加的多边形法则，会利用多边形法则以及加法运算律化简算式．

问题 1

这是为了引进向量的加法而设计的一个实际操作问题.

在问题 1 的提出和分析中,没有直接引用物理中“位移”这个概念,而是直观地表述为“位置移动”.必须明确这个运动过程与方向、距离有关,不同于通常的“行程问题”.

通过画图操作,可以直观地显示 C 地相对于 A 地的位置;同时直观地说明了向量加法的意义.

问题 2

引进向量加法的三角形法则.但要注意,法则是规定的.

关于三角形法则的教学,分为两个层次.第一层次是不平行的两个向量相加,其法则直观地呈现出“三角形”的特征;第二层次是平行的两个向量相加,同样以“第二个向量与第一个向量首尾相接”求和向量,也可以说是依据三角形法则进行运算.

问题1

小明从 A 地出发向东行走 5 千米到达 B 地,再向北又走了 5 千米到达 C 地,那么小明这时在 A 地的什么方向上?到 A 地的距离是多少?(精确到 1 千米)

这个问题也可以用物理中的“位移”来叙述.

小明“从 A 地出发向东行走 5 千米到达 B 地”,是一次“位置移动”.这一位置移动以 A 为起点,由移动的方向和距离所确定,因此可用指定起点的向量表示,就是$\overrightarrow{AB}$:“向东,5 千米”.同样,小明从 B 地到 C 地的位置移动可用向量表示为$\overrightarrow{BC}$:“向北,5 千米”.

取 1∶250 000 的比例尺,如图 22-74,画有向线段表示向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{BC}$;再画有向线段$\overrightarrow{AC}$.那么以 A 为起点的向量$\overrightarrow{AC}$表示从 A 地到 C 地的一次位置移动.由画图可知,$\triangle ABC$ 是直角三角形,$\angle B=90^\circ$,$AB=BC=5$(千米).于是,得$\angle BAC=45^\circ$,$AC=5\sqrt{2}\approx 7$(千米).所以,向量$\overrightarrow{AC}$:“东北方向,7 千米”.由此可知小明这时在 A 地的东北方向,到 A 地的距离约 7 千米.

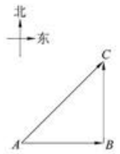


图 22-74

通过对两次平移的合成的讨论,说明求两个向量的和向量是现实的需要,而且和向量是确定的.

从 A 地到 B 地、再从 B 地到 C 地这两次位置移动合在一起,其结果就是从 A 地到 C 地进行一次位置移动.用向量来表示,就说“向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$合在一起是向量$\overrightarrow{AC}$”.这时称$\overrightarrow{AC}$为$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{BC}$的和向量,可表示为

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

求两个向量的和向量的运算叫做向量的加法.

问题2

已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$,怎样求这两个向量的和向量?

通过问题 1 的讨论可以看到,当两个位置向量首尾相接时,它们的和向量很容易确定.因此,我们可采用作图的方法来规定向量加法的运算.

如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是不平行的向量,那么如图 22-75,在平面内任取一点 O,作向量$\overrightarrow{OA}$,使$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$;再作向量$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$.以 O 为起点、B 为终点画有向线段$\overrightarrow{OB}$,则有向线段$\overrightarrow{OB}$所表示的向量 $\vec{c}$ 是向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的和向量.用算式表示为

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}.$$

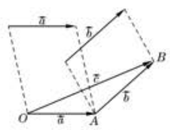


图 22-75

运用三角形法则的一般过程是:分别画出表示这两个向量的有向线段,其中第一条有向线段的终点为第二条有向线段的起点(即首尾相接);再以第一条有向线段的起点为起点、第二条有向线段的终点为终点画有向线段.

一般来说,求不平行的两个向量的和向量时,只要把第二个向量与第一个向量首尾相接,那么以第一个向量的起点为起点、第二个向量的终点为终点的向量就是和向量.这样的规定叫做向量加法的**三角形法则**.

如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是两个平行向量,也可像上面一样作图,这时,向

第四节 平面向量及其加减运算 107

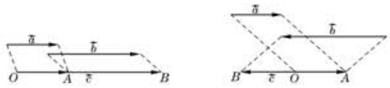
【注意事项】

(1) 在初中进行向量教学,要强调以简明的实际问题导入,让学生在有目的的操作活动中体验.课本中关于向量加法的意义和法则的教学安排,体现了这一要求.要使学生从中获得过程经历,学会画图求和向量;在理论方面应降低难度,能经得起推敲但不要展开.因此,关于向量加法法则的合理性,一般不必向学生解释.如要说明,主要需指出图 22-75 中$\overrightarrow{OB}$的方向和大小是唯一确定的,与点 O 位置的选取无关.根据平行四边形的判定和性质定理,可以证明和向量的确定性.

(2) 关于向量加法的意义,可解释为“向量的合成”,直观地描述是指“把两个向量合在一起的运算”,这样的描述只能“意会”.为避开进一步的解释,课本中先利用图形对两个向量相加进行了直观描述,指出了“和向量”,再讲向量加法的意义,虽不够严谨,但可以理解.对向量加法的教学,重点应放在使学生掌握有关法则上.

量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{OB}$在一条直线上(如图 22－76). 我们仍规定

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}=\vec{c}.$$



(1)　　(2)

图 22－76

想一想

当$\vec{a}$与$\vec{b}$互为相反向量时，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，这时点 B 与 O 的位置关系怎样? 这时$\vec{a}$与$\vec{b}$的和是什么?

向量$\vec{a}$的相反向量可用$-\vec{a}$表示，互为相反向量的两个向量的和是特殊的向量.

一般地，我们把长度为零的向量叫做**零向量**，记作$\vec{0}$. 规定$\vec{0}$的方向可以是任意的(或者说不确定)；$|\vec{0}|=0$.

于是，　$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

对于任意的向量，都有

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}；\quad \vec{0}+\vec{a}=\vec{a}.$$

将向量$\vec{0}$与数0类比，可见它们有类似的特性.

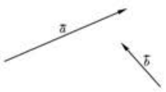
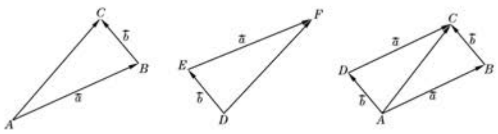


图 22－77

例题1　如图 22－77，已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$. 求作：

(1) $\vec{a}+\vec{b}$；　　(2) $\vec{b}+\vec{a}$.

解　(1) 如图 22－78(1)，在平面内任取一点 A，作向量$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$；再作$\overrightarrow{AC}$，则$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.



(1)　　(2)　　(3)

图 22－78

(2) 如图 22－78(2)，在平面内任取一点 D，作向量$\overrightarrow{DE}=\vec{b}$，$\overrightarrow{EF}=\vec{a}$；再作$\overrightarrow{DF}$，则$\overrightarrow{DF}=\vec{b}+\vec{a}$.

我们也可以在解第(1)小题的基础上，来解第(2)小题. 如图 22－78(3)，以 AB、BC 为邻边，作平行四边形 $ABCD$，再作向量$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{DC}$.

想一想

提出问题让学生思考，为引进零向量作铺垫.

零向量的方向是任意的，这是规定而不需要解释.零向量记作$\vec{0}$，与数“0”有根本区别，要引起学生注意，防止出错.

关于零向量的特性，可让学生与“0”类比，进行归纳.

例题 1

本题是向量加法的三角形法则的运用；安排这两个小题的目的是为引出向量加法的交换律.

【注意事项】

(1) 在向量加法的教学中，一方面要充分利用学生学习数的运算的已有经验，另一方面又要防止知识的负迁移.向量有方向，两个向量“合在一起”必须考虑方向问题，与两个数“合在一起”不一样，对于“合”的理解也应有不同.引进向量以及向量的加法，是学生数学观念的突破和提升，同时学生也要逐步转折和适应，必须引起注意.

(2) 向量加法的交换律，是通过对例题 1 中两个小题的作图求和向量进行归纳而得到的.实际上，在第(1)题作图的基础上再进行第(2)题的作图，并运用平行四边形的定义和性质进行说理、导出$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$的过程，就是证明向量加法满足交换律.从中可以看到，向量加法交换律与平行四边形定理(包括判定与性质)有密切联系，或者说向量加法交换律是平行四边形定理的代数形式，而平行四边形定理是向量加法交换律的几何形式，它们具有等价性.教学时，不必突出向量加法交换律的证明，也不必提出它与平行四边形定理的关系，但教师要理解有关知识的内涵，把握它们之间的内在联系，用较高的观点对学生进行学习指导.

由平行四边形的定义和性质，可知

$AD /\!/ BC, AD=BC; DC /\!/ AB, DC=AB.$

所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\vec{b}$；$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$.

得 $\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$.

把以上解法与第(1)小题联系起来，可见

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

也就是说，**向量的加法满足交换律.**

例题2 如图 22－79，已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$. 求作：

(1) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$；

(2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

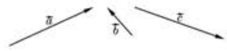


图 22－79

解 (1) 如图 22－80，在平面内任取一点 O，作向量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，得 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}$；再作$\overrightarrow{BC}=\vec{c}$，然后作向量$\overrightarrow{OC}$，则

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}.$$

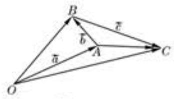


图 22－80

(2) 在图 22－80 中，作向量$\overrightarrow{AC}$，得 $\overrightarrow{AC}=\vec{b}+\vec{c}$，则

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

把第(1)(2)小题联系起来，可见

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

也就是说，**向量的加法满足结合律.**

由向量加法的交换律和结合律，可知三个向量相加，运算时可先将其中任意两个向量相加，所得的和向量再与第三个向量相加. 三个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 相加，可表示为

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$

练习 22.8(1)

1. 如图，已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，求作 $\vec{a}+\vec{b}$（只要求画图表示，不必写作法；以下同）.

（第 1 题）

2. 如图，已知平行四边形 $ABCD$，在图中作出下列两个向量的和向量.

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$；

第四节 平面向量及其加减运算 109

例题 2

本题同样是向量加法的三角形法则的运用；安排了两个小题的目的是为引出向量加法的结合律.

解题时，题(1)可让学生自己动手进行操作，画出和向量；然后要求学生在题(1)的图形上画题(2)和向量. 于是得到两题的和向量是同一向量，学生由此可归纳出向量加法满足结合律.

练习 22.8(1)

1. 略.

2. (1) $\overrightarrow{AD}$；$\overrightarrow{CB}$.(2) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}$.作图略.

3. $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{OD}$.

【注意事项】

(1) 例题 2 的解题过程，其实是向量加法结合律的证明. 关于向量加法的交换律和结合律，只要求学生确认，课本中没有呈现"证明"，教学时也不要讲证明，可指出我们验证了向量加法满足交换律和结合律.

(2) 在练习 22.8(1)中求作和向量时，不要求写作法，但是画图的操作应正确进行，如通过平行移动作一个向量等于已知向量，不能马虎了事，要给人以"两个向量相等"的直觉.

(3) 练习 22.8(1)第 3 题是利用向量加法的法则和运算律化简算式，要引导学生总结有关规律.

(2) $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}$.

(1)　　　　(2)

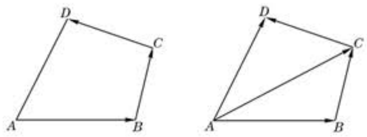
（第 2 题）

3. 填空：

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$_______，$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=$_______，$\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED}=$_______.

问题3

已知四边形 $ABCD$ 及向量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$(如图 22－81(1))，怎样作出$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$?



(1)　　　　(2)

图 22－81

不妨按照从左到右的顺序进行运算. 如图 22－81(2)，作向量$\overrightarrow{AC}$，则$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$；

再作$\overrightarrow{AD}$，则$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$.

所以，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

由此可见，当三个向量顺次首尾相接时，这三个向量相加所得的和是以第一个向量的起点为起点、第三个向量的终点为终点的向量. 如

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}.$$

想一想

已知向量$\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{AD}$，能直接写出$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$所得的和向量吗？

110 第二十二章　四边形

【本课重点】

导出几个向量相加的多边形法则；帮助学生掌握向量加法的法则并获得灵活运用的体验.

问题 3

引导学生探究几个向量相加的法则.

让学生通过画图操作，归纳三个向量相加的法则.

想一想

在画图操作的直观经验基础上，引导学生进行抽象概括，获得规律性的认识.

$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$.

【注意事项】

(1) 几个向量相加的多边形法则，是在操作实践中总结出来的.直接运用这一法则求作几个向量的和向量，简便易行.教学中，要引导学生自己总结多边形法则，并学会画图的操作方法.

(2) 几个向量的和仍然是向量，要让学生对此形成明确的认识并在表达时引起注意，特别是当和向量为零向量时不能写成“0”.

例题 3

本题是为引进几个向量相加的多边形法则作铺垫.画图方法的形成是以问题 3 的探究为基础,将从三个向量相加得到的规律推广到四个向量相加.

想一想

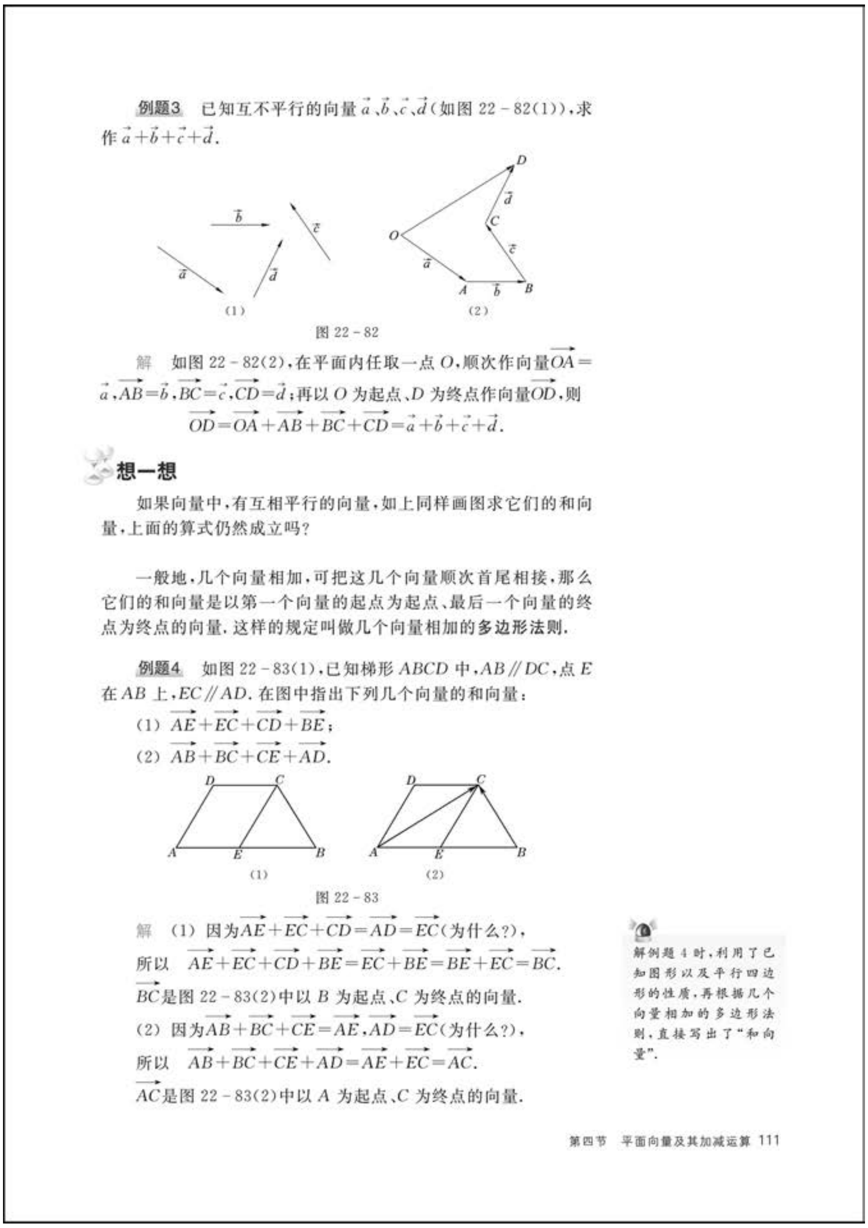
引导学生将求几个互不平行向量的和向量的画图方法用于其中有互相平行向量的情形,验证这样的方法同样适用.

在以上实践和思考的基础上,归纳出几个向量相加的多边形法则.

例题 4

本题是向量加法有关法则的运用,有一定的综合要求.

解题时,要结合图形的几何性质,找出相等向量,进行多个向量的加法运算;要引导学生利用法则化简算式,灵活思维.



例题3 已知互不平行的向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$(如图 22－82(1)),求作 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.

(1)　　(2)

图 22－82

解　如图 22－82(2),在平面内任取一点 O,顺次作向量 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$,$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$,$\overrightarrow{BC}=\vec{c}$,$\overrightarrow{CD}=\vec{d}$;再以 O 为起点、D 为终点作向量 $\overrightarrow{OD}$,则

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}.$$

想一想

如果向量中,有互相平行的向量,如上同样画图求它们的和向量,上面的算式仍然成立吗?

一般地,几个向量相加,可把这几个向量顺次首尾相接,那么它们的和向量是以第一个向量的起点为起点、最后一个向量的终点为终点的向量.这样的规定叫做几个向量相加的**多边形法则**.

例题4 如图 22－83(1),已知梯形 $ABCD$ 中,$AB /\!/ DC$,点 E 在 AB 上,$EC /\!/ AD$.在图中指出下列几个向量的和向量:

(1) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BE}$;

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AD}$.

(1)　　(2)

图 22－83

解　(1) 因为 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EC}$(为什么?),

所以 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BC}$ 是图 22－83(2)中以 B 为起点、C 为终点的向量.

(2) 因为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}$,$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EC}$(为什么?),

所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AC}$ 是图 22－83(2)中以 A 为起点、C 为终点的向量.

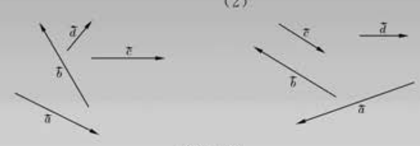
解例题 4 时,利用了已知图形以及平行四边形的性质,再根据几个向量相加的多边形法则,直接写出了“和向量”.

第四节　平面向量及其加减运算 111

练习 22.8(2)

1. 如图,已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$,求作 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.

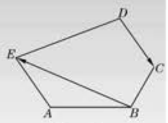
(1) (2)



(第 1 题)

2. 如图,已知五边形 $ABCDE$,适当选用它的几条边(除 DC 外)作向量,把下列向量用所作的向量的关系式表示出来.

(1) $\overrightarrow{DC}$; (2) $\overrightarrow{BE}$.



(第 2 题)

3. 填空:

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=$______,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=$______;

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}=$______,$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{EF}=$______;

(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=$______.

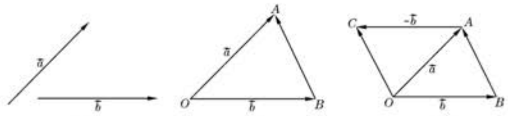
22.9 平面向量的减法

在数的运算中,减法是指"已知两个数的和及其中一个数,求另一个数"的运算,即减法是加法的逆运算.

同样地,向量的加法也有逆运算.已知两个向量的和及其中一个向量,求另一个向量的运算叫做**向量的减法**.

问题

已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$(如图 22-84(1)),如果 $\vec{a}$ 是 $\vec{b}$ 与另一个向量 $\vec{x}$ 相加所得的和向量,即 $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$,那么怎样求出向量 $\vec{x}$?



(1) (2) (3)

图 22-84

练习 22.8(2)

1. (1)(2)提示:利用几个向量相加的多边形法则画图.
2. (1) $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}$;
   (2) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BE}$,或 $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BE}$.
3. (1) $\vec{0}$,$\overrightarrow{BC}$;
   (2) $\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AC}$;
   (3) $\overrightarrow{AF}$.

【本课重点】

引进向量的减法;使学生掌握向量减法的法则,并初步学会向量加减的混合运算.

问题

根据向量减法的意义,提出问题引导学生思考如何进行减法运算.

【教学目标】

(1) 经历引进向量减法的过程,理解向量减法的意义,知道向量减法是向量加法的逆运算.
(2) 初步掌握向量减法的三角形法则;会将向量的减法转化为加法运算和进行向量的加减混合运算.
(3) 初步掌握向量加法的平行四边形法则;初步了解向量运算的实际应用.

指导学生解决问题时，要抓住“两个向量的和向量与其中一个向量共起点”这个关键.

通过问题的解决，建立向量减法的三角形法则.要指导学生结合图形观察和分析向量减法与加法两种运算的三角形法则之间有什么差别及联系.

以“数的减法可转化为加法运算”对学生进行启发，让学生导出向量的减法转化为加法运算的法则；验证的过程可由师生共同完成.

例题 1

本题是帮助学生理解向量减法的三角形法则，要求学生根据图形特征建立向量关系式.

例题 2

本题是向量的加减混合运算，帮助学生掌握向量加减的运算法则和明确加减混合运算的运算顺序.

根据向量加法的三角形法则，两个向量的和向量与其中一个向量共起点.

于是，在平面内任取一点 O，作向量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$；再作向量$\overrightarrow{BA}$（如图 22－84(2)）. 可知$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$，即 $\vec{b}+\overrightarrow{BA}=\vec{a}$.

因此，所求的向量 $\vec{x}$ 与向量$\overrightarrow{BA}$相等.

如果 $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$，那么 $\vec{x}$ 叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差向量，记作 $\vec{a}-\vec{b}$；这时，$\vec{a}$ 是被减向量，$\vec{b}$ 是减向量.

在这个问题中，$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$. 由此可见，可用作图的方法来求两个向量的差向量.

在平面内任取一点，以这点为公共起点作出这两个向量，那么它们的差向量是以减向量的终点为起点、被减向量的终点为终点的向量.

特别地，可以其中一个向量的起点为起点作另一个向量.

如上作图求两个向量的差向量的规定叫做**向量减法的三角形法则**.

在图 22－84(2)中，以 OB、BA 为邻边作平行四边形 $OBAC$，再作向量 AC 和 OC，如图 22－84(3). 由平行四边形的定义和性质，可得

$$\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{OB}=-\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA}.$$

因为$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$，即

$$\vec{a}+(-\vec{b})=\overrightarrow{OC},$$

而 $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OC}$，所以

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

也就是说，**减去一个向量等于加上这个向量的相反向量.**

由此，向量的减法可转化为向量的加法.

例题1 如图 22－85，已知 AD 是$\triangle ABC$ 的中线，试用向量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$表示向量$\overrightarrow{BD}$和$\overrightarrow{DC}$.

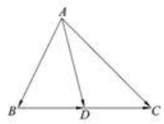


图 22－85

解 因为向量$\overrightarrow{BD}$的起点和终点分别是向量的$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$的终点，而$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AD}$共起点，所以

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.$$

同理可得 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$.

例题2 已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$（如图 22－86），求作：

(1) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$；　　(2) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$.

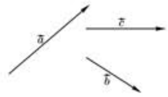


图 22－86

解 (1) 按照从左到右的顺序进行运算，可知

第四节　平面向量及其加减运算 113

【注意事项】

关于向量的减法，在向量代数中，常有两种定义方法，第一种是将向量的减法定义为向量加法的逆运算，即如果 $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$，则 $\vec{x}$ 叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差；第二种方法是在相反向量的基础上，用向量的加法来定义向量的减法.为便于学生接受，课本中先类比数的加减法，然后借助几何直观得出差向量的作法（向量减法的几何意义）；再按第一种方法给出向量减法的定义，然后利用相反向量按照第二种方法对向量减法的意义作出解释.

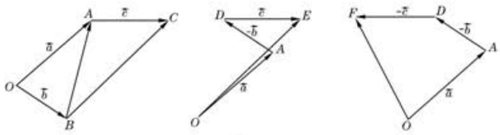
$$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}-\vec{b})+\vec{c}.$$

如图 22－87(1)，在平面内如取一点 O，作向量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，作向量$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，得

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}.$$

再作向量$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，然后作向量$\overrightarrow{BC}$，则

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=(\vec{a}-\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}.$$



(1) (2) (3)

图 22－87

几个向量相加减通常转化为几个向量相加，再运用多边形法则作图.

第(1)题也可以这样解：把向量的减法转化为加法，可知

$$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{c}.$$

根据向量加法的多边形法则，如图 22－87(2)，在平面内如取一点 O，顺次作向量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=-\vec{b}$，$\overrightarrow{DE}=\vec{c}$；再作向量$\overrightarrow{OE}$，则

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}.$$

(2) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})+(-\vec{c})$.

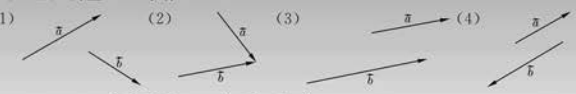
如图 22－87(3)，在平面内取一点 O，顺次作向量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=-\vec{b}$，$\overrightarrow{DF}=-\vec{c}$；再作向量$\overrightarrow{OF}$，则

$$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\vec{a}+(-\vec{b})+(-\vec{c})=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}.$$

练习 22.9(1)

1. 如图，已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，求作 $\vec{a}-\vec{b}$.

(1) (2) (3) (4)



2. 如图，已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$，求作 $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}$.

（第 2 题）

3. 填空：

(1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=$________；

(2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OC}=$________.

114 第二十二章　四边形

进行向量加减混合运算时，运算顺序的规定是与数的运算顺序一样的，要明确告诉学生.

通过例题 2，提出了“在进行向量加减混合运算时，通常将减法转化为加法”的基本思路，这样便于利用几个向量相加的多边形法则进行作图.

练习 22.9(1)

1. 略.
2. 提示：通常将算式中的减法转化为加法，再利用几个向量相加的多边形法则作图.
3. (1) $\vec{0}$；
   (2) $\overrightarrow{BA}$.

【本课重点】

引进向量加法的平行四边形法则，使学生掌握平行四边形法则，并会用于解决简单的实际问题.

例题 3

本题主要为导出向量加法的平行四边形法则，并让学生看到平行四边形中两个“对角线向量”分别与两个“有公共起点的边向量”之间的关系.

利用向量加法和减法各自的三角形法则，得到平行四边形中两个“对角线向量”分别是两个“有公共起点的边向量”的和向量与差向量.

在以上学习的基础上，导出向量加法的平行四边形法则；同时指出，另一“对角线向量”是这两个“边向量”的差向量，特别要注意差向量的方向.

例题 4

通过本题教学，使学生熟悉运用向量加法的平行四边形法则求和向量的画图方法.

例题 5

本题是向量加法的平行四边形法则在解决简单实际问题中的应用.

例题3 如图 22 - 88，已知平行四边形 $OACB$，设$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，试用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示下列向量：

(1) $\overrightarrow{OC}$；　　(2) $\overrightarrow{AB}$.

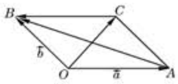


图 22 - 88

解 (1) 根据平行四边形的定义和性质，可知$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，所以

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}.$$

(2) 因为向量$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$共起点，向量$\overrightarrow{AB}$以向量$\overrightarrow{OA}$的终点为起点、以向量$\overrightarrow{OB}$的终点为终点，所以

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}.$$

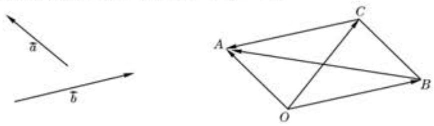
由例题 3(1)可以看到，如果 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 是两个不平行的向量，那么求它们的和向量时，可以在平面内任取一点为公共起点，作两个向量分别与 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 相等；再以这两个向量为邻边作平行四边形；然后以所取的公共起点为起点，作这个平行四边形的对角线向量，则这一对角线向量就是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和向量.

在平面内所取这点可以是已知一个向量的起点.

上述规定叫做**向量加法的平行四边形法则**.

在如上所作的平行四边形中，以另一条对角线作向量，可使这一对角线向量是这两个向量的差向量，这个差向量与被减向量共终点.

例题4 如图 22 - 89(1)，已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，用向量加法的平行四边形法则作向量 $\vec{a}+\vec{b}$，再作出向量 $\vec{a}-\vec{b}$.



(1)　　(2)

图 22 - 89

作法 1. 在平面内取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$；

2. 以 OA、OB 为邻边，作▱$OBCA$；

3. 分别作向量$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{BA}$.

则$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$.（如图 22 - 89(2)所示）

例题5 在一段宽阔的河道中，河水以 40 米/分的速度向东流去. 一艘小艇顺流航行到 A 处，然后沿着北偏东 10°方向以 12 千米/时的速度驶往北岸，请用作图方法指出小艇实际航行的方向.

小艇从 A 处开始，按照“北偏东 10°”的方向航行，航速 12 千米/时，即 200 米/分. 小艇同时又受到向东流动的河水的影响，所以实际航行的方向会偏离原定的航向.

第四节 平面向量及其加减运算 115

【注意事项】

(1) 将向量加法的平行四边形法则安排在向量减法这一节中，一是为了分散向量加法学习的难点，加强向量加法的三角形法则的运用；二是在向量减法一节引进向量加法的平行四边形法则，可借助于运用向量减法的三角形法则的画图基础，并有利于展开对平行四边形中有关向量的整体讨论.

(2) 向量加法的平行四边形法则在物理中的运用很多，要让学生掌握这一法则. 向量加法的平行四边形法则与三角形法则的表现形式不同，但本质上是一致的. 要让学生分清两个法则在作图方法上的差别，并注意合理选用法则.

分析　从 A 处开始，经过 1 分钟的时间，河水的运动可用向量 $\vec{m}$："向东，40 米"来表示，小艇的运动可用向量 $\vec{n}$："北偏东 10°，200 米"来表示. 小艇实际航行的运动可用向量 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的和向量表示.

解　设向量 $\vec{m}$ 为"向东，40 米"，向量 $\vec{n}$ 为"北偏东 10°，200 米". 可知 $|\vec{n}|=5|\vec{m}|$，于是取 $|\vec{m}|$ 为单位长.

如图 22－90 所示，作向量 $\overrightarrow{AM}=\vec{m}$，向量 $\overrightarrow{AN}=\vec{n}$；再作平行四边形 $AMGN$，然后作向量 $\overrightarrow{AG}$. 则向量 $\overrightarrow{AG}$ 的指向就是小艇实际航行的方向.

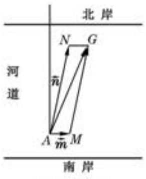
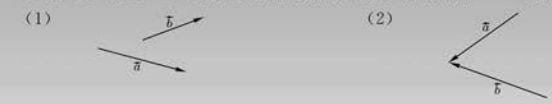


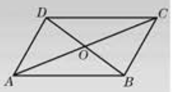
图 22－90

练习 22.9(2)

1. 如图，已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，用向量加法的平行四边形法则求作 $\vec{a}+\vec{b}$，再作出向量 $\vec{a}-\vec{b}$.



2. 如图，已知平行四边形 $ABCD$，对角线 AC 与 BD 相交于点 O. 设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，试用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示下列向量：
$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$.



（第 2 题）

3. 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$.
（1）试用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{DB}$；
（2）在实数运算中，$-(a+b)=-a-b$，$-(a-b)=-a+b$. 在向量运算中，有类似的等式吗？

116 第二十二章　四边形

练习 22.9(2)

1. 略.
2. $\overrightarrow{OC}=-\vec{a}$，
$\overrightarrow{OD}=-\vec{b}$，
$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$，
$\overrightarrow{BC}=-\vec{a}-\vec{b}$，
$\overrightarrow{CD}=\vec{a}-\vec{b}$，
$\overrightarrow{DA}=\vec{a}+\vec{b}$.
3. （1）$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$，
$\overrightarrow{CA}=-\vec{a}-\vec{b}$，
$\overrightarrow{BD}=\vec{a}-\vec{b}$，
$\overrightarrow{DB}=\vec{b}-\vec{a}$；
（2）有类似等式.

【注意事项】

在向量教学中，要重视向量与生活实际的联系.课本中对这方面的联系，包括向量知识的引入和应用两个层面.比如向量的概念和加法法则的引入，有生活实际的背景；例题 5 的安排体现了向量知识用于生活实际的要求.

本章主要采用演绎推理的方法，着重对平行四边形和梯形进行了比较系统的研究.另外，引进了平面向量的概念及加减运算，把向量的初步知识整合在平行四边形的运用中.

对本章的小结，可指导学生以知识结构框图为线索，将本章内容进行系统整理，认识基本概念之间的内在联系和基本定理之间的逻辑关联；同时，从中领略几何演绎的思想方法和定理系统的建立过程，提高对数学的理解力和鉴赏力.还要引导学生体会几何研究的基本方法以及各种方法的互补作用，充分认识演绎推理的威力，并重视论证之前的实验和分析，提高几何学习与研究的能力.关于向量内容的小结，要依据课本抓住要点，帮助学生明确并落实教学基本要求.

Benzhang Xiaojie

22

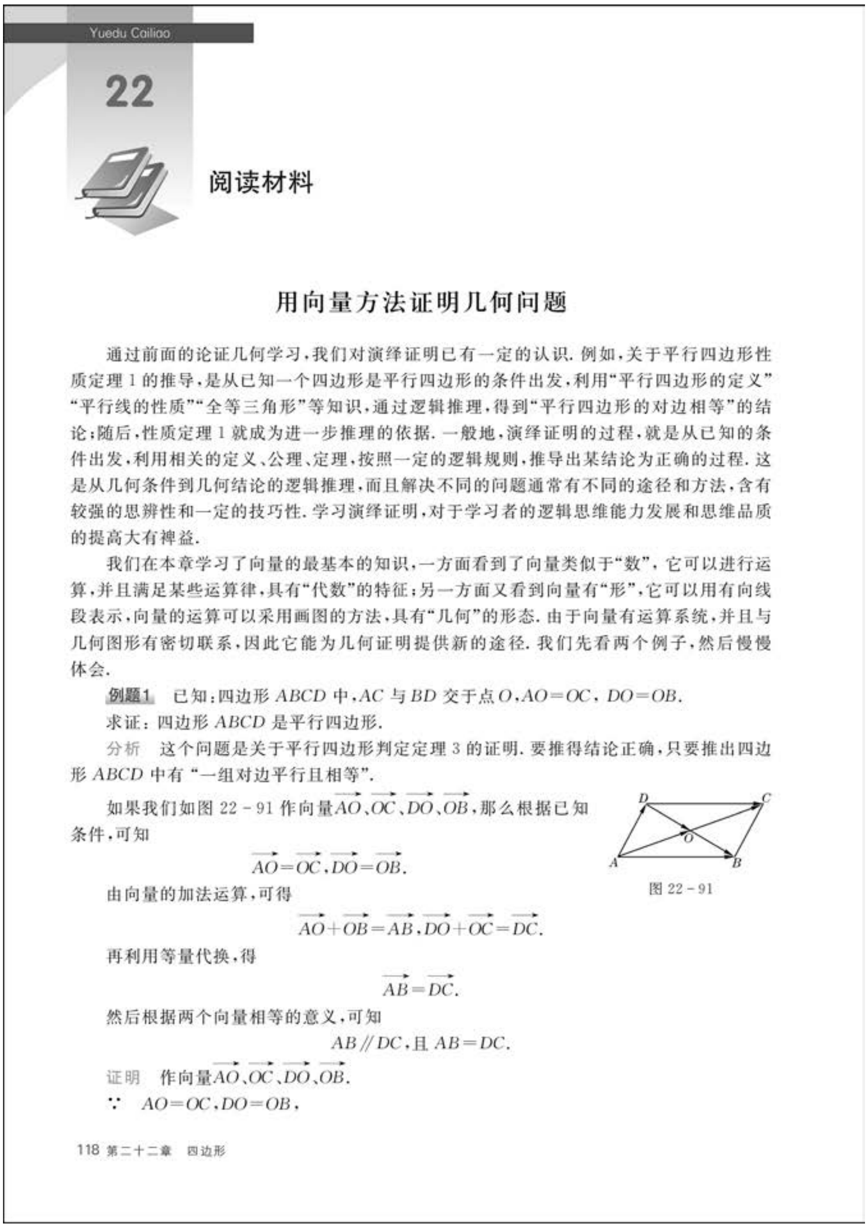
本章小结

我们在本章学习了多边形的有关概念，着重研究了平行四边形和梯形这两类特殊的四边形.在平行四边形中，导出了平行四边形的性质定理和判定定理，再对矩形、菱形以及正方形进行了研究；在梯形中，主要研究了等腰梯形的性质和判定.我们还学习了向量的初步知识，知道向量的概念以及向量的加法和减法.

平行四边形的定义、性质和判定是本章的核心内容；矩形、菱形以及正方形都有特殊的性质和判定方法.等腰梯形的性质定理、三角形中位线定理等的推导，是以平行四边形的有关定理为依据的，是平行四边形知识的运用；向量的加法及其交换律的推导，也用到了平行四边形的知识.平行四边形的有关定理，还是证明两条线段相等、两个角相等、两条直线平行或垂直的重要依据.

在研究四边形的过程中，采用了从一般图形到特殊图形的研究方法，以特殊的、也是常见的图形为研究重点.在研究有关图形的性质时，重视从直观感知到演绎推理，注重推理证明；对有关判定定理的条件探究，注意从相关性质定理的逆命题进行分析，强调理性思维.通过本章的学习，我们可以进一步体会到，直观经验是几何的基础，演绎证明是几何的支柱，几何知识之间联系紧密，有严格的逻辑结构；体会到运用逻辑推理的方法才能认识图形的本质，抓住事物的本质特征才能把握它们之间的联系和区别.

本章知识结构图如下：



Yuedu Cailiao

22

阅读材料

用向量方法证明几何问题

通过前面的论证几何学习，我们对演绎证明已有一定的认识. 例如，关于平行四边形性质定理 1 的推导，是从已知一个四边形是平行四边形的条件出发，利用"平行四边形的定义""平行线的性质""全等三角形"等知识，通过逻辑推理，得到"平行四边形的对边相等"的结论；随后，性质定理 1 就成为进一步推理的依据. 一般地，演绎证明的过程，就是从已知的条件出发，利用相关的定义、公理、定理，按照一定的逻辑规则，推导出某结论为正确的过程. 这是从几何条件到几何结论的逻辑推理，而且解决不同的问题通常有不同的途径和方法，含有较强的思辨性和一定的技巧性. 学习演绎证明，对于学习者的逻辑思维能力发展和思维品质的提高大有裨益.

我们在本章学习了向量的最基本的知识，一方面看到了向量类似于"数"，它可以进行运算，并且满足某些运算律，具有"代数"的特征；另一方面又看到向量有"形"，它可以用有向线段表示，向量的运算可以采用画图的方法，具有"几何"的形态. 由于向量有运算系统，并且与几何图形有密切联系，因此它能为几何证明提供新的途径. 我们先看两个例子，然后慢慢体会.

例题1 已知：四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 交于点 O，$AO=OC$，$DO=OB$.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

分析 这个问题是关于平行四边形判定定理 3 的证明. 要推得结论正确，只要推出四边形 $ABCD$ 中有"一组对边平行且相等".

如果我们如图 22－91 作向量 $\overrightarrow{AO}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{DO}$、$\overrightarrow{OB}$，那么根据已知条件，可知

图 22－91

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}，\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}.$$

由向量的加法运算，可得

$$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}，\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DC}.$$

再利用等量代换，得

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}.$$

然后根据两个向量相等的意义，可知

$$AB\parallel DC，且 AB=DC.$$

证明 作向量 $\overrightarrow{AO}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{DO}$、$\overrightarrow{OB}$.

∵ $AO=OC$，$DO=OB$，

118 第二十二章 四边形

【设计意图】

本材料用举例说明的方式，介绍了用向量方法证明几何问题的基本思路.希望学生通过阅读本材料，初步了解向量知识在平面几何中的运用，感受几何证明的新方法，开阔眼界；初步体会向量的工具价值，领略用向量方法证明几何问题的过程和优越性，激发学生学习向量知识的兴趣和运用向量知识的积极性.

【活动建议】

以指导学生自主阅读为主，可组织学生写写读后感和交流学习体会.

在数学基础较好的班级，可选用材料中的例题或另编类似的例题，组织课堂教学，加强学习指导，帮助学生加深对用向量方法进行几何证明的了解.

还可参照本材料，编选活动资料，组织学有余力的学生进行探究性学习.在九年级完成了向量的线性运算教学以后，可进一步充实材料，组织学习活动.

【注意事项】

在初中进行的向量教学中，不要求学生会用向量方法证明几何问题.

向量是综合几何向解析几何过渡的桥梁;用向量方法证明几何题是向量代数在几何中的有效运用,体现了几何代数化的思想.由于初中的向量内容安排不多,没有形成向量代数的完整结构,因此学生只能学到初步的向量知识,只能进行向量运用的初步尝试.用向量方法证明几何题与用演绎推理方法证明几何题,它们的证明过程有明显的不同,但学生在现阶段难于体会.提供的框图,一是帮助学生认识用向量方法证明几何题的过程,二是引导有兴趣的学生进一步学习用向量方法证明几何题.

又 $\overrightarrow{AO}$与$\overrightarrow{OC}$同向,$\overrightarrow{DO}$与$\overrightarrow{OB}$同向,

∴ $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$.

∵ $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DC}$,

∴ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,

得 $AB \parallel DC$,且 $AB=DC$.

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

在上面的证明过程中,没有通过两个三角形全等和利用平行线的判定来推导 $AB \parallel DC$ 且 $AB=DC$,而是运用向量及其加法运算来获得结论,这就是用向量方法进行几何证明.

例题2 已知:如图 22-92,四边形 $ABCD$ 是平行四边形,点 E、F 在对角线 BD 所在的直线上,$BE=DF$.

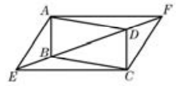


图 22-92

求证:四边形 $AECF$ 是平行四边形.

证明 作向量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{AE}$和$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{FD}$、$\overrightarrow{FC}$.

∵ $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB \parallel DC$,$AB=DC$,

得 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

∵ BE 与 FD 在一直线上,$BE=FD$,

∴ $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{FD}$.

∵ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}$,$\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FC}$,

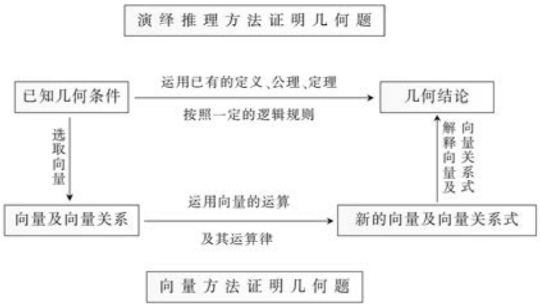
∴ $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FC}$,

得 $AE \parallel FC$,$AE=FC$.

∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

我们采用向量方法证明了例题 2 的结论正确. 如果采用演绎推理方法来证明,不添加辅助线时,那么要先证明两个三角形全等,还要利用平行线的判定定理.

用向量方法证明几何题与用演绎推理方法证明几何题,它们的证明过程有明显的不同:



用向量方法证明几何题，要适当选取向量；正确进行向量运算；恰当解释运算结果．其基本过程是向量的运用，关键是进行几何关系与向量关系式之间的转化．而且，它有一定的程式，基本依据是向量的运算及其运算律，思路简明．

如果你对用向量方法证明几何题有兴趣，那么还要进一步学习向量的其他运算．当然，向量的运用还有很多，证明几何题只是牛刀小试．

120 第二十二章　四边形

用向量方法证明几何题，思路简明，降低了思辨难度而注重算法性．初中几何的主要内容是综合几何，对培养和发展学生的逻辑思维能力有重要作用．在学生能较好地运用演绎推理方法的基础上，可鼓励他们学习用向量方法证明几何题，增强用代数方法解决几何问题的意识和能力．

第二十三章　概 率 初 步

一、教学目标

1. 理解必然事件、不可能事件、随机事件等概念，知道确定事件与不确定事件的含义；对生活中的一些简单的事件，能辨别它是哪一类事件.

2. 知道事件的概率的含义.认识随机事件的概率与这个事件发生之间的关系；获得参与随机试验活动过程的经历，知道随机事件的概率可用大数次试验的频率来估计.

3. 知道等可能试验的概念；初步掌握等可能试验中等可能试验事件的概率计算公式；会用树形图分析等可能试验的全部可能结果；会将一些与几何图形有关的简单概率问题转化为等可能试验中的概率问题来解决.

4. 树立初步的概率意识，初步认识机会与风险、规则公平性与决策合理性等，体会用概率知识解释生活中的简单概率问题.

二、课时安排

本章教学共 8 课时，建议分配如下：

23.1	确定事件和随机事件	1 课时
23.2	事件发生的可能性	1 课时
23.3	事件的概率	3 课时
23.4	概率计算举例	2 课时
本章小结		1 课时

三、设计说明

学生以往学习的数学中，主要是研究确定性问题.而在生活中有大量的随机事件，本章主要是研究随机事件发生的规律，但只是初步的、体验性的研究.

课本中首先从生活实例及数学常识中引出必然事件、不可能事件(两者同属确定事件)及随机事件的概念；然后提出事件发生的可能性大小并进行定性的描述，再引入事件的概率并进行定量的计算.用数字来表示事件发生的可能性大小，是一种自然的联想.为了让学生对概率的本质有所体会，课本中安排了摸牌试验，用以说明事件的概率一般总是通过大数次的随机试验，在统计意义下来确定；并指出了试验频率与概率之间的关系，指出可通过大数次的试验来估计事件的概率.

在明确了概率的有关基本概念的基础上，提出了等可能试验，通过实例说明了等可能试验的概率计算公式，着重研究等可能试验中事件的概率(古典概型).对于在等可能试验过程中涉及分步试验的问题，课本中介绍了画“树形图”的方法，利用“树形图”所具有的直观性，来分析所有等可能试验的结果，再运用公式进行概率计算.还通过习题介绍了列表法，用来解决涉及两次等可能试验交叉结果的概率问题.最后安排了概率计算举例，进一步说明概率计算的基本方法及其基本运用；并引导学生体会概率的意义，学习用概率知识解释生活中的一些概率问题.

学生在六年级曾经与概率有过初步的接触，但那时是作为分数应用的内容来安排教学的，没有真正涉及概率的有关概念.因此，本章内容是重起炉灶，让学生对概率进行相对集中的学习，以获得一些初步的概率知识和形成初步的概率意识.学生在高中阶段还要继续学习概率知识，现在初中阶段所学的内容，不涉及集合，不涉及大数定理，更不涉及对立、相容和独立事件概念，以及概率加法公式、期望值等；在概率计算的方法中，主要采用枚举法而不涉及排列组合.

四、教学建议

1. 重视概率与生活实际的联系.生活中充满了随机事件,各类随机事件发生的可能性有大有小,用概率可以度量随机事件发生可能性的大小.要结合生动有趣的事例来阐述内容,激发学生的学习兴趣;要联系生活实际,让学生通过实例来学习概率的初步知识,知道概率与生活的联系,学习概率是适应社会生活的需要;要通过用概率知识解释生活中的概率问题,帮助学生增强应用意识,并在用概率知识解释生活中的概率问题的过程中逐步形成概率意识.

2. 关注学生的学习过程.学生学习概率知识,面临着认知对象、数学观念、思考方法等的改变,有一个逐步了解和适应的过程.必须适当降低认识的起点,严格控制内容的难度.应通过生活中的具体事例,帮助学生认识随机现象和概率问题;要用朴素的语言描述有关概念,用典型的事例解说思考方法和概率计算过程,切实降低理论要求.摸牌、摸球、掷骰子等,是学习概率的简明载体,要重视发挥这些事例的作用.在等可能试验中出现分步或交叉试验的概率问题,是本章教学的一个难点,要注意画树形图的分析方法的运用.

为帮助学生认识概率的含义,在教学中要重视试验,让学生在试验中探究事件发生的规律,领会概率的含义;为帮助学生正确运用概率计算的公式,在教学中要强调分析并重视分析方法,让学生学会画树形图,会利用树形图直观地解决一些等可能试验的概率问题.要指导学生正确理解随机事件、等可能试验等概念和注意等可能试验中事件的概率计算公式的应用范围,帮助学生纠正一些由确定性思维负迁移所产生的错误观念和由盲目套用公式进行概率计算而产生的错误.

3. 切实把握“概率初步”的教学要求.本章内容是概率初步,教学的重点是必然事件、不可能事件、随机事件、频率、概率、等可能试验等概念,以及基于等可能试验的事件及其概率计算公式等;还要关注学生对分类讨论思想方法、树形图分析法的学习和运用,以及对解决简单概率问题的体验.要注意难度控制,比如设计分步或交叉的试验时,所涉及的等可能试验不超过两步或等可能结果总数不超过 20 个.

要强调学习概率的现实意义,关注学生的概率意识的形成,关注用概率知识解释生活中的概率问题的学习.

五、评价建议

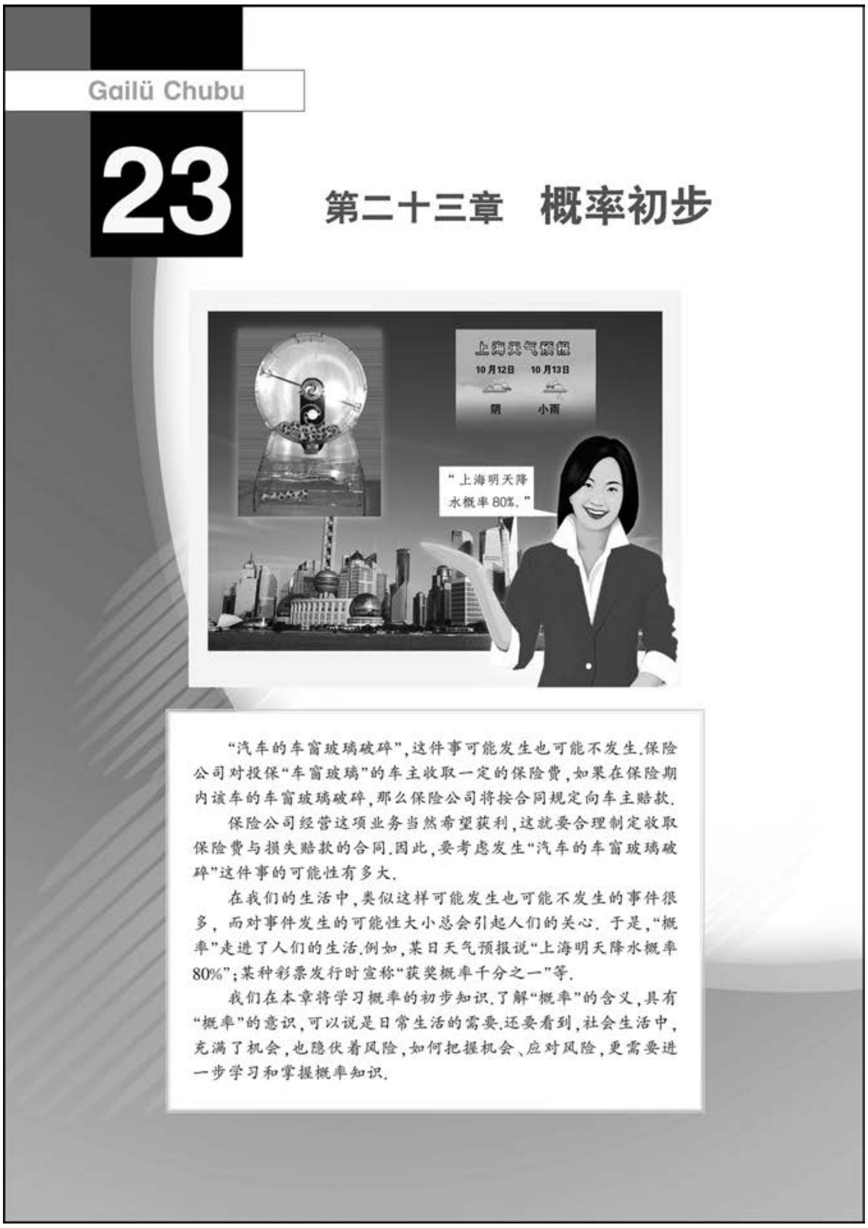
1. 关注学生对概率的有关基本概念以及概率计算的基本方法的掌握.对学生学习情况的检测,要把握教学基本要求.比如:能正确辩识日常生活中的随机事件与确定事件;知道频率与概率的区别与联系;理解等可能试验并初步掌握相应的概率计算公式;会根据具体问题画出树形图,会解决需两步或三步试验的等可能试验中事件的概率问题;能用所学的概率知识解决简单的概率问题、解释生活中的一些简单的概率问题和纠正一些错误观点等.

2. 关注学生在学习过程的表现.要重视评价学生在实验活动中的表现,比如学生参与活动的积极性、团队合作的精神、实事求是的作风等;重视评价学生的学习态度和方法,比如认真参加讨论、敢于发表意见和提出问题,试验操作规范、收集数据真实,联系生活实际、认真思考分析等.还要关注学生自主的探究态度和科学的实验方法的养成,通过评价进行积极引导和促进.本章的知识内容,与学生以往所学的知识关联不多,而与学生生活实际的联系密切,本章的学习又是“随机性数学”的起步,要采用鼓励性评价,促进他们“成功学习”.

在章头语中，通过日常生活中“汽车窗玻璃保险”的事例，让学生感知不确定事件及可能性大小；再以天气预报中的降水概率、买彩票的中奖概率，让学生意识到生活中到处有概率问题.由此提出本章学习的内容和要求，并概述了本章学习的意义.

章头图是关于天气预报和摇号抽奖的画面.

教学中可再列举一些生活中的随机现象和概率问题，引起学生学习概率的兴趣.



Gailü Chubu

23 第二十三章 概率初步

“汽车的车窗玻璃破碎”，这件事可能发生也可能不发生.保险公司对投保“车窗玻璃”的车主收取一定的保险费，如果在保险期内该车的车窗玻璃破碎，那么保险公司将按合同规定向车主赔款.

保险公司经营这项业务当然希望获利，这就要合理制定收取保险费与损失赔款的合同.因此，要考虑发生“汽车的车窗玻璃破碎”这件事的可能性有多大.

在我们的生活中，类似这样可能发生也可能不发生的事件很多，而对事件发生的可能性大小总会引起人们的关心. 于是，“概率”走进了人们的生活.例如，某日天气预报说“上海明天降水概率80%”；某种彩票发行时宣称“获奖概率千分之一”等.

我们在本章将学习概率的初步知识.了解“概率”的含义，具有“概率”的意识，可以说是日常生活的需要.还要看到，社会生活中，充满了机会，也隐伏着风险，如何把握机会、应对风险，更需要进一步学习和掌握概率知识.

Shijian jiqi Fasheng De Kenengxing

第一节　事件及其发生的可能性

23.1　确定事件和随机事件

我们曾经讨论过，“从一副没有大、小王的扑克牌中任意取出一张牌，这张牌的花色是红桃”，这种现象可能出现也可能不出现．还可以看到，在这副牌中，“取出的这张牌是大王”肯定不会出现，“取出的这张牌不是大王”肯定会出现．

再看一看，下列现象会不会出现：

（1）上海明天会下雨；

（2）将要过马路时恰好遇到红灯；

（3）室温低于-5℃时，盆内的水结成了冰；

（4）有人把石头孵成了小鸡．

上面列举的现象中，（1）和（2）可能出现也可能不出现；（3）必定出现；（4）必定不出现．

在一定条件下必定出现的现象叫做**必然事件**(certain event)，例如上述现象（3）．

在一定条件下必定不出现的现象叫做**不可能事件**(impossible event)，例如上述现象（4）．

必然事件和不可能事件统称为**确定事件**．

那些在一定条件下可能出现也可能不出现的现象叫做**随机事件**(random event)，也称为**不确定事件**，例如上述现象（1）和（2）．

试分别举几个在现实生活中必定出现、必定不出现、不一定出现的现象．

例题1　判断下列事件中，哪些是必然事件，哪些是不可能事件，哪些是随机事件：

（1）从地面往上抛出的篮球会落下；

（2）软木塞沉在水底；

（3）买一张彩票中大奖；

（4）抛掷一枚硬币，落地后正面朝上．

规定硬币有数字的一面为正面，另一面为反面．

解　（1）由于重力的作用，“从地面往上抛出的篮球会落下”是必然事件．

（2）软木塞的密度比水小，不可能沉在水底，所以“软木塞沉在水底”是不可能事件．

（3）买一张彩票中大奖虽然可能性很小，但确有可能发生，所以“买一张彩票中大奖”是随机事件．

（4）抛掷一枚硬币，落地后正、反面都有可能朝上，所以“抛掷一枚硬币，落地后正面朝上”是随机事件．

122 第二十三章　概率初步

本课从具体例子出发，说明有些事情一定出现，有些事情一定不出现，而有些事情可能出现也可能不出现．然后，进一步讨论生活中的一些现象，引出“必然事件”“不可能事件”，指出两者均为“确定事件”，再引出“随机事件”．

例题 1

列举日常生活中的实例，要求学生根据生活经验判断事件的类型，帮助学生理解“必然事件”“不可能事件”“随机事件”．

要注意描述各种现象的前提或条件，如“篮球会落下”是地球有引力．

硬币的正、反面国家有规定，在实验情境下，也可自己约定．

【教学目标】

（1）理解必然事件、不可能事件、随机事件的概念，知道确定事件与必然事件、不可能事件的关系，会用生活中的简单事例进行说明．

（2）能区分生活中的必然事件、不可能事件及随机事件．

例题 2

要求学生用学过的数学知识来判断必然事件、不可能事件和随机事件.

同样要注意各事件的条件.如题(1)中“在实数范围内”的条件;题(3)中“十进制”的条件.又如练习 23.1 第 2(3)中“平面内”的条件等.

一个事件总有如下三者必居其一的属性:“发生”或“不发生”或“可能发生也可能不发生”,也就是说事件具有“发生性”的基本属性.课本中这一段文字,实际上指出了“事件”的“发生性”基本属性.

议一议

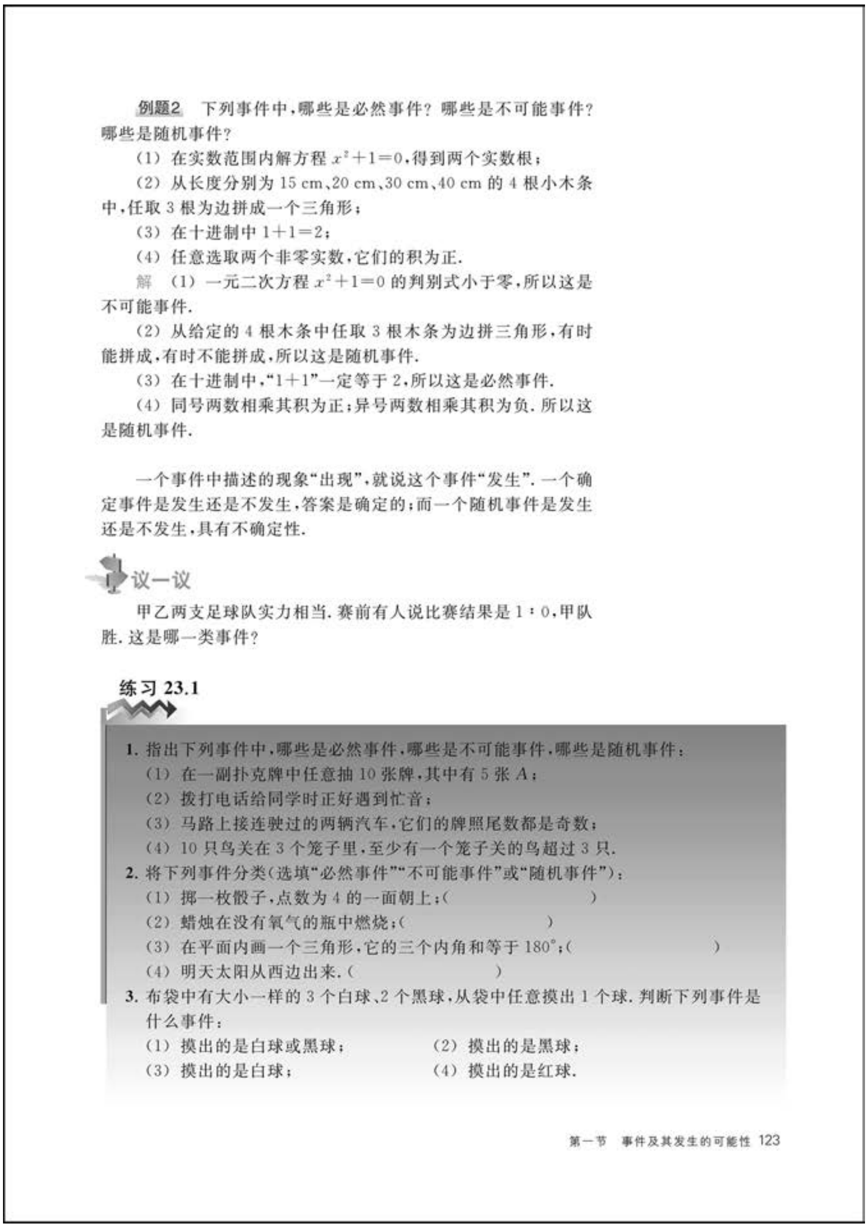
让学生议论是为引起学习兴趣.预测的比赛结果是随机事件.

练习 23.1

1. (1) 不可能事件;
(2) 随机事件;
(3) 随机事件;
(4) 必然事件.

2. (1) 随机事件;
(2) 不可能事件;
(3) 必然事件;
(4) 不可能事件.

3. (1) 必然事件;
(2) 随机事件;
(3) 随机事件;
(4) 不可能事件.



例题2 下列事件中,哪些是必然事件?哪些是不可能事件?哪些是随机事件?

(1) 在实数范围内解方程 $x^2+1=0$,得到两个实数根;

(2) 从长度分别为 15 cm、20 cm、30 cm、40 cm 的 4 根小木条中,任取 3 根为边拼成一个三角形;

(3) 在十进制中 $1+1=2$;

(4) 任意选取两个非零实数,它们的积为正.

解 (1) 一元二次方程 $x^2+1=0$ 的判别式小于零,所以这是不可能事件.

(2) 从给定的 4 根木条中任取 3 根木条为边拼三角形,有时能拼成,有时不能拼成,所以这是随机事件.

(3) 在十进制中,“1+1”一定等于 2,所以这是必然事件.

(4) 同号两数相乘其积为正;异号两数相乘其积为负.所以这是随机事件.

一个事件中描述的现象“出现”,就说这个事件“发生”.一个确定事件是发生还是不发生,答案是确定的;而一个随机事件是发生还是不发生,具有不确定性.

议一议

甲乙两支足球队实力相当.赛前有人说比赛结果是 1∶0,甲队胜.这是哪一类事件?

练习 23.1

1. 指出下列事件中,哪些是必然事件,哪些是不可能事件,哪些是随机事件:
(1) 在一副扑克牌中任意抽 10 张牌,其中有 5 张 A;
(2) 拨打电话给同学时正好遇到忙音;
(3) 马路上接连驶过的两辆汽车,它们的牌照尾数都是奇数;
(4) 10 只鸟关在 3 个笼子里,至少有一个笼子关的鸟超过 3 只.

2. 将下列事件分类(选填“必然事件”“不可能事件”或“随机事件”):
(1) 掷一枚骰子,点数为 4 的一面朝上;(　　　　)
(2) 蜡烛在没有氧气的瓶中燃烧;(　　　　)
(3) 在平面内画一个三角形,它的三个内角和等于 180°;(　　　　)
(4) 明天太阳从西边出来.(　　　　)

3. 布袋中有大小一样的 3 个白球、2 个黑球,从袋中任意摸出 1 个球.判断下列事件是什么事件:
(1) 摸出的是白球或黑球;　　(2) 摸出的是黑球;
(3) 摸出的是白球;　　(4) 摸出的是红球.

第一节 事件及其发生的可能性 123

【注意事项】

(1) 教学中可补充一些事件供学生讨论,也可让学生自己举例说明什么是“必然事件”“不可能事件”和“随机事件”.要注意把握讨论的主题,不要转向无谓的争论;重点放在随机事件上.

(2) 有些学生对不可能事件是确定事件不容易理解,实际上确定事件只是指该事件发生或不发生是确定的,并不是对事件本身的肯定.学生对确定事件的概念只要知道,而对必然事件、不可能事件和随机事件的概念要求理解.

(3) 练习 23.1 第 1(4)题涉及“抽屉原理”,但不要提出这一原理;让学生直观分析结论.

23.2 事件发生的可能性

路口的交通信号灯有红、绿、黄三种颜色，随意经过路口时，遇到某种颜色的信号灯是不确定的.

问题

某路口的交通信号灯的时间设置为：红灯 30 秒，绿灯 50 秒，黄灯 3 秒. 某人随意经过这一路口时，遇到哪种颜色的信号灯的可能性最大？遇到哪种颜色的信号灯的可能性最小？

这是通过比较各种结果发生所占有的时间长短来判断的. 一般来说，随机事件发生的可能性大小，要经过大数次的试验来确定.

某人随意经过这一路口时，正好遇到某种颜色的信号灯，是随机事件. 因为绿灯持续的时间最长，黄灯持续的时间最短，所以遇到绿灯的可能性最大，遇到黄灯的可能性最小.

例题1 木盒中装有 10 个红球、3 个黄球和 1 个白球，这些球只是颜色不同. 从木盒中任意摸出 1 个球，试比较下列事件发生的可能性大小，并按可能性从大到小的顺序把它们排列出来：

(1) 摸出 1 个黄球； (2) 摸出 1 个白球；

(3) 摸出 1 个绿球； (4) 摸出 1 个红球；

(5) 摸出 1 个球的颜色是红色或黄色或白色.

解 任意摸出的那个球是什么颜色，与盒中装有这种颜色的球的个数有关. 如果用 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5 分别表示事件(1)(2)(3)(4)(5)发生的可能性大小，那么把它们从大到小排列的顺序是：

$$P_5, P_4, P_1, P_2, P_3.$$

各种事件发生的可能性有大有小，可用普通词语来表述. 如上述事件中，事件(5)是必然事件，事件(3)是不可能事件，就分别说它们发生的可能性为“必然”“不可能”；事件(1)(2)(4)是随机事件，通过盒中装有这种颜色的球的个数进行分析，就说事件(4)“很有可能”发生；事件(2)“不太可能”发生；而事件(1)“有可能”发生.

例题2 比较下列事件发生的可能性大小，并将它们按可能性从小到大的顺序排列：

(1) 买一张发行量很大的彩票恰好中五百万大奖；

(2) 连续雨天中间的一天，在路上遇到撑伞的行人；

(3) 抛掷一枚硬币，落地后反面朝上.

解 用 P_1、P_2、P_3 分别表示事件(1)(2)(3)发生的可能性大小.

根据生活经验，可知事件(1)发生的可能性很小，而事件(2)发

124 第二十三章 概率初步

问题

通过交通信号灯，让学生感受生活中充满了随机事件，同时关注随机事件发生的可能性有大有小.只要求学生根据各颜色信号灯亮的时间长短来判断事件发生的可能性大小，不要求进行计算.

例题 1

本题只需根据球的数量来判断各事件发生可能性大小，是经验性的概率估计.要求学生依据生活经验将 P_i 从大到小排列，不涉及数值计算.

在学生通过比较对 P_i 的大小有了感性认识的基础上，再让学生尝试用普通语言对可能性大小进行定性陈述.

例题 2

本题以具体事例帮助学生对事件发生的可能性有大有小增加感性认识.

【教学目标】

(1) 知道各种事件发生的可能性大小有不同，能根据经验判断一些随机事件发生的可能性的大小并排出大小顺序.

(2) 会用“一定发生”“很有可能发生”“可能发生”“不太可能发生”“一定不会发生”等词语来表述事件发生的可能性大小.

【注意事项】

(1) 交通灯问题中，各种颜色的灯亮时间是对一个循环而言.例题 1 中用 P_i($i=1$、2、…、5)表示摸出各色球的可能性大小，渗透了概率的符号语言.

(2) 在例题 1 和例题 2 中，通过比较把几个事件发生的可能性大小有序排列出来，具有定性描述的意义，即“比较”而言.

生的可能性很大，事件(3)发生与不发生的可能性一样大. 所以，它们发生的可能性按从小到大的顺序排列是：

$$P_1, P_3, P_2.$$

练习 23.2

1. 你认为下列事件中，哪些是“不太可能”发生的事件？哪些是“很有可能”发生的事件？
   (1) 一场足球比赛的比分为 11∶0；
   (2) 云层又黑又低时就会下雨；
   (3) 刚买回来的新彩电没有图像；
   (4) 在大城市上下班高峰时段车辆拥堵.
2. 用 P_1、P_2 表示上题中事件(1)(2)发生的可能性大小，P_1 与 P_2 哪个大？
3. 举几个生活中的例子，指出哪些随机事件发生的可能性较大，哪些随机事件发生的可能性较小，试说明原因.

第一节　事件及其发生的可能性 125

练习 23.2

1. (1) 不太可能；
　(2) 很有可能；
　(3) 不太可能；
　(4) 很有可能.

2. $P_2 > P_1$.

3. 略.

【注意事项】

(1) 本课着重于说明随机事件发生的可能性有大小差别.教学中可补充一些实例，或让学生举出一些生活中和所学知识中的各种事件，比较它们发生的可能性大小，使学生获得比较丰富的认识.

(2) 通过例题的讨论，要让学生进一步感知基于经验判断事件发生的可能性大小的思考方法，以及用普通词语表述可能性有大有小的方法.使学生知道，有时可根据事件发生的条件或有关经验、资料等，对事件发生的可能性大小作出大致的判断，并进行定性的描述.对于可能性大小进行判断的过程中，不需要进行概率计算.

Shijian De Gailü

第二节　事件的概率

23.3　事件的概率

用怎样的数字来表示事件发生的可能性，必须合理地规定，以满足实际需要.

通过上一节对例题 1、2 中各事件发生的可能性的讨论，我们知道这些事件发生的可能性有大有小，其大小的不同可以用词语来描述，但总感到不够确切. 如果用数字来表示事件发生的可能性，那么利用数字的大小来描述事件发生的可能性大小，就十分明了.

问题1

“上海地区明天降水”，这是一个随机事件. 天气预报“上海地区明天降水概率 80%”，它的含义是什么？

天气预报是根据已有的气象资料和经验，对天气情况作出的判断. 预报“上海地区明天降水概率 80%”，就是说上海地区明天降水有“80%的可能”.

如果预报“上海地区明天很有可能降水”，当然也可以知道“上海地区明天降水”这个事件很有可能发生，但是用“80%”这一数字，就把“很有可能”的程度明确地表示出来了. 通常，如 70%、80% 或 90%等的可能，都是“很有可能”，但还是有大小的差异.

用什么数作为某个随机事件的概率，要通过对事件进行具体研究来确定. 在研究中也可以看到，这个数字大于 0 且小于 1.

用来表示某事件发生的可能性大小的数叫做这个事件的概率(probability).

不可能事件必定不发生，规定用“0”作为不可能事件的概率；而必然事件必定发生，就规定用“1”作为必然事件的概率. 这样，随机事件的概率，就是大于 0 且小于 1 的一个数，通常可以写成纯小数、小于 1 的百分数或真分数.

必然事件、不可能事件和随机事件的概率的取值情况，用线段图表示如下(如图 23－1)：

图 23－1

例如，“当田螺里有寄生虫时，生吃田螺会得寄生虫病”是“很可能发生的事件”；“买一张彩票中大奖”是“小概率事件”.

很不可能发生的事件是指概率接近 0 的事件(即小概率事件)；很可能发生的事件是指概率接近 1 的事件.

为了叙述的方便，我们可用大写的英文字母来表示事件，如事件 A、事件 B、……；事件 A 的概率，记作 $P(A)$.

126 第二十三章　概率初步

【本课重点】

引进事件的概率的概念；引导学生经历估计随机事件的概率的试验，认识频率以及它与概率之间的区别和联系.

问题 1

以学生熟悉的天气预报为例，说明用数值(百分比)表示可能性大小的含义.

在学生有一定的感性认识的基础上引进“概率”的定义，再进一步指出不可能事件和必然事件的概率以及随机事件的概率的取值范围；用线段图直观地说明各种事件概率的大致位置.

【教学目标】

(1) 知道概率的含义，会用符号表示一个事件的概率；知道不可能事件和必然事件的概率以及随机事件的概率的取值范围.

(2) 经历随机试验的活动过程，理解随机事件发生的频率，知道频率与概率之间的区别和联系；会根据大数次试验所得的频率估计事件的概率.

(3) 通过实例理解等可能试验的概念；掌握等可能试验中事件的概率计算公式，会运用公式来计算简单事件的概率；会运用枚举法分析等可能试验的所有结果；初步学会画树形图.

(4) 在参与有关概率的随机试验活动中，增强科学精神和团队合作精神；初步会用所学的概率知识解释生活中的一些简单的概率问题.

【注意事项】

(1) 在概率的教学中，要指出将事件发生的可能性大小从定性描述转到定量刻画的必要性，让学生知道数值化以后就能精确比较可能性大小，就能对概率进行运算.还要说明规定“0”“1”分别为不可能事件和必然事件的概率的合理性.

(2) 图 23－1 中，很不可能发生事件的概率接近 0、很可能发生事件的概率接近 1，都是模糊的提法，故图中不明确标出其取值范围.

引进对事件概率的符号表示；要指出通常总是用大写字母 V、U 分别表示不可能事件和必然事件，而字母 A、B 等表示随机事件.

问题 2

提出摸牌中一个具体的随机事件，让学生尝试通过试验估计它的概率.

操作

组织学生进行摸牌试验.

为了节省时间，可用 3～4 副牌，每副牌任意分成 13 组；让每个学生取一组牌，多摸几次再进行统计.

议一议

摸牌试验的可操作性较强，但是试验所得的频率与事件的概率有区别，要让学生通过讨论获得正确认识.

如果用 V 表示不可能事件，U 表示必然事件，那么

$$P(V)=0, P(U)=1.$$

对于随机事件 A，可知

$$0<P(A)<1.$$

一个随机事件发生的可能性大小，一般是通过观察在相同条件下进行的大数次试验，统计试验的结果，从中找到规律，从而对事件的概率作出估计.

问题2

在一副扑克牌中取红桃、梅花、方块各一张牌混合放在一起. 从中任意摸出一张牌，“恰好摸到红桃”的概率是多少？

这是一个随机事件. 任意摸牌一次，是一次试验，试验的结果有三种，即摸到红桃、摸到梅花或摸到方块. 每次把摸出的牌放回再洗匀，反复进行这样的试验.

操作

全班同学进行上述摸牌试验.

(1) 每人摸牌一次，看一看摸到的是哪种牌.

(2) 统计：

全班同学总共摸牌__________次；

填下表：

统计项目	红桃	梅花	方块
摸到某种花色的次数			
$\dfrac{\text{摸到某种花色的次数}}{\text{总共摸牌的次数}}$	——	——	——

事件的概率是一个确定的常数；而频率是不确定的，与试验次数的多少有关.

用频率估计概率，得到的只是近似值. 为了得到概率的可靠的估计值，试验的次数要足够大.

在上面的摸牌试验中，我们把总共摸牌的次数称为“试验总次数”，摸到红桃的次数称为这一事件发生的“频数”，把频数与试验总次数（即摸到红桃的次数与总共摸牌的次数）的比值称为“恰好摸到红桃”这一事件发生的“频率”.

我们通常把某事件在大数次试验中发生的频率，作为这个事件的概率的估计值.

议一议

在摸牌试验中，“恰好摸到红桃”这一事件发生的频率接近 $\frac{1}{3}$ 吗？如果增加试验的次数呢？

历史上统计学家曾多次做过抛掷一枚均匀硬币的试验，得出

【注意事项】

(1) 随机事件发生的规律一般通过大数次的试验得出，而概率揭示了随机事件发生的规律.用频率估计概率时，必须注意“大数次试验”这一条件.当试验次数充分大时，频率将稳定在概率附近，因此可用频率来估计概率.（教师知道，某随机事件的频率随着试验次数的增大而收敛于该随机事件的概率，并非指如试验 105 次所得的频率一定比试验 100 次所得的频率更接近概率.）

(2) 要认真组织摸牌试验；在摸牌试验中，要规范试验方法，端正学生的态度，真实地进行试验，不要流于形式或杜撰试验数据.但是，大数次的摸牌试验难于实施，这里只是让学生获得过程体验；如有条件，可借助于计算机进行摸拟试验.

(3) 要指导学生理解“边款”中关于频率与概率的说明，搞清频率与概率的区别与联系.频率是指在相同条件下的若干次试验中，指定事件出现的次数与总试验次数的比，它一般随着试验次数变化而变化.如果试验次数较少，那么这个事件发生的频率与它的概率这两数可能相差很大.比如，两次掷骰子都掷得“1点”，则“掷得 1 点”的频率为 1；但对于一枚均匀的骰子来说，1～6 中的任何整数点朝上的概率都是 $\frac{1}{6}$.

以下数据：

试验者	试验次数 n	出现正面的次数 k	出现正面的频率 $\frac{k}{n}$
布丰	4 040	2 048	0.506 9
德·摩根	4 092	2 048	0.500 5
费勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

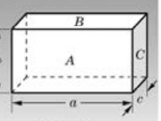
概率揭示了随机事件发生的规律，而这种规律是通过大量的随机试验去发现的，与确定性事件的规律不一样.

从上表同样可以看到，当抛掷次数增多时，频率稳定在 0.5 附近. 因此，就用 0.5 表示抛掷一枚均匀硬币出现正面的概率.

利用统计学家做过的掷硬币试验，让学生进一步认识频率与概率之间的区别和联系.

练习 23.3(1)

1. 写出下列事件的概率(填“等于 1”“接近 1”“等于 0”或“接近 0”)：
   (1) 用 A 表示“上海天天是晴天”，则 $P(A)$________；
   (2) 用 B 表示“新买的圆珠笔写得出字”，则 $P(B)$________；
   (3) 用 C 表示“班主任安排座位，小明的同桌和小明是同一天生日”，则 $P(C)$________；
   (4) 用 D 表示“当 m 是正整数时，$2m$ 是偶数”，则 $P(D)$________.
2. 全班同学一起做摸球试验，布袋里的球除了有红白两种颜色外其他都一样. 每次从布袋里摸出一个球，记下颜色后放回摇匀. 一共摸了 200 次，其中 131 次摸出红球，69 次摸出白球. 如果布袋里有 3 个球，请你估计布袋里红球和白球的个数.
3. 如图，一枚匀质的陆战棋棋子，各棱长的大小关系是 $a>b>c$，用 A、B、C 分别代表字母所在的面及其相对的一面. 通过抛掷棋子的试验，比较 A、B、C 朝上各事件的概率的大小.



(第 3 题)

练习 23.3(1)

1. (1) 等于 0；(2) 接近 1；(3) 接近 0；(4) 等于 1.
2. 2 红 1 白.
3. 略.

在问题 2 的摸牌试验中，任意一次试验可能的结果只有三种，即摸出红桃、摸出梅花或摸出方块. 这三种结果出现的机会均等，而且一次试验中不会同时出现两种结果.

如果一项可以反复进行的试验具有以下特点：

(1) 试验的结果是有限个，各种结果可能出现的机会是均等的；

(2) 任何两个结果不可能同时出现，

那么这样的试验叫做**等可能试验**.

【本课重点】

引进等可能试验的概念及等可能试验中事件的概率计算公式，并让学生初步学会它们的运用.

【注意事项】

(1) 对练习 23.3(1)第 3 题进行试验活动时，所选的棋子要匀质；不要选用由两种材料拼接而成的棋子.

(2) 等可能试验的特点，是从学生经历过的摸牌试验概括出来的. 由此可见，一个试验被称为等可能试验，它必须满足三个条件，即试验结果的个数有限、各种结果等可能出现和每次试验结果唯一. 这三个条件中，“各种结果等可能出现”的条件有一定的模糊性，通常带有理想状态的假设，在教学中不要深究，只对具体的试验是否满足这个条件加以说明.

问题 3

提出这个问题，意在帮助学生把握等可能试验的特点并会用于判断一个试验是否为等可能试验.同时，引出对于等可能试验中事件的概率的讨论.

通过掷骰子的实例，说明如何利用等可能试验的特点得到等可能试验中事件的概率.再从特殊到一般，给出等可能试验中事件的概率的计算公式.

例题 1

本题运用了等可能试验中事件概率的计算公式；也为引导学生用概率知识解释生活中的概率问题.

议一议

让学生注意频率与概率的区别.

问题3

掷一枚材质均匀的骰子，看结果是哪一点朝上.这个试验是等可能试验吗？

分析

在掷一枚骰子的试验中，所有可能出现的结果只有 6 种：点数分别为 1，2，3，4，5，6；由于骰子的材质均匀，随手掷出骰子，可以认为各种结果出现的机会均等，且一次试验只有一个结果出现.所以，这个试验是等可能试验.

骰子为正方体，它的六个面上分别有 1 点、2 点、…、6 点的标记.掷骰子出现几点，指骰子落地后朝上一面的点数.

进一步分析这个试验.如果一个事件是"掷一枚骰子，出现的点数是 1、2、3、4、5、6 中的一个"，那么这个事件是必然事件，记作 U，则 $P(U)=1$.

如果事件 A 是"掷得某个点数"，设这个事件的概率为 $P(A)$，那么由等可能试验的意义可知，"掷得其他某一个点数"的事件的概率都等于 $P(A)$.所有这样的不同事件共有 6 个，而在一次试验中只有其中一个事件发生，所以

$$6P(A)=1,$$

得 $P(A)=\frac{1}{6}$.

如果事件 B 是"掷得奇数点"，即出现"1 点""3 点"或"5 点"，那么 $P(B)=3\times\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

一般地，如果一个试验共有 n 个等可能的结果，事件 A 包含其中的 k 个结果，那么事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的可能结果数}}{\text{所有的可能结果总数}}=\frac{k}{n}.$$

这种类型中事件的概率，不必通过大次数试验利用频率来估计，通常利用公式来计算.如前面的问题 2，可直接算出所求概率为 $\frac{1}{3}$.

例题1 甲乙两人轮流掷一枚材质均匀的骰子，每人各掷了 8 次.结果甲有三次掷得"合数点"，而乙没有一次掷得"合数点".如果两人继续掷，那么下一次谁掷得"合数点"的机会比较大？

在 1 到 6 中，合数是 4 和 6.

解 掷一枚骰子的试验是等可能试验，共有 6 个等可能结果."掷得合数点"的事件包含"4 点""6 点"两个结果，所以"掷得合数点"的概率为 $\frac{2}{6}$，即 $\frac{1}{3}$.

因为在每一次掷骰子的试验中，事件"掷得合数点"的概率是不变的，所以两人下一次掷得合数点的机会一样大.

议一议

"掷一枚骰子得合数点"这个事件的概率为 $\frac{1}{3}$，为什么乙掷 8

第二节 事件的概率 129

【注意事项】

（1）对例题 1 的结论作判断，关键是每次进行掷骰子试验的条件一样（各试验之间是独立的），可知其中一个事件的概率不变.解题时避开了"试验独立"的概念，只指出掷骰子的试验是等可能试验，再利用等可能试验中事件概率的计算公式求出了这个事件的概率；只要学生看到每次试验都是同样的等可能试验，就知道下一次"掷得合数点"的概率不变.教学时可指明"每次进行掷骰子试验的条件都一样"，便于学生思考.

（2）"议一议"中讨论的问题，是引导学生关注频率与概率的区别，并用于解释概率问题.乙掷 8 次未掷得合数点（其频率为零）并不奇怪，因为 8 次试验不是大数次试验；只有进行大数次试验时，随机事件发生的频率才接近概率.要让学生举一反三，学习解释生活中的一些概率问题，进一步体会概率的含义；知道如"某种彩票获奖概率千分之一"，但是买一千张（或更多）未必中奖而买一张也有可能中奖.

次却没有一次掷得“合数点”?

例题2 在一副扑克牌中拿出 2 张红桃、2 张黑桃的牌共 4 张,洗匀后,从中任取 2 张牌恰好同花色的概率是多少?

解 把拿出的 4 张牌编号,如红桃 1、红桃 2、黑桃 1、黑桃 2. 从中任取 2 张牌的试验,是等可能试验.

试验出现的等可能结果共有 6 个:

“红桃 1、红桃 2”;“红桃 1、黑桃 1”;“红桃 1、黑桃 2”;

“红桃 2、黑桃 1”;“红桃 2、黑桃 2”;“黑桃 1、黑桃 2”.

设事件 A:“2 张牌恰好同花色”,它包含其中 2 个结果:

“红桃 1、红桃 2”;“黑桃 1、黑桃 2”.

所以,$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

试一试

如果从扑克牌中拿出 3 张红桃、2 张黑桃的牌共 5 张,从中任取 2 张牌恰好同花色的概率是多少?

练习 23.3(2)

1. 有人说如果随机事件 A 的概率 $P(A)=0.5$,那么由 $P(A)\times 2=0.5\times 2=1$,可知在相同的条件下重复 2 次,事件 A 肯定发生. 你认为他的说法对吗?
2. 布袋里有 2 个红球、3 个黄球、4 个白球,它们除颜色外其他都相同. 从布袋里摸出一个球恰好为红球的概率是多少?
3. 掷一枚材质均匀的骰子,掷得的点数为素数的概率是多少?

问题4

木盒里有 1 个红球和 1 个黄球,这两个球除颜色外其他都相同. 从盒子里先摸出一个球,放回去摇匀后,再摸出一个球. 两次都摸到红球的概率是多少? 摸到 1 个红球 1 个黄球的概率又是多少?

有人说,两次摸球只有 3 种可能的结果:2 红、2 黄、1 红 1 黄. 所以摸到 2 红的概率应该是 $\frac{1}{3}$. 这种说法对吗?

分析

由于第一次摸出的球被放回,所以两次摸球是在相同条件下进行的.

130 第二十三章 概率初步

例题 2

本题利用了“枚举法”来分析等可能试验的结果的情况,再运用概率的计算公式求概率.

试一试

让学生将在例题 2 中获得的经验和方法用于解决新的问题.可让学生先尝试,然后再讲评.

练习 23.3(2)

1. 不对.在相同条件下重复 2 次的试验中,事件 A 发生的概率是$\frac{3}{4}$而非 1.
2. $\frac{2}{9}$.
3. $\frac{1}{2}$.

【本课重点】

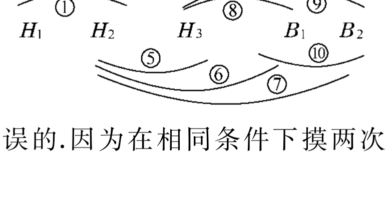
引进画“树形图”的方法,用于分析等可能试验中的所有结果.

问题 4

为引进画“树形图”的方法提供背景.

【注意事项】

(1) 对“试一试”中的问题,可指导学生将 3 张红桃、2 张黑桃编为 H_1、H_2、H_3、B_1、B_2,如图对试验的等可能结果的情况进行分析,其中①②⑤⑩是同花色的,因此求得的概率是$\frac{2}{5}$.



(2) 问题 4“边款”中的说法是错误的.因为在相同条件下摸两次球所出现的等可能结果有“红红、红黄、黄红、黄黄”4 种.

教学时要对画“树形图”的方法进行解说.

借助“树形图”列出试验中的所有等可能结果以后，可让学生解答问题 4；然后对问题 4“边款”中的说法为什么是错的进行解释.

我们利用下面的“树形图”来分析试验中的所有可能结果.

把所有可能的结果一一列出的方法叫“枚举法”，“树形图”就是枚举法的一种表示形式.

由树形图可以直观地看到，两次摸球共有 4 个等可能的结果，即(红，红)、(红，黄)、(黄，红)、(黄，黄)，而(红，红)只是其中的 1 个结果.

设事件 A：“两次摸到红球”. 可知 $P(A)=\frac{1}{4}$.

设事件 B：“摸到 1 个红球 1 个黄球”. 因为摸到 1 个红球 1 个黄球包含两次试验中的 2 个可能结果，即(红，黄)或(黄，红)，所以 $P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

借助树形图可简明地列出所有等可能的结果，问题 4 中的等可能试验分两步进行，所画树形图中的“树枝”相应分为两级. 如果一个等可能试验分多步进行，那么“树枝”相应分为多级. 画等可能结果的树形图，要注意其中同一级的每一条“树枝”必须是等可能的，最后一级的“树枝”条数是试验中所有等可能结果的个数.

例题 3

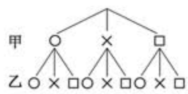
本题是游戏中的概率问题，让学生用所学概率知识解决，以引起学生的兴趣并进一步关注生活中的概率问题.

可让学生自己画出树形图；也可指导学生试用“列表格”的方法来分析所有等可能结果.

完成解题后，还可提问：甲胜或乙胜的概率是多少？

例题3 甲乙两个同学做“石头、剪刀、布”的游戏，在一个回合中两人能分出胜负的概率是多少？

解 用“○、×、□”依次代表“石头、剪刀、布”. 用下面的树形图展现所有等可能的结果.



从图中看到，共有 9 个等可能的结果，即
(○，○)、(○，×)、(○，□)、(×，○)、(×，×)、(×，□)、(□，○)、(□，×)、(□，□).

其中，两人手势相同的结果有 3 个，不分胜负；其余 6 个结果，都能分出胜负.

设事件 A：“一个回合中两人能分出胜负”. 可知

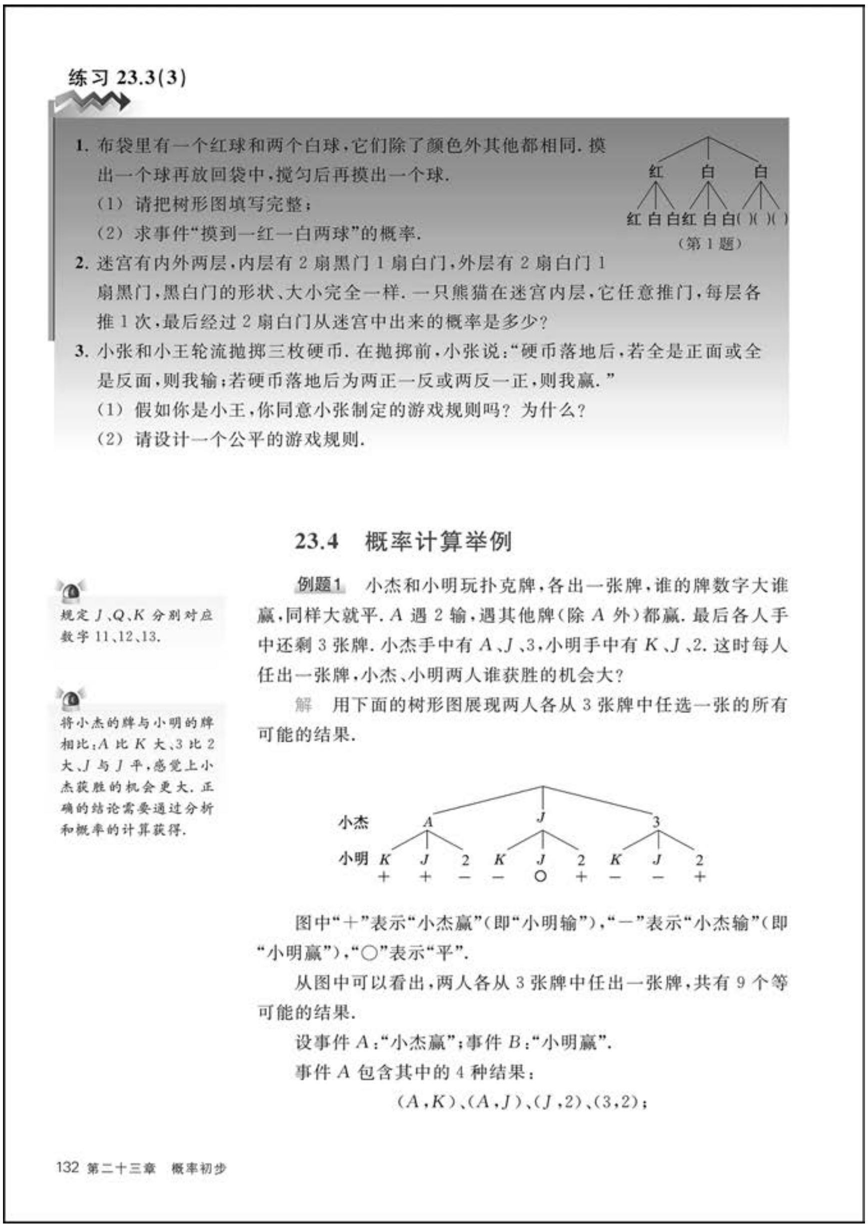
$$P(A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

第二节 事件的概率 131

【注意事项】

(1) 对于相同条件下重复进行的等可能试验，可用树形图列出所有等可能结果. 树形图是枚举法的一种表示形式(在“边款”中已指出)，直观性强. 指导学生画等可能结果的树形图时，要讲清：① 分步试验要分级画树枝，可从左到右画树枝，也可从上往下画树枝，分步试验的对象与相应的试验结果要对应；② 同一级的每个树枝都是相应一步试验的等可能结果；③ 最后一级的树枝是完成这个试验所出现的所有等可能结果，树枝数就是等可能结果总数. 这些要点，应结合实例进行讲解.

(2) 画等可能结果的树形图，“树枝”分级不要超过三级.



练习 23.3(3)

1. 布袋里有一个红球和两个白球，它们除了颜色外其他都相同. 摸出一个球再放回袋中，搅匀后再摸出一个球.
(1) 请把树形图填写完整；
(2) 求事件"摸到一红一白两球"的概率.

(第1题)

2. 迷宫有内外两层，内层有2扇黑门1扇白门，外层有2扇白门1扇黑门，黑白门的形状、大小完全一样. 一只熊猫在迷宫内层，它任意推门，每层各推1次，最后经过2扇白门从迷宫中出来的概率是多少？

3. 小张和小王轮流抛掷三枚硬币. 在抛掷前，小张说："硬币落地后，若全是正面或全是反面，则我输；若硬币落地后为两正一反或两反一正，则我赢."
(1) 假如你是小王，你同意小张制定的游戏规则吗？为什么？
(2) 请设计一个公平的游戏规则.

23.4 概率计算举例

规定 J、Q、K 分别对应数字 11、12、13.

例题1 小杰和小明玩扑克牌，各出一张牌，谁的牌数字大谁赢，同样大就平. A 遇 2 输，遇其他牌(除 A 外)都赢. 最后各人手中还剩 3 张牌. 小杰手中有 A、J、3，小明手中有 K、J、2. 这时每人任出一张牌，小杰、小明两人谁获胜的机会大？

将小杰的牌与小明的牌相比：A 比 K 大，3 比 2 大，J 与 J 平，感觉上小杰获胜的机会更大. 正确的结论需要通过分析和概率的计算获得.

解 用下面的树形图展现两人各从 3 张牌中任选一张的所有可能的结果.

图中"+"表示"小杰赢"(即"小明输")，"−"表示"小杰输"(即"小明赢")，"○"表示"平".

从图中可以看出，两人各从 3 张牌中任出一张牌，共有 9 个等可能的结果.

设事件 A："小杰赢"；事件 B："小明赢".

事件 A 包含其中的 4 种结果：

(A,K)、(A,J)、$(J,2)$、$(3,2)$；

132 第二十三章 概率初步

练习 23.3(3)

1. (1) "红""白""白"；

(2) $\frac{4}{9}$.

2. $\frac{2}{9}$.

3. (1) 小王赢的概率为 $\frac{1}{4}$，小张赢的概率为 $\frac{3}{4}$，因此不同意；

(2) 答案不唯一. 如"一方以正面多为赢，另一方以反面多为赢".

【本课重点】

引导学生进一步学习用画"树形图"的方法分析等可能试验中事件的概率问题，并体验概率知识在生活实际中的应用.

例题 1

本题是联系生活实际的问题. 可让学生先猜测结论，再进行分析、解答.

解答时可由学生独立画出树形图，注意树形图中的结构；要引导学生在解决问题的过程中体会概率知识的实际应用.

【教学目标】

(1) 经历概率计算问题的分析、探究过程，进一步体会关于概率问题的分析和思考方法.

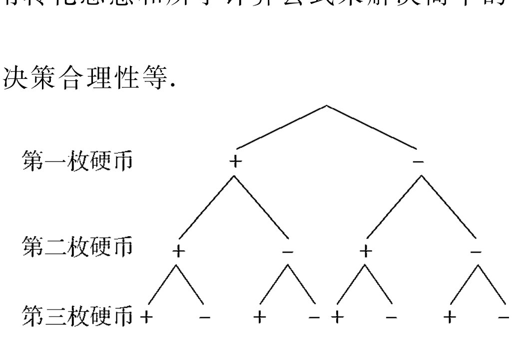
(2) 初步会用画"树形图"的方法分析等可能试验中事件的概率问题，并进行概率计算.

(3) 知道有些与几何图形有关的概率问题可转化为等可能试验中的概率问题，也有些等可能试验中的概率问题可转化为与几何图形有关的概率问题，初步学会运用转化思想和所学计算公式来解决简单的概率问题.

(4) 树立初步的概率意识，认识机会与风险、规则公平性与决策合理性等.

【注意事项】

练习 23.3(3)中第 3 题的三枚硬币试验，画树形图时要分三级，如图所示. 可组织学生讨论，共同解决. 本题对规则公平性的判断和改进，是用概率知识解释和处理生活中的概率问题，要引导学生从中体会学习概率的意义.



例题 2

本题有生活实际背景，着重于引导学生运用所学概率知识解决和解释生活实际中的概率问题.

在教学中，① 要指出由于抓阄后不放回，所以三人抓阄不是在相同的条件下的重复试验；② 为说明“抓中”的概率与抓阄次序无关，可将“甲”“乙”“丙”换成“第一人”“第二人”“第三人”；③ 可让学生独立画出树形图进行分析；④ 在解决问题的过程中，要重视培养学生的概率意识和运用概率知识的能力.

练习 23.4(1)

1. C.

2. $\frac{1}{3}$.

3. $\frac{1}{6}$.

事件 B 也包含其中的 4 种结果：

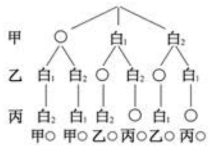
$(A,2)$、(J,K)、$(3,K)$、$(3,J)$.

所以，$P(A)=P(B)=\frac{4}{9}$.

即两人获胜的机会一样大.

例题2 甲、乙、丙三个球迷只有一张球票，现通过抓阄来决定谁去看球. 为此准备了三张纸片，其中一张画了个圆圈“○”，抓中的人得到球票；另两张纸片空白. 抓阄前，甲提出要先抓，他想先抓的人得到球票的机会大. 他的想法对吗？

解 假设抓阄的顺序依次是甲、乙、丙. 3 张纸片中一张画“○”. 我们用“○”表示抓中，其余用“白$_1$”“白$_2$”表示. 用树形图展示所有可能的结果如下：



从图中可以看出，共有 6 种可能的结果，其中甲、乙、丙抓到画“○”的纸片的结果各有 2 种，可知概率都是$\frac{1}{3}$. 所以他们得到球票机会一样大.

抓阄是不放回地取纸片，即甲取一张纸片后，乙在剩下两张中选取一张，丙只好拿最后一张.

练习 23.4(1)

1. 一人把分别写有“20”“10”“世博”的 3 张相同卡片，字面朝下随意放在桌面上；另一人再把这 3 张卡片排成一行，从左到右恰好排成“2010 世博”或者“世博 2010”的概率是 （ ）
 (A) $\frac{1}{6}$； (B) $\frac{1}{4}$； (C) $\frac{1}{3}$； (D) $\frac{1}{2}$.
2. 从 2，6，8 这三个数中任选两个组成两位数，在组成的所有两位数中任意抽取一个数，这个数恰好能被 4 整除的概率是多少？
3. 三位同伴进饭店用餐，把每人自带的雨伞交给服务员放在一起保管. 如果离店时服务员把他们的雨伞随意还给各人，那么三位同伴恰好拿到各自的雨伞的概率是多少？

【注意事项】

(1) 在对例题 1 进行分析之前，可让学生猜一猜谁获胜的可能性大. 通过概率计算，使学生知道凭“感觉”有时靠不住，要具体分析才能得出正确结论. 解例题 1 时，也可用列表格的方法来分析所有的等可能结果，如右表.

小明 \ 小杰	A	J	3
K	+	−	−
J	+	O	−
2	−	+	+

(2)例题 2 中的“抓阄”，可能有的学生本来也怀疑它的公平性，可先让学生针对甲的想法发表意见，并讲出所说意见的依据；然后，引导学生探求“抓中”的概率. 先后抓阄的试验不是相同条件下的重复试验，但以全过程为分步完成的一次试验则它是等可能试验. 利用树形图分析，有助于学生理解.

(3) 在等可能试验过程中，遇到分步或交叉试验时，往往借助于树形图等方法来分析所有等可能结果. 但要注意控制问题的难度，分层数及结果数不可过多.

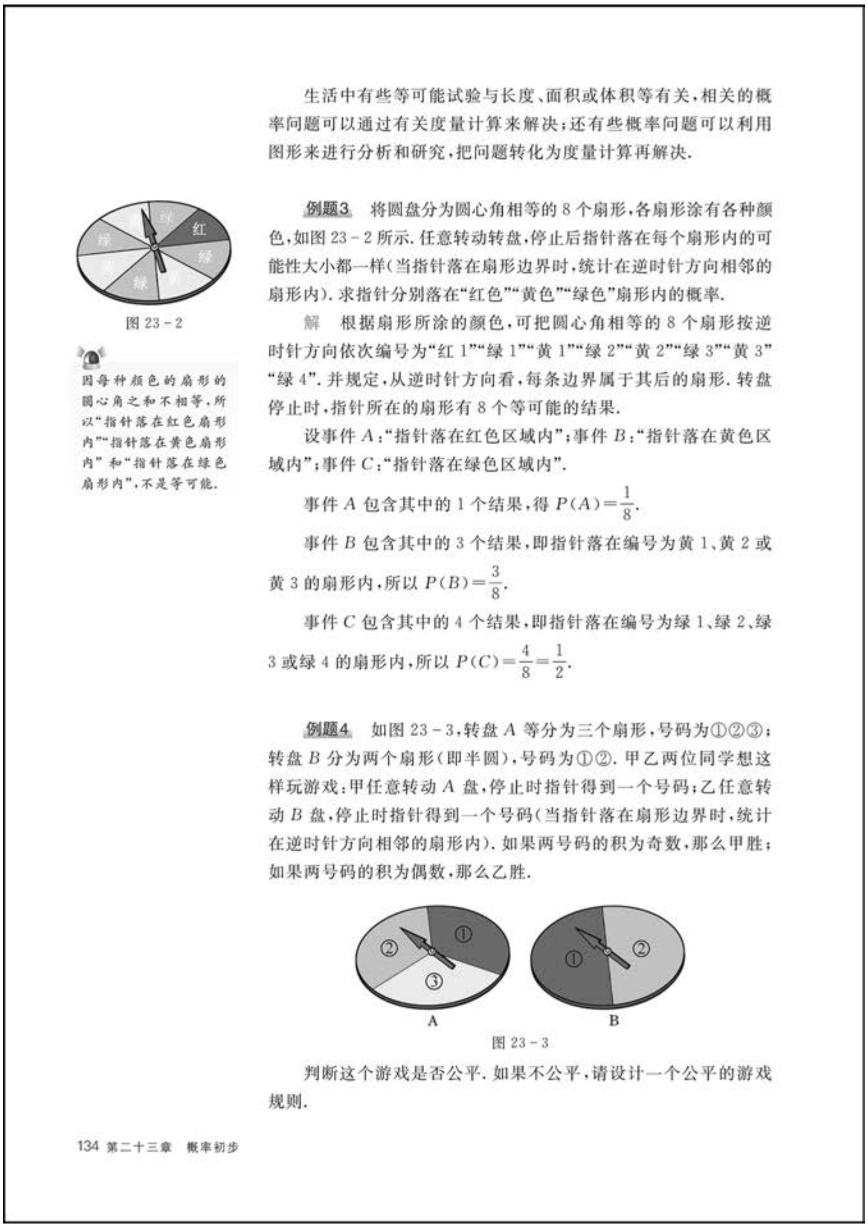

生活中有些等可能试验与长度、面积或体积等有关，相关的概率问题可以通过有关度量计算来解决；还有些概率问题可以利用图形来进行分析和研究，把问题转化为度量计算再解决.

图 23－2

因每种颜色的扇形的圆心角之和不相等，所以“指针落在红色扇形内”“指针落在黄色扇形内”和“指针落在绿色扇形内”，不是等可能.

例题3 将圆盘分为圆心角相等的 8 个扇形，各扇形涂有各种颜色，如图 23－2 所示. 任意转动转盘，停止后指针落在每个扇形内的可能性大小都一样(当指针落在扇形边界时，统计在逆时针方向相邻的扇形内). 求指针分别落在“红色”“黄色”“绿色”扇形内的概率.

解 根据扇形所涂的颜色，可把圆心角相等的 8 个扇形按逆时针方向依次编号为“红 1”“绿 1”“黄 1”“绿 2”“黄 2”“绿 3”“黄 3”“绿 4”. 并规定，从逆时针方向看，每条边界属于其后的扇形. 转盘停止时，指针所在的扇形有 8 个等可能的结果.

设事件 A：“指针落在红色区域内”；事件 B：“指针落在黄色区域内”；事件 C：“指针落在绿色区域内”.

事件 A 包含其中的 1 个结果，得 $P(A)=\frac{1}{8}$.

事件 B 包含其中的 3 个结果，即指针落在编号为黄 1、黄 2 或黄 3 的扇形内，所以 $P(B)=\frac{3}{8}$.

事件 C 包含其中的 4 个结果，即指针落在编号为绿 1、绿 2、绿 3 或绿 4 的扇形内，所以 $P(C)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

例题4 如图 23－3，转盘 A 等分为三个扇形，号码为①②③；转盘 B 分为两个扇形(即半圆)，号码为①②. 甲乙两位同学想这样玩游戏：甲任意转动 A 盘，停止时指针得到一个号码；乙任意转动 B 盘，停止时指针得到一个号码(当指针落在扇形边界时，统计在逆时针方向相邻的扇形内). 如果两号码的积为奇数，那么甲胜；如果两号码的积为偶数，那么乙胜.

图 23－3

判断这个游戏是否公平. 如果不公平，请设计一个公平的游戏规则.

134 第二十三章 概率初步

例题 3

本题以转盘为实际背景，讨论与几何图形有关的概率问题.这个问题可转化为等可能试验中事件的概率问题来解决.

例题 4

本题设计为数学游戏，让学生用所学概率知识来分析“规则公平性”的问题，以增加趣味性.从数学的角度来看，本题其实就是：从 1、2、3 中任取一个数，再从 1、2 中任取一个数，分别求所取两数的积为奇数、为偶数的概率.

【注意事项】

(1) 例题 3 是求与转盘相关的事件的概率，可归属于几何概型问题.但课本中没有引进几何概型的概念，教学中也不要提出，只是对有关问题就事论事地讨论.

(2) 课本中从图形的直观提出了例题 3 的解题方法，对转化的思路没有详细说明.教学时可向学生说明：转盘试验中，转盘停止后指针所停的位置即试验的结果有无数个，这不符合等可能试验的条件；但在转盘自由转动的前提下，各种结果可能出现的机会是一样的.将转盘划分为若干个圆心角相等的扇形并规定了边界的归属后，相对于各扇形而言，如果把指针落在某个扇形内的结果看作是一个结果，那么指针落在圆心角相等的不同扇形内的结果是有限且等可能的，而且指针不会同时落在两个扇形内，这样就将转盘试验转化为等可能试验，这个问题也转化为相对于图形区域的等可能试验的概率问题.

也可这样解释，由于转盘试验中各种结果可能出现的机会是一样的，因此指针落在某一个扇形内的可能性大小与这个扇形的圆心角大小有正比例关系，指针落在某一个扇形内的概率等于这个扇形的圆心角与圆周角的比值.此解释不要展开，也不要把有关概率归为面积之比.

公平的游戏规则不是唯一的，只要提出的规则使得对甲乙分别有利的可能结果数相等.如可规定：两人转得的号码之和为奇数时甲胜、为偶数时乙胜.也可定为：两人转得的号码之差的绝对值为 1 时甲胜、否则乙胜.

解　用树形图展示一次游戏的所有等可能的结果，如图 23－4 所示. 从图中可以看出，共有 6 个等可能的结果：

(①,①)、(①,②)、(②,①)、(②,②)、(③,①)、(③,②).

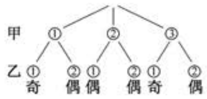


图 23－4

设事件 D:“两号码之积为奇数”；事件 E:“两号码之积为偶数”.

事件 D 包含其中的 2 个结果：(①,①)、(③,①)，所以，

$$P(D)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

事件 E 包含其余的 4 个结果，所以，

$$P(E)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

甲胜的概率比乙胜的概率小$\frac{1}{3}$，可见这个游戏规则对乙很有利，是不公平的.

为了公平起见，可更改游戏规则. 如改为“两号码之和为奇数，甲胜；两号码之和为偶数，乙胜”，其余不变.

这样，两号码之和分别是 2、3、3、4、4、5，其中奇数 3 个，偶数 3 个. 两人获胜的概率都是$\frac{1}{2}$，可见这个游戏规则是公平的.

例题 5

本题中涉及的随机试验，其结果有无数个.通过将时间分段以后，可将相关的试验结果看作只有 4 种，于是转化为等可能事件的概率问题来解决.让学生从中体会到，某些含无数试验结果的特殊的概率问题，可运用转化的数学思想方法来处理；同时，加深对等可能事件的认识.

例题5　甲乙两人相约下午 1 时至 2 时在某公共汽车站乘车，已知该站在下午 1 时 30 分和 2 时准点各发一班车. 假设因堵车的影响，甲乙两人在 1 时至 2 时之间任一时刻到达车站的可能性相等，如果两人到车站后见车就上，那么两人同乘一辆车的概率是多少？

解　将下午 1 时至 2 时以 1 时 30 分这一时刻为界划为前、后两个时间段，前段从下午 1 时至 1 时 30 分(含此时刻)之间，后段从下午 1 时 30 分至 2 时(含此时刻)之间.

实际上，相对于一个时段内的无数个时刻而言，分界的那个时刻可忽略不计.

因为甲乙两人在下午 1 时至 2 时之间任一时刻到达车站的可能性相等，而前、后两段的时间又一样长，所以相对于前、后两个时间段而言，如果把甲或乙在其中一个时间段内到达车站看作一种情况，那么由这两人到达车站的时刻所确定的结果共有四种，即两人同在前段、两人同在后段、甲在前段乙在后段、乙在前段甲在后段，而且这四种结果是等可能的.

设事件 A:“甲乙两人同乘一辆车”，可知事件 A 包含“两人同在前段”“两人同在后段”这两种结果，所以 $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

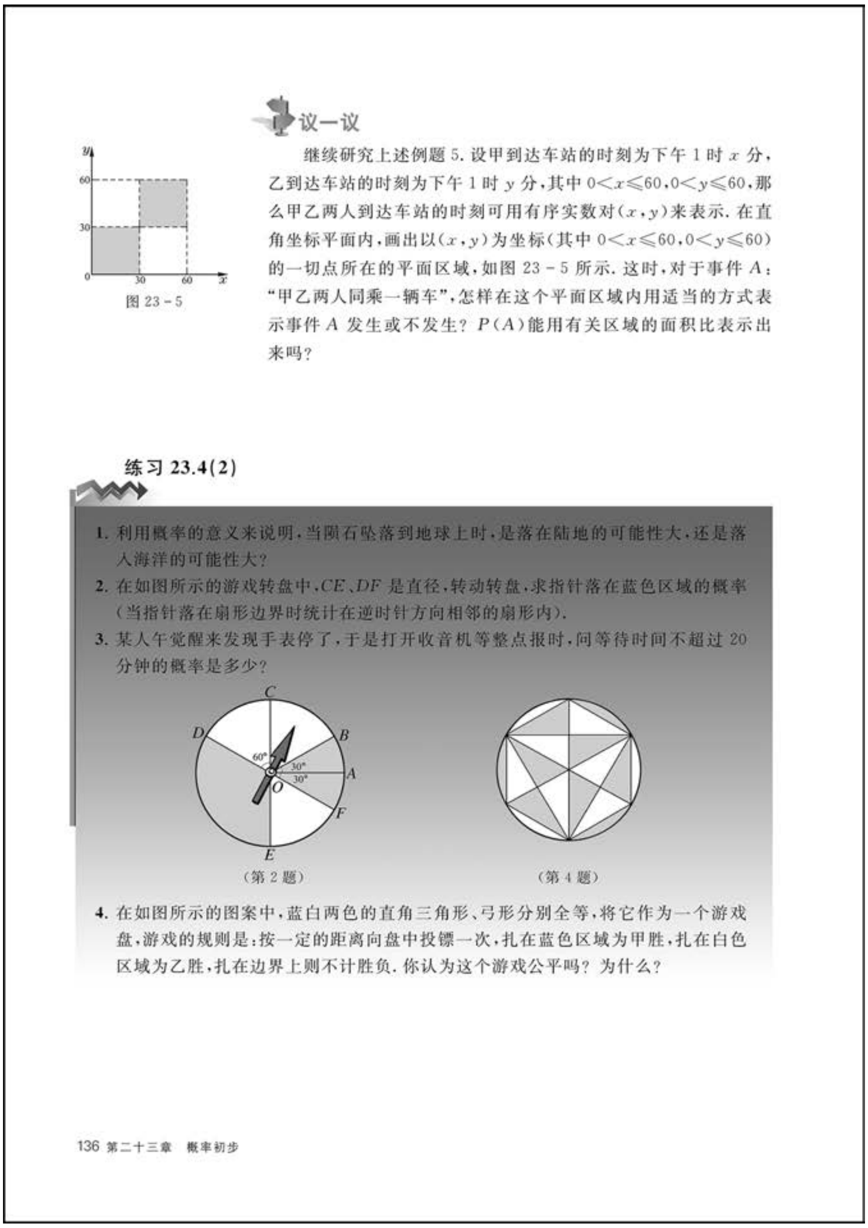
第二节　事件的概率 135

【注意事项】

(1) 例题 5 与例题 3 的解题思路其实是一样的，只是例题 3 中的“转盘”分成扇形具有几何直观性，其解题思路比较容易理解；而对时间进行分段，则缺少直观性.在例题 5 的分析过程中，要引导学生联想例题 3，把已有的经验迁移过来.

(2) 例题 5 解答后的“议一议”，是要引导学生将这个概率问题转化为直角坐标平面内区域面积的计算问题.可组织学生一起讨论，让学生了解这一解题思路，知道有的概率问题可利用度量计算方法来解决.

(3) 例题 3 和例题 5，是对几何概型的初步渗透，但课本中没有引进几何概型及其解法，教学时不必补充.注意，在例题 3 和例题 5 中对出现在边界上的试验结果指定了它归属的区域，为的是便于把问题转化为等可能事件的概率问题并使学生容易理解；如果按照几何概型来分析，那么边界上的试验结果可忽略不计.



议一议

继续研究上述例题 5. 设甲到达车站的时刻为下午 1 时 x 分，乙到达车站的时刻为下午 1 时 y 分，其中 $0<x\leqslant 60$，$0<y\leqslant 60$，那么甲乙两人到达车站的时刻可用有序实数对 (x, y) 来表示. 在直角坐标平面内，画出以 (x, y) 为坐标（其中 $0<x\leqslant 60$，$0<y\leqslant 60$）的一切点所在的平面区域，如图 23－5 所示. 这时，对于事件 A："甲乙两人同乘一辆车"，怎样在这个平面区域内用适当的方式表示事件 A 发生或不发生？$P(A)$ 能用有关区域的面积比表示出来吗？

图 23－5

练习 23.4(2)

1. 利用概率的意义来说明，当陨石坠落到地球上时，是落在陆地的可能性大，还是落入海洋的可能性大？
2. 在如图所示的游戏转盘中，CE、DF 是直径，转动转盘，求指针落在蓝色区域的概率（当指针落在扇形边界时统计在逆时针方向相邻的扇形内）.
3. 某人午觉醒来发现手表停了，于是打开收音机等整点报时，问等待时间不超过 20 分钟的概率是多少？

（第 2 题）

（第 4 题）

4. 在如图所示的图案中，蓝白两色的直角三角形、弓形分别全等，将它作为一个游戏盘，游戏的规则是：按一定的距离向盘中投镖一次，扎在蓝色区域为甲胜，扎在白色区域为乙胜，扎在边界上则不计胜负. 你认为这个游戏公平吗？为什么？

136 第二十三章 概率初步

练习 23.4(2)

1. 陨石坠落到地球的某一处是随机事件，由于海洋面积比陆地大，故落入海洋可能性大.
2. 将圆盘分成 12 个中心角为 30°的扇形，并使扇形 AOB 是其中之一，可知蓝色区域含 6 个这样的扇形，所以指针落入蓝色区域的概率为 $\frac{1}{2}$.
3. 将整点之间的 60 分钟画成线段 AB."等待时间不超过 20 分钟"，即醒来的时刻 C 应满足 $CB<\frac{AB}{3}$ $\left(\text{或 } CB\leqslant\frac{AB}{3}\right)$，因此所求的概率是 $\frac{1}{3}$.
4. 因为图案中蓝、白两色区域面积相等，所以游戏公平.

【注意事项】

练习 23.4(2)中各题，都是与图形有关的概率问题，可转化为相对于图形区域的等可能试验的概率问题来求概率，或利用图形直观求解.安排这样的练习，主要用意是希望通过问题的解决，帮助学生整理并进一步体会关于概率问题的分析和思考方法，同时体会概率知识的应用.

本章的学习内容，是概率的初步知识；这些知识建立在对生活实际中一些现象及问题进行分析和讨论的基础上，用于解决和解释生活实际中的一些简单的概率问题.要通过对本章的小结，帮助学生回顾和整理概率的有关概念、概率计算的基本方法和概率知识的初步运用.要重视引导学生用心体会概率学习的意义，强化概率意识，提高进一步学习和运用概率的兴趣.

23

本章小结

现实生活中有各种各样的事件，有些是确定事件，有些是随机事件. 确定事件是否发生，都是肯定的；而随机事件是否发生事先不能肯定，但可以预测其发生的可能性的大小. 通过本章的学习，我们知道概率是对随机事件发生的可能性大小的度量，它揭示了随机事件发生的规律. 概率知识有广泛的实际应用，科学的预测可以帮助我们合理地决策、理智地参与社会生活.

随机事件的概率，一般通过大数次的随机试验，利用频率来进行估计. 但是，有些事件，它包含的结果是等可能试验的所有结果中的某一个或某几个，这类事件的概率可以通过计数再利用公式进行计算. 我们尝试了用频率估计概率，着重讨论了等可能试验和相关两类简单事件的概率计算方法，从而初步体会到概率的意义，初步获得了概率研究的过程体验.

本章知识结构图如下：

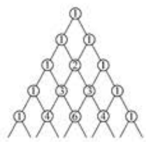
Tanjiu Huodong

23

探究活动

杨辉三角与路径问题

如图是“杨辉三角”(杨辉是我国宋朝时期的数学家)的图形. 一只蚂蚁从最高点出发往下爬,在任意一个节点沿哪一条路径往下爬的可能性都相同. 最高点以下各横行顺次为第一、二、……层,求:



(1) 从最高点爬到第一层各节点的概率;

(2) 从最高点爬到第三层各节点的概率;

(3) 从最高点爬到第四层各节点的概率.

探究

观察右图,第一层有 2 个节点,第二层有 3 个节点,……,第 k 层有 $k+1$ 个节点. 图中各节点上所标的数字,正是蚂蚁从最高点爬到这个节点的不同路径条数. 如“③”表示蚂蚁从最高点爬到这个节点有 3 条不同的路径.

思考 1:从最高点爬到第一层的总路径数共有几条? 到第一层各节点的路径数分别有几条? 由此可知,(1)所求概率是多少?

思考 2:问题(2)和(3)可以参照问题(1)进行分析和求解吗?

拓展

蚂蚁从最高点爬到第六层各节点的概率是多少?

思考 3:从第二层开始,每个节点的路径数与它上方邻近两个节点的路径数有什么数量关系?

思考 4:图中第五、六层各节点上的数字分别是什么?

【设计意图】

杨辉三角与二项展开式系数之间有丰富的联系.杨辉三角与路径问题的活动设计,抓住隐含在杨辉三角与分级等可能试验之间的关联,有层次地提出问题,引导学生探索和发现分级等可能试验的概率计算与杨辉三角的系数之间的关系,帮助学生加深对等可能试验的理解,获得对杨辉三角中系数排列规律的认识;同时让学生在探究活动中,获得过程经历,培养自主学习能力.

【活动建议】

组织有兴趣的学生开展活动,再进行交流和总结.

指导学生沿着所设的问题线索,逐步递进,体验过程;发现规律,解决问题.

【参考答案】

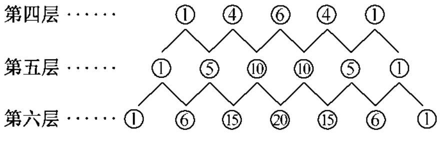
(1) $\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}$;(2) $\frac{1}{8}$,$\frac{3}{8}$,$\frac{3}{8}$,$\frac{1}{8}$;(3) $\frac{1}{16}$,$\frac{1}{4}$,$\frac{3}{8}$,$\frac{1}{4}$,$\frac{1}{16}$.

探究思考 1:到第一层共有 2 条路径,到各点各有 1 条路径,得(1)中事件的概率都是$\frac{1}{2}$.

探究思考 2:从第一层到第二层共有 4 条路径,其中到左、右节点①的路径各有 1 条,到节点②的路径有 2 条,可知到第二层两个节点①的概率都是$\frac{1}{4}$,到节点②的概率是$\frac{1}{2}$.类似地,从第一层到第三层共有 8 条路径,到两节点①各有 1 条路径.到两个节点③各有 3 条路径,由此可知到第三层节点①的概率都是$\frac{1}{8}$,到节点③的概率都是$\frac{3}{8}$.

探究思考 3:由(1)(2)发现规律,即到某节点的路径数就是该节点圈内数,到达层中某节点的概率等于该节点圈内数与同一层各节点圈内数总和之比,可得答案.

探究思考 4:如右图所示.



练习部分参考答案

第二十章　一次函数

习题 20.1

1. ①⑤⑥；⑥；③.

2. (1) $m=0$；　(2) $m\neq -3$.

3. $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$，当 $x=5$ 时，$y=-1$.

4. $y=\frac{2}{3}x-4$.

习题 20.2(1)

1. (1) 图略，与 x 轴的交点坐标为 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，与 y 轴的交点坐标为 $(0,-2)$；

(2) 图略，与 x 轴的交点坐标为 $\left(\frac{1}{3},0\right)$，与 y 轴的交点坐标为 $(0,1)$；

(3) 图略，与 x 轴的交点坐标为 $(-10,0)$，与 y 轴的交点坐标为 $(0,5)$；

(4) 图略，与 x 轴的交点坐标为 $(-3,0)$，与 y 轴的交点坐标为 $(0,-1)$.

2. $k=-1$，与 x 轴的交点坐标为 $(-1,0)$，图略.

3. (1) $y=3x-7$；　(2) $y=\frac{3}{5}x-\frac{18}{5}$.

4. (1) $y=\frac{3}{4}x+3$；　(2) $y=-\frac{1}{2}x-2$.

习题 20.2(2)

1. ③④.

2. (1) $y=2x-5$；　(2) $y=2x-3$.

3. (1) $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$；　(2) $\frac{2}{3}$.

习题 20.2(3)

1. (1) 3；　(2) $\left(-1,3\frac{3}{4}\right)$，$x<-1$，$y>3\frac{3}{4}$；　(3) $x<4$，$x>4$.

2. (1) $y<1$；　(2) $x<\frac{5}{3}$.

3. (1) $k=-\frac{2}{3}$，$b=1$；　(2) $y>3$；　(3) $x>6$.

习题 20.3(1)

1. $m<-\frac{3}{2}$.

2. 增大.

3. (1) $m=\frac{4}{7}$；　(2) 增大.

4. (1) $m<-\frac{1}{2}$；　(2) 负半轴上.

习题 20.3(2)

1. (1) 上，3；　(2) 下，2.

2. ① $k>0,b<0$； ② $k<0,b<0$； ③ $k>0,b>0$； ④ $k<0,b>0$.
3. 第二、三、四象限.
4.（1） $m>\frac{3}{2}$； （2） $m<1$.

习题 20.4(1)

1.（1） $y=30-\frac{3}{10}t(0\leqslant t\leqslant 100)$.
2.（1） $V=5t+10(0\leqslant t\leqslant 16)$； （2） 16 小时.
3.（1） $y=-\frac{3}{500}x+34$； （2） 300 米.

习题 20.4(2)

1.（1） $V=1\,200-20t$； （2） 还剩 1 000 万立方米； （3） 40 天； （4） 60 天.
2.（1） l_2； （2） 10 米； （3） 小明会赢得比赛.

复习题

A 组
1. $m\neq 3$.
2. $y=\frac{2}{3}x+4$.
3. A.
4. C.
5. $B(0,3),C(0,-1)$.
6. $y=2x-4$.
7.（1） $y=-2x+80$； （2） $y=20$； （3） $x=36$； （4） $20<x<40$.
8.（1） $k=1,b=2$； （2） 图略； （3） $x>0$.
9.（1） 起步价为 14 元,3 千米内只收起步价； （2） $y=2.5x+6.5$,7.8 千米； （3） 25 千米.
10.（1） $y=16+0.13x$； （2） 35.76 元； （3） 300 分钟.

B 组
1. 2.
2. $\frac{1}{2}$,$0<m<\frac{1}{2}$,增大.
3. C.
4. $b=\pm 4$.
5.（1） $y=-2x+6$； （2） $m=2$； （3） $y=x$.
6.（1） $y_1=10x(x\geqslant 0),y_2=25x-75(x\geqslant 3)$； （2） 图略； （3） 当 $x=5$(小时)时乙追上甲;50 千米.

第二十一章　代数方程

习题 21.1

1. B.
2. 含字母系数的一元二次方程:①;高次方程:②⑥⑧;分式方程:④⑦;整式方程:①②③⑤⑥⑧⑨.
3.（1） $x=\frac{a+2}{a-2}$； （2） $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{b}$.
4. 略.

习题 21.2

1. 答案不唯一,例如:$x^3-1=0,x^4-16=0$ 等.
2. B.
3.（1） $x=-3$； （2） $x=\pm 2$； （3） $x\approx 2.408$.
4.（1） $x\approx -5.037$； （2） $x_1=\frac{3}{4},x_2=\frac{7}{12}$； （3） $x=\frac{1}{4}$.

习题 21.3(1)

1. (1) C； (2) D.

2. 不同意.解分式方程必须验根，$x_1=1$ 就是原方程的增根，应该舍去.

3. $k=-2$.

习题 21.3(2)

1. (1) C； (2) C.

2. (1) $x_1=-2, x_2=5$； (2) $y_1=-1+\sqrt{7}, y_2=-1-\sqrt{7}$.

3. (1) $x_1=\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}, x_2=\dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}$； (2) $y=1$.

4. $x_1=9, x_2=-\dfrac{1}{9}$，验根过程略.

习题 21.3(3)

1. (1) D； (2) D.

2. (1) $\dfrac{x}{x+1}, y^2+3y-4=0$； (2) 答案不唯一，如$\dfrac{1}{x+1}, \dfrac{1}{y-1}, \begin{cases} u-4v=-1, \\ 2u+v=16. \end{cases}$

3. (1) $x_1=-2, x_2=3$； (2) $x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

4. $\begin{cases} x=-\dfrac{4}{3}, \\ y=\dfrac{8}{3}. \end{cases}$

5. (1) 3，4； (2) $a=12, b=5$，是第 4 个方程； (3) $\dfrac{2(n+2)}{x}-\dfrac{1}{x-(n+1)}=1, x_1=n+2, x_2=2n+2$；

验证略.

习题 21.4(1)

1. 是.

2. (1) A； (2) C.

3. 当 $x=0$ 时，左边$=\sqrt{3\times 0}=0$，右边$=0$，左边$=$右边，所以 $x=0$ 是原方程的根；

当 $x=3$ 时，左边$=\sqrt{3\times 3}=3$，右边$=-3$，左边$\neq$右边，所以 $x=3$ 不是原方程的根.

习题 21.4(2)

1. (1) $x_1=0, x_2=1$； (2) $k<-1$.

2. (1) D； (2) B.

3. (1) $x=\dfrac{3}{2}$； (2) $x=\dfrac{5}{3}$； (3) $x=1$； (4) $x=6$.

4. $x=4$.

5. $m=2$.

习题 21.5

1. (1) x^2、$2xy$、$-y^2$，$\dfrac{1}{2}$、-5，1； (2) 不是.

2. (1) C； (2) C.

3. (1) √； (2) ×； (3) ×； (4) √.

4. 答案不唯一，如：$\begin{cases} x=3, \\ y=\dfrac{3}{2}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}, \\ y=-1, \end{cases}$ … $\begin{cases} x=m, \\ y=\dfrac{m}{m-1} \end{cases}$ $(m\neq 0, 1, 2)$均可.

习题 21.6(1)

1. $\begin{cases}x_1=2,\\y_1=4;\end{cases}\begin{cases}x_2=4,\\y_2=2.\end{cases}$

2. (1) $\begin{cases}x_1=1,\\y_1=0,\end{cases}\begin{cases}x_2=-\dfrac{5}{3},\\y_2=-\dfrac{8}{3};\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x_1=0,\\y_1=0,\end{cases}\begin{cases}x_2=\dfrac{24}{5},\\y_2=-\dfrac{12}{5};\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x_1=4,\\y_1=3,\end{cases}\begin{cases}x_2=3,\\y_2=4.\end{cases}$

3. $\begin{cases}x=-30,\\y=22.\end{cases}$提示:利用“整体代入”更简便.

4. 答案不唯一,例如:$\begin{cases}y=2x,\\xy=2,\end{cases}$或$\begin{cases}y=2x,\\x^2+y^2=5,\end{cases}$或$\begin{cases}y=2x,\\y=x^2+2x-1\end{cases}$等.

习题 21.6(2)

1. (1) $x-y=0, x+5y=0$; (2) $\begin{cases}x^2+y^2=20,\\x-2y=0,\end{cases}\begin{cases}x^2+y^2=20,\\x-3y=0.\end{cases}$

2. (1) B; (2) D.

3. (1) $\begin{cases}x_1=-\dfrac{3}{2},\\y_1=\dfrac{5}{2},\end{cases}\begin{cases}x_2=1,\\y_2=0,\end{cases}\begin{cases}x_3=\dfrac{1}{2},\\y_3=-\dfrac{3}{2},\end{cases}\begin{cases}x_4=-1,\\y_4=0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=0,\\y=0.\end{cases}$

4. $\begin{cases}x_1=-\dfrac{3}{5},\\y_1=-\dfrac{7}{5},\end{cases}\begin{cases}x_2=-\dfrac{13}{5},\\y_2=\dfrac{3}{5},\end{cases}\begin{cases}x_3=5,\\y_3=0,\end{cases}\begin{cases}x_4=3,\\y_4=2.\end{cases}$

习题 21.7(1)

1. (1) C; (2) B.

2. 0.5 米.提示:设梯子顶端 A 下滑了 x 米,根据题意可列方程:$(2-x)^2+2^2=2.5^2$.

3. 10 元或 20 元.提示:设每件童装应降价 x 元,根据题意可列方程:$(20+2x)(40-x)=1\,200$,解得 $x_1=10, x_2=20$.

4. 20%.提示:设今后三年内这种环保型汽车每年增长的百分率是 x,根据题意可列方程:$1\,250(1+x)^3=2\,160$.

5. 30 人.提示:因为 $25\times1\,000<27\,000$,所以该单位去某风景区旅游的员工人数超过 25 人.设该单位共有 x 名员工去某风景区旅游,根据题意可列方程:$x[1\,000-(x-25)\times20]=27\,000$,解得 $x_1=30, x_2=45$.当$x=45$时,$1\,000-(45-25)\times20=600<700$,不合题意,舍去.

习题 21.7(2)

1. (1) C; (2) B.

2. 小丽 10 元,小杰 20 元.提示:设小丽平均每个月存 x 元,则小杰平均每个月存 $2x$ 元,根据题意可列方程:$\dfrac{120}{2x}=\dfrac{120}{x}-6$.

3. 33 套.提示:设现在实际做了 x 套,根据题意可列方程:$\dfrac{6}{x}=\dfrac{6}{x-3}-\dfrac{1}{55}$.

习题 21.7(3)

1. 3.提示:设这个数是 x,根据题意可列方程:$\sqrt{x+1}+1=x$.

2. 25 平方米.提示:设厅的面积为 x 平方米,那么大卧室的面积是$(x-9)$平方米,小卧室的面积是$(x-16)$平方米.根据题意可列方程:$\sqrt{x-9}=\sqrt{x-16}+1$.

3. 约为 0.51 m.提示:设该座钟的钟摆的长度是 x m,根据题意可列方程:$\dfrac{60}{42}=2\times3.14\sqrt{\dfrac{x}{9.8}}$.

4. 7.5 千米.提示:设变压器所在处 P 距离 C 处 x 千米,根据题意可列方程:$\sqrt{x^2+5^2}=\sqrt{(16-x)^2+3^2}$.

习题 21.7(4)

1. 小王在书店买了 10 套书,在网上买了 15 套书.提示:设小王在书店买了 x 套书,根据题意可列方程:$\frac{1\,350}{25-x}=\frac{1\,350-350}{x}-10$.

2. 小丽 40 分钟,小雪 60 分钟.提示:设小丽由 A 到 B 需要 x 分钟,小雪由 B 到 A 需要 y 分钟,根据题意可列方程组:$\begin{cases}\frac{48}{x}+\frac{48}{y}=2,\\ \frac{20}{x}+\frac{30}{y}=1.\end{cases}$

3. 甲 8 小时,乙 12 小时.提示:设单独完成此项工作,甲乙两班各需要 x 小时、y 小时,根据题意可列方程组:$\begin{cases}\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{1}{2},\\ \frac{3}{x}+\frac{6}{y}=\frac{7}{8}.\end{cases}$

复习题

A 组

1. (1) $\neq 3$; (2) $x=-3$; (3) $x_1=-1, x_2=2$; (4) $x=0$; (5) x^2、xy、$-2y^2$,x、$2y$,0.

2. (1) D; (2) C; (3) D; (4) A; (5) D; (6) C.

3. (1) 当 $a=0$ 时,方程没有实数根;当 $a\neq 0$ 时,$x=\frac{5a+1}{a}$; (2) $y=\pm\frac{\sqrt{b^2+1}}{b^2+1}$.

4. (1) $x=5$; (2) $x=\pm 2$; (3) $x\approx 2.169$; (4) $x_1\approx 2.364, x_2\approx -4.364$.

5. (1) $x=-\frac{2}{3}$; (2) $x_1=-\frac{2}{3}, x_2=-4$; (3) $x_1=1, x_2=-3$; (4) $\begin{cases}x=-\frac{1}{3},\\ y=\frac{2}{3}.\end{cases}$

6. (1) $x=4$; (2) 无实数解; (3) $y=20$; (4) $y=1$.

7. (1) $\begin{cases}x_1=-3,\\ y_1=-2,\end{cases}\begin{cases}x_2=2,\\ y_2=3;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=9,\end{cases}\begin{cases}x_2=9,\\ y_2=1;\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=1,\end{cases}\begin{cases}x_2=-1,\\ y_2=-1,\end{cases}\begin{cases}x_3=\frac{4\sqrt{7}}{7},\\ y_3=\frac{2\sqrt{7}}{7},\end{cases}\begin{cases}x_4=-\frac{4\sqrt{7}}{7},\\ y_4=-\frac{2\sqrt{7}}{7};\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x_1=\frac{1}{3},\\ y_1=-\frac{2}{3},\end{cases}\begin{cases}x_2=-\frac{1}{3},\\ y_2=\frac{2}{3},\end{cases}\begin{cases}x_3=\frac{3}{2},\\ y_3=\frac{1}{2},\end{cases}\begin{cases}x_4=-\frac{3}{2},\\ y_4=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

8. 10%.提示:设这四年中,每年接受科技培训的人次的增长率是 x,根据题意可列方程:$10(1+x)^3=13.31$.

9. 750 米.提示:设原计划每天修建盲道 x 米,根据题意可列方程:$\frac{3\,000}{x}-\frac{3\,000}{x+250}=2$.解得 $x_1=500, x_2=-750$(舍去).

10. 甲 60 个,乙 50 个.提示:设甲乙两人原来每小时分别加工 x 个、y 个零件,根据题意可列方程组:$\begin{cases}\frac{300}{y}-\frac{300}{x}=1,\\ \frac{250}{x}-\frac{300}{2y}=\frac{7}{6}.\end{cases}$

B 组

1. (1) $x=-1$; (2) $x=-2$ 或 $x=\frac{29}{10}$; (3) $x=-1$.

2. $m=\pm 1$.当 $m=1$ 时,方程组的解是$\begin{cases}x=-2,\\y=1;\end{cases}$当 $m=-1$ 时,方程组的解是$\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$提示:先消元得到一元二次方程,再利用一元二次方程的根的判别式求解.

3. 120 厘米.提示:设该长方形的宽是 x 厘米,则它的长是$(x+40)$厘米,根据题意可列方程:$x+(x+40)-80=\sqrt{x^2+(x+40)^2}$.

4. 能.提示:设规定时间为 x 天,根据题意可列方程:$\frac{24}{2x+4}+\frac{24}{2x-16}=1$,解得 $x_1=28$,$x_2=2$.经检验,$x_1=28$,$x_2=2$ 都是原方程的根,但 $x_2=2$ 不合题意,舍去,取 $x=28$.由 $24<28$ 知,甲乙两组合做可在规定时间内完成.

5. 甲 16 天,乙 24 天.

提示:设单独完成清淤工作甲公司需 x 天,乙公司需 y 天,根据题意可列方程组:$\begin{cases}\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=25\%,\\\frac{4}{x}+\frac{x+2}{y}=1.\end{cases}$

6. (1) 甲乙两组行进速度之比为 3∶2;

(2) 3.6 千米.提示:设山脚到山顶的路程为 x 千米,根据题意可列方程:$\frac{x}{x-1.2}=\frac{3}{2}$.

(3) 可提问题:"B 处到山顶的路程是多少千米?"

解答:设 B 处到山顶的路程为 $y(y>0)$千米,根据题意可列方程:$\frac{y}{1.2-y}=\frac{3}{2}$,解得 $y=0.72$.

答:B 处到山顶的路程是 0.72 千米.

第二十二章　四边形

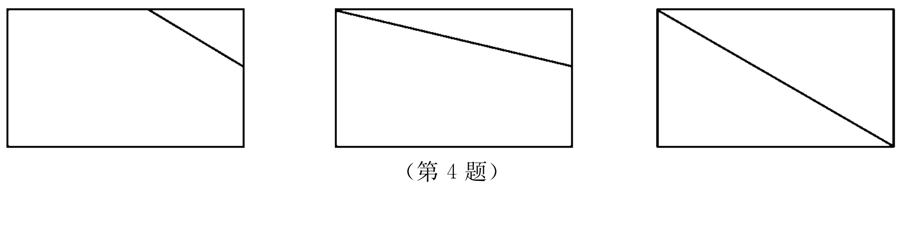
习题 22.1(1)

1. (1) $1\,800°$; (2) 10; (3) 11,$1\,620°$.

2. $(n-2)\cdot 180=n\cdot 144$,$n=10$.所以它的内角和为 $1\,440°$.

3. 设$\angle A=(2x)°$,$\angle B=(3x)°$,$\angle C=(4x)°$,则 $2x+4x=180$,得 $x=30$,所以,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$ 的度数分别是 $60°$、$90°$、$120°$、$90°$.

4. 剪掉一个角后,有三种情况,分别是五边形、四边形和三角形,所以内角和分别为 $540°$、$360°$、$180°$.



(第 4 题)

习题 22.1(2)

1. 8.

2. $360°\div 10=36°$,$180°-36°=144°$,各外角是 $36°$,各内角是 $144°$.

3. 设多边形的边数为 n,则$(n-2)\cdot 180°=5\times 360°$,得 $n=12$.

4. 联结 AD,得$\angle E+\angle F=\angle GAD+\angle GDA$,所以$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$ 的结果即为四边形 $ABCD$ 的内角和 $360°$.

习题 22.2(1)

1. (1) $72°$,$108°$; (2) 4、8.

2. 过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E,由条件可知 $AE=4$,所以$\square ABCD$ 的面积为 $40\ cm^2$.

3. 提示：$CD=AB=BE+AE$，只需证 $AE=BC$；由 $AB\parallel CD$ 以及 DE 为$\angle ADC$ 的角平分线知$\angle AED=\angle ADE$，可推出 $AE=AD=BC$.

习题 22.2(2)

1. (1) 59 mm；（2）4 cm；10 cm.
2. $AB=3$，$BC=5$.
3. BC、CD 及 OB 的长分别为 8、10、3.
4. 提示：证明$\triangle DOF\cong\triangle BOE$.

习题 22.2(3)

1. 提示：由四边形 $AEFD$、$EBCF$ 为平行四边形知，$AD\parallel EF$ 且 $AD=EF$，$EF\parallel BC$ 且 $EF=BC$，推出 $AD\parallel BC$ 且 $AD=BC$.所以 $ABCD$ 为平行四边形.
2. 提示：证明$\triangle AEH\cong\triangle CGF$(SAS)，由此知 $EH=FG$；同理可得 $EF=HG$，由两组对边分别相等推出四边形 $EFGH$ 是平行四边形.
3. 提示：先运用平行四边形的性质证明$\triangle AEG\cong\triangle CFH$，得 $EG\parallel HF$ 且 $EG=HF$，再由一组对边平行且相等推出四边形 $EFGH$ 是平行四边形.
4. 提示：先证 $AE\parallel FD$ 且 $AE=FD$，再证 $AE\parallel GD$ 且 $AE=GD$，推出四边形 $AEGD$ 为平行四边形，从而 ED、AG 互相平分.

习题 22.2(4)

1. 提示：由 $AB\parallel CD$，$\angle B=\angle D$，可得$\angle A=\angle C$，从而用两组对角分别相等推出结论.或者由 $AB\parallel CD$，$\angle B=\angle D$，可得 $AD\parallel BC$，从而用两组对边分别平行推出结论.
2. 提示：联结 BD，交 AC 于点 O，证明 EF 和 BD 互相平分.
3. 提示：可通过证明 $AF\parallel EC$ 且 $AF=EC$，由一组对边平行且相等推出四边形 $AECF$ 是平行四边形.也可以通过证明$\angle E=\angle F$，$\angle EAF=\angle ECF$，由两组对角分别相等推出四边形 $AECF$ 是平行四边形.
4. 提示：证明四边形 $AEDF$ 是平行四边形，再证明$\triangle DFC$ 是等腰三角形，由此知 $DF+DE=FC+AF=AC$.

习题 22.3(1)

1. (1) 10 cm，24 cm；（2）5.
2. 提示：先证$\triangle AOB$ 是等边三角形，再推出 $AB=\frac{1}{2}BD=7.5$ 厘米，$AC=15$ 厘米.
3. 提示：证明$\triangle ABM$、$\triangle DCM$ 都是等腰直角三角形，推出$\angle AMB=\angle DMC=45^\circ$，得$\angle AMD=90^\circ$，所以 $MA\perp MD$.
4. 提示：由条件可推出 $AC=AD$，即$\triangle ACD$、$\triangle ACB$ 都是等边三角形，于是可得$\angle BCD=120^\circ$.
5. 提示：由翻折知$\angle EFC'=\angle EFC=115^\circ$，得$\angle 1=\angle EGF=\angle GFC'=50^\circ$，$\angle 2=130^\circ$.

习题 22.3(2)

1. (1) $16\sqrt{3}$；（2）20，24.
2. 提示：由题意知 $AO=BO=AB$，所以$\angle AOB=60^\circ$.
3. 提示：由题意可设这两个角的度数分别是 $3x$、$2x$，则 $2x+3x=90$，解得 $x=18$，所以菱形四个内角的度数分别是 $4x$、$6x$、$4x$、$6x$，即 72°、108°、72°、108°.
4. 提示：由$\angle BAD=2\angle B$，且$\angle BAD+\angle B=180^\circ$，可得$\angle B=60^\circ$，又 $AB=BC$，所以$\triangle ABC$ 是等边三角形.

习题 22.3(3)

1. 提示：由题意知$\angle BAF+\angle ABF=\frac{1}{2}(\angle DAB+\angle ABC)=90^\circ$，同理可得$\angle AED=\angle DHC=90^\circ$，所以这个四边形是矩形.
2. 提示：由题意知四边形 $HGMD$ 是平行四边形，再证$\triangle GBM\cong\triangle DCM$，推出 $GM=DM$，可得四边形 $HGMD$ 是菱形.

3. 提示:联结 MN,只需证明 $MNCD$ 是菱形.

4. 这样的点 P 存在.作$\angle A$ 的平分线与 BC 相交于点 P,过点 P 分别作 AB、AC 的平行线,交 AC、AB 于点 D、E,得四边形 $AEPD$ 是菱形.证明略.

习题 22.3(4)

1. 提示:由四边形 $ABCD$ 是正方形可知$\angle ACB=\angle ACF=45°$;又由 $CE=AC$ 可知$\angle CAE=\angle CEA=22.5°$,所以$\angle AFC=112.5°$.

2. 提示:证$\triangle ADE\cong\triangle DCF$,可推得 $AE=DF$ 且 $AE\perp DF$.

3. 提示:先证明$\angle ODF=\angle OCE$,再证明$\triangle DOF\cong\triangle COE$.

4. 提示:联结 DE,由题意知四边形 $GEFD$ 是矩形,所以 $GF=DE$,再证明 $BE=DE$.也可以延长 FE 交 AB 于点 H,证明$\triangle BHE\cong\triangle EFG$.

习题 22.3(5)

1. 提示:由题意可推出$\triangle AEB$、$\triangle FBC$、$\triangle GDC$、$\triangle HAD$ 均是等腰直角三角形,可得四边形 $EFGH$ 是矩形;又 $EH=EA+AH=DG+HD=HG$,所以四边形 $EFGH$ 是正方形.

2. 提示:联结 BF,证明$\triangle EDF$ 是等腰三角形,再证明$\triangle BEF\cong\triangle BCF$,可推出结论.此题也可以运用代数运算的方法得出结论.

3. 提示:证明$\triangle AA'D'\cong\triangle BB'A'\cong\triangle CC'B'\cong\triangle DD'C'$.

4. 提示:设正方形的边长为 1,$CC'=x$,则 $B'C=1-x$,由题意可知 $B'C'^2=x^2+(1-x)^2=\frac{5}{9}$,解得 $x=\frac{1}{3}$ 或$\frac{2}{3}$,所以当点 A'、B'、C'、D'分别位于所在边的边长的$\frac{1}{3}$或$\frac{2}{3}$处时,正方形 $A'B'C'D'$的面积是正方形 $ABCD$ 面积的$\frac{5}{9}$.

习题 22.4

1. (1) 略; (2) $120°$或 $60°$.

2. $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. 提示:过点 D 作 $DE\parallel AB$,交 BC 于点 E,可推出 $DC=EC=5$.

4. 提示:用两种不同的方法表示 $S_{\triangle ADC}$,可得 $5\times DE=2\times 3$,所以 DE 的长是$\frac{6}{5}$.

习题 22.5(1)

1. (1) 10 cm,$65\sqrt{3}$ cm^2; (2) $45°,135°,45°,135°$; (3) $60°,120°,60°,120°$.

2. 提示:运用等腰梯形的性质证明$\triangle EAB\cong\triangle EDC$.

3. 提示:运用等腰梯形的性质证明$\triangle CBE\cong\triangle ADC$.

4. 提示:先利用对角线互相平分证明四边形 $DEFC$ 是平行四边形;再通过证明$\triangle ADC\cong\triangle BCD$,推出 $OD=OE$,得对角线 $DF=CE$,所以四边形 $DEFC$ 是矩形.

习题 22.5(2)

1. (1) ×; (2) √; (3) √.

2. 提示:先推出 $EF\parallel BC$,又 BE 与 CF 不平行,所以四边形 $EBCF$ 是梯形,再由 $EC=FB$ 推出四边形 $EBCF$ 是等腰梯形.

3. 提示:由条件得$\triangle ABD\cong\triangle ACE$,推出 $BD=EC$,$AE=AD$,得 $BE=CD$;由$\angle AED=\angle ABC=\frac{180°-\angle A}{2}$,推出 $ED\parallel BC$,又 BE 与 CD 不平行,可推出四边形 $BCDE$ 是等腰梯形.

4. 周长为 26 cm,面积为 32 cm^2.

习题 22.6(1)

1. (1) $\frac{1}{2}$,$\frac{1}{4}$; (2) 1∶3; (3) 菱形; (4) 矩形.

2. 提示：设原三角形的三边长分别为 $3x$ cm、$4x$ cm、$6x$ cm，则新三角形的三边长为$\frac{3x}{2}$ cm、$2x$ cm、$3x$ cm.由题意得$\frac{3x}{2}+2x+3x=52$，解得 $x=8$，所以原三角形的三边长是 24 cm、32 cm、48 cm.

3. 由三角形中位线定理知 $EF=\frac{1}{2}AD$，$EG=\frac{1}{2}BC$，所以 $EF=EG$.

4. 提示：联结 AC、BD，运用三角形中位线定理可得 $MF /\!/ AC$ 且 $MF=\frac{1}{2}AC$，$EN /\!/ AC$ 且 $EN=\frac{1}{2}AC$，所以 $EN /\!/ MF$ 且 $EN=MF$，可推出 $MENF$ 是平行四边形；又 $AC=BD$，所以 $MENF$ 是菱形.

习题 22.6(2)

1. (1) 30； (2) 18； (3) 3∶5.
2. 设腰长为 x cm，由题意得 $4x=24$，解得 $x=6$，腰长为 6 cm.
3. 提示：由 $A_5B_5=20$ 米，$A_1B_1=80$ 米，可知 $A_3B_3=50$ 米，进而有 $A_2B_2=65$ 米.
4. 提示：取 AB 的中点 F，联结 EF，由梯形中位线定理得 $EF /\!/ BC$；由条件可推出 EF 垂直平分 AB，所以 $EA=EB$.

习题 22.7(1)

1. 提示：方向按照上北、下南、左西、右东加以区分，长度按比例缩小.
2. (1) $\overrightarrow{DE}$；(2) $\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DC}$；(3) $\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{EB}$；(4) $\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CE}$；(5) $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{EC}$；(6) $\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{CD}$.

习题 22.7(2)

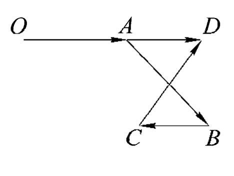
1. (1) $\overrightarrow{AB}$； (2) $\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{CD}$； (3) $\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{BC}$；$\overrightarrow{DA}$.
2. (1) 正确； (2) 不正确； (3) 正确； (4) 不正确.
3. (1) $\overrightarrow{AF}$； (2) $\overrightarrow{CF}$、$\overrightarrow{EA}$； (3) $\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{DA}$.

习题 22.8(1)

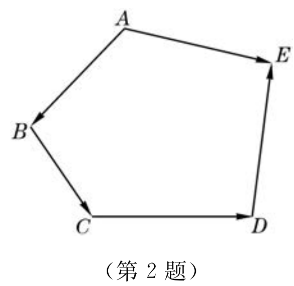
1. (1) 作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$；$\vec{b}+\vec{c}$，图略；
   (2) 由向量加法的结合律可知 $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$，所以，在第(1)题作图的基础上，作$\overrightarrow{BC}=\vec{c}$，得$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$，图略；
   (3) 略.
2. (1) $\overrightarrow{CA}=(-\vec{a})+(-\vec{b})$，$\overrightarrow{BD}=\vec{b}+(-\vec{a})$； (2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\vec{b}+\vec{b}$.
3. 根据加法法则画图.注意和向量与 $\vec{a}$（或 $\vec{b}$）平行，图略.
4. (1) $\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{ED}$； (2) 过点 C 作$\overrightarrow{CG}=\vec{c}$，联结 EG，则$\overrightarrow{EG}=\vec{a}+\vec{c}$.

习题 22.8(2)

1. (1) 略；(2) 略；(3) 如图，在平面内任取一点 O，顺次作向量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{CD}=\vec{d}$，则$\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.



（第 1(3)题）



（第 2 题）

2. 如图.
3. (1) $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$（还有相等向量）；
   (2) 因为$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AO}$，所以，$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$；
   (3) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

4. (1) 正确，因为$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}$，$\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\vec{0}$，所以结论成立；

(2) 不正确，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

5. (1) $\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$； (2) $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AD}=-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$； (3) $\overrightarrow{EB}=-\overrightarrow{BE}=-(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$.

习题 22.9(1)

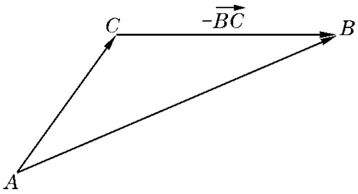
1. (1) 略；

(2) 略.

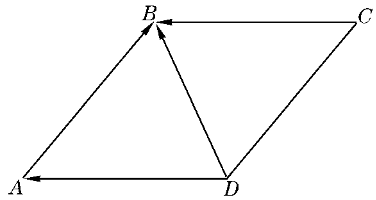
2. 略.

3. (1) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$，如图所示；

(2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$，图略.



（第 3(1)题）



（第 4(1)题）

4. (1) 错.(如图，以有向线段$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CB}$为邻边作平行四边形 $ADCB$，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}$，而$\overrightarrow{DB}$与$\overrightarrow{AC}$不相等)；

(2) 错.($\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}$).

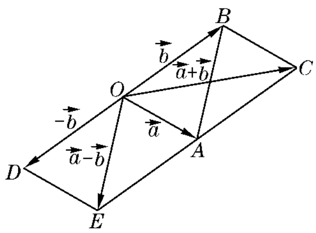
5. 略.

习题 22.9(2)

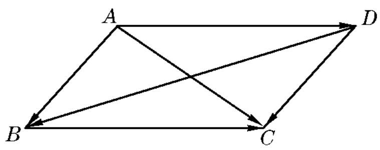
1. 如图所示.已知$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OD}=-\vec{b}$，在平行四边形 $OACB$ 中 $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$；在平行四边形 $ODEA$ 中，

$$\vec{a}+(-\vec{b})=\overrightarrow{OE}.$$

因为 $OB\parallel EA$ 且 $OB=EA$，所以四边形 $OEAB$ 是平行四边形，得$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OE}$.所以 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 方法一：如图，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}$；

方法二：$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$.

3. (1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$；

(2) $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$.

4. (1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$；

(2) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OD}=\vec{0}$；

(3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$.

5. (1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}=-\vec{b}$； (2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB}=-\overrightarrow{BE}=-(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$.

复习题

A 组

1. (1) 9，7； (2) 6 或 $2\sqrt{3}$； (3) 平行四边形，菱形，矩形，菱形； (4) $0<x<25$； (5) 6，$4\sqrt{3}$.

2. 提示：由题意知 $BO+OC=6$，在 Rt$\triangle AED$ 中，$BC=AD=2AE=4$，可得$\triangle BOC$ 的周长为 10.

3. 提示：取 GD 的中点 H，联结 AH，可得 $AH=\frac{1}{2}GD=AB$，$\angle ABD=\angle AHB=50^\circ$.

4. 提示：$\square AEPG$ 与 $\square HPFC$ 的面积相等，$\square ABHG$ 与 $\square BCFE$ 的面积相等，$\square HCDG$ 与 $\square AEFD$ 的面积相等.证明过程略.

5. 提示：通过证明 $\triangle NCF \cong \triangle MAE$ 可得 $NF=ME$，$\angle NFC=\angle MEA$，进一步推得 $\angle NFE=\angle MEF$，$NF /\!/ ME$，所以四边形 $NEMF$ 是平行四边形，推出 $EN /\!/ MF$.

6. 提示：由题意知 $\angle DEA=30^\circ=\angle EAB$，$\angle EBA=\dfrac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ$，所以 $\angle EBC=15^\circ$.

7. 提示：由题意知菱形的一条对角线将菱形分为两个边长为 6 的等边三角形，所以这个菱形的面积为 $2\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=18\sqrt{3}$.

8. 提示：由题意可推出 $\angle EDB=\angle DBC=\angle EBD$，所以 $BE=ED$.设 $AE=x$，则 $BE=ED=25-x$.在直角三角形 ABE 中，有 $15^2+x^2=(25-x)^2$，解得 $x=8$.

9. 提示：由题意可推出 $AE /\!/ FC$ 且 $AE=FC$，得到四边形 $AFCE$ 是平行四边形，推出 $HE /\!/ FG$；同理可得 $HF /\!/ EG$，所以四边形 $GFHE$ 是平行四边形，再证 $AG \perp BE$.

10. 提示：先证 $AD=DH$，且 $AF /\!/ DH$，又 $\angle ADF$ 和 $\angle BFE$ 是等角的余角，得 $\angle AFD=\angle BFE=\angle ADF$，推出 $AF=AD$，所以 $AF /\!/ DH$ 且 $AF=DH$，推出四边形 $AFHD$ 是菱形.

11. 提示：证明 $\triangle AFC \cong \triangle ABE$.

12. 提示：延长 AE，交 BC 于点 G，可推出 $\triangle BEA \cong \triangle BEG$，得 E 是 AG 的中点，可知 EF 是 $\triangle AGC$ 的中位线，推出 $EF=\dfrac{1}{2}(BC-AB)$.

13. 略.

B 组

1. 提示：由题意可知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，又由纸片等宽推出邻边上的高相等，所以 $AD=AB$，可知平行四边形 $ABCD$ 是菱形.

2. 提示：先选择能构成平行四边形的两个条件，如：①②、①⑤、①⑥、⑤⑥，然后再选择一个条件③或④构成矩形.

3. (1) $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\vec{a}-\vec{b}$；$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DE}=\vec{c}-(\vec{a}-\vec{b})$；
   (2) $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，作图略.

4. 提示：由题意可知四边形 $EFGH$ 是菱形，新草坪的面积是原来的 2 倍.

5. 提示：延长 CE，交 AB 的延长线于点 G，可推出 $CE=EG=\dfrac{1}{2}GC$.再通过证明 $\triangle ABF \cong \triangle CBG$ 得 $CG=AF$.

6. 提示：由三角形中位线定理知 $FN /\!/ BM$ 且 $FN=\dfrac{1}{2}BM$，$EN /\!/ MC$ 且 $EN=\dfrac{1}{2}MC$，可证 $\triangle AMB \cong \triangle DMC$，得 $BM=MC$，所以四边形 $MENF$ 是菱形.

7. 提示：由等腰梯形可得 $\angle B=\angle C$，又 $GF=GC$，得 $\angle GFC=\angle C$，所以 $\angle GFC=\angle B$，推出 $GF /\!/ AE$，所以四边形 $AEFG$ 是平行四边形；又 $\angle EFG=180^\circ-\angle EFB-\angle GFC=180^\circ-\dfrac{1}{2}\angle FGC-\dfrac{180^\circ-\angle FGC}{2}=90^\circ$，所以四边形 $AEFG$ 是矩形.

8. 提示：由条件可得 $\angle DBC=\angle BDC$，推出 $DC=BC=AB$.设 $AD=x$，则 $DC=BC=AB=12-x$，得 $20=24-x$，所以 $AD=4$.

9. 提示：(1) 由 $\triangle ACF \cong \triangle DCB$，得 $AF=BD$；(2) 点 C 在线段 AB 的延长线上，同理可得 $AF=BD$.

10. 提示：(1) 由平行线和角平分线的条件，得 $\angle OEC=\angle OCE$，推出 $OE=OC$，同理可得 $OF=OC$，所以 $OE=OF$；(2) 当 O 是 AC 的中点时，四边形 $AECF$ 是矩形.

第二十三章　概率初步

习题 23.1

1. (1) 不可能事件； (2) 随机事件； (3) 必然事件； (4) 随机事件.

2. (1) ×; (2) ×; (3) √; (4) √.

3. ②,①,③④.

习题 23.2

1. 座号是 2 的倍数的可能性大.

2. (1) 可能发生; (2) 很不可能发生; (3) 一定发生; (4) 可能发生.

3. D.

4. 如:从装有 999 个白球和 1 个红球的袋子里任意摸出一个球.

习题 23.3(1)

1. (1) 接近 0; (2) =1; (3) 接近 1; (4) =0.

2. (1) 小明的试验中针尖朝上的频率为 0.5,小杰的试验中针尖朝上的频率为 0.65;
(2) 图钉针尖朝上的概率估计是 0.65,因为大数次试验的频率才稳定于概率附近.

3. 略.

习题 23.3(2)

1. (1) $\frac{2}{11}$; (2) 0; (3) $\frac{4}{11}$.

2. (1) $\frac{1}{13}$; (2) $\frac{1}{4}$.

3. (1) $\because\ 3\times16<50<3\times17$, $\therefore\ P(3\text{ 的倍数})=\frac{16}{50}=\frac{8}{25}$;

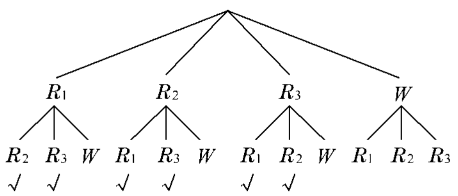
(2) $\because\ 5\times10=50$, $\therefore\ P(5\text{ 的倍数})=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$.

4. 红、黑各 5 张.

习题 23.3(3)

1. 用 R_1、R_2、R_3 表示 3 个红球,用 W 表示白球,从树形图可见共有 12 种等可能结果,其中"两红"共有 6 种结果,故相应概率为$\frac{1}{2}$.

也可将 4 个球排成一列,R_1,R_2,R_3,W,任意摸两个球的等可能结果为:(R_1R_2)、(R_1R_3)、(R_1W)、(R_2R_3)、(R_2W)、(R_3W),共 6 种,其中"两红"有 3 种,故相应概率为$\frac{1}{2}$.



(第 1 题)

2. $\frac{2}{3}$.

3. 可依次去掉一条线段,共有 4 种等可能结果,其中只有一种结果能构成三角形,所以能构成三角形的概率是$\frac{1}{4}$.

(3 5 7)	(1 5 7)	(1 3 7)	(1 3 5)
√	×	×	×

(第 3 题)

习题 23.4(1)

1. 不公平.

列表显示了所有 9 种等可能结果,其中"两数和为 2"有 1 种,"两数和为 3"有 2 种,"两数和为 4"有 3 种,"两数和为 5"有 2 种,"两数和为 6"有 1 种.因此选中第 2、6 组的概率都是$\frac{1}{9}$,选中第 3、5 组的概率都是$\frac{2}{9}$,选中第 4 组的概率是$\frac{1}{3}$.

(1 1)	(1 2)	(1 3)		2	3	4
(2 1)	(2 2)	(2 3)	⇨	3	4	5
(3 1)	(3 2)	(3 3)		4	5	6

(第 1 题)

2. 可组成的三位数有125、152、215、251、512、521，共6个，其中“能被5整除的数”有2个，故任取一个三位数恰被5整除的概率是$\frac{1}{3}$.

3. (1) 因为5个球中有2个球无奖，所以摸不到奖的概率是$\frac{2}{5}$；

(2) 将球按奖品价值排列：50，20，10，0，0，任取2个的等可能结果有：(50　20)、(50　10)、(50　0)、(50　0)、(20　10)、(20　0)、(20　0)、(10　0)、(10　0)、(0　0)，共10种结果，“超过10元”的结果有7种，所以P(超过10元)$=\frac{7}{10}$.

4. 两张牌的点数不互素有(2，2)、(2，4)、(3，3)、(4，2)、(4，4)，共5种结果，故两张牌的点数互素有11种结果，两张牌的点数互素概率为$\frac{11}{16}$.

5. 掷两枚骰子共有36个等可能结果，“两数和为8”有5种结果，“两数和为9”有4种结果；“两数和大于8”有10种结果，“两数差的绝对值小于2”有(1　1)、(2　2)、(3　3)、(4　4)、(5　5)、(6　6)、(1　2)、(2　3)、(3　4)、(4　5)、(5　6)、(2　1)、(3　2)、(4　3)、(5　4)、(6　5)，共16种结果，故方案①②都不公平.公平游戏规则有很多，如“两数之和等于8时甲胜，两数之和等于6则乙胜”；“两数差等于0时甲胜，两数差的绝对值等于3则乙胜”.

(1　1)	(1　2)	(1　3)	(1　4)	(1　5)	(1　6)
(2　1)	(2　2)	(2　3)	(2　4)	(2　5)	(2　6)
(3　1)	(3　2)	(3　3)	(3　4)	(3　5)	(3　6)
(4　1)	(4　2)	(4　3)	(4　4)	(4　5)	(4　6)
(5　1)	(5　2)	(5　3)	(5　4)	(5　5)	(5　6)
(6　1)	(6　2)	(6　3)	(6　4)	(6　5)	(6　6)

(第5题)

习题 23.4(2)

1. P(钻出石油)$=\frac{40}{5\,000}=\frac{1}{125}$.

2. $\frac{1}{2}$.

3. $\frac{2}{3}$.

4. (1) $\frac{80}{360}=\frac{2}{9}$；　(2) $\frac{40}{360}+\frac{20}{360}=\frac{1}{6}$；　(3) $\frac{80}{360}+\frac{60}{360}+\frac{40}{360}+\frac{20}{360}=\frac{200}{360}=\frac{5}{9}$.

复习题

A 组

1. (1) $\frac{8}{64}=\frac{1}{8}$；　(2) $\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$；　(3) $\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$；　(4) $\frac{8}{64}=\frac{1}{8}$.

2. (1) 列表如下：

(1　1)	(1　2)	(1　3)	(1　4)	(1　5)	(1　6)
(2　1)	(2　2)	(2　3)	(2　4)	(2　5)	(2　6)
(3　1)	(3　2)	(3　3)	(3　4)	(3　5)	(3　6)
(4　1)	(4　2)	(4　3)	(4　4)	(4　5)	(4　6)
(5　1)	(5　2)	(5　3)	(5　4)	(5　5)	(5　6)
(6　1)	(6　2)	(6　3)	(6　4)	(6　5)	(6　6)

(2) ① “点数和为6”有5种结果，“点数和为8”也有5种结果，故相应的概率都是$\frac{5}{36}$；② P(点数和大于4)$=$

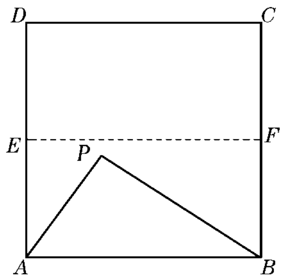
$\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$.

3. 去掉大、小王的一副牌中，奇数牌有 $7\times4=28$ 张，故抽到的奇数牌的概率是$\frac{7}{13}$.红桃、方块共有 $13\times2=26$ 张，故抽到红桃或方块的概率是$\frac{1}{2}$.因为$\frac{7}{13}>\frac{1}{2}$，所以玩法不公平.

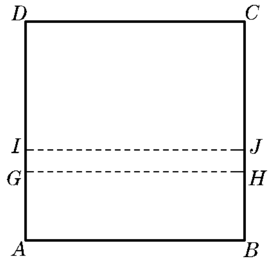
B 组

1. (1) 设 AB 边上的高为 h，则$\frac{1}{2}\cdot1\cdot h<\frac{1}{4}$，得 $h<\frac{1}{2}$，如图(1)，E、F 分别为 AD、BC 中点，当点 P 在矩形 $ABFE$ 内部时，$S_{\triangle PAB}<\frac{1}{4}$，所以 $P\left(S_{\triangle PAB}<\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$；

(2) 由$\frac{1}{6}<S_{\triangle PAB}<\frac{1}{5}$，得$\frac{1}{6}<\frac{1}{2}\cdot1\cdot h<\frac{1}{5}$，$\frac{1}{3}<h<\frac{2}{5}$，如图(2)，$AI=BJ=\frac{2}{5}$，$AG=BH=\frac{1}{3}$，当点 P 在矩形 $GHJI$ 内部时，$S_{\triangle PAB}$在$\frac{1}{6}$至$\frac{1}{5}$之间，所以 $P\left(\frac{1}{6}<S_{\triangle PAB}<\frac{1}{5}\right)=\dfrac{\frac{2}{5}-\frac{1}{3}}{1}=\frac{1}{15}$.



(1)



(2)

(第 1 题)

2. (1) 红球 6 个，黄球 4 个，其他颜色的球 2 个；

(2) 至少 6 个，其中红球 4 个，黄球 1 个，其他颜色的球 1 个.

说　　明

本册教材根据上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会制定的课程方案和《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》编写,供九年义务教育八年级第二学期试用.

本教材由上海师范大学主持编写,经上海市中小学教材审查委员会审查准予试用.

本册教材的编写人员有:

主编:邱万作　　分册主编:史荣铨

特约撰稿人(按姓氏笔画为序):王　华　胡　军　徐晓燕　曾国光　蔡则彪

2019 年教材修订组成员:叶锦义　邵世开　沈　洁　陆海兵　徐晓燕　顾跃平

欢迎广大师生来电来函指出教材的差错和不足,提出宝贵意见.出版社电话:021-64319241.

插图绘制:黄国荣、顾云明

图书在版编目(CIP)数据

九年义务教育数学教学参考资料. 八年级. 第二学期：试用本 / 上海市中小学（幼儿园）课程改革委员会编. — 上海：上海教育出版社, 2019.12（2024.12重印）
ISBN 978−7−5444−9650−6

Ⅰ. ①九… Ⅱ. ①上… Ⅲ. ①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ. ①G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第276855号

经上海市中小学教材审查委员会审查
准予试用　　准用号 II-CJ-2019025

责任编辑　周明旭

九年义务教育
数学教学参考资料
八年级第二学期
(试用本)
上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会

上海世纪出版股份有限公司
上　海　教　育　出　版　社　出版
（上海市闵行区号景路159弄C座　　邮政编码:201101）
上海新华书店发行　　上海中华印刷有限公司印刷

开本 890×1240　1/16　印张 11
2019年12月第1版　　2024年12月第6次印刷
ISBN 978-7-5444-9650-6/G·7958

定价:27.50元
此书如有印、装质量问题,请向本社调换　上海教育出版社电话:021-64373213

绿色印刷产品

ISBN 978-7-5444-9650-6