国家教材委员会专家委员会审核通过 2024

义务教育教科书

（五·四学制）

数学

七年级

上册

上海教育出版社

义务教育教科书

（五·四学制）

数学

七年级
上册

主编　李大潜

上海教育出版社

主　　编：李大潜
本册主编：徐斌艳
本册编写人员：王海生　沈　洁　李文侠　鲁海燕　朱丽霞　金荣生　苗俊杰　朱　雁

责任编辑：项征御　章佳维
装帧设计：王　捷　周　吉

本册教科书中的图片由图虫·创意等图片网站提供

义务教育教科书（五·四学制）　数学　七年级　上册

出　版　上海教育出版社（上海市闵行区号景路159弄C座）
发　行　上海新华书店
印　刷　上海中华印刷有限公司
版　次　2024年7月第1版
印　次　2025年6月第2次印刷
开　本　787 毫米×1092 毫米　1/16
印　张　9.5
字　数　140 千字
书　号　ISBN 978−7−5720−2876−2/G·2544
定　价　9.80 元

主编的话

世间的万事万物都有数和形这两个侧面，数学这门学科是忽略了事物的其他属性，仅仅从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界的.

初中的数学，介于小学数学与高中数学之间，以往偏向于直观的数学教学将开始逐步走向理性的阶段，对学生逻辑思维的训练会提出较高的要求，其认识也将不断得到深化.

数学是一门重理解和思考的学科. 数学学得好，主要看三条：一是理解要深入，二是运作要熟练，三是表达要清晰. 这儿所提的“运作”，泛指推理及计算. 这三者中最重要的是理解，只有理解深入，才能实现运作熟练和表达清晰这样一些外在层面上的表现，才能真正掌握数学的精髓.

这些年参加了上海市的一些基础数学教科书的编写工作，常常听到一种说法：数学是绝大多数学生一生中学得最多的一门功课，不少学生对数学是喜欢和热爱的，但不太注意对数学真正的理解和感悟，花费了不少时间去刷题，学习负担虽重，却远未达到应有的收获；还有相当一部分学生觉得数学抽象、难懂、神秘，从而望而生畏，甚至避之唯恐不及. 所有这些，都不是我们希望看到的.

我们希望通过教师及学生的共同努力，使数学成为一门容易为学生接受，真正喜闻乐见、可近可亲的课程；不仅负担不重，而且愈学愈想学，愈学愈有趣味，愈学愈觉得数学内容丰富、奥妙无穷，深深地为其吸引和陶醉. 这是我们的一个理想，并相信它是一定可以实现的.

为了实现我们的理想，我们希望这套教科书能真正抓住初中数学的真谛，用朴实无华且单刀直入的方式展现初中阶段应该学习的基本数学内容，努力给学生带来明确而清晰的印象，真正帮助他们理解与掌握有关的数学内容，使学生的数学知识随着年龄的增长逐步增进，充分体现数学学科的育人价值.

本册教科书开始系统地介绍代数式. 在“整式的加减”“整式的乘除”两章中将学习整式的四则运算. 在“因式分解”一章中学习代数式的分解. 在“分式”一章中学习分式的性质及其运算. 此外，在“图形的运动”一章中学习图形的三种基本运动以及两种对称. 在“综合与实践”中，将从数学角度研究传统连续纹样和现代镶嵌图形、制订“阅读之星”评选方案.

目　录

第 10 章　整式的加减

第 11 章　整式的乘除

第 12 章　因式分解

第 10 章

整式的加减

通过前面几章的学习，我们已掌握了有理数的运算，学习了用字母表示数及与一次式有关的概念. 是否还有二次式、三次式、高次式存在？它们也能像数那样进行运算吗？

本章将展开关于一类代数式——整式的学习，重点是掌握合并同类项，另外需要关注去括号的方法. 学好整式的加减，能为之后学习整式的乘除和因式分解打下基础.

10.1 整式

我们看以下几个例子：

（1）棱长为 a 的正方体的表面积为 $6a^2$，体积为 a^3；

（2）铅笔的单价是 x 元，圆珠笔的单价是铅笔单价的 2.5 倍，则圆珠笔的单价是 $2.5x$ 元；

（3）全校学生总人数是 m，其中女生占总人数的 48%，则女生人数是 $48\%m$；

（4）一辆汽车的速度是 v km/h，它 t h 行驶的路程为 vt km.

上面的例子中得到了一组代数式：$6a^2$、a^3、$2.5x$、$48\%m$、vt.

数或字母的乘积叫作**单项式**.

> 单独一个数或一个字母也是单项式.

上面列出的代数式都是单项式. 其中，$6a^2$ 的数字因数为 6，称 $6a^2$ 的系数是 6；a^3 的数字因数为 1，称 a^3 的系数是 1. 一个含字母的单项式中的数字因数叫作这个**单项式的系数**. 例如，上面例子中的一组单项式的系数分别为 6、1、2.5、48%、1.

一个单项式中，所有字母的指数的和叫作这个**单项式的次数**. 例如，$6a^2$、a^3、$2.5x$、$48\%m$、vt 的次数分别为 2、3、1、1、2.

特别地，非零的数是零次单项式，如 5、$-\dfrac{5}{2}$ 都是零次单项式.

例 1 请指出下列单项式的系数和次数：

（1）ab；　　（2）$\dfrac{3}{7}s^3t^2$；　　（3）$-\dfrac{5x^4y^2}{11}$.

解 （1）单项式 ab 的系数是 1，次数是 2.

（2）单项式 $\dfrac{3}{7}s^3t^2$ 的系数是 $\dfrac{3}{7}$，次数是 5.

（3）单项式 $-\dfrac{5x^4y^2}{11}$ 的系数是 $-\dfrac{5}{11}$，次数是 6.

对于两个单项式，如果它们所含字母相同，且相同字母的指数也相同，

那么称这两个单项式为**同类项**.

例 2 判断下列各组单项式是不是同类项：

(1) a 与 $3a$；

(2) $2xy$ 与 $2x$；

(3) $2a^2b^2$ 与 $-3b^2a^2$；

(4) $3x^2y$ 与 $2y^2x$.

解 (1) a 与 $3a$ 这两个单项式所含字母相同，均为字母 a，且字母 a 的指数也相同，都是 1，所以它们是同类项.

(2) $2xy$ 与 $2x$ 这两个单项式所含字母不相同，前者含字母 y，而后者不含字母 y，所以它们不是同类项.

(3) $2a^2b^2$ 与 $-3b^2a^2$ 这两个单项式虽然所含字母顺序不同，但是它们所含字母相同，均为字母 a 和 b，且相同字母的指数也相同，所以它们是同类项.

(4) $3x^2y$ 与 $2y^2x$ 这两个单项式虽然所含字母相同，均为字母 x 和 y，但是相同字母的指数不相同，前者中字母 x 的指数为 2，而后者中字母 x 的指数为 1，所以它们不是同类项.

例 3 当 m 和 n 为何值时，关于 x、y 的单项式 $\frac{1}{3}x^{n-1}y^m$ 与 $-x^{2m}y^4$ 是同类项?

解 因为关于 x、y 的单项式 $\frac{1}{3}x^{n-1}y^m$ 与 $-x^{2m}y^4$ 是同类项，所以

$$\begin{cases} n-1=2m, \\ m=4. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} m=4, \\ n=9. \end{cases}$$

因此 m 的值为 4，n 的值为 9.

观察下面一组代数式：

$$4a^2-3b^3、-m+4、3t^2-t-4、2ab+2ac+2bc.$$

它们都是由单项式求和而得到的代数式.

有限个单项式求和得到的代数式叫作**整式**．整式也叫作**多项式**．上面列举的四个代数式均为整式．例如，$3t^2-t-4$ 是由 $3t^2$、$-t$ 和 -4 这三个单项式求和得到的整式．

单项式也是整式．

课堂练习 10.1

1. 填表：

单项式	$-xy^4$	b^7	$-\frac{5}{11}s^4t^5$	$(-3)^3x^2y^4$	$\frac{5r^2}{7}$
系数					
次数					

2. 已知整式 $-3x^3y^2+\frac{3}{2}x^2y^2-\frac{1}{3}xy+2.5x-y$ 是由五个单项式求和得到的，请将这些单项式以及它们各自的系数与次数填入下表：

单项式					
系数					
次数					

3. 判断下列各组单项式是不是同类项：

（1）$3xy$ 与 $-yx$；

（2）$5a^2b^3c$ 与 $5a^3b^2c$；

（3）$\frac{1}{3}mn^3$ 与 $-\frac{n^3m}{7}$；

（4）$5x^2$ 与 $-3x^2y$．

10.2 合并同类项

在学习一次式时，我们已经遇到了合并同类项. 假设有两个边长分别为 a 和 $3a$ 的正方形，它们的周长之和为 $4a+12a$，利用乘法对加法的分配律，可以写成 $4a+12a=(4+12)a=16a$. 同样地，这两个正方形的面积之和为 a^2+9a^2，利用乘法对加法的分配律，可以写成 $a^2+9a^2=(1+9)a^2=10a^2$.

像这样，把同类项合并成一项的过程叫作**合并同类项**.

在合并同类项时，把同类项的系数相加的结果作为合并后的系数，而字母和字母的指数不变.

例 1 合并同类项：

(1) $2x^3+3x^3-(-4x^3)$；

(2) $14m^2-3n^3+5mn-11m^2+12n^3-7mn$；

(3) $\frac{3}{2}x^2y-\frac{2}{3}x^2y-z^4+\frac{1}{6}yx^2+z^4$.

解 (1) $2x^3+3x^3-(-4x^3)$

$=[2+3-(-4)]x^3$

$=(2+3+4)x^3$

$=9x^3$.

(2) $14m^2-3n^3+5mn-11m^2+12n^3-7mn$

$=(14-11)m^2+(-3+12)n^3+(5-7)mn$

$=3m^2+9n^3-2mn$.

(3) $\frac{3}{2}x^2y-\frac{2}{3}x^2y-z^4+\frac{1}{6}yx^2+z^4$

$=\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)x^2y+(-1+1)z^4$

$=x^2y+0z^4$

$=x^2y$.

例 2 先合并同类项，再求值：

（1）$3x-2y-4x+6y+1$，其中 $x=2$，$y=3$；

（2）$2x^2-4xy-3y^2+4xy+5+2y^2$，其中 $x=\frac{1}{2}$，$y=2$.

解 （1）$3x-2y-4x+6y+1$

$=(3-4)x+(-2+6)y+1$

$=-x+4y+1$.

当 $x=2$，$y=3$ 时，原式$=-2+4\times3+1=11$.

（2）$2x^2-4xy-3y^2+4xy+5+2y^2$

$=2x^2+(-4+4)xy+(-3+2)y^2+5$

$=2x^2-y^2+5$.

当 $x=\frac{1}{2}$，$y=2$ 时，原式$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-2^2+5=\frac{3}{2}$.

课堂练习 10.2(1)

1. 合并同类项：

（1）$\frac{1}{5}a^2-\frac{7}{15}a^2+\frac{8}{3}a^2$；

（2）$-2x^3-25x+4x^3+11x-2x^3+28$.

2. 先合并同类项，再求值：

（1）$5x^2+4-3x^2-5x-4+6x$，其中 $x=-3$；

（2）$4a+b^2+3ab-b^2-4a+3ab$，其中 $a=\frac{1}{3}$，$b=-\frac{1}{2}$.

合并同类项后，整式中的每一个单项式叫作**整式的项**，每一项的次数是几，就称为几次项，不含字母的项叫作**常数项**. 各项中次数最高项的次数叫作这个**整式的次数**. 合并同类项后，整式有几项，就称为几项式.

例如，$3t^2-t-4$ 的次数为 2，有 3 项，所以称为二次三项式. 其中，$3t^2$ 是二次项，$-t$ 是一次项，-4 是常数项.

例 3 判断下列整式的次数：

（1）$4c^5-3c^2+1$；

（2）$x^4-x^2y+x^2y^3-y^3$.

解 （1）因为 $4c^5$ 是次数最高的项，其次数为 5，所以 $4c^5-3c^2+1$ 的次数是 5.

（2）因为 x^2y^3 是次数最高的项，其次数为 5，所以 $x^4-x^2y+x^2y^3-y^3$ 的次数是 5.

为了表达方便或计算需要，在合并同类项后，可以根据加法的交换律将一个整式中的各项按照其中某一个字母指数的大小顺序来排列.

例如，将 $x^2+5x+4x^4-3x^3+2$ 按 x 的指数从大到小的顺序排列，写成 $4x^4-3x^3+x^2+5x+2$，称为按 x 降幂排列；或者按 x 的指数从小到大的顺序排列，写成 $2+5x+x^2-3x^3+4x^4$，称为按 x 升幂排列.

例 4 将 $2r-r^2+\frac{4}{3}r^3-4$ 按 r 降幂排列.

解 将 $2r-r^2+\frac{4}{3}r^3-4$ 按 r 降幂排列为 $\frac{4}{3}r^3-r^2+2r-4$.

例 5 将 $3+6x^2y^3-2xy^4-5x^3y-4x^4y^2$ 按照下列要求排列：

（1）按 x 升幂排列；

（2）按 y 降幂排列.

解 （1）将 $3+6x^2y^3-2xy^4-5x^3y-4x^4y^2$ 按 x 升幂排列为 $3-2xy^4+6x^2y^3-5x^3y-4x^4y^2$.

（2）将 $3+6x^2y^3-2xy^4-5x^3y-4x^4y^2$ 按 y 降幂排列为 $-2xy^4+6x^2y^3-4x^4y^2-5x^3y+3$.

课堂练习 10.2(2)

1. 填表：

整式	$3x^5-8x^2-3x+1$	$-a^3+5a^6-7$	$-\frac{2}{3}a^2b^3c+\frac{4}{5}a^3b^2-\frac{1}{4}bc^2-2$
次数			
项数			
常数项			

2. 将下列整式按 x 升幂排列：

（1）$14x-3x^2-7-2x^4$；（2）$3x^3y+xy^2-x^5-6y^3$.

3. 将下列整式按 y 降幂排列：

（1）$\frac{3}{2}y-5y^2+\frac{5}{7}$；（2）$-7+6y+y^2-11y^4-3y^3$.

习题 10.1—10.2

A

1. 给出以下单项式：

a、$3ab$、$\frac{1}{2}a^2b$、$2b^2a$、a^2、b^2、$\frac{1}{3}ab$、$2.5a^2b$、$4ab^2$、a^2b^2、$\frac{ab}{4}$、$-\frac{1}{5}a^2b$、$-\frac{2}{3}b^2a$.

（1）a^2b 的同类项有：________________；

（2）$-ab$ 的同类项有：________________；

（3）$3ab^2$ 的同类项有：________________.

2. 合并同类项：

（1）$3a-2a^2+4-3a^2+a$；

(2) $xy+2xy-3x^2-3xy+x^2$;

(3) $5a^2b-3ab-4ab^2+7ab-2ab^2$;

(4) $4-2xy+7xy-15+xy$.

3. 求下列整式的值：

(1) $3a^2+2a-\frac{4}{3}a^2+\frac{1}{2}a-\frac{5}{3}a^2-\frac{1}{3}a$，其中 $a=12$；

(2) $3x^2-4xy+6xy-3x^2+2y^2$，其中 $x=\frac{5}{2}$，$y=-3$.

B

4. 求代数式的值：$2(m+n)^2-3(m+n)-4(m+n)^2-7+5(m+n)$，其中 $m=-3$，$n=1$.

5. 当 $|x-4|+|x-y+1|=0$ 时，求整式 $\frac{1}{3}x^2y+\frac{5}{3}xy^2-x^2y+xy^2$ 的值.

10.3 整式的加法和减法

在六年级的学习中，我们知道小学学习的去括号的方法适用于一次式的运算．同样的方法也适用于整式的运算．几个整式相加减，有括号的按照去括号的方法去括号，再合并同类项，就得到这几个整式相加减的运算结果．

例 1 计算：

（1）$2x-(3x-2y+3)+(5y-2)$；

（2）$(a^3+3a^2+4a-1)-(a^2-3a-a^3-3)$．

解 （1）$2x-(3x-2y+3)+(5y-2)$

$=2x-3x+2y-3+5y-2$

$=-x+7y-5$．

（2）$(a^3+3a^2+4a-1)-(a^2-3a-a^3-3)$

$=a^3+3a^2+4a-1-a^2+3a+a^3+3$

$=2a^3+2a^2+7a+2$．

例 2 计算：

（1）$2(3a+4b)-3(2a-3b)$；

（2）$(x^2-2x)-2[(x^2-1)+4x]$．

解 （1）$2(3a+4b)-3(2a-3b)$

$=6a+8b-6a+9b$

$=17b$．

（2）$(x^2-2x)-2[(x^2-1)+4x]$

$=x^2-2x-2(x^2-1+4x)$

$=x^2-2x-2x^2+2-8x$

$=-x^2-10x+2$．

例 3 先化简，再求值：$15a^2-\{-4a^2+[5a-8a^2-(2a^2-a)]\}$，其中 $a=-\frac{1}{2}$．

分析 本题求值的代数式中包含了大、中、小三种括号，我们可以按照去括号的方法，先去小括号，再去中括号，最后去大括号.

解 $15a^2-\{-4a^2+[5a-8a^2-(2a^2-a)]\}$

$=15a^2-[-4a^2+(5a-8a^2-2a^2+a)]$

$=15a^2-[-4a^2+(6a-10a^2)]$

$=15a^2-(-4a^2+6a-10a^2)$

$=15a^2+14a^2-6a$

$=29a^2-6a.$

当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，原式 $=29\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-6\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{29}{4}+3=\dfrac{41}{4}$.

课堂练习 10.3(1)

1. 计算：

(1) $(x-y-z)-(2x+3y+2z)$；

(2) $-(2a^2+4a+5)+(3a^2-7a-8)$.

2. 计算：

(1) $-(3a+2b)+3(4b-3a+1)-2(2a-b-3)$；

(2) $2x-\left[3x-\dfrac{1}{2}(x-2)\right]+5x-\dfrac{3}{2}(x-2)$.

3. 已知 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=1$，求代数式 $\dfrac{1}{2}x-\left[x^2+2y^2-\left(\dfrac{1}{2}x-3\right)\right]+(2x^2+3y^2+4)$ 的值.

例 4 求 $4x^2+y^2-5xy$ 与 $3xy+4y^2-7x^2$ 的和.

解 $(4x^2+y^2-5xy)+(3xy+4y^2-7x^2)$

$=4x^2+y^2-5xy+3xy+4y^2-7x^2$

$=-3x^2+5y^2-2xy.$

例 5　已知 $2a^3-13a+11$ 与某个整式的和是 $5+6a+3a^2-3a^3$，求这个整式.

分析　所求的整式应为 $5+6a+3a^2-3a^3$ 减去 $2a^3-13a+11$ 的差.

解　根据题意，得

$$
\begin{aligned}
&(5+6a+3a^2-3a^3)-(2a^3-13a+11)\\
=&5+6a+3a^2-3a^3-2a^3+13a-11\\
=&-5a^3+3a^2+19a-6.
\end{aligned}
$$

因此，所求的整式是 $-5a^3+3a^2+19a-6$.

例 6　已知 $A=2x^2-7x+2$，$B=3x^2-5x+4$，$C=x^2+2x-5$，求 $A-B+C$.

解　根据题意，得

$$
\begin{aligned}
&A-B+C\\
=&(2x^2-7x+2)-(3x^2-5x+4)+(x^2+2x-5)\\
=&2x^2-7x+2-3x^2+5x-4+x^2+2x-5\\
=&-7.
\end{aligned}
$$

探究

一个五次整式与一个四次整式的和是一个几次整式?

一个五次整式与一个五次整式的和是一个几次整式?

课堂练习 10.3(2)

1. 求 $3x+5y-\frac{1}{4}$ 与 $\frac{1}{2}x-3y+\frac{1}{2}$ 的和.

2. 求 $\frac{1}{2}x^2-3xy+\frac{1}{4}$ 减去 $-\frac{2}{3}x^2+xy-\frac{2}{3}$ 的差.

3. 计算：$\frac{1}{2}x^2-(x^2-2x+3)+(x-2)-\left(\frac{2}{3}x^2-2x+\frac{1}{2}\right)$.

习题 10.3

A

1. 计算：

（1）$4x^3-(-6x^3)+(-9x^3)$；

（2）$(7xy-x^2+y^2)-(x^2-y^2+7xy)$；

（3）$-\frac{2}{3}ab+\frac{1}{4}a^2b+ab+\left(-\frac{3}{4}a^2b\right)-1$.

2. 求 $4a+3ab-\frac{1}{2}b$ 减去 $-2a-\frac{3}{2}ab+\frac{1}{3}b$ 的差.

3. 已知某个整式与 $3x^2+2y^2$ 的和是 $x^2+xy-\frac{1}{2}y^2$，求这个整式.

4. 已知 $2(x^2-x+2)$ 减去某个整式所得的差是 $\frac{1}{2}x-2$，求这个整式.

5. 先化简，再求值：$2(x^2-x)-[x-3(2x^2+x-1)]-6x^2$，其中 $x=-\frac{1}{2}$.

B

6. 已知整式 A、B、C 满足 $A-2B=3C$，其中 $A=x^2-xy+2y^2$，$C=4x^2+3xy-6y^2$. 求整式 B.

◎内容提要

1. 基本概念：单项式，整式，多项式，同类项，合并同类项.

（1）数或字母的乘积叫作单项式. 一个含字母的单项式中的数字因数叫作这个单项式的系数. 一个单项式中，所有字母的指数的和叫作这个单项式的次数.

（2）有限个单项式求和得到的代数式叫作整式，也叫作多项式. 合并同类项后，整式中的每一个单项式叫作整式的项，不含字母的项叫作常数项. 单项式是只有一项的整式.

（3）对于两个单项式，如果它们所含字母相同，且相同字母的指数也相同，那么称这两个单项式为同类项.

2. 合并同类项：把整式中的同类项合并成一项的过程叫作合并同类项. 在合并同类项时，把同类项的系数相加的结果作为合并后的系数，而字母和字母的指数不变. 合并同类项后，各项中次数最高项的次数叫作这个整式的次数.

◎复习题

A

1. 填空题：

（1）$2x^4+4x^2-3$ 是______次______项式，其常数项是______.

（2）若$(a-2)x^2y^{a+3}$是关于 x、y 的六次单项式，则 $a=$______.

（3）将$-2x^5y^5-x^4y^6-3xy^4+\frac{1}{2}x^2y^3-3y-\frac{1}{4}x^3y^2$ 按下列要求排列：

按 x 降幂排列：______________________________.

按 y 升幂排列：______________________________.

（4）若$\frac{1}{2}x^2yz$ 与$-\frac{1}{3}x^ayz^b$ 是同类项，则 $a=$______，$b=$______.

2. 选择题：

（1）下列各组单项式中，不是同类项的是（　　）

A. $-\frac{x}{5}$与 x；　　B. $4xy^2$ 与$-4y^2x$；

C. $\frac{6}{7}x^5y$ 与$\frac{6}{7}x$；　　D. -4 与$\frac{\pi}{2}$.

（2）如果 x、y 互为相反数，a、b 互为倒数，那么$\frac{1}{3}(x+y)+3ab$ 的值是（　　）

A. 3；　　B. 0；

C. -3；　　D. 以上都不对.

（3）如果 $a-(b+c-d)=(a-c)+A$，那么 A 等于（　　）

A. $d-b$；　　B. $-b-d$；

C. $b-d$；　　D. $b+d$.

（4）下面是小华做的一道整式的加减运算题，但她不小心把一滴墨水滴在了上面：

$$\left(-x^2+3xy-\frac{1}{2}y^2\right)-\left(-\frac{1}{2}x^2+4xy-\frac{3}{2}y^2\right)=-\frac{1}{2}x^2\ \underline{\qquad\qquad}+y^2,$$

阴影部分即为被墨迹遮住的部分. 被墨迹遮住的一项应是 (　　)

A. $-7xy$；　　B. $+7xy$；　　C. $-xy$；　　D. $+xy$.

3. 先化简，再求值：$-3x^2-2y^2+\frac{3}{2}x^2+4y^2-4$，其中 $x=-1$，$y=\frac{5}{2}$.

4. 已知 $A=3a^2-2a+1$，$B=5a^2-3a+2$，求 $2A-3B$.

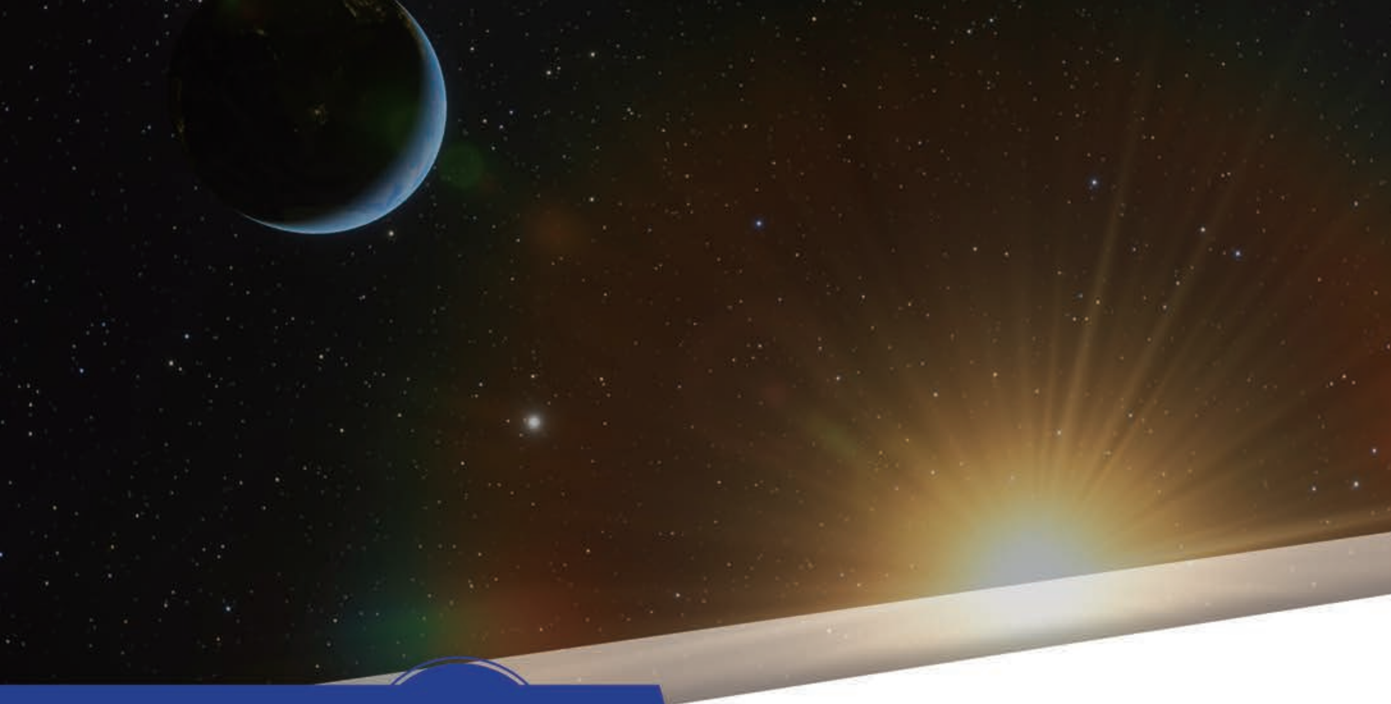
B

5. 已知$(a-4)x^3-x^b+x-b$ 是关于 x 的二次三项式，求 $a-b$.

6. 已知关于 x 的整式 $ax^3-2x^2+6+(a-1)x^2+2bx-7$ 中不含 x 的一次项和二次项，求 a、b 的值.

7. 有这样一道题“当 $a=2$，$b=-2$ 时，求 $3a^3b^3-\frac{1}{2}a^2b+b-\left(4a^3b^3-\frac{1}{4}a^2b-b^2\right)+\left(a^3b^3+\frac{1}{4}a^2b\right)-2b^2+3$ 的值”. 甲同学做题时把 $a=2$ 错抄成 $a=-2$，乙同学没抄错题，但他们做出的结果却一样，你知道这是怎么回事吗？请说明理由.

8. 如果当 $x=2$ 时，px^3+qx+1 的值等于 1 000，那么当 $x=-2$ 时，px^3+qx+1 的值是多少？



第11章

整式的乘除

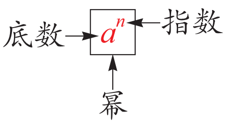
本章在整式加减运算的基础上，进一步学习整式的乘除运算. 整式的四则运算在很多方面可以类比有理数的四则运算，它们也是学习方程、分式、根式和函数等知识的基础.

本章首先学习正整数指数幂的运算，然后根据幂的运算性质，学习整式的乘除运算. 在整式乘法运算中，我们将得到一些常用的乘法公式，不仅可以利用它们进行简单的计算和推理，也为因式分解的学习打下基础.

11.1 整式的乘法

1. 同底数幂的乘法

我们知道，$a \cdot a \cdot a$ 表示三个 a 相乘，记作 a^3，叫作"a 的立方"或"a 的三次方".



一般地，将 n 个 a 相乘的运算叫作**乘方**，$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \cdot a}_{n个a}$ 记作 a^n，乘方的结果叫作**幂**. 在 a^n 中，a 叫作**底数**，正整数 n 叫作**指数**. a^n 读作"a 的 n 次方"，当 a^n 被看作是 a 的 n 次方的结果时，也读作"a 的 n 次幂". 当 $n=1$ 时，我们规定：$a^1=a$.

观察

$2^2 \times 2^3=(2\times2)\times(2\times2\times2)=2\times2\times2\times2\times2=2^5=2^{2+3}$；

$a^2 \cdot a^3=(a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a)=a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a=a^5=a^{2+3}$.

一般地，设 m、n 是正整数，如何计算 $a^m \cdot a^n$？

事实上，

$$\begin{aligned}
&a^m \cdot a^n \\
&=(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \cdot a}_{m个a}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \cdot a}_{n个a}) \quad (乘方的意义) \\
&=\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \cdot a}_{(m+n)个a} \\
&=a^{m+n} \quad (乘方的意义).
\end{aligned}$$

同底数幂的乘法性质：

$$a^m \cdot a^n=a^{m+n} \quad (m、n 是正整数).$$

同底数幂相乘，底数不变，指数相加.

同底数幂的乘法运算，可以转化为指数的加法运算.

例 1 计算下列各式，结果用幂的形式表示：

(1) $10^2\times10^3$；

(2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^5$；

(3) $a^2\cdot a^4$；

(4) $(a-b)\cdot(a-b)^3$；

(5) $y\cdot y^2\cdot y^3$.

解 (1) $10^2\times10^3=10^{2+3}=10^5$.

(2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^5=\left(-\frac{1}{2}\right)^{4+5}=\left(-\frac{1}{2}\right)^9$.

(3) $a^2\cdot a^4=a^{2+4}=a^6$.

(4) $(a-b)\cdot(a-b)^3=(a-b)^{1+3}=(a-b)^4$.

(5) $y\cdot y^2\cdot y^3=y^{1+2}\cdot y^3=y^{1+2+3}=y^6$.

> 一般地，
> $a^m\cdot a^n\cdot a^p=a^{m+n+p}$（$m$、$n$、$p$ 都是正整数）.

例 2 计算：

(1) $(-b^2)\cdot(-b^3)$；

(2) $x^3\cdot(-x^4)$；

(3) $a^3\cdot a^3-a^3-a^3$.

解 (1) $(-b^2)\cdot(-b^3)=(-1)\times(-1)\cdot b^2\cdot b^3=b^{2+3}=b^5$.

(2) $x^3\cdot(-x^4)=-x^3\cdot x^4=-x^{3+4}=-x^7$.

(3) $a^3\cdot a^3-a^3-a^3=a^{3+3}-(a^3+a^3)=a^6-2a^3$.

课堂练习 11.1(1)

1. 下列计算是否正确？如果不正确，应该如何改正？

(1) $x^4\cdot x=x^4$； (2) $x^2+x^2=x^4$.

2. 计算下列各式，结果用幂的形式表示：

(1) $\left(\frac{3}{7}\right)^3\times\left(\frac{3}{7}\right)^5$； (2) $(-a)\cdot a^2\cdot(-a^2)$；

(3) $x\cdot(-x^3)\cdot(-x^5)$；　　(4) $(b-a)^2\cdot(b-a)^3$.

3. 计算：

(1) $a^2\cdot a^5+a\cdot a^3\cdot a^3$；

(2) $a+2a+3a+4a-a\cdot a^2\cdot a^3\cdot a^4$.

2. 幂的乘方

观察

$$(2^3)^2=2^3\times2^3=2^{3+3}=2^{3\times2};$$

$$(a^3)^2=a^3\cdot a^3=a^{3+3}=a^{3\times2};$$

$$(a^m)^2=a^m\cdot a^m=a^{m+m}=a^{2m}\ (m\text{ 是正整数}).$$

一般地，设 m、n 是正整数，如何计算 $(a^m)^n$？

事实上，$(a^m)^n=\underbrace{a^m\cdot a^m\cdot\cdots\cdot a^m}_{n\text{个}a^m}$　（乘方的意义）

$=a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{}}$，其中 $\underbrace{m+m+\cdots+m}_{n\text{个}m}$　（同底数幂的乘法性质）

$=a^{mn}$.

幂的乘方性质：

$$(a^m)^n=a^{mn}\ (m\text{、}n\text{ 是正整数}).$$

幂的乘方，底数不变，指数相乘.

幂的乘方运算，可以转化为指数的乘法运算.

例 3　计算下列各式，结果用幂的形式表示：

(1) $(10^2)^3$；　　(2) $(a^3)^4$；

(3) $[(-b)^3]^3$；　　(4) $[(a+b)^5]^3$.

解　(1) $(10^2)^3=10^{2\times3}=10^6$.

(2) $(a^3)^4=a^{3\times4}=a^{12}$.

(3) $[(-b)^3]^3=(-b)^{3\times3}=(-b)^9$.

(4) $[(a+b)^5]^3=(a+b)^{5\times3}=(a+b)^{15}$.

例 4 计算：

(1) $(a^3)^4\cdot(a^4)^3\cdot a$；　　(2) $(x^3)^2\cdot(x^3)^5$.

解 (1) $(a^3)^4\cdot(a^4)^3\cdot a$

$=a^{3\times4}\cdot a^{4\times3}\cdot a$

$=a^{12+12+1}=a^{25}$.

(2) $(x^3)^2\cdot(x^3)^5$

$=x^6\cdot x^{15}$

$=x^{21}$.

> (2) 也能这样算：
> $(x^3)^2\cdot(x^3)^5$
> $=(x^3)^{2+5}$
> $=(x^3)^7$
> $=x^{21}$.

例 5 计算：

(1) $(a^2)^3+a^2\cdot a^3$；

(2) $m+2m+3m+m\cdot m^2\cdot m^3-(m^2)^3$.

解 (1) $(a^2)^3+a^2\cdot a^3=a^{2\times3}+a^{2+3}=a^6+a^5$.

(2) $m+2m+3m+m\cdot m^2\cdot m^3-(m^2)^3$

$=6m+m^6-m^6$

$=6m$.

课堂练习 11.1(2)

1. 下列计算是否正确？如果不正确，应该如何改正？

(1) $(a^5)^2=a^7$；　　(2) $a^5\cdot a^2=a^{10}$.

2. 计算下列各式，结果用幂的形式表示：

(1) $(x^4)^3\cdot x^2$；　　(2) $-(x^3)^5\cdot(-x^3)$；

(3) $y^3\cdot(y^2)^3\cdot(y^3)^2$；　　(4) $(-x)\cdot[(-x)^2]^3$；

(5) $[(x-y)^3]^2$；　　(6) $[(a+1)^3]^4\cdot(a+1)^3$.

3. 随着科技的进步，纳米技术的运用越来越广泛. 1 m$=10^9$ nm，那么 1 m$^2=$________ nm^2(nm：长度单位纳米的符号).

3. 积的乘方

观察

$$(ab)^2=(ab)\cdot(ab)=(a\cdot a)\cdot(b\cdot b)=a^2b^2;$$

$$(ab)^3=(ab)\cdot(ab)\cdot(ab)=(a\cdot a\cdot a)\cdot(b\cdot b\cdot b)=a^3b^3.$$

一般地，设 n 是正整数，如何计算 $(ab)^n$？

事实上，

$$(ab)^n=\underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\cdots\cdot(ab)}_{n\text{个}ab}\quad\text{（乘方的意义）}$$

$$=\underbrace{(a\cdot a\cdot\cdots\cdot a)}_{n\text{个}a}\cdot\underbrace{(b\cdot b\cdot\cdots\cdot b)}_{n\text{个}b}\quad\text{（乘法的交换律、结合律）}$$

$$=a^nb^n\quad\text{（乘方的意义）}.$$

积的乘方性质：

$$(ab)^n=a^nb^n\quad(n\text{ 是正整数}).$$

积的乘方，等于乘方的积.

例 6 计算：

(1) $(4m)^2$；

(2) $\left(\frac{2}{3}a\right)^3$；

(3) $(-xy^2)^3$；

(4) $(-3ab^2)^4$.

解 (1) $(4m)^2=4^2\cdot m^2=16m^2$.

(2) $\left(\frac{2}{3}a\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot a^3=\frac{8}{27}a^3$.

(3) $(-xy^2)^3=(-x)^3\cdot(y^2)^3=(-1)^3\cdot x^3\cdot y^6=-x^3y^6$.

(4) $(-3ab^2)^4=(-3a)^4\cdot(b^2)^4=(-3)^4\cdot a^4\cdot b^8=81a^4b^8$.

思考

计算：$(abc)^n$ （n 是正整数）.

事实上，$(abc)^n=(ab)^n\cdot c^n=a^nb^nc^n$.

例 7 计算：

（1）$(xy^2z^3)^5$；

（2）$(2ab^2)^2\cdot(2ab^2)^3$.

解 （1）$(xy^2z^3)^5=x^5\cdot(y^2)^5\cdot(z^3)^5$

$=x^5y^{10}z^{15}$.

（2）$(2ab^2)^2\cdot(2ab^2)^3=(2ab^2)^5$

$=2^5\cdot a^5\cdot(b^2)^5$

$=32a^5b^{10}$.

例 8 计算：

（1）$x^2\cdot x^3+(3x^2)^3+(-2x)^5$；

（2）$(-a)\cdot a^{n+1}+(-3a)^2\cdot a^n$ （n 是正整数）；

（3）$[3(x+y)^3]^2-[2(x+y)^2]^3$ （结果用幂的形式表示）.

解 （1）$x^2\cdot x^3+(3x^2)^3+(-2x)^5$

$=x^5+3^3\cdot(x^2)^3+(-2)^5\cdot x^5$

$=x^5+27x^6-32x^5$

$=27x^6-31x^5$.

（2）$(-a)\cdot a^{n+1}+(-3a)^2\cdot a^n$

$=-a^{1+(n+1)}+(-3)^2a^2\cdot a^n$

$=-a^{n+2}+9a^{n+2}$

$=8a^{n+2}$.

（3）$[3(x+y)^3]^2-[2(x+y)^2]^3$

$=9(x+y)^6-8(x+y)^6$

$=(x+y)^6$.

课堂练习 11.1(3)

1. 下列计算是否正确？如果不正确，应该如何改正？

（1）$(3a)^2=3a^2$；　　（2）$(a^3b^2)^3=a^6b^5$；

（3）$(-2ab^2)^3=-8a^3b^6$；　　（4）$\left(\frac{2}{3}a^2b^2\right)^3=\frac{8}{9}a^6b^6$.

2. 计算：

（1）$(-x^3y^2)^3$；

（2）$\left(\frac{3}{4}xy^2z\right)^2$.

3. 计算：

（1）$(m^2)^3\cdot(2m)^4\cdot(-m)^2$；

（2）$x\cdot x^2\cdot x^{n-3}-(-x)^2\cdot x^{n-2}$（$n$ 是大于 3 的正整数）；

（3）$(x-y)^2\cdot(x-y)^3\cdot(y-x)^4$（结果用幂的形式表示）；

（4）$[(a+b)^3]^2-[(-a-b)^2]^3$.

4. 整式的乘法

问题　光在真空中的速度约为 3×10^5 km/s，1 光年是指光在真空中经过 1 年所行的距离，它是一个长度单位. 若取一年的时间约为 3.15×10^7 s，则 1 光年的距离大约为多少？

1 光年等于光在真空中的速度乘一年的时间，即

$$\begin{aligned}&(3\times10^5)\times(3.15\times10^7)\\=&(3\times3.15)\times(10^5\times10^7)\\=&9.45\times10^{12}(\text{km}).\end{aligned}$$

所以 1 光年的距离大约为 9.45×10^{12} km.

思考

$$3ax^5 \cdot bx^7 = (3a \cdot b) \cdot (x^5 \cdot x^7) = 3abx^{12}.$$

以上计算是单项式与单项式相乘，用到了哪些运算律与运算法则？

单项式与单项式相乘，把它们的系数、同底数幂分别相乘.

例 9 计算：

(1) $\frac{1}{2}xy^2 \cdot (-x^2z)$；　　(2) $(-4ax^2) \cdot (-3a^2x^3)$；

(3) $(-2x)^3 \cdot (5x^2y)^2$.

解 (1) $\frac{1}{2}xy^2 \cdot (-x^2z)$

$= \left[\frac{1}{2} \times (-1)\right] \cdot (x \cdot x^2) \cdot y^2 \cdot z$

$= -\frac{1}{2}x^3y^2z.$

(2) $(-4ax^2) \cdot (-3a^2x^3)$

$= [(-4) \times (-3)] \cdot (a \cdot a^2) \cdot (x^2 \cdot x^3)$

$= 12a^3x^5.$

(3) $(-2x)^3 \cdot (5x^2y)^2$

$= (-8x^3) \cdot (25x^4y^2)$

$= (-8 \times 25) \cdot (x^3 \cdot x^4) \cdot y^2$

$= -200x^7y^2.$

例 10 求单项式 $-2x^2y$、$5xy^3$ 与 $-\frac{3}{5}x^2y^2$ 的乘积.

解 $(-2x^2y) \cdot (5xy^3) \cdot \left(-\frac{3}{5}x^2y^2\right)$

$= \left[(-2) \times 5 \times \left(-\frac{3}{5}\right)\right] \cdot (x^2 \cdot x \cdot x^2) \cdot (y \cdot y^3 \cdot y^2)$

$= 6x^5y^6.$

思考

$3x^5 \cdot (4x^7+2x)=3x^5 \cdot 4x^7+3x^5 \cdot 2x=12x^{12}+6x^6$.

这是单项式乘整式，用到了哪些运算律与运算法则？

单项式乘整式，用单项式乘整式的每一项，再把所得的积相加.

$$m \cdot (a+b+c)=ma+mb+mc.$$

例 11 计算：

(1) $2ab \cdot (3a^2b-2ab^2)$；

(2) $\left(\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}x^2y\right) \cdot (-12xy)$；

(3) $\left(-\frac{1}{3}xy^2\right) \cdot (-3xy+9yz+1)$.

解 (1) $2ab \cdot (3a^2b-2ab^2)$

$=2ab \cdot 3a^2b+2ab \cdot (-2ab^2)$

$=6a^3b^2-4a^2b^3$.

(2) $\left(\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}x^2y\right) \cdot (-12xy)$

$=\frac{1}{4}x \cdot (-12xy)+\left(-\frac{2}{3}x^2y\right) \cdot (-12xy)$

$=-3x^2y+8x^3y^2$.

(3) $\left(-\frac{1}{3}xy^2\right) \cdot (-3xy+9yz+1)$

$=\left(-\frac{1}{3}xy^2\right) \cdot (-3xy)+\left(-\frac{1}{3}xy^2\right) \cdot 9yz+\left(-\frac{1}{3}xy^2\right) \cdot 1$

$=x^2y^3-3xy^3z-\frac{1}{3}xy^2$.

讨论

如何求图 11-1-1 中涂色部分的面积？

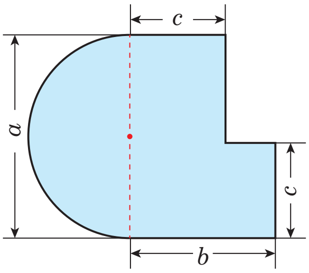


图 11-1-1

课堂练习 11.1(4)

1. 计算：

(1) $\frac{5}{12}ab^2 \cdot 3ab$；　　(2) $(-x^2y)\cdot(2xy)^3$；

(3) $-x\cdot(x^2+2x-2)$；　　(4) $(4a^3-2a+1)\cdot(-2a)^2$.

2. 计算：

(1) $b\cdot(a+b)-a\cdot(b-a)$；　　(2) $x\cdot(x-y)-y\cdot(x-y)$；

(3) $a\cdot(a^2+a+1)+(-1)\cdot(a^2+a+1)$；

(4) $x\cdot(x^2-x-1)+2\cdot(x^2+1)-\frac{1}{3}x\cdot(3x^2+6x)$.

思考

如何计算 $(2x^3+3xy)\cdot(x+y^2)$？

可以把 $x+y^2$ 看成一个整体，运用乘法对加法的分配律计算，得

$$
\begin{aligned}
&(2x^3+3xy)\cdot(x+y^2)\\
=&2x^3\cdot(x+y^2)+3xy\cdot(x+y^2)\\
=&2x^3\cdot x+2x^3\cdot y^2+3xy\cdot x+3xy\cdot y^2\\
=&2x^4+2x^3y^2+3x^2y+3xy^3.
\end{aligned}
$$

整式与整式相乘，先用一个整式的每一项乘另一个整式中的每一项，再把所得的积相加.

$$(a+b)\cdot(m+n)=am+an+bm+bn.$$

例 12 计算：

(1) $(x-2)\cdot(y+3)$；

(2) $(2a+b)\cdot(a-3b)$；

(3) $(m+n)\cdot(m^2-mn+n^2)$.

解 (1) $(x-2)\cdot(y+3)=xy+3x-2y-6$.

(2) $(2a+b)\cdot(a-3b)=2a^2-6ab+ab-3b^2=2a^2-5ab-3b^2$.

(3) $(m+n)\cdot(m^2-mn+n^2)$

$=m^3-m^2n+mn^2+m^2n-mn^2+n^3$

$=m^3+n^3$.

例 13 计算：

(1) $(x+y)\cdot(x-y)\cdot(x^2+y^2)$；

(2) $(x+y)\cdot(x^2-2xy+y^2)-y\cdot(x^2+y^2)$.

解 (1) $(x+y)\cdot(x-y)\cdot(x^2+y^2)$

$=(x^2-xy+xy-y^2)\cdot(x^2+y^2)$

$=(x^2-y^2)\cdot(x^2+y^2)$

$=x^4+x^2y^2-x^2y^2-y^4$

$=x^4-y^4$.

(2) $(x+y)\cdot(x^2-2xy+y^2)-y\cdot(x^2+y^2)$

$=x^3-2x^2y+xy^2+x^2y-2xy^2+y^3-x^2y-y^3$

$=x^3-2x^2y-xy^2$.

例 14 图 11-1-2 是一个相框的平面图形．图中大长方形的长为 a、宽为 b（$a>b$）．四周框的宽度为 x $\left(0<x<\frac{b}{2}\right)$．求图中小长方形(涂色部分)的面积.

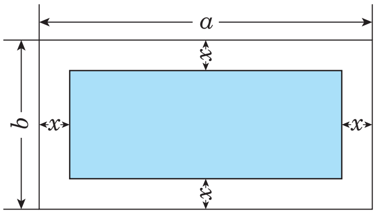


图 11-1-2

解　小长方形的面积为

$$\begin{aligned}&(a-2x)\cdot(b-2x)\\=&ab-2ax-2bx+4x^2.\end{aligned}$$

因此，小长方形的面积为 $ab-2ax-2bx+4x^2$.

课堂练习 11.1(5)

1. 计算：

(1) $(x+2)\cdot(x+1)$；　　(2) $(x-2)\cdot(3x+1)$.

2. 计算：

(1) $(3a+b)\cdot(3a-b)$；

(2) $(x^2+1)\cdot(2+x^2)$；

(3) $(x+2)^2$；

(4) $(m-n)\cdot(m^2+mn+n^2)$；

(5) $(x+1)\cdot(x-2)\cdot(2x-1)$；

(6) $\left(\frac{1}{3}+a\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-a\right)\cdot\left(\frac{1}{9}+a^2\right)$.

3. 计算：

(1) $(x+a)\cdot(x+b)$；

(2) $(x-a)\cdot(x-b)$.

习题 11.1

A

1. 填表：

幂	底数	指数	积的形式
$(-3y)^2$	$-3y$	2	$(-3y)\cdot(-3y)$
$\left(\frac{2}{3}a\right)^4$			
$(2+a)^3$			

2. 按要求填空：

$$\left(\frac{5}{3}\right)^3\times\left(\frac{5}{3}\right)^5$$

$=(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)\times(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$ （将幂表示成积的形式）

$=\underbrace{\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{5}{3}}_{(\quad)\text{个}\frac{5}{3}}$ （乘法结合律）

$=\_\_\_\_\_\_\_\_$ （将积表示成幂的形式）.

3. 填空题(结果用幂的形式表示)：

(1) $10\times10^4=\_\_\_\_\_\_\_\_$；

(2) $(-2)^4\times(-2)^6=\_\_\_\_\_\_\_\_$；

(3) $(-a)\cdot(-a)^3\cdot(-a)^5=\_\_\_\_\_\_\_\_$；

(4) $(m-n)^2\cdot(m-n)^4\cdot(m-n)^6=\_\_\_\_\_\_\_\_$.

4. 选择题：

(1) $(2a^2)^3$ 的结果是 (　　)

A. $2a^6$； B. $8a^5$； C. $8a^6$； D. $8a^8$.

(2) $2a^2 \cdot 3a^3$ 的结果是 ( )

A. $5a^5$; B. $6a^6$;

C. $5a^6$; D. $6a^5$.

(3) 下列计算中正确的是 ( )

A. $2a+3a=5a$; B. $a^2 \cdot a^3=a^6$;

C. $2a \cdot 3a=5a^2$; D. $(a^2)^3=a^5$.

5. 计算：

(1) $a^4 \cdot a^5+a \cdot a^4 \cdot a^4$;

(2) $a^2 \cdot (a^2)^3 \cdot (a^2)^5$;

(3) $a^3 \cdot a^5-(a^3)^5$;

(4) $(-x)^2 \cdot (-x^6) \cdot (-x^2)^3$;

(5) $(x-y) \cdot (y-x)^5+(x-y)^2 \cdot (y-x)^4$;

(6) $(-2a^2)^3+(-3a^3)^2+(-a)^6$;

(7) $\left(-\frac{1}{2}a^2b\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}ab^2\right)-(-ab)^3$;

(8) $\left(4x^2-\frac{4}{9}x+1\right) \cdot (-3x^2)$;

(9) $(x^2+3) \cdot (x^2-9)$;

(10) $5x \cdot (x^2-2x-1)-x \cdot (2x+3) \cdot (x-5)$.

B

6. 已知 $y \cdot (y-2)-2=0$，求 $3 \cdot (y+1) \cdot (y-3)+2$ 的值.

7. 如果 A、B 都是关于 x 的单项式，且 $A \cdot B$ 是一个九次单项式，$A+B$是一个五次式，那么 $A-B$ 的次数 ( )

A. 一定是 9；

B. 一定是 5；

C. 一定是 4；

D. 无法确定.

8. 将关于 x 的一次二项式 $ax+b$ 与二次三项式 x^2+2x+3 相乘，积中不出现一次项，且二次项系数为 1. 求 a、b 的值.

11.2 乘法公式

思考

$(a+b)(a-b)$的结果有什么特征？

$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$，即两个数的和与这两个数的差的乘积等于这两个数的平方的差.

平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

思考

分别计算图 11-2-1(1)(2)中涂色组合图形的面积，你能从中发现平方差公式吗？

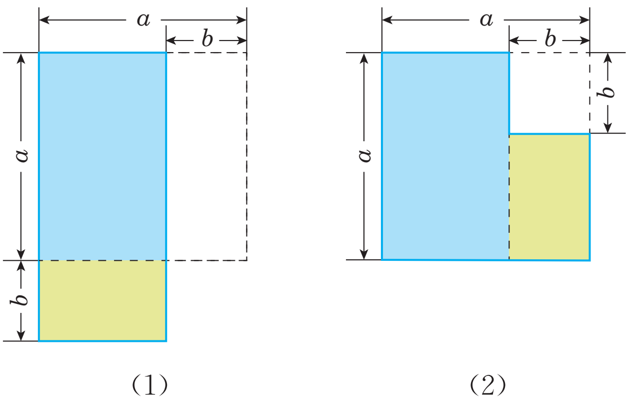


图 11-2-1

满足平方差公式特征的整式乘法，可以用平方差公式直接写出运算结果.

例 1 计算：

(1) $(y+1)(y-1)$；　　(2) $(2m+3n)(2m-3n)$；

(3) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y\right)$.

分析 以(3)为例，我们可以应用平方差公式：

$$\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y\right)=\left(\frac{1}{2}x\right)^2-\left(\frac{2}{3}y\right)^2$$

$$(\ a\ +\ b\ )(\ a\ -\ b\ )=\ a^2\ -\ b^2$$

解 (1) $(y+1)(y-1)=y^2-1^2=y^2-1$.

(2) $(2m+3n)(2m-3n)=(2m)^2-(3n)^2=4m^2-9n^2$.

(3) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y\right)=\left(\frac{1}{2}x\right)^2-\left(\frac{2}{3}y\right)^2=\frac{1}{4}x^2-\frac{4}{9}y^2$.

例 2 计算：

(1) $(-x+1)(-x-1)$；

(2) $(2a-3b)(-2a-3b)$.

解 (1) $(-x+1)(-x-1)$

$=(-x)^2-1^2$

$=x^2-1$.

(2) $(2a-3b)(-2a-3b)$

$=(-3b+2a)(-3b-2a)$

$=(-3b)^2-(2a)^2$

$=9b^2-4a^2$.

课堂练习 11.2(1)

1. 计算：

(1) $(2x+5)(2x-5)$；

(2) $(1-2a)(1+2a)$；

(3) $\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}\right)$；

(4) $(-2x-3y)(3y-2x)$；

(5) $(-3-2x)(3-2x)$；

(6) $(x-2y)(x+2y)+(2x-y)(2x+y)$.

思考

$(a+b)^2$ 和 $(a-b)^2$ 的结果有什么特征?

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$，即两数和(或差)的平方，等于这两个数的平方的和，加上(或减去)这两个数的积的两倍.

完全平方公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

思考

你能分别根据图 11-2-2(1)(2)中涂色组合图形的面积计算发现两个完全平方公式吗?

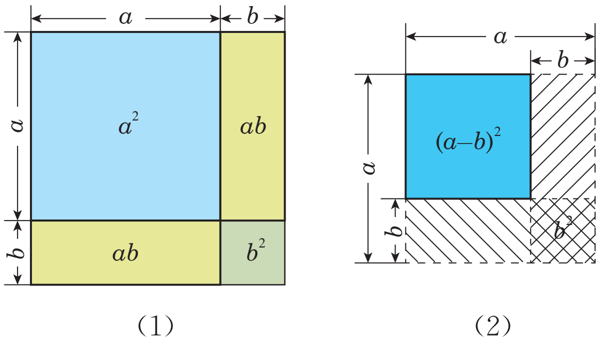


图 11-2-2

对于满足完全平方公式特征的整式乘法，可以利用完全平方公式直接写出运算结果. 平方差公式与完全平方公式是常用的乘法公式.

例 3 计算：

(1) $(x+1)^2$；　　(2) $(m+2n)^2$；

(3) $(3-y)^2$；　　(4) $\left(\frac{1}{2}t-1\right)^2$.

解 (1) $(x+1)^2=x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2=x^2+2x+1$.

(2) $(m+2n)^2=m^2+2\cdot m\cdot(2n)+(2n)^2=m^2+4mn+4n^2$.

(3) $(3-y)^2=9-2\times 3\cdot y+y^2=9-6y+y^2$.

(4) $\left(\frac{1}{2}t-1\right)^2=\left(\frac{1}{2}t\right)^2-2\cdot\left(\frac{1}{2}t\right)\cdot 1+1^2=\frac{1}{4}t^2-t+1.$

例 4 计算：

(1) $(-x+1)^2$；

(2) $(-3-y)^2$；

(3) $(m^3-2n^2)^2$.

解 (1) $(-x+1)^2$

$=(-x)^2+2\cdot(-x)\cdot 1+1^2$

$=x^2-2x+1.$

(2) $(-3-y)^2$

$=[-(3+y)]^2=(3+y)^2$

$=3^2+2\times 3\cdot y+y^2$

$=9+6y+y^2.$

(3) $(m^3-2n^2)^2$

$=(m^3)^2-2\cdot(m^3)\cdot(2n^2)+(2n^2)^2$

$=m^6-4m^3n^2+4n^4.$

例 5 利用完全平方公式计算：$(a+b+c)^2$.

解 $(a+b+c)^2$

$=[(a+b)+c]^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac.$

课堂练习 11.2(2)

1. 下列计算是否正确？如果不正确，应该如何改正？

(1) $(a+b)^2=a^2+b^2$；

(2) $(7-a)^2=49-a^2$；

(3) $(a+2b)^2=a^2+2ab+b^2$；

(4) $(a-2b)^2=a^2-4ab-4b^2$.

2. 计算：

(1) $(2x+y)^2$；　　(2) $(-a-b)^2$；

(3) $\left(\frac{1}{4}m-\frac{2}{3}n\right)^2$；　　(4) $(-a^3+2b^3)^2$；

(5) $(2x+3)(2x-3)(4x^2-9)$；　　(6) $(a+b-c)^2$.

例 6　计算：

(1) $(x^2+3y)(-3y-x^2)$；

(2) $(2a+3b)^2-(2a-3b)^2$；

(3) $(m+2n)(m-2n)(m^2+4n^2)$.

解　(1) $(x^2+3y)(-3y-x^2)$

$=(x^2+3y)[-(x^2+3y)]$

$=-(x^2+3y)^2$

$=-(x^4+6x^2y+9y^2)$

$=-x^4-6x^2y-9y^2$.

(2) $(2a+3b)^2-(2a-3b)^2$

$=(4a^2+12ab+9b^2)-(4a^2-12ab+9b^2)$

$=24ab$.

(3) $(m+2n)(m-2n)(m^2+4n^2)$

$=(m^2-4n^2)(m^2+4n^2)$

$=m^4-16n^4$.

例 7　计算：

(1) $(a-2b+3c)^2$；

(2) $(a+b-c)(a-b+c)$.

解　(1) $(a-2b+3c)^2$

$=[(a-2b)+3c]^2$

$=(a-2b)^2+2(a-2b)\cdot 3c+(3c)^2$

$=a^2-4ab+4b^2+6ac-12bc+9c^2$

$=a^2+4b^2+9c^2-4ab+6ac-12bc.$

(2) $(a+b-c)(a-b+c)$

$=[a+(b-c)][a-(b-c)]$

$=a^2-(b-c)^2$

$=a^2-(b^2-2bc+c^2)$

$=a^2-b^2+2bc-c^2.$

例 8 利用乘法公式计算：

(1) 101×99；　　(2) 98^2.

解 (1) $101\times99=(100+1)\times(100-1)=100^2-1^2=9\ 999.$

(2) $98^2=(100-2)^2=100^2-2\times100\times2+2^2=9\ 604.$

课堂练习 11.2(3)

1. 利用平方差公式计算：

(1) 88×92；　　(2) $99\frac{3}{4}\times100\frac{1}{4}$.

2. 利用完全平方公式计算：

(1) 102^2；　　(2) 99.9^2.

3. 计算：

(1) $(-x+y)(x-y)$；　　(2) $(-x-y)(x+y)$；

(3) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$；　　(4) $(a+2b-3)(a-2b+3)$.

利用乘法公式，可以较简便地求某些代数式的值和计算.

例 9 已知$(a+b)^2=9$，$(a-b)^2=25$. 求 a^2+b^2 与 ab 的值.

解 因为$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，所以

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2,$$

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$$

这样，

$$a^2+b^2=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2},$$

$$ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}.$$

当$(a+b)^2=9$，$(a-b)^2=25$ 时，$a^2+b^2=17$，$ab=-4$.

例 10 计算：$998\times1\,002+4$.

解 $998\times1\,002+4=(1\,000-2)\times(1\,000+2)+4$

$$=1\,000^2-2^2+4=1\,000\,000.$$

例 11 如图 11-2-3，一张直径为 $a+2b$ 的圆形纸片，从中挖去直径分别为 a、b、b 的三个圆形纸片. 求剩下纸片的面积（结果保留 π）.

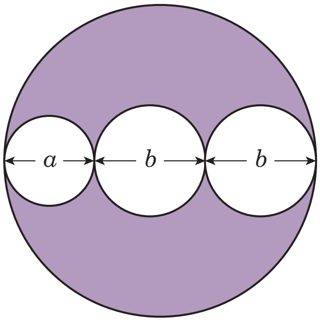


图 11-2-3

解 剩下纸片的面积为

$$\pi\left(\frac{a+2b}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{\pi}{4}[(a+2b)^2-a^2-b^2-b^2]$$

$$=\frac{\pi}{4}(4ab+2b^2)=\pi ab+\frac{\pi}{2}b^2.$$

因此，剩下纸片的面积为$\pi ab+\frac{\pi}{2}b^2$.

课堂练习 11.2(4)

1. 计算：$987^2-986\times988$.

2. 已知 $a+b=5$，$ab=6$. 求 a^2+b^2 与$(a-b)^2$ 的值.

3. 先化简，再求值：$(a-2b)(a-3b)+(a-2b)^2-2(a-3b)^2$，其中 $a=-\frac{1}{3}$，$b=-2$.

4. 对平方差公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$运用等式性质，得到

$$a^2=(a+b)(a-b)+b^2.$$

可以利用这个等式进行如下计算：

$$98^2=(98+2)\times(98-2)+2^2=100\times96+4=9\ 604;$$

$$101^2=(101+1)\times(101-1)+1^2=102\times100+1=10\ 201.$$

请试着用这个方法计算：65^2 和 103^2.

习题 11.2

A

1. 给出下列式子：

① $(x-y)(x+y)$，② $(x+y)(y-x)$，③ $(y-x)(-y-x)$，

④ $(-x+y)(x-y)$，⑤ $(-x-y)(x+y)$，⑥ $(-x-y)(x-y)$.

其中，符合平方差公式特征的有__________________(填序号).

2. 填空题：

(1) $(3a+2b)(3a-2b)=$__________________；

(2) $(-3a+2b)(3a-2b)=$__________________；

(3) $(3a+2b)(-3a-2b)=$__________________；

(4) $(x+4y)^2=$__________________；

(5) $(x-4y)^2=$__________________；

(6) $\left(-x-\frac{1}{2}\right)^2=$__________________.

3. 计算：

(1) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$；

(2) $(2x+3y)^2-(3y-2x)^2$；

(3) $(a-2b-c)^2$；

(4) $(x+3y-2)(x+3y+2)$；

(5) $(x^2+x-3)(x^2-x+3)$；

(6) $\left(ab+\frac{1}{2}\right)^2\left(ab-\frac{1}{2}\right)^2$.

4. 简便计算：

（1）$-19\frac{7}{9}\times\left(-20\frac{2}{9}\right)$；（2）$39.9^2$.

5. 已知关于 x 的整式 $9x^2+(2k-1)x+4$ 是某个关于 x 的整式的平方，求 k 的值.

B

6. 已知 $(a-b)^2=25$，$ab=-6$. 求下列各式的值：

（1）a^2+b^2；（2）a^4+b^4.

11.3 整式的除法

1. 同底数幂的除法

观察

$$2^5\div2^2=\frac{2^5}{2^2}=\frac{2\times2\times2\times2\times2}{2\times2}=2^3=2^{5-2};$$

$$a^5\div a^2=\frac{a^5}{a^2}=\frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a}=a^3=a^{5-2}\ (a\neq0);$$

$$(-3)^m\div(-3)^n=\frac{(-3)^m}{(-3)^n}=\frac{\overbrace{(-3)\times(-3)\times\cdots\times(-3)}^{m\text{个}-3}}{\underbrace{(-3)\times(-3)\times\cdots\times(-3)}_{n\text{个}-3}}=(-3)^{m-n}$$

(m、n 是正整数且 $m>n$).

一般地，设 m、n 是正整数且 $m>n$，$a\neq0$，如何计算 $a^m\div a^n$？

$$\begin{aligned}a^m\div a^n&=\frac{a^m}{a^n}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{m\text{个}a}}{\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}a}}\\&=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{(m-n)\text{个}a}\\&=a^{m-n}.\end{aligned}$$

同底数幂的除法性质：

$$a^m\div a^n=a^{m-n}\ (m、n\text{ 是正整数且 }m>n，a\neq0).$$

同底数幂相除，底数不变，指数相减.

同底数幂的除法运算，可以转化为指数的减法运算.

当 $a\neq0$ 时，$a^m\div a^m=1$. 要使得同底数幂的除法性质在 $m=n$ 时仍成立，即 $a^m\div a^m=a^{m-m}=a^0$，规定

$a^0=1 \quad (a\neq 0)$，即任何不等于零的数的零次幂都等于 1.

例 1 计算：

(1) $(-2)^6\div(-2)^3$；

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^7\div\left(\frac{2}{3}\right)^5$；

(3) $\left(-\frac{1}{2}xy\right)^5\div\left(-\frac{1}{2}xy\right)^2$.

在(3)中，要求 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$. 在本章中进行除法运算时，总是默认除数不为零.

解 (1) $(-2)^6\div(-2)^3=(-2)^{6-3}=(-2)^3=-8$.

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^7\div\left(\frac{2}{3}\right)^5=\left(\frac{2}{3}\right)^{7-5}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$.

(3) $\left(-\frac{1}{2}xy\right)^5\div\left(-\frac{1}{2}xy\right)^2=\left(-\frac{1}{2}xy\right)^{5-2}=\left(-\frac{1}{2}xy\right)^3=-\frac{1}{8}x^3y^3$.

例 2 计算：

(1) $2^2\times2^3\div2^5$；

(2) $(a+b)^{m+2}\div(a+b)^m$ （m 是正整数）.

解 (1) $2^2\times2^3\div2^5$

$=2^5\div2^5$

$=1$.

(2) $(a+b)^{m+2}\div(a+b)^m$

$=(a+b)^{m+2-m}$

$=(a+b)^2$

$=a^2+2ab+b^2$.

课堂练习 11.3(1)

1. 计算：

(1) $3^5\div3^3$；　　(2) $(-2)^{12}\div(-2)^{10}$；

(3) $5^{50}\div5^{50}$；　　(4) $-4^6\div4^5$.

2. 计算：

(1) $a^{10}\div a^{7}$；　　　　(2) $-x^{102}\div x^{102}$；

(3) $\left(\frac{3}{4}\right)^{6}\div\left(\frac{3}{4}\right)^{4}$.

3. 计算：

(1) $(-2xy)^{5}\div(-2xy)^{2}$；　　(2) $-3^{6}\div(-3)^{5}\times(-3)^{0}$.

2. 单项式除以单项式

问题　2022 年我国粮食总产量大约为 7.0×10^{11} kg. 如果按我国人口 1.4×10^{9} 人计算，那么人均粮食产量大约是多少？

计算：$(7.0\times10^{11})\div(1.4\times10^{9})$.

$$\begin{aligned}&(7.0\times10^{11})\div(1.4\times10^{9})\\=&(7.0\div1.4)\times(10^{11}\div10^{9})\\=&5\times10^{2}(\text{kg}).\end{aligned}$$

$$(7.0\times10^{11})\div(1.4\times10^{9})=\frac{7.0\times10^{11}}{1.4\times10^{9}}.$$

思考

如何用单项式和单项式的乘法验证上面的计算？

可以计算 $(5x^{2})\cdot(1.4x^{9})=(5\times1.4)\cdot(x^{2}\cdot x^{9})=7x^{11}$，由于除法是乘法的逆运算，因此

$$\begin{aligned}7x^{11}\div1.4x^{9}&=(7\div1.4)\cdot(x^{11}\div x^{9})\\&=5x^{11-9}=5x^{2}.\end{aligned}$$

这里，$7x^{11}\div1.4x^{9}$ 指的是 $(7x^{11})\div(1.4x^{9})$. 今后，在以单项式作为除式时，我们总是这样处理.

两个单项式相除，把系数和同底数幂分别相除.

例 3 计算：

(1) $16x^5y^6\div4x^2y^5$；

(2) $-3a^3b^6c\div6ab^3$；

(3) $m^4n^5\div\left(-\frac{2}{3}mn\right)$.

解 (1) $16x^5y^6\div4x^2y^5$

$=(16\div4)\cdot(x^5\div x^2)\cdot(y^6\div y^5)$

$=4x^{5-2}y^{6-5}=4x^3y$.

(2) $-3a^3b^6c\div6ab^3$

$=(-3\div6)\cdot(a^3\div a)\cdot(b^6\div b^3)\cdot c$

$=-\frac{1}{2}a^{3-1}b^{6-3}c=-\frac{1}{2}a^2b^3c$.

(3) $m^4n^5\div\left(-\frac{2}{3}mn\right)=\left[1\div\left(-\frac{2}{3}\right)\right]m^{4-1}n^{5-1}=-\frac{3}{2}m^3n^4$.

课堂练习 11.3(2)

1. 计算：

(1) $10a^8\div2a^4$；

(2) $a^4bc\div2ab$；

(3) $-4ax^2\div6x^2$；

(4) $3x^7y^3\div\left(-\frac{1}{3}xy^2\right)$.

2. 填空题：

(1) (________)$\div2ab=6ab^2$；

(2) (________)$\div(-5xy^2)=15xy$；

(3) $125a^2x^3\div$(________)$=5a$；

(4) $24a^3b^2\div$(________)$=-3ab$.

3. 整式除以单项式

思考

$$(ma+mb+mc)\div m=a+b+c.$$

你能用整式乘法验证这个结果吗?

整式除以单项式，先用整式的每一项除以单项式，再把所得的商相加.

例 4 计算：

(1) $(21a^3-14a^2-7a)\div 7a$；

(2) $(10m^5n^4+5m^3n^2-15mn)\div(-15mn)$；

(3) $\left(-\frac{2}{3}x^2y^3+\frac{3}{4}xy^2-2x^2y\right)\div\left(-\frac{1}{2}xy\right)$；

(4) $(3c^3d-6c^2d^2+c^2)\div(-3c^2)$.

解 (1) $(21a^3-14a^2-7a)\div 7a$

$=21a^3\div 7a-14a^2\div 7a-7a\div 7a$

$=3a^2-2a-1$.

(2) $(10m^5n^4+5m^3n^2-15mn)\div(-15mn)$

$=10m^5n^4\div(-15mn)+5m^3n^2\div(-15mn)-15mn\div(-15mn)$

$=-\frac{2}{3}m^4n^3-\frac{1}{3}m^2n+1$.

(3) $\left(-\frac{2}{3}x^2y^3+\frac{3}{4}xy^2-2x^2y\right)\div\left(-\frac{1}{2}xy\right)$

$=\left(-\frac{2}{3}x^2y^3\right)\div\left(-\frac{1}{2}xy\right)+\frac{3}{4}xy^2\div\left(-\frac{1}{2}xy\right)-2x^2y\div\left(-\frac{1}{2}xy\right)$

$=\frac{4}{3}xy^2-\frac{3}{2}y+4x$.

(4) $(3c^3d-6c^2d^2+c^2)\div(-3c^2)$

$=3c^3d\div(-3c^2)-6c^2d^2\div(-3c^2)+c^2\div(-3c^2)$

$=-cd+2d^2-\dfrac{1}{3}$.

课堂练习 11.3(3)

1. 计算：

(1) $(4a^3-2a^2+2a)\div 2a$；

(2) $(12ax^3-27ax)\div 3ax$；

(3) $(-18x^3y^2+12x^2y^3-6x^2y^2)\div(-3x^2y^2)$.

2. 计算：

(1) $6a(2a^3+3a^2+4a)\div 12a^2$；

(2) $(18x^2y^2-30x^3y^2)\div 3x\div 2y^2$.

习题 11.3

A

1. (口答)计算：

(1) $a^3\div a^3$； (2) $a^8\div a^4$；

(3) $a^9\div a^3\cdot a$； (4) $a^5\div(a^3\cdot a^2)$.

2. 计算：

(1) $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^7\div\left(-\dfrac{2}{5}\right)^5\div\dfrac{2}{5}$；

(2) $(4\times10^2)^3\div(-2\times10^3)$；

(3) $(x^4)^2\div x^5\div(-x)^2$；

(4) $(a^3\cdot a^2)^2\div(a^3\div a)^3$；

(5) $2a^3\div 3a^2$；

(6) $3x^7y^3z\div\left(-\dfrac{1}{3}xy^2\right)$;

(7) $(20x^2y^2-5x)\div 5x$;

(8) $2x^2y^3(2x^2-3xy+5y^2)\div(-4x^2y^2)$.

B

3. 先化简，再求值：$(3a^{n+2}+9a^{n+1}-a^n)\div(-6a^n)$，其中 $a=-2$（n 是正整数）.

◎阅读材料

贾宪三角

我们已经学习了整式乘法，可以计算以下的式子：

$$(a+b)^0=1;$$
$$(a+b)^1=a+b;$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4;$$
$$\cdots\cdots$$

你能发现以上等式右边的各项系数的规律吗？

这些系数的规律早在11世纪就已被我国北宋数学家贾宪（约11世纪上半叶）发现.

1261年，我国南宋数学家杨辉（13世纪）在他所著的《详解九章算法》中给

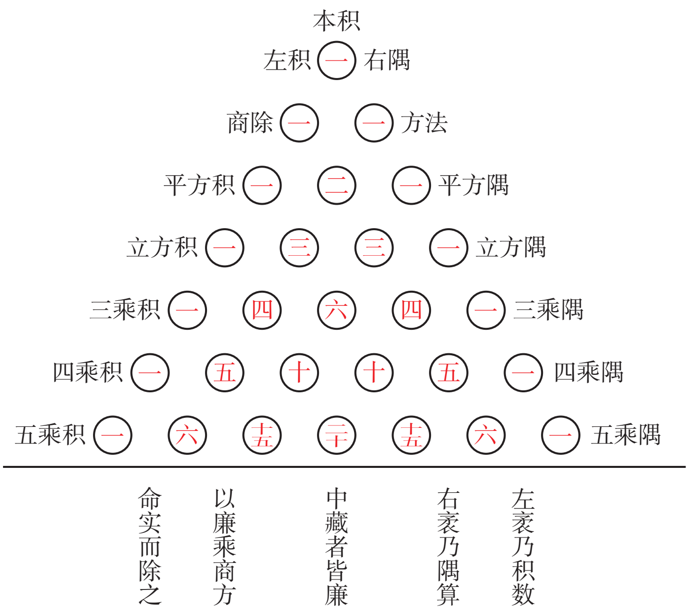


图 1

出了一个“开方作法本源图”，如图 1 所示，并指明：“开方作法本源图出自《释锁算书》，贾宪用此术.” 这幅图被后人称为“贾宪三角”.

“贾宪三角”中还蕴含了许多数字的规律. 你也许已经发现，这个“三角形”的两条斜的“边”都是由数字 1 组成的，而其他数都等于它“肩上”的两个数的和. 按此规律，这个数字三角形可以写到任意层. 这样一种$(a+b)^n$ 的展开式中各项系数的规律，在西方数学史上被称为“帕斯卡三角形”. 帕斯卡(Blaise Pascal，1623—1662)是法国数学家，他在 1654 年所著的书中给出了类似于“贾宪三角”的数字三角形表.

仔细观察，你也许还会发现“贾宪三角”中数字的其他规律.

整式除以整式——长除法

类比于两数相除可以用竖式运算，整式除以整式也可以用竖式运算. 其步骤是：

（1）把被除式和除式按同一字母降幂排列(若有缺项用零补齐)；

（2）用竖式进行运算；

（3）当余式的次数低于除式的次数时，运算终止，得到商式和余式.

例如，求$(5x^4+3x^3+2x-4)\div(x^2+1)$的商式和余式，可以计算：

$$
\begin{array}{r|l}
 & \qquad\qquad\quad 5x^2+3x-5 \\
\cline{2-2}
x^2+0x+1 & 5x^4+3x^3+0x^2+2x-4 \\
 & \underline{5x^4+0x^3+5x^2\qquad\qquad\quad} \\
 & \qquad\quad 3x^3-5x^2+2x \\
 & \qquad\quad \underline{3x^3+0x^2+3x\qquad} \\
 & \qquad\qquad\quad -5x^2-\ \ x-4 \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{-5x^2+0x-5} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad -x+1
\end{array}
$$

因此，商式是$5x^2+3x-5$，余式是$-x+1$. 只写出系数，上面的计算也可以表示为

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & 5+3-5 \\
1+0+1 & \big)\overline{\,5+3+0+2-4\,} \\
 & \,5+0+5 \\ \cline{2-2}
 & 3-5+2 \\
 & \underline{3+0+3} \\
 & -5-1-4 \\
 & \underline{-5+0-5} \\
 & -1+1
\end{array}
$$

思考：已知 $x^4+x^3+ax^2+x+b$ 除以 x^2+x+1 的余式为零，你能根据以上的方法分别求出 a、b 的值吗？

◎内容提要

1. 基本概念：幂，底数，指数.

2. 正整数指数幂与零指数幂的运算：

（1）$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$（m、n 是正整数）.

（2）$(a^m)^n = a^{mn}$（m、n 是正整数）.

（3）$(ab)^n = a^n b^n$（n 是正整数）.

（4）$a^m \div a^n = a^{m-n}$（m、n 是正整数且 $m>n$，$a \neq 0$）.

（5）$a^0 = 1$（$a \neq 0$）.

3. 整式的乘法与除法：

（1）单项式与单项式相乘，把它们的系数、同底数幂分别相乘.

（2）整式与整式相乘，先用一个整式的每一项乘另一个整式中的每一项，再把所得的积相加.

（3）两个单项式相除，把系数和同底数幂分别相除.

（4）整式除以单项式，先用整式的每一项除以单项式，再把所得的商相加.

4. 乘法公式：

（1）平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

（2）完全平方公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

◎复习题

A

1. 对于$(-2)^3$与-2^3，下列叙述中正确的是（　　）

A. 底数相同，运算结果相同；　　B. 底数相同，运算结果不同；

C. 底数不同，运算结果相同；　　D. 底数不同，运算结果不同.

2. 对于自然数n，等式$(-a)^n=-a^n(a\neq 0)$成立的条件是（　　）

A. n是正奇数；　　B. n是正偶数；

C. n是零；　　D. n是正整数.

3. 下列式子一定成立的是（　　）

A. $x^2+x^2=2x^4$；　　B. $(x^2)^3=x^5$；

C. $(-x^5)^2=(-x^2)^5$；　　D. $(-x^5)(-x)^2=-x^7$.

4. 计算：

(1) $2x^2\left(-\frac{2}{3}xy^3\right)^3$；　　(2) $(3x-2y)(2x-3y)$；

(3) $\left(3x+\frac{1}{2}y\right)^2\left(3x-\frac{1}{2}y\right)^2$；　　(4) $(3ab^2)^3\div(-2ab)^2$；

(5) $(-x+5y)(-x-5y)(x^2+25y^2)$；

(6) $(2a^3x^2-a^2x^2)\div\left(-\frac{2}{3}a^2x^2\right)$.

5. 简便计算：

(1) $\left(99\frac{1}{2}\right)^2$；　　(2) $199\frac{1}{5}\times 200\frac{4}{5}$.

B

6. 已知关于x的整式$x+t$与$3x+4$的积中不含x的一次项，求t的值.

7. 已知$(a+b)^2=9$，$(a-b)^2=1$. 求$(a+1)(b+1)(a-1)(b-1)$的值.

第 12 章

因式分解

因式分解是整式的一种重要的恒等变形，它和整式的乘法运算有着密切的联系，也是进一步学习分式和一元二次方程的基础.

本章将从整式乘法的逆向思维出发，理解因式分解的意义，研究如何把一个含多个项的整式分解成几个整式的乘积. 在探索因式分解方法的过程中，认识因式分解与整式乘法之间的关系，体会数学知识之间的联系和逆向思考问题的方法. 通过分析如何将一个含多个项的整式因式分解，掌握因式分解的常用方法，并发展观察、分析和应用的能力.

12.1 因式分解的意义

我们已经学习了整式的乘法，可以将几个整式的乘积化为一个整式. 如：

$$m(a+b+c)=ma+mb+mc;$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

反过来，有时候我们需要将一个整式化为几个整式的积.

思考

你能把下列整式化为几个整式的积吗?

(1) $ma+mb+mc=$____________________;

(2) $a^2-b^2=$____________________;

(3) $a^2-2ab+b^2=$____________________.

几个整式相乘，其中每个整式都称为积的因式. 把含多个项的整式化为几个次数更低的整式的积，叫作把这个整式**因式分解**. 如：

$$x^2+x=x(x+1);$$

$$x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1).$$

其中，x、$x+1$ 是 x^2+x 的因式，x^2+1、$x+1$、$x-1$ 是 x^4-1 的因式.

因式分解一般要分解到每个因式都不能再分解为止，如在 x^4-1 因式分解的过程中，因式 x^2+1 不能继续因式分解，x^2-1 还能继续因式分解为 $(x+1)(x-1)$.

例 1 下列等式中，哪些从左到右的变形是因式分解?

(1) $(x-2)(x+3)=x^2+x-6$;

(2) $6m^3+9m=3m(2m^2+3)$;

(3) $4y^2-4y+1=(2y-1)^2$;

(4) $a^2-b^2+3=(a+b)(a-b)+3$.

分析 (1) 等式$(x-2)(x+3)=x^2+x-6$从左到右的变形是整式的乘法运算；

(2) 等式 $6m^3+9m=3m(2m^2+3)$从左到右的变形可看作将 $6m^3+9m$ 化为 $3m$ 与 $2m^2+3$ 的乘积，是因式分解；

(3) 等式 $4y^2-4y+1=(2y-1)^2$ 从左到右的变形可看作将 $4y^2-4y+1$ 化为 $2y-1$ 与 $2y-1$ 的乘积，是因式分解；

(4) 等式 $a^2-b^2+3=(a+b)(a-b)+3$ 的右边不是几个整式的积，而是$(a+b)(a-b)$与 3 的和，不是因式分解.

解 (1) 不是.

(2) 是.

(3) 是.

(4) 不是.

思考

因式分解和整式乘法有什么关系？试举例说明.

课堂练习 12.1

1. (口答)下列等式中，哪些从左到右的变形是因式分解?

(1) $1+2x+3x^2=1+x(2+3x)$；

(2) $3x(x+y)=3x^2+3xy$；

(3) $6a^2b+3ab^2-ab=ab(6a+3b-1)$；

(4) $m^2-9n^2=(m+3n)(m-3n)$.

2. 利用整式的乘法计算下列各式：

(1) $3x(x+2)=$________________；

(2) $(5x+1)(5x-1)=$________________；

(3) $(a-4)^2=$________________；

(4) $(m+1)(m-6)=$____________________.

根据上述算式，完成下列因式分解：

(5) $3x^2+6x=$____________________；

(6) $25x^2-1=$____________________；

(7) $a^2-8a+16=$____________________；

(8) $m^2-5m-6=$____________________.

12.2 因式分解的方法

观察

观察 $ma+mb+mc$ 的每一项，你有什么发现？

我们把含多个项的整式中的每一项都含有的公共的因式叫作这个整式各项的**公因式**.

由 $m(a+b+c)=ma+mb+mc$，可得

$$ma+mb+mc=m(a+b+c).$$

这就将 $ma+mb+mc$ 分解成两个整式的积. 其中，m 是 $ma+mb+mc$ 各项的公因式.

如果含多个项的整式的各项含有非常数的公因式，那么可以把这个公因式提取出来，从而将这个整式化为两个次数更低的整式的积，这种因式分解的方法叫作**提取公因式法**.

思考

如何将 $6xy^2+9xy$ 因式分解？

先找出 $6xy^2+9xy$ 各项的公因式，再用提取公因式法因式分解. 这个整式有两项 $6xy^2$ 与 $9xy$，这两项的系数 6 与 9 有最大公因数 3，这两项的字母部分 xy^2 与 xy 都含有字母 x 和 y，且 x 和 y 的最低次数都是 1，因此可提取公因式 $3xy$，得

$$6xy^2+9xy=3xy\cdot 2y+3xy\cdot 3=3xy(2y+3).$$

如果含多个项的整式的各项的系数都是整数，提取公因式时，通常提取各项系数的最大公因数.

例 1 因式分解：

(1) $6a^2-8a^3$；　　(2) $15a^2b+3ab$；

(3) $8x^2y+4xy^2-12xy$；　　(4) $-4x^2y+6xy^2-2xy$.

解 (1) $6a^2-8a^3=2a^2\cdot 3-2a^2\cdot 4a=2a^2(3-4a)$.

(2) $15a^2b+3ab=3ab\cdot 5a+3ab\cdot 1=3ab(5a+1)$.

(3) $8x^2y+4xy^2-12xy=4xy\cdot 2x+4xy\cdot y-4xy\cdot 3$

$=4xy(2x+y-3)$.

(4) $-4x^2y+6xy^2-2xy=-(4x^2y-6xy^2+2xy)$

$=-(2xy\cdot 2x-2xy\cdot 3y+2xy\cdot 1)$

$=-2xy(2x-3y+1)$.

例 2 因式分解：

(1) $a(x+y)+b(x+y)$；

(2) $x(a-b)^2-y(b-a)^3$.

解 (1) $a(x+y)+b(x+y)$

$=(x+y)(a+b)$.

(1)中，将 $x+y$ 看作一个整体，作为公因式提取.

(2) $x(a-b)^2-y(b-a)^3$

$=x(a-b)^2+y(a-b)^3$

$=(a-b)^2(x+ay-by)$.

课堂练习 12.2(1)

1. 因式分解：

(1) $2ax^3+6a^2x^2$； (2) $3x^2y+6xy^2z-3xy$；

(3) $-5abc+10ab+15a$； (4) $27a^2bc-9ab^2c+3abc^2$.

2. 填空题：

(1) $2m(y-x)^2=(\_\_\_\_)(x-y)^2$；

(2) $2m(y-x)^3=(\_\_\_\_)(x-y)^3$.

3. 因式分解：

(1) $3a(m-n)-2b(m-n)$；

(2) $2(x-y)^2-(y-x)$.

观察

a^2-b^2 有什么特征?

由平方差公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，可得

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

这就将 a^2-b^2 分解成两个整式的积.

平方差公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 从左到右的变形是整式的乘法，从右到左的变形是因式分解. 如果一个整式符合平方差公式的特征，那么就可以用平方差公式把它因式分解.

例 3 因式分解：

(1) $1-9x^2$;

(2) $-4x^2+y^2$;

(3) $\frac{9}{16}a^2-b^2$;

(4) $(a+b)^2-(a+c)^2$.

解 (1) $1-9x^2$

$=1-(3x)^2$

$=(1+3x)(1-3x)$.

(2) $-4x^2+y^2$

$=y^2-(2x)^2$

$=(y+2x)(y-2x)$.

(3) $\frac{9}{16}a^2-b^2$

$=\left(\frac{3}{4}a\right)^2-b^2$

$=\left(\frac{3}{4}a+b\right)\left(\frac{3}{4}a-b\right)$.

(4) $(a+b)^2-(a+c)^2$

$=[(a+b)+(a+c)][(a+b)-(a+c)]$

$=(2a+b+c)(b-c)$.

例 4 因式分解：

（1）$3x^3-12x$；

（2）x^4-81.

解 （1）$3x^3-12x$

$=3x(x^2-4)$

$=3x(x+2)(x-2)$.

（2）x^4-81

$=(x^2)^2-9^2$

$=(x^2+9)(x^2-9)$

$=(x^2+9)(x+3)(x-3)$.

当整式的各项含有公因式时，通常先提取公因式，然后再考虑是否能进一步因式分解.

因式分解要分解到每个因式都不能再分解为止. 如 x^2-9 还能分解为 $(x+3)(x-3)$.

课堂练习 12.2(2)

1. （口答）下列整式能用平方差公式因式分解吗？为什么？

（1）$4+a^2$；（2）$4-a^2$；

（3）$-4+a^2$；（4）$-4-a^2$.

2. 因式分解：

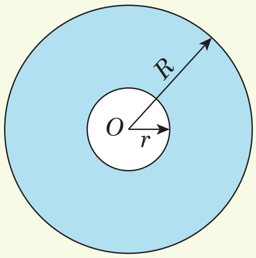
（1）x^2-16；（2）$x^2-\frac{4}{25}y^2$；

（3）$9a^2b^2-81a^2$；（4）$a^2(a-b)+b^2(b-a)$.

3. 如图，大小两圆的圆心相同，已知它们的半径分别为 R 和 r.

（1）用含 R 和 r 的代数式表示圆环的面积；

（2）如果 $R=5.5$，$r=1.5$，求圆环的面积（π 取 3.14）.



（第 3 题）

观察

$a^2+2ab+b^2$、$a^2-2ab+b^2$ 有什么特征？

由完全平方公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，可得

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

这就将 $a^2+2ab+b^2$ 与 $a^2-2ab+b^2$ 分别分解成两个相同的整式的积.

完全平方公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 从左到右的变形是整式的乘法，从右到左的变形是因式分解. 如果一个整式符合完全平方公式的特征，那么就可以用完全平方公式把它因式分解.

例 5 因式分解：

(1) $9x^2-12x+4$；

(2) $4x^2+20x+25$；

(3) $-a^2+4ab-4b^2$；

(4) $x^2y^2-\dfrac{2}{3}xy+\dfrac{1}{9}$.

分析 用完全平方公式因式分解时，关键在于判断这个整式是否符合完全平方公式的特征. 例如，在(1)中，$9x^2=(3x)^2$，$4=2^2$，$-12x=-2\cdot(3x)\cdot 2$，所以 $9x^2-12x+4$ 可以用该方法因式分解，即

$$9x^2-12x+4=(3x)^2-2\cdot(3x)\cdot 2+2^2=(3x-2)^2.$$

$$a^2 \quad -2 \quad a \quad b+b^2=(a-b)^2$$

解 (1) $9x^2-12x+4$

$=(3x)^2-2\cdot(3x)\cdot 2+2^2$

$=(3x-2)^2$.

(2) $4x^2+20x+25$

$=(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot 5+5^2$

$=(2x+5)^2$.

(3) $-a^2+4ab-4b^2$

$=-(a^2-4ab+4b^2)$

$=-[a^2-2\cdot a\cdot(2b)+(2b)^2]$

$=-(a-2b)^2$.

(4) $x^2y^2-\frac{2}{3}xy+\frac{1}{9}$

$=(xy)^2-2\cdot(xy)\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$=\left(xy-\frac{1}{3}\right)^2$.

例 6 因式分解：

(1) $2ax^2-12axy+18ay^2$；

(2) $(x+y)^2+8(x+y)+16$.

解 (1) $2ax^2-12axy+18ay^2$

$=2a(x^2-6xy+9y^2)$

$=2a(x-3y)^2$.

(2) $(x+y)^2+8(x+y)+16$

$=(x+y)^2+2\cdot(x+y)\cdot4+4^2$

$=(x+y+4)^2$.

根据因式分解和整式乘法的关系，可以用平方差公式和完全平方公式将具有特殊形式的整式因式分解. 像这样，根据常用的乘法公式将整式因式分解的方法叫作**公式法**.

课堂练习 12.2(3)

1. (口答)下列整式能用完全平方公式因式分解吗？为什么？

(1) $a^2+4a+16$； (2) $4x^2+4x-1$；

(3) $9b^2-24b+16$； (4) $-x^2-10x-25$.

2. 因式分解：

(1) $4a^2+12a+9$；

(2) $m^2+m+\frac{1}{4}$；

(3) $x^2-16xy+64y^2$；

(4) $-m^2n^2+8mn-16$.

3. 因式分解：

(1) $8ax^2+16a^2x+8a^3$；

(2) $(2x-y)^2-10(2x-y)+25$.

观察

关于 x 的整式

$$x^2+(a+b)x+ab$$

有什么特征？

$x^2+(a+b)x+ab$ 是一个关于 x 的二次三项式，其中二次项系数为 1，常数项是两个数 a 与 b 的积，而一次项系数恰好是这两个数 a 与 b 的和.

由 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$，可得

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b).$$

这就将 $x^2+(a+b)x+ab$ 分解成两个整式的积.

如果关于 x 的二次三项式 x^2+px+q 的常数项 q 能分解成两个因数 a 与 b 的积，且一次项系数 p 又恰好等于 $a+b$，那么 x^2+px+q 就可以进行如下的因式分解：

$$x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b).$$

思考

如何将二次三项式 x^2+3x+2 因式分解？

观察 x^2+3x+2 的系数，它的二次项系数是 1，常数项 $2=1\times2$，一次项系数 $3=1+2$，所以 $x^2+3x+2=x^2+(1+2)x+1\times2=(x+1)(x+2)$.

上述将 x^2+3x+2 因式分解的过程，可以形象地表示为

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ & \times & \\ 1 & & 2 \end{array}$$

先分解二次项系数 $1=1\times1$，分别写在十字交叉线的左上角和左下角；再分解常数项 $2=1\times2$，分别写在十字交叉线的右上角和右下角；然后交叉相乘并求和，看它是否等于一次项系数 3.

一般地，如果二次三项式

$$x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b),$$

那么这样的因式分解的过程可以表示为

$$\begin{array}{ccc} 1 & & a \\ & \times & \\ 1 & & b \end{array}$$

像这样，通过适当地分解系数，把二次三项式因式分解的方法叫作**十字相乘法**.

用十字相乘法将关于 x 的二次三项式 x^2+px+q 因式分解，关键在于是否能将常数项 q 分解成两个因数 a 与 b 的积，且 a 与 b 的和又恰好等于一次项系数 p.

例如，用十字相乘法将二次三项式 x^2-5x+6 因式分解，常数项 $6=1\times6=2\times3=(-1)\times(-6)=(-2)\times(-3)$，因为 $(-2)+(-3)=-5$，所以选择 $6=(-2)\times(-3)$，即

> 常数项的因数分解往往有多种情况，此时选择的关键在于判断哪两个因数的和恰好等于一次项的系数.

$$\begin{array}{ccc} 1 & & -2 \\ & \times & \\ 1 & & -3 \end{array}$$

所以 $x^2-5x+6=[x+(-2)][x+(-3)]=(x-2)(x-3)$.

例 7 因式分解：

(1) $x^2+7x+12$； (2) $x^2-8x+12$；

(3) $x^2+4x-12$； (4) $x^2-11x-12$.

解 (1) $x^2+7x+12$

$=(x+3)(x+4)$.

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ & \times & \\ 1 & & 4 \end{array}$$

(2) $x^2-8x+12$

$=(x-6)(x-2)$.

$$\begin{array}{ccc}1 & & -6\\ & \times & \\ 1 & & -2\end{array}$$

(3) $x^2+4x-12$

$=(x-2)(x+6)$.

$$\begin{array}{ccc}1 & & -2\\ & \times & \\ 1 & & 6\end{array}$$

(4) $x^2-11x-12$

$=(x+1)(x-12)$.

$$\begin{array}{ccc}1 & & 1\\ & \times & \\ 1 & & -12\end{array}$$

思考

如何将 $x^2+7xy+12y^2$ 因式分解?

类比二次三项式 $x^2+7x+12$ 的因式分解，同样考虑十字相乘法. 将 $x^2+7xy+12y^2$ 看作关于 x 的二次三项式，它的二次项系数是 1，常数项 $12y^2=3y\cdot 4y$，一次项系数 $7y=3y+4y$. 于是有

$$\begin{array}{ccc}1 & & 3y\\ & \times & \\ 1 & & 4y\end{array}$$

因此 $x^2+7xy+12y^2=(x+3y)(x+4y)$.

例 8 因式分解：

(1) $x^2+6xy+8y^2$；　　(2) $x^2+5xy-6y^2$.

解 (1) $x^2+6xy+8y^2$

$=(x+2y)(x+4y)$.

$$\begin{array}{ccc}1 & & 2y\\ & \times & \\ 1 & & 4y\end{array}$$

(2) $x^2+5xy-6y^2$

$=(x-y)(x+6y)$.

$$\begin{array}{ccc}1 & & -y\\ & \times & \\ 1 & & 6y\end{array}$$

课堂练习 12.2(4)

1. 因式分解：

(1) x^2+3x-4；　　(2) $x^2-5x-24$；

(3) $x^2+12x+27$；　　(4) $x^2-9x+14$.

2. 因式分解：

（1）$x^2+xy-6y^2$；　　（2）$x^2-3xy-10y^2$.

思考

如何将 $ax+ay+bx+by$ 因式分解？

观察 $ax+ay+bx+by$ 的特征，它的前两项、后两项分别有公因式 a 与 b，如果把它的项分成 $ax+ay$ 与 $bx+by$ 两组，从前一组中提取公因式 a，从后一组中提取公因式 b，那么得到的另一个因式都是 $x+y$，就可以继续提取公因式把这个整式因式分解，即

$$
\begin{aligned}
&ax+ay+bx+by\\
=&(ax+ay)+(bx+by)\\
=&a(x+y)+b(x+y)\\
=&(x+y)(a+b).
\end{aligned}
$$

观察 $ax+ay+bx+by$ 的特征，你还有其他的分组方法因式分解吗？

例 9 因式分解：

（1）$ab-ac+b-c$；

（2）$3x^2y+6xy-4x-8$.

解 （1）$ab-ac+b-c$

$$
\begin{aligned}
&=(ab-ac)+(b-c)\\
&=a(b-c)+(b-c)\\
&=(a+1)(b-c).
\end{aligned}
$$

（2）$3x^2y+6xy-4x-8$

$$
\begin{aligned}
&=(3x^2y+6xy)-(4x+8)\\
&=3xy(x+2)-4(x+2)\\
&=(3xy-4)(x+2).
\end{aligned}
$$

讨论

还有其他的分组方法可以对例 9 中的整式因式分解吗？如果有，那么因式分解的结果是否相同？

思考

如何将 $a^2+2ab+b^2-1$ 因式分解？

观察 $a^2+2ab+b^2-1$ 的特征，它的前面三项符合完全平方公式的特征，即 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，如果把它的项分成 $a^2+2ab+b^2$ 与 -1 两组，就可以继续用公式法因式分解，即

$$
\begin{aligned}
&a^2+2ab+b^2-1\\
=&(a^2+2ab+b^2)-1\\
=&(a+b)^2-1^2\\
=&(a+b+1)(a+b-1).
\end{aligned}
$$

例 10 因式分解：

(1) $x^2-4xy+4y^2-4$；　　(2) $9a^2-3a+b-b^2$.

分析 $x^2-4xy+4y^2-4$ 的前面三项符合完全平方公式的特征，分组后可以用公式法因式分解；将 $9a^2-3a+b-b^2$ 的第一项与第四项分为一组，第二项与第三项分为一组，第一组用公式法因式分解后与第二组有公因式 $3a-b$，可以用提取公因式法因式分解.

解 (1) $x^2-4xy+4y^2-4$

$$
\begin{aligned}
&=(x^2-4xy+4y^2)-4\\
&=(x-2y)^2-4\\
&=(x-2y+2)(x-2y-2).
\end{aligned}
$$

(2) $9a^2-3a+b-b^2$

$$
\begin{aligned}
&=(9a^2-b^2)-(3a-b)\\
&=(3a+b)(3a-b)-(3a-b)\\
&=(3a-b)(3a+b-1).
\end{aligned}
$$

观察整式的特征，通过适当分组，我们可以将某些整式因式分解.

课堂练习 12.2(5)

1. 因式分解：

(1) $a^2-ab-2a+2b$；　(2) $3a-9b+2ac-6bc$；

(3) $x^2+3y-xy-3x$；　(4) $x^3+2x^2y-9x-18y$.

2. 因式分解：

(1) $x^2+4y^2-1-4xy$；　(2) $a^2-b^2-c^2+2bc$；

(3) $x^2-2x+6y-9y^2$；　(4) a^2+2a-b^2-2b.

习题 12.1—12.2

A

1. 下列从左到右的等式变形是不是因式分解？如果不是，请说明理由.

(1) $a^2-2a+1=a(a-2)+1$；　(2) $(x-1)(x+6)=x^2+5x-6$；

(3) $x^3-x=x(x+1)(x-1)$；　(4) $m+4=m\left(1+\frac{4}{m}\right)$.

2. 已知整式 x^2-5x+a 因式分解的结果是$(x+b)^2$，求 a、b 的值.

3. 因式分解：

(1) $12x^3yz-30xy^2$；

(2) $-4a^2b+6ab^2-2ab$；

(3) $15p(p+q)-10q(p+q)$；

(4) $(m-n)(p-q)-(n-m)^2(q-p)$.

4. 因式分解：

(1) $1-25a^2$；　(2) $(x+y)^2-4(x-y)^2$；

(3) $a^2-16a+64$；　(4) $4x^2+20x+25$.

5. 因式分解：

（1）$x^2-15x+54$；　　（2）$a^2+12a+32$；

（3）x^3+2x^2-2x-4；　　（4）$1-a^2-b^2-2ab$.

6. 已知 $a-b=2$，$b+c=-5$. 求 $a^2+ac-ab-bc$ 的值.

B

7. 因式分解：

（1）$x(x-y)+y(y-x)-2(y-x)^2$；

（2）$(x^2+y^2)^2-4x^2y^2$；

（3）$(a-b)^3-4ab(b-a)$；

（4）$(x^2-2x)^2-6(x^2-2x)+9$.

8. 因式分解：

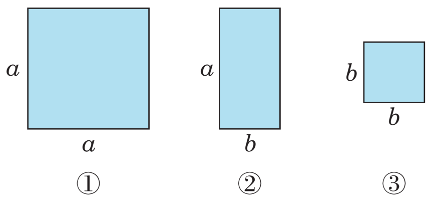
（1）$a^3-a^2b+4b-4a$；

（2）$2x^2y-6xy+2x^2-6x$；

（3）$m^2n+mn^2+2m^2-4m$；

（4）$a^2-b(b+4)-4$.

9. 如图，有三种不同形状的卡片①②③各若干张. 现用 1 张卡片①、6 张卡片②和 9 张卡片③无重叠、无缝隙地拼成一个大正方形，求该正方形的边长.



（第 9 题）

◎内容提要

1. 基本概念：因式，因式分解，公因式.

把含多个项的整式化为几个次数更低的整式的积，叫作把这个整式因式分解.

2. 因式分解的方法：

（1）提取公因式法：如果含多个项的整式的各项含有非常数的公因式，那么可以把这个公因式提取出来，从而将这个整式化为两个次数更低的整式的积.

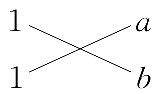
（2）公式法：根据常用的乘法公式将整式因式分解，如：

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

（3）十字相乘法：通过适当地分解系数，把二次三项式因式分解：

$$\begin{aligned}&x^2+px+q\\=&x^2+(a+b)x+ab\\=&(x+a)(x+b).\end{aligned}$$



其中，$p=a+b$，$q=ab$.

◎复习题

A

1. 选择题：

(1) 下列等式中，从左到右的变形是因式分解的是 (   )

A. $(x-1)^2=x^2-2x+1$；

B. $a^2+4a+1=(a+2)^2-3$；

C. $a^2-b^2+c^2-d^2=(a+b)(a-b)+(c+d)(c-d)$；

D. $-12x^2+9xy=-3x(4x-3y)$.

(2) 下列因式分解正确的是 (   )

A. $4a^2b^2-6ab^2+2ab=2ab(2ab-3b)$；

B. $-x^2-x+6=x^2+x-6=(x+3)(x-2)$；

C. $x^2-y^2-2y-1=(x+y+1)(x-y-1)$；

D. $a^2+b^2-2ab=(a+b)^2$.

(3) 下列各式中，能用平方差公式因式分解的是 (   )

A. $(-x)^2-y^2$；　　B. $-x^2-y^2$；

C. x^2+y^2；　　D. $x^2+(-y)^2$.

(4) 下列各式中，能用完全平方公式因式分解的是 (   )

A. a^2+4a-4；　　B. a^2+2a+4；

C. $x^2-x+\frac{1}{4}$；　　D. $-x^2+6xy+9y^2$.

2. 因式分解：

(1) $6a^2b-15ab^2$；

(2) $10xy^2+8xy-2y$；

(3) $2x(a+b)-3y(a+b)$；

(4) $(a+b)(x-y)-(a-b)(y-x)$.

3. 因式分解：

（1）$25x^2-16y^2$；

（2）$4a^2-12a+9$；

（3）$16n^3-9m^2n$；

（4）$(x-y)^2-2t(x-y)+t^2$.

4. 因式分解：

（1）$x^2-11x+18$；

（2）$x^2-10xy+9y^2$；

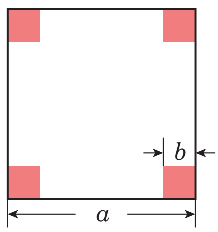
（3）$x^2-xy+yz-xz$；

（4）$a^2-4b^2-c^2+4bc$.

5. 如图，在一块边长为 a m 的正方形空地的四角各留出一块边长为 b m$\left(b<\frac{a}{2}\right)$的正方形，用来修建花坛，其余地方均为草坪.

（1）用含 a、b 的代数式表示草坪的面积 S；

（2）当 $a=15.2$，$b=2.6$ 时，利用因式分解计算此时草坪的面积.



（第 5 题）

B

6. 填空题：

（1）如果 $2x^2+px+q$ 因式分解的结果为 $(x+3)(2x-1)$，那么 $p=$________，$q=$________；

（2）如果 $x-3y=5$，$x^2-9y^2=35$，那么 $x+3y=$________；

（3）如果 $a+b=-1$，那么 $\frac{1}{2}a^2+ab+\frac{1}{2}b^2$ 的值为________.

7. 因式分解：

（1）$x-1+x^2(1-x)$；

（2）$x^3+2x^2y-9x-18y$；

(3) $(x^2+5x)^2+5(x^2+5x)-6$;

(4) $(x-y)^2-2(x-y)-a^2+1$.

8. (1) 如果关于 x 的整式 x^2+px+6 可以因式分解为 $(x+a)(x+b)$，其中 a、b 均为整数，那么满足条件的 p 的值有多少个？为什么？

(2) 如果关于 x 的整式 x^2+6x+q 可以因式分解为 $(x+c)(x+d)$，其中 c、d 均为整数，那么满足条件的 q 的值有多少个？为什么？

第13章

分　式

分式是作为“分子”和“分母”的两个整式相除所得的代数式. 分式与整式的关系可以类比分数与整数.

分式的基本性质与运算法则可以类比分数得到. 需要注意的是，对分式的变形及运算，必须在分式有意义的前提下进行，即字母的取值不能使分母为零. 本章还将正整数指数幂推广到整数指数幂，并把分式与负整数指数幂有机地联系起来.

可化为一元一次方程的分式方程是一类特殊的方程. 通过解决有关的问题，可以逐步理解分式方程的概念、解法以及验根的步骤和意义.

13.1 分式及其性质

1. 分式

两个整数相除，可以用分数表示，如：$5\div3=\frac{5}{3}$. 两个整式相除，应该如何表示呢?

问题

(1) 长方形的面积是 S，长是 a，宽是多少?

(2) 走一段 10 km 的路，骑车需用 t h，步行需用的时间是骑车的 2 倍还多 1 h. 步行的速度是多少?

(3) 一名篮球运动员在一场比赛中投进 x 个罚球(每 1 球得 1 分)、y 个 2 分球、z 个 3 分球. 这名篮球运动员的 3 分球得分占其总得分的几分之几?

上述问题的结果可以依次表示为 $\frac{S}{a}$、$\frac{10}{2t+1}$ 和 $\frac{3z}{x+2y+3z}$. 一般地，对于两个整式 A、B(B 是非零整式)，$A\div B$ 可以表示为 $\frac{A}{B}$ 的形式，$\frac{A}{B}$ 叫作**分式**，也称为有理式，其中 A 称为分子，B 称为分母. 本章主要讨论分母中含有字母的分式.

用数值代替分式中的字母，计算得出的代数式的值就是分式的值.

例 1 当 $x=-3$，$y=2$ 时，分别计算下列分式的值：

(1) $\frac{3x-2y}{x}$；　　(2) $\frac{y+6}{x+7}$.

解 当 $x=-3$，$y=2$ 时，

(1) $\frac{3x-2y}{x}=\frac{3\times(-3)-2\times2}{-3}=\frac{-13}{-3}=\frac{13}{3}$.

(2) $\frac{y+6}{x+7}=\frac{2+6}{-3+7}=\frac{8}{4}=2$.

思考

求分式 $\dfrac{y-3}{x+7}$ 的值时，x 能取 -7 吗？

当 $x=-7$ 时，分母 $x+7=0$，所以 x 不能取 -7.

一般地，分母的值为 0 时，分式无意义；分母的值不为 0 时，分式有意义.

例 2 当 x 取什么值时，下列分式有意义？

（1）$\dfrac{x^2+1}{2x}$；

（2）$\dfrac{x+5}{x+2}$；

（3）$\dfrac{2x}{x^2+1}$.

解 （1）由 $2x=0$，得 $x=0$. 所以 $x\neq 0$ 时，分式 $\dfrac{x^2+1}{2x}$ 有意义.

（2）由 $x+2=0$，得 $x=-2$. 所以 $x\neq -2$ 时，分式 $\dfrac{x+5}{x+2}$ 有意义.

（3）因为 $x^2+1\neq 0$，所以 x 取一切数时，分式 $\dfrac{2x}{x^2+1}$ 有意义.

例 3 当 x 取什么值时，分式 $\dfrac{2x+1}{3x-1}$ 的值为 0？

分析 在分式中，只有当分子的值为 0 且分母的值不为 0 时，分式的值才为 0.

解 由分子 $2x+1=0$，得 $x=-\dfrac{1}{2}$.

当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，分母 $3x-1=3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)-1=-\dfrac{5}{2}\neq 0$. 所以，当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，分式 $\dfrac{2x+1}{3x-1}$ 的值为 0.

课堂练习 13.1(1)

1. 将下列式子表示为分式：

(1) $3 \div x$；　　(2) $2ax \div by$；

(3) $(x^2+1) \div x$；　　(4) $2x \div (3x+5)$.

2. 当 x 满足什么条件时，下列分式有意义？分式的值为 0？

(1) $\dfrac{1-x}{1+2x}$；　　(2) $\dfrac{3x}{x+2}$.

3. 当 $x=-1$，$y=-4$ 时，计算下列分式的值：

(1) $\dfrac{y}{x}$；　　(2) $\dfrac{x-y}{x+y}$.

2. 分式的基本性质

在分数中，有

$$\frac{5}{8}=\frac{5\times 3}{8\times 3},\ \frac{9}{24}=\frac{9\div 3}{24\div 3}.$$

这是分数的基本性质：分数的分子和分母乘(或除以)同一个不为 0 的数，分数的值不变．用字母表示为

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}\ (m\neq 0),\ \frac{a}{b}=\frac{a\div n}{b\div n}\ (n\neq 0).$$

类似地，分式也有下面的基本性质：

分式的分子和分母乘(或除以)同一个整式，当该整式的值不为 0 时，分式的值不变，即

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot M}{B\cdot M}\ (M\neq 0),\ \frac{A}{B}=\frac{A\div N}{B\div N}\ (N\neq 0).$$

例如：

对任意数 x，$\dfrac{3}{5}=\dfrac{3(x^2+1)}{5(x^2+1)}$；

当 $3x\neq0$ 时，$\frac{3}{5}=\frac{3\times3x}{5\times3x}=\frac{9x}{15x}$；

当 $2xy\neq0$ 时，$\frac{-6xy^2}{10x^2y}=\frac{-6xy^2\div2xy}{10x^2y\div2xy}=-\frac{3y}{5x}$.

$2xy$ 是分式 $\frac{-6xy^2}{10x^2y}$ 分子、分母的一个公因式，运用分式的基本性质，可以把分子、分母中的 $2xy$ 约去. 像这样，把一个分式的分子与分母中的公因式约去的过程，叫作**约分**.

当 $2xy=0$ 时，$\frac{-6xy^2}{10x^2y}$ 无意义，约分无法进行.

> 如无特殊说明，本章出现的分式的变形与运算，总是在分式有意义的前提下进行.

例 4 约分：

(1) $\frac{6x^2y}{9xy^2}$；

(2) $\frac{35(x-y)^2}{45(x-y)^3}$；

(3) $\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}$.

解 (1) $\frac{6x^2y}{9xy^2}=\frac{2x\cdot(3xy)}{3y\cdot(3xy)}=\frac{2x}{3y}$.

(2) $\frac{35(x-y)^2}{45(x-y)^3}=\frac{7\times5(x-y)^2}{9(x-y)\cdot5(x-y)^2}=\frac{7}{9(x-y)}$.

(3) $\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x-2}$.

分式 $\frac{2x}{3y}$、$\frac{7}{9(x-y)}$、$\frac{1}{x-2}$ 的分子与分母没有一次及以上的公因式，这样的分式叫作**最简分式**. $\frac{6x}{9y}$ 与 $\frac{2x}{3y}$ 都是最简分式，习惯上，在结果中将 $\frac{6x}{9y}$ 化为 $\frac{2x}{3y}$.

约分可以化简分式. 如果分式的分子和分母是几个因式的积的形式，可约去相同因式. 有时，需要先对分子、分母因式分解，再约分. 分式的约分一般要使结果成为最简分式.

例 5 化简：

(1) $\dfrac{x-2}{x^2-4x+4}$；

(2) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$；

(3) $\dfrac{15b-5a}{2a-6b}$.

解 (1) $\dfrac{x-2}{x^2-4x+4}=\dfrac{x-2}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{x-2}$.

(2) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}=\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{x+2}{x+3}$.

(3) $\dfrac{15b-5a}{2a-6b}=\dfrac{5(3b-a)}{2(a-3b)}=-\dfrac{5(a-3b)}{2(a-3b)}=-\dfrac{5}{2}$.

课堂练习 13.1(2)

1. 下列分式中，哪些是最简分式？

$\dfrac{6ab}{5a^2}$、$\dfrac{3(a^2-b^2)}{a+b}$、$\dfrac{x+1}{2x+1}$、$\dfrac{x-1}{3x-3}$.

2. 化简：

(1) $\dfrac{6m^2n^3}{3mn}$；

(2) $\dfrac{-20x}{25x^2}$；

(3) $\dfrac{9ab}{12a^2}$；

(4) $\dfrac{2(x+y)^2}{x+y}$.

3. 化简：

(1) $\dfrac{x-5}{15-3x}$；

(2) $\dfrac{x^2-2x}{4-2x}$；

(3) $\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$；

(4) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+6x+5}$.

习题 13.1

A

1. 将下列式子表示为分式：

（1）$a \div b$；（2）$3 \div 2ab$；

（3）$ab \div (a+b)$；（4）$(x^2+y^2) \div 2xy$.

2. 当 x 满足什么条件时，下列分式有意义？分式的值为 0？

（1）$\dfrac{x+2}{3x}$；（2）$\dfrac{-x+5}{3-x}$；（3）$\dfrac{x-8}{3+x^2}$.

3. 求下列各分式的值：

（1）$\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2x+1}$，其中 $x=3$；

（2）$\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，其中 $x=-\dfrac{1}{2}$，$y=2$.

4. 化简：

（1）$\dfrac{4a^2}{16a^4}$；（2）$-\dfrac{18xy}{27x^2y^2}$；（3）$\dfrac{12(x+y)^2}{20(x+y)(x+2y)}$.

5. 化简：

（1）$\dfrac{9x-9}{4-4x}$；（2）$\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$；（3）$\dfrac{x^2-4x+4}{2x-4}$.

B

6. 甲、乙两人从一条公路的某处出发，同向而行，乙提前 1 h 出发. 已知甲的速度为 a km/h，乙的速度为 b km/h，$a>b$. 那么甲追上乙需要多少时间？当 $a=6$，$b=5$ 时，甲追上乙需要多少时间？

13.2 分式的运算

1. 分式的乘除

讨论

(1) 类比 $\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{4\times3}{5\times2}$，$\frac{16}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{16\times3}{5\times4}$，如何计算 $\frac{x^2}{5}\cdot\frac{3}{x}$？

(2) 类比 $\frac{4}{5}\div\frac{3}{25}=\frac{4}{5}\times\frac{25}{3}$，$\frac{4}{7}\div\frac{3}{49}=\frac{4}{7}\times\frac{49}{3}$，如何计算 $\frac{4}{x}\div\frac{3}{x^2}$？

与分数的乘除法的法则类似，分式的乘除法的法则如下：

两个分式相乘，将分子相乘的积作分子，分母相乘的积作分母.

分式除以分式，将除式的分子和分母颠倒位置后，再与被除式相乘.

用式子表示为：

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D},\quad \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}.$$

例 1 计算：

(1) $\frac{2a^2}{3}\cdot\frac{b}{4a}$；　　(2) $\frac{3y(x+3)}{x-3}\cdot\frac{2(x-3)}{9y^2}$.

解 (1) $\frac{2a^2}{3}\cdot\frac{b}{4a}=\frac{2a^2b}{3\times4a}=\frac{ab}{6}$.

(2) $\frac{3y(x+3)}{x-3}\cdot\frac{2(x-3)}{9y^2}$

$=\frac{6y(x+3)(x-3)}{9y^2(x-3)}$

$=\frac{2(x+3)}{3y}$.

例 2 计算：

(1) $\left(\frac{-5m}{n}\right)\div\frac{10m^2}{3n}$；　　(2) $\frac{x+1}{x^2+2x-3}\div\frac{x+1}{x-1}$；

(3) $\frac{2a-b}{a^2-2ab+b^2}\div\frac{4a^2-b^2}{ab^2-a^2b}$.

解 (1) $\left(\frac{-5m}{n}\right)\div\frac{10m^2}{3n}$

$$=\left(\frac{-5m}{n}\right)\cdot\frac{3n}{10m^2}$$

$$=\frac{-15mn}{10nm^2}$$

$$=-\frac{3}{2m}.$$

(1) 中，除法能够进行的前提是 $m\neq0$ 且 $n\neq0$. 在本章中做分式除法时，总是默认除式的值不为 0.

(2) $\frac{x+1}{x^2+2x-3}\div\frac{x+1}{x-1}$

$$=\frac{x+1}{(x+3)(x-1)}\div\frac{x+1}{x-1}$$

$$=\frac{x+1}{(x+3)(x-1)}\cdot\frac{x-1}{x+1}$$

$$=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{1}{x+3}.$$

(3) $\frac{2a-b}{a^2-2ab+b^2}\div\frac{4a^2-b^2}{ab^2-a^2b}$

$$=\frac{2a-b}{(a-b)^2}\div\frac{(2a-b)(2a+b)}{ab(b-a)}$$

$$=\frac{2a-b}{(a-b)^2}\cdot\frac{ab(b-a)}{(2a-b)(2a+b)}$$

$$=\frac{ab(2a-b)(b-a)}{(a-b)^2(2a-b)(2a+b)}$$

$$=-\frac{ab}{(a-b)(2a+b)}.$$

分式的运算结果一般要化简为最简分式.

例 3 如图 13-2-1，用一个半径为 r m 的半圆和一个一边长度为 h m 的长方形，组成一扇窗. 根据设计要求，整扇窗的面积为 4 m^2.

(1) 用含 r 的代数式表示 h；

(2) 当 $r=1$ 时，求窗的高度(π 取 3.14，结果精确到 0.01 m).

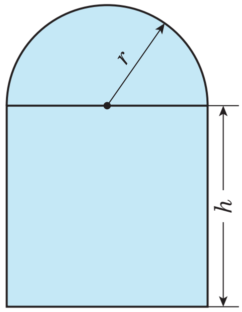


图 13-2-1

分析 窗的面积等于半圆的面积与长方形的面积之和. 窗的高度等于 h 与 r 的和.

解 (1) 由 $\frac{1}{2}\pi r^2+2rh=4$，得

$$2rh=4-\frac{1}{2}\pi r^2.$$

从而 $h=\frac{1}{2r}\left(4-\frac{1}{2}\pi r^2\right)$，因此

$$h=\frac{2}{r}-\frac{1}{4}\pi r.$$

(2) 当 $r=1$ 时，$h=\frac{2}{1}-\frac{1}{4}\times 3.14\times 1=1.215$ (m).

$$h+r=1.215+1=2.215\approx 2.22\ (\text{m}).$$

答：窗的高度约为 2.22 m.

课堂练习 13.2(1)

1. 计算：

(1) $\frac{2}{x}\cdot\frac{x}{4}$； (2) $\frac{3x^2y}{4}\cdot\frac{y}{6x}$；

(3) $\frac{2}{2x+1}\cdot\frac{1}{2x+1}$.

2. 计算：

（1）$\dfrac{x^2-4}{x+1}\cdot\dfrac{2x+2}{2-x}$；　　（2）$\dfrac{2x+1}{x}\div\dfrac{6+12x}{5}$；

（3）$\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x+2}\div\dfrac{x-2}{x+1}$.

2. 分式的加减

讨论

（1）类比 $\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{2+1}{5}=\dfrac{3}{5}$，如何计算 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x}$？

（2）类比 $\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3-1}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，如何计算 $\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x}$？

与同分母的分数加减法类似，同分母分式的加减法法则如下：

同分母分式相加减，分母不变，分子相加减.

例 4 计算：

（1）$\dfrac{x}{3x-1}+\dfrac{3}{3x-1}$；　　（2）$\dfrac{2}{x^2-4}-\dfrac{x}{x^2-4}$；

（3）$\dfrac{3x^2-1}{x^2-3x+2}-\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}+\dfrac{1-2x^2}{x^2-3x+2}$.

解 （1）$\dfrac{x}{3x-1}+\dfrac{3}{3x-1}=\dfrac{x+3}{3x-1}$.

（2）$\dfrac{2}{x^2-4}-\dfrac{x}{x^2-4}$

$=\dfrac{2-x}{x^2-4}$

$$=\frac{2-x}{(x-2)(x+2)}$$

$$=-\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}$$

$$=-\frac{1}{x+2}.$$

(3) $\frac{3x^2-1}{x^2-3x+2}-\frac{x+2}{x^2-3x+2}+\frac{1-2x^2}{x^2-3x+2}$

$$=\frac{3x^2-1-(x+2)+1-2x^2}{x^2-3x+2}$$

$$=\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$$

$$=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x-1)}$$

$$=\frac{x+1}{x-1}.$$

讨论

(1) 类比 $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}+\frac{2}{12}=\frac{9+2}{12}=\frac{11}{12}$，如何计算 $\frac{3}{2x}+\frac{1}{3x}$?

(2) 类比 $\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{6}{9}-\frac{1}{9}=\frac{6-1}{9}=\frac{5}{9}$，如何计算 $\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$?

异分母分数相加减，先将它们转化为分母相同的分数，再利用同分母分数的加减法法则进行计算. 异分母分式的加减与之类似. 将几个异分母分式分别化为与原来分式的值相等的同分母分式的过程叫作**通分**. 例如

$$\frac{3}{2x}+\frac{1}{3x}=\frac{9}{6x}+\frac{2}{6x}=\frac{11}{6x},$$

其中 $6x$ 称为 $\frac{3}{2x}$ 和 $\frac{1}{3x}$ 的公分母.

异分母分式相加减，先将它们通分，然后进行加减.

例 5 计算：

(1) $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$；

(2) $\frac{x}{x^2-y^2}-\frac{1}{x+y}$；

(3) $\frac{y}{2x}+\frac{x}{y}-\frac{2x-1}{y^2}$.

分析 (1) $\frac{x}{2}$ 和 $\frac{2}{x}$ 的公分母可取为 $2x$；

(2) 因为 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，所以 $\frac{x}{x^2-y^2}$ 和 $\frac{1}{x+y}$ 的公分母可取为 x^2-y^2；

(3) $\frac{y}{2x}$、$\frac{x}{y}$ 和 $\frac{2x-1}{y^2}$ 的公分母可取为 $2xy^2$.

解 (1) $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{x\cdot x}{2x}+\frac{2\times 2}{2x}=\frac{x^2+4}{2x}$.

(2) $\frac{x}{x^2-y^2}-\frac{1}{x+y}$

$=\frac{x}{x^2-y^2}-\frac{x-y}{(x+y)(x-y)}$

$=\frac{x-x+y}{x^2-y^2}$

$=\frac{y}{x^2-y^2}$.

(3) $\frac{y}{2x}+\frac{x}{y}-\frac{2x-1}{y^2}$

$=\frac{y\cdot y^2}{2x\cdot y^2}+\frac{x\cdot 2xy}{y\cdot 2xy}-\frac{(2x-1)\cdot 2x}{y^2\cdot 2x}$

$=\frac{y^3+2x^2y-4x^2+2x}{2xy^2}$.

课堂练习 13.2(2)

1. 计算：

(1) $\dfrac{2}{3x}-\dfrac{1}{3x}$；

(2) $\dfrac{2a+1}{ab}-\dfrac{1}{ab}$；

(3) $\dfrac{x+2y}{1-x^2}+\dfrac{y-1}{x^2-1}-\dfrac{y}{1-x^2}$.

2. 下列各式的计算正确吗？如果不正确，应该如何改正？

(1) $\dfrac{c-d}{a}-\dfrac{c+d}{a}=\dfrac{c-d-c+d}{a}=\dfrac{0}{a}=0$；

(2) $\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{b-a}{ab}$；

(3) $\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}=\dfrac{x(x+y)-y(x-y)}{(x-y)(x+y)}=\dfrac{x^2-y^2}{x^2-y^2}=1$.

3. 计算：

(1) $\dfrac{2}{3x}-\dfrac{3}{4x}$；

(2) $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{8}{x^2-4}$；

(3) $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{3x+5}{x^2+2x-3}$.

3. 整数指数幂

思考

计算：$a^5\div a^7\ (a\neq 0)$.

$$a^5\div a^7=\frac{a^5}{a^7}=\frac{1}{a^2}.$$

当 m、n 是正整数，且 $m>n$ 或 $m=n$ 时，有 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ $(a\neq 0)$. 如果以上性质对 $m<n$ 仍然成立，那么 $a^5 \div a^7 = a^{5-7} = a^{-2}$. 这样会得到 $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.

由此，规定

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a\neq 0,\ n \text{ 是正整数}).$$

到现在为止，在 $a\neq 0$ 时，a^n 中的指数 n 可以是正整数、零或负整数.

当 m、n 是正整数且 $m<n$ 时，$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m \div a^m}{a^n \div a^m} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{m-n}$.

因此，

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a\neq 0,\ m、n \text{ 是正整数}).$$

例 6 计算：

(1) $2^6 \div 2^8$；　　(2) $10^{101} \div 10^{104}$；　　(3) $5^{12} \div 5^{12}$.

解 (1) $2^6 \div 2^8 = 2^{6-8} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

(2) $10^{101} \div 10^{104} = 10^{101-104} = 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000}$.

(3) $5^{12} \div 5^{12} = 5^{12-12} = 5^0 = 1$.

思考

我们知道 $2^2 \times 2^5 = 2^{2+5}$，那么 $2^2 \times 2^{-5}$ 是否等于 $2^{2+(-5)}$？

当 $a\neq 0$ 时，$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 是否对任意整数 m、n 都成立？

下面我们先讨论 m 是任意整数且 n 是负整数的情况：

(1) 当 $m>0$ 时，由 $-n$ 是正整数，得

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n};$$

(2) 当 $m=0$ 时，

$$a^m \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^{0+n} = a^{m+n};$$

(3) 当 $m<0$ 时，由 $-m$、$-n$ 是正整数，得

$$a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

当 m 是任意整数且 n 是正整数或 0 时，也可以验证 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 是成立的.

随着指数的取值范围由正整数扩大到全体整数，前面学过的正整数指数幂的运算性质也推广到了整数指数幂.

当 a、b 不为 0 时，对于整数指数幂，有

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$；

(2) $(ab)^n = a^n b^n$；

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$.

思考

当 $a \neq 0$ 时，对于任意整数 m、n，是否有 $a^m \div a^n = a^{m-n}$？

例 7 计算：

(1) $x^{-5} \cdot x^2$；　　(2) $(2^{-2})^3$；

(3) $10^0 \div 3^{-3}$；　　(4) $(3a)^3 \cdot (2a)^{-2}$.

解 (1) $x^{-5} \cdot x^2 = x^{(-5)+2} = x^{-3}$.

(2) $(2^{-2})^3 = 2^{(-2)\times 3} = 2^{-6} = \frac{1}{64}$.

(3) $10^0 \div 3^{-3} = 1 \div \frac{1}{3^3} = 1 \times 3^3 = 27$.

(4) $(3a)^3 \cdot (2a)^{-2} = 3^3 \cdot a^3 \cdot 2^{-2} \cdot a^{-2} = 3^3 \times 2^{-2} \cdot a^{3-2} = \frac{27}{4}a$.

课堂练习 13.2(3)

1. 计算：

(1) $3^5 \div 3^8$；　(2) $x^4 \div x^{10}$；

(3) $2^{-5} \times 2$；　(4) $3^{-2} \times 3^{-1}$.

2. 下列各式的计算是否正确？如果不正确，应该如何改正？

(1) $2^3 \times 2^4 = 2^{3\times 4}$；　(2) $a^4 \cdot a^{-3} = a^{4\div 3}$；

(3) $3^{-1} = -3$；　(4) $(-10)^0 = -1$.

3. 计算：

(1) $[(-2)^{-3}]^2$；　(2) $[(-2)^{-3}]^{-2}$；

(3) $(2a)^{-3} \cdot a^4$.

习题 13.2

A

1. 下列各式的计算是否正确？如果不正确，应该如何改正？

(1) $\dfrac{b}{a} \div a = b$；　(2) $\dfrac{-x}{2b} \cdot \dfrac{6b}{x^2} = \dfrac{3b}{x}$；

(3) $\dfrac{4x}{3a} \div \dfrac{a}{2x} = \dfrac{2}{3}$；　(4) $\dfrac{x}{x-y} - \dfrac{y}{y-x} = 1$.

2. 计算：

(1) $\dfrac{4a}{3b^2c} \cdot \dfrac{bc}{8a^2}$；　(2) $24x^2y \cdot \dfrac{7}{36x^2y^2}$；

(3) $\dfrac{2x+2}{3x^2} \cdot \dfrac{2x}{x+1}$.

3. 计算：

(1) $\dfrac{x+2}{x-1} \cdot \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$；　(2) $\dfrac{a^2-b^2}{2ab} \cdot \dfrac{a^2-2ab}{a^2-ab-2b^2}$；

(3) $\left(\dfrac{2a}{3b^2}\right)^2 \div \left(-\dfrac{a}{b}\right)^3$；　(4) $\dfrac{12xy^2}{x+y} \div \dfrac{4xy}{x^2-y^2}$.

4. 计算：

(1) $\dfrac{2}{3x}+\dfrac{5}{6x}$；　　(2) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{2x-1}{x^2}$；

(3) $\dfrac{c}{ab}+\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}$；　　(4) $\dfrac{3}{x}-\dfrac{3}{x+1}$；

(5) $\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{8}{x^2-4}$；　　(6) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

5. 将下列各式表示成只含有正整数指数幂的形式：

(1) $-x^{-2}$；　　(2) $2x^2y^{-3}$；

(3) $5xy(x+y)^{-2}$；　　(4) $4^{-3}a^{-1}b^2$.

6. 将下列各式表示成不含分母的形式：

(1) $-\dfrac{2}{xy}$；　　(2) $\dfrac{2xy}{x+2y}$；

(3) $\dfrac{a+b}{2a^2b^3}$；　　(4) $\dfrac{2a}{x^2y^2(x^2+y^2)}$.

7. 计算：

(1) $(-a^2)^3\cdot(-a^3)^{-2}$；　　(2) $(2ab^2)^2\cdot(3ab)^{-3}$；

(3) $\left(\dfrac{4}{ab}\right)^4\div\left(\dfrac{a^2b}{8}\right)^{-3}$；　　(4) $(2x)^{-4}+(4x^2)^{-2}$；

(5) $xy(x^{-1}+y^{-1})$；　　(6) $\dfrac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}$.

B

8. 先化简，再求值：$\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x+3}{x^2-1}\div\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-2x+1}$，其中 $x=-2$.

9. 市场里有甲、乙两种苹果. 甲种苹果每箱质量为 m kg，售价 a 元；乙种苹果每箱质量为 n kg，售价 b 元. 每千克甲种苹果的价格是乙种苹果的多少倍？

13.3 分式方程

问题 京沪高铁上海虹桥站至北京南站全程约 1 318 km．如果某趟列车的平均速度提高 $\frac{1}{6}$，其从上海虹桥站至北京南站的行驶时间将缩短 37 min，那么这趟列车提速前后的平均速度分别为多少(结果精确到 1 km/h)？

设火车提速前的平均速度是 x km/h，根据问题可以列出方程

$$\frac{1\,318}{x}-\frac{1\,318}{\left(1+\frac{1}{6}\right)x}=\frac{37}{60}.$$

像这样，分母里含有未知数的方程叫作**分式方程**．像一元一次方程等分母里不含有未知数的方程称为整式方程．只含有一个未知数的方程的解称为这个方程的根．

解分式方程的关键是把分母“去掉”，将其转化成整式方程．

分式方程 $\frac{1\,318}{x}-\frac{1\,318}{\left(1+\frac{1}{6}\right)x}=\frac{37}{60}$ 的两边都乘公分母 $\frac{7}{6}x$，得到一元一次方程

$$1\,318\times\frac{7}{6}-1\,318=\frac{37}{60}\times\frac{7}{6}x.$$

解得

$$x\approx305.$$

所以这趟列车提速前的平均速度约为 305 km/h，提速后的平均速度约为 356 km/h．

观察分式方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x^2+x}$.

方程的两边都乘公分母 $x(x+1)$，得到一元一次方程

$$(x+1)+x=1.$$

解得

$$x=0.$$

由于 $x=0$ 使 $\frac{1}{x}$ 的分母的值为 0，因此，0 不是原分式方程的根，原分式方程无解.

在分式方程变形时，有时会产生不符合原分式方程的根，这种根称为原分式方程的增根，应舍去. 检验一个数是否是方程的根的过程，称为验根.

在上面的求解中，$x=0$ 是分式方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x^2+x}$ 的增根.

思考

解分式方程为什么会产生增根?

在分式方程两边同乘一个整式，由于这个整式的值可能为 0，这就可能产生增根.

本节我们研究可化为一元一次方程的分式方程.

例 1 解方程 $\frac{2x-1}{3x+1}=\frac{1}{2}$.

解 方程两边同乘 $2(3x+1)$，得

$$2(2x-1)=3x+1.$$

去括号，得 $$4x-2=3x+1.$$

移项，化简，得 $$x=3.$$

将 $x=3$ 代入原方程检验，得

$$左边=\frac{2\times3-1}{3\times3+1}=\frac{1}{2}=右边.$$

所以原方程的解是 $x=3$.

例 2 解方程 $\frac{x}{x-1}+1=\frac{1}{x-1}$.

解 方程两边同乘 $x-1$，得 $x+(x-1)=1$.

移项，化简，得 $$x=1.$$

将 $x=1$ 代入原方程检验，此时方程中分式的分母的值为 0，分式无意义.

所以 $x=1$ 不是原方程的解. 原方程无解.

归纳

你能归纳出解分式方程的一般步骤吗?

解分式方程的一般步骤是：

（1）去分母，转化成整式方程并求解；

（2）验根，并写出结论.

课堂练习 13.3(1)

1. 下列方程中，哪些是分式方程?

（1）$x+\dfrac{1}{x}=3$；　（2）$\dfrac{1}{x}=2$；

（3）$\dfrac{2x-5}{4}+\dfrac{x}{3}=\dfrac{1}{2}$；　（4）$\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{1}{x-1}$.

2. 解方程：

（1）$\dfrac{2}{x}=5$；　（2）$\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{1}{x}$；

（3）$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2x}=1$；　（4）$\dfrac{4}{x-3}=\dfrac{1}{3-x}+2$.

3. $x=2$ 是下列哪个分式方程的解?

（1）$\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{5}{2}$；　（2）$x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$；　（3）$\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{4}{x+2}$.

例 3　现有一包 15 g 的果汁粉，用水冲泡成浓度为 6%的饮料，需要加多少水$\left(\text{浓度}=\dfrac{\text{溶质质量}}{\text{溶液质量}}\right)$?

解　设需要加 x g 水. 根据题意，得

$$\frac{15}{x+15}=6\%.$$

方程两边同乘 $100(x+15)$，得

$$1\,500=6(x+15).$$

解得 $$x=235.$$

经检验，$x=235$ 是原方程的解.

答：需要加 235 g 水.

例 4 某商店促销，购买某款电器每台可享受减免 300 元的优惠. 若同样用 33 000 元购买若干台此款电器，优惠后可购买的台数比优惠前多 10%，这款电器优惠前的售价为多少元？

分析 根据"优惠后可购买的台数比优惠前多 10%"，可以得到"优惠前 33 000 元购买的台数×(1+10%)=优惠后 33 000 元购买的台数".

解 设该款电器优惠前的售价为 x 元. 根据题意，可得

$$\frac{33\,000}{x}\times(1+10\%)=\frac{33\,000}{x-300},$$

即 $$\frac{1.1}{x}=\frac{1}{x-300}.$$

方程两边同乘 $x(x-300)$，得

$$1.1(x-300)=x.$$

解得 $$x=3\,300.$$

经检验，$x=3\,300$ 是原方程的解.

答：这款电器优惠前的售价为 3 300 元.

例 5 甲地至乙地的铁路路程约 300 km. 如果行驶在这一路段的快车与慢车的车速之比为 5∶3，快车比慢车快 1 h 到达，那么甲地至乙地的快车与慢车的速度各是多少？

分析 根据"快车与慢车的车速之比为 5∶3"，若设快车的速度是 $5x$ km/h，则慢车的速度是 $3x$ km/h. 由速度、时间、路程之间的关系，可列出表 13-1：

表 13-1

车型	速度/(km/h)	路程/km	时间/h
快车	$5x$	300	$\frac{300}{5x}$
慢车	$3x$	300	$\frac{300}{3x}$

根据“快车比慢车快 1 h 到达”，可以得到“慢车所用时间－快车所用时间＝1 h”，据此可以列出方程.

解 设甲地至乙地的快车的速度是 $5x$ km/h，则慢车的速度是 $3x$ km/h.

根据题意，可得

$$\frac{300}{3x}-\frac{300}{5x}=1.$$

方程两边同乘 $15x$，得

$$300\times5-300\times3=15x.$$

解得 $$x=40.$$

经检验，$x=40$ 是原方程的解.

$5x=200$，$3x=120$.

答：甲地至乙地的快车的速度是 200 km/h，慢车的速度是 120 km/h.

课堂练习 13.3(2)

1. 某中学七年级学生到距离学校 15 km 的青少年营地活动，先遣部队的行进速度是大部队行进速度的 1.2 倍，预计比大部队早 0.5 h 到达目的地. 求先遣部队与大部队各自的行进速度.

2. 甲、乙两单位为爱心基金捐款，甲单位捐款 4 800 元，乙单位捐款 6 000 元. 已知乙单位捐款人数比甲单位多 10 人，且两单位人均捐款额相等. 这两单位共有多少人捐款？人均捐款额是多少？

3. 小华和小海一起做速算练习，小海每分钟比小华多做 4 道速算题，结果在相同的时间内，小海做了 240 道速算题，小华只做了 160 道速算题. 小华每分钟做多少道速算题?

习题 13.3

A

1. 填空题：

(1) 当 $x=$________时，分式 $\dfrac{x+3}{x-1}$ 的值等于 2；

(2) 如果方程 $\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{a}{x-1}$ 的解为 $x=2$，那么 a 的值为________.

2. 解方程：

(1) $\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{3}{x+1}$；

(2) $\dfrac{5}{2x-1}+\dfrac{3}{1-2x}=2$；

(3) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3x}=1$；

(4) $\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{6}{x-x^2}$.

3. 通信员要从营地前往相距 2 400 m 的哨所送信，然后立即按原路返回，这样从出发到回到营地共花了 40 min. 若通信员去送信时的速度是返回时的速度的 1.5 倍，求他去送信时的速度.

4. 某工程队承接了 90 万平方米的荒山绿化任务，为了迎接雨季的到来，实际的工作效率比原计划提高了 25%，结果提前 30 天完成了任务. 求原计划每天绿化的面积.

B

5. 已知关于 x 的方程 $\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{k}{2-x}=\dfrac{3x}{x-2}$ 无解，求 k 的值.

6. 某班组织登山活动，分甲、乙两组从山脚下沿着同一条道路，同时向山顶进发. 已知甲、乙两组行进同一段路所用的时间之比为 2∶3.

（1）直接写出甲、乙两组行进的速度之比；

（2）当甲组到达山顶时，乙组行进到山腰 A 处，且 A 处离山顶的路程尚有 1.2 km，求山脚离山顶的路程.

◎阅读材料

把一个分式写成几个分式的和

通过分式的加减运算，可以把几个分式的和写成一个分式．有时候需要把这一过程反过来，即要把一个分式写成几个分式的和．

观察：

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{99\times 100}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$$

$$=1-\frac{1}{100}$$

$$=\frac{99}{100}.$$

在上述的计算过程中，应用了$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，使运算变得简便．

如何用简单方法计算

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{97\times 99}?$$

是否可以将分式$\frac{1}{x(x+2)}$写成$\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}$（$A$、$B$是有理数）的形式？如果可以，怎样确定$A$、$B$的值？

方法一： 如果$\frac{1}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}$成立，那么当$x=-1$或$x=1$时等式成立．于是，得方程组$\begin{cases}-1=-A+B,\\ \frac{1}{3}=A+\frac{B}{3}.\end{cases}$解得$\begin{cases}A=\frac{1}{2},\\ B=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

将 A、B 的值代回检验，$\frac{1}{2x}-\frac{1}{2(x+2)}=\frac{(x+2)-x}{2x(x+2)}=\frac{1}{x(x+2)}$.

因此，$\frac{1}{x(x+2)}=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2(x+2)}$.

方法二： 因为 $\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)}=\frac{(A+B)x+2A}{x(x+2)}$，所以要使

$\frac{1}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}$成立，只要$\begin{cases}A+B=0,\\2A=1\end{cases}$成立，解得$\begin{cases}A=\frac{1}{2},\\B=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

应用 $\frac{1}{x(x+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)$，如何计算 $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{97\times99}$？

你能将分式 $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ 写成 $\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}$（$A$、$B$、$C$ 是有理数）的形式吗？

将一个分式写成几个分式的和的形式，在微积分中将有重要的应用.

◎内容提要

1. 基本概念：分式，最简分式，分式方程.

对于两个整式 A、B（B 是非零整式），$A\div B$ 可以表示为 $\dfrac{A}{B}$ 的形式，叫作分式.

分子与分母没有一次及以上的公因式的分式叫作最简分式.

分母里含有未知数的方程叫作分式方程.

2. 分式的基本性质：分式的分子和分母乘（或除以）同一个整式，当该整式的值不为 0 时，分式的值不变.

3. 分式的运算：

分式的变形和运算总是在分式有意义的条件下进行.

（1）乘法：两个分式相乘，将分子相乘的积作分子，分母相乘的积作分母.

（2）除法：分式除以分式，将除式的分子和分母颠倒位置后，再与被除式相乘.

（3）加减法：同分母分式相加减，分母不变，分子相加减；异分母分式相加减，先将它们通分，然后进行加减.

4. 幂的运算：当 a、b 不为 0，m、n 是整数时，有

$$a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}，a^{m}\cdot a^{n}=a^{m+n}，(ab)^{n}=a^{n}b^{n}，(a^{m})^{n}=a^{mn}.$$

5. 分式方程：解分式方程要注意验根.

◎复习题

A

1. 填空题：

（1）如果分式 $\dfrac{2+3x}{2-3x}$ 有意义，那么 x 的取值要满足的条件是________；

（2）化简：$\dfrac{x}{x^2-2x}=$________；

（3）计算：$\dfrac{y}{2x^2}\cdot\dfrac{x}{y}=$________；

（4）计算：$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{3a}=$________；

（5）计算：$x\div x^{-1}\div x=$________；

（6）计算：$\dfrac{1}{a}+\left(-\dfrac{2a}{b^2}\right)\div\left(-\dfrac{4a}{b}\right)^2=$________.

2. 计算：

（1）$\dfrac{x^2-9}{4-x^2}\cdot\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$；

（2）$\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{2b}{a^2+b^2}$；

（3）$\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{x+6}{x^2-3x}+\dfrac{1}{x}$.

3. 计算：

（1）$\dfrac{3-x}{2x-4}\div\left(x+2-\dfrac{5}{x-2}\right)$；

（2）$\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}\right)\div\dfrac{x}{x+1}$；

（3）$\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x+3}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+4x+3}$；

（4）$\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\right)\div\left(1-\dfrac{x^2+4}{4x}\right)$.

4. 解方程：

（1）$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x}+3=0$；

（2）$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3}=0$；

（3）$\dfrac{3}{x+3}=\dfrac{2}{2x+1}$；

（4）$\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{6x+7}{3x+4}$.

5. 甲、乙两名学生各在电脑上输入 1 500 个汉字. 乙的输入速度是甲的 3 倍，且比甲少用 20 min 完成任务. 他们两人平均每分钟各输入多少个汉字?

6. 已知 A、B 两地相距 120 km，甲、乙两人都要从 A 地前往 B 地. 若甲所用的时间比乙少 1 h，且甲的速度是乙的 1.5 倍，求甲、乙各自的速度.

B

7. 如果关于 x 的方程 $\dfrac{ax+1}{x-1}=1$ 无解，那么 $a=$________.

8. 先化简，再求值：$\dfrac{x^2+xy}{x^2-2xy-3y^2}\cdot\dfrac{3y-x}{x-y}+(x^{-1}+y^{-1})\div(x^{-1}-y^{-1})$，其中 $x=2$，$y=-1$.

9. 化简：$\dfrac{x^2-9}{x+3}$.

甲的解法：$\dfrac{x^2-9}{x+3}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{x+3}=x-3$.

乙的解法：$\dfrac{x^2-9}{x+3}=\dfrac{(x^2-9)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{(x^2-9)(x-3)}{x^2-9}=x-3$.

甲、乙两人的解法是否都正确? 为什么?

第14章

图形的运动

有些运动，只改变物体的位置，而不改变其形状和大小．例如，站在自动扶梯上的乘客，可以由扶梯移送到下一层；风力发电机的叶片绕着轴心转动；将“囍”字剪纸左右对折等．

如果将上述人、物的形体想象成一个平面几何图形，就可以将这些运动想象成平面图形的运动，分别是图形的平移、旋转和轴对称．它们的共同特征是经过运动后，图形的形状和大小都不改变．

本章中，我们将分别学习平移、旋转和轴对称这三种平面图形运动的概念和性质，掌握与这些运动有关的对称图形的特征与性质，并且应用这些知识解决相关的问题．本章的学习将为今后对三角形、平行四边形和圆的学习提供直观铺垫．

14.1 平移

图 14-1-1 是生活中常见的衣橱移门，当推动门把手时，门会从一个位置沿轨道移动到另一个位置. 如果把这扇门看作一个长方形，那么门的移动就是这个长方形移动到另一个位置.

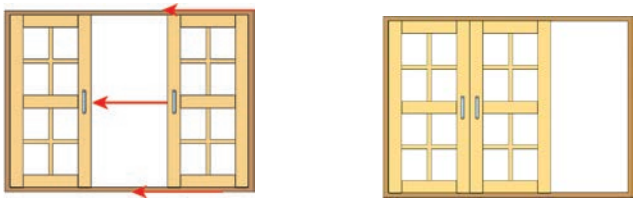


图 14-1-1

观察门移动的过程，可以得到以下结论：

(1) 在移动门时，门的大小不会改变；

(2) 如果门把手向左移动 0.75 m，那么这扇门的其他部分也向左移动 0.75 m.

在平面上，将图形上的所有点都按照某个方向作相同距离的位置移动，叫作**图形的平移**.

如图 14-1-2，移动三角形 ABC 得到三角形 $A_1B_1C_1$. 平移的方向为射线 AA_1 的方向，平移的距离是线段 AA_1 的长度. 其中，点 A 与点 A_1 是对应点；线段 AB 与线段 A_1B_1 是对应线段，它们的长度相等；$\angle BAC$ 与 $\angle B_1A_1C_1$ 是对应角，它们的大小也相等.

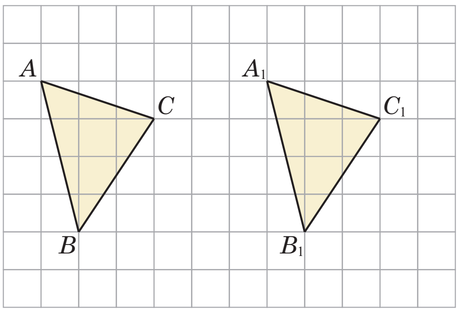


图 14-1-2

从上面的例子可以得到图形的平移具有以下性质：

（1）每组对应点之间的距离相等；

（2）分别连接两组对应点，所成的线段平行（或在同一直线上）且相等；

（3）对应角的大小相等，对应线段平行（或在同一直线上）且相等；

（4）平移后得到的图形与原图形形状相同，大小相等.

图形平移前后对应点之间的距离叫作**图形平移的距离**.

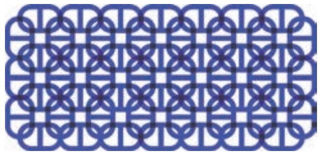


图 14-1-3

图形的平移在日常生活中有着广泛的应用，图 14-1-3 是由一个基本图形通过多次平移后得到的组合图形.

操作

设计一个图案，使其由一个基本图形多次平移后组合得到.

例 1 如图 14-1-4，将三角形 ABC 向右平移 4 格，再向下平移 3 格后的图形为三角形 $A_1B_1C_1$.

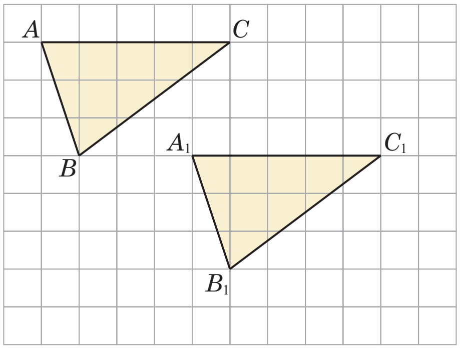


图 14-1-4

（1）点 B、C 的对应点分别是哪两个点？

（2）线段 AC 的对应线段是哪条线段？它们的长度相等吗？$\angle ABC$ 的对应角是哪个角？它们的大小相等吗？

（3）如果线段 AB 的中点是 D，那么能确定它的对应点的位置吗？

解 （1）点 B、C 的对应点分别是点 B_1、C_1.

（2）线段 AC 的对应线段是线段 A_1C_1，$AC=A_1C_1$；$\angle ABC$ 的对应角是 $\angle A_1B_1C_1$，$\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$.

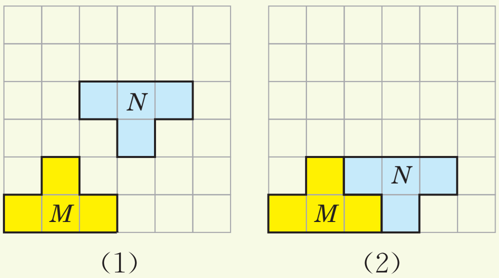
（3）线段 AB 的中点 D 的对应点是线段 A_1B_1 的中点 D_1.

操作

在图 14-1-4 中画出三角形 ABC 的平移方向，并量出平移的距离.

课堂练习 14.1(1)

1. 如图，将(1)中的图形 N 平移到如(2)所示的位置，则下列图形 N 的平移方法中，正确的是 （　　）

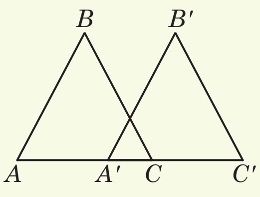


（第 1 题）

A. 向下平移 1 格；　　B. 向上平移 1 格；

C. 向上平移 2 格；　　D. 向下平移 2 格.

2. 如图，三角形 $A'B'C'$ 由三角形 ABC 沿射线 AC 方向平移 2 cm 得到. 若 $AC=3$ cm，则 $A'C=$________.

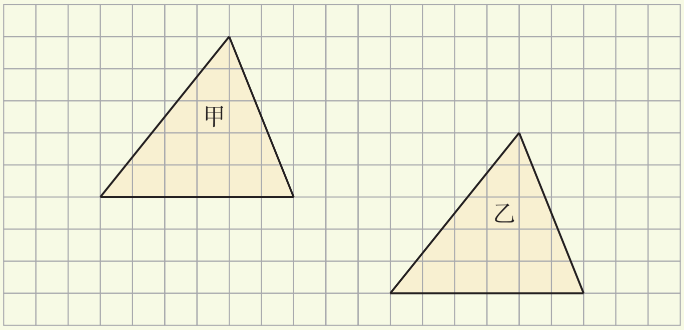


（第 2 题）

3. 如图，每个小方格的边长都是 1 个单位长度. 平移后三角形甲与三角形乙重合.

（1）把三角形甲向________平移________个单位长度，再向________平移________个单位长度，使与三角形乙重合.

（2）要使这两个三角形重合，你还有其他平移的方法吗？请说出其中一种.



（第 3 题）

例 2 如图 14-1-5，将等边三角形 FBD 分割成 4 个小等边三角形，假设它们的边长为 1.3 cm，你能通过平移三角形 ABC 得到其他三角形吗？若能，请说出平移的方向和距离.

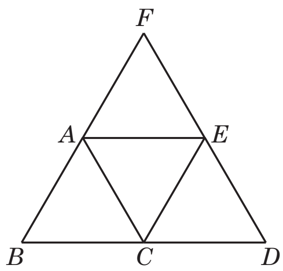


图 14-1-5

解 将三角形 ABC 沿着射线 BA 方向平移 1.3 cm，可以得到三角形 FAE；将三角形 ABC 沿着射线 BC 方向平移 1.3 cm，可以得到三角形 ECD.

不能通过平移三角形 ABC 得到三角形 ACE.

例 3 如图 14-1-6，请回答下列问题：

（1）将图中四边形 $ABCD$ 向右平移 6 格，画出平移后的图形 $A'B'C'D'$.

（2）线段 BC 与线段 $B'C'$ 之间有怎样的位置关系？

（3）线段 AB 与线段 $A'B'$、$\angle B$ 与 $\angle B'$ 各有怎样的大小关系？

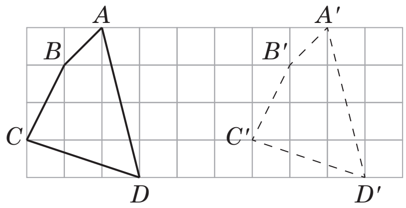


图 14-1-6

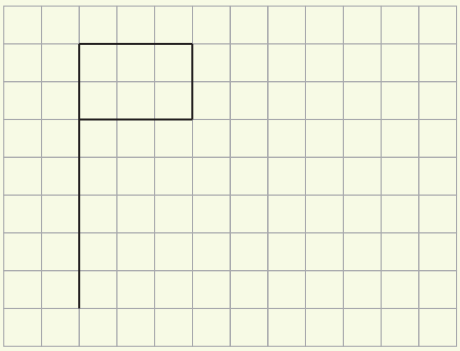
解 （1）分别将点 A、B、C、D 向右平移 6 格，得到对应点 A'、B'、C'、D'，再依次连接 $A'B'$、$B'C'$、$C'D'$、$D'A'$，则四边形 $A'B'C'D'$ 就是将四边形 $ABCD$ 向右平移 6 格所得的四边形.

（2）因为线段 BC 与线段 $B'C'$ 是对应线段，所以 $BC \parallel B'C'$.

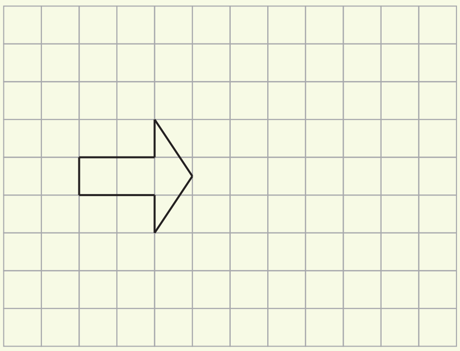
（3）因为线段 AB 与线段 $A'B'$ 是对应线段，所以 $AB = A'B'$；又因为 $\angle B$ 和 $\angle B'$ 是对应角，所以 $\angle B = \angle B'$.

课堂练习 14.1(2)

1. 如图，把旗状图形向右平移 2 格，画出平移后的图形.



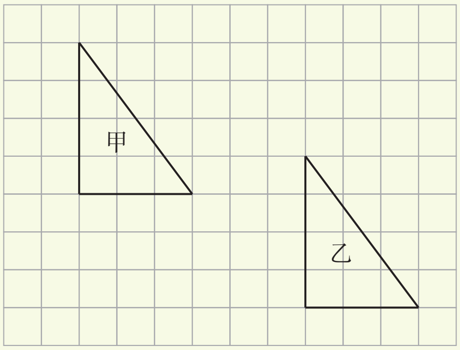
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，把箭头图形先向右平移 4 格，再向下平移 2 格，画出平移后的图形.

3. 如图，怎样将三角形甲平移到三角形乙的位置？画出平移的方向，量出平移的距离（结果精确到 0.1 cm）.

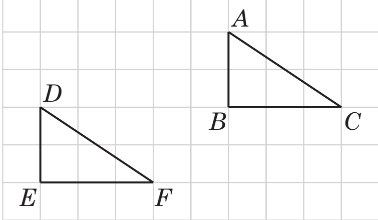


（第 3 题）

习题 14.1

A

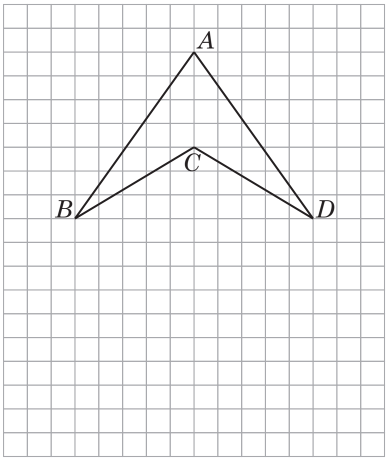
1. 如图，每个小方格的边长都是 1 个单位长度. 将三角形 ABC 平移到三角形 DEF 的位置，下面正确的平移步骤是 （　　）



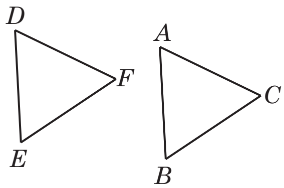
（第 1 题）

A. 先把三角形 ABC 向左平移 5 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度；
B. 先把三角形 ABC 向右平移 5 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度；
C. 先把三角形 ABC 向左平移 5 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度；
D. 先把三角形 ABC 向右平移 5 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度.

2. 把图中的图形向下平移 3 格，画出平移后的图形，并写出点 A、B、C、D 的对应点.



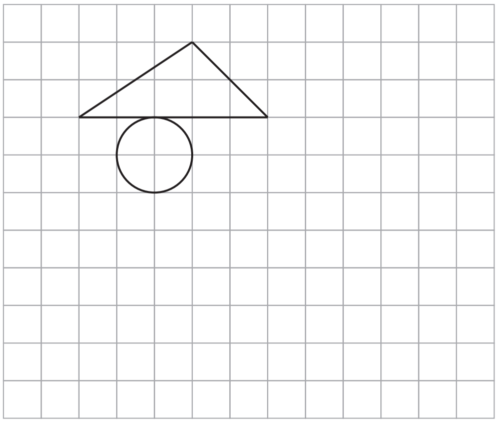
（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，三角形 ABC 和三角形 DEF 都是等边三角形，其中一个等边三角形经过平移后成为另一个等边三角形. 指出点 A、B、C 的对应点，线段 AB、BC、AC 的对应线段和 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对应角.

4. 把图中的图形先向下平移 2 格，再向右平移 4 格，画出平移后的图形.



（第 4 题）

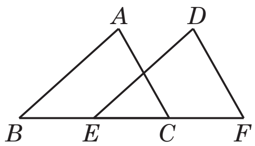
B

5. 如图，已知在三角形 ABC 中，$BC=4$ cm，把三角形 ABC 沿射线 BC 方向平移 2 cm，得到三角形 DEF.

（1）图中与 $\angle B$ 相等的角有多少个？

（2）图中共有多少对相互平行且长度相等的线段？请把它们写出来.

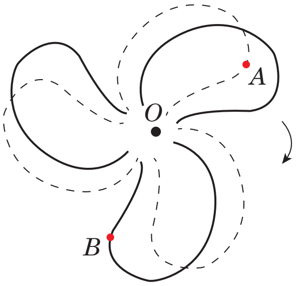
（3）求 $BE:EC:CF$.



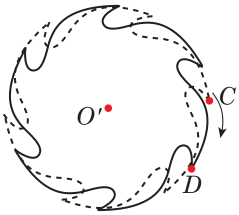
（第 5 题）

14.2 旋转

在日常生活中，我们会遇到图形的转动. 如图 14-2-1，电扇的叶片从位置 A 绕点 O 按顺时针方向转动 150°，转动到位置 B；铣床的铣刀从位置 C 绕点 O' 按顺时针方向转动 40°，转动到位置 D.



电扇叶片



铣刀

图 14-2-1

从上述例子可以看到，电扇叶片的转动、铣床铣刀的转动，虽然转动的角度各不相同，但它们有两个共同的特点：(1)图形都围绕着一个定点作转动；(2)都有一个转动的角度. 由此可以得到图形旋转的定义.

在平面上，将一个图形上的所有点绕一个定点按某个方向转动一个角度，这样的运动叫作**图形的旋转**，这个定点叫作**旋转中心**，转动的角叫作**旋转角**.

> 一般规定旋转角大于 0°，小于 360°.

“某个方向”是指“顺时针方向”或者“逆时针方向”. 图形的旋转具有下列特点：旋转前的图形与旋转后的图形形状相同，大小相等.

例如，在图 14-2-2 中，三角形 ABC 绕点 O 按顺时针方向旋转一个角度成为三角形 $A_1B_1C_1$，点 O 是旋转中心，$\angle AOA_1$ 是旋转角. 在三角形 ABC 的旋转中，点 A 与点 A_1 是对应点；线段 AB 与线段 A_1B_1 是对应线段，它们的长度相等；$\angle BAC$ 与 $\angle B_1A_1C_1$ 是对应角，这两个角的大小也相等.

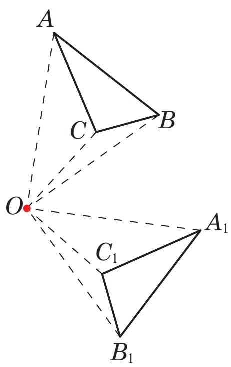


图 14-2-2

在图 14-2-2 中，你还能找出其他的对应线段和对应角吗？还有其他的旋转角吗？

操作

如图 14-2-3，将一张正方形纸片两条对角线的公共点用大头针钉住. 旋转正方形，至少旋转多少度才可以使它与初始位置的正方形重合？每旋转多少度会重复上述现象？

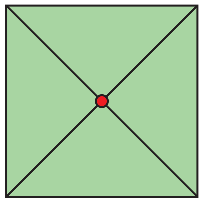


图 14-2-3

例 1 如图 14-2-4，O 是三角形 ABC 内一点，将一枚图钉钉在点 O 处，把三角形 ABC 按逆时针方向旋转成为三角形 $A_1B_1C_1$.

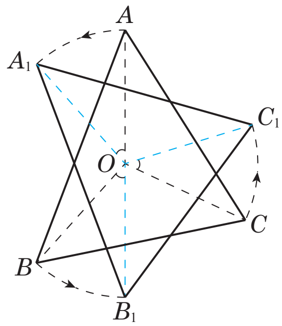


图 14-2-4

（1）确定这个旋转的旋转中心和旋转角；

（2）找出点 A、B、C 的对应点，并判断每一组对应点到旋转中心的距离是否相等；

（3）找出线段 AB、BC、AC 的对应线段，并判断每一组对应线段是否相等；

（4）找出 $\angle ABC$、$\angle BAC$ 和 $\angle BCA$ 的对应角，并判断每一组对应角是否相等.

解 （1）旋转中心是点 O，旋转角为 $\angle AOA_1$（或 $\angle BOB_1$、$\angle COC_1$）.

（2）点 A 与点 A_1 是一组对应点，$OA=OA_1$；点 B 与点 B_1 是一组对应点，$OB=OB_1$；点 C 与点 C_1 是一组对应点，$OC=OC_1$.

（3）线段 AB 与线段 A_1B_1 是一组对应线段，$AB=A_1B_1$；线段 BC 与线段 B_1C_1 是一组对应线段，$BC=B_1C_1$；线段 AC 与线段 A_1C_1 是一组对应线段，$AC=A_1C_1$.

（4）$\angle ABC$ 与 $\angle A_1B_1C_1$ 是一组对应角，$\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$；$\angle BAC$ 与 $\angle B_1A_1C_1$ 是一组对应角，$\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$；$\angle BCA$ 与 $\angle B_1C_1A_1$ 是一组对应角，$\angle BCA=\angle B_1C_1A_1$.

思考

如果把图 14-2-4 中的三角形 ABC 绕点 O 按顺时针方向旋转 $90°$，那么线段 OA、OB、OC 旋转的角度是多少？

上面一些例子告诉我们，图形的旋转具有以下性质：

（1）每组对应点到旋转中心的距离相等；

（2）两组对应点分别与旋转中心连线，所成的角相等；

（3）对应线段的长度相等，对应角的大小相等；

（4）旋转后得到的图形与原图形形状相同，大小相等.

例 2 如图 14-2-5(1)，已知点 O 与三角形 ABC，画出三角形 ABC 绕点 O 按逆时针方向旋转 $45°$后的图形.

分析 因为图形旋转不改变图形的形状，对图形旋转的画图，关键是要确定表示图形的“关键点”，找出这些点在旋转后的对应点，并按照原图形顺序连接这些对应点. 这里，图形三角形 ABC 的“关键点”是顶点 A、B、C，只需画出它们绕点 O 旋转后的对应点 A_1、B_1、C_1，就可得到所求的图形.

解 （1）把三角形 ABC 的顶点 A、B、C 与旋转中心 O 连接起来，得到 OA、OB、OC.

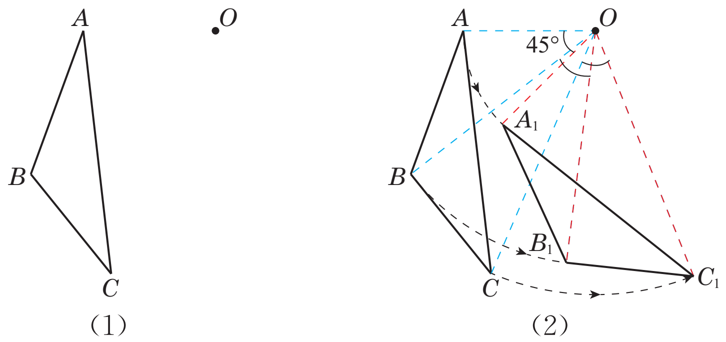


图 14-2-5

（2）以 OA 为始边，逆时针方向作 $45°$角，在角的终边上截取 OA_1，使 $OA=OA_1$，得到点 A 的对应点 A_1.

（3）类似步骤(2)的操作，可分别得到点 B、C 的对应点 B_1、C_1.

（4）依次连接 A_1B_1、B_1C_1、C_1A_1，得到三角形 $A_1B_1C_1$，如图 14-2-5(2).

三角形 $A_1B_1C_1$ 就是三角形 ABC 绕点 O 按逆时针方向旋转 $45°$后的图形.

操作

（1）如图 14-2-6(1)，点 A 绕点 O 按逆时针方向旋转 $90°$后，经过的路线是怎样的图形？

（1）　　（2）

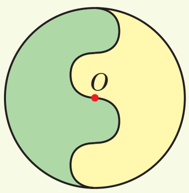
图 14-2-6

（2）如图 14-2-6(2)，线段 AB 绕点 A 按顺时针方向旋转 $45°$后，它所扫过的平面部分是怎样的图形？如果 $AB=3$ cm，那么这个图形的面积是多少？

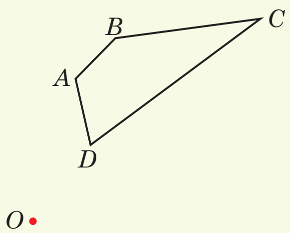
课堂练习 14.2

1. 画一个直角，并画出这个直角绕它的顶点按逆时针方向旋转 $120°$后的图形.

2. 如图，绿色图形绕点 O 按逆时针方向旋转几度后能与黄色图形重合？



（第 2 题）



（第 3 题）

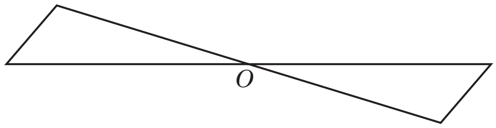
3. 画出图中以点 O 为旋转中心按逆时针方向旋转 $60°$后的图形.

习题 14.2

A

1. 画一个 60°的角，并画出这个角绕它的顶点按逆时针方向旋转 45°后的图形.

2. 在图中，画出以点 O 为旋转中心，按顺时针方向旋转 90°后的图形.

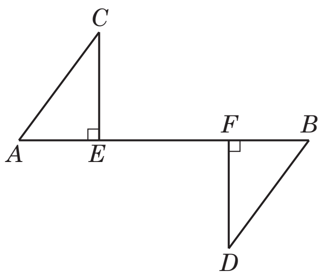


（第 2 题）

3. 画一个四边形 $ABCD$，任取一点 O 为旋转中心，画出四边形 $ABCD$ 绕点 O 旋转 180°后的图形.

B

4. 如图，直角三角形 AEC 旋转后得到直角三角形 BFD，确定图中的旋转中心和旋转角，并指出图中相等的线段和相等的角.



（第 4 题）

14.3 轴对称

1. 图形的翻折与轴对称图形

在日常生活及工作中，还会看到一类图形，将它们沿着某一条直线翻折，其在直线两边的部分能够重合. 如图 14-3-1，将“囍”在直线 l 左边的部分沿着直线 l 翻折，l 两边的“喜”字重合. 如图 14-3-2 中的京剧脸谱，将它在直线 l 左边的部分沿着 l 翻折，与右边部分重合.

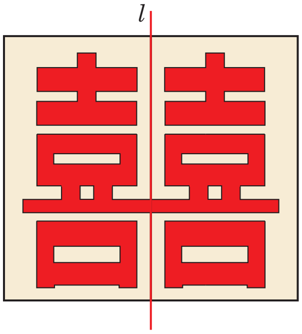


图 14-3-1

图 14-3-2

如图 14-3-3，三角形 ABC 和三角形 $A_1B_1C_1$ 沿着直线 l 翻折后重合，点 A 与点 A_1 是对应点，线段 AB 与线段 A_1B_1 是对应线段，$\angle A$ 与 $\angle A_1$ 是对应角.

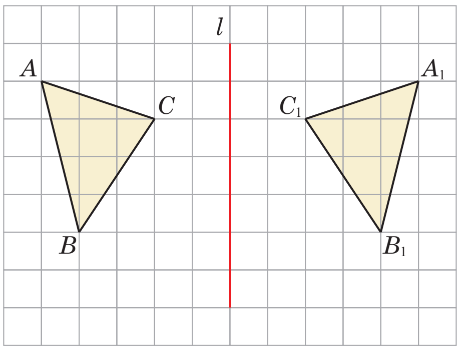


图 14-3-3

操作

对图 14-3-4 中的两幅摄影作品，试分别找到一条直线，将它们各自沿着该直线翻折，使直线两边的部分重合.

（1）

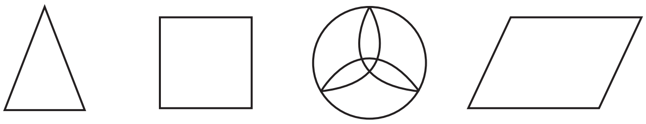
（2）

图 14-3-4

若将一个图形沿着某一条直线翻折过来，直线两边的部分能够相互重合，这个图形叫作**轴对称图形**，这条直线是它的**对称轴**，也称这个图形**关于这条直线对称**.

线段、角、正方形和圆都是常见的轴对称图形.

例 1 判断图 14-3-5 中的四个图形是不是轴对称图形. 如果是轴对称图形，请画出该图形的所有对称轴.



（1）　（2）　（3）　（4）

图 14-3-5

解 （1）（2）（3）是轴对称图形，它们的对称轴如图 14-3-6 所示.（4）不是轴对称图形.

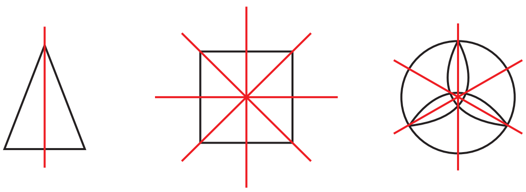


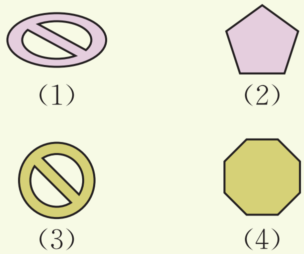
图 14-3-6

课堂练习 14.3(1)

1. 将一张 A4 纸对折后，再剪出一个图形，然后展开，使它成为一个等腰三角形.

2. 已知三角形 ABC 是等边三角形，它有没有对称轴？如果有对称轴，有几条？

3. 在下列图形中找出轴对称图形，并分别画出它们的一条对称轴.



（第 3 题）

2. 轴对称

观察

对图 14-3-7 中的两幅图，你能发现什么共同的特征？

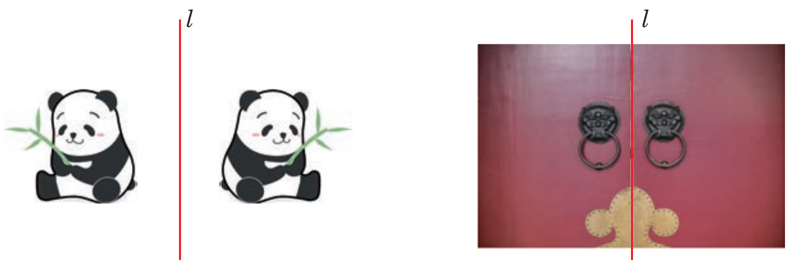


图 14-3-7

把一个图形沿着某一条直线翻折，如果它能够与另一个图形重合，那么就称这两个图形**关于这条直线成轴对称**，这条直线叫作**对称轴**. 翻折后能够重合的点叫作**对称点**.

如图 14-3-8，三角形 ABC 沿着直线 MN 翻折后，与三角形 $A_1B_1C_1$ 重合，三角形 ABC 与三角形 $A_1B_1C_1$ 关于直线 MN 成轴对称，直线 MN 是对称轴，点 A 与点 A_1、点 B 与点 B_1、点 C 与点 C_1 是关于直线 MN 的对称点；线段 AB 与线段 A_1B_1 是对应线段，对应线段 AB 与 A_1B_1 长度相等；$\angle B$ 和 $\angle B_1$ 是对应角，对应角 $\angle B$ 与 $\angle B_1$ 大小相等.

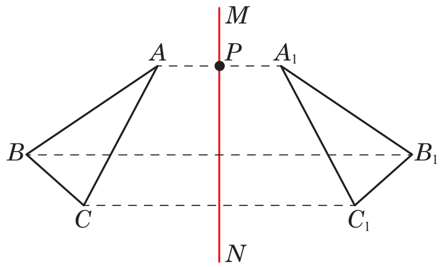


图 14-3-8

思考

图 14-3-8 中还有其他关于直线 MN 成轴对称的线段或角吗?

在图 14-3-8 中，点 A 与点 A_1 是对称点，设 AA_1 与对称轴 MN 交于点 P，将三角形 ABC 沿着直线 MN 翻折后，点 A 与点 A_1 重合，$AP=A_1P$，$\angle MPA=\angle MPA_1=90°$.

两个图形关于一条直线成轴对称，具有下面的性质：

（1）对应线段的长度相等，对应角的大小相等，这两个图形形状相同，大小相等；

（2）连接对称点的线段和对称轴垂直，并且被对称轴平分.

例 2 如图 14-3-9(1)，画出四边形 $ABCD$ 关于直线 l 成轴对称的图形.

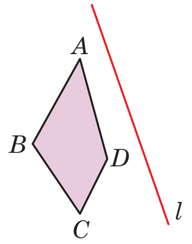
分析 利用两个成轴对称图形的性质，可知只需找出图形的"关键点"，即四边形四个顶点关于直线 l 的对称点，就可得到所求的图形.

解 （1）过点 A 画直线 l 的垂线 AO，垂足为 O. 延长 AO 到点 A_1，使 $OA_1=OA$，就得到点 A 关于直线 l 的对称点 A_1.

（2）类似步骤(1)的操作，分别画出点 B、C、D 关于直线 l 的对称点 B_1、C_1、D_1.

(3) 依次连接 A_1B_1、B_1C_1、C_1D_1、D_1A_1，得到四边形 $A_1B_1C_1D_1$，如图 14-3-9(2)所示.

四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 就是四边形 $ABCD$ 关于直线 l 成轴对称的图形.



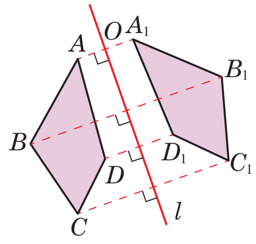


图 14-3-9

操作

图 14-3-10 中的两个图形成轴对称，画出它们的对称轴.

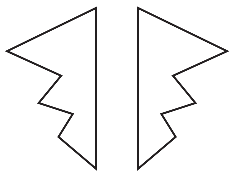
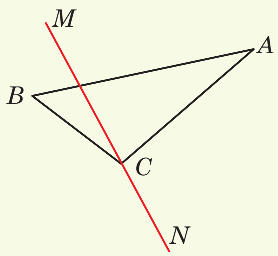


图 14-3-10

在成轴对称的两个图形中，分别连接两组对称点，取中点，连接两个中点所得的线段所在的直线就是对称轴.

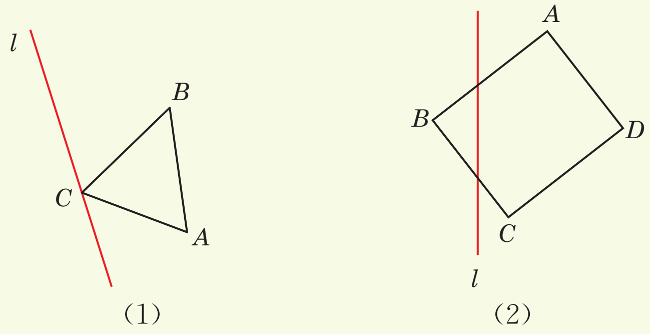
课堂练习 14.3(2)

1. 画出如图所示的三角形 ABC 关于直线 MN 成轴对称的图形.



（第 1 题）

2. 画出下列图形关于直线 l 成轴对称的图形.

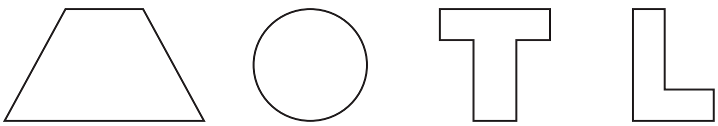


（第 2 题）

习题 14.3

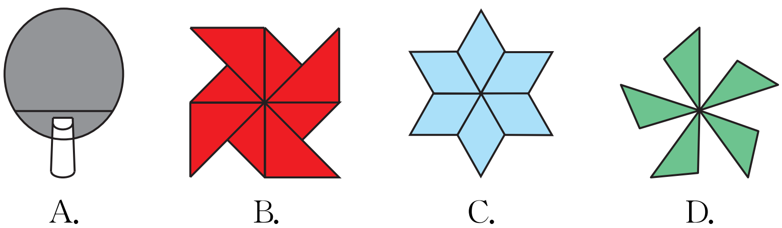
A

1. 下列图形中，哪些图形是轴对称图形？如果是轴对称图形，那么它们各有多少条对称轴？分别画出它们的一条对称轴.



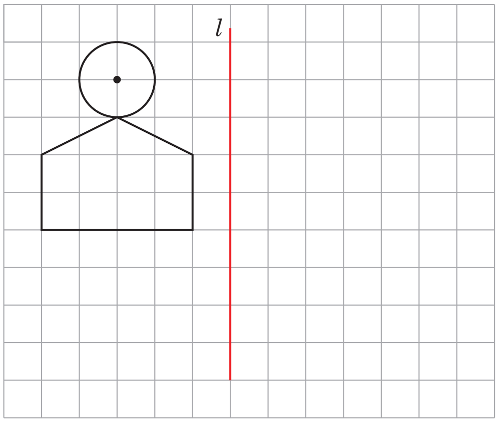
（第 1 题）

2. 下列图形中，是轴对称图形的是________（填图形的编号）.



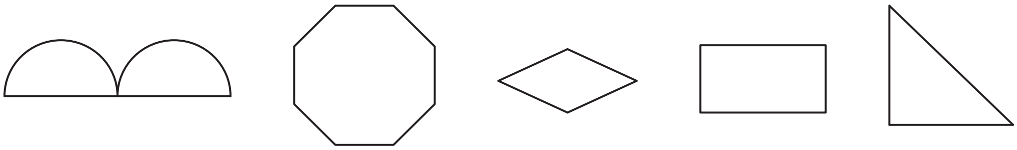
（第 2 题）

3. 画出与图中图形关于直线 l 成轴对称的图形.



（第 3 题）

4. 下列图形中，哪些是轴对称图形？如果是轴对称图形，画出一条对称轴.

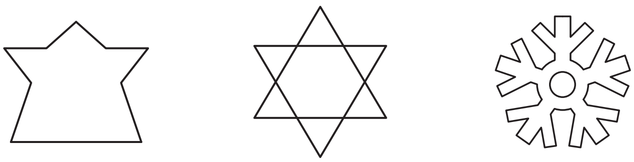


（1）　（2）　（3）　（4）　（5）

（第 4 题）

B

5. 下列各图形是轴对称图形，画出它们的所有对称轴.

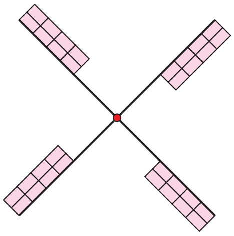


（1）　（2）　（3）

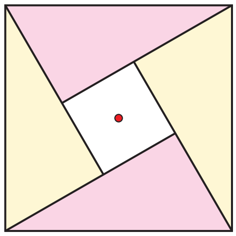
（第 5 题）

14.4 中心对称

观察图 14-4-1 中的两个图形，它们各自绕一个点旋转 180°后，都能与原图形重合.



（1）



（2）

图 14-4-1

如果一个图形上的所有点绕着所在平面上的一个定点旋转 180°后，能与原图形重合，那么这个图形叫作**中心对称图形**，这个定点叫作**对称中心**.

思考

如图 14-4-2，等边三角形、正方形、平行四边形、圆是不是中心对称图形？

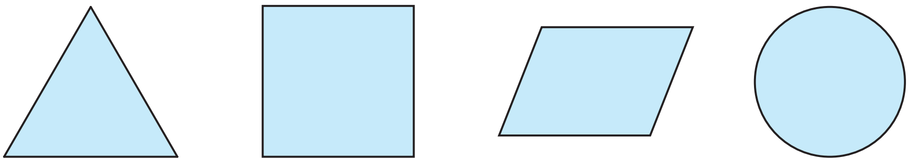


图 14-4-2

在平面上，一个图形绕着一个定点旋转 180°后，能与另一个图形重合，这两个图形称为关于这个定点对称，也称这两个图形成中心对称，这个定点称为对称中心.

如果两个图形关于点 O 成中心对称，那么对于一个图形中的一点 P 绕点 O 旋转 180°后，就与另一个图形中的一点 P'重合. 这时，点 P 与点 P'是这两

个成中心对称的图形的对应点，也叫作关于点 O 的**对称点**.

如图 14-4-3，三角形 ABC 与三角形 DEF 关于点 O 成中心对称，点 A 的对称点是点 D，线段 AB 的对应线段是线段 DE，$\angle BAC$ 的对应角是 $\angle EDF$.

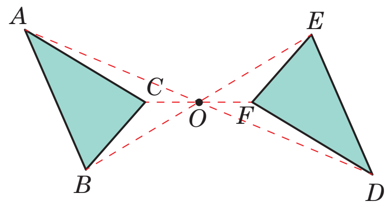


图 14-4-3

操作

你能写出图 14-4-3 中其他的对称点、对应线段和对应角吗?

如图 14-4-3，将三角形 ABC 绕点 O 旋转，点 A 和点 D 是对称点，点 O 为对称中心. 根据旋转的性质，$OA=OD$. 又因为旋转角为 $180°$，所以 A、O、D 三点在同一直线上.

两个关于一点成中心对称的图形，具有下面的性质：

(1) 对应线段平行(或在同一直线上)且相等；

(2) 连接每组对称点的线段都经过对称中心，并且被对称中心平分.

例 1 如图 14-4-4(1)，画出四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称的图形.

分析 利用图形旋转的性质，可知只需找出四边形的“关键点”，即四个顶点 A、B、C、D 关于点 O 的对称点，就可得到所求的图形.

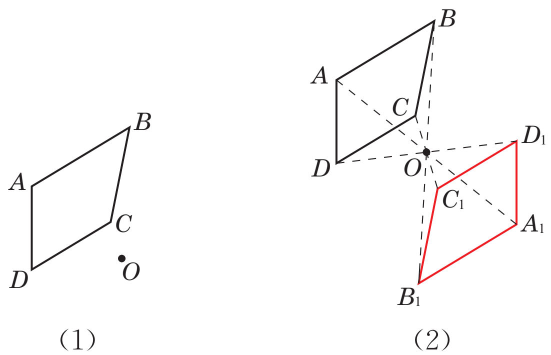


图 14-4-4

解 (1) 连接 AO 并延长到点 A_1，使 $OA_1=OA$，得到点 A 的对称点 A_1.

(2) 类似步骤(1)的操作，可以画出点 B、C、D 关于点 O 的对称点 B_1、C_1、D_1.

(3) 依次连接 A_1B_1、B_1C_1、C_1D_1、D_1A_1，得到四边形 $A_1B_1C_1D_1$，如图 14-4-4(2)所示.

四边形 $ABCD$ 和四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是两个关于点 O 成中心对称的图形.

操作

把图 14-4-5 中的三角形 ABC 绕着边 AB 的中点 O 旋转 180°，画出旋转后的图形. 旋转后得到的图形和原来的三角形 ABC 组成的组合图形是以前学过的哪一种几何图形？

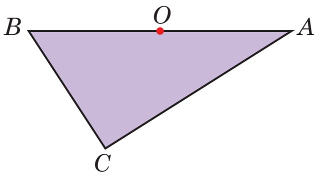
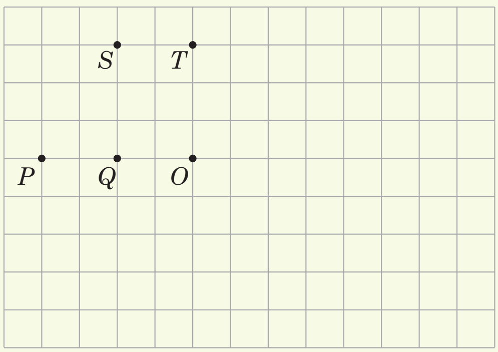


图 14-4-5

课堂练习 14.4

1. 画出图 14-4-5 中与三角形 ABC 关于点 O 成中心对称的图形.

2. 如图，有 O、P、Q、S、T 五个点.



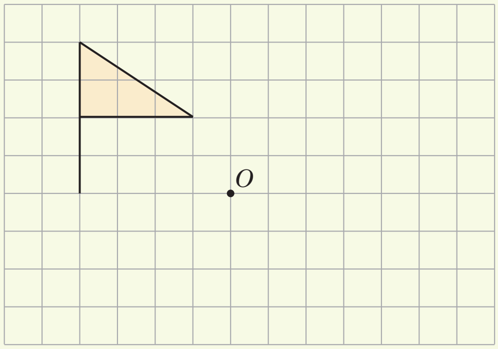
(第 2 题)

(1) 分别画出与点 P、Q、S、T 关于点 O 成中心对称的点；

(2) 画出与线段 PS 关于点 O 成中心对称的图形；

(3) 画出与四边形 $PQTS$ 关于点 O 成中心对称的图形.

3. 如图，画出与旗子关于点 O 成中心对称的图形.

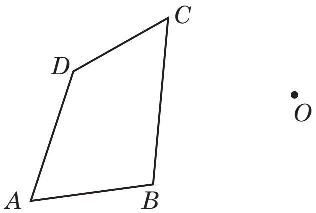


（第 3 题）

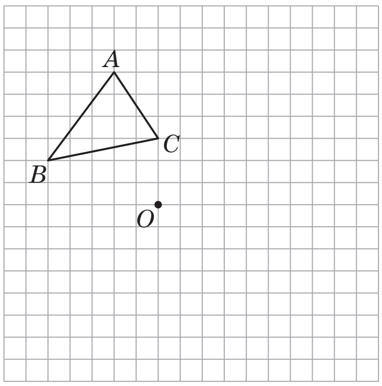
习题 14.4

A

1. 画出与图中四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称的图形，并写出点 A、B、C、D 的对称点.



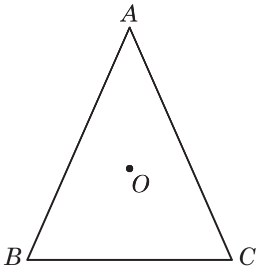
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，画出与三角形 ABC 关于点 O 成中心对称的图形.

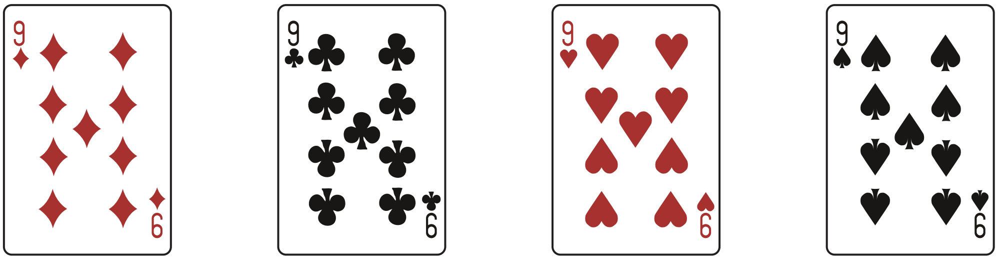
3. 如图，画出与三角形 ABC 关于点 O 成中心对称的图形.



（第 3 题）

B

4. 如图，桌上放着四张纸牌，现将其中的某一张纸牌在原地旋转 $180°$，发现旋转后在桌上看到的纸牌中的图案与原先一模一样. 你能判断出旋转的是哪一张纸牌吗？为什么？



（第 4 题）

◎内容提要

1. 基本概念：图形的平移、旋转、轴对称、中心对称.

2. 图形平移后，每组对应点之间的距离相等；分别连接两组对应点，所成的线段平行(或在同一直线上)且相等；对应角的大小相等，对应线段平行(或在同一直线上)且相等；平移后得到的图形与原图形形状相同，大小相等.

3. 图形旋转后，每组对应点到旋转中心的距离相等；两组对应点分别与旋转中心连线，所成的角相等；对应线段的长度相等，对应角的大小相等；旋转后得到的图形与原图形形状相同，大小相等.

4. 把一个图形沿着某一条直线翻折，如果它能够与另一个图形重合，那么就称这两个图形关于这条直线成轴对称，这条直线叫作对称轴. 翻折后能够重合的点叫作对称点.

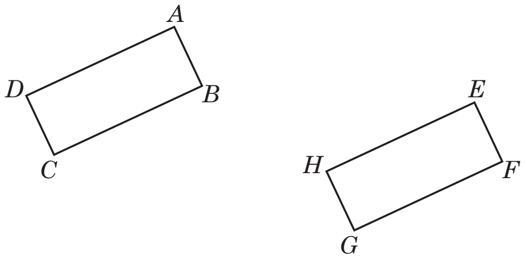
两个图形关于一条直线成轴对称时，对应线段的长度相等，对应角的大小相等，这两个图形形状相同，大小相等；连接对称点的线段和对称轴垂直，并且被对称轴平分.

5. 成中心对称的两个图形，对应线段平行(或在同一直线上)且相等；连接每组对称点的线段都经过对称中心，并且被对称中心平分.

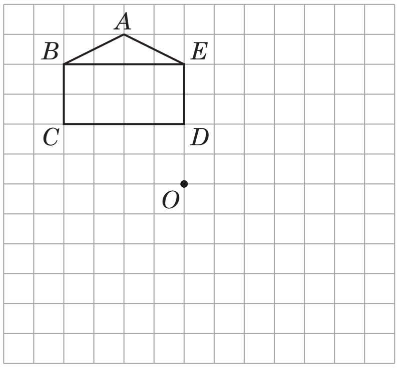
◎复习题

A

1. 长方形 $EFGH$ 是由长方形 $ABCD$ 平移后得到的，请分别写出点 A、C 的对应点，线段 AB、CD 的对应线段，$\angle ADC$ 的对应角.



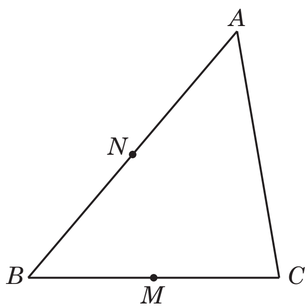
（第 1 题）



（第 2 题）

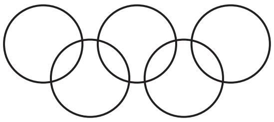
2. 如图，画出与图中图形关于点 O 成中心对称的图形.

3. 把三角形 ABC 绕着边 BC、BA 的中点 M、N 分别旋转 $180°$，画出旋转后所得的图形.



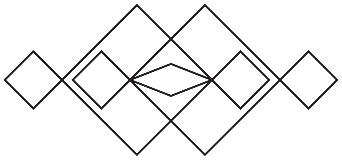
（第 3 题）

4. 下列图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是　　（　　）


A.


B.


C.

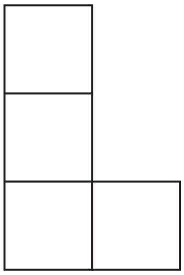

D.

B

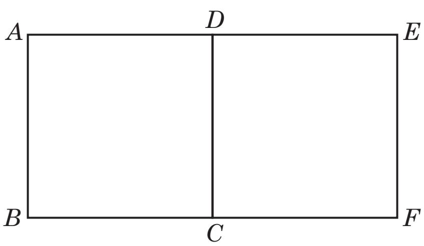
5. 画出一个图形，使所画图形中同时有正方形和圆，并且这个图形既是轴对称图形，又是中心对称图形.

6.（1）如图，由 4 个同样的小正方形所组成的图形，请再补上一个同样的小正方形，使由 5 个小正方形组成的图形成为一个轴对称图形；

（2）如图，由 4 个同样的小正方形所组成的图形，请再补上一个同样的小正方形，使由 5 个小正方形组成的图形成为一个中心对称图形.

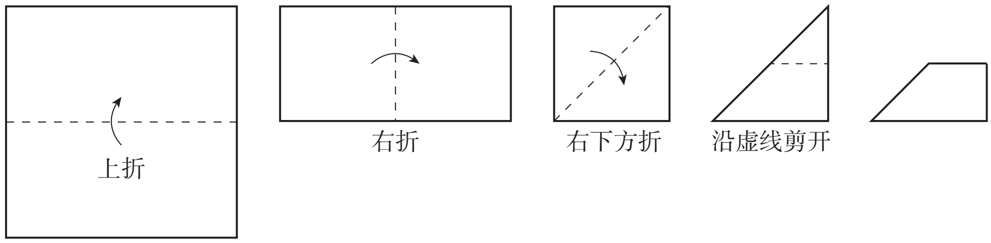

（第 6 题）

7. 如图，四边形 $CDEF$ 旋转后能与正方形 $ABCD$ 重合，那么图形所在的平面上可以作为旋转中心的点共有几个？请一一指出.



（第 7 题）

8. 如图，把一张正方形纸片对折三次后，沿虚线剪开，画出最后所得的纸片展开后的图形. 它是轴对称图形吗?



(第 8 题)

综合与实践

从传统连续纹样到现代镶嵌图案

制订“阅读之星”评选方案

从传统连续纹样到现代镶嵌图案

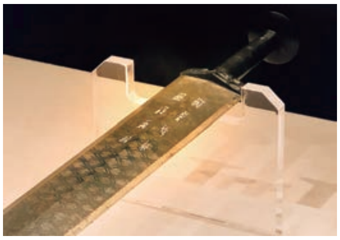


图 1

图 1 展示的是湖北省博物馆的镇馆之宝——越王勾践剑，被尊为“百兵之祖”. 除了剑身正面所刻的八字鸟篆铭文“越王鸠浅　自作用剑”(意为:越王勾践亲自督造并使用的剑)，这把剑吸引人的还有剑身上呈网状分布的菱形花纹，从顶端到剑锋连续排列，浑然一体.

这种以基本(单位)纹样(图案)为基础，根据一定的变换方式(如：平移、旋转、轴对称等)重复排列所构成的不间断图案称为连续纹样. 按纹样排列方式的不同一般分为二方连续纹样和四方连续纹样，富有中国传统审美趣味.

活动 1　二方连续纹样与唐草纹

二方连续纹样是指一个单位图案沿上下或左右方向连续排列所形成的横式或纵式带状纹样(也叫花边纹样)，富有节奏和韵律感. 越王勾践剑采用了二方连续纹样设计.

唐代较多取忍冬、荷花、兰花、牡丹等花草图案构成二方连续纹样，这些花草的枝茎滋长延伸、蔓蔓不断，有茂盛、长久的吉祥寓意. 因盛行于唐代，故名“唐草纹”. 唐草纹经过恰当的变形后，可以装饰在各种实用器物上. 图 2 展示的三件唐代器物，造型精美细腻，无论外沿还是内壁，都有清晰可见的二方连续花纹图饰，其结构严谨中又带有大唐一贯的典雅富丽风格，是难得的珍宝.

[唐]鸳鸯莲瓣纹金碗

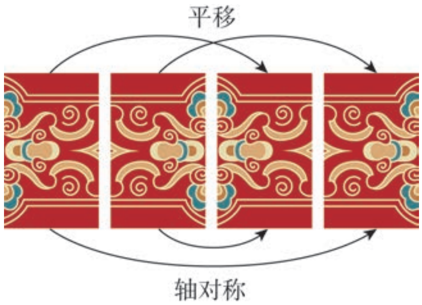
[唐]鎏金双狮纹银碗

[唐]鎏金飞狮纹盒顶盖

图 2

请仔细观察表 1 中的二方连续纹样，找出这些纹样中的单位纹样及其变换方式，并填入表 1.

表 1　二方连续纹样中的单位纹样及其变换方式

二方连续纹样	单位纹样	变换方式
		
		
		
		

活动 2　四方连续纹样

二方连续纹样沿上下左右四个方向连续延伸扩展就形成了四方连续纹样．仔细观察图 3 中的清代描彩漆福寿纹葫芦式盒，填彩漆纹饰中清晰可见四方连续的装饰形式．

图 3

请仔细观察表 2 中的四方连续纹样，找出其中的单位纹样及其变换方式，并填入表 2.

表 2 四方连续纹样中的单位纹样及其变换方式

四方连续纹样	单位纹样	变换方式
		平移
		
		

活动 3 鸽子瓷砖变形记

活动 1 和活动 2 中展示了单位纹样为规则几何图形（如三角形、矩形等）的无交叠的连续阵列. 在现代艺术中还有一类图案（图 4），它们由不规则的基本图案紧密相连，没有重叠、没有空隙地铺满一个封闭图形，被称为镶嵌图案.

带有几何和自然图案的
罗马镶嵌

浙江省松阳县黄家大院
梅兰竹菊轩厢房的窗棂

图 4

荷兰艺术家埃舍尔(Maurtis Cornelis Escher)在镶嵌图案方面所形成的独特风格尤为引人瞩目，被称为“埃舍尔风格”．图 5(1)展示了一种由多块瓷砖密铺而成的图案，其中作为基本单位的鸽子图案(2)形状并不规则，较难直接发现其密铺的方式．但我们通过裁剪和平移，可将其转换为规则的图形(3)，这样就可以通过四方连续密铺，再经过上色，得到图 5 中的瓷砖图案(4)了．

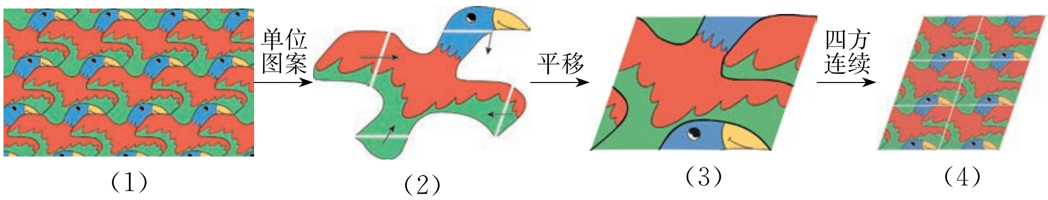
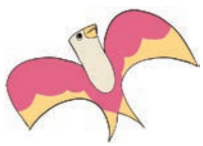


图 5 鸽子瓷砖变形过程

请根据以上思路，填写表 3 中另两组鸽子瓷砖图案的密铺过程．

表 3 拼接鸽子瓷砖

鸽子瓷砖	单位图案	几何变换	基本几何图形	四方连续
		平移	 平行四边形	
				
				

经过平移、旋转、轴对称等变换，基于线条的中国传统纹样的二方(或四方)构图和基于色块的现代镶嵌图案的密铺构图在本质上实现了联系，让我们再一次体会到数学工具的神奇．

小组活动

请参照活动 3 的构图方式，设计出自己的图样，再请组内其他同学推测出你的构图规律.

制订“阅读之星”评选方案

书籍是人类进步的阶梯．为引导学生读好书、读经典，2020 年我国教育部发布《中小学生阅读指导目录》，列出 300 种图书，分为人文社科、文学、自然科学和艺术四类，其中小学 110 种、初中 100 种、高中 90 种．

某校要举行“阅读之星”评选活动，成立了“阅读之星”评选小组，向全校学生征集评选方案，要求在制订方案时考虑如下几个因素：(1)书籍的数量；(2)书籍的类别数；(3)书籍的总页数；(4)学生提交的读书报告的质量．

活动 1

评选小组收到一份“阅读之星”的评选方案．该方案根据阅读书籍的数量和总页数给同学计分，得分排前十位的同学入围“阅读之星”．具体方案如图 1 所示．

> 为鼓励同学们多读书，建议考虑两个因素：书籍的数量和书籍的总页数.
>
> 若某同学阅读书籍的数量为A，总页数为B，则其“阅读之星”得分计为：$10A+0.1B$. 假设小海一个学期共读了6本书，总页数750页，那么他的“阅读之星”得分为：$10A+0.1B=10\times6+0.1\times750=135$.
>
> “阅读之星”得分每学期计算一次，得分排前十位的同学当选为学期“阅读之星”.

图 1　“阅读之星”评选方案一

(1) 请讨论，为什么书籍的总页数 B 前的系数比书籍的数量 A 前的系数小很多？

(2) 根据上述方案，选出班级中阅读得分排前十位的同学，授予“阅读之星”称号．请他们分享阅读的书目．

(3) 你对上面的方案有什么补充意见？

活动 2

对于评选方案一，有人建议将“书籍的类别数”作为评选的考虑因素，于是有了第二个方案，如图 2 所示.

为鼓励同学们多读书、广读书，建议考虑三个因素：书籍的数量、书籍的总页数和书籍的类别数.

若某同学阅读书籍的数量为A，书籍的总页数为B，书籍的类别数为C，则其“阅读之星”得分计为：$10A+0.1B+5C$. 假设小海一个学期共读了6本书，其中2本属于人文社科、4本属于自然科学，小海所读书籍的类别数为2，6本书的总页数为750页，那么得分为：$10A+0.1B+5C=10\times6+0.1\times750+5\times2=145$.

“阅读之星”得分每学期计算一次，得分排前十位的同学当选为学期“阅读之星”.

图 2 “阅读之星”评选方案二

（1）请讨论 A、B、C 前的系数是否合理.

（2）根据上述方案，选出班级中阅读得分排前十位的同学，授予“阅读之星”称号. 请他们分享阅读的书目.

（3）你对上面的方案有什么补充意见？

活动 3

比较活动 1 和活动 2，可以发现方案考虑的因素不同，评选结果可能不同. 一般来说，评选方案需要不断改进.

1. 考虑哪些因素：书籍的数量、书籍的总页数……？
2. 为什么考虑这些因素：多读书……？
3. 每个因素前的系数大小应该如何确定？
4. 用字母表示考虑的因素，建立一个计分的方法.
5. 举例说明，如何使用计分方法.

图 3

请分组讨论，参考图 3 中所列的问题，制订一个“阅读之星”评选方案.

各小组展示所制订的“阅读之星”评选方案，讨论得到最佳方案. 用你们的最佳方案评选出全班的“阅读之星”.

附　录

部分中英文词汇索引

10. 整式的加减

单项式	monomial	2
系数	coefficient	2
整式	integral expression	4
多项式	polynomial	4
（整式的）项	term	6
常数项	constant term	6
（整式的）次数	degree	6

11. 整式的乘除

乘方	power	18
幂	exponentiation	18
底数	base number	18
指数	exponent	18

12. 因式分解

因式分解	factorization (of a polynomial)	55
公因式	common factor (of polynomials)	58

13. 分式

分式	algebraic rational fraction	76
分式方程	fractional equation	93
增根	extraneous root	94

14. 图形的运动

平移	translation	106
旋转	rotation	114
轴对称	reflection symmetry	120
中心对称	central symmetry	126

后　记

本套教科书根据教育部颁布的《义务教育数学课程标准(2022 年版)》编写.

本册教科书是七年级上册. 在主编李大潜的主持下, 由徐斌艳任本册主编, 各章的具体分工为:

王海生、张向韵、李文侠(第 10 章), 沈洁、李文侠、徐斌艳(第 11 章), 鲁海燕、李文侠、徐斌艳(第 12 章), 朱丽霞、金荣生、徐斌艳(第 13 章), 王海生、苗俊杰、李文侠(第 14 章), 朱雁、徐斌艳(综合与实践).

感谢编写团队的团结协作和不懈努力, 并对王建磐教授的协助表示衷心的谢忱.

编写过程中, 上海市课程教育教学研究基地(中小学课程方案基地)、上海市心理教育教学研究基地、上海基础教育教材建设重点研究基地、两个上海市数学教育教学研究基地(分别设在复旦大学和华东师范大学)等上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地对教科书编写工作给予了大力支持, 在此表示衷心的感谢.

我们要感谢一直支持、关心和帮助我们工作的同志和朋友们. 大家的热忱指导和帮助, 我们定会铭记于心, 并化为我们的工作动力.

欢迎广大师生来电来函提出宝贵意见.

联系电话: 021−64319241(内容)　021−64373213(印刷或装订)

电子邮箱: jcjy@seph.com.cn

地　　址: 上海市闵行区号景路 159 弄 C 座上海教育出版社(201101)

SHUXUE

数学

七年级　上册

绿色印刷产品

ISBN 978-7-5720-2876-2

9 787572 028762

定　价：　9.80 元