普通高中

Shuxue
Jiaoxue Cankao Ziliao

数学

教学参考资料

必修
第二册

上海教育出版社

普通高中

Shuxue
Jiaoxue Cankao Ziliao

数学

教学参考资料

必修

第二册

上海教育出版社

主　　编　李大潜　王建磐
副 主 编　应坚刚　鲍建生
本册编写人员　邹建兵　周子翔　朱胜林　肖登鹏　陈兴义　刘　攀　邹佳晨　况亦军

责任编辑　张莹莹　潘迅馨
装帧设计　周　吉

插图绘制　朱泽宇

普通高中　数学教学参考资料　必修　第二册
上海市中小学（幼儿园）课程改革委员会组织编写

出　　版　上海教育出版社有限公司（上海市闵行区号景路159弄C座）
发　　行　上海新华书店
印　　刷　上海中华印刷有限公司
版　　次　2020年12月第1版
印　　次　2024年12月第5次
开　　本　890×1240　1/16
印　　张　7.5
字　　数　128 千字
书　　号　ISBN 978-7-5720-0397-4/G·0289
定　　价　22.50 元

目　　录

绪　论

本套教学参考资料(以下统称“本套教参”)与李大潜、王建磐主编，上海教育出版社出版的《普通高中教科书·数学》(以下统称“本套教材”)配套使用，本套教材依据中华人民共和国教育部制定并颁布实施的《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》(以下简称“国家课程标准”)编制，并经国家教材委员会专家委员会审核通过.

一、本套教材的总体结构框架

国家课程标准把高中数学课程分为必修课程、选择性必修课程和选修课程，并规定：必修课程为学生发展提供共同基础，是高中毕业的数学学业水平考试的基本内容，也是高考的内容要求；选择性必修课程是供学生选择的课程，也是高考的内容要求；选修课程为学生确定发展方向提供引导，为学生展示数学才能提供平台，为学生发展数学兴趣提供选择，为大学自主招生提供参考①.

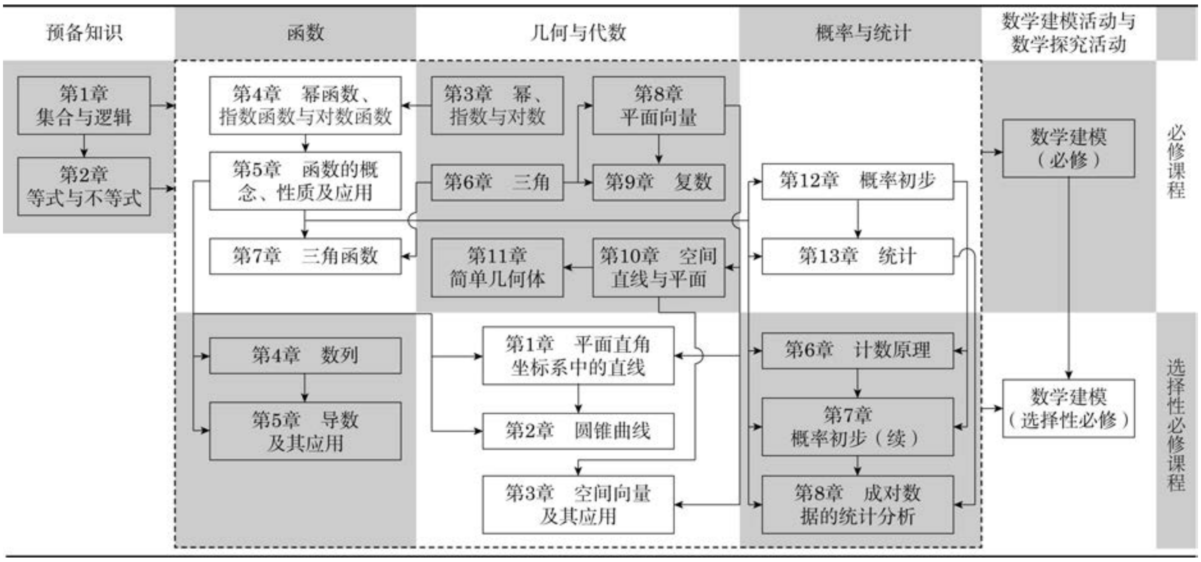
本套教材仅包含必修课程和选择性必修课程.

国家课程标准把必修课程和选择性必修课程所囊括的数学内容分为预备知识、函数、几何与代数、概率与统计、数学建模活动与数学探究活动 5 个主题②. 本套教材把这 5 个主题及其具体要求组织成了必修课程 13 章和数学建模 1 册，选择性必修课程 8 章和数学建模 1 册. 这些章的标题以及各章之间的逻辑联系如下页图所示.

---

① 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京：人民教育出版社，2020：9，11-12.

② 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京：人民教育出版社，2020：13-14，36-37.



说明：(1) 数学是一个整体，教材各章之间或多或少都存在联系，上图仅标出一些主要联系.

(2) 预备知识主题下的两章为高中数学学习提供基本语言、基本工具和基本思维方式，因此它们是整个知识体系的基础；数学建模是给学生提供解决实际问题的训练和实践，可以建立在任何数学基础上.

(3) 在数学建模活动与数学探究活动主题下，上图只列了两册数学建模，并没有列出数学探究的内容. 其实，数学探究的内容以“探究与实践”专栏、“课后阅读”专栏、“拓展与思考”的习题以及某些边框分散在教材中. 教师可以利用这些素材引导学生进行自主探究，也可以根据教学内容自行设计数学探究活动，让学生学得更加生动活泼.

(4) 国家课程标准把幂、指数与对数的运算融在幂函数、指数函数与对数函数中，把三角的定义、三角恒等变换以及解三角形等非函数内容都归在三角函数标题下，所以相关的内容也就都在“函数”主题下了；本套教材把这些非函数的内容从函数标题下独立出来，形成了必修课程的第 3 章“幂、指数与对数”及第 6 章“三角”，把这两章归到“几何与代数”主题下是更顺理成章的. 当然，这两章内容与紧接在后面的函数的学习密切相连，在课程结构的安排上仍把它们归在函数主题一起考虑.

本套教材共有必修课程教材四册.

- 必修第一册：第 1 章至第 5 章；
- 必修第二册：第 6 章至第 9 章；
- 必修第三册：第 10 章至第 13 章；

- 必修第四册：数学建模.

本套教材共有选择性必修课程教材三册.

- 选择性必修第一册：第 1 章至第 4 章；
- 选择性必修第二册：第 5 章至第 8 章；
- 选择性必修第三册：数学建模.

除数学建模外的五册教材可以安排从高中一年级至高中三年级第一学期共五个学期教学. 每册内容没有撑足教学时数，留一定的机动课时供教师根据实际需要灵活掌握，可用作重点或难点的强化课、复习课、习题课、数学建模活动、数学探究活动等，也可用于安排选修课程或校本课程内容的学习. 数学建模内容与数学知识的逻辑结构没有直接的关系，两册数学建模教材不是前三册或前两册教材的后继，而是包含比教学课时数要求更多的内容，供各个年段灵活地、有选择地使用，以实现数学建模的教学目标.

二、本套教材的编写思想与主要特点

本套教材是在上海市教育委员会组织下，由设在复旦大学和华东师范大学的上海市数学教育教学研究基地(上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地)联合主持编写的，由李大潜、王建磐担任主编. 教材编写过程中，我们始终坚持正确的政治方向和价值导向，科学地处理了教学内容的编排，反复认真地打磨，努力做到结构严谨、体例活泼、特色鲜明，体现了理性精神和创新意识，有较高的科学品位和学科人文情怀，希望能为广大师生喜闻乐见，对学生学业水平的提升，数学学科核心素养发展和社会责任感的培育都有促进作用.

我们认为本套教材在编写思想上有所突破，在内容呈现上有一些特点. 具体体现在以下几个方面.

(1) 关注“立德树人”，课程育人. 通过各种素材与知识本体的有机融合，有效落实了立德树人的根本任务，明确体现了“四个自信”和社会主义核心价值观，注重培养学生严谨求实的科学态度.

章首图的选用让学生在最初一瞥中体会中国共产党的光辉历史和祖国社会主义建设的成就；用现代化建设的新成就作为情景引入数学概念，让学生在学习知识的同时看到祖国发展的日新月异；例习题和“探究与实践”“课后阅读”等专栏中包含了各种热

点问题和重大主题教育的内容；重视数学史在数学教育中的作用，许多题附有历史的简述，既体现人类文化知识的积累和创新的过程，也帮助学生理解和掌握相关的数学知识；在数学史阐述中，特别注意我国历代数学家及其成就以及西方数学的脉络中我国学者(在学术、传播或中国化等方面)的贡献.

(2) 体现“国家标准，上海特色，国际水平”. 基于国家课程标准，但同时也对上海两期课改的经验有所继承，对东部发达地区的国际化大型城市这一特点有所关注，对数学链条上缺失的关键节点有所弥补.

本套教材在吸收上海两期课改(“一期课改”和“二期课改”)中已经成熟的经验方面，比较典型的例子有：数学归纳法，这是国家课程标准中标有 * 号的选学内容，本套教材将其 * 号去掉，归入正常教学要求；无穷递缩等比数列的和作为极限思想的朴素表述，与求导呼应；把反函数、参数方程、极坐标方程等内容以标 * 号的方式加入到本套教材中，供学校和教师选用. 这些内容曾出现在上海“二期课改”的教材中，学生的接受度较高.

对一些数学链条中关键的节点做适当的弥补. 例如，引入反证法，希望以此简化部分数学证明，提高学生逻辑推理能力；比较全面地介绍了直线方程的各种形式，既夯实解析几何的基础，也建立解析几何与数学其他分支的联结点，如斜截式方程紧密联系一次函数，而直线的法向量与点法式方程是立体几何中平面法向量的预演.

(3) 以国家课程标准所描述的“函数”“代数与几何”“概率与统计”三个主题为教材发展的三条主线，主线内部一气呵成(除了跨越必修与选择性必修的必要隔断外)，形成层层递进的章节设计，体现了整体性和连贯性，避免在发展主线间的反复变换，使学生不仅能更好地了解数学整体的思想和结构，也能了解数学不同分支之间的差异，对培养学生的数学素养更有好处.

(4) 注重“从特殊到一般，再指导特殊”的认识论规律. 例如，在函数主线内部，没有从给出函数的一般定义入手，而是先让幂函数、指数函数、对数函数作为“特殊”出现，然后提出函数的一般概念，再在“一般”指导下进入三角函数的学习. 这种处理方法在其他专题上也可以找到踪影：学过直线方程、圆锥曲线方程后，引出曲线方程的严格定义，然后用例题和习题的形式求一些轨迹的方程，再介绍曲线的参数方程和极坐标方程；在“简单几何体”一章中，先讲柱体与锥体，然后讨论多面体与旋转体，再“特殊化”到球的学习；“数列”一章，在学过等差数列、等比数列后，介绍一般数列

的概念与性质，特别关注用递推公式表示的数列，然后引入了数学归纳法，全章最后落笔于用迭代方法求$\sqrt{2}$的近似值，这是用递推公式表示数列的实际例子.

（5）在必修课程第10章“空间直线与平面”中，给出“立体几何”相对完整严格的演绎法阐述，意在努力克服学生的空间直观想象和逻辑推理上的不足. 在选择性必修课程第3章“空间向量及其应用”的章末回到立体几何，用向量方法解决立体几何问题，从几何问题代数化的角度引出解题新思路，加深对立体几何的理解，反过来又很好地诠释了学习空间向量的意义.

（6）数学建模单独成册. 国家课程标准把数学建模活动与数学探究活动作为一条单列的主线，充分体现了对数学建模的重视程度. 数学建模与数学知识的关系是强调已经学得的知识(不一定是刚刚学得的，一般也并不指定哪些具体的知识点)在解决实际问题中的应用，因此数学建模活动和数学知识体系的发展并无直接的关联性，数学建模活动的教学不应依附于特定知识性内容的教学，而应该强调它的活动性、探索性和综合性，在过程中不断提高学生分析问题、解决问题的能力和综合应用数学知识的能力，并充分激发学生的创新精神和创造意识.

基于这种想法，把数学建模内容独立出来，按必修和选择性必修分别单独成册. 这样做符合课程标准的要求，符合数学建模内容的特点，并至少在以下四个方面凸显它的优势：

- 数学建模单独的物理存在给教师和学生在强调数学建模学习和数学建模核心素养培养上更为直观的感受，更能激起数学建模教与学的热情；
- 独立的数学建模分册明确地显示数学建模不是在数学学习的某一特定节点上的内容，也不是新增的数学知识，而是在数学教学过程中随时随地可以开展的教学实践活动；
- 单独成册的数学建模教材有较大的容量，可以提供更多的活动案例，让教师和学生可以依据自己的兴趣和特长做多样的选择；
- 单独成册的数学建模教材以它的相对系统性和完整性帮助教师理解数学建模的意义和特点，逐步体会并形成数学建模的教学规范，从而更好地帮助学生开展相应的数学建模活动，体验数学建模的全过程，领悟数学建模的真谛.

（7）本套教材另一个与众不同的地方是采用“娓娓道来”的叙事方式，它使得教材既是一个“教”本，也是一个“读”本，学生可以在阅读中了解数学，喜欢数学，学好数

学. 正文的这种叙事方式使教师和学生更加注重数学精髓，体验数学严谨，掌握数学要义，提高数学素养，引导教师在教学中避免“重解题、轻概念、轻思想”的倾向.

三、本套教参的主要特点

本套教参编撰的目的是使教师理解教科书编制所依据的《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》，体会教材的编制特色和主要思想，把握教材所包含的数学知识的体系和脉络，掌握教学过程的关键，从而很好地完成从课程标准和教材所描述的“期望课程”“潜在实施课程”到教学过程的“实施课程”和学生习得的“获得课程”的转变.

本套教参与教材分册和章节安排均一致，即教参的分册和章节目录均与教材一致. 但教参没有直接把教材复制在内，也不是平铺直叙地解释教材的内容. 教参着重讲出编写者的思想及体会，明确各章的定位，剖析重点和难点，厘清容易混淆的地方，帮助教师把握课程标准的基本理念和目标要求，强调数学核心素养的落实，等等，从而开拓教师思维，优化教学方法. 从这个角度讲，教参又是课本内容的深化和补充，成为教材(潜在实施课程)到教学(实施课程)的中介和桥梁.

教材前言强调，“在任何情况下，都要基于课程标准，贯彻‘少而精’‘简而明’的原则，精心选择与组织教材内容，抓住本质，返璞归真，尽可能给学生以明快、清新的感受，使学生能更深入地领会数学的真谛，让数学成为广大学生喜闻乐见的一门课程. ”这是本套教材坚持的基本特色. 教材的许多特色隐含在内容选取、编排和行文中. 教参将揭示和突出教材的基本特色以及教材编制过程落实这个特色所采取的具体措施和处理方式，并充分注意同一主题内前置和后续内容的衔接以及一个主题的内容与其他主题甚至其他学科内容的关联. 这种衔接和关联在章节导言、总结部分以及在相关知识内容阐述中有明确的交代. 这样做的目的是让教师更加深刻地体会整个高中阶段数学是一个知识的网络，并在教学中把这个认知传递给学生.

教参的每一章因所涉及的内容以及编写者的风格特点可能会有所差异，但我们追求每章总体结构基本统一，关键要素基本具备.

每一章的教参包括“本章概述”“教材分析与教学建议”“参考答案或提示”和“相关阅读材料”四个部分.

“本章概述”部分的主要栏目有“总体要求”“课时安排建议”“内容编排与特色”“教学提示”与“评价建议”等. 特别地，“总体要求”中通过与课程标准、“二期课改”教材

的联系与对比，围绕着本章内容的重要性、与前后知识的联系和课程目标等内容进行阐述.

“教材分析与教学建议”部分按节编写，每节有“教学重点”“内容分析”“注意事项”“教学建议”等栏目.

“参考答案或提示”是教参的常规内容，但我们希望能够尝试给出一些思想或方法的提示.

给出“相关阅读材料”是一个新的尝试，我们希望为教师和学生的课外阅读提供一些提示或指导. 所列文献、材料以中文为主，但也会包含少量英文文献.

四、必修教材第二册中的一些关注点

必修教材第二册一共四章，前两章是第一册第 3 章开始的函数主题的学习. 第一册第 5 章给出了函数的一般定义和表示方法，并对函数性质研究中的一般关注点(奇偶性、单调性和最值)进行了定义和讨论之后，第 7 章在第 5 章建立的一般理论指导下对一类新的函数——三角函数进行了研究. 我们仍然遵循运算与函数分离的原则，三角函数所赖以建立的运算部分，即三角学的内容(包括正弦、余弦、正切与余切的定义，各种三角变换公式与解三角形)，前置在第 6 章进行学习.

第 7 章定义了三角函数，并讨论了正弦函数、余弦函数和正切函数的图像和主要性质. 除了研究奇偶性、单调性和最值外，研究三角函数还特别要关注它们的周期性. 这一章还研究了正弦函数带若干个参数的变形 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，介绍了参数 A、ω、φ 在物理学和工程技术中的意义以及它们在函数理论中的意义，牵涉到函数图像的变形和运动，这是全套教材中唯一深入研究函数变形的例子，要加以关注. 但要注意，模仿这个例子再去讨论函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$是没有意义的，因为它可以由函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$调整参数 ω 与 φ 得到.

第 6、7 两章的教学要让学生更深刻地体会函数研究应该关注的内容，理解运算与函数分离的意义.

第 8 章讲授平面向量. 这部分内容的处理与二期课改教材有很大的区别. 在二期课改教材中，“向量”仅作为服务于其他数学内容的工具进行学习，内容被分解为若干小块，分布在初中八年级第二学期、初中九年级第一学期、高中二年级第一学期和高中拓展等四册教材中. 本套教材把向量作为一个重要内容，分为“平面向量”(在必修

课程中)和“空间向量”(在选择性必修课程中)两章，给予系统的阐述. 因此，教师特别要注意向量理论的系统性、完整性，关注它在教材中发展的内在逻辑，给学生讲好向量理论，而不仅仅是提供给学生作为解题工具的向量.

第 9 章讲授复数. 本教材复数内容与众不同的处理方法是“运算先行”，即在引入复数以后，没有急着去理清下一级的定义与性质，而是单刀直入地介绍复数的运算，并把它与多项式的运算相联系. 把学生熟悉的内容嫁接到一个陌生的语境中，让学生减少学习困难，提高学习效率. 复数的三角形式及其在复数乘除运算中的应用是选学的内容，可根据不同学生的学情，有更多的灵活处理以体现教学的适切性.

第 6 章　三角

一、本章概述

总体要求

国家课程标准要求“突出数学主线，凸显数学的内在逻辑和思想方法，精选课程内容，处理好数学学科核心素养与知识技能之间的关系，强调数学与生活以及其他学科的联系，提升学生应用数学解决实际问题的能力，同时注重数学文化的渗透”. 关于三角知识的学习从小学、初中一直持续到高中阶段，不仅蕴含着它本身的内在逻辑和思想方法，还影响着后续知识如解析几何、立体几何、复数等的学习，并与物理学和现实世界存在着广泛的联系. 因此，三角在数学教学中占据着比较重要的位置. 三角知识的发展历史悠久，伴随着曲折的过程，蕴含着丰富的数学文化，在教学中渗透三角的数学文化内涵有助于落实立德树人的根本任务.

在小学和初中，学生对角已有一定认知. 在初中，学生对锐角的正弦、余弦、正切与余切的定义等知识已有了一定基础. 高中阶段所学习的三角知识是对学生既有知识的再认知和升华，体现了从几何方法到代数方法这一研究方式的转变. 本章知识的内在逻辑联系紧密并相互关联，在教学中应重视基本概念和公式的生成过程，充分揭示知识之间的内在联系，使学生明白有关知识的来龙去脉. 本章的知识将为后续章节和其他学科的学习奠定基础，在教学中应强调三角概念及常用公式和正弦、余弦定理的工具性价值和一定的应用价值，而不必过分纠缠于复杂的计算和解答技巧.

本章的学习可以帮助学生在用锐角的正弦、余弦、正切刻画直角三角形中边角关系的基础上，借助于单位圆对一般的角度建立正弦、余弦、正切等概念，了解引入弧度制的必要性；探索和研究正弦、余弦、正切等之间的一些恒等关系；探索三角形边长与角度的关系，掌握正弦、余弦定理，并能用它们解决简单的实际问题.

本章的三节内容与学科核心素养密切相关. 在“正弦、余弦、正切、余切”这一节中，通过数学抽象和直观想象重新建构了角及其度量方法，以及正弦、余弦、正切、余切等概念，并展示了同角三角关系，诱导公式和已知某个角的正弦、余弦、正切的值求角等内容. 在“常用三角公式”一节中，通过数学抽象和逻辑推理，在得到两角差的余弦公式基础之上，推导出两角和与差的正弦、余弦、正切公式，二倍角公式，半角的正弦、余弦、正切公式以及和差化积与积化和差公式. 这一系列的三角恒等变换过程，对培养学生逻辑推理和数学运算等学科核心素养提出了较高的要求. 在“解三角形”一节中，关于正弦、余弦定理的推导和使用体现了对数学抽象、逻辑推理和数学运算等核心素养的要求，而处理三角测量的实际问题对培养学生数学建模的核心素养也有较大的作用. 由于本章已经初步把数与形结合起来，直角坐标系和单位圆被广泛使用，在教学中应尽量多结合图形来帮助学生突破认知难点，加深数学理解，而数形结合正是直观想象这一学科核心素养的体现.

课时安排建议

本章的课时安排建议为 17＋2，共计 19 课时. 建议如下：

章节名	建议课时数	具体课时分配建议
6.1　正弦、余弦、正切、余切	8	锐角的正弦、余弦、正切、余切　0.5 课时
		任意角及其度量　1.5 课时
		任意角的正弦、余弦、正切、余切　3 课时
		诱导公式　2 课时
		已知正弦、余弦或正切值求角　1 课时
6.2　常用三角公式	5	两角和与差的正弦、余弦、正切公式　3 课时
		二倍角公式　1 课时
		三角变换的应用　1 课时
6.3　解三角形	4	正弦定理　1 课时
		余弦定理　3 课时
探究与实践	1	
复习与小结	1	

内容编排与特色

本章内容共分为三节，分别是 6.1 正弦、余弦、正切、余切，6.2 常用三角公式，

6.3 解三角形.

“6.1 正弦、余弦、正切、余切”包含以下五方面内容：锐角的正弦、余弦、正切、余切；任意角及其度量；任意角的正弦、余弦、正切、余切；诱导公式；已知正弦、余弦或正切值求角. 锐角的正弦、余弦、正切、余切复习了相应的定义，以及同角三角关系和诱导公式，建立了本节学习的认知起点. 任意角及其度量将角的定义推广、拓展到任意角，并置于平面直角坐标系中研究，而弧度制是用圆的弧长与半径的比值来度量角的一种新方法，不仅使得某些公式简洁漂亮，更为后续的学习打下良好的基础. 任意角的正弦、余弦、正切、余切介绍了如何从初中所学锐角的正弦、余弦、正切、余切通过平面直角坐标系推广到任意角的正弦、余弦、正切、余切，进而研究同角三角关系并简单应用. 借助单位圆和对称性得到一系列诱导公式，并将“奇变偶不变，符号看象限”写入教材，强调可以将(终边不在坐标轴上的)任意角的三角转化为锐角的三角，而正弦与余弦、正切与余切的相互转化也为三角公式推导和后续学习奠定基础. “已知正弦、余弦或正切值求角”的实质是使用单位圆和正弦、余弦、正切的定义，数形结合的观念是有关推导的关键. 该小节强调一般性结论和具特殊三角值的角的求解，淡化了原二期课改教材对求解三角方程的要求.

“6.2 常用三角公式”包含以下三部分：两角和与差的正弦、余弦、正切公式；二倍角公式；三角变换的应用. 两角和与差的正弦、余弦、正切公式和二倍角公式与二期课改教材相较变动不大. 而在三角变换的应用中出现了半角的正弦、余弦和正切公式、和差化积公式、积化和差公式，这些是两角和与差公式、二倍角公式的应用，关键在于体会公式推导过程，淡化这三组公式的使用. 本节还在“探究与实践”中安排了万能代换公式的推导，在“课后阅读”中安排了三角变换公式简史，以拓宽学生视野，通过数学文化提升学生的核心素养.

“6.3 解三角形”由正弦定理和余弦定理两部分组成. 正弦定理和余弦定理需要体会定理的推导过程，并能灵活运用这两个定理处理不同条件下的三角形问题，进而利用这些知识处理一些简单的实际问题. 本节还在“探究与实践”中安排了海伦公式和“三斜求积”公式的等价性证明，在“课后阅读”中安排了三角学发展简史，促进学生了解历史上中国数学家的贡献，通过数学史的学习提高对数学的认知和兴趣，感悟数学的文化价值.

本章综合了几何与代数的方法，强调和突出了数与形的结合. 除了完整的知识结

构外，本章还穿插了学生的探究、体验活动，注重对学生数学核心素养的培养.

教学提示

正弦、余弦、正切、余切的教学，应该把学生初中学过的三角知识作为认知起点，重新对角及其度量方法，正弦、余弦、正切、余切的定义，同角三角关系，诱导公式等知识进行建构. 正弦、余弦、正切、余切的教学应引导学生结合实际情境，借助单位圆的直观，探索其有关性质. 由于这部分知识中的概念较多，对数学抽象素养有较高要求，在教学中应尽量多使用图形，借助几何直观来帮助学生加深理解. 这部分知识前后联系非常紧密，知识环环相扣，在教学中需根据学生的学习状况采用合理的教学节奏，做到循序渐进.

在三角恒等变换的教学中，可以采用不同的方式得到三角恒等变换的基本公式. 由于出现的公式数量较多，且公式之间的关系非常密切，在教学中要充分展示公式的推导方法，揭示公式之间的内在联系及其转化规律. 在导出公式后，要通过对典型例题的讲解、归纳、概括，准确地揭示解题规律与方法. 通过适量难度适当的习题，使学生加强理解并会运用公式进行简单的恒等变换，培养学生观察问题、分析问题与解决问题的能力，充分体会数形结合和化归等数学思想方法. 三角恒等变换的教学应淡化技巧，避免编制偏题和怪题.

解三角形的教学应从实际情景出发，充分说明正弦定理和余弦定理来源于生产、生活实际. 在解三角形的应用教学中，要引导学生理解正弦定理和余弦定理如何用于描述客观世界事物的变化规律，体会正弦定理和余弦定理与现实世界的密切联系.

可以组织学生收集、阅读三角学的形成与发展的历史资料，结合内容撰写报告，论述三角学发展的过程、重要结果、主要人物、关键事件及其对人类文明的贡献.

评价建议

与其他章节相比，本章概念和公式比较多，知识之间前后联系紧密，必须高度关注数学的学习评价，了解学生的学习过程和知识掌握情况，做到循序渐进.

教学评价需要关注概念与公式的形成. 通过创设合适的教学情境，利用合适的数学问题加以引导，对学生知识形成、表达、交流过程进行评价. 例如，通过观察调节手表指针等生活现象，发现角的概念，不但需要考察旋转的量，而且要考察旋转的方向，通过课堂观察评价学生对角的概念的数学抽象过程.

教学评价需要关注数学基本技能的形成. 例如，在同角三角关系和三角常用公式的教学中，要关注学生能否在理解数学公式的基础上，掌握数学运算、推理、变换等技能和方法，能否根据问题的特点合理选择公式，并能准确熟练地进行恒等变换. 在解三角形过程中，能够根据三角形的已知量，合理选择正弦或余弦定理加以运用.

教学评价中需要关注学生能力的培养和形成. 例如，本章中数形结合思想是主线，在角、正弦、余弦、正切和余切等诸多概念中，在诱导公式、两角差的余弦公式、正弦定理、余弦定理等的推导过程中，都体现着直观想象这一核心素养. 在三角恒等变换过程中，化归的数学思想方法始终蕴含其中. 在用正弦定理和余弦定理解决简单的实际问题时，教学评价必须关注数学建模能力是否得到提升.

本章的活动案例评价可以采用两个探究与实践活动：万能代换公式，“三斜求积”与海伦公式的等价性证明；也可以在学习解三角形后自行设计，对实际问题进行三角测量. 活动的形式可以是个体活动，也可以是小组活动. 活动的成果可以采用提交研究报告或者小论文等多种形式，并对活动过程或者活动成果进行评价.

在本章的阶段评价中关注的知识重点是：1. 了解任意角的概念和弧度制，能进行弧度与角度的互化，理解正弦、余弦、正切和余切的定义，理解同角三角的基本关系式并简单运用；推导出诱导公式并简单运用；能在已知角的正弦、余弦、正切的条件下求角. 2. 能推导出两角差的余弦公式，能通过两角差的余弦公式推导两角和与差的正弦、余弦、正切公式以及二倍角的正弦、余弦、正切公式，了解它们的内在联系；能运用上述公式进行简单的恒等变换，包括推导出半角公式、积化和差与和差化积公式. 3. 掌握正弦定理、余弦定理，能用正弦定理、余弦定理解决简单的实际问题.

二、教材分析与教学建议

6.1　正弦、余弦、正切、余切

教学重点

了解任意角的概念和弧度制，能进行弧度与角度的互化，初步体会引入弧度制的

必要性. 借助单位圆理解正弦、余弦、正切和余切的定义.

理解同角三角的基本关系式：$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$等，并能用这些关系式解决一些三角恒等式的化简与证明.

借助于单位圆的对称性，利用定义推导出诱导公式$\left(\pi\pm\alpha，\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha\right.$ 等的正弦、余弦、正切$\left.\right)$，并能够进行简单的求值、化简与证明.

能够从已知角的正弦、余弦、正切值求角，并能简单应用.

内容分析

在初中阶段，已定义了锐角的正弦、余弦、正切和余切，并得到了同角三角关系和部分诱导公式以及部分特殊角的三角值. 当角度推广到任意角，为了进一步研究的便利引入了弧度制，同时借助平面直角坐标系得到任意角的正弦、余弦、正切和余切及相应的同角三角关系. 诱导公式使得(终边不在坐标轴上的)任意角的三角函数可以转化为锐角的三角函数，同时也体现了正弦与余弦、正切与余切可以互相转化，为后续三角公式的推导和三角函数的学习奠定基础. 已知正弦、余弦、正切值来求角，虽然可以视为诱导公式的运用，但为保证严密性，利用三角的定义和单位圆，通过数形结合推导得到一般性的结论. 在本节中，概念的内涵和公式的推导需要准确理解和体会，平面直角坐标系和单位圆是两个常用的重要工具，对数学抽象、逻辑推理和直观想象要求较高，对数学运算也有相应的要求.

例 1 旨在说明任意角总可以转化为一个在 $0°\sim360°$范围内的终边相同的角，进而可判断角所属的象限.

例 2 旨在例示终边重合的所有角，理解其集合含义，并找出给定范围内的终边相同的角.

例 3 旨在说明如何将角度化为弧度.

例 4 旨在说明如何将弧度化为角度. 例 3 和例 4 不需要强记公式，只要了解 π 弧度$=180°$即可相互转化. 在使用计算器时需要提醒学生两种度量制的差异.

例 5 旨在说明在弧度制下如何表示终边相同的角.

例 6 旨在说明在弧度制下如何判断角所属的象限，其中分类讨论是本题的一个难点. 本题也可从数形结合的角度通过几何直观判断.

例 7 和例 8 旨在说明如何根据角的终边上一点的坐标求得角的正弦、余弦、正切和余切值. 其中，例 7 为终边位于象限中的角，而例 8 为终边位于坐标轴上的角，其中某些值(余切值)是不存在的.

例 9 旨在让学生了解通过正弦、余弦、正切的符号来判断角所属的象限.

例 10 给出已知角，通过单位圆求出角的正弦、余弦、正切值. 值得注意的是，正弦、余弦、正切值可以用角的终边上的点的坐标，特别是圆心在原点的单位圆上的点的坐标来计算.

例 11 和例 12 给出了已知角的一个三角值，求其他三角值的方法. 解题的关键在于平方关系，而开方运算中符号的选取则由角的终边所在的位置确定. 因为涉及了分类讨论和解方程的思想，例 12 比例 11 略难. 由于本教材中未要求学生掌握正割和余割，而例 12 又是相当常见的问题，学生需要掌握这种不通过正割和余割来计算的方法.

例 13 旨在熟悉同角三角关系的常见变化形式，从而能够熟练进行求值.

例 14 旨在熟悉使用同角三角关系通过恒等变换进行证明的方法，其中(1)和(2)实质上是正切与正割、余切与余割的平方之间的关系. 考虑到国家课程标准要求，此处未给出正割、余割的数学符号及名词. 值得注意的是，证明这些恒等关系的方法并不唯一，因为证明恒等式可以采用从左至右、从右至左、作差等不同的形式. 本题不但体现了数学转化的思想，还对分析、推理、计算能力等都有较高的要求.

例 15 和例 16 旨在熟悉诱导公式的使用，前一例具体而相对简单，后一例抽象而具一般性. 在使用诱导公式时，不仅仅要注意转化路径的多样性，更希望体会“符号看象限”的含义，从而可以灵活应用公式，切忌对公式死记和硬套.

例 17 和例 18 旨在熟悉诱导公式，体会“奇变偶不变，符号看象限”的含义并加以运用.

例 19 综合了正弦、余弦的定义与诱导公式，刻画了简单的旋转变换. 还可以根据学生水平，将此题抽象并推广得到一般化的结论.

例 20 和例 21 都是从已知角的正弦、余弦、正切值求角，在本小节仅要求对具特殊三角值的角进行求解.

注意事项

在高中，角是通过旋转来定义的，虽然这里有运动过程，角的概念已经一般化，但角依然是一个几何量. 本章在平面直角坐标系中研究角，用解析的方法将几何问题

代数化. 规定逆时针方向旋转所得的角为正角，这是一个习惯或约定，并没有什么道理可讲，不必对此纠缠.

圆心角的大小与所在圆的半径无关，因此在单位圆中可以用角度来表示弧长，反之也可用单位圆的弧长来度量角度. 弧度制简化了运算，但在中学阶段，要让学生充分理解弧度制的必要性和优越性是比较困难的，将来学了微积分才可深入理解这一点. 现阶段对此不必过分要求学生去体会，只需告知学生这样做会带来研究的方便就可以了. 教材上提到，“在弧度制下，每个角都是一个确定的实数，而每个实数也可以表示一个确定的角，这就构成角的集合与实数集合之间的一个一一对应关系”. 其实，无论在角度制还是弧度制下，都能建立角的集合与实数集合之间的一一对应，只是具体对应关系不同. 教材中提到了弧度制下的弧长公式和扇形面积公式比角度制下要简单，这是高中学生能理解的主要例子. 弧度制的重要性在于它为微积分中的计算带来极大的便利. 只有在弧度制下，才有简单的公式$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}=1$，并使得微积分中的大量公式取最简单的形式.

借助平面直角坐标系，将锐角的正弦、余弦、正切和余切的定义推广到任意角，是从长度之比转化到了坐标之比，而后又在单位圆中将其定义为相应的坐标. 以往有的教材中曾说过的三角函数线，虽能实现同样的目的，但三角函数线在学生学完三角后不再有用，国家课程标准中也未提到三角函数线，本书不再对此有所介绍.

对掌握不同象限的角的正弦、余弦和正切的符号在教学上要高度重视. 在已知角的某个三角值求其余三角值时，除了同角三角公式中的平方关系是解答的关键，还和通过角所属的象限确定三角的符号相关联. 掌握该知识对后续学习和运用诱导公式等也有重要意义.

国家课程标准对正割和余割不作要求，因此同角三角关系的公式仅写出四个，和初中在内容和形式上相同但要求不同. 考虑到后续章节的学习，正割和正切、余割与余切的平方关系仅在例题和边框中作了必要介绍，但无需拓展加深. 此外，考虑到知识的系统性和后续章节的学习，本书对余切作了一定介绍，但这已经略微超出国家课程标准的要求，因此对于余切的要求也不宜过高.

诱导公式的第一课时介绍了如何使用不同的诱导公式将(终边不在坐标轴上的)任意角的三角值最终转化为锐角的三角值. 第二课时介绍了如何运用诱导公式将正弦

与余弦、正切与余切相互转化，从而为后续的两角和与差公式的推导及三角函数的学习等提供工具. 诱导公式推导的关键在于单位圆的使用和对称关系，其中数形结合的思想方法进一步被强化，可以进一步提升学生的直观想象和逻辑推理方面的素养.

教学建议

高中的三角知识虽然与初中的有较大的差异，但并不意味着初中三角知识可以完全被摒弃，它们实际上是高中三角教学的认知起点. 复习锐角的正弦、余弦、正切、余切在教学上是必要的，不仅在于一些定义和公式在形式上是一致的，而且有利于从锐角的三角知识转化为高中的三角知识.

高中三角的内容是中学数学的重要组成部分，它的基础主要是几何中的相似形和圆，但主要用代数方法来研究，这就初步把代数和几何联系起来了. 角是由射线旋转运动形成的，要理解任意角中正角和负角是具有相反意义的量，它的正、负值是为了区分其旋转方向而人为规定的. 同样，象限角也是为了需要人为规定的. 在教学中，应通过具体实例，用旋转的观点讲清角的概念推广的实际意义，说明推广角的概念和引进任意角的必要性.

由于本节的三角知识已经初步把数和形结合起来，在教学中应尽量多地用图形尤其是单位圆来帮助学生加深理解. 又本节的知识前后联系非常紧密，后面的知识经常要用到前面的知识，因此在教学中要随时了解学生的学习情况，并据此调节教学节奏，做到循序渐进.

要借助单位圆和对称性的几何直观，让学生探索三角函数的诱导公式. 在这一过程中，要引导学生通过类比，发现其他形式的对称性以及与旋转变换相关的坐标关系，尝试建立数学公式，并验证公式的正确性. 要引导学生自己归纳出记忆公式的方法，并理解其中的道理. 诱导公式的使用要建立在对“奇变偶不变，符号看象限”含义的准确理解基础之上，绝不要硬记所有的公式.

“已知正弦、余弦或正切值求角”虽然从诱导公式引入，但应用诱导公式并不能保证严密性，而使用单位圆和对称性加以推导，在数学论证上则是比较严密的. 本课时并不对求解三角方程有所要求，虽然所学习的公式具有一般性，但考虑到学生并不具备反三角函数的知识，因此仅限于对已知特殊角的正弦、余弦或正切值求角.

6.2 常用三角公式

教学重点

通过推导两角差的余弦公式，知道两角差的余弦公式的意义.

能从两角差的余弦公式推导两角和与差的正弦、余弦、正切公式，二倍角的正弦、余弦、正切公式，并了解它们的内在联系.

能运用上述公式进行简单的恒等变换，包括推导出半角公式、积化和差公式、和差化积公式(这三组公式不强行要求记忆).

内容分析

本教材中，两角和与差的正弦、余弦、正切公式是在两角差的余弦公式的基础上，通过诱导公式与同角三角关系推导得到的，由此可进一步得到其常用的特例——二倍角公式. 半角公式可视为由二倍角公式的变化形成，而积化和差、和差化积公式可视为由两角和与差的正弦、余弦公式变形而成. 积化和差公式与和差化积公式又可以相互推导. 因此，需要熟悉两角差的余弦公式的推导过程，灵活掌握恒等变换中的正用、逆用和变化应用，将本节中的各个公式有机联系起来.

例 1 旨在例示如何在简单的情形中抓住角之间的联系，使用两角和与差的余弦公式. 要注意本题的解答方法不唯一.

例 2 旨在例示如何在相对复杂的情况下使用两角差的余弦公式，其中在同角三角平方关系的使用中，由角所属的象限确定相应三角值的符号是解题的关键.

例 3 旨在通过关注角之间的联系，合理用已知角表示目标角，再使用两角差的余弦公式. 注意，学生容易直接使用两角和的余弦公式，再使用解方程的方法求得目标角的余弦，但这并不是最优的方法. 通过本例让学生体会可以从不同的角度思考问题，从而合理选择公式和算法.

例 4 旨在例示如何在简单的情形中抓住角之间的联系，使用两角差的正弦公式.

例 5 旨在例示如何使用两角和与差的正弦公式进行恒等变换. 其中，观察等式右侧的特征是合理使用公式的关键.

例 6 和例 7 旨在体现如何在简单的情形中使用两角和与差的正切公式.

例 8 是关于斜三角形的一个常见又比较重要的结论，而其证明用的是两角和的正切公式的一个常见变化形式. 学生需要熟悉两角和与差公式的一些常见变化形式.

例 9 可以为求解向量绕原点旋转作预备，进而可推导出平面直角坐标系的坐标旋转公式. 由于本题综合了三角的定义和两角和的正弦与余弦公式，不但有典型性，更有较强的综合性.

例 10 将单角化为复合角，被称为辅助角公式. 本例综合了三角的定义与两角和或差的正弦公式的逆向使用，且事实上还存在着某种构造性的应用，这个公式的掌握对学生来讲是相对困难的.

例 11 旨在例示如何在简单的情形中使用二倍角公式.

例 12 旨在说明如何从二倍角公式推导三倍角的余弦公式，进一步可以用类似方法推导多倍角的相应公式. 该公式曾在历史上为三次方程的求解提供了重要的思路，但在教学上不应强调记忆该公式，只需掌握其推导方法和体会转化的思想.

例 13 旨在说明二倍角公式如何用来“降次”或“升次”. 虽然本题为证明恒等式，但重要的是需要掌握二倍角公式的正用或逆用的方法.

例 14、例 15、例 16 与例 17 分别证明了半角的正弦、余弦、正切公式，积化和差公式与和差化积公式. 以例题形式呈现的目的在于强调公式的推导过程，而淡化公式的记忆和应用. 在例 14 和例 15 中，公式的成立是有条件的，但考虑到本课时的目的在于体会推导过程，并未在此展开，可根据学生的具体情况必要时补充说明.

注意事项

在两角差的余弦公式的推导中，由于角为任意角，在平面直角坐标系中采用了解析方法通过构造图形而加以证明. 这种推导方法有利于提升学生的分析和论证能力，培养学生的数学素养.

本节中很多的三角公式是有适用条件的，在教学过程中应予注意，以保证数学的严谨性，但不宜对此有较高的要求.

在三角恒等变换过程中，熟悉公式的特征才能够合理正用、逆用或变化使用公式；观察角(已知角和目标角)之间的联系也会影响公式选用的合理性；而涉及到平方关系的表达式在开方运算过程中往往与角所属象限的三角的符号选择有关. 以上三点是本节公式使用的难点，需要在学习中予以强调. 事实上，这些在本节公式的推导过程中都分别有所体现，在教学中必须注重分析和展现这些要点.

教学建议

辅助角公式是在下一章三角函数学习中常用的工具. 辅助角公式在教学上不仅是

重点，而且由于综合了等式的构造、三角的定义、两角和与差公式的逆向使用等知识和方法，更是教学中的难点.

二倍角公式与半角公式存在天然的联系，在二倍角公式的逆用和变化使用中需要适当控制难度.

半角公式、积化和差公式与和差化积公式在教学中不必过分展开，不需要强调记忆，更不必强调使用这些公式进行化简、求值与证明. 体会推导过程中的知识来源、恒等变换方法及数学思想，让学生知道这些公式并在需要时能够查阅或推导，就达到了该小节的教学目的.

6.3 解三角形

教学重点

探索三角形边长与角度的关系，掌握正弦定理、余弦定理.

能用正弦定理、余弦定理解决简单的实际问题.

内容分析

“解三角形”包含两部分内容：一是正弦定理和余弦定理的推导，并应用于求三角形的边长或角度等基本量；二是综合应用正弦定理和余弦定理解决简单的实际问题.

例 1 作为本节引例，将生产生活中的实际问题转化为具体数学问题，体现了在解三角形中引入正弦定理的必要性，同时也有利于学生数学建模能力的培养. 从教学要求来说，在已知三角形两角和一边的条件下，使用正弦定理入手求解三角形中的其他量相对比较容易，无需再像初中时那样通过辅助线并转化为直角三角形来求解.

例 2 主要介绍了正弦定理中边与所对角的正弦之比的几何意义. 本题对圆的基础知识的了解有一定要求，本质上是转化为直角三角形处理. 该证明方法和数学史上的一般证明方法有一定差异，但相对来讲更容易理解.

例 3 旨在熟悉面积公式和例 2 的结论.

例 4 要求在已知三角形两边和一夹角的条件下，求其他的边或角等基本量. 对此问题，从余弦定理入手相对便利. 在求得另一边后，用正弦定理或余弦定理求其他量都是可行的选择. 在使用正弦定理求得角的正弦后，在判断角为锐角或钝角时，可以借助大边对大角的定性判断.

例 5 旨在说明在已知三角形两边和其中一边所对的角的条件下，求其他的边或角

等基本量. 对此问题，使用正弦定理或余弦定理入手都是可行的. 如果从正弦定理入手，要判断角为锐角或钝角，可使用大边对大角来加以判断，在某些情况下也是有难度的. 如果从余弦定理入手求边，计算量相对较大，但判断解较为容易. 对于此类问题不要求深入研究，能够根据相应条件求解即可.

例 6 说明在已知三角形三边的条件下，求其角. 对此问题，使用余弦定理入手解三角形是常用的方法. 在已知三角形三边求面积的过程中，也给出了证明海伦公式的一般思路.

例 7 旨在说明如何综合运用正弦定理和余弦定理证明三角形的相关问题. 在教学过程中也可以让学生探究本题的其他证明方法.

例 8 实际上也是典型的三角形求解综合问题，涉及了三角形面积公式、余弦定理和同角三角关系. 在三角形求解过程中，要意识到已知某个角的正弦值求其余弦值时，会涉及到对角为锐角还是钝角的判断.

例 9 是将第一节中“已知正弦、余弦或正切值求角”和反三角函数知识综合起来的题目. 在教学中，对反三角函数知识不必过分拓展和拔高，也不应拓展到三角方程.

例 10 是常见的三角测量问题. 在初中，学生通常将其处理为两个直角三角形的求解，而本题告诉学生也可以将其处理为一个斜三角形和一个直角三角形的求解. 该模型的建立和求解是相对容易的，而且符合学生的生活体验，因此将其作为正弦定理和余弦定理应用于三角测量中的第一个案例.

例 11 让学生进一步体会三角测量的模型建立过程，而借助图形和数据分析是解决问题的关键. 三角测量往往涉及多个三角形，需要分析判断已有数据，选用合理的求解顺序和定理.

注意事项

正弦定理和余弦定理是三角形中边角关系的定量刻画，正弦定理是直角三角形中边角数量关系的推广，余弦定理是直角三角形勾股定理的推广. 在证明定理的过程中，学生容易通过作三角形的高从而转化为直角三角形来推导，但该方法必须用分类讨论来保证其严谨性，这点对许多学生来讲是有难度的. 本教材中用解析法证明正弦定理和余弦定理，与正弦、余弦、正切的定义等知识一脉相承，学生还可以体会到解析法论证带来的简洁之美.

正弦和余弦定理在三角测量中的应用较为广泛，如“如何测量底部不能达到的建

筑物高度”“如何测量地面上不能达到的两点间距离”等. 本节仅要求处理简单的三角测量问题.

教学建议

正弦定理和余弦定理的证明方法较多，教师可以引导学生探究不同的证明，提高学生的学习主动性和论证能力.

解三角形案例中，已知三角形两边和一对角求解其他量时，用正弦定理和余弦定理入手都是可行的方法，不要误认为只有用正弦定理入手才便利. 对于这类问题的解的讨论，在国家课程标准中是不作要求的，只要给出数据加以求解即可. 事实上求解过程也会面临解的讨论问题，但无需过分拓展.

本教材中对反三角函数的要求是掌握锐角的反三角函数表示，或者说只要求以反三角函数记号表达锐角即可. 考虑到后续章节(如向量、解析几何和立体几何等章节)的学习需要，结合第一节“已知正弦、余弦或正切值求角”的知识，可以得到一般性结论. 不要求掌握反三角函数的定义、性质和图像，仅要求能够用反三角函数的记号表达所求角，并能用计算器求出近似值. 另外，这里并不意味着对三角方程的求解提出要求.

正弦定理与余弦定理的教学一定要联系实际，使学生懂得解三角形的知识在实际生活中有着广泛的应用，从而加强数学的应用意识，并提高学习的积极性. 在用正弦定理、余弦定理解决简单的实际问题的教学中，要注重让学生体会数学建模的一般思路和方法，同时也要注意控制问题难度和引导学生合理使用计算器等工具.

三、参考答案或提示

6.1 正弦、余弦、正切、余切

练习 6.1(1)

1. (1) 错误.　(2) 正确.　(3) 错误.　(4) 错误.

2. $\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ+180^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+270^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$\{\alpha \mid \alpha=k\cdot 360^\circ+90^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

3.（1）$45°$，第一象限.　（2）$185.3°$，第三象限.

（3）$350°$，第四象限.　（4）$170°$，第二象限.

练习 6.1(2)

1. $\frac{\pi}{12}$，$-\frac{3}{5}\pi$，$\frac{\pi}{8}$.

2. $165°$，$-72°$，$-171.89°$.

3. 3π cm，15π cm^2.

4. 第二象限或第四象限.

练习 6.1(3)

1. $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{13}}{13}$，$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{13}}{13}$，$\tan\alpha=-\frac{3}{2}$，$\cot\alpha=-\frac{2}{3}$.

2. C.

3.（1）第三象限.　（2）第三象限.

练习 6.1(4)

1. $\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$，$\tan\frac{5\pi}{3}=-\sqrt{3}$，$\cot\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. $\sin k\pi=0$，$\cos k\pi=(-1)^k(k\in\mathbf{Z})$.

3. $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\tan\alpha=2$，$\cot\alpha=\frac{1}{2}$.

4. 当 α 为第一象限的角时，$\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\tan\alpha=3$；当 α 为第三象限的角时，$\sin\alpha=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\tan\alpha=3$.

练习 6.1(5)

1. $\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{2\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=\frac{7}{2}$.

2.（1）1.　（2）1.

3. 证明：$\cot^2\alpha-\cos^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\cos^2\alpha=\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}=\cot^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$.

练习 6.1(6)

1.（1）方法一：根据角 α 与角 $2\pi-\alpha$ 的终边关于 x 轴对称，证明略；

方法二：$\sin(2\pi-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$.

(2)(3)(4)同理可证.

2. (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.　(2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.　(3) $\sqrt{3}$.

3. (1) -3.　(2) $\sin\alpha$.

练习 6.1(7)

1. (1) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi-\alpha\right)=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$.

(2)(3)(4)同理可证.

2. $\cos\alpha$.

3. 设点 $A(3,4)$位于角 θ 的终边上，则 $\sin\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=\frac{3}{5}$. 点 $A'(x,y)$位于角 $\theta-\frac{\pi}{2}$的终边上，且 $OA'=OA=5$，$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{y}{5}$，$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{x}{5}$，从而有$x=5\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=5\sin\theta=4$，$y=5\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-5\cos\theta=-3$.

所以，点 A'的坐标为$(4,-3)$.

练习 6.1(8)

1. (1) $x=k\pi-(-1)^k\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.　(2) $x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.　(3) $x=k\pi-\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

2. (1) $\left\{\frac{\pi}{2},\ \frac{11\pi}{6}\right\}$.　(2) $\left\{x \mid x=k\pi+\frac{5\pi}{24}\text{或 }x=k\pi-\frac{11\pi}{24},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(3) $\left\{x \mid x=\frac{k\pi}{3}-\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

习题 6.1

A 组

1. (1) D.　(2) C.　(3) C.

2. (1) $359°$，第四象限.　(2) $170°$，第二象限.

3. (1) $\frac{5\pi}{4}$，第三象限.　(2) $\frac{25\pi}{3}$，第一象限.

（3）$-\frac{\pi}{8}$，第四象限.　　（4）$-\frac{6\pi}{5}$，第二象限.

4. $\alpha=\frac{5\pi}{6}$，$S=\frac{5\pi}{3}$.

5.（1）$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=-\frac{4}{3}$，$\cot\alpha=-\frac{3}{4}$.

（2）$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，$\tan\alpha=\sqrt{3}$，$\cot\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6.（1）负号.　　（2）负号.　　（3）正号.

7.（1）第四象限.　　（2）第一象限或第四象限.

8.（1）$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，$\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

（2）$\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2}$，$\cos\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\frac{7\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

9.（1）$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

（2）当α为第二象限的角时，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$；当$\alpha$为第四象限的角时，$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

10. 证明：（1）$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

（2）$\tan\alpha-\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

11.（1）$\frac{1}{3}$.　　（2）$\frac{3}{8}$.

12.（1）$\frac{1}{2}$.　　（2）$\frac{\sqrt{2}}{2}$.　　（3）$-\frac{1}{2}$.　　（4）$-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

13. $\sin\frac{23\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\frac{23\pi}{3}=\frac{1}{2}$，$\tan\frac{23\pi}{3}=-\sqrt{3}$；

$\sin\left(-\frac{87\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\left(-\frac{87\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\left(-\frac{87\pi}{4}\right)=1$.

14.（1）0.　　（2）$\sin\alpha$.　　（3）$\cot\alpha$.　　（4）$-\tan\alpha$.

B 组

1.（1）$S=\{\alpha \mid \alpha=k\cdot 360^\circ+60^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$\alpha=-300^\circ$或$60^\circ$或$420^\circ$.

（2）$S=\{\alpha \mid \alpha=k\cdot 360^\circ-21^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$\alpha=-21^\circ$或$339^\circ$或$699^\circ$.

2. 60°或150°.

3. 设圆心角为 $\alpha(0<\alpha<2\pi)$，半径为 r. 由题意，得 $\alpha r+2r=16$，$\frac{1}{2}\alpha r^2=12$. 解得 $r=6$，$\alpha=\frac{2}{3}$或 $r=2$，$\alpha=6$.

所以，圆心角大小为$\frac{2}{3}$弧度或 6 弧度.

4. $\{\alpha \mid \alpha=k\cdot 180^\circ+45^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$\{\alpha \mid \alpha=k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z}\}$.

5.（1）三.　（2）$\alpha+\beta=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.　（3）y 轴

6. 设圆心角为 $\alpha(0<\alpha<2\pi)$，半径为 r，面积为 S. 由题意，得 $\alpha r+2r=20$. 于是，$S=\frac{1}{2}\alpha r^2=\frac{1}{2}(20-2r)r=-(r-5)^2+25$，$\frac{10}{\pi+1}<r<10$.

当 $r=5$ 时，圆心角 $\alpha=2$ 弧度，扇形面积的最大值为 25 cm^2.

7. $\tan\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{3}$.

8. 证明：（1）$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

（2）$(1-\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha+2\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=2(1-\sin\alpha+\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)=2(1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)$.

9. 由于 α 是第二象限的角，得 $\cos\alpha<0$，因此原式$=\frac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}+\frac{1-\sin\alpha}{|\cos\alpha|}=\frac{2}{|\cos\alpha|}=-\frac{2}{\cos\alpha}$.

10. $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

11. 由题意，得 $\sin\alpha+\cos\alpha=-2k$，$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3k}{2}$. 因为$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$，所以 $4k^2=1+3k$，从而有 $k=1$ 或 $k=-\frac{1}{4}$. 当 $k=1$ 时，关于 x 的二次

方程 $2x^2+4kx+3k=0$ 无实数解，应舍去.

综上，可得 $k=-\frac{1}{4}$.

12.（1）$x=2k\pi+\frac{4\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.　（2）$x=\frac{3\pi}{4}$ 或 $x=\frac{5\pi}{4}$.

（3）$x=k\pi-(-1)^k\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$.　（4）$x=k\pi+\frac{5\pi}{48}$ 或 $x=k\pi-\frac{11\pi}{48}$，$k\in\mathbf{Z}$.

6.2 常用三角公式

练习 6.2(1)

1.（1）$\frac{\sqrt{2}}{2}$.　（2）$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $-\frac{7\sqrt{2}}{26}$.

3. 证明：（1）$\frac{2\cos A\cos B-\cos(A-B)}{\cos(A-B)-2\sin A\sin B}=\frac{2\cos A\cos B-(\cos A\cos B+\sin A\sin B)}{\cos A\cos B+\sin A\sin B-2\sin A\sin B}=1$.

（2）$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta=(1-\sin^2\alpha)\cos^2\beta-\sin^2\alpha(1-\cos^2\beta)=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$.

练习 6.2(2)

1.（1）$\frac{\sqrt{3}}{2}$.　（2）$\sqrt{3}$.

2. $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}$，$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=7$.

3. 证明：（1）$\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\tan^2\alpha-\tan^2\beta$.

（2）$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$.

练习 6.2(3)

1. $\sin C=\frac{220}{221}$，$\cos C=-\frac{21}{221}$.

2. $\sin(\alpha+\beta)=\frac{33}{65}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{56}{65}$，所以 $\alpha+\beta$ 是第二象限的角.

3. (1) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$.　(2) $2\sin\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

练习 6.2(4)

1. (1) $\dfrac{1}{4}$.　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.　(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

2. $\sin 2\alpha=-\dfrac{4}{5}$，$\cos 2\alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\tan 2\alpha=\dfrac{4}{3}$.

3. 证明：(1) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+\sin 2\alpha$.

(2) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\cos 2\alpha$.

(3) $\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos^2\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$.

练习 6.2(5)

1. 证明：由 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，将上述两式相加并整理，得 $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$.

2. 证明：由上题有 $\dfrac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]=\cos x\cos y$，在其中取 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$y=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$，整理就有 $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

3. 证明：$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

习题 6.2

A 组

1. (1) $\dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.　(2) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.　(3) $2+\sqrt{3}$.

2. (1) $\cos\alpha$.　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　(3) $\sqrt{2}\cos\theta$.　(4) $\tan\alpha$.

3. $\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{21}{221}$.

4. $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{33}{65}$，$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{56}{65}$，$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{33}{56}$.

5. $\tan(\alpha+\beta)=-1$ 且 $0<\alpha+\beta<\pi$，故 $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$.

6. $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{17}{31}$.

7. 证明：（1）$\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\tan\alpha+\tan\beta$.

（2）$\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\beta+\sin^2\beta)+\sin\beta\cos\beta(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta$.

8. $\sin 2\varphi=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$，$\cos 2\varphi=-\dfrac{7}{9}$，$\tan 2\varphi=-\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$.

9. 顶角的正弦、余弦和正切值分别为$\dfrac{24}{25}$、$\dfrac{7}{25}$和$\dfrac{24}{7}$.

10. 证明：（1）$1+\sin\alpha=\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$.

（2）等式右边$=2\cos^2 2\alpha-1-4\cos 2\alpha+3=2(\cos 2\alpha-1)^2=2(1-2\sin^2\alpha-1)^2=8\sin^4\alpha=$左边，所以原式成立.

（3）$\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}=\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}}$

$=\dfrac{1+\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan\dfrac{\alpha}{2}}$.

（4）$\tan\alpha+\cot\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha}=\dfrac{2}{\sin 2\alpha}$.

B 组

1. 由 $\sin\alpha-\sin\beta=-\dfrac{1}{3}$，$\cos\alpha-\cos\beta=\dfrac{1}{2}$，得$(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{4}$，即 $2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{13}{36}$，从而有 $2-2\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{13}{36}$，故 $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{59}{72}$.

2. $\sin\beta=\dfrac{7}{25}$.

3. (1) $\tan\alpha=\frac{1}{3}$.　　(2) 原式$=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{1}{7}$.

4. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}$，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$，由上述两式得 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{5}{12}$，$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{12}$，从而有 $\tan\alpha\tan\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=-\frac{1}{5}$.

5. 由题意，得$\frac{5\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{7\pi}{2}$且 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{-4+3\sqrt{15}}{20}>0$，所以 $\alpha+\beta$ 是第二象限的角.

6. $\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$.

7. (1) $2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$.　　(2) $13\sin(\alpha+\varphi)$(其中，φ 由 $\sin\varphi=-\frac{12}{13}$，$\cos\varphi=\frac{5}{13}$确定，通常取 $\varphi\in[0,2\pi)$).

8. $\left(\frac{\sqrt{2}}{10},\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)$.

9. 由 $\sin\alpha=\frac{8}{5}\sin\frac{\alpha}{2}$，得 $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{8}{5}\sin\frac{\alpha}{2}$，从而有 $\sin\frac{\alpha}{2}=0$ 或 $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{5}$,所以 $\cos\alpha=1$ 或 $\cos\alpha=\frac{7}{25}$.

6.3　解三角形

练习 6.3(1)

1. $c\approx7.69$.

2. $b\approx7.66$，$c\approx6.74$，$S\approx16.58$(由于近似的方法不同，面积答案也可能为 $S\approx16.59$).

3. 直角三角形.

练习 6.3(2)

1. $c=\sqrt{13}$.

2. $B=30^\circ$，$C=105^\circ$，$c=3\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

3. $-\frac{1}{4}$.

练习 6.3(3)

1. $b=\sqrt{21}$.

2. 略.

3. 证明：(1) $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=\dfrac{(2R\sin A)^2+(2R\sin B)^2}{(2R\sin C)^2}=\dfrac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}$.

(2) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.将上述三式相加并整理，得 $a^2+b^2+c^2=2(ab\cos C+ac\cos B+bc\cos A)$.

4. (1) $\arcsin\dfrac{3}{5}$.　(2) $\pi-\arccos\dfrac{2}{3}$.　(3) $-\arctan 2$.　(4) $k\pi-(-1)^k\arcsin\dfrac{2}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

练习 6.3(4)

1. $\angle BSA=75°-30°=45°$，$AB=18\times\dfrac{40}{60}=12$. 由 $\dfrac{BS}{\sin 30°}=\dfrac{AB}{\sin 45°}$，得 $BS=6\sqrt{2}$（海里）. 所以，货轮到灯塔 S 的距离为 $6\sqrt{2}$ 海里.

2. 设缉私船应以北偏东 α 方向，经过时间 t 追上走私船，则 $\dfrac{30t}{\sin\alpha}=\dfrac{45t}{\sin 135°}$，从而 $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}\sin 135°=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，即 $\alpha\approx 28.13°$. 所以，缉私船应以北偏东$28.13°$方向追击走私船.

3. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=56.3°$，由余弦定理 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB=482.80^2+631.50^2-2\times 482.80\times 631.50\times\cos 56.3°\approx 293\ 557.052\ 5$，得 $AB\approx 541.81$（米），$DE=AB-AD-BE\approx 421$（米）. 所以，隧道的长约为 421 米.

习题 6.3

A 组

1. $BC=\sqrt{6}$.

2. $a=8\sqrt{21}$.

3. $c=3$，$\cos B=-\dfrac{1}{7}$，最大角 B 的余弦值为$-\dfrac{1}{7}$.

4. $c=\sqrt{5}$ 或 $c=\sqrt{29}$.

5. $C=30°$，$a=\sqrt{3}+1$，$A=105°$.

6. 由题意，得$\dfrac{1}{2}ab\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$和 $a^2+b^2-2ab\cos\dfrac{\pi}{3}=4$，从而有 $ab=4$ 和 $a^2+b^2-ab=4$，解得 $a=b=2$.

7. 证明：在$\triangle BAD$中，有$\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}$，在$\triangle CAD$中，有$\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}$，由$\angle ADB=180^\circ-\angle ADC$，$\angle BAD=\angle CAD$，得$\sin\angle ADB=\sin\angle ADC$，$\sin\angle BAD=\sin\angle CAD$，从而有$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$.

8. 在$\triangle ABD$中，由余弦定理，得$BD^2+4-2\cdot 2\cdot BD\cos\angle ADB=3$. 在$\triangle CBD$中，由余弦定理，得$BD^2+4-2\cdot 2\cdot BD\cos\angle CDB=9$. 又由$\angle ADB=180^\circ-\angle CDB$，得$\cos\angle ADB=-\cos\angle CDB$，将上述两式相加，即得$2(BD^2+4)=3+9$，从而$BD=\sqrt{2}$.

9.（1）由$a=2b\cos C=2b\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，得$c^2=b^2$，所以三角形$ABC$为等腰三角形.

（2）$\tan B=\dfrac{\cos(B-C)}{\sin A-\sin(B-C)}=\dfrac{\cos B\cos C+\sin B\sin C}{\sin(B+C)-\sin(B-C)}=\dfrac{\cos B\cos C+\sin B\sin C}{2\cos B\sin C}$，所以$\dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{\cos B\cos C+\sin B\sin C}{2\cos B\sin C}$，从而有$\cos B\cos C-\sin B\sin C=0$，即$\cos(B+C)=0$，故$B+C=\dfrac{\pi}{2}$，三角形$ABC$为直角三角形.

10. $BC=\sqrt{1.95^2+1.4^2-2\times1.95\times1.4\times\cos 66^\circ20'}\approx1.89$(米).

B组

1. $\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$.

2. 由$S=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{4}$，得$\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{4}$，从而$\sin A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos A$，因此$\tan A=1$. 又$A\in(0,\pi)$，所以$A=\dfrac{\pi}{4}$.

3.（1）$\cos A=\dfrac{3}{5}$.　（2）面积$S=84$.

4. 周长最小值为12；当三角形为等边三角形时，面积取得最大值$4\sqrt{3}$.

5.（1）$\arcsin\dfrac{2}{5}$或$\pi-\arcsin\dfrac{2}{5}$.　（2）$\pi\pm\arccos\dfrac{2}{3}$.　（3）$k\pi-\arctan\dfrac{1}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

6. $a=\sqrt{13}$.

7. 在 $\triangle ADB$ 中，由 $\dfrac{AD}{\sin 45^\circ}=\dfrac{15\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$，得 $AD=30$．在 $\triangle ACD$ 中，$CD=\sqrt{30^2+(10\sqrt{3})^2-2\times10\sqrt{3}\times30\times\cos 30^\circ}=10\sqrt{3}$，从而得 $\angle ADC=30^\circ$．所以灯塔 C 与 D 相距 $10\sqrt{3}$ 海里，C 在 D 的南偏东30°方向.

8. 在$\triangle BCD$ 中，由$\dfrac{100}{\sin 65^\circ}=\dfrac{BD}{\sin 45^\circ}$，得 $BD\approx78.02$(米)．在$\triangle ACD$ 中，由$\dfrac{100}{\sin 67^\circ}=\dfrac{AD}{\sin 80^\circ}$，得 $AD\approx106.99$(米)．在$\triangle ABD$ 中，$AB=\sqrt{AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos 37^\circ}\approx64.81$(米).

9. 证明：（1）$\dfrac{\cos 2A}{a^2}-\dfrac{\cos 2B}{b^2}-\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)=\dfrac{\cos 2A-1}{a^2}+\dfrac{1-\cos 2B}{b^2}=\dfrac{2\sin^2 B}{b^2}-\dfrac{2\sin^2 A}{a^2}=0$，从而有$\dfrac{\cos 2A}{a^2}-\dfrac{\cos 2B}{b^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}$.

（2）$(a^2-b^2-c^2)\tan A+(a^2-b^2+c^2)\tan B=-2bc\cos A\tan A+2ac\cos B\tan B=-2bc\sin A+2ac\sin B=4S_{\triangle ABC}-4S_{\triangle ABC}=0$.

复习题

A 组

1.（1）A.　　（2）C.

2.（1）-2.　　（2）二.　　（3）$-\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$.

3. $\sqrt{2}$.

4. 当 $a>0$ 时，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$；当 $a<0$ 时，$\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$.

5.（1）$\sin\theta$.　　（2）0.

6. $\dfrac{2}{3}$.

7. $\dfrac{5}{8}$.

8. 证明：（1）$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}a\cdot2R\sin B\cdot\sin C=\dfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{a}{\sin A}\cdot\sin B\sin C=$

$\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}$.

（2）由上题，有 $S=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2(\sin B\cos C+\cos B\sin C)}=\dfrac{a^2}{2(\cot B+\cot C)}$.

9.（1）$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$.　　（2）$\tan C=1$.

10. 证明：$(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2+2\cos(\alpha-\beta)=2+2\left[2\cos^2\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)-1\right]=4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

B组

1.（1）C.　　（2）D.

2.（1）120°.　　（2）$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

3. 证明：由 $\sin\alpha=a\sin\beta$，$b\cos\alpha=a\cos\beta$，得 $\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha=a^2\sin^2\beta+a^2\cos^2\beta$，即 $1-\cos^2\alpha+b^2\cos^2\alpha=a^2$. 又 α 为锐角，所以 $\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{a^2-1}{b^2-1}}$.

4. $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$.

5. 由 $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$，$\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$，得 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$. 因为 $\sin(\alpha-\beta)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\alpha-\beta=-\dfrac{\pi}{4}$.

6. 证明：α 及 β 都是锐角，则 $0<\alpha+\beta<\pi$. 因为 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=2$，即 $\tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta$，所以 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$，从而有 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

7. $-\sqrt{2}$.

8. 证明：（1）$\dfrac{2(1+\sin 2\alpha)}{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}=\dfrac{2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha)}{1+2\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}=1+\tan\alpha$.

（2）$2\sin\alpha+\sin 2\alpha=2\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{2\sin\alpha(1-\cos^2\alpha)}{1-\cos\alpha}=\dfrac{2\sin^3\alpha}{1-\cos\alpha}$.

9.（1）由 $\sin C+\sin(B-A)=\sin(A+B)+\sin(B-A)=2\sin B\cos A=\sin 2A$，得 $2\sin B\cos A=2\sin A\cos A$，从而有 $\cos A=0$ 或 $\sin A=\sin B$. 于是，$A=\dfrac{\pi}{2}$或$A=$

B，三角形 ABC 为直角三角形或等腰三角形.

（2）由$\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{a^2}{b^2}$，得 $b^2\tan A=a^2\tan B$，从而 $b^2\sin A\cos B=a^2\sin B\cos A$，进一步由正弦定理得$\sin^2 B\sin A\cos B=\sin^2 A\sin B\cos A$，所以 $\sin 2A=\sin 2B$. 因此 $2A=2B$ 或 $2A=\pi-2B$，即 $A=B$ 或 $A+B=\dfrac{\pi}{2}$，从而三角形 ABC 为等腰三角形或直角三角形.

10. 证明：$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=\tan\dfrac{A}{2}\left(\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\right)+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}=\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B+C}{2}\left(1-\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}\right)+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}=1-\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}=1$.

拓展与思考

1.（1）

θ	1	0.5	0.1	0.01	0.001
$\sin\theta$	0.841 5	0.479 4	0.099 8	0.009 999 8	0.001
$\dfrac{\sin\theta}{\theta}$	0.841 5	0.958 9	0.998 3	0.999 98	0.999 999 8

（2）当 θ 趋近于 0 时，$\dfrac{\sin\theta}{\theta}$的值趋近于 1.

（3）如图 6－R1，当 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$时，在以原点为圆心的单位圆中，记$\triangle OAB$ 的面积为S_1，扇形 OAB 的面积为S_2，直角三角形 OAC 的面积为 S_3，不难由图得到 $S_1<S_2<S_3$，从而有 $\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\theta<\dfrac{1}{2}\theta\cdot 1^2<\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\theta$，于是有 $\sin\theta<\theta<\tan\theta$.

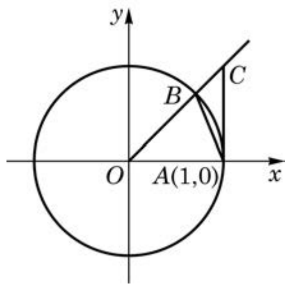


图 6－R1

因为$\sin\theta<\theta<\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，从而有 $\cos\theta<\dfrac{\sin\theta}{\theta}<1$. 当 θ 趋近于 0 时，$\cos\theta$ 趋近于 1.

所以，$\dfrac{\sin\theta}{\theta}$的值趋近于 1.

2.（1）①无解；②$B=90°$；③$B=\arcsin\dfrac{9}{13}$或 $\pi-\arcsin\dfrac{9}{13}$；④$B=30°$；⑤$B=$

$\arcsin\dfrac{9}{22}$.

（2）当 $0<a<9$ 时，B 无解；当 $a=9$ 或 $a\geqslant 18$ 时，B 有一解；当 $9<a<18$ 时，B 有两解.

3.（1）由 $\cos 54°=\sin 36°$，得 $4\cos^3 18°-3\cos 18°=2\sin 18°\cos 18°$，即 $4\cos^2 18°-3=2\sin 18°$，从而有 $4\sin^2 18°+2\sin 18°-1=0$. 因为 $\sin 18°>0$，解二次方程得 $\sin 18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

（2）如图 6－R2，在等腰三角形 ABC 中，$AB=AC$，$\angle BAC=36°$. 设 $BC=a(a>0)$，作 $\angle ABC$ 的角平分线 BD，则 $BD=AD=a$. 由于 $\triangle DBC$ 与 $\triangle CAB$ 相似，因此 $\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{BC}{AC}$，即 $\dfrac{DC}{a}=\dfrac{a}{DC+a}$，从而 $DC=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$. $\sin 18°=\cos 72°=\dfrac{a^2+DC^2-a^2}{2a\cdot DC}=\dfrac{DC}{2a}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

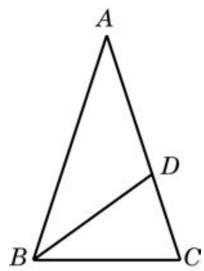


图 6－R2

4. 设 $\angle DAB=\theta$. 由题意，在三角形 ADC 中，$\dfrac{AD}{\sin 17.5°}=\dfrac{DC}{\sin(71.3°-\theta)}$；在 $\triangle BDC$ 中，$\dfrac{DC}{\sin 24.2°}=\dfrac{BD}{\sin 35.4°}$；在 $\triangle BDA$ 中，$\dfrac{BD}{\sin\theta}=\dfrac{AD}{\sin 31.6°}$. 将上述三式相乘，得 $\sin 17.5°\sin 24.2°\sin\theta=\sin(71.3°-\theta)\sin 35.4°\sin 31.6°$，从而有 $\sin 17.5°\sin 24.2°=(\sin 71.3°\cot\theta-\cos 71.3°)\sin 35.4°\sin 31.6°$，得 $\cot\theta\approx 0.767\,2$，所以 $\angle DAB\approx 52.5°$.

四、相关阅读材料

参考文献

伊莱·马奥尔. 三角之美——边边角角的趣事(第 2 版)[M]. 曹雪林，边晓娜，译. 北京：人民邮电出版社，2018.

第 7 章　三角函数

一、本章概述

总体要求

国家课程标准指出："重视以学科大概念为核心，促进学科核心素养的落实"."函数"是数学学科的一个大概念，它是一条"贯穿高中数学课程的主线". 其中，三角函数是基本初等函数之一. 现实生活中存在大量的周期现象，而三角函数是刻画周期现象最典型的数学模型，它是分析和解决周期问题的基本工具，在物理学、工程学和其他许多领域都有广泛的应用.

通过第 4 章和第 5 章的学习，我们有了函数这个概念和工具，从而可以从对应关系的角度建立正弦函数、余弦函数和正切函数的概念. 将"三角函数"从三角中分离出来独立成章，既加强了对三角运算的基本训练，也突出了"函数"这一数学课程主线，凸显函数学习中由特殊到一般、再由一般到特殊的认知规律.

区别于第 6 章中静态地将正弦、余弦和正切作为比值研究的方式，本章从动态的角度，对正弦函数、余弦函数和正切函数加以研究. 在这一章中，给出了正弦函数、余弦函数和正切函数的定义，指出了它们的定义域是实数集的一个子集.

通过本章的学习，学生可以体会"用几何直观和代数运算的方法研究三角函数的周期性、奇偶性(对称性)、单调性和最大(小)值等性质；利用三角函数构建数学模型，解决实际问题".

对于三角函数的研究，本章采用先画函数图像，再研究三角函数的性质的方式. 这种数形结合的方法，有利于学生发现三角函数的性质，而数形结合的思想也是"直观想象"这一数学核心素养的体现.

对于三角函数的周期性、奇偶性、单调性、值域与最值等主要性质，用几何直观

和代数运算的方法加以研究，并尽量说明其理由，以提升学生“逻辑推理”的素养．本章呈现的生活中的实例可以作为培养学生“数学建模”素养的素材．

课时安排建议

本章的课时安排建议为 8+1，共计 9 课时．建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
7.1　正弦函数的图像与性质	4	正弦函数的图像　1 课时
		正弦函数的性质：周期性　1 课时
		值域与最值　1 课时
		奇偶性与单调性　1 课时
7.2　余弦函数的图像与性质	1	
7.3　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像	1	可以根据学生实际情况调整为 1.5 课时
7.4　正切函数的图像与性质	1	
探究与实践	1	可以根据学生实际情况调整为 0.5 课时
复习与小结	1	

内容编排与特色

本章内容共分为四节，分别是 7.1 正弦函数的图像与性质，7.2 余弦函数的图像与性质，7.3 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像，7.4 正切函数的图像与性质．

“7.1 正弦函数的图像与性质”着重研究正弦函数的图像、性质(周期性、奇偶性、单调性和最值)，为后续三节内容的学习奠定基础．与幂函数、指数函数和对数函数不同，三角函数具有周期性．研究正弦函数的性质时，先研究它的周期性，再研究其奇偶性、单调性和最值，这样在讨论正弦函数的单调性和最值时，就可以选择在长度为一个周期的适当区间上加以研究，从而简化问题．为了说明正弦函数 $y=\sin x$的最小正周期是 2π，我们结合它的图像，从图像的平移角度说明小于 2π 的正数不是正弦函数$y=\sin x$ 的最小正周期，这一论述过程体现了数形结合的思想，有助于培养学生“直观想象和逻辑推理”的核心素养．

本节末尾，教材提供了一篇阅读材料“圆周运动与简谐运动”．即使学生暂时缺乏

这一部分物理知识的基础，也可以感受到正弦函数在物理等学科中的应用，体会物理问题中数学建模的思想.

“7.2 余弦函数的图像与性质”一节，因为余弦函数 $y=\cos x$ 与函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 是完全相同的函数，所以可以很自然地利用平移把余弦函数 $y=\cos x$ 转化成正弦函数 $y=\sin x$，从而得到余弦函数的图像与性质. 本节的例题既是对余弦函数的图像和性质的应用，又是对正弦函数中未涉及到的问题(即在自变量有限制范围时正弦型或余弦型函数的最值问题)的补充.

“7.3 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像”中，引入了一个实际问题，说明研究函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像的必要性，并了解参数 A、ω 及 φ 的实际意义. 例 1 涉及参数 A、ω、φ 的变化对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图像的影响，但在探究过程中，基本上采取点到为止，适当控制了难度. 例 3 借助图像加强学生对于参数 A、ω、φ 的意义的理解. 通过实际问题和例 3 使学生体会到三角函数与现实世界的密切联系.

本节末尾提供了一个探究与实践活动“潮汐的函数模拟”和一篇阅读材料“声音中的三角函数”. 这两个材料都凸显了三角函数在描述周期变化问题中的作用. 其中，探究与实践活动可以引导学生理解如何用三角函数描述客观世界中的周期变化规律，这也是数学建模的一部分.

“7.4 正切函数的图像与性质”包含正切函数的图像与正切函数的性质两个部分，类比正弦函数的研究方法可以很快得到正切函数的图像与性质. 所展示的例题与“二期课改”教材基本一致，并把“二期课改”教材中较难的一个例题作为“探究与实践”活动.

本章结构上注重知识的前后逻辑关系，是一般函数的理论在三角函数中的应用，是理论指导实践的具体体现. 本章的章首语、探究与实践、课后阅读以及部分章节中的情景引入和例题设计关注学生生活，注重以学生的发展为本；丰富的生活实例及问题实例凸显数学从生活中来，强调数学与生活、数学与物理的联系，提高学生运用数学解决实际生活中的问题的能力.

教学提示

教师应把涉及到“函数”这一大概念的内容视为一个整体，使学生体会由一般函数到三角函数这种由一般到特殊的理论指导实践的过程；体会用三角函数图像的几何直

观认识三角函数的性质的过程；经历运用三角函数解决实际问题的全过程.

在三角函数的教学中，要注意先由图像发现性质，再论证性质的过程；由正弦函数的图像与性质，转化或类比得到余弦函数、正切函数的图像与性质的过程.

教学中应充分发挥单位圆的作用，引导学生借助单位圆，画出正弦函数与正切函数的图像，探索三角函数的值域与最值、单调性.

关于三角函数应用的教学，要充分利用本章各节所提供的问题情景，引导学生理解如何用三角函数描述客观世界中的周期变化规律，体会三角函数与现实世界的密切联系.

在三角函数的性质的教学过程中，应避免编制偏题、怪题，避免繁琐的技巧训练.

鼓励学生运用信息技术学习、探索和解决问题. 例如，利用计算器、计算机画出三角函数的图像，探索、比较它们的变化规律，研究三角函数的性质.

在教学过程中还应结合具体实例和问题引导学生提升数学抽象、数学运算、数学建模、直观想象和逻辑推理的素养.

评价建议

教学评价过程要创设合适的教学情境，提出合适的数学问题，对学生形成概念、语言表达概念等交流过程进行评价. 例如，通过观察正弦函数的图像，发现正弦函数的函数值随自变量的变化呈现出“周而复始”的周期变化规律，进而引入一般周期函数的概念，在此教学过程中，应通过课堂观察评价学生这一“数学抽象”的过程.

教学评价过程中要关注把握知识技能的范围和难度. 例如，在讨论正弦函数的最小正周期为什么是 2π 的探究中考查学生的思维过程，对学生的思维深度和思维广度进行评价. 通过把对余弦函数的研究转化为对正弦函数的研究的过程，考查学生从整体上把握问题的思考方式，等等. 在过程评价中使学生感受到成长的快乐，激发其数学学习的积极性.

引导每个学生积极参与本章的两个探究与实践活动，体会利用三角函数构建刻画事物周期变化的数学模型. 这些可以是个体活动，也可以是小组活动. 通过提交研究报告或小论文等形式进行小结，采用不同的方式对研究报告或小论文进行评价.

在本章的阶段评价中需关注的知识重点是：

1. 正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$ 和正切函数 $y=\tan x$ 的图像，以及奇偶性、周期性、单调性、值域与最值等性质.

2. 五点法画函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像以及从函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像中获取参数 A、ω、φ 的值.

3. 用三角函数解决简单的实际问题及构建刻画事物周期变化的简单的数学模型.

二、教材分析与教学建议

7.1 正弦函数的图像与性质

教学重点

建立正弦函数的概念，借助单位圆画正弦函数 $y=\sin x$ 在$[0,2\pi]$上的图像，并利用诱导公式得到 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的图像. 掌握正弦函数的图像特征，会用五点法绘制 $y=\sin x$ 在一个周期内的图像.

掌握正弦函数的周期性，理解周期函数的定义，了解函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的周期.

借助单位圆理解正弦函数的值域与最值，能运用正弦函数的值域与最值解决简单的正弦型函数的相应问题.

了解正弦函数的奇偶性，借助单位圆理解正弦函数的单调性，能运用正弦函数的单调性解决问题.

内容分析

第 4 章、第 5 章学习的幂函数、指数函数、对数函数和一般函数的图像与性质为本章提供了研究函数的工具和方法——先画出三角函数的图像，再研究其主要性质. 本节内容是这一章的重点. 有了这一节的基础，我们就可以把余弦函数转化为正弦函数，进而深入研究函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像，并类比正弦函数的图像与性质得到正切函数的图像与性质.

正弦函数的图像是借助单位圆，利用描点法得到的. 通过观察函数 $y=\sin x$，

$x\in[0,2\pi]$图像的特征，找到五个关键点，由此得到正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的大致图像.

例 1 旨在说明如何用五点(作图)法作出正弦函数的大致图像，结合图像求解最简单的三角不等式.

正弦函数的最小正周期为 2π 这一事实，在过去的教材中均回避其证明，本教材利用图像平移的方法简明而严格地说明了这一点，是一个特色.

例 2 旨在例示如何通过换元并利用正弦函数 $y=\sin x$ 的最小正周期，得到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$($A\neq 0$，$\omega>0$)的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

例 3 是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$(其中 A、ω、φ 为常数，且 $A\neq 0$，$\omega>0$)的最小正周期公式的简单运用. 通过本例也可以总结出该函数的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

例 4 旨在使学生理解周期函数的概念，强调在周期函数的定义中，自变量 x 的取值是定义域内的任意值.

正弦函数的最小正周期为 2π，在研究正弦函数的值域与最值时，只需选择一个适当的、长度为一个周期的区间进行研究. 这里取此区间为$[0,2\pi)$，并借助单位圆，从正弦函数的定义出发研究正弦函数的值域与最值.

例 5 旨在使学生掌握正弦函数的值域与最值的简单应用，并学会用三角公式或换元法转化为熟悉的函数求最值.

例 6 是三角函数最值在实际问题中的应用，使学生体会到可以建立三角函数模型来解决实际问题，培养学生“数学建模”的素养.

例 7 是函数奇偶性的判断问题. 注意在判断函数奇偶性时，首先要写出函数的定义域.

此处取区间为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$，并借助单位圆，从正弦函数的定义出发研究正弦函数的单调性.

例 8 运用正弦函数的单调性判断两个正弦值的大小，是正弦函数单调性最直接的应用.

例 9 利用正弦函数的单调性求形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的函数的单调区间. 首先把该函数转化为 $A>0$ 且 $\omega>0$ 的情况以简化问题，然后基于 $\omega x+\varphi$($\omega>0$)与 x 的递增

或递减的变化一致，利用正弦函数的单调性解决问题. 严格的说理也可以使用函数单调性的定义. 为避免增加学生负担，本题没有给出复合函数单调性的判断法则. 本例第(2)问的第二步，也可以先求出 $2x-\frac{\pi}{6}$的范围，即$-\frac{13\pi}{6}<2x-\frac{\pi}{6}\leqslant-\frac{\pi}{6}$，再令 $t=2x-\frac{\pi}{6}$，进而考虑函数 $y=2\sin t$，$t\in\left(-\frac{13\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right]$的单调减区间.

课后阅读“圆周运动与简谐运动”介绍了正弦函数在物理学中的应用，也可以让学生体会到正弦函数的自变量不一定是角.

习题 7.1B 组的第 7 题可以使学生了解到除了我们学习的三角函数外，还有其他类型的周期函数，但在本阶段教学中不宜编制有关周期函数的过难的习题.

注意事项

由于正弦函数 $y=\sin x$ 的函数值是直角坐标系下、以坐标原点为圆心的单位圆上点的纵坐标，而单位圆这个封闭的曲线在 y 轴上的正投影是 y 轴上从 -1 到 1 的线段，因此单位圆上点的纵坐标即 $\sin x$ 的值，能取遍 -1 到 1 之间的一切实数值，从而 $\sin x\in[-1,1]$，即 $y=\sin x$ 的值域为$[-1,1]$.

借助单位圆研究正弦函数的值域与最值，就可以容易地用直观的方法说明正弦函数的单调性.

正弦函数图像的对称性可以通过平移转化为研究正弦型函数的奇偶性，因而不作为正弦函数的一个主要性质列出. 对于正弦函数图像的对称性，在编制练习题时不建议加大难度.

正弦函数的零点，实际上是振动的平衡位置所对应的自变量的值，但是若将正弦函数的图像向上或向下平移，就可能没有零点了. 因此，在函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 图像上，重要的点并不是零点所对应的函数图像上的点，而是平衡位置上相应的点和图像的最高点与最低点. 因此本节没有将零点作为主要性质，用五点(作图)法来强调图像上的关键点就可以了.

教学建议

学生学习了第 6 章“三角”，可能产生固化的静态思考模式. 为了促使学生转变思考问题的角度，在教学中建议简单介绍课后阅读“圆周运动与简谐运动”，以便利用现实世界中的例子使学生体会到从函数角度研究三角的必要性.

在教学中应突出单位圆在研究函数图像与性质时的重要作用，无论是画正弦函数 $y=\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图像，研究正弦函数 $y=\sin x$ 在 $[0,2\pi)$ 上的值域与最值，还是研究正弦函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的单调性，都是借助单位圆，利用正弦函数的定义而严格得到的. 要避免仅仅从正弦函数的直观图像得到这些结论的不严格的做法.

在研究正弦函数的性质时，我们宜先研究它的周期性，这可为研究正弦函数的单调性和最值提供简便的方法. 一般来说，函数的值域可由函数的单调性决定，但是借助单位圆先研究值域比先研究单调性相对简单，所以教材采用的顺序是：周期性—值域与最值—奇偶性与单调性. 教学过程也可以根据学生的具体情况适当调整顺序为：周期性—奇偶性与单调性—值域与最值. 如果按照后一种顺序教学，就可以对自变量有限制范围的函数的最值问题进行探讨，但是下一节“余弦函数的图像与性质”例 1 的第(2)小题中会涉及到此类问题，在本节教学中不宜过于加大这方面的难度.

本节关于复合函数的单调性的讨论，仅限于形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的函数. 这方面的难度需要控制，关于形如 $y=A\sin^2 x+B\sin x+C$ 的函数的单调性的问题不属于现阶段教学要求.

7.2　余弦函数的图像与性质

教学重点

建立余弦函数的概念，通过平移将余弦函数转化为正弦函数，探讨余弦函数的图像与性质，掌握余弦函数的奇偶性、周期性、单调性、值域与最值等性质及其图像特征.

内容分析

因为 $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，余弦函数 $y=\cos x$ 与函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 是同一个函数，对余弦函数的研究可直接转化为对函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的研究. 由前一节的内容，很自然地就可以得到余弦函数的图像与性质.

例 1 既是余弦函数值域与最值的应用，也是对正弦函数值域与最值应用的补充. 第(2)小题给出了自变量有限制范围的函数的最值问题，在求这类值域或最值问题时，利用函数单调性的说理过程必不可少，这是特别要注意的.

例 2 旨在使学生掌握求最小正周期和函数单调区间的方法.

本节中没有设计关于余弦函数的奇偶性等方面的例题，因为余弦函数的奇偶性问题与正弦函数的奇偶性问题完全类似.

通过习题 7.2B 组第 2、3 题，进一步使学生理解余弦函数与正弦函数的关系，掌握它们的图像和性质的区别与联系.

注意事项

区别于“二期课改”教材，本教材把余弦函数单独作为一节内容，可以更明确地从函数的角度找到它与正弦函数的联系. 正弦和余弦的定义虽然不同，但是余弦函数 $y=\cos x$ 与正弦函数 $y=\sin x$ 的图形形状是完全相同的，只是在直角坐标系中的位置不一样，所以由正弦函数的图像与性质立刻可以得到余弦函数的图像与性质. 基于以上理由，本节内容只需 1 课时.

教学建议

因为有了正弦函数的知识基础，在本节的教学过程中应尽量引导学生找到余弦函数与正弦函数的联系，并由此得到余弦函数的图像，归纳出余弦函数的主要性质. 要让学生体会探究问题的方法.

本节例题选择的主要目的是突出余弦函数主要性质中的重点和难点，不必增加过多的例题.

7.3 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像

教学重点

结合具体实例，了解函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$以及表达式中参数 A、ω、φ 的实际意义. 会用三角函数解决简单的实际问题，体会可利用三角函数构建刻画周期变化事物的数学模型.

在 $A>0$，$\omega>0$ 的情况下，分别研究 $y=A\sin x$、$y=\sin\omega x$、$y=\sin(x+\varphi)$的图像，并发现它们与 $y=\sin x$ 的图像之间的关系. 能借助图像理解参数 A、ω、φ 的意义，了解参数的变化对函数图像的影响.

会用五点(作图)法作出 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的大致图像.

内容分析

“函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像”是第一节“正弦函数的图像与性质”的深入. 它包

含三部分内容：一是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$表达式中参数$A$、$\omega$、$\varphi$ 的意义；二是参数A、ω、φ 的变化对图像的影响；三是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$图像的画法.

从一个实际生活中大家熟悉的钟表转动问题引入函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，并直接给出简谐振动中物体离开平衡位置的位移 y 与时间 x 的函数关系 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0，\omega>0)$，使学生了解研究函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像的必要性，了解函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的表达式中参数$A$、$\omega$、$\varphi$ 的意义.

例 1 借助图像，让学生体会参数A、ω、φ 变化对函数图像的影响.

例 2 是为了使学生掌握用前面学过的五点(作图)法作出 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像，并进一步理解参数$A$、$\omega$、$\varphi$ 的意义.

例 3 的目的是让学生体会到，可以利用三角函数构建刻画周期变化事物的数学模型，并使学生进一步理解参数A、ω、φ 在实际问题中的意义.

探究与实践“潮汐的函数模拟”取自一个实际问题的数据. 若学生选择函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 进行模拟，需要学生考虑函数最大值的平均值和最小值的平均值，计算出这两个平均值的差，还要学会处理图像上两个最高点的水平距离，两个最低点的水平距离等数据，由此找出参数A、ω、φ 和B 的适当的值.

课后阅读“声音中的三角函数”让学生进一步感受三角函数在解决具体周期变化规律问题中的作用.

习题 7.3A 组的第 3 题和 B 组的第 3 题不需要学生具有相关的物理知识. 例如，在 B 组的第 3 题中，已直接给出了三相交流电的线电压的有效值的定义，学生只需结合定义利用所学的数学知识就可以解决. 通过这些练习，可以使学生体会到三角函数在现实世界中的应用.

注意事项

本节的知识重点是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像及其表达式中参数$A$、$\omega$、$\varphi$ 的意义.

需要掌握的内容是：

(1) 对于函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$(其中参数 $A>0$，$\omega>0$)，要知道：A 增大时图像的振幅增大，ω 增大时图像相邻两个零点的间距减小，φ 增大时图像向左平移；

(2) 给定参数A、ω、φ，能用五点法作出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像；

(3) 给出函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像，能从图像中确定参数$A$、$\omega$、$\varphi$ 的值.

需要注意的是，参数A、ω、φ 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的影响不应超过例 1 中

的定性要求，特别是不应要求学生在不止一个参数变化时掌握函数图像的变换.

教学建议

本节内容较丰富，根据学生实际情况，教学过程中可以用 1 课时或 1.5 课时完成.

例 1 的教学过程中，建议充分利用计算器、计算机画出三角函数的直观图像，帮助学生观察、比较并发现它们的变化规律，再通过计算验证相应的结论. 可以分两步进行以分散难点：第一步在三个不同的直角坐标系中分别画出 $y=2\sin x$ 与 $y=\sin x$ 的图像；$y=\sin 2x$ 与 $y=\sin x$ 的图像；$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$与 $y=\sin x$ 的图像. 第二步把它们的图像放到同一个直角坐标系中，进行观察与比较. 参数 A、ω、φ 分别对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的影响仅限于本例给出的定性结果，避免编制更复杂的习题.

例 2 中可以先回顾五点（作图）法画正弦函数的过程，再确定函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的五个关键点，作出它的大致图像.

探究与实践活动建议让学生以研究报告或小论文的形式进行小结，培养学生数学建模的素养.

7.4 正切函数的图像与性质

教学重点

建立正切函数的概念，借助单位圆画出正切函数 $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$的图像，掌握正切函数的图像特征.

掌握正切函数的奇偶性、周期性、单调性和值域.

内容分析

类似对正弦函数图像与性质的研究方法，得到正切函数的图像与性质. 对于正切函数 $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的单调性，我们利用函数单调性的定义给出了证明.

例 1 是正切函数的定义域和单调性的应用，只需学生掌握形如 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\ \omega>0)$的函数的单调区间的问题，例题已严格控制了难度.

例 2 是正切函数周期性的应用，对于形如 $y=A\tan(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的函数，可以得到其周期 $T=\frac{\pi}{\omega}$.

探究与实践“球门的张角问题”是“二期课改”教材中一道例题的改编，将其作为一

个课后数学建模的活动. 球门是一个立体的图形，从不同的角度考虑问题可能会得到不同的答案. 此问题作为一个课后探究活动，使得学生有更多时间思考并建立恰当的数学模型.

注意事项

关于正切函数 $y=\tan x$ 的最小正周期是 π，可以仿照正弦函数最小正周期的证明. 证明如下：若 T 是正切函数 $y=\tan x$ 的最小正周期，由周期函数的定义有 $\tan x=\tan(x+T)$，即函数 $y=\tan x$ 与函数 $y=\tan(x+T)$ 是同一函数，它们的图像完全重合. 因此，将函数 $y=\tan x$ 的图像向左平移 T 个长度单位，所得图像与 $y=\tan x$ 原来的图像完全重合. 显然 $T=\pi$ 是正切函数 $y=\tan x$ 的一个周期. 若其最小正周期满足 $0<T<\pi$，由 $\tan x=\tan(x+T)$，并在式中特取 $x=0$，就得到 $\tan T=0$，这在 $0<T<\pi$ 时不成立，所以函数 $y=\tan(x+T)$ 的图像不会与函数 $y=\tan x$ 的图像重合. 这说明正切函数不会有小于 π 的正周期，从而其最小正周期为 π. 这个证明和正弦函数的最小正周期的证明完全类似，在教学过程中不必呈现.

教学建议

例 1 中，对于函数 $y=\tan\left(\dfrac{\pi}{6}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的单调区间，这里引用“二期课改”的做法，因为 $\dfrac{\pi}{6}x+\dfrac{\pi}{3}$ 与 x 的递增或递减变化一致，所以可以转化为正切函数的单调性加以说明. 在此没有用到复合函数的单调性判断方法，教学过程中要注意控制难度.

探究与实践活动中建议让学生以研究报告或小论文的形式进行小结，以培养学生数学建模的素养.

三、参考答案或提示

7.1 正弦函数的图像与性质

练习 7.1(1)

1. 略.

2. 图略. 使 $y>0$ 的 x 取值范围是$\left[0,\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6},2\pi\right]$；使 $y<0$ 的 x 取值范围是$\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$.

3. 图略. 将 $y=\sin x$ 的图像向上平移 2 个单位，得到 $y=\sin x+2$ 的图像.

练习 7.1(2)

1.（1）最小正周期为 2π. （2）最小正周期为$\frac{2\pi}{3}$.

2. 当 $x=2k\pi+\frac{4\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$时，$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin x$ 成立. 因为 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\neq\sin\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{3}$不是 $y=\sin x$ 的周期.

3. 估算心电图的周期为 0.8 秒.

练习 7.1(3)

1.（1）定义域为 **R**，值域为$[-1,1]$. （2）定义域为 **R**，值域为$\left[\frac{1}{2},2\right]$.

2.（1）最大值为-4，此时 $x=k\pi+\frac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$；最小值为-6，此时 $x=k\pi+\frac{5\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$.

（2）$y=-(\sin x-1)^2+2$，因为$-1\leqslant\sin x\leqslant1$，所以$-2\leqslant y\leqslant2$. 该函数的最大值为 2，此时 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$；最小值为-2，此时 $x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

（3）$y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. 该函数的最大值为 2，此时 $x=k\pi+\frac{5\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$；最小值为-2，此时 $x=k\pi+\frac{11\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$.

3. 由题意，可知$\angle C_1BC=\angle A_1DA=\angle B_1AB=\alpha$，$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，$A_1B_1=A_1A+AB_1=b\sin\alpha+a\cos\alpha$，同理 $B_1C_1=a\sin\alpha+b\cos\alpha$. 矩形 $A_1B_1C_1D_1$ 的周长为 $2(A_1B_1+B_1C_1)=2(a+b)(\sin\alpha+\cos\alpha)=2\sqrt{2}(a+b)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$. 所以，当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$时，矩形 $A_1B_1C_1D_1$的周长最大.

练习 7.1(4)

1.（1）奇函数. （2）偶函数. （3）偶函数. （4）既不是奇函数也不是偶

函数.

2. (1) $\sin\left(-\frac{\pi}{16}\right)>\sin\left(-\frac{\pi}{13}\right)$.　　(2) $\sin 715^\circ<\sin(-724^\circ)$.

3. (1) $y=\sin x-1$ 的单调增区间为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$；单调减区间为 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2) $y=-\sin x$ 的单调增区间为 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$；单调减区间为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(3) $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的单调增区间为 $\left[\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{12},\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$；单调减区间为 $\left[\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4},\frac{2k\pi}{3}+\frac{7\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$.

习题 7.1

A 组

1. 略.

2. (1) 最小正周期为 7π.　　(2) 最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$.

3. 因为 $T=\frac{2\pi}{|2\omega|}$，所以 $|2\omega|=\frac{2\pi}{2}$，即 $\omega=\pm\frac{\pi}{2}$.

4. (1) $y=2-3\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的最大值为 5，此时所有相应 x 值的集合为 $\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi+\frac{3\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$；最小值为 -1，此时所有相应 x 值的集合为 $\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2) $y=-\sin^2x+2\sin x+2$，$x\in\mathbf{R}$ 的最大值为 3，此时所有相应 x 值的集合为 $\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$；最小值为 -1，此时所有相应 x 值的集合为 $\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi+\frac{3\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(3) $y=2\sin x-5$，$x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$ 的最大值为 -3，此时所有相应 x 值的集合为 $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$；最小值为 $-5-\sqrt{3}$，此时所有相应 x 值的集合为 $\left\{-\frac{\pi}{3}\right\}$.

（4）$y=\cos^2 x-\sin x$，$x\in\mathbf{R}$ 的最大值为 $\dfrac{5}{4}$，此时所有相应 x 值的集合为 $\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi-\dfrac{5\pi}{6}\text{或}\ x=2k\pi-\dfrac{\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$；最小值为 -1，此时所有相应 x 值的集合为 $\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

5.（1）奇函数.　（2）偶函数.　（3）既不是奇函数也不是偶函数.

6.（1）$\sin\dfrac{3\pi}{11}<\sin\dfrac{5\pi}{12}$.　（2）$\sin\left(-\dfrac{76\pi}{11}\right)<\sin\dfrac{85\pi}{12}$.

7.（1）$y=2-\sin x$ 的单调增区间为 $\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$；单调减区间为 $\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$.

（2）$y=3\sin\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的单调增区间为 $\left[6k\pi-\dfrac{9\pi}{4},6k\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$；单调减区间为 $\left[6k\pi+\dfrac{3\pi}{4},6k\pi+\dfrac{15\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$.

8.（1）因为 $y=2\sqrt{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，所以此函数的值域为 $[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$.

（2）因为 $y=(\sin x+2)^2-4$，且 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，所以此函数的值域为 $[-3,5]$.

9. 因为方程 $\sin x=\dfrac{1}{2}$ 的解就是函数 $y=2\sin x-1$ 的零点，所以函数 $y=2\sin x-1$ 的零点为 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}$ 或 $x=2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.

B 组

1. 函数 $y=\sqrt{2\sin x-1}$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{5\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

2. 因为 $y=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$，由 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\leqslant\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 有 $4k\pi+\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 4k\pi+\dfrac{5\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，所以此函数的单调减区间为 $\left[4k\pi+\dfrac{\pi}{2},4k\pi+\dfrac{5\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$.

3. 因为函数 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2kx+\cos^2 kx=\sin\left(2kx+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}(k>0)$，所以 $T=\dfrac{2\pi}{2k}=\pi$，解得 $k=1$.

4. 因为$-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以$-\frac{\pi}{6}\leqslant x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{2\pi}{3}$，从而$-\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，故此函数的值域为$\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

5. 因为$y=\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x=1-\frac{\sin^2 2x}{2}=\frac{3+\cos 4x}{4}$，所以此函数的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$. 因为$-1\leqslant\cos 4x\leqslant 1$，所以$\frac{1}{2}\leqslant\frac{3+\cos 4x}{4}\leqslant 1$，此函数的最小值为$\frac{1}{2}$，最大值为1.

6. 设四边形$OACB$的面积为S，$\angle AOB=\alpha$，则$S=\triangle OAB$的面积$+\triangle ABC$的面积. 在$\triangle OAB$中，由余弦定理，有$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\alpha=5-4\cos\alpha$，故$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}AB^2\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}(5-4\cos\alpha)$. 从而有$S=\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}(5-4\cos\alpha)=\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha+\frac{5\sqrt{3}}{4}=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{5\sqrt{3}}{4}$，其中$0<\alpha<\pi$. 因此四边形$OACB$的面积$S$的最大值为$2+\frac{5\sqrt{3}}{4}$，此时$\angle AOB=\frac{5\pi}{6}$.

7. (1) 函数$y=f(x)$的最小正周期为2.　(2) 略.

7.2　余弦函数的图像与性质

练习 7.2

1. $\omega=\frac{1}{2}$.

2. (1) 奇函数.　(2) 奇函数.　(3) 既不是奇函数也不是偶函数.

3. 函数$y=2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$的最小正周期为$4\pi$，单调增区间为$\left[4k\pi-\frac{5\pi}{3},4k\pi+\frac{\pi}{3}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$，单调减区间为$\left[4k\pi+\frac{\pi}{3},4k\pi+\frac{7\pi}{3}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$.

习题 7.2

A 组

1. 略.

2. (1) 6π.　(2) π.

3. （1）$y=3^{\cos 2x}$，$x\in\mathbf{R}$ 的最大值为 3，此时相应 x 值的集合为$\{x \mid x=k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$；最小值为$\frac{1}{3}$，此时相应 x 值的集合为$\left\{x \,\middle|\, x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

（2）因为 $y=\cos x-\sin^2 x=\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$，且$-1\leqslant\cos x\leqslant 1$，所以此函数的最大值为 1，此时相应 x 值的集合为$\{x \mid x=2k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$；最小值为$-\frac{5}{4}$，此时相应 x 值的集合为$\left\{x \,\middle|\, x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

4. （1）偶函数.　　（2）既不是奇函数也不是偶函数.　　（3）奇函数.

5. 函数 $y=\cos 2x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$的单调增区间是$\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$和$\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$；单调减区间是$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. 当 $x=0$ 时，此函数取得最大值 1；当 $x=\frac{\pi}{2}$时，此函数取得最小值-1. 因此，此函数的值域是$[-1,1]$.

B 组

1. A.

2. 由偶函数的定义，可以得到 $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

3. 在同一平面直角坐标系中画出 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的图像，可以看出$\triangle ABC$ 总是以 2π 为底边、高为$\sqrt{2}$的等腰三角形，因此$\triangle ABC$ 的面积为$\sqrt{2}\pi$.

7.3　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图像

练习 7.3

1. 略.

2. D.

3. $y=\frac{3}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

习题 7.3

A 组

1. 略.

2. 函数 $y=\sqrt{2}\sin\left(30\pi x-\frac{\pi}{12}\right)$的振幅为$\sqrt{2}$，频率为 $f=\frac{1}{T}=\frac{30\pi}{2\pi}=15$，初始相位

是$-\frac{\pi}{12}$.

3. 因为频率为 $f=\frac{1}{T}=\frac{100\pi}{2\pi}=50$(次/秒)，所以这种交流电流在 0.5 s 内往复运行的次数为 $0.5\times 50=25$(次).

4. 略.

5. 图略. (1) 在 $h=\sqrt{2}$(cm)处. (2) 2 cm. (3) 2 s. (4) 0.5 次.

B 组

1. 略.

2. $y=2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{5\pi}{3}\right)$.

3. 因为 $U_2-U_1=A\sin\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)-A\sin\omega t=A\sin\omega t\cdot\cos\frac{2\pi}{3}+A\cos\omega t\cdot\sin\frac{2\pi}{3}-A\sin\omega t=-\frac{3}{2}A\sin\omega t+\frac{\sqrt{3}}{2}A\cos\omega t=-\sqrt{3}A\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{6}\right)$，所以其最大值为 $Y_1=\sqrt{3}A=220\sqrt{6}$. 同理，$Y_2=220\sqrt{6}$，$Y_3=220\sqrt{6}$. 因此，三相交流电的线电压的有效值 $\frac{Y_1}{\sqrt{2}}=\frac{Y_2}{\sqrt{2}}=\frac{Y_3}{\sqrt{2}}=220\sqrt{3}$.

练习 7.4

1. $\left\{\alpha \,\middle|\, \alpha=k\pi+\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

2. (1) $\tan\left(-\frac{2\pi}{7}\right)>\tan\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$. (2) $\cot 231^\circ>\cot 237^\circ$. (3) $\tan\left(k\pi-\frac{\pi}{3}\right)<\tan\left(k\pi+\frac{\pi}{3}\right)$.

3. 定义域为$\left\{x \,\middle|\, x\neq\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{12},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$；单调增区间为$\left(\frac{k\pi}{3}-\frac{\pi}{4},\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

习题 7.4

A 组

1. (1) 2π. (2) $\frac{\pi}{3}$.

2. $T=\frac{\pi}{|a|}$.

3. 函数 $y=\tan x$ 的最大值为 1，此时 $x=\dfrac{\pi}{4}$；最小值为$-\sqrt{3}$，此时 $x=-\dfrac{\pi}{3}$.

4.（1）奇函数. （2）偶函数. （3）奇函数. （4）偶函数.

5. 函数 $y=2\tan\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$的定义域为$\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},\ x\neq\dfrac{k\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{9},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，单调增区间为$\left(\dfrac{k\pi}{3}-\dfrac{\pi}{9},\dfrac{k\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{9}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

B 组

1. $x=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

2. 因为 $f(-2)=a\sin(-4)+b\tan(-2)+3=1$，所以 $a\sin 4+b\tan 2=2$，从而 $f(\pi+2)=a\sin(2\pi+4)+b\tan(\pi+2)+3=a\sin 4+b\tan 2+3=2+3=5$.

3. 最大值为 2，最小值为$-\dfrac{1}{4}$.

复习题

A 组

1.（1）4π. （2）$\dfrac{2\pi}{3}$.

2.（1）偶函数. （2）奇函数. （3）偶函数. （4）既不是奇函数也不是偶函数.

3. $x=\dfrac{\pi}{6}$.

4.（1）$y=-\sin 2x$ 的单调增区间为$\left[k\pi+\dfrac{\pi}{4},k\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$；单调减区间为$\left[k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$.

（2）$y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的单调增区间为$\left[2k\pi-\dfrac{5\pi}{6},2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$；单调减区间为$\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{6},2k\pi+\dfrac{7\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$.

（3）$y=\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$的单调增区间为$\left[4k\pi-\dfrac{3\pi}{2},4k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$；单调减区间为$\left[4k\pi+\dfrac{\pi}{2},4k\pi+\dfrac{5\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$.

（4）$y=2\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的单调增区间为$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{3\pi}{8},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

5. 略.

6. $y=3\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$.

7.（1）因为$y=\cos^2 x+\cos x-2=\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$，且$-1\leqslant\cos x\leqslant 1$，所以此函数的最大值为 0，此时$x=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$；最小值为$-\frac{9}{4}$，此时$x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

（2）因为$-\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$，$-\frac{4\pi}{3}\leqslant 2x\leqslant\frac{2\pi}{3}$，从而$-1\leqslant\sin 2x\leqslant 1$，所以函数$y=\sin 2x$，$x\in\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$的最大值为 1，此时$x=\frac{\pi}{4}$；其最小值为$-1$，此时$x=-\frac{\pi}{4}$.

（3）因为$y=\sin^2 2x-2\sin 2x=(\sin 2x-1)^2-1$，且$-1\leqslant\sin 2x\leqslant 1$，所以此函数的最大值为 3，此时$x=k\pi+\frac{3\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$；最小值为$-1$，此时$x=k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

（4）因为$-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$，$-\frac{\pi}{3}\leqslant x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{12}$，从而$\frac{1}{2}\leqslant\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，所以函数$y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$的最大值为 1，此时$x=\frac{\pi}{6}$；最小值为$\frac{1}{2}$，此时$x=-\frac{\pi}{6}$.

8.（1）$y=10-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{12}t-\sin\frac{\pi}{12}t=10-2\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)$. 因为$0\leqslant t<24$，$\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}<\frac{7\pi}{3}$，从而$-1\leqslant\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$，所以该函数的最大值为 12，此时$t=14$；最小值为 8，此时$t=2$. 因此，最大温差为$12-8=4$(℃).

（2）由题意，有$y=10-2\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)>11$，即$\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)<-\frac{1}{2}$，而$\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}<\frac{7\pi}{3}$，所以$\frac{7\pi}{6}<\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}<\frac{11\pi}{6}$，解得$10<t<18$，从而 10 时到 18 时这段时间需要降温.

B 组

1. 因为 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\sin^2 x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\sqrt{2}(1-\cos 2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\sqrt{2}=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}$，所以其最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

2. 在同一平面直角坐标系中画出 $y=\sin x$，$x\in(0,2\pi)$ 及 $y=\cos x$，$x\in(0,\ 2\pi)$ 的图像. 由图像可知，使 $\sin x>\cos x$ 成立的 x 的取值范围是$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$.

3.（1）因为 $y=2\sin^2 x+\sin 2x-1=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，所以此函数的最大值为$\sqrt{2}$，此时 $x=k\pi+\frac{3\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$.

（2）$y=1-\sin x-2\cos^2 x=2\sin^2 x-\sin x-1=2\left(\sin x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$. 因为 $x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$，从而$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\sin x\leqslant 1$，所以当 $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$时，此函数取得最大值$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，此时 $x=\frac{4\pi}{3}$.

4. 因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$，且 $0<\omega<1$，可知 $0\leqslant\omega x\leqslant\frac{\pi}{3}\omega<\frac{\pi}{3}$，从而 $y=2\sin\omega x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上为严格增函数. 因此当 $x=\frac{\pi}{3}$时，该函数取得最大值，有 $2\sin\left(\frac{\pi}{3}\omega\right)=\sqrt{2}$，$\frac{\pi}{3}\omega=\frac{\pi}{4}$，$\omega=\frac{3}{4}$.

5.（1）由题意，有 $A=50$，$b=60$，最小正周期 $T=30$，于是 $\omega=\frac{\pi}{15}$，故有 $y=50\sin\left(\frac{\pi}{15}t+\varphi\right)+60$. 因为当 $t=0$ 时，$y=10$，于是 $\sin\varphi=-1$，而 $\varphi\in[-\pi,\pi]$，从而 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$. 所以，y(米)关于 t(分钟)的表达式为 $y=50\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+60$.

（2）由题意，有 $y=50\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+60>85$，即 $\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)>\frac{1}{2}$.只需考虑第一周的情况，此时 $0\leqslant t\leqslant 30$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{3\pi}{2}$，从而$\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{6}$，解得 $10<$

$t<20$. 所以在摩天轮转动的一圈内，有 10 分钟的时间点 P 距离地面超过 85 米.

^{*6}—^{*8}. 证明略.

拓展与思考

1. 由图像可知，线段 P_1P_2 的长就是 $\sin x$ 的值，而 $\sin x$ 满足的条件是 $6\cos x=5\tan x$，即 $6\cos x=\dfrac{5\sin x}{\cos x}$，即 $6\cos^2 x=5\sin x$，$6\sin^2 x+5\sin x-6=0$，$(3\sin x-2)(2\sin x+3)=0$. 因为 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\sin x<1$，所以线段 P_1P_2 的长为 $\sin x=\dfrac{2}{3}$.

2. (1) 当 $5\leqslant x\leqslant 6$ 时，$0\leqslant 6-x\leqslant 1$，由 $y=f(x)$ 的最小正周期为 2，且是偶函数，有 $f(x)=f(x-6)=f(6-x)=6-x(5\leqslant x\leqslant 6)$，故当 $5\leqslant x\leqslant 6$ 时，函数的表达式为 $y=6-x$.

(2) 由图像可知 $y=f(x)$ 必经过点 $(7,1)$ 或 $(-7,1)$，从而 $k=\pm\dfrac{1}{7}$.

3. (1) 因为 $PR=3-2\sin\theta$，$PQ=3-2\cos\theta$，其中 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，所以 S 关于 θ 的函数解析式为 $S=(3-2\sin\theta)(3-2\cos\theta)$，$0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

(2) $S=(3-2\sin\theta)(3-2\cos\theta)=9-6(\sin\theta+\cos\theta)+4\sin\theta\cos\theta$. 令 $\sin\theta+\cos\theta=t$，则 $t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\in[1,\sqrt{2}]$，从而 $2\sin\theta\cdot\cos\theta=t^2-1$，而 $S=2t^2-6t+7=2\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{5}{2}$. 由此可得：当 $t=1$ 即 $\theta=0$ 或 $\dfrac{\pi}{2}$ 时，矩形 $PQCR$ 的面积 S 取得最大值 3(平方米).

四、相关阅读材料

参考文献

[1] 伊莱·马奥尔. 三角之美——边边角角的趣事(第 2 版)[M]. 曹雪林，边晓娜，译. 北京：人民邮电出版社，2018.

[2] 宋仑珍. 傅立叶教你学三角函数[M]. 王明君，译. 合肥：黄山书社，2016.

第 8 章　平面向量

一、本章概述

总体要求

向量具有深刻的数学内涵、丰富的物理背景. 向量既是代数研究的对象，也是几何研究的工具. 向量是沟通几何与代数的桥梁，通过向量可以用代数的方法研究直线、曲线、平面、曲面以及高维空间中的数学问题，是进一步学习和研究数学其他领域问题的基础. 在解决实际问题中，向量也有广泛的应用.

本单元的学习，可以帮助学生理解平面向量的代数表示与几何意义；掌握平面向量的概念、运算、向量基本定理以及向量的应用；用向量的语言、方法描述和解决现实生活、数学和物理中的问题；提升数学抽象，直观想象，数学运算和逻辑推理素养.

几何与代数是高中数学课程的主线之一. 通过形与数的结合，突出几何直观与代数运算之间的融合，感悟数学知识之间的关联，加强对数学整体性的理解.

课时安排建议

本章的课时安排建议为 10＋1，共计 11 课时. 建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
8.1　向量的概念和线性运算	3	向量的概念　1 课时
		向量的加法和减法　1 课时
		实数与向量的乘法　1 课时
8.2　向量的数量积	2	向量的投影　1 课时
		向量的数量积的定义与运算律　1 课时
8.3　向量的坐标表示	3	向量基本定理　1 课时
		向量的正交分解与坐标表示、向量线性运算的坐标表示　1 课时
		向量数量积与夹角的坐标表示　1 课时

（续表）

章节名	建议课时	具体课时分配建议
8.4　向量的应用	2	向量的应用　2 课时
复习与小结	1	

内容编排与特色

二期课改教材中“向量”作为服务于其他数学内容的工具进行学习，内容被分解为若干小块，分布在初中八年级第二学期、初中九年级第一学期、高中二年级第一学期和高中拓展等四册教材中. 本套教材把向量作为一个重要内容，分为“平面向量”(在必修课程中)和“空间向量”(在选择性必修课程中)两章，给予系统的阐述. 教师不光要解决新旧教材知识上的衔接问题，更重要的是要理解和体会由向量地位的不同而引起的理念性和实践性的变化，把向量当作有独立存在意义的学习内容，而不仅仅是工具性内容.

本章讲的是平面向量，内容共分为四节，分别是 8.1 向量的概念和线性运算，8.2 向量的数量积，8.3 向量的坐标表示，8.4 向量的应用. 前三节比较完整地阐述了平面向量的基本理论，最后一节举了平面向量在数学、力学和生活中的应用的一些例子.

“8.1 向量的概念和线性运算”通过对力、速度、位移等有物理背景的量的分析，为学生建立起向量的最初直觉，并用“既有大小又有方向的量”给出向量的描述性定义. 紧接着教材给出了向量的几何表示(用有向线段表示向量)，把向量转化为学生比较熟悉的几何对象，让学生较为直观地理解向量的方向与模，理解平面向量的意义和两个向量相等的含义，并能利用向量处理一些简单的几何问题.

但是，如果不建立起相应的代数结构，向量的研究跳不出几何的框架，就没有独立存在的意义. 由于向量没有直接等同于有向线段(而是等同于有向线段在平移变换下的等价类)，使得在向量集合上定义线性运算成为可能(例如，两个向量可以平移到具有相同起点的位置上，使得可以用平行四边形法则定义它们的和)，并且所定义的运算有很好的实际意义(如加法与力的合成的一致性). 向量集合上有了线性运算后，即成为了向量空间，从而搭起了研究向量的基本框架(见附录的 1). 这些背景知识教师必须心中有数，但不是面对学生教学的内容. 通过对这些背景的了解，教学中要注意引导学生理解，向量系统是学生见到的第一个有别于数的系统的有运算的数学结

构，它的运算都要进行严格的定义，运算所具有的性质都要严格论证.

本小节只讲向量的线性运算(包括向量的加减法、实数与向量的乘法). 尽管这些是最基本的代数运算，但这种运算对学生来说是比较抽象的. 学生所熟悉的是数的运算，建立在用符号表示数基础上的符号运算和函数的运算本质上也都是数的运算. 而向量是一种新的运算对象(因此符号不全代表数了). 教材借助实例和平面向量的几何表示，帮助学生理解平面向量的加、减运算和数乘运算的意义及运算规则，并通过线性运算来研究两个向量的大小与位置关系. 例如，“实验室中借助弹簧秤验证两个力的合成”引出向量的加法，“匀速行驶的科考船在两个不同时间中位置的变化”引出实数与向量的乘法.

“8.2 向量的数量积”又是学生没有经历过的新的运算，实际上它也是向量空间的线性结构之外所添加的一个运算，用向量的语言描述“角度”这一重要的几何量，特别是描述“垂直”这一重要的几何性质. (事实上，在大学的线性代数课程中，“垂直”是通过正定的内积(即数量积)来定义的. 但在学生所熟悉的现实的平面或(三维)空间中，“垂直”是客观存在或者说预先设定的，于是数量积则反过来被这预先设定的“垂直”关系所定义.)教材通过物理中的功的计算，帮助学生理解平面向量数量积的概念及其物理意义；通过几何直观，了解平面向量投影的概念以及投影向量的意义，并通过用数量积判断两个平面向量的垂直关系和平行关系，使学生初步了解向量的数量积在几何上的应用.

把数量积的定义公式作简单变形，就得到了求两向量夹角的公式. 这个公式的意义在本节没有显现出来，因为现在还少有先知道两向量的数量积而求它们的夹角的例子. 在下一节有了向量的坐标表示以后，可以通过向量的坐标求数量积，上述求向量夹角的公式就将发挥它的重要作用.

“8.3 向量的坐标表示”把几何表示的向量通过直角坐标系的引入又化为代数对象，使向量成为代数方法解决几何问题的一个有效工具. 注意本套教材这一节的编排与二期课改同一内容的编排不同：在二期课改教材中，先介绍向量的坐标表示，再引入向量基本定理；本套教材虽然一开始把向量在直角坐标系中的分解作为情境引入，但马上回过来先给出了向量基本定理，建立起向量分解理论的基础，然后把向量的正交分解作为向量分解的特例引出，最后回到坐标分解. 这样做突出了向量基本定理的重要地位，同时避免了仅在直角坐标系中讨论向量分解定理的局限性.

除了通过向量的几何形式与代数形式(坐标表示)的联系的建立，使向量成为联系代数、几何、三角的重要纽带外，老师们还应该清楚地了解本节所蕴含的以下意义：一，向量的坐标表示提供了把平面和空间中直观的向量抽象地推广到高维向量空间的渠道，而高维向量空间及其相关的线性变换理论是大学线性代数课程的核心内容；二，本节出现了平面向量的基的概念，它现在似乎很不起眼，但将来会推广为高维向量空间的基以及维数、线性相关、线性无关等线性代数课程中的重要且有一定难度的概念. 因此，本节教学应适当强化相关概念，并尽可能用浅显、直观的语言让学生体会一些深层次的数学思想.

“8.4 向量的应用”旨在介绍平面向量在中学阶段的一些最基本的应用，为此，教材精心选择了几个典型的例题. 其中，例 1 用向量方法证明了定比分点公式，例 2 在此基础上运用定比分点公式求三角形的重心. 例 3、例 4 继续向量在平面几何中的应用的话题，例 3 利用向量处理平行关系的优势，方便地证明了“对角线互相平分的四边形是平行四边形”这一定理；例 4 的问题是已知三角形的两条边的向量，求三角形的面积，目标是把三角形的面积用两个向量的坐标简洁地表示出来，但为了降低难度，先求出用这两个向量的模与数量积表示的面积公式，把它作为中间结果. 例 5 是一道日常生活中的问题，例 6 要求用向量方法证明两角差的余弦公式，例 7 是一道力学背景的问题，已知合力求分力.

向量的应用是比较广泛的，特别是在平面几何中有大量的相关问题，但本教材并没有在这里过分挖掘，只是点到为止.

教学提示

向量是沟通代数、几何与三角的桥梁，也是解决三角、几何等问题的重要工具，平面几何和三角中的许多概念和定理有对向量的描述，许多证明和计算可以转化为向量的线性运算以及向量的数量积运算来处理. 在实际教学中需要进一步关注如下几个方面：

（1）向量是一个具有实际意义与物理背景的数学模型

开展向量教学时，需要充分利用学生已有的生活经验，以及物理学科的基础知识，创设丰富的教学情景，例如力、速度、加速度，力的合成与分解，物体做功等. 通过这些情境材料引导学生了解向量的物理背景，认识向量作为描述现实问题模型的

作用，同时通过解决问题，引导学生学会善于运用向量这一数学模型处理问题的基本方法.

（2）向量是联系相关知识的桥梁

向量是代数的研究对象，具有代数表达与运算的特征，是一种基本的数学语言.向量的几何意义使我们可以用代数的方法来刻画几何元素(点、线、面)，通过向量运算描述几何元素之间的关系，以及研究长度、面积、体积等几何度量问题. 教学中，教师要充分关注到向量这些特点，建立向量与代数、几何、三角之间的联系.

（3）向量是解决几何问题的有效工具

向量既有代数的抽象性，又有几何的直观性，是数形结合的典范. 向量法是研究几何问题的有力工具. 教学中应当引导学生深入体会向量及其运算与几何图形之间的联系，总结运用向量的代数运算研究几何问题的基本思想. 即构造向量表示平面几何问题中涉及的几何元素，将平面问题转化为向量问题；通过向量运算，研究几何元素之间的关系，如距离、夹角等问题；最后把运算结果“翻译”成几何结论. 在平面向量的教学中，应该引导学生体会运用向量处理几何、物理问题等的方法. 通过解决上述问题，提高学生的运算能力和解决实际问题的能力.

评价建议

与二期课改教材主要把向量作为解决几何问题的工具进行教学的设计不一样，本教材把向量作为独立的数学分支进行设计. 因此，掌握向量这个“体系”是整个教学的抓手，也是进行教学评价的关键.

向量概念和向量的有向线段表示、向量的线性运算、向量的数量积，以及向量基本定理与向量的坐标表示，是本章所涉及的向量理论的核心内容. 向量系统是有别于数的系统的一个全新的系统，有自己独特的结构和运算体系. 向量系统的教学特别有助于学生数学抽象、逻辑推理、数学运算和直观想象等核心素养的培养，教学评价也应该聚焦于这些素养的考察. 例如，考察学生是否根据物理或生活中量的基本特征，准确辨别出向量和数量；能否理解用有向线段表示向量对建立向量理论的意义，并能熟练掌握在有向线段语境中定义(或者说几何地定义)的各种向量运算；能否理解向量基本定理以及建立在该定理基础上的向量的坐标表示，熟练地进行坐标表示下的各种向量运算.

有些问题并不是传统意义的数学题，但对考察学生的学习过程以及学生对新知识和既有知识的联系能力是很有意义的. 例如，可以让学生思考，用以表示一个向量的有向线段不是唯一的，却为什么可以用于定义向量的夹角(包括向量的平行与垂直)以及向量的线性运算与数量积，怎么说明这些定义与所选择的有向线段无关？向量的有向线段表示不唯一但坐标表示唯一，这“不唯一”如何走向“唯一”，其中的关键是什么？

向量在许多领域有着广泛的应用，各种应用给学生提供了提高数学建模能力的机会，因为来自数学和其他方面的问题未必是用向量表述的，学生就必须从中抽象出向量问题，有时候非向量问题到向量问题的抽象被视为理所当然，如证明直线间的垂直关系变为证明直线上的向量之间的垂直关系，然后用向量方法解决所抽象出来的问题，最后回到原问题的语境解释所得到的结果. 这个过程与一般的数学建模过程类似. 因此，要从数学建模的高度注意培养和考察学生用向量解决问题的能力.

二、教材分析与教学建议

8.1　向量的概念和线性运算

教学重点

理解向量的概念，理解并能熟练进行向量的线性运算(加法、减法、实数与向量的乘法).

内容分析

向量是一个既有大小又有方向的量. 这是向量的描述性定义，它使学生在情境引入基础上容易接受向量这个概念，容易据以判断生活和科学中见到的量是否为向量. 教学中要做好铺垫，并细化处理，用好教材中列举的生活实例、几何事实和物理量(如速度、位移等)，体会所举例子的共同本质特征是既有“大小”又有“方向”，获得对向量的感性认识，逐渐去体会向量概念的本质，完成从“数”到“向量”的认识飞跃.

但向量的这个描述性定义不是严格的数学定义，无法据以建构数学理论. 向量的严格定义依附于向量空间的定义，即在严格定义的向量空间中，向量作为元素出现. 中学数学不可能采取这样的切入方式，而是描述性定义之后，通过一定的抽象和几何表示，借助于学生熟悉的平面上的几何，建立起向量的线性运算，推导出运算的基本性质，从而事实上构建了向量空间(但没有出现这个术语)的基本框架(见附录的 1).

为了让老师们更清楚地了解这个过程，我们进一步解释一下教材的具体做法. 教材在给出“向量是一个既有大小又有方向的量”的描述性定义后，马上指出：“准确地说，一个向量有两个要素定义，一是它的大小(一个正实数或零)，一是它在空间中的方向.”这句补白朝着向量概念的数学化迈出了重要一步：它抛弃向量的物理或其他属性，从数学上把向量描述成一个正实数与空间的一个方向组成的二元组(方向可以理解为一组平行射线，或等价地理解为过一个预先给定的固定点的一条射线)或者 0(由于具有不同方向的零大小的量都是相等的，故与此相对应的向量只有一个).

教材紧接着给出向量的几何表示，即用有向线段来表示向量，甚至直接把有向线段看成向量. 根据定义，具有相同长度且方向相同(即同向平行)的有向线段表示的是同一个向量. 有了学生熟悉的几何载体，向量的相关概念和线性运算的定义就可以严格地进行了. 这就使我们能在建立严格的(平面)向量理论体系方向上继续前进.

从力的合成这一情境中引出向量加法的平行四边形法则，然后在数学上证明了平行四边形法则等价于三角形法则. 要给学生强调这是同一个法则的不同表现形式. 当然，这都是在两个向量不平行的前提下的描述. 如果两个向量平行，那么平行四边形或三角形退化成了一段双重的线段，教材第 101 页画出所有三种不同情况. 如图 8－R1，退化情况可以通过非退化的三角形压扁成线段来说明：

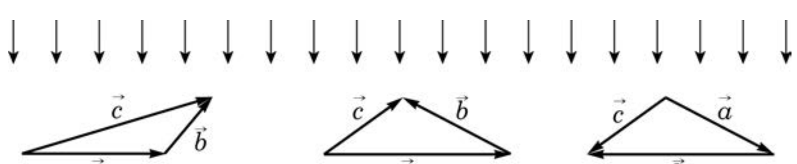


图 8－R1

压扁过程可以口头描述、教学模型展现或者计算机动态演示.

与向量加法有关的运算律包括交换律与结合律，列于教材第 102 页. 教材只证明了

结合律(例 3)，交换律的证明在一个平行四边形用三角形法则中就可以给出(图 8－R2)：

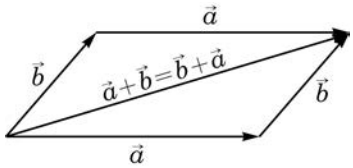


图 8－R2

由于有了结合律，可以考虑不加括号的向量连加. 反复使用证明结合律时用的等式 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，就可以得到容易记忆且方便使用的求向量和的“首尾原则”：若干个起点、终点依次相接的向量的和是以第一个向量的起点为起点，以最后一个向量的终点为终点的向量. 要让学生充分理解并熟练运用这个原则. 这个原则将来还要推广到空间向量.

与数的运算一样，向量的减法是作为加法的逆运算来定义的，并通过负向量把减法运算转化为加法运算. 因此，向量的加法是教学的重点，减法归结到加法，不要再就减法本身大动干戈.

实数与向量的乘法是两个不同类的量之间的运算，直接照本宣科，对学生来说，理解起来会有一定难度. 可以让学生体会 scalar(相对于向量，实数称 scalar)一词的潜在含义. Scalar 是 scale(按比例缩放)的施加者，因此有“缩放器”的原始意义，意味着实数乘在向量上，就是把实数作为比例系数缩放向量(负实数作为比例系数时，除了按绝对值缩放向量外，还要把向量改变为相反的方向). 有了这样的直观描述，学生自然理解了实数与向量相乘依旧得到一个向量，也不难给出这个向量的长度和方向. 我们也常把实数与向量的乘积称为向量的数量倍数，或简称为向量的倍数.

教材中给出实数与向量相乘的三条重要的运算定律，它们都很直观，可以在定义基础上直接验证，但教材限于篇幅而没有给出证明. 这里给出描述性说明供参考，它对学生理解这些运算定律会有所帮助：

证 $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$：向量 $\vec{a}$ 的 λ 倍加上向量 $\vec{a}$ 的 μ 倍是向量 $\vec{a}$ 的 $\lambda+\mu$ 倍.

证 $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$：把 $\vec{a}$ 按比例系数 λ 缩放后，再按比例系数 μ 缩放，其结果即为按比例系数 $\lambda\mu$ 缩放.

证 $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$：如图 8－R3，以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为邻边的三角形与以 $\lambda\vec{a}$、$\lambda\vec{b}$ 为邻边的三角形相似，于是 $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

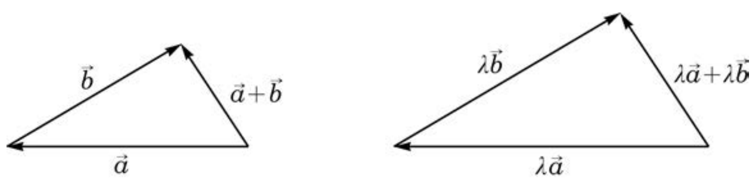


图 8－R3

向量的加法、减法、实数与向量的乘法的综合运算，叫做向量的线性运算. 满足所要求运算定律的线性运算的存在是向量空间最本质的特征. 本节至此完成了平面向量理论的框架构建(见附录的1).

本节共8个例题，其中例1与例2是概念的一些实例，有助于学生的概念理解.

例3证明向量加法的结合律，其证明的逻辑起点是对平面上任意三点 A、B、C 均有 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，无论三点是否共线. 这是本小节所给出的向量加法的三角形法则及其退化情形的统一表达. 给学生讲清这个公式的来源，结合律的证明就顺理成章了. 这个公式还是非常有用的向量加法的“首尾规则”的依据，要借助这个公式和结合律的证明把“首尾规则”讲清楚.

例4是向量加法的实际应用题，情境还是力的合成. 必须注意的是，这里的两个力作用在同一点上，没有这样的前提，两个力是无法合成的.

例5牵涉到向量的减法，这里直接用减法的几何表达解题. 将来向量减法问题更多地直接化为加法做.

例6是向量线性运算及其运算律的练习题，由简入繁，体会向量的计算过程.

例7与例8都是用两个向量表示第三个向量的问题，前者从一个关系式解出表示式，后者从几何图形找出表示式. 这两个例题是向量基本定理的预演，要让学生体会这里所说的“表示”是用给定的一些向量的线性组合来表达另一个向量.

注意事项

本教材向量的引入与二期课改教材的处理不同. 二期课改教材把有向线段直接称为向量并用向量记号表示，事后加上有向线段平移后仍是同一向量的说明. 本教材在向量描述性定义之后，用非负实数与方向的二元组再给向量以数学的定义，然后用有向线段把向量表示出来(即向量的几何表示)，才与二期课改教材进入同一平台. 这样的过程在数学上层层递进，逐渐严密，上文已有描述，希望老师们理解并按此处理.

在讲授向量的几何表示时，要提醒学生的是，用以表示一个向量的有向线段不是唯一的，两个有向线段表示同一向量的充要条件是它们具有相同的长度和方向. 教材提到我们也直接把有向线段看成向量，这时也要强调把一个有向线段平移后还是同一个向量.

用力的合成作为情境引入向量的加法是标准的做法，学生也容易理解. 要注意的是，不是任何两个力都可以合成，但任何两个向量都可以相加. 这个差异的原因是数

学上所研究的向量是自由向量(见教材第 98 页)，即可以自由平移的向量，任何两个向量都可以平移到具有相同起点的位置上. 物理学中的力除了大小、方向外，还有第三个要素作用点，即向(矢)量的起点. 也就是说，力是一个固定向量，作用点不一致的力无法相加. 这给教学的启示是，虽然“力”可以作为引入向量的情境、向量加法的启示和向量问题的来源，但千万不要整体上把“力”当作向量理论的现实样本. 如要以“力”来举例或编习题，千万注意问题中的“力”要有相同的作用点.

本教参提供的向量空间的抽象定义以及教材如何从描述性定义逐步走向严谨和完善的过程的描述是为老师们提供的背景材料，希望教学过程中把握正确的导向. 这些内容不应在课堂上面向学生讲授(但不排除作为学有余力的学生进行自主探究的素材，或者作为学生课外兴趣小组活动的主题).

教学建议

在向量的基本概念教学中，可以设置问题情境，注意调动学生参与概念理解等教学活动的积极性，引导学生自主举出一些向量的实例. 在向量的加法、减法学习中，引导学生自主设计多组向量，并结合平行四边形法则、三角形法则，通过作图深刻领悟向量加法、减法运算的基本内涵.

实数与向量的乘法是刻画平行向量的重要工具. 教材给出了一个向量与一个非零向量平行的充要条件，它是几何问题代数化的起点. 从这里开始，在本章教学中要逐步让学生从理性上理解向量代数在几何中的各种应用. 还可以结合三角形相似等几何变换(本教参说明 $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ 时就用了相似三角形)，引导学生理解向量的线性运算在几何中的意义.

8.2 向量的数量积

教学重点

在物理中的“功”的基础上抽象出投影向量及向量的数量积概念，感悟这些问题上数学抽象的特点与意义；让学生熟悉向量数量积公式(包括导出的向量夹角公式)，理解向量数量积的运算律.

内容分析

本节由通过力的作用做功这个物理现象引出向量数量积. 全节包括“向量的投影”和“向量的数量积的定义与运算律”两小节.

对“力做功”这个物理模型做分析时，常常把力分解成运动方向上的分力和垂直于运动方向的分力. 垂直于运动方向的分力对做功没有贡献，从而只有在运动方向上的分力才是真正做功的力. 这个运动方向上的分力就是力在运动方向上的投影. 这就引出一个向量在另一个非零向量方向上的投影的概念.

必须强调的是，这里所说的投影是一个向量(为了强调它的向量属性，有时用术语投影向量)，它的起点和终点分别是原向量的起点和终点的投影. 必须注意的是，这与二期课改教材所说的一个向量在另一个非零向量方向上的投影是不一致的. 二期课改教材所说的“投影”是一个数量，其绝对值是本教材所说的投影向量的模. 本教材把二期课改教材所说的“投影”称为“数量投影”. 可以用式子把这两种投影的关系表达出来：如果 $\vec{a}$ 是一个非零向量，它的单位向量是 $\vec{a}_0$，那么向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 方向上的投影是

$$|\vec{b}|\cos\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle\vec{a_0},$$

其中 $|\vec{b}|\cos\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$ 就是向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 方向上的数量投影. 这里 $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$ 是向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角. 如果仅就向量到向量的投影而言，二者能够互推，这是因为投影是 $\vec{a_0}$ 的数量倍数，完全决定于一个数量，即数量投影. 由于这个原因，这两个不同的投影概念在使用层面上没有差异.

但是，为什么教材以及它的上位文件国家课程标准改用投影向量来阐述相关内容？最重要的理由是，数量投影只是在特定语境中定义的一个特殊的概念，无法在数学更大的范围内进行合适的推广，而向量意义下的投影是几何学中一般的投影概念在向量理论中的反映. 一般地说，几何学中的投影是一个几何变换，它把高维空间的一个几何对象变换到它的一个较低维数的子空间中的一个几何对象(而不是数). 例如，三维空间中的物体的三视图就是这个物体在三个互相正交的二维子空间(平面)上的投影. 几何学上的投影一方面起着把高维空间中对象的研究化为较低维数空间中的投影对象的研究(维数的降低可能使研究得以简化)；反过来，通过在不同较低维数子空间上的投影对象的研究，又能“拼凑”出有关高维空间原对象的某些认知. 三视图的例子就是这样.

回到向量的语境. 设想老师们都已熟悉空间向量. 我们可以像定义向量到直线(或非零向量方向)上的投影那样定义一个向量在一个平面上的投影：如图 8－R4，作向量$\overrightarrow{AB}$的起点 A 与终点 B 在平面 α 上的投影 A'与 B'，则向量$\overrightarrow{A'B'}$就定义为向量$\overrightarrow{AB}$在平面 α 上的投影(当然，我们还要验证相等的向量在这个做法下得到的投影也是相等的向量，从而说明这个定义是有意义的，但这里不深入细节了). 这个定义是向量到向量(或者说到直线)投影概念的自然推广.

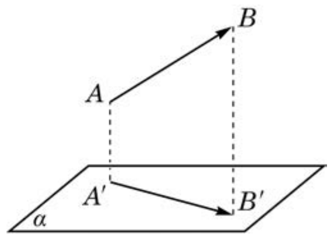


图 8－R4

这里给出的空间向量在平面上的投影出现在本套教材选择性必修第一册习题 3.1B 组第 3 题(教材第 102 页). 这道题中给出了向量意义的投影的传递性：把一个向量投影到一个平面，再把平面中的投影向量进一步投影到该平面中一个非零向量方向上，相当于直接把原向量投影到最后的那个非零向量上. 这种传递性也是一般的几何学上投影的传递性在向量理论中的反映.

关于投影的这些说明供教师参考，并希望教师通过自己的理解和体会，更好地把教材所讲述的投影内容的教学做好，特别注意不要把关于投影和数量积的教学回到数量投影主导的思路上.

向量的数量积的定义公式直接脱胎于力做功的计算公式，学生不太会有理解的困难. 但要提醒学生注意两点：

(1) 虽然教材在本小节一开始就两个非零向量定义数量积，但在后面加了“零向量与任意向量的数量积为 0”的规定，它保证了数量积的定义公式同样适用于零向量的情况，只要加上一个普适的假设：零向量与任何向量的夹角可以是$[0, \pi]$中的任何角.

(2) 运算与数的乘法运算的本质差别还在于：两个数相乘，得到的运算结果还是一个数，即整个运算过程都在数的集合内部实现了；但是，两个向量的数量积是一个数，不再是一个向量了，也就是说数量积运算不能在向量集合内部实现. 还可以比较

实数与向量的乘积，它是两个不同类型的量进行运算，而数量积是两个相同类型的量(都是向量)进行运算，得到另外类型的量(实数). 要用这些例子启发学生认识到运算的概念也会随着数学研究范围的扩大而得到拓展.

要求学生理解并能运用的数量积的运算律有交换律、对数乘的结合律和对向量加法的分配律. 这些运算律及其证明在教材第 113—114 页，这里只对向量数量积对加法的分配律的证明做如下细节补充：由于向量和的投影等于它们投影的和这一结论已在例 2 证明，因此

$$\begin{aligned}|\vec{b}+\vec{c}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\rangle\vec{a_0}&=|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\vec{a_0}+|\vec{c}|\cos\langle\vec{a},\vec{c}\rangle\vec{a_0}\\&=(|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle+|\vec{c}|\cos\langle\vec{a},\vec{c}\rangle)\vec{a_0},\end{aligned} \quad ①$$

这里 $\vec{a_0}$ 是 $\vec{a}$ 的单位向量. 直接把①式两端的向量与 $\vec{a}$ 做数量积，并注意到 $\vec{a}\cdot\vec{a_0}=|\vec{a}|$，就得到所希望的结果. 也可以由①式得出

$$|\vec{b}+\vec{c}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\rangle=|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle+|\vec{c}|\cos\langle\vec{a},\vec{c}\rangle. \quad ②$$

②式两边同乘实数 $|\vec{a}|$ 也得到所要的结果.

②式说的是向量和的数量投影等于它们数量投影的和，这里是通过投影向量证明的，与二期课改教材中的证法不一样.

还要注意教材第 113 页边框中的两点说明：其一，对向量的数量积谈结合律是没有意义的，因为不能定义三个向量的数量积(前段所说，两个向量的数量积不再是向量了，当然就无法与第三个向量做数量积)；其二，对向量的数量积，消去律不成立，即从 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ 及 $\vec{c}\neq\vec{0}$ 无法推出 $\vec{a}=\vec{b}$(这等价于两个非零向量的数量积可以是零).

在这些运算律之外，不必让学生再去掌握其他“公式”. 例 4 的两个公式(完全平方公式与平方差公式)也仅是例题而已，不要求学生掌握与应用，更不要追求它们的“丰富内涵”.

本节给出的向量夹角公式是向量的数量积的定义公式的简单变形，目前还没有看出它的强大功能，可以像教材那样，先给学生一个预告：当向量的坐标表示实现后，向量的数量积直接由坐标算出，这个夹角公式就变成非常有用了. 留一个伏笔，引起学生继续学习的兴趣.

向量的数量积是在平面上既有的角度和垂直关系的本质反映，从而必然是刻画向量垂直关系的最本质的手段，要让学生深刻理解和掌握. 教材中与垂直关系充要条件

并列的不等式$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqslant|\vec{a}||\vec{b}|$及其相等情况的分析难度不大，也希望学生了解. 在下文(8.3 节例 8)还会回到这个话题. 这里特别提醒学生注意，这个不等式中“$\leqslant$”号两边的“$|\quad|$”符号有着不同的含义.

本节共 6 道例题.

例 1 不过是投影的具体例子，有助于学生对概念的理解.

例 2 证明了两个向量和的投影等于投影的和，这是向量投影的线性性质中比较困难的一部分(另一部分是向量数量倍数的投影等于投影的同一数量倍数，见练习 8.2(1)的第 1 题)，但用几何方法解决，直截了当. 实际上，从本例题结论立即可以推出两个向量和的数量投影等于数量投影的和. 本例题的所证结果在下一小节向量数量积对加法的分配律的证明中起关键作用.

例 3 是求数量积的具体例子.

例 4 要求证明两个“乘法公式”，即两向量和的平方公式和两向量平方差的公式，边框中还提到两向量差的平方公式. 注意，这里所说的“平方”都是指一个向量和自己的数量积. 前面说过，这些公式仅作为例题，不要求掌握. 事实上，要使用这些公式时，直接推导也是很容易的. 这里还要再提醒学生注意的是，不是所有关于数的乘法公式都可以移植到向量上，例如所有三次方以上的公式都不能移植，因为一个向量关于数量积的三次方是无法定义的.

例 5 与例 6 是使用向量夹角公式的具体例子. 上文说过，向量夹角公式真正发挥作用是在向量的坐标表示之后. 这里的两个例子不过是小试牛刀.

注意事项

本教材没有把向量的数量积放在“平面向量的坐标表示”总标题之下，明确表明数量积的定义与坐标表示没有关系，注意这个变化. 在坐标表示下数量积的公式，则在下一节中再介绍.

对部分教师而言，从数量投影到投影向量的转换也许有一定困难. 希望大家认真阅读上文所说的这种转换的意义，先让自己对教材和教学内容理解上完成这种转换，才能对本节内容的教学有更好的把握.

从参与运算的量和运算结果的量的差别，让学生体会数的乘法、数与向量的乘法以及向量的数量积之间的差别，理解数学运算概念的拓展. 让学生体会不能定义三个

向量的数量积，从而数量积的结合律无从谈起.

教学建议

对学生直截了当地讲投影向量，数量投影仅作为辅助概念出现，不要偏离这个取向. 本教参花费较多篇幅谈投影向量在数学中的地位和意义，是为了让老师们的思想从数量投影主导转换到投影向量主导. 学生第一次接触向量的数量积概念，没有习惯的或固有的想法，因此不要把概念转换所引起的困惑传递给学生.

数量积运算的定义是本节的核心内容，其引入的逻辑顺序是："力做功"作为情境，得到功的计算公式，再直接模仿功的计算公式定义向量的数量积. 这样的处理没有过分依赖投影概念，对学生直接切入核心内容的学习是有所裨益的. 但这样的处理也有明显的不足："向量的投影"这一小节的内容容易被边缘化. 教材例 2 的设置并把例题的结论用于向量数量积对加法的分配律的证明，在某种程度上弥补了这个缺陷，希望老师们注意到这一点.

有兴趣的老师也可以尝试直接模仿功的定义(而不是功的计算公式)来定义向量的数量积. 这样的处理使得"做功的情境引入—投影的讨论—数量积的定义"的过程一气呵成，实质性地把投影向量融合于向量的数量积的定义中，有它理论上的优势. 这个定义分两个步骤完成. 第一步，先定义两个平行向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$，两向量同向取正，异向取负；第二步，对任意向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$(其中 $\vec{a}\neq\vec{0}$)，定义 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b'}$，其中 $\vec{b'}$ 为 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影. 这个定义中的第一步是把"功等于位移方向上的力乘位移"这个直观描述数学化，第二步是功的定义的直接模仿. 要从这个定义得出数量积的公式，只要对平行向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 验证一下 $(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b})=\lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b})$，再把投影的公式代入就可以了.

在数量积的教学中要特别启发学生理解，向量的数量积与数的乘积是截然不同的运算，绝对不能想当然地把数的运算的性质搬到向量的数量积上，要让学生体会到重新审视和证明数量积的运算定律的必要性.

希望老师们能回忆一下大学的代数课程，并且能理解：我们现在在平面上已知的欧氏空间结构中做数量积，而在大学高等代数或线性代数课程中，欧氏空间的结构是反过来由给定的数量积决定的. 可见，数量积与欧氏空间结构本质上是一回事. 因此，在本节教学中，数量积与欧氏空间中的夹角(特别是垂直关系)的联系是数量积必须要

关注的，数量积的几何应用也常常围绕这个关系推出.

本节教学应聚焦于向量理论本体，可以适当联系向量在平面几何和三角学中的应用，但不宜喧宾夺主.

8.3　向量的坐标表示

教学重点

本节的主题是把 8.1 节所定义的平面向量、它们的线性运算与数量积用坐标形式表达出来. 第 1 小节“向量基本定理”一般性地讨论平面向量写成两个给定的不平行向量之线性组合的问题，这里没有给这两个不平行向量再附加其他条件；第 2 小节“向量的正交分解与坐标表示”讨论了向量的正交分解(即把任意向量写成两个互相垂直向量的线性组合问题)，并且很快就转入更为特殊的坐标分解，即关于预先给定的坐标系中的坐标轴正方向上的单位向量的分解上；后面两节(“向量线性运算的坐标表示”与“向量数量积与夹角的坐标表示”)分别在坐标分解的语境中进行向量的线性运算与数量积运算.

本节教学的关键点有两个，其一是向量基本定理的意义和证明；其二是向量的坐标表示. 有了向量的坐标表示以后，寻求各种向量运算在坐标表示下的表现形式是顺理成章的事，难度也不大.

内容分析

“向量基本定理”是本节内容的逻辑基础. 这个定理的叙述和证明都与坐标系无关，但教材从学生非常熟悉的直角坐标系引入，让学生感知，通过平面直角坐标系，可以把平面向量与有序实数对一一对应；并把这个一一对应最后解释为向量写成坐标轴上单位向量的线性组合，从而为向量基本定理做了一个铺垫，然后进入一般情况的向量基本定理的叙述和证明. 这样的处理旨在充分顾及学生的认知规律，降低教学难度.

向量基本定理是向量理论中举足轻重的一个定理，联系着这一理论中的许多基本概念和结论. 在平面的情况下，这些概念和结论看起来不会太“高大上”，甚至觉得有些平凡琐碎. 我们必须理解并建立这些看似平凡的概念、结论与向量空间一般理论中的概念、结论的联系，以便把这些概念拓展到空间向量(选择性必修第一册第 3 章)以及对学生未来可能的选修课程的学习，从而发展学生的数学抽象素养.

在向量空间理论中，线性相关与线性无关是一对非常重要的概念. 如果一组向量有一个非平凡的线性组合等于$\vec{0}$，那么称这组向量是线性相关的；反之，如果一组向量的任何非平凡的线性组合都不等于$\vec{0}$，那么称这组向量是线性无关的. 对于平面向量，两个向量平行(共线)与线性相关(一组向量有一个非平凡的线性组合等于$\vec{0}$)是等价的，因而不平行(不共线)等价于线性无关.

一个向量空间的基是它的一个极大线性无关向量组(这组向量是线性无关的，但添加任何向量以后就变成线性相关的了). 基的等价定义是向量空间中的一组向量使得任意向量都可以唯一表示成这组向量的线性组合. 把这个定义与向量基本定理比较，得知向量基本定理就是描述向量空间基的定理，因此，在一些文献中也称此定理为向量空间基定理. 平面向量基本定理说的是：平面上任意两个不平行(不共线)的向量都组成平面向量的一个基.

向量空间的一个重要性质是任何基所包含元素的个数是不变的，这个元素个数称为向量空间的维数. 平面向量基本定理告诉我们平面向量组成的向量空间是二维的. 这与我们关于维数的直观认知是一致的.

向量基本定理的证明对学生而言可能有一定难度. 一个难点是，学生习惯于在直角坐标系中求点的坐标(这是本节用直角坐标系引入的理由)，但向量基本定理只给出两个不平行的向量，不要求垂直，因此不能用直角坐标系. 它也不是简单地用平行四边形法则求和，而是已知和与两个加项所在的直线，求加项. 这实际上还是坐标系的思想，不过是斜坐标系(对学生不要用此名词). 可启发学生，在直角坐标系中求坐标虽然常说是作坐标轴的垂线，也可以说成作另一条坐标轴的平行线，平行线的思想就可以模仿到非直角的情况，然后就程序化地作出平行四边形，找出线性组合的系数.

这个证明的图示(教材第 118 页)画的是向量 $\vec{a}$ 与给定的两个向量$\vec{e_1}$ 与$\vec{e_2}$ 都不平行的一般情况，但证明实际上也包含 $\vec{a}$ 与向量$\vec{e_1}$ 或$\vec{e_2}$ 平行(包括 $\vec{a}=\vec{0}$的情况)的特殊情况. 如果觉得学生不能从一般情况体会特殊情况，也可以把平行的特殊情况单独证明. 此时证明很简单：不妨设 $\vec{a}\parallel\vec{e_1}$，由于$\vec{e_1}\neq\vec{0}$，一定存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，使得 $\vec{a}=\lambda\vec{e_1}$(见教材第 105 页所给出的向量平行的充要条件)，这就把 $\vec{a}$ 写成向量$\vec{e_1}$ 与$\vec{e_2}$ 的线性组合 $\vec{a}=\lambda\vec{e_1}+0\vec{e_2}$.

向量基本定理证明的另一个难点是唯一性的证明，虽寥寥数语，但所隐含的思想如不深入体会，便难以真正掌握证明的真谛. 应该告诉学生，在证明唯一性问题上，

一个常用的方法是假设有两个满足要求的东西(向量、方程、代数式、几何图形等)，然后证明这两个东西实际上是同一个东西. 这是证明中所谓的“同一法”. 还要给学生强调，证明“同一”的时候，要用好已知条件，进行严格的逻辑推理. 例如，本定理证明中，从$(\lambda-\lambda')\vec{e_1}=-(\mu-\mu')\vec{e_2}$推出$\lambda=\lambda'$，$\mu=\mu'$就完全依赖于条件$\vec{e_1}$与$\vec{e_2}$不平行(即线性无关).

在向量基本定理的基础上，“向量的正交分解与坐标表示”小节关注“正交分解”(即向量关于两个互相垂直的向量的分解)这一特殊情况，并以物理中“力的正交分解”和“平面直角坐标系”为例子. 专注于正交分解就是专注于向量分解理论中应用最广泛的部分，又与学生的既有知识有密切的联系，也更符合学生的认知发展规律. 正交分解中更具使用价值的是“标准正交分解”，即关于一对互相正交的单位向量的分解. 互相正交的单位向量组成基则称为“标准正交基”.“标准正交分解”与“标准正交基”的概念可以推广到定义了正定数量积的高维实空间(即欧氏空间)上，引出一系列的理论发展. 但本教材回避了这两个概念的术语和一般定义(希望教学中也不要涉及这两个概念)，直接从平面直角坐标系的例子直接引入了“坐标分解”的概念：在既有的(即预先设定的)直角坐标系中，在x轴和y轴正方向给出单位向量$\vec{i}$和$\vec{j}$，关于这两个向量的分解就是“坐标分解”，从而给出向量的坐标表示，并通过位置向量的概念，说明向量的坐标本质上就是位置向量终点的坐标，从而严格阐明平面向量与有序实数对一一对应的关系.

第3小节“向量线性运算的坐标表示”推导了向量的线性运算(包括向量加减法、实数与向量的乘法)在向量的坐标表示下的对应运算法则. 至此，把8.1节所描述的平面向量的全体实现为用坐标表示的二维向量空间(见附录的2). 本小节还给出了坐标表示下向量的模的计算公式.

我们还可以注意到，线性运算的公式其实在任何基下面都有类似的形式，未必要标准正交基. 事实上，如果给定平面上不平行的两个向量$\vec{e_1}$与$\vec{e_2}$，任何平面向量都可以唯一地表示成$x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$的形式，其中x、$y\in\mathbf{R}$. 如果也用实数对(x,y)记这个向量，那么教材第121页上关于线性运算的规则依然成立，那里的证明也可以直接搬到这种更一般的情况. 所以希望在讲这些公式时，不要过分强调正交分解.

但本小节的模的计算公式依赖于正交分解.

与线性运算不同的是，向量的数量积依赖于欧氏空间结构(我们已经反复讲过)，

所以第 4 小节“向量数量积与夹角的坐标表示”的讨论完全建立在标准正交分解的基础上，我们从教材第 123 页上的向量数量积公式的证明中就可以看到这一点.

用向量在直角坐标系中的坐标表示，向量的数量积有着非常简洁的表示式，而原来的向量夹角(余弦)公式也演变成了向量坐标之间的简单运算. 向量坐标表示的这个优势是向量方法解决许多几何问题的基础. 教材第 124 页给出了两向量垂直与平行的充要条件，是这种优势的小试牛刀. 这两个充要条件简单、工整、对称，实用性强，也应该让学生掌握.

本节一共 8 个例题.

例 1 要求用平行四边形的两条邻边所代表的向量的线性组合来表示该平行四边形中的一些其他线段所代表的向量，这是诠释向量基本定理的实例. 注意，这是本节例题中唯一采用非正交分解的例子，教学中应充分利用这一点给学生一些“斜分解”的直觉和基本计算能力.

例 2 要求写出一些向量的坐标. 图中所画向量有的不是从坐标原点出发，提醒学生求向量的坐标不是简单地找向量终点的坐标，只有当向量的起点落在坐标原点时，其终点的坐标才是向量的坐标；在其余的情况下，一定要先把向量平移，使其起点置于坐标原点(即作出已知向量的位置向量)，才能求它的坐标.

在下一小节例 4 前面(教材第 121 页)又回到求向量坐标的话题，给出了向量的坐标等于其终点坐标减去其起点坐标的结论. 在这个地方可以回顾一下例 2，再进入例 4.

例 3 至例 5 都是与第 3 小节内容相关的简单计算：例 3 关于线性运算；例 4 求起点不在坐标原点的向量的坐标，不用几何方法作位置向量，而是用终点坐标减去起点坐标的代数方法；例 5 比例 4 更深入一步，要用向量的模求单位向量的坐标.

例 6 给定了两个向量的坐标，求它们的夹角，是第 4 小节所给的向量夹角公式的直接应用；例 7 用求向量的数量积证明垂直关系，把话题引导到紧接在后面的向量垂直与平行的充要条件上.

例 8 给出了向量在代数中应用的一个例子：用向量方法证明柯西－施瓦兹不等式. 这道例题以及下一节的一些例题往往有一些难度，在教学中应尽量启发学生如何找到解题思路，如何克服解题过程的难点等. 比如针对例 8，可以比较柯西－施瓦兹不等式与向量夹角公式从而找到切入点，启发学生由余弦函数的取值范围推出不等

式，再把等号成立的条件化为余弦函数值的条件及向量平行条件，最后用平行的充要条件得出结论.

注意事项

向量基本定理只要求两个向量不平行，没有垂直之类更强的假设条件. 本套教材之所以从平面直角坐标系引入话题，纯粹是从学生熟悉的语境出发帮助学生理解，不要把向量基本定理讲成只针对两个互相垂直向量的情况. 当然，在中学阶段，向量基本定理的主要作用是给出向量的坐标表示，所以在第 1 小节讲了一般性向量基本定理后，后几个小节只聚焦于正交分解和坐标表示(实际上，如上文所说，向量的线性运算公式并不依赖于正交分解).

向量通过它的坐标与有序实数对(x,y)一一对应，但这里向量的坐标指的是把向量起点放在坐标原点时，向量终点的坐标. 要反复提醒学生，通过平移把向量的起点置于坐标原点(即作出给定向量的位置向量)，或者通过把向量终点坐标减去其起点坐标得到向量的坐标.

教学建议

向量基本定理的表述和证明是本节的关键点和主要难点，应按教材建议，从学生熟悉的直角坐标系情境入手，再推广到一般情况. 其“存在性”的构造性证明和“唯一性”的同一法证明，对学生都有一定难度，要让学生在学习中了解这些证法，尝试使用这些证法，以提高逻辑推理能力. 注意学生的理解情况，必要时放慢进度，让学生酝酿体会，直至有较好的理解和掌握.

建立了向量的坐标表示后，第 3 和第 4 小节中的公式和结论的证明基本上是常规的计算和验证，建议可让学生在教师指导下尝试自行推导或证明，以锻炼学生的数学运算和逻辑推理素养.

第 1 小节后的“探究与实践”可作为数学探究活动的素材.

虽然不必向学生讲解，但是老师们要了解本节牵涉到许多向量空间理论中的重要概念和理论，而最本质的是，本节经历了通过一个基，把抽象的向量空间表示为由数组组成的“比较具体的”向量空间(见附录的 2)，以及通过一个标准正交基，把抽象的欧氏空间表示为由数组组成的“比较具体的”欧氏空间.

8.4 向量的应用

教学重点

通过用向量工具解决代数、几何、三角和物理等领域中的问题，既是对前面几节内容的复习回顾，更是对向量作为解决各种问题的工具的揭示，对解决问题的基本思路和基本方法的示范.

培养学生自觉地把向量工具作为解决数学其他分支和其他学科问题以及实际问题的一个重要的选项，并逐步提高这个工具的使用能力.

内容分析

在本章8.1—8.3节所发展出来的平面向量的基础上，8.3节末尾已呈现了向量在代数中应用的例子，本节继续给出向量在平面几何、函数以及物理等方面的应用. 我们已经看到向量理论本身严密精美，有丰富内涵，构成了精致的代数结构；我们还将看到向量理论的另外一面——它还是数学和其他学科中一个有用的数学工具，可以把许多问题转化为向量问题，并最终通过向量的坐标表示转化为代数问题来处理. 学生可以从中体会数学中各个分支间以及数学与外部世界的交叉融合、相得益彰的魅力.

例1用向量坐标法证明定比分点公式. 这里不仅仅指“内定比分点”(即在线段内部的定比分点)，因此题目一开始就说“P 是直线P_1P_2上的点”，而不是说“P 是线段P_1P_2上的点”. 需要注意条件 $\lambda \neq -1$，引导学生从几何上思考：如果$P_1 \neq P_2$，是否存在使$\overrightarrow{P_1P} = -\overrightarrow{PP_2}$的点 P？或者从代数解题过程中讨论 $\lambda \neq -1$ 将出现什么问题. 如果希望给学生几何直观，可以分 $\lambda < -1$、$-1 < \lambda < 0$ 与 $\lambda \geqslant 0$ 三种情况讨论，并分别画图. 问题最后得到有向线段的定比分点公式，特别是线段中点坐标公式有很多应用，建议学生尽量记忆，并可直接使用. 中点公式在例2中有直接应用. 与定比分点相关的还有练习8.4(1)的第3题，习题8.4A组的第1题.

例2利用例1得到有向线段的定比分点公式进一步给出了三角形重心的坐标表示，是向量的坐标表示法在平面几何上的应用.

许多平面几何的定理和问题可以用向量方法解决，例3就是这样的例子，它用向量法证明了平行四边形的一个判定定理：对角线互相平分的四边形是平行四边形. 证明过程只用到向量加法，非常简单. 在讲解过程中，不妨与以前初中时期的初等几何方法相比较，从中可以看到这一新方法的简捷之处. 但要注意，两个向量相等给出的不仅仅是向量所在的线段相等，而是它们平行且相等. 练习8.4(1)第2题、习题8.4A

组第 4 题以及习题 8.4B 组第 5 题都是平面几何定理或问题的向量解法，与本例题有异曲同工之妙.

例 4 实际上是把原点为一个顶点的三角形的面积用另外两个顶点的坐标表示出来，其第(1)小题是第(2)小题的中间结果，是为减小例题难度而设的铺垫. 公式的证明用到了向量的坐标表示、由两边长与夹角正弦乘积之半表达的三角形面积以及向量的数量积. 本题的关键点是把三角形面积公式中的正弦与向量数量积中的余弦联系起来，因此自然想到的是求面积的平方，走了这一步，其他的就迎刃而解了.

这里得到的面积公式简洁明了，用起来也非常方便，在本教材中，可以作为结论使用. 如果三角形的第三个顶点不在坐标原点，仍可以用此公式，只不过要先求出其两边向量的位置向量. 练习 8.4(1)第 1 题、习题 8.4A 组第 2 题就可以这样解答，习题 8.4B 组第 2 题也是该例题的拓展.

例 5 旨在呈现向量方法和函数领域的联系，体现了运用向量方法在求解这类问题中的简捷之处，其中蕴涵向量的数量积和它的几何内涵. 在讲解过程中，或可以通过与其他的方法相比较，进而体会这一方法的特色在哪里. 练习 8.4(2)第 2 题是该例题的知识延伸.

与平面几何类似，许多三角学的公式、定理也可以用向量方法证明，这里给出的例 6 就要求用向量方法证明两角差的余弦公式. 证明在单位圆中进行，思路很简单，不过是用两种办法计算两个角 α 与 β 终边上的单位向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积，再令两种算法的结果相等. 这里要注意的是，因为题目中 α 与 β 可以是任意角，不能保证 $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle=\alpha-\beta$，而只能保证这两个角有相同的始边与终边. 这已经足够使我们的证明进行下去了.

可以引导学生用向量方法证明正弦定理、余弦定理等(见习题 8.4A 组第 3 题)，使学生体会向量方法带来的便利以及向量在三角中的广泛应用.

例 7 是向量在力学上的应用，向量上不过是一个向量沿两个不同方向的分解问题，与向量基本定理的证明有着相似的情境. 这里提请注意两点：一，我们多次强调过，力的问题中，必须作用点相同的力才可能做数学意义的向量运算；二，这个问题不是对重力做分解，而是对总拉力做分解，而由于系统是平衡的，因此总拉力与重力大小相等，方向相反. 练习 8.4(2)的第 1 题也是力的问题.

注意事项

除了向量的数量积和向量的坐标表示外，在二期课改中其余平面向量内容都在初

中教材中，尽管向量内容完全夹杂在几何内容中，但鉴于学生的知识基础，向量在几何上的应用无法深入. 相比于此，新教材在这方面的要求有较大的提高，编排集中，涉及面拓宽，习题也更丰富了. 希望通过这一章节向量与数学内外其他知识的联系的呈现，让学生对向量的广泛应用和处理问题的简洁明了有深刻的印象，让向量工具成为学生解决数学问题或其他相关问题时的重要选项.

当然，向量也有很多局限性，不可能解决所有的科学难题，教学中也务必强调这一点. 另外，不宜过多挖掘与向量有关的应用问题，造成学生负担过重. 向量也不能代替平面几何中的演绎推理. 这方面一定要适可而止.

教学建议

作为课堂的引入，可以通过简要的复习，或让学生以小组分享形式对前三节的重要知识和内容有所回忆和综合. 由于向量蕴藏有代数与几何的双重属性，相关的知识可以相当丰富，因此在具体解题应用中会有不同的方法呈现，而老师和学生们的群策群力，可能会找寻到各种各样的向量与非向量的解题之路. 希望通过向量的应用这一节的学习，发展学生的建模素养，进一步推动学生用数学的更加多元的眼光观察和思考身边的世界.

本节旨在介绍和呈现向量的一般应用，一共安排了两个课时，在学生已经知道和明了关于向量的各种应用的基础上，不宜对初等几何的一些难题多作纠缠.

三、参考答案或提示

8.1 向量的概念和线性运算

练习 8.1(1)

1. (3)(6)(8)；电场强度等.

2. 不是，图略.

3. (1) $\overrightarrow{EF}$、$\overrightarrow{CB}$.　　(2) $\overrightarrow{FA}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{AF}$、$\overrightarrow{CD}$.

(3) $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{DE}$、$\overrightarrow{ED}$、$\overrightarrow{EF}$、$\overrightarrow{FE}$、$\overrightarrow{AF}$、$\overrightarrow{FA}$、$\overrightarrow{OA}$、

$\overrightarrow{OB}$.　（4）$\overrightarrow{AF}$、$\overrightarrow{CD}$.

练习 8.1(2)

1.（1）$\overrightarrow{CB}$.　（2）$\overrightarrow{BA}$.

2. 证明略，可以.

3. 不能，因为三个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和$\vec{c}$可能是共线向量.

练习 8.1(3)

1.（1）$17\vec{a}-10\vec{b}$.　（2）$-\frac{7}{12}\vec{a}+\frac{13}{12}\vec{b}$.　（3）$-11\vec{b}+11\vec{c}$.

2.（1）$-\frac{3}{5}\vec{b}$.　（2）$\frac{2}{5}\vec{a}+\vec{b}$.　（3）$\frac{2}{5}\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}$.

3. $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{GC}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.

习题 8.1

A 组

1. 单位圆.

2.（1）图略.　（2）图略.　（3）图略.

3.（1）假命题，理由略.　（2）真命题，理由略.

（3）假命题，理由略.　（4）假命题，理由略.

4.（1）$\overrightarrow{DB}$、$\overrightarrow{FE}$.　（2）$\overrightarrow{CF}$、$\overrightarrow{FA}$、$\overrightarrow{ED}$.　（3）$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{BD}$、$\overrightarrow{DB}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{FE}$.

5.（1）图略.　（2）图略.

6.（1）$\vec{0}$.　（2）$\vec{0}$.　（3）$\overrightarrow{AB}$.

7.（1）向东走 4 km.　（2）向南偏东 45°方向走 $2\sqrt{2}$ km.

（3）向北偏东 45°方向走$\sqrt{2}$ km.　（4）向南走 3 km.

8. $4\sqrt{13}$.

9.（1）证明略.　（2）证明略.

10.（1）$\vec{a}-\vec{b}$.　（2）$-\vec{a}-10\vec{b}+7\vec{c}$.　（3）$-\vec{a}+2\vec{b}$.

11. 证明略.

12.（1）$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.　（2）$\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

习题 8.1

B 组

1. （1）图略.　　（2）图略.　　（3）图略.

2. （1）$\sqrt{2}$.　　（2）1.　　（3）2.

3. （1）图略.　　（2）图略.

4. （1）证明略.　　（2）证明略.

5. （1）假命题，理由略.　　（2）真命题，理由略.　　（3）真命题，理由略.

6. 证明略.

7. 证明略.

8. 证明略.

8.2　向量的数量积

练习 8.2(1)

1. 证明略.

2. （1）$\frac{\pi}{3}$.　　（2）$\frac{\pi}{3}$.　　（3）$\frac{2\pi}{3}$.

3. $\pm\frac{24}{25}\vec{a}$，± 4.8.

练习 8.2(2)

1. 直角三角形，理由略.

2. （1）$16-18\sqrt{3}$.　　（2）$\frac{2\pi}{3}$.

3. $\sqrt{7}$.

习题 8.2

A 组

1. $-\frac{4}{3}\vec{b}$.

2. $\frac{3}{2}$.

3. $3\sqrt{2}$.

4. 0.

5. $\frac{\pi}{4}$.

6. 27.

7. 等边三角形，理由略.

8. (1) -10.　　(2) -93.

9. 29.

10. (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.　　(2) $\frac{\pi}{4}$.

11. (1) -16.　　(2) -25.

12. -1.

习题 8.2

B 组

1. $\sqrt{3}$.

2. $\sqrt{7}$.

3. $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

4. 10.

5. -16.

6. $\frac{\pi}{3}$.

7. 证明略.

8. 证明略.

8.3 向量的坐标表示

练习 8.3(1)

1. $\overrightarrow{OA}=(a\cos\theta)\vec{i}+(a\sin\theta)\vec{j}$，$\overrightarrow{OA'}=(a\cos\theta)\vec{i}-(a\sin\theta)\vec{j}$.

2. $\overrightarrow{OC}=-\vec{a}+0\vec{b}$，$\overrightarrow{OD}=0\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{DC}=-\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=-\vec{a}-\vec{b}$.

3. $\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{CG}=-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$.

练习 8.3(2)

1. $3\vec{a}-\vec{b}=(-8,14)$，$|3\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{65}$.

2. $\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$.

3. $\overrightarrow{AB}=(1,1)$，$\overrightarrow{BC}=(2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(3,3)$.

证明：$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}$，或 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$，或 $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$等.

练习 8.3(3)

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=8$，$\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=-2$.

2. $|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=13$，$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\arccos\frac{33}{65}$.

3. $k=0$ 或 $k=2$.

4. $k=1$，$\vec{c}=(2,-1)$.

习题 8.3

A 组

1. $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}$，$\overrightarrow{ON}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$.

2. $2\vec{a}+3\vec{b}=(4,7)$，$\vec{a}-2\vec{b}=(-5,0)$，$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}=\left(-\frac{7}{6},\frac{2}{3}\right)$.

3. $\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=(6,0)$.

4. $|\vec{a}|=13$，$\vec{a_0}=\left(-\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right)$.

5. $C\left(-1,\frac{3}{2}\right)$，$D(-11,-1)$，$E\left(\frac{7}{3},\frac{7}{3}\right)$.

6. $x=\frac{5}{3}$.

7. $P\left(\frac{5}{3},-2\right)$或 $P\left(\frac{13}{3},2\right)$.

8. $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$，$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\pi}{4}$.

9. $m=1$ 或 $m=-6$.

10. $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$或$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

习题 8.3

B 组

1. $C(6,9)$，$D(3,12)$，$E(5,10)$. C、D、E 三点共线.

2. $m=\frac{1}{2}$.

3. $A(-3,0)$、$B(0,9)$或$A\left(-\frac{3}{2},0\right)$、$B(0,-9)$.

4. $k=5$.

8.4 向量的应用

练习 8.4(1)

1. 9.

2. 证明：由图可知，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，于是$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. 因此，$DE\parallel BC$.

3. $(0,\ 15)$.

练习 8.4(2)

1. (1) $\vec{f_2}=(1+\sqrt{3},3+\sqrt{3})$.　　(2) $10(3+\sqrt{3})$焦耳.

2. 当点 P 的坐标是$\left(\frac{8}{37},\frac{85}{37}\right)$时，$|\overrightarrow{BP}|$取到最小值.

习题 8.4

A 组

1. $\left(\frac{5}{2},\frac{13}{3}\right)$.

2. $\frac{3}{2}$.

3. 证明略，提示：利用向量的数量积及其相关性质.

4. 证明略，提示：综合运用向量的线性运算和数量积的相关知识.

5. 证明：设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$. 再设$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC}$，于是$\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$，$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=(1-\lambda)\vec{a}+(1-\lambda)\vec{b}$.

类似地，可求得$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=(\lambda-1)\vec{a}+\lambda\vec{b}$，$\overrightarrow{ND}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AN}=(\lambda-1)\vec{a}+$

$\lambda\vec{b}$，从而有$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{ND}$.

因此，四边形 $BMDN$ 是平行四边形.

B 组

1. 证明略，提示：运用向量的概念和线性运算及其性质.

2. 证明略，提示：$\overrightarrow{CA}=(x_1-x_3,y_1-y_3)$，$\overrightarrow{CB}=(x_2-x_3,y_2-y_3)$，进而利用 8.4 节例 4 的思路即可获证.

3. 证明：构造向量 $\vec{u}=(a+2,b+3)$，$\vec{v}=(1,1)$，则由 $6=|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leqslant|\vec{u}||\vec{v}|\leqslant\sqrt{2}|\vec{u}|$，可知$|\vec{u}|\geqslant3\sqrt{2}$，从而有$(a+2)^2+(b+3)^2\geqslant18$. 当取等号时，与“$a$、$b$ 均为正数，且 $a+b=1$”矛盾，因此$(a+2)^2+(b+3)^2>18$.

此题亦可借助于其他的方式构造向量来求证.

4. 证明：设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}$，进而可求出$\overrightarrow{ME}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}$ 和$\overrightarrow{DE}=\dfrac{3}{4}\vec{a}-\dfrac{1}{4}\vec{b}$. 再利用已知 $ABCD$ 是一个正方形验证$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{DE}=0$ 即可.

5. 证明：设此平行四边形为 $ABCD$，记$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，进而将所求的向量写成 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的线性组合. 不妨与 8.4 节例 1 中的定比分点公式相比较.

复习题

A 组

1. （1）$3\sqrt{2}$.　（2）$\sqrt{26}$.　（3）$2\sqrt{2}$.

2. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向.

3. 证明略，提示：计算它们的终点连成的向量.

4. $(1,4)$.

5. $\left(-7,-\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{\sqrt{14}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$.

6. （1）$\sqrt{58}$.　（2）$-\dfrac{1}{3}$，反向.

7. （1）$(-9,15)$，$3\sqrt{34}$.　（2）$(3,6)$，$(19,-39)$.　（3）-56.

8. $\lambda=1$，$\mu=-2$.

9. $\left(\frac{1}{3},-\frac{5}{3}\right)$.

10. 证明略，提示：用$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$表示$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BC}$.

11. 证明：$4\overrightarrow{PG}=2\overrightarrow{PN}+2\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$.

12. 证明略，提示：计算得到$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{BC}$平行，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$不平行.

B 组

1. 证明略.

2. $\vec{c}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.

3. (1) 证明略，提示：两个向量的数量积为 0.

(2) $\frac{\pi}{6}$或$\frac{7\pi}{6}$.

4. $\sqrt{2}$.

5. $-\frac{3}{2}$.

6. $-\frac{2}{3}$.

7. $(4,2)$.

8. 证明略，提示：设$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$，$0<\lambda<1$，用$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AD}$作为基向量表示$\overrightarrow{PD}$和$\overrightarrow{EF}$.

9. 证明略，提示：以一条边及其上的高所在的直线为 x 轴和 y 轴建立平面直角坐标系.

10. $\vec{f_2}$ 的大小为 $1\,000\sqrt{13-6\sqrt{3}}$ N，与 M 的前进方向的夹角为 $\arcsin\frac{1}{\sqrt{13-6\sqrt{3}}}$.

拓展与思考

1. 不存在.

2. 证明略，提示：寻找合适的坐标轴建立平面直角坐标系.

四、相关阅读材料

参考文献

张景中，彭翕成. 绕来绕去的向量法[M]. 北京：科学出版社，2010.

附录

1. 向量空间的抽象定义

实数域 $\mathbf{R}$(也可换成其他数域)上的向量空间是一个集合 V，并且

(1) 有一个定义在 V 上的二元运算+(加法)，使得 $a+b\in V$，对所有 a、$b\in V$，并且满足

①$a+b=b+a$，对所有 a、$b\in V$；

②$(a+b)+c=a+(b+c)$，对所有 a、b、$c\in V$；

③存在一个元素 $0\in V$，使得 $0+a=a$，对所有 $a\in V$；

④对任何 $a\in V$，存在元素 $-a\in V$，使得 $a+(-a)=0$.

(2) 任意 $\lambda\in\mathbf{R}$ 与 $a\in V$ 定义一个元素 $\lambda a\in V$(可理解为实数 λ 与向量 a 的积)，满足

① $1a=a$，对所有 $a\in V$；

② $0a=0$，对所有 $a\in V$；

③ $\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a$，对所有 $a\in V$，λ、$\mu\in\mathbf{R}$；

④ $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$，对所有 $a\in V$，λ、$\mu\in\mathbf{R}$；

⑤ $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$，对所有 a、$b\in V$，$\lambda\in\mathbf{R}$.

2. 向量空间的例

设 n 是一个正整数，n 个实数的数组组成的集合

$$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}$$

是一个向量空间，只要定义

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)+(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

$$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n),$$

这里 λ 与所有 x_i、y_i（$i=1$，2，…，n）都是实数.

这是一个 n 维向量空间，向量

$$(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots\cdots,(0,0,\cdots,1)$$

就组成它的一个基.

实际上，这个例子有它的普遍意义：实数域 $\mathbf{R}$ 上的任何 n 维向量空间都可以通过它的一个基表示为（更严格的数学语言是"同构于"）$\mathbf{R}^n$.

说明：在线性代数或高等代数课程中，为了把线性变换的矩阵左乘，常用列的形式把数组写成 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

第 9 章　复数

一、本章概述

总体要求

复数是在实数的基础上，人们对于数的认识的进一步发展. 复数是数系扩充过程中的一个重要环节，对于复数概念和运算规则的规定，使得复数成为一类重要的运算对象，同时，复数又兼具非常明确的几何意义. 复数从代数和几何等多个方面呈现其与客观世界的深刻联系. 复数是现代数学工作者和各个领域的科技工作者广泛运用的基本数学工具.

数学的发展史表明，复数与无理数一样，都是人类理性思维的产物，体现了数学知识体系的内在矛盾对于数学发展的推动作用. 从实数系到复数系，首先是满足了数学自身发展的需要，人们逐步发现复数与几何的关联乃至复数与客观世界更为广泛的联系，反过来又进一步推动了复数理论的发展与完善. 对复数知识起源的简要介绍，有益于学生理性思维的形成和发展.

在复数知识的学习中，学生会了解一些新的概念和规则，从中体会类比、推广等数学思想方法. 复数学习内容的呈现，凸现了复数与中学数学各个知识模块的紧密联系，在探寻复数与图形的联系中强化“数”与“形”相互结合的意识，体验从复数这一新的视角把握代数与几何的关联. 在介绍复数的概念、运算以及几何意义等基础知识的过程中，应重视发挥其对学生数学抽象、数学运算、逻辑推理以及直观想象等数学核心素养发展的促进作用.

课时安排建议

本章的课时安排建议为 5＋2＋1，共计 8 课时. 建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
9.1　复数及其四则运算	2	复数的引入与复数的四则运算　1 课时
		复数的实部、虚部与共轭　1 课时

（续表）

章节名	建议课时	具体课时分配建议
9.2　复数的几何意义	2	复平面与复数的坐标表示、复数的向量表示、复数加法的平行四边形法则　1 课时
		复数的模　1 课时
9.3　实系数一元二次方程	1	
9.4　(选学)复数的三角形式	2	复数的三角形式　1 课时
		三角形式下复数的乘除运算、三角形式下复数的乘方与开方　1 课时
复习与小结	1	

内容编排与特色

本章内容共分为四节，分别是 9.1 复数及其四则运算，9.2 复数的几何意义，9.3 实系数一元二次方程，9.4 复数的三角形式.

本教材复数内容与众不同的处理方法是“运算先行”，在全章开头引入复数之后，单刀直入地介绍复数的四则运算，而相关的概念和理论框架随后逐步完善.

具体地说，“9.1 复数及其四则运算”开门见山地从负数的开平方引入虚数单位，从虚数单位与实数的运算引入一般的复数. 从本章课后阅读简要介绍的复数起源故事可以看到，在三次方程求根公式的研究中，数学家不得不面对负数的开平方问题. 为了解决这个在当时属于“不现实”的问题，数学家凭空想象出一种新的数，叫做“imaginary number”(想象的数，翻译后被叫做虚数)，其中虚数单位 i 满足 $i^2=-1$.

在定义了虚数单位后，用“运算”的途径构建复数集 **C**：首先把虚数单位与实数“相乘”，得到形如 $bi(b\in\mathbf{R})$的纯虚数，然后把这样的虚数与实数“相加”，得到一般的复数 $a+bi(a、b\in\mathbf{R})$. 这种引进一般复数的方式突出了数系的运算特征.

复数相等的关系是建立复数运算的逻辑基础. 教材把复数相等作为“约定”在这里出现了. 有了复数相等关系后，就能类比多项式的运算法则直接给出复数运算的定义，使学生能不太困难地理解和进行复数的运算. 在教学时，注意让学生进行这种类比，而不是强求学生死记运算公式.

由于“运算先行”，复数的实部、虚部和共轭等概念在复数的四则运算之后才出现，然后衔接到 9.2 节的内容.

因此，本教材复数理论的建立可以描述为以运算为抓手，先搭建一个基本满足需要的框架，再加以逐步细化并形成严谨的逻辑体系的过程. 这样的复数知识呈现方

式，在某种程度上还原了历史上数学家对于复数研究非常朴素而自然的探究过程，它为学生用一种朴实无华的思想方法进行科学创新的思考提供了一次体验的机会. 同时，将复数的四则运算与实数范围内多项式的运算建立起一个清晰的联系，从而将需要学习的新知识链接于学生头脑中掌握得较好的既有知识. 这样的知识呈现顺序，有利于学生更加快捷、高效地获取新的数学知识和数学思想方法.

“9.2 复数的几何意义”的主要目的是通过复平面建立复数与点及向量之间的对应关系. 复数的代数形式反映了数系扩充的一般表示方法，也为复平面的构建提供了方便. 复数代数形式中的实部与虚部，自然地成为复数所对应的向量在一组正交基(1，0)与(0，1)下的坐标. 在建立了复数与向量之间的对应关系后，不仅可以用向量的加减运算来表示复数的加减运算，而且可以将向量加减运算的平行四边形法则推广到复数的加减运算上，在赋予复数加减运算几何意义的同时，也自然地将向量的模的概念推广到复数上. 教材中的这种处理方法如顺水推舟，将第 8 章与第 9 章自然地联结在一起.

本套教材在复数引入之初就给出了复数四则运算的定义，与在定义了复平面和复数的坐标表示后再引入复数运算相比较，更突出复数作为一个数系的运算特征，而把复平面及复数运算的几何意义作为一种拓展性质. 从逻辑上看，这样的处理更合理.

“9.3 实系数一元二次方程”是对复数引入情境(求复数的平方根)的一种呼应，彻底解决了实系数一元二次方程问题，得出任意一个实系数一元二次方程都有两个根，并对虚根的共轭性以及根与系数的关系(即韦达定理)进行了充分的讨论. 教师要心中有数的是，这一内容是著名的“代数学基本定理”(复系数一元多项式方程在复数域内一定有一个根)以及它的推论(如果重根按重数计，复系数一元 n 次多项式方程在复数域内正好有 n 个根)的最简单的情形：二次多项式方程，而且只考虑实系数的情形(复系数的情况在节后的“探究与实践”中).

“9.4 复数的三角形式”属于选学内容，是二期课改教材中没有的内容. 复数的代数形式虽然能够较为方便地处理复数的加、减、乘、除等四则运算，但是，要对以代数形式表示的复数进行高次乘方和开方运算，是一项较为困难的工作. 在 9.2 节中建立复数与复平面上的点的一一对应之后，很自然地联想到用在直角坐标系中确定点的位置的几何量来表示对应的复数. 除了点的直角坐标(它给出复数的代数形式)外，还有一组几何量可以准确地给出点的位置，它们是复数的模和辐角(这组几何量将来可以联系到点的极坐标). 用复数的模和辐角的正弦与余弦，构建一种不同于代数形式的复数表达方式，由此，复数便有了另一种非常重要且有用的表示形式，即复数的三

角形式. 若复数以三角形式表示，则复数的乘除运算以及乘方和开方运算都有非常简洁的表达式，并可以显示出这些运算的几何意义：复数的三角形式是一种刻画旋转变换非常便捷、有效的工具. 以三角形式表示的复数乘法、除法公式，清晰而自然地体现了复数乘法的几何意义. 例如，一个复数乘(除以)一个模为 1 的复数，在复平面上就是一个点绕着坐标原点旋转某一角度.

在三角形式的基础上，还可以进一步用指数形式来表示复数，但本教材不涉及. 复数的三角形式和指数形式在数学中都具有广泛的应用.

对复数代数形式和三角形式相关知识的介绍，构成了相对完整的复数系的基础知识，展示了复数这一代数概念与几何的内在联系，为学生又一次提供了用代数手段解决几何问题的实践体验.

教学提示

回顾初中阶段求解一元二次方程的相关知识，由此提出负数的开平方问题并引出虚数单位的概念，这是在课堂教学中介绍复数知识通行的做法. 但是，希望在一元二次方程判别式小于零时有解，并非是数学家引入虚数概念的直接动因. 这里，可以结合本章的课后阅读，从三次方程求根公式的研究过程中要解释 $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}-\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ 的意义入手，引导学生思考其中需要解决的两个问题：第一，负数开平方的含义是什么？第二，即使负数可以开平方，那么开方的结果与实数之间的“+”是怎样联系的？也就是它怎样参与实数的运算. 由此便可自然地将教学内容指向本章第 1 节复数的概念、复数相等以及复数四则运算规则等知识. 在整个复数教学过程中，教师要把握“运算先行”的模式，即先定义并让学生操作复数的四则运算，再细化复数的相关概念的知识呈现方式，引导学生关注创立复数理论的过程中那些非常朴素的思想方法，体验、感悟怎样用最便捷、有效的方式，将科学创新的成果与既有的知识体系有机融合.

复数的运算法则和复数的几何意义是复数基础知识中的两个核心内容. 复数概念从诞生到确立其在数学中的地位经历了近 300 年的时间，这其中复数的几何意义功不可没. 复数几何意义涉及中学数学多方面的知识，复数、直角坐标平面上的点以及向量相互紧密联系，它们有许多共同点，但是各自的性质又有不少差异. 向量和复数都可以进行加减运算，而且都遵守平行四边形法则，这是它们的共性. 复数可以进行乘除运算，而且运算的结果仍然是复数；而向量的数量积在某种意义下也是乘法，但是其运算结果不是向量. 可见这两个“乘法”是完全不同的概念，不能混淆. 复数的模是

实数绝对值概念的延伸，复数与向量的模描述了点之间的距离，而且都满足三角不等式. 在复数几何意义的教学中，要引导学生以较为宽阔的视野思考相关知识的联系与区别，体会“类比”这一十分重要的思想方法，学会主动地运用复数工具描述几何现象.

利用复数的代数形式 $z=a+bi(a、b\in\mathbf{R})$，将复数问题化归到实数领域的问题，这是中学数学在解决有关复数的问题时常用的思想方法. 但是，如果所有的复数问题都可以这样回到实数来处理，那么复数除了形式的存在就没有更多意义了. 对此，教材安排了少量的例题和习题，向学生展示不以 $a+bi(a、b\in\mathbf{R})$的形式表示复数而直接以复数 z 对其性质展开研究. 通过一些简单的例题和习题，如求解虚系数一元一次方程等问题，对解决复数问题不同于“复数问题实数化”的思想方法作出适度的介绍.

现行市场上不少型号的学生用计算器都具有复数运算的功能，教师要提倡学生通过阅读说明书以及合作交流等方式，以学生自主探究为主掌握计算器的复数运算功能，促进学生运用现代数学工具能力的发展.

在复数教学内容基本完成以后，教师可以再次引导学生关注复数与实数的异同点，并启发学生思考：为什么教材上只阐述了复数的相等关系而没有复数的大小关系？进而引导学生通过课外书籍的阅读或网上浏览，了解数系扩充的基本原则、序关系等相关知识，进一步拓展数学的学习视野.

评价建议

复数的相关概念、复数的运算以及复数的几何性质，是复数知识的核心内容，也是教学评价的重点. 要以复数知识为载体，通过教学评价，促进学生数学抽象、数学运算、逻辑推理以及直观想象等核心素养的提升. 可以通过一些简单的探究性问题(比如，“若实数 $x_1x_2=0$，则 x_1 和 x_2 中至少有一个为零”能否推广到复数)的讨论，促进学生发现问题、提出问题、分析问题和解决问题能力的发展.

虽然复数运算可以通过计算器进行，但笔算是学生理解复数的算理以及性质的一个必不可少的过程，笔算的正确率是学生运算能力的一种外在表现. 在过程性评价中，对于一些简单的复数运算问题，可以对学生使用计算器作一些适度的限制.

复数的几何意义是一项综合性较强的学习内容，其中不仅包含了对于“形”的直观感悟，还有不少关于几何及代数的逻辑推理. 在有关复数几何意义的教学评价选材中，应注意体现适度的逻辑推理和直观想象方面的要求，通过简单的数学过程表述，促进学生逻辑推理和数学表达能力的发展.

二、教材分析与教学建议

9.1 复数及其四则运算

教学重点

回顾初中阶段一元二次方程的求根公式，提出负数开平方问题并引出复数的概念，理解复数相等的含义以及复数的四则运算规则并依据算理正确地进行计算，根据复数的代数形式对复数加以分类.

内容分析

复数系是为了解决负数的开平方问题而对实数系所作的扩充，四则运算是复数系最为重要的组成部分，只有明确了复数相等关系的含义并定义了复数的运算，复数才有了“数”的基本特征.

定义复数集及复数集上的运算有不同的方法. 例如，严谨的方法之一是把复数系定义为实数域上具有基$\{1=(1,0),\mathrm{i}=(0,1)\}$的二维向量空间(自然地具有加减法运算)上恰当地定义乘法与除法，使其成为一个域，且等式$\mathrm{i}^2=-1$自然地成立. 这种方法先几何地构建复数系，代数的性质和运算规则都在几何框架下实现. 另一种严谨方法是代数的，关键在于构建实数域的二维代数扩域，即先构建实数域$\mathbf{R}$上的一元多项式代数$\mathbf{R}[T]$，再做$\mathbf{R}[T]$关于它的极大理想(T^2+1)的商域，T在商域中的像(记为i)即为虚数单位.

这两种方法虽然严谨，但是它们脱离了学生的知识储备和认知水平，也与复数理论发展的历史进程相去甚远. 因此，在中学教材中复数的引入通常由引入-1的一个平方根i开始，构建$a+b\mathrm{i}$形式的记号所成的集合$\mathbf{C}$，通过确定相等关系并定义运算赋予这些记号以“数”的意义，从而使$\mathbf{C}$成为一个数系(即复数系).

本教材也是这样建立复数理论的. 但与许多教材不同的是，我们摒弃了在复数运算出现之前先讲相关概念，甚至先建立复数的几何表示的做法，而把引入部分的理论建构压缩到极小，实施“运算先行”的策略. 具体做法体现在以下两个方面：

一是，人为规定了-1的一个平方根(虚数单位)为i以后，通过形式地定义运算作出“新数”：先作实数b与虚数单位i的乘积$b\mathrm{i}(b\in\mathbf{R})$，再把$b\mathrm{i}$与既有的实数$a$相加而得到$a+b\mathrm{i}$，从而得到完整的复数集$\mathbf{C}$. 这个过程通过形式的运算制造出新数，严格

说来是比较抽象的，但由于比较自然，因此学生接受起来不会有什么困难.

实施“运算先行”策略之前，我们用约定的形式给“一个复数等于 0”和“两个复数相等”以明确的含义. 这两个约定对学生而言是自然的，也不会有学习的障碍(从数学本质上说，这个约定只是说明在复空间中 1 和 i 是实数域上线性无关的向量). 有了这个约定，我们就沿着“运算先行”之路继续前行：以多项式四则运算规则与 $i^2=-1$ 相结合来定义复数四则运算(实际上是前文所说的用扩域方法定义复数域时得出的复数运算)，这是一种为构建新知识体系而对既有知识所进行的顺理成章的“移植”. 沿着这样的复数知识发生与发展的路径，学生就可以将复数运算与初中阶段所学习的多项式运算相对接，为掌握复数四则运算提供一个非常熟悉的背景支撑.

在定义了复数、约定了复数的相等关系并建立了四则运算规则以后，学生头脑里作为“数”的复数概念就基本形成了. 接下来教材把与复数相关的概念进一步细化，先将 $a+bi(a、b\in\mathbf{R})$中的 a、b 分别称为复数 $a+bi$ 的实部与虚部，$a+bi(a、b\in\mathbf{R})$称为复数的代数形式(这里不妨先预告后续内容“复数的三角形式”). 既然复数是继实数以后所学习的有关“数”的知识，那么很自然地应该仿照对于实数的研究将复数进行分类，由此引出虚数和纯虚数等概念，并指出虚数才是在实数之外所新增的数，复数以实数和虚数分作两类，复数和虚数并非是同一个概念. 共轭复数是复数理论中的一个重要概念，它在本节可看到的作用是将复数的除法运算归结为“分子和分母同时乘分母的共轭复数”这样较为简洁的表述语言. 而教材中求共轭复数与复数四则运算的关系公式，其验证过程既是学生进一步巩固复数四则运算法则的教学素材，也是实践体验数学符号语言与自然语言(例如，复数和的共轭等于共轭的和)相互转换的学习机会. 需注意教材给出“商的共轭等于共轭的商”的证明过程，并没有程序化地使用复数的实部、虚部进行验证，而是在乘法结论基础上用逆运算的思想的简洁证明.

例 1 中四个有关复数加法、减法以及乘法运算的问题，在强调了复数的四则运算可以根据多项式运算法则与 $i^2=-1$ 相结合而展开的思想方法后，可以学生自主练习、教师适度指导的方式完成.

例 2 示范了复数除法运算法则的运用. 在教学中，可以类比对$\dfrac{1}{a+\sqrt{b}}$进行分母有理化的方法，说明除数为 $c+di(c、d\in\mathbf{R})$的复数除法运算中将分子和分母同乘 $c-di$，便可以将除法运算化归为乘法运算.可以引导学生回忆一下,这种方法是利用公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 将分母中的二次根式去掉.

例 3 展示虚数单位 i 的整数次幂的周期性. 教学中可引导学生从 i 开始自主探究发现规律，并通过讨论交流，提炼、概括“对任意整数 m，都有 $i^m+i^{m+1}+i^{m+2}+i^{m+3}=$

0”的结论，其中应注意引导学生体会，以符号语言呈现的上述结论与自然语言表达“i的四个连续整数次幂之和为零”的相互转换.

例 4 说明在实数范围内成立的完全平方和(差)等公式在复数范围内仍然成立.

例 5 和例 6 体现将复数概念细化的各个要素以及将复数的分类准确运用于具体的复数.

例 7 指出在复数集 **C** 中，$z\in\mathbf{R}$ 的充要条件是 $z=\overline{z}$，这是复数的一条重要性质，它是以不同于“复数问题实数化”的思想方法处理复数问题的工具之一. 同时，这一问题的论证过程是对于充要条件证明方法的复习.

例 8 的求解有两条不同的路径，学生容易想到的方法是根据已知条件先计算得出 $\frac{z_1}{z_2}$ 的结果再写出 z 的值，而教材所呈现的方法，则在体现共轭复数运算性质运用的同时，通过两边取共轭来体现等式“两边同时……”这一非常重要的数学思想方法.

注意事项

教材虽然介绍了虚数单位的整数次幂运算及其性质，但是对以复数代数形式表示的复数，幂运算以局限于平方运算为宜，复数的高次乘方运算，待以后学习了复数的三角形式和指数形式后可以更方便地处理.

二期课改教材在复数四则运算之后专设一节讲述复数的平方根与复数的立方根，因为本教材通过“9.4 复数的三角形式”一节，使得一般的求复数方根的题目不再困难，就没有必要设置这样的专节了. 而且，在“9.3 实系数一元二次方程”中，讨论实数的平方根时没有采用复数的三角形式，仅用复数的代数形式和“待定系数法”就解决问题了. 这个方法完全可以用于复数平方根的讨论，在后面的“探究与实践”中提到这一事实时，让学生自由探索.

教学建议

复数的四则运算可用多项式运算与虚数单位 i 的性质 $i^2=-1$ 相结合加以开展. 在讲解复数运算规则时，可以从类比根式运算入手，通过对实数 $a+b\sqrt{2}$ 与 $c+d\sqrt{2}$(a、b、c、$d\in\mathbf{R}$)四则运算的复习，引导学生自主探究复数的四则运算规则. 特别地，讲复数除法时，注意类比分母含有无理数的分数的分母有理化，在讲了共轭复数以后可以再次回顾，指明作除法时把分子和分母同乘分母的共轭复数这一关键点.

9.2 复数的几何意义

教学重点

建立复数与复平面上的点和向量间的对应关系，类比向量掌握复数加减法的平行

四边形法则，理解共轭复数的概念并了解其对于刻画点的对称关系的作用. 理解复数模的概念、性质及关于复数模的三角不等式.

内容分析

由于任意的复数都可以唯一地表示成代数形式 $a+b\mathrm{i}(a、b\in\mathbf{R})$，由复数的实部 a 和虚部 b 确定的有序实数对 $(a，b)$ 可以视作直角坐标平面上一个点的坐标，这样便建立了复数集与坐标平面上的点以及平面向量间的一一对应关系. 由此，复数就不再是一个单纯为了解决负数的开平方问题而人为构造的数学对象，复数可以找到简洁明了的几何意义. 因为有 $|z|^2=z\bar{z}$ 等复数的性质，所以人们对于二维平面上几何关系的描述，可以用一个代数数学对象即复数 z 来表示. 由此，几何图形性质的研究又有了新的工具，复数也在它所表现的几何意义中不断地发展. 复数的几何意义的学习对于促进学生数学综合思维能力的发展具有独特的作用.

通过平行四边形法则可以看到，复数在复平面上表示为向量后，其加减运算与向量的加减运算是一致的.

在复平面上，点与点之间的距离、对称以及平移、旋转、伸缩变换等诸多几何概念、几何操作都可以通过复数的代数运算给予较为方便的刻画. 例如，在“9.4 复数的三角形式”中还可以看到，复数的乘除运算是刻画向量旋转与伸缩的有力工具.

在“9.1 复数及其四则运算”中介绍共轭复数的定义，这在当时是一个略显突兀的概念. 虽然利用共轭复数可使得对于复数除法运算法则的描述有所简化，但似乎无需为此而专门规定一个概念，没有共轭复数这个说法，复数的除法运算规则也已经交待清楚了. 现在这里至少还可以看到共轭复数的另一个价值，即提供了一个描述复平面上两点间对称关系的工具：在复平面上，若点 Z 所对应的复数为 z，则 $\bar{z}$ 所对应的点与点 Z 关于 x 轴对称，$-\bar{z}$ 在复平面上所对应的点与点 Z 关于 y 轴对称. 在此基础上还可以刻画复平面上点的更多的对称关系. 而复数 z 与 $\bar{z}$ 的乘积所具有的性质 $z\bar{z}=|z|^2$，使得原本需要“多元”方能表达的点的距离得以用“一元”的形式呈现. 在“9.3 实系数一元二次方程”讨论中，共轭复数又出现了：没有实根的实系数一元二次方程一定有一对共轭虚根(这个结论易推广为“实系数一元多项式方程的虚根共轭地成对出现”).

复数的模是与复数相关的几何量中最为重要的量之一，它与复平面中复数所对应的向量的模是一致的，同时在代数上它是实数的绝对值概念的推广. 复数的模使得平面上最普遍的长度度量和相关问题可以用复数的形式简洁地表达和处理. 例如，平面上两点 $A(a，b)$ 与 $B(c，d)$ 间的距离原来需要由四个字母的根式 $\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$ 表示. 若记 $z_A=a+b\mathrm{i}$，$z_B=c+d\mathrm{i}$，则两点 A 与 B 的距离公式简化为只需两个变量并且不含根

式的$|z_A-z_B|$来表示，并由$|z_A-z_B|^2=(z_A-z_B)\overline{(z_A-z_B)}$，有关长度问题的推演就可以在复数的语境中加以处理，从而在某种程度上简化了运算.

本节我们还证明了关于复数模的重要不等式$|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|$，它是本套教材必修1“2.3 基本不等式及其应用”中关于实数绝对值的三角不等式的推广. 在2.3节中，三角不等式的证明是借助于两数和平方公式完成的，当时只在实数范围内讨论问题，也很难看出此不等式与“三角形两边之和大于第三边”相似. 本节中推广到复数的三角不等式$|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|$的证明就实实在在地运用了“三角形两边之和大于第三边”的性质. 这一内容的教学要联系“2.3 基本不等式及其应用”的相关内容，一方面起着前后呼应的作用，另一方面也是为学生释疑解惑，使他们真正了解“三角不等式”命名的根据和意义.

公式$|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|$讲的是一个顶点在坐标原点的三角形“两边之和大于第三边”. 更一般的“三角形两边之和大于第三边”可以用表示三角形三个顶点的复数z_1、z_2、z_3表达为$|z_1-z_2|+|z_2-z_3|\geqslant|(z_1-z_2)+(z_2-z_3)|=|z_1-z_3|$.

例1解题过程的表述可以不涉及几何图形，但是在教学中，应通过共轭复数在复平面上所对应的点的图示，初步建立属于代数领域的“复数”与属于几何领域的“点”之间的关联，感受一对共轭复数在复平面上所对应的点关于x轴对称这一特殊的图式.

例2的教学可以在学生动手操作(描点，作向量)的过程中感悟复数、点、向量间的联系.

例3借助向量减法运算的坐标表示，说明了如何用复数的差表示始点不在复平面原点的向量，它实际上是一个用复数研究几何问题的重要工具.

例4用向量的数量积说明复数z与$z\mathrm{i}$所对应的向量的垂直关系，由此说明将向量绕始点逆时针旋转90°的代数表达，是将该向量所对应的复数与虚数单位i相乘. 它以呈现特例的方式对复数乘法的几何意义作了提示性的介绍.

例5是复数加法平行四边形法则的应用. 可由学生动手作图将问题从文字表述转化为相应的图形，如此得到的图形应该是没有线段OB的. 教学的着力点就在于引导学生体会，平行四边形对角线表示的向量所对应的复数可由复数的加法运算得到. 在下一节复数模的教学中，可以将此问题作变式处理“求$|OB|$的长度”. 类似的问题其教学意图就是，帮助学生在与平行四边形相关的几何场景中，逐步自觉地将平行四边形与复数的加法运算相联系，从而以复数为工具处理相关的几何问题.

例6是复数模的概念针对特定复数的应用，可在此处引入上述例5的变式问题.

例7从$a+b\mathrm{i}(a、b\in\mathbf{R})$入手，是学生在初步建立了复数概念并进行了一些有关复数问题的基本练习后较为自然的选择. 教学中不妨让学生首先完成这一过程，然后

引导学生关注复数模的一个重要性质 $|z|^2=z\,\overline{z}$，并由此提出一个处理复数问题的重要观点：在中学阶段学习复数时，借助 $z=a+bi(a、b\in\mathbf{R})$ 将“复数问题实数化”是非常常用的思想方法，但例 7 所展示的直接以复数 z 呈现的问题解决过程.

例 8 展示了共轭复数模的性质在复数模的计算中的作用，其中的(2)显示了一对共轭复数具有相等的模，体现了观察能力对于发现代数结构所具有的特定关系从而简化问题解决过程的独特作用.

例 9 以复数的形式呈现了复平面上的两个点，以复数差的模的几何意义作中介，复数的代数形式表示的点便可与既有的两点间距离公式建立直接的联系.

注意事项

复数的模以及复数加法的平行四边形法则可以表示向量的长度等复数及其运算所具备的几何特征，使得复数以及复数的运算都可以有“形”的体现，复数可以与图形有一种天然的联系. 因此，复数知识可以与平面几何、三角、向量乃至选择性必修课程中的解析几何等学习内容相联系，由此产生不少数学知识和能力综合要求较高的问题. 在教学和评价中，应以复数几何意义的简单直接运用为主，不应强调不同知识板块的多方位联系.

复数的乘积与向量的数量积是两个完全不同的概念. 现在至少可以让学生体会的有：它们的运算法则不同，运算结果是不同的量(复数乘积的结果仍然是复数，即复平面上的向量，而向量的数量积的结果是数量).

例 7 说明，复数问题的解决，应该有不同于“复数问题实数化”的思想方法. 对于此类问题，建议在教学中要有所体现但不要刻意强化，不要为此而引入一些技巧性和灵活性要求很高的问题.

教学建议

复数几何意义的教学，要注重由向量入手，引导学生自主探究复数作为描述几何关系的代数工具的作用，启发学生尝试用复数刻画简单的几何关系. 复数加减法的平行四边形法则，复数模的性质的阐述等，不仅其结论是重要的工具，而且在获得这些结论的过程中包含着丰富的逻辑推理的示范，所体现的数学思想方法应当在教学过程中得到充分的重视.

9.3 实系数一元二次方程

教学重点

在复数范围内完整解决实系数一元二次方程的求解以及根与系数的关系.

内容分析

在复数范围内求解实系数一元二次方程，依然继承了初中阶段推导一元二次方程

求根公式的配方法. 这里碰到的关键问题是判别式(它可能是正数、0、负数)在复数范围内有几个平方根. 因此，教材中特地用了一小节讨论实数的平方根，用“待定系数法”不仅找出了给定实数的平方根，而且证明了只有我们所找到的那些平方根.

后一个问题往往没有引起注意，并在教材编写和教学中常常被忽略. 事实上，当求出一个非零实数的两个平方根后，很少有人再问一下：当视野扩大到复数系以后，这个实数还有其他平方根吗？这不是一个没有意义的问题(在四元数体内，一个实数可以不只有两个平方根)，它是唯一因式分解定理(实系数多项式在复数域内只有本质唯一的因式分解)的推论. 但现有的中小学教材都没有提到唯一因式分解定理，因此必须单独证明所需要的结论.

好在我们用很短的一小节，用很简单的办法就解决了问题：实数 $c\geqslant 0$ 只有已知的实平方根 $\pm\sqrt{c}$；实数 $c<0$ 只有一对共轭的纯虚平方根 $\pm\sqrt{-c}\,\mathrm{i}$.

有了这个铺垫之后，关于实系数一元二次方程根的讨论都是顺理成章的，而复数范围内实系数一元二次方程根与系数的关系以及对二次多项式的分解因式，都是对初中阶段相应知识的自然发展.

例 1 以 -25 的平方根为代表研究负数的开平方问题，由此可引出 $-c(c>0)$ 的平方根为 $\pm\sqrt{-c}\,\mathrm{i}$. 这是继规定 i 为 -1 的平方根之后，应该紧随其后的负数开平方问题，也是在复数范围内解实系数一元二次方程的准备知识.

例 2 在一元二次方程判别式为负值时，直接套用一元二次方程的求根公式得到方程的虚数解. 在教学中，也可以针对此题再次运用配方法重演一元二次方程解得虚数根的过程.

例 3 的教学除了关注一元二次方程根与系数关系的运用，首先应该引导学生通过对求根公式的观察得到结论：若一元二次方程有虚数根，则必定为一对共轭虚根.

例 4 将实系数一元二次方程的虚数根与二次多项式在复数范围内作分解因式相联系，教学时可将其与一元二次方程有两个实无理数根而对二次多项式作分解因式的情形相类比.

注意事项

在复数范围内求解实系数一元二次方程的教学，要积极倡导学生通过自主探究或以合作学习的方式，获得对于数学新概念推动既有数学知识发展的实践体验. 同时，应注意避免以此为话题而过多地引入各种复数范围内解方程的问题.

教学建议

对于实系数一元二次方程，学生通过初中阶段的学习以及本套教材必修 1“2.1 等

式与不等式的性质”中的“一元二次方程的解集及根与系数的关系”的学习，通常都有一定的认知基础. 因此，实系数一元二次方程求根公式的推导和根的情况的讨论都不难，在教学中可以根据不同学生的学习情况，采用或者是教师课堂讲解，或者是课堂上教师指导下的学生自主探究，或者是学生课外讨论交流、课内小结汇报等多种不同的方式开展教学. 作为铺垫的实数的平方根讨论本身也没有难度，关键是引导学生理解问题所在.

对学有余力的学生，可引导他们探索复系数一元二次方程的求解问题(见“探究与实践”).

*9.4 复数的三角形式

教学重点

通过复数的几何意义了解复数的三角形式及相关概念，形成复数的代数形式与三角形式间的联系，掌握用复数三角形式表示的复数乘法、除法、乘方、开方运算公式. 了解复数乘法运算的几何意义.

内容分析

直角坐标平面上点的坐标可以表示为$(r\cos\theta, r\sin\theta)$的形式，其中$r$是坐标原点到给定点的距离，$\theta$是$x$轴正半轴绕原点旋转到通过给定点位置所经过的角. 由此，给定点所对应的复数就可以写成$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，这便是复数的三角形式，此时$r$称为复数的模，$\theta$称为复数的辐角. 这样引入复数的三角形式，可以降低它的神秘感，让学生觉得自然，容易接受.

要让学生体会到，复数的表示形式这样一个小小的转换让我们进入一个新的天地：由于两角和差正余弦公式的介入，使得复数乘、除时二项式的乘除计算转化为辐角的和差运算(是否与对数化积商为和差很相似？老师们如果熟悉复数的指数形式，可以看出它们实际上是相通的，但此“相通”不宜作为教学的内容)，从而使得复数的乘、除、乘方、开方的运算公式有着异乎寻常的简单形式，特别使得原来复杂得几乎无从着手的连续乘除和高次的乘方与开方运算变成轻而易举的事情. 不仅如此，通过辐角的增减，还清晰地体现了复数乘法运算的几何意义，使得旋转变换这一常见的图形运动有了方便的代数刻画. 复数的三角形式的这些功能和特点凸显了它的重要意义.

本节的难点之一是复数乘法的几何意义. 伸缩变换只是实数乘法的问题，尽量讲得简单扼要，也可联系上一章所讲的向量的数量倍数运算(实数与向量的乘法). 要把重点放在旋转变换上，让学生理解旋转就是辐角的增减问题，从而与复数乘除相联系.

本节的另一个难点是开方时要考虑被开方数的不同辐角（不仅仅是辐角的主值）．这个难点要分散处理，先在定义复数的三角形式时强调一个复数的辐角可以取相差 2π 倍数的不同值，而不限于取主值；然后在讲开方公式时启发学生注意到 2π 的倍数除以一个大于 1 的整数后不一定是 2π 的倍数了，所以不同的辐角可能给出不同的方根．还可让学生比较为什么乘、除、乘方公式中不用考虑这个问题．

从复数的三角形式还可以引申到复数的指数形式 $z=re^{i\theta}$．但实际上，复指数的定义要用到指数的级数展开，这在中学阶段是无法给出的，所有中学教科书和初等数学课外读物上所谓的复数指数形式都是有其形而无其实．本教材没有引入指数形式的记号．

例 1 介绍复数的代数形式向三角形式的转化．在完成复数模的计算后，要关注复数在复平面上的对应点所在的位置，正确把握正负数以及纯虚数的辐角．对于复平面上所对应的点落在第一、第二、第三、第四象限的复数 $a+bi(a、b\in\mathbf{R})$，可分别以锐角、$\pi-$锐角、$\pi+$锐角、$2\pi-$锐角的方式给出它的辐角，其中的锐角是 $\arctan\left|\dfrac{b}{a}\right|$，由此形成一个化复数的代数形式为三角形式的准程序化操作．

例 2 是与三角有关的复数的“伪三角形式”转化为正确的三角形式问题，其关键有两点：一是准确掌握三角形式的特点，二是诱导公式等三角公式的灵活运用．

例 3 是复数三角形式下的乘法和除法运算法则在标准情形中的运用．对复数三角形式下运算法则的运用，教学要求应限于标准情形中的运用为宜．

例 4 展示了复数乘法对于向量旋转的刻画，在此可回顾“9.2 复数的几何意义”例 4，指明复数三角形式下的乘法法则清晰地体现了复数乘法与旋转变换的联系，强调复数乘法是代数描述旋转变换最为便捷的工具之一．

例 5 和例 6 分别是复数三角形式下的乘法和开方运算法则在标准情形中的运用，由此展示这是复数乘方和开方运算的首选工具．

注意事项

复数的三角形式作为选学内容，其教学可根据不同学生的学情，从教学内容到学习方式，都应当有更多的灵活处理以体现教学的适切性．希望能让选学这一内容的学生，对于以复数三角形式为基础的复数乘除运算以及乘方和开方运算法则有初步的了解和直接的运用，知道复数的加减乘除四则运算都有重要的几何意义，知道描述平面几何中点的平移、对称、旋转变换的代数工具．不要作更多的拓展．

教学建议

引导学有余力的学生在教师的指导下，在复习任意角以及三角函数相关知识的基

础上，通过自主研读、讨论交流的方式获取知识. 教师可以通过课内讲解、课外讲座等方式介绍相关内容并给学生以指导和帮助. 其教学应更多地关注拓展学生的数学视野，进一步激发学生探究数学的愿望，并体验自主探究、合作学习的过程.

三、参考答案或提示

9.1 复数及其四则运算

练习 9.1(1)

1. $x=1$，$y=4$.

2. (1) $1+9\mathrm{i}$.　(2) $-1-3\mathrm{i}$.　(3) $\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

(4) $-8\mathrm{i}$.　(5) $1+\mathrm{i}$.　(6) $-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$.

练习 9.1(2)

1. 证明：设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}(a、b、c、d\in\mathbf{R})$，则 $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$，$\overline{z_1+z_2}=(a+c)-(b+d)\mathrm{i}$，又 $\overline{z_1}+\overline{z_2}=(a-b\mathrm{i})+(c-d\mathrm{i})=(a+c)-(b+d)\mathrm{i}$，所以 $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.

$\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$ 的验证与之类似.

2. 在复数 $-5+6\mathrm{i}$、$\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$、$-\sqrt{3}$、$\mathrm{i}$、$0$、$\cos\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5}$ 中，$-\sqrt{3}$、0 是实数，$-5+6\mathrm{i}$、$\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$、$\mathrm{i}$、$\cos\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5}$ 是虚数，i 是纯虚数.

复数 $-5+6\mathrm{i}$ 的实部是 -5，虚部是 6. 复数 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$ 的实部是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，虚部是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 复数 $-\sqrt{3}$ 的实部是 $-\sqrt{3}$，虚部是 0. 复数 i 的实部是 0，虚部是 1. 复数 0 的实部是 0，虚部是 0. 复数 $\cos\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5}$ 的实部是 $\cos\dfrac{\pi}{5}$，虚部是 $\sin\dfrac{\pi}{5}$.

3. (1) 真命题. 设 $z=a+b\mathrm{i}(a、b\in\mathbf{R})$，则 $z+\overline{z}=(a+b\mathrm{i})+(a-b\mathrm{i})=2a\in\mathbf{R}$.

(2) 假命题. 若 $z=1$，则 $\overline{z}=1$，$z-\overline{z}=0$，不是纯虚数.

（3）真命题. 设 $z=a+b\mathrm{i}(a、b\in\mathbf{R})$，则 $z-\overline{z}=(a+b\mathrm{i})-(a-b\mathrm{i})=2b\mathrm{i}$. 由 $z-\overline{z}=0$，得 $b=0$. 所以 $z\in\mathbf{R}$.

（4）假命题. 若 $z=0$，则 $\overline{z}=0$，此时 $z+\overline{z}=0$，但 0 不是纯虚数.

4.（1）$m=1$.　（2）$m<1$ 或 $m>1$.　（3）$m=-2$.

习题 9.1

A 组

1. $x=4$，$y=-6$.

2. $\begin{cases}x=3,\\y=-8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-8,\\y=3.\end{cases}$

3.（1）$\frac{11}{12}-\frac{1}{10}\mathrm{i}$.　（2）$-2+10\mathrm{i}$.　（3）$2b+2a\mathrm{i}$.

（4）$24+7\mathrm{i}$.　（5）$2+23\mathrm{i}$.　（6）$-\mathrm{i}$.

（7）$5-\mathrm{i}$.　（8）$-\frac{3}{13}-\frac{28}{13}\mathrm{i}$.　（9）$\frac{1}{2}$.

4. 证明：$(c+d\mathrm{i})\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}\right)=\frac{c(ac+bd)-d(bc-ad)}{c^2+d^2}+\frac{c(bc-ad)+d(ac+bd)}{c^2+d^2}\mathrm{i}=\frac{a(c^2+d^2)}{c^2+d^2}+\frac{b(c^2+d^2)}{c^2+d^2}\mathrm{i}=a+b\mathrm{i}$.

5. 2.

6. $x=6$，$y=-4$.

7. $x=-1$，$y=5$.

8. $-12+5\mathrm{i}$.

9. $\frac{8}{3}$.

10. $\frac{3}{13}-\frac{2}{13}\mathrm{i}$.

11.（1）$m=6$ 或 $m=-1$.　（2）$m=4$.　（3）$m=-1$.

12. $\begin{cases}x=2,\\y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\y=-2.\end{cases}$

B 组

1. (1) i.　(2) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.　(3) $64\mathrm{i}$.

2. $5+\frac{5}{2}\mathrm{i}$.

3. $x=4$，$y=3$.

4. $x=\frac{5}{2}$，$y=-\frac{3}{2}$.

5. (1) $m=2$ 或 $m=3$.　(2) $m<-5$ 或 $-5<m<2$ 或 $2<m<3$ 或 $3<m<5$ 或 $m>5$.

(3) 不存在.　(4) $m=3$.

6. (1) B.　(2) D.

7. $z=2+\mathrm{i}$.

8. 证明：由 $z=a+b\mathrm{i}(a、b\in\mathbf{R})$，得 $\frac{z+\overline{z}}{z-\overline{z}}=\frac{(a+b\mathrm{i})+(a-b\mathrm{i})}{(a+b\mathrm{i})-(a-b\mathrm{i})}=\frac{2a}{2b\mathrm{i}}=-\frac{a}{b}\mathrm{i}$，而实数 a、b 都不等于 0，所以 $\frac{z+\overline{z}}{z-\overline{z}}=-\frac{a}{b}\mathrm{i}$ 是纯虚数.

练习 9.2(1)

1. (1) x 轴的正半轴上.　(2) x 轴的负半轴上.

(3) 第二象限.　(4) y 轴的负半轴上.

2. $2<m<4$.

3. $2-2\mathrm{i}$，$-2+2\mathrm{i}$.

4. $(-1，3)$.

练习 9.2(2)

1. (1) $8\sqrt{2}$.　(2) $7\sqrt{7}$.　(3) $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

2. 点 Z_1 在以原点为圆心，10 为半径的圆上，点 Z_2 在此圆内部.

3. $\sqrt{2}$.

4. $\sqrt{65}$.

习题 9.2

A 组

1.

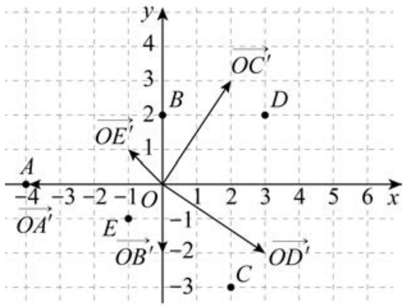


图 9－R1

2. (1) $m=7$ 或 $m=-2$.　(2) $m=5$ 或 $m=3$.　(3) $-2<m<3$ 或 $5<m<7$.

3. (1) $2+8\mathrm{i}$，$-2-8\mathrm{i}$.　(2) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\mathrm{i}$，$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\mathrm{i}$.

4. $(3,\ -3)$.

5. 5.

6. (1) 625.　(2) $27\sqrt{2}$.　(3) 2.　(4) $\sqrt{170}$.

7. $\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

8. $\dfrac{9}{5}$或 1.

9. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

10. $12+5\mathrm{i}$ 或 $-12-5\mathrm{i}$.

B 组

1. (1) A.　(2) C.

2. $(3,\ 5)$，$5+6\mathrm{i}$.

3. $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$，$|z_1-z_2|=\sqrt{2}$.

4. 证明：设 $z=a+b\mathrm{i}(a$、$b\in\mathbf{R})$. 由已知，得 $a^2+b^2=1$ 且 $a\neq0$，$b\neq\pm1$.则$\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}=$

$\dfrac{a+b\mathrm{i}+\mathrm{i}}{a+b\mathrm{i}-\mathrm{i}}=\dfrac{[a+(b+1)\mathrm{i}][a-(b-1)\mathrm{i}]}{[a+(b-1)\mathrm{i}][a-(b-1)\mathrm{i}]}=\dfrac{a^2+b^2-1+2a\mathrm{i}}{a^2+(b-1)^2}=\dfrac{2a\mathrm{i}}{a^2+b^2-2b+1}=\dfrac{a\mathrm{i}}{1-b}$，所以$\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$

是纯虚数.

5. 证明：因为$|z|=|\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$，所以集合$M$中的每一个复数在复平面上所对应的点都在以原点为圆心，1为半径的圆上.

6. 证明：设$z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$，$z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$（a_1、b_1、a_2、$b_2\in\mathbf{R}$），则$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathrm{i}$，$z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\mathrm{i}$，于是，$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2+(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2=2(a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2)=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$.

7. 0或$2+2\mathrm{i}$.

练习 9.3

1. $-1<k<0$.

2. (1) $x=\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$.　(2) $x=-1\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$.　(3) $x=\dfrac{5\pm\sqrt{39}\mathrm{i}}{4}$.

3. $-\dfrac{1}{3}$.

习题 9.3

A 组

1. (1) $x=\pm\dfrac{5}{2}\mathrm{i}$.　(2) $x=1\pm\sqrt{3}$.　(3) $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.　(4) $x=4\pm\sqrt{3}$.

2. $b=-4$，$c=13$.

3. ±2.

B 组

1. (1) $x=\pm2$或$x=\pm2\mathrm{i}$.　(2) $x=\pm\sqrt{2}$或$x=\pm\sqrt{5}\mathrm{i}$.

2. $2+\sqrt{2}\mathrm{i}$和$2-\sqrt{2}\mathrm{i}$.

3. (1) $(a+b+c\mathrm{i})(a+b-c\mathrm{i})$.　(2) $(x+\sqrt{5}y\mathrm{i})(x-\sqrt{5}y\mathrm{i})$.

(3) $2\left(x-\dfrac{3+\mathrm{i}}{2}\right)\left(x-\dfrac{3-\mathrm{i}}{2}\right)$.

4. 3.

练习 9.4(1)

1. (1) $3\pi(\cos0.5+\mathrm{i}\sin0.5)$是复数的三角形式，它与复数三角形式的规定$r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$（其中$r\geqslant0$）相一致.

(2) $2(\sin1+\mathrm{i}\cos1)$不符合复数三角形式的规定，将其改写为复数三角形式的结

果是 $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right]$.

（3）$\cos 131\pi+\mathrm{i}\sin 131\pi$ 是复数的三角形式，它与复数三角形式的规定 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$（其中 $r\geqslant 0$）相一致.

（4）$\sqrt{2}(\cos 0.3\pi+\mathrm{i}\sin 0.2\pi)$不符合复数三角形式的规定，实部中的余弦与虚部中的正弦的角不相等.

（5）$-2\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$不符合复数三角形式的规定，将其改写为复数三角形式的结果是 $2\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

（6）$3\left(\cos\frac{\pi}{5}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}\right)$不符合复数三角形式的规定，将其改写为复数三角形式的结果是 $3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]$.

2.（1）$3(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)$.　　（2）$2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

（3）$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$.　　（4）$2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

练习 9.4(2)

1.（1）$16\mathrm{i}$.　　（2）$3\mathrm{i}$.　　（3）$-2\sqrt{6}+2\sqrt{2}\,\mathrm{i}$.

2. 1，i，-1，$-\mathrm{i}$.

习题 9.4

A 组

1.（1）$4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.　　（2）$6\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

（3）$\cos\frac{3\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{8}$.　　（4）$\cos\frac{13\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{7}$.

2.（1）$\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{3\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}$.　　（2）$-\sqrt{3}-\mathrm{i}$.　　（3）$-\frac{3\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}\mathrm{i}$.

（4）$-2\sqrt{2}$.　　（5）$4\,096$.

3. i，$-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

B 组

1. （1）$-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$.　　（2）$-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{6}i$.

2. $-4+3i$.

3. $\frac{\pi}{4}$.

复习题

A 组

1. （1）D.　　（2）A.

2. （1）11，-60，61，$11+60i$.　　（2）③.

3. （1）$a=3$ 或 $a=1$.　　（2）$a<-1$ 或 $a>3$.

4. 3.

5. （1）$10+11i$.　　（2）25.　　（3）$11+7i$.　　（4）$-\frac{8}{5}$.　　（5）$4\sqrt{3}+4i$.

6. 2.

7. （1）$x=2\pm 2i$.　　（2）$x=\frac{-1\pm\sqrt{10}}{3}$.

B 组

1. （1）B.　　（2）C.

2. $\sqrt{2}$.

3. $\frac{5}{2}$.

4. $4\sqrt{2}$.

拓展与思考

1. 5.

2. $-21+i$.

四、相关阅读材料

参考文献

[1] 常庚哲，伍润生. 复数与几何[M]. 北京：科学出版社，2002.

[2] 张顺燕. 复数、复函数及其应用[M]. 大连：大连理工大学出版社，2011.

[3] 保罗·J·纳欣. 虚数的故事[M]. 朱惠霖，译. 上海：上海教育出版社，2008.

[4] Andreescu T，Andrica D. Complex Numbers from A to…Z (Second Edition)[M]. New York：Birkhäuser，2014.

后　　记

本套教学参考资料与李大潜、王建磐主编，上海教育出版社出版的《普通高中教科书·数学》配套使用，本套教材根据中华人民共和国教育部制定并颁布实施的《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》编制，并经国家教材委员会专家委员会审核通过.

本套教材是由设在复旦大学和华东师范大学的两个上海市数学教育教学研究基地(上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地)联合主持编写的. 编写工作依据高中数学课程标准的具体要求，努力符合教育规律和高中学生的认知规律，结合上海城市发展定位和课程改革基础，并力求充分体现特色. 希望我们的这一努力能经得起实践和时间的检验，对扎实推进数学的基础教育发挥积极的作用.

本书是与必修第二册教材配套的教学参考资料，共为四章，各章编写人员分别为

邹建兵、周子翔、朱胜林(第 6 章)

肖登鹏、周子翔、朱胜林(第 7 章)

陈兴义、刘攀、邹佳晨(第 8 章)

况亦军(第 9 章)

限于编写者的水平，也由于新编教材尚缺乏教学实践的检验，不妥及疏漏之处在所难免，恳请广大师生及读者不吝赐教. 宝贵意见请通过邮箱 gaozhongshuxue@seph.com.cn 反馈，不胜感激.

2020 年 12 月

图书在版编目（CIP）数据

普通高中数学教学参考资料 : 必修. 第二册 / 上海市中小学（幼儿园）课程改革委员会组织编写. — 上海:上海教育出版社, 2020.12（2024.12重印）
ISBN 978−7−5720−0397−4

Ⅰ. ①普… Ⅱ. ①上… Ⅲ. ①中学数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2021)第003552号

经上海市中小学教材审查委员会审查
准予试用　　准用号 Ⅱ-GJ-2020016

中国环境标志
CHINA ENVIRONMENTAL LABELLING

绿色印刷产品

ISBN 978-7-5720-0397-4
9 787572 003974 >
定　价:　 22.50元