义务教育教科书

（五·四学制）

数学

教学参考资料

八年级

上册

上海教育出版社

义务教育教科书

（五·四学制）

数学
教学参考资料

八年级
上册

主编　李大潜

上海教育出版社

图书在版编目（CIP）数据
义务教育教科书（五·四学制）数学教学参考资料.
八年级 上册 / 李大潜主编. — 上海：上海教育出版社，
2025.6. — ISBN 978-7-5720-3483-1
I. G633.603
中国国家版本馆CIP数据核字第2025NR0991号

主　　编：李大潜
本册主编：王志强
本册编写人员：周子翔　鲁海燕　张海燕　胡　军　顾跃平　陆立强　朱　雁

责任编辑：周明旭
装帧设计：王　捷　周　吉

义务教育教科书（五·四学制）　数学教学参考资料　八年级　上册

出　版　上海教育出版社（上海市闵行区号景路159弄C座）
发　行　上海新华书店
印　刷　上海中华印刷有限公司
版　次　2025年6月第1版
印　次　2025年6月第1次印刷
开　本　787 毫米×1092 毫米　1/16
印　张　14.75
字　数　350 千字
书　号　ISBN 978-7-5720-3483-1/G·3111
定　价　46.50 元

目　录

绪　　论

本套《数学教学参考资料》与李大潜主编的《义务教育教科书（五·四学制）数学》（六年级至九年级）（以下简称“本套教科书”）配套使用. 本套教科书依据教育部制定并颁布实施的《义务教育数学课程标准（2022 年版）》（以下简称《课标 2022 年版》）编制，并经国家教材委员会专家委员会审核通过.

一、本套教科书的总体结构框架

1. 教科书结构体系

根据“五四”学制特点，义务教育初中阶段包括六年级至九年级，每个年级两个学期，简述为上、下学期，因此本套教科书包括六年级至九年级的教科书，每个年级分上、下两册，共计八册.

本套教科书依据《课标 2022 年版》的要求，将教学内容按照主题进行划分并依次呈现，突出数与代数、图形与几何、统计与概率、综合与实践四个领域，这四个领域也贯穿了整套教科书. 对于每个领域的内容编排，将整个领域视为一个整体，有序地呈现相应知识点，并兼顾知识点之间的有机联系，按照知识发生发展的规律和学生的认知水平循序渐进、逐次展开. 本套教科书的结构体系如表一所示.

表一　教科书结构体系

<table>
<tr><th>年级/册次</th><th>数与代数</th><th>图形与几何</th><th>统计与概率</th><th>综合与实践</th></tr>
<tr><td rowspan="4">六年级上册</td><td>第 1 章　有理数</td><td></td><td></td><td rowspan="4">• 你的膳食健康吗？
• 上海一日游计划制订</td></tr>
<tr><td>第 2 章　简单的代数式</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>第 3 章　一元一次方程</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>第 4 章　线段与角</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">六年级下册</td><td>第 5 章　比与比例</td><td></td><td></td><td rowspan="5">• 旋转的齿轮
• 中国的能源生产与消费</td></tr>
<tr><td></td><td>第 6 章　圆与扇形</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>第 7 章　可能性与统计图表</td></tr>
<tr><td></td><td>第 8 章　圆柱与圆锥</td><td></td></tr>
<tr><td>第 9 章　二元一次方程组</td><td></td><td></td></tr>
</table>

（续表）

年级/册次	数与代数	图形与几何	统计与概率	综合与实践
七年级上册	第 10 章　整式的加减			• 从传统连续纹样到现代镶嵌图案 • 制订“阅读之星”评选方案
	第 11 章　整式的乘除			
	第 12 章　因式分解			
	第 13 章　分式			
		第 14 章　图形的运动		
七年级下册	第 15 章　一元一次不等式			• 积木可以叠多远? • 田径比赛中的数学
		第 16 章　相交线与平行线		
		第 17 章　三角形		
		第 18 章　等腰三角形		
八年级上册	第 19 章　实数			• 理财小课堂 • “勾股定理”证明中的中国智慧
	第 20 章　二次根式			
	第 21 章　一元二次方程			
		第 22 章　直角三角形		
八年级下册		第 23 章　四边形		• 折纸与数学 • 神奇的密码
		第 24 章　平面直角坐标系		
	第 25 章　一次函数			
	第 26 章　反比例函数			
九年级上册	第 27 章　二次函数			• 探寻测量高度的方法 • 城市原点
		第 28 章　相似三角形		
		第 29 章　三角初步		
		第 30 章　投影与视图		
九年级下册		第 31 章　圆		• 碳足迹——无所不在的二氧化碳排放 • 血型的秘密
			第 32 章　抽样与数据分析	
			第 33 章　概率初步	

2. 教科书的基本体例

本套教科书的基本体例采用单元(章)结构，每个单元呈现一个完整的知识模块．在以数学核心内容为主的数与代数、图形与几何、统计与概率领域，相应章节的编写结构层次为：章—节—课时，以课时为基本单位．在每个基本单位中有固定的栏目〔如概念(定义、性质、定理、法则等)、问题、例题、课堂练习、节习题〕，特色小栏目(观察、操作、思考、探究、讨

论、归纳). 在每一章又设计章的固有栏目(如章首图、章首语、阅读材料、内容提要、复习题).

在培养学生综合运用所学知识和方法解决实际问题的综合与实践领域，每册有 2 个实践活动，以活动为基本单位. 在每个基本单位中有针对主题的问题情境引入语、活动串(任务串、问题串)、拓展反思等栏目，其中每个活动串包含活动任务要求或问题、学生活动要求等内容.

3. 栏目功能定位及编写说明

本套教科书呈现上大致可分为基本栏目板块、特色小栏目板块以及各章固有栏目板块. 教科书在栏目设置上一方面借鉴了上海“二期课改”教科书中具有较高使用价值的栏目，修改、提升和进一步完善其具体内容的设计；另一方面结合《课标 2022 年版》要求，增设若干特色小栏目，以满足义务教育阶段数学课程改革的需求.

(1) 基本栏目板块

概念 (定义、性质、定理、法则等) 以文字叙述的形式呈现一节课要求学生必须掌握的核心内容，包括概念、定义、性质、公理、定理、法则、公式、原理等，帮助学生准确把握本节课的核心知识. 该板块内容一般安排在例题之前或者例题之间. 六、七年级教科书多以描述性语言的形式表述，而八、九年级教科书的表述逐步强调严谨性.

例题 为学生及时巩固理解数学概念(定义、性质、定理、法则等)提供平台，加强概念在数学或实际问题中的运用. 学生通过参与分析和解答典型题目，及时加深对概念(定义、性质、定理、法则等)的理解和运用，经历理解问题、分析问题、解决问题、拓展性思考问题的过程，要求学生能够在教师的引导与讲解下，深度参与题目的分析、解答和讨论.

课堂练习 旨在通过适度(兼顾难度和时间)的练习题，巩固学生对新知的掌握，并对学生的学习效果进行检测. 学生通过完成课堂练习获得及时巩固所学知识的机会，深化对知识的理解. 习题选编与课堂例题的题型、难度基本匹配，从而满足学生对本课时新授内容的基本训练需求.

(2) 特色小栏目板块

针对《课标 2022 年版》提出的课程目标，即培养学生数学素养，会用数学的眼光观察现实世界(主要表现为抽象能力、几何直观、空间观念与创新意识)，会用数学的思维思考现实世界(主要表现为运算能力、推理意识或推理能力)，会用数学的语言表达现实世界(主要表现为数据意识或数据观念、模型观念、应用意识)，对上海“二期课改”教科书上的小栏目进行补充和优化，本套教科书中的小栏目定位见表二.

表二　小栏目功能定位及编写说明

栏目名称	功能定位与编写说明
观察	本栏目作为数学活动的一种形式体现，为后续知识的引入、介绍或应用等奠定基础. 要求学生通过观察图形或现象等，发现其中蕴含的共同点或不同点、特征和性质等，从而归纳推理得出合适的数学结论. 教师引导学生在观察的过程中深入理解知识要点，体会数学思想和方法. 本栏目要帮助学生“会用数学的眼光观察现实世界”，基于观察学会发现客观世界或现象中的数学关系或特征.

（续表）

栏目名称	功能定位与编写说明
操作	本栏目为学生直观感知并理解数学结论提供实践操作的机会，有助于提高学生的动手实践能力. 学生根据操作的步骤流程及相应要求，通过实验、绘图等方式探究数学规律或验证数学性质、定理等，并基于具体操作抽象出数学知识. 本栏目要求学生能够切实动手操作，以激发学生在现实世界中亲自实践的兴趣，从而引导学生通过具体操作活动感知如何从数学的角度发现问题，逐渐尝试“会用数学的眼光观察现实世界”.
思考	本栏目是以问题或问题串的形式为结论的推出搭建合适的脚手架. 学生通过思考简短且指向性明确(即指向某个具体细节或关键点)的问题(串)，或引发对新知的感悟，或拓展数学思维. 本栏目以问题适时启发学生思考，引导学生“会用数学的思维思考现实世界”.
探究	本栏目是以问题或活动的形式为学生经历数学知识内容的“再发现”过程提供探索的机会. 学生通过参与探究活动，尝试学会问题解决的策略、思想和方法，获得对数学概念、性质、定理等的理解. 本栏目旨在让学生“会用数学的思维思考现实世界”，要求学生更多地参与且经历相对独立的思考过程，从而发现数学事实及规律.
讨论	本栏目作为学生合作学习的载体，为学生沟通交流对数学知识内容的理解与感悟创设平台，旨在激发学生的求知欲和表达欲. 学生通过对问题素材的思考与分析，参与小组交流、班级交流等不同形式的同伴讨论，在互相沟通表达的过程中拓宽知识内容的广度和深度，领悟数学思想方法. 本栏目要求学生深度参与数学语言的表达与交流活动，在参与中“会用数学的语言表达现实世界”，发展数学表达与交流能力.
归纳	本栏目是为学生提炼、概括并表达数学结论提供机会. 学生在观察和操作等实践活动基础上，对经猜想验证的数学结论或知识进行提炼总结，并使用数学的语言表述为严谨的数学概念、性质或规则等. 本栏目要求学生“会用数学的语言表达现实世界”，在总结归纳数学知识的过程中逐渐养成用数学语言表达的习惯，能逐渐用严谨的数学语言陈述自己得到的结论，解释结论的合理性等，提升总结提炼能力.

（3）各章固有栏目板块

章首　以图文相结合的形式作为每一单元(章)的开头部分，旨在引导学生带着探究的热情进入新知的学习. 文字性表述围绕本章内容在数学中的地位和意义，与其他章的关联，以及学习重点展开. 章首图的设计和选用，结合单元内容特点，有机融入重大主题的教育内容，力图展现在党的领导下，我国现代化建设在各个领域取得的伟大成就.

提示　以解释性文字、拓展性介绍或启发性思考内容的形式对正文内容进行补充，为学生进一步理解正文内容提供支持与帮助. 学生通过栏目的内容延伸，深化对知识内容的认识，拓宽知识视野. 以书页的样式伴文排列，在内容上除了可以是对数学知识的进一步补充，还可以体现一些学科的拓展和现实情境的延伸等.

内容提要　通过概念梳理，系统回顾并概括本章学习内容，列出本章重要的知识点、结论与公式，帮助学生整理复习数学知识，建构自身的数学内容体系.

阅读材料　以图文并茂的形式提供史料、背景材料、知识应用及课外活动题材等阅读材料，供学生选择阅读或使用，开阔数学视野. 主要呈现数学文化、数学史、数学趣题、科普知识、中华优秀传统文化等，旨在提高学生的科学文化素养，集中体现数学课程的育人价值.

二、本套教科书的编写思想和主要特点

在教科书编写过程中，我们始终坚持正确的政治方向和育人为本的价值导向，全面贯彻党的教育方针和政策，围绕立德树人根本任务，努力实现义务教育阶段的培养目标，在提高数学学习质量的同时，落实学科核心素养，使得人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展. 我们希望编写一套经得起历史和实践检验的优秀教科书，将教科书作为推进教学改革的载体，通过教科书改变教学，通过教科书引导考试，让数学成为广大师生喜闻乐见的一门课程.

在编写过程中，我们注重吸收上海两期课改（“一期课改”和“二期课改”）的经验，同时依据《课标 2022 年版》科学地处理教学内容的编排. 本套教科书结构严谨、体例活泼、特色鲜明，体现了理性精神和人文情怀，有望促进学生数学核心素养的发展、创新意识的提高和社会责任感的增强.

本套教科书的编写思想和主要特点，具体体现在如下几个方面.

（1）遵循课程标准，吸取课改经验. 我们努力遵循国家课程标准的基本精神及指导思想，参照国家课程标准中的具体安排与建议，吸收上海在“五四”学制课程教材研究与实践中的有益经验，将已有的初中数学教科书作为本次编写的迭代初始值，在可能的范围内有的放矢地调整、提升与改进.

（2）内容削枝强干、提质减负，表述简明扼要、单刀直入. 教科书内容应该掌握到怎样的程度，是教科书的编写者及讲课的教师必须面临且迫切需要解决的一个问题. 对初中阶段的教科书，我们尽可能对内容精准定位、降低难度，关注数学的本质内容、内在发展和数学的应用，避免片面地追求严格化；用朴实无华且单刀直入的方式加以呈现，增加亲和力. 既提高质量，帮助学生打好必要的基础，又把时间和自由留给学生，切实减轻学生的负担，实现双赢的目标.

（3）整体架构科学合理，重视衔接和交叉. 根据《课标 2022 年版》中“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”这三大知识领域内在的逻辑关系和知识链条，相对集中地安排各领域内容. 各分册兼顾了不同领域，精心设计领域交叉或承上启下的章节. 例如，为更充分地发挥平面几何在培养逻辑推理中的独特作用，从七年级下册开始，将“相交线与平行线”“三角形”“等腰三角形”“直角三角形”“四边形”等与几何推理密切相关的内容，以 2 至 3 章为一个小板块，相对集中进行教学. 又如，根据八、九年级的学习要求，结合学生认知的特点和能力，在八年级上册依次呈现实数、二次根式、一元二次方程、直角三角形（含勾股定理），联系紧密，八年级下册有平面直角坐标系、一次函数、反比例函数，紧接着在九年级上册将二次函数作为初中函数的收官. 与高中关系密切的三角初步、圆、投影与视图、抽样与数据分析、概率初步依次安排在九年级上册和九年级下册.

（4）小初高整体设计，前后呼应且顺畅. 按照《课标 2022 年版》对小学和初中数学课程的一体化标准，强调小学与初中的衔接. 充分考虑到上海教育的实际情况和“五四”学制的特殊性，在学段内容划分及与小学、高中数学教科书的有效衔接上，做了精细设计. 例如，在“第

1 章有理数”中，首先巩固了小学分数和有限小数的四则运算. 在介绍有理数的同时回顾和整理了小学中对数的认识，并顺势过渡到“第 2 章简单的代数式”，作为初中代数学习的开端. 在引入一元一次方程、二元一次方程组解决实际问题时，与小学的算术解法作对比，以体现方程解法的优越性. 又如，在“一元二次方程”中，出现涉及可化为一元二次方程的分式方程的应用，为新编高中教科书中求解可化为一元二次不等式的分式不等式作铺垫，体现了从初中到高中递进的学习规律.

（5）加强逻辑推理，提升几何和代数推理能力. 针对初中阶段学生的数学认识将从以感性与直观为主上升到以理性与推理为主的特点和要求，加强对学生逻辑思维、推理能力、论证表达的培养. 例如，突出初中几何在培养逻辑思维中的关键作用，加强几何论证的学习. 在“相交线与平行线”中，从简单命题的证明开始，给出逻辑清晰、推理严格的证明示范. 在每个例题中，都力求论证逻辑思路清晰，表达清楚，随着知识的深入，循序渐进地逐步提高论证的要求，让学生在潜移默化之中学会推理论证的思想方法. 又如，在“整式乘除的性质”“负整数指数幂的乘法性质”“二次根式的乘法性质”“根式运算性质的推导”等知识点中，都增加了代数推理的内容.

（6）科学界定重要概念的内涵，调整重要结论的定位与分层. 坚持科学性、适宜性和一致性，同时考虑学生的理解、接受程度和使用的便利性，重新界定一部分概念和性质. 调整了一些重要结论的定位和分层. 例如，明确一些重要概念：整式也称多项式，单项式是特殊的多项式；分式也称有理式，整式是特殊的分式；梯形是一组对边平行的四边形，平行四边形是特殊的梯形. 又如，调整一些结论的定位：“垂线段最短”由基本事实(公理)改为定理，在“直角三角形”中作为定理加以证明；“平行线分线段成比例”，由基本事实(公理)改为定理，在“相似三角形”中作为定理加以证明；“一个内角等于 60°的等腰三角形是等边三角形”由定理改为例题；“直角三角形中的 30°角所对直角边是斜边的一半”由定理改为例题.

（7）“综合与实践”的内容情境丰富、跨学科特征鲜明. 按照《课标 2022 年版》对“综合与实践”的要求，灵活采用“主题式学习”和“项目式学习”两种“综合与实践”的呈现方式. 例如，六年级上册的“你的膳食健康吗?”是主题式活动，“上海一日游计划制订”是主题式与项目式相结合的学习活动. 这同时实现了从小学到初中对“综合与实践”不同要求的过渡. 情境设计丰富，有跨学科特征，活动意图明确，任务清晰，具有可操作性. 例如，为“综合与实践”设计丰富的任务情境，包括社会生活(如“理财小课堂”)、科学技术(如“旋转的齿轮”)和数学文化(如“‘勾股定理’证明中的中国智慧”)等. 同时还兼顾跨学科内容的设计，包括营养学(如“你的膳食健康吗?”)、物理学(如“积木可以叠多远?”)、金融学(如“理财小课堂”)、工程学(如“旋转的齿轮”)、艺术(如“从传统连续纹样到现代镶嵌图案”)等.

三、本套教学参考资料的编写意图与结构

本套教学参考资料编撰的目的是使教师理解教科书编制所依据的《课标 2022 年版》，体会教科书的编制特色和主要思想，把握教科书所包含的数学知识的体系和脉络，掌握教学过程的关键，从而很好地完成从课程标准和教科书所描述的“期望课程”“可实施课程”到教学过程

的“实施课程”和学生习得的“获得课程”的转变. 教学参考资料侧重给出编写者的思想及体会，明确各章的定位，剖析重点和难点，厘清容易混淆的地方，帮助教师把握《课标 2022 年版》的基本理念和目标要求，强调数学核心素养的落实，从而开拓教师思维，优化教学方法. 从这个角度讲，教学参考资料又是对教科书内容的深化和补充，成为教科书(可实施课程)到教学(实施课程)的中介和桥梁.

在任何情况下，教科书都要基于《课标 2022 年版》，贯彻“少而精”“简而明”的原则. 精心选择与组织教科书内容，抓住本质，返璞归真，尽可能给学生以明快、清新的感受，使学生能更深入地领会数学的真谛，让数学成为广大学生喜闻乐见的一门课程. 这是本套教科书坚持的基本特色. 教科书的许多特色隐含在内容的选取、编排和行文中. 教学参考资料将揭示和突出教科书的基本特色以及教科书编制过程落实这个特色所采取的具体措施和处理方式，并充分注意同一主题内前置和后续内容的衔接以及一个主题的内容与其他主题甚至其他学科内容的关联. 这种衔接和关联在章首语、内容提要以及在相关知识内容阐述中有明确的交代. 这样做的目的是让教师更加深刻地体会整个初中阶段数学是一个知识的网络，并在教学中把这种认知传递给学生.

本套教学参考资料与教科书的分册和章节安排一致，即教学参考资料的分册和章节目录均与教科书一致. 每册教学参考资料由四个主要部分组成：绪论部分、总论部分、分论部分和附录部分，具体结构如下：

（1）绪论部分

主要介绍整套教科书的总体结构框架、编写理念，以及本册教科书的编写说明和特色等.

（2）总论部分

针对《义务教育教科书(五・四学制)数学》的每一章内容，教学参考资料从“总体要求”“课时安排建议”“内容编排与特色”“教学提示”“评价建议”5 个方面，对各章的内容进行细致的阐述和说明. 其中，在“总体要求”中，该部分强调每一章内容的重要性及与前后章节的联系，明确课程内容要求和素养目标，与课程标准对应，指引教师把握教学方向. 在“课时安排建议”中，根据章节内容，提供课时分配建议，包括章末小结和阶段性习题课等环节，确保教学完整性和节奏合理性. 在“内容编排与特色”中，阐述章节内容的编排思路和特色，提炼教科书编写特点，帮助教师理解整体框架和逻辑. 在“教学提示”中，基于课程标准，为每一章教学提供具体提示和建议，涉及内容顺序、问题情境、核心概念把握及信息技术运用，优化教学方法. 在“评价建议”中，结合章节内容，从知识、素养、数学思想文化等方面提出评价建议，关注数学过程、概念本质、思维表达及应用，为课程评价提供指导.

（3）分论部分

为了帮助教师更好地理解和把握教科书内容，本部分将按照“章—节—课时”的形式，对教科书进行细致的解析. 其中，包含了以节为单位的“本节教学目标”和以课时为单位的“本课教学重点”“本课教学建议”“本课内容分析”栏目.

“本节教学目标”中明确提出学生通过本节学习后应达到的具体预期效果. 这些目标的设定，紧密围绕《课标 2022 年版》的内容要求和学业要求展开，强调学生对知识点的掌握，关注对其素养、能力的培养和提升.

“本课教学重点”中指出本节课教学中需要特别强调和关注的内容. 这些重点通常是教学中的核心知识点或关键能力，对于实现教学目标具有重要意义.

“本课教学建议”为教师使用本套教科书进行教学，提供具体的教学方法和策略指导. 这些建议基于课程标准、教材内容和学生实际情况，旨在帮助教师更有效地组织课堂教学活动.

“本课内容分析”深入解读本节课的教科书内容，旨在帮助教师全面把握教材编排，包括说明概念表述、例题设计、思考观察等栏目的教学建议，以及教学过程中可能存在的难点和教学注意事项等.

(4) 附录部分

本次教材的编制包括了三个品种：教科书(课本)、教学参考资料、练习部分(练习册). 其中，教科书中的课堂练习、节习题、章复习题与练习部分中的习题，形成了一个完整的习题训练和检测系统. 而这些习题的答案或解答提示都呈现在教学参考资料中，以便教师能完整全面地检测和评价教学效果.

四、教科书特色小栏目和固有栏目的教学建议

根据教科书特色小栏目板块的功能定位，在教学中可以参照如下建议使用小栏目：

观察　教师组织学生关注这个栏目呈现的表达式、图形或问题等,通过直观或者归纳等发现数学性质、特征或者数学结论等.

操作　教师组织学生参考这个栏目给出的步骤流程，进行实验、绘图等实践活动，感受和探究数学规律或验证数学性质、定理等.

思考　教师组织学生对栏目给出的内容进行思考、分析或解答，其目的是对之前所学内容的延伸，或者通过问题引出后续进一步学习的内容.

探究　教师组织学生对这个栏目给出的内容进行探索，其目的是加深学生对数学概念、性质、定理等的理解，让学生经历独立思考过程. 本栏目的内容在深度、综合性、开放性方面要求很高，有些属于初高衔接内容，教师不一定在课堂上给出答案，可以鼓励学生在课后进一步思考.

讨论　教师组织学生针对这个栏目提出的问题，进行全班集体的交流和讨论，或者学生在小组中展开数学交流.

归纳　教师组织学生根据之前学习的内容，让学生提炼概括出可能的数学概念、性质或者定理，并进行表达. 教师应对学生的表达进行规范化，必要时给予纠正.

本教科书的各章有若干相对固有的栏目，在教学中可以灵活处理.

章首语　教师可以在每章开始时，组织学生阅读并讨论章首语，让学生初步了解每章要学习的内容，为每章学习做好准备. 在每章结束时，再回顾章首页进一步体会.

提示　教师组织学生结合教科书正文阅读或浏览提示部分的说明，拓展学生对所学内容的理解.

内容提要　教师组织学生在每章结束时，阅读内容提要，复习每章所学的概念、性质、定理等. 需要特别指出的是，几何章节中内容提要里出现的性质和定理，是进行几何推理的起

点，可以直接使用.

阅读材料　教师在完成课时内容学习以后，鼓励学生使用阅读材料，了解数学文化和数学史，或者见识数学趣题，开阔数学视野，帮助学生提高文化素养、陶冶道德情操.

五、八年级上册教科书编写特色

我们根据《课标 2022 年版》共编写了初中(六年级至九年级)数学教科书八册. 八年级上册由“实数”“二次根式”“一元二次方程”“直角三角形”和“综合与实践”5 个单元(章)组成.

第 19、20、21 章隶属于“数与代数”领域，第 22 章隶属于“图形与几何”领域. “第 19 章实数”和“第 20 章二次根式”紧密联系，从学习数的开方开始，认识实数并掌握二次根式的运算，它们也是一元二次方程和直角三角形中勾股定理的基础. 在此基础上，在“第 21 章一元二次方程”中学习一元二次方程的解法、判别式、根与系数的关系以及应用问题，在“第 22 章直角三角形”中学习直角三角形的性质，包括著名的勾股定理，进一步熟悉几何推理和几何计算.

第 19 章　实数

本章从乘方的逆运算出发，学习了平方根与立方根. 算术平方根、平方根、立方根三课时的内容结构基本类似，利于学生对比学习.

无理数的引出是本章的难点，通过讨论有理数的小数形式和证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数，指出 $\sqrt{2}$ 一定是无限不循环小数，从而自然引出无理数. 利用数轴将“数”与“形”结合起来，并通过夹逼收缩说明能用数轴上的一个点表示无理数，初步认识实数与数轴上的点具有一一对应关系，同时体会用有理数估计一个无理数的大致范围的方法.

第 20 章　二次根式

在“第 19 章实数”中引进了数的开方运算，对代数式的认识也需要从有理式扩展到根式. 本章学习二次根式的概念和性质，通过理解最简二次根式、同类二次根式以及分母有理化，掌握二次根式的运算，特别是化简二次根式的方法. 这些知识也将为学习一元二次方程、勾股定理、二次函数等内容奠定基础.

第 21 章　一元二次方程

本章中要学习用因式分解法、配方法和公式法来解数字系数的一元二次方程，能用求根公式对二次三项式因式分解，能用判别式判断根的情况，并掌握韦达定理这一重要性质. 在以前学习过的方程应用问题的基础上，进一步体会从具体问题中提炼数学信息，最终建立一元二次方程或可化为一元二次方程的分式方程的过程.

第 22 章　直角三角形

在学生已经知道了三角形的有关概念、掌握了全等三角形的性质与判定的基础上，本章要学习直角三角形的性质和直角三角形全等的判定，并与利用等腰三角形的性质学习线段的垂直平分线相类比，利用直角三角形的性质学习角平分线的性质.

本章中还要学习勾股定理及其逆定理. 勾股定理是平面几何中重要的定理，它有着广泛的应用，对勾股定理的学习也将为三角、解析几何、立体几何的学习奠定基础.

综合与实践

本册的“综合与实践”安排了两个内容：“理财小课堂”与“‘勾股定理’证明中的中国智慧”.

在“理财小课堂”中，先通过一个活动比较单利法和复利法的收益，然后在后两个活动中进一步探讨各种理财方案，通过这些活动，可以让学生了解数学在日常生活中的应用.

“‘勾股定理’证明中的中国智慧”与第22章的阅读材料“勾股定理简史”相呼应，介绍了中国古代数学家证明勾股定理的三种方法，展示了中国古代数学的重要成就，拓宽了学生的知识面，并让学生从多种方法中感受几何直观和几何推理.

第 19 章　实　　数

一、本章概述

1. 总体要求

从有理数到实数，是学生在初中阶段第二次体会数的扩充. 在学习有理数时，学生已经积累了一些关于数的扩充的学习经验，知道数的扩充源于实际生活的需要. 在初中阶段，大多数问题是在实数范围内展开的，实数是后续学习一元二次方程、函数等内容的基础，对将来的学习具有重要作用.

本章从乘方的逆运算出发，先学习平方根与立方根，然后在此基础上，指出$\sqrt{2}$是一个无限不循环小数的事实，引领学生认识无理数，经历从有理数到实数的扩充，体会数的运算的推广和发展. 通过本章的学习，学生要知道算术平方根、平方根、立方根的意义，理解实数的概念，认识实数与数轴的关系，掌握实数的运算，以适应后续学习的需要.

2. 课时安排建议

本章共 12 课时，具体课时分配建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
19.1 平方根与立方根	3	算术平方根　1 课时
		平方根　1 课时
		立方根　1 课时
习题课	1	
19.2 实数	6	有理数的小数形式　1 课时
		无理数　1 课时
		实数与数轴　1 课时
		实数的绝对值和大小比较　1 课时
		实数的运算　1 课时
		科学记数法　1 课时
习题课	1	
复习与小结	1	

3. 内容编排与特色

本章内容分为两节，分别是“19.1 平方根与立方根”和“19.2 实数”.

“19.1 平方根与立方根”以问题为背景，引出算术平方根、平方根、立方根的概念. 3 个课时在内容结构上基本类似，利于学生在学习的过程中通过比较更好地理解算术平方根、平方根、立方根. 在算术平方根和平方根的顺序上，先介绍通过实际背景“已知正方形的面积，求它的边长”引出的算术平方根，既体现了与实际的联系，又利于学生在解决实际问题的过程中更好地认识算术平方根与平方根的区别和联系.

“19.2 实数”，按照“实数的概念—实数与数轴—实数的运算—科学记数法”展开内容. 无理数的引出是实数概念教学的难点，通过讨论有理数的小数形式和证明$\sqrt{2}$不是有理数，指出$\sqrt{2}$一定是无限不循环小数，自然引出无理数，让学生初步体验代数推理. 实数与数轴上的点的对应关系，可以通过画图在数轴上表示无理数$\sqrt{2}$，但难以说明任意无理数都可以通过画图在数轴上找到一个点来表示它. 因此，这里利用夹逼收缩的方法说明能用数轴上的一个点对应表示一个无理数，让学生初步认识实数与数轴上的点具有一一对应关系. 对初中生而言，这种方法可能比较抽象，难以充分理解，但在想象线段的长度越来越小并最终收缩为一点的过程中，学生能够亲身经历数学抽象的形成过程，从而逐步发展数学抽象能力.

本章的最大特色是重视代数推理和数学抽象. 通过本章的学习，让学生更好地理解数学概念，初步体验代数推理，养成良好的思维习惯.

4. 教学提示

重视概念的形成过程. 引入算术平方根、平方根、立方根时，教学中应对具体的问题展开讨论，经历“已知一个正数的平方，求这个正数”“已知一个数的平方，求这个数”“已知一个数的立方，求这个数”三个问题的探究过程，初步形成概念并理解概念. 学生对正数有两个平方根的认知是教学中的难点，建议在具体例子的基础上，通过讨论归纳，概括平方根的特点，使学生更深刻地理解平方根的概念. 关于无理数的引入，教学中要关注问题引导的连贯性，从发现$\sqrt{2}$，到指出$\sqrt{2}$是无限不循环小数，再到将$\sqrt{2}$用数轴上的一个点表示，三个问题层层递进. 在有理数扩充到实数的认知过程中，感受数的扩充的必要性.

体会类比的学习方法. 算术平方根、平方根、立方根在内容结构上基本类似，都经历了“问题引入—求平（立）方根—平（立）方根的特点”的学习过程，教学中可以通过类比分析，认识联系和区别，引导学生理解概念. 类比有理数，学习实数的绝对值、相反数、实数的大小比较、实数的运算，引导学生体会类比的学习方法，促进知识系统的建构和完善.

重视估算能力的培养. 估算是一种具有实际应用价值的运算能力，《课标 2022 年版》中明确指出能用有理数估计一个无理数的大致范围. 本章通过探究“$\sqrt{2}$究竟有多大?”，引导学生经历估算的过程，在教学中要鼓励学生借助计算器等工具进行探索，充分交流讨论，体会用有

理数估计一个无理数的大致范围的方法，培养学生的估算能力.

体会数形结合的思想. 实数与数轴上的点是一一对应的，利用数轴可以将“数”与“形”结合起来，有利于对实数概念和运算的理解. 教学中可以引导学生结合数轴理解实数的绝对值和相反数，对数轴上两点间的距离展开充分探究，让学生初步体会数形结合思想的作用.

把握实数的教学要求. 学生在初中阶段不可能充分理解实数的理论，在引出无理数时可以让学生初步体会代数推理，在说明实数与数轴上的点的对应关系时可以让学生经历数学抽象. 但在教学时要把握好对这两处的要求，充分尊重学生的认知基础，不能过于追求严密的逻辑体系.

5. 评价建议

关注学生对概念的理解. 本章的概念主要有算术平方根、平方根、立方根、无理数、实数等. 评价时要重视概念的区别和联系，如算术平方根与平方根；评价时要重视对概念易错点的辨析，如正数的平方根有两个以及平方根的符号表示；评价时要重视概念的运用，如举出或构造无理数等. 要结合具体情境评价学生对概念的理解水平.

关注学生实数运算能力的形成. 对于实数运算能力，评价时不能仅仅关注运算的结果，也要关注学生能否正确理解实数的运算法则，能否根据数的特点选择合适的运算方法，能否依据算理进行准确的实数运算，能否使用计算器进行实数的运算.

鼓励学生分析概括和交流表达. 关注学生是否积极参与思考和探究，如平(立)方根特点的思考，无理数引出时系列问题的讨论，估计$\sqrt{2}$大小的探究，等等；鼓励学生独立思考、分析概括和交流表达.

二、教科书分析与教学建议

19.1 平方根与立方根

本节教学目标

（1）了解算术平方根、平方根、立方根的概念，会用根号表示数的算术平方根、平方根、立方根.

（2）了解乘方与开方互为逆运算，会用平方运算求数的算术平方根和平方根(被开方数可以表示成有理数的平方)，会用立方运算求数的立方根(被开方数可以表示成有理数的立方).

（以下分析对应课本第 2～4 页）

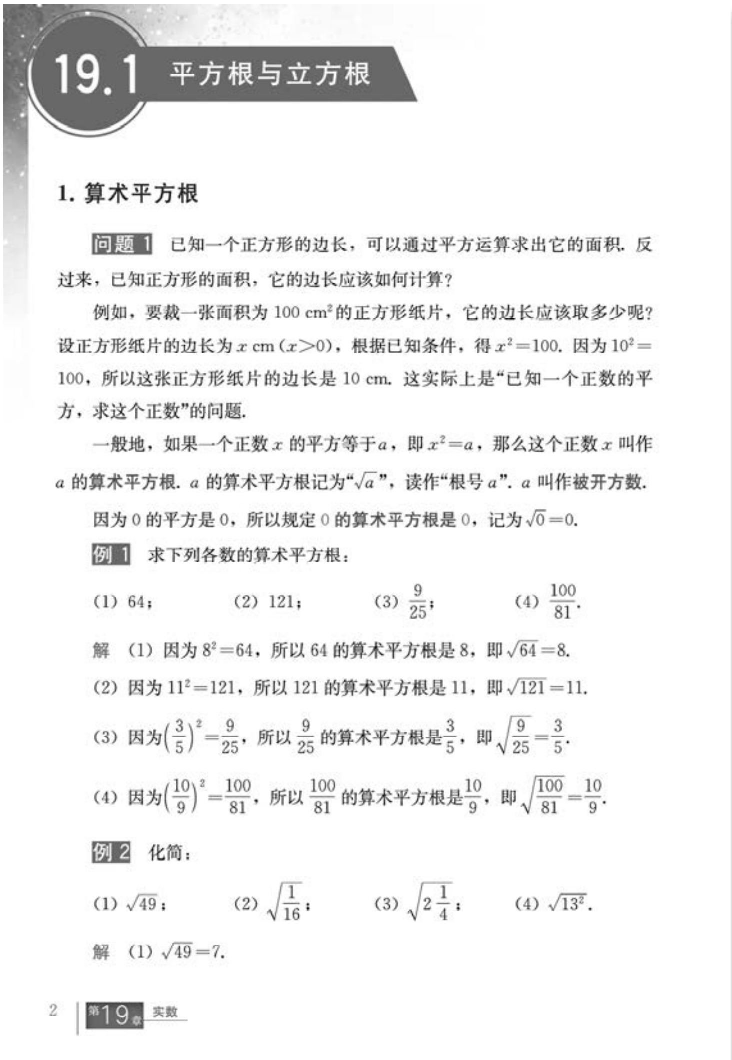
本课教学重点

了解算术平方根的概念，会用根号表示数的算术平方根；在被开方数可以表示成有理数的平方时，会用平方运算求数的算术平方根.

本课教学建议

（1）教学中要重视通过具体问题揭示本质“已知一个正数的平方，求这个正数”的过程，关注算术平方根的概念从具体到抽象的形成，促进学生更好地理解算术平方根的意义.

（2）算术平方根的问题引入和求数的算术平方根的思考方法，都体现了互逆的过程，教学中要引导学生体会，为理解平方与开平方互为逆运算打下基础.



19.1 平方根与立方根

1. 算术平方根

问题 1 已知一个正方形的边长，可以通过平方运算求出它的面积. 反过来，已知正方形的面积，它的边长应该如何计算？

例如，要裁一张面积为 100 cm² 的正方形纸片，它的边长应该取多少呢？设正方形纸片的边长为 x cm（$x>0$），根据已知条件，得 $x^2=100$. 因为 $10^2=100$，所以这张正方形纸片的边长是 10 cm. 这实际上是“已知一个正数的平方，求这个正数”的问题.

一般地，如果一个正数 x 的平方等于 a，即 $x^2=a$，那么这个正数 x 叫作 a 的算术平方根. a 的算术平方根记为“$\sqrt{a}$”，读作“根号 a”. a 叫作被开方数.

因为 0 的平方是 0，所以规定 0 的算术平方根是 0，记为 $\sqrt{0}=0$.

例 1 求下列各数的算术平方根：

(1) 64；　(2) 121；　(3) $\frac{9}{25}$；　(4) $\frac{100}{81}$.

解 (1) 因为 $8^2=64$，所以 64 的算术平方根是 8，即 $\sqrt{64}=8$.

(2) 因为 $11^2=121$，所以 121 的算术平方根是 11，即 $\sqrt{121}=11$.

(3) 因为 $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$，所以 $\frac{9}{25}$ 的算术平方根是 $\frac{3}{5}$，即 $\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$.

(4) 因为 $\left(\frac{10}{9}\right)^2=\frac{100}{81}$，所以 $\frac{100}{81}$ 的算术平方根是 $\frac{10}{9}$，即 $\sqrt{\frac{100}{81}}=\frac{10}{9}$.

例 2 化简：

(1) $\sqrt{49}$；　(2) $\sqrt{\frac{1}{16}}$；　(3) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$；　(4) $\sqrt{13^2}$.

解 (1) $\sqrt{49}=7$.

2 第19章 实数

本课内容分析

问题 1 从“已知正方形的边长，求它的面积”逆向思考，提出“已知正方形的面积，求它的边长”，进一步抽象出问题“已知一个正数的平方，求这个正数”，从具体到抽象介绍算术平方根的概念.

$\sqrt{a}$ 中的被开方数 a 是非负数，$\sqrt{a}$ 也是非负数.

例 1 的解法体现了根据概念求算术平方根的思考过程.

例 2 用根号表示数的算术平方根，同样运用例 1 求算术平方根的思考方法，过程略去不写.

例 3 和例 4 旨在引导学生思考被开方数的小数点与它的算术平方根的小数点的变化规律.

(2) $\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$.

(3) $\sqrt{2\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$.

(4) $\sqrt{13^2}=13$.

例 3 化简：

(1) $\sqrt{4}$；　(2) $\sqrt{400}$；　(3) $\sqrt{40\,000}$；　(4) $\sqrt{4\,000\,000}$.

解 (1) $\sqrt{4}=2$.

(2) $\sqrt{400}=20$.

(3) $\sqrt{40\,000}=200$.

(4) $\sqrt{4\,000\,000}=2\,000$.

我们知道，如果 $x^2=a$，那么 $(10x)^2=100a$. 这说明一个数扩大为原来的 10 倍，它的平方就扩大为原来的 100 倍. 反过来，一个数扩大为原来的 100 倍，它的算术平方根就扩大为原来的 10 倍.

例 4 化简：

(1) $\sqrt{25}$；　(2) $\sqrt{0.25}$；　(3) $\sqrt{0.002\,5}$；　(4) $\sqrt{0.000\,025}$.

解 (1) $\sqrt{25}=5$.

(2) $\sqrt{0.25}=0.5$.

(3) $\sqrt{0.002\,5}=0.05$.

(4) $\sqrt{0.000\,025}=0.005$.

一个数缩小为原来的 $\frac{1}{100}$，它的算术平方根就缩小为原来的 $\frac{1}{10}$.

被开方数的小数点向右或者向左移动两位，它的算术平方根的小数点相应地向右或者向左移动一位.

例 5 化简：

(1) $\sqrt{90\,000}$；　　(2) $\sqrt{225\,000\,000}$；

(3) $\sqrt{0.003\,6}$；　　(4) $\sqrt{0.000\,169}$.

解 (1) 因为 $\sqrt{9}=3$，所以 $\sqrt{90\,000}=300$.

(2) 因为 $\sqrt{225}=15$，所以 $\sqrt{225\,000\,000}=15\,000$.

(3) 因为 $\sqrt{36}=6$，所以 $\sqrt{0.003\,6}=0.06$.

(4) 因为 $\sqrt{169}=13$，所以 $\sqrt{0.000\,169}=0.013$.

课堂练习 19.1(1)

1. 判断下列说法是否正确，正确的在括号里打“√”，错误的在括号里打“×”：

(1) 2 是 4 的算术平方根；　　(　　)

(2) -3 是 9 的算术平方根；　　(　　)

(3) 0.01 是 0.1 的算术平方根；　　(　　)

(4) 0.04 是 0.016 的算术平方根.　　(　　)

2. 求下列各数的算术平方根：

(1) 196；　(2) 0.81；　(3) $\frac{9}{64}$；　(4) $1\frac{7}{9}$.

3. 化简：

(1) $\sqrt{360\,000}$；　　(2) $\sqrt{25\,600}$；

(3) $\sqrt{0.000\,1}$；　　(4) $\sqrt{0.000\,049}$.

2. 平方根

问题 2 已知一个数的平方等于 100，那么这个数是多少？

设这个数是 x，根据已知条件，得

例 5 的解法体现了例 3、例 4 运算规律的运用.

课堂练习 19.1(1)

1. (1) √.

(2) ×.

(3) ×.

(4) ×.

2. (1) 14.

(2) 0.9.

(3) $\frac{3}{8}$.

(4) $\frac{4}{3}$.

3. (1) 600.

(2) 160.

(3) 0.01.

(4) 0.007.

（以下分析对应课本第 4～6 页）

本课教学重点

了解平方根的概念，会用根号表示数的平方根；在被开方数可以表示成有理数的平方时，会用平方运算求数的平方根.

本课教学建议

（1）引入平方根的概念时，要重视引导学生比较“已知一个数的平方，求这个数”和“已知一个正数的平方，求这个正数”，关注平方根与算术平方根的区别.

（2）“正数的平方根有两个”是学生理解的难点，教学中应结合实例帮助学生理解.

（3）平方根的根号表示蕴含了对平方根概念的理解，教学中要关注文字语言与符号语言的转化，促进学生更好地理解平方根.

（4）平方根的问题引入和求数的平方根的思考方法，再次体现了互逆的过程，教学中要引导学生体会，为类比学习立方根打下基础.

$$x^2=100.$$

因为 $10^2=100$，$(-10)^2=100$，所以这个数是 10 或 -10. 这实际上是“已知一个数的平方，求这个数”的问题.

一般地，如果一个数 x 的平方等于 a，即 $x^2=a$，那么这个数 x 叫作 a 的平方根，也称为二次方根. a 叫作被开方数.

求一个数 a 的平方根的运算叫作开平方. 例如，求 64 的平方根，就是要对 64 进行开平方运算，64 是被开方数.

例 6 求下列各数的平方根：

(1) 4；　　(2) 0.16；　　(3) $\dfrac{9}{25}$.

解 (1) 因为 $2^2=4$，$(-2)^2=4$，所以 4 的平方根是 ±2.

(2) 因为 $0.4^2=0.16$，$(-0.4)^2=0.16$，所以 0.16 的平方根是 ±0.4.

(3) 因为 $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$，$\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$，所以 $\dfrac{9}{25}$ 的平方根是 $\pm\dfrac{3}{5}$.

思考

正数的平方根有什么特点？0 有平方根吗？负数有平方根吗？

正数有两个平方根，它们互为相反数，其中正的平方根就是这个数的算术平方根；0 有平方根，0 的平方根是 0；负数没有平方根，因为在我们现在所认识的数中，任何一个正数、0 或负数的平方都不是负数.

> 正数有两个平方根，它们互为相反数；
> 0 的平方根是 0；
> 负数没有平方根.

正数 a 的两个平方根可以用符号“$\pm\sqrt{a}$”表示. 其中，“$+\sqrt{a}$”表示 a 的正的平方根，即 a 的算术平方根；“$-\sqrt{a}$”表示 a 的负的平方根，读作“负根号 a”.

本课内容分析

引导学生比较问题 2 和问题 1 的区别和联系，与算术平方根作比较，促进学生对平方根概念的理解.

例 6 的解法体现了根据概念求平方根的思考过程. 学生初学时可能对“正数进行开平方运算有两个运算结果”“负数不能进行开平方运算(实数范围内)”不太习惯，因为这与他们之前运算结果是唯一的认知经验不符，教学时可以通过具体的例子帮助学生加深对平方根概念的理解，促进其对平方根特点的把握.

平方根和算术平方根既有区别又有联系. 区别在于正数的平方根有两个，而它的算术平方根只有一个；联系在于正数的正的平方根就是它的算术平方根. 0 的平方根和算术平方根都是 0.

例 7 分别用根号表示数的算术平方根、负平方根和平方根. 注意正数 a 的平方根用根号表示是“$\pm\sqrt{a}$”，而$\sqrt{a}$ 仅仅表示正数 a 的算术平方根. 教学时可以让学生先说出$\pm\sqrt{a}$ 分别表示什么，再进行化简. 化简时同样根据概念进行思考，过程略去不写.

让学生理解正数的两个平方根互为相反数，我们可以利用算术平方根来研究平方根.

课堂练习 19.1(2)

1. (1) ×.

(2) ×.

(3) √.

(4) √.

2. (1) ±5.

(2) $\pm\dfrac{8}{11}$.

(3) ±0.6.

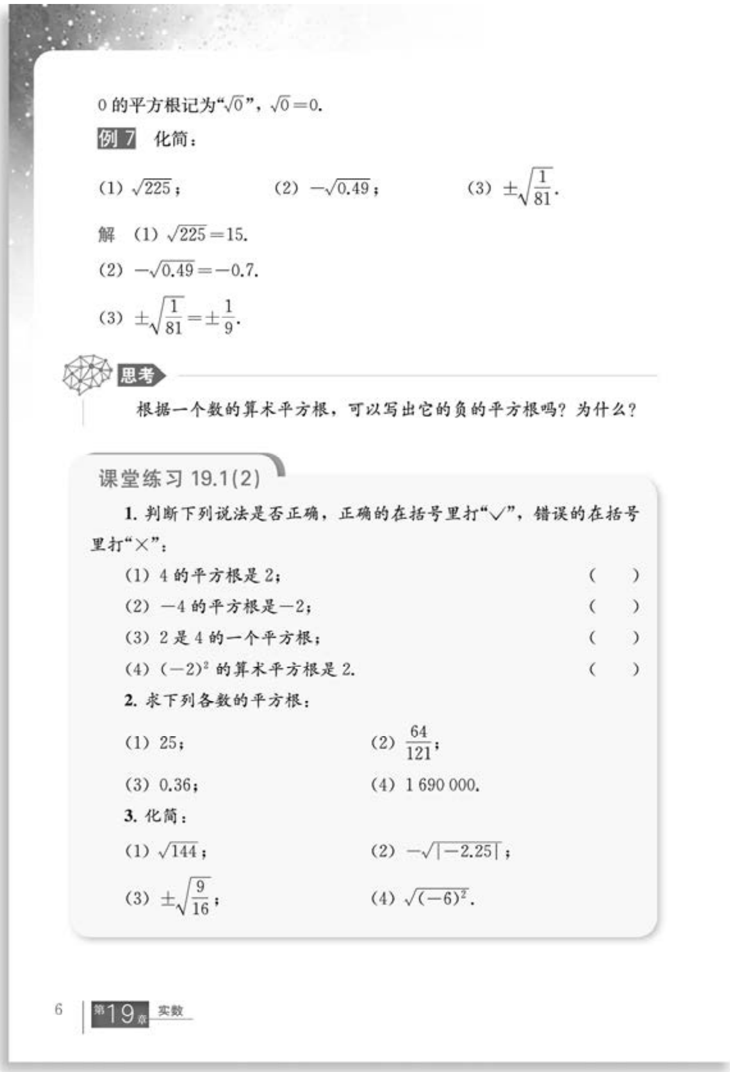
(4) $\pm1\ 300$.

3. (1) 12.

(2) -1.5.

(3) $\pm\dfrac{3}{4}$.

(4) 6.



0 的平方根记为“$\sqrt{0}$”，$\sqrt{0}=0$.

例 7 化简：

(1) $\sqrt{225}$；　(2) $-\sqrt{0.49}$；　(3) $\pm\sqrt{\dfrac{1}{81}}$.

解 (1) $\sqrt{225}=15$.

(2) $-\sqrt{0.49}=-0.7$.

(3) $\pm\sqrt{\dfrac{1}{81}}=\pm\dfrac{1}{9}$.

思考

根据一个数的算术平方根，可以写出它的负的平方根吗？为什么？

课堂练习 19.1(2)

1. 判断下列说法是否正确，正确的在括号里打“√”，错误的在括号里打“×”：

(1) 4 的平方根是 2；　(　)

(2) -4 的平方根是 -2；　(　)

(3) 2 是 4 的一个平方根；　(　)

(4) $(-2)^2$ 的算术平方根是 2.　(　)

2. 求下列各数的平方根：

(1) 25；　(2) $\dfrac{64}{121}$；

(3) 0.36；　(4) 1 690 000.

3. 化简：

(1) $\sqrt{144}$；　(2) $-\sqrt{|-2.25|}$；

(3) $\pm\sqrt{\dfrac{9}{16}}$；　(4) $\sqrt{(-6)^2}$.

6 第19章 实数

（以下分析对应课本第 7～9 页）

本课教学重点

了解立方根的概念，会用根号表示数的立方根；在被开方数可以表示成有理数的立方时，会用立方运算求数的立方根.

本课教学建议

（1）类比算术平方根、平方根的学习经验，重视立方根概念引入时从实际问题到“已知一个数的立方，求这个数”的转化，重视根据概念求数的立方根的思考过程，促进对立方根概念的理解.

（2）关注立方根与平方根的区别，在理解立方根的概念、求数的立方根和归纳“任何一个数都有且只有一个立方根”时，引导学生对立方根与平方根进行比较，更好地理解立方根与平方根.

本课内容分析

与算术平方根、平方根的学习过程类似，通过问题 3 抽象出“已知一个数的立方，求这个数”，引出立方根和开立方的概念.

例 8 的解法体现了根据概念求立方根的思考过程，为归纳“任何一个数都有且只有一个立方根”积累直观经验.

归纳时要注意比较立方根与平方根的区别.

3. 立方根

问题 3 有一个体积为 1 000 cm^3 的正方体纸盒，它的棱长是多少？

设这个正方体纸盒的棱长是 x cm，根据已知条件，得 $x^3=1\,000$. 因为 $10^3=1\,000$，所以这个正方体纸盒的棱长是 10 cm. 这实际上是“已知一个数的立方，求这个数”的问题.

一般地，如果一个数 x 的立方等于 a，即 $x^3=a$，那么这个数 x 叫作 a 的立方根，也称为三次方根. a 叫作被开方数.

求一个数 a 的立方根的运算叫作开立方. 例如，求 64 的立方根，就是要对 64 进行开立方运算，64 是被开方数.

例 8 求下列各数的立方根：

(1) 27； (2) $-1\,000$； (3) $\frac{64}{125}$； (4) 0.

解 (1) 因为 $3^3=27$，所以 27 的立方根是 3.

(2) 因为 $(-10)^3=-1\,000$，所以 $-1\,000$ 的立方根是 -10.

(3) 因为 $\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{64}{125}$，所以 $\frac{64}{125}$ 的立方根是 $\frac{4}{5}$.

(4) 因为 $0^3=0$，所以 0 的立方根是 0.

思考

正数、0、负数的立方根各有什么特点？

正数的立方是正数，0 的立方是 0，负数的立方是负数. 在我们现在所认识的数中，任何一个数都有立方根，且只有一个立方根.

> 正数的立方根是正数；
> 0 的立方根是 0；
> 负数的立方根是负数.

类似平方根，数 a 的立方根用符号“$\sqrt[3]{a}$”表示.

例 9 化简：

(1) $\sqrt[3]{216}$；　　(2) $\sqrt[3]{-216}$；

(3) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$；　　(4) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$.

解 (1) $\sqrt[3]{216}=6$.

(2) $\sqrt[3]{-216}=-6$.

(3) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$.

(4) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}$.

一般地，$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$.

例 10 化简：

(1) $\sqrt[3]{27\,000}$；　(2) $\sqrt[3]{-125\,000}$；　(3) $\sqrt[3]{-1\,000\,000}$.

解 (1) $\sqrt[3]{27\,000}=30$.

(2) $\sqrt[3]{-125\,000}=-50$.

(3) $\sqrt[3]{-1\,000\,000}=-100$.

例 11 化简：

(1) $\sqrt[3]{-0.008}$；　(2) $\sqrt[3]{0.064}$；　(3) $\sqrt[3]{0.000\,001}$.

解 (1) $\sqrt[3]{-0.008}=-0.2$.

(2) $\sqrt[3]{0.064}=0.4$.

(3) $\sqrt[3]{0.000\,001}=0.01$.

思考

(1) 将被开方数扩大为原来的 1 000 倍，它的立方根如何变化？

(2) 将被开方数缩小为原来的$\frac{1}{1\,000}$，它的立方根如何变化？

被开方数的小数点向右或者向左移动三位，它的立方根的小数点相应地向右或者向左移动一位.

8 第19章 实数

例 9 用根号表示数的立方根，运用与例 8 求立方根相同的思考方法，过程略去不写.

引导学生通过例 9 归纳结论$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$. 根据学生的认知情况，也可以通过立方根的概念进行推理. 求负数的立方根时，可以先求出这个负数的绝对值的立方根，再取相反数.

例 10 和例 11 旨在引导学生思考被开方数的小数点与它的立方根的小数点的变化规律. 因为有算术平方根的学习经验，这里直接设置思考，鼓励学生大胆表达.

课堂练习 19.1(3)

1. $a=5$，$b=-\dfrac{1}{6}$，$c=0.2$.

2. (1) 4.

(2) -5.

(3) $-\dfrac{1}{3}$.

(4) $\dfrac{3}{2}$.

3. (1) 200.

(2) 0.5.

(3) -60.

(4) -0.03.

习题 19.1

1. (1) ×.

(2) √.

(3) ×.

(4) ×.

(5) ×.

(6) ×.

2. (1) 6.

(2) $\dfrac{10}{11}$.

(3) 0.02.

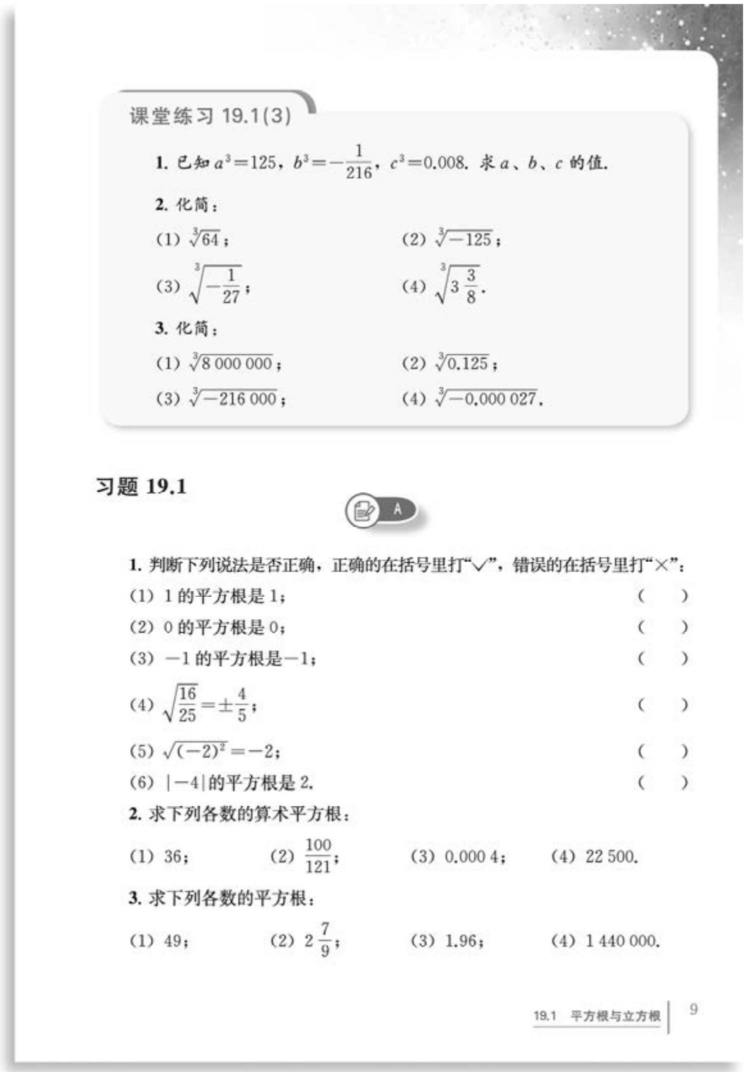
(4) 150.

3. (1) ± 7.

(2) $\pm\dfrac{5}{3}$.

(3) ± 1.4.

(4) $\pm 1\,200$.



课堂练习 19.1(3)

1. 已知 $a^3=125$，$b^3=-\dfrac{1}{216}$，$c^3=0.008$. 求 a、b、c 的值.

2. 化简：

(1) $\sqrt[3]{64}$；　　(2) $\sqrt[3]{-125}$；

(3) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{27}}$；　　(4) $\sqrt[3]{3\dfrac{3}{8}}$.

3. 化简：

(1) $\sqrt[3]{8\,000\,000}$；　　(2) $\sqrt[3]{0.125}$；

(3) $\sqrt[3]{-216\,000}$；　　(4) $\sqrt[3]{-0.000\,027}$.

习题 19.1

A

1. 判断下列说法是否正确，正确的在括号里打“√”，错误的在括号里打“×”：

(1) 1 的平方根是 1；　（　　）

(2) 0 的平方根是 0；　（　　）

(3) -1 的平方根是 -1；　（　　）

(4) $\sqrt{\dfrac{16}{25}}=\pm\dfrac{4}{5}$；　（　　）

(5) $\sqrt{(-2)^2}=-2$；　（　　）

(6) $|-4|$ 的平方根是 2.　（　　）

2. 求下列各数的算术平方根：

(1) 36；　(2) $\dfrac{100}{121}$；　(3) 0.000 4；　(4) 22 500.

3. 求下列各数的平方根：

(1) 49；　(2) $2\dfrac{7}{9}$；　(3) 1.96；　(4) 1 440 000.

19.1 平方根与立方根　9

4. 求下列各数的立方根：

(1) 1；　(2) $-\frac{8}{27}$；　(3) -0.064；　(4) 216 000.

5. 化简：

(1) $\sqrt{900}$；　(2) $-\sqrt{3\frac{1}{16}}$；　(3) $\sqrt{0.008\,1}$；　(4) $\pm\sqrt{1\,210\,000}$.

6. 化简：

(1) $\sqrt[3]{-27}$；　(2) $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$；　(3) $\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}$；　(4) $\sqrt[3]{-8^2}$.

B

7. 下列说法是否正确？如果不正确，请说明理由.

(1) 互为相反数的两个数的立方根也互为相反数；

(2) 立方根是它本身的数只有 0；

(3) 算术平方根是它本身的数只有 0；

(4) 平方根与立方根相等的数只有 0.

8. 根据下表回答问题：

x	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9
x^2	9.61	10.24	10.89	11.56	12.25	12.96	13.69	14.44	15.21
x^3	29.791	32.768	35.937	39.304	42.875	46.656	50.653	54.872	59.319

(1) 13.69 的平方根是_______，$\sqrt{10.24}=$_______；

(2) 35.937 的立方根是_______，$\sqrt[3]{59.319}=$_______；

(3) 根据表中的数据，你能分别写出下列各式的值吗？如果能，请写出这个值；如果不能，请说明理由.

① $\sqrt{12\,960\,000}$；　② $\sqrt{0.000\,152\,1}$；

③ $\sqrt[3]{2\,979\,100\,000}$；　④ $\sqrt[3]{0.000\,046\,656}$.

10　第19章　实数

4. (1) 1.

(2) $-\frac{2}{3}$.

(3) -0.4.

(4) 60.

5. (1) 30.

(2) $-\frac{7}{4}$.

(3) 0.09.

(4) $\pm1\,100$.

6. (1) -3.

(2) $\frac{1}{4}$.

(3) $\frac{5}{2}$.

(4) -4.

7. (1) 正确.

(2) 不正确，1 的立方根是 1，−1 的立方根是−1.

(3) 不正确，1 的算术平方根是 1.

(4) 正确.

8. (1) ±3.7；3.2.

(2) 3.3；3.9.

(3) ① 能，3 600.

② 不能，因为 15.21 的小数点向左移动五位才能得到被开方数 0.000 152 1，小数点移动的位数 5 不是 2 的倍数.

③ 不能，因为 29.791 的小数点向右移动八位才能得到被开方数 2 979 100 000，小数点移动的位数 8 不是 3 的倍数.

④ 能，0.036.

19.2　实数

本节教学目标

（1）知道有理数必为有限小数或无限循环小数，有限小数或无限循环小数必为有理数.

（2）了解无理数和实数，知道实数由有理数和无理数组成，了解实数与数轴上的点一一对应.

（3）能用有理数估计一个无理数的大致范围，会用计算器计算算术平方根和立方根.

（4）能用数轴上的点表示实数，能比较实数的大小.

（5）能借助数轴理解绝对值和相反数的意义，会求实数的绝对值和相反数.

（6）知道实数基本运算的意义，会依据实数的运算法则、运算律和运算顺序进行实数的运算.

（7）了解近似数，在解决实际问题时，能用计算器进行近似计算，会按问题的要求进行简单的近似计算.

（8）理解科学记数法的意义，会用科学记数法表示有理数.

（以下分析对应课本第 11～13 页）

本课教学重点

知道有理数必为有限小数或无限循环小数，有限小数或无限循环小数必为有理数.

本课教学建议

（1）有理数必为有限小数或无限循环小数是学生认知的难点，教学时应结合具体的例子，引导学生体会循环节的产生过程，进而理解有理数的小数形式.

（2）介绍有理数的小数形式是为引出无理数作铺垫，教学时要尊重学生的认知基础. 对于“有理数必为有限小数或无限循环小数”，可结合具体的例子简单说理；“有限小数或无限循环小数必为有理数”仅介绍转化方法.

19.2 实数

1. 有理数的小数形式

我们知道，有理数是能够写成分数 $\frac{b}{a}$(a、b 是整数，$a\neq0$)的数，请把下列有理数写成小数的形式，你有什么发现？

$$\frac{5}{2}、-\frac{4}{5}、\frac{22}{7}、-\frac{16}{9}、\frac{3}{22}.$$

我们发现，这些有理数都可以写成有限小数或无限循环小数的形式，即

$$\frac{5}{2}=2.5,\ -\frac{4}{5}=-0.8,\ \frac{22}{7}=3.\dot{1}42\,85\dot{7},\ -\frac{16}{9}=-1.\dot{7},\ \frac{3}{22}=0.1\dot{3}\dot{6}.$$

在小学，我们曾经学习过分数与小数的互化，知道分数化成小数即用分子除以分母. 当分子除以分母能够除尽时，分数可以化成有限小数，例如，$\frac{5}{2}=5\div2=2.5$.

当分子除以分母除不尽时，分数为什么一定能化成无限循环小数呢？我们以 $\frac{3}{22}$ 为例加以说明，下面是 $\frac{3}{22}$ 化成小数的过程：

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & 0.13636 \\
22 & \overline{)3.0} \\
 & \underline{2\,2} \\
 & 80 \\
 & \underline{66} \\
 & 140 \\
 & \underline{132} \\
 & 80 \\
 & \underline{66} \\
 & 140 \\
 & \underline{132} \\
 & 8
\end{array}$$

由于除法中余数一定小于除数，因此在除数确定的情况下，出现的余数只有有限种可能，如除数是 22 时，出现的余数只有 0、1、2、…、21，共 22

本课内容分析

从有理数的概念出发，指出有理数化为小数即分数化为小数.

先通过具体的数，让学生直观体会有理数都可以写成有限小数或无限循环小数的形式.

“当分子除以分母除不尽时，分数一定能化为无限循环小数”是学生理解的难点，这里结合具体的例子 $\frac{3}{22}$，降低说理的难度，帮助学生理解.

种可能. 如果永远除不尽，那么相同的余数一定会重复出现，如 $3\div22$，相同的余数 8 和 14 依次重复出现. 一旦出现相同的余数，补 0 后再继续相除，商也一定会出现循环，如 $\frac{3}{22}=3\div22=0.1\dot{3}\dot{6}$，在相同的余数 8 和 14 依次重复出现后，商相应出现循环节 36. 所以当分子除以分母除不尽时，分数一定能化成无限循环小数.

可以把整数看成小数点后是 0 的小数，于是任何一个有理数都可以写成有限小数或无限循环小数的形式.

反过来，任何有限小数或无限循环小数也都是有理数. 在小学，我们已经学习了如何把有限小数化成分数，如 $0.9=\frac{9}{10}$，$2.12=2\frac{12}{100}=2\frac{3}{25}$. 那么，无限循环小数如何化成分数呢？这个问题将在高中数学学习中作更深入的研究，这里仅介绍一种将无限循环小数化成分数的方法.

*例 1 将 $0.\dot{5}$ 化成分数.

解 设 $x=0.\dot{5}$，那么 $10x=5.\dot{5}$.

因为 $5.\dot{5}=5+0.\dot{5}$，所以 $10x=5+x$.

化简，得 $9x=5$，解得 $x=\frac{5}{9}$.

所以，$0.\dot{5}=\frac{5}{9}$.

*例 2 将 $1.\dot{5}\dot{3}$ 化成分数.

解 设 $x=0.\dot{5}\dot{3}$，那么 $100x=53.\dot{5}\dot{3}$.

因为 $53.\dot{5}\dot{3}=53+0.\dot{5}\dot{3}$，所以 $100x=53+x$.

化简，得 $99x=53$，解得 $x=\frac{53}{99}$.

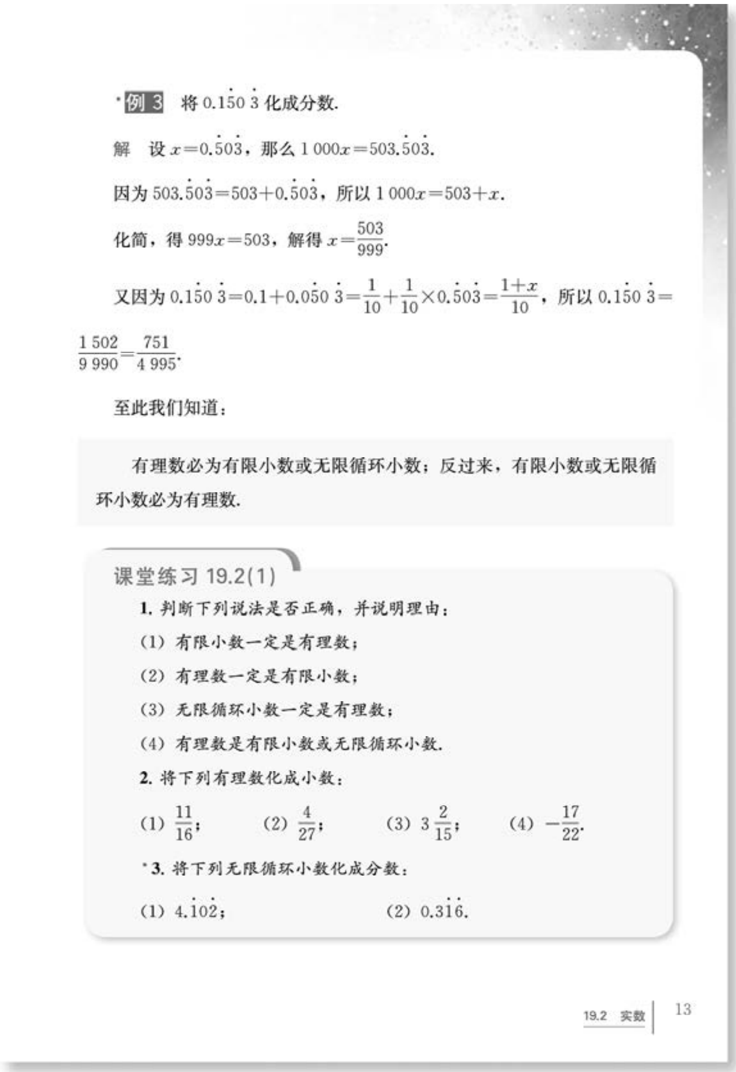
所以，$1.\dot{5}\dot{3}=1\frac{53}{99}$.

说明：带“*”的内容为选学内容.

12 第19章 实数

经过有理数化为小数的讨论后，反过来，再讨论任何有限小数或无限循环小数是否都是有理数，关键在于对无限循环小数可以化为分数的理解.

例 1、例 2 和例 3 旨在通过介绍一种将无限循环小数化成分数的方法，促进学生理解无限循环小数可以化成分数. 对于具体的转化方法，建议根据学情分层教学. 可以仅了解无限循环小数能化成分数，但不介绍转化方法；也可以通过例 1、例 2 和例 3 的学习了解如何转化，但不要求掌握转化方法；还可以鼓励学生理解如何将无限循环小数化成分数.


*例 3 将 $0.1\dot{5}0\dot{3}$ 化成分数.

解 设 $x=0.\dot{5}0\dot{3}$，那么 $1\,000x=503.\dot{5}0\dot{3}$.

因为 $503.\dot{5}0\dot{3}=503+0.\dot{5}0\dot{3}$，所以 $1\,000x=503+x$.

化简，得 $999x=503$，解得 $x=\frac{503}{999}$.

又因为 $0.1\dot{5}0\dot{3}=0.1+0.0\dot{5}0\dot{3}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\times0.\dot{5}0\dot{3}=\frac{1+x}{10}$，所以 $0.1\dot{5}0\dot{3}=\frac{1\,502}{9\,990}=\frac{751}{4\,995}$.

至此我们知道：

有理数必为有限小数或无限循环小数；反过来，有限小数或无限循环小数必为有理数.

课堂练习 19.2(1)

1. 判断下列说法是否正确，并说明理由：

（1）有限小数一定是有理数；

（2）有理数一定是有限小数；

（3）无限循环小数一定是有理数；

（4）有理数是有限小数或无限循环小数.

2. 将下列有理数化成小数：

（1）$\frac{11}{16}$；（2）$\frac{4}{27}$；（3）$3\frac{2}{15}$；（4）$-\frac{17}{22}$.

*3. 将下列无限循环小数化成分数：

（1）$4.\dot{1}0\dot{2}$；（2）$0.3\dot{1}\dot{6}$.

19.2 实数 13

例 3 关键在于通过 $0.1\dot{5}0\dot{3}=0.1+0.0\dot{5}0\dot{3}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\times0.\dot{5}0\dot{3}$，将原问题转化为 $0.\dot{5}0\dot{3}$ 化为分数的问题.

建立有理数与有限小数或无限循环小数的对应关系.

课堂练习 19.2(1)

1.（1）正确.

（2）不正确.

（3）正确.

（4）正确.

理由略.

2.（1）0.687 5.

（2）$0.\dot{1}4\dot{8}$.

（3）$3.1\dot{3}$.

（4）$-0.7\dot{7}\dot{2}$.

***3.**（1）$4\frac{34}{333}$.

（2）$\frac{313}{990}$.

说明：带“*”的内容为选学内容.

（以下分析对应课本第 14～17 页）

本课教学重点

了解无理数，能用有理数估计一个无理数的大致范围，会用计算器计算算术平方根和立方根.

本课教学建议

（1）从有理数的小数表示，到说明 $\sqrt{2}$ 的存在性，再到证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数，教学时要关注教学内容的连贯性，重视通过理性思考，引出无理数的概念.

（2）重视对“$\sqrt{2}$ 究竟有多大”的探究，引导学生经历用有理数估计一个无理数大致范围的过程，培养学生的估算能力.

（3）证明“$\sqrt{2}$ 不是有理数”需要较好的代数推理能力，对学生有一定的挑战，学生理解证明过程即可，不要求系统掌握证明一个数不是有理数的方法.

2. 无理数

如图 19-2-1，把边长为 1 的两个正方形分别沿着它们的一条对角线剪开，得到四个形状、大小都相同的等腰直角三角形，它们的面积都是$\frac{1}{2}$；再把这四个等腰直角三角形拼成一个四边形 $ABCD$，那么我们就得到一个面积为 2 的正方形.

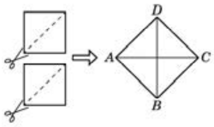


图 19-2-1

问题 1 图 19-2-1 中，正方形 $ABCD$ 的边长是多少?

设正方形 $ABCD$ 的边长为 x，则

$$x^2=2.$$

由算术平方根的意义，得 $x=\sqrt{2}$.

所以正方形 $ABCD$ 的边长是 $\sqrt{2}$.

***问题 2** 图 19-2-1 中，正方形 $ABCD$ 的边长是一条线段的长，即 $\sqrt{2}$ 表示一个数，那么 $\sqrt{2}$ 是有理数吗?

事实上，$\sqrt{2}$ 不是有理数. 可以用反证法证明如下：

假设 $\sqrt{2}$ 是一个有理数，那么存在互素的正整数 a、b，使 $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$. 两边平方，得 $2=\left(\frac{a}{b}\right)^2$，即 $a^2=2b^2$.

于是 a^2 是 2 的倍数，所以 a 也是 2 的倍数.

设 $a=2m$，其中 m 是正整数，就有 $(2m)^2=2b^2$，即 $b^2=2m^2$.

14 第19章 实数

本课内容分析

通过拼图操作发现存在面积为 2 的正方形.

问题 1 说明实际存在长度等于 $\sqrt{2}$ 的线段，让学生感受数的扩充的必要性.

* 问题 2 证明了 $\sqrt{2}$ 不是有理数，为引出无理数作铺垫. 这里的证明运用了反证法，让学生初步体会代数推理.

“a^2 是 2 的倍数，所以 a 也是 2 的倍数”可以用反证法证明如下：假设 a 不是 2 的倍数，则 a 不含素因数 2，因此 a^2 也不含素因数 2，即 a^2 不是 2 的倍数，与条件矛盾. 所以 a 是 2 的倍数.

先建立有理数与有限小数或无限循环小数的对应关系，再说明 $\sqrt{2}$ 的存在性，最后证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数，自然引出等价于无限不循环小数的无理数.

在探究“$\sqrt{2}$ 究竟有多大”时，运用了逐步逼近的思想，在教学中要鼓励学生借助计算器进行探索交流.

通过探究让学生体会 $\sqrt{2}$ 是一个确定的数，体会用有理数估计一个无理数的大致范围的方法，为后续理解任何一个无理数都可以用数轴上的一个点对应表示打下基础.

于是 b^2 是 2 的倍数，所以 b 也是 2 的倍数.

由此可见，a 与 b 不是互素的，与假设的 a 与 b 互素相矛盾. 因此 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

这样，我们就得到了 $\sqrt{2}$ 不是有理数，也就是说，$\sqrt{2}$ 既不是有限小数，也不是无限循环小数，那么 $\sqrt{2}$ 一定是无限不循环小数. 实际上，很多数的平方根和立方根都是无限不循环小数.

无限不循环小数又叫作无理数. 例如，$\sqrt{3}$、$-\sqrt{5}$、$\sqrt[3]{2}$ 等都是无理数，π 也是无理数.

探究

$\sqrt{2}$ 究竟有多大？

虽然 $\sqrt{2}$ 是无理数，但我们可以用有理数估计它的大致范围. 我们知道，边长越大的正方形的面积越大；反之，面积越大的正方形的边长也越大. 所以被开方数越大，对应的算术平方根也越大，即如果 $a>b\geqslant 0$，那么 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$. 利用这个结论，我们可以估计 $\sqrt{2}$ 的大小：

表 19－1

2 所在的范围	$\sqrt{2}$ 所在的范围
$1^2<2<2^2$	$1<\sqrt{2}<2$
$1.4^2<2<1.5^2$	$1.4<\sqrt{2}<1.5$
$1.41^2<2<1.42^2$	$1.41<\sqrt{2}<1.42$
$1.414^2<2<1.415^2$	$1.414<\sqrt{2}<1.415$
$1.414\,2^2<2<1.414\,3^2$	$1.414\,2<\sqrt{2}<1.414\,3$
$1.414\,21^2<2<1.414\,22^2$	$1.414\,21<\sqrt{2}<1.414\,22$
$1.414\,213^2<2<1.414\,214^2$	$1.414\,213<\sqrt{2}<1.414\,214$
…	…

如果表 19－1 继续下去，可以得到 $\sqrt{2}$ 的更精确的近似值．我们可以用计算器求出一个数的平方根或其近似值．

例 4 用计算器求值（近似值保留三位小数）：

(1) $\sqrt{2}$；　　(2) $\sqrt{4\,489}$；

(3) $\sqrt{\frac{3}{7}}$；　　(4) $\sqrt{0.039\,2}$．

解　(1) $\sqrt{2}\approx1.414$．

(2) $\sqrt{4\,489}=67$．

(3) $\sqrt{\frac{3}{7}}\approx0.655$．

(4) $\sqrt{0.039\,2}\approx0.198$．

用计算器求一个数的平方根时，按键顺序与计算器的型号有关，具体操作可以参考计算器的使用说明书．

同样地，我们也可以用计算器求一个数的立方根或其近似值．

例 5 用计算器求值（近似值保留四位小数）：

(1) $\sqrt[3]{24}$；　　(2) $\sqrt[3]{17\,576}$；

(3) $\sqrt[3]{-3.96}$；　　(4) $\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$．

解　(1) $\sqrt[3]{24}\approx2.884\,5$．

(2) $\sqrt[3]{17\,576}=26$．

(3) $\sqrt[3]{-3.96}\approx-1.582\,1$．

(4) $\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}\approx1.386\,7$．

课堂练习 19.2(2)

1. 无限小数一定是无理数吗？无理数一定是无限小数吗？请说明理由．

2. 下列无理数分别介于哪两个相邻的整数之间？

(1) $\sqrt{10}$；　　(2) $-\sqrt{21}$．

例 4 学习用计算器求一个正数的算术平方根，例 5 学习用计算器求一个数的立方根，如果结果是无理数，那么根据指定的精确度要求取近似值．在教学中要切实指导学生学习计算器的使用和取近似值的方法．

如果需要求一个正数的负平方根，可以利用计算器先求它的算术平方根，再取相反数．

课堂练习 19.2(2)

1. 不一定是；一定是．理由略．

2.（1）3 和 4．

（2）-5 和 -4．

3.（1）-2.236．

（2）12．

（3）±2.572．

（4）-12.467．

（以下分析对应课本第 17～19 页）

本课教学重点

了解实数，知道实数由有理数和无理数组成；了解实数与数轴上的点一一对应，能用数轴上的点表示实数.

本课教学建议

（1）重视对实数概念的理解，教学中要引导学生以具体的数为载体，通过辨析认识有理数和无理数的区别，使学生更好地理解有理数和无理数是两类不同的数.

（2）对“实数与数轴上的点一一对应”的说明，重在引导学生体会夹逼收缩的过程，不要过于追求严密的逻辑体系.

3. 用计算器求值（近似值保留三位小数）：

(1) $-\sqrt{5}$；　　(2) $\sqrt[3]{1\,728}$；

(3) $\pm\sqrt{6\frac{8}{13}}$；　　(4) $\sqrt[3]{-1\,937.7}$.

3. 实数与数轴

有理数和无理数统称为实数. 有理数为有限小数或无限循环小数，无理数为无限不循环小数. 不是有理数的实数就是无理数. 实数可以这样分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正有理数}\\0\\\text{负有理数}\end{array}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\\text{无理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{array}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

实数也可以分为正实数、0、负实数.

例 6　下列各数中，哪些是有理数？哪些是无理数？

0、-2、$\sqrt{2}$、4、3.141 6、$-0.\dot{2}\dot{3}$、$\frac{22}{7}$、π、$-0.373\,773\,777\,3\cdots$（位数无限且相邻两个“3”之间依次增加 1 个“7”）.

解　有理数有：0、-2、4、3.141 6、$-0.\dot{2}\dot{3}$、$\frac{22}{7}$.

无理数有：$\sqrt{2}$、π、$-0.373\,773\,777\,3\cdots$（位数无限且相邻两个“3”之间依次增加 1 个“7”）.

我们知道，每一个有理数都可以对应数轴上的一个点，那么一个无理数可以对应数轴上的一个点吗？

本课内容分析

在有理数和无理数的基础上，明确实数的概念.

类比有理数的分类，引导学生从“是不是有理数”和“数的符号”两种不同的标准，对实数分类.

例 6 帮助学生理解有理数、无理数的概念，注意培养学生辨别概念的思维习惯.

学生已经知道，有理数可以用数轴上的点对应表示，也经历了用有理数估计 $\sqrt{2}$ 的大致范围的过程，这里将逐步逼近的思想用数轴上的线段逐渐收缩为一点来呈现，体现了数与形的结合.

反过来，数轴上任意给定的一点可对应一个有理数或一个无理数. 根据学生的认知情况，可以说明如下：数轴上任意给定的一点，或者对应一个有理数，或者存在以有理数为端点，且长度越来越小(接近于0)的一组线段，将此点包括在内，从而此点必对应一个无理数.

例 7 利用无理数的近似值(有理数)，在数轴上将一个无理数用其大致位置的点表示出来，既体现了估算能力，也利于利用数形结合研究问题.

问题 3 $\sqrt{2}$能用数轴上的一个点对应表示吗?

利用计算机技术，可以求出$\sqrt{2}=1.414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,688\,724\,209\,698\,078\,569\,671\,875\,376\,948\,073\,176\,679\cdots$，其值在有理数 1～2 之间，进一步在 1.4～1.5 之间，1.41～1.42 之间，……(如表 19 - 1 所示).

如图 19-2-2，在数轴上，以上面各对有理数所对应的点为端点的线段的长度依次为 1、0.1、0.01、…，这些线段的长度越来越小，最终收缩为一点，这个点就是数轴上与$\sqrt{2}$ 对应的唯一的一个点.

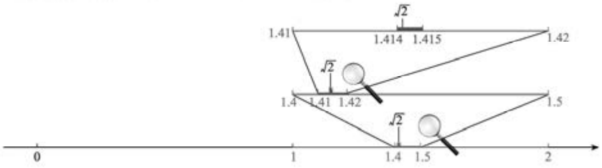


图 19-2-2

类似地，任何一个无理数都可以用数轴上的一个点对应表示. 这样，除任意一个有理数在数轴上有唯一的对应点外，任意一个无理数在数轴上也有唯一的对应点，从而任意一个实数在数轴上有唯一的对应点. 反之，数轴上任意给定的一点可对应一个有理数或一个无理数. 所以，实数与数轴上的点一一对应.

例 7 在数轴上分别标出$-\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$所对应的点的大致位置.

解 用计算器可得$-\sqrt{3}\approx-1.732$，$\sqrt{5}\approx2.236$，它们在数轴上所对应的点的大致位置如图 19-2-3 所示.

一个无理数在数轴上所对应的点，可以利用这个无理数的近似值(有理数)所对应的点来大致确定.

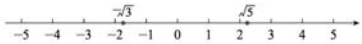


图 19-2-3

18 第19章 实数

课堂练习 19.2(3)

1. 判断下列说法是否正确，并说明理由：

（1）正实数包括正有理数和正无理数；

（2）实数可以分为正实数和负实数两类；

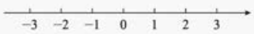
（3）所有有理数都可以对应数轴上的点；

（4）数轴上的所有点都对应有理数.

2. 下列各数中，哪些是有理数？哪些是无理数？

$-\pi$、3.14、$-\sqrt{2}$、$\frac{63}{20}$、$\frac{355}{113}$、$\frac{1}{3}$、$0.\dot{9}$、$0.0\dot{3}$、0.313 113 111 3…(位数无限且相邻两个“3”之间依次增加 1 个“1”).

3. 在如图所示的数轴上分别标出$-\sqrt{2}$、$\sqrt[3]{5}$所对应的点的大致位置.



（第 3 题）

4. 实数的绝对值和大小比较

借助数轴，可以将有理数的绝对值、大小比较推广到实数. 有理数关于相反数和绝对值的意义同样适合于实数.

一个实数在数轴上所对应的点到原点的距离，叫作这个实数的绝对值. 实数 a 的绝对值记作$|a|$.

绝对值相等、符号相反的两个实数互为相反数；0 的相反数是 0. 非零实数 a 的相反数是$-a$.

一个正实数的绝对值是它本身，0 的绝对值是 0，一个负实数的绝对值是它的相反数. 设 a 表示一个实数，则

$$|a|=\begin{cases}a, & 当 a>0 时；\\ 0, & 当 a=0 时；\\ -a, & 当 a<0 时.\end{cases}$$

19.2 实数 19

课堂练习 19.2(3)

1.（1）正确.

（2）不正确.

（3）正确.

（4）不正确.

理由略.

2. 有理数：3.14、$\frac{63}{20}$、$\frac{355}{113}$、$\frac{1}{3}$、$0.\dot{9}$、$0.0\dot{3}$.

无理数：$-\pi$、$-\sqrt{2}$、0.313 113 111 3…(位数无限且相邻两个“3”之间依次增加 1 个“1”).

3. 略.

（以下分析对应课本第 19～22 页）

本课教学重点

能借助数轴理解绝对值和相反数的意义，会求实数的绝对值和相反数，能比较实数的大小.

本课教学建议

（1）类比有理数，理解实数的绝对值和相反数的意义，比较实数的大小.

（2）引导学生借助数轴理解绝对值和相反数，重视数轴上两点间的距离公式的探究过程，体会数形结合思想的作用.

例 8 (1) 分别写出 $\sqrt{10}$、$\sqrt[3]{-27}$ 的绝对值；

(2) 分别写出 $-\sqrt{2}$、$\pi-3.14$ 的相反数；

(3) 已知一个数的绝对值是 $\sqrt{15}$，求这个数.

解 (1) 因为 $\sqrt{10}>0$，$\sqrt[3]{-27}=-3<0$，所以 $|\sqrt{10}|=\sqrt{10}$，$|\sqrt[3]{-27}|=3$.

(2) 因为 $-(-\sqrt{2})=\sqrt{2}$，$-(\pi-3.14)=3.14-\pi$，所以 $-\sqrt{2}$、$\pi-3.14$ 的相反数分别是 $\sqrt{2}$、$3.14-\pi$.

(3) 因为 $|\sqrt{15}|=\sqrt{15}$，$|-\sqrt{15}|=\sqrt{15}$，所以绝对值是 $\sqrt{15}$ 的数是 $\sqrt{15}$ 或 $-\sqrt{15}$.

两个实数也可以比较大小，其大小顺序的规定同有理数一样.

从数轴上看，右边的点对应的实数总比左边的点对应的实数大.

负实数小于 0；0 小于正实数；负实数小于正实数.

两个正实数，绝对值大的数较大；两个负实数，绝对值大的数较小.

例 9 不用计算器，比较下列各组数的大小：

(1) $\sqrt{5}$ 与 $-\sqrt{6}$；

(2) $\sqrt{5}$ 与 $\sqrt{6}$；

(3) $-\sqrt{5}$ 与 $-\sqrt{6}$.

解 (1) 因为负数小于正数，所以 $-\sqrt{6}<\sqrt{5}$.

(2) 因为 $5<6$，所以 $\sqrt{5}<\sqrt{6}$.

(3) 因为 $|-\sqrt{5}|=\sqrt{5}$，$|-\sqrt{6}|=\sqrt{6}$，又 $\sqrt{5}<\sqrt{6}$，所以 $-\sqrt{5}>-\sqrt{6}$.

例 10 如图 19-2-4，已知数轴上的三点 A、B、C 所对应的实数依次是 $\sqrt{2}$、$-\frac{2}{3}$、$2\frac{1}{2}$，O 为原点.

(1) 求线段 OA、OB、OC 的长；

(2) 求线段 BC、AC 的长.

20 第19章 实数

本课内容分析

在探究“$\sqrt{2}$ 究竟有多大”时，根据“面积越大的正方形的边长越大”，我们知道“如果 $a>b\geqslant 0$，那么 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$”，可以直接利用这个结论比较实数的大小.

例 10 先从绝对值的几何意义出发，理解数轴上的点到原点的距离就是这个点所表示的数的绝对值，再探索数轴上两点间的距离.

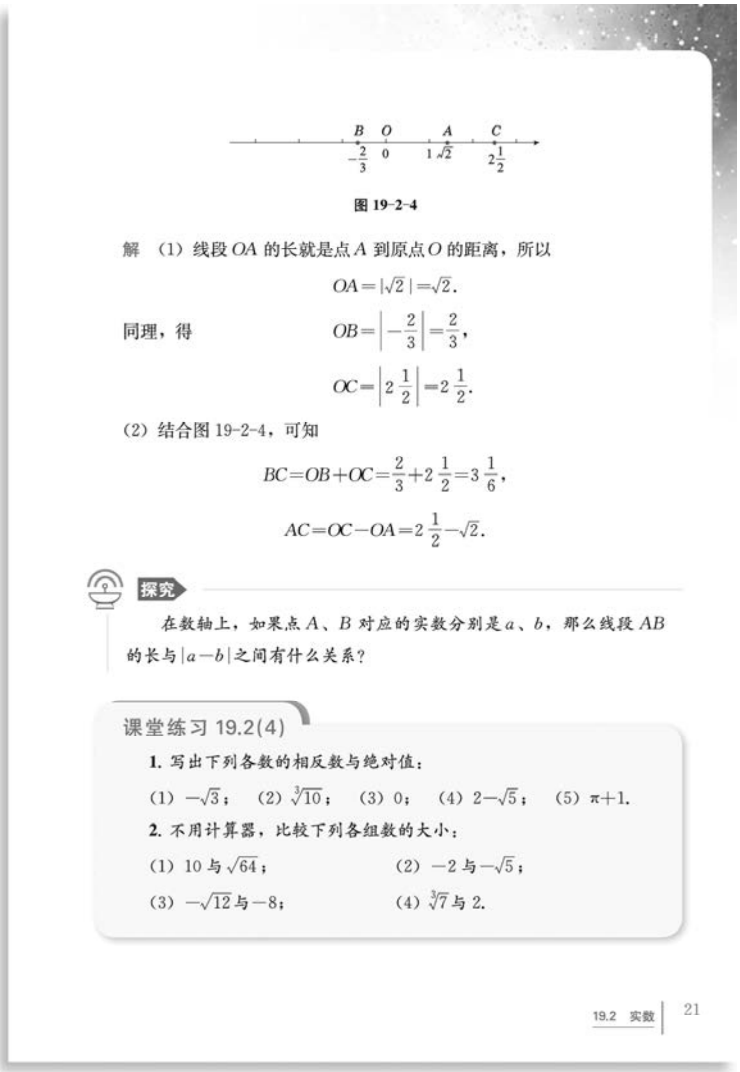


图 19-2-4

解 (1) 线段 OA 的长就是点 A 到原点 O 的距离，所以

$$OA=|\sqrt{2}|=\sqrt{2}.$$

同理，得

$$OB=\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3},$$

$$OC=\left|2\frac{1}{2}\right|=2\frac{1}{2}.$$

(2) 结合图 19-2-4，可知

$$BC=OB+OC=\frac{2}{3}+2\frac{1}{2}=3\frac{1}{6},$$

$$AC=OC-OA=2\frac{1}{2}-\sqrt{2}.$$

探究

在数轴上，如果点 A、B 对应的实数分别是 a、b，那么线段 AB 的长与 $|a-b|$ 之间有什么关系？

课堂练习 19.2(4)

1. 写出下列各数的相反数与绝对值：

(1) $-\sqrt{3}$；　(2) $\sqrt[3]{10}$；　(3) 0；　(4) $2-\sqrt{5}$；　(5) $\pi+1$.

2. 不用计算器，比较下列各组数的大小：

(1) 10 与 $\sqrt{64}$；　(2) -2 与 $-\sqrt{5}$；

(3) $-\sqrt{12}$ 与 -8；　(4) $\sqrt[3]{7}$ 与 2.

19.2 实数　21

探究　通过探究引发学生思考数轴上两点间的距离与这两点所对应的实数之间的关系，归纳数轴上两点间的距离公式，为平面直角坐标系中两点间距离公式的学习打下基础.

课堂练习 19.2(4)

1. (1) $\sqrt{3}$；$\sqrt{3}$.

(2) $-\sqrt[3]{10}$；$\sqrt[3]{10}$.

(3) 0；0.

(4) $\sqrt{5}-2$；$\sqrt{5}-2$.

(5) $-\pi-1$；$\pi+1$.

2. (1) $10>\sqrt{64}$.

(2) $-2>-\sqrt{5}$.

(3) $-\sqrt{12}>-8$.

(4) $\sqrt[3]{7}<2$.

3. (1) 略.

(2) $AB=2\frac{2}{15}$，$CD=3.55$，$AC=1.95$.

（以下分析对应课本第 22～25 页）

本课教学重点

会进行实数的运算，会按问题的要求进行简单的近似计算.

本课教学建议

（1）类比有理数，理解实数的运算法则、运算律和运算顺序.

（2）在实数运算的教学中，重视运算的过程，关注学生对运算法则的掌握，对运算律的运用，对运算顺序的理解，促进学生实数运算能力的形成.

3. 已知数轴上的四点 A、B、C、D 所对应的实数依次是 -1.2、$-3\frac{1}{3}$、$\frac{3}{4}$、4.3.

（1）在如图所示的数轴上标出点 A、B、C、D；

（第 3 题）

（2）求线段 AB、CD、AC 的长.

本课内容分析

类比有理数的运算，理解实数的加、减、乘、除、乘方运算.

实数还可以进行开平（立）方运算.

5. 实数的运算

实数的加、减、乘、除、乘方运算的意义，和有理数运算的意义一样. 我们学过的有理数的运算法则、运算律以及运算顺序的规定，在实数范围内同样适用.

若 a、b、c 为实数，则有

加法交换律：$a+b=b+a$.

加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$.

乘法交换律：$ab=ba$.

乘法结合律：$(ab)c=a(bc)$.

乘法对加法的分配律：$a(b+c)=ab+ac$.

实数之间不仅可以进行加、减、乘、除、乘方运算，而且正数和 0 可以进行开平方运算，任意一个实数可以进行开立方运算. 实数混合运算的顺序为：先乘方和开平（立）方，再乘除，最后加减.

对于涉及无理数的实数运算，如果没有指明运算结果保留几位小数，那么通常是利用实数的运算法则和运算律对算式进行化简，其结果可能是一个化简了的算式，如 $2+\sqrt{3}$、$2\sqrt{3}$.

$2\sqrt{3}=2\times\sqrt{3}$.

22 第19章 实数

例 11 计算：

(1) $2\sqrt{7}+3\sqrt{7}-\sqrt{7}$；

(2) $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\div\frac{1}{\sqrt{2}}$；

(3) $\sqrt{(-3)^2+(\sqrt{7})^2}$；

(4) $(-2\sqrt{3}+2+3\sqrt{3})\times\sqrt{3}$.

解 (1) $2\sqrt{7}+3\sqrt{7}-\sqrt{7}$

$=(2+3-1)\times\sqrt{7}$ （乘法对加法的分配律）

$=4\sqrt{7}$.

(2) $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\div\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}$

$=(\sqrt{2})^2\times\sqrt{3}$ （乘法交换律）

$=2\sqrt{3}$.

(3) $\sqrt{(-3)^2+(\sqrt{7})^2}$

$=\sqrt{9+7}$

$=\sqrt{16}$

$=4$.

(4) $(-2\sqrt{3}+2+3\sqrt{3})\times\sqrt{3}$

$=(-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}+2)\times\sqrt{3}$ （加法交换律）

$=(\sqrt{3}+2)\times\sqrt{3}$

$=(\sqrt{3})^2+2\times\sqrt{3}$ （乘法对加法的分配律）

$=3+2\sqrt{3}$.

19.2 实数 23

例 11 运用运算法则、运算律等进行实数的运算，不涉及二次根式化简的问题.

教学中应指导学生明确每个步骤的依据，关注对算理的理解，促进学生实数运算能力的形成.

解题过程中出现在括号内的标注，重在揭示运算律，不列为解题规范要求.

结合具体的例子，了解近似数. 教学中可以再举一些例子，帮助学生认识近似数.

一星期有 7 天，1 cm=0.01 m，2 的算术平方根是 $\sqrt{2}$，圆周率是 π，这里的 7、0.01、$\sqrt{2}$、π 都是精确的数. 但是，一年约有 365.24 天，某个轮子的直径约是 0.66 m，$\sqrt{2}$ 约为 1.414，圆周率约为 3.14，这里的 365.24、0.66、1.414、3.14 都不精确，是近似数.

对于涉及无理数的实数运算，很多时候需要对结果取近似值. 这时，可以先对算式进行适当化简，然后一般用“四舍五入法”，按照所要求的精确度取近似值.

例 12 是实数的近似计算，需指明精确度的要求.

例 12 计算(结果保留两位小数)：

(1) $(\pi+2\sqrt{2})-\sqrt{2}$；

(2) $[(\sqrt{5})^2-1]\times\sqrt{3}$.

解 (1) $(\pi+2\sqrt{2})-\sqrt{2}$

$=\pi+(2\sqrt{2}-\sqrt{2})$ (加法结合律)

$=\pi+\sqrt{2}$

≈ 4.56.

(2) $[(\sqrt{5})^2-1]\times\sqrt{3}$

$=(5-1)\times\sqrt{3}$

$=4\sqrt{3}$

≈ 6.93.

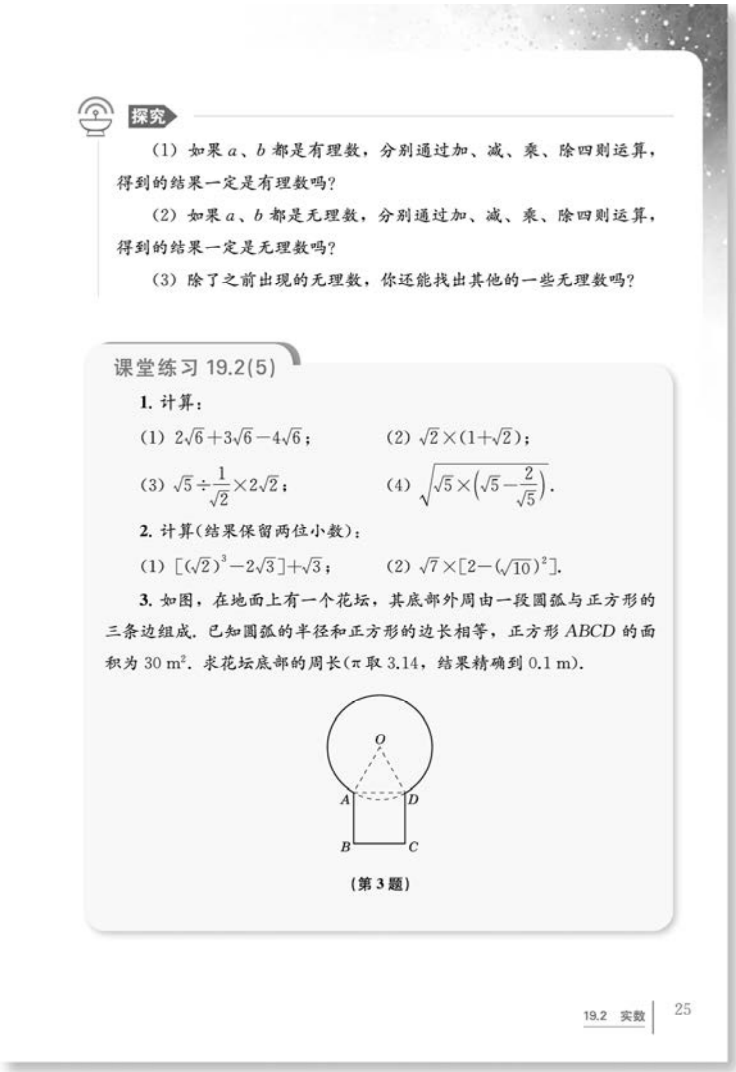
在实际应用中学习实数的运算，注意关注学生对计算结果的理解，引导学生重视数学与生活的联系.

例 13 伞兵脱离飞机打开降落伞前下降的高度 h(单位：m)与下降的时间 t(单位：s)近似地满足 $h=4.9t^2$(不计空气阻力). 某伞兵在打开降落伞前下降了 920 m，问：大约经过了多少时间(结果精确到 1 s)?

解 由 $h=4.9t^2$，$h=920$，得 $t^2=\dfrac{920}{4.9}$.

因为 $t>0$，所以 $t=\sqrt{\dfrac{920}{4.9}}\approx 14$(s).

答：大约经过了 14 s.



探究

(1) 如果 a、b 都是有理数，分别通过加、减、乘、除四则运算，得到的结果一定是有理数吗？

(2) 如果 a、b 都是无理数，分别通过加、减、乘、除四则运算，得到的结果一定是无理数吗？

(3) 除了之前出现的无理数，你还能找出其他的一些无理数吗？

课堂练习 19.2(5)

1. 计算：

(1) $2\sqrt{6}+3\sqrt{6}-4\sqrt{6}$；　(2) $\sqrt{2}\times(1+\sqrt{2})$；

(3) $\sqrt{5}\div\frac{1}{\sqrt{2}}\times2\sqrt{2}$；　(4) $\sqrt{\sqrt{5}\times\left(\sqrt{5}-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$.

2. 计算(结果保留两位小数)：

(1) $[(\sqrt{2})^3-2\sqrt{3}]+\sqrt{3}$；　(2) $\sqrt{7}\times[2-(\sqrt{10})^2]$.

3. 如图，在地面上有一个花坛，其底部外周由一段圆弧与正方形的三条边组成. 已知圆弧的半径和正方形的边长相等，正方形 $ABCD$ 的面积为 30 m^2. 求花坛底部的周长(π 取 3.14，结果精确到 0.1 m).

(第 3 题)

19.2 实数　25

通过探究引导学生认识有理数经过四则运算仍是有理数(封闭性)，无理数经过四则运算不一定是无理数.

探究时注意结合具体的例子，帮助学生理解无理数和有理数运算的区别.

在学习了实数的运算后，通过探究，鼓励学生构造无理数，理解无理数有无限多个，避免将无理数等价于开不尽方的数，从而更全面地认识无理数的概念.

课堂练习 19.2(5)

1. (1) $\sqrt{6}$.

(2) $\sqrt{2}+2$.

(3) $4\sqrt{5}$.

(4) $\sqrt{3}$.

2. (1) 原式 $=2\sqrt{2}-\sqrt{3}\approx1.10$.

(2) 原式 $=-8\sqrt{7}\approx-21.17$.

3. 45.1 m.　提示：圆的半径和正方形的边长均为 $\sqrt{30}$ m，花坛底部的周长为 $\frac{300}{180}\times\pi\times\sqrt{30}+3\sqrt{30}$ (m).

（以下分析对应课本第 26～27 页）

本课教学重点

理解科学记数法的意义，会用科学记数法表示有理数.

本课教学建议

（1）重视科学记数法在实际问题中的应用，促进学生理解科学记数法的意义.

（2）通过具体的实例，帮助学生理解用科学记数法表示一个有理数时，绝对值较大的数的整数位数与 10 的整数次幂的指数 n 的数量关系，绝对值较小的数的小数点与左起第一个非零数字之间 0 的个数与 10 的整数次幂的指数 n 的数量关系.

6. 科学记数法

在科学研究和日常生活中，人们往往会遇到绝对值较大或较小的数，如光在真空中的传播速度约为 300 000 000 m/s，1 nm 等于 0.000 000 001 m. 这些数直接写起来很不方便，可以用 10 的整数次幂的形式来表示，如 $300\ 000\ 000=3\times10^{8}$，$0.000\ 000\ 001=1\times10^{-9}$.

把一个数表示成 $a\times10^{n}$（$1\leqslant|a|<10$，a 是整数或小数，n 是整数）的形式，这种记数方法叫作科学记数法. 当 $a=1$ 或 $a=-1$ 时，“1”常省略不写，如 $0.000\ 000\ 001=10^{-9}$，$-1\ 000\ 000=-10^{6}$.

用科学记数法表示绝对值较大或较小的数给表达和计算带来了方便. 对于绝对值较大的数，可以直观地表示这个数的整数的位数，如 3.2×10^{5} 有六个整数位. 对于绝对值较小的数，可以直观地表示这个数的小数点与左起第一个非零数字之间 0 的个数，如 1.23×10^{-4} 的小数点与左起第一个非零数字 1 之间有三个 0.

例 14 用科学记数法表示下列各数：

（1）9 600 000；（2）−1 300 000 000；

（3）0.000 031 42；（4）−0.000 000 037.

解 （1）$9\ 600\ 000=9.6\times10^{6}$.

（2）$-1\ 300\ 000\ 000=-1.3\times10^{9}$.

（3）$0.000\ 031\ 42=3.142\times10^{-5}$.

（4）$-0.000\ 000\ 037=-3.7\times10^{-8}$.

例 15 用科学记数法表示下列各数：

（1）地球的表面积约为 510 000 000 km^2；

（2）月球的质量约为 7 350 000 000 000 000 万吨；

（3）在全球范围内，我国北斗卫星导航系统的授时精度优于 0.000 000 02 s.

解 （1）$510\ 000\ 000=5.1\times10^{8}$.

（2）$7\ 350\ 000\ 000\ 000\ 000=7.35\times10^{15}$.

（3）$0.000\ 000\ 02=2\times10^{-8}$.

26 第19章 实数

本课内容分析

本课时内容是用科学记数法表示有理数. 六年级学习有理数时，学生没有负整数指数幂的知识基础，若将本课时内容安排在六年级，则只能学习用科学记数法表示绝对值较大的数. 安排在本章学习，知识间的联系更加紧密.

在实际问题中，当一个数的绝对值较大或者较小时，读写都很不方便，利用科学记数法来表示，便于读写，体现了科学记数法的作用.

例 14 要求正确利用科学记数法表示一个有理数，有助于理解其简洁性，应注意例 14(2)和例 14(4)中的符号问题.

通过例 15、例 16 和例 17，体会实际生活中以及科学研究中科学记数法的应用. 教学中还可适当举一些生活中的其他例子.

例 16 根据 2021 年 5 月 11 日发布的《第七次全国人口普查公报(第二号)》，2020 年 11 月 1 日零时，全国总人口约为 1.44×10^9 人. 如果平均每人每天食用粮食 0.5 kg，那么上述人口普查公报中的所有人一天食用多少吨粮食？如果一年按 365 天计算，一年食用多少吨粮食？(结果用科学记数法表示)

解 $0.5\times1.44\times10^9=7.2\times10^8(\text{kg})=7.2\times10^5(\text{t})$，

$7.2\times10^5\times365=2.628\times10^8(\text{t})$.

答：上述人口普查公报中的所有人一天食用 7.2×10^5 t 粮食，一年食用 2.628×10^8 t 粮食.

例 17 已知 1 m^3 的铁的质量是 7.9×10^3 kg. 现在有一个铁制的零件，它的体积是 3 mm^3，那么它的质量是多少千克(结果用科学记数法表示)？

解 $1\ \text{mm}=10^{-3}\ \text{m}$，$1\ \text{mm}^3=10^{-9}\ \text{m}^3$.

$7.9\times10^3\times3\times10^{-9}=2.37\times10^{-5}(\text{kg})$.

答：这个零件的质量是 2.37×10^{-5} kg.

课堂练习 19.2(6)

1. 用科学记数法表示下列各数：

(1) 261 500； (2) −10 200 000；

(3) 0.000 76； (4) −0.000 010 32.

2. (1) 2.023×10^8有______个整数位；

(2) -6.91×10^7有______个整数位；

(3) 1.98×10^{-5}的小数点与左起第一个非零数字之间有______个 0；

(4) -4.372×10^{-6}的小数点与左起第一个非零数字之间有______个 0.

3. 一天有 8.64×10^4 s，如果一年按 365 天计算，一年有多少秒(结果用科学记数法表示)？

19.2 实数 | 27

课堂练习 19.2(6)

1. (1) 2.615×10^5.

(2) -1.02×10^7.

(3) 7.6×10^{-4}.

(4) -1.032×10^{-5}.

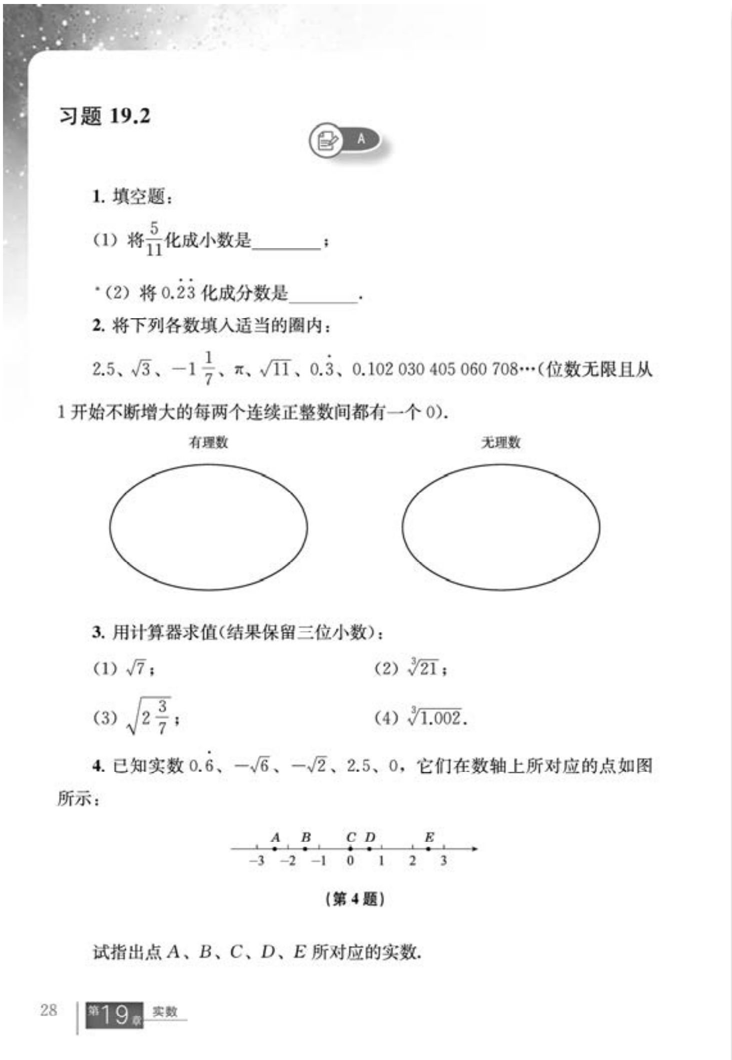
2. (1) 九.

(2) 八.

(3) 四.

(4) 五.

3. 一年有 $3.153\,6\times10^7$ s.



习题 19.2

A

1. 填空题：

(1) 将$\frac{5}{11}$化成小数是________；

*(2) 将$0.\dot{2}\dot{3}$化成分数是________.

2. 将下列各数填入适当的圈内：

2.5、$\sqrt{3}$、$-1\frac{1}{7}$、π、$\sqrt{11}$、$0.\dot{3}$、0.102 030 405 060 708…(位数无限且从1开始不断增大的每两个连续正整数间都有一个0).

3. 用计算器求值(结果保留三位小数)：

(1) $\sqrt{7}$；　(2) $\sqrt[3]{21}$；

(3) $\sqrt{2\frac{3}{7}}$；　(4) $\sqrt[3]{1.002}$.

4. 已知实数 $0.\dot{6}$、$-\sqrt{6}$、$-\sqrt{2}$、2.5、0，它们在数轴上所对应的点如图所示：

(第 4 题)

试指出点 A、B、C、D、E 所对应的实数.

28 第19章 实数

习题 19.2

1. (1) $0.\dot{4}\dot{5}$.

*(2) $\frac{23}{99}$.

2. 有理数：2.5、$-1\frac{1}{7}$、$0.\dot{3}$.

无理数：$\sqrt{3}$、π、$\sqrt{11}$、0.102 030 405 060 708…(位数无限且从1开始不断增大的每两个连续正整数间都有一个0).

3. (1) 2.646.

(2) 2.759.

(3) 1.558.

(4) 1.001.

4. 点 A、B、C、D、E 所对应的实数分别为 $-\sqrt{6}$、$-\sqrt{2}$、0、$0.\dot{6}$、2.5.

5. (1) $2-\sqrt{3}$.

(2) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$.

(3) 5.

(4) $\sqrt{7}$.

6. (1) $\sqrt{10}<\sqrt{12}$.

(2) $-\sqrt{10}<-3$.

(3) $-2\sqrt{2}>-2\sqrt{3}$.

(4) $\dfrac{\sqrt{8}}{2}<\dfrac{3}{2}$.

7. (1) 略.

(2) $AB=5\dfrac{1}{15}$，$BC=\dfrac{11}{12}$，$AD=\sqrt{10}-1.4$.

8. (1) $-\sqrt{2}$.

(2) $3\sqrt{3}$.

(3) $\dfrac{1}{2}$.

(4) -13.9.

9. 66.8 km.

10. (1) 1.702×10^{7}.

(2) -2.3×10^{6}.

(3) 4.56×10^{-4}.

(4) -6.07×10^{-3}.

5. 化简：

(1) $|2-\sqrt{3}|$；　(2) $|\sqrt{5}-\sqrt{7}|$；

(3) $|3-\sqrt{3}|+|2+\sqrt{3}|$；　(4) $|\sqrt{7}-2|+2$.

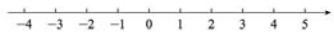
6. 不用计算器，比较下列各组数的大小：

(1) $\sqrt{10}$与$\sqrt{12}$；　(2) $-\sqrt{10}$与-3；

(3) $-2\sqrt{2}$与$-2\sqrt{3}$；　(4) $\dfrac{\sqrt{8}}{2}$与$\dfrac{3}{2}$.

7. 已知数轴上的点 A、B、C、D 所对应的实数依次是-1.4、$3\dfrac{2}{3}$、2.75、$-\sqrt{10}$.

(1) 在如图所示的数轴上标出点 A、B、C 的位置和点 D 的大致位置；



(第 7 题)

(2) 求线段 AB、BC、AD 的长.

8. 计算：

(1) $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-7\sqrt{2}-2\sqrt{2}$；

(2) $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}-\dfrac{5}{4}\sqrt{3}+\dfrac{1}{4}\sqrt{3}+\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$；

(3) $\sqrt{10}\times\sqrt{3}\div2\sqrt{10}\div\sqrt{3}$；

(4) $\sqrt[3]{-1\,000}-\sqrt{100}+\sqrt[3]{0.001}+\sqrt{36}$.

9. 人站在距地面 h km 的高处，能看到的最远距离 d 近似满足 $d=\sqrt{2Rh}$，其中 R 是地球的半径. 上海“东方明珠”太空舱距地面的高度约为 350 m，如果没有障碍物的影响，站在太空舱的人可以看到多远(R 取 6 371 km，结果精确到 0.1 km)?

10. 用科学记数法表示下列各数：

(1) 17 020 000；　(2) $-2\,300\,000$；

19.2 实数　29

(3) 0.000 456；　　　　　　　　(4) $-0.006\ 07$.

B

11. 判断下列说法是否正确，并说明理由：

(1) 无理数与无理数的和一定是无理数；

(2) 无理数与无理数的积一定是无理数；

(3) 有理数与无理数的和一定是无理数；

(4) 有理数与无理数的积一定是无理数.

* **12.** 试说明 $\sqrt{3}$ 是无理数的理由.

13. 我们知道，正方形的面积越大，其边长也越大，即如果两个正方形的面积分别为 a 和 b，且 $a<b$，那么 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$.

因为 $1^2<3<2^2$，所以 $1<\sqrt{3}<2$，可知 $\sqrt{3}$ 的整数部分是 1. 取 1 和 2 的中间值 $\frac{1+2}{2}=1.5$，由 $1.5^2=2.25<3$，得 $1.5<\sqrt{3}<2$；取 1.5 和 2 的中间值 $\frac{1.5+2}{2}=1.75$，由 $1.75^2=3.062\ 5>3$，得 $1.5<\sqrt{3}<1.75$；……

请继续上面的方法和步骤，确定 $\sqrt{3}$ 的十分位上的数字.

30　第19章　实数

11. (1) 不正确，如 $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$.

(2) 不正确，如 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$.

(3) 正确. 假设有理数 a 与无理数 b 的和是有理数 c，那么 $b=c-a$. 因为 a 与 c 都是有理数，所以 $c-a$ 也是有理数，即 b 是有理数，这与 b 是无理数矛盾. 因此有理数与无理数的和一定是无理数.

(4) 不正确，如 $0\times\sqrt{2}=0$.

* **12.** 假设 $\sqrt{3}$ 是一个有理数，那么存在互素的正整数 a、b，使 $\sqrt{3}=\frac{a}{b}$. 两边平方，得 $3=\left(\frac{a}{b}\right)^2$，即 $a^2=3b^2$. 于是 a^2 是 3 的倍数，可证 a 也是 3 的倍数. 假设 a 不是 3 的倍数，则 a 不含素因数 3，因此 a^2 也不含素因数 3，即 a^2 不是 3 的倍数，与条件矛盾. 所以 a 是 3 的倍数. 设 $a=3m$，其中 m 是正整数，那么 $(3m)^2=3b^2$，即 $b^2=3m^2$. 于是 b^2 是 3 的倍数，所以 b 也是 3 的倍数. 由此可见 a 与 b 不是互素的，这与假设的 a 与 b 互素相矛盾. 因此 $\sqrt{3}$ 不是有理数.

13. 取 1.5 和 1.75 的中间值 $\frac{1.5+1.75}{2}=1.625$，由 $1.625^2=2.640\ 625<3$，得 $1.625<\sqrt{3}<1.75$；取 1.625 和 1.75 的中间值 $\frac{1.625+1.75}{2}=1.687\ 5$，由 $1.687\ 5^2=2.847\ 656\ 25<3$，得 $1.687\ 5<\sqrt{3}<1.75$；取 1.687 5 和 1.75 的中间值 $\frac{1.687\ 5+1.75}{2}=1.718\ 75$，由 $1.718\ 75^2=2.954\ 101\ 562\ 5<3$，得 $1.718\ 75<\sqrt{3}<1.75$. 所以，$\sqrt{3}$ 的十分位上的数字是 7.

复习题

1.（1）$\pm\dfrac{5}{9}$.

（2）$-\dfrac{4}{5}$.

（3）-15.

（4）$0.58\dot{3}$.

*（5）$\dfrac{67}{495}$.

（6）$<$.

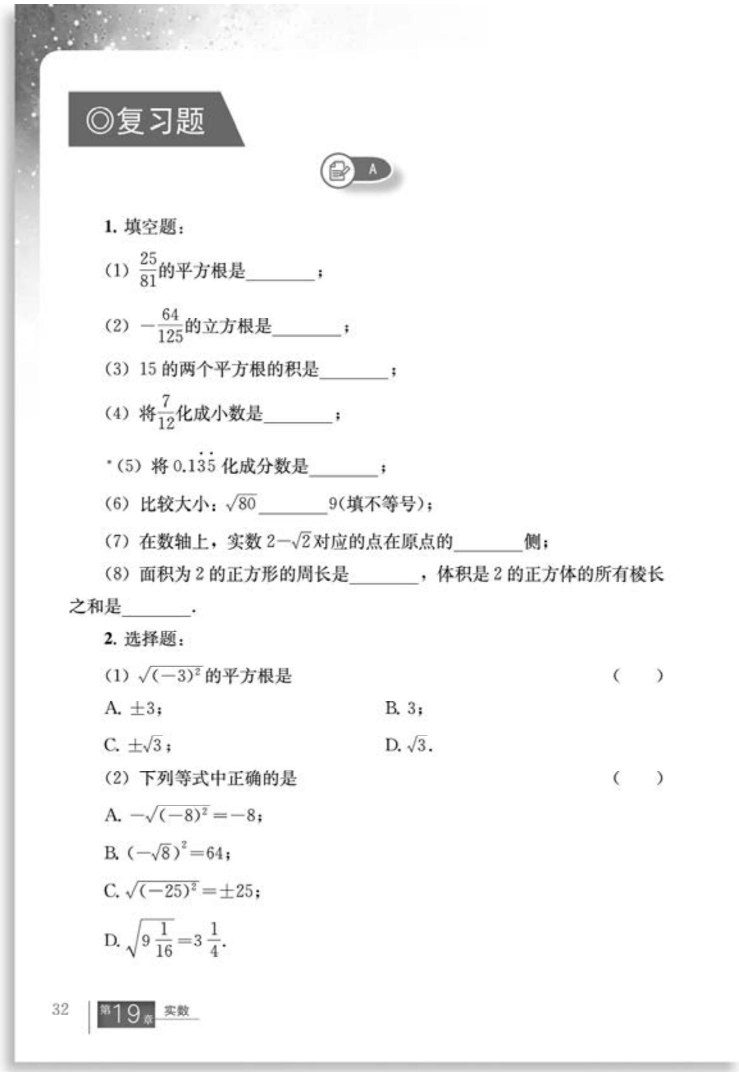
（7）右.

（8）$4\sqrt{2}$；$12\sqrt[3]{2}$.

2.（1）C.

（2）A.

（3）D.



◎复习题

A

1. 填空题：

(1) $\dfrac{25}{81}$的平方根是________；

(2) $-\dfrac{64}{125}$的立方根是________；

(3) 15 的两个平方根的积是________；

(4) 将$\dfrac{7}{12}$化成小数是________；

*(5) 将 $0.\dot{1}3\dot{5}$ 化成分数是________；

(6) 比较大小：$\sqrt{80}$________9(填不等号)；

(7) 在数轴上，实数 $2-\sqrt{2}$ 对应的点在原点的________侧；

(8) 面积为 2 的正方形的周长是________，体积是 2 的正方体的所有棱长之和是________.

2. 选择题：

(1) $\sqrt{(-3)^2}$ 的平方根是　　（　　）

A. ±3；　　B. 3；

C. $\pm\sqrt{3}$；　　D. $\sqrt{3}$.

(2) 下列等式中正确的是　　（　　）

A. $-\sqrt{(-8)^2}=-8$；

B. $(-\sqrt{8})^2=64$；

C. $\sqrt{(-25)^2}=\pm25$；

D. $\sqrt{9\dfrac{1}{16}}=3\dfrac{1}{4}$.

32　第19章　实数

(3) 下列说法中正确的是（　　）

A. 数轴上的每一个点都有一个有理数与它对应；

B. 不带根号的数一定是有理数；

C. 负数没有立方根；

D. $-\sqrt{17}$是 17 的一个平方根.

3. 用计算器求下列各数的值(结果保留三位小数)，并分别写出它们的相反数及绝对值.

(1) $\sqrt{11}$；　　(2) $\sqrt[3]{-4}$；　　(3) $-\sqrt{3}$；　　(4) $\sqrt[3]{3}$.

4. 计算：

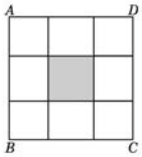
(1) $\sqrt{15}-\frac{3}{2}\sqrt{15}+\frac{1}{4}\sqrt{15}$；　　(2) $(3-\sqrt{3})\div\sqrt{3}$.

5. 根据实验数据，钢轨温度每变化 1 ℃，每一米钢轨就伸缩约 0.000 012 m. 如果一年中气温相差 40 ℃，那么 100 m 长的铁路最多可伸缩多少(结果用科学记数法表示)？

6. 用 480 m 长的篱笆在空地上围一个绿化场地，有两种设计方案：一种是围成正方形；另一种是围成圆形. 选用哪一种方案围成的场地面积较大？大多少(π 取 3.14，结果精确到 1 m^2)？

B

7. 如图，面积为 30 m^2 的正方形 $ABCD$ 的四个角都是面积为 3 m^2 的小正方形，用计算器求阴影部分正方形的边长(结果精确到 0.01 m).



(第 7 题)

3. (1) 3.317；$-\sqrt{11}$；$\sqrt{11}$.

(2) -1.587；$\sqrt[3]{4}$；$\sqrt[3]{4}$.

(3) -1.732；$\sqrt{3}$；$\sqrt{3}$.

(4) 1.442；$-\sqrt[3]{3}$；$\sqrt[3]{3}$.

4. (1) $-\frac{1}{4}\sqrt{15}$.

(2) $\sqrt{3}-1$.

5. 4.8×10^{-2} m.

6. 圆形围成的场地面积较大，约大 3 944 m^2. 提示：正方形的边长为120 m，正方形的面积为14 400 m^2；圆形的半径为$\frac{240}{\pi}$ m，圆形的面积为$\frac{57\ 600}{\pi}\approx$ 18 343.9 m^2.

7. 阴影部分正方形的边长为$\sqrt{30}-2\sqrt{3}\approx2.01$(m).

8.（1）第 100 个数为 10.

（2）至少要选 7 个数.

提示：$1+\sqrt{2}\approx2.414$，

$1+\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\approx2.682$，

$1+\sqrt{2}-\sqrt{3}+2+\sqrt{5}\approx4.918$，

$1+\sqrt{2}-\sqrt{3}+2+\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7}\approx5.114$.

9.（1）1.

（2）1.

探究过程略.

8. 给定按一定规律排列的一列数：1、$\sqrt{2}$、$-\sqrt{3}$、2、$\sqrt{5}$、$-\sqrt{6}$、$\sqrt{7}$、….

（1）写出第 100 个数.

（2）如果从 1 开始依次连续取若干个数，使它们的和大于 5，那么至少要选多少个数？将算式及结果写出来(可以使用计算器).

9. 请利用计算器探究：

（1）任取一个大于 1 的数，先对它开平方，再对得到的算术平方根开平方，……，若将这样的开平方运算持续进行下去，其结果向什么数靠近？写出你的探究过程和结论.

（2）任取一个小于 1 且大于 0 的数先对它开平方，再对得到的算术平方根开平方，……，若将这样的开平方运算持续进行下去，其结果向什么数靠近？写出你的探究过程和结论.

第 20 章　二 次 根 式

一、本章概述

1. 总体要求

代数式是由字母表示数发展而来的，是数量关系的简明表达. 在六、七年级时，代数式所涉及的运算局限于加、减、乘、除以及乘方，在“第 19 章实数”中引进了数的开方运算，对代数式的认识也需要从有理式扩展到根式.

本章之前学生对数系的扩充、数的运算法则及运算律有了初步认识，对式的运算法则与用运算律进行式的运算有了初步体验，这些都为本章学习打下了基础. 本章的教学任务是了解二次根式、最简二次根式、同类二次根式、有理化因式与分母有理化的概念，了解二次根式的加、减、乘、除运算法则，会用它们进行简单的四则运算，将运算结果化为最简二次根式. 本章的学习有助于学生体会二次根式与整式、分式运算之间的联系，建立由整式、分式、二次根式构成的代数式及其运算的知识结构，提升运算能力，为学习一元二次方程、勾股定理、二次函数等内容奠定基础.

2. 课时安排建议

本章共 9 课时，具体课时分配建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
20.1 二次根式及其性质	2	二次根式及其性质　2 课时
习题课	1	
20.2 二次根式的运算	4	二次根式的运算　4 课时
习题课	1	
复习与小结	1	

3. 内容编排特色

本章内容分为两节，分别是“20.1 二次根式及其性质”和“20.2 二次根式的运算”.

“二次根式及其性质”这一节，由开平方运算与算术平方根的概念，引出二次根式的概念，归纳出二次根式的性质，通过引导学生观察化简后的二次根式被开方数的特点，帮助学生理解最简二次根式的概念. 与“二期课改”教科书相比，本章增加了依据算术平方根的意义对性质 3 “$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\,(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$”与性质 4 “$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,(a\geqslant 0,\ b>0)$”的推导. 这样的编排，既有利于学生在已有知识的基础上理解新的知识，也帮助学生体会到二次根式的性质是二次根式化简的关键.

“二次根式的运算”是本章的重点，通过具体实例引导学生归纳出同类二次根式的概念，帮助学生类比整式的加减，将二次根式的加减归结为合并同类二次根式. 以问题为背景，引出二次根式的乘除运算，帮助学生由二次根式的性质归纳出二次根式乘除运算的法则，这可以促进学生更深刻地理解二次根式的性质，同样是二次根式运算的关键.

《课标 2022 年版》对本章的内容要求中把学习对象限定为“根号下仅限于数”的二次根式，为了让学生更全面地理解二次根式的运算，本章的例题和习题中，保留了简单的根号下含有字母的二次根式运算. 与“二期课改”教科书相比，本章删去了较复杂的二次根式运算问题，降低了二次根式运算的难度. 教科书将二次根式的性质 3、4 与最简二次根式整合成一节课，将同类二次根式与二次根式的加减整合成一节课，这样的编排有利于学生理解数学知识间的内在联系，削枝强干，提质减负.

4. 教学提示

要让学生理解二次根式有关概念的产生是基于二次根式运算、变形、化简的需要. 例如，为化简二次根式而引进最简二次根式的概念；为进行二次根式加减运算而引进同类二次根式的概念；为进行二次根式除法运算或化去“分母”中的根式而引进有理化因式和分母有理化的概念.

慎重处理与二次根式有关的一些概念问题. 本章出现的概念虽已尽可能清晰描述、容易辨析，但涉及具体的问题时，还有可能引起争议. 实际上，有一些概念是不必深究的，应加以回避. 例如，在教学中不宜引入判断类似$\sqrt{\sqrt{2}a}$的式子是不是二次根式的讨论；又如，引入最简二次根式的概念是为了让学生会化简二次根式，能识别那些虽然表示形式不同但实质相同的二次根式. 为方便学生熟悉最简二次根式，本章保留了判断最简二次根式的例题和课堂练习，但在教学中不要过度引入判断是不是最简二次根式的训练. 对于这些概念，简明向学生呈现，不要人为复杂化.

要关注与以往学过的知识的类比. 可将合并同类二次根式与合并同类项类比，将二次根式的运算与有理式的运算类比，还可以将二次根式的研究过程与有理式的研究过程类比，帮助学生建立代数式的知识系统，揭示二次根式的运算与有理式的运算的内在联系.

本章的重点是二次根式的运算与化简. 教科书中已指出本章中出现的二次根式的变形与运算总是在二次根式有意义的前提下进行. 在本章的例题与练习中，一般不涉及对二次根式被开

方数所含字母取值范围的讨论. 学生需要理解在二次根式的运算中被开方数应满足的条件，但不需要让学生去解决繁难的问题.

5. 评价建议

要关注学生对二次根式的相关概念的理解和掌握，要求学生知道被开方数满足什么条件时二次根式有意义，理解最简二次根式、同类二次根式、有理化因式等相关概念，能运用二次根式的性质进行运算、变形和化简.

要关注学生数学素养的培育及解决问题能力的提高，应考查学生能否运用本章的基本知识和技能解决二次根式的相关问题，能否在二次根式相关运算中选择合适的化简与计算方法.

二、教科书分析与教学建议

20.1　二次根式及其性质

本节教学目标

（1）了解二次根式的概念，二次根式有意义应满足的条件.

（2）了解二次根式的性质，能运用性质化简二次根式.

（3）了解最简二次根式的概念，会将二次根式化为最简二次根式.

（以下分析对应课本第 36～38 页）

本课教学重点

了解二次根式的概念与$\sqrt{a}$有意义的条件；了解二次根式的性质 1、2.

本课教学建议

（1）教科书中是以代数式从有理式扩充到根式的角度给出了二次根式的概念，因而在教学中应侧重让学生理解二次根式有意义时被开方数是非负数的要求，而不必深究怎样判断一个式子是不是二次根式，也不宜讨论如$\sqrt{\sqrt{2}a}$、$\sqrt{(1+x)^{\frac{1}{2}}}$、$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$等是不是二次根式的问题.

（2）作为对《课标 2022 年版》中“了解二次根式（根号下仅限于数）的加、减、乘、除运算法则，会用它们进行简单的四则运算”的回应，教科书中的例题和习题中虽包含简单的根号下有字母的二次根式，但为降低难度，后续内容没有涉及对被开方数所含字母取值范围的讨论，凡涉及可移到根号外的字母或因式，都设为非负.

20.1 二次根式及其性质

在“实数”一章，我们学习了开平方运算，知道了当 $a \geqslant 0$ 时，$\sqrt{a}$ 表示 a 的算术平方根.

形如 $\sqrt{a}$ 的代数式(其中 a 为有理式)，叫作二次根式. 例如，$\sqrt{2}$、$\sqrt{\frac{2}{3}}$、$\sqrt{a^2+1}$、$\sqrt{b^2-4ac}$、$\sqrt{\frac{1}{x-2}}$ 等，都是二次根式.

在实数范围内，负数没有平方根，所以如 $\sqrt{-3}$、$\sqrt{b}\ (b<0)$ 这样的式子没有意义，$\sqrt{a}$ 有意义的条件是代数式 a 的值不小于 0，即 $a \geqslant 0$.

例 1 设 x 是实数，当 x 满足什么条件时，下列各式有意义？

(1) $\sqrt{2x-1}$；　　(2) $\sqrt{2-x}$；

(3) $\sqrt{\frac{1}{x}}$；　　(4) $\sqrt{1+x^2}$.

解　(1) 由 $2x-1 \geqslant 0$，得 $x \geqslant \frac{1}{2}$.

所以，当 $x \geqslant \frac{1}{2}$ 时，$\sqrt{2x-1}$ 有意义.

(2) 由 $2-x \geqslant 0$，得 $x \leqslant 2$.

所以，当 $x \leqslant 2$ 时，$\sqrt{2-x}$ 有意义.

(3) 由 $\frac{1}{x} \geqslant 0$，得 $x > 0$.

所以，当 $x > 0$ 时，$\sqrt{\frac{1}{x}}$ 有意义.

(4) 不论 x 是什么实数，都有 $1+x^2>0$.

所以，当 x 是任意实数时，$\sqrt{1+x^2}$ 都有意义.

如无特别说明，本章出现的二次根式的变形与运算总是在二次根式有意义的前提下进行.

因为 $\sqrt{a}$ 表示 a 的算术平方根，所以 $\sqrt{a}$ 的平方等于 a. 现在把这个结论作

36　第20章 二次根式

本课内容分析

学生在“实数”一章中已经学习了开平方运算，本节从算术平方根的概念出发，开门见山地给出了二次根式的概念，并运用实例结合算术平方根的意义推导出二次根式的性质 1、2.

例 1 帮助学生理解“$\sqrt{a}$”有意义的条件，加深学生对二次根式概念的理解.

本课时中性质 1、2 直接从算术平方根的意义推得.

例 2 两个小题都属于 $\sqrt{a^2}=-a(a<0)$ 的类型，因为学生对这类问题的处理容易出错. 计算结果的表达式中，通常应去掉绝对值符号.

课堂练习 20.1(1)

1. (1) $x\leqslant\frac{1}{6}$.

(2) $x<0$.

(3) x 为任意实数.

2. (1) $\frac{1}{2}$.

(2) $\frac{1}{3}$.

3. $2a-2b+2c$.

为二次根式的性质：

性质 1 $(\sqrt{a})^2=a\quad(a\geqslant0)$.

思考

$\sqrt{a^2}$ 与 a 一定相等吗？为什么？

$\sqrt{a^2}$ 是 a^2 的算术平方根，是一个非负数，而 a 可能为负数，所以 $\sqrt{a^2}$ 与 a 不一定相等，如 $\sqrt{(-1)^2}\neq-1$. 当 $a>0$ 时，a^2 的算术平方根为 a；当 $a=0$ 时，a^2 的算术平方根为 0；当 $a<0$ 时，a^2 的算术平方根为 $-a$. 这是二次根式的又一性质：

性质 2 $\sqrt{a^2}=|a|$.

例 2 求下列二次根式的值：

(1) $\sqrt{(3-\pi)^2}$；

(2) $\sqrt{x^2-2x+1}$，其中 $x=-\sqrt{3}$.

解 (1) $\sqrt{(3-\pi)^2}=|3-\pi|=\pi-3$.

(2) $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$.

当 $x=-\sqrt{3}$ 时，原式 $=\left|-\sqrt{3}-1\right|=\sqrt{3}+1$.

课堂练习 20.1(1)

1. 设 x 是实数，当 x 满足什么条件时，下列各式有意义？

(1) $\sqrt{\frac{1}{3}-2x}$； (2) $\sqrt{-\frac{2}{x}}$； (3) $\sqrt{x^2-2x+1}$.

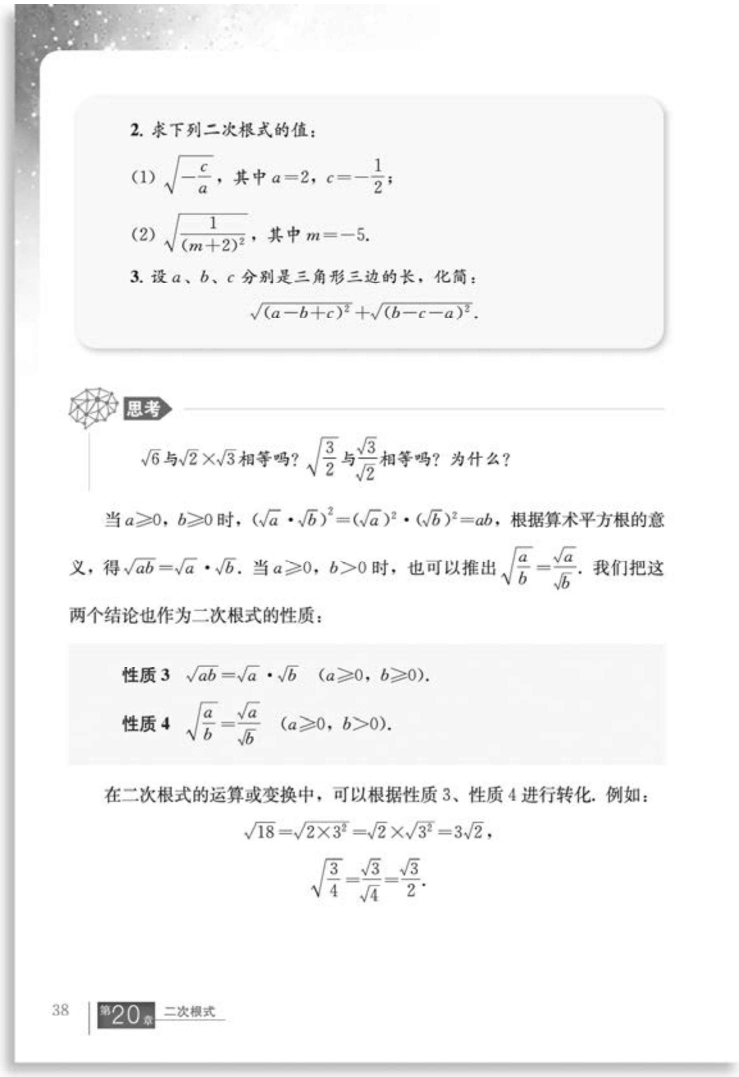
（以下分析对应课本第 38～41 页）

本课教学重点

归纳二次根式的性质 3、4，了解形如 $b\sqrt{a}$ 这种更一般形式的二次根式，了解最简二次根式的概念，会将二次根式化为最简二次根式.

本课教学建议

在化简二次根式的过程中，可以引导学生关注二次根式中字母的取值范围，根据二次根式的意义，由已知条件推出相应字母的取值范围，培养学生严密的思维习惯. 为了降低难度，除第 1 课时外，例题与练习中一般都给出字母的取值范围，以保证被开方数不取负值，避免对被开方数中字母取值范围的讨论.



2. 求下列二次根式的值：

(1) $\sqrt{-\frac{c}{a}}$，其中 $a=2$，$c=-\frac{1}{2}$；

(2) $\sqrt{\frac{1}{(m+2)^2}}$，其中 $m=-5$.

3. 设 a、b、c 分别是三角形三边的长，化简：

$$\sqrt{(a-b+c)^2}+\sqrt{(b-c-a)^2}.$$

思考

$\sqrt{6}$与$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$相等吗？$\sqrt{\frac{3}{2}}$与$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$相等吗？为什么？

当$a\geqslant0$，$b\geqslant0$时，$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2=ab$，根据算术平方根的意义，得$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$. 当$a\geqslant0$，$b>0$时，也可以推出$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. 我们把这两个结论也作为二次根式的性质：

性质 3 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ $(a\geqslant0，b\geqslant0)$.

性质 4 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(a\geqslant0，b>0)$.

在二次根式的运算或变换中，可以根据性质 3、性质 4 进行转化. 例如：

$$\sqrt{18}=\sqrt{2\times3^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{3^2}=3\sqrt{2},$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

38 第20章 二次根式

本课内容分析

思考 引导学生通过具体实例归纳出二次根式的性质 3、4.

运用算术平方根的意义推导出性质 3、4. 这与上一课时中性质 1、2 的推导一脉相承. 学习二次根式的四个性质是为了对二次根式进行化简.

一般地，根据性质 3，设 $a \geqslant 0$，那么

$$\sqrt{ab^2}=\sqrt{a} \cdot \sqrt{b^2}=|b|\sqrt{a}.$$

这说明，如果二次根式里被开方数是几个因式的积，其中有的因式是完全平方式，那么这样的因式可用它的算术平方根代替后移到根号外面.

> 形如 A^2（A 为整式）的代数式称为完全平方式，如 b^2、$(a+b)^2$.

根据性质 4，设 $\frac{a}{b} \geqslant 0$，那么

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{a \cdot b}{b \cdot b}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{|b|}.$$

这说明，如果二次根式里被开方数含有分母，那么可以将分子和分母同乘一个代数式，使分母变为完全平方式，再将分母用它的算术平方根代替后移到根号外面作为新的分母，从而化去被开方数中的分母.

把二次根式里被开方数所含因式中的完全平方式移到根号外，或者化去被开方数的分母的过程，称为“化简二次根式”.

为了方便，我们常把形如 $b\sqrt{a}$（其中 a、b 为有理式）的代数式也称为二次根式，如 $3\sqrt{2}$、$\frac{\sqrt{6}}{4}$、$-\sqrt{3}$ 等.

例 3 化简下列二次根式：

（1）$\sqrt{72}$；　（2）$\sqrt{12a^3}$；　（3）$\sqrt{18x^2}$（$x \geqslant 0$）.

解　（1）$\sqrt{72}=\sqrt{6^2 \times 2}=6\sqrt{2}$.

（2）由 $12a^3 \geqslant 0$，可知 $a \geqslant 0$.

所以 $\sqrt{12a^3}=\sqrt{2^2 \times 3 \times a^2 \times a}=\sqrt{(2a)^2 \cdot 3a}=2|a|\sqrt{3a}=2a\sqrt{3a}$.

（3）$\sqrt{18x^2}=\sqrt{3^2 \times 2 \times x^2}=3\sqrt{2}|x|$.

因为 $x \geqslant 0$，所以 $\sqrt{18x^2}=3\sqrt{2}x$.

例 4 化简下列二次根式：

（1）$\sqrt{\frac{a}{3}}$；　（2）$\sqrt{\frac{5}{2x}}$；　（3）$\sqrt{\frac{b^2}{9a}}$（$b>0$）.

先让学生尝试运用性质 3、4 化简“根号下为数字”的二次根式，再归纳一般结论，总结出化简二次根式的基本方法.

这里介绍“化简二次根式”的含义，并扩展了二次根式的范围，是为了方便后面的运用和表达.

例 3 化简被开方数是单项式的二次根式，例 3(2)中对字母 a 的讨论，是为了去掉 $|a|$ 中的绝对值符号，判断 $a \geqslant 0$ 的过程表达，不作为规定的格式要求.

例 4 化简被开方数含分母的二次根式，但这个分母为单项式，在例 4(3)中，给定条件 $b>0$ 是为降低难度. 若给的条件是 $b\geqslant 0$，则不能确定 $a>0$，要分 $b=0$，$b>0$ 两种情况讨论.

观察　先引导学生通过观察、比较和分析，具体认识最简二次根式的特征，然后概括最简二次根式的概念. 特别要注意边框中对条件(1)的说明.

例 5 是为了帮助学生更好地理解最简二次根式的概念，教学中应侧重让学生学会将一个二次根式化为最简二次根式，而不要过度引入判断最简二次根式的练习.

解　(1) $\sqrt{\frac{a}{3}}=\sqrt{\frac{3a}{3^2}}=\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{3^2}}=\frac{\sqrt{3a}}{3}$.

(2) 由 $\frac{5}{2x}\geqslant 0$，可知 $x>0$.

所以 $\sqrt{\frac{5}{2x}}=\sqrt{\frac{5\cdot 2x}{2^2\cdot x^2}}=\frac{\sqrt{10x}}{\sqrt{(2x)^2}}=\frac{\sqrt{10x}}{2|x|}=\frac{\sqrt{10x}}{2x}$.

(3) 已知 $b>0$，又由 $\frac{b^2}{9a}\geqslant 0$，可知 $a>0$.

所以 $\sqrt{\frac{b^2}{9a}}=\sqrt{\frac{b^2\cdot a}{3^2\cdot a^2}}=\frac{\sqrt{b^2\cdot a}}{\sqrt{(3a)^2}}=\frac{|b|\sqrt{a}}{3|a|}=\frac{b\sqrt{a}}{3a}$.

观察

将例 3、例 4 中的二次根式化简前后相比较，化简后的二次根式，如 $6\sqrt{2}$、$2a\sqrt{3a}$、$\frac{\sqrt{3a}}{3}$ 等，其被开方数有什么共同特点？

由以上观察，可以发现：

(1) 被开方数中各因式的指数都为 1；

(2) 被开方数不含分母.

被开方数中的因式是指因式分解和素因数分解后的因式和因数.

我们把满足上述两个条件的二次根式，叫作最简二次根式.

在二次根式的运算中，一般要把结果化成最简二次根式.

例 5　判断下列二次根式是不是最简二次根式：

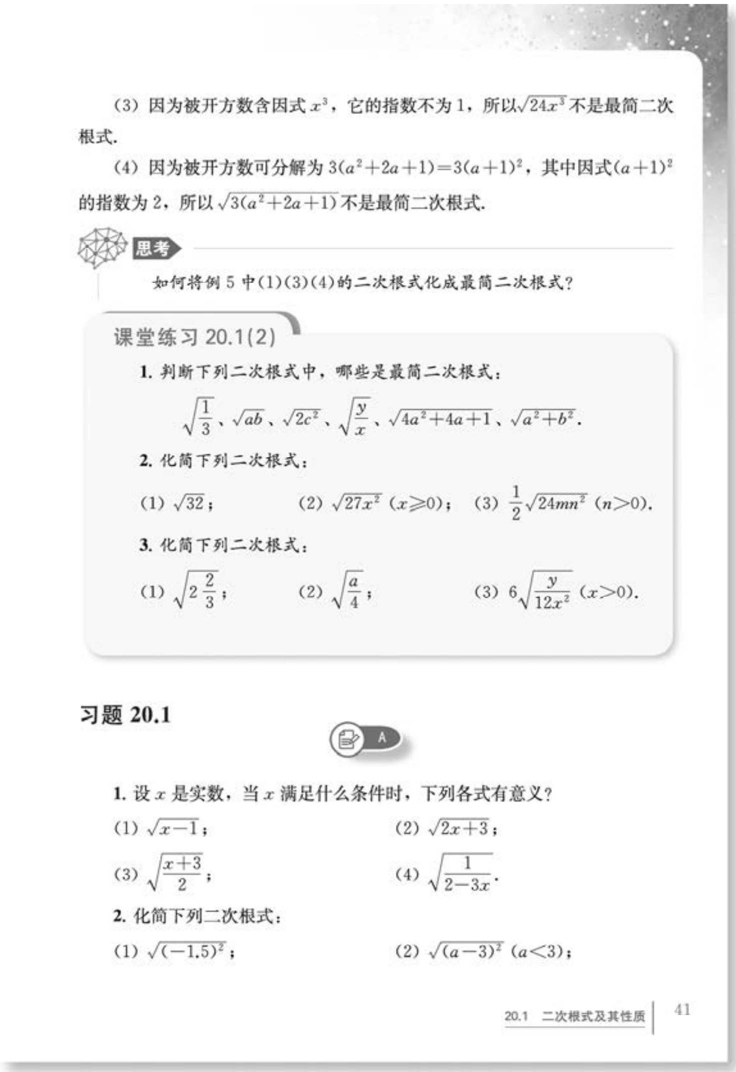
(1) $\sqrt{\frac{5a}{3}}$；　(2) $\sqrt{42a}$；

(3) $\sqrt{24x^3}$；　(4) $\sqrt{3(a^2+2a+1)}$.

解　(1) 因为被开方数 $\frac{5a}{3}$ 含分母 3，所以 $\sqrt{\frac{5a}{3}}$ 不是最简二次根式.

(2) 因为被开方数可分解为 $42a=2\times 3\times 7\times a$，各因式的指数都为 1，所以 $\sqrt{42a}$ 是最简二次根式.

40　第20章　二次根式



(3) 因为被开方数含因式 x^3，它的指数不为 1，所以 $\sqrt{24x^3}$ 不是最简二次根式.

(4) 因为被开方数可分解为 $3(a^2+2a+1)=3(a+1)^2$，其中因式 $(a+1)^2$ 的指数为 2，所以 $\sqrt{3(a^2+2a+1)}$ 不是最简二次根式.

思考

如何将例 5 中(1)(3)(4)的二次根式化成最简二次根式？

课堂练习 20.1(2)

1. 判断下列二次根式中，哪些是最简二次根式：

$$\sqrt{\frac{1}{3}}、\sqrt{ab}、\sqrt{2c^2}、\sqrt{\frac{y}{x}}、\sqrt{4a^2+4a+1}、\sqrt{a^2+b^2}.$$

2. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{32}$；　(2) $\sqrt{27x^2}$ $(x\geqslant 0)$；　(3) $\frac{1}{2}\sqrt{24mn^2}$ $(n>0)$.

3. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{2\frac{2}{3}}$；　(2) $\sqrt{\frac{a}{4}}$；　(3) $6\sqrt{\frac{y}{12x^2}}$ $(x>0)$.

习题 20.1

A

1. 设 x 是实数，当 x 满足什么条件时，下列各式有意义？

(1) $\sqrt{x-1}$；　(2) $\sqrt{2x+3}$；

(3) $\sqrt{\frac{x+3}{2}}$；　(4) $\sqrt{\frac{1}{2-3x}}$.

2. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{(-1.5)^2}$；　(2) $\sqrt{(a-3)^2}$ $(a<3)$；

20.1 二次根式及其性质　41

思考　在本课时中，学生已经学习了运用性质来化简二次根式的基本方法，在例 5 后让学生通过思考来应用已有经验解决将非最简二次根式化成最简二次根式的问题.

课堂练习 20.1(2)

1. $\sqrt{ab}$、$\sqrt{a^2+b^2}$.

2. (1) $4\sqrt{2}$.

(2) $3\sqrt{3}x$.

(3) $n\sqrt{6m}$.

3. (1) $\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

(2) $\frac{\sqrt{a}}{2}$.

(3) $\frac{\sqrt{3y}}{x}$.

习题 20.1

1. (1) $x\geqslant 1$.

(2) $x\geqslant -\frac{3}{2}$.

(3) $x\geqslant -3$.

(4) $x<\frac{2}{3}$.

2. (1) 1.5.

(2) $3-a$.

(3) $b-4$.

(4) $m-n$.

3. $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$,

$\sqrt{3a^3}=a\sqrt{3a}$,

$\sqrt{0.5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$.

4. (1) $4\sqrt{3}$.

(2) $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

(3) $\frac{2\sqrt{15}}{5}$.

(4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(5) $\frac{5\sqrt{6}}{2}$.

5. (1) $45\sqrt{10}$.

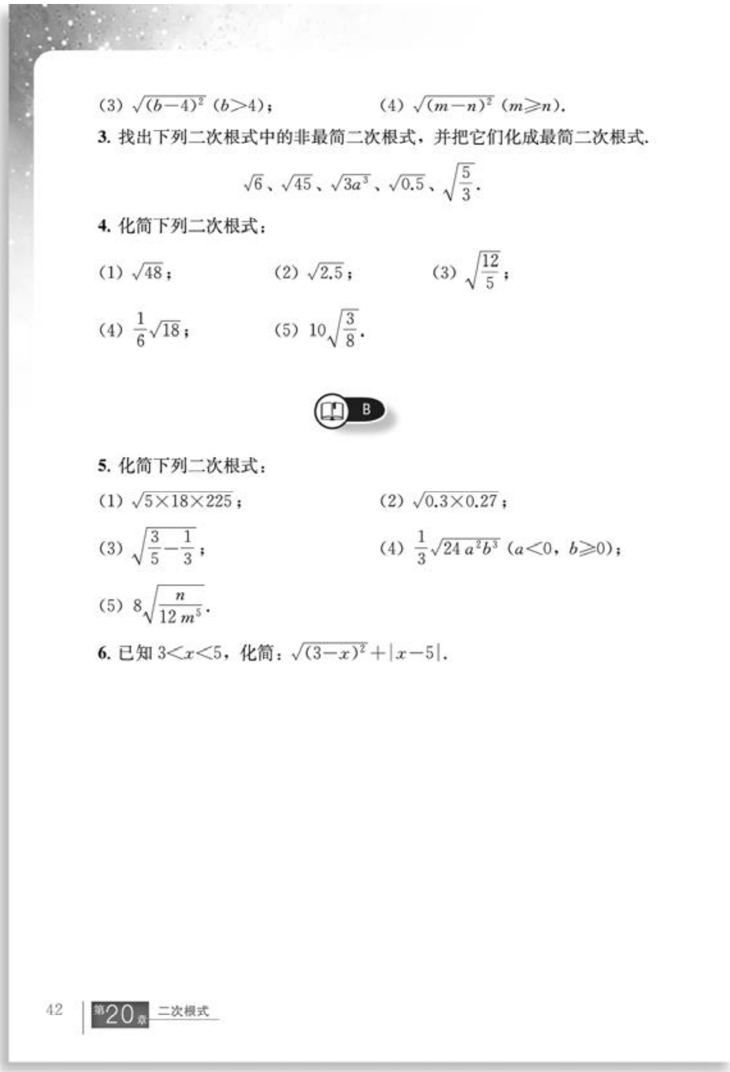
(2) $\frac{9\sqrt{10}}{100}$.

(3) $\frac{2\sqrt{15}}{15}$.

(4) $-\frac{2}{3}ab\sqrt{6b}$.

(5) 当 $m>0$ 时，原式$=\frac{4\sqrt{3mn}}{3m^3}$；当 $m<0$ 时，原式$=-\frac{4\sqrt{3mn}}{3m^3}$.

6. 2.



(3) $\sqrt{(b-4)^2}$ $(b>4)$；　(4) $\sqrt{(m-n)^2}$ $(m\geqslant n)$.

3. 找出下列二次根式中的非最简二次根式，并把它们化成最简二次根式.

$\sqrt{6}$、$\sqrt{45}$、$\sqrt{3a^3}$、$\sqrt{0.5}$、$\sqrt{\frac{5}{3}}$.

4. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{48}$；　(2) $\sqrt{2.5}$；　(3) $\sqrt{\frac{12}{5}}$；

(4) $\frac{1}{6}\sqrt{18}$；　(5) $10\sqrt{\frac{3}{8}}$.

B

5. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{5\times18\times225}$；　(2) $\sqrt{0.3\times0.27}$；

(3) $\sqrt{\frac{3}{5}-\frac{1}{3}}$；　(4) $\frac{1}{3}\sqrt{24a^2b^3}$ $(a<0,\ b\geqslant0)$；

(5) $8\sqrt{\frac{n}{12m^5}}$.

6. 已知 $3<x<5$，化简：$\sqrt{(3-x)^2}+|x-5|$.

42 第20章 二次根式

20.2 二次根式的运算

本节教学目标

(1) 了解同类二次根式的概念，会合并同类二次根式.

(2) 了解二次根式的加、减、乘、除运算法则，会进行简单的二次根式四则混合运算.

(3) 了解分母有理化，会把一个二次根式分母有理化.

(4) 能用二次根式表示具体问题中简单的数量关系，建立模型观念.

(以下分析对应课本第 43～45 页)

本课教学重点

了解同类二次根式的概念，能判断几个二次根式是不是同类二次根式，会合并同类二次根式，会用二次根式的加、减法法则进行简单的混合运算.

本课教学建议

判断同类二次根式的目的是合并同类二次根式，合并的依据是乘法对加法的分配律，合并同类二次根式也就是二次根式的加减运算. 教学中应重点关注学生能运用法则进行简单的二次根式加减运算.

20.2 二次根式的运算

实数的运算律和运算顺序，在二次根式运算中同样适用.

观察

把$\sqrt{\frac{1}{2}}$与$\sqrt{18}$化成最简二次根式，所得结果有什么相同之处？

$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$. 二次根式$\frac{\sqrt{2}}{2}$与$3\sqrt{2}$的被开方数相同，都是 2.

几个二次根式化成最简二次根式后，如果被开方数相同，那么这几个二次根式叫作同类二次根式. 例如，$\sqrt{\frac{1}{2}}$与$\sqrt{18}$是同类二次根式，而$\sqrt{2}$与$\sqrt{3}$不是同类二次根式.

例 1 下列二次根式中，哪些是同类二次根式？

$\sqrt{12}$、$\sqrt{24}$、$\sqrt{\frac{1}{27}}$、$\sqrt{a^4b}$ $(a\neq0)$、$2\sqrt{a^3b}$ $(a>0)$、$-\sqrt{ab^3}$ $(a>0)$.

解 把二次根式化成最简二次根式，得

$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times3}=2\sqrt{3}$；

$\sqrt{24}=\sqrt{2^2\times2\times3}=2\sqrt{6}$；

$\sqrt{\frac{1}{27}}=\sqrt{\frac{3}{9^2}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$；

$\sqrt{a^4b}=a^2\sqrt{b}$ $(a\neq0)$；

$2\sqrt{a^3b}=2\sqrt{a^2\cdot ab}=2a\sqrt{ab}$ $(a>0)$；

$-\sqrt{ab^3}=-\sqrt{ab\cdot b^2}=-b\sqrt{ab}$（由 $a>0$，可知 $b\geqslant0$）.

所以，$\sqrt{12}$与$\sqrt{\frac{1}{27}}$是同类二次根式，$2\sqrt{a^3b}$ $(a>0)$与$-\sqrt{ab^3}$ $(a>0)$也是同类二次根式.

20.2 二次根式的运算 43

本课内容分析

例 1 通过判断同类二次根式的过程，帮助学生理解需要先化简为最简二次根式，再判断是不是同类二次根式，此类问题不宜过难.

二次根式的加减同整式的加减类似，归结为合并同类二次根式. 为了合并同类二次根式，应当先把各个二次根式化成最简二次根式.

例 2 合并下列各式中的同类二次根式：

(1) $2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{2}+\sqrt{3}$；　　(2) $3\sqrt{x}-a\sqrt{x}$.

解 (1) $2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$$=\left(2+\frac{1}{3}\right)\sqrt{2}+\left(-\frac{1}{2}+1\right)\sqrt{3}$$

$$=\frac{7}{3}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

(2) $3\sqrt{x}-a\sqrt{x}=(3-a)\sqrt{x}$.

例 3 计算：

(1) $3\sqrt{75}+\frac{\sqrt{48}}{2}$；　　(2) $\left(\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{12}\right)$.

解 (1) $3\sqrt{75}+\frac{\sqrt{48}}{2}$

$$=3\sqrt{5^2\times3}+\frac{\sqrt{4^2\times3}}{2}$$

$$=15\sqrt{3}+2\sqrt{3}=17\sqrt{3}.$$

(2) $\left(\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{12}\right)$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}}-2\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{12}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}+2\sqrt{3}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\sqrt{2}+\left(2-\frac{2}{3}\right)\sqrt{3}=\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

44 第20章 二次根式

例 2，合并同类二次根式就是二次根式的加减运算，学习同类二次根式的目的是进行加减运算，而合并的依据是乘法对加法的分配律.

例 3 是二次根式的加减混合运算，要让学生体会实数(根式)运算与有理数(有理式)运算的联系，感受在数(式)的扩充过程中，运算性质、运算律的一致性.

课堂练习 20.2(1)

1. (1) 是.

(2) 不是.

(3) 是.

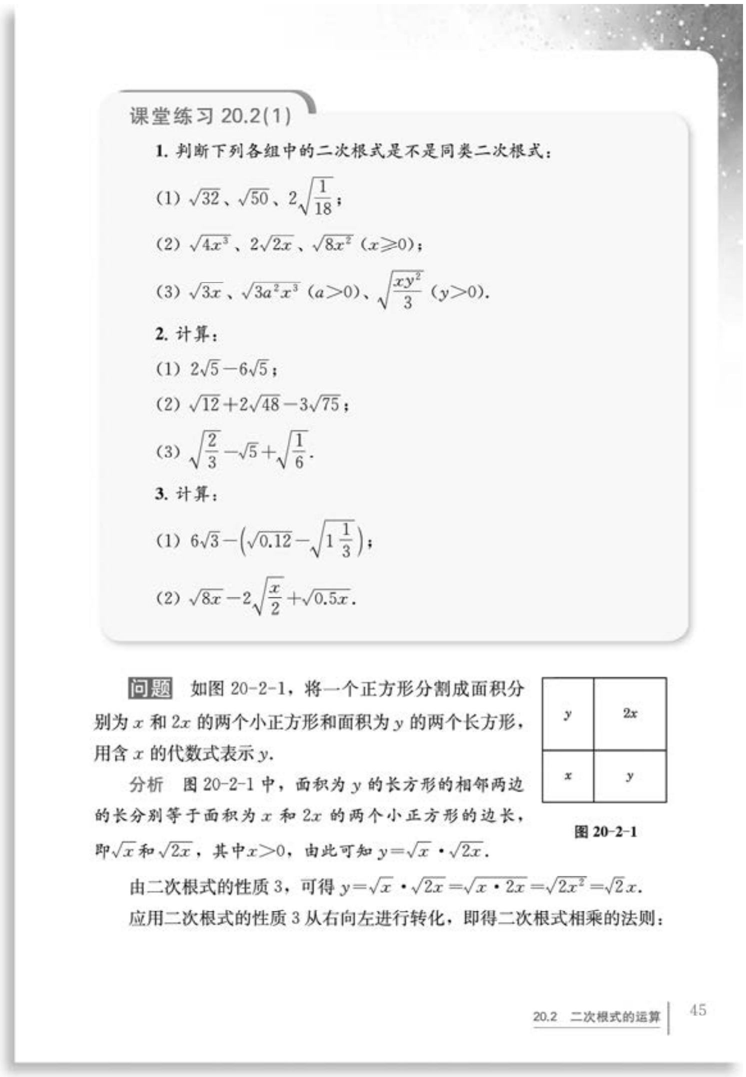
2. (1) $-4\sqrt{5}$.

(2) $-5\sqrt{3}$.

(3) $\frac{\sqrt{6}}{2}-\sqrt{5}$.

3. (1) $\frac{97}{15}\sqrt{3}$.

(2) $\frac{3}{2}\sqrt{2x}$.



课堂练习 20.2(1)

1. 判断下列各组中的二次根式是不是同类二次根式：

(1) $\sqrt{32}$、$\sqrt{50}$、$2\sqrt{\frac{1}{18}}$；

(2) $\sqrt{4x^3}$、$2\sqrt{2x}$、$\sqrt{8x^2}$ $(x\geqslant 0)$；

(3) $\sqrt{3x}$、$\sqrt{3a^2x^3}$ $(a>0)$、$\sqrt{\frac{xy^2}{3}}$ $(y>0)$.

2. 计算：

(1) $2\sqrt{5}-6\sqrt{5}$；

(2) $\sqrt{12}+2\sqrt{48}-3\sqrt{75}$；

(3) $\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{5}+\sqrt{\frac{1}{6}}$.

3. 计算：

(1) $6\sqrt{3}-\left(\sqrt{0.12}-\sqrt{1\frac{1}{3}}\right)$；

(2) $\sqrt{8x}-2\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{0.5x}$.

问题　如图 20-2-1，将一个正方形分割成面积分别为 x 和 $2x$ 的两个小正方形和面积为 y 的两个长方形，用含 x 的代数式表示 y.

图 20-2-1

分析　图 20-2-1 中，面积为 y 的长方形的相邻两边的长分别等于面积为 x 和 $2x$ 的两个小正方形的边长，即 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{2x}$，其中 $x>0$，由此可知 $y=\sqrt{x}\cdot\sqrt{2x}$.

由二次根式的性质 3，可得 $y=\sqrt{x}\cdot\sqrt{2x}=\sqrt{x\cdot 2x}=\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}x$.

应用二次根式的性质 3 从右向左进行转化，即得二次根式相乘的法则：

20.2　二次根式的运算　45

（以下分析对应课本第 45～47 页）

本课教学重点

了解二次根式相乘、相除的法则，会用二次根式相乘、相除的法则进行简单的运算.

本课教学建议

二次根式的除法有两种算法，一是运用二次根式相除的法则；二是进行分母有理化. 下一课时将会学习分母有理化，所以本课时中除式不涉及二次根式的加减.

课堂练习 20.2(1)

1. 判断下列各组中的二次根式是不是同类二次根式：

(1) $\sqrt{32}$、$\sqrt{50}$、$2\sqrt{\frac{1}{18}}$；

(2) $\sqrt{4x^3}$、$2\sqrt{2x}$、$\sqrt{8x^2}$ $(x\geqslant 0)$；

(3) $\sqrt{3x}$、$\sqrt{3a^2x^3}$ $(a>0)$、$\sqrt{\frac{xy^2}{3}}$ $(y>0)$.

2. 计算：

(1) $2\sqrt{5}-6\sqrt{5}$；

(2) $\sqrt{12}+2\sqrt{48}-3\sqrt{75}$；

(3) $\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{5}+\sqrt{\frac{1}{6}}$.

3. 计算：

(1) $6\sqrt{3}-\left(\sqrt{0.12}-\sqrt{1\frac{1}{3}}\right)$；

(2) $\sqrt{8x}-2\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{0.5x}$.

问题 如图 20-2-1，将一个正方形分割成面积分别为 x 和 $2x$ 的两个小正方形和面积为 y 的两个长方形，用含 x 的代数式表示 y.

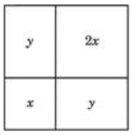


图 20-2-1

分析 图 20-2-1 中，面积为 y 的长方形的相邻两边的长分别等于面积为 x 和 $2x$ 的两个小正方形的边长，即 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt{2x}$，其中 $x>0$，由此可知 $y=\sqrt{x}\cdot\sqrt{2x}$.

由二次根式的性质 3，可得 $y=\sqrt{x}\cdot\sqrt{2x}=\sqrt{x\cdot 2x}=\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}x$.

应用二次根式的性质 3 从右向左进行转化，即得二次根式相乘的法则：

20.2 二次根式的运算 45

本课内容分析

问题 从面积问题自然引入二次根式相乘运算.

用两个小正方形的边长计算两个全等的长方形面积的过程，运用了二次根式相乘的法则.

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}.$$

例 4 计算：

(1) $\sqrt{12}\times\sqrt{32}$；

(2) $\sqrt{\frac{1}{6}}\times\sqrt{48}$；

(3) $3\sqrt{2}\times2\sqrt{6}$；

(4) $\sqrt{b}\cdot\sqrt{4b}$.

解 (1) $\sqrt{12}\times\sqrt{32}=\sqrt{12\times32}=\sqrt{2^2\times3\times2^5}=\sqrt{(2^3)^2\times2\times3}=2^3\times\sqrt{2\times3}=8\sqrt{6}$.

(2) $\sqrt{\frac{1}{6}}\times\sqrt{48}=\sqrt{\frac{1}{6}\times48}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$.

(3) $3\sqrt{2}\times2\sqrt{6}=3\times2\times\sqrt{2\times6}=6\times2\sqrt{3}=12\sqrt{3}$.

(4) $\sqrt{b}\cdot\sqrt{4b}=\sqrt{b\cdot4b}=\sqrt{2^2\cdot b^2}=2|b|$.

因为$\sqrt{b}$有意义，所以 $b\geqslant0$.

因此，$\sqrt{b}\cdot\sqrt{4b}=2b$.

同样地，二次根式的性质 4 给出了二次根式相除的法则，即

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

例 5 计算：

(1) $\sqrt{3}\div\sqrt{2}$；

(2) $\sqrt{\frac{4}{3}}\div\sqrt{\frac{1}{15}}$；

(3) $2\sqrt{18}\div4\sqrt{3}$.

解 (1) $\sqrt{3}\div\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{3\times2}{2\times2}}=\sqrt{\frac{6}{2^2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

例 4 是二次根式的乘法运算. 例 4(1)还可以先化为最简二次根式后再相乘；例 4(4)可以让学生看到两个二次根式的乘积是有理式的情况，为下一课时学习分母有理化作了铺垫.

例 5 是二次根式的除法运算. 例 5(1)还可以用分母有理化的方法去掉分母中的根号，这将在下一课时中学习.

课堂练习 20.2(2)

1. (1) $2\sqrt{5}$.

(2) $\dfrac{\sqrt{70}}{100}$.

(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. (1) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(2) $\dfrac{35\sqrt{2}}{4}$.

(3) $3\sqrt{6}$.

3. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(2) $\sqrt{\dfrac{4}{3}}\div\sqrt{\dfrac{1}{15}}=\sqrt{\dfrac{4}{3}\div\dfrac{1}{15}}=\sqrt{\dfrac{4}{3}\times 15}=\sqrt{4\times 5}=2\sqrt{5}$.

(3) $2\sqrt{18}\div 4\sqrt{3}=\dfrac{2\sqrt{18}}{4\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{18}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

课堂练习 20.2(2)

1. 计算：

(1) $2\sqrt{15}\div\sqrt{3}$；

(2) $\sqrt{0.1}\times\sqrt{0.07}$；

(3) $\sqrt{13}\div\sqrt{\dfrac{104}{4}}$.

2. 计算：

(1) $\sqrt{4b}\div\sqrt{6b}$；

(2) $\sqrt{35}\times\sqrt{\dfrac{5}{2}}\div\sqrt{\dfrac{4}{7}}$；

(3) $\sqrt{24}\div(\sqrt{12}\div\sqrt{27})$.

3. 如果一个圆的面积与一个正方形的面积相等，那么该圆的周长与该正方形周长的比值是多少？

观察

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{6}}{2},$$

上式中$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$的分母是$\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$的分母是2，分母中的$\sqrt{2}$是怎样化为2的？

把分母中的根号化去的过程称为分母有理化. 分母有理化的方法，一般是把分子和分母都乘同一个适当的代数式，使分母不含根号.

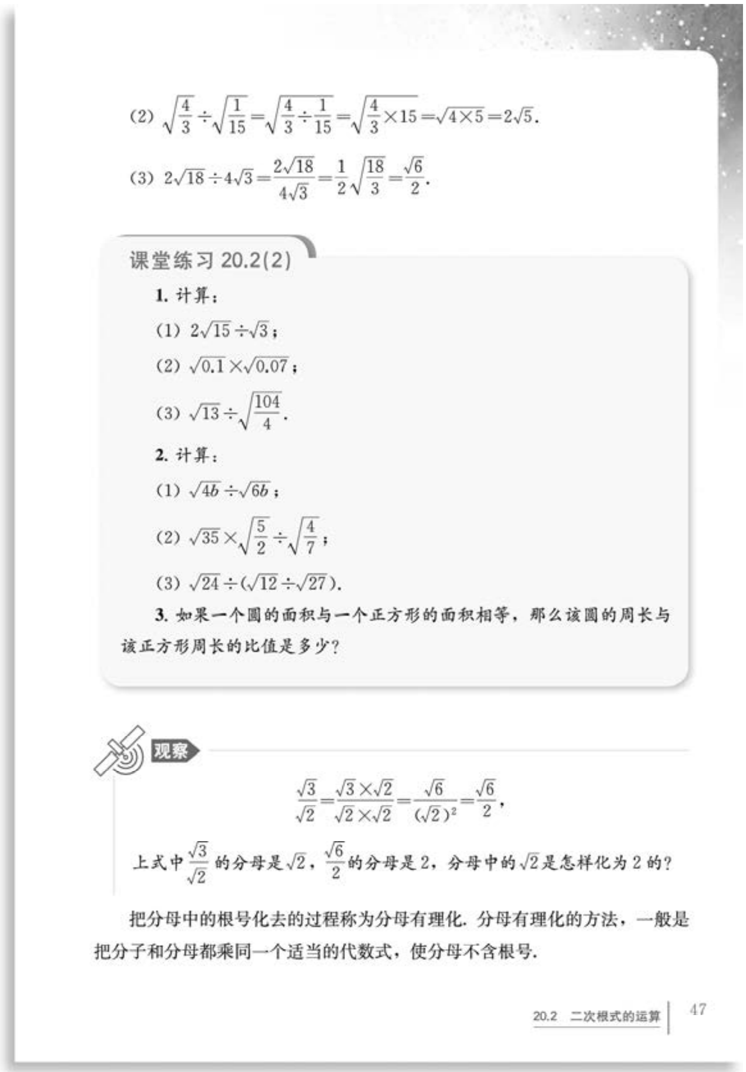
（以下分析对应课本第 47～50 页）

本课教学重点

了解二次根式分母有理化的含义，会进行分母有理化运算.

本课教学建议

教科书中涉及二次根式除法的算式中，除式所含二次根式的个数一般不超过两个，且通常采用分母有理化的方法来完成除法运算.


(2) $\sqrt{\frac{4}{3}}\div\sqrt{\frac{1}{15}}=\sqrt{\frac{4}{3}\div\frac{1}{15}}=\sqrt{\frac{4}{3}\times 15}=\sqrt{4\times 5}=2\sqrt{5}$.

(3) $2\sqrt{18}\div 4\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{18}}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{18}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

课堂练习 20.2(2)

1. 计算：

(1) $2\sqrt{15}\div\sqrt{3}$；

(2) $\sqrt{0.1}\times\sqrt{0.07}$；

(3) $\sqrt{13}\div\sqrt{\frac{104}{4}}$.

2. 计算：

(1) $\sqrt{4b}\div\sqrt{6b}$；

(2) $\sqrt{35}\times\sqrt{\frac{5}{2}}\div\sqrt{\frac{4}{7}}$；

(3) $\sqrt{24}\div(\sqrt{12}\div\sqrt{27})$.

3. 如果一个圆的面积与一个正方形的面积相等，那么该圆的周长与该正方形周长的比值是多少？

观察

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{6}}{2},$$

上式中 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 的分母是 $\sqrt{2}$，$\frac{\sqrt{6}}{2}$ 的分母是 2，分母中的 $\sqrt{2}$ 是怎样化为 2 的？

把分母中的根号化去的过程称为分母有理化. 分母有理化的方法，一般是把分子和分母都乘同一个适当的代数式，使分母不含根号.

20.2 二次根式的运算 47

本课内容分析

观察　运用二次根式的性质 1 可以将上一课时例 5(1)分母中的根号化去.

例 6 计算：

(1) $\sqrt{2}\div\sqrt{12}$；

(2) $a\div\sqrt{a}$；

(3) $\dfrac{2\sqrt{18}}{\sqrt{45}}$.

分析 (1)(2)先写成“分式”的形式，再分母有理化.

解 (1) $\sqrt{2}\div\sqrt{12}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

(2) $a\div\sqrt{a}=\dfrac{a}{\sqrt{a}}=\dfrac{a\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}=\dfrac{a\sqrt{a}}{a}=\sqrt{a}$.

(3) $\dfrac{2\sqrt{18}}{\sqrt{45}}=\dfrac{2\times3\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.

例 7 如图 20-2-2，在面积为 $2a$ 的正方形 $ABCD$ 中，截得面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ 的直角三角形 ABE. 求 BE 的长.

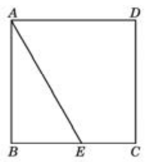


图 20-2-2

解 因为正方形 $ABCD$ 的面积为 $2a$，所以它的边长为 $\sqrt{2a}$. 设 $BE=x$，根据题意，得

$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{2a}=\frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

所以，$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\div\dfrac{\sqrt{2a}}{2}$

$$=\frac{2\sqrt{3}a}{3\sqrt{2a}}=\frac{2\sqrt{3}a\cdot\sqrt{2a}}{3\sqrt{2a}\cdot\sqrt{2a}}$$

$$=\frac{2a\sqrt{6a}}{6a}=\frac{\sqrt{6a}}{3},$$

即 $BE=\dfrac{\sqrt{6a}}{3}$.

48 第20章 二次根式

例 6 是运用分母有理化进行二次根式的除法运算. 在教学过程中，可以根据学生的情况，展示或分享不同的解法，呈现算法多样性. 例如，例 6(1)还可以按如下解法计算：

解法 1：$\sqrt{\dfrac{2}{12}}=\sqrt{\dfrac{1}{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

解法 2：$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

例 7 是二次根式除法在实际问题中的应用，对例 7 求解时也可以这样算：

$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}a\div\frac{\sqrt{2a}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}a\times\frac{2}{\sqrt{2a}}$$

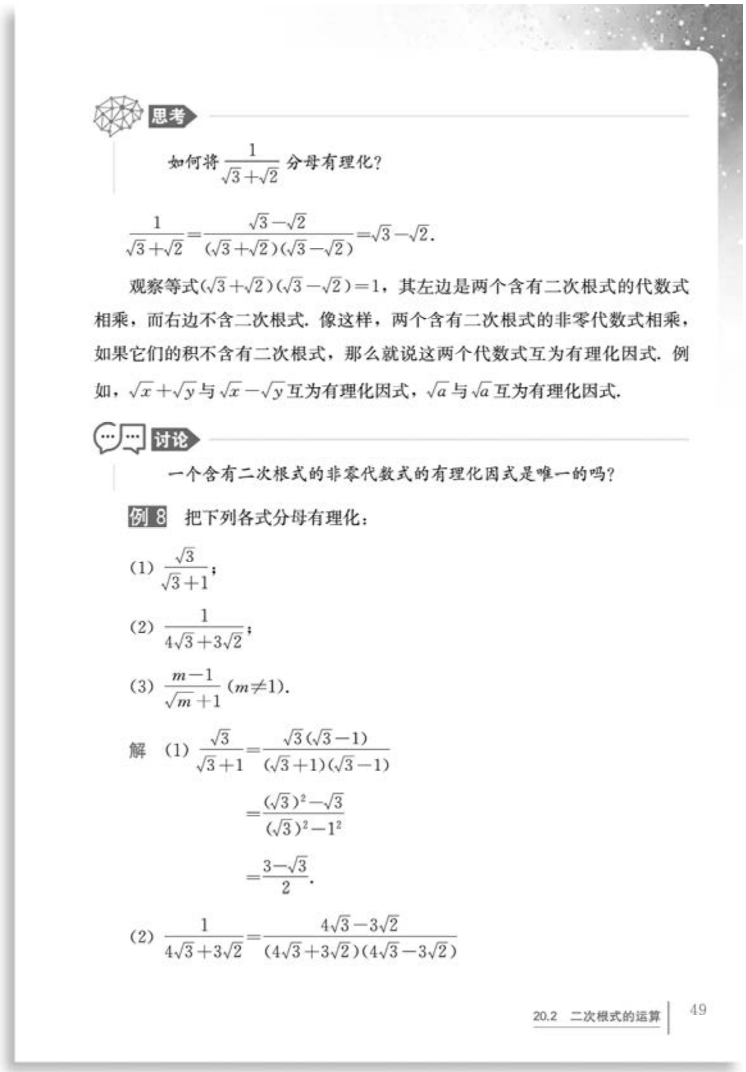
$$=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{3}{2a}}$$

$$=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{3\cdot2a}{(2a)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{6a}}{3}.$$

思考　将分母中含有两个二次根式的代数式进行分母有理化.

讨论　一个含有二次根式的非零代数式的有理化因式是不唯一的. 例如，$\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 的有理化因式还可以是 $2\sqrt{x}-2\sqrt{y}$ 等.



思考

如何将 $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 分母有理化？

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

观察等式 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1$，其左边是两个含有二次根式的代数式相乘，而右边不含二次根式. 像这样，两个含有二次根式的非零代数式相乘，如果它们的积不含有二次根式，那么就说这两个代数式互为有理化因式. 例如，$\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 与 $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 互为有理化因式，$\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{a}$ 互为有理化因式.

讨论

一个含有二次根式的非零代数式的有理化因式是唯一的吗？

例 8　把下列各式分母有理化：

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$；

(2) $\dfrac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$；

(3) $\dfrac{m-1}{\sqrt{m}+1}\ (m\neq 1)$.

解　(1)
$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{(\sqrt{3})^2-\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

(2)
$$\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{(4\sqrt{3}+3\sqrt{2})(4\sqrt{3}-3\sqrt{2})}$$

20.2　二次根式的运算　49

$$=\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{(4\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{30}.$$

(3) 已知式中 $m\neq1$，所以

$$\frac{m-1}{\sqrt{m}+1}=\frac{(m-1)(\sqrt{m}-1)}{(\sqrt{m}+1)(\sqrt{m}-1)}$$

$$=\frac{(m-1)(\sqrt{m}-1)}{m-1}$$

$$=\sqrt{m}-1.$$

例 8 中的(3)还可以按如下方式解答：

$$\frac{m-1}{\sqrt{m}+1}=\frac{(\sqrt{m}+1)(\sqrt{m}-1)}{\sqrt{m}+1}=\sqrt{m}-1,$$

且此解题过程中 m 可以等于 1.

课堂练习 20.2(3)

1. 把下列各式分母有理化：

(1) $\frac{2}{\sqrt{3}}$；　(2) $\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{18}}$；　(3) $\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$.

2. 写出下列各式的一个有理化因式：

$1-\sqrt{2}$、$\sqrt{a-1}$、$\sqrt{x}-\sqrt{y}$、$2\sqrt{u}+\sqrt{v}$.

3. 把下列各式分母有理化：

(1) $\frac{2}{1-\sqrt{3}}$；　(2) $\frac{1}{1-\sqrt{n}}$；　(3) $\frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-3}$.

50　第20章　二次根式

例 8 可引导学生学会选择适当的有理化因式. 例 8(3)提供了两种解法，题中的条件 $m\neq1$ 是确保所乘的有理化因式不为 0. 后一种解法不需要这个条件，但要指出解题过程中利用了隐含条件 $m\geqslant0$.

课堂练习 20.2(3)

1. (1) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2) $\frac{\sqrt{10}}{18}$.

(3) $\frac{\sqrt{a^2+1}}{a^2+1}$.

2. $1+\sqrt{2}$、$\sqrt{a-1}$、$\sqrt{x}+\sqrt{y}$、$2\sqrt{u}-\sqrt{v}$.（答案不唯一）

3. (1) $-\sqrt{3}-1$.

(2) $\frac{1+\sqrt{n}}{1-n}$.

(3) $\frac{4x+9+12\sqrt{x}}{4x-9}$.

（以下分析对应课本第 51～52 页）

本课教学重点

会用二次根式的加、减、乘、除运算法则进行简单的四则运算，会解决含有二次根式的代数式求值的问题.

本课教学建议

学生在解含有二次根式的不等式的过程中，当两边同时除以含有二次根式的式子时，常常会忽视除式是负值的情况而导致计算错误，需要在教学中加以关注.

例 9 计算：

(1) $\frac{10}{\sqrt{5}}-\frac{4}{\sqrt{5}-1}$；

(2) $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$.

解 (1) $\frac{10}{\sqrt{5}}-\frac{4}{\sqrt{5}-1}=\frac{10\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}-\frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$

$$=\frac{10\sqrt{5}}{5}-\frac{4(\sqrt{5}+1)}{4}$$

$$=2\sqrt{5}-(\sqrt{5}+1)$$

$$=\sqrt{5}-1.$$

(2) $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=(\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$

$$=a+2+\frac{1}{a}.$$

例 10 已知 $x=3-2\sqrt{2}$，求 $\frac{x^2-6x+2}{x-3}$ 的值.

分析 可以把 $x=3-2\sqrt{2}$ 直接代入计算，但把 $(x-3)$ 看作整体代入，比较简便.

解 因为 $x-3=-2\sqrt{2}$，所以

$$\frac{x^2-6x+2}{x-3}=\frac{(x-3)^2-7}{x-3}$$

$$=\frac{(-2\sqrt{2})^2-7}{-2\sqrt{2}}$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

例 11 解方程：$\sqrt{3}-2\sqrt{6}x=-2\sqrt{2}$.

解 由 $\sqrt{3}-2\sqrt{6}x=-2\sqrt{2}$，得

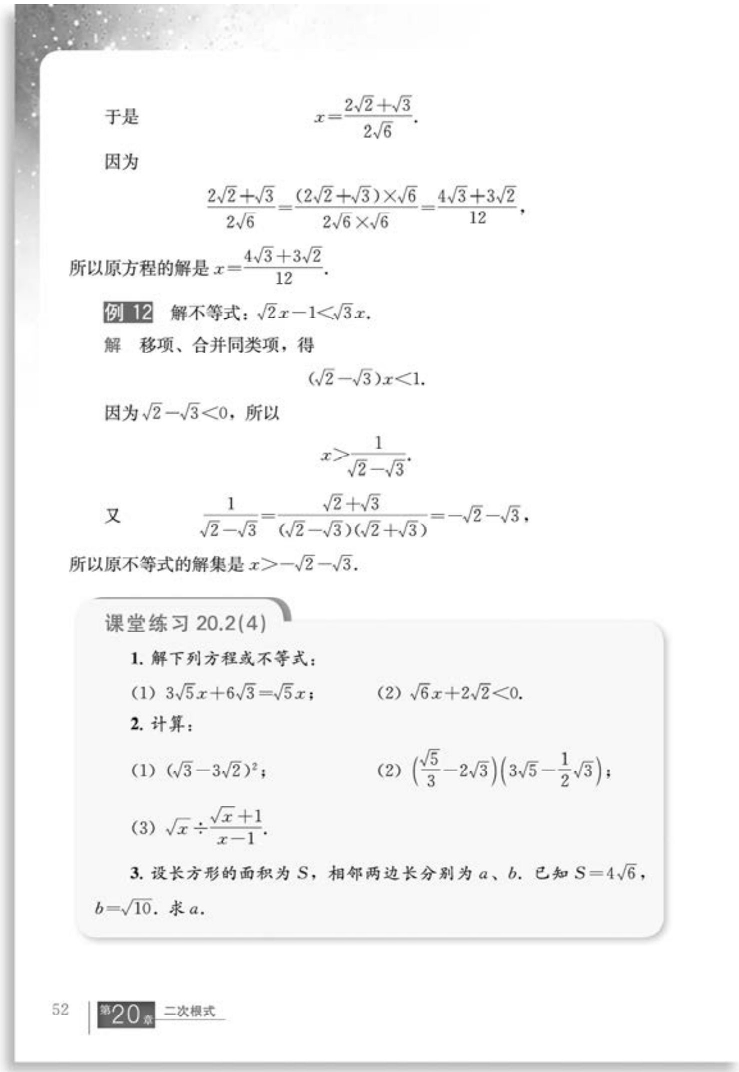
$$-2\sqrt{6}x=-2\sqrt{2}-\sqrt{3}.$$

本课内容分析

例 9 是简单的二次根式混合运算. 例 9(2)可以让学生体会整式的乘法公式在二次根式乘法运算中仍然适用.

例 10 是求含二次根式的代数式的值，把 $x=3-2\sqrt{2}$ 直接代入计算是求代数式的值的基本方法.

例 11 是二次根式混合运算在解方程中的运用.



于是 $$x=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}.$$

因为

$$\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})\times\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{12},$$

所以原方程的解是 $x=\frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{12}$.

例 12 解不等式：$\sqrt{2}x-1<\sqrt{3}x$.

解 移项、合并同类项，得

$$(\sqrt{2}-\sqrt{3})x<1.$$

因为 $\sqrt{2}-\sqrt{3}<0$，所以

$$x>\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}.$$

又 $$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=-\sqrt{2}-\sqrt{3},$$

所以原不等式的解集是 $x>-\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

课堂练习 20.2(4)

1. 解下列方程或不等式：

(1) $3\sqrt{5}x+6\sqrt{3}=\sqrt{5}x$； (2) $\sqrt{6}x+2\sqrt{2}<0$.

2. 计算：

(1) $(\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2$； (2) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$；

(3) $\sqrt{x}\div\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$.

3. 设长方形的面积为 S，相邻两边长分别为 a、b. 已知 $S=4\sqrt{6}$，$b=\sqrt{10}$. 求 a.

52 第20章 二次根式

例 12 是二次根式混合运算在解不等式中的运用，需要注意未知数的系数的符号.

课堂练习 20.2(4)

1. (1) $x=-\frac{3}{5}\sqrt{15}$.

(2) $x<-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. (1) $21-6\sqrt{6}$.

(2) $8-\frac{37}{6}\sqrt{15}$.

(3) $x-\sqrt{x}$.

3. $a=\frac{4}{5}\sqrt{15}$.

习题 20.2

A

1. 当 n 取 4、6、8、12、16、18 中的哪些数时，$\sqrt{n}$ 和 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式?

2. 计算：

(1) $-\frac{3}{4}\sqrt{5}+\frac{3}{5}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{3}{10}\sqrt{5}$；

(2) $\left(3\sqrt{m}-\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)-\left(\frac{5}{6}\sqrt{m}-\frac{1}{6}\sqrt{2}\right)$.

3. 计算：

(1) $2\sqrt{12}-\sqrt{27}$；　　(2) $3\sqrt{5}-\sqrt{\frac{1}{5}}$；

(3) $\sqrt{32}-\sqrt{18}+\sqrt{2}$；　　(4) $3\sqrt{8}-2\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. 计算：

(1) $3\sqrt{48}\times(-\sqrt{24})$；　　(2) $\sqrt{2x}\cdot\sqrt{x}$；

(3) $\sqrt{\frac{a}{8}}\cdot\sqrt{2}$.

5. 计算：

(1) $2\sqrt{6}\div\sqrt{2}$；　　(2) $5x\div\sqrt{x}$；

(3) $\sqrt{27a}\div\sqrt{3}$.

6. 把下列各式分母有理化：

(1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$；　　(2) $\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{6}}$；

(3) $\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

7. 把下列各式分母有理化：

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$；　　(2) $\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$；

20.2 二次根式的运算 53

习题 20.2

1. 8、18.

2. (1) $\frac{1}{20}\sqrt{5}$.

(2) $\frac{13}{6}\sqrt{m}-\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

3. (1) $\sqrt{3}$.

(2) $\frac{14}{5}\sqrt{5}$.

(3) $2\sqrt{2}$.

(4) $\frac{11}{2}\sqrt{2}-\frac{7}{6}\sqrt{3}$.

4. (1) $-72\sqrt{2}$.

(2) $\sqrt{2}x$.

(3) $\frac{\sqrt{a}}{2}$.

5. (1) $2\sqrt{3}$.

(2) $5\sqrt{x}$.

(3) $3\sqrt{a}$.

6. (1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

(2) $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

(3) $\frac{\sqrt{2x}}{2x}$.

7. (1) $\sqrt{2}+1$.

(2) $\sqrt{a}+1$.

(3) $\sqrt{x}+1$.

8.（1）2.

（2）$8\sqrt{15}+30$.

（3）$-5-2\sqrt{6}$.

9.（1）$x=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{6}$.

（2）$x<2\sqrt{5}+2\sqrt{3}$.

10. $2\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

11. $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$.

(3) $\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$.

8. 计算：

(1) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$；　　(2) $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(5\sqrt{3}+3\sqrt{5})$；

(3) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})\div(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$.

9. 解下列方程或不等式：

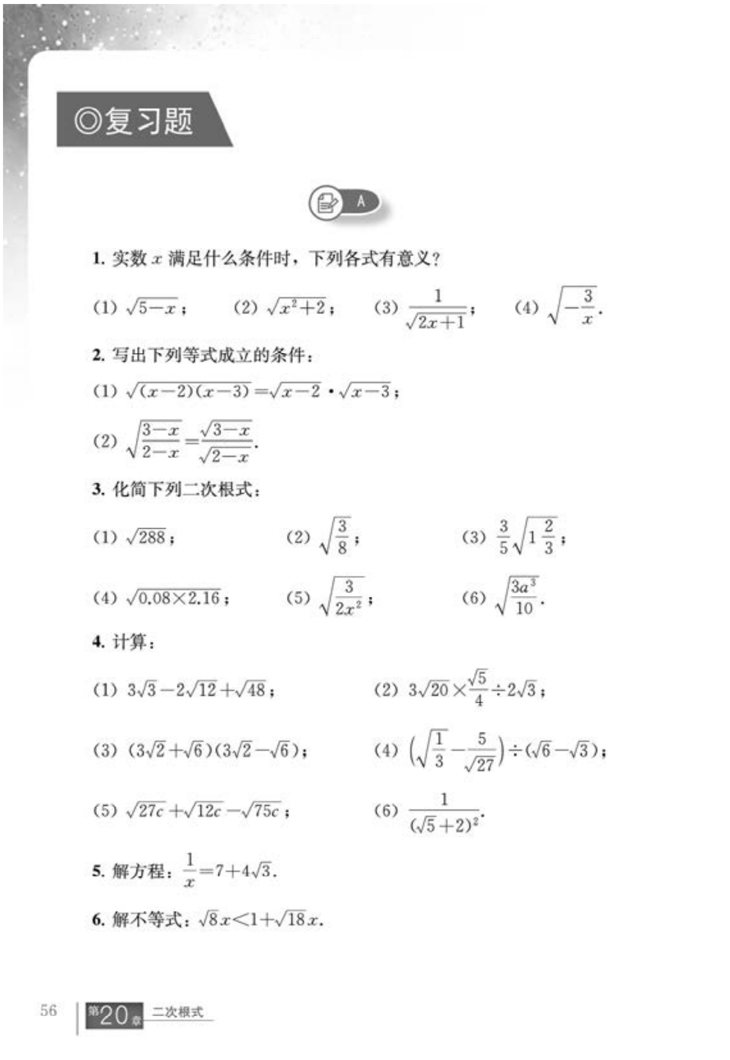
(1) $\sqrt{5}-2\sqrt{3}x=-\sqrt{2}$；　　(2) $\sqrt{3}x+3>\sqrt{5}x-1$.

10. 当 $x=2$ 时，求代数式 $\left(\sqrt{x}+\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)\sqrt{3x}$ 的值.

B

11. 已知 $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$，求 $\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ 的值.

54　第20章　二次根式



◎复习题

A

1. 实数 x 满足什么条件时，下列各式有意义？

(1) $\sqrt{5-x}$；　(2) $\sqrt{x^2+2}$；　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$；　(4) $\sqrt{-\dfrac{3}{x}}$.

2. 写出下列等式成立的条件：

(1) $\sqrt{(x-2)(x-3)}=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-3}$；

(2) $\sqrt{\dfrac{3-x}{2-x}}=\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{2-x}}$.

3. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{288}$；　(2) $\sqrt{\dfrac{3}{8}}$；　(3) $\dfrac{3}{5}\sqrt{1\dfrac{2}{3}}$；

(4) $\sqrt{0.08\times2.16}$；　(5) $\sqrt{\dfrac{3}{2x^2}}$；　(6) $\sqrt{\dfrac{3a^3}{10}}$.

4. 计算：

(1) $3\sqrt{3}-2\sqrt{12}+\sqrt{48}$；　(2) $3\sqrt{20}\times\dfrac{\sqrt{5}}{4}\div2\sqrt{3}$；

(3) $(3\sqrt{2}+\sqrt{6})(3\sqrt{2}-\sqrt{6})$；　(4) $\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}-\dfrac{5}{\sqrt{27}}\right)\div(\sqrt{6}-\sqrt{3})$；

(5) $\sqrt{27c}+\sqrt{12c}-\sqrt{75c}$；　(6) $\dfrac{1}{(\sqrt{5}+2)^2}$.

5. 解方程：$\dfrac{1}{x}=7+4\sqrt{3}$.

6. 解不等式：$\sqrt{8}x<1+\sqrt{18}x$.

56　第20章　二次根式

复习题

1. (1) $x\leqslant5$.

(2) x 为任意实数.

(3) $x>-\dfrac{1}{2}$.

(4) $x<0$.

2. (1) $x\geqslant3$.

(2) $x<2$.

3. (1) $12\sqrt{2}$.

(2) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

(3) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

(4) $\dfrac{6}{25}\sqrt{3}$.

(5) 当 $x>0$ 时，原式$=\dfrac{\sqrt{6}}{2x}$；当 $x<0$ 时，原式$=-\dfrac{\sqrt{6}}{2x}$.

(6) $\dfrac{\sqrt{30a}}{10}a$.

4. (1) $3\sqrt{3}$.

(2) $\dfrac{5}{4}\sqrt{3}$.

(3) 12.

(4) $-\dfrac{2\sqrt{2}+2}{9}$.

(5) 0.

(6) $9-4\sqrt{5}$.

5. $x=7-4\sqrt{3}$.

6. $x>-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

7. $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$.

8. 2. 提示：$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=x-1+3-x=2$.

9. 27 s. 提示：听到 10 次嘀嗒声需要的时间 $t=10\times 2\pi\times\sqrt{\dfrac{1.8}{9.8}}=\dfrac{60}{7}\pi$.

10. 21. 提示：由 $756=2^2\times 3^3\times 7$，化简 $\sqrt{756}=6\sqrt{21}$.

B

7. 已知 $a=\sqrt{3}-1$，求代数式 $\sqrt{a^2+\dfrac{1}{a^2}-2}$ 的值.

8. 设 $1\leqslant x\leqslant 3$，化简：$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$.

9. 落地钟的钟摆摆动一个来回所需要的时间称为一个周期 T，其计算公式为 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，其中 l 表示摆长(单位：m)，$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$. 如果一台落地钟摆长为 1.8 m，它摆动一个来回发出一次嘀嗒声，那么听到 10 次嘀嗒声大约需要多少时间(π 取 3.14，结果精确到 1 s)?

10. 已知 n 是正整数，且 $\sqrt{756n}$ 是整数. 求 n 的最小值.

第 21 章　一元二次方程

一、本章概述

1. 总体要求

一元二次方程可以用来描述许多实际问题中的数量关系，它与一元一次方程和二元一次方程组一样，都是刻画现实世界的重要工具. 一元二次方程的解法、判别式及根与系数的关系在数学中有着广泛的应用. 本章作为先前学习的一元一次方程、一次方程组和不等式知识的延伸和深化，既是学生进一步学习二次函数等其他数学知识必不可少的基础，也是运用数学知识解决实际问题的重要工具.

学习一元二次方程的解法及其应用是本章的重点，而从实际问题的数量关系中构建一元二次方程模型是本章的难点. 通过本章的学习，要培养学生灵活运用因式分解法、配方法和公式法来解数字系数的一元二次方程的技能，并理解配方法的原理. 同时，要着重培养学生在现实情境中根据具体问题建立一元二次方程的能力，并能根据具体问题的实际意义检验方程解的合理性. 此外，学生应掌握利用一元二次方程的判别式判断方程实根的存在性及根的性质. 通过了解一元二次方程的根与系数的关系，知道利用韦达定理解决一些简单的问题. 学生应能运用求根公式分解二次三项式，并能用一元二次方程的相关知识解决实际问题.

2. 课时安排建议

本章共 18 课时，具体课时分配建议如下：

<table>
<tr><th>章节名</th><th>建议课时</th><th>具体课时分配建议</th></tr>
<tr><td>21.1 一元二次方程的概念</td><td>1</td><td>一元二次方程的概念　1 课时</td></tr>
<tr><td rowspan="3">21.2 一元二次方程的解法</td><td rowspan="3">4</td><td>特殊的一元二次方程的解法　2 课时</td></tr>
<tr><td>一般的一元二次方程的解法　1 课时</td></tr>
<tr><td>一元二次方程的求根公式　1 课时</td></tr>
<tr><td>习题课</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>21.3 一元二次方程的判别式</td><td>2</td><td>一元二次方程的判别式　2 课时</td></tr>
</table>

（续表）

章节名	建议课时	具体课时分配建议
21.4 一元二次方程的根与系数的关系	2	一元二次方程的根与系数的关系　2 课时
习题课	1	
21.5 一元二次方程的应用	5	二次三项式的因式分解　1 课时
		列方程解应用题　4 课时
复习与小结	2	

3. 内容编排与特色

本章内容分为五节，分别是“21.1 一元二次方程的概念”“21.2 一元二次方程的解法”“21.3 一元二次方程的判别式”“21.4 一元二次方程的根与系数的关系”和“21.5 一元二次方程的应用”.

“一元二次方程的概念”这一节，以实际问题为背景，引出一元二次方程，归纳出一元二次方程的一般形式，认识一元二次方程的意义，通过让学生观察思考方程中未知数的个数和次数，引导学生联想并类比一元一次方程，以便更好地理解一元二次方程的有关概念. 这样编排，既有利于学生接受并理解新知识，又充分地反映出一元二次方程及其有关概念来源于现实世界，是刻画现实世界的一个有效的数学工具.

在解一元二次方程时，通过对一些具体一元二次方程的特点的剖析，探索其基本解法. 这种呈现方式突出了重点，同时分散了难点. 解一元二次方程的基本思想是“降次”，即将一元二次方程转化为熟悉的一元一次方程. 这种化归思想在解此类方程时具有重要作用. “一元二次方程的解法”一节中，教科书主要讨论了用因式分解法、配方法和公式法解简单的数字系数的一元二次方程. 与“二期课改”教科书不同，教科书在特殊的一元二次方程的解法介绍上有所调整，首先介绍因式分解法，然后通过求平方根来求解. 但教科书并未提及“开平方法”，在教学中不建议使用该名称. 在介绍一元二次方程的解法时，教科书注重展现数学的思维过程. 例如，在讲配方法时，结合具体方程以文字概述形式详细写出每一步的求解过程，并强调关键步骤的目的. 这样既可以使学生明白其解法中的道理，体会其方法，加深对具体数学知识和数学方法的理解和掌握，又加大了学生探究解决问题的力度.

一元二次方程的判别式是通过对求根公式的推导得出的，具有普遍意义，用于判断方程的根的情况. 与“二期课改”教科书相比，教科书新增了一元二次方程的根与系数的关系的内容，并对此进行了探究，得出了韦达定理. 在了解韦达定理的直接应用后，还介绍了利用整体代入法求关于两根的对称式的值（关于两个字母的对称式指的是如果将这两个字母交换，式子不变，如 a^2b+ab^2 是关于 a、b 的对称式），以及利用韦达定理求已知和与积的两个未知数的值.

在应用方面，教科书首先基于韦达定理，推导出用一元二次方程的求根公式分解二次三项式的方法. 该过程运用了代数推理，展示了数学的逻辑思维方法. 随后，教科书安排了列一元二次方程和可化为一元二次方程的分式方程解应用题. 这些应用问题与生活紧密相关，凸显了方程在解决实际问题中的广泛性和有效性.

本章的特色在于其内容始终与实际情境相结合，使学生充分感受在实际问题中构建一元二次方程模型并回到实际问题中进行解释、检验和应用的过程. 通过这种方式，学生能够深刻体会一元二次方程是刻画现实世界的一个有效的数学工具，并认识到数学的实用价值.

4. 教学提示

本章所讨论的一元二次方程与学生已学习过的一元一次方程相比，它的特殊性在于未知数的次数是2，因此求解它的基本思路是将面临的新问题转化为熟悉的问题. 教学时，应为学生提供能主动地思考、探究、交流的内容，使学生认识到“降次”的合理性. 在讨论一元二次方程的基本解法时，要把重点放在分析方程的形式特征上，使学生理解各种解法及算理，体会“降次”在解一元二次方程时的作用. 一元二次方程的求解是本章最基础的知识，也是以后学习的必备技能. 教学中，要安排适量的、有针对性的训练，但不能停留在简单模仿与机械记忆的层次上，而要有意识地揭示解法的关键过程，加深学生对相关结论的理解. 例如，感悟用字母表示的求根公式的意义，体会算术与代数的差异. 通过这些方式，促进学生在主动学习、探究学习的过程中获取知识，发展能力，体会数学思想方法.

一元二次方程的知识在我们日常生活中随处可见，与许多实际问题都有联系. 教学中，要重视引导学生经历对实际问题中的量的分析过程，借助用字母表达的未知数，建立一元二次方程. 同时，引导学生正确理解实际问题情境，在分析问题、解决问题的过程中感受一元二次方程的应用. 为了突破本章教学难点，切实提高利用一元二次方程解决实际问题的能力，教师可用图形、表格等不同的形式引导学生分析题意，提炼数学信息，并将相关语言翻译为数学语言，进而确定相关量之间的数量关系，最终建立一元二次方程或可化为一元二次方程的分式方程.

一元二次方程的判别式和根与系数的关系及用求根公式对二次三项式进行因式分解，反映了根的各种情况与系数之间的内在联系，因此在教学中，要紧紧把握住“系数”“根”及“关系”这三个要点，使学生能理解，并会灵活应用结论.

5. 评价建议

关注学生对一元二次方程的基本知识和技能方面的掌握情况. 学生应理解一元二次方程的概念；能够根据一元二次方程的特征，灵活选择因式分解法、配方法、公式法解数字系数的一元二次方程；会用一元二次方程的判别式判别方程的根的情况；知道利用一元二次方程的根与系数的关系可以解决一些简单的问题；能够列出一元二次方程解决简单的实际问题.

关注学生对一元二次方程作为数学工具解决实际问题的认识程度. 学生应能够理解实际问题的背景和条件，准确地识别问题中的已知量、未知量和其他相关量，确定它们之间的数学关系，建立一元二次方程；能够根据具体问题的实际意义，对所得的解进行合理的解释和验证. 应考查学生是否能够将实际问题抽象化，运用数学语言和概念进行建模和分析，思考过程是否清晰有条理，是否能够清晰地表达思考过程.

二、教科书分析与教学建议

21.1　一元二次方程的概念

本节教学目标

（1）了解一元二次方程概念的形成过程；理解一元二次方程的有关概念，会把一元二次方程化成一般形式，会指出一元二次方程中各项的名称及其系数.

（2）理解方程的根的意义，会判断一个数是不是一元二次方程的根；知道一元二次方程的根的个数与一元一次方程的不同.

（以下分析对应课本第 59～61 页）

本课教学重点

理解一元二次方程的概念，知道一元二次方程的根及其个数.

本课教学建议

（1）对一元二次方程概念的教学要注意联系实际，要从现实生活中的实例来引入.

（2）理解一元二次方程的概念要抓住两条：第一要强调“整式方程”这个前提，第二要突出“只含有一个未知数，且未知数的最高次数是 2”这个区别于其他方程的实质.

（3）一元二次方程的一般形式为 $ax^2+bx+c=0$，必须强调 $a\neq0$. 如果 $a=0$，那么方程变形为 $bx+c=0$，这就不是一元二次方程了. 反之，如果 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程，那就一定含有 $a\neq0$ 这个条件.

21.1 一元二次方程的概念

我们已经学过一元一次方程的解法. 在此基础上，可以解决一些实际问题. 但是，基于实际问题列出的方程并不限于一元一次方程.

问题 一块长方形绿地的面积为 1 200 m^2，且已知长比宽多 10 m. 问：长和宽各为多少?

分析 设这块长方形绿地的宽为 x m，它的长就是$(x+10)$m. 因为绿地面积为 1 200 m^2，所以 $x(x+10)=1\,200$.

去括号，得

$$x^2+10x=1\,200.$$

在上面的等式中，有一个用字母 x 表示的未知数，可知它是一个关于 x 的一元方程；等号的两边都是整式，这样的方程是一个整式方程，其中未知数 x 的最高次数是 2. 求出这个方程中未知数 x 的值，就可以求得长方形绿地的宽.

一般地，只含有一个未知数，且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫作**一元二次方程**. 一元二次方程的一般形式是

$$ax^2+bx+c=0\ （a、b、c\ 为已知数，且\ a\neq 0），$$

其中 ax^2 叫作二次项，a 是二次项系数；bx 叫作一次项，b 是一次项系数；c 叫作常数项.

例如，$(x+5)^2=12$，$2y^2+3y=-1$，$x^2+5x=0$ 都是一元二次方程，必要时可以通过移项及化简把它们化成一般形式.

上述绿地面积问题中出现的方程 $x^2+10x=1\,200$，可通过移项化成一般形式 $x^2+10x-1\,200=0$，其中二次项系数 a 是 1，一次项系数 b 是 10，常数项 c 是 $-1\,200$.

例 1 把下列一元二次方程化成一般形式，并写出方程中的各项与各项的系数：

(1) $x(x-1)=3x-4$；

本课内容分析

以实际问题为背景，引入一元二次方程的概念，旨在展现需要进一步学习方程的知识以满足实际应用的需求.

根据题意列出方程后，可引导学生比较这个方程与先前学过的一元一次方程的异同，从而认识一元二次方程的基本特征.

由于已学过整式的概念，因此，本课时先出现整式方程的概念，然后据此定义一元二次方程. 这里可对整式方程适当解说，但不必要求学生死记硬背.

例 1 旨在帮助学生会把一元二次方程化成一般形式，同时认识一元二次方程中的项和系数.

确定一元二次方程中的各项与各项的系数，是对确定的一元二次方程的一般形式而言的. 由于一元二次方程的一般形式并不是唯一的，因此其各项与各项的系数也是不唯一的. 例如，例 1(1)中的一元二次方程的一般形式也可以化为 $-x^2+4x-4=0$，针对该一般形式，它的二次项系数是 -1，一次项系数是 4，常数项是 -4.

例 2 一方面是复习方程的根的概念以及判断一个数是不是方程的根的方法；另一方面是让学生感知一元二次方程根的个数与一元一次方程不同. 要提示学生注意这个方程的根不止一个.

(2) $y+\sqrt{3}=\sqrt{2}(y^2+2)$.

解 (1) 去括号，得 $x^2-x=3x-4$.

移项并合并同类项，得 $x^2-4x+4=0$.

因此，方程中的二次项是 x^2，即 $1\cdot x^2$(1 通常省略不写)，所以二次项系数是 1；一次项是 $-4x$，一次项系数是 -4；常数项是 4.

(2) 去括号，得 $y+\sqrt{3}=\sqrt{2}y^2+2\sqrt{2}$.

移项，得 $-\sqrt{2}y^2+y+\sqrt{3}-2\sqrt{2}=0$.

因此，方程中的二次项是 $-\sqrt{2}y^2$，二次项系数是 $-\sqrt{2}$；一次项是 y，一次项系数是 1；常数项是 $\sqrt{3}-2\sqrt{2}$.

满足方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$) 的实数 x 叫作这个方程的实数根(或者实数解)，简称实根或者根. 对于一个一元二次方程，可以依据根的意义，判断一个未知数的值是不是这个方程的根.

例 2 判断 -4、$\frac{1}{2}$、2 是不是一元二次方程 $x^2+2x-8=0$ 的根.

解 把 $x=-4$ 代入方程 $x^2+2x-8=0$ 的左边，得左边的值为

$$(-4)^2+2\times(-4)-8=0,$$

而右边的值为 0.

因为方程左右两边的值相等，所以 $x=-4$ 是这个一元二次方程的根.

把 $x=\frac{1}{2}$ 代入方程 $x^2+2x-8=0$ 的左边，得左边的值为

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{1}{2}-8=-6\frac{3}{4},$$

而右边的值为 0.

因为方程左右两边的值不相等，所以 $x=\frac{1}{2}$ 不是这个一元二次方程的根.

类似地，把 $x=2$ 代入方程的左边，发现方程左右两边的值相等，可知 $x=2$ 也是这个一元二次方程的根.

60 第 21 章 一元二次方程

课堂练习 21.1

1. 判断下列方程哪些是一元二次方程：

(1) $x^2-16=0$；

(2) $3y^2-4y=0$；

(3) $x-\frac{1}{x}=0$；

(4) $\sqrt{3}x^2-\frac{1}{3}x+1=0$；

(5) $(x+3)(x-3)+4=0$.

2. 将下列一元二次方程化成一般形式，并分别指出它们的二次项系数、一次项系数和常数项：

(1) $\frac{1}{5}x^2+1=3x$；

(2) $\sqrt{3}y=\sqrt{5}y^2$；

(3) $2x(x-1)=3(x+5)-4$；

(4) $5x^2-mx+n=0$（m、n 是已知数）.

3. 当 m 满足什么条件时，方程 $mx^2-3x=x^2-mx+2$ 是关于 x 的一元二次方程？

习题 21.1

A

1. 判断下列方程是不是一元二次方程，是的在括号里打“√”，不是的在括号里打“×”：

(1) $1-2x^2=x$； （　）

(2) $3x^2-\sqrt{2}x=7$； （　）

(3) $x^2+\frac{1}{2x^2}=0$； （　）

(4) $(3x-2)(x+6)=3x^2-7$. （　）

课堂练习 21.1

1. (1)(2)(4)(5).

2. (1) $\frac{1}{5}x^2-3x+1=0$，其二次项系数是$\frac{1}{5}$，一次项系数是-3，常数项是 1.

(2) $\sqrt{5}y^2-\sqrt{3}y=0$，其二次项系数是 $\sqrt{5}$，一次项系数是$-\sqrt{3}$，常数项是 0.

(3) $2x^2-5x-11=0$，其二次项系数是 2，一次项系数是-5，常数项是-11.

(4) $5x^2-mx+n=0$，其二次项系数是 5，一次项系数是$-m$，常数项是 n.

(答案不唯一)

3. $m\neq1$.

习题 21.1

1. (1) √.

(2) √.

(3) ×.

(4) ×.

2. $2x^2-3x+5=0$，2，-3，5；

$x^2-2x-1=0$，1，-2，-1；

$2x^2-9x-14=0$，2，-9，-14；

$(1-\sqrt{2})x^2-(1+\sqrt{2})x=0$，$1-\sqrt{2}$，$-1-\sqrt{2}$，0.

（答案不唯一）

3. 是，理由略.

4. 答案不唯一，如 $x^2-x=0$，$-x^2-x+2=0$ 等.

提示：对于 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，a、b、c 的取值满足 $a+c=1$，$b=-1$ 即可.

2. 填表：

把下列一元二次方程化成一般形式，并填写各项的系数和常数项：

方程	一般形式	二次项系数	一次项系数	常数项
$5-3x+2x^2=0$				
$x(x-2)=1$				
$(x-2)^2=(3x+2)(x-5)$				
$(1-\sqrt{2})x^2=(1+\sqrt{2})x$				

B

3. $x=-\dfrac{3}{2}$是不是关于 x 的一元二次方程 $2x^2-(2a-3)x-3a=0$ 的根？为什么？

4. 写出一个一元二次方程，使这个方程的一个根是 1，且它的一次项系数为-1；并写出你构造这个方程的方法.

62　第21章　一元二次方程

21.2　一元二次方程的解法

本节教学目标

（1）能用因式分解法解一些特殊的一元二次方程.

（2）能通过求平方根来解一些特殊的一元二次方程.

（3）理解配方的思路，能利用配方法解一元二次方程.

（4）经历一元二次方程求根公式的推导过程，理解公式法，会利用公式法解一元二次方程.

（以下分析对应课本第 63～66 页）

本课教学重点

用因式分解法解一些特殊的一元二次方程.

本课教学建议

（1）因式分解法是建立在对一元二次方程的一般形式左边的二次三项式可进行因式分解的基础上求解方程，要重视引导学生总结归纳因式分解法解一元二次方程的方法. 可以选择不同类型的一元二次方程进行示范，并强调如何提取公因式、如何运用十字相乘法、如何使用乘法公式等.

（2）解形如 $ax^2+bx=0(a\neq 0)$ 的方程时，不能把方程中的公因式 x 约去，否则就会丢掉一个根 $x=0$. 课堂练习 21.2(1)第 3 题中小海的解法就是犯了这个错误.

本课内容分析

由方程 $x(x+10)=0$，得方程 $x=0$ 或 $x+10=0$，再解这两个一次方程得到原方程的根，其依据是“$A\cdot B=0$”等价于“$A=0$ 或 $B=0$”. 要讲明两者可以相互推出，以此说明方程变形前后同解(但不提出“同解原理”).

例 1 引导学生探索形如 $ax^2+bx=0(a\neq 0)$ 的方程的解法，体验“因式分解”是“降次”的有效方法.

21.2 一元二次方程的解法

1. 特殊的一元二次方程的解法

怎样解第 21.1 节的“问题”中出现的一元二次方程 $x^2+10x=1\,200$ 呢?

我们从常数项为 0 的特殊形式入手，讨论怎样解一元二次方程.

问题 1 怎样解方程 $x^2+10x=0$? ①

我们已经学习过一元一次方程的解法，那么方程①能否转化为一元一次方程求解呢?

观察方程①，其右边为 0，左边可以因式分解，于是这个方程可变形为

$$x(x+10)=0.$$

此时，这个方程的左边是两个因式的积，右边是 0.

我们知道，如果两个因式的积等于 0，那么这两个因式中至少有一个等于 0；反之，如果两个因式中至少有一个等于 0，那么这两个因式的积也等于 0.

> 当 $A\cdot B=0$ 时，必有 $A=0$ 或 $B=0$；反之，当 $A=0$ 或 $B=0$ 时，必有 $A\cdot B=0$.

由此得 $x=0$ 或 $x+10=0$.

解得 $x=0$ 或 $x=-10$.

所以，原方程的根是 $x_1=0$，$x_2=-10$.

> 未知数为 x 的一元二次方程的两个根通常用 x_1、x_2 表示.

例 1 解下列方程:

(1) $5x^2-4x=0$;

(2) $2x(1-x)=3(1-x)$.

解 (1) 将方程的左边因式分解，得

$$x(5x-4)=0.$$

由此得 $x=0$ 或 $5x-4=0$.

解得 $x=0$ 或 $x=\frac{4}{5}$.

所以，原方程的根是 $x_1=0$，$x_2=\frac{4}{5}$.

21.2 一元二次方程的解法 63

(2) 通过移项，原方程可变形为

$$2x(1-x)-3(1-x)=0.$$

将方程的左边因式分解，得

$$(1-x)(2x-3)=0.$$

由此得 $1-x=0$ 或 $2x-3=0$.

解得 $x=1$ 或 $x=\frac{3}{2}$.

所以，原方程的根是 $x_1=1$，$x_2=\frac{3}{2}$.

可以发现，上述解法中，通过因式分解，把一元二次方程化成两个一次因式的积等于 0 的形式，从而把解一元二次方程的问题转化为解一元一次方程的问题.

像上面这样解一元二次方程的方法叫作因式分解法.

因式分解法适用于解某些特殊的一元二次方程.

例 2 解下列方程：

(1) $x^2-7x+12=0$；

(2) $2y(y-2)=y^2+5$；

(3) $3(x-2)=5(x-2)^2$.

解 (1) 将方程的左边因式分解，得

$$(x-4)(x-3)=0.$$

由此得 $x-4=0$ 或 $x-3=0$.

解得 $x=4$ 或 $x=3$.

所以，原方程的根是 $x_1=4$，$x_2=3$.

(2) 整理原方程，得

$$y^2-4y-5=0.$$

将方程的左边因式分解，得

$$(y-5)(y+1)=0.$$

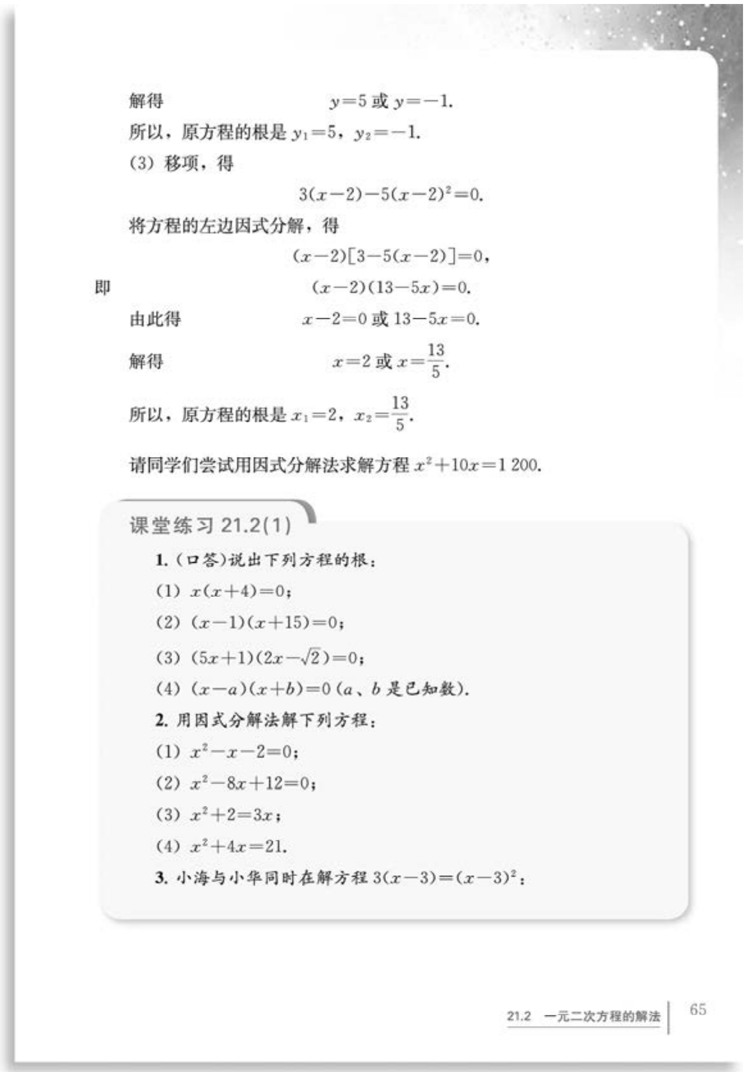
由此得 $y-5=0$ 或 $y+1=0$.

64 第21章 一元二次方程

例 1(2)的解题过程中体现了整体思想.

例 2 是用因式分解法解一些特殊的一元二次方程，引导学生归纳适合用因式分解法求解的方程的基本特征.

用因式分解法解一元二次方程时，方程的一边能够分解成两个一次因式，另一边必须是 0.



解得　　　　　　　　$y=5$ 或 $y=-1$.

所以，原方程的根是 $y_1=5$，$y_2=-1$.

(3) 移项，得

$$3(x-2)-5(x-2)^2=0.$$

将方程的左边因式分解，得

$$(x-2)[3-5(x-2)]=0,$$

即　　　　　　　　$(x-2)(13-5x)=0.$

由此得　　　　　　$x-2=0$ 或 $13-5x=0$.

解得　　　　　　　$x=2$ 或 $x=\frac{13}{5}$.

所以，原方程的根是 $x_1=2$，$x_2=\frac{13}{5}$.

请同学们尝试用因式分解法求解方程 $x^2+10x=1\ 200$.

课堂练习 21.2(1)

1. (口答)说出下列方程的根：

(1) $x(x+4)=0$；

(2) $(x-1)(x+15)=0$；

(3) $(5x+1)(2x-\sqrt{2})=0$；

(4) $(x-a)(x+b)=0$ (a、b 是已知数).

2. 用因式分解法解下列方程：

(1) $x^2-x-2=0$；

(2) $x^2-8x+12=0$；

(3) $x^2+2=3x$；

(4) $x^2+4x=21$.

3. 小海与小华同时在解方程 $3(x-3)=(x-3)^2$：

21.2　一元二次方程的解法　65

课堂练习 21.2(1)

1. (1) $x_1=0$，$x_2=-4$.

(2) $x_1=1$，$x_2=-15$.

(3) $x_1=-\frac{1}{5}$，$x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(4) $x_1=a$，$x_2=-b$.

2. (1) $x_1=2$，$x_2=-1$.

(2) $x_1=2$，$x_2=6$.

(3) $x_1=2$，$x_2=1$.

(4) $x_1=-7$，$x_2=3$.

3. 小海的解法不正确，第一步就错了，原因略. 小华的解法正确.

（以下分析对应课本第 66～68 页）

本课教学重点

通过求平方根来解一些特殊的一元二次方程.

本课教学建议

（1）对于通过求平方根来解一元二次方程，要让学生明白这种方法是建立在数的开平方的基础上，适用于形如 $ax^2+c=0(a\neq0)$的方程，这里的 x 可以表示一个未知数(如例 3)，也可以表示一个含有未知数的代数式(如例 4).

（2）在“归纳”栏目中，方程 $x^2=0$ 的根是 $x_1=x_2=0$，对于学生而言较难理解. 此时可引导学生将方程看作$(x-0)(x-0)=0$，因此方程的根是 $x_1=x_2=0$. 根的表示要强调表达形式，不要提出重根概念和代数基本定理.

小海：	小华：
两边同除以$(x-3)$，得 $3=x-3$. 解得 $x=6$.	移项，得 $3(x-3)-(x-3)^2=0$. 提取公因式，得$(x-3)(3-x+3)=0$. 由此得 $x-3=0$ 或 $3-x+3=0$. 解得 $x_1=3$，$x_2=6$.

你认为谁的解法正确？正确的请在框内打“√”；不正确的请指出错误的地方及错误原因.

下面，我们继续探讨一元二次方程的解法.

问题 2 怎样解方程 $x^2=1\,200$? ②

分析 根据平方根的定义，可知 x 是 1 200 的平方根，所以解方程②就是求 1 200 的平方根，为此只要将方程两边开平方即可.

解 两边开平方，得 $x=\pm 20\sqrt{3}$.

所以方程②有两个根：$x_1=20\sqrt{3}$，$x_2=-20\sqrt{3}$.

如果我们将方程②改成

$$x^2=-1\,200 \quad ③$$

的形式，这个方程③该怎么解呢？

分析 根据上面的分析，可知“解方程③就是求 $-1\,200$ 的平方根”. 因为负数在实数范围内没有平方根，所以方程③没有实数根.

上述解法中，我们利用了平方根的定义求解相应的方程.

可以像上面这样，直接通过求平方根来解某些特殊的一元二次方程.

例 3 解下列方程：

(1) $9x^2-4=0$； (2) $2x^2+5=0$.

解 (1) 移项，得 $9x^2=4$.

本课内容分析

问题 2 引导学生通过解方程，认识解这类方程与求平方根的联系，由此介绍通过求平方根来解特殊的一元二次方程. 要注意方程的根的表示方式.

例 3 是通过求平方根来解形如 $ax^2+c=0(a\neq 0)$的方程.

两边同除以 9，得 $x^2=\frac{4}{9}$.

两边开平方，得 $x=\pm\frac{2}{3}$.

所以，原方程的根是 $x_1=\frac{2}{3}$，$x_2=-\frac{2}{3}$.

(2) 移项，得 $2x^2=-5$.

两边同除以 2，得 $x^2=-\frac{5}{2}$.

因为任何一个实数的平方不可能是负数，所以原方程没有实数根.

归纳

形如 $ax^2+c=0$（a、c 为已知数，且 $a\neq0$）的一元二次方程有根吗？如果有，你能求出它的根吗？

一元二次方程 $ax^2+c=0$（$a\neq0$）可以变形为 $x^2=-\frac{c}{a}$. 若将 $-\frac{c}{a}$ 记为 d，则原方程转化为 $x^2=d$.

(1) 当 $d>0$ 时，方程有两个不相等的实数根：$x_1=\sqrt{d}$，$x_2=-\sqrt{d}$；

(2) 当 $d=0$ 时，方程有两个相等的实数根：$x_1=x_2=0$；

(3) 当 $d<0$ 时，方程没有实数根.

问题 3 对照方程②的求解过程，你能解方程 $(x+5)^2=12$ 吗？

分析 如果把 $(x+5)$ 看成一个整体，即看成一个未知数 y，那么方程 $(x+5)^2=12$ 就可以看成方程 $y^2=12$.

解 两边开平方，得

$$x+5=2\sqrt{3} \text{ 或 } x+5=-2\sqrt{3}.$$

分别求这两个一元一次方程的根，得

$$x=2\sqrt{3}-5 \text{ 或 } x=-2\sqrt{3}-5.$$

所以，原方程的根是 $x_1=2\sqrt{3}-5$，$x_2=-2\sqrt{3}-5$.

对于解形如 $ax^2+c=0$（$a\neq0$）的方程的步骤进行归纳时，不仅引导学生归纳一般步骤，更重要的是获得对 a、c 的符号与方程根的情况的关系的正确认识.

问题 3 引导学生对形如 $ax^2+c=0$（$a\neq0$）的方程的解法进行推广运用，探讨形如 $a(x+b)^2+c=0$（$a\neq0$）的方程的解法.

例 4 解下列方程：

(1) $(2x-5)^2=9$；　　(2) $2(x+3)^2-49=0$.

解 (1) 两边开平方，得

$$2x-5=3 \text{ 或 } 2x-5=-3.$$

解得　$x=4$ 或 $x=1$.

所以，原方程的根是 $x_1=4$，$x_2=1$.

(2) 原方程可化为

$$(x+3)^2=\frac{49}{2}.$$

两边开平方，得

$$x+3=\frac{7}{2}\sqrt{2} \text{ 或 } x+3=-\frac{7}{2}\sqrt{2}.$$

解得　$x=\frac{7}{2}\sqrt{2}-3$ 或 $x=-\frac{7}{2}\sqrt{2}-3$.

所以，原方程的根是 $x_1=\frac{7}{2}\sqrt{2}-3$，$x_2=-\frac{7}{2}\sqrt{2}-3$.

课堂练习 21.2(2)

1. (口答)说出下列方程的根：

(1) $x^2=144$；　(2) $x^2-\frac{25}{36}=0$；

(3) $5x^2+2=0$；　(4) $64y^2=1$；

(5) $-2y^2+4=0$.

2. 解下列方程：

(1) $\frac{1}{2}x^2-8=0$；　(2) $1-0.1x^2=0$；

(3) $(x+2)^2=25$；　(4) $3(5-x)^2=36$；

(5) $\frac{1}{3}(2x-3)^2=25$.

68 第21章 一元二次方程

课堂练习 21.2(2)

1. (1) $x_1=12$，$x_2=-12$.

(2) $x_1=\frac{5}{6}$，$x_2=-\frac{5}{6}$.

(3) 没有实数根.

(4) $y_1=\frac{1}{8}$，$y_2=-\frac{1}{8}$.

(5) $y_1=\sqrt{2}$，$y_2=-\sqrt{2}$.

2. (1) $x_1=4$，$x_2=-4$.

(2) $x_1=\sqrt{10}$，$x_2=-\sqrt{10}$.

(3) $x_1=3$，$x_2=-7$.

(4) $x_1=2\sqrt{3}+5$，$x_2=-2\sqrt{3}+5$.

(5) $x_1=\frac{5}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}$，$x_2=-\frac{5}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}$.

（以下分析对应课本第 69～72 页）

本课教学重点

理解配方法，能用配方法解一元二次方程.

本课教学建议

（1）配方法的教学是一个难点，要通过具体实例的讲解，帮助学生理解配方的过程，掌握关键步骤.

（2）配方法是以完全平方公式为基础的，当二次项系数为 1 时，配方的关键步骤是“方程两边同加上一次项系数一半的平方”. 对二次项系数不为 1 的一元二次方程，通常先把二次项系数化为 1，再配方. 要让学生知道，配方过程中，方程首先化为二次项系数为 1 的形如 $x^2+px=q$ 的方程，只要方程两边同加一个常数 $\left(\frac{p}{2}\right)^2$，方程的左边 $x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2$ 即可配成一个完全平方式.

本课内容分析

问题 4 引导学生探讨如何把不能直接利用求平方根来解的一元二次方程转化为可以用求平方根来解的方程，引进配方法.

通过对比 x^2+10x 与 $(x+5)^2$ 的展开式的各项和各项的系数，引出在方程 $x^2+10x=12$ 两边同加上 25，即可把方程左边化成完全平方式 $(x+5)^2$，方程右边是常数 37，从而得到配方的概念，这样可把不能直接用求平方根的方法来解的方程化为可用求平方根的方法来解的形式.

2. 一般的一元二次方程的解法

我们知道，第 21.1 节的“问题”中出现的一元二次方程 $x^2+10x=1\,200$ 可以用因式分解法求解，但是，对于下面的方程④，用因式分解法求解就不容易了，需要继续探索一元二次方程的一般解法.

问题 4 怎样解方程 $x^2+10x=12$? ④

我们已经会解“问题 3”中的方程 $(x+5)^2=12$，因为它是 $y^2=d(d\geqslant 0)$ 的形式，可以直接通过开平方求解. 那么，能否将方程 $x^2+10x=12$ 转化为 $y^2=d(d\geqslant 0)$ 的形式呢?

分析 观察方程④的左边 x^2+10x，它与 $(x+5)^2$ 的展开式相差一个常数 25. 如果在方程④的两边同加上一次项系数一半的平方，即 25，那么方程④可化成 $(x+5)^2=37$ 的形式，然后两边开平方求解即可.

解方程④的过程可以表示如下：

原方程	$x^2+10x=12.$
方程的两边同加上 25	$x^2+10x+25=12+25.$
将左边写成完全平方式	$(x+5)^2=37.$
两边开平方	$x+5=\sqrt{37}$ 或 $x+5=-\sqrt{37}.$
解一元一次方程	$x_1=\sqrt{37}-5$，$x_2=-\sqrt{37}-5.$

像这样给 x^2+10x 加上 25 配成完全平方式 $(x+5)^2$ 的过程，简称“配方”.

例 5 解下列方程：

(1) $x^2-2x=4$; (2) $x^2+3x-\frac{7}{4}=0$.

解 (1) 在原方程两边同加上一个数，使方程左边配成完全平方式. 为此，加上 1，原方程可化为

$$x^2-2x+1=4+1,$$

即
$$(x-1)^2=5.$$

两边开平方，得

$$x-1=\sqrt{5} \text{ 或 } x-1=-\sqrt{5}.$$

解得
$$x=1+\sqrt{5} \text{ 或 } x=1-\sqrt{5}.$$

所以，原方程的根是 $x_1=1+\sqrt{5}$，$x_2=1-\sqrt{5}$.

例 5 让学生经历用配方的方法解一元二次方程.

(2) 移项，得

$$x^2+3x=\frac{7}{4}.$$

再在两边同加上一个数，使方程左边配成完全平方式. 为此，加上$\left(\frac{3}{2}\right)^2$，原方程可化为

$$x^2+3x+\frac{9}{4}=\frac{7}{4}+\frac{9}{4},$$

即
$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=4.$$

两边开平方，得

$$x+\frac{3}{2}=2 \text{ 或 } x+\frac{3}{2}=-2.$$

解得
$$x=\frac{1}{2} \text{ 或 } x=-\frac{7}{2}.$$

所以，原方程的根是 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{7}{2}$.

像上面这样，通过“配方”来解一元二次方程的方法，可称为配方法.

请同学们尝试用配方法求解方程 $x^2+10x=1\ 200$.

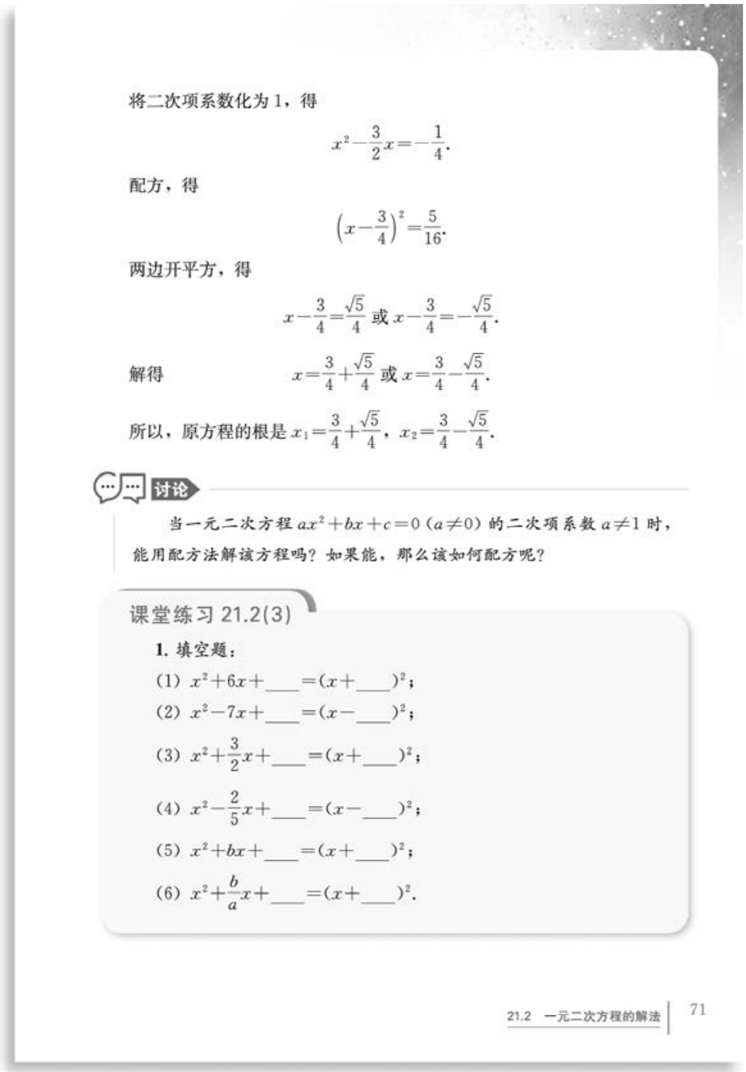
例 6 用配方法解方程：$2x^2-3x+\frac{1}{2}=0$.

例 6 引导学生先把二次项的系数化为 1，然后按例 5 的方法配方.

分析 观察该方程，由于二次项系数为 2，为了便于配方，往往先将二次项系数化为 1，为此将方程的两边同除以 2.

解 移项，得

$$2x^2-3x=-\frac{1}{2}.$$


将二次项系数化为1，得

$$x^2-\frac{3}{2}x=-\frac{1}{4}.$$

配方，得

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{5}{16}.$$

两边开平方，得

$$x-\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{5}}{4}\text{ 或 }x-\frac{3}{4}=-\frac{\sqrt{5}}{4}.$$

解得 $x=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}$ 或 $x=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}$.

所以，原方程的根是 $x_1=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}$，$x_2=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}$.

讨论

当一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的二次项系数 $a\neq1$ 时，能用配方法解该方程吗？如果能，那么该如何配方呢？

课堂练习 21.2(3)

1. 填空题：

(1) x^2+6x+___$=(x+$___$)^2$；

(2) x^2-7x+___$=(x-$___$)^2$；

(3) $x^2+\frac{3}{2}x+$___$=(x+$___$)^2$；

(4) $x^2-\frac{2}{5}x+$___$=(x-$___$)^2$；

(5) x^2+bx+___$=(x+$___$)^2$；

(6) $x^2+\frac{b}{a}x+$___$=(x+$___$)^2$.

21.2 一元二次方程的解法 71

课堂练习 21.2(3)

1.（1）9；3.

（2）$\frac{49}{4}$；$\frac{7}{2}$.

（3）$\frac{9}{16}$；$\frac{3}{4}$.

（4）$\frac{1}{25}$；$\frac{1}{5}$.

（5）$\frac{b^2}{4}$；$\frac{b}{2}$.

（6）$\frac{b^2}{4a^2}$；$\frac{b}{2a}$.

2. 用配方法解下列方程：

(1) $x^2+8x-2=0$；

(2) $x^2-x-1=0$；

(3) $2x^2-5x+1=0$；

(4) $4x^2-2x-1=0$.

3. 乐乐在解方程 $x^2-4x-2=0$ 时出现了错误，他的解答过程如下：

解：① 移项，得 $x^2-4x=-2$.

② 配方，得 $(x-2)^2=2$.

③ 两边开平方，得 $x-2=\sqrt{2}$ 或 $x-2=-\sqrt{2}$.

④ 所以 $x_1=2+\sqrt{2}$，$x_2=2-\sqrt{2}$.

(1) 乐乐的解答过程是从第________步开始出错的，其错误原因是________________；

(2) 请写出正确的解答过程.

3. 一元二次方程的求根公式

问题 5 对于任意给定的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$，如何用配方法求解？

观察前面“配方”的过程，可以知道这种方法对任意的一元二次方程都是适用的. 下面我们利用配方法来解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$.

把原方程的常数项移到方程右边，得

$$ax^2+bx=-c.$$

方程两边同除以二次项系数，得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

2. (1) $x_1=-4+3\sqrt{2}$，$x_2=-4-3\sqrt{2}$.

(2) $x_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(3) $x_1=\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}$，$x_2=\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}$.

(4) $x_1=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}$，$x_2=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}$.

3. (1) ①；常数项移项未变号.

(2) 移项，得 $x^2-4x=2$.

配方，得 $(x-2)^2=6$.

两边开平方，得

$x-2=\sqrt{6}$ 或 $x-2=-\sqrt{6}$.

所以 $x_1=2+\sqrt{6}$，$x_2=2-\sqrt{6}$.

（以下分析对应课本第 72～76 页）

本课教学重点

引导学生经历一元二次方程求根公式的推导过程，掌握一元二次方程的求根公式，会用公式法解一元二次方程.

本课教学建议

（1）讲解求根公式的推导过程时，重点强调每一步的逻辑推理过程，帮助学生理解公式的来源和意义. 对于求根公式的推导过程，只要求学生了解. 在推导过程中，需指出为什么要对 b^2-4ac 的正负进行讨论. 当 $b^2-4ac<0$ 时，涉及负数没有平方根的概念，要求学生能理解. 当 $b^2-4ac=0$ 时，通常先直接求出 $-\dfrac{b}{2a}$ 的值，再写出一元二次方程的相等的两根.

（2）求根公式的推导过程中，当方程化为 $x+\dfrac{b}{2a}=\pm\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}$ 后，在将 $4a^2$ 开方时，不需要对 a 进行讨论. 这是因为当 $a>0$ 时，$x+\dfrac{b}{2a}=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；当 $a<0$ 时，$x+\dfrac{b}{2a}=\mp\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，结果是一致的.

方程两边同加上$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$，把左边配成完全平方式，得

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

整理，得

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

对上面这个方程进行分类讨论：

因为 $a\neq 0$，所以 $4a^2>0$.

(1) 当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，$\frac{b^2-4ac}{4a^2}\geqslant 0$.

通过开平方，可得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}},$$

则

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

即

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

(2) 当 $b^2-4ac<0$ 时，$\frac{b^2-4ac}{4a^2}<0$. 这时，在实数范围内，x 取任何数都不能使方程 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 左右两边的值相等，所以原方程没有实数根.

由上述讨论可以得到：

> 对一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$，当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，它的实数根可以写成 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 的形式. 这个式子叫作一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的求根公式.

在求根公式中，如果 $b^2-4ac=0$，那么 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$，即方程有两个相等的实数根（重根）.

21.2　一元二次方程的解法　73

本课内容分析

配方法是推导求根公式的依据；通过求根公式的推导又进一步巩固了配方法.

这里简明表述了运用配方法解一元二次方程的过程，最后得出了求根公式. 可采用师生共同讨论的方式进行教学；同时教师要适当讲解，必要时可借助具体实例进行说明.

在解一元二次方程时，把方程化成一般形式 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$），如果 $b^2-4ac\geqslant0$，那么把 a、b、c 的值代入求根公式，就可以求得方程的实数根；如果 $b^2-4ac<0$，那么原方程没有实数根. 这种解一元二次方程的方法称为公式法.

公式法适用所有的一元二次方程.

例 7 展示了用公式法解一元二次方程的过程，帮助学生学习和掌握公式法.

例 7 用公式法解下列方程：

(1) $5x^2+6x+1=0$；

(2) $y(y+4)=8$.

解 (1) 原方程中，$a=5$，$b=6$，$c=1$.

$$b^2-4ac=6^2-4\times5\times1=16.$$

用公式法解一元二次方程时，应根据方程的一般形式确定 a、b、c 的值，特别要注意 a、b、c 的符号.

由求根公式，得 $x=\dfrac{-6\pm\sqrt{16}}{2\times5}=\dfrac{-6\pm4}{10}$，

即 $$x=-\frac{1}{5} \text{ 或 } x=-1.$$

所以，原方程的根是 $x_1=-\dfrac{1}{5}$，$x_2=-1$.

(2) 把原方程化成一般形式，得

$$y^2+4y-8=0,$$

其中 $a=1$，$b=4$，$c=-8$.

$$b^2-4ac=4^2-4\times1\times(-8)=48.$$

由求根公式，得 $y=\dfrac{-4\pm\sqrt{48}}{2\times1}=\dfrac{-4\pm4\sqrt{3}}{2}$，

即 $$y=-2+2\sqrt{3} \text{ 或 } y=-2-2\sqrt{3}.$$

所以，原方程的根是 $y_1=-2+2\sqrt{3}$，$y_2=-2-2\sqrt{3}$.

例 8 着重指出用公式法解一元二次方程时，一定要先把方程化为一般形式，并要注意过程的表达和计算的正确性.

例 8 用公式法解下列方程：

(1) $x^2-2(\sqrt{5}x-3)=1$；

(2) $2x^2+4=-5x$.

74 第21章 一元二次方程

解 (1) 把原方程化成一般形式，得

$$x^2-2\sqrt{5}x+5=0,$$

其中 $a=1$，$b=-2\sqrt{5}$，$c=5$.

$$b^2-4ac=(-2\sqrt{5})^2-4\times1\times5=0.$$

由求根公式，得 $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-2\sqrt{5}}{2\times1}=\sqrt{5}$.

所以，原方程的根是 $x_1=x_2=\sqrt{5}$.

(2) 把原方程化成一般形式，得

$$2x^2+5x+4=0,$$

其中 $a=2$，$b=5$，$c=4$.

$$b^2-4ac=5^2-4\times2\times4=-7<0.$$

所以，原方程没有实数根.

回到第 21.1 节中的“问题”，这块长方形绿地的宽 x 满足方程

$$x^2+10x=1\,200,$$

即

$$x^2+10x-1\,200=0.$$

用公式法解这个方程，得

$$x=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\times1\times(-1\,200)}}{2\times1}=\frac{-10\pm\sqrt{4\,900}}{2}=\frac{-10\pm70}{2},$$

即

$$x_1=30,\ x_2=-40.$$

经检验，在这两个根中，只有 $x_1=30$ 符合实际意义，因此这块长方形绿地的宽为 30 m，它的长为 40 m.

在列方程解决应用问题时，要检验方程的根是否符合实际意义.

讨论

围绕方程 $x^2+10x=1\,200$，我们一共探索了几种解法？你能说说这几种解法各自的特点吗？

21.2 一元二次方程的解法 75

例 8(1)求得 $\Delta=b^2-4ac=0$ 后，就直接计算 $-\dfrac{b}{2a}$ 的值，由此写出方程的根.

课堂练习 21.2(4)

1. (1) $x_1=-2$，$x_2=\dfrac{3}{2}$.

(2) $x_1=\sqrt{3}+\sqrt{7}$，$x_2=\sqrt{3}-\sqrt{7}$.

(3) $x_1=\dfrac{1+\sqrt{145}}{6}$，$x_2=\dfrac{1-\sqrt{145}}{6}$.

(4) 没有实数根.

2. (1) $x_1=x_2=\sqrt{2}$.

(2) $x_1=x_2=\dfrac{2}{3}$.

(3) $x_1=\dfrac{7+\sqrt{13}}{6}$，$x_2=\dfrac{7-\sqrt{13}}{6}$.

(4) $y_1=1+\sqrt{3}$，$y_2=1-\sqrt{3}$.

3. (1) ①；未根据方程的一般形式确定常数项.

(2) 略.

习题 21.2

1. (1) $x_1=11$，$x_2=-11$.

(2) $x_1=4$，$x_2=-4$.

(3) $x_1=5+3\sqrt{2}$，$x_2=5-3\sqrt{2}$.

(4) $y_1=-48$，$y_2=-52$.

课堂练习 21.2(4)

1. 用公式法解下列方程：

(1) $2x^2+x-6=0$； (2) $x^2-2\sqrt{3}x-4=0$；

(3) $\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x=6$； (4) $2x^2+3x+10=8x-1$.

2. 用公式法解下列方程：

(1) $x^2+2=2\sqrt{2}x$； (2) $9x^2-12x+4=0$；

(3) $x(x-5)=(2x-3)^2-6$； (4) $y-\dfrac{y^2-1}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

3. 欢欢在解方程 $x^2-5x=1$ 时出现了错误，她的解答过程如下：

解：① 原方程中，$a=1$，$b=-5$，$c=1$.

② $b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times1=21>0$.

③ 由求根公式，得 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

④ 所以，原方程的根是 $x_1=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$，$x_2=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$.

(1) 欢欢的解答过程是从第________步开始出错的，其错误原因是________________；

(2) 请写出正确的解答过程.

习题 21.2

A

1. 解下列方程：

(1) $x^2=121$； (2) $4x^2-64=0$；

(3) $(x-5)^2=18$； (4) $3(50+y)^2-12=0$.

76 第21章 一元二次方程

2. 用因式分解法解下列方程：

(1) $4x^2-2x=0$；　(2) $x^2+2x-3=0$；

(3) $-x^2+3x+18=0$；　(4) $x^2-12x=4x$.

3. 用配方法解下列方程：

(1) $x^2-4x-21=0$；　(2) $x^2+3x+1=0$；

(3) $3x^2+6x-1=0$；　(4) $\frac{1}{2}x^2-3x-5=0$.

4. 用公式法解下列方程：

(1) $x^2+7x+3=0$；　(2) $2x^2-5x+1=0$；

(3) $-3x^2-5x+7=0$；　(4) $6x^2-3=x$.

B

5. 用适当的方法解下列方程：

(1) $2(x+1)^2=3$；　(2) $\frac{(2x-1)^2}{3}=\frac{1-2x}{4}$；

(3) $4x(x+1)=15$；　(4) $2\sqrt{3}x=\sqrt{2}(x^2+1)$；

(5) $(x+2)^2=-2x$；　(6) $\frac{3}{2}y\left(y-\frac{8}{3}\right)=3y-4$.

6. 解关于 x 的方程：$x^2-4x-k^2=0$（k 是已知数）.

7. 已知二次三项式 x^2-6x+5.

(1) 当 x 为何值时，这个二次三项式的值为零？

(2) 当 x 为何值时，这个二次三项式的值等于 $x+4$ 的值？

8. 三个连续整数中，第一个与第三个整数的平方和正好是 100. 求这三个连续整数.

21.2 一元二次方程的解法 77

2.（1）$x_1=0$，$x_2=\frac{1}{2}$.

（2）$x_1=1$，$x_2=-3$.

（3）$x_1=-3$，$x_2=6$.

（4）$x_1=0$，$x_2=16$.

3.（1）$x_1=-3$，$x_2=7$.

（2）$x_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

（3）$x_1=\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$，$x_2=\frac{-3-2\sqrt{3}}{3}$.

（4）$x_1=3+\sqrt{19}$，$x_2=3-\sqrt{19}$.

4.（1）$x_1=\frac{-7+\sqrt{37}}{2}$，$x_2=\frac{-7-\sqrt{37}}{2}$.

（2）$x_1=\frac{5+\sqrt{17}}{4}$，$x_2=\frac{5-\sqrt{17}}{4}$.

（3）$x_1=\frac{-5+\sqrt{109}}{6}$，$x_2=\frac{-5-\sqrt{109}}{6}$.（4）$x_1=\frac{1+\sqrt{73}}{12}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{73}}{12}$.

5.（1）$x_1=-1+\frac{\sqrt{6}}{2}$，$x_2=-1-\frac{\sqrt{6}}{2}$.（2）$x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{1}{8}$.（3）$x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=-\frac{5}{2}$.

（4）$x_1=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，$x_2=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.（5）$x_1=-3+\sqrt{5}$，$x_2=-3-\sqrt{5}$.（6）$y_1=\frac{2}{3}$，$y_2=4$.

6. $x_1=2+\sqrt{4+k^2}$，$x_2=2-\sqrt{4+k^2}$.

7.（1）5 或 1.（2）$\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$或$\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$.

8. 6、7、8 或-8、-7、-6.

21.3 一元二次方程的判别式

本节教学目标

(1) 会用判别式判断方程的根的情况.

(2) 会根据方程的根的情况判断判别式的值的符号.

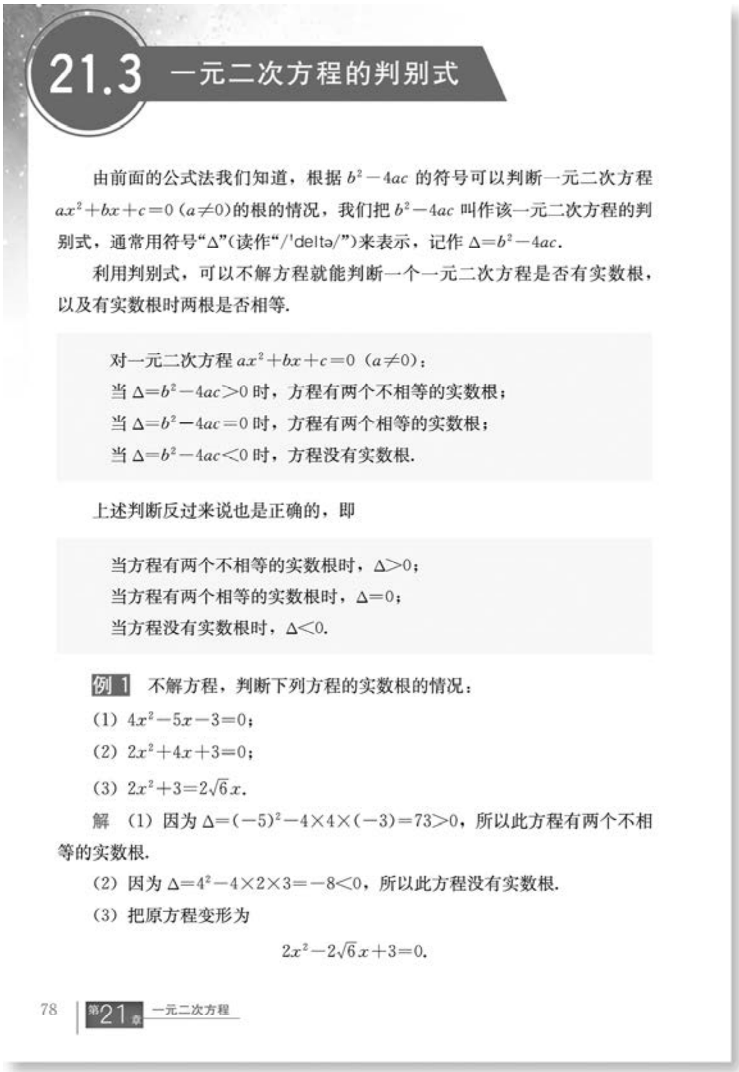
(以下分析对应课本第 78～79 页)

本课教学重点

会用判别式判断方程的根的情况.

本课教学建议

在一元二次方程的判别式的教学中，可以让学生感知一元二次方程的系数与方程的根之间的联系.


21.3 一元二次方程的判别式

由前面的公式法我们知道，根据 b^2-4ac 的符号可以判断一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 的根的情况，我们把 b^2-4ac 叫作该一元二次方程的判别式，通常用符号“Δ”（读作“/ˈdeltə/”）来表示，记作 $\Delta=b^2-4ac$.

利用判别式，可以不解方程就能判断一个一元二次方程是否有实数根，以及有实数根时两根是否相等.

对一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$：
当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；
当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根；
当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根.

上述判断反过来说也是正确的，即

当方程有两个不相等的实数根时，$\Delta>0$；
当方程有两个相等的实数根时，$\Delta=0$；
当方程没有实数根时，$\Delta<0$.

例 1 不解方程，判断下列方程的实数根的情况：

(1) $4x^2-5x-3=0$；

(2) $2x^2+4x+3=0$；

(3) $2x^2+3=2\sqrt{6}x$.

解 (1) 因为 $\Delta=(-5)^2-4\times4\times(-3)=73>0$，所以此方程有两个不相等的实数根.

(2) 因为 $\Delta=4^2-4\times2\times3=-8<0$，所以此方程没有实数根.

(3) 把原方程变形为

$$2x^2-2\sqrt{6}x+3=0.$$

78 第21章 一元二次方程

本课内容分析

例 1 是一元二次方程的判别式的基本运用. 不解方程而要判断一元二次方程根的情况时，应先把方程化为一般形式，然后正确求出 b^2-4ac 的值，最后进行判断.

关于“根据方程的根的情况判断判别式的值的符号”，教科书中指出了它是正确的，但没有给出这个结论的推导过程，这是为了降低学习的难度. 对这个结论的正确性进行说理，可用“反证法”（不作为教学要求）：假设一个一元二次方程有两个不相等的实数根时 $\Delta\leqslant0$，那么由 $\Delta\leqslant0$ 可知这个方程有两个相等的实数根或没有实数根，与所设一元二次方程有两个不相等的实数根相矛盾，所以当一个一元二次方程有两个不相等的实数根时，一定有 $\Delta>0$. 另外两种情况可类似说理.

因为 $\Delta=(-2\sqrt{6})^2-4\times2\times3=0$，所以此方程有两个相等的实数根.

例 2 关于 x 的方程 $x^2+(m-1)x-m=0$（m 是实数）一定有实数根吗？为什么？

解 $\Delta=(m-1)^2-4\times1\times(-m)$

$=m^2+2m+1=(m+1)^2$.

因为 m 是实数，所以 $(m+1)^2\geqslant0$，即 $\Delta\geqslant0$.

所以此方程一定有实数根.

一元二次方程有实数根指的是方程有两个不相等的实数根或有两个相等的实数根.

课堂练习 21.3(1)

1. 不解方程，判断下列方程的实数根的情况：

(1) $64x^2-5x-4=0$；　(2) $\frac{1}{4}x^2-3x+9=0$；

(3) $0.2x^2+0.6x+0.05=0$；　(4) $3x(x-2)=-7$；

(5) $9x^2=4(3x-1)$；　(6) $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x+1=0$.

2. 关于 x 的方程 $mx^2+(m+1)x+1=0$（$m\neq0$）一定有实数根吗？为什么？

例 3 当 m 分别满足什么条件时，关于 x 的方程 $x^2+(m-2)x+\frac{1}{4}m^2-1=0$ 的根的情况如下：

(1) 方程有两个不相等的实数根？

(2) 方程有两个相等的实数根？

(3) 方程没有实数根？

解 $\Delta=(m-2)^2-4\left(\frac{1}{4}m^2-1\right)=-4m+8$.

(1) 当 $\Delta=-4m+8>0$，即 $m<2$ 时，方程有两个不相等的实数根.

(2) 当 $\Delta=-4m+8=0$，即 $m=2$ 时，方程有两个相等的实数根.

例 2 判断含字母系数的一元二次方程的根的情况，含有代数证明的要求. 受学生现有的不等式知识的限制，对这类问题的要求不能过高，通常是利用完全平方式或直接比较大小的方法来确定 Δ 的符号情况.

课堂练习 21.3(1)

1. (1) 有两个不相等的实数根.

(2) 有两个相等的实数根.

(3) 有两个不相等的实数根.

(4) 没有实数根.

(5) 有两个相等的实数根.

(6) 没有实数根.

2. 一定有实数根. 因为 $m\neq0$，$\Delta=(m+1)^2-4m=(m-1)^2\geqslant0$.

（以下分析对应课本第 79～81 页）

本课教学重点

会根据方程的根的情况确定方程中一个字母系数满足的条件，并进一步探求方程的根.

本课教学建议

通过例题帮助学生进一步认识一元二次方程实数根的情况与判别式的值之间的关系，并会运用它们解决一些简单的问题.

因为 $\Delta=(-2\sqrt{6})^2-4\times2\times3=0$，所以此方程有两个相等的实数根.

例 2 关于 x 的方程 $x^2+(m-1)x-m=0$（m 是实数）一定有实数根吗？为什么？

解 $\Delta=(m-1)^2-4\times1\times(-m)$

$=m^2+2m+1=(m+1)^2$.

因为 m 是实数，所以 $(m+1)^2\geqslant0$，即 $\Delta\geqslant0$.

所以此方程一定有实数根.

一元二次方程有实数根指的是方程有两个不相等的实数根或有两个相等的实数根.

课堂练习 21.3(1)

1. 不解方程，判断下列方程的实数根的情况：

(1) $64x^2-5x-4=0$； (2) $\frac{1}{4}x^2-3x+9=0$；

(3) $0.2x^2+0.6x+0.05=0$； (4) $3x(x-2)=-7$；

(5) $9x^2=4(3x-1)$； (6) $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x+1=0$.

2. 关于 x 的方程 $mx^2+(m+1)x+1=0$（$m\neq0$）一定有实数根吗？为什么？

例 3 当 m 分别满足什么条件时，关于 x 的方程 $x^2+(m-2)x+\frac{1}{4}m^2-1=0$ 的根的情况如下：

(1) 方程有两个不相等的实数根？

(2) 方程有两个相等的实数根？

(3) 方程没有实数根？

解 $\Delta=(m-2)^2-4\left(\frac{1}{4}m^2-1\right)=-4m+8$.

(1) 当 $\Delta=-4m+8>0$，即 $m<2$ 时，方程有两个不相等的实数根.

(2) 当 $\Delta=-4m+8=0$，即 $m=2$ 时，方程有两个相等的实数根.

本课内容分析

例 3 中已知一元二次方程根的情况，由判别式应满足的条件确定其中字母系数需满足的条件.

(3) 当 $\Delta=-4m+8<0$，即 $m>2$ 时，方程没有实数根.

例 4 已知关于 x 的方程 $x^2-4kx+(2k-1)^2=0$ 有实数根，求 k 所满足的条件及方程的根（用含 k 的代数式表示）.

解 $\Delta=(-4k)^2-4(2k-1)^2=16k-4$.

因为方程有实数根，所以 $16k-4\geqslant 0$，即 $k\geqslant\frac{1}{4}$.

方程的根是

$$x=\frac{4k\pm\sqrt{16k-4}}{2},$$

即 $$x_1=2k+\sqrt{4k-1},\ x_2=2k-\sqrt{4k-1}.$$

例 5 已知关于 x 的方程 $4x^2-(k+2)x+k=1$ 有两个相等的实数根，求 k 的值及方程的根.

解 把原方程变形为 $4x^2-(k+2)x+k-1=0$.

$\Delta=[-(k+2)]^2-4\times4\times(k-1)=k^2-12k+20$.

因为方程有两个相等的实数根，所以 $\Delta=0$.

由 $$k^2-12k+20=0,$$

得 $$(k-2)(k-10)=0.$$

解得 $$k=2\text{ 或 }k=10.$$

把 $k=2$ 代入原方程，得

$$4x^2-4x+1=0,$$

即 $$(2x-1)^2=0.$$

原方程的根是 $x_1=x_2=\frac{1}{2}$.

把 $k=10$ 代入原方程，得

$$4x^2-12x+9=0,$$

即 $$(2x-3)^2=0.$$

原方程的根是 $x_1=x_2=\frac{3}{2}$.

80 第21章 一元二次方程

例 4 在已知一元二次方程有实数根的情况下，不仅要确定方程中字母系数满足的条件，还要求出方程的根.

例 5 指出先要把一元二次方程化为一般形式，并再次强调一元二次方程有两个相等实数根的表示方式.

课堂练习 21.3(2)

1. $k=-1$.

2. (1) $m>\frac{5}{4}$.

(2) $m=\frac{5}{4}$.

(3) $m<\frac{5}{4}$.

(4) $m=2$.

习题 21.3

1. (1) ×.

(2) ×.

(3) ×.

(4) √.

2. (1) p^2-4q.

(2) ±4.

(3) $k>1$.

(4) $m\leqslant\frac{9}{16}$.

课堂练习 21.3(2)

1. 当 k 取何值时，关于 x 的方程 $x^2-k(x+1)+x=0$ 有两个相等的实数根？

2. 当 m 分别满足什么条件时，关于 x 的方程 $x^2+2mx+(m-2)^2=x$ 的根的情况如下：

(1) 方程有两个不相等的实数根？

(2) 方程有两个相等的实数根？

(3) 方程没有实数根？

(4) 方程有一个根为 0？

习题 21.3

A

1. 判断下列语句是否正确，正确的在括号里打“√”，错误的在括号里打“×”：

(1) 方程 $x^2-8=0$ 有两个相等的实数根； (　　)

(2) 方程 $5x^2=-2x$ 没有实数根； (　　)

(3) 如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个实数根，那么 $\Delta>0$； (　　)

(4) 如果 a、c 异号，那么关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根. (　　)

2. 填空题：

(1) 关于 x 的一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的判别式是________；

(2) 如果关于 x 的方程 $4x^2-mx+1=0$ 有两个相等的实数根，那么 m 的值是________；

(3) 如果关于 x 的方程 $(x+1)^2=1-k$ 没有实数根，那么 k 所满足的条件是________；

(4) 如果关于 x 的方程 $2x^2-3x+2m=0$ 有两个实数根，那么 m 所满足的条件是__________.

3. 不解方程，判断下列方程的实数根的情况：

(1) $3x^2-25x+10=0$；　　(2) $\frac{1}{2}x^2+7x+28=0$；

(3) $16x^2+9=24x$；　　(4) $x^2+2(\sqrt{3}+1)x+2\sqrt{3}=0$.

4. 当 m 分别满足什么条件时，关于 x 的一元二次方程 $(m+1)x^2+2x=1$（m 是实数）的根的情况如下：

(1) 方程有两个不相等的实数根？

(2) 方程有两个相等的实数根？

(3) 方程没有实数根？

B

5. 已知关于 x 的方程 $x^2+2x-a+1=0$ 没有实数根，试判断关于 x 的方程 $x^2+ax+a=1$ 是否一定有两个不相等的实数根，并说明理由.

6. 已知关于 x 的方程 $(2-k)x^2-2kx+1=0$ 有两个相等的实数根，求 k 的值及方程的根.

82 第21章 一元二次方程

3. (1) 有两个不相等的实数根.

(2) 没有实数根.

(3) 有两个相等的实数根.

(4) 有两个不相等的实数根.

4. (1) $m>-2$ 且 $m\neq-1$.

(2) $m=-2$.

(3) $m<-2$.

5. 是. 由题意，得 $4-4(-a+1)<0$，解得 $a<0$.

由此得 $a^2-4(a-1)=(a-2)^2>0$，所以方程 $x^2+ax+a=1$ 一定有两个不相等的实数根.

6. 由 $(-2k)^2-4(2-k)=0$，解得 $k_1=-2$，$k_2=1$.

当 $k=-2$ 时，$x_1=x_2=-\frac{1}{2}$；

当 $k=1$ 时，$x_1=x_2=1$.

21.4　一元二次方程的根与系数的关系

本节教学目标

（1）了解一元二次方程的根与系数的关系.

（2）知道利用韦达定理可以求关于一元二次方程两根的对称式的值.

（以下分析对应课本第 83～85 页）

本课教学重点

了解韦达定理及其推导过程，会利用韦达定理解决一些简单问题.

本课教学建议

通过韦达定理的推导，了解定理内容，并在例题的简单运用中正确记忆.

21.4 一元二次方程的根与系数的关系

我们知道一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$) 的根的情况完全是由系数 a、b、c 确定的，判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的符号与其实数根的情况有密切关系，当 $\Delta\geqslant0$ 时，求根公式 $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 表达了方程的每一个根与系数之间的关系. 现在我们进一步研究一元二次方程的两个根与系数之间的关系.

我们试着计算两根之和与两根之积.

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$) 的两个根 x_1、x_2 满足

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a},$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

由此得到下述关于一元二次方程的根与系数关系的定理：

韦达定理 如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$) 的两个实数根分别是 x_1、x_2，那么

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

例 1 已知下列方程均有两个实数根，求两根的和与积：

(1) $x^2-4x+\sqrt{5}=0$；　　(2) $2x^2-\sqrt{3}x-3=0$；

(3) $\frac{1}{2}x^2+2x=0$；　　(4) $-\sqrt{2}x^2=x-4$.

解　设一元二次方程的两个实数根分别是 x_1、x_2.

(1) 由韦达定理，得 $x_1+x_2=-(-4)=4$，$x_1\cdot x_2=\sqrt{5}$.

(2) 由韦达定理，得 $x_1+x_2=-\dfrac{-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{-3}{2}=-\dfrac{3}{2}$.

本课内容分析

例 1 可帮助学生熟悉韦达定理，体会它的直接运用. 应指出运用时需将所给一元二次方程化为一般形式，同时注意定理中两个关系式的符号是不同的.

(3) 由韦达定理，得 $x_1+x_2=-\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=-4$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{0}{\frac{1}{2}}=0$.

(4) 将原方程变形为 $\sqrt{2}x^2+x-4=0$，由韦达定理，得

$$x_1+x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_1\cdot x_2=\frac{-4}{\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}.$$

例 2，由已知一元二次方程的一个根求另一个根及方程中的一个待定系数，帮助学生掌握根与系数的关系.

例 2 已知关于 x 的方程 $2x^2-5x+p=0$ 的一个根为 $\frac{1}{2}$，求此方程的另一个根及 p 的值.

解 设此方程的另一个根是 x_1，由韦达定理，得

$$\begin{cases} x_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}, & ① \\ x_1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{p}{2}. & ② \end{cases}$$

由①，得 $x_1=2$.

把 $x_1=2$ 代入②，得 $2\times\frac{1}{2}=\frac{p}{2}$.

解得 $p=2$.

所以，此方程的另一个根是 $x_1=2$，p 的值是 2.

课堂练习 21.4(1)

1. (口答)已知下列方程均有两个实数根，求两根的和与积：

(1) $x^2-2x-2=0$；　(2) $12x^2+8x=0$；

(3) $2x^2-3x+\frac{1}{2}=0$；　(4) $2x^2-7=0$；

(5) $x^2+2=2\sqrt{2}x$；　(6) $\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x=6$.

84　第21章　一元二次方程

课堂练习 21.4(1)

1. (1) 和为 2，积为 -2.

(2) 和为 $-\frac{2}{3}$，积为 0.

(3) 和为 $\frac{3}{2}$，积为 $\frac{1}{4}$.

(4) 和为 0，积为 $-\frac{7}{2}$.

(5) 和为 $2\sqrt{2}$，积为 2.

(6) 和为 $\frac{1}{3}$，积为 -4.

2. (1) $x=-\frac{1}{2}$.

(2) $x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

3. (1) 另一个根是 $x=3$，k 的值为 -7.

(2) 另一个根是 $x=-6$，m 的值为 -18.

（以下分析对应课本第 85～86 页）

本课教学重点

知道利用一元二次方程的根与系数的关系可以求关于两根的对称式的值.

本课教学建议

（1）求关于方程两根的对称式的值时，要指导学生正确把握代数式变形的方向和保持恒等的要求.

（2）要让学生注意 $\Delta \geqslant 0$ 这个隐含条件.

本课内容分析

例 3 是利用韦达定理求关于两根的对称式的值. 解这类题的关键是将关于 x_1、x_2 的对称式用 x_1+x_2、x_1x_2 表示.

2. (1) 已知方程 $2x^2-5x-3=0$ 的一个根是 3，不解方程，求此方程的另一个根；

(2) 已知方程 $2x^2-2x-1=0$ 的一个根是 $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，不解方程，求此方程的另一个根.

3. (1) 已知关于 x 的方程 $2x^2+kx+3=0$ 的一个根是 $\frac{1}{2}$，求此方程的另一个根及 k 的值；

(2) 已知关于 x 的方程 $3x^2+15x+m=0$ 的一个根为 1，求此方程的另一个根及 m 的值.

例 3 已知方程 $2x^2+6x-3=0$ 有两个实数根 x_1、x_2，利用韦达定理求下列各式的值：

(1) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$；

(2) $x_1^2+x_2^2$；

(3) $(x_1-x_2)^2$.

利用韦达定理求关于 x_1、x_2 的代数式的值时，通常先把代数式化为由 x_1+x_2 和 $x_1 \cdot x_2$ 表示的形式，再代入求值.

解 由韦达定理，得

$$x_1+x_2=-3，x_1 \cdot x_2=-\frac{3}{2}.$$

(1) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{-3}{-\frac{3}{2}}=2.$

(2) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-3)^2-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=12.$

(3) $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(-3)^2-4\times\left(-\frac{3}{2}\right)=15.$

21.4 一元二次方程的根与系数的关系 85

例 4 已知关于 x 的方程 $x^2-(m-3)x+m+8=0$ 的两个实数根的平方和等于 13，求 m 的值及此方程的两根.

解 设方程 $x^2-(m-3)x+m+8=0$ 的两个实数根分别为 x_1、x_2，那么 $\Delta\geqslant 0$，且 $x_1+x_2=m-3$，$x_1\cdot x_2=m+8$.

根据题意，得 $$x_1^2+x_2^2=13.$$

因为
$$\begin{aligned}x_1^2+x_2^2&=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\\&=(m-3)^2-2(m+8)\\&=m^2-8m-7,\end{aligned}$$

所以 $$m^2-8m-7=13,$$

即 $$m^2-8m-20=0.$$

解得 $$m_1=10,\ m_2=-2.$$

当 $m=10$ 时，方程 $x^2-(m-3)x+m+8=0$，即
$$x^2-7x+18=0,$$
这时，$\Delta=(-7)^2-4\times 18<0$，不符合题意.

当 $m=-2$ 时，方程 $x^2-(m-3)x+m+8=0$，即
$$x^2+5x+6=0,$$
这时，解得 $x_1=-2$，$x_2=-3$.

所以，m 的值为 -2，方程的两根分别为 $x_1=-2$，$x_2=-3$.

课堂练习 21.4(2)

1. 已知方程 $2x^2+4x-3=0$ 有两个实数根 x_1、x_2，利用韦达定理求下列各式的值：

(1) $x_1^2x_2+x_1x_2^2$； (2) $(x_1-2)(x_2-2)$；

(3) $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$； (4) $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}$.

2. 已知关于 x 的方程 $x^2+(k-5)x-(k+4)=0$ 有两个实数根 x_1、x_2，且 $(x_1+1)(x_2+1)=-8$. 求 k 的值及此方程的两根.

86 第21章 一元二次方程

例 4，在已知一个关于方程两根的对称式的值的条件下，利用方程的根与系数的关系求方程中的系数所含字母的值及方程的两根. 初中阶段需控制关于两根的对称式的复杂程度.

课堂练习 21.4(2)

1. (1) 3.

(2) $\dfrac{13}{2}$.

(3) $\dfrac{11}{2}$.

(4) $\dfrac{28}{9}$.

2. $k=5$，两根分别为 $x_1=-3$，$x_2=3$.

习题 21.4

1.（1）$x=4$.

（2）$x=-1-\sqrt{2}$.

2.（1）另一根为 $x=1+\sqrt{2}$，$p=-2\sqrt{2}$.

（2）另一根为 $x=-\frac{8}{3}$，$k=\pm 3$.

3.（1）$-\frac{1}{2}$.

（2）-2.

（3）$\frac{5}{2}$.

（4）3.

（5）$\frac{11}{2}$.

（6）-4.

4. $m=3$，两根分别为 $x_1=1$，$x_2=-5$.

5. $a=0$，另一根为 $x=-3$；或 $a=-3$，另一根为 $x=\frac{3}{2}$.

习题 21.4

A

1.（1）已知方程 $2x^2-7x-4=0$ 的一个根是 $-\frac{1}{2}$，不解方程，求此方程的另一个根；

（2）已知方程 $x^2+2x-1=0$ 的一个根是 $-1+\sqrt{2}$，不解方程，求此方程的另一个根.

2.（1）已知关于 x 的方程 $x^2+px+1=0$ 的一个根是 $\sqrt{2}-1$，求此方程的另一个根及 p 的值；

（2）已知关于 x 的方程 $3x^2+5x-k^2+1=0$ 的一个根是 1，求此方程的另一个根及 k 的值.

3. 设 x_1、x_2 是方程 $2x^2-2x-1=0$ 的两个实数根，利用韦达定理求下列各式的值：

（1）$x_1^2x_2+x_1x_2^2$；　（2）$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$；

（3）$x_1^2-x_1x_2+x_2^2$；　（4）$(x_1-x_2)^2$；

（5）$(x_1-3)(x_2-3)$；　（6）$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$.

4. 已知 x_1、x_2 是关于 x 的方程 $x^2+2(m-1)x+2m^2-23=0$ 的两个实数根，且 $x_1^2+x_2^2=26$. 求 m 的值及此方程的两根.

B

5. 已知关于 x 的方程 $(a+1)x^2+3x+a^2+3a=0$ 的一个根为 0，求此方程的另一个根及 a 的值.

21.5　一元二次方程的应用

本节教学目标

（1）了解二次三项式的因式分解与解一元二次方程的联系；能通过求一元二次方程的根，在实数范围内将二次三项式因式分解.

（2）能解简单的分式方程，知道解分式方程时“去分母”可能产生增根，掌握验根的方法.

（3）能应用一元二次方程解决一些实际问题.

（以下分析对应课本第 88～89 页）

本课教学重点

了解二次三项式的因式分解与解一元二次方程的联系；能通过求一元二次方程的根，在实数范围内将二次三项式因式分解.

本课教学建议

通过具体例子，先把二次三项式的因式分解由有理数范围扩大到实数范围，然后引导学生思考，建立起因式分解与解一元二次方程的联系.

21.5 一元二次方程的应用

1. 二次三项式的因式分解

我们曾经在有理数范围内讨论过整式的因式分解．现在，我们将在实数范围内讨论二次三项式 ax^2+bx+c 的因式分解．

在解一元二次方程 $2x^2-10x+12=0$ 时，可以先把方程左边因式分解，得 $2(x-3)(x-2)=0$，从而解得方程的两个根 $x_1=3$，$x_2=2$．

反过来，也可以通过求出一元二次方程的根把二次三项式因式分解．

设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根是 x_1、x_2，那么根据韦达定理可以知道：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，即 $\frac{b}{a}=-(x_1+x_2)$，$\frac{c}{a}=x_1x_2$．

$$
\begin{aligned}
\text{所以 } ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\
&= a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]\\
&= a(x-x_1)(x-x_2).
\end{aligned}
$$

这就是说，要将二次三项式 ax^2+bx+c 因式分解，如果 $b^2-4ac\geqslant0$，可以用求根公式求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根 x_1、x_2，然后得到

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

但如果 $b^2-4ac<0$，那么二次三项式 ax^2+bx+c 在实数范围内就不能因式分解．

例 1 在实数范围内因式分解：

(1) $3x^2-10x+7$；

(2) $2x^2+4x-3$．

解 (1) 对于方程 $3x^2-10x+7=0$，

$$\Delta=(-10)^2-4\times3\times7=16>0.$$

88 第21章 一元二次方程

本课内容分析

例 1 帮助学生掌握利用求根公式对二次三项式因式分解的方法.

此方程的两个实数根是

$$x_1=\frac{7}{3},\ x_2=1.$$

所以 $3x^2-10x+7=3\left(x-\frac{7}{3}\right)(x-1)$.

(2) 对于方程 $2x^2+4x-3=0$，

$$\Delta=4^2-4\times2\times(-3)=40>0.$$

此方程的两个实数根是

$$x_1=\frac{-2+\sqrt{10}}{2},\ x_2=\frac{-2-\sqrt{10}}{2}.$$

所以 $2x^2+4x-3=2\left(x-\frac{-2+\sqrt{10}}{2}\right)\left(x-\frac{-2-\sqrt{10}}{2}\right)$.

课堂练习 21.5(1)

1. 在实数范围内因式分解：

(1) $x^2-8=$________________；

(2) $4x^2-7=$________________；

(3) $x^2+3x-28=$________________；

(4) $3x^2-11x+10=$________________.

2. 在实数范围内因式分解：

(1) $2x^2+4x+1$； (2) $x^2-2ax-a^2$.

2. 列方程解应用题

例 2 某建筑工程队利用一段长 80 m 的旧墙，用铁栅栏靠墙围一个所占地面为长方形的建筑垃圾临时堆放点. 如果所使用的铁栅栏总长为 120 m，且只围三边，那么是否可以围出符合下列要求的长方形堆放点？如果可以，分别求出长方形的两条邻边的长.

21.5 一元二次方程的应用 89

课堂练习 21.5(1)

1. (1) $(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})$.

(2) $(2x+\sqrt{7})(2x-\sqrt{7})$ 或 $4\left(x+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

(3) $(x+7)(x-4)$.

(4) $(x-2)(3x-5)$ 或 $3(x-2)\left(x-\frac{5}{3}\right)$.

2. (1) $2\left(x+\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$.

(2) $(x-a+\sqrt{2}a)(x-a-\sqrt{2}a)$.

（以下分析对应课本第 89～92 页）

本课教学重点

列一元二次方程解与图形面积相关的实际问题.

本课教学建议

在正确理解题意的基础上，通过列方程来解应用题，并对方程的根是否符合实际意义进行检验和解释.

(1) 长方形的面积是 2 000 m^2；

(2) 长方形的面积是 1 800 m^2；

(3) 长方形的面积是 1 152 m^2.

分析　如图 21-5-1，只围三边的长方形，其中有两边垂直于墙，一边平行于墙. 不妨设垂直于墙的一边长为 x m，则平行于墙的一边长为 $(120-2x)$ m.

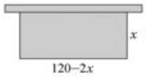


图 21-5-1

解　设长方形垂直于墙的一边长为 x m，则平行于墙的一边长为 $(120-2x)$ m.

(1) 根据题意，得方程

$$(120-2x)x=2\,000.$$

整理，得 $$x^2-60x+1\,000=0.$$

这是一个一元二次方程，因为 $\Delta=-400<0$，所以此方程没有实数根.

答：仅用 120 m 长的铁栅栏围三边，围不出面积为 2 000 m^2 的长方形堆放点.

(2) 根据题意，得方程

$$(120-2x)x=1\,800.$$

整理，得 $$x^2-60x+900=0.$$

解得 $$x_1=x_2=30.$$

当 $x=30$ 时，$120-2x=60$.

经检验，$x=30$ 符合实际意义.

答：用 120 m 长的铁栅栏围三边，可以围出面积为 1 800 m^2 的长方形堆放点，长方形垂直于墙的一边长为 30 m，平行于墙的一边长为 60 m.

(3) 根据题意，得方程

$$(120-2x)x=1\,152.$$

整理，得 $$x^2-60x+576=0.$$

解得 $$x_1=12，x_2=48.$$

当 $x=12$ 时，$120-2x=96$；

当 $x=48$ 时，$120-2x=24$.

90　第21章　一元二次方程

本课内容分析

例 2 设计有 3 个小题，具有一定的开放性，可组织学生讨论. 铁栅栏总长 120 m 是固定不变的，但用这些材料围成长方形建筑垃圾临时堆放点，其面积大小可以不同；而面积大小的变化，又限制在一定的范围内. 要让学生体会怎样列出方程来求解；怎样解释方程的根的实际意义. 还可以提出“所围建筑垃圾临时堆放点的最大面积是多少?”留给学生思考.

例 3 是以现实生活中各类纸质包装盒为背景设计的一个应用题，并在现实的基础上做了一定的理想化处理，即不考虑边缘处的黏合问题. 需要学生对问题中提到的底面和侧面有正确的理解，进而才能列出方程求解. 本题中给出的两者面积相等，在现实中并不是真正需要关注的，从包装的角度看，人们会更加关心所折叠成的盒子的体积，可引导学生对此思考.

经检验，旧墙只有 80 m，而 96>80，不符合实际意义，$x=12$ 应舍去；$x=48$ 符合实际意义.

答：用 120 m 长的铁栅栏围三边，可以围出面积为 1 152 m^2 的长方形堆放点，长方形垂直于墙的一边长为 48 m，平行于墙的一边长为 24 m.

例 3 有一张边长为 10 cm 的正方形硬纸板，在硬纸板的四个角上剪去四个相同的小正方形，再折叠成一个无盖的长方体盒子(图 21-5-2). 如果这个长方体盒子的底面面积与一个侧面的面积恰好相等，求剪去的小正方形的边长.

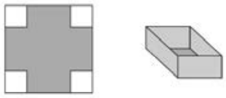


图 21-5-2

分析　长方体盒子的底面是正方形，四个侧面是相同的长方形，底面正方形的边长是侧面长方形的一边，侧面长方形的另一边是长方体盒子的高，也就是剪去的小正方形的边长.

解　设剪去的小正方形的边长为 x cm，则长方体盒子底面正方形的边长为 $(10-2x)$ cm.

根据题意，得方程

$$(10-2x)^2=(10-2x)x.$$

整理，得

$$(10-2x)(10-3x)=0.$$

解得

$$x_1=5,\ x_2=\frac{10}{3}.$$

经检验，当 $x_1=5$ 时，正方形硬纸板直接被剪成四个小正方形，不能折叠成盒子，不符合实际意义，$x_1=5$ 应舍去；$x_2=\frac{10}{3}$ 符合实际意义.

答：剪去的小正方形的边长为 $\frac{10}{3}$ cm.

21.5　一元二次方程的应用　91

课堂练习 21.5(2)

1. 用 100 cm 长的铁丝弯折出一个长方形的模型，要使铁丝恰好用完. 问：是否可以折成符合下列要求的长方形？如果可以，分别求出长方形的两条邻边的长.

（1）长方形的面积是 525 cm^2；

（2）长方形的面积是 625 cm^2；

（3）长方形的面积是 700 cm^2.

2. 一张长方形图片的长和宽分别为 25 cm 和 20 cm，在它四周外围镶上宽度相等的边框. 已知边框的面积为 196 cm^2，求边框的宽度.

3. 已知两个相邻正奇数的积是 143，求这两个数.

例 4 小华将 2 000 元人民币按一年定期存入某银行，到期后取出 1 000 元购买图书和文具，剩下的 1 000 元及利息又全部按一年定期存入该银行. 如果这两年存款的年利率不变，那么到期后本金和利息共 1 045.45 元. 求这种存款方式的年利率.

分析　存款到期后的利息＝本金×利率×存期.

本利和＝本金＋利息.

由此可得：如果将这种存款方式的年利率用 x 表示，那么第一年到期后的本利和为 $2\,000(1+x)$，第二年的本金为 $[2\,000(1+x)-1\,000]$.

这样，可列出方程求解.

解　设这种存款方式的年利率为 x. 根据题意，得方程

$$[2\,000(1+x)-1\,000](1+x)=1\,045.45.$$

整理，得　$2\,000(1+x)^2-1\,000(1+x)-1\,045.45=0.$

记 $y=1+x$，得 $2\,000y^2-1\,000y-1\,045.45=0.$

解得 $y=1.015$ 或 $y=-0.515$.

于是　$x+1=1.015$ 或 $x+1=-0.515$，

即 $x=0.015$ 或 $x=-1.515$（负值不符合实际意义，舍去）.

92 | 第21章 一元二次方程

课堂练习 21.5(2)

1.（1）可以，两边长分别为 15、35.

（2）可以，两边长均为 25.

（3）不可以.

2. 2 cm.

3. 这两个数为 11 和 13.

（以下分析对应课本第 92～94 页）

本课教学重点

掌握一些实际问题中的基本数量关系，体会分析问题的方法，列出一元二次方程解简单的实际问题，进一步体会一元二次方程的应用价值.

本课教学建议

应用题所涉及的现实场景很多，是无法穷尽的，教学中要引导学生将现实生活中所涉及的量及其关系，逐步抽象为数学中的数，进而列出方程来求解. 要鼓励学生多关注生活的方方面面.

课堂练习 21.5(2)

1. 用 100 cm 长的铁丝弯折出一个长方形的模型，要使铁丝恰好用完. 问：是否可以折成符合下列要求的长方形？如果可以，分别求出长方形的两条邻边的长.

(1) 长方形的面积是 525 cm^2；

(2) 长方形的面积是 625 cm^2；

(3) 长方形的面积是 700 cm^2.

2. 一张长方形图片的长和宽分别为 25 cm 和 20 cm，在它四周外围镶上宽度相等的边框. 已知边框的面积为 196 cm^2，求边框的宽度.

3. 已知两个相邻正奇数的积是 143，求这两个数.

例 4 小华将 2 000 元人民币按一年定期存入某银行，到期后取出 1 000 元购买图书和文具，剩下的 1 000 元及利息又全部按一年定期存入该银行. 如果这两年存款的年利率不变，那么到期后本金和利息共 1 045.45 元. 求这种存款方式的年利率.

分析　存款到期后的利息＝本金×利率×存期.

本利和＝本金＋利息.

由此可得：如果将这种存款方式的年利率用 x 表示，那么第一年到期后的本利和为 $2\,000(1+x)$，第二年的本金为 $[2\,000(1+x)-1\,000]$.

这样，可列出方程求解.

解　设这种存款方式的年利率为 x. 根据题意，得方程

$$[2\,000(1+x)-1\,000](1+x)=1\,045.45.$$

整理，得　$2\,000(1+x)^2-1\,000(1+x)-1\,045.45=0.$

记 $y=1+x$，得 $2\,000y^2-1\,000y-1\,045.45=0.$

解得 $y=1.015$ 或 $y=-0.515$.

于是　$x+1=1.015$ 或 $x+1=-0.515$，

即 $x=0.015$ 或 $x=-1.515$（负值不符合实际意义，舍去）.

本课内容分析

例 4 是关于存款利率的应用题，需要让学生对有关存款问题中涉及的数量及其关系有正确的认识. 解决问题后，可根据实际情况进行解释.

思考　让学生明白直接将存款存两年和存一年后再转存一年是有区别的，能让学生更好地理解为何不同存期的存款利率是不同的.

例 5 是有关销售的问题，需要学生对其中相关的量及其关系有正确的理解. 题中调查的结果，是一种理想化的假设.

例 6 是有关比赛积分的问题，不同项目、不同赛制的积分方式是不同的，本题中采用的赛制俗称“单循环”.

答：这种存款方式的年利率为 1.5%.

思考

如果第一年到期后直接转存，那么怎样计算第二年期满后的本利和呢？

例 5　某商场每副护目镜的进货价为 20 元，售价在 25 元至 40 元之间. 调查表明：如果每副护目镜售价为 25 元，平均每月能售出 800 副；如果售价每上涨 1 元，月销售量会减少 10 副. 已知某月该护目镜的销售利润为 10 500 元，求每副护目镜的售价.

分析　每月的销售利润＝单个货品的销售利润×货品的月销售量.

由此可得：护目镜的每月销售利润＝(护目镜的售价－进货价)×护目镜的月销售量. 而护目镜的售价＝原售价(25 元)＋售价上涨部分.

如果将每副护目镜售价上涨的部分用 x 元表示，那么每副护目镜的销售利润为$(25+x-20)$元，护目镜的月销售量为$(800-10x)$副.

这样，可列出方程求解.

解　设每副护目镜售价上涨 x 元. 根据题意，得方程

$$(25+x-20)(800-10x)=10\,500.$$

整理，得
$$x^2-75x+650=0.$$

解得 $x_1=10$，$x_2=65$（售价超出 25 元至 40 元的范围，不符合题意，舍去）.

当 $x=10$ 时，$25+x=35$.

答：每副护目镜的售价为 35 元.

例 6　学校组织围棋比赛，比赛中，每名选手都与其他选手恰好比赛一局，每局赢的选手记 2 分，输的选手记 0 分；如果平局，两名选手各记 1 分. 最终，统计得到所有参赛选手的总得分为 2 070. 求这次比赛共有多少名选手参加.

分析　如果共有 x 名选手参加比赛，那么每名选手都要与$(x-1)$名选手比赛一局，因此实际比赛总局数应为$\frac{x(x-1)}{2}$. 由于每局共计 2 分，因此全部

21.5　一元二次方程的应用　93

选手总得分为 $x(x-1)$.

解　设这次比赛共有 x 名选手参加. 根据题意，得方程

$$2\cdot\frac{x(x-1)}{2}=2\,070.$$

整理，得　　　　　$(x-46)(x+45)=0$.

解得 $x_1=46$，$x_2=-45$(不符合实际意义，舍去).

答：这次比赛共有 46 名选手参加.

课堂练习 21.5(3)

1. 某种产品原来每件价格为 800 元，经过两次降价，且每次降价的百分率相同，现在每件售价为 578 元. 求每次降价的百分率.

2. 某学校 1 161 名学生在操场上列队，已知每列人数都相同，且每列人数比总列数少 16. 求每列人数.

在七年级学习“分式”这一章时，我们认识了分式方程，讨论了可化为一元一次方程的分式方程的解法. 例如，分式方程 $\frac{2}{x+1}=3$ 和 $\frac{1}{x}=\frac{3}{x-1}$，通过去分母都可转化为一元一次方程求解.

问题　学校组织“爱心义卖”活动，八(1)班与八(2)班各得义卖款 1 200 元与 1 120 元. 在计算各班人均义卖款时发现：八(1)班比八(2)班人均义卖款多 5 元，八(1)班的人数比八(2)班少 2. 问：两个班人均义卖款分别是多少？

如果设八(1)班人均义卖款是 x 元，那么八(2)班人均义卖款是$(x-5)$元，而两个班的人数可以分别表示为 $\frac{1\,200}{x}$ 与 $\frac{1\,120}{x-5}$.

于是，可列出方程

$$\frac{1\,200}{x}=\frac{1\,120}{x-5}-2.$$

这是分式方程，可按照已掌握的解分式方程的方法求它的解.

课堂练习 21.5(3)

1. 15%.

2. 27.

（以下分析对应课本第 94～96 页）

本课教学重点

掌握可化为一元二次方程的分式方程的解法.

本课教学建议

（1）通过例题，让学生理解“去分母”是把分式方程转化为整式方程来解的基本思路.

（2）需要让学生明白，增根是化出的整式方程的根，但不是原分式方程的根. 也就是说，增根是在解分式方程的过程中产生的. 教师知道这是由于在解方程过程中实施的变形不是同解变形所致，但在教学中不要深究，只要求学生明白：通过将分式方程转化为整式方程来求解，有可能产生增根，因此需要“验根”，这时检验的步骤不可缺少.

选手总得分为 $x(x-1)$.

解　设这次比赛共有 x 名选手参加. 根据题意，得方程

$$2 \cdot \frac{x(x-1)}{2}=2\,070.$$

整理，得　$(x-46)(x+45)=0$.

解得 $x_1=46$，$x_2=-45$(不符合实际意义，舍去).

答：这次比赛共有 46 名选手参加.

课堂练习 21.5(3)

1. 某种产品原来每件价格为 800 元，经过两次降价，且每次降价的百分率相同，现在每件售价为 578 元. 求每次降价的百分率.

2. 某学校 1 161 名学生在操场上列队，已知每列人数都相同，且每列人数比总列数少 16. 求每列人数.

在七年级学习“分式”这一章时，我们认识了分式方程，讨论了可化为一元一次方程的分式方程的解法. 例如，分式方程 $\frac{2}{x+1}=3$ 和 $\frac{1}{x}=\frac{3}{x-1}$，通过去分母都可转化为一元一次方程求解.

问题　学校组织“爱心义卖”活动，八(1)班与八(2)班各得义卖款 1 200 元与 1 120 元. 在计算各班人均义卖款时发现：八(1)班比八(2)班人均义卖款多 5 元，八(1)班的人数比八(2)班少 2. 问：两个班人均义卖款分别是多少？

如果设八(1)班人均义卖款是 x 元，那么八(2)班人均义卖款是 $(x-5)$ 元，而两个班的人数可以分别表示为 $\frac{1\,200}{x}$ 与 $\frac{1\,120}{x-5}$.

于是，可列出方程

$$\frac{1\,200}{x}=\frac{1\,120}{x-5}-2.$$

这是分式方程，可按照已掌握的解分式方程的方法求它的解.

本课内容分析

问题　通过实例引出了可以化为一元二次方程的分式方程，使学生感受有必要进一步学习和研究可化为一元二次方程的分式方程. 列出方程以后，可让学生尝试解这个方程.

方程两边同乘 $x(x-5)$，去分母得

$$1\,200(x-5)=1\,120x-2x(x-5).$$

整理，得 $$x^2+35x-3\,000=0.$$

这是一元二次方程，利用本章学习的知识可解得，$x_1=40$，$x_2=-75$.

代入上面的分式方程检验，可知 $x_1=40$，$x_2=-75$ 都是其根，但 -75 不符合实际意义，应舍去.

所以，八(1)班与八(2)班人均义卖款分别是 40 元和 35 元.

在求解上面的分式方程时，去分母后所得到的整式方程是一个一元二次方程，所以上面的分式方程是可化为一元二次方程的分式方程，其求解步骤与解可化为一元一次方程的分式方程类似.

例 7、例 8 是解简单的分式方程的演练，让学生了解解分式方程的一般步骤. 在例 8 中还需提醒学生注意，为了找到合适的去分母时两边同乘的代数式，一般需要对分式方程中的各分母先进行因式分解.

例 7 解方程：$\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$.

解 方程两边同乘 $(x-1)(x+1)$，去分母得

$$x(x+1)=2.$$

整理，得 $$x^2+x-2=0.$$

解这个整式方程，得 $x_1=-2$，$x_2=1$.

检验：当 $x=-2$ 时，代入原方程，等式成立；当 $x=1$ 时，代入原方程，右端分母为 0，无意义，即 $x=1$ 为增根，应舍去.

所以，原方程的根是 $x=-2$.

例 8 解方程：$\dfrac{2s}{s^2+2s-3}+\dfrac{1}{s+3}=1$.

解 原方程可变形为 $\dfrac{2s}{(s-1)(s+3)}+\dfrac{1}{s+3}=1$.

方程两边同乘 $(s-1)(s+3)$，去分母得

$$2s+s-1=(s-1)(s+3).$$

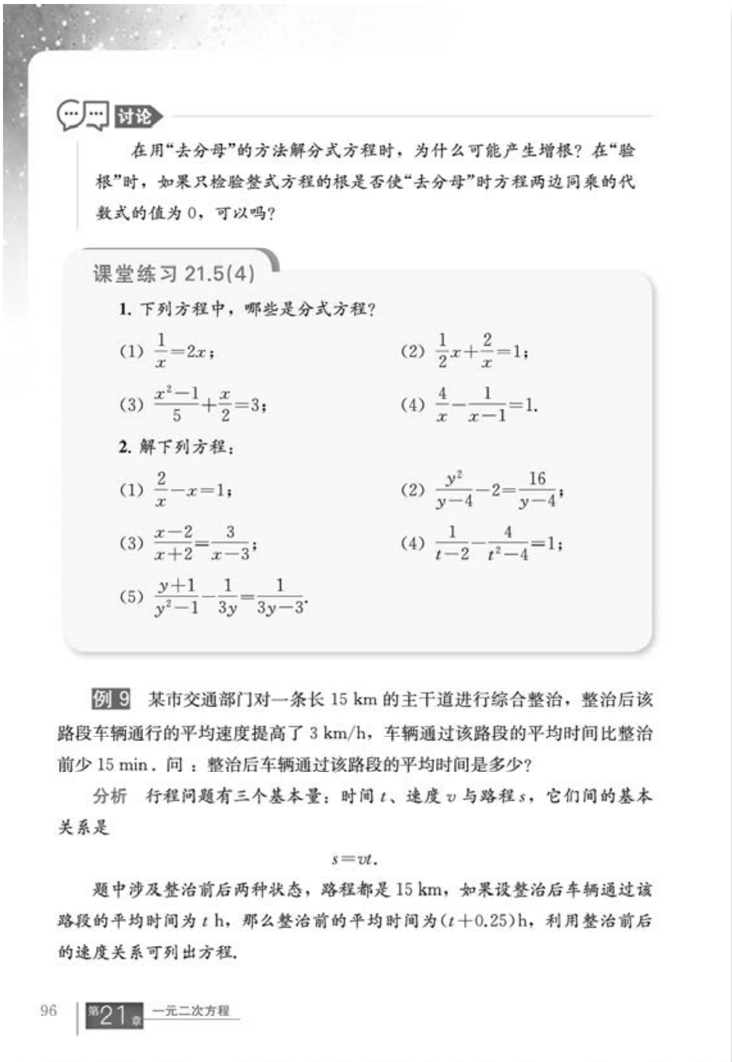
整理，得 $$s^2-s-2=0.$$

解这个整式方程，得 $s_1=2$，$s_2=-1$.

检验：当 s 分别为 2 与 -1 时，代入原方程，等式均成立.

所以，原方程的根为 $s_1=2$，$s_2=-1$.

21.5 一元二次方程的应用 95



讨论

在用"去分母"的方法解分式方程时，为什么可能产生增根？在"验根"时，如果只检验整式方程的根是否使"去分母"时方程两边同乘的代数式的值为 0，可以吗？

课堂练习 21.5(4)

1. 下列方程中，哪些是分式方程？

(1) $\frac{1}{x}=2x$；　(2) $\frac{1}{2}x+\frac{2}{x}=1$；

(3) $\frac{x^2-1}{5}+\frac{x}{2}=3$；　(4) $\frac{4}{x}-\frac{1}{x-1}=1$.

2. 解下列方程：

(1) $\frac{2}{x}-x=1$；　(2) $\frac{y^2}{y-4}-2=\frac{16}{y-4}$；

(3) $\frac{x-2}{x+2}=\frac{3}{x-3}$；　(4) $\frac{1}{t-2}-\frac{4}{t^2-4}=1$；

(5) $\frac{y+1}{y^2-1}-\frac{1}{3y}=\frac{1}{3y-3}$.

例 9 某市交通部门对一条长 15 km 的主干道进行综合整治，整治后该路段车辆通行的平均速度提高了 3 km/h，车辆通过该路段的平均时间比整治前少 15 min．问：整治后车辆通过该路段的平均时间是多少？

分析　行程问题有三个基本量：时间 t、速度 v 与路程 s，它们间的基本关系是

$$s=vt.$$

题中涉及整治前后两种状态，路程都是 15 km，如果设整治后车辆通过该路段的平均时间为 t h，那么整治前的平均时间为$(t+0.25)$h，利用整治前后的速度关系可列出方程.

96　第21章　一元二次方程

讨论　需注意"去分母"时扩大了未知数允许取值的范围；也可以直接检验"两边同乘的代数式的值"是否为 0.

课堂练习 21.5(4)

1. (1)(2)(4).

2. (1) $x_1=1$，$x_2=-2$.

(2) $y=-2$.

(3) $x_1=0$，$x_2=8$.

(4) $t=-1$.

(5) 无解.

（以下分析对应课本第 96～98 页）

本课教学重点

掌握列分式方程解简单的实际问题的方法.

本课教学建议

列分式方程解应用题时，需要从两个方面进行检验：一是解分式方程的过程中是否产生了增根；二是这个分式方程的根是否符合题意.

讨论

在用“去分母”的方法解分式方程时，为什么可能产生增根？在“验根”时，如果只检验整式方程的根是否使“去分母”时方程两边同乘的代数式的值为 0，可以吗？

课堂练习 21.5(4)

1. 下列方程中，哪些是分式方程？

(1) $\frac{1}{x}=2x$；　　(2) $\frac{1}{2}x+\frac{2}{x}=1$；

(3) $\frac{x^2-1}{5}+\frac{x}{2}=3$；　　(4) $\frac{4}{x}-\frac{1}{x-1}=1$.

2. 解下列方程：

(1) $\frac{2}{x}-x=1$；　　(2) $\frac{y^2}{y-4}-2=\frac{16}{y-4}$；

(3) $\frac{x-2}{x+2}=\frac{3}{x-3}$；　　(4) $\frac{1}{t-2}-\frac{4}{t^2-4}=1$；

(5) $\frac{y+1}{y^2-1}-\frac{1}{3y}=\frac{1}{3y-3}$.

例 9　某市交通部门对一条长 15 km 的主干道进行综合整治，整治后该路段车辆通行的平均速度提高了 3 km/h，车辆通过该路段的平均时间比整治前少 15 min．问：整治后车辆通过该路段的平均时间是多少？

分析　行程问题有三个基本量：时间 t、速度 v 与路程 s，它们间的基本关系是

$$s=vt.$$

题中涉及整治前后两种状态，路程都是 15 km，如果设整治后车辆通过该路段的平均时间为 t h，那么整治前的平均时间为$(t+0.25)$h，利用整治前后的速度关系可列出方程.

96　第21章　一元二次方程

本课内容分析

例 9 是行程问题，教学时可利用“图示法”分析问题中的数量关系，利用线段图直观的特点帮助学生准确理解题意.

解　设整治后车辆通过该路段的平均时间是 t h. 根据题意，可列方程

$$\frac{15}{t}=\frac{15}{t+0.25}+3.$$

去分母并整理，得　　$4t^2+t-5=0.$

解得　　$t_1=1$，$t_2=-\frac{5}{4}$.

经检验，$t_1=1$，$t_2=-\frac{5}{4}$都是原方程的根，但负值不符合实际意义，应舍去.

答：整治后车辆通过该路段的平均时间是 1 h.

例 10　某市为了美化环境，计划在一定的时间内增加 200 km² 绿化面积. 后来市政府调整了原定计划，不但绿化面积要在原计划的基础上增加 20%，而且要提前 1 年完成任务. 经测算，要完成新的计划，平均每年的绿化面积必须比原计划多 20 km². 求原计划平均每年的绿化面积.

分析　根据题意，可知

完成原计划 200 km² 绿化面积所需时间 － 完成新计划 200(1+20%) km² 绿化面积所需时间 ＝ 提前的时间

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{200}{\text{原计划平均每年绿化面积}} \qquad \frac{200(1+20\%)}{\text{新计划平均每年绿化面积}} \qquad 1\text{ 年}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{200(1+20\%)}{\text{原计划平均每年绿化面积}+20}$$

解　设原计划平均每年的绿化面积为 x km². 根据题意，可列方程

$$\frac{200}{x}-\frac{200(1+20\%)}{x+20}=1.$$

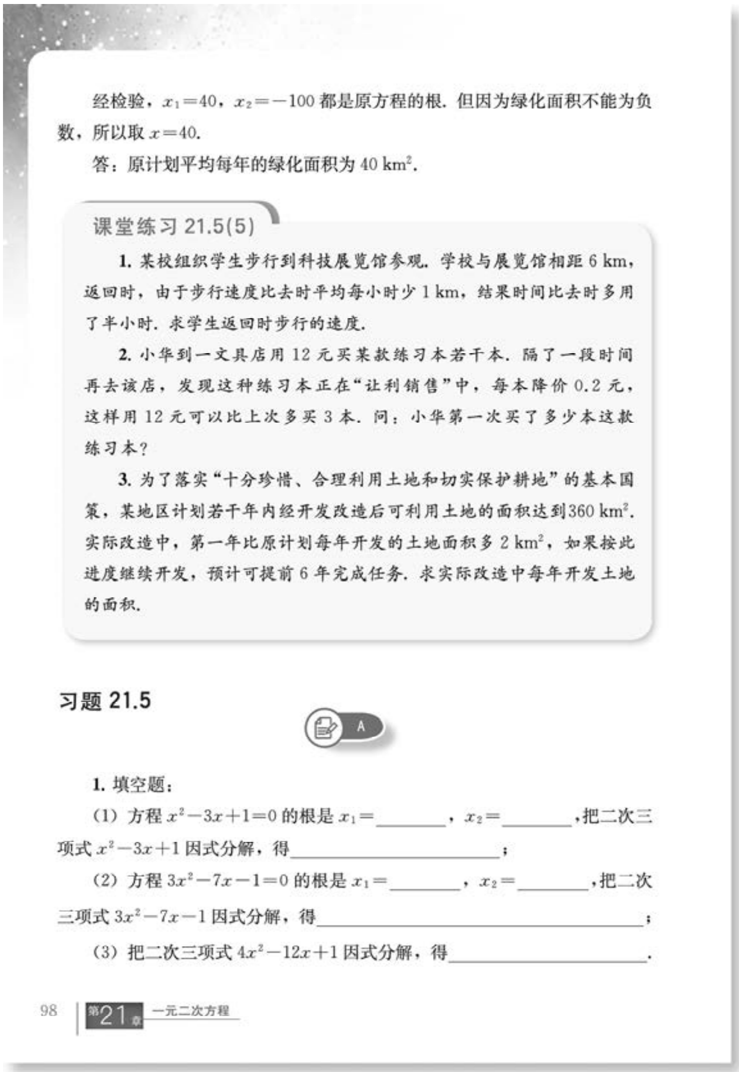
去分母并整理，得

$$x^2+60x-4\,000=0.$$

解得　　$x_1=40$，$x_2=-100$.

21.5　一元二次方程的应用　97

例 10 是工程问题，教学时，可先复习工程问题中有哪些基本数量，以及这些数量之间的基本关系式. 可利用“列表法”分析数量关系.



经检验，$x_1=40$，$x_2=-100$ 都是原方程的根．但因为绿化面积不能为负数，所以取 $x=40$.

答：原计划平均每年的绿化面积为 40 km^2.

课堂练习 21.5(5)

1. 某校组织学生步行到科技展览馆参观．学校与展览馆相距 6 km，返回时，由于步行速度比去时平均每小时少 1 km，结果时间比去时多用了半小时．求学生返回时步行的速度．

2. 小华到一文具店用 12 元买某款练习本若干本．隔了一段时间再去该店，发现这种练习本正在“让利销售”中，每本降价 0.2 元，这样用 12 元可以比上次多买 3 本．问：小华第一次买了多少本这款练习本？

3. 为了落实“十分珍惜、合理利用土地和切实保护耕地”的基本国策，某地区计划若干年内经开发改造后可利用土地的面积达到360 km^2. 实际改造中，第一年比原计划每年开发的土地面积多 2 km^2，如果按此进度继续开发，预计可提前 6 年完成任务．求实际改造中每年开发土地的面积．

习题 21.5

A

1. 填空题：

(1) 方程 $x^2-3x+1=0$ 的根是 $x_1=$________，$x_2=$________，把二次三项式 x^2-3x+1 因式分解，得____________________；

(2) 方程 $3x^2-7x-1=0$ 的根是 $x_1=$________，$x_2=$________，把二次三项式 $3x^2-7x-1$ 因式分解，得______________________________；

(3) 把二次三项式 $4x^2-12x+1$ 因式分解，得____________________.

98 第21章 一元二次方程

课堂练习 21.5(5)

1. 3 km/h.

2. 12 本.

3. 12 km^2.

习题 21.5

1. （1）$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$；$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$；$\left(x-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

（2）$\dfrac{7+\sqrt{61}}{6}$；$\dfrac{7-\sqrt{61}}{6}$；$3\left(x-\dfrac{7+\sqrt{61}}{6}\right)\left(x-\dfrac{7-\sqrt{61}}{6}\right)$.

（3）$4\left(x-\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. (1) C.

(2) C.

(3) B.

3. (1) $(x+1+\sqrt{5})(x+1-\sqrt{5})$.

(2) $(x-2+\sqrt{5})(x-2-\sqrt{5})$.

4. (1) $x_1=5$，$x_2=-2$.

(2) $y_1=-1+\sqrt{7}$，$y_2=-1-\sqrt{7}$.

(3) $x_1=\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}$.

(4) $y=1$.

5. 正方形的边长为 12 cm，长方形的长为 24 cm、宽为 10 cm.

2. 选择题：

(1) 将方程 $\dfrac{x-3}{x^2-x}+\dfrac{2}{x-1}=1$ 去分母后所得的方程是 （　　）

A. $x-3+2x=1$；　　B. $x-3+2=x^2-x$；

C. $x-3+2x=x^2-x$；　　D. $x(x-3)+2x=x-1$.

(2) 甲、乙两组志愿者参加植树造林. 已知甲组每天比乙组多种 5 棵树，且甲组种 120 棵树所用的天数比乙组种 70 棵树所用的天数多 1. 如果设乙组每天种树 x 棵，那么列出的方程是 （　　）

A. $\dfrac{120}{x-5}=\dfrac{70}{x}+1$；　　B. $\dfrac{120}{x}=\dfrac{70}{x+5}+1$；

C. $\dfrac{120}{x+5}=\dfrac{70}{x}+1$；　　D. $\dfrac{120}{x}=\dfrac{70}{x-5}+1$.

(3) 一列火车到某站已经晚点 6 min，如果将速度每小时加快 10 km，那么继续行驶 20 km 刚好正点到达下一站. 设这列火车原来行驶的速度为 x km/h，则所列出的方程是 （　　）

A. $\dfrac{20}{x}-\dfrac{20}{x+10}=6$；　　B. $\dfrac{20}{x}-\dfrac{20}{x+10}=\dfrac{6}{60}$；

C. $\dfrac{20}{x+10}-\dfrac{20}{x}=6$；　　D. $\dfrac{20}{x+10}-\dfrac{20}{x}=\dfrac{6}{60}$.

3. 在实数范围内因式分解：

(1) x^2+2x-4；　　(2) x^2-4x-1.

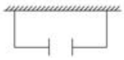
4. 解下列方程：

(1) $\dfrac{10}{x}+3=x$；　　(2) $\dfrac{2}{y-3}+1=\dfrac{3}{y^2-9}$；

(3) $\dfrac{x}{x^2+4x+3}-\dfrac{2}{x+3}=1$；　　(4) $\dfrac{1}{y+2}+\dfrac{4y}{y^2-4}+\dfrac{2}{2-y}=1$.

5. 已知一个长方形的长是一个正方形边长的 2 倍，宽比正方形的边长少 2 cm，且面积比正方形的面积大 96 cm². 求正方形的边长及长方形的长和宽.

6. 如图，要建一个面积为 140 m^2 的仓库，仓库的一边靠墙，这堵墙长 16 m；在与墙平行的一边，要开一扇 2 m 宽的门. 已知需要新建的墙总长为 32 m，求这个仓库的长和宽.



（第 6 题）

7. 一件商品由原售价连续两次降价，每次下降的百分率相同. 已知原售价是 875 元，降价两次后的售价是 560 元. 问：每次下降的百分率是多少？

8. 将一块长方形铁皮的四个角截去四个相同的小正方形，然后把四边折起来做成一个无盖的盒子. 已知长方形铁皮长 25 cm、宽 15 cm，做成盒子的底面积为 231 cm^2. 求这个盒子的容积.

9. 某教育设备厂原计划用 6 m^3 的木材为希望小学制作学生使用的课桌椅若干套. 由于改进了技术，每套课桌椅可以节约 $\frac{1}{55}$ m^3 的木材，因此多做了 3 套. 问：实际做了多少套？

B

10. 在实数范围内因式分解：

（1）$2x^2+3x-1$；　　（2）$-a^2+5a+2$.

11. 将一根长为 56 cm 的铁丝剪成两段，将两段各做成一个正方形，在不考虑接口、不计损耗的前提下，能使两个正方形的面积之和等于 20 cm^2 吗？如果能，请说明怎么剪；如果不能，请说明理由. 能使两个正方形的面积之和分别等于 100 cm^2、196 cm^2 吗？

12. 先验证下列结论的正确性：

① 方程 $x-\frac{1}{x}=2-\frac{1}{2}$ 的根是 $x_1=2$，$x_2=-\frac{1}{2}$；

② 方程 $x-\frac{1}{x}=3-\frac{1}{3}$ 的根是 $x_1=3$，$x_2=-\frac{1}{3}$；

100　第21章　一元二次方程

6. 14 m、10 m.

7. 20%.

8. 462 cm^3.

9. 33.

10.（1）$2\left(x+\frac{3-\sqrt{17}}{4}\right)\cdot\left(x+\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)$.

（2）$-\left(a-\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)\cdot\left(a-\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)$.

11. 不能使面积之和等于 20 cm^2；剪成长分别为32 cm、24 cm 的两段，能使面积之和等于 100 cm^2；不能使面积之和等于 196 cm^2. 理由略.

12. 方程的根为 $x=9$ 或 $x=-\frac{1}{9}$，验证略.

13. 都正确，看法略.

③ 方程 $x-\frac{1}{x}=3+\frac{3}{4}$ 的根是 $x_1=4$，$x_2=-\frac{1}{4}$；

④ 方程 $x-\frac{1}{x}=4+\frac{4}{5}$ 的根是 $x_1=5$，$x_2=-\frac{1}{5}$.

再观察上述方程及其根的特征，猜想方程 $x-\frac{1}{x}=8\frac{8}{9}$ 的根，并验证你的猜想.

13. 下面分别是小海和小华解分式方程 $\frac{1}{x+2}=\frac{2}{x^2+3x+2}$ 的具体过程.

小海的解题过程：

$$x^2+3x+2=2x+4.$$
$$x^2+x-2=0.$$
$$x_1=-2，x_2=1.$$

检验：$x=-2$ 为增根.

所以，原方程的根为 $x=1$.

小华的解题过程：

$$\frac{1}{x+2}=\frac{2}{(x+2)(x+1)}.$$
$$x+1=2.$$
$$x=1.$$

检验：$x=1$ 非增根.

所以，原方程的根为 $x=1$.

请先判断小海和小华的解法是否正确，再谈谈你对他们两人解法的看法.

◎复习题

A

1. 选择题：

(1) 下列方程中，是一元二次方程的是 (　　)

A. $2x+1=3$；　　B. $x^2+y=2$；

C. $3x^2+2x=4$；　　D. $x^2+\frac{1}{x}=1$.

(2) 已知关于 y 的方程 $(2y+m)(y-3)=0$ 有一个根是 $-\frac{5}{2}$，那么 m 的值等于 (　　)

A. -5；　　B. 5；

C. $\frac{2}{5}$；　　D. $\frac{5}{2}$.

(3) 如果关于 x 的二次三项式 ax^2+3x+4 在实数范围内不能因式分解，那么 a 所满足的条件是 (　　)

A. $0<a<\frac{9}{16}$ 或 $a<0$；　　B. $a\neq0$；

C. $a>\frac{9}{16}$；　　D. $a<\frac{3}{4}$ 且 $a\neq0$.

2. 填空题：

(1) 方程 $2x^2+x+1=0$ 实数根的情况是________；

方程 $(x-4)^2+2(x-1)-5=0$ 实数根的情况是________；

方程 $x^2+2x-4=0$ 实数根的情况是________.

(2) 方程 $6x^2+x=0$ 的两根之和是____，两根之积是____；

方程 $-\sqrt{2}x^2+4x=2$ 的两根之和是____，两根之积是____.

(3) 在实数范围内因式分解：

$x^2+4x+2=$________；

104 第21章 一元二次方程

复习题

1. (1) C.

(2) B.

(3) C.

2. (1) 没有实数根；有两个相等的实数根；有两个不相等的实数根.

(2) $-\frac{1}{6}$；0；$2\sqrt{2}$；$\sqrt{2}$.

(3) $(x+2-\sqrt{2})(x+2+\sqrt{2})$；$2\left(x+\frac{3-\sqrt{57}}{4}\right)\left(x+\frac{3+\sqrt{57}}{4}\right)$.

3. (1) $x_1=-6$，$x_2=3$.

(2) $x_1=-\frac{3}{2}$，$x_2=\frac{1}{2}$.

(3) $x_1=2\sqrt{2}+3$，$x_2=2\sqrt{2}-3$.

(4) $x_1=-4$，$x_2=2$.

(5) $x_1=-\frac{1}{4}$，$x_2=\frac{13}{4}$.

(6) $x_1=-\frac{2}{3}$，$x_2=-4$.

4. 小海正确；小华错误，原因略.

改正：变形，得 $x^2-7x-31=0$.

解得 $x_1=\frac{7+\sqrt{173}}{2}$，$x_2=\frac{7-\sqrt{173}}{2}$.

5. $\Delta=[-(2k-1)]^2-4\times1\times k^2=-4k+1$.

由题意，得 $\Delta>0$，所以 $k<\frac{1}{4}$.

6. 是的. 提示：$\Delta=[-(4m-1)]^2-4\times2\times(-m^2-m)=24m^2+1>0$.

7. 另一个根为 $x=-2$，$m=1$.

$2x^2+3x-6=$____________.

3. 解下列方程：

(1) $x^2+3x-18=0$；

(2) $(2x+1)^2-4=0$；

(3) $x^2-4\sqrt{2}x-1=0$；

(4) $3x^2-(x-2)^2=12$；

(5) $(4x-1)^2-10(4x-1)-24=0$；

(6) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}=-\frac{8}{x^2-4}$.

4. 小海与小华分别在解下面的方程：

小海：

(1) $x(3x+2)-6(3x+2)=0$.

解：$(3x+2)(x-6)=0$.

$3x+2=0$ 或 $x-6=0$.

解得 $x=-\frac{2}{3}$ 或 $x=6$.

所以，原方程的根是 $x_1=-\frac{2}{3}$，$x_2=6$.

小华：

(2) $(x+3)(x-10)=1$.

解：$x+3=1$ 或 $x-10=1$.

解得 $x=-2$ 或 $x=11$.

所以，原方程的根是 $x_1=-2$，$x_2=11$.

你认为他们的解法正确吗？如果正确，请在框内打“√”；如果不正确，请找出错误的地方，指出错误原因，并写出正确的解法.

5. 当 k 满足什么条件时，关于 x 的方程 $x^2-(2k-1)x+k^2=0$ 有两个不相等的实数根？

6. 无论 m 取何值，关于 x 的方程 $2x^2-(4m-1)x-m^2-m=0$ 一定有两个不相等的实数根吗？为什么？

7. 如果关于 x 的方程 $x^2+(m+2)x+2=0$ 的一个根为 -1，求此方程的另一个根及 m 的值.

复习题 105

8. 请尝试解决南宋数学家杨辉提出的一个问题："直田积八百六十四步，只阔不及长一十二步. 问阔及长各几步."（其大意为：长方形的面积是 864 平方步，宽比长少 12 步. 求这个长方形的长和宽.）

9. 一块长方形空地的长是 24 m，宽是 12 m，现要在它的中央划一个小长方形区域种植花卉，四周植草. 已知四周所留的宽度相同，小长方形面积是原长方形面积的 $\frac{5}{9}$. 求小长方形的长和宽.

10. 某木器厂今年一月份生产了课桌 500 张；后因管理不善，二月份的产量减少了 10%；从三月份起加强了管理，产量逐月上升，四月份产量达到 648 张. 如果三、四月份的月增长率相同，求这个增长率.

B

11. 已知关于 x 的方程 $2x^2-\sqrt{3}x+m=0$ 没有实数根，那么 m 可取的最小整数值是多少？

12. 已知方程 $2x^2+4x+1=0$ 的两根是 x_1、x_2，利用韦达定理，求下列各式的值：

(1) $(x_1-3)(x_2-3)$；　　(2) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$；

(3) $x_1^2+x_2^2-x_1x_2$；　　(4) $(x_1-x_2)^2$.

13. 如图，在宽为 20 m、长为 32 m 的长方形耕地上，修筑同样宽的三条道路（两条纵向，一条横向，横向与纵向互相垂直），把耕地分成大小不等的六块实验田. 为使实验田总面积为 570 m²，道路的宽应为多少？

（第 13 题）

14. 某工厂在第一季度的生产中，一月份的产值是 250 万元，二、三月份产值的月增长率相同. 已知第一季度的总产值是 843.6 万元，求二、三月份的月增长率.

106　第21章　一元二次方程

8. 36 步、24 步.

9. 20 米、8 米.

10. 增长率为 20%.

11. m 可取的最小整数值是 1.

12. (1) $\frac{31}{2}$.

(2) 6.

(3) $\frac{5}{2}$.

(4) 2.

13. 道路的宽应为 1 m.

14. 二、三月份的月增长率为 12%.

15. 能在规定时间内完成. 提示：设规定时间为 x 天，根据题意，得 $\frac{1}{2x+4}+\frac{1}{2x-16}=\frac{1}{24}$，可得 $x=28$.

15. 某工程队中甲、乙两组承包一段路基的改造工程，规定在若干天内完成. 已知甲组单独完成这项工程所需时间比规定时间的 2 倍多 4 天，乙组单独完成这项工程所需时间比规定时间的 2 倍少 16 天，而甲、乙两组合做需要 24 天完成. 问：甲、乙两组合做能否在规定时间内完成？

第 22 章　直角三角形

一、本章概述

1. 总体要求

直角三角形是一种特殊的三角形，本章主要研究它的特殊性质与判定，包括著名的勾股定理. 勾股定理定量地反映了直角三角形三边之间的关系，搭建起了几何图形和数量关系之间的桥梁，它是定量几何的基础，是平面几何中重要的定理之一.

本章是在七年级三角形及等腰三角形学习的基础上展开的，主要任务是引导学生深入探究特殊的三角形——直角三角形的有关性质与判定. 要求学生掌握直角三角形的性质、直角三角形全等的判定、角平分线的性质，掌握勾股定理及其逆定理. 这些定理不仅是平面几何中的重要定理，也将为三角、解析几何、立体几何的学习奠定基础. 通过本章的学习，帮助学生进一步熟悉几何推理和几何计算.

2. 课时安排建议

本章共 12 课时，具体课时分配建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
22.1　直角三角形	2	直角三角形的性质　1 课时
		直角三角形全等的判定　1 课时
习题课	1	
22.2　角平分线	2	角平分线　2 课时
习题课	1	
22.3　勾股定理	3	勾股定理　3 课时
习题课	1	
复习与小结	2	

3. 内容编排与特色

本章内容分为三节，分别是“22.1 直角三角形”“22.2 角平分线”和“22.3 勾股定理”.

“22.1 直角三角形”，先研究一个直角三角形的性质，再判断两个直角三角形是否全等. 内容编排以操作为背景，自然引出定理进而证明，有利于学生更好地理解与掌握. 与“二期课改”教科书相比，改用“同一法”证明定理“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”，证明过程更加简洁自然. 根据《课标 2022 年版》的内容要求，删去了“在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半”及其逆命题，以例题的形式证明了这个结论，为学生学习“第 29 章三角初步”作铺垫. 为规范语言，删去了“H.L.”的名称. 结合尺规作图的操作呈现并证明了直角三角形全等的判定定理.

“22.2 角平分线”，先经历尺规作图的操作，体验角的轴对称性，再引入角平分线的性质定理及定理“在角的内部，到角的两边所在直线距离相等的点，均在这个角的平分线上”，后一个定理的证明可以看作直角三角形全等判定的一个应用. 与“二期课改”教科书相比，定理“在角的内部，到角的两边所在直线距离相等的点，均在这个角的平分线上”中，不再强调“包括顶点”，说明了“角平分线的端点到这个角的两边所在直线的距离相等，都为 0”，删去“点到射线的距离”的说明，把“到角的两边距离相等的点”改为“到角的两边所在直线距离相等的点”，让定理的表述更简洁明确.

“22.3 勾股定理”，“在直角三角形中，斜边大于直角边”可以看作“在三角形中，大角对大边”的特殊情况，进而证明了“垂线段最短”. 通过计算面积的操作活动，先猜想勾股定理，再引入图形面积的性质为定理证明作铺垫. 与“二期课改”教科书相比，“垂线段最短”不再作为公理. 给出图形面积的性质，让运用计算面积证明勾股定理的方法更严谨.

本章最大特色是重视几何直观、数学抽象和逻辑推理. 让学生在直观发现图形特征、理解尺规作图原理、推导几何图形性质的过程中，发展几何直观、抽象能力和推理能力.

4. 教学提示

直角三角形的性质、直角三角形全等的判定、角平分线的性质在编写结构上基本类似，帮助学生经历“画图猜想、归纳结论、推理论证”的过程，在教学中帮助学生在尺规作图的操作活动中发展空间观念和空间想象力. 使用“同一法”虽可以简洁自然地证明“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”，但对于学生而言有一定难度，不宜要求学生独立地运用它证明几何命题.

直角三角形是特殊的三角形，在教学中引导学生将直角三角形的性质与一般三角形、等腰三角形的性质类比，分析共性与区别；将角平分线的性质与线段的垂直平分线的性质类比，帮助学生体会由线段和角的轴对称性揭示的相关图形中线段的相等关系；将直角三角形全等的判定与一般三角形全等的判定类比，感悟其特殊性及适用范围.

勾股定理是人类智慧的体现，可以结合信息技术设计探究活动研究勾股定理，本章阅读材料和本册的综合与实践中介绍了几种勾股定理的证法，在教学中可以结合勾股定理的不同证法介绍古今中外对勾股定理的研究成果，鼓励学生进一步探究勾股定理的证明，激发学生的求知欲、探索欲，发展学生的创新意识.

5. 评价建议

关注学生对图形性质的理解和掌握. 本章的图形性质主要有直角三角形的性质、直角三角形全等的判定、角平分线的性质和勾股定理，评价时重视与以前学过的一般三角形相关知识的区别与联系，如角平分线与线段垂直平分线；评价时要重视对运用性质时易错点的辨析，如直角三角形全等的判定适用的前提条件；评价时要重视数形结合的运用，如勾股定理与“方程”思想的结合等. 教师可设计具体情境评价学生对图形性质的理解水平.

关注学生几何直观、抽象能力和推理能力的形成. 评价时重视学生能否在概括直角三角形、角平分线的性质及其线段与角的关系时，形成和发展抽象能力；能否在尺规作图、探究勾股定理证明方法时，形成几何直观；能否在证明定理及其逆定理的过程中，发展推理能力. 评价时要重视学生准确、严谨的表达.

鼓励学生积极探究和交流讨论. 关注学生是否积极参与探究与讨论，如“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”的证明方法的讨论，勾股定理古今中外证明方法的探究. 重视教学的过程性评价，对学生的思路分析和归纳总结给予及时评价.

二、教科书分析与教学建议

22.1　直角三角形

本节教学目标

（1）理解直角三角形的概念.

（2）掌握直角三角形的两个锐角互余；掌握有两个锐角互余的三角形是直角三角形.

（3）探索并掌握直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

（4）已知一直角边和斜边，用尺规作图作直角三角形.

（5）探索并掌握判定直角三角形全等的定理.

（6）理解尺规作图的基本原理与方法，发展几何直观.

（以下分析对应课本第 109～111 页）

本课教学重点

掌握直角三角形的两个锐角互余；掌握两个锐角互余的三角形是直角三角形；探索并掌握直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

本课教学建议

（1）“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”是直角三角形的重要性质，学生在“第 23 章四边形”学习矩形的对角线互相平分且相等的性质时，可自然地推得这个定理，在“二期课改”教科书中运用“倍长中线”构造中心对称图形的方式，通过两次证明三角形全等的方法就是基于此.

现阶段，无论是教科书中提到的“同一法”还是“倍长中线”构造中心对称图形两次证明三角形全等的方法都有一定难度，在教学中可根据学生情况适当选择，不必要求学生用“同一法”证明几何命题.

（2）根据《课标 2022 年版》的内容要求，删去了“二期课改”教科书中的“在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半”，以及它的逆命题“在直角三角形中，如果一条直角边等于斜边的一半，那么这条直角边所对的角等于 30°”. 例 2 可以作为对含有一个特殊角度的直角三角形线段关系研究的补充. 在“第 29 章三角初步”中求给定锐角的正弦、余弦与正切值时将用到此结论.

22.1 直角三角形

1. 直角三角形的性质

直角三角形有一个角是直角，根据三角形的内角和定理，可推出直角三角形的一个性质定理：

定理 直角三角形的两个锐角互余.

其逆命题也是正确的，即得到直角三角形的一个判定定理：

定理 两个锐角互余的三角形是直角三角形.

请自行证明上面两个定理.

下面我们来研究直角三角形的另一些性质.

如图 22-1-1，在 Rt△ABC 中，作射线 CD 与边 AB 交于点 D，将 $\angle ACB$ 分成两个角，使 $\angle ACD=\angle A$，就有 $\angle BCD=\angle B$，可见 Rt△ABC 被分成了两个等腰三角形.

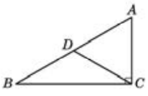


图 22-1-1

基于上面的分析，可以得到直角三角形的另一个性质定理：

定理 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

如图 22-1-2，已知：在 Rt△ABC 中，CD 是斜边 AB 上的中线.

求证：$CD=\frac{1}{2}AB$.

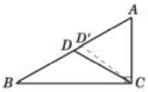


图 22-1-2

证明 如图 22-1-2，过点 C 作射线 CD' 交边 AB 于点 D'，使 $\angle ACD'=\angle A$，根据题意，可知 $\angle ACD'+\angle BCD'=90°$，由“直角三角形的两个锐角互余”，可得 $\angle A+\angle B=90°$，从而推出 $\angle BCD'=\angle B$.

所以，$CD'=AD'=BD'$，即线段 AB 的中点 D 与点 D' 重合. 因此，

本课内容分析

让学生经历过直角顶点作射线分割直角三角形的过程，结合“直角三角形的两个锐角互余”的性质，体会直角三角形斜边上的中线可以将它分成两个等腰三角形，运用“同一法”可以证明这个结论.

探究 提示学生使用反证法，利用“在三角形中，大边对大角”证明上述定理. 如图 22－1－3，如果 $AD=BD>CD$，则 $\angle ACD>\angle A$，$\angle BCD>\angle B$，于是 $\angle ACB=\angle ACD+\angle BCD>\angle A+\angle B=90^\circ$，这与已知矛盾. 如果 $AD=BD<CD$，同理可得 $\angle ACB=\angle ACD+\angle BCD<\angle A+\angle B=90^\circ$，也与已知矛盾. 从而 $CD=AD=BD$.

例 2 证明了“在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半”，它的逆命题“在直角三角形中，如果一条直角边等于斜边的一半，那么这条直角边所对的角等于 30°”也可以通过添加这条辅助线证得. 本题还可以通过倍长线段 BC 构造等边三角形，利用“等腰三角形三线合一”证得.

$CD=AD=BD$，即 $CD=\frac{1}{2}AB$.

探究

用反证法证明上述定理. 如果 $AD>CD$ 可推出什么矛盾？如果 $AD<CD$ 呢？

例 1 如图 22-1-3，已知：CD 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的中线，且 $CD=\frac{1}{2}AB$.

求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

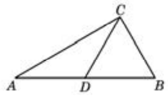


图 22-1-3

证明 ∵ CD 是边 AB 上的中线，且 $CD=\frac{1}{2}AB$，

∴ $CD=AD=BD$.

∴ $\angle A=\angle ACD$，$\angle B=\angle BCD$.

∵ $\angle A+\angle B+\angle ACB=180^\circ$，

∴ $\angle A+\angle B+\angle ACD+\angle BCD=180^\circ$.

∴ $\angle A+\angle B=\frac{1}{2}\times180^\circ=90^\circ$.

∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形（两个锐角互余的三角形是直角三角形）.

例 2 如图 22-1-4，已知：在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$.

求证：$BC=\frac{1}{2}AB$.

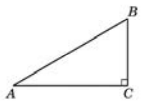


图 22-1-4

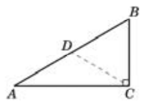


图 22-1-5

证明 如图 22-1-5，作斜边 AB 上的中线 CD.

∵ $\angle ACB=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，

∴ $\angle B=60^\circ$（直角三角形的两个锐角互余）.

110 第22章 直角三角形

∵ CD 是斜边 AB 上的中线，

∴ $CD=AD=BD=\frac{1}{2}AB$（直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半）.

∴ $\angle DCB=\angle B=60°$.

∴ $\angle BDC=60°$.

∴ $\triangle CDB$ 是等边三角形.

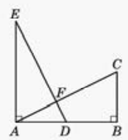
∴ $BC=CD=\frac{1}{2}AB$.

课堂练习 22.1(1)

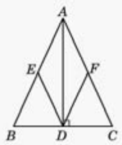
1. 如图，已知 D 为线段 AB 的中点，$EA\perp AB$，$CB\perp AB$，垂足分别为 A、B，$AE=AB=2BC$，那么下列结论中不正确的是　（　　）

A. $DE=AC$；　　B. $\angle E+\angle C=90°$；

C. $\angle CAB=30°$；　　D. $\angle EAF=\angle ADE$.



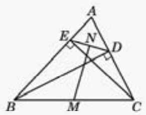
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知：在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$，垂足为 D，E、F 分别是边 AB、AC 的中点，且 $DE=DF$. 求证：$AB=AC$.

3. 如图，已知：BD、CE 分别是 $\triangle ABC$ 的高，M、N 分别是 BC、DE 的中点. 求证：$MN\perp ED$.



（第 3 题）

22.1 直角三角形　111

课堂练习 22.1(1)

1. C.

2. 提示：利用“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”，得 $AB=2DE$，$AC=2DF$，再由 $DE=DF$，得 $AB=AC$.

3. 提示：连接 MD、ME. 利用直角三角形的性质定理推出 $MD=ME$；再由“等腰三角形三线合一”，得 $MN\perp ED$.

（以下分析对应课本第 112～115 页）

本课教学重点

探索并掌握直角三角形全等的判定定理，结合一般三角形全等的判定体会直角三角形全等的判定定理的特殊性. 已知一直角边和斜边，用尺规作图作直角三角形.

本课教学建议

（1）要强调直角三角形是使用直角三角形全等的判定定理的前提条件，关注这个定理的特殊性及适用范围.

（2）在例题的证明中没有写出由线段垂直的条件推出两个角相等且为 90°，进而得到两个三角形是直角三角形的过程，是因为这个过程是简单且显然的，教学中可根据学生情况给予适当处理.

2. 直角三角形全等的判定

在“三角形”一章中，我们已经知道，在两个三角形中如果仅已知两边分别相等且一组等边的对角相等，一般不能判定这两个三角形全等. 但如果这两个三角形对应相等的角是直角，它们全等吗？

操作

如图 22-1-6，已知线段 b、$c(c>b)$.

求作 Rt$\triangle ABC$，使 $\angle ACB=90°$，$AB=c$，$AC=b$.

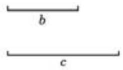


图 22-1-6

作法

(1) 作线段 $AC=b$；

(2) 过点 C 作直线 $MN\perp AC$；

(3) 以点 A 为圆心、以 c 的长为半径作弧，交直线 MN 于点 B；

(4) 连接 AB.

$\triangle ABC$ 就是所求的直角三角形(图 22-1-7).

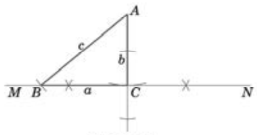


图 22-1-7

思考

上面以点 A 为圆心、以 c 的长为半径作弧，还可交直线 MN 于另一点 B'，从而作出了满足要求的另一个直角三角形$\triangle AB'C$(图 22-1-8)，它与$\triangle ABC$ 全等吗？为什么？

如图 22-1-8，$\triangle ABB'$是等腰三角形，从而$\angle B=\angle B'$. 又由$\angle ACB=\angle ACB'$，$AB=AB'$，即可证得$\triangle ABC\cong\triangle AB'C$.

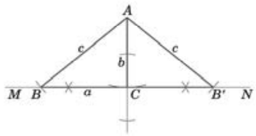


图 22-1-8

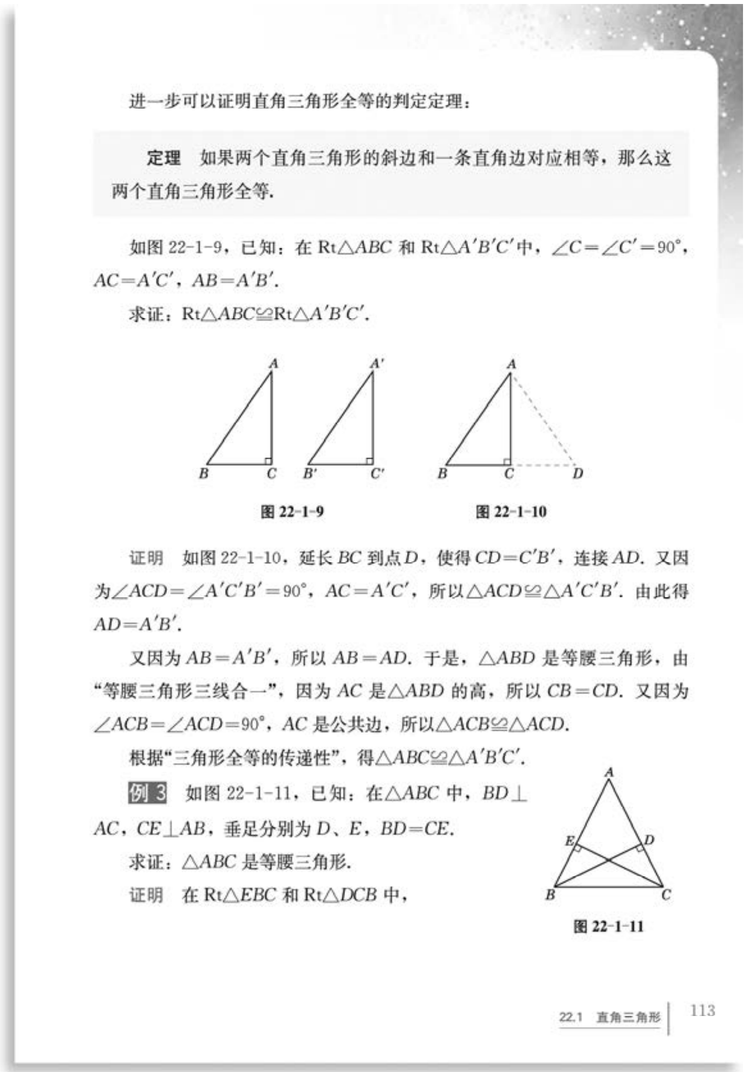
本课内容分析

直角三角形是特殊的三角形，因此一般三角形全等的判定方法对直角三角形都适用. 引入中的问题开门见山地引导学生关注直角三角形具备一般三角形没有的特殊性质.

操作 通过画一个直角三角形感悟如果已知斜边、直角边，那么它的形状大小是确定的.

过直线上一点作已知直线的垂线的方法在第 18 章中已学过.

思考 结合操作中尺规作图的经验，可以自然地联想到添加辅助线构造成轴对称的全等三角形，以证明直角三角形全等的判定定理.



进一步可以证明直角三角形全等的判定定理：

定理 如果两个直角三角形的斜边和一条直角边对应相等，那么这两个直角三角形全等.

如图 22-1-9，已知：在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$中，$\angle C=\angle C'=90°$，$AC=A'C'$，$AB=A'B'$.

求证：Rt$\triangle ABC \cong$ Rt$\triangle A'B'C'$.

图 22-1-9　　图 22-1-10

证明　如图 22-1-10，延长 BC 到点 D，使得 $CD=C'B'$，连接 AD. 又因为$\angle ACD=\angle A'C'B'=90°$，$AC=A'C'$，所以$\triangle ACD \cong \triangle A'C'B'$. 由此得 $AD=A'B'$.

又因为 $AB=A'B'$，所以 $AB=AD$. 于是，$\triangle ABD$ 是等腰三角形，由"等腰三角形三线合一"，因为 AC 是$\triangle ABD$ 的高，所以 $CB=CD$. 又因为$\angle ACB=\angle ACD=90°$，$AC$ 是公共边，所以$\triangle ACB \cong \triangle ACD$.

根据"三角形全等的传递性"，得$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

例 3 如图 22-1-11，已知：在$\triangle ABC$ 中，$BD \perp AC$，$CE \perp AB$，垂足分别为 D、E，$BD=CE$.

求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

证明　在 Rt$\triangle EBC$ 和 Rt$\triangle DCB$ 中，

图 22-1-11

22.1 直角三角形　113

定理证明中，通过添加辅助线的方法，构造$\triangle A'B'C' \cong \triangle ACD$(SAS)，进而可以推得 $AB=AD$. 这与"操作"中"以点 A 为圆心、以 c 的长为半径作弧，交直线 MN 于点 B、B'"呼应.

例 3 给出运用直角三角形全等的判定定理的示范，本题也可以通过证明$\triangle ADB \cong \triangle AEC$(AAS)证得结论.

∵ $\begin{cases} CE=BD, \\ BC=CB, \end{cases}$

∴ Rt△EBC≌Rt△DCB（直角三角形全等的判定定理）.

∴ $\angle EBC=\angle DCB$.

∴ $AB=AC$，

即△ABC 是等腰三角形.

例 4 证明：有一条直角边和斜边上的高对应相等的两个直角三角形全等.

如图 22-1-12，已知：在 Rt△ABC 和 Rt△$A'B'C'$中，$\angle ACB=\angle A'C'B'=90°$，$AC=A'C'$，$CD\perp AB$，$C'D'\perp A'B'$，垂足分别为 D、D'，$CD=C'D'$.

求证：△ABC≌△$A'B'C'$.

图 22-1-12

证明 在 Rt△ACD 与 Rt△$A'C'D'$中，

∵ $\begin{cases} AC=A'C', \\ CD=C'D', \end{cases}$

∴ Rt△ACD≌Rt△$A'C'D'$（直角三角形全等的判定定理）.

∴ $\angle A=\angle A'$.

在△ABC 与△$A'B'C'$中，

∵ $\begin{cases} \angle A=\angle A', \\ AC=A'C', \\ \angle ACB=\angle A'C'B', \end{cases}$

∴ △ABC≌△$A'B'C'$.

114 第22章 直角三角形

例 4 是三角形全等判定的综合应用.

课堂练习 22.1(2)

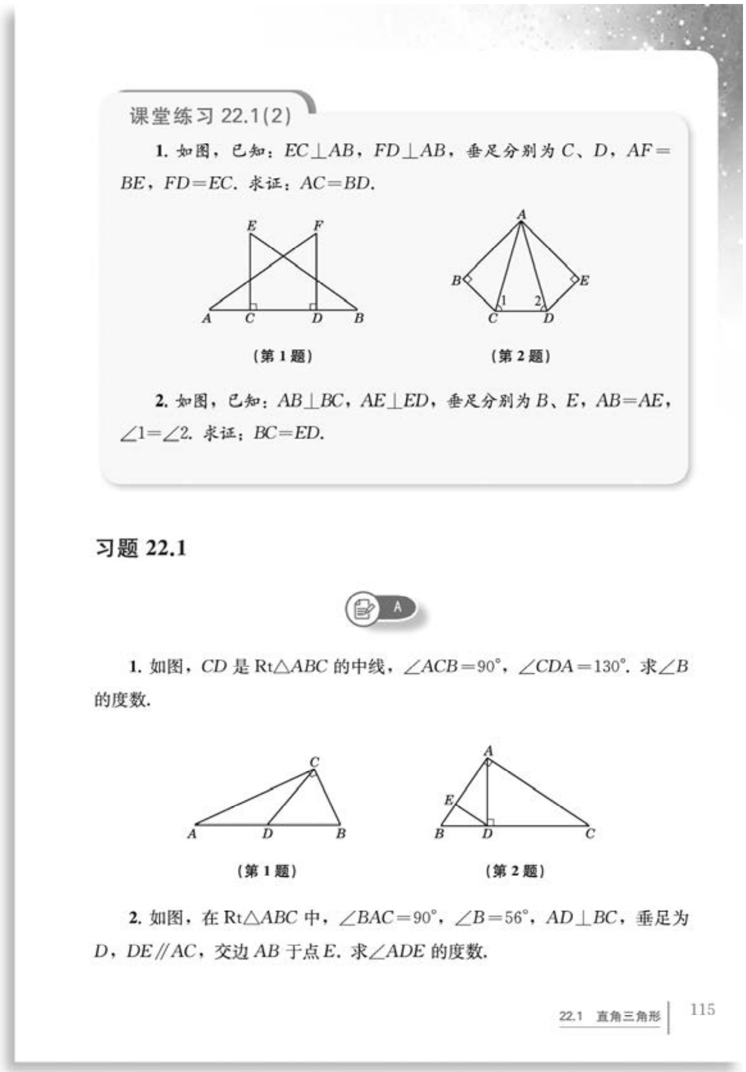
1. 提示：基于$\angle ECB=\angle FDA=90°$，利用直角三角形全等的判定定理，证Rt$\triangle FDA\cong$Rt$\triangle ECB$，得$AD=BC$，由此推出$AC=BD$.

2. 提示：利用直角三角形全等的判定定理，证Rt$\triangle ABC\cong$Rt$\triangle AED$，得$BC=ED$.

习题 22.1

1. $\angle B=65°$.

2. $\angle ADE=56°$.


课堂练习 22.1(2)

1. 如图，已知：$EC\perp AB$，$FD\perp AB$，垂足分别为C、D，$AF=BE$，$FD=EC$. 求证：$AC=BD$.

（第1题）　（第2题）

2. 如图，已知：$AB\perp BC$，$AE\perp ED$，垂足分别为B、E，$AB=AE$，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$BC=ED$.

习题 22.1

A

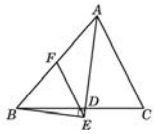
1. 如图，CD是Rt$\triangle ABC$的中线，$\angle ACB=90°$，$\angle CDA=130°$. 求$\angle B$的度数.

（第1题）　（第2题）

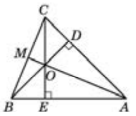
2. 如图，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，$\angle B=56°$，$AD\perp BC$，垂足为D，$DE/\!/AC$，交边AB于点E. 求$\angle ADE$的度数.

22.1 直角三角形　115

3. 如图，已知：AD 是$\triangle ABC$ 的角平分线，$BE \perp AD$，BE 交 AD 的延长线于点 E，F 是边 AB 的中点. 求证：$FE /\!/ AC$.



（第 3 题）

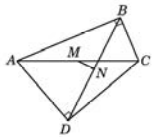


（第 4 题）

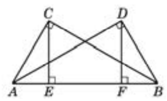
4. 如图，$\triangle ABC$ 的高 BD 与 CE 相交于点 O，$OD=OE$，AO 的延长线交边 BC 于点 M. 求证：$AB=AC$.

B

5. 如图，已知：$\angle ABC=\angle ADC=90°$，$M$、$N$ 分别是 AC、BD 的中点. 求证：$MN \perp BD$.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，已知：$AC \perp BC$，$AD \perp BD$，垂足分别为 C、D，$AD=BC$，$CE \perp AB$，$DF \perp AB$，垂足分别为 E、F. 求证：$CE=DF$.

116 第22章 直角三角形

3. 提示：由已知，可得 $AF=EF$，进而可推得$\angle AEF=\angle EAC$，推出 $FE /\!/ AC$.

4. 提示：先证$\mathrm{Rt}\triangle ADO \cong \mathrm{Rt}\triangle AEO$，得 $AD=AE$；再证 $\triangle ADB \cong \triangle AEC$，得 $AB=AC$.

5. 提示：连接 BM、DM，由“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”推得 $DM=BM$，进而得到 $MN \perp BD$.

6. 提示：先证 $\mathrm{Rt}\triangle ABC \cong \mathrm{Rt}\triangle BAD$，得$\angle CBA=\angle DAB$；再证 $\triangle CEB \cong \triangle DFA$，得 $CE=DF$.

22.2　角平分线

本节教学目标

（1）会用尺规作图作一个角的平分线，理解其原理.

（2）探索并证明角平分线的性质定理.

（3）证明“在角的内部，到角的两边所在直线距离相等的点，均在这个角的平分线上”.

（4）了解三角形的内心的概念.

（以下分析对应课本第 117～119 页）

本课教学重点

用尺规作图作一个角的平分线，掌握角平分线的性质.

本课教学建议

（1）认识角的轴对称性是研究角平分线的性质定理及定理“在角的内部，到角的两边所在直线距离相等的点，均在这个角的平分线上”的关键，理解用尺规作图作一个角的平分线的原理，有助于加深学生对角的轴对称性的理解.

（2）在叙述“在角的内部，到角的两边所在直线距离相等的点，均在这个角的平分线上”时，学生一般不会加限制条件. 引导学生注意角的平分线是在角内部的一条射线，所以要加上“在角的内部”这个条件. 在第 16 章定义点到直线的距离时补充规定了“直线上的点到这条直线的距离为 0”，因此角的顶点到角两边的距离是相等的，故而删去了“二期课改”教科书中“且包含顶点”的叙述. 本套教科书中没有定义点到射线的距离，所以“到角的两边的距离相等”改为“到角的两边所在直线的距离相等”.

22.2 角平分线

操作

我们知道，角是轴对称图形，它的对称轴是角平分线所在的直线. 已知一个角，你能用直尺和圆规作出它的平分线吗？

如图 22-2-1，已知$\angle AOB$，求作$\angle AOB$的平分线.

作法

(1) 以点 O 为圆心、以任意长度 a 为半径作弧，分别交 OA、OB 于点 D、E；

(2) 分别以点 D、E 为圆心，以 DE 的长为半径作弧，两弧相交于$\angle AOB$内的一点 C；

(3) 作射线 OC.

射线 OC 就是$\angle AOB$的平分线(图 22-2-2).

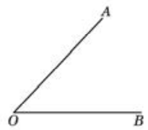


图 22-2-1

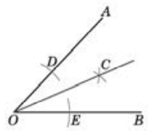


图 22-2-2

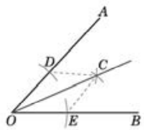


图 22-2-3

证明　如图 22-2-3，连接 CD、CE.

在$\triangle OCD$和$\triangle OCE$中，

$$\because \begin{cases} OD=OE, \\ OC=OC, \\ CD=CE, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle OCD \cong \triangle OCE$.

22.2 角平分线 | 117

本课内容分析

角平分线性质的探索可以与线段垂直平分线类比，加深学生对线段和角的轴对称性的认识.

操作　角平分线的概念在第 4 章中已学过，用尺规作图作一个角的平分线的依据是用“边边边”判定三角形全等.

作法的第(2)句“以 DE 的长为半径”中半径的选取只要满足大于$\frac{1}{2}DE$即可，此时能保证两弧相交.

在本章角平分线的教学中不必讨论大于等于平角的角.

∴ $\angle COD=\angle COE$,

即 OC 平分$\angle AOB$.

如图22-2-4，设 OC 是$\angle AOB$ 的平分线，在 OC 上任取一个不与点 O 重合的点 P，过点 P 分别向 OA、OB 作垂线段，那么这两条垂线段的长相等.

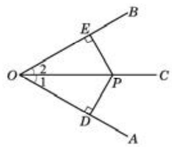


图 22-2-4

研究角平分线有关问题时，约定所涉及的角小于平角.

归纳上述事实，得到角平分线的性质定理：

定理 角平分线上的点到这个角的两边所在直线的距离相等.

显然，角平分线的端点到这个角的两边所在直线的距离相等，都为 0.

如图 22-2-4，已知：OC 是$\angle AOB$ 的平分线，P 是OC 上一点(点 P 不与点 O 重合)，$PD\perp OA$，$PE\perp OB$，垂足分别为 D、E.

求证：$PD=PE$.

证明 因为 OC 是$\angle AOB$ 的平分线，所以$\angle 1=\angle 2$. 因为 $PD\perp OA$，$PE\perp OB$，所以$\angle PDO=\angle PEO=90°$. 又因为$\angle 1=\angle 2$，$\angle PDO=\angle PEO$，$OP$ 为公共边，所以$\triangle PDO\cong\triangle PEO$. 由此推出 $PD=PE$.

反过来，则得到：

定理 在角的内部，到角的两边所在直线距离相等的点，均在这个角的平分线上.

118 第22章 直角三角形

如图 22-2-5，已知：Q 为$\angle AOB$ 内部一点，$QD\perp OA$，$QE\perp OB$，垂足分别为 D、E，$QD=QE$.

求证：点 Q 在$\angle AOB$ 的平分线上.

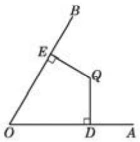


图 22-2-5

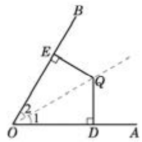
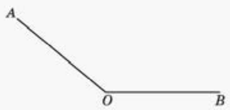


图 22-2-6

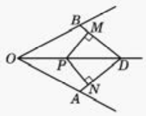
证明　如图 22-2-6，作射线 OQ. 因为 $QD\perp OA$，$QE\perp OB$，所以$\angle QDO=\angle QEO=90°$. 又因为 $QD=QE$，OQ 为公共边，根据直角三角形全等的判定定理，得 $Rt\triangle QDO\cong Rt\triangle QEO$. 由此推出$\angle 1=\angle 2$，即 OQ 是$\angle AOB$ 的平分线，由此可见点 Q 在$\angle AOB$ 的平分线上.

课堂练习 22.2(1)

1. 如图，已知$\angle AOB$，用尺规四等分$\angle AOB$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知：点 P、D 在$\angle AOB$ 的平分线上，$OA=OB$，$PM\perp BD$，$PN\perp AD$，垂足分别是 M、N. 求证：$PM=PN$.

“在角的内部，到角的两边所在直线距离相等的点，均在这个角的平分线上”的证明运用了直角三角形全等的判定定理.

课堂练习 22.2(1)

1. 略.

2. 提示：先证$\triangle BOD\cong\triangle AOD$（SAS），得$\angle BDO=\angle ADO$；再根据角平分线的性质定理，推出 $PM=PN$.

（以下分析对应课本第 120～122 页）

本课教学重点

能运用角平分线的性质定理及“在角的内部，到角的两边所在直线距离相等的点，均在这个角的平分线上”进行推理证明，了解三角形的内心的概念.

本课教学建议

（1）学生学习了线段垂直平分线与角平分线的性质定理后，有时仍会用全等三角形推理.在教学中，引导学生关注运用这些定理可以简化证明过程.

（2）现阶段学生只需要知道三角形的内心是三角形的三条角平分线的交点，在第 31 章定义三角形的内切圆时再说明三角形的内心是三角形内切圆的圆心.

例 1 如图 22-2-7，已知：在$\triangle ABC$中，AO、BO分别是$\angle BAC$、$\angle ABC$的平分线，$OD\perp BC$，$OE\perp AB$，垂足分别为D、E.

求证：点O在$\angle C$的平分线上.

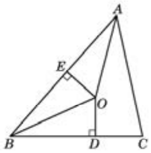


图 22-2-7

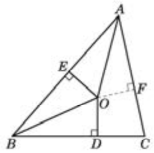


图 22-2-8

证明　如图 22-2-8，过点O作$OF\perp AC$，垂足为F.

$\because$　AO是$\angle BAC$的平分线，$OE\perp AB$，$OF\perp AC$，

$\therefore$　$OE=OF$（角平分线的性质定理）.

同理，可得$OE=OD$.

$\therefore$　$OD=OF$.

又$\because$　$OD\perp BC$，$OF\perp AC$，

$\therefore$　点O在$\angle C$的平分线上（在角的内部，到角的两边所在直线距离相等的点，均在这个角的平分线上）.

本题结论表明：三角形的三个内角的平分线相交于一点，这个交点叫作三角形的内心.

例 2 如图 22-2-9，已知：在$\triangle ABC$中，AD是$\angle BAC$的平分线，且$BD=CD$.

求证：$\angle B=\angle C$.

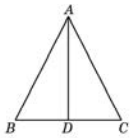


图 22-2-9

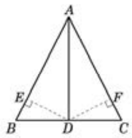


图 22-2-10

120　第22章　直角三角形

本课内容分析

例 1 综合运用角平分线的性质定理及“在角的内部，到角的两边所在直线距离相等的点，均在这个角的平分线上”证明了第 17 章中提及的三角形三条角平分线交于一点.

例 2 是角平分线的性质定理与直角三角形全等的判定定理的综合运用.

例 3 是对线段垂直平分线的性质定理的逆命题和“在角的内部，到角的两边所在直线距离相等的点，均在这个角的平分线上”以及尺规作图的综合应用.

证明　如图 22-2-10，过点 D 作 $DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为 E、F.

$\because$ AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，

$\therefore$ $DE=DF$（角平分线的性质定理）.

在 Rt$\triangle BDE$ 和 Rt$\triangle CDF$ 中，

$\because$ $\begin{cases} DE=DF, \\ BD=CD, \end{cases}$

$\therefore$ Rt$\triangle BDE\cong$Rt$\triangle CDF$（直角三角形全等的判定定理）.

$\therefore$ $\angle B=\angle C$.

例 3　如图 22-2-11，已知 $\angle AOB$ 及其内部一点 C.

求作 $\angle AOB$ 内部一点 P，使 $PC=PO$，且点 P 到直线 OA、OB 的距离相等.

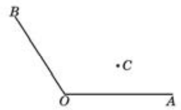


图 22-2-11

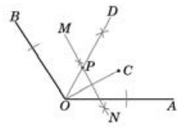


图 22-2-12

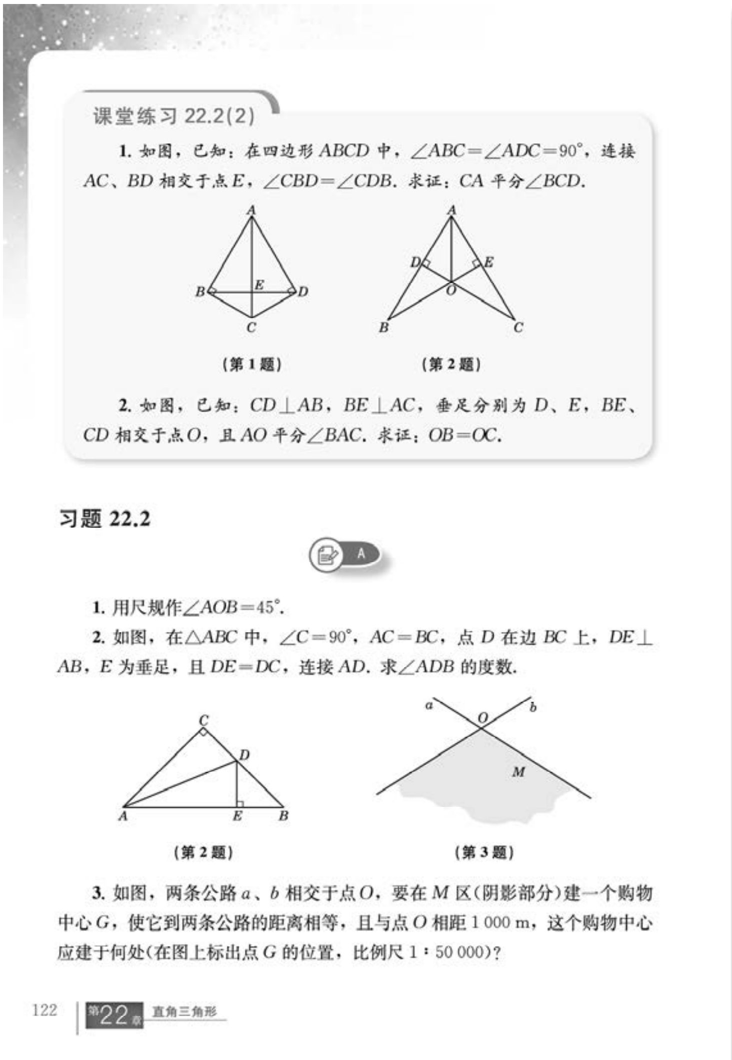
分析　假定点 P 已经作出，由 $PC=PO$，可知点 P 一定在线段 OC 的垂直平分线上. 又由点 P 在 $\angle AOB$ 内部且到直线 OA、OB 的距离相等，可知点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上. 因此，P 应是线段 OC 的垂直平分线与 $\angle AOB$ 的平分线的交点.

作法

（1）连接 OC，作线段 OC 的垂直平分线 MN；

（2）作 $\angle AOB$ 的平分线 OD，OD 与 MN 相交于点 P.

P 就是所求的点(图 22-2-12).



课堂练习 22.2(2)

1. 如图，已知：在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle ADC=90°$，连接 AC、BD 相交于点 E，$\angle CBD=\angle CDB$. 求证：CA 平分 $\angle BCD$.

(第 1 题)　(第 2 题)

2. 如图，已知：$CD\perp AB$，$BE\perp AC$，垂足分别为 D、E，BE、CD 相交于点 O，且 AO 平分 $\angle BAC$. 求证：$OB=OC$.

习题 22.2

A

1. 用尺规作 $\angle AOB=45°$.

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=BC$，点 D 在边 BC 上，$DE\perp AB$，E 为垂足，且 $DE=DC$，连接 AD. 求 $\angle ADB$ 的度数.

(第 2 题)　(第 3 题)

3. 如图，两条公路 a、b 相交于点 O，要在 M 区(阴影部分)建一个购物中心 G，使它到两条公路的距离相等，且与点 O 相距 1 000 m，这个购物中心应建于何处(在图上标出点 G 的位置，比例尺 1∶50 000)?

122　第22章　直角三角形

课堂练习 22.2(2)

1. 提示：先证 $\angle ABD=\angle ADB$，得 $AB=AD$；再根据“在角的内部，到角的两边所在直线距离相等的点，均在这个角的平分线上”，得点 A 在 $\angle BCD$ 的平分线上.

2. 提示：根据角平分线的性质定理，得 $OD=OE$，再证 $\triangle ODB\cong\triangle OEC$，推出 $OB=OC$.

习题 22.2

1. 提示：先作一条直线的垂线得直角，再作直角的角平分线得 $45°$ 角.

2. $\angle ADB=112.5°$.

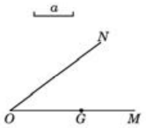
3. 提示：在 M 区内作两公路所成角的平分线 OP，在射线 OP 上截取 OG，使得 $OG=2$ cm，点 G 即为所求.

4. 提示：先作$\angle MON$的平分线，然后以点G为圆心、以a为半径作弧交$\angle MON$的平分线于两点，则这两点均为所求.

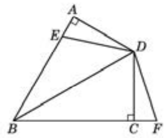
5. 提示：根据角平分线的性质定理，得$DA=DC$，可推出$\mathrm{Rt}\triangle DAE\cong\mathrm{Rt}\triangle DCF$，得$\angle DEA=\angle DFC$，进而推出$\angle BED+\angle DFB=180^\circ$.

6. 提示：过点G作$GE\perp BC$，垂足为E，推得$GE=AG=\frac{1}{2}AD=GD$，得点G在$\angle BCD$的平分线上.

4. 如图，已知线段a及$\angle MON$，点G在OM上，在$\angle MON$的内部求作点P，使点P到直线OM、ON的距离相等，且$PG=a$.



（第4题）

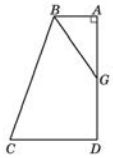


（第5题）

5. 如图，已知：在四边形$ABCD$中，$\angle BAD=\angle BCD=90^\circ$，$BD$平分$\angle ABC$. 点$E$在边$AB$上，点$F$在边$BC$的延长线上，连接$DE$、$DF$，$DE=DF$. 求证：$\angle BED+\angle DFB=180^\circ$.

B

6. 如图，已知：$AB\parallel CD$，$\angle A=90^\circ$，G为线段AD的中点，BG平分$\angle ABC$. 求证：点G在$\angle BCD$的平分线上.



（第6题）

22.2 角平分线 | 123

22.3　勾股定理

本节教学目标

（1）探索并掌握勾股定理及其逆定理.

（2）能运用勾股定理及其逆定理解决一些简单的实际问题.

（3）经历用几何直观和逻辑推理分析问题和解决问题的过程，发展应用意识和创新意识.

（以下分析对应课本第 124～127 页）

本课教学重点

经历勾股定理的探索过程，理解用面积割补证明勾股定理的方法，掌握勾股定理.

本课教学建议

（1）“在直角三角形中，斜边大于直角边”是对直角三角形三边关系的定性刻画，勾股定理则是对直角三角形三边关系的定量刻画. 先定性、再定量地研究直角三角形三边关系，有助于学生全面认识直角三角形三边之间的关系，理解勾股定理的地位与作用.

（2）本册教科书使用“在三角形中，大角对大边”证明“在直角三角形中，斜边大于直角边”进而推出“垂线段最短”.

（3）计算三个正方形面积的“操作”，有助于学生观察它们面积的关系发现勾股定理. 因此，本册教科书中删去了“二期课改”教科书中先研究等腰直角三角形、再研究一般三角形三边的数量关系引入勾股定理的内容. 计算大正方形面积的过程有助于学生理解用面积法证明勾股定理的思路.

（4）勾股定理的证明是本套教科书中首次使用面积法证明几何问题，很多勾股定理的证明方法用到了图形分、合、移、补前后的面积计算，补充图形面积的性质让定理的证明更严谨.

（5）本章的阅读材料及本册的综合与实践中，介绍了古今中外证明勾股定理的方法，可以结合信息技术设计教学活动，鼓励学生探究勾股定理的证明方法，激发学生的学习热情.

本课内容分析

对于直角三角形的三边关系的研究，先从定性的角度得到斜边大于直角边，再从定量的角度探索并证明勾股定理.

“垂线段最短”可以解释第16章中为什么用“垂线段的长度”定义点到直线的距离，加深学生对点到直线的距离的理解.

22.3 勾股定理

我们来研究直角三角形三边之间的关系.

定理 在直角三角形中，斜边大于直角边.

如图22-3-1，已知：在Rt△ACB中，$\angle C=90^\circ$.

求证：$BC<AB$，$AC<AB$.

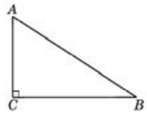


图 22-3-1

证明　根据“直角三角形的两个锐角互余”，可得$\angle A+\angle B=90^\circ$，进而推出$\angle A<\angle C$. 由“在三角形中，大角对大边”，可得$BC<AB$，同理可知$AC<AB$.

如果把直角边AC看作点A到直线BC的垂线段，那么根据上述定理，可以推得

定理 连接直线外一点与直线上各点的所有线段中，垂线段最短.

简单地说：垂线段最短.

这样，直线外一点到直线的距离就是连接该点与该直线上各点所得线段长度的最小值.

操作

如图22-3-2，在由边长为1的小正方形构成的方格网中，作出几个以格点为顶点的直角三角形(两条直角边的长分别记为a、b，斜边长记为c)，分别以三角形的各边为正方形的一边，向三角形外作正方形. 请计算每张图中各小正方形的面积并填写在表22-1中.

124 第22章 直角三角形

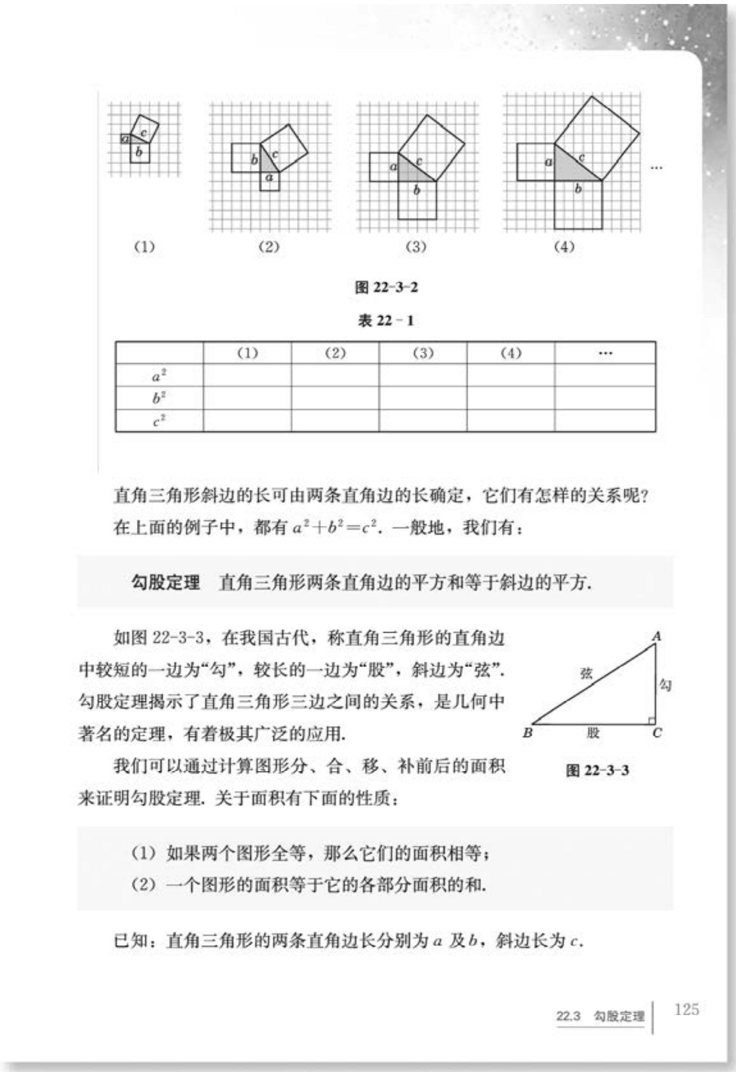


图 22-3-2

表 22－1

	(1)	(2)	(3)	(4)	…
a^2					
b^2					
c^2					

直角三角形斜边的长可由两条直角边的长确定，它们有怎样的关系呢？在上面的例子中，都有 $a^2+b^2=c^2$. 一般地，我们有：

勾股定理 直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方.

如图 22-3-3，在我国古代，称直角三角形的直角边中较短的一边为“勾”，较长的一边为“股”，斜边为“弦”. 勾股定理揭示了直角三角形三边之间的关系，是几何中著名的定理，有着极其广泛的应用.

图 22-3-3

我们可以通过计算图形分、合、移、补前后的面积来证明勾股定理. 关于面积有下面的性质：

(1) 如果两个图形全等，那么它们的面积相等；
(2) 一个图形的面积等于它的各部分面积的和.

已知：直角三角形的两条直角边长分别为 a 及 b，斜边长为 c.

22.3 勾股定理 125

操作 先给出几个具体的直角三角形，然后让学生分别计算以两直角边为边长的正方形的面积和以斜边为边长的正方形的面积，发现直角三角形三边之间的数量关系.

计算以斜边为边长的正方形的面积可以借助格线，用一个大正方形的面积减去四个直角三角形的面积(与教科书中的勾股定理的证明方法类似)，也可以是四个直角三角形的面积加上一个小正方形的面积(与赵爽弦图类似)，这个过程为面积法证明勾股定理作铺垫.

操作的题目选自顾冷沅、杨玉东发表在《上海中学数学》2007 年 1—2 期合刊上的《过程性变式与数学课例研究》一文.

可以参照《课标 2022 年版》附录中的例 82，结合信息技术设计教学活动，利用面积的不变性帮助学生体会勾股定理的直观证明.

一些涉及勾股定理的计算题会用到矩形的判定与性质. 学生在小学已经直观地了解了长方形和正方形的特点，但矩形的判定与性质将在八年级下册学习，所以本章中对这类计算题的书写可以不必要求严格的逻辑推理.

例 1 是勾股定理的初步应用. 先作三角形的高，再运用勾股定理计算线段长，这是计算三角形中线段长的常用方法.

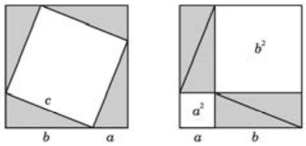
求证：$a^2+b^2=c^2$.

下面是古代数学家的一种巧妙证法：

图 22-3-4(1)和(2)都是边长为$(a+b)$的正方形，从中分别去掉四个全等的直角三角形(蓝色部分)，由上述关于面积的性质，可知这两个正方形中剩余部分的面积一定相等.

图 22-3-4 中每个直角三角形的两直角边长分别为 a 及 b. 因为这些直角三角形全等，而直角三角形的两个锐角互余，所以图 22-3-4(1)中的剩余部分是边长为 c 的正方形，而图 22-3-4(2)中的剩余部分是边长分别为 a 及 b 的两个正方形. 因此，

$$a^2+b^2=c^2.$$



(1) (2)

图 22-3-4

例 1 求边长为 1 的等边三角形的面积.

解 如图 22-3-5，等边三角形 ABC 的边长为 1. 过点 A 作 $AD\perp BC$，垂足为 D.

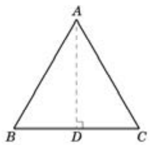


图 22-3-5

$\because$ $AB=BC=CA=1$，$AD\perp BC$，

$\therefore$ $BD=CD=\frac{1}{2}$.

在 Rt$\triangle ABD$ 中，

$\because$ $\angle ADB=90°$，

$\therefore$ $AB^2=AD^2+BD^2$ (勾股定理).

$\therefore\ AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\therefore\ S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$

因此，边长为1的等边三角形的面积是$\frac{\sqrt{3}}{4}$.

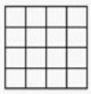
思考

如果等边三角形的边长为a，那么其面积S是多少(用含a的代数式表示)？

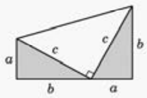
课堂练习 22.3(1)

1. 已知等边三角形ABC的边长为3 cm，求$\triangle ABC$的面积.

2. 如图，设每个小方格的面积为1，分别画出一条以格点为端点且长度为$\sqrt{5}$、5、$2\sqrt{5}$的线段.



（第2题）



（第3题）

3. 如图，涂色部分是两个直角边长为a、b，斜边长为c的直角三角形，且两斜边的夹角是直角. 请利用这个图形验证勾股定理.

我们来研究勾股定理的逆命题.

勾股定理的逆定理　如果三角形的一条边的平方等于其他两条边的平方和，那么这个三角形是直角三角形.

思考　结合例1的学习经验，推导出边长为a的等边三角形的面积为$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

课堂练习 22.3(1)

1. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

2. 略.

3. 提示：三个直角三角形的面积和为$ab+\frac{1}{2}c^2$，梯形的面积为$\frac{1}{2}(a+b)^2$. 由$ab+\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}(a+b)^2$化简可推得.

（以下分析对应课本第 127～130 页）

本课教学重点

理解勾股定理逆定理的证明过程，掌握勾股定理的逆定理.

本课教学建议

（1）勾股定理及其逆定理是一对互逆定理，勾股定理是直角三角形的一个性质定理，其逆定理是直角三角形的一个判定定理，可以类比平行线的判定与性质加深对互逆定理之间关系的认识. 勾股定理及其逆定理具有重要的地位和价值.

（2）与前面学过的判定定理不同，勾股定理的逆定理是通过计算来证明几何图形的性质——三角形有一个内角是直角，这体现了图形特征与数量关系之间的密切联系.

（3）教科书中勾股定理逆定理的证明是用两边及其夹角作出直角三角形，也可以用斜边和直角边作出直角三角形，利用勾股定理可以计算出另一条直角边，再用“边边边”证明两个三角形全等.

如图 22-3-6，已知：在$\triangle ABC$中，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，且$a^2+b^2=c^2$.

求证：$\triangle ABC$是直角三角形.

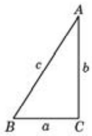


图 22-3-6

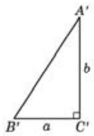


图 22-3-7

分析 构造一个直角边长为a、b的直角三角形，证明它与$\triangle ABC$全等.

证明 如图 22-3-7，作$\triangle A'B'C'$，使$\angle C'=90^\circ$，$B'C'=a$，$A'C'=b$，由勾股定理，可得$A'B'^2=B'C'^2+A'C'^2=a^2+b^2$. 又因为$a^2+b^2=c^2$，所以$A'B'^2=c^2$，即$A'B'=c$.

因此，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的三边对应相等，从而$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$. 由“全等三角形的对应角相等”，可得$\angle C=\angle C'=90^\circ$，即$\triangle ABC$是直角三角形.

例 2 在$\triangle ABC$中，$BC=8$，$AC=15$，$AB=17$. 试判断$\triangle ABC$是不是直角三角形.

解 $\because$ $BC^2+AC^2=8^2+15^2=289$，$AB^2=17^2=289$，

$\therefore$ $AB^2=BC^2+AC^2$.

$\therefore$ $\triangle ABC$是直角三角形（勾股定理的逆定理）.

我们已经知道，$3^2+4^2=5^2$，$8^2+15^2=17^2$，如果正整数a、b、c满足$a^2+b^2=c^2$，那么a、b、c称为一组勾股数. 以勾股数中的三个数为三边长的三角形一定是直角三角形.

本课内容分析

把勾股定理的条件与结论交换，可以得到它的逆命题. 因为$a^2+b^2=c^2$，所以AB是$\triangle ABC$最长的边，根据“在三角形中，大边对大角”，可知$\angle C$是$\triangle ABC$中最大的角. 要证$\triangle ABC$是直角三角形，也就是要证明$\angle C=90^\circ$，因此想到构造一个直角三角形. 但这种方法学生不容易想到，可回顾已学过的用尺规作图作三角形的方法，帮助学生理解存在一个满足两条直角边分别为a、b的直角三角形，判定它与$\triangle ABC$全等，就可以说明满足条件的三角形是唯一的.

例 2 是勾股定理的逆定理的简单应用.

勾股数有实用价值. 这里引进了勾股数的概念，可结合课堂练习与习题让学生了解常见的勾股数.

例 3 是综合运用勾股定理及其逆定理解决简单的实际问题.

例 3 图 22-3-8 是一块四边形绿地的示意图，其中 AB 长 24 m，BC 长 15 m，CD 长 20 m，DA 长 7 m，$\angle C=90°$. 求绿地 $ABCD$ 的面积.

图 22-3-8

图 22-3-9

解 如图 22-3-9，连接 BD.

在 $\triangle BCD$ 中，

$\because$ $\angle C=90°$，

$\therefore$ $BD^2=BC^2+CD^2$（勾股定理）.

$\because$ $BC=15$，$CD=20$，

$\therefore$ $BD^2=15^2+20^2=225+400=625$.

在 $\triangle ABD$ 中，

$\because$ $AD=7$，$AB=24$，

$\therefore$ $AD^2+AB^2=7^2+24^2=49+576=625$.

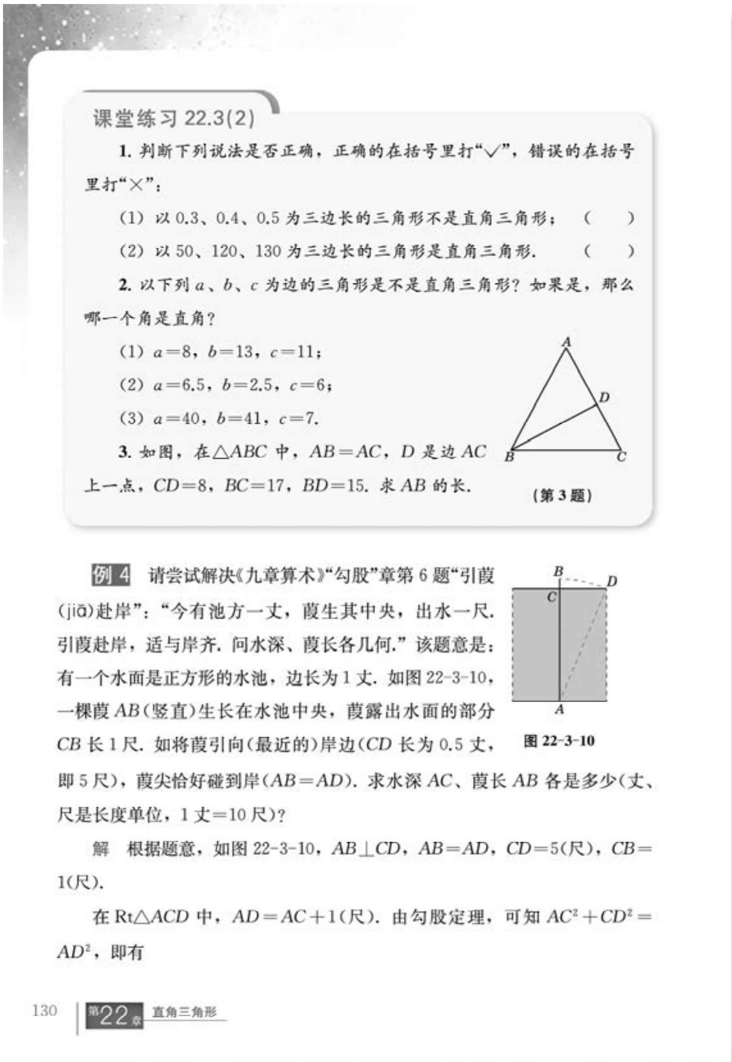
$\therefore$ $BD^2=AD^2+AB^2$.

$\therefore$ $\angle A=90°$（勾股定理的逆定理）.

$$\begin{aligned}\therefore\ S_{四边形ABCD}&=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ABD}\\&=\frac{1}{2}BC\cdot CD+\frac{1}{2}AD\cdot AB\\&=\frac{1}{2}\times15\times20+\frac{1}{2}\times7\times24\\&=150+84=234.\end{aligned}$$

答：绿地 $ABCD$ 的面积是 234 m^2.

22.3 勾股定理 | 129



课堂练习 22.3(2)

1. 判断下列说法是否正确，正确的在括号里打“√”，错误的在括号里打“×”：

（1）以 0.3、0.4、0.5 为三边长的三角形不是直角三角形；（　）

（2）以 50、120、130 为三边长的三角形是直角三角形.（　）

2. 以下列 a、b、c 为边的三角形是不是直角三角形？如果是，那么哪一个角是直角？

（1）$a=8$，$b=13$，$c=11$；

（2）$a=6.5$，$b=2.5$，$c=6$；

（3）$a=40$，$b=41$，$c=7$.

3. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 是边 AC 上一点，$CD=8$，$BC=17$，$BD=15$. 求 AB 的长.

（第 3 题）

例 4 请尝试解决《九章算术》“勾股”章第 6 题“引葭(jiā)赴岸”：“今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺. 引葭赴岸，适与岸齐. 问水深、葭长各几何.”该题意是：有一个水面是正方形的水池，边长为 1 丈. 如图 22-3-10，一棵葭 AB(竖直)生长在水池中央，葭露出水面的部分 CB 长 1 尺. 如将葭引向(最近的)岸边(CD 长为 0.5 丈，即 5 尺)，葭尖恰好碰到岸($AB=AD$). 求水深 AC、葭长 AB 各是多少(丈、尺是长度单位，1 丈=10 尺)？

图 22-3-10

解　根据题意，如图 22-3-10，$AB\perp CD$，$AB=AD$，$CD=5$(尺)，$CB=1$(尺).

在 Rt$\triangle ACD$ 中，$AD=AC+1$(尺). 由勾股定理，可知 $AC^2+CD^2=AD^2$，即有

130　第22章　直角三角形

课堂练习 22.3(2)

1.（1）×.

（2）√.

2.（1）b 为最大边，$b^2=169$，$a^2+c^2=185$. 所以$\triangle ABC$ 不是直角三角形.

（2）a 为最大边，$a^2=42.25$，$b^2+c^2=42.25$. 所以$\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle A=90°$.

（3）b 为最大边，$b^2=1\,681$，$a^2+c^2=1\,649$. 所以$\triangle ABC$ 不是直角三角形.

3. $\dfrac{289}{16}$. 提示：先推出$\triangle BCD$ 是直角三角形，$\angle BDC=90°$；再利用勾股定理，$AB^2-BD^2=(AC-DC)^2$，即 $AB^2-15^2=(AB-8)^2$，解得 $AB=\dfrac{289}{16}$.

（以下分析对应课本第 130～133 页）

本课教学重点

能运用勾股定理及其逆定理解决一些简单的实际问题.

本课教学建议

（1）为解决例 4，学生需要经历从立体图形到平面图形的建模过程，图 22－3－10 是水池截面的示意图，现阶段教科书中没有引进“截面”的概念，可结合学生情况简要说明.

（2）运用例 5 的尺规作图方法，能在数轴上描出实数 $\sqrt{n}$（n 为大于 1 的整数，但 n 不宜过大）所对应的点的位置.

课堂练习 22.3(2)

1. 判断下列说法是否正确，正确的在括号里打“√”，错误的在括号里打“×”：

（1）以 0.3、0.4、0.5 为三边长的三角形不是直角三角形；（ ）

（2）以 50、120、130 为三边长的三角形是直角三角形．（ ）

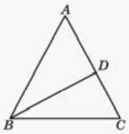
2. 以下列 a、b、c 为边的三角形是不是直角三角形？如果是，那么哪一个角是直角？

（1）$a=8$，$b=13$，$c=11$；

（2）$a=6.5$，$b=2.5$，$c=6$；

（3）$a=40$，$b=41$，$c=7$.

3. 如图，在△ABC 中，$AB=AC$，D 是边 AC 上一点，$CD=8$，$BC=17$，$BD=15$. 求 AB 的长.



（第 3 题）

例 4 请尝试解决《九章算术》“勾股”章第 6 题“引葭(jiā)赴岸”：“今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺．引葭赴岸，适与岸齐．问水深、葭长各几何．”该题意是：有一个水面是正方形的水池，边长为 1 丈．如图 22-3-10，一棵葭 AB(竖直)生长在水池中央，葭露出水面的部分 CB 长 1 尺．如将葭引向(最近的)岸边(CD 长为 0.5 丈，即 5 尺)，葭尖恰好碰到岸($AB=AD$)．求水深 AC、葭长 AB 各是多少(丈、尺是长度单位，1 丈=10 尺)？

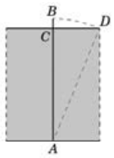


图 22-3-10

解　根据题意，如图 22-3-10，$AB\perp CD$，$AB=AD$，$CD=5$(尺)，$CB=1$(尺).

在 Rt△ACD 中，$AD=AC+1$(尺)．由勾股定理，可知 $AC^2+CD^2=AD^2$，即有

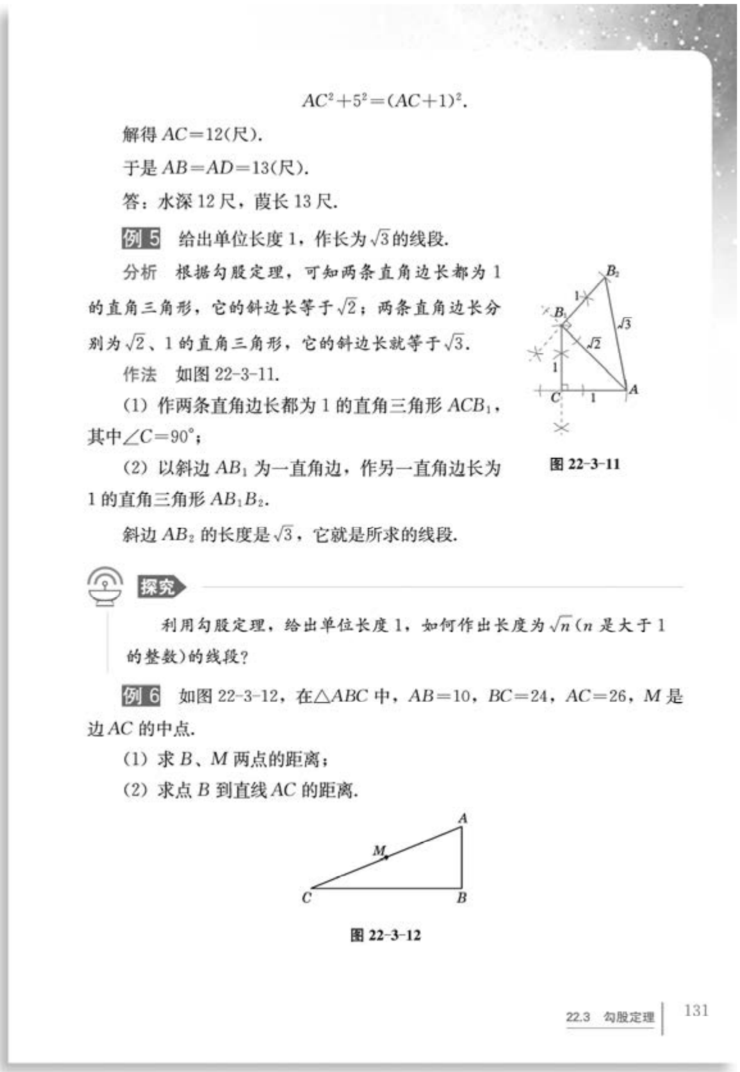
130　第22章　直角三角形

本课内容分析

例 4 是《九章算术》中的勾股名题，可以帮助学生感受中华优秀传统文化.

例 5，给定单位长度，可用尺规作图顺次作出长为$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$的线段. 继续下去，可以作出长为$\sqrt{n}$（n 为大于 1 的整数）的线段.

探究 使用例 5 的尺规作图方法，分别以 1 和$\sqrt{n-1}$（n 为大于 1 的整数）为直角边长作直角三角形，则这个直角三角形的斜边就是长为$\sqrt{n}$的线段.



$$AC^2+5^2=(AC+1)^2.$$

解得 $AC=12$（尺）.

于是 $AB=AD=13$（尺）.

答：水深 12 尺，葭长 13 尺.

例 5 给出单位长度 1，作长为$\sqrt{3}$的线段.

分析 根据勾股定理，可知两条直角边长都为 1 的直角三角形，它的斜边长等于$\sqrt{2}$；两条直角边长分别为$\sqrt{2}$、1 的直角三角形，它的斜边长就等于$\sqrt{3}$.

作法 如图 22-3-11.

(1) 作两条直角边长都为 1 的直角三角形 ACB_1，其中$\angle C=90°$；

(2) 以斜边 AB_1 为一直角边，作另一直角边长为 1 的直角三角形 AB_1B_2.

斜边 AB_2 的长度是$\sqrt{3}$，它就是所求的线段.

图 22-3-11

探究

利用勾股定理，给出单位长度 1，如何作出长度为$\sqrt{n}$（n 是大于 1 的整数）的线段？

例 6 如图 22-3-12，在$\triangle ABC$ 中，$AB=10$，$BC=24$，$AC=26$，M 是边 AC 的中点.

(1) 求 B、M 两点的距离；

(2) 求点 B 到直线 AC 的距离.

图 22-3-12

22.3 勾股定理 131

分析　运用勾股定理的逆定理可以判断$\triangle ABC$是直角三角形，于是转化为“求直角三角形斜边上的中线长和高”的问题.

解　在$\triangle ABC$中，

$\because$ $AB=10$，$BC=24$，$AC=26$，

$\therefore$ $AB^2+BC^2=10^2+24^2=100+576=676$.

又$\because$ $AC^2=26^2=676$，

$\therefore$ $AC^2=AB^2+BC^2$.

$\therefore$ $\angle ABC=90°$（勾股定理的逆定理）.

(1) 如图 22-3-13，连接 BM.

$\because$ M是边AC的中点，$\angle ABC=90°$，

$\therefore$ $BM=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 26=13$（直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半），

即B、M两点的距离为 13.

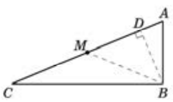


图 22-3-13

(2) 如图 22-3-13，过点B作$BD\perp AC$，垂足为D.

$\because$ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}\times 10\times 24=120$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times 26\times BD=13BD$，

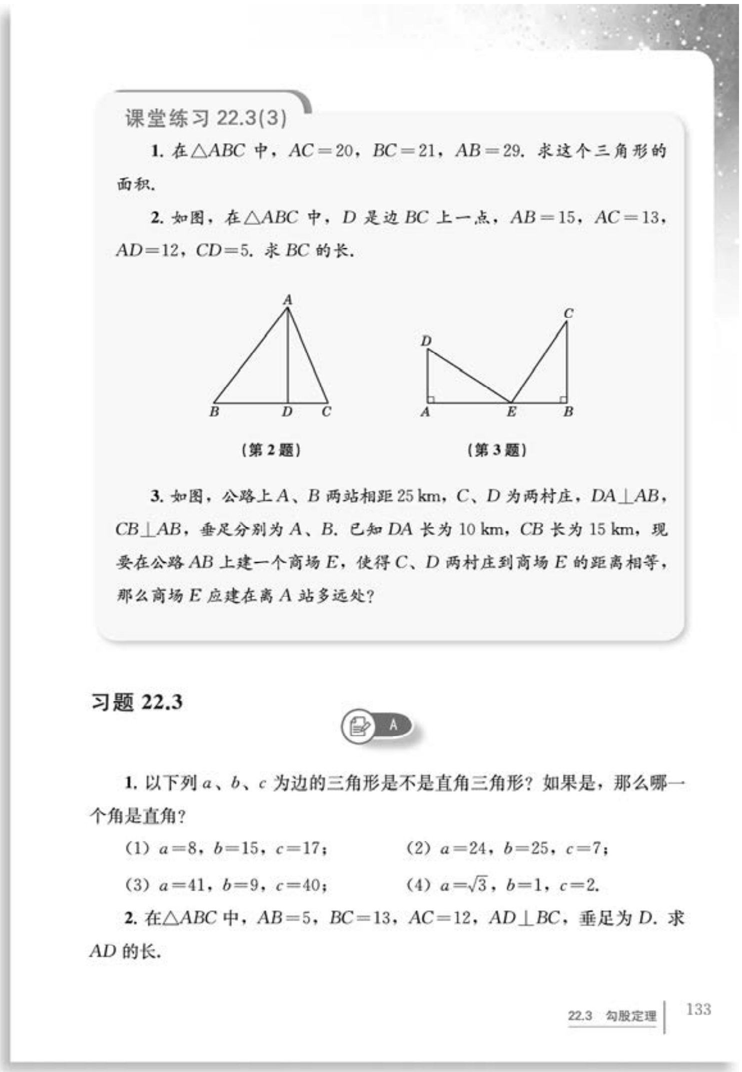
$\therefore$ $13BD=120$.

$\therefore$ $BD=\frac{120}{13}$，

即点B到直线AC的距离等于$\frac{120}{13}$.

132　第22章　直角三角形

例 6 解决问题的关键是利用勾股定理的逆定理判断$\triangle ABC$是直角三角形.



课堂练习 22.3(3)

1. 在△ABC 中，$AC=20$，$BC=21$，$AB=29$. 求这个三角形的面积.

2. 如图，在△ABC 中，D 是边 BC 上一点，$AB=15$，$AC=13$，$AD=12$，$CD=5$. 求 BC 的长.

（第 2 题）　（第 3 题）

3. 如图，公路上 A、B 两站相距 25 km，C、D 为两村庄，$DA\perp AB$，$CB\perp AB$，垂足分别为 A、B. 已知 DA 长为 10 km，CB 长为 15 km，现要在公路 AB 上建一个商场 E，使得 C、D 两村庄到商场 E 的距离相等，那么商场 E 应建在离 A 站多远处？

习题 22.3

A

1. 以下列 a、b、c 为边的三角形是不是直角三角形？如果是，那么哪一个角是直角？

(1) $a=8$，$b=15$，$c=17$；　(2) $a=24$，$b=25$，$c=7$；

(3) $a=41$，$b=9$，$c=40$；　(4) $a=\sqrt{3}$，$b=1$，$c=2$.

2. 在△ABC 中，$AB=5$，$BC=13$，$AC=12$，$AD\perp BC$，垂足为 D. 求 AD 的长.

22.3 勾股定理 133

课堂练习 22.3(3)

1. 210. 提示：由 $AC^2+BC^2=AB^2$，可知 $\angle ACB=90°$. 根据三角形的面积公式，可求得该三角形的面积为 210.

2. 14.

3. 商场 E 应建在离 A 站 15 km 远处. 提示：可设 $AE=x$ km，根据题意，可得方程 $10^2+x^2=(25-x)^2+15^2$，解得 $x=15$(km).

习题 22.3

1. (1) c 为最大边，$c^2=289$，$a^2+b^2=289$. 所以△ABC 是直角三角形，$\angle C=90°$.

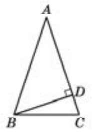
(2) △ABC 是直角三角形，$\angle B=90°$.

(3) △ABC 是直角三角形，$\angle A=90°$.

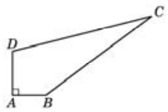
(4) △ABC 是直角三角形，$\angle C=90°$.

2. $\frac{60}{13}$. 提示：根据勾股定理的逆定理，可知△ABC 是直角三角形，$\angle A=90°$. 利用三角形面积公式，可得 $AD=\frac{60}{13}$.

3. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC=5$，$CD=1$，$BD\perp AC$，垂足为D. 求BC的长.



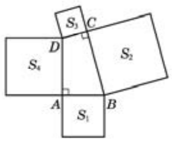
（第3题）



（第4题）

4. 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle A=90^\circ$，$AB=3$，$BC=12$，$CD=13$，$DA=4$. 求四边形$ABCD$的面积.

5. 如图，在四边形$ABCD$中，$\angle DAB=\angle BCD=90^\circ$，分别以四边形$ABCD$的四条边为边向外作四个正方形，面积分别为$S_1$、$S_2$、$S_3$、$S_4$. 如果$S_1=48$，$S_2=110$，$S_3=25$，求$S_4$的值.

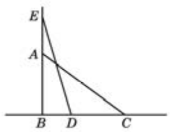


（第5题）

B

6. 在$\triangle ABC$中，$BC=6$，$AC=3$，$AB=3\sqrt{3}$. 求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的度数.

7. 如图，一架2.5 m长的梯子AC斜靠在一面墙BE上，梯子底端C离墙2 m. 要将梯子的顶端A上升0.9 m至E处（梯子长度不变），求梯子底部C在水平方向滑动到D的距离.



（第7题）

134 | 第22章 直角三角形

3. $\sqrt{10}$. 提示：由勾股定理，可得$BD=3$，$BC=\sqrt{10}$.

4. 36. 提示：连接BD. 由勾股定理，可得$BD=5$，利用三角形面积公式可得$S_{\text{四边形}ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BDC}=36$.

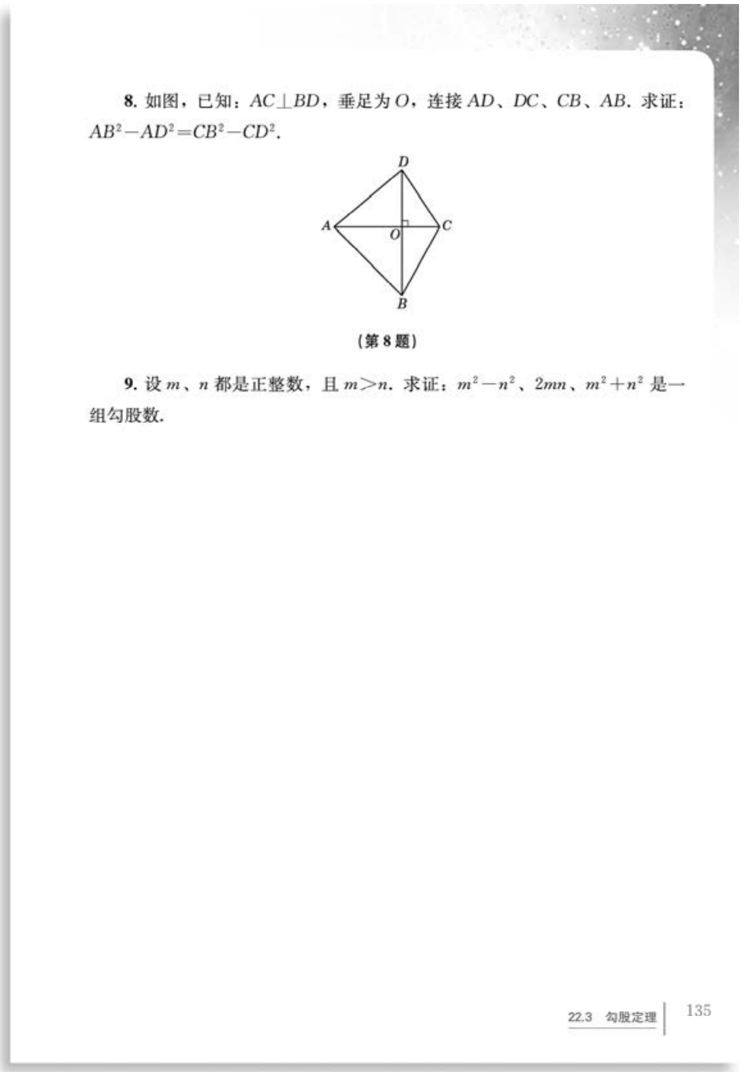
5. 87. 提示：连接BD. 由勾股定理，可推得$S_1+S_4=S_2+S_3$，得出$S_4=87$.

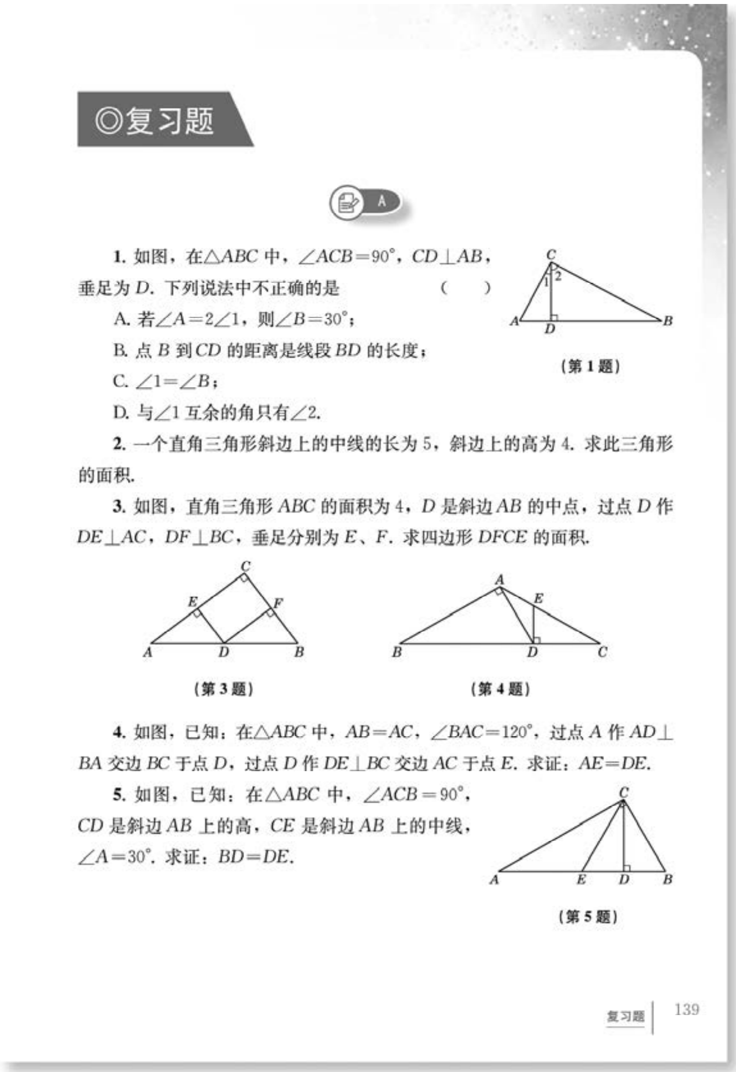
6. $\angle A=90^\circ$，$\angle B=30^\circ$，$\angle C=60^\circ$. 提示：由勾股定理的逆定理，可证$\triangle ABC$是直角三角形，$\angle A=90^\circ$，取斜边BC的中点D并连接AD，则$\triangle ACD$是等边三角形，由此得$\angle C=60^\circ$，$\angle B=30^\circ$.

7. 梯子底部C在水平方向滑动到D的距离为1.3 m. 提示：由勾股定理，得$AB=\sqrt{2.5^2-2^2}=1.5$(m). 由题意，可知$DE=AC=2.5$ m，$BE=1.5+0.9=2.4$(m). 在$\mathrm{Rt}\triangle DBE$中，由勾股定理，得$BD=\sqrt{DE^2-BE^2}=\sqrt{2.5^2-2.4^2}=0.7$(m)，所以$CD=1.3$ m.

8. 提示：运用勾股定理，可得 $AB^2=OA^2+OB^2$，$CD^2=OC^2+OD^2$，$AD^2=OA^2+OD^2$，$BC^2=OB^2+OC^2$，进一步可证得结论.

9. 提示：因为$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$，所以 m^2-n^2、$2mn$、m^2+n^2 是一组勾股数.





◎复习题

A

1. 如图，在△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，垂足为 D. 下列说法中不正确的是（　　）

A. 若$\angle A=2\angle 1$，则$\angle B=30°$；

B. 点 B 到 CD 的距离是线段 BD 的长度；

C. $\angle 1=\angle B$；

D. 与$\angle 1$互余的角只有$\angle 2$.

（第 1 题）

2. 一个直角三角形斜边上的中线的长为 5，斜边上的高为 4. 求此三角形的面积.

3. 如图，直角三角形 ABC 的面积为 4，D 是斜边 AB 的中点，过点 D 作 $DE\perp AC$，$DF\perp BC$，垂足分别为 E、F. 求四边形 $DFCE$ 的面积.

（第 3 题）　　（第 4 题）

4. 如图，已知：在△ABC 中，$AB=AC$，$\angle BAC=120°$，过点 A 作 $AD\perp BA$ 交边 BC 于点 D，过点 D 作 $DE\perp BC$ 交边 AC 于点 E. 求证：$AE=DE$.

5. 如图，已知：在△ABC 中，$\angle ACB=90°$，CD 是斜边 AB 上的高，CE 是斜边 AB 上的中线，$\angle A=30°$. 求证：$BD=DE$.

（第 5 题）

复习题　139

复习题

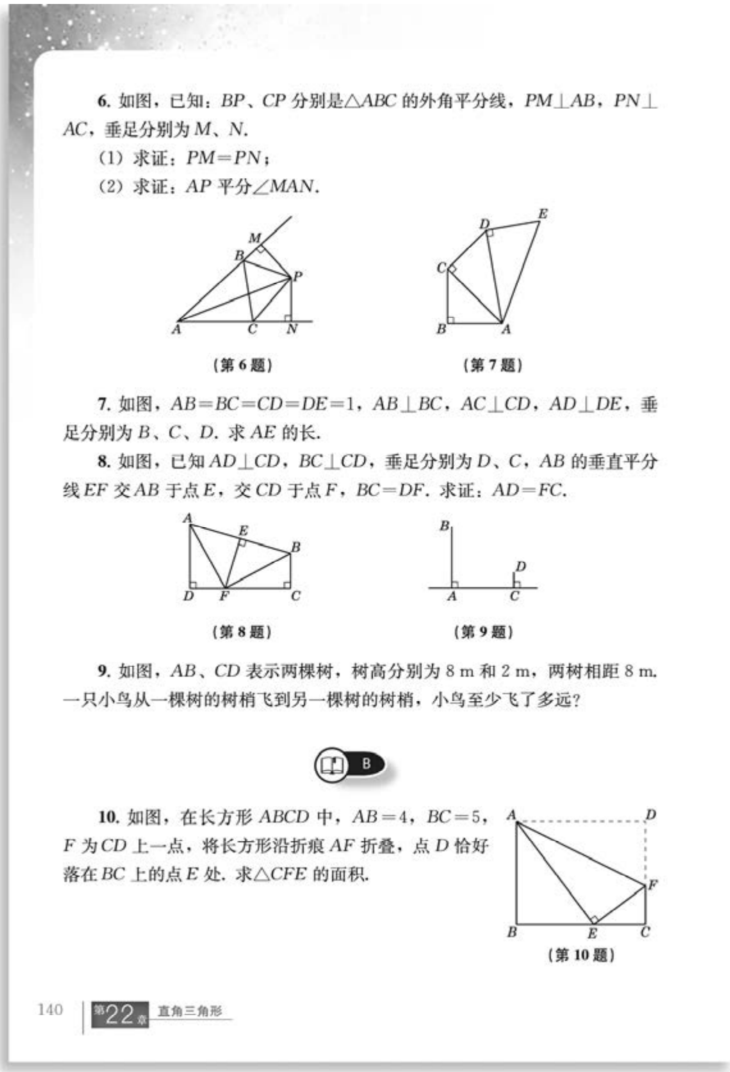
1. D.

2. 20.

3. 2. 提示：连接CD，根据“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”，可得 $CD=\frac{1}{2}AB=AD$. 再由 $DE\perp AC$，得 $AE=CE$. 从而 $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CDE}$. 同理，$S_{\triangle BDF}=S_{\triangle CDF}$. 所以 $S_{四边形DFCE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=2$.

4. 提示：由 $AB=AC$，$\angle BAC=120°$，易得 $\angle B=\angle C=30°$. 由 $AD\perp BA$，可求得 $\angle DAC=30°$，$\angle ADC=120°$. 由 $DE\perp BC$，可求得 $\angle ADE=30°$. 所以$\angle ADE=\angle DAC$，得到 $AE=DE$.

5. 提示：在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，CE 是斜边上的中线，可推得 $AE=BE=CE$，$\angle CEB=60°$，$\angle B=60°$，得到 $CE=CB$. 再由 CD 是斜边 AB 上的高，可证得 $BD=DE$.


6. 如图，已知：BP、CP 分别是$\triangle ABC$ 的外角平分线，$PM\perp AB$，$PN\perp AC$，垂足分别为 M、N.

(1) 求证：$PM=PN$；

(2) 求证：AP 平分$\angle MAN$.

（第 6 题）　（第 7 题）

7. 如图，$AB=BC=CD=DE=1$，$AB\perp BC$，$AC\perp CD$，$AD\perp DE$，垂足分别为 B、C、D. 求 AE 的长.

8. 如图，已知 $AD\perp CD$，$BC\perp CD$，垂足分别为 D、C，AB 的垂直平分线 EF 交 AB 于点 E，交 CD 于点 F，$BC=DF$. 求证：$AD=FC$.

（第 8 题）　（第 9 题）

9. 如图，AB、CD 表示两棵树，树高分别为 8 m 和 2 m，两树相距 8 m. 一只小鸟从一棵树的树梢飞到另一棵树的树梢，小鸟至少飞了多远？

B

10. 如图，在长方形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=5$，F 为 CD 上一点，将长方形沿折痕 AF 折叠，点 D 恰好落在 BC 上的点 E 处. 求$\triangle CFE$ 的面积.

（第 10 题）

140　第22章　直角三角形

6.（1）提示：过点 P 作 $PD\perp BC$，垂足为 D. 由 BP 是$\triangle ABC$ 的外角平分线，$PM\perp AB$，$PD\perp BC$，得 $PM=PD$. 同理，$PN=PD$. 可得 $PM=PN$.

（2）提示：由 $PM\perp AB$，$PN\perp AC$，且 $PM=PN$，可得 AP 平分$\angle MAN$.

7. 2.　提示：由 $AB=BC=CD=DE=1$，$AB\perp BC$，$AC\perp CD$，$AD\perp DE$，可得

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2}；$$

$$AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{3}；$$

$$AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=2.$$

8. 提示：由 EF 垂直平分 AB，得 $AF=BF$. 易证 $\mathrm{Rt}\triangle ADF\cong \mathrm{Rt}\triangle FCB$，可得 $AD=FC$.

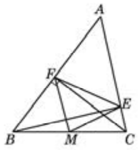
9. 小鸟至少飞了 10 m. 提示：两棵树的高度差为 $8-2=6$(m)，间距为 8 m，根据勾股定理，可得小鸟至少飞行的距离为$\sqrt{8^2+6^2}=10$(m).

10. $\frac{3}{2}$.　提示：易知，$AE=AD=5$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$BE=\sqrt{AE^2-AB^2}=3$，所以 $CE=BC-BE=2$. 设 $CF=x$，则 $DF=4-x$. 由轴对称的性质，可知 $EF=DF=4-x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle EFC$ 中，$CF^2+CE^2=EF^2$，即 $x^2+2^2=(4-x)^2$，解得 $x=\frac{3}{2}$. 所以$\triangle CFE$ 的面积$=\frac{1}{2}\cdot CE\cdot CF=\frac{3}{2}$.

11. 如图，在$\triangle ABC$中，$CF\perp AB$，垂足为F，M为BC的中点，E为AC上一点，且$ME=MF$.

（1）求证：$BE\perp AC$；

（2）若$\angle A=50°$，求$\angle FME$的度数.



（第 11 题）

复习题 141

11.（1）提示：因为$CF\perp AB$，由“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”及$ME=MF$，可推得，$\angle MEB=\angle MBE$，$\angle MEC=\angle MCE$. 所以$\angle MEB+\angle MEC=90°$，即证$BE\perp AC$.

（2）$\angle FME=80°$. 提示：由$\angle A=50°$，可知$\angle ABC+\angle ACB=130°$，可得$\angle BMF+\angle CME=360°-2(\angle ABC+\angle ACB)=100°$，所以$\angle FME=80°$.

综合与实践

理财小课堂

情境与主题分析

随着我国国内生产总值(GDP)的增加，家庭的金融资产也有不同程度的提高，学习必要的理财知识，既能帮助中学生树立资产管理意识，也有助于他们理性对待资产的变动，从根本上防止“金融诈骗”等不法行为的发生，为国家的金融安全打下基础.

将财经知识与数学课程结合，为数学教学提供了真实的应用场景，拓展了数学课程的教学内容，使其更贴近实际生活.

活动过程分析

活动 1

- **内容**

1. 依据单利法和复利法分别计算：10 000元按方案 1 中的利率，在 1 年和 2 年后的金额变化.
2. 依据单利法和复利法分别计算：P 元按年利率 r，在 3 年和 n 年后的金额变化.

- **意图**

1. 学习教科书中的案例说明，进行具体数值的计算.
2. 通过推导单利法和复利法的一般计算公式，发现两种计息法的异同.

活动 2

- **内容**

1. 按折现率 t，计算 1 年、2 年、3 年和 n 年后的 P 元在当前时刻的价值.
2. 根据折现率计算并比较三个理财方案的优劣.

- **意图**

1. 理解折现的概念和计算方法.
2. 根据折现的概念体会理财方案的异同.

活动 3

- **内容**

求解各方案的实际收益率，并比较它们的优劣.

• **意图**

理解收益率的概念，掌握简单情况下的计算方法，了解如何用实际收益率比较理财方案的优劣.

教学过程设计

为帮助学生了解理财知识，需要根据涉及的数学知识，从低到高逐步推进. 本实践活动围绕对假设的三个理财方案的比较，设计了三个活动，从最简单的存款利率出发，逐步引导学生理解理财中的基本概念并掌握计算方法，最终学会用统一的标准比较三个理财方案的异同，并作出选择.

• **引入**

提出理财主题并通过三个理财方案的呈现，让学生在实际情境中思考并决策，以帮助其理解和体会理财的实际应用和这种能力在现代社会中的重要性.

• **教学设计**

1. 通过讨论“理财的重要性”，让学生思考理财对个人生活的影响.

2. 针对教科书中给出的三个理财方案，让学生根据现有的理解和认识逐一分析、讨论其利弊.

3. 学生分组讨论，选择自己认为最合理的理财方案，并解释选择的原因.

4. 教师可提示学生在做理财决策时需要考虑的因素.

理财小课堂

理财能力是现代社会对人的基本要求之一，掌握基本的理财知识，有助于培养合理的消费观念和对个人未来、家庭的责任心，为一生的行稳致远打好基础.

假设你现在有 10 000 元现金，以下 3 个理财方案，你会选择哪个?

方案 1：本金 10 000 元，年利率 5%，存期 2 年，逐年计息.

方案 2：本金 10 000 元，1 年后返回 6 000 元，2 年后返回 5 025 元.

方案 3：本金 10 000 元，1 年后返回 5 000 元，2 年后返回 6 025 元.

活动 1　单利法与复利法

存款金额等于本金加利息，利息计算有两种方式：

单利法：每期依据本金计算利息，不考虑前期利息所产生的利息. 例如，100 元的本金，年利率为 5%，存期 2 年，逐年计息，2 年后可取回金额等于本金加 2 年的利息，即 $100+100\times5\%+100\times5\%=110$ (元).

复利法：每期依据本金和前期利息之和计算利息. 以上定期存款，按照复利法，2 年后可取回金额为 $100+100\times5\%+(100+100\times5\%)\times5\%=110.25$ (元).

问题 1　请按单利法，逐次计算方案 1 中的存款在 1 年、2 年后的金额.

问题 2　请按复利法，逐次计算方案 1 中的存款在 1 年、2 年后的金额.

问题 3　设本金为 P，年利率为 r，请分别写出依据单利法和复利法计算 3 年后总金额的公式.

问题 4　设条件与问题 3 相同，请分别写出依据单利法和复利法计算 n 年后总金额的公式.

通过活动 1，可以发现：在年利率相同的情况下，复利法计算金额不少于

理财小课堂　143

活动 1

根据现实场景，自然引入单利法和复利法，学生可以在理解概念的基础上掌握算法，进一步了解它们的异同. 作为检验，活动要求学生解决问题 1～4.

• **教学设计**

1. 引导学生理解单利法和复利法，以及两者的联系与区别.

2. 在理解的基础上，进一步学会两种计息方式的算法.

3. 问题 1：引导学生仿照教科书给出的算式以及单利法计息，计算出相应的存款.

1 年后：$10\,000+10\,000\times5\%=10\,500$(元)；

2 年后：$10\,000+10\,000\times5\%+10\,000\times5\%=11\,000$(元).

4. 问题 2：引导学生仿照教科书给出的算式以及复利法计息，计算出相应的存款.

1 年后：$10\,000+10\,000\times5\%=10\,500$(元)；

2 年后：$10\,000+10\,000\times5\%+(10\,000+10\,000\times5\%)\times5\%=11\,025$(元).

5. 问题 3：在问题 1 和问题 2 的基础上，引导学生逐步推出分别用单利法和复利法两种计

息方式，计算出 3 年后总金额的一般算式.

单利法(3 年后)：$P+Pr+Pr+Pr=(1+3r)P$；

复利法(3 年后)：$P+Pr+(P+Pr)r+[P+Pr+(P+Pr)r]r=(1+r)^3P$.

6. 问题 4：在问题 3 的基础上，引导学生推出分别用单利法和复利法两种计息方式，计算出 n 年后总金额的公式.

单利法(n 年后)：$(1+nr)P$；

复利法(n 年后)：$(1+r)^nP$.

7. 引导学生比较两种计息方式所得利息的大小，思考复利法的利息总是不少于单利法的原因. 提示：可以根据复利法将当年产生的利息作为下一年的本金，定性说明第 2 年及以后所得利息一定大于单利法. 也可以启发学生直接比较两种计息方式下每年利息的计算公式来得到结论. 例如：

单利法：每年利息固定，均为 rP.

复利法：

第 1 年：rP；

第 2 年：本金增加到$(1+r)P$，所以利息为$[(1+r)P]r=rP+r^2P>rP$；

第 3 年：本金增加到$(1+r+r+r^2)P$，所以利息为$[(1+r+r+r^2)P]r>[(1+r)P]r>rP$；

……

依此类推，可得第 2 年起复利法每年利息均超过单利法.

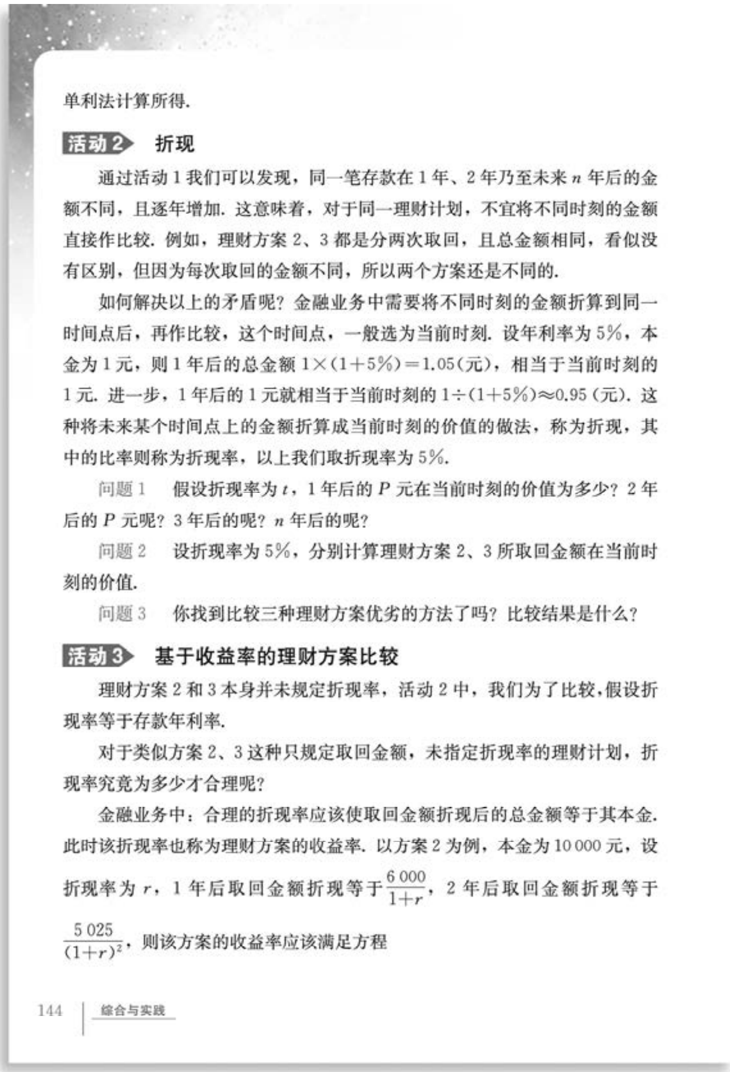
- **注意事项**

在推导单利法和复利法的公式时，应给予学生充分的时间，让学生体会从特殊到一般的过程. 提醒学生验证公式的科学性，在比较两种计息方式时，要更多关注引起两者差异的本质原因，并能用数学语言进行说明.

- **建议课时**　1 课时

活动 2

通过比较方案 2 和方案 3 的异同，引入折现的概念，并学习相应的计算.



单利法计算所得.

活动 2 折现

通过活动 1 我们可以发现，同一笔存款在 1 年、2 年乃至未来 n 年后的金额不同，且逐年增加. 这意味着，对于同一理财计划，不宜将不同时刻的金额直接作比较. 例如，理财方案 2、3 都是分两次取回，且总金额相同，看似没有区别，但因为每次取回的金额不同，所以两个方案还是不同的.

如何解决以上的矛盾呢？金融业务中需要将不同时刻的金额折算到同一时间点后，再作比较，这个时间点，一般选为当前时刻. 设年利率为 5%，本金为 1 元，则 1 年后的总金额 $1\times(1+5\%)=1.05$(元)，相当于当前时刻的 1 元. 进一步，1 年后的 1 元就相当于当前时刻的 $1\div(1+5\%)\approx0.95$ (元). 这种将未来某个时间点上的金额折算成当前时刻的价值的做法，称为折现，其中的比率则称为折现率，以上我们取折现率为 5%.

问题 1　假设折现率为 t，1 年后的 P 元在当前时刻的价值为多少？2 年后的 P 元呢？3 年后的呢？n 年后的呢？

问题 2　设折现率为 5%，分别计算理财方案 2、3 所取回金额在当前时刻的价值.

问题 3　你找到比较三种理财方案优劣的方法了吗？比较结果是什么？

活动 3 基于收益率的理财方案比较

理财方案 2 和 3 本身并未规定折现率，活动 2 中，我们为了比较，假设折现率等于存款年利率.

对于类似方案 2、3 这种只规定取回金额，未指定折现率的理财计划，折现率究竟为多少才合理呢？

金融业务中：合理的折现率应该使取回金额折现后的总金额等于其本金. 此时该折现率也称为理财方案的收益率. 以方案 2 为例，本金为 10 000 元，设折现率为 r，1 年后取回金额折现等于 $\frac{6\,000}{1+r}$，2 年后取回金额折现等于 $\frac{5\,025}{(1+r)^2}$，则该方案的收益率应该满足方程

144　综合与实践

- **教学设计**

1. 请学生比较方案 2 和方案 3，可以发现 2 年内取回的利息总额相等，但每年取回的金额不同，从而引发学生的好奇.

2. 让学生思考两种方案的区别，由此引入需要将财产在未来的金额折算成当前时刻的价值，这就是“折现”的概念.

3. 教科书给出了 5%折现率的折现公式，据此引导学生推导折现的一般计算公式. 推导过程中提醒学生注意用单利法还是复利法.

4. 问题 1：在教科书呈现的具体数值计算的基础上，引导学生推导 1 年、2 年、3 年及 n 年后的折现公式.

1 年后：$\dfrac{P}{1+t}$；

2 年后：$\dfrac{P}{(1+t)^2}$；

3 年后：$\dfrac{P}{(1+t)^3}$；

n 年后：$\dfrac{P}{(1+t)^n}$.

5. 问题 2：引导学生利用问题 1 得到的算式，比较方案 2 和方案 3 在 1 年和 2 年后取得的总金额在当前时刻的价值.

方案 2：

1 年后的 6 000 元，相当于当前时刻的 $6\,000\times\dfrac{1}{1+5\%}\approx5\,714.29$(元)；

2 年后的 5 025 元，相当于当前时刻的 $5\,025\times\dfrac{1}{(1+5\%)^2}\approx4\,557.82$(元).

合计：10 272.11 元.

方案 3：

1 年后的 5 000 元，相当于当前时刻的 $5\ 000\times\frac{1}{1+5\%}\approx 4\ 761.90$(元)；

2 年后的 6 025 元，相当于当前时刻的 $6\ 025\times\frac{1}{(1+5\%)^2}\approx 5\ 464.85$(元).

合计：10 226.75 元.

6. 问题 3：基于问题 2，从折现的视角对比方案 1、2 和 3 的收益.

方案 1：

单利法，2 年到期时的金额折现总额等于 $10\ 000\times(1+5\%\times 2)\times\frac{1}{(1+5\%)^2}=9\ 977.32$(元)；

复利法，2 年到期时的金额折现总额等于 $10\ 000\times(1+5\%)^2\times\frac{1}{(1+5\%)^2}=10\ 000$(元).

方案 2：2 年后折现总额为 10 272.11 元.

方案 3：2 年后折现总额为 10 226.75 元.

方案 2 折现总额最大，所以最好.

- **注意事项**

折现是一个新引入的概念，教师应让学生有充分的理解，不急于进行计算. 问题 1 的重点在于让学生理解折现的具体计算，在此基础上，学生可着手进行方案 2 和方案 3 的比较，为问题 3 的整体比较打好基础. 在以折现的视角比较三个理财方案的优劣时，重点应放在理解和说明比较结果的合理性，而不仅限于哪个更优的比较结论.

- **建议课时**　1 课时

单利法计算所得.

活动 2　折现

通过活动 1 我们可以发现，同一笔存款在 1 年、2 年乃至未来 n 年后的金额不同，且逐年增加. 这意味着，对于同一理财计划，不宜将不同时刻的金额直接作比较. 例如，理财方案 2、3 都是分两次取回，且总金额相同，看似没有区别，但因为每次取回的金额不同，所以两个方案还是不同的.

如何解决以上的矛盾呢？金融业务中需要将不同时刻的金额折算到同一时间点后，再作比较，这个时间点，一般选为当前时刻. 设年利率为 5%，本金为 1 元，则 1 年后的总金额 $1\times(1+5\%)=1.05$(元)，相当于当前时刻的 1 元. 进一步，1 年后的 1 元就相当于当前时刻的 $1\div(1+5\%)\approx0.95$ (元). 这种将未来某个时间点上的金额折算成当前时刻的价值的做法，称为折现，其中的比率则称为折现率，以上我们取折现率为 5%.

问题 1　假设折现率为 t，1 年后的 P 元在当前时刻的价值为多少？2 年后的 P 元呢？3 年后的呢？n 年后的呢？

问题 2　设折现率为 5%，分别计算理财方案 2、3 所取回金额在当前时刻的价值.

问题 3　你找到比较三种理财方案优劣的方法了吗？比较结果是什么？

活动 3　基于收益率的理财方案比较

理财方案 2 和 3 本身并未规定折现率，活动 2 中，我们为了比较，假设折现率等于存款年利率.

对于类似方案 2、3 这种只规定取回金额，未指定折现率的理财计划，折现率究竟为多少才合理呢？

金融业务中：合理的折现率应该使取回金额折现后的总金额等于其本金. 此时该折现率也称为理财方案的收益率. 以方案 2 为例，本金为 10 000 元，设折现率为 r，1 年后取回金额折现等于 $\frac{6\,000}{1+r}$，2 年后取回金额折现等于 $\frac{5\,025}{(1+r)^2}$，则该方案的收益率应该满足方程

144　综合与实践

活动 3

活动 2 通过假设折现率等于存款利率来比较理财方案的优劣. 金融实践中人们往往希望能根据理财方案的回报算出一个数据，据此判断方案优劣，这就是收益率的由来，也即活动 3 的核心.

- **教学设计**

1. 向学生介绍期限为 n 年的理财方案的收益率是一个 n 次方程的解，考虑到八年级学生的能力，活动 3 以 2 年为例，这样收益率计算就化为一个二次方程的求解.

2. 问题 1：引导学生求解教科书给出的二次方程，其解即为方案 2 的收益率.

解方程可得 $r=6.97\%$.

3. 问题 2：引导学生按照问题 1 中方案 2 的收益率的求解方式，计算方案 3 的收益率.

方案 3：设折现率为 r，可得 $\frac{5\,000}{1+r}+\frac{6\,025}{(1+r)^2}=10\,000$，得 $r\approx6.55\%$.

4. 问题 3：引导学生按照问题 1 和问题 2 的求解方式，计算方案 1 的收益率.

方案 1：设折现率为 r.

单利法：$\frac{11\,000}{(1+r)^2}=10\,000$，得 $r\approx4.88\%$；

复利法：易知 $r=5\%$.

$$\frac{6\,000}{1+r}+\frac{5\,025}{(1+r)^2}=10\,000.$$

问题 1　**请求解以上方程，得出方案 2 的收益率.**

问题 2　**请计算方案 3 的收益率.**

问题 3　**方案 1 的收益率是多少?**

问题 4　**请根据收益率比较三种方案的优劣，比较结果和活动 2 一样吗?**

5. 问题 4：引导学生根据问题 1～问题 3 的求解结果，找到最优的理财方案. 再与活动 2 以折现方法得出的结果相比较，体会和解释两种方法的异同.

比较收益率，方案 2 最佳，结论与活动 2 一致.

- **注意事项**

收益率是一个新引入的概念，教师要让学生有充分的理解，而不急于具体数值的计算. 在获得结论后，要引导学生比较使用折现的方法和利用收益率计算的异同.

- **建议课时**　1 课时

评价建议

本实践活动的评价可从“学习任务完成情况”和“活动体验和习得”两方面展开.

表一　学习任务完成情况评价表

<table>
<tr><td colspan="8">学生姓名：</td></tr>
<tr><th rowspan="2">学习任务</th><th rowspan="2">内容</th><th colspan="6">评分</th></tr>
<tr><th>5</th><th>4</th><th>3</th><th>2</th><th>1</th><th>得分</th></tr>
<tr><td rowspan="3">活动 1</td><td>数值计算</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3">（满分 15）</td></tr>
<tr><td>推导一般算法</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>比较说理</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">活动 2</td><td>数值计算</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3">（满分 15）</td></tr>
<tr><td>推导一般算法</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>比较说理</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">活动 3</td><td>数值计算</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2">（满分 10）</td></tr>
<tr><td>比较说理</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

注：表一用 1～5 依次表示你在每项任务上的完成程度，并累计得到本活动的整体完成度得分(满分 40 分).

表二　活动体验和习得自评表

<table>
<tr><td colspan="8">学生姓名：</td></tr>
<tr><th>维度</th><th>说明</th><th>内容 1</th><th>内容 2</th><th>内容 3</th><th>内容 4</th><th>内容 5</th><th>得分</th></tr>
<tr><td>知识建构</td><td>试写出新学到的知识
（1～5 项）</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>沟通</td><td>试写出你曾在课堂上提出的见解
（1～5 项）</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>个人学习</td><td>试写出你获取重要知识的来源
（1～5 项）</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>价值观/态度</td><td>试写出完成各活动时你的体验或见解
（1～5 项）</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

注：表二中内容 1～内容 5 表示在每个维度指向的具体内容，得分内容的数量(满分 5 分)，并累计得到本活动的整体活动体验分(满分 20 分).

最后，教师可综合表一和表二，对每名学生在本次活动中的表现作出评价.

“勾股定理”证明中的中国智慧

情境与主题分析

勾股定理在本册第22章已有详细的描述，并被用来解决一些几何问题，在九年级上册第29章中，它还将用于推导恒等式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，以此为基础，在高中阶段还会学到更多的三角恒等式，形式简单的勾股定理在数学中发挥了重要作用. 同时，勾股定理是人类文明的一个杰出代表，被认为是人类最早发现并应用的数学公式，其在天文观测、建筑构造等活动中发挥了关键的作用. 因此，曾有人提议在探索外星球的宇宙飞船中刻上直角三角形以及勾股定理.

在西方，人们普遍认为勾股定理是古希腊数学家毕达哥拉斯(Pythagoras)最早发现并证明的，所以称之为毕达哥拉斯定理. 有意思的是，人类早期不同地区的历史文化中都有关于这个定理的记录或描述. 例如，成书于西汉早期的《周髀算经》记录了商周时期关于勾股定理的特例以及一般形式的对话，按年代算，毕达哥拉斯生活的时期和我国的商周有交集；古埃及人没有留下相关的文字记录，但现存的金字塔因宏伟规整的几何形态和几乎垂直的塔基四边，令人相信当时的埃及工程师应该掌握了包括勾股定理在内的直角三角形知识；人们在古巴比伦泥版文书中发现了一系列“勾股数”(满足勾股定理的三元数组)；古代印度婆罗门经典关于庙宇和祭坛设计解决方法的描述则涉及勾股定理的应用.

勾股定理因其悠久的历史、简单的形式，各个历史时期各国数学家乃至数学爱好者给出了数百种证明. 希腊数学史上有记载的勾股定理的证明最早出现在欧几里得的《几何原本》中，大意如下(参考文献[1]，15－16)：

如图一，首先证明$\triangle ABD\cong\triangle FBC$，

但　　　长方形 $BDLP=2\triangle ABD$(指面积，下同)，

同理，　正方形 $GFBA=2\triangle FBC$.

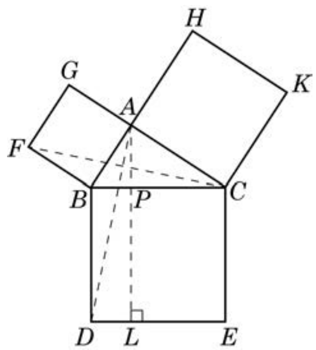
所以　　长方形 $BDLP$＝正方形 $GFBA$.

同理，　长方形 $CELP$＝正方形 $ACKH$.

故有　　长方形 $BDLP$＋长方形 $CELP$＝正方形 $GFBA$＋正方形 $ACKH$.

另一方面　长方形 $BDLP$＋长方形 $CELP$＝正方形 $CEDB$.

所以　　正方形 $GFBA$＋正方形 $ACKH$＝正方形 $CEDB$.



图一

以上证明通过添加三条辅助线，借助三角形全等加以证明，逻辑清晰，演绎完整，是对欧几里得几何的展示.

欧几里得几何推理的出发点是若干公理(基本性质). 在古代，数学家则基于以下简单原理证明了包括勾股定理在内的一些数学定理(公式)：

一个平面几何图形(或立体几何图形)被分割成若干部分后，面积(或体积)的总和保持不变.

以上原理被中国古代数学家刘徽概括为“出入相补，各从其类”，所以也称为出入相补原理. 第22章中关于勾股定理的证明也是基于这个原理.

活动过程分析

为了更好地帮助学生了解勾股定理研究在中国数学史中的地位，加深对中华优秀传统文化的认识，提高数学学习兴趣，我们在众多中国古代数学家的证明中，选取了三个有代表性的证明作为实践活动的内容. 其中，刘徽首次提出“出入相补，各从其类”，展示出中国古代数学家独特的智慧；赵爽被认为是在中国历史上第一个完成勾股定理证明的人，赵爽弦图也是最简短的证明方法，他的证明是中国古代数学成果的标志；李善兰则是清末中外科学文化交流的代表，他的证明方法基于赵爽弦图，又有出入相补原理特色.

事实上，图形的分割和拼接在现有小学和初中数学教科书中均有所体现，在求解复杂图形面积的问题中发挥了重要作用. 需要指出的是：通过面积证明勾股定理必须保证在图形重组过程中不会出现面积丢失或增加的情况，本次活动通过直角三角形全等来说明以上三种证明方法都不会出现面积的变化.

课前准备

学生阅读第 22 章“阅读材料”，了解勾股定理历史.

活动 1

- **内容**

1. 阅读《九章算术》原文，了解教科书中图 1 的来历.
2. 制作以勾、股为边的两个正方形，将它们分割成 5 块，再组合成一个四边形.
3. 通过两对全等三角形，证明勾股定理.

- **意图**

1. 理解“出入相补”的具体含义.
2. 了解出入相补原理有效的前提：分割组合过程中，没有丢失图形.

活动 2

- **内容**

1. 了解赵爽弦图的来历及其在数学史中的地位.
2. 制作四个全等的直角三角形，拼成一个大四边形.
3. 通过四个全等直角三角形与中间小正方形面积之和等于大正方形面积，得出勾股定理.

- **意图**

1. 体会赵爽的证明方法的直接和简短.
2. 了解赵爽的证明方法和经典出入相补原理的区别和联系.

活动 3

- **内容**

1. 了解李善兰生平及其在中国近代科学发展中的作用.
2. 比较两个小正方形所围区域和大正方形所围区域，找出并证明三对全等三角形.

- **意图**

1. 了解李善兰方法和前述两种方法的区别和联系.

2. 体会定理证明中的创新思维.

课外活动

- **内容**

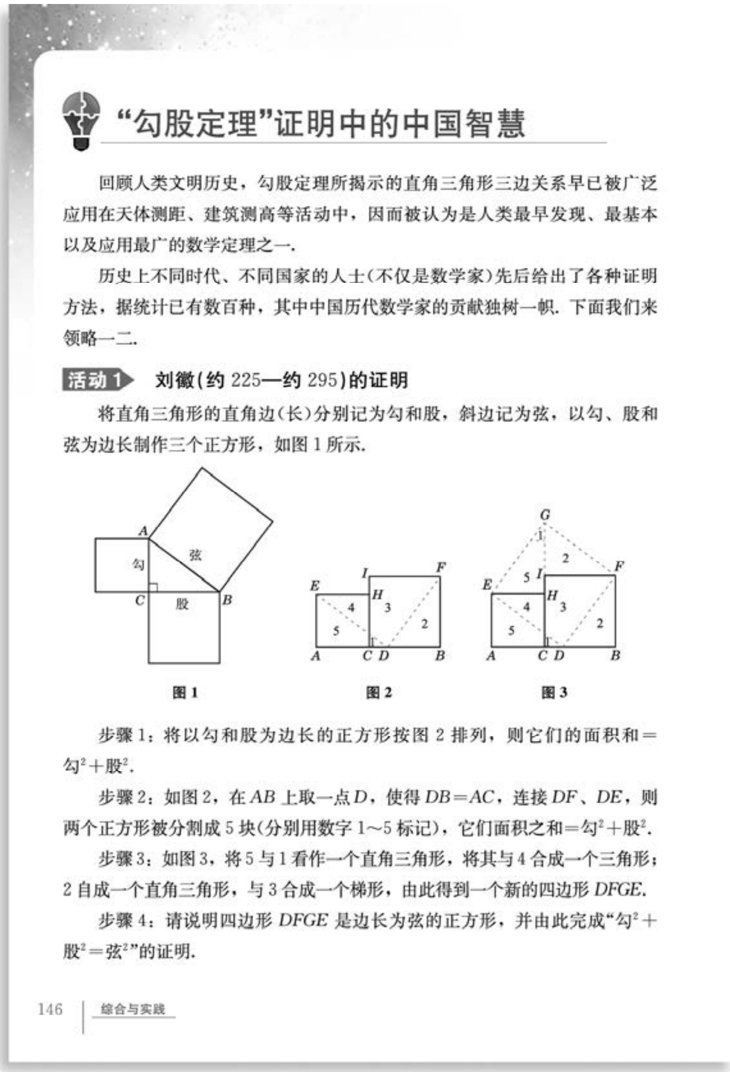
鼓励学有余力的学生阅读参考文献[1]和[3]，进一步了解出入相补原理在数学研究中的作用.

- **意图**

通过学习中国数学史知识，加深对中华优秀传统文化的认知和认同.

教学过程设计

根据活动 1、2 的设计，教师可以先补充关于出入相补原理和赵爽弦图的历史知识，提高学生兴趣. 接着，组织分组活动，每组只完成一项活动，结束后推选一名学生报告本组结果. 在各小组报告结果后，如果时间允许，可要求学有余力的学生回答本教参中新增的问题，以启发思考，提升思维品质. 对学有余力的学生，可以组织开展课外活动. 另外，用全等三角形说明图形分割和重组过程的完整性是本实践活动的关键点，教师应从条件充分、逻辑严密、内容详细等角度指导学生的活动.



“勾股定理”证明中的中国智慧

回顾人类文明历史，勾股定理所揭示的直角三角形三边关系早已被广泛应用在天体测距、建筑测高等活动中，因而被认为是人类最早发现、最基本以及应用最广的数学定理之一.

历史上不同时代、不同国家的人士(不仅是数学家)先后给出了各种证明方法，据统计已有数百种，其中中国历代数学家的贡献独树一帜. 下面我们来领略一二.

活动 1 刘徽(约 225—约 295)的证明

将直角三角形的直角边(长)分别记为勾和股，斜边记为弦，以勾、股和弦为边长制作三个正方形，如图 1 所示.

图 1　图 2　图 3

步骤 1：将以勾和股为边长的正方形按图 2 排列，则它们的面积和＝勾^2＋股^2.

步骤 2：如图 2，在 AB 上取一点 D，使得 $DB=AC$，连接 DF、DE，则两个正方形被分割成 5 块(分别用数字 1～5 标记)，它们面积之和＝勾^2＋股^2.

步骤 3：如图 3，将 5 与 1 看作一个直角三角形，将其与 4 合成一个三角形；2 自成一个直角三角形，与 3 合成一个梯形，由此得到一个新的四边形 $DFGE$.

步骤 4：请说明四边形 $DFGE$ 是边长为弦的正方形，并由此完成“勾^2＋股^2＝弦^2”的证明.

146　综合与实践

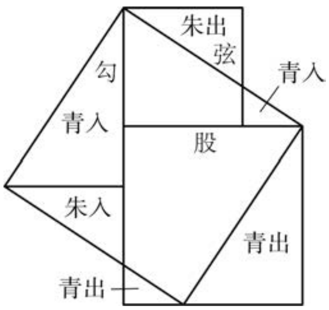
活动 1

活动之前，针对教科书中的图 1，补充以下材料：

刘徽在对《九章算术》“勾股”章注解中写道“勾自乘为朱方，股自乘为青方. 令出入相补，各从其类，因就其余不移动也，合成弦方之幂. 开方除之，即弦也”.

同时，配以图二解释. 组织学生讨论“出入相补”的含义.

参考解答：这段话中“出”就是分割，“入”即通过平移、旋转实现拼接；“出入相补”即为“先分后合”.



图二

步骤 1：请学生以勾、股为边制作两个正方形，将它们按教科书中图 2 所示并排，则两个正方形的面积和是 a^2+b^2.

步骤 2：按教科书中图 2 将两个正方形分割成 5 个部分，则它们的面积和仍是 a^2+b^2.

步骤 3：按教科书中图 3 将上述 5 块图形拼成四边形 $DFGE$.

步骤 4：教科书中图 2 中的正方形 $ACHE$ 的边长为教科书中图 1 中的直角三角形 ACB 的勾长(记作 a)；正方形 $CBFI$ 的边长为直角三角形 ACB 的股长(记作 b).

对照教科书中的图 2 和图 3，容易发现：将图 2 中 Rt△EAD 绕点 E 按逆时针方向旋转，直至线段 EA 和 EH 重合；将图 2 中 Rt△FDB 绕点 F 按顺时针方向旋转，直至线段 FB 和线段 FI 重合，就得到了四边形 $DFGE$，满足：

$ED=EG$，$DF=FG$.　①

$\angle EGH = \angle EDA$，$\angle IGF = \angle BDF$. ②

$\angle GED = \angle GEH + \angle HED = \angle DEA + \angle HED = \angle HEA = 90°$. ③

$\angle GFD = \angle GFI + \angle IFD = \angle DFB + \angle IFD = \angle IFB = 90°$. ④

四边形 $DFGE$ 的面积等于正方形 $ACHE$ 与正方形 $CBFI$ 的面积之和. ⑤

如教科书中图 2 和图 3，因为 $AB = AC + CB = a + b$，由点 D 的取法，可知 $DB = a$，所以 $AD = AB - DB = a + b - a = b$，而 $AE = a$，所以Rt△EAD斜边 ED 的长等于教科书中图 1 中的弦长(记作 c).

在 Rt△EAD 和 Rt△DBF 中，$EA = DB = a$，$AD = BF = b$，$\angle EAD = \angle DBF = 90°$，所以 Rt△$EAD$≌Rt△$DBF$.

所以 $ED = DF = c$，$\angle EDA = \angle DFB$.

结合①，可得 $EG = ED = DF = FG = c$. ⑥

易知$\angle EDA + \angle FDB = \angle DFB + \angle FDB = 90°$，所以$\angle EDF = 90°$.

结合②，可得$\angle EGF = \angle EGH + \angle IGF = \angle EDA + \angle BDF = 90°$.

结合③④，可得$\angle GED = \angle EDF = \angle GFD = \angle EGF = 90°$. ⑦

由⑥⑦可知，四边形 $DFGE$ 是正方形，且边长为 c，面积为 c^2.

结合⑤，即得 $a^2 + b^2 = c^2$.

- **注意事项**

本活动目的在于说明出入相补原理所得结果可以给出严格证明. 为方便起见，主要用图形旋转的方法来说明所得正方形是边长等于弦的正方形.

- **建议课时**　1 课时

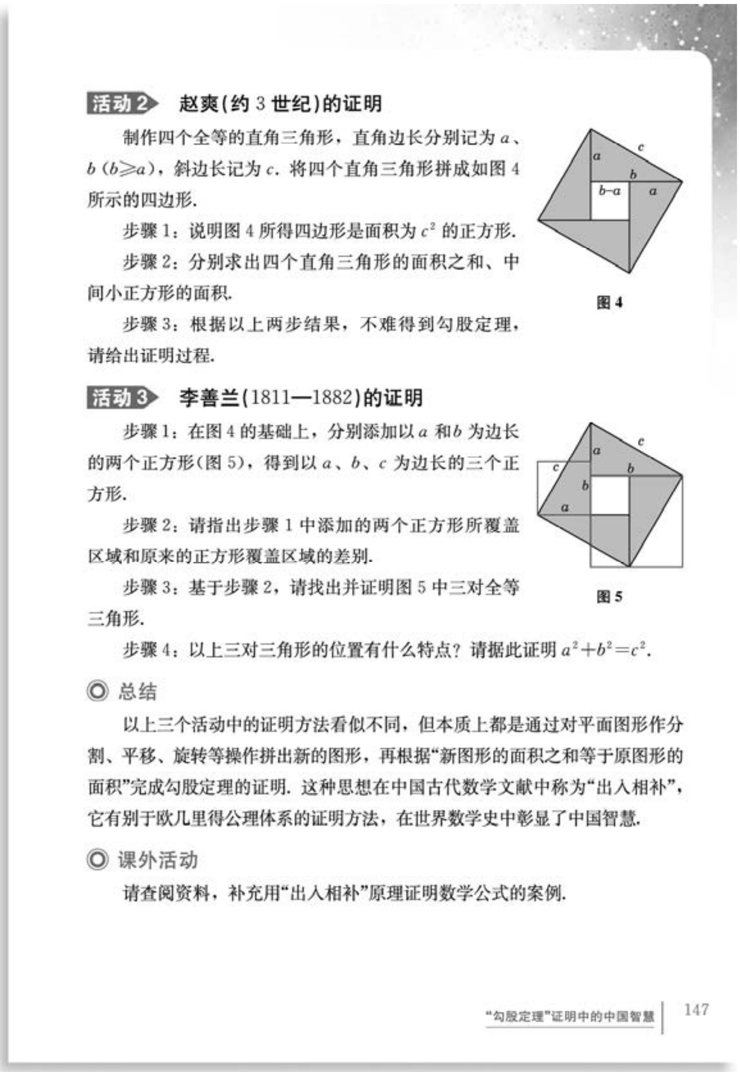
活动 2

活动之前，可补充以下材料：

图三是 2002 年在北京召开的第 24 届国际数学家大会(ICM)的会标，会标中央是类似纸质风车的几何图案，以鲜艳的色彩、动态的造型，吸引了参会数学家的目光.

图三

图四



活动 2 赵爽(约 3 世纪)的证明

制作四个全等的直角三角形，直角边长分别记为 a、b ($b \geqslant a$)，斜边长记为 c. 将四个直角三角形拼成如图 4 所示的四边形.

步骤 1：说明图 4 所得四边形是面积为 c^2 的正方形.

步骤 2：分别求出四个直角三角形的面积之和、中间小正方形的面积.

步骤 3：根据以上两步结果，不难得到勾股定理，请给出证明过程.

图 4

活动 3 李善兰(1811—1882)的证明

步骤 1：在图 4 的基础上，分别添加以 a 和 b 为边长的两个正方形(图 5)，得到以 a、b、c 为边长的三个正方形.

步骤 2：请指出步骤 1 中添加的两个正方形所覆盖区域和原来的正方形覆盖区域的差别.

步骤 3：基于步骤 2，请找出并证明图 5 中三对全等三角形.

步骤 4：以上三对三角形的位置有什么特点？请据此证明 $a^2+b^2=c^2$.

图 5

◎ 总结

以上三个活动中的证明方法看似不同，但本质上都是通过对平面图形作分割、平移、旋转等操作拼出新的图形，再根据“新图形的面积之和等于原图形的面积”完成勾股定理的证明. 这种思想在中国古代数学文献中称为“出入相补”，它有别于欧几里得公理体系的证明方法，在世界数学史中彰显了中国智慧.

◎ 课外活动

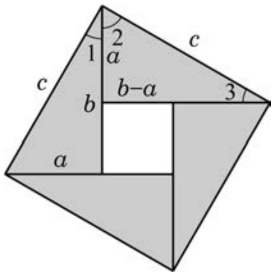
请查阅资料，补充用“出入相补”原理证明数学公式的案例.

“勾股定理”证明中的中国智慧 | 147

图四所示的这个几何图案最早由中国古代数学家赵爽(约 3 世纪)所画，他在为《周髀算经》作注解时，称自己根据《周髀算经》的文字内容画了一组图，用来说明早期古人是如何观测天象的，并称这组图为“勾股圆方图”，其中第一幅就是如图四所示的(赵爽)弦图.

为了证明方便，在活动 2 中我们将赵爽弦图用教科书中的图 4 来表示，设勾、股、弦的长分别为 a、b、c.

步骤 1：因为教科书图 4 中四个直角三角形全等，所以蓝色四边形边长都等于 c，如图五，可知 $\angle 1=\angle 3$，而 $\angle 2+\angle 3=90^\circ$，所以 $\angle 2+\angle 1=90^\circ$. 同理可得该四边形其余三个角都等于 90°. 因此该四边形为正方形，面积等于 c^2.



图五

步骤 2：同理，图五中间白色四边形四角均为直角，并且边长均等于 $b-a$，所以白色正方形的面积等于 $(b-a)^2$. 每个直角三角形面积等于 $\frac{1}{2}ab$，进一步，它们的和等于 $2ab$.

步骤 3：因为蓝色正方形面积等于四个直角三角形与一个白色正方形面积之和，所以 $c^2=2ab+(b-a)^2$，即 $c^2=a^2+b^2$.

- **教学建议**

对学有余力的学生，可以提以下问题：

(1) 弦图方法和出入相补方法哪种更加简捷?

参考解答：前者更简捷.

(2) 弦图方法是出入相补方法的特殊情况吗?

参考解答：不是.

(3) 出入相补方法是弦图方法的特殊情况吗?

参考解答：不是.

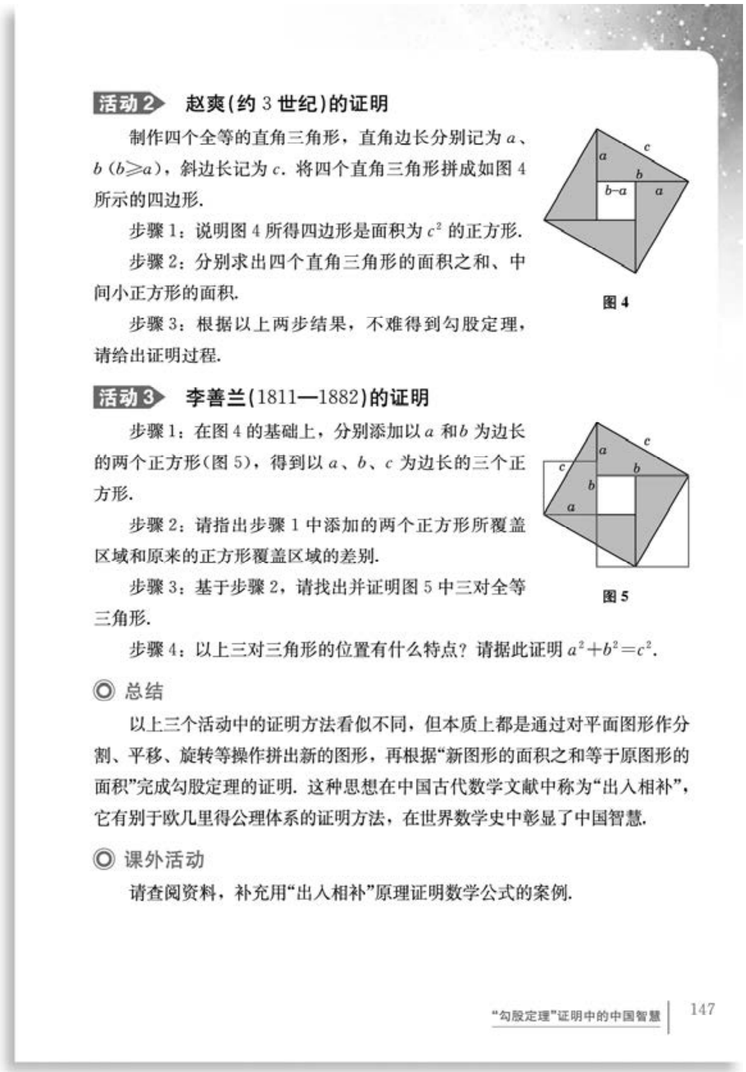
- **注意事项**

受图形限制，图五只标注了边长和部分角，没有标注图形顶点(交点)，所以在证明三角形全等时，无法给出具体的对应边相等的条件，教师上课时不妨让学生指出具体的对应边.

- **建议课时** 0.5 课时

活动 3

李善兰是清代著名数学家、天文学家、翻译家和教育家，翻译了 8 种共 80 多卷科学书籍，其中尤以和他人合作翻译的欧几里得《几何原本》后九卷最为著名. 他自幼研读《九章算术》，又对西方近代数学思想有深刻的理解和掌握，提出了第一个以中国学者命名的数学公式——李善兰恒等式.



活动 2 赵爽(约 3 世纪)的证明

制作四个全等的直角三角形，直角边长分别记为 a、b ($b\geqslant a$)，斜边长记为 c. 将四个直角三角形拼成如图 4 所示的四边形.

步骤 1：说明图 4 所得四边形是面积为 c^2 的正方形.

步骤 2：分别求出四个直角三角形的面积之和、中间小正方形的面积.

步骤 3：根据以上两步结果，不难得到勾股定理，请给出证明过程.

图 4

活动 3 李善兰(1811—1882)的证明

步骤 1：在图 4 的基础上，分别添加以 a 和 b 为边长的两个正方形(图 5)，得到以 a、b、c 为边长的三个正方形.

步骤 2：请指出步骤 1 中添加的两个正方形所覆盖区域和原来的正方形覆盖区域的差别.

步骤 3：基于步骤 2，请找出并证明图 5 中三对全等三角形.

步骤 4：以上三对三角形的位置有什么特点？请据此证明 $a^2+b^2=c^2$.

图 5

◎ 总结

以上三个活动中的证明方法看似不同，但本质上都是通过对平面图形作分割、平移、旋转等操作拼出新的图形，再根据"新图形的面积之和等于原图形的面积"完成勾股定理的证明. 这种思想在中国古代数学文献中称为"出入相补"，它有别于欧几里得公理体系的证明方法，在世界数学史中彰显了中国智慧.

◎ 课外活动

请查阅资料，补充用"出入相补"原理证明数学公式的案例.

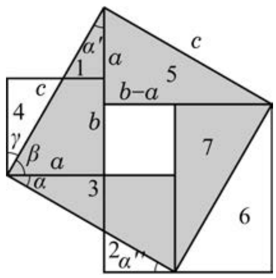
"勾股定理"证明中的中国智慧 | 147

步骤 1：在活动 2 的基础上，分别添加以勾、股为边的两个正方形，由此产生七个直角三角形并分别编号，如图六所示.

步骤 2：设勾、股、弦的长依次为 a、b、c，以它们为边的三个正方形分别记为正方形 A、正方形 B 和正方形 C.

不难发现，在正方形 A 和正方形 B 中，编号为 2、4、6 的三个三角形位于正方形 C 之外，而在正方形 C 中，编号为 1、3、5 的三个三角形不属于正方形 A 和正方形 B.

步骤 3：如图六，三角形 5 和三角形 7 全等；三角形 7 与三角形 6 有共同的斜边，另有一条直角边等于 b，所以可推得三角形 6 和三角形 7 全等. 因此，三角形 5 和三角形 6 全等.



图六

在直角三角形 3 和直角三角形 4 中，$\angle\alpha+\angle\beta=90^\circ$，$\angle\gamma+\angle\beta=90^\circ$，所以$\angle\alpha=\angle\gamma$，它们各有一条直角边等于 a，所以可推得三角形 3 和三角形 4 全等.

在直角三角形 1 和直角三角形 2 中，因为三角形 3 和三角形 4 的

斜边相等，再根据正方形 C 两边相等，可得出三角形 1 和三角形 2 的斜边相等. 进一步，$\angle\alpha'+\angle\beta=90°$，$\angle\alpha+\angle\beta=90°$，所以$\angle\alpha=\angle\alpha'$，而$\angle\alpha=\angle\alpha''$，所以$\angle\alpha'=\angle\alpha''$. 至此可推得三角形 1 和三角形 2 全等.

步骤 4：三角形 2、4、6 可以分别拼接到三角形 1、3、5，根据出入相补原理，证明了正方形 A 和正方形 B 的面积和等于正方形 C 的面积，即 $a^2+b^2=c^2$.

- **教学建议**

对学有余力的学生，可以提出以下问题：

(1) 李善兰的方法和前面两种方法完全不同吗？

参考解答：不是.

(2) 如果不是，那么李善兰的方法和前面两种方法是什么关系？

参考解答：从弦图出发，运用出入相补原理证明结论.

- **注意事项**

受图形限制，图六只标注了边长和部分角，没有标注图形顶点(交点)，所以在证明三角形全等时，无法给出具体的对应边相等条件，教师上课时不妨让学生指出具体的对应边.

- **建议课时** 0.5 课时

课外活动

在中国古代数学发展过程中，围绕着勾股定理的证明和探究，催生出许多重要的数学成果，其中关于勾股定理的证明有数百种. 参考文献[3]还介绍了梅文鼎等其他 5 位古代数学家的生平及其证明方法.

更值得一提的是，源自几何直观的出入相补原理并不仅仅用于解决几何问题，参考文献[1]介绍了如何应用出入相补原理得到方程 $x^2-2cx+a^2=0$(a、$c>0$)的两个根和方程 $ax^2+bx=c$(a、b、$c>0$)的一个根. 学有余力的学生可以读一读参考文献，进一步体味数学文化.

评价建议

本活动以分组方式进行，学生自评形成表一，教师评价小组形成表二，综合表一和表二形成最终评价.

表一　个人收获自评

学生姓名：			所在小组名称：		
小组分工(主要负责哪些任务)：					
活动内容	**评分**				
	5	**4**	**3**	**2**	**1**
了解生平					
理解背景					
理解思路					
掌握步骤					
提高兴趣					

表二　小组活动评价

小组名称：			成员姓名：		
评价内容	**评分**				
	5	**4**	**3**	**2**	**1**
过程完整					
证明正确					
表达清楚					
团队合作					
现场回答					

参考文献

[1] 李文林. 从赵爽弦图谈起[M]. 北京：高等教育出版社，2008.

[2] 佚名. 九章算术[M]. 刘徽，注. 希格玛工作室，编译. 上海：上海教育出版社，2021.

[3] 蔡宗熹. 千古第一定理——勾股定理[M]. 北京：高等教育出版社，2013.

附录

《练习部分》参考答案与提示

第 19 章　实数

19.1　平方根与立方根

课后练习 19.1(1)

1.（1）×.（2）×.（3）×.（4）√.

2.（1）16.（2）$\frac{5}{13}$.（3）$\frac{5}{2}$.（4）0.08.

3.（1）$\frac{11}{20}$.（2）$\frac{7}{3}$.（3）0.014.（4）1 500.

4. 需要准备 48 m 长的竹篱笆.

5. 由题意，可知 $a=2$，$b=-1$，$c=3$，所以 $a+b+c$ 的算术平方根是 2.

课后练习 19.1(2)

1.（1）×.（2）×.（3）×.（4）√.（5）×.（6）×.

2.（1）不正确，$\sqrt{|-49|}=7$.（2）正确.（3）不正确，$-\sqrt{(-5)^2}=-5$.（4）不正确，$\sqrt{81}=9$.

3.（1）± 8.（2）$\pm\frac{4}{9}$.（3）$\pm\frac{13}{16}$.（4）$\pm\frac{9}{2}$.（5）$\pm 1\,400$.（6）± 0.12.

4.（1）40.（2）-0.9.（3）$\pm\frac{7}{2}$.（4）$-\frac{5}{9}$.

5. 根据题意，得 $2m-4$ 和 $3m-1$ 互为相反数，即 $2m-4+3m-1=0$，解得 $m=1$. 所以，$a=(2m-4)^2=4$.

课后练习 19.1(3)

1.（1）√.（2）×.（3）√.（4）×.

2.（1）-2.（2）0.1.（3）$\frac{6}{5}$.（4）$-\frac{5}{3}$.

3.（1）-40.（2）0.005.（3）-600.（4）-0.02.

4. 新正方体的棱长为 4 cm.

5.（1）因为 $3^4=81$，$(-3)^4=81$，所以 81 的四次方根是 ± 3.

（2）因为$(-2)^7=-128$，所以-128的七次方根是-2.

（3）① 因为$32x^5+243=0$，可得$x^5=-\dfrac{243}{32}$. 因为$\left(-\dfrac{3}{2}\right)^5=-\dfrac{243}{32}$，所以$x=-\dfrac{3}{2}$.

② 由$x^6=(-8)^2$，可得$x^6=64$. 因为$2^6=64$，$(-2)^6=64$，所以$x=\pm 2$.

19.2 实数

课后练习 19.2(1)

1.（1）√.（2）√.（3）√.（4）×.

2.（1）0.32.（2）$-1.1\dot{3}$.（3）$3.\dot{8}\dot{1}$.（4）$-0.7\dot{2}$.

3.（1）$5\dfrac{4}{9}$.（2）$-\dfrac{61}{495}$.

4. 欢欢的想法不对. 设长方形布料的长为$5x$ cm，宽为$2x$ cm. 根据题意，得$5x\cdot 2x=360$，即$x^2=36$，根据平方根的意义，得$x=6$或$x=-6$(舍去)，因此长方形布料的长为30 cm. 而$\sqrt{625}=25$，即正方形布料的边长为25 cm. 长方形布料的长大于正方形布料的边长，所以不能用这块正方形布料裁出符合要求的长方形布料.

课后练习 19.2(2)

1. 不一定是. 例如，1的平方根是± 1，1的立方根是1，它们都是有理数.

2. 答案不唯一，如$\sqrt{17}$、$3\sqrt{2}$、$\sqrt{21}$等.

3.（1）11.180.（2）-2.404.（3）± 1.563.（4）-15.（5）0.342.（6）-2.109.

4.（1）50.（2）7.07.

5.（1）2；$\sqrt{7}-2$. 提示：因为$\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$，即$2<\sqrt{7}<3$，所以$\sqrt{7}$的整数部分为2，小数部分为$\sqrt{7}-2$.

（2）6；$\sqrt{3}-1$. 提示：因为$\sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4}$，即$1<\sqrt{3}<2$，可得$6<5+\sqrt{3}<7$，所以$5+\sqrt{3}$的整数部分为6，小数部分为$\sqrt{3}-1$.

（3）3；$2-\sqrt{3}$. 提示：因为$1<\sqrt{3}<2$，可得$3<5-\sqrt{3}<4$，所以$5-\sqrt{3}$的整数部分为3，小数部分为$2-\sqrt{3}$.

课后练习 19.2(3)

1.（1）√.（2）×.（3）√.（4）×.

2. 有理数：3.141 592 65、$\sqrt{49}$、$-2.020\,020\,002$、0、$5.\dot{1}\dot{7}$.

无理数：$\dfrac{\pi}{2}$、$\sqrt[3]{9}$、$-\sqrt{10}$.

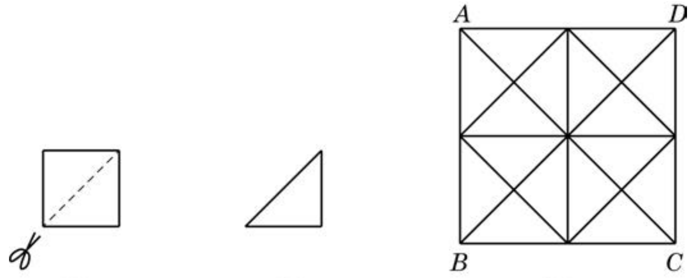
3.（1）$\sqrt[3]{-10}\approx -2.15$，$\sqrt{0.5}\approx 0.71$，数轴略.

（2）$-\sqrt[3]{128}\approx -5.04$，$-\sqrt{24}\approx -4.90$，数轴略.

4.（1）$\sqrt{2}$.（2）$-\sqrt{2}$.

5.（1）答案不唯一，例如，将8个面积为1的小正方形沿一条对角线剪开，如图(1)所

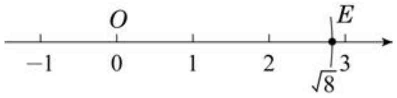
示，得 16 个如图(2)所示的小三角形，将这些小三角形拼成一个面积为 8 的大正方形 $ABCD$，如图(3)所示.



(1)　　(2)　　(3)

〔第 5(1)题〕

（2）如图，在数轴的正半轴上截取 $OE=AB$，则点 E 即为 $\sqrt{8}$ 所对应的点的大致位置.



〔第 5(2)题〕

课后练习 19.2(4)

1.（1）$-\sqrt{5}$；$\sqrt{5}$.（2）$\sqrt[3]{17}$；$\sqrt[3]{17}$.（3）$\sqrt{2}-\sqrt{3}$；$\sqrt{3}-\sqrt{2}$.（4）$\pm\sqrt{11}$.

2.（1）$\sqrt{5}>2$.（2）$-\sqrt{18}>-\sqrt{19}$.（3）$-4>-\sqrt{17}$.（4）$\sqrt[3]{25}<3$.

3.（1）略.（2）$AB=2\frac{2}{15}$，$AD=2.7$，$BD=4\frac{5}{6}$.

4.（1）$x=1$，$y=\sqrt{5}$ 或 $y=-\sqrt{5}$.

（2）当 $y=\sqrt{5}$ 时，$x+y=1+\sqrt{5}$，相反数是 $-1-\sqrt{5}$，绝对值是 $1+\sqrt{5}$；当 $y=-\sqrt{5}$ 时，$x+y=1-\sqrt{5}$，相反数是 $\sqrt{5}-1$，绝对值是 $\sqrt{5}-1$.

5.（1）3.（2）33.（3）333.（4）3 333.

（5）$\underbrace{33\cdots3}_{100个3}$；$\underbrace{33\cdots3}_{n个3}$. 提示：观察前面计算结果中 3 的个数与被开方数中 2 的个数的关系，可得 $\underbrace{33\cdots3}_{100个3}$ 和 $\underbrace{33\cdots3}_{n个3}$.

课后练习 19.2(5)

1.（1）×.（2）×.（3）×.（4）×.

2.（1）$-\frac{1}{6}\sqrt{5}$.（2）-3.（3）90.（4）20.（5）$15-6\sqrt{2}$.（6）$\sqrt{7}+7\sqrt{2}$.

3.（1）$-\frac{2}{3}\sqrt{3}\approx-1.15$.（2）$\frac{25}{27}\sqrt{3}\approx1.60$.（3）$\sqrt{26}\approx5.10$.（4）$2\sqrt{2}+6\approx8.83$.

4. AF 的长为 8.0 m.

5.（1）由题意，可知 $OC=AB=\sqrt{2}-1$，即点 C 所表示的数的绝对值是 $\sqrt{2}-1$，所以这个数是 $\sqrt{2}-1$ 或 $1-\sqrt{2}$.

（2）当点 C 所表示的数是 $\sqrt{2}-1$ 时，由对称可得 $DC=BC=\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)=1$. 所以点 D 所表示的数为 $(\sqrt{2}-1)-1=\sqrt{2}-2$；

当点 C 所表示的数是 $1-\sqrt{2}$ 时，由对称可得 $DC=BC=\sqrt{2}-(1-\sqrt{2})=2\sqrt{2}-1$. 所以点 D 所表示的数为 $(1-\sqrt{2})-(2\sqrt{2}-1)=2-3\sqrt{2}$.

课后练习 19.2(6)

1.（1）5.78×10^{5}.（2）$-3.662\,43\times10^{8}$.（3）1.109×10^{-4}.（4）-6.47×10^{-7}.

2.（1）3.6×10^{7}.（2）3.476×10^{6}.（3）7×10^{-7}.（4）3.3×10^{-9}.

3.（1）四.（2）6.（3）六.（4）-6.

4. 此人一年补充的水分大约有 7.3×10^{5} mL.

5. 设该张国际标准尺寸全张纸的长边为 x m，短边为 y m. 由条件①，得 $xy=1$；由条件②，得 $x:y=y:\frac{x}{2}$，即 $x^2=2y^2$. 所以 $x^2=\sqrt{2}$. 因为 x 与 y 都大于 0，所以 $x\approx1.189\,2$ m$\approx$1 189 mm，$y=\frac{1}{x}\approx0.840\,9$ m$\approx$841 mm. 所以该张国际标准尺寸全张纸的长边和短边分别为 1 189 mm 和 841 mm.

第 20 章　二次根式

20.1　二次根式及其性质

课后练习 20.1(1)

1.（1）√.（2）×.（3）√.（4）×.

2.（1）$x\leqslant0$.（2）$x\geqslant-\frac{9}{2}$.（3）$x>1$.（4）$x=0$.

3. $\sqrt{1-x}$.

4.（1）$4-\pi$.（2）$\sqrt{2}-1$.

5. 乙的解答不正确. 当 $a=\frac{1}{5}$ 时，$a-\frac{1}{a}<0$，则 $\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=\left|a-\frac{1}{a}\right|=\frac{1}{a}-a$，而不是 $a-\frac{1}{a}$.

课后练习 20.1(2)

1.（1）$x\geqslant1$.（2）$y>6$.

2.（1）$7\sqrt{2}$.（2）$3\sqrt{6a}$.（3）$2\sqrt{6}m$.（4）$y^2\sqrt{2y}$.

3.（1）$2\sqrt{7}$.（2）$\frac{5}{2}\sqrt{2}$.（3）$\frac{2}{3}\sqrt{10}$.（4）$\frac{3}{10}\sqrt{7}$.（5）$2y\sqrt{6y}$.（6）$\frac{\sqrt{2s}}{2}$.（7）$\frac{\sqrt{5}}{15}p$.（8）$\frac{2\sqrt{2n}}{5n^2}$.

4. $2\sqrt{xy}$、$\sqrt{x+y}$、$\sqrt{26ab}$.

5. (1) $\frac{1}{n}\sqrt{\frac{5n}{24m}}=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{5n\cdot 6m}{2^2\cdot 6m\cdot 6m}}=\frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt{30mn}}{\sqrt{2^2\cdot(6m)^2}}=\frac{\sqrt{30mn}}{12mn}$.

(2) $\sqrt{\frac{2}{5(x+y)}}=\sqrt{\frac{2\cdot 5(x+y)}{5(x+y)\cdot 5(x+y)}}=\frac{\sqrt{10(x+y)}}{\sqrt{[5(x+y)]^2}}=\frac{\sqrt{10(x+y)}}{5(x+y)}$.

(3) $\sqrt{\frac{63}{(s-t)^3}}=\sqrt{\frac{3^2\cdot 7\cdot(s-t)}{(s-t)^3\cdot(s-t)}}=\frac{\sqrt{3^2\cdot 7(s-t)}}{\sqrt{(s-t)^4}}=\frac{3\sqrt{7(s-t)}}{(s-t)^2}$.

(4) $\sqrt{\frac{3}{m^2+2m+1}}=\sqrt{\frac{3}{(m+1)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(m+1)^2}}=-\frac{\sqrt{3}}{m+1}$.

20.2　二次根式的运算

课后练习 20.2(1)

1. D.

2. (1) 化成$\frac{2}{x}\sqrt{2x}$与$2\sqrt{x}$，不是. (2) 化成$\frac{\sqrt{10s}}{5}$与$\frac{\sqrt{10s}}{2s}$，是.

3. (1) $\frac{1}{4}\sqrt{3}$. (2) $\frac{7}{5}\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

4. (1) 0. (2) $\frac{7}{8}\sqrt{6}$. (3) $3\sqrt{x}$. (4) $-\frac{19}{5}\sqrt{5m}$.

5. (1) 答案不唯一，如$\sqrt{32}=4\sqrt{2}$，$\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$，$\sqrt{0.5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) 答案不唯一，如$\sqrt{2}$和$-\frac{2}{5}\sqrt{2}$.

课后练习 20.2(2)

1. (1) $14\sqrt{3}$. (2) $\frac{1}{20}\sqrt{5}$. (3) -6. (4) -2. (5) $\frac{4\sqrt{b}}{b}$. (6) $2x\sqrt{y}$.

2. (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (2) $\frac{\sqrt{30}}{300}$. (3) $\frac{\sqrt{14}}{7}$. (4) $-\frac{2}{15}\sqrt{6}$.

3. (1) $5\sqrt{5}$. (2) $\sqrt{2}x$.

4. 最大的有理数是 6，它是这一串数中的第 18 个数. 提示：易知，第 n 个数为$\sqrt{2n}$(其中 n 为正整数).

课后练习 20.2(3)

1. (1) $\frac{\sqrt{10}}{2}$. (2) $\frac{\sqrt{21}}{6}$.

2. A.

3. 他做得不对，改正如下：$\sqrt{18}\div(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\frac{18}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{18}\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2}=\sqrt{2\times 3^2\times 3}-$

$\sqrt{2^2\times3^2}=3\sqrt{6}-6$.

4. (1) $\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{m-n}$；$\dfrac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{m-n}$. (2) $\dfrac{a\sqrt{m}-b\sqrt{n}}{a^2m-b^2n}$；$\dfrac{a\sqrt{m}+b\sqrt{n}}{a^2m-b^2n}$.

5. (1) $\dfrac{\sqrt{6x}}{4x}$. (2) $\dfrac{\sqrt{m}}{n}$. (3) $-\sqrt{3}$. (4) $(a+b)\sqrt{a-b}$. (5) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$. (6) $a+\sqrt{ab}+b$.

6. 答案不唯一，例如，$\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot\sqrt{8}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$\sqrt{8}\div\sqrt{24}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot\sqrt{12}\div\sqrt{24}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，等等.

课后练习 20.2(4)

1. (1) $-\sqrt{2}-1$. (2) $6\sqrt{3}+6\sqrt{2}$. (3) $-4\sqrt{6}$. (4) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

2. (1) $x=2-\sqrt{2}$. (2) $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (3) $x=5\sqrt{3}+5\sqrt{2}$. (4) $x=-8\sqrt{3}+12$.

3. (1) $x<-3\sqrt{2}$. (2) $x<\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. (3) $x>\dfrac{\sqrt{2}}{16}$. (4) $x<3+\sqrt{15}$.

4. $\dfrac{3}{2}-\sqrt{5}$.

5. $\dfrac{5}{9}\sqrt{3}$. 提示：原式$=\dfrac{(\sqrt{m})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}+\dfrac{(\sqrt{m}-2\sqrt{n})^2}{\sqrt{m}-2\sqrt{n}}=\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{m}-2\sqrt{n}=2\sqrt{m}-\sqrt{n}$.

第 21 章　一元二次方程

21.1　一元二次方程的概念

课后练习 21.1

1. B.

2. (1) $x^2+3x-4=0$，其二次项系数为 1，一次项系数为 3，常数项为 -4.(答案不唯一)

(2) $y^2-2y-1=0$，其二次项系数为 1，一次项系数为 -2，常数项为 -1.(答案不唯一)

(3) $x^2+(1-m)x-2=0$，其二次项系数为 1，一次项系数为$(1-m)$，常数项为 -2.(答案不唯一)

3. -4、1 是该一元二次方程的根，-1、$\dfrac{1}{2}$不是该一元二次方程的根.

4. 将该方程化成一般形式$(m^2+1)x^2-x+3=0$，因为 $m^2+1\geqslant1$，所以该方程一定是一元二次方程.

5. 设该一元二次方程为 $x^2+bx+5=0$，将 $x=2$ 代入方程，解得 $b=-\frac{9}{2}$，故该一元二次方程为 $x^2-\frac{9}{2}x+5=0$.

21.2 一元二次方程的解法

课后练习 21.2(1)

1. D.

2.（1）$x_1=0$，$x_2=2$. （2）$x_1=0$，$x_2=-9$. （3）$x_1=-3$，$x_2=-1$. （4）$x_1=-\frac{1}{3}$，$x_2=\frac{1}{2}$.

3.（1）$x_1=1$，$x_2=7$. （2）$x_1=-6$，$x_2=3$. （3）$x_1=-4$，$x_2=5$. （4）$x_1=-2$，$x_2=7$.

4. 答案不唯一，“（ ）”内添加一项可以是 $22x$，该方程的解为 $x_1=-1$，$x_2=-21$.

课后练习 21.2(2)

1. A.

2.（1）$x_1=-\sqrt{3}$，$x_2=\sqrt{3}$. （2）没有实数根. （3）$x_1=-7$，$x_2=7$. （4）$x_1=-\frac{3}{2}$，$x_2=\frac{3}{2}$.

3.（1）$x_1=-6$，$x_2=2$. （2）没有实数根. （3）$x_1=-\frac{11}{4}$，$x_2=-\frac{13}{4}$. （4）$x_1=-\frac{1}{3}$，$x_2=1$.

4. 上述解答过程从第一步开始出现了错误，其错误原因是正数的平方根有两个，这里只写了一个，正确的解答过程如下：

解：两边开平方，得 $2x-3=2$ 或 $2x-3=-2$.

解得 $x=\frac{5}{2}$ 或 $x=\frac{1}{2}$.

所以，原方程的根是 $x_1=\frac{5}{2}$，$x_2=\frac{1}{2}$.

课后练习 21.2(3)

1.（1）$\frac{1}{4}$；$\frac{1}{2}$. （2）$\frac{9}{4}$；$\frac{3}{2}$. （3）$\frac{1}{9}$；$\frac{1}{3}$. （4）$\frac{m^2}{4}$；$\frac{m}{2}$.

2.（1）$x_1=-\frac{3}{2}-\sqrt{3}$，$x_2=-\frac{3}{2}+\sqrt{3}$. （2）没有实数根. （3）$x_1=2-\sqrt{5}$，$x_2=2+\sqrt{5}$. （4）$x_1=1-\sqrt{3}$，$x_2=1+\sqrt{3}$.

3.（1）$x_1=-1$，$x_2=\frac{1}{2}$. （2）$x_1=\frac{2-\sqrt{6}}{3}$，$x_2=\frac{2+\sqrt{6}}{3}$.

4. 4. 提示：$(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$，要加上一个数使之成为完全平方式，因为其一次项系数为-2，所以成为完全平方式后常数项为1，故而补充的数为4.

课后练习 21.2(4)

1. C.

2. (1) $x_1=-2-\sqrt{3}$，$x_2=-2+\sqrt{3}$. (2) $x_1=-\dfrac{3}{2}$，$x_2=3$. (3) 没有实数根. (4) $x_1=-1-\sqrt{7}$，$x_2=-1+\sqrt{7}$.

3. (1) $x_1=\dfrac{-\sqrt{3}-\sqrt{23}}{2}$，$x_2=\dfrac{-\sqrt{3}+\sqrt{23}}{2}$. (2) $x_1=\dfrac{-\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$，$x_2=\dfrac{-\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$. (3) $x_1=\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{26}}{4}$，$x_2=\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{26}}{4}$. (4) $x_1=3-\dfrac{\sqrt{205}}{5}$，$x_2=3+\dfrac{\sqrt{205}}{5}$.

4. (1) 因为方程 $x^2+5x+6=0$ 的根是 $x_1=-2$，$x_2=-3$，此时$|x_1-x_2|=1$，所以该方程的两个根的距离为1；因为方程 $x^2+5x-6=0$ 的根是 $x_1=-6$，$x_2=1$，此时$|x_1-x_2|=7$，所以该方程的两个根的距离不为1.

(2) 因为方程$(x-3)(mx-n)=0$ 的根是 $x_1=3$，$x_2=\dfrac{n}{m}$，又因为该方程的两个根的距离为1，所以 $\dfrac{n}{m}=2$ 或 $\dfrac{n}{m}=4$. 当 $\dfrac{n}{m}=2$ 时，$\dfrac{m+n}{2n}$ 的值是$\dfrac{3}{4}$；当 $\dfrac{n}{m}=4$ 时，$\dfrac{m+n}{2n}$ 的值是$\dfrac{5}{8}$.

21.3 一元二次方程的判别式

课后练习 21.3(1)

1. B.

2. (1) 有两个不相等的实数根. (2) 有两个不相等的实数根. (3) 有两个相等的实数根. (4) 没有实数根.

3. 一定有实数根. 因为 k 为实数，$\Delta=(-2k)^2-4\left(k-\dfrac{1}{4}\right)=(2k-1)^2\geqslant 0$.

4. (1) 当 $2a-1=0$ 时，即当 $a=\dfrac{1}{2}$时，代入得$-2\cdot\dfrac{1}{2}x+1=0$，方程有实数根 $x=1$；

(2) 当 $2a-1\neq 0$ 时，即当 $a\neq\dfrac{1}{2}$时，$\Delta=(-2a)^2-4(2a-1)=4(a-1)^2\geqslant 0$，原方程有实数根.

综上，该方程总有实数根.

课后练习 21.3(2)

1. (1) $k<\dfrac{9}{8}$. (2) $m>1$.

2. $\Delta=(-4a)^2-4\cdot a\cdot(a+3)=12a^2-12a$. 由 $\Delta=0$，解得 $a=1$ 或 $a=0$(不符合题意，舍去)，将 $a=1$ 代入原方程，得 $x^2-4x+4=0$，解得 $x_1=x_2=2$.

3. 因为方程有实数根，所以 $\Delta=(2m+1)^2-4(m^2+1)=4m-3\geqslant 0$，解得 $m\geqslant\frac{3}{4}$. 方程的根是 $x_1=\frac{-(2m+1)+\sqrt{4m-3}}{2}$，$x_2=\frac{-(2m+1)-\sqrt{4m-3}}{2}$.

4. 由题意，知 $k-1\neq 0$. $\Delta=(-4)^2-4\cdot(k-1)\cdot(-2)=8k+8$.

(1) 由 $\Delta=0$，得 $k=-1$.

(2) 由 $\Delta<0$，得 $k<-1$.

(3) 由 $\Delta\geqslant 0$，得 $k\geqslant -1$. 又 $k-1\neq 0$，所以 $k\geqslant -1$ 且 $k\neq 1$.

21.4　一元二次方程的根与系数的关系

课后练习 21.4(1)

1. (1) 4.　(2) -2.　(3) 3；-5.

2. 设此方程的两个根分别为 x_1、x_2，不妨设 $x_1=2$. 又因为 $x_1+x_2=3$，所以可得 $x_2=1$，$n=x_1x_2=2$.

3. 设此方程的两个根分别为 x_1、x_2，则 $x_1+x_2=k+1$，$x_1x_2=2$. 不妨设 $x_1=\sqrt{3}+1$，则 $x_2=\frac{2}{x_1}=\sqrt{3}-1$，$k+1=x_1+x_2=2\sqrt{3}$，得 $k=2\sqrt{3}-1$.

4. 设此方程的两个根分别为 x_1、x_2，不妨设 $x_1\geqslant x_2$，则由题意，可得 $x_1+x_2=2$，$x_1x_2=-2n+1$. 由 $\begin{cases}x_1+x_2=2,\\x_1-x_2=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=\frac{3}{2},\\x_2=\frac{1}{2}.\end{cases}$ 所以 $-2n+1=\frac{3}{4}$，得 $n=\frac{1}{8}$.

课后练习 21.4(2)

1. 由韦达定理，得 $\alpha+\beta=-\frac{-1}{\frac{1}{2}}=2$，$\alpha\beta=\frac{-2}{\frac{1}{2}}=-4$.

(1) 原式 $=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)=0$.

(2) 原式 $=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1=-19$.

(3) 原式 $=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2}=\frac{3}{4}$.

(4) 因为 $(|\alpha-\beta|)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=20$，所以 $|\alpha-\beta|=2\sqrt{5}$.

2. 由 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2$，得 $\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=2$. 又因为 $x_1+x_2=m-1$，$x_1x_2=m-2$，所以 $\frac{m-1}{m-2}=2$，解得 $m=3$，经检验，$m=3$ 是该方程的根. 将 $m=3$ 代入原方程，得 $x^2-2x+1=0$，解得 $x_1=x_2=1$.

3. (1) 因为 $m>0$，可知该方程是关于 x 的一元二次方程，$\Delta=[-(2m-1)]^2-4\cdot m\cdot(m-2)=4m+1$. 因为 $4m+1>1$，所以 $\Delta>0$，因此这个方程有两个不相等的实数根.

(2) 由 $(x_1-3)(x_2-3)=5$，得 $x_1x_2-3(x_1+x_2)+9=5$. 将 $x_1+x_2=\frac{2m-1}{m}$，$x_1x_2=$

$\frac{m-2}{m}$ 代入，得 $\frac{m-2}{m}-3\cdot\frac{2m-1}{m}+9=5$，解得 $m=1$，经检验，$m=1$ 是该方程的根. 所以，m 的值为 1.

4. 设此方程的两个根分别为 x_1、x_2，不妨设 $x_1\leqslant x_2$. 由韦达定理，得 $x_1+x_2=m+5$，$x_1x_2=6m$.

所以 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(m+5)^2-12m$.

由题意，得 $(m+5)^2-12m=25$，解得 $m_1=2$，$m_2=0$.

将 $m_1=2$ 代入原方程，得 $x^2-7x+12=0$，解得 $x_1=3$，$x_2=4$；

将 $m_2=0$ 代入原方程，得 $x^2-5x=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=5$.

21.5　一元二次方程的应用

课后练习 21.5(1)

1.（1）不能. （2）能. （3）能. （4）能.

2.（1）令 $a^2+3a-1=0$，解得 $a_1=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$，$a_2=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$.

所以 $a^2+3a-1=\left(a+\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)\left(a+\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$.

（2）$2x^2+4x+\frac{1}{2}=2\left(x^2+2x+\frac{1}{4}\right)$. 令 $x^2+2x+\frac{1}{4}=0$，解得 $x_1=\frac{-2+\sqrt{3}}{2}$，$x_2=\frac{-2-\sqrt{3}}{2}$. 所以 $2x^2+4x+\frac{1}{2}=2\left(x+\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$.

（3）$\frac{1}{2}y^2+2y-3=\frac{1}{2}(y^2+4y-6)$. 令 $y^2+4y-6=0$，解得 $y_1=-2+\sqrt{10}$，$y_2=-2-\sqrt{10}$. 所以 $\frac{1}{2}y^2+2y-3=\frac{1}{2}(y+2-\sqrt{10})(y+2+\sqrt{10})$.

（4）$-3x^2+3x+2=-3\left(x^2-x-\frac{2}{3}\right)$. 令 $x^2-x-\frac{2}{3}=0$，解得 $x_1=\frac{3+\sqrt{33}}{6}$，$x_2=\frac{3-\sqrt{33}}{6}$. 所以 $-3x^2+3x+2=-3\left(x-\frac{3+\sqrt{33}}{6}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{33}}{6}\right)$.

课后练习 21.5(2)

1. 垂直于墙面的隔板长是 8 m. 提示：设垂直于墙面的隔板长是 x m，根据题意，得方程 $x(50-4x)=144$. 解得 $x_1=8$，$x_2=\frac{9}{2}$. 当 $x=8$ 时，$50-4x=18$；当 $x=\frac{9}{2}$ 时，$50-4x=32$，$32>30$，故 $x=\frac{9}{2}$ 舍去.

2. 这三个数的和是 18. 提示：设这三个正整数分别为 $x-1$、x、$x+1$，根据题意，得方程 $(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=110$. 解得 $x_1=6$，$x_2=-6$（舍去）. 所以这三个正整数分别为 5、6、7，它们的和为 $5+6+7=18$.

3. 原纸片的相邻两边的长分别是 10 cm 和 8 cm. 提示：设原纸片的一边长是 x cm，则其邻边长是 $(18-x)$ cm. 根据题意，得方程 $2(x-4)(18-x-4)=48$. 解得 $x_1=10$，$x_2=8$.

课后练习 21.5(3)

1. 该园区的年利润每年增长 20%. 提示：设该园区的年利润每年增长 x，根据题意，得方程 $8\,000(1+x)^2=11\,520$. 解得 $x_1=0.2$，$x_2=-2.2$(不合题意，舍去).

2. 银行一年期定期存款的年利率为 2%. 提示：设银行一年期定期存款的年利率为 x，根据题意，得方程$\frac{1}{2}\times 5\,000(1+x)^2=2\,601$. 解得 $x_1=0.02$，$x_2=-2.02$(不合题意，舍去).

3. 摄影小组中七年级的学生有 14 人，八年级的学生有 8 人. 提示：设摄影小组中七年级的学生有 x 人，则八年级的学生有 $(22-x)$ 人. 根据题意，得方程$\frac{1}{2}x(x-1)+\frac{1}{2}(22-x)(21-x)=119$. 解得 $x_1=14$，$x_2=8$(不合题意，舍去).

课后练习 21.5(4)

1. (1) C. (2) C.

2. (1) 去分母得 $x+1=2x^2$.

解得 $x_1=1$，$x_2=-\frac{1}{2}$.

检验：将 $x_1=1$，$x_2=-\frac{1}{2}$代入原方程，等式成立.

所以，原方程的根为 $x_1=1$，$x_2=-\frac{1}{2}$.

(2) 去分母得 $y+2+2(y+1)=(y+1)(y+2)$.

解得 $y_1=\sqrt{2}$，$y_2=-\sqrt{2}$.

检验：将 $y_1=\sqrt{2}$，$y_2=-\sqrt{2}$代入原方程，等式成立.

所以，原方程的根为 $y_1=\sqrt{2}$，$y_2=-\sqrt{2}$.

3. (1) 去分母得 $16=(x+2)^2-(x-2)$.

整理，得 $x^2+3x-10=0$.

解得 $x_1=-5$，$x_2=2$.

检验：将 $x_1=-5$ 代入原方程，等式成立；将 $x_2=2$ 代入原方程，左端分母为 0，无意义，即 $x_2=2$ 是增根，应舍去.

所以，原方程的根为 $x=-5$.

(2) 去分母得 $s(s-3)+(s-2)-1=0$.

整理，得 $s^2-2s-3=0$.

解得 $s_1=-1$，$s_2=3$.

检验：将 $s_1=-1$ 代入原方程，等式成立；将 $s_2=3$ 代入原方程，左端第 2、3 个式子分母为 0，无意义，即 $s_2=3$ 是增根，应舍去.

所以，原方程的根为 $s=-1$.

课后练习 21.5(5)

1. A 组用了 1 h 到达营地，B 组用了 1.25 h 到达营地． 提示：设 B 组的速度是 x km/h，则 A 组的速度是$(x+1)$ km/h．根据题意，得方程 $\frac{5}{x+1}+\frac{15}{60}=\frac{5}{x}$．解得 $x_1=-5$，$x_2=4$．经检验，$x_1=-5$，$x_2=4$ 都是原方程的根，但负值不符合实际意义，应舍去．所以，B 组用的时间为 $5\div4=1.25$(h)，A 组用的时间为 $5\div5=1$(h)．

2. 今天 1 千克青菜 10 元． 提示：设今天 1 千克青菜 x 元，则昨天 1 千克青菜$(x-2)$元．根据题意，得方程 $\frac{40}{x}+1=\frac{40}{x-2}$．解得 $x_1=10$，$x_2=-8$．经检验，$x_1=10$，$x_2=-8$ 都是原方程的根，但负值不符合实际意义，应舍去．

3. 提速后该线路地铁列车从起点 A 站出发到终点 B 站需要 68 min． 提示：设原来的速度为 x km/h，则提速后的速度为$(x+15)$ km/h．根据题意，得方程 $\frac{60}{x}=\frac{60}{x+15}+\frac{12}{60}$．解得 $x_1=60$，$x_2=-75$．经检验，$x_1=60$，$x_2=-75$ 都是原方程的根，但负值不符合实际意义，应舍去．所以提速后的速度为 $60+15=75$(km/h)，用时为$\frac{60}{75}\times60+2\times10=68$(min)．

第 22 章　直角三角形

22.1 直角三角形

课后练习 22.1(1)

1. 4；$\angle A$ 和$\angle B$，$\angle ACD$ 和$\angle BCD$，$\angle A$ 和$\angle ACD$，$\angle B$ 和$\angle BCD$．

2. 25．

3. 4；20．

4. 提示：先证明 $CE=BE=\frac{1}{2}BD$，推出$\angle B=\angle ECB$，从而$\angle CEA=2\angle B=\angle A$，得 $AC=CE$．所以 $AC=\frac{1}{2}BD$．

5. 提示：取 AB 中点 D，连接 CD．先证$\angle DCB=\angle CDB=\angle B=60°$，再证$\triangle ACD$ 是等腰三角形，从而$\angle ACD=\angle A=30°$．所以$\angle ACB=\angle ACD+\angle DCB=90°$．

6. (1) 提示：由 $BE\perp AC$，$CF\perp AB$，D 是边 BC 的中点，根据直角三角形的性质定理，推出 $DE=\frac{1}{2}BC=DF$．

(2) $\angle A=60°$． 提示：由$\triangle DEF$ 是等边三角形，可知$\angle FDE=60°$，即$\angle FDB+\angle EDC=120°$，利用直角三角形的性质定理，可推得$\angle DBF=\angle DFB$，$\angle DEC=\angle DCE$．再由$\angle DBF+\angle DFB+\angle DEC+\angle DCE=360°-120°=240°$，得$\angle ABC+\angle ACB=120°$．所以$\angle A=60°$．

课后练习 22.1(2)

1. 提示：证明 $AE=DF$.

2. 提示：先证明 $\mathrm{Rt}\triangle EBA\cong\mathrm{Rt}\triangle FCD$；再证明$\triangle ACF\cong\triangle DBE$，得 $AF=DE$.

3. 提示：先证明 $\mathrm{Rt}\triangle ADB\cong\mathrm{Rt}\triangle A'D'B'$，得$\angle B=\angle B'$；再证明$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，推出 $AC=A'C'$.

4. 提示：延长 BE 交 AC 于点 F，证明 $\mathrm{Rt}\triangle BDE\cong\mathrm{Rt}\triangle ADC$，得$\angle DBE=\angle DAC$. 由$\angle DAC+\angle C=90°$，可推得$\angle CBF+\angle C=90°$，从而$\angle BFC=90°$.

5.（1）$AB=AC$，理由略. 提示：证明 $\mathrm{Rt}\triangle BPM\cong\mathrm{Rt}\triangle CPN$，得$\angle PBM=\angle PCN$. 由 $PB=PC$，可得$\angle PBC=\angle PCB$. 进一步可证得$\angle ABC=\angle ACB$，根据“等角对等边”，得出 $AB=AC$.

（2）仍然成立. 提示：证明方法同(1).

22.2 角平分线

课后练习 22.2(1)

1. 提示：证明$\triangle BFD\cong\triangle CED$，得 $DF=DE$，所以 AD 平分$\angle BAC$.

2. 提示：过点 P 分别作 $PE\perp OA$，$PF\perp OD$，垂足分别是 E、F. 由已知 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PCD}$ 和 $AB=CD$，推出 $PE=PF$，所以 OP 平分$\angle AOD$.

3. 提示：由角平分线的性质定理，得 $DC=DE$，从而$\angle DCE=\angle DEC$；由 $EF\parallel BC$，得$\angle FEC=\angle DCE$，所以$\angle FEC=\angle DEC$，即 EC 平分$\angle FED$.

4.（1）提示：①过点 D 作 $DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为 E、F. 由角平分线的性质定理，得到 $DE=DF$. 由三角形的面积公式得到$\triangle ABD$ 的面积$=\frac{1}{2}AB\cdot DE$，$\triangle ACD$ 的面积$=\frac{1}{2}AC\cdot DF$，从而$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{AB}{AC}$. ②过点 A 作 $AH\perp BC$，垂足为 H，由三角形的面积公式得到$\triangle ABD$ 的面积$=\frac{1}{2}BD\cdot AH$，$\triangle ACD$ 的面积$=\frac{1}{2}CD\cdot AH$，即可证明$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{BD}{CD}$.

（2）$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$.

（3）仍然成立. 理由略. 提示：由(1)的类似方法，可证$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{AB}{AC}$，$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{BD}{CD}$，所以$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$.

课后练习 22.2(2)

1. C.

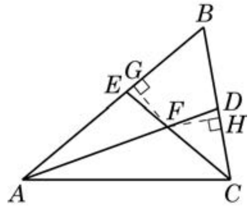
2. 8 cm，8 cm.

3. 图略. 提示：以点 O 为圆心、以线段 a 的长为半径作圆，这个圆与$\angle O$ 的平分线的交点就是所求作的点 P.

4. 提示：先证明$\angle DFE=90°$，再推出 $DF=DB$.

5. (1) 连接 BF. 由题意，可知 F 是$\triangle ABC$ 的内心，BF 是$\triangle ABC$ 的角平分线. 因为$\triangle ABC$ 是等边三角形，所以可以推出 $AD\perp BC$，$CE\perp AB$. 根据角平分线的性质定理，可得 $FE=FD$.

(2) 仍然成立. 提示：当 $AB\neq BC$ 时，$\angle BAC\neq\angle BCA$，如图，过点 F 作 $FG\perp AB$，$FH\perp BC$，垂足分别为 G、H，则 $\angle FGE=\angle FHD=90°$. 根据角平分线的性质，得到 F 是$\triangle ABC$ 的内心，进而得到 $FG=FH$. 由已知条件、“三角形的内角和等于 180°”以及三角形的外角的性质，可推得$\angle AFE=60°$，进一步可推得$\angle GEF=\angle HDF$，从而可证$\triangle EFG\cong\triangle DFH$，得到 $FE=FD$.



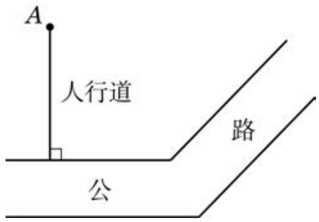
(第 5 题)

22.3 勾股定理

课后练习 22.3(1)

1. B.

2. 因为“连接直线外一点与直线上各点的所有线段中，垂线段最短”，所以只要作点 A 到公路的垂线段即可，如图所示.



(第 2 题)

3. (1) $b=12$. (2) $c=\dfrac{5}{2}$. (3) $a=9$.

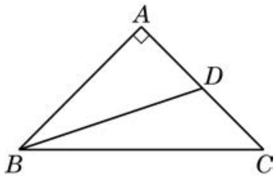
4. 根据勾股定理，可得

$A=100-36=64$；

$y=\sqrt{15^2+36^2}=\sqrt{1\,521}=39$；

$B=17^2-8^2=289-64=225$.

5. $\sqrt{10}$. 提示：如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，$AB=AC$，$BC=4$. 根据勾股定理，可知 $AB^2+AC^2=BC^2$，可得 $AB=AC=2\sqrt{2}$. 由 BD 是$\triangle ABC$ 的中线，则 $AD=\sqrt{2}$. 再由勾股定理，可求得 $BD=\sqrt{10}$.



(第 5 题)

6. (1) 由勾股定理，知 $EH^2=ET^2+HT^2=a^2+b^2$，则正方形 $EFGH$ 的面积 $S=EH^2=a^2+b^2$.

(2) 直角三角形 EHT 的面积为 10，正方形 $EFGH$ 的面积为 41. 提示：由 $m+n=10$，$m-n=8$，得 $m=9$，$n=1$. 根据题意，可知 $m=a+b$，$n=a-b$，解得 $a=5$，$b=4$. 所以，直角三角形 EHT 的面积为$\dfrac{1}{2}ab=10$. 由(1)，可知正方形 $EFGH$ 的面积 $S=a^2+b^2=41$.

课后练习 22.3(2)

1. (1) 直角三角形. (2) 17 或$\sqrt{161}$.

2. B.

3. $\triangle ABC$ 不是直角三角形. 理由如下：根据勾股定理，得 $AB^2=AD^2+BD^2=400$，$AC^2=AD^2+CD^2=169$. 由 $AB^2+AC^2=400+169=569$，$BC^2=(BD+CD)^2=441$，可知

$BC>AB>AC$，且 $AB^2+AC^2\neq BC^2$，所以△ABC 不是直角三角形.

4. 101.4. 提示：由 $BD^2+CD^2=25+144=169$，$BC^2=169$，可得 $BD^2+CD^2=BC^2$，所以△BCD 是直角三角形. 在 Rt△ADC 中，由 $AD^2+CD^2=AC^2$，可以得到 $AB=AC=16.9$.

5.（1）△DEC 为直角三角形，理由略. 提示：由旋转的性质，可得△ABD≌△CBE，可证得△DBE 为等边三角形，于是 $DE=BD=4$，$EC=AD=3$，$DE^2+EC^2=3^2+4^2=5^2=CD^2$，所以△$DEC$ 为直角三角形.

（2）$\angle ADB=150°$. 提示：由(1)，可知△DEC 为直角三角形且 $\angle DEC=90°$，可证得 $\angle BED=60°$，所以 $\angle BEC=90°+60°=150°$，从而 $\angle ADB=150°$.

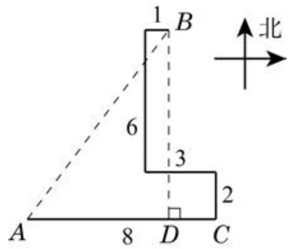
课后练习 22.3(3)

1.（1）26. （2）12；15.

2. 提示：在 Rt△ACD 中，根据勾股定理，得 $CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{20^2-16^2}=12$，从而 $BD=BC-CD=12=CD$. 进一步可证得 $AB=AC$，△ABC 是等腰三角形.

3. $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$，证明略. 提示：在△BCD 和△ABC 中，由勾股定理，可得 $BD^2=BC^2+CD^2$，$AB^2=BC^2+AC^2$. 所以，$AB^2+CD^2=AC^2+BC^2+CD^2=AC^2+BD^2$.

4. 10 km. 提示：如图，过点 B 作 $BD\perp AC$，垂足为 D. 根据题意，可知 $AD=6$ km，$BD=8$ km. 由勾股定理，得 $AB=10$ km.



（第 4 题）

5. 两部分面积相等，理由略. 提示：设 $BC=2a$，$AB=2c$，$AC=2b$，Ⅰ的面积为 S_1，Ⅱ的面积为 S_2. 由勾股定理，得 $BC^2=AB^2+AC^2$，则 $a^2=c^2+b^2$，再由三角形的面积公式和圆的面积公式证明 $S_1=S_2$，即可得出结论.

后　记

本套教学参考资料与李大潜主编、上海教育出版社出版的《义务教育教科书(五・四学制)数学》配套使用.

本册教学参考资料是八年级上册. 在主编李大潜的主持下，由王志强任本册主编，参与编写人员为：

鲁海燕、周子翔(第 19 章)

张海燕、周子翔(第 20 章)

胡军、顾跃平、周子翔(第 21 章)

张海燕、周子翔(第 22 章)

朱雁、陆立强(综合与实践)

感谢编写团队的团结协作和不懈努力. 编写过程中，上海市课程教育教学研究基地(中小学课程方案基地)、上海市心理教育教学研究基地、上海基础教育教材建设重点研究基地、两个上海市数学教育教学研究基地(分别设在复旦大学和华东师范大学)等上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地对编写工作给予了大力支持，在此表示衷心的感谢.

我们要感谢一直支持、关心和帮助我们工作的同志和朋友们. 大家的热忱指导和帮助，我们定会铭记于心，并化为我们的工作动力.

欢迎广大师生来电来函提出宝贵的意见.

联系电话：021－64319241(内容)　021－64373213(印刷或装订)

电子邮箱：jcjy@seph.com.cn

地　　址：上海市闵行区号景路 159 弄 C 座上海教育出版社(201101)

SHUXUE
JIAOXUE CANKAO ZILIAO

经上海市教材审查和评价委员会审查
准予使用　准用号 SD-CJ-2025001

数学　教学参考资料

八年级　上册

中国环境标志
CHINA ENVIRONMENTAL LABELLING
绿色印刷产品

ISBN 978-7-5720-3483-1
9 787572 034831 >
定　价：　46.50 元