九年义务教育

八年级　第一学期

（试用本）

数学

教学参考资料

上海教育出版社

目　录

注 1　标有“*”号的章名均配有原课本的缩小文本.

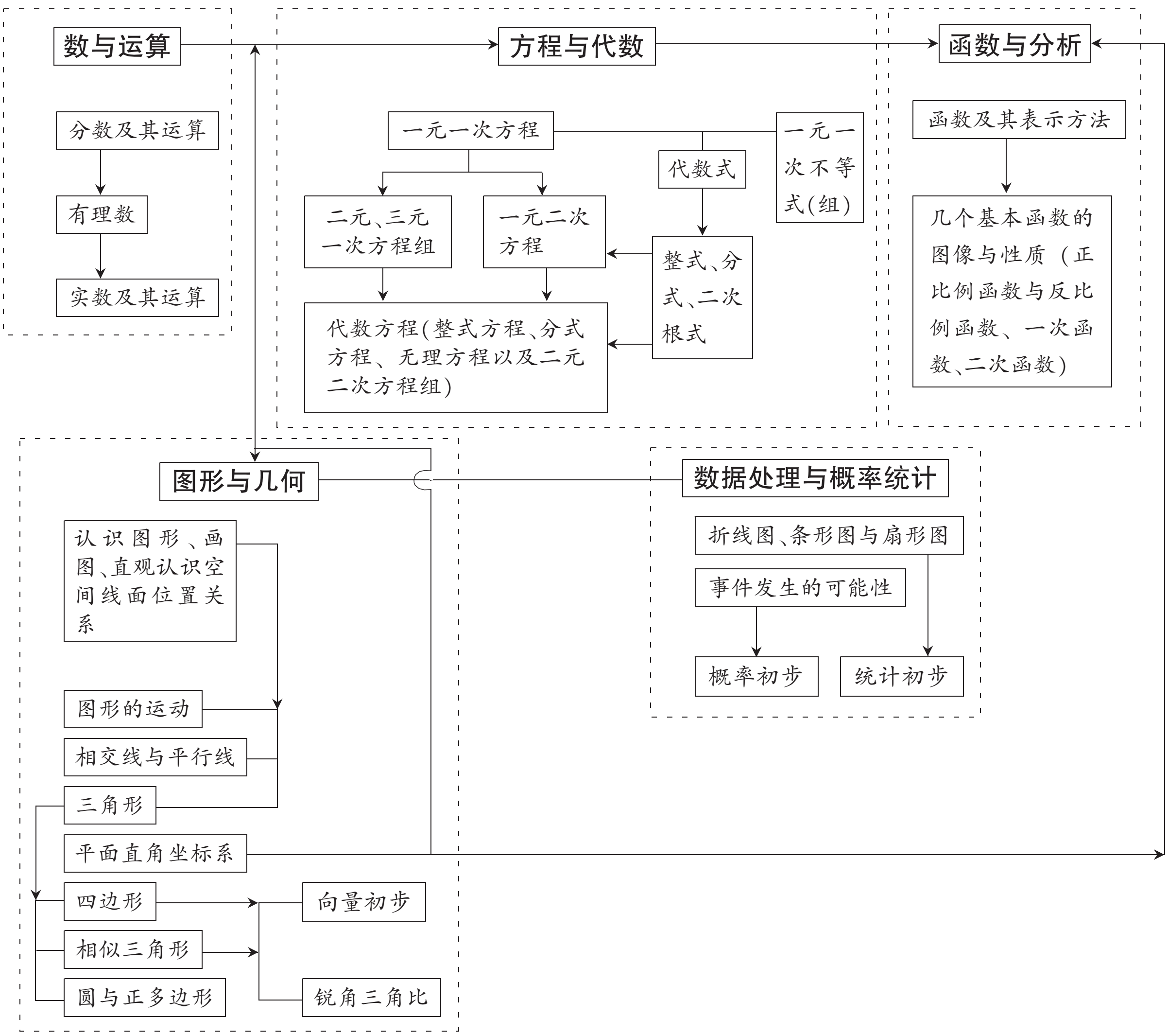
注 2　括号“(　)”内页码为课本相应页码.

课 本 简 介

一、初中数学课本内容框架体系

1. 知识内容框图

《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》中指明,数学课程内容包括“基本内容”“拓展内容”和“专题研究与实践”三类.其中“基本内容”是所有学生必备的、共同的数学基础;这些内容按其所属知识领域,分为“数与运算”“方程与代数”“图形与几何”“函数与分析”“数据处理与概率统计”等五个部分,它们自成体系,又相互联系,构成一个有机的整体.根据数学知识内容“通盘设计、分阶段安排”的原则,初中数学基本内容的框图如下:



2.各年级内容安排

数学基本内容各部分设计为若干个学习主题,组成学习序列.初中数学课本的编写,在把握各部分内容的发展主线和相互联系的基础上,采取“多线有序并进、螺旋上升,内容互相穿插、混合编排”的方式.另外,为做好初、高中数学的衔接,设置了数学“拓展Ⅱ”,提供希望进入普通高中的学生进行学习.各年级课本内容安排如下:

<table>
<tr><th rowspan="2">年级</th><th colspan="5">基 本 内 容</th></tr>
<tr><th>数与运算</th><th>方程与代数</th><th>图形与几何</th><th>函数与分析</th><th>数据处理与概率统计</th></tr>
<tr><td>六年级</td><td>数的整除性
分数及其运算
比和比例
有理数及其运算
数轴
有理数的大小比较
科学记数法</td><td>一元一次方程
二元、三元一次方程组
一元一次不等式(组)</td><td>圆与扇形
基本图形的画法
长方体的再认识</td><td></td><td rowspan="2">在数的运算、字母表示数等学习中，渗透可能性大小问题和一些统计量计算；结合扇形、画图等内容，学习画条形图、折线图、扇形图</td></tr>
<tr><td>七年级</td><td>实数
实数的运算
n次方根
有理数指数幂</td><td>代数式
整式及其运算
因式分解
分式及其运算</td><td>图形运动
相交线与平行线
三角形
平面直角坐标系</td><td></td></tr>
<tr><td>八年级</td><td></td><td>二次根式
一元二次方程
整式方程
分式方程
无理方程
二元二次方程组</td><td>几何证明
四边形
向量及其加减法</td><td>函数及其表示法
正比例函数
反比例函数
一次函数</td><td>确定事件与随机事件
概率的意义
等可能试验
简单事件的概率</td></tr>
<tr><td rowspan="3">九年级</td><td></td><td></td><td>相似三角形
实数与向量的乘法
圆与正多边形
锐角三角比</td><td>二次函数</td><td>数据整理与统计图表
统计的意义
表示一组数据平均水平的量
表示一组数据波动程度的量
表示一组数据分布的量</td></tr>
<tr><td colspan="5">【拓展Ⅱ】——定向拓展内容</td></tr>
<tr><td></td><td>一元二次方程的根与系数的关系</td><td>直线与圆再研究
与圆有关的角及线段
四点共圆</td><td>二次函数再研究
二次函数应用</td><td></td></tr>
</table>

3. 内容变化重点

依据《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》，初中数学课本内容的组织和处理，相对于上海市原来的初中数学课本进行了一些调整. 内容变化的主要方面如下：

(1) 在引进计算器和建立数字化数学活动平台的背景下，在确保学生获得关于数及式的运算、解方程、画图等基本技能的切实训练的前提下，删减用纸笔进行繁复的数值计算的内容；削减孤立的加、减、乘、除、乘方、开方的繁复演练；精简关于式的运算、变形、求值以及单纯解方程(组)训练的繁难内容；削减复杂的求函数定义域和用描点法画复杂函数图像的内容. 同时，有关内容的教学重点相应发生转移，如数与式的运算，侧重于引导学生体会算理，理解和掌握运算法则、运算性质、运算顺序，寻找和选择合理、有效的运算途径；方程的学习，侧重于引导学生探究解法，体会解方程的基本原理和一般过程，获得列方程解应用题的过程体验和经验；函数的研讨，侧重于引导学生树立运动、变化的观点，懂得运用函数思想和数形结合思想分析问题，了解函数研究的内容、方法及其基本应用.

(2) 在数与运算中，渗透数系扩展的基本思想和原则，突出数系通性；在一元一次方程中，通过运用有理数的运算性质和等式性质解方程，展示以通性求通解的代数主题，同时提供学习代数式的经验基

础;在一元二次方程中,强化代数主题以及化归的思想、策略和方法;通过进一步研究简单的高次方程、分式方程、无理方程和二元二次方程组以及方程的应用,深化对方程的基础知识和解方程的基本思想的认识.

(3) 降低认识函数的起点,以两个变量存在确定的相互依赖关系来描述函数,突出函数的本质;利用函数图像,直观认识函数的基本性质.

(4) 把圆柱、圆锥和球的有关内容移到高中,在图形运动中对等腰三角形、平行四边形和圆的有关性质不展开讨论;改善实验几何到论证几何的衔接,展现“实验—归纳—猜测—论证”的过程;对圆的有关知识内容进行分层处理,对几何论证的难度加强控制;在论证几何中,重视发挥图形研究过程对学生学习演绎推理方法的载体作用和对培育学生的理性精神、逻辑推理能力所具有的教育价值.

(5) 结合有关几何内容,引进向量及其线性运算;结合有关数的运算和图形的知识,引进“可能性”和“数据整理”问题 ,再集中学习“概率”和“统计”的初步知识.

(6) 加强数学与现实生活的联系,重视数学模型及其应用;增设“阅读材料”,加强数学与文化的整合,进行人文精神的教育;安排“探究活动”和“实践活动”,促进学生的体验性学习和探究性学习.

(7) 设置“拓展Ⅱ”板块,把“一元二次方程的根与系数的关系”“二次函数解析式的确定及其与一元二次方程的联系”“圆与直线位置关系定理以及与圆有关的角和四点共圆”等列为定向拓展内容,规定今后要进入普通高中的学生必须学习.

4.课本使用要点

(1) 全面把握课程目标.

数学教育在发展和完善人的教育活动中,在形成人类理性思维和促进个人智力发展的过程中,发挥着独特的、不可替代的作用.要充分认识数学的育人功能,确立正确的数学教育目的观.数学课程及其教学,不仅要关注学生对数学知识、技能、思想方法的掌握,关注其数学能力的发展,而且要有助于学生理解数学的社会价值,领略数学文化的内涵,体验数学思维方式和方法,形成良好的数学思维品质,促使学生的数学素养全面提高;要让学生学习自主获取数学知识的方法,体会数学思考和创造的过程,增强学习的兴趣和自信心,不断提高自主学习的能力,帮助学生确立终身学习的愿望,奠定终身发展的基础.

数学课程目标体系含有“知识与技能”“过程与方法”“情感态度与价值观”三个维度,分为总目标和学段目标两个层次,它们通过全程的数学教学整体实现.课程内容主题的学习要求,是课程目标的具体化体现和形成性标志;恰当制订、有效落实各章和每节课的教学目标,是逐步达成课程目标的根本保证.

数学课程目标对数学教学具有定向和引导的意义.每课教学目标的制订,要全面关注三个维度,针对教学实际,指向明确,定位准确,切实可行.

(2) 精心组织教学内容.

数学课本是课程内容的重要载体,为教学提供了基本素材,具有系统性、通用性;课本内容的安排,显示了对教学材料进行组织的一条基本线索和一种可取形式,有借鉴性也有局限性.不同班级、不同学生使用同样的课本,必须有区别地对待、有适当的调整.所以,具体教学中的内容组织,既要尊重课本,更要活用课本,整体把握课本要求,创造性地使用课本素材.要在研读课本、分析学生的基础上,从达成目标的需要着眼,从学生学习的实际出发,恰当选取和组织每节课教学的素材内容.要体现内容与目标的一致性以及与学生现有认知水平的适切性;要重视内容的基础性、层次性、结构性和可接受性;要有助于学生对数学的认识和理解,有助于激发学生学习数学的兴趣和信心.

教学内容的组织还要强调应更多地关注教学的主体目标和重点内容,关注数学的基本运用及其与现实生活的联系,注重于打好基础、促进发展;不要在细枝末节上纠缠,不要搞过于繁杂和技巧性过强的统一训练.

(3) 合理安排教学过程.

数学教学是学生在教师指导下主动学习课程的真实过程.在教学过程中,教师、学生、教学内容、教学环境等众多因素共同作用、相互影响,推动教学的实施.教学过程的设计,要确立和尊重学生的学习主体地位,坚持“教”为“学”服务的原则;要强调有效发挥学生在学习活动中的主动、能动作用,发挥教师对学生学

习的指导、促进作用，体现教师主导与学生主动相统一，师生互动，共同发展；要切实加强数学基础教学，重视过程教学，遵循学生认识数学的一般规律和数学发展的逻辑顺序，展现有效落实数学基本知识、基本技能、基本能力和基本应用的教学途径，同时把接受性学习与探究性学习、个体学习与合作学习等多种方式适当组合运用于其中，将体验探索、发现过程和经历数学化、再创造过程等目标要求有机整合于其中；要创设良好的认知环境，适切应用现代信息技术，构建民主、平等、和谐的师生关系，提供开放自主的活动空间和丰富多样的学习资源，促进学生积极、自由地思维，生动、活泼地发展.

数学课本的编写力求体现过程模式，展现知识的发生、发展和形成的过程，通过“问题—活动”引导学生探索求知. 课本内容的呈现方式，为改善教学过程提供了一定的思考基础和有利条件. 教学实施过程的具体安排，与教师、学生、环境等各方面因素有关. 要对课本内容进行教学法的加工，要注意课堂生成资源的利用，要注意及时反馈和调节，使教学过程充满活力；要为学生自主活动提供机会和条件，发挥师生的积极性、创造性和营造良好的认知环境，激活课堂.

(4) 切实改进学习评价.

数学学习评价是对学生通过数学学习所取得的成果和达到的水平作出评判，同时对学生改进学习和完善自我进行导向；它又是实施教学反馈、评估和决策的重要环节. 学习评价应强化其教育功能和激励作用，更多地肯定进步、鼓励成功、鼓舞信心；评价的结果应更多地用于帮助师生改进数学的教与学，引导师生正确把握目标、能动发展，鼓励学生努力学习、奋发上进.

学习评价活动有期中、期末测试和章节测验，还包括对每节课达成学习目标的情况分析和对学生日常学习表现的考察，这些都是形成性评价活动. 初中毕业考试及学业评定，是学段的终结性评价.

形成性评价，其立足点是“形成、改进”，着眼点是“引导、促进”. 形成性学习评价的实施，不仅要评价学生通过数学学习所取得的成果和达到的水平，更要重视学生在学习过程中的变化和发展，关注学生在学习活动中所表现出来的主体精神、进取态度、行为习惯、思维品质和学习潜力. 由此，学习评价的方式和方法应多种多样，评价结果的报告和解释应重视定性与定量相结合、统一性与灵活性相结合，体现评价的全面性、动态性、综合性和激励性.

长期以来，学习评价活动偏重于书面考试和分数评定，注重于认知发展的水平，因此必须改进和完善学习评价. 要端正学习评价的目的，建立起“主体多元、方法多样”的评价体系，加强过程性评价，实施发展性评价.

必须强调，形成性学习评价，应更多地关注学生在学习过程中的变化和发展，注重对学生达成课程目标的启发和引导. 应重视对学生课堂学习情况的分析和日常学习表现的观察，加强评价者与被评价者之间的沟通和交流；应加强对测试命题的研究，关于数学基础知识和基本技能的考查，要把握基本要求，突出教学重点，注重理解实质，体现数学思想方法，发挥测试命题对用好数学课本、加强数学基础教学的积极导向作用.

二、本册课本内容编写说明

八年级第一学期数学课本（以下简称本册课本）包含“二次根式”“一元二次方程”“正比例函数与反比例函数”“几何证明”等四章内容，还有配合各章内容的练习部分.

1. *编写思路*

本册课本的编写，坚持以体现课程改革理念、提高学生数学素养为根本，努力把握数学知识发展主线和学生认知发展规律，正确处理数学知识发展过程中的转折和过渡，展现学生思维发展过程中的阶段性特点；全面理解数学课程目标，注重落实基本要求，突出数学思想方法，激扬理性精神和数学文化；改善内容呈现方式，增强数学活动，有效促进学生主动学习.

(1) 内容要求的定位力求准确，过渡衔接的安排力求平稳.

《上海市中小学数学课程标准（试行本）》对初中数学内容的安排，设计为“二二分段”. 本册课本是后两年这一段的开头，有关内容体现了前两年初中数学内容的发展和阶段性提升. 如第十六章“二次根式”和第十七章“一元二次方程”，是对于代数式和方程的研究的深入；第十八章“正比例函数与反比例函数”，是从

常量数学到变量数学的起步；第十九章“几何证明”，是从实验几何到论证几何的跨越.在初中的后两年，从这一册开始，学生将围绕“以通性求通解”的代数主题，以二次根式和一元二次方程为新起点，进入代数基础知识的系统化学习，初步完善代数知识结构；将在运动变化的观点指导下，以正比例函数和反比例函数为载体，进入变量数学的研究；将围绕发展逻辑思维能力的目标要求，以“几何证明”为台阶，进入论证几何的学习，获得演绎推理及其规范表达的基本训练.所以，本册内容承前启后，对初中数学的后一段学习具有奠基性意义.在这样的认识基础上，课本对各章内容的编排和处理，特别注意做好与以前所学知识的衔接，恰当反映其在数学知识系统中的地位和作用.

从算术到代数，从常量数学到变量数学，从实验几何到论证几何，从确定性数学到随机性数学，等等，是学生在初中阶段数学学习中所要经历的几个重大转折，也是认识上的飞跃.其中，从算术到代数的转折，已在六、七年级完成；进入八年级，面临着从常量数学到变量数学、从实验几何到论证几何的转折，课本中的“正比例函数与反比例函数”“几何证明”两章，承担着实现这两大转折的任务.本册课本内容不仅是数学基础知识的充实，而且是数学学习领域的拓宽.在学生认知发展的转折关头，课本特别重视铺设台阶，强调遵循规律，坚持简明处理，力求平稳转折.例如，第十八章开篇通过具体事例讲变量及其相互依赖关系，第十九章的起始通过命题和证明讲逻辑初步知识，分别为引进函数和几何论证进行了必要的铺垫.

（2）高观点、低起点，注重于数学思想方法内涵.

各章内容的组织，有一定的数学思想观点指导，同时适当降低了认识的起点.在“二次根式”中，关注对于“式是数的发展、是简明的数学语言和重要的数学工具”的阐释，而认识的起点是数字式和二次根式的基本运算，并注意揭示式的运算与数的运算的联系，以及二次根式运算之间的联系；在“一元二次方程”中，关注“以数的运算基本性质和等式性质探索方程解法”的实施，而研究的起始是最简单的方程，按照从特殊到一般的认识过程逐步展开.关于“函数的概念”，渗透了“事物运动变化并且具有规律性”的观点和“对应与映射”的思想，但着重点是理解变量之间存在相互依赖关系；关于“几何证明”，有学习“公理化思想”和“形式逻辑”的背景及要求，但有关内容是从整理实验几何知识引进，通过举例加以说明，具体表述时运用了浅显、明白的语言.同时，各章内容的阐述，注意展开数学思考的过程，展现数学思想方法的运用，其中有丰富的内涵.

（3）关注学习过程，促进学生主动学习.

“问题—活动—归纳”，是本册课本内容呈现的基本方式.一般的过程是：提出问题，导出学习主题；安排活动，开展探索研究；简要归纳，形成基本结论.在“几何证明”的举例中，先给出例题，然后进行思路分析，再形成证明，重视“分析”的环节.同时，课本注意加强从特殊到一般、从具体到抽象、从直观到严谨、从形象思维到逻辑思维的引导，为学生主动学习提供帮助.

本册课本中保持安排有“问题”“思考”“操作”“想一想”“议一议”等栏目，有边款点拨、方框解说等版式，以引导学生开展数学活动，帮助学生把握重点和释疑解难，指导学生生动、活泼、主动地学习，深入地思考.

在各章的末尾，配备有“阅读材料”或“探究活动”.安排阅读“关于一元二次方程的求根公式”“《几何原本》古今谈”“勾股定理万花筒”等材料，意在帮助学生丰富数学文化，扩大数学视野，养成文化包容态度；安排“一组二次根式问题的探索”“解一个特殊的方程”“生活中的函数”等活动，重在加强数学实践和引导学生探究学习.

数学练习部分中的习题安排，重视基本训练，也有一些开放性问题、探究性问题、实践性问题等；注意训练要求分层，有统一性也有多样性.“活动与探究”或“试一试”栏目下的题目，一般有较高的难度，这样的题目不要求所有学生都去做，主要提供给有学习兴趣的学生进行研究和讨论，进一步培养学生的探究意识和钻研精神，满足不同学生的学习需要.

2. 内容提要

本册课本的基本内容分属“方程与代数”“图形与几何”“函数与分析”等领域.

在代数部分，前一段完成了“有理数—一元一次方程（组）—整式和分式”的教学，又提供了实数及其运算的基础；本册安排二次根式和一元二次方程这两章，将式的研究从有理式推进到无理式，将方程的

讨论从一次方程推进到二次方程.在数学课程标准中，关于这两个代数内容主题的设计，是把一元二次方程放在二次根式前面，并对一元二次方程的教学采取分层要求、分步到位的做法，延续到“整式方程”的学习主题再进行整理和完善.在本册课本编写中，考虑到前两年的内容编排已有一些变动，特别是七年级的“实数”一章对实数运算的基础性教学有一定加强，此时“二次根式”已经呼之欲出，“一元二次方程”也有可能一气呵成，因此编排顺序改为将“二次根式”放在“一元二次方程”之前.式是数及其运算的发展，它对方程理论的研究具有工具作用和支持意义；有了二次根式的铺垫，关于一元二次方程的基本内容教学，在本册这一章基本完成.必须强调，数的运算和运算性质，是探索和形成方程解法的知识基础；现在课本中代数内容的发展线索，依然是紧扣“以通性求通解”的代数主题.方程是初中代数的中心内容，对本册中一元二次方程的学习，将为学生进一步探索和研究其他代数方程提供思想方法的准备.

在分析部分，前一段已为学习函数进行了基础知识方面的必要准备以及有关数学思想方法的渗透，如式的初步知识、方程和不等式的有关知识、用字母表示数的思想、集合与对应的思想等；本册课本安排“正比例函数与反比例函数”一章，在于引导学生跨步进入“函数与分析”这一学习领域，以这两个简单的、又有一定代表性的具体函数为例，展开对于函数的初步研究.

在几何部分，前一段通过实验几何的教学，进行了平面几何的探源和奠基；本册课本安排的“几何证明”一章，是论证几何学习的入门.在这一章，注重于逻辑知识初步、演绎推理试步.其中还涉及关于线段垂直平分线、角平分线、直角三角形等的研究，既为平面几何充实必需的基本知识，又是演练逻辑推理的载体，是尝试建立论证几何体系的初步实践.

3. 课时安排

各章教学的课时数建议如下：

第十六章	二次根式	9课时
第十七章	一元二次方程	11课时
第十八章	正比例函数和反比例函数	11课时
第十九章	几何证明	26课时

第十六章　二 次 根 式

一、教学目标

1. 理解二次根式的概念，领会字母“代”数思想；能根据二次根式中被开方数应满足的条件，判断或确定所含字母的取值范围.

2. 经历二次根式性质的概括过程，掌握二次根式性质的基本运用.

3. 理解最简二次根式、同类二次根式、有理化因式的意义，会将二次根式化为最简二次根式，会判别同类二次根式，会进行分母有理化.

4. 掌握二次根式的加、减、乘、除及混合运算，体会类比、化归等数学思想方法.

5. 会解一次项系数或常数项中含二次根式的一元一次方程和一元一次不等式.

二、课时安排

本章教学共 9 课时，建议分配如下：

16.1	二次根式	2 课时
16.2	最简二次根式和同类二次根式	2 课时
16.3	二次根式的运算	4 课时
本章小结		1 课时

三、设计说明

代数式是由字母表示数发展而来的，是数的进一步发展和数量关系的简明表达. 在七年级第一学期建立代数式的概念时，其中涉及的基本运算局限于加、减、乘、除以及乘方，这时出现的代数式类型只有整式和分式. 第十二章“实数”中引进了数的开方运算，而且在方根的讨论中实际上已经出现了根式（数字式），因此需要并有可能扩展对代数式的认识. 本章与此紧密联系，着重研究二次根式. 在内容的安排上，与前面的整式和分式类似，就是在明确二次根式的概念的基础上，讲它的基本性质和运算法则. 关于最简二次根式、同类二次根式、分母有理化的学习，是对二次根式的运算、变形、化简进行研究的知识准备.

关于二次根式的运算，按加、减、乘、除、混合运算的顺序编排，符合学生的习惯. 对含一个根式和两个根式的分母有理化，一气呵成. 在二次根式的运用中加入解一元一次方程和解一元一次不等式的有关内容，以利于加强与已学知识的联系.

在本章的学习中，重点是掌握二次根式的运算，关键是理解二次根式的性质. 不要涉及繁难的二次根式问题，力求简明、清晰地展示有关式的研究的基本原理和方法，展示二次根式运算的法则和过程.

四、教学建议

1. 让学生理解二次根式有关概念的产生是基于二次根式运算、变形、化简的需要. 如，为化简二次根式而引进最简二次根式；为二次根式加减运算而引进同类二次根式；为对二次根式实施除法运算或化去“分母”中的根式而引进有理化因式和分母有理化.

2. 慎重处理与二次根式有关的一些概念问题. 本章出现的概念，已注意尽可能清晰描述、容易辨析，但涉及具体的问题时，还是有可能引起争议. 实际上，有一些概念问题是暂时讲不清楚的，要在以后再逐步明确；有一些概念问题是不必深究的，应加以回避. 如二次根式的被开方数可以是整式或分式，这一说明出现在二次根式的概念引进之时，在教学中不要引入如$\sqrt{\sqrt{2}a}$是不是二次根式的讨论；又如，通常把形如$m\sqrt{a}$（$a\geqslant 0$）也叫做二次根式，课本中没有指出对 m 的具体要求，只是举例说明，在教学中只要指明 m 中不含根号. 对于概念问题，都应把握教学基本要求，简明地向学生呈现，不要人为地复杂化.

在代数式的知识系统基本建立后，一方面要引导学生对有关的概念问题进行系统化认识，如关注数字

式与含有字母的代数式之间的差异，引进有理式和无理式的概念；另一方面还是要严格控制知识运用的难度，注重理解和分析，把握知识的内在联系，掌握基本的数学思想和方法.

3. 注意运用类比方法和渗透化归思想. 在教学中，可将合并同类二次根式与合并同类项类比，将二次根式加减与整式加减、分式加减类比，将二次根式的运算与相应"数字式"的运算类比，促进学生的知识迁移. 还可以将二次根式的研究过程与整式、分式的研究过程类比，帮助学生建立代数式的知识系统. 要揭示化简二次根式、分母有理化的意义，揭示二次根式运算与整式、分式运算的内在联系，让学生从中体会化归思想.

4. 引导学生注意二次根式中字母的取值范围，培养学生的严谨的态度和推理能力. 在"实数"一章，已讨论过被开方数为数字的二次根式(即"数字式")及其运算，本章主要是学习被开方数含字母的二次根式. 为避免因规定字母取非负数而可能造成的思维定势，本章强调二次根式的被开方数中所含字母确保该二次根式有意义. 要求理解被开方数应满足的条件，能确定字母的取值范围. 为了降低对根式中的字母讨论的难度，这里所涉及的问题都比较简单，有时也直接限定一些字母的取值范围. 这样处理，主要是提醒学生注意被开方数中字母的取值范围，培养学生对字母进行分析、讨论的意识和严谨思维的习惯，并不要求学生去解决繁难的问题. 教学中要切实控制难度，可对不同的学生提出不同的要求，包括直接告诉学生式中字母的取值范围而让学生去思考"为什么".

5. 促进学生探索求知和有效学习. 课本中注意引导学生探究学习，教学中对此要切实把握，如归纳$\sqrt{a^2}=|a|$、判断被开方数中字母的取值范围、选取有理化因式、选择不同的运算途径，以及探究活动等. 课本中的例题安排注意了层次性，如关于二次根式的运算举例，被开方数由数到字母，算式从单"项"到多"项"，混合运算中二次根式的个数一般不超过 4 个. 教学中要从实际出发，从易到难，逐步递进；要重视对典型错误的分析，如讲评$\sqrt{a^2}=a$、$\dfrac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}=\dfrac{(m-n)(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})}=\dfrac{(m-n)(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{m-n}=\sqrt{m}-\sqrt{n}$中的问题；还要注意基本要求的把握，如不要涉及类似$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$的化简，不要涉及复杂的分母有理化问题等，应着重于加强数学的基础教学.

五、评价建议

1. 关注学生对数学基本内容的理解和掌握. 注重对概念的理解和描述，能对二次根式的有关概念加以辨析和判断. 注重运算的基本技能和能力要求，能运用法则进行二次根式加、减、乘、除及混合运算并化简运算结果.

2. 关注学生对数学思想方法的体会和领悟. 在课堂教学的点评和小结中，要重视有关数学思想方法的点拨和交流，促进学生进行数学思想方法的反思和总结；对学生的学习评价，应体现对有关数学思想方法教学的要求.

3. 关注学生思维的严密性和灵活性. 对二次根式被开方数中字母的取值范围进行判断，是发展学生的数学能力的要求，也是培养学生的思维严密性的需要. 应通过教学和评价，引导学生缜密思考、正确分析，同时注意控制难度，对不同的学生提不同的要求. 在二次根式运算中，要引导学生重视不同解法的比较和运算途径的合理选择，对优秀解法予以鼓励性评价.

5. 关注学生代数式知识系统的构建和完善. 在初中学习代数式，主要的内容是整式、分式和二次根式. 学生对于代数式的认识有一个逐步完善的过程，要引导和鼓励学生对所学的代数式知识进行系统整理，并纳入学习评价范围.

6. 关注学生学习方式和方法的改善. 要引导学生积极主动学习，运用已有的实数及其运算，以及代数式的基础知识探究新知，归纳总结. 要让学生在化简二次根式的过程中，逐步掌握二次根式的性质；在二次根式运算中体会化归思想，在对含数字根式的一元一次方程和一元一次不等式求解中学习二次根式的运用，建立数学知识之间的联系并贯通前后知识. 要鼓励学生提出问题和开展探究活动，在获取知识的过程中学会学习，学会思考.

Ercigenshi

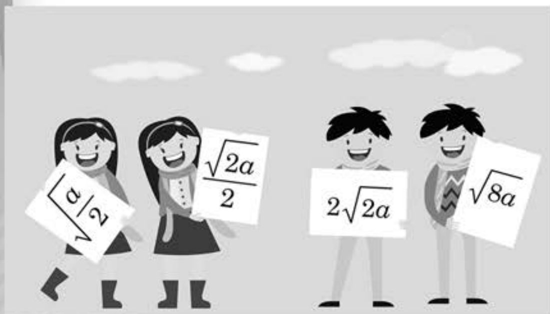
16 第十六章　二次根式

代数式是用运算符号和括号把数或表示数的字母连接而成的式子.其实,就是运用符号构成的数学语言.例如:

代数式$(a+b)(a-b)$,表示两个数的和与这两个数的差的积;

代数式a^2-b^2,表示两个数的平方差;

公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,是一个数量关系的清晰表达.



用代数式表示数量和数量关系既简明又精确.通过整式和分式的学习,我们已经体会到,对于数的深入研究,需要采用式的表达形式;用数学语言描述实际问题中的数量和数量关系,需要发挥式的工具作用;而利用式来研究和解决问题的过程中,离不开式的运算、变形或化简.

在实数及其运算中,我们看到了形如$\sqrt{a}$这样的式子.它代表一类新的代数式,本章将对这类代数式进行研究.

章头语中,着重说明了代数式的意义及其地位和作用.特别强调代数式是运用数学符号构成的数学语言,用代数式表示数量和数量关系既简明又精确;强调代数式是分析、研究、解决实际问题不可缺少的工具.

学生通过整式、分式两章的学习,对代数式及其在中学数学的地位和作用有基本的认识.章头语中的阐述,是对学生已有认识的概括,更是对学生深化认识的引导,以促进学生进一步重视代数式的学习,提高学习的积极性.

代数式是初中代数的奠基性内容,是基本的数学语言和工具.章头语中所提示的要点,应在本章教学的整个过程中,引导学生深入体会.

【本课重点】

根据代数式的意义，从开平方运算直接引入二次根式的概念，导出$\sqrt{a}$有意义的条件；归纳二次根式的性质 1、2 及恒等式 $\sqrt{a^2}=|a|$.

例题 1

帮助学生理解“$\sqrt{a}$”有意义的条件并体会它的基本运用.

注意题中说“下列各式”，而不是“下列二次根式”，因为只有当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a}$才是二次根式；如果指明了是二次根式，那么它一定有意义，$a\geqslant 0$ 已含其中.

注意解题过程中的表达要求，引导学生养成符合逻辑地思考和正确推理的习惯.

Ercigenshi De Gainian
He Xingzhi

第一节　二次根式的概念和性质

16.1　二次根式

在实数这一章，我们学习了开平方运算．当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a}$表示 a 的一个平方根．把它看作由平方根号“$\sqrt{\ }$”与 a 所成的式子时，这是一个代数式.

代数式$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$叫做**二次根式**．仍然读作“根号 a”，其中 a 是被开方数.

本章二次根式的被开方数可为整式或分式.

例如，$\sqrt{2}$、$\sqrt{\frac{2}{3}}$、$\sqrt{a^2+1}$、$\sqrt{b^2-4ac}(b^2-4ac\geqslant 0)$、$\sqrt{\frac{1}{x-2}}(x>2)$等，都是二次根式.

在实数范围内，负数没有平方根，所以如$\sqrt{-3}$、$\sqrt{b}(b<0)$这样的式子没有意义.

$\sqrt{a}$有意义的条件是 $a\geqslant 0$.

例题1　设 x 是实数，当 x 满足什么条件时，下列各式有意义？

(1) $\sqrt{2x-1}$；　(2) $\sqrt{2-x}$；

(3) $\sqrt{\frac{1}{x}}$；　(4) $\sqrt{1+x^2}$.

解　(1) 由 $2x-1\geqslant 0$，得 $x\geqslant\frac{1}{2}$.

所以，当 $x\geqslant\frac{1}{2}$时，$\sqrt{2x-1}$有意义.

(2) 由 $2-x\geqslant 0$，得 $x\leqslant 2$.

所以，当 $x\leqslant 2$ 时，$\sqrt{2-x}$有意义.

(3) 由$\frac{1}{x}\geqslant 0$ 以及 $x\neq 0$，可知 x 与 1 同号，得 $x>0$.

所以，当 $x>0$ 时，$\sqrt{\frac{1}{x}}$有意义.

(4) 因为不论 x 是什么实数，都有 $x^2\geqslant 0$，可知 $1+x^2>0$．所以，当 x 是任何实数时，$\sqrt{1+x^2}$都有意义.

在平方根的学习中，我们根据开平方与平方互为逆运算的关

2　第十六章　二次根式

【教学目标】

(1) 理解二次根式的概念；理解$\sqrt{a}$有意义的条件，会根据二次根式有意义求被开方数中字母的取值范围(限简单问题).

(2) 理解二次根式的基本性质，知道等式成立的条件；会利用二次根式的性质化简简单的二次根式.

(3) 经历归纳等式 $\sqrt{a^2}=|a|$ 的过程，体会数学知识之间的联系及其表达形式的转换.

【注意事项】

(1) 引入二次根式时，解说必须简明，不要人为地复杂化．二次根式举例中如 $\sqrt{b^2-4ac}(b^2-4ac\geqslant 0)$，突出了二次根式中的“被开方数一定非负”的特征.

(2) 边款中的说明，是对初学二次根式所作的规定，要正确把握．现在不要讨论如$\sqrt{\sqrt{2}a}$、$\sqrt{(1+x)^{\frac{1}{2}}}$、$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$等是不是二次根式的问题.

系，得到了下列等式. 现在把这两个等式作为二次根式的性质：

性质 1 $\sqrt{a^2}=a \quad (a\geqslant 0)$.

性质 2 $(\sqrt{a})^2=a \quad (a\geqslant 0)$.

问题1

当 a 为实数时，$\sqrt{a^2}$ 与 $|a|$ 有什么关系？

试填写下表：

a	-3	-1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	3
$\sqrt{a^2}$							
$\|a\|$							

根据填表的结果，你认为 $\sqrt{a^2}$ 与 $|a|$ 有什么样的关系？

一般来说，由 $a^2=|a|^2$，得 $\sqrt{a^2}=\sqrt{|a|^2}$，其中 $|a|\geqslant 0$. 利用二次根式的性质 1，可知 $\sqrt{|a|^2}=|a|$，所以

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a>0), \\ 0 & (a=0), \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

例题2 求下列二次根式的值：

(1) $\sqrt{(3-\pi)^2}$；

(2) $\sqrt{x^2-2x+1}$，其中 $x=-\sqrt{3}$.

解 (1) $\sqrt{(3-\pi)^2}=|3-\pi|$.

因为 $3-\pi<0$，所以

$$|3-\pi|=-(3-\pi)=\pi-3.$$

所以，$\sqrt{(3-\pi)^2}=\pi-3$.

(2) $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$.

当 $x=-\sqrt{3}$ 时，原式 $=\left|-\sqrt{3}-1\right|$.

因为 $-\sqrt{3}-1<0$，所以

$$\left|-\sqrt{3}-1\right|=-(-\sqrt{3}-1)=\sqrt{3}+1.$$

所以，当 $x=-\sqrt{3}$ 时，原二次根式的值是 $\sqrt{3}+1$.

在解题(1)时，判断 $3-\pi<0$ 的过程表达不作为规定的格式要求，本题可表述为 $\sqrt{(3-\pi)^2}=|3-\pi|=\pi-3$.
以后对类似问题可同样处理.
注意，计算结果的表达式中，通常应去掉绝对值符号.

第一节 二次根式的概念和性质 3

二次根式的性质 1、2 是学生已有知识的归纳，但还是需要向学生作解释.

问题 1

$\sqrt{a^2}=|a|$ 是一个重要的等式，可由 $\sqrt{a^2}=\sqrt{|a|^2}=|a|$ 直接得到. 这里安排学生通过讨论，从特殊值情况归纳一般规律，比较符合学生的认知水平，也是对学生进行探索学习的引导，同时让学生获得过程体验.

例题 2

注意本例与问题 1 中分类讨论的结果的联系，注意从一般到特殊的演绎过程.

两个小题都属于 $\sqrt{a^2}=-a(a<0)$ 的类型，因为学生对这类问题的处理容易出错.

【注意事项】

(1) 等式 $\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$ 和 $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$，在“实数”一章中已出现. 这两个等式揭示了开平方与平方之间的联系，又是二次根式运算的基础，因此把它们作为二次根式性质 1、2 加以突出.

(2) 二次根式性质 1 只涉及 $a\geqslant 0$ 的情况；对于 $a<0$ 的情况，放在 $\sqrt{a^2}=|a|$ 中讨论.

(3) 为降低难度，后续内容凡涉及可移到根号外的字母或因式，基本上都设为非负. 但学生现在理解和运用 $\sqrt{a^2}=-a(a<0)$ 时容易出现错误，而对“$\sqrt{a^2}=a$”有思维定势，要帮助学生纠正，可适当增加一些变式让学生辨析.

(4) 利用 $\sqrt{a^2}=|a|$ 化简具体的二次根式时，最后结果通常不用绝对值形式. 为去掉绝对值符号而对 a 取值的符号进行判断的过程，要向学生讲解清楚，但可不要求学生按例题 2 的格式书写，允许采用如“边款”中所示的较简单的表达方式 .

练习 16.1(1)

1. (1) $x\leqslant\frac{1}{6}$;(2) $x<0$;

(3) x 为任意实数.

2. (1) $\frac{1}{2}$;(2) $\frac{1}{3}$.

3. $2a-2b+2c$.

【本课重点】

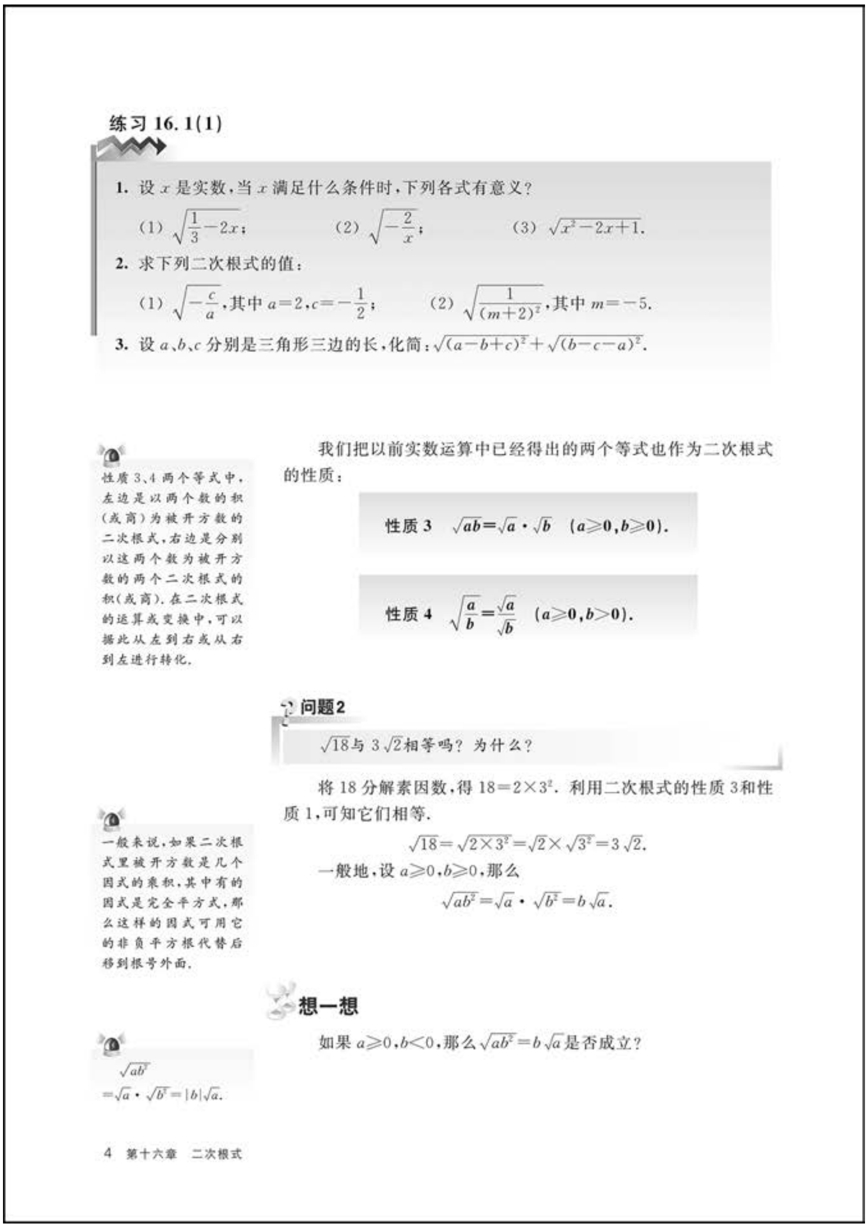
归纳二次根式性质 3 和 4;运用性质化简较简单的二次根式.让学生明确在化简时移到根式外的因式要非负;并通过实例理解二次根式 $m\sqrt{a}$这种更一般的形式.

问题 2

通过运用性质 3 和 1 化简“数字式”.要引导学生从特殊到一般进行思考和归纳,从而获得一般的认识.

想一想

可先用性质 3,再与 $\sqrt{a^2}=|a|$比较.



练习 16.1(1)

1. 设 x 是实数,当 x 满足什么条件时,下列各式有意义?

(1) $\sqrt{\frac{1}{3}-2x}$;　(2) $\sqrt{-\frac{2}{x}}$;　(3) $\sqrt{x^2-2x+1}$.

2. 求下列二次根式的值:

(1) $\sqrt{-\frac{c}{a}}$,其中 $a=2,c=-\frac{1}{2}$;　(2) $\sqrt{\frac{1}{(m+2)^2}}$,其中 $m=-5$.

3. 设 a、b、c 分别是三角形三边的长,化简:$\sqrt{(a-b+c)^2}+\sqrt{(b-c-a)^2}$.

性质 3、4 两个等式中,左边是以两个数的积(或商)为被开方数的二次根式,右边是分别以这两个数为被开方数的两个二次根式的积(或商).在二次根式的运算或变换中,可以据此从左到右或从右到左进行转化.

我们把以前实数运算中已经得出的两个等式也作为二次根式的性质:

性质 3　$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$　$(a\geqslant0,b\geqslant0)$.

性质 4　$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$　$(a\geqslant0,b>0)$.

问题2

$\sqrt{18}$与 $3\sqrt{2}$相等吗? 为什么?

一般来说,如果二次根式里被开方数是几个因式的乘积,其中有的因式是完全平方式,那么这样的因式可用它的非负平方根代替后移到根号外面.

将 18 分解素因数,得 $18=2\times3^2$. 利用二次根式的性质 3和性质 1,可知它们相等.

$$\sqrt{18}=\sqrt{2\times3^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{3^2}=3\sqrt{2}.$$

一般地,设 $a\geqslant0,b\geqslant0$,那么

$$\sqrt{ab^2}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b^2}=b\sqrt{a}.$$

想一想

如果 $a\geqslant0,b<0$,那么$\sqrt{ab^2}=b\sqrt{a}$是否成立?

$\sqrt{ab^2}$
$=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b^2}=|b|\sqrt{a}$.

4　第十六章　二次根式

【注意事项】

(1) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant0,b\geqslant0)$和$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant0,b>0)$在“实数”一章中也出现过.这两个等式也是二次根式运算的基础,所以把它们作为二次根式性质 3、4 加以突出.要注意等式成立的条件,实际上是对$\sqrt{ab}$、$\sqrt{\frac{a}{b}}$中字母的取值范围有了更加严格的限制,教学时应向学生说明道理.

(2) 要指导学生辩证地理解二次根式性质 3、4.这两个等式从左到右和从右到左是一样的,但在运用时又有不同的含义.从左到右,体现了二次根式的性质特征;而从右到左,则指明了二次根式乘(除)运算的法则.

(3) 本课扩充了“因式”的含义,将素因数也看成因式.当分解素因数后含“有理数的平方数”时,也要用其正平方根移到根号外来代替.

问题3

$\sqrt{\frac{3}{8}}$与$\frac{\sqrt{6}}{4}$相等吗？为什么？

利用分数的基本性质以及二次根式的性质 4 和性质 1，可知它们相等.

$$\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3\times 2}{8\times 2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4^2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

类似地，设 $a\geqslant 0$，$b>0$，那么

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{a\cdot b}{b\cdot b}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

把二次根式里被开方数所含的完全平方因式移到根号外，或者化去被开方数的分母的过程，称为“化简二次根式”.

通常把形如 $m\sqrt{a}\,(a\geqslant 0)$ 的式子也叫做二次根式. 如 $3\sqrt{2}$，$-\sqrt{3}$，$2a\sqrt{b^2+1}$ 等也是二次根式.

如果二次根式中被开方数是分式(或分数)，那么可以化去分母. 方法是将分子和分母同乘一个不等于零的代数式，使分母变为完全平方式，再将分母用它的正平方根代替后移到根号外面作新的分母.

本章给出的二次根式(或其他代数式)中所含字母的取值都能确保二次根式(或其他代数式)有意义.

例题3 化简二次根式：

(1) $\sqrt{72}$； (2) $\sqrt{12a^3}$； (3) $\sqrt{18x^2}\ (x\geqslant 0)$.

解 (1) $\sqrt{72}=\sqrt{6^2\times 2}=6\sqrt{2}$.

(2) $\sqrt{12a^3}=\sqrt{2^2\cdot 3\cdot a^2\cdot a}=\sqrt{(2a)^2\cdot 3a}=2|a|\sqrt{3a}$.

由 $12a^3\geqslant 0$，可知 $a\geqslant 0$，所以 $\sqrt{12a^3}=2a\sqrt{3a}$.

(3) $\sqrt{18x^2}=\sqrt{3^2\cdot 2\cdot x^2}=3\sqrt{2}|x|$.

因为 $x\geqslant 0$，所以 $\sqrt{18x^2}=3\sqrt{2}x$.

题(2)中对字母 a 的讨论，是为了去掉 $|a|$ 中的绝对值符号. 判断 $a\geqslant 0$ 的过程表达，可不作规定的格式要求. 如解题(2)，可表述为 $\sqrt{12a^3}=\cdots=2|a|\sqrt{3a}=2a\sqrt{3a}$. 以后类似问题可以同样处理.

例题4 化简二次根式：

(1) $\sqrt{\frac{a}{3}}$； (2) $\sqrt{\frac{5}{2x}}$； (3) $\sqrt{\frac{b^2}{9a}}\ (b>0)$.

解 (1) $\sqrt{\frac{a}{3}}=\sqrt{\frac{3a}{3^2}}=\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{3^2}}=\frac{\sqrt{3a}}{3}$.

(2) 由 $\frac{5}{2x}\geqslant 0$，可知 $x>0$.

所以 $\sqrt{\frac{5}{2x}}=\sqrt{\frac{5\cdot 2x}{2^2\cdot x^2}}=\frac{\sqrt{10x}}{\sqrt{(2x)^2}}=\frac{\sqrt{10x}}{2|x|}=\frac{\sqrt{10x}}{2x}$.

(3) 已知 $b>0$，又由 $\frac{b^2}{9a}\geqslant 0$，可知 $a>0$.

所以 $\sqrt{\frac{b^2}{9a}}=\sqrt{\frac{b^2\cdot a}{3^2\cdot a^2}}=\frac{\sqrt{b^2\cdot a}}{\sqrt{(3a)^2}}=\frac{|b|\sqrt{a}}{3|a|}=\frac{b\sqrt{a}}{3a}$.

第一节 二次根式的概念和性质 5

问题 3

让学生尝试运用性质 4 化简“数字式”；再归纳一般结论.

问题 2 和问题 3 的作用，一是作为二次根式性质 3、4 的练习；二是解决了被开方数为有理数的二次根式的化简问题.

这里讲明了“化简二次根式”的含义，并扩展了二次根式的范围，这有利于后面的运用和表达.

例题 3

化简被开方数是单项式的二次根式. 注意表达的要求.

例题 4

化简被开方数含数字分母或是分式的二次根式，但这个分式的分母为单项式.

在题（3）中，给定条件 $b>0$ 是为降低难度. 若给的条件是 $b\geqslant 0$，则不能确定 $a>0$，要分 $b=0$、$b>0$ 两种情况讨论.

【注意事项】

（1）从问题 2 到“想一想”，再到问题 3，可让学生自行探索完成. 对于数学基础较好的学生，“想一想”可改为讨论题：$\sqrt{ab^2}$ 何时为二次根式？化简结果与什么字母有关？有怎样的关系？可用特殊值加以说明.

（2）指出二次根式 $m\sqrt{a}\,(a\geqslant 0)$ 中的 m 中不含根号，但不必深入讨论.

（3）由问题 3 引出结论后，边款中用文字表述了化简二次根式的基本方法，主要是帮助学生理解用符号表示的化简过程. 形式化的表达简明易记，文字表达有清晰的语义，有助于理解，教学时应将两者结合.

（4）引导学生注意二次根式中字母的取值范围，会根据二次根式的意义，由已知条件推出相应字母的取值范围，培养学生严密思维的习惯和逻辑推理能力. 有时在题中给出个别字母的取值范围，既避免了分类讨论，又让学生增加了二次根式中被开方数必须非负的意识. 要注意例题和练习所说明的难度要求，如例 3(2) 对 a 的取值范围的判断；例 4(3) 限定 $b>0$，比限定 $b<0$ 要简单些. 教学应切实控制难度，不要拔高.

（5）本节两课中二次根式化简的层次不同：二次根式中的被开方数，问题 2 和 3 是由整数到分数，例题 3 和 4 是由数到字母，由单字母到多字母，由整式到分式. 这样既有利于学生体会化简二次根式的方法，又分散了化简中的难点. 教学中要有序安排，逐步递进. 对学生解题的表达，其格式要求可参照边款中的说明进行规范 .

练习 16.1(2)

1. (1) $m\geqslant 0, n\geqslant 0$;

(2) $m\geqslant 0, n>0$.

2. (1) $4\sqrt{2}$;(2) $3\sqrt{3}x$;

(3) $n\sqrt{6mn}$.

3. (1) $\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$;(2) $\dfrac{\sqrt{a}}{2}$;

(3) $\dfrac{\sqrt{3xy}}{x^2}$.

【本课重点】

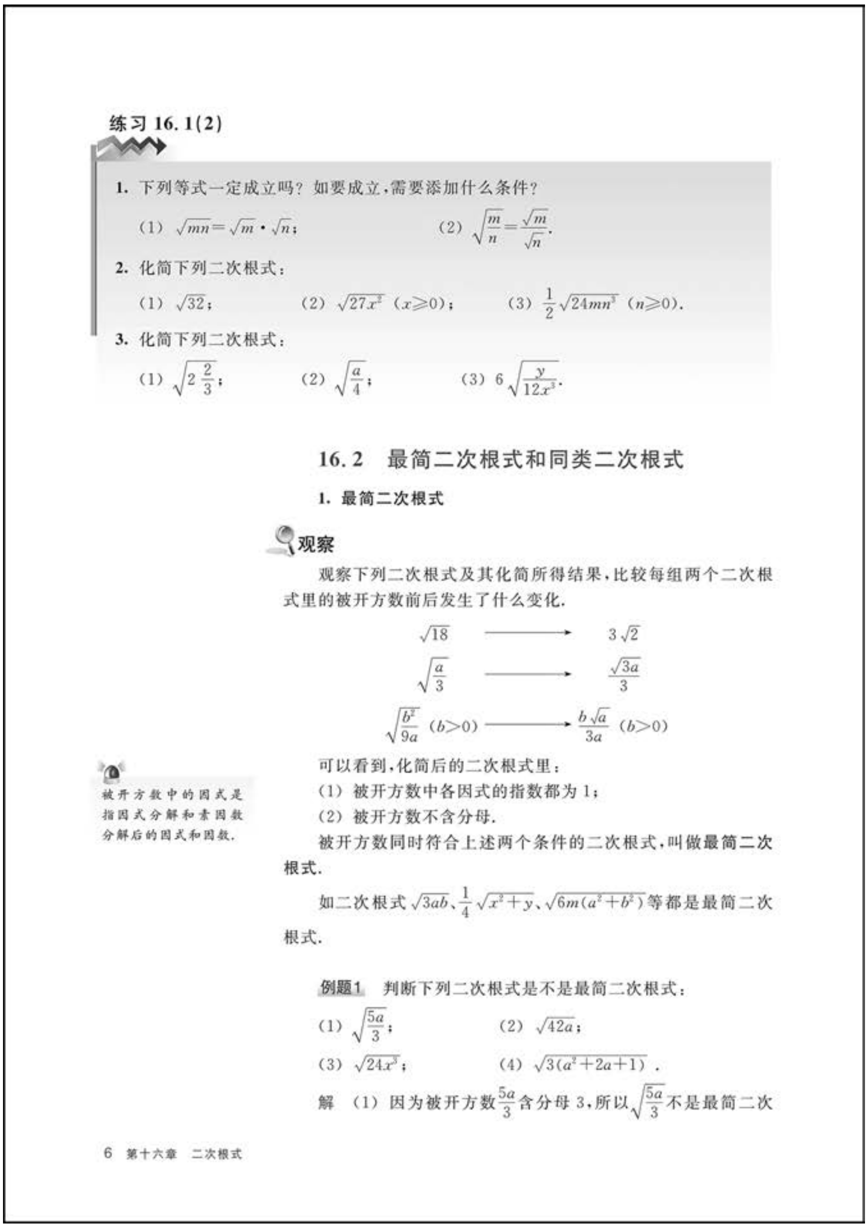
建立最简二次根式的概念;让学生会判别最简二次根式和将二次根式化简.

观察

引导学生通过观察、比较和分析,具体认识最简二次根式的特征.然后概括最简二次根式的概念.特别要注意边款中对条件(1)的说明.

例题 1

本例是概念辨析,让学生理解并掌握最简二次根式必须满足的条件.



练习 16.1(2)

1. 下列等式一定成立吗?如要成立,需要添加什么条件?

(1) $\sqrt{mn}=\sqrt{m}\cdot\sqrt{n}$;　　(2) $\sqrt{\dfrac{m}{n}}=\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$.

2. 化简下列二次根式:

(1) $\sqrt{32}$;　　(2) $\sqrt{27x^2}$ $(x\geqslant 0)$;　　(3) $\dfrac{1}{2}\sqrt{24mn^3}$ $(n\geqslant 0)$.

3. 化简下列二次根式:

(1) $\sqrt{2\dfrac{2}{3}}$;　　(2) $\sqrt{\dfrac{a}{4}}$;　　(3) $6\sqrt{\dfrac{y}{12x^3}}$.

16.2 最简二次根式和同类二次根式

1. 最简二次根式

观察

观察下列二次根式及其化简所得结果,比较每组两个二次根式里的被开方数前后发生了什么变化.

$$\sqrt{18} \longrightarrow 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\frac{a}{3}} \longrightarrow \frac{\sqrt{3a}}{3}$$

$$\sqrt{\frac{b^2}{9a}}\ (b>0) \longrightarrow \frac{b\sqrt{a}}{3a}\ (b>0)$$

可以看到,化简后的二次根式里:

(1) 被开方数中各因式的指数都为 1;

(2) 被开方数不含分母.

被开方数中的因式是指因式分解和素因数分解后的因式和因数.

被开方数同时符合上述两个条件的二次根式,叫做最简二次根式.

如二次根式 $\sqrt{3ab}$、$\dfrac{1}{4}\sqrt{x^2+y}$、$\sqrt{6m(a^2+b^2)}$ 等都是最简二次根式.

例题1 判断下列二次根式是不是最简二次根式:

(1) $\sqrt{\dfrac{5a}{3}}$;　　(2) $\sqrt{42a}$;

(3) $\sqrt{24x^3}$;　　(4) $\sqrt{3(a^2+2a+1)}$.

解 (1) 因为被开方数 $\dfrac{5a}{3}$ 含分母 3,所以 $\sqrt{\dfrac{5a}{3}}$ 不是最简二次

6 第十六章 二次根式

【教学目标】

(1) 经历最简二次根式和同类二次根式的概括过程,体会比较与分析的思维方法;通过合并同类二次根式,体会类比与迁移的认知方法.

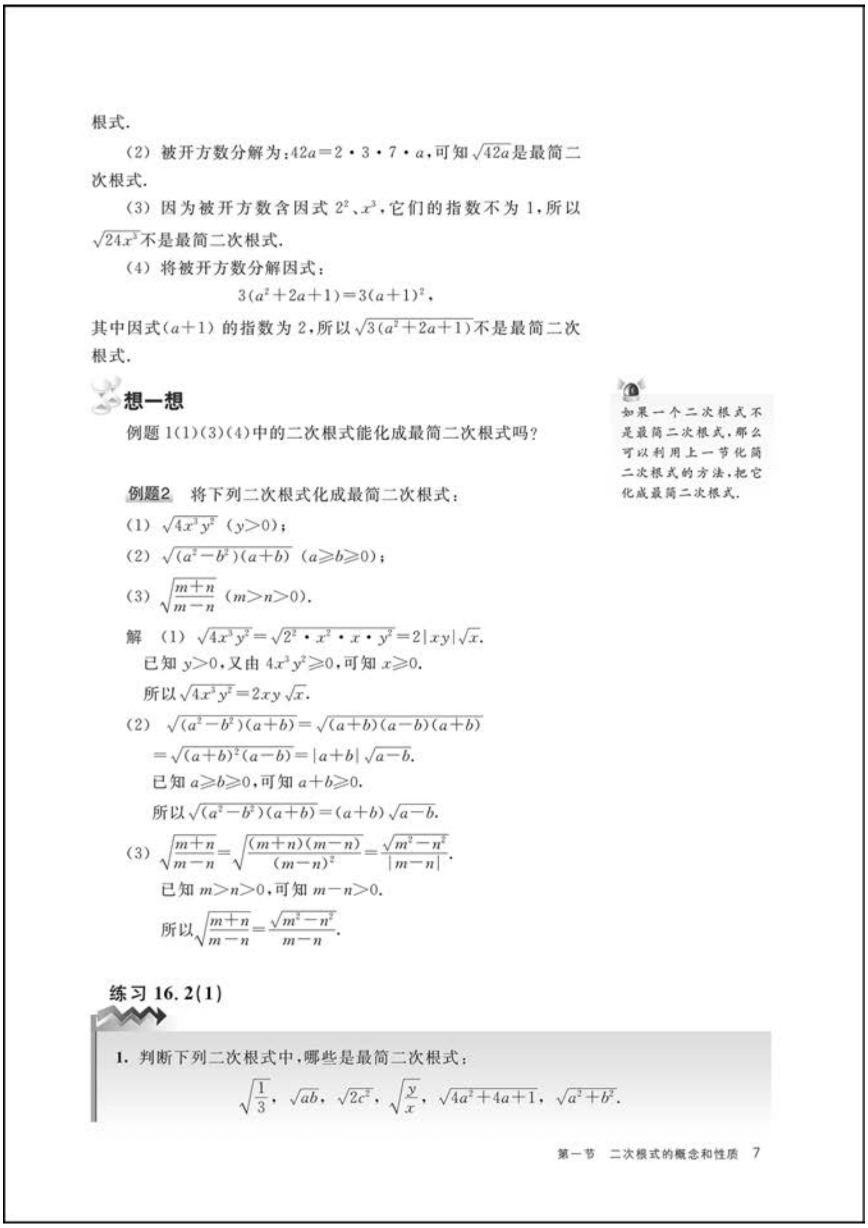
(2) 理解最简二次根式的概念,会判别最简二次根式;会将非最简二次根式化为最简二次根式.

(3) 理解同类二次根式的概念,会判断几个二次根式是否为同类二次根式.

【注意事项】

(1) 要展现最简二次根式概念的形成过程,让学生在观察、比较、分析等活动中体会数学的思想方法.

(2) 注意最简二次根式的被开方数应满足的条件;但不要引导学生去讨论诸如 $\sqrt{a+\dfrac{1}{3}}$、$\sqrt{2.5}$ 等是不是最简二次根式的问题.



根式.

(2) 被开方数分解为：$42a=2\cdot 3\cdot 7\cdot a$，可知 $\sqrt{42a}$ 是最简二次根式.

(3) 因为被开方数含因式 2^2、x^3，它们的指数不为 1，所以 $\sqrt{24x^3}$ 不是最简二次根式.

(4) 将被开方数分解因式：

$$3(a^2+2a+1)=3(a+1)^2,$$

其中因式 $(a+1)$ 的指数为 2，所以 $\sqrt{3(a^2+2a+1)}$ 不是最简二次根式.

想一想

例题 1(1)(3)(4)中的二次根式能化成最简二次根式吗？

如果一个二次根式不是最简二次根式，那么可以利用上一节化简二次根式的方法，把它化成最简二次根式.

例题2 将下列二次根式化成最简二次根式：

(1) $\sqrt{4x^3y^2}$ $(y>0)$；

(2) $\sqrt{(a^2-b^2)(a+b)}$ $(a\geqslant b\geqslant 0)$；

(3) $\sqrt{\dfrac{m+n}{m-n}}$ $(m>n>0)$.

解 (1) $\sqrt{4x^3y^2}=\sqrt{2^2\cdot x^2\cdot x\cdot y^2}=2|xy|\sqrt{x}$.

已知 $y>0$，又由 $4x^3y^2\geqslant 0$，可知 $x\geqslant 0$.

所以 $\sqrt{4x^3y^2}=2xy\sqrt{x}$.

(2) $\sqrt{(a^2-b^2)(a+b)}=\sqrt{(a+b)(a-b)(a+b)}$

$=\sqrt{(a+b)^2(a-b)}=|a+b|\sqrt{a-b}$.

已知 $a\geqslant b\geqslant 0$，可知 $a+b\geqslant 0$.

所以 $\sqrt{(a^2-b^2)(a+b)}=(a+b)\sqrt{a-b}$.

(3) $\sqrt{\dfrac{m+n}{m-n}}=\sqrt{\dfrac{(m+n)(m-n)}{(m-n)^2}}=\dfrac{\sqrt{m^2-n^2}}{|m-n|}$.

已知 $m>n>0$，可知 $m-n>0$.

所以 $\sqrt{\dfrac{m+n}{m-n}}=\dfrac{\sqrt{m^2-n^2}}{m-n}$.

练习 16.2(1)

1. 判断下列二次根式中，哪些是最简二次根式：

$$\sqrt{\frac{1}{3}},\ \sqrt{ab},\ \sqrt{2c^2},\ \sqrt{\frac{y}{x}},\ \sqrt{4a^2+4a+1},\ \sqrt{a^2+b^2}.$$

第一节 二次根式的概念和性质 7

想一想

让学生先思考，调动已有知识经验，再过渡到例题 2 的教学.

例题 2

学习将非最简二次根式化成最简二次根式的方法.

题中涉及判断因式正负的要求，教学中要强调思维的严密性，但对判断过程的表达要求可适当降低.

如题(2)应由 $a\geqslant b\geqslant 0$，推出 $a+b\geqslant 0$；题(3)应由 $m>n>0$，推出 $m-n>0$. 教学时需加以说明.

练习 16.2(1)

1. $\sqrt{ab}$，$\sqrt{a^2+b^2}$.

【注意事项】

(1) 上一节已经讨论了较简单的二次根式的化简问题，本课的二次根式化简中，按被开方数为单项式、多项式(分解成几个因式的积的形式)和分式，有层次地安排. 教学时，应有序展开.

(2) 将一个二次根式化为最简二次根式，是式的变形，其中体现了“求简”和“抓本质”的数学思考方法.

(3) 本章概念较多，不少学生学习会有困难，教学中要注意通过具体例子来说明概念，让学生通过特殊来理解一般.

2. $\frac{2}{m}\sqrt{m}$，$a\sqrt{b-c}$（$a>0$），$\frac{y}{x^2}\sqrt{3x}$（$y>0$）.

3. $a^2\sqrt{3a}$，$\frac{b\sqrt{ab}}{2}$（$b>0$），$a(x+y)\sqrt{a(x-y)}$（$x>y>0$），$\frac{p\sqrt{p-q}}{p-q}$（$p>q>0$）.

【本课重点】

建立同类二次根式的概念；让学生初步学会判断几个二次根式是否是同类二次根式的方法.

问题

引导学生思考和分析，发现同类二次根式的本质特征.

教学时可与章头图对照，引起学生学习兴趣.

由具体到抽象，引出同类二次根式的概念.

例题 3

学习判断同类二次根式的方法和过程.

可组织学生讨论边款中提出的问题，使学生从中体会，判断几个二次根式是否是同类二次根式，只看它们化为最简二次根式后被开方数是否相同；字母的取值范围是根式自身的要求.

2. 找出下列二次根式中的非最简二次根式，并把它们化成最简二次根式：

$$\sqrt{14}，\sqrt{\frac{4}{m}}，\sqrt{5(u^2-v^2)}，\sqrt{a^2b-a^2c}\ (a>0)，\sqrt{\frac{3y^2}{x^3}}\ (y>0).$$

3. 将下列各二次根式化成最简二次根式：

$$\sqrt{3a^5}，\sqrt{\frac{ab^3}{4}}\ (b>0)，\sqrt{a^3(x+y)^2(x-y)}\ (x>y>0)，\sqrt{\frac{p^2}{p-q}}\ (p>q>0).$$

2. 同类二次根式

问题

把二次根式$\sqrt{8a}$与$\sqrt{\frac{1}{2a}}$化成最简二次根式，所得结果有什么相同之处？

通过化简，得

$$\sqrt{8a}=2\sqrt{2a}；\quad \sqrt{\frac{1}{2a}}=\frac{1}{2a}\sqrt{2a}.$$

可见，两个最简二次根式里的被开方数都是$2a$.

几个二次根式化成最简二次根式后，如果被开方数相同，那么这几个二次根式叫做**同类二次根式**.

上述$\sqrt{8a}$与$\sqrt{\frac{1}{2a}}$是同类二次根式.

例题3 下列二次根式中，哪些是同类二次根式？

$\sqrt{12}$，$\sqrt{24}$，$\sqrt{\frac{1}{27}}$，$\sqrt{a^4b}$，$2\sqrt{a^3b}$ （$a>0$），$-\sqrt{ab^3}$ （$a>0$）.

解 把二次根式化成最简二次根式，得

$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times3}=2\sqrt{3}$；

$\sqrt{24}=\sqrt{2^2\times2\times3}=2\sqrt{6}$；

$\sqrt{\frac{1}{27}}=\sqrt{\frac{3}{9^2}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$；

$\sqrt{a^4b}=a^2\sqrt{b}$；

$2\sqrt{a^3b}=2\sqrt{a^2\cdot ab}=2a\sqrt{ab}$ （$a>0$）；

$-\sqrt{ab^3}=-\sqrt{ab\cdot b^2}=-b\sqrt{ab}$ （由$a>0$，可知$b\geqslant0$）.

当 $a<0$，$b<0$ 时，$2\sqrt{a^3b}$与$-\sqrt{ab^3}$是同类二次根式吗？

所以，$\sqrt{12}$与$\sqrt{\frac{1}{27}}$是同类二次根式，$2\sqrt{a^3b}$与$-\sqrt{ab^3}$是同类二次根式.

8 第十六章 二次根式

我们知道，在多项式中，遇到同类项就可以合并．类似地，同类二次根式也可以合并．

例题4 合并下列各式中的同类二次根式：

(1) $2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{2}+\sqrt{3}$；

(2) $3\sqrt{xy}-a\sqrt{xy}+b\sqrt{xy}$.

解 (1) $2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$=\left(2+\frac{1}{3}\right)\sqrt{2}+\left(-\frac{1}{2}+1\right)\sqrt{3}$

$=\frac{7}{3}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(2) $3\sqrt{xy}-a\sqrt{xy}+b\sqrt{xy}$

$=(3-a+b)\sqrt{xy}$.

练习 16.2(2)

1. 下列各组二次根式中，属同类二次根式的是 (　　)

(A) $2\sqrt{3}$与$\sqrt{6}$；　(B) $\sqrt{\frac{1}{3}}$与$\frac{\sqrt{2}}{3}$；

(C) $\sqrt{18}$与$\sqrt{\frac{1}{2}}$；　(D) $\sqrt{4a}$与$\sqrt{8a}$.

2. 在$\sqrt{16}$、$\frac{\sqrt{72}}{2}$、$-\sqrt{48}$中，与$\sqrt{2}$是同类二次根式的是________.

3. 判断下列各组中的二次根式是不是同类二次根式：

(1) $\sqrt{32}$，$\sqrt{50}$，$2\sqrt{\frac{1}{18}}$；　(2) $\sqrt{4x^3}$，$2\sqrt{2x}$，$\sqrt{8x^2}$ $(x\geqslant 0)$；

(3) $\sqrt{3x}$，$\sqrt{3a^2x^3}$ $(a>0)$，$\sqrt{\frac{xy^2}{3}}$ $(y>0)$.

4. 合并下列各式中的同类二次根式：

(1) $3\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}}{2}-4\sqrt{5}$；　(2) $2\sqrt{a}+4\sqrt{b}-6\sqrt{a}+\frac{1}{2}\sqrt{b}$.

例题 4

通过合并同类二次根式，引导学生思考为什么要引进同类二次根式.

注意与多项式中的合并同类项类比，使学生正确理解“合并”的过程.

练习 16.2(2)

1. C.

2. $\frac{\sqrt{72}}{2}$.

3. (1) 是；(2) 不是；(3) 是.

4. (1) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$；

(2) $-4\sqrt{a}+\frac{9}{2}\sqrt{b}$.

【注意事项】

(1) 要引导学生体会，最简二次根式是本章学习中必须确立的一个基本概念. 要判断几个二次根式是否是同类二次根式，或要将一个二次根式简洁地表示，都是以最简二次根式概念为基础的.

(2) 合并同类二次根式，其实就是二次根式的加减运算. 本节安排合并同类二次根式的学习，主要是让学生体会引进同类二次根式的目的意义，同时为随后的加减运算作铺垫. 在教学中要抓住本课教学的重点，从而正确把握例题 4 的教学要求.

(3) 关于同类二次根式的判别是相对于原来的二次根式，并非指它们相应的最简二次根式. 如练习 16.2(2)第 2 题的答案是$\frac{\sqrt{72}}{2}$，而不是 $3\sqrt{2}$.

【本课重点】

引进二次根式的加减运算；使学生掌握二次根式加减运算的要求和过程，并会解常数项含二次根式的一次方程和一次不等式.

问题 1

通过问题引导学生认识二次根式加减运算的一般过程.

算式中的 $2\sqrt{a}$ 是特意设计的，表明在二次根式加减时非同类二次根式不能合并，保留在结果中.

例题 1

这是"数字式"的二次根式加减问题. 通过本例让学生对实数加减运算获得新的认识并掌握运算要求.

Ercigenshi De Yunsuan

第二节　二次根式的运算

16.3　二次根式的运算

1. 二次根式的加法和减法

整式的加减归结为合并同类项．二次根式的加减同整式的加减类似，归结为合并同类二次根式．

问题1

怎样计算 $a^2\sqrt{8a}+\sqrt{50a^3}-\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{a}}+2\sqrt{a}$？

分析　观察算式中的四个二次根式，它们不都是最简二次根式．它们之中有没有同类二次根式，要化成最简二次根式后才能判断.

根据算式中所含二次根式，可知 $a>0$.

由 $a^2\sqrt{8a}=2a^2\sqrt{2a}$，$\sqrt{50a^3}=5a\sqrt{2a}$，$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{a}}=\frac{\sqrt{2a}}{2}$，可知这三个二次根式是同类二次根式，可以将它们合并．

$$\begin{aligned}原式&=2a^2\sqrt{2a}+5a\sqrt{2a}-\frac{\sqrt{2a}}{2}+2\sqrt{a}\\&=\left(2a^2+5a-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2a}+2\sqrt{a}.\end{aligned}$$

不是同类二次根式的根式不能合并，保留在结果中.

由此可见，二次根式相加减的一般过程是：

先把各个二次根式化成最简二次根式，再把同类二次根式分别合并.

例题1　计算：

(1) $3\sqrt{75}+\frac{\sqrt{48}}{2}$；

(2) $\left(\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{75}\right)$.

解　(1) $3\sqrt{75}+\frac{\sqrt{48}}{2}$

$=3\sqrt{5^2\times3}+\frac{\sqrt{4^2\times3}}{2}=15\sqrt{3}+2\sqrt{3}=17\sqrt{3}$.

(2) $\left(\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{75}\right)$

10 第十六章　二次根式

【教学目标】

(1) 类比整式的加减运算，归纳二次根式加减的过程；会进行二次根式的加减运算.

(2) 理解分母有理化的意义，会寻找合适的有理化因式将分母有理化，会进行二次根式的乘除运算.

(3) 掌握二次根式的运算顺序，会进行二次根式的加减乘除混合运算.

(4) 认识二次根式运算与整式、分式运算之间的联系，建立由整式、分式、二次根式构成的代数式知识基础，体会化归思想.

(5) 在从数字到代数式、从不含字母的"数字式"运算到代数式运算的过程经历中，体会字母"代"数的思想；通过解决简单的实际问题以及解一元一次方程和一元一次不等式，体会二次根式的运用.

【注意事项】

关于二次根式 $m\sqrt{a}$（$a\geqslant0$），已说明其中的 m 不含根号. 因此，问题 1 的结果不要写成 $\left(2a^2+5a-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2a}+2\sqrt{a}=\left(2\sqrt{2}a^2+5\sqrt{2}a-\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right)\sqrt{a}$.

$=\sqrt{\frac{1}{2}}-2\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{75}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}+5\sqrt{3}$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\sqrt{2}+\left(5-\frac{2}{3}\right)\sqrt{3}$

$=\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{13}{3}\sqrt{3}.$

例题2 计算：

(1) $\frac{2}{3}\sqrt{9m}+\frac{3}{4}\sqrt{16m}$；

(2) $\sqrt{50(p-q)}+\sqrt{\frac{8}{p-q}}$.

解 (1) $\frac{2}{3}\sqrt{9m}+\frac{3}{4}\sqrt{16m}$

$=\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{m}+\frac{3}{4}\cdot 4\sqrt{m}$

$=2\sqrt{m}+3\sqrt{m}=5\sqrt{m}.$

(2) $\sqrt{50(p-q)}+\sqrt{\frac{8}{p-q}}$

$=\sqrt{5^2\cdot 2\cdot(p-q)}+\sqrt{\frac{2^3(p-q)}{(p-q)^2}}$

$=5\sqrt{2(p-q)}+\frac{2}{|p-q|}\sqrt{2(p-q)}.$

由$\frac{8}{p-q}\geqslant 0$，可知 $p-q>0$.

所以$\sqrt{50(p-q)}+\sqrt{\frac{8}{p-q}}$

$=\left(5+\frac{2}{p-q}\right)\sqrt{2(p-q)}.$

例题3 解不等式：$2x+\sqrt{\frac{5}{4}}>4x-\sqrt{\frac{5}{9}}$.

解 由 $2x+\sqrt{\frac{5}{4}}>4x-\sqrt{\frac{5}{9}}$，

得 $2x-4x>-\sqrt{\frac{5}{4}}-\sqrt{\frac{5}{9}}$，

$-2x>-\sqrt{\frac{5}{2^2}}-\sqrt{\frac{5}{3^2}}$，

$-2x>-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{3}$，

第二节 二次根式的运算 11

对例题 1(2)中的 $\sqrt{0.5}$，先将它化为$\sqrt{\frac{1}{2}}$再参加运算. 在此可指出，加减算式中有二次根式的被开方数为小数时，通常将小数化为分数，然后进行运算.

例题 2

让学生体验二次根式加减运算的过程，了解表达要求.

注意，当化最简二次根式涉及根号内的因式移出时，应先判断有关因式的正负.

注意例题 1 与例题 2 的层次，先数字后字母，先单字母后多字母，先单项式后多项式，先整式后分式.

例题 3

本题是把解一元一次不等式问题放在实数背景下，这个不等式的常数项含二次根式. 通过解题，建立前后知识之间的联系，帮助学生巩固和加强不等式的知识基础.

注意把握这类问题的难度要求；注意正确运用不等式的性质.

【注意事项】

(1) 最简二次根式和同类二次根式是实施二次根式加减运算的基础；加减运算的过程也是最简二次根式、同类二次根式的复习与应用的过程. 要注意运算的基础教学，同时让学生体会，最简二次根式和同类二次根式概念的产生，与二次根式加减运算的需要有关.

(2) 注意将合并同类二次根式与合并同类项类比；将二次根式加减与整式加减类比.

(3) 在问题 1、例题 2 及练习 16.3(1)第 1 题中，都有对各二次根式被开方数中字母(或因式)取值范围进行判断的要求，要让学生体会.

(4) 本节中把二次根式的运算与解方程、解不等式相联系，有利于学生贯通知识和加强基础，但要切实控制难度. 例题 3 及练习 16.3(1)第 2、3 题，安排了解一元一次方程和不等式，作为二次根式加减法的应用. 这类问题中的方程和不等式，现在只限于常数项含有二次根式；求解过程必须简明.

练习 16.3(1)

1. (1) $\frac{11}{5}\sqrt{3}$;(2) $\frac{5}{3}\sqrt{2x}$.

2. $-\frac{11}{4}\sqrt{6}$.

3. $x>2\sqrt{2}$.

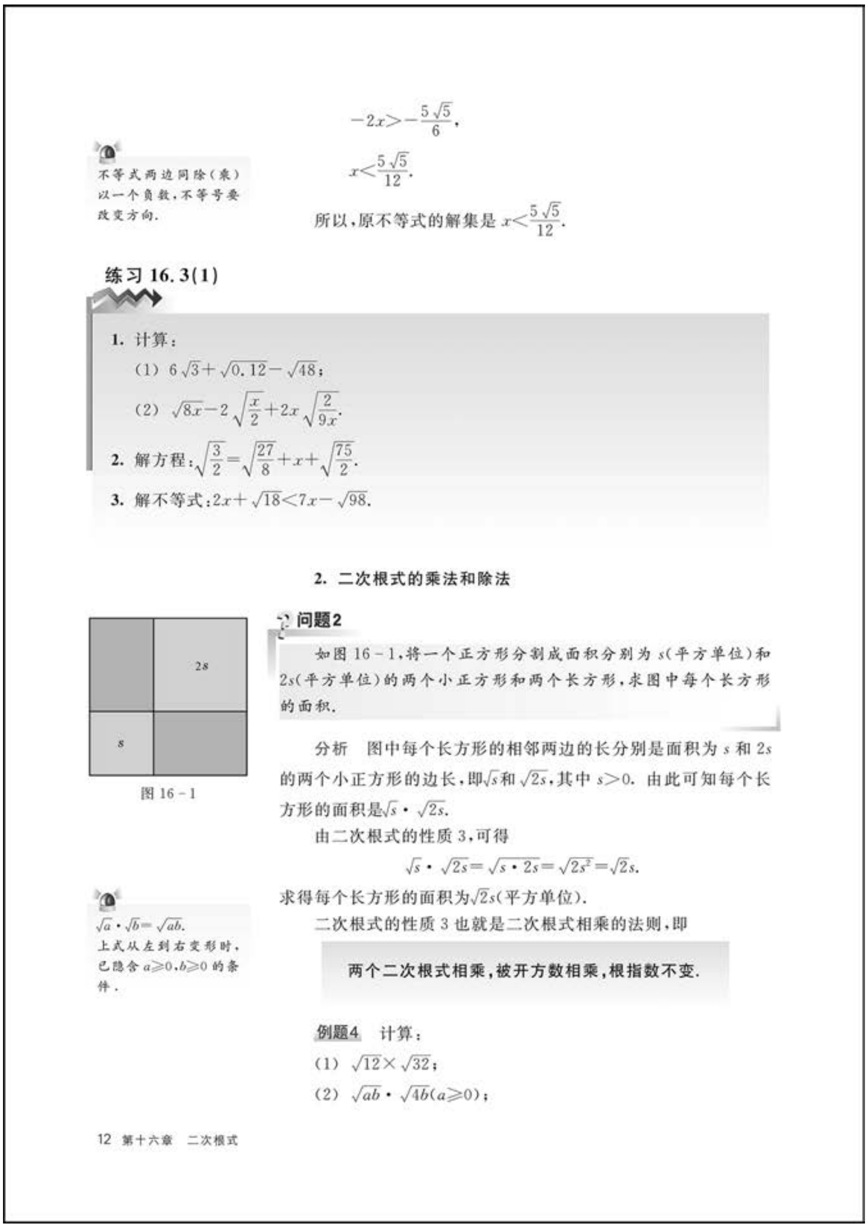
【本课重点】

引进二次根式的乘除运算,并使学生掌握乘除运算的法则,正确表达运算过程.

问题 2

由面积问题引出二次根式乘法.可让学生自主运用二次根式性质 3 解决问题.

二次根式乘法的法则就是二次根式性质 3,可再用符号语言表达出来.



$$-2x>-\frac{5\sqrt{5}}{6},$$

$$x<\frac{5\sqrt{5}}{12}.$$

所以,原不等式的解集是 $x<\frac{5\sqrt{5}}{12}$.

不等式两边同除(乘)以一个负数,不等号要改变方向.

练习 16.3(1)

1. 计算:

(1) $6\sqrt{3}+\sqrt{0.12}-\sqrt{48}$;

(2) $\sqrt{8x}-2\sqrt{\frac{x}{2}}+2x\sqrt{\frac{2}{9x}}$.

2. 解方程:$\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{27}{8}}+x+\sqrt{\frac{75}{2}}$.

3. 解不等式:$2x+\sqrt{18}<7x-\sqrt{98}$.

2. 二次根式的乘法和除法

问题2

如图 16－1,将一个正方形分割成面积分别为 s(平方单位)和 $2s$(平方单位)的两个小正方形和两个长方形,求图中每个长方形的面积.

图 16－1

分析　图中每个长方形的相邻两边的长分别是面积为 s 和 $2s$ 的两个小正方形的边长,即$\sqrt{s}$和 $\sqrt{2s}$,其中 $s>0$. 由此可知每个长方形的面积是$\sqrt{s}\cdot\sqrt{2s}$.

由二次根式的性质 3,可得

$$\sqrt{s}\cdot\sqrt{2s}=\sqrt{s\cdot 2s}=\sqrt{2s^2}=\sqrt{2}s.$$

求得每个长方形的面积为$\sqrt{2}s$(平方单位).

二次根式的性质 3 也就是二次根式相乘的法则,即

两个二次根式相乘,被开方数相乘,根指数不变.

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.
上式从左到右变形时,已隐含 $a\geqslant0,b\geqslant0$ 的条件.

例题4　计算:

(1) $\sqrt{12}\times\sqrt{32}$;

(2) $\sqrt{ab}\cdot\sqrt{4b}(a\geqslant0)$;

12 第十六章　二次根式

【注意事项】

从面积问题引入二次根式的乘法时,还要引导学生体会二次根式是表达数量和数量关系的工具,二次根式的运算来自解决问题的需要.

(3) $\sqrt{abc}\cdot 2\sqrt{abc^2}\,(c\geqslant 0)$.

解 (1) $\sqrt{12}\times\sqrt{32}$

$=\sqrt{12\times 32}=\sqrt{2^2\times 3\times 2^5}$

$=\sqrt{(2^3)^2\times 2\times 3}=2^3\times\sqrt{2\times 3}=8\sqrt{6}$.

(2) $\sqrt{ab}\cdot\sqrt{4b}$

$=\sqrt{ab\cdot 4b}=\sqrt{a\cdot 2^2\cdot b^2}=2|b|\sqrt{a}=2b\sqrt{a}$.

(3) $\sqrt{abc}\cdot 2\sqrt{abc^2}$

$=2\sqrt{abc\cdot abc^2}=2\sqrt{a^2b^2c^2\cdot c}=2|abc|\sqrt{c}=2abc\sqrt{c}$.

二次根式相乘的结果必须化成最简二次根式.

题(2)中由根式 $\sqrt{4b}$ 可知 $b\geqslant 0$；题(3)中由根式 $\sqrt{abc}$ 可知 $abc\geqslant 0$.

两个二次根式相除，怎样进行运算？

同样地，二次根式的性质 4 就是二次根式相除的法则，即

两个二次根式相除，被开方数相除，根指数不变.

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

上式从左到右变形时，已隐含 $a\geqslant 0$，$b>0$ 的条件.

例题5 计算：

(1) $\sqrt{2a}\div\sqrt{3b}$；

(2) $\sqrt{6u^2}\div\sqrt{10u^3v}$；

(3) $\sqrt{a+b}\div\sqrt{a^2c-b^2c}\ (a>b>0)$.

解 (1) $\sqrt{2a}\div\sqrt{3b}$

$=\sqrt{\frac{2a}{3b}}=\sqrt{\frac{2a\cdot 3b}{(3b)^2}}=\frac{\sqrt{6ab}}{\sqrt{(3b)^2}}=\frac{\sqrt{6ab}}{3|b|}=\frac{\sqrt{6ab}}{3b}$.

如果二次根式相除的结果是根式，那么必须化成最简根式.

(2) $\sqrt{6u^2}\div\sqrt{10u^3v}$

$=\sqrt{\frac{6u^2}{10u^3v}}=\sqrt{\frac{3}{5uv}}=\sqrt{\frac{3\cdot 5uv}{(5uv)^2}}$

$=\frac{\sqrt{15uv}}{\sqrt{(5uv)^2}}=\frac{\sqrt{15uv}}{5|uv|}$.

由除式中 $10u^3v=10u^2\cdot uv>0$，可知 $uv>0$.

所以 $\sqrt{6u^2}\div\sqrt{10u^3v}=\frac{\sqrt{15uv}}{5uv}$.

(3) $\sqrt{a+b}\div\sqrt{a^2c-b^2c}$

$=\sqrt{\frac{a+b}{c(a^2-b^2)}}=\sqrt{\frac{a+b}{c(a+b)(a-b)}}$

第二节 二次根式的运算 13

例题 4

这是二次根式乘法的基本演练. 其中，题(1)是数字式计算，题(2)(3)逐步加大了难度.

题(1)利用法则得到被开方数是两数的积，然后直接进行素因数分解，这是算法之一；可让学生提出其他算法.

从二次根式的乘法到除法，学生的认知不存在困难. 这里直接指出二次根式性质 4 就是除法法则，可再用符号语言表达出来.

例题 5

本题是二次根式除法法则的运用. 解题时只用除法法则，不要涉及分母有理化. 结果要化成最简根式.

【注意事项】

(1) 在例题教学中，可让学生自主选用解题策略，然后对不同的算法进行比较.

如例题 4(1)还可以这样计算：$\sqrt{12}\times\sqrt{32}=2\sqrt{3}\times 4\sqrt{2}=8\sqrt{6}$；又如 $\sqrt{24}\times\sqrt{32}$ 的计算，可以是 $\sqrt{24}\times\sqrt{32}=\sqrt{2^3\times 3\times 2^5}=16\sqrt{3}$，也可以是 $\sqrt{24}\times\sqrt{32}=2\sqrt{6}\times 4\sqrt{2}=8\sqrt{2^2\times 3}=16\sqrt{3}$，等等.

(2) 在例题 5(3) 中，判断 $c(a-b)>0$ 是为了去掉 $|c(a-b)|$ 中的绝对值符号．这里把 $c(a-b)$ 作为一个整体进行讨论，不必对 $c>0$ 作判断.

(3) 二次根式的积、商都要化成最简根式.

(4) 二次根式的除法内容分别安排在本课及以后两节课中. 本课只运用二次根式的除法法则进行除法运算.

练习 16.3(2)

1. （1） $\dfrac{\sqrt{70}}{100}$；（2） $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

（3） $\dfrac{35\sqrt{2}}{4}$.

2. （1） $\dfrac{3y\sqrt{30y}}{5}$；

（2） $-\dfrac{t}{s}\sqrt{s}$；

（3） $\dfrac{\sqrt{2(x^2-y^2)}}{2(x+y)}$.

3. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

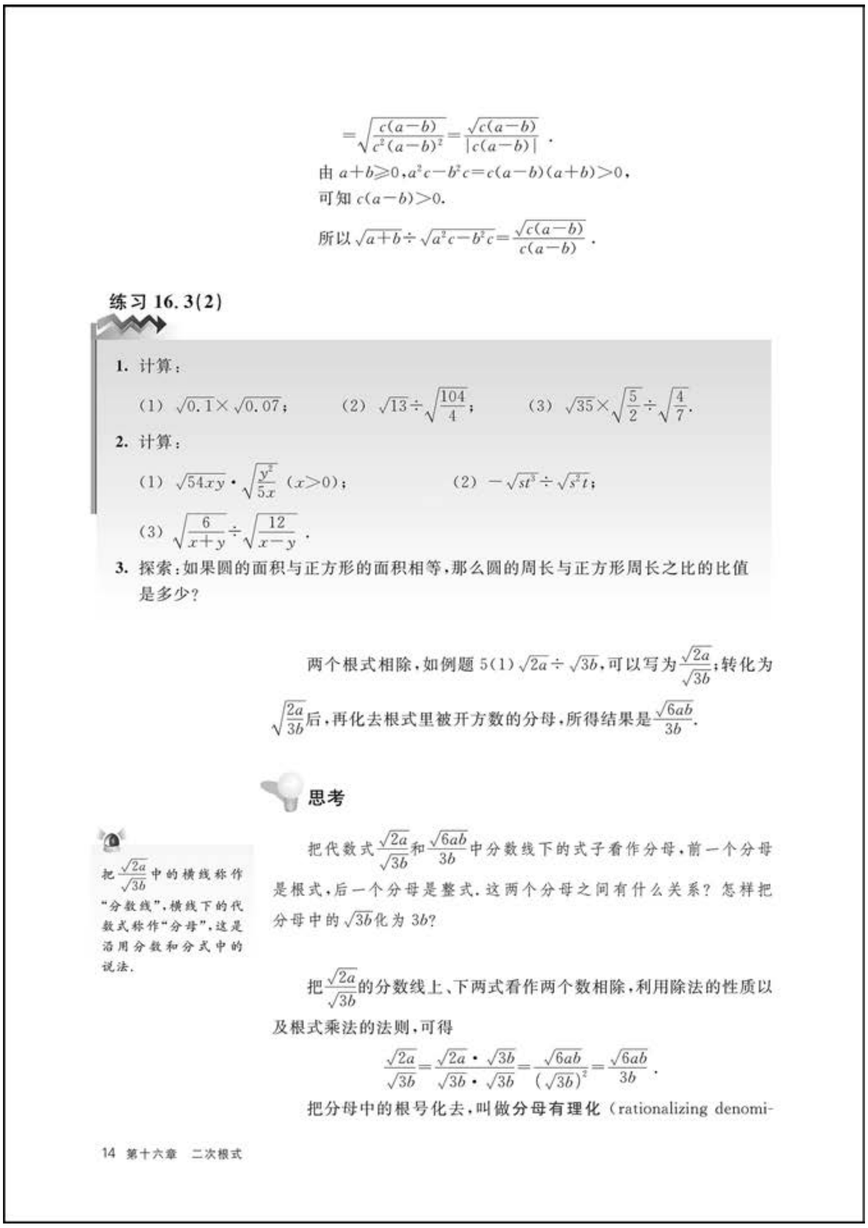
【本课重点】

明确分母有理化的含义；利用分母有理化进行除式为一个根式的除法运算.

思考

让学生采用不同算法进行二次根式的除法运算，通过比较引出分母有理化的概念.

引导学生体会，分母有理化就是实施二次根式的除法，而且过程更为简明.



$$=\sqrt{\frac{c(a-b)}{c^2(a-b)^2}}=\frac{\sqrt{c(a-b)}}{|c(a-b)|}.$$

由 $a+b\geqslant 0$，$a^2c-b^2c=c(a-b)(a+b)>0$，

可知 $c(a-b)>0$.

所以 $\sqrt{a+b}\div\sqrt{a^2c-b^2c}=\dfrac{\sqrt{c(a-b)}}{c(a-b)}$.

练习 16.3(2)

1. 计算：

（1） $\sqrt{0.1}\times\sqrt{0.07}$；　（2） $\sqrt{13}\div\sqrt{\dfrac{104}{4}}$；　（3） $\sqrt{35}\times\sqrt{\dfrac{5}{2}}\div\sqrt{\dfrac{4}{7}}$.

2. 计算：

（1） $\sqrt{54xy}\cdot\sqrt{\dfrac{y^2}{5x}}$ $(x>0)$；　（2） $-\sqrt{st^3}\div\sqrt{s^2t}$；

（3） $\sqrt{\dfrac{6}{x+y}}\div\sqrt{\dfrac{12}{x-y}}$.

3. 探索：如果圆的面积与正方形的面积相等，那么圆的周长与正方形周长之比的比值是多少？

两个根式相除，如例题 5(1) $\sqrt{2a}\div\sqrt{3b}$，可以写为 $\dfrac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3b}}$；转化为 $\sqrt{\dfrac{2a}{3b}}$ 后，再化去根式里被开方数的分母，所得结果是 $\dfrac{\sqrt{6ab}}{3b}$.

思考

把代数式 $\dfrac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3b}}$ 和 $\dfrac{\sqrt{6ab}}{3b}$ 中分数线下的式子看作分母，前一个分母是根式，后一个分母是整式. 这两个分母之间有什么关系？怎样把分母中的 $\sqrt{3b}$ 化为 $3b$？

把 $\dfrac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3b}}$ 中的横线称作“分数线”，横线下的代数式称作“分母”，这是沿用分数和分式中的说法.

把 $\dfrac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3b}}$ 的分数线上、下两式看作两个数相除，利用除法的性质以及根式乘法的法则，可得

$$\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3b}}=\frac{\sqrt{2a}\cdot\sqrt{3b}}{\sqrt{3b}\cdot\sqrt{3b}}=\frac{\sqrt{6ab}}{(\sqrt{3b})^2}=\frac{\sqrt{6ab}}{3b}.$$

把分母中的根号化去，叫做**分母有理化**（rationalizing denomi-

14　第十六章　二次根式

【注意事项】

（1） 注意练习 16.3(2)第 2 题中对字母的取值范围的判断. 题 2(2)中由除式 $\sqrt{s^2t}$ 可知 $\begin{cases}t>0,\\ s\neq 0,\end{cases}$ 再由 $\sqrt{st^3}$ 可得 $s>0$.

（2） 二次根式的除法有两种算法，一是运用二次根式的除法法则；二是进行分母有理化. 实际上，二次根式的除法归根结底就是分母有理化. 本课是学习分母有理化的开始，除式限制为一个根式.

nators). 分母有理化的方法,一般是把分子和分母都乘以同一个适当的代数式,使分母不含根号.

例题6 计算:

(1) $\sqrt{2}\div\sqrt{12}$;

(2) $a\div\sqrt{a+b}$;

(3) $\sqrt{a^2-b^2}\div\sqrt{2a+2b}$ $(a>b>0)$.

一个二次根式(或整式)除以一个二次根式,可写成分式的形式,通过分母有理化进行运算.

解 (1) $\sqrt{2}\div\sqrt{12}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{12}\times\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{36}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

题(1)也可以这样解:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

(2) $a\div\sqrt{a+b}$

$$=\frac{a}{\sqrt{a+b}}=\frac{a\cdot\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a+b}}$$

$$=\frac{a}{a+b}\sqrt{a+b}.$$

(3) 由已知 $a>b>0$,得 $a+b>0$,$a-b>0$.

$$\sqrt{a^2-b^2}\div\sqrt{2a+2b}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{2(a+b)}}=\frac{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a-b}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a+b}}$$

$$=\frac{\sqrt{a-b}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a-b}.$$

题(3)中需先判断 $a+b\geqslant0$,$a-b\geqslant0$,才能得到 $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a-b}$.

题(3)也可以这样解:

$$原式=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{2(a+b)}}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2(a+b)}}=\sqrt{\frac{(a+b)(a-b)}{2(a+b)}}=\sqrt{\frac{2(a-b)}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2(a-b)}.$$

例题7 如图 16-2,在面积为 $2a$ 的正方形 $ABCD$ 中,截得直角三角形 ABE 的面积为$\frac{\sqrt{3}}{3}a$,求 BE 的长.

解 因为正方形 $ABCD$ 的面积为 $2a$,所以它的边长为 $\sqrt{2a}$. 设 $BE=x$,根据题意,得

$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{2a}=\frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

所以,$x=\frac{\sqrt{3}}{3}a\div\frac{\sqrt{2a}}{2}$

$$=\frac{2\sqrt{3}a}{3\sqrt{2a}}=\frac{2\sqrt{3}a\cdot\sqrt{2a}}{3\sqrt{2a}\cdot\sqrt{2a}}$$

$$=\frac{2a\sqrt{6a}}{6a}=\frac{\sqrt{6a}}{3},$$

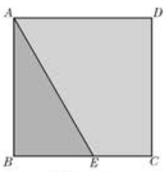


图 16-2

第二节 二次根式的运算 15

例题 6

本题展现了通过分母有理化实施二次根式除法的过程.

题(1)可让学生用多种方法求解,如:

① $\sqrt{\frac{2}{12}}=\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$;

② $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2\times3}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$;

③ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{12}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{36}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

再让学生比较各种算法,学会灵活处理.

例题 7

本题是二次根式除法的简单运用.

【注意事项】

(1) 在例题 6(3) 中给出条件 $a>b>0$,是为了降低难度. 实际上,由除式 $\sqrt{2(a+b)}$ 中 $a+b>0$,可知被除式 $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{(a+b)(a-b)}$中应有 $a-b\geqslant0$. 本题可用不同方法求解,再进行比较. 要向学生说明,$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a-b}$成立的前提条件是 $a+b\geqslant0$,$a-b\geqslant0$,因此先判断出已具备所需的条件,而且这一步骤不可缺少;解题时一般应先交代前提条件具备,再进行算式变形.

(2) 例题 7 是二次根式的除法在面积问题中的应用,解题过程中运用了方程思想. 对例题 7 求解时,也可以这样算:

$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}a\div\frac{\sqrt{2a}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}a\times\frac{2}{\sqrt{2a}}=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{3}{2a}}=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{3\cdot2a}{(2a)^2}}=\frac{\sqrt{6a}}{3}.$$

例题 8

本题为增强二次根式的运算与解方程之间的联系而设计，让学生学会解含二次根式的一元一次方程.

练习 16.3(3)

1. (1) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$；(2) $\dfrac{\sqrt{10}}{18}$；

(3) $\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a^2+1}$.

2. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3. (1) $x=-\dfrac{3}{5}\sqrt{15}$；

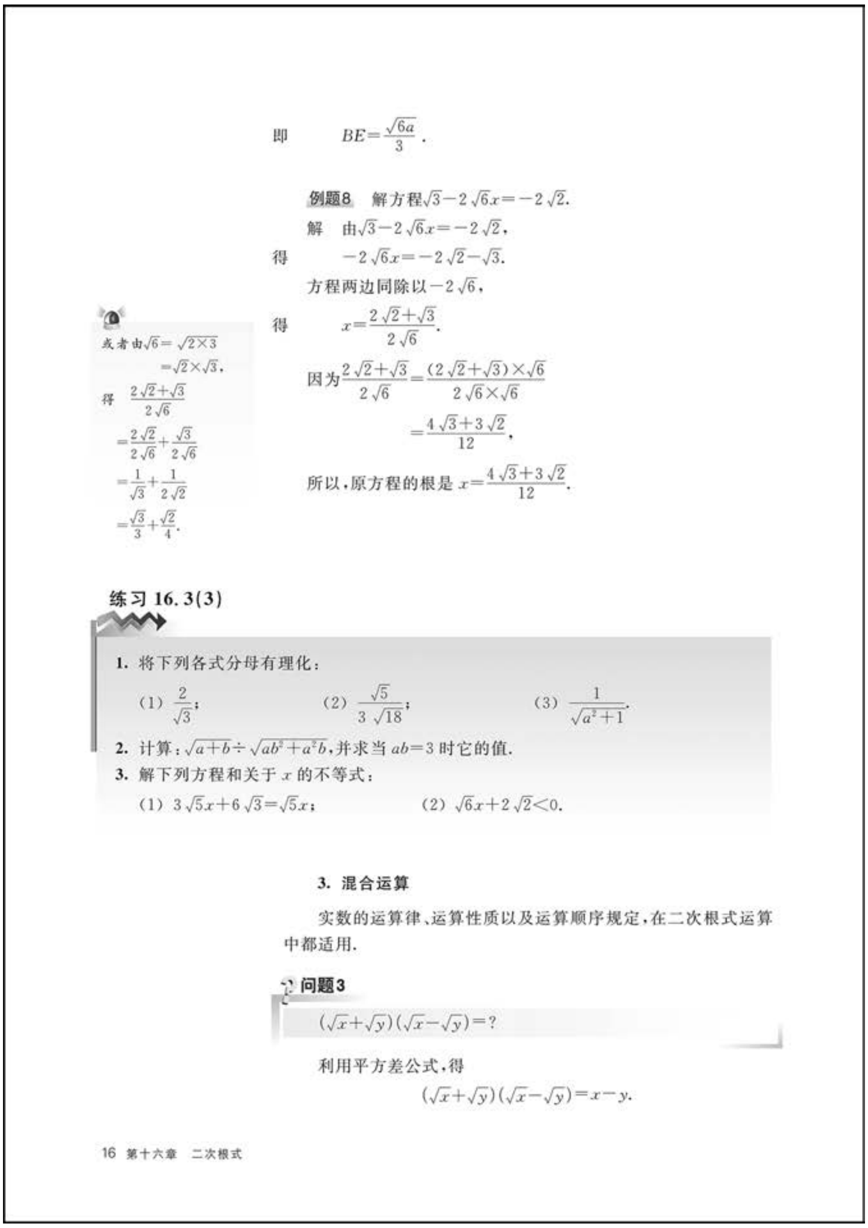
(2) $x<-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

【本课重点】

使学生进一步掌握分母有理化的方法；初步掌握二次根式的加减乘除混合运算.

问题 3

通过问题讨论，引出有理化因式.



即 $BE=\dfrac{\sqrt{6}a}{3}$.

例题8 解方程$\sqrt{3}-2\sqrt{6}x=-2\sqrt{2}$.

解 由$\sqrt{3}-2\sqrt{6}x=-2\sqrt{2}$，

得 $-2\sqrt{6}x=-2\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

方程两边同除以$-2\sqrt{6}$，

得 $x=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$.

因为$\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})\times\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{12}$，

所以，原方程的根是 $x=\dfrac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{12}$.

或者由$\sqrt{6}=\sqrt{2\times3}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}$，

得 $\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

练习 16.3(3)

1. 将下列各式分母有理化：

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$；　(2) $\dfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{18}}$；　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$.

2. 计算：$\sqrt{a+b}\div\sqrt{ab^2+a^2b}$，并求当 $ab=3$ 时它的值.

3. 解下列方程和关于 x 的不等式：

(1) $3\sqrt{5}x+6\sqrt{3}=\sqrt{5}x$；　(2) $\sqrt{6}x+2\sqrt{2}<0$.

3. 混合运算

实数的运算律、运算性质以及运算顺序规定，在二次根式运算中都适用.

问题3

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})=?$

利用平方差公式，得

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})=x-y.$$

16 第十六章 二次根式

【注意事项】

(1) 例题 8 中一元一次方程的一次项系数含二次根式，在求解时只涉及除式为一个根式的二次根式除法.此例说明了这类问题的难度要求.

边款中的算法，提示学生要灵活运用知识解题.但是，必须重视基本方法.

(2) 练习 16.3(3)中第 1(3)题，可按部就班进行分母有理化；也可先由 $a^2-4b^2=(a+2b)(a-2b)>0$ 和 $a+2b>0$，推出 $a-2b>0$，再把$\dfrac{\sqrt{a+2b}}{\sqrt{a^2-4b^2}}$化为$\dfrac{1}{\sqrt{a-2b}}$，然后进行分母有理化.

观察上面这个等式，左边是两个含有二次根式的代数式相乘，右边不含二次根式.

两个含有二次根式的非零代数式相乘，如果它们的积不含有二次根式，我们就说这两个含有二次根式的非零代数式互为**有理化因式**．如$\sqrt{x}+\sqrt{y}$与$\sqrt{x}-\sqrt{y}$互为有理化因式，$\sqrt{a}$与$\sqrt{a}$也互为有理化因式.

一个含有二次根式的代数式的有理化因式是唯一的吗？

想一想

$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$的有理化因式是什么？

例题9 把下列各式分母有理化：

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$；

(2) $\dfrac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$；

(3) $\dfrac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$ $(m\neq n)$.

解 (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

$$=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{(\sqrt{3})^2-\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

分子和分母都乘以分母的有理化因式.

(2) $\dfrac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$

$$=\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{(4\sqrt{3}+3\sqrt{2})(4\sqrt{3}-3\sqrt{2})}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{(4\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{48-18}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{30}.$$

(3) 已知式中 $m\neq n$，所以

$$\frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}=\frac{(m-n)(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})}$$

$$=\frac{(m-n)(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{m-n}$$

$$=\sqrt{m}-\sqrt{n}.$$

题(3)还可以这样解：

$$\frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}=\frac{(\sqrt{m})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}=\frac{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}=\sqrt{m}-\sqrt{n}.$$

此时 m、n 可以相等.

第二节 二次根式的运算 17

想一想

原式的有理化因式可以是$a\sqrt{x}-b\sqrt{y}$或$-a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$等.

例题 9

帮助学生掌握分母有理化的基本方法. 要指导学生学会选择适当的有理化因式.

题(3)提供了两种解法. 注意题中的条件 $m\neq n$，是确保所乘有理化因式不为 0. 边款中的解法不需这个条件，但要指出解题过程中利用了隐含条件 $m\geqslant 0$，$n\geqslant 0$.

【注意事项】

(1) 要引导学生思考问题 3 的边款中和“想一想”中提出的问题，以加深对有理化因式的理解，进而学会寻找合适的有理化因式将含两个二次根式的分母有理化. 一个含有二次根式的代数式的有理化因式不唯一. 如$\sqrt{x}-\sqrt{y}$与$\sqrt{x}+\sqrt{y}$互为有理化因式，可知 $m(\sqrt{x}-\sqrt{y})$（m 是非零整式或分式）都与$\sqrt{x}+\sqrt{y}$互为有理化因式.

(2) 例题 9(3) 将$\dfrac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$分母有理化时，增加 $m\neq n$ 的条件，是为了避免对$\sqrt{m}-\sqrt{n}$是否为零进行讨论. 而边款中的解法则不需要另加条件. 本例表明分母有理化时要注意有理化因式的值不能为零，也表明采用不同的方法所需要的条件可能不同.

(3) 涉及二次根式除法的算式中，除式所含二次根式的个数不超过两个，通常采用分母有理化的方法来完成除法.

例题 10

本题是简单的二次根式混合运算问题.

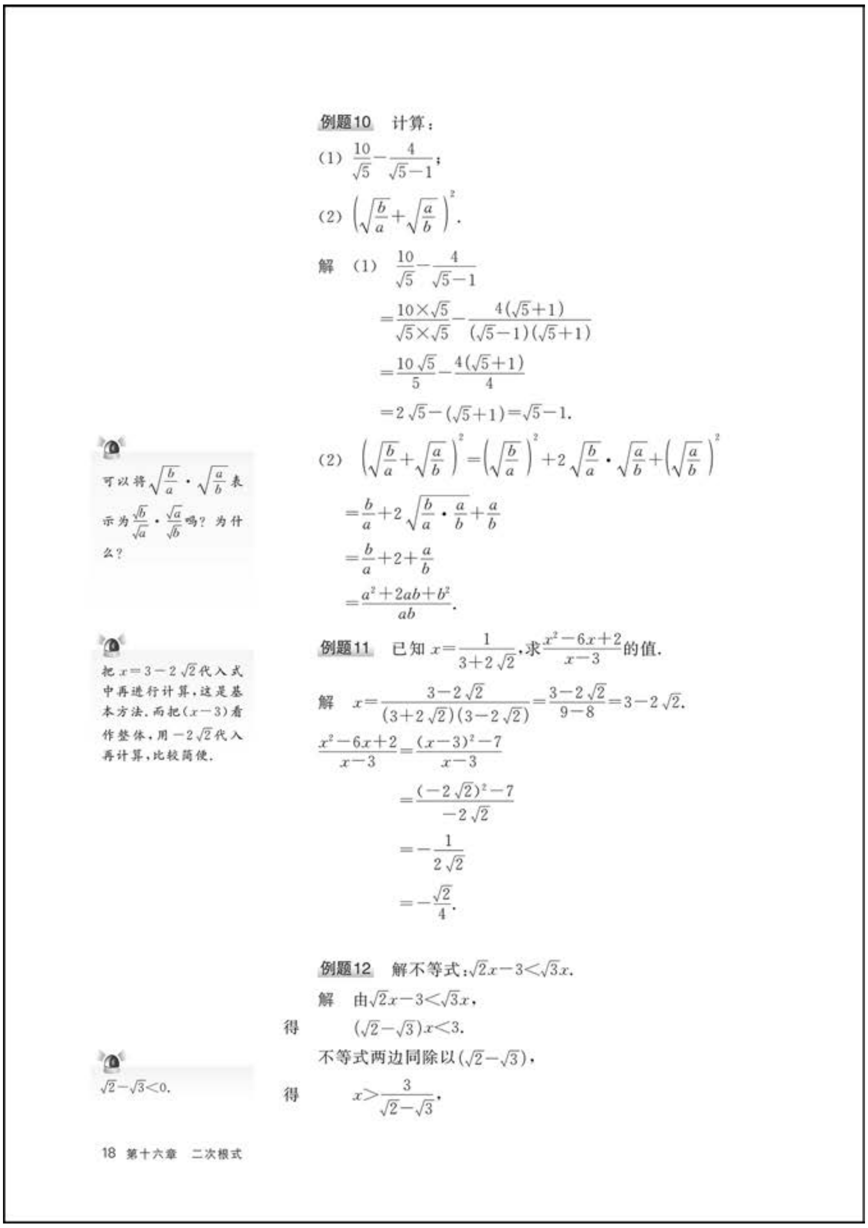
题(2)讨论“边款”中的问题,是为了让学生注意$\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$成立的条件,即应满足$a>0$,$b>0$.

例题 11

本题是二次根式运算在求代数式的值过程中的运用.

例题 12

本题是二次根式混合运算在解不等式中的运用.



例题10 计算:

(1) $\frac{10}{\sqrt{5}}-\frac{4}{\sqrt{5}-1}$;

(2) $\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$.

解 (1) $\frac{10}{\sqrt{5}}-\frac{4}{\sqrt{5}-1}$

$=\frac{10\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}-\frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$

$=\frac{10\sqrt{5}}{5}-\frac{4(\sqrt{5}+1)}{4}$

$=2\sqrt{5}-(\sqrt{5}+1)=\sqrt{5}-1$.

(2) $\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2+2\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}+\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$

$=\frac{b}{a}+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+\frac{a}{b}$

$=\frac{b}{a}+2+\frac{a}{b}$

$=\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}$.

可以将$\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$表示为$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$吗?为什么?

例题11 已知$x=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$,求$\frac{x^2-6x+2}{x-3}$的值.

解 $x=\frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=\frac{3-2\sqrt{2}}{9-8}=3-2\sqrt{2}$.

$\frac{x^2-6x+2}{x-3}=\frac{(x-3)^2-7}{x-3}$

$=\frac{(-2\sqrt{2})^2-7}{-2\sqrt{2}}$

$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

把$x=3-2\sqrt{2}$代入式中再进行计算,这是基本方法.而把$(x-3)$看作整体,用$-2\sqrt{2}$代入再计算,比较简便.

例题12 解不等式:$\sqrt{2}x-3<\sqrt{3}x$.

解 由$\sqrt{2}x-3<\sqrt{3}x$,

得 $(\sqrt{2}-\sqrt{3})x<3$.

不等式两边同除以$(\sqrt{2}-\sqrt{3})$,

得 $x>\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

$\sqrt{2}-\sqrt{3}<0$.

18 第十六章 二次根式

【注意事项】

(1) 在对分子含有二次根式、分母为整式的代数式进行加减时,要注意与分式的加减类比;在分母有理化中,要注意渗透转化思想.让学生在运算过程中体会数学思想,能运用数学思想来指导运算.

(2) 例题 11 的解法中渗透了整体思想.教学中可将$x=3-2\sqrt{2}$直接代入再求值,然后与整体代入的方法进行比较,并且指出,直接代入x的值再进行计算是通用的基本方法.注意这类问题的难度要求.

(3) 例题 12 的解题过程中,要对含两个根号的一次项系数的正负进行判别,学生很容易疏忽,需要强调.

$$x>\frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})},$$

$$x>-3\sqrt{2}-3\sqrt{3}.$$

所以，原不等式的解集是 $x>-3\sqrt{2}-3\sqrt{3}$.

练习 16.3(4)

1. 写出下列各式的有理化因式：

   $1-\sqrt{2}$，$\sqrt{a-1}$，$\sqrt{x}-\sqrt{y}$，$2\sqrt{u}+\sqrt{v}$.

2. 将下列各式分母有理化：

   (1) $\frac{2}{1-\sqrt{3}}$；　　(2) $\frac{1}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$；

   (3) $\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}$.

3. 计算：

   (1) $(\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2$；　　(2) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$；

   (3) $\sqrt{xy}\div\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$.

练习 16.3(4)

1. $1+\sqrt{2}$，$\sqrt{a-1}$，

$\sqrt{x}+\sqrt{y}$，$2\sqrt{u}-\sqrt{v}$.

2. (1) $-\sqrt{3}-1$；

(2) $\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{m-n}$；

(3) $\frac{4x+9y+12\sqrt{xy}}{4x-9y}$.

3. (1) $21-6\sqrt{6}$；

(2) $8-\frac{37}{6}\sqrt{15}$；

(3) $x\sqrt{y}-y\sqrt{x}$.

【注意事项】

(1) 练习 16.3(4)第 1 题，注意比较 $\sqrt{a-1}$ 与 $\sqrt{a}-1$ 的有理化因式的差别；解第 3(3)题，类似于例题 9(3)，有两种解法，要让学生体会.

(2) 本课中关于二次根式混合运算的基本例题不多，故通过练习 16.3(4)第 3 题弥补.

通过小结，引导学生整理本章所学知识，同时进一步体会：式是在数的层面上进一步的抽象与概括，数是研究式的基础；二次根式的性质是掌握二次根式运算的知识基础，化归思想是指导二次根式运算的重要思想；类比的方法是学习和理解新知的一种有效方法，要重视知识之间的内在联系，不断充实和加强基础知识.

Benzhangxiaojie

16

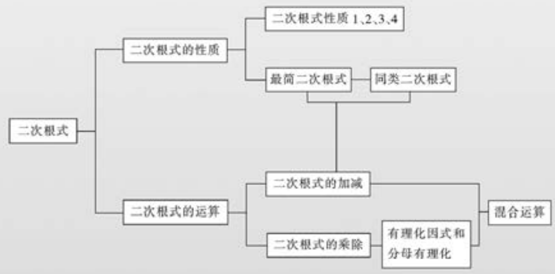
本章小结

在数的学习中，我们从整数到分数（小数），再到无理数，逐步扩大了对于数的认识；从数的加减到乘除，再到乘方和开方，逐步完善了对于数的基本运算的认识．我们又运用字母表示数的思想，把对于数及其运算的研究，上升到关于式及其运算的研究层面，更深入地探索数及其运算的性质和规律.

数是研究式的基础，式是数的概念和运算的发展．学习了实数及其运算以后，特别是掌握了数的开方运算，我们对于式的学习，自然地就从整式、分式进入到根式．本章学习的内容是二次根式，主要是二次根式的性质及其加、减、乘、除运算，涉及最简二次根式、同类二次根式、有理化因式的概念．其中，掌握二次根式的运算是重点，理解二次根式的性质是关键.

把二次根式化为最简二次根式，不仅是简明表达的需要，而且是研究那些表示形式不同但实质一样的二次根式的需要．明确了同类二次根式和有理化因式的意义，那么，实施二次根式的加减运算，归结为合并同类二次根式；实施二次根式的除法运算，归结为分母有理化．从二次根式运算的全过程来看，就是按照一定的法则，把二次根式的运算转化为类似于整式、分式的运算，体现了化归的数学思想.

本章的知识结构框图如下：



20 第十六章　二次根式

Yueducailiao

16

阅读材料

二次不尽根与简单连分数

设 N 是一个正整数但不是任何一个整数的平方数，则对 N 开平方是“开不尽”的，我们就说 $\sqrt{N}$是一个二次不尽根，它是无限不循环小数即无理数．

连分数是一个数学式，其特征就是“在一个分数里面包含另一个分数”．如果一个连分数形如

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}},$$

其中 $a_1,a_2,a_3,\cdots$是正整数，那么就称它为简单连分数．通常我们把上面的形式写成较为紧缩的形式 $a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\cdots$，或者记作$[a_1;a_2,a_3,\cdots]$．当 $a_1,a_2,a_3,\cdots$的个数为有限时，它称为有限连分数；当 $a_1,a_2,a_3,\cdots$的个数为无限时，则称为无限连分数．

凡是有限连分数都可从最下层起依次化简，将其化为普通的分数或小数．如：

$$1+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}=1\frac{2}{5}=1.4;$$

$$1+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{5}}=1\frac{5}{12}\approx1.42;$$

$$1+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2}$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{5}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{5}{12}}=1\frac{12}{29}\approx1.414;$$

$$1+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2}=1\frac{29}{70}\approx1.414\ 3;$$

……

我们知道，$\sqrt{2}=1.414\ 213\ 562\cdots$．实际上，$\sqrt{2}$可以写成一个无限连分数，即

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\cdots.$$

又如，

$$\sqrt{3}=1+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\cdots;$$

$$\sqrt{5}=2+\frac{1}{4+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{4+}\cdots.$$

阅读材料 21

【设计意图】

本材料介绍了用循环连分数表示二次不尽根的认识过程和思考方法，让学生通过对材料的阅读和理解，建立二次不尽根与循环连分数之间的联系，感受数学的奥妙，激发学生学习数学的兴趣；通过用循环连分数表示二次不尽根的尝试和实践，复习二次根式的相关计算，体会迭代、逼近等的数学思想．

【活动建议】

对本材料的阅读，可分两个层次提出要求：(1) 知道连分数的有关概念，理解用循环连数分数表示$\sqrt{2}$、$\sqrt{19}$的导出过程，并能计算相应的近似值；体会用循环连分数表示二次不尽根的数学价值和其中蕴含的数学思想方法．(2) 运用所介绍的方法，推出表示$\sqrt{6}$、$\sqrt{30}$的循环连分数；进一步认识任何一个二次不尽根都可以用一个循环连分数表示，了解二次不尽根与循环连分数之间的联系．对此有兴趣的学生，可在教师的指导下，利用电子表格进行递推计算，得到二次不尽根的高精度近似值．还可进一步查阅有关连分数的材料，拓展对连分数的认识．

【问题解答】

将$\sqrt{6}$化为连分数：

析出最大整数	分子有理化且使分子为 1
第一步：$\sqrt{6}=2+\sqrt{6}-2$ ……………… (1)	第二步：(1)$=2+\dfrac{2}{\sqrt{6}+2}=2+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{6}+2}{2}}$
第三步：$\dfrac{\sqrt{6}+2}{2}=2+\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$ ………… (2)	第四步：(2)$=2+\dfrac{1}{\sqrt{6}+2}$
第五步：$\sqrt{6}+2=4+\sqrt{6}-2$ ………… (3)	第六步：(3)$=4+\dfrac{2}{\sqrt{6}+2}=4+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{6}+2}{2}}$，返回第三步

所以$\sqrt{6}=2+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{4+}\cdots$，记为$\sqrt{6}=[2;\dot{2}\dot{4}]$.

在上述等式中，等号左边是一个二次不尽根，而右边是一个无限连分数，且是循环连分数．

一般来说，任何一个二次不尽根都可以写成一个循环连分数．于是，根据写成的连分数，可将一个二次不尽根的近似值笔算出来．二次不尽根这样一个“杂乱无章”的无限不循环小数，居然可以与一个“严整有序”的循环连分数划上等号，是数学的奥妙和乐趣的生动体现．

阅读理解：

$\sqrt{19}=4+\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{8+}\cdots$．等号右边这个无限连分数的表达式中不断重复出现 2，1，3，1，2，8，它是一个循环连分数（可记作$[4;\dot{2}1312\dot{8}]$）．

$\sqrt{19}$是怎样化成这个连分数的呢？简要说明如下：

小于$\sqrt{19}$的最大整数是 4，可得$\sqrt{19}=4+(\sqrt{19}-4)=4+\frac{3}{\sqrt{19}+4}$；

小于$\frac{\sqrt{19}+4}{3}$的最大整数是 2，可得$\frac{\sqrt{19}+4}{3}=2+\frac{\sqrt{19}-2}{3}=2+\frac{5}{\sqrt{19}+2}$；

小于$\frac{\sqrt{19}+2}{5}$的最大整数是 1，可得$\frac{\sqrt{19}+2}{5}=1+\frac{\sqrt{19}-3}{5}=1+\frac{2}{\sqrt{19}+3}$；

小于$\frac{\sqrt{19}+3}{2}$的最大整数是 3，可得$\frac{\sqrt{19}+3}{2}=3+\frac{\sqrt{19}-3}{2}=3+\frac{5}{\sqrt{19}+3}$；

小于$\frac{\sqrt{19}+3}{5}$的最大整数是 1，可得$\frac{\sqrt{19}+3}{5}=1+\frac{\sqrt{19}-2}{5}=1+\frac{3}{\sqrt{19}+2}$；

小于$\frac{\sqrt{19}+2}{3}$的最大整数是 2，可得$\frac{\sqrt{19}+2}{3}=2+\frac{\sqrt{19}-4}{3}=2+\frac{1}{\sqrt{19}+4}$；

小于$\sqrt{19}+4$的最大整数是 8，可得$\sqrt{19}+4=8+(\sqrt{19}-4)=8+\cdots$．

由于$\sqrt{19}-4$在前面已经出现，可见再继续下去，就会不断地重复出现上面的情况，于是得到了一个表示$\sqrt{19}$的循环连分数．

上述将$\sqrt{19}$化为循环连分数的过程是一个迭代过程．类似地，可将任何一个二次不尽根化为循环连分数，其要点是：

（1）求出小于这个二次不尽根的最大整数，并将它析出；

（2）对析出最大整数后余下的式子进行“分子有理化”且使分子为 1；

（3）将“分子有理化且为 1”所得结果的分子分母颠倒，再析出小于颠倒所得这个数的最大整数，并对余下的式子进行“分子有理化”且使分子为 1；

（4）如(3)继续，直到析出最大整数后余下的式子重复出现．

实践尝试：

试一试，分别将$\sqrt{6}$、$\sqrt{30}$化为连分数．

22 第十六章 二次根式

【问题解答】(续)

将$\sqrt{30}$化为连分数：

析出最大整数	分子有理化且使分子为 1
第一步：$\sqrt{30}=5+\sqrt{30}-5$ …………… (1)	第二步：$(1)=5+\frac{5}{\sqrt{30}+5}=5+\frac{1}{\frac{\sqrt{30}+5}{5}}$
第三步：$\frac{\sqrt{30}+5}{5}=2+\frac{\sqrt{30}-5}{5}$ ……… (2)	第四步：$(2)=2+\frac{1}{\sqrt{30}+5}$
第五步：$\sqrt{30}+5=10+\sqrt{30}-5$ ……… (3)	第六步：$(3)=10+\frac{5}{\sqrt{30}+5}=10+\frac{1}{\frac{\sqrt{30}+5}{5}}$，返回第三步

所以$\sqrt{30}=5+\frac{1}{2+}\frac{1}{10+}\cdots$，记为$\sqrt{30}=[5;\dot{2}(\dot{1}\dot{0})]$.

第十七章　一元二次方程

一、教学目标

1. 理解一元二次方程的有关概念,知道一元二次方程的根的个数情况.

2. 经历探索一元二次方程解法的过程,体验从特殊到一般、从具体到抽象的思考方法,领会“化归”思想和“降次”策略.

3. 会用开平方法、因式分解法解特殊的一元二次方程.

4. 理解用配方法解一元二次方程的思路,掌握求根公式,会用配方法和公式法解一元二次方程.

5. 理解一元二次方程的根的判别式的意义,会用判别式判断一元二次方程根的情况,能根据一元二次方程根的情况确定判别式的值的符号.

6. 理解二次三项式的因式分解与一元二次方程的根之间的内在联系,会在实数范围内对二次三项式进行因式分解.

7. 会列一元二次方程解决简单的实际问题,体会方程思想和方程模型方法.

二、课时安排

本章教学共11课时,建议分配如下:

17.1　一元二次方程的概念	1课时
17.2　一元二次方程的解法	5课时
17.3　一元二次方程根的判别式	2课时
17.4　一元二次方程的应用	2课时
本章小结	1课时

三、设计说明

学生在前面已经学习了一元一次方程以及二元、三元一次方程(组),掌握了方程的初步知识,领略了研究方程和探索方程(组)解法的思考方法.一元一次方程是最基本的方程,本章研究一元二次方程,是实际应用的需要,也是扩展方程知识的必然.

课本以实际问题为背景,引进一元二次方程的有关概念;以探讨最简单的方程 $x^2=a(a\geqslant 0)$ 的解法为起点,逐步展开解一元二次方程的讨论.本章的中心内容是一元二次方程的解法,在编写中注重展现解法的探索和形成过程,突出从特殊到一般、从具体到抽象的研究思路以及“化归”思想和“降次”策略.解最简单的一元二次方程时,根据开平方运算的意义,容易得到“开平方法”,然后在“开平方法”的运用中,引导学生体会“化归”和“降次”的思想方法.利用“两个数的积等于零相当于这两个数中至少有一个等于零”这一性质,得到可化为两个因式的积等于零形式的这类特殊一元二次方程求解的“因式分解法”.最后,讨论一般的一元二次方程的解法,利用等式性质进行配方,把解方程化归为运用开平方法,从而得到“配方法”.“配方法”以及在此基础上归纳得到的“公式法”,对于解一元二次方程具有通用性;在求根公式基础上概括出的一元二次方程的根的判别式,对于判断方程的根的情况具有普遍意义.这样就初步建立了一元二次方程的基本理论.

一元二次方程以及一元一次方程,是最基本、最重要的方程,是进一步学习方程和其他数学知识必不可少的基础,也是运用数学知识解决实际问题的重要工具.

关于一元二次方程的根与系数的关系,安排在九年级作为与高中数学学习相关的拓展内容.

四、教学建议

1. 引导学生感受数学来源于生活,又服务于生活. 课本中为引入一元二次方程的概念,提供了现实的

背景；在一元二次方程的实际应用中，重视与现实生活的联系. 教学时，要让学生在解决实际问题的过程中，获得“建模—求解—检验”的体验，体会方程模型方法，提高数学学习兴趣.

2. 重视学生的过程经历，突出数学思想方法教学. 探索一元二次方程的解法，是进行数学思想方法教学的良好素材. 在教学中，要把握课本对有关内容的安排从特殊到一般、从具体到抽象的线索，充分展开探索活动，体现化归思想、整体思想的导向作用，展示降次的策略方法. 还有，如讨论有一个根为 0、1 或 -1 的一元二次方程的系数及常数项的特征，或归纳一元二次方程的求根公式，或概括一元二次方程的根的判别式，或寻找二次三项式因式分解的通法等，既要关注数学知识的获得，还要重视学习方法的指导，让学生从中体会抓本质、找联系、求规律、化繁为简和以简驭繁等数学研究方法.

3. 鼓励学生积极探索、主动学习. 代数的主题是以通性求通解，充分体现在探索方程解法的过程中. 这一过程就是利用字母“代”数，运用数(式)及其运算的基本性质，由已知探求未知，获得把未知化为已知的一般方法. 本章在“问题”“思考”“想一想”等栏目中，为学生设计了一系列的问题，引导学生探究学习，体验“以通性求通解”的过程. 在教学中，要放手让学生进行探索、归纳、总结和交流，在解决问题的同时学习代数主题.

4. 严格控制解一元二次方程问题的难度. 让学生掌握一元二次方程的解法，是本章教学必须落实的知识技能要求. 在教学中，应重视学生对解一元二次方程的过程和方法的学习，重视学生对数学思想的领悟和基本解法的掌握；要控制问题的难度，注重基本要求的落实，确保学生得到解方程的基本训练.

五、评价建议

1. 关注学生对解方程基本知识和技能的掌握与运用. 这方面的评价，主要是检测学生能否选用合适的方法解一元二次方程并正确表达过程，能否列出一元二次方程或利用一元二次方程的相关知识解决简单的实际问题；还包括学生对有关数学思想方法的领会和基本数学能力的形成.

2. 关注学生在学习过程中的表现和进步. 要及时评价学生参与教学活动的积极性，与他人合作的主动性，进行探究性学习的态度和发表意见的情况，思维的参与度、灵活度，是否独立思考，是否有求异精神和创新精神等.

3. 关注学生的个性差异和学习能力发展. 学生对一元一次方程的学习和掌握的情况有所不同，因此学习一元二次方程时原有基础存在差异，在对问题的思考、对一元二次方程解法的探究以及解方程的能力等方面会有不同表现. 在学习评价中，要充分尊重学生，保护学生的自尊心，鼓励学生积极进取；要建立多元的评价方式，全面评价学生的发展. 对于数学学习基础不同的学生，应提出不同的学习目标，切实把握教学基本要求，同时鼓励追求卓越；通过控制知识内容难度，引导学生探究学习和加强过程性评价，促进学生主动学习，发展主体意识和主体能力.

Yiyuan Erci
Fangcheng

17 第十七章 一元二次方程

通过一次方程(组)的学习，我们体会到，列方程、解方程，是寻找已知量与未知量间等量关系并探求未知量的重要方法.

看下面这幅群猴嬉戏图：

一群猴子在林中欢闹，
不知疲倦不知烦恼.
有数量为总数八分之一再平方的大猴小猴，
在树枝上不停地蹦跳；
还有 12 只猴子摘果取乐，
一边啼叫一边乱抛.
树枝摇曳果遍地，
林中猴子共多少？

这是古印度的一道有趣的数学题目，你能求出猴子的总数吗？

如果用x表示林中猴子的总数，可得$\left(\frac{x}{8}\right)^2+12=x$.上述问题归结为解这个方程，本章就来探索这一类方程的解法.

章头语中包含了两层意思：一是强调学习方程知识的重要性；二是指出扩充方程知识的必要性.

在此指出列方程、解方程是探求未知量的重要方法，对学生学习方程知识具有价值引导的意义. 学生对方程知识的重要性已有初步体会，这里不必过多地解释，让学生在进一步的学习中加深认识和体验.

引用古印度的一道数学题目，是为了导入本章的学习主题，而题目本身也有趣味性；配以章头图，使情景更加生动有趣. 对本题列方程，可由学生完成，同时感受题中的乐趣.

Yiyuanercifangcheng De Gainian

第一节　一元二次方程的概念

17.1　一元二次方程的概念

我们知道,"含有未知数的等式"叫做方程.运用等式性质和数的运算性质,可以得到一元一次方程的解法.在此基础上,可以解有关一次方程组的问题以及一些实际问题.但是,由实际问题列出的方程不一定是一元一次方程.

问题1

一块长方形绿地的面积为1 200平方米,并且长比宽多10米,那么长和宽各为多少米?

分析　设这块长方形绿地的宽为 x 米,可知它的长就是 $(x+10)$ 米.因为绿地面积为1 200平方米,所以

$$x(x+10)=1\,200.$$

去括号,得

$$x^2+10x=1\,200.$$

观察上面的等式,其中有一个用字母 x 表示的未知数,可知它是一个一元方程;方程的两边都是关于未知数的整式,这样的方程是一个整式方程.在这个整式方程中,未知数 x 的最高次数是2.求出这个方程中的未知数 x 的值,就可以求得长方形绿地的宽.

现在,我们来研究这一类型的方程.

只含有一个未知数,且未知数的最高次数是2的整式方程叫做**一元二次方程**(quadratic equation with one unknown).

例如,$x^2-16=0$,$2y^2+3y+1=0$,$3x^2-2x=0$,$\sqrt{2}x^2+4x=32$,$-x^2-2=5x$ 等都是一元二次方程.

方程 $x^2+10x=1\,200$,经过移项可以化成

$$x^2+10x-1\,200=0.$$

任何一个关于 x 的一元二次方程都可以化成

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$$

的形式,这种形式简称一元二次方程的**一般式**.其中 ax^2 叫做二次项,a 是二次项系数;bx 叫做一次项,b 是一次项系数;c 叫做常数项.

在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中,b、c 可以是任意实数,但 a 应是一个不为零的实数,这是为什么?

24　第十七章　一元二次方程

问题1

提出实际问题,引入一元二次方程的概念.

根据问题1的题意列出方程后,可引导学生比较这个方程与一元一次方程的异同,从而认识一元二次方程的基本特征.

一元二次方程的概念涉及整式方程.可对整式方程适当解说,但不必要求学生理解.有关整式方程的概念,将在后续学习中进一步明确.

一元二次方程的一般式为 $ax^2+bx+c=0$,必须强调 $a\neq 0$.如果 $a=0$,那么方程变形为 $bx+c=0$,这就不是一元二次方程了.反之,如果 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程,那就一定含有 $a\neq 0$ 这个条件.

【教学目标】

(1) 经历一元二次方程概念的形成过程,知道一元二次方程是描述生活实际中的等量关系的工具;理解一元二次方程的有关概念,会把一元二次方程化成一般式,能指出一元二次方程中各项的名称及其系数.

(2) 理解方程的根的意义,会判别一个数是不是一元二次方程的一个根;知道一元二次方程的根的个数情况与一元一次方程的情况不同,知道有一个根为0、1或−1的一元二次方程的系数和常数项的特征.

【注意事项】

一元二次方程可从一元一次方程概念的发展引进.现在课本中通过实际问题引入一元二次方程,有利于促使学生更多地关注数学与现实的联系,初步认识一元二次方程的实际应用,从而对学习一元二次方程的目的有新的思考.

例题1 把下列一元二次方程化成一般式，并写出方程中的各项与各项的系数.

(1) $2x(x-1)=3x-4$；

(2) $y+\sqrt{3}=\sqrt{2}(y^2+2)$.

解 (1) 去括号，得 $2x^2-2x=3x-4$.

移项、化简，得 $2x^2-5x+4=0$.

可知方程中的二次项是 $2x^2$，二次项的系数是 2；一次项是 $-5x$，一次项的系数是 -5；常数项是 4.

(2) 去括号，得 $y+\sqrt{3}=\sqrt{2}y^2+2\sqrt{2}$.

移项、化简，得 $-\sqrt{2}y^2+y+\sqrt{3}-2\sqrt{2}=0$.

可知方程中的二次项是 $-\sqrt{2}y^2$，二次项的系数是 $-\sqrt{2}$；一次项是 y，一次项的系数是 1；常数项是 $\sqrt{3}-2\sqrt{2}$.

对于一个一元二次方程，我们可以依据根的意义，判断未知数的一个值是不是这个方程的根.

例题2 判断 2、5、-4 是不是一元二次方程 $x^2+x=8-x$ 的根.

解 把 $x=2$ 分别代入方程 $x^2+x=8-x$ 的左边和右边，得

左边的值为 $2^2+2=6$；

右边的值为 $8-2=6$.

因为方程左右两边的值相等，所以 $x=2$ 是这个一元二次方程的根.

把 $x=5$ 分别代入方程 $x^2+x=8-x$ 的左边和右边，得

左边的值为 $5^2+5=30$；

右边的值为 $8-5=3$.

因为方程左右两边的值不相等，所以 $x=5$ 不是这个一元二次方程的根.

同样，把 $x=-4$ 分别代入方程的左边和右边，得左右两边的值相等，可知 $x=-4$ 是这个一元二次方程的根.

> 能够使方程左右两边的值相等的未知数的值叫做方程的解. 只含有一个未知数的方程，它的解又叫做方程的根.

> 从这个一元二次方程看到，它的根的个数与一元一次方程是不同的.

问题2

在下列方程中，哪些方程有一个根为 0？哪些方程有一个根为 1？哪些方程有一个根为 -1？

(1) $2x^2+x=0$； (2) $5x^2-4x=0$；

(3) $3x^2+2x-5=0$； (4) $x^2-7x+6=0$；

(5) $x^2+5x+4=0$； (6) $2x^2-3x-5=0$.

> 依据方程的根的意义，可知方程(1)(2)有一个根为 0；方程(3)(4)有一个根为 1；方程(5)(6)有一个根为 -1.

第一节 一元二次方程的概念 25

例题 1

本题为帮助学生掌握把一元二次方程化成一般式的技能，同时具体认识方程中的项和系数.

确定一元二次方程中的各项与各项的系数，是对一般式而言. 要注意系数的符号问题.

例题 2

本题一方面是复习方程的解的概念以及判断一个数是不是方程的根的方法；另一方面让学生感知一元二次方程根的个数情况与一元一次方程不同.

要提示学生注意这个方程的根不止一个.

问题 2

提出这一问题，是引导学生关注有一个根为 0 或 1、-1 的一元二次方程的项的系数及常数项的特征，通过实例感知一元二次方程的根与系数有关系.

【注意事项】

一个方程是不是一元二次方程，通常要化成一般式以后才能判断；关于一元二次方程中各项的系数，必须把方程化成一般式以后才能确定；讨论一元二次方程的根与系数之间的关系，也是基于方程的一般式. 所以，要重视学生对一元二次方程一般式概念的学习和理解.

想一想

让学生通过对具体实例的分析，归纳有一个根为 0 或 1、-1 的一元二次方程的项的特征.

练习 17.1

1. (1) 是；(2) 是；
(3) 不是；(4) 是；
(5) 不是；(6) 是.

2. (1) $\frac{1}{5}x^2-3x+1=0$；
(2) $\sqrt{5}y^2-\sqrt{3}y=0$；
(3) $2x^2-5x-11=0$；
(4) $5x^2-mx+n=0$.
其余从略.

3. $m\neq1$.

4. $m=4$.

想一想

如果一元二次方程有一个根为 0，那么方程的项的系数或常数项有什么特征？有一个根为 1 呢？有一个根为 -1 呢？

练习 17.1

1. 判断下列方程哪些是一元二次方程：

(1) $x^2-16=0$；　　(2) $3y^2-4y=0$；

(3) $x-\frac{1}{x}=0$；　　(4) $\sqrt{3}x^2-\frac{1}{3}x+1=0$；

(5) $(x+1)(x+4)=x(x-2)$；　　(6) $(x+3)(x-3)+4=0$.

2. 将下列一元二次方程化为一般式，并分别指出它们的二次项系数、一次项系数和常数项：

(1) $\frac{1}{5}x^2+1=3x$；　　(2) $\sqrt{3}y=\sqrt{5}y^2$；

(3) $2x(x-1)=3(x+5)-4$；　　(4) $5x^2-mx+n=0$（m、n 是已知数）.

3. 当 m 为何值时，关于 x 的方程 $mx^2-3x=x^2-mx+2$ 是一元二次方程？

4. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2+3x+m-4=0$ 有一个根是 0，求 m 的值.

【注意事项】

(1) 要鼓励学生思考、概括有一个根为 0 或 1、-1 的一元二次方程的系数(包括常数项)的特征，培养学生的分析、归纳能力. 必要时可再提供一些具体实例充实归纳的基础，或指导有兴趣的学生由一元二次方程的一般式导出一般结论，但不要求学生记住结论和用于解决新的问题.

(2) 练习 17.1 第 4 题的解题要求是利用方程的根的意义，并不要求直接运用“想一想”所得的结论.

Yiyuanercifangcheng
De Jiefa

第二节 一元二次方程的解法

17.2 一元二次方程的解法

1. 特殊的一元二次方程的解法

我们从特殊形式的一元二次方程着手，讨论解一元二次方程的问题.

问题1

怎样解方程 $x^2=4$?

分析 $x^2=4$ 是一元二次方程，它表达的等量关系是未知数 x 的平方等于 4. 根据平方根的意义，可知 x 是 4 的平方根. 所以，解方程 $x^2=4$ 就是求 4 的平方根. 由此可见，这个方程有两个实数根.

方程 $x^2=4$ 的解法如下：

因为 4 的平方根是 ± 2，所以方程 $x^2=4$ 的根是

$$x_1=2, x_2=-2.$$

未知数为 x 的一元二次方程的两个根通常用 x_1、x_2 表示.

像这样解一元二次方程的方法叫做开平方法.

对于一元二次方程 $x^2=d$，如果 $d\geqslant 0$，那么就可以用开平方法求它的根. 当 $d>0$ 时，方程有两个不相等的根：$x_1=\sqrt{d}$，$x_2=-\sqrt{d}$；当 $d=0$ 时，得 $x^2=0$，这时就说方程有两个相等的根，记作：$x_1=x_2=0$.

例题1 用开平方法解下列方程：

(1) $9x^2-4=0$；

(2) $2x^2+5=0$.

解 (1) 移项，得 $9x^2=4$.

两边同除以 9，得 $x^2=\frac{4}{9}$.

利用开平方法，得 $x=\pm\frac{2}{3}$.

所以，原方程的根是 $x_1=\frac{2}{3}$，$x_2=-\frac{2}{3}$.

第二节 一元二次方程的解法 27

【本课重点】

使学生掌握用开平方法解一元二次方程，并在探索解法的过程中体会化归思想、整体思想和降次策略.

问题 1

让学生通过解方程，认识解这类方程与开平方运算的联系，由此引进开平方法. 要注意方程的根的表示法.

例题 1

本题是用开平方法解形如 $ax^2+c=0(a\neq 0)$ 的方程，为学生归纳解这类方程的一般步骤以及根的一般情况提供认识基础.

【教学目标】

(1) 经历探索一元二次方程解法的过程，体会从特殊到一般、从具体到抽象的思考方法以及化归思想和降次策略.

(2) 掌握解一元二次方程的开平方法、因式分解法、配方法和公式法；会选用适当的方法解一元二次方程.

(3) 会用计算器求一元二次方程的近似根.

【注意事项】

学生对方程 $x^2=0$ 的根是 $x_1=x_2=0$ 较难理解. 此时可直接告诉学生，如果一元二次方程有实数根，那么就一定有两个（以后学习因式分解法和求根公式时可对此适当作一些解释）；但这两个根有可能是相等的. 如方程 $x^2=0$ 的根是 $x_1=x_2=0$，要强调表达形式，不要提出重根概念和代数基本定理.

让学生对例题 1 的解题过程进行分析和讨论，归纳解形如 $ax^2+c=0(a\neq 0)$ 的方程的一般步骤. 其中，当 $c=0$ 时方程的根有两个，需要讲解.

(2) 移项，得 $2x^2=-5$.

两边同除以 2，得 $x^2=-\frac{5}{2}$.

因为任何一个实数的平方不可能是负数，所以原方程没有实数根.

一般来说，解形如 $ax^2+c=0$(其中 $a\neq 0$)的一元二次方程，其步骤是：

(1) 通过移项、两边同除以 a，把原方程变形为

$$x^2=-\frac{c}{a}.$$

(2) 根据平方根的意义，可知

当 a、c 异号时，$-\frac{c}{a}>0$，方程的根是

$$x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}},\quad x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}};$$

当 a、c 同号时，$-\frac{c}{a}<0$，方程没有实数根；

当 $c=0$ 时，$-\frac{c}{a}=0$，方程的根是 $x_1=x_2=0$.

例题 2

这是上述解方程步骤的实践运用. 要明确规范表达的要求.

例题2 解方程：$-7x^2+21=0$.

解 移项，得 $-7x^2=-21$.

两边同除以 -7，得 $x^2=3$.

利用开平方法，得 $x=\pm\sqrt{3}$.

所以，原方程的根是 $x_1=\sqrt{3}$，$x_2=-\sqrt{3}$.

问题 2

引导学生对形如 $ax^2+c=0(a\neq 0)$ 的方程的解法进行推广运用，探讨形如 $a(x+b)^2+c=0$的方程的解法.

问题2

怎样解方程 $(1+x)^2=16$?

分析 如果把 $(1+x)$ 看作一个整体，即看成一个未知数 y，那么方程 $(1+x)^2=16$ 就可看成方程 $y^2=16$，这样就可用开平方法来解.

解法如下：

由方程 $(1+x)^2=16$，利用开平方法，得

$$1+x=4 \quad 或 \quad 1+x=-4.$$

分别求这两个一元一次方程的根，得 $x=3$ 或 $x=-5$.

所以，原方程的根是

$$x_1=3,x_2=-5.$$

通过开平方，把解一元二次方程的问题转化为解一元一次方程的问题，其数学思想是“化归”，基本策略是“降次”.

28 第十七章 一元二次方程

【注意事项】

(1) 对于解形如 $ax^2+c=0(a\neq 0)$的方程的步骤进行归纳时，应让学生进行讨论，使学生不仅明白一般步骤，更重要的是获得对 a、c 的符号与方程根的情况的关系的正确认识，提高学生的解题能力.

(2) 问题 2 的解题过程中体现了整体代换、降次和化归思想，要揭示这些数学思想方法并引导学生认真体会. 整体代换也可以说是换元，但本题中没有提出“换元法”，而注重于其中的数学思想.

例题3 解下列方程：

（1）$(2x-5)^2=9$；

（2）$2(x+3)^2-49=0$.

解 （1）利用开平方法，得

$$2x-5=3 \quad 或 \quad 2x-5=-3.$$

解得 $x=4$ 或 $x=1$.

所以，原方程的根是 $x_1=4$，$x_2=1$.

（2）原方程可变形为

$$(x+3)^2=\frac{49}{2}.$$

利用开平方法，得

$$x+3=\frac{7}{2}\sqrt{2} \quad 或 \quad x+3=-\frac{7}{2}\sqrt{2}.$$

解得 $x=\frac{7}{2}\sqrt{2}-3$ 或 $x=-\frac{7}{2}\sqrt{2}-3$.

所以，原方程的根是 $x_1=\frac{7}{2}\sqrt{2}-3$，$x_2=-\frac{7}{2}\sqrt{2}-3$.

练习 17.2(1)

1. 说出下列方程的根：

（1）$x^2=144$； （2）$x^2-\frac{25}{36}=0$；

（3）$x^2-6=0$； （4）$5x^2+2=0$；

（5）$64y^2=1$； （6）$-2y^2+4=0$.

2. 用开平方法解下列方程：

（1）$\frac{1}{2}x^2-8=0$； （2）$x^2-24=0$；

（3）$1-0.1x^2=0$； （4）$(x+2)^2=25$；

（5）$3(5-x)^2=36$； （6）$\frac{1}{3}(2x-3)^2=25$.

在用开平方法解特殊的一元二次方程的过程中，体现了“化归”思想和“降次”策略的运用. 那么，对于问题 2，还有其他方法解方程 $(1+x)^2=16$ 吗？

如果把方程 $(1+x)^2=16$ 变形为

$$(1+x)^2-16=0,$$

观察这个方程的左边，它可以分解因式. 于是方程可再变形为

$$[(1+x)+4][(1+x)-4]=0,$$

即

$$(x+5)(x-3)=0.$$

方程左边可利用公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 分解因式.

例题 3

本题展现了解一元二次方程 $a(x+b)^2+c=0$ 的一般过程. 要注意表达的要求，使学生加深对化归、降次等数学思想方法的认识.

练习 17.2(1)

1. （1）$x_1=12$，$x_2=-12$；

（2）$x_1=\frac{5}{6}$，$x_2=-\frac{5}{6}$；

（3）$x_1=\sqrt{6}$，$x_2=-\sqrt{6}$；

（4）无实数根；

（5）$y_1=\frac{1}{8}$，$y_2=-\frac{1}{8}$；

（6）$y_1=\sqrt{2}$，$y_2=-\sqrt{2}$.

2. （1）$x_1=4$，$x_2=-4$；

（2）$x_1=2\sqrt{6}$，

$x_2=-2\sqrt{6}$；

（3）$x_1=\sqrt{10}$，

$x_2=-\sqrt{10}$；

（4）$x_1=3$，$x_2=-7$；

（5）$x_1=2\sqrt{3}+5$，

$x_2=-2\sqrt{3}+5$；

（6）$x_1=\frac{5}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}$，

$x_2=-\frac{5}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}$.

【本课重点】

使学生掌握用因式分解法解一元二次方程，并在探索解法的过程中，体会化归思想及降次策略.

在学生对解一元二次方程的基本思路有了正确认识的基础上，提出“分解因式”是“降次”的有效策略.

问题 3

引导学生利用“分解因式”的方法去解形式简单的一元二次方程. 可放手让学生自主解决问题.

例题 4

让学生体验解形如 $ax^2+bx=0(a\neq0)$ 的方程的过程，引出解一元二次方程的“因式分解法”.

这时，方程的形式是“两个因式的积等于零”.

我们知道，如果两个数的积等于零，那么这两个数中至少有一个是零；反过来，如果两个数中至少有一个是零，那么这两个数的积也等于零.

当 $A\cdot B=0$ 时，必有 $A=0$ 或 $B=0$；当 $A=0$ 或 $B=0$ 时，必有 $A\cdot B=0$.

由于因式 $(x+5)$ 和 $(x-3)$ 都表示数，因此由上面的方程可得

$$x+5=0 \quad 或 \quad x-3=0,$$

解这两个一元一次方程，得 $x=-5$ 或 $x=3$.

所以，原方程的根是 $x_1=-5, x_2=3$.

利用分解因式，也可将某些一元二次方程“降次”.

问题3

怎样解形如 $ax^2+bx=0(a\neq0)$ 的方程？

这个方程的右边为 0，而左边容易分解因式. 将这个方程变形为

$$x(ax+b)=0,$$

用提取公因式法分解因式.

可得 $x=0$ 或 $ax+b=0$.

解得 $x=0$ 或 $x=-\frac{b}{a}$.

所以，原方程的根是 $x_1=0, x_2=-\frac{b}{a}$.

例题4 解下列方程：

(1) $x^2+8x=0$；

(2) $5x^2-4x=0$.

解 (1) 原方程可变形为

$$x(x+8)=0,$$

得 $x=0$ 或 $x+8=0$.

解得 $x=0$ 或 $x=-8$.

所以，原方程的根是 $x_1=0, x_2=-8$.

(2) 原方程可变形为

$$x(5x-4)=0,$$

得 $x=0$ 或 $5x-4=0$.

解得 $x=0$ 或 $x=\frac{4}{5}$.

所以，原方程的根是 $x_1=0, x_2=\frac{4}{5}$.

通过因式分解，把一元二次方程化成两个一次因式的积等于零的形式，从而把解一元二次方程的问题转化为解一元一次方程的问题，像这样解一元二次方程的方法叫做**因式分解法**.

30 第十七章 一元二次方程

【注意事项】

(1) 由方程 $(x+5)(x-3)=0$ 得方程 $x+5=0$ 或 $x-3=0$，再解这两个一次方程得到原方程的根，其依据是“$A\cdot B=0$”相当于“$A=0$ 或 $B=0$”. 要讲两者可以相互推出（等价），以此说明方程变形前后同解（但不提出“同解原理”）. 应重视过程，讲明道理，提供机会让学生体会数学思想方法.

(2) 在解方程表述最后结果时，两根之间没有使用逻辑联词，也没有使用普通联词，只用逗号分开，这是为了避免混乱. 对此不要多加解释，学生只需知道方程有两个根即可.

例题5 解下列方程：

(1) $(3x-5)(x+\sqrt{2})=0$；

(2) $x^2-7x+12=0$.

解 (1) 由原方程得

$$3x-5=0 \quad 或 \quad x+\sqrt{2}=0.$$

解得 $$x=\frac{5}{3} \quad 或 \quad x=-\sqrt{2}.$$

所以，原方程的根是 $x_1=\frac{5}{3}, x_2=-\sqrt{2}$.

(2) 原方程可变形为

$$(x-4)(x-3)=0,$$

得 $$x-4=0 \quad 或 \quad x-3=0.$$

解得 $$x=4 \quad 或 \quad x=3.$$

所以，原方程的根是 $x_1=4, x_2=3$.

这个方程的右边为0，而左边可用十字相乘法分解因式.

由此可见，当一个一元二次方程的一边是零，而另一边的二次式易于分解成两个一次因式时，可用因式分解法来解这个一元二次方程.

例题6 解下列方程：

(1) $2x(x-2)=x^2+5$；

(2) $2x(2x+5)-(x-1)(2x+5)=0$.

解 (1) 原方程可变形为

$$x^2-4x-5=0.$$

把上面方程的左边分解因式，方程化为

$$(x-5)(x+1)=0,$$

得 $$x-5=0 \quad 或 \quad x+1=0.$$

解得 $$x=5 \quad 或 \quad x=-1.$$

所以，原方程的根是 $x_1=5, x_2=-1$.

先将这个方程变形，化成右边为0的形式；再看左边，可用十字相乘法分解因式.

(2) 把方程的左边分解因式，得

$$(2x+5)[2x-(x-1)]=0,$$

即 $$(2x+5)(x+1)=0.$$

得 $$2x+5=0 \quad 或 \quad x+1=0.$$

解得 $$x=-\frac{5}{2} \quad 或 \quad x=-1.$$

所以，原方程的根是 $x_1=-\frac{5}{2}, x_2=-1$.

观察这个方程，它的右边为0；左边可用提取公因式法分解因式.

第二节 一元二次方程的解法 31

例题 5

本题是用因式分解法解特殊的一元二次方程，让学生认识适宜用因式分解法来解的方程的基本特征.

可用因式分解法来解的这类一元二次方程的基本特征，可让学生进行归纳.

例题 6

引导学生扩展因式分解法的运用. 要指导学生把握用因式分解法来解的方程的基本特征.

题(1)强调要先将方程化为一般式，再看左边能否通过因式分解化为两个一次因式的乘积形式.

题(2)要求学生灵活运用因式分解的方法.

练习 17.2(2)

1. (1) $x_1=0, x_2=-4$;

(2) $x_1=1, x_2=-15$;

(3) $x_1=-\frac{1}{5}, x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

(4) $x_1=a, x_2=-b$;

(5) $x_1=0, x_2=-\frac{2}{3}$;

(6) $x_1=0, x_2=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

2. (1) $x_1=2, x_2=-1$;

(2) $x_1=6, x_2=2$;

(3) $x_1=2, x_2=1$;

(4) $x_1=-7, x_2=3$.

3. (1) $x_1=9, x_2=4$;

(2) $x_1=3, x_2=\frac{2}{7}$;

(3) $x_1=\frac{5}{2}, x_2=-\frac{4}{3}$;

(4) $x_1=x_2=3$.

4. (1) 正确;(2) 错误.等式右边为 1,不能直接用因式分解法来解.

【本课重点】

引进用配方法解一元二次方程,并让学生掌握配方法.

问题 4

通过问题引导学生探讨同一方程的不同解法,引进配方法.

练习 17.2(2)

1. (口答)说出下列方程的根:

(1) $x(x+4)=0$;　　(2) $(x-1)(x+15)=0$;

(3) $(5x+1)(2x-\sqrt{2})=0$;　　(4) $(x-a)(x+b)=0$;

(5) $12x^2+8x=0$;　　(6) $3x^2-\sqrt{2}x=0$.

2. 用因式分解法解下列方程:

(1) $x^2-x-2=0$;　　(2) $x^2-8x+12=0$;

(3) $x^2+2=3x$;　　(4) $x^2+4x=21$.

3. 用因式分解法解下列方程:

(1) $13x=x^2+36$;　　(2) $7x(x-3)-2(x-3)=0$;

(3) $3x(2x-5)-4(5-2x)=0$;　　(4) $x^2-6x+9=0$.

4. 下列方程的解法对不对?为什么?

(1) $x(3x+2)-6(3x+2)=0$.

解: $(3x+2)(x-6)=0$.

$3x+2=0$ 或 $x-6=0$.

解得 $x=-\frac{2}{3}$ 或 $x=6$.

所以 $x_1=-\frac{2}{3}, x_2=6$.

(2) $(x+3)(x-10)=1$.

解: $x+3=1$ 或 $x-10=1$.

解得 $x=-2$ 或 $x=11$.

所以 $x_1=-2, x_2=11$.

2. 一般的一元二次方程的解法

问题4

在上一节的例题 4(1)中,采用因式分解法解方程$x^2+8x=0$是比较简便的.试问:能用开平方法解这个方程吗?

$(x+4)^2$
$=x^2+2\cdot4\cdot x+4^2$
$=x^2+8x+16.$

分析　观察方程的左边 x^2+8x,它与$(x+4)^2$ 的展开式相差一个常数 16.如果在方程的两边同加上 16,那么方程$x^2+8x=0$可化成$(x+4)^2=16$.再利用开平方法,得 $x+4=4$ 或 $x+4=-4$.所以原方程的根是 $x_1=0, x_2=-8$.

在上面解方程的过程中,利用了两数和(差)的平方公式.把x^2+8x配成$(x+4)^2$ 时,实际上就是在方程两边同加上"一次项系数一半的平方".像这样通过添项(或拆项)配完全平方式的过程,简称"配方".

一般来说,方程 $x^2+px=0$ 的两边同加上 $\left(\frac{p}{2}\right)^2$,可化为 $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2$ 的形式,这时方程左边是关于 x 的完全平方式,右边是一个常数.

32 第十七章　一元二次方程

【注意事项】

在对问题 4 的分析过程中,要对如何配方进行学习指导,帮助学生理解配方的过程.

通过对比 x^2+8x 与$(x+4)^2$ 的展开式的各项和各项的系数,引出方程 $x^2+8x=0$ 左右两边都加上 16,即可把方程左边化成完全平方式$(x+4)^2$,方程右边是常数 16,从而得到配方的概念,这样可把不能直接用开平方法来解的方程化为可用开平方法来解的形式.

例题7 解下列方程：

(1) $x^2-2x=4$；

(2) $4x^2+12x-7=0$.

解 (1) 在原方程两边同加上“一次项系数一半的平方”，即$(-1)^2$，方程可变形为

$$(x-1)^2=5.$$

利用开平方法，得

$$x-1=\sqrt{5} \quad 或 \quad x-1=-\sqrt{5}.$$

解得 $$x=1+\sqrt{5} \quad 或 \quad x=1-\sqrt{5}.$$

所以，原方程的根是$x_1=1+\sqrt{5}$，$x_2=1-\sqrt{5}$.

(2) 原方程可变形为

$$4x^2+12x=7.$$

两边同除以4，得 $$x^2+3x=\frac{7}{4}.$$

再在两边同加上“一次项系数一半的平方”，即$\left(\frac{3}{2}\right)^2$，方程可化为

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=4.$$

利用开平方法，得

$$x+\frac{3}{2}=2 \quad 或 \quad x+\frac{3}{2}=-2.$$

解得 $$x=\frac{1}{2} \quad 或 \quad x=-\frac{7}{2}.$$

所以，原方程的根是$x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{7}{2}$.

像上面这样解一元二次方程的方法叫做**配方法**. 对于一般的一元二次方程，都可以用配方法来解.

解方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的一般步骤是：

(1) 通过移项、两边同除以二次项的系数，将原方程变形为$x^2+px=q$ (p、q是已知数)的形式.

(2) 通过方程两边同加上“一次项系数一半的平方”，将方程$x^2+px=q$的左边配成一个关于x的完全平方式，方程化为

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2+q.$$

(3) 当$\left(\frac{p}{2}\right)^2+q\geqslant 0$时，再利用开平方法解方程；当$\left(\frac{p}{2}\right)^2+q<0$时，原方程无实数根.

由$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，把c移到等式右边，再两边同除以a，得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

例题 7

帮助学生掌握配方的方法.

其中题(2)先把二次项的系数化为1，然后配方. 这样处理有利于学生进行解题操作和归纳用配方法解一元二次方程的一般步骤.

通过对实例的分析和思考，归纳出用配方法解一元二次方程的一般步骤.

【注意事项】

(1) 配方法以完全平方公式为基础，当二次项系数为1时，配方的关键步骤是“方程两边同时加上一次项系数一半的平方”. 对二次项系数不为1的一元二次方程，通常先把二次项系数化为1，然后再配方. 要让学生熟悉把代数式x^2+px加上一个适当的数，使之配成一个关于x的完全平方式.

(2) 配方法的教学是一个难点. 在教学中应设计好问题，鼓励学生积极探索，主动学习；要通过具体实例的讲解，帮助学生理解配方的过程，掌握关键步骤.

例题 8

本题方程中的二次项系数不是 1，常数项是分数，它表明了用配方法解一元二次方程的难度要求.

练习 17.2(3)

1. (1) 9，3；

(2) 16，4；

(3) $\dfrac{9}{16}$，$\dfrac{3}{4}$；

(4) $\dfrac{1}{25}$，$\dfrac{1}{5}$；

(5) $\dfrac{b^2}{4}$，$\dfrac{b}{2}$；

(6) $\dfrac{b^2}{4a^2}$，$\dfrac{b}{2a}$.

2. (1) $x_1=-4+3\sqrt{2}$，

$x_2=-4-3\sqrt{2}$；

(2) $x_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

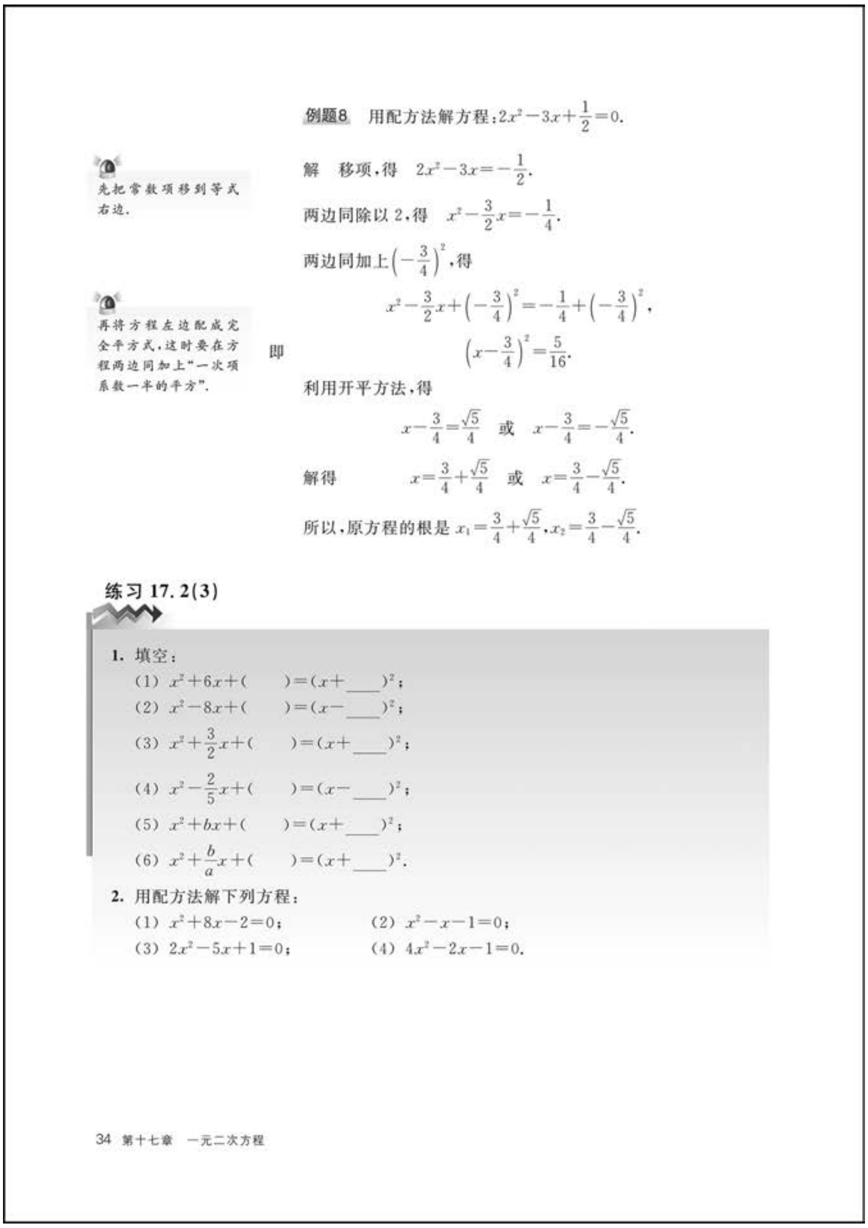
$x_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$；

(3) $x_1=\dfrac{5}{4}+\dfrac{\sqrt{17}}{4}$，

$x_2=\dfrac{5}{4}-\dfrac{\sqrt{17}}{4}$；

(4) $x_1=\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{5}}{4}$，

$x_2=\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.



例题8 用配方法解方程：$2x^2-3x+\frac{1}{2}=0$.

先把常数项移到等式右边.

解 移项，得 $2x^2-3x=-\frac{1}{2}$.

两边同除以 2，得 $x^2-\frac{3}{2}x=-\frac{1}{4}$.

两边同加上 $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$，得

再将方程左边配成完全平方式，这时要在方程两边同加上“一次项系数一半的平方”.

$$x^2-\frac{3}{2}x+\left(-\frac{3}{4}\right)^2=-\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{4}\right)^2,$$

即

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{5}{16}.$$

利用开平方法，得

$$x-\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{5}}{4} \quad 或 \quad x-\frac{3}{4}=-\frac{\sqrt{5}}{4}.$$

解得 $x=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}$ 或 $x=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}$.

所以，原方程的根是 $x_1=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}$，$x_2=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}$.

练习 17.2(3)

1. 填空：

(1) $x^2+6x+(\quad)=(x+\_\_\_)^2$；

(2) $x^2-8x+(\quad)=(x-\_\_\_)^2$；

(3) $x^2+\frac{3}{2}x+(\quad)=(x+\_\_\_)^2$；

(4) $x^2-\frac{2}{5}x+(\quad)=(x-\_\_\_)^2$；

(5) $x^2+bx+(\quad)=(x+\_\_\_)^2$；

(6) $x^2+\frac{b}{a}x+(\quad)=(x+\_\_\_)^2$.

2. 用配方法解下列方程：

(1) $x^2+8x-2=0$； (2) $x^2-x-1=0$；

(3) $2x^2-5x+1=0$； (4) $4x^2-2x-1=0$.

34 第十七章 一元二次方程

3. 一元二次方程的求根公式

我们知道，一元一次方程 $ax+b=0$（其中 a、b 是已知数，且 $a\neq0$）的根唯一存在，可用已知数 a、b 表示为 $x=-\frac{b}{a}$. 对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（其中 a、b、c 是已知数，且 $a\neq0$），它的根的情况怎样？能不能用已知数 a、b、c 来表示？

利用配方法，可以解任何一个一元二次方程，我们用配方法来研究这个问题.

原方程	$ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$
把常数项移到方程右边	$ax^2+bx=-c$
方程两边同除以二次项的系数	$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$
方程两边同加上“一次项系数一半的平方”，把左边配成完全平方式	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$
整理	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

对上面这个方程进行讨论

因为 $a\neq0$，所以 $4a^2>0$.

（1）当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，$\frac{b^2-4ac}{4a^2}\geqslant0$.

利用开平方法，得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

则 $\quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.（想一想，为什么？）

即 $\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

当 $a>0$ 时，$\sqrt{4a^2}=2a$，所以 $\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；当 $a<0$ 时，$\sqrt{4a^2}=-2a$，所以 $\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\mp\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

（2）当 $b^2-4ac<0$ 时，$\frac{b^2-4ac}{4a^2}<0$. 这时，在实数范围内，x 取任何值都不能使方程 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 左右两边的值相等，所以原方程没有实数根.

由上述讨论可以得到：

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，它有两个实数根：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

或表示为 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

这就是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的**求根公式**.

第二节 一元二次方程的解法 35

【本课重点】

引导学生经历一元二次方程求根公式的导出过程，掌握用公式法解一元二次方程.

配方法是推导求根公式的思考依据；通过求根公式推导又进一步巩固了配方法，而且把配方法运用到解一般式方程.

这里简明表述了配方法解一元二次方程的步骤和过程，最后得出了求根公式. 可采用师生共同讨论的方式进行教学；同时教师要适当讲解，必要时可借助于具体实例进行解说.

【注意事项】

（1）对于求根公式的推导过程，只要求学生了解. 在推导过程中，需指出为什么要对 b^2-4ac 的正负性进行讨论. 当 $b^2-4ac<0$ 时，涉及负数没有平方根的概念，要求学生能理解.

（2）当方程化为 $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ 时，右边可表示为 $\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}$；在将 $4a^2$ 开方时，对 a 不需要进行讨论. 这是因为当 $a>0$ 时，$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；当 $a<0$ 时，$x+\frac{b}{2a}=\mp\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，其结果是一致的.

（3）当 $b^2-4ac=0$ 时，通常直接求出 $-\frac{b}{2a}$ 的值，然后写出一元二次方程的相等两根.

在求根公式中，如果 $b^2-4ac=0$，那么 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$，即方程有两个相等的实数根.

在解一元二次方程时，只要把方程化为一般式

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0),$$

如果 $b^2-4ac\geqslant 0$，把 a、b、c 的值代入求根公式，就可以求得方程的实数根；如果 $b^2-4ac<0$，那么原方程无实数根. 这种解一元二次方程的方法称为**公式法**.

例题9 用公式法解下列方程：

(1) $5x^2+6x+1=0$；

(2) $x^2-2=2\sqrt{2}x$.

解 (1) 原方程中，$a=5$，$b=6$，$c=1$.

$$b^2-4ac=6^2-4\times5\times1=16.$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{16}}{2\times5}=\frac{-6\pm4}{10},$$

即

$$x=-\frac{1}{5}\quad 或\quad x=-1.$$

所以，原方程的根是 $x_1=-\frac{1}{5}$，$x_2=-1$.

(2) 把原方程化成一般式，得

$$x^2-2\sqrt{2}x-2=0.$$

其中，$a=1$，$b=-2\sqrt{2}$，$c=-2$.

$$b^2-4ac=8-4\times1\times(-2)=16.$$

$$x=\frac{-(-2\sqrt{2})\pm\sqrt{16}}{2\times1}=\frac{2\sqrt{2}\pm4}{2},$$

即

$$x=\sqrt{2}+2\quad 或\quad x=\sqrt{2}-2.$$

所以，原方程的根是 $x_1=\sqrt{2}+2$，$x_2=\sqrt{2}-2$.

用公式法解一元二次方程时，应根据方程的一般式确定 a、b、c 的值，这里特别要注意 a、b、c 的符号.

例题10 用公式法解下列方程：

(1) $x^2-2(\sqrt{5}x-3)=1$；

(2) $\sqrt{2}(x^2-1)=x(x-2)+1$.

解 (1) 把原方程化成一般式，得

$$x^2-2\sqrt{5}x+5=0.$$

其中，$a=1$，$b=-2\sqrt{5}$，$c=5$.

$$b^2-4ac=(-2\sqrt{5})^2-4\times1\times5=0.$$

$$-\frac{b}{2a}=\frac{-(-2\sqrt{5})}{2\times1}=\sqrt{5}.$$

36 第十七章 一元二次方程

例题 9

展示用公式法解一元二次方程的过程，帮助学生学习和掌握公式法.

例题 10

着重指出用公式法解一元二次方程时，一定要先把方程化为一般式，并要注意过程的表达和计算的正确性.

解题(1)求得 $\Delta=0$ 后，就直接计算 $-\frac{b}{2a}$ 的值，由此写出方程的根.

【注意事项】

(1) 用公式法解一元二次方程，要控制难度. 整体的要求是在解题时不出现复杂计算，并注意 b^2-4ac 的值不要出现无理数.

(2) 要让学生明确用公式法解一元二次方程的一般步骤，可归纳如下：

① 把方程化成一般形式；

② 确定方程中 a、b、c 的值(特别要注意符号)；

③ 求出 b^2-4ac 的值；

④ 在 $b^2-4ac\geqslant 0$ 的前提下，把 a、b 及 b^2-4ac 的值代入公式，再进行计算(实际上就是求代数式 $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 的值)；

⑤ 正确表示求得的两个根.

所以，原方程的根是 $x_1=x_2=\sqrt{5}$.

(2) 把原方程化成一般式，得

$$(\sqrt{2}-1)x^2+2x-\sqrt{2}-1=0.$$

其中，$a=\sqrt{2}-1$，$b=2$，$c=-\sqrt{2}-1$.

$$b^2-4ac=2^2+4(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=8.$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2(\sqrt{2}-1)}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)}=\frac{-1\pm\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1},$$

即 $x=1$ 或 $x=-3-2\sqrt{2}$.

所以，原方程的根是 $x_1=1$，$x_2=-3-2\sqrt{2}$.

$\frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=1$；

$\frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

$=\frac{-(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$

$=-(\sqrt{2}+1)^2$

$=-3-2\sqrt{2}$.

练习 17.2(4)

1. 求下列方程中 b^2-4ac 的值：

   (1) $x^2-5x+2=0$；　　(2) $3x^2+x=1$；

   (3) $6x-5=3x^2$；　　(4) $\sqrt{2}x^2=\sqrt{3}x+2\sqrt{2}$.

2. 用公式法解下列方程：

   (1) $2x^2+x-6=0$；　　(2) $x^2-2\sqrt{3}x-4=0$；

   (3) $\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x=6$；　　(4) $2x^2+3x+10=8x-1$.

3. 用公式法解下列方程：

   (1) $x^2+2=2\sqrt{2}x$；　　(2) $9x^2-12x+4=0$；

   (3) $x(x-5)=(2x-3)^2-6$；　　(4) $y-\frac{y^2-1}{2}=-\frac{1}{2}$.

解一元二次方程，公式法是通用的方法，它是利用配方法总结出来的. 有一些特殊的一元二次方程，采用开平方法或因式分解法显得比较简便.

例题11 用适当的方法解下列方程：

(1) $x^2+(\sqrt{3}+1)x=0$；

(2) $(x+3)(x-5)=1$；

(3) $x(x-6)=2(x-8)$；

(4) $\frac{1}{4}(x+3)^2=1$.

解 (1) 把原方程的左边分解因式，方程化为

$$x(x+\sqrt{3}+1)=0,$$

边款中对例题 10(2)的说明，是帮助学生掌握根的表示形式的化简过程. 对学习有困难的学生要给予必要的指导.

练习 17.2(4)

1. (1) 17；(2) 13；

(3) -24；(4) 19.

2. (1) $x_1=-2$，$x_2=\frac{3}{2}$；

(2) $x_1=\sqrt{3}+\sqrt{7}$，

$x_2=\sqrt{3}-\sqrt{7}$；

(3) $x_1=\frac{1+\sqrt{145}}{6}$，

$x_2=\frac{1-\sqrt{145}}{6}$；

(4) 无实数根.

3. (1) $x_1=x_2=\sqrt{2}$；

(2) $x_1=x_2=\frac{2}{3}$；

(3) $x_1=\frac{7+\sqrt{13}}{6}$，

$x_2=\frac{7-\sqrt{13}}{6}$；

(4) $y_1=1+\sqrt{3}$，

$y_2=1-\sqrt{3}$.

【本课重点】

使学生在掌握一元二次方程的四种解法的基础上，会选择适当的方法来解方程.

例题 11

对解一元二次方程的基本方法进行复习巩固，并要求学生根据方程的不同特点灵活运用各种解法.

在边款中给出了如何选用解法的思考依据. 在教学中，要让学生在解方程的具体实践中体会如何合理选用解法，从中获得体验和经验.

例题 12

本题解方程的过程中，涉及去分母、去括号的步骤，更具一般性.

> 这个方程的左边容易分解因式，所以选择因式分解法.

得 $$x=0 \quad 或 \quad x+\sqrt{3}+1=0.$$

解得 $$x=0 \quad 或 \quad x=-\sqrt{3}-1.$$

所以，原方程的根是 $x_1=0$，$x_2=-\sqrt{3}-1$.

(2) 原方程可变形为

$$x^2-2x-16=0.$$

> 方程的右边是1而不是零，先将方程整理后再观察，可见不宜用因式分解法，所以选择公式法.

其中，$a=1$，$b=-2$，$c=-16$.

$$b^2-4ac=(-2)^2-4\times(-16)=4+64=68.$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{68}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{17}}{2}=1\pm\sqrt{17},$$

即 $$x=1+\sqrt{17} \quad 或 \quad x=1-\sqrt{17}.$$

所以，原方程的根是 $x_1=1+\sqrt{17}$，$x_2=1-\sqrt{17}$.

(3) 原方程可变形为

$$x^2-8x+16=0,$$

即 $$(x-4)^2=0.$$

所以，原方程的根是 $x_1=x_2=4$.

(4) $\frac{1}{4}(x+3)^2=1$.

方法一（用开平方法）：

原方程可变形为 $(x+3)^2=4$.

利用开平方法，得 $x+3=2$ 或 $x+3=-2$.

解得 $x=-1$ 或 $x=-5$.

所以，原方程的根是 $x_1=-1$，$x_2=-5$.

> 解一元二次方程时，如能注意方法的选择，解题过程可能会简便些.

方法二（用因式分解法）：

原方程可变形为 $(x+3)^2-4=0$.

把方程左边分解因式，方程化为

$$[(x+3)+2][(x+3)-2]=0,$$

得 $$x+5=0 \quad 或 \quad x+1=0.$$

解得 $$x=-5 \quad 或 \quad x=-1.$$

所以，原方程的根是 $x_1=-5$，$x_2=-1$.

例题12 解下列方程：

(1) $-x(x-4)=2(x-4)$；

(2) $\frac{x^2-2}{3}+\frac{x}{2}=x$.

解 (1) 由 $-x(x-4)=2(x-4)$，

整理，得 $2(x-4)+x(x-4)=0$.

把方程左边分解因式，方程化为

$$(x-4)(2+x)=0,$$

38 第十七章 一元二次方程

得 $x-4=0$ 或 $2+x=0$.

解得 $x=4$ 或 $x=-2$.

所以,原方程的根是 $x_1=4, x_2=-2$.

(2) 由 $\frac{x^2-2}{3}+\frac{x}{2}=x$,

去分母,得 $2(x^2-2)+3x=6x$.

整理,得 $2x^2-3x-4=0$.

其中,$a=2, b=-3, c=-4$.

$$b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times(-4)=41.$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{41}}{2\times2}=\frac{3\pm\sqrt{41}}{4},$$

即 $x=\frac{3+\sqrt{41}}{4}$ 或 $x=\frac{3-\sqrt{41}}{4}$.

所以,原方程的根是 $x_1=\frac{3+\sqrt{41}}{4}, x_2=\frac{3-\sqrt{41}}{4}$.

例题13 用计算器求 $x^2-2x-1=0$ 的近似根(精确到 0.1).

解 原方程中,$a=1, b=-2, c=-1$.

$$b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-1)>0.$$

由求根公式,得

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\times1\times(-1)}}{2\times1}.$$

用计算器计算,得原方程的根是

$$x_1\approx2.4, x_2\approx-0.4.$$

练习 17.2(5)

1. 解下列方程:
   (1) $2x^2-6=0$;　(2) $27=4x^2$;
   (3) $3x^2=5x$;　(4) $x(x-1)+3(x-1)=0$;
   (5) $(x+1)^2=2$;　(6) $3(x-7)^2=2(7-x)$.
2. 用适当的方法解下列方程:
   (1) $\frac{1}{2}(x+2)^2=4$;　(2) $x^2-2x-8=0$;
   (3) $(2x-3)^2=x^2$;　(4) $x(x+8)=16$.
3. (1) 求当 x 为何值时,二次式 $3x^2-6$ 的值等于 21;
   (2) 求当 x 为何值时,二次式 $3x^2-6$ 的值与 $x-2$ 的值相等.
4. 用计算器求下列方程的近似根(精确到 0.1):
   (1) $2x^2-\sqrt{3}x-3=0$;　(2) $\sqrt{2}x^2-3x-2\sqrt{5}=0$.

例题 13

本题是解方程与计算器的应用结合,帮助学生掌握计算器的基本操作和解题过程的基本表达.

要对学生进行计算器的操作指导.

练习 17.2(5)

1. (1) $x_1=\sqrt{3}, x_2=-\sqrt{3}$;

(2) $x_1=\frac{3}{2}\sqrt{3}$,

$x_2=-\frac{3}{2}\sqrt{3}$;

(3) $x_1=0, x_2=\frac{5}{3}$;

(4) $x_1=-3, x_2=1$;

(5) $x_1=\sqrt{2}-1$,

$x_2=-\sqrt{2}-1$;

(6) $x_1=7, x_2=\frac{19}{3}$.

2. (1) $x_1=-2+2\sqrt{2}$,

$x_2=-2-2\sqrt{2}$;

(2) $x_1=4, x_2=-2$;

(3) $x_1=1, x_2=3$;

(4) $x=-4\pm4\sqrt{2}$.

3. (1) $x=\pm3$;

(2) $x=\frac{4}{3}$,或 $x=-1$.

4. (1) $x_1\approx1.7, x_2\approx-0.9$;

(2) $x_2\approx3.1, x_2\approx-1.0$.

【本课重点】

让学生经历一元二次方程根的判别式的导出过程，会根据根的判别式判断方程的根的情况.

在一元二次方程的求根公式基础上，指明 b^2-4ac 的值与一元二次方程的根的关系.

17.3 一元二次方程根的判别式

对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，不解这个方程，能否判断这个方程解的情况？是否能从这个方程的系数组成的代数式中找到判断依据？

我们知道，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 可以化成方程

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

这个方程左边是一个完全平方式，可知对于任意实数 x，左边的值总是非负的. 于是断定，如果方程右边的值为非负数，那么这个方程有实数解；如果方程右边的值为负数，那么这个方程没有实数解.

因为 $4a^2>0$，所以方程右边的值与 b^2-4ac 的值同号(或同时为0). 由此可见，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的实数根是否存在，以及存在时两根是否相等，可依据 b^2-4ac 的值与 0 的大小关系进行判断.

我们把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的判别式，通常用符号“Δ”(读作/'deltə/)来表示，记作

$$\Delta=b^2-4ac.$$

利用根的判别式，不必解方程，就可以判断一个一元二次方程是否有实数根，以及有实数根时两根是否相等.

> 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$，
> 当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；
> 当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根；
> 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根.

上述判断反过来说，也是正确的. 即

> 当方程有两个不相等的实数根时，$\Delta>0$；
> 当方程有两个相等的实数根时，$\Delta=0$；
> 当方程没有实数根时，$\Delta<0$.

例题 1

这是一元二次方程根的判别式的基本运用.

不解方程，判别一元二次方程根的情况，应先把方程化为一般式，然后正确求出 b^2-4ac 的值，最后进行判别.

例题1 不解方程，判断下列方程的根的情况：

(1) $4x^2-5x-3=0$；

(2) $2x^2+4x+3=0$；

(3) $2x^2+3=2\sqrt{6}x$.

解 (1) 因为 $\Delta=(-5)^2-4\times4\times(-3)=73>0$，所以此方程有两个不相等的实数根.

(2) 因为 $\Delta=4^2-4\times2\times3=-8<0$，所以此方程没有实数根.

【教学目标】

(1) 经历一元二次方程的根的判别式的概括过程，会根据根的判别式判断方程的根的情况，会根据方程的根的情况确定方程中一个字母系数的取值范围.

(2) 通过从具体到抽象的认识活动，锻炼观察、分析、归纳、概括能力.

【注意事项】

(1) 关于“根据方程的根的情况判断判别式的值的符号”，课本中指出了它是正确的，但没有给出这个结论的推导过程，这是为了降低学习的难度. 对这个结论的正确性进行说理，可用“反证法”(不作为教学要求)：假设一个一元二次方程有两个不相等的实数根时 $\Delta\leqslant0$，那么由 $\Delta\leqslant0$ 可知这个方程有两个相等的实数根或没有实数根，与所设一元二次方程有两个不相等的实数根相矛盾，所以当一个一元二次方程有两个不相等的实数根时一定有 $\Delta>0$. 另外两种情况可同样说理.

(2) 在一元二次方程的根的判别式的教学中，可对学生进行辩证唯物主义观点的教育. 一元二次方程的系数与方程的根的分布两者互相制约，体现了根与系数的一种联系.

(3) 把原方程变形为

$$2x^2-2\sqrt{6}x+3=0.$$

因为 $\Delta=(-2\sqrt{6})^2-4\times2\times3=0$，
所以此方程有两个相等的实数根.

例题2 关于 x 的方程 $x^2+(m-1)x-m=0$(其中 m 是实数)一定有实数根吗？为什么？

解 $\Delta=(m-1)^2-4\cdot1\cdot(-m)$
$=m^2+2m+1=(m+1)^2$.

因为 m 是实数，所以 $(m+1)^2\geqslant0$，即 $\Delta\geqslant0$.
所以此方程一定有实数根.

练习 17.3(1)

1. 不解方程，判断下列方程的根的情况：

(1) $64x^2-5x-4=0$；　(2) $\frac{1}{4}x^2-3x+9=0$；

(3) $0.2x^2+0.6x+0.05=0$；　(4) $3x(x-2)=-7$；

(5) $9x^2=4(3x-1)$；　(6) $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x+1=0$.

2. 关于 x 的方程 $mx^2+(m+1)x+1=0$(其中 $m\neq0$)一定有实数根吗？为什么？

例题3 当 m 取何值时，关于 x 的方程

$$x^2+(m-2)x+\frac{1}{4}m^2-1=0$$

(1) 有两个不相等的实数根？
(2) 有两个相等的实数根？
(3) 没有实数根？

解 $\Delta=(m-2)^2-4\left(\frac{1}{4}m^2-1\right)$
$=-4m+8$.

(1) 当 $-4m+8>0$，即 $m<2$ 时，方程有两个不相等的实数根.
(2) 当 $-4m+8=0$，即 $m=2$ 时，方程有两个相等的实数根.
(3) 当 $-4m+8<0$，即 $m>2$ 时，方程没有实数根.

例题4 当 k 为何值时，关于 x 的方程

$$x^2-4kx+(2k-1)^2=0$$

有实数根？并求出这时方程的根(用含 k 的代数式表示).

一元二次方程有实数根，包括有不等两根或相等两根的情况.

第二节 一元二次方程的解法 41

例题 2

本题是判断含字母系数的方程的根的情况，含有代数证明的要求.

练习 17.3(1)

1. (1) 有两个不相等的实数根；(2) 有两个相等的实数根；(3) 有两个不相等的实数根；(4) 无实数根；(5) 有两个相等的实数根；(6) 无实数根.

2. 一定有实数根. 因为 $m\neq0$，$\Delta=(m+1)^2-4m=(m-1)^2\geqslant0$.

【本课重点】

通过举例，使学生学会根据方程的根的情况确定方程中一个字母系数的取值范围，并进一步探求方程的根.

例题 3

本题是已知一元二次方程根的情况，由判别式应满足的条件确定方程中字母系数的取值范围.

【注意事项】

(1) 在例题 2 中说明了判断含字母系数的方程的有实数根的基本过程：先求出判别式 Δ；然后推导出 $\Delta\geqslant0$，再作出判断. 对根的其他情况的判断过程类似. 由于受学生现有的不等式知识的限制，所以对这类问题的要求不能过高，通常是利用完全平方式或直接比较大小的方法来确定 Δ 的符号情况.

(2) 练习 17.3(1)第 2 题给出了条件 $m\neq0$，是为了降低难度. 本章对于含字母系数的方程的实根情况的讨论，一般要求在方程的次数确定的情况下进行，以后再适当提高.

例题 4

本题是在已知一元二次方程有实数根的情况下，不仅要确定方程中字母系数的取值范围，还要求出方程的根. 涉及解含字母系数的方程的要求.

例题 5

本题指出先要把一元二次方程化为一般式，并再次强调一元二次方程有两个等根的表示方式.

练习 17.3(2)

1. $k=-1$.

2. （1）$k>\dfrac{5}{4}$；

（2）$k=\dfrac{5}{4}$；

（3）$k<\dfrac{5}{4}$；

（4）$k=2$.

当 $\Delta=0$ 即 $k=\dfrac{1}{4}$ 时，方程有两个相等的实数根：$x_1=x_2=\dfrac{1}{2}$.

解 $\Delta=(-4k)^2-4(2k-1)^2$
$=16k-4$.

当 $16k-4\geqslant 0$，即 $k\geqslant\dfrac{1}{4}$ 时，方程有实数根.

这时，方程的根是

$$x=\frac{4k\pm\sqrt{16k-4}}{2},$$

即 $$x_1=2k+\sqrt{4k-1},\ x_2=2k-\sqrt{4k-1}.$$

例题5 已知关于 x 的方程 $4x^2-(k+2)x+k=1$ 有两个相等的实数根，求 k 的值及这时方程的根.

解 把原方程变形为

$$4x^2-(k+2)x+k-1=0.$$

$$\begin{aligned}\Delta&=[-(k+2)]^2-4\cdot 4\cdot(k-1)\\&=k^2+4k+4-16k+16\\&=k^2-12k+20.\end{aligned}$$

因为方程有两个相等的实数根，所以 $\Delta=0$.

由 $$k^2-12k+20=0,$$

得 $$(k-2)(k-10)=0.$$

解得 $$k=2\quad 或\quad k=10.$$

把 $k=2$ 代入原方程，得

$$4x^2-4x+1=0,$$

即 $$(2x-1)^2=0.$$

这时原方程的根是 $x_1=x_2=\dfrac{1}{2}$.

把 $k=10$ 代入原方程，得

$$4x^2-12x+9=0,$$

即 $$(2x-3)^2=0.$$

这时原方程的根是 $x_1=x_2=\dfrac{3}{2}$.

练习 17.3(2)

1. 当 k 取何值时，关于 x 的方程 $x^2-k(x+1)+x=0$ 有两个相等的实数根？
2. 已知关于 x 的方程 $x^2+2kx+(k-2)^2=x$. 当 k 取何值时，此方程
   （1）有两个不相等的实数根？
   （2）有两个相等的实数根？
   （3）没有实数根？
   （4）有一个根为 0？

42 第十七章 一元二次方程

【注意事项】

例题 4 中要求在方程有实数根的前提下解含字母系数的方程，这对许多学生可能会有困难. 在教学中，一方面要加强学习指导，帮助学生体会字母代替数的含义；另一方面要注意这里只是让学生初步体验，以后还将安排学生学习.

Yiyuanercifangcheng De Yingyong

第三节 一元二次方程的应用

17.4 一元二次方程的应用

1. 二次三项式的因式分解

我们曾经在有理数范围内讨论过多项式的因式分解问题. 例如,下列二次多项式的因式分解:

(1) $x^2-4=(x+2)(x-2)$;

(2) $x^2+4x-12=(x+6)(x-2)$;

(3) $2x^2+4x-6=2(x^2+2x-3)=2(x+3)(x-1)$.

但是,对于有些二次多项式,如 x^2-3 这样简单的二次二项式,在有理数范围内却不能分解因式.

而在实数范围内,这个二次二项式可以分解因式:

$$x^2-3=x^2-(\sqrt{3})^2=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}).$$

又如,$9x^2-5=(3x)^2-(\sqrt{5})^2=(3x+\sqrt{5})(3x-\sqrt{5})$.

当 m、n 为正数时,
$mx^2-n=(\sqrt{m}x+\sqrt{n})\cdot(\sqrt{m}x-\sqrt{n})$.

现在,我们在实数范围内讨论二次三项式的因式分解.

在上面(2)(3)两例中,可以看出 $x^2+4x-12=0$ 的两根是 $x_1=-6$,$x_2=2$;$2x^2+4x-6=0$ 的两根是 $x_1=-3$,$x_2=1$.

一般来说,如果二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq0)$ 通过因式分解,得

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

那么,$ax_1^2+bx_1+c=0$,$ax_2^2+bx_2+c=0$. 所以,$x=x_1$,$x=x_2$ 都是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根.

在二次三项式的分解式中,两个一次式(一次项系数为 1)的常数项,分别是这个二次三项式相应方程的实数根的相反数.

思考

对二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq0)$ 进行因式分解,是否可以通过求一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根来解决?

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个实数根:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

那么写出代数式 $a(x-x_1)(x-x_2)$,得

$$a(x-x_1)(x-x_2)=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2].$$

因为 $$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a},$$

第三节 一元二次方程的应用 43

【本课重点】

使学生理解二次三项式的分解式与一元二次方程的根之间的联系;学会通过求一元二次方程的根在实数范围内将二次三项式分解因式.

通过具体例子,先把二次三项式的因式分解由有理数范围扩大到实数范围;然后引导学生思考,建立起分解式与一元二次方程根之间的联系.

思考

引导学生对二次三项式的一般形式进行研究,归纳得到二次三项式因式分解的方法.

【教学目标】

(1) 知道二次三项式的因式分解与一元二次方程的根之间的联系;会通过求一元二次方程的根,在实数范围内将二次三项式分解因式.

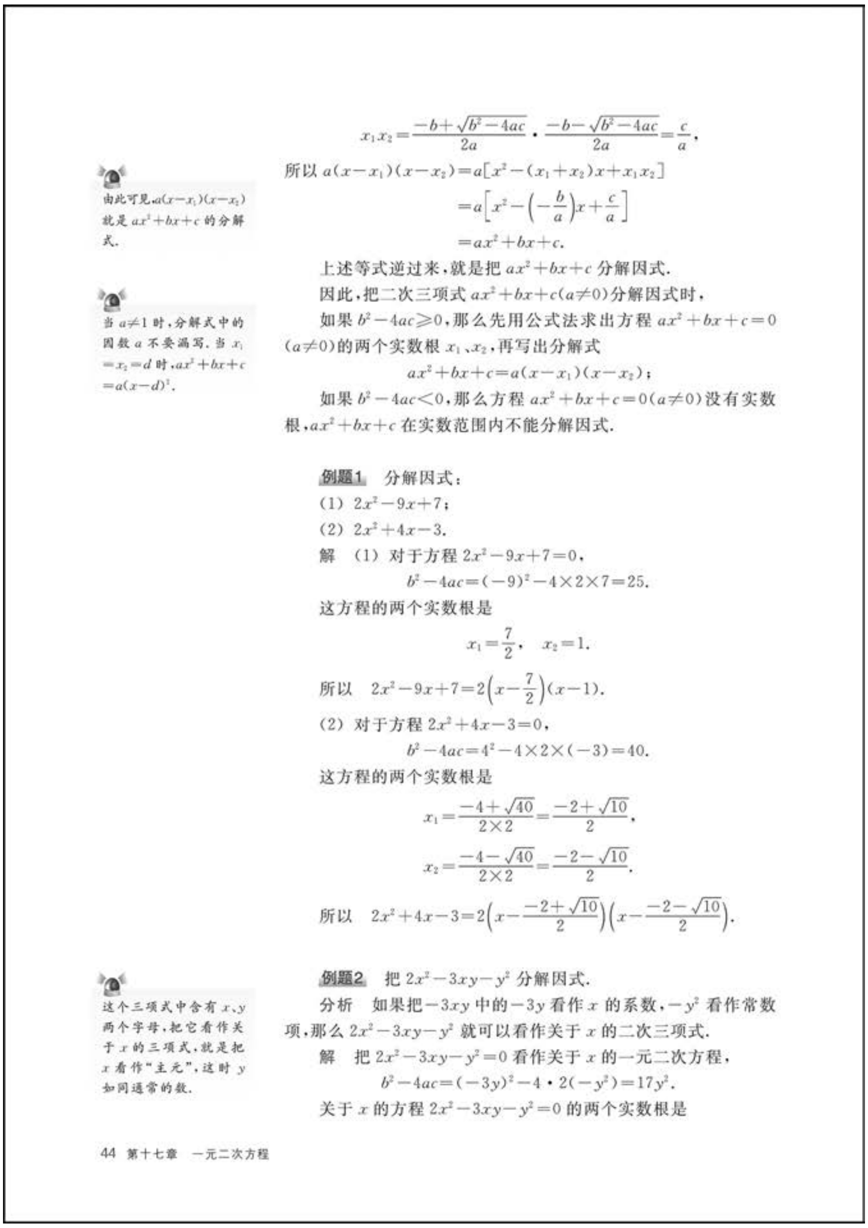
(2) 会分析实际问题中的数量关系和列一元二次方程解简单的应用题.

(3) 在应用一元二次方程解决实际问题的活动中,增强数学应用意识,体会数学的价值,激发学习数学的兴趣.

【注意事项】

两个"边款"中的概括,指出了 mx^2-n 和 ax^2+bx+c 在实数范围内可分解时,它们的分解式的一般结论. 要结合具体例子帮助学生理解,特别要强调获得结论的前提条件,如第一个"边款"中的 m、n 为正数;第二个"边款"中指明分解式的两个一次式的一次项系数为 1.

由于学生还没有学习一元二次方程的根与系数关系定理，所以导出二次三项式的分解式的思路采用了构造法．先写出代数式 $a(x-x_1)(x-x_2)$，通过计算得 $a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2+bx+c$；再将过程逆过来，得到 ax^2+bx+c 的分解式．然后，归纳出二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq0)$ 分解因式的一般方法．



$$x_1x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{c}{a}.$$

由此可见，$a(x-x_1)(x-x_2)$ 就是 ax^2+bx+c 的分解式．

所以 $a(x-x_1)(x-x_2)=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]$

$$=a\left[x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}\right]$$

$$=ax^2+bx+c.$$

上述等式逆过来，就是把 ax^2+bx+c 分解因式．

当 $a\neq1$ 时，分解式中的因数 a 不要漏写．当 $x_1=x_2=d$ 时，$ax^2+bx+c=a(x-d)^2$．

因此，把二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq0)$ 分解因式时，

如果 $b^2-4ac\geqslant0$，那么先用公式法求出方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的两个实数根 x_1、x_2，再写出分解式

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2);$$

如果 $b^2-4ac<0$，那么方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 没有实数根，ax^2+bx+c 在实数范围内不能分解因式．

例题1 分解因式：

(1) $2x^2-9x+7$；

(2) $2x^2+4x-3$．

解 (1) 对于方程 $2x^2-9x+7=0$，

$$b^2-4ac=(-9)^2-4\times2\times7=25.$$

这方程的两个实数根是

$$x_1=\frac{7}{2},\quad x_2=1.$$

所以 $2x^2-9x+7=2\left(x-\frac{7}{2}\right)(x-1)$．

(2) 对于方程 $2x^2+4x-3=0$，

$$b^2-4ac=4^2-4\times2\times(-3)=40.$$

这方程的两个实数根是

$$x_1=\frac{-4+\sqrt{40}}{2\times2}=\frac{-2+\sqrt{10}}{2},$$

$$x_2=\frac{-4-\sqrt{40}}{2\times2}=\frac{-2-\sqrt{10}}{2}.$$

所以 $2x^2+4x-3=2\left(x-\frac{-2+\sqrt{10}}{2}\right)\left(x-\frac{-2-\sqrt{10}}{2}\right)$．

例题2 把 $2x^2-3xy-y^2$ 分解因式．

这个三项式中含有 x、y 两个字母，把它看作关于 x 的三项式，就是把 x 看作"主元"，这时 y 如同通常的数．

分析 如果把 $-3xy$ 中的 $-3y$ 看作 x 的系数，$-y^2$ 看作常数项，那么 $2x^2-3xy-y^2$ 就可以看作关于 x 的二次三项式．

解 把 $2x^2-3xy-y^2=0$ 看作关于 x 的一元二次方程，

$$b^2-4ac=(-3y)^2-4\cdot2(-y^2)=17y^2.$$

关于 x 的方程 $2x^2-3xy-y^2=0$ 的两个实数根是

44 第十七章 一元二次方程

例题 1

帮助学生掌握利用求根公式对二次三项式分解因式的方法和过程表达．

本题的式中只含一个字母．

例题 2

本题是对关于 x、y 的二次齐次式因式分解．

【注意事项】

(1) 学生对表达式 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ 导出过程的理解可能困难一些，要耐心引导．

(2) 学生对方程变形和恒等变形这两者容易混淆．如在解方程时，学生已习惯把 $2x^2+6x-4=0$ 化为 $x^2+3x-2=0$，于是误认为代数式 $2x^2+6x-4=x^2+3x-2$．在教学中要强调它们是两种不同的变形．

(3) 在二次三项式分解因式中，学生有时会犯以下错误：如由 $ax^2+bx+c=0$ 的两根是 x_1 和 x_2，得 $ax^2+bx+c=a(x+x_1)(x+x_2)$；或 $ax^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)$．前一种错误是符号出错，后一种错误是漏乘二次项系数．可通过对分解式导出过程的分析和由分解式到原式的验算，指出错误，及时纠正．

$$x=\frac{3y\pm\sqrt{17y^2}}{2\times2}=\frac{3y\pm\sqrt{17}y}{4}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}y,$$

即 $$x_1=\frac{3+\sqrt{17}}{4}y,\quad x_2=\frac{3-\sqrt{17}}{4}y.$$

所以 $2x^2-3xy-y^2=2\left(x-\frac{3+\sqrt{17}}{4}y\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{17}}{4}y\right)$.

想一想

如果把 $2x^2-3xy-y^2$ 看作关于 y 的二次三项式，那么分解因式的结果是什么？

练习 17.4(1)

1. 在实数范围内分解因式：
   (1) $x^2-8=$________________；
   (2) $4x^2-7=$________________；
   (3) $x^2+3x-28=$________________；
   (4) $x^2-11x+30=$________________.
2. 在实数范围内分解因式：
   (1) x^2+4x+1；　　(2) $2x^2+3x-1$；
   (3) $3x^2-6x+1$；　　(4) $6x^2+\sqrt{3}x-3$.
3. 在实数范围内分解因式：
   (1) $x^2-2ax-a^2$；　　(2) $2x^2-8xy+5y^2$.

2. 实际问题

现在我们来解决 17.1 节开头提出的问题：

一块长方形绿地的面积为 1 200 平方米，并且长比宽多 10 米，那么长和宽各为多少米？

解：设这块长方形绿地的宽为 x 米，根据题意，得方程

$$x(x+10)=1\,200.$$

整理，得 $$x^2+10x-1\,200=0,$$

即 $$(x-30)(x+40)=0.$$

解得 $$x_1=30, x_2=-40.$$

负数根不符合实际意义，应舍去. 所以 $x=30$.

$$x+10=40.$$

答：绿地的长和宽分别是 40 米和 30 米.

列方程解应用题时，要注意检验方程的根是否符合实际意义.

第三节　一元二次方程的应用　45

想一想

引导学生进一步看到，式中的“主元”选择不同，二次三项式因式分解的结果有不同的表达形式.

练习 17.4(1)

1. (1) $(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})$；
(2) $(2x+\sqrt{7})(2x-\sqrt{7})$；
(3) $(x+7)(x-4)$；
(4) $(x-5)(x-6)$.

2. (1) $(x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3})$；
(2) $2\left(x-\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x+\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)$；
(3) $3\left(x-\frac{3+\sqrt{6}}{3}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$；
(4) $6\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. (1) $(x-a+\sqrt{2}a)(x-a-\sqrt{2}a)$；
(2) $2\left(x-\frac{4+\sqrt{6}}{2}y\right)\left(x-\frac{4-\sqrt{6}}{2}y\right)$.

【本课重点】

使学生掌握一些实际问题中的基本数量关系，体会分析问题的方法，会列出一元二次方程解简单的实际问题，并从中体会一元二次方程的应用.

【注意事项】

在例题 2 因式分解的操作过程中，要把其中一个字母看作通常的数，化归为例题 1 的形式. 这时，求相应的一元二次方程的根及其表达是教学的难点，要加强学习指导.

“边款”中提示可选两个字母之一为“主元”，这是一种数学思想，要让学生体会.

例题 3

本题设计有 3 个小题，使问题表现出一定的开放性，可组织学生讨论.

铁栅栏长 120 米是固定不变的，但用这些材料围成长方形仓库，其面积大小有不同；而面积大小的变化，又限制在一定的范围内. 要让学生体会怎样列出方程来求解；怎样解释方程的根的实际意义. 还可以提出，所围仓库的最大面积是多少？留给学生一个悬念.

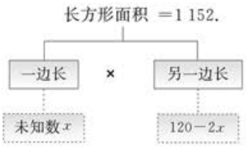
例题3 某建筑工程队利用工地一段 100 米长的旧墙，用 120 米长的铁栅栏靠墙围一个所占地面为长方形的临时仓库，铁栅栏只围三边. 按下列要求，分别求长方形的两条邻边的长.

(1) 长方形的面积是 1 152 平方米；

(2) 长方形的面积是 1 800 平方米；

(3) 长方形的面积是 2 000 平方米.

分析　先看第(1)题，根据题意，可以得到等式



第(2)(3)题类似.

解　设长方形的一条边长为 x 米，则另一条边长为 $(120-2x)$ 米.

(1) 根据题意，得方程

$$(120-2x)x=1\,152.$$

整理，得 $x^2-60x+576=0.$

解得 $x_1=12,\ x_2=48.$

经检验，x_1、x_2 都符合实际意义.

当 $x=12$ 时，$120-2x=96$；

当 $x=48$ 时，$120-2x=24$.

答：长方形相邻两边的长分别是 96 米和 12 米，或 24 米和 48 米.

(2) 根据题意，得方程

$$(120-2x)x=1\,800.$$

整理，得 $x^2-60x+900=0.$

解得 $x_1=x_2=30.$

经检验，$x=30$ 符合实际意义.

当 $x=30$ 时，$120-2x=60$.

答：长方形相邻两边的长分别是 30 米和 60 米.

(3) 根据题意，得方程

$$(120-2x)x=2\,000.$$

整理，得 $x^2-60x+1\,000=0.$

因为 $\Delta=-400<0$，所以此方程无实数根.

答：用 120 米长的铁栅栏按题中的要求围仓库，长方形的面积不可能是 2 000 平方米.

46 第十七章　一元二次方程

【注意事项】

列方程解应用题时，应对方程的根是否符合应用题的实际意义进行检验和解释，在教学中要引起重视.

例题4 某工厂七月份的产值是100万元，计划九月份的产值要达到144万元. 如果每月产值的增长率相同，求这个增长率.

分析 月增长率$=\dfrac{\text{本月产值}-\text{上月产值}}{\text{上月产值}}\times 100\%$.

由此可得

$$\begin{aligned}\text{本月产值}&=\text{上月产值}\times\text{月增长率}+\text{上月产值}\\&=\text{上月产值}\times(1+\text{月增长率}).\end{aligned}$$

如果该厂产值的月增长率用x表示，那么

八月份的产值为$100\cdot(1+x)$万元；

九月份的产值为$[100(1+x)]\cdot(1+x)$万元.

这样，可列出方程求解.

解 设这个工厂每月产值的增长率为x. 根据题意，得方程

$$100\cdot(1+x)^2=144,$$

即

$$(1+x)^2=1.44.$$

所以 $1+x=1.2$ 或 $1+x=-1.2$（不合题意，舍去）.

得

$$x=0.2=20\%.$$

答：这个工厂八、九两月的月增长率为20%.

练习 17.4(2)

1. 用100厘米长的铅丝，弯折一个长方形的模型. 分别在下列条件下，求相邻两边的长：
   (1) 长方形的面积是525平方厘米；
   (2) 长方形的面积是625平方厘米；
   (3) 长方形的面积是700平方厘米.
2. 某种产品原来每件价格为800元，经过两次降价，且每次降价的百分率相同，现在每件售价为578元，求每次降价的百分率.

第三节 一元二次方程的应用 47

例题4

本题是关于增长率的应用题. 解题后，可进行一般意义的解释.

练习 17.4(2)

1. (1) 35厘米，15厘米；
   (2) 25厘米，25厘米；
   (3) 不存在.
2. 15%.

【注意事项】

(1) 在例题4的已知条件中，指明了“每个月的增长率相同”和“时间为两个月”. 学生经历了关于解题思路的分析过程后，对于其他的类似问题，应让他们能够举一反三地进行解决；涉及时间为3个月、4个月、…、n个月的有关增长率的类似问题，学生也有可能列出方程（当然还要学习如何解方程），应给予表扬. 所以，要重视“如何列方程”的分析过程，使学生获得规律性的认识和可借鉴的经验.

(2) 关于列方程解应用题的教学，课本中的安排是多次反复，逐步递进；注重数量关系分析，淡化题型套路，提高学生分析问题和解决问题的能力. 在后面的“代数方程”一章中，还有列方程解应用题的内容，现在要注意恰当把握教学要求.

对本章进行小结时，不仅要做好知识的整理，更重要的是引导学生体会探索一元二次方程解法的过程，提升数学观点和领会数学思想方法.

让学生掌握解一元二次方程的步骤、方法及基本技能，是教学基本要求的组成部分；而对“以通性求通解”的代数主题的认识，对“化归”思想和“降次”策略的领会，对“从特殊到一般”和“从具体到抽象”的数学思考方法的领悟，应是教学基本要求的重要内容.

小结中通过框图指出了本章知识的内在结构. 建议在教学中让学生自己阅读、自己体验，然后学生间互相交流体会，教师加以引导.

Benzhangxiaojie

17

本章小结

本章主要探讨一元二次方程及其解法. 最简单的一元二次方程是 $x^2=m$，当 $m\geqslant 0$ 时，解这个方程的实质就是求 m 的平方根. 在探索一元二次方程解法的过程中，我们正是从解最简单的一元二次方程出发，根据开平方运算的意义，得到了“开平方法”；还利用“两个数的积等于零相当于这两个数中至少有一个等于零”这一性质，得到解特殊一元二次方程的“因式分解法”. 对于解一般的一元二次方程，利用等式性质进行配方，获得了具有通用性的“配方法”；再通过对“配方法”深入研究，归纳出简明的“求根公式”. 我们根据在实数范围内实施开平方的条件，提出了一元二次方程根的判别式，并用它来判断方程的根的情况. 一元一次方程总有一个根，而一元二次方程可能有两个实数根（这两个实数根可以相等），也可能没有实数根.

回顾一元二次方程解法的探索和运用过程，可以看到，数的运算及其性质和等式性质，是形成解法思路的知识基础；“字母表示数”“化归”、从特殊到一般、从具体到抽象等数学思想，是开展探索活动的指导思想. 这一过程，体现了“以通性求通解”的代数主题，体现了化高次方程为低次方程的“降次”策略，为我们进一步研究解方程问题提供了思考方法.

本章的知识结构框图如下：

48 第十七章 一元二次方程

Yueducailiao

17

阅读材料

关于一元二次方程的求根公式

设 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，则 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(b^2-4ac\geqslant0)$. 这就是一元二次方程的求根公式.

根据史料（如右图），古巴比伦人已会处理一些特殊的二次方程问题. 早期巴比伦代数的一个基本问题，是求出一个数，使这个数与其倒数之和等于已知数，这就是一个二次方程问题. 巴比伦人用一些特殊方法来求这类方程的根. 当时巴比伦人还不知道负数，因此他们对二次方程的负根问题略而不提.

由于平方数和面积概念紧密相连，古希腊人也常常借助几何方法处理二次方程问题. 丢番图（Diophantus，约公元 246 年～330 年）曾解决过许多数字系数的二次方程，但他不承认无理根，也不承认负数根.

我国古代数学家对二次方程很有研究. 三国时赵爽（公元 3 世纪～4 世纪）在他的著作《勾股圆方图注》中，就曾介绍过方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=2c,\\x_1x_2=b\end{cases}$ 的解由公式 $x_{1,2}=\dfrac{2c\pm\sqrt{(2c)^2-4b}}{2}$ 给出，这实质上已经含有一元二次方程的求根公式的形式，但他未能最终得出求根公式.

中世纪阿拉伯数学家花剌子米（Al-khwārizmi，约公元 780 年～850 年）（如左图）在他的著作《代数学》中，给出了一元二次方程的一般解法，并用几何方法对其解法的正确性进行了证明. 他承认二次方程有两个根，还容许无理根的存在，不过他忽略了负根. 由于他的《代数学》完全没有代数符号，一切算法都是用文字语言来表达，因此，花剌子米不可能写出现今的求根公式.

到了 16 世纪，法国数学家韦达（F. Vieta，公元 1540 年～1603 年）有意识、有系统地引入和使用代数符号. 从此，人们的思路和书写更加紧凑和有效，在此基础上，代数得到了迅速的发展. 这时二次方程的求根公式才用数学符号表示出来. 后来，数学家又对这类符号不断改进；还引进了一种新的数（到了高中将会学习），使负数开平方也可以实施. 这样，不仅给出了现在所见的关于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的求根公式，而且在数的范围扩大以后，无论 $\Delta\geqslant0$ 还是 $\Delta<0$，方程总是有解.

【设计意图】

让学生通过对本材料的阅读，了解人类认识和研究一元二次方程的历史以及我国古代数学家所作出的贡献；从一元二次方程求根公式形成的过程中，体会数学演进的历史和建立代数符号系统的意义，感受世界文化的相互交融和促进.

【活动建议】

指导有兴趣的学生进行阅读和交流学习体会.

在学习指导中，可适当讲解赵爽对二次方程的研究成果和花剌子米对二次方程一般解法的几何证明；要强调韦达引入和使用代数符号对数学发展的重大作用.

Tanjiuhuodong

17

探究活动

数字世界一个“平方和”等式宝塔的构建

我们知道，$3^2+4^2=5^2$.

计算 $10^2+11^2+12^2$ 以及 13^2+14^2，又得到 $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$.

在这两个等式中，等号左右两边是一些平方数，且这些平方数的底数构成“连续正整数”；等号左边的平方数个数比右边的平方数个数多 1.

于是，提出如下问题：给定一个正整数 k，是否存在一个正整数 n，使等式

$$n^2+(n+1)^2+\cdots+(n+k)^2=(n+k+1)^2+\cdots+(n+k+k)^2 \quad (※)$$

能成立？

为解决这个问题，我们先退到特殊情况来分析，然后再对一般情况进行研究．

(1) 等式 $3^2+4^2=5^2$ 表明，给定 $k=1$ 时，存在正整数 $n=3$，使等式(※)成立．再考察方程 $x^2+(x+1)^2=(x+2)^2$，可知 3 是这个方程的正整数根．

(2) 等式 $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$ 表明，给定 $k=2$ 时，存在正整数 $n=10$，使等式(※)成立．也就是说，方程 $x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2+(x+4)^2$ 有正整数根 10. 事实上，

将原方程变形为 $\quad x^2+(x+1)^2+(x+2)^2-[(x+3)^2+(x+4)^2]=0$,

再变形为 $\quad x^2+[(x+1)^2-(x+3)^2]+[(x+2)^2-(x+4)^2]=0$,

得 $\quad x^2-2(2x+4)-2(2x+6)=0$, 即 $x^2-8x-20=0$,

解得 $\quad x_1=10,\ x_2=-2$(舍去).

(3) 试求方程

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2=(x+4)^2+(x+5)^2+(x+6)^2$$

的正整数根．

(4) 讨论：对于给定的一个正整数 k，关于 x 的一元二次方程

$$x^2+(x+1)^2+\cdots+(x+k)^2=(x+k+1)^2+\cdots+(x+k+k)^2$$

是否存在正整数根？如果存在，试将这个方程的正整数根用 k 表示出来．

(5) 归纳：分别取 $k=1,2,3,4,5,6,\cdots$，依次写出等式(※)，建立一个“平方和”等式的宝塔．

50 第十七章 一元二次方程

【设计意图】

让学生通过构建一个“平方和”等式的活动，获得观察和发现规律、提出和研究问题、应用所学知识和方法解决问题的过程经历，感受数学创造的快乐，体会数字世界的美妙．

【活动建议】

一般情况下，由教师指导学生进行探究．先让学生观察一些具体的“平方和”等式，发现等式的规律性特征，提出探究活动的主题；再帮助学生理解(1)和(2)提示，然后尝试解决问题(3). 后面可分两个层次提出要求，第一层次是分别给出 $k=4,5,\cdots$，让学生通过解方程、确定 n 的值和写出相应等式；第二层次是让学生按照(4)和(5)进行活动．对于数学基础较好的学生，可让学生自主开展活动，教师提供必要的指导和帮助．

要对学生的活动过程和成果进行讲评；并组织学生交流参与活动的体会，分享所获得的经验和快乐.

【问题解答】

问题(4)的讨论和问题(5)的解答如下：

关于 x 的一元二次方程

$$x^2+(x+1)^2+\cdots+(x+k)^2=(x+k+1)^2+\cdots+(x+k+k)^2,$$

可变形为 $\quad x^2+(x+1)^2+\cdots+(x+k)^2-[(x+k+1)^2+\cdots+(x+k+k)^2]=0$,

再变形为 $\quad x+[(x+1)^2-(x+k+1)^2]+\cdots+[(x+k)^2-(x+2k)^2]=0$,

得 $\quad x^2-(2x+k+2\cdot 1)k-\cdots-(2x+k+2\cdot k)k=0$,

即 $\quad x^2-2k^2x-k^2(2k+1)=0$，解得 $\quad x_1=2k^2+k,\ x_2=-k$(舍去).

分别取 $k=1,2,3,4,5,6,\cdots$，得到一个“平方和”等式的宝塔：

$k=1$, $\quad 3^2+4^2=5^2$

$k=2$, $\quad 10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$

$k=3$, $\quad 21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2$

$k=4$, $\quad 36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2$

$k=5$, $\quad 55^2+56^2+57^2+58^2+59^2+60^2=61^2+62^2+63^2+64^2+65^2$

$k=6$, $\quad 78^2+79^2+80^2+81^2+82^2+83^2+84^2=85^2+86^2+87^2+88^2+89^2+90^2$

……

第十八章　正比例函数和反比例函数

一、教学目标

1. 经历函数概念的形成过程.通过实际事例,认识变量与常量,理解变量之间的相互依赖关系;知道以运动、变化的观点看待相关数量问题,能从两个变量之间相互联系、相互依赖的角度理解函数的意义.

2. 知道函数的定义域、函数值的意义,知道符号“$y=f(x)$”的意义;在简单情况下,会根据函数的解析式和实际意义求定义域;对自变量的值与函数值之间的对应关系有初步认识,会求函数值.

3. 通过现实生活中的具体事例,理解正比例关系和反比例关系;理解正比例函数和反比例函数的概念,获得从数量方面把握事物运动变化规律和事物之间相互联系的体会.

4. 知道函数图像的意义,会用描点法画正比例函数和反比例函数的图像;能借助于图像的直观,用数学语言描述正比例函数和反比例函数的基本性质,并掌握这些基本性质;体会数形结合思想.

5. 会用待定系数法求正比例函数和反比例函数的解析式.

6. 通过对正比例函数和反比例函数的学习以及实例的分析,知道函数是刻画实际问题中变量之间相互依赖关系的工具,知道解析法、列表法、图像法是常用的函数表示法;能从表示函数的图像或表格中获取有关信息.

二、课时安排

本章教学共 11 课时,建议分配如下:

18.1　函数的概念	2 课时
18.2　正比例函数	3 课时
18.3　反比例函数	3 课时
18.4　函数的表示法	2 课时
本章小结	1 课时

三、设计说明

函数是数学中重要的基本概念之一,它是从现实世界中抽象出来的,是从数量关系的角度刻画事物运动变化规律的工具;函数知识渗透在中学数学的许多内容之中,它又与物理、化学等学科的知识密切相关.同时,函数是一个重要的数学思想,运用函数的思想和方法,可以加深对一些代数问题的理解.本章是学习函数知识的开始,中心内容是正比例函数和反比例函数.

本章内容的安排,先举例讲述数量以及变化过程和变量,讲述变量之间的相互联系和相互依存,使学生对函数获得感性的认识;接着,用朴素的语言描述函数的概念,注重两个变量之间存在确定的依赖关系这一基本特征;然后,研究正比例函数和反比例函数,以它们为载体,帮助学生初步感知变量数学,体会研究函数的基本方法;在学生对函数具有一般了解和具体研究的基础上,再整理函数的表示法,讨论生活实际中的函数问题,深化对函数的理解.

“函数”这个词是我国清代数学家李善兰(公元 1811 年～1882 年)由拉丁文所译,解释为“凡此变数中函彼变数,则此为彼之函数”.原词用作数学的术语,据说最早出现在德国数学家莱布尼兹于 1673 年所写的一篇手稿中.瑞士数学家约翰·贝努利在 1697 年提出,“由任一变量和常数的形式所构成的量”为函数;瑞士数学家欧拉在 1734 年引进了函数的记号 $y=f(x)$,又在 1748 年将函数概括为“由一个变量与一些常量通过任何方式形成的解析表达式”,从此,函数概念成为微积分中的中心概念.关于函数的定义,有一个逐步发展的过程.简而言之,早期采用的是“变量说”,是以“一个变量随着另一个变量变化而变化”来定义函数,既形象直观,又通俗易懂,但局限在数的范围内考察,并且忽视了对应.在 19 世纪 70 年代集合论问世后,采用了“对应说”(或称为“映射说”),突出“两个集合间元素的对应”就是函数,既抓住了函数的本质

属性，又拓广了定义的适应范围，但是这个定义中有一个意义不明确的术语“对应”. 到了 20 世纪 60 年代，广泛采用“序偶说”，通过集合的直积来定义函数，既清晰又明确，但过于形式化.

本章中对函数概念的描述，运用了早期“变量说”中的朴实语言，强调两个变量之间存在确定的依赖关系；有时也适当渗透了“对应思想”，但不要求对两个变量的取值具有对应关系进行讨论. 在高中阶段学习“集合”的基础上，函数将以“两个数集间元素的对应关系”重新定义，深入揭示函数的本质，完善“变量说”的表达，初步进入 “对应说”阶段. 这样编排，比较符合函数概念发展的过程和学生认识函数的规律，层次清楚，体现了不同学习阶段的不同要求，这与一期数学课本对函数概念的教学安排有差别.

四、教学建议

1. 从运动变化过程和变量相依赖关系的角度认识函数. 函数概念来源于客观实际的需要，也是数学内部发展的需要. 16 世纪以后，关于物体运动的研究成为自然科学的中心问题，人们对各种运动变化的事物以及变化过程中相关的量和这些量之间的相互关系进行研究，推动了数学的发展；到了 17 世纪，在数学中产生了变量与函数的概念，开始进入变量数学时期.

本章关于函数的定义，采用朴素的“变量说”. 这样定义，是基于初中学生的认知水平和函数学习起步的要求. 在初中阶段对函数概念的学习，应把握的要点是： 函数产生于事物运动变化过程；它涉及一个变化过程中的两个变量；其基本特征是这两个变量之间存在确定的依赖关系. 在教学中，一要引导学生认识客观事物都处在运动变化之中，从而树立运动变化的观念；二要突出函数概念的特征性质，扣住“其中一个变量随着另一个变量的变化而变化”. 至于以前的教材在函数概念中十分强调的对应法则，现在应该淡化，到高中阶段再加以明确. 函数的定义域是建立函数概念的必要成分，要让学生知道自变量是在一定范围内取值的；但对函数定义域的具体讨论，现在不要涉及复杂的情况. 以前在初中讲函数时说到它有定义域和对应法则这两个要素，现在也不要提出.

2. 创设实际问题情境，由具体到抽象逐步认识函数，在应用中逐步加深理解. 函数与现实生活的联系非常密切. 本章以实际问题贯穿始终，有些问题为引出或解说函数的有关概念，有些问题是作为函数应用的实例. 在教学中，要提供充分的具体事例，引导学生进行分析和讨论，通过数学的抽象，逐步形成函数的有关概念；要提供多样的实际问题，鼓励学生进行探索和研究，在解决问题的过程中，加深对函数知识的理解，体会函数的应用，领会函数的思想和方法；要提供机会和条件，让学生进行实践和思考，促使学生关心并探究周围事物中存在的函数关系，体验表示函数的方法和获取信息的途径，初步认识到函数是从数量关系的角度刻画客观事物运动变化规律的工具.

有关实际问题的选取，要尽量贴近学生的生活，注意与其他学科知识结合，但必须符合学生的知识经验和认知基础.

3. 重视数形结合的研究方法，借助图像直观来研究函数. 图像法是函数的一种表示方法，是辅助初中学生对函数性质进行研究的一种基本手段. 本章以研究正比例函数和反比例函数为中心课题，展现了利用“描点法”画函数图像的过程和利用图像的直观性研究函数性质的过程. 在教学中，要让学生学会按照步骤画已知正比例函数和反比例函数的图像，在操作实践中认识函数图像上的点的坐标与两个变量的对应值之间的关系，体会图像的含义；要引导学生从函数图像的形态发现图像的性质进而归纳函数的性质，并建立起函数的性质与图像的性质之间的联系，进行信息的转换，从中体会数形结合的思想方法. 还要注意现代信息技术的运用，利用计算机（或图形计算器）的画图功能和动态显示功能，帮助学生正确认识函数图像的特征，促进学生从形象思维到抽象思维的发展，同时培养学生的现代技术意识.

4. 注重学生对于基础知识与基本技能的掌握，提高基本能力. 本章内有关函数的概念，函数的定义域、函数值，函数的表示方法，以及正比例函数和反比例函数的概念、图像、性质等，包括其中蕴含的数学思想方法，是重要的基础知识；会画正比例函数和反比例函数的图像，能利用图像讨论这些函数的基本性质等，是基本的数学技能；能利用函数的图像或表格获取信息，能运用所学的函数知识分析和解决一些简单的实际问题，是基本的数学能力. 在教学中，应注重基础知识和基本技能的落实，重视数学基本能力以及一般能力的提高. 关于求函数定义域的问题、求函数解析式的问题、函数的实际应用问题等，要严格控制难度.

五、评价建议

1. 把握"函数学习起步"的定位要求. 关于函数的学习，从本章开始并贯穿其后，逐步成为中学数学的一条主线. 这里是从常量数学进入变量数学，是函数学习的开端，因此学生有一个逐步认识和逐步适应的过程. 必须强调，教学内容应平实，教学要求应朴实，教学评价应重在学生学习兴趣的发展和基本要求的落实.

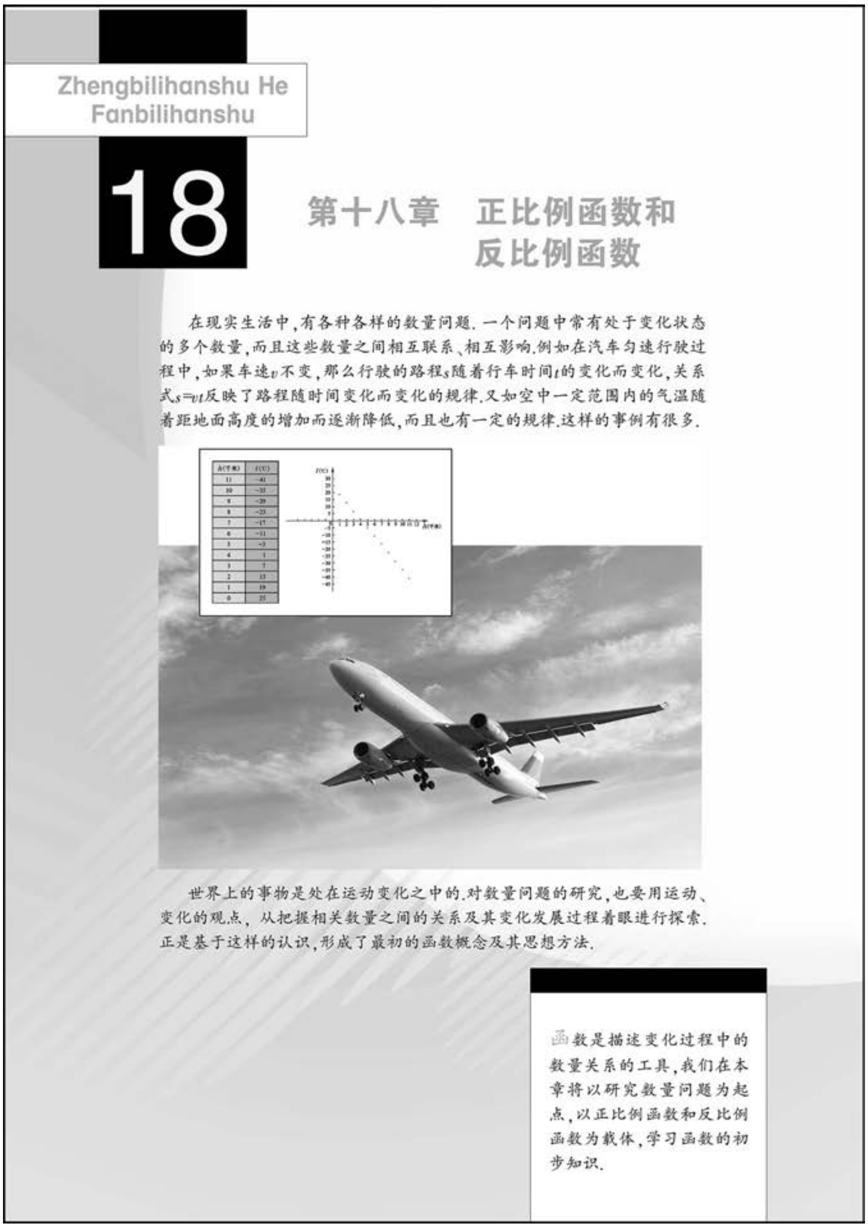
2. 重视学生在函数有关概念形成、函数知识实际应用过程中的经历和体验. 函数内容是培养学生积极的情感态度、辩证唯物主义的思想观点、数学应用的意识和能力的良好素材. 所以函数学习中的有关过程经历、情感体验的要求，不仅是必须关注的教学目标，而且必须纳入学习评价的范畴. 可采取交流心得、小结体会等多种多样的形式，进行自主性评价.

3. 关注学生对函数的思想方法以及利用图像直观研究函数性质的方法的初步掌握. 函数思想方法以及利用图像直观研究函数性质的方法，是本章教学的重要内容，是学生进一步学习函数的基础. 要通过研究和解决问题的活动，引导学生逐步认识，深入体会，初步掌握有关的数学思想和方法，并采用适当的方式进行检测.

4. 鼓励学生进行探究学习和开展实践活动. 本章的学习内容中，设计了一些探究活动，例如观察和发现"身边的函数"，探索和研究正比例函数、反比例函数的性质，分析和解决一些实际问题等；还安排了画图像的操作活动以及在章末的数学实践活动. 要鼓励学生积极探究，大胆发表意见，认真参加操作实践活动，完成数学实践作业. 对学生在探究、实践活动中的表现和显示的成效，要给予积极的评价.

章头语中简要说明了学习和研究函数是现实的需要.引导学生初步认识,世界上的事物处在运动变化之中,函数是描述事物变化过程中的数量关系的工具,从而激发学习热情和积极性.

章头图是大气层中一定范围内的气温随着距地面高度的变化而变化的写照,提示了可用列表法和图像法表示函数.



Zhengbilihanshu He Fanbilihanshu

18 第十八章　正比例函数和反比例函数

在现实生活中,有各种各样的数量问题.一个问题中常有处于变化状态的多个数量,而且这些数量之间相互联系、相互影响.例如在汽车匀速行驶过程中,如果车速v不变,那么行驶的路程s随着行车时间t的变化而变化,关系式$s=vt$反映了路程随时间变化而变化的规律.又如空中一定范围内的气温随着距地面高度的增加而逐渐降低,而且也有一定的规律.这样的事例有很多.

世界上的事物是处在运动变化之中的.对数量问题的研究,也要用运动、变化的观点,从把握相关数量之间的关系及其变化发展过程着眼进行探索.正是基于这样的认识,形成了最初的函数概念及其思想方法.

函数是描述变化过程中的数量关系的工具,我们在本章将以研究数量问题为起点,以正比例函数和反比例函数为载体,学习函数的初步知识.

Zhengbilihanshu

第一节　正比例函数

18.1　函数的概念

1. 变量与函数

人们在认识和描述某一事物时，经常会用“量”来具体表达事物的某些特征(属性)，同时用“数”来表明量的大小. 数与度量单位合在一起，就是“数量”.

例如，我们居住的地球，可以用下列数量来描述它的一些特征：

平均半径	6 371.22 千米
表面积	5.11×10^{8} 平方千米
体积	1.083×10^{12} 立方千米
质量	5.97×10^{24} 千克
地心最高温度	不超过 5 000℃
自转一周所需的时间	23 时 56 分 4 秒
绕太阳运行的平均速度	29.77 千米/秒
……	

这里所涉及的量，有长度、面积、体积、质量、温度、时间、速度等.

问题1

地球上的赤道是一个大圆，半径长 $r_0\approx6.378\times10^{6}$(米). 设想有一个飞行器环绕赤道飞行一周，其轨道是与赤道在同一平面且同圆心的圆 E. 如果圆 E 的周长比赤道的周长多 a 米，那么圆 E 的半径长 r 是多少米?

在这个问题中，相关的量都是长度. 其中赤道的半径长 r_0 米的数值保持不变，圆 E 的周长比赤道的周长多 a 米，即两圆周长的差为 a 米，圆 E 的半径长为 r 米，a 与 r 可以取不同的数值.

在问题研究过程中，可以取不同数值的量叫做变量(variable)；保持数值不变的量叫做常量(constant)(或常数).

区分变量与常量，要结合实际问题进行具体分析.
问题 1 中的 a、r 是变量；r_0 是常量，2π 是常数.

在问题 1 中，由 $2\pi r-2\pi r_0=a$(米)，得 $r=r_0+\frac{a}{2\pi}$(米).

可以看到，圆 E 的半径 r 与两圆周长的差 a 之间是相互联系的. 由“$r=r_0+\frac{a}{2\pi}$”可知，r 随着 a 的变化而变化，而且当变量 a 取一个确定的值时，变量 r 的值随之也确定. 这时，我们就说变量 r 与

52　第十八章　正比例函数和反比例函数

【本课重点】

通过实例引进变量与常量的概念及函数的有关概念；让学生领会函数的意义，初步感知函数表示方法.

以用数量描述地球一些特征为例，使学生知道，如长度、面积、体积、质量、温度、时间、速度等是常用的数量.

问题 1

提出一个有关长度的数量问题进行讨论，引入变量与常量的概念.

明确变量和常量的概念. “边款”中提示，区分变量与常量时要具体分析，辩证地认识.

指出变化过程中的两个变量并不是孤立的，其中一个变量随着另一个变量的变化而变化. 这是对变量之间存在确定的依赖关系的解说.

【教学目标】

(1) 通过对描述地球的一些数量的分析，认识数量的意义，知道常用的数量；通过具体实例认识并分清变量和常量.

(2) 知道用运动、变化的观点看待事物，理解变化过程中的两个变量之间相互依赖的含义，从而理解函数的概念；知道函数的自变量以及函数解析式.

(3) 知道函数的定义域、函数值的意义，知道自变量的值与函数值之间有对应关系，会在简单情况下求函数的定义域、函数值；知道符号“$y=f(x)$”的意义.

问题 2

通过对本题的讨论，引进函数的概念.

要让学生完成填表（数据分别是：100 升；90 升；80 升；70 升），体会两个变量相互联系、相互依赖的含义；再用数学式子表达它们之间的依赖关系，并注意变量 x 的取值有范围限制.

关于函数的概念，要指出其中涉及“变化过程”和“变量的取值范围”，但主要应强调“两个变量之间存在确定的依赖关系”.

指明 x 为自变量后，不再指出 y 是因变量，避免概念重复.

“函数解析式”表达了两个变量之间的“依赖关系”，可结合实例加以解释，帮助学生理解.

a 之间存在确定的依赖关系.

问题2

一辆汽车行驶在国道上，汽车油箱里原有汽油 120 升，每行驶 10 千米耗油 2 升.

（1）填表：

汽车行驶的路程	100 千米	150 千米	200 千米	250 千米
油箱里剩余的油量				

（2）在汽车行驶过程中，汽车行驶的路程与油箱里剩余的油量都是变量吗？

（3）设汽车行驶的路程为 x 千米，油箱里剩余的油量为 y 升，那么 y 与 x 之间是否存在确定的依赖关系？

在这个问题中，汽车行驶的路程 x（千米）与油箱里剩余的油量 y（升）都是变量. 随着汽车行驶路程的增加，油箱里剩余的油量在减少，即变量 y 随着变量 x 的变化而变化；又在填表时可知，$y=120-\frac{2}{10}x$，即 $y=120-0.2x$，当 x 取一个确定的数值时，y 的值也随之确定，所以 y 与 x 之间存在着确定的依赖关系.

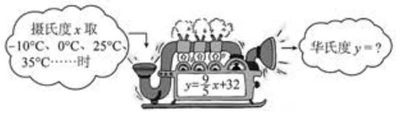
当然，本题中路程 x 的取值不是任意的. 根据题意，易知 $x\geqslant 0$；又当汽车行驶 600 千米后油箱里就没油了. 所以 x 只能在一定的范围内取值，即 $0\leqslant x\leqslant 600$.

在某个变化过程中有两个变量，设为 x 和 y，如果在变量 x 的允许取值范围内，变量 y 随着 x 的变化而变化，它们之间存在确定的依赖关系，那么变量 y 叫做变量 x 的**函数**（function），x 叫做**自变量**（independent variable）.

在问题 2 中，变量 y 是变量 x 的函数，x 是自变量. 其中 y 随着 x 变化而变化的依赖关系是由“$y=120-0.2x$”表达出来的. 这种表达两个变量之间依赖关系的数学式子称为**函数解析式**.

问题 1 中，变量 r 是变量 a 的函数，a 是自变量，“$r=r_0+\frac{a}{2\pi}$”是函数解析式.

例题1 气温的摄氏度 x 与华氏度 y 之间可以进行如下转化，华氏度 y 是不是摄氏度 x 的函数？为什么？



【注意事项】

（1）由于学生初次接触变量与常量的概念，教学时，可增加几个简单的、贴近学生生活的事例，让学生认清变量与常量.

（2）一个量是常量还是变量，一般是相对于某一个研究过程而言，要具体分析，不能绝对化. 例如描述地球有关特征的那些数量，在地球漫长的演化过程中并不是固定不变的，但在一定的时期内变化极小，在一般的科学研究中就把这些量看作常量. 又如一个学校的学生人数在一段时间内是常量，长时间内是变量. 教师对此可适当地进行说明.

如果摄氏度用 t 表示，华氏度用 F 表示，那么函数解析式为 $F=\frac{9}{5}t+32$. 函数解析式 $y=\frac{9}{5}x+32$ 和 $F=\frac{9}{5}t+32$，所表达的两个变量之间的依赖关系完全一样.

解 在把摄氏度转化为华氏度的过程中，华氏度 y 随着摄氏度 x 的变化而变化；由 $y=\frac{9}{5}x+32$，当 x 取定一个值时，y 的值随之确定，例如下表：

摄氏度 x(℃)	…	−10	0	25	35	100	…
华氏度 y(℉)	…	14	32	77	95	212	…

可见，变量 y 与 x 之间存在确定的依赖关系，y 是 x 的函数. $y=\frac{9}{5}x+32$是这个函数的解析式.

例题2 某气象站测得当地某一天的气温变化情况，如图18－1所示.

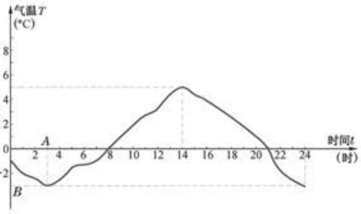


图 18－1

给出这一天的某一确定时刻 t_1，可以在图18－1中的 t 轴上找出 t_1 所对应的点 A；过点 A 作垂直于 t 轴的直线，与图中曲线相交于一点，再过这点作垂直于 T 轴的直线，垂足为点 B，那么点 B 对应的数就是时刻 t_1 的气温. 如这天凌晨3时的气温为−3℃.

(1) 根据图像，一天中气温随着时间的变化情况，两个变量之间是否存在确定的依赖关系？其中一个变量是另一个变量的函数吗？

(2) 根据图像信息，填写下表：

时间(时)	0	3	8	14	21	24
气温(℃)		−3				

解 (1) 两个变量是时间 t 和气温 T. 可以看到，当时间 t(时)变化时，相应的气温 T(℃)也随之变化；由曲线上一点的坐标(t, T)，可知某一时刻 t 的气温是 T. 由此可见，这两个变量之间存在确定的依赖关系(这种关系是用曲线来表达的)，所以 T 是 t 的函数.

54 第十八章 正比例函数和反比例函数

例题 1

帮助学生理解函数的概念. 判断一个变量是不是另一个变量的函数，主要看这两个变量之间是不是存在确定的依赖关系.

例题 2

让学生初步了解，表达两个变量之间依赖关系的方法，不是只有解析式，还有图、表，为学生进一步学习函数的表示方法提供铺垫.

用曲线表达一天中气温随着时间变化的情况，学生不容易看懂，"边款"中进行了解释. 教学时，要指导学生读图.

【注意事项】

(1) 函数概念中没有涉及"对应法则"，与以前教材中关于函数概念的表述不一样. 现在这样处理，对学生认识函数降低了起点，到高中再强调"对应". 教学时不要进行补充和提升.

(2) 在"边款"中，针对例题1指出了函数解析式所表达的是"两个变量之间的依赖关系"，它与这两个变量用什么字母表示无关. 教学时对此要加以讲解，但不要引进"同一函数"的概念.

议一议

关于“变量 $x+2$ 是不是变量 x 的函数”的讨论，主要是为了帮助学生深入认识函数的本质，并建立“函数与式”之间的联系. 可组织数学基础较好的学生议一议. 对以此形式表达的函数，不作为概念辨析的一般要求.

练习 18.1(1)

1. 出勤率 p 随着到校人数 n 的变化而变化，出勤率 p 与到校人数 n 之间存在确定的依赖关系，p 关于 n 的函数解析式是 $p=\frac{n}{1\,200}$.

2. 略.

3. (1) 略；

(2) $v=\frac{s}{t}$.

4. (1) 线段 AB 的长是常量，线段 CD 的长是变量；

(2) S 是 h 的函数.

【本课重点】

使学生知道函数的定义域和函数值的意义，知道自变量的值与函数值之间有对应关系，会在简单情况下求函数的定义域、函数值；知道符号“$y=f(x)$”的意义.

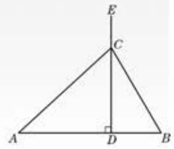
(2) 时间为 0，8，14，21，24(时)时，气温分别为 -1，0，5，0，-3(℃).

议一议

对于代数式 $x+2$，给定 x 的一个值，可以求出这个代数式的一个值. 如果 x 是一个变量，那么 $x+2$ 也是一个变量. 试问：变量 $x+2$ 是不是变量 x 的函数？

练习 18.1(1)

1. 某校学生总人数 1 200 人，某天实际到校的学生人数 n 与学生的出勤率 p 是变量. 试说明 p 是 n 的函数，并写出这个函数的解析式.
2. 举一个含有两个相关变量的实例，指出其中一个变量是否是另一个变量的函数. 如果是，请把它们之间的依赖关系表达出来.
3. 已知物体匀速运动中，路程 s、速度 v、时间 t 之间有关系式 $s=vt$.
   (1) 如果速度不变，那么这个式子里哪两个量是变量？这两个变量中哪一个是自变量？哪一个是自变量的函数？如果时间不变呢？
   (2) 如果路程不变，试写出速度关于时间的函数解析式.
4. 如图，线段 $AB=a$，在垂直于 AB 的射线 DE 上有一个动点 C(C 与垂足 D 不重合)，分别联结 CA、CB，得到 $\triangle ABC$.
   (1) 指出在 $\triangle ABC$ 的面积的变化过程中，线段 AB、CD 的长哪一个是常量？哪一个是变量？
   (2) 设 CD 的长为 h，$\triangle ABC$ 的面积为 S，S 是不是 h 的函数？



(第 4 题)

2. 函数的定义域与函数值

操作

已知函数 $y=2x+5$ 和 $y=\sqrt{x}$，按要求分别进行以下操作：

(1) 输入 x ⟶ $y=2x+5$ ⟶ 输出 y

对变量 x 取一些数值，分别代入式子 $2x+5$ 中，用计算器计算，把 x 每次所取的值与计算器相应显示的结果填入下表：

x						…
y						

(2) 输入 x ⟶ $y=\sqrt{x}$ ⟶ 输出 y

对变量 x 取一些数值，分别代入式子 $\sqrt{x}$ 中，用计算器计算，把 x 每次所取的值与计算器相应显示的结果填入下表：

x						…
y						

思考

对于函数 $y=2x+5$，自变量 x 可以取任意一个实数吗？函数 $y=\sqrt{x}$ 呢？

通过操作和思考，我们知道函数 $y=2x+5$ 中自变量 x 可取任意一个实数；函数 $y=\sqrt{x}$ 中自变量 x 只能取大于或等于 0 的实数，因为在实数范围内，当 $x<0$ 时，$\sqrt{x}$ 没有意义.

函数的自变量允许取值的范围，叫做这个函数的**定义域**(domain).

每一个函数都有定义域. 对于用解析式表示的函数，如果不加说明，那么这个函数的定义域是能使这个函数解析式有意义的所有实数.

例题3 求下列函数的定义域：

(1) $y=5x-3$；　　(2) $y=\frac{1}{x+2}$；

(3) $y=\sqrt{x-1}$.

解 (1) 对于整式 $5x-3$，无论 x 取什么实数，它都有意义. 所以函数 $y=5x-3$ 的定义域是一切实数.

(2) 对于分式 $\frac{1}{x+2}$，分母 $x+2\neq0$，即 $x\neq-2$. 所以函数 $y=\frac{1}{x+2}$ 的定义域是不等于 -2 的一切实数(也可表示为：x 是实数且 $x\neq-2$).

(3) 对于二次根式 $\sqrt{x-1}$，被开方数 $x-1\geqslant0$，即 $x\geqslant1$. 所以函数 $y=\sqrt{x-1}$ 的定义域是大于或等于 1 的一切实数(也可表示为：$x\geqslant1$).

想一想

根据函数解析式的特征求这个函数的定义域，一般应怎样思考？

56 第十八章 正比例函数和反比例函数

操作

通过操作活动引导学生以函数的观点重新认识学过的求代数式的值的内容.

思考

让学生关注函数的自变量取值有一定范围，从而引出“函数的定义域”.

函数的定义域是研究函数必须涉及的基本概念. 每一个函数都有定义域；对于给定的函数，它的定义域必须是明确的.

例题 3

说明“求函数的定义域”的思考方法. 在知道函数解析式和对定义域未加说明的情况下，函数的定义域由确保解析式有意义来确定.

想一想

引导学生总结如何根据函数解析式的特征确定函数的定义域.

【注意事项】

总结如何根据函数解析式的特征确定函数的定义域时，一般按解析式中的表示函数的式子是整式、分式或根式(偶次、奇次)等不同类型进行归纳. 对数学基础较好的学生，可要求他们归纳得全面一些；而对所有学生的要求，就是掌握例题 3 以及练习中各题所表示的几种类型，不要扩大类型和提高难度.

例题 4

本题包含两个要求，一是写出函数解析式；二是写出函数的定义域，让学生体会要注意函数的实际意义.

在例题 4 的讨论中，渗透“对应思想”，同时引入函数值的概念.

记号 $y=f(x)$ 表示“y 是 x 的函数”. $f(x)$ 不是表示“f”与“x”的积，而是指明在变化过程中的自变量为 x，用 f 表示变量 y 随着 x 变化而变化的规律.

例题4 如果三角形的三条边长分别为 3 厘米、7 厘米、x 厘米，那么三角形的周长 y(厘米)是 x(厘米)的函数. 写出函数解析式，并指出它的定义域.

解　函数解析式是 $y=x+10$.

根据三角形的三边关系，可知 $7-3<x<7+3$，即 $4<x<10$. 所以这个函数的定义域是 $4<x<10$.

这个例题告诉我们，实际问题中的函数，它的定义域，除了使函数解析式有意义外，还必须使实际问题有意义.

在这个函数中，取 $x=5$，代入函数解析式 $y=x+10$，得 $y=5+10=15$；取 $x=6.5$，可得 $y=16.5$；取 $x=4\sqrt{3}$，可得 $y=10+4\sqrt{3}$. 实际上，在定义域 $4<x<10$ 内，自变量 x 每取一个确定的值，根据 $y=x+10$，y 都有唯一确定的值与它对应.

> 我们现在所涉及的函数，对于自变量在定义域内的每一个确定的值，另一个变量都有唯一确定的值与它对应.

如果变量 y 是自变量 x 的函数，那么对于 x 在定义域内取定的一个值 a，变量 y 的对应值叫做当 $x=a$ 时的**函数值**(value of a function).

> 函数记号中括号外的字母不同，如 $y=g(x)$，$y=F(x)$ 等，表示 y 随着 x 变化而变化的规律不同.

为了深入研究函数，我们把语句“y 是 x 的函数”用记号 $y=f(x)$ 来表示. 这里括号内的字母 x 表示自变量，括号外的字母 f 表示 y 随着 x 变化而变化的规律. 例如函数 $y=x+10$ 记为 $y=f(x)$ 时，f 表示“x 加 10”这个运算关系；例题 2(1) 中这个函数可记为 $T=f(t)$，这时 t 是自变量，f 就表示图形中所反映的气温 T 随时间 t 变化而变化的规律. 在同一问题中同时研究几个不同的函数时，表示函数的记号中，括号外的字母可采用不同的字母，如 f、g、h 和 F、…，以示区别.

> 函数的自变量取遍定义域中的所有值，对应的函数值的全体叫做这个函数的值域. 如上述函数 $y=x+10$ $(4<x<10)$，它的值域是 $14<y<20$.

在函数用记号 $y=f(x)$ 表示时，$f(a)$ 表示当 $x=a$ 时的函数值.

把例题 4 中的函数 $y=x+10$ 记为 $y=f(x)$，可知 $f(x)=x+10$. 那么当 $x=5$ 时的函数值是 15，可表示为 $f(5)=15$；还有，$f(6.5)=16.5$；$f(4\sqrt{3})=10+4\sqrt{3}$.

例题5 已知 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(a)(a\neq 1)$.

分析　函数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ 的定义域是不等于 1 的所有实数. 分别用 $0,-1,\dfrac{1}{2},a$ 代替函数解析式中的 x，就得到函数值.

解　$f(0)=\dfrac{2\times0+1}{0-1}=-1$.

【注意事项】

(1) 为了引入函数值，例题 4 渗透了“对应思想”. 在这里不要像以往那样去强调“对应”，只要学生能理解“自变量在定义域内每取一个确定的值，都能相应地唯一确定另一变量的值”，知道“自变量应在定义域内取值，相应的函数值唯一确定”，不要提出对函数的概念再重新认识.

(2) 在同时研究几个函数时，应选用不同字母表示不同函数中变量间相互依赖的变化规律，以免引起混乱.

(3) 关于函数的“值域”，学生只须了解，不要提出更高的要求.

$$f(-1)=\frac{2\times(-1)+1}{(-1)-1}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}.$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\times\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{2}{-\frac{1}{2}}=-4.$$

$$f(a)=\frac{2a+1}{a-1}\quad(a\neq1).$$

练习 18.1(2)

1. 求下列各函数的定义域：

(1) $y=2x+\sqrt{5}$； (2) $y=\frac{3x+1}{x-2}$；

(3) $y=\sqrt{3x-4}$； (4) $y=\frac{x-1}{\sqrt{x-4}}$.

2. 等腰三角形中，底角的度数用 x 表示，顶角的度数用 y 表示，写出 y 关于 x 的函数解析式及函数的定义域.

3. 已知 $f(x)=\frac{2x+3}{x+4}$，求 $f(-2)$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)$，$f(0)$，$f(\sqrt{2})$.

18.2 正比例函数

1. 正比例函数

某商店销售某种型号的水笔，销售情况记录如下：

售出水笔数(支)	2	5	4	3	10	15	…
营业额(元)	5	12.5	10	7.5	25	37.5	…

在表中任取一组数据，求营业额与售出水笔数的比值，如 $\frac{5}{2}=2.5$，$\frac{12.5}{5}=2.5$，$\frac{37.5}{15}=2.5$，…，可见它们的比值都是相等的. 这个比值，也就是水笔的单价 2.5(元/支).

设售出的水笔的数量为 x 支(x 是正整数)，相应的营业额为 y 元，那么 $\frac{y}{x}=2.5$，也可表示为 $y=2.5x$.

一个正方形的周长随边长变化而变化. 设正方形的边长为 $x(x>0)$，周长为 y，那么 $y=4x$，也可表示为 $\frac{y}{x}=4$.

如果两个变量的每一组对应值的比值是一个常数(这个常数

58 第十八章 正比例函数和反比例函数

例题 5

本题说明了求函数值的基本方法.

要指导学生把求函数值与求代数式的值进行比较，把已有的知识迁移过来，同时把新知识与旧知识联系起来.

练习 18.1(2)

1. (1) 一切实数；

(2) x 是实数且 $x\neq2$；

(3) x 是实数且 $x\geqslant\frac{4}{3}$；

(4) x 是实数且 $x>4$.

2. $y=180-2x$；

函数的定义域是

$0<x<90$.

3. $f(-2)=-\frac{1}{2}$，

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{7}$，

$f(0)=\frac{3}{4}$，

$f(\sqrt{2})=\frac{5\sqrt{2}+8}{14}$.

【本课重点】

引导学生经历正比例函数概念的形成过程并理解概念，初步学会用待定系数法求正比例函数的解析式.

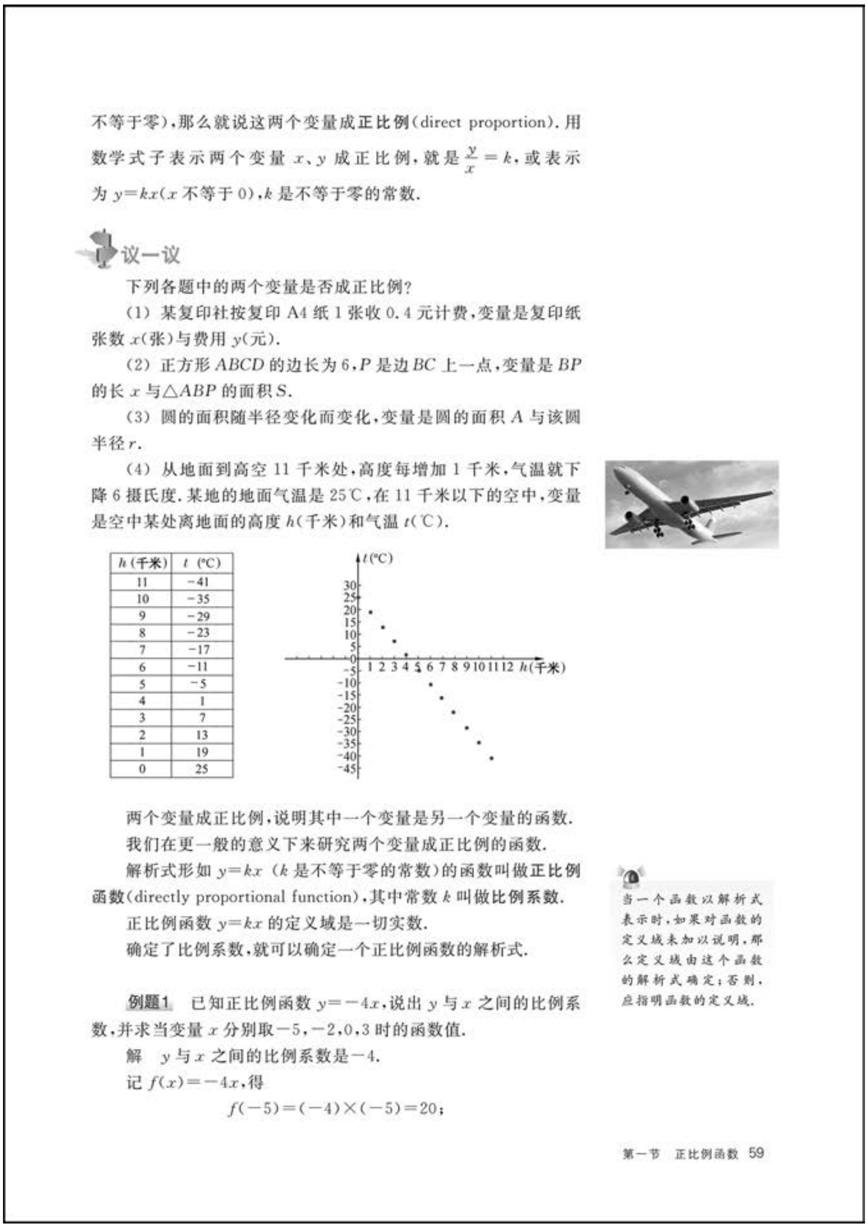
【教学目标】

(1) 通过现实生活中的具体事例，理解正比例关系的含义，能判断两个变量是否成正比例关系；理解正比例函数的概念，初步学会用待定系数法求正比例函数的解析式.

(2) 通过画图像的操作实践，体验“描点法”；知道正比例函数的图像是过原点的一条直线，会画正比例函数的图像；知道函数图像的意义.

(3) 经历利用正比例函数图像直观分析正比例函数基本性质的过程，体会数形结合的思想方法和研究函数的方法，归纳并掌握正比例函数的基本性质.

(4) 在正比例函数的概念引入和实际应用的过程中，进一步认识函数与现实生活密切相关；会利用正比例函数解决一些简单的实际问题.



不等于零),那么就说这两个变量成**正比例**(direct proportion).用数学式子表示两个变量 x、y 成正比例,就是 $\frac{y}{x}=k$,或表示为 $y=kx$(x 不等于 0),k 是不等于零的常数.

议一议

下列各题中的两个变量是否成正比例?

(1) 某复印社按复印 A4 纸 1 张收 0.4 元计费,变量是复印纸张数 x(张)与费用 y(元).

(2) 正方形 $ABCD$ 的边长为 6,P 是边 BC 上一点,变量是 BP 的长 x 与△ABP 的面积 S.

(3) 圆的面积随半径变化而变化,变量是圆的面积 A 与该圆半径 r.

(4) 从地面到高空 11 千米处,高度每增加 1 千米,气温就下降 6 摄氏度.某地的地面气温是 25℃,在 11 千米以下的空中,变量是空中某处离地面的高度 h(千米)和气温 t(℃).

h(千米)	t(℃)
11	−41
10	−35
9	−29
8	−23
7	−17
6	−11
5	−5
4	1
3	7
2	13
1	19
0	25

两个变量成正比例,说明其中一个变量是另一个变量的函数.

我们在更一般的意义下来研究两个变量成正比例的函数.

解析式形如 $y=kx$ (k 是不等于零的常数)的函数叫做**正比例函数**(directly proportional function),其中常数 k 叫做**比例系数**.

正比例函数 $y=kx$ 的定义域是一切实数.

确定了比例系数,就可以确定一个正比例函数的解析式.

当一个函数以解析式表示时,如果对函数的定义域未加以说明,那么定义域由这个函数的解析式确定;否则,应指明函数的定义域.

例题1 已知正比例函数 $y=-4x$,说出 y 与 x 之间的比例系数,并求当变量 x 分别取 -5,-2,0,3 时的函数值.

解 y 与 x 之间的比例系数是 -4.

记 $f(x)=-4x$,得

$$f(-5)=(-4)\times(-5)=20;$$

第一节 正比例函数 59

议一议

让学生通过四个问题的讨论,进一步认识两个变量成正比例的表达形式;同时注意在实际问题中,变量的取值范围通常是部分实数,并强调 k 是不等于零的常数.

正比例函数是两个变量成正比例的进一步抽象和一般化.正比例函数的概念主要是由解析式的形式特征来表述的.

例题 1

让学生具体认识比例系数,体会正比例函数由比例系数完全确定,同时巩固函数值的概念和求函数值的方法.

【注意事项】

(1) 关于正比例函数的概念,主要应明确函数解析式的形式特征.这类函数的定义域,在未加说明时,由它的解析式确定为一切实数;否则,就要具体指明.我们讨论正比例函数 $y=kx$ 的图像和性质时,按此约定,函数的定义域为一切实数,得到它的图像是直线;而在定义域是部分实数时,它的图像是直线的部分或直线上的一些点.

(2) 对于人为设计的正比例函数,如 $y=(1-a)x^{a^2}$,在教学中不宜出现.在反比例函数教学中也同样处理.

$f(-2)=(-4)\times(-2)=8$；

$f(0)=(-4)\times 0=0$；

$f(3)=(-4)\times 3=-12$.

例题2 已知 y 是 x 的正比例函数，且当 $x=3$ 时，$y=24$. 求 y 与 x 之间的比例系数，并写出函数解析式和函数的定义域.

解 因为 y 是 x 的正比例函数，可设函数解析式为 $y=kx\ (k\neq 0)$.

把 $x=3$，$y=24$ 代入解析式，得

$$24=3k.$$

解得 $$k=8.$$

所以，y 与 x 之间的比例系数是 8；函数解析式是 $y=8x$，函数的定义域为一切实数.

在求正比例函数的解析式时，先设解析式为 $y=kx(k\neq 0)$，其中系数 k 待定；再利用已知条件确定 k 的值. 这样的方法称为"待定系数法".

想一想

已知正比例函数中两个变量的一组非零对应值，一定能求出函数解析式吗？怎样思考？

练习 18.2(1)

1. （口答）判断下列问题中的两个变量是否成正比例，为什么？
   (1) 商一定（不为零），被除数与除数.
   (2) 除数不变（不为零），被除数与商.
   (3) 一个因数（不为零）不变，另一个因数与它们的积.
   (4) 等腰三角形的周长一定，它的腰长与它底边的长.
   (5) 一个人的体重与他的年龄.
2. 下列函数（其中 x 是自变量）中，哪些是正比例函数？哪些不是？为什么？
   (1) $y=\frac{x}{5}$； (2) $y=-\frac{1}{5}x$； (3) $y=\frac{5}{x}$； (4) $y=5x+2$.
3. 已知 y 是 x 的正比例函数，且当 $x=2$ 时，$y=12$. 求 y 与 x 之间的比例系数，并写出 y 关于 x 的函数解析式.

2. 正比例函数的图像

我们知道，直角坐标平面内任意一点都有唯一确定的坐标 (x,y)；反过来，以任意给定的一对有序实数 (x,y) 为坐标，都可以在直角坐标平面内唯一确定一个点.

根据正比例函数的解析式，对自变量 x 在定义域内每取一个值，就能确定相应的一个函数值；分别以所取 x 的值和相应的函数值作为点的横坐标和纵坐标，可以在坐标平面内描出对应的点.

60 第十八章 正比例函数和反比例函数

例题 2

让学生体验由正比例函数中两个变量的一组对应值确定这个函数的过程. 这种求函数解析式的方法是待定系数法.

想一想

引导学生认识，由于正比例函数解析式中只有一个待定系数，因此确定一个正比例函数只需一个独立条件（一组非零对应值）.

练习 18.2(1)

1. 略.
2. 正比例函数是 $y=\frac{x}{5}$，$y=-\frac{1}{5}x$；$y=5x+2$，$y=\frac{5}{x}$ 不是正比例函数.
3. 比例系数为 6；解析式是 $y=6x$.

【本课重点】

让学生体验用"描点法"画函数图像的过程；掌握正比例函数图像的画法及特点.

操作

用“描点法”画函数图像，包括“列表”“描点”“连线”三个步骤. 由于学生第一次接触“描点法”，教师的示范必不可少.

要得到函数 $y=2x$ 的图像是一条直线，需要学生观察、思考和想象，要进行必要的指导，但不必严格说明.

归纳函数图像的意义时，要从函数图像应满足纯粹性和完备性这两个方面的要求来说明. 但现在只要让学生有所认识，今后再逐步体会.

操作

已知正比例函数 $y=2x$.

(1) 列表：取自变量 x 的一些值，计算出相应的函数值，如下表：

x	…	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	…
$y=2x$	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…

(2) 描点：分别以所取 x 的值和相应的函数值作为点的横坐标和纵坐标，描出这些坐标所对应的各点.

(3) 连线：用光滑的曲线(包括直线)把描出的这些点按照横坐标由小到大的顺序联结起来.

可以想象，当 x 取遍所有的实数时，如上描出所有的点就成一条直线. 如图 18-2 所示.

自变量 x 可取任意实数，因此可以描出无数个点，且没有起点也没有终点.
在高中将证明正比例函数的图像是一条直线.

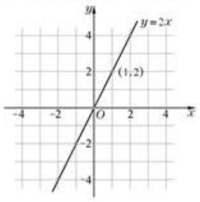


图 18-2

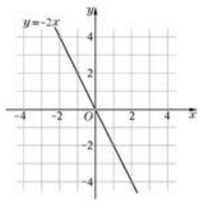


图 18-3

由画图的操作过程可知，所画直线上任意一点的坐标都满足函数解析式 $y=2x$；同时，以这个解析式所确定的 x 与 y 的任意一组对应值为坐标的点都在所画的直线上. 我们就说“这条直线是函数 $y=2x$ 的图像”，并把它表示为“直线 $y=2x$”.

上述操作显示，画函数图像的步骤可以归纳为：(1) 列表；(2) 描点；(3) 连线.

对于一个函数 $y=f(x)$，如果一个图形(包括直线、曲线或其他图形)上任意一点的坐标都满足函数关系式 $y=f(x)$，同时以这个函数解析式所确定的 x 与 y 的任意一组对应值为坐标的点都在图形上，那么这个图形叫做函数 $y=f(x)$ 的图像.

操作

使学生进一步体验画函数图像的一般操作步骤.

操作

按照前述操作的步骤，画函数 $y=-2x$ 的图像.

函数 $y=-2x$ 的图像也是一条直线，如图 18-3 所示.

第一节　正比例函数　61

【注意事项】

(1) 学生第一次在直角坐标平面内描绘函数图像，其中充满了探索，需要积极引导.

(2) 通过操作来尝试画函数 $y=2x$ 的图像时，画出来的图形充其量是一条线段；如果描点出现较大的偏差，那么还有可能画出一条折线(或曲线). 因此，要正确画出正比例函数 $y=2x$ 的图像，一方面要尽可能准确描点、多描点；另一方面要讲解“边款”中的说明，让学生知道所画的线可以向两方无限延伸，由线段想象到直线. 然后指出，在高中将证明正比例函数 $y=kx$ 的图像是一条直线.

思考

函数 $y=-2x$ 的图像与 $y=2x$ 的图像有哪些相同的特点？

函数 $y=2x$ 与 $y=-2x$ 的图像都是一条直线，观察可见这两条直线都经过原点 $O(0,0)$. 实际上，原点 O 的坐标 $(0,0)$ 适合这两个函数的解析式，可知观察所得结论是正确的.

我们知道，一条直线由这条直线上的任意两点所确定. 如直线 $y=2x$，可以由原点 $O(0,0)$ 和点 $(1,2)$ 唯一确定；直线 $y=-2x$ 可以由原点 $O(0,0)$ 和点 $(1,-2)$ 唯一确定.

一般地，正比例函数 $y=kx$（k 是常数，$k\neq0$）的图像是经过原点 $O(0,0)$ 和点 $M(1,k)$ 的一条直线. 我们把正比例函数 $y=kx$ 的图像叫做直线 $y=kx$.

过两点可以画且只能画一条直线.

例题3 在同一直角坐标平面内，分别画出下列函数的图像：

$$y=3x,\ y=x,\ y=\frac{1}{3}x.$$

画直线 $y=x$ 和直线 $y=\frac{1}{3}x$ 时各取点 $B(2,2)$ 和 $C(3,1)$，而不取坐标为 $(1,1)$ 和 $\left(1,\frac{1}{3}\right)$ 的点，是为使所选取的点离原点 O 远一些.

分析 画正比例函数图像，可先取图像上的两个点，再过这两点画一条直线. 为了方便，我们通常取原点 $O(0,0)$ 和点 $M(1,k)$. 但有时为了在画直线时能准确地定位，所取的两点不宜太靠近.

解 选取点 $O(0,0)$ 和 $A(1,3)$，过这两点画一条直线，就得到函数 $y=3x$ 的图像.

选取点 $O(0,0)$ 和 $B(2,2)$，过这两点画一条直线，就得到函数 $y=x$ 的图像.

选取点 $O(0,0)$ 和 $C(3,1)$，过这两点画一条直线，就得到函数 $y=\frac{1}{3}x$ 的图像.

这三个函数的图像如图 18－4 所示.

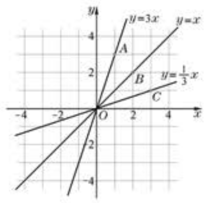


图 18－4

思考

引导学生发现和归纳正比例函数图像的特征.

让学生知道，确认了正比例函数的图像是过原点的一条直线以后，要画正比例函数的图像时，只需确定两个点，然后过这两点画一条直线.

例题 3

这是画正比例函数图像的具体实践，让学生体会如何适当选取两个点，才能在画直线时准确进行定位.

练习 18.2(2)

1. 一条直线；点$(0,0)$和点$(1,k)$.
2. 函数解析式为$y=-10x$；函数图像经过第二、四象限.
3. 略.

【本课重点】

引导学生利用正比例函数图像的直观性，探究正比例函数的基本性质. 从中获得过程经历，体会数形结合的思想方法和研究函数的方法；归纳并掌握正比例函数的基本性质. 能利用正比例函数解决一些简单的实际问题.

操作

画出有代表性的正比例函数的图像，为分析正比例函数的性质做准备.

思考

引导学生对一些正比例函数图像进行观察和比较，从而发现并归纳正比例函数的性质.

练习 18.2(2)

1. （口答）正比例函数 $y=kx$ 的图像是______，它一定经过点______和______.
2. 函数 $y=kx$ $(k\neq 0)$的图像经过点 $A\left(-\frac{1}{2},5\right)$，写出函数解析式，并说明函数图像经过哪几个象限.
3. 在同一直角坐标平面内画出两个函数的图像：
   (1) $y=4x$ 与 $y=\frac{1}{4}x$；　　(2) $y=-\frac{1}{3}x$ 与 $y=-3x$.

3. 正比例函数的性质

操作

在同一直角坐标平面内，分别画出下列函数的图像：

$$y=-4x,\ y=-x,\ y=-\frac{1}{4}x.$$

上面三个函数的图像如图 18－5 所示.

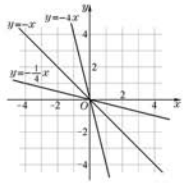


图 18－5

思考

观察图 18－4 和图 18－5，思考并回答下列问题：

(1) 图 18－4 中的函数图像经过哪两个象限？图 18－5 中的函数图像呢？

(2) 正比例函数 $y=kx$ 的图像所经过的两个象限与常数 k 有什么关系？

(3) 图 18－4 中，当一条直线上的点的横坐标从小到大逐渐变化时，点的位置随着从______到______逐渐变化（填“高”或“低”）；这就是说，当自变量 x 的值从小到大逐渐变化时，函数值 y 相应地从______到______逐渐变化（填“大”或“小”）.

图 18－5 中，当一条直线上的点的横坐标从小到大逐渐变化时，点的位置随着从______到______逐渐变化（填“高”或“低”）；这就是说，当自变量 x 的值从小到大逐渐变化时，函数值 y 相应地从______到______逐渐变化（填“大”或“小”）.

(4) 一般来说，对于正比例函数 $y=kx$，随着自变量 x 的值逐渐增大，函数值 y 将怎样变化？

通过观察和思考，可以归纳正比例函数 $y=kx$（k 是常数，$k\neq 0$）有如下性质：

【注意事项】

研究正比例函数的性质时，要让学生经历观察、比较、思考、发现、归纳的过程，从中体会利用图像直观来研究函数性质的“数形结合”的方法.

也可以说，当 $k>0$ 时，正比例函数的图像（除原点外）在第一、三象限.（当 $k<0$ 时类似）

（1）当 $k>0$ 时，正比例函数的图像经过第一、三象限；自变量 x 的值逐渐增大时，y 的值也随着逐渐增大.

（2）当 $k<0$ 时，正比例函数的图像经过第二、四象限；自变量 x 的值逐渐增大时，y 的值则随着逐渐减小.

性质（1）和（2）中的条件与结论各自调换也正确，可以直接运用.

例题4 已知正比例函数 $y=(1-2a)x$，如果 y 的值随 x 的值增大而减小，那么 a 的取值范围是什么？

解 对于正比例函数 $y=(1-2a)x$，由 y 的值随 x 的值增大而减小，可知

$$1-2a<0.$$

解得 $$a>\frac{1}{2}.$$

所以，a 的取值范围是 $a>\frac{1}{2}$.

例题5 在水管放水的过程中，放水的时间 x（分）与流出的水量 y（立方米）是两个变量. 已知水管每分钟流出的水量是 0.2 立方米，放水的过程持续 10 分钟，写出 y 与 x 之间的函数解析式，并指出函数的定义域，再画出这个函数的图像.

解 在放水的过程中，变量 y 与 x 之间成正比例，比例系数是 0.2. 函数解析式是 $y=0.2x$；函数的定义域是 $0\leqslant x\leqslant 10$.

这个函数的图像如图 18－6 所示.

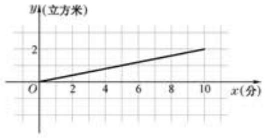


图 18－6

如果函数的解析式是 $y=kx$，但函数的定义域是部分实数，那么这个函数的图像是直线的一部分（还可能只是在一条直线上的一些点）.

在例题 5 中，函数解析式是 $y=0.2x$，定义域是 $0\leqslant x\leqslant 10$，这个函数的图像是一条线段.

练习 18.2(3)

1. 如果正比例函数 $y=kx$ 的图像经过第一、三象限，那么 y 的值随 x 的值增大而________.
   如果正比例函数 $y=kx$ 的图像经过第二、四象限，那么 y 的值随 x 的值增大而________.

64 第十八章 正比例函数和反比例函数

例题 4

这是正比例函数性质的直接应用，可放手让学生自己解决.

例题 5

这是用函数模型方法刻画一个变化过程的尝试.

要重视导出函数的过程分析，并提醒学生注意这个函数的定义域以及图像的特征.

这个函数是正比例函数，但它的定义域是部分实数，图像是一条线段. 对此要进行必要的讲解，帮助学生形成对正比例函数的正确的和比较完整的认识.

练习 18.2(3)

1. 增大;减小.

2. 二、四.

3. $a<4$.

4. (1) 略;

(2) 它们关于 x 轴、y 轴都对称;

(3) 比例系数互为相反数.

2. 已知 $mn<0$,那么函数 $y=\frac{m}{n}x$ 的图像经过第________象限.

3. 已知正比例函数 $y=\left(1-\frac{a}{4}\right)x$,$y$ 的值随着 x 的值增大而增大,求 a 的取值范围.

4. (1) 在同一直角坐标平面内,画出正比例函数 $y=5x$ 和 $y=-5x$ 的图像;

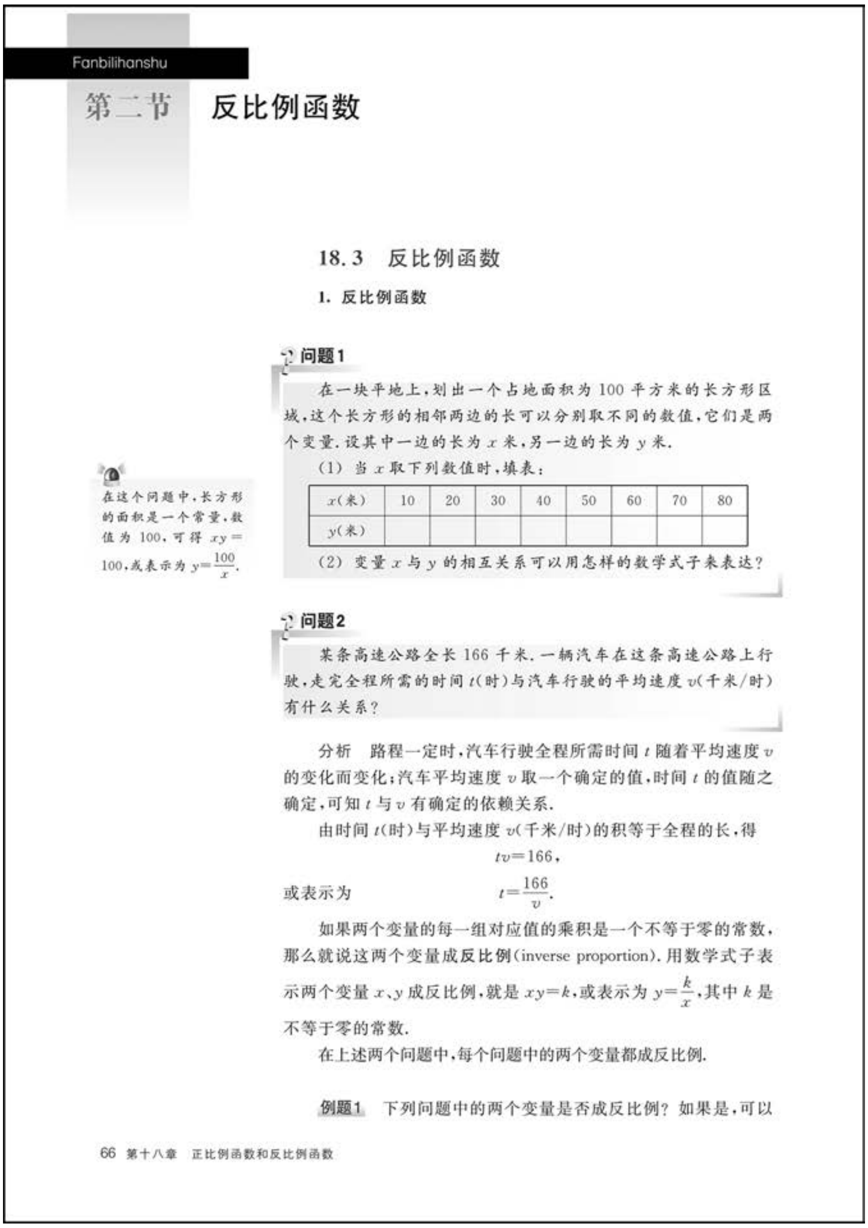
(2) 观察(1)所画的两个函数图像,它们关于 x 轴对称吗? 关于 y 轴对称吗?

(3) 根据(1)(2),如果两个正比例函数的图像关于坐标轴对称,那么它们的比例系数有什么关系?

第一节 正比例函数 65

【注意事项】

本节先讨论两个变量成正比例关系的一些实际问题,从两个变量相互依赖阐明它们具有函数关系;然后引进正比例函数,再研究这一类函数的图像、性质和简单应用,展示了对函数进行研究的基本思想方法.教学中要引导学生经历研究函数的过程,让学生感知函数研究的内容和方法.



Fanbilihanshu

第二节　反比例函数

18.3　反比例函数

1. 反比例函数

问题1

在一块平地上，划出一个占地面积为 100 平方米的长方形区域，这个长方形的相邻两边的长可以分别取不同的数值，它们是两个变量. 设其中一边的长为 x 米，另一边的长为 y 米.

（1）当 x 取下列数值时，填表：

x(米)	10	20	30	40	50	60	70	80
y(米)								

（2）变量 x 与 y 的相互关系可以用怎样的数学式子来表达？

在这个问题中，长方形的面积是一个常量，数值为 100，可得 $xy=100$，或表示为 $y=\frac{100}{x}$.

问题2

某条高速公路全长 166 千米. 一辆汽车在这条高速公路上行驶，走完全程所需的时间 t(时)与汽车行驶的平均速度 v(千米/时)有什么关系？

分析　路程一定时，汽车行驶全程所需时间 t 随着平均速度 v 的变化而变化；汽车平均速度 v 取一个确定的值，时间 t 的值随之确定，可知 t 与 v 有确定的依赖关系.

由时间 t(时)与平均速度 v(千米/时)的积等于全程的长，得

$$tv=166,$$

或表示为

$$t=\frac{166}{v}.$$

如果两个变量的每一组对应值的乘积是一个不等于零的常数，那么就说这两个变量成**反比例**(inverse proportion). 用数学式子表示两个变量 x、y 成反比例，就是 $xy=k$，或表示为 $y=\frac{k}{x}$，其中 k 是不等于零的常数.

在上述两个问题中，每个问题中的两个变量都成反比例.

例题1　下列问题中的两个变量是否成反比例？如果是，可以

66 第十八章　正比例函数和反比例函数

【本课重点】

引导学生经历反比例函数概念的形成过程，理解反比例关系和反比例函数的概念；会判断两个变量是否成反比例函数关系，会用待定系数法求反比例函数解析式.

问题 1

通过在表格中填写数据的活动，让学生更直观地发现规律，得到 $xy=100$ 的关系式.

问题 2

让学生进一步体会在路程不变的情况下，平均速度与时间的乘积不变的特点，得到 $tv=166$.

在问题 1、2 的基础上归纳两个变量成反比例的概念.

【教学目标】

（1）通过现实生活中的具体事例，理解反比例关系；理解反比例函数的概念，会用待定系数法求反比例函数的解析式.

（2）会画反比例函数的图像，知道反比例函数的图像是双曲线；在画图像的操作活动中，养成认真、细心、严谨的学习态度和学习习惯.

（3）经历利用反比例函数图像直观分析反比例函数基本性质的过程，进一步体会数形结合的思想方法和研究函数的方法，归纳并掌握反比例函数的基本性质.

（4）在反比例函数的概念引入和实际应用的过程中，进一步体会函数与现实生活密切相关.

（5）能运用正比例函数、反比例函数的知识以及待定系数法，确定一个涉及正比例关系和反比例关系的函数的解析式.

例题 1

通过对具体问题的讨论，使学生学会判断两个变量之间的反比例关系，同时感知反比例函数.

用怎样的数学式子来表示？

（1）平行四边形的面积为 20 平方厘米，变量分别是平行四边形的一条边长 a（厘米）和这条边上的高 h（厘米）；

（2）被除数为 100，变量分别是除数 r 和商 q；

（3）一位男同学练习 1 000 米长跑，变量分别是该同学跑步的平均速度 v（米/秒）和跑完全程所用的时间 t（秒）.

解 （1）平行四边形的一条边长 a（厘米）和这条边上的高 h（厘米）的乘积 $ah=20$（平方厘米），所以 a 与 h 成反比例，a 与 h 的关系可表示为 $a=\frac{20}{h}$.

（2）当被除数为 100 时，除数 r 和商 q 的乘积 $rq=100$，所以 r 与 q 成反比例，r 与 q 的关系可表示为 $r=\frac{100}{q}$.

（3）当路程为 1 000 米时，跑步的平均速度 v（米/秒）和跑完全程所用的时间 t（秒）的乘积 $vt=1\,000$，所以 v 与 t 成反比例，v 与 t 的关系可表示为 $v=\frac{1\,000}{t}$.

归纳反比例函数的概念.

应强调反比例函数解析式的特征；关于它的定义域，同正比例函数一样说明. 要使学生明确，反比例函数的定义域由解析式确定为不等于零的一切实数.

如果两个变量成反比例，那么其中一个变量是另一个变量的函数. 如同正比例函数的研究一样，我们也在更一般的意义下来研究两个变量成反比例的函数.

解析式形如 $y=\frac{k}{x}$（k 是常数，$k\neq 0$）的函数叫做**反比例函数**（inversely proportional function）. 其中 k 也叫做比例系数.

反比例函数由系数 k 确定.

反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的定义域是不等于零的一切实数.

例题 2

帮助学生学习用待定系数法求反比例函数的解析式；同时复习求函数值和已知函数值求它对应的自变量 x 的值.

例题2 已知 y 是 x 的反比例函数，且当 $x=2$ 时，$y=9$.

（1）求 y 关于 x 的函数解析式；

（2）当 $x=3\frac{1}{2}$ 时，求 y 的值；

（3）当 $y=5$ 时，求 x 的值.

解 （1）因为 y 是 x 的反比例函数，可设函数解析式为 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）.

把 $x=2$，$y=9$ 代入解析式，得

$$9=\frac{k}{2}.$$

解得 $$k=18.$$

这里采用了待定系数法.

所以，y 关于 x 的函数解析式是 $y=\frac{18}{x}$.

第二节 反比例函数 67

【注意事项】

本节内容的结构及安排与“正比例函数”类似. 有关的教学环节和教学要求的把握，可参照上一节“正比例函数”.

（2）当 $x=3\frac{1}{2}$ 时，把 $x=3\frac{1}{2}$ 代入函数解析式 $y=\frac{18}{x}$，得

$$y=\frac{18}{3\frac{1}{2}}=\frac{36}{7}.$$

（3）当 $y=5$ 时，把 $y=5$ 代入函数解析式 $y=\frac{18}{x}$，得

$$5=\frac{18}{x}.$$

解得 $$x=\frac{18}{5}.$$

想一想

已知反比例函数中两个变量的一组对应值，一定能求出函数解析式吗？

练习 18.3(1)

1. （口答）判断下列问题中两个变量是否成反比例，为什么？
   （1）三角形的面积 S 一定时，它的一条边长 a 和这条边上的高 h；
   （2）存煤量 Q 一定时，平均每天的用煤量 m 与可使用的天数 t；
   （3）货物的总价 A 一定时，货物的单价 a 与货物的数量 x；
   （4）车辆所行驶的路程 s 一定时，车轮的直径 d 和车轮的旋转周数 n.
2. 下列函数（其中 x 是自变量）中，哪些是反比例函数？哪些不是？为什么？
   （1）$y=-\frac{1}{3}x$；（2）$y=\frac{x}{4}$；
   （3）$y=-\frac{1}{5x}$；（4）$y=\frac{2a}{x}$（a 为常数，$a\neq0$）.
3. 已知 y 是 x 的反比例函数，且当 $x=4$ 时，$y=7$.
   （1）写出 y 关于 x 的函数解析式；
   （2）当 $x=5$ 时，求 y 的值.
4. 已知长方形的面积为 20 平方厘米，它的一边长为 x 厘米，求这边的邻边长 y（厘米）关于 x（厘米）的函数解析式，并写出这个函数的定义域.

通过列表、描点、连线画函数图像，是一种基本方法.

2. 反比例函数的图像和性质

我们按照作函数图像的一般步骤，通过列表、描点、连线，来画反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k 是常数，$k\neq0$）的图像.

想一想

引导学生思考确定反比例函数解析式所需要的条件.

练习 18.3(1)

1. （1）a 与 h 成反比例；
   （2）m 与 t 成反比例；
   （3）a 与 x 成反比例；
   （4）d 与 n 成反比例.
2. （3）（4）是反比例函数；（1）（2）不是反比例函数.
3. （1）$y=\frac{28}{x}$；
   （2）$y=\frac{28}{5}$.
4. 函数解析式为 $y=\frac{20}{x}$；定义域为 x 是实数且 $x>0$.

【本课重点】

让学生经历画反比例函数图像的过程，知道反比例函数的图像是双曲线，学会画反比例函数的图像.

操作

让学生进行画反比例函数图像的操作实践.

学生画反比例函数的图像时可能会有较多困难,要加强过程指导.

操作

画反比例函数 $y=\frac{8}{x}$ 的图像.

(1) 列表:反比例函数的定义域是不等于零的所有实数,在列表时,自变量 x 的值不能取零,可以取一些正数和负数,计算出相应的函数值 y,如下表所示:

x	…	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	6	7	8	…
y	…	-1	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{8}{5}$	-2	$-\frac{8}{3}$	-4	-8	8	4	$\frac{8}{3}$	2	$\frac{8}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{7}$	1	…

(2) 描点:分别以 x 所取的值和相应的 y 值作为点的横坐标和纵坐标,描出这些坐标所对应的各点.

(3) 连线:把第一象限内的各点用光滑的曲线连接,再向两方伸展,得到图像的一支;

用同样的方法在第三象限画出图像的另一支.

函数 $y=\frac{8}{x}$ 的图像如图 18－7 所示.

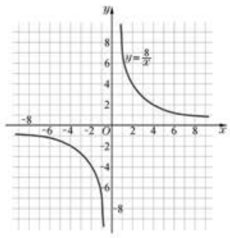


图 18－7

想一想

引导学生在画反比例函数图像时注意函数的定义域,把握图像的特征.

想一想

画函数 $y=\frac{8}{x}$ 的图像时,为什么曲线的每支是向两方伸展的?

操作

让学生通过画函数 $y=-\frac{8}{x}$ 的图像,从中获得实践经验.

操作

画反比例函数 $y=-\frac{8}{x}$ 的图像.

(1) 列表:

x	…	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	6	7	8	…
y	…																	…

第二节 反比例函数 69

【注意事项】

(1) 对学生画反比例函数 $y=\frac{8}{x}$ 图像的指导,首先要分析函数解析式,使学生在列表时能注意到 x 与 y 的值都不能为零且一定同号;取 x 的一些正值并求出 y 的对应值后,由各组中两个值分别取相反数就得到新的"数对";进一步看到这个函数图像上的点分布在第一、第三象限,图像与坐标轴都不相交.其次要指出"连线"的要求,即用光滑的曲线连接,并向两方伸展.

(2) 对于数学基础较好的学生,可让他们先尝试画反比例函数 $y=\frac{8}{x}$ 的图像,然后引导学生通过对函数解析式进行分析,正确认识图像的基本特征,发现和纠正画图过程中可能出现的错误.

把你通过操作画出的图像与图 18－8 比较一下；想一想，画反比例函数的图像要注意什么？

（2）描点；

（3）连线.

函数 $y=-\frac{8}{x}$ 的图像如图 18－8 所示.

反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k 是常数，$k\neq 0$）的图像叫做**双曲线**（hyperbola），它有两支.

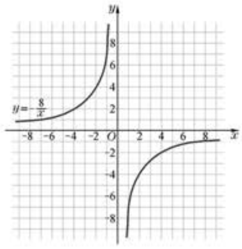


图 18－8

想一想

双曲线的每支都是向两方无限伸展的，那么双曲线是否会与坐标轴相交？画反比例函数图像时应该注意哪些问题？把你的想法与同学交流一下.

操作

画反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 和 $y=-\frac{6}{x}$ 的图像.

反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 和 $y=-\frac{6}{x}$ 的图像如图 18－9 所示.

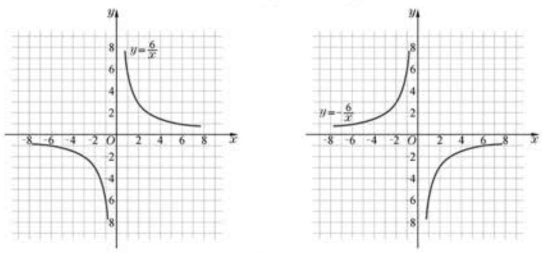


图 18－9

70 第十八章 正比例函数和反比例函数

可利用多媒体，向学生演示画反比例函数图像的过程及正确的图形.

想一想

引导学生及时总结画反比例函数图像的经验.

操作

让学生利用已有的经验，自主进行画反比例函数图像的实践，并为归纳反比例函数的基本性质提供有代表性的图像.

【注意事项】

（1）在反比例函数的图像教学中，描点、画图是难点. 要让学生动手实践，通过画函数 $y=\frac{8}{x}$ 和 $y=-\frac{8}{x}$ 的图像获得经验；发现错误时应组织学生讨论并及时讲评，明确画图像时应注意的问题.

（2）可利用计算机等多媒体手段，显示反比例函数图像的特征，使学生认识反比例函数的图像是曲线，而且有两支，并直观认识图像变化的大致趋势.

（3）可指导学生根据解析式 $y=\frac{8}{x}$ 思考，如果 x 所取值的绝对值越来越大，那么 y 的对应值的绝对值越来越小；而 x 所取值的绝对值越来越小（不为零），则 y 的对应值的绝对值越来越大. 由此可知，图像向右或向左延伸，与 x 轴越来越靠近；图像向上或向下延伸，与 y 轴越来越靠近. 关于 $y=-\frac{8}{x}$ 的图像，可类似地进行思考和分析.

思考

用问题引导学生发现反比例函数的基本性质.

要展现观察、比较、思考和归纳的过程.

师生共同归纳反比例函数的基本性质.

要强调反比例函数的函数值的变化情况是对图像分别所在的象限而言，不是针对整个定义域.

练习 18.3(2)

1. 略.

2. 略.

3. $y=-\dfrac{1}{x}$, $y=-\dfrac{1}{2x}$, $y=-\dfrac{3}{50x}$; $y=\dfrac{0.2}{x}$.

4. 第二、四象限.

思考

观察、比较函数 $y=\dfrac{8}{x}$ 和 $y=\dfrac{6}{x}$ 的图像，思考下列问题：

(1) 这两个函数的图像分别位于哪几个象限内?

(2) 在每一象限内，随着图像上的点的横坐标 x 逐渐增大，纵坐标 y 是怎样变化的?

(3) 图像的每支都向两方无限延伸，它们可能与 x 轴、y 轴相交吗? 为什么?

类似地，再观察和比较函数 $y=-\dfrac{8}{x}$ 与 $y=-\dfrac{6}{x}$ 的图像，并思考上述问题.

通过对图像的观察和比较，可以归纳反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$(k 是实数，$k\neq0$)有如下性质：

(1) 当 $k>0$ 时，函数图像的两支分别在第一、三象限；在每个象限内，当自变量 x 的值逐渐增大时，y 的值随着逐渐减小.

(2) 当 $k<0$ 时，函数图像的两支分别在第二、四象限；在每个象限内，当自变量 x 的值逐渐增大时，y 的值随着逐渐增大.

(3) 图像的两支都无限接近于 x 轴和 y 轴，但不会与 x 轴和 y 轴相交.

性质(1)和(2)的条件与结论各自调换也是正确的，可以直接运用.

练习 18.3(2)

1. 在同一直角坐标平面内，分别画出下列函数的图像：

(1) $y=\dfrac{4}{x}$；　　(2) $y=-\dfrac{4}{x}$.

2. 根据上题的图像，分别说明自变量 x 逐渐增大时，y 的值的变化情况.

3. 已知下列反比例函数：

$$y=\frac{0.2}{x},\ y=-\frac{1}{x},\ y=-\frac{1}{2x},\ y=-\frac{3}{50x}.$$

其中，图像位于第二、四象限的函数是__________；

在其图像所在的每个象限内，y 的值随 x 的值增大而减小的函数是__________.

4. 如果反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$(k 是常数，$k\neq0$)的图像在第二、四象限，那么正比例函数 $y=kx$(k 是常数，$k\neq0$)的图像经过哪几个象限?

第二节　反比例函数　71

【注意事项】

对反比例函数“在每一象限内，当自变量的值逐渐增大时，y 的值随着逐渐减小(增大)”的性质进行解说时，一要利用图像直观；二可通过正反两方面具体举例进行解释.

例题3 已知反比例函数 $y=\frac{2k+1}{x}$.

(1) 如果这个函数图像经过点 $(2,-1)$，求 k 的值；

(2) 如果在这个函数图像所在的每个象限内，y 的值随 x 的值增大而减小，求 k 的取值范围.

解 (1) 因为反比例函数 $y=\frac{2k+1}{x}$ 的图像经过点 $(2,-1)$，所以把 $x=2$，$y=-1$ 代入 $y=\frac{2k+1}{x}$，得 $-1=\frac{2k+1}{2}$.

这时函数解析式是 $y=-\frac{2}{x}$.

解得 $$k=-\frac{3}{2}.$$

(2) 由于在函数 $y=\frac{2k+1}{x}$ 的图像所在的每个象限内，y 的值随 x 的值的增大而减小，可知

$$2k+1>0.$$

解得 $$k>-\frac{1}{2}.$$

例题4 已知 $y=y_1-y_2$，并且 y_1 与 x 成正比例，y_2 与 $(x-2)$ 成反比例. 当 $x=-2$ 时，$y=-7$；当 $x=3$ 时，$y=13$.

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式；

(2) 求当 $x=5$ 时的函数值.

分析 由 y_1 与 x 成正比例，可设 $y_1=k_1x(k_1\neq0)$；由 y_2 与 $(x-2)$ 成反比例，可设 $y_2=\frac{k_2}{x-2}$ $(k_2\neq0)$.

把 $(x-2)$ 看成一个整体；由于题中的正比例系数与反比例系数是两个互不相关的常数，因此分别用 k_1、k_2 表示.

解 (1) 设所求的函数解析式为 $y=k_1x-\frac{k_2}{x-2}$，其中 k_1、k_2 都是不等于零的常数.

当 $x=-2$ 时，$y=-7$，把它们代入 $y=k_1x-\frac{k_2}{x-2}$，得

$$-7=-2k_1-\frac{k_2}{-2-2}.$$

化简得 $$8k_1-k_2=28. \quad ①$$

当 $x=3$ 时，$y=13$，把它们代入 $y=k_1x-\frac{k_2}{x-2}$，得

$$13=3k_1-\frac{k_2}{3-2}.$$

化简得 $$3k_1-k_2=13. \quad ②$$

将①②组成一个关于 k_1、k_2 的二元一次方程组：

$$\begin{cases}8k_1-k_2=28,\\3k_1-k_2=13.\end{cases}$$

解这个方程组，得

72 第十八章 正比例函数和反比例函数

【本课重点】

让学生初步体会反比例函数性质的运用，并进一步学习待定系数法，会确定由正比例函数、反比例函数组合而成的函数的解析式.

例题 3

本题中题(1)是用待定系数法确定函数解析式；题(2)是反比例函数的性质的初步运用. 可放手让学生自主解决.

例题 4

本题是用待定系数法求一个函数的解析式，这个函数中涉及正比例关系和反比例关系.

【注意事项】

(1) 在例题 4 中，函数 y 是一个关于 x 的正比例函数和一个关于 $(x-2)$ 的反比例函数的差，让学生求这个函数的解析式有一定的难度. 在教学中，要帮助学生理解题意，理清楚解题思路. 要讲解函数 y 的构成、y_2 与 $(x-2)$ 成反比例的含义；要解释其中涉及两个互不相关的待定系数，必须分别用 k_1、k_2 表示.

(2) 类似于例题 4 的问题，有综合运用正比例、反比例函数知识和待定系数法的要求；对这类问题的难度要切实控制，不要补充繁难的题目.

在例题 4 教学的基础上，要引导学生反思，从中体会到确定两个待定系数，需要有两个独立条件，并通过列方程组求解.

练习 18.3(3)

1. 由 $2k-1<0$，得 $k<\frac{1}{2}$.

2. (1) $y=\frac{3}{x}$；

(2) $a=\frac{3}{2}$，$y=\frac{3}{4}x$.

3. (1) x 是一切实数，且 $x\neq 0$；

(2) 0，$\sqrt{2}$.

$$k_1=3, k_2=-4.$$

因此，所求函数解析式是 $y=3x+\frac{4}{x-2}$.

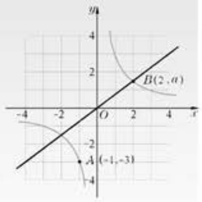
(2) 当 $x=5$ 时，$y=3\times5+\frac{4}{5-2}=16\frac{1}{3}$.

所以，当 $x=5$ 时，函数值为 $16\frac{1}{3}$.

本例求函数解析式时还是采用待定系数法. 其中，待定系数有两个，分别用 k_1、k_2 表示；通过列方程组并求解，确定 k_1、k_2 的值.

练习 18.3(3)

1. 已知反比例函数 $y=\frac{2k-1}{x}$ 的图像有一支在第二象限，求常数 k 的取值范围.
2. 如图，点 $A(-1,-3)$、$B(2,a)$ 在图中的反比例函数图像上，点 B 同时在图中的正比例函数图像上.
   (1) 求这个反比例函数的解析式；
   (2) 求 a 的值及这个正比例函数的解析式.
3. 已知函数 $f(x)=2x-\frac{2}{x}$.
   (1) 求这个函数的定义域；
   (2) 计算 $f(-1)$，$f(\sqrt{2})$.



(第 2 题)

Hanshu De Biaoshifa

第三节 函数的表示法

18.4 函数的表示法

正比例函数和反比例函数，都是用数学式子来表达两个变量之间的函数关系.把两个变量之间的依赖关系用数学式子来表达，这种表示函数的方法叫做**解析法**.这种数学式子也就是函数解析式.

用解析法表示函数关系，既全面地概括了变量之间的依赖关系，又简单明了，便于对函数进行理论上的分析和研究.但有些函数不能用解析法表示，或者很难找到这个函数的解析式，因此必须用其他的方式来表示这些函数.

观察

“探索浩瀚宇宙，发展航天事业，建设航天强国，是我们不懈追求的航天梦.”我国航天事业创造了以“两弹一星”、载人航天、月球探测等为代表的辉煌成就.

下面是某载人飞船返回舱返回过程中的大致相关记录：

时　间	3时45分	4时13分	4时19分	4时20分	4时23分	4时32分	4时33分
返回舱距地面的高度	350千米	100千米	15千米	10千米	6千米	1千米	0
降落状况	返回舱制动点火	返回舱处于无动力飞行状态，高速进入黑障区	引导伞引出减速伞	减速伞打开	返回舱抛掉防热大底	指示灯亮，提示即将着陆	返回舱成功降落地面

本例用表格反映了某载人飞船返回舱距地面的高度与时间的函数关系.把两个变量之间的依赖关系用表格来表达，这种表示函数的方法叫做**列表法**.

用列表法来表示函数，自变量的值与其对应的函数值一目了然，查找方便.但有许多函数，往往不可能把自变量的所有值与其对应的函数值都列在表中.

观察

根据研究，体内血乳酸浓度升高是运动后感觉疲劳的重要原因.运动员未运动时，体内血乳酸浓度水平通常在40mg/L以下；如果血乳酸浓度降到50mg/L以下，运动员就基本消除了疲劳.体

74 第十八章 正比例函数和反比例函数

【本课重点】

知道表示函数的三种常用方法，以及各自的优缺点；使学生获得建立函数关系的经历，并能从函数图像或表格中获取有关信息.

观察

让学生通过某载人飞船返回舱返回过程中的相关记录，了解列表法及其优缺点.本例是思想教育素材，让学生为我国航天事业的成就而自豪.

引导学生体会，用列表法表示函数关系有优点也有不足，表中通常仅反映了部分的函数值.

【教学目标】

（1）通过对正比例函数、反比例函数的回顾以及有关实例的分析，知道表示函数有解析法、列表法、图像法等三种常用方法，知道这三种表示法的优缺点.

（2）经历建立函数关系的过程，从中体会函数是描述事物运动变化规律的工具；会适当选用函数表示法或综合运用几种表示法，来表达简单实际问题中的函数关系.

（3）初步学会运用函数的思想方法解决简单的实际问题；能从表示函数的图像或表格中获取有关信息.

【注意事项】

（1）学生在前面的学习中，对表示函数的解析法、列表法、图像法已有初步认识.本节的教学，着重于引导学生对这三种方法进行归纳、整理，了解它们的优缺点.可再举一些实例，帮助学生进一步认识函数的常用表示法.

（2）可结合我国航天事业的成就，对学生进行思想教育.

观察

通过实例，让学生了解图像法及其优缺点，并知道利用函数图像获取信息.

育科研工作者根据实验数据，绘制了一幅图像，它反映了运动员进行高强度运动后，体内血乳酸浓度随时间变化而变化的函数关系，如图 18－10 所示.

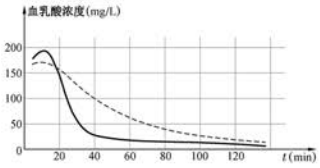


图 18－10

图中实线表示采用慢跑等活动方式放松时血乳酸浓度的变化情况；虚线表示采用静坐方式休息时血乳酸浓度的变化情况.

从图中可以看出采用慢跑方式能够更好地消除疲劳.

把两个变量之间的依赖关系用图像来表示，这种表示函数的方法叫做**图像法**.

用图像法来表示函数非常直观，可以清楚地看出函数的变化情况. 但是，在图像中找对应值时往往不够准确，而且有的函数画不出它的图像，还有许多函数不可能得到它的完整图像.

解析法、列表法、图像法是表示函数的三种常用方法. 用适当的方法表示函数，或者把几种方法结合起来，能够帮助我们更好地研究函数和运用函数解决问题. 前面在研究正比例函数和反比例函数时，我们同时运用了解析法和图像法.

例题 1

让学生尝试建立函数关系.

可用实物模型帮助学生理解题意和探求定义域.

例题1 把一块边长为 20 厘米的正方形铁皮，在四角各截去边长为 x 厘米的小正方形（如图 18－11），再按虚线折成一个无盖的长方体盒子. 求这个盒子的容积 V（立方厘米）关于变量 x（厘米）的函数解析式以及函数的定义域.

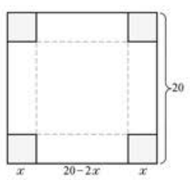


图 18－11

解　已知截去小正方形的边长为 x 厘米，那么所做成的盒子

第三节　函数的表示法　75

【注意事项】

（1）根据具体情况选择适当的方法表示函数，是合理表达、深入研究函数的现实需要，也是灵活、有效地解决问题的能力表现. 同时要使学生认识到，把表示函数的几种方法结合起来，可以发挥不同表示方法的长处，进行优势互补.

（2）怎样消除激烈运动后的疲劳，是学生需要知道的知识；在学生对体内血乳酸随着时间变化而变化的“观察”活动中，要有意让学生去体会.

的高是 x 厘米，盒子的底是正方形，它的边长是 $(20-2x)$ 厘米. 可得

$$V=x(20-2x)^2.$$

这就是所求 V 关于 x 的函数解析式.

因为小正方形的边长不能为零或负数，又不能等于或大于原来正方形铁皮边长的一半，所以函数的定义域是 $0<x<10$.

例题2 A、B 两地相距 25 千米，甲于某日 12 时 30 分骑自行车从 A 地出发前往 B 地，乙也于同日下午骑摩托车从 A 地出发前往 B 地. 图 18－12 中的折线 PQR 和线段 MN 分别反映了甲和乙所行驶的路程 s 与该日下午的时间 t 的函数关系. 根据图像提供的信息回答下列问题：

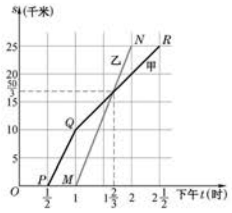


图 18－12

(1) 甲出发后几小时乙才出发？

(2) 乙行驶多少分钟后追上甲？这时两人离 B 地还有多少千米？

(3) 甲乙两人分别在下午几点到达 B 地？

(4) 甲从下午 1 时到 2 时半的速度是每小时多少千米？

(5) 乙的速度是每小时多少千米？

解 (1) 甲出发半小时后乙才出发.

乙出发后追上甲所用时间为 $1\frac{2}{3}-1=\frac{2}{3}$(小时).

(2) 从图中信息可知，当乙出发 $\frac{2}{3}$ 小时(即 40 分钟)后追上甲；这时两人离 B 地的路程是

$$25-\frac{50}{3}=\frac{25}{3}(\text{千米}).$$

(3) 甲在下午 2 时 30 分到达 B 地，乙在下午 2 时到达 B 地.

(4) $(25-10)\div\left(2\frac{1}{2}-1\right)=10$(千米/时).

所以，甲下午 1 时到 2 时半的速度是 10 千米/时.

(5) $25\div(2-1)=25$(千米/时).

所以，乙的速度是 25 千米/时.

例题 2

帮助学生学会分析图像、获取信息.

用图像表达函数关系具有直观性，有关的信息可以通过“读图”获得.

要对学生进行“读图”的指导，培养学生的读图能力.

练习 18.4(1)

1. (1) 从起始到 2 分这段时间,列车的速度逐渐加快;

(2) 在 2 分到 5.5 分这段时间内,列车匀速行驶,行驶了 17.5 千米;

(3) 从 5.5 分到 8 分这段时间,列车的速度逐渐减慢.

2. $y=30x$;$0<x\leqslant 40$.

【本课重点】

引导学生运用函数的思想方法解决简单的实际问题.

例题 3

本题是依据实际问题中的变量关系建立反比例函数.

这个反比例函数的定义域是由函数的解析式及函数的实际意义确定的,这个定义域为部分正实数.

练习 18.4(1)

1. 一位学生在乘坐磁浮列车从龙阳路站到上海浦东国际机场途中,记录了列车运行速度的变化情况,如下表:

时间 t(分)	0	1	1.5	2	3	4	5	5.5	6	7	8
速度 v(千米/时)	0	146	217	300	300	300	300	300	281	121	0

根据表中提供的信息回答下列问题:

(1) 在哪一段时间内列车的速度逐渐加快?

(2) 在哪一段时间内列车是匀速行驶的?在这一段时间内列车走了多少路程?

(3) 在哪一段时间内列车的速度逐渐减慢?

2. 某校生物小组学生准备在校内一空地围一个长方形苗圃.苗圃的一边靠墙,墙可利用部分的最大长度为 40 米;苗圃的另一边与墙垂直,长为 30 米.
试写出苗圃的面积 y(平方米)与靠墙一边的长 x(米)的函数解析式以及函数的定义域.

例题3 一个游泳池内有水 90 立方米,设排尽全池水的时间为 t(分),每分钟的排水量为 x(立方米),规定排水时间至少 9 分钟,至多 15 分钟.试写出排水时间 t 关于每分钟排水量 x 的函数解析式,并指出函数的定义域.

解 根据题意,排水时间 t 与每分钟排水量 x 成反比例关系,可表示为

$$tx=90,$$

即

$$t=\frac{90}{x}.$$

当 $t=9$ 时,得 $x=10$;当 $t=15$ 时,得 $x=6$.可知要在规定时间内排尽池水,每分钟的排水量至多 10 立方米,至少 6 立方米.

所以,所求函数解析式是 $t=\frac{90}{x}$,定义域是 $6\leqslant x\leqslant 10$.

在实际问题中,当两个变量 y 和 x 成反比例时,y 是 x 的函数,可用解析法表示为 $y=\frac{k}{x}$(k 是常数,$k\neq 0$);但是,函数的定义域一般是部分实数(不包括零).

例题4 根据我国 2018 年 10 月开始实行的个人所得税新税率,纳税人实际取得的工资、薪金收入扣除 5 000 元后的余额为全月应纳税所得额.新应缴纳所得税的税率仍分为 7 级,应缴纳所得税按级计算.前 4 级的税率如下表:

第三节 函数的表示法 77

【注意事项】

在例题 3 中,发现排水时间与每分钟的排水量成反比例是解题的关键,而确定函数的定义域有可能是难点.分析时,可联系生活经验和结合具体取值,帮助学生把握排水时间与每分钟排水量成反比例关系的事实;进而看到,由排水时间的规定,对排水量大小有限制.

级数	全月应纳税所得额	税率
1	不超过 3 000 元	3%
2	超过 3 000 元至 12 000 元的部分	10%
3	超过 12 000 元至 25 000 元的部分	20%
4	超过 25 000 元至 35 000 元的部分	25%

设个人月工资、薪金收入为 x 元，试写出当 x(元)超过 8 000(元)但不超过 17 000(元)时，个人应缴纳的所得税 y(元)关于 x(元)的函数解析式；并求个人月工资、薪金收入为 12 000 元的职工每月需缴纳的个人所得税.（x 为精确到 0.01 的正数. 本题没有符合的专项扣除项目）

分析　当 x(元)超过 8 000(元)但不超过 17 000(元)时，全月应纳税所得额为$(x-5\,000)$元，其中 3 000 元税率为 3%，还有$(x-5\,000-3\,000)$元在“3 000 元至12 000 元的部分”内. 这样，其缴纳的个人所得税为

$$(x-8\,000)\times10\%+3\,000\times3\%(\text{元}).$$

解　当个人月工资、薪金收入 x(元)超过 8 000(元)但不超过 17 000(元)时，

$$y=(x-8\,000)\times10\%+3\,000\times3\%,$$

即　$y=0.1x-710$　($8\,000<x\leqslant17\,000$ 且 x 为精确到 0.01 的正数).

当 $x=12\,000$ 时，$y=490$(元).

答：当 x(元)超过 8 000(元)但不超过 17 000(元)时，个人应缴纳的所得税 y(元)关于 x(元)的函数解析式是 $y=0.1x-710$；个人月工资、薪金收入为 12 000 元的职工每月需缴纳的个人所得税是 490 元.

例题5　为了预防“流感”，某学校对教室采取“药熏”消毒. 已知该药燃烧时，室内每立方米的含药量 y(毫克)与时间 x(分)成正比例；药物燃烧结束后，y 与 x 成反比例；这两个变量之间的关系如图 18－13 所示. 根据图中所提供的信息，回答下列问题：

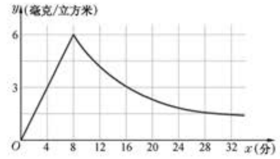


图 18－13

例题 4

本题以公民纳税为背景，含有建立函数关系和函数应用的要求；可结合解题进行思想教育.

例题 5

本题有读图和函数应用的要求，又是所学函数知识的综合运用. 其中问题(2)(3)的设计，是为了控制题目难度，避免出现“分段函数”.

【注意事项】

(1) 在例题 4 中所涉及的个人所得税问题，实际情况比较复杂. 题中选取了其中的一种情况加以简化，让学生运用正比例函数的知识加以解决. 这样，既达到了巩固和运用所学知识的要求，又起到了思想教育的作用.

(2) 例题 5 是以医学中研究药效为背景的简化了的实际问题. 它既应用了正比例函数的模型，又应用了反比例函数的模型，使所学知识都得到了巩固. 在解题过程中，要引导学生回顾和整理有关知识，积累和总结读图的经验，体会函数的应用.

“边款”中提出的问题具有实用性和趣味性，可提供给数学基础较好的学生进行研究和讨论.

(3) 在初中阶段，对“分段函数”不作教学要求.

练习 18.4(2)

1. （1）$y=8.9x$；

（2）$y=\dfrac{200}{x}$.

2. C.

3. 已知眼镜度数 y 与镜片焦距 x 成反比例函数，所以设 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq0)$.

把 $x=0.25$，$y=400$ 代入式中，解得 $k=100$.

所以，所求的函数解析式为 $y=\dfrac{100}{x}$.

（1）药物燃烧了几分钟时，教室里含“药”量最大？每立方米含药量有多少毫克？

（2）写出药物燃烧时，y 关于 x 的函数解析式及定义域.

（3）写出在药物燃烧结束后，y 关于 x 的函数解析式及定义域.

解 （1）根据图像可知，药物燃烧了 8 分钟时，教室里含药量最大，每立方米有 6 毫克.

（2）在药物燃烧过程中，y 与 x 成正比例. 可设 $y=k_1x$ （$k_1\neq0$）.

把点(8,6)的坐标代入，解得 $k_1=\dfrac{3}{4}$.

又从图像可知，药物燃烧到第 8 分钟，所以药物燃烧时的函数为

$$y=\frac{3}{4}x\ (0\leqslant x\leqslant8).$$

（3）药物燃烧结束后，y 与 x 成反比例. 可设

$$y=\frac{k_2}{x}\ (k_2\neq0).$$

把点(8,6)的坐标代入，解得 $k_2=48$.

所以，所求函数为 $y=\dfrac{48}{x}$ （$x\geqslant8$）.

医学研究表明，当空气中每立方米的含药量不低于 3 毫克、且持续时间不少于 10 分钟时，才能有效杀灭空气中的病毒. 本次消毒是否有效？为什么？

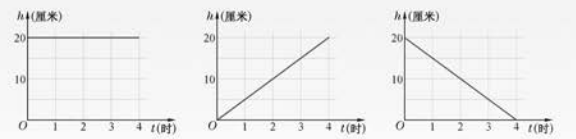
练习 18.4(2)

1. （1）已知每千克苹果售价 8.90 元，设购买苹果 x 千克，需付款 y 元，试写出 y 关于 x 的函数解析式；

   （2）采购员用 200 元去买苹果，设每千克苹果售价 x 元，可购买苹果 y 千克，试写出 y 关于 x 的函数解析式.

2. 一支蜡烛长 20 厘米，点燃后每小时燃烧 5 厘米.

   试判断在下列图像中，能大致表示这支蜡烛点燃后剩下的长度 h(厘米)与点燃的时间 t(时)之间的函数关系的是哪一个图.



（A）　　（B）　　（C）

（第 2 题）

3. 近视眼镜的度数 y(度)与镜片焦距 x(米)成反比例. 已知 400 度的近视眼镜镜片的焦距为 0.25 米，请写出眼镜度数 y 关于镜片焦距 x 的函数解析式.

Benzhangxiaojie

18

本章小结

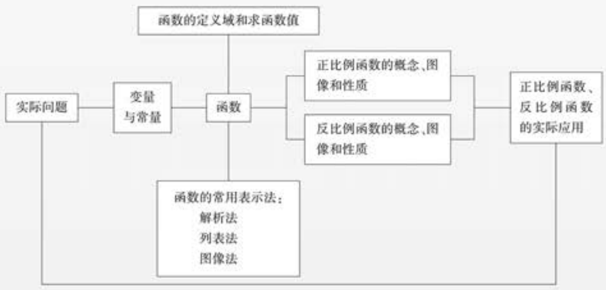
客观世界是不断运动、变化的，事物中存在各种各样的变量. 在同一个变化过程中，一些变量之间相互依存，一个变量的变化会引起其他变量的相应变化.

函数是体现运动变化的基本数学概念，它从数量角度刻画事物变化的过程，表达变量之间确定的依赖关系. 一般来说，对于函数必须指明它的定义域；在没有特别说明的情况下，函数的定义域是指使函数解析式有意义的自变量的取值范围. 在实际问题中，自变量的取值要符合实际意义.

本章重点讨论了正比例函数和反比例函数. 我们通过分析现实生活中具有正比例或反比例关系的具体事例，建立了正比例函数、反比例函数的概念；借助于图像的直观，得到了它们的一些基本性质；并应用这些概念和性质，解决一些简单的实际问题.

函数的表示方法，常用的有解析法、列表法、图像法等三种，不同的表示方法各具特点、各有局限，把几种方法结合起来，有助于对函数进行分析和研究. 利用函数图像的直观，数形结合地研究函数的性质，是在初中阶段学习函数的基本要求；利用图表获取信息，运用函数描述变化过程，利用待定系数法确定函数解析式，其中的数学思想方法要认真体会.

本章的知识结构框图如下：



通过小结，整理本章所学知识. 不仅要帮助学生深入理解函数的有关概念，更要引导学生体会函数的思想以及研究函数的方法.

【设计意图】

引导学生进行数学实践活动,将所学知识用于生产、生活实际,获得过程体验,增强数学应用的意识;学习用数学的眼光观察周围世界,体会数学源于实践、服务于实践的辩证观点.

【活动建议】

把本项活动作为数学作业进行布置和检查,组织学生进行活动.

学生可自选其中一个项目,完成作业;教师要对学生的作业情况及活动表现给予讲评.在讲评时,要特别关注学生在活动过程中的体验.

Tanjiuhuodong

18

探究活动

生活中的函数

活动一

水银体温计的读数与水银柱的长度之间是否存在函数关系呢?

(1) 收集数据:

温度计的读数(℃)	35	36	37	38	39	40	41	42
水银柱的长度(cm)								

(2) 分别以水银温度计的读数与相应的水银柱的长度为点的横坐标与纵坐标,在直角坐标平面内分别描出各个点,并用光滑的曲线(或直线)将这些点连接起来.

(3) 水银温度计的读数 t 是水银柱的长度 h 的函数吗?为什么?

第十九章　几 何 证 明

一、教学目标

1. 体验几何研究从直观经验、操作实验到演绎推理的演进过程，认识几何直觉和演绎推理的作用；知道基本的逻辑术语，理解命题、定理、证明的意义；懂得推理过程中的因果关联，知道证明的步骤.

2. 在例题学习和证明实践中，初步掌握演绎推理的规则和规范表达的格式；会用三角形全等的判定定理和性质定理证明有关线段相等、角相等以及两条直线平行、垂直的简单问题，会用等腰三角形的判定定理和性质定理证明简单的几何问题.

3. 通过对平行线和等腰三角形的有关定理的分析，理解逆命题与逆定理；掌握角的平分线、线段的垂直平分线的有关性质；知道轨迹的意义，知道圆、角的平分线、线段的垂直平分线这三条基本轨迹.

4. 掌握判定两个直角三角形全等的特殊方法，在“斜边、直角边”判定定理的学习过程中，体会解决问题过程中矛盾的一般性与特殊性；掌握直角三角形的有关性质和判定.

5. 在勾股定理及其逆定理的学习中，领略人类文明的辉煌成就，感受理性思维的精神和包容世界文化的意义；了解勾股定理导出的过程和它在度量几何中的作用，进一步理解形数之间的联系；能运用勾股定理及其逆定理解决比较简单的证明或计算问题及比较简单的实际应用问题；掌握平面直角坐标系内两点距离的公式.

二、课时安排

本章教学共26课时，建议分配如下：

19.1　命题和证明	2课时
19.2　证明举例	7课时
19.3　逆命题和逆定理	1课时
19.4　线段的垂直平分线	1课时
19.5　角的平分线	2课时
19.6　轨迹	2课时
19.7　直角三角形全等的判定	1课时
19.8　直角三角形的性质	3课时
19.9　勾股定理	4课时
19.10　两点的距离公式	1课时
本章小结	2课时

三、设计说明

学生通过实验几何的学习，获得了必要的几何基础知识，得到了几何语言表达的训练和形式化说理的体验，为进入论证几何的学习准备了条件. 本章是论证几何学习的入门，课本开宗明义，从人类文明发展进程的视角，按照“从感性到理性”的认识规律，阐述了几何证明的重要性以及从直观几何、实验几何推进到论证几何的必要性.

本章内容由三个方面组成：一是几何证明举例，以已经学过的平行线的判定与性质、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质等知识的运用为载体，着重学习基本的逻辑术语、演绎推理的思考方法以及证明的步骤、格式与规范. 二是以“角的平分线”“线段的垂直平分线”等图形的研究为载体，着重学习逆命题、逆定理、轨迹等知识. 三是以直角三角形为研究对象，演练逻辑推理，着重研究直角三角形全等的判定和性质、勾股定理及其逆定理，进而导出两点距离的公式等.

“证明举例”的设计，注重于调动学生已有的知识经验和建立必要的逻辑知识基础，架起从实验几何到

论证几何的桥梁，引导学生平稳过渡．内容的安排，先讲述“证明”的含义和有关的逻辑术语，再为学生提供演绎证明的简明示范，让学生进行演绎证明的初步训练．例题的组织，循序渐进，由易到难．起始是直接利用平行线的性质与判定进行证明，再到利用全等三角形的性质证明线段相等、角相等；然后，通过判定三角形全等并利用全等三角形的性质证明两直线平行或垂直．其中，涉及添置辅助线的要求，补充证明了“三边对应相等的两个三角形全等”这一判定定理；强调了证明前的分析和证明后的反思．

在“角的平分线”和“线段的垂直平分线”中，通过对角的平分线与线段的垂直平分线的深入研究，导出了反映它们的本质特征的重要定理．在获得了这些定理的基础上，讨论了逆命题、逆定理的概念，再以这两个图形为载体讲述“点的集合”，引出了有关“点的轨迹”的内容．在研究过程中，抓住了角、线段的轴对称特性所传递出来的有关图形中相等线段的信息；抓住了“轨迹”概念所含有的“纯粹性”“完备性”的要求．让学生通过这部分内容的学习，体会到利用“角的平分线”和“线段的垂直平分线”的有关定理证明线段相等，是常用的方法；知道“轨迹”是具有某种特征性质的点的集合，为今后的学习打下认识的基础．

在实验几何阶段，对于三角形进行了一般性的研究，还探讨了关于等腰三角形这类特殊的三角形的特性．本章以演绎推理为主要研究方法，着重研究另一类特殊的三角形，即直角三角形，涉及关于直角三角形的特殊性质与判定．勾股定理及其逆定理，分别是直角三角形的性质与判定，由于它们非常重要而且在数学史上有特殊地位，因此本章安排专题进行研究．勾股定理是定量几何的基础，是几何的支柱之一；坐标平面上两点的距离公式，是勾股定理的自然延伸．这些内容的安排，不仅帮助学生进一步完善了三角形的有关基础知识，而且可以使学生获得对于论证几何的研究方法和过程的体验．

四、教学建议

1．充分尊重学生的认知过程，做好实验几何与论证几何的衔接，提高学生学习论证几何的兴趣．

七年级的几何内容属于实验几何的范畴．那时虽然也在逐步渗透推理论证的要求，但主要还是采用实验、归纳、类比的方法进行几何研究．学生通过操作、观察、思考、归纳，发现几何事实，然后进行“说理”，再确认事实．不过，在“相交线”“平行线”“三角形”中，“说理”具有一定的逻辑推理意义，是几何证明的初步尝试；这些内容可以看作是实验几何和论证几何的早期结合，对论证几何的学习有铺垫作用．本章进入到论证几何阶段，在教学中既要看到学生已有的认知基础，更要注意这是几何学习的重大转折，必须切实做好从实验几何到论证几何的衔接和过渡．由于逻辑推理的思辨性强，而学生个体的差异大，所以前期的教学一般应低起点、小步子、多分析、勤引导，调动一切有效手段，尽可能让所有学生积极参与教学活动，特别要培养学生对论证几何的学习兴趣．要重视章头语和论证几何的“开篇”，使学生从一开始就能跟上教学进程，提高自信，稳步前进．

2．重视证题前的分析和证题后的反思，引导学生学会数学思考的方法和养成严密思维的习惯．

本章对图形的研究主要采用“演绎推理”的方法，“几何证明”有较高层次的思维要求．数学是最严谨、最严格的学科，论证几何教学是培养学生逻辑推理能力的非常好的时机．

由于学生刚开始步入论证几何阶段，对怎样探索“几何证明”的途径和如何有条理地表达证明过程缺少经验，因此教师要有意识地示范和引导，让学生不断地反思和总结．

开始时，可列举典型的例题，讲解证明的思路，展示证明的过程；同时细致剖析其中的因果关系，让学生理解如何有条理地、简约地表达．

在几何证明的教学中，要重视证题前的分析．分析的方法通常有如下三种：① 由因导果，即从“已知”看“可知”推向“未知”；② 执果索因，即从“未知”看“需知”靠拢“已知”；③“两头凑”，即既从“未知”看“需知”，又从“已知”看“可知”，使“需知”与“可知”相衔接．

反思是对以前学习的再认识，对经验的总结和提升．学生反思能力的培养，往往同时伴有概括、比较、推理、驳证等思维能力的发展，以及数学思想方法的提炼．

结合本章内容的教学培养学生的反思能力，可从以下几个方面考虑：① 反思思维过程，即对思维是否清晰、严密、有条理等进行审视．② 反思思维策略，即分析具体方法中所包含的数学基本思想方法，对具体方法再加工，提炼出适用范围广的一般数学思想方法．③ 反思问题本质，即对问题本质进行反思、剖

析，将思维从个别推向一般，使认识深化，思维抽象程度得以提高. ④ 反思解题方法，即反思解题方法的优劣，优化解题过程，以开阔学生视野，促进学生思维的多样性、合理性、严密性、灵活性、创造性等，提高思维品质 .

3. 重视基础知识和基本技能，强调正确理解几何概念和运用几何语言，关注学生对思维方法、数学文化和理性精神的学习.

基础知识和基本技能是学生形成基本学力的基础，是学生获得过程与方法体验、情感与态度教育的载体，必须予以高度重视 . 例如，对本章涉及的一些数学概念、定义、公理以及获得的定理和重要结论等，应要求学生正确理解和逐步掌握；对几何语言的学习，包括普通语言、图形语言和符号语言的表述以及它们之间的“转译”，语言运用的准确性和简明性，推理表达的逻辑性和严密性等，要认真落实. 还应要求学生养成正确画图、周密思考、规范表达的习惯，重视观察、分析活动 .

本章对演绎证明的学习，不仅是要学生掌握演绎推理的技能，会对结论的正确性进行论证，使获得的结论完全可靠；更重要的是要学生从中体会演绎的思想和所体现的理性精神，学会演绎推理的思维方法. 要让学生了解，论证几何是以公理、公设作为出发点，以演绎的方式构成了几何学. 几何定理是演绎推理的结论，是理性思维的成果；任何证明，都可表述为以公理为出发点的演绎，论证几何是一个严谨的体系. 可指导学生阅读章后的“《几何原本》古今谈”（阅读材料一）和其他有关材料，提高学生的认识.

勾股定理是人类智慧的荣耀，在古今中外有巨大影响和作用. 可结合勾股定理的教学，向学生介绍古希腊、巴比伦和我国古代对勾股定理的研究成果，进行包容世界文化的教育；利用赵爽的勾股定理图，进行民族精神的教育. 著名网络科普作家塔米姆・安萨利在其近著中提出了对社会有重大影响的 10 大科学发现，其中勾股定理排在十大科学发现之首；华罗庚先生曾建议将“勾三股四弦五”的勾股定理图画在宇宙探测器上，用这个勾股定理图作为与“外星人”交流的“宇宙语言”，以此激发学生热爱人类文明的感情.

4. 重视几何学习的阶段性、层次性，讲究“度”的把握.

在论证几何阶段，演绎推理成为几何研究的主要方法. 但本章是论证几何的入门，要从学生初学演绎推理来把握教学要求，证明的难度不能过高. 还应注意到，几何直觉对逻辑思维有启导作用，实验操作对探索证明思路有重要意义，所以演绎推理并不排斥以前的几何研究方法. 本章对一些命题的探讨，展现了“实验—归纳—猜想—证明”的完整过程；有时在证明前的分析中有实验操作活动. 把演绎与非演绎适当结合，这是有“度”. 关于几何证明的难度，应分层面对、逐步提高，这也是有“度”.

教学内容的展开，也要注意层次性和“度”的要求. 在课本内容的处理中，这方面的要求有所体现. 如对线段的垂直平分线这一轨迹的阐述，是分层推进的. 第一层次：用原定理和逆定理分别表述；第二层次：用点的集合表述；第三层次：在说明了轨迹的含义后，指出“和线段两个端点距离相等的点的轨迹是这条线段的垂直平分线”. 另外，课本中有些内容（包括例题、习题），可能一些学生学习时有较大困难，这时需要补设台阶，或者适当调整内容，为这些学生提供帮助. 要尊重学生学习的真实过程，力求教学有“度”.

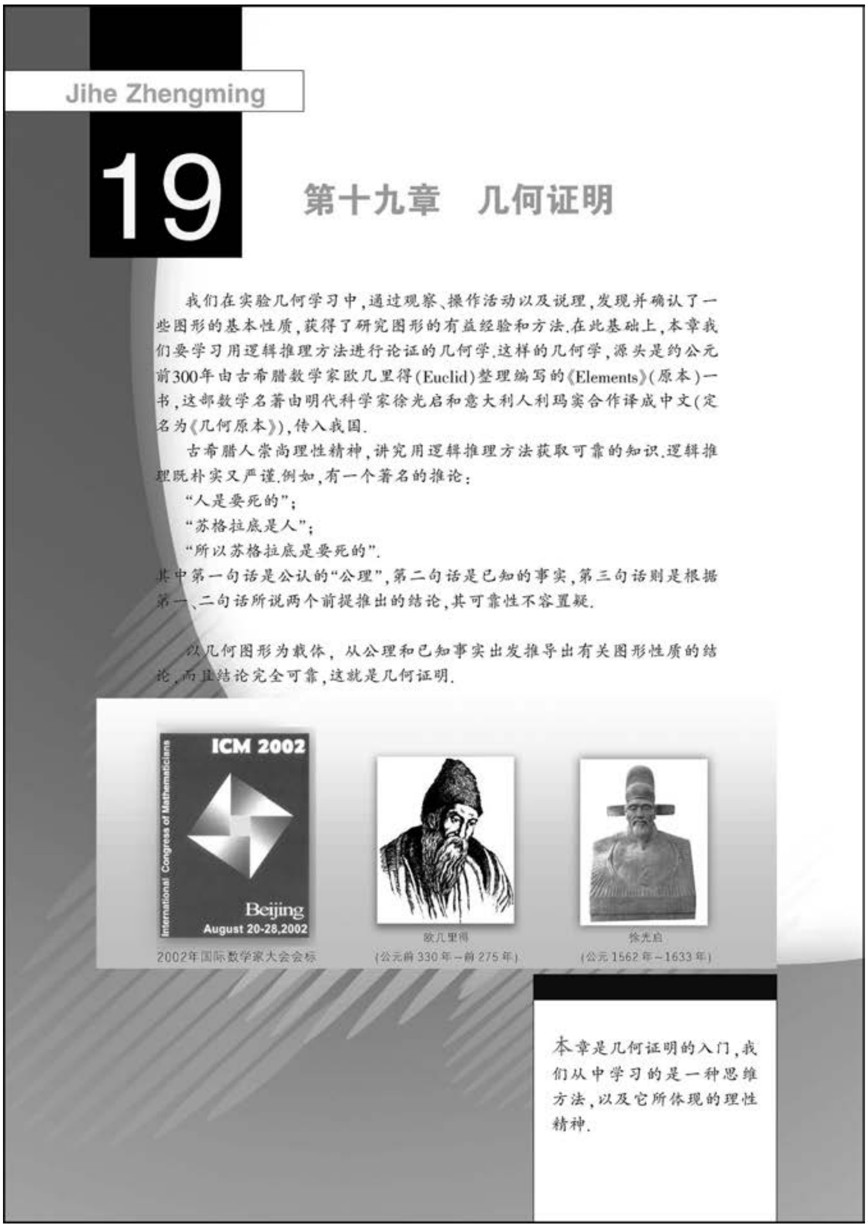
勾股定理如何教，究竟用“活动式”“探究式”，还是用“讲授式”，是一个有价值的研究课题. 课本中的引入是联系七年级第二学期引进无理数时一个遗留问题而展开的，关注调动学生的认知准备. 这一引入方案，给两类不同的教学方式都留有较大的空间；证明的方法也顺势形成，而且是将任给的两个正方形割补成一个正方形的一般方法. 教师可以以勾股定理的教学内容为载体，进行教学模式的研究. 勾股定理的证明方法很多，课本中（包括阅读材料之二）介绍了几种不同证法，可选择使用. 还可以让学生上网搜集勾股定理的证明方法，并作出自己的评价；同时，鼓励学生进一步探究勾股定理的证明，写出小论文，进行展示和交流.

五、评价建议

1. 关注学生的学习兴趣和对演绎推理的认识. 论证几何是一个严谨的逻辑演绎体系，初学时学生可能会感到枯燥、抽象、难懂. 本章是论证几何的入门，是演绎推理的尝试，要关注学生学习兴趣的引发和自信心的建立，在注意教学内容的趣味性、生动性和平实性的同时，要重视鼓励性评价，激发兴趣，鼓舞信心；要把握形成性评价的要求，注意论证入门的定位和学习转折的过程，强调教学基本要求的落实.

2. 关注学生的论证能力的培养和发展. 几何论证有很强的思辨性和逻辑性，培养学生的论证能力既是必须重视的目标内容，又是长期的任务. 本章通过对证明之前的思路分析、证明过程的严密表达、证明之后的反思小结以及课后练习的安排等，展现了培养论证能力的基本途径. 要通过实施过程性评价，促进各个环节有效发挥作用. 要让学生探索和提出证题的思路，尝试和规范证明的表达，总结和交流解题的心得，同时给以积极的评价.

3. 关注学生的探究学习和对数学文化的包容. 本章安排了一些操作性实验和理性实验活动，引导学生进行探究学习；介绍了一些几何文化史料，引导学生学习数学文化. 要鼓励学生开展数学实验活动，阅读数学文化材料，上网查找资料；启发学生在实验活动中总结几何学习和研究的方法，在了解中国古代数学辉煌成就的同时，认识古希腊数学对人类文明的宝贵贡献；指导学生撰写学习体会或小论文，并对学生的学习态度、表现和收获进行评价.



Jihe Zhengming

19 第十九章　几何证明

我们在实验几何学习中，通过观察、操作活动以及说理，发现并确认了一些图形的基本性质，获得了研究图形的有益经验和方法.在此基础上，本章我们要学习用逻辑推理方法进行论证的几何学.这样的几何学，源头是约公元前300年由古希腊数学家欧几里得(Euclid)整理编写的《Elements》(原本)一书，这部数学名著由明代科学家徐光启和意大利人利玛窦合作译成中文(定名为《几何原本》)，传入我国.

古希腊人崇尚理性精神，讲究用逻辑推理方法获取可靠的知识.逻辑推理既朴实又严谨.例如，有一个著名的推论：

“人是要死的”；

“苏格拉底是人”；

“所以苏格拉底是要死的”.

其中第一句话是公认的“公理”，第二句话是已知的事实，第三句话则是根据第一、二句话所说两个前提推出的结论，其可靠性不容置疑.

以几何图形为载体，从公理和已知事实出发推导出有关图形性质的结论，而且结论完全可靠，这就是几何证明.

2002年国际数学家大会会标

欧几里得
(公元前330年—前275年)

徐光启
(公元1562年—1633年)

本章是几何证明的入门，我们从中学习的是一种思维方法，以及它所体现的理性精神.

章头语中，以平面几何演进的过程为线索，引导学生对实验几何的学习进行简单的回顾，再指出现在开始进入论证几何的学习.

论证几何的“源头”是欧几里得的《原本》.这里对《几何原本》作了简单的介绍，着重指出论证几何强调理性思维、采用逻辑推理方法，这是本章学习中必须重视的.

“人是要死的；苏格拉底是人；所以苏格拉底是要死的.”这个著名的推论，据传是古希腊哲学家亚里士多德(Aristotle，公元前 384 年～322 年)讲解“什么是证明”的示范.这三句话清晰地说明了“三段论”的特征和逻辑推理的规则.让学生从中看到，逻辑推理既朴实又严谨.在此基础上，再指明了“几何证明”的含义.

章头图中的图片，分别是 2002 年在我国首都北京召开的国际数学家大会的会标、欧几里得的头像和徐光启的塑像，其中有丰富的人文内涵.

【注意事项】

教学中，要向学生简单解说所引用的逻辑推理范例，指出“大前提”“小前提”和“结论”的“三段论”形式；可以尝试让学生列举生活中的例子，进行初步的体会.还可向学生推荐章后的阅读材料“《几何原本》古今谈”或其他有关资料，让学生在课外进行阅读和思考，体会平面几何的教育价值，明确学习论证几何的目的和要求.

【本课重点】

使学生初步理解证明的含义，知道推理的基本过程和因果关系的表述.

人们通常所说的证明，其含义较广，有“实践证明”“历史证明”“实验证明”“举例证明”等. 课本以“对顶角相等”的说理为例，分析三种导出“对顶角相等”的方法，进而说明什么是严格的数学证明和演绎证明.

“边款”中指出在代数中也有演绎推理，一是要学生重视代数说理；二是让学生知道整个数学是讲理的、严谨的.

Jihe Zhengming

第一节　几何证明

19.1　命题和证明

1. 演绎证明

一般来说，证明是指人们为获得使人信服的结论所采用的手段，有“实践证明”“历史证明”“实验证明”“举例证明”等多种形式；而对数学结论的正确性进行证明，还有更为严格的形式.

怎样才算严格的数学证明呢？下面以“对顶角相等”为例进行分析.

我们分别用下列三种方法来导出“对顶角相等”.

一是直观说明，即凭眼睛看到的结果就加以认定.

二是操作确认，可以用量角器度量两个对顶角，也可以把两个对顶角剪下来相叠，由度量所得数据基本相同或叠在一起基本重合就加以确认.

三是推理论证，这是古希腊的数学家欧几里得在《几何原本》中所采用的，用现在的术语表述如下(见七年级第二学期数学课本)：

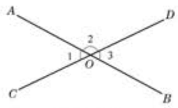


图 19－1

(如图 19－1)
因为$\angle 1$与$\angle 2$、$\angle 2$与$\angle 3$分别是邻补角(已知)，
所以$\angle 1+\angle 2=180^\circ$，$\angle 2+\angle 3=180^\circ$(邻补角的意义).
得$\angle 1+\angle 2=\angle 2+\angle 3$(等量代换).
所以$\angle 1=\angle 3$(等量减等量，差相等).

这三种方法中，哪一种最可靠、最有说服力？

第一种方法是凭个人观察进行判断. 眼见为实，几何直观很重要. 但是直观往往只能认识表面现象，还需要提高到理性认识，才能掌握事物的本质.

第二种方法是通过人们的实践进行检验. 因为这种检验可以无数次重复，而结论总是基本相同，所以有较高的真理性. 但是，测量难免有误差，叠合还需讲道理.

第三种方法是完全依靠理性进行推导. 它不凭任何个人的感觉，而是从邻补角的意义出发，运用等量的两个基本性质，按照“有此因就有其果”的规则，符合逻辑地推导出结论. 这一证明方法是严格的，也是最为可靠的.

像上述第三种方法，称为演绎推理(或演绎法). 演绎推理的过程，就是演绎证明.

在代数中也用演绎推理. 例如已知$2x+3=5$，求x.
解：因为$2x+3=5$(已知)，
所以$2x=2$(等式性质)，
所以$x=1$(等式性质).

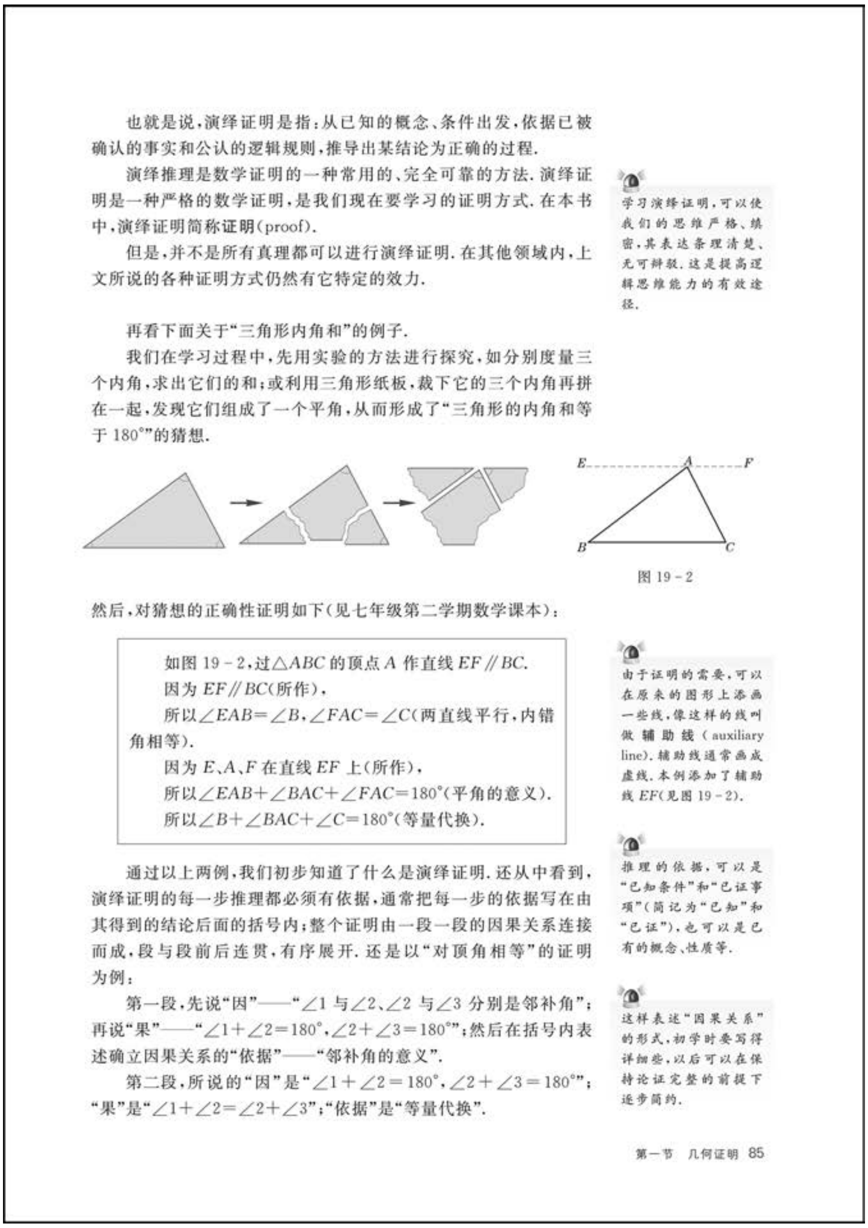
84 第十九章　几何证明

【教学目标】

(1) 通过回顾“对顶角相等”与“三角形的内角和等于180°”的说理和分析，初步理解演绎证明的含义及因果关系的表述；体会演绎证明是一种严格的数学证明，所获得的结论最为可靠.

(2) 知道定义、命题、真命题、假命题、公理、定理等术语，体会定义、命题、公理、定理等之间的区别与联系；了解命题的构成，能初步区分命题的题设和结论，会把命题改写成“如果……那么……”的形式.

(3) 知道证明一个命题为真命题的一般过程；知道证明一个命题为假命题只要举一个反例；初步感知证明过程中体现的理性精神.



也就是说，演绎证明是指：从已知的概念、条件出发，依据已被确认的事实和公认的逻辑规则，推导出某结论为正确的过程.

演绎推理是数学证明的一种常用的、完全可靠的方法. 演绎证明是一种严格的数学证明，是我们现在要学习的证明方式. 在本书中，演绎证明简称**证明**(proof).

学习演绎证明，可以使我们的思维严格、缜密，其表达条理清楚、无可辩驳. 这是提高逻辑思维能力的有效途径.

但是，并不是所有真理都可以进行演绎证明. 在其他领域内，上文所说的各种证明方式仍然有它特定的效力.

再看下面关于“三角形内角和”的例子.

我们在学习过程中，先用实验的方法进行探究，如分别度量三个内角，求出它们的和；或利用三角形纸板，裁下它的三个内角再拼在一起，发现它们组成了一个平角，从而形成了“三角形的内角和等于 180°”的猜想.

图 19－2

然后，对猜想的正确性证明如下(见七年级第二学期数学课本)：

> 如图 19－2，过$\triangle ABC$ 的顶点 A 作直线 $EF\parallel BC$.
> 因为 $EF\parallel BC$(所作)，
> 所以$\angle EAB=\angle B$，$\angle FAC=\angle C$(两直线平行，内错角相等).
> 因为 E、A、F 在直线 EF 上(所作)，
> 所以$\angle EAB+\angle BAC+\angle FAC=180°$(平角的意义).
> 所以$\angle B+\angle BAC+\angle C=180°$(等量代换).

由于证明的需要，可以在原来的图形上添画一些线，像这样的线叫做**辅助线**(auxiliary line). 辅助线通常画成虚线. 本例添加了辅助线 EF(见图 19－2).

通过以上两例，我们初步知道了什么是演绎证明. 还从中看到，演绎证明的每一步推理都必须有依据，通常把每一步的依据写在由其得到的结论后面的括号内；整个证明由一段一段的因果关系连接而成，段与段前后连贯，有序展开. 还是以“对顶角相等”的证明为例：

推理的依据，可以是“已知条件”和“已证事项”(简记为“已知”和“已证”)，也可以是已有的概念、性质等.

第一段，先说“因”——“$\angle 1$ 与$\angle 2$、$\angle 2$ 与$\angle 3$ 分别是邻补角”；再说“果”——“$\angle 1+\angle 2=180°$，$\angle 2+\angle 3=180°$”；然后在括号内表述确立因果关系的“依据”——“邻补角的意义”.

第二段，所说的“因”是“$\angle 1+\angle 2=180°$，$\angle 2+\angle 3=180°$”；“果”是“$\angle 1+\angle 2=\angle 2+\angle 3$”；“依据”是“等量代换”.

这样表述“因果关系”的形式，初学时要写得详细些，以后可以在保持论证完整的前提下逐步简约.

第一节　几何证明　85

对结论的正确性进行证明，有多种多样的方式. 应让学生知道，不同的证明方式有不同的应用领域，各有特定的效力. 在“边款”中，强调了学习演绎证明的教育价值.

“三角形的内角和”一例，有意安排了对学习过程的回顾，引导学生关注几何研究的全过程，同时进一步体会演绎证明. 本例涉及添辅助线，但现在不要详细讲解.

“三角形的内角和等于 180°”这一结论的导出，是先用度量、拼接等方法进行操作实验；再通过归纳提出猜想；然后对猜想的正确性进行证明. 要向学生指出，在几何研究中，应重视发挥实验和证明的不同功效和互补作用.

可再举些学生熟悉的例子，剖析为什么要证明，怎样表达证明过程，使学生加深体会，帮助学生顺利进入论证几何的学习.

对证明过程的讲解，要对照具体例子，细致分析，让学生知道每一段中的因果关系和表达的规范. 这里回避了“三段论”的提法，注重于学生对“三段论”的具体感知和对证明过程的整体认识.

【注意事项】

(1)“三角形的内角和”的例子，再次阐述了演绎证明的过程．同时要特别注意，本例强调了实验探究的价值，指明了几何研究的完整过程是“实验—归纳—猜想—证明”. 教学中要让学生知道，通过数学实验发现几何事实与通过演绎证明将结论严格化，两者都很重要. 实验与证明有不同功效，它们相辅相成；归纳与演绎有不同侧重，它们互补互利. 我们现在学习演绎证明，不能忽视实验归纳.

(2)“三段论”是演绎证明的基本表达形式，课本中的几何证明具体体现了“三段论”. 由于解说“三段论”需要形式逻辑的知识基础，所以课本中不直接提出，而是用具体的事例和朴素的语言，引导学生逐步体会.

证明的过程是由“一连串连贯、有序的因果关系”组成的，要指导学生在练习和实践中逐步正确把握.

练习 19.1(1)

1. 略.

2. 因为 $DF /\!/ AB$，所以
$\angle B=\angle FDC$，
$\angle BED=\angle EDF$.
因为 $DE /\!/ AC$，所以
$\angle C=\angle EDB$，
$\angle A=\angle BED$.
得 $\angle EDF=\angle A$.
因为 $\angle BDC=\angle EDB+\angle EDF+\angle FDC$，
$\angle BDC$ 是平角，所以
$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.

【本课重点】

通过具体例子讲解逻辑的初步知识. 使学生知道定义、命题、真命题、假命题、公理、定理等术语，了解命题的构成；知道证明一个命题为假命题的一般过程，知道证明一个命题为假命题只要举一个反例.

课本中所举的例子，是为了引出有关术语. 可调整或补充例子.

第三段，所说的“因”是“$\angle 1+\angle 2=\angle 2+\angle 3$”；“果”是“$\angle 1=\angle 3$”；“依据”是“等量减等量，差相等”.

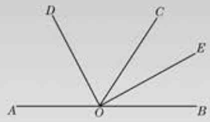
从整体上看，前一段中的“果”为后一段提供了“因”，一连串这样连贯、有序的因果关系组成了完整的证明.

练习 19.1(1)

1. 阅读下面的证明过程，说一说其中的因果关系.

已知：如图，$\angle AOC$ 与 $\angle COB$ 互为邻补角，OD 平分 $\angle AOC$，OE 平分 $\angle COB$.

求证：$\angle DOE=90^\circ$.



（第 1 题）

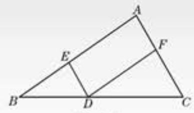
证明：因为 OD 平分 $\angle AOC$（已知），

所以 $\angle DOC=\frac{1}{2}\angle AOC$（角平分线的意义）.

同理 $\angle COE=\frac{1}{2}\angle COB$.

所以 $\angle DOC+\angle COE=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle COB$
$=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle COB)$（等式性质）.

因为 $\angle AOC$ 与 $\angle COB$ 互为邻补角（已知），
所以 $\angle AOC+\angle COB=180^\circ$（邻补角的意义），
得 $\angle DOC+\angle COE=90^\circ$（等量代换），
所以 $\angle DOE=90^\circ$.



（第 2 题）

2. 已知：如图，点 D、E、F 分别在 $\triangle ABC$ 的边 BC、AB、AC 上，且 $DF /\!/ AB$，$DE /\!/ AC$，试利用平行线的性质证明 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.

2. 命题、公理、定理

科学研究的目的是揭示客观世界的规律，而规律的表述常用判断性语句. 例如“地球是绕太阳旋转的”“标准气压下的水在零摄氏度以下会结冰”.

在数学中，下列句子是大家熟悉的：

(1) 能够被 2 整除的数叫做偶数.

(2) 互为补角的两个角都是锐角.

(3) 对顶角相等.

(4) 如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

(5) 两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行.

【注意事项】

本课内容中的逻辑术语较多，学生可能会感到抽象和枯燥. 要降低认识起点，从一些具体的、熟悉的例子入手，辅助于图形，组织讨论，尽可能调动学生的学习主动性；可辅以生活中的事例，激发学生的兴趣.

(6) 画$\angle AOB$的平分线OC.

(7) 等角的余角相等吗？

句子(1)是说明偶数这个名词的含义，像这样能界定某个对象含义的句子叫做**定义**(definition).

句子(2)(3)(4)(5)都是对某一件事情作出判断，像这样，判断一件事情的句子叫做**命题**(proposition). 其判断为正确的命题叫做**真命题**(true proposition)；其判断为错误的命题叫做**假命题**(false proposition). 上述命题中，(3)(4)(5)是真命题，(2)是假命题.

句子(6)(7)不是判断性语句，因而不是命题.

数学命题通常由题设、结论两部分组成，题设是已知事项，结论是由已知事项推出的事项. 这样的命题可以写成“如果……，那么……”的形式，用“如果”开始的部分是题设，用“那么”开始的部分是结论，例如命题(4).

“对顶角相等”是一个简洁表述的命题，它也可以改写成“如果……，那么……”的形式，叙述为“如果两个角是对顶角，那么这两个角相等”.

句子“由不在同一直线上的三条线段首尾顺次联结所组成的图形叫做三角形”，是三角形的定义. 你能再举出一些这样的例子吗？

命题(5)中，“内错角相等”是题设，“这两条直线平行”是结论. 不过，这个命题中，“如果”前面还有“两条直线被第三条直线所截”的条件，没有这个条件，就没有内错角，所以这个条件也属于题设部分.

议一议

把命题“同角的余角相等”改写成“如果……，那么……”的形式，并指出这个命题的题设和结论.

在以前的学习中，我们通过操作实验，归纳出一些基本事实，如：

两点之间线段最短.

过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行.

过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.

同位角相等，两直线平行.

两直线平行，同位角相等.

这些基本事实，当时分别称为线段的基本性质、平行线的基本性质、垂线的基本性质、平行线的判定方法1和平行线的性质1. 它们都是命题，是被公认为正确的.

人们从长期的实践中总结出来的真命题叫做**公理**(axiom)，它们可以作为判断其他命题真假的原始依据.

有些命题是从公理或其他真命题出发，用推理方法证明为正确的，并进一步作为判断其他命题真假的依据，这样的真命题叫做**定理**(theorem).

例如：依据公理“两点之间线段最短”，可以推导出“三角形

严格意义的几何公理，其正确性不需证明，也不能证明. 为便于学习，课本中列出的公理的范围有所扩大.

第一节 几何证明 87

关于定义、命题、公理、定理等，是今后常用的逻辑术语，应帮助学生搞清它们的含义；命题的构成、真命题和假命题的概念、如何判断命题的真假等，比较抽象. 可请学生举例或再提供些例子，让学生结合实例，初步形成正确的认识.

有些命题的题设与结论不明显，学生理解这种命题可能会有困难. 可结合图形对题设与结论具体分析，也可添上命题表述中被省略的词语后再分析，帮助学生找出命题的题设与结论.

这里列举的基本事实，在课本中都纳入公理范围. 可引导学生整理一下有关的公理，明确哪些是原始的依据. “边款”中已经指明，课本已将公理的范围扩大了，这是为了降低几何学习的难度，同时有利于实验几何的学习.

讲解了“定理”以后，这里进行了举例说明. 可结合下一节内容的学习，指导学生在课外对以前已经获得的定理进行整理，搞清楚已有的定理系统. 在七年级的几何学习中，对有些真命题的说理其实就是推理证明，这些真命题以后就作为定理使用.

关于证明真命题的步骤，先让学生对照所举例子有初步的了解，以后在证明举例的教学中再进行实践操作. 这里以解说为主.

通过举反例来证明一个命题是假命题，是以具体例子进行说明的. 有时间的话，可补充例子帮助学生加深认识，一般不要去涉及形式逻辑方面的问题.

这个例子的证明，可让学生先举反例，教师再进行指导. 要指出，反例是“由符合命题题设的条件得出了不符合命题结论的结果”的事例，而只要能举出一个反例，就可以断定这个命题是假命题.

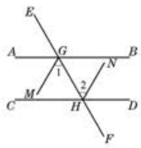
再如，“在同一平面内垂直于同一直线的两条直线平行”也是定理.

的任何两边之和大于第三边”是正确的；依据公理“两直线平行，同位角相等”“等量代换”和真命题“对顶角相等”，可以推导出“两直线平行，内错角相等”是正确的. 真命题“三角形的任何两边之和大于第三边”“两直线平行，内错角相等”，还是判断其他一些命题真假的常用依据，所以它们是定理. 前面所列真命题(3)(4)(5)也都是定理.

定义、公理和定理，都是用推理方法判断命题真假的依据.

确认一个命题是真命题，要经过证明. 那么证明真命题需要有哪些步骤呢?

以证明真命题“两条平行线被第三条直线所截，内错角的平分线互相平行”为例，说明如下：

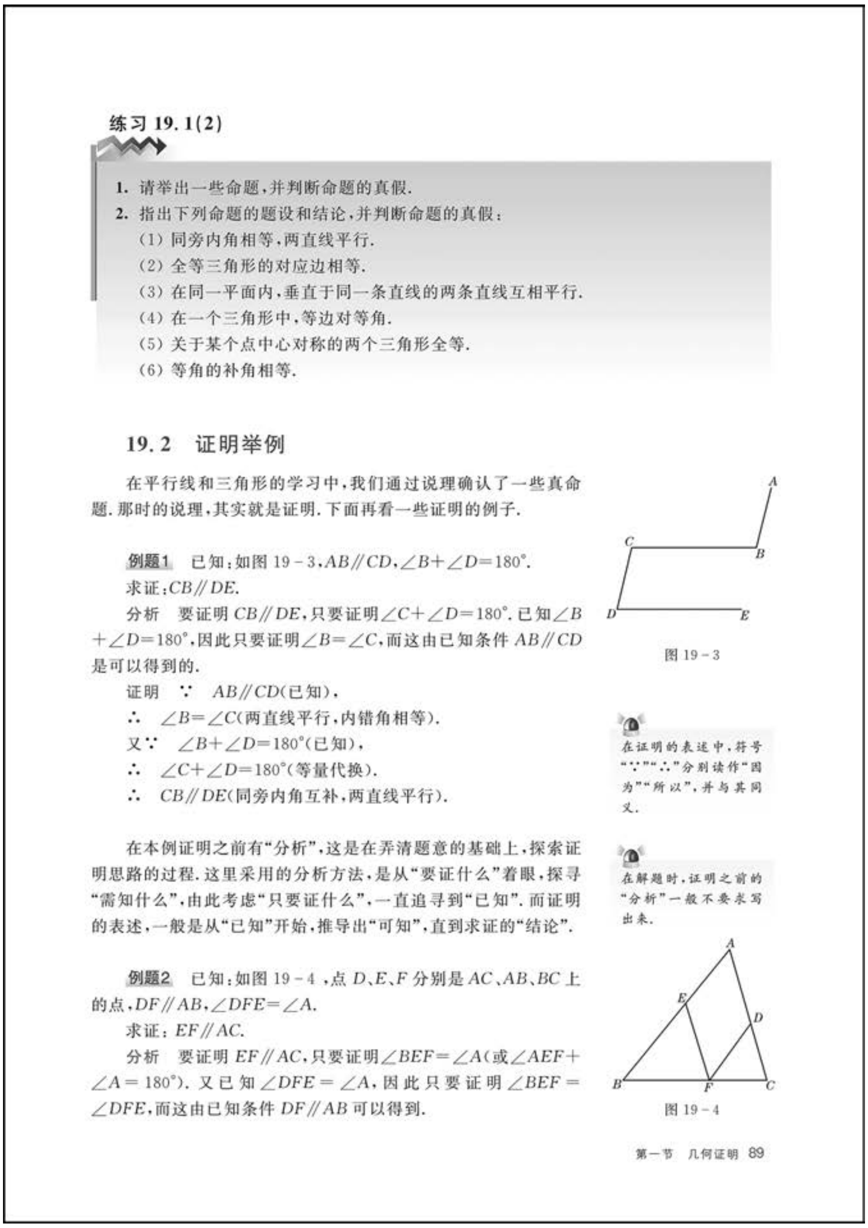
步　骤	解　说
(1) 根据题意作出图形，并在图上标出必要的字母或符号.	
(2) 根据题设和结论，结合图形，写出“已知”和“求证”.	已知：如图，$AB\parallel CD$，直线 EF 分别与 AB、CD 相交于点 G、H，GM、HN 分别平分 $\angle AGH$ 与 $\angle DHG$. 求证：$GM\parallel HN$.
(3) 经过分析，找出由已知推出结论的途径，写出证明过程.	证明：因为 $AB\parallel CD$（已知）， 所以 $\angle AGH=\angle DHG$（两直线平行，内错角相等）. 又因为 GM 平分 $\angle AGH$（已知）， 所以 $\angle 1=\frac{1}{2}\angle AGH$（角平分线的定义）. 同理 $\angle 2=\frac{1}{2}\angle DHG$. 得 $\angle 1=\angle 2$（等式性质）. 所以 $GM\parallel HN$（内错角相等，两直线平行）.

你能对本例再举出其他的反例吗? 当然，证明一个命题是假命题，有一个反例就够了.

证明一个命题是假命题，只要举出一个反例.

例如，“互为补角的两个角都是锐角”是假命题，证明如下：

两个直角互为补角，但它们却不是锐角. 所以这个命题是假命题.



练习 19.1(2)

1. 请举出一些命题，并判断命题的真假.
2. 指出下列命题的题设和结论，并判断命题的真假：
   (1) 同旁内角相等，两直线平行.
   (2) 全等三角形的对应边相等.
   (3) 在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线互相平行.
   (4) 在一个三角形中，等边对等角.
   (5) 关于某个点中心对称的两个三角形全等.
   (6) 等角的补角相等.

19.2 证明举例

在平行线和三角形的学习中，我们通过说理确认了一些真命题. 那时的说理，其实就是证明. 下面再看一些证明的例子.

例题1 已知：如图 19－3，$AB \parallel CD$，$\angle B+\angle D=180°$.

求证：$CB \parallel DE$.

分析　要证明 $CB \parallel DE$，只要证明 $\angle C+\angle D=180°$. 已知 $\angle B+\angle D=180°$，因此只要证明 $\angle B=\angle C$，而这由已知条件 $AB \parallel CD$ 是可以得到的.

证明　∵　$AB \parallel CD$（已知），

∴　$\angle B=\angle C$（两直线平行，内错角相等）.

又∵　$\angle B+\angle D=180°$（已知），

∴　$\angle C+\angle D=180°$（等量代换）.

∴　$CB \parallel DE$（同旁内角互补，两直线平行）.

图 19－3

在证明的表述中，符号"∵""∴"分别读作"因为""所以"，并与其同义.

在本例证明之前有"分析"，这是在弄清题意的基础上，探索证明思路的过程. 这里采用的分析方法，是从"要证什么"着眼，探寻"需知什么"，由此考虑"只要证什么"，一直追寻到"已知". 而证明的表述，一般是从"已知"开始，推导出"可知"，直到求证的"结论".

在解题时，证明之前的"分析"一般不要求写出来.

例题2 已知：如图 19－4，点 D、E、F 分别是 AC、AB、BC 上的点，$DF \parallel AB$，$\angle DFE=\angle A$.

求证：$EF \parallel AC$.

分析　要证明 $EF \parallel AC$，只要证明 $\angle BEF=\angle A$（或 $\angle AEF+\angle A=180°$）. 又已知 $\angle DFE=\angle A$，因此只要证明 $\angle BEF=\angle DFE$，而这由已知条件 $DF \parallel AB$ 可以得到.

图 19－4

第一节　几何证明　89

练习 19.1(2)

1. 略.

2. (1) 题设：同旁内角相等；结论：两直线平行．这是假命题.

(2) 题设：两个三角形全等；结论：这两个三角形的对应边相等．这是真命题.

(3) 题设：同一平面内的两条直线垂直于同一条直线；结论：这两条直线平行．这是真命题.

(4) 题设：一个三角形的两边相等；结论：这两条边所对的角相等．这是真命题.

(5) 题设：两个三角形关于某点中心对称；结论：这两个三角形全等．这是真命题.

(6) 题设：两个角分别是相等两角的补角；结论：这两个角相等．这是真命题.

【本课重点】

利用简单的例题，让学生学习演绎证明的思考方法、过程表达和格式规范.

例题 1

这是学习用演绎推理方法进行几何证明的开始，起点较低. 题中涉及平行线性质与判定的运用. 要着重讲清证题思路的分析、因果关系的表述、格式的规范要求. 注意符号语言的运用.

例题 2

本题是在与例题 1 不同的图形中，利用平行线的性质与判定证明两直线平行. 两题的要求类似.

【教学目标】

(1) 通过证明举例的学习和实践，懂得演绎推理的一般规则，初步掌握规范表达的格式；知道分析证题思路的基本方法.

(2) 会利用关于平行线、全等三角形、等腰三角形的判定与性质来证明有关线段相等、角相等以及两直线平行和垂直的简单问题；了解添置辅助线的基本方法，会添置几种常见的辅助线.

(3) 初步学会演绎推理的方法和规范表达，体会理性思维的精神，发展逻辑思维能力.

想一想

可让学生先独立思考，再合作交流. 引导学生对学过的知识及时归纳总结，养成不断反思的习惯，逐步形成比较完整的知识结构.

练习 19.2(1)

1. 由$\angle AOB=\angle COD$，再结合已知，可得$\angle A=\angle C$，从而证明$AB /\!/ CD$.

2. (1) 由$AB=AC$，得$\angle B=\angle C$. 又由$DE /\!/ BC$，得$\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$.

从而得$\angle ADE=\angle AED$，再得$AD=AE$.

(2) 由$AB=AC$，得$\angle B=\angle C$，从而说明$\angle B=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)$.

同理，$\angle ADE=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)$. 于是，得$\angle B=\angle ADE$，所以$DE /\!/ BC$.

【本课重点】

让学生进一步体会证明前的分析方法和证明过程的表述规范，初步学会利用全等三角形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质来证明有关线段相等、角相等的简单问题.

证明 ∵ $DF /\!/ AB$(已知)，

∴ $\angle BEF=\angle DFE$(两直线平行，内错角相等).

又∵ $\angle DFE=\angle A$(已知)，

∴ $\angle BEF=\angle A$(等量代换).

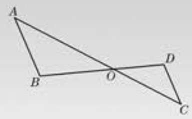
∴ $EF /\!/ AC$(同位角相等，两直线平行).

想一想

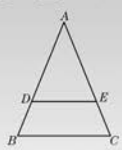
依据学过的哪些定理可以证明两条直线平行？

练习 19.2(1)

1. 已知：如图，AC与BD相交于点O，$\angle A=\angle AOB$，$\angle C=\angle COD$.
求证：$AB /\!/ CD$.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 已知：如图，点D、E分别在$\triangle ABC$的边AB、AC上，$AB=AC$.
(1) 如果$DE /\!/ BC$，求证：$AD=AE$；
(2) 如果$AD=AE$，求证：$DE /\!/ BC$.

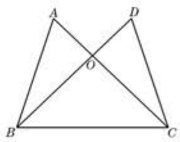


图 19－5

例题3 已知：如图 19－5，AC与BD相交于点O，$OA=OD$，$\angle OBC=\angle OCB$.

求证：$AB=DC$.

分析 将AB和DC分别看成是$\triangle AOB$和$\triangle DOC$的边，那么要证明$AB=DC$，只要证明$\triangle AOB$和$\triangle DOC$全等.

证明 在$\triangle BOC$中，

∵ $\angle OBC=\angle OCB$(已知)，

∴ $OB=OC$(等角对等边).

在$\triangle AOB$与$\triangle DOC$中，

$$\begin{cases} OA=OD(\text{已知}), \\ \angle AOB=\angle DOC(\text{对顶角相等}), \\ OB=OC(\text{已证}), \end{cases}$$

∴ $\triangle AOB \cong \triangle DOC$(S. A. S).

∴ $AB=DC$(全等三角形的对应边相等).

90 第十九章 几何证明

例题 3

本题是利用全等三角形的性质来证明线段相等. 仍要注重于证题思路的分析和证明过程的表达.

【注意事项】

(1) “证明举例”这一节共安排了 14 个例题，由易到难、由浅入深有层次地展开. 这些例题既是对以前所学几何知识的复习和整理，也是对演绎推理的具体说明和初步演练，还是对证题方法的归纳和总结. 难点是如何探索证题思路和添置辅助线. 要切实把握题目的难度，关注学生对演绎证明的基本方法的领悟和规范表达的体验.

(2) 在上面几个例题中，对证题思路的分析，是从“要证”探索“需知”，一直追寻到“已知”，即“执果索因”；而证明过程的表述，是从“已知”导出“可知”，直到获得求证的“结论”，即“由因导果”. 要引导学生体会两个过程的联系和区别，学会分析的方法和简单证明的表达.

想一想

如果将 AB 和 DC 分别看成是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 的边，那么怎样证明 $AB=DC$？

例题4 已知：如图 19－6，$AB=AC$，$DB=DC$.

求证：$\angle B=\angle C$.

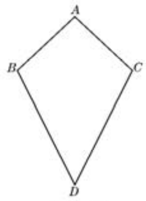


图 19－6

分析 要证明两个角相等，可利用全等三角形的性质. 观察图 19－6，如果联结 AD，那么 $\angle B$ 和 $\angle C$ 就分别为 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的内角，这时要证明 $\angle B=\angle C$，只要证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.

证明 联结 AD（如图 19－7）.

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 中，

$$\begin{cases} AB=AC（已知）, \\ DB=DC（已知）, \\ AD=AD（公共边）, \end{cases}$$

∴ $\triangle ABD \cong \triangle ACD$（S. S. S）.

∴ $\angle B=\angle C$（全等三角形的对应角相等）.

本题的证明涉及添辅助线. 通过联结 AD，构造了两个三角形，把“已知”和“求证”联系起来.

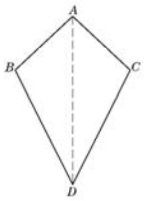


图 19－7

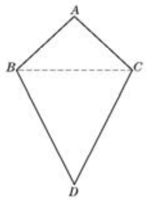


图 19－8

本题还可以这样分析：从已知条件 $AB=AC$，$DB=DC$，联想到等腰三角形的性质，把 $\angle ABD$ 和 $\angle ACD$ 各分成两部分，分别证明每一部分对应相等，于是考虑联结 BC，如图19－8 所示.

在这样分析的基础上，请同学们完成证明.

例题 3、例题 4 告诉我们，利用全等三角形的性质可以证明线段相等、角相等，而且这是常用的基本方法.

想一想

依据学过的哪些定理可以证明线段相等？哪些定理可以证明角相等？

第一节 几何证明 91

想一想

引导学生探求证题的不同途径，拓宽思路.

例题 4

本题是证明两角相等，涉及添辅助线的要求.

关于证题思路的分析，有不同的考虑，于是有不同的证法和添加辅助线的方法. 联结 AD，可利用全等三角形的性质直接推出结论. 而联结 BC，则可利用等腰三角形的性质（等边对等角）来解决问题. 这两种证法都是基本方法，可让学生提出和选用，证题后再进行讲评. 课本给出的证法中，添置辅助线时注意到了保持 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的完整性.

本题教学后，要引导学生体会辅助线的作用，对为什么要添辅助线和怎样添辅助线这两个问题引起初步的思考.

想一想

让学生从例题 3 和例题 4 的学习中体会证明两条线段相等、两角相等的思考方法，再对有关的定理进行归纳、整理，积累知识经验.

【注意事项】

（1）例题 3 与例题 4 的证明方法都不止一种，可让学生充分讨论，提出不同的思路，选择适当的方法. 利用多种方法解一道题，有助于提高学生思维的灵活性.

（2）对证题思路的分析，基本的认识是要建立“已知条件”与“待证结论”之间的联系，考虑可能导出结论的途径.

例题 4 中，观察已知图形（是一个筝形），没有现成的平行线和三角形，“已知条件”与“待证结论”之间没有直接的联系. 于是，要架设沟通条件与结论的桥梁，这就需要添置辅助线. 再进一步分析“已知条件”与“待证结论”，通过联结 AD（或 BC）构造三角形，可以利用全等三角形（或等腰三角形）的性质进行证明.

练习 19.2(2)

1. 利用“A. S. A”，证得$\triangle ABD\cong\triangle ACD$，从而得 $AB=AC$.

2. 由$\angle DAB=\angle EAC$，得$\angle DAC=\angle EAB$，从而得$\triangle ADC\cong\triangle AEB$，所以$\angle D=\angle E$.

3. 由 $AB\parallel CD$，得$\angle B=\angle C$；又由 $BF=CE$，得 $BE=CF$，从而证得 $\triangle ABE\cong\triangle DCF$. 所以 $AE=DF$.

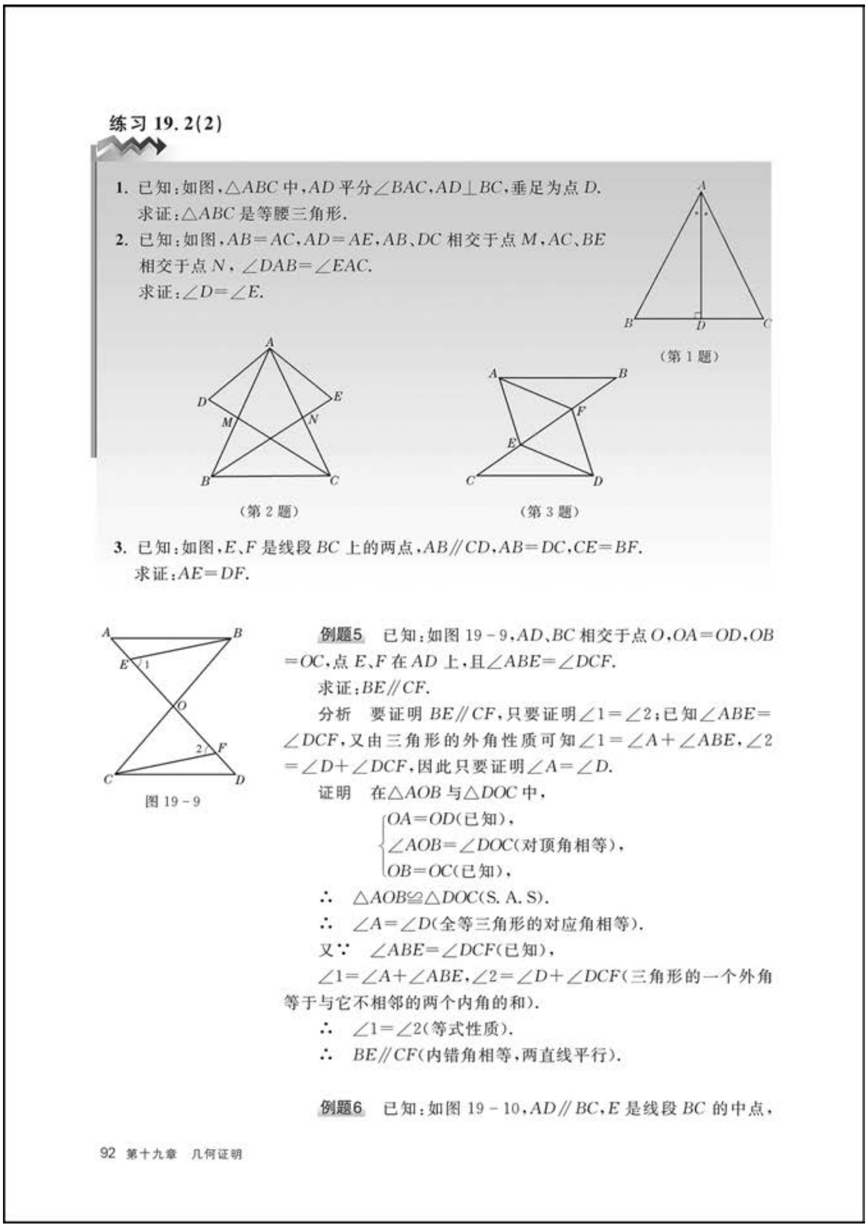
【本课重点】

使学生在例题学习中，进一步获得演绎证明的体验；初步掌握利用全等三角形的性质证明两条直线平行和两条线段相等.

例题 5

本题的证明过程，逻辑段落有所增加. 为创造运用平行线判定方法的条件，先证两个三角形全等，然后借助全等三角形的性质和三角形外角的性质，结合已知条件，得到“内错角相等”，再推出两直线平行.

证题思路的分析，采用了从“已知”想“可知”和从“需知”找“已知”相结合的思考方法.



练习 19.2(2)

1. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，AD 平分$\angle BAC$，$AD\perp BC$，垂足为点 D.
   求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.
2. 已知：如图，$AB=AC$，$AD=AE$，AB、DC 相交于点 M，AC、BE 相交于点 N，$\angle DAB=\angle EAC$.
   求证：$\angle D=\angle E$.

(第 1 题)　(第 2 题)　(第 3 题)

3. 已知：如图，E、F 是线段 BC 上的两点，$AB\parallel CD$，$AB=DC$，$CE=BF$.
   求证：$AE=DF$.

图 19-9

例题5 已知：如图 19-9，AD、BC 相交于点 O，$OA=OD$，$OB=OC$，点 E、F 在 AD 上，且$\angle ABE=\angle DCF$.

求证：$BE\parallel CF$.

分析　要证明 $BE\parallel CF$，只要证明$\angle 1=\angle 2$；已知$\angle ABE=\angle DCF$，又由三角形的外角性质可知$\angle 1=\angle A+\angle ABE$，$\angle 2=\angle D+\angle DCF$，因此只要证明$\angle A=\angle D$.

证明　在$\triangle AOB$与$\triangle DOC$中，

$$\begin{cases}OA=OD(\text{已知}),\\ \angle AOB=\angle DOC(\text{对顶角相等}),\\ OB=OC(\text{已知}),\end{cases}$$

∴　$\triangle AOB\cong\triangle DOC$(S. A. S).

∴　$\angle A=\angle D$(全等三角形的对应角相等).

又∵　$\angle ABE=\angle DCF$(已知)，

$\angle 1=\angle A+\angle ABE$，$\angle 2=\angle D+\angle DCF$(三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和).

∴　$\angle 1=\angle 2$(等式性质).

∴　$BE\parallel CF$(内错角相等，两直线平行).

例题6 已知：如图 19-10，$AD\parallel BC$，E 是线段 BC 的中点，

92 第十九章　几何证明

【注意事项】

例题 5、例题 6 对如何分析问题、探索证题思路等提出了新的要求，证明的难度有所提高，以使学生的逻辑思维能力得到锻炼和提高．在教学过程中，要加强分析和指导，帮助学生理清思路；同时，由于表达证明过程的逻辑段落增加，因此要先明确逻辑线索，注意整体设计；再分段处理，逐步完善.

$AE=DE$.

求证：$AB=DC$.

证明　∵　$AD\parallel BC$（已知），

∴　$\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$（两直线平行，内错角相等）.

∵　$AE=DE$（已知），

∴　$\angle 3=\angle 4$（等边对等角）.

∴　$\angle 1=\angle 2$（等量代换）.

∵　E 是线段 BC 的中点（已知），

∴　$BE=CE$（线段中点的定义）.

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle DCE$ 中，

$$\begin{cases} AE=DE（已知）, \\ \angle 1=\angle 2（已证）, \\ BE=CE（已证）, \end{cases}$$

∴　$\triangle ABE\cong\triangle DCE$（S. A. S）.

∴　$AB=DC$（全等三角形的对应边相等）.

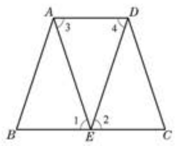
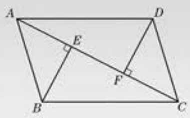


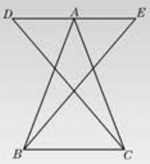
图 19－10

练习 19.2(3)

1. 已知：如图，$BE\perp AC$，$DF\perp AC$，垂足分别是点 E、F. $AF=CE$，$BE=DF$.
   求证：$AB=CD$，$AB\parallel CD$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，$DE\parallel BC$，A 是 DE 上一点，$AD=AE$，$AB=AC$.
   求证：$BE=CD$.

例题7　已知：如图 19－11，$DB\perp AB$，$DC\perp AC$，且 $\angle 1=\angle 2$.

求证：$AD\perp BC$.

证明　∵　$DB\perp AB$，$DC\perp AC$（已知），

∴　$\angle ABD=\angle ACD=90°$（垂直的定义）.

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 中，

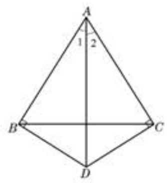


图 19－11

第一节　几何证明　93

例题 6

本题利用图形的直观，把要证明两条线段相等，归结为证明两个三角形全等. 为此，需找出运用三角形全等判定方法的条件. 分析已知条件，可见证题的关键是推导 $\angle 1=\angle 2$，可组织学生讨论，共同突破.

对于数学基础较好的学生，可引导他们利用 $\triangle EAD$ 是等腰三角形，从而关于底边 AD 的垂直平分线对称的性质来证明结论.

练习 19.2(3)

1. 证 $\triangle ABE\cong\triangle CDF$，得到 $AB=CD$，$\angle BAE=\angle DCF$. 从而得到 $AB\parallel CD$.

2. 由 $DE\parallel BC$，得 $\angle DAB=\angle ABC$，$\angle EAC=\angle ACB$.

又 $AB=AC$，得 $\angle ABC=\angle ACB$，从而 $\angle DAB=\angle EAC$，得 $\angle DAC=\angle EAB$.

再证 $\triangle DAC\cong\triangle EAB$，推出 $BE=CD$.

【本课重点】

引导学生进一步学习演绎推理和规范表达，发展逻辑思维的能力；初步掌握证明两条直线垂直的基本方法.

例题 7

本题是证明两条直线垂直，归结为利用等腰三角形“三线合一”的性质.

【注意事项】

例题 7、例题 8 都是证明两条直线垂直，但证明的方法有区别. 例题 7 归结为利用等腰三角形“三线合一”性质获得结论；例题 8 归结为根据垂直的定义得到结论，两题的证法有一定的典型性 . 解题后要引导学生进行反思和小结，归纳证明两条直线垂直的基本方法.

例题 7 证题思路的分析，是从图形的直观和已知$\angle 1=\angle 2$，把问题转化为只要证明$\triangle ABC$是等腰三角形，为此，只要证明$\triangle ABD$与$\triangle ACD$全等.

本题的证明也可以归结到根据垂直的定义得出结论，但过程不够简洁. 可以提出这一思路来作比较，帮助学生形成合理选择证题途径的意识.

例题 8

本题的证题思路的分析，可先引导学生从“已知条件”看到$\triangle BCE$与$\triangle ACD$全等；再从“待证结论”探寻所需条件，把问题转化为证明$\angle BFD=90^\circ$（或$\angle BFA=90^\circ$）. 这样，可确定需知$\angle 1=\angle 2$，从而将思路贯通.

练习 19.2(4)

1. 分别联结OC、OD. 证$\triangle OAC$与$\triangle BOD$全等，得$OC=OD$，$\angle AOC=\angle BOD$. 又$\angle AOM=\angle BOM$，得$\angle COM=\angle DOM$. 再根据等腰三角形的性质得到$OM\perp CD$.

$$\begin{cases}\angle ABD=\angle ACD(\text{已证}),\\ \angle 1=\angle 2(\text{已知}),\\ AD=AD(\text{公共边}),\end{cases}$$

∴ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$(A. A. S).

得 $AB=AC$(全等三角形的对应边相等).

∵ $\triangle ABC$是等腰三角形，且$\angle 1=\angle 2$，

∴ $AD\perp BC$(等腰三角形的三线合一).

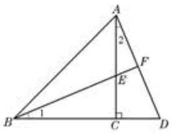


图 19－12

例题8 已知：如图 19－12，$\triangle ABD$中，$AC\perp BD$，垂足为点C，$AC=BC$. 点E在AC上，且$CE=CD$. 联结BE并延长交AD于点F.

求证：$BF\perp AD$.

分析 要证明$BF\perp AD$，只要证明$\angle BFD=90^\circ$. 由三角形内角和等于180°，可知$\angle 1+\angle D+\angle BFD=180^\circ$，$\angle 2+\angle D+\angle ACD=180^\circ$，又$\angle ACD=90^\circ$，因此只要证明$\angle 1=\angle 2$.

证明 ∵ $AC\perp BD$(已知)，

∴ $\angle ACB=\angle ACD=90^\circ$(垂直的定义).

在$\triangle BCE$与$\triangle ACD$中，

$$\begin{cases}CE=CD(\text{已知}),\\ \angle BCE=\angle ACD(\text{已证}),\\ BC=AC(\text{已知}),\end{cases}$$

∴ $\triangle BCE\cong\triangle ACD$(S. A. S).

得 $\angle 1=\angle 2$(全等三角形的对应角相等).

在$\triangle ACD$中，$\angle 2+\angle D+\angle ACD=180^\circ$(三角形的内角和等于$180^\circ$)，

在$\triangle BFD$中，$\angle 1+\angle D+\angle BFD=180^\circ$(三角形的内角和等于$180^\circ$)，

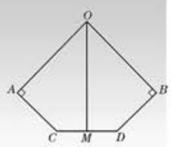
∴ $\angle 1+\angle D+\angle BFD=\angle 2+\angle D+\angle ACD$(等量代换).

∴ $\angle BFD=\angle ACD=90^\circ$(等式性质).

∴ $BF\perp AD$(垂直的定义).

练习 19.2(4)

1. 已知：如图，$OA=OB$，$AC=BD$，且$OA\perp AC$，$OB\perp BD$，点M在CD上，$\angle AOM=\angle BOM$.
   求证：$OM\perp CD$.



（第 1 题）

2. 小明用如下两种方法画出了互相垂直的两条直线，你能证明这两种画法的正确性吗？
   画法一：

【注意问题】

例题 7 和例题 8 的证明，对知识的运用有一定的综合性，对证明过程的表达也有一定的要求. 教学中不要操之过急，应多加引导、分析，做好讲评和小结.

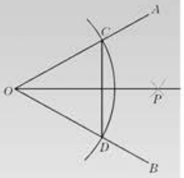
① 画$\angle AOB$；

② 以点 O 为圆心、任意长为半径画弧，分别交 OA 于点 C，交 OB 于点 D；

③ 再分别以点 C 和点 D 为圆心、大于$\frac{1}{2}CD$ 的同样长为半径画弧，两弧相交于$\angle AOB$ 内部一点 P；

④ 分别画射线 OP、线段 CD .

则 CD 与 OP 互相垂直.



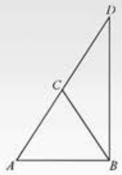
画法二：

① 画线段 AB，再分别以点 A 和点 B 为圆心、大于$\frac{1}{2}AB$ 的同样长为半径画弧，两弧相交于点 C；

② 分别联结 AC、BC，延长 AC 到点 D，使 $CD=CA$；

③ 联结 DB .

则 DB 与 AB 互相垂直.



“三边对应相等的两个三角形全等”是一个真命题，现在我们来证明这个事实.

例题9 已知：如图 19－13，在$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$中，$AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$CA=C'A'$.

求证：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

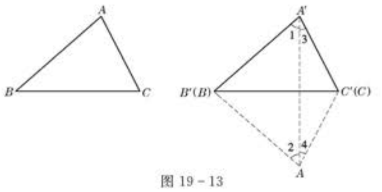


图 19－13

分析　全等三角形的其他判定方法都与三角形的角有关，于是要设法找到$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$中有一组角对应相等. 但是，在这两个分散的三角形中，已知条件的作用受到限制，因此考虑通过图形的运动，把它们组合成一个图形.

证明　不妨设边 BC 最长. 如图 19－13，把$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$拼在一起，使边 BC 和 $B'C'$重合，并使点 A、A'在 $B'C'$的两侧；再联结 $A'A$.

∵　$AB=A'B'$，$AC=A'C'$（已知），

第一节　几何证明　95

2. 对于画法一，利用“S.S.S”判定 $\triangle OCP \cong \triangle ODP$，再利用等腰三角形的性质得到$CD \perp OP$.

对于画法二，利用等边对等角，得$\angle A=\angle ABC$，$\angle D=\angle DBC$；再利用三角形的内角和等于 $180°$推出$\angle ABD=90°$，得 $DB \perp AB$.

【本课重点】

通过添置辅助线和综合分析，解决较复杂的证明问题. 让学生体会利用图形的运动把一些分散的元素集中在一个图形中的方法，以及添置辅助线的思考方法.

例题 9

本题是补证“边边边”定理. 证明的思路是通过图形的运动把一些分散的元素集中在一个图形中，然后利用已有的“边角边”定理，证明两个三角形全等.

这种利用图形运动的证明方法，学生以前从未遇到，要注意分析和引导 . 在后面的例题中，还会用到这一方法.

想一想

引导学生反思，拼图时是否一定要使两个三角形的最长边重合？使其他一组等边重合是否可行？实际上，可任选一组等边使它们重合进行拼图，证明的思路一样．但要注意，拼成的四边形中有可能出现一个大于(或等于)180°的角，这时的证明过程要分类讨论．

例题 10

本题的证明不仅添置了两条辅助线，而且利用了两次三角形全等．但是，证题思路的形成比较直接，所以安排为基本证法．

本题通过构造等腰三角形来证明，过程更加简明，但证题思路的形成可能会困难一些．另外，也可作线段 BC 的垂直平分线，利用轴对称图形的性质来证明，但学生对证明的表述可能不习惯．

教学中，要鼓励学生积极思维，提出不同的证题思路，再指导学生完成证明．

∴ $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$（等边对等角）．

∴ $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$（等式性质），

即 $\angle B'A'C'=\angle BAC$．

在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，

$$\begin{cases}AB=A'B'(\text{已知}),\\ \angle BAC=\angle B'A'C'(\text{已证}),\\ AC=A'C'(\text{已知}),\end{cases}$$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$(S. A. S)．

想一想

如果拼图时使 AB 与 $A'B'$ 重合，能证明$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$全等吗？试一试．

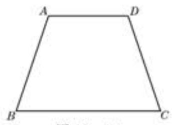


图 19－14

例题10 已知：如图 19－14，四边形 $ABCD$ 中，$AB=DC$，$\angle B=\angle C$．

求证：$\angle A=\angle D$．

分析 要证明$\angle A=\angle D$，容易想到通过证明$\angle A$与$\angle D$所在的两个三角形全等来实现．因此分别联结 AC、BD，设法证明$\triangle ABD$与$\triangle DCA$全等．

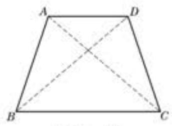


图 19－15

证明 分别联结 AC、DB（如图 19－15）．

在$\triangle ABC$与$\triangle DCB$中，

$$\begin{cases}AB=DC(\text{已知}),\\ \angle ABC=\angle DCB(\text{已知}),\\ BC=CB(\text{公共边}),\end{cases}$$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle DCB$(S. A. S)．

得 $AC=DB$（全等三角形的对应边相等）．

在$\triangle ABD$与$\triangle DCA$中，

$$\begin{cases}DB=AC(\text{已证}),\\ AB=DC(\text{已知}),\\ AD=DA(\text{公共边}),\end{cases}$$

∴ $\triangle ABD\cong\triangle DCA$(S. S. S)．

∴ $\angle BAD=\angle CDA$（全等三角形的对应角相等）．

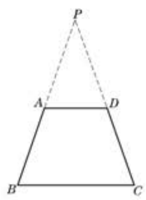


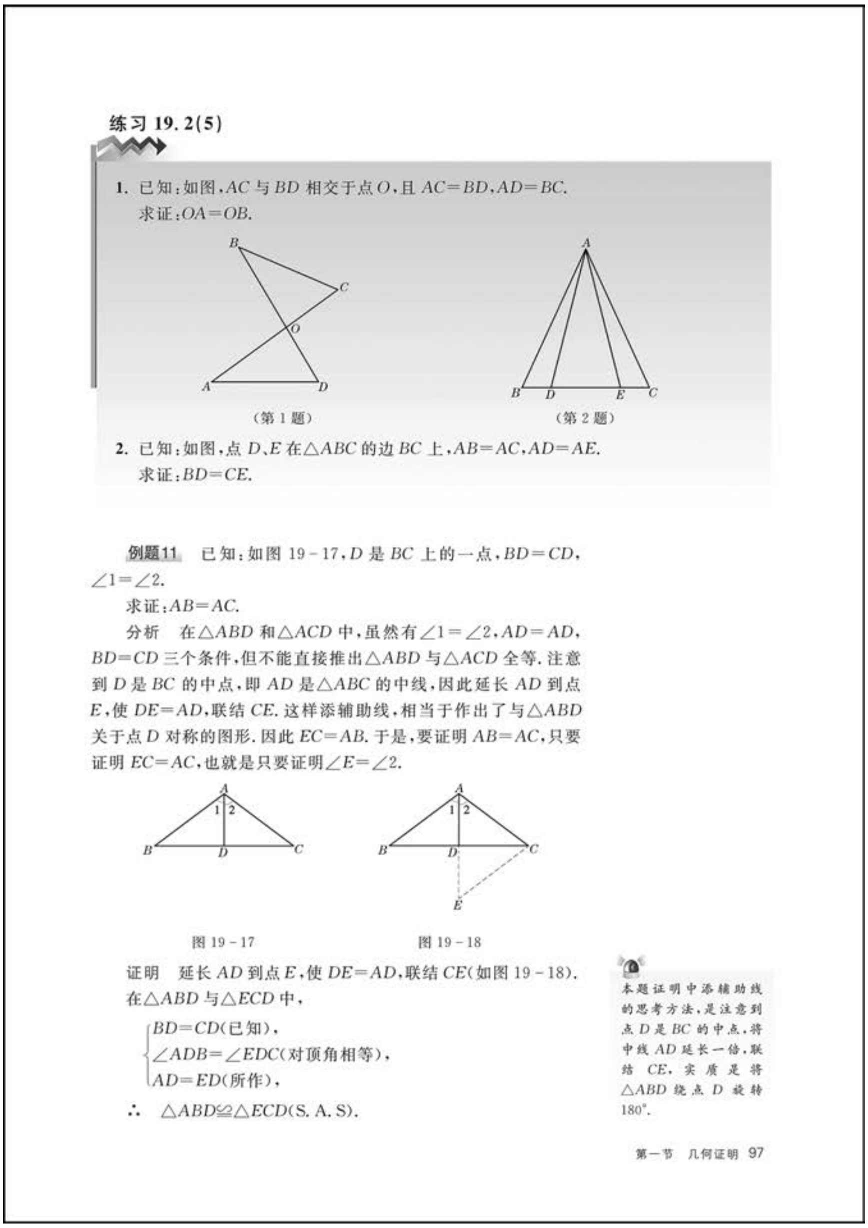
图 19－16

我们如果从已知“$\angle B=\angle C$”进行分析，可知$\angle B$、$\angle C$所在的三角形是等腰三角形．只要作出以 BC 为底边、$\angle B$ 和$\angle C$ 为底角的那个等腰三角形（如图 19－16），再结合已知“$AB=DC$”，就可推得$\angle BAD=\angle CDA$．

96 第十九章 几何证明

【注意问题】

例题 9 和例题 10 的安排，一是为了补证“边边边”定理，二是使学生丰富证题的经验．学生可以从中体会通过图形的运动把分散的已知条件集中在一个图形中的思考方法，体会构造基本图形以及补全图形的重要性，获得关于添置辅助线的启示．但是，证明的难度较大，要加强指导，并做好讲评小结．



练习 19.2(5)

1. 已知：如图，AC 与 BD 相交于点 O，且 $AC=BD$，$AD=BC$.
求证：$OA=OB$.

（第 1 题）　　（第 2 题）

2. 已知：如图，点 D、E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，$AB=AC$，$AD=AE$.
求证：$BD=CE$.

例题11　已知：如图 19－17，D 是 BC 上的一点，$BD=CD$，$\angle 1=\angle 2$.

求证：$AB=AC$.

分析　在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，虽然有 $\angle 1=\angle 2$，$AD=AD$，$BD=CD$ 三个条件，但不能直接推出 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 全等. 注意到 D 是 BC 的中点，即 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，因此延长 AD 到点 E，使 $DE=AD$，联结 CE. 这样添辅助线，相当于作出了与 $\triangle ABD$ 关于点 D 对称的图形. 因此 $EC=AB$. 于是，要证明 $AB=AC$，只要证明 $EC=AC$，也就是只要证明 $\angle E=\angle 2$.

图 19－17　　图 19－18

证明　延长 AD 到点 E，使 $DE=AD$，联结 CE（如图 19－18）.
在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ECD$ 中，

$$\begin{cases} BD=CD（已知），\\ \angle ADB=\angle EDC（对顶角相等），\\ AD=ED（所作），\end{cases}$$

$\therefore$ 　$\triangle ABD\cong\triangle ECD$(S. A. S).

本题证明中添辅助线的思考方法，是注意到点 D 是 BC 的中点，将中线 AD 延长一倍，联结 CE，实质是将 $\triangle ABD$ 绕点 D 旋转 $180°$.

第一节　几何证明　97

练习 19.2(5)

1. 联结 AB，证 $\triangle ABC\cong\triangle BAD$，从而得到 $\angle BAC=\angle ABD$；再得到 $OA=OB$.

2. 方法一：可证 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$，得到 $BD=CE$.

方法二：过点 A 作 $AH\perp BC$，垂足为点 H. 利用等腰三角形的性质得到 $BH=CH$，$DH=EH$，从而 $BD=CE$.

【本课重点】

让学生进一步获得探究证题思路的经历，丰富演绎证明的经验，体会在图形运动思想的指导下添置辅助线的方法和构造基本图形的方法.

例题 11

本题是证明两条线段相等，看似简单但不能直接运用全等三角形的判定和性质来进行证明. 这时要考虑添辅助线，而添辅助线所用的方法，将对证明直角三角形斜边上的中线的定理起到启示和铺垫作用.

【注意事项】

在例题 11 中，已知 D 是线段 BC 的中点，即 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，可考虑将 $\triangle ABD$ 绕点 D 旋转 $180°$，使 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 成为同一三角形中的等角. 通过将中线 AD 延长一倍，作出 $\triangle ABD$ 关于点 D 对称的图形，这种添辅助线的方法，是基于对图形旋转运动的认识，要引导学生深入体会.

例题 12

本题是证明两角之间的倍半关系，涉及添置辅助线和综合运用等腰三角形性质、三角形内角和、同角的余角相等等基本定理的要求，有助于学生拓宽证题思路和提高分析能力.

本题是等腰三角形和直角三角形的组合，要熟悉基本图形的性质，这是证题的基础.

练习 19.2(6)

1. 作 BC 边上的高 AE，可得 $\angle BAE=\angle BCD$，推出 $\angle BAE=\angle CAE$；再证明 $\triangle ABE\cong\triangle ACE$，得 $AB=AC$.

2. 在 BC 上截取 $CE=CA$，联结 DE. 证 $\triangle ECD\cong\triangle ACD$，得 $ED=AD$，$\angle DEC=\angle A$.

由已知 $BC=AC+AD$，得 $BE=AD=ED$，从而推出 $\angle DEC=2\angle B$，得到 $\angle A=2\angle B$.

得　$EC=AB$，$\angle E=\angle 1$（全等三角形的对应边相等、对应角相等）.

又∵　$\angle 1=\angle 2$（已知），

∴　$\angle E=\angle 2$（等量代换）.

得　$EC=AC$（等角对等边）.

∴　$AB=AC$（等量代换）.

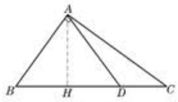


图 19－19

例题12　如图19－19，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$. D 是 BC 上的一点，$AD=AB$.

求证：$\angle BAD=2\angle C$.

分析　要证明 $\angle BAD=2\angle C$，只要证明 $\angle BAD$ 的一半与 $\angle C$ 相等. 由于 $AD=AB$，因此考虑作 $\angle BAD$ 的平分线 AH，从而将问题转化为证明 $\angle BAH=\angle C$.

证明　过点 A 作 $AH\perp BC$，垂足为点 H（如图 19－19）.

∵　$AD=AB$（已知），

∴　$\angle BAD=2\angle BAH$（等腰三角形的三线合一）.

在 $\triangle ABC$ 中，

∵　$\angle BAC+\angle B+\angle C=180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

又∵　$\angle BAC=90^\circ$（已知），

∴　$\angle B+\angle C=90^\circ$.

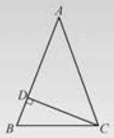
同理 $\angle BAH+\angle B=90^\circ$.

∴　$\angle BAH=\angle C$（同角的余角相等）.

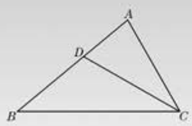
∴　$\angle BAD=2\angle C$（等量代换）.

练习 19.2(6)

1. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$CD\perp AB$，点 D 为垂足，$\angle A=2\angle BCD$.
   求证：$AB=AC$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，CD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$BC=AC+AD$.
   求证：$\angle A=2\angle B$.

98 第十九章　几何证明

【注意事项】

(1) 涉及线段或角的和、差、倍、半的证明问题，要严格控制难度.

(2) 练习 19.2(6)第 1 题可不添置辅助线来进行证明，其证明思路是：由 $\angle A=2\angle BCD$，$\angle B+\angle BCD=90^\circ$，推出 $2\angle B+\angle A=180^\circ$；再由 $\angle A+\angle B+\angle ACB=180^\circ$ 推出 $\angle B=\angle ACB$，得 $AB=AC$.

习题 19.2(6)第 1 题和第 2 题，分别是练习 19.2(6)第 2 题和第 1 题通过各题中一个条件与结论调换后构成的. 可在习题讲评时指出相关两题之间的联系，引导学生进行反思性学习.

例题13　求证：不等边三角形一边的两端到这边的中线所在直线的距离相等.

已知：如图 19－20，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，CE 和 BF 都垂直于直线 AD，垂足分别为点 E、F.

求证：$CE=BF$.

根据命题，画出图形，再写已知、求证.

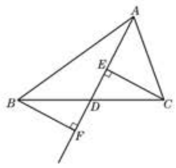


图 19－20

分析　要证明 $CE=BF$，只要证明 $\triangle CDE\cong\triangle BDF$. 注意到 $\angle CED=\angle BFD=90^\circ$，$\angle CDE=\angle BDF$，$CD=BD$，因此可利用“角、角、边”来证这两个三角形全等.

证明　∵　AD 是 $\triangle ABC$ 的中线(已知)，

∴　$BD=CD$(中线的定义).

∵　$CE\perp AD$，$BF\perp AD$(已知)，

∴　$\angle CED=\angle BFD=90^\circ$(垂直的定义).

在 $\triangle BDF$ 与 $\triangle CDE$ 中，

$$\begin{cases}\angle BFD=\angle CED(\text{已证}),\\ \angle BDF=\angle CDE(\text{对顶角相等}),\\ BD=CD(\text{已证}),\end{cases}$$

∴　$\triangle BDF\cong\triangle CDE$(A. A. S)

∴　$CE=BF$(全等三角形的对应边相等).

本题的证明也可以这样考虑：注意到 CE、BF 分别是 $\triangle ACD$ 与 $\triangle ABD$ 的高，而且 AD 是它们的公共边；同时 $\triangle ACD$ 与 $\triangle ABD$ 又是等底($BD=CD$)同高的两个三角形，因此 $\triangle ACD$ 与 $\triangle ABD$ 的面积相等. 利用这一关系，可证明 $CE=BF$.

请试一试利用面积相等关系完成证明.

例题14　求证：有两边及其中一边上的中线对应相等的两个三角形全等.

已知：如图 19－21，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，AD、$A'D'$ 分别是边 BC、$B'C'$ 上的中线，$AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$AD=A'D'$.

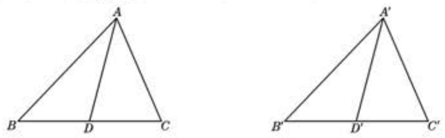


图 19－21

求证：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

分析　要证明 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，由于已知 $AB=A'B'$，$BC=B'C'$，因此只要证明 $\angle B=\angle B'$. 为此考虑证明 $\triangle ABD$ 与 $\triangle A'B'D'$ 全等.

第一节　几何证明　99

【本课重点】

通过举例，展示证明用普通语言叙述的命题的一般步骤. 让学生体会证明一个真命题的全过程，学会分析命题的题设和结论，获得把普通语言转化为图形语言和符号语言的经验，学会结合图形写出已知、求证，提高演绎推理能力.

例题 13

本题的教学，从分析题设、结论，到画出图形，再写已知、求证，直至完成证明，要耐心地对学生进行引导. 要突出不同的数学语言之间的联系和转译，强调表述的规范，重视学生对全过程的体验.

证明的方法可从学生已有的利用全等三角形性质证明线段相等的经验提出，还可引导学生从面积角度入手来证明线段相等，开阔学生的思路.

例题 14

本题教学的实施要求与例题 13 一样. 但可适当放手让学生先尝试，如画图、写已知和求证，再讨论证明的思路；教师仍要加强指导，帮助学生完善表达，把握完整过程.

【注意事项】

对用普通语言叙述的几何命题进行证明，是推理证明教学中的一个难点. 其中涉及普通语言、图形语言、符号语言这三种数学语言形态的转译，对命题证明全过程的把握. 但是，这一内容的教学对提高学生的数学语言运用能力、逻辑表达能力有重要作用；也有助于学生加深对论证几何的理解和数学表达模式的体验. 例题 13 和例题 14，是对学生进行这方面学习的引导；在以后形成几何定理的过程中，通常是提出命题、再进行证明，或证明事实、再概括定理，例题 13 和例题 14 的学习是今后学习的基础.

例题 14 的证明中，有两次运用三角形全等的要求，符合数学课程标准对三角形全等运用的有关规定.

在其他有关内容的教学中，要注意控制证明的难度.

练习 19.2(7)

1. 画图略. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle BAC=\angle B'A'C'$，$\angle B=\angle B'$，AD 平分 $\angle BAC$，$A'D'$ 平分 $\angle B'A'C'$，且 $AD=A'D'$.

求证：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

证明提示：先证 $\angle BAD=\angle B'A'D'$；然后利用“A. A. S”定理，证 $\triangle ABD\cong\triangle A'B'D'$，得 $AB=A'B'$；

再利用“A. S. A”，证得 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

2. 画图略.

已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 是 BC 边上的中线，点 P 是 AD 上任意一点，$PE\perp AB$，$PF\perp AC$，垂足分别是点 E、F.

求证：$PE=PF$.

证明提示：先利用等腰三角形性质，证 $\angle BAD=\angle CAD$；然后利用“A. A. S”，证 $\triangle AEP\cong\triangle AFP$，得到 $PE=PF$.

证明 ∵ AD、$A'D'$ 分别是 BC、$B'C'$ 上的中线(已知)，

∴ $BD=\frac{1}{2}BC$，$B'D'=\frac{1}{2}B'C'$(三角形中线的定义).

又∵ $BC=B'C'$(已知)，

∴ $BD=B'D'$(等式性质).

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle A'B'D'$ 中，

$$\begin{cases} AB=A'B'\text{(已知)}, \\ BD=B'D'\text{(已证)}, \\ AD=A'D'\text{(已知)}, \end{cases}$$

∴ $\triangle ABD\cong\triangle A'B'D'$(S. S. S).

得 $\angle B=\angle B'$(全等三角形的对应角相等).

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，

$$\begin{cases} AB=A'B'\text{(已知)}, \\ \angle B=\angle B'\text{(已证)}, \\ BC=B'C'\text{(已知)}, \end{cases}$$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$(S. A. S).

练习 19.2(7)

1. 求证：有两角及其中一角的平分线对应相等的两个三角形全等.
2. 求证：等腰三角形底边中线上任意一点到两腰的距离相等.

100 第十九章 几何证明

Xianduan De Chuizhipingfenxian
Yu Jiao De Pingfenxian

第二节 线段的垂直平分线与角的平分线

19.3 逆命题和逆定理

我们学过下列两个命题：

(1) 两直线平行，内错角相等.

(2) 内错角相等，两直线平行.

分析这两个命题的题设和结论，我们看到命题(1)的题设和结论正好分别是命题(2)的结论和题设.

在两个命题中，如果第一个命题的题设是第二个命题的结论，而第一个命题的结论又是第二个命题的题设，那么这两个命题叫做**互逆命题**. 如果把其中一个命题叫做**原命题**，那么另一个命题叫做它的**逆命题**(converse proposition).

上面的两个命题就是互逆命题，如果命题(1)叫做原命题，那么命题(2)叫做命题(1)的逆命题.

也可以把命题(2)叫做原命题，这时命题(1)叫做命题(2)的逆命题.

例题1 写出命题“如果两个角是同一个角的余角，那么这两个角相等”的逆命题.

解 原命题的逆命题是：如果两个角相等，那么这两个角是同一个角的余角.

如果一个定理的逆命题经过证明也是定理，那么这两个定理叫做**互逆定理**，其中一个叫做另一个的**逆定理**.

例如：等腰三角形的性质“如果三角形的两条边相等，那么它们所对的角相等”与等腰三角形的判定“如果三角形的两个角相等，那么它们所对的边相等”，它们不仅是互逆命题，而且是互逆定理.

在例题 1 中，命题“如果两个角是同一个角的余角，那么这两个角相等”是真命题，但是逆命题“如果两个角相等，那么这两个角是同一个角的余角”是假命题(想一想，为什么?). 可见原命题是定理，逆命题不一定是定理. 一般来说，所有的定理都有逆命题，但不是所有的定理都有逆定理.

例题2 写出命题“全等三角形的面积相等”的逆命题，再判断这个逆命题的真假.

解 命题“全等三角形的面积相等”可写成“如果两个三角形

第二节 线段的垂直平分线与角的平分线 101

通过具体例子，引进互逆命题、原命题、逆命题的概念. 注意，在两个互逆的命题中，原命题和逆命题是相对而言的，“边款”已经指明.

例题 1

通过本例说明怎样写一个命题的逆命题. 教学时要适当进行归纳.

在学习互逆命题的基础上，引入互逆定理. 要强调凡是定理都是真命题，一个定理不一定有逆定理.

例题 2

本题是对一个简单表述的命题，写它的逆命题. 这个逆命题也可以写成“面积相等的两个三角形是全等三角形”.

有的命题不是以“如果……那么……”的形式表述，学生在写它的逆命题时，可能会感到困难. 教师要引导学生，在理解原命题含义的基础上，借助图形，写成“如果……那么……”的形式，再写逆命题就比较容易.

【教学目标】

(1) 知道原命题、逆命题、互逆命题、逆定理、互逆定理等的含义.

(2) 会写一个命题的逆命题，并会证明它的真假 . 知道每一个命题都有逆命题，但一个定理不一定有逆定理.

(3) 增强逆向思维的意识，体会辩证思想.

【注意事项】

(1) 学生在 19.1 中已经学习了命题的有关概念，会写一个命题的题设与结论. 现在再学习原命题与互逆命题，一般不难理解与掌握. 同样地，学生已初步掌握了证明真命题与假命题的方法，现在再学习逆定理与互逆定理也应该比较顺利，而且由于在前面的学习中已积累了一定数量的互逆定理，因此可与学生共同举例，形成有关概念.

(2) 几何中有许多互逆的命题和互逆的定理，它们从正反两方面揭示了图形的特征，所以互逆命题、互逆定理的概念是重要概念. 要通过具体的例子，引导学生认识一个命题一定有逆命题，但逆命题不一定是真命题. 所以，一个定理不一定有逆定理.

(3) 代数中也有许多互逆的命题，可适当展开.

让学生进一步体会，要证明一个命题是假命题，只要举一个反例.

练习 19.3

1.（1）题设：两直线平行；结论：同位角相等.

它的逆命题是：同位角相等，两直线平行.

（2）题设：两个三角形全等；结论：它们的对应角相等.

它的逆命题是：三个内角对应相等的两个三角形全等.

2.（1）逆命题是：三个内角都等于 60°的三角形是等边三角形．这是真命题.

（2）逆命题是：两个全等三角形一定关于某一条直线对称．这是假命题.

3.（1）定理“对顶角相等”的逆命题是：相等的两个角是对顶角. 这是一个假命题，所以“对顶角相等”没有逆定理.

（2）定理“全等三角形的对应边相等”的逆命题是：三边对应相等的两个三角形是全等三角形，这是一个真命题．所以“全等三角形的对应边相等”有逆定理.

操作

根据线段的轴对称性质，通过操作活动，归纳得到“线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等”的结论. 同时，让学生通过操作获得感性认识，为下面的证明提供思考基础.

是全等三角形，那么这两个三角形的面积相等”. 它的逆命题是“如果两个三角形的面积相等，那么这两个三角形是全等三角形”.

这个逆命题是假命题.

例如，图 19－22 中，$AA' \parallel BC$，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'BC$ 的面积相等，但 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'BC$ 显然不全等.

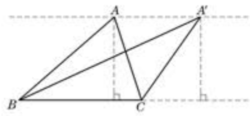


图 19－22

练习 19.3

1. 说出下列命题的题设和结论，再说出它们的逆命题：
   （1）两直线平行，同位角相等.
   （2）全等三角形的对应角相等.
2. 写出下列命题的逆命题，再判断逆命题的真假：
   （1）等边三角形的三个内角都等于 60°.
   （2）关于某一条直线对称的两个三角形全等.
3. 下列定理有没有逆定理？为什么？
   （1）对顶角相等.
   （2）全等三角形的对应边相等.

19.4 线段的垂直平分线

我们知道，线段是轴对称图形，它的对称轴是线段的垂直平分线. 如图 19－23，线段 AB 关于直线 MN 对称. 在直线 MN 上任取一点 P，分别联结 PA、PB，那么线段 PA 与 PB 一定相等吗？

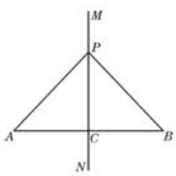


图 19－23

操作

以直线 MN 为折痕将这个图形翻折，可见点 P 的位置不动，点 A 与点 B 重合（想一想，为什么？）. 也就是说，线段 PA 与 PB 相等.

归纳上述事实，得到命题：

102 第十九章　几何证明

【教学目标】

（1）经历线段垂直平分线的性质的发现过程，初步掌握线段垂直平分线的性质定理及其逆定理，体会辩证思想.

（2）能运用线段垂直平分线的性质定理及其逆定理解决简单的几何问题.

（3）通过从操作实验到演绎推理的数学活动，认识实验归纳和演绎推理的作用.

如果一个点在一条线段的垂直平分线上，那么分别联结这点与线段两个端点所得的两条线段相等.

我们来证明这个命题是真命题.

已知：如图 19－23，直线 MN 是线段 AB 的垂直平分线，垂足为点 C，点 P 在直线 MN 上.

求证：$PA=PB$.

证明：∵ MN 是线段 AB 的垂直平分线，垂足为点 C(已知)，

∴ $MN\perp AB$，$AC=BC$(线段垂直平分线的定义).

设点 P 不在线段 AB 上，

由 $MN\perp AB$，得 $\angle PCA=\angle PCB=90^\circ$(垂直的定义).

在 $\triangle PCA$ 与 $\triangle PCB$ 中，

$$\begin{cases}AC=BC(\text{已知}),\\ \angle PCA=\angle PCB(\text{已证}),\\ PC=PC(\text{公共边}),\end{cases}$$

∴ $\triangle PCA\cong\triangle PCB$(S. A. S).

∴ $PA=PB$(全等三角形的对应边相等).

如果点 P 在线段 AB 上，那么点 P 与点 C 重合，即 $PA=PB$.

上述命题中，线段 PA 与 PB 分别表示点 P 到点 A、B 的距离，于是得到以下定理：

定理　线段垂直平分线上的任意一点到这条线段两个端点的距离相等.

思考

这个定理的逆命题是什么？逆命题正确吗？写出这个定理的逆命题，再进行证明.

这个定理的逆命题是：如果一个点到一条线段两个端点的距离相等，那么这个点在这条线段的垂直平分线上.

已知：如图 19－24，$QA=QB$.

求证：点 Q 在线段 AB 的垂直平分线上.

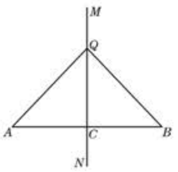


图 19－24

引导学生利用全等三角形的判定和性质，证明由操作所得的命题是真命题；然后概括出线段垂直平分线的(性质)定理.

在命题的证明中，要注意对点 P 是否在线段 AB 上分别论述.

定理的概括可由师生共同完成. 从“线段相等”到“距离相等”，有进一步抽象的要求，也增强了定理的应用性.

思考

在获得定理的基础上，引导学生研究这个定理的逆命题. 这是几何研究的一种方法，并让学生增强运用这一方法主动获取知识的意识.

先让学生写出逆命题，再根据已有的操作经验提出逆命题为真命题的猜想，然后进行证明.

按照画图，写已知、求证，证明，展开全过程.

【注意事项】

(1) 课本中线段垂直平分线的性质定理没有用“如果……那么……”的形式来表述. 教学时让学生说出或写出它的逆命题，可能会有一定的困难. 教师可帮助学生分析它的题设和结论，再写出其逆命题.

(2) 线段垂直平分线的性质定理及其逆定理(判定定理)，共同揭示了线段垂直平分线的本质特征，这是用集合的语言来描述线段垂直平分线的思考基础. 教学中，要引导学生认识由线段垂直平分线的性质定理及其逆定理(判定定理)所表达的线段垂直平分线上的点的特征.

逆定理的证明和概括，可放手让学生自主完成.

分析：为了证明点 Q 在线段 AB 的垂直平分线上，可以先经过点 Q 画线段 AB 的垂线，然后证明所画垂线平分线段 AB.

证明：如果点 Q 在线段 AB 上，那么点 Q 就是线段 AB 的中点，即在线段 AB 的垂直平分线上.

设点 Q 不在线段 AB 上，过点 Q 作 $QC \perp AB$，垂足为点 C.

∵ $QA=QB$（已知），$QC \perp AB$（所作），

∴ $CA=CB$（等腰三角形的三线合一），

即点 C 是线段 AB 的中点.

∴ 点 Q 在线段 AB 的垂直平分线上.

也可以先平分线段 AB，如设线段 AB 的中点为 C，联结 QC，然后证明 QC 垂直于线段 AB.

学生对于“集合”的认识其实是模糊的，让学生在集合的思想指导下重新认识线段垂直平分线的两个定理，需要教师引导.

于是，得到了这个定理的逆定理：

逆定理　和一条线段两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上.

这里的解释是渗透集合思想，教师要讲清楚、讲正确，学生只要知道.

任何图形都是由点组成的，因此我们可以把图形看成点的集合.

由上述的定理和逆定理可以知道，组成线段 AB 的垂直平分线的所有点和 A、B 两点的距离都相等；反过来，和 A、B 两点距离相等的所有的点组成线段 AB 的垂直平分线. 于是，线段的垂直平分线可以看作是和这条线段两个端点的距离相等的点的集合.

例题

本题是线段垂直平分线两个定理的初步运用. 实际上，通过本题证明了三角形三边的垂直平分线相交于一点，为今后学习三角形的外心提供基础.

要让学生体会线段垂直平分线两个定理的不同运用.

本节只安排了一个例题，而且例题的起点偏高. 可根据班级的教学实际，增加一个低起点的例题作铺垫，或选用其他例题.

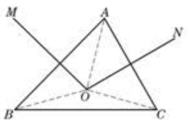


图 19－25

例题　已知：如图 19－25，在 $\triangle ABC$ 中，OM、ON 分别是 AB、AC 的垂直平分线，OM 与 ON 相交于点 O.

求证：点 O 在 BC 的垂直平分线上.

证明　分别联结 OB、OA、OC.

∵ OM、ON 分别是 AB、AC 的垂直平分线（已知），

∴ $OA=OB$，$OC=OA$（线段垂直平分线上的任意一点到这条线段两个端点的距离相等）.

得 $OB=OC$（等量代换）.

∴ 点 O 在 BC 的垂直平分线上（和一条线段的两个端点的距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上）.

练习 19.4

1. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=24\text{cm}$，AC 的垂直平分线分别交 AB、AC 于点 E、F，且 $\triangle BCE$ 的周长为 34cm，求底边 BC 的长.

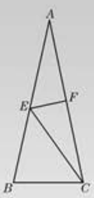
104 第十九章　几何证明

【注意事项】

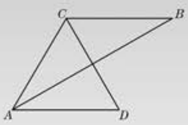
（1）课本中对线段垂直平分线的性质定理进行探索和证明，是在线段垂直平分线上任取一点 P 为代表，这里要注意点 P 有可能在线段 AB 上. 要证明一个图形上的每一点都具有某种性质，只要在图形上任取一点作代表，这一思想方法应让学生理解.

（2）教学中，要重视对线段垂直平分线这两个互逆定理的条件和结论的分析，帮助学生进一步体会两个互逆定理的联系和区别，学会正确运用定理.

（3）用集合的语言描述线段垂直平分线，学生不容易理解，教师要仔细讲解，这也是为学生在后面学习轨迹打基础. 可结合线段 AB 的垂直平分线进行具体说明：点是组成图形的基本元素，线段 AB 的垂直平分线这个图形可看成点的集合；“和 A、B 两点的距离相等”，是线段 AB 的垂直平分线这个图形（集合）中的点所具有的特征.



（第 1 题）



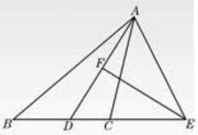
（第 2 题）

2. 已知：如图，CD 垂直平分 AB，AB 平分$\angle CAD$.

求证：$AD /\!/ BC$.

3. 已知：如图，AD 平分$\angle BAC$，AD 的垂直平分线交 BC 的延长线于点 E，交 AD 于点 F.

求证：$\angle EAC=\angle B$.



（第 3 题）

19.5　角的平分线

思考

一个角是轴对称图形，它的对称轴是角的平分线所在的直线. 角的平分线除了平分这个角以外，还有其他的性质吗？

研究角的平分线有关性质时，规定所涉及的这个角小于平角.

如果 OC 是$\angle AOB$ 的平分线，那么以 OC 所在直线为折痕，将这个图形翻折，这个角的两边一定重合. 可见，在 OC 上任取一个与点 O 不重合的点 P，从点 P 分别向边 OA、OB 作垂线段，那么这两条垂线段的长一定相等. 我们来证明这个事实.

已知：如图 19－26，OC 是$\angle AOB$ 的平分线，点 P 是 OC 上一点，$PD\perp OA$，$PE\perp OB$，垂足分别为点 D、E.

求证：$PD=PE$.

证明：$\because$　OC 是$\angle AOB$ 的平分线（已知），

$\therefore$　$\angle 1=\angle 2$（角平分线的定义）.

$\because$　$PD\perp OA$，$PE\perp OB$（已知），

$\therefore$　$\angle PDO=\angle PEO=90^\circ$（垂直的定义）.

在$\triangle PDO$ 与$\triangle PEO$ 中，

$$\begin{cases}\angle 1=\angle 2\text{（已证）},\\ \angle PDO=\angle PEO\text{（已证）},\\ OP=OP\text{（公共边）},\end{cases}$$

$\therefore$　$\triangle PDO\cong\triangle PEO$（A. A. S）.

$\therefore$　$PD=PE$（全等三角形的对应边相等）.

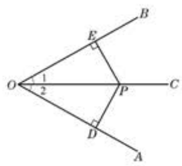


图 19－26

图 19－26 中$\angle AOB$ 的平分线 OC 上的点 O 到这个角两边的距离都等于零.

第二节　线段的垂直平分线与角的平分线 105

练习 19.4

1. 10cm.

2. 提示：由 CD 垂直平分 AB，得 $CA=CB$，可知$\angle CAB=\angle B$. 由 AB 平分$\angle CAD$，得$\angle CAB=\angle BAD$. 于是$\angle B=\angle BAD$，所以 $AD /\!/ BC$.

3. 提示：由 EF 垂直平分 AD，得 $EA=ED$，可知$\angle EDA=\angle DAE$. 由$\angle EDA=\angle B+\angle BAD$，得$\angle DAE=\angle DAC+\angle EAC$，于是$\angle B+\angle BAD=\angle DAC+\angle EAC$.

由 AD 平分$\angle BAC$，得$\angle BAD=\angle DAC$，所以$\angle B=\angle EAC$.

【本课重点】

让学生再次体会寻求一个定理是否有逆定理的过程，初步掌握角的平分线的性质定理及其逆定理，能运用角的平分线的性质定理及其逆定理解决简单的几何问题.

思考

引导学生在实验几何的知识经验的基础上，进一步探究角的平分线的性质.

引出性质，再进行证明.

【教学目标】

(1) 初步掌握角的平分线的性质定理及其逆定理.

(2) 能运用角的平分线的性质定理及其逆定理解决简单的几何问题.

【注意事项】

可以类比线段垂直平分线的教学进行角的平分线的教学设计. 通过角的平分线的性质定理及其逆定理的探索，进一步发展学生的推理证明意识和能力. 同时让学生再次体会寻求一个定理是否有逆定理的过程.

概括角的平分线的性质定理.

再讨论角的平分线的性质定理的逆定理. 这个逆定理的证明安排在课本第 113 页. 如果现在让学生进行证明也是可行的,但证明过程不太简捷,可根据学生实际情况把握 .

例题 1

本题是角的平分线的性质定理及其逆定理的综合运用. 实际上,通过本题证明了三角形的三条角平分线相交于一点,为今后学习三角形的内心提供基础.

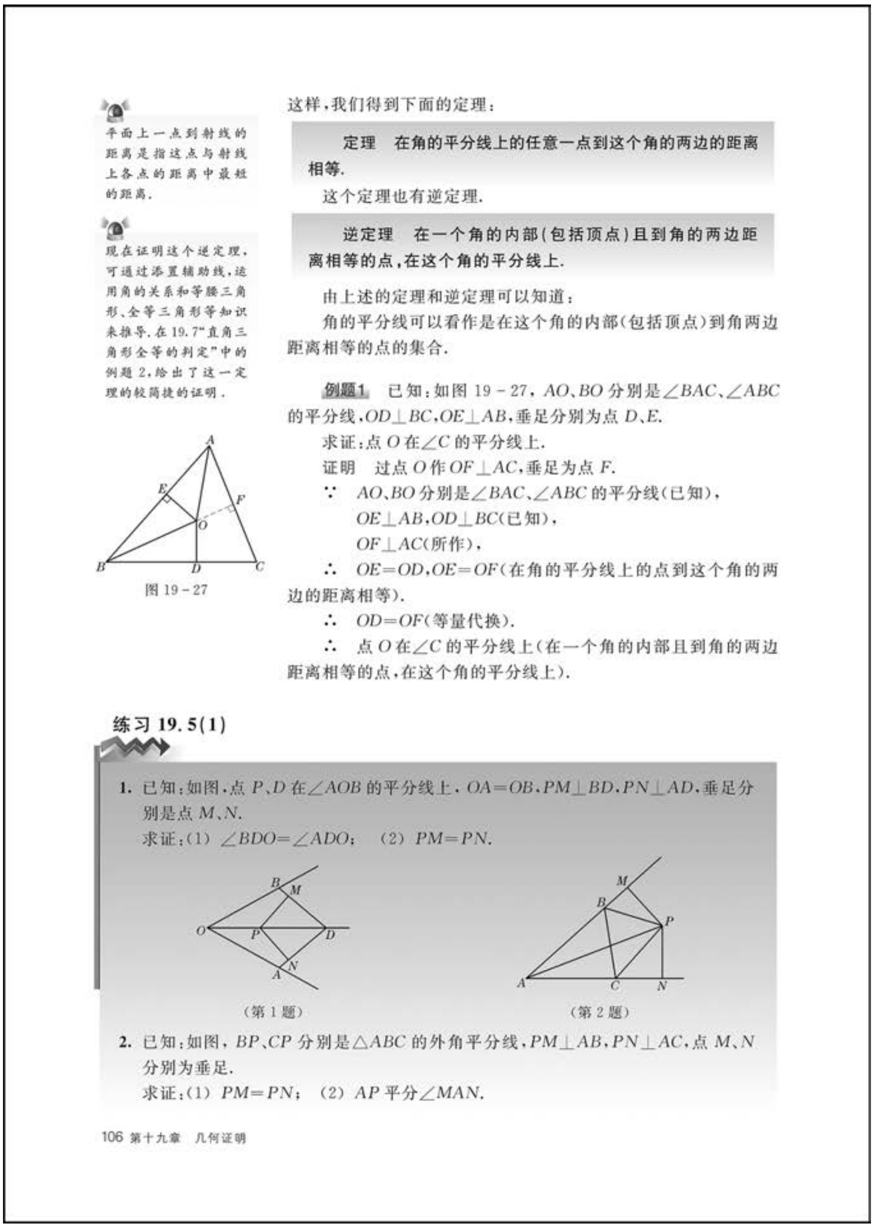
练习 19.5(1)

1. 提示: 先证$\triangle BOD \cong \triangle AOD$(S. A. S),得$\angle BDO=\angle ADO$;再根据角平分线的性质定理,推出 $PM=PN$.

2. 提示: 过点 P 作 $PH\perp BC$,垂足为点 H.

3. $112.5°$.

4. 略.



平面上一点到射线的距离是指这点与射线上各点的距离中最短的距离.

现在证明这个逆定理,可通过添置辅助线,运用角的关系和等腰三角形、全等三角形等知识来推导. 在 19.7"直角三角形全等的判定"中的例题 2,给出了这一定理的较简捷的证明 .

这样,我们得到下面的定理:

定理 在角的平分线上的任意一点到这个角的两边的距离相等.

这个定理也有逆定理.

逆定理 在一个角的内部(包括顶点)且到角的两边距离相等的点,在这个角的平分线上.

由上述的定理和逆定理可以知道:

角的平分线可以看作是在这个角的内部(包括顶点)到角两边距离相等的点的集合.

例题1 已知:如图 19－27, AO、BO 分别是$\angle BAC$、$\angle ABC$ 的平分线,$OD\perp BC$,$OE\perp AB$,垂足分别为点 D、E.

求证:点 O 在$\angle C$ 的平分线上.

证明 过点 O 作 $OF\perp AC$,垂足为点 F.

$\because$ AO、BO 分别是$\angle BAC$、$\angle ABC$ 的平分线(已知),

$OE\perp AB$,$OD\perp BC$(已知),

$OF\perp AC$(所作),

$\therefore$ $OE=OD$,$OE=OF$(在角的平分线上的点到这个角的两边的距离相等).

$\therefore$ $OD=OF$(等量代换).

$\therefore$ 点 O 在$\angle C$ 的平分线上(在一个角的内部且到角的两边距离相等的点,在这个角的平分线上).

图 19－27

练习 19.5(1)

1. 已知:如图,点 P、D 在$\angle AOB$ 的平分线上, $OA=OB$,$PM\perp BD$,$PN\perp AD$,垂足分别是点 M、N.

求证:(1) $\angle BDO=\angle ADO$; (2) $PM=PN$.

(第 1 题)　(第 2 题)

2. 已知:如图, BP、CP 分别是$\triangle ABC$ 的外角平分线,$PM\perp AB$,$PN\perp AC$,点 M、N 分别为垂足.

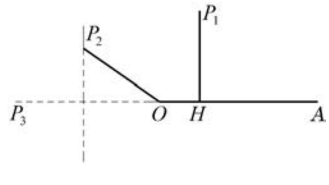
求证:(1) $PM=PN$; (2) AP 平分$\angle MAN$.

106 第十九章 几何证明

【注意事项】

(1) 由于证明角的平分线性质定理的逆定理时,利用直角三角形全等判定定理比较简便,为使学生减少学习障碍,所以安排在以后学习了直角三角形全等判定定理后补证.

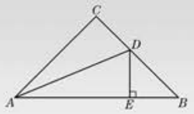
(2) 学习线段的垂直平分线时,学生已经历了构造其逆命题的过程. 通过类比,学生容易构造角的平分线性质定理的逆命题. 在叙述其逆命题时,学生一般不会加限制条件. 可在验证其真假时,引导学生注意角的平分线是在角的内部的一条射线,所以要加上"在角的内部"这个条件.



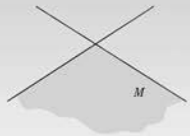
"边款"中已经指出现在对"点到射线的距离"的说明,在教学中不要展开;可针对具体图形和学生实际,简单扼要地讲解. 射线外一点到射线的距离的几何解释是:它是"联结这点与射线上任意一点的所有线段中最短线段的长度."

例如射线 OA 外一点 P 到它的距离 d,其几何表示如下:过点 P 作直线 OA 的垂线,当垂足在射线 OA 上时,$d=PH$;当垂足在射线 OA 的反向延长线上时,$d=PO$. 如图,点 P_1、P_2、P_3 到射线 OA 的距离分别是 $d_1=P_1H$,$d_2=P_2O$,$d_3=P_3O$.

3. 如图,已知△ABC 中,$\angle C=90^\circ$,$AC=BC$,点 D 在 BC 上,$DE\perp AB$,点 E 为垂足,且 $DE=DC$,联结 AD.
求$\angle ADB$ 的度数.



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 如图,要在 M 区建一个大型超级购物中心 G,使它到两条公路的距离相等,离两公路交叉处 1 000 米,这个超级购物中心应建于何处(在图上标出点 G 的位置,比例尺 1∶50 000)?

例题2 已知:如图 19－28,CD 垂直平分线段 AB,E 是 CD 上一点,分别联结 CA、CB、EA、EB.

求证:$\angle CAE=\angle CBE$.

证明 ∵ CD 垂直平分线段 AB(已知),

∴ $EA=EB$,$CA=CB$(线段垂直平分线上的任意一点到这条线段两个端点的距离相等).

在△CAE 与△CBE 中,

$$\begin{cases}CA=CB(\text{已证}),\\EA=EB(\text{已证}),\\CE=CE(\text{公共边}),\end{cases}$$

∴ △CAE≌△CBE(S. S. S).

∴ $\angle CAE=\angle CBE$(全等三角形的对应角相等).

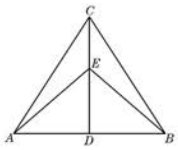


图 19－28

例题3 已知:如图 19－29,$CD\perp AB$,$BE\perp AC$,垂足分别是点 D、E;BE、CD 相交于点 O,且 AO 平分$\angle BAC$.

求证:$OB=OC$.

证明 ∵ AO 平分$\angle BAC$(已知),

$CD\perp AB$,$BE\perp AC$(已知),

∴ $\angle ODB=\angle OEC=90^\circ$(垂直的定义),

且 $OD=OE$(在角的平分线上的点到这个角的两边的距离相等).

在△ODB 与△OEC 中,

$$\begin{cases}\angle ODB=\angle OEC(\text{已证}),\\OD=OE(\text{已证}),\\\angle DOB=\angle EOC(\text{对顶角相等}),\end{cases}$$

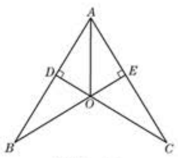


图 19－29

第二节 线段的垂直平分线与角的平分线 107

【本课重点】

让学生加深对线段的垂直平分线、角的平分线的性质定理的理解,并学会对它们的简单运用.

例题 2

本题是线段垂直平分线性质定理的简单运用,并综合全等三角形的判定和性质定理,证明两角相等.

证题后,还可进一步探讨:图中共有几对全等三角形?还有哪些线段相等?

例题 3

本题是角的平分线性质定理的简单运用,并综合运用全等三角形的判定和性质定理,证明两条线段相等.

【注意事项】

学生学习了线段垂直平分线与角的平分线的性质定理后,对其运用可能仍感到陌生,往往还会“舍近求远”,仍利用全等三角形推理.如例题 2 和例题 3,有的学生可能通过两次运用全等三角形来完成证明.在教学中,如果出现这种情况,要及时指出,让学生重视有关定理的直接运用,简化证明过程.

练习 19.5(2)

1. 提示：证 $\triangle ACD \cong \triangle AED$，得 $\angle C=\angle AED$.

再推出 $\angle EAD=\angle B$，得 $DA=DB$，可知点 D 在线段 AB 的垂直平分线上.

又由 $\angle AED=\angle C=90^\circ$，得 $DE\perp AB$，所以 DE 是 AB 的垂直平分线．

2. 40°.

3. 错误. 因为已知中缺少条件：$DE\perp AB$，$DF\perp AC$.

【本课重点】

形成关于轨迹的描述性概念，归纳指出“线段的垂直平分线”“角的平分线”和“圆”等三条基本轨迹，并用于解释简单的轨迹问题.

利用学生已有的生活和知识经验，阐述轨迹的意义.

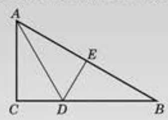
可结合具体事例解释：轨迹上的任意一点都符合“某些条件”(纯粹性)；凡是符合“某些条件”的点都在轨迹上(完备性).

∴ $\triangle ODB\cong\triangle OEC$(A. S. A).

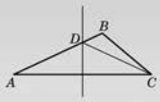
∴ $OB=OC$(全等三角形的对应边相等).

练习 19.5(2)

1. 已知：如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle B=30^\circ$，$AC=AE$，AD 平分 $\angle CAB$，交 BC 于点 D，联结 DE.
   求证：DE 是 AB 的垂直平分线.

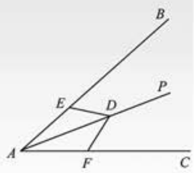


(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=115^\circ$，AC 的垂直平分线与 AB 交于点 D，联结 CD. 如果 $\angle BCD$ 与 $\angle DCA$ 的度数比为 3 : 5，那么 $\angle ACB$ 的度数是多少？
3. 判断下面的证明过程是否正确，并说明理由.
   已知：如图，点 D 是射线 AP 上的一点，点 E、F 分别在 AB、AC 上，且 $DE=DF$.
   求证：AP 平分 $\angle BAC$.
   证明：∵ 点 D 是射线 AP 上一点，且 $DE=DF$(已知)，
   ∴ AP 平分 $\angle BAC$(在一个角的内部且到角两边距离相等的点，在这个角的平分线上).



(第 3 题)

19.6 轨迹

对于抛出的篮球，如果把它在运动过程中经过的每一个位置看作一个点，那么所有这样的点的集合就是它的轨迹.

苹果自由落地，抛出的篮球，悬挂着的钟摆往返摆动等，它们运动的路线给我们以点的轨迹的形象.

我们知道，线段的垂直平分线是和线段两端距离相等的所有的点的集合. 我们有时也把符合某些条件的所有的点的集合叫做**点的轨迹**(trail). 因此，可以这样说：

108 第十九章 几何证明

【教学目标】

(1) 了解轨迹的意义，知道“线段的垂直平分线”“角的平分线”和“圆”三条基本轨迹.

(2) 会用三条基本轨迹解释简单的轨迹问题并用图形语言表示，会用交轨法进行基本的作图.

(3) 通过轨迹的学习，初步感知集合的思想.

和线段两个端点距离相等的点的轨迹是这条线段的垂直平分线.

同样可以说:

在一个角的内部(包括顶点)且到角两边距离相等的点的轨迹是这个角的平分线.

用圆规画圆时,可以看到圆上的每一点到定点(圆心)的距离都等于定长(半径);反过来,到定点的距离等于定长的点都在以这个定点为圆心、定长为半径的圆上.因此,一个圆可以看作是到定点的距离等于定长的所有的点的集合.由此可知:

到定点的距离等于定长的点的轨迹是以这个定点为圆心、定长为半径的圆.

例题1 作图并说明符合下列条件的点的轨迹(不要求证明):

(1) 底边为定长的等腰三角形的顶角顶点的轨迹;

(2) 经过定点 A 且半径为 1 厘米的圆的圆心的轨迹.

分析 (1) 由于等腰三角形的顶角顶点到底边两端点的距离相等,因此顶点必在底边的垂直平分线上;反过来,等腰三角形底边垂直平分线上的点到底边两端点的距离相等.底边的中点虽然在底边的垂直平分线上,但它与底边两端不能构成三角形,所以底边的中点必须除外.

(2) 经过定点 A 且半径为 1 厘米的圆有无数多个,但这些圆的圆心与点 A 的距离均为 1 厘米,因此这些圆的圆心在以点 A 为圆心、1 厘米长为半径的圆上;反过来,以这个圆上的任一点为圆心、1 厘米长为半径作圆,必经过点 A.

解 (1) 设给定的底边为线段 AB,作线段 AB 的垂直平分线 l,l 交 AB 于点 D,则线段 AB 的垂直平分线 l(线段 AB 的中点 D 除外)是以线段 AB 为底边的等腰三角形的顶角顶点的轨迹.如图 19-30 所示.

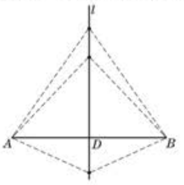


图 19-30

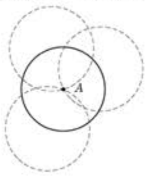


图 19-31

(2) 以定点 A 为圆心、1 厘米的长为半径作圆,则⊙A 是经过

列出“线段的垂直平分线”“角的平分线”和“圆”等三条基本轨迹,并依照轨迹的意义进行简要的说明.

例题 1

这是用基本轨迹解释简单的轨迹问题.

教学时,可先让学生通过作图找出符合条件的几个点,再引导学生通过想象得出这样的点的轨迹.

在分析过程中,必须注意正反两个方面的叙述.如例题 1(1)中,要说明对于这样的等腰三角形,“其顶角顶点必在底边的垂直平分线上”;同时“底边的垂直平分线上的点除底边的中点外都是其顶角顶点”.例题 1(2)类似.

【注意事项】

(1) 轨迹是符合某些条件的所有的点的集合,这样的描述对于初中学生是不容易理解的,其中涉及对“集合”的认识和对“某些条件”的具体化.轨迹必须具备“纯粹性”和“完备性”的要求,这是“集合”的应有之义,但现在很难向学生讲清楚.采用的做法,一是在前面的教学中适当地进行渗透;二是现在对具体轨迹进行解释时有所体现.其用意是既要使学生对轨迹有正确的了解,又使他们可以接受.课本中没有提出轨迹应具备“纯粹性”和“完备性”,只是对具体的轨迹进行浅显的解释,教学中不必补充这方面的内容.

(2) 课本中讲述三条基本轨迹时,没有强调有关的点都“在同一平面内”.现在是讨论平面几何问题,叙述简略些便于记忆,一般应不至于引起误解.但这三个轨迹都是平面内的点的轨迹,讲解时可说明一下.

(3) 例题 1(1)的轨迹“线段 AB 的垂直平分线(线段 AB 的中点 D 除外)”.这里,“线段 AB 的中点 D 除外”是必须指出但又是容易疏忽的.本例有助于学生认识轨迹的意义,但这一要求对初中学生是偏高的.对于类似的问题,如果学生在有关轨迹的表述中没有排除某些特殊点,那么应予以肯定而不要苛求,由教师再把正确的表述告诉学生.

例题 2

此例是让学生学习轨迹的图形表示，把轨迹上的点应符合的几何条件转化为用图形语言来表达. 可让学生先尝试，教师再指导.

对于基础较好的学生，完成题(2)后，还可提出“到 A、B 两点的距离之差为 3 厘米的点的轨迹”，让学生进行讨论.

练习 19.6(1)

(1) 线段 PQ 的垂直平分线；

(2) 以点 A 为圆心、2cm 长为半径的圆；

(3) 平行于直线 AB 且和 AB 距离为 3cm 的两条直线.

【本课重点】

让学生学会用交轨法进行基本的作图.

例题 3

让学生通过交轨法作图的操作实践，获得交轨法作图的体验.

结合具体实践，归纳交轨法.

点 A 且半径为 1 厘米的圆的圆心的轨迹. 如图 19-31 所示.

例题2 说出下列点的轨迹是什么图形，并画出图形.

(1) 到两个定点 A、B 的距离相等的点的轨迹；

(2) 已知两个定点 A、B 的距离为 3 厘米，这时到点 A、B 的距离之和为 3 厘米的点的轨迹.

解 (1) 轨迹是线段 AB 的垂直平分线，如图 19-32 所示.

(2) 轨迹是线段 AB，如图 19-33 所示.

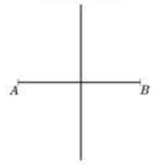


图 19-32

图 19-33

练习 19.6(1)

作图并说明符合下列条件的点的轨迹（不要求证明）.

(1) 经过已知点 P 和点 Q 的圆的圆心的轨迹；

(2) 到点 A 的距离等于 2cm 的点的轨迹；

(3) 与已知直线 AB 的距离为 3cm 的点的轨迹.

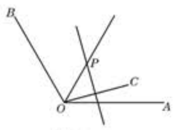


图 19-34

例题3 已知：$\angle AOB$ 和 $\angle AOB$ 内一点 C（如图 19-34）.

求作：$\angle AOB$ 内部一点 P，使 $PC=PO$，且点 P 到 $\angle AOB$ 的两边 OA、OB 的距离相等.

分析 假如点 P 已经作出，由 $PC=PO$，可知点 P 一定在线段 OC 的垂直平分线上. 又由点 P 到 $\angle AOB$ 两边 OA、OB 的距离相等，可知点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上. 因此，点 P 是这两个轨迹的交点.

作法 1. 联结 OC，作线段 OC 的垂直平分线.

2. 作 $\angle AOB$ 的平分线，它与 OC 的垂直平分线相交于点 P.

则 P 就是所求作的点.

在例题 3 中，我们先找出符合一部分作图要求的点的轨迹，如线段 CO 的垂直平分线；再找出符合另一部分作图要求的点的轨迹，如 $\angle AOB$ 的平分线；然后得出这两个轨迹的交点. 利用轨迹相交进行作图的方法叫做**交轨法**.

110 第十九章 几何证明

【注意事项】

(1) 在用交轨法作图的分析过程中，着重介绍交轨思想，即分析所求作的点是在哪两个轨迹上.

(2) 用交轨法作图的工具并不限于直尺和圆规. 这样处理，既降低了作图的难度，又让学生把注意力集中在对交轨思想的理解上.

交轨法是常用的作图方法. 我们在用尺规作三角形、线段的垂直平分线、角的平分线时，都运用了交轨法.

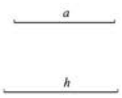


图 19－35

例题4 已知线段 a、h，求作等腰三角形，使其底边长为 a，底边上的高为 h.

已知：线段 a，h（如图 19－35）.

求作：$\triangle ABC$，使 $AB=AC$，且 $BC=a$，高 $AD=h$.

分析 首先画出符合条件的图形草图，根据 $BC=a$，可以确定点 B、C 的位置. 由等腰三角形的"三线合一"的性质，画出 BC 的中垂线 MN，交 BC 于点 D，由 $AD=h$，可知点 A 到点 D 的距离为 h. 这就是说，点 A 必在以定点 D 为圆心、h 为半径的圆上. 因此，这个圆与 DM 的交点就是点 A.

作法 1. 作线段 $BC=a$.

2. 作线段 BC 的垂直平分线 MN，MN 与 BC 相交于点 D.

3. 在 MN 上截取 DA，使 $DA=h$.

4. 分别联结 AB、AC.

则$\triangle ABC$ 就是所画的等腰三角形（如图 19－36）.

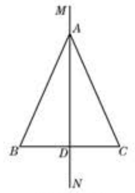
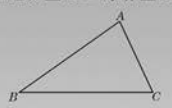


图 19－36

练习 19.6(2)

1. 如图，已知$\triangle ABC$，求作$\triangle A'B'C'$，使$\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$.

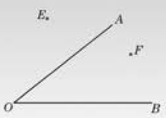


（第 1 题）

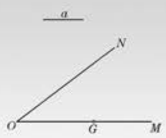
（第 2 题）

2. 如图，要在某天然气管道 MN 上修建一个泵站，分别向 A、B 两镇供气，泵站修在管道的什么地方，可使所用的输气管线最短？

3. 如图，已知$\angle AOB$ 及点 E、F，在$\angle AOB$ 的内部求作点 P，使点 P 到 OA、OB 的距离相等，且 $PE=PF$.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，已知$\angle MON$ 及线段 a，点 G 在 OM 上，求作点 P，使点 P 到 OM、ON 的距离相等，且 $PG=a$.

第二节 线段的垂直平分线与角的平分线 111

例题 4

用交轨法作图的示范，应着重对作法的分析和画图的操作；而关于作法的表述，可让学生先口述再阅读课本，体会书面表达的规范.

练习 19.6(2)

1. 略.

2. 先作点 A 关于直线 MN 的对称点 A'，再联结 $A'B$. 则 $A'B$ 与 MN 的交点就是所求作的点.（或先作点 B 关于直线 MN 的对称点 B'，再联结 AB'. 则 AB' 与 MN 的交点就是所求作的点.）

3. 略.

4. 略（提示：有两种可能）.

【注意事项】

（1）以前的画图题是以学习正确使用作图工具和训练画图语言为主，现在的画图题，主要目的是训练如何用圆规和直尺（无刻度）正确作图，一般限于画简单的几何图形. 这时的画图（作图），需要通过理性的分析，采用适当的方法，但对作图工具的限制可放宽. 交轨法是一种常用的基本方法，教师要指导学生逐步领会.

（2）本节中的交轨法作图是围绕三条基本轨迹展开的，在教学中不要增加新的轨迹，以免增加难度.

（3）学生在用交轨法作图时，不要求写作法，但要保留画图过程的痕迹，并指出结论.

关于直角三角形全等的判定，是在学生已经掌握了判定三角形全等的基础上进行的.这是基于对直角三角形进行系统研究的需要，也是为了突出判定两个直角三角形全等有特殊的方法.

直角三角形是特殊的三角形，关于一般三角形全等的判定方法，对直角三角形都适用.而对于判定一般三角形全等不能使用的“边边角”方法，对于直角三角形是否正确？这样提出问题和思考问题，是正确把握一般与特殊之间关系的体现，要展现这一过程.

关于证明思路的分析，一是要抓住一般运用三角形全等的判定方法所需要的条件；二是联想“边边边”判定定理的证明.

Zhijiaosanjiaoxing

第三节　直角三角形

19.7　直角三角形全等的判定

直角三角形是特殊的三角形，关于一般三角形全等的判定方法，对直角三角形都适用.而对一般三角形而言，利用“边、边、角”不能判定两个三角形全等，它能否成为直角三角形全等的判定定理呢？

在两个直角三角形中，“边、边、角”对应相等的情况有几种？

两个直角三角形中，如果“边、边、角”对应相等，那么其中对应相等的角一定是直角，因此对应相等的边只能分别是斜边和一条直角边.我们只要研究：斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形是否全等？

如图 19－37，在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$中，已知$\angle C=\angle C'=90°$，$AC=A'C'$，$AB=A'B'$，那么 Rt$\triangle ABC$ 与 Rt$\triangle A'B'C'$全等吗？下面我们来证明这个结论是正确的.

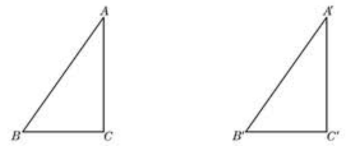


图 19－37

分析：如果能从这些已知条件中得到一个锐角对应相等，那么就可以肯定这两个三角形全等.为此，考虑把这两个直角三角形拼成一个等腰三角形.

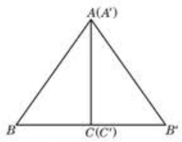


图 19－38

证明：如图 19－38 所示，把$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$拼在一起.由于 $AC=A'C'$，因此可使 AC 和 $A'C'$重合；由于$\angle ACB=\angle A'C'B'=90°$，因此点 B、C、B'必在一条直线上.于是得到$\triangle ABB'$.

$\because$　$AB=A'B'$，

$\therefore$　$\angle B=\angle B'$（等边对等角）.

在$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$中，

$$\begin{cases}\angle ACB=\angle A'C'B'\text{（已知）},\\ \angle B=\angle B'\text{（已证）},\\ AB=A'B'\text{（已知）},\end{cases}$$

所以 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$（A.A.S）.

112 第十九章　几何证明

【教学目标】

（1）经历探索直角三角形全等的特殊判定方法的过程，体会演绎思想和化归思想.

（2）掌握直角三角形全等的判定定理，会用“H.L”判定直角三角形全等.

于是我们得到直角三角形全等的判定定理：

定理　如果两个直角三角形的斜边和一条直角边对应相等，那么这两个直角三角形全等(简记为 H.L).

例题1　已知：如图 19－39，在 $\triangle ABC$ 中，$BD \perp AC$，$CE \perp AB$，垂足分别为点 D、E，$BD=CE$.

求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

证明　∵　$CE \perp AB$，$BD \perp AC$(已知)，

∴　$\triangle EBC$ 和 $\triangle DCB$ 都是直角三角形.

在 $\mathrm{Rt}\triangle EBC$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle DCB$ 中，

$\begin{cases} CE=BD(\text{已知}), \\ BC=CB(\text{公共边}), \end{cases}$

∴　$\mathrm{Rt}\triangle EBC \cong \mathrm{Rt}\triangle DCB$(H.L).

得 $\angle EBC=\angle DCB$(全等三角形的对应角相等).

∴　$AB=AC$(等角对等边)，

即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

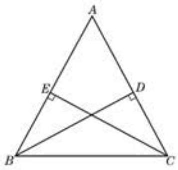


图 19－39

前面在 19.5 节学习角的平分线性质定理的逆定理时，由于没有学习直角三角形全等的判定定理，因此没有对逆定理进行证明，现补证如下.

例题2　求证：在一个角的内部(包括顶点)且到角的两边距离相等的点，在这个角的平分线上.

已知：如图 19－40，$QD \perp OA$，$QE \perp OB$，垂足分别为点 D、E，$QD=QE$.

求证：点 Q 在 $\angle AOB$ 的平分线上.

证明　作射线 OQ.

∵　$QD \perp OA$，$QE \perp OB$(已知)，

∴　$\angle QDO=\angle QEO=90^\circ$(垂直的定义).

在 $\mathrm{Rt}\triangle QDO$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle QEO$ 中，

$\begin{cases} QD=QE(\text{已知}), \\ OQ=OQ(\text{公共边}), \end{cases}$

∴　$\mathrm{Rt}\triangle QDO \cong \mathrm{Rt}\triangle QEO$(H.L).

得　$\angle 1=\angle 2$(全等三角形的对应角相等)，

即 OQ 是 $\angle AOB$ 的平分线(角的平分线的定义).

∴　点 Q 在 $\angle AOB$ 的平分线上.

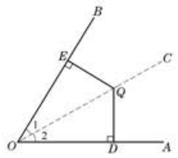


图 19－40

第三节　直角三角形 113

例题 1

此例是直角三角形全等的判定定理的运用.学生学习了直角三角形全等的判定定理后，对其运用可能仍感陌生，往往还会“舍近求远”，套用全等三角形模式.比如：学生可以通过证明 $\triangle ADB \cong \triangle AEC$(A.A.S)，也能推得 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.对此，教师应鼓励学生用多种证明方法来证明，并进行比较.

例题 2

本题是补证角的平分线性质定理的逆定理.在形式上，我们采用证明命题的形式，让学生再次体验证明命题的基本步骤.

【注意事项】

(1) 要引导学生思考本节开始提出的问题.学生已经知道，两边及其中一边的对角对应相等的两个三角形不一定全等，但对于两个直角三角形，如果“边边角”对应相等，那么其中对应相等的角一定是直角，因此对应相等的边只能分别是斜边和一条直角边(由于直角边有两条，因此有两种情况)；而从已知条件中得出一个锐角对应相等，是证明全等的关键.在证明前的分析中，可引导学生思考通过图形的组合来解决，前面在证明“三条边对应相等的两个三角形全等”时用到了这种方法，为学生提供了思考的基础；同时也告诉学生，有些证明方法是可以互相借鉴的.

(2) 关于直角三角形全等的“H.L”判定定理，要强调其特殊性.在证明过程中使用这一判定定理时，一定要指出直角三角形这个前提条件，使学生体会到这个判定定理的特殊性和局限性.另外，可适当与一般三角形全等的判定定理的运用相结合，有利于全等三角形知识的全面掌握.

练习 19.7

1. 提示：由 AD 平分 $\angle BAC$ 和 $DE\perp AB$、$DF\perp AC$，得 $DE=DF$，且有 $\angle BED=\angle CFD=90^\circ$. 再利用“H. L”证 $\mathrm{Rt}\triangle DEB$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle DFC$ 全等，得 $EB=FC$.

2. 提示：先指出 $\angle ECB=\angle FDA=90^\circ$，再利用“H. L”证 $\mathrm{Rt}\triangle ECB$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle FDA$ 全等，得 $BC=AD$，推出 $BD=AC$.

3. 提示：利用“H. L”证 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle AED$ 全等，得 $BC=DE$.

4. 提示：由 FE 垂直平分 AB，得 $FA=FB$；再利用“H. L”证 $\mathrm{Rt}\triangle ADF\cong\mathrm{Rt}\triangle FCB$，得 $AD=FC$.

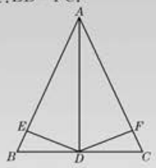
【本课重点】

让学生掌握直角三角形的两个锐角互余和直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半这两个性质定理.

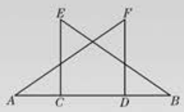
推导直角三角形的性质定理 1.

练习 19.7

1. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，且 $BD=CD$，DE、DF 分别垂直于 AB、AC，垂足分别为点 E、F.
求证：$EB=FC$.

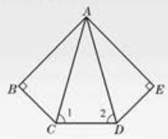


（第 1 题）

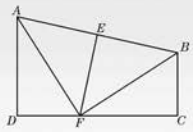


（第 2 题）

2. 已知：如图，$EC\perp AB$，$FD\perp AB$，垂足分别为点 C、D，$AF=BE$，$FD=EC$.
求证：$AC=BD$.
3. 已知：如图，$AB\perp BC$，$AE\perp ED$，垂足分别为点 B、E，$AB=AE$，$\angle 1=\angle 2$.
求证：$BC=DE$.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 已知：如图，$AD\perp CD$，$BC\perp CD$，D、C 分别为垂足，AB 的垂直平分线 EF 交 AB 于点 E，交 CD 于点 F，$BC=DF$.
求证：$AD=FC$.

19.8 直角三角形的性质

对直角三角形的性质的研究，可从考察它的角、边以及特殊线段等之间所构成的各种关系的特征着手.

如图 19－41，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$.

根据三角形内角和等于 180°，可知 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$，所以 $\angle A+\angle B=90^\circ$.

于是有下面的定理：

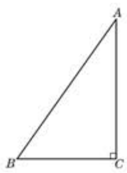


图 19－41

114 第十九章 几何证明

【教学目标】

（1）经历探索直角三角形性质的过程，体会研究图形性质的方法.

（2）掌握直角三角形的性质定理和特殊直角三角形的性质定理，能运用直角三角形的有关性质解决简单的数学问题.

定理 1　直角三角形的两个锐角互余.

例题1　已知：如图 19 - 42，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，CD是斜边AB上的高.

求证：$\angle ACD=\angle B$.

证明　$\because$　$\angle ACB=90^\circ$(已知)，

$\therefore$　$\angle A+\angle B=90^\circ$(直角三角形的两个锐角互余).

$\because$　CD是斜边AB上的高（已知），

即　$CD\perp AB$，

$\therefore$　$\angle CDA=90^\circ$(垂直的定义).

$\therefore$　$\angle A+\angle ACD=90^\circ$(直角三角形的两个锐角互余).

$\therefore$　$\angle ACD=\angle B$(同角的余角相等).

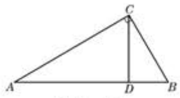


图 19 - 42

当$\angle B=45^\circ$时，图 19 - 42 中的各锐角都是45°；线段CD也是斜边AB上的中线，而且$CD=AD=BD$，即$AB=2CD$，或$CD=\frac{1}{2}AB$.

想一想

在例题 1 中，如果$\angle B=45^\circ$，那么图 19 - 42 中的各锐角是多少度？各线段的长度之间有哪些等量关系？

问题1

直角三角形斜边上的中线长一定等于斜边长的一半吗？

下面，我们来证明上述等量关系是正确的.

已知：如图 19 - 43，在 Rt$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，CD是斜边AB上的中线.

求证：$CD=\frac{1}{2}AB$.

分析：要证明$CD=\frac{1}{2}AB$，即$AB=2CD$，可延长CD到点C'，使$DC'=CD$，此时$CC'=2CD$，于是只要证明$CC'=AB$. 为此，联结AC'，只要证得$\triangle C'AC\cong\triangle BCA$，便可推出$CC'=AB$.

证明：延长CD到点C'，使$DC'=CD$，联结$C'A$（如图 19 - 43）.

在$\triangle C'DA$与$\triangle CDB$中，

$$\begin{cases}AD=BD(\text{已知}),\\ \angle C'DA=\angle CDB(\text{对顶角相等}),\\ DC'=DC(\text{所作}),\end{cases}$$

$\therefore$　$\triangle C'DA\cong\triangle CDB$(S. A. S).

得　$C'A=CB$(全等三角形的对应边相等)；

$\angle C'AD=\angle B$(全等三角形的对应角相等).

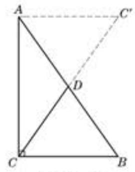


图 19 - 43

第三节　直角三角形 115

例题 1

本题是直角三角形性质定理 1 的简单运用. 这个图形是常见的基本图形，图中有三个直角三角形. 搞清图中大小相等的每一对锐角，对今后解决这类图形的相似问题大有帮助.

想一想

引导学生探讨含 45°锐角的直角三角形斜边上中线与斜边的长度关系，引出问题 1. 让学生逐步体会从特殊到一般的研究问题的策略.

问题 1

引导学生研究直角三角形斜边上中线长与斜边长的等量关系.

由特殊情况猜想一般结论，再进行证明.

对证明思路的分析，要注意调动学生已有的知识经验. 抓住中线特点、运用中心对称思想，提出添置辅助线的方法. “证明举例”中的例题 11，为形成本问题的证明思路提供了思考基础.

【注意事项】

(1) “直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”的性质，是推导特殊直角三角形性质的出发点，因此它是本节内容的重点.

(2) 提出“直角三角形斜边上的中线长等于斜边长的一半”的命题，是通过对特殊直角三角形斜边上的中线与斜边的等量关系的理性分析，形成的猜想；如何证明，尤其是如何添置辅助线，可能是学生学习的难点. 在教学中，要更多地发挥教师的主导作用.

课本中对这个定理的证明，采用构造中心对称图形的方式，通过两次三角形全等来完成. 虽然证明的步骤较多，但是，证明的思路却自然而清晰. 这个定理还有其他的证法，如以前的教材中曾采用“同一法”. 由于学生现在还缺少运用同一法的认知基础，所以课本中没有采用同一法来证明这个定理.

在严格论证的基础上，形成了直角三角形性质定理 2.

这种添辅助线的方法，是从要证线段之间的倍半关系进行考虑得到的. 或者说，从点 D 是 AB 的中点，考虑将 $\triangle CDB$ 绕点 D 旋转 $180°$.

∵ $\angle BCA=90°$(已知)，

∴ $\angle CAB+\angle B=90°$(直角三角形的两个锐角互余).

得 $\angle CAB+\angle C'AD=90°$(等量代换)，

即 $\angle C'AC=90°$.

∴ $\angle C'AC=\angle BCA$.

在 $\triangle C'AC$ 与 $\triangle BCA$ 中，

$$\begin{cases} C'A=BC\text{(已证)}, \\ \angle C'AC=\angle BCA\text{(已证)}, \\ AC=CA\text{(公共边)}, \end{cases}$$

∴ $\triangle C'AC \cong \triangle BCA$(S. A. S).

得 $CC'=AB$(全等三角形的对应边相等).

又∵ $CD=\frac{1}{2}CC'$(所作)，

∴ $CD=\frac{1}{2}AB$(等量代换).

由此又得到一个定理：

定理 2　直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

例题 2

本题主要是直角三角形性质定理 2 的运用.

教学时，要引导学生分析思路，并注意表达的规范性.

完成证明后，可让学生归纳图中共有几对全等三角形.

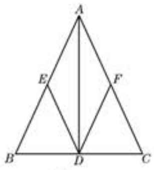


图 19 - 44

例题2　已知：如图 19 - 44，在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$，E、F 分别是 AB、AC 的中点，且 $DE=DF$.

求证：$AB=AC$.

证明　∵ $AD\perp BC$(已知)，

∴ $\angle ADB=\angle ADC=90°$(垂直的定义).

又∵ E、F 分别是 AB、AC 的中点(已知)，

∴ $DE=\frac{1}{2}AB$，$DF=\frac{1}{2}AC$(直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半)，

即 $AB=2DE$，$AC=2DF$.

∵ $DE=DF$(已知)，

∴ $AB=AC$(等式性质).

练习 19.8(1)

1. C.

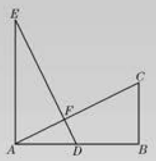
练习 19.8(1)

1. 如图，已知 D 为 AB 的中点，$EA\perp AB$，$CB\perp AB$，$AE=AB=2BC$，那么下列结论中不正确的是　　(　　)

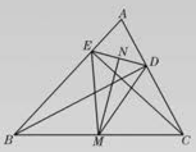
(A) $DE=AC$；　　(B) $\angle E+\angle C=90°$；

(C) $\angle CAB=30°$；　　(D) $\angle EAF=\angle ADE$.

116 第十九章　几何证明



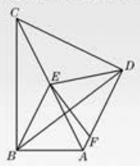
（第 1 题）



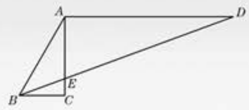
（第 2 题）

2. 已知：如图，BD、CE 分别是△ABC 的高，M、N 分别是 BC、DE 的中点，分别联结 ME、MD。
求证：$MN \perp ED$.

3. 如图，△ABC 中，$\angle ABC=90°$，E 为 AC 的中点. 在图中作点 D，使 $AD \parallel BE$，且 $\angle ADC=90°$；在 AD 上取点 F，使 $FD=BE$；分别联结 EF、ED、BD. 试判断 EF 与 BD 之间具有怎样的位置关系.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 已知：如图，在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，$AD \parallel BC$，$\angle CBE=\frac{1}{2}\angle ABE$.
求证：$ED=2AB$.

想一想

上述定理 2 是所有直角三角形共有的性质. 在特殊的直角三角形中，能否由这个定理得到一些特殊的性质？

根据直角三角形的性质定理 2 可知，直角三角形斜边上的中线把这个直角三角形分成两个等腰三角形.

如图 19－45，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，CD 是斜边 AB 上的中线，那么△DBC、△DAC 都是等腰三角形.

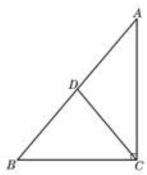


图 19－45

问题2

图 19－45 中，如果 $\angle A=30°$，可知 $\angle B=60°$，这时△DBC 是什么样的特殊三角形？从中能否发现边 BC 与 AB 之间的等量关系？

第三节　直角三角形 117

2. 提示：利用直角三角形性质定理 2 推出 $MD=ME$；再由等腰三角形的三线合一，得 $MN \perp ED$.

3. 提示：利用直角三角形性质定理 2，推出 $EB=ED$，可知 $\angle EBD = \angle EDB$. 再证 $\angle EDB=\angle BDF$，$FD=ED$，由等腰三角形的三线合一，得 $DB \perp EF$.

4. 提示：取 ED 的中点 F，联结 AF. 再证 $AB=AF$.

【本课重点】

导出直角三角形性质定理 2 的两个推论，并进行初步的运用.

想一想

引导学生研究特殊的直角三角形的特殊性质.

让学生注意到，直角三角形斜边上的中线将直角三角形分成两个等腰三角形. 既为进一步的研究进行导向，又为解决问题提供了一种思路.

问题 2

导入对于有一个角等于 30°的直角三角形的研究，关注 30°的角所对的直角边与斜边之间的等量关系.

注重分析斜边上的中线将 Rt$\triangle ABC$ 分成的两个等腰三角形中，$\triangle CDB$ 是等边三角形.

通过证明概括推论 1.

引导学生思考推论 1 的逆命题，再进行论证，得到推论 2.

例题 3

本题是推论 1 的运用.

由已知条件，可知 $\triangle ADC$ 是直角三角形，$\angle C=\angle B=30°$，得 $AD=\frac{1}{2}CD$. 于是，只要证明 $BD=AD$.

可让学生进行分析.

已知：在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$.

求证：$BC=\frac{1}{2}AB$.

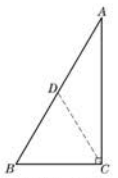


图 19－46

证明：作斜边 AB 上的中线 CD（如图 19－46）.

$\because$ $\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$（已知），

$\therefore$ $\angle B=60°$（直角三角形的两个锐角互余）.

$\because$ CD 是斜边 AB 上的中线（已知），

$\therefore$ $CD=AD=BD=\frac{1}{2}AB$（直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半）.

$\therefore$ $\triangle CDB$ 是等边三角形（有一个内角是 60° 的等腰三角形是等边三角形）.

得 $BC=BD$（等边三角形的每条边都相等）.

$\therefore$ $BC=\frac{1}{2}AB$（等量代换）.

于是得到直角三角形性质定理 2 的推论：

从定理直接推出来的定理叫做推论.

推论 1　在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半.

反过来，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，CD 是 AB 上的中线，如果 $BC=\frac{1}{2}AB$，那么 $\triangle BDC$ 是等边三角形，得 $\angle B=60°$，从而 $\angle A=30°$.

于是得到定理 2 的另一个推论：

推论 2　在直角三角形中，如果一条直角边等于斜边的一半，那么这条直角边所对的角等于 30°.

例题3　已知：如图 19－47，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle B=30°$，$AD\perp AC$.

求证：$BD=\frac{1}{2}CD$.

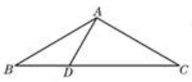


图 19－47

证明　$\because$ $AD\perp AC$（已知），

$\therefore$ $\angle DAC=90°$（垂直的定义）.

$\because$ $AB=AC$（已知），

$\therefore$ $\angle B=\angle C$（等边对等角）.

$\because$ $\angle B=30°$（已知），

$\therefore$ $\angle C=30°$（等量代换）.

118 第十九章　几何证明

【注意事项】

“推论”是从某一定理直接推出的定理. 本课中出现了定理 2 的“推论 1”和“推论 2”，可适当解说“推论”的含义.

得 $AD=\frac{1}{2}CD$（在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半）.

又∵ $\angle BAC+\angle B+\angle C=180^\circ$（三角形内角和等于 180°），

即 $\angle BAD+\angle DAC+\angle B+\angle C=180^\circ$，

∴ $\angle BAD=180^\circ-90^\circ-30^\circ-30^\circ=30^\circ$.

得 $\angle B=\angle BAD$（等量代换）.

∴ $AD=BD$（等角对等边）.

∴ $BD=\frac{1}{2}CD$（等量代换）.

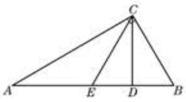


图 19－48

例题4 已知：如图 19－48，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$，CE 是斜边 AB 上的中线，且 $ED=BD$.

求证：$\angle A=30^\circ$.

证明 ∵ $\angle ACB=90^\circ$（已知），CE 是斜边 AB 上的中线（已知），

∴ $CE=\frac{1}{2}AB$（直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半）.

∵ $CD\perp AB$，$ED=BD$（已知），

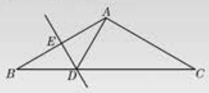
∴ $CE=CB$（线段垂直平分线上的任意一点到这条线段两个端点的距离相等）.

得 $CB=\frac{1}{2}AB$（等量代换）.

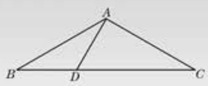
∴ $\angle A=30^\circ$（在直角三角形中，如果一条直角边等于斜边的一半，那么这条直角边所对的角等于 30°）.

练习 19.8(2)

1. 已知：如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=120^\circ$，$AB=AC$，AB 边上的垂直平分线交 BC 于点 D，交 AB 于点 E，联结 AD.
   求证：$CD=2BD$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 D 在 BC 边上，$\angle DAC=90^\circ$，$AD=\frac{1}{2}CD$. 求$\angle BAC$ 的度数.

例题 4

本题是直角三角形的性质定理 2 及其推论 2 的运用.

可在学生讨论、交流的基础上，形成证明思路.

完成证明后，可让学生看一看，图中点 D 是线段 AB 的几等分点？与 CE 相等的线段有哪些？

练习 19.8(2)

1. 提示：先推出 $\angle B=\angle C=30^\circ$. 然后证 $\angle DAC=90^\circ$，得到 $CD=2AD$. 再推出 $CD=2BD$.

2. $\angle BAC=120^\circ$.

3. $BM=12$.

4. $PD=2.5$.

【本课重点】

使学生进一步巩固直角三角形的性质，会运用直角三角形的性质解决数学问题.

例题 5

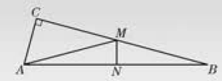
本题是运用直角三角形的性质进行证明.

证题后，教师可将已知条件“点 F 是 AB 的中点”与证明结论“$EF \parallel AC$”互换，让学生尝试证明. 引导学生深入认识图形，抓住本质，探究学习.

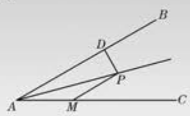
例题 6

本例是例题 4 的变式，既是帮助学生巩固所学的直角三角形的性质，也是对学生进行探究性学习的引导.

3. 如图，已知在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle B=15°$，AB 的垂直平分线分别与 AB、BC 相交于点 N、M，联结 AM，$AC=6$，求 BM 的长.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，已知 $\angle BAC=30°$，AP 平分 $\angle BAC$，$PM \parallel AB$，$PM=5$，$PD \perp AB$，求 PD 的长.

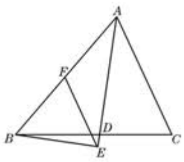


图 19－49

例题5 已知：如图 19－49，在 $\triangle ABC$ 中，AD 平分 $\angle BAC$，$BE \perp AD$，BE 交 AD 的延长线于点 E，点 F 是 AB 的中点.

求证：$EF \parallel AC$.

证明 ∵ AD 平分 $\angle BAC$（已知），

∴ $\angle FAE=\angle DAC$（角平分线的定义）.

∵ $BE \perp AD$（已知），

∴ $\angle AEB=90°$（垂直的定义）.

又∵ EF 是 AB 上的中线（已知），

∴ $EF=\frac{1}{2}AB$（直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半），

即 $EF=AF$.

得 $\angle FEA=\angle FAE$（等边对等角）.

∴ $\angle FEA=\angle DAC$（等量代换）.

∴ $FE \parallel AC$（内错角相等，两直线平行）.

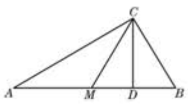


图 19－50

例题6 已知：如图 19－50，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=30°$，$\angle ACB=90°$，M、D 分别为 AB、MB 的中点.

求证：$CD \perp AB$.

证明 ∵ $\angle A=30°$，$\angle ACB=90°$（已知），

∴ $BC=\frac{1}{2}AB$（在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半）.

又∵ M 是 AB 的中点（已知），

∴ $CM=\frac{1}{2}AB$（直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半）.

∴ $CM=BC$（等量代换）.

又∵ D 是 MB 的中点（已知），

∴ $CD \perp AB$（等腰三角形的三线合一）.

120 第十九章 几何证明

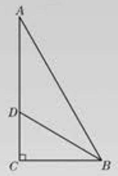
【注意事项】

在巩固直角三角形性质的例题教学中，要重视复习和巩固前面所学的知识，同时注意例题的变式训练，一题多变，一题多用，提高例题教学的功效.

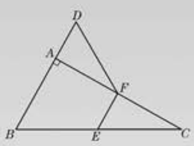
练习 19.8(3)

1. 已知：如图，在△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，D 为直角边 AC 上的一个点，BD 平分 $\angle ABC$，$AD=2CD$.

求证：(1) $\angle A=30^\circ$；(2) 点 D 在线段 AB 的垂直平分线上.



（第 1 题）



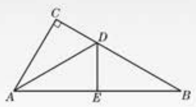
（第 2 题）

2. 已知：如图，在△ABC 中，$\angle BAC=90^\circ$，$\angle C=30^\circ$，EF 垂直平分 AC，点 D 在 BA 的延长线上，$AD=\frac{1}{2}EC$.

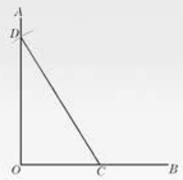
求证：(1) $\triangle DAF\cong\triangle EFC$；(2) $DF=BE$.

3. 已知：如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，AD 平分 $\angle CAB$，交 BC 于点 D，DE 垂直平分 AB，点 E 为垂足.

求证：(1) $\angle B=30^\circ$；(2) $BD=2CD$.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 已知：如图，小明先画 $\angle AOB=90^\circ$，然后在射线 OB 上任取一点 C（与点 O 不重合），以点 C 为圆心，两倍 OC 长为半径画弧，交射线 OA 于点 D，则 $\angle ODC$ 等于 30°. 你认为小明的画法正确吗？为什么？

第三节　直角三角形 121

练习 19.8(3)

1. 提示：过点 D 作 $DE\perp AB$，垂足为点 E.

2. 略.

3. 提示：

(1) 先证 $\angle DAE=\angle B$，$\angle CAB=2\angle DAE$；再由三角形内角和为 180°，得 $\angle DAE=30^\circ$，于是 $\angle B=30^\circ$.

(2) 推出 $BD=2DE$，$DC=DE$，得 $BD=2DC$.

4. 正确.

由题意可知 $OC=\frac{1}{2}CD$，又 $\angle O=90^\circ$，根据推论 2 得 $\angle ODC=30^\circ$.

【本课重点】

导出和证明勾股定理，进行勾股定理的初步运用.

问题 1

这个问题指向直角三角形中斜边与一条直角边之间的大小关系，使学生对“斜边大于直角边”有定性的认识.

问题 2

这个问题指向直角三角形中斜边与两条直角边之间的等量关系，引导学生从数量方面探索斜边与直角边的关系.

图 19 - 52 就是七年级第二学期课本第 2 页的图 12 - 1. 通过将两个边长为 1 的正方形拼成一个面积为 2 的正方形，调动学生已有的知识经验，引导学生从面积关系探讨边长关系，从特殊到一般进行分析.

将两个小正方形的边长由 1 改为 m，引向对一般的等腰直角三角形的探究.

19.9 勾股定理

我们来进一步研究直角三角形的边所具有的性质.

问题1

在直角三角形中，直角边与斜边之间有怎样的大小关系？为什么？

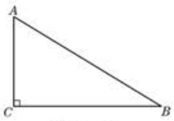


图 19 - 51

如图 19 - 51，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$. 如果把直角边 AC 看作点 A 到直线 BC 的垂线段，把斜边 AB 看作点 A 到直线 BC 的斜线段，那么根据“垂线段最短”的性质，可知 $AB>AC$. 类似地，可知 $AB>BC$. 因此得到定理：

定理 在直角三角形中，斜边大于直角边.

问题2

在直角三角形中，斜边和两条直角边之间有没有某种等量关系呢？

在七年级第二学期，我们进行过如图 19 - 52 的操作：把边长为 1 的两个正方形分别沿着它们的一条对角线剪开，再把所得的四个直角三角形拼成一个面积为 2 的正方形.

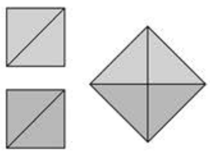


图 19 - 52

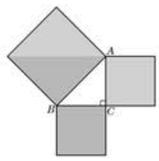


图 19 - 53

如果图 19 - 52 中的两个小正方形的边长都为 m（m 为正实数），那么由它们所分成的四个直角三角形拼成一个大正方形，其面积就是 $2m^2$.

再仔细观察、分析，可知图 19 - 52 中四个形状大小一样的直角三角形是等腰直角三角形；这个等腰直角三角形的直角边是小正方形的边，斜边是所拼成的大正方形的边.

122 第十九章 几何证明

【教学目标】

（1）理解用面积割补方法证明勾股定理的思路和勾股定理逆定理的推导方法；了解勾股定理的重要性以及它在人类重大科技发现中的地位，感受人类文明，体会理性精神.

（2）初步掌握勾股定理及其逆定理，能用勾股定理及其逆定理解决基本的有关证明或计算问题 . 了解勾股数组的概念，熟悉最基本的勾股数组.

（3）在勾股定理及其逆定理的学习中，获得“探索—研究—运用—反思”的过程经历，增强学习数学的兴趣和探究学习的意识，激发科学研究的内部动机.

问题3

已知一个等腰直角三角形 ABC，AB 是斜边．

(1) 如图 19－53，分别以这个三角形的各边为边向外部作正方形，这样所作的三个正方形的面积之间有怎样的等量关系？

(2) 在一个等腰直角三角形中，两条直角边与一条斜边在数量上有怎样的等量关系？

联系对于图 19－52 讨论所得的结论，可知分别以 AC、BC 为边的两个正方形的面积之和等于以 AB 为边的那个正方形的面积. 一般来说，

等腰直角三角形中，以两条直角边为边的两个正方形面积的和等于以斜边为边的正方形的面积．

以“形”来描述.

或者说，

等腰直角三角形中，两条直角边的平方和等于斜边的平方．

以“数”来描述.

问题4

上述等腰直角三角形的这一性质，是否也是两直角边不相等的直角三角形所具有的性质？

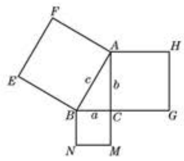


图 19－54

如图 19－54，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，$a\neq b$，四边形 $ABEF$、$BCMN$、$ACGH$ 都是正方形．我们来探讨能否推出：

正方形 $BCMN$ 与正方形 $ACGH$ 的面积和等于正方形 $ABEF$ 的面积．

以“形”来描述.

或者说能否推出：

$$a^2+b^2=c^2.$$

以“数”来描述.

由图 19－52 可知，用四个全等的等腰直角三角形正好拼成一个以其斜边为边的大正方形．

现在我们尝试，如果直角三角形中 $a\neq b$(不妨设 $b>a$)，那么用四个这样的全等直角三角形能否拼出一个以其斜边为边的正方形？如能拼出，这时所得的大正方形内部会留下“空隙”吗？

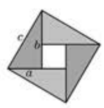


图 19－55

当 $b>a$ 时，类似图 19－52，将这四个全等的直角三角形拼成如图 19－55 的四边形．可知，这个四边形的四条边都等于直角三角形的斜边；而它的每个内角都是由直角三角形中互余的两个锐角组成，所以四个内角相等且都等于直角．因此，所拼成的这个四边形是边长等于 c 的正方形．但是，这个大正方形的内部出现“空隙”.

小学数学告诉我们，四条边相等、四个角都是直角的四边形是正方形.

第三节　直角三角形 123

问题 3

让学生观察图 19－53 的构图，初步体会面积割补方法，并从中归纳发现等腰直角三角形中“两直角边的平方和等于斜边的平方”的数学事实.

这里要从“形”到“数”，抓住面积关系进行引导.

问题 4

由等腰直角三角形推向一般直角三角形，再次进行一般化，提出猜想.

从图 19－53 到图 19－54，既是图形从特殊到一般的变化，又是问题 4 中提出的命题的直观呈现. 同时，引导学生从分析三个正方形的面积关系对怎样证明猜想的正确性进行探讨.

图 19－55 的拼法是图 19－52 拼法的自然延伸，充分运用了学生已有的知识和经验；推导结论时，关键在于确定大正方形内出现的“空隙”是一个边长为 $b-a$ 的正方形. 这种证法，就是赵爽的证法（见本章“阅读材料二”中有关叙述）.

【注意事项】

(1) 勾股定理在数学发展史上有重要的地位和作用，是定量几何的基础定理. 勾股定理中有丰富的数学文化，对学生的发展，尤其是科技意识的形成，有积极的影响. 对于这一点，教师应有足够的认识，并有意识地将本节课的内容作为给学生发展具有“重大影响”的优质教育资源.

(2) 在勾股定理的教学过程中，要注意与七年级第二学期关于“无理数$\sqrt{2}$”的引入相联系，引发学生研究勾股定理的兴趣；注意课本中 4 个问题之间的内在联系，帮助学生形成研究的思路.

(3) 课本中关于勾股定理的证明思路，是在本节提出的“问题”引导下逐步形成的. 在教学时，要注意把握图 19－52→图 19－53→图 19－54→图 19－55 的变化过程，可利用多媒体或实物模型向学生演示，加强直观性和动态感. 采用这一证法是基于问题 2 讨论的背景，也可另外适当选用本章“阅读材料二”中介绍的其他方法 .

从图 19－54 到图 19－56，可通过将正方形 $ABEF$ 沿着 AB 翻转的演示进行引导，而要让学生理解面积割补的思路，需借助于图 19－55. 这里应利用多媒体或实物模型，结合图形适当讲解. “边款”中指出了图 19－56 所反映的图形运动过程及其具有的方法论意义.

勾股定理的证明方法很多，可鼓励学生自行查找有关资料. 同时，让学生增加对数学文化的了解，获得思想情感方面的教育.

在图 19－55 中，当 a 与 b 越来越接近时，$a-b$的差越来越接近于 0，大正方形内部出现的空隙的面积越来越接近于 0. 因此，图 19－52 的拼法可以看成是图 19－55 拼法的一个特例.

如图 19－54 所示，$a^2+b^2=c^2$ 与 $S_{正方形BCMN}+S_{正方形ACGH}=S_{正方形ABEF}$ 两者相当.

进一步分析这个“空隙”所成的图形，可知它是一个边长等于 $b-a$的正方形.

拼成的这个大正方形的面积，应等于这四个全等的直角三角形的面积的和再加上“空隙”的面积.

于是，

得 $$c^2=4\times\frac{1}{2}ab+(b-a)^2.$$

化简，得 $$a^2+b^2=c^2.$$

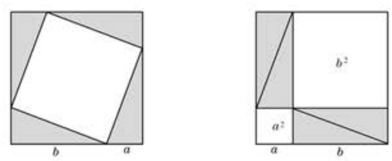
这样，我们得到了如下定理：

勾股定理　直角三角形两条直角边的平方和，等于斜边的平方.

我国古代数学家证明勾股定理，有如下巧妙证法：

图 19－56(1)(2)是大小一样的两个正方形，从中分别去掉四个全等的直角三角形(带阴影)，那么这两个正方形中剩下部分的面积一定相等.

如图所示，两个正方形的边长都是$(a+b)$，每个直角三角形的两直角边长分别为 a、b，设斜边长为 c. 因为这些直角三角形全等，而直角三角形的两个锐角互余，所以图 19－56(1)中的剩余部分是边长为 c 的正方形；图 19－56(2)中的剩余部分是边长分别为 a、b 的两个正方形. 因此，
$$a^2+b^2=c^2.$$



(1)　　(2)

图 19－56

勾股定理是几何中最著名的定理之一，它在数学研究与人类实践的活动中有着极其广泛的应用.

在直角三角形中，如果已知两条边的长，那么根据勾股定理，就能求出第三条边的长.

124 第十九章　几何证明

例题1 求边长为1的等边三角形的面积.

已知：如图19－57，$\triangle ABC$中，$AB=BC=CA=1$.

求：$S_{\triangle ABC}$（即三角形ABC的面积）.

解 作$AD\perp BC$，垂足为点D.

$\because$ $AB=AC=BC=1$，$AD\perp BC$，

$\therefore$ $BD=CD=\frac{1}{2}$（等腰三角形的三线合一）.

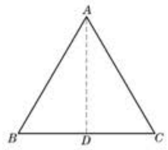


图19－57

在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中，

$\because$ $\angle ADB=90^\circ$（垂直的定义），

$\therefore$ $AB^2=AD^2+BD^2$（勾股定理）.

得 $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore$ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

已知$\triangle ABC$的边长等于1，要求它的面积，关键是求出一边上的高.

想一想

如果等边三角形的边长为a，那么面积S是多少？（用含a的代数式表示）

练习19.9(1)

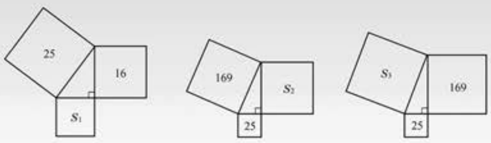
1. 在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle A=90^\circ$，设a、b、c分别表示$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$所对的边.

（1）已知$b=4$，$c=5$，求a； （2）已知$a=13$，$b=12$，求c.

2. 已知等腰直角三角形的腰长为5，求这个三角形的周长.

3. 求下列图中字母所表示的正方形的面积：

（1）$S_1=$_______； （2）$S_2=$_______； （3）$S_3=$_______.



（1） （2） （3）

（第3题）

例题1

本例是勾股定理的初步运用.其中，作高线再求高从而求出面积，是常用的方法.

想一想

让学生把例题1的结论一般化，导出边长为a的等边三角形的面积为$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

练习19.9(1)

1.（1）$a=\sqrt{41}$；

（2）$c=5$.

2. 等腰直角三角形的底边长$c=5\sqrt{2}$.周长$l=5+5+5\sqrt{2}=10+5\sqrt{2}$.

3.（1）9；（2）144；（3）194.

【本课重点】

让学生体会勾股定理的基本运用.

例题 2

本题是勾股定理用于解决简单的实际问题.

从画卷长是否超过正面长方形对角线长来判断画卷能否放入行李架，主要原因是以前课本中没有引进正方体的“体对角线”. 边款的说明是为了消除“画卷长超过正面长方形对角线长就一定不能放入行李架”的误解．一般来说，当画卷长超过长方体的“体对角线”长时，画卷就一定不能放入行李架内．

例题 3

本题是《九章算术》中的勾股名题，具有人文性．解题过程中运用了方程思想、数形结合思想.

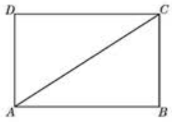


图 19－58

在日常生活中，勾股定理的应用很多.

例题2 假设某行李架是一个 56cm×36cm×23cm 的长方体空间. 一位旅客携带一件 62cm 长的画卷，这件画卷能放入行李架吗？

分析　画卷沿着行李架的 56cm 或 36cm 边缘摆放明显超长，因此可看沿着正面长方形的对角线能否放入，这需要求出这条对角线的长后再加以判断.

解　行李架的空间是长方体，正面是长 56cm、宽 36cm 的长方形.

如图 19－58，在长方形 $ABCD$ 中，$AB=56\text{cm}$，$BC=36\text{cm}$，AC 是对角线.

∵　四边形 $ABCD$ 是长方形(已知)，

∴　$\angle B=90^\circ$(长方形的四个角都是直角).

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

∵　$\angle B=90^\circ$(已证)，

∴　$AC^2=AB^2+BC^2$(勾股定理).

得　$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{56^2+36^2}=\sqrt{4\,432}\approx 66.6(\text{cm})$.

∵　$62<66.6$，

∴　62cm 长的画卷能放入行李架.

联结长方体中不在同一面上的两个顶点的线段是这个长方体的“体对角线”. 设长方体的长、宽、高分别为 a、b、c，“体对角线”长为 l，那么 $l^2=a^2+b^2+c^2$.

在本题中只要画卷的长小于所述长方体的“体对角线”长，那么画卷就可放入行李架．

我国古代对勾股定理的应用就十分注重，在古代数学书籍中有不少相关记载. 例如《九章算术》中的勾股问题，是具有历史地位的世界著名算题.

例题3 (《九章算术》勾股章第 6 题“引葭(jiā)赴岸”)“今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺. 引葭赴岸，适与岸齐. 问水深、葭长各几何.”

本题的意思是：有一水池一丈见方，池中央生有一棵类似芦苇的植物，露出水面一尺. 如把它引向岸边，正好与岸边齐. 问：水有多深？该植物有多长？

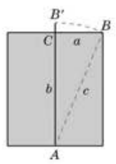


图 19－59

分析　如图 19－59，$\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC=b$，$AB=c$，$BC=a$，b 为池深，c 为葭长，且葭出水 1 尺，即 $c=(b+1)$尺，由题意知 a 为 5 尺. 根据勾股定理，可得 $b^2+5^2=(b+1)^2$，从中可以求出 b.

解　如图 19－59，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$.

则有 $AC^2+BC^2=AB^2$(勾股定理).

设 $AC=b$，可得　$b^2+5^2=(b+1)^2$.

化简，得　$2b-24=0$.

解得　$b=12$.

126 第十九章　几何证明

【注意事项】

(1) 例题 2 的问题情景有一定的真实性，但这件画卷能否放入行李架，与画卷的长短、粗细及长方体对角线有关，因此也有一定的复杂性. 课本中将问题进行了简化处理，如将画卷抽象成线段，对长方体只看它的正面即一个长方形，这样就可用平面几何的方法来解决．本例将立体问题进行了平面化处理，这一点可向学生明确说明，以避免引起无谓的争论.

(2) 例题 2 教学时，如有必要可简要说明，一般的思考是判断画卷长是否小于长方体“体对角线”的长. 可以取一个长方体模型，具体介绍长方体的“体对角线”的意义，但不必给出“体对角线”的定义．边款中对长方体的“体对角线”概念及其等量关系 $l^2=a^2+b^2+c^2$ 的解说，均不要求学生掌握．

$AB=b+1=13$.

答：水深 12 尺，葭长 13 尺.

利用勾股定理，可以作出长度为$\sqrt{n}$（n 是大于 1 的整数）的线段.

例题4 分别作长为$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、…、$\sqrt{7}$的线段.

分析　根据勾股定理可知，两条直角边长都为 1 的直角三角形，它的斜边长等于$\sqrt{2}$；两条直角边长分别为$\sqrt{2}$、1 的直角三角形，它的斜边长就等于$\sqrt{3}$. 依此类推，可作出其余的线段.

作法　如图 19－60.

1. 作两条直角边都为 1 的直角三角形 ACB_1，其中$\angle C=90°$.
2. 以斜边 AB_1 为一直角边，作另一直角边长为 1 的直角三角形 AB_1B_2.
3. 顺次这样作下去，最后作到直角三角形 AB_5B_6.

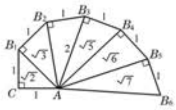


图 19－60

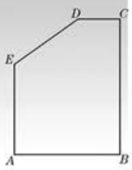
则斜边 AB_1、AB_2、…、AB_6 的长度分别是$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、…、$\sqrt{7}$，它们是所求作的线段.

想一想

已知长度为$\sqrt{n}$（n 是大于 1 的整数）的线段，你能作出长度为$\sqrt{n+1}$的线段吗？

练习 19.9(2)

1. $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，设顶点$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边长分别为 a、b、c. 已知 $a=n-1(n>1)$，$b=2\sqrt{n}$，求 c.
2. 如图，已知$\angle A=\angle B=\angle C=90°$，$AB=7$，$AE=6$，$CD=3$，$DE=5$，求多边形 $ABCDE$ 的面积.



（第 2 题）

第三节　直角三角形 127

例题 4

本题是几何作图题，让学生知道，给定单位长度，可用本题的作图方法，顺次作出长为$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、…的线段.

想一想

分别以 1 和$\sqrt{n}$（n 为大于 1 的整数）为直角边长作直角三角形，则这个直角三角形的斜边就是长度为$\sqrt{n+1}$的线段.

练习 19.9(2)

1. $c= n+1$.

2. 提示：分别延长 AE、CD，设两延长线相交于点 F，则四边形 $ABCF$ 是长方形，$\triangle DEF$ 是直角三角形. 利用勾股定理，得 $EF=3$. 再求 $S_{长方形ABCF}$ 和 $S_{\triangle DEF}$，得多边形 $ABCDE$ 的面积$=S_{长方形ABCF}-S_{\triangle DEF}=63-6=57$.

【注意问题】

在教学例题 4 以后，可指出据此能用几何方法在数轴上描出实数$\sqrt{n}$（为大于 1 的整数）所对应的点，回应七年级第二学期“实数”中的相关内容.

【本课重点】

导出和证明勾股定理的逆定理,并进行初步运用;引进勾股数组.

问题 5

引导学生思考勾股定理的逆命题.

勾股定理的逆定理的证明,是本课的一个难点.为帮助学生形成证明的思路,教师要多发挥主导作用.

首先可指出,由已知条件推导结论,现在没有直接的依据.再回顾确定一个直角三角形需要什么样的条件,引导学生注意到由两边可确定直角三角形.

然后进一步分析已知的条件及待证的结论.现已知$\triangle ABC$的三边长以及它们之间的数量关系,而由其中两边可构造一个直角三角形,于是要证明$\triangle ABC$是直角三角形,就只要证明$\triangle ABC$与所作的直角三角形全等.

问题5

由三边对应相等的两个三角形全等,可知给定三边的长,三角形的形状、大小就唯一确定.那么三角形的三边之间满足怎样的关系时这个三角形是直角三角形呢?

如果勾股定理的逆命题是真命题,那么就可以根据边的情况来判定这个三角形是否是直角三角形.

大约在公元前 2700 年左右,古埃及人建造金字塔时,由于塔基必须是正方形,他们就是用三角形的边来确定直角的.

现在,我们来证明勾股定理的逆命题是真命题.

已知:如图 19 - 61,在$\triangle ABC$中,$BC=a$, $AC=b$, $AB=c$,且$a^2+b^2=c^2$.

求证:$\triangle ABC$是直角三角形.

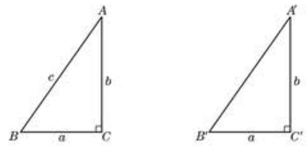


图 19 - 61

分析　直接从$a^2+b^2=c^2$证明$\triangle ABC$是直角三角形是困难的.如果有一个直角三角形$A'B'C'$, $\angle C'=90^\circ$, $B'C'=a$, $A'C'=b$,那么斜边$A'B'$就满足

$$A'B'^2=B'C'^2+A'C'^2=a^2+b^2=c^2.$$

只要证明$\triangle A'B'C'\cong\triangle ABC$,就能推出$\angle C=\angle C'=90^\circ$.

证明　作$\triangle A'B'C'$,使$\angle C'=90^\circ$, $B'C'=a$, $A'C'=b$,那么

$$A'B'^2=B'C'^2+A'C'^2=a^2+b^2\text{(勾股定理)}.$$

$\because$　$a^2+b^2=c^2$(已知),

$\therefore$　$A'B'^2=c^2$(等量代换).

$\because$　边长是正数,

$\therefore$　$A'B'=c$.

在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中,

$$\begin{cases}BC=a=B'C',\\CA=b=C'A',\\AB=c=A'B',\end{cases}$$

$\therefore$　$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$(S. S. S).

$\therefore$　$\angle C=\angle C'=90^\circ$,

即$\triangle ABC$是直角三角形(直角三角形的定义).

128 第十九章　几何证明

【注意事项】

要注意勾股定理和勾股定理的逆定理的区别.可以说,勾股定理是直角三角形的一个性质定理,而勾股定理的逆定理是直角三角形的一个判定定理．因为勾股定理及其逆定理具有重要的地位和价值,所以有特殊的名称.

于是我们得到：

勾股定理的逆定理　如果三角形的一条边的平方等于其他两条边的平方和，那么这个三角形是直角三角形.

例题5　已知$\triangle ABC$中，$BC=8$，$AC=15$，$AB=17$，试判断$\triangle ABC$是不是直角三角形.

解　$\because$　$BC^2+AC^2=8^2+15^2=289$，$AB^2=17^2=289$，

$\therefore$　$AB^2=BC^2+AC^2$.

因此，$\triangle ABC$是直角三角形(勾股定理的逆定理).

先找出最长边，再看最长边的平方与其他两边的平方和是否相等.

我们已经知道，$3^2+4^2=5^2$，$8^2+15^2=17^2$. 如果正整数a、b、c满足$a^2+b^2=c^2$，那么a、b、c叫做勾股数组. 以勾股数组中的三个数分别为各边长的三角形一定是直角三角形.

容易验证，5、12、13，7、24、25，20、21、29等，都是勾股数组.

一般地，设m、n都是正整数，且$m>n$，如果$a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$，那么a、b、c一定是勾股数组. 而且设k为正整数，可知ka、kb、kc也一定是勾股数组.

因为$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$
$=m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2$
$=m^4+2m^2n^2+n^4$，
$(m^2+n^2)^2$
$=m^4+2m^2n^2+n^4$，
所以$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$.

例题6　图19-62是一块四边形绿地的示意图，其中AB长24米，BC长15米，CD长20米，DA长7米，$\angle C=90°$，求绿地$ABCD$的面积.

分析　求一般的四边形的面积问题，通常转化为求三角形面积问题. 因此，如果联结对角线BD，分别求$S_{\triangle BCD}$和$S_{\triangle ABD}$(想一想，为什么不联结AC?)，可得四边形$ABCD$的面积. $S_{\triangle BCD}$可以直接求出，而求$S_{\triangle ABD}$就需要对$\triangle ABD$的形状作出判断，这就需要先求出BD的长.

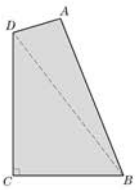


图19-62

解　联结BD(如图19-62).

在$\triangle BCD$中，

$\because$　$\angle C=90°$(已知)，

$\therefore$　$BD^2=BC^2+CD^2$(勾股定理).

由　$BC=15$，$CD=20$(已知)，

得　$$BD^2=15^2+20^2=225+400=625.$$

在$\triangle ABD$中，

$\because$　$AD=7$，$AB=24$，

$\therefore$　$AD^2+AB^2=7^2+24^2=49+576=625$.

得　$BD^2=AD^2+AB^2$.

$\therefore$　$\angle A=90°$(勾股定理的逆定理).

因此，$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ABD}$

例题5

本题是勾股定理的逆定理的基本运用. 已知三角形的三边长，判断这个三角形是否是直角三角形，通常以勾股定理的逆定理为依据. “边款”中指出了进行判断的步骤和方法，可让学生自己归纳.

勾股数组有实用价值. 这里引进了勾股数组的概念，并列出了常用的简单勾股数组. 同时指出，如果m、n是正整数，且$m>n$，那么m^2-n^2、$2mn$、m^2+n^2就构成勾股数组. 给定m、n，可利用这三个关系式“制造”具体的勾股数组.

关于m^2-n^2、$2mn$、m^2+n^2是勾股数组的证明，不作教学要求.

例题6

本题是勾股定理及其逆定理的综合运用. 要注意解题中运用这两条定理时在表述上的区别，并提醒学生在标注理由时不要搞错.

练习 19.9(3)

1. (1) ×;(2) √.

2. (1) b 为最大边,$b^2=13^2=169$, $a^2+c^2=64+121=185$. ∵ $a^2+c^2\neq b^2$. ∴ $\triangle ABC$ 不是直角三角形.

(2) a 为最大边,$a^2=6.5^2=42.25$,$b^2=2.5^2=6.25$,$c^2=6^2=36$. $b^2+c^2=6.25+36=42.25$. ∵ $a^2=b^2+c^2$, ∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形,$\angle A=90°$.

(3) $\triangle ABC$ 不是直角三角形.

3. 提示:先推出$\triangle BCD$是直角三角形,$\angle BDC=90°$;再利用勾股定理,得 $AB=\dfrac{289}{16}$.

【本课重点】

引导学生进一步学习勾股定理及其逆定理的有关应用.

例题 7

本题是几何计算问题,概念性强,有一定的知识综合运用要求.

在教学指导中,首先要求学生对两点的距离和点到直线的距离的概念有清晰的认识,知道这两种距离在图形中的几何表示;然后结合图形进行分析和计算.

$=\frac{1}{2}BC\cdot CD+\frac{1}{2}AD\cdot AB$

$=\frac{1}{2}\times15\times20+\frac{1}{2}\times7\times24$

$=150+84=234.$

答:绿地 $ABCD$ 的面积等于 234 平方米.

练习 19.9(3)

1. 判断题:

(1) 以0.3、0.4、0.5 为边长的三角形不是直角三角形. ( )

(2) 以 0.5、1.2、1.3 为边长的三角形是直角三角形. ( )

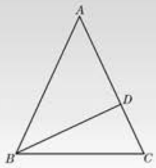
2. 在$\triangle ABC$中,设$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$分别所对的边为a、b、c,根据给定条件,判断$\triangle ABC$是否是直角三角形.如果是,那么哪一个内角是直角?

(1) $a=8$,$b=13$,$c=11$;

(2) $a=6.5$,$b=2.5$,$c=6$;

(3) $a=40$,$b=41$,$c=7$.

3. 如图,$\triangle ABC$中,已知$AB=AC$, D是AC上的一点,$CD=8$,$BC=17$,$BD=15$,求AB的长.



(第 3 题)

我们来探讨勾股定理和它的逆定理的有关应用.

例题7 如图 19-63,在$\triangle ABC$中,$AB=10$,$BC=24$,$AC=26$,M是AC的中点,求:

(1) B、M两点的距离;

(2) 点B到AC的距离.

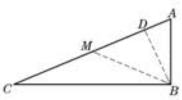


图 19-63

分析 已知$\triangle ABC$的三边长,可以判断这个三角形是否是直角三角形.常用的方法是运用勾股定理的逆定理.如果它是直角三角形,那么本题就转化为我们熟悉的“求直角三角形斜边上的中线长”和“求直角三角形的直角顶点到斜边的距离”那样的问题.

解 在$\triangle ABC$中,

∵ $AB=10$,$BC=24$,$AC=26$(已知),

∴ $AB^2+BC^2=10^2+24^2=100+576=676$.

又∵ $AC^2=26^2=676$,

得 $AC^2=AB^2+BC^2$(等量代换).

∴ $\angle B=90°$(勾股定理的逆定理).

(1) 联结 BM(如图 19-63).

130 第十九章 几何证明

【注意事项】

在例题 7 中,求点 B 到直线 AC 的距离,先化为求 Rt$\triangle ABC$ 斜边上的高,再利用了三角形面积计算方法的转换.这样利用三角形的面积求点到直线的距离,需要学生对有关概念的本质及概念之间的联系有深刻的认识. 在教学中,要引导学生进行反思和总结.

利用勾股定理的逆定理判断$\triangle ABC$是直角三角形,是解决例题 7 的一个关键点.而从数量关系的角度对三角形的类型进行分析和判断,学生的意识可能有欠缺,在本例教学中,要帮助学生进行强化.

∵ M 是 AC 的中点(已知),

∴ $BM=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 26=13$(直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半).

即 B、M 两点的距离为 13.

(2) 作 $BD\perp AC$,垂足为点 D(如图 19-63).

∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}\times 10\times 24=120$,

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times 26\times BD=13BD$,

∴ $13BD=120$(等量代换).

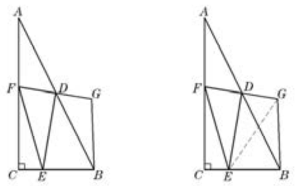
∴ $BD=\frac{120}{13}$.

即点 B 到 AC 的距离等于 $\frac{120}{13}$.

Rt△ABC 中,如果两条直角边分别为 a、b,斜边为 c,斜边上的高为 h_c,那么可利用等式 $ch_c=ab$ 求高 h_c.

例题8 已知:如图 19-64(1),$\triangle ABC$ 是直角三角形,$\angle ACB=90°$,D 是边 AB 上的中点;点 E、F 分别在边 BC、AC 上,$DE\perp DF$;点 G 在 FD 的延长线上,$DG=DF$.

求证:(1) $GB\perp BC$; (2) $EF^2=AF^2+BE^2$.



(1) (2)

图 19-64

分析 (1) 要证明 $GB\perp BC$,只要证明 $\angle GBD+\angle ABC=90°$.由 $\angle ABC$ 与 $\angle A$ 互余,可知只要证明 $\angle GBD=\angle A$.(2) 要证明 $EF^2=AF^2+BE^2$,关键是要证明线段 EF、AF、BE 能组成直角三角形.

要证线段 a、b、c 满足关系式 $a^2+b^2=c^2$,应设法将这三条线段组成三角形,并证明这个三角形是直角三角形,且 c 是斜边.

证明 (1) 在△GDB 与△FDA 中,

$$\begin{cases} DG=DF(\text{已知}), \\ \angle GDB=\angle FDA(\text{对顶角相等}), \\ BD=AD(\text{中点的定义}), \end{cases}$$

∴ $\triangle GDB\cong\triangle FDA$(S. A. S).

得 $\angle GBD=\angle A$(全等三角形的对应角相等).

例题 8

本题分设两个小题,其中题(1) 是为解决题(2) 铺设台阶.在整体上,对知识和方法的综合运用有较高的要求.

对题(1)的证明思路的分析,可借助于图形的直观性,注意调动学生在利用线段中点将图形旋转变换的经验.题(2)是证明两条线段的平方和等于第三条线段的平方,需要将三条线段采用适当的方法集中组成三角形,然后证明这个三角形是直角三角形,再运用勾股定理得到线段的平方关系 . 题(1)为题(2)中三条线段变成一个直角三角形的三边提供了图形的直观基础和思考的线索.

∵ $\angle C=90^\circ$(已知),

∴ $\angle A+\angle ABC=90^\circ$(直角三角形的两个锐角互余).

得 $\angle GBD+\angle ABC=90^\circ$(等量代换),

即 $\angle GBC=90^\circ$(等量代换),

∴ $GB\perp BC$.

(2) 联结 EG(如图 19－64(2)).

在 Rt△GBE 中,$EG^2=BG^2+BE^2$(勾股定理).

∵ $DE\perp DF$,$DG=DF$,

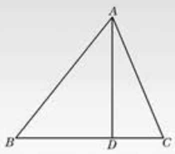
∴ $EF=EG$(线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等).

又由△GDB≌△FDA,得 $BG=AF$(全等三角形的对应边相等),

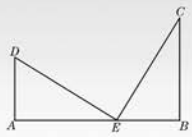
∴ $EF^2=AF^2+BE^2$(等量代换).

练习 19.9(4)

1. 如图,在△ABC 中,D 是边 BC 上的一点,$AB=15$,$AC=13$,$AD=12$,$CD=5$.求 BC 的长.
2. 如图,公路上 A、B 两站相距 25 千米,C、D 为两村庄,$DA\perp AB$,$CB\perp AB$,垂足分别为点 A、B. 已知 DA 长 10 千米,CB 长 15 千米,现要在公路 AB 上建一个日用品大卖场 E,使得 C、D 两村到大卖场 E 的距离相等,那么大卖场 E 应建在离 A 站多远处?



(第 1 题)



(第 2 题)

练习 19.9 (4)

1. $BC=14$.

2. 提示:可运用方程思想,设 $AE=x$ 千米,建立方程 $10^2+x^2=(25-x)^2+15^2$,解得 $x=15$(千米).

19.10 两点的距离公式

我们知道,在直角坐标平面内,x 轴或平行于 x 轴的直线上的两点 $A(x_1,y)$、$B(x_2,y)$的距离 $AB=|x_1-x_2|$;y 轴或平行于 y 轴的直线上的两点 $C(x,y_1)$、$D(x,y_2)$的距离 $CD=|y_1-y_2|$.

【教学目标】

经历探求直角坐标平面内两点的距离的过程,掌握两点的距离公式,体会数形结合的数学思想方法.

问题 1

如果经过 A、B 两点的直线 AB 既不平行于 x 轴，又不平行于 y 轴，那么 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 两点间的距离 AB 如何计算呢？

如图 19－65，直线 AB 既不平行于 x 轴，也不平行于 y 轴，这时，显然 $AB \neq |x_1 - x_2|$，$AB \neq |y_1 - y_2|$.

我们来分析 $|x_1 - x_2|$、$|y_1 - y_2|$ 的几何意义.

过点 A 作垂直于 x 轴的直线，再过点 B 作垂直于 y 轴的直线，两直线相交于点 C. 可知点 C 的坐标是 (x_1, y_2). 所以

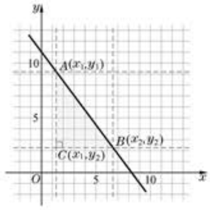


图 19－65

$$BC = |x_1 - x_2|, \quad AC = |y_1 - y_2|.$$

还可以看到，因为 x 轴、y 轴的夹角是直角，所以 $\angle ACB = 90°$.

在 Rt△ABC 中，

因为 $AB^2 = AC^2 + BC^2$（勾股定理），

所以 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

可见，$|x_1 - x_2|$ 是直线 $x = x_1$ 和直线 $x = x_2$ 这两条平行线间的距离；$|y_1 - y_2|$ 是直线 $y = y_1$ 和直线 $y = y_2$ 这两条平行线间的距离.

想一想

$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 两点同在 x 轴或 y 轴上，或者所在直线平行于坐标轴时，$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 同样适用吗？

当 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 同在 x 轴或平行于 x 轴的直线上时，$y_1 = y_2$；当 A、B 同在 y 轴或平行于 y 轴的直线上时，$x_1 = x_2$.

由此得到两点的距离公式：

如果直角坐标平面内有两点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，那么 A、B 两点的距离

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

例题1 已知直角坐标平面内的△ABC 三个顶点 A、B、C 的坐标分别为 $(-1, 4)$、$(-4, -2)$、$(2, -5)$.

（1）△ABC 的三条边长分别为多少？

第三节 直角三角形 133

问题 1

在学生已掌握直角坐标平面内平行于坐标轴的直线上两点的距离公式的基础上，引导学生探求直角坐标平面内任意两点的距离.

学生对 $|x_1 - x_2|$、$|y_1 - y_2|$ 的几何意义的理解，是探求直角坐标平面内任意两点的距离的思考基础. 可指导学生在直角坐标平面内画出表示 $|x_1 - x_2|$、$|y_1 - y_2|$ 的线段，再适当进行解释，让学生体会两式分别就是关于 x 轴、y 轴平行的平行线的距离公式.

导出不平行于坐标轴的直线上两点距离的表达式.

这是勾股定理的直接运用. 在坐标平面内讨论问题时，要重视对学生进行“数”与“形”之间的联系和相互转化的学习指导.

想一想

让学生注意到平行于坐标轴的直线（或在坐标轴）上的两点的距离公式也可表示为

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

从而得到直角坐标平面内两点的距离公式.

例题 1

本题已知直角坐标平面内的三角形的三个顶点坐标，判断三角形的形状，是度量分析的问题.

初中阶段，在直角坐标平面内判断三角形的形状，往往利用两点的距离公式，从求边长着手.

例题 2

本题是两点距离公式的运用.

设 x 轴上的点的坐标为 $(m, 0)$，是常用的方法；类似地，y 轴上的点的坐标可设为 $(0, n)$，要让学生知道坐标轴上的点的坐标的特征，并会应用. 本题也可以结合教学实际，进行变式教学.

练习 19.10

1. (1) $AB=5$；(2) $CD=\sqrt{149}$；(3) $EF=5$；(4) $GH=2\sqrt{26}$.

2. (1) $AB=5, BC=\sqrt{113}$, $CA=\sqrt{34}$，$\triangle ABC$ 既不是等腰三角形，又不是直角三角形；

(2) $\triangle EFG$ 是直角三角形，$\angle F=90^{\circ}$.

3. $\triangle ABC$ 的高 AD 垂直平分 BC，点 A 的横坐标为 2. 设点 A 的坐标为 $(2, n)$，则 $AB=AC$.

根据题意，$AB=BC=4$，得 $\sqrt{2^2+n^2}=4$，解得 $n=\pm 2\sqrt{3}$.

A 的坐标为 $(2, 2\sqrt{3})$ 或 $(2, -2\sqrt{3})$.

(2) 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

分析　应先求出 $\triangle ABC$ 的三条边长，再作判断.

解　(1) $\because$ 点 A、B、C 的坐标分别为 $(-1, 4)$、$(-4, -2)$、$(2, -5)$，

$\therefore$ $AB=\sqrt{(-1+4)^2+(4+2)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$，

$BC=\sqrt{(-4-2)^2+(-2+5)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$，

$AC=\sqrt{(-1-2)^2+(4+5)^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$（两点距离公式）.

(2) $\because$ $AB=3\sqrt{5}, BC=3\sqrt{5}$，

$\therefore$ $AB=BC$（等量代换）.

又 $\because$ $AB^2+BC^2=45+45=90, AC^2=90$，

$\therefore$ $AB^2+BC^2=AC^2$（等量代换），

得　$\triangle ABC$ 是直角三角形（勾股定理逆定理）.

$\therefore$ $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形（等腰直角三角形的定义）.

例题2　已知直角坐标平面内的两点分别为 $A(3, 3)$、$B(7, 1)$，点 P 在 x 轴上，$\angle APB=90^{\circ}$，求点 P 的坐标.

解　$\because$ 点 P 在 x 轴上，可设点 P 的坐标是 $(m, 0)$，

又 $\because$ 点 A、B 的坐标分别是 $(3, 3)$、$(7, 1)$，

$\therefore$ $AP=\sqrt{(3-m)^2+(3-0)^2}$，

$BP=\sqrt{(7-m)^2+(1-0)^2}$（两点距离公式）.

$\because$ $\angle APB=90^{\circ}$，$\therefore$ $\triangle ABP$ 是直角三角形.

$\therefore$ $AP^2+BP^2=AB^2$（勾股定理）.

$\therefore$ $(3-m)^2+(3-0)^2+(7-m)^2+(1-0)^2=(3-7)^2+(3-1)^2$.

整理，得　$m^2-10m+24=0$，

解得　$m=4$ 或 $m=6$.

$\therefore$ 点 P 的坐标是 $(4, 0)$ 或 $(6, 0)$.

练习 19.10

1. 求下列两点的距离：
   (1) $A(1, 2)$ 和 $B(4, 6)$；　(2) $C(-3, 5)$ 和 $D(7, -2)$；
   (3) $E(-4, 3)$ 和 $F(1, 3)$；　(4) $G(-5, 6)$ 和 $H(-3, -4)$.
2. 已知三角形三个顶点的坐标，试判断三角形的形状.
   (1) $A(-3, 1), B(1, 4), C(-6, -4)$；
   (2) $E(4, 3), F(1, 2), G(3, -4)$.
3. 已知等边三角形 ABC 的顶点 B、C 的坐标分别为 $(0, 0)$ 和 $(4, 0)$，求顶点 A 的坐标.

Benzhangxiaojie

19

本章小结

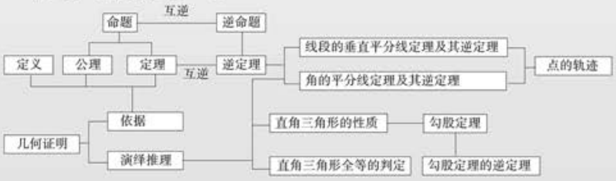
本章的内容属于论证几何学.从实验几何到论证几何,是从感性认识到理性认识的一个重大的跨越.通过直观观察和操作实验形成的几何直觉是很宝贵的,它能帮助我们洞察几何图形的性质,作出猜想,给出进行演绎推理的目标和步骤.论证几何采用逻辑方法进行严密的推理,使所得的结论具有高度可靠性.几何直观和演绎证明,好比我们的左右手,都很重要.感性认识和理性认识互相结合,才能深刻地认识事物的本质.

在所有科学分支中,数学是最为严谨的一门科学.通过学习几何证明,不仅可以帮助我们严密地思考和表达,养成有条理分析和“言必有据”的习惯,而且可以进一步体会数学的价值,体验求是、求真、求实的科学精神.

本章列举了一些具体几何问题的证明.演绎证明是一种思维方式,也是一种语言表达方式.我们正是通过一个个例题的证明,在演绎证明的实践中模仿、思考、操练,逐步理解和掌握演绎证明的思想、步骤,以及表达的格式.因此,“在游泳中学习游泳”,认真地做好练习是最要紧的.

就几何知识而言,本章首先是剖析“线段的垂直平分线”“角的平分线”两个基本图形;然后对直角三角形的性质和判定进行了研究,特别是勾股定理及其逆定理(可以分别看作直角三角形的一种性质和一种判定),这是人类文明的重要象征.勾股定理是定量地研究几何的一个基本定理,一个三角形作出它的一条高之后,就分为两个直角三角形;而两点的距离公式是利用勾股定理进行定量研究的典型体现,勾股定理的重要性由此可见一斑.

本章的知识结构框图如下:



本章小结 135

本章是论证几何的入门.在小结时,应对演绎证明的基本思想、一般步骤、表述格式以及它的作用和价值进行全面的反思,引导学生体会演绎推理是一种思维方法以及它所体现的理性精神.同时,要对本章三大节的内容及其关系进行整理,使学生顺利完成从实验几何到论证几何的跨越,在认识上达到一个新高度.

在几何证明的学习过程中,强调了证明前的分析和证明后的反思,要帮助学生总结学习经验,学会分析,加强反思,逐步提高逻辑推理能力.

【设计意图】

本阅读材料，简要介绍了平面几何的研究和发展历程，欧几里得的巨著《几何原本》的形成过程及其划时代意义，《几何原本》对人类文明和科学发展的重大影响；简述了《几何原本》传入我国的历史，点明了学习几何学的目的和意义. 希望学生通过对本材料的学习，得到数学文化的熏陶，认识《几何原本》的历史价值和现实意义，端正学习几何学的目的和态度，提高学习兴趣.

【活动建议】

在本章开篇教学中，可结合章头语，安排学生在课外阅读本材料，激发学习兴趣.

在学生学习了"证明举例"一节的基础上，可指导学生再仔细阅读本材料，让学生认真领会学习几何学的目的和要求.

在本章的学习小结中，可引导学生联系本材料的有关内容，领会演绎思想和证明过程，进一步体会几何学的价值.

阅读材料一

《几何原本》古今谈

人类早期对图形进行研究，是由于生产和生活实际的需要. 古埃及尼罗河泛滥成灾，经常要测量被河水冲坏的土地；中国春秋战国时期实行"土地多的人多交农业税"的政策，也要测量土地的面积. 当时的测量和研究，依赖于经验观察、割补搭拼、丈量计算. 在长期的实践活动中，人们用直观、实验的方式，获得了一些几何结论. 这样得到的结论大都有一定的正确性. 但是，经验毕竟有局限性，结论并不完全可靠.

大约在公元前 300 年，古希腊数学家欧几里得广泛收集和研究来自古埃及、古巴比伦以及古希腊前人的几何学知识，经过系统整理和重新表述，形成了具有严密逻辑体系的《Elements》(原本)一书. 在这本书的编写中，欧几里得选择了一系列有重大意义的、最原始的定义和公理，并将它们严格地按照逻辑的顺序进行排列，然后在此基础上进行演绎和证明，导出一系列的几何图形性质. 这一严谨的几何学体系，闪耀着理性思维的光芒.

我国明代科学家徐光启和意大利人利玛窦合作翻译了该书的前六卷，于 1607 年完成，定名为《几何原本》. 书名所加的"几何"两字，出自英文"Geometry"中 Geo 的音译，兼有中文"多少"的语义，十分贴切.

《几何原本》是严谨科学体系的典范，它不仅是数学领域的硕果，而且其影响遍及整个科学.《几何原本》传入中国，通常看作是中国近代科学发展的起点.

我国明代科学家徐光启是上海人，他的墓地在徐家汇，现已开辟为光启公园(如图). 意大利人利玛窦的墓地在北京，任人凭吊.

中国古代数学崇尚"算法"，虽然也有演绎推理，但不够系统. 关于《几何原本》，徐光启写过以下一段话，值得我们揣摩体会.

"此书有四不必：不必疑，不必揣，不必试，不必改；有四不可得：欲脱之不可得，欲驳之不可得，欲减之不可得，欲前后更置之不可得."

我们现在学习几何学，不仅是学习几何知识，更重要的是学习演绎推理的方法，体察理性思维的精神，并且在自然科学和社会科学的各个学科中加以运用和体现. 无数经验表明，通过几何来学习演绎推理，是最为简捷有效的途径.

Yueducailiao Er

19

阅读材料二

勾股定理万花筒

勾股定理是人类最伟大的科学发现之一，是初等几何中的一个基本定理. 这个定理有十分悠久的历史，几乎所有文明古国，如希腊、中国、埃及、巴比伦、印度等，对此定理都有所研究.

勾股定理在西方被称为“毕达哥拉斯定理”(Pythagoras theorem). 毕达哥拉斯(Pythagoras，公元前 572 年～公元前 497 年)是古希腊数学家兼哲学家，他于公元前 550 年发现了这一定理. 相传，当时他的学派宰牛百头，广设盛宴，以示庆贺. 由此，这一定理又被冠以“百牛定理”. 古希腊数学家欧几里得在《原本》(我国译作《几何原本》)(第 I 卷，命题 47)中关于这个定理的证明，如图 1 所示.

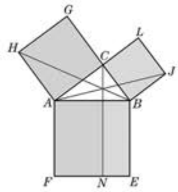


图 1

中国古代对这一数学定理的认识和应用，可以追溯到公元前一千多年. 中国最早的一部天文数学著作《周髀算经》就记载了一段史实：在周朝初年(公元前 1100 年)，商高对周公有这样的谈话：“故折矩以为勾广三，股修四，径隅五”(意思是在方尺上截取勾(短直角边)长为 3，股(长直角边)长为 4，则这端到那端的径(斜边)长必为 5). 这实际上是勾股定理的一个特例，是对勾股定理的初步认识，所以勾股定理又称商高定理. 不过，对这一定理的证明，却是较迟的事情. 直到公元 3 世纪“三国”时期，赵爽才用面积割补给出了它的第一种证明.

古代巴比伦人对勾股定理的研究同样令人惊叹. 人们在 1945 年对古巴比伦人遗留的一块数学泥板的研究中，惊讶地发现上面竟然刻有 15 组勾股数组，其年代远在商高和毕达哥拉斯之前，大约在公元前 1900 年到公元前 1600 年之间. 这些勾股数组中有些是很大的数，如 3 456，3 367，4 825；13 500，12 709，18 541 等，即使在今天也不是人们所熟悉的. 这使人们有理由相信，古巴比伦人早已掌握了勾股定理，并很可能找到了一种求得勾股数组的一般方法.

阅读材料二 137

【设计意图】

本材料主要介绍了有关勾股定理的数学史，证明勾股定理的几种典型方法，在勾股定理的应用研究中所产生的新成果. 希望学生通过阅读本材料，了解勾股定理在数学史上的地位和价值，认识勾股定理是人类的共同财富，形成包容世界文化的态度；同时引起对勾股定理研究的兴趣，积极参与探究活动，体验研究勾股定理的特殊魅力.

【活动建议】

在一般情况下，让学生在课外自主阅读本材料，并要求学生进一步查找有关资料，组织一次交流学习体会的活动.

教师也可结合勾股定理的教学，向学生介绍本材料中的某些史料和证明方法，改善教学过程.

本材料可分为三个部分.

第一部分介绍有关勾股定理的数学史，指出几乎所有文明古国对勾股定理都有研究. 这表明勾股定理有重要价值，曾引起众多文明古国的重视；同时，各文明古国对勾股定理的研究有很悠久的历史和各自的成果，有本国的文化色彩. 古希腊的思辨、古中国的算法、古巴比伦的精深等，交相辉映，共铸文明.

这部分内容是数学文化教育的素材.

第二部分介绍赵爽、伽菲尔德证明勾股定理的方法.

在赵爽证法中，构图简捷、新颖、和谐. 因此，这一构图成为 2002 年在北京召开的国际数学家大会的会标. 这一证法比古希腊的证法更为简明、清晰.

在伽菲尔德的证法中，构图巧妙，思路简明.

让学生从中了解我国古代数学的辉煌成就，了解证明勾股定理的方法的多样性，引起对勾股定理进行学习和研究的兴趣.

仅从以上史料就足以说明，勾股定理是全人类的共同财富，是世界文明宝库中的一颗璀璨明珠.

千百年来，许多数学家和数学学者对证明勾股定理兴趣盎然，各种证明方法层出不尽，据统计已有不同证法数百种. 下面，让我们欣赏其中两种.

1. 赵爽的证法

以 a、b 为直角边（$b>a$），以 c 为斜边作四个全等的直角三角形，则每个直角三角形的面积等于 $\frac{1}{2}ab$. 把这四个直角三角形拼成如图 2 所示形状.

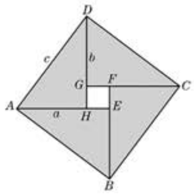


图 2

由 $\mathrm{Rt}\triangle DAH\cong\mathrm{Rt}\triangle ABE$，得 $\angle HDA=\angle EAB$.

又 $\angle HAD+\angle HDA=90^\circ$，可得 $\angle EAB+\angle HAD=90^\circ$，即 $\angle DAB=90^\circ$.

同理，$\angle ABC$、$\angle BCD$、$\angle CDA$ 都等于 90°.

再由 $AB=BC=CD=DA$，可知四边形 $ABCD$ 是一个边长为 c 的正方形，它的面积等于 c^2.

因为 $EF=FG=GH=HE=b-a$，$\angle HEF=90^\circ$，所以 $EFGH$ 是一个边长为 $(b-a)$ 的正方形，它的面积等于 $(b-a)^2$.

于是，得 $4\times\frac{1}{2}ab+(b-a)^2=c^2$，所以 $a^2+b^2=c^2$.

2002 年在北京召开的国际数学家大会的会标（如上图），其原型就是这幅赵爽的勾股定理证明图.

2. 伽菲尔德的证法

美国第 20 任总统伽菲尔德，对数学有着浓厚的兴趣，业余喜爱研究数学. 1876 年，他时任众议员，提出了勾股定理的一种巧妙证法：

138 第十九章 几何证明

如图 3 构图，

梯形面积 $=\frac{1}{2}$(上底+下底)×高

$=\frac{1}{2}(a+b)(a+b)$.

又　梯形面积 = 三个直角三角形面积的和

$=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$,

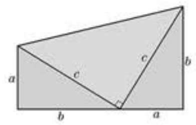


图 3

得　$\frac{1}{2}(a+b)(a+b)=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$,

即　$a^2+2ab+b^2=ab+ab+c^2$.

因此　$a^2+b^2=c^2$.

在勾股定理的应用研究中，数学家们得到了一些引人入胜的新成果. 下举两例：

1. 希波克拉底“月牙定理”

人们在刻意追求解决难题“化圆为方”的过程中，发现一些除圆以外的特殊曲边形的面积能和某个多边形的面积相等. 这种发现最早应归功于古希腊数学家希波克拉底. 他首先提出了“月牙定理”：以直角三角形两直角边为直径向外作两个半圆，以斜边为直径向内作半圆，则三个半圆所围成的两个月牙形（希波克拉底月牙）面积的和等于该直角三角形的面积.

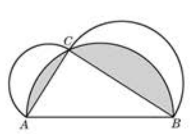


图 4　月牙定理

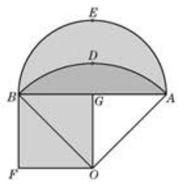


图 5　月牙与正方形等积

如图 4，利用勾股定理，可得 Rt$\triangle ABC$ 直角边上两个半圆面积的和等于斜边上半圆的面积；再同时减去两个深色弓形的面积，即得直角边上两个月牙形面积的和等于直角三角形的面积.

月牙定理结论之优美令人称奇不已. 图 5 同样是希波克拉底“化曲为直”的杰作——月牙形与正方形等积. 简练易懂的割补技巧犹如神来之笔，大大开启了人们的心灵之窗. 同时，月牙定理化曲为直的成功给一些数学家带来遐想，认为“化圆为方”问题的解决已近在咫尺. 有人甚至声称“圆可以化为方.”当然，这是绝对错误的.

第三部分介绍关于勾股定理应用研究的一些成果.

希波克拉底“月牙定理”展现了数学家的奇思妙想和丰富联想，学生从中可以感受到数学的美.

“化圆为方”的不可能性早已获得证明，数学家对“化圆为方”“化曲为直”的追求，体现了一种探索的精神，对学生有科学态度教育的意义.

2. 帕普斯对勾股定理的“推广”

古希腊数学家帕普斯证明了勾股定理的一个有趣的变形. 他将直角三角形三边上的正方形改成平行四边形，这三个平行四边形的作图方法如右：

如图 6，对于 Rt$\triangle ABC$，

（1）分别以两直角边 AB、AC 为边，作两个平行四边形；

（2）分别延长两个平行四边形中平行于直角边的两边，它们相交于点 P；

（3）作射线 PA，与 BC 相交于点 R，再截取 $RQ=PA$；

（4）以 BC 为一边作平行四边形，使另一组对边平行且等于 RQ.

对于以上的作图，我们可以得到如下的真命题：

斜边上的平行四边形面积等于两条直角边上的平行四边形面积的和.

如何证明这个命题是真命题？有兴趣的同学，不妨自行研究，尝试证明一下.

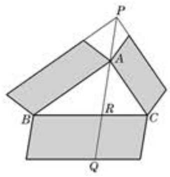


图 6　勾股定理推广

140 第十九章　几何证明

帕普斯对勾股定理的“推广”再次展示勾股定理的无穷魅力. 同时，可能引起学生对推广勾股定理的思考，并使学生在今后的数学学习中有所联想.

由于学生的几何作图能力和几何论证基础相对较弱，因此证明这个推广的结论会有困难. 教师应对有兴趣尝试证明的学生提供指导和帮助.

关于帕普斯对勾股定理的推广的结论，证明如下：

如图，延长 MC，交 FG 于点 H.

$\because$ $MH /\!/ QP$，$PF /\!/ AC$，

$\therefore$ 四边形 $ACHP$ 是平行四边形.

$\because$ $\square ACHP$ 与 $\square ACFG$ 同底同高，

$\therefore$ $\square ACHP$ 的面积 $=$ $\square ACFG$ 的面积.

$\because$ 四边形 $BCMN$ 是平行四边形，

$\therefore$ $CR /\!/ MQ$.

又 $\because$ $CM /\!/ RQ$，

$\therefore$ 四边形 $CMQR$ 是平行四边形.

$\square CMQR$ 与 $\square ACHP$ 中，

$\because$ $HM /\!/ PQ$，

$\therefore$ HM、PQ 间的距离是定值.

又 $\because$ $RQ=PA$，

$\therefore$ $\square CMQR$ 的面积 $=$ $\square ACHP$ 的面积.

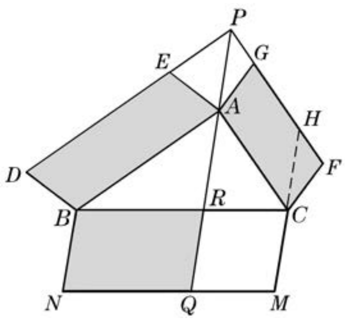
$\therefore$ $\square CMQR$ 的面积 $=$ $\square ACFG$ 的面积.

同理可证 $\square BNQR$ 的面积 $=$ $\square ABDE$ 的面积.

$\therefore$ $\square CMQR$ 的面积 $+$ $\square BNQR$ 的面积

$=\square ACFG$ 的面积 $+$ $\square ABDE$ 的面积，

即 $\square BCMN$ 的面积 $=$ $\square ACFG$ 的面积 $+$ $\square ABDE$ 的面积.



练习部分参考答案

第十六章　二次根式

习题 16.1(1)

1. (1) $\surd$；　(2) $\times$；　(3) $\surd$；　(4) $\times$.

2. (1) $x\leqslant 0$；　(2) $x\geqslant -\frac{9}{2}$；　(3) $x>1$；　(4) $x=0$.

3. $\sqrt{1-x}$.

4. (1) $4-\pi$；　(2) $\sqrt{2}-1$.

5. 乙错. 当 $a=\frac{1}{5}$ 时，$a-\frac{1}{a}<0$，$\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=\left|a-\frac{1}{a}\right|=\frac{1}{a}-a$，而不是 $a-\frac{1}{a}$.

习题 16.1(2)

1. (1) $x\geqslant 1$；　(2) $y>6$.

2. (1) $7\sqrt{2}$；　(2) $3\sqrt{6a}$；　(3) $2m\sqrt{3m}$；　(4) $y^2\sqrt{xy}$.

3. (1) $\frac{2}{3}\sqrt{10}$；　(2) $\frac{\sqrt{\pi s}}{\pi}$；　(3) $\frac{\sqrt{5}}{15}p$；　(4) $\frac{2\sqrt{2n}}{5n^2}$.

4. (1) $\frac{2\sqrt{5m}}{n}$；　(2) $\frac{5\sqrt{5xy}}{2x}$；　(3) $\frac{b}{12c}\sqrt{6abc}$；　(4) $\frac{4\sqrt{3n}}{mn^2}$.

习题 16.2(1)

1. $2\sqrt{xy}$，$\sqrt{x+y}$，$\sqrt{26ab}$.

2. (1) $3ab^2\sqrt{2b}$；　(2) $3\sqrt{6}(x-y)^2$；　(3) $\sqrt{3}(p+q)$；　(4) $1-5x$.

3. (1) $\frac{\sqrt{15xy}}{6y^2}$；　(2) $\frac{\sqrt{30mn}}{12mn}$；　(3) $\frac{\sqrt{10(x+y)}}{5(x+y)}$；　(4) $\frac{3\sqrt{7(s-t)}}{(s-t)^2}$；　(5) $\frac{\sqrt{3}}{mn-1}$.

习题 16.2(2)

1. 8 或 18.

2. D.

3. (1) $\frac{2}{x}\sqrt{2x}$ 与 $2\sqrt{x}$，不是；　(2) $\frac{b}{c}\sqrt{ac}$ 与 $\frac{\sqrt{ac}}{a}$，是；

(3) $\frac{\sqrt{2st}}{t}$ 与 $\frac{\sqrt{3st}}{3s}$，不是；　(4) $\frac{\sqrt{m^2-n^2}}{3(m-n)}$ 与 $\frac{2\sqrt{m^2-n^2}}{m+n}$，是.

4. (1) $\frac{\sqrt{5}}{20}$；　(2) $\frac{13}{6}\sqrt{m}-\frac{1}{2}\sqrt{n}$.

5. (1) 如 $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$，$\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$；　(2) 如 $\sqrt{2}$ 和 $-\frac{2}{5}\sqrt{2}$.

习题 16.3(1)

1. (1) 0；　(2) $\frac{7}{8}\sqrt{6}$；　(3) $3\sqrt{x}$.

2. (1) $\frac{3}{a}\sqrt{a}$；　(2) $-\frac{19}{5}\sqrt{5m}$；　(3) $\frac{2b-1}{a^2-b^2}\sqrt{a^2-b^2}$.

3. (1) $x<-3\sqrt{2}$；　(2) $x<\frac{\sqrt{6}}{4}$.

4. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$.

习题 16.3(2)

1. (1) -6; (2) -2; (3) $\frac{4\sqrt{b}}{b}$; (4) $2x\sqrt{y}$.

2. (1) $\frac{\sqrt{ab}}{2b}$; (2) $\frac{\sqrt{5y}}{x}$; (3) $\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x+y}$; (4) $\frac{x+y}{y}$.

3. (1) $\sqrt{2}x$; (2) $n-1$.

习题 16.3(3)

1. (1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$; (2) $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

2. (1) $\frac{\sqrt{6x}}{4x}$; (2) $\frac{\sqrt{m}}{n}$; (3) $(a+b)\sqrt{a-b}$; (4) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

3. (1) $x<\frac{2\sqrt{15}}{5}$; (2) $x=\frac{\sqrt{3}}{15}$.

4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. 如$\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{8}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,$\sqrt{8}\div\sqrt{24}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{12}\div\sqrt{24}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

习题 16.3(4)

1. A.

2. 不对. $\sqrt{18}\div(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{18}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2}=\sqrt{2\times3^2\times3}-\sqrt{2^2\times3^2}=3\sqrt{6}-6$.

3. (1) $-\sqrt{2}-1$; (2) $\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}$; (3) $\frac{6m+7\sqrt{mn}+2n}{4m-n}$; (4) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

4. (1) $\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{m-n}$,$\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{m-n}$; (2) $\frac{a\sqrt{m}-b\sqrt{n}}{a^2m-b^2n}$;$\frac{a\sqrt{m}+b\sqrt{n}}{a^2m-b^2n}$.

5. (1) $x=5(\sqrt{3}+\sqrt{2})$; (2) $x=6+4\sqrt{2}$.

复习题

A 组

1. (1) $x\geqslant3$; (2) $x<2$.

2. $-2a$.

3. (1) $14\sqrt{3}$; (2) $\frac{\sqrt{5}}{20}$.

4. (1) $\frac{\sqrt{3}}{3}+11\sqrt{2}$; (2) $\frac{28}{5}\sqrt{5}-\frac{1}{6}\sqrt{6}$.

5. $\frac{3\sqrt{3c}}{c}$.

6. (1) $\frac{7-3\sqrt{5}}{8}$; (2) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$.

7. $x>\frac{\sqrt{2}}{16}$.

8. $x=-14+8\sqrt{3}$.

9. 4.

B组

1. （1）$\dfrac{\sqrt{30}}{300}$；　（2）$-\dfrac{8\sqrt{6}}{45}$.

2. $6-2x$.

3. （1）$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}bc^2(b\geqslant0)$；　（2）$\dfrac{7}{t^3}\sqrt{10t}$.

4. $\dfrac{4ab}{3}\sqrt{3ab}(b>0)$.

5. 互为倒数.

6. （1）$3c(c>0)$；　（2）$\dfrac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}(a>b>0)$.

7. $2+\dfrac{2}{5}\sqrt{15}$.

8. A.

9. C.

10. 12.

第十七章　一元二次方程

习题 17.1

1. （1）√；　（2）√；　（3）×；　（4）×.

2.

一般式	二次项系数	一次项系数	常数项
$2x^2-3x+5=0$	2	-3	5
$x^2-2x-1=0$	1	-2	-1
$2x^2-9x-14=0$	2	-9	-14
$(1-\sqrt{2})x^2-(1+\sqrt{2})x=0$	$1-\sqrt{2}$	$-1-\sqrt{2}$	0

3. （1）$m\neq\pm2$；　（2）-5.

4. 是，略.

5. 提示：若 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有一个根为 1，那么 $a+b+c=0$. 这样的一个方程，如 $2x^2-x-1=0$.

习题 17.2(1)

1. （1）×；　（2）√；　（3）×；　（4）×.

2. （1）$x=\pm11$；　（2）$x=\pm4$；　（3）$t=\pm2\sqrt{2}$；　（4）$y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$；　（5）$y=\pm\dfrac{3}{2}$；

（6）$t=\pm\dfrac{5}{6}$；　（7）$x=5\pm3\sqrt{2}$；　（8）$x=\sqrt{2}\pm2$；　（9）$y_1=-48, y_2=-52$；

（10）$x_1=b-2, x_2=2-b$.

习题 17.2(2)

1. （1）0，1；　（2）$\sqrt{5}, 3\sqrt{5}$；　（3）$-\dfrac{1}{6}, -4$；　（4）$0, \dfrac{\sqrt{2}}{5}$；　（5）$\dfrac{1}{13}, -\dfrac{4}{3}$；　（6）$-\dfrac{3}{5}a, \dfrac{5}{3}a$.

2. （1）$0, \dfrac{1}{2}$；　（2）$-3, 1$；　（3）$6, -3$；　（4）$6, -2$；

（5）$-5, -2$；　（6）$-4, 2$；　（7）$-1, -7$；　（8）$0, b-a$.

3. 如：$x^2+9x+20=0$.

4. $x^2+y^2=4$.

习题 17.2(3)

1. （1）① 常数项，$x^2-3x=1$；② 一次项系数一半的平方，$x^2-3x+\frac{9}{4}=1+\frac{9}{4}$；

③ $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$；④ $x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$；⑤ $x-\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$，$x-\frac{3}{2}=-\frac{\sqrt{13}}{2}$；

⑥ $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$，$\frac{3-\sqrt{13}}{2}$.

（2）4，2； （3）$\frac{25}{4}$，$\frac{5}{2}$； （4）$\frac{1}{64}$，$\frac{1}{8}$； （5）$\frac{m^2}{4}$，$\frac{m}{2}$； （6）$\frac{b^2}{4a^2}$，$\frac{b}{2a}$.

2. （1）7，-3； （2）$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$，$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$； （3）$-1+\frac{2}{3}\sqrt{3}$，$-1-\frac{2}{3}\sqrt{3}$；

（4）$3+\sqrt{19}$，$3-\sqrt{19}$； （5）$1+\frac{\sqrt{14}}{2}$，$1-\frac{\sqrt{14}}{2}$； （6）96，-104.

习题 17.2(4)

1. 求出 b^2-4ac 的值，$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

2. （1）$\frac{-7+\sqrt{37}}{2}$，$\frac{-7-\sqrt{37}}{2}$； （2）$\frac{5+\sqrt{17}}{4}$，$\frac{5-\sqrt{17}}{4}$； （3）$\frac{-5+\sqrt{109}}{6}$，$\frac{-5-\sqrt{109}}{6}$；

（4）$\frac{1+\sqrt{73}}{12}$，$\frac{1-\sqrt{73}}{12}$； （5）$\frac{3+\sqrt{41}}{4}$，$\frac{3-\sqrt{41}}{4}$； （6）$\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$，$\frac{-1-\sqrt{2}}{2}$；

（7）$\frac{3+\sqrt{15}}{2}$，$\frac{3-\sqrt{15}}{2}$； （8）$\sqrt{3}+3$，$\sqrt{3}-3$.

3. $2+\sqrt{k^2+4}$，$2-\sqrt{k^2+4}$.

习题 17.2(5)

1. （1）0，$\frac{\sqrt{2}}{3}$； （2）$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$； （3）1，-4； （4）-8，6.

2. $1\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$.

3. （1）$x_1\approx0.62$，$x_2\approx-1.62$； （2）$x_1\approx1.16$，$x_2\approx0.14$.

4. （1）$-1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$； （2）$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{8}$； （3）$\frac{3}{2}$，$-\frac{5}{2}$； （4）$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$；

（5）$-3\pm\sqrt{5}$； （6）4，$\frac{2}{3}$.

5. （1）$x=5$ 或 1； （2）$\frac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$.

6. 6，7，8，或 -8，-7，-6.

习题 17.3(1)

1. （1）×； （2）×； （3）×； （4）√.

2. （1）有两个不相等的实数根； （2）无实数根； （3）有两个相等的实数根； （4）有两个不相等的实数根.

3. 略.

习题 17.3(2)

1. （1）p^2-4q； （2）±4； （3）$k>1$； （4）$m\leqslant\frac{9}{16}$.

2. （1）$m>-2$ 且 $m\neq-1$； （2）$m=-2$； （3）$m<-2$.

3. $k=-2$ 或 1. 当 $k=-2$ 时，$x_1=x_2=-\frac{1}{2}$；当 $k=1$ 时，$x_1=x_2=1$.

4. $m=3$ 或 $m=4$.

习题 17.4(1)

1. (1) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$;

(2) $\frac{7+\sqrt{61}}{6}, \frac{7-\sqrt{61}}{6}, 3\left(x-\frac{7+\sqrt{61}}{6}\right)\left(x-\frac{7-\sqrt{61}}{6}\right)$;

(3) $4\left(x-\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)$; (4) $(x-2y-\sqrt{2}y)(x-2y+\sqrt{2}y)$.

2. (1) $(x+1+\sqrt{5})(x+1-\sqrt{5})$; (2) $(x-2-\sqrt{5})(x-2+\sqrt{5})$;

(3) $2\left(x-\frac{\sqrt{17}-3}{4}\right)\left(x+\frac{\sqrt{17}+3}{4}\right)$; (4) $-\left(a-\frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)\left(a-\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)$;

(5) $\left(x-\frac{\sqrt{13}-1}{2}y\right)\left(x+\frac{\sqrt{13}+1}{2}y\right)$; (6) $3\left(xy-\frac{\sqrt{10}-5}{3}\right)\left(xy+\frac{\sqrt{10}+5}{3}\right)$.

习题 17.4(2)

1. (1) $2x(x+2)=x^2+32$; (2) $a+a(1+x)+a(1+x)^2$.

2. 正方形的边长为 12 厘米;长方形的长和宽分别为 24 厘米、10 厘米.

3. 14 米,10 米.

4. 20%.

复习题

A 组

1. B. **2.** C. **3.** B. **4.** C.

5. (1) ± 6; (2) $x_1=x_2=3$; (3) $\frac{-1\pm\sqrt{2}}{3}$;

(4) $0,-4$; (5) $\frac{7\pm\sqrt{33}}{6}$; (6) $2,1$.

6. (1) $16,4,\frac{1}{4},\frac{1}{2}$; (2) $1,-4,\frac{p}{2},q-\frac{p^2}{4}$.

7. (1) $-2\pm\sqrt{3}$; (2) $7,-2$; (3) $-24\pm 8\sqrt{11}$; (4) $2\sqrt{2}\pm 3$;

(5) $-\frac{7}{2},-\frac{3}{2}$; (6) $5,3$; (7) $-4,2$; (8) $\frac{13}{4},-\frac{1}{4}$.

8. (1) 有两个不相等的实数根; (2) 有两个相等的实数根;

(3) 无实数根; (4) 有两个不相等的实数根.

9. $k<\frac{1}{4}$.

10. 一定有,因为 $\Delta=24m^2+1$ 恒大于 0.

11. (1) $\left(x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$; (2) $(x-1-\sqrt{7})(x-1+\sqrt{7})$;

(3) $2\left(x-\frac{\sqrt{30}-4}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{30}+4}{2}\right)$; (4) $\left(x-\frac{5+\sqrt{13}}{2}y\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{13}}{2}y\right)$;

(5) $-2\left(x-\frac{\sqrt{57}-3}{4}\right)\left(x+\frac{\sqrt{57}+3}{4}\right)$; (6) $4\left(xy-\frac{\sqrt{17}-1}{8}\right)\left(xy+\frac{\sqrt{17}+1}{8}\right)$.

12. 20 米,8 米.

B 组

1. (1) ± 1; (2) a,b; (3) $a,-\frac{5}{3}a$.

2. 1.

3. 1 米.

4. 20%.

5. 12%.

6. (1)

Δ	x_1	x_2
1	1	2
4	4	6
9	9	12

(2) 如:$x^2-36x+320=0$;

(3) $\Delta=n^2$,$x_1=n^2$,$x_2=n^2+n$,一般式为 $x^2-(2n^2+n)x+n^2(n^2+n)=0$.

第十八章　正比例函数和反比例函数

习题 18.1(1)

1. (1) 存在,婴儿的体重是该婴儿成长经过的月数的函数 .

(2) 不存在 .　(3) 不存在 .

(4) 存在,某班支援灾区的捐款数(元)是该班学生个人捐款平均数的函数 .

2. (1) 圆的周长 C(cm)随着半径 r(cm)的变化而变化,由 $C=2\pi r$,在 r 的允许取值的范围内,当 r 取定一个值时,C 的值随之确定,C 和 r 之间存在确定的依赖关系. C 是 r 的函数, 函数解析式是 $C=2\pi r$.

(2) 等腰三角形顶角的度数 y 随着底角 x 的变化而变化,由 $y=180-2x$,在 x 的允许取值的范围内,当 x 取定一个值时,y 的值随之确定,y 与 x 之间存在确定的依赖关系. y 是 x 的函数,函数解析式是 $y=180-2x$.

(3) 周长为 15cm 的等腰三角形,腰长 a 随着底边长 b 的变化而变化,由 $a=\dfrac{15-b}{2}$,在 b 的允许取值的范围内,当 b 取定一个值时,a 的值随之确定,a 与 b 之间存在确定的依赖关系. a 是 b 的函数,函数解析式是 $a=\dfrac{15-b}{2}$.

(4) 购买笔的总价 S 随着购买支数 n 的变化而变化,由 $S=2n$,在 n 的允许取值的范围内,当 n 取定一个值时,S 的值随之确定,S 与 n 之间存在确定的依赖关系. S 是 n 的函数,函数解析式是 $S=2n$.

(5) 乙种袋装米的千克数 y 随着甲种袋装米的千克数 x 的变化而变化,由 $y=25-x$,在 x 的允许取值的范围内,当 x 取定一个值时,y 的值随之确定,y 与 x 之间存在确定的依赖关系. y 是 x 的函数,函数解析式是 $y=25-x$.

3. $s=7.12t$.

4. 变量:注入水的流量 Q,注满水池所需的时间 t;

常量:水池的容量 300 立方米.

由 $Qt=300$,可知 Q 随着 t 的变化而变化, 在 t 的允许取值的范围内,当 t 取定一个值时,Q 的值随之确定,Q 与 t 之间存在确定的依赖关系. 所以 Q 是 t 的函数, 函数解析式是 $Q=\dfrac{300}{t}$.

5. (1) 变量:时间和记忆量. 从列表和图像中可见,当时间 t 变化时,记忆量 Q 也随之变化,Q 与 t 之间存在确定的依赖关系. Q 是 t 的函数.

(2) 略.

习题 18.1(2)

1. (1) x 是一切实数; (2) $x\neq 2$; (3) $x\leqslant\dfrac{3}{2}$; (4) $x>-\dfrac{2}{3}$.

2. (1) $y=2x-3$,x 是一切实数,略; (2) $y=\sqrt{x-3}+2$,$x\geqslant 3$,略.

3. $\frac{5}{4}$;1;a^2+1;a^2+2a+2.

4. (1) $y=15-2x$,$\frac{15}{4}<x<\frac{15}{2}$; (2) $y=\frac{15-x}{2}$,$0<x<\frac{15}{2}$.

习题 18.2(1)

1. (1) √,2; (2) √,$\frac{1}{2}$; (3) √,-1; (4) ×; (5) ×; (6) ×.

2. (1) 由 $C=4a$ 可知,正方形的周长 C 与边长 a 的比值是一个常数 4,所以 C 与 a 成正比例.
   (2) 由 $m=10t$ 可知,存款总数 m 与存款月数 t 的比值是一个常数 10,所以 m 与 t 成正比例.
   (3) 由 $h=0.75n$ 可知,笔记本叠在一起的总厚度 h 与笔记本的本数 n 的比值是一个常数 0.75,所以 h 与 n 成正比例.
   (4) 由 $a=6t$ 可知,分针一周内旋转的角度 α 与旋转的时间 t 的比值是一个常数 6,所以 α 与 t 成正比例.

3. 比例系数为 $-\frac{1}{5}$;函数值依次是 1、0、$-\frac{1}{10}$、$-\frac{\sqrt{3}}{5}$.

4. (1) $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$; (2) $\frac{8}{3}\sqrt{3}$.

5. 根据题意,得 $m=0.045a$. m 与 a 成正比例,比例系数是 0.045.

习题 18.2(2)

1. $a\neq 3$,$b=-2$.

2. 略.

3. (1) $y=-2x$; (2) $b=-2\sqrt{2}$.

4. $y=-\frac{5}{2}x$.

5. (1) 100; (2) 甲; (3) 8.

习题 18.2(3)

1. (1) 一、三,增大; (2) 二、四,减小; (3) 二、四,减小; (4) 一、三,增大.

2. $k<\frac{1}{2}$.

3. $y=-\frac{\sqrt{5}}{3}x$,当 x 的值增大时,y 的值减小.

4. (1) $y=5x(0\leqslant x\leqslant 4)$; (2) 略.

5. $75\div 25=3$(元/立方米),$y=3x$.

6. 直线 AC:$y=-\frac{4}{9}x$;直线 BD:$y=\frac{4}{9}x$.

习题 18.3(1)

1. (1) √,1; (2) √,-2; (3) ×; (4) ×; (5) ×; (6) √,$\frac{3}{5}$.

2. (1) 由 $vt=s$ 可知,速度与时间的乘积是一个常数(即 s),所以 v 与 t 成反比例.
   (2) 由 $ah=2s$ 可知,三角形的一边长 a 与这边上的高 h 的乘积是一个常数(即 $2s$),所以 a 与 h 成反比例.
   (3) 假设每个工人的工作效率都为 a,由 $t=\frac{Q}{na}$,即 $tn=\frac{Q}{a}$ 可知,时间 t 与人数 n 的乘积是一个常数$\left(即\frac{Q}{a}\right)$,所以 t 与 n 成反比例.

3. $k=-2$；$y=-\frac{2}{x}$，$x=\sqrt{6}$时，$y=-\frac{1}{3}\sqrt{6}$.

4. $k=1$；$y=\frac{2}{x}$.

5. 设飞轮每分钟转 n 周. 由 $46\times100=20\times n$，得 $n=230$.

答：飞轮每分钟转 230 周.

习题 18.3(2)

1. $k=2\sqrt{3}$.

2. 略.

3. (1) $-\frac{3}{5}$；增大； (2) $<$.

4. 设 $B(x,y)$. 矩形 $OABC$ 的面积$=BC\cdot BA=|x|\cdot|y|=|xy|=6$.

5. 错. 反比例函数的图像的两支不能与 x 轴和 y 轴相交.

习题 18.3(3)

1. (1) $y=-\frac{6}{x}$； (2) $k_1<0$.

2. B.

3. $y=\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{x}$.

4. y 与 z 成反比例.

5. C.

习题 18.4(1)

1. 解析法、列表法、图像法.

2. (1) $\frac{y}{x}=\frac{1}{1000}$，$y$ 与 x 成正比例； (2) $y=\frac{1}{1000}x(x\geqslant0)$；

(3) 当 $x=25$(克)时，$y=0.025$(千克)； (4) 略.

3. (1) 60； (2) 15，45； (3) 6； (4) $Q=60-5t(0\leqslant t\leqslant12)$.

4. C.

习题 18.4(2)

1. (1) $A(5,1)$； (2) 10.

2. $y=-x^2+25x(0<x<25)$.

3. (1) $y_{甲}=70x$，$y_{乙}=80(x-1)$.

(2) 当 $x=5$ 时，$y_{甲}=350$(元)，$y_{乙}=320$(元)，选乙旅行社.

(3) 当 $x=10$ 时，$y_{甲}=700$(元)，$y_{乙}=720$(元)，选甲旅行社.

4. (1) $y=\frac{1}{5x-2}$；

(2) 当 $x=0.55$ 时，$y=\frac{4}{3}$；当 $x=0.75$ 时，$y=\frac{4}{7}$.

得$\frac{4}{7}\leqslant y\leqslant\frac{4}{3}$， 即 $0.57\leqslant y\leqslant1.33$.

所以本年度计划用电量的范围是 1.57 亿度至 2.33 亿度.

复习题

A 组

1. $y=3-x$，是.

2. $\sqrt{3}$.

3. 正比例函数有①④;反比例函数有②③.
4. D.
5. $m=-1$.
6. 略.
7. (1) 一切实数; (2) $x\neq-\frac{1}{2}$; (3) $x\geqslant-\frac{1}{2}$; (4) $x>-\frac{1}{2}$.
8. $y=\frac{90}{x}(x>0)$.
9. $y=2x+\frac{2}{x}$;当 $x=4$ 时,$y=8.5$.
10. 当 a、b 异号时,两个函数的图像没有公共点.

B组

1. z 是 x 成反比例函数;当 $x=16$ 时,$z=-\frac{3}{2}$.
2. (1) 保持不变的线段有:AB、BC、CD、AD,变化的线段有:AP、PD、BP、CP.
   (2) $\triangle BPC$ 的面积保持不变,$\triangle ABP$ 和$\triangle PDC$ 的面积发生变化.
   (3) $y=10-x(0<x<10)$,$S=20-2x(0<x<10)$.
3. $m=6$.
4. C.
5. 图 C 反映甲的游泳状况,图 B 反映乙的游泳状况.
6. $y_1=12\times0.6$;$y_2=18\times0.6$;$y_3=24\times0.6$;…;$y_n=6(n+1)\times0.6=3.6(n+1)$.
   所以 $y_{10}=3.6\times(10+1)=3.6\times11=39.6$(米).
   答:每一层外边界所成多边形的周长 y 与层数 n 之间的函数解析式是 $y_n=3.6(n+1)$,第十层外边界所成的多边形的周长为 39.6 米.

第十九章　几何证明

习题 19.1(1)

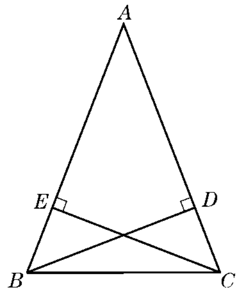
1. (1) 已知;互为补角的意义;等量代换.
   因:$\angle1$ 与$\angle2$ 互为补角,
   果:$\angle2=180^\circ-\angle1$.
   因:$\angle1$ 与$\angle3$ 互为补角,
   果:$\angle3=180^\circ-\angle1$.
   因:$\angle2=180^\circ-\angle1$,$\angle3=180^\circ-\angle1$,
   果:$\angle2=\angle3$.
   (2) 已知;角平分线的意义;已知;两直线平行,内错角相等;等量代换;等角对等边.
   因:AE 平分$\angle BAC$,
   果:$\angle1=\angle2$.
   因:$DE/\!/AC$,
   果:$\angle3=\angle2$.
   因:$\angle1=\angle2$,$\angle3=\angle2$,
   果:$\angle1=\angle3$.
   因:$\angle1=\angle3$,
   果:$DA=DE$.
2. 略.

习题 19.1(2)

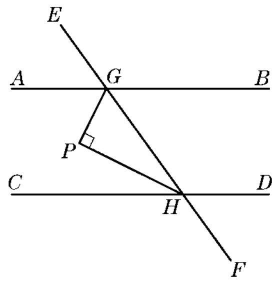
1. (1) B; (2) C.

2. （1） 已知：如图（1），$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$CE\perp AB$，$BD\perp AC$，垂足分别是点 E、D.

求证：$BD=CE$.



（1）



（2）

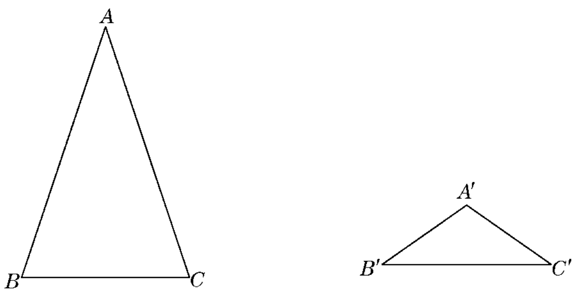
（2） 已知：如图（2），直线 AB、CD 被直线 EF 所截，且 $AB\parallel CD$，PG 平分 $\angle AGH$，PH 平分 $\angle CHG$.

求证：$PG\perp PH$.

3. （1） 如可以找到三个内角的度数分别为 90°、30°、60° 的两块三角板，它们的大小不一样，即这两块三角板分别所成的三角形不全等.

（2） 如 $\angle ABC=\angle A'B'C'=90^\circ$，这时 $\angle ABC$ 与 $\angle A'B'C'$ 互补，但这两个角不是锐角或钝角.

（3） 如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$；$\triangle A'B'C'$ 中，$A'B'=A'C'$；且 $BC=B'C'$，$\angle A=\angle B'$. 但 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 不全等.



习题 19.2（1）

1. 提示：利用平行线判定与性质.

2. 由 $AB\parallel CD$，得 $\angle A+\angle D=180^\circ$. 又 $\angle A=\angle C$，得 $\angle C+\angle D=180^\circ$.

所以 $AD\parallel BC$.

3. 提示：利用等腰三角形 OAD 与等腰三角形 OBC 的顶角相等，再由三角形内角和，推出 $\angle A=\angle B$，从而 $AD\parallel BC$.

习题 19.2（2）

1. 提示：利用等腰三角形性质与三角形的外角性质，推出 $\angle B=\angle C$，从而得 $AB=AC$.

2. 提示：证明 $\triangle OAC\cong\triangle OBD$，得 $\angle CAO=\angle DBO$；又根据 $OA=OB$，得 $\angle OAB=\angle OBA$，从而得到 $\angle CAB=\angle DBA$.

3. 提示：设法证明 $\triangle BCE\cong\triangle CBD$，从而得到 $\angle BCE=\angle CBD$，推出 $OB=OC$.

习题 19.2（3）

1. 提示：利用等腰三角形 OAB 与等腰三角形 ODC 的底角互余，再由三角形内角和，推出 $\angle A$ 与 $\angle D$ 互补，从而 $AB\parallel DC$.

2. 提示：证明 $\triangle ADF\cong\triangle CBE$，得 $\angle AFD=\angle CEB$；再利用等角的补角相等，得 $\angle AFB=\angle CED$. 推出 $AF\parallel CE$.

3. 提示:证明$\triangle ABD\cong\triangle CDB$,得$\angle ADB=\angle CBD$,推出$DE/\!/BF$. 所以$\angle E=\angle F$.

习题 19.2(4)

1. 提示:证明$\triangle ABC\cong\triangle CDE$,推出$\angle A=\angle DCE$.

2. 提示:证明$\triangle ABP\cong\triangle ACP$,得 $BP=CP$;再利用等腰三角形三线合一的性质,得 $BD=CD$,$AD\perp BC$.

3. (1) 提示:证明$\angle CBE=\angle FBE=150^\circ$,推出$\triangle BCE\cong\triangle BFE$.

(2) 由$\triangle BCE\cong\triangle BFE$,得$CE=FE$,$\angle CEB=\angle FEB$;再利用等腰三角形三线合一的性质,得$BE\perp CF$.

习题 19.2(5)

1. 提示:证明$\triangle ACD\cong\triangle ABE$.

2. 提示:方法一,证明$\triangle ABC\cong\triangle DCB$,得$AC=DB$;再利用$OC=OB$,推得$AO=DO$;方法二,利用 A. S. A 证明$\triangle ABO\cong\triangle DCO$,得$AO=DO$.

3. 提示:联结BD,证明$\triangle BDE\cong\triangle CDE$,得$BD=CD$,$\angle DBE=\angle C$,推出$\angle ADB=2\angle C$;再证明$AB=BD$,得$\angle A=\angle ADB$,从而得$\angle A=2\angle C$.

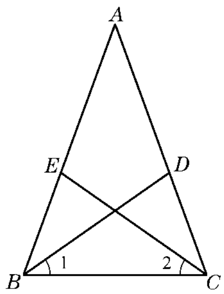
习题 19.2(6)

1. 提示:在BC上截取$CE=CA$,联结DE. 或者延长CA至点F,使$CF=CB$,联结FD.

2. 提示:方法之一是由$AB=AC$得$\angle B=\angle ACB$,可知$\angle A+2\angle B=180^\circ$;再利用$\angle BCD=90^\circ-\angle B$推出结论. 方法之二是作出$BC$边上的高$AE$为辅助线. 方法之三是在$AB$上取点$E$,使$CE=CB$,构造以$BE$为底边的等腰三角形$BCE$,证明$\angle A=\angle BCE$.

3. 提示:延长AE,交BC的延长线于点F;证明$\triangle ADE\cong\triangle FCE$,从而得$\triangle ABF$是等腰三角形;再利用等腰三角形的性质推出结论.

习题 19.2(7)



1. 已知:如图,$\triangle ABC$中,$AB=AC$,BD、CE分别是$\angle ABC$和$\angle ACB$的平分线,点D、E分别在边AC、AB上.

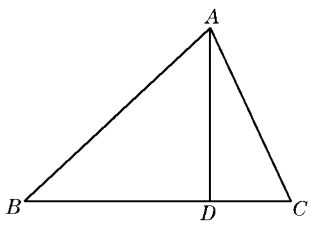
求证:$BD=CE$.

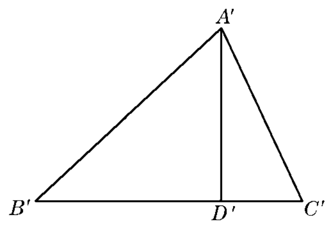
证明提示:先推出$\angle 1=\angle 2$;再证明$\triangle BCE\cong\triangle CBD$,得$BD=CE$.

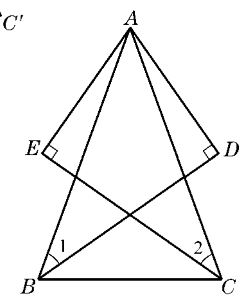
2. 已知:如图,在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中,$\angle BAC=\angle B'A'C'$,$\angle B=\angle B'$;$AD\perp BC$,$A'D'\perp B'C'$,垂足分别为点D、D',且$AD=A'D'$.

求证:$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

证明提示:先证明$\triangle ABD\cong\triangle A'B'D'$,得$AB=A'B'$;再推出$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.







3. 已知:如图,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,BD、CE分别是$\angle ABC$、$\angle ACB$的平分线;$AD\perp BD$,$AE\perp CE$,垂足分别为点D、E.

求证:$AD=AE$.

证明提示:先证明$\angle 1=\angle 2$,$\angle D=\angle E=90^\circ$;再证明$\triangle ABD\cong\triangle ACE$,得$AD=AE$.

习题 19.3

1. (1) 两角相等的三角形是等腰三角形.

(2) 轴对称图形是等边三角形.

(3) 四条边相等的四边形是正方形.

(4) 如果两个角不是对顶角,那么这两个角不相等.

2. (1) 逆命题:如果两个角相等,那么这两个角是直角.

举反例,如:两个角相等,它们的度数分别为 $50°$、$50°$,但这两个角不是直角.

(2) 逆命题:如果三角形中两个内角是锐角,那么这个三角形的第三个内角是钝角.

举反例,如:三角形的三个角分别是 $40°$、$60°$、$80°$,其中两个角是锐角,但它的第三个内角不是钝角.

习题 19.4

1. 提示:由 $AC=AD$,$BC=BD$,得点 A、B 都在 CD 的垂直平分线上,可知 AB 是 CD 的垂直平分线;由点 E 在 AB 上,得 $EC=ED$.

2. 提示:先证明 $\angle MAB=\angle MBA$,$\angle NAB=\angle NBA$;再利用等式性质,得 $\angle MAN=\angle MBN$.

3. 6cm.

4. (1) $35°$; (2) $10°$; (3) $54°$.

习题 19.5(1)

1. 提示:由角平分线性质,得 $DC=DE$,推出 $\angle DCE=\angle DEC$;又 $EF /\!/ BC$,得 $\angle FEC=\angle DCE$,所以 $\angle FEC=\angle DEC$,即 EC 平分 $\angle FED$.

2. 提示:过点 P 分别作 $PE\perp OA$,$PF\perp OD$,垂足分别是点 E、F. 由已知 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PCD}$ 和 $AB=CD$,推出 $PE=PF$,所以 OP 平分 $\angle AOD$.

3. 提示:证明 $\triangle BFD\cong\triangle CED$,得 $DF=DE$,所以 AD 平分 $\angle BAC$.

习题 19.5(2)

1. 8cm,8cm.

2. 提示:先证明 $\angle DFE=90°$,再推出 $DF=DB$.

3. 提示:推出 $CD=AC$,则点 C 在 AD 的垂直平分线上.

习题 19.6 (1)

1. 不正确,如线段 AB 的垂直平分线与 AB 的交点就不是轨迹中的点.

2. 过点 O 平行于直线 l 且与直线 l 的距离为 1 厘米的一条直线.

3. (1) AB,AB;(2) 线段 AB 的延长线.

习题 19.6(2)

1. 略. **2.** 略. **3.** 略. **4.** 略.

习题 19.7

1. 提示:证明 $\triangle ADC\cong\triangle AEB$,得 $AB=AC$.

2. 提示:先证明 $\mathrm{Rt}\triangle EBA\cong\mathrm{Rt}\triangle FCD$;再证明 $\triangle ACF\cong\triangle DBE$,得 $AF=DE$.

3. 提示:先证明 $\mathrm{Rt}\triangle ADB\cong\mathrm{Rt}\triangle A'D'B'$,得 $\angle B=\angle B'$;再证明 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$,推出 $AC=A'C'$.

4. 提示:先证明 $\mathrm{Rt}\triangle CDB\cong\mathrm{Rt}\triangle C'D'B'$,得 $\angle B=\angle B'$;再推出 $\triangle ACB\cong\triangle A'C'B'$.

习题 19.8(1)

1. 4,20.

2. 提示:(1) 由 $AB=AC$,点 F 是 BC 中点,可知 $AF\perp BC$,即 $\angle AFB=90°$;再利用直角三角形性质,推出 $2MF=AE$;

(2)与(1)同理,可证明 $AE=2MG$,推出 $MF=MG$.

3. 提示:先证明 $CE=BE=\frac{1}{2}BD$,推出 $\angle B=\angle ECB$;再证明 $\angle B=\frac{1}{2}\angle CEA$,推出 $\angle CEA=\angle A$,得

$AC=CE$,所以 $AC=\frac{1}{2}BD$.

4. 提示:联结 CD. 先证明$\triangle ADE \cong \triangle DAC$,得 $AE=DC$;再证明 $DC=\frac{1}{2}AB$,推出 $AE=\frac{1}{2}AB$.

习题 19.8 (2)

1. 6,9.

2. 提示:过点 G 作 $GF \perp AB$,垂足为点 F. 先证明$\angle GEF=30°$,推出 $GF=\frac{1}{2}EG$;再证明 $GF=GD$,所以 $GD=\frac{1}{2}EG$.

3. $\frac{2}{3}$.

4. 提示:先证明 $DC=DE$,得 $AD=2DE$;再推出$\angle A=30°$.

习题 19.8 (3)

1. 提示:(1) 证明$\triangle AEB \cong \triangle BDC$,得$\angle ABE=\angle BCD$;(2) 证明$\angle DOF=60°$,推出$\angle ODF=30°$,又 $DF \perp BE$,故 $OD=2OF$.

2. 提示:联结 AE. 先证明 $DE=AE=\frac{1}{2}BC$,又$\angle EDA=60°$,推出$\triangle ADE$ 是等边三角形,得 $AD=ED$.

3. 提示:取斜边 AB 中点 D,联结 CD.

4. 提示:(1) 先证明 $BC=\frac{1}{2}AB$;再证明$\angle DBA=30°$,又$\angle A=30°$,推出 $PF=\frac{1}{2}AP$,$PE=\frac{1}{2}PB$. 得 $PE+PF=\frac{1}{2}PB+\frac{1}{2}AP=\frac{1}{2}(PB+AP)=\frac{1}{2}AB=BC$.

(2) 联结 DP. 由 $S_{\triangle BDP}+S_{\triangle ADP}$,得$\frac{1}{2}AD \cdot BC=\frac{1}{2}BD \cdot PE+\frac{1}{2}AD \cdot PF$,推出 $BC=PE+PF$.

习题 19.9(1)

1. (1) 5; (2) 8.

2. (1) 15; (2) 9.

3. (1) 64; (2) 39; (3) 225.

4. $\sqrt{10}$.

习题 19.9(2)

1. 四边形 $ABCD$ 面积是 12.5;周长是 $3\sqrt{5}+3\sqrt{2}+\sqrt{13}$.

2. 24 米.

3. 10 千米.

4. 10 米.

习题 19.9(3)

1. (1) 直角三角形; (2) 3; (3) 直角三角形.

2. (1) B; (2) A.

3. $\triangle ABC$ 是直角三角形,最大内角度数是 90°.

习题 19.9(4)

1. (1) 26 ; (2) $b=12$,$c=15$.

2. 提示:利用勾股定理,得 $DC=12$,推出 $BD=BC-DC=24-12=12$;再可得 $AB=20$,推出$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

3. 提示:$AB^2+CD^2-(AC^2+BD^2)=(AB^2-AC^2)-(BD^2-CD^2)$,$AB^2=AC^2+BC^2$,$BD^2=CD^2+BC^2$,推出 $AB^2+CD^2-(AC^2+BD^2)=BC^2-BC^2=0$,所以 $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$.

4. $4\sqrt{17}$平方米.

习题 19.10

1. (1) 15; (2) $\sqrt{53}$; (3) $2\sqrt{17}$; (4) $\sqrt{66}$.

2. (1) 等腰三角形; (2) 等腰直角三角形; (3) 直角三角形.

3. $(1,0)$,或$(3,0)$,或$(-1,0)$,或$\left(\frac{1}{2},0\right)$.

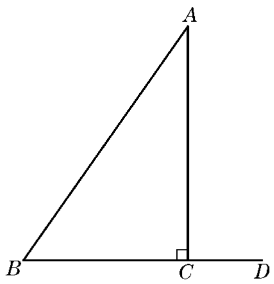
4. $m=1$.

复习题

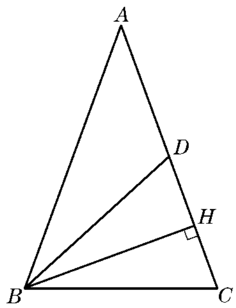
A 组

1. (1) 例如:全等三角形的对应角相等;
全等三角形对应边上的中线相等.
(2) 例如:等腰三角形两底角的角平分线相等;
等腰三角形两腰上的高相等.

2. (1) 假命题.反例:如图(1),$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$\triangle ABC$ 的外角$\angle ACD$ 与$\angle ACB$ 相等.



(1)



(2)

(2) 假命题(注意:这个命题有两种情况).
(3) 假命题.反例:如图(2),$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,BD、BH 分别是 AC 边上的中线、高.但 $BD\neq BH$.

3. 提示:先证明$\angle EAC=2\angle B$,再推出$\angle B=\angle EAD$,得 $AD/\!/BC$.

4. 提示:先证明$\angle EDA=\angle EAD$,得 $EA=ED$,从而得到 $EA=EB=ED$.再推出$\angle B=\angle EDB$,然后利用$\triangle ABD$ 的内角和等于 180°,可得$\angle EDA+\angle EDB=90°$,所以 $AD\perp BD$.

5. 提示:联结 BC.先证明$\triangle ABC\cong\triangle DCB$,得$\angle ABC=\angle DCB$ 及$\angle DBC=\angle ACB$,推出$\angle ABD=\angle DCA$.

6. 提示:对于方法 1(延长 BE 交 CD 于点 F),可利用三角形外角性质和平行线的性质进行证明;对于方法 2(联结 BD),可利用三角形内角和定理及平行线的性质进行证明;对于方法 3(过点 E 作 AB 的平行线 EF),可指出 $EF/\!/CD$,再利用平行线的性质进行证明.

7. 已知:如图,$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$,$AD$、$A'D'$分别是 BC、$B'C'$上的中线.
求证:$AD=A'D'$.
证明提示:先证明 $BD=B'D'$,再证明$\triangle ABD\cong\triangle A'B'D'$,得 $AD=A'D'$.

8. 150°或 30°.

9. 30°.

10. 30°.

11. 90°.

12. A.

13. 以点 A 为圆心、长度 4 为半径的圆.

14. 略.

15. 提示:先证明 $FD=FC$;再证明$\triangle AFD\cong\triangle AFC$,得$\angle DAF=\angle CAF$,推出 AF 垂直平分 CD.

16. C.

17. $\dfrac{(8+3\sqrt{3})\pi}{6}$.

18. 提示:利用勾股定理,推出 $AD^2=AC^2-CD^2$,$BD^2=BC^2-CD^2$;再计算 $AD^2+BD^2+2CD^2$,并注意 $AC^2+BC^2=AB^2$,得到结论.

19. 8.

20. $\triangle MEF$ 是等腰直角三角形,证明略.

B 组

1. 提示:先证明$\triangle ABD\cong\triangle CAE$,得$\angle ABD=\angle CAE$;再证明$\angle CAE=\angle ACB$,推出 $AE/\!/BC$.

2. 提示:先证明 $OB=OC$;再由点 A、O 都在线段 BC 的垂直平分线上,推出 $AD\perp BC$.

3. 提示:由 AD 是$\angle BAC$ 的平分线,利用轴对称性,在 AB 上截取 $AE=AC$,联结 DE. 证明$\triangle ACD\cong\triangle AED$及$\triangle BDE$是等腰三角形,推出$\angle C=2\angle B$.

4. 略. 提示:找到点 M(或 N)关于直线 AB 的对称点 M'(或 N'),联结 $M'N$(或 MN'),与 AB 相交即可.

5. 提示:(1) 取 AB 的中点 E,联结 DE. 证明$\triangle ACD\cong\triangle AED$,得$\angle C=\angle DEA$;再利用等腰三角形性质,推出 $DC\perp AC$.

(2) 先推出$\angle 2=\angle B$,再证明$\angle 1=30^\circ$,得 $AD=2CD$.

6. 提示:先证明 $FE=\dfrac{1}{2}AB$,$FD=\dfrac{1}{2}AB$,得 $FE=FD$;再利用等腰三角形性质,推出$\angle DFG=\angle EFG$.

7. 28 米.

8. 点 P 的坐标是$\left(\dfrac{21}{8},0\right)$或$\left(0,\dfrac{21}{10}\right)$.

9. $AC=3$,$BC=5$.

10. (1) 略; (2) 平行,理由略; (3) 可能,这时$\angle A=120^\circ$.

说　　明

本册教材根据上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会制定的课程方案和《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》编写,供九年义务教育八年级第一学期试用.

本教材由上海师范大学主持编写,经上海市中小学教材审查委员会审查准予试用.

本册教材的编写人员有:

主　编:邱万作　　　　分册主编:史荣铨

特约撰稿人:(按姓氏笔画为序)叶锦义　沈　洁　陆海兵　章　健　蔡则彪　瞿　军

2019年教材修订组成员:叶锦义　邵世开　沈　洁　陆海兵　徐晓燕　顾跃平

欢迎广大师生来电来函指出教材的差错和不足,提出宝贵意见.出版社电话:021-64319241.

插图绘制:黄国荣、顾云明

图书在版编目（CIP）数据

九年义务教育数学教学参考资料. 八年级. 第一学期:试用本 / 上海市中小学（幼儿园）课程改革委员会编. — 上海:上海教育出版社, 2019.7（2023.6重印）
ISBN 978−7−5444−9336−9

Ⅰ. ①九… Ⅱ. ①上… Ⅲ. ①中学数学课－初中－教学参考资料 Ⅳ. ①G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第147168号

经上海市中小学教材审查委员会审查
准予试用　准用号Ⅱ-CJ-2019003

责任编辑　周明旭
张莹莹

九年义务教育

数学教学参考资料

八年级第一学期

(试用本)

上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会

上海世纪出版股份有限公司
上　海　教　育　出　版　社　出版

（上海市闵行区号景路159弄C座　　邮政编码:201101）

上海新华书店发行　　上海华顿书刊印刷有限公司印刷

开本 890×1240　1/16　印张 11

2019年7月第1版　　2023年6月第5次印刷

ISBN 978-7-5444-9336-9/G·7697

定价:22.00元

此书如有印、装质量问题,请向本社调换　上海教育出版社电话:021-64373213

中国环境标志
CHINA ENVIRONMENTAL LABELLING
绿色印刷产品

ISBN 978-7-5444-9336-9