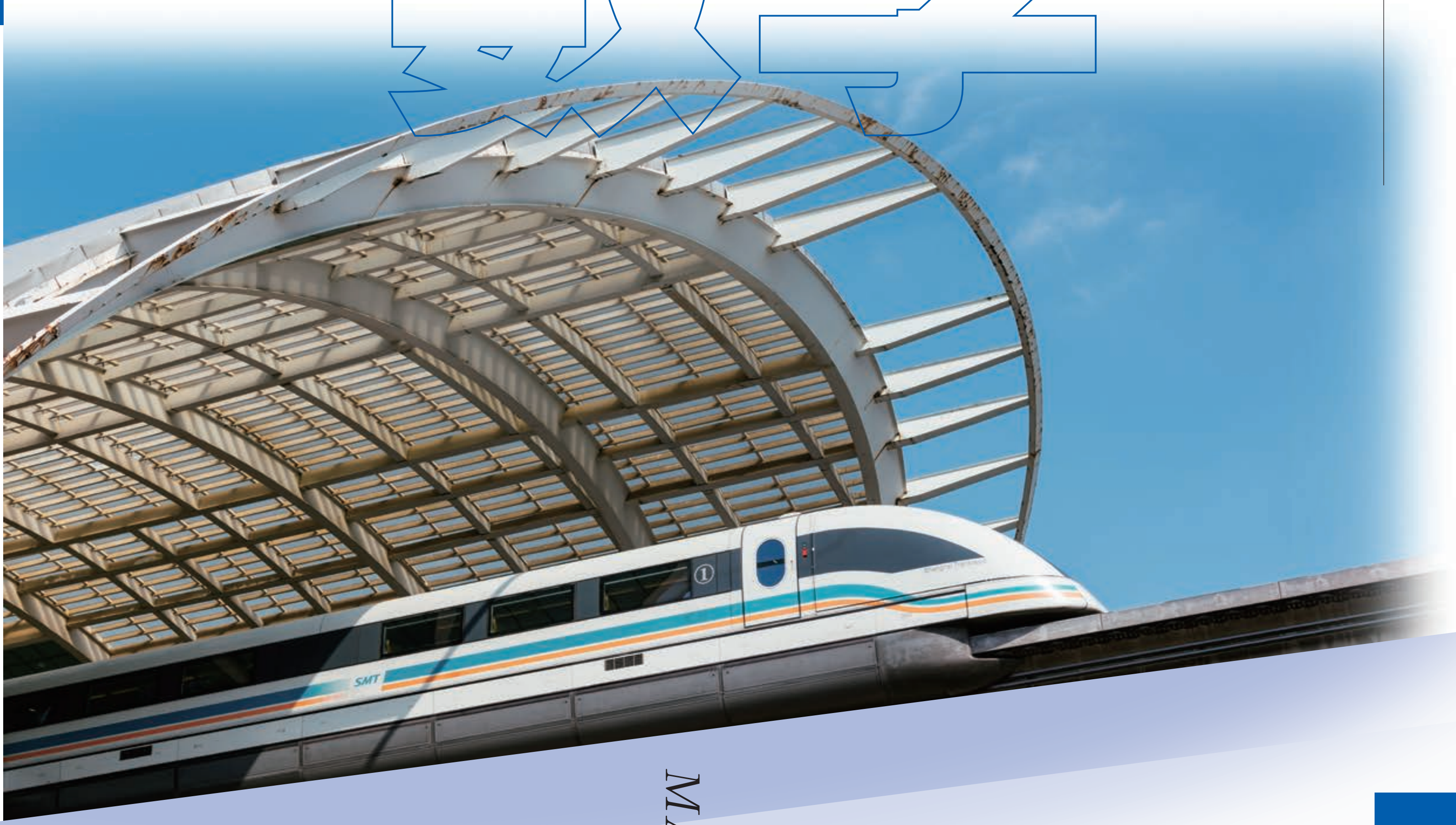
九年义务教育课本

八年级 第一学期

（试用本）

上海教育出版社

数学



MATHEMATICS

目录

16

第十六章　二次根式

17

第十七章　一元二次方程

18

第十八章 正比例函数和反比例函数

19

第十九章 几何证明

Ercigenshi

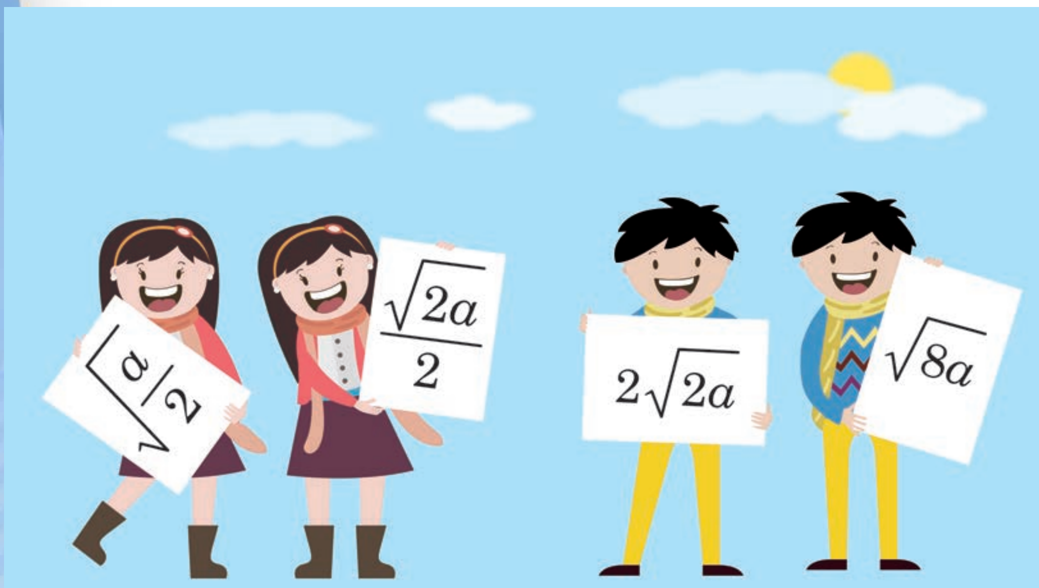
16 第十六章　二次根式

代数式是用运算符号和括号把数或表示数的字母连接而成的式子.其实,就是运用符号构成的数学语言.例如:

代数式$(a+b)(a-b)$,表示两个数的和与这两个数的差的积;

代数式 a^2-b^2,表示两个数的平方差;

公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,是一个数量关系的清晰表达.



用代数式表示数量和数量关系既简明又精确.通过整式和分式的学习,我们已经体会到,对于数的深入研究,需要采用式的表达形式;用数学语言描述实际问题中的数量和数量关系,需要发挥式的工具作用;而利用式来研究和解决问题的过程中,离不开式的运算、变形或化简.

在实数及其运算中,我们看到了形如$\sqrt{a}$这样的式子.它代表一类新的代数式,本章将对这类代数式进行研究.

第一节　二次根式的概念和性质

16.1　二次根式

在实数这一章，我们学习了开平方运算．当 $a\geqslant0$ 时，$\sqrt{a}$表示 a 的一个平方根．把它看作由平方根号“$\sqrt{\quad}$”与 a 所成的式子时，这是一个代数式.

代数式$\sqrt{a}$($a\geqslant0$)叫做**二次根式**．仍然读作“根号 a”，其中 a 是被开方数.

本章二次根式的被开方数可为整式或分式.

例如，$\sqrt{2}$、$\sqrt{\dfrac{2}{3}}$、$\sqrt{a^2+1}$、$\sqrt{b^2-4ac}$($b^2-4ac\geqslant0$)、$\sqrt{\dfrac{1}{x-2}}$($x>2$)等，都是二次根式.

在实数范围内，负数没有平方根，所以如 $\sqrt{-3}$、$\sqrt{b}$($b<0$)这样的式子没有意义.

$\sqrt{a}$有意义的条件是 $a\geqslant0$.

例题 1　设 x 是实数，当 x 满足什么条件时，下列各式有意义?

(1) $\sqrt{2x-1}$；　　(2) $\sqrt{2-x}$；

(3) $\sqrt{\dfrac{1}{x}}$；　　(4) $\sqrt{1+x^2}$.

解　(1) 由 $2x-1\geqslant0$，得 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$.

所以，当 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$时，$\sqrt{2x-1}$有意义.

(2) 由 $2-x\geqslant0$，得 $x\leqslant2$.

所以，当 $x\leqslant2$ 时，$\sqrt{2-x}$有意义.

(3) 由$\dfrac{1}{x}\geqslant0$ 以及 $x\neq0$，可知 x 与 1 同号，得 $x>0$.

所以，当 $x>0$ 时，$\sqrt{\dfrac{1}{x}}$有意义.

(4) 因为不论 x 是什么实数，都有 $x^2\geqslant0$，可知 $1+x^2>0$. 所以，当 x 是任何实数时，$\sqrt{1+x^2}$都有意义.

在平方根的学习中，我们根据开平方与平方互为逆运算的关

系，得到了下列等式. 现在把这两个等式作为二次根式的性质：

性质 1 $\sqrt{a^2}=a \quad (a\geqslant 0)$.

性质 2 $(\sqrt{a})^2=a \quad (a\geqslant 0)$.

问题 1

当 a 为实数时，$\sqrt{a^2}$ 与 $|a|$ 有什么关系？

试填写下表：

a	-3	-1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	3
$\sqrt{a^2}$							
$\|a\|$							

根据填表的结果，你认为 $\sqrt{a^2}$ 与 $|a|$ 有什么样的关系？

一般来说，由 $a^2=|a|^2$，得 $\sqrt{a^2}=\sqrt{|a|^2}$，其中 $|a|\geqslant 0$. 利用二次根式的性质 1，可知 $\sqrt{|a|^2}=|a|$，所以

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a>0),\\ 0 & (a=0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

例题2 求下列二次根式的值：

(1) $\sqrt{(3-\pi)^2}$；

(2) $\sqrt{x^2-2x+1}$，其中 $x=-\sqrt{3}$.

解 (1) $\sqrt{(3-\pi)^2}=|3-\pi|$.

因为 $3-\pi<0$，所以

$$|3-\pi|=-(3-\pi)=\pi-3.$$

所以，$\sqrt{(3-\pi)^2}=\pi-3$.

(2) $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$.

当 $x=-\sqrt{3}$ 时，原式 $=|-\sqrt{3}-1|$.

因为 $-\sqrt{3}-1<0$，所以

$$|-\sqrt{3}-1|=-(-\sqrt{3}-1)=\sqrt{3}+1.$$

所以，当 $x=-\sqrt{3}$ 时，原二次根式的值是 $\sqrt{3}+1$.

在解题(1)时，判断 $3-\pi<0$ 的过程表达不作为规定的格式要求，本题可表述为 $\sqrt{(3-\pi)^2}=|3-\pi|=\pi-3$.
以后对类似问题可同样处理.
注意，计算结果的表达式中，通常应去掉绝对值符号.

练习 16.1(1)

1. 设 x 是实数，当 x 满足什么条件时，下列各式有意义？

(1) $\sqrt{\frac{1}{3}-2x}$；　　(2) $\sqrt{-\frac{2}{x}}$；　　(3) $\sqrt{x^2-2x+1}$.

2. 求下列二次根式的值：

(1) $\sqrt{-\frac{c}{a}}$，其中 $a=2, c=-\frac{1}{2}$；　　(2) $\sqrt{\frac{1}{(m+2)^2}}$，其中 $m=-5$.

3. 设 a、b、c 分别是三角形三边的长，化简：$\sqrt{(a-b+c)^2}+\sqrt{(b-c-a)^2}$.

性质 3、4 两个等式中，左边是以两个数的积（或商）为被开方数的二次根式，右边是分别以这两个数为被开方数的两个二次根式的积（或商）. 在二次根式的运算或变换中，可以据此从左到右或从右到左进行转化.

我们把以前实数运算中已经得出的两个等式也作为二次根式的性质：

性质 3　$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$　$(a\geqslant 0, b\geqslant 0)$.

性质 4　$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$　$(a\geqslant 0, b>0)$.

问题2

$\sqrt{18}$与 $3\sqrt{2}$相等吗？为什么？

将 18 分解素因数，得 $18=2\times 3^2$. 利用二次根式的性质 3和性质 1，可知它们相等.

$$\sqrt{18}=\sqrt{2\times 3^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{3^2}=3\sqrt{2}.$$

一般地，设 $a\geqslant 0, b\geqslant 0$，那么

$$\sqrt{ab^2}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b^2}=b\sqrt{a}.$$

一般来说，如果二次根式里被开方数是几个因式的乘积，其中有的因式是完全平方式，那么这样的因式可用它的非负平方根代替后移到根号外面.

想一想

如果 $a\geqslant 0, b<0$，那么 $\sqrt{ab^2}=b\sqrt{a}$是否成立？

$\sqrt{ab^2}$
$=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b^2}=|b|\sqrt{a}$.

问题3

$\sqrt{\frac{3}{8}}$与$\frac{\sqrt{6}}{4}$相等吗？为什么？

利用分数的基本性质以及二次根式的性质 4 和性质 1，可知它们相等.

$$\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3\times 2}{8\times 2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4^2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

类似地，设 $a\geqslant 0$，$b>0$，那么

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{a\cdot b}{b\cdot b}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

把二次根式里被开方数所含的完全平方因式移到根号外，或者化去被开方数的分母的过程，称为“化简二次根式”.

通常把形如 $m\sqrt{a}\,(a\geqslant 0)$ 的式子也叫做二次根式. 如 $3\sqrt{2}$，$-\sqrt{3}$，$2a\sqrt{b^2+1}$等也是二次根式.

> 如果二次根式中被开方数是分式（或分数），那么可以化去分母. 方法是将分子和分母同乘一个不等于零的代数式，使分母变为完全平方式，再将分母用它的正平方根代替后移到根号外面作新的分母.

> 本章给出的二次根式（或其他代数式）中所含字母的取值都能确保二次根式（或其他代数式）有意义.

例题3 化简二次根式：

(1) $\sqrt{72}$；　(2) $\sqrt{12a^3}$；　(3) $\sqrt{18x^2}\ (x\geqslant 0)$.

解 (1) $\sqrt{72}=\sqrt{6^2\times 2}=6\sqrt{2}$.

(2) $\sqrt{12a^3}=\sqrt{2^2\cdot 3\cdot a^2\cdot a}=\sqrt{(2a)^2\cdot 3a}=2|a|\sqrt{3a}$.

由 $12a^3\geqslant 0$，可知 $a\geqslant 0$，所以$\sqrt{12a^3}=2a\sqrt{3a}$.

(3) $\sqrt{18x^2}=\sqrt{3^2\cdot 2\cdot x^2}=3\sqrt{2}|x|$.

因为 $x\geqslant 0$，所以$\sqrt{18x^2}=3\sqrt{2}x$.

> 题(2)中对字母 a 的讨论，是为了去掉$|a|$中的绝对值符号. 判断 $a\geqslant 0$ 的过程表达，可不作规定的格式要求. 如解题(2)，可表述为
> $\sqrt{12a^3}=\cdots=2|a|\sqrt{3a}$
> $=2a\sqrt{3a}$.
> 以后类似问题可以同样处理.

例题4 化简二次根式：

(1) $\sqrt{\frac{a}{3}}$；　(2) $\sqrt{\frac{5}{2x}}$；　(3) $\sqrt{\frac{b^2}{9a}}\ (b>0)$.

解 (1) $\sqrt{\frac{a}{3}}=\sqrt{\frac{3a}{3^2}}=\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{3^2}}=\frac{\sqrt{3a}}{3}$.

(2) 由$\frac{5}{2x}\geqslant 0$，可知 $x>0$.

所以$\sqrt{\frac{5}{2x}}=\sqrt{\frac{5\cdot 2x}{2^2\cdot x^2}}=\frac{\sqrt{10x}}{\sqrt{(2x)^2}}=\frac{\sqrt{10x}}{2|x|}=\frac{\sqrt{10x}}{2x}$.

(3) 已知 $b>0$，又由$\frac{b^2}{9a}\geqslant 0$，可知 $a>0$.

所以$\sqrt{\frac{b^2}{9a}}=\sqrt{\frac{b^2\cdot a}{3^2\cdot a^2}}=\frac{\sqrt{b^2\cdot a}}{\sqrt{(3a)^2}}=\frac{|b|\sqrt{a}}{3|a|}=\frac{b\sqrt{a}}{3a}$.

练习 16.1(2)

1. 下列等式一定成立吗？如要成立，需要添加什么条件？

(1) $\sqrt{mn}=\sqrt{m}\cdot\sqrt{n}$；　　(2) $\sqrt{\dfrac{m}{n}}=\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$.

2. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{32}$；　　(2) $\sqrt{27x^2}$ $(x\geqslant 0)$；　　(3) $\dfrac{1}{2}\sqrt{24mn^3}$ $(n\geqslant 0)$.

3. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{2\dfrac{2}{3}}$；　　(2) $\sqrt{\dfrac{a}{4}}$；　　(3) $6\sqrt{\dfrac{y}{12x^3}}$.

16.2　最简二次根式和同类二次根式

1. 最简二次根式

观察

观察下列二次根式及其化简所得结果，比较每组两个二次根式里的被开方数前后发生了什么变化.

$$\sqrt{18} \longrightarrow 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\frac{a}{3}} \longrightarrow \frac{\sqrt{3a}}{3}$$

$$\sqrt{\frac{b^2}{9a}}\ (b>0) \longrightarrow \frac{b\sqrt{a}}{3a}\ (b>0)$$

被开方数中的因式是指因式分解和素因数分解后的因式和因数.

可以看到，化简后的二次根式里：

(1) 被开方数中各因式的指数都为 1；

(2) 被开方数不含分母.

被开方数同时符合上述两个条件的二次根式，叫做**最简二次根式**.

如二次根式 $\sqrt{3ab}$、$\dfrac{1}{4}\sqrt{x^2+y}$、$\sqrt{6m(a^2+b^2)}$ 等都是最简二次根式.

例题 1　判断下列二次根式是不是最简二次根式：

(1) $\sqrt{\dfrac{5a}{3}}$；　　(2) $\sqrt{42a}$；

(3) $\sqrt{24x^3}$；　　(4) $\sqrt{3(a^2+2a+1)}$.

解　(1) 因为被开方数 $\dfrac{5a}{3}$ 含分母 3，所以 $\sqrt{\dfrac{5a}{3}}$ 不是最简二次

根式.

(2) 被开方数分解为:$42a=2\cdot3\cdot7\cdot a$,可知$\sqrt{42a}$是最简二次根式.

(3) 因为被开方数含因式 2^2、x^3,它们的指数不为 1,所以$\sqrt{24x^3}$不是最简二次根式.

(4) 将被开方数分解因式:

$$3(a^2+2a+1)=3(a+1)^2,$$

其中因式$(a+1)$的指数为 2,所以$\sqrt{3(a^2+2a+1)}$不是最简二次根式.

想一想

例题 1(1)(3)(4)中的二次根式能化成最简二次根式吗?

如果一个二次根式不是最简二次根式,那么可以利用上一节化简二次根式的方法,把它化成最简二次根式.

例题2 将下列二次根式化成最简二次根式:

(1) $\sqrt{4x^3y^2}$ $(y>0)$;

(2) $\sqrt{(a^2-b^2)(a+b)}$ $(a\geqslant b\geqslant0)$;

(3) $\sqrt{\dfrac{m+n}{m-n}}$ $(m>n>0)$.

解 (1) $\sqrt{4x^3y^2}=\sqrt{2^2\cdot x^2\cdot x\cdot y^2}=2|xy|\sqrt{x}$.

已知 $y>0$,又由 $4x^3y^2\geqslant0$,可知 $x\geqslant0$.

所以$\sqrt{4x^3y^2}=2xy\sqrt{x}$.

(2) $\sqrt{(a^2-b^2)(a+b)}=\sqrt{(a+b)(a-b)(a+b)}$

$=\sqrt{(a+b)^2(a-b)}=|a+b|\sqrt{a-b}$.

已知 $a\geqslant b\geqslant0$,可知 $a+b\geqslant0$.

所以$\sqrt{(a^2-b^2)(a+b)}=(a+b)\sqrt{a-b}$.

(3) $\sqrt{\dfrac{m+n}{m-n}}=\sqrt{\dfrac{(m+n)(m-n)}{(m-n)^2}}=\dfrac{\sqrt{m^2-n^2}}{|m-n|}$.

已知 $m>n>0$,可知 $m-n>0$.

所以$\sqrt{\dfrac{m+n}{m-n}}=\dfrac{\sqrt{m^2-n^2}}{m-n}$.

练习 16.2(1)

1. 判断下列二次根式中,哪些是最简二次根式:

$$\sqrt{\frac{1}{3}},\ \sqrt{ab},\ \sqrt{2c^2},\ \sqrt{\frac{y}{x}},\ \sqrt{4a^2+4a+1},\ \sqrt{a^2+b^2}.$$

2. 找出下列二次根式中的非最简二次根式，并把它们化成最简二次根式：

$$\sqrt{14},\ \sqrt{\frac{4}{m}},\ \sqrt{5(u^2-v^2)},\ \sqrt{a^2b-a^2c}\ (a>0),\ \sqrt{\frac{3y^2}{x^3}}\ (y>0).$$

3. 将下列各二次根式化成最简二次根式：

$$\sqrt{3a^5},\ \sqrt{\frac{ab^3}{4}}\ (b>0),\ \sqrt{a^3(x+y)^2(x-y)}\ (x>y>0),\ \sqrt{\frac{p^2}{p-q}}\ (p>q>0).$$

2. 同类二次根式

问题

把二次根式 $\sqrt{8a}$ 与 $\sqrt{\frac{1}{2a}}$ 化成最简二次根式，所得结果有什么相同之处？

通过化简，得

$$\sqrt{8a}=2\sqrt{2a};\quad \sqrt{\frac{1}{2a}}=\frac{1}{2a}\sqrt{2a}.$$

可见，两个最简二次根式里的被开方数都是 $2a$.

几个二次根式化成最简二次根式后，如果被开方数相同，那么这几个二次根式叫做**同类二次根式**.

上述 $\sqrt{8a}$ 与 $\sqrt{\frac{1}{2a}}$ 是同类二次根式.

例题3 下列二次根式中，哪些是同类二次根式？

$$\sqrt{12},\ \sqrt{24},\ \sqrt{\frac{1}{27}},\ \sqrt{a^4b},\ 2\sqrt{a^3b}\ (a>0),\ -\sqrt{ab^3}\ (a>0).$$

解 把二次根式化成最简二次根式，得

$$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times 3}=2\sqrt{3};$$

$$\sqrt{24}=\sqrt{2^2\times 2\times 3}=2\sqrt{6};$$

$$\sqrt{\frac{1}{27}}=\sqrt{\frac{3}{9^2}}=\frac{\sqrt{3}}{9};$$

$$\sqrt{a^4b}=a^2\sqrt{b};$$

$$2\sqrt{a^3b}=2\sqrt{a^2\cdot ab}=2a\sqrt{ab}\quad (a>0);$$

$$-\sqrt{ab^3}=-\sqrt{ab\cdot b^2}=-b\sqrt{ab}\quad (\text{由 } a>0,\text{可知 } b\geqslant 0).$$

所以，$\sqrt{12}$ 与 $\sqrt{\frac{1}{27}}$ 是同类二次根式，$2\sqrt{a^3b}$ 与 $-\sqrt{ab^3}$ 是同类二次根式.

当 $a<0$，$b<0$ 时，$2\sqrt{a^3b}$ 与 $-\sqrt{ab^3}$ 是同类二次根式吗？

我们知道，在多项式中，遇到同类项就可以合并．类似地，同类二次根式也可以合并.

例题4 合并下列各式中的同类二次根式：

(1) $2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{2}+\sqrt{3}$；

(2) $3\sqrt{xy}-a\sqrt{xy}+b\sqrt{xy}$.

解 (1) $2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$=\left(2+\frac{1}{3}\right)\sqrt{2}+\left(-\frac{1}{2}+1\right)\sqrt{3}$

$=\frac{7}{3}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(2) $3\sqrt{xy}-a\sqrt{xy}+b\sqrt{xy}$

$=(3-a+b)\sqrt{xy}$.

练习 16.2(2)

1. 下列各组二次根式中，属同类二次根式的是 (　　)

(A) $2\sqrt{3}$与$\sqrt{6}$； (B) $\sqrt{\frac{1}{3}}$与$\frac{\sqrt{2}}{3}$；

(C) $\sqrt{18}$与$\sqrt{\frac{1}{2}}$； (D) $\sqrt{4a}$与$\sqrt{8a}$.

2. 在$\sqrt{16}$、$\frac{\sqrt{72}}{2}$、$-\sqrt{48}$中，与$\sqrt{2}$是同类二次根式的是________________.

3. 判断下列各组中的二次根式是不是同类二次根式：

(1) $\sqrt{32}$，$\sqrt{50}$，$2\sqrt{\frac{1}{18}}$； (2) $\sqrt{4x^3}$，$2\sqrt{2x}$，$\sqrt{8x^2}$ $(x\geqslant 0)$；

(3) $\sqrt{3x}$，$\sqrt{3a^2x^3}$ $(a>0)$，$\sqrt{\frac{xy^2}{3}}$ $(y>0)$.

4. 合并下列各式中的同类二次根式：

(1) $3\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}}{2}-4\sqrt{5}$； (2) $2\sqrt{a}+4\sqrt{b}-6\sqrt{a}+\frac{1}{2}\sqrt{b}$.

第二节　二次根式的运算

16.3　二次根式的运算

1. 二次根式的加法和减法

整式的加减归结为合并同类项．二次根式的加减同整式的加减类似，归结为合并同类二次根式．

问题 1

怎样计算 $a^2\sqrt{8a}+\sqrt{50a^3}-\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{a}}+2\sqrt{a}$？

分析　观察算式中的四个二次根式，它们不都是最简二次根式．它们之中有没有同类二次根式，要化成最简二次根式后才能判断.

> 根据算式中所含二次根式，可知 $a>0$.

由 $a^2\sqrt{8a}=2a^2\sqrt{2a}$，$\sqrt{50a^3}=5a\sqrt{2a}$，$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{a}}=\frac{\sqrt{2a}}{2}$，可知这三个二次根式是同类二次根式，可以将它们合并．

> 不是同类二次根式的根式不能合并，保留在结果中.

$$\text{原式}=2a^2\sqrt{2a}+5a\sqrt{2a}-\frac{\sqrt{2a}}{2}+2\sqrt{a}$$

$$=\left(2a^2+5a-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2a}+2\sqrt{a}.$$

由此可见，二次根式相加减的一般过程是：

先把各个二次根式化成最简二次根式，再把同类二次根式分别合并.

例题 1　计算：

(1) $3\sqrt{75}+\frac{\sqrt{48}}{2}$；

(2) $\left(\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{75}\right)$.

解　(1) $3\sqrt{75}+\frac{\sqrt{48}}{2}$

$$=3\sqrt{5^2\times 3}+\frac{\sqrt{4^2\times 3}}{2}=15\sqrt{3}+2\sqrt{3}=17\sqrt{3}.$$

(2) $\left(\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{75}\right)$

$=\sqrt{\frac{1}{2}}-2\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{75}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}+5\sqrt{3}$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\sqrt{2}+\left(5-\frac{2}{3}\right)\sqrt{3}$

$=\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{13}{3}\sqrt{3}.$

例题2 计算：

(1) $\frac{2}{3}\sqrt{9m}+\frac{3}{4}\sqrt{16m}$；

(2) $\sqrt{50(p-q)}+\sqrt{\frac{8}{p-q}}$.

解 (1) $\frac{2}{3}\sqrt{9m}+\frac{3}{4}\sqrt{16m}$

$=\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{m}+\frac{3}{4}\cdot 4\sqrt{m}$

$=2\sqrt{m}+3\sqrt{m}=5\sqrt{m}.$

(2) $\sqrt{50(p-q)}+\sqrt{\frac{8}{p-q}}$

$=\sqrt{5^2\cdot 2\cdot(p-q)}+\sqrt{\frac{2^3(p-q)}{(p-q)^2}}$

$=5\sqrt{2(p-q)}+\frac{2}{|p-q|}\sqrt{2(p-q)}.$

由$\frac{8}{p-q}\geqslant 0$，可知 $p-q>0$.

所以$\sqrt{50(p-q)}+\sqrt{\frac{8}{p-q}}$

$=\left(5+\frac{2}{p-q}\right)\sqrt{2(p-q)}.$

例题3 解不等式：$2x+\sqrt{\frac{5}{4}}>4x-\sqrt{\frac{5}{9}}$.

解 由 $2x+\sqrt{\frac{5}{4}}>4x-\sqrt{\frac{5}{9}}$，

得 $2x-4x>-\sqrt{\frac{5}{4}}-\sqrt{\frac{5}{9}}$，

$-2x>-\sqrt{\frac{5}{2^2}}-\sqrt{\frac{5}{3^2}}$，

$-2x>-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{3}$，

$$-2x>-\frac{5\sqrt{5}}{6},$$

$$x<\frac{5\sqrt{5}}{12}.$$

不等式两边同除（乘）以一个负数，不等号要改变方向.

所以，原不等式的解集是 $x<\frac{5\sqrt{5}}{12}$.

练习 16.3(1)

1. 计算：

（1）$6\sqrt{3}+\sqrt{0.12}-\sqrt{48}$；

（2）$\sqrt{8x}-2\sqrt{\frac{x}{2}}+2x\sqrt{\frac{2}{9x}}$.

2. 解方程：$\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{27}{8}}+x+\sqrt{\frac{75}{2}}$.

3. 解不等式：$2x+\sqrt{18}<7x-\sqrt{98}$.

2. 二次根式的乘法和除法

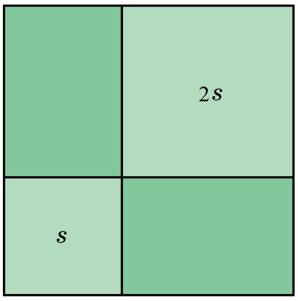


图 16－1

问题2

如图 16－1，将一个正方形分割成面积分别为 s（平方单位）和 $2s$（平方单位）的两个小正方形和两个长方形，求图中每个长方形的面积.

分析 图中每个长方形的相邻两边的长分别是面积为 s 和 $2s$ 的两个小正方形的边长，即$\sqrt{s}$和 $\sqrt{2s}$，其中 $s>0$. 由此可知每个长方形的面积是$\sqrt{s}\cdot\sqrt{2s}$.

由二次根式的性质 3，可得

$$\sqrt{s}\cdot\sqrt{2s}=\sqrt{s\cdot 2s}=\sqrt{2s^2}=\sqrt{2}s.$$

求得每个长方形的面积为$\sqrt{2}s$（平方单位）.

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.
上式从左到右变形时，已隐含 $a\geqslant 0, b\geqslant 0$ 的条件.

二次根式的性质 3 也就是二次根式相乘的法则，即

两个二次根式相乘，被开方数相乘，根指数不变.

例题4 计算：

（1）$\sqrt{12}\times\sqrt{32}$；

（2）$\sqrt{ab}\cdot\sqrt{4b}$；

(3) $\sqrt{abc}\cdot 2\sqrt{abc^2}$.

解 (1) $\sqrt{12}\times\sqrt{32}$

$=\sqrt{12\times 32}=\sqrt{2^2\times 3\times 2^5}$

$=\sqrt{(2^3)^2\times 2\times 3}=2^3\times\sqrt{2\times 3}=8\sqrt{6}$.

(2) $\sqrt{ab}\cdot\sqrt{4b}$

$=\sqrt{ab\cdot 4b}=\sqrt{a\cdot 2^2\cdot b^2}=2|b|\sqrt{a}=2b\sqrt{a}$.

(3) $\sqrt{abc}\cdot 2\sqrt{abc^2}$

$=2\sqrt{abc\cdot abc^2}=2\sqrt{a^2b^2c^2\cdot c}=2|abc|\sqrt{c}=2abc\sqrt{c}$.

二次根式相乘的结果必须化成最简二次根式.

题(2)中由根式 $\sqrt{4b}$ 可知 $b\geqslant 0$;题(3)中由根式 $\sqrt{abc}$ 可知 $abc\geqslant 0$.

两个二次根式相除,怎样进行运算?

同样地,二次根式的性质 4 就是二次根式相除的法则,即

两个二次根式相除,被开方数相除,根指数不变.

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

上式从左到右变形时,已隐含 $a\geqslant 0$,$b>0$ 的条件.

例题5 计算:

(1) $\sqrt{2a}\div\sqrt{3b}$;

(2) $\sqrt{6u^2}\div\sqrt{10u^3v}$;

(3) $\sqrt{a+b}\div\sqrt{a^2c-b^2c}$ $(a>b>0)$.

解 (1) $\sqrt{2a}\div\sqrt{3b}$

$=\sqrt{\dfrac{2a}{3b}}=\sqrt{\dfrac{2a\cdot 3b}{(3b)^2}}=\dfrac{\sqrt{6ab}}{\sqrt{(3b)^2}}=\dfrac{\sqrt{6ab}}{3|b|}=\dfrac{\sqrt{6ab}}{3b}$.

如果二次根式相除的结果是根式,那么必须化成最简根式.

(2) $\sqrt{6u^2}\div\sqrt{10u^3v}$

$=\sqrt{\dfrac{6u^2}{10u^3v}}=\sqrt{\dfrac{3}{5uv}}=\sqrt{\dfrac{3\cdot 5uv}{(5uv)^2}}$

$=\dfrac{\sqrt{15uv}}{\sqrt{(5uv)^2}}=\dfrac{\sqrt{15uv}}{5|uv|}$.

由除式中 $10u^3v=10u^2\cdot uv>0$,可知 $uv>0$.

所以 $\sqrt{6u^2}\div\sqrt{10u^3v}=\dfrac{\sqrt{15uv}}{5uv}$.

(3) $\sqrt{a+b}\div\sqrt{a^2c-b^2c}$

$=\sqrt{\dfrac{a+b}{c(a^2-b^2)}}=\sqrt{\dfrac{a+b}{c(a+b)(a-b)}}$

$$=\sqrt{\frac{c(a-b)}{c^2(a-b)^2}}=\frac{\sqrt{c(a-b)}}{|c(a-b)|}.$$

由 $a+b\geqslant 0$，$a^2c-b^2c=c(a-b)(a+b)>0$，

可知 $c(a-b)>0$.

所以 $\sqrt{a+b}\div\sqrt{a^2c-b^2c}=\dfrac{\sqrt{c(a-b)}}{c(a-b)}$.

练习 16.3(2)

1. 计算：

(1) $\sqrt{0.1}\times\sqrt{0.07}$；　(2) $\sqrt{13}\div\sqrt{\dfrac{104}{4}}$；　(3) $\sqrt{35}\times\sqrt{\dfrac{5}{2}}\div\sqrt{\dfrac{4}{7}}$.

2. 计算：

(1) $\sqrt{54xy}\cdot\sqrt{\dfrac{y^2}{5x}}$ $(x>0)$；　(2) $-\sqrt{st^3}\div\sqrt{s^2t}$；

(3) $\sqrt{\dfrac{6}{x+y}}\div\sqrt{\dfrac{12}{x-y}}$.

3. 探索：如果圆的面积与正方形的面积相等，那么圆的周长与正方形周长之比的比值是多少？

两个根式相除，如例题 5(1) $\sqrt{2a}\div\sqrt{3b}$，可以写为$\dfrac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3b}}$；转化为$\sqrt{\dfrac{2a}{3b}}$后，再化去根式里被开方数的分母，所得结果是$\dfrac{\sqrt{6ab}}{3b}$.

思考

把代数式$\dfrac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3b}}$和$\dfrac{\sqrt{6ab}}{3b}$中分数线下的式子看作分母，前一个分母是根式，后一个分母是整式. 这两个分母之间有什么关系？怎样把分母中的 $\sqrt{3b}$化为 $3b$?

把$\dfrac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3b}}$中的横线称作“分数线”，横线下的代数式称作“分母”，这是沿用分数和分式中的说法.

把$\dfrac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3b}}$的分数线上、下两式看作两个数相除，利用除法的性质以及根式乘法的法则，可得

$$\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3b}}=\frac{\sqrt{2a}\cdot\sqrt{3b}}{\sqrt{3b}\cdot\sqrt{3b}}=\frac{\sqrt{6ab}}{(\sqrt{3b})^2}=\frac{\sqrt{6ab}}{3b}.$$

把分母中的根号化去，叫做**分母有理化**（rationalizing denominators). 分母有理化的方法,一般是把分子和分母都乘以同一个适当的代数式,使分母不含根号.

> 一个二次根式(或整式)除以一个二次根式,可写成分式的形式,通过分母有理化进行运算.

例题6 计算:

(1) $\sqrt{2} \div \sqrt{12}$;

(2) $a \div \sqrt{a+b}$;

(3) $\sqrt{a^2-b^2} \div \sqrt{2a+2b}$ $(a>b>0)$.

解 (1) $\sqrt{2} \div \sqrt{12}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{12} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

> 题(1)也可以这样解:
>
> $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$

(2) $a \div \sqrt{a+b}$

$$= \frac{a}{\sqrt{a+b}} = \frac{a \cdot \sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{a+b}}$$

$$= \frac{a}{a+b}\sqrt{a+b}.$$

(3) 由已知 $a>b>0$,得 $a+b>0$,$a-b>0$.

$$\sqrt{a^2-b^2} \div \sqrt{2a+2b}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{2(a+b)}} = \frac{\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{a-b}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a+b}}$$

$$= \frac{\sqrt{a-b} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a-b}.$$

> 题(3)中需先判断 $a+b \geqslant 0$,$a-b \geqslant 0$,才能得到 $\sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{a-b}$.
>
> 题(3)也可以这样解:
>
> 原式 $= \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{2(a+b)}}$
>
> $= \sqrt{\frac{a^2-b^2}{2(a+b)}}$
>
> $= \sqrt{\frac{(a+b)(a-b)}{2(a+b)}}$
>
> $= \sqrt{\frac{2(a-b)}{4}}$
>
> $= \frac{1}{2}\sqrt{2(a-b)}.$

例题7 如图 16-2,在面积为 $2a$ 的正方形 $ABCD$ 中,截得直角三角形 ABE 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$,求 BE 的长.

解 因为正方形 $ABCD$ 的面积为 $2a$,所以它的边长为 $\sqrt{2a}$. 设 $BE=x$,根据题意,得

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{2a} = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

所以,$x = \frac{\sqrt{3}}{3}a \div \frac{\sqrt{2a}}{2}$

$$= \frac{2\sqrt{3}a}{3\sqrt{2a}} = \frac{2\sqrt{3}a \cdot \sqrt{2a}}{3\sqrt{2a} \cdot \sqrt{2a}}$$

$$= \frac{2a\sqrt{6a}}{6a} = \frac{\sqrt{6a}}{3},$$

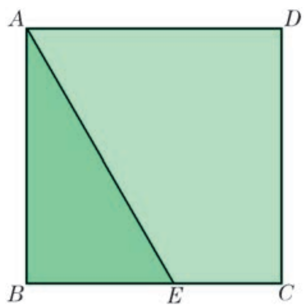


图 16-2

即 $$BE=\frac{\sqrt{6}a}{3}.$$

例题8 解方程$\sqrt{3}-2\sqrt{6}x=-2\sqrt{2}$.

解 由$\sqrt{3}-2\sqrt{6}x=-2\sqrt{2}$，

得 $$-2\sqrt{6}x=-2\sqrt{2}-\sqrt{3}.$$

方程两边同除以$-2\sqrt{6}$，

得 $$x=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}.$$

因为$\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})\times\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$

$$=\frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{12},$$

所以，原方程的根是$x=\frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{12}$.

或者由$\sqrt{6}=\sqrt{2\times3}$
$=\sqrt{2}\times\sqrt{3}$，

得 $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$

$=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{4}$.

练习 16.3(3)

1. 将下列各式分母有理化：

(1) $\frac{2}{\sqrt{3}}$； (2) $\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{18}}$； (3) $\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$.

2. 计算：$\sqrt{a+b}\div\sqrt{ab^2+a^2b}$，并求当$ab=3$时它的值.

3. 解下列方程和关于x的不等式：

(1) $3\sqrt{5}x+6\sqrt{3}=\sqrt{5}x$； (2) $\sqrt{6}x+2\sqrt{2}<0$.

3. 混合运算

实数的运算律、运算性质以及运算顺序规定，在二次根式运算中都适用.

问题3

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})=?$

利用平方差公式，得

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})=x-y.$$

观察上面这个等式，左边是两个含有二次根式的代数式相乘，右边不含二次根式.

两个含有二次根式的非零代数式相乘，如果它们的积不含有二次根式，我们就说这两个含有二次根式的非零代数式互为**有理化因式**. 如$\sqrt{x}+\sqrt{y}$与$\sqrt{x}-\sqrt{y}$互为有理化因式，$\sqrt{a}$与$\sqrt{a}$也互为有理化因式.

一个含有二次根式的代数式的有理化因式是唯一的吗？

想一想

$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$的有理化因式是什么？

例题9 把下列各式分母有理化：

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$；

(2) $\dfrac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$；

(3) $\dfrac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$ $(m\neq n)$.

解 (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

$$=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{(\sqrt{3})^2-\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

分子和分母都乘以分母的有理化因式.

(2) $\dfrac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$

$$=\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{(4\sqrt{3}+3\sqrt{2})(4\sqrt{3}-3\sqrt{2})}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{(4\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{48-18}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{30}.$$

(3) 已知式中 $m\neq n$，所以

$$\frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}=\frac{(m-n)(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})}$$

$$=\frac{(m-n)(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{m-n}$$

$$=\sqrt{m}-\sqrt{n}.$$

题(3)还可以这样解：

$$\frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{(\sqrt{m})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$$

$$=\sqrt{m}-\sqrt{n}.$$

此时 m、n 可以相等.

例题10 计算：

(1) $\dfrac{10}{\sqrt{5}}-\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$；

(2) $\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2$.

解 (1) $\dfrac{10}{\sqrt{5}}-\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$

$=\dfrac{10\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}-\dfrac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$

$=\dfrac{10\sqrt{5}}{5}-\dfrac{4(\sqrt{5}+1)}{4}$

$=2\sqrt{5}-(\sqrt{5}+1)=\sqrt{5}-1$.

> 可以将$\sqrt{\dfrac{b}{a}}\cdot\sqrt{\dfrac{a}{b}}$表示为$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$吗？为什么？

(2) $\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2=\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2+2\sqrt{\dfrac{b}{a}}\cdot\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2$

$=\dfrac{b}{a}+2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}+\dfrac{a}{b}$

$=\dfrac{b}{a}+2+\dfrac{a}{b}$

$=\dfrac{a^2+2ab+b^2}{ab}$.

例题11 已知 $x=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$，求$\dfrac{x^2-6x+2}{x-3}$的值.

> 把 $x=3-2\sqrt{2}$代入式中再进行计算，这是基本方法. 而把$(x-3)$看作整体，用$-2\sqrt{2}$代入再计算，比较简便.

解 $x=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{9-8}=3-2\sqrt{2}$.

$\dfrac{x^2-6x+2}{x-3}=\dfrac{(x-3)^2-7}{x-3}$

$=\dfrac{(-2\sqrt{2})^2-7}{-2\sqrt{2}}$

$=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

例题12 解不等式：$\sqrt{2}x-3<\sqrt{3}x$.

解 由$\sqrt{2}x-3<\sqrt{3}x$，

得 $(\sqrt{2}-\sqrt{3})x<3$.

不等式两边同除以$(\sqrt{2}-\sqrt{3})$，

> $\sqrt{2}-\sqrt{3}<0$.

得 $x>\dfrac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$，

$$x>\frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})},$$

$$x>-3\sqrt{2}-3\sqrt{3}.$$

所以，原不等式的解集是 $x>-3\sqrt{2}-3\sqrt{3}$.

练习 16.3(4)

1. 写出下列各式的有理化因式：

$1-\sqrt{2}$，$\sqrt{a-1}$，$\sqrt{x}-\sqrt{y}$，$2\sqrt{u}+\sqrt{v}$.

2. 将下列各式分母有理化：

(1) $\dfrac{2}{1-\sqrt{3}}$；　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$；

(3) $\dfrac{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}$.

3. 计算：

(1) $(\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2$；　　(2) $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{5}-\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$；

(3) $\sqrt{xy}\div\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$.

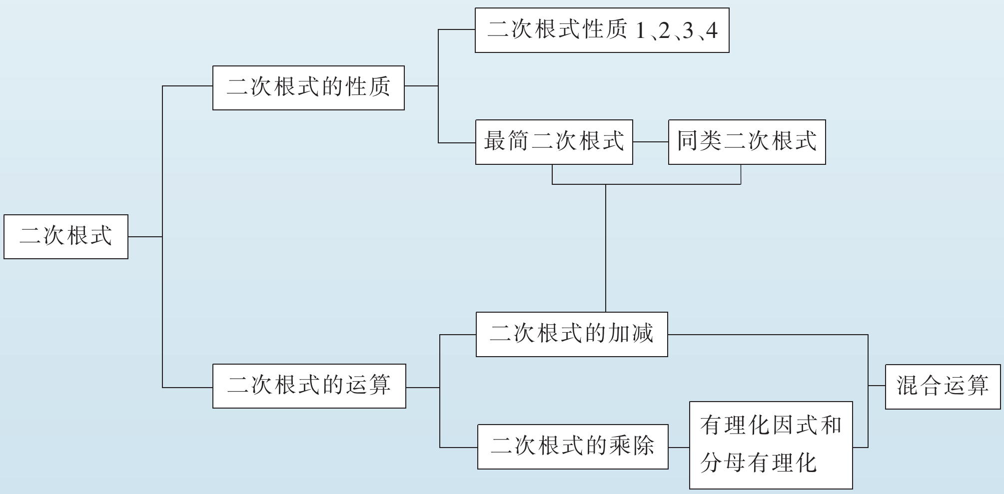
本章小结

在数的学习中，我们从整数到分数（小数），再到无理数，逐步扩大了对于数的认识；从数的加减到乘除，再到乘方和开方，逐步完善了对于数的基本运算的认识．我们又运用字母表示数的思想，把对于数及其运算的研究，上升到关于式及其运算的研究层面，更深入地探索数及其运算的性质和规律．

数是研究式的基础，式是数的概念和运算的发展．学习了实数及其运算以后，特别是掌握了数的开方运算，我们对于式的学习，自然地就从整式、分式进入到根式．本章学习的内容是二次根式，主要是二次根式的性质及其加、减、乘、除运算，涉及最简二次根式、同类二次根式、有理化因式的概念．其中，掌握二次根式的运算是重点，理解二次根式的性质是关键．

把二次根式化为最简二次根式，不仅是简明表达的需要，而且是研究那些表示形式不同但实质一样的二次根式的需要．明确了同类二次根式和有理化因式的意义，那么，实施二次根式的加减运算，归结为合并同类二次根式；实施二次根式的除法运算，归结为分母有理化．从二次根式运算的全过程来看，就是按照一定的法则，把二次根式的运算转化为类似于整式、分式的运算，体现了化归的数学思想．

本章的知识结构框图如下：



16

阅读材料

二次不尽根与简单连分数

设 N 是一个正整数但不是任何一个整数的平方数，则对 N 开平方是“开不尽”的，我们就说 $\sqrt{N}$ 是一个二次不尽根，它是无限不循环小数即无理数．

连分数是一个数学式，其特征就是“在一个分数里面包含另一个分数”．如果一个连分数形如

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}},$$

其中 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 是正整数，那么就称它为简单连分数．通常我们把上面的形式写成较为紧缩的形式 $a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\cdots$，或者记作 $[a_1; a_2, a_3, \cdots]$．当 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 的个数为有限时，它称为有限连分数；当 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 的个数为无限时，则称为无限连分数．

凡是有限连分数都可从最下层起依次化简，将其化为普通的分数或小数．如：

$$1+\frac{1}{2+}\ \frac{1}{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}=1\frac{2}{5}=1.4;$$

$$1+\frac{1}{2+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{5}}=1\frac{5}{12}\approx 1.42;$$

$$1+\frac{1}{2+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{2}$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{5}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{5}{12}}=1\frac{12}{29}\approx 1.414;$$

$$1+\frac{1}{2+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{2}=1\frac{29}{70}\approx 1.414\ 3;$$

……

我们知道，$\sqrt{2}=1.414\ 213\ 562\cdots$．实际上，$\sqrt{2}$ 可以写成一个无限连分数，即

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{2+}\cdots.$$

又如，

$$\sqrt{3}=1+\frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\cdots;$$

$$\sqrt{5}=2+\frac{1}{4+}\ \frac{1}{4+}\ \frac{1}{4+}\ \frac{1}{4+}\ \frac{1}{4+}\ \frac{1}{4+}\cdots.$$

在上述等式中，等号左边是一个二次不尽根，而右边是一个无限连分数，且是循环连分数．

一般来说，任何一个二次不尽根都可以写成一个循环连分数．于是，根据写成的连分数，可将一个二次不尽根的近似值笔算出来．二次不尽根这样一个“杂乱无章”的无限不循环小数，居然可以与一个“严整有序”的循环连分数划上等号，是数学的奥妙和乐趣的生动体现．

阅读理解：

$\sqrt{19}=4+\frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{8+}\cdots$．等号右边这个无限连分数的表达式中不断重复出现 2，1，3，1，2，8，它是一个循环连分数(可记作$[4;\dot{2}1312\dot{8}]$)．

$\sqrt{19}$是怎样化成这个连分数的呢？简要说明如下：

小于$\sqrt{19}$的最大整数是 4，可得$\sqrt{19}=4+(\sqrt{19}-4)=4+\dfrac{3}{\sqrt{19}+4}$；

小于$\dfrac{\sqrt{19}+4}{3}$的最大整数是 2，可得$\dfrac{\sqrt{19}+4}{3}=2+\dfrac{\sqrt{19}-2}{3}=2+\dfrac{5}{\sqrt{19}+2}$；

小于$\dfrac{\sqrt{19}+2}{5}$的最大整数是 1，可得$\dfrac{\sqrt{19}+2}{5}=1+\dfrac{\sqrt{19}-3}{5}=1+\dfrac{2}{\sqrt{19}+3}$；

小于$\dfrac{\sqrt{19}+3}{2}$的最大整数是 3，可得$\dfrac{\sqrt{19}+3}{2}=3+\dfrac{\sqrt{19}-3}{2}=3+\dfrac{5}{\sqrt{19}+3}$；

小于$\dfrac{\sqrt{19}+3}{5}$的最大整数是 1，可得$\dfrac{\sqrt{19}+3}{5}=1+\dfrac{\sqrt{19}-2}{5}=1+\dfrac{3}{\sqrt{19}+2}$；

小于$\dfrac{\sqrt{19}+2}{3}$的最大整数是 2，可得$\dfrac{\sqrt{19}+2}{3}=2+\dfrac{\sqrt{19}-4}{3}=2+\dfrac{1}{\sqrt{19}+4}$；

小于$\sqrt{19}+4$ 的最大整数是 8，可得$\sqrt{19}+4=8+(\sqrt{19}-4)=8+\cdots$．

由于$\sqrt{19}-4$ 在前面已经出现，可见再继续下去，就会不断地重复出现上面的情况，于是得到了一个表示$\sqrt{19}$的循环连分数．

上述将$\sqrt{19}$化为循环连分数的过程是一个迭代过程．类似地，可将任何一个二次不尽根化为循环连分数，其要点是：

(1) 求出小于这个二次不尽根的最大整数，并将它析出；

(2) 对析出最大整数后余下的式子进行“分子有理化”且使分子为 1；

(3) 将“分子有理化且为 1”所得结果的分子分母颠倒，再析出小于颠倒所得这个数的最大整数，并对余下的式子进行“分子有理化”且使分子为 1；

(4) 如(3)继续，直到析出最大整数后余下的式子重复出现．

实践尝试：

试一试，分别将$\sqrt{6}$、$\sqrt{30}$化为连分数．

Yiyuan Erci
Fangcheng

17 第十七章　一元二次方程

通过一次方程(组)的学习,我们体会到,列方程、解方程,是寻找已知量与未知量间等量关系并探求未知量的重要方法.

看下面这幅群猴嬉戏图:

一群猴子在林中欢闹,
不知疲倦不知烦恼.
有数量为总数八分之一再平方的大猴小猴,
在树枝上不停地蹦跳;
还有 12 只猴子摘果取乐,
一边啼叫一边乱抛.
树枝摇曳果遍地,
林中猴子共多少?

这是古印度的一道有趣的数学题目,你能求出猴子的总数吗?

如果用x表示林中猴子的总数,可得$\left(\frac{x}{8}\right)^2+12=x$.上述问题归结为解这个方程,本章就来探索这一类方程的解法.

Yiyuanercifangcheng
De Gainian

第一节　一元二次方程的概念

17.1　一元二次方程的概念

我们知道，"含有未知数的等式"叫做方程. 运用等式性质和数的运算性质，可以得到一元一次方程的解法. 在此基础上，可以解有关一次方程组的问题以及一些实际问题. 但是，由实际问题列出的方程不一定是一元一次方程.

问题1

一块长方形绿地的面积为 1 200 平方米，并且长比宽多 10 米，那么长和宽各为多少米?

分析　设这块长方形绿地的宽为 x 米，可知它的长就是 $(x+10)$米. 因为绿地面积为 1 200 平方米，所以

$$x(x+10)=1\,200.$$

去括号，得

$$x^2+10x=1\,200.$$

观察上面的等式，其中有一个用字母 x 表示的未知数，可知它是一个一元方程；方程的两边都是关于未知数的整式，这样的方程是一个整式方程. 在这个整式方程中，未知数 x 的最高次数是 2. 求出这个方程中的未知数 x 的值，就可以求得长方形绿地的宽.

现在，我们来研究这一类型的方程.

只含有一个未知数，且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做**一元二次方程**(quadratic equation with one unknown).

例如，$x^2-16=0$，$2y^2+3y+1=0$，$3x^2-2x=0$，$\sqrt{2}x^2+4x=32$，$-x^2-2=5x$ 等都是一元二次方程.

方程 $x^2+10x=1\,200$，经过移项可以化成

$$x^2+10x-1\,200=0.$$

任何一个关于 x 的一元二次方程都可以化成

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$$

的形式，这种形式简称一元二次方程的**一般式**. 其中 ax^2 叫做二次项，a 是二次项系数；bx 叫做一次项，b 是一次项系数；c 叫做常数项.

在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中，b、c 可以是任意实数，但 a 应是一个不为零的实数，这是为什么?

例题1 把下列一元二次方程化成一般式，并写出方程中的各项与各项的系数.

（1） $2x(x-1)=3x-4$；

（2） $y+\sqrt{3}=\sqrt{2}(y^2+2)$.

解 （1）去括号，得 $2x^2-2x=3x-4$.

移项、化简，得 $2x^2-5x+4=0$.

可知方程中的二次项是 $2x^2$，二次项的系数是 2；一次项是 $-5x$，一次项的系数是 -5；常数项是 4.

（2）去括号，得 $y+\sqrt{3}=\sqrt{2}y^2+2\sqrt{2}$.

移项、化简，得 $-\sqrt{2}y^2+y+\sqrt{3}-2\sqrt{2}=0$.

可知方程中的二次项是 $-\sqrt{2}y^2$，二次项的系数是 $-\sqrt{2}$；一次项是 y，一次项的系数是 1；常数项是 $\sqrt{3}-2\sqrt{2}$.

对于一个一元二次方程，我们可以依据根的意义，判断未知数的一个值是不是这个方程的根.

例题2 判断 2、5、-4 是不是一元二次方程 $x^2+x=8-x$ 的根.

解 把 $x=2$ 分别代入方程 $x^2+x=8-x$ 的左边和右边，得

左边的值为 $2^2+2=6$；

右边的值为 $8-2=6$.

因为方程左右两边的值相等，所以 $x=2$ 是这个一元二次方程的根.

把 $x=5$ 分别代入方程 $x^2+x=8-x$ 的左边和右边，得

左边的值为 $5^2+5=30$；

右边的值为 $8-5=3$.

因为方程左右两边的值不相等，所以 $x=5$ 不是这个一元二次方程的根.

同样，把 $x=-4$ 分别代入方程的左边和右边，得左右两边的值相等，可知 $x=-4$ 是这个一元二次方程的根.

> 能够使方程左右两边的值相等的未知数的值叫做方程的解. 只含有一个未知数的方程，它的解又叫做方程的根.

> 从这个一元二次方程看到，它的根的个数与一元一次方程是不同的.

问题2

在下列方程中，哪些方程有一个根为 0？哪些方程有一个根为 1？哪些方程有一个根为 -1？

（1） $2x^2+x=0$；　　（2） $5x^2-4x=0$；

（3） $3x^2+2x-5=0$；　　（4） $x^2-7x+6=0$；

（5） $x^2+5x+4=0$；　　（6） $2x^2-3x-5=0$.

> 依据方程的根的意义，可知方程(1)(2)有一个根为 0；方程(3)(4)有一个根为 1；方程(5)(6)有一个根为 -1.

想一想

如果一元二次方程有一个根为 0，那么方程的项的系数或常数项有什么特征？有一个根为 1 呢？有一个根为 −1 呢？

练习 17.1

1. 判断下列方程哪些是一元二次方程：

(1) $x^2-16=0$；　　(2) $3y^2-4y=0$；

(3) $x-\dfrac{1}{x}=0$；　　(4) $\sqrt{3}x^2-\dfrac{1}{3}x+1=0$；

(5) $(x+1)(x+4)=x(x-2)$；　　(6) $(x+3)(x-3)+4=0$.

2. 将下列一元二次方程化为一般式，并分别指出它们的二次项系数、一次项系数和常数项：

(1) $\dfrac{1}{5}x^2+1=3x$；　　(2) $\sqrt{3}y=\sqrt{5}y^2$；

(3) $2x(x-1)=3(x+5)-4$；　　(4) $5x^2-mx+n=0$ (m、n 是已知数).

3. 当 m 为何值时，关于 x 的方程 $mx^2-3x=x^2-mx+2$ 是一元二次方程？

4. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2+3x+m-4=0$ 有一个根是 0，求 m 的值.

第二节　一元二次方程的解法

17.2　一元二次方程的解法

1. 特殊的一元二次方程的解法

我们从特殊形式的一元二次方程着手，讨论解一元二次方程的问题.

问题 1

怎样解方程 $x^2=4$?

分析　$x^2=4$ 是一元二次方程，它表达的等量关系是未知数 x 的平方等于 4. 根据平方根的意义，可知 x 是 4 的平方根. 所以，解方程 $x^2=4$ 就是求 4 的平方根. 由此可见，这个方程有两个实数根.

方程 $x^2=4$ 的解法如下：

因为 4 的平方根是 ± 2，所以方程 $x^2=4$ 的根是

$$x_1=2, x_2=-2.$$

未知数为 x 的一元二次方程的两个根通常用 x_1、x_2 表示.

像这样解一元二次方程的方法叫做**开平方法**.

对于一元二次方程 $x^2=d$，如果 $d\geqslant 0$，那么就可以用开平方法求它的根. 当 $d>0$ 时，方程有两个不相等的根：$x_1=\sqrt{d}$，$x_2=-\sqrt{d}$；当 $d=0$ 时，得 $x^2=0$，这时就说方程有两个相等的根，记作：$x_1=x_2=0$.

例题 1　用开平方法解下列方程：

(1) $9x^2-4=0$；

(2) $2x^2+5=0$.

解　(1) 移项，得　$9x^2=4$.

两边同除以 9，得　$x^2=\dfrac{4}{9}$.

利用开平方法，得　$x=\pm\dfrac{2}{3}$.

所以，原方程的根是　$x_1=\dfrac{2}{3}$，$x_2=-\dfrac{2}{3}$.

（2）移项，得　$2x^2=-5$.

两边同除以 2，得　$x^2=-\frac{5}{2}$.

因为任何一个实数的平方不可能是负数，所以原方程没有实数根.

一般来说，解形如 $ax^2+c=0$（其中 $a\neq0$）的一元二次方程，其步骤是：

（1）通过移项、两边同除以 a，把原方程变形为

$$x^2=-\frac{c}{a}.$$

（2）根据平方根的意义，可知

当 a、c 异号时，$-\frac{c}{a}>0$，方程的根是

$$x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}},\quad x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}};$$

当 a、c 同号时，$-\frac{c}{a}<0$，方程没有实数根；

当 $c=0$ 时，$-\frac{c}{a}=0$，方程的根是 $x_1=x_2=0$.

例题2　解方程：$-7x^2+21=0$.

解　移项，得　$-7x^2=-21$.

两边同除以 -7，得　$x^2=3$.

利用开平方法，得　$x=\pm\sqrt{3}$.

所以，原方程的根是 $x_1=\sqrt{3}$，$x_2=-\sqrt{3}$.

问题2

怎样解方程 $(1+x)^2=16$？

分析　如果把 $(1+x)$ 看作一个整体，即看成一个未知数 y，那么方程 $(1+x)^2=16$ 就可看成方程 $y^2=16$，这样就可用开平方法来解.

解法如下：

由方程 $(1+x)^2=16$，利用开平方法，得

$$1+x=4\quad 或\quad 1+x=-4.$$

分别求这两个一元一次方程的根，得 $x=3$ 或 $x=-5$.

所以，原方程的根是

$$x_1=3,x_2=-5.$$

通过开平方，把解一元二次方程的问题转化为解一元一次方程的问题，其数学思想是“化归”，基本策略是“降次”.

例题3 解下列方程：

(1) $(2x-5)^2=9$；

(2) $2(x+3)^2-49=0$.

解 (1) 利用开平方法，得

$$2x-5=3 \quad 或 \quad 2x-5=-3.$$

解得 $$x=4 \quad 或 \quad x=1.$$

所以，原方程的根是 $x_1=4$，$x_2=1$.

(2) 原方程可变形为

$$(x+3)^2=\frac{49}{2}.$$

利用开平方法，得

$$x+3=\frac{7}{2}\sqrt{2} \quad 或 \quad x+3=-\frac{7}{2}\sqrt{2}.$$

解得 $$x=\frac{7}{2}\sqrt{2}-3 \quad 或 \quad x=-\frac{7}{2}\sqrt{2}-3.$$

所以，原方程的根是 $x_1=\frac{7}{2}\sqrt{2}-3$，$x_2=-\frac{7}{2}\sqrt{2}-3$.

练习 17.2(1)

1. 说出下列方程的根：

(1) $x^2=144$； (2) $x^2-\frac{25}{36}=0$；

(3) $x^2-6=0$； (4) $5x^2+2=0$；

(5) $64y^2=1$； (6) $-2y^2+4=0$.

2. 用开平方法解下列方程：

(1) $\frac{1}{2}x^2-8=0$； (2) $x^2-24=0$；

(3) $1-0.1x^2=0$； (4) $(x+2)^2=25$；

(5) $3(5-x)^2=36$； (6) $\frac{1}{3}(2x-3)^2=25$.

在用开平方法解特殊的一元二次方程的过程中，体现了“化归”思想和“降次”策略的运用. 那么，对于问题 2，还有其他方法解方程 $(1+x)^2=16$ 吗？

如果把方程 $(1+x)^2=16$ 变形为

$$(1+x)^2-16=0,$$

观察这个方程的左边，它可以分解因式. 于是方程可再变形为

$$[(1+x)+4][(1+x)-4]=0,$$

即 $$(x+5)(x-3)=0.$$

方程左边可利用公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 分解因式.

当 $A\cdot B=0$ 时，必有 $A=0$ 或 $B=0$；当 $A=0$ 或 $B=0$ 时，必有 $A\cdot B=0$.

这时，方程的形式是“两个因式的积等于零”.

我们知道，如果两个数的积等于零，那么这两个数中至少有一个是零；反过来，如果两个数中至少有一个是零，那么这两个数的积也等于零.

由于因式 $(x+5)$ 和 $(x-3)$ 都表示数，因此由上面的方程可得

$$x+5=0 \quad 或 \quad x-3=0,$$

解这两个一元一次方程，得　$x=-5$ 或 $x=3$.

所以，原方程的根是　$x_1=-5, x_2=3$.

利用分解因式，也可将某些一元二次方程“降次”.

问题3

怎样解形如 $ax^2+bx=0(a\neq0)$ 的方程？

用提取公因式法分解因式.

这个方程的右边为 0，而左边容易分解因式. 将这个方程变形为

$$x(ax+b)=0,$$

可得

$$x=0 \quad 或 \quad ax+b=0.$$

解得

$$x=0 \quad 或 \quad x=-\frac{b}{a}.$$

所以，原方程的根是 $x_1=0, x_2=-\dfrac{b}{a}$.

例题4　解下列方程：

(1) $x^2+8x=0$；

(2) $5x^2-4x=0$.

解　(1) 原方程可变形为

$$x(x+8)=0,$$

得

$$x=0 \quad 或 \quad x+8=0.$$

解得

$$x=0 \quad 或 \quad x=-8.$$

所以，原方程的根是 $x_1=0, x_2=-8$.

(2) 原方程可变形为

$$x(5x-4)=0,$$

得

$$x=0 \quad 或 \quad 5x-4=0.$$

解得

$$x=0 \quad 或 \quad x=\frac{4}{5}.$$

所以，原方程的根是 $x_1=0, x_2=\dfrac{4}{5}$.

通过因式分解，把一元二次方程化成两个一次因式的积等于零的形式，从而把解一元二次方程的问题转化为解一元一次方程的问题，像这样解一元二次方程的方法叫做**因式分解法**.

例题5 解下列方程：

(1) $(3x-5)(x+\sqrt{2})=0$；

(2) $x^2-7x+12=0$.

解 (1) 由原方程得

$$3x-5=0 \quad \text{或} \quad x+\sqrt{2}=0.$$

解得 $$x=\frac{5}{3} \quad \text{或} \quad x=-\sqrt{2}.$$

所以，原方程的根是 $x_1=\frac{5}{3}$，$x_2=-\sqrt{2}$.

(2) 原方程可变形为

$$(x-4)(x-3)=0,$$

得 $$x-4=0 \quad \text{或} \quad x-3=0.$$

解得 $$x=4 \quad \text{或} \quad x=3.$$

所以，原方程的根是 $x_1=4$，$x_2=3$.

> 这个方程的右边为0，而左边可用十字相乘法分解因式.

由此可见，当一个一元二次方程的一边是零，而另一边的二次式易于分解成两个一次因式时，可用因式分解法来解这个一元二次方程.

例题6 解下列方程：

(1) $2x(x-2)=x^2+5$；

(2) $2x(2x+5)-(x-1)(2x+5)=0$.

解 (1) 原方程可变形为

$$x^2-4x-5=0.$$

把上面方程的左边分解因式，方程化为

$$(x-5)(x+1)=0,$$

得 $$x-5=0 \quad \text{或} \quad x+1=0.$$

解得 $$x=5 \quad \text{或} \quad x=-1.$$

所以，原方程的根是 $x_1=5$，$x_2=-1$.

> 先将这个方程变形，化成右边为0的形式；再看左边，可用十字相乘法分解因式.

(2) 把方程的左边分解因式，得

$$(2x+5)[2x-(x-1)]=0,$$

即 $$(2x+5)(x+1)=0.$$

得 $$2x+5=0 \quad \text{或} \quad x+1=0.$$

解得 $$x=-\frac{5}{2} \quad \text{或} \quad x=-1.$$

所以，原方程的根是 $x_1=-\frac{5}{2}$，$x_2=-1$.

> 观察这个方程，它的右边为0；左边可用提取公因式法分解因式.

练习 17.2(2)

1. (口答)说出下列方程的根：

(1) $x(x+4)=0$；　　(2) $(x-1)(x+15)=0$；

(3) $(5x+1)(2x-\sqrt{2})=0$；　　(4) $(x-a)(x+b)=0$；

(5) $12x^2+8x=0$；　　(6) $3x^2-\sqrt{2}x=0$.

2. 用因式分解法解下列方程：

(1) $x^2-x-2=0$；　　(2) $x^2-8x+12=0$；

(3) $x^2+2=3x$；　　(4) $x^2+4x=21$.

3. 用因式分解法解下列方程：

(1) $13x=x^2+36$；　　(2) $7x(x-3)-2(x-3)=0$；

(3) $3x(2x-5)-4(5-2x)=0$；　　(4) $x^2-6x+9=0$.

4. 下列方程的解法对不对？为什么？

(1) $x(3x+2)-6(3x+2)=0$.

解：$(3x+2)(x-6)=0$.

$3x+2=0$ 或 $x-6=0$.

解得 $x=-\dfrac{2}{3}$　或　$x=6$.

所以 $x_1=-\dfrac{2}{3}$，$x_2=6$.

(2) $(x+3)(x-10)=1$.

解：$x+3=1$ 或 $x-10=1$.

解得 $x=-2$　或　$x=11$.

所以 $x_1=-2$，$x_2=11$.

2. 一般的一元二次方程的解法

问题4

在上一节的例题 4(1)中，采用因式分解法解方程$x^2+8x=0$是比较简便的．试问：能用开平方法解这个方程吗？

分析　观察方程的左边 x^2+8x，它与$(x+4)^2$ 的展开式相差一个常数 16．如果在方程的两边同加上 16，那么方程$x^2+8x=0$可化成$(x+4)^2=16$．再利用开平方法，得 $x+4=4$ 或 $x+4=-4$．所以原方程的根是 $x_1=0$，$x_2=-8$.

> $(x+4)^2$
> $=x^2+2\cdot 4\cdot x+4^2$
> $=x^2+8x+16$.

在上面解方程的过程中，利用了两数和(差)的平方公式．把x^2+8x配成$(x+4)^2$ 时，实际上就是在方程两边同加上“一次项系数一半的平方”．像这样通过添项(或拆项)配完全平方式的过程，简称“配方”．

一般来说，方程 $x^2+px=0$ 的两边同加上 $\left(\dfrac{p}{2}\right)^2$，可化为 $\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2=\left(\dfrac{p}{2}\right)^2$ 的形式，这时方程左边是关于 x 的完全平方式，右边是一个常数．

例题7 解下列方程：

(1) $x^2-2x=4$;

(2) $4x^2+12x-7=0$.

解 (1) 在原方程两边同加上"一次项系数一半的平方"，即 1^2，方程可变形为

$$(x-1)^2=5.$$

利用开平方法，得

$$x-1=\sqrt{5} \quad 或 \quad x-1=-\sqrt{5}.$$

解得 $$x=1+\sqrt{5} \quad 或 \quad x=1-\sqrt{5}.$$

所以，原方程的根是 $x_1=1+\sqrt{5}$，$x_2=1-\sqrt{5}$.

(2) 原方程可变形为

$$4x^2+12x=7.$$

两边同除以 4，得 $$x^2+3x=\frac{7}{4}.$$

再在两边同加上"一次项系数一半的平方"，即 $\left(\frac{3}{2}\right)^2$，方程可化为

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=4.$$

利用开平方法，得

$$x+\frac{3}{2}=2 \quad 或 \quad x+\frac{3}{2}=-2.$$

解得 $$x=\frac{1}{2} \quad 或 \quad x=-\frac{7}{2}.$$

所以，原方程的根是 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{7}{2}$.

像上面这样解一元二次方程的方法叫做**配方法**. 对于一般的一元二次方程，都可以用配方法来解.

解方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的一般步骤是：

(1) 通过移项、两边同除以二次项的系数，将原方程变形为 $x^2+px=q$ (p、q 是已知数)的形式.

(2) 通过方程两边同加上"一次项系数一半的平方"，将方程 $x^2+px=q$的左边配成一个关于 x 的完全平方式，方程化为

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2+q.$$

(3) 当 $\left(\frac{p}{2}\right)^2+q\geqslant0$ 时，再利用开平方法解方程；当 $\left(\frac{p}{2}\right)^2+q<0$ 时，原方程无实数根.

由 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，把 c 移到等式右边，再两边同除以 a，得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

例题8 用配方法解方程：$2x^2-3x+\frac{1}{2}=0$.

> 先把常数项移到等式右边.

解 移项，得 $2x^2-3x=-\frac{1}{2}$.

两边同除以 2，得 $x^2-\frac{3}{2}x=-\frac{1}{4}$.

两边同加上$\left(\frac{3}{4}\right)^2$，得

> 再将方程左边配成完全平方式，这时要在方程两边同加上“一次项系数一半的平方”.

$$x^2-\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2=-\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2,$$

即
$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{5}{16}.$$

利用开平方法，得

$$x-\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{5}}{4} \quad 或 \quad x-\frac{3}{4}=-\frac{\sqrt{5}}{4}.$$

解得
$$x=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4} \quad 或 \quad x=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}.$$

所以，原方程的根是 $x_1=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}$，$x_2=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}$.

练习 17.2(3)

1. 填空：

(1) $x^2+6x+(\quad)=(x+\underline{\qquad})^2$；

(2) $x^2-8x+(\quad)=(x-\underline{\qquad})^2$；

(3) $x^2+\frac{3}{2}x+(\quad)=(x+\underline{\qquad})^2$；

(4) $x^2-\frac{2}{5}x+(\quad)=(x-\underline{\qquad})^2$；

(5) $x^2+bx+(\quad)=(x+\underline{\qquad})^2$；

(6) $x^2+\frac{b}{a}x+(\quad)=(x+\underline{\qquad})^2$.

2. 用配方法解下列方程：

(1) $x^2+8x-2=0$； (2) $x^2-x-1=0$；

(3) $2x^2-5x+1=0$； (4) $4x^2-2x-1=0$.

3. 一元二次方程的求根公式

我们知道，一元一次方程 $ax+b=0$（其中 a、b 是已知数，且 $a\neq0$）的根唯一存在，可用已知数 a、b 表示为 $x=-\dfrac{b}{a}$. 对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（其中 a、b、c 是已知数，且 $a\neq0$），它的根的情况怎样？能不能用已知数 a、b、c 来表示？

利用配方法，可以解任何一个一元二次方程，我们用配方法来研究这个问题.

原方程	$ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$
把常数项移到方程右边	$ax^2+bx=-c$
方程两边同除以二次项的系数	$x^2+\dfrac{b}{a}x=-\dfrac{c}{a}$
方程两边同加上“一次项系数一半的平方”，把左边配成完全平方式	$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=-\dfrac{c}{a}+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$
整理	$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$

对上面这个方程进行讨论

因为 $a\neq0$，所以 $4a^2>0$.

（1）当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，$\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\geqslant0$.

利用开平方法，得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

则 $$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad（想一想，为什么？）$$

即 $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

当 $a>0$ 时，$\sqrt{4a^2}=2a$，所以 $\pm\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；当 $a<0$ 时，$\sqrt{4a^2}=-2a$，所以 $\pm\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}=\mp\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

（2）当 $b^2-4ac<0$ 时，$\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}<0$. 这时，在实数范围内，x 取任何值都不能使方程 $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$ 左右两边的值相等，所以原方程没有实数根.

由上述讨论可以得到：

> 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，它有两个实数根：
>
> $$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

或表示为 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

这就是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的**求根公式**.

在求根公式中，如果 $b^2-4ac=0$，那么 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$，即方程有两个相等的实数根.

在解一元二次方程时，只要把方程化为一般式

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0),$$

如果 $b^2-4ac\geqslant 0$，把 a、b、c 的值代入求根公式，就可以求得方程的实数根；如果 $b^2-4ac<0$，那么原方程无实数根. 这种解一元二次方程的方法称为**公式法**.

例题9 用公式法解下列方程：

(1) $5x^2+6x+1=0$；

(2) $x^2-2=2\sqrt{2}x$.

解 (1) 原方程中，$a=5$，$b=6$，$c=1$.

$$b^2-4ac=6^2-4\times 5\times 1=16.$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{16}}{2\times 5}=\frac{-6\pm 4}{10},$$

即
$$x=-\frac{1}{5}\quad 或\quad x=-1.$$

所以，原方程的根是 $x_1=-\frac{1}{5}$，$x_2=-1$.

(2) 把原方程化成一般式，得

$$x^2-2\sqrt{2}x-2=0.$$

其中，$a=1$，$b=-2\sqrt{2}$，$c=-2$.

$$b^2-4ac=8-4\times 1\times(-2)=16.$$

$$x=\frac{-(-2\sqrt{2})\pm\sqrt{16}}{2\times 1}=\frac{2\sqrt{2}\pm 4}{2},$$

即
$$x=\sqrt{2}+2\quad 或\quad x=\sqrt{2}-2.$$

所以，原方程的根是 $x_1=\sqrt{2}+2$，$x_2=\sqrt{2}-2$.

用公式法解一元二次方程时，应根据方程的一般式确定 a、b、c 的值，这里特别要注意 a、b、c 的符号.

例题10 用公式法解下列方程：

(1) $x^2-2(\sqrt{5}x-3)=1$；

(2) $\sqrt{2}(x^2-1)=x(x-2)+1$.

解 (1) 把原方程化成一般式，得

$$x^2-2\sqrt{5}x+5=0.$$

其中，$a=1$，$b=-2\sqrt{5}$，$c=5$.

$$b^2-4ac=(-2\sqrt{5})^2-4\times 1\times 5=0.$$

$$-\frac{b}{2a}=\frac{-(-2\sqrt{5})}{2\times 1}=\sqrt{5}.$$

所以，原方程的根是 $x_1=x_2=\sqrt{5}$.

（2）把原方程化成一般式，得

$$(\sqrt{2}-1)x^2+2x-\sqrt{2}-1=0.$$

其中，$a=\sqrt{2}-1, b=2, c=-\sqrt{2}-1$.

$$b^2-4ac=2^2+4(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=8.$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2(\sqrt{2}-1)}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)}=\frac{-1\pm\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1},$$

即 $x=1$ 或 $x=-3-2\sqrt{2}$.

所以，原方程的根是 $x_1=1, x_2=-3-2\sqrt{2}$.

$\frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=1$；

$\frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

$=\frac{-(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$

$=-(\sqrt{2}+1)^2$

$=-3-2\sqrt{2}$.

练习 17.2(4)

1. 求下列方程中 b^2-4ac 的值：

（1）$x^2-5x+2=0$；（2）$3x^2+x=1$；

（3）$6x-5=3x^2$；（4）$\sqrt{2}x^2=\sqrt{3}x+2\sqrt{2}$.

2. 用公式法解下列方程：

（1）$2x^2+x-6=0$；（2）$x^2-2\sqrt{3}x-4=0$；

（3）$\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x=6$；（4）$2x^2+3x+10=8x-1$.

3. 用公式法解下列方程：

（1）$x^2+2=2\sqrt{2}x$；（2）$9x^2-12x+4=0$；

（3）$x(x-5)=(2x-3)^2-6$；（4）$y-\frac{y^2-1}{2}=-\frac{1}{2}$.

解一元二次方程，公式法是通用的方法，它是利用配方法总结出来的.有一些特殊的一元二次方程，采用开平方法或因式分解法显得比较简便.

例题 11 用适当的方法解下列方程：

（1）$x^2+(\sqrt{3}+1)x=0$；

（2）$(x+3)(x-5)=1$；

（3）$x(x-6)=2(x-8)$；

（4）$\frac{1}{4}(x+3)^2=1$.

解 （1）把原方程的左边分解因式，方程化为

$$x(x+\sqrt{3}+1)=0,$$

这个方程的左边容易分解因式，所以选择因式分解法.

得 $$x=0 \quad 或 \quad x+\sqrt{3}+1=0.$$

解得 $$x=0 \quad 或 \quad x=-\sqrt{3}-1.$$

所以，原方程的根是 $x_1=0$，$x_2=-\sqrt{3}-1$.

(2) 原方程可变形为

$$x^2-2x-16=0.$$

方程的右边是1而不是零，先将方程整理后再观察，可见不宜用因式分解法，所以选择公式法.

其中，$a=1$，$b=-2$，$c=-16$.

$$b^2-4ac=(-2)^2-4\times(-16)=4+64=68.$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{68}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{17}}{2}=1\pm\sqrt{17},$$

即 $$x=1+\sqrt{17} \quad 或 \quad x=1-\sqrt{17}.$$

所以，原方程的根是 $x_1=1+\sqrt{17}$，$x_2=1-\sqrt{17}$.

(3) 原方程可变形为

$$x^2-8x+16=0,$$

即 $$(x-4)^2=0.$$

所以，原方程的根是 $x_1=x_2=4$.

(4) $\frac{1}{4}(x+3)^2=1$.

方法一(用开平方法)：

原方程可变形为 $$(x+3)^2=4.$$

利用开平方法，得 $x+3=2$ 或 $x+3=-2$.

解得 $$x=-1 \quad 或 \quad x=-5.$$

所以，原方程的根是 $x_1=-1$，$x_2=-5$.

方法二(用因式分解法)：

解一元二次方程时，如能注意方法的选择，解题过程可能会简便些.

原方程可变形为 $$(x+3)^2-4=0.$$

把方程左边分解因式，方程化为

$$[(x+3)+2][(x+3)-2]=0,$$

得 $$x+5=0 \quad 或 \quad x+1=0.$$

解得 $$x=-5 \quad 或 \quad x=-1.$$

所以，原方程的根是 $x_1=-5$，$x_2=-1$.

例题12 解下列方程：

(1) $-x(x-4)=2(x-4)$；

(2) $\frac{x^2-2}{3}+\frac{x}{2}=x$.

解 (1) 由 $-x(x-4)=2(x-4)$，

整理，得 $$2(x-4)+x(x-4)=0.$$

把方程左边分解因式，方程化为

$$(x-4)(2+x)=0,$$

得 $x-4=0$ 或 $2+x=0$.

解得 $x=4$ 或 $x=-2$.

所以,原方程的根是 $x_1=4$,$x_2=-2$.

(2) 由 $\dfrac{x^2-2}{3}+\dfrac{x}{2}=x$,

去分母,得 $2(x^2-2)+3x=6x$.

整理,得 $2x^2-3x-4=0$.

其中,$a=2$,$b=-3$,$c=-4$.

$$b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times(-4)=41.$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{41}}{2\times2}=\frac{3\pm\sqrt{41}}{4},$$

即 $x=\dfrac{3+\sqrt{41}}{4}$ 或 $x=\dfrac{3-\sqrt{41}}{4}$.

所以,原方程的根是 $x_1=\dfrac{3+\sqrt{41}}{4}$,$x_2=\dfrac{3-\sqrt{41}}{4}$.

例题13 用计算器求 $x^2-2x-1=0$ 的近似根(精确到 0.1).

解 原方程中,$a=1$,$b=-2$,$c=-1$.

$$b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-1)>0.$$

由求根公式,得

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\times1\times(-1)}}{2\times1}.$$

用计算器计算,得原方程的根是

$$x_1\approx2.4,x_2\approx-0.4.$$

练习 17.2(5)

1. 解下列方程:

(1) $2x^2-6=0$;

(2) $27=4x^2$;

(3) $3x^2=5x$;

(4) $x(x-1)+3(x-1)=0$;

(5) $(x+1)^2=2$;

(6) $3(x-7)^2=2(7-x)$.

2. 用适当的方法解下列方程:

(1) $\dfrac{1}{2}(x+2)^2=4$;

(2) $x^2-2x-8=0$;

(3) $(2x-3)^2=x^2$;

(4) $x(x+8)=16$.

3. (1) 求当 x 为何值时,二次式 $3x^2-6$ 的值等于 21;

(2) 求当 x 为何值时,二次式 $3x^2-6$ 的值与 $x-2$ 的值相等.

4. 用计算器求下列方程的近似根(精确到 0.1):

(1) $2x^2-\sqrt{3}x-3=0$;

(2) $\sqrt{2}x^2-3x-2\sqrt{5}=0$.

17.3 一元二次方程根的判别式

对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，不解这个方程，能否判断这个方程解的情况？是否能从这个方程的系数组成的代数式中找到判断依据？

我们知道，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 可以化成方程

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

这个方程左边是一个完全平方式，可知对于任意实数 x，左边的值总是非负的. 于是断定，如果方程右边的值为非负数，那么这个方程有实数解；如果方程右边的值为负数，那么这个方程没有实数解.

因为 $4a^2>0$，所以方程右边的值与 b^2-4ac 的值同号（或同时为 0）. 由此可见，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的实数根是否存在，以及存在时两根是否相等，可依据 b^2-4ac 的值与 0 的大小关系进行判断.

我们把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的判别式，通常用符号“Δ”（读作/'deltə/）来表示，记作

$$\Delta=b^2-4ac.$$

利用根的判别式，不必解方程，就可以判断一个一元二次方程是否有实数根，以及有实数根时两根是否相等.

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$，
当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；
当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根；
当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根.

上述判断反过来说，也是正确的. 即

当方程有两个不相等的实数根时，$\Delta>0$；
当方程有两个相等的实数根时，$\Delta=0$；
当方程没有实数根时，$\Delta<0$.

例题 1 不解方程，判断下列方程的根的情况：

(1) $4x^2-5x-3=0$；

(2) $2x^2+4x+3=0$；

(3) $2x^2+3=2\sqrt{6}x$.

解 (1) 因为 $\Delta=(-5)^2-4\times 4\times(-3)=73>0$，
所以此方程有两个不相等的实数根.

(2) 因为 $\Delta=4^2-4\times 2\times 3=-8<0$，
所以此方程没有实数根.

(3) 把原方程变形为

$$2x^2-2\sqrt{6}x+3=0.$$

因为 $\Delta=(-2\sqrt{6})^2-4\times2\times3=0$，

所以此方程有两个相等的实数根.

例题2 关于 x 的方程 $x^2+(m-1)x-m=0$(其中 m 是实数)一定有实数根吗？为什么？

解 $\Delta=(m-1)^2-4\cdot1\cdot(-m)$

$=m^2+2m+1=(m+1)^2.$

因为 m 是实数，所以 $(m+1)^2\geqslant0$，即 $\Delta\geqslant0$.

所以此方程一定有实数根.

练习 17.3(1)

1. 不解方程，判断下列方程的根的情况：

(1) $64x^2-5x-4=0$；

(2) $\frac{1}{4}x^2-3x+9=0$；

(3) $0.2x^2+0.6x+0.05=0$；

(4) $3x(x-2)=-7$；

(5) $9x^2=4(3x-1)$；

(6) $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x+1=0.$

2. 关于 x 的方程 $mx^2+(m+1)x+1=0$(其中 $m\neq0$)一定有实数根吗？为什么？

例题3 当 m 取何值时，关于 x 的方程

$$x^2+(m-2)x+\frac{1}{4}m^2-1=0$$

(1) 有两个不相等的实数根？

(2) 有两个相等的实数根？

(3) 没有实数根？

解 $\Delta=(m-2)^2-4\left(\frac{1}{4}m^2-1\right)$

$=-4m+8.$

(1) 当 $-4m+8>0$，即 $m<2$ 时，方程有两个不相等的实数根.

(2) 当 $-4m+8=0$，即 $m=2$ 时，方程有两个相等的实数根.

(3) 当 $-4m+8<0$，即 $m>2$ 时，方程没有实数根.

例题4 当 k 为何值时，关于 x 的方程

$$x^2-4kx+(2k-1)^2=0$$

有实数根？并求出这时方程的根(用含 k 的代数式表示).

一元二次方程有实数根，包括有不等两根或相等两根的情况.

解 $\Delta=(-4k)^2-4(2k-1)^2$
$=16k-4$.

当 $16k-4\geqslant 0$，即 $k\geqslant\frac{1}{4}$ 时，方程有实数根.

当 $\Delta=0$ 即 $k=\frac{1}{4}$ 时，方程有两个相等的实数根：$x_1=x_2=\frac{1}{2}$.

这时，方程的根是

$$x=\frac{4k\pm\sqrt{16k-4}}{2},$$

即
$$x_1=2k+\sqrt{4k-1},x_2=2k-\sqrt{4k-1}.$$

例题5 已知关于 x 的方程 $4x^2-(k+2)x+k=1$ 有两个相等的实数根，求 k 的值及这时方程的根.

解 把原方程变形为

$$4x^2-(k+2)x+k-1=0.$$

$$\begin{aligned}\Delta&=[-(k+2)]^2-4\cdot 4\cdot(k-1)\\&=k^2+4k+4-16k+16\\&=k^2-12k+20.\end{aligned}$$

因为方程有两个相等的实数根，所以 $\Delta=0$.

由
$$k^2-12k+20=0,$$
得
$$(k-2)(k-10)=0.$$
解得
$$k=2\quad 或\quad k=10.$$

把 $k=2$ 代入原方程，得

$$4x^2-4x+1=0,$$
即
$$(2x-1)^2=0.$$

这时原方程的根是 $x_1=x_2=\frac{1}{2}$.

把 $k=10$ 代入原方程，得

$$4x^2-12x+9=0,$$
即
$$(2x-3)^2=0.$$

这时原方程的根是 $x_1=x_2=\frac{3}{2}$.

练习 17.3(2)

1. 当 k 取何值时，关于 x 的方程 $x^2-k(x+1)+x=0$ 有两个相等的实数根？

2. 已知关于 x 的方程 $x^2+2kx+(k-2)^2=x$. 当 k 取何值时，此方程

(1) 有两个不相等的实数根？

(2) 有两个相等的实数根？

(3) 没有实数根？

(4) 有一个根为 0？

第三节　一元二次方程的应用

17.4　一元二次方程的应用

1. 二次三项式的因式分解

我们曾经在有理数范围内讨论过多项式的因式分解问题. 例如，下列二次多项式的因式分解：

(1) $x^2-4=(x+2)(x-2)$；

(2) $x^2+4x-12=(x+6)(x-2)$；

(3) $2x^2+4x-6=2(x^2+2x-3)=2(x+3)(x-1)$.

但是，对于有些二次多项式，如 x^2-3 这样简单的二次二项式，在有理数范围内却不能分解因式.

而在实数范围内，这个二次二项式可以分解因式：

$$x^2-3=x^2-(\sqrt{3})^2=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}).$$

又如，$9x^2-5=(3x)^2-(\sqrt{5})^2=(3x+\sqrt{5})(3x-\sqrt{5})$.

当 m、n 为正数时，

$mx^2-n=(\sqrt{m}x+\sqrt{n})\cdot(\sqrt{m}x-\sqrt{n})$.

现在，我们在实数范围内讨论二次三项式的因式分解.

在上面(2)(3)两例中，可以看出 $x^2+4x-12=0$ 的两根是 $x_1=-6$，$x_2=2$；$2x^2+4x-6=0$ 的两根是 $x_1=-3$，$x_2=1$.

一般来说，如果二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq0)$ 通过因式分解，得

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

那么，$ax_1^2+bx_1+c=0$，$ax_2^2+bx_2+c=0$. 所以，$x=x_1$，$x=x_2$ 都是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根.

在二次三项式的分解式中，两个一次式(一次项系数为 1)的常数项，分别是这个二次三项式相应方程的实数根的相反数.

思考

对二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq0)$ 进行因式分解，是否可以通过求一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根来解决？

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个实数根：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

那么写出代数式 $a(x-x_1)(x-x_2)$，得

$$a(x-x_1)(x-x_2)=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2].$$

因为　$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{c}{a},$$

所以 $a(x-x_1)(x-x_2)=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]$

$$=a\left[x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}\right]$$

$$=ax^2+bx+c.$$

> 由此可见，$a(x-x_1)(x-x_2)$ 就是 ax^2+bx+c 的分解式.

上述等式逆过来，就是把 ax^2+bx+c 分解因式.

因此，把二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq0)$ 分解因式时，

如果 $b^2-4ac\geqslant0$，那么先用公式法求出方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个实数根 x_1、x_2，再写出分解式

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2);$$

如果 $b^2-4ac<0$，那么方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 没有实数根，ax^2+bx+c 在实数范围内不能分解因式.

> 当 $a\neq1$ 时，分解式中的因数 a 不要漏写. 当 $x_1=x_2=d$ 时，$ax^2+bx+c=a(x-d)^2$.

例题1 分解因式：

(1) $2x^2-9x+7$;

(2) $2x^2+4x-3$.

解 (1) 对于方程 $2x^2-9x+7=0$，

$$b^2-4ac=(-9)^2-4\times2\times7=25.$$

这方程的两个实数根是

$$x_1=\frac{7}{2},\quad x_2=1.$$

所以 $2x^2-9x+7=2\left(x-\frac{7}{2}\right)(x-1).$

(2) 对于方程 $2x^2+4x-3=0$，

$$b^2-4ac=4^2-4\times2\times(-3)=40.$$

这方程的两个实数根是

$$x_1=\frac{-4+\sqrt{40}}{2\times2}=\frac{-2+\sqrt{10}}{2},$$

$$x_2=\frac{-4-\sqrt{40}}{2\times2}=\frac{-2-\sqrt{10}}{2}.$$

所以 $2x^2+4x-3=2\left(x-\frac{-2+\sqrt{10}}{2}\right)\left(x-\frac{-2-\sqrt{10}}{2}\right).$

例题2 把 $2x^2-3xy-y^2$ 分解因式.

分析 如果把 $-3xy$ 中的 $-3y$ 看作 x 的系数，$-y^2$ 看作常数项，那么 $2x^2-3xy-y^2$ 就可以看作关于 x 的二次三项式.

> 这个三项式中含有 x、y 两个字母，把它看作关于 x 的三项式，就是把 x 看作“主元”，这时 y 如同通常的数.

解 把 $2x^2-3xy-y^2=0$ 看作关于 x 的一元二次方程，

$$b^2-4ac=(-3y)^2-4\cdot2(-y^2)=17y^2.$$

关于 x 的方程 $2x^2-3xy-y^2=0$ 的两个实数根是

$$x=\frac{3y\pm\sqrt{17y^2}}{2\times 2}=\frac{3y\pm\sqrt{17}y}{4}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}y,$$

即 $$x_1=\frac{3+\sqrt{17}}{4}y,\quad x_2=\frac{3-\sqrt{17}}{4}y.$$

所以 $2x^2-3xy-y^2=2\left(x-\frac{3+\sqrt{17}}{4}y\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{17}}{4}y\right)$.

想一想

如果把 $2x^2-3xy-y^2$ 看作关于 y 的二次三项式，那么分解因式的结果是什么？

练习 17.4(1)

1. 在实数范围内分解因式：
   (1) $x^2-8=$____________________；
   (2) $4x^2-7=$____________________；
   (3) $x^2+3x-28=$____________________；
   (4) $x^2-11x+30=$____________________.
2. 在实数范围内分解因式：
   (1) x^2+4x+1； (2) $2x^2+3x-1$；
   (3) $3x^2-6x+1$； (4) $6x^2+\sqrt{3}x-3$.
3. 在实数范围内分解因式：
   (1) $x^2-2ax-a^2$； (2) $2x^2-8xy+5y^2$.

2. 实际问题

现在我们来解决 17.1 节开头提出的问题：

一块长方形绿地的面积为 1 200 平方米，并且长比宽多 10 米，那么长和宽各为多少米？

解：设这块长方形绿地的宽为 x 米，根据题意，得方程

$$x(x+10)=1\,200.$$

整理，得 $$x^2+10x-1\,200=0,$$

即 $$(x-30)(x+40)=0.$$

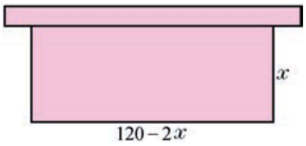
解得 $$x_1=30, x_2=-40.$$

负数根不符合实际意义，应舍去. 所以 $x=30$.

$$x+10=40.$$

答：绿地的长和宽分别是 40 米和 30 米.

列方程解应用题时，要注意检验方程的根是否符合实际意义.



例题3 某建筑工程队利用工地一段 100 米长的旧墙，用 120 米长的铁栅栏靠墙围一个所占地面为长方形的临时仓库，铁栅栏只围三边. 按下列要求，分别求长方形的两条邻边的长.

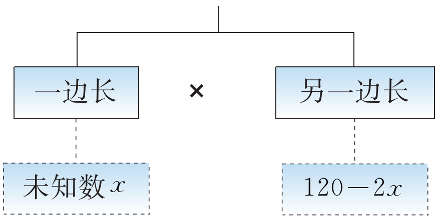
（1） 长方形的面积是 1 152 平方米；

（2） 长方形的面积是 1 800 平方米；

（3） 长方形的面积是 2 000 平方米.

分析 先看第(1)题，根据题意，可以得到等式

长方形面积 $=1\,152$.



第(2)(3)题类似.

解 设长方形的一条边长为 x 米，则另一条边长为$(120-2x)$米.

（1） 根据题意，得方程

$$(120-2x)x=1\,152.$$

整理，得 $$x^2-60x+576=0.$$

解得 $$x_1=12,\ x_2=48.$$

经检验，x_1、x_2 都符合实际意义.

当 $x=12$ 时，$120-2x=96$；

当 $x=48$ 时，$120-2x=24$.

答：长方形相邻两边的长分别是 96 米和 12 米，或 24 米和 48 米.

（2） 根据题意，得方程

$$(120-2x)x=1\,800.$$

整理，得 $$x^2-60x+900=0.$$

解得 $$x_1=x_2=30.$$

经检验，$x=30$ 符合实际意义.

当 $x=30$ 时，$120-2x=60$.

答：长方形相邻两边的长分别是 30 米和 60 米.

（3） 根据题意，得方程

$$(120-2x)x=2\,000.$$

整理，得 $$x^2-60x+1\,000=0.$$

因为 $\Delta=-400<0$，所以此方程无实数根.

答：用 120 米长的铁栅栏按题中的要求围仓库，长方形的面积不可能是 2 000 平方米.

例题4 某工厂七月份的产值是 100 万元，计划九月份的产值要达到 144 万元. 如果每月产值的增长率相同，求这个增长率.

分析 月增长率$=\dfrac{\text{本月产值}-\text{上月产值}}{\text{上月产值}}\times 100\%$.

由此可得

$$\begin{aligned}\text{本月产值}&=\text{上月产值}\times\text{月增长率}+\text{上月产值}\\&=\text{上月产值}\times(1+\text{月增长率}).\end{aligned}$$

如果该厂产值的月增长率用 x 表示，那么

八月份的产值为 $100\cdot(1+x)$万元；

九月份的产值为$[100(1+x)]\cdot(1+x)$万元.

这样，可列出方程求解.

解 设这个工厂每月产值的增长率为 x. 根据题意，得方程

$$100\cdot(1+x)^2=144,$$

即
$$(1+x)^2=1.44.$$

所以 $1+x=1.2$ 或 $1+x=-1.2$(不合题意，舍去).

得
$$x=0.2=20\%.$$

答：这个工厂八、九两月的月增长率为 20%.

练习 17.4(2)

1. 用 100 厘米长的铅丝，弯折一个长方形的模型. 分别在下列条件下，求相邻两边的长：

   (1) 长方形的面积是 525 平方厘米；

   (2) 长方形的面积是 625 平方厘米；

   (3) 长方形的面积是 700 平方厘米.

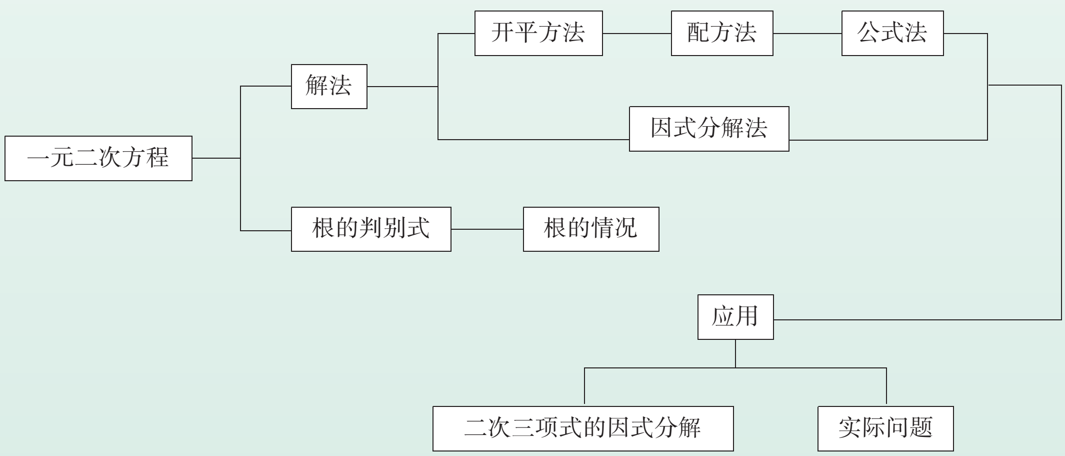
2. 某种产品原来每件价格为 800 元，经过两次降价，且每次降价的百分率相同，现在每件售价为 578 元，求每次降价的百分率.

本章小结

本章主要探讨一元二次方程及其解法.最简单的一元二次方程是 $x^2=m$，当 $m\geqslant0$ 时，解这个方程的实质就是求 m 的平方根.在探索一元二次方程解法的过程中，我们正是从解最简单的一元二次方程出发，根据开平方运算的意义，得到了“开平方法”；还利用“两个数的积等于零相当于这两个数中至少有一个等于零”这一性质，得到解特殊一元二次方程的“因式分解法”.对于解一般的一元二次方程，利用等式性质进行配方，获得了具有通用性的“配方法”；再通过对“配方法”深入研究，归纳出简明的“求根公式”.我们根据在实数范围内实施开平方的条件，提出了一元二次方程根的判别式，并用它来判断方程的根的情况.一元一次方程总有一个根，而一元二次方程可能有两个实数根(这两个实数根可以相等)，也可能没有实数根.

回顾一元二次方程解法的探索和运用过程，可以看到，数的运算及其性质和等式性质，是形成解法思路的知识基础；“字母表示数”“化归”、从特殊到一般、从具体到抽象等数学思想，是开展探索活动的指导思想.这一过程，体现了“以通性求通解”的代数主题，体现了化高次方程为低次方程的“降次”策略，为我们进一步研究解方程问题提供了思考方法.

本章的知识结构框图如下：



17

阅读材料

关于一元二次方程的求根公式

设 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，则 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(b^2-4ac\geqslant 0)$. 这就是一元二次方程的求根公式.

根据史料(如右图)，古巴比伦人已会处理一些特殊的二次方程问题. 早期巴比伦代数的一个基本问题，是求出一个数，使这个数与其倒数之和等于已知数，这就是一个二次方程问题. 巴比伦人用一些特殊方法来求这类方程的根. 当时巴比伦人还不知道负数，因此他们对二次方程的负根问题略而不提.

由于平方数和面积概念紧密相连，古希腊人也常常借助几何方法处理二次方程问题. 丢番图(Diophantus，约公元 246 年～330 年)曾解决过许多数字系数的二次方程，但他不承认无理根，也不承认负数根.

我国古代数学家对二次方程很有研究. 三国时赵爽(公元 3 世纪～4 世纪)在他的著作《勾股圆方图注》中，就曾介绍过方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=2c,\\ x_1x_2=b\end{cases}$ 的解由公式 $x_{1,2}=\dfrac{2c\pm\sqrt{(2c)^2-4b}}{2}$ 给出，这实质上已经含有一元二次方程的求根公式的形式，但他未能最终得出求根公式.

中世纪阿拉伯数学家花剌子米(Al-khwārizmi，约公元 780 年～850 年)(如左图)在他的著作《代数学》中，给出了一元二次方程的一般解法，并用几何方法对其解法的正确性进行了证明. 他承认二次方程有两个根，还容许无理根的存在，不过他忽略了负根. 由于他的《代数学》完全没有代数符号，一切算法都是用文字语言来表达，因此，花剌子米不可能写出现今的求根公式.

到了 16 世纪，法国数学家韦达(F. Vieta，公元 1540 年～1603 年)有意识、有系统地引入和使用代数符号. 从此，人们的思路和书写更加紧凑和有效，在此基础上，代数得到了迅速的发展. 这时二次方程的求根公式才用数学符号表示出来. 后来，数学家又对这类符号不断改进；还引进了一种新的数(到了高中将会学习)，使负数开平方也可以实施. 这样，不仅给出了现在所见的关于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的求根公式，而且在数的范围扩大以后，无论 $\Delta\geqslant 0$ 还是 $\Delta<0$，方程总是有解.

探究活动

数字世界一个“平方和”等式宝塔的构建

我们知道，$3^2+4^2=5^2$.

计算 $10^2+11^2+12^2$ 以及 13^2+14^2，又得到 $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$.

在这两个等式中，等号左右两边是一些平方数，且这些平方数的底数构成“连续正整数”；等号左边的平方数个数比右边的平方数个数多 1.

于是，提出如下问题：给定一个正整数 k，是否存在一个正整数 n，使等式

$$n^2+(n+1)^2+\cdots+(n+k)^2=(n+k+1)^2+\cdots+(n+k+k)^2 \quad (※)$$

能成立？

为解决这个问题，我们先退到特殊情况来分析，然后再对一般情况进行研究．

（1）等式 $3^2+4^2=5^2$ 表明，给定 $k=1$ 时，存在正整数 $n=3$，使等式（※）成立．再考察方程 $x^2+(x+1)^2=(x+2)^2$，可知 3 是这个方程的正整数根．

（2）等式 $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$ 表明，给定 $k=2$ 时，存在正整数 $n=10$，使等式（※）成立．也就是说，方程 $x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2+(x+4)^2$ 有正整数根 10. 事实上，

将原方程变形为 $\quad x^2+(x+1)^2+(x+2)^2-[(x+3)^2+(x+4)^2]=0,$

再变形为 $\quad x^2+[(x+1)^2-(x+3)^2]+[(x+2)^2-(x+4)^2]=0,$

得 $\quad x^2-2(2x+4)-2(2x+6)=0,\quad$ 即 $\quad x^2-8x-20=0,$

解得 $\quad x_1=10,\quad x_2=-2$（舍去）.

（3）试求方程

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2=(x+4)^2+(x+5)^2+(x+6)^2$$

的正整数根．

（4）讨论：对于给定的一个正整数 k，关于 x 的一元二次方程

$$x^2+(x+1)^2+\cdots+(x+k)^2=(x+k+1)^2+\cdots+(x+k+k)^2$$

是否存在正整数根？如果存在，试将这个方程的正整数根用 k 表示出来．

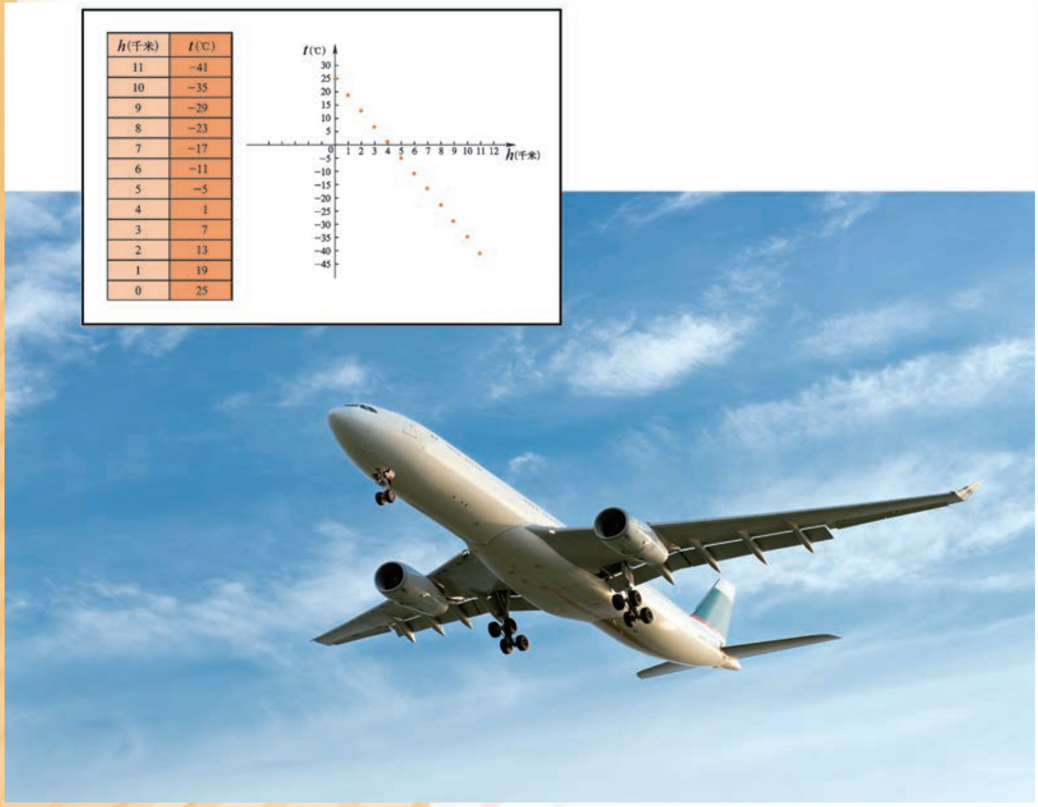
（5）归纳：分别取 $k=1,2,3,4,5,6,\cdots$，依次写出等式（※），建立一个“平方和”等式的宝塔．

Zhengbilihanshu He Fanbilihanshu

18

第十八章　正比例函数和反比例函数

在现实生活中，有各种各样的数量问题. 一个问题中常有处于变化状态的多个数量，而且这些数量之间相互联系、相互影响.例如在汽车匀速行驶过程中，如果车速v不变，那么行驶的路程s随着行车时间t的变化而变化，关系式$s=vt$反映了路程随时间变化而变化的规律.又如空中一定范围内的气温随着距地面高度的增加而逐渐降低，而且也有一定的规律.这样的事例有很多.



h(千米)	t(℃)
11	−41
10	−35
9	−29
8	−23
7	−17
6	−11
5	−5
4	1
3	7
2	13
1	19
0	25

世界上的事物是处在运动变化之中的.对数量问题的研究，也要用运动、变化的观点，从把握相关数量之间的关系及其变化发展过程着眼进行探索.正是基于这样的认识，形成了最初的函数概念及其思想方法.

函数是描述变化过程中的数量关系的工具，我们在本章将以研究数量问题为起点，以正比例函数和反比例函数为载体，学习函数的初步知识.

Zhengbilihanshu

第一节　正比例函数

18.1　函数的概念

1. 变量与函数

人们在认识和描述某一事物时，经常会用“量”来具体表达事物的某些特征(属性)，同时用“数”来表明量的大小．数与度量单位合在一起，就是“数量”．

例如，我们居住的地球，可以用下列数量来描述它的一些特征：

平均半径	6 371.22 千米
表面积	5.11×10^{8} 平方千米
体积	1.083×10^{12} 立方千米
质量	5.97×10^{24} 千克
地心最高温度	不超过 5 000℃
自转一周所需的时间	23 时 56 分 4 秒
绕太阳运行的平均速度	29.77 千米/秒
……	

这里所涉及的量，有长度、面积、体积、质量、温度、时间、速度等．

问题 1

地球上的赤道是一个大圆，半径长 $r_0\approx6.378\times10^{6}$(米)．设想有一个飞行器环绕赤道飞行一周，其轨道是与赤道在同一平面且同圆心的圆 E．如果圆 E 的周长比赤道的周长多 a 米，那么圆 E 的半径长 r 是多少米？

在这个问题中，相关的量都是长度．其中赤道的半径长 r_0 米的数值保持不变，圆 E 的周长比赤道的周长多 a 米，即两圆周长的差为 a 米，圆 E 的半径长为 r 米，a 与 r 可以取不同的数值．

在问题研究过程中，可以取不同数值的量叫做**变量**(variable)；保持数值不变的量叫做**常量**(constant)(或常数)．

区分变量与常量，要结合实际问题进行具体分析．
问题 1 中的 a、r 是变量；r_0 是常量，2π 是常数．

在问题 1 中，由 $2\pi r-2\pi r_0=a$(米)，得 $r=r_0+\dfrac{a}{2\pi}$(米)．

可以看到，圆 E 的半径 r 与两圆周长的差 a 之间是相互联系的．由“$r=r_0+\dfrac{a}{2\pi}$”可知，r 随着 a 的变化而变化，而且当变量 a 取一个确定的值时，变量 r 的值随之也确定．这时，我们就说变量 r 与

a 之间存在确定的依赖关系.

问题2

一辆汽车行驶在国道上，汽车油箱里原有汽油 120 升，每行驶 10 千米耗油 2 升.

（1）填表：

汽车行驶的路程	100 千米	150 千米	200 千米	250 千米
油箱里剩余的油量				

（2）在汽车行驶过程中，汽车行驶的路程与油箱里剩余的油量都是变量吗？

（3）设汽车行驶的路程为 x 千米，油箱里剩余的油量为 y 升，那么 y 与 x 之间是否存在确定的依赖关系？

在这个问题中，汽车行驶的路程 x（千米）与油箱里剩余的油量 y（升）都是变量. 随着汽车行驶路程的增加，油箱里剩余的油量在减少，即变量 y 随着变量 x 的变化而变化；又在填表时可知，$y=120-\frac{2}{10}x$，即 $y=120-0.2x$，当 x 取一个确定的数值时，y 的值也随之确定，所以 y 与 x 之间存在着确定的依赖关系.

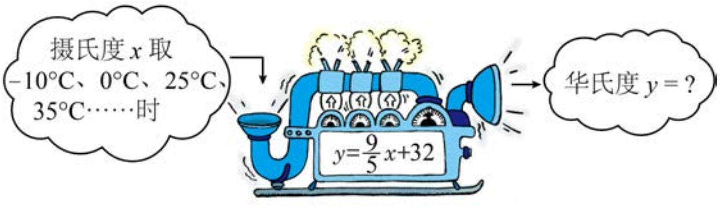
当然，本题中路程 x 的取值不是任意的. 根据题意，易知 $x\geqslant 0$；又当汽车行驶 600 千米后油箱里就没油了. 所以 x 只能在一定的范围内取值，即 $0\leqslant x\leqslant 600$.

在某个变化过程中有两个变量，设为 x 和 y，如果在变量 x 的允许取值范围内，变量 y 随着 x 的变化而变化，它们之间存在确定的依赖关系，那么变量 y 叫做变量 x 的**函数**（function），x 叫做**自变量**（independent variable）.

在问题 2 中，变量 y 是变量 x 的函数，x 是自变量. 其中 y 随着 x 变化而变化的依赖关系是由“$y=120-0.2x$”表达出来的. 这种表达两个变量之间依赖关系的数学式子称为**函数解析式**.

问题 1 中，变量 r 是变量 a 的函数，a 是自变量，“$r=r_0+\frac{a}{2\pi}$”是函数解析式.

例题1 气温的摄氏度 x 与华氏度 y 之间可以进行如下转化，华氏度 y 是不是摄氏度 x 的函数？为什么？



解　在把摄氏度转化为华氏度的过程中，华氏度 y 随着摄氏度 x 的变化而变化；由 $y=\frac{9}{5}x+32$，当 x 取定一个值时，y 的值随之确定，例如下表：

如果摄氏度用 t 表示，华氏度用 F 表示，那么函数解析式为 $F=\frac{9}{5}t+32$. 函数解析式 $y=\frac{9}{5}x+32$ 和 $F=\frac{9}{5}t+32$，所表达的两个变量之间的依赖关系完全一样.

摄氏度 x(℃)	…	-10	0	25	35	100	…
华氏度 y(℉)	…	14	32	77	95	212	…

可见，变量 y 与 x 之间存在确定的依赖关系，y 是 x 的函数. $y=\frac{9}{5}x+32$是这个函数的解析式.

例题2　某气象站测得当地某一天的气温变化情况，如图18－1 所示.

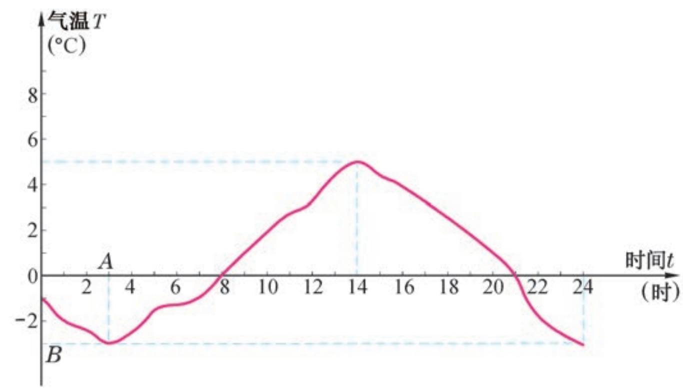


图 18－1

(1) 根据图像，一天中气温随着时间的变化情况，两个变量之间是否存在确定的依赖关系？其中一个变量是另一个变量的函数吗？

(2) 根据图像信息，填写下表：

给出这一天的某一确定时刻 t_1，可以在图18－1中的 t 轴上找出 t_1 所对应的点 A；过点 A 作垂直于 t 轴的直线，与图中曲线相交于一点，再过这点作垂直于 T 轴的直线，垂足为点 B，那么点 B 对应的数就是时刻 t_1 的气温. 如这天凌晨 3 时的气温为－3℃.

时间(时)	0	3	8	14	21	24
气温(℃)		-3				

解　(1) 两个变量是时间 t 和气温 T. 可以看到，当时间 t(时)变化时，相应的气温 T(℃)也随之变化；由曲线上一点的坐标(t,T)，可知某一时刻 t 的气温是 T. 由此可见，这两个变量之间存在确定的依赖关系(这种关系是用曲线来表达的)，所以 T 是 t 的函数.

(2) 时间为 0,8,14,21,24(时)时,气温分别为 $-1,0,5,0,-3$(℃).

议一议

对于代数式 $x+2$,给定 x 的一个值,可以求出这个代数式的一个值. 如果 x 是一个变量,那么 $x+2$ 也是一个变量. 试问:变量 $x+2$ 是不是变量 x 的函数?

练习 18.1(1)

1. 某校学生总人数 1 200 人,某天实际到校的学生人数 n 与学生的出勤率 p 是变量. 试说明 p 是 n 的函数,并写出这个函数的解析式.

2. 举一个含有两个相关变量的实例,指出其中一个变量是否是另一个变量的函数. 如果是,请把它们之间的依赖关系表达出来.

3. 已知物体匀速运动中,路程 s、速度 v、时间 t 之间有关系式 $s=vt$.

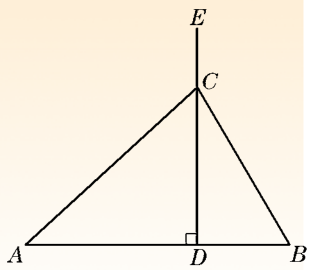
(1) 如果速度不变,那么这个式子里哪两个量是变量? 这两个变量中哪一个是自变量? 哪一个是自变量的函数? 如果时间不变呢?

(2) 如果路程不变,试写出速度关于时间的函数解析式.

4. 如图,线段 $AB=a$,在垂直于 AB 的射线 DE 上有一个动点 C(C 与垂足 D 不重合),分别联结 CA、CB,得到 $\triangle ABC$.

(1) 指出在 $\triangle ABC$ 的面积的变化过程中,线段 AB、CD 的长哪一个是常量? 哪一个是变量?

(2) 设 CD 的长为 h,$\triangle ABC$ 的面积为 S,S 是不是 h 的函数?



(第 4 题)

2. 函数的定义域与函数值

操作

已知函数 $y=2x+5$ 和 $y=\sqrt{x}$,按要求分别进行以下操作:

(1) 输入 x $\longrightarrow$ $y=2x+5$ $\longrightarrow$ 输出 y

对变量 x 取一些数值,分别代入式子 $2x+5$ 中,用计算器计算,把 x 每次所取的值与计算器相应显示的结果填入下表:

x						…
y						

(2) 输入 x $\longrightarrow$ $y=\sqrt{x}$ $\longrightarrow$ 输出 y

对变量 x 取一些数值，分别代入式子$\sqrt{x}$中，用计算器计算，把 x 每次所取的值与计算器相应显示的结果填入下表：

x						…
y						

思考

对于函数 $y=2x+5$，自变量 x 可以取任意一个实数吗？函数 $y=\sqrt{x}$呢？

通过操作和思考，我们知道函数 $y=2x+5$ 中自变量 x 可取任意一个实数；函数 $y=\sqrt{x}$中自变量 x 只能取大于或等于 0 的实数，因为在实数范围内，当 $x<0$ 时，$\sqrt{x}$没有意义.

函数的自变量允许取值的范围，叫做这个函数的**定义域**(domain).

每一个函数都有定义域. 对于用解析式表示的函数，如果不加说明，那么这个函数的定义域是能使这个函数解析式有意义的所有实数.

例题3　求下列函数的定义域：

(1) $y=5x-3$；　　(2) $y=\dfrac{1}{x+2}$；

(3) $y=\sqrt{x-1}$.

解　(1) 对于整式 $5x-3$，无论 x 取什么实数，它都有意义. 所以函数 $y=5x-3$ 的定义域是一切实数.

(2) 对于分式$\dfrac{1}{x+2}$，分母 $x+2\neq 0$，即 $x\neq -2$. 所以函数 $y=\dfrac{1}{x+2}$的定义域是不等于 -2 的一切实数(也可表示为：x 是实数且 $x\neq -2$).

(3) 对于二次根式$\sqrt{x-1}$，被开方数 $x-1\geqslant 0$，即 $x\geqslant 1$. 所以函数 $y=\sqrt{x-1}$的定义域是大于或等于 1 的一切实数(也可表示为：$x\geqslant 1$).

想一想

根据函数解析式的特征求这个函数的定义域，一般应怎样思考？

例题4 如果三角形的三条边长分别为 3 厘米、7 厘米、x 厘米，那么三角形的周长 y(厘米)是 x(厘米)的函数. 写出函数解析式，并指出它的定义域.

解 函数解析式是 $y=x+10$.

根据三角形的三边关系，可知 $7-3<x<7+3$，即 $4<x<10$. 所以这个函数的定义域是 $4<x<10$.

这个例题告诉我们，实际问题中的函数，它的定义域，除了使函数解析式有意义外，还必须使实际问题有意义.

> 我们现在所涉及的函数，对于自变量在定义域内的每一个确定的值，另一个变量都有唯一确定的值与它对应.

在这个函数中，取 $x=5$，代入函数解析式 $y=x+10$，得 $y=5+10=15$；取 $x=6.5$，可得 $y=16.5$；取 $x=4\sqrt{3}$，可得 $y=10+4\sqrt{3}$. 实际上，在定义域 $4<x<10$ 内，自变量 x 每取一个确定的值，根据 $y=x+10$，y 都有唯一确定的值与它对应.

如果变量 y 是自变量 x 的函数，那么对于 x 在定义域内取定的一个值 a，变量 y 的对应值叫做当 $x=a$ 时的**函数值**(value of a function).

> 函数记号中括号外的字母不同，如 $y=g(x)$，$y=F(x)$ 等，表示 y 随着 x 变化而变化的规律不同.

为了深入研究函数，我们把语句"y 是 x 的函数"用记号 $y=f(x)$ 来表示. 这里括号内的字母 x 表示自变量，括号外的字母 f 表示 y 随着 x 变化而变化的规律. 例如函数 $y=x+10$ 记为 $y=f(x)$ 时，f 表示"x 加 10"这个运算关系；例题 2(1)中这个函数可记为 $T=f(t)$，这时 t 是自变量，f 就表示图形中所反映的气温 T 随时间 t 变化而变化的规律. 在同一问题中同时研究几个不同的函数时，表示函数的记号中，括号外的字母可采用不同的字母，如 f、g、h 和 F、…，以示区别.

> 函数的自变量取遍定义域中的所有值，对应的函数值的全体叫做这个函数的值域. 如上述函数 $y=x+10$ $(4<x<10)$，它的值域是 $14<y<20$.

在函数用记号 $y=f(x)$ 表示时，$f(a)$ 表示当 $x=a$ 时的函数值.

把例题 4 中的函数 $y=x+10$ 记为 $y=f(x)$，可知 $f(x)=x+10$. 那么当 $x=5$ 时的函数值是 15，可表示为 $f(5)=15$；还有，$f(6.5)=16.5$；$f(4\sqrt{3})=10+4\sqrt{3}$.

例题5 已知 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(a)(a\neq 1)$.

分析 函数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ 的定义域是不等于 1 的所有实数. 分别用 $0，-1，\dfrac{1}{2}，a$ 代替函数解析式中的 x，就得到函数值.

解 $f(0)=\dfrac{2\times 0+1}{0-1}=-1$.

$$f(-1)=\frac{2\times(-1)+1}{(-1)-1}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}.$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\times\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{2}{-\frac{1}{2}}=-4.$$

$$f(a)=\frac{2a+1}{a-1}\quad(a\neq 1).$$

练习 18.1(2)

1. 求下列各函数的定义域：

(1) $y=2x+\sqrt{5}$；　　(2) $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$；

(3) $y=\sqrt{3x-4}$；　　(4) $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x-4}}$.

2. 等腰三角形中，底角的度数用 x 表示，顶角的度数用 y 表示，写出 y 关于 x 的函数解析式及函数的定义域.

3. 已知 $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+4}$，求 $f(-2)$，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f(0)$，$f(\sqrt{2})$.

18.2　正比例函数

1. 正比例函数

某商店销售某种型号的水笔，销售情况记录如下：

售出水笔数(支)	2	5	4	3	10	15	…
营业额(元)	5	12.5	10	7.5	25	37.5	…

在表中任取一组数据，求营业额与售出水笔数的比值，如 $\frac{5}{2}=2.5$，$\frac{12.5}{5}=2.5$，$\frac{37.5}{15}=2.5$，…，可见它们的比值都是相等的. 这个比值，也就是水笔的单价 2.5(元/支).

设售出的水笔的数量为 x 支(x 是正整数)，相应的营业额为 y 元，那么 $\frac{y}{x}=2.5$，也可表示为 $y=2.5x$.

一个正方形的周长随边长变化而变化. 设正方形的边长为 $x(x>0)$，周长为 y，那么 $y=4x$，也可表示为 $\frac{y}{x}=4$.

如果两个变量的每一组对应值的比值是一个常数(这个常数

不等于零),那么就说这两个变量成**正比例**(direct proportion).用数学式子表示两个变量 x、y 成正比例,就是 $\frac{y}{x}=k$,或表示为 $y=kx$(x 不等于 0),k 是不等于零的常数.

议一议

下列各题中的两个变量是否成正比例?

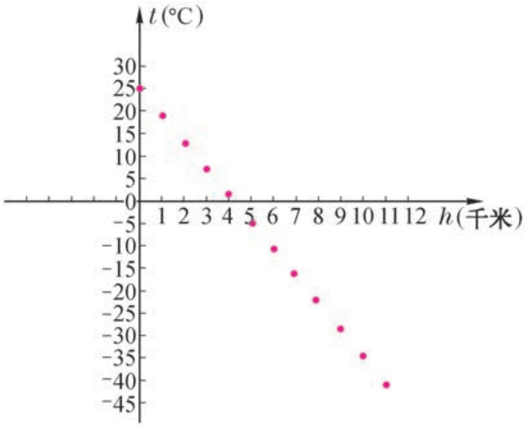
(1) 某复印社按复印 A4 纸 1 张收 0.4 元计费,变量是复印纸张数 x(张)与费用 y(元).

(2) 正方形 $ABCD$ 的边长为 6,P 是边 BC 上一点,变量是 BP 的长 x 与△ABP 的面积 S.

(3) 圆的面积随半径变化而变化,变量是圆的面积 A 与该圆半径 r.

(4) 从地面到高空 11 千米处,高度每增加 1 千米,气温就下降 6 摄氏度.某地的地面气温是 25℃,在 11 千米以下的空中,变量是空中某处离地面的高度 h(千米)和气温 t(℃).

h(千米)	t (℃)
11	−41
10	−35
9	−29
8	−23
7	−17
6	−11
5	−5
4	1
3	7
2	13
1	19
0	25



两个变量成正比例,说明其中一个变量是另一个变量的函数.

我们在更一般的意义下来研究两个变量成正比例的函数.

解析式形如 $y=kx$ (k 是不等于零的常数)的函数叫做**正比例函数**(directly proportional function),其中常数 k 叫做**比例系数**.

正比例函数 $y=kx$ 的定义域是一切实数.

确定了比例系数,就可以确定一个正比例函数的解析式.

当一个函数以解析式表示时,如果对函数的定义域未加以说明,那么定义域由这个函数的解析式确定;否则,应指明函数的定义域.

例题1 已知正比例函数 $y=-4x$,说出 y 与 x 之间的比例系数,并求当变量 x 分别取 -5,-2,0,3 时的函数值.

解 y 与 x 之间的比例系数是 -4.

记 $f(x)=-4x$,得

$$f(-5)=(-4)\times(-5)=20;$$

$$f(-2)=(-4)\times(-2)=8;$$
$$f(0)=(-4)\times 0=0;$$
$$f(3)=(-4)\times 3=-12.$$

例题2 已知 y 是 x 的正比例函数，且当 $x=3$ 时，$y=24$. 求 y 与 x 之间的比例系数，并写出函数解析式和函数的定义域.

解 因为 y 是 x 的正比例函数，可设函数解析式为 $y=kx\ (k\neq 0)$.

把 $x=3$，$y=24$ 代入解析式，得

$$24=3k.$$

解得 $$k=8.$$

所以，y 与 x 之间的比例系数是 8；函数解析式是 $y=8x$，函数的定义域为一切实数.

> 在求正比例函数的解析式时，先设解析式为 $y=kx(k\neq 0)$，其中系数 k 待定；再利用已知条件确定 k 的值. 这样的方法称为“待定系数法”.

想一想

已知正比例函数中两个变量的一组非零对应值，一定能求出函数解析式吗？怎样思考？

练习 18.2(1)

1. （口答）判断下列问题中的两个变量是否成正比例，为什么？

（1） 商一定（不为零），被除数与除数.

（2） 除数不变（不为零），被除数与商.

（3） 一个因数（不为零）不变，另一个因数与它们的积.

（4） 等腰三角形的周长一定，它的腰长与它底边的长.

（5） 一个人的体重与他的年龄.

2. 下列函数（其中 x 是自变量）中，哪些是正比例函数？哪些不是？为什么？

（1） $y=\dfrac{x}{5}$； （2） $y=-\dfrac{1}{5}x$； （3） $y=\dfrac{5}{x}$； （4） $y=5x+2$.

3. 已知 y 是 x 的正比例函数，且当 $x=2$ 时，$y=12$. 求 y 与 x 之间的比例系数，并写出 y 关于 x 的函数解析式.

2. 正比例函数的图像

我们知道，直角坐标平面内任意一点都有唯一确定的坐标(x,y)；反过来，以任意给定的一对有序实数(x,y)为坐标，都可以在直角坐标平面内唯一确定一个点.

根据正比例函数的解析式，对自变量 x 在定义域内每取一个值，就能确定相应的一个函数值；分别以所取 x 的值和相应的函数值作为点的横坐标和纵坐标，可以在坐标平面内描出对应的点.

操作

已知正比例函数 $y=2x$.

(1) 列表：取自变量 x 的一些值，计算出相应的函数值，如下表：

x	…	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	…
$y=2x$	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…

(2) 描点：分别以所取 x 的值和相应的函数值作为点的横坐标和纵坐标，描出这些坐标所对应的各点.

(3) 连线：用光滑的曲线(包括直线)把描出的这些点按照横坐标由小到大的顺序联结起来.

可以想象，当 x 取遍所有的实数时，如上描出所有的点就成一条直线. 如图 18－2 所示.

自变量 x 可取任意实数，因此可以描出无数个点，且没有起点也没有终点.
在高中将证明正比例函数的图像是一条直线.

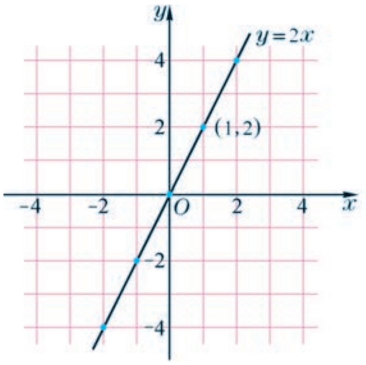


图 18－2

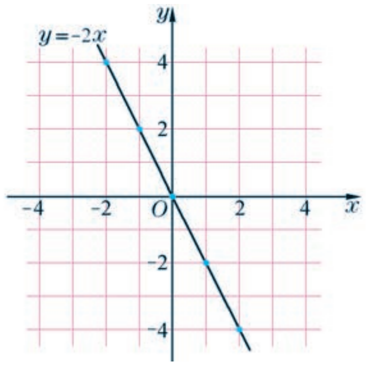


图 18－3

由画图的操作过程可知，所画直线上任意一点的坐标都满足函数解析式 $y=2x$；同时，以这个解析式所确定的 x 与 y 的任意一组对应值为坐标的点都在所画的直线上. 我们就说“这条直线是函数 $y=2x$ 的图像”，并把它表示为“直线 $y=2x$”.

上述操作显示，画函数图像的步骤可以归纳为：(1) 列表；(2) 描点；(3) 连线.

对于一个函数 $y=f(x)$，如果一个图形(包括直线、曲线或其他图形)上任意一点的坐标都满足函数关系式 $y=f(x)$，同时以这个函数解析式所确定的 x 与 y 的任意一组对应值为坐标的点都在图形上，那么这个图形叫做函数 $y=f(x)$ 的图像.

操作

按照前述操作的步骤，画函数 $y=-2x$ 的图像.

函数 $y=-2x$ 的图像也是一条直线，如图 18－3 所示.

思考

函数 $y=-2x$ 的图像与 $y=2x$ 的图像有哪些相同的特点？

函数 $y=2x$ 与 $y=-2x$ 的图像都是一条直线，观察可见这两条直线都经过原点 $O(0,0)$. 实际上，原点 O 的坐标 $(0,0)$ 适合这两个函数的解析式，可知观察所得结论是正确的.

我们知道，一条直线由这条直线上的任意两点所确定. 如直线 $y=2x$，可以由原点 $O(0,0)$ 和点 $(1,2)$ 唯一确定；直线 $y=-2x$ 可以由原点 $O(0,0)$ 和点 $(1,-2)$ 唯一确定.

一般地，正比例函数 $y=kx$（k 是常数，$k\neq0$）的图像是经过原点 $O(0,0)$ 和点 $M(1,k)$ 的一条直线. 我们把正比例函数 $y=kx$ 的图像叫做直线 $y=kx$.

过两点可以画且只能画一条直线.

例题3 在同一直角坐标平面内，分别画出下列函数的图像：

$$y=3x,\quad y=x,\quad y=\frac{1}{3}x.$$

画直线 $y=x$ 和直线 $y=\frac{1}{3}x$ 时各取点 $B(2,2)$ 和 $C(3,1)$，而不取坐标为 $(1,1)$ 和 $\left(1,\frac{1}{3}\right)$ 的点，是为使所选取的点离原点 O 远一些.

分析 画正比例函数图像，可先取图像上的两个点，再过这两点画一条直线. 为了方便，我们通常取原点 $O(0,0)$ 和点 $M(1,k)$. 但有时为了在画直线时能准确地定位，所取的两点不宜太靠近.

解 选取点 $O(0,0)$ 和 $A(1,3)$，过这两点画一条直线，就得到函数 $y=3x$ 的图像.

选取点 $O(0,0)$ 和 $B(2,2)$，过这两点画一条直线，就得到函数 $y=x$ 的图像.

选取点 $O(0,0)$ 和 $C(3,1)$，过这两点画一条直线，就得到函数 $y=\frac{1}{3}x$ 的图像.

这三个函数的图像如图 18－4 所示.

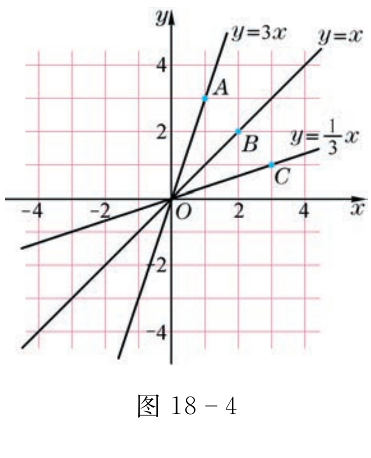


图 18－4

练习 18.2(2)

1. (口答)正比例函数 $y=kx$ 的图像是________,它一定经过点________和________.
2. 函数 $y=kx$ $(k\neq 0)$的图像经过点 $A\left(-\dfrac{1}{2},5\right)$,写出函数解析式,并说明函数图像经过哪几个象限.
3. 在同一直角坐标平面内画出两个函数的图像:

   (1) $y=4x$ 与 $y=\dfrac{1}{4}x$;　　　　(2) $y=-\dfrac{1}{3}x$ 与 $y=-3x$.

3. 正比例函数的性质

操作

在同一直角坐标平面内,分别画出下列函数的图像:

$$y=-4x,\ y=-x,\ y=-\frac{1}{4}x.$$

上面三个函数的图像如图 18－5 所示.

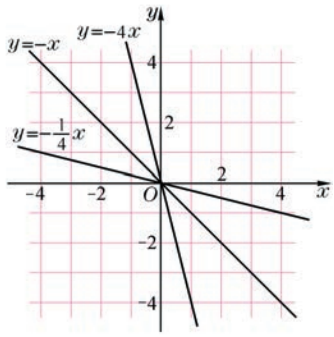


图 18－5

思考

观察图 18－4 和图 18－5,思考并回答下列问题:

(1) 图 18－4 中的函数图像经过哪两个象限?图 18－5 中的函数图像呢?

(2) 正比例函数 $y=kx$ 的图像所经过的两个象限与常数 k 有什么关系?

(3) 图 18－4 中,当一条直线上的点的横坐标从小到大逐渐变化时,点的位置随着从________到________逐渐变化(填"高"或"低");这就是说,当自变量 x 的值从小到大逐渐变化时,函数值 y 相应地从________到________逐渐变化(填"大"或"小").

图 18－5 中,当一条直线上的点的横坐标从小到大逐渐变化时,点的位置随着从________到________逐渐变化(填"高"或"低");这就是说,当自变量 x 的值从小到大逐渐变化时,函数值 y 相应地从________到________逐渐变化(填"大"或"小").

(4) 一般来说,对于正比例函数 $y=kx$,随着自变量 x 的值逐渐增大,函数值 y 将怎样变化?

通过观察和思考,可以归纳正比例函数 $y=kx$(k 是常数,$k\neq 0$)有如下性质:

也可以说，当 $k>0$ 时，正比例函数的图像（除原点外）在第一、三象限.（当 $k<0$ 时类似）

（1）当 $k>0$ 时，正比例函数的图像经过第一、三象限；自变量 x 的值逐渐增大时，y 的值也随着逐渐增大.

（2）当 $k<0$ 时，正比例函数的图像经过第二、四象限；自变量 x 的值逐渐增大时，y 的值则随着逐渐减小.

性质（1）和（2）中的条件与结论各自调换也正确，可以直接运用.

例题4 已知正比例函数 $y=(1-2a)x$，如果 y 的值随 x 的值增大而减小，那么 a 的取值范围是什么？

解 对于正比例函数 $y=(1-2a)x$，由 y 的值随 x 的值增大而减小，可知

$$1-2a<0.$$

解得 $$a>\frac{1}{2}.$$

所以，a 的取值范围是 $a>\frac{1}{2}$.

例题5 在水管放水的过程中，放水的时间 x（分）与流出的水量 y（立方米）是两个变量. 已知水管每分钟流出的水量是 0.2 立方米，放水的过程持续 10 分钟，写出 y 与 x 之间的函数解析式，并指出函数的定义域，再画出这个函数的图像.

解 在放水的过程中，变量 y 与 x 之间成正比例，比例系数是 0.2. 函数解析式是 $y=0.2x$；函数的定义域是 $0\leqslant x\leqslant 10$.

这个函数的图像如图 18－6 所示.

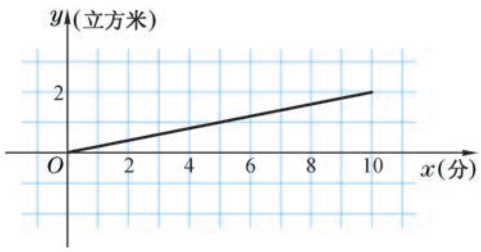


图 18－6

如果函数的解析式是 $y=kx$，但函数的定义域是部分实数，那么这个函数的图像是直线的一部分（还可能只是在一条直线上的一些点）.

在例题 5 中，函数解析式是 $y=0.2x$，定义域是 $0\leqslant x\leqslant 10$，这个函数的图像是一条线段.

练习 18.2(3)

1. 如果正比例函数 $y=kx$ 的图像经过第一、三象限，那么 y 的值随 x 的值增大而_________.
   如果正比例函数 $y=kx$ 的图像经过第二、四象限，那么 y 的值随 x 的值增大而_________.

2. 已知 $mn<0$，那么函数 $y=\frac{m}{n}x$ 的图像经过第________象限.

3. 已知正比例函数 $y=\left(1-\frac{a}{4}\right)x$，$y$ 的值随着 x 的值增大而增大，求 a 的取值范围.

4. （1） 在同一直角坐标平面内，画出正比例函数 $y=5x$ 和 $y=-5x$ 的图像；

（2） 观察(1)所画的两个函数图像，它们关于 x 轴对称吗？关于 y 轴对称吗？

（3） 根据(1)(2)，如果两个正比例函数的图像关于坐标轴对称，那么它们的比例系数有什么关系？

第二节　反比例函数

18.3　反比例函数

1. 反比例函数

问题1

在一块平地上，划出一个占地面积为 100 平方米的长方形区域，这个长方形的相邻两边的长可以分别取不同的数值，它们是两个变量. 设其中一边的长为 x 米，另一边的长为 y 米.

（1）当 x 取下列数值时，填表：

x(米)	10	20	30	40	50	60	70	80
y(米)								

（2）变量 x 与 y 的相互关系可以用怎样的数学式子来表达？

在这个问题中，长方形的面积是一个常量，数值为 100，可得 $xy=100$，或表示为 $y=\frac{100}{x}$.

问题2

某条高速公路全长 166 千米. 一辆汽车在这条高速公路上行驶，走完全程所需的时间 t(时)与汽车行驶的平均速度 v(千米/时)有什么关系？

分析　路程一定时，汽车行驶全程所需时间 t 随着平均速度 v 的变化而变化；汽车平均速度 v 取一个确定的值，时间 t 的值随之确定，可知 t 与 v 有确定的依赖关系.

由时间 t(时)与平均速度 v(千米/时)的积等于全程的长，得

$$tv=166,$$

或表示为

$$t=\frac{166}{v}.$$

如果两个变量的每一组对应值的乘积是一个不等于零的常数，那么就说这两个变量成**反比例**(inverse proportion). 用数学式子表示两个变量 x、y 成反比例，就是 $xy=k$，或表示为 $y=\frac{k}{x}$，其中 k 是不等于零的常数.

在上述两个问题中，每个问题中的两个变量都成反比例.

例题1　下列问题中的两个变量是否成反比例？如果是，可以

用怎样的数学式子来表示？

（1）平行四边形的面积为 20 平方厘米，变量分别是平行四边形的一条边长 a（厘米）和这条边上的高 h（厘米）；

（2）被除数为 100，变量分别是除数 r 和商 q；

（3）一位男同学练习 1 000 米长跑，变量分别是该同学跑步的平均速度 v（米/秒）和跑完全程所用的时间 t（秒）.

解　（1）平行四边形的一条边长 a（厘米）和这条边上的高 h（厘米）的乘积 $ah=20$（平方厘米），所以 a 与 h 成反比例，a 与 h 的关系可表示为 $a=\frac{20}{h}$.

（2）当被除数为 100 时，除数 r 和商 q 的乘积 $rq=100$，所以 r 与 q 成反比例，r 与 q 的关系可表示为 $r=\frac{100}{q}$.

（3）当路程为 1 000 米时，跑步的平均速度 v（米/秒）和跑完全程所用的时间 t（秒）的乘积 $vt=1\,000$，所以 v 与 t 成反比例，v 与 t 的关系可表示为 $v=\frac{1\,000}{t}$.

如果两个变量成反比例，那么其中一个变量是另一个变量的函数. 如同正比例函数的研究一样，我们也在更一般的意义下来研究两个变量成反比例的函数.

解析式形如 $y=\frac{k}{x}$（k 是常数，$k\neq 0$）的函数叫做**反比例函数**（inversely proportional function）. 其中 k 也叫做比例系数.

反比例函数由系数 k 确定.

反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的定义域是不等于零的一切实数.

例题2　已知 y 是 x 的反比例函数，且当 $x=2$ 时，$y=9$.

（1）求 y 关于 x 的函数解析式；

（2）当 $x=3\frac{1}{2}$ 时，求 y 的值；

（3）当 $y=5$ 时，求 x 的值.

解　（1）因为 y 是 x 的反比例函数，可设函数解析式为 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）.

把 $x=2$，$y=9$ 代入解析式，得

$$9=\frac{k}{2}.$$

解得

$$k=18.$$

这里采用了待定系数法.

所以，y 关于 x 的函数解析式是 $y=\frac{18}{x}$.

(2) 当 $x=3\frac{1}{2}$时，把 $x=3\frac{1}{2}$代入函数解析式 $y=\frac{18}{x}$，得

$$y=\frac{18}{3\frac{1}{2}}=\frac{36}{7}.$$

(3) 当 $y=5$ 时，把 $y=5$ 代入函数解析式 $y=\frac{18}{x}$，得

$$5=\frac{18}{x}.$$

解得 $$x=\frac{18}{5}.$$

想一想

已知反比例函数中两个变量的一组对应值，一定能求出函数解析式吗？

练习 18.3(1)

1. (口答)判断下列问题中两个变量是否成反比例，为什么？

(1) 三角形的面积 S 一定时，它的一条边长 a 和这条边上的高 h；

(2) 存煤量 Q 一定时，平均每天的用煤量 m 与可使用的天数 t；

(3) 货物的总价 A 一定时，货物的单价 a 与货物的数量 x；

(4) 车辆所行驶的路程 s 一定时，车轮的直径 d 和车轮的旋转周数 n.

2. 下列函数(其中 x 是自变量)中，哪些是反比例函数？哪些不是？为什么？

(1) $y=-\frac{1}{3}x$； (2) $y=\frac{x}{4}$；

(3) $y=-\frac{1}{5x}$； (4) $y=\frac{2a}{x}$ (a 为常数，$a\neq0$).

3. 已知 y 是 x 的反比例函数，且当 $x=4$ 时，$y=7$.

(1) 写出 y 关于 x 的函数解析式；

(2) 当 $x=5$ 时，求 y 的值.

4. 已知长方形的面积为 20 平方厘米，它的一边长为 x 厘米，求这边的邻边长 y(厘米)关于 x(厘米)的函数解析式，并写出这个函数的定义域.

通过列表、描点、连线画函数图像，是一种基本方法.

2. 反比例函数的图像和性质

我们按照作函数图像的一般步骤，通过列表、描点、连线，来画反比例函数 $y=\frac{k}{x}$(k 是常数，$k\neq0$)的图像.

操作

画反比例函数 $y=\frac{8}{x}$ 的图像.

(1) 列表:反比例函数的定义域是不等于零的所有实数,在列表时,自变量 x 的值不能取零,可以取一些正数和负数,计算出相应的函数值 y,如下表所示:

x	…	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	6	7	8	…
y	…	-1	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{8}{5}$	-2	$-\frac{8}{3}$	-4	-8	8	4	$\frac{8}{3}$	2	$\frac{8}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{7}$	1	…

(2) 描点:分别以 x 所取的值和相应的 y 值作为点的横坐标和纵坐标,描出这些坐标所对应的各点.

(3) 连线:把第一象限内的各点用光滑的曲线连接,再向两方伸展,得到图像的一支;

用同样的方法在第三象限画出图像的另一支.

函数 $y=\frac{8}{x}$ 的图像如图 18－7 所示.

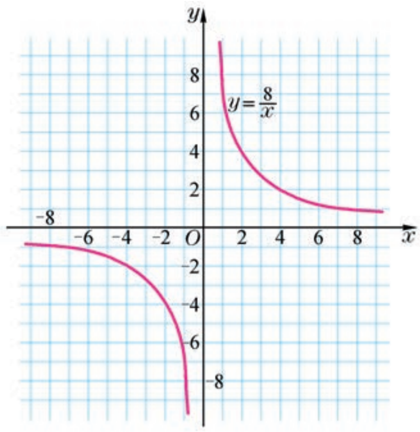


图 18－7

想一想

画函数 $y=\frac{8}{x}$ 的图像时,为什么曲线的每支是向两方伸展的?

操作

画反比例函数 $y=-\frac{8}{x}$ 的图像.

(1) 列表:

x	…	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	6	7	8	…
y	…																	…

> 把你通过操作画出的图像与图18－8比较一下；想一想，画反比例函数的图像要注意什么？

（2）描点；

（3）连线．

函数 $y=-\dfrac{8}{x}$ 的图像如图18－8所示．

反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$（k 是常数，$k\neq0$）的图像叫做**双曲线**（hyperbola），它有两支．

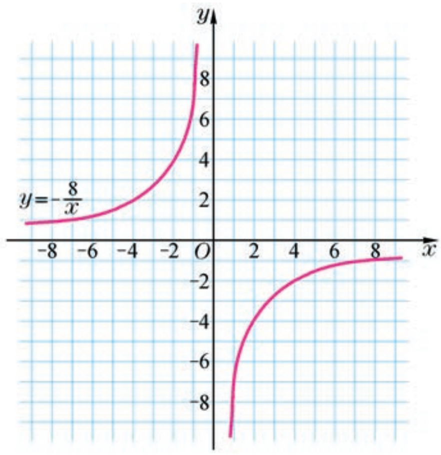


图18－8

想一想

双曲线的每支都是向两方无限伸展的，那么双曲线是否会与坐标轴相交？画反比例函数图像时应该注意哪些问题？把你的想法与同学交流一下．

操作

画反比例函数 $y=\dfrac{6}{x}$ 和 $y=-\dfrac{6}{x}$ 的图像．

反比例函数 $y=\dfrac{6}{x}$ 和 $y=-\dfrac{6}{x}$ 的图像如图18－9所示．

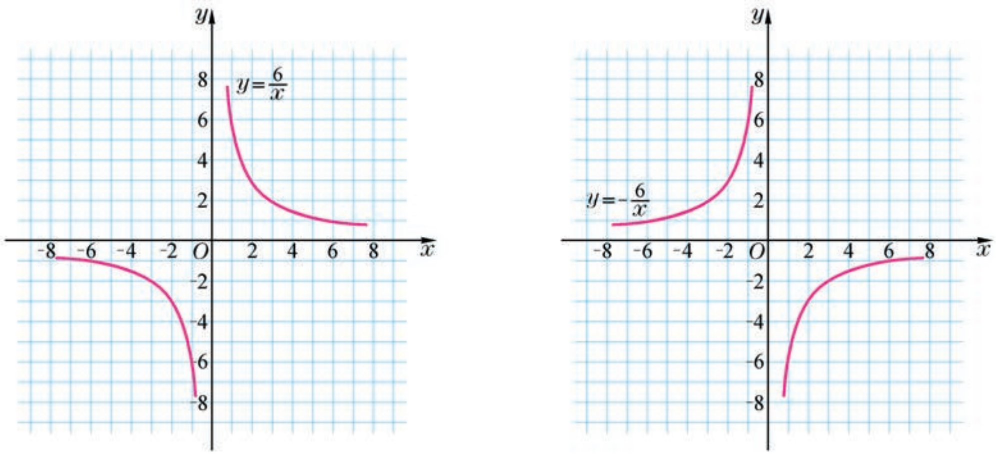


图18－9

思考

观察、比较函数 $y=\frac{8}{x}$ 和 $y=\frac{6}{x}$ 的图像，思考下列问题：

（1）这两个函数的图像分别位于哪几个象限内？

（2）在每一象限内，随着图像上的点的横坐标 x 逐渐增大，纵坐标 y 是怎样变化的？

（3）图像的每支都向两方无限延伸，它们可能与 x 轴、y 轴相交吗？为什么？

类似地，再观察和比较函数 $y=-\frac{8}{x}$ 与 $y=-\frac{6}{x}$ 的图像，并思考上述问题.

通过对图像的观察和比较，可以归纳反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k 是实数，$k\neq0$）有如下性质：

（1）当 $k>0$ 时，函数图像的两支分别在第一、三象限；在每个象限内，当自变量 x 的值逐渐增大时，y 的值随着逐渐减小.

（2）当 $k<0$ 时，函数图像的两支分别在第二、四象限；在每个象限内，当自变量 x 的值逐渐增大时，y 的值随着逐渐增大.

（3）图像的两支都无限接近于 x 轴和 y 轴，但不会与 x 轴和 y 轴相交.

性质（1）和（2）的条件与结论各自调换也是正确的，可以直接运用.

练习 18.3(2)

1. 在同一直角坐标平面内，分别画出下列函数的图像：

（1）$y=\frac{4}{x}$；　　（2）$y=-\frac{4}{x}$.

2. 根据上题的图像，分别说明自变量 x 逐渐增大时，y 的值的变化情况.

3. 已知下列反比例函数：

$$y=\frac{0.2}{x},\quad y=-\frac{1}{x},\quad y=-\frac{1}{2x},\quad y=-\frac{3}{50x}.$$

其中，图像位于第二、四象限的函数是____________；

在其图像所在的每个象限内，y 的值随 x 的值增大而减小的函数是____________.

4. 如果反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k 是常数，$k\neq0$）的图像在第二、四象限，那么正比例函数 $y=kx$（k 是常数，$k\neq0$）的图像经过哪几个象限？

例题3 已知反比例函数 $y=\frac{2k+1}{x}$.

（1）如果这个函数图像经过点 $(2,-1)$，求 k 的值；

（2）如果在这个函数图像所在的每个象限内，y 的值随 x 的值增大而减小，求 k 的取值范围.

解 （1）因为反比例函数 $y=\frac{2k+1}{x}$ 的图像经过点 $(2,-1)$，所以把 $x=2$，$y=-1$ 代入 $y=\frac{2k+1}{x}$，得 $-1=\frac{2k+1}{2}$.

> 这时函数解析式是 $y=-\frac{2}{x}$.

解得 $$k=-\frac{3}{2}.$$

（2）由于在函数 $y=\frac{2k+1}{x}$ 的图像所在的每个象限内，y 的值随 x 的值的增大而减小，可知

$$2k+1>0.$$

解得 $$k>-\frac{1}{2}.$$

例题4 已知 $y=y_1-y_2$，并且 y_1 与 x 成正比例，y_2 与 $(x-2)$ 成反比例. 当 $x=-2$ 时，$y=-7$；当 $x=3$ 时，$y=13$.

（1）求 y 关于 x 的函数解析式；

（2）求当 $x=5$ 时的函数值.

分析 由 y_1 与 x 成正比例，可设 $y_1=k_1x(k_1\neq0)$；由 y_2 与 $(x-2)$ 成反比例，可设 $y_2=\frac{k_2}{x-2}$ $(k_2\neq0)$.

> 把 $(x-2)$ 看成一个整体；由于题中的正比例系数与反比例系数是两个互不相关的常数，因此分别用 k_1、k_2 表示.

解 （1）设所求的函数解析式为 $y=k_1x-\frac{k_2}{x-2}$，其中 k_1、k_2 都是不等于零的常数.

当 $x=-2$ 时，$y=-7$，把它们代入 $y=k_1x-\frac{k_2}{x-2}$，得

$$-7=-2k_1-\frac{k_2}{-2-2}.$$

化简得 $$8k_1-k_2=28. \qquad ①$$

当 $x=3$ 时，$y=13$，把它们代入 $y=k_1x-\frac{k_2}{x-2}$，得

$$13=3k_1-\frac{k_2}{3-2}.$$

化简得 $$3k_1-k_2=13. \qquad ②$$

将①②组成一个关于 k_1、k_2 的二元一次方程组：

$$\begin{cases}8k_1-k_2=28,\\3k_1-k_2=13.\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$k_1=3, k_2=-4.$$

因此，所求函数解析式是 $y=3x+\dfrac{4}{x-2}$.

（2）当 $x=5$ 时，$y=3\times5+\dfrac{4}{5-2}=16\dfrac{1}{3}$.

所以，当 $x=5$ 时，函数值为 $16\dfrac{1}{3}$.

本例求函数解析式时还是采用待定系数法．其中，待定系数有两个，分别用 k_1、k_2 表示；通过列方程组并求解，确定 k_1、k_2 的值．

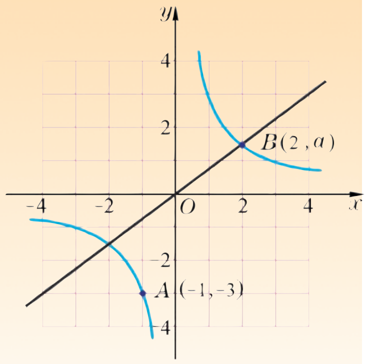
练习 18.3(3)

1. 已知反比例函数 $y=\dfrac{2k-1}{x}$ 的图像有一支在第二象限，求常数 k 的取值范围．

2. 如图，点 $A(-1,-3)$、$B(2,a)$ 在图中的反比例函数图像上，点 B 同时在图中的正比例函数图像上．

（1）求这个反比例函数的解析式；

（2）求 a 的值及这个正比例函数的解析式．



（第 2 题）

3. 已知函数 $f(x)=2x-\dfrac{2}{x}$.

（1）求这个函数的定义域；

（2）计算 $f(-1)$，$f(\sqrt{2})$.

第三节　函数的表示法

18.4　函数的表示法

正比例函数和反比例函数，都是用数学式子来表达两个变量之间的函数关系. 把两个变量之间的依赖关系用数学式子来表达，这种表示函数的方法叫做**解析法**. 这种数学式子也就是函数解析式.

用解析法表示函数关系，既全面地概括了变量之间的依赖关系，又简单明了，便于对函数进行理论上的分析和研究. 但有些函数不能用解析法表示，或者很难找到这个函数的解析式，因此必须用其他的方式来表示这些函数.

观察

2005 年 10 月 17 日，我国“神舟”六号载人飞船顺利返回地面. 下面是“神舟”六号飞船返回舱返回过程中的相关记录：

时　　间	3 时 45 分	4 时 13 分	4 时 19 分	4 时 20 分	4 时 23 分	4 时 32 分	4 时 33 分
返回舱距地面的高度	350 千米	100 千米	15 千米	10 千米	6 千米	1 千米	0
降落状况	返回舱制动点火	返回舱处于无动力飞行状态，高速进入黑障区	引导伞引出减速伞	减速伞打开	返回舱抛掉防热大底	指示灯亮，提示即将着陆	返回舱成功降落地面

本例用表格反映了“神舟”六号返回舱距地面的高度与时间的函数关系. 把两个变量之间的依赖关系用表格来表达，这种表示函数的方法叫做**列表法**.

用列表法来表示函数，自变量的值与其对应的函数值一目了然，查找方便. 但有许多函数，往往不可能把自变量的所有值与其对应的函数值都列在表中.

观察

根据研究，体内血乳酸浓度升高是运动后感觉疲劳的重要原因. 运动员未运动时，体内血乳酸浓度水平通常在 40mg/L 以下；如果血乳酸浓度降到 50mg/L 以下，运动员就基本消除了疲劳. 体

育科研工作者根据实验数据，绘制了一幅图像，它反映了运动员进行高强度运动后，体内血乳酸浓度随时间变化而变化的函数关系，如图 18－10 所示.

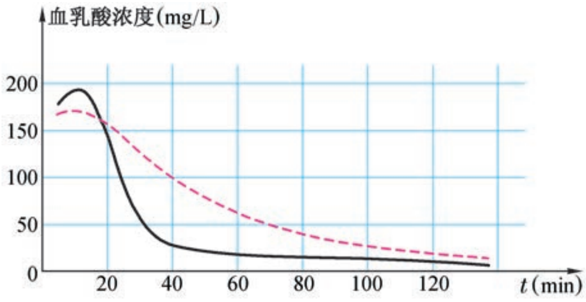


图 18－10

图中实线表示采用慢跑等活动方式放松时血乳酸浓度的变化情况；虚线表示采用静坐方式休息时血乳酸浓度的变化情况.

从图中可以看出采用慢跑方式能够更好地消除疲劳.

把两个变量之间的依赖关系用图像来表示，这种表示函数的方法叫做**图像法**.

用图像法来表示函数非常直观，可以清楚地看出函数的变化情况. 但是，在图像中找对应值时往往不够准确，而且有的函数画不出它的图像，还有许多函数不可能得到它的完整图像.

解析法、列表法、图像法是表示函数的三种常用方法. 用适当的方法表示函数，或者把几种方法结合起来，能够帮助我们更好地研究函数和运用函数解决问题. 前面在研究正比例函数和反比例函数时，我们同时运用了解析法和图像法.

例题1　把一块边长为 20 厘米的正方形铁皮，在四角各截去边长为 x 厘米的小正方形（如图 18－11），再按虚线折成一个无盖的长方体盒子. 求这个盒子的容积 V（立方厘米）关于变量 x（厘米）的函数解析式以及函数的定义域.

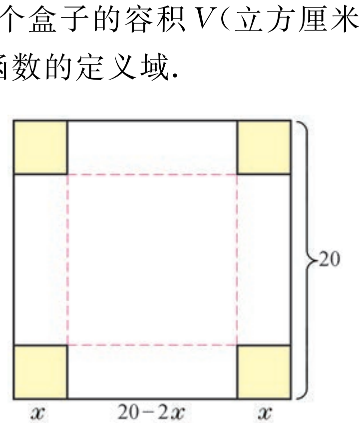


图 18－11

解　已知截去小正方形的边长为 x 厘米，那么所做成的盒子

的高是 x 厘米，盒子的底是正方形，它的边长是 $(20-2x)$ 厘米. 可得

$$V=x(20-2x)^2.$$

这就是所求 V 关于 x 的函数解析式.

因为小正方形的边长不能为零或负数，又不能等于或大于原来正方形铁皮边长的一半，所以函数的定义域是 $0<x<10$.

例题2 A、B 两地相距 25 千米，甲于某日 12 时 30 分骑自行车从 A 地出发前往 B 地，乙也于同日下午骑摩托车从 A 地出发前往 B 地. 图 18－12 中的折线 PQR 和线段 MN 分别反映了甲和乙所行驶的路程 s 与该日下午的时间 t 的函数关系. 根据图像提供的信息回答下列问题：

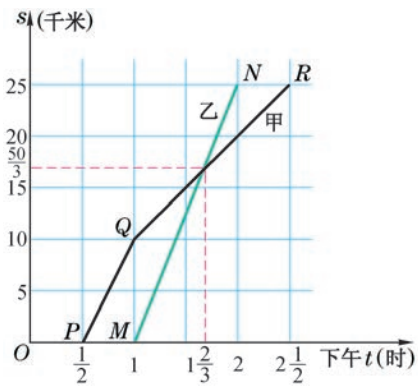


图 18－12

（1） 甲出发后几小时乙才出发？

（2） 乙行驶多少分钟后追上甲？这时两人离 B 地还有多少千米？

（3） 甲乙两人分别在下午几点到达 B 地？

（4） 甲从下午 1 时到 2 时半的速度是每小时多少千米？

（5） 乙的速度是每小时多少千米？

> 乙出发后追上甲所用时间为 $1\frac{2}{3}-1=\frac{2}{3}$（小时）.

解 （1） 甲出发半小时后乙才出发.

（2） 从图中信息可知，当乙出发 $\frac{2}{3}$ 小时（即 40 分钟）后追上甲；这时两人离 B 地的路程是

$$25-\frac{50}{3}=\frac{25}{3}（千米）.$$

（3） 甲在下午 2 时 30 分到达 B 地，乙在下午 2 时到达 B 地.

（4） $(25-10)\div\left(2\frac{1}{2}-1\right)=10$（千米/时）.

所以，甲下午 1 时到 2 时半的速度是 10 千米/时.

（5） $25\div(2-1)=25$（千米/时）.

所以，乙的速度是 25 千米/时.

练习 18.4(1)

1. 一位学生在乘坐磁悬浮列车从龙阳路站到上海浦东国际机场途中，记录了列车运行速度的变化情况，如下表：

时间 t(分)	0	1	1.5	2	3	4	5	5.5	6	7	8
速度 v(千米/时)	0	146	217	300	300	300	300	300	281	121	0

根据表中提供的信息回答下列问题：

(1) 在哪一段时间内列车的速度逐渐加快？

(2) 在哪一段时间内列车是匀速行驶的？在这一段时间内列车走了多少路程？

(3) 在哪一段时间内列车的速度逐渐减慢？

2. 某校生物小组学生准备在校内一空地围一个长方形苗圃. 苗圃的一边靠墙，墙可利用部分的最大长度为 40 米；苗圃的另一边与墙垂直，长为 30 米.
试写出苗圃的面积 y（平方米）与靠墙一边的长 x（米）的函数解析式以及函数的定义域.

例题3 一个游泳池内有水 90 立方米，设排尽全池水的时间为 t(分)，每分钟的排水量为 x(立方米)，规定排水时间至少 9 分钟，至多 15 分钟. 试写出排水时间 t 关于每分钟排水量 x 的函数解析式，并指出函数的定义域.

解 根据题意，排水时间 t 与每分钟排水量 x 成反比例关系，可表示为

$$tx=90,$$

即
$$t=\frac{90}{x}.$$

当 $t=9$ 时，得 $x=10$；当 $t=15$ 时，得 $x=6$. 可知要在规定时间内排尽池水，每分钟的排水量至多 10 立方米，至少 6 立方米.

所以，所求函数解析式是 $t=\frac{90}{x}$，定义域是 $6\leqslant x\leqslant 10$.

> 在实际问题中，当两个变量 y 和 x 成反比例时，y 是 x 的函数，可用解析法表示为 $y=\frac{k}{x}$（k 是常数，$k\neq 0$）；但是，函数的定义域一般是部分实数（不包括零）.

例题4 根据我国 2018 年 10 月开始实行的个人所得税新税率，纳税人实际取得的工资、薪金收入扣除 5 000 元后的余额为全月应纳税所得额. 新应缴纳所得税的税率仍分为 7 级，应缴纳所得税按级计算. 前 4 级的税率如下表：

级数	全月应纳税所得额	税率
1	不超过 3 000 元	3%
2	超过 3 000 元至 12 000 元的部分	10%
3	超过 12 000 元至 25 000 元的部分	20%
4	超过 25 000 元至 35 000 元的部分	25%

设个人月工资、薪金收入为 x 元，试写出当 x(元)超过 8 000(元)但不超过 17 000(元)时，个人应缴纳的所得税 y(元)关于 x(元)的函数解析式；并求个人月工资、薪金收入为 12 000 元的职工每月需缴纳的个人所得税.(x 为精确到 0.01 的正数. 本题没有符合的专项扣除项目)

分析 当 x(元)超过 8 000(元)但不超过 17 000(元)时，全月应纳税所得额为 $(x-5\,000)$ 元，其中 3 000 元税率为 3%，还有 $(x-5\,000-3\,000)$ 元在“3 000 元至 12 000 元的部分”内. 这样，其缴纳的个人所得税为

$$(x-8\,000)\times 10\%+3\,000\times 3\%(\text{元}).$$

解 当个人月工资、薪金收入 x(元)超过 8 000(元)但不超过 17 000(元)时，

$$y=(x-8\,000)\times 10\%+3\,000\times 3\%,$$

即 $y=0.1x-710$ $(8\,000<x\leqslant 17\,000$ 且 x 为精确到 0.01 的正数).

当 $x=12\,000$ 时，$y=490$(元).

答：当 x(元)超过 8 000(元)但不超过 17 000(元)时，个人应缴纳的所得税 y(元)关于 x(元)的函数解析式是 $y=0.1x-710$；个人月工资、薪金收入为 12 000 元的职工每月需缴纳的个人所得税是 490 元.

例题5 为了预防“流感”，某学校对教室采取“药熏”消毒. 已知该药燃烧时，室内每立方米的含药量 y(毫克)与时间 x(分)成正比例；药物燃烧结束后，y 与 x 成反比例；这两个变量之间的关系如图 18 - 13 所示. 根据图中所提供的信息，回答下列问题：

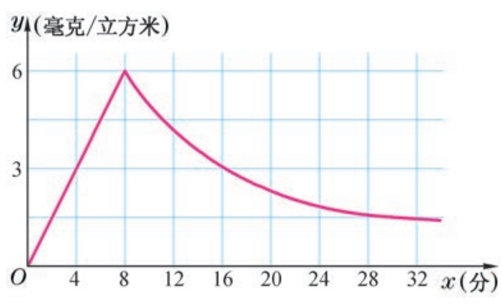


图 18 - 13

(1) 药物燃烧了几分钟时，教室里含“药”量最大？每立方米含药量有多少毫克？

(2) 写出药物燃烧时，y 关于 x 的函数解析式及定义域.

(3) 写出在药物燃烧结束后，y 关于 x 的函数解析式及定义域.

解 (1) 根据图像可知，药物燃烧了 8 分钟时，教室里含药量最大，每立方米有 6 毫克.

(2) 在药物燃烧过程中，y 与 x 成正比例. 可设 $y=k_1x\ (k_1\neq 0)$.

把点(8,6)的坐标代入，解得 $k_1=\dfrac{3}{4}$.

又从图像可知，药物燃烧到第 8 分钟，所以药物燃烧时的函数为

$$y=\frac{3}{4}x\ (0\leqslant x\leqslant 8).$$

(3) 药物燃烧结束后，y 与 x 成反比例. 可设

$$y=\frac{k_2}{x}\ (k_2\neq 0).$$

把点(8,6)的坐标代入，解得 $k_2=48$.

所以，所求函数为 $y=\dfrac{48}{x}\ (x\geqslant 8)$.

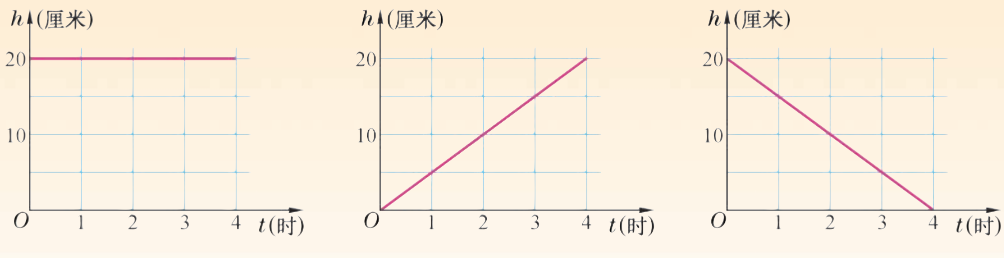
医学研究表明，当空气中每立方米的含药量不低于 3 毫克、且持续时间不少于 10 分钟时，才能有效杀灭空气中的病毒. 本次消毒是否有效？为什么？

练习 18.4(2)

1. (1) 已知每千克苹果售价 8.90 元，设购买苹果 x 千克，需付款 y 元，试写出 y 关于 x 的函数解析式；

   (2) 采购员用 200 元去买苹果，设每千克苹果售价 x 元，可购买苹果 y 千克，试写出 y 关于 x 的函数解析式.

2. 一支蜡烛长 20 厘米，点燃后每小时燃烧 5 厘米.
   试判断在下列图像中，能大致表示这支蜡烛点燃后剩下的长度 h(厘米)与点燃的时间 t(时)之间的函数关系的是哪一个图.



(A) (B) (C)

(第 2 题)

3. 近视眼镜的度数 y(度)与镜片焦距 x(米)成反比例. 已知 400 度的近视眼镜镜片的焦距为 0.25 米，请写出眼镜度数 y 关于镜片焦距 x 的函数解析式.

本章小结

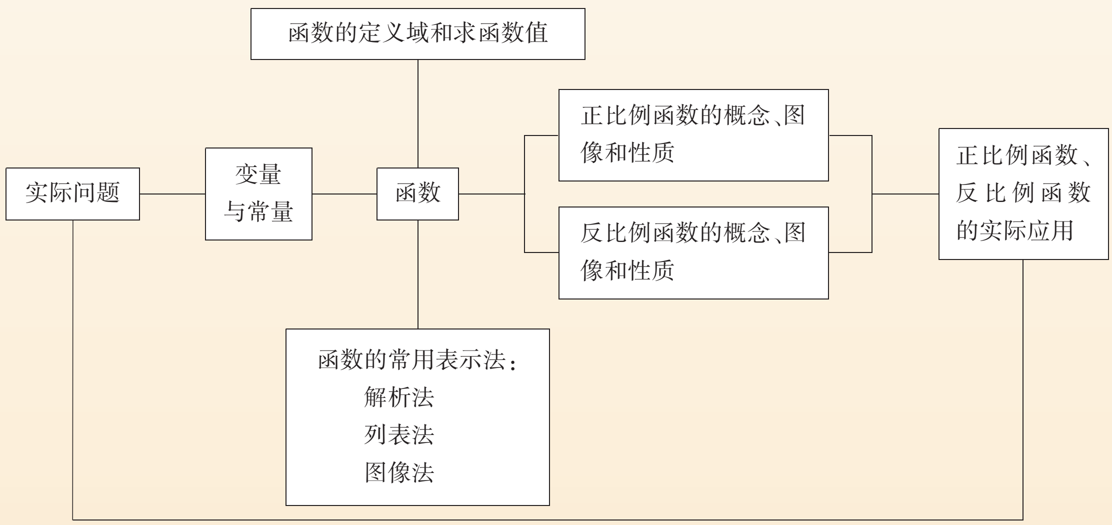
客观世界是不断运动、变化的，事物中存在各种各样的变量. 在同一个变化过程中，一些变量之间相互依存，一个变量的变化会引起其他变量的相应变化.

函数是体现运动变化的基本数学概念，它从数量角度刻画事物变化的过程，表达变量之间确定的依赖关系. 一般来说，对于函数必须指明它的定义域；在没有特别说明的情况下，函数的定义域是指使函数解析式有意义的自变量的取值范围. 在实际问题中，自变量的取值要符合实际意义.

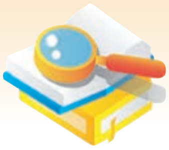
本章重点讨论了正比例函数和反比例函数. 我们通过分析现实生活中具有正比例或反比例关系的具体事例，建立了正比例函数、反比例函数的概念；借助于图像的直观，得到了它们的一些基本性质；并应用这些概念和性质，解决一些简单的实际问题.

函数的表示方法，常用的有解析法、列表法、图像法等三种，不同的表示方法各具特点、各有局限，把几种方法结合起来，有助于对函数进行分析和研究. 利用函数图像的直观，数形结合地研究函数的性质，是在初中阶段学习函数的基本要求；利用图表获取信息，运用函数描述变化过程，利用待定系数法确定函数解析式，其中的数学思想方法要认真体会.

本章的知识结构框图如下：



18

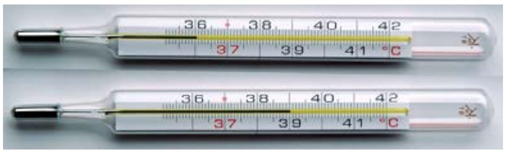


探究活动

生活中的函数

活动一

水银体温计的读数与水银柱的长度之间是否存在函数关系呢?



(1) 收集数据:

温度计的读数(℃)	35	36	37	38	39	40	41	42
水银柱的长度(cm)								

(2) 分别以水银温度计的读数与相应的水银柱的长度为点的横坐标与纵坐标,在直角坐标平面内分别描出各个点,并用光滑的曲线(或直线)将这些点连接起来.

(3) 水银温度计的读数 t 是水银柱的长度 h 的函数吗? 为什么?

活动二

调查、整理一个实际事例，这个事例中有两个具有正比例关系或反比例关系的变量；再把这两个变量之间的关系用函数描述出来.

活动要求：

（1）观察周围的事物，或者从家庭生活中了解，或者去商店调查，整理一个实际事例.

（2）用函数描述这个事例中两个变量之间的关系.

（3）完成作业单.

项目	内容
实际事例	
函数表示	
活动体会	

Jihe Zhengming

19 第十九章　几何证明

我们在实验几何学习中，通过观察、操作活动以及说理，发现并确认了一些图形的基本性质，获得了研究图形的有益经验和方法.在此基础上，本章我们要学习用逻辑推理方法进行论证的几何学.这样的几何学，源头是在公元前300年由古希腊数学家欧几里得(Euclid)整理编写的《Elements》(原本)一书，这部数学名著在公元1607年由明代科学家徐光启和意大利传教士利玛窦合作译成中文(定名为《几何原本》)，传入我国.

古希腊人崇尚理性精神，讲究用逻辑推理方法获取可靠的知识.逻辑推理既朴实又严谨.例如，有一个著名的推论：

“人是要死的”；

“苏格拉底是人”；

“所以苏格拉底是要死的”.

其中第一句话是公认的“公理”，第二句话是已知的事实，第三句话则是根据第一、二句话所说两个前提推出的结论，其可靠性不容置疑.

以几何图形为载体，从公理和已知事实出发推导出有关图形性质的结论，而且结论完全可靠，这就是几何证明.

2002年国际数学家大会会标


欧几里得
(公元前 330 年~前 275 年)


徐光启
(公元 1562 年~1633 年)

本章是几何证明的入门，我们从中学习的是一种思维方法，以及它所体现的理性精神.

Jihe Zhengming

第一节　几何证明

19.1　命题和证明

1. 演绎证明

一般来说，证明是指人们为获得使人信服的结论所采用的手段，有“实践证明”“历史证明”“实验证明”“举例证明”等多种形式；而对数学结论的正确性进行证明，还有更为严格的形式.

怎样才算严格的数学证明呢？下面以“对顶角相等”为例进行分析.

我们分别用下列三种方法来导出“对顶角相等”.

一是直观说明，即凭眼睛看到的结果就加以认定.

二是操作确认，可以用量角器度量两个对顶角，也可以把两个对顶角剪下来相叠，由度量所得数据基本相同或叠在一起基本重合就加以确认.

三是推理论证，这是古希腊的数学家欧几里得在《几何原本》中所采用的，用现在的术语表述如下（见七年级第二学期数学课本）：

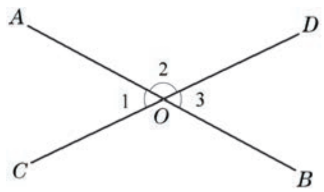


图 19－1

（如图 19－1）
因为$\angle 1$与$\angle 2$、$\angle 2$与$\angle 3$分别是邻补角（已知），
所以$\angle 1+\angle 2=180^\circ$，$\angle 2+\angle 3=180^\circ$（邻补角的意义）.
得$\angle 1+\angle 2=\angle 2+\angle 3$（等量代换）.
所以$\angle 1=\angle 3$（等量减等量，差相等）.

这三种方法中，哪一种最可靠、最有说服力？

第一种方法是凭个人观察进行判断. 眼见为实，几何直观很重要. 但是直观往往只能认识表面现象，还需要提高到理性认识，才能掌握事物的本质.

第二种方法是通过人们的实践进行检验. 因为这种检验可以无数次重复，而结论总是基本相同，所以有较高的真理性. 但是，测量难免有误差，叠合还需讲道理.

第三种方法是完全依靠理性进行推导. 它不凭任何个人的感觉，而是从邻补角的意义出发，运用等量的两个基本性质，按照“有此因就有其果”的规则，符合逻辑地推导出结论. 这一证明方法是严格的，也是最为可靠的.

像上述第三种方法，称为演绎推理（或演绎法）. 演绎推理的过程，就是演绎证明.

在代数中也用演绎推理. 例如已知 $2x+3=5$，求 x.
解：因为 $2x+3=5$（已知），
所以 $2x=2$（等式性质），
所以 $x=1$（等式性质）.

也就是说，演绎证明是指：从已知的概念、条件出发，依据已被确认的事实和公认的逻辑规则，推导出某结论为正确的过程.

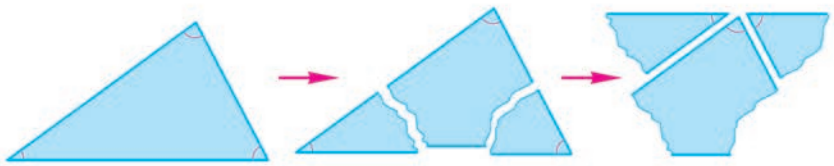
演绎推理是数学证明的一种常用的、完全可靠的方法. 演绎证明是一种严格的数学证明，是我们现在要学习的证明方式. 在本书中，演绎证明简称**证明**(proof).

学习演绎证明，可以使我们的思维严格、缜密，其表达条理清楚、无可辩驳. 这是提高逻辑思维能力的有效途径.

但是，并不是所有真理都可以进行演绎证明. 在其他领域内，上文所说的各种证明方式仍然有它特定的效力.

再看下面关于“三角形内角和”的例子.

我们在学习过程中，先用实验的方法进行探究，如分别度量三个内角，求出它们的和；或利用三角形纸板，裁下它的三个内角再拼在一起，发现它们组成了一个平角，从而形成了“三角形的内角和等于 180°”的猜想.



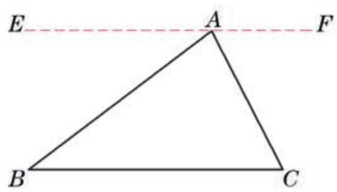


图 19－2

然后，对猜想的正确性证明如下(见七年级第二学期数学课本)：

> 如图 19－2，过△ABC 的顶点 A 作直线 $EF // BC$.
> 因为 $EF // BC$(所作)，
> 所以∠EAB＝∠B，∠FAC＝∠C(两直线平行，内错角相等).
> 因为 E、A、F 在直线 EF 上(所作)，
> 所以∠EAB＋∠BAC＋∠FAC＝180°(平角的意义).
> 所以∠B＋∠BAC＋∠C＝180°(等量代换).

由于证明的需要，可以在原来的图形上添画一些线，像这样的线叫做**辅助线**(auxiliary line). 辅助线通常画成虚线. 本例添加了辅助线 EF(见图 19－2).

通过以上两例，我们初步知道了什么是演绎证明. 还从中看到，演绎证明的每一步推理都必须有依据，通常把每一步的依据写在由其得到的结论后面的括号内；整个证明由一段一段的因果关系连接而成，段与段前后连贯，有序展开. 还是以“对顶角相等”的证明为例：

推理的依据，可以是“已知条件”和“已证事项”(简记为“已知”和“已证”)，也可以是已有的概念、性质等.

第一段，先说“因”——“∠1 与∠2、∠2 与∠3 分别是邻补角”；再说“果”——“∠1＋∠2＝180°，∠2＋∠3＝180°”；然后在括号内表述确立因果关系的“依据”——“邻补角的意义”.

第二段，所说的“因”是“∠1＋∠2＝180°，∠2＋∠3＝180°”；“果”是“∠1＋∠2＝∠2＋∠3”；“依据”是“等量代换”.

这样表述“因果关系”的形式，初学时要写得详细些，以后可以在保持论证完整的前提下逐步简约.

第三段，所说的“因”是“$\angle 1+\angle 2=\angle 2+\angle 3$”；“果”是“$\angle 1=\angle 3$”；“依据”是“等量减等量，差相等”.

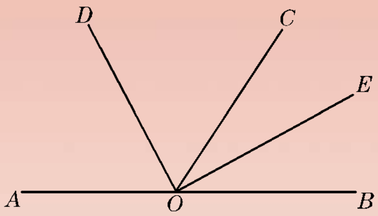
从整体上看，前一段中的“果”为后一段提供了“因”，一连串这样连贯、有序的因果关系组成了完整的证明.

练习 19.1(1)

1. 阅读下面的证明过程，说一说其中的因果关系.

已知：如图，$\angle AOC$ 与 $\angle COB$ 互为邻补角，OD 平分 $\angle AOC$，OE 平分 $\angle COB$.

求证：$\angle DOE=90°$.



（第 1 题）

证明：因为 OD 平分 $\angle AOC$（已知），

所以 $\angle DOC=\frac{1}{2}\angle AOC$（角平分线的意义）.

同理 $\angle COE=\frac{1}{2}\angle COB$.

所以 $\angle DOC+\angle COE=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle COB$

$=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle COB)$（等式性质）.

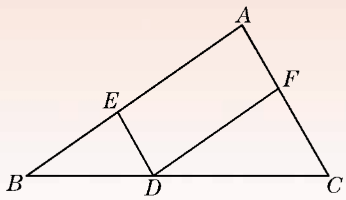
因为 $\angle AOC$ 与 $\angle COB$ 互为邻补角（已知），

所以 $\angle AOC+\angle COB=180°$（邻补角的意义），

得 $\angle DOC+\angle COE=90°$（等量代换），

所以 $\angle DOE=90°$.

2. 已知：如图，点 D、E、F 分别在 $\triangle ABC$ 的边 BC、AB、AC 上，且 $DF/\!/AB$，$DE/\!/AC$，试利用平行线的性质证明 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$.



（第 2 题）

2. 命题、公理、定理

科学研究的目的是揭示客观世界的规律，而规律的表述常用判断性语句. 例如“地球是绕太阳旋转的”“标准气压下的水在零摄氏度以下会结冰”.

在数学中，下列句子是大家熟悉的：

(1) 能够被 2 整除的数叫做偶数.

(2) 互为补角的两个角都是锐角.

(3) 对顶角相等.

(4) 如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

(5) 两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行.

（6）画$\angle AOB$的平分线OC.

（7）等角的余角相等吗？

句子（1）是说明偶数这个名词的含义，像这样能界定某个对象含义的句子叫做**定义**（definition）.

句子（2）（3）（4）（5）都是对某一件事情作出判断，像这样，判断一件事情的句子叫做**命题**（proposition）. 其判断为正确的命题叫做**真命题**（true proposition）；其判断为错误的命题叫做**假命题**（false proposition）. 上述命题中，（3）（4）（5）是真命题，（2）是假命题.

句子（6）（7）不是判断性语句，因而不是命题.

数学命题通常由题设、结论两部分组成，题设是已知事项，结论是由已知事项推出的事项. 这样的命题可以写成“如果……，那么……”的形式，用“如果”开始的部分是题设，用“那么”开始的部分是结论，例如命题（4）.

“对顶角相等”是一个简洁表述的命题，它也可以改写成“如果……，那么……”的形式，叙述为“如果两个角是对顶角，那么这两个角相等”.

句子“由不在同一直线上的三条线段首尾顺次联结所组成的图形叫做三角形”，是三角形的定义. 你能再举出一些这样的例子吗？

命题（5）中，“内错角相等”是题设，“这两条直线平行”是结论. 不过，这个命题中，“如果”前面还有“两条直线被第三条直线所截”的条件，没有这个条件，就没有内错角，所以这个条件也属于题设部分.

议一议

把命题“同角的余角相等”改写成“如果……，那么……”的形式，并指出这个命题的题设和结论.

在以前的学习中，我们通过操作实验，归纳出一些基本事实，如：

两点之间线段最短.

过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行.

过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.

同位角相等，两直线平行.

两直线平行，同位角相等.

这些基本事实，当时分别称为线段的基本性质、平行线的基本性质、垂线的基本性质、平行线的判定方法1和平行线的性质1. 它们都是命题，是被公认为正确的.

人们从长期的实践中总结出来的真命题叫做**公理**（axiom），它们可以作为判断其他命题真假的原始依据.

严格意义的几何公理，其正确性不需证明，也不能证明. 为便于学习，课本中列出的公理的范围有所扩大.

有些命题是从公理或其他真命题出发，用推理方法证明为正确的，并进一步作为判断其他命题真假的依据，这样的真命题叫做**定理**（theorem）.

例如：依据公理“两点之间线段最短”，可以推导出“三角形

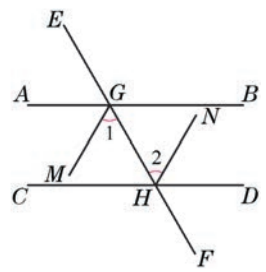
再如，“在同一平面内垂直于同一直线的两条直线平行”也是定理.

的任何两边之和大于第三边”是正确的；依据公理“两直线平行，同位角相等”“等量代换”和真命题“对顶角相等”，可以推导出“两直线平行，内错角相等”是正确的. 真命题“三角形的任何两边之和大于第三边”“两直线平行，内错角相等”，还是判断其他一些命题真假的常用依据，所以它们是定理. 前面所列真命题(3)(4)(5)也都是定理.

定义、公理和定理，都是用推理方法判断命题真假的依据.

确认一个命题是真命题，要经过证明. 那么证明真命题需要有哪些步骤呢？

以证明真命题“两条平行线被第三条直线所截，内错角的平分线互相平行”为例，说明如下：

步　　骤	解　　说
(1) 根据题意作出图形，并在图上标出必要的字母或符号.	
(2) 根据题设和结论，结合图形，写出“已知”和“求证”.	已知：如图，$AB//CD$，直线 EF 分别与 AB、CD 相交于点 G、H，GM、HN 分别平分 $\angle AGH$ 与 $\angle DHG$. 求证：$GM//HN$.
(3) 经过分析，找出由已知推出结论的途径，写出证明过程.	证明：因为 $AB//CD$（已知）， 所以 $\angle AGH=\angle DHG$（两直线平行，内错角相等）. 又因为 GM 平分 $\angle AGH$（已知）， 所以 $\angle 1=\frac{1}{2}\angle AGH$（角平分线的定义）. 同理 $\angle 2=\frac{1}{2}\angle DHG$. 得 $\angle 1=\angle 2$（等式性质）. 所以 $GM//HN$（内错角相等，两直线平行）.

你能对本例再举出其他的反例吗？当然，证明一个命题是假命题，有一个反例就够了.

证明一个命题是假命题，只要举出一个反例.

例如，“互为补角的两个角都是锐角”是假命题，证明如下：

两个直角互为补角，但它们却不是锐角. 所以这个命题是假命题.

练习 19.1(2)

1. 请举出一些命题，并判断命题的真假.
2. 指出下列命题的题设和结论，并判断命题的真假：
   (1) 同旁内角相等，两直线平行.
   (2) 全等三角形的对应边相等.
   (3) 在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线互相平行.
   (4) 在一个三角形中，等边对等角.
   (5) 关于某个点中心对称的两个三角形全等.
   (6) 等角的补角相等.

19.2 证明举例

在平行线和三角形的学习中，我们通过说理确认了一些真命题. 那时的说理，其实就是证明. 下面再看一些证明的例子.

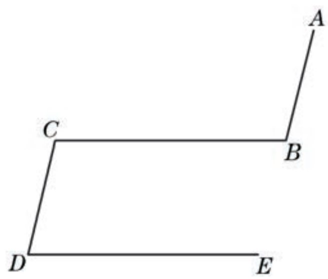


图 19－3

例题1 已知：如图 19－3，$AB /\!/ CD$，$\angle B+\angle D=180^\circ$.

求证：$CB /\!/ DE$.

分析 要证明 $CB /\!/ DE$，只要证明 $\angle C+\angle D=180^\circ$. 已知 $\angle B+\angle D=180^\circ$，因此只要证明 $\angle B=\angle C$，而这由已知条件 $AB /\!/ CD$ 是可以得到的.

证明 ∵ $AB /\!/ CD$(已知)，

∴ $\angle B=\angle C$(两直线平行，内错角相等).

又∵ $\angle B+\angle D=180^\circ$(已知)，

∴ $\angle C+\angle D=180^\circ$(等量代换).

∴ $CB /\!/ DE$(同旁内角互补，两直线平行).

> 在证明的表述中，符号“∵”“∴”分别读作“因为”“所以”，并与其同义.

在本例证明之前有“分析”，这是在弄清题意的基础上，探索证明思路的过程. 这里采用的分析方法，是从“要证什么”着眼，探寻“需知什么”，由此考虑“只要证什么”，一直追寻到“已知”. 而证明的表述，一般是从“已知”开始，推导出“可知”，直到求证的“结论”.

> 在解题时，证明之前的“分析”一般不要求写出来.

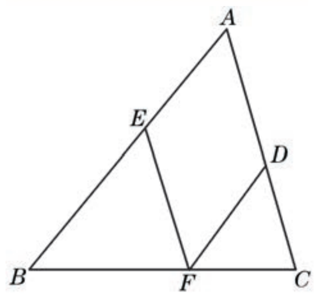


图 19－4

例题2 已知：如图 19－4，点 D、E、F 分别是 AC、AB、BC 上的点，$DF /\!/ AB$，$\angle DFE=\angle A$.

求证：$EF /\!/ AC$.

分析 要证明 $EF /\!/ AC$，只要证明 $\angle BEF=\angle A$(或 $\angle AEF+\angle A=180^\circ$). 又已知 $\angle DFE=\angle A$，因此只要证明 $\angle BEF=\angle DFE$，而这由已知条件 $DF /\!/ AB$ 可以得到.

证明 $\because$ $DF /\!/ AB$（已知），

$\therefore$ $\angle BEF=\angle DFE$（两直线平行，内错角相等）.

又$\because$ $\angle DFE=\angle A$（已知），

$\therefore$ $\angle BEF=\angle A$（等量代换）.

$\therefore$ $EF /\!/ AC$（同位角相等，两直线平行）.

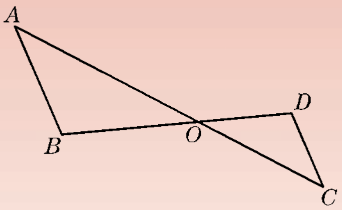
想一想

依据学过的哪些定理可以证明两条直线平行？

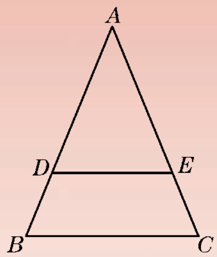
练习 19.2(1)

1. 已知：如图，AC 与 BD 相交于点 O，$\angle A=\angle AOB$，$\angle C=\angle COD$.

求证：$AB /\!/ CD$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，点 D、E 分别在$\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上，$AB=AC$.

（1）如果 $DE /\!/ BC$，求证：$AD=AE$；

（2）如果 $AD=AE$，求证：$DE /\!/ BC$.

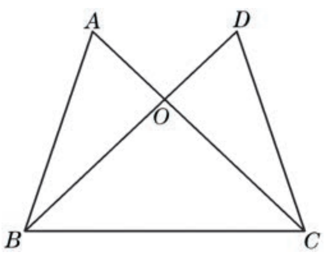


图 19－5

例题3 已知：如图 19－5，AC 与 BD 相交于点 O，$OA=OD$，$\angle OBC=\angle OCB$.

求证：$AB=DC$.

分析 将 AB 和 DC 分别看成是$\triangle AOB$ 和$\triangle DOC$ 的边，那么要证明 $AB=DC$，只要证明$\triangle AOB$ 和$\triangle DOC$ 全等.

证明 在$\triangle BOC$ 中，

$\because$ $\angle OBC=\angle OCB$（已知），

$\therefore$ $OB=OC$（等角对等边）.

在$\triangle AOB$ 与$\triangle DOC$ 中，

$$\begin{cases} OA=OD\text{（已知）}, \\ \angle AOB=\angle DOC\text{（对顶角相等）}, \\ OB=OC\text{（已证）}, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle AOB\cong\triangle DOC$（S. A. S）.

$\therefore$ $AB=DC$（全等三角形的对应边相等）.

想一想

如果将 AB 和 DC 分别看成是$\triangle ABC$ 和$\triangle DCB$ 的边，那么怎样证明 $AB=DC$？

例题4 已知：如图 19－6，$AB=AC$，$DB=DC$.

求证：$\angle B=\angle C$.

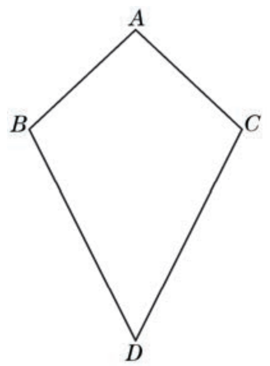


图 19－6

分析 要证明两个角相等，可利用全等三角形的性质. 观察图 19－6，如果联结 AD，那么$\angle B$ 和$\angle C$ 就分别为$\triangle ABD$ 和$\triangle ACD$ 的内角，这时要证明$\angle B=\angle C$，只要证明$\triangle ABD\cong\triangle ACD$.

证明 联结 AD（如图 19－7）.

在$\triangle ABD$ 与$\triangle ACD$ 中，

$$\begin{cases} AB=AC（已知），\\ DB=DC（已知），\\ AD=AD（公共边），\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$（S. S. S）.

$\therefore$ $\angle B=\angle C$（全等三角形的对应角相等）.

本题的证明涉及添辅助线. 通过联结 AD，构造了两个三角形，把“已知”和“求证”联系起来.

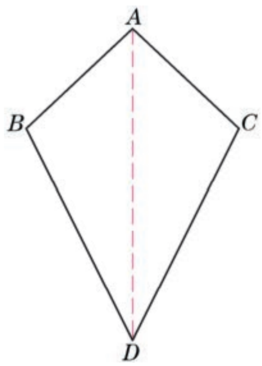


图 19－7

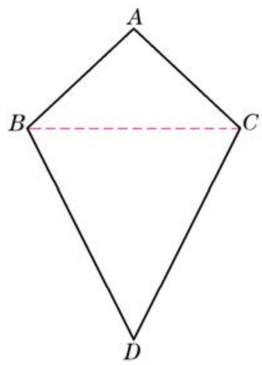


图 19－8

本题还可以这样分析：从已知条件 $AB=AC$，$DB=DC$，联想到等腰三角形的性质，把$\angle ABD$ 和$\angle ACD$ 各分成两部分，分别证明每一部分对应相等，于是考虑联结 BC，如图19－8 所示.

在这样分析的基础上，请同学们完成证明.

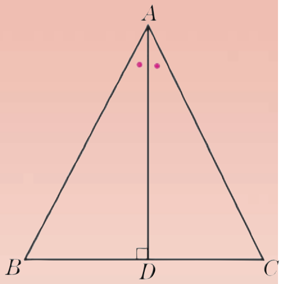
例题 3、例题 4 告诉我们，利用全等三角形的性质可以证明线段相等、角相等，而且这是常用的基本方法.

想一想

依据学过的哪些定理可以证明线段相等？哪些定理可以证明角相等？

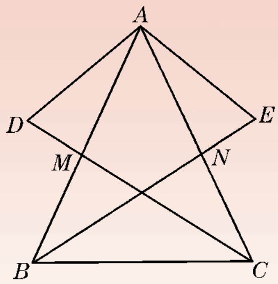
练习 19.2(2)

1. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，AD 平分 $\angle BAC$，$AD \perp BC$，垂足为点 D.
   求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

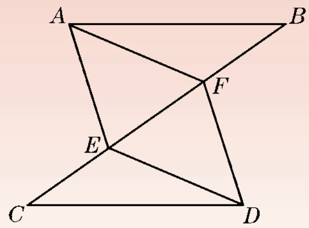


（第 1 题）

2. 已知：如图，$AB=AC$，$AD=AE$，AB、DC 相交于点 M，AC、BE 相交于点 N，$\angle DAB=\angle EAC$.
   求证：$\angle D=\angle E$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 已知：如图，E、F 是线段 BC 上的两点，$AB /\!/ CD$，$AB=DC$，$CE=BF$.
   求证：$AE=DF$.

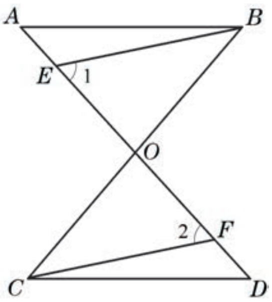


图 19－9

例题5 已知：如图 19－9，AD、BC 相交于点 O，$OA=OD$，$OB=OC$，点 E、F 在 AD 上，且 $\angle ABE=\angle DCF$.

求证：$BE /\!/ CF$.

分析 要证明 $BE /\!/ CF$，只要证明 $\angle 1=\angle 2$；已知 $\angle ABE=\angle DCF$，又由三角形的外角性质可知 $\angle 1=\angle A+\angle ABE$，$\angle 2=\angle D+\angle DCF$，因此只要证明 $\angle A=\angle D$.

证明 在 $\triangle AOB$ 与 $\triangle DOC$ 中，

$$\begin{cases} OA=OD（已知）, \\ \angle AOB=\angle DOC（对顶角相等）, \\ OB=OC（已知）, \end{cases}$$

∴ $\triangle AOB \cong \triangle DOC$(S. A. S).

∴ $\angle A=\angle D$（全等三角形的对应角相等）.

又∵ $\angle ABE=\angle DCF$（已知），

$\angle 1=\angle A+\angle ABE$，$\angle 2=\angle D+\angle DCF$（三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和）.

∴ $\angle 1=\angle 2$（等式性质）.

∴ $BE /\!/ CF$（内错角相等，两直线平行）.

例题6 已知：如图 19－10，$AD /\!/ BC$，E 是线段 BC 的中点，

$AE=DE$.

求证：$AB=DC$.

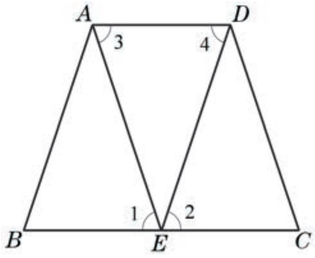


图 19－10

证明 ∵ $AD /\!/ BC$（已知），

∴ $\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$（两直线平行，内错角相等）.

∵ $AE=DE$（已知），

∴ $\angle 3=\angle 4$（等边对等角）.

∴ $\angle 1=\angle 2$（等量代换）.

∵ E 是线段 BC 的中点（已知），

∴ $BE=CE$（线段中点的定义）.

在$\triangle ABE$与$\triangle DCE$中，

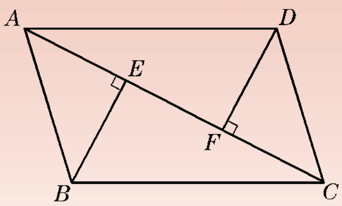
$$\begin{cases} AE=DE（已知），\\ \angle 1=\angle 2（已证），\\ BE=CE（已证），\end{cases}$$

∴ $\triangle ABE \cong \triangle DCE$（S. A. S）.

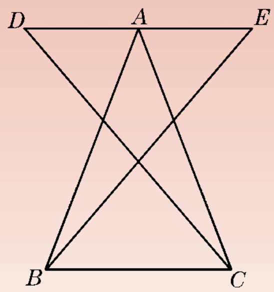
∴ $AB=DC$（全等三角形的对应边相等）.

练习 19.2(3)

1. 已知：如图，$BE \perp AC$，$DF \perp AC$，垂足分别是点 E、F. $AF=CE$，$BE=DF$.
求证：$AB=CD$，$AB /\!/ CD$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，$DE /\!/ BC$，A 是 DE 上一点，$AD=AE$，$AB=AC$.
求证：$BE=CD$.

例题7 已知：如图 19－11，$DB \perp AB$，$DC \perp AC$，且$\angle 1=\angle 2$.

求证：$AD \perp BC$.

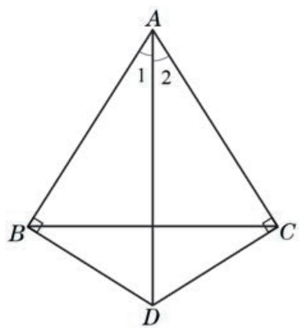


图 19－11

证明 ∵ $DB \perp AB$，$DC \perp AC$（已知），

∴ $\angle ABD=\angle ACD=90^{\circ}$（垂直的定义）.

在$\triangle ABD$与$\triangle ACD$中，

$$\begin{cases}\angle ABD=\angle ACD(\text{已证}),\\ \angle 1=\angle 2(\text{已知}),\\ AD=AD(\text{公共边}),\end{cases}$$

∴ $\triangle ABD \cong \triangle ACD$(A. A. S).

得 $AB=AC$(全等三角形的对应边相等).

∵ $\triangle ABC$ 是等腰三角形,且 $\angle 1=\angle 2$,

∴ $AD \perp BC$(等腰三角形的三线合一).

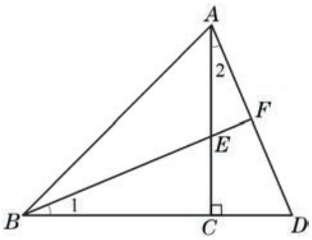


图 19 - 12

例题8 已知:如图 19 - 12,$\triangle ABD$ 中,$AC \perp BD$,垂足为点 C,$AC=BC$. 点 E 在 AC 上,且 $CE=CD$. 联结 BE 并延长交 AD 于点 F.

求证:$BF \perp AD$.

分析 要证明 $BF \perp AD$,只要证明 $\angle BFD=90^\circ$. 由三角形内角和等于 180°,可知 $\angle 1+\angle D+\angle BFD=180^\circ$,$\angle 2+\angle D+\angle ACD=180^\circ$,又 $\angle ACD=90^\circ$,因此只要证明 $\angle 1=\angle 2$.

证明 ∵ $AC \perp BD$(已知),

∴ $\angle ACB=\angle ACD=90^\circ$(垂直的定义).

在 $\triangle BCE$ 与 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases}CE=CD(\text{已知}),\\ \angle BCE=\angle ACD(\text{已证}),\\ BC=AC(\text{已知}),\end{cases}$$

∴ $\triangle BCE \cong \triangle ACD$(S. A. S).

得 $\angle 1=\angle 2$(全等三角形的对应角相等).

在 $\triangle ACD$ 中,$\angle 2+\angle D+\angle ACD=180^\circ$(三角形的内角和等于 180°),

在 $\triangle BFD$ 中,$\angle 1+\angle D+\angle BFD=180^\circ$(三角形的内角和等于 180°),

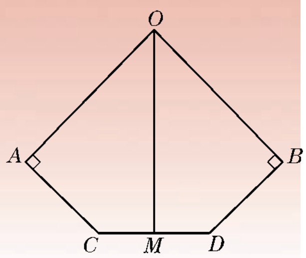
∴ $\angle 1+\angle D+\angle BFD=\angle 2+\angle D+\angle ACD$(等量代换).

∴ $\angle BFD=\angle ACD=90^\circ$(等式性质).

∴ $BF \perp AD$(垂直的定义).

练习 19.2(4)

1. 已知:如图,$OA=OB$,$AC=BD$,且 $OA \perp AC$,$OB \perp BD$,点 M 在 CD 上,$\angle AOM=\angle BOM$.
   求证:$OM \perp CD$.



(第 1 题)

2. 小明用如下两种方法画出了互相垂直的两条直线,你能证明这两种画法的正确性吗?
   画法一:

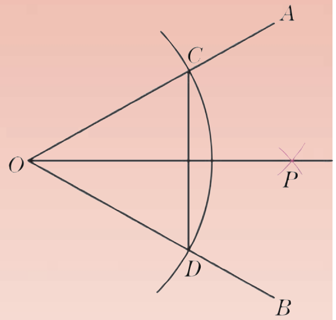
① 画$\angle AOB$；

② 以点 O 为圆心、任意长为半径画弧，分别交 OA 于点 C，交 OB 于点 D；

③ 再分别以点 C 和点 D 为圆心、大于$\frac{1}{2}CD$ 的同样长为半径画弧，两弧相交于$\angle AOB$ 内部一点 P；

④ 分别画射线 OP、线段 CD .

则 CD 与 OP 互相垂直.



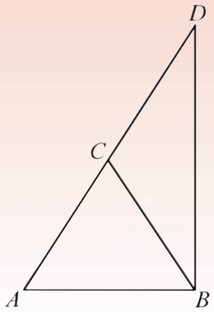
画法二：

① 画线段 AB，再分别以点 A 和点 B 为圆心、大于$\frac{1}{2}AB$ 的同样长为半径画弧，两弧相交于点 C；

② 分别联结 AC、BC，延长 AC 到点 D，使 $CD=CA$；

③ 联结 DB .

则 DB 与 AB 互相垂直.



“三边对应相等的两个三角形全等”是一个真命题，现在我们来证明这个事实.

例题9 已知：如图 19－13，在$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$中，$AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$CA=C'A'$.

求证：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

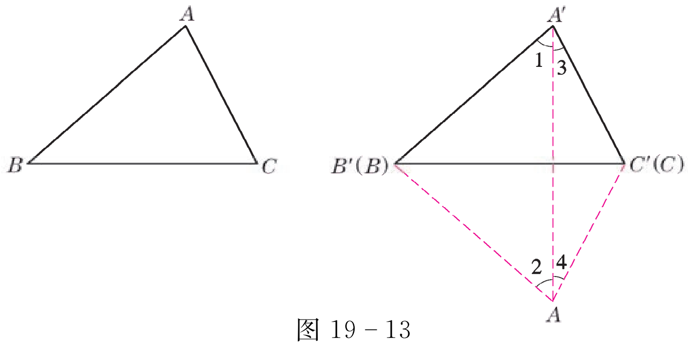


图 19－13

分析 全等三角形的其他判定方法都与三角形的角有关，于是要设法找到$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$中有一组角对应相等. 但是，在这两个分散的三角形中，已知条件的作用受到限制，因此考虑通过图形的运动，把它们组合成一个图形.

证明 不妨设边 BC 最长. 如图 19－13，把$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$拼在一起，使边 BC 和 $B'C'$重合，并使点 A、A'在 $B'C'$的两侧；再联结 $A'A$.

$\because$ $AB=A'B'$，$AC= A'C'$(已知)，

$\therefore \quad \angle 1=\angle 2, \angle 3=\angle 4$ (等边对等角).

$\therefore \quad \angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$(等式性质),

即 $\angle B'A'C'=\angle BAC$.

在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中,

$$\begin{cases} AB=A'B'(\text{已知}), \\ \angle BAC=\angle B'A'C'(\text{已证}), \\ AC=A'C'(\text{已知}), \end{cases}$$

$\therefore \quad \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$(S. A. S).

想一想

如果拼图时使 AB 与 $A'B'$ 重合，能证明$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$全等吗？试一试.

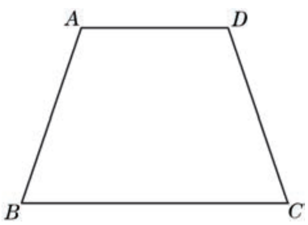


图 19－14

例题10 已知:如图 19－14,四边形 $ABCD$ 中,$AB=DC$,$\angle B=\angle C$.

求证:$\angle A=\angle D$.

分析 要证明$\angle A=\angle D$,容易想到通过证明$\angle A$与$\angle D$所在的两个三角形全等来实现. 因此分别联结 AC、BD,设法证明$\triangle ABD$与$\triangle DCA$全等.

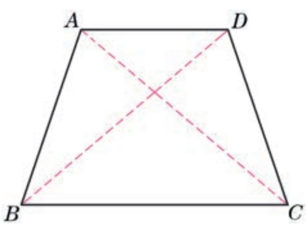


图 19－15

证明 分别联结 AC、DB(如图 19－15).

在$\triangle ABC$与$\triangle DCB$中,

$$\begin{cases} AB=DC(\text{已知}), \\ \angle ABC=\angle DCB(\text{已知}), \\ BC=CB(\text{公共边}), \end{cases}$$

$\therefore \quad \triangle ABC \cong \triangle DCB$(S. A. S).

得 $AC=DB$(全等三角形的对应边相等).

在$\triangle ABD$与$\triangle DCA$中,

$$\begin{cases} DB=AC(\text{已证}), \\ AB=DC(\text{已知}), \\ AD=DA(\text{公共边}), \end{cases}$$

$\therefore \quad \triangle ABD \cong \triangle DCA$(S. S. S).

$\therefore \quad \angle BAD=\angle CDA$(全等三角形的对应角相等).

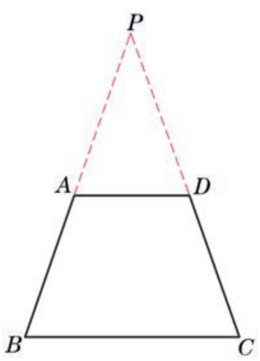
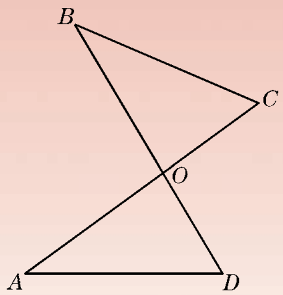


图 19－16

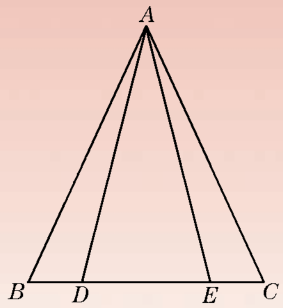
我们如果从已知"$\angle B=\angle C$"进行分析,可知$\angle B$、$\angle C$所在的三角形是等腰三角形. 只要作出以 BC 为底边、$\angle B$ 和$\angle C$为底角的那个等腰三角形(如图 19－16),再结合已知"$AB=DC$",就可推得$\angle BAD=\angle CDA$.

练习 19.2(5)

1. 已知：如图，AC 与 BD 相交于点 O，且 $AC=BD$，$AD=BC$.
   求证：$OA=OB$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，点 D、E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，$AB=AC$，$AD=AE$.
   求证：$BD=CE$.

例题11 已知：如图 19－17，D 是 BC 上的一点，$BD=CD$，$\angle 1=\angle 2$.

求证：$AB=AC$.

分析 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，虽然有 $\angle 1=\angle 2$，$AD=AD$，$BD=CD$ 三个条件，但不能直接推出 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 全等. 注意到 D 是 BC 的中点，即 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，因此延长 AD 到点 E，使 $DE=AD$，联结 CE. 这样添辅助线，相当于作出了与 $\triangle ABD$ 关于点 D 对称的图形. 因此 $EC=AB$. 于是，要证明 $AB=AC$，只要证明 $EC=AC$，也就是只要证明 $\angle E=\angle 2$.

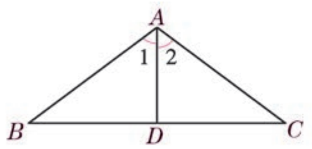


图 19－17

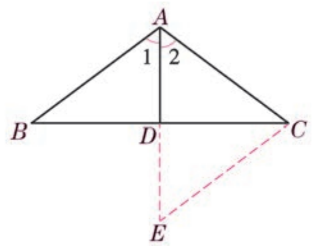


图 19－18

证明 延长 AD 到点 E，使 $DE=AD$，联结 CE（如图 19－18）.

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ECD$ 中，

$$\begin{cases} BD=CD\text{（已知）}, \\ \angle ADB=\angle EDC\text{（对顶角相等）}, \\ AD=ED\text{（所作）}, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle ECD$（S. A. S）.

本题证明中添辅助线的思考方法，是注意到点 D 是 BC 的中点，将中线 AD 延长一倍，联结 CE，实质是将 $\triangle ABD$ 绕点 D 旋转 $180°$.

得　$EC=AB$，$\angle E=\angle 1$（全等三角形的对应边相等、对应角相等）.

又∵　$\angle 1=\angle 2$（已知），

∴　$\angle E=\angle 2$（等量代换）.

得　$EC=AC$（等角对等边）.

∴　$AB=AC$（等量代换）.

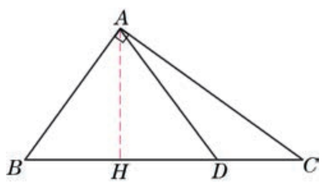


图 19－19

例题12　如图19－19，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$. D 是 BC 上的一点，$AD=AB$.

求证：$\angle BAD=2\angle C$.

分析　要证明$\angle BAD=2\angle C$，只要证明$\angle BAD$ 的一半与$\angle C$ 相等. 由于 $AD=AB$，因此考虑作$\angle BAD$ 的平分线 AH，从而将问题转化为证明$\angle BAH=\angle C$.

证明　过点 A 作 $AH\perp BC$，垂足为点 H（如图 19－19）.

∵　$AD=AB$（已知），

∴　$\angle BAD=2\angle BAH$（等腰三角形的三线合一）.

在$\triangle ABC$ 中，

∵　$\angle BAC+\angle B+\angle C=180°$（三角形的内角和等于 180°），

又∵　$\angle BAC=90°$（已知），

∴　$\angle B+\angle C=90°$.

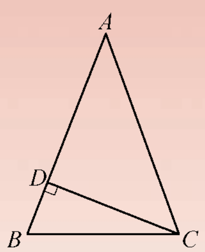
同理$\angle BAH+\angle B=90°$.

∴　$\angle BAH=\angle C$（同角的余角相等）.

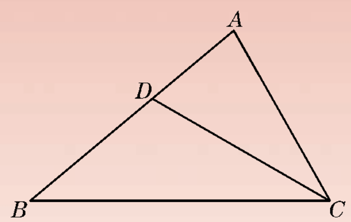
∴　$\angle BAD=2\angle C$（等量代换）.

练习 19.2(6)

1. 已知：如图，在$\triangle ABC$ 中，$CD\perp AB$，点 D 为垂足，$\angle A=2\angle BCD$.
求证：$AB=AC$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，在$\triangle ABC$ 中，CD 是$\triangle ABC$ 的角平分线，$BC=AC+AD$.
求证：$\angle A=2\angle B$.

例题13 求证：不等边三角形一边的两端到这边的中线所在直线的距离相等.

根据命题，画出图形，再写已知、求证.

已知：如图 19－20，AD 是$\triangle ABC$ 的中线，CE 和 BF 都垂直于直线 AD，垂足分别为点 E、F.

求证：$CE=BF$.

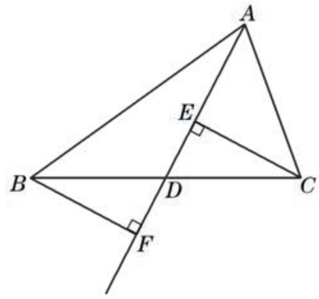


图 19－20

分析 要证明 $CE=BF$，只要证明$\triangle CDE\cong\triangle BDF$. 注意到$\angle CED=\angle BFD=90^\circ$，$\angle CDE=\angle BDF$，$CD=BD$，因此可利用“角、角、边”来证这两个三角形全等.

证明 $\because$ AD 是$\triangle ABC$ 的中线（已知），

$\therefore$ $BD=CD$（中线的定义）.

$\because$ $CE\perp AD$，$BF\perp AD$（已知），

$\therefore$ $\angle CED=\angle BFD=90^\circ$（垂直的定义）.

在$\triangle BDF$ 与$\triangle CDE$ 中，

$$\begin{cases}\angle BFD=\angle CED\text{（已证）},\\ \angle BDF=\angle CDE\text{（对顶角相等）},\\ BD=CD\text{（已证）},\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle BDF\cong\triangle CDE$（A. A. S）

$\therefore$ $CE=BF$（全等三角形的对应边相等）.

本题的证明也可以这样考虑：注意到 CE、BF 分别是$\triangle ACD$ 与$\triangle ABD$ 的高，而且 AD 是它们的公共边；同时$\triangle ACD$ 与$\triangle ABD$ 又是等底（$BD=CD$）同高的两个三角形，因此$\triangle ACD$ 与$\triangle ABD$ 的面积相等. 利用这一关系，可证明 $CE=BF$.

请试一试利用面积相等关系完成证明.

例题14 求证：有两边及其中一边上的中线对应相等的两个三角形全等.

已知：如图 19－21，在$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$中，AD、$A'D'$分别是边 BC、$B'C'$上的中线，$AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$AD=A'D'$.

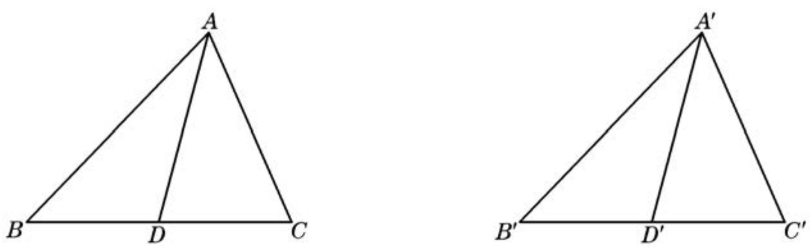


图 19－21

求证：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

分析 要证明$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，由于已知 $AB=A'B'$，$BC=B'C'$，因此只要证明$\angle B=\angle B'$. 为此考虑证明$\triangle ABD$ 与$\triangle A'B'D'$全等.

证明 ∵ AD、$A'D'$分别是BC、$B'C'$上的中线(已知),

∴ $BD=\frac{1}{2}BC$, $B'D'=\frac{1}{2}B'C'$(三角形中线的定义).

又∵ $BC=B'C'$(已知),

∴ $BD=B'D'$(等式性质).

在$\triangle ABD$与$\triangle A'B'D'$中,

$$\begin{cases} AB=A'B'(\text{已知}), \\ BD=B'D'(\text{已证}), \\ AD=A'D'(\text{已知}), \end{cases}$$

∴ $\triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$(S. S. S).

得 $\angle B=\angle B'$(全等三角形的对应角相等).

在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中,

$$\begin{cases} AB=A'B'(\text{已知}), \\ \angle B=\angle B'(\text{已证}), \\ BC=B'C'(\text{已知}), \end{cases}$$

∴ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$(S. A. S).

练习 19.2(7)

1. 求证:有两角及其中一角的平分线对应相等的两个三角形全等.
2. 求证:等腰三角形底边中线上任意一点到两腰的距离相等.

第二节　线段的垂直平分线与角的平分线

19.3　逆命题和逆定理

我们学过下列两个命题：

(1) 两直线平行，内错角相等.

(2) 内错角相等，两直线平行.

分析这两个命题的题设和结论，我们看到命题(1)的题设和结论正好分别是命题(2)的结论和题设.

在两个命题中，如果第一个命题的题设是第二个命题的结论，而第一个命题的结论又是第二个命题的题设，那么这两个命题叫做**互逆命题**. 如果把其中一个命题叫做**原命题**，那么另一个命题叫做它的**逆命题**(converse proposition).

上面的两个命题就是互逆命题，如果命题(1)叫做原命题，那么命题(2)叫做命题(1)的逆命题.

也可以把命题(2)叫做原命题，这时命题(1)叫做命题(2)的逆命题.

例题1　写出命题"如果两个角是同一个角的余角，那么这两个角相等"的逆命题.

解　原命题的逆命题是：如果两个角相等，那么这两个角是同一个角的余角.

如果一个定理的逆命题经过证明也是定理，那么这两个定理叫做**互逆定理**，其中一个叫做另一个的**逆定理**.

例如：等腰三角形的性质"如果三角形的两条边相等，那么它们所对的角相等"与等腰三角形的判定"如果三角形的两个角相等，那么它们所对的边相等"，它们不仅是互逆命题，而且是互逆定理.

在例题1中，命题"如果两个角是同一个角的余角，那么这两个角相等"是真命题，但是逆命题"如果两个角相等，那么这两个角是同一个角的余角"是假命题(想一想，为什么?). 可见原命题是定理，逆命题不一定是定理. 一般来说，所有的定理都有逆命题，但不是所有的定理都有逆定理.

例题2　写出命题"全等三角形的面积相等"的逆命题，再判断这个逆命题的真假.

解　命题"全等三角形的面积相等"可写成"如果两个三角形

是全等三角形，那么这两个三角形的面积相等”．它的逆命题是“如果两个三角形的面积相等，那么这两个三角形是全等三角形”．

这个逆命题是假命题．

例如，图 19－22 中，$AA' \parallel BC$，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'BC$ 的面积相等，但 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'BC$ 显然不全等．

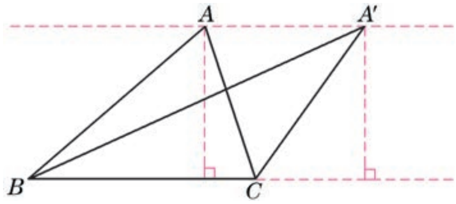


图 19－22

练习 19.3

1. 说出下列命题的题设和结论，再说出它们的逆命题：

（1） 两直线平行，同位角相等．

（2） 全等三角形的对应角相等．

2. 写出下列命题的逆命题，再判断逆命题的真假：

（1） 等边三角形的三个内角都等于 60°．

（2） 关于某一条直线对称的两个三角形全等．

3. 下列定理有没有逆定理？ 为什么？

（1） 对顶角相等．

（2） 全等三角形的对应边相等．

19.4　线段的垂直平分线

我们知道，线段是轴对称图形，它的对称轴是线段的垂直平分线．如图 19－23，线段 AB 关于直线 MN 对称．在直线 MN 上任取一点 P，分别联结 PA、PB，那么线段 PA 与 PB 一定相等吗？

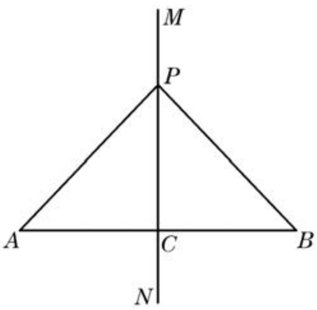


图 19－23

操作

以直线 MN 为折痕将这个图形翻折，可见点 P 的位置不动，点 A 与点 B 重合（想一想，为什么？）．也就是说，线段 PA 与 PB 相等．

归纳上述事实，得到命题：

如果一个点在一条线段的垂直平分线上，那么分别联结这点与线段两个端点所得的两条线段相等.

我们来证明这个命题是真命题.

已知：如图 19－23，直线 MN 是线段 AB 的垂直平分线，垂足为点 C，点 P 在直线 MN 上.

求证：$PA=PB$.

证明：∵ MN 是线段 AB 的垂直平分线，垂足为点 C(已知)，

∴ $MN\perp AB$，$AC=BC$(线段垂直平分线的定义).

设点 P 不在线段 AB 上，

由 $MN\perp AB$，得$\angle PCA=\angle PCB=90^\circ$(垂直的定义).

在$\triangle PCA$ 与$\triangle PCB$ 中，

$$\begin{cases} AC=BC(\text{已知}), \\ \angle PCA=\angle PCB(\text{已证}), \\ PC=PC(\text{公共边}), \end{cases}$$

∴ $\triangle PCA\cong\triangle PCB$(S. A. S).

∴ $PA=PB$(全等三角形的对应边相等).

如果点 P 在线段 AB 上，那么点 P 与点 C 重合，即 $PA=PB$.

上述命题中，线段 PA 与 PB 分别表示点 P 到点 A、B 的距离，于是得到以下定理：

定理　线段垂直平分线上的任意一点到这条线段两个端点的距离相等.

思考

这个定理的逆命题是什么？逆命题正确吗？写出这个定理的逆命题，再进行证明.

这个定理的逆命题是：如果一个点到一条线段两个端点的距离相等，那么这个点在这条线段的垂直平分线上.

已知：如图 19－24，$QA=QB$.

求证：点 Q 在线段 AB 的垂直平分线上.

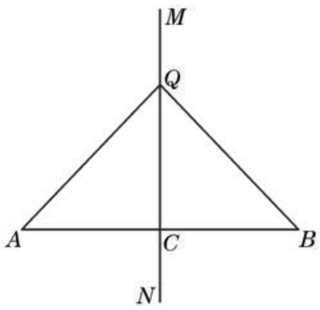


图 19－24

分析：为了证明点 Q 在线段 AB 的垂直平分线上，可以先经过点 Q 画线段 AB 的垂线，然后证明所画垂线平分线段 AB.

证明：如果点 Q 在线段 AB 上，那么点 Q 就是线段 AB 的中点，即在线段 AB 的垂直平分线上.

也可以先平分线段 AB，如设线段 AB 的中点为 C，联结 QC，然后证明 QC 垂直于线段 AB.

设点 Q 不在线段 AB 上，过点 Q 作 $QC\perp AB$，垂足为点 C.

∵ $QA=QB$(已知)，$QC\perp AB$(所作)，

∴ $CA=CB$(等腰三角形的三线合一)，

即点 C 是线段 AB 的中点.

∴ 点 Q 在线段 AB 的垂直平分线上.

于是，得到了这个定理的逆定理：

逆定理　和一条线段两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上.

任何图形都是由点组成的，因此我们可以把图形看成点的集合.

由上述的定理和逆定理可以知道，组成线段 AB 的垂直平分线的所有点和 A、B 两点的距离都相等；反过来，和 A、B 两点距离相等的所有的点组成线段 AB 的垂直平分线. 于是，线段的垂直平分线可以看作是和这条线段两个端点的距离相等的点的集合.

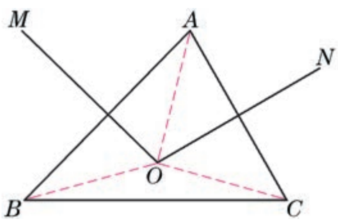


图 19－25

例题　已知：如图 19－25，在$\triangle ABC$ 中，OM、ON 分别是 AB、AC 的垂直平分线，OM 与 ON 相交于点 O.

求证：点 O 在 BC 的垂直平分线上.

证明　分别联结 OB、OA、OC.

∵ OM、ON 分别是 AB、AC 的垂直平分线(已知)，

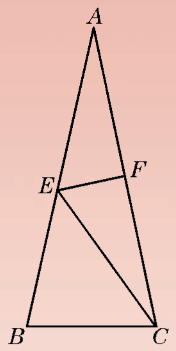
∴ $OA=OB$，$OC=OA$(线段垂直平分线上的任意一点到这条线段两个端点的距离相等).

得 $OB=OC$(等量代换).

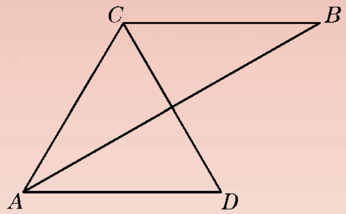
∴ 点 O 在 BC 的垂直平分线上(和一条线段的两个端点的距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上).

练习 19.4

1. 如图，已知在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=24\text{cm}$，AC 的垂直平分线分别交 AB、AC 于点 E、F，且$\triangle BCE$ 的周长为 34cm，求底边 BC 的长.



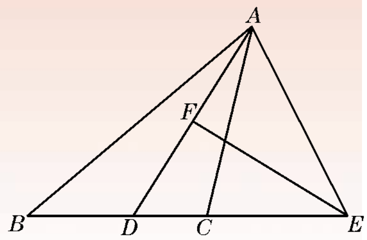
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，CD 垂直平分 AB，AB 平分$\angle CAD$.
求证：$AD /\!/ BC$.

3. 已知：如图，AD 平分$\angle BAC$，AD 的垂直平分线交 BC 的延长线于点 E，交 AD 于点 F.
求证：$\angle EAC=\angle B$.



（第 3 题）

19.5　角的平分线

思考

一个角是轴对称图形，它的对称轴是角的平分线所在的直线．角的平分线除了平分这个角以外，还有其他的性质吗？

> 研究角的平分线有关性质时，规定所涉及的这个角小于平角．

如果 OC 是$\angle AOB$ 的平分线，那么以 OC 所在直线为折痕，将这个图形翻折，这个角的两边一定重合．可见，在 OC 上任取一个与点 O 不重合的点 P，从点 P 分别向边 OA、OB 作垂线段，那么这两条垂线段的长一定相等．我们来证明这个事实．

已知：如图 19－26，OC 是$\angle AOB$ 的平分线，点 P 是 OC 上一点，$PD\perp OA$，$PE\perp OB$，垂足分别为点 D、E.

求证：$PD=PE$.

证明：$\because$　OC 是$\angle AOB$ 的平分线（已知），

$\therefore$　$\angle 1=\angle 2$（角平分线的定义）.

$\because$　$PD\perp OA$，$PE\perp OB$（已知），

$\therefore$　$\angle PDO=\angle PEO=90^\circ$（垂直的定义）.

在$\triangle PDO$ 与$\triangle PEO$ 中，

$$\begin{cases}\angle 1=\angle 2（已证），\\ \angle PDO=\angle PEO（已证），\\ OP=OP（公共边），\end{cases}$$

$\therefore$　$\triangle PDO\cong\triangle PEO$（A. A. S）.

$\therefore$　$PD=PE$（全等三角形的对应边相等）.

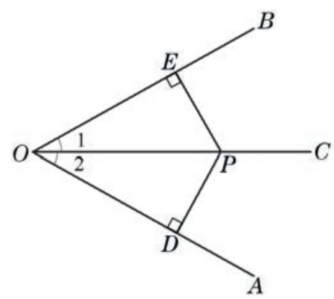


图 19－26

> 图 19－26 中$\angle AOB$ 的平分线 OC 上的点 O 到这个角两边的距离都等于零．

平面上一点到射线的距离是指这点与射线上各点的距离中最短的距离.

现在证明这个逆定理,可通过添置辅助线,运用角的关系和等腰三角形、全等三角形等知识来推导.在19.7"直角三角形全等的判定"中的例题2,给出了这一定理的较简捷的证明.

这样,我们得到下面的定理:

定理 在角的平分线上的任意一点到这个角的两边的距离相等.

这个定理也有逆定理.

逆定理 在一个角的内部(包括顶点)且到角的两边距离相等的点,在这个角的平分线上.

由上述的定理和逆定理可以知道:

角的平分线可以看作是在这个角的内部(包括顶点)到角两边距离相等的点的集合.

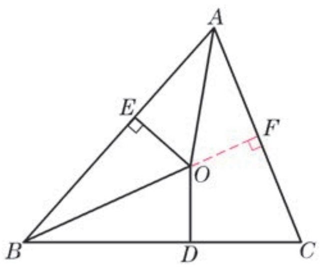


图 19－27

例题1 已知:如图 19－27,AO、BO 分别是$\angle BAC$、$\angle ABC$的平分线,$OD\perp BC$,$OE\perp AB$,垂足分别为点 D、E.

求证:点 O 在$\angle C$ 的平分线上.

证明 过点 O 作 $OF\perp AC$,垂足为点 F.

∵ AO、BO 分别是$\angle BAC$、$\angle ABC$ 的平分线(已知),

$OE\perp AB$,$OD\perp BC$(已知),

$OF\perp AC$(所作),

∴ $OE=OD$,$OE=OF$(在角的平分线上的点到这个角的两边的距离相等).

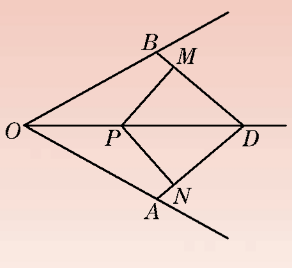
∴ $OD=OF$(等量代换).

∴ 点 O 在$\angle C$ 的平分线上(在一个角的内部且到角的两边距离相等的点,在这个角的平分线上).

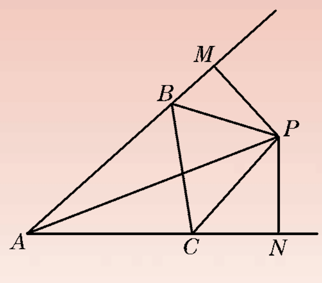
练习 19.5(1)

1. 已知:如图,点 P、D 在$\angle AOB$ 的平分线上,$OA=OB$,$PM\perp BD$,$PN\perp AD$,垂足分别是点 M、N.

   求证:(1) $\angle BDO=\angle ADO$; (2) $PM=PN$.



(第 1 题)

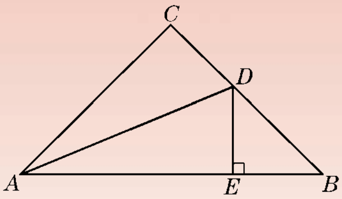


(第 2 题)

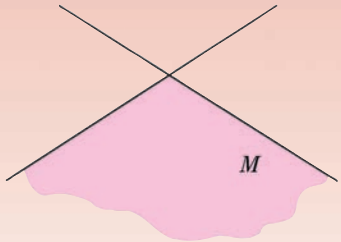
2. 已知:如图,BP、CP 分别是$\triangle ABC$ 的外角平分线,$PM\perp AB$,$PN\perp AC$,点 M、N 分别为垂足.

   求证:(1) $PM=PN$; (2) AP 平分$\angle MAN$.

3. 如图，已知$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=BC$，点D在BC上，$DE\perp AB$，点E为垂足，且$DE=DC$，联结AD.
求$\angle ADB$的度数.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，要在M区建一个大型超级购物中心G，使它到两条公路的距离相等，离两公路交叉处1 000米，这个超级购物中心应建于何处（在图上标出点G的位置，比例尺1∶50 000）？

例题2 已知：如图19－28，CD垂直平分线段AB，E是CD上一点，分别联结CA、CB、EA、EB.

求证：$\angle CAE=\angle CBE$.

证明 ∵ CD垂直平分线段AB（已知），

∴ $EA=EB$，$CA=CB$（线段垂直平分线上的任意一点到这条线段两个端点的距离相等）.

在$\triangle CAE$与$\triangle CBE$中，

$$\begin{cases} CA=CB（已证）, \\ EA=EB（已证）, \\ CE=CE（公共边）, \end{cases}$$

∴ $\triangle CAE\cong\triangle CBE$（S. S. S）.

∴ $\angle CAE=\angle CBE$（全等三角形的对应角相等）.

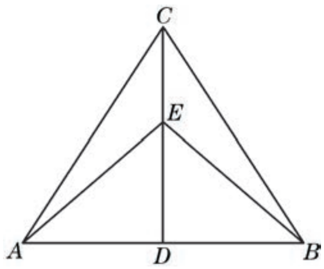


图 19－28

例题3 已知：如图19－29，$CD\perp AB$，$BE\perp AC$，垂足分别是点D、E；BE、CD相交于点O，且AO平分$\angle BAC$.

求证：$OB=OC$.

证明 ∵ AO平分$\angle BAC$（已知），

$CD\perp AB$，$BE\perp AC$（已知），

∴ $\angle ODB=\angle OEC=90°$（垂直的定义），

且$OD=OE$（在角的平分线上的点到这个角的两边的距离相等）.

在$\triangle ODB$与$\triangle OEC$中，

$$\begin{cases} \angle ODB=\angle OEC（已证）, \\ OD=OE（已证）, \\ \angle DOB=\angle EOC（对顶角相等）, \end{cases}$$

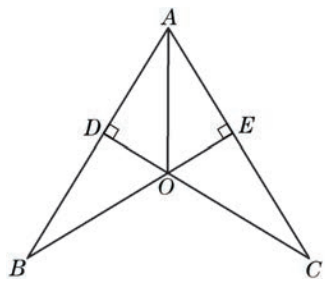


图 19－29

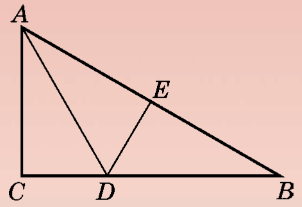
∴　$\triangle ODB \cong \triangle OEC$(A. S. A).

∴　$OB=OC$(全等三角形的对应边相等).

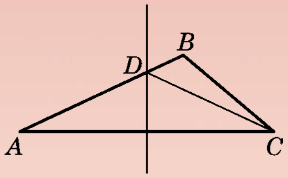
练习 19.5(2)

1. 已知：如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle B=30°$，$AC=AE$，AD 平分 $\angle CAB$，交 BC 于点 D，联结 DE.

   求证：DE 是 AB 的垂直平分线.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=115°$，AC 的垂直平分线与 AB 交于点 D，联结 CD. 如果 $\angle BCD$ 与 $\angle DCA$ 的度数比为 3∶5，那么 $\angle ACB$ 的度数是多少？

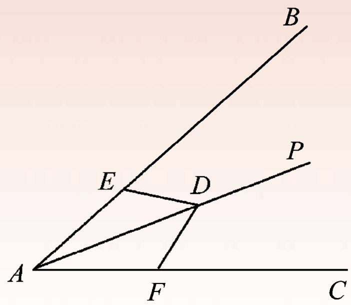
3. 判断下面的证明过程是否正确，并说明理由.

   已知：如图，点 D 是射线 AP 上的一点，点 E、F 分别在 AB、AC 上，且 $DE=DF$.

   求证：AP 平分 $\angle BAC$.

   证明：∵　点 D 是射线 AP 上一点，且 $DE=DF$(已知)，

   ∴　AP 平分 $\angle BAC$(在一个角的内部且到角两边距离相等的点，在这个角的平分线上).

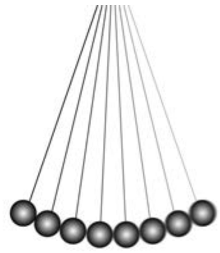


(第 3 题)

19.6　轨迹

对于抛出的篮球，如果把它在运动过程中经过的每一个位置看作一个点，那么所有这样的点的集合就是它的轨迹.

苹果自由落地，抛出的篮球，悬挂着的钟摆往返摆动等，它们运动的路线给我们以点的轨迹的形象.



我们知道，线段的垂直平分线是和线段两端距离相等的所有的点的集合. 我们有时也把符合某些条件的所有的点的集合叫做**点的轨迹**(trail). 因此，可以这样说：

和线段两个端点距离相等的点的轨迹是这条线段的垂直平分线.

同样可以说：

在一个角的内部(包括顶点)且到角两边距离相等的点的轨迹是这个角的平分线.

用圆规画圆时，可以看到圆上的每一点到定点（圆心）的距离都等于定长（半径）；反过来，到定点的距离等于定长的点都在以这个定点为圆心、定长为半径的圆上. 因此，一个圆可以看作是到定点的距离等于定长的所有的点的集合. 由此可知：

到定点的距离等于定长的点的轨迹是以这个定点为圆心、定长为半径的圆.

例题1 作图并说明符合下列条件的点的轨迹（不要求证明）：

（1）底边为定长的等腰三角形的顶角顶点的轨迹；

（2）经过定点 A 且半径为 1 厘米的圆的圆心的轨迹.

分析 （1）由于等腰三角形的顶角顶点到底边两端点的距离相等，因此顶点必在底边的垂直平分线上；反过来，等腰三角形底边垂直平分线上的点到底边两端点的距离相等. 底边的中点虽然在底边的垂直平分线上，但它与底边两端不能构成三角形，所以底边的中点必须除外.

（2）经过定点 A 且半径为 1 厘米的圆有无数多个，但这些圆的圆心与点 A 的距离均为 1 厘米，因此这些圆的圆心在以点 A 为圆心、1 厘米长为半径的圆上；反过来，以这个圆上的任一点为圆心、1 厘米长为半径作圆，必经过点 A.

解 （1）设给定的底边为线段 AB，作线段 AB 的垂直平分线 l，l 交 AB 于点 D，则线段 AB 的垂直平分线 l（线段 AB 的中点 D 除外）是以线段 AB 为底边的等腰三角形的顶角顶点的轨迹. 如图 19－30 所示.

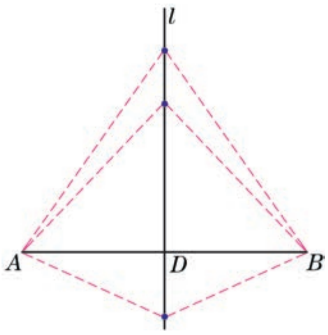


图 19－30

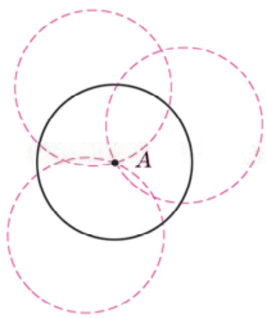


图 19－31

（2）以定点 A 为圆心、1 厘米的长为半径作圆，则⊙A 是经过

点 A 且半径为 1 厘米的圆的圆心的轨迹. 如图 19－31 所示.

例题2 说出下列点的轨迹是什么图形，并画出图形.

(1) 到两个定点 A、B 的距离相等的点的轨迹；

(2) 已知两个定点 A、B 的距离为 3 厘米，这时到点 A、B 的距离之和为 3 厘米的点的轨迹.

解 (1) 轨迹是线段 AB 的垂直平分线，如图 19－32 所示.

(2) 轨迹是线段 AB，如图 19－33 所示.

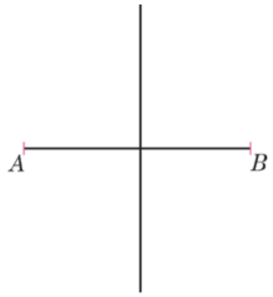


图 19－32

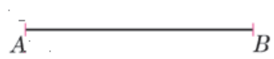


图 19－33

练习 19.6(1)

作图并说明符合下列条件的点的轨迹（不要求证明）.

(1) 经过已知点 P 和点 Q 的圆的圆心的轨迹；

(2) 到点 A 的距离等于 2cm 的点的轨迹；

(3) 与已知直线 AB 的距离为 3cm 的点的轨迹.

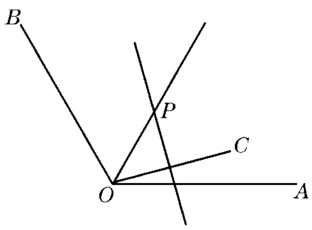


图 19－34

例题3 已知：$\angle AOB$ 和 $\angle AOB$ 内一点 C（如图 19－34）.

求作：$\angle AOB$ 内部一点 P，使 $PC=PO$，且点 P 到 $\angle AOB$ 的两边 OA、OB 的距离相等.

分析 假如点 P 已经作出，由 $PC=PO$，可知点 P 一定在线段 OC 的垂直平分线上. 又由点 P 到 $\angle AOB$ 两边 OA、OB 的距离相等，可知点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上. 因此，点 P 是这两个轨迹的交点.

作法 1. 联结 OC，作线段 OC 的垂直平分线.

2. 作 $\angle AOB$ 的平分线，它与 OC 的垂直平分线相交于点 P.

则 P 就是所求作的点.

在例题 3 中，我们先找出符合一部分作图要求的点的轨迹，如线段 CO 的垂直平分线；再找出符合另一部分作图要求的点的轨迹，如 $\angle AOB$ 的平分线；然后得出这两个轨迹的交点. 利用轨迹相交进行作图的方法叫做**交轨法**.

交轨法是常用的作图方法. 我们在用尺规作三角形、线段的垂直平分线、角的平分线时，都运用了交轨法.

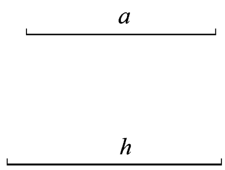


图 19－35

例题4 已知线段 a、h，求作等腰三角形，使其底边长为 a，底边上的高为 h.

已知：线段 a，h（如图 19－35）.

求作：$\triangle ABC$，使 $AB=AC$，且 $BC=a$，高 $AD=h$.

分析 首先画出符合条件的图形草图，根据 $BC=a$，可以确定点 B、C 的位置. 由等腰三角形的“三线合一”的性质，画出 BC 的中垂线 MN，交 BC 于点 D，由 $AD=h$，可知点 A 到点 D 的距离为 h. 这就是说，点 A 必在以定点 D 为圆心、h 为半径的圆上. 因此，这个圆与 DM 的交点就是点 A.

作法 1. 作线段 $BC=a$.

2. 作线段 BC 的垂直平分线 MN，MN 与 BC 相交于点 D.

3. 在 MN 上截取 DA，使 $DA=h$.

4. 分别联结 AB、AC.

则 $\triangle ABC$ 就是所画的等腰三角形（如图 19－36）.

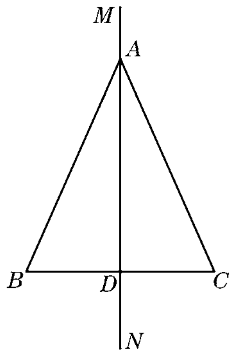
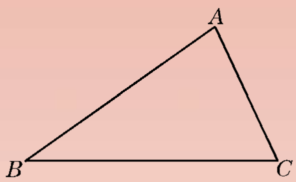


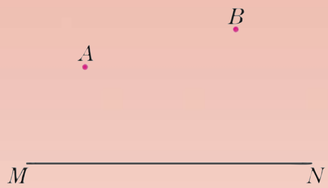
图 19－36

练习 19.6(2)

1. 如图，已知 $\triangle ABC$，求作 $\triangle A'B'C'$，使 $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$.



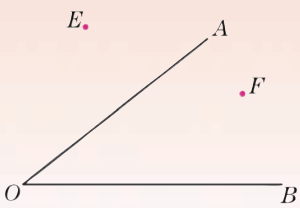
（第 1 题）



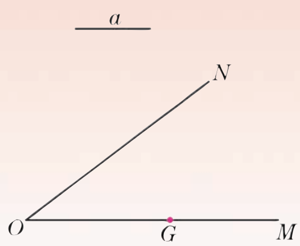
（第 2 题）

2. 如图，要在某天然气管道 MN 上修建一个泵站，分别向 A、B 两镇供气，泵站修在管道的什么地方，可使所用的输气管线最短？

3. 如图，已知 $\angle AOB$ 及点 E、F，在 $\angle AOB$ 的内部求作点 P，使点 P 到 OA、OB 的距离相等，且 $PE=PF$.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，已知 $\angle MON$ 及线段 a，点 G 在 OM 上，求作点 P，使点 P 到 OM、ON 的距离相等，且 $PG=a$.

第三节　直角三角形

19.7　直角三角形全等的判定

直角三角形是特殊的三角形，关于一般三角形全等的判定方法，对直角三角形都适用. 而对一般三角形而言，利用“边、边、角”不能判定两个三角形全等，它能否成为直角三角形全等的判定定理呢？

在两个直角三角形中，“边、边、角”对应相等的情况有几种？

两个直角三角形中，如果“边、边、角”对应相等，那么其中对应相等的角一定是直角，因此对应相等的边只能分别是斜边和一条直角边. 我们只要研究：斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形是否全等？

如图 19－37，在 Rt△ABC 和 Rt△$A'B'C'$ 中，已知$\angle C=\angle C'=90°$，$AC=A'C'$，$AB=A'B'$，那么 Rt△ABC 与 Rt△$A'B'C'$ 全等吗？下面我们来证明这个结论是正确的.

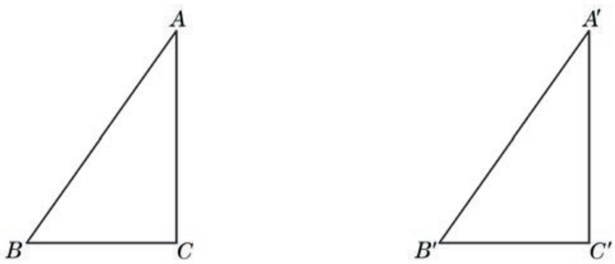


图 19－37

分析：如果能从这些已知条件中得到一个锐角对应相等，那么就可以肯定这两个三角形全等. 为此，考虑把这两个直角三角形拼成一个等腰三角形.

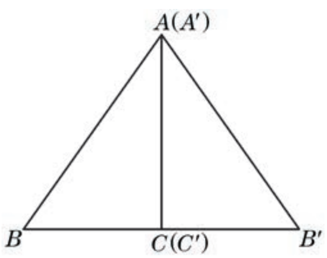


图 19－38

证明：如图 19－38 所示，把△ABC 和△$A'B'C'$拼在一起. 由于 $AC=A'C'$，因此可使 AC 和 $A'C'$重合；由于$\angle ACB=\angle A'C'B'=90°$，因此点 B、C、B'必在一条直线上. 于是得到△ABB'.

∵　$AB=A'B'$，

∴　$\angle B=\angle B'$（等边对等角）.

在△ABC 与△$A'B'C'$中，

$$\begin{cases}\angle ACB=\angle A'C'B'\text{（已知）},\\ \angle B=\angle B'\text{（已证）},\\ AB=A'B'\text{（已知）},\end{cases}$$

所以 △ABC≌△$A'B'C'$（A. A. S）.

于是我们得到直角三角形全等的判定定理：

> **定理　如果两个直角三角形的斜边和一条直角边对应相等，那么这两个直角三角形全等(简记为 H. L).**

例题1　已知：如图 19－39，在 $\triangle ABC$ 中，$BD\perp AC$，$CE\perp AB$，垂足分别为点 D、E，$BD=CE$.

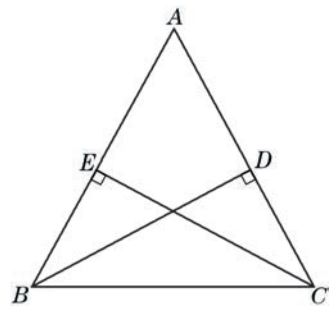


图 19－39

求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

证明　$\because$　$CE\perp AB$，$BD\perp AC$(已知)，

$\therefore$　$\triangle EBC$ 和 $\triangle DCB$ 都是直角三角形.

在 $\mathrm{Rt}\triangle EBC$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle DCB$ 中，

$$\begin{cases} CE=BD(\text{已知}), \\ BC=CB(\text{公共边}), \end{cases}$$

$\therefore$　$\mathrm{Rt}\triangle EBC\cong\mathrm{Rt}\triangle DCB$(H. L).

得 $\angle EBC=\angle DCB$(全等三角形的对应角相等).

$\therefore$　$AB=AC$(等角对等边)，

即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

前面在 19.5 节学习角的平分线性质定理的逆定理时，由于没有学习直角三角形全等的判定定理，因此没有对逆定理进行证明，现补证如下.

例题2　求证：在一个角的内部(包括顶点)且到角的两边距离相等的点，在这个角的平分线上.

已知：如图 19－40，$QD\perp OA$，$QE\perp OB$，垂足分别为点 D、E，$QD=QE$.

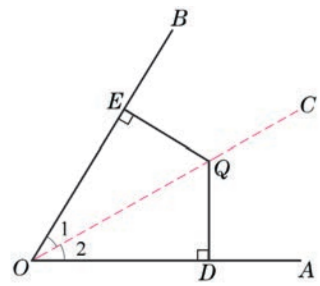


图 19－40

求证：点 Q 在 $\angle AOB$ 的平分线上.

证明　作射线 OQ.

$\because$　$QD\perp OA$，$QE\perp OB$(已知)，

$\therefore$　$\angle QDO=\angle QEO=90^{\circ}$(垂直的定义).

在 $\mathrm{Rt}\triangle QDO$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle QEO$ 中，

$$\begin{cases} QD=QE(\text{已知}), \\ OQ=OQ(\text{公共边}), \end{cases}$$

$\therefore$　$\mathrm{Rt}\triangle QDO\cong\mathrm{Rt}\triangle QEO$(H. L).

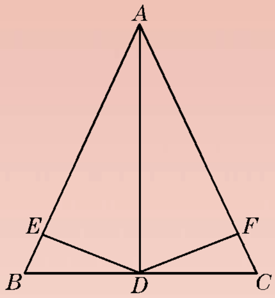
得　$\angle 1=\angle 2$(全等三角形的对应角相等)，

即 OQ 是 $\angle AOB$ 的平分线(角的平分线的定义).

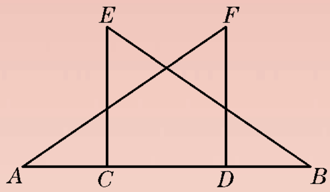
$\therefore$　点 Q 在 $\angle AOB$ 的平分线上.

练习 19.7

1. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，AD是$\angle BAC$的平分线，且$BD=CD$，DE、DF分别垂直于AB、AC，垂足分别为点E、F.
求证：$EB=FC$.



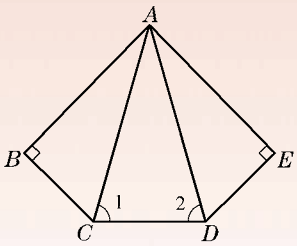
（第 1 题）



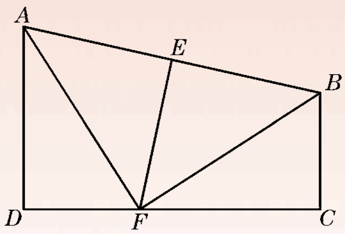
（第 2 题）

2. 已知：如图，$EC\perp AB$，$FD\perp AB$，垂足分别为点C、D，$AF=BE$，$FD=EC$.
求证：$AC=BD$.

3. 已知：如图，$AB\perp BC$，$AE\perp ED$，垂足分别为点B、E，$AB=AE$，$\angle 1=\angle 2$.
求证：$BC=DE$.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 已知：如图，$AD\perp CD$，$BC\perp CD$，D、C分别为垂足，AB的垂直平分线EF交AB于点E，交CD于点F，$BC=DF$.
求证：$AD=FC$.

19.8 直角三角形的性质

对直角三角形的性质的研究，可从考察它的角、边以及特殊线段等之间所构成的各种关系的特征着手.

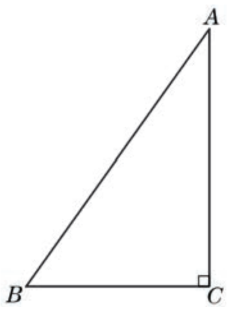


图 19－41

如图 19－41，在 Rt$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$.

根据三角形内角和等于 180°，可知$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，所以$\angle A+\angle B=90°$.

于是有下面的定理：

定理 1　直角三角形的两个锐角互余.

例题 1　已知：如图 19 - 42，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，CD是斜边AB上的高.

求证：$\angle ACD=\angle B$.

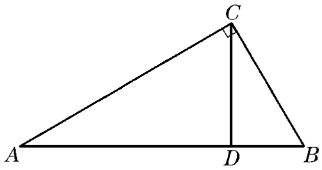


图 19 - 42

证明　$\because$　$\angle ACB=90^\circ$(已知)，

$\therefore$　$\angle A+\angle B=90^\circ$(直角三角形的两个锐角互余).

$\because$　CD是斜边AB上的高（已知），

即　$CD\perp AB$，

$\therefore$　$\angle CDA=90^\circ$(垂直的定义).

$\therefore$　$\angle A+\angle ACD=90^\circ$(直角三角形的两个锐角互余).

$\therefore$　$\angle ACD=\angle B$(同角的余角相等).

当$\angle B=45^\circ$时，图 19 - 42 中的各锐角都是45°；线段CD也是斜边AB上的中线，而且$CD=AD=BD$，即$AB=2CD$，或$CD=\frac{1}{2}AB$.

想一想

在例题 1 中，如果$\angle B=45^\circ$，那么图 19 - 42 中的各锐角是多少度？各线段的长度之间有哪些等量关系？

问题 1

直角三角形斜边上的中线长一定等于斜边长的一半吗？

下面，我们来证明上述等量关系是正确的.

已知：如图 19 - 43，在 Rt$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，CD是斜边AB上的中线.

求证：$CD=\frac{1}{2}AB$.

分析：要证明$CD=\frac{1}{2}AB$，即$AB=2CD$，可延长CD到点C'，使$DC'=CD$，此时$CC'=2CD$，于是只要证明$CC'=AB$. 为此，联结AC'，只要证得$\triangle C'AC\cong\triangle BCA$，便可推出$CC'=AB$.

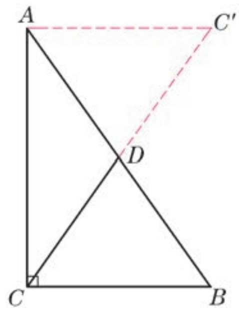


图 19 - 43

证明：延长CD到点C'，使$DC'=CD$，联结$C'A$（如图 19 - 43）.

在$\triangle C'DA$与$\triangle CDB$中，

$$\begin{cases}AD=BD(\text{已知}),\\ \angle C'DA=\angle CDB(\text{对顶角相等}),\\ DC'=DC(\text{所作}),\end{cases}$$

$\therefore$　$\triangle C'DA\cong\triangle CDB$(S. A. S).

得　$C'A=CB$(全等三角形的对应边相等)；

$\angle C'AD=\angle B$(全等三角形的对应角相等).

这种添辅助线的方法，是从要证线段之间的倍半关系进行考虑得到的. 或者说，从点 D 是 AB 的中点，考虑将 $\triangle CDB$ 绕点 D 旋转 $180°$.

∵ $\angle BCA=90°$（已知），

∴ $\angle CAB+\angle B=90°$（直角三角形的两个锐角互余）.

得 $\angle CAB+\angle C'AD=90°$（等量代换），

即 $\angle C'AC=90°$.

∴ $\angle C'AC=\angle BCA$.

在 $\triangle C'AC$ 与 $\triangle BCA$ 中，

$$\begin{cases} C'A=BC（已证），\\ \angle C'AC=\angle BCA（已证），\\ AC=CA（公共边），\end{cases}$$

∴ $\triangle C'AC\cong\triangle BCA$（S. A. S）.

得 $CC'=AB$（全等三角形的对应边相等）.

又∵ $CD=\dfrac{1}{2}CC'$（所作），

∴ $CD=\dfrac{1}{2}AB$（等量代换）.

由此又得到一个定理：

定理 2　直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

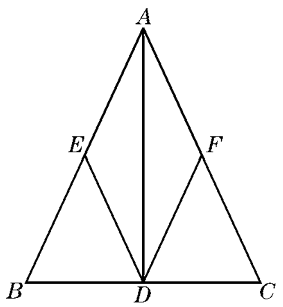


图 19－44

例题2　已知：如图 19－44，在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$，E、F 分别是 AB、AC 的中点，且 $DE=DF$.

求证：$AB=AC$.

证明　∵ $AD\perp BC$（已知），

∴ $\angle ADB=\angle ADC=90°$（垂直的定义）.

又∵ E、F 分别是 AB、AC 的中点（已知），

∴ $DE=\dfrac{1}{2}AB$，$DF=\dfrac{1}{2}AC$（直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半），

即 $AB=2DE$，$AC=2DF$.

∵ $DE=DF$（已知），

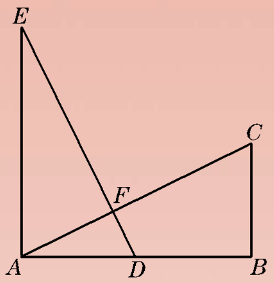
∴ $AB=AC$（等式性质）.

练习 19.8(1)

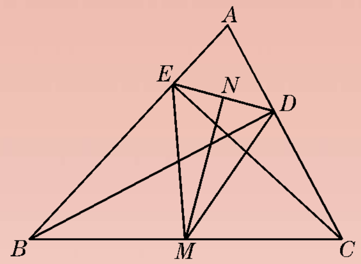
1. 如图，已知 D 为 AB 的中点，$EA\perp AB$，$CB\perp AB$，$AE=AB=2BC$，那么下列结论中不正确的是　　　　（　　）

(A) $DE=AC$；　　(B) $\angle E+\angle C=90°$；

(C) $\angle CAB=30°$；　　(D) $\angle EAF=\angle ADE$.



（第 1 题）

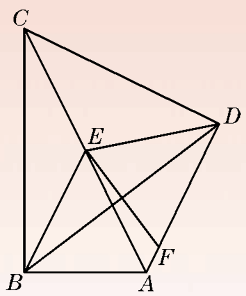


（第 2 题）

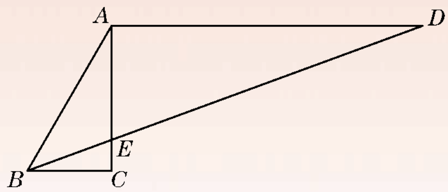
2. 已知：如图，BD、CE 分别是$\triangle ABC$ 的高，M、N 分别是 BC、DE 的中点，分别联结 ME、MD.

求证：$MN\perp ED$.

3. 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，E 为 AC 的中点. 在图中作点 D，使 $AD\parallel BE$，且 $\angle ADC=90°$；在 AD 上取点 F，使 $FD=BE$；分别联结 EF、ED、BD. 试判断 EF 与 BD 之间具有怎样的位置关系.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 已知：如图，在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，$AD\parallel BC$，$\angle CBE=\frac{1}{2}\angle ABE$.

求证：$ED=2AB$.

想一想

上述定理 2 是所有直角三角形共有的性质. 在特殊的直角三角形中，能否由这个定理得到一些特殊的性质？

根据直角三角形的性质定理 2 可知，直角三角形斜边上的中线把这个直角三角形分成两个等腰三角形.

如图 19－45，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，CD 是斜边 AB 上的中线，那么$\triangle DBC$、$\triangle DAC$ 都是等腰三角形.

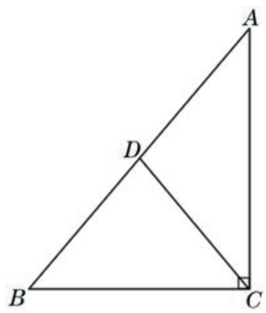


图 19－45

问题2

图 19－45 中，如果$\angle A=30°$，可知$\angle B=60°$，这时$\triangle DBC$ 是什么样的特殊三角形？从中能否发现边 BC 与 AB 之间的等量关系？

已知：在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$.

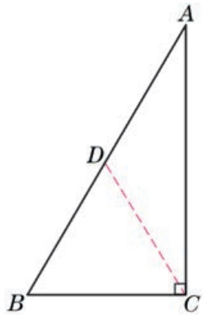


图 19－46

求证：$BC=\frac{1}{2}AB$.

证明：作斜边 AB 上的中线 CD（如图 19－46）.

$\because$ $\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$（已知），

$\therefore$ $\angle B=60°$（直角三角形的两个锐角互余）.

$\because$ CD 是斜边 AB 上的中线（已知），

$\therefore$ $CD=AD=BD=\frac{1}{2}AB$（直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半）.

$\therefore$ $\triangle CDB$ 是等边三角形（有一个内角是 60°的等腰三角形是等边三角形）.

得 $BC=BD$（等边三角形的每条边都相等）.

$\therefore$ $BC=\frac{1}{2}AB$（等量代换）.

于是得到直角三角形性质定理 2 的推论：

从定理直接推出来的定理叫做推论.

推论 1　在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半.

反过来，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，CD 是 AB 上的中线，如果 $BC=\frac{1}{2}AB$，那么$\triangle BDC$ 是等边三角形，得$\angle B=60°$，从而$\angle A=30°$.

于是得到定理 2 的另一个推论：

推论 2　在直角三角形中，如果一条直角边等于斜边的一半，那么这条直角边所对的角等于 30°.

例题3　已知：如图 19－47，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle B=30°$，$AD\perp AC$.

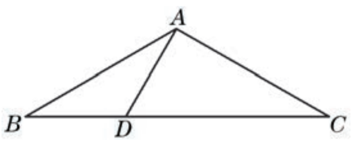


图 19－47

求证：$BD=\frac{1}{2}CD$.

证明　$\because$ $AD\perp AC$（已知），

$\therefore$ $\angle DAC=90°$（垂直的定义）.

$\because$ $AB=AC$（已知），

$\therefore$ $\angle B=\angle C$（等边对等角）.

$\because$ $\angle B=30°$（已知），

$\therefore$ $\angle C=30°$（等量代换）.

得 $AD=\frac{1}{2}CD$（在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半）.

又∵ $\angle BAC+\angle B+\angle C=180°$（三角形内角和等于 180°），

即 $\angle BAD+\angle DAC+\angle B+\angle C=180°$，

∴ $\angle BAD=180°-90°-30°-30°=30°$.

得 $\angle B=\angle BAD$（等量代换）.

∴ $AD=BD$（等角对等边）.

∴ $BD=\frac{1}{2}CD$（等量代换）.

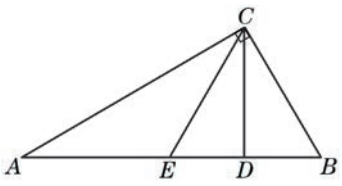


图 19－48

例题4 已知：如图 19－48，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，CE 是斜边 AB 上的中线，且 $ED=BD$.

求证：$\angle A=30°$.

证明 ∵ $\angle ACB=90°$（已知），CE 是斜边 AB 上的中线（已知），

∴ $CE=\frac{1}{2}AB$（直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半）.

∵ $CD\perp AB$，$ED=BD$（已知），

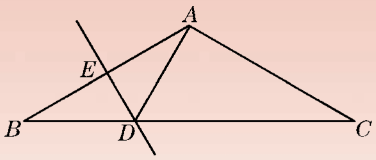
∴ $CE=CB$（线段垂直平分线上的任意一点到这条线段两个端点的距离相等）.

得 $CB=\frac{1}{2}AB$（等量代换）.

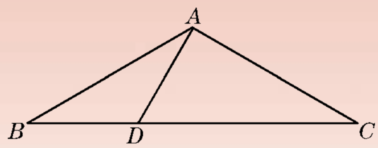
∴ $\angle A=30°$（在直角三角形中，如果一条直角边等于斜边的一半，那么这条直角边所对的角等于 30°）.

练习 19.8(2)

1. 已知：如图，在△ABC 中，$\angle BAC=120°$，$AB=AC$，AB 边上的垂直平分线交 BC 于点 D，交 AB 于点 E，联结 AD.
   求证：$CD=2BD$.



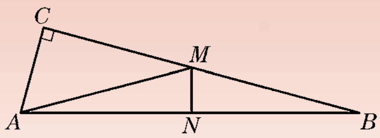
（第 1 题）



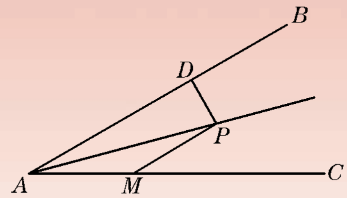
（第 2 题）

2. 如图，已知△ABC 中，$AB=AC$，点 D 在 BC 边上，$\angle DAC=90°$，$AD=\frac{1}{2}CD$. 求 $\angle BAC$ 的度数.

3. 如图,已知在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ$,$\angle B=15^\circ$,AB 的垂直平分线分别与 AB、BC 相交于点 N、M,联结 AM,$AC=6$,求 BM 的长.



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 如图,已知$\angle BAC=30^\circ$,AP 平分$\angle BAC$,$PM/\!/AB$,$PM=5$,$PD\perp AB$,求 PD 的长.

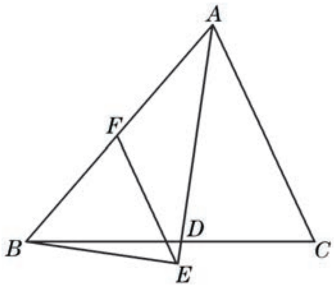


图 19－49

例题5 已知:如图 19－49,在$\triangle ABC$ 中,AD 平分$\angle BAC$,$BE\perp AD$,BE 交 AD 的延长线于点 E,点 F 是 AB 的中点.

求证:$EF/\!/AC$.

证明 ∵ AD 平分$\angle BAC$(已知),

∴ $\angle FAE=\angle DAC$(角平分线的定义).

∵ $BE\perp AD$(已知),

∴ $\angle AEB=90^\circ$(垂直的定义).

又∵ EF 是 AB 上的中线(已知),

∴ $EF=\dfrac{1}{2}AB$(直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半),

即 $EF=AF$.

得 $\angle FEA=\angle FAE$(等边对等角).

∴ $\angle FEA=\angle DAC$(等量代换).

∴ $FE/\!/AC$(内错角相等,两直线平行).

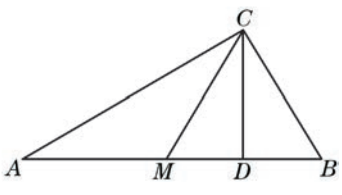


图 19－50

例题6 已知:如图 19－50,在$\triangle ABC$ 中,$\angle A=30^\circ$,$\angle ACB=90^\circ$,M、D 分别为 AB、MB 的中点.

求证:$CD\perp AB$.

证明 ∵ $\angle A=30^\circ$,$\angle ACB=90^\circ$(已知),

∴ $BC=\dfrac{1}{2}AB$(在直角三角形中,如果一个锐角等于 30°,那么它所对的直角边等于斜边的一半).

又∵ M 是 AB 的中点(已知),

∴ $CM=\dfrac{1}{2}AB$(直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半).

∴ $CM=BC$(等量代换).

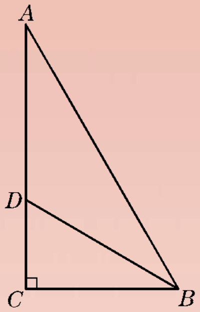
又∵ D 是 MB 的中点(已知),

∴ $CD\perp AB$(等腰三角形的三线合一).

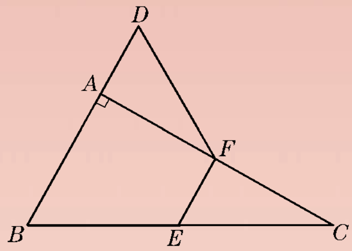
练习 19.8(3)

1. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，D为直角边AC上的一个点，BD平分$\angle ABC$，$AD=2CD$.

求证：(1) $\angle A=30°$； (2) 点D在线段AB的垂直平分线上.



（第 1 题）



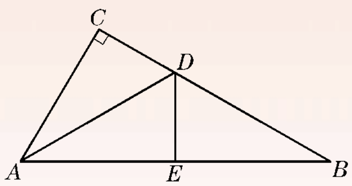
（第 2 题）

2. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，$\angle C=30°$，EF垂直平分AC，点D在BA的延长线上，$AD=\dfrac{1}{2}EC$.

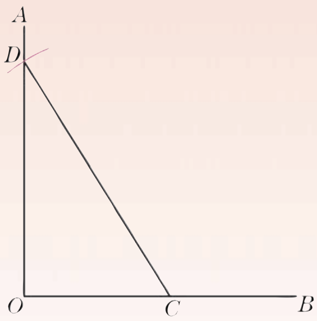
求证：(1) $\triangle DAF\cong\triangle EFC$； (2) $DF=BE$.

3. 已知：如图，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，AD平分$\angle CAB$，交BC于点D，DE垂直平分AB，点E为垂足.

求证：(1) $\angle B=30°$； (2) $BD=2CD$.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 已知：如图，小明先画$\angle AOB=90°$，然后在射线OB上任取一点C（与点O不重合），以点C为圆心，两倍OC长为半径画弧，交射线OA于点D，则$\angle ODC$等于$30°$. 你认为小明的画法正确吗？为什么？

19.9　勾股定理

我们来进一步研究直角三角形的边所具有的性质.

问题1

在直角三角形中，直角边与斜边之间有怎样的大小关系？为什么？

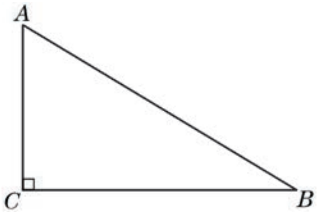


图 19－51

如图 19－51，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$. 如果把直角边 AC 看作点 A 到直线 BC 的垂线段，把斜边 AB 看作点 A 到直线 BC 的斜线段，那么根据“垂线段最短”的性质，可知 $AB>AC$. 类似地，可知 $AB>BC$. 因此得到定理：

定理　在直角三角形中，斜边大于直角边.

问题2

在直角三角形中，斜边和两条直角边之间有没有某种等量关系呢？

在七年级第二学期，我们进行过如图 19－52 的操作：把边长为 1 的两个正方形分别沿着它们的一条对角线剪开，再把所得的四个直角三角形拼成一个面积为 2 的正方形.

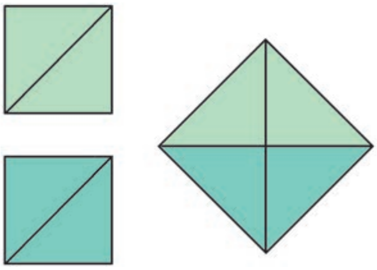


图 19－52

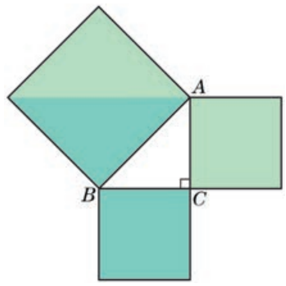


图 19－53

如果图 19－52 中的两个小正方形的边长都为 m（m 为正实数），那么由它们所分成的四个直角三角形拼成一个大正方形，其面积就是 $2m^2$.

再仔细观察、分析，可知图 19－52 中四个形状大小一样的直角三角形是等腰直角三角形；这个等腰直角三角形的直角边是小正方形的边，斜边是所拼成的大正方形的边.

问题3

已知一个等腰直角三角形 ABC，AB 是斜边．

（1）如图 19－53，分别以这个三角形的各边为边向外部作正方形，这样所作的三个正方形的面积之间有怎样的等量关系？

（2）在一个等腰直角三角形中，两条直角边与一条斜边在数量上有怎样的等量关系？

联系对于图 19－52 讨论所得的结论，可知分别以 AC、BC 为边的两个正方形的面积之和等于以 AB 为边的那个正方形的面积．一般来说，

等腰直角三角形中，以两条直角边为边的两个正方形面积的和等于以斜边为边的正方形的面积．

以“形”来描述．

或者说，

等腰直角三角形中，两条直角边的平方和等于斜边的平方．

以“数”来描述．

问题4

上述等腰直角三角形的这一性质，是否也是两直角边不相等的直角三角形所具有的性质？

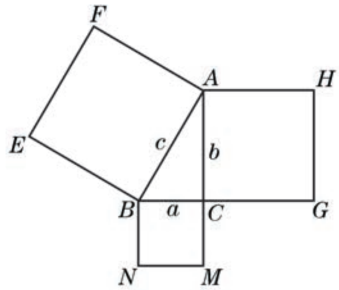


图 19－54

如图 19－54，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，$a\neq b$，四边形 $ABEF$、$BCMN$、$ACGH$ 都是正方形．我们来探讨能否推出：

正方形 $BCMN$ 与正方形 $ACGH$ 的面积和等于正方形 $ABEF$ 的面积．

以“形”来描述．

或者说能否推出：

$$a^2+b^2=c^2.$$

以“数”来描述．

由图 19－52 可知，用四个全等的等腰直角三角形正好拼成一个以其斜边为边的大正方形．

现在我们尝试，如果直角三角形中 $a\neq b$（不妨设 $b>a$），那么用四个这样的全等直角三角形能否拼出一个以其斜边为边的正方形？如能拼出，这时所得的大正方形内部会留下“空隙”吗？

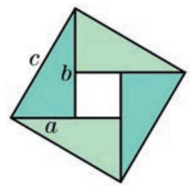


图 19－55

当 $b>a$ 时，类似图 19－52，将这四个全等的直角三角形拼成如图 19－55 的四边形．可知，这个四边形的四条边都等于直角三角形的斜边；而它的每个内角都是由直角三角形中互余的两个锐角组成，所以四个内角相等且都等于直角．因此，所拼成的这个四边形是边长等于 c 的正方形．但是，这个大正方形的内部出现“空隙”．

小学数学告诉我们，四条边相等、四个角都是直角的四边形是正方形．

在图 19－55 中，当 a 与 b 越来越接近时，$a-b$ 的差越来越接近于 0，大正方形内部出现的空隙的面积越来越接近于 0. 因此，图 19－52 的拼法可以看成是图 19－55 拼法的一个特例.

如图 19－54 所示，$a^2+b^2=c^2$ 与 $S_{正方形BCMN}+S_{正方形ACGH}=S_{正方形ABEF}$ 两者相当.

进一步分析这个“空隙”所成的图形，可知它是一个边长等于 $b-a$ 的正方形.

拼成的这个大正方形的面积，应等于这四个全等的直角三角形的面积的和再加上“空隙”的面积.

于是，

得
$$c^2=4\times\frac{1}{2}ab+(b-a)^2.$$

化简，得
$$a^2+b^2=c^2.$$

这样，我们得到了如下定理：

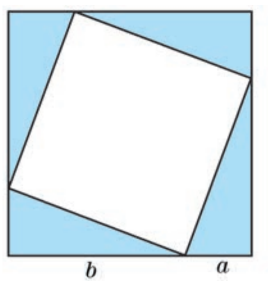
勾股定理　直角三角形两条直角边的平方和，等于斜边的平方.

我国古代数学家证明勾股定理，有如下巧妙证法：

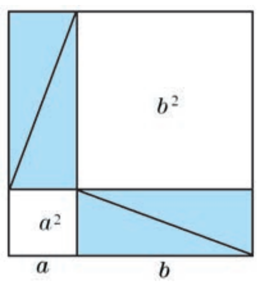
图 19－56(1)(2)是大小一样的两个正方形，从中分别去掉四个全等的直角三角形(带阴影)，那么这两个正方形中剩下部分的面积一定相等.

如图所示，两个正方形的边长都是 $(a+b)$，每个直角三角形的两直角边长分别为 a、b，设斜边长为 c. 因为这些直角三角形全等，而直角三角形的两个锐角互余，所以图 19－56(1)中的剩余部分是边长为 c 的正方形；图 19－56(2)中的剩余部分是边长分别为 a、b 的两个正方形. 因此，

$$a^2+b^2=c^2.$$



(1)



(2)

图 19－56

勾股定理是几何中最著名的定理之一，它在数学研究与人类实践的活动中有着极其广泛的应用.

在直角三角形中，如果已知两条边的长，那么根据勾股定理，就能求出第三条边的长.

例题1 求边长为 1 的等边三角形的面积.

已知：如图 19－57，$\triangle ABC$ 中，$AB=BC=CA=1$.

求：$S_{\triangle ABC}$（即三角形 ABC 的面积）.

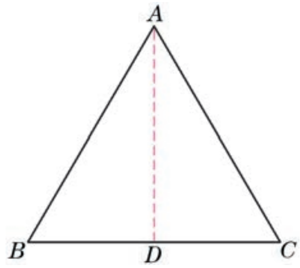


图 19－57

解 作 $AD\perp BC$，垂足为点 D.

$\because$ $AB=AC=BC=1$，$AD\perp BC$，

$\therefore$ $BD=CD=\dfrac{1}{2}$（等腰三角形的三线合一）.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，

$\because$ $\angle ADB=90^\circ$（垂直的定义），

$\therefore$ $AB^2=AD^2+BD^2$（勾股定理）.

得 $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{1^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore$ $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot AD=\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

已知 $\triangle ABC$ 的边长等于 1，要求它的面积，关键是求出一边上的高.

想一想

如果等边三角形的边长为 a，那么面积 S 是多少？（用含 a 的代数式表示）

练习 19.9(1)

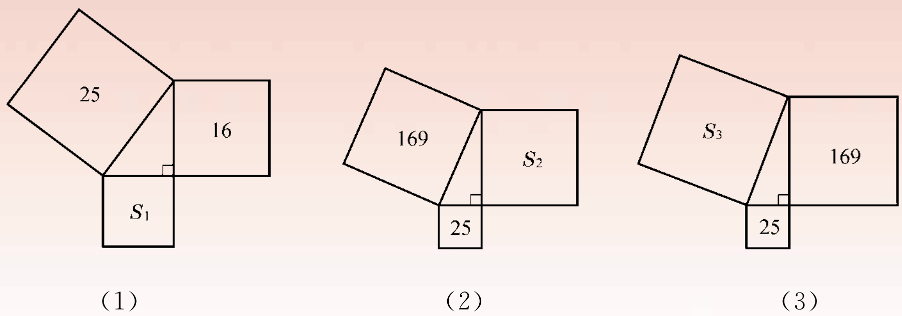
1. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle A=90^\circ$，设 a、b、c 分别表示 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边.

（1）已知 $b=4$，$c=5$，求 a； （2）已知 $a=13$，$b=12$，求 c.

2. 已知等腰直角三角形的腰长为 5，求这个三角形的周长.

3. 求下列图中字母所表示的正方形的面积：

（1）$S_1=$________；（2）$S_2=$________；（3）$S_3=$________.



（第 3 题）

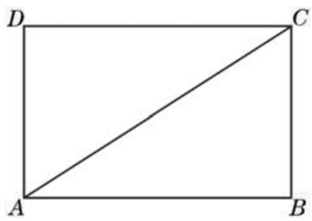


图 19－58

联结长方体中不在同一面上的两个顶点的线段是这个长方体的"体对角线".设长方体的长、宽、高分别为 a、b、c,"体对角线"长为 l,那么 $l^2=a^2+b^2+c^2$.
在本题中只要画卷的长小于所述长方体的"体对角线"长,那么画卷就可放入行李架.

在日常生活中,勾股定理的应用很多.

例题2 机场入口处的铭牌上说明,飞机行李架是一个 56cm×36cm×23cm 的长方体空间.一位旅客携带一件 62cm 长的画卷,这件画卷能放入行李架吗?

分析 画卷沿着行李架的 56cm 或 36cm 边缘摆放明显超长,因此可看沿着正面长方形的对角线能否放入,这需要求出这条对角线的长后再加以判断.

解 行李架的空间是长方体,正面是长 56cm、宽 36cm 的长方形.

如图 19－58,在长方形 $ABCD$ 中,$AB=56$cm,$BC=36$cm,AC 是对角线.

∵ 四边形 $ABCD$ 是长方形(已知),

∴ $\angle B=90°$(长方形的四个角都是直角).

在 Rt$\triangle ABC$ 中,

∵ $\angle B=90°$(已证),

∴ $AC^2=AB^2+BC^2$(勾股定理).

得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{56^2+36^2}=\sqrt{4432}\approx 66.7$(cm).

∵ $62<66.7$,

∴ 62cm 长的画卷能放入行李架.

我国古代对勾股定理的应用就十分注重,在古代数学书籍中有不少相关记载.例如《九章算术》中的勾股问题,是具有历史地位的世界著名算题.

例题3 (《九章算术》勾股章第 6 题"引葭(jiā)赴岸")"今有池方一丈,葭生其中央,出水一尺.引葭赴岸,适与岸齐.问水深、葭长各几何."

本题的意思是:有一水池一丈见方,池中央生有一棵类似芦苇的植物,露出水面一尺.如把它引向岸边,正好与岸边齐.问:水有多深?该植物有多长?

分析 如图 19－59,Rt$\triangle ABC$ 中,$AC=b$,$AB=c$,$BC=a$,b 为池深,c 为葭长,且葭出水 1 尺,即 $c=(b+1)$尺,由题意知 a 为 5 尺.根据勾股定理,可得 $b^2+5^2=(b+1)^2$,从中可以求出 b.

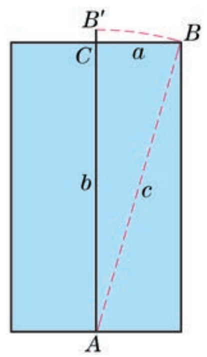


图 19－59

解 如图 19－59,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$.

则有 $AC^2+BC^2=AB^2$(勾股定理).

设 $AC=b$,可得 $b^2+5^2=(b+1)^2$.

化简,得 $2b-24=0$.

解得 $b=12$.

$AB=b+1=13$.

答：水深 12 尺，葭长 13 尺.

利用勾股定理，可以作出长度为$\sqrt{n}$（n 是大于 1 的整数）的线段.

例题4　分别作长为$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、…、$\sqrt{7}$的线段.

分析　根据勾股定理可知，两条直角边长都为 1 的直角三角形，它的斜边长等于$\sqrt{2}$；两条直角边长分别为$\sqrt{2}$、1 的直角三角形，它的斜边长就等于$\sqrt{3}$. 依此类推，可作出其余的线段.

作法　如图 19－60.

1. 作两条直角边都为 1 的直角三角形 ACB_1，其中$\angle C=90°$.
2. 以斜边 AB_1 为一直角边，作另一直角边长为 1 的直角三角形 AB_1B_2.
3. 顺次这样作下去，最后作到直角三角形 AB_5B_6.

则斜边 AB_1、AB_2、…、AB_6 的长度分别是$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、…、$\sqrt{7}$，它们是所求作的线段.

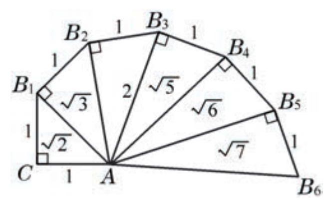


图 19－60

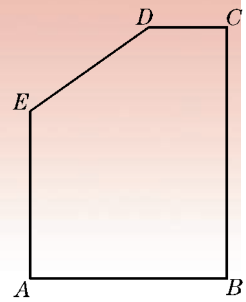
想一想

已知长度为$\sqrt{n}$（n 是大于 1 的整数）的线段，你能作出长度为$\sqrt{n+1}$的线段吗？

练习 19.9(2)

1. $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，设顶点$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边长分别为 a、b、c. 已知 $a=n-1(n>1)$，$b=2\sqrt{n}$，求 c.

2. 如图，已知$\angle A=\angle B=\angle C=90°$，$AB=7$，$AE=6$，$CD=3$，$DE=5$，求多边形 $ABCDE$ 的面积.



（第 2 题）

问题5

由三边对应相等的两个三角形全等，可知给定三边的长，三角形的形状、大小就唯一确定. 那么三角形的三边之间满足怎样的关系时这个三角形是直角三角形呢？

如果勾股定理的逆命题是真命题，那么就可以根据边的情况来判定这个三角形是否是直角三角形.

大约在公元前 2700 年左右，古埃及人建造金字塔时，由于塔基必须是正方形，他们就是用三角形的边来确定直角的.

现在，我们来证明勾股定理的逆命题是真命题.

已知：如图 19－61，在$\triangle ABC$中，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，且 $a^2+b^2=c^2$.

求证：$\triangle ABC$是直角三角形.

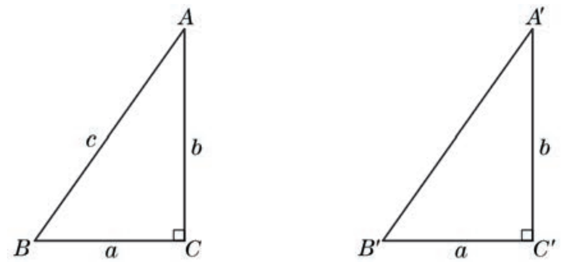


图 19－61

分析 直接从 $a^2+b^2=c^2$ 证明$\triangle ABC$是直角三角形是困难的. 如果有一个直角三角形 $A'B'C'$，$\angle C'=90°$，$B'C'=a$，$A'C'=b$，那么斜边 $A'B'$就满足

$$A'B'^2=B'C'^2+A'C'^2=a^2+b^2=c^2.$$

只要证明$\triangle A'B'C'\cong\triangle ABC$，就能推出$\angle C=\angle C'=90°$.

证明 作$\triangle A'B'C'$，使$\angle C'=90°$，$B'C'=a$，$A'C'=b$，那么

$$A'B'^2=B'C'^2+A'C'^2=a^2+b^2\text{（勾股定理）}.$$

$\because$ $a^2+b^2=c^2$（已知），

$\therefore$ $A'B'^2=c^2$（等量代换）.

$\because$ 边长是正数，

$\therefore$ $A'B'=c$.

在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，

$$\begin{cases} BC=a=B'C', \\ CA=b=C'A', \\ AB=c=A'B', \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$（S. S. S）.

$\therefore$ $\angle C=\angle C'=90°$，

即$\triangle ABC$是直角三角形（直角三角形的定义）.

于是我们得到：

勾股定理的逆定理　如果三角形的一条边的平方等于其他两条边的平方和，那么这个三角形是直角三角形.

例题5　已知$\triangle ABC$中，$BC=8$，$AC=15$，$AB=17$，试判断$\triangle ABC$是不是直角三角形.

先找出最长边，再看最长边的平方与其他两边的平方和是否相等.

解　$\because$　$BC^2+AC^2=8^2+15^2=289$，$AB^2=17^2=289$，

$\therefore$　$AB^2=BC^2+AC^2$.

因此，$\triangle ABC$是直角三角形(勾股定理的逆定理).

我们已经知道，$3^2+4^2=5^2$，$8^2+15^2=17^2$. 如果正整数a、b、c满足$a^2+b^2=c^2$，那么a、b、c叫做勾股数组. 以勾股数组中的三个数分别为各边长的三角形一定是直角三角形.

容易验证，5、12、13，7、24、25，20、21、29等，都是勾股数组.

一般地，设m、n都是正整数，且$m>n$，如果$a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$，那么a、b、c一定是勾股数组. 而且设k为正整数，可知ka、kb、kc也一定是勾股数组.

因为$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$
$=m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2$
$=m^4+2m^2n^2+n^4$，
$(m^2+n^2)^2$
$=m^4+2m^2n^2+n^4$，
所以$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$.

例题6　图19－62是一块四边形绿地的示意图，其中AB长24米，BC长15米，CD长20米，DA长7米，$\angle C=90°$，求绿地$ABCD$的面积.

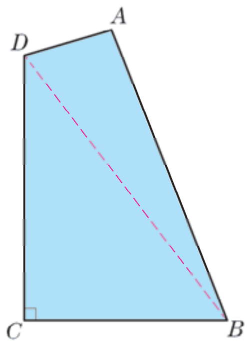


图19－62

分析　求一般的四边形的面积问题，通常转化为求三角形面积问题. 因此，如果联结对角线BD，分别求$S_{\triangle BCD}$和$S_{\triangle ABD}$(想一想，为什么不联结AC?)，可得四边形$ABCD$的面积. $S_{\triangle BCD}$可以直接求出，而求$S_{\triangle ABD}$就需要对$\triangle ABD$的形状作出判断，这就需要先求出BD的长.

解　联结BD(如图19－62).

在$\triangle BCD$中，

$\because$　$\angle C=90°$(已知)，

$\therefore$　$BD^2=BC^2+CD^2$(勾股定理).

由　$BC=15$，$CD=20$(已知)，

得　$$BD^2=15^2+20^2=225+400=625.$$

在$\triangle ABD$中，

$\because$　$AD=7$，$AB=24$，

$\therefore$　$AD^2+AB^2=7^2+24^2=49+576=625$.

得　$BD^2=AD^2+AB^2$.

$\therefore$　$\angle A=90°$(勾股定理的逆定理).

因此，$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ABD}$

$=\frac{1}{2}BC \cdot CD+\frac{1}{2}AD \cdot AB$

$=\frac{1}{2}\times 15\times 20+\frac{1}{2}\times 7\times 24$

$=150+84=234.$

答：绿地 $ABCD$ 的面积等于 234 平方米.

练习 19.9(3)

1. 判断题：

（1） 以0.3、0.4、0.5 为边长的三角形不是直角三角形. （　　）

（2） 以 0.5、1.2、1.3 为边长的三角形是直角三角形. （　　）

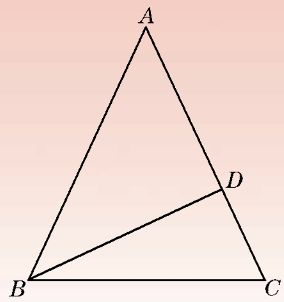
2. 在△ABC 中，设∠A、∠B、∠C 分别所对的边为 a、b、c，根据给定条件，判断△ABC 是否是直角三角形. 如果是，那么哪一个内角是直角？

（1） $a=8$，$b=13$，$c=11$；

（2） $a=6.5$，$b=2.5$，$c=6$；

（3） $a=40$，$b=41$，$c=7$.

3. 如图，△ABC 中，已知 $AB=AC$，D 是 AC 上的一点，$CD=8$，$BC=17$，$BD=15$，求 AB 的长.



（第 3 题）

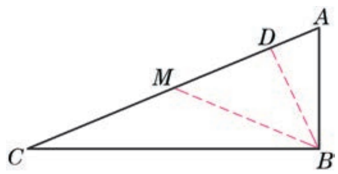


图 19－63

我们来探讨勾股定理和它的逆定理的有关应用.

例题7 如图 19－63，在△ABC 中，$AB=10$，$BC=24$，$AC=26$，M 是 AC 的中点，求：

（1） B、M 两点的距离；

（2） 点 B 到 AC 的距离.

分析 已知△ABC 的三边长，可以判断这个三角形是否是直角三角形. 常用的方法是运用勾股定理的逆定理. 如果它是直角三角形，那么本题就转化为我们熟悉的“求直角三角形斜边上的中线长”和“求直角三角形的直角顶点到斜边的距离”那样的问题.

解 在△ABC 中，

∵ $AB=10$，$BC=24$，$AC=26$(已知)，

∴ $AB^2+BC^2=10^2+24^2=100+576=676$.

又∵ $AC^2=26^2=676$，

得 $AC^2=AB^2+BC^2$(等量代换).

∴ $\angle B=90°$(勾股定理的逆定理).

（1） 联结 BM(如图 19－63).

∵　M 是 AC 的中点(已知)，

∴　$BM=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times26=13$(直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半).

即 B、M 两点的距离为 13.

(2) 作 $BD\perp AC$，垂足为点 D(如图 19-63).

∵　$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}\times10\times24=120$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times26\times BD=13BD$，

∴　$13BD=120$(等量代换).

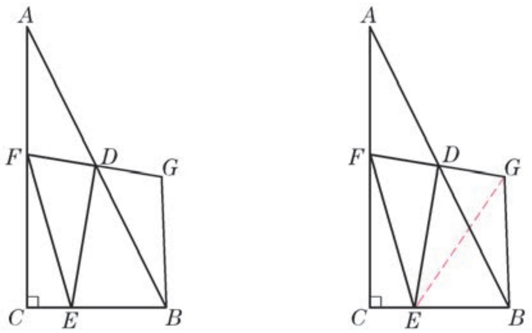
∴　$BD=\frac{120}{13}$.

即点 B 到 AC 的距离等于$\frac{120}{13}$.

Rt$\triangle ABC$ 中，如果两条直角边分别为 a、b，斜边为 c，斜边上的高为 h_c，那么可利用等式 $ch_c=ab$ 求高 h_c.

例题8　已知：如图 19-64(1)，$\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle ACB=90°$，D 是边 AB 上的中点；点 E、F 分别在边 BC、AC 上，$DE\perp DF$；点 G 在 FD 的延长线上，$DG=DF$.

求证：(1) $GB\perp BC$；　(2) $EF^2=AF^2+BE^2$.



(1)　　(2)

图 19-64

分析　(1) 要证明 $GB\perp BC$，只要证明$\angle GBD+\angle ABC=90°$. 由$\angle ABC$ 与$\angle A$ 互余，可知只要证明$\angle GBD=\angle A$. (2) 要证明 $EF^2=AF^2+BE^2$，关键是要证明线段 EF、AF、BE 能组成直角三角形.

要证线段 a、b、c 满足关系式 $a^2+b^2=c^2$，应设法将这三条线段组成三角形，并证明这个三角形是直角三角形，且 c 是斜边.

证明　(1) 在$\triangle GDB$ 与$\triangle FDA$ 中，

$$\begin{cases}DG=DF\text{(已知)},\\ \angle GDB=\angle FDA\text{(对顶角相等)},\\ BD=AD\text{(中点的定义)},\end{cases}$$

∴　$\triangle GDB\cong\triangle FDA$(S. A. S).

得　$\angle GBD=\angle A$(全等三角形的对应角相等).

$\because \quad \angle C=90^\circ$(已知)，

$\therefore \quad \angle A+\angle ABC=90^\circ$(直角三角形的两个锐角互余).

得 $\quad \angle GBD+\angle ABC=90^\circ$(等量代换)，

即 $\quad \angle GBC=90^\circ$(等量代换)，

$\therefore \quad GB\perp BC$.

(2) 联结 EG(如图 19－64(2)).

在 Rt$\triangle GBE$ 中，$EG^2=BG^2+BE^2$(勾股定理).

$\because \quad DE\perp DF, DG=DF$，

$\therefore \quad EF=EG$(线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等).

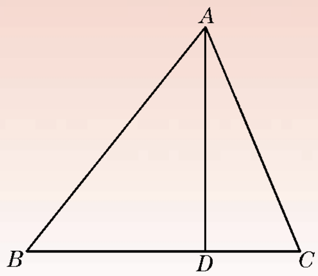
又由$\triangle GDB\cong\triangle FDA$，得 $BG=AF$(全等三角形的对应边相等)，

$\therefore \quad EF^2=AF^2+BE^2$(等量代换).

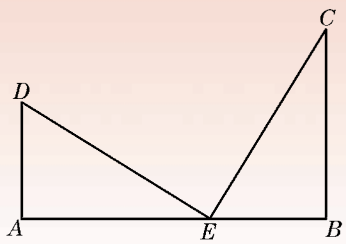
练习 19.9(4)

1. 如图，在$\triangle ABC$ 中，D 是边 BC 上的一点，$AB=15$，$AC=13$，$AD=12$，$CD=5$. 求 BC 的长.

2. 如图，公路上 A、B 两站相距 25 千米，C、D 为两村庄，$DA\perp AB$，$CB\perp AB$，垂足分别为点 A、B. 已知 DA 长 10 千米，CB 长 15 千米，现要在公路 AB 上建一个日用品大卖场 E，使得 C、D 两村到大卖场 E 的距离相等，那么大卖场 E 应建在离 A 站多远处?



(第 1 题)



(第 2 题)

19.10 两点的距离公式

我们知道，在直角坐标平面内，x 轴或平行于 x 轴的直线上的两点 $A(x_1, y)$、$B(x_2, y)$的距离 $AB=|x_1-x_2|$；y 轴或平行于 y 轴的直线上的两点 $C(x, y_1)$、$D(x, y_2)$的距离 $CD=|y_1-y_2|$.

问题1

如果经过 A、B 两点的直线 AB 既不平行于 x 轴，又不平行于 y 轴，那么 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 两点间的距离 AB 如何计算呢？

如图 19－65，直线 AB 既不平行于 x 轴，也不平行于 y 轴，这时，显然 $AB \neq |x_1 - x_2|$，$AB \neq |y_1 - y_2|$.

我们来分析 $|x_1 - x_2|$、$|y_1 - y_2|$ 的几何意义.

过点 A 作垂直于 x 轴的直线，再过点 B 作垂直于 y 轴的直线，两直线相交于点 C. 可知点 C 的坐标是 (x_1, y_2). 所以

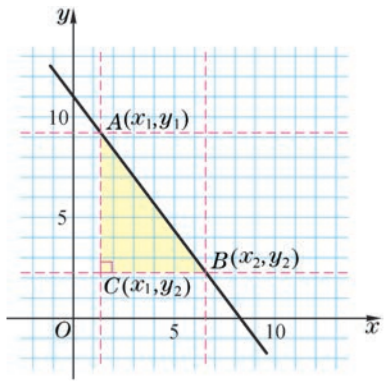


图 19－65

$$BC = |x_1 - x_2|,\ AC = |y_1 - y_2|.$$

还可以看到，因为 x 轴、y 轴的夹角是直角，所以 $\angle ACB = 90°$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，

因为 $AB^2 = AC^2 + BC^2$（勾股定理），

所以 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

> 可见，$|x_1 - x_2|$ 是直线 $x = x_1$ 和直线 $x = x_2$ 这两条平行线间的距离；$|y_1 - y_2|$ 是直线 $y = y_1$ 和直线 $y = y_2$ 这两条平行线间的距离.

想一想

$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 两点同在 x 轴或 y 轴上，或者所在直线平行于坐标轴时，$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 同样适用吗？

> 当 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 同在 x 轴或平行于 x 轴的直线上时，$y_1 = y_2$；当 A、B 同在 y 轴或平行于 y 轴的直线上时，$x_1 = x_2$.

由此得到两点的距离公式：

如果直角坐标平面内有两点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，那么 A、B 两点的距离

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

例题1 已知直角坐标平面内的 $\triangle ABC$ 三个顶点 A、B、C 的坐标分别为 $(-1, 4)$、$(-4, -2)$、$(2, -5)$.

(1) $\triangle ABC$ 的三条边长分别为多少？

(2) 试判断$\triangle ABC$的形状.

分析　应先求出$\triangle ABC$的三条边长,再作判断.

解　(1) $\because$　点A、B、C的坐标分别为$(-1,4)$、$(-4,-2)$、$(2,-5)$,

$\therefore$　$AB=\sqrt{(-1+4)^2+(4+2)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$,

$BC=\sqrt{(-4-2)^2+(-2+5)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$,

$AC=\sqrt{(-1-2)^2+(4+5)^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$(两点距离公式).

(2) $\because$　$AB=3\sqrt{5}$,$BC=3\sqrt{5}$,

$\therefore$　$AB=BC$(等量代换).

又$\because$　$AB^2+BC^2=45+45=90$,$AC^2=90$,

$\therefore$　$AB^2+BC^2=AC^2$(等量代换),

得　$\triangle ABC$是直角三角形(勾股定理逆定理).

$\therefore$　$\triangle ABC$是等腰直角三角形(等腰直角三角形的定义).

例题2　已知直角坐标平面内的两点分别为$A(3,3)$、$B(7,1)$,点P在x轴上,$\angle APB=90°$,求点P的坐标.

解　$\because$　点P在x轴上,可设点P的坐标是$(m,0)$,

又$\because$　点A、B的坐标分别是$(3,3)$、$(7,1)$,

$\therefore$　$AP=\sqrt{(3-m)^2+(3-0)^2}$,

　　$BP=\sqrt{(7-m)^2+(1-0)^2}$(两点距离公式).

$\because$　$\angle APB=90°$,　$\therefore$　$\triangle ABP$是直角三角形.

$\therefore$　$AP^2+BP^2=AB^2$(勾股定理).

$\therefore$　$(3-m)^2+(3-0)^2+(7-m)^2+(1-0)^2=(3-7)^2+(3-1)^2$.

整理,得　$m^2-10m+24=0$,

解得　$m=4$或$m=6$.

$\therefore$　点P的坐标是$(4,0)$或$(6,0)$.

练习 19.10

1. 求下列两点的距离:

　(1) $A(1,2)$和$B(4,6)$;　　(2) $C(-3,5)$和$D(7,-2)$;

　(3) $E(-4,3)$和$F(1,3)$;　　(4) $G(-5,6)$和$H(-3,-4)$.

2. 已知三角形三个顶点的坐标,试判断三角形的形状.

　(1) $A(-3,1)$,$B(1,4)$,$C(-6,-4)$;

　(2) $E(4,3)$,$F(1,2)$,$G(3,-4)$.

3. 已知等边三角形ABC的顶点B、C的坐标分别为$(0,0)$和$(4,0)$,求顶点A的坐标.

本章小结

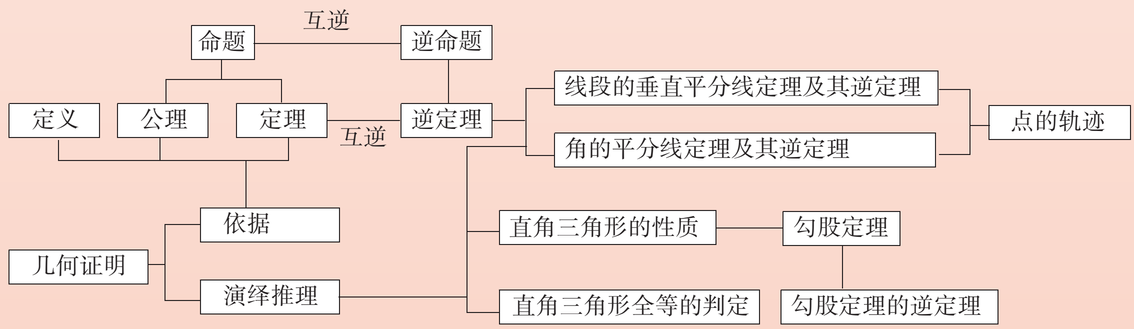
本章的内容属于论证几何学. 从实验几何到论证几何，是从感性认识到理性认识的一个重大的跨越. 通过直观观察和操作实验形成的几何直觉是很宝贵的，它能帮助我们洞察几何图形的性质，作出猜想，给出进行演绎推理的目标和步骤. 论证几何采用逻辑方法进行严密的推理，使所得的结论具有高度可靠性. 几何直观和演绎证明，好比我们的左右手，都很重要. 感性认识和理性认识互相结合，才能深刻地认识事物的本质.

在所有科学分支中，数学是最为严谨的一门科学. 通过学习几何证明，不仅可以帮助我们严密地思考和表达，养成有条理分析和“言必有据”的习惯，而且可以进一步体会数学的价值，体验求是、求真、求实的科学精神.

本章列举了一些具体几何问题的证明. 演绎证明是一种思维方式，也是一种语言表达方式. 我们正是通过一个个例题的证明，在演绎证明的实践中模仿、思考、操练，逐步理解和掌握演绎证明的思想、步骤，以及表达的格式. 因此，“在游泳中学习游泳”，认真地做好练习是最要紧的.

就几何知识而言，本章首先是剖析“线段的垂直平分线”“角的平分线”两个基本图形；然后对直角三角形的性质和判定进行了研究，特别是勾股定理及其逆定理（可以分别看作直角三角形的一种性质和一种判定），这是人类文明的重要象征. 勾股定理是定量地研究几何的一个基本定理，一个三角形作出它的一条高之后，就分为两个直角三角形；而两点的距离公式是利用勾股定理进行定量研究的典型体现，勾股定理的重要性由此可见一斑.

本章的知识结构框图如下：



19

阅读材料一

《几何原本》古今谈

人类早期对图形进行研究，是由于生产和生活实际的需要．古埃及尼罗河泛滥成灾，经常要测量被河水冲坏的土地；中国春秋战国时期实行“土地多的人多交农业税”的政策，也要测量土地的面积．当时的测量和研究，依赖于经验观察、割补搭拼、丈量计算．在长期的实践活动中，人们用直观、实验的方式，获得了一些几何结论．这样得到的结论大都有一定的正确性．但是，经验毕竟有局限性，结论并不完全可靠．

大约在公元前300年，古希腊数学家欧几里得广泛收集和研究来自古埃及、古巴比伦以及古希腊前人的几何学知识，经过系统整理和重新表述，形成了具有严密逻辑体系的《Elements》(原本)一书．在这本书的编写中，欧几里得选择了一系列有重大意义的、最原始的定义和公理，并将它们严格地按照逻辑的顺序进行排列，然后在此基础上进行演绎和证明，导出一系列的几何图形性质．这一严谨的几何学体系，闪耀着理性思维的光芒．

1607年，我国明代科学家徐光启和意大利传教士利玛窦合作翻译了该书的前六卷，定名为《几何原本》．书名所加的“几何”两字，出自英文“Geometry”中Geo的音译，兼有中文“多少”的语义，十分贴切．Geometry来自希腊文Geometria，其含意是“测地术”，表明几何学起源于测量．

《几何原本》是严谨科学体系的典范，它不仅是数学领域的硕果，而且其影响遍及整个科学．《几何原本》传入中国，通常看作是中国近代科学发展的起点．

我国明代科学家徐光启是上海人，他的墓地在徐家汇，现已开辟为光启公园(如图)．意大利人利玛窦的墓地在北京，任人凭吊．

中国古代数学崇尚“算法”，虽然也有演绎推理，但不够系统．徐光启在翻译《几何原本》以后所写的序中，有以下一段话值得我们揣摩体会．

“此书有四不必：不必疑，不必揣，不必试，不必改；有四不可得：欲脱之不可得，欲驳之不可得，欲减之不可得，欲前后倒之不可得．”

我们现在学习几何学，不仅是学习几何知识，更重要的是学习演绎推理的方法，体察理性思维的精神，并且在自然科学和社会科学的各个学科中加以运用和体现．无数经验表明，通过几何来学习演绎推理，是最为简捷有效的途径．

19

阅读材料二

勾股定理万花筒

勾股定理是人类最伟大的科学发现之一，是初等几何中的一个基本定理. 这个定理有十分悠久的历史，几乎所有文明古国，如希腊、中国、埃及、巴比伦、印度等，对此定理都有所研究.

勾股定理在西方被称为“毕达哥拉斯定理”(Pythagoras theorem). 毕达哥拉斯(Pythagoras，公元前 572 年～公元前 497 年)是古希腊数学家兼哲学家，他于公元前 550 年发现了这一定理. 相传，当时他的学派宰牛百头，广设盛宴，以示庆贺. 由此，这一定理又被冠以“百牛定理”. 古希腊数学家欧几里得在《原本》(我国译作《几何原本》)(第Ⅰ卷，命题 47)中关于这个定理的证明，如图 1 所示.

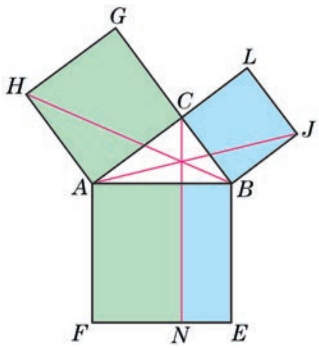


图 1

中国古代对这一数学定理的认识和应用，可以追溯到公元前一千多年. 中国最早的一部天文数学著作《周髀算经》就记载了一段史实：在周朝初年(公元前 1100 年)，商高对周公有这样的谈话：“故折矩以为勾广三，股修四，径隅五”(意思是在方尺上截取勾(短直角边)长为 3，股(长直角边)长为 4，则这端到那端的径(斜边)长必为 5). 这实际上是勾股定理的一个特例，是对勾股定理的初步认识，所以勾股定理又称商高定理. 不过，对这一定理的证明，却是较迟的事情. 直到公元 3 世纪“三国”时期，赵爽才用面积割补给出了它的第一种证明.

古代巴比伦人对勾股定理的研究同样令人惊叹. 人们在 1945 年对古巴比伦人遗留的一块数学泥板的研究中，惊讶地发现上面竟然刻有 15 组勾股数组，其年代远在商高和毕达哥拉斯之前，大约在公元前 1900 年到公元前 1600 年之间. 这些勾股数组中有些是很大的数，如 3 456，3 367，4 825；13 500，12 709，18 541 等，即使在今天也不是人们所熟悉的. 这使人们有理由相信，古巴比伦人早已掌握了勾股定理，并很可能找到了一种求得勾股数组的一般方法.

仅从以上史料就足以说明，勾股定理是全人类的共同财富，是世界文明宝库中的一颗璀璨明珠.

千百年来，许多数学家和数学学者对证明勾股定理兴趣盎然，各种证明方法层出不尽，据统计已有不同证法数百种. 下面，让我们欣赏其中两种.

1. 赵爽的证法

以 a、b 为直角边($b>a$)，以 c 为斜边作四个全等的直角三角形，则每个直角三角形的面积等于 $\frac{1}{2}ab$. 把这四个直角三角形拼成如图 2 所示形状.

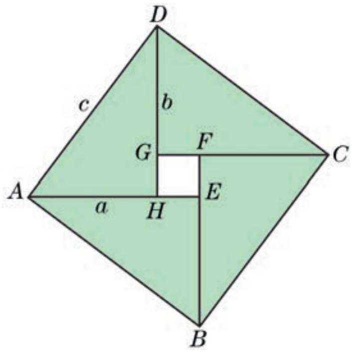


图 2

由 $\mathrm{Rt}\triangle DAH \cong \mathrm{Rt}\triangle ABE$，得 $\angle HDA=\angle EAB$.

又 $\angle HAD+\angle HDA=90^\circ$，可得 $\angle EAB+\angle HAD=90^\circ$，即 $\angle DAB=90^\circ$.

同理，$\angle ABC$、$\angle BCD$、$\angle CDA$ 都等于 90°.

再由 $AB=BC=CD=DA$，可知四边形 $ABCD$ 是一个边长为 c 的正方形，它的面积等于 c^2.

因为 $EF=FG=GH=HE=b-a$，$\angle HEF=90^\circ$，所以 $EFGH$ 是一个边长为 $(b-a)$ 的正方形，它的面积等于 $(b-a)^2$.

于是，得 $4\times\frac{1}{2}ab+(b-a)^2=c^2$，所以 $a^2+b^2=c^2$.

2002 年在北京召开的国际数学家大会的会标(如上图)，其原型就是这幅赵爽的勾股定理证明图.

2. 伽菲尔德的证法

美国第 20 任总统伽菲尔德，对数学有着浓厚的兴趣，业余喜爱研究数学. 1876 年，他时任众议员，提出了勾股定理的一种巧妙证法：

如图 3 构图，

梯形面积$=\frac{1}{2}$(上底+下底)×高

$=\frac{1}{2}(a+b)(a+b)$.

又　梯形面积=三个直角三角形面积的和

$=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$,

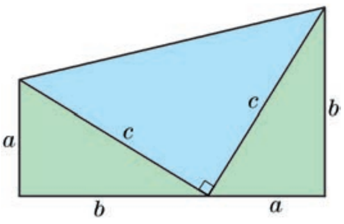


图 3

得　$\frac{1}{2}(a+b)(a+b)=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$,

即　$a^2+2ab+b^2=ab+ab+c^2$.

因此　$a^2+b^2=c^2$.

在勾股定理的应用研究中，数学家们得到了一些引人入胜的新成果. 下举两例：

1. 希波克拉底“月牙定理”

人们在刻意追求解决难题“化圆为方”的过程中，发现一些除圆以外的特殊曲边形的面积能和某个多边形的面积相等. 这种发现最早应归功于古希腊数学家希波克拉底. 他首先提出了“月牙定理”：以直角三角形两直角边为直径向外作两个半圆，以斜边为直径向内作半圆，则三个半圆所围成的两个月牙形（希波克拉底月牙）面积的和等于该直角三角形的面积.

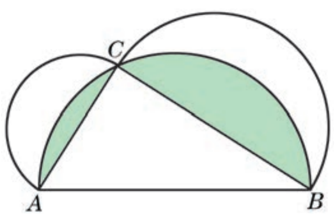


图 4　月牙定理

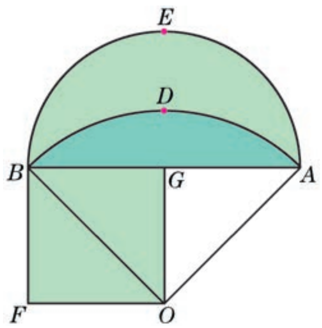


图 5　月牙与正方形等积

如图 4，利用勾股定理，可得 Rt△ABC 直角边上两个半圆面积的和等于斜边上半圆的面积；再同时减去两个深色弓形的面积，即得直角边上两个月牙形面积的和等于直角三角形的面积.

月牙定理结论之优美令人称奇不已. 图 5 同样是希波克拉底“化曲为直”的杰作——月牙形与正方形等积. 简练易懂的割补技巧犹如神来之笔，大大开启了人们的心灵之窗. 同时，月牙定理化曲为直的成功给一些数学家带来遐想，认为“化圆为方”问题的解决已近在咫尺. 有人甚至声称“圆可以化为方.”当然，这是绝对错误的.

2. 帕普斯对勾股定理的“推广”

古希腊数学家帕普斯证明了勾股定理的一个有趣的变形. 他将直角三角形三边上的正方形改成平行四边形，这三个平行四边形的作图方法如右：

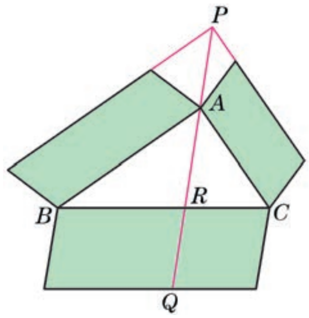


图 6　勾股定理推广

如图 6，对于 Rt$\triangle ABC$，

（1）分别以两直角边 AB、AC 为边，作两个平行四边形；

（2）分别延长两个平行四边形中平行于直角边的两边，它们相交于点 P；

（3）作射线 PA，与 BC 相交于点 R，再截取 $RQ=PA$；

（4）以 BC 为一边作平行四边形，使另一组对边平行且等于 RQ.

对于以上的作图，我们可以得到如下的真命题：

斜边上的平行四边形面积等于两条直角边上的平行四边形面积的和.

如何证明这个命题是真命题？有兴趣的同学，不妨自行研究，尝试证明一下.

说　　明

本册教材根据上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会制定的课程方案和《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》编写,供九年义务教育八年级第一学期试用.

本教材由上海师范大学主持编写,经上海市中小学教材审查委员会审查准予试用.

本册教材的编写人员有:

主编:邱万作　　　分册主编:史荣铨

特约撰稿人:(按姓氏笔画为序)叶锦义　沈　洁　陆海兵　章　健　蔡则彪　瞿　军

2019年教材修订组成员:叶锦义　邵世开　沈　洁　陆海兵　徐晓燕　顾跃平

欢迎广大师生来电来函指出教材的差错和不足, 提出宝贵意见. 出版社电话:021-64319241.

本册教材图片提供信息:

图虫网(封面一幅图,目录P2一幅图,P51一幅图,P52一幅图,P59一幅图,P77一幅图,P81一幅图,P108一幅图);上海教育出版社(目录P1两幅图,目录P2一幅图,P1一幅图,P23一幅图,P49两幅图,P53一幅图,P83三幅图,P108一幅图,P136一幅图,P138一幅图)

插图绘制:黄国荣、顾云明、王捷

经上海市中小学教材审查委员会审查
准予试用　准用号Ⅱ-CB-2019007

责任编辑　周明旭
张莹莹

九年义务教育课本
数　学
八年级第一学期
(试用本)
上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会

上海世纪出版股份有限公司
上　海　教　育　出　版　社　出版
(上海永福路123号　邮政编码:200031)

上海新华书店发行　上海中华印刷有限公司印刷

开本 890×1240　1/16　印张 9
2019年7月第1版　2021年6月第3次印刷
ISBN 978-7-5444-9334-5/G·7695

定价:11.30元
全国物价举报电话:12315
此书如有印、装质量问题,请向本社调换　上海教育出版社电话:021-64377165

绿色印刷产品

ISBN 978-7-5444-9334-5