九年义务教育课本

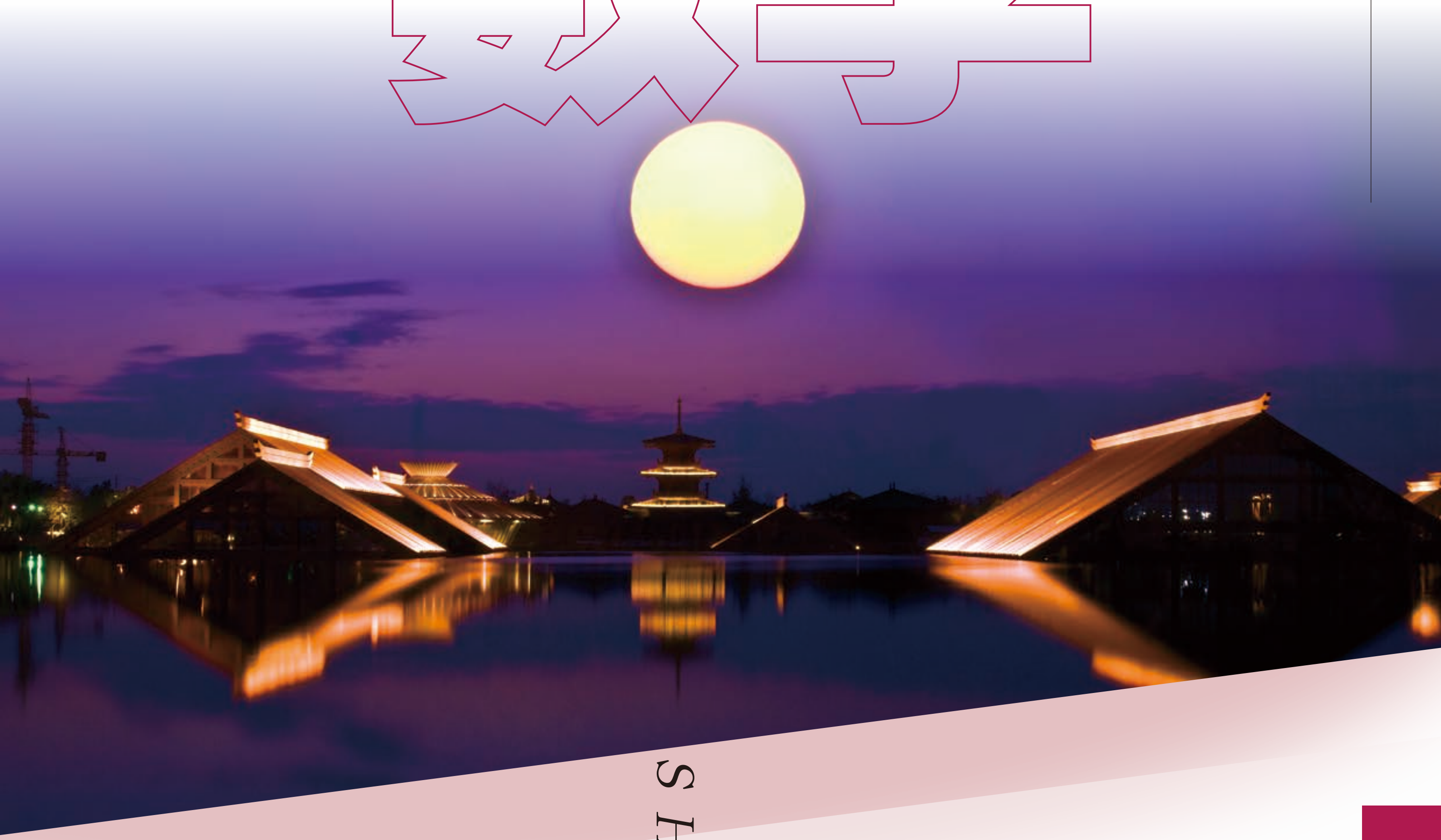
数学

数学

九年级　拓展Ⅱ

（试用本）

上海教育出版社



SHUXUE

SHUXUE SHUXUE SHUXUE SHUXUE SHUXUE SHUXUE SHUXUE SHUXUE SHUXUE SHUXUE

目录

1

2

Yiyuan Erci Fangcheng
Yu Erci Hanshu

1

第一章　一元二次方程与二次函数

喜庆的烟花，在空中划出一条条抛物线，呈现精彩；节能的太阳灶，有一个由一段抛物线旋转而成的抛物面，集聚光热；……对抛物线的形象，我们并不陌生.关于抛物线的研究，与二次函数密切相联.

形如$y=ax^2+bx+c$　（其中a、b、c是常数，且$a\neq 0$）的函数是二次函数，而$ax^2+bx+c=0$（其中a、b、c是常数，且$a\neq 0$）则是一元二次方程的一般式.由此想到，二次函数与一元二次方程之间有什么联系？怎样以函数的思想来深入理解一元二次方程？怎样用一元二次方程的知识来研究二次函数？这正是本章要讨论的主要问题.

Yiyuan Erci Fangcheng De Gen Yu Xishu Guanxi

第一节　一元二次方程的根与系数关系

1.1　一元二次方程的根与系数关系

一元二次方程有两个实数根时，求根公式表达了方程的每一个根与系数之间的关系. 现在我们进一步研究一元二次方程的两个根与方程系数之间的关系.

操作

解下列方程，并把方程的根填入表 1.1-1.

表 1.1-1

一元二次方程	x_1	x_2
$x^2-5x+6=0$		
$x^2+5x-6=0$		
$x^2-4x-12=0$		
$x^2-(a+b)x+ab=0$		

思考

（1）表 1.1-1 中的每一个方程的两根 x_1、x_2 的“和”与方程的系数之间有什么样的关系？它们的“积”呢？

（2）由（1）得到的结论，是否适用于表 1.1-2 中的方程？

表 1.1-2

一元二次方程	x_1	x_2	x_1+x_2	$x_1\cdot x_2$
$x^2-11x+18=0$				
$16x^2-9=0$				
$5x^2+6x+1=0$				
$2x^2+3x-5=0$				

（3）如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 有两个实数根 x_1、x_2，那么 x_1+x_2、$x_1\cdot x_2$ 与这个方程的系数之间有什么样的关系？

一般地，设 x_1、x_2 分别是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的两个实数根，则

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad x_1+x_2&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a},\\x_1\cdot x_2&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.\end{aligned}$$

由此得到关于一元二次方程的根与系数关系的定理：

定理　如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的两个实数根分别是 x_1、x_2，那么

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

一元二次方程的根与系数关系的定理又称为韦达定理．法国数学家韦达（1540—1603）在研究和推广这个定理中，作出了卓越的贡献．

例题1　写出下列一元二次方程的两个实数根的和与积．

（1）$x^2-4x+\sqrt{5}=0$；　（2）$2x^2-\sqrt{3}x-3=0$；

（3）$-\sqrt{2}x^2=x-4$．

解　设一元二次方程的两个实数根是 x_1、x_2．

（1）$x_1+x_2=-(-4)=4$，　$x_1\cdot x_2=\sqrt{5}$．

（2）$x_1+x_2=-\dfrac{-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　$x_1\cdot x_2=\dfrac{-3}{2}=-\dfrac{3}{2}$．

（3）将原方程变形为 $\sqrt{2}x^2+x-4=0$，得

$$x_1+x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad x_1\cdot x_2=\frac{-4}{\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}.$$

对于题(3)，必须将原方程化为一元二次方程的一般式后，再确定 a、b、c 的值．这个方程也可化为 $-\sqrt{2}x^2-x+4=0$．

例题2　已知关于 x 的方程 $2x^2-5x+p=0$ 的一个根为 $\dfrac{1}{2}$，求方程的另一个根及 p 的值．

解　设方程的另一个根是 x_1，由根与系数的关系，得

$$\begin{cases}x_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}, & ①\\[2ex] x_1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{p}{2}. & ②\end{cases}$$

由①得　$x_1=2$．

把 $x_1=2$ 代入②，得　$2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{p}{2}$．

本题也可将已知的一个根代入原方程，得到关于 p 的方程，求出 p 的值；再代入原方程，解出原方程的另一个根．

解得　$p=2$.

所以，方程的另一个根是 2，p 的值是 2.

练习 1.1(1)

1. （口答）说出下列各方程的两根的和与两根的积：

(1) $x^2-2x-2=0$；　　(2) $12x^2+8x=0$；

(3) $2x^2-3x+\frac{1}{2}=0$；　　(4) $2x^2-7=0$；

(5) $x^2+2=2\sqrt{2}x$；　　(6) $\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x=6$.

2. (1) 已知方程 $2x^2-5x-3=0$ 的一个根是 3，不解方程，求这个方程的另一个根；

(2) 已知方程 $2x^2-2x-1=0$ 的一个根是 $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，不解方程，求这个方程的另一个根.

3. (1) 已知关于 x 的方程 $2x^2+kx+3=0$ 的一个根是 $\frac{1}{2}$，求方程的另一个根及 k 的值；

(2) 已知关于 x 的方程 $3x^2+15x+m=0$ 的一个根为 1，求方程的另一个根及 m 的值.

例题3　已知方程 $2x^2+6x-3=0$ 的两根是 x_1、x_2，利用根与系数的关系求下列各式的值：

(1) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$；　　(2) $x_1^2+x_2^2$；

(3) $(x_1-x_2)^2$.

> 题中关于 x_1、x_2 的代数式都是关于 x_1、x_2 的对称式，即式中 x_1、x_2 相互替换后代数式不变. 利用根与系数的关系求关于 x_1、x_2 的代数式的值时，通常先把代数式化为由 x_1+x_2 和 $x_1 \cdot x_2$ 表示的形式，然后再代入求值.

解　方程的两个根是 x_1、x_2，由根与系数的关系，得

$$x_1+x_2=-3,\quad x_1\cdot x_2=-\frac{3}{2}.$$

(1) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{-3}{-\frac{3}{2}}=2.$

(2) $$\begin{aligned}x_1^2+x_2^2&=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\\&=(-3)^2-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)\\&=12.\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}(x_1-x_2)^2&=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\\&=(-3)^2-4\times\left(-\frac{3}{2}\right)\\&=15.\end{aligned}$$

例题4　已知关于 x 的方程 $x^2-(m-3)x+m+8=0$ 的两个实数根的平方和等于13，求 m 的值及方程的两根.

解　设方程 $x^2-(m-3)x+m+8=0$ 的两个实数根分别为 x_1、x_2，那么 $\Delta\geqslant 0$，且 $x_1+x_2=m-3$，$x_1\cdot x_2=m+8$.

根据题意，得

$$x_1^2+x_2^2=13.$$

$$\because\quad x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$
$$=(m-3)^2-2(m+8)$$
$$=m^2-8m-7,$$

$$\therefore\quad m^2-8m-7=13.$$

解得　$m_1=10$，$m_2=-2$.

当 $m=10$ 时，方程 $x^2-(m-3)x+m+8=0$ 即

$$x^2-7x+18=0,$$

这时，$\Delta=(-7)^2-4\times 18<0$，不合题意.

当 $m=-2$ 时，方程 $x^2-(m-3)x+m+8=0$ 即

$$x^2+5x+6=0,$$

这时，解得　$x_1=-2$，$x_2=-3$.

所以，m 的值为 -2，方程的两根分别为 -2 和 -3.

由已知方程两根之间的关系，求方程的字母系数的值时，常常可以利用根与系数的关系，建立关于相应字母的方程，从而求得字母系数的值. 注意，一元二次方程有实数根 $\Leftrightarrow \Delta\geqslant 0$.

练习 1.1(2)

1. 已知方程 $2x^2+4x-3=0$ 的两个实数根是 x_1、x_2，利用根与系数的关系求下列各式的值：

   (1) $x_1^2x_2+x_1x_2^2$；　(2) $x_1^2+x_2^2$；

   (3) $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$；　(4) $(x_1-2)(x_2-2)$.

2. 已知关于 x 的方程 $x^2+(k-5)x-(k+4)=0$ 的两个实数根是 x_1、x_2，且 $(x_1+1)(x_2+1)=-8$，求 k 的值及方程的两根.

思考

已知一个一元二次方程，当判别式 $\Delta\geqslant 0$ 时，可以求得这个方程的实数根. 反过来，已知一元二次方程的两个实数根，是否能作出这个方程呢？

如果一个一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的两个实数根是 x_1、x_2，那么二次三项式 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. 于是，这个方程可表示为 $a(x-x_1)(x-x_2)=0$，即

$$a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]=0,$$

其中 $a\neq 0$. 由于 a 的值不确定，所以这样的一元二次方程有无数个，但所有的这些方程的根都是 x_1、x_2.

如果只要作一个两根分别为 x_1、x_2 的一元二次方程，那么可取 $a=1$，方程 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$ 就是所求作的一个方程.

也可直接作方程 $(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$，得到以 x_1、x_2 为两根的一个一元二次方程. 这时，通常应将所作方程再化成一般式.

例题5 求作一个一元二次方程，使它的两个根分别是 $2+\sqrt{3}$ 和 $2-\sqrt{3}$.

解 设 $x_1=2+\sqrt{3}$，$x_2=2-\sqrt{3}$，得

$$x_1+x_2=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4,$$

$$x_1\cdot x_2=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1.$$

则 $x^2-4x+1=0$ 是所求作的一个方程.

想一想

如果例题 5 中加上“使所作的方程的二次项系数为 $\frac{1}{2}$”的条件，那么这个方程是什么？

例题6 已知方程 $2x^2-4x-1=0$，利用根与系数的关系求作一个一元二次方程，使它的两根分别是已知方程的两根的平方.

解 设方程 $2x^2-4x-1=0$ 的两个根是 x_1、x_2，则

$$x_1+x_2=2,\quad x_1\cdot x_2=-\frac{1}{2}.$$

设所求作的方程的两个根分别是 y_1、y_2，则 $y_1=x_1^2$，$y_2=x_2^2$. 得

$$\begin{aligned} y_1+y_2&=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\\ &=2^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=5,\\ y_1\cdot y_2&=x_1^2\cdot x_2^2=(x_1x_2)^2\\ &=\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

因此，$y^2-5y+\frac{1}{4}=0$ 是所求作的一个方程.

所求得的这个方程可化为整数系数方程 $4y^2-20y+1=0$.

议一议

对于例题 6，可作出多少个符合要求的一元二次方程？怎样表示这些方程？

例题7 已知两个数的和是 2，它们的积是 -1，求这两个数.

解 设这两个数分别是 x_1、x_2，根据题意得

$$x_1+x_2=2,$$
$$x_1\cdot x_2=-1.$$

可知 x_1、x_2 是一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 的两个根.

解这个方程，得 $x_1=1+\sqrt{2}$，$x_2=1-\sqrt{2}$.

所以，这两个数分别是 $1+\sqrt{2}$ 和 $1-\sqrt{2}$.

也可以设这两个数分别为 x_1、x_2，得
$$\begin{cases}x_1+x_2=2,\\x_1x_2=-1.\end{cases}$$
通过解这个二元二次方程组，求得这两个数的值.

练习 1.1(3)

1. 已知一个一元二次方程的二次项系数为 $\frac{1}{2}$，这个方程的两个根是 2 和 4，写出它的一次项系数和常数项.

2. 不解方程，求作一个新的一元二次方程，使它的两个根：

(1) 分别是方程 $6x^2-3x-2=0$ 的两根的倒数；

(2) 分别是方程 $x^2-3x+1=0$ 的两根的平方.

3. 已知两数的和与积，求这两个数.

(1) 和等于 4，积等于 -21；

(2) 和等于 $\sqrt{2}$，积等于 $-\frac{1}{4}$.

第二节　二次函数的解析式

1.2　二次函数与一元二次方程

我们来探讨二次函数与一元二次方程之间的联系.

问题1

已知二次函数① $y=x^2-4x+3$，② $y=x^2-4x+4$，③ $y=x^2-4x+5$，当它们的自变量 x 分别取何值时函数值为零?

函数值为零，即 $y=0$.

对于函数①，$y=0$ 就是 $x^2-4x+3=0$，解这个一元二次方程，得 $x_1=1$，$x_2=3$. 可知当自变量 x 的值为 1 或 3 时，它的函数值为零.

对于函数②，$y=0$ 就是 $x^2-4x+4=0$，解这个一元二次方程，得$x_1=x_2=2$. 可知当自变量 x 的值为 2 时，它的函数值为零.

对于函数③，$y=0$ 就是 $x^2-4x+5=0$，这个方程没有实数根. 可知无论自变量 x 取什么实数值，它的函数值都不为零.

一般地，对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$，给定 $y=m$，就得到一个关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=m$. 解这个方程，可求得函数值为 m 时所对应的自变量 x 的值或判定函数值不可能为 m.

当 $m=0$ 时，得一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$.

问题2

已知二次函数① $y=x^2-4x+3$，② $y=x^2-4x+4$，③ $y=x^2-4x+5$的图像分别如图 1－1(1)(2)(3)所示.

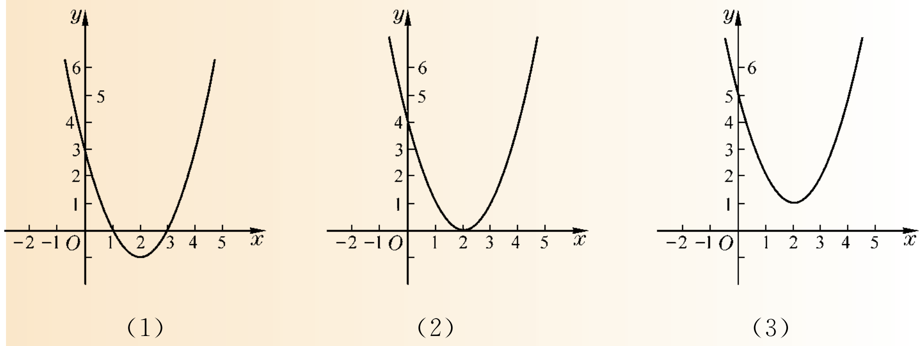


图 1－1

观察图 1－1 中的三个图像，回答问题：

函数的图像与 x 轴是否有公共点？如果有公共点，那么其坐标是什么？

如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴有公共点，那么公共点的纵坐标为 0. 由 $y=0$，得相应的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，则这个方程的实数根就是函数图像与 x 轴的公共点的横坐标.

例题1 求下列二次函数的图像与 x 轴的公共点的坐标.

(1) $y=x^2-3x+2$；　　(2) $y=2x^2-5x-3$.

解 (1) 由 $y=0$，得 $x^2-3x+2=0$.

解得 $x_1=1$，$x_2=2$.

所以函数 $y=x^2-3x+2$ 的图像与 x 轴的公共点的坐标分别是 $(1,0)$ 和 $(2,0)$.

(2) 由 $y=0$，得 $2x^2-5x-3=0$.

解得 $x_1=3$，$x_2=-\frac{1}{2}$.

所以函数 $y=2x^2-5x-3$ 的图像与 x 轴的公共点的坐标分别是 $(3,0)$ 和 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

例题2 已知二次函数 $y=-x^2+4x-1$，求：

(1) 二次函数的图像与 y 轴的公共点的坐标；

(2) 二次函数的图像与直线 $y=2$ 的公共点的坐标.

分析 二次函数的图像与 y 轴的公共点的横坐标 $x=0$，纵坐标就是当自变量 $x=0$ 时，函数 $y=-x^2+4x-1$ 的函数值. 二次函数的图像与直线 $y=2$ 的公共点的纵坐标为 2，横坐标就是 $y=2$ 时相应一元二次方程 $-x^2+4x-1=2$ 的实数根.

解 (1) 当 $x=0$ 时，$y=-x^2+4x-1=-1$.

所以二次函数的图像与 y 轴的公共点的坐标是 $(0,-1)$.

(2) 由 $y=2$，得 $-x^2+4x-1=2$.

整理得 $x^2-4x+3=0$.

解得 $x_1=1$，$x_2=3$.

所以函数 $y=-x^2+4x-1$ 的图像与直线 $y=2$ 的公共点的坐标分别是 $(1,2)$ 和 $(3,2)$.

一般地，关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=m$ $(a\neq0)$ 的实数根是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=m$ 的公共点的横坐标.

练习 1.2(1)

1. 求下列二次函数的图像与 x 轴的公共点的坐标.

（1） $y=x^2-5$；（2） $y=x^2+3x$；

（3） $y=2x^2-3x+1$；（4） $y=-x^2+2x+3$.

2. 求下列二次函数的图像与直线 $y=-2$ 的公共点的坐标.

（1） $y=x^2+3x-6$；（2） $y=x^2-2x-10$.

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像就是抛物线 $y=ax^2+bx+c$，它与 x 轴的公共点的个数有三种情况：有两个公共点；有且只有一个公共点；没有公共点.

思考

怎样判断抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴公共点的个数？

由于抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的公共点的横坐标是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根，而一元二次方程的实数根的情况可根据这个方程的判别式来判断，由此得到：

抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的公共点的个数，由相应的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 确定；反过来，由抛物线与 x 轴的公共点的个数，也可以确定判别式的值的符号. 即

（1） $\Delta>0 \Leftrightarrow$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有两个公共点；

（2） $\Delta=0 \Leftrightarrow$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有且只有一个公共点；

（3） $\Delta<0 \Leftrightarrow$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴没有公共点.

当抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有两个公共点时，可称公共点为它们的交点.
当抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有且只有一个公共点时，这个公共点就是抛物线的顶点.

例题3 判断下列抛物线与 x 轴的公共点的个数：

（1） $y=2x^2+5x+4$；（2） $y=2x^2+5x-4$；

（3） $y=2x^2-2\sqrt{6}x+3$.

解 （1） 对于方程 $2x^2+5x+4=0$，

$$\Delta=5^2-4\times2\times4=-7<0.$$

所以抛物线 $y=2x^2+5x+4$ 与 x 轴没有公共点.

（2） 对于方程 $2x^2+5x-4=0$，

$$\Delta=5^2+4\times2\times4=57>0.$$

所以抛物线 $y=2x^2+5x-4$ 与 x 轴有两个公共点.

（3） 对于方程 $2x^2-2\sqrt{6}x+3=0$，

$$\Delta=(2\sqrt{6})^2-4\times2\times3=0.$$

所以抛物线 $y=2x^2-2\sqrt{6}x+3$ 与 x 轴有且只有一个公共点.

例题4 当 m 满足什么条件时，抛物线 $y=(m+1)x^2+4mx+4m-3$ 与 x 轴的公共点的情况是：

(1) 有两个公共点?

(2) 有且只有一个公共点?

(3) 没有公共点?

解 由抛物线的表达式可知 $m+1\neq0$.

对于一元二次方程 $(m+1)x^2+4mx+4m-3=0$，

$$\Delta=(4m)^2-4(m+1)(4m-3)=-4(m-3).$$

(1) 当 $-4(m-3)>0$ 且 $m+1\neq0$，即 $m<3$ 且 $m\neq-1$ 时，这条抛物线与 x 轴有两个公共点.

(2) 当 $-4(m-3)=0$ 且 $m+1\neq0$，即 $m=3$ 时，这条抛物线与 x 轴有且只有一个公共点.

(3) 当 $-4(m-3)<0$ 且 $m+1\neq0$，即 $m>3$ 时，这条抛物线与 x 轴没有公共点.

练习 1.2(2)

1. 试判断下列抛物线与 x 轴的公共点的个数：

(1) $y=x^2-2x-1$；

(2) $y=x^2-2x+1$；

(3) $y=x^2-2x+2$.

2. 当 k 取何值时，抛物线 $y=kx^2+2(k-1)x+k-1$ 与 x 轴的公共点的情况是：

(1) 有两个公共点?

(2) 有且只有一个公共点?

(3) 没有公共点?

例题5 求证：抛物线 $y=x^2-mx+m^2+1$ 在 x 轴的上方.

抛物线在 x 轴的上方是指抛物线上所有的点都在 x 轴的上方.

分析 抛物线 $y=x^2-mx+m^2+1$ 的开口向上，可知当抛物线与 x 轴没有公共点时，它的所有的点都在 x 轴的上方.

证明 ∵ 二次项系数 $1>0$，

∴ 抛物线 $y=x^2-mx+m^2+1$ 的开口向上.

对于方程 $x^2-mx+m^2+1=0$，

$$\Delta=m^2-4(m^2+1)=-3m^2-4.$$

∵ $-3m^2\leqslant0$，$-4<0$，

$\therefore\quad \Delta<0$.

可知抛物线 $y=x^2-mx+m^2+1$ 与 x 轴没有公共点.

$\therefore\quad$ 抛物线 $y=x^2-mx+m^2+1$ 在 x 轴的上方.

例题6 已知抛物线 $y=x^2+4x+m$ 与 x 轴有两个公共点 A、B,且线段 $AB=6$,求 m 的值.

解 不妨设点 A 在点 B 的左侧,点 A 的坐标为 $(x_1,0)$.

因为线段 $AB=6$,所以点 B 的坐标为 $(x_1+6,0)$.

这时,x_1、x_1+6 是相应的一元二次方程 $x^2+4x+m=0$ 的两个实数根,得

$$x_1+(x_1+6)=-4,\quad ①$$

$$x_1\cdot(x_1+6)=m.\quad ②$$

由①解得 $\quad x_1=-5$,再代入②,

解得 $\quad m=-5$.

例题 6 也可以这样解:

设 $A(x_1,0)$,$B(x_2,0)$,则 x_1、x_2 是方程 $x^2+4x+m=0$ 的两个不相等的实数根.这时应有 $\Delta>0$,即 $16-4m>0$,得 $m<4$.

解方程 $x^2+4x+m=0$,得

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4m}}{2}=-2\pm\sqrt{4-m}.$$

$$\therefore\quad AB=|x_1-x_2|$$

$$=\left|(-2+\sqrt{4-m})-(-2-\sqrt{4-m})\right|=2\sqrt{4-m}.$$

$\because\quad AB=6$,

$\therefore\quad 2\sqrt{4-m}=6$.

解得 $\quad m=-5$.

经检验,$m=-5$ 满足 $m<4$ 的条件,并且是方程 $2\sqrt{4-m}=6$ 的根.

所以 $m=-5$.

我们还可以利用一元二次方程的根与系数的关系,得到 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$.于是,$AB=\sqrt{16-4m}$,再求出 m 的值.

练习 1.2(3)

1. 已知二次函数 $y=x^2-(k+4)x+2k-1$,求证:无论 k 取何值,它的图像与 x 轴总有两个公共点.
2. 已知抛物线 $y=x^2-kx+k-2$ 与 x 轴有两个公共点 A、B,且 $AB=2$.求抛物线的表达式及 A、B 的坐标.

1.3　二次函数解析式的确定

确定二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的解析式，就是要确定 a、b、c 的值. 如果已知二次函数图像上三个点的坐标(或自变量与函数值的三组对应值)，那么可列出关于 a、b、c 的方程组，通过解方程组求得 a、b、c 的值.

例题1　已知二次函数的图像经过 $A(4,5)$、$B(2,-3)$、$C(0,-3)$三点.

(1) 求这个二次函数的解析式；

(2) 指出图像的开口方向、对称轴和顶点坐标，以及图像的变化趋势.

解　(1) 设所求二次函数的解析式为 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$.

根据题意，得 $\begin{cases}16a+4b+c=5,\\4a+2b+c=-3,\\c=-3.\end{cases}$

解这个方程组，得　$a=1,\ b=-2,\ c=-3$.

所以，所求二次函数的解析式为 $y=x^2-2x-3$.

(2) $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，二次项系数 $1>0$.

因此，这个二次函数的图像开口向上，对称轴是直线 $x=1$，顶点坐标是$(1,-4)$.

图像在直线 $x=1$ 左侧的这部分曲线下降，在右侧的这部分曲线上升；顶点是图像的最低点(图像如图 1－2 所示).

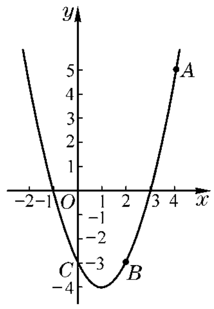


图 1－2

图像上升或下降，是指沿着 x 轴的正方向看图像时，图像上点的位置变化的态势.
于是可知，图像上升(或下降)，y 的值随 x 的值增大而增大(或减小).

例题2　指出下列二次函数图像的开口方向、最高点或最低点的坐标，以及图像的变化趋势.

(1) $y=-x^2+4x-6$；　　(2) $y=2x^2-5x-3$.

解　(1) $y=-x^2+4x-6=-(x-2)^2-2$，二次项系数 $-1<0$.

所以二次函数 $y=-x^2+4x-6$ 的图像开口向下，最高点即顶点的坐标是$(2,-2)$；图像在直线 $x=2$ 左侧的这部分曲线上升，在右侧的这部分曲线下降.

(2) $y=2x^2-5x-3=2\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2-\dfrac{49}{8}$，二次项系数 $2>0$.

所以二次函数 $y=2x^2-5x-3$ 的图像开口向上，最低点即顶点的坐标是$\left(\dfrac{5}{4},-\dfrac{49}{8}\right)$；图像在直线 $x=\dfrac{5}{4}$左侧的这部分曲线下降，在右侧的这部分曲线上升.

一般地，二次函数 $y=a(x+m)^2+k$ 的图像有以下特征：

图像的对称轴是直线 $x=-m$，顶点坐标是 $(-m,k)$.

当 $a>0$ 时，图像开口向上；图像在直线 $x=-m$ 的左侧部分的曲线下降，在右侧部分的曲线上升；顶点是图像上的最低点.

当 $a<0$ 时，图像开口向下；图像在直线 $x=-m$ 的左侧部分的曲线上升，在右侧部分的曲线下降；顶点是图像上的最高点.

二次函数 $y=a(x+m)^2+k$ 的图像上升、下降的特征，直观地表达了这个二次函数的函数值随着自变量的值变化而变化的情况.

在讨论函数值的变化情况时，自变量 x 的取值范围也可以分为 $x<-m$ 和 $x\geqslant -m$；或 $x\leqslant -m$ 和 $x\geqslant -m$；或 $x<-m$ 和 $x>-m$.

当 $a>0$ 时，在 $x\leqslant -m$ 的范围内，y 的值随 x 的值增大而减小；在 $x>-m$ 的范围内，y 的值随 x 的值增大而增大.

当 $a<0$ 时，在 $x\leqslant -m$ 的范围内，y 的值随 x 的值增大而增大；在 $x>-m$ 的范围内，y 的值随 x 的值增大而减小.

例题3 已知二次函数 $y=-x^2+4x-3$.

(1) 判断点 $A(2,1)$、$B(4,3)$ 是否在函数图像上；

(2) 求出函数图像与坐标轴的公共点的坐标；

(3) 指出函数图像的开口方向、顶点坐标及函数值的增减变化情况.

解 (1) 当 $x=2$ 时，$y=-2^2+4\times 2-3=1$.

所以点 $A(2,1)$ 在这个函数图像上.

当 $x=4$ 时，$y=-4^2+4\times 4-3=-3\neq 3$.

所以点 $B(4,3)$ 不在这个函数图像上.

(2) 当 $x=0$ 时，$y=-3$.

所以函数图像与 y 轴的公共点坐标是 $(0,-3)$.

当 $y=0$ 时，得 $-x^2+4x-3=0$.

解得 $x_1=1$，$x_2=3$.

所以函数图像与 x 轴的公共点坐标分别是 $(1,0)$ 和 $(3,0)$.

(3) $y=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$，二次项系数 $-1<0$.

所以，函数图像的开口向下；顶点坐标是 $(2,1)$；在 $x\leqslant 2$ 的范围内，y 的值随 x 的值增大而增大；在 $x>2$ 的范围内，y 的值随 x 的值增大而减小.

练习 1.3(1)

1. 已知二次函数图像上三点的坐标，求二次函数的解析式：

(1) $(0,10)$，$(1,5)$，$(2,2)$；

(2) $(-1,6)$，$(-2,0)$，$(-3,-2)$；

(3) $(-1,2)$，$\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$，$(1,0)$.

2. 指出下列二次函数图像的开口方向、顶点坐标以及函数值的增减变化情况，并判断点 $A(-2,4)$、$B(3,-6)$是否在函数图像上.

（1） $y=x^2-3x-6$；　　　　（2） $y=2x^2-5x-9$.

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 可化为 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式. 它的图像是抛物线，a 的值决定了抛物线的开口方向与开口大小，顶点$(-m,k)$决定了抛物线的位置；同时，抛物线的其他特征也是明确的.

想一想

我们知道，二次函数 $y=a(x+m)^2+k$ 的图像的对称轴是直线 $x=-m$，顶点坐标是$(-m,k)$. 如果已知二次函数图像的顶点坐标及一个其他条件，能确定这个函数的解析式吗？

例题4 已知二次函数图像的顶点坐标为$(2,-3)$，且过点 $A(3,-1)$，求这个函数的解析式.

解 由二次函数图像的顶点坐标为$(2,-3)$，可设这个函数的解析式为 $y=a(x-2)^2-3$.

∵ 图像过点 $A(3,-1)$，

∴ $a(3-2)^2-3=-1$.

解得 $a=2$.

所以这个函数的解析式为 $y=2(x-2)^2-3$，即

$$y=2x^2-8x+5.$$

> 如果已知二次函数图像的顶点坐标为(p,q)，那么可设函数解析式为
> $y=a(x-p)^2+q$.
> 这时只要再有一个条件，就可以确定二次函数的解析式（即确定 a 的值）.

例题5 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像过点 $A(1,0)$和 $B(0,3)$，对称轴是直线 $x=-1$，求这个函数的解析式.

解 由二次函数图像的对称轴为直线 $x=-1$，可设这个函数的解析式为 $y=a(x+1)^2+k$.

∵ 图像过 $A(1,0)$、$B(0,3)$两点，

∴ $\begin{cases} a\cdot 2^2+k=0, \\ a+k=3. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=-1, \\ k=4. \end{cases}$

所以这个函数的解析式为 $y=-(x+1)^2+4$，即

$$y=-x^2-2x+3.$$

例题6 已知二次函数 $y=x^2+2(m-3)x+9$ 图像的顶点在坐标轴上，求这个函数的解析式.

解 二次函数 $y=x^2+2(m-3)x+9$ 图像的顶点在坐标轴上，有两种情况：顶点在 x 轴上；顶点在 y 轴上.

由 $y=x^2+2(m-3)x+9=(x+m-3)^2-m^2+6m$，可知图像的顶点坐标为 $(-m+3,-m^2+6m)$.

(1) 当顶点在 x 轴上时，$-m^2+6m=0$.

解得 $m=0$ 或 $m=6$.

则二次函数的解析式为 $y=x^2-6x+9$ 或 $y=x^2+6x+9$.

(2) 当顶点在 y 轴上时，$-m+3=0$.

解得 $m=3$.

则二次函数的解析式为 $y=x^2+9$.

综上所述，二次函数的解析式为

$$y=x^2-6x+9,\text{或 } y=x^2+6x+9,\text{或 } y=x^2+9.$$

例题 6 在指出图像的顶点有两种位置情况后，也可以这样解：

(1) 当顶点在 x 轴上时，相应的一元二次方程 $x^2+2(m-3)x+9=0$ 有两个相同的实数根.

所以 $\Delta=[2(m-3)]^2-4\times9=0$.

解得 $m=0$ 或 $m=6$.

则二次函数的解析式为 $y=x^2-6x+9$ 或 $y=x^2+6x+9$.

(2) 当顶点在 y 轴上时，一次项系数 $2(m-3)=0$.

解得 $m=3$.

则二次函数的解析式为 $y=x^2+9$.

然后再综述结论.

设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点为 M，则
(1) 顶点 M 在 x 轴上 $\Leftrightarrow$ 方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=0$；
(2) 顶点 M 在 y 轴上 $\Leftrightarrow$ $b=0$.

练习 1.3(2)

1. (1) 如果二次函数图像的顶点坐标为 $(2,3)$，且图像过点 $M(3,1)$，求这个函数的解析式；

(2) 已知二次函数图像的顶点坐标为 $(-1,-8)$，图像与 x 轴的一个公共点 A 的横坐标为 -3，求这个函数的解析式.

2. 已知二次函数的图像过点 $A(-2,0)$ 和 $B(0,-3)$，对称轴是直线 $x=2$，求这个函数的解析式.

3. 已知二次函数 $y=x^2+2mx+9$ 图像的顶点在 x 轴上，求这个函数的解析式.

如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴有 $A(x_1,0)$ 和 $B(x_2,0)$ 两个公共点，那么 x_1、x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根. 这时，$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. 于是，这个二次函数的解析式就可以表示为 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，其中 x_1、x_2 是图像与 x 轴公共点的横坐标.

例题7 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴的两个公共点的横坐标分别是 3、-1，图像与 y 轴公共点的纵坐标是 $-\frac{3}{2}$. 求这个函数的解析式.

解 设所求的二次函数的解析式为 $y=a(x-3)(x+1)$.

$\because$ 图像与 y 轴公共点的坐标是 $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$，

$\therefore$ $a(0-3)(0+1)=-\frac{3}{2}$.

解得 $a=\frac{1}{2}$.

所以这个函数的解析式是 $y=\frac{1}{2}(x-3)(x+1)$，即

$$y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}.$$

本题也可由已知三个点的坐标，用待定系数法求这个函数的解析式. 试比较，哪种方法更简便些？

例题8 如图 1－3，已知 Rt$\triangle ABC$ 的斜边 AB 在 x 轴上，斜边上的高 OC 在 y 轴正半轴上，且 $OA=1$，$OC=2$. 求过 A、B、C 三点的抛物线的表达式.

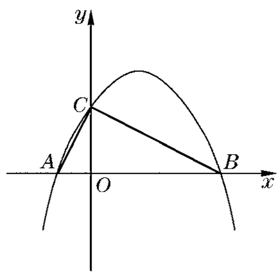


图 1－3

分析 只需求出 A、B、C 三点的坐标，就可求得抛物线的表达式.

解 由 OC 是 Rt$\triangle ABC$ 斜边上的高，可知 Rt$\triangle AOC\backsim$ Rt$\triangle COB$，得

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OC}{OB}.$$

由 $OA=1$，$OC=2$，得 $OB=4$.

$\because$ 点 A、B 在 x 轴上，且点 A、B 分别在原点的左、右侧，点 C 在 y 轴的正半轴上，

$\therefore$ $A(-1,0)$，$B(4,0)$，$C(0,2)$.

设所求抛物线的表达式为 $y=a(x+1)(x-4)$，由抛物线过点 $C(0,2)$，得

$$a(0+1)(0-4)=2.$$

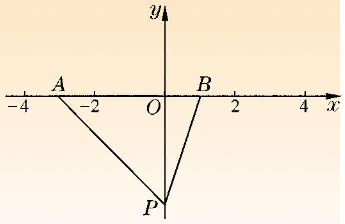
解得 $a=-\frac{1}{2}$.

所以所求抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{2}(x+1)(x-4)$，即

$$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2.$$

练习 1.3(3)

1. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴有 $A(-2,0)$、$B(4,0)$ 两个公共点，与 y 轴的公共点是 $C(0,4)$，求这个函数的解析式.
2. 已知抛物线与 x 轴交于 $A(-3,0)$、$B(1,0)$ 两点，与 y 轴的负半轴交于点 P，$\triangle ABP$ 的面积为 6，求抛物线的表达式.



（第 2 题）

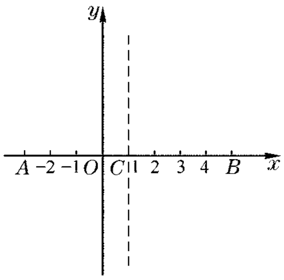


图 1－4

例题9 已知一个二次函数的图像经过点 $P(-2,7)$，对称轴是直线 $x=1$，图像在 x 轴上截得的线段长为 8，求这个函数的解析式.

解 如图 1－4，设直线 $x=1$ 与 x 轴的公共点为 C，图像在 x 轴上截得的线段 $AB=8$，点 A 在点 B 的左边.

由二次函数的图像关于直线 $x=1$ 对称，可知 $AC=BC=4$ 即 $AO+OC=OB-OC=4$.

因为 $OC=1$，所以 $AO=3$，$OB=5$，且 A、B 分别在原点的左、右侧.

可得 $A(-3,0)$，$B(5,0)$.

设这个二次函数的解析式为 $y=a(x+3)(x-5)$.

$\because$ 图像过点 $P(-2,7)$，

$\therefore$ $a(-2+3)(-2-5)=7$.

解得 $a=-1$.

所以，这个函数的解析式为 $y=-(x+3)(x-5)$，即

$$y=-x^2+2x+15.$$

本题利用了二次函数图像的对称性，求得图像与 x 轴的公共点的坐标，再求函数解析式. 计算过程较简便.

想一想

如果直接设函数解析式为 $y=a(x-1)^2+k$，可利用另两个条件确定这个解析式吗？

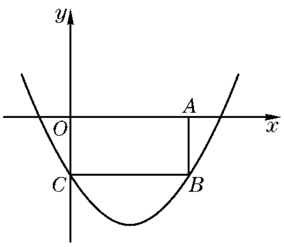


图 1－5

例题10 已知抛物线 $y=\frac{1}{10}x^2+mx+n$ 的对称轴是直线 $x=10$，并且过点 $M(30,20)$.

(1) 求这条抛物线的表达式；

(2) 如图 1－5，矩形 $OCBA$ 的边 OA、OC 分别在 x 轴和 y 轴上，顶点 B、C 在这条抛物线上，求点 B、C 的坐标；

(3) 设抛物线的顶点为 P，试判断 $\triangle PBC$ 的形状.

解 (1) $\because$ 抛物线 $y=\frac{1}{10}x^2+mx+n$ 的对称轴是直线 $x=10$，

$\therefore$ 可设抛物线的表达式为 $y=\frac{1}{10}(x-10)^2+k$.

$\because$ 抛物线经过点 $M(30,20)$，

$\therefore$ $\frac{1}{10}(30-10)^2+k=20$.

解得 $k=-20$.

所以，抛物线的表达式是 $y=\frac{1}{10}(x-10)^2-20$，即

$$y=\frac{1}{10}x^2-2x-10.$$

(2) $\because$ 点 C 是抛物线 $y=\frac{1}{10}x^2-2x-10$ 与 y 轴的公共点，

$\therefore$ 点 C 的坐标是 $(0,-10)$.

$\because$ $BC/\!/x$ 轴，

$\therefore$ 点 B 的纵坐标为 -10.

由 $\frac{1}{10}x^2-2x-10=-10$，

解得 $x_1=0$，$x_2=20$.

根据题意，取 $x=20$.

所以，点 B 的坐标为 $(20,-10)$.

(3) $\because$ $y=\frac{1}{10}x^2-2x-10$

$=\frac{1}{10}(x-10)^2-20$，

$\therefore$ 抛物线的顶点 P 的坐标为 $(10,-20)$.

又 $B(20,-10)$，$C(0,-10)$，

$\therefore$ $PB=\sqrt{(10-20)^2+(-20+10)^2}=10\sqrt{2}$，

$PC=\sqrt{(10-0)^2+(-20+10)^2}=10\sqrt{2}$，

$BC=|20-0|=20$.

$\therefore$ $PB=PC$，$PB^2+PC^2=BC^2$.

所以，$\triangle PBC$ 是等腰直角三角形.

练习 1.3(4)

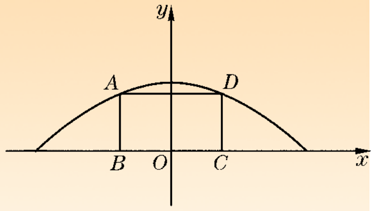
1. 已知一个二次函数图像的对称轴是直线 $x=-1$，图像在 x 轴上截得的线段长为 4，与 y 轴的公共点的纵坐标为 -6，求这个函数的解析式.

2. 如图，已知二次函数 $y=-mx^2+4m$ 图像的顶点坐标为 $(0,2)$，矩形 $ABCD$ 的顶点 B、C 在 x 轴上（点 B 在点 C 的左边），顶点 A、D 在图像上且位于 x 轴上方.

(1) 求这个函数的解析式；

(2) 设点 A 的坐标为 (x,y)，求矩形 $ABCD$ 的周长 p 关于自变量 x 的函数解析式；

(3) 矩形 $ABCD$ 的周长是否可能等于 9？



（第 2 题）

例题11 某公园要建造一个圆形的喷水池，在水池中央竖一根垂直于水面的水管，顶端安装一个喷头向外喷水. 设计方案中，以图 1－6(1)示意，OA 表示水管，喷头 A 离水面的高度为 2.25 米，水流在各个方向上沿抛物线路径落下. 在图 1－6(2)所示的平面直角坐标系 xOy 中，曲线 APB 表示落点 B 离点 O 最远的一条水流，其上的水珠的高度 y(米)关于水平距离 x(米)的函数解析式是 $y=-x^2+4x+\frac{9}{4}$.

(1) 水流 APB 上的水珠离水面的最大高度是多少米？

(2) 如果不考虑其他因素，那么圆形水池的半径至少为多少米时，才能使喷出的水流不落在水池外？

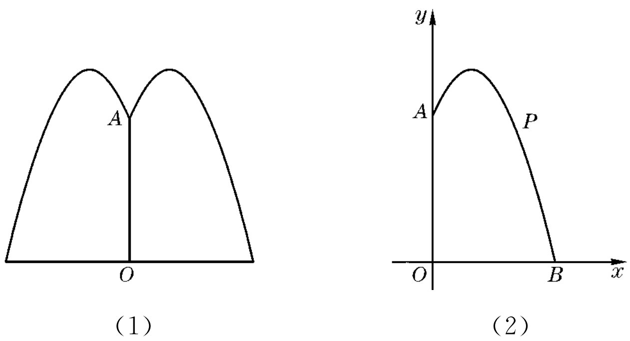


图 1－6

解 (1) 由 $y=-x^2+4x+\frac{9}{4}=-(x-2)^2+\frac{25}{4}$，可知抛物线 $y=-x^2+4x+\frac{9}{4}$ 的顶点坐标为 $\left(2,\frac{25}{4}\right)$.

因为水流 APB 的路径是抛物线 $y=-x^2+4x+\frac{9}{4}$ 的一段且经过这一抛物线的顶点，所以水流 APB 上的水珠离水面的最大高度是 $\frac{25}{4}$ 米.

(2) 由 $y=0$，得 $-x^2+4x+\frac{9}{4}=0$.

解得　$x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{9}{2}$.

根据题意得　$x=\frac{9}{2}$.

所以圆形水池的半径至少为$\frac{9}{2}$米，才能使喷出的水流不落在水池外.

例题12　有一座抛物线型拱桥，已知水位正常时，桥下水面的宽度为20米，拱顶距水面5米. 图1－7是拱桥的截面图，其中桥拱截线是一段抛物线，平面直角坐标系xOy的原点O是桥拱截线与水位正常的水面截线相交处的一点，x轴在水面截线上；AB是警戒线，拱顶到AB的距离为1.8米.

（1）求桥拱截线所在抛物线的表达式；

（2）求达到警戒线AB位置时水面的宽度.

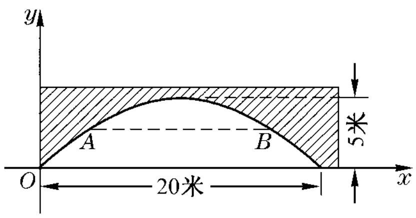


图1－7

解　（1）在平面直角坐标系xOy中，抛物线的顶点坐标为(10,5)，抛物线与x轴的公共点坐标为(0,0)和(20,0).

设抛物线的表达式为$y=a(x-10)^2+5$.

∵　原点$O(0,0)$在抛物线上，

∴　$a(0-10)^2+5=0$.

解得　$a=-\frac{1}{20}$.

所以，抛物线的表达式为$y=-\frac{1}{20}(x-10)^2+5$，即

$$y=-\frac{1}{20}x^2+x.$$

（2）由拱顶到警戒线AB的距离以及到x轴的距离分别为1.8米和5米，可知点A的纵坐标为3.2.

∵　点A在抛物线$y=-\frac{1}{20}x^2+x$上，

∴　$-\frac{1}{20}x^2+x=3.2$，

即　　$x^2-20x+64=0$.

解得　$x_1=16$，$x_2=4$.

可得 $A(4,3.2)$，$B(16,3.2)$.

$AB=16-4=12$(米).

所以，达到警戒线 AB 位置时水面的宽度为 12 米.

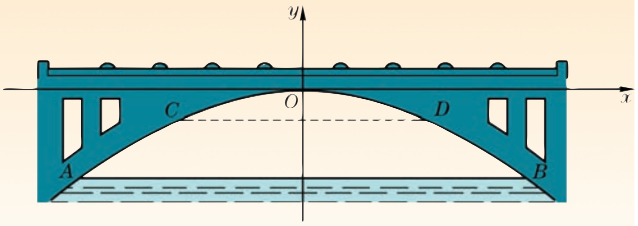
练习 1.3(5)

1. 如果在距地面高度 h_0 米处将一个物体以 v_0 米/秒的速度竖直上抛，那么物体的高度 h(米)与运动时间 t(秒)的关系可以用公式 $h=-4.9t^2+v_0t+h_0$ 表示. 现将一个小球从地面开始以 24.5 米/秒的速度竖直向上抛起，它经过多少时间落到地面？

2. 一座抛物线型拱桥的截面如图所示，其中桥拱截线是一段抛物线，AB 表示正常水位时桥下水面的宽，CD 表示水位上升 3 米时水面的宽，$AB=20$ 米，$CD=10$ 米. 平面直角坐标系 xOy 的原点是抛物线的顶点 O，x 轴是水平线.

(1) 求桥拱截线所在抛物线的表达式；

(2) 求拱顶离正常水位 AB 的高度.



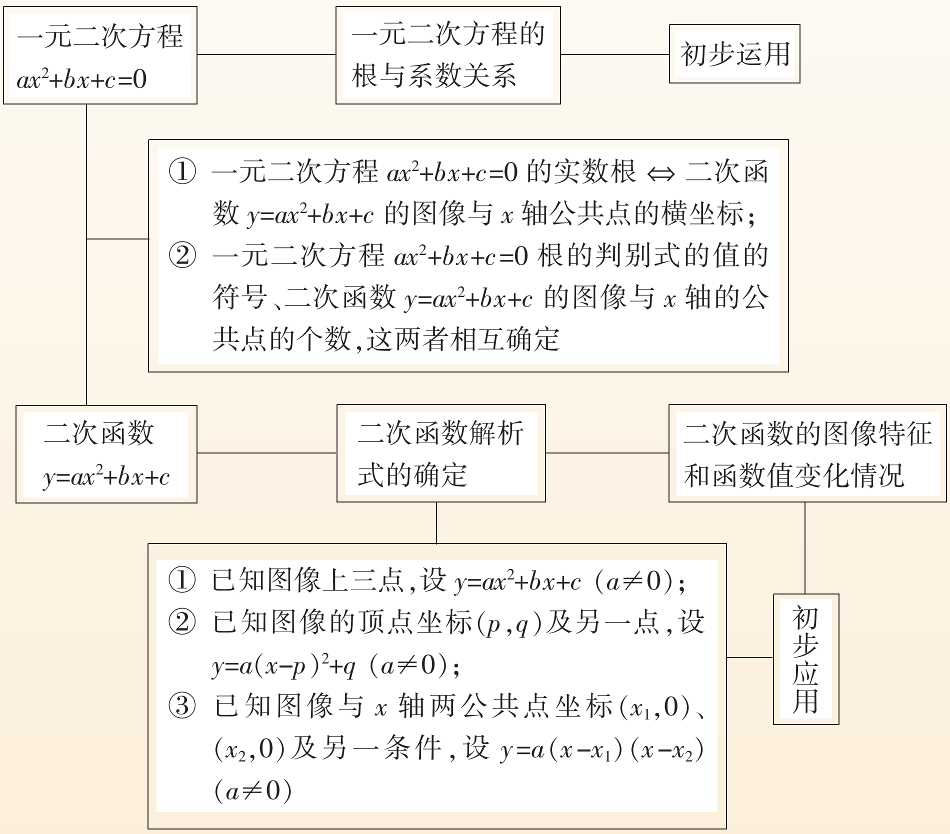
(第 2 题)

本章小结

我们在本章学习了一元二次方程的根与系数的关系；建立了二次函数与一元二次方程之间的联系；进一步研究了二次函数的图像与性质，以及如何根据图像的特征来确定二次函数的解析式.

一元二次方程和二次函数都是初中数学的重点内容. 本章进一步完善了一元二次方程的基本理论，充实了二次函数的知识基础；并在运动和联系的辩证思想指导下，把有关知识贯通起来，形成一个整体，为高中阶段进一步学习函数和其他数学知识做好了准备.

本章的知识结构框图如下：



1

探究活动

公路隧道设计的可行性分析

某一新建公路要穿越一座大山，对隧道的设计要求是，确保宽度不超过 2 米、高度不超过 2.8 米的汽车可同时来往通过，汽车通行时上部与隧道顶部的间距不少于 0.2 米. 为节省建筑成本并兼顾美观，还要求隧道的最大高度不超过4.5 米、宽度不超过 6 米；隧道顶部横截线为抛物线，两侧为直立面，中间不加支柱.

有一个方案设计的隧道截面如图 1－8 所示. 这个截面由一段抛物线和矩形 $ABCD$ 中的三边围成，图形关于 BC 的垂直平分线成轴对称. 抛物线顶点 M 到 BC 的距离为 4.25 米，矩形的边 AB 的长为 2 米，BC 的长为 6 米. 试思考以下问题：

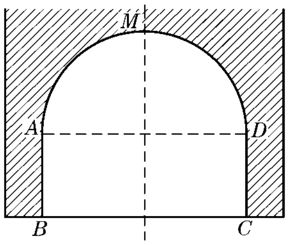


图 1－8

（1） 这一设计符合汽车通行的要求吗？

（2） 为保障行车安全，车道不能过于靠近隧道两侧，在这一设计方案中，车道边界与隧道一侧的最小距离约为多少米？

（3） 在特殊情况下，如一辆宽度为 2.6 米、高度达到 3.6 米的汽车，可以单行通过吗？

提示：

（1） 适当建立平面直角坐标系 xOy，求出抛物线的顶点 M 和点 D 的坐标.

（2） 求出这一段抛物线的表达式 $y=f(x)$.

（3） 适当取一些 a 的值，通过计算有关 $f(a)$的值进行分析、判断.

Zhixian He Yuan

2 第二章　直线和圆

“大漠孤烟直”,“长河落日圆”.直线和圆的形象存在于生活的画卷中,引人遐想.

直线和圆,都是我们已经熟悉的几何图形.我们在平面几何的学习中,从直线形到圆形,逐步认识了常见的基本图形的性质;从实验归纳到推理论证,初步掌握了几何研究的基本方法. 本章主要以由直线和圆构成的图形为研究对象,探讨它们的基本性质,进一步展示平面几何研究的思想方法,完善平面几何的知识基础.

第一节　圆的切线

2.1　圆的切线

直线和圆的位置关系有三种：相交、相切、相离.

我们知道，如果一条直线和圆只有一个公共点，那么就说这条直线与圆相切，这个公共点是切点，这条直线称为圆的切线. 根据圆心到一条直线的距离是否等于这个圆的半径长，可以判断这条直线是不是圆的切线.

我们还知道判定切线的定理：

经过半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线（如图 2－1）.

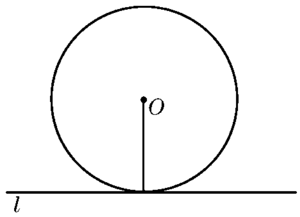


图 2－1

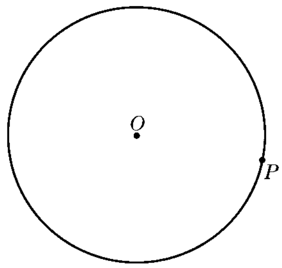


图 2－2

先作出以点 P 为外端的半径；再过点 P 作垂直于这条半径的直线，则这条直线就是圆的切线，且只有一条.

已知⊙O 及⊙O 上的一点 P（如图 2－2），可利用切线的判定定理，作出以点 P 为切点的圆的切线.

下面再来讨论切线的判定定理的运用.

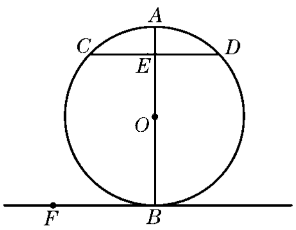


图 2－3

例题 1　已知：如图 2－3，AB 是⊙O 的直径，弦 CD 与 AB 相交于点 E，$CE=DE$，直线 $BF//CD$.

求证：BF 是⊙O 的切线.

证明　∵　AB 是⊙O 的直径，$CE=DE$，

∴　$CD\perp AB$.

又　∵　$BF//CD$，

∴　$BF\perp OB$.

∵　BF 过⊙O 半径 OB 的外端，

∴　BF 是⊙O 的切线.

例题2 已知：如图 2-4，在△ABE 中，$AB=AE$，以 AB 为直径的⊙O 与 BE 相交于点 C，$CD\perp AE$，垂足为点 D.

求证：CD 是⊙O 的切线.

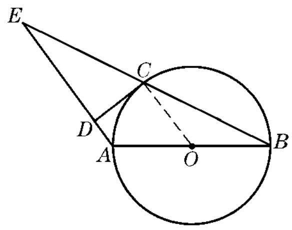


图 2-4

证明 联结 OC.

∵ $OB=OC$，

∴ $\angle B=\angle OCB$.

∵ $AB=AE$，

∴ $\angle B=\angle E$.

于是得 $\angle OCB=\angle E$，

∴ $OC\parallel AE$.

∵ $CD\perp AE$，

∴ $CD\perp OC$.

∵ CD 过⊙O 半径 OC 的外端，

∴ CD 是⊙O 的切线.

联结过切点的半径，是常用的添辅助线方法.

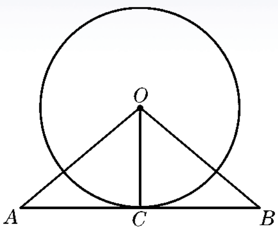
练习 2.1(1)

1. 已知：如图，在△ABO 中，$AO=BO$，C 是 AB 的中点，⊙O 是以 O 为圆心、OC 为半径的圆.

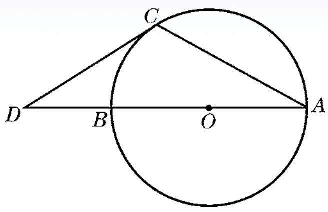
求证：AB 是⊙O 的切线.

2. 已知：如图，AB 是⊙O 的直径，C 是⊙O 上的一点，D 是 AB 延长线上的一点，$CD=CA$，$\angle CAD=30°$.

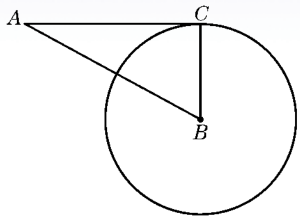
求证：CD 是⊙O 的切线.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 已知：如图，在△ABC 中，$\angle B=60°$，$AB=2BC$，⊙B 经过点 C.

求证：AC 是⊙B 的切线.

问题 1

切线的判定定理的逆命题是真命题吗？圆的切线有什么性质？

切线的判定定理的逆命题可以表述为：如果一条直线与一个

圆相切，那么这条直线垂直于过切点的半径. 下面我们来证明这个命题是真命题.

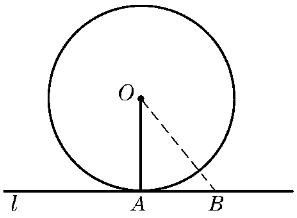


图 2－5

已知：如图 2－5，直线 l 是⊙O 的切线，切点为 A.

求证：直线 $l \perp$ 半径 OA.

证明　过圆心 O 作 $OB \perp l$，垂足为点 B，则圆心 O 到直线 l 的距离等于 OB 的长.

∵　直线 l 是⊙O 的切线，

∴　OB 的长等于⊙O 的半径长.

可知点 B 在⊙O 上，即点 B 是直线 l 与⊙O 的公共点.

∵　直线 l 与⊙O 只有唯一的公共点，即切点 A，

∴　点 B 一定与点 A 重合，得 OB 与 OA 重合.

∴　直线 $l \perp$ 半径 OA.

由此得到，圆的切线有如下性质：

切线的性质定理　圆的切线垂直于经过切点的半径.

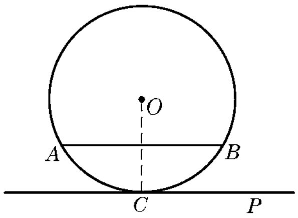


图 2－6

例题3　已知：如图 2－6，AB 是⊙O 的弦，C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，CP 是⊙O 的切线，C 是切点.

求证：$AB /\!/ CP$.

证明　联结 OC.

∵　C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，

∴　$OC \perp AB$.

∵　CP 是⊙O 的切线，C 是切点，

∴　$OC \perp CP$.

∴　$AB /\!/ CP$.

根据切线的性质定理可知，经过圆心和切点的直线垂直于切线；而在平面上过一点与已知直线垂直的直线有且只有一条，于是可得到下列推论：

推论 1　经过圆心且垂直于切线的直线必经过切点.

推论 2　经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心.

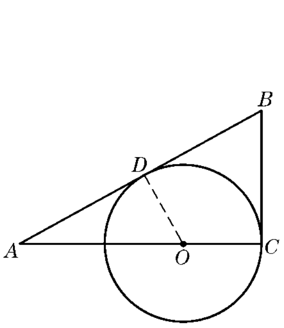


图 2－7

例题4　已知：如图 2－7，在△ABC 中，$\angle A=30°$，$\angle ACB=90°$，$BC=1$，点 O 在边 AC 上，以 OC 为半径的⊙O 与 AB 相切于点 D. 求⊙O 的半径长.

解　联结 OD.

∵　AB 是⊙O 的切线，D 是切点，OD 为⊙O 的半径，

∴　$AB \perp OD$，即 $\angle ADO=90°$.

设⊙O 的半径长为 r.

在 Rt△AOD 中，由 $\angle A=30°$，得 $AO=2DO=2r$.

在 Rt△ABC 中，由 $\angle A=30°$，$\angle ACB=90°$，$BC=1$，得 $AC=\sqrt{3}$.

∵ $AC=AO+OC$，

∴ $2r+r=\sqrt{3}$.

解得 $r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

∴ $\odot O$ 的半径长是 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

例题5 已知：如图 2－8，AB 是$\odot O$ 的直径，AD 是弦，BC 是$\odot O$ 的切线，切点为 B，$OC/\!/AD$.

求证：DC 是$\odot O$ 的切线.

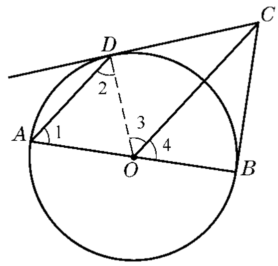


图 2－8

证明 联结 OD.

∵ BC 是$\odot O$ 的切线，切点是 B，AB 是$\odot O$ 的直径，

∴ $BC\perp AB$，即$\angle ABC=90°$.

∵ $OC/\!/AD$，

∴ $\angle 1=\angle 4$，$\angle 2=\angle 3$.

∵ $OA=OD$，

∴ $\angle 1=\angle 2$.

得 $\angle 3=\angle 4$.

又 ∵ $OC=OC$，$OD=OB$，

∴ $\triangle COD\cong\triangle COB$.

得 $\angle CDO=\angle ABC$.

∴ $\angle CDO=90°$，即 $CD\perp OD$.

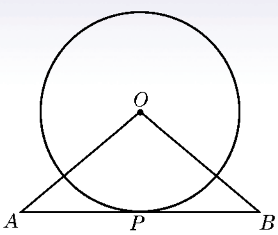
又 ∵ CD 过$\odot O$ 半径 OD 的外端，

∴ DC 是$\odot O$ 的切线.

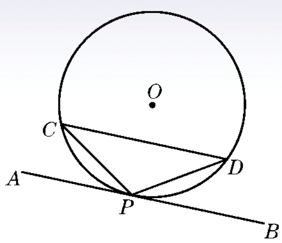
练习 2.1(2)

1. 已知：如图，AB 是$\odot O$ 的切线，切点是 P，且 $PA=PB$.
求证：$\angle A=\angle B$.

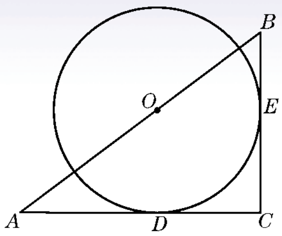
2. 如图，AB 与$\odot O$ 相切于点 P，弦 $CD/\!/AB$.
求证：$CP=DP$.



(第 1 题)



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，已知$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=4$，$BC=3$，O 是边 AB 上一点，以 O 为圆心的$\odot O$ 与边 AC、BC 都相切，切点分别是 D、E. 求$\odot O$ 的半径长.

我们知道，过圆上一点作这个圆的切线，可依据切线的判定定理进行作图.

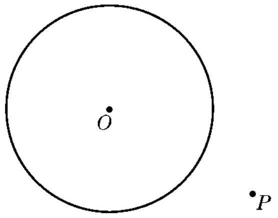


图 2－9

问题2

过圆外一点作这个圆的切线，怎样作图？

如图 2－9，点 P 在⊙O 外. 要过点 P 作⊙O 的切线，关键是确定切点的位置.

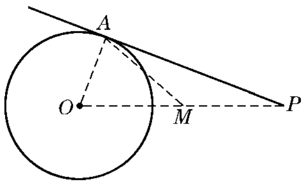


图 2－10

设直线 PA 是⊙O 的切线，切点是 A. 如图2－10，联结 PO、OA，则△OPA 是以 OP 为斜边的直角三角形. 设 OP 的中点为 M，可知 $MO=MP=MA$（为什么?），即点 A 在以 M 为圆心、MO 为半径的⊙M 上.

由此想到，如果以 OP 为直径作⊙M，那么⊙M 与⊙O 的交点应是过点 P 所作⊙O 切线的切点. 实际上，设点 A 为一个交点，则 $MO=MP=MA$，得 $\angle OAM=\angle AOM$，$\angle MAP=\angle APM$. 由△OPA 的内角和等于 $180°$，可知$\angle OAP=90°$，即 $PA\perp OA$.

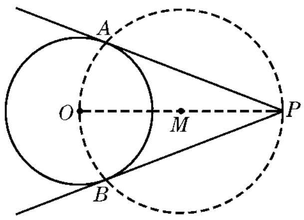


图 2－11

于是，可按以下作图法作过点 P 的⊙O 的切线.

作法：如图 2－11，

1. 联结 OP，取 OP 的中点 M.

2. 以 M 为圆心、MO 为半径作⊙M，⊙M 与⊙O 分别相交于点 A、B.

3. 作直线 PA、PB.

则 PA、PB 为所求作的切线.

设⊙O 与⊙M 的半径长分别为 r、r_1，圆心距为 d，则 $d=OM=r_1$，$d=\frac{1}{2}OP>\frac{1}{2}r$. 可知 $|r-r_1|<d<r+r_1$，所以⊙M 与⊙O 相交.

问题3

过圆外一点作圆的两条切线，这点与两个切点之间的线段相等吗？

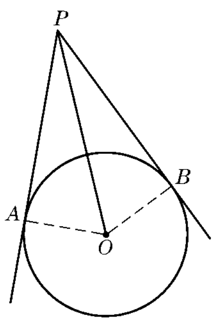


图 2－12

如图 2－12，PA 和 PB 是⊙O 的切线，切点分别是点 A、B. 线段 PA 和 PB 是点 P 分别到切点 A、B 的线段. 分别联结 OA、OB.

∵　PA、PB 分别切⊙O 于点 A、B，

∴　$PA\perp OA$，$PB\perp OB$.

得　$\angle PAO=\angle PBO=90°$.

∵　$OA=OB$，$PO=PO$，

∴　$\mathrm{Rt}\triangle POA\cong\mathrm{Rt}\triangle POB$.

∴　$PA=PB$，且$\angle OPA=\angle OPB$.

圆的切线上一点与切点间的线段的长叫做这点到圆的**切线长**. 图 2－12 中，线段 PA 和 PB 的长是点 P 到⊙O 的切线长.

通过上面的讨论，得到以下定理：

定理 1（切线长定理）　从圆外一点作圆的两条切线，切线长相等.

定理 2　从圆外一点作圆的两条切线，它们的夹角被这一点与圆心的连线平分.

例题6　如图 2－13，已知点 P 在⊙O 外，PA、PB 是⊙O 的两条切线，切点分别为 A、B，$\angle APB=60°$，⊙O 的半径长为 1. 求点 P 到⊙O 的切线长.

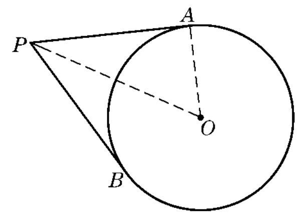


图 2－13

解　分别联结 OP 和 OA.

∵　PA 是⊙O 的切线，切点是 A，

∴　$OA\perp AP$，得 $\angle PAO=90°$.

∵　PA、PB 是⊙O 的切线，$\angle APB=60°$，

∴　$\angle OPA=\dfrac{1}{2}\angle APB=30°$.

在 Rt△OAP 中，$OA=1$，$PA=OA\cdot\cot\angle OPA=\sqrt{3}$.

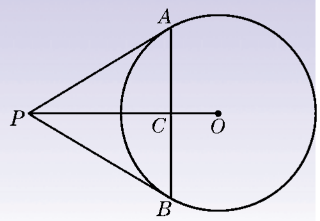
所以，点 P 到⊙O 的切线长为 $\sqrt{3}$.

练习 2.1(3)

1. 填空题：

（1）若 A 是⊙O 外一点，则过点 A 的⊙O 的切线有______条；
若 B 是⊙O 上一点，则过点 B 的⊙O 的切线有______条；
若 C 是⊙O 内一点，则过点 C 的⊙O 的切线有______条.

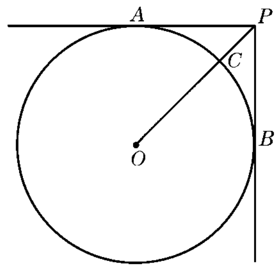
（2）如图，PA、PB 是⊙O 的切线，切点分别为 A、B，OP 与 AB 相交于点 C，如果 $\angle APB=70°$，那么 $\angle PAB=$________度，$\angle ACP=$________度.



（第 1(2)题）

2. 已知⊙O 的半径长为 2 厘米，点 P 到圆心 O 的距离为 4 厘米，求经过点 P 的⊙O 的两条切线的夹角及切线长.

3. 如图，已知⊙O 的半径长为 1，PA、PB 是⊙O 的切线，切点分别为 A、B，$\angle APB=90°$，PO 与 $\overset{\frown}{AB}$ 交于点 C. 求线段 PC 的长.



（第 3 题）

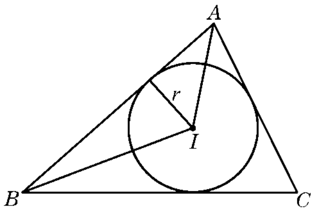


图 2－14

三角形的三条角平分线交于一点．其中两条角平分线的交点唯一确定这个三角形的内心．

如图 2－14，在$\triangle ABC$中，已知 I 是$\angle ABC$和$\angle BAC$两角的平分线的交点，点 I 到 AB 的距离为 r，$\odot I$ 的半径长等于 r．可知点 I 到 AC、BC 的距离也等于 r（为什么？），则$\odot I$ 与 AB、AC、BC 三边都相切．

如果一个圆与一个三角形的三边都相切，那么这个圆叫做这个三角形的**内切圆**，这个三角形叫做这个圆的**外切三角形**；三角形的内切圆的圆心叫做**三角形的内心**．

以三角形中两角的平分线的交点为圆心、交点到三角形一边的距离为半径所作的圆，是这个三角形的内切圆．每个三角形有且只有一个内切圆．

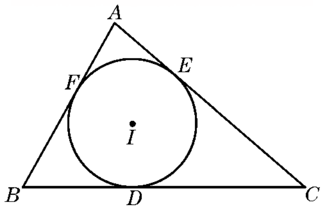


图 2－15

事实上，AF、BD、CE 三条线段的和，就是$\triangle ABC$的周长的一半．

例题7　如图 2－15，已知$\triangle ABC$中，$AB=7$ 厘米，$BC=9$ 厘米，$CA=8$ 厘米，I 是$\triangle ABC$的内心，$\odot I$ 与 BC、CA、AB 分别相切于点 D、E、F．求线段 AF、BD、CE 的长．

解　设 $AF=x$ 厘米，$BD=y$ 厘米，$CE=z$ 厘米．

$\because$　$\odot I$ 与 BC、CA、AB 分别相切于点 D、E、F，

$\therefore$　$AE=AF$，$BF=BD$，$CD=CE$．

由题意得关于 x、y、z 的方程组

$$\begin{cases} x+y=7, \\ y+z=9, \\ z+x=8. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=3, \\ y=4, \\ z=5. \end{cases}$

所以 AF、BD、CE 的长分别为 3 厘米、4 厘米、5 厘米．

想一想

一般地，如果$\triangle ABC$中，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，那么顶点 A、B、C 到这个三角形的内切圆的切线长分别是多少（用 a、b、c 表示）？

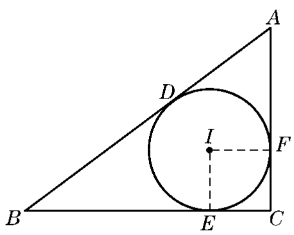


图 2－16(1)

例题8　如图 2－16(1)，已知在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=4$，$\odot I$ 是$\triangle ABC$的内切圆．求内切圆的半径长．

解　设$\odot I$ 与 AB、BC、CA 分别切于点 D、E、F．

分别联结 IE、IF，则 $IE\perp BC$，$IF\perp AC$，且 $IE=IF$．

又　$\because$　$\angle C=90°$，

$\therefore$　四边形 $IECF$ 是正方形，其边长是$\odot I$ 的半径长．

设$\odot I$ 的半径长为 r，由切线长定理，得

$$BD=BE=4-r,\ AD=AF=3-r.$$

在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=4$.

由勾股定理，得　$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

$\because$　$BD+AD=AB$，

$\therefore$　$(4-r)+(3-r)=5$.

解得 $r=1$.

所以，内切圆的半径长为 1.

如果直角三角形的三边长分别为 a、b、c（其中 c 为斜边），那么它的内切圆半径长为

$$r=\frac{a+b-c}{2}.$$

想一想

如果用 a、b、c 分别表示直角边 BC、AC 和斜边 AB 的长，那么直角三角形 ABC 的内切圆半径长 r 可以怎样表示？

在例题 8 中，联结 ID，则 $ID\perp AB$. 由于 $ID\perp AB$，$IE\perp BC$，$IF\perp AC$，且 $ID=IE=IF=r$，因此也可利用面积关系求 r.

一般地，设直角三角形中$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边长分别为 a、b、c.

由　$S_{\triangle AIB}+S_{\triangle BIC}+S_{\triangle AIC}=S_{\triangle ABC}$，

得　$\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}ar=\frac{1}{2}ab$（如图 2－16(2)）.

所以　$r=\frac{ab}{a+b+c}$.

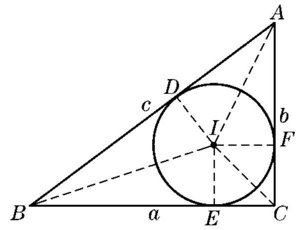


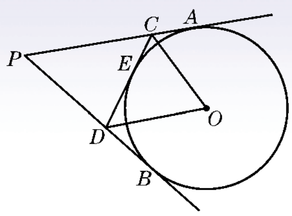
图 2－16(2)

$r=\frac{ab}{a+b+c}$ 与 $r=\frac{a+b-c}{2}$ 的表示形式不一样，其实两个表达式相等，请自己证明.

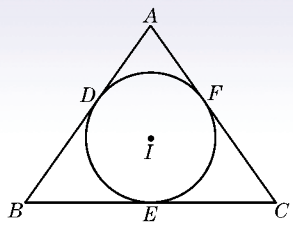
练习 2.1(4)

1. 已知一个直角三角形的两条直角边长之比为 5∶12，其内切圆的半径长为 1. 求此三角形的周长.

2. 如图，已知 PA、PB 是$\odot O$的两条切线，切点分别为 A、B，点 C、D 分别在 PA、PB 上，且 CD 切$\odot O$于点 E，$\angle APB=50°$. 求$\angle COD$ 的度数.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，已知在$\triangle ABC$中，$AB=AC=5$，$BC=6$，$\odot I$ 是$\triangle ABC$的内切圆，它与 AB、BC、CA 相切的切点分别为 D、E、F.

（1）求证：$BE=CE$；

（2）求$\odot I$ 的半径长.

如图 2－17，直线 AB 与$\odot O_1$、$\odot O_2$ 都相切.

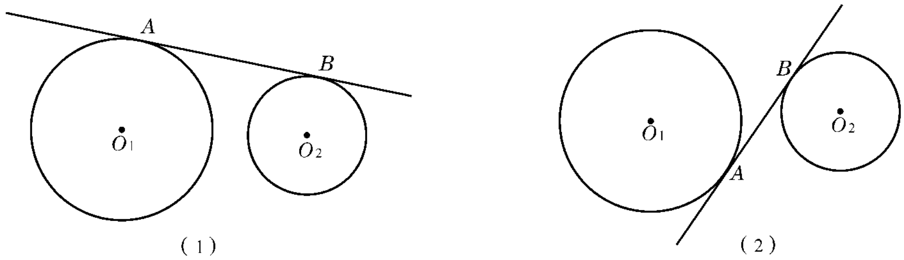


图 2－17

和两个圆都相切的直线叫做两圆的**公切线**.

如果两个圆在公切线的同旁，那么这条公切线叫做两圆的**外公切线**(如图 2－17(1)).

如果两个圆在公切线的两旁，那么这条公切线叫做两圆的**内公切线**(如图 2－17(2)).

操作

两圆的五种位置关系如图 2－18 所示. 根据两圆公切线的特征，通过移动直尺大致画出各种位置关系中两圆的外公切线、内公切线，并填写下表.

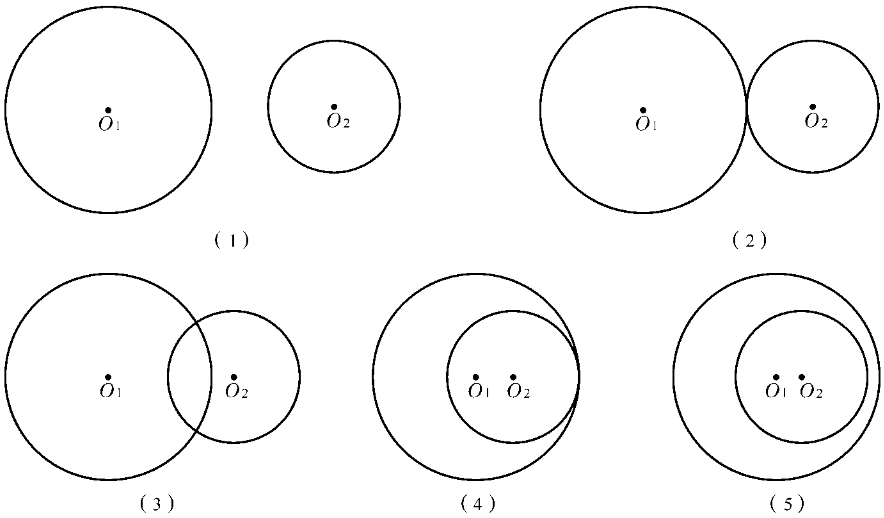


图 2－18

两圆位置关系	外公切线条数	内公切线条数	公切线条数
外离			
外切			
相交			
内切			
内含			

想一想

两圆的位置关系与这两圆的公切线条数之间有什么联系?

例题9 如图 2-19,已知$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 外离,$O_1O_2=d$,两圆的半径长分别为 r_1、r_2,且 $r_1<r_2$.直线 l 是两圆的一条外公切线,分别与$\odot O_1$、$\odot O_2$ 相切于 A、B 两点,与直线 O_1O_2 相交于点 P.求线段 PO_1 的长.

解 分别联结 O_1A 和 O_2B.

$\because$ 直线 l 是$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的公切线,A、B 分别是切点,

$\therefore$ $O_1A\perp l$, $O_2B\perp l$.

得 $\angle PAO_1=\angle PBO_2=90°$.

$\therefore$ $O_1A/\!/O_2B$.

于是 $\dfrac{PO_1}{PO_2}=\dfrac{O_1A}{O_2B}$, 得 $\dfrac{PO_1}{PO_1+d}=\dfrac{r_1}{r_2}$.

$\therefore$ $PO_1=\dfrac{r_1d}{r_2-r_1}$.

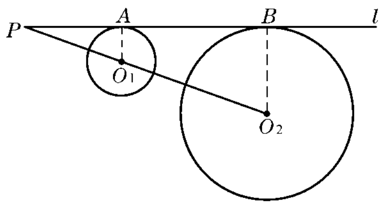


图 2-19

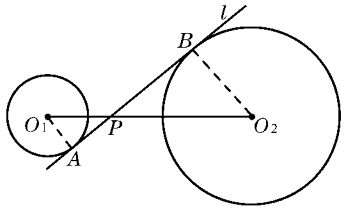


图 2-20

如图 2-20,$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 外离,直线 l 是它们的一条内公切线,分别与$\odot O_1$、$\odot O_2$ 相切于 A、B 两点,l 与直线 O_1O_2 相交于点 P.设 $O_1O_2=d$,$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的半径长分别为 r_1、r_2,这时线段 PO_1 的长也能用 r_1、r_2、d 表示.

同例题 9 一样,分别联结 O_1A 和 O_2B,则 $O_1A/\!/O_2B$.

得 $\dfrac{PO_1}{PO_2}=\dfrac{O_1A}{O_2B}$, 即 $\dfrac{PO_1}{d-PO_1}=\dfrac{r_1}{r_2}$.

$\therefore$ $PO_1=\dfrac{r_1d}{r_1+r_2}$.

> 这里的 $\dfrac{r_1}{r_1+r_2}$ 是一个小于 1 的正数,它的实际意义表示 PO_1 与圆心距 d 的比.

在例题 9 中可见 PO_1 的长虽然与 d、r_1、r_2 的大小有关,但当两圆的位置关系改为外切或相交时,结论仍然正确.

还可以看到,半径长相等的两圆,无论它们的位置关系是外离、外切还是相交,这两圆的两条外公切线一定平行于两圆的连心线.

另外,外切两圆的内公切线以及内切两圆的外公切线,是过切点且垂直于连心线的直线(为什么?).

> 两圆所成的图形关于连心线对称.如果直线 l 是两圆的公切线,那么直线 l 关于连心线对称的直线也是这两圆的公切线.

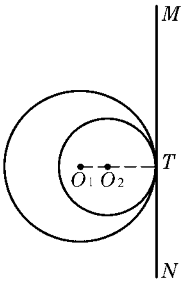


图 2－21

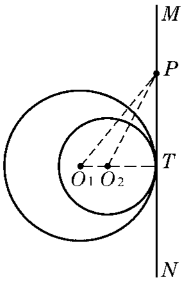


图 2－22

例题10 如图 2－21，已知$\odot O_1$和$\odot O_2$内切于点 T，直线 MN 是经过点 T 的公切线，$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径长分别为 5 和 3，P 是 MN 上的一个动点. 求 $PO_1^2-PO_2^2$ 的值，并指出这个值是否与点 P 的位置有关.

分析 由于点 P 是一个动点，因此可分为点 P 重合于切点 T 和点 P 不重合于切点 T 两种情形加以讨论.

解 ∵ $\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 内切于切点 T，

∴ 连心线 O_1O_2 必经过点 T.

(1) 当 P 重合于切点 T(如图 2－21)时，

$$\begin{aligned} PO_1^2-PO_2^2 &= TO_1^2-TO_2^2 \\ &= 5^2-3^2 \\ &= 16. \end{aligned}$$

(2) 当 P 不重合于切点 T(如图 2－22)时，

$O_1O_2 \perp MN$，点 T 为垂足.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PO_1T$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle PO_2T$ 中，

$$PO_1^2=PT^2+O_1T^2,$$
$$PO_2^2=PT^2+O_2T^2.$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad PO_1^2-PO_2^2 &= (PT^2+O_1T^2)-(PT^2+O_2T^2) \\ &= TO_1^2-TO_2^2 \\ &= 16. \end{aligned}$$

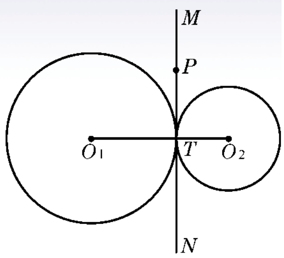
综上所述，$PO_1^2-PO_2^2$ 的值等于 16.

$PO_1^2-PO_2^2$ 是一个常数，与点 P 的位置无关.

当$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的半径长分别为 r_1 和 r_2，且 $r_1>r_2$ 时，可得一般的结论：
$PO_1^2-PO_2^2=r_1^2-r_2^2$.

练习 2.1(5)

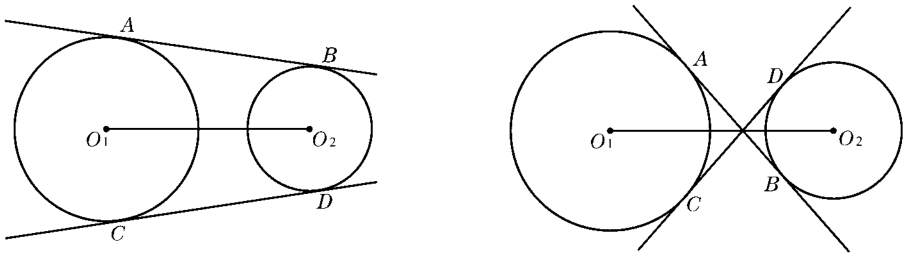
1. 设 R、r、d 分别表示两圆的半径长及圆心距，根据下列条件，判断两圆的位置关系，并指出公切线的条数.
   (1) $R=1$，$r=1$，$d=3$；
   (2) $R=2$，$r=3$，$d=3$；
   (3) $R=4$，$r=1$，$d=3$；
   (4) $R=2$，$r=1$，$d=4$；
   (5) $R=3$，$r=1$，$d=1$；
   (6) $R=2$，$r=1$，$d=1$.
2. 如图，已知$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 外切于点 T，MN 是经过切点 T 的一条公切线. $O_1O_2=9$，$\odot O_1$ 的半径长比$\odot O_2$ 的半径长大 2. P 是 MN 上的一个动点，求 $PO_1^2-PO_2^2$ 的值.



(第 2 题)

两圆的一条公切线上两个切点间的距离叫做**公切线的长**.

如图 2－23，在(1)中 AB、CD 是$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的两条外公切线，在(2)中 AB、CD 是$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的两条内公切线，A、B、C、D 是切点.那么线段 AB、CD 的长都是这两圆的公切线的长.由$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 关于连心线 O_1O_2 对称，可知 $AB=CD$.



(1)　　(2)

图 2－23

例题11　如图 2－24，已知$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 外离，AB 是它们的外公切线，切点分别是 A、B，$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的半径长分别为 r_1、r_2，且 $r_1>r_2$，$O_1O_2=d$.求外公切线 AB 的长(用 r_1、r_2、d 表示).

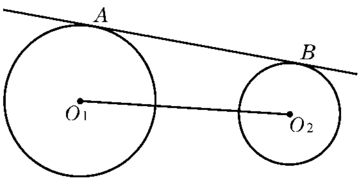


图 2－24

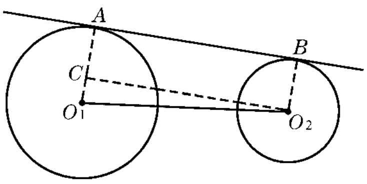


图 2－25

分析　由切线的性质定理可知，$O_1A\perp AB$，$O_2B\perp AB$.因此可考虑平移线段 AB，构造直角三角形，通过解直角三角形来解决问题.

解　如图 2－25，分别联结 O_1A、O_2B，得 $O_1A=r_1$，$O_2B=r_2$；再过 O_2 作 $O_2C\perp O_1A$，垂足为点 C，则$\angle O_1CO_2=90°$.

∵　AB 是$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的外公切线，切点分别是 A、B，

∴　$O_1A\perp AB$，$O_2B\perp AB$.

得　$\angle O_1AB=\angle O_2BA=90°$.

所以四边形 ACO_2B 是矩形.

得　$O_2C=AB$，$O_1C=O_1A-CA=r_1-r_2$.

在 Rt$\triangle O_1O_2C$ 中，由勾股定理得

$$O_2C=\sqrt{O_1O_2^{\,2}-O_1C^2}.$$

又　$O_1O_2=d$，

所以 $AB=O_2C=\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}$.

想一想

在例题 11 中，如果$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 外切，那么结论可用 r_1、r_2 表

示吗？如果将 $r_1>r_2$ 改为 $r_1=r_2$，那么结论正确吗？如果将外公切线改为内公切线，结论是什么？

例题12 如图 2-26，已知$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 外切于点 T，AB、CD 都是$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的外公切线，A、B、C、D 是切点，AB 与 CD 相交于点 P. 如果$\odot O_1$ 的半径长是$\odot O_2$ 的半径长的 3 倍，求 AB 与 CD 的夹角的度数.

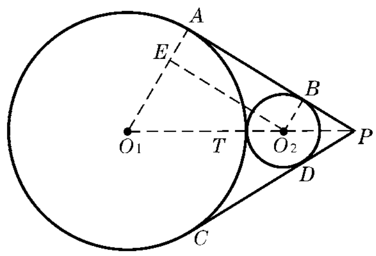


图 2-26

解 作连心线 O_1O_2，则连心线 O_1O_2 经过点 P.

分别联结 O_1A、O_2B；过点 O_2 作 $O_2E\perp O_1A$，垂足为点 E.

可证四边形 AEO_2B 是矩形.

设$\odot O_2$ 的半径长为 R，则$\odot O_1$ 的半径长为 $3R$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle O_1O_2E$ 中，$O_1O_2=4R$，$O_1E=2R$，

∴ $\angle O_1PA=\angle O_1O_2E=30°$.

得 $\angle APC=2\angle O_1PA=60°$.

∴ AB 与 CD 的夹角为 $60°$.

例题13 如图 2-27，已知$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 外切于点 A，BC 是$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的外公切线，切点分别是 B、C.

求证：$AB\perp AC$.

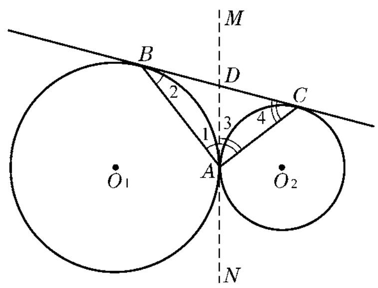


图 2-27

证明 经过点 A 作$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的公切线 MN，交 BC 于点 D.

∵ DB、DA 是$\odot O_1$ 的切线，切点分别是 B、A，

∴ $DB=DA$.

∴ $\angle 1=\angle 2$.

同理可证 $\angle 3=\angle 4$.

∵ $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180^\circ$,

∴ $2(\angle 1+\angle 3)=180^\circ$.

得 $\angle 1+\angle 3=90^\circ$.

∴ $AB\perp AC$.

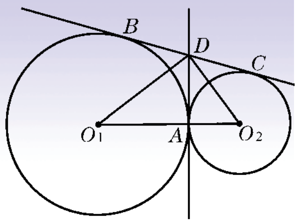
也可分别联结 O_1B、O_2C、O_1O_2，利用切线的性质、平行线的判定和性质、等腰三角形的性质等推出 $AB\perp AC$.

练习 2.1(6)

1. 已知两圆的半径长分别为 3 和 8，圆心距为 13，求两圆的外公切线的长.

2. 已知两圆的半径长分别为 1 和 2，圆心距为 6，求两圆的内公切线的长及两条内公切线的夹角的度数.

3. 已知：如图，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 外切于点 A，BC 是 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的外公切线，切点分别是 B、C，两圆的内公切线交 BC 于点 D.
求证：$O_1D\perp O_2D$.



（第 3 题）

第二节　与圆有关的角及比例线段

2.2　与圆有关的角

当所讨论的圆心角大于平角或弧是优弧时，必须特别指明.

一个角有一个顶点和两条边，顶点和边相对于一个圆的位置关系分别有各种情况，由此得到不同类型的与圆有关的角.

1. 圆心角

我们已经知道，顶点在圆心的角叫做**圆心角**. 圆心角的两边都与圆相交，两边所夹的弧是这个圆心角所对的弧. 如图 2－28，$\angle AOB$ 是圆心角，它所对的弧是$\overset{\frown}{AB}$.

在圆周上给定一条弧，由分别过弧的端点的两条半径所确定的圆心角，是这条弧所对的圆心角.

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等；相等的弧所对的圆心角相等.

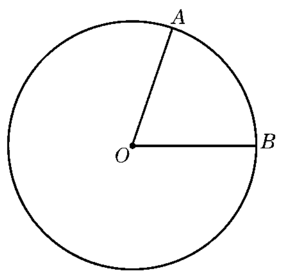


图 2－28

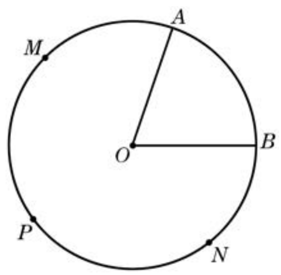


图 2－29

2. 圆周角

操作

如图 2－29，圆心角$\angle AOB=70°$，M、N 是$\overset{\frown}{APB}$上的任意两点. 试分别作出$\angle AMB$、$\angle ANB$，并量出这两个角的度数.

如上所作的$\angle AMB$ 和$\angle ANB$，它们的顶点都在$\odot O$ 上，两边都与圆相交. 分别度量这两个角，所得角度都是 35°，说明它们都等于$\angle AOB$ 的度数的一半.

顶点在圆周上并且两边都与圆相交的角叫做**圆周角**(angle of circumference).

圆周角的两边所夹的弧，是这个圆周角所对的弧；由圆周上一

点分别与弧的两端点的连线确定的圆周角，是这条弧所对的圆周角.

在图 2－29 中，$\angle AMB$ 和$\angle ANB$ 是圆周角；它们所对的弧都是$\overset{\frown}{AB}$，与圆心角$\angle AOB$ 所对的弧相同.

如果圆周角与圆心角所对的弧相同，那么这两个角之间的大小有以下关系：

圆周角定理　一条弧所对的圆周角等于这条弧所对的圆心角的一半.

试一试

在$\odot O$ 上取一点 A，以 A 为顶点画一些圆周角；再观察圆心与圆周角的位置关系，有几种可能的情况？

通过画图可见，圆心与圆周角的位置关系有三种情况：圆心在圆周角的一边上，圆心在圆周角的内部，圆心在圆周角的外部.

对于圆心与圆周角位置关系的三种情况，分别画圆周角；再画出与圆周角所对的弧相同的圆心角，如图 2－30 所示.

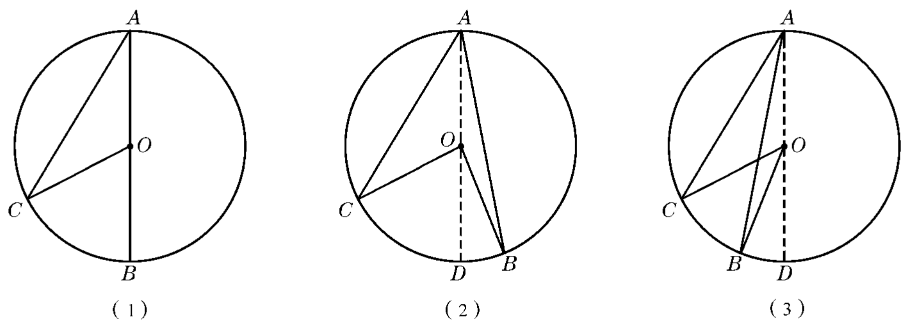


图 2－30

下面，我们来证明圆周角定理.

已知：如图 2－30，在$\odot O$ 中，$\overset{\frown}{BC}$所对的圆周角是$\angle BAC$，所对的圆心角是$\angle BOC$.

求证：$\angle BAC=\dfrac{1}{2}\angle BOC$.

分析：如果圆心 O 在圆周角$\angle BAC$ 的一边上，如图 2－30(1)，这时圆心角$\angle BOC$ 恰为等腰三角形 AOC 的外角，可推出结论；如果圆心 O 在$\angle BAC$ 的内部或外部，如图 2－30(2)(3)，那么可考虑构造如图 2－30(1)的图形，将问题转化.

证明：(1) 当圆心 O 在$\angle BAC$ 的一边上时，不妨设在 AB 上，

如图 2－30(1).

∵ $OA=OC$，

∴ $\angle A=\angle C$.

∵ $\angle BOC=\angle A+\angle C$，

∴ $\angle BOC=2\angle A$.

∴ $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

(2) 当圆心 O 在$\angle BAC$的内部时，作直径 AD，如图 2－30(2).由(1)可知

$$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD，\angle CAD=\frac{1}{2}\angle COD.$$

得 $\angle BAD+\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BOD+\frac{1}{2}\angle COD$.

所以$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

(3) 当圆心 O 在$\angle BAC$的外部时，作直径 AD，如图 2－30(3).由(1)可知

$$\angle CAD=\frac{1}{2}\angle COD，\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD.$$

得 $\angle CAD-\angle BAD=\frac{1}{2}\angle COD-\frac{1}{2}\angle BOD$.

所以$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

综上所述，总有$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$.

研究问题的过程中，如果所涉及的对象出现多种可能情况，通常要对所有可能情况分别进行讨论，即运用分类讨论的数学思想方法来研究.

由圆周角定理，可以得到以下推论：

推论 1　同弧或等弧所对的圆周角相等；同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧也相等（如图 2－31(1)）.

推论 2　半圆(或直径)所对的圆周角是直角；90°的圆周角所对的弦是直径（如图 2－31(2)）.

想一想，怎样证明这两个推论？

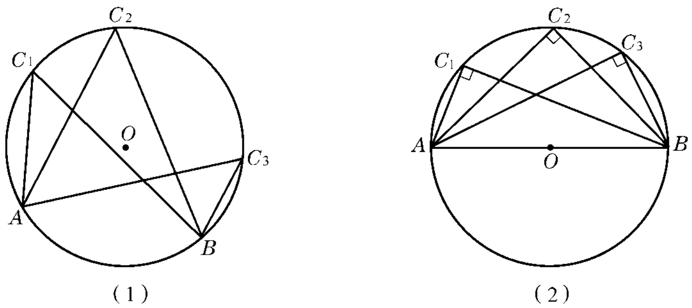


图 2－31

例题1 已知 A、B、C 是$\odot O$ 上的三点，圆心角$\angle AOB=100^\circ$，求$\angle ACB$ 的度数.

分析 点 A、B 将$\odot O$ 分成两部分，即优弧$\overset{\frown}{AB}$与劣弧$\overset{\frown}{AB}$；而点 C 位于哪一部分并不确定，因此需分两种情况讨论.

解 点 C 的位置有两种情况.

(1) 当点 C 在优弧$\overset{\frown}{AB}$上时，如图 2－32(1).

$\because$ 圆周角$\angle ACB$ 和圆心角$\angle AOB$ 所对的弧相同，

$\therefore$ $\angle ACB=\dfrac{1}{2}\angle AOB.$

$\therefore$ $\angle ACB=\dfrac{1}{2}\times 100^\circ=50^\circ.$

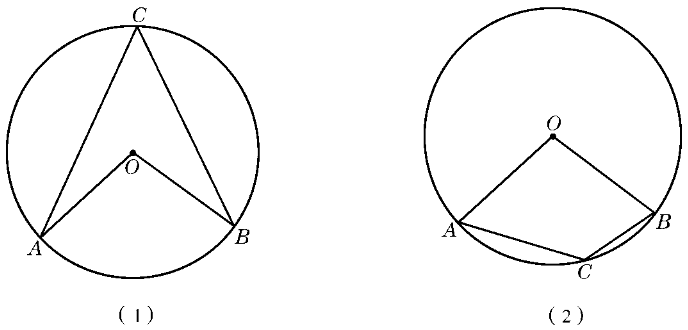


图 2－32

(2) 当点 C 在劣弧$\overset{\frown}{AB}$上时，如图 2－32(2).

$\because$ 圆周角$\angle ACB$ 所对的弧是优弧$\overset{\frown}{AB}$，圆心角$\angle AOB$ 所对的弧是劣弧$\overset{\frown}{AB}$，

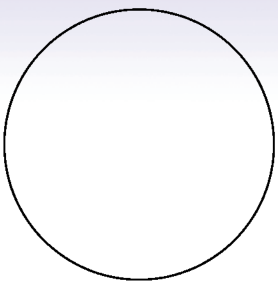
$\therefore$ $\angle ACB=\dfrac{1}{2}(360^\circ-\angle AOB).$

$\therefore$ $\angle ACB=\dfrac{1}{2}\times(360^\circ-100^\circ)=130^\circ.$

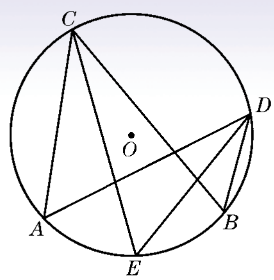
综上所述，$\angle ACB$ 等于 50°或 130°.

练习 2.2(1)

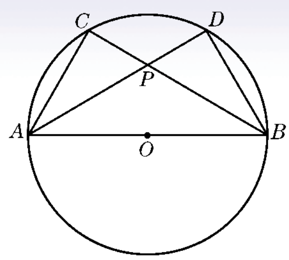
1. 现在只给你铅笔和带有直角的三角尺两样作图工具，请你设法作出所给圆的圆心，并说明理由.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

2. 已知：如图，点 A、B、C、D、E 在 $\odot O$ 上，CE 平分 $\angle ACB$.

求证：DE 平分 $\angle ADB$.

3. 如图，已知 AB 是 $\odot O$ 的直径，AD 平分 $\angle BAC$，BC 平分 $\angle ABD$，AD 与 BC 相交于点 P.

(1) 求证：$AC=BD$；

(2) 求 $\angle APB$ 的度数.

圆心角和圆周角是研究其他与圆有关角的基础，其他与圆有关的角可以转化为圆心角和圆周角加以研究.

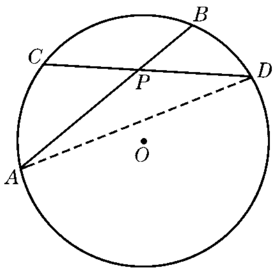


图 2-33

例题2 已知：如图 2-33，$\odot O$ 的两条弦 AB 与 CD 相交于圆内的一点 P.

求证：$\angle APC$ 等于 $\overset{\frown}{AC}$ 所对圆周角与 $\overset{\frown}{BD}$ 所对圆周角的和.

证明 联结 AD.

∵ $\angle APC$ 是 $\triangle PAD$ 的外角，

∴ $\angle APC=\angle ADP+\angle DAP$.

∵ $\angle ADP$ 是 $\overset{\frown}{AC}$ 所对圆周角，$\angle DAP$ 是 $\overset{\frown}{BD}$ 所对圆周角，

∴ $\angle APC$ 等于 $\overset{\frown}{AC}$ 所对圆周角与 $\overset{\frown}{BD}$ 所对圆周角的和.

试一试，通过例题 2 的讨论，能归纳出用有关圆周角的大小表示圆内角大小的关系式吗？圆外角呢？

顶点位于圆内的角叫做**圆内角**；圆心角是特殊的圆内角. 顶点在圆外，两边与圆相切或相交的角叫做**圆外角**.

例题 2 中的 $\angle APC$ 是 $\odot O$ 的一个圆内角.

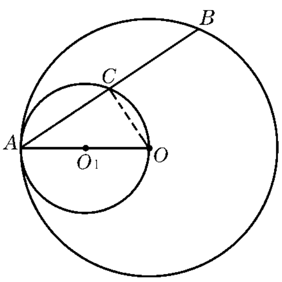


图 2-34

例题3 已知：如图 2-34，以 $\odot O$ 的半径 OA 为直径作 $\odot O_1$，$\odot O$ 的弦 AB 交 $\odot O_1$ 于点 C.

求证：$AC=BC$.

分析 由 AB 是 $\odot O$ 的弦，可考虑利用垂径定理来证明结论.

证明 联结 OC.

∵ OA 是 $\odot O_1$ 的直径，

∴ $\angle OCA=90°$（直径所对的圆周角是直角），

得 $OC\perp AC$.

又 ∵ AB 是 $\odot O$ 的弦，

∴ $AC=BC$.

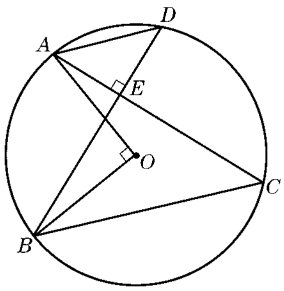


图 2-35

例题4 已知：如图 2-35，在 $\odot O$ 中，OA 和 OB 是半径，AC 和 BD 是弦，$OA\perp OB$，$AC\perp BD$，垂足是点 E.

求证：$AD\parallel BC$.

证明 由 $OA \perp OB$，得 $\angle AOB = 90°$，

∴ $\angle C = \frac{1}{2}\angle AOB = 45°$.

∵ $\angle D = \angle C$，

∴ $\angle D = 45°$.

由 $AC \perp BD$，得 $\angle AED = 90°$.

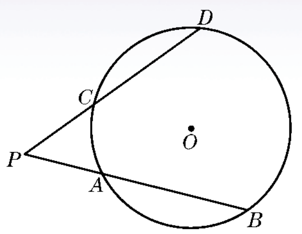
∴ $\angle DAE = 90° - 45° = 45°$.

得 $\angle C = \angle DAE$.

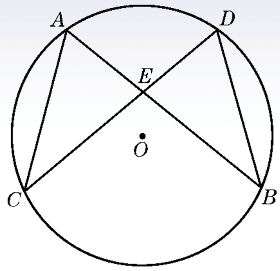
∴ $AD \parallel BC$.

练习 2.2(2)

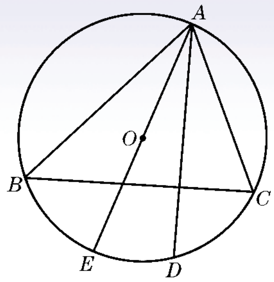
1. 已知：如图，由⊙O 外一点 P 作⊙O 的两条割线 PAB 与 PCD.
   求证：$\angle P$ 等于 $\overset{\frown}{BD}$ 所对圆周角与 $\overset{\frown}{AC}$ 所对圆周角的差.
2. 已知：如图，⊙O 的弦 AB 与 CD 相交于点 E，且 $AC = BD$.
   求证：$EB = EC$.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 已知：如图，△ABC 内接于⊙O，弦 AD 与 BC 垂直，AE 是⊙O 的直径.
   求证：$\angle BAE = \angle CAD$.

3. 弦切角

如图 2－36，$\angle APB$ 是圆周角，点 A、B 在⊙O 上. 当顶点 P 在 $\overset{\frown}{APB}$ 上移动并向点 B 逐渐靠近时，得到一系列的圆周角，如 $\angle AP_1B$、$\angle AP_2B$、$\angle AP_3B$……这一系列的圆周角所对的弧都是 $\overset{\frown}{AB}$.

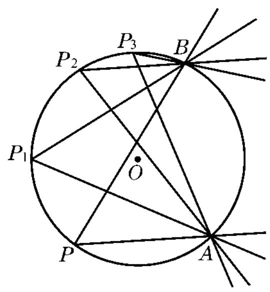


图 2－36

想一想

如图 2－36，点 P 越来越靠近点 B，射线 PA 和 PB 分别绕着

点 A、点 B 转动. 当点 P 到达与点 B 重合的位置时，如图 2－37 所示，原来的射线 PB 到达什么样的位置？如果将此时形成的角记为 $\angle APC$，那么 $\angle APC$ 还是圆周角吗？

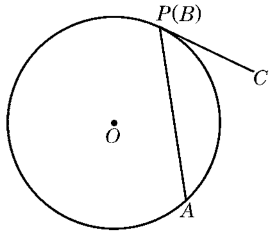


图 2－37

当点 P 与点 B 重合时，原来的射线 PB 为 $\odot O$ 的过点 B 的切线.

顶点在圆上，一条边与圆相交而另一条边与圆相切的角叫做**弦切角**(angle between chord and tangent).

在圆上位于弦切角内部的那段弧是这个弦切角所夹的弧.

在顶点 P 移动的过程中，相应的一系列圆周角所对的弧都是 $\overset{\frown}{AB}$，可知它们的大小关系相等. 而弦切角 $\angle APC$ 所夹的弧也是 $\overset{\frown}{AB}$，由此猜想它与 $\angle APB$ 的大小相等.

问题

在图 2－36 中，圆周角 $\angle APB$ 的位置随着顶点 P 在 $\overset{\frown}{APB}$ 上移动的变化，在这一过程中它的大小发生变化吗？当点 P 到达与点 B 重合的位置时，如图 2－37 所示，圆周角 $\angle APB$ 变成弦切角 $\angle APC$，它们之间有怎样的大小关系？

弦切角与它所夹的弧所对的圆周角有以下大小关系：

弦切角定理　弦切角等于它所夹的弧所对的圆周角.

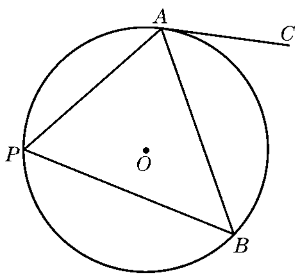


图 2－38

在图 2－38 中，$\angle BAC$ 的边 AB 是 $\odot O$ 的弦，AC 与 $\odot O$ 相切，则 $\angle BAC$ 是 $\odot O$ 的弦切角，$\overset{\frown}{AB}$ 是弦切角 $\angle BAC$ 所夹的弧，$\angle APB$ 是 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角.

我们来探索如何证明这个定理.

类似于圆周角与圆心的三种位置关系，弦切角与圆心的位置关系也有三种：圆心在弦 AB 上(这时 AB 是怎样的弦?)；圆心在弦切角 $\angle BAC$ 的外部；圆心在弦切角 $\angle BAC$ 的内部. 因此定理证明需要分类讨论.

圆心与弦切角的位置关系可能是：圆心在弦切角的外部、一边上或内部.

已知：$\angle BAC$ 是 $\odot O$ 的弦切角，AC 与 $\odot O$ 相切，$\angle BAC$ 所夹的弧是 $\overset{\frown}{AB}$，$\angle APB$ 是 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角.

求证：$\angle BAC=\angle APB$.

证明　(1) 当圆心 O 在 $\angle BAC$ 的弦 AB 上时，如图 2－39(1).

$\because$　AC 与 $\odot O$ 相切于点 A，AB 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore$　$AB\perp AC$.

得　$\angle BAC=90^\circ$.

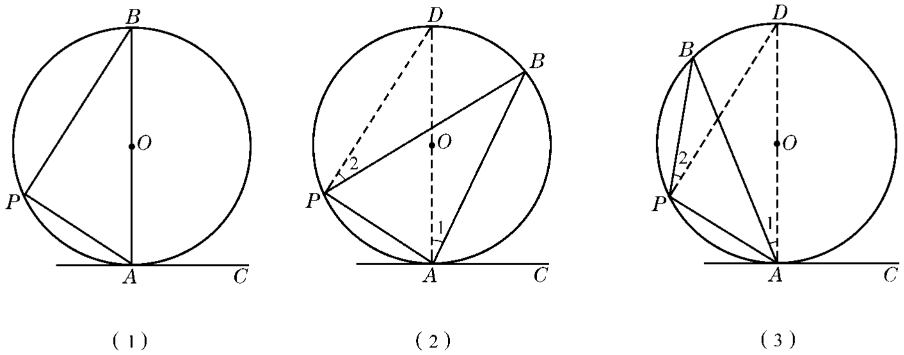


图 2－39

∵　$\overset{\frown}{AB}$是半圆，$\angle APB$ 是$\overset{\frown}{AB}$所对的圆周角，

∴　$\angle APB=90°$.

∴　$\angle BAC=\angle APB$.

(2) 当圆心 O 在$\angle BAC$ 的外部时，如图 2－39(2)，作$\odot O$ 的直径 AD，再联结 PD.

由(1)得　$\angle DAC=\angle APD$，

即　$\angle 1+\angle BAC=\angle 2+\angle APB$.

∵　$\angle 1=\angle 2$，

∴　$\angle BAC=\angle APB$.

(3) 当圆心 O 在$\angle BAC$ 的内部时，如图 2－39(3)，作$\odot O$ 的直径 AD，联结 PD.

由(1)得　$\angle DAC=\angle APD$.

∵　$\angle 1=\angle 2$，

∴　$\angle 1+\angle DAC=\angle 2+\angle APD$.

即　$\angle BAC=\angle APB$.

综上所述，总有$\angle BAC=\angle APB$.

例题5　已知：如图 2－40，PE 是$\odot O$ 的切线，切点为 E，PBA 为$\odot O$ 的割线，$\angle APE$ 的平分线 PC 分别交 AE、BE 于 C、D 两点.

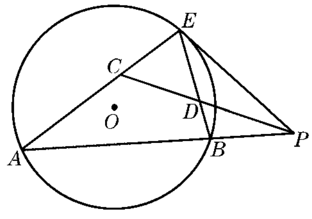


图 2－40

求证：$\angle ECD=\angle EDC$.

分析　观察图形可见，$\angle ECD$ 是$\triangle CAP$ 的外角，$\angle EDC$ 是$\triangle DPE$ 的外角；弦切角$\angle PEB$ 所夹的弧与圆周角$\angle A$ 所对的弧相同. 又已知 PC 平分$\angle APE$，于是可推出$\angle ECD=\angle EDC$.

证明　∵　PE 是$\odot O$ 的切线，

∴　$\angle PEB$ 是弦切角.

得　$\angle PEB=\angle A$.

∵　PC 平分$\angle APE$，

∴　$\angle EPC=\angle APC$.

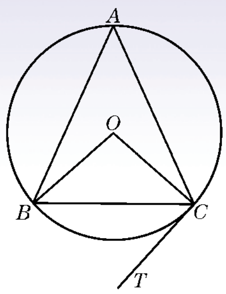
∵　$\angle ECD=\angle A+\angle APC$，$\angle EDC=\angle PEB+\angle EPC$，

∴　$\angle ECD=\angle EDC$.

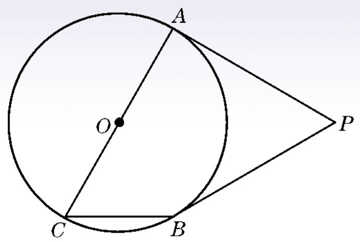
练习 2.2(3)

1. 如图，$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，且 $AB=AC$，CT 是$\odot O$ 的切线，切点为 C，$\angle BOC=100°$，求$\angle ACT$ 的度数.

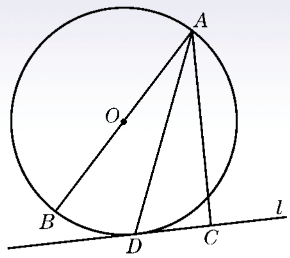
2. 如图，已知 P 是$\odot O$ 外一点，PA、PB 是$\odot O$ 的切线，切点分别为 A、B，AC 是$\odot O$ 的直径，$\angle P=60°$，求弦切角$\angle CBP$ 的度数.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 已知：如图，AB 是$\odot O$ 的直径，$\angle BAC$ 的平分线 AD 交$\odot O$ 于点 D，直线 l 过点 D 且与$\odot O$ 相切.

求证：$AC\perp l$.

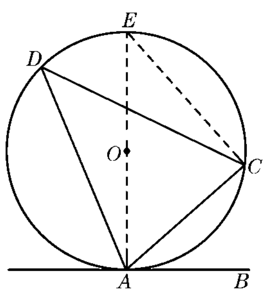


图 2－41

由本例可知，弦切角定理的逆命题也是真命题.

例题6　已知：如图 2－41，AC 是$\odot O$ 的一条弦，AB 是过点 A 的一条直线，点 D 在$\odot O$ 上，且$\angle ADC=\angle BAC$.

求证：AB 是$\odot O$ 的切线.

证明　作$\odot O$ 的直径 AE，联结 CE，得　$\angle E=\angle D$.

∵　$\angle D=\angle BAC$，

∴　$\angle E=\angle BAC$.

∵　$\angle ACE=90°$，

∴　$\angle E+\angle EAC=90°$.

得　$\angle BAC+\angle EAC=90°$，即　$\angle EAB=90°$.

于是，$AB\perp OA$，且 AB 过$\odot O$ 半径 OA 的外端.

所以，AB 是$\odot O$ 的切线.

例题7 已知 P 是$\odot O$外一点，PB、PC 是$\odot O$的两条切线，切点分别为 B、C，$\angle P=80^\circ$，点 A 在$\odot O$上但与点 B、C 不重合. 求$\angle BAC$的度数.

解 点 A 在$\odot O$上的位置有两种情况，需分别讨论.

(1) 当点 A 在优弧$\overset{\frown}{CB}$上时，如图 2-42(1)，联结 BC.

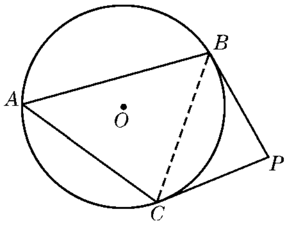
$\because$ PB、PC 为$\odot O$的切线，

$\therefore$ $PB=PC$.

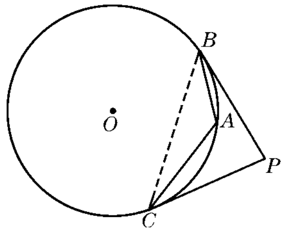
在等腰三角形 PBC 中，$\angle P=80^\circ$.

得 $\angle PBC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle P)=50^\circ$.

$\therefore$ $\angle BAC=\angle PBC=50^\circ$.



(1)



(2)

图 2-42

(2) 当点 A 在劣弧$\overset{\frown}{CB}$上时，如图 2-42(2)，联结 BC.

同(1)，可知$\angle PBC=\angle PCB=50^\circ$.

又 $\angle ACB=\angle ABP$，

$$\begin{aligned}\therefore\ \angle BAC &=180^\circ-(\angle ABC+\angle ACB)\\ &=180^\circ-(\angle ABC+\angle ABP)\\ &=180^\circ-\angle PBC\\ &=130^\circ.\end{aligned}$$

综上所述，$\angle BAC$ 等于 50°或 130°.

例题8 已知：如图 2-43，$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 内切于点 P，过点 P 的两条直线分别交$\odot O_1$、$\odot O_2$ 于 A、B、C、D 四点.

求证：$AB/\!/CD$.

证明 过点 P 作两圆的公切线 PT，则

$$\angle ABP=\angle APT,\ \angle CDP=\angle CPT.$$

得 $\angle ABP=\angle CDP$.

$\therefore$ $AB/\!/CD$.

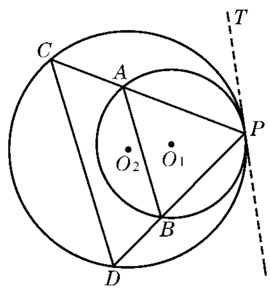
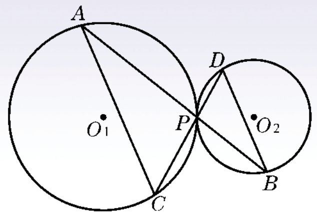


图 2-43

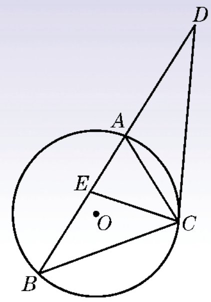
两圆相切时，过切点的公切线是传递两圆有关角度关系的纽带.

练习 2.2(4)

1. 已知：如图，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于点 P，过点 P 的两条直线分别交 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 于 A、C、D、B 四点.
   求证：$AC /\!/ BD$.



（第 1 题）



（第 3 题）

2. 已知直线 l 与 $\odot O$ 相切于点 A，B 是 l 上的一点，OB 交 $\odot O$ 于点 C，$\angle ABO=20°$. 求 $\angle BAC$ 的度数.
3. 已知：如图，CD 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线，C 为切点，BA 的延长线与切线 CD 相交于点 D，点 E 在边 AB 上，且 $DE=DC$.
   求证：CE 平分 $\angle ACB$.

2.3　与圆有关的比例线段

在研究了直线与圆的位置关系的基础上，我们以两条相交直线及其交点与圆的位置关系为背景，讨论了与圆有关的角，现在讨论与圆有关的比例线段.

1. 相交割线上的有关比例线段

如果一个圆的两条割线相交，那么交点与圆的位置关系有三种情况：在圆内、在圆外和在圆上.

当两条割线相交于圆内一点时，得到两条相交弦，它们的交点把每条弦分为两条线段.

讨论中只涉及割线上与圆有关的线段.

问题 1

两条相交弦被交点分成的四条线段之间有怎样的数量关系？

如图 2－44，$\odot O$ 的弦 AB 与 CD 相交于点 P，线段 AP、PB、

CP、PD 是点 P 分两弦所得的线段.根据这四条线段的位置特征，可考虑构造三角形来探究它们之间的数量关系.

分别联结 AD 与 BC，得$\triangle PAD$ 和$\triangle PCB$.

因为$\angle A$ 与$\angle C$ 都是$\overset{\frown}{DB}$所对的圆周角，$\angle D$ 与$\angle B$ 都是$\overset{\frown}{AC}$所对的圆周角，

所以 $\angle A=\angle C$，$\angle D=\angle B$， 得 $\triangle PAD\backsim\triangle PCB$.

因此，$\dfrac{AP}{PD}=\dfrac{CP}{PB}$，或表示为 $AP\cdot PB=CP\cdot PD$.

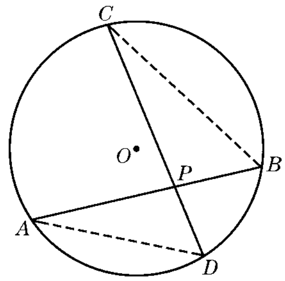


图 2－44

我们把上面的结论概括为：

相交弦定理　圆的两条相交弦中，每条弦被交点分成的两条线段的乘积相等.

当圆的两条相交弦在特殊的位置时，如图 2－45，AB 是$\odot O$ 的直径，弦 $CD\perp AB$，垂足是点 P，则 $CP=PD=\dfrac{1}{2}CD$，这时 $AP\cdot PB=CP^2$.也就是说，如果弦和直径垂直相交，那么弦的一半是它分直径所得的两条线段的比例中项.

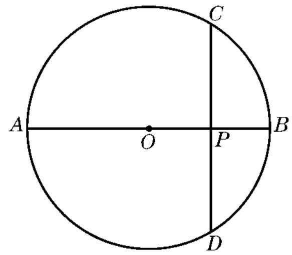


图 2－45

我们再来讨论两条割线相交于圆外一点时的有关比例线段.

如图 2－46，$\odot O$ 的两条割线 PAB、PCD 交于圆外一点 P，得弦 AB、CD 以及有关线段 PA、PB、PC、PD.

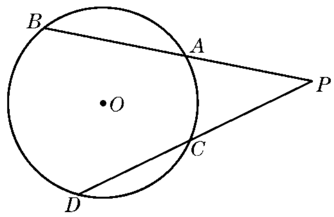


图 2－46

相交弦定理可以看作是当两条割线交于圆内一点时，对有关线段的数量关系的概括.将两条割线的交点位置改在圆外时，就得到图 2－46.

思考

由相交弦定理联想，在图 2－46 中，是否仍有 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$?

类似于相交弦定理的推导，可得同样的结论.

如图 2－47，分别联结 AD 与 BC.

$\because$ $\angle ADC$ 与$\angle ABC$ 所对的弧都是$\overset{\frown}{AC}$，

$\therefore$ $\angle ADC=\angle ABC$.

又 $\because$ $\angle P=\angle P$，

$\therefore$ $\triangle PAD\backsim\triangle PCB$.

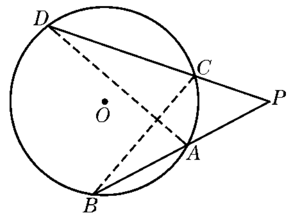


图 2－47

得 $\dfrac{PA}{PD}=\dfrac{PC}{PB}$.

$\therefore\quad PA\cdot PB=PC\cdot PD.$

于是,得到以下定理:

割线定理　从圆外一点引圆的两条割线,这一点到每条割线与圆交点的两条线段的积相等.

例题1　已知:如图 2－48,$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于点 A、B,直线 O_1O_2 与 AB 交于点 P,又分别与 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 相交于点 C、D 和点 E、F.

求证:$PC\cdot PD=PE\cdot PF$.

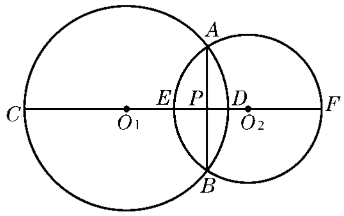


图 2－48

证明　在$\odot O_1$ 中,

$\because$　弦 AB 与 CD 相交于点 P,

$\therefore\quad PA\cdot PB=PC\cdot PD.$

同理,得　$PA\cdot PB=PE\cdot PF.$

$\therefore\quad PC\cdot PD=PE\cdot PF.$

例题2　如图 2－49,已知 C 是$\odot O$ 的直径 AB 延长线上的一点,$BC=\dfrac{1}{2}AB=1$,过点 C 作$\odot O$ 的割线,交$\odot O$ 于 D、E 两点,且 D 是 CE 的中点.求弦 DE 的长.

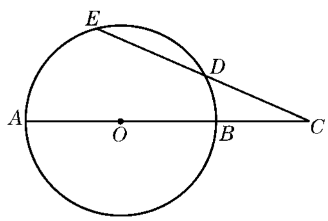


图 2－49

解　由割线定理,得　$CB\cdot CA=CD\cdot CE.$

$\because\quad BC=\frac{1}{2}AB=1$,

$\therefore\quad CA=3$.

设 $DE=a(a>0)$，又 D 是 CE 的中点，则 $CD=a$.

于是　$1\cdot 3=a\cdot 2a$.

解得　$a=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

所以，弦 DE 的长为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

例题3　如图 2－50，$\odot O$ 的弦 AB 垂直于直径 CD，M 为垂足. 已知 $AM=4$，$CM=2$. 求直径 CD 的长.

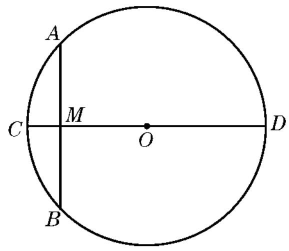


图 2－50

解　$\because\quad CD\perp AB$，CD 是直径，

$\therefore\quad AM=BM$.

$\because\quad AM\cdot BM=CM\cdot DM$,

$\therefore\quad AM^2=CM\cdot DM$.

又　$\because\quad AM=4$，$CM=2$,

$\therefore\quad 4^2=2\cdot DM$.

解得　$DM=8$.

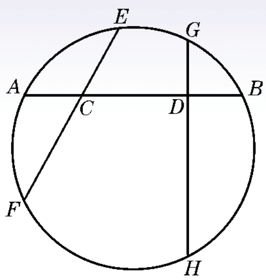
$\therefore\quad CD=CM+DM=2+8=10$.

练习 2.3(1)

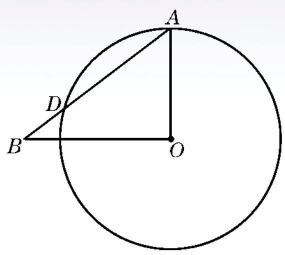
1. 已知在圆中有两条相交弦，其中一条弦被交点分成 6 厘米和 9 厘米两段，另一条弦被交点分成 3∶8 的两段，求另一条弦的长.

2. 已知：如图，C、D 是$\odot O$ 的弦 AB 上的两点，且 $AC=BD$，弦 EF 过点 C，弦 GH 过点 D.

求证：$CE\cdot CF=DG\cdot DH$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在$\triangle AOB$ 中，$\angle O=90°$，$OA=6$，$OB=8$，以 O 为圆心、OA 长为半径长作$\odot O$，交 AB 于点 D，求弦 AD 的长.

2. 相交切割线上的有关比例线段

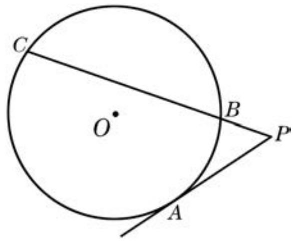


图 2 - 51

过圆外一点 P 任意作圆的割线 PDE 和割线 PFG，分别与圆交于点 D、E、F、G，则 $PD \cdot PE = PF \cdot PG$. 由此可见，等式中各乘积的大小是确定的，其大小只与点 P 和圆的相对位置有关，而与所作割线的位置无关.

现在我们来讨论过圆外一点的切线、割线上的有关比例线段.

如图 2 - 51，过⊙O 外一点 P 分别作⊙O 的切线 PA 和割线 PBC，其中 A 为切点，B、C 是割线与⊙O 的交点，得线段 PA、PB、PC 以及弦 BC.

如果将割线 PFG 绕点 P 旋转，使割线与圆的两个交点越来越靠近，到两个交点重合时，这条割线变成了圆的切线.

问题2

在图 2 - 51 中，线段 PA、PB、PC 之间有怎样的数量关系？

把切线 PA 看作一条割线 PFG 绕点 P 旋转所得的直线，即它是割线 PFG 旋转到点 F、G 重合于点 A 时的位置. 由割线定理可知，$PB \cdot PC = PF \cdot PG$. 对于割线 PBC 和切线 PA，猜想应有 $PB \cdot PC = PA^2$.

我们来证明这一猜想是正确的.

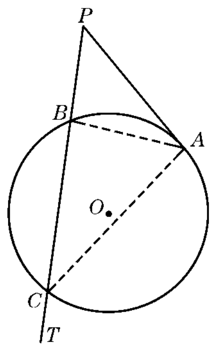


图 2 - 52

已知：如图 2 - 52，P 为⊙O 外一点，PA 是⊙O 的切线，切点为 A，PT 是⊙O 的割线，PT 交⊙O 于点 B、C.

求证：$PA^2 = PB \cdot PC$.

证明：分别联结 AB 和 AC.

∵ PA 为⊙O 的切线，切点为 A，

∴ $\angle PAB = \angle BCA$.

又 ∵ $\angle P = \angle P$，

∴ $\triangle APB \backsim \triangle CPA$.

得 $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{PC}{PA}$.

∴ $PA^2 = PB \cdot PC$.

相交弦定理、割线定理和切割线定理，统称为圆幂定理.

于是得到：

切割线定理　从圆外一点引圆的切线和割线，切线长是这点到割线与圆交点的两条线段的比例中项.

例题4　如图 2-53，已知 PAB 是⊙O 的割线，PT 切⊙O 于点 T，且 $PA=4$，$PT=6$，求弦 AB 的长.

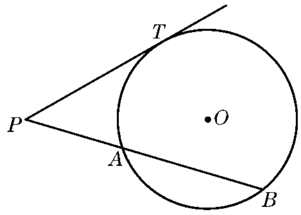


图 2-53

解　∵　PT 切⊙O 于点 T，

∴　$PT^2=PA\cdot PB$.

又　∵　$PA=4$，$PT=6$，

∴　$6^2=4\cdot PB$.

解得　$PB=9$.

∴　$AB=PB-PA=9-4=5$.

例题5　如图 2-54，已知弦 AD 和 CE 相交于⊙O 内一点 F，延长 EC，与过点 A 的切线相交于点 B，$AB=BF=FD$，$BC=1$，$CE=8$. 求线段 AF 的长.

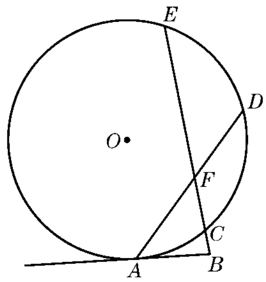


图 2-54

解　∵　AB 是⊙O 的切线，BCE 是⊙O 的割线，

∴　$BA^2=BC\cdot BE=1\times(1+8)=9$，即 $BA=3$.

得　$DF=BF=AB=3$.

又　∵　$CF=BF-BC=3-1=2$，

∴　$EF=CE-CF=8-2=6$.

∵　AD 与 CE 是⊙O 的两条弦，且相交于点 F，

∴　$AF\cdot FD=CF\cdot FE$.

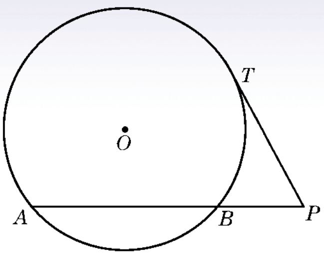
得　$AF\cdot 3=2\cdot 6$.

∴　$AF=4$.

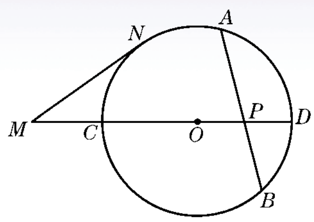
练习 2.3(2)

1. 已知⊙O 的弦 $AB=3$，延长 AB 到点 P，使 $BP=1$，过点 P 作⊙O 的切线 PC，C 为切点. 求 PC 的长.

2. 如图，已知 P 是⊙O 外一点，PT 是⊙O 的切线，切点为 T，PBA 是⊙O 的割线，$AB=6$，$PT=4$. 求 PB 的长.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，已知⊙O 的弦 AB 和直径 CD 相交于点 P，M 是 DC 延长线上的一点，MN 是⊙O 的切线，N 是切点，$AP=8$，$PB=6$，$PD=4$，$MC=6$. 求 MN 的长.

第三节　圆内接四边形

2.4　圆内接四边形

过一个三角形的三个顶点的圆有且只有一个，这个三角形是圆的内接三角形，这个圆是三角形的外接圆.

如果一个多边形的所有顶点都在同一个圆上，那么这个多边形叫做**圆的内接多边形**，这个圆叫做**多边形的外接圆**.

如图 2－55(1)(2)(3)，它们分别表示$\triangle ABC$、四边形$ABCD$、六边形 $ABCDEF$ 与圆的相接关系.

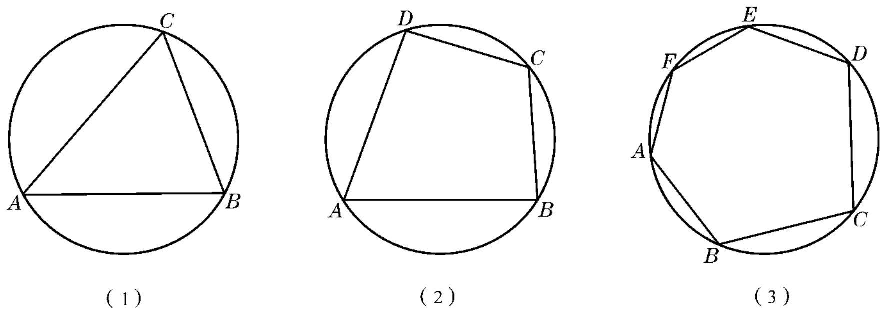


图 2－55

问题 1

观察图 2－55 中的圆内接四边形，它的每一个内角都是圆周角. 那么，圆内接四边形的内角之间有什么特殊的数量关系呢？

在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$ 所对的弧是$\overset{\frown}{BCD}$，$\angle C$ 所对的弧是$\overset{\frown}{BAD}$；而$\overset{\frown}{BCD}$与$\overset{\frown}{BAD}$合起来正好是圆周. 因此，$\overset{\frown}{BCD}$所对的圆心角与$\overset{\frown}{BAD}$所对的圆心角之和是一个周角，利用圆周角定理，得$\angle A+\angle C=180°$. 同理，$\angle B+\angle D=180°$. 可见，圆内接四边形 $ABCD$ 的每组对角互补.

因为四边形的一个外角与它相邻的内角互补，所以还可进一步得到，这个外角等于与它相邻内角的对角.

上面的讨论可概括为：

圆内接四边形的性质定理　圆内接四边形的对角互补，并且任一个外角都等于它的内对角.

例题1 已知：如图 2－56，过⊙O 外一点 P 的两条直线分别交⊙O 于 A、B 和 C、D 四点.

求证：$PD \cdot AC = PA \cdot BD$.

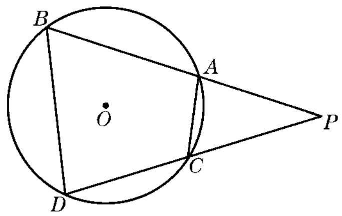


图 2－56

证明 ∵ 四边形 $ABDC$ 内接于⊙O，

∴ $\angle ACP = \angle DBP$（圆内接四边形的性质）.

又 ∵ $\angle CPA = \angle BPD$，

∴ $\triangle ACP \backsim \triangle DBP$.

得 $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{AC}{DB}$.

∴ $PD \cdot AC = PA \cdot BD$.

例题2 已知：如图 2－57，AD 是 $\triangle ABC$ 外角 $\angle EAC$ 的平分线，AD 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 D.

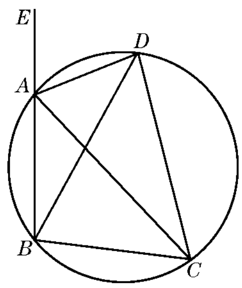


图 2－57

求证：$\triangle DBC$ 是等腰三角形.

证明 ∵ AD 是 $\angle EAC$ 的平分线，

∴ $\angle EAD = \angle DAC$.

∵ $\angle EAD$ 是圆内接四边形 $ABCD$ 的外角，

∴ $\angle EAD = \angle DCB$.

又 ∵ $\angle DAC = \angle DBC$，

∴ $\angle DCB = \angle DBC$.

∴ $\triangle DBC$ 是等腰三角形.

例题3 已知：如图 2－58，AB 是⊙O 的直径，弦 $CD \perp AB$，垂足为点 E，G 是 $\overset{\frown}{AC}$ 上任意一点，AG、DC 的延长线交于点 F.

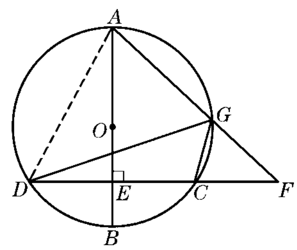


图 2－58

求证：$\angle FGC = \angle AGD$.

证明 联结 AD.

∵ AB 是⊙O 的直径，且 $CD \perp AB$，

∴ $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AC}$.

得 $\angle AGD = \angle ADC$.

又 ∵ $\angle FGC$ 是圆内接四边形 $ADCG$ 的外角，

∴　$\angle FGC=\angle ADC$.

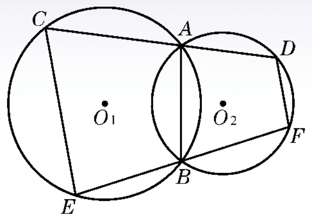
∴　$\angle FGC=\angle AGD$.

练习 2.4(1)

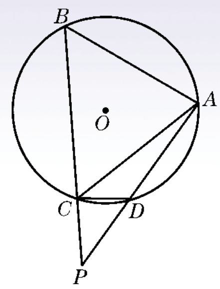
1. 已知四边形 $ABCD$ 内接于圆，且$\angle A:\angle B:\angle C=3:4:6$. 求$\angle D$ 的度数.

2. 已知：如图，AB 是$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 的公共弦，分别过点 A、B 的两条直线与两圆相交于 C、D、E、F 四点.

求证：$CE\parallel DF$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 已知：如图，四边形 $ABCD$ 是$\odot O$ 的内接四边形，$AB=AC$，又 AD 与 BC 两边的延长线交于点 P.

求证：$\angle P=\angle ACD$.

如果一个四边形有外接圆，那么它的外接圆是唯一确定的.

我们知道，不在同一直线上的三个点唯一确定一个圆. 对于一个四边形，由它的三个顶点所确定的圆不一定过第四个顶点，所以不是任何一个四边形都有外接圆.

问题2

满足什么条件的四边形才有外接圆？

假如一个四边形有外接圆，那么这个四边形就具有圆内接四边形的性质. 因此，可从圆内接四边形性质定理的逆命题考虑，来探索有外接圆的四边形需满足的条件.

圆内接四边形性质定理的一个逆命题可叙述为：如果一个四边形的对角互补，那么这个四边形是圆内接四边形.

我们来尝试证明上述逆命题是真命题.

已知：四边形 $ABCD$ 中，$\angle B+\angle D=180°$.

求证：四边形 $ABCD$ 内接于圆.

分析：要证明四边形 $ABCD$ 内接于圆，就是要证明 A、B、C、D 四点在同一个圆上. 因为 A、B、C 三点不在同一直线上，它们可以确定一个圆，所以只要证明第四个点 D 也在这个圆上即可. 但直接证明点 D 在圆上比较困难，可采用间接证明的方法.

证明：过四边形 $ABCD$ 的三个顶点 A、B、C 作⊙O.

设⊙O 与边 CD 所在直线的交点为 E.

如图 2－59(1)或(2)，联结 AE.

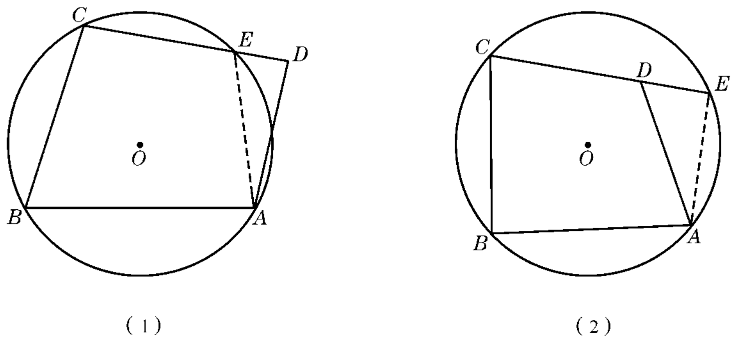


图 2－59

∵ 四边形 $ABCE$ 内接于⊙O，

∴ $\angle B+\angle AEC=180°$.

又 ∵ $\angle B+\angle D=180°$，

∴ $\angle AEC=\angle D$.

可知 AE 与 AD 一定平行或重合.

∵ AE 与 AD 有公共点 A，它们一定不平行，

∴ AE 与 AD 一定重合.

而直线 AD 与 CD 只有唯一的交点 D，

∴ 点 E 与点 D 也一定重合.

∵ 点 E 在⊙O 上，

∴ 点 D 在⊙O 上.

证明的过程还可以按照如下思路表述：假设点 D 不在圆上；经过推理论证，得出错误的结论；指出这个假设是错误的，从而肯定点 D 在圆上. 这样的证明方法称为反证法.

这样就得到以下定理：

圆内接四边形的判定定理　对角互补的四边形内接于圆.

还可以得到以下定理：

如果一个四边形的一个外角等于它的内对角，那么这个四边形内接于圆(如图 2－60).

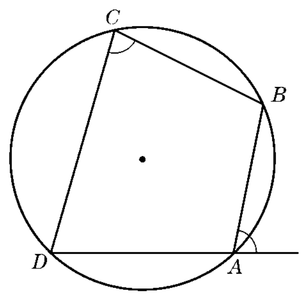


图 2－60

平面上的四个点在同一个圆上，称为**四点共圆**. 上述定理可以用来判定四点共圆.

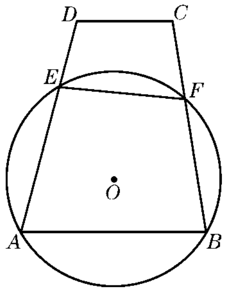


图 2－61

例题4 已知：如图 2－61，在梯形 $ABCD$ 中，$AB // CD$，AB 是⊙O 的弦，AD、BC 分别与⊙O 相交于点 E、F.

求证：四边形 $CDEF$ 内接于圆.

证明 ∵ 四边形 $ABFE$ 内接于⊙O，

∴ $\angle CFE=\angle A$.

∵ $AB // CD$，

∴ $\angle D+\angle A=180^\circ$.

得 $\angle D+\angle CFE=180^\circ$.

∴ 四边形 $CDEF$ 内接于圆.

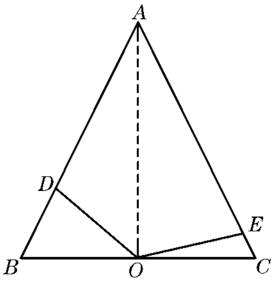


图 2－62

例题5 已知：如图 2－62，在△ABC 中，$AB=AC$，O 是边 BC 的中点，点 D、E 分别在边 AB、AC 上，且$\angle DOE+\angle A=180^\circ$.

求证：$OD=OE$.

证明 联结 AO.

∵ $\angle DOE+\angle A=180^\circ$，

∴ 四边形 $ADOE$ 内接于圆.

∵ $AB=AC$，且 O 是 BC 的中点，

∴ $\angle BAO=\angle CAO$.

得 $\overset{\frown}{OD}=\overset{\frown}{OE}$.

∴ $OD=OE$.

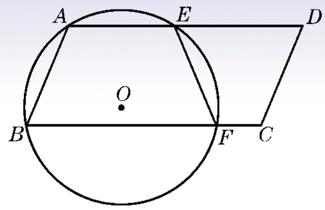
练习 2.4(2)

1. 已知：点 D、E 分别在△ABC 的边 AC、AB 上，且 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$.

求证：B、C、D、E 四点共圆.

2. 已知：如图，▱$ABCD$ 中，⊙O 经过点 A、B，分别与边 AD、BC 相交于点 E、F.

求证：C、D、E、F 四点共圆.



（第 2 题）

3. 证明：锐角三角形(非等腰)各边的中点和一边上的高的垂足共圆.

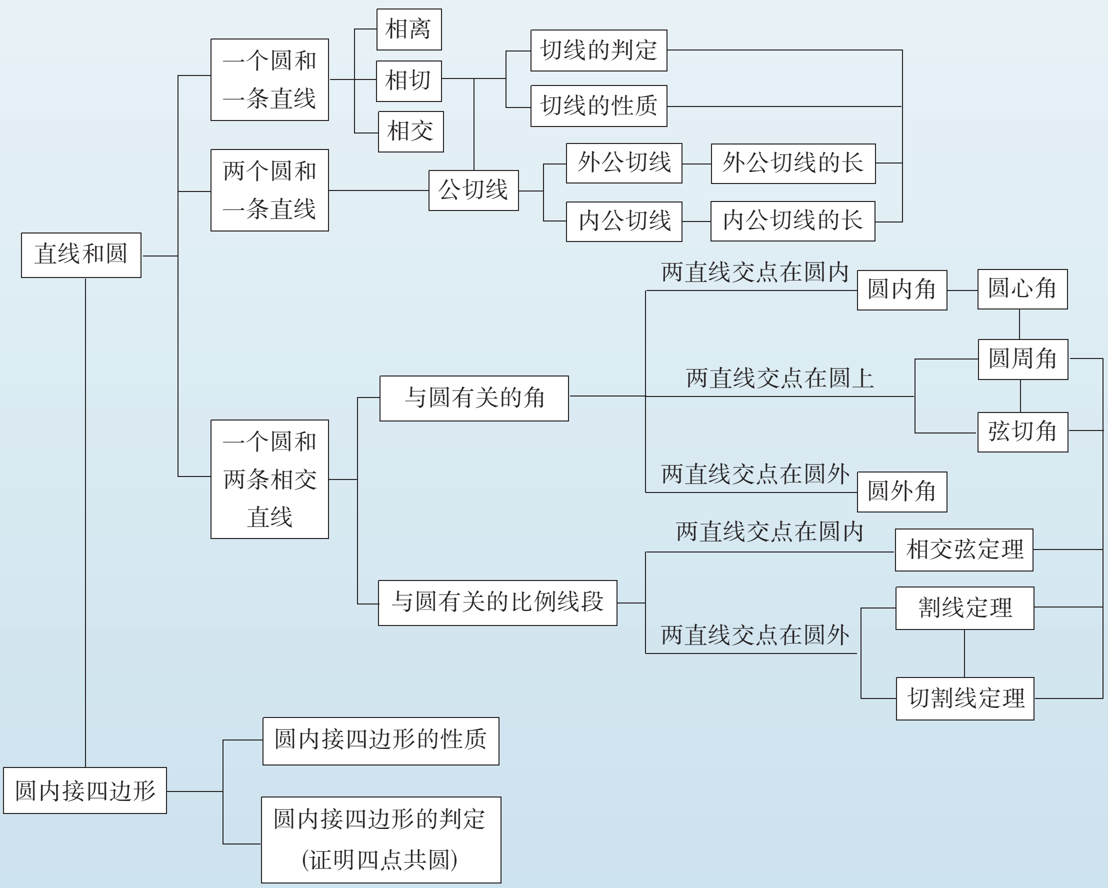
本章小结

本章首先讨论了一条直线与一个圆相切这种特殊的位置关系，并着重研究了直线与圆相切的判定和性质. 然后研究了一条直线与两个圆都相切的位置关系，涉及内公切线与外公切线的概念，以及公切线长及其计算. 接着，运用运动的观点，讨论了两条相交直线与圆形成的有关的角、有关的比例线段. 关于与圆有关的角，引入了圆心角、圆周角、弦切角等概念，研究了圆周角、弦切角分别与相应圆心角之间的数量关系；关于与圆有关的比例线段的研究，得到了相交弦定理、割线定理、切割线定理. 最后，讨论了圆的内接四边形，着重研究了圆的内接四边形的性质与判定.

这些知识内容是平面几何基础的组成部分，其中贯穿着图形的运动和变化，体现了演绎思想. 通过学习，我们的逻辑推理能力得到了进一步的提高，同时进一步学习数学的知识准备更加充实.

在圆周角定理和弦切角定理的证明过程中，运用了分类讨论思想和化归思想. 分类讨论和化归作为分析问题、解决问题的思想方法，不仅在数学学科中有广泛应用，而且在其他学科的学习、研究以及日常的工作中，也是有用的.

本章的知识结构框图如下：



2

阅读材料

圆的幂和两圆的等幂轴

在“与圆有关的比例线段”一节中，提出了相交弦定理、割线定理和切割线定理，并指出它们统称为圆幂定理.

为什么称为圆幂定理？那就要先知道“圆幂”的含义.

设⊙O的半径长为R，点P与圆心O的距离为d，则d^2-R^2叫做点P对于⊙O的幂.

当点P在圆外时，如图2-63(1)，从点P分别作过圆心O的割线PAB和任意一条割线PCD；再作⊙O的切线PT，T为切点. 由割线和切割线定理，得

$$PT^2=PC\cdot PD=PA\cdot PB=(d-R)(d+R)=d^2-R^2.$$

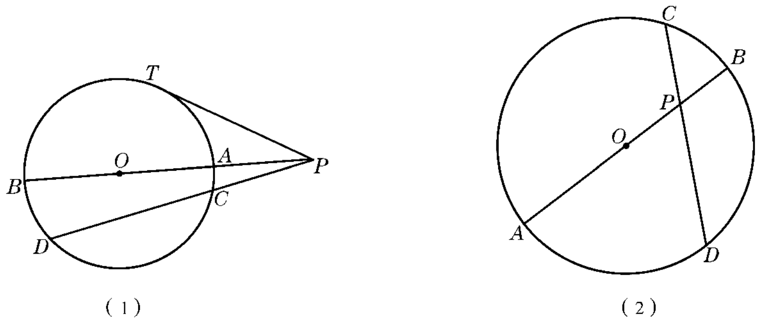


图 2-63

当点P在圆内时，如图2-63(2)，过点P分别作一条直径AB和任意一条弦CD. 由相交弦定理，得

$$CP\cdot PD=AP\cdot PB=(R+d)(R-d)=-(d^2-R^2).$$

当点P在圆上时，$d=R$，得$d^2-R^2=0$.

由此可见，相交弦定理、割线定理和切割线定理共同表达了一个点对于圆的幂的几何意义，所以把它们统称为圆幂定理.

还可进一步得到以下结论：

设一个圆的半径长为R，一点P与圆心的距离为d，且$d\neq R$.

(1) 如果过点P的一条直线与圆相交于C、D两点，那么

$$PC\cdot PD=\begin{cases}d^2-R^2\text{，当点 }P\text{ 在圆外时；}\\-(d^2-R^2)\text{，当点 }P\text{ 在圆内时.}\end{cases}$$

(2) 如果过点P的一条直线与圆相切于点T，那么

$$PT^2=d^2-R^2.$$

这样，我们可以更加清楚地看到，相交弦定理、割线定理和切割线定理的结论中，两条线

段的乘积的大小只与点 P 相对于圆的位置有关，它是一个定值. 这个定值是点 P 对于圆的幂（当点 P 在圆外时）或点 P 对于圆的幂的相反数（当点 P 在圆内时）.

再来讨论一个点分别对于两个圆的幂. 如图 2－64(1)，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于点 T，直线 l 是它们的内公切线. 设 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的半径长分别为 R_1、R_2，点 P 是直线 l 上的任意一点，$PO_1=d_1$，$PO_2=d_2$，则

$$PT^2=d_1^2-R_1^2=d_2^2-R_2^2.$$

这就是说，直线 l 上的任意一点对于两圆的幂相等.

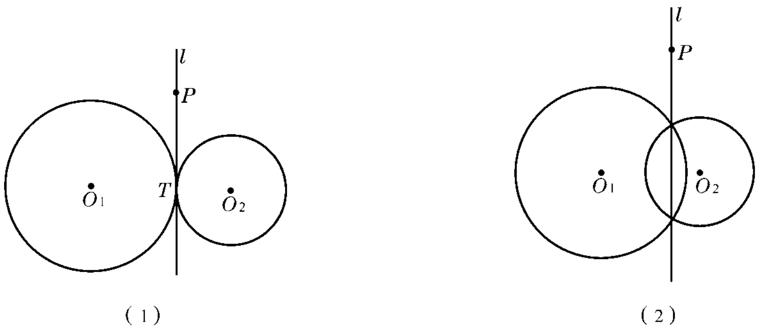


图 2－64

如果一条直线上的任意一点对于两圆的幂相等，那么这条直线叫做这两圆的等幂轴.

一般地，

当两圆相切时，过它们的切点的公切线是这两圆的等幂轴.

当两圆相交时，过它们的两个交点的直线是这两圆的等幂轴（如图 2－64(2)）.

关于以上结论，可仿照两圆外切的情形验证.

当两圆相离（非同心圆）时，这两圆的等幂轴是垂直于它们的连心线的一条直线. 具体位置的确定，运用以后高中学习的解析几何的知识比较容易解决.

说　明

本册教材根据上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会制定的课程方案和《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》编写,供九年义务教育九年级试用.

本教材由上海师范大学主持编写,经上海市中小学教材审查委员会审查准予试用.

本册教材的编写人员有:

主编:邱万作　　　分册主编:叶锦义

特约撰稿人:(按姓氏笔画为序)陆海兵　陈慧珍　邵世开　顾跃平

2019年教材修订组成员:叶锦义　邵世开　沈　洁

陆海兵　徐晓燕　顾跃平

欢迎广大师生来电来函指出教材的差错和不足，提出宝贵意见.出版社电话:021-64319241.

本册教材图片提供信息:

图虫网(封面一幅图,目录P1一幅图,目录P2一幅图,P1一幅图,P25一幅图)

插图绘制:黄国荣、顾云明、周吉

经上海市中小学教材审查委员会审查
准予试用　准用号Ⅱ-CB-2019011

责任编辑　章佳维

九年义务教育课本

数　学

九年级　拓展Ⅱ

(试用本)

上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会

上海世纪出版股份有限公司
上　海　教　育　出　版　社　出版

（上海市闵行区号景路159弄C座　　邮政编码:201101）

上海新华书店发行　　上海锦佳印刷有限公司印刷

开本 890×1240　1/16　印张 4.25

2019年7月第1版　　2024年7月第6次印刷

ISBN 978-7-5444-9330-7/G·7691

定价:5.85元

价格依据文件：沪价费〔2017〕15号

如发现内容质量问题，请拨打 021-64319241

如发现印、装问题，请拨打 021-64373213，我社负责调换

绿色印刷产品

ISBN 978-7-5444-9330-7