普通高中

Shuxue
Jiaoxue Cankao Ziliao

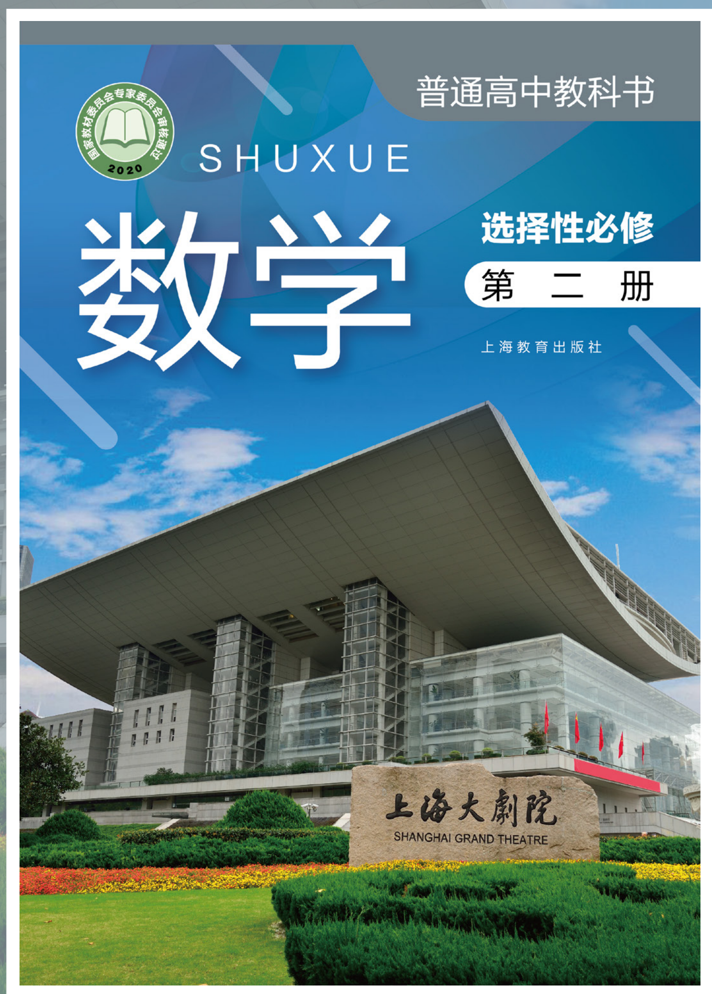
数学

教学参考资料

选择性必修

第 二 册

上海教育出版社



Shuxue
Jiaoxue Cankao Ziliao

普通高中

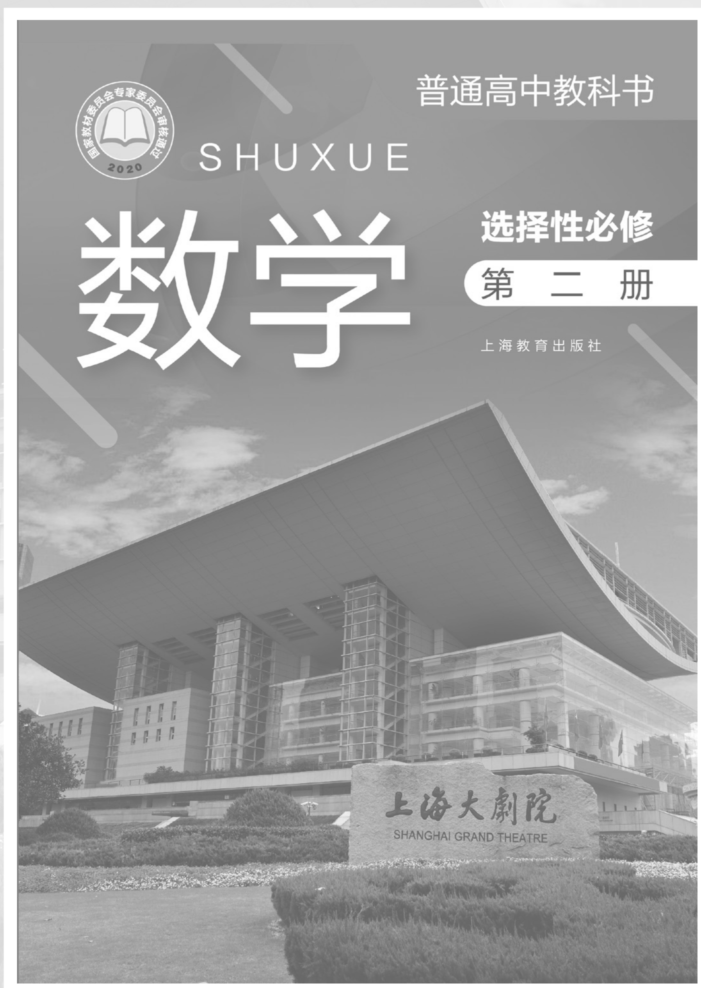
数学

选择性必修

第 二 册

教 学 参 考 资 料

上 海 教 育 出 版 社



主　　编　李大潜　王建磐
副 主 编　应坚刚　鲍建生
本册编写人员　程　靖　肖恩利　姚一隽　应坚刚　田万国　任升录　陈月兰　汪家录

责任编辑　曲春蕊
装帧设计　周　吉

插图绘制　朱泽宇

普通高中　数学教学参考资料　选择性必修　第二册
上海市中小学（幼儿园）课程改革委员会组织编写

出　　版　上海教育出版社有限公司（上海市闵行区号景路159弄C座）
发　　行　上海新华书店
印　　刷　上海新华印刷有限公司
版　　次　2022年7月第1版
印　　次　2025年6月第4次
开　　本　890×1240　1/16
印　　张　6.75
字　　数　116 千字
书　　号　ISBN 978-7-5720-1458-1/G·1160
定　　价　22.00 元

目　录

绪论 …… 1

第 5 章　导数及其应用 …… 9

一、本章概述 …… 9

二、教材分析与教学建议 …… 14

三、参考答案或提示 …… 25

四、相关阅读材料 …… 31

第 6 章　计数原理 …… 34

一、本章概述 …… 34

二、教材分析与教学建议 …… 37

三、参考答案或提示 …… 43

第 7 章　概率初步(续) …… 50

一、本章概述 …… 50

二、教材分析与教学建议 …… 54

三、参考答案或提示 …… 63

四、相关阅读材料 …… 70

第 8 章　成对数据的统计分析 …… 72
一、本章概述 …… 72
二、教材分析与教学建议 …… 76
三、参考答案或提示 …… 89
四、相关阅读材料 …… 97

绪　　论

本套教学参考资料(以下统称“本套教参”)与李大潜、王建磐主编，上海教育出版社出版的《普通高中教科书·数学》(以下统称“本套教材”)配套使用，本套教材依据中华人民共和国教育部制定并颁布实施的《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》(以下简称“国家课程标准”)编制，并经国家教材委员会专家委员会审核通过.

一、本套教材的总体结构框架

国家课程标准把高中数学课程分为必修课程、选择性必修课程和选修课程，并规定：必修课程为学生发展提供共同基础，是高中毕业的数学学业水平考试的基本内容，也是高考的内容要求；选择性必修课程是供学生选择的课程，也是高考的内容要求；选修课程为学生确定发展方向提供引导，为学生展示数学才能提供平台，为学生发展数学兴趣提供选择，为大学自主招生提供参考[①].

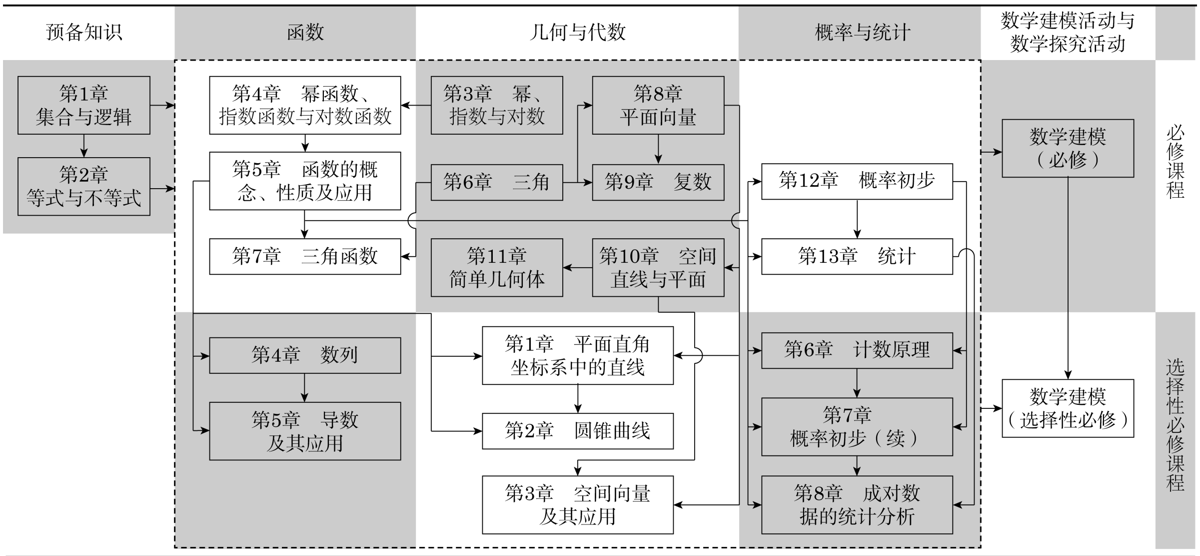
本套教材仅包含必修课程和选择性必修课程.

国家课程标准把必修课程和选择性必修课程所囊括的数学内容分为预备知识、函数、几何与代数、概率与统计、数学建模活动与数学探究活动 5 个主题[②]. 本套教材把这 5 个主题及其具体要求组织成了必修课程 13 章和数学建模 1 册，选择性必修课程 8 章和数学建模 1 册. 这些章的标题以及各章之间的逻辑联系如下页图所示.

---

① 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京：人民教育出版社，2020：9，11-12.

② 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京：人民教育出版社，2020：13-14，36-37.



说明：(1) 数学是一个整体，教材各章之间或多或少都存在联系，上图仅标出一些主要联系.

(2) 预备知识主题下的两章为高中数学学习提供基本语言、基本工具和基本思维方式，因此它们是整个知识体系的基础；数学建模是给学生提供解决实际问题的训练和实践，可以建立在任何数学基础上.

(3) 在数学建模活动与数学探究活动主题下，上图只列了两册数学建模，并没有列出数学探究的内容. 其实，数学探究的内容以“探究与实践”专栏、“课后阅读”专栏、“拓展与思考”的习题以及某些边框分散在教材中. 教师可以利用这些素材引导学生进行自主探究，也可以根据教学内容自行设计数学探究活动，让学生学得更加生动活泼.

(4) 国家课程标准把幂、指数与对数的运算融在幂函数、指数函数与对数函数中，把三角的定义、三角恒等变换以及解三角形等非函数内容都归在三角函数标题下，所以相关的内容也就都在“函数”主题下了；本套教材把这些非函数的内容从函数标题下独立出来，形成了必修课程的第 3 章“幂、指数与对数”及第 6 章“三角”，把这两章归到“几何与代数”主题下是更顺理成章的. 当然，这两章内容与紧接在后面的函数的学习密切相连，在课程结构的安排上仍把它们归在函数主题一起考虑.

本套教材共有必修课程教材四册.

- 必修第一册：第 1 章至第 5 章；
- 必修第二册：第 6 章至第 9 章；
- 必修第三册：第 10 章至第 13 章；

- 必修第四册：数学建模.

本套教材共有选择性必修课程教材三册.

- 选择性必修第一册：第 1 章至第 4 章；
- 选择性必修第二册：第 5 章至第 8 章；
- 选择性必修第三册：数学建模.

除数学建模外的五册教材可以安排从高中一年级至高中三年级第一学期共五个学期教学. 每册内容没有撑足教学时数，留一定的机动课时供教师根据实际需要灵活掌握，可用作重点或难点的强化课、复习课、习题课、数学建模活动、数学探究活动等，也可用于安排选修课程或校本课程内容的学习. 数学建模内容与数学知识的逻辑结构没有直接的关系，两册数学建模教材不是前三册或前两册教材的后继，而是包含比教学课时数要求更多的内容，供各个年段灵活地、有选择地使用，以实现数学建模的教学目标.

二、本套教材的编写思想与主要特点

本套教材是在上海市教育委员会组织下，由设在复旦大学和华东师范大学的上海市数学教育教学研究基地（上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地）联合主持编写的，由李大潜、王建磐担任主编. 教材编写过程中，我们始终坚持正确的政治方向和价值导向，科学地处理了教学内容的编排，反复认真地打磨，努力做到结构严谨、体例活泼、特色鲜明，体现了理性精神和创新意识，有较高的科学品位和学科人文情怀，希望能为广大师生喜闻乐见，对学生学业水平的提升，数学学科核心素养发展和社会责任感的培育都有促进作用.

我们认为本套教材在编写思想上有所突破，在内容呈现上有一些特点. 具体体现在以下几个方面.

（1）关注“立德树人”，课程育人. 通过各种素材与知识本体的有机融合，有效落实了立德树人的根本任务，明确体现了“四个自信”和社会主义核心价值观，注重培养学生严谨求实的科学态度.

章首图的选用让学生在最初一瞥中体会中国共产党的光辉历史和祖国社会主义建设的成就；用现代化建设的新成就作为情景引入数学概念，让学生在学习知识的同时看到祖国发展的日新月异；例习题和“探究与实践”“课后阅读”等专栏中包含了各种热

点问题和重大主题教育的内容；重视数学史在数学教育中的作用，许多题附有历史的简述，既体现人类文化知识的积累和创新的过程，也帮助学生理解和掌握相关的数学知识；在数学史阐述中，特别注意我国历代数学家及其成就以及西方数学的脉络中我国学者(在学术、传播或中国化等方面)的贡献.

(2) 体现“国家标准，上海特色，国际水平”. 基于国家课程标准，但同时也对上海两期课改的经验有所继承，对东部发达地区的国际化大型城市这一特点有所关注，对数学链条上缺失的关键节点有所弥补.

本套教材在吸收上海两期课改(“一期课改”和“二期课改”)中已经成熟的经验方面，比较典型的例子有：数学归纳法，这是国家课程标准中标有 * 号的选学内容，本套教材将其 * 号去掉，归入正常教学要求；无穷递缩等比数列的和作为极限思想的朴素表述，与求导呼应；把反函数、参数方程、极坐标方程等内容以标 * 号的方式加入到本套教材中，供学校和教师选用. 这些内容曾出现在上海“二期课改”的教材中，学生的接受度较高.

对一些数学链条中关键的节点做适当的弥补. 例如，引入反证法，希望以此简化部分数学证明，提高学生逻辑推理能力；比较全面地介绍了直线方程的各种形式，既夯实解析几何的基础，也建立解析几何与数学其他分支的联结点，如斜截式方程紧密联系一次函数，而直线的法向量与点法式方程是立体几何中平面法向量的预演.

(3) 以国家课程标准所描述的“函数”“代数与几何”“概率与统计”三个主题为教材发展的三条主线，主线内部一气呵成(除了跨越必修与选择性必修的必要隔断外)，形成层层递进的章节设计，体现了整体性和连贯性，避免在发展主线间的反复变换，使学生不仅能更好地了解数学整体的思想和结构，也能了解数学不同分支之间的差异，对培养学生的数学素养更有好处.

(4) 注重“从特殊到一般，再指导特殊”的认识论规律. 例如，在函数主线内部，没有从给出函数的一般定义入手，而是先让幂函数、指数函数、对数函数作为“特殊”出现，然后提出函数的一般概念，再在“一般”指导下进入三角函数的学习. 这种处理方法在其他专题上也可以找到踪影：学过直线方程、圆锥曲线方程后，引出曲线方程的严格定义，然后用例题和习题的形式求一些轨迹的方程，再介绍曲线的参数方程和极坐标方程；在“简单几何体”一章中，先讲柱体与锥体，然后讨论多面体与旋转体，再“特殊化”到球的学习；“数列”一章，在学过等差数列、等比数列后，介绍一般数列

的概念与性质，特别关注用递推公式表示的数列，然后引入了数学归纳法，全章最后落笔于用迭代方法求$\sqrt{2}$的近似值，这是用递推公式表示数列的实际例子.

（5）在必修课程第 10 章“空间直线与平面”中，给出“立体几何”相对完整严格的演绎法阐述，意在努力克服学生的空间直观想象和逻辑推理上的不足. 在选择性必修课程第 3 章“空间向量及其应用”的章末回到立体几何，用向量方法解决立体几何问题，从几何问题代数化的角度引出解题新思路，加深对立体几何的理解，反过来又很好地诠释了学习空间向量的意义.

（6）数学建模单独成册. 国家课程标准把数学建模活动与数学探究活动作为一条单列的主线，充分体现了对数学建模的重视程度. 数学建模与数学知识的关系是强调已经学得的知识(不一定是刚刚学得的，一般也并不指定哪些具体的知识点)在解决实际问题中的应用，因此数学建模活动和数学知识体系的发展并无直接的关联性，数学建模活动的教学不应依附于特定知识性内容的教学，而应该强调它的活动性、探索性和综合性，在过程中不断提高学生分析问题、解决问题的能力和综合应用数学知识的能力，并充分激发学生的创新精神和创造意识.

基于这种想法，把数学建模内容独立出来，按必修和选择性必修分别单独成册. 这样做符合课程标准的要求，符合数学建模内容的特点，并至少在以下四个方面凸显它的优势：

- 数学建模单独的物理存在给教师和学生在强调数学建模学习和数学建模核心素养培养上更为直观的感受，更能激起数学建模教与学的热情；
- 独立的数学建模分册明确地显示数学建模不是在数学学习的某一特定节点上的内容，也不是新增的数学知识，而是在数学教学过程中随时随地可以开展的教学实践活动；
- 单独成册的数学建模教材有较大的容量，可以提供更多的活动案例，让教师和学生可以依据自己的兴趣和特长做多样的选择；
- 单独成册的数学建模教材以它的相对系统性和完整性帮助教师理解数学建模的意义和特点，逐步体会并形成数学建模的教学规范，从而更好地帮助学生开展相应的数学建模活动，体验数学建模的全过程，领悟数学建模的真谛.

（7）本套教材另一个与众不同的地方是采用“娓娓道来”的叙事方式，它使得教材既是一个“教”本，也是一个“读”本，学生可以在阅读中了解数学，喜欢数学，学好数

学. 正文的这种叙事方式使教师和学生更加注重数学精髓，体验数学严谨，掌握数学要义，提高数学素养，引导教师在教学中避免“重解题、轻概念、轻思想”的倾向.

三、本套教参的主要特点

本套教参编撰的目的是使教师理解教科书编制所依据的《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》，体会教材的编制特色和主要思想，把握教材所包含的数学知识的体系和脉络，掌握教学过程的关键，从而很好地完成从课程标准和教材所描述的“期望课程”“潜在实施课程”到教学过程的“实施课程”和学生习得的“获得课程”的转变.

本套教参与教材分册和章节安排均一致，即教参的分册和章节目录均与教材一致. 但教参没有直接把教材复制在内，也不是平铺直叙地解释教材的内容. 教参着重讲出编写者的思想及体会，明确各章的定位，剖析重点和难点，厘清容易混淆的地方，帮助教师把握课程标准的基本理念和目标要求，强调数学核心素养的落实，等等，从而开拓教师思维，优化教学方法. 从这个角度讲，教参又是课本内容的深化和补充，成为教材(潜在实施课程)到教学(实施课程)的中介和桥梁.

教材前言强调，“在任何情况下，都要基于课程标准，贯彻‘少而精’‘简而明’的原则，精心选择与组织教材内容，抓住本质，返璞归真，尽可能给学生以明快、清新的感受，使学生能更深入地领会数学的真谛，让数学成为广大学生喜闻乐见的一门课程. ”这是本套教材坚持的基本特色. 教材的许多特色隐含在内容选取、编排和行文中. 教参将揭示和突出教材的基本特色以及教材编制过程落实这个特色所采取的具体措施和处理方式，并充分注意同一主题内前置和后续内容的衔接以及一个主题的内容与其他主题甚至其他学科内容的关联. 这种衔接和关联在章节导言、总结部分以及在相关知识内容阐述中有明确的交代. 这样做的目的是让教师更加深刻地体会整个高中阶段数学是一个知识的网络，并在教学中把这个认知传递给学生.

教参的每一章因所涉及的内容以及编写者的风格特点可能会有所差异，但我们追求每章总体结构基本统一，关键要素基本具备.

每一章的教参包括“本章概述”“教材分析与教学建议”“参考答案或提示”和“相关阅读材料”四个部分.

“本章概述”部分的主要栏目有“总体要求”“课时安排建议”“内容编排与特色”“教学提示”与“评价建议”等. 特别地，“总体要求”中通过与课程标准、“二期课改”教材

的联系与对比，围绕着本章内容的重要性、与前后知识的联系和课程目标等内容进行阐述.

“教材分析与教学建议”部分按节编写，每节有“教学重点”“内容分析”“注意事项”“教学建议”等栏目.

“参考答案或提示”是教参的常规内容，但我们希望能够尝试给出一些思想或方法的提示.

给出“相关阅读材料”是一个新的尝试，我们希望为教师和学生的课外阅读提供一些提示或指导. 所列文献、材料以中文为主，但也会包含少量英文文献.

四、选择性必修教材第二册中的一些关注点

选择性必修教材第二册一共四章，从第 5 章“导数及其应用”开始. 导数是微积分的核心内容之一，是现代数学的基本概念. 导数概念是依赖于极限建立起来的. 高中阶段不要求学生系统地学习极限，只是在以前学习圆、数列等知识时有所渗透，本章中再通过现实情境和几何直观等，让学生建立起朴素的极限思想，在此基础上直观地给出导数的概念. 因此，本章只能算是导数的一个科普式的入门. 尽管如此，本章的学习仍然希望学生能通过实际场景理解导数的概念，体会导数的思想和意义，能进行导数的基本运算，能运用导数研究函数的一些基本性质，并解决一些简单的实际问题.

第 6 章“计数原理”讨论的是有限集合中元素个数的计数问题，提供一些基本的原理和计数模型. 其核心是两个原理(加法原理与乘法原理)和两个计数模型(排列与组合). 和二期课改教材的不同之处在于，本教材在同一节中引入了加法原理与乘法原理，更便于学生比较两个原理之间的异同，辨别它们不同的应用场景. 限于学生的知识水平，教材没有给出两个原理的严格理论推导，教学中要通过实例让学生体会这两个原理的合理性. 但要注意的是，本章排列组合部分从定义到公式的推导都遵循了严格的数学方法. 本章最后两节把排列与组合运用到古典概率，并给出著名的二项式定理的一个证明，使学生对计数原理等工具的数学价值形成更深的认识.

第 7 章和第 8 章分别是必修课程第 12 章与第 13 章的继续，主题分别是概率和统计. 第 7 章“概率初步(续)”是必修课程第 12 章中概率内容的延续，涉及的重要概念有：条件概率(条件概率公式、概率的乘法公式、全概率公式、*贝叶斯公式)，随机变

量(随机变量的分布、伯努利分布、期望、期望的线性性质、方差、方差的性质)和分布(二项分布、超几何分布、正态分布)等. 这些概念和相应的理论与其他数学分支内容相比有很大的差异，对于学生来说，“换一种思路”“换一套语言”(必修教材第12章章首语)仍然在适应过程中，学习难度较大. 教材通过一些比较简单的具体实例来引入相关概念及公式，由浅入深，尽量使学生易于接受和理解，教师也应该通过典型案例开展教学活动. 案例的情境应是丰富的、有趣的、学生熟悉的. 在案例教学中要重视过程，层次清楚地体现从具体到抽象、从实际到理论的过程.

必修课程第13章“统计”中，学生学习了统计的初步知识，关注了来自单一变量数据的一些统计特征. 而本册教材的第8章“成对数据的统计分析”，则是在此基础上研究来自同一对象的两个变量的成对数据的统计相关性，涉及的主题包括线性相关系数、一元线性回归分析和2×2列联表独立性检验. 这些都属于推断性统计方法，在构建统计模型、预测结果和因果分析等方面有许多应用. 通过本章的学习，学生将了解一些经典的统计方法与统计思想，体验解决特殊问题的统计过程及统计方法，进而感受到统计思想在解决实际问题过程中的作用.

本册教材的第5、7、8三章触及了三个不同学科(微积分、概率和统计)巨大冰山的一角. 在学生有限的知识积累和教材有限的篇幅中，不可能对所涉及的知识作完整的阐述，缺省、模糊、以说明代替严格式论证，都是不可避免的. 教师在教学时，一要把握“混而不错”的基本原则，过程可以跳跃、简略、“非数学化”，但结果的表达必须是正确和严格的；二要让学生体会概念的精髓，体会学科基本思想和方法；三要让学生能够运用所学的知识解决相关的数学或实际问题，达到课程标准所要求的学习目标；四要培养学生的学习兴趣，引导学生未来的进一步学习.

第 5 章　导数及其应用

一、本章概述

总体要求

“导数是微积分的核心内容之一，是现代数学的基本概念，蕴含微积分的基本思想；导数定量地刻画了函数的局部变化，是研究函数性质的基本工具.”①

初等数学可以对匀速运动进行描述分析，也能够解决形状规则物体的度量问题. 但是，对于变速运动的刻画、边界不规则图形的度量，就需要借助新的数学工具——微积分. 导数作为微积分的重要内容，为研究函数性质提供了便捷的途径，被广泛应用于实际问题中的函数模型处理.

函数是微积分的研究对象，也是学生从初中阶段就开始接触的学习内容，更是高中数学课程的一条主线. 在必修课程的学习中，学生已经熟悉了大部分基本初等函数，并借助图像、代数运算等方法对其性质进行了初步的研究，进而体会到了函数在解决实际问题中的作用. 导数的学习将使学生进一步感悟函数局部性质与整体性质的联系，并掌握研究函数单调性、极值和最值的有力工具.

导数概念是依赖于极限思想建立起来的. 极限思想在之前圆、数列等知识的学习中有所渗透，在本章的学习过程中需要通过现实情境、几何直观、数值逼近等方式进一步体会，感悟极限思想在导数概念形成中的重要意义，在解决变速运动等现实问题中的重要功能，从而形成对极限思想的朴素理解. 由于高中阶段不要求学生系统地学习极限和连续的严密化定义以及相关性质，因此要获得更为深刻的领会，特别是对于相关知识的严密化表述与论证，将在后续选修课程或大学阶段的课程中完成.

---

① 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京：人民教育出版社，2020：37.

通过本章的学习，“可以帮助学生通过丰富的实际背景理解导数的概念，掌握导数的基本运算，运用导数研究函数的性质，并解决一些实际问题”①. 具体而言，需要帮助学生了解导数是关于瞬时变化率的数学表达，从直观上理解导数的几何意义，并借助求导运算研究一些函数的单调性、极值和最值，进而体会导数在解决实际问题中的重要作用.

课时安排建议

本章的课时安排建议为 9+1，共计 10 课时. 建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
5.1　导数的概念及意义	2	导数的概念　1 课时
		导数的几何意义　1 课时
5.2　导数的运算	3	基本初等函数的导数　1 课时
		导数的四则运算　1 课时
		简单复合函数的导数　1 课时
5.3　导数的应用	4	利用导数研究函数的单调性　1 课时
		利用导数研究函数的极值　1 课时
		利用导数研究函数的最值以及利用导数研究二次函数　1 课时
		利用导数解决实际问题　1 课时
复习与小结	1	

内容编排与特色

与上海二期课改数学课程相比，导数为新增内容. 从国家课程标准来看，《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》对微积分内容的要求与 2003 年出版的《普通高中数学课程标准(实验)》相比，保留了文科学生和理工科学生均需修读的“导数及其应用”，删去了理工科学生需要修读的“定积分与微积分基本定理”.

本章内容共分为三节，分别是 5.1 导数的概念及意义，5.2 导数的运算，5.3 导数的应用.

① 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京：人民教育出版社，2020：39.

“5.1 导数的概念及意义”通过两种情境帮助学生理解导数的概念. 一是瞬时速度，揭示导数的物理意义；二是切线的斜率，揭示导数的几何意义. 首先借助对高铁运行过程中瞬时速度的讨论，从导数的物理意义出发，帮助学生感受导数学习的必要性. 同时在具体实例中，借助信息技术工具呈现一系列具体数值，帮助学生体会从平均速度向瞬时速度趋近的过程，感悟极限思想在解决变速运动相关问题时的重要性. 随后，从特殊到一般地抽象出某点处导数的定义. 在接下来关于导数几何意义的介绍中，让学生经历从割线趋近于切线的过程，在此基础上生成对一般曲线切线的定义，进一步体会导数是平均变化率的极限. 然后借助熟悉的圆的切线问题，帮助学生体会新的切线定义与以往定义的一致性，同时在解决问题的过程中归纳出“函数在某点处导数的几何意义是相应的曲线在该点处切线的斜率”，进而获得求曲线在某点处切线方程的一般方法. 最后讨论切线水平的特殊情况，顺势给出驻点的概念，为后续函数极值的学习做铺垫.

“5.2 导数的运算”首先从函数某点处导数的概念过渡到导函数的概念，然后借助导函数的定义求一些简单函数的导函数，帮助学生初步体会求导公式的来源. 紧接着不加证明地给出一些常用求导公式，并结合具体的求导问题帮助学生感受数学公式在简化运算方面的重要价值. 导数的四则运算法则在教材中也是直接给出的，仅对积的求导公式进行了形式上的推导，以帮助学生体会求导法则的来由，以及为什么通常 $(f(x)g(x))'$ 并不等于 $f'(x)g'(x)$. 最后，在介绍简单复合函数的求导法则时，先通过实例引入“复合函数”的概念，再借助导函数的定义推出形如 $y=f(ax+b)$ 的简单复合函数的求导公式.

一旦有了基本初等函数的求导公式和导数的四则运算法则以及复合函数的求导法则，就可以对所有的初等函数进行求导运算. 限于高中课程的要求，本节中并未给出反三角函数的求导公式以及一般复合函数的求导法则，但是试图通过本节末尾所设置的探究与实践活动，使学生对一般复合函数的求导法则有所了解，并在探究过程中体会从具体到抽象，从特殊到一般的数学思想.

整体而言，本节的正文部分聚焦纯数学情境，着力突出数学运算，帮助学生掌握导数运算的公式与法则；同时在习题部分设置了若干现实情境问题，希望学生在掌握求导运算的基础上，进一步体会导数的意义. 因为此时求函数在某点处的导数可以借助求导公式和求导法则，不必再依赖于导数的定义，所以问题中所涉及的函数与 5.1 节相比，可以更为复杂一些.

“5.3 导数的应用”从利用导数研究函数的单调性开始，进而研究函数的极值和最值，最后通过呈现导数在实际问题中的应用，帮助学生在巩固所学的同时，初步体会微积分对人类文明的贡献. 由于在高中阶段现有知识的基础上，无法提供相关定理的严格证明，因此本节特别关注定理的发现与验证活动. 例如，借助信息技术工具绘制函数的图像，探究导数与函数单调性之间的关系，一方面发现结论，另一方面验证结论. 相关例习题中既有学生非常熟悉的函数，也有相对陌生的函数. 前者旨在帮助学生体会：利用导数判断函数单调性所得的结果与之前学习过程中通过直观观察或借助不等式证明所得的结果一致；后者旨在帮助学生体会利用导数判断函数单调性的方法具有更广泛的适用性.

本节中还设置了一个特别的学习内容，即利用导数解决熟悉的二次函数、一元二次方程和一元二次不等式问题. 该内容既是对以往所学相关结论的回顾，也是对本节所学新知识的应用. 一方面呼应本套教材必修第一册“2.2 不等式的求解”之“2.一元二次不等式的求解”、“5.2 函数的单调性”以及“5.3 函数的应用”之“2.用函数观点求解方程与不等式”，让学生再次从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式，深入理解函数、方程和不等式三者之间的关联，体会数学的整体性；另一方面帮助学生体会导数为研究函数的单调性与极值提供了简便而普适的方法，在学习过程中发展数学抽象和逻辑推理素养.

在本节的末尾，教材提供了一篇阅读材料——“微积分简史”，通过列举微积分发展史上的重大事件，为学生进一步了解微积分的发展历程及其重要价值提供了参考.

总体而言，本章围绕实际问题展开，尽可能借助信息技术工具从直观上帮助学生理解抽象的导数概念及相关定理. 知识的呈现过程也常常采用归纳发现的方式，而不强调严格的演绎推理. 希望学生通过学习初步认识导数及其应用，一方面了解数学所能处理的问题并不拘泥于匀速运动或规则图形，另一方面对未来进一步学习微积分抱有渴望.

教学提示

本章内容是从解决实际问题的需要开始，引入导数的概念及其几何意义；接着以导数的定义为基础，给出一些基本初等函数的导数公式以及导数的运算法则；随后以简单函数为载体，呈现导数在研究函数性质中的作用，最终回归到如何用导数解决实际问题.

为了揭示导数概念的内涵，“应通过丰富的实际背景和具体实例引入导数的概念，例如斜率、增长率、膨胀率、效率、密度、速度、加速度等，应引导学生经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数是如何刻画瞬时变化率的，感悟极限的思想；应引导学生通过具体实例感受导数在研究函数和解决实际问题中的作用，体会导数的意义. 学生对导数概念的理解不可能一步到位，导数概念的学习应该贯穿在一元函数导数及其应用学习的始终. 一般地，在高中阶段研究与导数有关的问题中，涉及的函数都是可导函数.”①

为了体现导数在研究函数性质方面的重要作用，教学中应引导学生与之前函数学习过程中所采用的方法和所得到的结论进行比较，进而体会导数工具的优越性. 需要注意的是，学生掌握基本求导运算的主要目的是借助运算体会导数在研究函数时的作用. 教学中可以借助具体实例或代数运算在一定程度上揭示导数运算法则的合理性，但不要求学生进行严格的证明，也不要求处理较为复杂的求导运算问题.

为了感悟微积分创立过程，以及微积分对数学发展的作用，“在教学中可以组织学生收集、阅读微积分创立与发展的历史资料，撰写小论文，论述微积分创立与发展的过程、重要结果、主要人物、关键事件及其对人类文明的贡献.”②

虽然本教材在多处结合具体情境渗透了极限思想，让学生形成对极限的朴素理解，但是并没有涉及极限、连续等概念的严格定义和相关理论，因此不可能借助严密的演绎推理体系来帮助学生建立对导数的理解. 此时，应特别注意发挥信息技术工具的优势来设计教学：一方面可以借助信息技术工具在批量计算方面的优势，让学生观察当自变量无限趋近于某个定值时，所对应的函数值的变化情况；另一方面可以借助信息技术工具在绘图方面的优势，让学生观察函数图像的变化情况，从操作确认的层面接受“利用导数研究函数性质”的合理性.

评价建议

在知识与技能层面，要求学生：理解导数的概念及其几何意义；记住并能利用常用的求导公式、导数的四则运算法则以及简单复合函数(形如 $y=f(ax+b)$)的求导法

① 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京：人民教育出版社，2020：40.

② 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京：人民教育出版社，2020：40.

则，求出简单初等函数的导数；能利用导数研究函数的单调性、极值和最值并解决简单的实际问题. 由于本章多数内容的处理上不追求严格的定义和证明，因此在评价过程中需要注意难度上的把握.

在过程与方法层面，要求学生：通过具体情境，直观理解导数概念，感悟极限思想，理解导数是一种借助极限的运算；能够结合实例，借助几何直观，体会导数与函数的单调性、极值、最值的关系，进而有意识地借助导数研究简单函数的性质，并解决简单的实际问题. 由于理解导数概念、感悟极限思想不是一朝一夕能够实现的，因此评价需要关注学生的学习进程. 例如，借助信息技术工具从数值角度观察从平均变化率到瞬时变化率的无限趋近过程.

在能力与素养层面，希望通过本章的学习，发展学生数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算等数学核心素养. 本章中设计的一些例习题和数学探究活动，也为学生素养的评价提供了可能. 例如，从导数运算与几何直观两个方面研究曲线的切线，可以反映学生的直观想象素养；从特殊到一般地探究复合函数求导规律，可以反映学生的合情推理能力；辨析求导运算的正误，可以反映学生的数学运算素养；讨论含有字母系数的三次函数与一元三次方程问题，可以反映学生的数学抽象素养；利用导数研究某个变化过程的瞬时变化率，解决何时利润最大、何时用料最省等实际问题，可以反映学生的数学建模素养.

在情感态度价值观层面，希望学生感悟极限思想是人类深刻认识和表达现实世界必备的思维品质；通过收集并阅读微积分创立过程的相关资料，体会微积分对数学发展的作用；发展好奇心和求知欲，对未来进入大学学好微积分抱有渴望. 这部分的评价可以借助课堂观察、课外活动等形式来实现.

二、教材分析与教学建议

5.1 导数的概念及意义

教学重点

通过实例分析，经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实

际背景，知道导数是关于瞬时变化率的数学表达，体会导数的内涵与思想，体会极限思想.

通过函数图像直观理解导数的几何意义.

内容分析

本节内容围绕导数的概念展开，包含导数的物理意义(运动物体某时刻的瞬时速度)和几何意义(曲线某点处的切线斜率). 概念展开的主要方式是：首先通过瞬时速度问题揭示导数概念形成过程中的极限思想；然后借助平均变化率和瞬时变化率的比较，给出导数的定义；接着用同样的极限思想引入切线的定义，说明函数在某点处的导数就是相应的曲线在该点处的切线斜率；最后通过水平切线的特例介绍驻点的概念.

导数是研究变化和变化中瞬时状态的一个核心概念，也是学生接触高等数学的一个重要概念. 通过导数几何意义的学习，既可以丰富学生对于切线概念的认识，又可以将导数概念直观化，为后续利用导数研究函数的单调性奠定基础. 而极限思想则始终渗透在本节内容的学习过程之中.

本节分为两个小节.

第 1 小节由瞬时速度的讨论引入“函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数”的概念.

高铁情境的引入是为了帮助学生感受导数学习的必要性. 由于在运动变化中需要刻画瞬时状态，因此运用了把时间段不断细分的极限思想.

例 1 分别从数值和解析式两个角度帮助学生理解时间段长度$|h|$无限趋近于零的过程，希望学生从观察一系列具体数值入手，初步感受导数这一抽象概念的内涵.

例 2 提出了另一个实际问题，希望学生了解导数所解决的不仅仅是瞬时速度问题，而是一般意义下的瞬时变化率问题.

练习 5.1(1)的两个情境用于巩固关于平均变化率和瞬时变化率的理解，分别涉及二次函数和一次函数. 第 1 题中的瞬时变化率随时间的变化而变化，第 2 题中的瞬时变化率则始终如一. 此类练习可以为学生后续理解导函数的概念做铺垫.

第 2 小节介绍“函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数”的几何意义.

在本套教材选择性必修第一册“第 2 章 圆锥曲线”的学习中，出现过关于圆和椭圆切线的讨论，但使用的是初中几何课程中的定义：与圆(椭圆)只有一个公共点的直线是它的切线；在学习抛物线时又通过例题帮助学生认识到：该定义无法推广到包括双曲线和抛物线在内的一般曲线，不具有一般性. 直到学习了本章中切线的一般定义，

学生才能获得对切线概念较为完整的认识.

本节类比瞬时速度给出了一般曲线切线的定义，意在帮助学生完成对切线概念的再认识，体会几何学中研究曲线的变化特性也需要极限思想.

例 3 以半圆上某点处的切线为例，帮助学生感受“新”的切线定义与以往学习的圆的切线的定义是一致的. 需要注意的是，此处涉及的函数比较复杂(其求导运算超出了课程标准的要求)，因此仅借助信息技术工具，帮助学生从数值变化上体会割线趋近于切线的过程.

相应地，习题 5.1B 组第 2 题也不要求学生进行求导计算，而是借助导数的几何意义，通过之前已有的求圆的切线的知识来解决问题.

例 4 和例 5 是以简单的幂函数为例，帮助学生体会如何借助导数求曲线在某点处的切线方程. 需要说明的是，在接下来学习了 5.2 节“导数的运算”以后，此处的求导过程就不必再从定义开始了. 此外，例 5 中的切线是“穿过”曲线的，和学生已有的对于圆的切线的认识有所不同，教师可以引导学生结合本节所介绍的切线定义进行理解.

练习 5.1(2)用来巩固关于导数几何意义的认识，其中第 2 题是为后续学习利用导数研究函数的性质做铺垫，因此只需要通过图像进行观察，而不要求对导数值进行计算. 习题 5.1 A 组第 7 题也是如此.

本节习题中还设置了一些求 $y=f(x)$在 $x=a$ 处的导数的问题，如习题 5.1 A 组的第 3 题. 这是为下一节学习中从“函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数”到“函数 $y=f(x)$的导函数”的过渡做铺垫.

注意事项

本节的重点在于经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，体会导数的意义与极限思想，通过函数图像直观地理解导数的几何意义. 应该注意避免在求导过程中出现复杂的极限运算. 因此，本节例习题中，凡是需要根据定义进行导数计算的函数，都是简单的不超过三次的多项式函数，教师在教学中也不宜拔高难度. 因为在接下来学习了 5.2 节“导数的运算”以后，函数的求导就可以借助公式与法则来进行了.

由于在高中阶段缺少严格的函数极限的定义，也不介绍极限的性质及四则运算法则，因此教材中利用定义求导的过程总是先化简$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$，再令 h 趋近于 0，

从而求出极限. 需要注意的是，学生未来进入大学学习了极限的四则运算法则之后，并不需要遵循这样的解题“规范”，因此，不建议在教学中强化这样的步骤意识，只要做到“混而不错”即可.

此外，本节中出现了函数“驻点”的概念，需要说明的是驻点和今后要接触到的极值点、无定义的点等，都指代自变量的取值，即位于一维的 x 轴上的点，它们的表示方式与二维平面、三维空间中点的坐标表示不同. 显然，在研究函数的分界点时，我们更加关注自变量的取值.

教学建议

本节所创设的问题情境意在体现导数的重要价值，帮助学生初步感受导数对于刻画运动变化的局部特征的作用. 无论是高铁的情境，还是切线概念的引入，都是为了帮助学生感受导数学习的必要性. 在教学中需要特别关注这一情感态度目标的实现.

极限思想是本节学习的难点，教学中可以充分借助信息技术工具，组织学生动手实践，一方面从数值变化上获得具象的认识，另一方面从图像变化上获得直观印象.

5.2　导数的运算

教学重点

能根据导数定义求函数 $y=C$、$y=x$、$y=x^2$、$y=x^3$、$y=\dfrac{1}{x}$和 $y=\sqrt{x}$ 的导数. 记住并利用教材中给出的基本初等函数的求导公式和导数的四则运算法则，求简单函数的导数；能求简单的复合函数(限于形如 $y=f(ax+b)$)的导数.

内容分析

本节内容围绕导数的运算展开，首先基于函数在某点处导数的概念，引入导函数的概念，然后由导数的定义推得 $y=C$、$y=kx+b$、$y=x^2$、$y=x^{-1}$和 $y=x^{\frac{1}{2}}$这几个简单函数的导数，进而不加证明地给出若干基本初等函数的求导公式. 为了便于处理更多初等函数(由基本初等函数的四则运算以及复合运算得到的函数)的求导问题，还介绍了导数的四则运算法则和形如 $y=f(ax+b)$的简单复合函数的求导法则，并以代数推理的形式对其中积的求导法则以及简单复合函数的求导法则进行了合理性说明.

导数的运算是微积分的基础性知识，是学生使用微积分解决实际问题的基础. 本

节的意图是呈现初等函数求导的一般方法. 由于初等函数是由基本初等函数通过四则运算以及复合运算得到的，因此一旦知道了常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这六类基本初等函数的求导公式，再结合导数的四则运算法则以及复合函数求导法则，就可以完成对所有初等函数的求导. 虽然在高中阶段不要求学生掌握反三角函数的有关内容，且对于复合函数求导也仅限于 $y=f(ax+b)$ 的形式，但是并不妨碍在本节的学习过程中让学生体会解决初等函数求导问题时这种化繁为简的思想.

本节正文与例题部分均以纯数学背景下的求导运算为主，旨在帮助学生熟练应用求导公式和法则. 同时，在习题中创设体温变化、潮水涨落、火车加速、气球膨胀、汽水冷藏等不同的现实情境，一方面帮助学生巩固运算技能，另一方面延续上一节的学习主题，进一步理解导数的意义，体会导数的应用价值.

本节分为三个小节.

第 1 小节是基本初等函数的导数.

例 1 是利用导函数的定义求常数函数的导数，并且从导数的几何意义上帮助学生直观感受“常数函数的导数为零”这一重要结论. 该结论在后续求导计算中将作为公式使用.

例 2 也是从数与形两个方面讨论函数 $y=kx+b$ 的导数. 先从几何的角度进行分析得到问题的答案，再根据定义从代数的角度运算求解，从而帮助学生再次感受数与形的统一.

例 3 是借助定义对三个简单的幂函数求导. 需要注意的是，在求导公式中包含 x 和 h 两个字母符号，由于最终考虑的是 h 趋近于 0 时的极限，因此在计算 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 的过程中，可以将 x 看作常量. 在第(3)小题中用到了分子有理化的方法，目的是借助平方差公式与分式的性质，将 $\dfrac{0}{0}$ 型(分式中分子和分母分别趋近于 0)的极限问题转化为可以用四则运算求解的极限问题. 由于高中课程不包含系统的极限知识，因此在教学过程中只要让学生初步了解：对这类问题在分式的极限无法确定的情况下还需进一步化简，化简的目的通常是约去分子或分母中趋近于 0 的部分.

本节中给出的 6 个求导公式，除公式(1)和公式(2)的一些特殊情况外，都不要求

证明，感兴趣的师生可以阅读本教学参考资料章末的附录. 对于指数函数和对数函数的求导，本套教材仅把形式最简单的$(e^x)'=e^x$和$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$列为公式，而对于它们的一般化则作为例题放在导数四则运算的应用和简单复合函数求导法则的应用当中(见本节例 8 和例 10).

例 4 是对求导公式的直接应用. 希望学生了解像$y=\dfrac{1}{x^2}$、$y=\sqrt{x}$这样的函数都可以转化为幂函数的形式，因此可以直接利用公式求导.

例 5 是一个求驻点的问题，也就是求导数为零时 x 的值. 此处三角方程的解有无数个，因此驻点也有无数个. 边框中的问题旨在帮助学生回顾：曲线在其驻点处的切线是一条水平直线.

第 2 小节是导数的四则运算.

要求学生记住导数的四则运算法则，但不要求掌握公式的证明. 教材为积的求导法则提供了形式上的推导，但在缺少极限与连续相关理论的前提下，这样的推理也是不够严密的，仅用于反映求导法则的合理性，以及为什么“积的求导”与“和的求导”不同. 在教学中可以通过特殊的例子帮助学生感受在对积求导时，通常$(f(x)g(x))'$并不等于$f'(x)g'(x)$. 例如，$(x\cdot x)'=(x^2)'=2x$，然而$(x)'\cdot(x)'=1$，两者显然并不相等.

例 6 是利用积的求导公式以及常数函数的求导公式得出推论$(Cf(x))'=Cf'(x)$，该结论在后续求导运算中可以作为公式使用.

例 7 是借助求导公式和四则运算法则求导. 要求学生看出初等函数是由哪些基本初等函数通过怎样的运算生成的，进而正确使用公式. 其中，第(3)小题是一个复合函数，在此处需要先展开再求导，也可以看作两个 $x-2$ 的乘积来求导，等后续学习了简单复合函数的导数，则可以用新的方法求解. 设置这样的问题是为了让学生体会：只要正确使用求导公式，不同方法所得的求导结果是一致的，进而加深对求导公式合理性的认识.

例 8 是利用已有的求导公式和法则推出一般对数函数的求导公式.

第 3 小节是简单复合函数的导数.

教材也为形如 $y=f(ax+b)$的简单复合函数的求导法则提供了形式上的推导，

以帮助学生理解和接受法则.

例 9 是对简单复合函数求导法则的直接应用.

例 10 是利用已有的求导公式和法则推出一般指数函数的求导公式.

在本节练习和习题中，有时会鼓励学生通过多种方法求导，目的是在巩固求导法则运用的同时，帮助学生感受法则的合理性. 例如，练习 5.2(3)的第 2 题，习题 5.2 的第 7 题和第 10 题.

注意事项

本章的重点是帮助学生掌握基本的求导运算，从而服务于后续学习中导数的应用. 因此，并不要求学生处理复杂的函数求导问题，也不要求掌握过多的求导公式. 在本章章末的“内容提要”中列出了需要学生掌握的常用求导公式与法则，可供教学参照.

对于求导问题来说，在没有特殊需要的情形下，通常认为答案的所有等价形式都是正确的.

此外，本章中导数乘法法则和简单复合函数求导法则的推理过程是建立在初等函数连续、可导推出连续等知识基础上的，但考虑到学生没有极限与连续的相关知识储备，因此采取混而不错的方式，不作特别说明.

按照课程标准要求，一般地，在高中阶段研究的与导数有关的问题中，所涉及的函数都是可导函数. 所以教材中不出现“可导”的概念. 例如，对于幂函数的求导公式 $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ 来说，若考虑某一特定的 α 取值，则对于某个具体的 x 而言，只要在所在的某个开区间内该函数有定义，则该公式适用.

学生在求导过程中可能会误将 $f'(x_0)$ 写成 $(f(x_0))'$，如将 $f'(2)$ 写成 $(f(2))'$. 需注意 $f'(2)$ 表示函数 $y=f(x)$ 的导(函)数(即 $y'=f'(x)$)在 $x=2$ 时的值；而 $(f(2))'$ 表示常数函数的导(函)数，其值为 0.

教学建议

由于缺乏极限运算的相关基础，本节中的许多结论都是直接告知学生的，因此在教学中需要尽可能创造机会，帮助学生从多种角度理解公式和法则的合理性. 例如，在已经求得一些简单幂函数的导数之后，可以猜想一般幂函数的求导公式. 又如，函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的求导，既可以利用积的求导法则，又可以利用商的求导法则. 比较两种

方法的运算过程与结果，可以帮助学生注意到：在积的求导公式中，是两项之和；而在商的求导公式中，分子上是两项之差.

本节还设计了两个探究与实践活动. 第 14 页的活动可以帮助学生复习基本初等函数的解析式和图像，同时巩固基本求导公式；第 18 页的活动中可以先请学生用已有的方法对复合函数求导，然后比较复合函数及其内层函数、外层函数的导数，进而猜想复合函数求导的一般规律，发展合情推理能力.

5.3 导数的应用

教学重点

结合实例，借助几何直观了解函数的单调性与导数的关系，能利用导数研究函数的单调性；对于多项式函数，能求不超过三次的多项式函数的单调区间.

借助函数的图像，了解函数在某点处取得极值的必要条件和充分条件；能利用导数求某些函数的极大值、极小值以及给定闭区间上不超过三次的多项式函数的最大值、最小值；体会导数与单调性、极值、最大(小)值的关系.

内容分析

本节内容围绕导数的应用展开. 在上一节掌握基本求导运算的基础上，首先利用导数的正负来判断函数的单调性，接着介绍极值点和极值的概念及其判断方法，然后讨论闭区间上连续函数的最大、最小值，最后将导数用于二次函数和实际问题的研究.

在初中阶段，学生对函数单调性的判断依赖于几何直观，缺少严密的推理；到了高中课程的必修部分，学生开始将定义作为判断函数单调性的依据，但是在此过程中，有可能碰到较为复杂、难以处理的不等式；本节中呈现的则是判断函数单调性的一种新方法，该方法简便易行，具有普适性.

本节中，学生需要感悟导数作为研究函数单调性强有力的工具，为研究函数的几何性质提供了通法，并通过利用导数解决现实问题的若干实例分析，理解为什么函数可以成为构建数学模型的有效的数学语言，从而理解利用导数研究函数的性质不仅是数学本身的需要，更是现实世界的需要，它在解决最优化等实际问题中有着广泛的应用.

为了帮助学生接受未加证明的定理，本节中的例题和习题既要让学生用导数研究熟悉的函数(如例 1、例 6、例 7、例 9，练习 5.3(1)的第 1 题，练习 5.3(2)的第 1 题，以及练习 5.3(3)的第 2 题)，也要让学生用导数研究陌生的函数(如例 2、例 8、例 10，

练习 5.3(1)的第 2 题，练习 5.3(2)的第 2 题，练习 5.3(3)的第 3 题). 前者是希望通过比较结果的一致性，帮助学生接受定理；后者则是希望通过处理陌生的函数，帮助学生体会定理的应用价值. 类似地，第 25 页至 27 页中以导数为工具对一般的二次函数、一元二次方程以及一元二次不等式进行研究，也是为了让学生在相信定理的同时，感受导数为研究函数性质所带来的便利.

本节分为五个小节.

第 1 小节直接给出了利用导数判断函数单调性的定理. 由于该定理的证明超出了高中所学，因此教材在边框处建议学生借助信息技术工具,从具体、直观的角度发现和验证这一重要结论. 在一个区间内，“函数在每一点处导数大于零”是局部性质，而“函数严格增”是整体性质，在教学过程中应注意帮助学生感悟局部与整体的关联.

例 1 是对定理的直接应用，研究对象是熟悉的二次函数. 但是由于缺少极限与连续的相关知识，因此在求单调区间时不要求学生对区间端点进行考虑，教材中也全部使用了开区间.

例 2 也是对定理的直接应用，研究对象是较为陌生的三次函数.

例 3 提供了一个反例，用以说明“函数严格增并不能推出其导数严格大于 0”，也就是说，本节所学定理反之是不成立的.

例 4 以及习题 A 组第 4 题第(2)小题，指出函数在无定义的点处导数不存在，这样的点也会成为函数单调区间的分界点.

例 5 和复习题 A 组第 1 题，则是借助对函数图像的观察，帮助学生体会导数在描述函数局部特征时的量化作用. 从定性到定量是数学研究的基本思路，而导数恰恰提供了定量研究函数变化的工具，它不仅能够帮助确定函数的单调性，还能反映其变化的陡峭程度.

第 2 小节是利用导数研究函数的极值.

需要注意的是，对于一般函数而言，极值点不一定是驻点，但是在可导的前提下，极值点一定是驻点；反过来，函数的驻点不一定是极值点，教材中给出了反例 $y=x^3$，并以定理形式给出了判断驻点是否为极值点的方法.

例 6 是对定理的直接应用，研究对象是熟悉的二次函数. 在分析函数单调区间和极值点的过程中使用了列表的方式，使结果更清晰地呈现出来.

例 7 也是对定理的直接应用，研究对象是正弦函数. 该函数具有周期性，虽然它

的驻点有无数个，但是通过对一个周期上的情况进行考虑，就可以得出问题的完整结论. 该结论在本套教材必修第二册“7.1 正弦函数的图像与性质”中已经出现过，但是在之前的学习中，结论的获得仅依赖于对函数图像的观察，而此处则得到了论证.

例 8 也是对定理的直接应用，研究对象是较为陌生的三次函数，帮助学生进一步体会导数在研究函数性质方面的强大功能.

第 3 小节是利用导数研究函数的最值.

闭区间上的连续函数一定存在最大值和最小值. 对于闭区间上的连续函数而言，如果最值出现在区间内部，那么一定是极值，因此，只要比较区间端点处的函数值以及极值的大小，就可以确定最大值和最小值. 一般而言，区间内部的极值有可能在不可导点取得，鉴于高中阶段暂不讨论函数可导与否的问题，教材在函数可导的前提下给出了利用导数求最值的方法.

例 9 和例 10 都是先求出函数的驻点，再将驻点处的函数值与区间两端点处的函数值进行比较，进而得到最大值和最小值. 前者的研究对象是熟悉的二次函数，后者的研究对象则是较为陌生的三次函数. 之所以不需要对驻点是否为极值点进行判断，一方面是因为极值点包含于驻点当中，不会在讨论过程中被遗漏，另一方面，那些不是极值点的驻点所对应的函数值既不会大于函数的最大值，也不会小于函数的最小值，对问题的答案不会产生影响.

第 4 小节“利用导数研究二次函数”是对本节所学内容的应用以及对本套教材必修第一册相关内容的回顾与再认识.

在利用导数研究函数单调性、极值以及最值的习题中，教科书有时会就相同的函数提出不同的问题，以便于教师在整个教学中可以协同处理. 例如，练习 5.3(2)的第 2 题和练习 5.3(3)的第 3 题；又如，复习题 A 组第 6 题和第 7 题.

第 5 小节是利用导数解决实际问题.

为了反映导数在现实世界中的应用，本节例题均设置了实际生活情境. 对于含有较多字母符号的问题，在教学中需要注意帮助学生区分常量和变量，如例 13.

例 11 中无盖长方体盒子是学生熟悉的情境. 它曾出现在本套教材必修第一册“5.3 函数的应用”之“3 用二分法求函数的零点”这一小节当中，当时研究这样的三次函数还只能采用描点法作出图像，进行观察，而今有了导数这一强大的工具，通过简单的运算和推理，就能够了解函数的单调性、极值和最值.

例 12 是一个经济学中的问题，其中第(1)问复习导数的意义，第(2)问利用导数求函数的最值.

例 13 讨论木质房梁的抗弯强度. 根据问题的实际意义，房梁过宽或过窄其抗弯强度都是较小的，因此在梁宽 b 所在的区间 $(0,d)$ 内部，必然存在某一取值所对应的抗弯强度最大. 同时，通过计算发现，抗弯强度 W 关于梁宽 b 的函数在区间内仅有一个驻点，由此可知，函数的最大值恰在驻点处取得.

例 14 讨论的是船只航行费用的问题，需要学生在理解题意的基础上先自行写出函数解析式及其定义域，再求出最值.

注意事项

由于缺少单侧连续等概念，本节中的单调区间均用开区间表示，也不要求学生对区间端点的情况进行讨论.

在本节中需要注意帮助学生区分极值和最值的差异：前者刻画的是函数在某点的邻域内的局部特征，后者则反映了函数在某个区间内的整体特征. 练习 5.3(3)的第 1 题和习题 5.3A 组第 3 题都是为此而设计的.

教学建议

由于缺少中值定理的相关知识，高中阶段无法对“利用导数研究函数单调性”的定理进行严格证明. 因此，在教学中建议借助信息技术工具，组织学生从数值和图像两个角度出发，对一些具体的函数进行研究，探究导数与函数几何性质之间的关系，从而通过合情推理猜想得到这一命题. 此后，再借助一些熟悉的函数对结果进行验证，如例 1 以及练习 5.3(1)的第 1 题.

在本节教学中可以充分发挥现代信息技术工具在绘制函数图像方面的优势，对利用导数推得的函数性质进行观察确认，体会导数作为强有力的工具为一般性地研究函数打开了崭新的世界.

本节末尾还提供了课后阅读材料“微积分简史”. 教师可以创设任务，鼓励学生收集、阅读对微积分的创立和发展起重大作用的有关资料，包括一些重要历史人物(牛顿、莱布尼茨、柯西、维尔斯特拉斯等)和事件，采取独立完成或者小组合作的方式，完成一篇有关微积分创立与发展的研究报告.

三、参考答案或提示

5.1　导数的概念及意义

练习 5.1(1)

1.（1）30 m/s.　（2）30 m/s.　（3）$10a$ m/s.

2.（1）2π.　（2）2π.

练习 5.1(2)

1. $y=-6x-3$，$y=6x-3$.

2.（1）正.　（2）负.

习题 5.1

A 组

1.（1）$4.05g$ m/s，$4.005g$ m/s，$4.0005g$ m/s.　（2）$4g$ m/s.

（3）ag m/s.　（4）$\frac{5}{2}g$ m/s.

2.（1）90 m/s，70 m/s.　（2）80 m/s.　（3）10 s.

3.（1）3 m^3/s.　（2）在 $t=a$(s)附近，流水量大约以 3 m^3/s的速度增加.（3）不变，因为 $f'(a)$是常数.

4.（1）$2\pi a+\pi h$.　（2）$2\pi a$.

5.（1）$\frac{3}{4}$.　（2）变大.

6.（1）4.　（2）2.　（3）0.　（4）-2.　（5）-4.

这些斜率的值随着自变量的增大而减小.

7.（1）正.　（2）正.

B 组

1.（1）4π 弧度/秒.　（2）12π 弧度/秒.

2.（1）$\frac{\sqrt{3}}{3}$.　（2）0.　（3）$-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. $f(1)=1$，$f'(1)=4$.

4. $-\frac{1}{3}$.

5.2 导数的运算

练习 5.2(1)

1. $y'=2x+3$.

2. (1) $y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.　　(2) $y'=\pi x^{\pi-1}$.

3. -1.

4. 提示：函数在其定义域内导数恒大于零.

练习 5.2(2)

(1) $y'=3e^x-ex^{e-1}$.　　(2) $y'=-\sin x+\frac{2}{x^2}$.　　(3) $y'=24x^2+24x+6$.

(4) $y'=\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\cos x$.　　(5) $y'=\ln x+1+\frac{2}{x^3}$.　　(6) $y'=1+\frac{1}{x^2}$.

(7) $y'=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$.　　(8) $y'=\sec^2 x$.

练习 5.2(3)

1. (1) $y'=8x-12$.　　(2) $y'=2\cos 2x$.

2. $f'(x)=-\frac{2}{(2x-1)^2}$. 提示：既可以用商的求导公式，也可以看作复合函数求导.

3. $y=-6x\ln 2+2$.

4. (1) $y'=3\sqrt{2-x}-\frac{3x}{2\sqrt{2-x}}$.　　(2) $y'=\frac{2}{x(2x+1)}-\frac{\ln(2x+1)}{x^2}$.

习题 5.2

A 组

1. (1) $y'=0$.　　(2) $y'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$.　　(3) $y'=-\frac{3}{x^4}$.

2. $y=-x+\frac{\pi}{2}$.

3. （1）$\left(\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{1}{2}},\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$或$\left(-\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{1}{2}},-\left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$.　（2）正.

4. $y=7$，$(-1,7)$；或 $y=3$，$(1,3)$.

5. $y=-x-2$，$(-1,-1)$；或 $y=-x+2$，$(1,1)$.

6. （1）$y'=2ex^{e-1}$.　（2）$y'=e^x\cos x-e^x\sin x$.　（3）$y'=-\frac{1}{(x-2)^2}$.

（4）$y'=\frac{1}{x\sin x}-\frac{\ln x\cos x}{\sin^2 x}$.

7. $y'=-8x+11$. 提示：可以先用积的求导公式，也可以先把函数表达式展开.

8. （1）$h(1)=\frac{22}{3}$，$h'(1)=9$.　（2）$h(1)=\frac{47}{3}$，$h'(1)=44$.　（3）$h(1)=\frac{7}{6}$，$h'(1)=-\frac{1}{12}$.

9. （1）$y'=\frac{1}{\sqrt{2x-5}}$.　（2）$y'=-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$.　（3）$y'=-\frac{1}{e^{x+1}}$.

10. $y'=-\frac{2}{(x-1)^2}$. 提示：既可以用商的求导公式，也可以看作复合函数求导.

11. （1）-1.2 ℃/min.　（2）2.7 min.

12. $-\frac{\pi}{8}$ m/h，$\frac{\pi}{8}$ m/h.

B 组

1. （1）$(0.4+1.2t)$ m/s^2.　（2）3 s.

2. （1）不是，因为导数恒大于零.　（2）是，$b=\pm 2$.

3. （1）$r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.　（2）$\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$.

4. （1）不正确，第二个减号应改为加号.　（2）不正确，应在结果前加负号.

5. $y=\pm 2\sqrt{2}x-1$. 提示：可先设切点为$(a,2a^2)$.

6. （1）$-32e^{-2}$，汽水放入冰箱后 1 小时左右，温度大约以 $32e^{-2}$℃/h 的速度降低.　（2）$y'=-\frac{288}{5}e^{-2t}$，汽水放入冰箱后 t 小时左右，温度大约以$\frac{288}{5}e^{-2t}$℉/h 的速度降低.

7. （1）$y'=2x\sin 3x+3x^2\cos 3x+x^{-\frac{3}{2}}$.　（2）$y'=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$.

5.3 导数的应用

练习 5.3(1)

1. (1) 单调增区间为$(-\infty,+\infty)$.　(2) 单调增区间为$(0,+\infty)$.　(3) 当$a>0$时，单调减区间为$\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right)$，单调增区间为$\left(-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$；当$a<0$时，单调增区间为$\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right)$，单调减区间为$\left(-\dfrac{b}{2a},+\infty\right)$.

2. (1) 单调减区间为$(-\infty,-1)$，单调增区间为$(-1,+\infty)$.　(2) 单调增区间为$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$及$(1,+\infty)$，单调减区间为$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

练习 5.3(2)

1. 单调减区间为$(2k\pi,2k\pi+\pi)$，单调增区间为$(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$，其中$k\in\mathbf{Z}$；在$x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$处取得极大值1，在$x=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$处取得极小值$-1$.

2. 单调增区间为$(-\infty,-1)$及$(1,+\infty)$，单调减区间为$(-1,1)$；在$x=-1$处取得极大值2，在$x=1$处取得极小值-2.

练习 5.3(3)

1. 由最大值的定义可知，(2) 正确；(1)(3)(4)不正确，理由略. 提示：可借助函数图像举反例.

2. $[-4,0]$.

3. 最大值是2，最小值是0.

练习 5.3(4)

1. 200.

2. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}R$.

习题 5.3

A 组

1. (1) 单调减区间为$(-\infty,+\infty)$.　(2) 单调减区间为$(0,+\infty)$.

2. 单调减区间为$\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$，单调增区间为$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，在$x=0$处取得极小值1.

3. 在b处取得最大值，不是极大值点；在x_4处取得最小值，是极小值点.

4. (1) 单调减区间为$(-\infty,-1)$，单调增区间为$(-1,+\infty)$，在极小值点$x=-1$处取得极小值 2.

(2) 单调增区间为$(-\infty,-1)$及$(1,+\infty)$，单调减区间为$(-1,0)$及$(0,1)$，在极大值点$x=-1$处取得极大值-2，在极小值点$x=1$处取得极小值 2.

(3) 单调减区间为$(-\infty,-1)$及$(1,+\infty)$，单调增区间为$(-1,1)$，在极小值点$x=-1$处取得极小值-2，在极大值点$x=1$处取得极大值 2.

(4) 单调增区间为$(-\infty,-2)$及$(0,+\infty)$，单调减区间为$(-2,0)$，在极大值点$x=-2$处取得极大值$\frac{4}{e^2}$，在极小值点$x=0$处取得极小值 0.

5. 提示：在$(-\infty,+\infty)$上导数恒大于零.

6. 单调减区间为$(-\infty,-2)$及$(2,+\infty)$.

7. 提示：函数在其定义域内导数恒大于零.

8. $[-1,15]$.

B 组

1. (1) $n=1$时，无驻点，无极值点；n是大于 1 的正奇数时，$x=0$是驻点，无极值点.

(2) n是正偶数，$x=0$是驻点，也是极小值点.

2. -7.

3. 当长为 2 m、宽为 1 m、高为$\frac{3}{2}$ m 时，体积最大，最大体积是 3 m^3.

4. 9 元.

复习题

A 组

1. ③⑤②④⑥①.

2. (1) $y=\frac{1}{4}x+1$.　(2) $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$.

3. (1) 12 m.　(2) 10 m/s.　(3) 5 m/s.　(4) $\frac{3}{2}$s，$\frac{93}{4}$ m.

4. (1) $3-5e$.　(2) e.　(3) $\frac{1}{e}$.　(4) $\frac{2}{3}+3e^2$.

5. (1) $y'=-\cos x$.　　(2) $y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+3x^{-4}$.　　(3) $y'=-4x+\frac{43}{2}$.

(4) $y'=-\frac{\sin x}{x^2}-\frac{2\cos x}{x^3}$.

6. (1) 单调增区间为$(-\infty,+\infty)$，无极值点.

(2) 单调增区间为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$，单调减区间为$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，$x=\frac{1}{2}$是极大值点.

(3) 单调增区间为$(-\infty,-2)$及$\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$，单调减区间为$\left(-2,\frac{4}{3}\right)$，$x=-2$是极大值点，$x=\frac{4}{3}$是极小值点.

7. (1) 最大值是1，最小值是-1.

(2) 最大值是$\frac{9}{4}$，最小值是0.

(3) 最大值是19，最小值是$\frac{13}{27}$.

B组

1. 单调增区间为$(-2,0)$，单调减区间为$(0,2)$，$x=0$是极大值点.

2. 1或$\frac{13}{4}$. 提示：可以设切点为(x_0,x_0)，一方面切点满足曲线方程，另一方面曲线在该点处导数为1，解方程组可得x_0与a的值.

3. 函数表达式为$y=x^3-3x^2$，单调减区间为$(0,2)$.

4. 80 km/h.

5. $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，$h=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

6. 25件.

拓展与思考

1. 当$a\geqslant 0$时，单调增区间为$(-\infty,+\infty)$；当$a<0$时，单调增区间为$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{-a}{3}}\right)$及$\left(\sqrt{\frac{-a}{3}},+\infty\right)$，单调减区间为$\left(-\sqrt{\frac{-a}{3}},\sqrt{\frac{-a}{3}}\right)$.

2. (1) 当$a\geqslant 0$时：方程有唯一实根.　　(2) 当$a<0$时：若$b>\frac{2\sqrt{3}}{9}(\sqrt{-a})^3$或

$b<-\frac{2\sqrt{3}}{9}(\sqrt{-a})^3$，则方程有唯一实根；若 $b=\pm\frac{2\sqrt{3}}{9}(\sqrt{-a})^3$，则方程恰有两个实根；若 $-\frac{2\sqrt{3}}{9}(\sqrt{-a})^3<b<\frac{2\sqrt{3}}{9}(\sqrt{-a})^3$，则方程恰有三个实根. 提示：当 $a<0$ 时，考虑 $x=-\sqrt{\frac{-a}{3}}$ 及 $x=\sqrt{\frac{-a}{3}}$ 时函数值的正负.

四、相关阅读材料

参考文献

[1]华东师范大学数学系. 数学分析(上册)第三版[M]. 北京：高等教育出版社，2001.

[2]齐民友. 遥望星空(二)—牛顿、微积分、万有引力定律的发现[M]. 北京：高等教育出版社，2008：18—60.

[3]卡尔・B. 波耶. 微积分概念发展史[M]. 唐生，译. 上海：复旦大学出版社，2007.

附录

以下给出教材中常用求导公式的证明过程，其中会涉及函数极限运算法则、反函数求导、一般复合函数求导等相关知识，根据课程标准要求，它们不在常规教学内容之内，可供教师参考，或作为学有余力者的课外拓展资料. 以下公式出现的顺序与教材有所不同，是考虑了证明的逻辑顺序.

① $(C)'=0$，C 为常数.

证明详见教材 5.2 节例 1.

② $(\sin x)'=\cos x$.

证明：当 $h\neq0$ 时，

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}},$$

从而，当 h 趋近于 0 时，$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x$.

$\Bigg($此处用到了三角函数中的和差化积公式：$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$，函数极限运算的乘法法则，以及重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.\Bigg)$

③ $(\cos x)'=-\sin x$.

证明：当 $h\neq 0$ 时，

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}},$$

从而，当 h 趋近于 0 时，$f'(x)=-\lim\limits_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-\sin x$.

$\Bigg($此处用到了三角函数中的和差化积公式：$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$，函数极限运算的乘法法则，以及重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.\Bigg)$

④ $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

证明：当 $h\neq 0$ 时，

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}},$$

从而，当 h 趋近于 0 时，$f'(x)=\frac{1}{x}\lim\limits_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}$.

(此处用到了函数极限运算的乘法法则以及重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.)

⑤ $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$.

证明：设 $y=\mathrm{e}^x$，则 $x=\ln y$. 利用反函数求导公式，得

$$(\mathrm{e}^x)'=\frac{1}{(\ln y)'}=y=\mathrm{e}^x.$$

（此处用到了反函数求导公式：$f'(x)=\dfrac{1}{g'(y)}$，其中 $x=g(y)$是函数 $y=f(x)$的反函数.）

⑥ $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$，$\alpha$ 为常数.

证明：因为 $x^\alpha=\mathrm{e}^{\alpha\ln x}$，利用复合函数求导公式，得

$$(x^\alpha)'=(\mathrm{e}^{\alpha\ln x})'=\mathrm{e}^{\alpha\ln x}(\alpha\ln x)'=x^\alpha\alpha(\ln x)'=\alpha x^\alpha\frac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

$\Big($此处用到了复合函数求导公式：$(f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x)$，以及常用求导公式$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.$\Big)$

第 6 章　计数原理

一、本章概述

总体要求

计数问题是数学中的研究对象之一，乘法（分步）原理和加法（分类）原理是解决计数问题最基本的方法. 排列与组合是学习概率理论的基础知识，由于其思维方法的新颖性和独特性，也是培养学生思维能力的不可或缺的素材. 作为初中多项式乘法公式的推广，二项式定理不仅使组合等内容得到深化，也为后面学习概率分布打下基础.

在小学和初中，学生已经掌握了枚举、分类讨论等基本的计数方法，学习了多项式的乘法公式. 本章旨在将这些基本的计数方法和乘法公式进行提炼，归纳出一般的计数方法和多项式展开式的基本规律，并使用这些工具研究概率等方面的问题.

高中阶段学习的计数方法是小学和初中阶段所学的计数方法的提升和抽象. 限于学生的知识水平，本章不强调理论推导，而是通过具体生活和数学中的例子归纳总结两个计数原理（加法原理和乘法原理），并对不同的计数现象进行剖析，从而总结出两种基本的计数模型——排列与组合. 进一步地，将排列与组合的知识运用到二项式定理或概率中，使学生对计数原理等工具的数学价值形成更深的认识. 这样的学习过程，遵循的是从具体到抽象的思路，符合学生的认知规律，并有助于培养学生的数学抽象素养.

课时安排建议

本章的课时安排建议为 11＋1，共计 12 课时. 建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配
6.1 乘法原理与加法原理	2	乘法原理　1 课时
6.1 乘法原理与加法原理	2	加法原理　1 课时
6.2 排列	3	排列的定义　1 课时
6.2 排列	3	排列数的计算　1 课时
6.2 排列	3	排列数的性质　1 课时
6.3 组合	3	组合的定义　1 课时
6.3 组合	3	组合数的计算　1 课时
6.3 组合	3	组合数的性质　1 课时
6.4 计数原理在古典概率中的应用	1	计数原理在古典概率中的应用　1 课时
6.5 二项式定理	2	杨辉三角和二项式定理　1 课时
6.5 二项式定理	2	二项式定理的应用——组合数的性质　1 课时
复习与小结	1	

内容编排与特色

本章内容共分为 5 节，分别是“6.1 乘法原理与加法原理”“6.2 排列”“6.3 组合”“6.4 计数原理在古典概率中的应用”“6.5 二项式定理”.

“6.1 乘法原理与加法原理”从学生熟悉的计数问题中提炼出乘法原理和加法原理；限于学生的知识基础，本节不强调理论推导，而是从具体问题中归纳一般规律，符合学生的认知规律. 另外，本教材在同一节中引入两个原理，这样比较两个原理异同的处理可使认识更深刻，体现认识问题的全面性.

“6.2 排列”遵循“从具体到抽象”的处理方法，作为对两个计数原理的一个基本运用，分别介绍了“排列的定义”“排列数的计算”和“排列数的性质”. 这部分教材内容的特色是突出了与排列数性质相关的问题，旨在加深学生对排列数公式的理解，提高学生的数学运算素养.

“6.3 组合”的处理方式与 6.2 节相同，分别介绍了“组合的定义”“组合数的计算”和“组合数的性质”. 这部分教材内容的特色是突出了与组合数性质相关的问题，旨在加深学生对组合数公式的理解，提高学生的数学运算素养，为进一步学习二项式定理

和概率分布作好铺垫.

“6.4 计数原理在古典概率中的应用”是根据课程标准的指导和教学的实际需要而增加的一节内容. 这部分内容旨在完善学生的知识体系，加深学生对计数原理及其应用的理解，也为进一步学习概率理论作好准备.

“6.5 二项式定理”从学生熟悉的多项式乘法开始，寻找一般性的规律，并用数学归纳法对二项式定理加以证明. 此外，在课后阅读中还利用组合的定义和多项式运算法则进行了证明. 这样处理的目的是加深学生对两个计数原理和排列组合的理解，提高学生的数学抽象和逻辑推理素养. 为突出对数学对象本质的理解，减少非主干知识的干扰，本节删去了原教材中“二项式系数”的定义及一些有关的讨论.

教学提示

教师应梳理本章中原理和方法之间的关系，引导学生的思维从具体到抽象，提高学生使用数学符号的能力. 两个原理(乘法原理和加法原理)和两种模型(排列与组合)的引入，都应从学生熟悉的情境开始，分析问题的本质属性，引导学生进行合理的数学推理. 教师要全盘考虑问题的难度，避免出现超出学生思考能力的计数问题和过于繁杂的问题；鼓励学生使用信息技术学习、探索和解决问题. 例如，利用计算器观察排列数与组合数的变化规律，探索排列数与组合数的关系，等等.

评价建议

在过程性评价中，应关注学生的思维. 对于相同的计数问题，不同的学生可能有不同的思考方式，呈现出不同的解决方法，教师不应把教学重心仅仅停留在“表达形式”的层面上，而应该关注学生的思维活动，对学生的书面表达和口头表达也应加以密切的关注，避免学生在计算过程中出现分类不清、重复计算、思考不全面等现象.

在终结性评价中，应更多地从基本方法的掌握层面上开展考查，避免技巧性强、分类情况较多等繁杂问题.

二、教材分析与教学建议

6.1 乘法原理与加法原理

教学重点

在枚举法计数的基础上，利用生活和数学中的例子将计数方法上升为乘法原理和加法原理这两个基本原理；明确这两个原理之间的差异，注重对问题的剖析，加强分析问题的条理性；在实际情境中，能够根据不同的需要选用适当的原理进行计数.

内容分析

计数是基本的数学活动之一，在问题涉及的数量较小的情况下，可以使用枚举法等方法进行. 而对于一般的计数问题，则需要总结计数规律，形成一定的计数方法. 乘法原理和加法原理是两个基本的计数原理，所有的计数活动都是从这两个原理派生而来的. 这两个原理分别对应了分步与分类这两个基本的数学活动，在明确活动类型的基础上，要选用适当的原理进行计数.

例 1 旨在使学生明确“做完一件事情”的含义，只有每层分别取了 1 本书，才可以说“完成取书”这样一件事情. 在实际的计算中，步骤的顺序并不是主要因素. 在教学中，教师要引导学生完整描述“取书”这样一件事情. 习题 6.1A 组的第 1 至 4 题是利用乘法原理解决的问题.

例 2 是常见的计数问题，为学习例 4 和例 6 作准备.

例 3 旨在说明，对于一个计数问题，要从适当的角度(如本题利用的是正整数的素因数分解)进行考虑. 本题的解决需要学生明确素因数分解、正约数等名词的含义. 习题 6.1B 组的第 4 题是本题的延伸；习题 6.1B 组的第 1 题是一个与多项式展开式有关的项数问题，为此必须明确“展开式中的项”的含义.

例 4 和例 6 是两个有限制条件的计数问题，旨在说明在计数活动中，往往要优先考虑限制条件，在明确限制条件类别(与分类有关，还是与分步有关)的基础上，选用合适

的计数原理进行计算. 习题 6.1A 组的第 5、6 题和习题 6.1B 组的第 3 题是三个有限制条件的计数问题，其中习题 6.1B 组的第 3 题可根据学生的实际情况决定是否选用.

例 5 是一个综合运用乘法原理与加法原理的问题，旨在说明在这类问题中，一般从分类开始，将问题分解成若干“类”，而在每一类的计算中，则使用乘法原理或加法原理进行计算. 习题 6.1B 组的第 2 题是一个与电路相关的问题，需要学生采取类似的方式分析求解.

注意事项

使用“乘法原理”的关键在于合理的“分步”. 计数时，不同的步骤之间应互相独立，即每个步骤所采用的方法，应该不影响其后续步骤所采用方法的选择. 例如，考虑问题“将 4 封不同的信 a、b、c、d 任意投到甲、乙、丙 3 个信箱中，有多少种不同的投法”，正确的计算方法是依次考虑每封信所在的信箱，而如果分别考虑每个信箱所投放的信，则信箱甲的投放情况会影响其他信箱的投放情况.

使用“加法原理”的关键在于合理的“分类”，要做到不重复、不遗漏.

教学建议

在教学过程中，应当突出对两个原理本质的理解，淡化计数的技巧. 在涉及计数原理或排列与组合的综合问题时，应避免过分繁杂的问题. 对于典型的计数问题，重在剖析问题的思考角度，而不是将计算方法和盘托出.

计数问题是与学生的生活实际联系比较密切的数学问题，在教学过程中，应充分利用学生熟悉的计数的例子，详细分析问题的思考角度和计算方法，提升学生对原理的理解.

6.2 排列

教学重点

明确排列和排列数的概念，掌握排列数的计算方法，能进行与排列数有关的简单恒等式的推导和证明.

内容分析

排列是基本的计数模型之一，是乘法原理的一个最主要的应用，学习排列是对学生已有的计数经验的理论提升. 对这部分内容的理解，既需要学生认识乘法原理的本质，熟练掌握排列数的计算，也要熟练运用符号语言. 这部分内容的学习效果

直接影响到后面对组合的学习，在教学中，教师需要处理好问题难度和典型性之间的关系.

例 1 旨在利用枚举法，使学生了解“排列”的含义，明确其核心特点为“元素之间的相对顺序”. 通过这个例子，学生也能初步体会如何计算满足一定条件的排列数，为后面学习排列数的计算作好准备. 练习 6.2(1)的第 1、2 题和习题 6.2A 组的第 1、2 题均是可以使用枚举法解决的排列问题.

例 2 和例 3 提供了解决排列问题的常用方法——对应，一个排列可以对应为将若干个不同的元素放在有编号的位子上. 对应也是解决计数问题的常用方法，不过限于学生的知识基础，教材中只涉及简单的对应. 练习 6.2(2)的第 1、2 题和习题 6.2A 组的第 3 至 5 题的处理方法本质上均可以看作对应.

例 4 是有限制条件的排列问题. 构造三位正整数时，需考虑到百位数不能为 0，因此，可以先考虑受限制的位子的排法，再考虑其他位子元素的排列；或者先考虑受限制的元素的排法，再考虑其他位子元素的排列. 另一方面，本题提供了从反面思考问题的角度，这也是解决计数问题的常用策略. 练习 6.2(2)的第 1、2 题，习题 6.2A 组的第 6 题，习题 6.2B 组的第 4 至 6 题是例 4 的延伸.

例 5 是两种常见的排列问题：给定元素间隔排列或相邻排列. 练习 6.2(2)的第 2 题、习题 6.2B 组的第 2 题是这两种方法的应用和深化.

例 6 是一个综合运用排列与加法原理的问题. 旨在说明，在综合使用计数方法求解的问题中，一般先从分类开始，将问题分解成若干“类”，而在每一类的计算中，则使用相应的计数模型或计数原理.

例 7、例 8、例 9 旨在明确排列数的表达形式和表达规律，并涉及排列数的化简计算和简单恒等式的证明. 练习 6.2(3)的第 1、2 题，习题 6.2A 组的第 7 至 9 题是对排列数计算公式的应用.

注意事项

在计数过程中，“对应”是一种常用的方法. 在学习计数原理之初，教师可以通过一些简单的例子说明“对应”的方法，但要控制问题的难度. 例 2 和排列数的推导过程就使用了“对应”方法.

对于排列问题，应关注对计数过程的剖析，突出乘法原理的本质. 对一个问题应尽可能从多种角度进行分析，比较不同计数过程的异同，分析可能产生错误结果的原

因(参见例 4 和例 5).

要注意对常用方法和典型问题的总结，如“从反面计算”“间隔排列”“相邻排列”等.

教学建议

在教学过程中，应当突出对排列本质的理解，加强对典型问题的剖析，而淡化技巧，避免繁杂的问题. 对于典型的排列问题，可以从不同的角度进行考虑，采用不同的处理方式，从而帮助学生理解相关的定义和计算的方法.

6.3 组合

教学重点

明确组合和组合数的概念，掌握组合数的计算方法，能进行与组合数有关的简单恒等式的推导和证明.

内容分析

组合是基本的计数模型之一，也是乘法原理的一个最主要的应用. 学生对组合的计数经验较少，对这部分内容的理解，既需要学生对乘法原理的本质有深层次的认识，熟练掌握组合数的计算，也要熟练运用符号语言. 这部分内容的学习效果直接影响到后面学习二项式定理和概率等内容，在教学中，教师需要处理好问题难度和典型性之间的关系.

例 1 旨在明确“排列”与“组合”的区别.

例 2 要求利用枚举法分别写出“每场比赛的两支球队”(组合)和“冠亚军的所有可能情况”(排列)，旨在进一步指出，对于实际的计数问题，要根据问题的本质属性判断是“排列问题”还是“组合问题”. 练习 6.3(1)的第 1、2 题以数学中的例子进一步阐明两者的区别.

例 3 是几何中的组合问题. 配套练习为习题 6.3A 组的第 1 题及习题 6.3B 组的第 3 题.

例 4 是选用学生熟悉的体育比赛赛制编排的组合问题，是例 2 的延伸.

例 5 和例 6 选用学生熟悉的实际生活中的计数问题，是对“排列”和“组合”的进一步辨析，综合使用乘法原理与组合计算方法. 练习 6.3(2)的第 2 题，习题 6.3A 组的第 2、3、5 题，习题 6.3B 组的第 4 题，均可以作为这两个例子的配套练习. 另外，习

题 6.3A 组的第 4、6 题，可以作为“从反面计算”的例子.

例 7、例 8、例 9 旨在使学生掌握组合数的一般计算方法. 例 8 作为组合数的两个常用性质，需要学生熟练掌握，两种说明方法都需要向学生明示. 配套练习为练习 6.3(3)的第 1、2 题，习题 6.3A 组的第 7 至 9 题，习题 6.3B 组的第 2、5 题.

注意事项

“排列”与“组合”的区别不仅仅在于“有序”和“无序”，在一般情况下，综合性计数问题遵循的策略是“先选择，后排列”，这从组合数的推导过程中就可以看出来. 组合数的推导过程是将“排列”问题从两个不同的角度来进行考虑，一是直接使用乘法原理，二是先选择元素，对这些元素进行排列，再使用乘法原理，从而得到组合数的计算表达式. 在教学过程中，“先选择，后排列”的计数方法是需要不断向学生强调的，练习 6.3(2)第 2 题的第(2)小题使用的就是“先选择，后排列”的计数方法.

教学建议

在教学过程中，应当加强对典型问题的剖析，突出对组合本质的理解，要淡化技巧，避免繁杂的问题. 对于典型的组合问题，可以从不同的角度进行考虑及阐述，并采用不同的处理方式，从而帮助学生理解相关的定义和计算的方法.

6.4 计数原理在古典概率中的应用

教学重点

明确等可能事件的含义，了解计数原理和计数模型在古典概率中的应用，能灵活使用计数方法计算古典概率.

内容分析

古典概率的计算是计数原理的主要应用之一. 虽然学生在初中阶段已经接触过概率的计算，但由于没有掌握完整的计数理论，只能利用枚举的方法计算涉及数量较小的问题. 本节旨在阐明计数原理的重要应用，为进一步学习概率理论作准备.

例 1 旨在说明如何利用计数方法计算古典概率. 配套练习为练习 6.4 的第 1、2 题，习题 6.4A 组的第 1、2 题及习题 6.4B 组的第 3 题.

例 2 和例 3 旨在说明如何利用“对立事件”的方法计算古典概率，例 3 可以作为进一步研究的例子. 配套练习为练习 6.4 的第 2 题及习题 6.4B 组的第 1、2 题.

注意事项

本节是对计数原理的基本运用，既是对计数原理和排列组合的回顾总结，又为进一步学习概率知识作准备. 由于只有1课时，因此不可能面面俱到，教学过程中应突出计数原理的使用.

教学建议

在教学过程中. 应当加强对“等可能事件”这一概念的辨析，淡化计算技巧，避免繁杂的问题. 对于典型的问题，可以采用不同的处理方式，从而帮助学生理解相关的定义和计算的方法.

6.5 二项式定理

教学重点

理解二项展开式中项的特点，能够写出二项展开式中指定的项，掌握与组合数有关的恒等式的简单处理方法，了解二项式定理的简单应用.

内容分析

二项式定理是初中学过的乘法公式的推广. 为了从$(a+b)^2$及$(a+b)^3$等展开式中寻找一般的展开规律，学生需要对计数原理、组合的概念与计算有比较深入的理解，教师可以结合杨辉三角等内容，对一般规律进行深入浅出的剖析，尝试从不同角度进行解释. 在研究组合数的性质时，“代入法”是一种常用的方法. 通过本节的学习，可以为进一步学习概率理论(随机变量的分布)作好准备.

例1旨在说明二项式定理的应用，它也可以利用杨辉三角解决. 配套练习为练习6.5(1)第1题的第(1)小题，习题6.5A组的第1至4题及习题6.5B组的第3、4题.

例2将减法运算改写为相应的加法运算，旨在说明在求一个二项式的展开式时，需要改写为$(a+b)^n$的标准形式. 配套练习为练习6.5(1)的第1题及习题6.5A组的第1题.

例3利用二项式定理证明整除性，这是二项式定理的一个常见的应用. 配套练习为练习6.5(1)的第2题.

例4使用换元法和代入法求二项展开式中全部(或部分)项的系数之和，这是研究二项式的展开式的系数满足性质的常用方法. 配套练习为练习6.5(2)的第1题及习题6.5B组的第1题.

例 5 和例 6 研究了组合数的单调变化规律和二项式的展开式中各项系数的单调变化规律，使用的是数列单调性的处理方法．这部分内容对学生的要求较高，教师可根据学生的实际情况给予必要的分解处理．配套练习为练习 6.5(2)的第 2 题、习题 6.5A 组的第 4 题及习题 6.5B 组的第 2 题．

注意事项

二项式定理的理论基础是“加法原理”(分类)与“组合”，也是“加法原理”与“组合”的一个重要模型(例如，在课后阅读材料中，利用组合的定义和多项式的乘法法则证明二项式定理)．这部分内容的教与学不仅要在展开式规律的发现和证明上，也要在组合数恒等式的推导过程中发挥数学模型的功能，但要适当注意问题的难度．例如，可以向学生介绍用数学模型“求包含 n 个元素的集合的子集个数”来证明 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$，但不建议向学生介绍 $C_n^0C_m^k+C_n^1C_m^{k-1}+C_n^2C_m^{k-2}+\cdots+C_n^kC_m^0=C_{n+m}^k$ $(m、n、k\in\mathbf{N}，k\leqslant m，k\leqslant n)$的证明．

教学建议

在教学过程中，教师应充分利用学生熟悉的$(a+b)^2$ 及$(a+b)^3$ 的展开规律，引导学生从计数原理和计数模型的角度考虑一般情形．在使用二项式定理证明或处理与组合数的性质有关的问题中，应当控制问题的难度，减少繁杂的问题．

三、参考答案或提示

6.1　乘法原理与加法原理

练习 6.1(1)

1. 12.

2. 81.

练习 6.1(2)

1. 10.

2. 11.

习题 6.1

A 组

1. 81.

2. 12.

3. 260.

4. 195.

5. 96.

6. 60.

B 组

1. 24.

2. 11.

3. 40.

4. $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$.

6.2 排列

练习 6.2(1)

1. ab，ac，ad，ae，bc，bd，be，cd，ce，de，ed，ec，eb，ea，dc，db，da，cb，ca，ba.

2. 12.

练习 6.2(2)

1. (1) 120.　(2) 24.　(3) 72.

2. (1) 1 440.　(2) 5 760.

练习 6.2(3)

1. 15.

2. 提示：把 $n+1$ 个元素进行全排列，有 P_{n+1}^{n+1} 种排法，其中，编号为 $n+1$ 的元素恰位于最后一个位置的排法有 P_n^n 种；如果编号为 $n+1$ 的元素不在最后一个位置上，那么它可以位于前 n 个位置中的任意一个，最后一个位置上的元素编号可取 1，2，…，n 中的一个，即剩下的 $n-1$ 个元素放置在余下的 $n-1$ 个位置上. 由乘法原理即得结论.

习题 6.2

A 组

1. 24；12.

2. 20.

3. 22.

4. 48.

5. 400.

6.（1）60.　（2）630.

7. D.

8. 4.

9. 8.

B 组

1. 432.

2. 72.

3. 504.

4. 144.

5. 261 273 600.

6. 240.

6.3　组合

练习 6.3(1)

1.（1）$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{a,d\}$，$\{a,e\}$，$\{b,c\}$，$\{b,d\}$，$\{b,e\}$，$\{c,d\}$，$\{c,e\}$，$\{d,e\}$；

（2）ab，ba，ac，ca，ad，da，ae，ea，bc，cb，bd，db，be，eb，cd，dc，ce，ec，de，ed.

2. $\triangle ABC$，$\triangle ABD$，$\triangle ABE$，$\triangle ABF$，$\triangle ACD$，$\triangle ACE$，$\triangle ACF$，$\triangle ADE$，$\triangle ADF$，$\triangle AEF$，$\triangle BCD$，$\triangle BCE$，$\triangle BCF$，$\triangle BDE$，$\triangle BDF$，$\triangle BEF$，$\triangle CDE$，

$\triangle CDF$，$\triangle CEF$，$\triangle DEF$.

练习 6.3(2)

1. 477 870.

2.（1）3.　（2）36.

练习 6.3(3)

1.（1）1 或 3.　（2）6.

2. C_{n+4}^{n}.

习题 6.3

A 组

1. 40.

2.（1）8 568.　（2）991 200.

3. 30.

4.（1）58 409 520.　（2）6 275 430.　（3）64 684 945.

5. 60.

6. 24.

7.（1）4，7，11.　（2）124.

8. 3 或 7.

9. 提示：可以将待征的等式变形为$(n+1)C_n^m=C_{n+1}^{m+1}(m+1)$，其左边是“先从 $n+1$ 个不同元素中选出 1 个，再从余下的 n 个元素中选出 m 个”的方法数，而其右边是“先从 $n+1$ 个不同元素中选出 $m+1$ 个，再从这 $m+1$ 个元素中选出 1 个”的方法数.

B 组

1. 36.

2. 提示：由于 2 个球都是红球的取法数为 C_m^2，2 个球颜色不同的取法数为 mn，因此$\dfrac{C_m^2}{m}=\dfrac{m-1}{2}$是 n 的倍数，从而是整数，所以 m 是奇数.

3. 165.

4. 2 174.

5. C_{n+1}^{4}.

6.4 计数原理在古典概率中的应用

练习 6.4

1. $\frac{4}{15}$.

2. $\frac{14}{15}$.

习题 6.4

A 组

1. $\frac{1}{9}$.

2. $\frac{3}{5}$.

B 组

1. $\frac{7}{10}$.

2. $\frac{44}{45}$.

3. $\frac{1}{15}$.

6.5 二项式定理

练习 6.5(1)

1. (1) $x^8-8\sqrt{2}x^7y+56x^6y^2-112\sqrt{2}x^5y^3+280x^4y^4-224\sqrt{2}x^3y^5+224x^2y^6-64\sqrt{2}xy^7+16y^8$.　(2) -220.　(3) -672.　(4) $-15\ 504x^{30}$.

2. 略.

练习 6.5(2)

1. (1) 0.　(2) 3^n.

2. (1) $672x^5$.　(2) $560x^4$.

习题 6.5

A 组

1. $-160x^3$.

2. 252.

3. 10.

4. $7x^5$ 和 $7x^6$.

5. $(0,\sqrt{2}]$.

B 组

1. 180.

2. $489\ 888x^4$.

3. $m=5$，$n=6$ 或 $m=6$，$n=5$.

4. 提示：我们知道，$A=\dfrac{1}{2}[(1+x)^n+(1-x)^n]$，$B=\dfrac{1}{2}[(1+x)^n-(1-x)^n]$，由此即得 $A^2-B^2=\dfrac{1}{4}[4(1+x)^n(1-x)^n]=(1-x^2)^n$.

复习题

A 组

1. 150.

2. 96.

3. 144.

4. 10.

5. 10.

6. 41.

7. 5.

B 组

1. 192.

2. 150.

3. 420.

4. （1）3 720.　　（2）720.　　（3）144.　　（4）720.

5. （1）115.　　（2）186.

6. （1）2^{100}.　　（2）$\frac{1}{2}[(2-\sqrt{3})^{100}-(2+\sqrt{3})^{100}]$.　　（3）1.

7. 7.

拓展与思考

1. 130.

2. 提示：$(2+\sqrt{5})^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k 2^{n-k}(\sqrt{5})^k$，$(2-\sqrt{5})^n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k 2^{n-k}(\sqrt{5})^k$，从而它们的差是 $2\sum\limits_{s=0}C_n^{2s+1}2^{n-(2s+1)}(\sqrt{5})^{2s+1}$，因此命题成立.

第 7 章　概率初步(续)

一、本章概述

总体要求

本章是必修第 12 章“概率初步”的延续，将进一步学习概率的相关知识，包括随机事件的条件概率与相关的公式、随机变量及其分布列、正态分布等.

本章主要学习条件概率与相关公式、随机变量的分布与特征、常用分布. 总体意图是通过具体实例，进一步介绍概率中的一些重要概念及计算概率的条件概率公式与全概率公式等，帮助学生了解条件概率及其与独立性的关系，以及全概率公式，能进行简单计算，进一步认识概率的直观含义；学习随机变量的概念及其分布，以及它们的期望与方差，感悟随机变量及其分布的含义，知道可以通过随机变量更好地刻画随机现象；了解几个重要的概率模型及其分布，理解伯努利试验，掌握二项分布，了解超几何分布；感悟服从正态分布的随机变量；基于随机变量及其分布解决简单的实际问题.

本章涉及的重要概念有：条件概率(条件概率公式、概率的乘法公式、全概率公式、*贝叶斯公式)，随机变量(随机变量的分布、伯努利分布、期望、期望的线性性质、方差、方差的性质)，分布(二项分布、超几何分布、正态分布).

内容包括：随机事件的条件概率、全概率公式、随机变量及其分布列、正态分布.

(1) 随机事件的条件概率

① 结合古典概型，了解条件概率的概念，能计算简单随机事件的条件概率.

② 结合古典概型，了解条件概率与独立性的关系.

③ 结合古典概型，会利用乘法公式计算概率.

④ 结合古典概型，会利用全概率公式计算概率.

⑤ *了解贝叶斯公式.

（2）随机变量及其分布列

① 通过具体实例，了解随机变量的概念，理解随机变量分布及其数字特征（期望、方差）.

② 通过具体实例，了解伯努利试验，掌握二项分布及其数字特征，并能解决简单的实际问题.

③ 通过具体实例，了解超几何分布及其期望，并能解决简单的实际问题.

（3）正态分布

① 通过误差模型，了解服从正态分布的随机变量. 通过具体实例，借助频率直方图的几何直观，了解正态分布的特征.

② 了解正态分布的期望、方差及其含义.

课时安排建议

本章的课时安排建议为 8＋1＋1，共计 10 课时. 建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
7.1　条件概率与相关公式	3	条件概率　1 课时
		全概率公式　1 课时
		*贝叶斯公式　1 课时
7.2　随机变量的分布与特征	3	随机变量与分布　1 课时
		期望　1 课时
		方差　1 课时
7.3　常用分布	3	二项分布　1 课时
		超几何分布　1 课时
		正态分布　1 课时
复习与小结	1	

内容编排与特色

本章内容共分为三节，分别是 7.1 条件概率与相关公式，7.2 随机变量的分布与特征，7.3 常用分布.

本章内容对于学生来说，学习难度较大. 在古典概率模型中，事件 A 发生之后，随机现象的结果就剩下事件 A 中的样本点，从而事件 A 变成了由这些样本点所构成的新的样本空间. 这个样本空间仍然是等可能的，这时事件 B 发生的概率就称为事件 B 基于条件 A 的概率，或在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率，或已知事件 A 发生，事件 B 发生的概率. 这称为条件概率，记为 $P(B|A)$. 如果事件 A 与 B 相互独立，就有 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$，从而 $P(B|A)=P(B)$，说明在两个事件独立的情况下，条件概率等于概率. 反之，若条件概率等于概率，则两个事件是独立的.

全概率公式是概率论中最基本、最重要的公式之一，其内涵丰富，应用广泛，蕴含了化整为零、化复杂为简单的数学思想. 将一个复杂事件的概率分解成若干个简单事件的概率之和，即指一个事件 A 发生的概率 $P(A)$是其在不同条件下发生的概率 $P(A|\Omega_k)$的加权平均. 这样，如果能掌握一个事件的全部信息，就可以计算出一个客观概率(古典概率). 然而，生活中绝大多数决策所面临的信息是不完全的，如果手中只有有限而不完整的信息，我们就要在此情况下尽可能作出一个好的预测. 换言之，可以先在主观判断的基础上估计一个值，然后根据观察到的新信息不断修正. 贝叶斯公式就是当已知某个事件发生时，问导致这个结果的第 i 个原因出现的可能性是多少，即执果索因.

随机变量与函数都是一种对应关系. 随机变量是把试验结果对应为实数，而函数是把实数对应为实数. 随机试验的样本空间就是随机变量作为一个函数的定义域，随机变量的取值范围相当于函数的值域. 把随机现象的结果数量化，即用数值表示随机现象的结果，就可以用常见的数学工具来研究这些随机现象. 期望是概率论和数理统计中的重要概念之一，反映了随机变量取值分布的特征，学习期望将为今后学习概率统计知识作铺垫，同时，它在市场预测、经济统计、风险与决策等领域有着广泛的应用，对今后学习数学及相关学科会产生深远的影响.

本章通过一些比较简单的具体实例来引入相关概念及公式，由浅入深，尽量使学生易于接受及理解. 采用娓娓道来的方式讲述有关的知识点，注重逻辑推理，力求让学生更好地体会数学概念，体验数学的严谨性，注重对学生数学素养的培养. 教材内容的呈现坚持从实例出发，每节内容中都设置熟悉的情境引入，重视使用生活实例，通过朴素直白的叙述，使看起来困难的内容简洁明晰，力求明白易懂，并通过启发性

的问题引发思考，自然地展现知识与方法的产生、形成与发展过程. 例如：(1)在学习条件概率时，假设一个袋子里装有大小与质地相同的 2 个黑球、3 个白球，两人依次随机不放回地摸 1 个球，可知第一个人摸到白球的概率为$\frac{3}{5}$，问：第二个人摸到白球的概率是多少？有的人会认为：如果第一个人摸到的是白球，那么剩下的白球还有 2 个，第二个人摸到白球的概率应是$\frac{1}{2}$；而如果第一个人摸到的是黑球，那么剩下的白球还有 3 个，第二个人摸到白球的概率应是$\frac{3}{4}$. 这就必然使学生产生疑惑，从而引发进一步的思考. (2)在学习全概率公式时，以三个供应商供货产品的优良率来计算总体的优良率，从而提出全概率公式，并通过例 3 的学习，指出这正应用了全概率公式的思想：全概率公式是概率的可加性与概率乘法公式的组合. (3)在学习随机变量时，先提出在许多情况下，可以利用数来表示随机现象的结果，然后给出生活中的 5 个实例，以解释随机变量. (4)在学习期望时，问:掷一颗骰子，掷得点数的期望是 3.5，甚至不是一个整数，那么，期望到底有什么意义呢？(5)在学习方差时指出，我们不仅能够时刻感知无处不在的随机性，还能够感知随机性的大小. 一般来说，如果某事件发生的可能性很大或者很小，它的随机性就相对较小.

本章例题设计多以题组的形式给出，力求在问题变式中辨析，在比较中获得认知. 例题与练习或习题配套呈现，习题是例题的延伸与推广，是学习理解例题的逐步深化，由此可体会巧妙处理特殊性与一般性的关系在解决问题中的科学思维方式.

本章内容的编写紧扣课程标准，内容的呈现符合学生的认知规律，知识的发生、发展遵循从具体到抽象、从特殊到一般的规律，符合学生学习实际，能促进学生数学思维能力的提高. 教材内容的表述自然、清晰，具有较强的可读性.

教学提示

内容编排按照课程标准的要求，体现教育性及科学性，注意培养学生数学抽象、数学运算、数学建模、数据分析等核心素养，提升学生的理解能力和运算能力.

教师应通过典型案例开展教学活动，案例的情境应是丰富的、有趣的、学生熟悉的. 在案例教学中要重视过程，层次清楚地体现从具体到抽象、从实际到理论的过程.

教学中，应引导学生通过具体实例，理解可以用随机变量更好地刻画随机现象，

感悟随机变量与随机事件的关系；理解随机事件独立性与条件概率之间的关系；通过二项分布、超几何分布、正态分布的学习，理解随机变量及其分布. 在教学过程中，应在引导学生利用所学知识解决一些实际问题的基础上，适当进行严格、准确的描述.

评价建议

在终结性评价中，关注对基础知识、基本方法的掌握，要能够结合具体实例，理解随机事件的独立性和条件概率的关系，理解随机变量在描述随机现象中的作用，掌握两个基本概率模型及其应用，了解正态分布的作用，进一步深入理解随机思想在解决实际问题中的作用.

在过程性评价中，关注理解概念、提升能力、培育素养. 重点提升数据分析、数学建模、数学运算和数学抽象等方面的素养.

二、教材分析与教学建议

7.1 条件概率与相关公式

教学重点

（1）结合古典概型，了解条件概率；

（2）能计算简单随机事件的条件概率；

（3）会利用乘法公式计算概率；

（4）会利用全概率公式计算概率；

（5）*了解贝叶斯公式.

核心概念：条件概率、条件概率公式、全概率公式.

核心素养：数学抽象、数学运算.

内容分析

本节旨在通过具体实例，进一步介绍概率中的一些重要概念及计算概率的条件概率公式、全概率公式等，进一步揭示概率的直观含义.

（1）条件概率. 在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生，试验结果必须是既在 A 中又在 B 中的事件，即必须属于 $A\cap B$，这等于是在一个样本空间为 A 的随机试验中，求事件 $A\cap B$ 发生的概率. 于是，条件概率 $P(B|A)=\dfrac{|A\cap B|}{|A|}$. 将该式的分子、分母都除以 $|\Omega|$，就得到 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$. 这是一个以古典概率模型为前提所得到的公式，但其思想方法可以推广.

（2）概率的乘法公式. 事件 A、B 同时发生的概率等于 A 发生的概率与在 A 发生的条件下 B 发生的概率的乘积，即 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$. 从样本空间的角度看，求 $P(A\cap B)$时，是在原来的样本空间 Ω 中进行讨论的. 而求 $P(B|A)$时，由于已经知道事件 A 发生，所考虑的样本空间就不是 Ω 而是 A 了. 因此，事件“$A\cap B$”与事件“$B|A$”是完全不同的事件，它们之间的联系由乘法公式揭示.

（3）全概率公式. 把样本空间 Ω 分成 n 个两两不同时发生(两两互斥)的事件 Ω_1，Ω_2，…，Ω_n，即 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\cdots\cup\Omega_n$，且当 $i\neq j$ 时有 $\Omega_i\cap\Omega_j=\varnothing$. 这样就可以将一个复杂事件的概率分解成若干个简单事件的概率之和，即指一个事件 A 发生的概率 $P(A)$是其在不同条件下发生的概率 $P(A|\Omega_k)$的加权平均，其中条件概率 $P(A|\Omega_k)$的权重为 $P(\Omega_k)$，$k=1$，2，…，n，即成立 $P(A)=\sum\limits_{k=1}^{n}P(A|\Omega_k)P(\Omega_k)$，这是一个简单直观的重要公式.

例 4 回答了日常生活中抽签时抽到好签的概率是否与抽签顺序有关的问题.

（4）*贝叶斯公式. 贝叶斯公式为利用搜集到的信息对原有判断进行修正提供了有效的手段. 在贝叶斯公式及其变形中，$P(\Omega_i|A)=\dfrac{P(A|\Omega_i)P(\Omega_i)}{P(A)}=P(\Omega_i)\cdot\dfrac{P(A|\Omega_i)}{P(A)}$. 对于任意给定的 i 来说，$P(\Omega_i)$称为事件 Ω_i 的先验概率. 一个已经发生了的事件 A 可以看作一个新的信息，在 A 发生的条件下，Ω_i 发生的概率 $P(\Omega_i|A)$ 可以看作对原概率 $P(\Omega_i)$的一个矫正，称为后验概率. 贝叶斯公式提供了一种通过不断学习经验来认识随机现象的思想，是机器学习的理论基础之一.

通常，在事件 B 发生的条件下发生事件 A 的概率，与在事件 A 发生的条件下发生事件 B 的概率是不一样的. 然而，这两者具有确定的关系，贝叶斯公式就是对这种

关系的陈述，即成立 $P(B|A)=\dfrac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$.

例 1、例 2 旨在帮助学生理解条件概率，并直接运用条件概率公式求解. 练习 7.1(1)的第 1、3 题旨在辨析条件概率以及两个事件同时发生的概率，习题 7.1A 组第 1、2 题是对这两道例题的巩固.

例 3 是为了说明全概率公式的直观意义，在没有给出公式之前，启发学生能自主获得.

例 4 以特殊事例进行建模，通过应用全概率公式计算，说明抽签的结果与抽签顺序无关. 教学中，还可以继续证明第四、第五个人摸到白球的概率，使学生透彻理解抽签时抽到好签的概率与抽签顺序无关.

例 5 先厘清第一次摸球后黑球可能在 A 罐中，也可能在 B 罐中，进而分类讨论两种情况下的条件概率，并应用全概率公式求解. 练习 7.1(2)的第 2、3 题、习题 7.1A 组第 3、4 题是对该例题的巩固.

例 6 以一个实际问题为背景，求在检测呈阳性反应时，该人患有这种疾病的条件概率，而已知信息是患有这种疾病检测呈阳性反应的概率及不患有这种疾病检测呈阳性反应的概率. 建立典型的贝叶斯公式模型，是后验概率对先验概率的一个矫正，并在该例的基础上，给出一般形式的贝叶斯公式.

注意事项

注意“求事件 A 发生且事件 B 发生的概率”与“已知事件 A 发生，求事件 B 发生的概率”两者的不同. 在实际问题中，需注意分辨.

如果事件 A 是否发生对事件 B 发生的概率没有影响，即 $P(B|A)=P(B)$，就称两个事件 A、B 相互独立，并把这两个事件叫做相互独立事件.

贝叶斯公式诱导出一种统计学观点，也是哲学观点：事件的概率可以根据出现的新信息来进行修正.

教学建议

计算条件概率通常有两种基本方法：一是根据定义，得 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$；二是改变样本空间，即在一个样本空间为 A 的随机试验中，求事件 $A\cap B$ 发生的概率，得 $P(B|A)=\dfrac{|A\cap B|}{|A|}$.

7.2 随机变量的分布与特征

教学重点

（1）通过具体实例，了解随机变量的含义；

（2）理解随机变量分布；

（3）理解期望与方差的概念，并会进行计算；

（4）感悟随机变量的分布及其数字特征的意义.

核心概念：随机变量的分布、期望、方差.

核心素养：数学运算、数据分析.

内容分析

本节旨在帮助学生了解随机变量的概念及其分布，理解随机变量的期望与方差，感悟随机变量的分布及其数字特征的意义，知道可以通过随机变量更好地刻画随机现象.

（1）随机变量. 如果在一次试验中，试验可能出现的结果可以用一个变量 X 来表示，并且 X 是随着试验的结果的不同而变化的，那么我们把这样的变量 X 叫做一个随机变量. 随机变量常用大写字母 X、Y、…表示. 这是随机变量的一个描述性定义. 其正式定义为：以样本空间作为定义域的一个函数 X 称为一个随机变量，即对样本空间 Ω 中任意给定的元素 ω，都有唯一的实数 $X(\omega)$与之对应. 注意，教师应该清楚随机变量是满足某种条件的一个函数.

（2）随机变量的分布. 随机变量所有可能的取值以及相应的概率，称为随机变量的分布.

将随机变量 X 所有可能的取值 x_i 与其对应的概率 $p_i(i=1, 2, \cdots, n)$列表如下：

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

称上表为随机变量 X 的概率分布律，简称分布，也称分布列. 还可以表示为 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_i & \cdots & p_n \end{pmatrix}$，其中 $p_1+p_2+\cdots+p_i+\cdots+p_n=1$. 随机变量的分布

表达了取值的可能性大小，也显示了随机变量的(全部)随机性.

(3) 随机变量的数学期望. 设一个随机变量 X 所有可能的取值是 x_1、x_2、…、x_n，这些值相应的概率是 p_1、p_2、…、p_n，则 $E[X]=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$ 叫做这个随机变量的数学期望，简称期望，也称均值. 因为期望实际上是由某个分布所确定的，所以也称为该分布的期望. 数学期望是一个加权平均，其中的权是随机变量取值对应的概率. 随机变量的期望是一个确定的数，刻画了这个随机变量的平均取值水平.

期望的线性性质：

① 如果 X 是一个随机变量，a 是一个实数，那么 $E[aX]=aE[X]$.

② 如果 X、Y 是两个随机变量，那么 $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$.

随机变量的方差. 随机变量 X 的方差 $D[X]$定义为 $D[X]=E[(X-E[X])^2]$，可变形为 $D[X]=E[X^2]-(E[X])^2$. 方差衡量此随机变量对其期望的偏离度或分散程度，即其随机程度. $D[X]$的算术平方根$\sqrt{D[X]}$叫做随机变量 X 的标准差，它也是一个衡量随机变量波动大小的量.

(4) 随机变量的方差. 设一个随机变量 X 所有可能取值是 x_1、x_2、…、x_n，其对应的概率是 p_1、p_2、…、p_n，则

$$D[X]=(x_1-E[X])^2p_1+(x_2-E[X])^2p_2+\cdots+(x_n-E[X])^2p_n$$

称为这个随机变量 X 的方差. 随机变量的方差反映了随机变量的取值相对于期望的平均波动的大小(离散程度).

方差的性质：

① 如果 X 是一个随机变量，a 是一个实数，那么 $D[aX]=a^2D[X]$.

② 如果 X、Y 分别是两个独立的随机变量，那么 $D[X+Y]=D[X]+D[Y]$.

例 1 旨在帮助学生理解分布的概念，练习 7.2(1)、习题 7.2A 组第 1 题是对此概念的巩固.

例 2 说明对于同一个随机试验，研究的随机变量不同，其分布也不同.

例 3 要求自主构造一个随机变量，表现出问题的开放性，是例 2 的延伸. 本例还可以构造与教科书上不同的随机变量，例如，用 Y 表示年降水量级别，$Y=1$、2、3 分别表示年降水量为 0～200、200～400 和 400 以上，求其分布. 教学中，应注意充分发挥学生的主动性.

例 4 旨在帮助学生理解期望的概念. 习题 7.2A 组第 2、3 题是对此概念的巩固.

例 5 有一定的难度. 首先，要确定随机试验的样本空间的元素个数及随机变量 X 取 k 时的事件含有的样本点数，前者应用乘法原理，后者应用组合数. 其次，在计算 X 的期望时要应用二项式定理，技巧性较高，要通过分析算式的结构找到突破点. 练习 7.2(2)旨在帮助学生理解期望的概念，并会进行计算.

例 6 是例 4 的延续，旨在帮助学生理解方差的概念.

例 7 是例 4 的延伸，旨在应用方差的性质. 习题 7.2A 组第 4 题是对方差计算内容的巩固.

注意事项

随机变量 X 可取不同的值，而期望 $E[X]$是一个不变的值，由 X 的分布唯一确定，所以也称为 X 的概率分布的数学期望，它反映了 X 取值的平均水平.

期望表示随机变量在随机试验中取值的平均值，它是概率意义下的平均值，不是相应数值的算术平均数. 期望的线性性质②可以推广到任意有限个随机变量的情况，即成立 $E[X_1+X_2+\cdots+X_n]=E[X_1]+E[X_2]+\cdots+E[X_n]$.

随机变量的期望还有以下性质：

① 若 c 为常数，则 $E[c]=c$.

② 如果 X、Y 是两个相互独立的随机变量，那么 $E[XY]=E[X]\cdot E[Y]$.

随机变量的方差还有以下性质：

① 若 c 为常数，则 $D[c]=0$.

② 如果 X 是一个随机变量，a 是一个实数，那么 $D[X+a]=D[X]$.

对于连续性随机变量 ξ，其密度函数为 $f(x)$，若 $E[\xi^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则 $D[\xi]=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(\xi)]^2f(x)\mathrm{d}x$ 称为 ξ 的方差. 连续型随机变量的数字特征的计算不作教学要求，此处给出仅供教师参考.

教学建议

尽管随机变量的名字中用了“变量”这两个字，但实际上它是一个函数. 随机变量的取值在随机现象发生前是随机的.

下面的性质可以在解决问题时使用：若 X 为随机变量，a、b 为实数，则$E[aX+b]=aE[X]+b$，$D[aX+b]=a^2D[X]$.

7.3 常用分布

教学重点

（1）通过具体实例，了解伯努利分布；

（2）掌握二项分布、超几何分布及其数字特征(期望和方差)，并能解决简单的实际问题；

（3）通过误差模型，了解服从正态分布的随机变量.

核心概念：二项分布、超几何分布、正态分布.

核心素养：数学建模、数据分析、数学运算等.

内容分析

本节旨在帮助学生了解几个重要的概率模型及其分布，解决简单的实际问题.

（1）伯努利分布. 设有一个伯努利试验，其成功概率为 $p(0<p<1)$，失败概率为 q，且 $p+q=1$. 若伯努利试验成功，则相应的随机变量取值为 1；若伯努利试验失败，则相应的随机变量取值为 0. 只取两个值的随机变量称为伯努利型，其分布称为伯努利分布，也称随机变量 X 服从参数为 p 的两点分布或者 0—1 分布，其分布列为 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ p & 1-p\end{pmatrix}$. 此时 $E[X]=p$，$D[X]=p-p^2$.

（2）二项分布. 设有一个伯努利试验，其成功概率为 $p(0<p<1)$，失败概率为 q，且 $p+q=1$. 独立地重复该试验 n 次，用 X 表示成功的次数，则随机变量 X 的分布称为二项分布，也称成功次数 X 服从参数为 n 和 p 的二项分布 $B(n,p)$，其分布列为 $\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n\\ q^n & \mathrm{C}_n^1pq^{n-1} & \mathrm{C}_n^2p^2q^{n-2} & \cdots & \mathrm{C}_n^kp^kq^{n-k} & \cdots & p^n\end{pmatrix}$. 于是，$E[X]=np$，$D[X]=np(1-p)$.

（3）超几何分布. 从一个装有大小与质地相同的 a 个白球、b 个黑球的袋中依次随机且不放回地取 n 个球，其中的白球数 X 的分布称为超几何分布. 此随机变量 X 的分布是 $P(X=k)=\dfrac{\mathrm{C}_a^k\mathrm{C}_b^{n-k}}{\mathrm{C}_{a+b}^n}$，其中 $k\leqslant n$，$k\leqslant a$，$n-k\leqslant b$. 如果随机变量 X 服从参数为 N、M、n 的超几何分布，其中 $N=a+b$，$M=a$，那么 $E(X)=\dfrac{nM}{N}$，$D(X)=\dfrac{n(N-n)(N-M)M}{N^2(N-1)}$.

（4）正态分布. 若随机变量 X 的概率分布律为 $\varphi_{\mu,\sigma^2}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，则称该分布为正态分布. $\varphi_{\mu,\sigma^2}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 称为正态分布的密度函数，其中 $x\in\mathbf{R}$，μ 及 σ^2 是参数，且 $\sigma>0$，$-\infty<\mu<+\infty$，参数 μ 和 σ^2 分别为正态变量的数学期望和方差.

期望为 μ、标准差为 σ 的正态分布通常记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

正态分布的密度函数 $\varphi_{\mu,\sigma^2}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 的图像叫做正态曲线，也称钟形曲线(图 7－R1). 该函数图像与 x 轴所夹部分的面积为 1，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{\mu,\sigma^2}(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=1$.

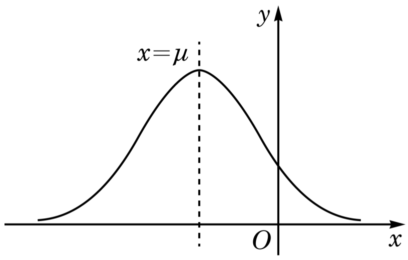


图 7–R1

若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi_{\mu,\sigma^2}(t)\,\mathrm{d}t$ 称为概率分布函数.

由于本教材中未涉及有关积分的内容，因此我们换一种说法来认识正态分布.

设 X 是一个取实数值的随机变量. 如果对任何给定的实数 a 与 $b(a<b)$，X 落在区间 (a,b) 上的概率 $P(a<X<b)$ 等于三条直线：$y=0$、$x=a$、$x=b$ 与正态密度函数 $y=\varphi_{\mu,\sigma^2}(x)$ 的图像所围的区域面积(图 7–R2)，那么 X 服从正态分布，或更准确地说，X 服从参数为 μ、σ^2 的正态分布，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

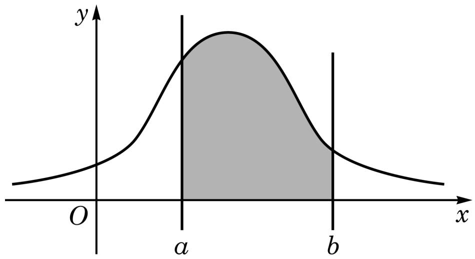


图 7–R2

X 在$(-\infty, +\infty)$内取值的概率为 1. X 在区间$(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$、$(\mu-2\sigma, \mu+2\sigma)$及$(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$内取值的概率分别是 68.3%、95.4%及 99.7%. 由于 X 在区间$(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$之外取值的概率是 0.3%，因此其取值几乎都在距 $x=\mu$ 三倍标准差之内，这就是正态分布的 3σ 原则.

数学期望为 0、标准差为 1 的正态分布叫做标准正态分布，记为 $X\sim N(0,1)$. 标准正态分布的密度函数为 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. 函数 $y=\varphi(x)$从$-\infty$到 x 的累计面积称为标准正态分布函数，即 $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$，它具有性质$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$. $\Phi(x)$的解析式不作教学要求，此处给出仅供教师参考.

正态分布可以转化为标准正态分布. 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

例 1 旨在帮助学生理解伯努利试验.

例 2 用例题的方式计算二项分布的期望和方差，使本节内容完整. 练习 7.3(1)进一步巩固二项分布.

例 3 是不放回摸球模型，通过特殊问题的解决引出超几何分布. 教学中可以设计一些问题，启发学生思考，进一步理解超几何分布的内涵.

例 4 是例 3 的延续，计算超几何分布的期望，因为这样的计算对学生来说比较困难，所以没有直接利用期望公式进行计算，而是另外构造等价的随机变量来计算期望.该例题没有计算方差，教学中，对于学有余力的学生，可以提出直接利用公式计算期望和方差的问题，请学生探究.

例 5、例 6 是对正态分布的应用，主要是运用正态分布的密度函数图像的对称性来实现问题的转化. 例 6 将正态分布转化为标准正态分布，解决问题后进一步指出正态分布的 3σ 原则，体现应用性. 习题 7.3B 组第 3 题将其进一步巩固.

注意事项

二项分布必须同时满足以下两个条件：①在一次试验中试验结果只有 A 与 $\overline{A}$ 这两个，且事件 A 发生的概率为 p，事件 $\overline{A}$ 发生的概率为 $1-p$；②试验可以独立重复地进行，即每次重复做一次试验，事件 A 发生的概率均为同一常数 p，事件 $\overline{A}$ 发生的概率均为 $1-p$.

超几何分布的特征：一个容量为 N 的总体内含有两种不同的事物 A(M 个)及 B($N-M$ 个)，任取 n 个，其中恰有 X 个 A. 符合该条件的即可断定是超几何分布，按照超几何分布的分布列 $P(X=k)=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$($k=0$，1，2，…，$m$)进行处理.

当 n 较小、而 N 较大时，有近似公式 $P(X=k)=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\approx C_n^k p^k q^{n-k}$，其中 $p=\dfrac{M}{N}$，$q=1-p$(此公式不作教学要求). 这说明此时超几何分布的概率计算可以近似地用二项分布来代替. 超几何分布是不放回抽样，而二项分布是放回抽样. 这说明，当总体容量 N 很大时，不放回抽样近似于放回抽样.

教学建议

根据二项分布，直观地说，做一件事情，不管成功概率多小，只要执着地努力，重复的次数足够多，就有很大可能会成功.

如果某个随机现象是由一些互相独立的偶然因素所引起的，而且每一个偶然因素在总体的变化中都只是起着均匀、微小的作用，那么相应于这种随机现象的随机变量的概率分布将近似服从正态分布. 正态分布是生活中的一个常用词，但正确地理解数据非常重要，应该通过误差模型来学习服从正态分布的随机变量. 但是正态分布的一些事实与结论，要用到微积分的知识才能证明，并且学生目前能够解决的问题类型也非常有限，主要限于变换以后的对称问题. 标准正态变量 X 在区间(x_1, x_2)内的概率公式为：$P(x_1<X\leqslant x_2)=P(X\leqslant x_2)-P(X\leqslant x_1)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$.

三、参考答案或提示

7.1 条件概率与相关公式

练习 7.1(1)

1. (1) $\dfrac{1}{2}$.　　(2) $\dfrac{1}{3}$.

2. $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{5}{6}$，$P(A\cap B)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{2}{5}$.

3. (1) $\frac{10}{19}$.　　(2) $\frac{5}{19}$.

练习 7.1(2)

1. 0.935.

2. 设事件 A 表示第一次取出的是白球，事件 B 表示第二次取出的是白球，则

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{4}{9}.$$

3. $\frac{3}{5}$.

练习 7.1(3)

1. $\frac{4}{5}$.

2. $\frac{20}{21}$.

习题 7.1

A 组

1. $\frac{2}{3}$.

2. $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$.

3. 0.031 5.

4. $\frac{2}{5}$.

B 组

1. 0.5.

2. 设事件 A 表示第 1 次摸到 1 号球，事件 B 表示第 2 次摸到 2 号球.

$$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})=\frac{1}{N-1}\cdot\frac{1}{N}+\frac{1}{N}\cdot\frac{N-1}{N}=\frac{N^2-N+1}{N^2(N-1)}.$$

7.2　随机变量的分布与特征

练习 7.2(1)

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{6}{36} & \frac{10}{36} & \frac{8}{36} & \frac{6}{36} & \frac{4}{36} & \frac{2}{36} \end{pmatrix}$.

2. B.

练习 7.2(2)

1. 2.

2. $\frac{5}{3}$.

练习 7.2(3)

1. 略.

2. 0.8.

习题 7.2

A 组

1. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{20} & \frac{3}{20} & \frac{6}{20} & \frac{10}{20} \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \end{pmatrix}$，$E[X]=\frac{161}{36}$.

3. $a=0.2$，$b=0.4$.

4. (1) $\frac{12}{25}$.　　(2) $E[X]=\frac{4}{5}$，$D[X]=\frac{9}{25}$.

B 组

1. 1.

2. $\frac{5}{9}$.

3. （1）X_1的分布为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$，$X_2$的分布为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$，

X_1+X_2的分布为$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \frac{1}{25} & \frac{2}{25} & \frac{3}{25} & \frac{4}{25} & \frac{5}{25} & \frac{4}{25} & \frac{3}{25} & \frac{2}{25} & \frac{1}{25} \end{pmatrix}$，

$E[X_1+X_2]=6=E[X_1]+E[X_2]$，$D[X_1+X_2]=4=D[X_1]+D[X_2]$.

（2）X_1的分布为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$，$X_2$的分布为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$，

X_1+X_2的分布为$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \frac{0}{20} & \frac{2}{20} & \frac{2}{20} & \frac{4}{20} & \frac{4}{20} & \frac{4}{20} & \frac{2}{20} & \frac{2}{20} & \frac{0}{20} \end{pmatrix}$，

$E[X_1+X_2]=6=E[X_1]+E[X_2]$，$D[X_1+X_2]=3\neq 4=D[X_1]+D[X_2]$.

4. 记 $C_0^0=0$，对 $m=0$，1，2，3，4，5，6，利用全概率公式，得

$$P(Y=m)=\sum_{k=m}^{6}P(Y=m \mid X=k)P(X=k)=\frac{1}{6}\sum_{k=m}^{6}\frac{C_k^m}{2^k}.$$

计算可得 Y 的分布为$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{21}{128} & \frac{5}{16} & \frac{33}{128} & \frac{1}{6} & \frac{29}{384} & \frac{1}{48} & \frac{1}{384} \end{pmatrix}$，

由此通过计算，可得 $E[Y]=\frac{7}{4}$，$D[Y]=\frac{77}{48}$.

7.3 常用分布

练习 7.3(1)

1. $\frac{1}{3}$.

2. 4.2.

练习 7.3(2)

1. $\frac{1}{2}$.

2. X 的分布为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{6}{56} & \frac{30}{56} & \frac{20}{56} \end{pmatrix}$，$E[X]=\frac{9}{4}$，$D[X]=\frac{45}{112}$.

Y 的分布为$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{20}{56} & \frac{30}{56} & \frac{6}{56} \end{pmatrix}$，$E[Y]=\frac{3}{4}$，$D[Y]=\frac{45}{112}$.

3. (1) 设事件 A 表示 5 张牌中至少有一张黑桃. $P(A)=1-\frac{C_{39}^5}{C_{52}^5}=\frac{7\,411}{9\,520}$.

(2) 设事件 B 表示 5 张牌中至少有一个对子. $P(B)=1-\frac{C_{13}^5 \cdot (C_4^1)^5}{C_{52}^5}=\frac{2\,053}{4\,165}$.

练习 7.3(3)

1. $1-k$.

2. D.

习题 7.3

A 组

1. (1) X 的分布实际上是一个二项分布 $B\left(6,\frac{1}{3}\right)$.

(2) $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{665}{729}$.

2. $\frac{140}{429}$.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{120} & \frac{36}{120} & \frac{60}{120} & \frac{20}{120} \end{pmatrix}$.

B 组

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{C_{39}^5}{C_{52}^5} & \frac{C_{13}^1C_{39}^4}{C_{52}^5} & \frac{C_{13}^2C_{39}^3}{C_{52}^5} & \frac{C_{13}^3C_{39}^2}{C_{52}^5} & \frac{C_{13}^4C_{39}^1}{C_{52}^5} & \frac{C_{13}^5}{C_{52}^5} \end{pmatrix}$，$E[X]=\frac{5}{4}$，$D[X]=\frac{235}{272}$.

2. (1) X_1X_2 的分布$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\dfrac{C_a^2}{C_{a+b}^2} & \dfrac{C_a^2}{C_{a+b}^2} \end{pmatrix}$，$E[X_1X_2]=\dfrac{C_a^2}{C_{a+b}^2}$.

(2) $E[X_k^2]=\dfrac{a}{a+b}$，$E[X^2]=E[X_1^2+2X_1X_2+X_2^2]=\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{2a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$，

$D[X]=E[X^2]-(E[X])^2=\dfrac{2ab(a+b-2)}{(a+b)^2(a+b-1)}$.

3. 令 $Y=\dfrac{X-3}{\sigma}$，则 $Y\sim N(0,1)$. 因此 $P(1\leqslant X\leqslant 5)=P\left(-\dfrac{2}{\sigma}\leqslant Y\leqslant\dfrac{2}{\sigma}\right)=$

$\Phi\left(\dfrac{2}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\dfrac{2}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\dfrac{2}{\sigma}\right)-1$，又 $P(1\leqslant X\leqslant 5)=0.6$，$\Phi\left(\dfrac{2}{\sigma}\right)=0.8$，$P(X>5)=$

$P\left(Y>\dfrac{2}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\dfrac{2}{\sigma}\right)=0.2$.

复习题

A 组

1. $\dfrac{1}{3}$.

2. $\dfrac{1}{2}$.

3. (1) $\dfrac{3}{5}$.　(2) $\dfrac{3}{10}$.　(3) $\dfrac{1}{2}$.

4. $a=\dfrac{1}{6}$，$b=\dfrac{1}{3}$，$c=\dfrac{1}{2}$.

5. $E[X]=\dfrac{3}{4}$，$D[X]=\dfrac{3}{16}$.

6. (1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \dfrac{4}{20} & \dfrac{12}{20} & \dfrac{4}{20} \end{pmatrix}$.　(2) $E[X]=1$，$D[X]=\dfrac{2}{5}$.　(3) $\dfrac{4}{5}$.

7. 1.96.

8. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$.

B组

1. 0.3.

2. $\frac{95}{99}$.

3. $\frac{1}{3}$.

4. (1) $\frac{10}{21}$. (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{5}{12} & \frac{6}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$，$E[X]=\frac{2}{3}$.

5. 设事件 A 表示甲摸球一次摸出红球；事件 B 表示乙摸球一次摸出红球.

A 与 B 相互独立.$P(A)=P(B)=\frac{1}{3}$，$P(\overline{A})=P(\overline{B})=\frac{2}{3}$.

$P(X=0)=P(\overline{A}B)+P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{A})=\frac{14}{27}$，$P(X=1)=P(A\overline{A})+P(\overline{A}\,\overline{B}A)=\frac{10}{27}$，

$P(X=2)=P(AA\overline{A})=\frac{2}{27}$，$P(X=3)=P(AAA)=\frac{1}{27}$.

X 的分布为$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{14}{27} & \frac{10}{27} & \frac{2}{27} & \frac{1}{27} \end{pmatrix}$，$E[X]=\frac{17}{27}$.

拓展与思考

1. (1) $\frac{3}{4}$，$\frac{1}{2}$.

(2) X 的分布为$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$，$E[X]=0$；$Y$ 的分布为$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，$E[Y]=0$.

(3) 甲的策略获胜概率更大，但风险(方差)也更高，平均收益(期望)与乙相同.

2. 设事件 A_1、A_2、A_3分别表示交换 1 次、2 次、3 次后，黑球还在 A 罐中，则

$$P(A_1)=\frac{2}{3}，P(A_2)=P(A_2|A_1)P(A_1)+P(A_2|\overline{A_1})P(\overline{A_1})=\frac{5}{9},$$

$$P(A_3)=P(A_3|A_2)P(A_2)+P(A_3|\overline{A_2})P(\overline{A_2})=\frac{14}{27}.$$

设事件 A_n 表示交换 n 次后黑球还在 A 罐中，则

$$P(A_k)=P(A_n|A_{n-1})P(A_{n-1})+P(A_n|\overline{A_{n-1}})P(\overline{A_{n-1}})=\frac{2}{3}P(A_{n-1})+\frac{1}{3}(1-P(A_{n-1})).$$

解得 $P(A_n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

3. 设此人赢为事件 A. 第一次掷出的点数之和记为 X，则 $P(X=k)=\frac{k-1}{36}$，$k=2$，3，4，5，6，7；$P(X=k)=\frac{13-k}{36}$，$k=8$，9，10，11，12.

由全概率公式，$P(A)=\sum\limits_{k=2}^{12}P(A|X=k)P(X=k)$，且

$$P(A|X=k)=1,\ k=7,\ 11;$$

$$P(A|X=k)=0,\ k=2,\ 3,\ 12.$$

记 $x_k=P(X=k)$. 对 $k=4$，5，6，8，9，10，

$$P(A|X=k)=x_k+\left(\frac{5}{6}-x_k\right)\cdot x_k+\left(\frac{5}{6}-x_k\right)^2\cdot x_k+\cdots$$

$$=\frac{x_k}{x_k+\frac{1}{6}}.$$

所以 $P(A)=\frac{244}{495}\approx0.493$.

四、相关阅读材料

阅读材料

血液检查中的期望值

虽然巧合或者极值是引人注目的，但是总的来说，平均值或者说“期望值”却能给

我们提供更多的信息，一个变量的期望值是这个变量的加权平均值，它是通过这个变量每一个取值出现的概率来衡量的.

假设一家医院要对可能患某种疾病的人群进行排查，为此，要检查每个人的血液. 已知大概每 100 人之中就有 1 人患有这种疾病. 人们是每 50 人一组地来到医院做检查的，这时，院长想知道，是否应该将 50 人的血液样本混合在一起进行检查，以此来代替对他们每个人的检查. 如果混合样本呈阴性，那么院长可以肯定 50 个人都没有患这种疾病；如果呈阳性，那么他需要逐个地对每个人进行血液检查. 假如院长将每组 50 人的血液样本混合在一起来检查，那么检查次数的期望值是多少呢?

院长将要么进行一次检查(如果混合样本溶液呈阴性)，要么进行 51 次检查(如果混合样本溶液呈阳性). 由于一个人没有患这种疾病的概率是$\frac{99}{100}$，因此所有 50 个人都没有患这种疾病的概率是$\left(\frac{99}{100}\right)^{50}$. 这样，院长只需进行一次血液检查的概率是$\left(\frac{99}{100}\right)^{50}$. 另一方面，因为至少有一个人患有这种疾病的概率是$1-\left(\frac{99}{100}\right)^{50}$，所以他要进行 51 次检查的概率是$1-\left(\frac{99}{100}\right)^{50}$. 因此，每组 50 人需要检查次数的期望值是$1\times\left(\frac{99}{100}\right)^{50}+51\times\left[1-\left(\frac{99}{100}\right)^{50}\right]\approx21$(次).

如果有许多人进行血液检查，院长可以从每个人的血液样本中取一部分出来，每 50 个样本为一份进行混合，然后进行检查. 如果结果呈阳性，可以他可以对 50 个样本中剩下的部分进行逐个检查. 这样的做法是挺聪明的，因为平均来说，每 50 个人只需要检查 21 次.

参考文献

约翰·艾伦·保罗士. 数盲——数学无知者眼中的迷惘世界[M]. 柳柏濂，译. 上海：上海教育出版社，2020.

第 8 章　成对数据的统计分析

一、本章概述

总体要求

在必修课程中，学生已学习过一些基本的统计方法，如数据获取、抽样技术、统计图表、统计估计等，已初步体会到统计处理的独特方法. 本章是在必修课程学习统计初步知识的基础上，研究来自同一对象的两组数据间的关系，进一步学习一些分析数据之间关系的常见统计模型与方法，并初步应用这些模型与方法解决一些实际问题. 作为常见的统计模型，它们与生产生活、科学研究等都有着密切的联系，并有着广泛的应用.

本章通过对典型案例的讨论，研究成对数据的统计相关性，了解样本相关系数的统计含义，了解一元线性回归模型分析的基本思想、方法及初步应用，学习独立性检验(只要求 2×2 列联表)的基本思想、方法及初步应用，进一步体会运用统计方法解决实际问题的基本思想，利用简单的统计软件进行数据分析，认识统计分析在决策中的作用.

通过对这些统计模型的学习，学生将学习到一些经典的统计方法与统计思想，体验解决特殊问题的统计过程及统计方法，进而感受统计思想在解决实际问题过程中的作用.

本章的具体要求如下：

(1) 结合实例，了解样本相关系数的统计含义，了解样本相关系数与标准化数据向量夹角的关系.

(2) 结合实例，会通过相关系数比较多组成对数据的相关性.

(3) 结合具体实例，了解一元线性回归模型的含义，了解模型参数的统计意义，

了解最小二乘原理，掌握一元线性回归模型参数的最小二乘估计方法，会使用相关的统计软件.

(4) 针对实际问题，会用一元线性回归模型进行预测.

(5) 通过实例，理解 2×2 列联表的统计意义.

(6) 通过实例，了解 2×2 列联表独立性检验及其应用.

课时安排建议

本章的课时安排建议为 8+2，共计 10 课时. 建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
8.1　成对数据的相关分析	2	成对数据间的关系　1 课时
		相关系数　1 课时
8.2　一元线性回归分析	3	一元线性回归分析的基本思想　2 课时
		一元线性回归分析的应用举例　1 课时
8.3　2×2 列联表	3	2×2 列联表独立性检验　2 课时
		独立性检验的具体应用　1 课时
复习与小结	2	

内容编排与特色

本章内容共分为三节，分别是 8.1 成对数据的相关分析，8.2 一元线性回归分析，8.3 2×2 列联表.

“8.1 成对数据的相关分析”首先在必修已经学过的统计例子(绘制散点图)的基础上，再给出绘制年需求量与每千克价格关系的散点图的例子，并通过观察散点图中数据的相关性，引出怎样更精确地刻画来自同一研究对象的两组数据的相关程度问题，为引入相关系数作铺垫. 相关系数是两个变量大小变化趋势的一致性度量，相关系数描述的是两个变量之间线性关系的方向和相关程度，计算公式不需要记忆. 在本节最后提供“相关系数的几何意义”阅读材料，为学生理解样本相关系数的作用提供参考.

“8.2 一元线性回归分析”利用上一节的例子，进一步介绍当变量之间有了线性关系之后，如何确定最佳拟合直线. 教科书用娓娓道来的叙述方式，努力降低理解难

度，对学生的统计知识要求不多，教学时可以引导学生开展阅读讨论. 由于回归分析的应用极其广泛，因此在本节最后讨论了可化为线性回归的非线性问题，能帮助学生进一步理解回归分析的意义. 考虑到基础较好的学生能够用配方法导出线性回归方程的回归系数公式，将利用最小二乘法求回归直线方程的推导过程内容安排在本节最后，作为“课后阅读”.

“8.3 2×2 列联表”研究两个分类变量(二分变量)之间是否独立的统计问题. 我们关心如何选用一个度量，用它的大小来说明独立性假设是否成立，这是假设检验的基本问题. 学生将通过具体例子体会假设检验的思想(实际推断原理)和步骤，重点关注其方法形成的直观合理性，理解检验的步骤，具体计算公式不要求记忆，对于一般的假设检验问题也不作要求.

内容展开到这里，学生自然会思考这样的问题：在讨论成对数据的统计分析时，到底有哪些类型的随机变量呢？在概率内容中遇到过离散型随机变量和连续型随机变量，8.3 节又处理了分类变量，那么随机变量的类型有哪些？8.3 节的“课后阅读”介绍了“不同类型的随机变量”，解答了学生的疑问.

我们试图通过案例介绍一些统计方法，但更看重的是统计思想. “统计学不止是一种方法或技术，还含有世界观的成分——它是看待世界上万事万物的一种方法. 我们常讲某事从统计观点看如何如何，指的就是这个意思，但统计思想也有一个发展过程.”①鉴于高中课程的特点，我们更加强调一些有用的思想方法的直观合理性(实际上也是这种方法的原始产生过程)，而不要求从数学上给出严格论证.

教材在必修课程概率统计内容的基础上，按照成对数据的相关分析—一元线性回归分析—2×2 列联表独立性检验的顺序展开内容，培养学生对数据的直观感觉，认识统计方法的特点(如数据获取的随机性、结果估计的随机性、统计推断可能犯错误等)，体会统计数据的随机性和统计方法应用的广泛性，理解其方法中蕴含的归纳思想. 和必修课程一样，应注意鼓励学生使用计算器、计算机等技术手段来处理数据. 以案例为载体，即在每一个主题内容下选择至少一个案例给学生呈现至少一次完整的数据处理过程，为学生亲自进行统计实践提供可参考的范例.

教材在处理案例时，采取先借助图表直观感知数据的意义以及统计的合理性，再

---

① 参见“相关阅读材料”[1].

适度地介绍统计处理方法，主要是通过案例讲述基本思想.

教学提示

在本章的教学中，应通过具体案例，引导学生理解两个随机变量的相关性可以通过成对样本数据进行分析. 在案例教学中要重视过程，分清层次，从具体到抽象，从实际到理论，引导学生理解利用一元线性回归模型可以研究变量之间的线性关系，进行预测；理解利用 2×2 列联表可以检验两个随机变量的独立性.

在教学过程中，应通过具体案例引导学生参与数据分析的全过程，并鼓励学生借助信息技术工具学习、探索，用相应的统计软件解决问题.

三节内容在选例时都考虑到在必修课程统计内容基础上作螺旋式上升以及促进学生对统计思维认识的深化，突出操作步骤. 教学中可以根据具体情况或学生的活动背景选择新的案例实施教学.

一元线性回归分析是通过生活中的实例帮助学生理解回归分析的意义，以具体的案例引出一元线性回归分析的步骤：通过绘制散点图，直观地了解两个变量的关系，然后运用最小二乘法建立回归模型. 所有的环节都有所了解之后，再呈现一个实际案例，让学生感受一元线性回归分析的一般步骤. 2×2 列联表独立性检验从现实情境引入，通过对实际问题的分析，说明处理分两类的随机变量之间关系的直观方法和合理性，体会学习统计知识的必要性.

在教学中应创设情境，让学生亲身参与统计活动的过程，避免探究活动陷入公式记忆或者枯燥繁琐的计算，减轻学生录入数据的负担，让学生感受统计方法和统计思想，理解数据的随机性和结果的概率意义.

评价建议

评价中应关注学生解决成对数据统计相关性的简单实际问题的水平. 考查学生能否运用一元线性回归分析的方法解决具体实际问题，能否运用 2×2 列联表解决简单实际问题中两个分类变量的独立性问题.

应关注过程性评价，包括感受统计思想产生的原始过程，淡化计算结果，注重理解统计方法的合理性和统计结果的概率意义. 例如，对独立性检验，我们关心统计思维的形成过程，理解小概率事件通常在一次观察实验中不会发生. 观察学生在学习中的积极变化，在探究过程中出现的有意义想法，关注学生数据分析素养的形成过程.

重点提升数据分析、数学运算、逻辑推理等核心素养.

要关注学生能否体会研究随机变量之间关系的统计方法，是否注意到结论的概率意义，观察学生在学习过程中统计观点的变化.

二、教材分析与教学建议

8.1 成对数据的相关分析

教学重点

在回顾必修课程“统计”一章中散点图等内容的基础上，用联系的观点考察来自同一对象的成对数据之间的关系，理解成对数据的线性相关系数的意义.

内容分析

必修课程中的散点图只是统计数据相关性可视化的一种呈现方式.

第 1 小节，教材先是回顾必修课程“统计”中用散点图刻画两个变量之间的关系，然后通过考察一个案例，绘制并观察散点图，发现案例中的成对数据具有明显的线性相关性，即可以用一条直线来拟合这组数据，从而引出第 2 小节的相关系数的概念.

第 2 小节明确提出，对于具有某种线性关系的成对数据，用线性相关系数(简称相关系数，也称皮尔逊相关系数)这一统计量来描述两个变量之间的线性相关程度.

相关系数的原始定义建立在协方差等更上位的概念基础上，本节没有进行这样的定义，也省略了从定义到计算公式的推导过程，而是直接给出了两个变量 x 与 y 的观察值 x_i 与 y_i 的相关系数的计算公式

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}},$$

其中$\overline{x}$、$\overline{y}$分别是两组数据 x_i、y_i 的算术平均数.

相关系数还可以与两组数据的标准差(本教材必修第三册第 166 页)联系起来：

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{ns_1s_2},$$

其中s_1和s_2分别是两组数据的标准差.

相关系数从几何上看就是这两组数据标准化后向量夹角的余弦值. 虽然本教材没有涉及 n 维向量及其夹角的概念，但学生可以从已学过的平面向量与空间向量的相关知识进行模仿推广. “相关系数的几何意义”放在本节后的“课后阅读”中，供有兴趣的学生阅读参考.

相关系数的几何意义可以直观地解释相关系数 r 的一个重要性质：因为 r 是一个角的余弦，所以$|r|\leqslant 1$. 但这仅仅是“解释”，便于学生理解和接受这个不等式①. 但也要提醒学生，这个解释不能算作证明，因为我们还没有建立起 n 维向量的理论框架. 在本教学参考资料章末的“相关阅读材料”关于“线性回归方程检验”的附录中，把相关系数与决断系数联系起来，$|r|\leqslant 1$ 不过是那个联系的简单推论.

本节并不要求学生知道相关系数的定义，也不要求学生了解相关系数计算公式的推导过程，但要求学生能够利用公式计算成对数据的相关系数，对数据量较大的数据能够用计算器或计算机进行计算，并能体会“正相关”“负相关”和数据变化趋势的联系，能了解教材所列的相关系数的一些基本特点：(1)相关系数关于两个变量是对称的；(2)相关系数与变量的单位无关；(3)相关系数与数据量的大小和数据本身都有关系.

教师也可以将计算两个变量之间的线性相关系数设计成一个探究过程，上述这些内容可以让学生在探究中逐步理解.

虽然本节提到用直线来拟合两组数据的问题，但没有说明什么样的拟合是“更好的”，怎样做出“最佳拟合”. 下一节将展现“一元线性回归分析”的基本思想，给出一个标准用以判断是否为数据的最佳拟合直线，并给出具体办法做出在这个标准下的最佳拟合直线.

---

① 不等式$|r|\leqslant 1$的直接证明也不难，但这个证明纯粹是数学归纳法和代数变形的应用，与本节的统计主题相去甚远，所以不宜在本节教学过程中花费这方面的精力. 但为了完整起见，本注解给出一个证明概要，供教师参考.

证明$|r|\leqslant 1$，就是要对任何 $n\geqslant 2$ 证明代数不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

成立，其中 a_i、b_i都是实数. 证明过程中不等式 $2xy\leqslant x^2+y^2$(x、y 是实数)起关键作用. $n=2$ 的情况很简单，此处略去. 现在假设 $n=k$ 时结论成立. 当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i + a_{k+1}b_{k+1}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{k} 2a_i b_i a_{k+1} b_{k+1} + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k} b_i^2\right) + \sum_{i=1}^{k} \left(a_i^2 b_{k+1}^2 + a_{k+1}^2 b_i^2\right) + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 = \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2\right).\end{aligned}$$

本节有 2 道例题.

例 1 作为本节内容的情境引入例题，还将在下一节(即“8.2 一元线性回归分析”)的内容推进过程中起作用. 例 1 中的情境是考察某种商品消费者年需求量与商品每千克价格之间的关系. 通常来说，同一商品价格提高，其销量就会降低，但也不是绝对如此. 教材中呈现了两组调查数据，要求根据这两组数据，先(按必修教材第三册 13.4 第 3 小节的做法)绘制散点图，再依据散点图进行分析，从而发现两组数据之间具有明显的线性相关关系，可以用一条直线来拟合. 这就自然引出第 2 小节的相关系数的概念.

例 2 是在学生学习了相关系数及其计算公式以后，让学生从熟悉的且容易获得的身高与体重数据着手，计算相关系数，并通过这样的实例理解相关系数的意义. 本例的边框通过实例说明了数据量的大小和数据本身都会对相关系数产生影响，当异常值出现时，对相关系数的影响可能更大，因此在做统计分析时需要对数据情况进行具体分析，有时甚至要剔除异常值，教师在教学中可适当作讲解.

例 2 的第 2 个边框提示我们，在用计算器或者计算机进行数值计算时，最终结果中的有效数字位数可根据需要取舍. 如果没有特别要求，为方便起见，在相关练习计算时，最终结果可以保留不超过 3 位小数.

注意事项

教科书中的案例仅作为示范，具体数据可由教师在教学实施过程中重新采集，也鼓励将问题背景替换成学生身边的例子.

在案例教学处理上，应设计问题让学生展开讨论，在讨论中辨析统计数据的随机性和代表性，以及如何透过数据发现规律.

教学建议

作为“成对数据的统计分析”的第一节课，要突出依据“数据”，通过统计作图观察数据的变化趋势，同时强调两个变量须来自同一研究对象，如“学生”的身高和体重，“商品”的价格和销量等.

相关分析是一种定量统计分析方法. 参与相关分析的两个变量的地位是平等的，与数据所取单位无关.

例 1 是在绘制散点图的基础上，依据散点图观察两组数据的相关性. 观察可从两方面展开：一看随着商品每千克价格变化，消费者年需求量的总体变化趋势，二看消

费者年需求量的随机性特征.

在教学相关系数计算公式时，可以通过比较两个变量取值与其平均值的波动情况，帮助学生理解公式的意义. 在不同领域里，人们对相关程度高低的感受很不相同. 社会学家可能认为 0.50 就是很高的相关性了，而经济学家可能认为这还不够高. 相关系数的大小跟变量观察值的多少有关，且受个别异常值的影响较大. 一般来说，当数据量 n 变大时，受随机性的影响，同样的两个变量的相关系数就会减小. 那么，相关系数多大才算显著？统计学家已经制定了检验相关系数显著性的统计用表，可以很方便地查阅.

另外，有相关关系并不表示一定有因果关系. 例如，在上海，白露过后，秋装销量见长，与此同时医院儿科就诊量也在上升，但我们不能因此认为是秋装销量上升导致儿科就诊量上升，或者儿科就诊量上升导致秋装销量上升. 事实上，它们都跟气温下降相关.

例 2 研究的是学生身高与体重的相关性. 对于处在成长期的青少年，其身高与体重之间具有非常密切的关系，教材受篇幅限制，只是示意性地给出 10 名高中男生的数据. 在学校，我们可以比较容易地获得更多学生身高、体重等样本数据，因此教学中不必囿于这 10 对数据，教师可以根据情况重新采集，甚至可以让学生来收集同龄人的身高与体重的数据，并按照教材的做法进行分析. 教师须提醒学生把收集到的样本数据储存好，在下一节学习回归模型时继续使用.

8.2　一元线性回归分析

教学重点

本节从一元线性回归分析的基本思想开始介绍，给出求回归系数的公式，重点是理解一元线性回归分析的统计方法，公式的证明不作教学要求.

内容分析

上海二期课改教材按照直接观察法和最小二乘法的顺序处理线性回归，所谓直接观察法就是在散点图中使直尺(一条线)尽量靠近或通过大多数点，然后在这一位置上沿直尺的一边作一条直线. 这一操作已在本教材上一节观察散点图的教学中进行. 因此，上一节绘制散点图和计算相关系数，可以看成是成对数据的统计分析的第一个台阶；本节“理性地”引入“最佳拟合直线”，提出了“最佳拟合直线”的标准以及如何求符

合标准的最佳拟合直线问题，即计算“线性回归方程”，则可以看成是成对数据的统计分析的第二个台阶.

本节的引入问题是上一节例 1 的延续，从直观观察两条拟合直线开始学习一元线性回归分析. 本节概念和头绪较多，所要做的事情是：对于给定的一组有线性相关关系的成对数据(x_1,y_1)、(x_1,y_1)、…、(x_n,y_n)和一个线性方程(或称线性模型)

$$y=ax+b.$$

我们要找出评判这个模型与数据贴近度的指标，并找到贴近度最好的模型.

教材按以下步骤循序渐进地展开：

- 引进了刻画单对数据(x_i,y_i)与拟合直线的贴近度的指标——离差(也称为残差)$y_i-\hat{y}_i$，其中 $\hat{y}_i=ax_i+b$ 是变量 y 与 x_i对应的理想值；

- 用离差的平方和

$$Q=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$$

作为刻画数据整体与拟合直线贴近度的指标——拟合误差；

- 把“拟合误差最小”作为“最佳拟合直线”的标准，定义了回归方程(也称回归模型)

$$y=\hat{a}x+\hat{b}$$

和由回归方程所定义的回归直线的概念；

- 给出回归方程的系数 $\hat{a}$ 与$\hat{b}$(称为回归系数)的计算公式.

由一组有某种线性关系的成对数据求其回归方程的方法称为一元线性回归分析. 我们的回归分析以拟合误差(即离差的平方和)取最小值作为“最佳拟合直线”的标准，这种回归分析的方法称为最小二乘法，回归系数 $\hat{a}$ 与$\hat{b}$ 称为模型参数a 与b 的最小二乘估计.

回归系数 $\hat{a}$ 与$\hat{b}$ 计算公式的推导比较复杂，放在本节的课后阅读中介绍. 必须注意的是，虽然上文中回归方程的定义过程和“课后阅读”中回归系数计算公式的推导过程都从一个线性模型 $y=ax+b$ 出发，但从计算公式可以看出，回归系数 $\hat{a}$ 与$\hat{b}$ 的值只与给定的数据有关，而与回归分析过程中选择的初始线性模型无关.

上一节介绍相关系数时我们特地指出，相关系数关于两个变量是对称的. 而从本节可以明显地看出，回归方程的定义关于两个变量是不对称的，因此必须对它们予以区分.

自变量 x 称为解释变量(亦称“说明变量”或“可控制变量”)，它按照一定的规律对模型中的因变量产生影响，并对因变量的变化原因作出解释或说明；因变量 y 称为反应变量(亦称“被预报变量”或“被解释变量”)，它对解释变量的变化作出反应. 在研究两个变量之间的线性回归关系时，作为解释变量的自变量通常是可控变量，它可能是随机变量(如树的胸径、某高一年级学生的期末数学考试成绩等)，也可能不是随机变量(如月份、工龄等)；而反应变量一定是随机变量.

本节编号的例题只有一个，即例 1，它沿用上一节例 2 的情境与数据，要求作线性回归分析. 本题的直接解法是套用回归系数计算公式. 教材建议直接将数据输入电子表格办公软件的工作簿，自动生成散点图和回归直线. 例题中还对身高 178 cm 的男生体重作出预测，体现了术语“反应变量”或“被预测变量”的意义.

例 1 后还总结了建立一元线性回归模型的一般步骤，以及相关分析和回归分析之间的联系与区别，必须给予关注.

教学中可设计为教师与学生一起探索并运用电子表格办公软件操作的教学活动，并总结步骤. 在完成例 1 的基础上，可根据情况增加一个问题作为巩固练习，让学生按照例 1 求解过程中总结出来的步骤完成.

本节最后部分给出了 1999 年至 2018 年我国国内游客数量和年份之间的分布关系，展示了如何用线性回归分析的方法处理游客数量随着年份而增长的呈指数分布性状的数据分布，即通过对因变量取对数，将原数据化成了有线性关系的一组数据，从而可作线性回归分析(这个方法通常称为对数回归分析). 本案例旨在让学生了解回归分析在大数据时代具有广泛的应用，增长见识，但对可化为线性回归的非线性回归问题不作教学要求.

还要注意到，由于 2020 年以后新冠疫情的国际大流行，上述问题中原有的变化规律被打破，学生可通过习题 8.2 B 组第 3 题的讨论，感受利用回归分析作预测时必须关注反应变量与解释变量之间的依赖关系是否受到大的干扰.

注意事项

由于在统计用语中，同一个概念通常有多种表达，因此本教材遵循两个原则处理，一是使用《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》中的名词，二是沿用上海二期课改教材中的用语. 教师应根据教材主要使用的术语进行教学，对其他术语也可作介绍，以方便学生进行课外拓展阅读.

进行线性回归分析时，我们都会强调给定的是一组具有某种线性关系的成对数据，这是因为只有对具有线性相关关系的两个变量进行线性回归分析才有意义. 但是回归系数计算公式并没有规定数据的线性相关性要达到何种水平才可以使用. 换言之，只要给定一组成对数据，一定可以根据公式求出它们的回归系数. 但是，当数据之间的线性相关性较弱的时候，得到的回归方程将无法反映这组数据的特点与性质. 因此，要使线性回归分析得出的结果真正有用，要从两个方面进行把关：一是尽可能预判数据是否具有比较强的线性相关关系(但这并不容易，特别是当数据量比较大时，需要适当的相关专业背景知识和历史经验作支撑)；二是对所得到的回归方程是否可靠作回归显著性检验，判断回归直线与数据是否有较好的拟合. 这一工作在教材中未提及，教学上也不作要求，但本教学参考资料章末给出了用“决断系数”进行检验的介绍，教师可以指导有兴趣的学生进行研究. 对数据量较小的案例，教师可以指导学生编制数据的离差表(即把离差 $y_i-\hat{y}_i$ 列表)，让学生直观判断回归模型的拟合效果.

现实中的统计问题通常包含大量的数据，一般都通过相应的统计软件进行计算. 但由于涉及版权、广告效应等问题，教材中没有给出具体的统计应用软件. 教学时可以根据学校信息媒体环境和师生的实际情况适当介绍相关统计软件的使用方法.

教学建议

教学中应安排操作活动让学生进行线性回归统计分析，注意不要将学生的操作活动变成数据输入或者代入公式的纯粹数学运算. 要让学生经历统计分析活动的全过程，在此之前，教师可以根据教材中的案例，示范操作步骤.

鼓励学生从建立回归模型的整个过程中总结出建立回归模型的一般步骤，而不是机械记忆教材中所列步骤.

由于计算相关系数、建立线性回归方程的过程中数据输入和计算的工作量都比较大，建议学生使用计算器或者计算机软件完成相关的工作，并对多次使用的数据养成及时存储的习惯.

由于教材中给出的例子仅具有示意性，在具体教学实施过程中，鼓励教师适当更换为更贴近学生实际的数据.

教学中应结合介绍一元线性回归分析基本思想的引例，将最小二乘法阐释明白. 如果学生整体基础较好，可以将课后“一元线性回归系数公式的推导”一并进行讲解，让学生对“最佳拟合”有所理解和体会. 如果要降低学生理解的难度，教学起点也可以

适当降低，不必要求学生掌握用最小二乘法得出回归系数的推导过程，只需理解“最佳拟合”(最小二乘法)的统计意义即可.

例 1 是上一节例 2 的延续，数据不必重新录入，可直接沿用. 教学中要讲清楚用电子表格办公软件的详细操作步骤，教师既要做好演示，也要指导学生亲自完成完整的操作过程. 在完成例 1 的教学后，师生共同归纳建立一元线性回归模型的一般步骤.

完成上述教学任务以后，教材给出了 1999 年至 2018 年我国国内游客数量呈指数分布性状增长的实例. 建议讲清楚指数模型转化为线性模型的过程，让学生理解转化的意义. 对有进一步学习兴趣的学生，可以让他们模仿这一例子去完成本章复习题的“拓展与思考”第 3 题，即对某地区 80 种品牌饼干的价格与销售量关系进行回归分析.

8.3　2×2 列联表

教学重点

了解分类变量的概念，能对两个分两类的分类变量编制 2×2 列联表加以说明，重点理解 2×2 列联表的构成和独立性检验的基本思想. 会应用 2×2 列联表对分类变量进行独立性检验(χ^2检验)，理解统计量 χ^2引入的合理性，熟悉独立性检验的步骤.

内容分析

前两节所讨论的相关系数和线性回归分析所涉及的随机变量是顺序变量或数值变量(参看本节末的“课后阅读”). 本节所要讨论的 2×2 列联表与独立性检验所涉及的是另外一类随机变量——分类变量，这类变量实际上给出总体中的个体一个分类，它把每一个个体对应到其所在的类别. 例如，可以按出生的年份给全校学生分类，把每一名学生对应到其出生年份，这就是一个分类变量；对全校学生按照性别进行分类，就给出了另一个分类变量.

本节只限于讨论分两类的分类变量(简称二分类变量)，这样的分类变量把总体中的个体分为两类，如上述按性别的分类变量. 教材本节的引入案例就是 50 岁以上公民这个总体中的两个二分类变量：其一，一个人吸烟与否；其二，一个人患慢性气管炎与否. 这两个变量是否相关，或者反过来说，是否独立，是社会和公共卫生领域比较关注的问题. 要回答这个问题，就要对这两个变量进行独立性检验，其方法是 2×2 列联表独立性检验.

进行 2×2 列联表独立性检验，首先要抽样(教材的案例中样本量是 339)，统计两

个变量在样本的取值，制作 2×2 列联表，即一个 2×2 表格，它的行标题指示一个变量的两种不同的分类，它的列标题指示另一个变量的两种不同的分类，在行列交叉的单元格上填入符合行标题与列标题所指示的样本数. 教学中应结合案例，与学生一起制作教材中的表 8-7，并启发学生举一反三，对新的检验问题制作相应的表格.

制作出 2×2 列联表后，可以通过计算其中一个分类变量的不同类别在另一个分类变量中的百分比，让学生直观地判断两个变量的相关性. 也可以借助统计图(二维条形图或者三维直方图)，让学生直观观察吸烟影响患慢性气管炎的百分比的指标差异的显著性，这样的过程有助于学生进一步理解统计图表的可视化特征. 但是，需要向学生强调，若要把这种直观观察感知的指标差异或变量的相关性理性地加以描述，则需要构造适当的统计量，并用程序化的方法进行处理.

构造这个统计量的思想是：先设定两个变量之间独立性的一个假设，然后比较两个变量的实际观察值与假设下的预期值的偏差，再定义观察值和预期值之间的总体偏差.

在做两个分类变量的独立性检验时，一般假设它们是相互独立的，即其中一个变量的分类在另一个变量的每个分类中的比例是相同的. 这个假设称为原假设或零假设，记为 H_0. 对原假设，也可以作出一个 2×2 表格，其中每个单元格就是变量在原假设下的预期值. 统计学家定义观察值和预期值之间的总体偏差为

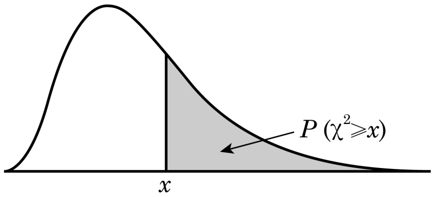
$$\chi^2=\sum\frac{(\text{观察值}-\text{预期值})^2}{\text{预期值}}, \quad ①$$

其中求和符号表示对所有单元格的求和. 直观上很容易理解，χ^2 的值(即观察值与预期值的总体偏差)越大，原假设成立的可能性就越小. 严格的做法是：预设一个接受原假设的标准，即选择一个概率分位数，通过 χ^2 分布概率表(准确的名称应是 χ^2 分布的上侧分位数表)，找到 χ^2 值对应于此分位数的临界值. 若 χ^2 值大于等于这个临界值，则拒绝原假设；否则，接受原假设.

χ^2 分布概率表是根据 χ^2 分布图计算得到的数表(图/表 8-R1)，它的行表头(第一行)所示的是 χ^2 分布概率表的分位数 α，它的列表头(第一列)是 χ^2 分布的自由度①

① 为了说明自由度，要把列联表的做法推广到一个 n 分类变量和一个 m 分类变量所组成的 $n\times m$ 列联表. 一个单独的 n 分类变量的自由度是 $n-1$. 在一个 $n\times m$ 列联表中，在一个 n 分类变量的每个自由度下还有另一个变量(m 分类变量)的 $m-1$ 个自由度，所以 $n\times m$ 列联表的 χ^2 分布的自由度是 $(n-1)(m-1)$. 特别地，2×2 列联表的自由度是 $(2-1)\times(2-1)=1$. 教师也可以直接告诉学生 2×2 列联表的自由度是 1，而不涉及 $n\times m$ 列联表和上述分析.

(2×2 列联表的自由度是 1)，表体则列示在给定的自由度下，对应于分位数 α 的一个数值 x，它就是在给定自由度下满足 $P(\chi^2 \geqslant x) \approx \alpha$ 的值 x.



	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.75	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	—	—	0.001	0.004	0.016	0.102	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838

(数据来源："相关阅读材料"[4]，第 1066—1068 页)

图/表 8-R1　χ^2 分布图与 χ^2 分布概率表(仅列自由度 1—3)

图/表 8-R1 中 χ^2 分布概率表只列出自由度 1—3 的数据，更大自由度的数据可参阅其他统计学方面的教材或著作.

χ^2 分布是统计学中的一个重要分布，由于它的定义、理论基础、χ^2 分布图的得出以及 χ^2 分布概率表的编制超出了本教材的范围，因此本教学参考资料也不涉及. 但必须提醒的是，这里针对一个 2×2 列联表所定义的 χ^2 只是理论定义的 χ^2 的一个近似，只有当样本量足够大时，列联表所定义的 χ^2 才能比较好地逼近理论定义的 χ^2. 因此要注意，在样本量太小时，不宜使用①式作独立性检验.

现在回到吸烟与慢性气管炎关系的案例. 这个案例的原假设是：

H_0：患慢性气管炎与吸烟没有关系，即它们相互独立.

这个假设的意思是，在吸烟者和不吸烟者中，患慢性气管炎者的比例是一样的. 由表 8-7 可以得知，在样本中患慢性气管炎者的比例是 $\frac{56}{339}$，写成百分比约是 16.52%. 据此，算出在原假设下预期值的 2×2 列联表，并把它与表 8-7 合并，从而制成表 8-8，然后如教材所示，计算得到

$$\chi^2 \approx 7.468.$$

这时我们要预设一个显著性水平 α，再进行查表并作出统计决断. 显著性水平 α 是作统计决断时所约定的概率临界值(或者说分位数). 若独立性检验中原假设成立的

概率不大于 α，则拒绝(或否定)原假设；若原假设成立的概率大于 α，则不能拒绝(或否定)原假设，也就是要接受原假设. 我们所作的显著性水平的约定是 $\alpha=0.05$，查阅 χ^2 分布概率表或根据教材所列的 χ^2 值超过某些界限的概率，得到 $x=3.841$，即 $P(\chi^2\geqslant3.841)\approx0.05$，而计算得到的 $\chi^2\approx7.468$ 在 $\chi^2\geqslant3.841$ 的范围内，所以我们可以推断原假设"H_0：患慢性气管炎与吸烟没有关系"成立的可能性小于 0.05，从而作出"拒绝(或否定)H_0"的统计决断.

就这个案例来说，还可以把显著性水平取为 $\alpha=0.025$ 或者 $\alpha=0.01$，从而 $x=5.024$ 或者 $x=6.635$，计算得到的 $\chi^2\approx7.468$ 都在 $\chi^2\geqslant x$ 的范围内，由此可以推断原假设"H_0：患慢性气管炎与吸烟没有关系"成立的可能性小于 0.025 或 0.01，不会改变最后的统计决断. 但 $\alpha=0.05$ 是本教材的约定，因此在作统计决断前关注的是 $x=3.841$.

这个案例通过是否吸烟与是否患慢性气管炎的实际获取的调查数据，较为详细地展现了 2×2 列联表独立性检验的整个过程. 这一例子包含的内容很丰富，特别是在原假设成立的假定下所得的预期值与观察值的总体差异的比较，教材用一张表格(表 8-8)来呈现，使得差异的大小比较直观. 为了描述这种差异性，统计学家引进了统计量

$$\chi^2=\sum\frac{(\text{观察值}-\text{预期值})^2}{\text{预期值}},$$

对单元格求和. 教师可以对统计量的合理性进行适当补充解释，让学生体会引入该统计量的合理性.

在实际计算中并不需要像表 8-8 那样，先把观察值和预期值并列在一张表中，再来计算总体偏差 χ^2，这是因为预期值也是从观察值得到的，它不过是把每个变量的每种分类样本数按比例分配到各个格子中. 对于教材中表 8-9 的 2×2 列联表，第一列的预期值就是把列总和 $a+c$ 按行的比 $(a+b):(c+d)$ 重新分配，得到这一列两个单元格的数据 $\frac{(a+c)(a+b)}{n}$ 与 $\frac{(a+c)(c+d)}{n}$，这里 $n=a+b+c+d$，即总样本量. 把行总和按列的比重新分配也得到同样的结果. 教材给出了 2×2 列联表下 χ^2 的计算公式：

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

并把公式的证明作为一道习题(习题 8.3 B组第 2 题). 为方便教师使用，本教学参考资料本章“参考答案或提示”部分给出了公式的完整证明.

教材总结了 2×2 列联表独立性检验的步骤. 所列步骤中第一次将“显著性水平 α”正式提出，并作了 $\alpha=0.05$ 的规定(上文只在边框中做这两件事)，还第一次用“统计决断”来指代根据 χ^2的值给出拒绝 H_0或接受 H_0的判断. 这两个术语要让学生理解并能正确使用.

在介绍了独立性检验的方法之后，在“独立性检验的具体应用”中还给出了三道例题，通过三种类型的案例展示了独立性检验的步骤. 为了避免学生产生作独立性检验的两类变量一定相关的误解，除例 1 外，后面所选两例都是接受原假设的情形，同时这两个案例反映了独立性检验在实际研究中的应用方式，为学生合理应用独立性检验提供了范例.

例 1 实际上是为了巩固 χ^2检验的步骤，建议让学生自主解决.

教材中首先指出把“性别”“是否色盲”作为两个分类变量，教学中应让学生来回答. χ^2计算公式不必要求学生记忆，能结合表 8-10 说清公式中字母的含义即可.

例 2 与例 3 是为了展现 2×2 列联表独立性检验的进一步应用，让学生体会在不能拒绝原假设 H_0的情形下，统计结论的表述方式.

可结合例题的讲解告诉学生：“拒绝 H_0”也是作独立性检验的可选假设之一，这个假设称为“备择假设”，通常记为 H_1. 对备择假设不做更深入的分析和更多的要求.

注意事项

在 2×2 列联表独立性检验的教学过程中，要着重引导学生感受选取能够说明独立性是否成立的统计量的重要性，让学生体会统计方法的合理性. 量化分析过程所依赖的统计学理论超出了本教材的要求，可以只告诉学生结果，使之能够操作，而不要影响学生对问题实质的理解.

2×2 列联表独立性检验中的统计决断是根据数据对可能的结果给出一个有较大把握的判断，虽然它在大概率上是对的，但在实际问题中仍然无法避免出现错误的可能. 下面给出关于两类错误的描述，供教师参考.

第一类错误：当原假设 H_0实际为真时，而按照给定的检验法则，拒绝了 H_0，这种错误又称为拒真错误(或弃真错误)，其发生的概率就是显著性水平 α 的大小，这个概率我们称为犯第一类错误的概率，又称为拒真概率.

第二类错误：当备择假设 H_1 实际为真时，而按照给定的检验法则，接受了 H_0，这种错误又称为受伪错误(或纳伪错误)，其发生的概率称为犯第二类错误的概率，又称受伪概率，通常记为 β. 在样本容量固定时，要使 α 与 β 都很小是不可能的，无限增大样本容量又是不实际的. 基于这种情况，奈曼(Neyman)与皮尔逊(Pearson)提出一个原则，即在控制犯第一类错误的概率 α 的条件下，使犯第二类错误的概率 β 尽量小，因为人们通常把错误地拒绝 H_0 比错误地接受 H_0 看得更重要些. 对基于奈曼—皮尔逊原则去寻找最优检验的问题，感兴趣的老师可参阅本教学参考资料章末参考文献[2].

教学建议

本节可以安排 3 课时教学. 引例通过研究吸烟与患慢性气管炎的关系的一组调查数据引入，首先从数据上直观判断吸烟与患慢性气管炎有关，再应用假设检验的方法对问题进行分析，得到在原假设“慢性气管炎患病与吸烟没有关系”成立的条件下，四种事件发生的预期值(也称理论频数)，通过比较观察值(也称实际频数)与预期值之间的差异，引入 χ^2 统计量，并应用 χ^2 统计量完成假设检验. 独立性检验是假设检验的一种具体类型，由于学生之前没有接触过假设检验问题，这里可以安排 2 课时教学.

正确构造 2×2 列联表是独立性检验的起步，也是重要步骤，通过表格可以帮助学生直观判断关心的分类变量是否影响另一个分类变量. 教学中应给予学生亲自完成 2×2 列联表的操作机会，让学生体会统计量公式构成的合理性.

在“2×2 列联表的具体应用”教学中，应培养学生对数据的直观感受，认识统计方法的特点，体会统计方法应用的广泛性，理解其方法中蕴含的统计思想. 教材中的引入案例要充分展开，让学生充分体会假设检验的思想和步骤. 一定要避免让学生单纯记忆和机械套用公式进行计算. 教学中，应鼓励学生使用计算器、计算机等信息技术工具来处理数据，有条件的学校还可以运用一些常见的统计软件解决实际问题；要给学生提供一定的实践活动机会，可结合实践探究活动选择一个案例，鼓励学生亲自操作，教材中给出的案例也可以根据需要进行替换，帮助学生感受独立性检验应用的广泛性.

对于选择性必修教材中的统计内容，重点是要求学生了解几种统计方法的基本思想及其初步应用，感受统计在科学实验和现实生活中的重要性，对于其理论基础不作要求.

教学的重点应放在如何对数据进行处理上，指导学生从直观上理解如何选用一个合适的统计量，怎样依据统计量的大小说明独立性是否成立，分析其方法的合理性，对于最后选取的 χ^2 统计量及其大小的界定，教师只需告知结果，学生能够操作即可. 代入公式的过程中计算量不大，必要时可使用计算器处理.

三、参考答案或提示

8.1　成对数据的相关分析

练习 8.1(1)

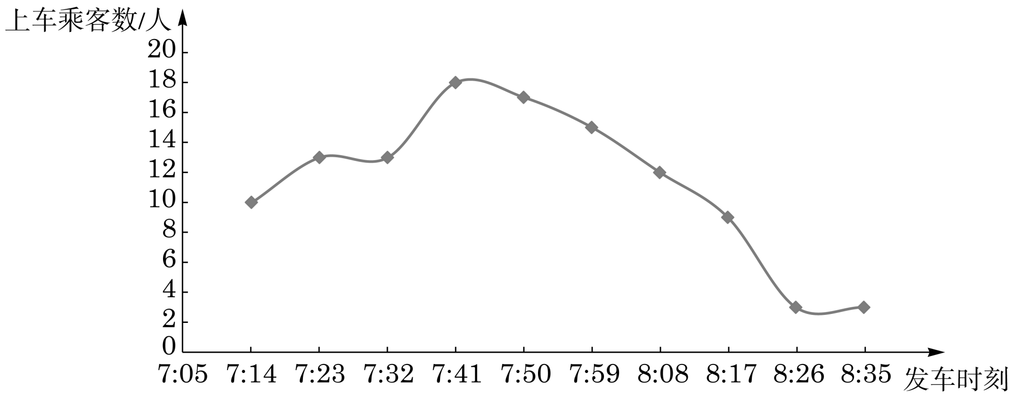
1.（1）因为不是来自同一对象的两组数据，所以不能看作成对数据，不能进行相关分析.

（2）一个人体内的脂肪含量与这个人的体重可以看作成对数据，能够进行相关分析.

（3）一个班级学生的物理成绩和数学成绩可以看作成对数据，能够进行相关分析.

2.（1）可以.　（2）略.

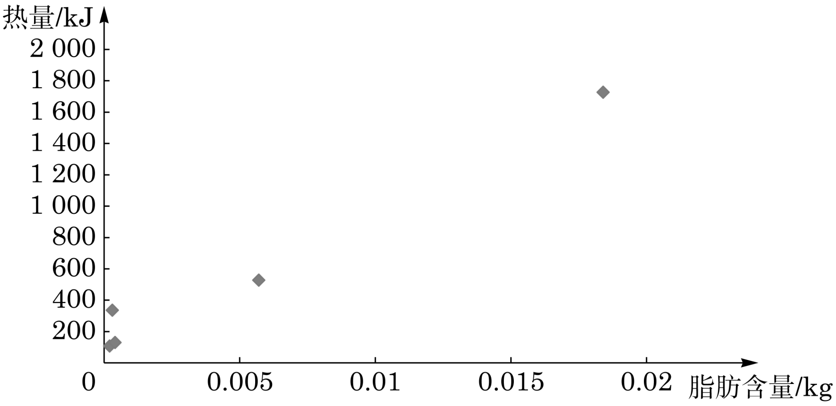
3. 发车时刻与上车乘客人数之间的关系是：开始记录的时候，上车乘客人数总体上是逐步增加的，最多时达到 18 人，发生在第 4 次记录，随后上车乘客人数开始逐步下降. 从散点图来看，近似呈抛物线形相关趋势.



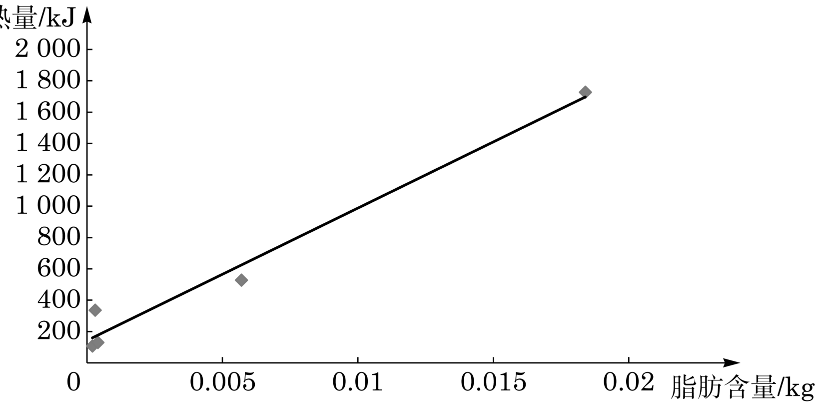
练习 8.1(2)

1. 提示：对自己收集到的部分同学的某两科成绩计算相关系数.

2. (1)



(2)



相关系数为 0.988.

习题 8.1

A 组

1. -0.863.

2. 0.561.

3. 0.945.

4. 0.989.

B 组

1. C.

2. -0.696.

3. 0.888.

8.2 一元线性回归分析

练习 8.2(1)

1. 略.

2. D.

3. D.

练习 8.2(2)

1. 68. 提示：先根据 $\hat{b}=\overline{y}-\hat{a}\overline{x}$求出 $\hat{b}=59.5$，进而求得 $y=67.5$，因此用电量约为 68 kW·h.

2. $y=-0.001x+1.098$.

3. $y=0.183x-9.935$.

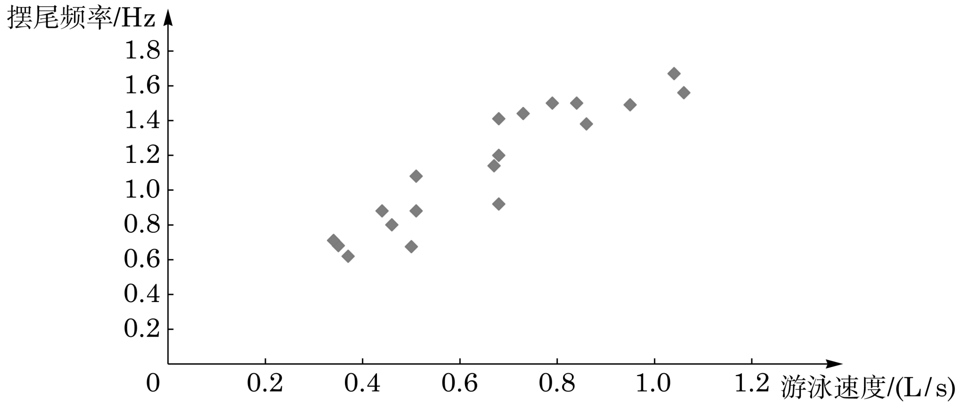
习题 8.2

A 组

1. $y=161.642x-323\ 388.121$.

2. $y=1.345x-53.118$.

3. (1)



(2) $y=1.439x+0.190$.

4. $y=0.604x+4.118$.

5. (1) -0.909.

(2) $y=-1.818x+77.364$.

(3) 64.64 元.

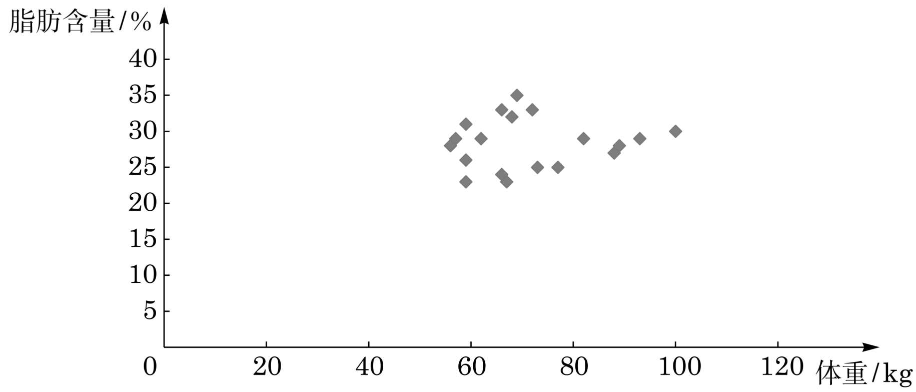
B 组

1. (1) $y=60+5x$.

(2) 110 千元.

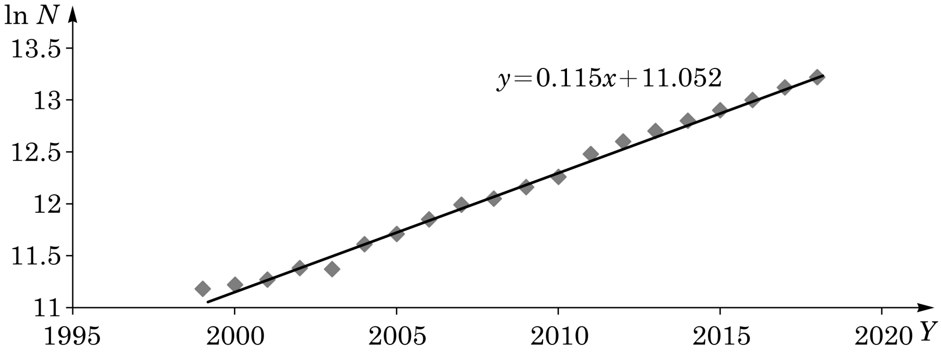
2. (1) 男性: $y=0.186x+11.571$；女性: $y=0.403x+5.240$.

(2) 事实上，从散点图来看，男女合并后的数据中脂肪含量与体重之间已经不具有线性关系. 因此，即使作线性回归分析得到回归方程，其斜率也必然和(1)中所计算的斜率有较大差异.



（3）①男性：0.935；②女性：0.813；③男女合计：0.078. 这些数据与(2)中所反映的信息一致.

3.（1）



按照原始数据，Y 表示年份，所得结果为 $\ln N=0.1147Y-218.3205$，所以 $N=e^{-218.3205}e^{0.1147Y}$. 以此模型预测 2021 年我国国内游客数量为：$N\approx 720\,900$(万人次). 提示：由于年份数据较大，因此建议保留 4 位小数，以提高指数模型预测的准确性.

（说明：若以 1999 年为起点，Y 表示随后的年数，即 1999 年对应 $Y=0$，2000 年对应 $Y=1$，2001 年对应 $Y=2$，以此类推，2018 年对应 $Y=19$，则可使对应常数项的数值较小，而不改变线性回归方程的本质. 此时，$\ln N=0.115Y+11.053$，所以 $N=e^{11.053}e^{0.115Y}=63\,133.07e^{0.115Y}$.）

（2）查阅国家统计局网站文化和旅游部提供的数据，2021 年国内游客恢复至 2019 年的 54%，实际游客人次为 325 000 万人次(2019 年实际游客为 601 000 万人次). 2020 年初开始，受新冠疫情国际大流行的影响，外部影响因素发生重大变化，原来国内游客数量增长的变化规律被打破，这提醒我们，在作长期预测时，必须考虑解释变量和反应变量之间的依赖关系是否发生改变.

8.3 2×2 列联表

练习 8.3(1)

$\chi^2\approx 178.129$，因为 $178.129>3.841$，所以在 0.05 的显著性水平上拒绝原假设

H_0：上课注意力集中与否与数学成绩之间没有关系. 因此，上课注意力集中与否与数学成绩之间有关系.（也可以说：注意力是否集中对成绩有显著影响，上课注意力集中的学生成绩显著好于上课注意力不集中的学生.）

练习 8.3(2)

1. $\chi^2 \approx 14.501$，因为 $14.501 > 3.841$，所以在 0.05 的显著性水平上拒绝原假设，髋关节保护器可以降低老年人髋部骨折的可能性.

2. $\chi^2 \approx 0.788$，因为 $0.788 < 3.841$，所以在 0.05 的显著性水平上接受原假设，A、B 两所中学的学生对报考某类大学的态度没有显著差异.

习题 8.3

A 组

1. $\chi^2 \approx 2.724$，因为 $2.724 < 3.841$，所以在 0.05 的显著性水平上接受原假设，该校高中生的数学成绩与语文成绩之间没有显著关系.

2. $\chi^2 \approx 11.098$，因为 $11.098 > 3.841$，所以在 0.05 的显著性水平上拒绝原假设，甲、乙两种中草药的疗效有显著差异.

B 组

1. $\chi^2 \approx 4.818$，因为 $4.818 > 3.841$，所以在 0.05 的显著性水平上拒绝原假设，改进操作方法能显著降低不合格率.

2. 证明：设表 8-9 各单元格在原假设下的预期值分别为 a'、b'、c'与 d'，则

$$a' = \frac{(a+b)(a+c)}{n},\ b' = \frac{(a+b)(b+d)}{n},$$

$$c' = \frac{(c+d)(a+c)}{n},\ d' = \frac{(c+d)(b+d)}{n}.$$

于是，计算可得

$$\frac{(a-a')^2}{a'} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)},\ \frac{(b-b')^2}{b'} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(ad-bc)^2}{(a+b)(b+d)},$$

$$\frac{(c-c')^2}{c'} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(ad-bc)^2}{(c+d)(a+c)},\ \frac{(d-d')^2}{d'} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(ad-bc)^2}{(c+d)(b+d)}.$$

所以

$$\chi^2 = \frac{(ad-bc)^2}{n} \cdot \frac{(c+d)(b+d)+(c+d)(a+c)+(a+b)(b+d)+(a+b)(a+c)}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$$=\frac{(ad-bc)^2}{n}\cdot\frac{n(b+d)+n(a+c)}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

复习题

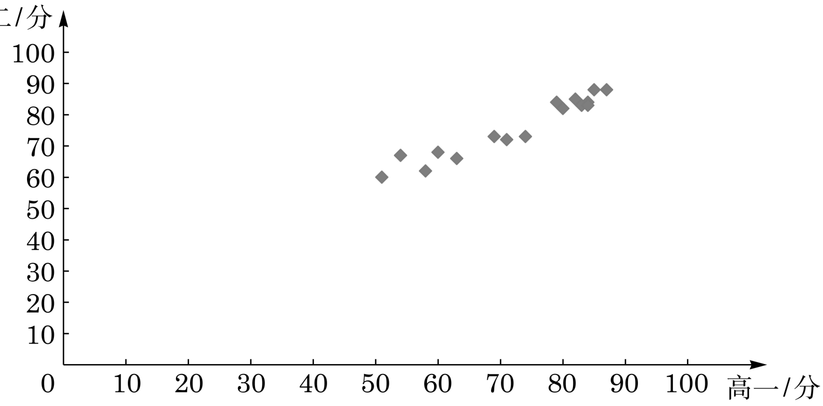
A 组

1. 0.992.

2. -44.866.

3. 广告费每增加 1 万元，销售额大约增加 9.4 万元.

4. (1)



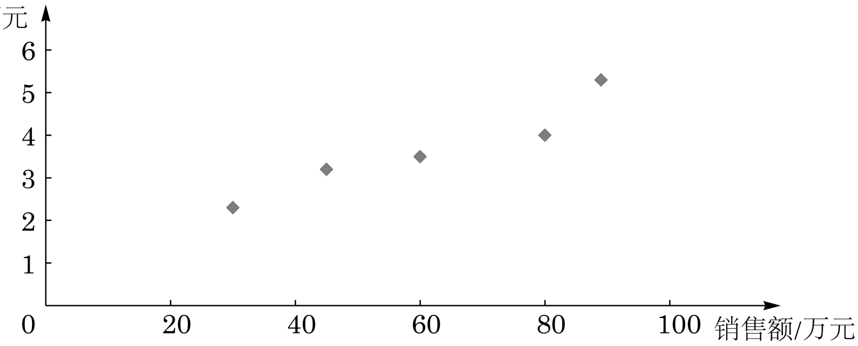
(2) 相关系数 $r\approx0.965$，说明学生高一与高二结束时的数学考试成绩之间具有很高的相关性.

5. $\chi^2\approx8.416$，因为 $8.416>3.841$，所以在 0.05 的显著性水平上拒绝原假设，能够以 95%的把握认为性别与读营养说明之间有关系.

B 组

1. 68.13%.

2. (1)



(2) $y=0.043x+1.034$.

3. (1) 该商品年销售额与地区居民人数的相关系数为 0.944，与平均每个家庭每年总收入的相关系数为 -0.090.

（2）该商品年销售额 y(单位：万元/年，y 为反应变量)与地区居民人数 x(单位：万人，x 为解释变量)的相关系数较大，回归方程为 $y=5.490x+41.967$.

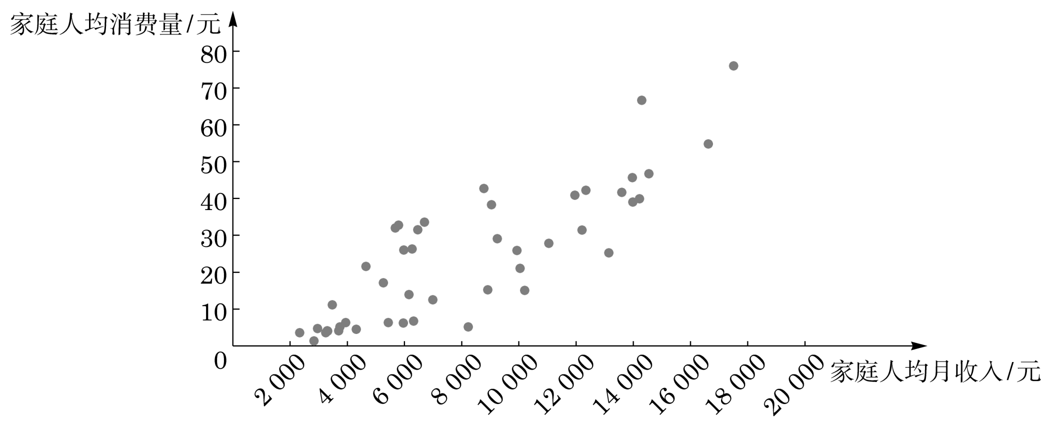
4.（1）

	无枯萎病	有枯萎病	总计
感染红叶螨	15	11	26
未感染红叶螨	17	14	31
总计	32	25	57

（2）$\chi^2\approx 0.047$，因为 $0.047<3.841$，所以在 0.05 的显著性水平上接受原假设，即这些数据不能说明感染红叶螨可引起植株对枯萎病的抗性.

拓展与思考

1.（1）



（2）0.844.

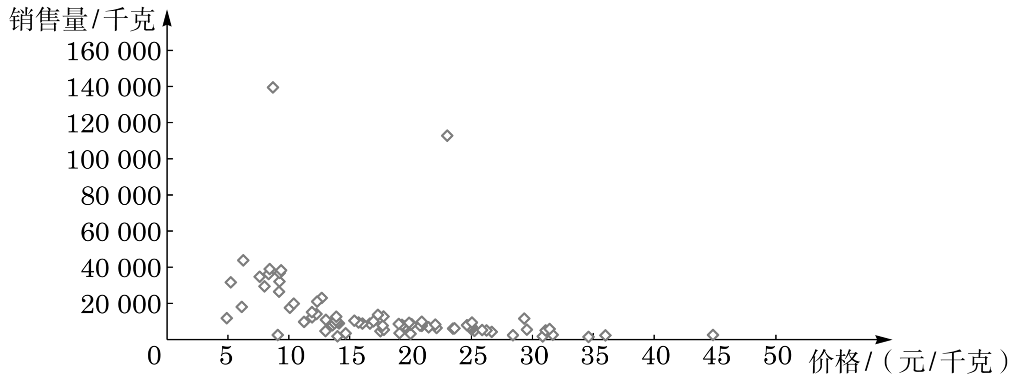
（3）通过观察散点图，加之 y 与 x 之间具有较高的相关性，说明 y 与 x 之间具有线性相关关系，可作回归分析，回归方程为 $y=0.004x-5.636$.

2.（1）将 $t=19$ 代入模型①，得 $y=226.1$，该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值为 226.1 亿元；将 $t=9$ 代入模型②，得 $y=256.5$，该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值为 256.5 亿元.

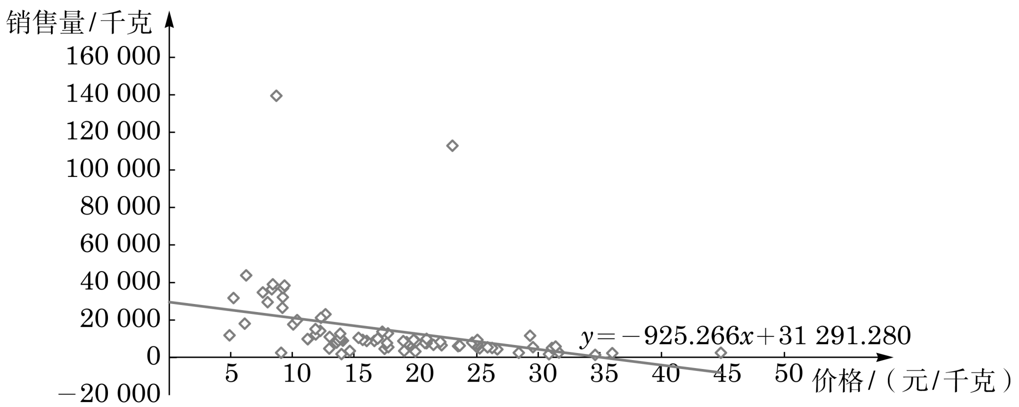
（2）用模型②得到的预测值更可靠. 理由：a.线性回归方程只能用来预测变化趋势没有发生明显改变且变量范围没有发生大的变化的情况，从折线图可以看出，从 2009 年以前到 2010 年以后，环境基础设施投资额的增长趋势发生了较大变化，这一点从模型①与模型②的直线斜率也可以看出；b.2019 年临近 2010—2018 年而远离 2000—2009 年，短期内变化趋势改变较小而长期来说会发生较大变化，另外，用模

型①预测 2016 年的值，计算结果为 199.1 而实际为 220，二者相差较大.（从 a、b 任一角度正确作答即可）

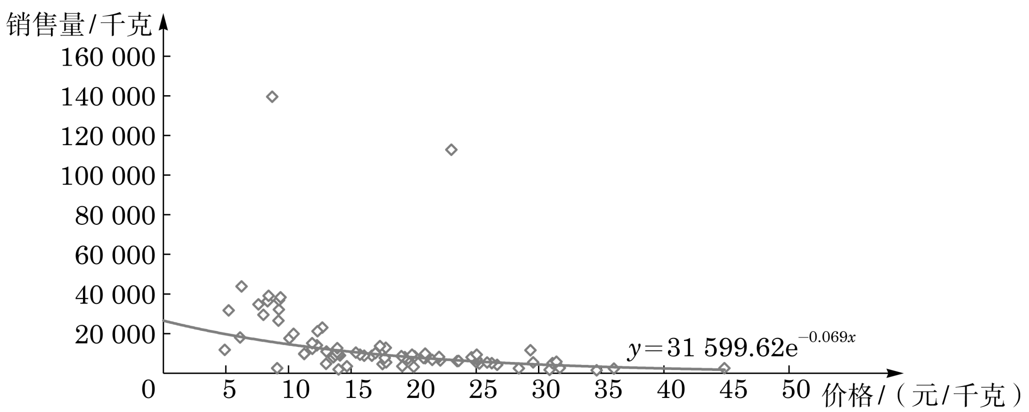
3. 价格与销售量的散点图为：



计算得到:价格与销售量的相关系数为-0.361，回归直线方程 $y=-925.266x+31\,291.280$.



由于相关系数比较小，于是再观察散点图，发现价格与销量之间不是线性关系，而是呈现出明显的指数下降趋势. 将饼干的销售量取自然对数再进行线性回归分析，得到 $y=31\,599.62\mathrm{e}^{-0.069x}$.



四、相关阅读材料

参考文献

[1] 陈希孺. 数理统计学简史[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2021.

[2] 茆诗松，程依明，濮晓龙. 概率论与数理统计教程(第三版)[M]. 北京：高等教育出版社，2019.

[3] 茆诗松，丁元. 回归分析及其试验设计[M]. 上海：华东师范大学出版社，1981.

[4] 茆诗松. 统计手册[M]. 北京：科学出版社，2003.

[5] 陈家鼎，刘婉如，汪仁官. 概率统计讲义(第三版)[M]. 北京：高等教育出版社，2004.

[6] 刘锦萼，等. 概率论与数理统计[M]. 北京：科学出版社，2001.

[7] 埃维森，格根. 统计学基本概念和方法[M]. 吴喜之，等译. 北京：高等教育出版社，2017.

[8] 戴维·穆尔，威廉·诺茨. 统计学的世界(上、下)[M]. 郑磊，译. 北京：中信出版集团，2017.

[9] 陆璇. 数理统计学基础[M]. 北京：清华大学出版社，2001.

[10] 假谷太一. 预测知识[M]. 黄宗成，译. 重庆：科学技术文献出版社重庆分社，1985.

[11] 周兆麟，李毓芝. 数理统计[M]. 北京：中国统计出版社，1985.

[12] 茆诗松，魏振军. 随机世界探秘——概率统计初步[M]. 上海：上海教育出版社，2000.

[13] P. J. Bickel & K. A.Doksum. Mathematical Statistics [M]. Vol. 1. Second Edition. New Jersey：Prentice Hall，2001.

[14] M. H. Kutner，C. J. Nachtsheim，J. Neter & W. Li. Applied Linear Statistical Models [M]. Fifth Edition. New York：McGraw－Hill/Irwin，2005.

附录

线性回归方程检验

线性回归方程的检验是个比较大的话题，有不同的角度和不同的方法. 这里只介绍决断系数检验，并且证明决断系数检验与相关系数检验是等价的.

决断系数(coefficient of determination，亦译作“判别系数”“可决系数”“拟合优度”等)的大小决定了最小二乘法回归拟合的优劣状况. 决断系数越接近 1，表示回归方程对原数据的拟合度越高，该方程的参考价值越高；相反，它越接近 0，表示回归方程对原数据的拟合度越低，该方程的参考价值越低.

沿用 8.2 节的一些记号：对一组成对数据(x_1,y_1)、(x_2,y_2)、…、(x_n,y_n)，数对$(\overline{x},\overline{y})$是样本点的中心，线性方程 $y=\hat{a}x+\hat{b}$ 是这组数据的线性回归方程，而 $\hat{y}_i=\hat{a}x_i+\hat{b}$，如图 8-R2 所示.

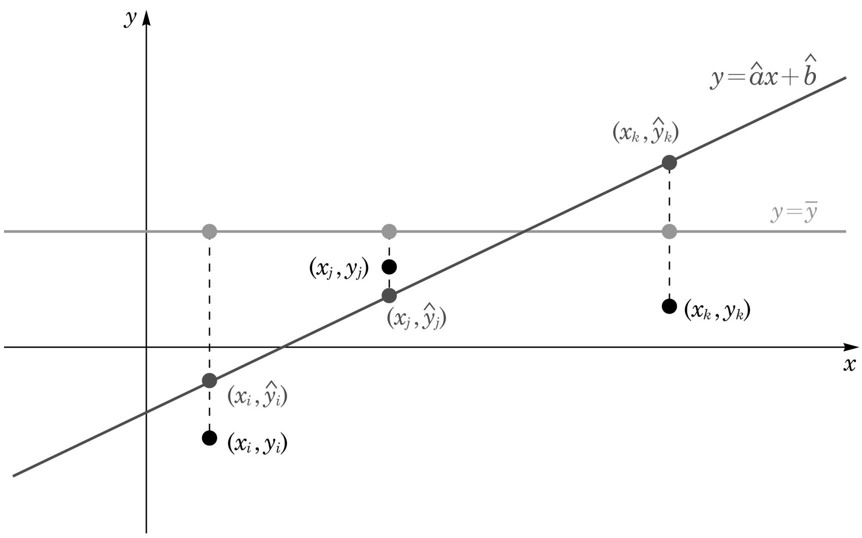


图 8-R2

定义这个线性回归的决断系数为

$$r^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2},$$

我们先认为 r^2 是一个新的统计量，暂时不与 8.1 节的相关系数 r 建立联系.

这个式子中的分母 $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$ 称为总平方和，它是观察数据(x_i,y_i)与数据中

心线 $y=\overline{y}$ 距离的平方和，常记为 SST；分子 $\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2$ 称为回归平方和，它是回归数据 $(x_i,\hat{y}_i)$ 与数据中心线 $y=\overline{y}$ 距离的平方和，常记为 SSR（参看图 8-R2）.

总平方和 SST、回归平方和 SSR 和教材第 126 页所定义的拟合误差 Q 有密切的关系. 拟合误差 Q 也常称为误差平方和，记为 SSE，即 $SSE=\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-y_i)^2$. 对每一个固定的 x_i，我们有 $y_i-\overline{y}=(\hat{y}_i-\overline{y})+(y_i-\hat{y}_i)$，这个和式关系在平方和层面依然成立，即我们有

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2+\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-y_i)^2, \quad ①$$

或写作

$$SST=SSR+SSE.$$

证明如下：

因为

$$y_i-\overline{y}=(y_i-\hat{y}_i)+(\hat{y}_i-\overline{y}),$$

所以

$$\begin{aligned}(y_i-\overline{y})^2&=[(y_i-\hat{y}_i)+(\hat{y}_i-\overline{y})]^2\\&=(y_i-\hat{y}_i)^2+(\hat{y}_i-\overline{y})^2+2(y_i-\hat{y}_i)(\hat{y}_i-\overline{y}).\end{aligned}$$

由 $\hat{y}_i=\hat{a}x_i+\hat{b}$，$\overline{y}=\hat{a}\,\overline{x}+\hat{b}$（从而 $\hat{b}=\overline{y}-\hat{a}\,\overline{x}$），于是有

$$\hat{y}_i-\overline{y}=\hat{a}(x_i-\overline{x}),\quad y_i-\hat{y}_i=(y_i-\overline{y})-\hat{a}(x_i-\overline{x}),$$

由此得到

$$(y_i-\hat{y}_i)(\hat{y}_i-\overline{y})=\hat{a}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})-\hat{a}^2(x_i-\overline{x})^2.$$

把最后这个式子两端对 i 求和，并把从回归系数公式得到的等式

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=\hat{a}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

代入，得到

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)(\hat{y}_i-\overline{y})=\hat{a}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})-\hat{a}^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=0.$$

于是①式成立，即

$$SST=SSR+SSE.$$

于是决断系数

$$r^2=\frac{SSR}{SST}=\frac{SST-SSE}{SST}=1-\frac{SSE}{SST}.$$

决断系数的分母 SST 是总平方和，来源于观察得到的真实数据. 从 SST 的分解 $SST=SSR+SSE$ 可以看出决断系数 r^2 的值在 0 与 1 之间，它所分解的第一项回归平方和 SSR 来源于回归方程所估计的预测数据，SSR 在总平方和中的比例越高，表明回归方程的预测估计数据对真实数据的解释能力越强.

最后把决断系数与 8.1 节所定义的相关系数

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$$

联系起来. 我们暂且把相关系数 r 的平方记为 $(r)^2$. 由 $\hat{y}_i=\hat{a}x_i+\hat{b}$ 与 $\overline{y}=\hat{a}\,\overline{x}+\hat{b}$，可以推出

$$\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2=\hat{a}^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2,$$

把回归系数 $\hat{a}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$ 代入，得到

$$\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2=\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\right]^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

$$=\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2=(r)^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2,$$

于是，

$$(r)^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}=r^2,$$

即决断系数就是相关系数的平方. 因此，用决断系数与用相关系数判定一个回归模型对原始数据拟合的优劣状况是等价的. 但两个系数各有特点，相关系数只用到原始数

据和它们的均值，更适合在作回归分析之前进行“预判”. 教材提及的一组“有线性相关关系的成对数据”，就可以理解为相关系数的绝对值较大的一组数据，只有对这样的数据作最小二乘估计，才有获得比较好的回归模型的可能. 决断系数用到了原始数据、作线性回归后的理想数据以及它们的均值，只能在得到回归模型后使用，但它的公式相对简单，用于事后判定回归模型的优劣比较方便.

后　　记

本套教学参考资料与李大潜、王建磐主编，上海教育出版社出版的《普通高中教科书·数学》配套使用，本套教材根据中华人民共和国教育部制定并颁布实施的《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》编制，并经国家教材委员会专家委员会审核通过.

本套教材是由设在复旦大学和华东师范大学的两个上海市数学教育教学研究基地(上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地)联合主持编写的. 编写工作依据高中数学课程标准的具体要求，努力符合教育规律和高中学生的认知规律，结合上海城市发展定位和课程改革基础，并力求充分体现特色. 希望我们的这一努力能经得起实践和时间的检验，对扎实推进数学的基础教育发挥积极的作用.

本书是与选择性必修第二册教材配套的教学参考资料，共为四章，各章编写人员分别为

程靖(第 5 章)

肖恩利、姚一隽(第 6 章)

应坚刚、田万国(第 7 章)

任升录、陈月兰、汪家录(第 8 章)

限于编写者的水平，也由于新编教材尚缺乏教学实践的检验，不妥及疏漏之处在所难免，恳请广大师生及读者不吝赐教. 宝贵意见请通过邮箱 gaozhongshuxue@seph.com.cn 反馈，不胜感激.

2022 年 7 月

图书在版编目（CIP）数据

普通高中数学教学参考资料：选择性必修. 第二册 / 上海市中小学（幼儿园）课程改革委员会组织编写. —上海：上海教育出版社，2022.7（2025.6重印）
ISBN 978-7-5720-1458-1

Ⅰ. ①普… Ⅱ. ①上… Ⅲ. ①中学数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2022)第103131号

经上海市中小学教材审查委员会审查
准予试用　　准用号 Ⅱ-GJ-2022017

中国环境标志
CHINA ENVIRONMENTAL LABELLING

绿色印刷产品

ISBN 978-7-5720-1458-1

定　价：　22.00元