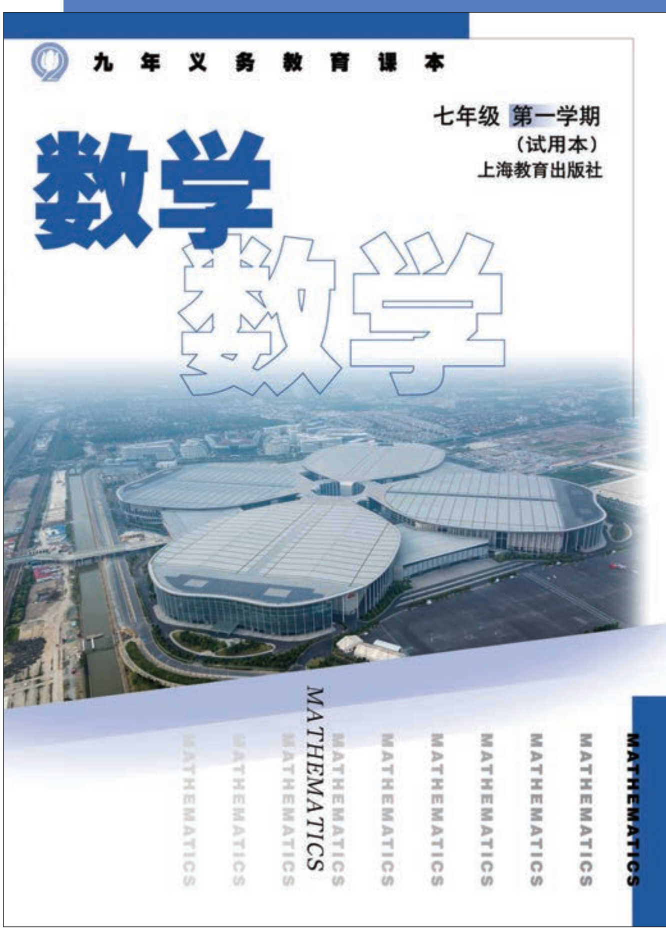
九 年 义 务 教 育

七年级 第一学期

（试用本）

数学

教学参考资料



上海教育出版社

目　　录

注：(　)中的数字表示课本的原页码.

课 程 简 介

一、课程的地位和作用

数学是研究数量关系和空间形式的科学，也是现代文化的重要组成部分，它的内容、思想、方法和语言已经广泛渗入人们的日常生活和工作中，影响着人们的思维方式，推动社会文化的进步.数学作为人们认识世界、从事工作和学习的必需工具，作为一种传递信息的强有力手段和人际交流的简明语言，对社会大众有着非常重要的意义.数学素养是现代公民必备的一种基本素养.

在基础教育阶段，数学课程是一门主要课程.它不仅为其他学科的学习提供基础知识、基本技能和思想方法，而且也为发展学生的抽象能力、推理能力和创造能力起着特殊的作用.在初中教育阶段，学生通过数学的学习，应掌握数学的基础知识、基本技能和思想方法，具有数学的表达和运算能力，具有基本的分类、推理、归纳、演绎和价值判断能力，学会有条理地思考和简明清晰地表达思考过程，初步养成积极探究的态度、独立思考的习惯、实事求是的作风和团队合作的精神.

基础教育阶段的数学课程面向全体学生，力求体现数学科学和数学教育的现代观念，促进学生全面、和谐、主动地发展.

二、课程的基本理念

数学课程的基本理念有：

1. 提高学生的数学素养，培养终身学习的基础.

数学课程及其教学，不仅要关注学生对数学知识、技能、思想方法的掌握，数学能力的发展，而且要有助于学生理解数学的社会价值，领略数学文化的内涵，体验数学的思维方式和方法，形成良好的思维品质，促使学生的数学素养得到全面提高.“终身学习”是现代社会中劳动者生存和发展的迫切需要，要让学生学会自行获取数学知识的方法，体会数学思考和创造的过程，不断提高自主学习的能力，帮助学生确立终身学习的愿望，奠定终身发展的基础.

2. 构建所有学生必需的共同基础，加强数学的应用和实践.

数学课程要体现“数学为人人”的指导思想，立足于使所有学生获得必备的数学基础.抓住数学知识的主干部分，突出基本原理和通用方法，切实加强数学课程的基础性.重视数学与现实生活的联系，选择具有广泛应用性的数学知识充实课程内容，并不断开发数学实践环节，强化运用数学知识分析问题和解决问题的过程.

3. 关注不同学生的数学需要，提供选择和发展的空间.

不同的学生可以有不同的数学发展.提供具有差别性和多样性的数学课程设计，增加课程的可选择性，使数学课程适应于全体学生.在初中义务教育阶段适当安排拓展性的数学内容，开阔学生的数学视野，发展学生的兴趣爱好.

4. 充分关注学习过程，引导学生探索求知.

数学课程应充分关注课程中的学习过程，创设有利于学生发挥主体性和创造性的条件.还应为学生探索求知创设合适的情境，重视从问题出发，设计以解决问题的活动为基础的数学认知过程.要向学生提供丰富的学习资源，自主探究的时间以及必要的指导和帮助，使学生的认知获得、过程经历、情感态度与价值观的提升，在数学学习中得到和谐统一.

5. 强化评价的教育功能，激励学生奋发进取.

学习评价应关注的重点是对学生主体积极性的调动以及对学生潜能开发和个性发展的促进.强调发挥数学学习评价的教育功能，评价结果应有利于帮助师生改进数学的教与学，激励学生努力学习、奋发上进.

6. 加强现代信息技术的应用，促进信息技术与数学课程的整合.

数学课程必须大力加强现代信息技术的应用，发挥现代信息技术对数学课程改革的积极作用.在现代信息技术的背景下，对数学课程内容进行必要的调整和更新，同时进行体系结构的创新，加强内容与信息技术的整合，拓宽数学学习的渠道，推动学习方式的转变，改善数学教学的过程.

三、课程的总目标

掌握有利于终身学习的数学基本知识和基本技能，其内容有数与运算、方程与代数、图形与几何、函数与分析、数据整理与概率统计等的基本概念、规律和由它们反映出来的数学思想方法，会按照一定的规则和步骤进行计算，初步形成数学中的听、说、写的交流技能，并会使用计算器进行计算和数据处理.

经历从具体情境中抽象出数学符号、建立数学模型的过程；经历从直观几何、实验几何到推理几何的演进过程，体会直观感知与理性思考的联系和区别，体会归纳推理、类比推理和演绎推理的意义和作用.

掌握演绎推理的基本规则和方法，能根据问题条件，寻找与设计合理、有效的运算途径，通过运算进行推理和探求.能通过数学的操作实验或理性活动进行合情推理，初步形成数学建模能力.初步掌握观察、操作、比较、分析、类比、归纳等数学实验研究的方法和利用图表整理数据、获取信息的方法.

关心现实世界中的数学现象并具有积极探索的兴趣，能从数学的角度提出问题和进行研究，知道数学内容中普遍存在着的运动、变化、相互联系和相互转化的规律，从中体会辩证唯物主义观点.

注：本文摘自《上海市中小学数学课程标准（试行稿）》的第 25～36 页.

课 本 概 述

一、课本内容

1. 本册课本的基本内容如下：

第九章　整式		第十章　分式	第十一章　图形的运动
9.1 字母表示数	9.11 平方差公式	10.1 分式的意义	11.1 平移
9.2 代数式	9.12 完全平方公式	10.2 分式的基本性质	11.2 旋转
9.3 代数式的值	9.13 提取公因式法	10.3 分式的乘除	11.3 旋转对称图形与中心对称图形
9.4 整式	9.14 公式法	10.4 分式的加减	11.4 中心对称
9.5 合并同类项	9.15 十字相乘法	10.5 可以化成一元一次方程的分式方程	11.5 翻折与轴对称图形
9.6 整式的加减	9.16 分组分解法	10.6 整数指数幂及其运算	11.6 轴对称
9.7 同底数幂的乘法	9.17 同底数幂的除法		
9.8 幂的乘方	9.18 单项式除以单项式		
9.9 积的乘方	9.19 多项式除以单项式		
9.10 整式的乘法			

2. 拓展、阅读材料和探究活动的内容如下：

	第　九　章	第　十　章	第　十　一　章
探究活动	一组平方数规律的探究	对一类特殊分式的探究	平面图形的设计
	探究能被 3、9 整除的数的规律		
阅读材料	贾宪三角		平面镶嵌
拓展	多项式除以多项式——长除法		

3. 本册课本的编制理念：

数学是有趣的，数学是有用的，数学的方法是美妙的，数学的思想是浅显的. 让学生通过操作体验数学，通过观察发现数学，通过探索感悟数学，通过运用理解数学，从而理解数学的社会价值，领略数学文化

的内涵，体验数学的思维方式，形成良好的数学思维品质，促使学生的数学素养得到全面提高.

4. 本册课本的几个特点：

（1）为全体学生学习数学构建共同基础.

本册课本供上海市七年级第一学期全体学生学习数学之用.数学在初中阶段是一门基础性的学科.基础扎实是中国基础数学教育的优势之一，因而打好基础是二期课改重要的任务之一.只是现在的数学基础是在现代教育观念指导下所确立的，所选内容是精选学生终身学习必备的基础知识和基本技能，基于这些，本学期学生学习的基础性内容是整式、分式、图形的运动等.根据课程标准，在学生对数的通性、通法充分理解和掌握了解方程（组）的基础上再学习整式，使学生逐渐体会代数的思想.通过数到式的学习提高学生抽象表述和抽象思维的能力.在分式这章中，主要学习分式的概念、基本性质与运算，而在数学思想上，主要学习类比的思想，通过类比分数的有关运算法则，得出分式的运算法则.图形的运动这一章的学习，定位在操作感知、实验几何的阶段，通过贴近学生生活的实例、操作实验，理解图形和图形运动的有关概念，为进一步学习平行、全等等几何概念作好数学知识的准备.

（2）提供现实、有趣、贴近学生生活实际的数学背景材料.

本册课本使用的对象是七年级学生.将数学知识形态转变为学生感兴趣的和学生可理解的教育形态，是一个值得重视的问题.为此，在课本中以学生感兴趣和熟悉的问题情景引入学习主题，设计和提供了众多的实际情景问题，如整式这章是以相邻两条跑道上运动员的起跑线相隔多远才比较公平的问题引入的；分式这章是由火车提速引出的问题引入的.本册课本力图通过生动的、贴近生活的和新颖的实例将数学的概念、法则转变为更易于学生接受的形态，使课本更具可读性和趣味性.

（3）注意数学思想方法的渗透.

根据课程标准，本册课本中蕴含着许多重要的数学思想：在整式这章中有数形结合的思想，如整式的乘法，通过长方形的面积计算来引出单项式与单项式、单项式与多项式、多项式与多项式的乘法，从而使学生能更易理解式的运算；在分式这章中，分式的运算蕴含着特殊到一般的思想，即将分数的乘除、加减运算扩大到更一般的分式的运算，也体现字母“代”数的一个渐进的过程.教师在具体的教学中将逐渐地体会到这些数学思想方法的重要性.将数学知识作为数学思想方法的载体，让数学思想方法通过数学知识来显化.让学生从小就在数学思想的熏陶下，学习数学.

（4）满足不同学生学习数学的需求.

课本在保证全体学生学习数学基础内容的同时，也为在数学上有更多需求的学生提供了学习素材.本册课本提供了许多探究活动、阅读材料和拓展栏目.“探究活动”是数学和现实中的一些具有的挑战性的问题，引导学生运用数学方法和手段进行探索，从而解决问题，并引起更多的思考，如探究活动：一组平方数规律的探究和对一类特殊分式的探索，有一定的式的变换和初步的逻辑推理的要求，这些探究适合对数学有兴趣的学生做进一步的学习.“阅读材料”是有关数学史料、趣题的介绍，主要是为有兴趣的学生提供课外的学习和更多了解数学的机会，如阅读材料：贾宪三角，就是让学生了解中国古代数学的瑰宝，增加学习数学的兴趣.“拓展”栏目中，主要安排的是有关数学知识内容的延伸和发展，提供给学生数学探索的机会.

二、教学目标

1. 理解用字母表示数的意义，理解代数式的意义.

2. 通过列代数式，初步掌握文字语言与符号语言之间的转换，领悟字母“代”数的数学思想，提高数学语言的表达能力.

3. 掌握整式的加、减、乘、除及乘方的运算法则，掌握平方差公式、两数和（差）的平方公式及其简单的

运用.

4. 理解因式分解的意义，掌握提取公因式法、分组分解法、公式法和二次项系数为1时的十字相乘法等因式分解的基本方法.

5. 理解分式的有关概念及其基本性质，通过与分数运算法则的类比，掌握分式的加、减、乘、除的运算法则.

6. 展现整数指数幂的扩展过程，理解正整数指数幂、零指数幂、负整数指数幂的概念，掌握有关整数指数幂的乘(除)、乘方等运算法则.

7. 通过对具体事例的描述，理解图形平移的意义.

8. 通过观察和操作，认识图形的旋转及其基本特征，知道旋转对称图形，知道中心对称图形是旋转对称图形的特例，理解中心对称的意义.

9. 通过操作活动，认识平面图形的翻折过程，理解轴对称的意义.

10. 在认识图形基本运动的过程中，感知几何变换思想，知道在经过平移、旋转、翻折等运动过程后，图形的形状和大小保持不变.

三、课时安排

本学期每周4课时，以17周计算，共68课时，8课时作为机动课时.另外60课时建议安排如下：

第九章　整式	42课时
第十章　分式	10课时
第十一章　图形的运动	8课时

在每章中已具体列出有关章节的课时安排，供教师教学时参考.

第九章　整　　式

一、教学目标

1. 在过去已有经验的基础上，进一步理解字母表示数的意义，理解代数式的有关概念，会求代数式的值，进一步掌握有理数的基本运算.

2. 经历用字母表示数和列代数式的抽象过程，初步体验文字语言和符号语言的转换过程，初步掌握文字语言与符号语言表述之间的转化方法，领悟字母“代”数的数学思想，提高数学语言的表达能力.

3. 掌握整式的加、减、乘、除及乘方的运算法则，能熟练地对简单整式进行加减运算和乘法、乘方运算，掌握整式除以单项式的基本方法.

4. 熟练掌握三个乘法公式，即平方差公式、两数和(差)的平方公式，并能运用这些乘法公式解决简单的有关问题.

5. 理解因式分解的意义，知道因式分解与整式乘法之间的关系，能利用整式乘法验证因式分解结果的正确性.

6. 掌握因式分解的四种基本方法，即提取公因式法、公式法、二次项系数为 1 的二次三项式的十字相乘法、分组分解法，能运用这四种因式分解的方法分解简单的多项式.

7. 经历整式乘法和因式分解方法的学习过程，进一步体验数学内容中普遍存在的变化、相互联系和相互转化的规律，体会辨证唯物主义观点.

二、课时安排

9.1	字母表示数	2 课时
9.2	代数式	1 课时
9.3	代数式的值	2 课时
9.4	整式	2 课时
9.5	合并同类项	2 课时
9.6	整式的加减	2 课时
9.7	同底数幂的乘法	2 课时
9.8	幂的乘方	2 课时
9.9	积的乘方	2 课时
9.10	整式的乘法	4 课时
9.11	平方差公式	2 课时

9.12	完全平方公式	2 课时
9.13	提取公因式法	3 课时
9.14	公式法	3 课时
9.15	十字相乘法	2 课时
9.16	分组分解法	2 课时
9.17	同底数幂的除法	1 课时
9.18	单项式除以单项式	1 课时
9.19	多项式除以单项式	1 课时
本章小结		4 课时

三、设计说明

在学生已经学过的有理数、一元一次方程和一元一次不等式等知识中涉及的字母“代”数的基础上，引入字母表示数的概念，帮助学生理解较为抽象的字母表示数的意义，在此基础上归纳出代数式的概念.

类比有理数的加法、减法、乘法、除法和乘方运算以及运算法则，列出相应整式的加法、减法、乘法、除法和乘方运算法则，让学生运用类比的思想进行学习，这样有利于他们更好地掌握整式运算的法则和方法.

乘法公式是对特殊整式乘法的规律性描述.乘法公式也是因式分解中运用公式法分解因式的基础.

因式分解和整式的乘法运算都是整式的一种恒等变形，因式分解是整式乘法的一种逆向变形，也是今后学习分式的基础.本章主要介绍四种最简单、最常用的分解因式的方法，在学习了整式的乘法后，紧接着学习因式分解，有利于学生进行比较，进行验证.

四、教学建议

1. 字母表示数是“代”数的基础.虽然学生已经学习了一元一次方程、二元一次方程(组)等知识，对字母表示数有一定的感知，但教学时，教师应给学生充分机会，让学生用数学语言和符号语言来展示自己的表示和思维.

2. 整式中有些概念，学生刚学时不易理解，比如系数、次数、同类项、代数式等，教学时，可通过简单、生动的事例，帮助学生区分、理解和掌握这些概念.

3. 教学时，应让学生经历运算法则、公式的形成过程，使他们领悟法则、公式的意义.由于整式的运算是多项式因式分解和今后学习分式、解方程的基础，因此适度的练习巩固是必要的.

4. 因式分解是整式中重要的恒等变形，它与整式乘法是互逆关系.教学时要使学生掌握因式分解的方法，并会利用整式乘法反向进行验证，强调因式分解必须在有理数范围内分解到不能分解为止.

5. 在教学时，要进行数学思想方法的渗透.如列代数式就是将文字语言转化为符号语言的过程；同底数幂相乘、幂的乘方、积的乘方等法则的形成过程，隐含着特殊到一般的思想方法；求代数式的值，隐含着一般到特殊的思想方法等.教师应将课本中所隐含的数学思想方法逐渐渗透在教学中，使学生在学习数学知识的同时领悟其中的数学思想方法.

6. 根据课程标准的要求，教学时，要控制整式运算的难度，不进行繁难的整式运算.乘法公式只要求掌握课本中所举的三个公式；多项式的除法中除式仅限于单项式；因式分解中涉及的多项式不超过四项.

五、评价建议

1. 关注学生用字母表示数的意识.

关注学生能否理解字母表示数的含义,能否运用字母表示某些量,能否熟练地把文字语言转化为符号语言,列出正确的代数式.

2. 关注学生对整式基本运算的能力.

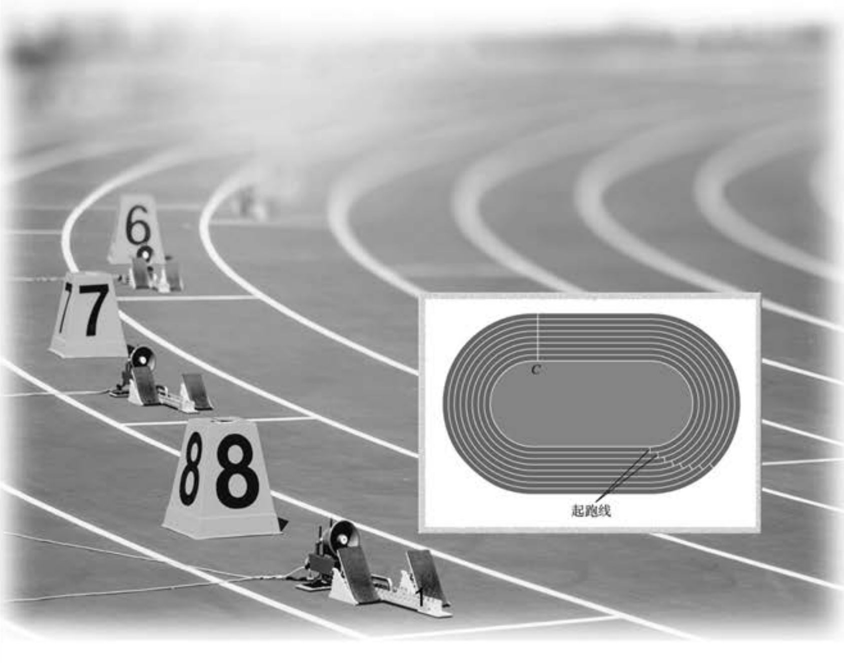
关注学生对整式基本运算法则的理解和掌握,熟练地进行整式的基本运算是中学数学的重要基础.

3. 关注学生对多项式进行因式分解的能力.

关注学生对多项式进行因式分解的能力.由于因式分解需要学生有较高的观察能力、分析能力和应用能力,因此在评价时要关注学生的不同思维方式,鼓励、引导学生积极思考,勇于探索,培养学生潜在的思维能力和创新能力.

第九章 整 式

学校在运动场上举行 200 米的赛跑，每条跑道的道宽为 1.22 米，比赛的终点线定在如图所示的 C 处. 由于不同跑道上的运动员要经过不同的弯道，因此他们不应从同一起跑线上起跑，相邻两条跑道上运动员的起跑线应相隔多远才比较公平？



本章由学生熟悉的学校运动场上跑道的相关问题引入整式的概念. 为了准确、公平地确定运动员成绩，径赛的终点都安排在垂直于跑道的同一条直线上. 但由于弯道内外圈的长度不相等，因此中长跑运动员的起跑线就不一样. 在标准的 400 米跑道上进行 200 米赛跑时，由于要经过一段弯道，因此起跑线不能安排在垂直于跑道的同一条直线上，由此引出一个问题，即“相邻两条跑道上运动员的起跑线应相隔多远才公平？”这个问题可以运用将要学习的数学知识来解决，从而引起学生学习数学的兴趣.

第 1 节的重点是整式的概念；理解字母表示数的意义，并能把语言表述的数量关系用代数式表示，这是本节的难点；正确地分析简单的数量关系，并列出代数式是学习本节的关键.

【教学目标】

(1) 理解字母表示数的意义.

(2) 会用字母替代一些简单问题中的数.

(3) 经历用字母表示一些常见的数或量的过程，领会字母表示数的数学思想.

问题 1

本题说明用字母可以表示运算律，这里的字母可以泛指任意数.

问题 2

本题说明用字母可以表示公式，公式中的字母可以指一类特定意义的数.在教学中还可以回忆长方形、梯形、圆的面积公式，并让学生说明公式中每个字母所代表的意义.在省略乘号时，字母与数字书写的位置一般要遵循数字写在前面，字母写在后面的要求；当数字是带分数时，一般要把带分数写成假分数，然后与字母写在一起.

9

第 1 节　整式的概念

9.1　字母表示数

问题 1

我们知道

$2+3=3+2$,

$2.1+(-4.2)=(-4.2)+2.1$,

这种加法的交换律对任何两个数都是成立的.你能将满足加法交换律的所有数都列举完吗?

一般地，加法的交换律表示为:

$$a+b=b+a\ (a、b\text{表示有理数}).$$

问题 2

还记得三角形面积公式、圆面积公式吗?

如图9-1，如果三角形的底边的长是a，底边上的高是h，三角形的面积为S，那么$S=\frac{1}{2}ah$.

如果圆的半径是r，圆的面积为S，那么$S=\pi r^2$.

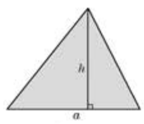


图 9-1

在省略乘号时，要把数字写在字母的前面，如$a\times2$写成$2a$，一般不要写成$a2$.当数字是带分数时，常写成假分数.如$1\frac{1}{2}a$一般写成$\frac{3}{2}a$.

问题 3

如图9-2，游乐场的大转盘的最高点、最低点分别离地面110米、10米，那么这个大转盘的半径是多少米?

2

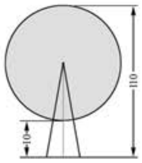


图 9-2

这里的字母r是一个满足等式的数.

设大转盘的半径是r米，据题意，可以列出方程：

$$10+2r=110,$$

解得$r=50$（米）.

问题 4

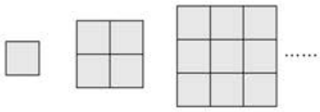


图 9-3

如图 9-3，用若干个大小相同的小正方形，依次拼成大的正方形，第 5 个和第 10 个大正方形需几个小正方形拼成？第n个大正方形需几个小正方形拼成？

请你完成下表：

	1	2	3	4	5	…	9	10	…	n
小正方形的个数	1	4	9	16		…	81		…	

以上问题的讨论中用到了“字母表示数”. 如问题1中的字母a和b表示有理数；问题2中的字母a、h和S表示正数，π表示圆周率. 用字母表示数，可以把数或数量关系简明地表示出来.

字母π表示圆周率时它是一个常数；问题3所列方程中的字母r表示一个未知的定数.

如果字母表示的数可在指定范围内任意取值，就说字母的取值可变，这个字母表示变数（或变元）.

例题1　1千克橘子的价格为a元，小明买了10千克橘子，用字母a表示小明买的橘子的总价.

3

问题 3

本题说明字母可以表示方程中的未知数，而方程中的字母表示几个特定的数.

问题 4

本题说明用字母可以表示有变化规律的数. 教学中，应启发学生寻找 1，4，9，16，…与 1，2，3，4，…相对应的变化规律，从而得到表格中的两个答案：100、n^2.

“用字母表示数”是基本数学思想方法之一，它为用数学语言简明地表述数量关系提供了重要基础.

例题 1

在生活实例中用字母表示数，将文字语言转化为符号语言，最后列出式子.

解　橘子的总价=1千克橘子的价格×橘子的千克数

$=a\times 10$

$=10a$（元）.

例题2　设某数为x，用x表示下列各数：

(1) 比某数的一半还多2的数；

(2) 某数减去3的差与5的积；

(3) 某数与3的和除以某数所得的商；

(4) 某数的60%除以m的商.

解　(1) $\frac{1}{2}x+2$.

(2) $5(x-3)$.

(3) $\frac{x+3}{x}$.

(4) $\frac{60\%x}{m}$.

乘式中含有字母时通常将数字写在字母前.

练习9.1

1. (1) 已知长方形的长为a，宽为b，用a、b表示长方形的周长是________.

(2) 已知圆的半径为r，用r表示圆的周长是________.

(3) 已知三角形的三边长分别为a、b、c，用a、b、c表示三角形的周长是________.

(4) 已知长方形的长是a，宽是b，用a、b表示长方形的面积是________.

2. 设某数是a，用a表示下列各数：

(1) 某数的$\frac{3}{4}$减去$\frac{2}{3}$的差；

(2) 某数的立方的相反数；

(3) 8减去某数的2倍的差；

(4) 8减去某数的差的2倍.

3. 用字母表示两个已学过的公式和运算法则.

4

例题 2

本题的四个小题先用字母x表示某数，然后根据题意，将文字语言转换为符号语言，教学时应强调按文字语言叙述的顺序书写符号语言.本题也为列代数式作了铺垫.

练习 9.1

1. (1) $2a+2b$；

(2) $2\pi r$；

(3) $a+b+c$；

(4) ab.

2. (1) $\frac{3}{4}a-\frac{2}{3}$；

(2) $-a^3$；

(3) $8-2a$；

(4) $2(8-a)$.

3. 如果正方形的边长为a，周长为C，那么$C=4a$；如果长方形的长和宽分别为a、b，面积为S，那么$S=ab$.……

整式

9.2 代数式

在上节中$10a$、πr^2、$5(x-3)$、$\frac{1}{2}x+2$、$\frac{x+3}{x}$等，这些用字母表示数的式子都是由运算符号、括号、数、字母连接而成的，它能简明地表示数量关系.

单独一个数或者一个字母也是代数式，如$\frac{1}{3}$、0、x、h等.

用运算符号和括号把数或表示数的字母连接而成的式子叫做代数式(algebraic expression).

例题1 用代数式表示：

(1) 比a的3倍还多2的数；

(2) b的$\frac{4}{3}$倍的相反数；

(3) x的平方的倒数减去$\frac{1}{2}$的差；

(4) 9减去y的$\frac{1}{3}$的差；

(5) x的立方与2的和.

解 (1) $3a+2$.

(2) $-\frac{4}{3}b$.

(3) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}$.

(4) $9-\frac{1}{3}y$.

(5) x^3+2.

例题2 设甲数是m，乙数是n，用代数式表示：

(1) 甲乙两数的和的5倍；

(2) 甲减去乙的差与甲的相反数的积；

(3) 甲乙两数平方的和；

(4) 甲乙两数和的立方.

解 (1) $5(m+n)$.

5

【教学目标】

(1) 理解代数式的概念.

(2) 初步掌握列代数式的方法，能根据要求，正确列出相应的代数式.

(3) 经历列代数式的过程，再次体验字母表示数的数学思想，初步掌握文字语言与数学式子表述之间的转换.

运算符号在初中阶段指加、减、乘、除、乘方、开方（七年级第二学期将学习）符号，等号不是运算符号.因此等式不是代数式.代数式是数的推广，数是代数式的特殊情形.

例题 1

列代数式时，用字母“代替”数字，应顺着文字语言叙述的顺序，用符号语言表示数量关系.如第(1)小题中，“a 的 3 倍”，用符号语言表示为“$3a$”；“多 2”，即比“$3a$”多“2”，因此是“$3a+2$”.此处要注意有些文字的顺序，如第(4)小题，“9 减去 y 的$\frac{1}{3}$的差”，如果改成“9 减去 y 的差的$\frac{1}{3}$”，结果就不一样了，可以让学生加以区别.建议教学时，使学生对代数式有正确的读法，如对于 $5x+1$，可以按运算顺序读作：5 乘以 x 加上 1；也可以按运算结果读作：x 的 5 倍与 1 的和.提高学生用字母表示数的能力.

例题 2

本题与例题 1 的区别在于它用两个字母列出代数式，也要注意文字语言叙述的次序，如区分“平方的和”与“和的平方”之间的差异.

例题 3

本题是一个列代数式在实际中的运用问题.若设体积为 V,则 $V=a^2h$,这是公式,而此公式的两边都是代数式.

练习 9.2

1. (1) $2a-3$;

(2) $(a-b)^2$;

(3) $2x-\frac{1}{5}y$;

(4) m^2-n^2.

2. $ap\%$,$a+ap\%$.

3. $ax+by$.

4. $3(30\%a+50\%b)$.

【教学目标】

(1) 理解代数式的值的概念.

(2) 能根据所给数据求代数式的值.

(3) 领悟字母"代"数的数学思想,提高数学语言表达能力.

(2) $(m-n)\cdot(-m)$.

(3) m^2+n^2.

(4) $(m+n)^3$.

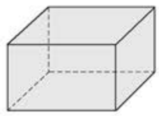


图 9-4

例题3　如图9-4,一个长方体的高为h,底面是一个边长为a的正方形,用代数式表示这个长方体的体积.

分析　长方体的体积=底面积×高.

底面是一个边长为a的正方形,它的面积是a^2.

解　这个长方体的体积是a^2h.

练习9.2

1 用代数式表示:

(1) 比a的2倍还少3的数;　　(2) a与b的差的平方;

(3) x的2倍与y的$\frac{1}{5}$的差;　　(4) m与n的平方差.

2 小明妈妈买了国库券a元,年利率为$p\%$,一年到期利息是多少?本利和是多少?

3 铅笔的单价是a元,钢笔的单价是b元,小明买了x支铅笔和y支钢笔,总共应付多少元?

4 某商场进行换季打折销售,上衣按原价a元的3折销售,长裤按原价b元的对折销售,小明的妈妈买了3套打折服装,共要付多少元?

9.3 代数式的值

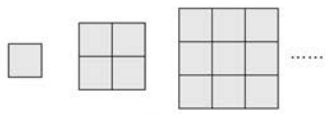


图 9-5

如图9-5,用若干个大小相同的小正方形,依次拼成大的正

6

方形，第 n 个大正方形可以由n^2个小正方形拼成.

当$n=4$时，即第4个大正方形，需用小正方形

$$n^2=4^2=16（个）；$$

当$n=10$时，即第10个大正方形，需用小正方形

$$n^2=10^2=100（个）；$$

当$n=30$时，即第30个大正方形，需用小正方形

$$n^2=30^2=900（个）.$$

当n取不同数值时，由代数式n^2可计算出相应的值.

> 用数值代替代数式里的字母，按照代数式中的运算关系计算得出的结果叫做代数式的值.

例如，100是代数式n^2在$n=10$时的值.

例题1　当a分别取下列值时，求代数式$\frac{3a(a+1)}{2}$的值.

(1) $a=2$；　(2) $a=-3$；　(3) $a=\frac{1}{2}$.

解　(1) 当$a=2$时，

$$\frac{3a(a+1)}{2}=\frac{3\times2\times(2+1)}{2}=9.$$

(2) 当$a=-3$时，

$$\frac{3a(a+1)}{2}=\frac{3\times(-3)\times(-3+1)}{2}=9.$$

(3) 当$a=\frac{1}{2}$时，

$$\frac{3a(a+1)}{2}=\frac{3\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+1\right)}{2}=\frac{9}{8}.$$

例题2　当$x=-2$，$y=-\frac{1}{2}$时，求下列各代数式的值.

(1) $3x^2-6xy+4y^2$；　(2) $\frac{1}{x+3y}$.

7

通过前面提供的例子，引出代数式的值的概念，代数式中字母可取不同的值.当字母取某一允许值时，代数式都有一个确定的代数式的值.代数式的值随着它的字母取值的变化而变化，这里隐含了函数的思想.

例题 1

本题是求代数式的值.根据定义，只要用数字代替代数式中的字母，然后按照代数式中的运算关系进行计算即可.但要关注代入时的规范书写、不漏系数、不缺项和正确计算，如第(2)小题，代入负数要注意添加括号.第(3)小题可先对分子上的分数进行运算，然后再做除法，避免繁分数的概念和运算.

例题 2

对于代数式中有两个字母的情况，求代数式的值的方法与例题1相同.在代数式中，代入x、y的相应数值，按例题的解答规范书写.代入负数、分数进行乘法、乘方运算时，要注意添加必要的括号.

解 (1) 当$x=-2$，$y=-\frac{1}{2}$时，

$$3x^2-6xy+4y^2$$
$$=3\times(-2)^2-6\times(-2)\times\left(-\frac{1}{2}\right)+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=12-6+1$$
$$=7.$$

(2) 当$x=-2$，$y=-\frac{1}{2}$时，

$$\frac{1}{x+3y}=\frac{1}{-2+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{-\frac{7}{2}}=-\frac{2}{7}.$$

例题3 如图9-6是一个长、宽分别是a米、b米的长方形绿化地，中间圆形区域计划做成花坛，它的半径是r米，其余部分种植绿草.

(1) 需种植绿草的面积是多少平方米？

(2) 当$a=10$，$b=4$，$r=\frac{2}{3}$时，求需种植绿草的面积.（π取3.14，精确到0.01平方米）

解 草地面积=长方形面积−圆面积.

(1) $ab-\pi r^2$（平方米）.

答：需种植绿草的面积是（$ab-\pi r^2$）平方米.

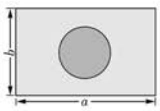


图9-6

(2) 当$a=10$，$b=4$，$r=\frac{2}{3}$时，

$$ab-\pi r^2$$
$$=10\times4-3.14\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$$
$$=40-3.14\times\frac{4}{9}$$
$$\approx38.60\text{（平方米）}.$$

答：当$a=10$，$b=4$，$r=\frac{2}{3}$时，需种植绿草的面积是38.60平方米.

8

例题 3

本题提供了一个有实际生活背景的问题，先根据条件列出代数式，再根据具体数值进行计算.

对于第（2）小题，圆周率 π 取 3.14，计算稍微复杂点，建议学生利用计算器求得结果.如果是笔算，应为 $40-3.14\times\frac{4}{9}\approx40-1.396$（由于要求“精确到 0.01平方米”，所以中间过程所得的数，应比精确到 0.01 多保留一位小数）$=38.604\approx38.60$（最后四舍五入，精确到 0.01 的结果）.

另外，课本中凡有计算器标志的，都允许使用计算器进行运算，课本中进行近似计算时，π 取 3.14，如果未加说明，那么在结果中保留 π.

整式

练习9.3

1 当x分别取下列值时，求代数式x^2+2x-1的值.

(1) $x=3$；　　(2) $x=\frac{1}{2}$.

2 当$a=\frac{1}{2}$，$b=-3$时，求下列各代数式的值.

(1) $2a+b$；　　(2) $4a^2-b^2$；　　(3) $a^2-2ab+b^2$.

3 如图，一个田径场由两个半圆和一个正方形组成.

(1) 用a表示该田径场的面积；

(2) 当$a=80$米时，求这个田径场的面积.(π取3.14，精确到0.01平方米)

(第3题)

9.4 整式

思考

(1) $2x$、$-2a^2$、ab^2、$-\frac{4}{3}x^2y^2$ 这些代数式包含哪些运算？

(2) $2x+3$、a^2+2a-1、$3a^2-b^2+2a-3$ 这些代数式包含哪些运算？

单独一个数也是单项式，如1、$\frac{1}{3}$、$-\frac{2}{5}$等.

由数与字母的积或字母与字母的积所组成的代数式叫做单项式(monomial).

单项式中的数字因数叫做这个单项式的系数(coefficient).

例如，$-2a^2$的系数是-2，ab^2的系数是1，$-\frac{4}{3}x^2y^2$的系数是$-\frac{4}{3}$.

9

练习 9.3

1. (1) 14；

(2) $\frac{1}{4}$.

2. (1) -2；

(2) -8；

(3) $12\frac{1}{4}$.

3. (1) $a^2+\frac{1}{4}\pi a^2$；

(2) 11 424.00 平方米.

【教学目标】

(1) 理解单项式、多项式和整式中的有关概念.

(2) 知道“指数”与“次数”的联系与区别，能写出单项式中的系数.

(3) 会把多项式按某一字母进行升幂或降幂排列.

通过两个思考问题引出单项式的概念.

对于单项式的系数概念，要注意符号也是系数的一部分.教学时，建议补充一些特殊形式的系数问题，如问单项式$-\frac{4x^2y^2}{3}$的系数是什么.帮助学生充分理解单项式系数的概念，判断在不同形式下单项式的系数.

单项式、多项式的次数，表示一个问题数量关系的复杂程度.一般地说，字母越多越复杂，每个字母次数越高越复杂.于是式的次数是字母各自的次数再相加，用它来描写“单项式”的复杂度.对只含有一个字母的单项式，字母的指数就是这个单项式的次数，对于有两个或两个以上字母的一个单项式，所有字母的指数和就是这个单项式的次数.

多项式由几个单项式的和所组成，对于多项式中的“−”号，应看成是单项式系数的符号，如多项式 $3x^2-x$，包含两项：$3x^2$ 和 $-x$，第二项的系数是 -1.又由于次数最高的项是 $3x^2$，这项的次数为 2，所以 $3x^2-x$ 是二次二项式.同理，课本中的 a^2+2a-1 是二次三项式（二次二项式、二次三项式的说法可以在学习了课本第 13 页合并同类项后再进行解释）.

例题 1

教学时对边框中的 $\frac{2a-5b}{7}=\frac{2a}{7}-\frac{5b}{7}$，将它最后写成 $\frac{2}{7}a-\frac{5}{7}b$，从而判断它是一个多项式.

一个单项式中，所有字母的指数的和叫做这个单项式的次数 (degree).

单项式 ab^2 对于字母 a 是一次，对于字母 b 是二次，对于单项式 ab^2 是三次.

例如，$2x$ 的次数是1，$2x$ 是一次单项式；

ab^2 的次数是字母 a 与 b 的指数的和，即 $1+2=3$，ab^2 是三次单项式.

由几个单项式的和组成的代数式叫做多项式 (polynomial). 在多项式中的每个单项式叫做多项式的项 (term)，不含字母的项叫做常数项 (constant term).次数最高项的次数就是这个多项式的次数.

例如，多项式 a^2+2a-1 是单项式 a^2、$2a$ 与 -1 三项的和，代数式中次数最高的项是 a^2，所以这个多项式的次数是2.

单项式、多项式统称为整式(integral expression).

例题1　下列代数式中哪些是单项式?哪些是多项式?

$$ab^2,\ 2a+3b,\ -4a^2b^4,\ \frac{2a-5b}{7}.$$

解　ab^2、$-4a^2b^4$ 都是数与字母或字母与字母的积，所以它们是单项式.

$\frac{2a-5b}{7}=\frac{2a}{7}-\frac{5b}{7}$.

$2a+3b$、$\frac{2a-5b}{7}$ 都是由两个单项式的和所组成，所以它们是多项式.

为了计算需要，可以将多项式各项的位置根据加法交换律按照其中某一个字母的指数大小顺序来排列.

在重新排列多项式时，要注意各项的符号.

例如，把多项式 $x^2+5x+4x^4-3x^3+2$ 按字母 x 的指数从大到小的顺序排列，写成 $4x^4-3x^3+x^2+5x+2$，这叫做把多项式按字母 x 降幂排列.

或按字母 x 的指数从小到大的顺序排列，写成 $2+5x+x^2-3x^3+4x^4$，这叫做把多项式按字母 x 升幂排列.

10

多项式按某一个字母指数的升幂或降幂排列，这是为了今后计算的方便.排列时，只需关注这个字母的指数.但在重新排列时，要注意各项的符号，特别是，如果某项有负号，那么这项移动时不要遗漏负号.

例题2 将多项式$3+6x^2y-2xy-5x^3y^2-4x^4y$先按字母$x$升幂排列，再按字母$x$降幂排列.

解 按字母x升幂排列是：$3-2xy+6x^2y-5x^3y^2-4x^4y$.

按字母x降幂排列是：$-4x^4y-5x^3y^2+6x^2y-2xy+3$.

问题

你能将下列多项式按字母x先升幂排列，再按字母x降幂排列吗？

(1) $2+3x^3-5x+7x^2$；

(2) $xy^2-2x^2y+x^3+4y^3-1$.

练习9.4

1. 下列代数式中哪些是单项式？哪些是多项式？

(1) $-3m^2n^2$；　(2) x^2+y^2；

(3) $\frac{a+b}{3}$；　(4) $\frac{a+b}{3a}$；

(5) $-\frac{2}{3}$；　(6) $3m+6n$.

2. 填表：

单项式	$-5x^2$	$-7xy^2$	$6abx^2$	$-4x^3y^2$	$2ab^2c^2$
系数					
次数					

3. 将下列多项式先按字母x升幂排列，再按字母x降幂排列：

(1) $-2x^2+x+6+5x^3$；

(2) $3x^2-6x-5-2x^4+x^3$；

(3) $x^2-3x^3y+2xy^2-y^3$；

(4) $2x^2-y^2+xy-4x^3y^3$.

4. 请你根据所给出的x、-2、y^2组成一个单项式和多项式.

11

例题 2

列举了一个多项式按字母 x 的指数升幂排列或降幂排列.

问题

(1) $2-5x+7x^2+3x^3$，$3x^3+7x^2-5x+2$；

(2) $-1+4y^3+xy^2-2x^2y+x^3$，$x^3-2x^2y+xy^2+4y^3-1$.

对问题中的第(2)小题，还可让学生按字母 y 升幂排列或降幂排列.

练习 9.4

1. (1)(5)是单项式；(2)(3)(6)是多项式.

2. 系数：-5，-7，6，-4，2；次数：2，3，4，5，5.

3. (1) $6+x-2x^2+5x^3$，$5x^3-2x^2+x+6$；

(2) $-5-6x+3x^2+x^3-2x^4$，$-2x^4+x^3+3x^2-6x-5$；

(3) $-y^3+2xy^2+x^2-3x^3y$，$-3x^3y+x^2+2xy^2-y^3$；

(4) $-y^2+xy+2x^2-4x^3y^3$，$-4x^3y^3+2x^2+xy-y^2$.

4. $-2xy^2$、$-2x+y^2$ 等.

第 2 节的重点是整式的加减运算；去括号法则的应用是学习本节的难点，特别是括号前面是“－”号时，学生在去括号时容易出错；能正确地合并同类项和去括号，就可正确地进行整式的加减，所以这是学习本节内容的关键.

【教学目标】

(1) 理解同类项的概念.

(2) 会利用加法的交换律、结合律、乘法对加法的分配律合并同类项.

(3) 掌握先合并同类项，再求代数式值的方法.

通过求两个正方形周长的和与面积的和，引入同类项的概念. 对于同类项的概念，应包含两个要求：

1. 所含的字母都相同；
2. 相同字母的指数也都相同.

这里要注意：几个常数项也是同类项.

问题

(1) 不是；(2) 是；(3) 不是；(4) 是.

9

第 2 节　整式的加减

9.5　合并同类项

如图9-7，正方形A、正方形B的边长分别是a、$3a$，那么这两个正方形的周长一共是多少？面积一共是多少？

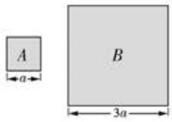


图9-7

正方形A的周长是$4a$，

正方形B的周长是$12a$，

正方形A、正方形B的周长一共是

$$4a+12a=(4+12)a=16a;$$

正方形A、正方形B的面积一共是

$$a^2+9a^2=(1+9)a^2=10a^2.$$

由$4a+12a=16a$与$a^2+9a^2=10a^2$可以看到，$4a$、$12a$都是只含有相同字母a的一次单项式，a^2、$9a^2$都是只含有相同字母a的二次单项式.

几个常数项也是同类项.

所含的字母相同，且相同字母的指数也相同的单项式叫做同类项(like terms).

问题

下列各组单项式是不是同类项?

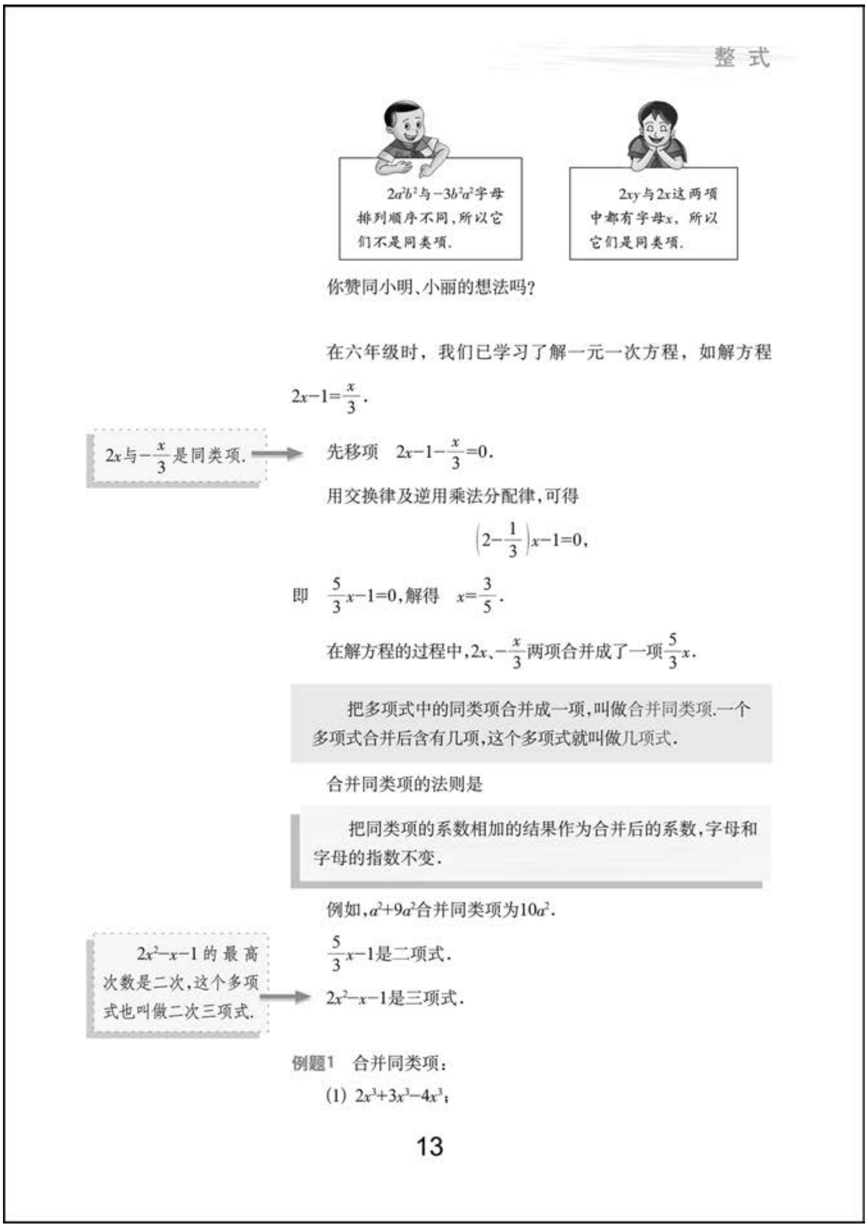
(1) $3x^2y$与$2y^2x$；

(2) $2a^2b^2$与$-3b^2a^2$；

(3) $2xy$与$2x$；

(4) $2.3a$与$-4.5a$.

12



$2a^2b^2$与$-3b^2a^2$字母排列顺序不同，所以它们不是同类项.

$2xy$与$2x$这两项中都有字母x，所以它们是同类项.

你赞同小明、小丽的想法吗？

在六年级时，我们已学习了解一元一次方程，如解方程

$2x-1=\frac{x}{3}$.

$2x$与$-\frac{x}{3}$是同类项.

先移项　$2x-1-\frac{x}{3}=0$.

用交换律及逆用乘法分配律，可得

$$\left(2-\frac{1}{3}\right)x-1=0,$$

即　$\frac{5}{3}x-1=0$，解得　$x=\frac{3}{5}$.

在解方程的过程中，$2x$、$-\frac{x}{3}$两项合并成了一项$\frac{5}{3}x$.

把多项式中的同类项合并成一项，叫做合并同类项.一个多项式合并后含有几项，这个多项式就叫做几项式.

合并同类项的法则是

把同类项的系数相加的结果作为合并后的系数，字母和字母的指数不变.

例如，a^2+9a^2合并同类项为$10a^2$.

$2x^2-x-1$的最高次数是二次，这个多项式也叫做二次三项式.

$\frac{5}{3}x-1$是二项式.

$2x^2-x-1$是三项式.

例题1　合并同类项：

(1) $2x^3+3x^3-4x^3$；

13

由一元一次方程引出合并同类项的概念，这是本教材的特点之一.此处还归纳了合并同类项的法则，使学生较为完整地认识合并同类项的方法.建议教学时可组织“找朋友”的活动，如教师分发写有同类项的纸牌给学生，然后让他们“找朋友”.这样更有利于学生对同类项概念及合并同类项法则的理解和掌握.

注意对于“几项式”的概念一定要在合并同类项后才能确定.

例题 1

对于项数较多的第(3)小题，建议教学时在同类项下面用一条短线、两条短线、曲线等“记号”表示同类项.如：$\underline{2x^2}\ \underline{\underline{-xy}}+3y^2\ \underline{\underline{+4xy}}-4y^2\ \underline{-x^2}$，这样可使学生一目了然看清同类项，避免发生漏项、错项等问题.

例题 2

求代数式的值是前面已经学过的知识，此处出现，目的是使学生进一步领会代数式的值的意义.一般先要化简代数式，再求代数式的值，此处先合并同类项，然后再代入数值计算，这样做较为简便.

教学时可以让学生先用过去学过的方法直接代入数值计算，然后再用合并同类项后代入数值的方法计算，并比较两种方法的优劣.同时要注意书写格式.

(2) $\frac{1}{2}ab^2-2ab^2+\frac{3}{4}ab^2$；

(3) $2x^2-xy+3y^2+4xy-4y^2-x^2$.

解 (1) $2x^3+3x^3-4x^3$

$=(2+3-4)x^3$

$=x^3$.

(2) $\frac{1}{2}ab^2-2ab^2+\frac{3}{4}ab^2$

$=\left(\frac{1}{2}-2+\frac{3}{4}\right)ab^2$

$=-\frac{3}{4}ab^2$.

多项式的同类项可以运用交换律、结合律、分配律合并.

(3) $2x^2-xy+3y^2+4xy-4y^2-x^2$

$=(2x^2-x^2)+(-xy+4xy)+(3y^2-4y^2)$

$=(2-1)x^2+(-1+4)xy+(3-4)y^2$

$=x^2+3xy-y^2$.

例题 2 求代数式的值：

(1) $3x-2y-4x+6y+1$，其中 $x=2$，$y=3$；

(2) $2x^2-xy-3y^2+4xy+5+2y^2-6x-3$，其中 $x=\frac{1}{2}$，$y=2$.

解 (1) $3x-2y-4x+6y+1$

$=(3x-4x)+(-2y+6y)+1$

$=-x+4y+1$.

当 $x=2$，$y=3$ 时，

原式 $=-2+4\times3+1=11$.

(2) $2x^2-xy-3y^2+4xy+5+2y^2-6x-3$

$=2x^2+(-xy+4xy)+(-3y^2+2y^2)-6x+(5-3)$

$=2x^2+3xy-y^2-6x+2$.

当 $x=\frac{1}{2}$，$y=2$ 时，

在本例中是否可以把x、y的值直接代入代数式中进行计算？

先合并再代入和直接代入计算哪一种方法较简捷？

原式 $=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\frac{1}{2}\times2-2^2-6\times\frac{1}{2}+2=-1\frac{1}{2}$.

14

练习9.5

1. 在多项式$2a+\frac{1}{2}-3a^2b+2ab^2-3a-\frac{1}{2}a^2b-3ab^2-1+a+2a^2b$中哪些项是同类项?为什么?
2. 判断以下合并是否正确:
(1) $-2x-3x=-5$;　　(2) $2x+3y=5xy$;
(3) $3x^2-2x^2=x$;　　(4) $-5xy+2xy=7xy$.
3. 合并同类项:
(1) $ab+a-2ab-3a-b$;
(2) $3a^2+5a-4a^2-6a+2a^2-3$;
(3) $10x^2y-7xy^2+4xy-9yx^2-2xy$;
(4) $2xy^2z-4xyz-3xzy^2+2xyz$.
4. 求代数式的值:
(1) $-4m^2-2n^2+3m^2+2mn+n^2$,其中$m=5$,$n=4$;
(2) $2x^2y+3xy^2-4yx^2-6xy^2+3x-5-5x$,其中$x=2$,$y=-\frac{1}{2}$.

9.6　整式的加减

问题 1

你会做以下的有理数计算吗?

$$\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}+\frac{37}{71}\right),\ \frac{2}{5}+\left(\frac{3}{34}-\frac{2}{5}\right).$$

根据六年级学习的有理数混合运算去括号法则,可得

$$\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}+\frac{37}{71}\right)=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}-\frac{37}{71}=-\frac{37}{71},$$

$$\frac{2}{5}+\left(\frac{3}{34}-\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{5}+\frac{3}{34}-\frac{2}{5}=\frac{3}{34}.$$

15

练习 9.5

1. $2a$、$-3a$、a;$\frac{1}{2}$、-1;$-3a^2b$、$-\frac{1}{2}a^2b$、$2a^2b$;$2ab^2$、$-3ab^2$.

2. (1) 错;
(2) 错;
(3) 错;
(4) 错.

3. (1) $-ab-2a-b$;
(2) a^2-a-3;
(3) x^2y-7xy^2+2xy;
(4) $-xy^2z-2xyz$.

4. (1) 化简为$-m^2-n^2+2mn$,当$m=5$,$n=4$时,它的值为-1;
(2) 化简为$-2x^2y-3xy^2-2x-5$,当$x=2$,$y=-\frac{1}{2}$时,它的值为$-6\frac{1}{2}$.

【教学目标】

由有理数去括号法则类比学习整式的去括号法则,掌握整式的加减运算.

从学生已经掌握的有理数去括号的法则，引出整式去括号的法则.

在教学时，也可以通过其他例子让学生自己得出去括号的法则，然后通过适量的练习加以巩固.

要强调的是：如果括号前是“－”号，那么去括号时，括号内的每一项都要改变符号.

例题 1

教学时应让学生充分关注去括号后各项的符号是否正确，然后用记号表示出同类项，最后合并同类项.

❶ 这是一句总结性语言，让学生理解：去括号和合并同类项是整式加减运算中的关键.

观察

因为 $3a+(5a-a)=3a+4a=7a$，①

$3a+5a-a=8a-a=7a$，②

所以 $3a+(5a-a)=3a+5a-a$.

因为 $3a-(5a-a)=3a-4a=-a$，③

$3a-5a+a=-2a+a=-a$，④

所以 $3a-(5a-a)=3a-5a+a$.

①、③中的等式左边的式子都有括号，而②、④中的等式没有括号，你能得到有关整式的去括号法则吗？

去括号法则：

括号前面是“+”号，去掉“+”号和括号，括号里的各项不变号；

括号前面是“−”号，去掉“−”号和括号，括号里的各项都变号.

$a+(b+c-d)$
$=a+b+c-d$，
$a-(b+c-d)$
$=a-b-c+d$.

例题1　先去括号，再合并同类项：

(1) $2x-(3x-2y+3)-(5y-2)$；

(2) $-(3a+2b)+(4a-3b+1)-(2a-b-3)$.

解　(1) $2x-(3x-2y+3)-(5y-2)$

$=2x-3x+2y-3-5y+2$

$=(2x-3x)+(2y-5y)+(-3+2)$

$=-x-3y-1$.

(2) $-(3a+2b)+(4a-3b+1)-(2a-b-3)$

$=-3a-2b+4a-3b+1-2a+b+3$

$=(-3a+4a-2a)+(-2b-3b+b)+(1+3)$

$=-a-4b+4$.

整式的加减就是单项式、多项式的加减，可利用去括号法则和合并同类项来完成整式的加减运算. ❶

16

例题 2　求整式 $2a+3b-1$ 与 $3a-2b+2$ 的和.

解　$(2a+3b-1)+(3a-2b+2)$

$=2a+3b-1+3a-2b+2$

$=(2a+3a)+(3b-2b)+(-1+2)$

$=5a+b+1$.

例题 3　求整式 $3x^2-2x+1$ 减去 $-x^2+x-3$ 的差.

解　$(3x^2-2x+1)-(-x^2+x-3)$

$=3x^2-2x+1+x^2-x+3$

$=4x^2-3x+4$.

问题 2

在六年级学习解方程时，我们已遇到了整式的加减运算. 你能举例说明吗？

练习9.6

1. 化简：

(1) $\frac{1}{2}x^2-(x^2-2x+3)+(x-2)-\left(-\frac{2}{3}x^2-2x+\frac{1}{2}\right)$；

(2) $\frac{1}{2}ab^2+(3a^2b-ab^2)-\left(-\frac{1}{4}a^2b+2a\right)-(5a-3)$.

2. 求整式 $3x+5y-\frac{1}{4}$ 与 $\frac{1}{2}x-3y+\frac{1}{2}$ 的和.

3. 求整式 $\frac{1}{2}x^2-2xy+\frac{1}{4}$ 减去 $-\frac{2}{3}x^2+xy-\frac{2}{3}$ 的差.

4. 求值：

(1) $-2x^2+6-(3-2x+x^2)+(3x^2-4x)$，其中 $x=2$；

(2) $\frac{1}{2}x-\left[x^2+2y^2-\left(\frac{1}{2}x-3\right)\right]+(2x^2+3y^2+4)$，其中 $x=\frac{1}{2}$，$y=1$.

5. 请写出两个整式，使它们的和为 $2x^2-3x-1$.

17

例题 2

求整式的和时，应先列式. 列式时，应添加必要的括号，以避免符号的错误.

例题 3

对于只含有一个字母的多项式，进行加减运算后所得到的结果一般写成这个字母的降幂排列形式.

问题 2

让学生回忆、举例. 如解方程组 $\begin{cases}x+y=1,\\ x-y=3\end{cases}$ 可用加减消元法，在这过程中，方程组的一边进行的就是整式的加减运算.

练习 9.6

1. (1) $\frac{1}{6}x^2+5x-\frac{11}{2}$；

(2) $-\frac{1}{2}ab^2+\frac{13}{4}a^2b-7a+3$.

2. $\frac{7}{2}x+2y+\frac{1}{4}$.

3. $\frac{7}{6}x^2-3xy+\frac{11}{12}$.

4. (1) $-2x+3=-1$；

(2) $x^2+y^2+x+1=2\frac{3}{4}$.

5. x^2、x^2-3x-1 等.

第 3 节的重点是整式的乘法.而整式的乘法运算法则是以幂的乘法运算性质为基础的,所以学好本节内容的关键是正确掌握幂的乘法运算性质.掌握幂的乘法运算及其指数间运算的联系是学习本节内容的难点.

【教学目标】

(1) 理解同底数幂相乘的概念.

(2) 掌握同底数幂相乘的法则,能熟练地进行同底数幂相乘的运算.

(3) 经历探究同底数幂相乘法则的过程,感知从特殊到一般的数学思想方法.

通过具体的数字,探究同底数幂相乘的法则.

教学时,也可根据学生的实际情况直接提出问题:$a^4 \cdot a^2=$? 然后引导学生用特殊的例子,或者用简单的数字,如由 $2^4 \times 2^2 = 2^n$,问 $n=$? 探究规律,最后得到同底数的幂相乘的法则.

9

第 3 节　整式的乘法

9.7　同底数幂的乘法

我们知道 $a \cdot a \cdot a$ 可以写成 a^3(读作"a的三次方"或"a的立方").

同样$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \cdot a}_{n个a}$可以写成$a^n$(读作"$a$的$n$次方"),其中$a$表示底数,正整数$n$表示指数,$a$的$n$次乘方的结果叫做$a$的$n$次幂.

请完成下表:

$3^2 \times 3^4=(3\times3)\times(3\times3\times3\times3)=3^6$	$3^{2+4}=3^6$
$(-2)^3\times(-2)^4=$　　　　$=$	$(-2)^{3+4}=$
$a^4 \cdot a^2=$　　　　$=$	$a^{4+2}=$

思考 1

由上表左右两列的结果,你发现什么规律吗?

观察$3^2\times3^4=3^{2+4}=3^6$,可以看到两个同底数的幂3^2、3^4相乘,它的计算结果是底数3不变,指数相加,即6=2+4.

一般地,如果m、n是正整数,那么

$$a^m \cdot a^n=\underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{m个a} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{n个a}$$

$$=\underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{(m+n)个a}$$

$$=\underline{\qquad\qquad}.$$

18

整式

同底数的幂相乘有如下法则：

> 同底数的幂相乘，底数不变，指数相加.
>
> $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.（m、n都是正整数）

例题1 计算下列各式，结果用幂的形式表示：

(1) $6^5 \times 6^6$；　　(2) $x^5 \cdot x^4$；

(3) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3$；　　(4) $(a+b)^2 \cdot (a+b)^3$；

(5) $y \cdot y^2 \cdot y^4$；　　(6) $(x-y)^3 \cdot (x-y)^4 \cdot (x-y)^2$.

解 (1) $6^5 \times 6^6 = 6^{5+6} = 6^{11}$.

(2) $x^5 \cdot x^4 = x^{5+4} = x^9$.

(3) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2+3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^5$.

(4) $(a+b)^2 \cdot (a+b)^3 = (a+b)^{2+3} = (a+b)^5$.

字母 y 的指数是1，而不是0!

(5) $y \cdot y^2 \cdot y^4 = y^{1+2} \cdot y^4 = y^3 \cdot y^4 = y^{3+4} = y^7$.

(6) $(x-y)^3 \cdot (x-y)^4 \cdot (x-y)^2$

$= (x-y)^{3+4} \cdot (x-y)^2$

$= (x-y)^7 \cdot (x-y)^2$

$= (x-y)^{7+2}$

$= (x-y)^9$.

例题2 计算下列各式，结果用幂的形式表示：

(1) $(-3)^3 \times 3^6$；

(2) $9^3 \times (-9)^4$；

(3) $(a-b)^2 \cdot (b-a)^3$.

解 (1) $(-3)^3 \times 3^6 = -3^3 \times 3^6 = -(3^3 \times 3^6) = -3^9 = (-3)^9$.

(2) $9^3 \times (-9)^4 = 9^3 \times 9^4 = 9^7$.

$(a-b)^2 = [-(b-a)]^2 = (b-a)^2$.

(3) $(a-b)^2 \cdot (b-a)^3$

$= (b-a)^2 \cdot (b-a)^3$

$= (b-a)^5$.

19

教学时应强化同底数幂相乘，指数是相加，而不是相乘.

例题 1

本题是同底数幂相乘法则的运用，教学时可设计如下的问题：

$2^2 \times 2^4 = 2^8$，

$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^6$，

请学生判断它们是否正确，使学生正确把握同底数幂相乘的法则.

例题 2

对于底数不相同但互为相反数的幂的乘法运算，一般把它转化为相同底数的幂的乘法运算，然后运用同底数的幂相乘的法则进行计算.

注意转化时的运算符号，如 $a-b=-(b-a)$，所以 $(a-b)^2=[-(b-a)]^2=(b-a)^2$. 在教学时，还可让学生思考是否有其他做法，如改变后一项，即 $(b-a)^3=-(a-b)^3$，然后进行运算，得到结果，最后对两种方法进行比较、评价. 注意结果应用幂的形式表示，如第(1)小题，结果不要写成 -3^9.

例题 3

对于整式的加（减）、乘混合运算，需根据先乘再加（减）的运算顺序进行计算.

思考 2

两个答案分别为 a^9、a^{m+n+p}.

练习 9.7

1.（1）10，3；

（2）$-\dfrac{4}{3}$，4；

（3）$-a$，5；

（4）$x+y$，6.

2.（1）错，$2x^2$；

（2）错，x^5；

（3）对；

（4）错，$-a^7$.

3.（1）8^7；

（2）$(-10)^7$；

（3）$\left(-\dfrac{3}{7}\right)^8$；

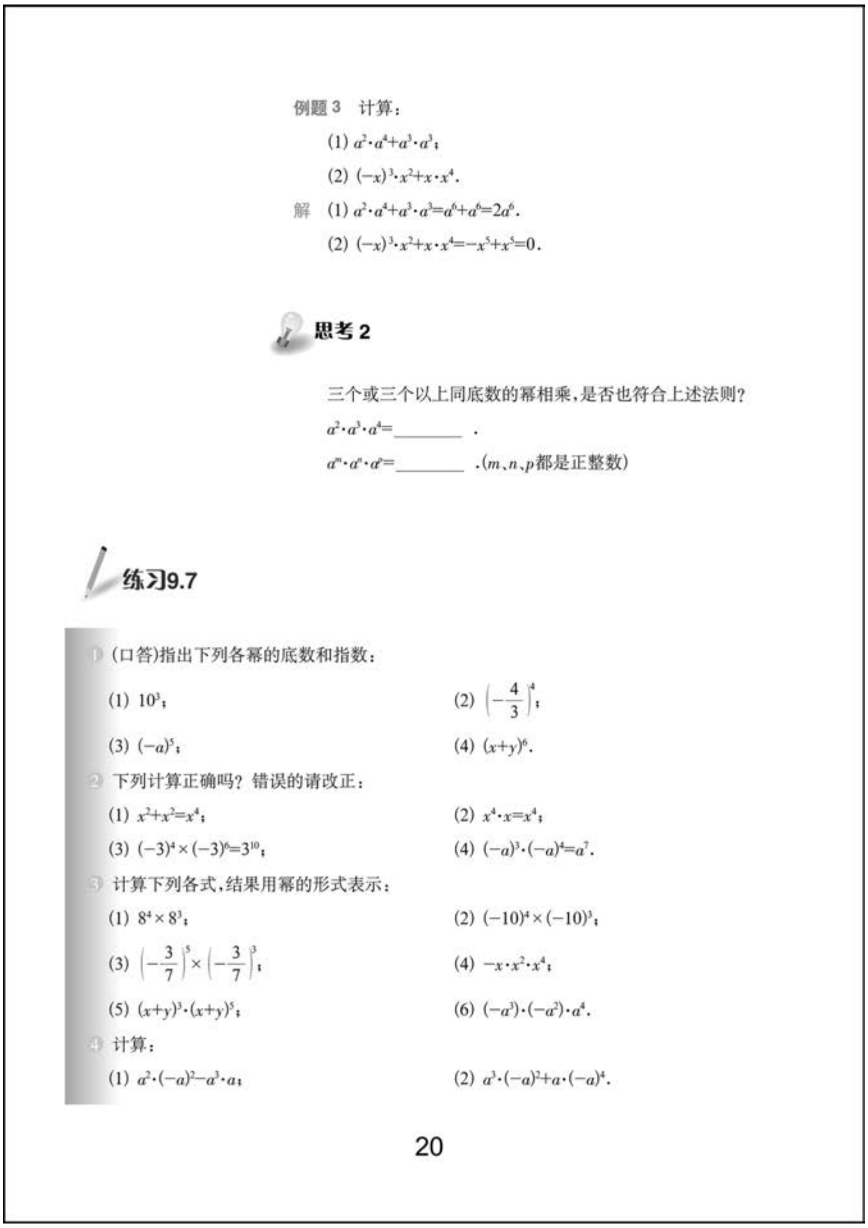
（4）$(-x)^7$；

（5）$(x+y)^8$；

（6）a^9.

4.（1）0；

（2）$2a^5$.



例题 3　计算：

(1) $a^2\cdot a^4+a^3\cdot a^3$；

(2) $(-x)^3\cdot x^2+x\cdot x^4$.

解　(1) $a^2\cdot a^4+a^3\cdot a^3=a^6+a^6=2a^6$.

(2) $(-x)^3\cdot x^2+x\cdot x^4=-x^5+x^5=0$.

思考 2

三个或三个以上同底数的幂相乘，是否也符合上述法则？

$a^2\cdot a^3\cdot a^4=$________.

$a^m\cdot a^n\cdot a^p=$________.（m、n、p都是正整数）

练习9.7

1 （口答）指出下列各幂的底数和指数：

(1) 10^3；　(2) $\left(-\dfrac{4}{3}\right)^4$；

(3) $(-a)^5$；　(4) $(x+y)^6$.

2 下列计算正确吗？错误的请改正：

(1) $x^2+x^2=x^4$；　(2) $x^4\cdot x=x^4$；

(3) $(-3)^4\times(-3)^6=3^{10}$；　(4) $(-a)^3\cdot(-a)^4=a^7$.

3 计算下列各式，结果用幂的形式表示：

(1) $8^4\times 8^3$；　(2) $(-10)^4\times(-10)^3$；

(3) $\left(-\dfrac{3}{7}\right)^5\times\left(-\dfrac{3}{7}\right)^3$；　(4) $-x\cdot x^2\cdot x^4$；

(5) $(x+y)^3\cdot(x+y)^5$；　(6) $(-a^3)\cdot(-a^2)\cdot a^4$.

4 计算：

(1) $a^2\cdot(-a)^2-a^3\cdot a$；　(2) $a^3\cdot(-a)^2+a\cdot(-a)^4$.

20

9.8 幂的乘方

5^3是5的3次幂，$(5^3)^2$可以看作是5^3的2次幂，即5的3次幂的平方，这就是幂的乘方.

请完成下表：

$(5^3)^2=5^3\times5^3=5^{3+3}=5^{3\times2}=5^6$	$5^{3\times2}=5^6$
$(3^4)^3=$	$3^{4\times3}=$
$[(-2)^3]^4=$	$(-2)^{3\times4}=$
$(a^2)^5=$	$a^{2\times5}=$

思考1

由上表左右两列的结果，你能找到幂的乘方的规律吗？

一般地，如果m、n是正整数，那么

$$(a^m)^n=\underbrace{a^m\cdot a^m\cdot\cdots\cdot a^m}_{n\text{个}a^m}=\underline{\qquad\qquad}.$$

幂的乘方有如下法则：

> 幂的乘方，底数不变，指数相乘，即
>
> $(a^m)^n=a^{mn}$.（m、n是正整数）

例题1 计算下列各式，结果用幂的形式表示：

(1) $(7^3)^2$；　　(2) $(a^2)^3$；

(3) $[(-2)^3]^4$；　　(4) $-(b^3)^3$.

解 (1) $(7^3)^2=7^{3\times2}=7^6$.

(2) $(a^2)^3=a^{2\times3}=a^6$.

(3) $[(-2)^3]^4=(-2)^{3\times4}=(-2)^{12}=2^{12}$.

(4) $-(b^3)^3=-b^{3\times3}=-b^9=(-b)^9$.

21

【教学目标】

(1) 理解幂的乘方的意义.

(2) 掌握幂的乘方的法则，能熟练地进行幂的乘方的运算.

(3) 经历探究幂的乘方法则的过程，体验从特殊到一般研究问题的方法.

思考 1

通过几个具体数字的计算例子，引导学生探究、归纳出幂的乘方法则.

教学时也可先提出问题，再引导学生仿照同底数幂相乘的法则进行探究.或提出$(2^3)^2$是否等于2^5的问题，引起学生学习的注意和兴趣.

这个法则要与同底数幂相乘的法则作比较，可以发现：同底数幂相乘，指数相加；幂的乘方运算，指数相乘.

例题 1

由于底数不变，因此幂的乘方运算主要关注指数运算的正确性.

例题 2

这是乘方与乘法的混合运算，应遵循先乘方再乘除的运算顺序.如果底数是负数，那么可先确定符号，再进行字母的乘方或乘除.

例题 3

这是一道混合运算题，要注意运算的顺序：先进行乘方、乘法运算，再进行加法运算.

思考 2

相等，即$(a^m)^n=(a^n)^m$.

例题 2　计算下列各式，结果用幂的形式表示：

(1) $(x^2)^3\cdot(x^3)^4$；

(2) $-y^2\cdot(-y)^3\cdot[(-y)^2]^3$；

(3) $[(a+b)^2]^3$；

(4) $(x+y)^3\cdot[(x+y)^2]^2$.

解　(1) $(x^2)^3\cdot(x^3)^4=x^{2\times3}\cdot x^{3\times4}=x^6\cdot x^{12}=x^{6+12}=x^{18}$.

(2) $-y^2\cdot(-y)^3\cdot[(-y)^2]^3=-y^2\cdot(-y^3)\cdot y^6=y^{2+3+6}=y^{11}$.

(3) $[(a+b)^2]^3$

$=(a+b)^{2\times3}$

$=(a+b)^6$.

(4) $(x+y)^3\cdot[(x+y)^2]^2$

$=(x+y)^3\cdot(x+y)^{2\times2}$

$=(x+y)^3\cdot(x+y)^4$

$=(x+y)^7$.

例题 3　计算：

(1) $a^3\cdot a^4\cdot a^2+(a^3)^3$；

(2) $(-x)^2\cdot(-x)^4+(x^2)^3$.

解　(1) $a^3\cdot a^4\cdot a^2+(a^3)^3$

$=a^{3+4+2}+a^{3\times3}$

$=a^9+a^9$

$=2a^9$.

(2) $(-x)^2\cdot(-x)^4+(x^2)^3$

$=(-x)^{2+4}+x^{2\times3}$

$=x^6+x^6$

$=2x^6$.

思考 2

$(a^m)^n$与$(a^n)^m$相等吗？

22

整式

练习9.8

1. (口答)计算,结果用幂的形式表示:

(1) $(10^2)^3$; (2) $10^3\times10^5$;

(3) $(b^3)^m$; (4) $b^2\cdot b^m$;

(5) $[(-a)^3]^3$; (6) $[(-a)^2]^3$.

2. 计算,结果用幂的形式表示:

(1) $[(-2)^3]^3$; (2) $(-10^2)^4$;

(3) $[(-x)^3]^4$; (4) $[(-x)^2]^3$;

(5) $(x^4)^3\cdot x^2$; (6) $[(-x)^3]^5\cdot(-x)^3$.

3. 计算:

(1) $y^3\cdot(y^2)^3\cdot(y^3)^2$; (2) $-x\cdot x^3\cdot[(-x)^2]^3$;

(3) $[(x-y)^3]^2$; (4) $[(a+1)^3]^4\cdot(a+1)^3$.

4. 当正整数n分别满足什么条件时,$(-a)^n=a^n$,$(-a)^n=-a^n$?

9.9 积的乘方

观察

$(3\times5)^2=(3\times5)\times(3\times5)$……幂的意义

$=(3\times3)\times(5\times5)$……乘法交换律、结合律

$=3^2\times5^2$.

按以上方法,完成下列填空:

$(2\times5)^2=$________________$=$______.

$(xy)^4=$________________$=$______.

思考 1

按照上述计算,你能归纳出积的乘方法则吗?

23

练习 9.8

1. (1) 10^6;

(2) 10^8;

(3) b^{3m};

(4) b^{2+m};

(5) $(-a)^9$;

(6) a^6.

2. (1) $(-2)^9$;

(2) 10^8;

(3) x^{12};

(4) x^6;

(5) x^{14};

(6) x^{18}.

3. (1) y^{15};

(2) $-x^{10}$;

(3) $(x-y)^6$;

(4) $(a+1)^{15}$.

4. 当 n 是偶数时,$(-a)^n=a^n$;当 n 是奇数时,$(-a)^n=-a^n$.

【教学目标】

(1) 理解积的乘方的意义.

(2) 会运用积的乘方法则进行有关的计算.

(3) 经历从特殊到一般的研究问题的过程.

思考 1

由于学生已经历了前两次从特殊到一般探究问题的过程,这里可以尝试让学生自己归纳出积的乘方法则.在运用积的乘方法则时,要让学生注意,积的每一项都要乘方,不要遗漏任一项.

例题 1

本题是积的乘方法则的运用，由于步骤较多，有些学生可能会遗漏一些运算，因此，解题时可让学生先确定系数（包括正确确定它们的符号），再确定每个字母的指数.

例题 2

第（1）小题要注意应将含有“－”号的字母底数看成是－1乘以这个字母.

思考 2

$a^nb^nc^n$.

$$(ab)^n=\underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\cdots\cdot(ab)}_{n\text{个}ab}$$
$$=\underbrace{(a\cdot a\cdot\cdots\cdot a)}_{n\text{个}a}\cdot\underbrace{(b\cdot b\cdot\cdots\cdot b)}_{n\text{个}b}$$
$$=a^n\cdot b^n.\ (n\text{是正整数})$$

积的乘方有如下法则：

> 积的乘方等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘，即
>
> $$(ab)^n=a^nb^n.\ (n\text{为正整数})$$

例题1 计算：

(1) $(3a)^4$；　　(2) $(-2mx)^3$；

(3) $(-xy^2)^3$；　　(4) $\left(\frac{2}{3}xy^2\right)^2$.

解 (1) $(3a)^4=3^4\cdot a^4=81a^4$.

(2) $(-2mx)^3=(-2m)^3\cdot x^3=(-2)^3\cdot m^3x^3=-2^3m^3x^3=-8m^3x^3$.

$(-x)^3=(-1)^3\cdot x^3$.

(3) $(-xy^2)^3=(-x)^3\cdot(y^2)^3=-x^3y^6$.

(4) $\left(\frac{2}{3}xy^2\right)^2=\left(\frac{2}{3}x\right)^2\cdot(y^2)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot x^2\cdot(y^2)^2=\frac{4}{9}x^2y^4$.

例题2 计算：

(1) $(-a)^3\cdot(-a)^4$；

(2) $3(x^2y^2)^3-2(x^3y^3)^2$；

(3) $(3x^3)^2+(2x^2)^3$.

解 (1) $(-a)^3\cdot(-a)^4=(-a)^7=(-1)^7\cdot a^7=-a^7$.

(2) $3(x^2y^2)^3-2(x^3y^3)^2=3x^6y^6-2x^6y^6=x^6y^6$.

(3) $(3x^3)^2+(2x^2)^3=9x^6+8x^6=17x^6$.

思考 2

上面的法则对三个或三个以上因式积的乘方是否也适合？

$(abc)^n=$________.（n为正整数）

24

练习9.9

1. (口答)计算:

(1) $(3a)^2$; (2) $(a^2b)^3$;

(3) $(2ab^2)^2$; (4) $(-2a^2b^2)^3$.

2. 判断下列计算是否正确:

(1) $(2a)^2=2a^2$; (2) $(-3x)^3=27x^3$;

(3) $(xy^2)^3=x^3y^5$; (4) $\left(\frac{2}{3}a\right)^2=\frac{4}{3}a^2$.

3. 计算:

(1) $(-x^3y^2)^3$; (2) $\left(\frac{3}{4}xy^2\right)^2$;

(3) $(-x^2y)^4$; (4) $(-2a^2)^3+9a^2\cdot a^4$.

4. 填空:

(1) $a^3b^6=(\quad)^3$; (2) $36a^6b^{10}=(\quad)^2$;

(3) $2^5\times5^5=(\quad)^5=10^{(\quad)}$; (4) $4^3\times25^3=(\quad)^3=10^{(\quad)}$.

5. 用简便方法计算下列各题:

(1) $2^3\times5^3$; (2) $4^6\times2.5^6$; (3) $4^6\times5^{12}$.

9.10 整式的乘法

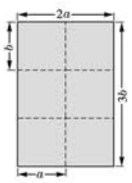


图9-8

1. 单项式与单项式相乘

如图9-8,长方形的长是$2a$,宽是$3b$,它的面积是$2a\cdot3b$,如何计算$2a\cdot3b$?

从图9-8中可以看到长方形可以分成6个长为a、宽为b的小长方形,而每个小长方形的面积都是ab,因此这个长方形的面积是$2a\cdot3b=6ab$.

这里$2a$、$3b$都是单项式,$2a\cdot3b$是单项式乘以单项式.

25

练习 9.9

1. (1) $9a^2$;
(2) a^6b^3;
(3) $4a^2b^4$;
(4) $-8a^6b^6$.

2. (1) 错;
(2) 错;
(3) 错;
(4) 错.

3. (1) $-x^9y^6$;
(2) $\frac{9}{16}x^2y^4$;
(3) x^8y^4;
(4) a^6.

4. (1) ab^2; (2) $6a^3b^5$ 或 $-6a^3b^5$;
(3) 2×5,5;
(4) 4×25,6.

5. (1) $10^3=1\ 000$;
(2) $10^6=1\ 000\ 000$;
(3) $10^{12}=1\ 000\ 000\ 000\ 000$.

【教学目标】

(1) 理解单项式与单项式相乘、单项式与多项式相乘、多项式与多项式相乘的法则.

(2) 会运用以上法则熟练地进行整式的乘法运算.

(3) 通过与有理数乘法的分配律进行类比,加深对这些法则的理解.

通过用不同方法求解长方形面积,引出单项式与单项式相乘的法则.

在涉及具体问题时，仍然可以让学生采用先确定系数（包括符号），再确定每一个字母及其指数的方法，避免重复、遗漏.

运用乘法交换律、结合律计算可得

$$2a\cdot 3b=(2\times 3)(a\cdot b)=6ab.$$

同样，$6a^2\cdot 4ab=(6\times 4)(a^2\cdot a)\cdot b=24a^3b$.

一般地，单项式与单项式相乘有如下法则：

> 单项式与单项式相乘，把它们的系数、同底数幂分别相乘的积作为积的因式，其余字母连同它的指数不变，也作为积的因式.

例题 1

在单项式乘以单项式时，根据乘法的交换律、结合律，把问题转化为同底数的幂相乘的问题.在计算时，还要注意系数与系数相乘.

本题综合了有理数的乘法、同底数幂的乘法、幂的乘方、积的乘方等运算，在运算中应注意运算顺序，并严格规范运算和书写过程.

例题1　计算：

(1) $3x\cdot 4x^3$；　　(2) $\frac{1}{2}xy^2\cdot(-4x^2y^4)$；

(3) $(-4ax^2)\cdot(-3a^2x^3)$；　(4) $(-2x)^3\cdot(5x^2y)^2$.

解　(1) $3x\cdot 4x^3=(3\times 4)(x\cdot x^3)=12x^4$.

(2) $\frac{1}{2}xy^2\cdot(-4x^2y^4)$

$=\left[\frac{1}{2}\times(-4)\right](x\cdot x^2)\cdot(y^2\cdot y^4)$

$=-2x^3y^6$.

(3) $(-4ax^2)\cdot(-3a^2x^3)$

$=[(-4)\times(-3)](a\cdot a^2)\cdot(x^2\cdot x^3)$

$=12a^3x^5$.

(4) $(-2x)^3\cdot(5x^2y)^2$

$=(-8x^3)\cdot(25x^4y^2)$

$=(-8\times 25)(x^3\cdot x^4)\cdot y^2$

$=-200x^7y^2$.

例题 2

运用两个单项式相乘的方法，计算多个单项式相乘.对于第(2)小题，整式的混合运算，需注意运算顺序.另外，要注意提高运算的正确率和解题的速度.

例题2　计算：

(1) $(-2x^2y)\cdot 5xy^3\cdot\left(-\frac{3}{5}x^2y^2\right)$；

(2) $4(xy)^2\cdot xy^2+\left(-\frac{3}{5}xy^3\right)\cdot\frac{5}{3}x^2y$.

26

解 (1) $(-2x^2y)\cdot 5xy^3\cdot\left(-\frac{3}{5}x^2y^2\right)$

$=\left[-2\times 5\times\left(-\frac{3}{5}\right)\right](x^2\cdot x\cdot x^2)\cdot(y\cdot y^3\cdot y^2)$

$=6x^5y^6$.

(2) $4(xy)^2\cdot xy^2+\left(-\frac{3}{5}xy^3\right)\cdot\frac{5}{3}x^2y$

$=4x^2y^2\cdot xy^2+\left(-\frac{3}{5}\times\frac{5}{3}\right)(x\cdot x^2)\cdot(y^3\cdot y)$

$=4x^3y^4-x^3y^4$

$=3x^3y^4$.

练习9.10(1)

1. 计算：

(1) $3a\cdot\frac{2}{9}ab$；　(2) $2x^2\cdot(-5xy)$；

(3) $\frac{5}{12}ab^2\cdot 3ab$；　(4) $-2.5x^2y^2\cdot 4x^3$.

2. 计算：

(1) $(2ab)^2\cdot(-3a)$；　(2) $(-x^2y)\cdot(2xy)^3$；

(3) $3ab\cdot\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)+\frac{3}{4}a\cdot 2a^2b^2$.

2. 单项式与多项式相乘

思考

如何计算 $(a+3)\cdot(2b)$？

这里 $a+3$ 是多项式，$2b$ 是单项式，$(a+3)\cdot(2b)$ 是单项式与多项式相乘．运用乘法分配律、交换律计算，可以得到

$$(a+3)\cdot(2b)=a\cdot 2b+3\cdot 2b=2ab+6b.$$

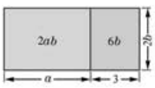


图9－9

如图 9－9，长方形的长是 $a+3$，宽是 $2b$，它的面积是 $(a+3)\cdot(2b)$．把这个长方形如图分成两个小长方形，它们的面积分别是

27

练习 9.10(1)

1. (1) $\frac{2}{3}a^2b$；

(2) $-10x^3y$；

(3) $\frac{5}{4}a^2b^3$；

(4) $-10x^5y^2$.

2. (1) $-12a^3b^2$；

(2) $-8x^5y^4$；

(3) 0.

单项式与多项式相乘的法则可运用数的乘法运算律直接导出，再引用图 9－9 对此法则进行直观说明.式的运算是数的运算的进一步抽象，要引导学生认识它们之间内在的关联性和实质的统一性.

单项式乘以多项式，一般需利用乘法的分配律，把问题转化为单项式乘以单项式的问题.

例题 3

多项式乘以单项式与单项式乘以多项式，根据乘法的交换律，运算法则是一样的.但本题仍要强调学生容易疏忽的“符号”问题.对第(2)小题，教学时应指出将$-12xy$分配到多项式中每一项时，需添加括号.

另外，原多项式中有几项，计算结果也应有几项，不要漏项.

练习 9.10(2)

1.(1) $10x^4$；

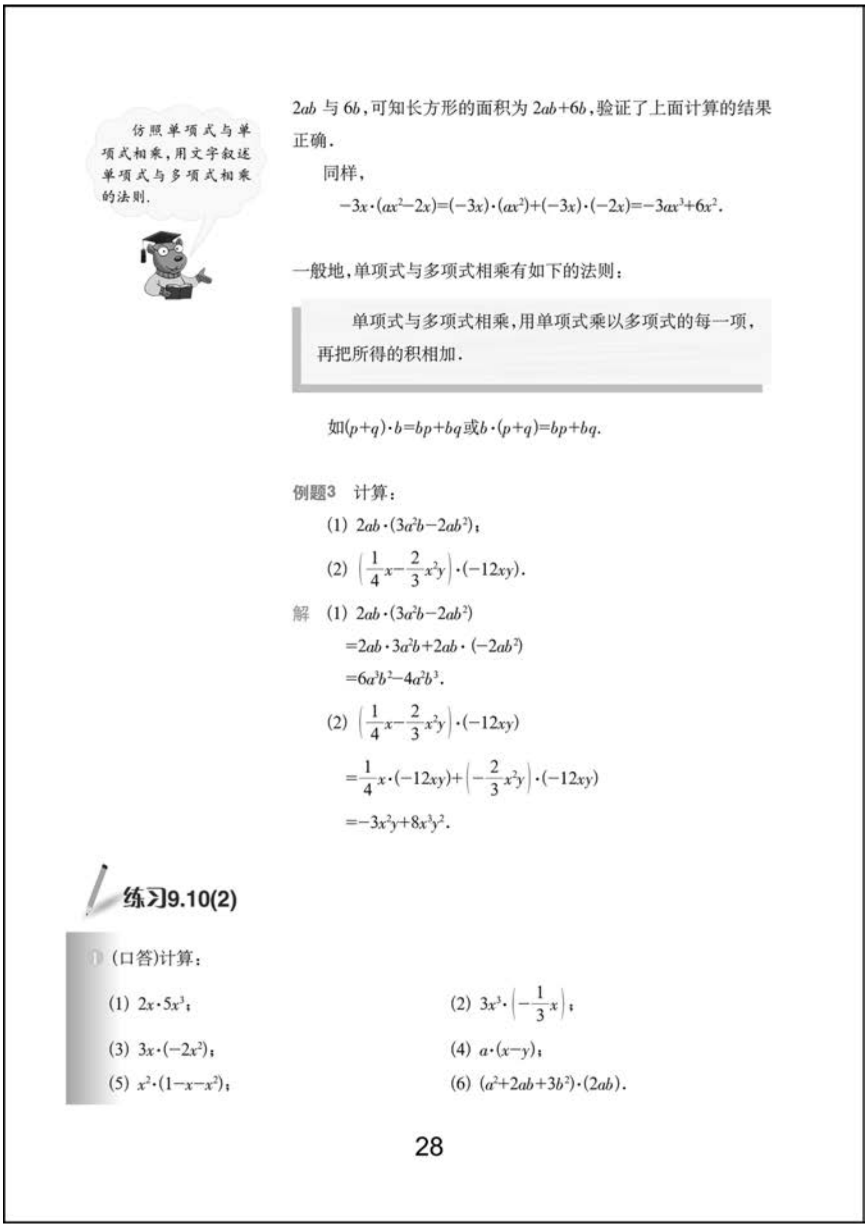
(2) $-x^4$；

(3) $-6x^3$；

(4) $ax-ay$；

(5) $x^2-x^3-x^4$；

(6) $2a^3b+4a^2b^2+6ab^3$.



仿照单项式与单项式相乘，用文字叙述单项式与多项式相乘的法则.

$2ab$ 与 $6b$，可知长方形的面积为 $2ab+6b$，验证了上面计算的结果正确.

同样，

$$-3x\cdot(ax^2-2x)=(-3x)\cdot(ax^2)+(-3x)\cdot(-2x)=-3ax^3+6x^2.$$

一般地，单项式与多项式相乘有如下的法则：

> 单项式与多项式相乘，用单项式乘以多项式的每一项，再把所得的积相加.

如$(p+q)\cdot b=bp+bq$或$b\cdot(p+q)=bp+bq$.

例题3　计算：

(1) $2ab\cdot(3a^2b-2ab^2)$；

(2) $\left(\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}x^2y\right)\cdot(-12xy)$.

解　(1) $2ab\cdot(3a^2b-2ab^2)$

$=2ab\cdot3a^2b+2ab\cdot(-2ab^2)$

$=6a^3b^2-4a^2b^3$.

(2) $\left(\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}x^2y\right)\cdot(-12xy)$

$=\frac{1}{4}x\cdot(-12xy)+\left(-\frac{2}{3}x^2y\right)\cdot(-12xy)$

$=-3x^2y+8x^3y^2$.

练习9.10(2)

1. (口答)计算：

(1) $2x\cdot5x^3$；　　(2) $3x^3\cdot\left(-\frac{1}{3}x\right)$；

(3) $3x\cdot(-2x^2)$；　　(4) $a\cdot(x-y)$；

(5) $x^2\cdot(1-x-x^2)$；　　(6) $(a^2+2ab+3b^2)\cdot(2ab)$.

28

2 计算：

(1) $(-2\times10^3)\times(3\times10^4)$；

(2) $4a^4b^2\cdot3a^2b$；

(3) $xy\cdot x^2y\cdot xy^2$；

(4) $\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}xy^2\right)$；

(5) $(-2a^2)\cdot(-ab^2)^3\cdot(2a^2b^3)$；

(6) $a^2\cdot(-3ab)\cdot(-5b^2)$.

3 计算：

(1) $-2x\cdot(x^2+2x-2)$；

(2) $-2a^2\cdot(a^2-3ab+b^2)$；

(3) $\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$；

(4) $(4a^3-2a+1)\cdot(-2a)^2$.

4 计算：

(1) $b(a+b)-a(b-a)$；

(2) $x(x-y)-y(x-y)$；

(3) $a(a^2+a+1)+(-1)(a^2+a+1)$；

(4) $x(x^2-x-1)+2(x^2+1)-\frac{1}{3}x(3x^2+6x)$.

3. 多项式与多项式相乘

思考

如何计算$(a+m)\cdot(b+n)$?

这里$a+m$、$b+n$都是多项式，$(a+m)\cdot(b+n)$是多项式与多项式相乘.

可以把$b+n$看成是一个整体，再运用单项式与多项式相乘的法则计算，得

29

2. (1) -6×10^7；
(2) $12a^6b^3$；
(3) x^4y^4；
(4) $-\frac{1}{12}x^7y^2$；
(5) $4a^7b^9$；
(6) $15a^3b^3$.

3. (1) $-2x^3-4x^2+4x$；
(2) $-2a^4+6a^3b-2a^2b^2$；
(3) $-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{8}x^2$；
(4) $16a^5-8a^3+4a^2$.

4. (1) a^2+b^2；
(2) $x^2-2xy+y^2$；
(3) a^3-1；
(4) $-x^2-x+2$.

多项式与多项式相乘的法则可运用单项式与多项式相乘的法则进行推导，然后利用图 9－10 予以解释，数形结合地深入理解法则.

在运用多项式乘以多项式法则时，具体的运算都是单项式乘以单项式的运算.要让学生在理解算理的基础上掌握操作步骤.注意具体运算每一项的符号，避免漏乘、符号错误、计算错误等.还要注意合并同类项，将结果化到最简形式.

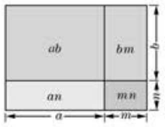


图9-10

$$(a+m)\cdot(b+n)=a\cdot(b+n)+m\cdot(b+n)=ab+an+bm+mn.$$

也可以看作：

$$(a+m)\cdot(b+n)=(a+m)\cdot b+(a+m)\cdot n=ab+bm+an+mn.$$

如图 9-10，大长方形的边长分别是 $a+m$ 和 $b+n$，它的面积为 $(a+m)\cdot(b+n)$.

把这个大长方形如图分成四个小长方形，可知它们的面积分别是 ab，an，bm，mn.大长方形的面积等于这四个小长方形面积的和，验证了上面计算的结果正确.

上面计算的过程也可以看作：

$$(a+m)(b+n)=ab+an+bm+mn.$$

一般地，多项式与多项式相乘有如下的法则：

> 多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项乘以另一个多项式的每一项，再把所得的积相加.

例题 4

在计算熟练的基础上，对于简单的多项式乘以多项式问题，可按例题解法一步写出.要注意符号，以及最后要合并同类项.本题的意图是帮助学生熟悉多项式乘以多项式的操作步骤.第(3)小题为以后学习平方差公式作铺垫.

例题4 计算：

(1) $(a+3)(b+5)$；

(2) $(3x-y)(2x+3y)$；

(3) $(a-b)(a+b)$；

(4) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

解 (1) $(a+3)(b+5)$

$=ab+5a+3b+15$.

(2) $(3x-y)(2x+3y)$

$=6x^2+9xy-2xy-3y^2$

$=6x^2+7xy-3y^2$.

> 多项式与多项式相乘的结果中，如果有同类项，要合并同类项.

(3) $(a-b)(a+b)$

$=a^2+ab-ab-b^2$

$=a^2-b^2$.

30

整式

(4) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$

$=a^3-b^3$.

例题 5 计算：

(1) $(3x-2)(2x-3)(x+2)$；

(2) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$.

解 (1) $(3x-2)(2x-3)(x+2)$

$=(6x^2-9x-4x+6)(x+2)$

$=(6x^2-13x+6)(x+2)$

$=6x^3+12x^2-13x^2-26x+6x+12$

$=6x^3-x^2-20x+12$.

(2) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

$=(a^2+ab-ab-b^2)(a^2+b^2)$

$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

$=a^4+a^2b^2-a^2b^2-b^4$

$=a^4-b^4$.

例题 6 学校在运动场上举行 200 米的赛跑，每条跑道的道宽为 1.22 米，比赛的终点线定在如图 9-11 所示的 C 处，由于不同跑道上的运动员要经过不同的弯道，因此，他们不应从同一起跑线上起跑，第一、第二两条跑道上运动员的起跑线应相隔多远才比较公平？（π 取 3.14，精确到 0.01 米）

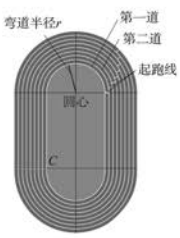


图9-11

分析 由于弯道是半圆周，设弯道的半径为 r，根据给出的图形可知，在第一道的运动员沿弯道内侧跑了 πr 米，在第二道的运动员沿弯道内侧跑了 $\pi(r+1.22)$米，两个运动员沿弯道内侧所跑的路程的差，就是两个运动员起跑时相隔的距离.

解  $\pi(r+1.22)-\pi r=\pi r+1.22\pi-\pi r$

$=1.22\pi\approx3.83$(米).

答：第一、第二两条跑道上运动员的起跑线应相隔约 3.83 米比较公平.

31

例题 5

对于三个多项式相乘问题，引导学生在熟练掌握两个多项式相乘的基础上，先选择两个多项式相乘，将其运算结果——一个新的多项式，再与第三个多项式相乘.依此类推，多个多项式的乘法都可以转化为两个多项式相乘问题.

例题 6

本题即本章的引例.通过对运算结果的观察，可以发现，最终的结果与跑道弯道的圆半径无关.本题学生学习时的主要困难在于列式，因此教学中可让学生独立思考后分组进行讨论研究.教师可根据学生实际，作适当提示和引导.特别要使学生理解两个运动员在半圆形弯道所跑的路程差就是两个运动员起跑时应相隔的距离，然后再将文字语言转化为符号语言，列出代数式.

练习 9.10(3)

1. (1) x^2+3x+2;

(2) x^2-x-2;

(3) x^2+5x+4;

(4) x^2-3x-4.

2. (1) $9a^2-b^2$;

(2) x^4+3x^2+2;

(3) x^2+4x+4;

(4) a^3+b^3.

3. (1) $2x^3-3x^2-3x+2$;

(2) a^4-1;

(3) $\frac{1}{81}-a^4$;

(4) $16-y^4$.

4. (1) $x^2+(a+b)x+ab$;

(2) $x^2-(a+b)x+ab$.

(此题为以后十字相乘法的教学留下伏笔)

练习9.10(3)

1 计算:

(1) $(x+2)(x+1)$;　　(2) $(x-2)(x+1)$;

(3) $(x+4)(x+1)$;　　(4) $(x-4)(x+1)$.

2 计算:

(1) $(3a+b)(3a-b)$;　　(2) $(x^2+1)(2+x^2)$;

(3) $(x+2)^2$;　　(4) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

3 计算:

(1) $(x+1)(x-2)(2x-1)$;　　(2) $(a-1)(a+1)(a^2+1)$;

(3) $\left(\frac{1}{3}+a\right)\left(\frac{1}{3}-a\right)\left(\frac{1}{9}+a^2\right)$;　　(4) $(4+y^2)(2+y)(2-y)$.

4 计算:

(1) $(x+a)(x+b)$;　　(2) $(x-a)(x-b)$.

32

整式

9

第4节 乘法公式

9.11 平方差公式

思考1

计算下列各题，并观察下列乘式与结果的特征：

(1) $(y+2)(y-2)=$

(2) $(3-a)(3+a)=$

(3) $(2a+b)(2a-b)=$

通过计算你发现了什么规律？

比较等号两边的代数式可以看到

> 公式中的a、b可以是任意的数或代数式.
> 你能推导出这个公式吗？

两个数的和与这两个数的差的乘积等于这两个数的平方差，即

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

这个公式叫做平方差公式.

思考2

你能根据图9-12中图形的面积关系来说明平方差公式吗？

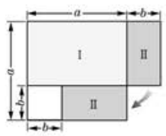


图9-12

例题1 计算：

(1) $(2x+y)(2x-y)$；

(2) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)$；

(3) $(-x+3y)(-x-3y)$；

(4) $(2a+b)(2a-b)(4a^2+b^2)$.

33

第 4 节的重点是掌握平方差与完全平方公式.难点是正确把握乘法公式的特征，并能正确地运用.学好这些公式的关键是在理解公式导出的基础上正确记忆.

【教学目标】

(1) 经历平方差公式的探求过程，理解平方差公式的意义，知道平方差公式与多项式乘法法则的关系.

(2) 熟悉平方差公式的特征，掌握平方差公式及其简单运用.

思考 1

(1) y^2-4.

(2) $9-a^2$.

(3) $4a^2-b^2$.

通过对运算结果的观察、分析和思考，引导学生发现两个特殊多项式相乘的规律，从而引出平方差公式.

平方差公式的特征是：如果两个二项式相乘，并且这两个二项式中的一项相同，另一项互为相反数，那么它们的积就等于这两项的平方差.

思考 2

此处是利用图 9 - 12 提供的情景，引导学生用两种不同方法计算长方形的面积，直观理解平方差公式.

例题 1

第(1)小题直接运用平方差的公式;第(2)小题在系数是分数的情况下运用平方差公式;第(3)小题在二项中的第一项都有负号的情况下,运用平方差公式;第(4)小题两次运用平方差公式.

教学时,教师应知道四个小题的层次性,使学生有层次地运用平方差公式.

解 (1) $(2x+y)(2x-y)$

$=(2x)^2-y^2$

$=4x^2-y^2$.

(2) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)$

$=\left(\frac{1}{2}x\right)^2-\left(\frac{1}{3}y\right)^2$

$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2$.

注意: $$\left(\underset{\downarrow}{\tfrac{1}{2}x}+\underset{\downarrow}{\tfrac{1}{3}y}\right)\left(\underset{\downarrow}{\tfrac{1}{2}x}-\underset{\downarrow}{\tfrac{1}{3}y}\right)=\underset{\downarrow}{\tfrac{1}{4}x^2}-\underset{\downarrow}{\tfrac{1}{9}y^2}$$
$$(a\ +\ b)\ \ (a\ -\ b)=\ a^2\ -\ b^2$$

将$(-x)$看作平方差公式中的a,$(3y)$看作b.

(3) $(-x+3y)(-x-3y)$

$=(-x)^2-(3y)^2$

$=x^2-9y^2$.

(4) $(2a+b)(2a-b)(4a^2+b^2)$

$=(4a^2-b^2)(4a^2+b^2)$

$=16a^4-b^4$.

例题 2

本题说明应用平方差公式可进行有理数的简便运算.

教学时应强调,相乘的两个数,如果可以分别拆成较为简单的a、b两个数的和与差时,就可运用平方差公式.

例题2 计算:

(1) 102×98; (2) 30.2×29.8.

解 (1) 102×98

$=(100+2)(100-2)$

$=100^2-2^2$

$=10\,000-4$

$=9\,996$.

(2) 30.2×29.8

$=(30+0.2)(30-0.2)$

$=30^2-0.2^2$

$=900-0.04$

$=899.96$.

34

练习9.11

1. 计算：

(1) $(2x+5)(2x-5)$；

(2) $(1-2a)(1+2a)$；

(3) $\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b\right)$；

(4) $\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}\right)$；

(5) $(-2x-3y)(-2x+3y)$；

(6) $(-2a-3b)(2a-3b)$；

(7) $(a+2)(a-2)(a^2+4)$；

(8) $\left(\frac{1}{9}y^2+x^2\right)\left(\frac{1}{3}y-x\right)\left(\frac{1}{3}y+x\right)$.

2. 计算：

(1) 103×97；

(2) 79×81；

(3) 50.2×49.8；

(4) $10\frac{1}{7}\times9\frac{6}{7}$.

3. 化简：

(1) $(a-b)(a+b)-(a+3b)(a-3b)$；

(2) $(x-2y)(x+2y)+(2x-y)(2x+y)$；

(3) $(x^2+2)(x^2-2)-(x-2)(x+2)$.

9.12 完全平方公式

思考 1

计算下列各题，并观察乘式与结果的特征：

(1) $(a+b)^2=$

(2) $(2a+3b)^2=$

(3) $(x-y)^2=$

练习 9.11

1. (1) $4x^2-25$；

(2) $1-4a^2$；

(3) $\frac{1}{9}a^2-\frac{1}{4}b^2$；

(4) $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{9}$；

(5) $4x^2-9y^2$；

(6) $9b^2-4a^2$；

(7) a^4-16；

(8) $\frac{1}{81}y^4-x^4$.

2. (1) 9 991；

(2) 6 399；

(3) 2 499.96；

(4) $99\frac{48}{49}$.

3. (1) $8b^2$；

(2) $5x^2-5y^2$；

(3) x^4-x^2.

【教学目标】

(1) 知道完全平方公式与多项式乘法的关系，理解完全平方公式的意义.

(2) 经历完全平方公式的探求过程，熟悉完全平方公式的特征，会运用完全平方公式解决一些简单问题.

思考 1

(1) $a^2+2ab+b^2$；(2) $4a^2+12ab+9b^2$；(3) $x^2-2xy+y^2$；(4) $4x^2-12xy+9y^2$.

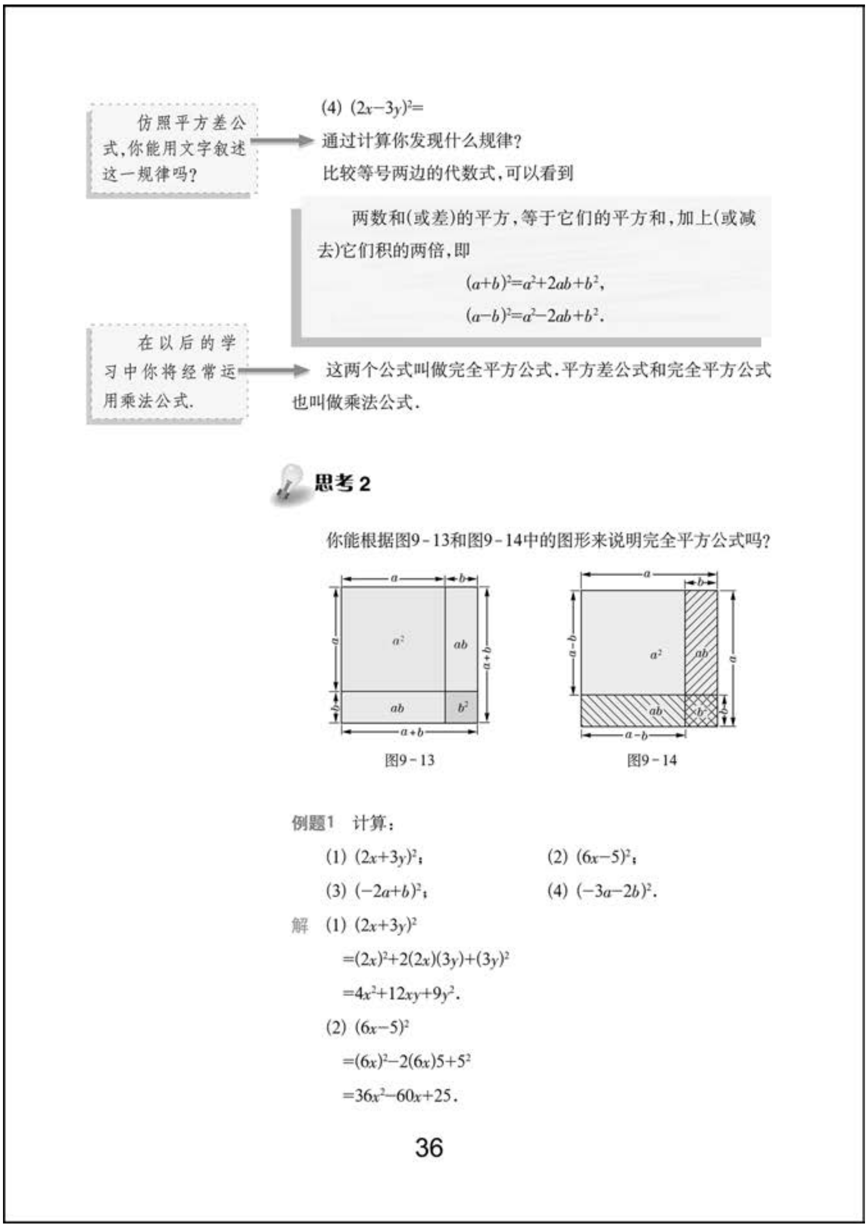
课本中设计了学生经历探究公式的过程，然后还对这个公式给出了几何图形的说明，目的是使学生掌握完全平方公式的特征，知道任意两项和的平方不等于这两项的平方和，任意两项差的平方也不等于这两项的平方差. 教学时，要强调 $(a\pm b)^2$ 运算后，有四项，其中两项合并同类项后变为三项，除了首项 a^2、末项 b^2 外，还有中间项 $2ab(-2ab)$，学生初学时，容易犯漏中间项的错误，教学时要引起足够的重视.

思考 2

关键使学生看懂教材提供的两幅图，通过两种不同的方法计算边长为 $a+b$、$a-b$ 的正方形的面积，从而从图形中理解完全平方公式.

例题 1

在使用完全平方公式时，容易犯的错误是漏中间项，这是学生学习中的一个难点.为了解决这个难点，可采用口诀式表述：首平方，末平方，两倍首末中间放.初学时，可以要求学生按照例题中的解答步骤，先利用完全平方公式写出各项，再进行运算，避免漏项、符号错误等问题.



仿照平方差公式，你能用文字叙述这一规律吗？

(4) $(2x-3y)^2=$

通过计算你发现什么规律？

比较等号两边的代数式，可以看到

两数和(或差)的平方，等于它们的平方和，加上(或减去)它们积的两倍，即

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

在以后的学习中你将经常运用乘法公式.

这两个公式叫做完全平方公式.平方差公式和完全平方公式也叫做乘法公式.

思考 2

你能根据图9-13和图9-14中的图形来说明完全平方公式吗？

图9-13　　图9-14

例题1　计算：

(1) $(2x+3y)^2$；　(2) $(6x-5)^2$；

(3) $(-2a+b)^2$；　(4) $(-3a-2b)^2$.

解　(1) $(2x+3y)^2$

$=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2$

$=4x^2+12xy+9y^2$.

(2) $(6x-5)^2$

$=(6x)^2-2(6x)5+5^2$

$=36x^2-60x+25$.

36

由于学生对降幂排列、首项为正的情况较为熟悉，因此对于第(3)小题和第(4)小题，建议学生采用课本37页中例题旁边方框中的方法做，教师在教学中要讲清为什么可以这样变形.

整 式

也可以这样做：

$(-2a+b)^2$

$=(b-2a)^2$

$=b^2-2b(2a)+(2a)^2$

$=b^2-4ab+4a^2.$

(3) $(-2a+b)^2$

$=(-2a)^2+2(-2a)b+b^2$

$=4a^2-4ab+b^2.$

(4) $(-3a-2b)^2$

$=[(-3a)-2b]^2$

$=(-3a)^2-2(-3a)(2b)+(2b)^2$

$=9a^2+12ab+4b^2.$

也可以这样做：

$(-3a-2b)^2$

$=[-(3a+2b)]^2$

$=(3a+2b)^2$

$=9a^2+12ab+4b^2.$

例题2　计算：

(1) $(a+b+c)^2$；

(2) $(x+y-2)(x-y+2)$.

$(a+b+c)^2$ 也可以化为 $[a+(b+c)]^2$，然后利用乘法公式完成.

解　(1) $(a+b+c)^2$

$=[(a+b)+c]^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac.$

(2) $(x+y-2)(x-y+2)$

$=[x+(y-2)][x-(y-2)]$

$=x^2-(y-2)^2$

$=x^2-(y^2-4y+4)$

$=x^2-y^2+4y-4.$

例题3　甲乙两家商店9月份的销售额均为a万元，在10月份和11月份这两个月份中，甲商店的销售额平均每月增长$x\%$，乙商店的销售额平均每月减少$x\%$，11月份甲商店的销售额比乙商店的销售额多多少万元？

解　由题意，11月份甲商店的销售额为$a(1+x\%)^2$(万元)，11月份乙商店的销售额为$a(1-x\%)^2$(万元). 所以，甲商店与乙商店的销售额的差为

$a(1+x\%)^2-a(1-x\%)^2$

37

例题 2

多于两项的完全平方，也可利用完全平方公式进行计算，即把某个多项式看成一个字母，第(1)小题就是把 $a+b$ 看成一项.教学时，还可让学生将 $b+c$ 看成一项进行计算.

第(2)小题是两个三项式相乘，若直接用多项式乘法的法则计算较繁，注意到这两个三项式中，有的项相同，有的项互为相反数，因此也可利用平方差公式计算.方法是：符号相同的项移到前面，符号不同的项移到后面，这样就满足了平方差公式的要求，然后运用平方差公式进行计算.

例题 3

本题是一道应用题，列式较难，因此在教学时，建议教师可先通过列表，理清题目中的数量关系，从而列出代数式.也可以先将字母都换成具体的数，如 $a=2$，$x=3$，再列出10月份、11月份甲、乙商店的销售额，如下表：

	10月份销售额	11月份销售额	化简后的11月份销售额
甲商店	$2(1+3\%)$	$2(1+3\%)+2(1+3\%)3\%$	$2(1+3\%)^2$
乙商店	$2(1-3\%)$	$2(1-3\%)-2(1-3\%)3\%$	$2(1-3\%)^2$

然后再考虑用字母代替数字，这样有利于学生的学习(本题也可以在学习了因式分解后，再用因式分解的方法化简本题).

练习 9.12

1.（1）错，$a^2+2ab+b^2$；

（2）错，$a^2+4ab+4b^2$；

（3）错，$a^2-4ab+4b^2$；

（4）错，$49-14a+a^2$.

2.（1）$4x^2+4xy+y^2$；

（2）$a^2+2ab+b^2$；

（3）$\frac{1}{9}m^2+\frac{1}{3}mn+\frac{1}{4}n^2$；

（4）$\frac{1}{16}a^2-\frac{1}{3}ab+\frac{4}{9}b^2$.

3. $(a-2x)^2x=a^2x-4ax^2+4x^3$.

4.（1）$a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$；

（2）$4x^2-y^2+2y-1$.

$=a\left(1+\frac{2x}{100}+\frac{x^2}{10\,000}\right)-a\left(1-\frac{2x}{100}+\frac{x^2}{10\,000}\right)$

$=a+\frac{2ax}{100}+\frac{ax^2}{10\,000}-a+\frac{2ax}{100}-\frac{ax^2}{10\,000}$

$=\frac{4ax}{100}$

$=\frac{ax}{25}$(万元).

答：11月份甲商店的销售额比乙商店的销售额多$\frac{ax}{25}$万元.

练习9.12

1. 判断下列各式的计算是否正确，错误的请加以改正.

(1) $(a+b)^2=a^2+b^2$；

(2) $(a+2b)^2=a^2+2ab+b^2$；

(3) $(a-2b)^2=a^2-4ab-4b^2$；

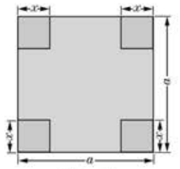
(4) $(7-a)^2=49-a^2$.

2. 计算：

(1) $(2x+y)^2$；　　(2) $(-a-b)^2$；

(3) $\left(\frac{1}{3}m+\frac{1}{2}n\right)^2$；　　(4) $\left(\frac{1}{4}a-\frac{2}{3}b\right)^2$.

3. 如图，将一张边长为a cm的正方形纸板的四角各剪去一个边长为x cm的小正方形，然后将它折成一个纸盒，求纸盒的容积.（纸板的厚度忽略不计，结果用含有a、x的代数式表示）



（第 3 题）

4. 计算：

(1) $(a+b-c)^2$；

(2) $(2x-y+1)(2x+y-1)$.

9

第 5 节 因式分解

9.13 提取公因式法

你还记得小学时学过的乘法对加法的分配律吗？

$$a(b+c)=ab+ac.$$

但有时，我们却需要逆用乘法对加法的分配律．如计算：

$$3\times\frac{99}{4}+3\times\frac{1}{4}.$$

可以得到

$$3\times\frac{99}{4}+3\times\frac{1}{4}=3\times\left(\frac{99}{4}+\frac{1}{4}\right)=3\times25=75.$$

观察

比较表格中每行左右两个等式．

$m(a+b)=ma+mb$	$ma+mb=m(a+b)$
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$m(a+b)=ma+mb$是整式的乘法运算，而$ma+mb=m(a+b)$是反过来把多项式$ma+mb$化为两个整式m与$a+b$的乘积．

每行左右两个等式恰好是互逆的等式变形．

39

第 5 节内容的重点是因式分解的概念和因式分解的四种方法．由于分组分解法要综合运用其他因式分解的方法，按照多项式的不同形式可以有不同分组，还要考虑分组后是否可以进一步分解，这就需要一定的观察能力、分析能力和应用能力，所以分组分解法是本节的难点．掌握因式分解各种方法的特点和适用范围是学好本节内容的关键．

【教学目标】

（1）理解因式分解的意义，知道因式分解与整式乘法的互逆关系．

（2）理解多项式的公因式的概念，掌握用提取公因式法分解因式．

观察

尽管只是等号的两边互换位置，但要注意引导学生发现等式左右两边形式的变化，即由积化和差的形式变为和差化积的形式．

根据因式分解的意义，帮助学生理解因式分解与整式乘法的运算是逆向运算.因此在学生初学时要突出用整式乘法的方法检验因式分解结果的正确性，并让学生体会因式分解与整式乘法的相互联系和相互转化的规律.

公因式，顾名思义，是“公共”的因式，因此一个多项式中可能有好几个公因式，如 $2x^2+4x$ 中，公因式有 2、x、$2x$ 等，但在因式分解的意义下，此处应提取 $2x$ 作为公因式（这里 $2x$ 是最大公因式，教师知道即可）.

提取公因式法是最基本的因式分解的方法.

例题 1

本题要求分解因式.可帮助学生逐步发现这个多项式有公因式 5、a、a^2、….另外要注意因式分解的一个原则，即要使多项式在规定的范围内分解到不能分解为止.根据这个原则，如果提取公因式后，另一因式仍可因式分解，那么应继续分解因式.对于提取公因式分解因式，一般要提取各项系数最大的公因数和各项都含有的相同字母的最低次幂的积，这样提取公因式可以一步到位.

把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做把这个多项式因式分解，也叫做把这个多项式分解因式.

因式分解和整式乘法的过程正好相反.

由 $ma+mb=m(a+b)$ 可以知道 m 是 $ma+mb$ 各项都含有的相同的因式.

一个多项式中每一项都含有的因式叫做这个多项式的公因式.

m 就是 $ma+mb$ 的一个公因式.

思考

如何把多项式 $6xy^2+9xy$ 分解因式?

分析　多项式 $6xy^2+9xy$ 有两项，这两项的系数都是整数，它们的公因数是3，还有相同的因式 xy，所以这个多项式各项有公因式 $3xy$，就是

想一想：
另一个因式 $2y+3$ 是如何得到的？

$$6xy^2+9xy=3xy\cdot 2y+3xy\cdot 3=3xy(2y+3).$$

如果一个多项式的各项含有公因式，那么可以把该公因式提取出来作为多项式的一个因式，提出公因式后的式子放在括号里，作为另一个因式.这种分解因式的方法叫做提取公因式法.

例题1　分解因式：$10a^3bc^2+15a^2b^2c$.

分析　观察多项式的两项，找出它们的公因式：

$$10a^3bc^2=5a^2bc\cdot 2ac,$$

$$15a^2b^2c=5a^2bc\cdot 3b,$$

40

> $10a^3bc^2$ 与 $15a^2b^2c$ 的公因式是怎样确定的？

这两项有公因式 $5a^2bc$，因此，用提取公因式法分解因式.

解　$10a^3bc^2+15a^2b^2c$

$=5a^2bc\cdot 2ac+5a^2bc\cdot 3b$

$=5a^2bc(2ac+3b)$.

> 你知道如何检验因式分解的正确性吗？

> 提取的公因式应是各项系数的最大公因数（系数都是整数时）与各项都含有的相同字母的最低次幂的积.

例题2　分解因式：

(1) $6a^2-8a^3$；

(2) $15a^2b+3ab$；

(3) $-4x^2y+6xy^2-2xy$；

(4) $-3ax+6ab-12ay$.

解　(1) $6a^2-8a^3$

$=2a^2\cdot 3-2a^2\cdot 4a$

$=2a^2(3-4a)$.

(2) $15a^2b+3ab$

$=3ab\cdot 5a+3ab\cdot 1$

$=3ab(5a+1)$.

> 提取 $3ab$ 后，括号内第二项1不能遗漏.

(3) $-4x^2y+6xy^2-2xy$

$=-(4x^2y-6xy^2+2xy)$

$=-(2xy\cdot 2x-2xy\cdot 3y+2xy\cdot 1)$

$=-2xy(2x-3y+1)$.

(4) $-3ax+6ab-12ay$

$=-(3ax-6ab+12ay)$

$=-(3a\cdot x-3a\cdot 2b+3a\cdot 4y)$

$=-3a(x-2b+4y)$.

41

例题 2

教学中要注意以下几点：1.刚开始学习因式分解时，应按教材中提供的方法规范地书写，避免遗漏某些项，在熟练以后，可直接写出最终结果.2.如果某项全部提出，那么要让学生注意括号内还必须留有 1！这是部分学生学习因式分解时易犯的错误.3.当第一项的系数是负数时，一般应提出这个负号，但必须注意，提取公因式后其他几项系数的符号都要改变.

在初学阶段，要让学生养成用整式的乘法检验因式分解的结果是否正确的习惯.由于整式的除法将在后续学习，所以这里不作补充.

练习 9.13(1)

1. (1) 不是，右边不是整式的积的形式；(2) 不是，这是整式的乘法；(3) 是；(4) 是.

2. (1) $2a$；

(2) $3x$；

(3) $2a$；

(4) $4xy$；

(5) $-5ax$；

(6) $-x$.

3. (1) $2ax^2(x+3a)$；

(2) $-3a(b-2bc+3c)$；

(3) $-5a(3+2b-bc)$；

(4) $3abc(9a-3b+c)$.

例题 3

本题说明多项式中各项的公因式可以是一个多项式，如本题提取的公因式是多项式 $x+y$.

例题 4

本题的方法与例题 3 一样，但公因式除了多项式 $2a-b$ 之外，还有 -6 与 -4 的公因数，因此在学习时要让学生注意，提取了公因式 $-2(2a-b)$ 后括号中的“多项式”是什么，而且由于这个“多项式”中含有小括号，因此外面的括号要用中括号.

练习9.13(1)

1. (口答)下列等式中，哪些从左到右的变形是因式分解？为什么？

(1) $1+2x+3x^2=1+x(2+3x)$；

(2) $3x(x+y)=3x^2+3xy$；

(3) $6a^2b+3ab^2-ab=ab(6a+3b-1)$；

(4) $3xy-4x^2y+5x^2y^2=xy(3-4x+5xy)$.

2. (口答)说出下列多项式各项的公因式：

(1) $2ax+4ay$；

(2) $3x^2+6x$；

(3) $4a^2-6a$；

(4) $4x^2y-12xy$；

(5) $-5a^2x+15ax^2$；

(6) $-x^3+2x^2-3x$.

3. 分解因式：

(1) $2ax^3+6a^2x^2$；

(2) $-3ab+6abc-9ac$；

(3) $-15a-10ab+5abc$；

(4) $27a^2bc-9ab^2c+3abc^2$.

例题3　分解因式：$a(x+y)+b(x+y)$.

分析　因为 $a(x+y)+b(x+y)$ 中各项有公因式 $x+y$，所以可以用提取公因式法来分解因式.

把 $x+y$ 看作一个整体！

解　$a(x+y)+b(x+y)$

$=(x+y)(a+b)$.

例题4　分解因式：$-6(2a-b)^2-4(2a-b)$.

分析　因为 $-6(2a-b)^2-4(2a-b)$ 中各项有公因式 $-2(2a-b)$，所以

42

可以用提取公因式法来分解因式.

解 $-6(2a-b)^2-4(2a-b)$

$=-2(2a-b)[3(2a-b)+2]$

$=-2(2a-b)(6a-3b+2)$.

例题5 分解因式:

(1) $x(a-b)^2-y(b-a)^3$;

(2) $x(a-b)+y(b-a)-3(b-a)$;

(3) $6(x+y)^2-2(x-y)(x+y)$.

$x(a-b)^2-y(b-a)^3$ 也可以化为 $x(b-a)^2-y(b-a)^3$.

解 (1) $x(a-b)^2-y(b-a)^3$

$=x(a-b)^2+y(a-b)^3$

$=(a-b)^2(x+ay-by)$.

(2) $x(a-b)+y(b-a)-3(b-a)$

$=x(a-b)-y(a-b)+3(a-b)$

$=(a-b)(x-y+3)$.

(3) $6(x+y)^2-2(x-y)(x+y)$

$=2(x+y)[3(x+y)-(x-y)]$

$=2(x+y)(3x+3y-x+y)$

$=2(x+y)(2x+4y)$

$=4(x+y)(x+2y)$.

练习9.13(2)

1. 填空:

(1) $2m(y-x)^2=(\quad)(x-y)^2$; (2) $-2m(y-x)^3=(\quad)(x-y)^3$;

(3) $(x+y)(y-x)=-(x+y)(\quad)$; (4) $-m(y-x^2)=m(\quad)$.

2. 分解因式:

(1) $3a(m-n)-2b(m-n)$; (2) $a(x-2)-b(x-2)+(2-x)$;

(3) $9(a-b)(a+b)-3(a-b)^2$; (4) $-2(b-2a)^2+(b-2a)$;

(5) $3(x+y)(y-x)-(x-y)^2$; (6) $-3(x-y)^2-(y-x)^3$.

例题 5

在提取一个多项式作为公因式时,要注意符号.如第(1)小题,尽管$(a-b)^2$ 与$(b-a)^3$ 形式不一样,但通过把其中的一个多项式变形,如把$(b-a)^3$ 变形为$-(a-b)^3$,就可发现它们的公因式是$(a-b)^2$,转化时,需注意它们的符号变化.为使学生真正理解并掌握,建议教学时,让学生再考虑用另一种方法分解这个多项式,即把$(a-b)^2$ 变形为$(b-a)^2$.

第(3)小题要注意经过一次提取,括号内合并同类项后,观察是否还需提取公因式,养成严谨的思维习惯.

练习 9.13(2)

1. (1) $2m$;

(2) $2m$;

(3) $x-y$;

(4) x^2-y.

2. (1) $(m-n)(3a-2b)$;

(2) $(x-2)(a-b-1)$;

(3) $6(a-b)(a+2b)$;

(4) $(b-2a)(4a-2b+1)$;

(5) $2(y-x)(2x+y)$;

(6) $(x-y)^2(x-y-3)$.

【教学目标】

(1) 理解整式乘法公式在因式分解中的作用.

(2) 经历运用公式法分解因式的过程,掌握运用公式法分解因式.

运用乘法公式分解因式是因式分解中应用较广的方法.

思考 1

提出问题,引出因式分解的平方差公式.

例题 1

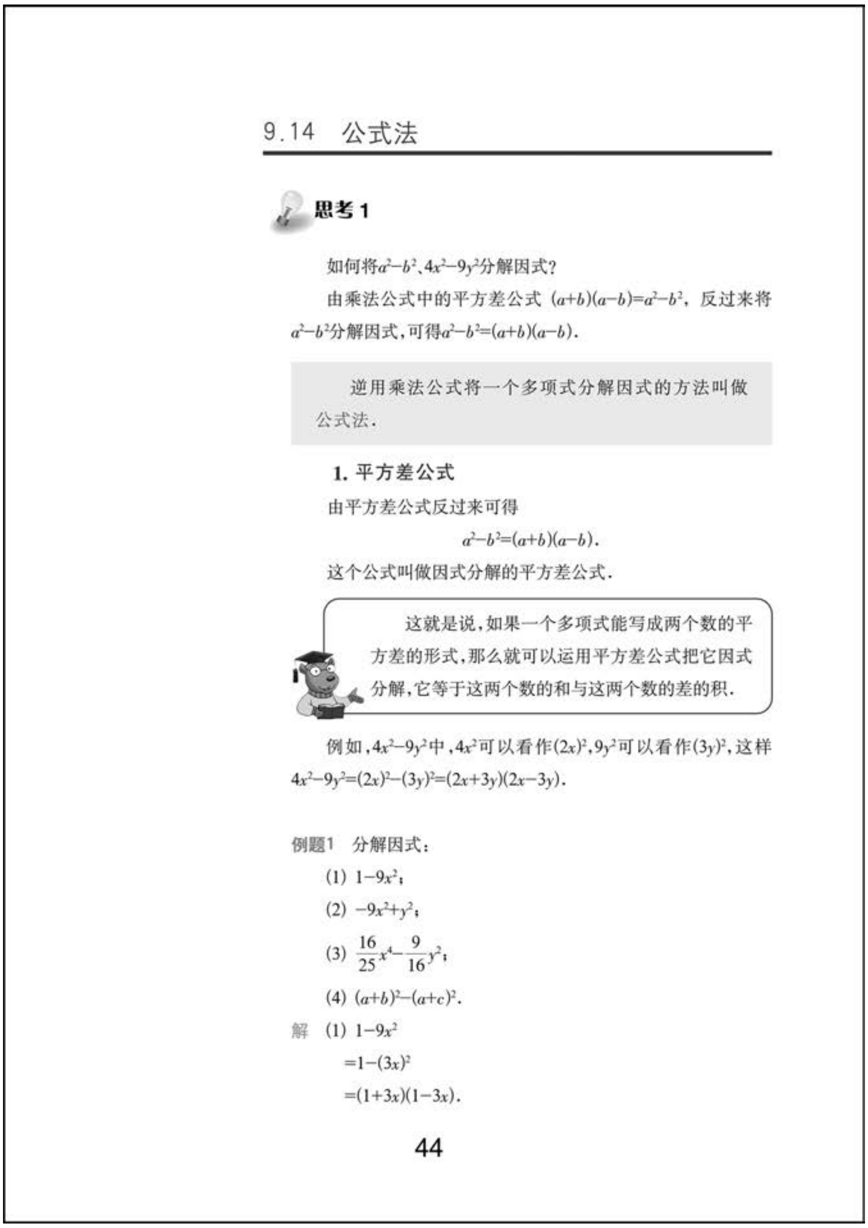
利用平方差公式分解因式时,这个多项式一定要满足三个条件:

(1) 这个多项式是两项式(或可以看成两项式,如第(4)小题);

(2) 每一项(除符号外)都是平方的形式;

(3) 两项的系数异号.

如第(1)小题中的 $9x^2$ 要化成 $(3x)^2$ 后才满足平方差公式的要求;第(2)小题也可先提出一个负号,再利用平方差公式分解因式;第(3)小题中 $\frac{16}{25}x^4$ 写成平方形式,应为 $\left(\frac{4}{5}x^2\right)^2$,教学时可先写成 $\left(\frac{4}{5}\right)^2(x^2)^2$,然后写成 $\left(\frac{4}{5}x^2\right)^2$,学生应知道每步的理由;第(4)小题要注意运用平方差公式后括号内的每一项系数的符号.



9.14 公式法

思考 1

如何将 a^2-b^2、$4x^2-9y^2$ 分解因式?

由乘法公式中的平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,反过来将 a^2-b^2 分解因式,可得 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

逆用乘法公式将一个多项式分解因式的方法叫做公式法.

1. 平方差公式

由平方差公式反过来可得

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

这个公式叫做因式分解的平方差公式.

这就是说,如果一个多项式能写成两个数的平方差的形式,那么就可以运用平方差公式把它因式分解,它等于这两个数的和与这两个数的差的积.

例如,$4x^2-9y^2$ 中,$4x^2$ 可以看作 $(2x)^2$,$9y^2$ 可以看作 $(3y)^2$,这样 $4x^2-9y^2=(2x)^2-(3y)^2=(2x+3y)(2x-3y)$.

例题1 分解因式:

(1) $1-9x^2$;

(2) $-9x^2+y^2$;

(3) $\frac{16}{25}x^4-\frac{9}{16}y^2$;

(4) $(a+b)^2-(a+c)^2$.

解 (1) $1-9x^2$

$=1-(3x)^2$

$=(1+3x)(1-3x)$.

44

也可以这样分解因式

$-9x^2+y^2$

$=-(9x^2-y^2)$

$=-(3x+y)(3x-y).$

(2) $-9x^2+y^2$

$=y^2-(3x)^2$

$=(y+3x)(y-3x).$

(3) $\frac{16}{25}x^4-\frac{9}{16}y^2$

$=\left(\frac{4}{5}x^2\right)^2-\left(\frac{3}{4}y\right)^2$

$=\left(\frac{4}{5}x^2+\frac{3}{4}y\right)\left(\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{4}y\right).$

(4) $(a+b)^2-(a+c)^2$

$=[(a+b)+(a+c)][(a+b)-(a+c)]$

$=(2a+b+c)(b-c).$

例题2 分解因式：

(1) $3x^3-12x$；

(2) x^4-16.

因式分解时要注意最后的结果要分解到不能再分解为止，例如，x^2-4还能分解为 $(x+2)(x-2)$.

解 (1) $3x^3-12x$

$=3x(x^2-4)$

$=3x(x+2)(x-2).$

(2) x^4-16

$=(x^2)^2-4^2$

$=(x^2+4)(x^2-4)$

$=(x^2+4)(x+2)(x-2).$

练习9.14(1)

1. 下列多项式能用平方差公式分解因式吗？如果可以，请分解因式：

(1) a^2+4b^2；　(2) $4a^2-(-b)^2$；

(3) $-4+a^2$；　(4) $-4-a^2$；

(5) $x^2-\frac{1}{4}$；　(6) $x^2+\frac{1}{4}$.

45

例题 2

对一个多项式进行因式分解时，一般先观察这个多项式是否有公因式可提取，然后再考虑运用其他方法分解因式.

第(1)小题，应先提出公因式，然后再利用平方差公式分解因式.

第(2)小题直接运用平方差公式后，学生往往以为分解因式已结束，教师可启发学生仔细观察，是否还能再分解.

本题需注意的是：目前是在有理数范围内分解因式，且应分解到不能再分解为止.

教学时，还可让学生用因式分解法化简课本第 37 页的例题 3，并比较两种方法，使学生体会因式分解的优越性.

练习 9.14(1)

1. (1) 不能；

(2) 能，$(2a+b)(2a-b)$；

(3) 能，$(a+2)(a-2)$；

(4) 不能；

(5) 能，$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$；

(6) 不能.

2. (1) $(x+3)(x-3)$;

(2) $\left(a+\frac{2}{5}b\right)\left(a-\frac{2}{5}b\right)$;

(3) $4(2x+y)(2x-y)$;

(4) $9a^2(b+3)(b-3)$;

(5) $6b(a+3)(a-3)$;

(6) $(x^2+9y^2)(x+3y)(x-3y)$.

3. (1) $-4\,000$;

(2) -200.

4. (1) $8ab$;

(2) $(x-2y)(3x-6y+1)(3x-6y-1)$.

5. $\pi R^2-\pi r^2=\pi(R+r)(R-r)=92.316$.

思考 2

提出问题,从而引出因式分解的完全平方公式.

运用完全平方公式分解因式,条件较复杂,首先这个多项式应是三项式,其次,其中的两项是两个整式的平方和,最后还要有一项是这两个整式乘积的2倍,只有同时满足这些条件时,才能利用完全平方公式分解因式.

对于三项式,较易看清楚其中两项分别是某两个整式的平方和(如果同为负时,先提取三项式的-1),但不容易看出另一项是两个整式乘积的2倍,需特别注意.如果这一项前面的符号是正的,那么这是两项和的完全平方公式;如果这一项前面的符号是负的,那么这是两项差的完全平方公式.

2 分解因式:

(1) x^2-9;　　(2) $a^2-\frac{4}{25}b^2$;

(3) $16x^2-4y^2$;　　(4) $9a^2b^2-81a^2$;

(5) $6a^2b-54b$;　　(6) x^4-81y^4.

3 用简便方法计算:

(1) $999^2-1\,001^2$;

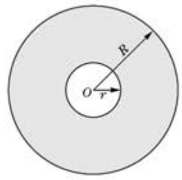
(2) $\left(99\frac{1}{2}\right)^2-\left(100\frac{1}{2}\right)^2$.

4 分解因式:

(1) $(2a+b)^2-(2a-b)^2$;

(2) $9(x-2y)^3-(x-2y)$.

5 如图,已知$R=5.6$,$r=1.4$,求圆环的面积.(π取3.14)



(第5题)

2. 完全平方公式

思考 2

$a^2+2ab+b^2$、x^2+6x+9、$4x^2-12xy+9y^2$如何分解因式?

由乘法公式中完全平方公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$

反过来可得

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

这两个公式叫做因式分解的完全平方公式.

这就是说,如果一个多项式能写成两个数的平方和,加上(或减去)这两个数的积的两倍,那么就可以运用完全平方公式把它分解因式,它等于这两个数的和(或差)的平方.

46

多项式$a^2+2ab+b^2$与$a^2-2ab+b^2$叫做完全平方式.在运用上述公式分解因式时，关键在于判断这个多项式是否为完全平方式.

用完全平方公式分解因式时，结果是“和”的平方，还是“差”的平方，可根据多项式中的什么条件来决定？

例如：

$$\begin{array}{c} x^2+6x+9=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=(x+3)^2. \\ \downarrow \\ a^2+2\ a\ b+b^2=(a+b)^2 \end{array}$$

又如：

$$\begin{array}{c} 4x^2-12xy+9y^2=(2x)^2-2\cdot(2x)\cdot(3y)+(3y)^2=(2x-3y)^2. \\ \downarrow \\ a^2\ -2\ a\ b+b^2=(a-b)^2 \end{array}$$

可以看到，用完全平方公式分解因式时，可以按照两数积的两倍前面的符号来选择运用哪一个完全平方公式.

例题3　分解因式：

(1) $9x^2-12x+4$；

(2) $4x^2+20xy+25y^2$；

(3) $\frac{1}{4}a^2-\frac{3}{5}ab+\frac{9}{25}b^2$；

(4) $-x^2+\frac{2}{3}xy-\frac{1}{9}y^2$.

解　(1) $9x^2-12x+4$

$=(3x)^2-2\cdot(3x)\cdot 2+2^2$

$=(3x-2)^2$.

(2) $4x^2+20xy+25y^2$

$=(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot(5y)+(5y)^2$

$=(2x+5y)^2$.

(3) $\frac{1}{4}a^2-\frac{3}{5}ab+\frac{9}{25}b^2$

$=\left(\frac{1}{2}a\right)^2-2\cdot\left(\frac{1}{2}a\right)\cdot\left(\frac{3}{5}b\right)+\left(\frac{3}{5}b\right)^2$

$=\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{5}b\right)^2$.

47

例题 3

要利用完全平方公式分解因式，可以先把两项写成两个整式的平方和的形式，然后仔细观察剩余的一项是否是这两个整式积的两倍.如果是，那么可以利用完全平方公式分解因式.教学时，建议以简单的练习为起点，如 x^2+2x+1，x^2-2x+1 等，让学生初步体验利用完全平方公式分解因式的方法，然后再从系数、字母个数等方面逐步提升难度.书写时，应让学生按照书本中例题的格式写，等熟练以后，才可一步到位.

对于第(3)小题，也可让学生先用提取公因式的方法把系数化为整数，然后利用完全平方公式解题：$\frac{1}{4}a^2-\frac{3}{5}ab+\frac{9}{25}b^2=\frac{1}{100}(25a^2-60ab+36b^2)=\frac{1}{100}[(5a)^2-2(5a)(6b)+(6b)^2]=\frac{1}{100}(5a-6b)^2$.

第(4)小题也可以如下分解因式：$-x^2+\frac{2}{3}xy-\frac{1}{9}y^2=-\frac{1}{9}(9x^2-6xy+y^2)=-\frac{1}{9}[(3x)^2-2(3x)\cdot y+y^2]=-\frac{1}{9}(3x-y)^2$.

(4) $-x^2+\frac{2}{3}xy-\frac{1}{9}y^2$

注意应先提取负号.

$=-\left(x^2-\frac{2}{3}xy+\frac{1}{9}y^2\right)$

$=-\left(x-\frac{1}{3}y\right)^2$.

例题4 分解因式：

(1) $2ax^2-12axy+18ay^2$；

(2) $(x+y)^2+8(x+y)+16$.

因式分解时，应先提取公因式，然后用公式法分解因式.

解 (1) $2ax^2-12axy+18ay^2$

$=2a(x^2-6xy+9y^2)$

$=2a(x-3y)^2$.

把$(x+y)$看作a，把4看作b.

(2) $(x+y)^2+8(x+y)+16$

$=(x+y)^2+2\cdot(x+y)\cdot4+4^2$

$=(x+y+4)^2$.

练习9.14(2)

1. 按照完全平方公式填空：

(1) $a^2-12a+(\quad)=(\qquad)^2$；

(2) $16-(\quad)+9b^2=(\qquad)^2$；

(3) $(\quad)^2+4xy+4=(\qquad)^2$；

(4) $(x-y)^2+6(x-y)+(\quad)=(\qquad)^2$.

2. 分解因式：

(1) $m^2+m+\frac{1}{4}$；

(2) $x^2-16xy+64y^2$；

(3) $9x+\frac{1}{4}+81x^2$；

(4) $-m^2n^2-16+8mn$.

48

例题 4

对于第(1)小题，因式分解时，应先观察多项式中是否有公因式可提，然后再考虑用其他方法分解因式.

对于第(2)小题，可把一个多项式$(x+y)$看作一个字母，然后利用完全平方公式进行因式分解.

练习 9.14(2)

1. (1) 36，$a-6$；

(2) $24b$，$4-3b$；

(3) xy，$xy+2$；

(4) 9，$x-y+3$.

2. (1) $\left(m+\frac{1}{2}\right)^2$；

(2) $(x-8y)^2$；

(3) $\left(9x+\frac{1}{2}\right)^2$；

(4) $-(mn-4)^2$.

3. 分解因式：

(1) $3a^2+12ab+12b^2$；

(2) $(2x-y)^2-10(2x-y)+25$；

(3) $8ax^2+16a^2x+8a^3$；

(4) $-6x^2y-3x^3-3xy^2$.

9.15 十字相乘法

思考

如何将x^2+3x+2、x^2-5x+6分解因式？

这两个多项式都是二次三项式x^2+px+q，但是都不是完全平方式，不能用完全平方公式来分解因式.

由多项式与多项式相乘的法则，可知

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$$

反过来可得

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b).$$

如果二次三项式x^2+px+q中的常数项q能分解成两个因数a、b的积，而且一次项系数p又恰好是$a+b$，那么x^2+px+q就可以进行如下的因式分解，即

$$x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b).$$

例如，x^2+3x+2中常数项是2，可以分解为2×1，而且$2+1=3$，恰好等于一次项系数，所以

$$x^2+3x+2=(x+2)(x+1).$$

在对多项式x^2+3x+2分解因式时，也可以借助画十字交叉线来分解.x^2分解为$x\cdot x$，常数项2分解为2×1，把它们用交叉线来表示：

3. (1) $3(a+2b)^2$；

(2) $(2x-y-5)^2$；

(3) $8a(x+a)^2$；

(4) $-3x(x+y)^2$.

【教学目标】

(1) 理解十字相乘法的概念.

(2) 掌握用十字相乘法分解二次项系数为1的二次三项式的方法.

十字相乘法是多项式乘法$(x+a)\times(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$的逆向运算(可复习课本第32页已做过的练习9.10(3)第4题).如果二次三项式的常数项能分解成两个数相乘，且这两个数的和恰好等于一次项的系数，那么就能用十字相乘法分解因式.

十字相乘法分解因式是一种适合于二次三项式因式分解的方法，它实际上是一种“凑数”尝试的方法.对刚学习这种方法的学生而言，在常数项分解方法较多时，难免会尝试失败.教师可作适当引导，选用一定量的习题，由易至难，通过循序渐进的训练，使学生积累经验，使得“尝试”成功的可能性加大.

画十字交叉线进行凑数尝试时，要强调凑数成功后要写成规范的格式.

例题 1

第(1)(3)小题的常数项都是12，而12可分解成好几对不同因数的积，如1×12，2×6，3×4，(－1)×(－12)，(－2)×(－6)，(－3)×(－4)，而第(2)(4)小题的常数项是－12，－12可分解成(－1)×12，(－2)×6，(－3)×4，1×(－12)，2×(－6)，3×(－4)等.如第(2)小题，－12＝(－2)×6＝2×(－6)，而－2＋6＝4，2＋(－6)＝－4，因为本小题的一次项系数是－4，所以分解因式时两个二项式中的常数项分别为－6、2.根据一次项系数进行适当地尝试，得到分解正确的结果.

用十字相乘法分解因式的书写较少，但学生探究尝试的过程可能较多.为了让学生熟练掌握这种方法，在教学中要通过多种形式加强训练.

按十字交叉相乘，它们积的和就是$2x+x=3x$.所以$x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$.

一般地，$x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$可以用十字交叉线表示：

$$\begin{array}{ccc} x & & +a \\ & \times & \\ x & & +b \end{array}$$

对 $x^2+2ax+a^2$ 是否可用十字相乘法分解因式？

利用十字交叉线来分解系数，把二次三项式分解因式的方法叫做十字相乘法.

又如x^2-5x+6用十字相乘法因式分解，常数项6可以分解为以下两个整数的积：

第一组：2×3，

第二组：1×6，

第三组：(−2)×(−3)，

第四组：(−1)×(−6).

究竟选择哪一组关键在于判断哪两个整数的和等于一次项系数−5.因为(−2)+(−3)=(−5)，所以选择第三组.用十字交叉线表示：

$$\begin{array}{ccc} x & & -2 \\ & \times & \\ x & & -3 \end{array}$$

按十字交叉相乘得$(-3x)+(-2x)=-5x$，恰好是一次项，于是有$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$.

在用十字相乘法分解因式时，因为常数项的因数分解有多种情况，所以通常要经过多次的尝试才能确定采用哪组因数分解来进行分解因式.

例题1　分解因式：

(1) $x^2-7x+12$；

(2) $x^2-4x-12$；

(3) $x^2+8x+12$；

(4) $x^2-11x-12$.

50

解 (1) $x^2-7x+12$

$=(x-3)(x-4)$.

$$\begin{array}{ll} x & -3 \\ x & -4 \end{array}$$

(2) $x^2-4x-12$

$=(x-6)(x+2)$.

$$\begin{array}{ll} x & -6 \\ x & +2 \end{array}$$

(3) $x^2+8x+12$

$=(x+2)(x+6)$.

$$\begin{array}{ll} x & +2 \\ x & +6 \end{array}$$

(4) $x^2-11x-12$

$=(x-12)(x+1)$.

$$\begin{array}{ll} x & -12 \\ x & +1 \end{array}$$

例题2 分解因式：

(1) $x^2+5xy-24y^2$；

(2) x^4-5x^2-36；

(3) $(2x+y)^2+6(2x+y)-27$.

解 (1) $x^2+5xy-24y^2$

$=(x+8y)(x-3y)$.

$$\begin{array}{ll} x & +8y \\ x & -3y \end{array}$$

把x^2看作一个整体.

(2) x^4-5x^2-36

$=(x^2+4)(x^2-9)$

$=(x^2+4)(x+3)(x-3)$.

$$\begin{array}{ll} x^2 & +4 \\ x^2 & -9 \end{array}$$

把$(2x+y)$看作一个整体.

(3) $(2x+y)^2+6(2x+y)-27$

$=(2x+y+9)(2x+y-3)$.

$$\begin{array}{ll} (2x+y) & +9 \\ (2x+y) & -3 \end{array}$$

51

例题 2

对于有些非二次三项式的多项式，可以把它们看成是二次三项式，然后利用十字相乘法进行因式分解.如第(1)小题，可把y看作常数，第(2)小题，可把x^2看作一个字母，第(3)小题，可把$(2x+y)$看作一个字母，然后利用十字相乘法进行因式分解.如果学生理解困难，教学时对于第(2)小题可以设$t=x^2$，那么原题就变形为$t^2-5t-36$，可因式分解为$(t+4)(t-9)$，然后再将t换为x^2，原式变为$(x^2+4)(x^2-9)$，最后因式分解为$(x^2+4)(x-3)(x+3)$.第(3)小题也可用类似的方法进行代换.第(2)(3)小题隐含着代换的数学思想方法.

练习 9.15

1. (1) $(x+4)(x-1)$；
(2) $(x-4)(x+1)$；
(3) $(x+10)(x-2)$；
(4) $(x-8)(x+3)$；
(5) $(x+3)(x+9)$；
(6) $(x-2)(x-6)$.

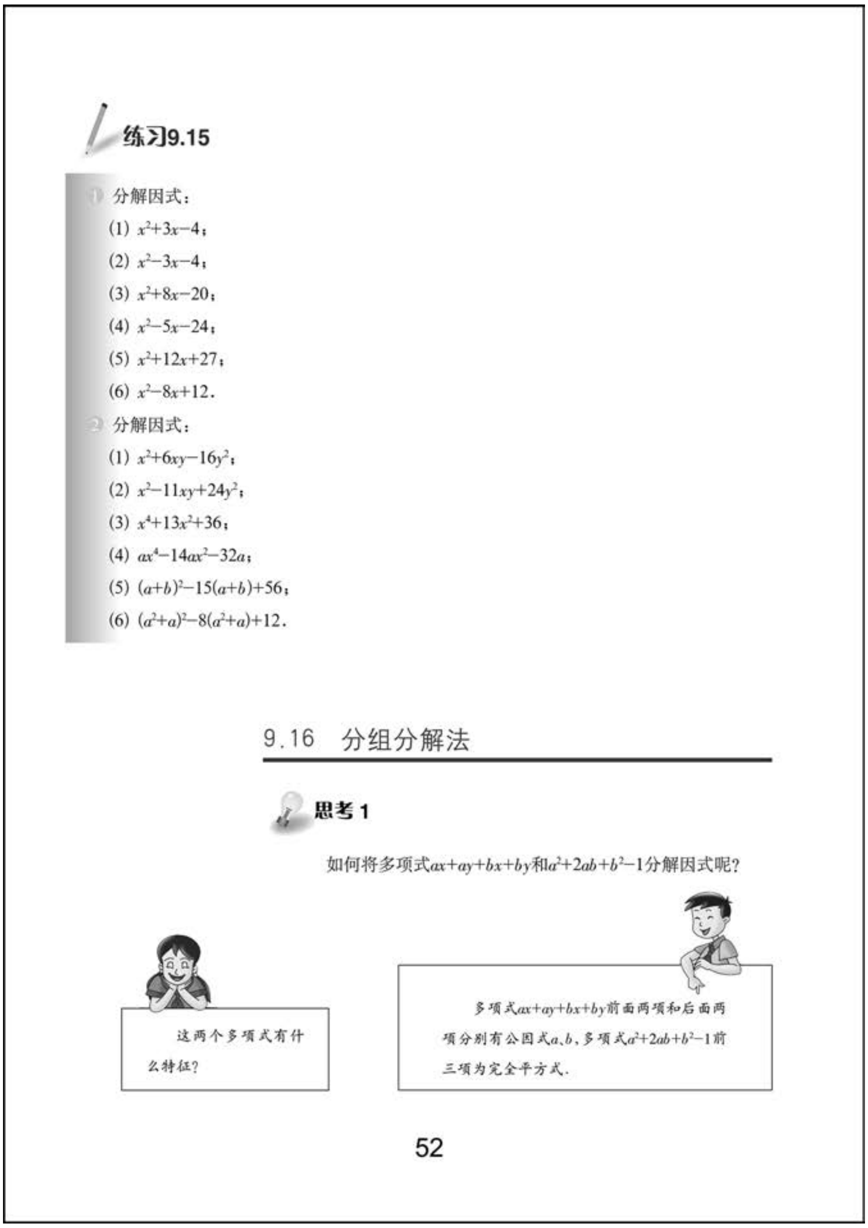
2. (1) $(x+8y)(x-2y)$；
(2) $(x-8y)(x-3y)$；
(3) $(x^2+4)(x^2+9)$；
(4) $a(x^2+2)(x+4)(x-4)$；
(5) $(a+b-7)(a+b-8)$；
(6) $(a+3)(a-2)(a+2)(a-1)$.

【教学目标】

(1) 理解分组分解法的概念.
(2) 掌握用分组分解法分解含有四项的多项式.

思考 1

这两个多项式都含有四项，对于含有四项的多项式，因式分解时一般应考虑把它们分成两组进行分解.分组方式可以是一项与三项分组，也可以是两项与两项分组.进行恰当的分组后，可以用提取公因式法和公式法等方法将整个多项式因式分解.因此思考的途径较多，需要根据这个多项式的特点进行一定的尝试.



练习9.15

1. 分解因式：
(1) x^2+3x-4；
(2) x^2-3x-4；
(3) $x^2+8x-20$；
(4) $x^2-5x-24$；
(5) $x^2+12x+27$；
(6) $x^2-8x+12$.

2. 分解因式：
(1) $x^2+6xy-16y^2$；
(2) $x^2-11xy+24y^2$；
(3) x^4+13x^2+36；
(4) ax^4-14ax^2-32a；
(5) $(a+b)^2-15(a+b)+56$；
(6) $(a^2+a)^2-8(a^2+a)+12$.

9.16 分组分解法

思考 1

如何将多项式$ax+ay+bx+by$和$a^2+2ab+b^2-1$分解因式呢？

52

整 式

可以把多项式$ax+ay+bx+by$分成$(ax+ay)$与$(bx+by)$两组，从前一组$ax+ay$中提取公因式a，得到另一个因式$x+y$；从后一组$bx+by$中提取公因式b，得到另一个因式也是$x+y$. 这样，就可以把这个多项式分解因式.

$$
\begin{aligned}
&ax+ay+bx+by\\
=&(ax+ay)+(bx+by)\\
=&a(x+y)+b(x+y)\\
=&(x+y)(a+b).
\end{aligned}
$$

如果把这个多项式分成$(ax+bx)$与$(ay+by)$两组，再分解因式，结果是否相同呢？

对于多项式$a^2+2ab+b^2-1$，可以将$a^2+2ab+b^2$作为一组，它是一个完全平方式，即$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，然后用公式法分解因式，即

$$
\begin{aligned}
&a^2+2ab+b^2-1\\
=&(a^2+2ab+b^2)-1\\
=&(a+b)^2-1\\
=&(a+b+1)(a+b-1).
\end{aligned}
$$

利用分组来分解因式的方法叫做分组分解法.

例题1　分解因式：$2ac-6ad+bc-3bd$.

分析　把这个多项式适当分成两组，例如将前两项分为一组，后两项分为一组．第一组提取公因式$2a$后另一个因式是$c-3d$；第二组提取公因式b后另一个因式也是$c-3d$．这样就可以分解因式了.

解　$2ac-6ad+bc-3bd$

$$
\begin{aligned}
&=(2ac-6ad)+(bc-3bd)\\
&=2a(c-3d)+b(c-3d)\\
&=(c-3d)(2a+b).
\end{aligned}
$$

53

一般地，一项与三项分组后，三项可用完全平方公式分解因式，然后再与一项利用平方差公式继续分解因式.两项与两项分组后，可先用提取公因式法分解因式，然后继续用提取公因式法分解因式，得到最终结果.

在教学中，应让学生理解，要尝试不同的分组，关键是分组后能继续分解因式. 如：将$a^2+2ab+b^2-1$分组为$(a^2+2ab)+(b^2-1)=a(a+2b)+(b-1)(b+1)$，接着就无法再因式分解了，这说明分组不恰当，因此要重新尝试分组.

例题 1

运用分组分解法分解因式时，有时多项式中的系数或相同的字母会给我们一个提示.如本题中，第一项和第二项的系数正好是倍数关系，把这两项分成一组，至少可提取这两项系数的公因数，然后再观察是否可继续分解.本题也可这样分组：第一项和第三项为一组，第二项与第四项为一组.

例题 2

可让学生尝试用不同的分组方法分解因式.另一种分组方法是将第一、四项作为一组,剩余两项作为另一组.教师还可提问“如果将第一、三项作为一组,剩余两项作为另一组,分组后是否还能分解因式?”让学生进一步思考.

例题 3

对于这个多项式,教学时应再一次强调分解因式的次序,即先观察多项式中是否有公因式.如果有公因式,那么应先提取公因式,然后再根据提取公因式后几个因式的特点,选用其他分解因式的方法.另外注意,在因式分解中所涉及的多项式不超过四项,且因式分解要分解到不能分解为止.

思考 2

$$\begin{aligned}&x^2-4xy+4y^2-4\\=&(x-2y)^2-4\\=&(x-2y-2)(x-2y+2).\end{aligned}$$

练习 9.16

1. (1) $2+3a$;

(2) $x-y$;

(3) $x-y+1$.

2. (1) $(b-c)(a+1)$;

(2) $(a-b)(a-2)$;

(3) $(a-3b)(3+2c)$;

(4) $(x+2)(3xy-4)$.

3. (1) $(x-y)(x-3)$;

(2) $(x+2y)(x+3)(x-3)$;

(3) $(y+2)(x+4)(x-3)$;

(4) $(x+y)(x-y)(m+n)(m-n)$.

例题2　分解因式:$6k^2+9km-6mn-4kn$.

解　$6k^2+9km-6mn-4kn$

$=(6k^2+9km)-(6mn+4kn)$

$=3k(2k+3m)-2n(3m+2k)$

$=(2k+3m)(3k-2n)$.

例题3　分解因式:$2x^3-2x^2y+8y-8x$.

解　$2x^3-2x^2y+8y-8x$

$=2(x^3-x^2y+4y-4x)$

$=2[(x^3-x^2y)+(4y-4x)]$

$=2[x^2(x-y)-4(x-y)]$

$=2(x-y)(x^2-4)$

$=2(x-y)(x+2)(x-2)$.

思考 2

如何把$x^2-4xy+4y^2-4$分解因式?

练习9.16

1. 填空:

(1) $2(a+b)+3a(a+b)=(\quad)(a+b)$;

(2) $x(a-b)-y(a-b)=(a-b)(\quad)$;

(3) $-(x-y)^2-(x-y)=-(x-y)(\quad)$.

2. 分解因式:

(1) $ab-ac+b-c$;　(2) $a^2-ab-2a+2b$;

(3) $3a-9b+2ac-6bc$;　(4) $3x^2y+6xy-4x-8$.

3. 分解因式:

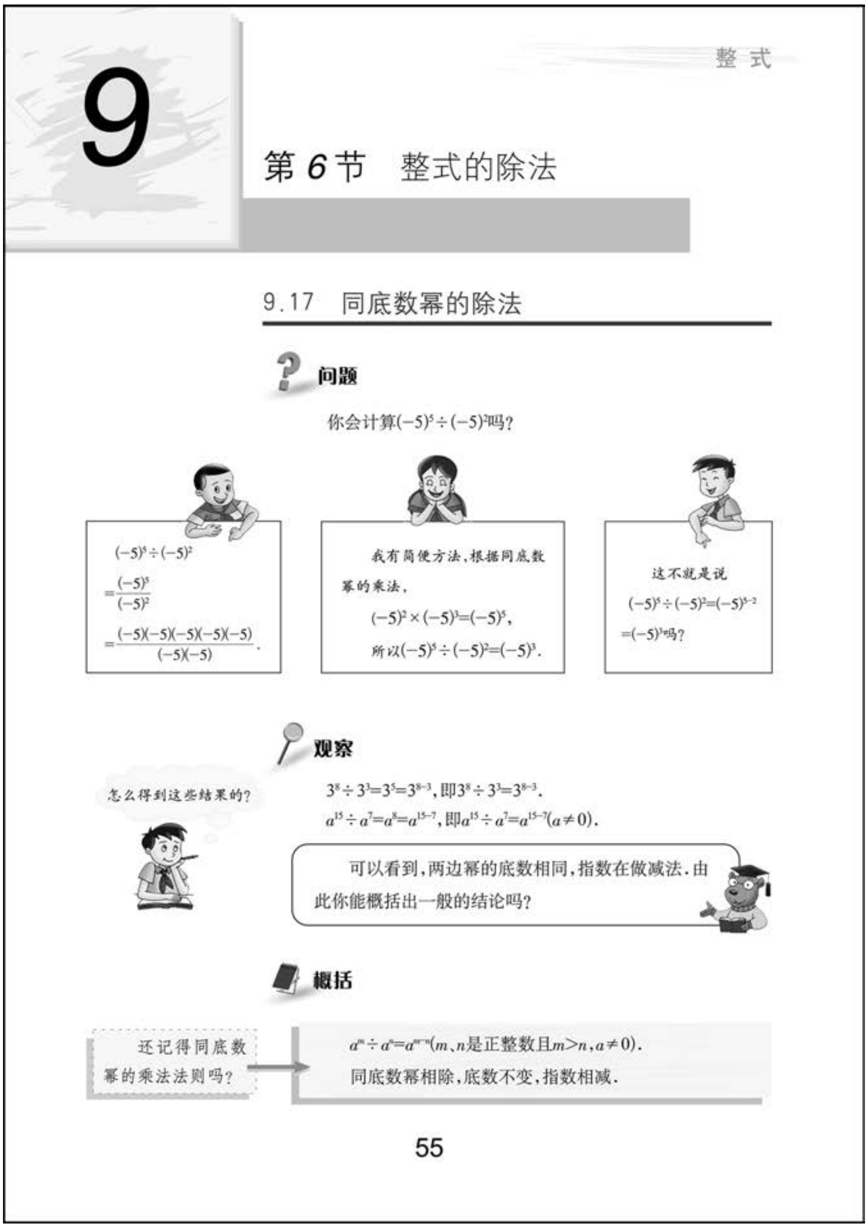
(1) $x^2+3y-xy-3x$;

(2) $x^3+2x^2y-9x-18y$;

(3) $(y+2)x^2+(y+2)x-12y-24$;

(4) $m^2x^2+n^2y^2-m^2y^2-n^2x^2$.

54


整式

9

第 6 节 整式的除法

9.17 同底数幂的除法

问题

你会计算 $(-5)^5 \div (-5)^2$ 吗？

$(-5)^5 \div (-5)^2$
$= \dfrac{(-5)^5}{(-5)^2}$
$= \dfrac{(-5)(-5)(-5)(-5)(-5)}{(-5)(-5)}$.

我有简便方法，根据同底数幂的乘法，
$(-5)^2 \times (-5)^3 = (-5)^5$，
所以 $(-5)^5 \div (-5)^2 = (-5)^3$.

这不就是说
$(-5)^5 \div (-5)^2 = (-5)^{5-2} = (-5)^3$ 吗？

观察

怎么得到这些结果的？

$3^8 \div 3^3 = 3^5 = 3^{8-3}$，即 $3^8 \div 3^3 = 3^{8-3}$.
$a^{15} \div a^7 = a^8 = a^{15-7}$，即 $a^{15} \div a^7 = a^{15-7} (a \neq 0)$.

可以看到，两边幂的底数相同，指数在做减法．由此你能概括出一般的结论吗？

概括

还记得同底数幂的乘法法则吗？

$a^m \div a^n = a^{m-n}$ (m、n 是正整数且 $m>n$，$a \neq 0$).
同底数幂相除，底数不变，指数相减.

55

第 6 节的重点是整式的除法.而整式的除法运算法则是以幂的运算性质为基础的，所以学好本节内容的关键是正确掌握幂的除法运算性质.理解幂的除法运算和其指数运算间的联系是学习本节内容的难点.

【教学目标】

经历同底数幂的除法法则与同底数幂的乘法法则比较的过程，掌握同底数幂的除法法则及零指数幂的规定.

问题

通过两种不同的方法，帮助学生理解同底数幂的除法法则的意义.

观察

进一步体验同底数幂相除时指数的变化规律，从而引导学生归纳出同底数幂的除法法则.

概括

在得出同底数幂除法法则时，要让学生与同底数幂的乘法法则进行比较，理解同底数幂相除时指数的运算.另外要让学生使用同底数幂的除法法则时，理解为什么底数 a 不能为 0，以及为什么 $m>n$.

在教学中要注意,零次幂为 1 是一个规定,而不是证明的结果.这样规定的目的是为了使其符合同底数幂的除法法则.

例题

本题直接运用同底数幂的除法法则进行计算,教学时可以让学生自己完成.

在本章中,如果作为底数的字母不作说明,那么字母均不为 0.

为了让学生熟练掌握同底数幂的除法法则,建议教学时可配以同底数幂的乘法,以及混合运算的练习题加强训练,如计算$a^5 \div a \cdot a^2$等.

练习 9.17

1. (1) 9;(2) 4;(3) 1;(4) -4.

2. (1) a^3;(2) -1;(3) $\frac{9}{16}$.

特别,当$m=n$时,$a^m \div a^n=a^m \div a^m=a^{m-m}=a^0$,

而$a^m \div a^m=1$,所以规定$a^0=1(a \neq 0)$.

> 任何不等于零的数的零次幂为1,即
>
> $$a^0=1(a \neq 0).$$

例题 计算:

(1) $(-3)^{15} \div (-3)^{12}$;

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^8 \div \left(\frac{2}{3}\right)^5$;

(3) $-a^7 \div a^6$;

(4) $7^{100} \div 7^{100}$.

解 (1) $(-3)^{15} \div (-3)^{12}=(-3)^{15-12}=(-3)^3=-27$.

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^8 \div \left(\frac{2}{3}\right)^5=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$.

(3) $-a^7 \div a^6=-(a^7 \div a^6)=-a^{7-6}=-a$.

也可以 $7^{100} \div 7^{100}=1$.

(4) $7^{100} \div 7^{100}=7^{100-100}=7^0=1$.

练习9.17

1. 计算:

(1) $3^5 \div 3^3$; (2) $(-2)^{12} \div (-2)^{10}$;

(3) $5^{50} \div 5^{50}$; (4) $-4^6 \div 4^5$.

2. 计算:

(1) $a^{10} \div a^7$;

(2) $-x^{102} \div x^{102}$;

(3) $\left(\frac{3}{4}\right)^6 \div \left(\frac{3}{4}\right)^4$.

整式

9.18 单项式除以单项式

问题

> 还记得1.5×10^8、3×10^5表示数的方法吗?

地球与太阳的距离约是1.5×10^8千米，光的速度约是每秒3×10^5千米，太阳光射到地球大约需要多少时间?

> $(1.5\times10^8)\div(3\times10^5)$
> $=\dfrac{1.5\times10^8}{3\times10^5}$.

这是一个除法运算的问题，所求时间大约为

$$(1.5\times10^8)\div(3\times10^5).$$

我们可以先算$(1.5\div3)$，接着算$(10^8\div10^5)$，然后将商相乘，得到计算结果.

> 你会用单项式与单项式的乘法验证以上结果吗?

$$\begin{aligned}&(1.5\times10^8)\div(3\times10^5)\\=&(1.5\div3)\times(10^8\div10^5)\\=&0.5\times10^3\\=&500(\text{秒}).\end{aligned}$$

如果用字母x代替底数10，那么这时就是单项式除以单项式的问题，用以上方法计算，即

$$\begin{aligned}&1.5x^8\div3x^5\\=&(1.5\div3)(x^8\div x^5)\\=&0.5x^{8-5}\\=&0.5x^3.\end{aligned}$$

思考

$$-6x^6y^9z\div3x^2y^4=?$$

> $3x^2y^4$不含字母z，可以认为$z^0=1$，$3x^2y^4=3x^2y^4z^0$.

由单项式的乘法，

$$\begin{aligned}&3x^2y^4\cdot(-2x^4y^5z)\\=&[3\times(-2)]\,x^{2+4}y^{4+5}z\\=&-6x^6y^9z,\end{aligned}$$

57

【教学目标】

(1) 通过实际情景的引入，理解单项式除以单项式的意义和作用.

(2) 掌握单项式除以单项式的法则.

(3) 经历单项式除以单项式的过程，领悟数学的化归思想.

问题

从一个具体的数的问题，即太阳光射到地球大约需要多少时间引入，然后用字母x代替数字10，使学生理解单项式除以单项式的意义.

教学时，要讲清为什么$(1.5\times10^8)\div(3\times10^5)$中要先算$(1.5\div3)$.这样用字母代替数字后的计算过程，学生也能接受.

思考

根据除法与乘法的关系，进一步阐明单项式除以单项式的意义，为归纳得到单项式除以单项式的法则作铺垫.

通过前面的一些引例，得到单项式除以单项式的法则，即把问题转化为系数与系数相除，同底数幂分别相除，此处也渗透了数学的化归思想.

例题

通过四个小题说明如何进行单项式除以单项式的运算.

与单项式乘以单项式相类似，教学中可引导学生总结单项式除以单项式的运算步骤，如先确定符号，再计算系数，最后利用同底数幂的除法法则写出字母及其指数，提高运算结果的正确率.

第(4)小题中的系数，由于计算较复杂，学生初学时经常会出错.教学时要提醒学生，除以一个数等于乘以这个数的倒数.

那么

$$-6x^6y^9z \div 3x^2y^4 = -2x^4y^5z$$

z^{1-0}，y^{9-4}，x^{6-2}

-6　$\div 3$　-2　底数不变　指数相减

系数相除

一般地，单项式除以单项式有如下法则：

> 两个单项式相除，把系数、同底数幂分别相除作为商的因式，对于只在被除式里含有的字母，则连同它的指数作为商的一个因式.

例题　计算：

(1) $16x^5y^8 \div 4x^2y^3$；

(2) $3a^3b^6 \div 6ab^3$；

(3) $-7x^4y^2 \div (-21x^2y^2)$；

(4) $a^4bx^7 \div \left(-\frac{3}{4}ax\right)$.

解　(1) $16x^5y^8 \div 4x^2y^3$

$=(16 \div 4)x^{5-2}y^{8-3}$

$=4x^3y^5$.

(2) $3a^3b^6 \div 6ab^3$

$=(3 \div 6)a^{3-1}b^{6-3}$

$=\frac{1}{2}a^2b^3$.

(3) $-7x^4y^2 \div (-21x^2y^2)$

$=[(-7) \div (-21)]\,x^{4-2}y^{2-2}$

$=\frac{1}{3}x^2$.

(4) $a^4bx^7 \div \left(-\frac{3}{4}ax\right)$

$=\left[1 \div \left(-\frac{3}{4}\right)\right]a^{4-1}bx^{7-1}$

$=-\frac{4}{3}a^3bx^6$.

58

练习9.18

1. 计算：

(1) $9a^5 \div 3a^3$；

(2) $-4x^6y^4 \div 2x^5y^2$；

(3) $2a^3b^6 \div 4a^2b^4$；

(4) $15ab^2 \div (-3b^2)$.

2. 填空：

(1) (　　) $\div 2ab = 6ab^2$；

(2) (　　) $\div (-5xy^2) = 15xy$；

(3) $125a^2x^3 \div$ (　　) $= 5a$；

(4) $24a^3b^2 \div$ (　　) $= -3ab$.

9.19　多项式除以单项式

思考

怎样计算 $(ma+mb+mc) \div m$ 呢?

这是一个多项式除以单项式的问题．其实就是求一个代数式，使它与 m 的积是 $ma+mb+mc$.

因为 $(a+b+c)m = ma+mb+mc$，所以

$$(ma+mb+mc) \div m = a+b+c.$$

而 $ma \div m + mb \div m + mc \div m = a+b+c$，因此

$$(ma+mb+mc) \div m = ma \div m + mb \div m + mc \div m.$$

一般地，多项式除以单项式有如下法则：

> 多项式除以单项式，先把多项式的每一项除以单项式，再把所得的商相加.

练习 9.18

1. (1) $3a^2$；

(2) $-2xy^2$；

(3) $\frac{1}{2}ab^2$；

(4) $-5a$.

2. (1) $12a^2b^3$；

(2) $-75x^2y^3$；

(3) $25ax^3$；

(4) $-8a^2b$.

【教学目标】

(1) 掌握多项式除以单项式的运算法则，会运用这个法则进行多项式与单项式除法的计算.

(2) 经历多项式除以单项式的过程，体验数学的化归思想.

思考

让学生利用前面推导整式乘法法则所积累的经验和方法，自主探讨和推导多项式除以单项式的法则.必要时可启发学生联系数的运算进行思考.

教学时，还可用具体数字来说明分别相除问题，如 $(12+4) \div 4 = \frac{12+4}{4} = \frac{12}{4} + \frac{4}{4} = 3+1=4$.

例题

教学时，要求学生按例题的格式书写，熟练以后才可直接写出结果.注意：不要漏项，不要出现符号错误等，如第(2)小题最后一项是-1.

练习 9.19

1. (1) $2a^2-a+1$；

(2) $4x^2-9$；

(3) $6x-4y+2$.

2. (1) $a^2+\frac{3}{2}a+2$；

(2) $3x-5x^2$.

例题 计算：

(1) $(9a^6-6a^4+12a^3)\div 3a^3$；

(2) $(4x^2y^3+8x^2y^2-2xy^2)\div 2xy^2$.

解 (1) $(9a^6-6a^4+12a^3)\div 3a^3$

$=9a^6\div 3a^3-6a^4\div 3a^3+12a^3\div 3a^3$

$=3a^3-2a+4$.

(2) $(4x^2y^3+8x^2y^2-2xy^2)\div 2xy^2$

$=4x^2y^3\div 2xy^2+8x^2y^2\div 2xy^2-2xy^2\div 2xy^2$

$=2xy+4x-1$.

练习9.19

1. 计算：

(1) $(4a^3-2a^2+2a)\div 2a$；

(2) $(12ax^3-27ax)\div 3ax$；

(3) $(-18x^3y^2+12x^2y^3-6x^2y^2)\div(-3x^2y^2)$.

2. 计算：

(1) $6a(2a^3+3a^2+4a)\div 12a^2$；

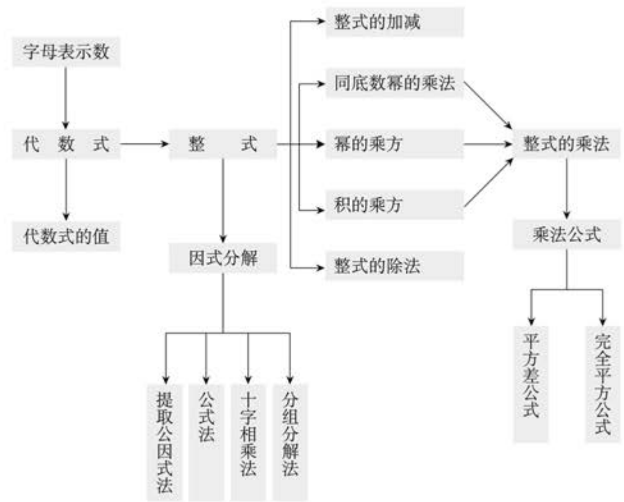
(2) $(18x^2y^2-30x^3y^2)\div 3x\div 2y^2$.

本章小结

我们在小学阶段学习了数的运算，本章首先学习了“字母表示数”，从而奠定了本章教学内容的基础．接着又学习了整式的加减乘除运算以及多项式的因式分解．因为其算式中含有字母，所以这是关于用字母表示的数的运算及变形．

“字母表示数”是一种重要的基本数学思想．有了它，就可以用字母简捷地表示有关运算法则及运算律，简明地表述许多数学定理、公式等；有了它，就可以用字母巧妙地表示已知或未知数量，建立代数式，建立方程等；有了它，就有了以字母及数学符号为要素构成的符号语言，而这种语言形态丰富了数学的表述力，同时还便于更灵活地进行数学交流、更有效地形成数学理解．

本章的知识框架如下：



61

本章的主线是将“数”的运算推广、发展为“式”的运算，由字母表示数使思维从具体到抽象，引出了代数式等概念，相应的运算也变得较为复杂．“式”及其运算是今后数学学习的重要基础，因此学生需熟练掌握．对于有关“式”的概念，如单项式、多项式等，不要求死背定义，主要会认识和辨别即可．

本章知识内容多，法则多，公式多，需记忆理解的多，小结前，建议让学生先整理本章所学的知识，如：可以将同底数幂相乘、同底数幂相除、积的乘方及幂的乘方列表比较，使学生理解和记忆这些法则．

“探究活动”与“阅读材料”“拓展”内容一样，可以根据学生的实际情况，让有兴趣的学生自己看，也可在课堂上选用，师生共同研究.

41、42、…、48、49，由于这一组数都接近 50，而 50 的平方较容易计算，因此可考虑利用它们与 50 的关系来计算.

$47^2=(50-3)^2=50^2-2\times50\times3+3^2=100\times(25-3)+3^2$，因此小杰的方法是正确的.一般地，$(50-n)^2=50^2-2\cdot50n+n^2=100(25-n)+n^2$.因此也可以用公式计算 56^2 等.

探究活动一

一组平方数规律的探究

观察以下的平方数：

$$21^2=441,$$
$$22^2=484,$$
$$23^2=529,$$
$$24^2=576,$$
$$25^2=625,$$
$$26^2=676,$$
$$27^2=729,$$
$$28^2=784,$$
$$29^2=841.$$

你能发现在25^2附近的两个平方数有什么规律吗？

$$26^2-24^2=100, 27^2-23^2=200, 28^2-22^2=300, \cdots\cdots$$

一般地，$(25+n)^2-(25-n)^2=100n$.

你能用这一公式说明上面所发生的奇妙规律吗？

对于以下的平方数：

$$41^2=1\,681,$$
$$42^2=1\,764,$$
$$43^2=1\,849,$$
$$44^2=1\,936,$$
$$45^2=2\,025,$$
$$46^2=2\,116,$$
$$47^2=2\,209,$$
$$48^2=2\,304,$$
$$49^2=2\,401.$$

你有没有简便的计算方法呢？

对于47^2的结果，小杰是这样计算的：

$$47^2=(25-3)\times100+3^2=2\,209.$$

他所用的方法是否正确呢？如果正确，请大家一起讨论，写出一个正确的计算公式，并用它来验证所给出的其他平方数的结果.

62

探究活动二

探究能被3、9整除的数的规律

通过计算，我们可以知道312、465、522是能被3整除的三位数，那么任意一个三位数$\overline{abc}$满足什么条件，它一定能被3整除呢？（$\overline{abc}$表示百位上、十位上、个位上的数分别是a、b、c.）

如果三位数$\overline{abc}$能被3整除，只要

$100a+10b+c=3p$，其中p为正整数，a、b、c表示0～9的一个数，且$a\neq0$.

$$\begin{aligned}a+b+c&=3p-99a-9b\\&=3(p-33a-3b),\end{aligned}$$

所以当$a+b+c$是3的倍数时，$\overline{abc}$一定能被3整除.

可以将此结论推广到更多位数，我们有

如果一个正整数各个数位上数的和能被3整除，那么这个数就能被3整除.

你能根据上述方法，寻找到三位数$\overline{abc}$被9整除的条件吗？你能证明这个结论吗？

根据以上结论判断以下整数哪些能被3或9整除：

531、231、810、139、112、342.

如果一个正整数各个数位上数的和能被 9 整除，那么这个数就能被 9 整除.

证明：如果一个三位数$\overline{abc}$能被 9 整除，那么设 $100a+10b+c=9k$，其中 k 为正整数，a、b、c 表示 0 到 9 中的一个整数，且 $a\neq0$. 因为 $a+b+c=9k-99a-9b=9(k-11a-b)$，而 $k-11a-b$ 是一个整数，反之也成立，所以当 $a+b+c$ 是 9 的倍数时，$\overline{abc}$能被 9 整除.

因为 9 能被 3 整除，所以能被 9 整除的数一定能被 3 整除，反之不一定.

能被 3 整除的数有：531、231、810、342. 能被 9 整除的数有：531、810、342.

这个探究活动的证明过程不必要求每个学生都掌握，但一个整数能被 3 或 9 整除的规律应让每个学生清楚，从而使学生能较快地判断一个整数是否是 3 或 9 的倍数.

这个阅读材料除了让有兴趣的学生自己阅读以外，还可以在课堂上加以研究、拓展，寻找其中有趣的规律，培养学生发现问题、解决问题的能力.当然在使用时，也可以用阿拉伯数字表示图中的数字部分，便于学生观察、研究.

贾宪三角中的规律将到高中学习二项式定理时继续研究，这里不必深究.

阅读材料

贾宪三角

我们已经学习了多项式乘以多项式，可以计算以下的式子，

$$(a+b)^0=1,$$
$$(a+b)^1=a+b,$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$
$$\cdots\cdots$$

你能发现以上等式右边的各项系数有何规律？

这些系数的规律早在11世纪就已被我国数学家贾宪发现.

1261年，我国宋代数学家杨辉在他所著的《详解九章算法》中给出一个“开方作法本源图”，如图1所示，并指明，“开方作法本源图出自《释锁算书》，贾宪用此术”.贾宪是北宋时期的数学家，大约生活在11世纪上半叶.图1被后人称为“贾宪三角”.

图1

贾宪三角中还蕴含了许多数字产生的规律.你也许已经发现，这个三角形的两条斜的边都是由数字1所组成的，而其他数都等于它肩上的两个数的和.按此规律，这个数字三角形可以写到任意层.这样一种$(a+b)^n$的展开式中各项系数的规律，在西方数学史上被称为“帕斯卡三角形”.帕斯卡是法国数学家，他在1654年所著的书中给出了类似于“贾宪三角”的数字三角形表.

仔细观察，你也许还会发现“贾宪三角”中数字的其他规律.

64

拓展

多项式除以多项式——长除法

类比于两数相除可以用竖式运算，多项式除以多项式也可以用竖式运算．其步骤是：

（ⅰ）把被除式和除式按同一字母的降幂排列(若有缺项用零补齐)．

（ⅱ）用竖式进行运算．

（ⅲ）当余式的次数低于除式的次数时，运算终止，得到商式和余式．

例题　求$(5x^4+3x^3+2x-4)\div(x^2+1)$的商式和余式．

解

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad\quad\quad\quad 5x^2+3x-5 \\
\cline{2-2}
x^2+0x+1 & 5x^4+3x^3+0x^2+2x-4 \\
 & 5x^4+0x^3+5x^2 \\
\cline{2-2}
 & \quad\quad 3x^3-5x^2+2x \\
 & \quad\quad 3x^3+0x^2+3x \\
\cline{2-2}
 & \quad\quad\quad\quad -5x^2-x-4 \\
 & \quad\quad\quad\quad -5x^2+0x-5 \\
\cline{2-2}
 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad -x+1
\end{array}
$$

答：商式是$5x^2+3x-5$，余式是$-x+1$．

说明：上述运算过程也可简化为只写出多项式的系数，具体表示如下，此法称为分离系数法．

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad\quad 5+3-5 \\
\cline{2-2}
1+0+1 & 5+3+0+2-4 \\
 & 5+0+5 \\
\cline{2-2}
 & \quad 3-5+2 \\
 & \quad 3+0+3 \\
\cline{2-2}
 & \quad\quad -5-1-4 \\
 & \quad\quad -5+0-5 \\
\cline{2-2}
 & \quad\quad\quad -1+1
\end{array}
$$

所以商式是$5x^2+3x-5$，余式是$-x+1$．

思考：已知$x^4+x^3+ax^2+x+b$能被x^2+x+1整除，你能根据以上的方法分别求出a、b的值吗？

65

这篇拓展介绍了多项式除以多项式的方法，可让学有余力的学生进行自学；也可组织部分学有余力的学生课外进行合作学习，教师可作必要的指导和点拨；也可布置适量的练习题请部分学生做，便于他们的理解和掌握；也可提出一些问题让部分学生思考，如多项式的整除问题等．

思考

$a=2$，$b=1$．

第十章　分　　式

一、教学目标

1. 通过实际问题的探究，经历分式形成的过程，理解分式的意义.

2. 通过与分数的性质类比得出分式的性质，知道约分和最简分式的概念.

3. 理解分式的有关概念及其基本性质，掌握分式加、减、乘、除的四则运算法则.

4. 理解负整数指数幂的意义，理解在负整数指数幂的条件下，整式和分式的统一.知道正整数指数幂的运算性质对整数指数幂仍然适用.

5. 理解绝对值小于 1 的有理数的科学记数法，会用科学记数法表示有理数.

6. 通过实际问题的解决，体会分式方程的意义，领会把分式方程整式化的转化思想，掌握分式方程的解法，知道分式方程出现增根的原因，理解验根的必要性.

二、课时安排

10.1	分式的意义	1 课时
10.2	分式的基本性质	1 课时
10.3	分式的乘除	1 课时
10.4	分式的加减	2 课时
10.5	可以化成一元一次方程的分式方程	1 课时
10.6	整数指数幂及其运算	2 课时
本章小结		2 课时

三、设计说明

分式是初中代数的重要学习内容之一，是有理式的一个重要组成部分.在整式的概念、变形、四则运算及因式分解的基础上，进一步学习分式，它既是对整式的运用和巩固，也是对整式的延伸.

教材从实际出发，设计出有时代特征和地域特色的实际问题情景，帮助学生积极主动地理解分式的意义.分式的概念是以整式为基础，类比分数引出的.在分式的定义中，明确指出了其分母中含有表示变数的字母，且字母的取值不能使分母的值为零.指明一个代数式是分式时，就已认定其分母中的字母表示变数且分母的值不为零；一个分式的值为零时，就是这个分式中字母的取值使得分子的值为零但分母的值不为零.

分式的基本性质是分式四则运算的基础，教材突出类比与转化的数学思想，鼓励学生类比分数的通

分、约分等性质，通过观察、联想得到分式的性质，通分、约分中的分式都是恒等变形.分式的四则运算是这一章学生需要学习的重点.它的运算以分数的运算为基础，用字母表示数，从而形成分式的运算.在分式的运算中，局部的运算，即分子的运算、分母的运算就是整式运算.课本从学生认知的难易程度出发，先学习分式的乘除法的运算，再学习分式的加减法运算.使学生由易到难地掌握分式的四则运算.运算结果化为最简分式是教材始终强调的一点.

可化为一元一次方程的分式方程，既是分式运算的一个应用，也是整式方程的延伸与扩展.教材设计了上海至南京的铁路提速问题情景，引起学生对所学内容的兴趣.通过问题的解决，得到分式方程的概念、解方程的方法以及验根的步骤和意义.

整数指数幂的引入，是对正整数指数幂、零指数幂的完善，并把分式与负整数幂的互化有机地联系起来，同时又把科学记数法推广到绝对值小于1的数的表示.

四、教学建议

1. 通过生活实际中的问题引出分式的概念.在教学时，教师应通过改变分式分母中字母的取值，使学生理解分式定义中对于分式所含字母取值的限制性要求.

2. 引导学生以整式的运算为基础，类比分数的性质和运算，通过观察、联想，经历分式的基本性质和四则运算法则的形成过程.在进行分式四则运算教学时，课本从学生先易后难的认知规律出发，先学习分式的乘除法运算，再学习分式的加减法运算.教师应关注课本的这一特点，加强分式乘除法运算技能的训练和巩固，为后续学习分式的异分母加减法打好基础.对异分母分式加减法的教学，可类比异分母分数的加减法，先通分，转化为同分母分式的加减法运算.通分时，如果分母是多项式，要先分解因式.在加减运算时，分母可保留因式乘积形式，这样在约分时较为简便.

3. 教学时要注意将分式方程转化为整式方程求解的“转化思想”的渗透，要使学生知道解分式方程中可能产生增根的原因，从而使学生认识验根的必要性.教师要特别注意本章中的分式方程都是指可化为一元一次方程的分式方程.不要随意增加难度.

4. 在幂的运算教学中，要帮助学生经历整数指数幂的扩展过程，理解正整数指数幂、零指数幂、负整数指数幂的概念和关系，将幂的运算性质归纳合并为三条：$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$，$a^m \div a^n = a^{m-n}$，$(a^m)^n = a^{mn}$.并用整数指数幂的性质完善用科学记数法表示绝对值较小的数.

五、评价建议

1. 关注学生对分式、分式方程的有关概念的理解，以及对分式的基本性质、四则运算的掌握.

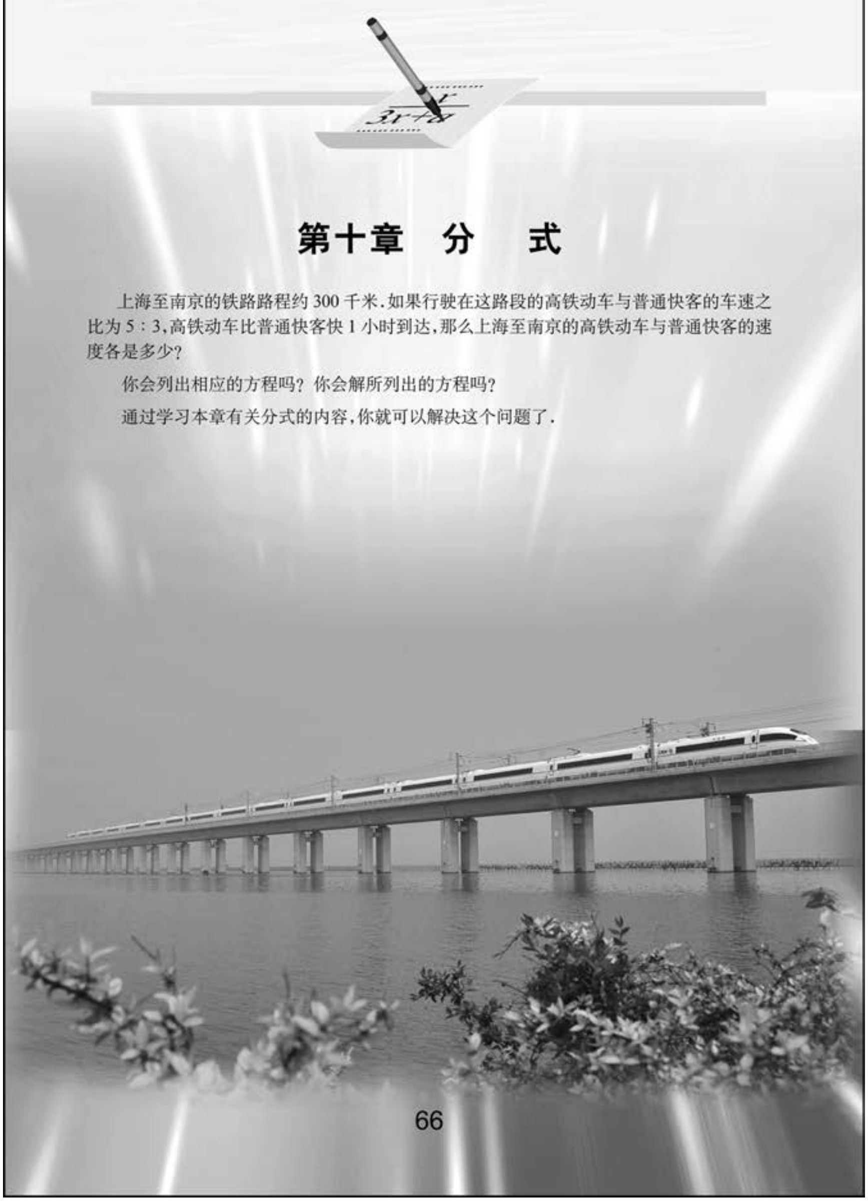
2. 关注学生在数学学习活动中的独立思考能力以及交流合作意识的培养.

3. 在解决问题的过程中，鼓励方法多样，有所创新.

本章的引入是一个有关火车运行的实际问题.可提出“如何列方程求解”,师生一起讨论.如果设高铁动车的速度为 $5x$ 千米/时,那么根据题意可列出方程 $\frac{300}{3x}-\frac{300}{5x}=1$.这时,让学生观察等式左边的代数式.要解这个方程就要先学习分式的有关知识.

这个问题说明了学习分式的必要性,即现实生活中需要这样的知识解决问题.由实际问题进入学习主题,有利于激发学生解决问题的积极性和主动性.

教师也可列举贴近学生生活的其他例子,但应注意所举的例子都应是可以化为一元一次方程的分式方程的问题.



第十章 分 式

上海至南京的铁路路程约 300 千米.如果行驶在这路段的高铁动车与普通快客的车速之比为 5∶3,高铁动车比普通快客快 1 小时到达,那么上海至南京的高铁动车与普通快客的速度各是多少?

你会列出相应的方程吗?你会解所列出的方程吗?

通过学习本章有关分式的内容,你就可以解决这个问题了.

66

10

第1节 分式

10.1 分式的意义

问题1

一名极限跳伞运动员在某摩天大厦跳伞，从350米的高度跳下，到落地时用了t秒，那么他的平均降落速度是每秒多少米？

一个长方形的面积是S平方米，长为x米，那么宽是多少米？

一名篮球运动员在一个赛季中罚球罚进a个，2分球投进b个，3分球投进c个，那么这名篮球运动员3分球得分占其总得分的几分之几？

上面问题的结果依次为$\frac{350}{t}$，$\frac{S}{x}$，$\frac{3c}{a+2b+3c}$.这些代数式中都含有表示变数的字母.

> 对于两个整式A、B，其中$B\neq0$，它们相除即$A\div B$时可以表示为$\frac{A}{B}$.如果B中含有表示变数的字母，那么$\frac{A}{B}$叫做分式(fraction)，A叫做分式的分子，B叫做分式的分母.

分式中分母B不等于零，是指B中变数的取值不能使B的值等于零.

例题1 下列各式中的分母都不为零，这时哪些是整式？哪些是分式？

$$\frac{4}{x}，\frac{x+y}{3}，\frac{xy}{x-y}，\frac{x}{a+2b+3c}.$$

67

【教学目标】

(1) 经历分式的形成过程，理解分式的概念.

(2) 会求分式中字母的取值范围以及分式的值为零时字母的取值.

问题1

建议可从具体数字出发，变换不同的整数，得到不同的分数，例如：$\frac{350}{10}$、$\frac{350}{9}$、$\frac{350}{8}$等，再用字母t表示，逐步引申出分式的概念.让学生通过从具体数字到字母的这些变化，体会分式的意义.

关于分式概念的教学要强调两点，一是分母中含有“变数”(用字母表示)；二是变数的取值不能使分母的值为零.

例题 1

通过整式与分式的比较，可帮助学生更好地理解分式的概念. 代数式$\dfrac{A}{B}$是分式的表示形式，其中 A、B 表示的应是两个整式，而 B 中应含有字母且$B\neq0$.

例题 2

根据已知条件求分式的值，本例是将字母所赋的值直接代入计算.（以后的学习中将进一步学习：先化简再代入；整体代入；换元求值等其他的方法.）

问题 2

注意分式中字母的取值范围.

例题 3

字母的取值不能使分母为零.

例题 4

教学时要强调当分子为零，且分母不为零时，分式的值为零.

解　$\dfrac{x+y}{3}$是整式；$\dfrac{4}{x}$、$\dfrac{xy}{x-y}$、$\dfrac{x}{a+2b+3c}$是分式.

例题2　当$x=-3$，$y=2$时，分别计算下列分式的值：

(1) $\dfrac{3x-2y}{x}$；　　(2) $\dfrac{y-3}{x+7}$.

解　(1) $\dfrac{3x-2y}{x}=\dfrac{3\times(-3)-2\times2}{-3}=\dfrac{-13}{-3}=\dfrac{13}{3}$.

(2) $\dfrac{y-3}{x+7}=\dfrac{2-3}{-3+7}=\dfrac{-1}{4}=-\dfrac{1}{4}$.

问题 2

计算例题2第(2)小题中分式的值时，x的值能取-7吗？

例题3　求下列分式中字母x的取值范围.

(1) $\dfrac{x^2+1}{2x}$；　　(2) $\dfrac{x+5}{x+2}$.

解　(1) 因为分式中分母不能为0，得$2x\neq0$，所以 $x\neq0$.

(2) 因为分式中分母不能为0，得$x+2\neq0$，所以$x\neq-2$.

例题4　x取什么值时，分式$\dfrac{2x+1}{3x-1}$的值为零？

分析　在分式中，只有当分子的值为零且分母不为零时，分式的值为零.

解　由分子$2x+1=0$，得$x=-\dfrac{1}{2}$.

当$x=-\dfrac{1}{2}$时，

68

分母$3x-1=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1=-2\frac{1}{2}\neq 0$.

所以，当$x=-\frac{1}{2}$时，分式$\frac{2x+1}{3x-1}$的值为零.

例题5 如图10-1是由一个半径为r的半圆和一个长方形组成的一扇窗.根据设计要求，整扇窗的面积应为4平方米.

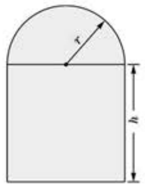


图10-1

(1) 用r的代数式表示h；

(2) 当$r=1.1$米时，求出窗高.（π取3.14，精确到0.01米）

解 (1) $\frac{1}{2}\pi r^2+2rh=4$,

$2rh=4-\frac{1}{2}\pi r^2$,

$h=\frac{1}{2r}\left(4-\frac{1}{2}\pi r^2\right)$,

$h=\frac{2}{r}-\frac{1}{4}\pi r$.

(2)  $h=\frac{2}{1.1}-\frac{1}{4}\times 3.14\times 1.1\approx 0.95$（米）.

窗高为$h+r=0.95+1.1=2.05$(米).

答：窗高为2.05米.

69

例题 5

增强学生学习数学、应用数学的意识，体验分式在实际生活中的应用，本例隐含着建立函数关系式的问题，为以后学习建立函数关系式作铺垫.

第(1)小题是求代数式；

第(2)小题是求代数式的值，做第(2)小题时允许学生使用计算器.

练习 10.1

1. (1) $\dfrac{3}{x}$；(2) $\dfrac{2ax}{by}$；

(3) $\dfrac{x^2+1}{x}$；(4) $\dfrac{2x}{3x+5}$.

2. (2)是整式；(1)(3)(4)是分式.

3. (1) 4；

(2) $-\dfrac{3}{5}$；

(3) $-3\dfrac{1}{3}$.

4. 整式：$a(2a+3)$、$(x+y)(3x-4y)$等；分式：$\dfrac{x+y}{3x-4y}$、$\dfrac{a}{2a+3}$.此题答案不唯一.

5. (1) $y\neq-\dfrac{1}{2}$；(2) $x\neq-2$；(3) $x+2y\neq0$；(4) $y=-1$.

【教学目标】

(1) 通过与分数的基本性质的类比，掌握分式的基本性质.

(2) 类比分数的约分，理解分式约分的意义，掌握分式约分的基本方法.

问题

建议在教学中首先引导学生复习分数中的最简分数、约分的概念和分数的基本性质，在此基础上再设置恰当的问题，指导学生通过联想、类比，归纳概括出分式的性质.

练习10.1

1. 将下列式子表示为分式：

(1) $3\div x$；　　(2) $2ax\div by$；

(3) $(x^2+1)\div x$；　　(4) $2x\div(3x+5)$.

2. 下列各式中的分母都不为零，这时哪些是整式？哪些是分式？

(1) $\dfrac{1}{a+2}$；　　(2) x^2-2y；

(3) $\dfrac{2x+1}{x^2-x+3}$；　　(4) $\dfrac{2x-y}{3x+2y}$.

3. 当$x=-1$，$y=-4$时，计算以下分式的值：

(1) $\dfrac{y}{x}$；　　(2) $\dfrac{x-y}{x+y}$；

(3) $\dfrac{2x-3y}{x^2+y}$.

4. 从代数式201、a、$2a+3$、$x+y$、$3x-4y$中任意选取两个分别组成一个整式，一个分式.

5. 对于分式$\dfrac{x-y}{x+2y}$：

(1) 如果$x=1$，那么y取值范围是什么？

(2) 如果$y=1$，那么x取值范围是什么？

(3) 该分式中x与y的取值应满足怎样的数量关系？

(4) 如果$x=-1$，那么y取什么值时，分式的值为零？

10.2 分式的基本性质

问题

$\dfrac{9}{15}=\dfrac{3\times3}{3\times5}=\dfrac{3}{5}$.

分数$\dfrac{9}{15}$、$\dfrac{-15}{-25}$、$\dfrac{36}{60}$、$\dfrac{3}{5}$、$-\dfrac{-6}{10}$是否相等，其中哪一个分数是最简分数？

70

还记得分数的基本性质吗？

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}=\frac{a\div n}{b\div n}(b\neq0,m\neq0,n\neq0).$$

类似的，分式也有这样的性质：

分式的分子和分母都乘以(或除以)同一个不为零的整式，分式的值不变，即

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot M}{B\cdot M}=\frac{A\div N}{B\div N},$$

其中M、N为整式，且$B\neq0,M\neq0,N\neq0$.

例如，

分子、分母同除以$3x$.

$$\frac{9x}{15x}=\frac{3(3x)}{5(3x)}=\frac{3}{5},$$

分子、分母同除以$2xy$.

$$\frac{-6xy^2}{10x^2y}=\frac{-3y(2xy)}{5x(2xy)}=\frac{-3y}{5x}=-\frac{3y}{5x}.$$

把一个分式的分子与分母中相同的因式约去的过程，叫做约分.

如果一个分式的分子与分母没有相同的因式（1除外），那么这个分式叫做最简分式.

例如，$-\frac{3y}{5x}$就是最简分式.

例题1 化简：

(1) $\frac{6x^2y}{9xy^2}$；

(2) $\frac{x+y}{x^2-y^2}$；

(3) $\frac{-2x+3x^2}{2x}$.

相同因式是$3xy$.

解 (1) $\frac{6x^2y}{9xy^2}=\frac{2x(3xy)}{3y(3xy)}=\frac{2x}{3y}$.

71

指导学生对分数和分式的基本性质进行类比.

说明：同除以$3x$时必须强调$3x\neq0$；同理，$2xy\neq0$.

对照最简分数的概念，由学生概括出最简分式的概念.

例题 1

建议以整式为基础，复习因式分解的几种方法.通过三个约分问题的解决，帮助学生形成如下认识：分式约分的过程就是约去分子、分母的公因式的过程.可举出一些例题，如：$\frac{x^6}{x^2}=x^3$；$\frac{x^2+y^2}{x+y}=x+y$；$\frac{x+m}{y+m}=\frac{x}{y}$；$\frac{a^2-b}{a^2}=-b$等，让学生辨析约分的过程是否正确.可引导学生类比分数的约分，并在约分过程中总结自己的体会，概括出进行分式约分的具体步骤：(1) 分别对分子、分母进行因式分解；(2) 约去分子、分母的公因式.

相同因式是$x+y$.

(2) $\dfrac{x+y}{x^2-y^2}=\dfrac{x+y}{(x-y)(x+y)}=\dfrac{1}{x-y}$.

相同因式是x.

(3) $\dfrac{-2x+3x^2}{2x}=\dfrac{x(-2+3x)}{2x}=\dfrac{-2+3x}{2}$.

由例题1可以看出约分可以化简分式.

化简分式时，如果分式的分子和分母都是单项式，约分时约去它们系数的最大公因数、相同因式的最低次幂. 如果分子、分母是多项式，先分解因式，再约分. 化简分式时要将分式化成最简分式或整式.

例题2 化简：

(1) $\dfrac{x-2}{x^2-4x+4}$；

(2) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$；

(3) $\dfrac{15b-5a}{2a-6b}$.

别忘了化简分式的最后结果应是最简分式或整式.

解 (1) $\dfrac{x-2}{x^2-4x+4}=\dfrac{x-2}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{x-2}$.

(2) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}=\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{x+2}{x+3}$.

(3) $\dfrac{15b-5a}{2a-6b}=\dfrac{5(3b-a)}{2(a-3b)}=-\dfrac{5(a-3b)}{2(a-3b)}=-\dfrac{5}{2}$.

练习10.2

1 填空：

(1) $\dfrac{3x^2y}{xy^2}=\dfrac{(\quad)}{y}$；　　(2) $\dfrac{y}{2x}=\dfrac{(\quad)}{2xy}$.

72

例题 2

本例题的设计意图是为巩固约分的方法，且强调约分要一直约到除了1之外，分子、分母再也没有其他公因式为止.可根据学生的实际情况，举一些学生易犯错误的约分问题，诸如：$\dfrac{4x^2(y-1)}{x(1-y)}$、$\dfrac{3m(x-y)^2}{y-x}$等小题，让学生通过解题，正确掌握约分的方法.

练习 10.2

1. (1) $3x$；

(2) y^2.

2. 下列分式中，哪些是最简分式？

$$\frac{20}{15x},\ \frac{3x+2}{6x+4},\ \frac{5(2x-1)}{2x},\ \frac{6ab}{5a^2},\ \frac{3(a^2-b^2)}{a+b},\ \frac{x+1}{2x+1},\ \frac{x-1}{3x-3}.$$

3. 将下列分式分别化成最简分式：

(1) $\frac{6m^2n^3}{3mn}$；

(2) $\frac{-20x}{25x^2}$；

(3) $\frac{9ab}{12a^2}$；

(4) $\frac{2(x+y)^2}{x+y}$.

4. 化简：

(1) $\frac{x-5}{15-3x}$；

(2) $\frac{x^2-2x}{4-2x}$；

(3) $\frac{x^2+5x+6}{x+2}$；

(4) $\frac{x^2-x-2}{x^2+6x+5}$.

2. $\frac{5(2x-1)}{2x}$、$\frac{x+1}{2x+1}$.

3. (1) $2mn^2$；

(2) $-\frac{4}{5x}$；

(3) $\frac{3b}{4a}$；

(4) $2(x+y)$.

4. (1) $-\frac{1}{3}$；

(2) $-\frac{x}{2}$；

(3) $x+3$；

(4) $\frac{x-2}{x+5}$.

第 2 节的重点是分式的四则运算.而本节的难点在于异分母分式的加减法.把分式的除法转化为乘法,能正确进行通分,把异分母分式的加减转化为同分母分式的加减,是学习本节内容的关键.

【教学目标】

(1) 经历与分数乘除法类比的过程,总结概括出分式乘除的运算法则.

(2) 通过具体问题的练习,掌握分式乘法、除法的运算法则,体会化归与转化的数学思想.

观察

(1)(2)是两道分数乘法、除法的引例.使学生理解 $\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}$ 是 $\frac{x^2}{5}\cdot\frac{3}{x}$ 当 $x=2$ 时的值.分数乘除运算是分式乘除运算的基础,分式运算是分数运算的扩展与延伸.通过列举分数的乘除运算实例,类比引入分式的乘除运算.从分子分母都是单项式的分式运算开始,初步学习分式乘法、除法的运算法则.

概括分式乘法、除法的法则时,还要强调:分式的分母不为零.

10

第 2 节　分式的运算

10.3　分式的乘除

观察

(1) $\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{4\times3}{5\times2}$, $\frac{16}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{16\times3}{5\times4}$,

你会计算 $\frac{x^2}{5}\cdot\frac{3}{x}$ 吗?

(2) $\frac{4}{5}\div\frac{3}{25}=\frac{4}{5}\times\frac{25}{3}$, $\frac{4}{7}\div\frac{3}{49}=\frac{4}{7}\times\frac{49}{3}$,

你会计算 $\frac{4}{x}\div\frac{3}{x^2}$ 吗?

将自己计算的结果与同学交流.

分式的乘除法则与分数的乘除法则类似:

> 两个分式相乘,将分子相乘的积作分子,分母相乘的积作分母.
>
> 分式除以分式,将除式的分子和分母颠倒位置后,再与被除式相乘.

用式子表示为:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD},$$

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}.$$

74

例题1 计算：

(1) $\frac{2a^2}{3}\cdot\frac{b}{4a}$；

(2) $\frac{3y(x+3)}{x-3}\cdot\frac{2(x-3)}{9y^2}$；

(3) $\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}$.

分子、分母同除以$2a$.

解 (1) $\frac{2a^2}{3}\cdot\frac{b}{4a}=\frac{2a^2b}{3\cdot4a}=\frac{ab}{6}$.

(2) $\frac{3y(x+3)}{x-3}\cdot\frac{2(x-3)}{9y^2}$

分子、分母同除以$3y(x-3)$.

$=\frac{6y(x+3)(x-3)}{9y^2(x-3)}$

$=\frac{2(x+3)}{3y}$.

(3) $\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}=\frac{b\cdot b}{a\cdot a}=\frac{b^2}{a^2}$.

例题2 计算：

(1) $\left(\frac{-5m}{n}\right)\div\frac{10m^2}{3n}$；

(2) $\frac{x+1}{x^2+2x-3}\div\frac{x+1}{x-1}$；

(3) $\frac{2a-b}{a^2-2ab+b^2}\div\frac{4a^2-b^2}{ab^2-a^2b}$.

解 (1) $\left(\frac{-5m}{n}\right)\div\frac{10m^2}{3n}$

$=\left(\frac{-5m}{n}\right)\cdot\frac{3n}{10m^2}$

$=\frac{-15mn}{10nm^2}$

$=-\frac{3}{2m}$.

(2) $\frac{x+1}{x^2+2x-3}\div\frac{x+1}{x-1}$

例题 1

帮助学生运用分式乘法法则进行具体运算.

第(1)小题是整式与分式的乘法.如果遇到 $2a^2\cdot\frac{b}{4a}$，那么可把 $2a^2$ 看成$\frac{2a^2}{1}$，即分母是 1 的分式.

第(2)小题是分式与分式的乘法.

例题 2

利用分式除法法则，将分式除法运算转化为乘法运算，体会转化的数学思想，当分式除法转化为乘法之后，具体的运算方法与分式乘法相同.

第(1)小题要特别注意“－”(负号)的运算，一般地，运算结果的“－”(负号)放在分数线前面.

第(2)小题在转化为乘法之后，先对前一个分式的分母进行因式分解，然后进行约分，使后面的运算变得便捷.

第(3)小题可让学生尝试不同的解法.在熟悉分式除法法则的基础上，通过举例，如对 $1\div\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}=1$ 进行辨析，强调运算顺序.帮助学生在乘除混合运算中正确地确定运算顺序.

同时必须强调：运算结果必须化成最简分式.

思考

$\left(\frac{b}{a}\right)^2$ 与 $\left(\frac{b^2}{a^2}\right)$ 相等.

学生已学过分数的乘方和整式的乘方运算，据此启发学生类比、联想，展开讨论和交流，如 $\left(\frac{b}{a}\right)^2$、$\left(\frac{x-y}{a}\right)^2$、$\frac{y^2}{x}\div\frac{x^2}{y}$ 等的意义，以及运算的法则.由 $\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b^2}{a^2}$，可推广到一般形式：$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

练习 10.3

1. (1) $\frac{1}{2}$；

(2) $\frac{xy^2}{8}$；

(3) -1；

(4) $\frac{2}{(2x+1)^2}$.

先分解因式.

$$=\frac{x+1}{(x+3)(x-1)}\div\frac{x+1}{x-1}$$

$$=\frac{x+1}{(x+3)(x-1)}\cdot\frac{x-1}{x+1}$$

$$=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{1}{x+3}.$$

(3) $\frac{2a-b}{a^2-2ab+b^2}\div\frac{4a^2-b^2}{ab^2-a^2b}$

$$=\frac{2a-b}{(a-b)^2}\div\frac{(2a-b)(2a+b)}{ab(b-a)}$$

$$=\frac{2a-b}{(a-b)^2}\cdot\frac{ab(b-a)}{(2a-b)(2a+b)}$$

$$=\frac{ab(2a-b)(b-a)}{(a-b)^2(2a-b)(2a+b)}$$

$$=-\frac{ab}{(a-b)(2a+b)}.$$

分式的运算结果一般化简成最简分式或整式.

思考

$\left(\frac{b}{a}\right)^2$ 与 $\frac{b^2}{a^2}$ 相等吗？

练习10.3

1. 计算：

(1) $\frac{2}{x}\cdot\frac{x}{4}$；　　(2) $\frac{3x^2y}{4}\cdot\frac{y}{6x}$；

(3) $\frac{3x-2}{x-1}\cdot\frac{x-1}{2-3x}$；　　(4) $\frac{2}{2x+1}\cdot\frac{1}{2x+1}$.

76

分式

2 计算：

(1) $\frac{x^2-4}{x+1}\cdot\frac{2x+2}{2-x}$；

(2) $\frac{x^2-4xy+4y^2}{x+2y}\cdot\frac{x}{x-2y}$.

3 计算：

(1) $3\div\frac{2}{x}$；

(2) $\frac{3}{x}\div\frac{6}{x^2}$；

(3) $\frac{2x+1}{x}\div\frac{6+12x}{5}$；

(4) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x+2}\div\frac{x-2}{x+1}$.

4 计算：

(1) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$；　(2) $\left(\frac{2x}{y}\right)^2$；　(3) $a\cdot\frac{1}{a^2}\div a^2$.

10.4 分式的加减

计算：

$\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=$________，

$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=$________.

思考 1

同分母分数的加减法则是否可以推广到同分母分式的加减呢？

如何计算

$\frac{2}{x}+\frac{1}{x}$，$\frac{3}{x}-\frac{1}{x}$，$\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}$，$\frac{3x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}$？

77

2. (1) $-2(x+2)$；

(2) $\frac{x(x-2y)}{x+2y}$.

3. (1) $\frac{3x}{2}$；

(2) $\frac{x}{2}$；

(3) $\frac{5}{6x}$；

(4) $\frac{x-3}{x+2}$.

4. (1) $\frac{8}{27}$；

(2) $\frac{4x^2}{y^2}$；

(3) $\frac{1}{a^3}$.

【教学目标】

(1) 掌握同分母分式加减法的运算法则.

(2) 经历异分母分式加减法法则的形成过程，掌握异分母分式加减的运算法则.

思考 1

通过对同分母分数加减运算的复习和类比，学习同分母分式的加减运算.建议设置适当的练习，帮助学生进行类比，如$\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$，$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\to\frac{2}{x}+\frac{1}{x}$，$\frac{3}{y}-\frac{1}{y}\to\frac{a}{x}+\frac{b}{x}$，$\frac{a}{y}-\frac{b}{y}\to\frac{a}{x^2+1}\pm\frac{b}{x^2+1}$等，逐步形成同分母分式的加减法法则.

例题 1

第(1)小题的意图是直接运用同分母分式(分母为多项式)的加法法则.

第(2)小题在运用同分母分式的减法法则后,还要将运算结果化为最简分式.

第(3)小题是三个分式的同分母分式的加减运算.要注意将运算所得的分式的分子、分母分别因式分解,约去公因式,从而得到最简分式.

分式加减的运算结果中,如果分子或分母是多项式,要考虑通过因式分解后是否有公因式,是否可以约分,最后化成最简分式.

与同学讨论计算的结果,并交流同分母分式的加减法法则.

> 同分母分式相加减,分母不变,分子相加减.

例题1 计算:

(1) $\frac{x}{3x-1}+\frac{3}{3x-1}$;

(2) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{x}{x^2-4}$;

(3) $\frac{3x^2-1}{x^2-3x+2}-\frac{x+2}{x^2-3x+2}+\frac{1-2x^2}{x^2-3x+2}$.

解 (1) $\frac{x}{3x-1}+\frac{3}{3x-1}$

$=\frac{x+3}{3x-1}$.

(2) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{x}{x^2-4}$

$=\frac{2-x}{x^2-4}$

$=\frac{2-x}{(x-2)(x+2)}$

$=-\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}$

$=-\frac{1}{x+2}$.

计算的结果化简成最简分式,有时是整式.

(3) $\frac{3x^2-1}{x^2-3x+2}-\frac{x+2}{x^2-3x+2}+\frac{1-2x^2}{x^2-3x+2}$

$=\frac{3x^2-1-(x+2)+1-2x^2}{x^2-3x+2}$

$=\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$

$=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x-1)}$

$=\frac{x+1}{x-1}$.

78

分式

练习10.4(1)

1. 计算：

(1) $\frac{2}{5}-\frac{3}{5}$；　　(2) $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}$；

(3) $\frac{3}{11}+\frac{8}{11}$；　　(4) $\frac{4}{15}-\frac{8}{15}$.

2. 计算：

(1) $\frac{2}{x}+\frac{3}{x}$；　　(2) $\frac{2}{3x}-\frac{1}{3x}$；

(3) $\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x-y}$；　　(4) $\frac{2a+1}{ab}-\frac{1}{ab}$.

计算：

(1) $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=$________；

(2) $\frac{3}{8}+\frac{1}{12}=$________；

(3) $\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=$________；

(4) $\frac{2}{5}-\frac{1}{25}=$________.

思考2

异分母分数的加减法是否可以推广到异分母分式的加减呢？

如何计算

$$\frac{3}{2x}+\frac{1}{3x},\ \frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}?$$

类似于异分母分数的加减法，

79

练习 10.4(1)

1. (1) $-\frac{1}{5}$；

(2) $\frac{1}{2}$；

(3) 1；

(4) $-\frac{4}{15}$.

2. (1) $\frac{5}{x}$；

(2) $\frac{1}{3x}$；

(3) 1；

(4) $\frac{2}{b}$.

异分母分式的加减法也可与异分母分数的加减法作类比，分式的基本性质和同分母分式的加减法运算是异分母分式的加减法运算的基础.教学中应根据学生的实际认知水平，作适当的复习和引导.

思考 2

引导学生运用类比的思想，以异分母分数的加减法转化为同分母分数的加减法为基础，让学生知道异分母分式的加减法也要转化成同分母分式进行加减.寻找最简公分母是进行通分的难点.为了化解这一难点，建议教师列举出由浅入深的问题，组织学生讨论，例如：两个异分母的分式化为同分母的分式时，它们的公分母应该如何确定？当各分式的分母中有多项式时，如果这些多项式能分解因式，应先把这些多项式分解因式，然后把各式化为最简分式，最后再确定最简公分母.

$\frac{3}{2x}+\frac{1}{3x}$中两个异分母分式的分母是$2x$、$3x$，$6x$是公分母，

$\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$ 中两个异分母分式的分母是x、x^2，x^2是公分母，

所以，$\frac{3}{2x}+\frac{1}{3x}=\frac{3\cdot3}{3\cdot2x}+\frac{2\cdot1}{2\cdot3x}=\frac{9}{6x}+\frac{2}{6x}=\frac{11}{6x}$，

$$\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{2x-1}{x^2}.$$

异分母分式相加减，先将它们化为相同分母的分式，然后进行加减.

将几个异分母的分式分别化为与原来分式的值相等的同分母分式的过程叫做通分.

通分先要确定公分母，如果各分母的系数是整数，通常取各分母系数的最小公倍数与字母因式的最高次幂的积作公分母.这样的公分母叫做最简公分母.

例题 2

进一步理解分式的基本性质.（说明：本书 10.3 一节中对分式性质$\frac{A}{B}=\frac{A\div N}{B\div N}$的运用比较多，对$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M}$的运用比较少，本题是对此的一个强调）.

例题2　将分式$\frac{x+1}{x}$化成分母分别为下列整式的分式：

(1) $2x$；　(2) xy；

(3) x^2y^2；　(4) $x(x+2)$.

解　(1) $\frac{x+1}{x}=\frac{x+1}{x}\cdot\frac{2}{2}=\frac{2(x+1)}{2x}$.

(2) $\frac{x+1}{x}=\frac{x+1}{x}\cdot\frac{y}{y}=\frac{(x+1)y}{xy}$.

(3) $\frac{x+1}{x}=\frac{x+1}{x}\cdot\frac{xy^2}{xy^2}=\frac{(x+1)xy^2}{x^2y^2}$.

(4) $\frac{x+1}{x}=\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x+2}{x+2}=\frac{(x+1)(x+2)}{x(x+2)}$.

80

例题3 计算：

(1) $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$；

(2) $\frac{1}{6x}+\frac{2}{9x^2}$；

(3) $\frac{x}{x^2-y^2}-\frac{1}{x+y}$；

(4) $\frac{y}{2x}+\frac{x}{y}-\frac{2x-1}{y^2}$.

解 (1) $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$

最简公分母是$2x$.

$=\frac{x\cdot x}{2x}+\frac{2\times 2}{2x}$

$=\frac{x^2+4}{2x}$.

(2) $\frac{1}{6x}+\frac{2}{9x^2}$

最简公分母是$18x^2$.

$=\frac{3x}{6x\cdot 3x}+\frac{2\times 2}{9x^2\cdot 2}$

$=\frac{3x+4}{18x^2}$.

(3) $\frac{x}{x^2-y^2}-\frac{1}{x+y}$

最简公分母是x^2-y^2.

$=\frac{x}{x^2-y^2}-\frac{x-y}{(x+y)(x-y)}$

$=\frac{x-x+y}{x^2-y^2}$

$=\frac{y}{x^2-y^2}$.

(4) $\frac{y}{2x}+\frac{x}{y}-\frac{2x-1}{y^2}$

最简公分母是$2xy^2$.

$=\frac{y\cdot y^2}{2x\cdot y^2}+\frac{x\cdot(2xy)}{y\cdot(2xy)}-\frac{(2x-1)\cdot(2x)}{y^2\cdot(2x)}$

$=\frac{y^3+2x^2y-4x^2+2x}{2xy^2}$.

81

例题 3

本题是异分母分式的加减法运算.解题的关键在于找出各分式的最简公分母.

第(1)小题是一个整式与一个分母中只含有一个字母的单项式的分式加法运算.

第(2)小题是两个分式的分母都是单项式的分式加法运算.

第(3)小题是两个分式的分母都是多项式的分式减法运算.减法运算中要特别注意分数线的括号功能,这是学生容易出错的地方.教学时可再写一步添加括号的过程,$\frac{x}{x^2-y^2}-\frac{x-y}{(x+y)(x-y)}=\frac{x-(x-y)}{x^2-y^2}$,使解题不易出错.

第(4)小题是三个分母都是单项式的分式的加减混合运算,在此基础上可稍作变化提出问题,例如:若其中一个分式的分母是多项式,将如何确定最简公分母.

练习 10.4(2)

1. (1) $\dfrac{3}{2a}$;

(2) $\dfrac{x+2}{x^2}$;

(3) $\dfrac{1}{x-3}$;

(4) $-\dfrac{1}{12x}$.

2. (1) $\dfrac{a^2+9}{3a}$;

(2) $\dfrac{3-4x}{6x^2}$;

(3) $\dfrac{2x^2-3x-6}{x(x+2)}$;

(4) $\dfrac{a^2-b^2}{ab}$;

(5) $-\dfrac{4}{(t+2)(t-2)}$;

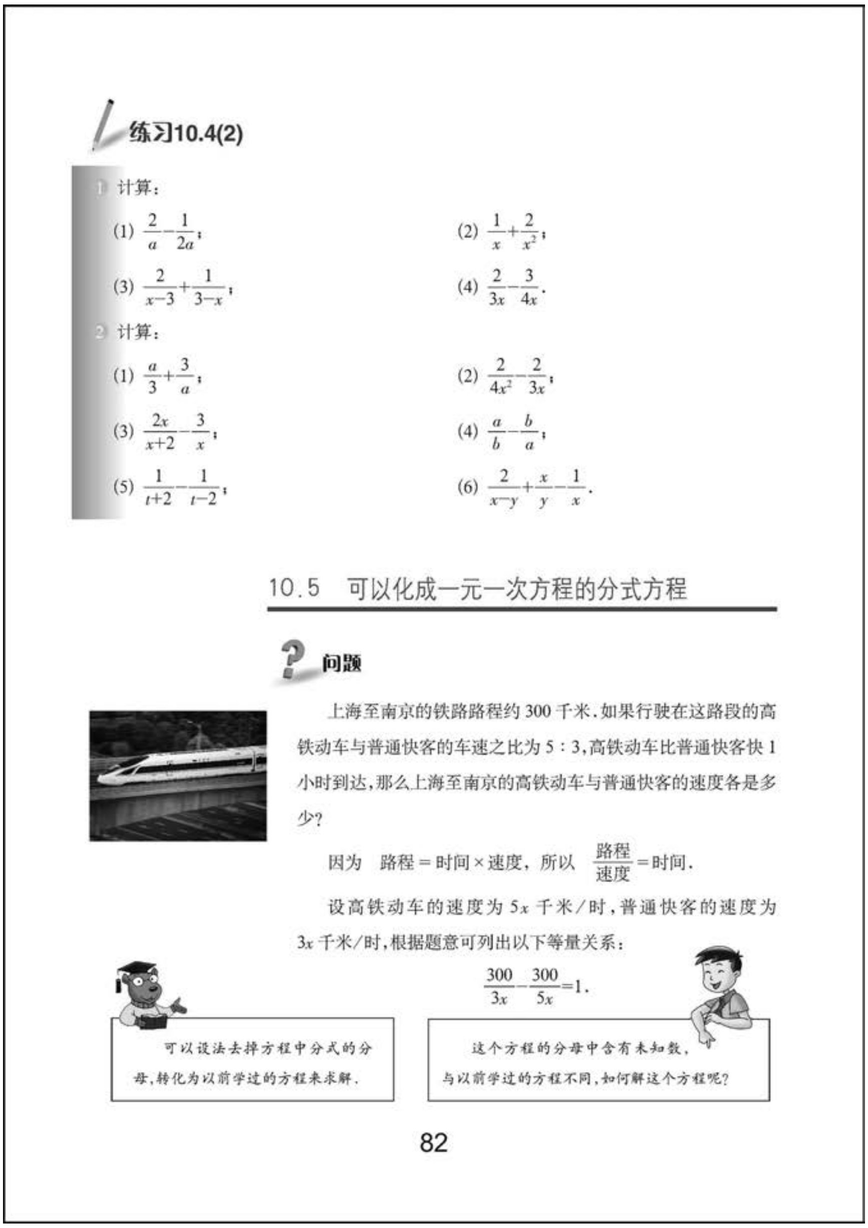
(6) $\dfrac{x^3-x^2y+y^2+xy}{xy(x-y)}$.

【教学目标】

(1) 理解分式方程及可化为一元一次方程的分式方程的意义.

(2) 通过学习分式方程的解法,理解解分式方程的基本思想,领悟把分式方程整式化的数学思想.

(3) 知道解分式方程时可能产生增根的原因,并掌握解分式方程的验根方法.



练习10.4(2)

1 计算:

(1) $\dfrac{2}{a}-\dfrac{1}{2a}$; (2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}$;

(3) $\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{1}{3-x}$; (4) $\dfrac{2}{3x}-\dfrac{3}{4x}$.

2 计算:

(1) $\dfrac{a}{3}+\dfrac{3}{a}$; (2) $\dfrac{2}{4x^2}-\dfrac{2}{3x}$;

(3) $\dfrac{2x}{x+2}-\dfrac{3}{x}$; (4) $\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}$;

(5) $\dfrac{1}{t+2}-\dfrac{1}{t-2}$; (6) $\dfrac{2}{x-y}+\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{x}$.

10.5 可以化成一元一次方程的分式方程

问题

上海至南京的铁路路程约 300 千米.如果行驶在这路段的高铁动车与普通快客的车速之比为 5 : 3,高铁动车比普通快客快 1 小时到达,那么上海至南京的高铁动车与普通快客的速度各是多少?

因为 路程=时间×速度, 所以 $\dfrac{\text{路程}}{\text{速度}}=$时间.

设高铁动车的速度为 $5x$ 千米/时,普通快客的速度为 $3x$ 千米/时,根据题意可列出以下等量关系:

$$\frac{300}{3x}-\frac{300}{5x}=1.$$

82

问题

在解决实际问题中,会出现分母中含有未知数的方程,然后引出分式方程的概念.

也可对方程左边两个分式先约分再解.

方程两边同时乘以 $15x$，得

$$300\times5-300\times3=15x.$$

解得 $x=40$(千米/时).

于是，得 $5x=200$(千米/时)，$3x=120$(千米/时).

所以高铁动车的速度为 200 千米/时，普通快客的速度为 120 千米/时.

以前学过的像一元一次方程、二元一次方程等这类分母中不含未知数的方程叫做整式方程.

分母中含有未知数的方程叫做分式方程.

例题1　解方程 $\dfrac{2x-1}{3x+1}=\dfrac{1}{2}$.

方程的两边同时乘以$3x+1$可以吗?

解　方程两边同时乘以$2(3x+1)$，得

$$2(2x-1)=3x+1.$$

去括号，得$4x-2=3x+1$.

移项，化简得$x=3$.

检验，将$x=3$代入原方程，得

$$左边=\frac{2\times3-1}{3\times3+1}=\frac{1}{2}=右边.$$

所以$x=3$是原方程的解.

因此，原方程的解是$x=3$.

解这个分式方程的关键是去分母，将其转化为已学过的整式方程再求解.

一元方程的解也叫做方程的根(root).

如$x=3$也可以说是方程$\dfrac{2x-1}{3x+1}=\dfrac{1}{2}$的根.

例题2　解方程 $\dfrac{x}{x-1}+1=\dfrac{1}{x-1}$.

解　方程两边同乘以$x-1$，得$x+x-1=1$，

83

建议在学生知道了分式方程的意义之后，给出几个方程，辨析它们是否为分式方程，帮助学生正确理解分式方程的概念.

将分式方程转化为整式方程是本节的重点.

组织学生讨论解分式方程的方法.指导学生观察、归纳出两方程之间的转化过程就是去分母，即:方程两边同乘以方程两边分式的公分母.

例题 1

学习分式方程的解法:去分母.

例题 2

在分式方程化为整式方程的过程中，可能使未知数 x 的取值范围扩大了．由整式方程解得的 x 有时可能会使原分式方程无意义，由此就产生了增根．

本题中原方程中的两个分式 $\frac{x}{x-1}$ 和 $\frac{1}{x-1}$ 成立的前提是 $x\neq1$，而整式方程 $x+x-1=1$ 中的 x 则没有这个限制条件，因此在分式方程转化为整式方程的过程中扩大了未知数 x 的取值范围，就有可能出现增根．

移项，化简得$x=1$．

检验，将$x=1$代入原方程，结果使方程中分式的分母为零，分式无意义．

所以$x=1$不是原方程的解．原方程无解．

在分式方程变形时，有时可能产生不适合原分式方程的根，这种根叫做原分式方程的增根(extraneous root)．

$x=1$就是分式方程$\frac{x}{x-1}+1=\frac{1}{x-1}$的增根．

分式方程化为整式方程的过程必须两边乘以一个适当的整式．由于这个整式可能为零，使本不相等的两边也相等了，这时就可能产生增根．所以解分式方程必须检验，而检验的方法只需看所得的解是否使所乘的式子为零．

例题 3

本题意图以解分式方程为基础，解决浓度问题，应对所涉及的溶质、溶液等名词作具体的解释．教师应强调应用题的解题步骤和书写格式．在用其他应用题举例说明时，应注意所举的问题都应限制为可以化为一元一次方程的分式方程．

例题3　一小包柠檬茶冲剂，用235克开水可冲泡成浓度为6%的饮料，这包柠檬茶冲剂有多少克?

也可根据
溶质＝浓度×溶液
列方程．

分析　根据浓度$=\frac{溶质}{溶液}$，可以列出方程．

解　设这包柠檬茶冲剂有x克．根据题意，得

$$\frac{x}{x+235}=6\%,$$

方程两边同时乘以$100(x+235)$，得

$$100x=6(x+235),$$

解方程，得$x=15$(克)．

经检验，$x=15$是原方程的根，并符合题意．

答：这包柠檬茶冲剂有15克．

84

分式

练习10.5

1. 下列方程中，哪些是分式方程？

(1) $x+\frac{1}{x}=3$；　　(2) $\frac{1}{x}=2$；

(3) $\frac{2x-5}{4}+\frac{x}{3}=\frac{1}{2}$；　　(4) $\frac{2}{x-2}=\frac{1}{x-1}$.

2. 解方程：

(1) $\frac{2}{x}=5$；　　(2) $\frac{2}{x-2}=\frac{1}{x}$；

(3) $\frac{2}{x}+\frac{1}{2x}=1$；　　(4) $\frac{4}{x-3}=\frac{1}{3-x}+2$.

3. $x=2$是下列哪个分式方程的一个解？

(1) $\frac{x^2+1}{x}=\frac{5}{2}$；　　(2) $x-\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$；　　(3) $\frac{1}{x-2}=\frac{4}{x+2}$.

4. 小丽、小明练习打字，小丽比小明每分钟多打 35 个字，小丽打 400 个字的时间与小明打 300 个字的时间相同. 小丽、小明每分钟分别可打多少字？

10.6 整数指数幂及其运算

思考 1

用同底数幂的运算性质，怎样计算

$2^2\div2^5$？

85

练习 10.5

1. (1)(2)(4)是分式方程.

2. (1) $x=\frac{2}{5}$；

(2) $x=-2$；

(3) $x=\frac{5}{2}$；

(4) $x=\frac{11}{2}$.

3. $x=2$ 是方程(1)的解.

4. 小丽、小明每分钟分别打 140、105 个字.

【教学目标】

(1) 理解当 p 为正整数时 a^{-p} 的意义，掌握 $a^{-p}=\frac{1}{a^p}$ 成立的条件，理解在引入负整数指数幂的条件下，整式和分式在形式上的统一.

(2) 理解整数指数幂的意义，掌握正整数指数幂的运算法则.

(3) 在会用科学记数法表示绝对值较大的数的基础上，学会用它表示绝对值小于 1 的数.

思考 1

复习同底数幂的运算性质和分数除法的运算法则，可先做适当的巩固练习，如 $2^6\div2^2$，$2^6\div2^6$ 等，然后回忆同底数幂除法的法则，再引入问题：$2^2\div2^5$. 通过三个问题的引导：一、用除法与分数的关系计算，得 $2^2\div2^5=\frac{1}{2^3}$；二、用同底数幂的除法性质来算，得 $2^2\div2^5=2^{2-5}=2^{-3}$；三、要使这两种不同的计算方法所得的结果一样，应如何规定，引导学生通过观察、比较、分析，形成对负整数指数幂运算的初步认识. 负整数指数幂是教学的重点和难点，为了帮助学生正确理解和记忆，可组织学生进行讨论与交流.

将具体数字的计算抽象概括成用字母表示的等式，并为后面分式的负指数幂运算奠定了基础. 这里仍然需要特别强调 $a\neq0$.

例题 1

从同底数幂的运算性质和分数除法的运算法则两个角度，进一步理解 a^{-p} 的意义，掌握 $a^{-p}=\frac{1}{a^p}$. 同时为以下的分式运算奠定基础.

例题 2

在掌握等式 $a^{-p}=\frac{1}{a^p}$ 的基础上，引导学生认识字母 a 不仅可以代表一个数，还可以代表一个整式. 本题的意图就是帮助学生加深对负整数指数幂的理解，公式中的字母 a 可以代表整式，如第(3)小题将代数式 $x+2y$ 看成 a. 同时注意各式中负指数幂中底数字母的条件：(1) $x\neq0$；(2) $a\neq0$；(3) $x+2y\neq0$.

如果用除法与分数的关系计算，有

$$2^2\div2^5=\frac{2^2}{2^5}=\frac{1}{2^3}.$$

因此有 $2^{-3}=\frac{1}{2^3}$.

例如，

$10^{-2}=\frac{1}{10^2}$，

$(-5)^{-3}=\frac{1}{(-5)^3}$，

$x^{-6}=\frac{1}{x^6}$.

为了使同底数幂相除的性质在 m、n 是正整数，且 $m<n$ 时仍成立，规定 $a^{-p}=\frac{1}{a^p}$（其中 $a\neq0$，p 是自然数）.

这样，到现在为止，在 $a\neq0$ 时，a^n 中的指数 n 可以是正整数、零和负整数. 这就是说，a^n 是整数指数幂.

例题1 计算：

(1) $2^6\div2^8$；

(2) $10^{101}\div10^{104}$；

(3) $5^{12}\div5^{12}$.

解 (1) $2^6\div2^8=2^{6-8}=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$.

也可以按照分数与除法的关系计算

$2^6\div2^8=\frac{2^6}{2^8}=\frac{2^6}{2^6\times2^2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$.

(2) $10^{101}\div10^{104}=10^{101-104}=10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1\,000}$.

(3) $5^{12}\div5^{12}=5^{12-12}=5^0=1$.

例题2 将下列各式写成只含有正整数指数幂的形式：

(1) x^{-3}；

(2) $a^{-3}b^4$；

(3) $(x+2y)^{-2}$.

解 (1) $x^{-3}=\frac{1}{x^3}$.

(2) $a^{-3}b^4=\frac{b^4}{a^3}$.

(3) $(x+2y)^{-2}=\frac{1}{(x+2y)^2}$.

86

分式

例题3 计算：

(1) $a^2 \div a \cdot a^3$； (2) $(-a)^3 \div a^5$.

$-a^{-2}=-\frac{1}{a^2}$.

解 (1) $a^2 \div a \cdot a^3 = a^{2-1} \cdot a^3 = a \cdot a^3 = a^{1+3} = a^4$.

(2) $(-a)^3 \div a^5 = -a^3 \div a^5 = -a^{3-5} = -a^{-2} = -\frac{1}{a^2}$.

思考 2

我们知道$2^2 \times 2^5 = 2^{2+5}$，

那么$2^2 \times 2^{-5}$是否等于$2^{2+(-5)}$？

$(-2)^{-3} \times (-2)^2$是否等于$(-2)^{-3+2}$？

你能进一步猜出更一般的结论吗？

请再举几个例子，用计算器验算你的结论.

思考 3

我们知道$(2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4$，$(2^3)^2 = 2^{3 \times 2}$，

那么$(2 \times 3)^{-4}$是否等于$2^{-4} \times 3^{-4}$呢？

$(2^2)^{-3}$是否等于$2^{2 \times (-3)}$呢？

你能进一步猜出更一般的结论吗？

请再举几个例子，用计算器验算你的结论.

在数学中，对于整数指数幂，有

$a^m a^n = a^{m+n}$（m、n为整数，$a \neq 0$）；

$(ab)^m = a^m b^m$（m为整数，$a \neq 0$，$b \neq 0$）；

$(a^m)^n = a^{mn}$（m、n为整数，$a \neq 0$）.

也就是说，前面学过的正整数幂的运算性质对整数指数幂仍然成立.

例题4 计算：

(1) $x^{-5} \cdot x^2$； (2) $(2^{-2})^3$； (3) $10^0 \div 3^{-3}$.

解 (1) $x^{-5} \cdot x^2 = x^{(-5)+2} = x^{-3}$.

(2) $(2^{-2})^3 = 2^{(-2) \times 3} = 2^{-6} = \frac{1}{64}$.

(3) $10^0 \div 3^{-3} = 1 \div \frac{1}{3^3} = 1 \times 3^3 = 27$.

87

例题 3

首先应复习巩固正整数指数幂的运算性质，其次通过具体的计算，确定$-a^2$、$(-a)^2$、$(-a)^3$、$-a^{-2}$等计算过程中的符号，掌握正确的算理，以避免计算中的错误.

思考 2

引导学生，通过含有负整数指数幂的乘除运算——幂的乘积，概括出一般规律，鼓励学生用自己的语言来表达，再抽象出用字母表示整数指数幂的积的运算性质.

思考 3

通过具体数的运算，体会两个数乘积的幂的运算过程，组织学生交流讨论，概括出整数指数幂的三条运算性质，抽象出一般的表达式.帮助学生形成对整数指数幂的完整认识.

还可以提问：为什么没有$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$（m、n为整数，$a \neq 0$）这个运算法则呢？其实$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$中已包含了同底数幂的除法法则，这里m、n为整数.

例题 4

巩固整数指数幂的运算性质.

例题 5
复习以前学过的科学记数法，可适当作些铺垫，如将0.000 1、0.000 000 1…等表示成负整数指数幂的形式，然后再组织学生学习绝对值小于 1 的数的科学记数法.

例题 6
体会实际生活中以及科学研究中科学记数法的应用.还可适当举一些生活中的其他例子.

例题 7
本题意图：第(1)小题进行负整数指数幂下的分式除法运算，还可以让学生思考$(x^{-2}+y^{-2})\div(x^{-2}-y^{-2})$，$(x^{-3}+y^{-3})\div(x^{-3}-y^{-3})$等计算的结果有何规律，更一般地可以考虑$(x^{-n}+y^{-n})\div(x^{-n}-y^{-n})$计算的结果；第(2)小题是负整数指数幂下的乘方运算.

例题5　把下列各数表示为$a\times10^n$的形式($1\leqslant|a|<10$，n为整数)：

(1) 0.001 2；

(2) 6 100 000；

(3) −0.000 010 32.

还记得科学记数法吗?

解　(1) $0.001\,2=1.2\times10^{-3}$.

(2) $6\,100\,000=6.1\times10^{6}$.

(3) $-0.000\,010\,32=-1.032\times10^{-5}$.

有了负整数指数幂，科学记数法不仅可以表示绝对值较大的数，也可以表示绝对值较小的数.

例题6　杆状细菌的长、宽分别约为2微米和1微米(1微米=10^{-4}厘米).如果一只手上有1千个杆状细菌，它们连成一线，那么这些连成一线的细菌最长是多少厘米?(结果用科学记数法表示)

解　1千个连成一线的杆状细菌最长是

$$2\times10^{-4}\times1\times10^{3}=2\times10^{-1}(\text{厘米}).$$

答：这些连成一线的杆状细菌最长是2×10^{-1}厘米.

例题7　计算：

(1) $(x^{-1}+y^{-1})\div(x^{-1}-y^{-1})$；

(2) $\left(\dfrac{x}{y^2}\right)^{-3}$.

解　(1) $(x^{-1}+y^{-1})\div(x^{-1}-y^{-1})$

$$=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\div\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$$

$$=\left(\frac{y+x}{xy}\right)\div\left(\frac{y-x}{xy}\right)$$

$$=\left(\frac{y+x}{xy}\right)\cdot\left(\frac{xy}{y-x}\right)$$

$$=\frac{y+x}{y-x}.$$

88

分式

(2) $\left(\frac{x}{y^2}\right)^{-3}=(x\cdot y^{-2})^{-3}=x^{-3}y^{(-2)\times(-3)}=\frac{y^6}{x^3}$.

练习10.6

1. 计算：

(1) $3^5\div 3^8$；　(2) $x^4\div x^{10}$；

(3) 2^{-4}；　(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

2. 计算：

(1) $3^{-2}\times 3^2$；　(2) $2^2\times 2^{-1}$；

(3) $2^{-5}\times 2$；　(4) $3^{-2}\times 3^{-1}$.

3. 下列计算正确吗？错误的请改正：

(1) $2^3\times 2^4=2^{3\times 4}$；　(2) $a^4\cdot a^{-3}=a^{4\div 3}$；

(3) $3^{-1}=-3$；　(4) $(-10)^0=-1$；

(5) $(3\times 4)^3=3^3\times 4^3$.

4. 将下列各式写成只含有正整数指数幂的形式：

(1) a^{-8}；　(2) $2x^3y^{-2}$；　(3) $3^{-2}(x-y)^{-3}$.

5. 计算：

(1) $[(-2)^3]^2$；　(2) $[(-2)^{-3}]^2$；　(3) $[(-2)^{-3}]^{-2}$.

6. 下列各数用科学记数法表示：

(1) 102 400；　(2) 0.000 456；　(3) −0.006 07.

7. 计算：

(1) $(a^{-2}b)^2$；　(2) $\left(\frac{2}{a}\right)^4$；　(3) $\left(\frac{2a^{-2}}{3b}\right)^{-2}$.

8. 实验证明，钢轨温度每变化1℃，每一米钢轨就伸缩0.000 011 8米，如果一年中气温上下相差40℃，那么对于100米长的铁路，最长可伸长多少米？（结果用科学记数法表示）

89

练习 10.6

1.（1）$\frac{1}{27}$；

（2）x^{-6}；

（3）$\frac{1}{16}$；

（4）9.

2.（1）1；

（2）2；

（3）$\frac{1}{16}$；

（4）$\frac{1}{27}$.

3.（1）错误，$2^3\times 2^4=2^{3+4}$；

（2）错误，$a^4\cdot a^{-3}=a^{4-3}$；

（3）错误，$3^{-1}=\frac{1}{3}$；

（4）错误，$(-10)^0=1$；

（5）正确.

4.（1）$\frac{1}{a^8}$；

（2）$\frac{2x^3}{y^2}$；

（3）$\frac{1}{3^2(x-y)^3}$.

5.（1）64；

（2）$\frac{1}{64}$；

（3）64.

6.（1）1.024×10^5；

（2）4.56×10^{-4}；

（3）-6.07×10^{-3}.

7.（1）$a^{-4}b^2$；（2）$16a^{-4}$；（3）$\frac{9}{4}a^4b^2$.

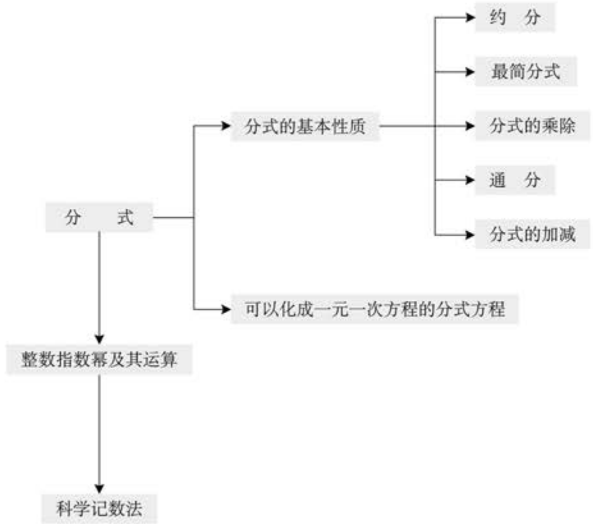
8. 4.72×10^{-2}米.

本章的重点是学习分式的意义、运算法则及其简单的运用.学习中,以分数、整式为基础,运用一般化、类比的数学思想方法得出分式的性质和运算法则.在复习时,可以和分数作类比,作出知识的结构图,也可以由学生自己列出结构图,交流完善.负整数幂的运算是本章学习的难点之一,复习时应有一定的练习加以巩固.通过复习,应使学生不仅对分式的有关知识和运算有更进一步的理解,而且对其中蕴含的数学思想方法有所感悟和体会.

本章小结

本章学习了分式的概念,类比分数,我们又得到了分式的基本性质;运用一般化的思想,将分数的运算类比迁移到分式的运算,并运用转化的思想求出可以化为一元一次方程的分式方程的根;通过整数指数幂的学习完善了同底数幂的运算性质和科学记数法,学习了用科学记数法来表示绝对值较小的数.

本章知识的结构框架如下:



分式

探究活动

对一类特殊分式的探究

用简捷的方法计算下列算式：

$\frac{1}{1\times2}=$________，

$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}=$________，

$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}=$________，

……

$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{98\times99}+\frac{1}{99\times100}=$________，

其实以上的算式可以运用$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$这个等式计算.

进一步，你能将分式$\frac{1}{x(x+2)}$写成$\frac{A}{x}-\frac{B}{x+2}$($A$、$B$为确定的有理数)这样的形式吗?

要使$\frac{1}{x(x+2)}=\frac{A}{x}-\frac{B}{x+2}$恒成立，可将$x=1$，$x=-1$分别代入上式，得方程组

$$\begin{cases}A-\frac{B}{3}=\frac{1}{3},\\-A-B=-1,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}A=\frac{1}{2},\\B=\frac{1}{2},\end{cases}$ 即 $\frac{1}{x(x+2)}=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2(x+2)}$.

请用上述方法将$\frac{1}{(x+1)(x-2)}$写成$\frac{A}{x+1}-\frac{B}{x-2}$($A$、$B$为确定的有理数)的形式.

思考

(1) 如何化简下列算式:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\cdots+\frac{1}{(x+2\,004)(x+2\,005)}?$$

(2) 如何求解下面的分式方程:

$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}-\frac{1}{2x}=1?$$

91

引导学生从三个层面进行探究.首先是$\frac{1}{1\times2}$，$\frac{1}{2\times3}$，$\frac{1}{3\times4}$，$\frac{1}{4\times5}$，…这一列分数表达形式的变化规律，指导学生从分子与分母两个角度观察哪些不变，哪些变，变化的规律如何，探究出这一列数的一般形式，即$\frac{1}{n(n+1)}$(n是大于零的自然数)；其次是对4个算式的计算结果的表达形式的规律探究，探究出它的一般形式，即$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$；然后再在相邻数乘积拆项的基础上，探究形如$\frac{1}{x(x+2)}$的分式拆项，将一个分式转化为两个分式的差.

用“赋值”法解决问题时，应强调给字母赋值时，必须是有意义的值，即分母不为零.探究活动的设计，旨在让每一个学生能在原有基础上有不同的发展.教师应尽量根据学生的实际情况，设计不同层次的问题，调动学生探究的积极性.

思考 (1) $\frac{x+4\,010}{x(x+2\,005)}$；(2) 用拆项的方法，$x=-\frac{9}{2}$.

第十一章　图形的运动

一、教学目标

1. 通过观察、操作等活动，理解图形的平移、旋转、翻折以及相关的概念.

2. 在认识图形基本运动的过程中，领悟在平移、旋转、翻折运动中图形的形状和大小都不变的性质.

3. 理解旋转对称图形、中心对称图形及两个图形关于某点中心对称的意义，掌握它们的区别与联系.

4. 理解轴对称图形和两个图形关于某一直线成轴对称的意义，掌握它们的区别与联系.

5. 会在方格纸上画出平移后的图形；会画已知图形关于某一点中心对称的图形；会画已知图形关于某一直线成轴对称的图形，会画出成轴对称的两个图形的对称轴.

6. 经历生活实际融入数学知识的学习过程，体验数学源于生活，又服务于生活.

7. 初步感知图形变换的思想，理解两个图形叠合的意义，初步形成动态地研究几何图形的意识.

二、课时安排

11.1	平移	2 课时
11.2	旋转	1 课时
11.3	旋转对称图形与中心对称图形	1 课时
11.4	中心对称	1 课时
11.5	翻折与轴对图形	1 课时
11.6	轴对称	1 课时
本章小结		1 课时

三、设计说明

平移、旋转、翻折是几何图形的三种基本运动，即平移运动、旋转运动、翻折运动.本章将研究这三种基本运动的基本特征及简单的对称问题.从内容的编排上，教材采取以学生生活中的实例为背景，以操作→表象→概念(性质)→简单应用为主线，引导学生通过操作获得知识.通过本章的学习，学生将体会用运动的观点看待静止的几何图形，感知几何变换的思想，如平面上两个形状相同、大小相等的图形，可以通过这

三种基本运动达到完全重合，为今后研究图形的全等和相似奠定基础.

鉴于学生的认知水平、年龄特征，教材中对这三种基本运动的研究仅限于操作的层面，主要通过“图形的运动”进行观察和实验获得形象认知，观察图形运动过程中的变量和不变量，找出规律.图形的平移运动，是一种位移，只要给出图形上一个点的移动方向和距离，就可以画出这个图形平移后的图形.只要求学生会在方格纸上画沿横、纵方向平移后的图形.教材分别从一个图形绕一个定点旋转运动和沿一条直线翻折运动着手，展开对中心对称与中心对称图形、轴对称与轴对称图形的研究.它们分别是学生容易混淆的概念，教师要帮助学生从本质上去理解概念，引导学生建立概念之间的联系与区别.在实际教学中，要让学生通过亲自动手操作，亲身体验来理解对称的意义.

两个图形关于某一直线(点)对称，归根结底是对应点关于某一直线(点)的对称问题.“对称点”是相对于对称轴、对称中心而言的两个点，它们是相互对应的，若点 A 关于某一直线(点)的对称点是 A'，则点 A' 关于某一直线(点)的对称点是 A.而“对称点的性质”是画已知图形关于某一直线(点)对称的图形的依据.教师可引导学生通过动手测量、观察总结，知道两个图形关于某一直线(点)的对称的性质，不必作几何说理解释.在学习画已知图形关于某直线(点)对称的图形时，引导学生理解图形是由点组成的，两个图形关于某直线(点)对称的实质是两个图形上的对称点关于某直线(点)对称，因此画对称图形的关键是找出对称点.关于多边形的对称问题，关键是找顶点的对称点.在学习过程中，使学生加深对轴(中心)对称意义的理解.

本章教学内容仍属于直观几何阶段，主要以直观与操作相结合，教材从学生的认知水平出发，设计观察、操作等教学环节，提倡学生亲自动手、亲身感受，用自己的体验来认识图形的运动及图形的对称性.一方面便于学生理解知识的形成过程，另一方面可激发学生参与学习活动的积极性.本章教学的重点是理解三种基本图形运动的概念及中心(轴)对称图形、两个图形关于某点(直线)成中心(轴)对称的意义，并会画出已知图形关于某点(直线)的对称图形.本章的难点是轴对称与两个图形关于某一直线成轴对称、中心对称图形与两个图形关于某一点中心对称的区别与联系.

四、教学建议

1. 本章的学习都是以生产、生活中的实例引入的，这样有利于学生直观、生动地学习.教师可尽量帮助学生联系生产、生活实际，通过操作实验获取知识，同时也学习获取知识的实验方法，为今后逐渐过渡到论证几何阶段作铺垫.

2. 教师要重视学生亲自动手操作、经历知识形成的过程.在学生理解概念的同时，发展学生探索知识的能力.

3. 中心(轴)对称图形、两个图形关于某一点(直线)对称的含义都是通过学生动手操作、观察图形的运动，感悟形成的.在教学中应注意渗透利用运动的观点看待几何图形的思想.

4. 本章所涉及的知识点较多，教师可引导学生通过动手操作形成概念.教师的引导要循序渐进，自然抽象出概念，并引导学生掌握相关知识点的区别与联系，从本质上理解概念.

5. 重视学生动手操作、画图能力的培养，渗透化归、类比的数学思想.

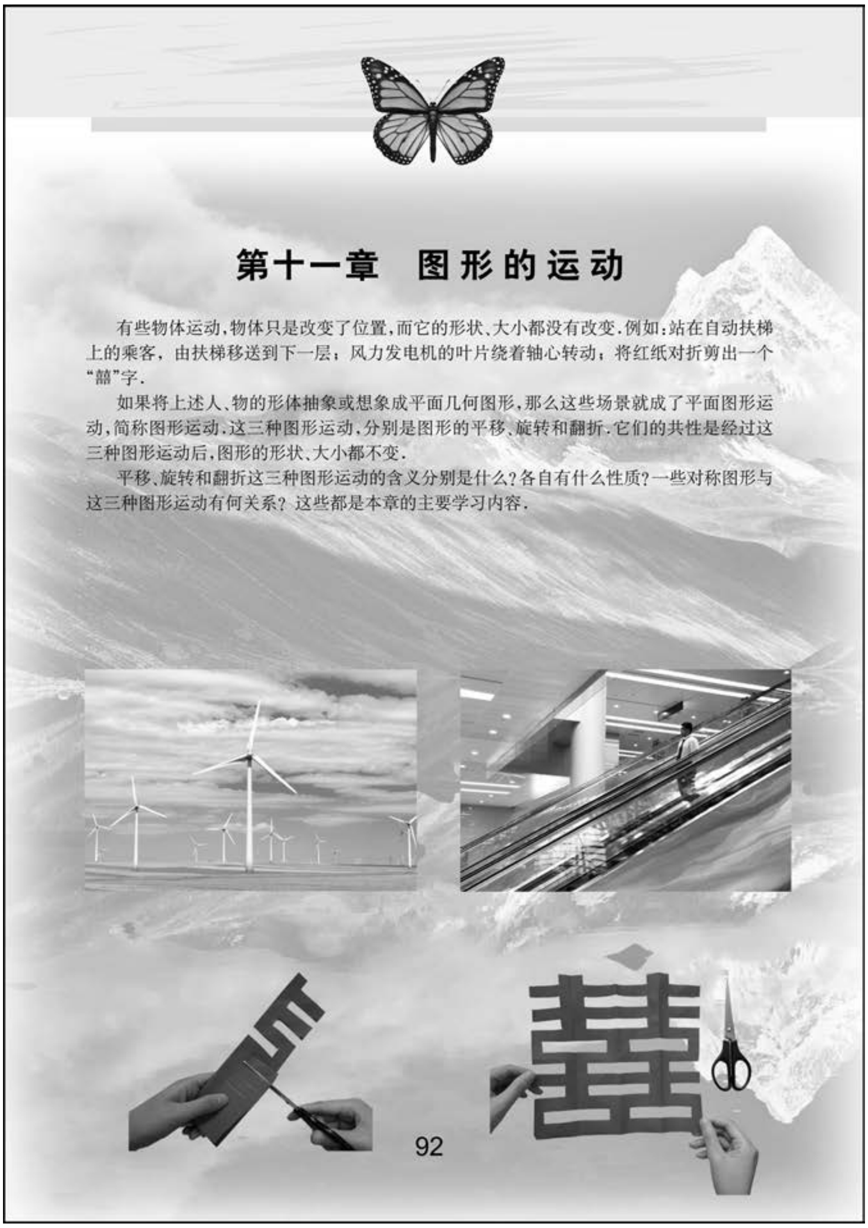
6. 合理地使用多媒体辅助教学，帮助学生理解相关知识点，处理好多媒体演示与学生亲自动手操作的关系.

五、评价建议

1. 关注学生在操作中参与的态度、动手操作的能力、合作交流的意识.

2. 关注学生在学习过程中的观察、分析、探索、归纳总结的能力.

3. 在评价学生对知识点的掌握程度时,应关注学生理解、应用的能力.



第十一章　图形的运动

有些物体运动，物体只是改变了位置，而它的形状、大小都没有改变.例如：站在自动扶梯上的乘客，由扶梯移送到下一层；风力发电机的叶片绕着轴心转动；将红纸对折剪出一个“囍”字.

如果将上述人、物的形体抽象或想象成平面几何图形，那么这些场景就成了平面图形运动，简称图形运动.这三种图形运动，分别是图形的平移、旋转和翻折.它们的共性是经过这三种图形运动后，图形的形状、大小都不变.

平移、旋转和翻折这三种图形运动的含义分别是什么？各自有什么性质？一些对称图形与这三种图形运动有何关系？这些都是本章的主要学习内容.

92

本章的开头，从实际生活中的场景引出了平面图形的运动，简述了本章学习的主要内容.从现实场景看到平面图形的运动，需要借助于自由的想象和数学的抽象，不是简单的迁移.通过本章主题图的形象展示，调动学生已有的经验和知识，学生能从中感知平面图形运动的一些基本特征，还能感受到数学与生活的联系.在教学中，还可以让学生再举一些实例进行讨论.

第 1 节的重点是平移.理解经过平移运动后,图形的形状和大小保持不变是学习本节内容的关键.

【教学目标】

(1) 通过观察生活情景,理解平移及对应点、对应角、对应线段的概念.

(2) 经历观察、测量等活动的过程,归纳出图形平移后图形的形状、大小保持不变的性质.

(3) 会在方格纸上画出经过平移后的平面图形,体会平移变换的思想.

通过具体的生活实例,直观地描述平移运动,给学生平移的表象.

问题 1

根据上述实例,引导学生根据自己生活中已有的经验,形成图形平移的概念.这样从学生的认知水平出发设计问题,易于学生解决问题,同时从生活实例中抽象出数学概念也是帮助学生理解数学知识的有效学习方法.

在学习平移概念时,应先将物体(移门)抽象为长方形,然后将移门的移动抽象为长方形的移动.而长方形是一种图形,从而逐步引出图形平移的概念,这样的学习,有助于学生对平移概念的理解.

11

第 1 节　图形的平移

11.1　平移

如果你家有移门,那么你会发现,开移门时,移门会沿轨道移动到另一个位置.

如果把移门看作长方形围成的一个图形,那么移门的移动就是将这个图形移动到另一个位置,如图11-1.

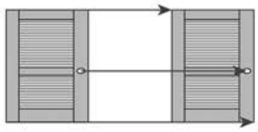


图11-1

问题 1

(1) 移动移门时,门的大小会改变吗?

(2) 如果移门的把手向右平移0.5米,那么移门的其他部分向什么方向移动,移动多少距离?

平面内,图形沿着一定的方向移动一定的距离,这样的图形运动叫做图形的平移,简称平移(translation). "一定的方向"称为平移的方向,"一定的距离"称为平移的距离.

图形的平移,可以看成:平移前的图形经过平移,与平移后的图形互相重合.对于平移前图形中的任意一点 P,在平移后的图形中有一点 P_1 与它重合.这时,点 P 与点 P_1 就是一对对应点,射线

93

PP_1的方向是平移方向，线段 PP_1的长是平移距离.

如图11-2，平移三角形ABC就可以得到三角形$A_1B_1C_1$.

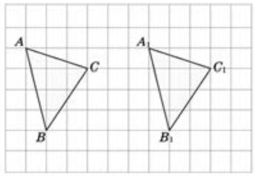


图11-2

也就是说，平移前的三角形 ABC 能与平移后的三角形$A_1B_1C_1$互相重合. 点 A 与点 A_1 是对应点，线段 AB 与线段 A_1B_1 是对应线段，$\angle A$ 与$\angle A_1$ 是对应角.

点 B 所对应的点是__________.

线段 AC 所对应的线段是__________.

$\angle C$ 所对应的角是__________.

思考 1

在图11-2中，平移三角形ABC得到三角形$A_1B_1C_1$.

(1) 联结AA_1、BB_1、CC_1，这几条线段有着怎样的位置关系？怎样的大小关系？

(2) 如果AB的中点是D，那么你能确定它的对应点的位置吗？

图形平移后，每一对对应线段的长度相等，每一对对应角的大小相等；这个图形的大小、形状不变.

图形平移后，每一对对应点的联结线段互相平行(或在同一条直线上)，并且相等，其长度等于平移距离.

94

通过三角形的平移运动给出对应线段、对应角的概念，并通过填空练习帮助学生正确理解这两个概念.

点 B 所对应的点是 B_1. 线段 AC 所对应的线段是 A_1C_1. $\angle C$ 所对应的角是$\angle C_1$.

思考 1

教师可引导学生讨论这些几何元素之间的关系，并归纳所发现的结论. 在教学活动设计上，可采用小组分工合作的形式，让学生经历自己动手操作、观察的过程，以培养学生的动手能力(学生应备好直尺、圆规、量角器等作图工具).

思考 2

针对小明和小杰的讨论，教师可引导学生测量图 11 - 2 中 AB 的中点 D 与它的对应点之间的距离，并与其他各组对应点之间的距离相比较，得出图形经平移运动后，图形上的每一点平移的距离都相等的结论．因此要计算出图 11 - 2 中图形平移的距离，只要像小杰所说的那样，即测量一组对应点之间的距离就可以了．

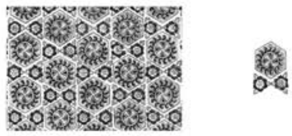
例题

由于图形经过平移运动后，图形上的任何一点平移的距离都相等，因此，要画出平移后的三角形的关键是画出平移后三角形的三个顶点．同时指出对于一个多边形的图形平移运动，只要找到这个多边形的各个顶点平移后的对应点即可．因此这里的关键在于找到对应点．注意本节课的平移操作仅限于在方格纸上将图形沿水平方向或竖直方向作平移运动．

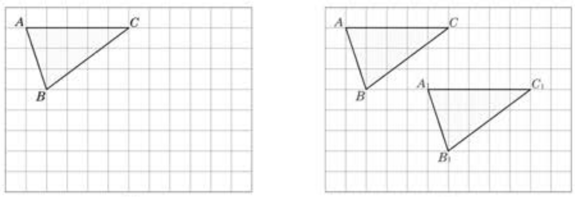
思考 2

你能计算出图11 - 2中图形平移的距离吗？

下面的左图是由若干个基本图形（右图）构成的，其中任意一个基本图形都可以平移到另一个基本图形的位置．



例题　如图11 - 3(1)，画出三角形ABC向右平移4格，向下平移3格后的图形．



(1)　　(2)

图11 - 3

分析　由于三角形ABC平移后所得图形仍是三角形，因此只需分别画出A、B、C三点平移后的对应点，再联结各点，就可以得到要画的图形．

解 （i）如图11－3(2)，分别画出A、B、C向右平移4格、向下平移3格后所对应的点A_1、B_1、C_1；

（ii）联结A_1B_1、B_1C_1、A_1C_1，得三角形$A_1B_1C_1$．三角形$A_1B_1C_1$就是三角形ABC向右平移4格、向下平移3格后的图形．

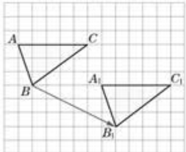


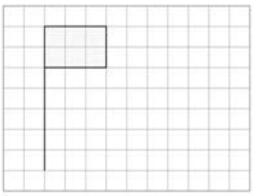
图11－4

问题2

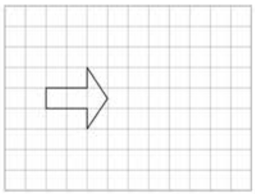
你能画出图11－4中三角形ABC的平移方向，并量出平移的距离吗？

练习11.1

1. 如图，把旗状图形向右平移2格，画出平移后的图形．



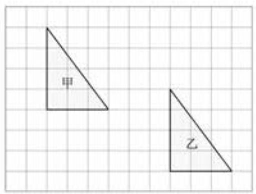
（第1题）



（第2题）

2. 如图，把箭头状图形向右平移4格，向下平移2格，画出平移后的图形．

3. 如图，怎样将三角形甲平移到三角形乙的位置？画出平移的方向，量出平移的距离．（精确到0.1厘米）



（第3题）

问题2

图11－3(2)中三角形ABC平移的方向是联结AA_1所得射线AA_1的方向，或联结BB_1或CC_1所得射线BB_1、CC_1的方向.这三条射线是平行的，关于这一点教师不必作更深入的解释.三角形ABC平移的距离是线段AA_1、BB_1或CC_1的长度，这三条线段的长度相等.

图11－4中画出了图11－3(2)中三角形ABC的平移方向.

练习11.1

1. 略.

2. 略.

3. 三角形甲先向右平移6格，再向下平移3格；或先向下平移3格，再向右平移6格，平移的距离是3.4厘米.

第 2 节的重点是中心对称的概念.掌握中心对称图形与中心对称概念的区别是本节的难点.理解中心对称图形是针对一个图形的概念,中心对称是针对两个图形的概念,则是本节内容学习的关键.

【教学目标】

(1) 知道图形旋转的概念,理解旋转中心、旋转角的意义.

(2) 经历具体的操作活动,初步体会图形在旋转运动过程中的不变性.

(3) 会画出简单图形绕某一点进行旋转运动后的图形.

观察

通过学生观察生活中的实例,形成关于图形旋转的具体形象,使学生获得图形旋转的感性认识.引导学生归纳这一类图形的共同特征,抽象出图形旋转的概念.

注意在举例时应将实例抽象为图形.

11

第 2 节　图形的旋转

11.2　旋转

观察

下列图形有哪些特征?



图11-5

如图11-5,时钟的分针、时针都是绕着中心O旋转的.

如图11-6,电扇的叶片从位置A绕点O转到位置B,给我们以图形旋转的形象.

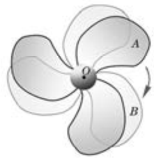
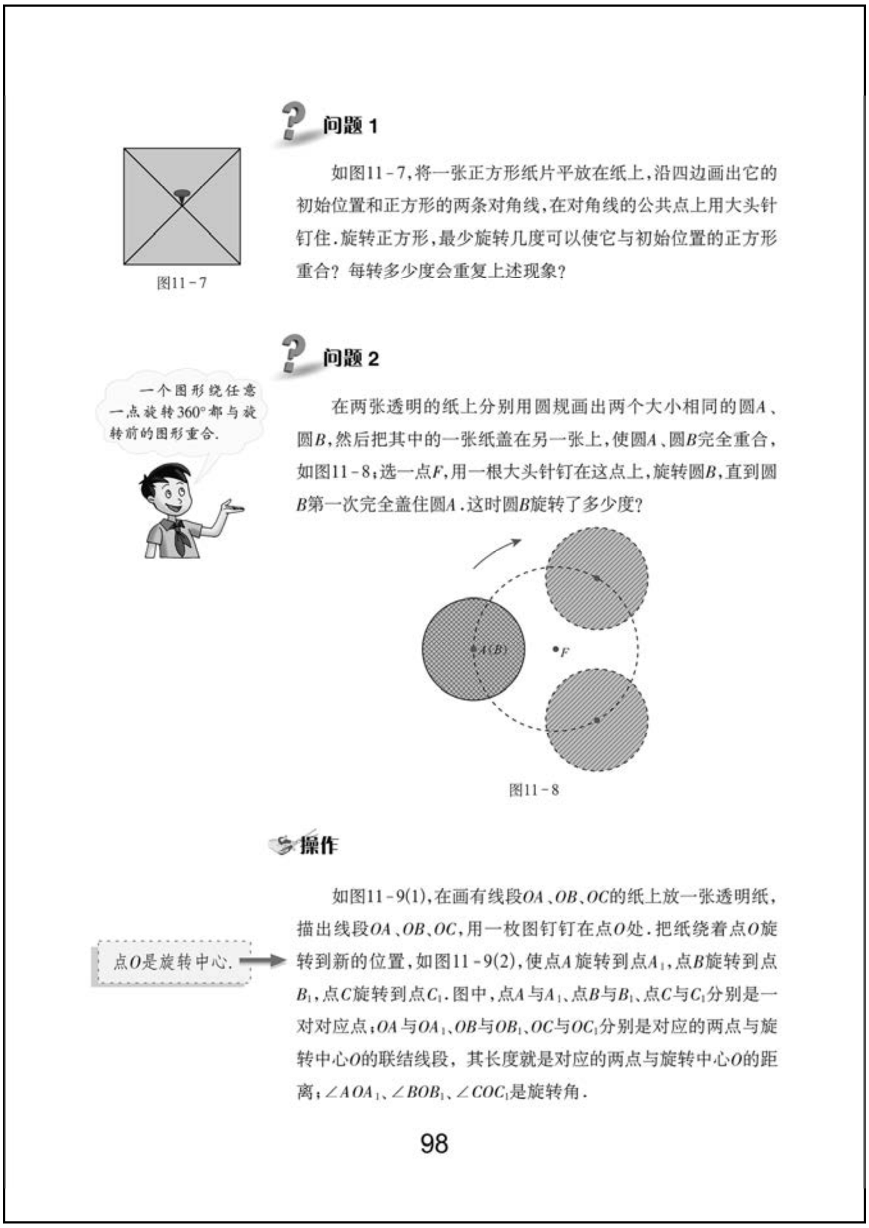


图11-6

在平面内,图形绕着一个定点按照某个方向转动一定大小的角α,这样的运动叫做图形的旋转(rotation).这个定点叫做旋转中心,角α叫做旋转角($0^\circ < \alpha < 360^\circ$).

"某个方向"是指"顺时针方向"或者"逆时针方向".图形的旋转,可以看成:旋转前的图形经过旋转,与旋转后的图形互相重合.对于旋转前的图形中的任意一点P,在旋转后的图形中有一点P_1与它重合,这时,点P与点P_1就是一对对应点.

97



问题 1

如图11-7，将一张正方形纸片平放在纸上，沿四边画出它的初始位置和正方形的两条对角线，在对角线的公共点上用大头针钉住．旋转正方形，最少旋转几度可以使它与初始位置的正方形重合？每转多少度会重复上述现象？

图11-7

问题 2

一个图形绕任意一点旋转360°都与旋转前的图形重合．

在两张透明的纸上分别用圆规画出两个大小相同的圆A、圆B，然后把其中的一张纸盖在另一张上，使圆A、圆B完全重合，如图11-8；选一点F，用一根大头针钉在这点上，旋转圆B，直到圆B第一次完全盖住圆A．这时圆B旋转了多少度？

图11-8

操作

点O是旋转中心．

如图11-9(1)，在画有线段OA、OB、OC的纸上放一张透明纸，描出线段OA、OB、OC，用一枚图钉钉在点O处．把纸绕着点O旋转到新的位置，如图11-9(2)，使点A旋转到点A_1，点B旋转到点B_1，点C旋转到点C_1．图中，点A与A_1、点B与B_1、点C与C_1分别是一对对应点；OA与OA_1、OB与OB_1、OC与OC_1分别是对应的两点与旋转中心O的联结线段，其长度就是对应的两点与旋转中心O的距离；$\angle AOA_1$、$\angle BOB_1$、$\angle COC_1$是旋转角．

98

问题 1

旋转正方形，最少旋转 90°可以使它与初始位置的正方形重合，每旋转 90°都会重复上述现象．

问题 2

圆 B 第一次完全盖住圆 A 时，圆 B 旋转了 360°．

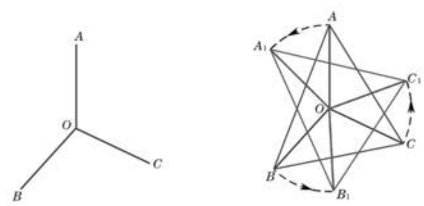
通过问题 1、2 中的两个图形的旋转运动，可启发学生，一个图形无论是绕图形上的任意一点还是绕图形外任意一点旋转 360°，都能与旋转前的图形重合，旋转前后图形的大小和形状没有改变．

操作

通过直观的操作、演示，让学生在动态变化中观察“旋转中心”“旋转角”，尤其要注意观察图形中各点的旋转角的大小，观察图形的旋转不变性．在此基础上引导学生展开讨论，得出图形旋转的有关性质．

例题

画一个多边形经旋转后图形的关键是画出旋转后这个图形的顶点的对应点.通过对例题的讲解,使学生知道图形在旋转过程中旋转角相等.由于本节课主要在操作、观察的基础上学习图形旋转的有关知识,所以要重视学生数学思维能力的培养.本例题可在师生共同讨论的基础上,教师边讲解、板书演示,学生边试着动手操作.



(1) (2)

图11-9

联结AB、BC、AC和A_1B_1、B_1C_1、A_1C_1. 这样，可以把三角形$A_1B_1C_1$看成是三角形ABC绕定点O旋转后得到的图形，对于这个旋转,AB与A_1B_1是一对对应线段,$\angle ABC$与$\angle A_1B_1C_1$是一对对应角.

图形旋转后对应的线段长度、角的大小有变化吗?

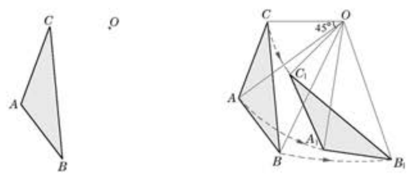
你还能在图中找出其他对应线段、对应角吗?

如果OA绕着点O按顺时针方向旋转90°，那么OB旋转的角度是多少?OC旋转的角度是多少?

图形旋转后,每一对对应线段的长度相等,每一对对应角的大小相等,这个图形的大小、形状不变.

图形旋转后，每一对对应点到旋转中心的距离相等；每一对对应点与旋转中心所连线段的夹角是一个定角,其大小等于旋转角(或周角与旋转角之差).

例题　在图11-10(1)中,画出三角形ABC绕点O按逆时针方向旋转45°后的图形.



(1) (2)

图11-10

99

分析　因为旋转图形不改变图形的形状，三角形旋转后仍是三角形，所以只需画出A、B、C绕点O旋转后所对应的点A_1、B_1、C_1即可.

解　(ⅰ) 联结OA、OB、OC；

(ⅱ) 以OA为始边，逆时针方向作45°角，在角的终边上截取线段OA_1，使$OA_1=OA$，得到点A_1；

(ⅲ) 同样分别可得B、C的对应点B_1、C_1；

(ⅳ) 联结A_1B_1、B_1C_1、A_1C_1.

图11-10(2)所得到的三角形$A_1B_1C_1$就是三角形ABC绕点O按逆时针方向旋转45°后的图形.

思考

(1) 如图11-11，点A绕点O按逆时针方向旋转90°后，它经过的路线是怎样的图形？

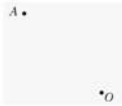


图11-11

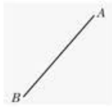


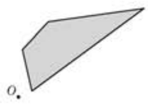
图11-12

(2) 如图11-12，线段AB绕点A按顺时针方向旋转45°后，它所扫过的平面部分是怎样的图形？画出这个图形.

练习11.2

1 画一个直角，并画出这个直角绕它的顶点按逆时针方向旋转120°后的图形.

2 画出下图以点O为旋转中心按逆时针方向旋转60°、120°、240°、360°后的图形.



(第2题)

(第3题)

3 如图，绿色图形绕点O按逆时针方向旋转几度后能与黄色图形重合？

100

思考

(1) 点 A 所经过的路线是 90° 圆心角所对的弧.

(2) 线段 AB 扫过的平面部分是圆心角为 45°的扇形.

通过对这两个问题的讨论，让学生感悟点动成线、线动成面的轨迹思想.

练习 11.2

1. 略.

2. 略.

3. 180°.

【教学目标】

(1) 理解旋转对称图形、中心对称图形的概念.

(2) 知道中心对称图形是旋转对称图形的一个特例.

观察

引导学生利用已有的知识(图形运动的思想)寻找所给图形的共同特征,并尝试着归纳所发现的共同特征,抽象出旋转对称图形的概念.

因为任何一个图形绕着一个定点旋转 360°后都能与旋转前的图形重合,所以在初中旋转对称图形的旋转角要小于 360°.

教师可通过让学生判断几组图形是中心对称图形还是旋转对称图形的练习,帮助学生体会并掌握中心对称图形与旋转对称图形的区别与联系,知道中心对称图形是旋转对称图形的一个特例.

11.3 旋转对称图形与中心对称图形

观察

下列图形有哪些特征?

如图11-13所示的五角星绕点O按逆时针方向旋转72°后与初始五角星重合.

图11-13

图11-14

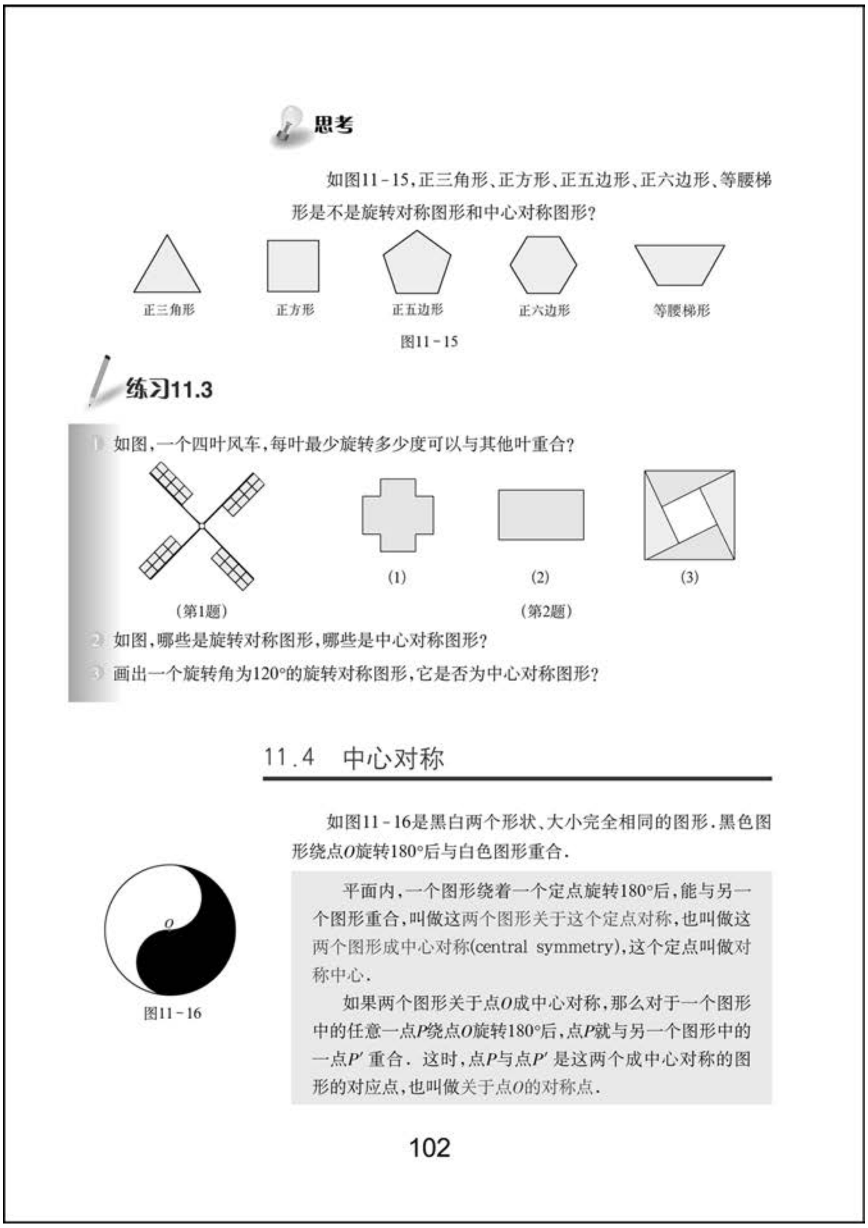
为什么旋转对称图形的旋转角要小于360°?

在平面内,如果一个图形绕着一个定点旋转一定大小的角α后,能与原图形重合,那么这个图形叫做旋转对称图形,这个定点叫做旋转对称中心,角α叫做旋转角($0° < \alpha < 360°$).

如图11-14,它是旋转对称图形,旋转角是180°.

中心对称图形就是旋转角大小为180°的旋转对称图形.

如果一个图形绕着所在平面内的一个定点旋转180°后,能与原图形重合,那么这个图形叫做中心对称图形,这个点叫做对称中心(center of symmetry).



思考

如图11-15,正三角形、正方形、正五边形、正六边形、等腰梯形是不是旋转对称图形和中心对称图形?

正三角形 正方形 正五边形 正六边形 等腰梯形

图11-15

练习11.3

1 如图,一个四叶风车,每叶最少旋转多少度可以与其他叶重合?

(第1题) (1) (2) (3) (第2题)

2 如图,哪些是旋转对称图形,哪些是中心对称图形?

3 画出一个旋转角为120°的旋转对称图形,它是否为中心对称图形?

11.4 中心对称

如图11-16是黑白两个形状、大小完全相同的图形.黑色图形绕点O旋转180°后与白色图形重合.

平面内,一个图形绕着一个定点旋转180°后,能与另一个图形重合,叫做这两个图形关于这个定点对称,也叫做这两个图形成中心对称(central symmetry),这个定点叫做对称中心.

如果两个图形关于点O成中心对称,那么对于一个图形中的任意一点P绕点O旋转180°后,点P就与另一个图形中的一点P'重合. 这时,点P与点P'是这两个成中心对称的图形的对应点,也叫做关于点O的对称点.

图11-16

102

思考

通过对这个问题的思考与讨论,引导学生进一步理解旋转对称图形与中心对称图形的区别与联系.在所给的图形中,除了等腰梯形以外,其余图形都是旋转对称图形,其中正方形、正六边形是中心对称图形.

练习 11.3

1. 90°.

2. 这三个图形都是旋转对称图形,也都是中心对称图形.

3. 旋转角为120°的旋转对称图形不一定是中心对称图形,如有三个叶片的风扇、正三角形等不是中心对称图形.而正六边形的旋转角可以是120°,且是中心对称图形.

【教学目标】

(1) 理解两个图形关于某一点中心对称的意义.

(2) 掌握中心对称与中心对称图形的概念.

(3) 知道中心对称的基本性质,并会用有关性质画已知图形关于某一点对称的图形.

(4) 能找到两个成中心对称图形的对称中心.

通过具体的图形旋转运动抽象出中心对称的概念.教师可通过具体的操作演示,引导学生建立中心对称与中心对称图形的区别与联系.

通过具体的图形，学习与中心对称有关的对称点、对应线段、对应角的概念.可让学生通过测量每一组对称点与对称中心的连线段的长度，知道“对称中心平分每一组对应点的连线段”这一性质.

例题

在了解中心对称的有关性质的基础上，学习画已知图形关于某一点对称的图形.因为平面图形是由点组成的，所以如果两个图形关于某一点中心对称，那么其中一个图形中任何一点关于某点的对称点都在另一个图形上.多边形的对称问题，要抓住它们的顶点这一关键，寻找顶点的对称点.

如图11－17，三角形ABC与三角形EFD关于点O成中心对称，那么点A的对称点是点E，线段AB的对应线段是线段EF，$\angle BAC$的对应角是$\angle FED$.

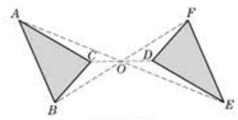


图11－17

你能写出其他的对称点、对应线段、对应角吗？

如果两个图形关于一点成中心对称，那么这两个图形对应线段平行（或在同一条直线上）且相等.

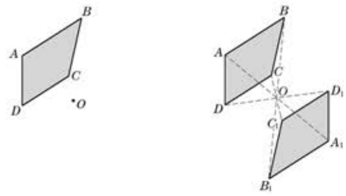
如果两个图形关于一点成中心对称，那么对称点的联结线段都经过对称中心，并且被对称中心平分.

例题　画出如图11－18(1)所示的四边形$ABCD$关于点O的中心对称的图形.

解　（ⅰ）如图11－18(2)，联结AO并延长到A_1，使$OA_1=OA$，得到点A的对称点A_1；

（ⅱ）同样分别作出点B、C、D的对称点B_1、C_1、D_1；

（ⅲ）依次联结A_1B_1、B_1C_1、C_1D_1、A_1D_1，得到四边形$A_1B_1C_1D_1$.



(1)　　(2)

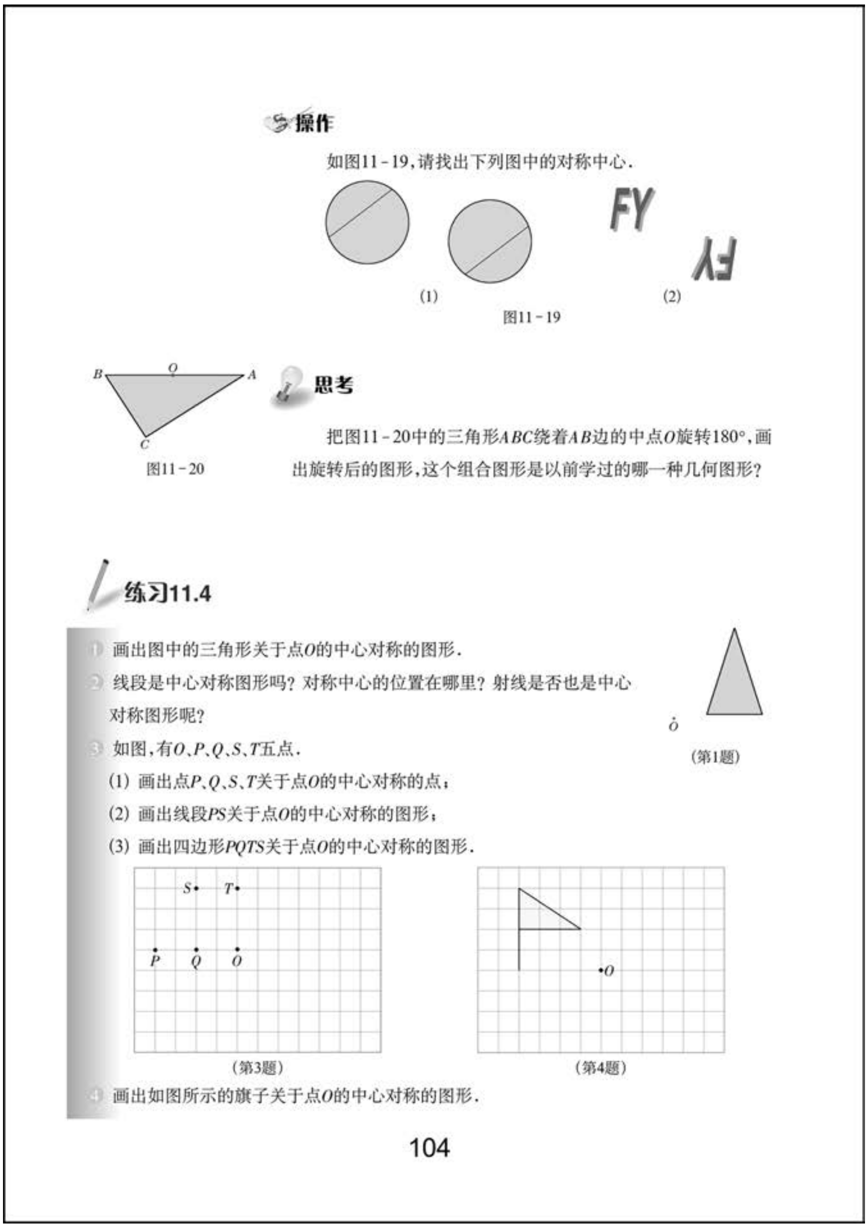
图11－18

寻找对称中心，只需分别联结两对对应点，所得两条直线的交点就是对称中心.

四边形$ABCD$和四边形$A_1B_1C_1D_1$是关于点O的中心对称的图形.

这种方法可以用来画出任意图形的中心对称的图形，并可以找到中心对称的图形的对称中心.

103



操作

如图11-19，请找出下列图中的对称中心.

(1) (2)

图11-19

图11-20

思考

把图11-20中的三角形ABC绕着AB边的中点O旋转180°，画出旋转后的图形，这个组合图形是以前学过的哪一种几何图形？

练习11.4

1. 画出图中的三角形关于点O的中心对称的图形.
2. 线段是中心对称图形吗？对称中心的位置在哪里？射线是否也是中心对称图形呢？
3. 如图，有O、P、Q、S、T五点.
   (1) 画出点P、Q、S、T关于点O的中心对称的点；
   (2) 画出线段PS关于点O的中心对称的图形；
   (3) 画出四边形$PQTS$关于点O的中心对称的图形.

(第1题)

(第3题) (第4题)

4. 画出如图所示的旗子关于点O的中心对称的图形.

104

操作

这两对图形均成中心对称，只需画出两组对应线段的交点，即为所求的对称中心.

思考

这个组合图形是以前学过的平行四边形.如果将这个组合图形看作一个整体，可以看到将它绕点O旋转180°后能与原组合图形完全重合，那么可知平行四边形是中心对称图形.

练习 11.4

1. 略.

2. 线段是中心对称图形，它的对称中心是线段的中点；射线不是中心对称图形.

3. 略.

4. 略.

第 3 节的重点是轴对称的概念. 理解轴对称图形是针对一个图形的概念，轴对称是针对两个图形的概念，是学习本节内容的难点.

【教学目标】

(1) 经历观察、动手操作，认识图形翻折运动的过程，知道经过翻折运动的图形保持形状、大小不变的性质.

(2) 理解轴对称图形的意义，并会画出轴对称图形的对称轴.

观察 1

由学生熟悉的剪纸帮助学生形成对图形翻折运动的初步印象. 通过具体的三角形的翻折运动，引导学生与前面学过的平移运动相比较. 平移运动、翻折运动后所得的图形的形状与大小都没发生变化，但两种运动后三角形对应顶点的位置不同.

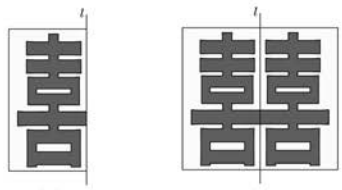
11

第 3 节　图形的翻折

11.5　翻折与轴对称图形

观察 1

剪纸是一门手工艺，为了剪一个民间表示喜庆的"双喜"图案"囍"，可以将一张长方形的纸一折二，然后剪下"喜"，再将两层"喜"摊开，就得到了"囍"，如图11－21所示，也可以认为将"喜"字绕直线l翻折后，成为"囍"字.



(1)　　(2)

图11－21

图11－22中，三角形ABC作平移运动后的图形与翻折后的图形是否相同?

如图11－22，三角形ABC沿直线l翻折得三角形$A_1B_1C_1$，点A与点A_1叫做对应点，线段AB与线段A_1B_1叫做对应线段，$\angle A$与$\angle A_1$叫

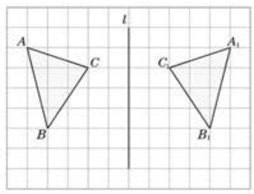


图11－22

105

做对应角，点B的对应点是__________；线段AC的对应线段是__________；$\angle C$的对应角是__________.

观察 2

以下这些艺术摄影作品有什么共同的特征呢？

图11-23

如图11-23，在京剧的脸谱中，如果将直线l的左边部分沿l翻折，它与右边部分重合.

观察中的图形都有这个特征.

> 把一个图形沿某一条直线翻折过来，直线两旁的部分能够相互重合，这个图形叫做轴对称图形，这条直线就是它的对称轴.

你能确定观察2中的图形的对称轴吗？

线段、等边三角形是轴对称图形吗？

思考

(1) 图11-24中的哪些图形是轴对称图形？

(1) (2) (3) (4)

图11-24

(2) 图11-24中的图形如果是轴对称图形，画出它的一条对称轴，对称轴是不是只有一条？

106

点 B 的对应点是 B_1.线段 AC 的对应线段是 A_1C_1.$\angle C$ 的对应角是$\angle C_1$.

观察 2

结合上面给出的图形的翻折运动，引导学生利用图形运动的观点，寻找所给图形的共同特点，由此概括出轴对称图形的概念.

思考

引导学生利用轴对称图形的概念判断一个图形是否是轴对称图形.

(1) 图 11－24(4)中的图形不是轴对称图形；

(2) 圆的对称轴有无数条.过该圆心的任意一条直线都是这个圆的对称轴.

练习 11.5

1. 略.

2. 是.

3. 略.

4. 有,有三条对称轴.

5. (2)(3)(4)是轴对称图形.

【教学目标】

(1) 理解两个图形关于一条直线成轴对称的意义,知道轴对称图形的基本性质.

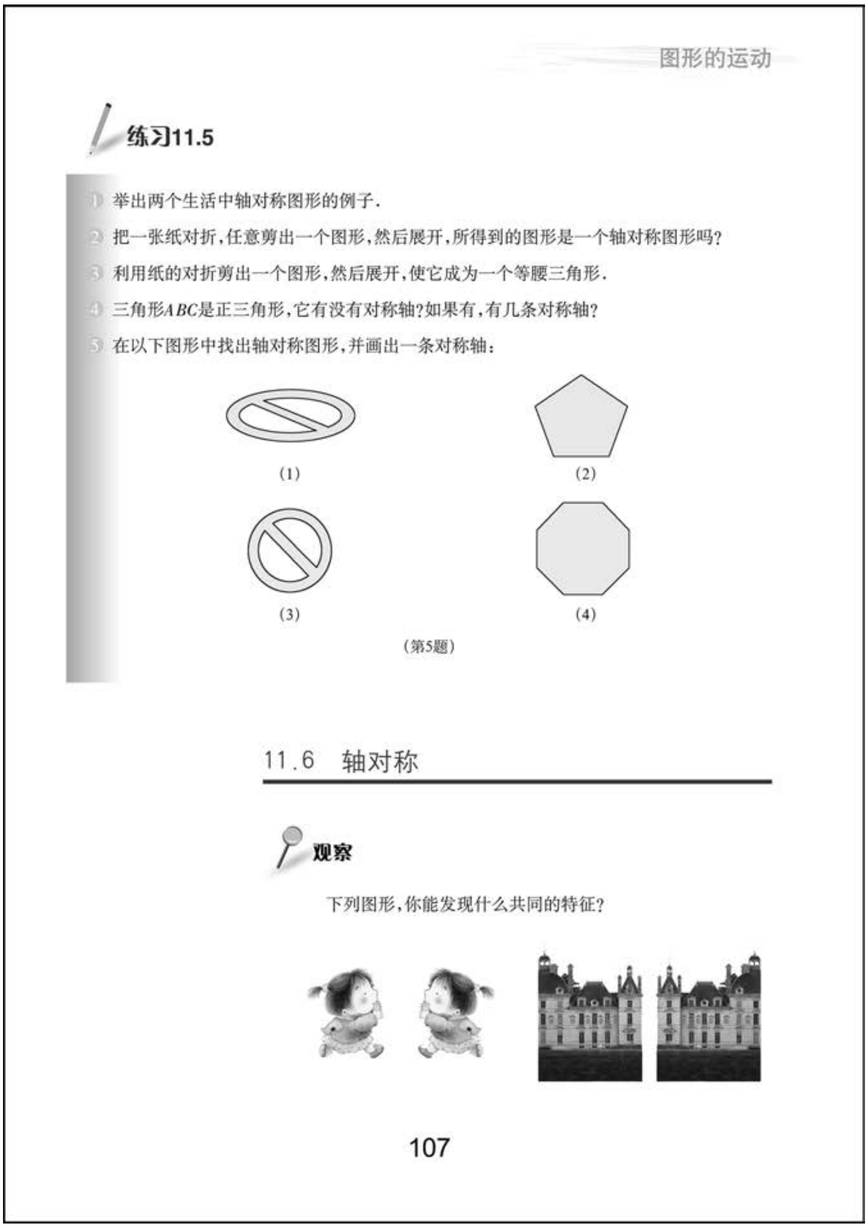
(2) 掌握“轴对称图形”与“两个图形关于一条直线成轴对称图形”这两个概念的区别与联系.

(3) 会用有关性质画已知图形关于某一条直线对称的图形.

(4) 能画出成轴对称的两个图形的对称轴.

观察

引导学生通过观察,利用图形的运动——翻折,认识图形的对称性,抽象出轴对称的概念.直观地展示生活中的实例,引导学生利用已有的相关知识学习轴对称及其性质,便于学生理解与掌握.



图形的运动

练习11.5

1. 举出两个生活中轴对称图形的例子.
2. 把一张纸对折,任意剪出一个图形,然后展开,所得到的图形是一个轴对称图形吗?
3. 利用纸的对折剪出一个图形,然后展开,使它成为一个等腰三角形.
4. 三角形ABC是正三角形,它有没有对称轴?如果有,有几条对称轴?
5. 在以下图形中找出轴对称图形,并画出一条对称轴:

(1) (2) (3) (4)

(第5题)

11.6 轴对称

观察

下列图形,你能发现什么共同的特征?

107

图11－25

如图11－25，左、右两个图形中，左边的图形沿直线l翻折后，可以与右边的图形重合.

如果把一个图形沿某一条直线翻折，能与另一个图形重合，那么叫做这两个图形关于这条直线成轴对称，这条直线叫做对称轴，两个图形中的对应点叫做关于这条直线的对称点.

如图11－26，三角形ABC沿着直线MN翻折后，它与三角形$A_1B_1C_1$重合，三角形ABC与三角形$A_1B_1C_1$关于直线MN对称，直线MN是对称轴，点A与A_1、点B与B_1、点C与C_1是关于直线MN的对称点.

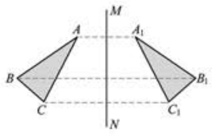


图11－26

两个图形关于一条直线成轴对称，这两个图形对应线段的长度相等，对应角的大小相等，它们的形状相同，大小不变.

两个图形关于一条直线成轴对称，对称点的联结线段被对称轴垂直平分；如果对应线段（或其延长线）相交，那么它们的交点在对称轴上.

例题 如图11－27(1)，画出一个四边形$ABCD$关于直线l的轴对称的图形.

解 (ⅰ) 过点A作直线l的垂线AO，并延长到A_1，使$OA_1=OA$，得到点A的对称点A_1；

(ⅱ) 同样分别可以作出点B、C、D的对称点B_1、C_1、D_1；

(ⅲ) 依次联结A_1B_1、B_1C_1、C_1D_1、A_1D_1，可以得到四边形$A_1B_1C_1D_1$，如图11－27(2)所示.

108

教师可结合具体图形，引导学生讨论“两个图形关于某条直线成轴对称”与“轴对称图形”的区别与联系.前者是指两个图形沿某一条直线翻折后与另一个图形互相重合，指的是两个图形的位置关系；后者是指一个图形沿某一条直线翻折后直线两旁的部分可以互相重合，指的是一个图形的性质.但这两者也可以是统一的，可以把轴对称图形中位于对称轴两旁的部分看作成轴对称的两个图形，也可以把关于某条直线对称的两个图形看作一个整体的轴对称图形.可引导学生测量对称点的连线段AA_1、BB_1、CC_1与直线MN所成的角度，以及每一组对称点到对称轴的距离，让学生知道两个图形关于一条直线成轴对称的性质，不必作几何说理解释.

例题

画一个已知图形关于某条直线对称的图形，教师可引导学生类比画一个已知图形关于某一点对称的图形的画法.抓住两个图形关于某条直线对称的实质：多边形关于直线对称可转化为线段关于直线对称，最终可化归为点关于直线对称.在分析过程中加深学生对轴对称性质的理解.

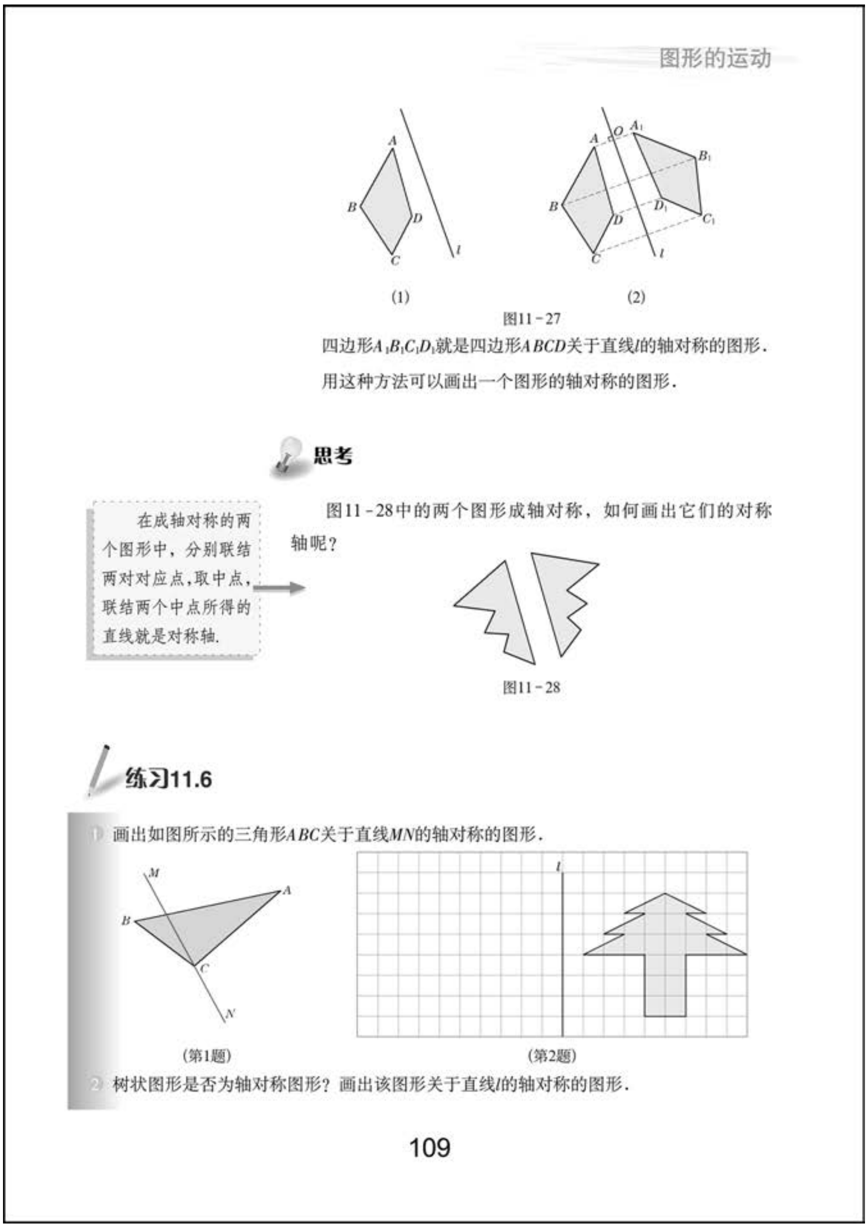
思考

画所求对称轴的方法，除教材上介绍的方法外，还可以作一对对应点的连线段的垂直平分线，这条垂直平分线就是对称轴.这两种寻找对称轴的方法让学生知道即可，不必作几何说理进行解释.

练习 11.6

1. 略.

2. 是.



(1) (2)

图11－27

四边形$A_1B_1C_1D_1$就是四边形$ABCD$关于直线l的轴对称的图形.

用这种方法可以画出一个图形的轴对称的图形.

思考

图11－28中的两个图形成轴对称，如何画出它们的对称轴呢？

在成轴对称的两个图形中，分别联结两对对应点，取中点，联结两个中点所得的直线就是对称轴.

图11－28

练习11.6

1. 画出如图所示的三角形ABC关于直线MN的轴对称的图形.

(第1题) (第2题)

2. 树状图形是否为轴对称图形？画出该图形关于直线l的轴对称的图形.

本章小结

本章通过日常生活中常见的图形，学习了图形的运动以及有关的概念．图形通过平移、旋转和翻折可以形成新的图形．对于这些图形运动问题应能正确地寻找到对应点、对应线段和对应角，应知道这些运动不会改变图形中线段的长度和角的度数，图形的形状与大小也不会改变，改变的只是图形的位置．学习本章将为今后学习平面几何奠定基础．

本章知识结构框图如下：

110

由于本章所涉及的概念较多且容易混淆，对于它们的引入大体上都采用如下的步骤：生活中的实例→表象→操作（图形的运动）→抽象成概念→思考→得出性质→简单应用，因此教师可引导学生从图形的运动入手，回顾有关概念的形成过程．学生可以从概念的形成、概念的描述、概念与概念的区别与联系等方面展开讨论，构建本章的知识结构框图．

复习本章时还应关注平移、旋转、翻折运动中图形的形状和大小都不变的性质．

这个探究活动的设计意图是使学生知道许多优美的图案可以由一个基本图形经过三种不同运动组合而成.

图2(1)中的各图是由图1经过平移得到的;

图2(2)中的各图是由图1经过翻折得到的;

图2(3)中的各图是由图1经过旋转得到的.

有时不同的运动也会产生相同的效果.如图2中的(2)也可以看作是由一个基本图形绕着点O旋转得到的,它与翻折运动所得到的效果是一样的.

探究活动

平面图形的设计

图1是一个基本图形,将它平移、旋转后,可产生一个更大的图形.由于运动方式不一样,可能产生不同的效果.以下给出运动后所形成的图形.

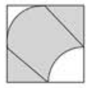
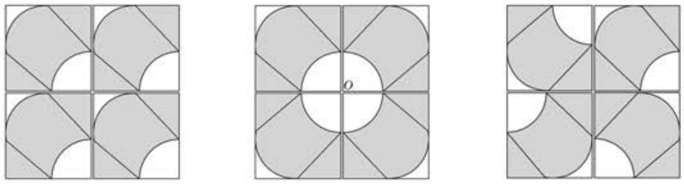


图1



(1) (2) (3)

图2

你能够说出图2中各图形是由图1经过怎样的运动形成的吗?请你自己设计一个基本图形,通过平移、旋转或翻折运动后形成一个更大的漂亮图案.

阅读材料

平 面 镶 嵌

在第八章的阅读材料中你已了解了荷兰艺术家埃舍尔的一些艺术作品，他的作品中出现了许多现实中不可能的图形，其实他还有一些运用数学中的平移、旋转和轴对称制作的平面镶嵌作品.平面镶嵌就是用一种或几种平面图形无缝隙而又不重叠地铺满整个平面.

只需用正三角形、正六边形和正方形中的一种图形，就可简单地完成平面的镶嵌，也可以用其中几种图形来镶嵌，如图1所示：

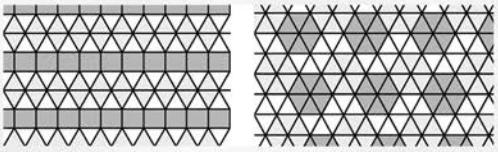


图1

还可以用其他的图形来镶嵌平面，图2是埃舍尔的一幅平面镶嵌作品，它是由同样大小的骑士镶嵌而成的.

图2

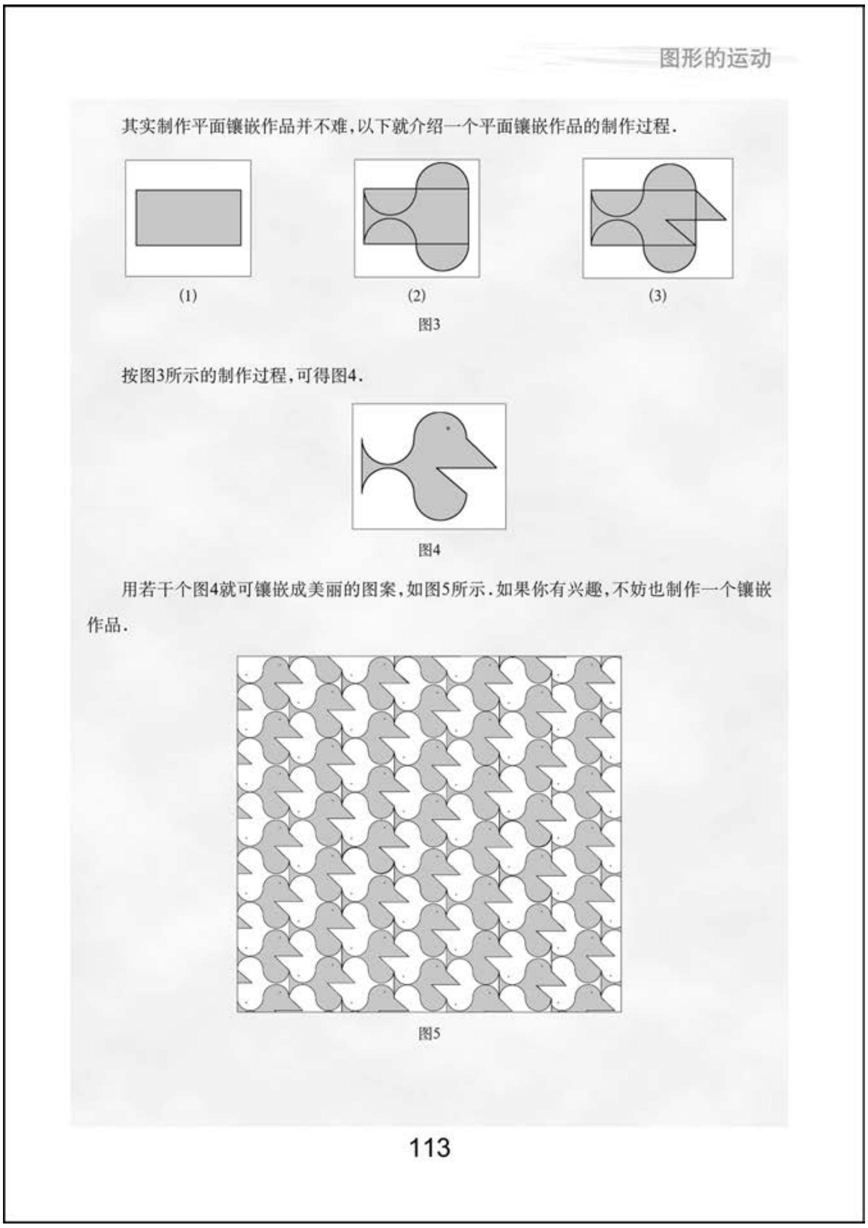
112

希望学生通过学习阅读材料知道图形的运动在生活中有着广泛的应用.

另外，通过欣赏与制作美丽的图案，让学生发现数学中的美，吸引学生对学习数学的兴趣.

教师应知道，并不是所有的多边形都可以完成平面的镶嵌.当围绕一点拼在一起的几个正多边形的内角加在一起恰好能组成一个周角时，就可以拼成一个平面图形，即这个正多边形的每个内角的度数能整除 360°.

图 3 在利用图形对称性的基础上，经过割补可以得到图 4.在制作图 4 的过程中要把握两个关键：(1) 是图形的对称性，即割去的部分和拼补的部分的形状、大小要保持不变，可以看作是经过图形的旋转得到的；(2) 经过割补后的图形(图 4)与原图形(图 3(1))的面积相等.这样用若干个图 4 就可以镶嵌成美丽的图案了.



图形的运动

其实制作平面镶嵌作品并不难，以下就介绍一个平面镶嵌作品的制作过程.

(1) (2) (3)

图3

按图3所示的制作过程，可得图4.

图4

用若干个图4就可镶嵌成美丽的图案，如图5所示.如果你有兴趣，不妨也制作一个镶嵌作品.

图5

113

练习部分参考答案

第九章　整　　式

习题 9.1

1. (1) $3x+5$.　(2) $\frac{1}{x^2}$.　(3) $2\,005-x^3$.　(4) $\frac{x}{5}$.　**2.** (1) $4a$, a^2.　(2) $\frac{1}{2}(a+b)h$.　(3) $\frac{n}{360}\pi r^2$.　(4) $\frac{C}{2}-a$.　**3.** (1) 11, $2n-1$.　(2) 36, k^2.　**4.** 4, 7, 10, 13, 61, 91, $3n+1$.

习题 9.2

1. (1) $3a+\frac{b}{2}$.　(2) $x^2-\frac{1}{y}$.　(3) $\frac{3}{a}+3\frac{2}{3}$.　(4) x^2-y^2.　(5) $(x-y)^2$.　(6) $x-y^2$.　**2.** C.　**3.**小丽$(a+3)$岁，爸爸$(4a+3)$岁.　**4.** $\frac{s}{a+b}$小时.　**5.** $\frac{85a+82b}{a+b}$分.　**6.** $(4x^3-44x^2+120x)$立方厘米.

习题 9.3

1. (1) $\frac{10}{3}$.　(2) $-\frac{5}{2}$.　(3) $\frac{10}{3}$.　**2.** (1) -3.　(2) $\frac{25}{4}$.　(3) $-\frac{1}{6}$.　(4) $\frac{21}{2}$.　**3.** (1) 6.　(2) 5.　**4.** (1) $\frac{1}{a^2-2}$.　(2) $\frac{1}{23}$.　**5.** 3、0、15、$\frac{5}{4}$、$-\frac{5}{9}$.　**6.** (1) 周长为：$4a+\frac{1}{2}\pi a$，面积为：$a^2+\frac{1}{4}\pi a^2$.　(2) 周长为：$24+3\pi$，面积为：$36+9\pi$.　**7.** (1) $\frac{1}{2}a^2$.　(2) $\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}a^2$.　(3) $\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}ab$.　(4) $\frac{1}{2}b^2$.　**8.** (1) $R=600$.　(2) 225.　(3) 当 q 越来越大(越来越接近 1，但小于 1)时，听到新闻的总人数就越多.

习题 9.4

1. 单项式：3、$3a$、a^2b^2、$-\frac{1}{3}a^2b^2$，多项式：$3+a$、a^2+b^2、$\frac{a^2+b^2}{3}$.　**2.** D.　**3.** 单项式：$-3x^3y^2$、$\frac{3}{2}x^2y^2$、$-\frac{1}{3}xy$、$2.5x$、$-y$；系数：-3、$\frac{3}{2}$、$-\frac{1}{3}$、2.5、-1；次数：5、4、2、1、1.　**4.** (1) 四次；$-4x^4+3x^2-$

$x+2$.　(2) 四次；$-5y^4-2x^2y^2+3x^3y-x^4$.　**5.** x^2+x.

习题 9.5

1. a^2b 的同类项：a^2b、$2ba^2$、$2.5a^2b$、$-\frac{a^2b}{5}$；$-ab$ 的同类项：$3ab$、$\frac{1}{3}ba$、$\frac{ab}{4}$；$2\ 005ab^2$ 的同类项：$4ab^2$、$-\frac{2}{3}b^2a$.　**2.** C.　**3.** C.　**4.** (1) $-5a^2+4a+4$.　(2) $-2x^2$.　(3) $5a^2b+4ab-6ab^2$.　(4) $6xy-11$.　**5.** (1) 原代数式化简为$\frac{13}{6}a$，当 $a=12$ 时，此代数式的值为 26.　(2) 原代数式化简为 $2y^2+2xy$，当 $x=\frac{5}{2}$，$y=-3$ 时，此代数式的值为 3.　**6.** 原代数式化简为 $5mn$，此代数式的值为 60.

习题 9.6

1. (1) $3a-3b+2$.　(2) $a+b-3c+4$.　(3) $4x^3+3x^2-2x+1$.　(4) $3x^3-x^2+2x+4$.　(5) $3x^3-3x^2+6x+9$.　**2.** (1) 不正确，$-2x^2+x^3$ 改为 $-2x^2-x^3$.　(2) 不正确，$a+b$ 改为 $-a+b$.　(3) 不正确，$-2a-2b+3c$ 改为 $-2a-4b+6c$.　**3.** (1) $-x^2+2x+2$.　(2) $-a^2+ab+b^2$.　(3) $-x^3-x^2-x+1$.　(4) $-\frac{3}{2}x^2+xy-\frac{11}{3}y^2$.　(5) $-a^2b-5ab-2ab^2$.　(6) $\frac{11}{2}x^2+3x-\frac{17}{2}$.　**4.** $\frac{5}{2}x^2+y^2+1$.　**5.** $6a+\frac{9}{2}ab-\frac{5}{6}b$.　**6.** $-2x^2+xy-\frac{5}{2}y^2$.　**7.** $a^2+\frac{3}{2}ab-2b^2$.　**8.** $2x^2-\frac{5}{2}x+6$.　**9.** (1) $-x^2-\frac{7}{6}x-5$.　(2) $-a^2+4ab+11b^2$.　**10.** (1) 原代数式化简为 $2x^2-3$，当 $x=-\frac{1}{2}$时，此代数式的值为$-2\frac{1}{2}$.　(2) 原代数式化简为 $ab+10b^2$，当 $a=2$，$b=0.2$ 时，此代数式的值为 0.8.　**11.** x^4+x^2 与 x^4-x^2；$-x^4+x^2$ 与 $-x^4-x^2$.

习题 9.7

1. 底数：-3、$\frac{2}{3}a$、$2+a$；指数：5、4、3；积的形式：$(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)$、$\left(\frac{2}{3}a\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a\right)$、$(2+a)(2+a)(2+a)$.　**2.** $\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}$；$\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}$；8；$\left(\frac{5}{3}\right)^8$.　**3.** (1) 5^8.　(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{13}$.　(3) $(-2)^{12}$.　(4) a^{15}.　(5) $(x-y)^{10}$.　(6) $(-a)^{15}$.　**4.** (1) $2a^7$.　(2) $10a+a^{10}$.　(3) $2x^6$.　(4) 0.

习题 9.8

1. C.　**2.** (1) 5^{12}.　(2) 2^{20}.　(3) $(x+y)^8$.　(4) a^{3n}.　(5) a^{10}.　(6) a^{24}.　(7) a^3，a^5.　(8) a^9.　**3.** (1) a^{18}.　(2) $-x^8$.　(3) $(x-y)^7$.　(4) a^8-a^{15}.　(5) 0.　(6) 0.　(7) $3x^{12}$.　(8) $2a^6+6a$.　**4.** 不同意；因为$(-a^2)^3=-a^6$，而$(-a^3)^2=a^6$.

习题 9.9

1. C.　**2.**（1）a^6b^9.　（2）$16a^8$.　（3）x^2y^4.　（4）$\frac{1}{8}a^9b^{15}$.　**3.**（1）$7a^6$.　（2）0.　(3) $2x^{10}$.　（4）$2a^6$.　**4.**（1）20 000.　（2）-1.　（3）1.　（4）500 000.　**5.** $k=6$.

习题 9.10

1. C.　**2.**（1）$6a^3b$.　（2）$6a^3$.　（3）$-12x^5$.　（4）$-\frac{1}{3}a^3b^3$.　**3.**（1）$-4a^3b^3$.　(2) $-108x^5y^8$.　（3）$-144m^{12}n^{12}$.　（4）$12x^6$.　（5）$-3a^4b^4$.　（6）$11a^2b^4c^6$.　**4.**（1）$V=6a^2h$，$S=12a^2+10ah$.　（2）$V=12$，$S=58$.　**5.** B.　**6.** ax；ay；az；$x+y+z$；$ax+ay+az$.　**7.**（1）$2x^2+4x-6$.　（2）$2x^4+4x^3-6x^2$.　（3）$\frac{2}{3}a^3b-\frac{1}{3}a^2b^2+2ab^3$.　（4）$-15x+6x^2-3x^3$.　(5) $6x^3y+4xy^3$.　（6）$-\frac{2}{3}x^3y^2+x^4y^3+\frac{5}{3}x^2y$.　**8.**（1）$18a^4-9a^3-27a^2$.　（2）$18x^4y+9x^3y^2-9x^2y^3$.　（3）$x^3-8x^2+3x$.　（4）$2a^3b-2ab^3$.　（5）$-\frac{1}{3}x^4y^3-\frac{4}{15}x^3y^4$.　（6）$a^3+a^2+a$.　**9.**（1）$\frac{5}{4}$.　（2）272.　**10.** C.　**11.** B.　**12.**（1）$x^2-6x-16$.　（2）a^4+12a^2+27.　(3) $6a^2+ab-b^2$.　（4）$x^2+\frac{5}{6}xy-y^2$.　（5）$9a^2-16$.　（6）$1-16x^4$.　**13.**（1）$-2x^2-14x+24$.　（2）$a^2-4b^2+12b-9$.　（3）$4x^2-3y^2$.　（4）$4x^4+4x^3+3x^2-x-1$.　**14.** $a=2$，$b=-3$.

习题 9.11

1. B.　**2.** (1) x^2-1.　(2) $a-\frac{1}{2}$.　(3) $2a+1$.　(4) $-x-y$.　(5) $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$.　**3.** (1) $9a^2-4$.　(2) $4-\frac{1}{4}x^2$.　（3）$y^2-0.64x^2$.　（4）$9-4a^2$.　（5）$6a^2-6b^2+5ab$.　（6）$-x^2+2xy-y^2$.　**4.** (1) 39 996.　（2）3 999 975.　（3）1 599.99.　（4）$399\frac{77}{81}$.　**5.**（1）x^4-1.　（2）$16a^4-\frac{1}{16}$.　(3) $3x^2-17$.　(4) $5x^2+5xy-2y^2$.　(5) a^4-5.　(6) a^4-25.

习题 9.12

1. C.　**2.** (1) x^2-y^2.　(2) $x^2-2xy+y^2$.　(3) $-x^2-2xy-y^2$.　(4) y^2-x^2.　(5) $a+1$.　(6) $a-1$.　(7) $4ab$.　(8) $2a^2+2b^2$.　**3.** (1) a^2+6a+9.　(2) $\frac{1}{9}x^2+2xy+9y^2$.　(3) $x^2-4xy+4y^2$.　(4) $9a^2-3a+\frac{1}{4}$.　(5) $16a^2-16a+4$.　(6) $x^2+6xy+9y^2$.　**4.** (1) $-7x-15$.　(2) $2x+5$.　(3) $a^2-3ab+b^2$.　(4) $-2a^2+4a+11$.　(5) $3x^2+\frac{1}{4}$.　(6) $-ab$.　**5.** (1) x^2+6x+9.　(2) 9.　(3) $6xy$.　(4) a.　(5) $16y^2$.　(6) $4ab$.　**6.** (1) x^4-16.　(2) a^4-2a^2+1.　(3) $4x^2+16y^2$.　(4) $4a^4-\frac{1}{4}$.　**7.** (1) 9 960.04.　(2) 4 020 025.　**8.** (1) a^2

$+4b^2+4ab-9$.　(2) x^4-x^2-6x-9.　(3) $8xy+6x+12y+18$.　**9.** (1) $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+2ab+2ac+2ad+2ae+2bc+2bd+2be+2cd+2ce+2de$.　(2) $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\cdots+2a_1a_n+2a_2a_3+2a_2a_4+\cdots+2a_2a_n+\cdots+2a_{n-1}a_n$.各项次数均为2,平方项系数均为1,交叉项系数均为2,项数为$\frac{n(n+1)}{2}$,n是原多项式的项数.

习题 9.13

1. C.　**2.** (1) $3xy(2x-y)$.　(2) $a(a^2+2a+3)$.　(3) $3a^2(a^2+b^2)$.　(4) $(x+3)(x-3)$.　(5) $(2a+b)(a+2b)$.　**3.** (1) $3a(2a^2-1)$.　(2) $6x(4-3x^2+2x^3)$.　(3) $-7x^2y^2(y-3x)$.　(4) $9m^2n^2(mn^2-3m^2n+9)$.　**4.** (1) $-25a(a-2)$.　(2) $3x(x^2-3x+1)$.　(3) $2x^2y(9xy+6y-x)$.　(4) $-2nm(1-2n+3m^2)$.　(5) $-9a^2b^2c^2(5a^2c-2a-10)$.　(6) $16x^2y^2z^2(xz+3x^2y-6z^2)$.　**5.** (1) $a-b$.　(2) $x-2y-3$.　(3) $-$.　(4) 5.　(5) $-x+y-3$.　**6.** $18a^2b$、$4b^2a$、$6a^3b$、$36ab^3$、$-8ab$;$18a^2b$、$-9a^2$、$6a^3b$、$36ab^3$、$3ab^2$;$4b^2a$、$36ab^3$、$4b^2$.　**7.** (1) $(x+y)^2(1-x-y)$.　(2) $(x-y)^2(1-x+y)$.　(3) $(y-x)^2(1-y+x)$.　(4) $(x-y)(2-3x+3y)$.　(5) $2ab(a+b)(2b-a)$.　(6) $2x(x+y)(x-y)$.　(7) $2a(a-3)(4a+1)$.　(8) $-8xyz(z-x-y)(3yz+4z-4x-4y-z^2)$.

习题 9.14

1. C.　**2.** (1) 10^2 或$(-10)^2$.　(2) $(\pm a^2)^2$.　(3) $\left(\pm\frac{1}{2}x\right)^2$.　(4) $(\pm 7ab^2)^2$.　(5) $\left(\pm\frac{5}{3}n^3\right)^2$.　(6) $\left(\pm\frac{1}{10}x^n\right)^2$.　**3.** (1) $(x+10)(x-10)$.　(2) $(2a+3b)(2a-3b)$.　(3) $\left(ab+\frac{1}{3}\right)\left(ab-\frac{1}{3}\right)$.　(4) $(5+4a^2)(5-4a^2)$.　(5) $(5x+4)(5x-4)$.　(6) $\left(\frac{3}{10}x+2y^2\right)\left(\frac{3}{10}x-2y^2\right)$.　**4.** (1) 99.96.　(2) $624\frac{24}{25}$.　(3) 20 025.　(4) 5 050.　**5.** (1) $2a(a+2)(a-2)$.　(2) $(x^2+4)(x+2)(x-2)$.　(3) $(a+3b)(a-b)$.　(4) $\frac{1}{8}x^2y^2(2x+y)(2x-y)$.　(5) $(3x+4a+4b)(3x-4a-4b)$.　(6) $4xy(x+y)(x-y)$.　(7) $(x-2y)(5x-10y+2)(5x-10y-2)$.　(8) $ab(9a^2b^2+1)(3ab+1)(3ab-1)$.　**6.** 140.672dm^2.　**7.** B.　**8.** (1) $\frac{81}{4}$, $\left(x-\frac{9}{2}\right)^2$.　(2) 25, $(a^2+5)^2$.　(3) $4n$, $(1-2n)^2$.　(4) $20xy$, $(2x+5y)^2$.　(5) $\frac{25}{4}$, $\left(3ab+\frac{5}{2}\right)^2$.　(6) $\frac{1}{4}$, $\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2$.　**9.** (1) $(a-3b)^2$.　(2) $(4+3m)^2$.　(3) $\left(ab-\frac{1}{2}\right)^2$.　(4) $(7x-y)^2$.　(5) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}x^2\right)^2$.　(6) $(5a-2b)^2$.　**10.** (1) $3a(a-2)^2$.　(2) $-(ab+3)^2$.　(3) $\frac{1}{16}mn(2m-n)^2$.　(4) $(a+1)^2(a-1)^2$.　(5) $(x-2y-6)^2$.　(6) $9(a+b)^2$.　**11.** 25, 5, 121, 11, 361, 19, $(a^2+3a+1)^2$.

习题 9.15

1. (1) $1\times9=3\times3=(-1)\times(-9)=(-3)\times(-3)$. (2) $1\times15=3\times5=(-1)\times(-15)=(-3)\times(-5)$. (3) $(-1)\times12=(-2)\times6=(-3)\times4=(-4)\times3=(-6)\times2=(-12)\times1$. (4) $(-1)\times28=(-2)\times14=(-4)\times7=(-7)\times4=(-14)\times2=(-28)\times1$. **2.** (1) $(x+1)(x+10)$. (2) $(x-2)(x-5)$. **3.** (1) $(a+2)(a+1)$. (2) $(a-1)(a-2)$. (3) $(a+8)(a+1)$. (4) $(a-2)(a-4)$. (5) $(a-2)(a+1)$. (6) $(a+2)(a-1)$. (7) $(a-4)(a+2)$. (8) $(a+8)(a-1)$. **4.** (1) 同号;同号. (2) 异号;不能确定,但分解所得因式中常数项的和的符号与原二次三项式中一次项系数的符号同号. **5.** (1) $(x-9)(x+2)$. (2) $(a+4b)(a+8b)$. (3) $(a+2)(a-2)(a^2+1)$. (4) $(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$. (5) $(a+2b-16)(a+2b+1)$. (6) $(ab-20c)(ab-3c)$. (7) $a(a-8b)(a+3b)$. (8) $3ab^2(2a-1)(a-1)$. (9) $(x-3)(x+1)(x-1)^2$. (10) $(x-3)(x+1)(x^2+x-3)$.

习题 9.16

1. (1) $y(2+3x)$. (2) $(a+2)(2+3b)$. (3) $(a+2)(2+3b)$. **2.** (1) $(x+3)(x-3)$. (2) $(a-2b+3)(a-2b-3)$. (3) $(a-2b+3)(a-2b-3)$. **3.** (1) $(x-4)(x+1)$. (2) $(a+b-4)(a+b+1)$. (3) $(a+b-4)(a+b+1)$. **4.** (1) $(x^2-2)(x+2)$. (2) $(y+2)(x+1)$. (3) $(2a+3)(3b+2)$. (4) $(3t-s)(2a+b)$. **5.** (1) $(1+a+b)(1-a-b)$. (2) $(2a-3b+c)(2a-3b-c)$. (3) $(x+2y)(x-2y-1)$. (4) $(x-5y-3)(x-5y)$.

习题 9.17

1. (1) $5\times5\times5$. (2) $\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)$. (3) $(-n)\cdot(-n)\cdot(-n)\cdot(-n)\cdot(-n)\cdot(-n)$. (4) $-n\cdot n\cdot n\cdot n\cdot n\cdot n$. **2.** B. **3.** (1) 9^6. (2) 10^5. (3) $-\frac{3}{4}$. (4) $(-2)^7$. (5) x^9. (6) $a^{2\,000}$. (7) $(-n)^5$. (8) $(a+b)^{10}$. **4.** (1) 1. (2) $\frac{2}{5}$. (3) x^7. (4) $-a^7$. (5) -1. (6) -1. (7) x. (8) a^7.

习题 9.18

1. B. **2.** (1) x^{10}. (2) x^{10}. (3) x^{20}. (4) $\frac{5}{3}ab^3$. (5) $\frac{4}{9}x^2y^4$. (6) $-\frac{15}{2}a^2b^2c$. **3.** (1) $3a^6$. (2) $-\frac{3}{2}a$. (3) $-\frac{4}{9}ab^3$. (4) $-\frac{4}{3}y^{10}$. **4.** (1) $\frac{27}{4}ab^4$. (2) $\frac{1}{6}a$. (3) $-\frac{10}{3}y^4$. (4) $3a^3$. (5) $5a$. (6) $\frac{2}{3}a^5$.

习题 9.19

1. C. **2.** (1) $2ab+6a^2b-8a^4b$. (2) $2a^3-4a^3b+a^2b^2$. (3) $\frac{4}{5}xy^2-\frac{6}{5}y+1$. (4) $2ab$

$+6a^2b-8a^4b$.　**3.** (1) $-4a+\frac{3}{2}x$.　(2) $7a^4-3a^2$.　(3) $4x^2+2xy-\frac{4}{3}y^2$.　(4) $-\frac{1}{24}a^3-\frac{1}{12}a^2-\frac{1}{8}a-\frac{1}{6}$.　**4.** (1) $3a^5+2a^4+4a^3+2a^2+a$.　(2) $-2x^2y+3xy^2-5y^3$.　(3) $\frac{1}{2}a^5+8a^3-\frac{1}{2}a$.　(4) $13ab-2$.

复习题

1. (1) C.　(2) D.　(3) C.　(4) A.　(5) B.　**2.** (1) $\frac{1}{2}xy+x^2$.　(2) $\frac{100(b-a)}{a}$.　(3) 五,五,$\frac{1}{2}$,$\frac{-x^4-5x^3y^2+3x^2y+2y^4+2}{4}$.　(4) 3.　(5) $-x^5$.　(6) $a^{1\,599}$.　(7) a^4.　(8) 5.　(9) 8 016.　(10) $6a+6b$,$2a^2+2b^2+5ab$.　(11) $(2^3)^4<(3^4)^2$.　(12) 5(答案不唯一).　**3.** (1) $-9a+2b$.　(2) $-x^2-6xy-y^2$.　(3) $-4a+12b-21c$.　(4) $7x^2-10x+3$.　**4.** (1) $S=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}ab$.　(2) $\frac{19}{2}$.　**5.** (1) $3a^6$.　(2) $-\frac{3}{4}a^{12}$.　(3) $-2a^{12}$.　(4) $\frac{3}{4}x^3y^5-x^3y^6+\frac{1}{4}x^2y^4$.　(5) $3x^2+3x-26$.　(6) $x^2+\frac{13}{6}xy+\frac{5}{2}x+\frac{25}{12}y+1+y^2$.　**6.** (1) $9a^2-4b^2$.　(2) $1-4a^4$.　(3) x^4-1.　(4) $25x^2y^2+4-20xy$.　(5) $2a^4+5b^4+2a^2b^2$.　(6) $x^4+4x^3+10x^2+12x+9$.　(7) $x^2-4xy+4y^2-16$.　(8) $a^4-4b^4-16+16b^2$.　**7.** (1) $3a(1-4a+6a^2)$.　(2) $2y(x+y)(x-y)$.　(3) $2(3+x^2)(3-x^2)$.　(4) $(5a-0.7b)(5a+0.7b)$.　(5) $(5x-1)^2$.　(6) $(2a^2+3b^2)^2$.　(7) $(x-12)(x+2)$.　(8) $(ab-5)(ab+4)$.　(9) $(x+10y)(x+15y)$.　(10) $(x+3y)(x-3y)(x^2+4y^2)$.　**8.** (1) $(3a-b)(2x+y)$.　(2) $(x+1)(x-1)(y+1)(y-1)$.　(3) $(3+a-2b)(3-a+2b)$.　(4) $(x+2y)(x-2y-2)$.　(5) $(x-4)(x+3)(x-3)(x+2)$.　(6) $(x+4)(x-2)$.　(7) $(a-b-5)(a-b+2)$.　(8) $(x-6y-3)(x+3y)$.　**9.** 90.　**10.** (1) -1.　(2) $-\frac{5}{3}a^2b^4$.　(3) $27a^2b^7$.　(4) $\frac{5}{4}x^2y^2+\frac{5}{2}xyz$.　(5) $10a^3$.　(6) x^6-x^2.　**11.** 所含小三角形的个数:1,4,9,16,…,n^2;所需小木棒的根数:3,9,18,30,…,$\frac{3n^2+3n}{2}$.

第十章　分　　式

习题 10.1

1. B.　**2.** (1) $\frac{a}{b}$.　(2) $\frac{3}{2ab}$.　(3) $\frac{ab}{a+b}$.　(4) $\frac{x^2+y^2}{2xy}$.　(5) $-\frac{4x}{5ab^2}$.　(6) $\frac{x+1}{x^2+1}$.　**3.** (1) $x\neq-2$.　(2) $x\neq-\frac{1}{2}$.　(3) $x\neq\pm1$.　(4) x 为一切数.　**4.** (1) $\frac{7}{16}$.　(2) $-\frac{8}{17}$.　**5.** (1) $x=\frac{3}{2}$.　(2) $x=-1$.　**6.** (1) $h=\frac{1\,125}{(12.5-x)^2}$.　(2) 增加了 3.0cm.

习题 10.2

1. C.　**2.**（1）4，9，150.　（2）$4x^2$，$9y^2$，$150xy^3$.　（3）$2x+4$，$3x+3$，x^2+2x，$2x^3+2x^2$.

3.（1）$\frac{1}{4a^2}$.　（2）$-\frac{2}{3xy}$.　（3）$-\frac{3m}{2n}$.　（4）$\frac{3(x+y)}{5(x+2y)}$.　**4.**（1）不是，$\frac{2}{5xy}$.　（2）是最简分式.　（3）不是，$\frac{5y}{3z}$.　（4）不是，$-\frac{x+2}{2}$.　**5.**（1）$-\frac{9}{4}$.　（2）$\frac{x+1}{x+2}$.　（3）$\frac{x-2}{2}$.

（4）$\frac{3x-12}{x+1}$.　（5）$\frac{x-3}{5-x}$.　（6）$\frac{x-1}{y-1}$.

习题 10.3

1. C.　**2.**（1）$\frac{y+2}{x+1}$.　（2）$\frac{a+b}{a-b}$.　（3）b，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{a^2}{b}$.　**3.**（1）$\frac{1}{6ab}$.　（2）$\frac{14}{3y}$.　（3）$24ay$.

（4）$\frac{4}{3x}$.　**4.**（1）$\frac{x+1}{x-2}$.　（2）$\frac{x^2+2x}{3-3x}$.　（3）$\frac{a-b}{2b}$.　（4）$3xy-3y^2$.　（5）$-\frac{4}{9ab}$.　（6）$2a^3b$.

（7）$\frac{x-1}{2x+6}$.　（8）$\frac{1}{x}$.

习题 10.4

1. D.　**2.**（1）$\frac{8}{xy}$.　（2）$\frac{1}{2x}$.　（3）3.　（4）$\frac{3y}{x-y}$.　（5）$\frac{1}{a}$.　（6）$x+1$.　**3.**（1）$6y$，$4x^2$.　（2）$6a^2$，$3b^2$，$2c^2$.　（3）$x-y$，$2x+2y$.　（4）x^2+2x+1，x^2+x-2.　**4.**（1）$\frac{3}{2x}$.

（2）$\frac{1}{x^2}$.　（3）$\frac{ab+bc+ac}{abc}$.　（4）$\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$.　（5）$\frac{3}{x^2+x}$.　（6）$\frac{x-5y}{x^2-y^2}$.　（7）$\frac{x^2-2x-3}{x^2-4}$.

（8）$\frac{1-x}{x+1}$.　**5.**（1）0.　（2）$-x$.　（3）$\frac{2x}{x+1}$.　（4）$-\frac{xy}{x+y}$.　**6.** 2.

习题 10.5

1. B.　**2.**（1）不是.　（2）是.　（3）是.　**3.**（1）$x=-\frac{9}{4}$.　（2）$x=5$.　（3）$x=1$.

（4）$x=\frac{11}{6}$.　**4.** 150 米/分.　**5.** 小丽每分钟可以做 8 道速算题.

习题 10.6

1.（1）a^6.　（2）a^2.　（3）a^{-2}.　（4）5^{-5}.　（5）x^{-4}.　（6）$(-a)^{-5}$.　**2.**（1）$-\frac{1}{x^2}$.

（2）$\frac{2x^2}{y^3}$.　（3）$\frac{5xy}{(x+y)^2}$.　（4）$\frac{b^2}{4^3a}$.　**3.**（1）$-2x^{-1}y^{-1}$.　（2）$2xy(x+2y)^{-1}$.　（3）$2^{-1}a^{-2}b^{-3}(a+b)$.　（4）$2ax^{-2}y^{-2}(x^2+y^2)^{-1}$.　**4.**（1）$9.6\times10^6$.　（2）$-1.3\times10^9$.　（3）$3.142\times10^{-5}$.　（4）$-3.8\times10^{-8}$.　（5）$5\times10^4$.　**5.**（1）$-1$.　（2）$\frac{4b}{27a}$.　（3）$\frac{a^2}{2b}$.　（4）$\frac{1}{8x^4}$.

(5) $x+y$.　(6) $\frac{xy}{x+y}$.

复习题

1. (1) C.　(2) D.　(3) B.　(4) B.　(5) B.　**2.** (1) $\frac{2b}{3a}$.　(2) ±3.　(3) $(-1)^{-1}<(-3)^{-3}<(-2)^{-2}$.　(4) $2.004\,100\,3\times10^{7}$, -9.6×10^{-5}.　(5) $\frac{1}{x}+\frac{1}{1.5x}=\frac{1}{12}$.　(6) -2.4×10^{-4}.

3. (1) $\frac{a}{3bx}$.　(2) $\frac{x+3}{2-x}$.　(3) $\frac{-12xy^2}{5a^3b^2}$.　(4) $\frac{x+1}{x+2}$.　**4.** (1) $\frac{7a}{2x}$.　(2) $\frac{2}{x+3}$.
(3) $\frac{4a^2b}{a^4-b^4}$.　(4) $\frac{x+3}{x}$.　**5.** 解相同;理由略.　**6.** 6 个;$\frac{3-x}{3x}$,$\frac{3x}{2x+3}$等.　**7.** (1) $-\frac{1}{2x+6}$.
(2) $\frac{2}{x-1}$.　(3) $\frac{2}{x^2+2x+1}$.　(4) $\frac{2}{x-2}$.　**8.** (1) 原式化简为$-2m$,当$m=2.5$时,该式的值为-5.
(2) 原式化简为$\frac{2}{x-5}$,当$x=7$时,该式的值为1.　**9.** (1) $x=-1$.　(2) $x=-\frac{9}{2}$.　(3) $x=\frac{3}{4}$.
(4) $x=-\frac{5}{4}$.　**10.** 甲的速度为60千米/时,乙的速度为40千米/时.　**11.** 小丽每分钟折4只,小杰每分钟折3只.　**12.** 365,5,48,45.

第十一章　图形的运动

习题 11.1

1. (1) 右,9,下,3.　(2) 把三角形甲先向下移动3个单位,再向右移动9个单位.　**2.** 略.
3. 略.

习题 11.2

1. 略.　**2.** 略.　**3.** 略.

习题 11.3

1. 是,最小角为120°.　**2.** 共有3个,点C、点D、CD的中点.　**3.** 第(1)张.　**4.** 略.

习题 11.4

1. 略.　**2.** 略.　**3.** 略.　**4.** 略.

习题 11.5

1. 略.　**2.** (1)(3)(5)(6).　**3.** 是轴对称.　**4.** 略.

习题 11.6

1. 略. **2.** 略. **3.** C. **4.** 略. **5.** 略. **6.** D. **7.** 略. **8.**（1）略. （2）三角形 $A_2B_2C_2$ 是三角形 ABC 关于点 O 的中心对称图形.

复习题

1. 略. **2.** 点 A 的对应点是点 E，点 C 的对应点是点 G，线段 AB 的对应线段是 EF，线段 CD 的对应线段是 GH，$\angle ADC$ 的对应角是 $\angle EHG$. **3.** 39 毫米. **4.** 略. **5.** 略. **6.** 略. **7.** 略. **8.** 略. **9.** 等边三角形有 3 条对称轴，正方形有 4 条对称轴. **10.** 略. **11.** 略. **12.** 略.

说　　明

本册教材根据上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会制定的课程方案和《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》编写,供九年义务教育七年级第一学期试用.

本教材由上海师范大学主持编写,经上海市中小学教材审查委员会审查准予试用.

本册教材的编写人员有:

主编:邱万作　　　分册主编:黄　华

特约撰稿人:(按姓氏笔画为序)齐　敏　李燕琴　黄　华　穆晓东　等

2019 年教材修订组成员:叶锦义　邵世开　沈　洁　陆海兵　徐晓燕　顾跃平

欢迎广大师生来电来函指出教材的差错和不足,提出宝贵意见.出版社电话:021-64319241.

图书在版编目（CIP）数据

九年义务教育数学教学参考资料. 七年级. 第一学期:试用本 / 上海市中小学（幼儿园）课程改革委员会编. — 上海:上海教育出版社, 2019.7（2023.6重印）
ISBN 978−7−5444−9340−6

Ⅰ. ①九… Ⅱ. ①上… Ⅲ. ①中学数学课 – 初中 – 教学参考资料 Ⅳ. ①G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第151483号

经上海市中小学教材审查委员会审查
准予试用　准用号Ⅱ－CJ－2019002

责任编辑　张莹莹

九年义务教育

数学教学参考资料

七年级第一学期

(试用本)

上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会

上海世纪出版股份有限公司
上　海　教　育　出　版　社 出版

（上海市闵行区号景路159弄C座　　邮政编码:201101）

上海新华书店发行　　上海中华印刷有限公司印刷

开本 890×1240　1/16　印张 8.75

2019年7月第1版　　2023年6月第5次印刷

ISBN 978-7-5444-9340-6/G·7701

定价:20.00元

ISBN 978-7-5444-9340-6