国家教材委员会专家委员会审核通过 2024

义务教育教科书

（五·四学制）

数学

七年级

下册

上海教育出版社

义务教育教科书

（五·四学制）

数学

七年级
下册

主编　李大潜

上海教育出版社

主　　编：李大潜
本册主编：徐斌艳
本册编写人员：金荣生　王春明　应坚刚　王松萍　胡　军　周子翔　陶志诚　王　鼎

责任编辑：项征御　周明旭
装帧设计：王　捷　周　吉

本册教科书中的图片由视觉中国、图虫・创意、壹图等图片网站提供

义务教育教科书（五・四学制）　数学　七年级下册

出　版　上海教育出版社（上海市闵行区号景路159弄C座）
发　行　上海新华书店
印　刷　上海中华印刷有限公司
版　次　2024年12月第1版
印　次　2024年12月第1次印刷
开　本　787 毫米×1092 毫米　1/16
印　张　10.25
字　数　155 千字
书　号　ISBN 978−7−5720−3213−4/G·2840
定　价　10.50 元

主编的话

世间的万事万物都有数和形这两个侧面，数学这门学科是忽略了事物的其他属性仅仅从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界的.

初中的数学，介于小学数学与高中数学之间，以往偏向于直观的数学教学将开始逐步走向理性的阶段，对学生逻辑思维的训练会提出较高的要求，其认识也将不断得到深化.

数学是一门重理解和思考的学科. 数学学得好，主要看三条：一是理解要深入，二是运作要熟练，三是表达要清晰. 这儿所提的“运作”，泛指推理及计算. 这三者中最重要的是理解，只有理解深入，才能实现运作熟练和表达清晰这样一些外在层面上的表现，才能真正掌握数学的精髓.

这些年参加了上海市的一些基础数学教科书的编写工作，常常听到一种说法：数学是绝大多数学生一生中学得最多的一门功课，不少学生对数学是喜欢和热爱的，但不太注意对数学真正的理解和感悟，花费了不少时间去刷题，学习负担虽重，却远未达到应有的收获；还有相当一部分学生觉得数学抽象、难懂、神秘，从而望而生畏，甚至避之唯恐不及. 所有这些，都不是我们希望看到的.

我们希望通过教师及学生的共同努力，使数学成为一门容易为学生接受，真正喜闻乐见、可近可亲的课程；不仅负担不重而且愈学愈想学，愈学愈有趣味，愈学愈觉得数学内容丰富、奥妙无穷，深深地为其吸引和陶醉. 这是我们的一个理想，并相信它是一定可以实现的.

为了实现我们的理想，我们希望这套教科书能真正抓住初中数学的真谛，用朴实无华且单刀直入的方式展现初中阶段应该学习的基本数学内容，努力给学生带来明确而清晰的印象，真正帮助他们理解与掌握有关的数学内容，使学生的数学知识随着年龄的增长逐步增进，充分体现数学学科的育人价值.

本册包含 4 章及 2 个实践活动. 在“一元一次不等式”这一章中，将学习不等式的性质，并以此为基础解一元一次不等式与一元一次不等式组. 在“相交线与平行线”“三角形”“等腰三角形”这三章中，将以平面几何为载体，开始学习演绎推理与论证. 除了要学一些具体的几何知识，更要着重学习概念的定义、命题的陈述及证明过程的展现. 在“综合与实践”中，将动手叠积木，从数学角度讨论在什么条件下所叠积木不倒塌，还将研究田径比赛中的数学.

目　录

第 15 章　一元一次不等式

第 16 章　相交线与平行线

第 17 章　三角形

第 18 章　等腰三角形

综合与实践

第15章

一元一次不等式

数量之间可能相等，也可能不相等. 相等关系与不等关系是最基本的数量关系，等式与不等式分别是表示相应数量关系的基本工具.

本章将类比等式的情形学习不等式的性质，并以此为基础解一元一次不等式与一元一次不等式组. 要注意等式性质和不等式性质的异同，等号没有“方向”，而不等号有“方向”：不等式的两边同乘一个负数，不等号的方向改变.

本章内容可用于解决一些简单的实际问题，也是学习后续数学知识的必要基础.

15.1 不等式及其性质

在自然界和日常生活中存在着各种大小关系，如月球的质量比地球的小，飞机的速度比汽车的快，直角大于锐角，商品打折后的价格比原价低，等等. 可以说，数量的大小比较无处不在，而表示数量的大小关系需要用到不等式.

对于数 a、b，符号 $\boldsymbol{a>b}$ 表示 a 大于 b；符号 $\boldsymbol{b<a}$ 表示 b 小于 a. $b<a$ 就是 $a>b$.

除“$>$”和“$<$”外，不等号还有“$\geqslant$”和“$\leqslant$”. $\boldsymbol{a\geqslant b}$ 表示 $a>b$ 或 $a=b$，读作“a 大于(或)等于 b”. 同样地，$\boldsymbol{a\leqslant b}$ 表示 $a<b$ 或 $a=b$，读作“a 小于(或)等于 b”.

用等号“$=$”连接的式子叫作等式，类似地，用不等号“$>$”“$<$”“$\geqslant$”“$\leqslant$”连接的式子，叫作**不等式**. 不等式与等式一样，都是研究数量关系的工具.

例 1 用适当的不等式表示下列关系：

(1) x 的 2 倍大于 1；

(2) a 的绝对值大于等于 a；

(3) 圆周率 π 大于 3 且小于 4.

解 (1) $2x>1$.

(2) $|a|\geqslant a$.

(3) $3<\pi<4$.

数的大小关系可以用其在数轴上对应的点的位置关系来表示. 数轴上右边的点所表示的数比左边的点所表示的数大. 设数 a、b、c 在数轴上对应的点分别为 A、B、C，点 A 或者在点 B 的右边、或者在点 B 的左边、或者与点 B 重合. 由此可以得出：

不等式性质 1 对于任意给定的两个数 a、b，在 $a>b$、$a<b$、$a=b$ 三种情形中，有且只有一种情形成立.

若点 A 在点 B 的右边，点 B 在点 C 的右边，则点 A 在点 C 的右边. 由此可以得出：

不等式性质 2 如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$.

如同相等关系具有传递性，不等式性质 2 表明大于关系也具有传递性. 同样地，“$\geqslant$”“$\leqslant$”与“$<$”也具有传递性.

思考

写出用不等号“$<$”表示的传递性.

课堂练习 15.1(1)

1. 用适当的不等式表示下列关系：

(1) a 与 5 的和大于-3；

(2) a 的 4 倍小于等于 12；

(3) a 的 3 倍减去 2 的差是一个非负数；

(4) a 的一半小于 a 与 b 的积.

2. 用适当的不等号填空：

(1) 如果 a 是正数，那么 a________0；

(2) 如果 a 是负数，那么 a________0；

(3) 如果 $a\geqslant b$，$b\geqslant c$，那么 a________c.

在等式的两边同加(或减)一个数，等式仍成立；在等式的两边同乘(或除以不等于 0 的)一个数，等式仍成立. 不等式是否存在类似的性质呢？观察几个具体例子：

(1) 在 $5>2$ 的两边同加 3，$8>5$ 成立；在 $1<8$ 的两边同减 3，$-2<5$ 成立.

(2) 在 $5>2$ 的两边同乘 3，$15>6$ 成立；在 $12>-8$ 的两边同除以 4，$3>-2$ 成立.

（3）在 $5>2$ 的两边同乘 -1，发现 $-5<-2$；在 $-10<4$ 的两边同除以 -2，发现 $5>-2$.

一般地，不等式有下述性质. 我们以“$>$”为例表述这些性质，其他不等号类似.

不等式性质 3　不等式的两边同加(或减)一个数，不等号的方向不变.

比如，如果 $a>b$，那么 $a+m>b+m$，$a-m>b-m$.

不等式性质 4　不等式的两边同乘(或除以)一个正数，不等号的方向不变.

比如，如果 $a>b$，$m>0$，那么 $am>bm$，$\frac{a}{m}>\frac{b}{m}$.

不等式性质 5　不等式的两边同乘(或除以)一个负数，不等号的方向改变.

比如，如果 $a>b$，$m<0$，那么 $am<bm$，$\frac{a}{m}<\frac{b}{m}$.

不等式的这些性质，是我们研究和求解不等式的基础.

例 2　设 $a<b$，用适当的不等号填空，并说明理由：

（1）$a-b$________0；

（2）$-2a$________$-2b$；

（3）$2a+3$________$2b+3$.

解　（1）填“$<$”，即 $a-b<0$.

理由：在 $a<b$ 的两边同减 b，就得到 $a-b<0$.

（2）填“$>$”，即 $-2a>-2b$.

理由：在 $a<b$ 的两边同乘 -2，就得到 $-2a>-2b$.

（3）填“$<$”，即 $2a+3<2b+3$.

理由：在 $a<b$ 的两边同乘 2，得 $2a<2b$；再在 $2a<2b$ 的两边同加 3，就得到 $2a+3<2b+3$.

例 3 说明下列表述正确的理由：

（1）如果 $a+b>c$，那么 $a>c-b$；

（2）一个数与正数的和大于其本身.

解 （1）在 $a+b>c$ 的两边同减 b，就得到 $a>c-b$.

（2）设一个数为 a，m 为一个正数，要说明 $a+m>a$. 事实上，在不等式 $m>0$ 的两边同加 a，就得到 $a+m>a$.

例 3 中的(1)表明，不等式一边中的某项可以改变符号后移到不等式的另一边，这种变形就是不等式中的移项.

$$a\boxed{+b}>c$$
$$a>c\boxed{-b}$$

课堂练习 15.1(2)

1. 设 $a>b$，用适当的不等号填空，并说明理由：

（1）$-5a$________$-5b$；

（2）$a+\dfrac{3}{8}$________$b+\dfrac{3}{8}$；

（3）$9a$________$9b$.

2. 用适当的不等号填空：

（1）如果 $ab>0$，$b>0$，那么 a________0；

（2）如果 $a>b$，那么 $-2a+3$________$-2b+3$.

习题 15.1

A

1. 用适当的不等式表示下列关系：

（1）a 的 3 倍与 8 的和小于-9；

（2）x 的$\dfrac{4}{5}$减去 14 的差大于等于-7；

(3) y 的 4 倍减去$\frac{1}{3}$的差是一个非负数.

2. 下列变形是否正确？如不正确，应该如何改正？

(1) 由 $a>b$，得 $a+2a>b-2a$；

(2) 由$\frac{1}{3}x+2<2x$，得$\frac{1}{3}x<2x-2$.

3. 设 $a<b$，用适当的不等号填空，并说明理由：

(1) $-0.8a$________$-0.8b$；

(2) $a+\frac{1}{6}$________$b+\frac{1}{6}$；

(3) $\frac{7}{3}(a-1)$________$\frac{7}{3}(b-1)$.

4. 用适当的不等号填空：

(1) 当 $a>0$，$b<0$ 时，ab________0；

(2) 当 $a<0$，b________0 时，$ab<0$；

(3) 当 $x>y$ 时，$11-x$________$11-y$；

(4) 当 $6x\leqslant 1$ 时，$6x+4$________5.

5. 说明：一个数与负数的和小于其本身.

6. 用不等式表示语句："如果 a 是正数，b 是负数，那么 ab 是负数".

B

7. 设 $a<b<0$，用适当的不等号填空：

(1) ab________a^2；

(2) ab________b^2；

(3) a^2________b^2.

8. "$a^2\geqslant 0$"是否对任意的有理数 a 都成立？请说明理由，并指出等号何时成立.

15.2 一元一次不等式

1. 不等式的解和解集

对于方程，我们要研究方程的解和解方程的方法. 对于含有未知数的不等式，同样也要研究不等式的解和解不等式的方法.

类比方程的解的意义，在含有未知数的不等式中，能使不等式成立的未知数的值，叫作**不等式的解**. 在不等式 $2x-1>3$ 中，将 $x=3$，$x=5.6$ 代入验算，该不等式都成立，因此这些值都是该不等式的解；但 $x=2$，$x=0$ 却不能使该不等式成立，因而不是该不等式的解.

只含有一个未知数且未知数的次数是 1 的不等式叫作**一元一次不等式**. 一元一次方程只有一个解，但一元一次不等式可能有无数个解. 一个不等式的解的全体叫作**不等式的解集**.

不等式的解集可以在数轴上直观地表示出来，如不等式 $x<4$ 的解集在数轴上的表示如图 15-2-1 所示：

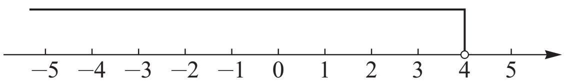


图 15-2-1

在表示 4 的点上画空心圈，表示 4 不包含在解集中. 在表示 -5 的点上画实心点，表示 -5 包含在解集中.

不等式 $x\geqslant-5$ 的解集在数轴上的表示如图 15-2-2 所示：

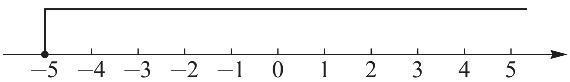


图 15-2-2

求不等式的解集的过程叫作**解不等式**.

例 1 求下列不等式的解集，并把它们分别在数轴上表示出来：

(1) $x-2<0$；

(2) $3x\geqslant-15$.

解 （1）不等式的两边同加 2，得 $x<2$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 15-2-3 所示：

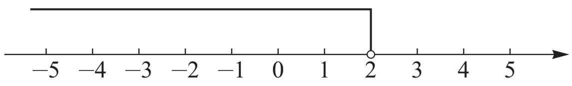


图 15-2-3

（2）不等式的两边同除以 3，得 $x \geqslant -5$.

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 15-2-4 所示：

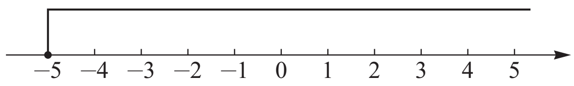


图 15-2-4

例 2 分别写出一个关于 x 的不等式，使其解集在数轴上的表示如图 15-2-5、图 15-2-6 所示：

（1）

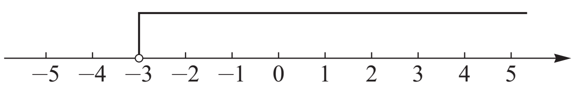


图 15-2-5

（2）

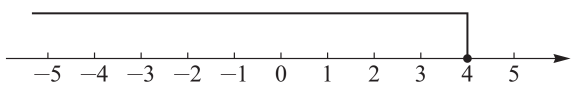


图 15-2-6

解 （1）$x>-3$.

（2）$x \leqslant 4$.

思考

写出两个解集为 $x>-3$ 的不等式.

$x>-3$ 是不等式 $2x>-6$ 的解集，也是不等式 $-x<3$ 的解集. 不同的方程可能有相同的解，类似地，不同的不等式也可能有相同的解集.

课堂练习 15.2(1)

1. 求下列不等式的解集，并把它们分别在数轴上表示出来：

（1）$x+1<3$；（2）$0.5x-6.1>0.15$；

（3）$3y-11>-2$；（4）$z-2\frac{2}{5}\leqslant 7\frac{3}{5}$.

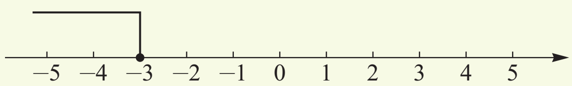
2. 在-3、-1、0、4、8 中，找出使下列不等式成立的 x 的值：

（1）$5x+12<0$；（2）$x-3\geqslant 4$；

（3）$-4x\leqslant -16$；（4）$\frac{3}{4}x>\frac{1}{4}x-2$.

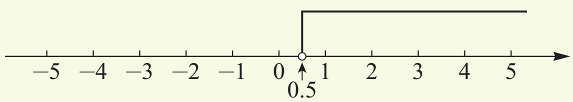
3. 分别写出一个关于 x 的不等式，使其解集在数轴上的表示如图所示.

（1）



（第 3(1)题）

（2）



（第 3(2)题）

2. 解一元一次不等式

问题 怎样解不等式 $5x-1\geqslant 2x+5$?

这是一个一元一次不等式. 类比求解一元一次方程的方法，可以运用不等式的性质，求出解集.

（1）移项，得 $5x-2x\geqslant 5+1$；

（2）合并同类项，得 $3x\geqslant 6$；

（3）两边同除以未知数的系数 3，得 $x\geqslant 2$.

所以，不等式 $5x-1\geqslant 2x+5$ 的解集是 $x\geqslant 2$.

解一元一次不等式的一般步骤是：

（1）化简不等式(去分母、去括号、移项、合并同类项)成 $ax>b$(或 $ax<b$ 等)的形式；

（2）两边同除以未知数的系数，得到不等式的解集.

不等式的两边同除以未知数的系数时，要考查系数 a 的正负. 当 $a>0$ 时，不等号的方向不变；当 $a<0$ 时，不等号的方向改变.

例 3 解不等式 $3x+12>40-x$，并在数轴上表示出它的解集.

解 移项，得

$$3x+x>40-12,$$

即

$$4x>28.$$

两边同除以 x 的系数 4，得

$$x>7.$$

所以，原不等式的解集是 $x>7$. 它在数轴上的表示如图 15-2-7 所示：

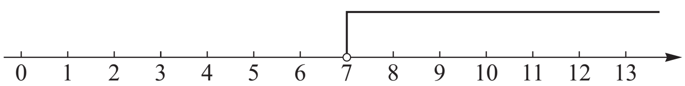


图 15-2-7

例 4 解不等式 $\dfrac{2x-5}{16}\geqslant\dfrac{4x+3}{2}+1$，并在数轴上表示出它的解集.

解 不等式的两边同乘 16，得

$$2x-5\geqslant 8(4x+3)+16.$$

去括号，得

$$2x-5\geqslant 32x+40.$$

移项、合并同类项，得

$$-30x\geqslant 45.$$

两边同除以 x 的系数-30，得

$$x\leqslant-\frac{3}{2}.$$

所以，原不等式的解集是 $x \leqslant -\frac{3}{2}$. 它在数轴上的表示如图 15-2-8 所示：

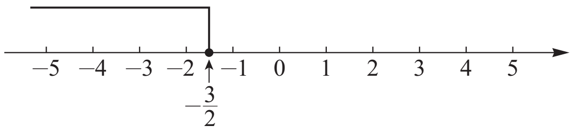


图 15-2-8

课堂练习 15.2(2)

1. 下列解法中，正确的是 (   )

A. $-x \geqslant -5$，两边同乘 -1，得 $x \geqslant 5$；

B. $-x \leqslant -5$，两边同乘 -1，得 $x \leqslant 5$；

C. $2x \geqslant -6$，两边同除以 -2，得 $x \leqslant 3$；

D. $-2x \geqslant -6$，两边同除以 -2，得 $x \leqslant 3$.

2. 解下列不等式，并分别在数轴上表示出它们的解集：

(1) $7x < 6x - 3$；　　(2) $5x - 12 < 8x - 33$；

(3) $\frac{5}{4}x + 4 \leqslant \frac{8}{3}x - 1$；　　(4) $3(6x+7) \geqslant 8 - 2(5x-9)$.

3. 一元一次不等式的应用

方程和不等式都是解决实际问题的基本工具.

例 5 某校七年级师生共 284 人乘车外出春游，如果每辆车可乘 48 人，那么至少需要多少辆车？

解 设需要 x 辆车，根据题意，得

$$48x \geqslant 284.$$

解这个不等式，得

$$x \geqslant \frac{71}{12}.$$

该解集在数轴上的表示如图 15-2-9 所示：

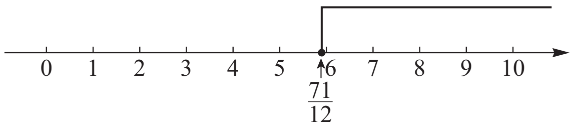


图 15-2-9

因为 x 应是正整数，所以 $x \geqslant 6$.

答：至少需要 6 辆车.

例 6 某次知识竞赛共有 25 道题，规定答对一道题得 4 分，答错一道题扣 1 分，不答题不得分. 在这次竞赛中，小海有 2 道题没有作答. 若希望取得不低于 80 分的成绩，小海至少要答对几道题?

解 设小海答对了 x 道题，又因为有 2 道题没有作答，所以共答错了 $(23-x)$道题. 根据题意，得

$$4x-1\times(23-x)\geqslant 80.$$

解这个不等式，得 $x \geqslant \frac{103}{5}$.

因为 x 应是正整数，所以 $x \geqslant 21$.

答：小海至少要答对 21 道题.

例 7 把一些奖品分给若干名学生. 如果每人分 3 个，那么多出 7 个奖品；如果每人分 5 个，那么有一名学生分到的奖品就少于 3 个. 问：学生最少有几名? 奖品至少有多少个?

解 设有 x 名学生，则奖品有$(3x+7)$个.

若每人分 5 个奖品，则最后一名学生分得 $3x+7-5(x-1)$个奖品.

根据题意，得

$$3x+7-5(x-1)<3.$$

解这个不等式，得 $x>\frac{9}{2}$.

因为 x 应是正整数，所以 $x \geqslant 5$，于是 $3x+7 \geqslant 22$.

答：学生最少有 5 名，奖品至少有 22 个.

应用一元一次不等式解决实际问题的一般步骤是：

（1）分析实际问题，设未知数，用不等式表示相应的不等关系；

（2）解不等式；

（3）结合实际情形，检验并确定最终结论.

课堂练习 15.2(3)

1. 一部电梯的额定载重量为 1 000 kg，某人用这部电梯把一批相同质量的货物从底层搬到顶层. 该人体重为 65 kg，每箱货物的质量为 60 kg. 问：每次最多能搬运多少箱货物？

2. 根据篮球赛的规则，在三分线外投篮命中可得 3 分，在三分线内投篮命中可得 2 分. 某球队在一场篮球赛中不算罚篮共投中 40 个球，罚篮得 10 分，并且总分超过 100 分. 该球队至少投中了多少个三分球？

习题 15.2

A

1. 将下列数填入它们所在的解集中：

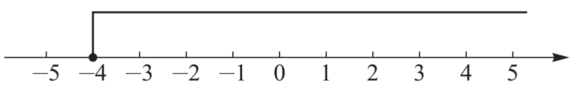
$$7、-5、3.2、-\frac{3}{4}、0、2\,023、-20.$$

（1）$x \geqslant -5$：____________________；

（2）$x < 5$：____________________.

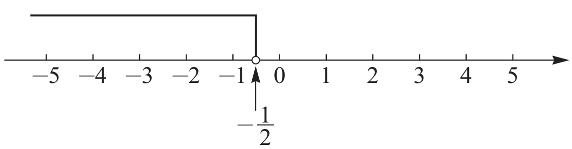
2. 分别写出一个关于 x 的不等式，使其解集在数轴上的表示如图所示.

（1）



（第 2(1) 题）

（2）



（第 2(2) 题）

3. 妈妈让小海去超市买 3 kg 梨和 4 kg 苹果．小海先挑了单价为每千克 14 元的梨．由于小海身上只有 100 元，因此他在挑苹果时，所买的苹果每千克不能超过多少元？

4. 某校七年级三个班进行爱心捐款，其中(1)班捐款 420 元，(2)班捐款 468 元．如果这三个班的平均捐款额超过 450 元，那么(3)班的捐款额应超过多少元？

5. 求下列不等式的解集，并把它们分别在数轴上表示出来：

(1) $2x+\frac{1}{4}<6\frac{1}{4}$；　　(2) $0.03x\geqslant-0.18$；

(3) $\frac{1}{3}y+25\leqslant22$；　　(4) $3z-17>-29$．

B

6. 根据题意列出不等式，并求解：

(1) x 的$\frac{2}{3}$与 2 的和是正数；

(2) 3 与 x 的和的 2 倍不小于 10；

(3) $\frac{x+1}{2}$ 减去$(2x-1)$的差大于 2．

7. 当 m 满足什么条件时，$x=3-2m$ 是不等式$\frac{1}{5}(x-3)<x-\frac{3}{5}$的一个解？

15.3 一元一次不等式组

问题 一件商品的成本是 30 元．若按原价的八八折销售，至少可获得 10%的利润；若按原价的九折销售，能获得不足 20%的利润．商品的原价满足什么条件?

分析 设这件商品的原价为 x 元，根据题意，x 必须同时满足下列两个不等式：

$$88\%x\geqslant30+30\times10\% \text{ 和 } 90\%x<30+30\times20\%.$$

可以写为：
$$\begin{cases}88\%x\geqslant30+30\times10\%,\\90\%x<30+30\times20\%.\end{cases}$$

由几个含有同一个未知数的一元一次不等式组成的一组不等式叫作**一元一次不等式组**.

方程组中的未知数一般多于一个，如二元一次方程组 $\begin{cases}x+y=1,\\x-y=2\end{cases}$ 有两个未知数——x 和 y，但一元一次不等式组中的未知数只有一个.

不等式组中所有不等式的解集的公共部分叫作**不等式组的解集**.

例如，对于不等式组 $\begin{cases}2x+1>3,\\x\leqslant4,\end{cases}$ $x=2$ 同时满足两个不等式，它是这个不等式组的解．虽然 $x=5$ 满足第一个不等式 $2x+1>3$，但不满足第二个不等式 $x\leqslant4$，因此 $x=5$ 不是这个不等式组的解．类似地，$x=1$ 满足第二个不等式，但不满足第一个不等式，因此也不是这个不等式组的解.

求不等式组的解集的过程叫作**解不等式组**.

例 1 利用数轴确定下列不等式组的解集：

(1) $\begin{cases}x>4,\\x>8;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x<4,\\x<-3;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x<4.5,\\x>-3;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x>4,\\x<-3\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

解 （1）分别把 $x>4$ 和 $x>8$ 的解集在数轴上表示出来，如图 15-3-1 所示：

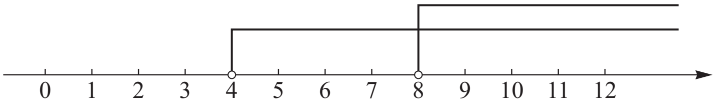


图 15-3-1

两个不等式的解集的公共部分是 $x>8$，因此不等式组 $\begin{cases} x>4, \\ x>8 \end{cases}$ 的解集是 $x>8$.

（2）分别把 $x<4$ 和 $x<-3$ 的解集在数轴上表示出来，如图 15-3-2 所示：

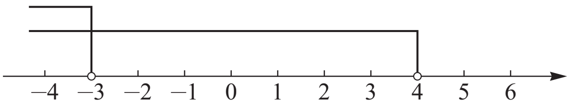


图 15-3-2

两个不等式的解集的公共部分是 $x<-3$，因此不等式组 $\begin{cases} x<4, \\ x<-3 \end{cases}$ 的解集是 $x<-3$.

（3）分别把 $x<4.5$ 和 $x>-3$ 的解集在数轴上表示出来，如图 15-3-3 所示：

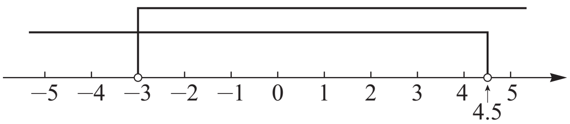


图 15-3-3

两个不等式的解集的公共部分是 $-3<x<4.5$，因此不等式组 $\begin{cases} x<4.5, \\ x>-3 \end{cases}$ 的解集是 $-3<x<4.5$.

（4）分别把 $x>4$ 和 $x<-3\dfrac{1}{2}$ 的解集在数轴上表示出来，如图 15-3-4 所示：

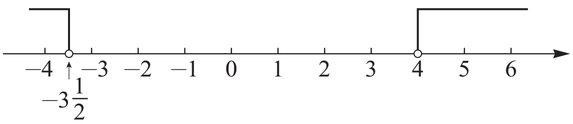


图 15-3-4

两个不等式的解集没有公共部分，因此不等式组 $\begin{cases} x>4, \\ x<-3\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 无解.

解一元一次不等式组的一般步骤：

（1）求出不等式组中各个不等式的解集，并分别在数轴上表示出来；

（2）确定各个不等式的解集的公共部分，得到不等式组的解集.

课堂练习 15.3(1)

1. 利用数轴确定下列不等式组的解集：

（1）$\begin{cases} x>0, \\ x>2; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x<1\dfrac{1}{2}, \\ x<-5; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x\leqslant 2\dfrac{1}{3}, \\ x>-0.5; \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} x\leqslant -7, \\ x\geqslant 2\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

2. 设 $a<b$，求下列不等式组的解集：

（1）$\begin{cases} x<a, \\ x<b; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x>a, \\ x>b; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x>a, \\ x<b; \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} x<a, \\ x>b. \end{cases}$

例 2　解不等式组：$\begin{cases} 4x>2x-6, & ① \\ 10+3x>7x-30. & ② \end{cases}$

解　由①，得

$$2x>-6.$$

解得

$$x>-3.$$

由②，得

$$-4x>-40.$$

解得

$$x<10.$$

不等式①②的解集在数轴上的表示如图 15-3-5 所示：

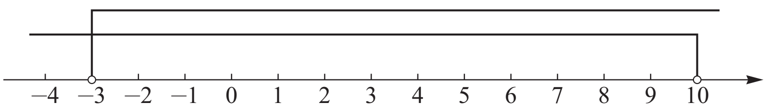


图 15-3-5

两个不等式的解集的公共部分是 $-3<x<10$，因此原不等式组的解集是 $-3<x<10$.

下面，我们来回答本节开头的“问题”.

例 3 解不等式组：$\begin{cases} 88\%x\geqslant 30+30\times 10\%, \\ 90\%x<30+30\times 20\%. \end{cases}$

解 不等式 $88\%x\geqslant 30+30\times 10\%$ 可化为 $88x\geqslant 3\,000+300$，其解集是 $x\geqslant 37.5$.

不等式 $90\%x<30+30\times 20\%$ 可化为 $90x<3\,000+600$，其解集是 $x<40$.

在数轴上分别将不等式 $x\geqslant 37.5$ 和 $x<40$ 的解集表示出来，如图 15-3-6 所示：

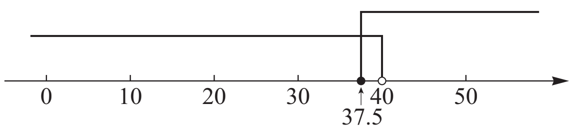


图 15-3-6

由此可得，原不等式组的解集是 $37.5\leqslant x<40$.

因此，本节“问题”中商品的原价在 37.5 元和 40 元之间(含 37.5 元，不含 40 元).

课堂练习 15.3(2)

1. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} 3x-5>2x-1, \\ 5x-6>2x; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 5-2x<2x-1, \\ x+3>2x. \end{cases}$

2. 解下列不等式组：

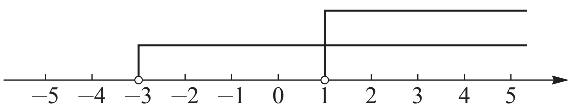
(1) $\begin{cases} 16x>24x-32, \\ 9x>7x-6; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2(x-4)\leqslant x-6, \\ 4+x>5x-24; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{x-7}{15}<\dfrac{x-2}{5}, \\ \dfrac{1}{2}x-1\leqslant 3-\dfrac{3}{2}x. \end{cases}$

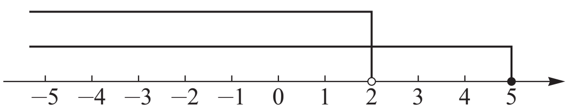
习题 15.3

A

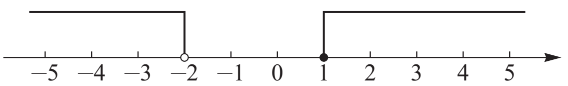
1. 根据图示，写出下列数轴上公共部分所表示的关于 x 的一元一次不等式组的解集：



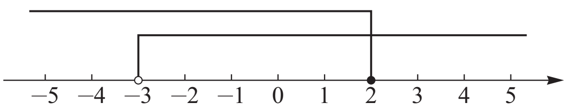
________________；



________________；



________________；



________________.

（第 1 题）

2. 利用数轴确定下列不等式组的解集：

（1）$\begin{cases} x>-4, \\ x>-2.5; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x\leqslant 5\dfrac{1}{4}, \\ x<-2.5; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x\leqslant 4\dfrac{1}{2}, \\ x>-5; \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} x\geqslant 6, \\ x\leqslant -2\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

3. 解下列不等式组：

（1）$\begin{cases} 4x-15>2x-3, \\ 5x-7>3x; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 4-3x<3x-2, \\ x+4>3x. \end{cases}$

4. 解下列不等式组：

（1）$\begin{cases} 2x>3.14, \\ \dfrac{1}{2}x+3>5; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 2x+1<1.41, \\ \dfrac{2-x}{3}+1\geqslant x. \end{cases}$

B

5. 请写出一个不等式组，使它的解集是$-1\leqslant x<0$．你认为这样的不等式组有多少个?

6. 若关于x的不等式组$\begin{cases} x<m+1, \\ x>2m-1 \end{cases}$无解，求$m$应满足的条件.

7. 用浓度分别为10％和0.9％的两种盐水配制10 kg新盐水，要求配得的新盐水的浓度既不低于4％又不超过6％．求浓度为10％的盐水用量满足的条件(结果精确到0.01 kg).

◎内容提要

1. 基本概念：不等式，一元一次不等式(组)，不等式(组)的解集.

2. 不等式的性质：

性质 1　对于任意给定的两个数 a、b，在 $a>b$、$a<b$、$a=b$ 三种情形中，有且只有一种情形成立.

性质 2　如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$.

性质 3　如果 $a>b$，那么 $a+m>b+m$，$a-m>b-m$.

性质 4　如果 $a>b$，$m>0$，那么 $am>bm$，$\dfrac{a}{m}>\dfrac{b}{m}$.

性质 5　如果 $a>b$，$m<0$，那么 $am<bm$，$\dfrac{a}{m}<\dfrac{b}{m}$.

3. 解一元一次不等式的一般步骤：

(1) 化简不等式(去分母、去括号、移项、合并同类项)成 $ax>b$(或 $ax<b$ 等)的形式；

(2) 两边同除以未知数的系数，得到不等式的解集.

4. 解一元一次不等式组的一般步骤：

(1) 求出不等式组中各个不等式的解集，并分别在数轴上表示出来；

(2) 确定各个不等式的解集的公共部分，得到不等式组的解集.

◎复习题

A

1. 根据题意列不等式(组)：

(1) x 与 y 的 2 倍的和不小于 10：______________；

(2) 边长为 a 的正方形的周长小于半径为 a 的圆的周长：__________；

(3) x 与 y 的和是非负数，且 x 与 y 的积不小于 4：____________.

2. 用适当的不等号填空：如果 $a\leqslant b$，$b\leqslant c$，那么 a______c.

3. 求下列不等式的解集，并把它们分别在数轴上表示出来：

(1) $\frac{3}{2}x-2<7$；　　(2) $0.42x\leqslant -0.84$；

(3) $\frac{3z+7}{2}\geqslant\frac{2z+13}{3}$.

4. 当 k 满足什么条件时，关于 x 的方程 $4(2x-5k)-2=-(x-7k)$ 的解是正数？是负数？

5. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}3x>21,\\4x+5>7x-31;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}5(x-9)\geqslant 15-6(x-1),\\\frac{1}{5}x-2\leqslant 4-\frac{2}{5}x.\end{cases}$

6. 当 x 满足什么条件时，$4x+6$ 与 $2x-1$ 的值都是负数？

7. 今年小海 13 岁，他的爸爸 45 岁，那么小海至少几岁时，他的年龄才能超过爸爸年龄的$\frac{1}{3}$？

B

8. 当 a 为何值时，关于 x 的不等式组$\begin{cases}\frac{5-2x}{4}\leqslant\frac{3-2x}{6},\\5x\leqslant x-14+a\end{cases}$恰有一个解？

9. 一队战士以 8 km/h 的速度前进. 队尾的通信兵需要把一份急件交给队首的队长，他以 10 km/h 的速度赶到队首后马上又以同样的速度返回，一共用时不超过 15 min. 求队伍至多有多长.

10. 已知 $a\neq 1$，解关于 x 的不等式 $(a-1)x\leqslant a^2-1$.

第 16 章

相交线与平行线

平面上两条直线，要么相交，要么平行.

关于相交线，可从它们所成角的大小来认识其位置关系. 垂直是相交的特殊情况，在几何中具有特殊的地位. 由于直线是无限延伸的，很难通过直观验证两条直线“不相交”来判断其是否平行，需要寻找等效的判定依据，因此在讨论平行线时，可以考虑利用两条直线与第三条直线相交所成的角，来研究平行线的判定依据与性质.

对数学对象的研究，只凭观察、测量、类比、归纳是不能让人完全信服的. 从本章开始，我们要以平面几何为载体，学习演绎推理与论证. 这就是说，要从已知条件出发，依据已被承认的事实(包括定义、公理、定理等)，通过逻辑推理去探索并证明新的事实. 为此，除了学习一些具体的知识，更要着重学习概念的定义、命题的陈述及证明的展现与表达，加强逻辑推理的训练.

16.1 相交线

1. 对顶角

观察

用一枚钉子将一根木条钉在墙上，木条可以绕着钉子转动，如图 16-1-1(1)所示. 当用两枚钉子把木条钉在墙上时，木条就被固定住了，如图 16-1-1(2)所示.

(1)　　(2)

图 16-1-1

这表明，经过一点有无数条直线，如图16-1-2(1)所示. 经过两点有一条直线，并且只有一条直线，如图 16-1-2(2)所示.

(1)　　(2)

图 16-1-2

像这样从实践经验中总结出来的事实还有很多. 在几何里，挑选其中一些基本事实，承认其正确性，将其作为用逻辑推理证实其他事实的原始依据. 这些基本事实称为**公理**.①

公理　经过两点有一条直线，并且只有一条直线.

---

①　公理的选择方式并不是唯一的，本套教科书中所列出的公理，与欧几里得的《几何原本》中的公理并不完全一致，与其他教科书中所列出的公理也可能不尽相同，但对学习推理及论证，均能起到同样的作用.

简单地说：**两点确定一条直线**.

如图 16-1-3，将两根木条 a、b 用一枚钉子钉在一起，给我们以两条直线相交的形象.

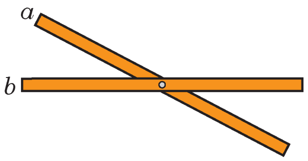


图 16-1-3

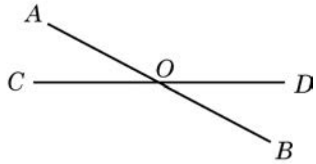


图 16-1-4

当两条直线有一个公共点时，就称这两条直线相交，或称它们是相交直线. 这个公共点叫作它们的交点. 在图 16-1-4 中，直线 AB、CD 相交，O 是它们的交点.

思考

两条直线能有两个或两个以上的交点吗？

如无特殊说明，本套教科书中两条直线指的是两条不重合的直线.

两条直线相交，只有一个交点.

原因如下：假设两条直线相交，有两个交点，那么经过这两个交点就有了两条直线，这与“两点确定一条直线”的公理相矛盾. 所以两条直线不可能有两个或两个以上的交点.

如图 16-1-5，直线 AB、CD 相交于点 O，构成以 O 为顶点的四个角：$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$ 和 $\angle 4$，它们是直线 AB、CD 相交所成的角. 其中 $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 有一个公共顶点 O，并且 $\angle 1$ 的两边 OA、OD 分别与 $\angle 3$ 的两边 OB、OC 互为反向延长线，具有这种关系的两个角叫作对顶角. 有时也称它们互为对顶角. 例如，$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 是对顶角，$\angle 2$ 和 $\angle 4$ 也是对顶角.

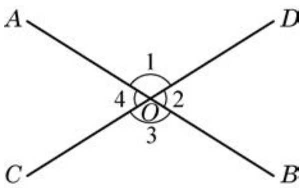


图 16-1-5

这样就明确界定了对顶角这个概念. 像这样界定一个概念的语句叫作**定义**，一般写成下面的形式.

定义 有公共顶点，且其中一个角的两边分别是另一个角的两边的反向

延长线的两个角叫作**对顶角**.

通过观察，猜想对顶角总是相等的. 由于观察及测量总会有误差，怎么才能说明这个猜想一定是正确的呢？数学上要求从已知条件出发，依据已被确认的事实(包括定义、公理等)，通过逻辑推理说明猜想的正确性，这个过程叫作**证明**. 被证明的猜想可以作为定理.

定理　对顶角相等.

如图 16-1-5，已知：直线 AB、CD 相交于点 O，$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 是对顶角.

求证：$\angle 1=\angle 3$.

证明　因为直线 AB、CD 相交于点 O，所以

$$\angle 1+\angle 2=180^\circ，\angle 2+\angle 3=180^\circ.$$

根据等式性质，得 $\angle 1=180^\circ-\angle 2$，$\angle 3=180^\circ-\angle 2$.

因此，$\angle 1=\angle 3$.

例 1　如图 16-1-6，已知直线 AB、CD 相交于点 O，$\angle AOC=50^\circ$. 求 $\angle BOD$、$\angle AOD$ 的度数.

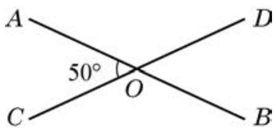


图 16-1-6

解　因为直线 AB、CD 相交于点 O，所以 $\angle BOD$ 与 $\angle AOC$ 是对顶角. 由“对顶角相等”，可得

$$\angle BOD=\angle AOC=50^\circ.$$

因为点 O 在直线 CD 上，所以

$$\angle AOD=180^\circ-\angle AOC=180^\circ-50^\circ=130^\circ.$$

因此，$\angle BOD=50^\circ$，$\angle AOD=130^\circ$.

例 2　如图 16-1-7，已知直线 AB、CD 相交于点 O，OE 平分 $\angle BOC$，$\angle BOE=65^\circ$. 求 $\angle AOD$ 的度数.

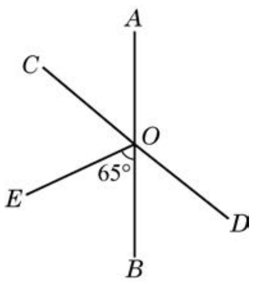


图 16-1-7

解　因为 OE 平分 $\angle BOC$，$\angle BOE=65^\circ$，所以

$$\angle BOC=2\angle BOE=2\times 65^\circ=130^\circ.$$

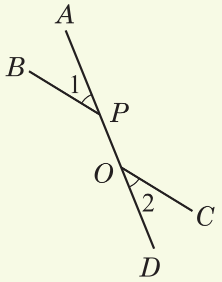
因为直线 AB、CD 相交于点 O，所以 $\angle AOD$ 与 $\angle BOC$ 是对顶角. 由“对顶角相等”，可得

$$\angle AOD = \angle BOC = 130^\circ.$$

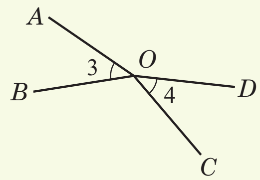
课堂练习 16.1(1)

1. (1) 如图(1)，已知 O、P 是直线 AD 上两点，$\angle 1=\angle 2$. $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是对顶角吗？请说明理由.

(2) 如图(2)，已知 $\angle 3=\angle 4$，$\angle 3$ 与 $\angle 4$ 是对顶角吗？请说明理由.



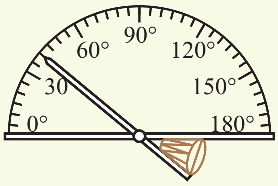
(1)



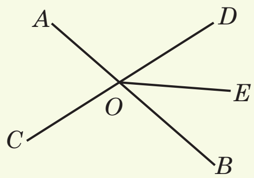
(2)

(第 1 题)

2. 一个对顶角量角器如图所示，请说出它的测量依据.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，已知直线 AB、CD 相交于点 O，OE 平分 $\angle BOD$，且 $\angle AOC=72^\circ$. 求 $\angle BOE$ 的度数.

2. 垂线

如图 16-1-8，木条 a 与木条 b 相交形成的四个角的大小随着木条 a 的转动而变化.

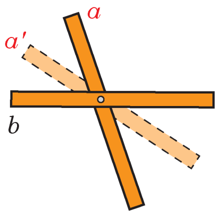


图 16-1-8

两条直线相交，形成四个小于平角的角，其中不大

于直角的那个角叫作这两条直线的**夹角**. 两条直线相交的位置特征，可以通过两条直线的夹角来描述.

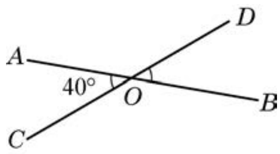


图 16-1-9

如图 16-1-9，直线 AB、CD 相交于点 O，$\angle AOC=40^\circ$，那么 $\angle AOC$ 是直线 AB、CD 的夹角，其大小是 40°.

思考

如图 16-1-10，直线 AB、CD 相交于点 O，$\angle AOD=150^\circ$. 求直线 AB 与直线 CD 的夹角的度数.

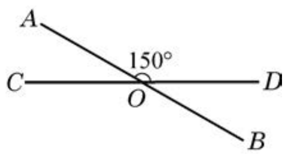


图 16-1-10

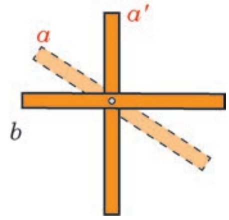


图 16-1-11

在图 16-1-11 中，转动木条 a 到 a'，使得 a' 与 b 的夹角是 90°，这时称 a' 与 b 互相垂直.

定义 如果两条相交直线的夹角为直角，就称这两条直线互相**垂直**，其中一条直线叫作另一条直线的**垂线**，它们的交点叫作**垂足**.

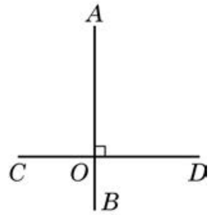


图 16-1-12

垂直用符号“⊥”表示，两条直线 AB、CD 互相垂直，记作 $AB\perp CD$，读作“AB 垂直于 CD”.

垂直是两条直线相交的一种特殊情况. 如图 16-1-12，若已知 $\angle AOD=90^\circ$，根据垂直的定义，可得 $AB\perp CD$；反过来，若已知 $AB\perp CD$，根据垂直的定义，可得 $\angle AOC=\angle COB=\angle BOD=\angle AOD=90^\circ$.

通常在两条直线的交点处标上符号“┐”，来表示这两条直线互相垂直.

讨论

在日常生产和生活中，经常可以遇到两条直线互相垂直的情形. 请指出图 16-1-13 中互相垂直的直线形象. 你还能举出一些生活中的其他例子吗?


(1)


(2)

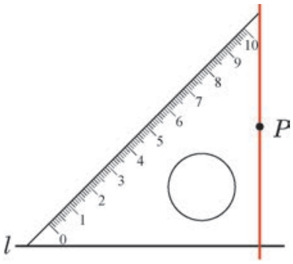

(3)

图 16-1-13

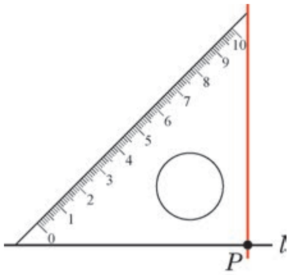
操作

给定直线 l 和点 P，要求过点 P 画直线 l 的垂线. 如图 16-1-14(1)，将三角尺的一条直角边紧靠直线 l，另一条直角边经过点 P，并沿着这条边画直线. 这条直线就是直线 l 的垂线. 如图 16-1-14(2)，如果点 P 在直线 l 上，同样也可以画出直线 l 的垂线.

请同学们尝试用量角器画.



(1)



(2)

图 16-1-14

思考

(1) 如图 16-1-15(1)，在平面上经过直线 l 上一点 P 画直线 l 的垂线，这样的垂线能画几条?

(2) 如图 16-1-15(2)，在平面上经过直线 l 外一点 P 画直线 l 的垂线，这样的垂线能画几条?

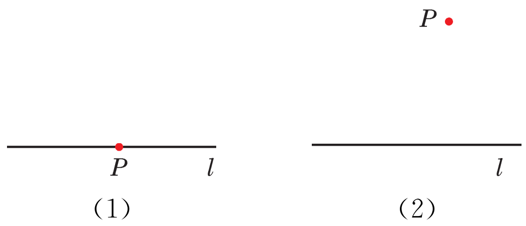


图 16-1-15

本章研究的图形限于平面图形，即所有的点、线都在同一平面上.

在平面上，经过任意一个定点 P 都能画出一条直线与已知直线 l 垂直，而且只能画出一条直线与已知直线 l 垂直. 这一基本事实在本套教科书中作为公理.

公理 在同一平面上，经过一点有且只有一条直线垂直于已知直线.

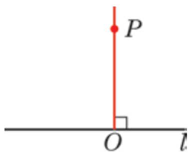


图 16-1-16

如图 16-1-16，$PO\perp l$，垂足为 O，线段 PO 叫作点 P 到直线 l 的**垂线段**.

定义 直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫作**点到直线的距离**. 如果一个点在直线 l 上，那么就说这个点到直线 l 的距离为 0.

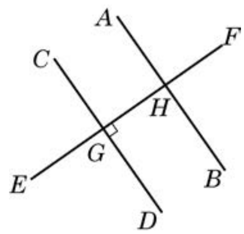


图 16-1-17

例 3 如图 16-1-17，已知：直线 AB、CD 分别交直线 EF 于点 H、G，$CD\perp EF$，$\angle FHA=\angle EGC$.

求证：$AB\perp EF$.

证明 ∵ $CD\perp EF$，

∴ $\angle EGC=90^\circ$（垂直的定义）.

又∵ $\angle FHA=\angle EGC$，

∴ $\angle FHA=90^\circ$.

∴ $AB\perp EF$（垂直的定义）.[①]

---

① 本套教科书在像例 3 这样的几何计算或证明中，常引进符号“∵”“∴”（分别读作“因为”“所以”，并与其同义），将推理的条件与结论分行显示，并将一些重要的推理依据用括号注在结论的后面，这样做是为了便于书写. 对于像“对顶角相等”这种定理的证明，则采用了更为正式的数学证明格式.

例 4　如图 16-1-18，已知 $AC \perp BC$，垂足为 C；$CD \perp AB$，垂足为 D. 指出图中线段 AC、BC、AD、BD、CD 的长度分别表示哪个点到哪条直线的距离.

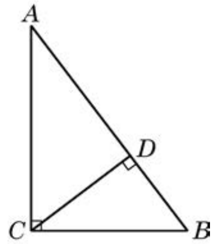


图 16-1-18

解　线段 AC 的长度表示点 A 到直线 BC 的距离；

线段 BC 的长度表示点 B 到直线 AC 的距离；

线段 AD 的长度表示点 A 到直线 CD 的距离；

线段 BD 的长度表示点 B 到直线 CD 的距离；

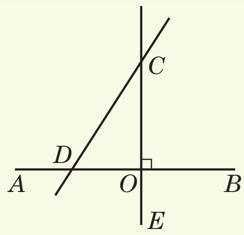
线段 CD 的长度表示点 C 到直线 AB 的距离.

课堂练习 16.1(2)

1. 填空题：

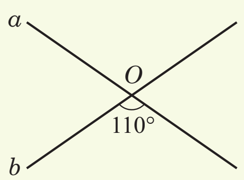
(1) 如图，直线________与直线________相交于点 D；

(2) 如图，直线________垂直于直线________，________为垂足.

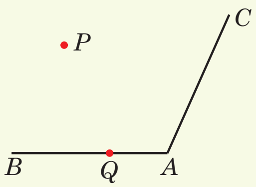


(第 1 题)

2. 如图，直线 a、b 的夹角是________°.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，已知点 P 在 $\angle CAB$ 的内部，点 Q 在边 AB 上. 根据下面的要求画出图形并填空.

(1) 过点 P 画 $PD \perp AB$，垂足为 D；

(2) 过点 P 画 $PE \perp AC$，垂足为 E；

(3) P、Q 两点间的距离是线段________的长度，线段 PD 的长度表示________到________的距离；

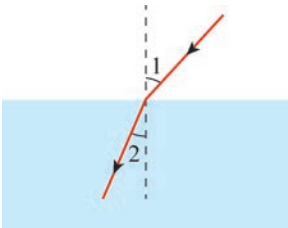
（4）点 P 到直线 AC 的距离是线段________的长度；

（5）点 Q 到直线 AB 的距离是________.

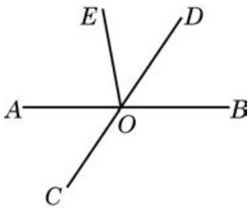
习题 16.1

A

1. 如图，当光线从空气射入水中时，光线的传播方向发生了改变，这就是光的折射现象. $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是对顶角吗？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，直线 AB、CD 相交于点 O，$\angle AOE=80°$，且 $\angle COE=3\angle EOD$. 求 $\angle BOC$ 的度数. 把以下解答过程补充完整.（注：若 $\angle 1$ 的大小是 $\angle 2$ 的 k 倍，则用 $\angle 1=k\angle 2$ 表示.）

解：∵ 直线 AB、CD 相交于点 O，

∴ $\angle COE+\angle$________$=180°$.

∵ $\angle COE=3\angle EOD$，

∴ ________$+$________$=180°$，

即 $\angle$________$=$________°.

∵ $\angle AOE=80°$，

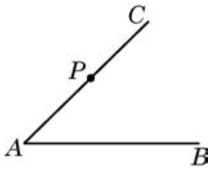
∴ $\angle AOD=$________°.

∴ $\angle BOC=\angle AOD=$________°（____________）.

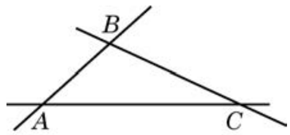
3. 如图，已知点 P 在$\angle BAC$ 的边 AC 上，按下列语句画出图形：

（1）过点 P 画 AC 的垂线，交边 AB 于点 D；

（2）过点 P 画 AB 的垂线，垂足为 E.



（第 3 题）



（第 4 题）

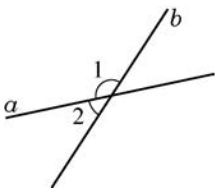
4. 如图，按下列语句画出图形：

（1）过点 B 画直线 AC 的垂线，垂足为 D；

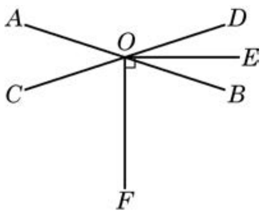
（2）过点 C 画直线 AB 的垂线，垂足为 E.

B

5. 如图，直线 a、b 相交，$\angle 1=3\angle 2$. 求直线 a、b 的夹角的度数.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，直线 AB、CD 相交于点 O，OE 平分$\angle BOD$，$OE\perp OF$，垂足为 O. 已知$\angle AOC=36^\circ$，求 $\angle BOF$ 的度数.

16.2 平行线

1. 平行公理

笔直的两条铁轨，教科书封面相对的两边，都给我们平行线的形象．如果画出它们的图形，应是同一平面上的两条线段（图 16-2-1）．它们各自向两个方向延长，总不会相交．

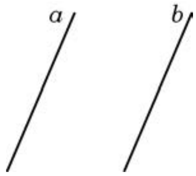


图 16-2-1

定义 在同一平面上不相交的两条直线叫作**平行线**．

平行用符号“//”表示．如果直线 a 和直线 b 是平行线，那么也称它们互相平行，记作“$a // b$”，读作“a 平行于 b”．

下面，我们尝试画平行线．

操作

如图 16-2-2，已知直线 a 和直线 a 外一点 P．利用直尺和三角尺画一条经过点 P 且平行于 a 的直线．

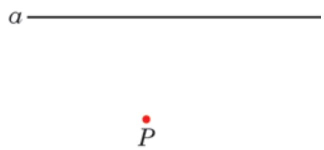


图 16-2-2

画法 （1）将三角尺的一边 AB 紧靠直线 a，将直尺紧靠三角尺的另一边 AC，如图 16-2-3(1)所示；

（2）沿直尺推动三角尺，使三角尺紧靠直线 a 的一边（边 AB）经过点 P，如图16-2-3(2)所示；

（3）沿三角尺的这条经过点 P 的边，画直线 b，如图 16-2-3(3)所示．

直线 b 就是所要画的直线，如图 16-2-3(4)所示．

经过点 P 可以画出一条、且只能画出一条与已知直线 a 平行的直线．我们把这个基本事实作为公理．

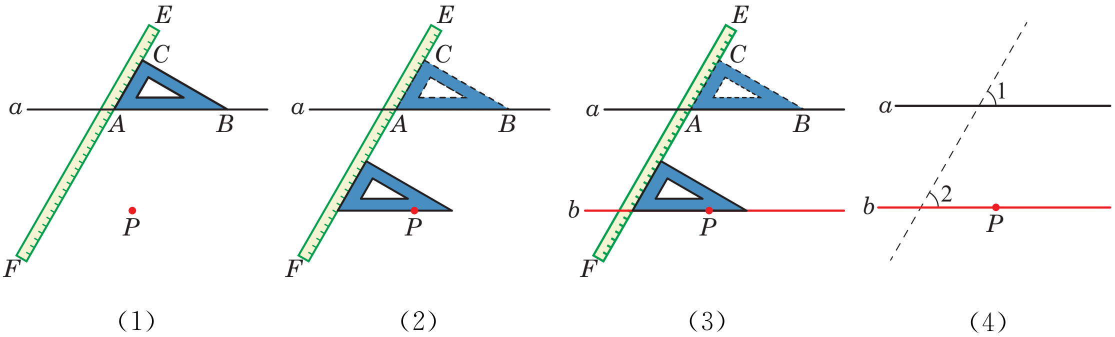


图 16-2-3

平行公理　经过直线外的一点，有且只有一条直线与该直线平行.

从平行公理可以推出

定理　在同一平面上，如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

如图 16-2-4，已知：直线 a、b、c 在同一平面上，$a/\!/c$，$b/\!/c$.

求证：$a/\!/b$.

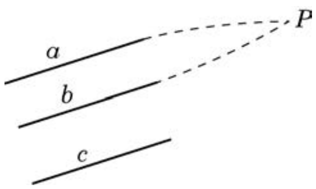


图 16-2-4

证明　如图 16-2-4，假设 a 与 b 不平行，且相交于点 P，那么过点 P 就有两条直线 a、b 都和直线 c 平行，这与平行公理矛盾.

这说明上述假设是错误的，所以 $a/\!/b$.

这个定理称为**平行的传递性**. 由此，三条直线 a、b、c 互相平行，可表示为“$a/\!/b/\!/c$”.

上面这样的证明方式，称为**反证法**. 在本章开头证明“两条直线相交，只有一个交点”时就已经用过. 反证法是数学中常用的一种证明方法，其步骤是：(1)先假设求证的结论是错误的；(2)由此推导出与已知定义、公理、定理或条件等相矛盾的结果；(3)从而否定开始的假设，肯定先前求证的结论的正确性.

课堂练习 16.2(1)

1. 根据下列语句画出图形：

（1）P 是直线 AB 外一点，直线 CD 经过点 P，且与直线 AB 平行；

（2）直线 AB、CD 是相交直线，P 是直线 AB、CD 外一点，直线 EF 经过点 P，且与直线 AB 平行，与直线 CD 相交于点 Q.

2. 填空：已知 $AB /\!/ EF$，$CD /\!/ EF$，根据____________，可得 $AB /\!/ CD$.

3. 已知直线 a、b、c 在同一平面上，以下推理是否正确？

（1）因为直线 a 与直线 b 垂直，直线 b 与直线 c 垂直，所以直线 a 与直线 c 垂直；

（2）因为直线 a 与直线 b 相交，直线 b 与直线 c 相交，所以直线 a 与直线 c 相交.

2. 平行线的判定与性质

如何判断两条直线是否平行？

由于直线是向两边无限延伸的，而我们所能看到的实际上只是直线的一部分，因此要用“不相交”去判定两条直线平行是十分困难的. 于是考虑借助第三条直线，利用它与这两条直线相交所成的角的大小，来判定两条直线是否平行.

如图 16-2-5，在同一平面上，直线 a、b 与直线 l 分别相交（也可以说：直线 a、b 被直线 l 所截），构成如图所示的八个角. 如$\angle 1$ 与$\angle 2$，它们分别在直线 a、b 的相同的一侧，并且在截线 l 的同侧，这样的一对角叫作**同位角**. $\angle 3$ 与$\angle 4$、$\angle 5$ 与$\angle 6$、$\angle 7$ 与$\angle 8$ 也分别是同位角.

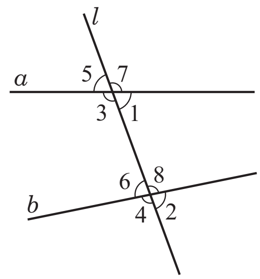


图 16-2-5

前面画平行线（图 16-2-3）时，将直尺的边看成截

线，只要同位角$\angle 1$与$\angle 2$相等，画出的直线a、b就是平行线. 我们把这个基本事实作为判定两条直线平行的公理.

公理 两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行.

简单地说：**同位角相等，两直线平行.**

思考

两条直线被第三条直线所截得到的四对同位角中，只要有一对相等，那么另外三对也一定对应相等. 为什么？

例 1 如图 16-2-6，已知：a、b、c是直线，$a\perp c$，$b\perp c$.

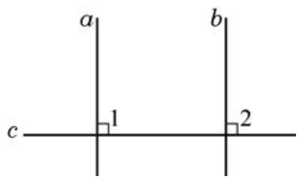


图 16-2-6

求证：$a/\!/b$.

证明 如图 16-2-6，$\because$ $a\perp c$，$b\perp c$，

$\therefore$ $\angle 1=90^\circ$，$\angle 2=90^\circ$.

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$.

$\therefore$ $a/\!/b$（同位角相等，两直线平行）.

例 2 如图 16-2-7，已知：直线l与直线a、b、c分别相交，且$\angle 1=\angle 2=\angle 3$.

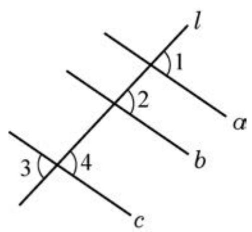


图 16-2-7

求证：$a/\!/b/\!/c$.

分析 由$\angle 1=\angle 2$，可推出$a/\!/b$. 要证明$a/\!/b/\!/c$，只要再证$a/\!/c$（或$b/\!/c$），而这只要找到一对相等的同位角即可.

证明 如图 16-2-7，将$\angle 3$的对顶角记作$\angle 4$.

$\because$ $\angle 1=\angle 2$，

$\therefore$ $a/\!/b$（同位角相等，两直线平行）.

$\because$ $\angle 3=\angle 4$（对顶角相等），$\angle 3=\angle 1$，

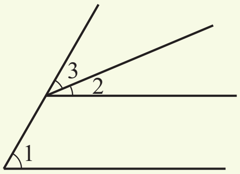
$\therefore$ $\angle 1=\angle 4$.

∴ $a // c$（同位角相等，两直线平行）．

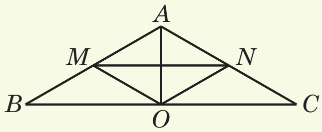
∴ $a // b // c$（平行的传递性）．

课堂练习 16.2(2)

1. 如图，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是同位角吗？ $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 呢？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，为了加固房屋，要在人字形屋架上加一条横梁 MN．如果 $\angle ABC=29^\circ$，那么 $\angle AMN$ 等于多少度时，横梁 MN 与 BC 平行？

3. 如图，如果 $\angle 1=110^\circ$，$\angle 2=70^\circ$，那么 $AB // CD$ 吗？为什么？把以下解答过程补充完整．

解：如图，将与 $\angle 1$ 相邻的一个补角记作 $\angle 3$．

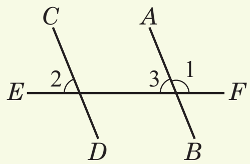
∵ $\angle 1=110^\circ$，

∴ $\angle 3=180^\circ-\angle 1=70^\circ$．

又∵ $\angle 2=70^\circ$，

∴ ________．

∴ $AB // CD$（______________________）．



（第 3 题）

利用同位角相等，可以判定两条直线平行．反过来，如果两条直线平行，同位角相等吗？我们可以证明下面的平行线的性质定理．

定理 两条平行直线被第三条直线所截，同位角相等．

简单地说：**两直线平行，同位角相等．**

由于一对同位角相等，可以推出其他三对同位角也对应相等，因此只要证明一对同位角相等即可.

如图 16-2-8(1)，已知：$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是直线 AB、CD 被直线 EF 截出的同位角，EF 分别交 AB、CD 于点 M、N，$AB /\!/ CD$.

求证：$\angle 1=\angle 2$.

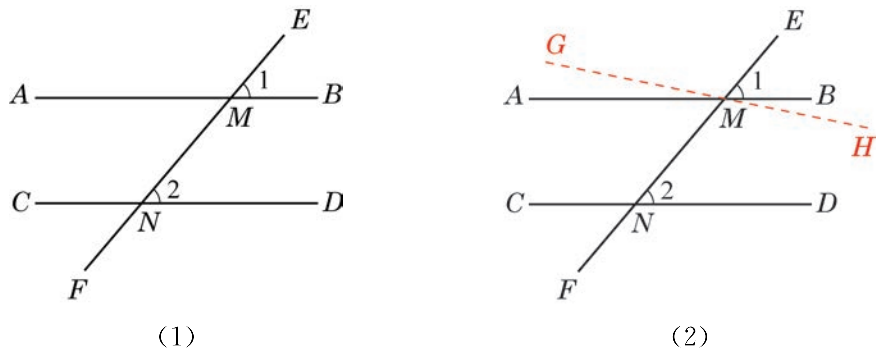


图 16-2-8

证明 用反证法. 假设 $\angle 1 \neq \angle 2$，那么可以过点 M 画一条直线 GH，使得 $\angle EMH=\angle 2$，如图 16-2-8(2)所示. 根据“同位角相等，两直线平行”，可得到 $GH /\!/ CD$. 又因为 $AB /\!/ CD$，这样经过点 M 存在两条直线 AB、GH 都与直线 CD 平行，与平行公理矛盾.

这说明 $\angle 1 \neq \angle 2$ 这一假设是不成立的，所以 $\angle 1=\angle 2$.

例 3 如图 16-2-9，已知：a、b、c 是直线，$a /\!/ b$，$a \perp c$.

求证：$b \perp c$.

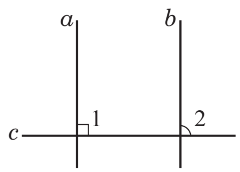


图 16-2-9

证明 如图 16-2-9，$\because$ $a /\!/ b$，

$\therefore$ $\angle 2=\angle 1$（两直线平行，同位角相等）.

$\because$ $a \perp c$，

$\therefore$ $\angle 1=90^\circ$.

$\therefore$ $\angle 2=90^\circ$.

$\therefore$ $b \perp c$.

例 4 如图 16-2-10，已知直线 a、b 被直线 l 所截，$a /\!/ b$，$\angle 1=50^\circ$. 求 $\angle 2$ 的度数.

分析 如图 16-2-10，由已知条件 $a // b$，可得 $\angle 2 = \angle 3$，因此要求 $\angle 2$ 的度数，只要求出 $\angle 3$ 的度数即可，而这可以由“对顶角相等”得到.

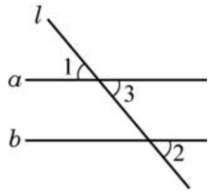


图 16-2-10

解 如图 16-2-10，将 $\angle 1$ 的对顶角记作 $\angle 3$，则 $\angle 1 = \angle 3$（对顶角相等）.

∵ $\angle 1 = 50°$，

∴ $\angle 3 = 50°$.

又∵ $a // b$，

∴ $\angle 3 = \angle 2$（两直线平行，同位角相等）.

∴ $\angle 2 = 50°$.

课堂练习 16.2(3)

1. 如图，已知直线 a、b 被直线 l 所截，且 $a // b$，$\angle 1 + \angle 2 = 120°$. 求 $\angle 3$ 的度数. 把以下解答过程补充完整.

解：∵ $\angle 1 = \angle 2$（对顶角相等），

又∵ $\angle 1 + \angle 2 = 120°$，

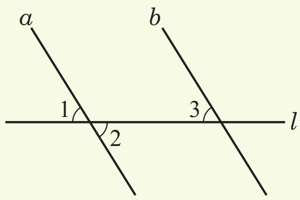
∴ $2\angle 1 = 120°$.

∴ $\angle 1 =$ ________ °.

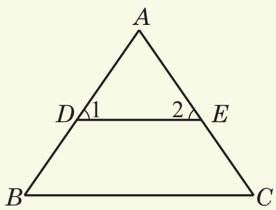
∵ $a // b$ ，

∴ $\angle 1 = \angle 3$ (____________________).

∴ $\angle 3 =$ ________ °.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知：D 与 E 分别是线段 AB 与线段 AC 上的点，$DE // BC$，$\angle 1 = \angle 2$. 求证：$\angle B = \angle C$. 把以下证明过程补充完整.

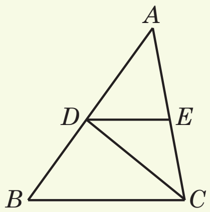
证明：∵ $DE // BC$，

∴ $\angle 2=\angle C$（________________）.

同理，$\angle 1=\angle B$.

∵ $\angle 1=\angle 2$，

∴ ____________.



（第 3 题）

3. 如图，D、E 分别是线段 AB、AC 上的点，CD 平分 $\angle ACB$，$DE // BC$，$\angle AED=80°$. 求 $\angle BCD$ 的度数.

如图 16-2-11，直线 a、b 被直线 l 所截，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 在直线 a、b 的内侧，且交错在截线 l 的两旁，像这样的一对角叫作**内错角**.

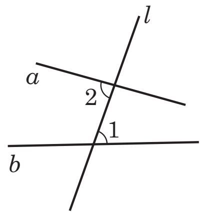


图 16-2-11

思考

两条直线被第三条直线所截，可以得到两对内错角. 如果其中一对内错角相等，那么另外一对内错角是否也相等？

利用同位角相等可以判定两条直线平行，那么是否也可以由内错角相等来判定两条直线平行呢？结论是肯定的，由此得到平行线的另一种判定方法.

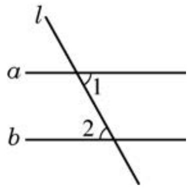
定理 两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行.

简单地说：**内错角相等，两直线平行.**

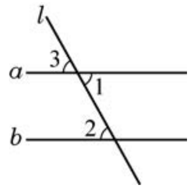
如图 16-2-12(1)，已知：直线 a、b 被直线 l 所截，$\angle 1=\angle 2$.

求证：$a // b$.

分析 我们已经知道“同位角相等，两直线平行”，为了证明 $a // b$，从 $\angle 1=\angle 2$ 出发，找出一对相等的同位角.



(1)



(2)

图 16-2-12

证明 如图 16-2-12(2)，将∠1 的对顶角记作∠3. 因为对顶角相等，所以∠1=∠3. 又已知∠1=∠2，从而有∠2=∠3.

根据“同位角相等，两直线平行”，得 $a \parallel b$.

例 5 如图 16-2-13，已知：直线 DE 经过点 A，∠1=40°，∠B=40°.

求证：$DE \parallel BC$.

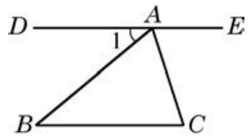


图 16-2-13

证明 ∵ ∠1=40°，∠B=40°，

∴ ∠1=∠B.

∴ $DE \parallel BC$（内错角相等，两直线平行）.

思考

当两直线平行时，内错角的大小有什么关系呢?

定理 两条平行直线被第三条直线所截，内错角相等.

简单地说：**两直线平行，内错角相等.**

如图 16-2-14，已知：∠1 与∠2 是直线 a、b 被直线 l 所截得到的一对内错角，$a \parallel b$.

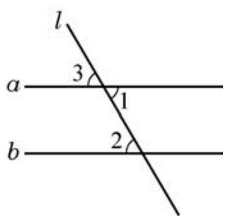


图 16-2-14

求证：∠1=∠2.

证明 如图 16-2-14，将∠1 的对顶角记作∠3.

由“对顶角相等”，得 ∠1=∠3.

根据“两直线平行，同位角相等”，由 $a \parallel b$，得∠3=∠2.

因此∠1=∠2.

例 6 如图 16-2-15，已知：$AB\parallel CD$，$AC\parallel BD$.

求证：$\angle 1=\angle B$.

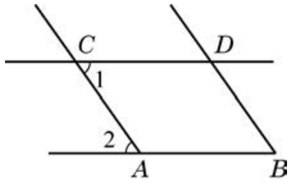


图 16-2-15

分析 如图 16-2-15，要证明$\angle 1=\angle B$，只要分别证明$\angle 1=\angle 2$，$\angle 2=\angle B$ 即可，而这可以由已知条件 $AB\parallel CD$，$AC\parallel BD$ 得到.

证明 $\because$ $AB\parallel CD$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$（两直线平行，内错角相等）.

$\because$ $AC\parallel BD$，

$\therefore$ $\angle 2=\angle B$（两直线平行，同位角相等）.

$\therefore$ $\angle 1=\angle B$.

课堂练习 16.2(4)

1. 填空题：

（1）如图，$\because$ $\angle B=\angle 3$，

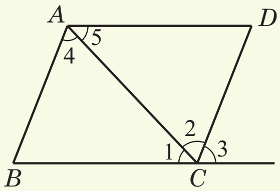
$\therefore$ ________ $\parallel$ ________（________________）；

（2）如图，$\because$ $\angle D=\angle 3$，

$\therefore$ ________ $\parallel$ ________（________________）；

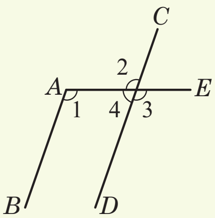
（3）如图，$\because$ $\angle 4=\angle$____，

$\therefore$ $AB\parallel DC$（________________）.

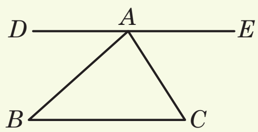


（第 1 题）

2. 如图，已知直线 AB、CD 被直线 AE 所截，且 $AB\parallel CD$，$\angle 1=110^\circ$. 问：$\angle 2$、$\angle 3$ 和$\angle 4$ 分别等于多少度？为什么？



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，已知直线 DE 经过点 A，$DE\parallel BC$，$\angle B=42^\circ$，$\angle C=57^\circ$. 求$\angle DAB$、$\angle CAD$ 的度数.

例 7 如图 16-2-16，已知：直线 a、b 被直线 l 所截，$\angle 1+\angle 2=180°$.

求证：$a // b$.

分析 从$\angle 1$、$\angle 2$ 出发，去寻找一对相等的同位角或一对相等的内错角.

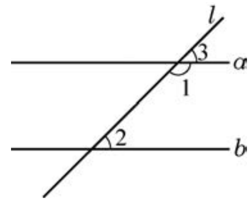


图 16-2-16

证明 如图 16-2-16，将与$\angle 1$ 相邻的一个补角记作$\angle 3$，则$\angle 1+\angle 3=180°$.

$\because$ $\angle 1+\angle 2=180°$，

$\therefore$ $\angle 2=\angle 3$.

$\therefore$ $a // b$（同位角相等，两直线平行）.

如图 16-2-16，$\angle 1$、$\angle 2$ 在直线 a、b 的内侧，且都在截线 l 的同旁，像这样的一对角叫作**同旁内角**.

本题的结论表明：**同旁内角互补，两直线平行.**

反过来也是正确的，即：**两直线平行，同旁内角互补.**

讨论

能利用“内错角相等，两直线平行”来证明“同旁内角互补，两直线平行”吗？如何证明“两直线平行，同旁内角互补”？

例 8 如图 16-2-17，已知：BE 平分$\angle ABC$，$\angle 1=\angle 2$.

求证：$DE // BC$.

分析 如图 16-2-17，将$\angle EBC$ 记作$\angle 3$，要证明 $DE // BC$，只要证明$\angle 2=\angle 3$. 已知 BE 平分$\angle ABC$，即有$\angle 1=\angle 3$，又已知$\angle 1=\angle 2$，由此可得$\angle 2=\angle 3$.

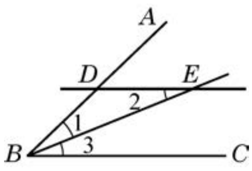


图 16-2-17

证明 如图 16-2-17，$\because$ BE 平分$\angle ABC$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 3$.

又$\because$ $\angle 1=\angle 2$，

$\therefore$ $\angle 2=\angle 3$.

$\therefore$ $DE // BC$（内错角相等，两直线平行）.

例 9 如图 16-2-18，直线 EF、AB 相交于点 A，$AB // DE$，$EF // BC$，$\angle E=130°$. 求$\angle B$ 的度数.

分析 由已知 $EF /\!/ BC$，可得 $\angle B+\angle BAE=180^\circ$，因此要求 $\angle B$，只要求出 $\angle BAE$ 即可. 又因为已知 $\angle E=130^\circ$，只需寻找 $\angle BAE$ 与 $\angle E$ 之间的关系，而这可以由已知条件 $AB /\!/ DE$ 得到.

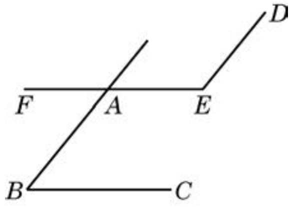


图 16-2-18

解 ∵ $AB /\!/ DE$，

∴ $\angle BAE=\angle E$（两直线平行，内错角相等）.

∵ $\angle E=130^\circ$，

∴ $\angle BAE=130^\circ$.

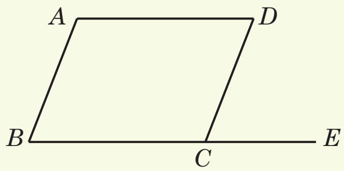
又∵ $EF /\!/ BC$，

∴ $\angle B+\angle BAE=180^\circ$（两直线平行，同旁内角互补）.

∴ $\angle B=180^\circ-\angle BAE=180^\circ-130^\circ=50^\circ$.

课堂练习 16.2(5)

1. 填空题：



（第 1 题）

（1）如图，∵ $\angle B+\angle BCD=180^\circ$，

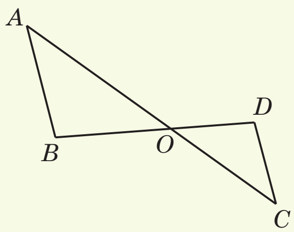
∴ ______ // ______（______________

______）；

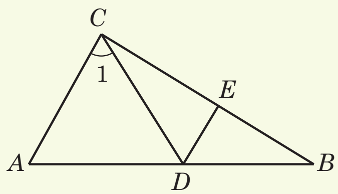
（2）如图，∵ $AD /\!/ BC$，

∴ $\angle D+\angle$______ $=180^\circ$（____________________）.

2. 如图，已知：AC 与 BD 相交于点 O，$\angle A=\angle AOB$，$\angle C=\angle COD$. 求证：$AB /\!/ CD$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，已知：点 D 在线段 AB 上，$\angle 1=\angle A$，$DE /\!/ AC$. 求证：DE 平分 $\angle CDB$.

例 10　如图 16-2-19，已知：$\angle B=\angle D$，$AB // CD$.

求证：$DE // BF$.

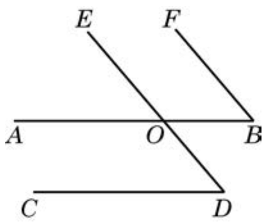


图 16-2-19

分析　要证明 $DE // BF$，只要证明$\angle AOE=\angle B$. 因为已知$\angle B=\angle D$，所以只需证明$\angle AOE=\angle D$，而这可以由已知条件 $AB // CD$ 得到.

证明　$\because$　$AB // CD$，

$\therefore$　$\angle AOE=\angle D$（两直线平行，同位角相等）.

又$\because$　$\angle B=\angle D$，

$\therefore$　$\angle AOE=\angle B$.

$\therefore$　$DE // BF$（同位角相等，两直线平行）.

例 11　如图 16-2-20，已知：$AB // CD$，$\angle 1=\angle A$.

求证：$\angle 2=\angle C$.

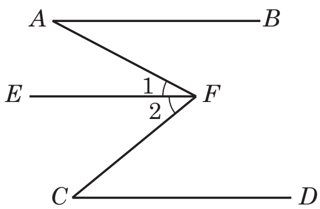


图 16-2-20

分析　要证明$\angle 2=\angle C$，只要证明 $EF // CD$，又因为 $AB // CD$，即证 $EF // AB$.

证明　$\because$　$\angle 1=\angle A$，

$\therefore$　$EF // AB$（内错角相等，两直线平行）.

又$\because$　$AB // CD$，

$\therefore$　$EF // CD$（平行的传递性）.

$\therefore$　$\angle 2=\angle C$（两直线平行，内错角相等）.

例 12　如图 16-2-21，已知：D、E、F 分别是线段 AC、AB、BC 上的点，$DF // AB$，$\angle DFE=\angle A$.

求证：$\angle EFB=\angle C$.

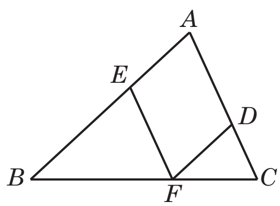


图 16-2-21

分析　要证明$\angle EFB=\angle C$，即证 $EF // AC$，只要寻找 EF 与 AC 被直线 AB（或直线 DF）所截得到的一对相等的同位角（或一对相等的内错角，或一对互补的同旁内角）.

证明　$\because$　$DF // AB$，

∴　$\angle BEF=\angle DFE$（两直线平行，内错角相等）.

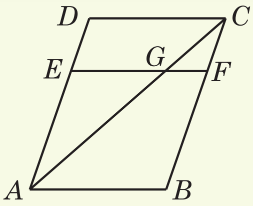
又∵　$\angle DFE=\angle A$，

∴　$\angle BEF=\angle A$.

∴　$EF\parallel AC$（同位角相等，两直线平行）.

∴　$\angle EFB=\angle C$（两直线平行，同位角相等）.

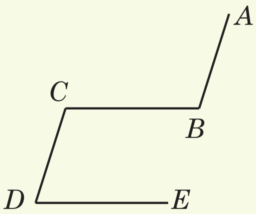
课堂练习 16.2(6)



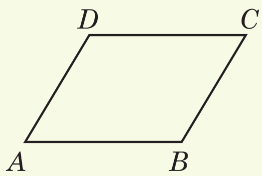
（第 1 题）

1. 如图，点 E、F 分别在线段 AD、BC 上，线段 AC、EF 交于点 G，$AB\parallel EF\parallel DC$. 找出图中所有与$\angle CGF$ 相等的角.

2. 如图，已知：$AB\parallel CD$，$\angle B+\angle D=180°$. 求证：$CB\parallel DE$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，已知：$\angle A=\angle C$，$AB\parallel DC$. 求证：$AD\parallel BC$.

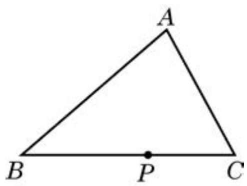
习题 16.2

A

1. 如图，已知 P 是线段 BC 上一点.

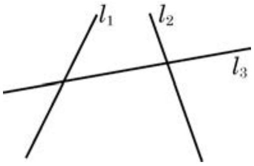
（1）过点 P 画 PD 平行于 AB，交 AC 于点 D；

（2）过点 P 画 PE 平行于 AC，交 AB 于点 E.

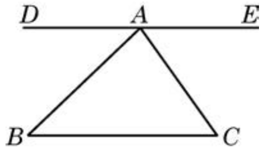


（第 1 题）

2. 如图，两条直线 l_1、l_2 被直线 l_3 所截，图中的同位角有________对，内错角有________对，同旁内角有________对.



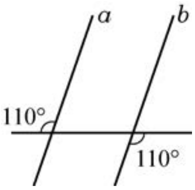
（第 2 题）



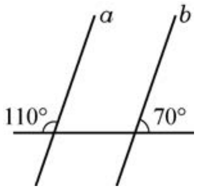
（第 3 题）

3. 如图，直线 DE、BC 被直线 AB 所截，与$\angle B$ 成内错角的是________，与$\angle B$ 成同旁内角的是________. 直线 DE、BC 被直线 AC 所截，与$\angle C$ 成内错角的是________.

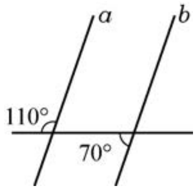
4. 下列图中不能判定直线 a、b 平行的是　　（　　）



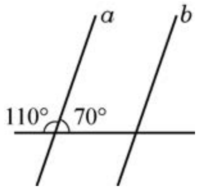
A.



B.



C.



D.

5. 如图，已知：$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，求证：$AB // CD$，$EF // MN$. 把以下解答过程补充完整.

解：∵　$\angle 1=\angle 2$，

$\angle 1=\angle 4$（________________），

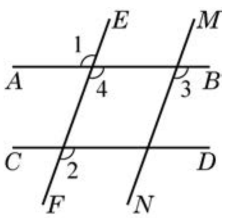
∴　$\angle$________$=\angle$________.

∴　$AB // CD$（________________________）.

又∵　$\angle 1=\angle 3$，

∴　$\angle$________$=\angle$________.

∴　$EF // MN$（________________________）.



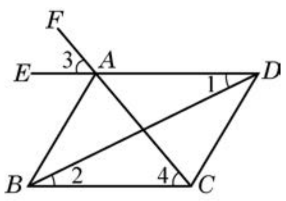
（第 5 题）

6. 填空题：

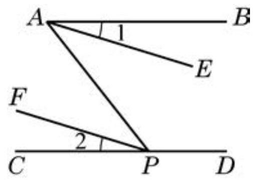
（1）如图，如果$\angle 1=\angle 2$，那么________$/\!/$________，推理依据是____________________；

（2）如图，如果$\angle 3=\angle 4$，那么________$/\!/$________，推理依据是____________________；

（3）如图，如果$\angle ABC+\angle BCD=180°$，那么________$/\!/$________，推理依据是____________________.



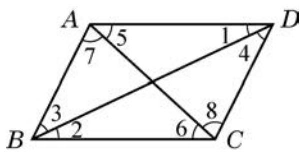
（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，点 P 在直线 CD 上，已知$\angle BAP+\angle APD=180°$，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$AE/\!/PF$.

8. 如图，已知 $AB/\!/DC$，$AD/\!/BC$. 请填写恰当的推理依据.



（第 8 题）

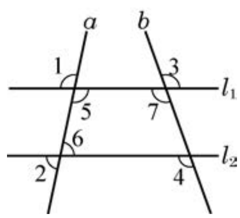
（1）因为 $AB/\!/DC$，根据________________，得$\angle 7=\angle 8$；

（2）因为 $AD/\!/BC$，所以$\angle 1=\angle 2$（________________）；

（3）因为 $AB/\!/DC$，根据________________，得 $\angle ABC+\angle BCD=180°$；

（4）因为 $AD/\!/BC$，所以 $\angle ADC+\angle BCD=180°$（________________）.

9. 如图，两条直线 a、b 分别与另两条直线 l_1、l_2 相交，已知 $\angle 1+\angle 2=180°$，$\angle 3=110°$，那么 $\angle 4$ 的度数是多少？为什么？请为以下解答补充恰当的推理依据.



（第 9 题）

解：由$\angle 1=\angle 5$，$\angle 2=\angle 6$（__________________），

又 $\angle 1+\angle 2=180°$，得 $\angle 5+\angle 6=180°$.

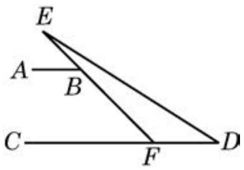
所以 $l_1 // l_2$（________________）.

由此得 $\angle 4=\angle 7$（________________）.

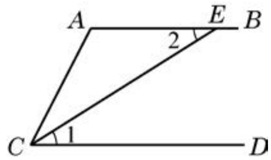
由 $\angle 7=\angle 3$（________________），又 $\angle 3=110°$，得 $\angle 7=110°$.

所以 $\angle 4 = 110°$.

10. 如图，已知 $AB // CD$，E、B、F 三点共线，$\angle DFE=135°$. 那么 $\angle ABE$ 的度数是多少？为什么？



（第 10 题）



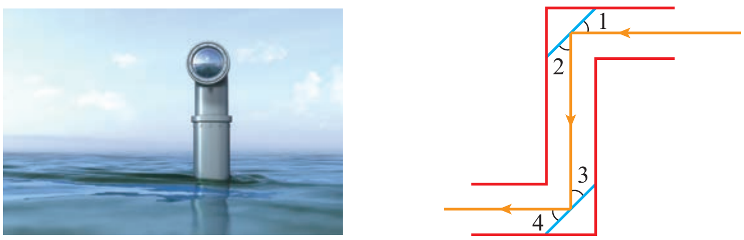
（第 11 题）

11. 如图，已知 $AB // CD$，CE 平分 $\angle ACD$，且交 AB 于点 E，$\angle A=118°$. 那么 $\angle 2$ 的度数是多少？为什么？

B

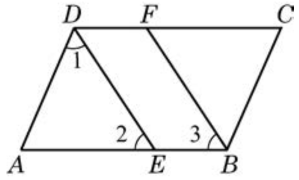
12. 对于同一平面上的直线 a、b、c，如果 a 与 b 平行，c 与 a 相交，那么 c 与 b 的位置关系是相交还是平行？

13. 潜望镜是一种从水下观察水面上事物的仪器，它通过两个平行的平面镜反射实现观察. 如图，光线经过镜子反射时，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$. 请解释为什么进入潜望镜的光线和离开潜望镜的光线是平行的.

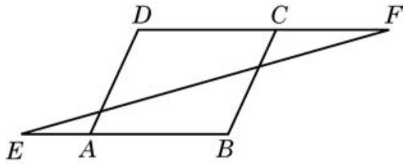


（第 13 题）

14. 如图，已知：$\angle CDA=\angle CBA$，DE 平分$\angle CDA$，BF 平分$\angle CBA$，且$\angle 1=\angle 2$. 求证：$DE/\!/FB$.



（第 14 题）



（第 15 题）

15. 如图，已知：$AD/\!/BC$，$\angle B=\angle D$. 求证：$\angle E=\angle F$.

16.3 命题与证明

1. 命题

前面我们见过一些可以判断真假的语句. 例如：

(1) 两个有理数相乘，同号得正，异号得负；

(2) 已知 a、b 是任意两个数，如果 $a^2=b^2$，那么 $a=b$；

(3) 对顶角相等；

(4) 两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行；

(5) 两条平行直线被第三条直线所截，内错角相等.

像这样，用自然语言、符号或式子表达，且可以判断其真假的语句叫作**命题**. 正确的命题叫作**真命题**，错误的命题叫作**假命题**. 上述命题中，(1)(3)(4)(5)都可以被证明是真命题；而(2)是假命题，比如，$a=1$，$b=-1$，虽然 $a^2=b^2=1$，但是 $a\neq b$.

数学命题通常由条件、结论两部分组成. 命题常可以写成“如果……，那么……”的形式. 其中，用“如果”开始的部分是条件，用“那么”开始的部分是结论.

命题(3)“对顶角相等”是一个简洁表述的命题，它也可以改写成“如果……，那么……”的形式，叙述为“如果两个角是对顶角，那么这两个角相等”.

由观察、实验、归纳和类比等方法得出的命题，可能是真命题，也可能是假命题.

例 1 说出下列命题的条件和结论，并指出它们是真命题还是假命题：

(1) 如果 $a=b$，那么 $a+c=b+c$；

(2) 如果 $a+c=b+c$，那么 $a=b$；

(3) 对顶角相等；

(4) 相等的角是对顶角.

解 (1) 这个命题的条件是：$a=b$；结论是：$a+c=b+c$. 它是真命题.

(2) 这个命题的条件是：$a+c=b+c$；结论是：$a=b$. 它是真命题.

(3) 这个命题的条件是：两个角是对顶角；结论是：这两个角相等. 它是真命题.

（4）这个命题可以写成：如果两个角相等，那么这两个角是对顶角. 所以，这个命题的条件是：两个角相等；结论是：这两个角是对顶角. 它是假命题.

思考

怎样说明“相等的角是对顶角”是假命题?

例 1 中，命题(1)的条件和结论恰好分别是命题(2)的结论和条件；命题(3)的条件和结论也恰好分别是命题(4)的结论和条件. 像这样，在两个命题中，如果第一个命题的条件是第二个命题的结论，且第一个命题的结论又是第二个命题的条件，那么这两个命题叫作**互逆命题**. 如果把其中一个命题叫作**原命题**，那么另外一个命题就叫作它的**逆命题**.

例 1 中，命题(1)和命题(2)就是互逆命题，如果命题(1)是原命题，那么命题(2)就是命题(1)的逆命题，这两个命题都是真命题. 命题(3)和命题(4)也是互逆命题，其中命题(3)是真命题，而命题(4)是假命题.

原命题是真命题时，其逆命题不一定是真命题.

课堂练习 16.3(1)

1. 请举出一些命题，并指出它们是真命题还是假命题.

2. 判断下列命题是真命题还是假命题：

（1）两直线平行，同旁内角互补；

（2）经过直线外一点，有且只有一条直线与该直线平行；

（3）同位角相等；

（4）两个锐角的和是钝角；

（5）ab 与 $-\frac{1}{2}ba$ 是同类项；

（6）方程 $5x-2=7+2x$ 的解是 $x=3$.

3. 写出命题“如果两个角是同一个角的余角，那么这两个角相等”的逆命题. 这个逆命题是真命题还是假命题?

2. 证明

思考

我们知道，下列命题都是真命题：

（1）如果$\frac{1}{3}a=\frac{1}{3}b$，那么 $a=b$；

（2）如果$-2a=-2b$，那么 $a=b$.

小海由此得到一个猜想：已知任意三个数 m、a、b，如果 $ma=mb$，那么 $a=b$. 你认为小海的猜想是真命题吗？为什么？

除了公理之外，真命题需要经过证明才能确认.

证明一个命题为真，先明确“已知”“求证”，再“证明”. 其中，“已知”是命题的条件，“求证”是命题的结论，“证明”是在“已知”和“求证”之间建立逻辑联系的完整推理过程. 在初中平面几何中，通常遵循步骤：

（1）根据题意画出示意图；

（2）根据条件和结论，参照示意图，写出“已知”和“求证”；

（3）写出由条件推出结论的完整过程.

下面，我们以证明命题“两条平行直线被第三条直线所截，一对内错角的平分线互相平行”为例来说明.

如图 16-3-1，已知：$AB\parallel CD$，直线 EF 分别与 AB、CD 相交于点 G、H，GM、HN 分别平分$\angle AGH$、$\angle DHG$.

求证：$GM\parallel HN$.

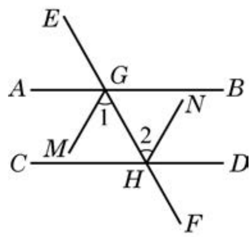


图 16-3-1

分析 如图 16-3-1，要证明 $GM\parallel HN$，只要证明$\angle 1=\angle 2$. 由已知条件 GM、HN 分别平分$\angle AGH$、$\angle DHG$，只需证明$\angle AGH=\angle DHG$，而这可以由已知条件 $AB\parallel CD$ 得到.

证明 如图 16-3-1，$\because$ $AB\parallel CD$，

$\therefore$ $\angle AGH=\angle DHG$（两直线平行，内错角相等）.

又$\because$ GM、HN 分别平分$\angle AGH$、$\angle DHG$，

∴ $\angle 1=\frac{1}{2}\angle AGH$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle DHG$.

∴ $\angle 1=\angle 2$，

∴ $GM/\!/HN$（内错角相等，两直线平行）.

例 2 如图 16-3-2，已知：$\angle A=\angle D$，$\angle C=\angle F$.

求证：$\angle FBA=\angle C$.

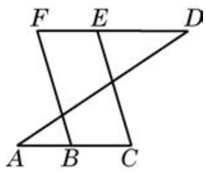


图 16-3-2

分析 要证明 $\angle FBA=\angle C$，只要证明 $\angle F=\angle FBA$，从而只需证明 $AC/\!/FD$，而这可以由已知条件 $\angle A=\angle D$ 得到.

证明 ∵ $\angle A=\angle D$，

∴ $AC/\!/FD$（内错角相等，两直线平行）.

∴ $\angle F=\angle FBA$（两直线平行，内错角相等）.

又∵ $\angle C=\angle F$，

∴ $\angle FBA=\angle C$.

要判定一个命题是假命题，有时只需举出一个符合命题的条件，但不满足命题的结论的例子. 这样的例子通常称为**反例**.

例如，前面“思考”中小海猜想的命题“已知任意三个数 m、a、b，如果 $ma=mb$，那么 $a=b$”是假命题，可以举出一个反例：当 $m=0$ 时，有 $0\times 2=0\times 4$，但是 $2\neq 4$.

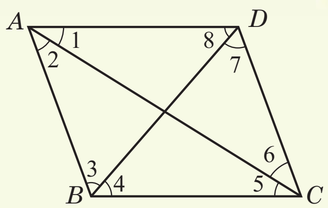
又如，“互为补角的两个角中一定有一个锐角”是假命题，可以举出反例：两个直角互为补角，但它们都不是锐角.

课堂练习 16.3(2)

1. 如图，请利用$\angle 1$到$\angle 8$这 8 个角，根据题目中的条件，补全结论，并给予证明.

（1）已知 $AB/\!/DC$，可以推出哪些角相等？

（2）已知 $AD/\!/BC$，可以推出哪些角相等？



（第 1 题）

2. 命题“如果两个角是两条直线被第三条直线所截得到的同旁内角，那么这两个角一定互补”是真命题吗？为什么？

3. 命题“如果$|a|=|b|$，那么$a=b$”．请判断这个命题的真假．若是真命题，请证明；若是假命题，请举一个反例，再添加一个适当的条件，使其成为一个真命题．

习题 16.3

A

1. 下列语句中，哪些是命题？

（1）对顶角相等吗？

（2）如果$a=b$，$a=c$，那么$b=c$；

（3）不相交的两条直线是平行线；

（4）过直线l外一点O画直线l的平行线；

（5）两条直线相交只有一个交点．

2. 说出下列命题的条件和结论，并指出它们是真命题还是假命题：

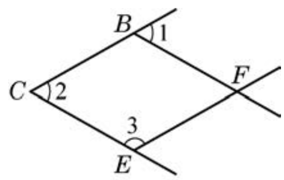
（1）如果两个角相等，那么这两个角是直角；

（2）如果O是线段AB的中点，那么$AO=BO$；

（3）如果两条直线被第三条直线所截，那么同位角相等；

（4）内错角相等，两直线平行．

3. 一个由4条线段构成的“鱼”形图案如图所示，已知$\angle 1=60°$，$\angle 2=60°$，$\angle 3=120°$．找出图中所有的平行线，并加以证明．

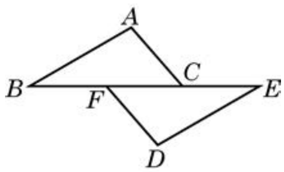


（第3题）

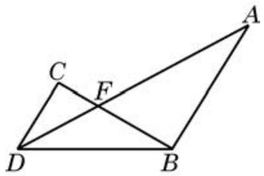
B

4. 已知命题“如图，已知点B、F、C、E在同一直线上，$\angle A=\angle D$，

则 $AB // DE$”. 判断这个命题是真命题还是假命题. 若是真命题，请证明；若是假命题，请添加一个适当的条件使它成为真命题，再证明.



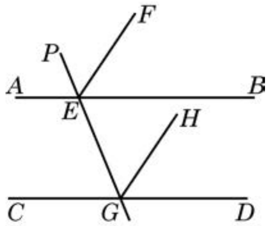
（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，在①$AB // CD$，②$\angle A=30^\circ$，③$\angle CBD=30^\circ$，④$\angle CDA=30^\circ$四项中，请选择其中两个作为条件，一个作为结论，构造一个真命题，并证明.

6. 如图，已知：$AB // CD$，EF 平分 $\angle PEB$，GH 平分 $\angle EGD$. 求证：$EF // GH$.



（第 6 题）

对于这道题，小华的证明过程如下：

证明：$\because$ $AB // CD$，

$\therefore$ $\angle PEB=\angle EGD$（两直线平行，同位角相等）.

$\because$ EF 平分 $\angle PEB$，GH 平分 $\angle EGD$，

$\therefore$ $\angle FEB=\frac{1}{2}\angle PEB$，$\angle HGD=\frac{1}{2}\angle EGD$.

$\therefore$ $\angle FEB=\angle HGD$.

$\therefore$ $EF // GH$（同位角相等，两直线平行）.

（1）请找出小华出错的地方，并指出错误的原因；

（2）请写出本题正确的证明过程.

◎阅读材料

证明的必要性

有学生认为，以前我们通过观察、实验和猜想就可以得到正确的结论，那么为什么还要学习证明呢？

小海通过多个例子得到一个猜想：已知任意三个数 m、a、b，如果 $ma=mb$，那么 $a=b$. 但当 $m=0$ 时这个猜想是不对的，所以这样的归纳推理是不可靠的.

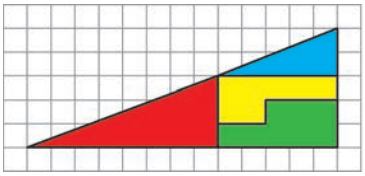


图 1

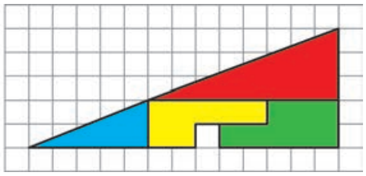


图 2

观察：图 1 是一个由 4 个不同的小块(用不同颜色区分)拼成的图形；图 2 是把图 1 中的 4 个小块打乱顺序后，重新拼成的图形. 图 1 和图 2 都是由相同的四个小块拼成的，为什么看起来图 1 会少了一个小正方形呢？这个消失的小正方形去哪里了呢？实际上，在图 1 和图 2 中，红色三角形与蓝色三角形的斜边并不在同一直线上，目测不容易察觉，容易误认为图 1 和图 2 这两个拼成的图形都是三角形.

这就是著名数学科普作家马丁·加德纳(Martin Gardner，1914—2010)于 1956 年发表的一道数学趣题——消失的正方形. 这个例子告诉我们一个道理："眼见未必为实".

因此，对于数学命题真假的判断，仅仅通过观察、实验和猜想等是不够的，还必须借助严密的逻辑推理才能做到"言之有据"，令人信服.

◎内容提要

1. 基本概念：对顶角，两条直线的夹角，两条直线互相垂直，点到直线的距离，平行线，同位角，内错角，同旁内角，命题，真命题，假命题，原命题，逆命题，互逆命题.

2. 相交线：

（1）两点确定一条直线.

（2）对顶角相等.

（3）在同一平面上，经过一点有且只有一条直线垂直于已知直线.

3. 平行线：

（1）平行公理：经过直线外的一点，有且只有一条直线与该直线平行.

（2）平行的传递性：在同一平面上，如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

（3）平行线的判定：

同位角相等，两直线平行.

内错角相等，两直线平行.

同旁内角互补，两直线平行.

（4）平行线的性质：

两直线平行，同位角相等.

两直线平行，内错角相等.

两直线平行，同旁内角互补.

4. 命题与证明：判定一个命题(除公理外)为真，需要证明；判定一个命题为假的常用方法是举一个反例.

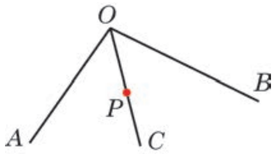
◎复习题

A

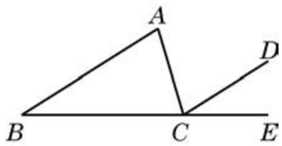
1. 如图，已知 OC 平分 $\angle AOB$.

（1）P 是射线 OC 上一点，过点 P 画 $PM \perp OA$，$PN \perp OB$，垂足分别为 M、N，比较垂线段 PM、PN 的长短；

（2）通过上述操作，你有何发现？



（第 1 题）



（第 2 题）

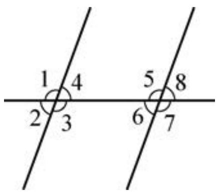
2. 如图，如果______________，那么 $AB \parallel CD$（请添加一个适当的条件，使该命题为真命题）.

3. 选择题：

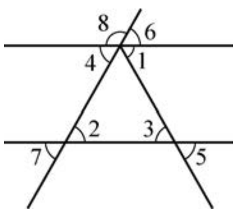
（1）如图(1)，已知 $\angle 1 = \angle 5$，那么与 $\angle 2$ 相等的角(不包括 $\angle 2$ 本身)共有（　　）

A. 1 个；　　B. 2 个；

C. 3 个；　　D. 4 个.



(1)



(2)

（第 3 题）

（2）如图(2)，已知 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$，那么下列说法中错误的是（　　）

A. $\angle 5$ 与 $\angle 8$ 互补；　　B. $\angle 7$ 与 $\angle 8$ 互补；

C. $\angle 6$ 与 $\angle 7$ 互补；　　D. $\angle 5$ 与 $\angle 6$ 相等.

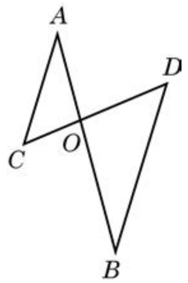
（3）如果两条平行直线被第三条直线所截，那么下列说法中错误的是（　　）

A. 一对同位角的平分线互相平行；

B. 一对内错角的平分线互相平行；

C. 一对同旁内角的平分线互相平行；

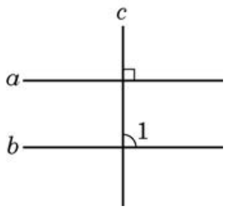
D. 一对同旁内角的平分线互相垂直.



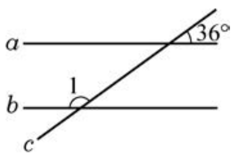
（第 4 题）

4. 如图，已知：AB、CD 相交于点 O，$\angle A=\angle B$. 求证：$\angle C=\angle D$.

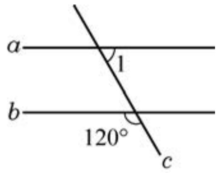
5. 在下列各图中，直线 c 分别与直线 a、b 相交. 已知 $a\parallel b$，分别计算$\angle 1$ 的度数.



（1）



（2）



（3）

（第 5 题）

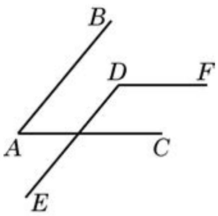
6. 已知下面 4 个命题：①钝角大于直角；②同位角相等，两直线平行；③相等的角都是钝角；④两直线平行，同位角相等.

回答下列问题：

（1）这些命题中有互逆命题吗？若有，指出哪两个命题是互逆命题（写出序号即可）.

（2）这些命题中有假命题吗？若有，指出其中的假命题（写出序号即可）.

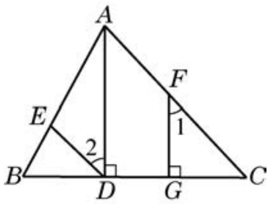
7. 如图，已知$\angle A$ 的两边与$\angle D$ 的两边分别平行，且$\angle D$ 比$\angle A$ 的 3 倍少 20°. 求$\angle D$ 的度数.



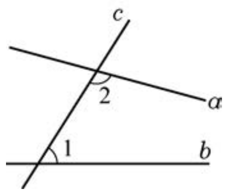
（第 7 题）

B

8. 如图，已知：$AD\perp BC$，$FG\perp BC$，垂足分别为 D、G，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$ED\parallel AC$.



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 用反证法证明. 如图，已知：直线 a、b 被直线 c 所截，$\angle 1+\angle 2\neq 180^\circ$. 求证：$a$ 与 b 不平行.

证明：假设____________________，则根据____________________，可得 $\angle 1+\angle 2=180^\circ$.

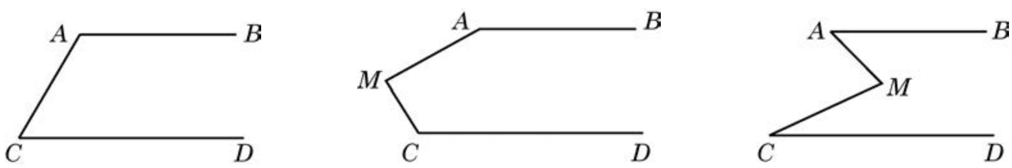
这与____________________矛盾，故假设不成立，a 与 b 不平行.

10. 请回答下列问题：

（1）如图(1)，已知 $AB\parallel CD$，那么 $\angle A+\angle C$ 等于多少度？为什么？

（2）如图(2)，已知 $AB\parallel CD$，那么 $\angle A+\angle AMC+\angle C$ 等于多少度？为什么？

（3）如图(3)，已知 $AB\parallel CD$，那么 $\angle A$、$\angle C$ 及 $\angle AMC$ 有怎样的数量关系？为什么？



(1) (2) (3)

（第 10 题）

第17章

三角形

三角形是基本的几何图形.我们在小学已经学过三角形的一些初步知识，本章将比较系统地学习三角形的有关概念、三边之间的关系及内角和的性质，严格地证明“三角形的内角和等于180°”.

依据三角形全等的判定方法，可识别在不同位置呈现出不同状态的全等三角形.依据全等三角形的性质，可证明几何图形中某些线段相等、角相等.这是平面几何研究问题的一种基本思路和方法.

本章还将学习用尺规作图作一些基本图形，并用三角形全等说明作图的合理性.尺规作图的思想源于古希腊，通过对作图原理的分析，可以更好地帮助我们将几何直观和逻辑推理结合在一起.

17.1 三角形的有关概念

定义 不在同一直线上的三点用线段两两连接而成的图形叫作**三角形**. 其中，三个点叫作三角形的**顶点**；连接顶点的三条线段叫作三角形的**边**，边的长度叫作**边长**；顶点处两边组成的角叫作三角形的**内角**，简称三角形的**角**.

如图 17-1-1，线段 AB、BC、CA 是三角形的边；点 A、B、C 是三角形的顶点；$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 是三角形的内角.

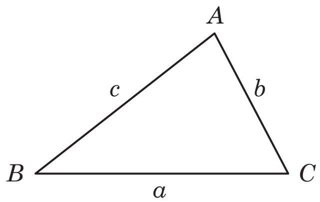


图 17-1-1

顶点是 A、B、C 的三角形，记作"$\triangle ABC$"，读作"三角形 ABC". 顶点 A、B、C 所对的边通常分别用 a、b、c 表示，如图 17-1-1 所示.

不在同一直线上的三点可以用线段两两连接构成一个三角形，是不是任意三条线段都可以组成一个三角形呢?

操作

给定三条线段，尝试用直尺和圆规作出一个三角形.

(1) 线段的长分别是 7 cm、12 cm、15 cm；

(2) 线段的长分别是 7 cm、9 cm、15 cm；

(3) 线段的长分别是 7 cm、8 cm、15 cm；

(4) 线段的长分别是 7 cm、7 cm、15 cm.

通过操作可以知道，第(1)(2)组中的三条线段能作出三角形，第(3)(4)组中的三条线段不能作出三角形.

思考

三条线段的长度必须具备怎样的条件才能作出一个三角形呢?

如果两条线段之和小于等于第三条线段，那么这三条线段不能组成一个

三角形，我们基于此给出如下公理：

公理　三角形任意两边的和大于第三边.

此公理也称为“三角不等式”，其确切意思是：如果三角形的三条边长分别是 a、b、c，那么它们必定满足“三角不等式”，即 $a+b>c$、$b+c>a$、$c+a>b$. 利用不等式的性质，由上述公理可以推出：

三角形任意两边的差小于第三边.

由这个公理，如果三条线段的长度不满足“三角不等式”，那么它们不能组成一个三角形；如果三条线段的长度满足“三角不等式”，那么它们可以组成一个三角形.

例 1　有两根长度分别为 5 cm、7 cm 的木棒，用长度为 13 cm 的木棒与它们能拼成一个三角形吗？用长度为 2 cm 的木棒呢？

解　用长度为 13 cm 的木棒时，因为 $5+7=12<13$，所以这三根木棒不能拼成三角形. 用长度为 2 cm 的木棒时，因为 $2+5=7$，所以这三根木棒也不能拼成三角形.

观察

图 17-1-2 中各三角形的内角有什么特征？

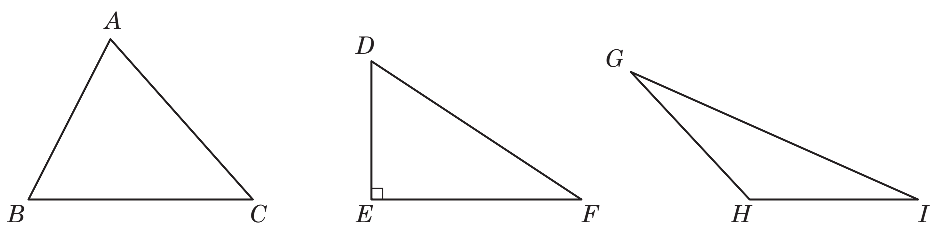


图 17-1-2

观察图 17-1-2 中各三角形的三个角，可以发现，$\triangle ABC$ 的三个角均为锐角；$\triangle DEF$ 中有一个角是直角；$\triangle GHI$ 中有一个角是钝角.

定义 三个角都是锐角的三角形叫作**锐角三角形**；有一个角是直角的三角形叫作**直角三角形**；有一个角是钝角的三角形叫作**钝角三角形**.

这样，三角形可分为锐角三角形、直角三角形和钝角三角形这三类，每个三角形属于且只属于其中的一类.

在直角三角形中，直角的两条边叫作**直角边**，直角所对的边叫作**斜边**. 直角三角形可用符号“Rt△”表示，例如直角三角形 ABC 可以表示为“Rt△ABC”，读作“直角三角形 ABC”.

定义 有两边相等的三角形叫作**等腰三角形**，特别地，三边都相等的三角形叫作**等边三角形**.

图 17-1-3 中，△ABC 的三边互不相等，不是等腰三角形；△DEF 中有两条边 DE、DF 相等，是等腰三角形；△GHI 的三边都相等，是等边三角形.

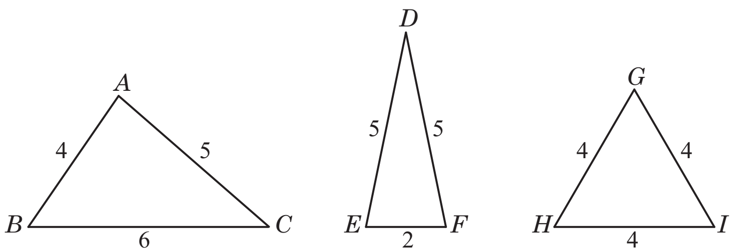


图 17-1-3

既是等腰三角形又是直角三角形的三角形叫作**等腰直角三角形**. 例如，有 45°角的三角尺的形状是等腰直角三角形.

课堂练习 17.1(1)

1. 下列长度的三根铁条能首尾顺次连接做成三角形框架的是（　　）

A. 23 cm、10 cm、8 cm；

B. 15 cm、23 cm、8 cm；

C. 18 cm、10 cm、23 cm；

D. 18 cm、10 cm、8 cm.

2. 如果一个等腰三角形的一边长为 5 cm，周长为 17 cm，那么其他两边的长分别可能是多少？

定义 给定一个三角形，从一个顶点向它的对边所在的直线画垂线，此顶点和垂足之间的线段叫作**三角形(此边上)的高**. 连接一个顶点及其对边中点的线段叫作**三角形(此边上)的中线**. 三角形一个内角的平分线与这个角的对边相交，这个角的顶点与交点之间的线段叫作**三角形(此角)的角平分线**.

严格地说，三角形的高、中线与角平分线均需明确所在的边或角，但在不会引起混淆时也可以省略.

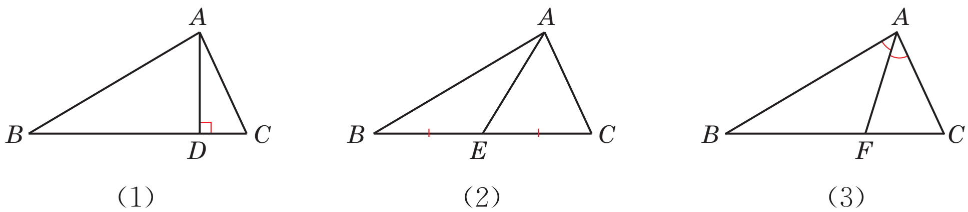


图 17-1-4

在图 17-1-4(1)中，$AD \perp BC$，垂足为 D，线段 AD 是$\triangle ABC$ 的边 BC 上的高，也可以写成“线段 AD 是$\triangle ABC$ 的高”；在图 17-1-4(2)中，点 E 在边 BC 上，$BE=CE$，线段 AE 是$\triangle ABC$ 的中线；在图17-1-4(3)中，$\angle BAF=\angle CAF$，线段 AF 是$\triangle ABC$ 的角平分线.

操作

(1) 在图 17-1-5(1)(2)(3)中，分别画三个三角形的三条中线；

(2) 在图 17-1-5(4)(5)(6)中，分别画三个三角形的三条角平分线；

(3) 在图 17-1-5(7)(8)(9)中，分别画三个三角形的三条高.

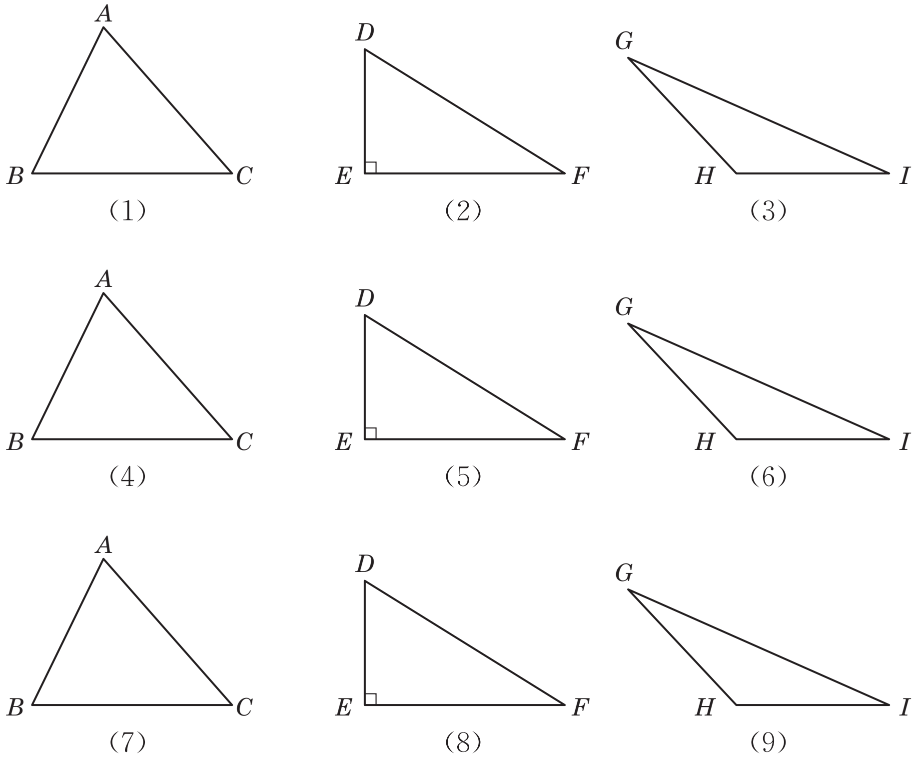


图 17-1-5

观察所画图形可以发现：

三角形的三条中线相交于三角形内一点．三角形的三条角平分线相交于三角形内一点．三角形的三条高所在直线相交于一点，它的位置情况如下：锐角三角形时在三角形内；直角三角形时在直角顶点；钝角三角形时在三角形外．

例 2 如图 17-1-6，在$\triangle ABC$ 中，AD 是边 BC 上的中线，$AE\perp BC$，垂足为 E．

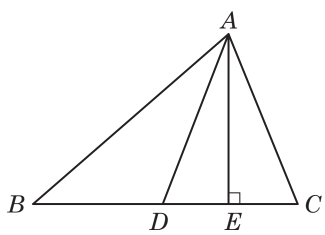


图 17-1-6

（1）AE 是图 17-1-6 中哪几个三角形的高？

（2）找出图 17-1-6 中面积相等的两个三角形，并加以证明．

解 （1）AE 是$\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle ABE$、$\triangle ADC$、$\triangle ADE$ 和$\triangle AEC$ 的高．

（2）$\triangle ABD$ 与$\triangle ACD$ 的面积相等．证明如下：

$\because$ AD 是边 BC 上的中线，

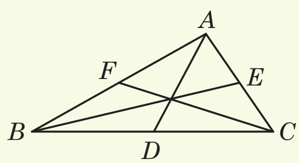
$\therefore$ $BD=DC$.

$\therefore$ $\frac{1}{2}BD \cdot AE=\frac{1}{2}DC \cdot AE$.

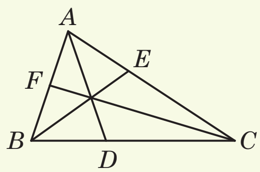
由三角形的面积公式，可知$\triangle ABD$ 与$\triangle ACD$ 的面积相等.

课堂练习 17.1(2)

1. 如图，AD、BE、CF 是$\triangle ABC$ 的三条中线，那么 $AB=2$________$=2$________，$BD=\frac{1}{2}$________，$AE=$________.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，AD、BE、CF 是$\triangle ABC$ 的三条角平分线，那么$\angle BAD=$________，$\angle ABE=\frac{1}{2}$________，$\angle ACB=2$________$=2$________.

习题 17.1

A

1. 以下列长度的各组线段为边能组成三角形的是 （　　）

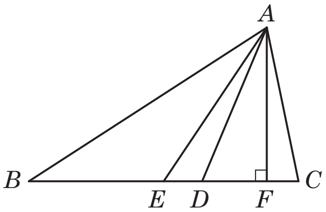
A. 2 cm、4 cm、6 cm；

B. 2 cm、5 cm、6 cm；

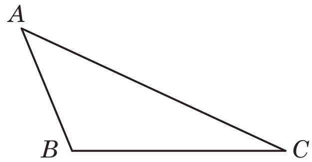
C. 2 cm、9 cm、6 cm；

D. 10 cm、4 cm、6 cm.

2. 如图，如果 AD、AE、AF 分别是$\triangle ABC$ 的角平分线、中线和高，那么$\angle$________$=\angle$________$=90°$，$\angle$________$=\angle$________，线段________$=$________.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，画出$\triangle ABC$ 的边 AC 上的高 BD，再写出所得图形中的直角三角形；画出$\triangle ABC$ 的边 AB 上的中线 CE，再写出所得图形中面积相等的两个三角形.

B

4. 把一根长为 18 cm 的细木棒锯成三段，拼成一个等腰三角形. 能拼成多少种有一边长为 4 cm 的等腰三角形？为什么？

17.2 三角形的内角和

1. 三角形的内角和

操作

将一张三角形纸片的三个角撕下，拼在一起，如图 17-2-1 所示. 你有何发现?

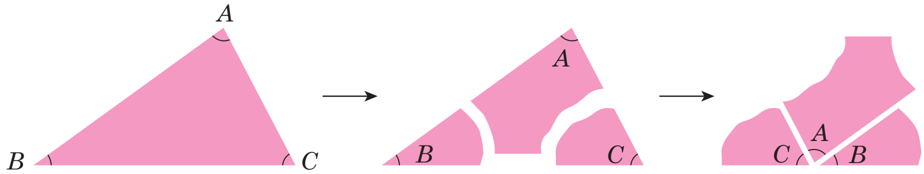


图 17-2-1

三角形的内角和定理　三角形的内角和等于 $180°$.

已知：$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 是 $\triangle ABC$ 的三个内角.

求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

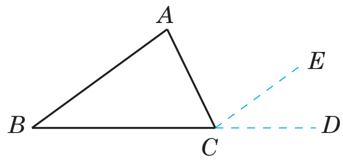


图 17-2-2

分析　要证 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$，即要证这三个角能合成一个平角. 由以上操作可知，只要将 $\angle A$ 与 $\angle B$ 转移到与 $\angle C$ 共顶点即可，因此过 $\triangle ABC$ 的顶点 C 作 AB 的平行线，如图 17-2-2 所示.

证明　过点 C 作 $CE\parallel BA$，延长 BC 至 D，如图 17-2-2 所示. 由平行线的性质，得

$\angle ACE=\angle A$，$\angle ECD=\angle B$.

因为 $\angle ACB+\angle ACE+\angle ECD=180°$，所以

$$\angle A+\angle B+\angle ACB=180°.$$

定理说明三角形的内角和与三角形的形状无关，是一个常量. 这是关于三角形的一个基本定理.

由于证明的需要，可以在原来的图形上添画一些线，像这样的线叫作辅助线. 辅助线通常画成虚线，本定理的证明过程中添加了辅助线 CD、CE，如图 17-2-2 所示.

思考

一个三角形的三个内角中最多有几个钝角？几个直角？

例 1 在$\triangle ABC$中，$\angle B=35^\circ$，$\angle C=55^\circ$. 求$\angle A$的度数，并判断$\triangle ABC$的形状.

解 $\because$ $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$是$\triangle ABC$的三个内角，

$\therefore$ $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$（三角形的内角和等于$180^\circ$）.

又$\because$ $\angle B=35^\circ$，$\angle C=55^\circ$，

$\therefore$ $\angle A=180^\circ-\angle B-\angle C=180^\circ-35^\circ-55^\circ=90^\circ$.

$\therefore$ $\triangle ABC$是一个直角三角形.

例 2 在$\triangle ABC$中，$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$，求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的度数.

解 根据题意，可设$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的度数分别为x°、$2x^\circ$、$3x^\circ$.

$\because$ $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$是$\triangle ABC$的三个内角，

$\therefore$ $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$（三角形的内角和等于$180^\circ$），

即

$$x+2x+3x=180.$$

$\therefore$ $x=30$.

$\therefore$ $\angle A=30^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\angle C=90^\circ$.

课堂练习 17.2(1)

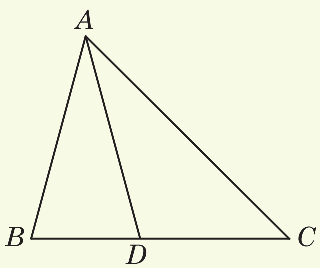
1. 已知$\triangle ABC$中两个内角的度数，判断$\triangle ABC$的形状：

（1）$\angle A=30^\circ$，$\angle B=40^\circ$；

（2）$\angle B=32^\circ$，$\angle C=58^\circ$；

（3）$\angle A=60^\circ$，$\angle C=50^\circ$.

2. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=60^\circ$，$\angle C=45^\circ$，AD是$\triangle ABC$的角平分线. 求$\angle ADC$的度数.



（第 2 题）

2. 三角形的外角及其性质

如图 17-2-3，延长$\triangle ABC$ 的一边 BC，得到$\angle ACD$. 像这样，三角形一个内角的一边与另一边的反向延长线所组成的角叫作三角形(与此内角相邻)的**外角**. $\angle ACD$ 是$\triangle ABC$ 的一个外角，$\angle ACB$ 是与它相邻的内角，另外两个内角$\angle A$、$\angle B$ 是与它不相邻的内角.

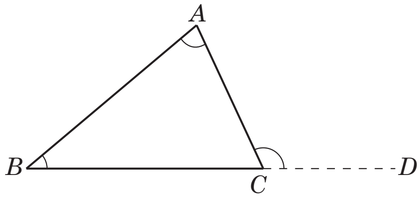


图 17-2-3

思考

在一个三角形中，与一个内角相邻的外角有几个？它们有何关系？

如图 17-2-4，作 BC 的延长线 CD，作 AC 的延长线 CE，可知$\angle ACD$、$\angle BCE$ 都是与$\angle ACB$ 相邻的外角. 这两个外角是对顶角，它们的大小相等.

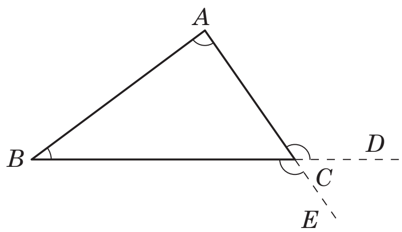


图 17-2-4

思考

如图 17-2-3，在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=75^\circ$，$\angle B=40^\circ$，$\angle ACD$ 是$\triangle ABC$ 的一个外角. 可以由$\angle A$、$\angle B$ 求出$\angle ACD$ 吗？若可以，$\angle ACD$ 与$\angle A$、$\angle B$ 之间有怎样的数量关系？任意一个三角形的一个外角与它不相邻的两个内角是否都有这种关系？

由三角形的内角和定理可以推出下面的结论：

推论 三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和.

推论是由定理直接推出的结论，可以作为进一步推理的依据.

如图 17-2-5，已知：$\angle ACD$ 是$\triangle ABC$ 的一个外角.

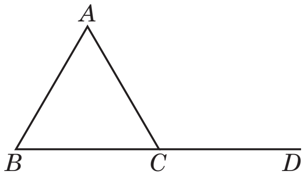


图 17-2-5

求证：$\angle ACD=\angle A+\angle B$.

证明 因为$\angle ACD+\angle ACB=180°$，又根据三角形的内角和定理，有$\angle A+\angle B+\angle ACB=180°$，所以$\angle ACD+\angle ACB=\angle A+\angle B+\angle ACB$. 从而$\angle ACD=\angle A+\angle B$.

由此，容易得到三角形的外角有如下的性质：

> 三角形的外角大于任何一个与它不相邻的内角.

例 3 在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=30°$，$\angle C=50°$. 求分别与$\angle ABC$、$\angle ACB$ 相邻的外角的度数.

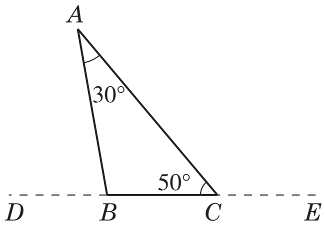


图 17-2-6

解 如图 17-2-6，作 CB 的延长线 BD，则$\angle ABD$ 是与$\angle ABC$ 相邻的一个外角.

$\because$ $\angle ABD=\angle A+\angle ACB$（三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和），

又$\because$ $\angle A=30°$，$\angle ACB=50°$，

$\therefore$ $\angle ABD=30°+50°=80°$.

作 BC 的延长线 CE，则$\angle ACE$ 是与$\angle ACB$ 相邻的一个外角.

$\because$ $\angle ACE+\angle ACB=180°$，

$\therefore$ $\angle ACE=180°-\angle ACB=180°-50°=130°$.

例 4 如图 17-2-7，$\angle BAC=70°$，D 是$\triangle ABC$ 的边 BC 上一点，且$\angle CAD=\angle C$，$\angle ADB=80°$.

（1）求$\angle C$ 的度数；

（2）求$\angle B$ 的度数.

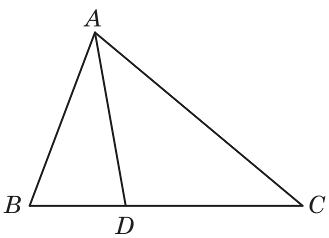


图 17-2-7

分析 考虑到$\triangle ADC$ 中与$\angle ADB$ 不相邻的两个内角$\angle CAD$、$\angle C$ 相等，所以利用“三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和”即可求得$\angle C$ 的度数；再求$\angle B$ 的度数，只

需在△ABC中利用“三角形的内角和等于180°”即可.

解 (1) ∵ $\angle ADB=\angle CAD+\angle C$（三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和），

又∵ $\angle CAD=\angle C$，$\angle ADB=80°$，

∴ $\angle C+\angle C=80°$.

∴ $\angle C=\frac{1}{2}\times 80°=40°$.

(2) ∵ $\angle BAC+\angle B+\angle C=180°$（三角形的内角和等于180°），

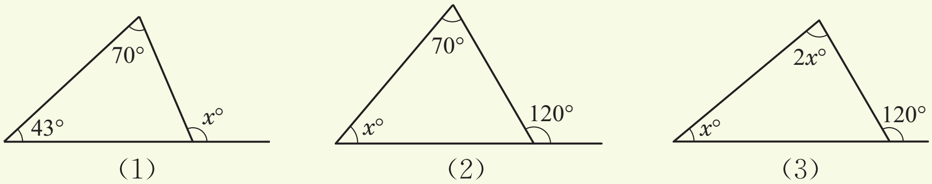
$\angle BAC=70°$，$\angle C=40°$，

∴ $70°+\angle B+40°=180°$.

∴ $\angle B=180°-70°-40°=70°$.

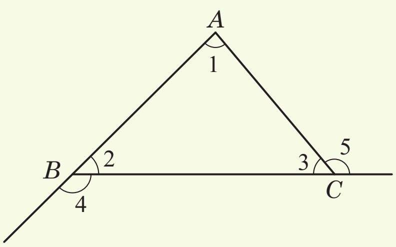
课堂练习 17.2(2)

1. 求图中 x 的值：



（第 1 题）

2. 如图，∠1、∠2、∠3 是△ABC 的三个内角，∠4、∠5 是△ABC 的外角. 如果 $\angle 1=85°$，$\angle 5=130°$，求∠2、∠3、∠4 的度数.



（第 2 题）

例 5 如图 17-2-8，在△ABC 中，D 是边 BC 上一点，且$\angle ADE=\angle B$. $\angle 1$ 与$\angle 2$ 相等吗？为什么？

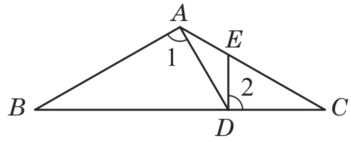


图 17-2-8

分析 考虑到$\angle ADC=\angle ADE+\angle 2$，且$\angle ADC$ 是△ABD 的一个外角，利用“三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和”即可推出$\angle 1$ 与$\angle 2$ 相等.

解 $\angle 1$ 与$\angle 2$ 相等. 理由如下：

∵ $\angle ADC=\angle ADE+\angle 2$，

又∵ $\angle ADC=\angle B+\angle 1$（三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和），

∴ $\angle ADE+\angle 2=\angle B+\angle 1$.

又∵ $\angle ADE=\angle B$，

∴ $\angle 1=\angle 2$.

例 6 如图 17-2-9，已知直线 AB、CD 相交于点 O，$\angle B=\angle C$，$\angle A=40°$. 求$\angle D$ 的度数.

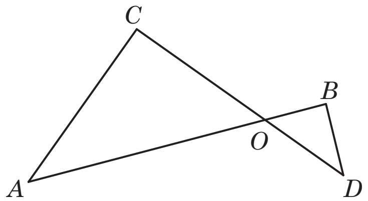


图 17-2-9

分析 要求$\angle D$ 的度数，根据“三角形的内角和定理”，并利用等量代换即可.

解 ∵ $\angle A+\angle C+\angle AOC=180°$，

$\angle D+\angle B+\angle BOD=180°$（三角形的内角和等于 180°），

∴ $\angle A+\angle C+\angle AOC=\angle D+\angle B+\angle BOD$.

又∵ $\angle AOC=\angle BOD$（对顶角相等），$\angle C=\angle B$，

∴ $\angle A=\angle D$.

又∵ $\angle A=40°$，

∴ $\angle D=40°$.

讨论

可否借助“三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和”求出例 6 中$\angle D$ 的度数？

对于三角形的每个内角，从与它相邻的两个外角中取一个，这样取得的三个外角相加所得的和，叫作三角形的**外角和**.

思考

三角形的内角和等于 180°，那么三角形的外角和等于多少度？

例 7 如图 17-2-10，$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$ 是$\triangle ABC$ 的外角，求$\angle 1+\angle 2+\angle 3$.

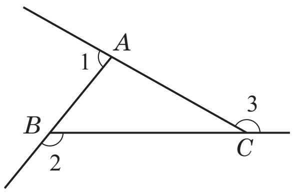


图 17-2-10

解 ∵ $\angle 1+\angle BAC=180^\circ$，

$\angle 2+\angle ABC=180^\circ$，

$\angle 3+\angle ACB=180^\circ$，

∴ $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=3\times 180^\circ=540^\circ$.

又∵ $\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

∴ $\angle 1+\angle 2+\angle 3+180^\circ=540^\circ$，

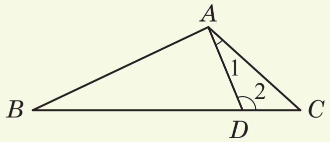
∴ $\angle 1+\angle 2+\angle 3=360^\circ$.

由此，我们得到：

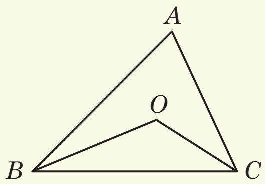
三角形的外角和等于 360°.

课堂练习 17.2(3)

1. 如图，在$\triangle ABC$中，D是边BC上一点，且$\angle 1=\angle B$. $\angle BAC$与$\angle 2$相等吗？为什么？



（第 1 题）



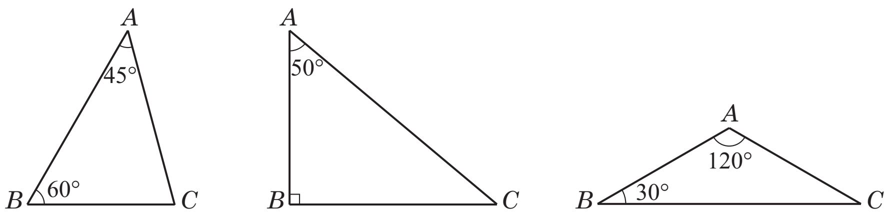
（第 2 题）

2. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A=70^\circ$，$\angle ABC$、$\angle ACB$的平分线OB、OC相交于点O. 求$\angle BOC$的度数.

习题 17.2

A

1. 求下列各三角形中$\angle C$的度数：



(1)　(2)　(3)

（第 1 题）

2. 下列命题中正确的是　（　　）

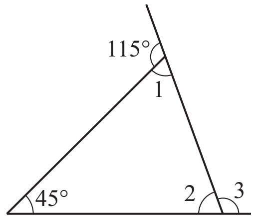
A. 锐角三角形的三个内角都是锐角；

B. 钝角三角形的三个内角都是钝角；

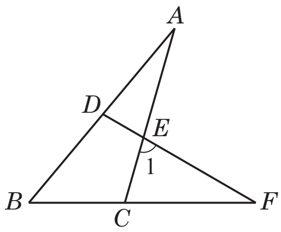
C. 钝角三角形的内角和大于锐角三角形的内角和；

D. 三角形中最小的两个内角的和必定大于90°.

3. 如图，求$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$的度数.



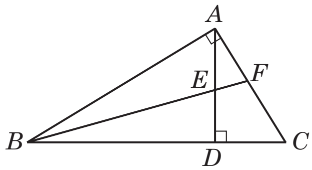
（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，直线DF与$\triangle ABC$的两边AB、AC分别相交于D、E两点，与BC的延长线相交于点F，$\angle B=50°$，$\angle 1=76°$，$\angle F=30°$. 求$\angle A$的度数.

5. 如图，已知：在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$，垂足为D，BF平分$\angle ABC$，且交AD于点E，交AC于点F. 求证：$\angle BED=\angle AFB$. 把以下解答过程补充完整.



（第 5 题）

解：因为BF平分$\angle ABC$，所以$\angle ABF=$________.

在$\triangle ABF$中，

$\angle AFB+\angle ABF+\angle BAF=180°$（____________________________）.

在$\triangle BDE$中，

$\angle BED+\angle EBD+\angle BDE=180°$（____________________________）.

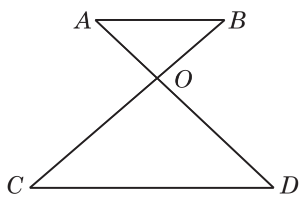
由$AD\perp BC$，得$\angle BDE=90°$.

又因为$\angle BAC=90°$，所以$\angle BED=\angle AFB$.

6. 如图，AD与BC相交于点O.

（1）如果$\angle A=\angle C$，那么$\angle B$与$\angle D$相等吗？为什么？

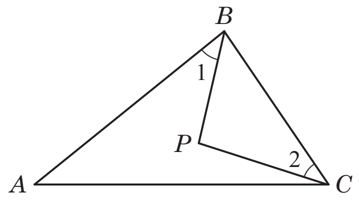
（2）如果$\angle A=\angle B$，$\angle C=\angle D$，那么AB与CD平行吗？为什么？



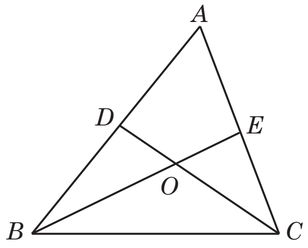
（第 6 题）

B

7. 如图，P 是 $\triangle ABC$ 内一点，$\angle ABC=85^\circ$，$\angle 1=\angle 2$. 求$\angle BPC$ 的度数.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，在$\triangle ABC$ 中，D、E 分别是边 AB、AC 上的点，BE、CD 相交于点O. 如果 $\angle A=60^\circ$，$\angle ACD=35^\circ$，$\angle ABE=25^\circ$，求$\angle BDC$ 和$\angle COE$ 的度数.

17.3 全等三角形及其性质

定义 如果一个图形经过平移、旋转、翻折后，与另一个图形能够完全重合，那么这两个图形叫作**全等形**. 是全等形的两个三角形叫作**全等三角形**.

思考

图 17-3-1 中有四对三角形，每对中的△ABC 通过怎样的运动能与另一个三角形重合？

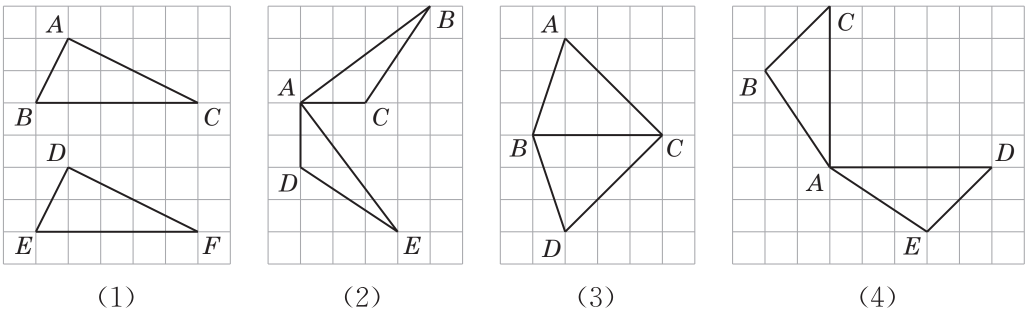


图 17-3-1

把两个全等三角形重合到一起，重合的顶点叫作**对应顶点**，重合的边叫作**对应边**，重合的角叫作**对应角**.

例如，图 17-3-1(1)中，△ABC 和△DEF 是全等三角形，记作△ABC≌△DEF，符号“≌”表示全等，读作“全等于”. 其中，点 A 和点 D、点 B 和点 E、点 C 和点 F 分别是对应顶点；边 AB 和边 DE、边 BC 和边 EF、边 AC 和边 DF 分别是对应边；∠A 和∠D、∠B 和∠E、∠C 和∠F 分别是对应角.

> 全等三角形指两个三角形全等. 在叙述时，通常把对应顶点的字母写在对应的位置上.

由全等三角形的定义可知：

> 全等三角形的对应边相等，对应角相等.

例如，图 17-3-1(1)中，$\triangle ABC\cong\triangle DEF$，$AB$ 与 DE 是对应边，由全等三角形的对应边相等，得 $AB=DE$. 同样地，我们还可以得到 $BC=EF$，$AC=DF$. 由全等三角形的对应角相等，可得 $\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$.

讨论

在图 17-3-1(2)、图 17-3-1(3)、图 17-3-1(4)中，分别都有两个三角形全等，请分别说出它们的对应边、对应角的相等关系.

由全等三角形的定义可以得到：

> 如果两个三角形都与第三个三角形全等，那么这两个三角形全等.

这个性质叫作**三角形全等的传递性**.

例 1 如图 17-3-2，已知 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$，$AB=2$ cm，$\angle A=60^\circ$，$\angle B=70^\circ$. 求 DE 的长，$\angle D$ 和 $\angle F$ 的度数.

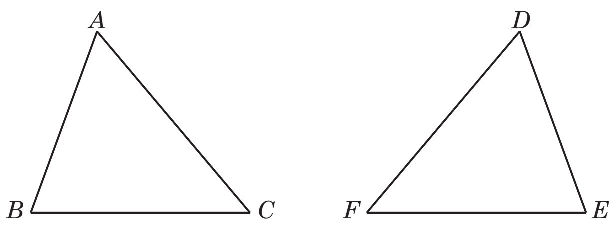


图 17-3-2

解 $\because$ $\triangle ABC\cong\triangle DEF$，顶点 A、B、C 分别与顶点 D、E、F 对应，

$\therefore$ $AB=DE$（全等三角形的对应边相等），

$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$（全等三角形的对应角相等）.

$\because$ $AB=2$ cm，$\angle A=60^\circ$，$\angle B=70^\circ$，

$\therefore$ $DE=2$ cm，$\angle D=60^\circ$，$\angle E=70^\circ$.

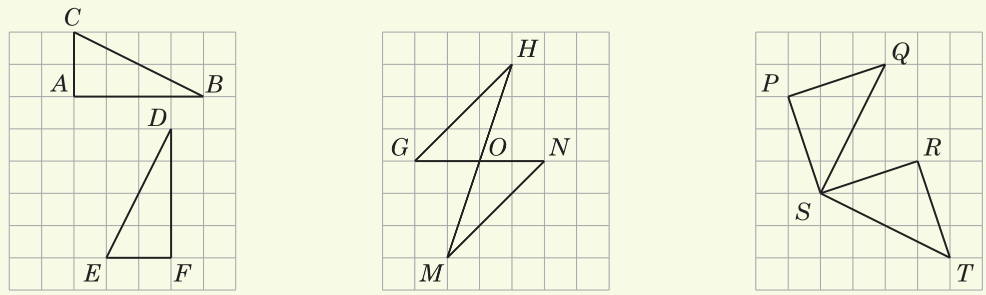
又$\because$ $\angle D+\angle E+\angle F=180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

$\therefore$ $\angle F=50^\circ$.

$\therefore$ $DE=2$ cm，$\angle D=60^\circ$，$\angle F=50^\circ$.

课堂练习 17.3

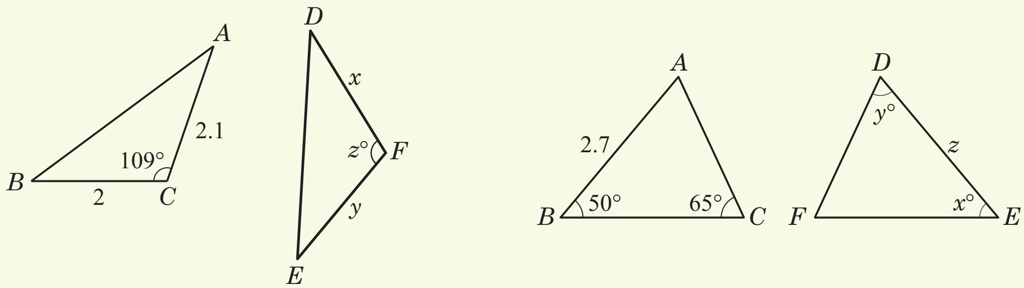
1. 图(1)(2)(3)中给出的每对三角形都是全等三角形. 用符号表示各对全等三角形，并指出它们的对应边和对应角.



(1)　　　　(2)　　　　(3)

(第 1 题)

2. 如图，已知$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，顶点 A、B、C 分别与顶点 D、E、F 对应. 求图中 x、y、z 的值.



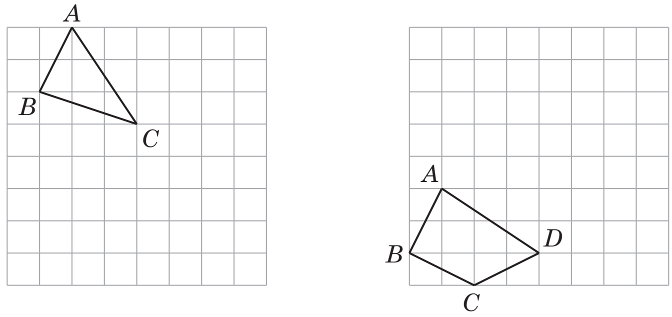
(1)　　　　(2)

(第 2 题)

习题 17.3

A

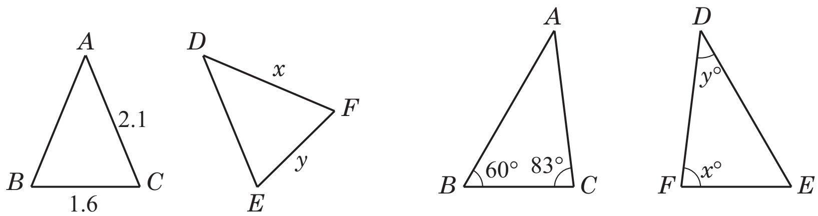
1. 分别在方格图中画出一个与$\triangle ABC$和四边形 $ABCD$ 全等的图形.



（1）　　　　　　（2）

（第 1 题）

2. 如图，已知$\triangle ABC\cong\triangle DEF$，顶点 A、B、C 分别与顶点 D、E、F 对应. 求图中 x、y 的值.

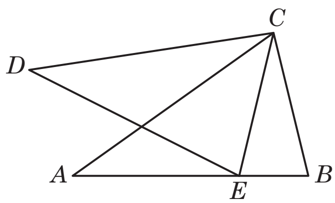


（1）　　　　　　（2）

（第 2 题）

B

3. 如图，已知$\triangle ABC\cong\triangle DEC$，边 AC 和边 DC、边 CB 和边 CE 分别是对应边. $\angle ACD$ 和$\angle BCE$ 相等吗？请说明理由.



（第 3 题）

17.4 三角形全等的判定

我们知道，如果$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，那么它们的对应边相等，对应角相等. 反过来，如果$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的三条边对应相等，三个角对应相等，即

$$AB=A'B',\ BC=B'C',\ CA=C'A',$$
$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C',$$

那么就能判定$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，如图 17-4-1 所示.

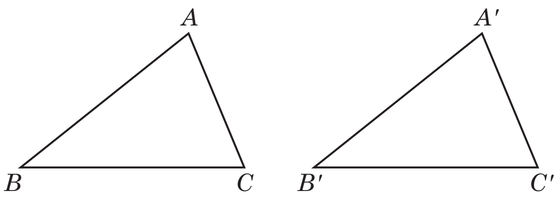


图 17-4-1

能否在上述六组边或角相等的条件中选择部分条件直接判定两个三角形全等呢?

下面，我们就对判定两个三角形全等的条件进行讨论.

操作

如图 17-4-2(1)，给定一个$\triangle ABC$. 作一个$\triangle A'B'C'$，如图 17-4-2(2)，使 $A'B'=AB$，$B'C'=BC$，$C'A'=CA$. 将作好的$\triangle A'B'C'$剪下来，经过平移、旋转、翻折后，能与$\triangle ABC$完全重合吗?

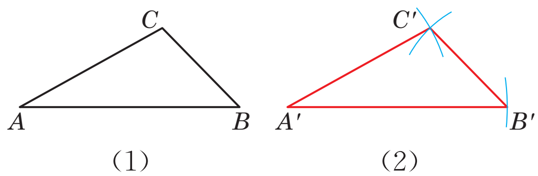


图 17-4-2

作法

(1) 作$A'B'=AB$；

(2) 分别以点 A'、B'为圆心，以线段 AC、BC 的长为半径画弧，两弧相交于点 C'；

(3) 连接 $A'C'$、$B'C'$.

$\triangle A'B'C'$就是所求的三角形，如图 17-4-2(2)所示.

公理　三边对应相等的两个三角形全等（简记为“边边边”或“SSS”）.

S 为英文中 side（边）的缩写，“SSS”即“边边边”.

如图 17-4-2，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，已知$AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$CA=C'A'$，那么$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

如果一个三角形的三条边长固定，那么这个三角形的形状和大小就完全确定了. 三角形的这个性质叫作三角形的稳定性. 三角形的稳定性在生产实践中有广泛的应用. 例如，桥梁拉杆、电视塔架底座、高压电线塔等都有三角形结构.

例 1　如图 17-4-3，已知：在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D是BC的中点.

求证：$\triangle ABD\cong\triangle ACD$.

分析　要证$\triangle ABD\cong\triangle ACD$，根据上面的公理，只需证这两个三角形的三边对应相等.

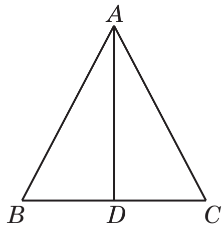


图 17-4-3

证明　$\because$　D是BC的中点，

$\therefore$　$BD=CD$.

在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，

$$\because \begin{cases} AB=AC, \\ BD=CD, \\ AD=AD, \end{cases}$$

$\therefore$　$\triangle ABD\cong\triangle ACD$（SSS）.

例 2　如图 17-4-4，已知：点A、B、C、D在同一直线上，$AC=DB$，$AE=CF$，$BE=DF$.

求证：$\triangle ABE\cong\triangle CDF$.

分析 要证$\triangle ABE\cong\triangle CDF$，只需由已知$AC=DB$，推出$AB=CD$，再利用“边边边”即可.

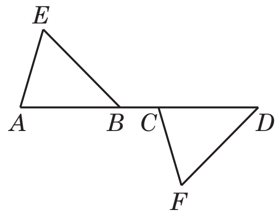


图 17-4-4

证明 $\because$ $AC=DB$，

$\therefore$ $AC-BC=DB-BC$.

$\therefore$ $AB=CD$.

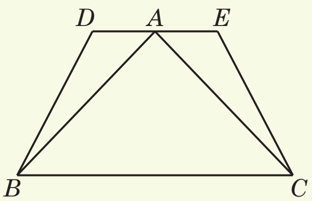
在$\triangle ABE$和$\triangle CDF$中，

$$\because \begin{cases} AB=CD, \\ AE=CF, \\ BE=DF, \end{cases}$$

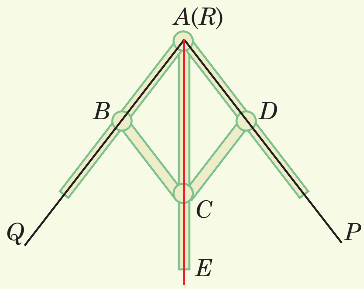
$\therefore$ $\triangle ABE\cong\triangle CDF$（SSS）.

课堂练习 17.4(1)

1. 如图，已知：$AB=AC$，$BD=CE$，A是DE的中点．求证：$\triangle ABD\cong\triangle ACE$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，仪器$ABCD$可以平分一个角，其中$AB=AD$，$BC=DC$，将仪器上的点A与$\angle PRQ$的顶点R重合，调整AB和AD，使它们落在$\angle PRQ$的两边上，沿AC画一条射线AE，AE就是$\angle PRQ$的平分线．你能说明其中的道理吗？

我们已经能用直尺和圆规作出一个三角形，使它的三边分别等于已知三角形的三边．你能只使用直尺和圆规作出一个角等于已知角吗？

例 3　作一个角等于已知角.

如图 17-4-5，已知 $\angle\alpha$，作 $\angle AOB=\angle\alpha$.

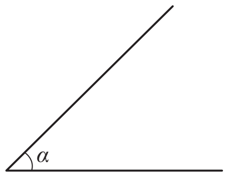


图 17-4-5

分析　设法使已知$\angle\alpha$ 成为某三角形的一个内角，再利用直尺和圆规作出一个与该三角形全等的三角形，此三角形中$\angle\alpha$ 的对应角就是所求的角.

作法

(1) 以$\angle\alpha$ 的顶点为圆心、以任意长度 a 为半径作弧，分别交$\angle\alpha$ 的两边于点 C、D，如图 17-4-6(1)所示；

(2) 过点 O 作一条任意射线 OA，以点 O 为圆心、以 a 的长为半径作弧，交 OA 于点 M；

(3) 以点 M 为圆心、以 CD 的长为半径作弧，交前弧于点 N；

(4) 经过点 N 作射线 OB.

$\angle AOB$ 就是所求的角，如图 17-4-6(2)所示.

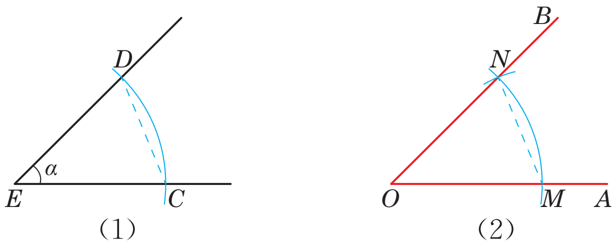


图 17-4-6

证明　记 $\angle\alpha$ 的顶点为 E，连接 CD、MN.

由作法，可知在$\triangle CDE$ 和$\triangle MNO$ 中，

$$\because \begin{cases} DE=NO, \\ CE=MO, \\ CD=MN, \end{cases}$$

$\therefore$　$\triangle CDE\cong\triangle MNO$ (SSS).

$\therefore$　$\angle MON=\angle CED$（全等三角形的对应角相等），

即$\angle AOB=\angle\alpha$.

在数学中，把只使用没有刻度的直尺和圆规在有限步之内完成作图的方法，叫作**尺规作图**. 尺规作图是古希腊数学家提出的一个概念，它对直尺和圆规的使用方法有着严格的限制：无刻度的直尺只能用来作经过两点的直线，圆规只能以一个定点为圆心、以给定的线段长为半径作圆.

例 4 过直线外一点作已知直线的平行线.

如图 17-4-7，已知直线 AB 和直线外一点 M，求作直线 $CD // AB$，且使 CD 经过点 M.

> 如无特别说明，本章及后续章节中的作图题均指用尺规作图，需保留作图痕迹.

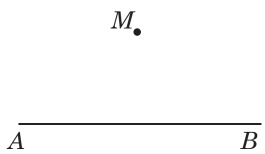


图 17-4-7

分析 可以借助“同位角相等，两直线平行”的公理，构造一对相等的同位角，以此得到两条平行的直线. 尝试过点 M 作一条与直线 AB 相交的直线作为“截线”，然后利用作一个角等于已知角的方法即可实现.

作法

（1）在直线 AB 上取一点 N，作直线 MN；

（2）过点 M 作直线 CD，使同位角 $\angle PMD=\angle MNB$（例 3）.

直线 CD 就是所求的直线(图17-4-8).

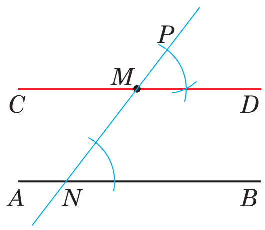


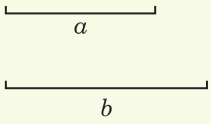
图 17-4-8

证明 由作法，可知 $\angle PMD=\angle MNB$，

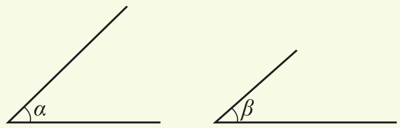
所以 $CD // AB$（同位角相等，两直线平行）.

课堂练习 17.4(2)

1. 如图，已知线段 a、b，求作△ABC，使 $AB=AC=b$，$BC=a$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知∠α、∠β，求作∠r=∠α+∠β.

操作

如图 17-4-9(1)，给定一个△ABC. 用直尺和圆规作△$A'B'C'$，如图 17-4-9(2)，使 $A'B'=AB$，∠A'=∠A，$A'C'=AC$. 将作好的△$A'B'C'$剪下来，经过平移、旋转、翻折后，能与△ABC 完全重合吗？

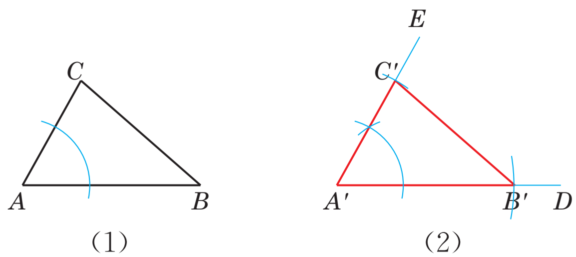


图 17-4-9

> 作法
> (1) 作∠$DA'E$=∠A；
> (2) 以点 A' 为圆心、以 AC 的长为半径作弧，交 $A'E$ 于点 C'；
> (3) 以点 A' 为圆心、以 AB 的长为半径作弧，交 $A'D$ 于点 B'；
> (4) 连接 $B'C'$.
> △$A'B'C'$就是所求的三角形，如图 17-4-9(2)所示.

公理 两边及其夹角对应相等的两个三角形全等(简记为“边角边”或“SAS”).

> A 为英文中 angle(角)的缩写，“SAS”即“边角边”.

如图 17-4-9，在△ABC 和△$A'B'C'$中，已知 $AB=A'B'$，∠A=∠A'，$AC=A'C'$，那么△ABC≌△$A'B'C'$.

例 5　如图 17-4-10，已知：$AB=DC$，$\angle ABC=\angle DCB$.

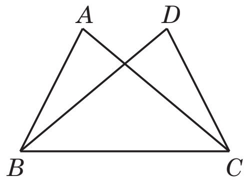


图 17-4-10

求证：$\triangle ABC \cong \triangle DCB$.

证明　在$\triangle ABC$ 和$\triangle DCB$ 中，

$$\because \begin{cases} AB=DC, \\ \angle ABC=\angle DCB, \\ BC=CB, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$（SAS）.

例 6　如图 17-4-11，已知：AB 与 CD 相交于点 O，$OA=OB$，$OC=OD$.

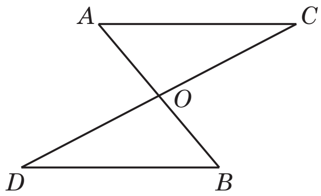


图 17-4-11

求证：$\triangle AOC \cong \triangle BOD$.

证明　在$\triangle AOC$ 和$\triangle BOD$ 中，

$$\because \begin{cases} OA=OB, \\ \angle AOC=\angle BOD\text{（对顶角相等）}, \\ OC=OD, \end{cases}$$

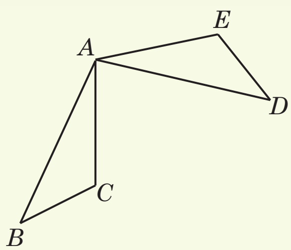
$\therefore$ $\triangle AOC \cong \triangle BOD$（SAS）.

探究

“两边分别相等且其中一组等边的对角相等的两个三角形全等”是真命题吗？为什么？

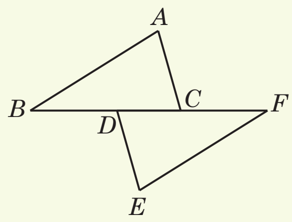
课堂练习 17.4(3)

1. 如图，已知：$AB=AD$，$AC=AE$，$\angle BAC=\angle DAE$. 求证：$\triangle BAC \cong \triangle DAE$.



（第 1 题）

2. 如图，已知：点 B、D、C、F 在同一直线上，$AC \parallel DE$，$AC=ED$，$BD=FC$. 求证：$\triangle ABC \cong \triangle EFD$.



（第 2 题）

操作

如图 17-4-12(1)，给定一个$\triangle ABC$. 用直尺和圆规作$\triangle A'B'C'$，如图 17-4-12(2)，使$\angle B'=\angle B$，$B'C'=BC$，$\angle C'=\angle C$. 将作好的$\triangle A'B'C'$剪下来，经过平移、旋转、翻折后，能与$\triangle ABC$完全重合吗?

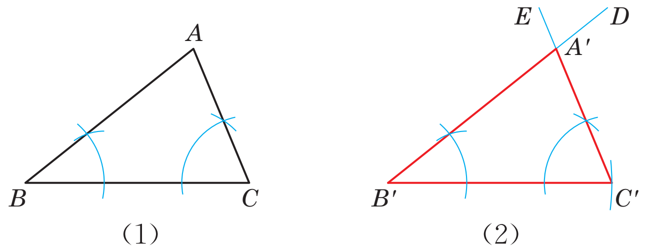


图 17-4-12

作法

(1) 作$B'C'=BC$；

(2) 分别以 B'、C'为顶点，在 $B'C'$的同侧作$\angle DB'C'=\angle B$，$\angle EC'B'=\angle C$，射线 $B'D$、$C'E$ 的交点记作A'.

$\triangle A'B'C'$就是所求的三角形，如图 17-4-12(2)所示.

公理 两角及其夹边对应相等的两个三角形全等(简记为“角边角”或“ASA”).

如图 17-4-12，在$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$中，已知$\angle B=\angle B'$，$BC=B'C'$，$\angle C=\angle C'$，那么$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

例 7 如图 17-4-13，已知：AB 与 CD 相交于点 O，$AO=BO$，$\angle A=\angle B$.

求证：$\triangle AOC \cong \triangle BOD$.

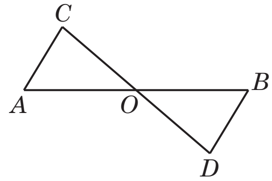


图 17-4-13

证明 在$\triangle AOC$ 和$\triangle BOD$ 中，

$$\because \begin{cases} \angle A=\angle B, \\ AO=BO, \\ \angle AOC=\angle BOD \text{（对顶角相等）}, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle AOC \cong \triangle BOD$（ASA）.

例 8 如图 17-4-14，已知：点 B、E、F、D 在同一直线上，$\angle B=\angle D$，$\angle AEB=\angle CFD$，$BF=DE$.

求证：$\triangle ABE \cong \triangle CDF$.

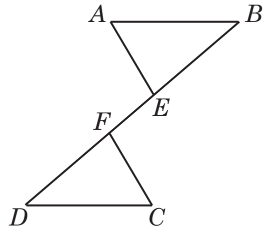


图 17-4-14

分析 要证$\triangle ABE \cong \triangle CDF$，考虑已知条件，根据“角边角”，只需将“$BF=DE$”转化为“$BE=DF$”即可.

证明 $\because$ $BF=DE$，

$\therefore$ $BF-EF=DE-EF$.

$\therefore$ $BE=DF$.

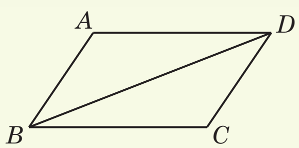
在$\triangle ABE$ 和$\triangle CDF$ 中，

$$\because \begin{cases} \angle B=\angle D, \\ BE=DF, \\ \angle AEB=\angle CFD, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABE \cong \triangle CDF$（ASA）.

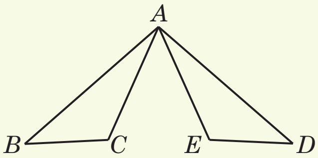
课堂练习 17.4(4)

1. 如图，已知：$\angle ABD=\angle CDB$，$\angle ADB=\angle CBD$. 求证：$\triangle ABD \cong \triangle CDB$.



（第 1 题）

2. 如图，已知：$\angle B=\angle D$，$\angle BAE=\angle DAC$，$AB=AD$. 求证：$BC=DE$.



（第 2 题）

例 9 如图 17-4-15，已知：在$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$BC=B'C'$.

求证：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

分析 要证$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，只需证明$\angle C=\angle C'$.

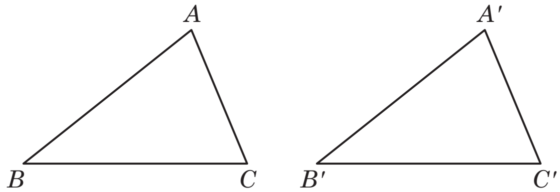


图 17-4-15

证明 $\because$ $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

$\therefore$ $\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B$.

同理，$\angle C'=180^\circ-\angle A'-\angle B'$.

又$\because$ $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，

$\therefore$ $\angle C=\angle C'$.

在$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$中，

$$\because \begin{cases} \angle B=\angle B', \\ BC=B'C', \\ \angle C=\angle C', \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$（ASA）.

本题的结论表明：

定理 两角对应相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等（简记为“角角边”或“AAS”）.

例 10 如图 17-4-16，已知：点 E、C 分别在线段 AB、AD 上，$AE=AC$，$\angle B=\angle D$.

求证：$\triangle ADE\cong\triangle ABC$.

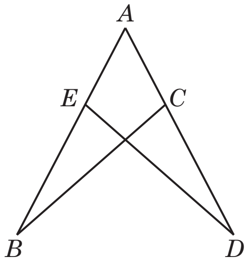


图 17-4-16

证明 在$\triangle ADE$ 和$\triangle ABC$ 中，

$$\because \begin{cases}\angle D=\angle B,\\ \angle A=\angle A,\\ AE=AC,\end{cases}$$

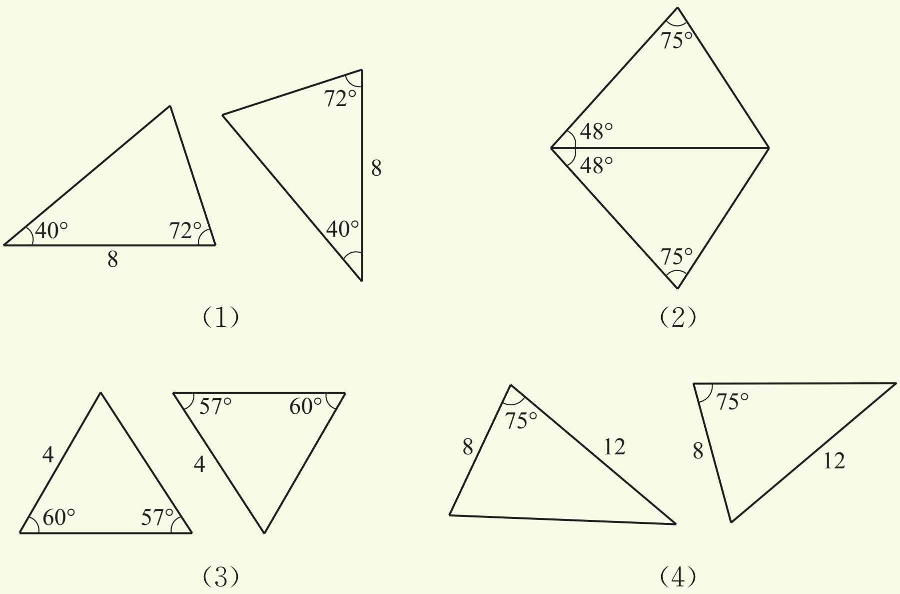
$\therefore$ $\triangle ADE\cong\triangle ABC$（AAS）.

讨论

“三个角分别相等的两个三角形全等”是真命题吗？为什么？

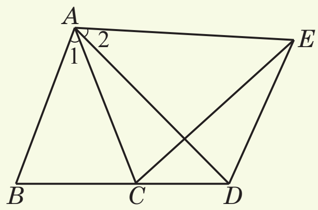
课堂练习 17.4(5)

1. 下列各对三角形是否全等？如果全等，请说明理由.



（第 1 题）

2. 如图，已知：$\angle 1=\angle 2$，$AD=AE$，$\angle B=\angle ACE$，且 B、C、D 三点在同一直线上. 求证：$BD=CE$. 把以下证明过程补充完整.



（第 2 题）

证明：$\because$ $\angle 1=\angle 2$，

$\therefore$ $\angle 1+\angle CAD=\angle 2+\angle CAD$.

$\therefore$ $\angle$________$=\angle$________.

在$\triangle ABD$ 和$\triangle ACE$ 中，

$$\because \begin{cases} \angle B=\angle ACE, \\ \angle \_\_\_\_\_\_=\angle \_\_\_\_\_\_, \\ AD=AE, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACE$（______________）.

$\therefore$ $BD=CE$（____________________）.

例 11 如图 17-4-17，已知：$AB=AC$，$AD=AE$，$\angle BAC=\angle DAE$.

求证：$\triangle DAB\cong\triangle EAC$.

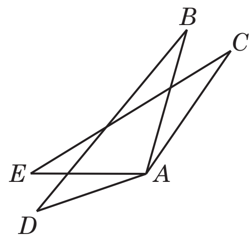


图 17-4-17

分析 要证$\triangle DAB\cong\triangle EAC$，已知有两组边对应相等，根据“边角边”，只需证这两组边的夹角相等即可.

证明 $\because$ $\angle BAC=\angle DAE$，

$\therefore$ $\angle BAC+\angle BAE=\angle DAE+\angle BAE$.

$\therefore$ $\angle EAC=\angle DAB$.

在$\triangle DAB$ 和$\triangle EAC$ 中，

$$\because \begin{cases} AB=AC, \\ \angle DAB=\angle EAC, \\ AD=AE, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle DAB\cong\triangle EAC$（SAS）.

例 12 如图 17-4-18，已知：在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC$，点A在DE上，$\angle D=90^\circ$，$\angle E=90^\circ$.

（1）求证：$\angle BAD=\angle ACE$；

（2）求证：$\triangle BDA\cong\triangle AEC$.

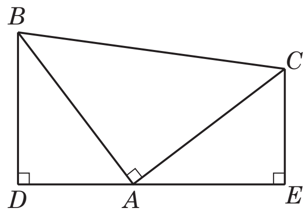


图 17-4-18

证明 （1）$\because$ 点A在DE上，

$\therefore$ $\angle BAD+\angle BAC+\angle CAE=180^\circ$.

又$\because$ $\angle BAC=90^\circ$，

$\therefore$ $\angle BAD+\angle CAE=90^\circ$.

$\because$ $\angle ACE+\angle CAE+\angle E=180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

又$\because$ $\angle E=90^\circ$，

$\therefore$ $\angle ACE+\angle CAE=90^\circ$.

$\therefore$ $\angle BAD=\angle ACE$.

（2）$\because$ $\angle D=90^\circ$，$\angle E=90^\circ$，

$\therefore$ $\angle D=\angle E$.

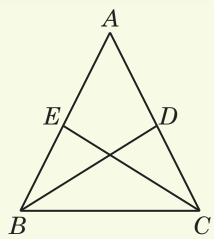
在$\triangle BDA$和$\triangle AEC$中，

$$\because \begin{cases}\angle D=\angle E,\\ \angle BAD=\angle ACE,\\ AB=AC,\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle BDA\cong\triangle AEC$（AAS）.

课堂练习 17.4(6)

1. 如图，已知：在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=\angle ACB$，BD、CE分别平分$\angle ABC$、$\angle ACB$. 求证：$BD=CE$. 把以下证明过程补充完整.



（第 1 题）

证明：$\because$ BD、CE分别平分$\angle ABC$、$\angle ACB$，

$\therefore$ $\angle DBC=\frac{1}{2}$________，$\angle ECB=\frac{1}{2}$________.

$\because \angle ABC = \angle ACB$，

$\therefore \angle DBC = \angle ECB$.

在$\triangle BDC$和$\triangle CEB$中，

$$\because \begin{cases} \underline{\qquad\qquad\qquad}, \\ \underline{\qquad\qquad\qquad}, \\ \underline{\qquad\qquad\qquad}, \end{cases}$$

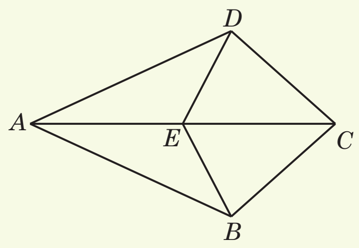
$\therefore \triangle BDC \cong \triangle CEB$（ASA）.

$\therefore BD = CE$（_________________）.

2. 如图，已知：E为AC上一点，且$AD = AB$，$ED = EB$.

（1）求证：$\triangle AED \cong \triangle AEB$；

（2）求证：$\triangle ABC \cong \triangle ADC$.



（第 2 题）

例 13 如图 17-4-19，已知：B是线段AC的中点，$BD = BE$，$\angle 1 = \angle 2$.

求证：$AD = CE$.

分析 要证$AD = CE$，可以考虑证明这两条线段所在的两个三角形全等，即证$\triangle ADB \cong \triangle CEB$.

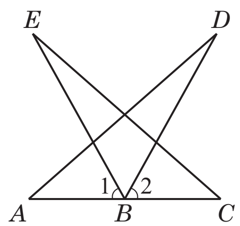


图 17-4-19

证明 $\because \angle 1 = \angle 2$，

$\therefore \angle 1 + \angle EBD = \angle 2 + \angle EBD$.

$\therefore \angle ABD = \angle CBE$.

$\because B$是AC的中点，

$\therefore AB = CB$.

在$\triangle ADB$和$\triangle CEB$中，

$$\because \begin{cases} AB = CB, \\ \angle ABD = \angle CBE, \\ BD = BE, \end{cases}$$

∴ $\triangle ADB \cong \triangle CEB$（SAS）.

∴ $AD = CE$（全等三角形的对应边相等）.

例 14 如图 17-4-20，已知：在$\triangle ABC$ 中，$\angle B = \angle C$，点 D、E、F 分别在边 BC、AC、AB 上，且 $BD = CE$，$BF = CD$.

求证：$\angle FDE = \angle B$.

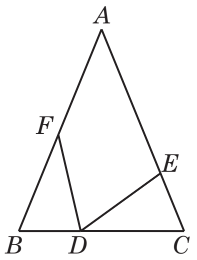


图 17-4-20

分析 由已知条件可证$\triangle BDF \cong \triangle CED$，可知$\angle BFD = \angle CDE$. 考虑到$\angle FDE$ 是$\triangle BDF$ 的外角$\angle FDC$ 的一部分，再利用“三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和”即可.

证明 在$\triangle BDF$ 和$\triangle CED$ 中，

$$\because \begin{cases} BD = CE, \\ \angle B = \angle C, \\ BF = CD, \end{cases}$$

∴ $\triangle BDF \cong \triangle CED$（SAS）.

∴ $\angle BFD = \angle CDE$（全等三角形的对应角相等）.

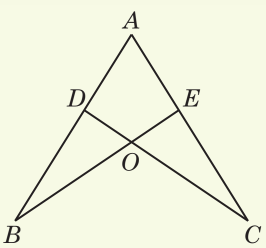
∵ $\angle FDC = \angle B + \angle BFD$（三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和），

∴ $\angle FDE + \angle CDE = \angle B + \angle BFD$.

∴ $\angle FDE = \angle B$.

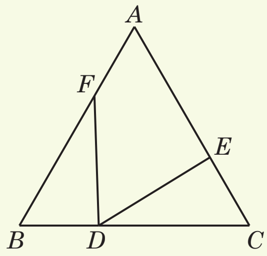
课堂练习 17.4(7)

1. 如图，已知：BE 与 CD 相交于点 O，且 $BO = CO$，$\angle ADC = \angle AEB$. 求证：$BD = CE$.



（第 1 题）

2. 如图，已知：在$\triangle ABC$中，点D、E、F分别在边BC、AC、AB上，且$FD=DE$，$BF=CD$，$\angle FDE=\angle B$. 求证：$\angle B=\angle C$.



（第 2 题）

例 15 如图 17-4-21，已知：线段AD、BC相交于点O，$OA=OD$，$OB=OC$，点E、F在线段AD上，且$\angle ABE=\angle DCF$.

求证：$BE /\!/ CF$.

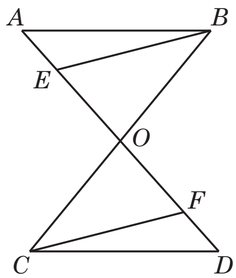


图 17-4-21

分析 要证$BE /\!/ CF$，只要证$\angle BEO=\angle CFO$. 已知有$\angle ABE=\angle DCF$，又可知$\angle BEO=\angle A+\angle ABE$，$\angle CFO=\angle D+\angle DCF$，因此只要证$\angle A=\angle D$，即证$\triangle AOB \cong \triangle DOC$即可.

证明 在$\triangle AOB$和$\triangle DOC$中，

$$\because \begin{cases} OA=OD, \\ \angle AOB=\angle DOC \text{（对顶角相等）}, \\ OB=OC, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle AOB \cong \triangle DOC$ (SAS).

$\therefore$ $\angle A=\angle D$（全等三角形的对应角相等）.

又$\because$ $\angle ABE=\angle DCF$，

$\therefore$ $\angle A+\angle ABE=\angle D+\angle DCF$.

又$\because$ $\angle BEO=\angle A+\angle ABE$，$\angle CFO=\angle D+\angle DCF$（三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和），

$\therefore$ $\angle BEO=\angle CFO$.

$\therefore$ $BE /\!/ CF$（内错角相等，两直线平行）.

例 16 证明：两边对应相等且其中一组等边上的中线相等的两个三角形全等.

如图 17-4-22，已知：在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$AB=A'B'$，$BC=B'C'$，AD、$A'D'$分别是边BC、$B'C'$上的中线，且$AD=A'D'$.

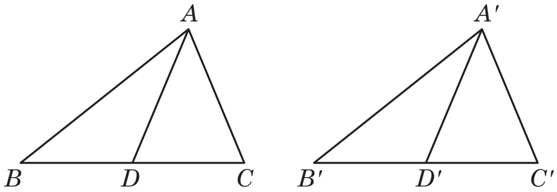


图 17-4-22

求证：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

分析 要证明$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，由于已知$AB=A'B'$，$BC=B'C'$，因此只需要证明$\angle B=\angle B'$. 为此考虑证明$\triangle ABD$和$\triangle A'B'D'$全等.

证明 $\because$ AD、$A'D'$分别是边BC、$B'C'$上的中线，

$\therefore$ $BD=\frac{1}{2}BC$，$B'D'=\frac{1}{2}B'C'$.

又$\because$ $BC=B'C'$，

$\therefore$ $BD=B'D'$.

在$\triangle ABD$和$\triangle A'B'D'$中，

$$\because \begin{cases} AB=A'B', \\ BD=B'D', \\ AD=A'D', \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle A'B'D'$（SSS）.

$\therefore$ $\angle B=\angle B'$（全等三角形的对应角相等）.

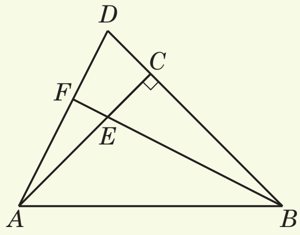
在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，

$$\because \begin{cases} AB=A'B', \\ \angle B=\angle B', \\ BC=B'C', \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$（SAS）.

课堂练习 17.4(8)

1. 如图，已知：在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CA=CB$．点 D 在边 BC 的延长线上，点 E 在边 AC 上，且 $CD=CE$，连接 BE、AD，延长 BE 与 AD 相交于点 F．求证：$AD=BE$．



（第 1 题）

2. 证明：两角对应相等且其中一组等角的平分线相等的两个三角形全等．

习题 17.4

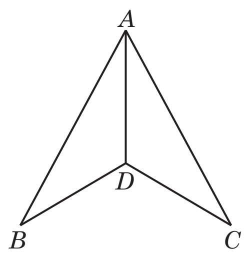
A

1. 如图，已知：$AB=AC$，$BD=CD$．求证：$\triangle ABD\cong\triangle ACD$．把以下证明过程补充完整．

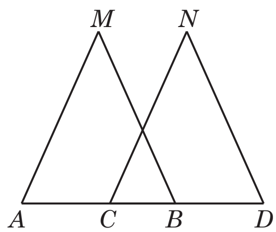
证明：在$\triangle ABD$ 和$\triangle ACD$ 中，

$$\because\begin{cases}\_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_,\\ \_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_,\\ \_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_,\end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$（________）．



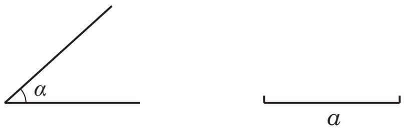
（第 1 题）



（第 2 题）

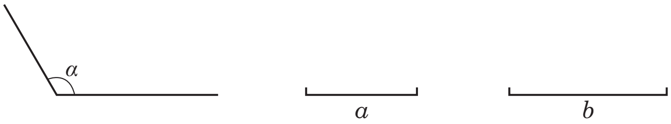
2. 如图，已知：点 A、C、B、D 在同一直线上，$AC=BD$，$AM=CN$，$BM=DN$．求证：$\triangle ABM\cong\triangle CDN$．

3. 如图，已知$\angle\alpha$和线段a，求作$\triangle ABC$，使$\angle B=\angle C=\angle\alpha$，$BC=a$.



（第 3 题）

4. 如图，已知$\angle\alpha$和线段a、b，求作$\triangle ABC$，使$\angle C=\angle\alpha$，$BC=a$，$AC=b$.



（第 4 题）

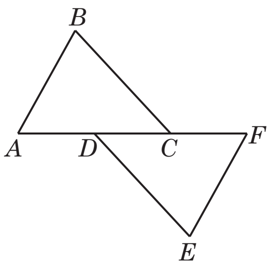
5. 如图，已知：点A、D、C、F在同一直线上，且$AC=FD$，$AB=FE$，$\angle A=\angle F$. 求证：$BC=ED$. 把以下证明过程补充完整.

证明：在$\triangle ABC$和$\triangle FED$中，

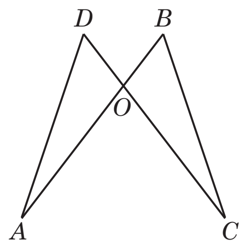
$$\because \begin{cases} \underline{\qquad\qquad}=\underline{\qquad\qquad}, \\ \underline{\qquad\qquad}=\underline{\qquad\qquad}, \\ \underline{\qquad\qquad}=\underline{\qquad\qquad}, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC\cong\triangle FED$ （$\underline{\qquad\qquad\qquad}$）.

$\therefore$ $BC=ED$ （$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$）.



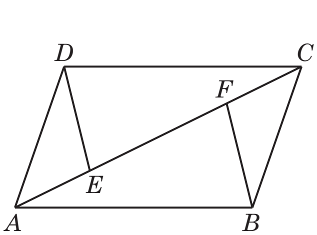
（第 5 题）



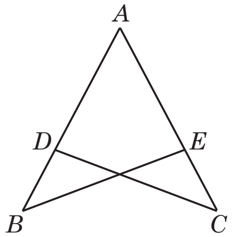
（第 6 题）

6. 如图，已知：AB与CD相交于点O，$\angle A=\angle C$，$OA=OC$. 求证：$\triangle AOD\cong\triangle COB$.

7. 如图，已知：E、F是AC上的两点，且$AF=CE$，$BF=DE$，$DE/\!/BF$. 求证：$\triangle ABF\cong\triangle CDE$.



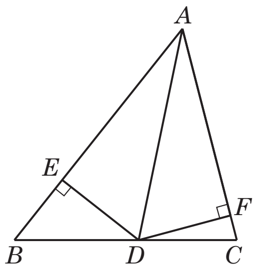
（第 7 题）



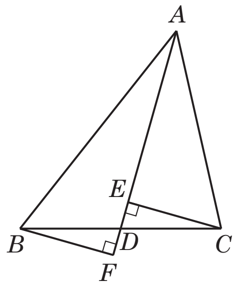
（第 8 题）

8. 如图，已知：点 D 在 AB 上，点 E 在 AC 上，$AB=AC$，$\angle B=\angle C$. 求证：$BD=CE$.

9. 如图，已知：AD 是$\triangle ABC$ 的角平分线，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为 E、F. 求证：$AE=AF$.



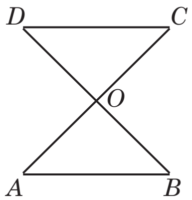
（第 9 题）



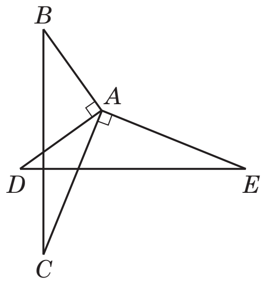
（第 10 题）

10. 如图，已知：AD 是$\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线，$CE\perp AD$，$BF\perp AD$，垂足分别为 E、F. 求证：$\triangle CDE\cong\triangle BDF$.

11. 如图，已知：AC 与 BD 相交于点 O，且 O 是 BD 的中点，$AB/\!/DC$. 求证：$AB=CD$.



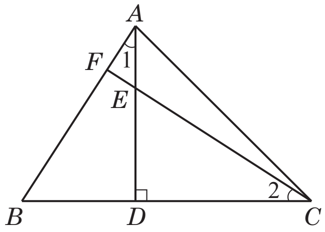
（第 11 题）



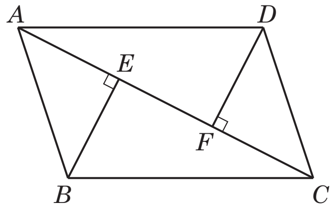
（第 12 题）

12. 如图，已知：$AB=AD$，$AC=AE$，$AB\perp AD$，$AC\perp AE$，垂足均为 A. 求证：$\triangle ABC\cong\triangle ADE$.

13. 如图，已知：在△ABC 中，$AD\perp BC$，D 是垂足，E 是线段 AD 上一点，连接 CE 并延长交 AB 于点 F，且 $CE=AB$，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$AD=CD$.



（第 13 题）

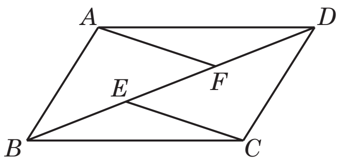


（第 14 题）

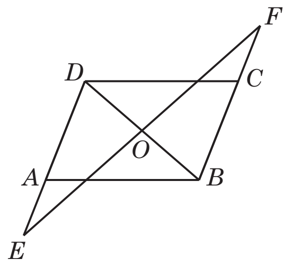
14. 如图，已知：$BE\perp AC$，$DF\perp AC$，垂足分别是 E、F，且 $AF=CE$，$BE=DF$. 求证：$AB=CD$ 且 $AB/\!/CD$.

B

15. 如图，已知：点 E、F 在线段 BD 上，$DE=BF$，$AF=CE$，且 $AD=BC$. 求证：$AF/\!/EC$.



（第 15 题）



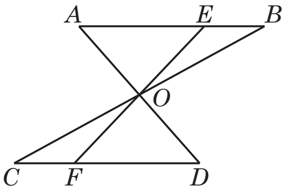
（第 16 题）

16. 如图，已知：$AB/\!/DC$，$AB=DC$，O 是线段 DB 上一点，过点 O 的直线分别交 DA 和 BC 的延长线于点 E、F. 求证：$\angle E=\angle F$.

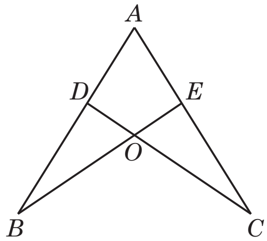
17. 如图，已知：$AB/\!/CD$，$AB=CD$，AD 和 BC 相交于点 O，EF 过点 O，且与 AB、CD 分别相交于点 E、F.

（1）求证：$OB=OC$；

（2）求证：$OE=OF$.



（第 17 题）



（第 18 题）

18. 如图，已知：$AB=AC$，BE 和 CD 相交于点 O，$\angle B=\angle C$．求证：$OD=OE$．

◎内容提要

1. 基本概念：三角形，锐角三角形，直角三角形，钝角三角形，等腰三角形，等边三角形，三角形的高、中线、角平分线，三角形的外角，全等形，全等三角形，尺规作图.

2. 三角形：

（1）三角不等式：

三角形任意两边的和大于第三边.

三角形任意两边的差小于第三边.

（2）三角形的内角和：

三角形的内角和等于 180°.

三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和.

三角形的外角大于任何一个与它不相邻的内角.

三角形的外角和等于 360°.

3. 全等三角形的性质：

全等三角形的对应边相等，对应角相等.

如果两个三角形都与第三个三角形全等，那么这两个三角形全等.

4. 三角形全等的判定：

三边对应相等的两个三角形全等(SSS).

两边及其夹角对应相等的两个三角形全等(SAS).

两角及其夹边对应相等的两个三角形全等(ASA).

两角对应相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等(AAS).

◎复习题

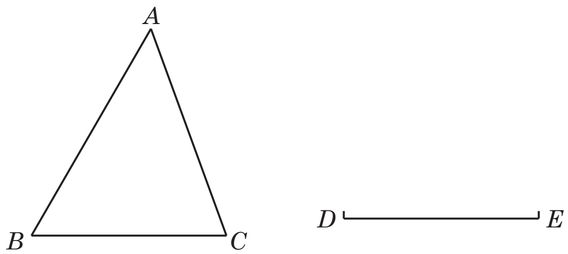
A

1. 选择题：

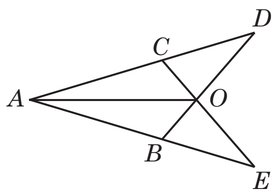
（1）如图（1），已知△ABC 的三边长互不相等，$DE=BC$，以 D、E 为两个顶点画位置不同的三角形，使所画三角形与△ABC 全等．这样的三角形最多可画（　　）

A. 2 个；　　B. 4 个；

C. 6 个；　　D. 8 个．



（1）



（2）

（第 1 题）

（2）如图（2），点 B、C 分别在线段 AE、AD 上，BD 与 CE 相交于点 O．如果 $AB=AC$，$AD=AE$，那么图中的全等三角形共有（　　）

A. 2 对；　　B. 3 对；

C. 4 对；　　D. 5 对．

（3）下列命题中，假命题是（　　）

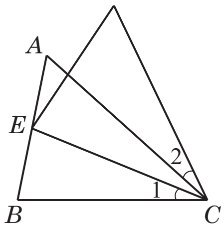
A. 面积相等的两个三角形全等；

B. 全等三角形的周长相等；

C. 全等三角形的面积相等；

D. 两角对应相等且其中一组等角对边上的高相等的两个三角形全等．

2. 如图，已知 $AC=DC$，$\angle 1=\angle 2$，请添加一个适当的条件，使 $\triangle ABC\cong\triangle DEC$.

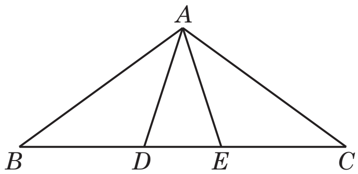


（第 2 题）

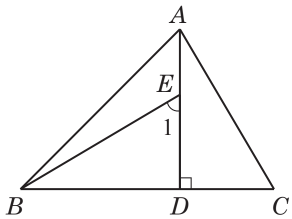
3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD、AE 将 $\angle BAC$ 三等分，点 D、E 在 BC 上，$\angle BAC:\angle B:\angle C=3:1:1$.

（1）求 $\angle ADE$ 的度数；

（2）请写出图中有两个内角相等的所有三角形.



（第 3 题）



（第 4 题）

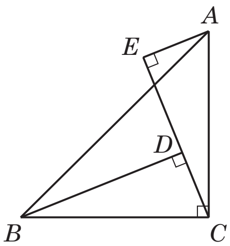
4. 如图，已知：在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$，垂足是 D，$AD=BD$，$DC=DE$. 求证：$\angle C=\angle 1$.

5.（1）证明：全等三角形对应边上的中线相等；

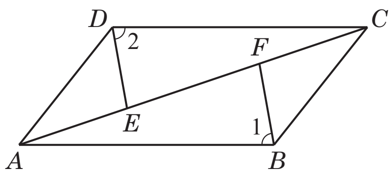
（2）证明：全等三角形对应角的平分线相等；

（3）证明：全等三角形对应边上的高相等.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC$，$BD\perp CE$，$AE\perp CE$，垂足分别为 D、E，且 $BD=3.1$ cm，$DE=1.9$ cm. 求 AE 的长.



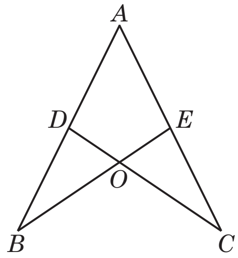
（第 6 题）



（第 7 题）

7. 如图，已知：$AB=CD$，$AB\,/\!/\,CD$，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$\triangle ADE\cong\triangle CBF$.

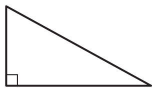
8. 给定如图所示的图形(不再添线)，从①$AD=AE$；②$DB=EC$；③$AB=AC$；④$OD=OE$ 中选取两个作为已知条件，通过推理能得到$\angle B=\angle C$. 这样的两个条件可以是_________. 请填写序号，并与同伴交流你的推理过程.



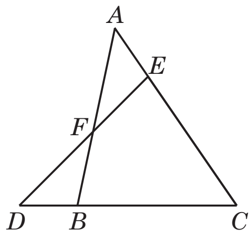
(第 8 题)

B

9. 两个全等的直角三角形，可以拼出各种不同的三角形或四边形. 图中已画出其中一个三角形，请画出另一个与它全等的三角形，使所拼成的三角形或四边形为轴对称图形(尽可能多地画出图形).



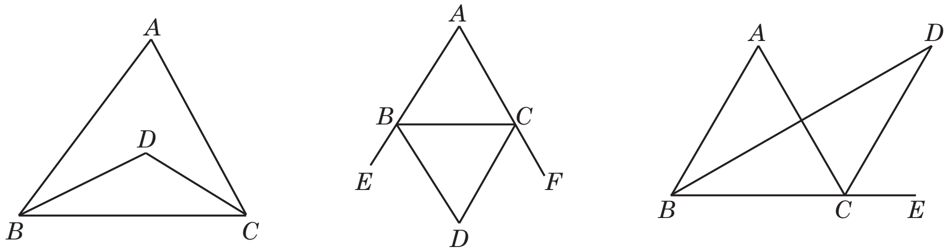
(第 9 题)



(第 10 题)

10. 如图，已知 D 是 CB 延长线上一点，点 E 在 AC 上，且 $DC=AC$，$\triangle ABC\cong\triangle DEC$. 图中还有哪些相等的线段？给出结论，无须证明.

11. (1) 如图(1)，已知：BD、CD 分别是$\triangle ABC$ 的内角$\angle ABC$、$\angle ACB$ 的平分线. 求证：$\angle BDC=90°+\frac{1}{2}\angle A$.



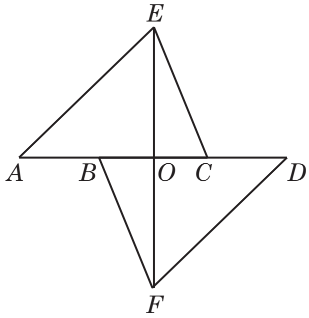
(1)　　(2)　　(3)

(第 11 题)

（2）如图(2)，BD、CD 是$\triangle ABC$ 的两个外角的平分线．请探究$\angle BDC$ 与$\angle A$ 之间有怎样的关系，并证明你的结论．

（3）如图(3)，BD、CD 分别是$\triangle ABC$ 的一个内角的平分线与一个外角的平分线．请探究$\angle BDC$ 与$\angle A$ 之间有怎样的关系，并证明你的结论．

12. 如图，已知：A、B、C、D 四点在同一直线上，$AB=CD$，$AE\parallel FD$，$BF\parallel EC$，AD 和 EF 相交于点 O．求证：$OE=OF$．



（第 12 题）

第 18 章

等腰三角形

等腰三角形是一类特殊且重要的三角形，具有轴对称性．等边三角形是它的一个特例．它们经常出现在建筑、艺术等设计中．

在本章中，我们将用上一章学习的全等三角形的性质和判定方法，发现并证明等腰三角形及等边三角形的一些性质和判定方法，并加以应用．等腰三角形底边上的高、中线及顶角平分线三线合一，这和线段垂直平分线的性质密切相关．

18.1 等腰三角形的性质

等腰三角形是有两边相等的三角形. 如图 18-1-1，$\triangle ABC$ 是等腰三角形，$AB=AC$. 边 AB 和 AC 是它的腰，BC 是底边；$\angle A$ 是它的顶角，$\angle B$ 和 $\angle C$ 是底角.

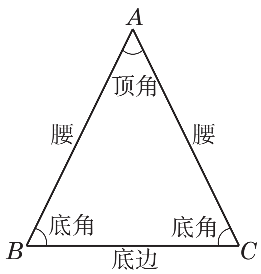


图 18-1-1

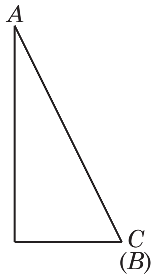


图 18-1-2

取一张等腰三角形纸片，把两腰 AB、AC 叠合在一起(图 18-1-2)，我们发现，两个底角互相重合. 这说明等腰三角形的两个底角相等. 下面我们来证明这个性质.

定理 等腰三角形的两底角相等.

简单地说：**等边对等角**.

如图 18-1-3，已知：在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$.

求证：$\angle B=\angle C$.

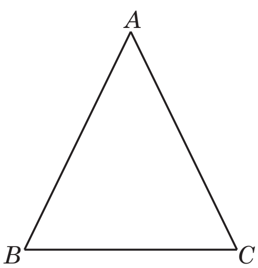


图 18-1-3

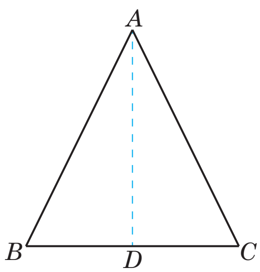


图 18-1-4

证明 如图 18-1-4，作$\triangle ABC$ 的顶角平分线 AD，有$\angle BAD=\angle CAD$. 又由于 $AB=AC$，AD 是公共边，由“边角边”，得$\triangle ABD\cong\triangle ACD$，从而$\angle B=\angle C$.

由$\triangle ABD\cong\triangle ACD$，还可得出 $BD=CD$，$\angle ADB=\angle ADC=90°$. 因此 AD 平分 BC，且$AD\perp BC$.

由此可见，线段 AD 既是等腰三角形 ABC 的顶角平分线，又是底边 BC 上的中线，也是底边 BC 上的高.

等腰三角形的这个性质可表述为：

定理 等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合.

简单地说：**等腰三角形三线合一**.

上面的证明过程还表明：

等腰三角形是轴对称图形，它的对称轴是顶角平分线（底边上的中线、底边上的高）所在的直线.

例 1 如图 18-1-5，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=110°$，AD 是$\triangle ABC$ 的中线.

（1）求$\angle 1$ 和$\angle B$ 的度数；

（2）求证：$AD\perp BC$.

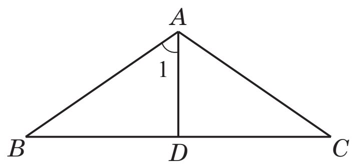


图 18-1-5

解 （1）$\because$ $AB=AC$，

$\therefore$ $\angle B=\angle C$（等边对等角）.

又$\because$ AD 是$\triangle ABC$ 的中线，

$\therefore$ $\angle 1=\frac{1}{2}\angle BAC$（等腰三角形三线合一）.

$\because$ $\angle BAC=110°$，

$\therefore$ $\angle 1=55°$.

又∵　$\angle B+\angle C+\angle BAC=180°$（三角形的内角和等于 180°），

∴　$\angle B=\dfrac{180°-110°}{2}=35°$.

∴　$\angle 1$ 和 $\angle B$ 的度数分别为 55°和 35°.

（2）　∵　$AB=AC$，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，

∴　$AD\perp BC$（等腰三角形三线合一）.

例 2　如图 18-1-6，已知：$AB=AC$，$DB=DC$.

求证：$\angle B=\angle C$.

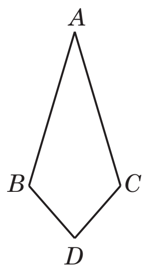


图 18-1-6

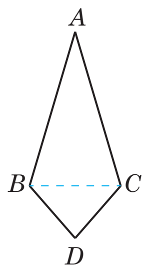


图 18-1-7

分析　从已知条件 $AB=AC$，$DB=DC$ 出发，考虑连接 BC 构造两个等腰三角形.

证明　如图 18-1-7，连接 BC.

∵　$AB=AC$，

∴　$\angle ABC=\angle ACB$（等边对等角）.

同理，$\angle DBC=\angle DCB$.

∴　$\angle ABC+\angle DBC=\angle ACB+\angle DCB$.

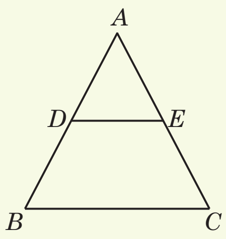
∴　$\angle ABD=\angle ACD$.

讨论

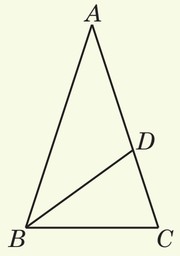
例 2 是否还有其他证明方法？

课堂练习 18.1(1)

1. 如图，已知：在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点D、E分别在边AB、AC上，$AD=AE$. 求证：$DE /\!/ BC$.



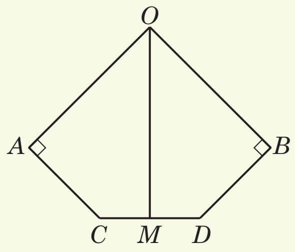
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点D在边AC上，且$BD=AD=BC$. 求$\triangle ABC$各内角的度数.

3. 如图，已知：$OA=OB$，$AC=BD$，且$OA\perp AC$，$OB\perp BD$，垂足分别为A、B，点M在线段CD上，$\angle AOM=\angle BOM$. 求证：$OM\perp CD$.



（第 3 题）

例 3 如图 18-1-8，已知：在直角三角形ABC中，$\angle BAC=90°$，D是边BC上一点，$AD=AB$.

求证：$\angle BAD=2\angle C$.

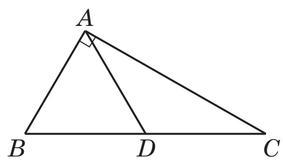


图 18-1-8

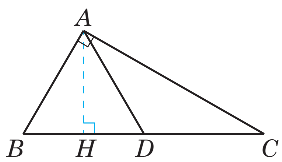


图 18-1-9

分析 要证明$\angle BAD=2\angle C$，只要证明$\angle BAD$的一半与$\angle C$相等. 由于$AD=AB$，可考虑作$AH\perp BC$，从而将问题转化为证明$\angle BAH=\angle C$.

证明 如图 18-1-9，过点 A 作 $AH\perp BC$，垂足为 H.

$\because$ $AD=AB$，

$\therefore$ $\angle BAD=2\angle BAH$ （等腰三角形三线合一）.

$\because$ $\angle BAC+\angle B+\angle C=180^\circ$（三角形的内角和等于 180°），

$\angle BAC=90^\circ$，

$\therefore$ $\angle B+\angle C=90^\circ$.

同理，$\angle BAH+\angle B=90^\circ$.

$\therefore$ $\angle BAH=\angle C$.

$\therefore$ $\angle BAD=2\angle C$.

思考

例 3 不添辅助线也能证明吗？

我们知道“等边对等角”，那么三角形中不相等的边所对的角有什么大小关系呢？

例 4 如图 18-1-10，已知：在△ABC 中，$AB>AC$.

求证：$\angle C>\angle B$.

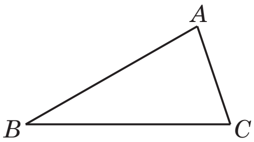


图 18-1-10

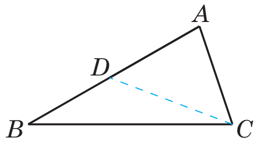


图 18-1-11

分析 要证 $\angle C>\angle B$，可利用“三角形的外角大于任何一个与它不相邻的内角”.

证明 如图 18-1-11，由 $AB>AC$，在 AB 上截取 $AD=AC$，连接 CD，就有

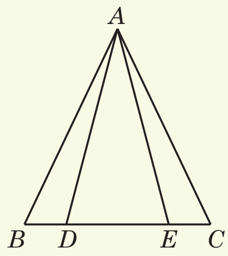
$$\angle ADC=\angle ACD \text{（等边对等角）}.$$

$\because$ $\angle ADC>\angle B$ （三角形的外角大于任何一个与它不相邻的内角），

$\therefore$ $\angle ACB>\angle ADC>\angle B$.

上述结论可以简述为：**在三角形中，大边对大角**.

课堂练习 18.1(2)



(第 1 题)

1. 如图，已知：在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点D、E在边BC上，且$AD=AE$. 求证：$BD=CE$.

2. 小海用如下两种方法作出了互相垂直的两条直线，你能证明这两种作法的正确性吗？

作法一：

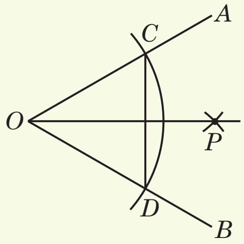
① 作任意一个角$\angle AOB$；

② 以点O为圆心、以任意长为半径作弧，交OA于点C，交OB于点D；

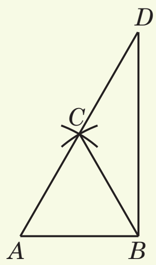
③ 分别以点C和点D为圆心、大于$\frac{1}{2}CD$的同样长度为半径作弧，两弧相交于$\angle AOB$内部的一点P；

④ 分别作射线OP及线段CD.

从而CD与OP互相垂直，如图(1)所示.



(1)



(2)

(第 2 题)

作法二：

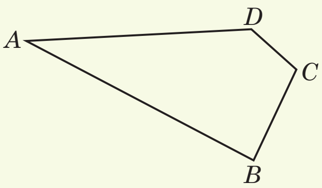
① 作线段AB，再分别以点A和点B为圆心、大于$\frac{1}{2}AB$的同样长度为半径作弧，两弧相交于点C；

② 连接 AC、BC，延长 AC 至点 D，使 $CD=CA$；

③ 连接 DB.

从而 DB 与 AB 互相垂直，如图(2)所示.

3. 如图，已知：在线段 AB、BC、CD、DA 中，$AB>AD$，$BC>CD$. 求证：$\angle ADC>\angle ABC$.



（第 3 题）

习题 18.1

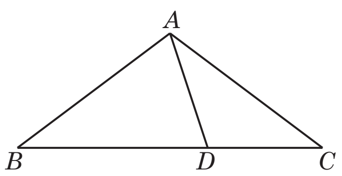
A

1. 填空题：

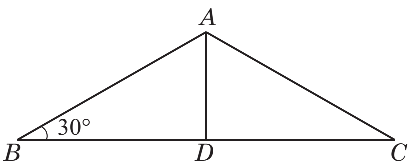
（1）如果等腰三角形的一个底角为 34°，那么另外两个角的度数分别为________和________；

（2）如果等腰三角形的底边和一腰长分别为 12 cm 和 15 cm，那么这个三角形的周长为________cm.

2. 如图，在$\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上，且有 $AB=AC=BD$，$AD=DC$. 求$\angle C$ 的度数.



（第 2 题）



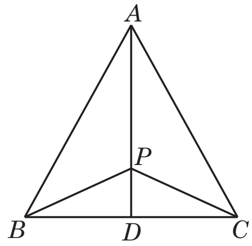
（第 3 题）

3. 如图，在$\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上，$AB=AC$，$BD=CD$，$\angle B=30°$. 求$\angle BAD$ 的度数.

4. 如图，已知：在△ABC中，D是边BC上一点，P是线段AD上一点，$\angle ABP=\angle ACP$，$\angle BPD=\angle CPD$.

（1）求证：$BD=CD$；

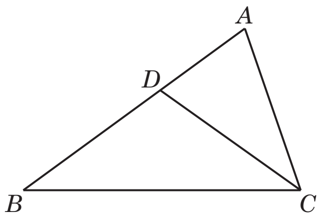
（2）求证：$AD\perp BC$.



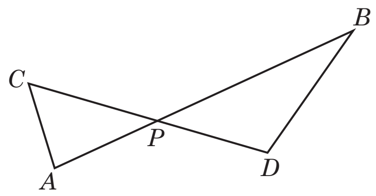
（第 4 题）

B

5. 如图，已知：在△ABC中，CD是△ABC的角平分线，$BC=AC+AD$. 求证：$\angle A=2\angle B$.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，已知：AB和CD相交于点P，$CP>AC$，$BD>PD$. 求证：$\angle A>\angle B$.

18.2 等腰三角形的判定

等腰三角形的两底角相等的逆命题也是一个真命题，可以作为等腰三角形的判定定理.

定理 如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等.

简单地说：**等角对等边**.

如图 18-2-1，已知：在$\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle C$.

求证：$AB=AC$.

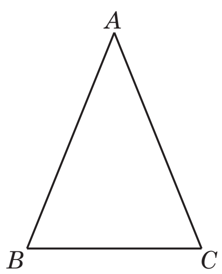


图 18-2-1

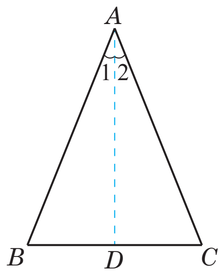


图 18-2-2

证明 如图 18-2-2，作$\angle BAC$ 的平分线 AD，有$\angle 1=\angle 2$. 又由于$\angle B=\angle C$，AD 是公共边，由“角角边”，得$\triangle ABD\cong\triangle ACD$，从而 $AB=AC$.

讨论

是否还有其他证明上述定理的方法?

例 1 如图 18-2-3，已知：在$\triangle ABC$ 中，BD、CE 分别是边 AC、AB 上的高，且$\angle DBC=\angle ECB$.

求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

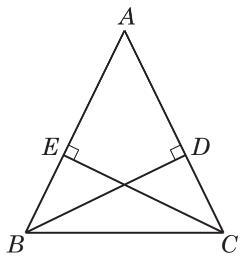


图 18-2-3

证明 $\because$ BD、CE 分别是边 AC、AB 上的高，

$\therefore$ $\angle BDC=\angle CEB=90°$.

在$\triangle CBD$ 和$\triangle BCE$ 中，

$$\because \begin{cases} \angle BDC=\angle CEB, \\ \angle DBC=\angle ECB, \\ BC=CB, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle CBD \cong \triangle BCE$（AAS）.

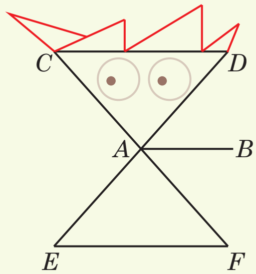
$\therefore$ $\angle BCD=\angle CBE$.

$\therefore$ $AB=AC$（等角对等边），

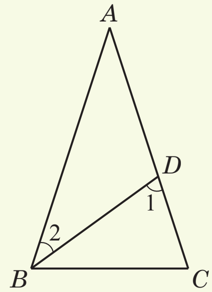
即$\triangle ABC$是等腰三角形.

课堂练习 18.2(1)

1. 某卡通形象如图所示，其中射线AB是$\triangle ACD$外角的平分线，且$AB /\!/ CD$. 你能说出呈现卡通形象头部的$\triangle ACD$是等腰三角形的理由吗?



（第 1 题）



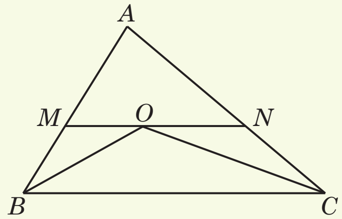
（第 2 题）

2. 如图，已知：在$\triangle ABC$中，$\angle 1=72^{\circ}$，$\angle 2=36^{\circ}$，$\angle C=72^{\circ}$.

（1）求证：$\triangle BCD$是等腰三角形；

（2）找出图中其他的等腰三角形，并加以证明.

3. 如图，已知：在$\triangle ABC$中，BO平分$\angle ABC$，CO平分$\angle ACB$，过点O作$MN /\!/ BC$分别交AB、AC于点M、N. 求证：$\triangle AMN$的周长等于AB与AC长度的和.



（第 3 题）

例 2 如图 18-2-4，已知：在$\triangle ABC$中，D是边BC的中点，$\angle 1=\angle 2$.

求证：$AB=AC$.

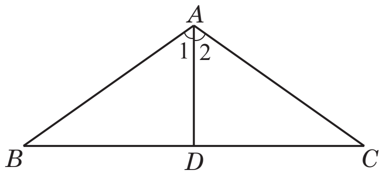


图 18-2-4

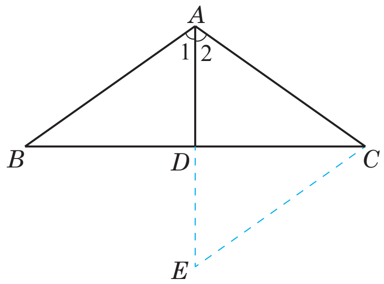


图 18-2-5

分析 在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，虽然有$\angle 1=\angle 2$，$AD=AD$，$BD=CD$这三个条件，但不能直接推出$\triangle ABD$和$\triangle ACD$全等.

证明 如图 18-2-5，延长AD至点E，使$DE=AD$，连接CE.

在$\triangle ABD$和$\triangle ECD$中，

$$\because \begin{cases} BD=CD, \\ \angle ADB=\angle EDC\ (\text{对顶角相等}), \\ AD=ED, \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle ECD$（SAS）.

$\therefore$ $AB=EC$，$\angle 1=\angle E$（全等三角形的对应边相等，对应角相等）.

又$\because$ $\angle 1=\angle 2$，

$\therefore$ $\angle 2=\angle E$.

$\therefore$ $AC=EC$（等角对等边）.

$\therefore$ $AB=AC$.

探究

是否还有其他证明例 2 的结论的方法？

例 3 如图 18-2-6，已知：在$\triangle ABC$中，$\angle C>\angle B$.

求证：$AB>AC$.

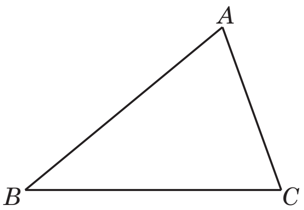


图 18-2-6

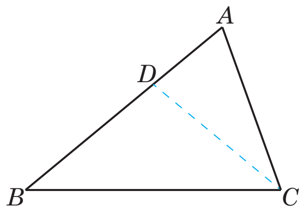


图 18-2-7

证明 如图 18-2-7，由$\angle ACB>\angle B$，在$\angle ACB$ 内部作$\angle BCD=\angle B$，CD 交 AB 于点 D. 根据“等角对等边”，有 $DB=DC$.

在$\triangle ACD$ 中，根据三角不等式，有 $AD+DC>AC$，所以 $AB=AD+DB=AD+DC>AC$.

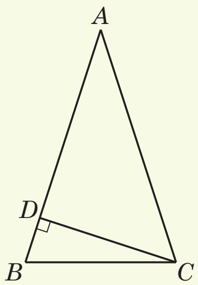
上述结论可以简述为：**在三角形中，大角对大边**.

讨论

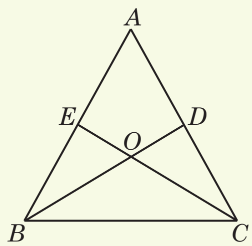
如何用反证法证明例3？

课堂练习 18.2(2)

1. 如图，已知：在$\triangle ABC$ 中，$CD\perp AB$，垂足为 D，$\angle A=2\angle BCD$. 求证：$AB=AC$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知：在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，BD、CE 分别是边 AC、AB 上的中线，BD、CE 相交于点 O. 求证：$OB=OC$.

3. 用例 3 的结论解决以下问题：

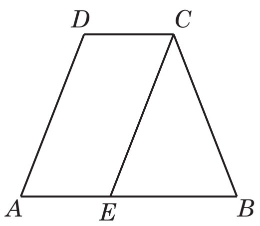
（1）在$\triangle ABC$ 中，如果$\angle A>\angle B>\angle C$，能判定 AB、BC、CA 的大小吗？

（2）如果一个三角形中最长的边所对的角是锐角，那么这个三角形一定是锐角三角形吗？为什么？

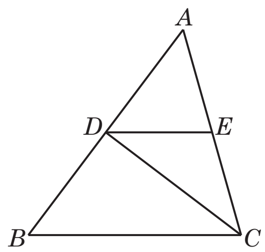
习题 18.2

A

1. 如图，已知：$\angle A=\angle B$，$CE \parallel DA$，CE 交 AB 于点 E. 求证：$CE=CB$.



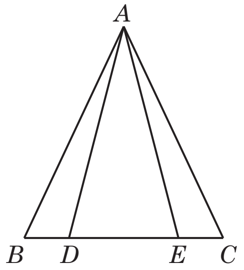
（第 1 题）



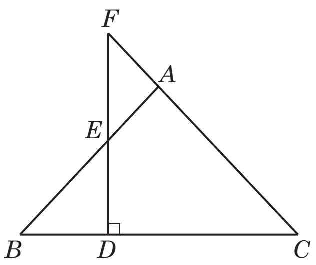
（第 2 题）

2. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB$ 的平分线 CD 交 AB 于点 D，$DE \parallel BC$. 如果 E 是边 AC 的中点，$AC=5$ cm，求 DE 的长.

3. 如图，已知：在$\triangle ABC$ 中，点 D、E 在边 BC 上，$\angle BAD=\angle CAE$，$\angle B=\angle C$. 求证：$AD=AE$.



（第 3 题）



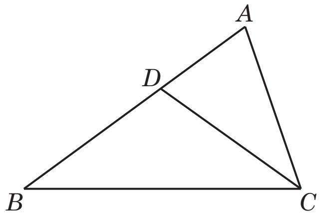
（第 4 题）

4. 如图，已知：在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D是边BC上一点，作$DE\perp BC$，垂足为D，交CA的延长线于点F. 求证：$AE=AF$.

B

5. 已知：在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D是边BC延长线上一点，E是边AB上一点，DE交边AC于点F. 求证：$AE<AF$.

6. 如图，已知：在$\triangle ABC$中，CD是$\triangle ABC$的角平分线，$\angle A=2\angle B$. 求证：$BC=AC+AD$.



（第 6 题）

18.3 等边三角形

等边三角形是一类特殊的等腰三角形，它的三边都是相等的.

思考

等边三角形的三个内角分别等于多少度?

一个三角形的内角满足什么条件时，这个三角形是等边三角形?

由等腰三角形的性质，得到：

定理 等边三角形的每个内角都等于 60°.

由等腰三角形的判定定理，得到：

定理 三个内角都相等的三角形是等边三角形.

请自行证明上面两个定理.

例 1 证明：有一个内角等于 60°的等腰三角形是等边三角形.

分析 在图 18-3-1 中，设 $AB=AC$，需要对三个内角分别等于 60°的各种情况进行讨论，其中$\angle B=60^\circ$和$\angle C=60^\circ$是类似的，故只要分两种情况讨论.

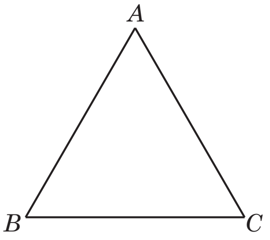


图 18-3-1

如图 18-3-1，已知：在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$.

(1) 当$\angle B=60^\circ$时，求证：$\triangle ABC$ 是等边三角形；

(2) 当$\angle A=60^\circ$时，求证：$\triangle ABC$ 是等边三角形.

证明 (1) $\because$ $AB=AC$，$\angle B=60^\circ$，

$\therefore$ $\angle C=\angle B=60^\circ$(等边对等角).

又$\because$ $\angle A=180^\circ-\angle C-\angle B=60^\circ$(三角形的内角和等于 180°)，

$\therefore$ $\angle A=\angle B=\angle C$.

$\therefore$ $\triangle ABC$ 是等边三角形(三个内角都相等的三角形是等边三角形).

(2) $\because$ $AB=AC$，

∴ $\angle C=\angle B$（等边对等角）.

又∵ $\angle A+\angle C+\angle B=180°$（三角形的内角和等于 180°），

$\angle A=60°$，

∴ $\angle B=\angle C=\angle A=60°$.

∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形（三个内角都相等的三角形是等边三角形）.

例 2 如图 18-3-2，已知：在等边三角形 ABC 的边 BC 上任取一点 D，以 CD 为边向外作等边三角形 CDE，连接 AD、BE.

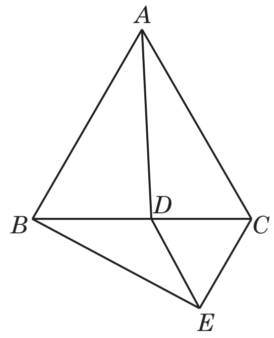


图 18-3-2

求证：$BE=AD$.

分析 要证 $BE=AD$，只需要证明 $\triangle BEC \cong \triangle ADC$.

证明 ∵ $\triangle CDE$ 和 $\triangle ABC$ 均是等边三角形，

∴ $CE=CD$，$BC=AC$，$\angle BCE=\angle ACD=60°$（等边三角形的每个内角都等于 60°）.

在 $\triangle BEC$ 和 $\triangle ADC$ 中，

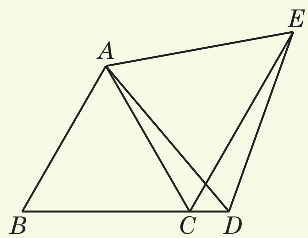
$$∵ \begin{cases} CE=CD, \\ \angle BCE=\angle ACD, \\ BC=AC, \end{cases}$$

∴ $\triangle BEC \cong \triangle ADC$（SAS）.

∴ $BE=AD$.

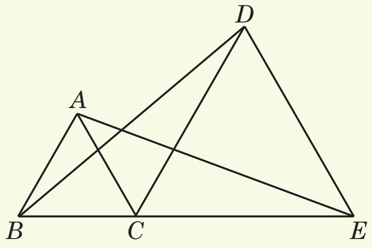
课堂练习 18.3

1. 如图，已知：$\triangle ABC$ 是等边三角形，D 为边 BC 延长线上一点，CE 平分 $\angle ACD$，$CE=BD$. 求证：$\triangle DAB \cong \triangle EAC$.

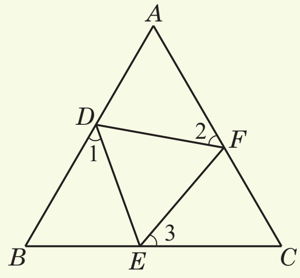


（第 1 题）

2. 如图，已知：点 B、C、E 在同一直线上，$\triangle ABC$、$\triangle DCE$ 都是等边三角形，连接 AE、BD. 求证：$\triangle ACE \cong \triangle BCD$.



（第 2 题）



（第 3 题）

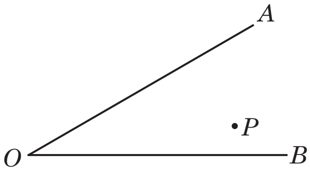
3. 如图，在$\triangle ABC$ 中，点 D、E、F 分别在边 AB、BC、CA 上，$\triangle DEF$ 是等边三角形，$\angle 1=\angle 2=\angle 3$. $\triangle ABC$ 是等边三角形吗？试说明理由.

习题 18.3

A

1. 选择题：

(1) 已知$\angle AOB=30^\circ$，点 P 在$\angle AOB$ 的内部，在图中画出点 P_1、P_2，使得点 P_1 与点 P 关于 OB 对称，点 P_2 与点 P 关于 OA 对称，那么以 P_1、O、P_2 三点为顶点的三角形是（　　）



（第 1 题）

A. 直角三角形；

B. 钝角三角形；

C. 只有两边相等的三角形；

D. 等边三角形.

(2) 下列所叙述的两个三角形中，一定全等的是（　　）

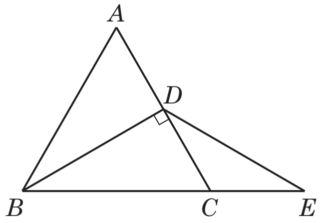
A. 含 60°角的两个直角三角形；

B. 腰对应相等的两个等腰三角形；

C. 边长均为 15 cm 的两个等边三角形；

D. 顶角对应相等的两个等腰三角形.

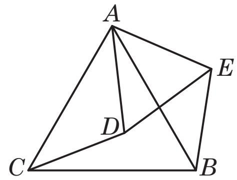
2. 如图，已知：$\triangle ABC$ 是等边三角形，BD 是边 AC 上的高，E 是边 BC 延长线上一点，$\angle E=30°$. 求证：$DB=DE$.



（第 2 题）

B

3. 如图，已知：点 D 在$\triangle ABC$ 的内部，$\triangle ABC$ 和$\triangle ADE$ 都是等边三角形，连接 EB、DC. 求证：$EB=DC$.



（第 3 题）

18.4 线段的垂直平分线

我们已经知道，等腰三角形是轴对称图形，它的对称轴是顶角平分线(底边上的中线、底边上的高)所在的直线.

定义 过线段中点且垂直于这条线段的直线叫作这条线段的**垂直平分线**，简称**中垂线**.

如图 18-4-1，如果直线 CD 是线段 AB 的垂直平分线，垂足为 O，那么 $OA=OB$，且 $CD\perp AB$.

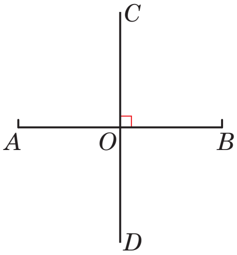


图 18-4-1

我们有下面的线段垂直平分线的性质定理：

定理 线段的垂直平分线上的任意一点到该线段两个端点的距离相等.

如图 18-4-2，已知：直线 MN 是线段 AB 的垂直平分线，垂足为 C，点 P 在直线 MN 上.

求证：$PA=PB$.

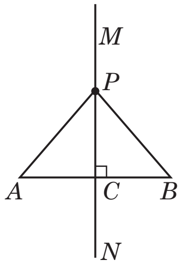


图 18-4-2

证明 因为直线 MN 是线段 AB 的垂直平分线，垂足为 C，所以 $MN\perp AB$，$AC=BC$.

如果点 P 不在线段 AB 上，由 $MN\perp AB$，得 $\angle PCA=\angle PCB=90^\circ$. 又因为 PC 是公共边，由“边角边”，得 $\triangle PCA\cong\triangle PCB$. 由此推出 $PA=PB$.

如果点 P 在线段 AB 上，那么点 P 与点 C 重合，仍有 $PA=PB$.

这个定理的逆命题也是成立的，即有：

定理 与一条线段的两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上.

如图 18-4-3，已知：线段 AB 和一点 Q，且 $QA=QB$.

求证：点 Q 在线段 AB 的垂直平分线上.

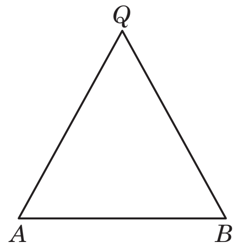


图 18-4-3

分析 要证点 Q 在线段 AB 的垂直平分线上，可以先经过点 Q 作线段 AB 的垂线，然后证明该垂线平分线段 AB.

证明 如果点 Q 在线段 AB 上，由 $QA=QB$，可知 Q 为线段 AB 的中点，即点 Q 必在线段 AB 的垂直平分线上.

> 也可以先平分线段 AB，如设线段 AB 的中点为 C，连接 QC，然后证明 QC 垂直于线段 AB.

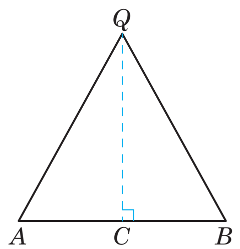


图 18-4-4

如果点 Q 不在线段 AB 上，过点 Q 作 $QC\perp AB$，垂足为 C(图 18-4-4). 由 $QA=QB$，$QC\perp AB$，根据“等腰三角形三线合一”，可得 $AC=BC$，即 C 是线段 AB 的中点. 由此可见，点 Q 在线段 AB 的垂直平分线上.

例 1 作已知线段的垂直平分线.

如图 18-4-5，已知线段 AB，求作线段 AB 的垂直平分线.

图 18-4-5

分析　根据“与一条线段的两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上”，只需要作出两个点，使每一个点到线段 AB 的两个端点的距离都相等，这两点所确定的直线就是线段 AB 的垂直平分线.

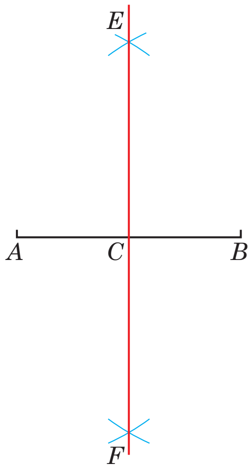


图 18-4-6

作法

(1) 以点 A 为圆心、以 AB 的长为半径作弧；

(2) 以点 B 为圆心、以 AB 的长为半径作弧；

(3) 两弧分别相交于点 E、F，过点 E、F 作直线 EF.

直线 EF 就是线段 AB 的垂直平分线(图 18-4-6).

图 18-4-6 中，由于直线 EF 与线段 AB 的交点 C 就是线段 AB 的中点，因此我们也可以用这种方法作线段的中点.

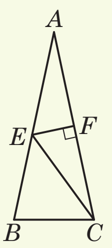
你能根据作法证明直线 EF 是线段 AB 的垂直平分线吗？

思考

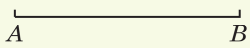
在例 1 的作图过程中，圆的半径是否必须是 AB 的长？

课堂练习 18.4(1)

1. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=24$ cm，AC 的垂直平分线分别交 AB、AC 于点 E、F，且$\triangle BCE$ 的周长为 34 cm．求底边 BC 的长.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，已知线段 AB，用尺规四等分线段 AB.

例 2 过直线外一点作已知直线的垂线.

如图 18-4-7，已知直线 l 和 l 外一点 P，过点 P 求作直线 l 的垂线.

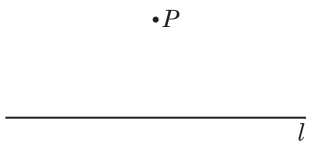


图 18-4-7

分析 只需在直线 l 上找出两点 A 和 B，使点 P 在线段 AB 的垂直平分线上，就可以将问题转化为作线段 AB 的垂直平分线.

作法

（1）任意取一点 K，使点 K 和点 P 分别在直线 l 的两侧；

（2）以点 P 为圆心、以 PK 的长为半径作弧，与直线 l 相交于点 A、B；

（3）作线段 AB 的垂直平分线 CD.

直线 CD 就是所求的垂线(图 18-4-8).

请自行完成证明.

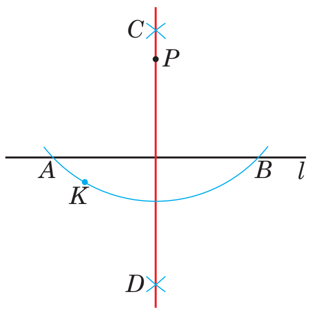


图 18-4-8

思考

1. 例 2 的作法中，为什么要使所取的点 K 与已知点 P 在直线 l 的两侧？点 K 与点 P 必须在直线 l 的两侧吗？

2. 如何过直线上一点作该直线的垂线？

例 3 已知底边和底边上的高作等腰三角形.

如图 18-4-9，已知线段 a、h. 求作△ABC，使 $AB=AC$，且 $BC=a$，高 $AD=h$.

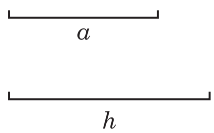


图 18-4-9

分析 先画出符合条件的示意图，根据 $BC=a$，可以确定点 B、C 的位置. 由“等腰三角形三线合一”，作 BC 的垂直平分线 MN，交 BC 于点 D. 由 $AD=h$，可知点 D 到点 A 的距离为 h，这就是说，点 A 在以定点 D 为圆心、以 h 为半径的圆上. 因此，这个圆与 MN 的交点就是 A.

作法

（1）作线段 $BC=a$；

（2）作线段 BC 的垂直平分线 MN，MN 与 BC 相交于点 D；

（3）以点 D 为圆心、以 h 的长为半径作弧，交 MN 于点 A；

（4）分别连接 AB、AC.

$\triangle ABC$ 就是所求的三角形（图 18-4-10）.

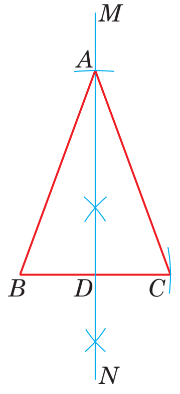


图 18-4-10

例 4　如图 18-4-11，已知：在 $\triangle ABC$ 中，OM、ON 分别是边 AB、AC 的垂直平分线，OM 与 ON 相交于点 O.

求证：点 O 在边 BC 的垂直平分线上.

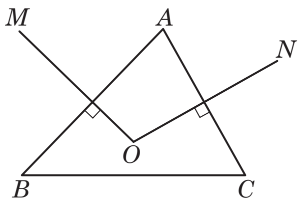


图 18-4-11

证明　如图 18-4-12，分别连接 OB、OA、OC.

∵　OM、ON 分别是边 AB、AC 的垂直平分线，

∴　$OA=OB$，$OC=OA$（线段垂直平分线的性质定理）.

∴　$OB=OC$.

∴　点 O 在边 BC 的垂直平分线上（与一条线段的两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上）.

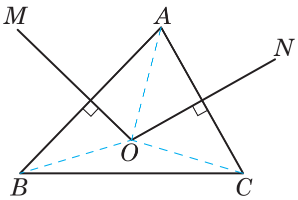
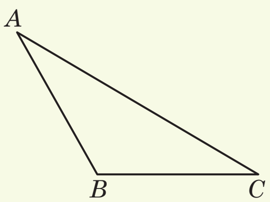


图 18-4-12

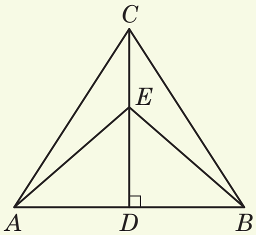
本题的结论表明：三角形的三条边的垂直平分线相交于一点，这个交点叫作**三角形的外心**.

课堂练习 18.4(2)

1. 如图，已知$\triangle ABC$，求作边 BC 上的高 AD.



（第 1 题）



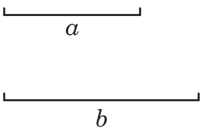
（第 2 题）

2. 如图，已知：CD 垂直平分线段 AB，E 是线段 CD 上一点，连接 CA、CB、EA、EB. 求证：$\angle CAE=\angle CBE$.

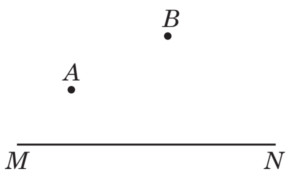
习题 18.4

A

1. 如图，已知线段 a、b，求作 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$，使$\angle B=90^\circ$，且 $AB=a$，$BC=b$.



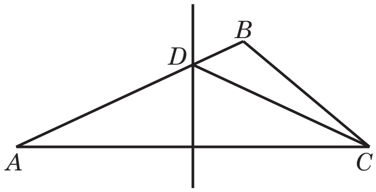
（第 1 题）



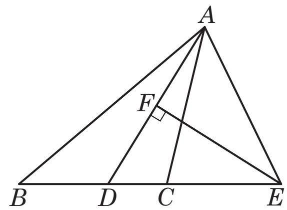
（第 2 题）

2. 如图，已知直线 MN 和直线外的两点 A、B，在直线 MN 上求作一点 P，使 $PA=PB$.

3. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle B=115^\circ$. AC 的垂直平分线与 AB 交于点 D. 连接 CD. 如果$\angle BCD$ 与$\angle DCA$ 的度数比为 $3:5$. 那么$\angle ACB$ 的度数是多少？



（第 3 题）

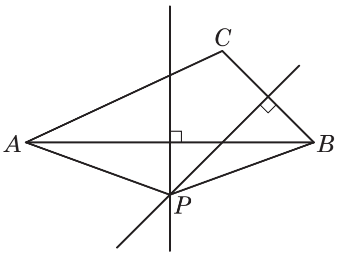


（第 4 题）

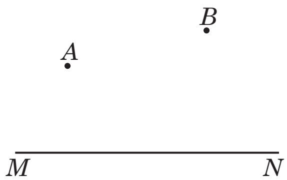
4. 如图，已知：AD 平分$\angle BAC$，AD 的垂直平分线交 BC 的延长线于点 E，交 AD 于点 F. 求证：$\angle CAE = \angle B$.

B

5. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 110°$，边 AB、CB 的垂直平分线相交于点 P，连接 AP、BP. 求$\angle APB$ 的度数.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，要在某天然气管道 MN 上修建一个泵站，分别向 A、B 两镇供气. 泵站修在管道的什么地方，可使所用的输气管线最短？

◎阅读材料

到三个定点距离之和最小的点

设要建造一座发电厂向附近的三座工厂输电，将发电厂建造在哪里，可以使从发电厂出发的输电线的总长度最短？

把问题数学化．设三座工厂为平面上的三个点 A、B、C，发电厂为点 P，需确定点 P 的位置，使 $PA+PB+PC$ 最小．当点 A、B、C 共线时，点 P 应取三点中居中的点．当点 A、B、C 不共线时，若$\triangle ABC$ 的三个内角均小于 $120°$，则所求的点 P 应满足$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$；而若$\triangle ABC$ 有一个内角大于或等于 $120°$，则所求的点 P 应为该三角形最大内角的顶点．约 1640 年，法国数学家费马(Pierre de Fermat，1601—1665)提出了这个问题，此问题中求得的点 P 也称为费马点．

下面，我们说明三角形最大内角小于 $120°$的情况．

如图 1，已知：在$\triangle ABC$ 中，最大角$\angle BAC<120°$，点 P 在$\triangle ABC$ 内，使得 $PA+PB+PC$ 最小．求证：$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$．

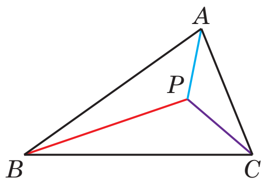


图 1

证明：如图 2，将$\triangle BPC$ 绕点 B 顺时针旋转 $60°$至$\triangle BP'C'$的位置，即作线段 $BC'=BC$，使得$\angle C'BC=60°$，且点 C'与点 A 在直线 BC 的异侧；作线段 $BP'=BP$，使得$\angle PBP'=60°$，且点 P'与点 A 在直线 BP 的异侧．连接 $C'P'$，这时$\triangle BPP'$是一个等边三角形，且$\triangle BP'C'\cong\triangle BPC$，于是 $PA+PB+PC=PA+PP'+P'C'$．

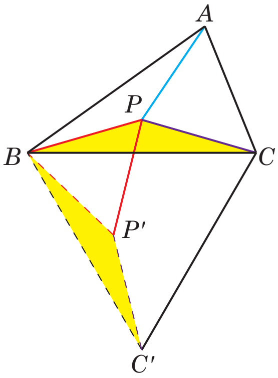


图 2

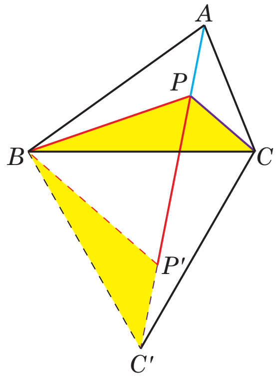


图 3

因为 A、C'为定点，欲使 $PA+PB+PC$ 最小，由三角不等式，可知点 P 应在线段 AC'上. 如图 3，此时，由于$\angle BPP'=\angle BP'P=60°$，可得$\angle BPA=120°$，$\angle BPC=\angle BP'C'=120°$. 所以$\angle APC=360°-120°\times 2=120°$.

从上面的证明还可以得到$\triangle BC'C$ 是等边三角形. 由此我们可以快速找到这类三角形的费马点. 作法如下：分别以$\triangle ABC$ 的边 AB、BC 为边向外作等边三角形 ABD 和等边三角形 BCE，此时 CD 和 AE 交于一点 P，点 P 就是所求的费马点，如图 4 所示.

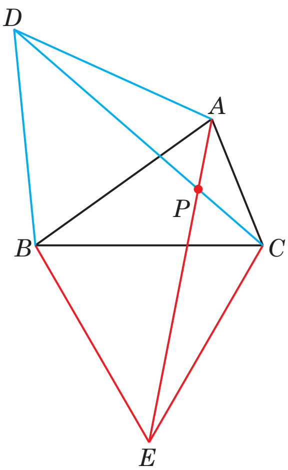


图 4

还可以证明，当$\angle BAC\geqslant 120°$时，点 A 为所求的费马点.

费马点是到平面上三个给定点的距离之和最小的点. 如果要确定到平面上 n 个给定点的距离之和最小的点，问题就复杂多了，但它在公路、铁路的路网设计乃至集成电路的布线中都有应用.

◎内容提要

1. 基本概念：等腰三角形，等边三角形，线段的垂直平分线，三角形的外心.

2. 等腰三角形：

（1） 等腰三角形的两底角相等(等边对等角).

（2） 等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合(等腰三角形三线合一).

（3） 如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等(等角对等边).

3. 等边三角形：

（1） 等边三角形的每个内角都等于 60°.

（2） 三个内角都相等的三角形是等边三角形.

4. 在三角形中，大边对大角，大角对大边.

5. 线段的垂直平分线：

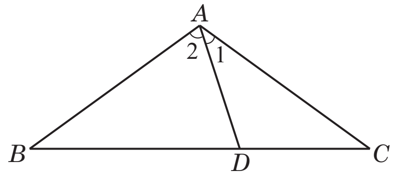
（1） 性质定理：线段的垂直平分线上的任意一点到该线段两个端点的距离相等.

（2） 与一条线段的两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上.

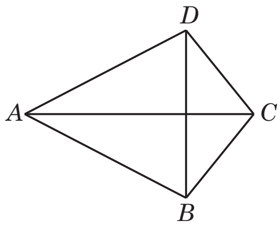
◎复习题

A

1. 如图，已知：在△ABC 中，$AB=AC$，点 D 在边 BC 上，$\angle 1=\angle B=\frac{1}{2}\angle 2$. 求证：△$ABD$ 是等腰三角形.



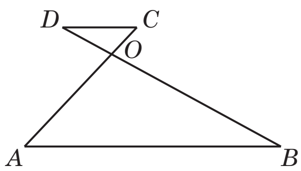
（第 1 题）



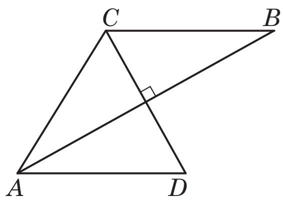
（第 2 题）

2. 如图，已知：$AB=AD$，$\angle ABC=\angle ADC$. 求证：AC 平分$\angle BAD$.

3. 如图，已知：$DC /\!/ AB$，AC 与 BD 相交于点 O，且 $OA<OB$. 求证：$OC<OD$.



（第 3 题）

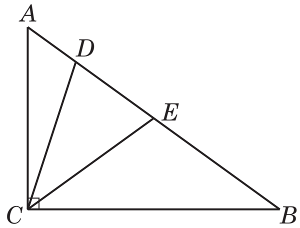


（第 4 题）

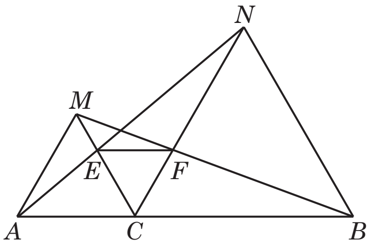
4. 如图，已知：CD 垂直平分线段 AB，AB 平分$\angle CAD$. 求证：$AD /\!/ BC$.

B

5. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$\angle B=36°$，点 D、E 在边 AB 上. 如果 $BC=BD$，$\angle CED=\angle CDB$，那么图中的等腰三角形有________个.



（第 5 题）



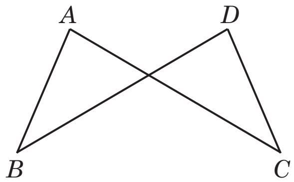
（第 6 题）

6. 如图，已知：C 为线段 AB 上一点，$\triangle ACM$、$\triangle CBN$ 都是等边三角形，直线 AN、MC 相交于点 E，直线 BM、CN 相交于点 F.

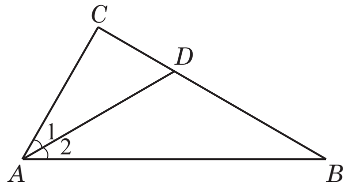
（1）求证：$AN=MB$；

（2）求证：$\triangle CEF$ 是等边三角形.

7. 如图，已知：$AB=DC$，$AC=BD$. 求证：$\angle B=\angle C$.



（第 7 题）



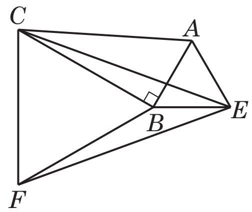
（第 8 题）

8. 如图，已知：在$\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上，$\angle 1=\angle 2$，$DA=DB$，$AC=\dfrac{1}{2}AB$. 求证：$DC\perp AC$.

9. 如图，分别以 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的两条直角边 AB、BC 为边作等边三角形 ABE 和等边三角形 BCF，连接 EF、EC.

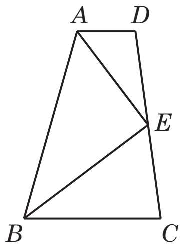
（1）在图中找出一对全等三角形，并证明你的结论；

（2）BE 和 CF 有怎样的位置关系？



（第 9 题）

10. 如图，已知：$AD\parallel BC$，E 是线段 CD 的中点，AE 平分$\angle BAD$. 求证：BE 平分$\angle ABC$.



（第 10 题）

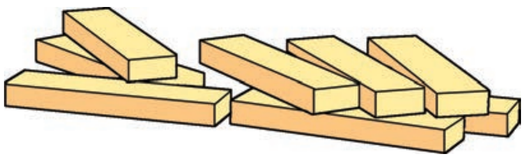
综合与实践

积木可以叠多远？

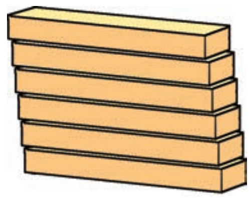
田径比赛中的数学

积木可以叠多远?

叠积木是童年时常见的一种益智游戏，能够锻炼我们的手眼协调能力和耐力. 如图 1，有若干块长、宽、高分别对应相同且材质均匀、质量相等的积木，将它们叠在一起并逐块延伸，在不倒塌的情况下，积木可以延伸多远?



(1)



(2)

图 1

准备活动

取 5 块长度为 l 的相同积木，四边对齐叠放，如图 2 所示. 沿平行于积木长边的方向推动最上面的积木(即积木①)而不触碰其他积木，在不倾倒的前提下积木①可延伸的最大长度是多少?

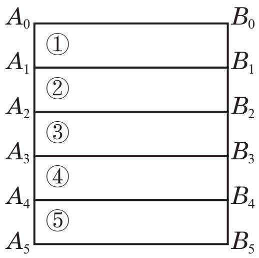


图 2

我们知道，材质均匀的长方体形状积木，它的重心在中心的位置，如图 3(1)中的点 N_1 是积木①的重心. 当积木①延伸出的长度 d_1(即点 B_1' 到点 B_1 的水平距离)小于点 N_1 到点 B_1 的水平距离 d_2 时，积木①不会倾倒. 若点 N_1 超出积木②的边缘，积木①就会倒下来，如图 3(3)所示. 因此想要积木①延伸的长度最大，水平方向上点 N_1 需刚好在积木②的边缘，即点 N_1 在 B_5B_2

的延长线上，如图 3(2)所示. 由此我们知道：1 块积木最远延伸长度为 $\frac{l}{2}$.

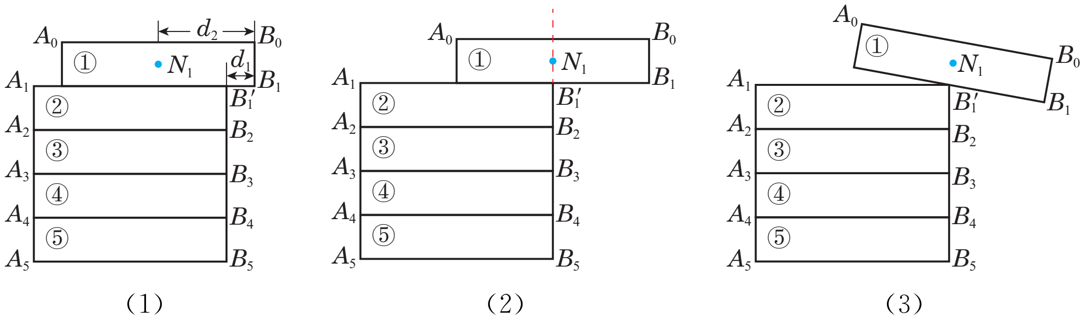


图 3 延伸 1 块积木的示意图

若干块长、宽、高分别对应相同且材质均匀、质量相等的积木，将它们如图 1(2)所示地叠起来，我们称这是一个长方体积木组合. 显然，一个长方体积木组合可以看作几个长方体积木组合叠在一起，比如图 1(2)中的组合可以看作是上面三块长方体积木叠在一起的组合叠在下面两块积木的组合之上. 对于这样的长方体积木组合，我们进一步给出以下预备知识：

1. 一个长方体积木组合的重心的水平位置偏移其最下方长方体积木重心的水平距离，等于组合中各个长方体积木重心偏移最下方长方体积木重心的水平距离的平均数.

2. 一个长方体积木组合的重心的高度等于组合中各个长方体积木重心高度的平均数.

3. 两个长方体积木组合叠在一起组成一个新的组合，当上方组合的重心在水平方向上超过下方组合的边缘，就会倒下.

活动 1 延伸 2 块积木

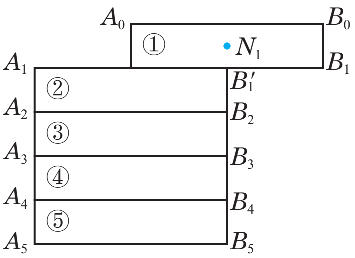
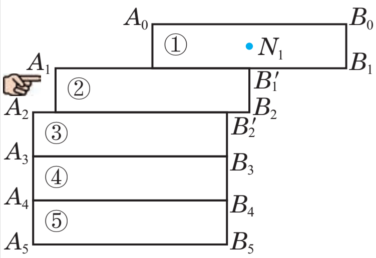
在图 3(2)的基础上，保持积木②和积木①的相对位置不变，按表 1 中手指方向推动积木①②的组合.

问题 1　计算积木①②组合的重心的初始位置，即重心的高度和偏移积木⑤重心的水平距离.

问题 2　当积木①②组合被推出最远时，它的重心位置在哪里？这时积木①、②的重心位置又分别在哪里？请仿照图 3(2)，在表 1 的蓝色框中标注出积木①②组合的重心位置，记作点 N_2.

问题 3　积木①②组合的最远延伸长度是多少？请填入表 1.

表 1　延伸 2 块积木活动记录表

延伸 1 块积木至最远	推动积木②	延伸 2 块积木至最远
		
积木①最远延伸长度$=\dfrac{l}{2}$		积木①②组合最远延伸长度=______

活动 2　延伸 3 块积木

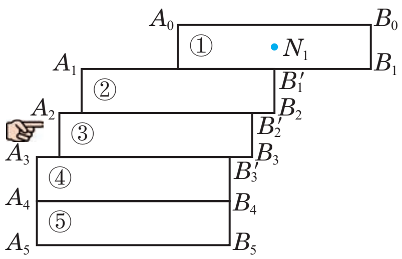
与活动 1 类似，在活动 1 结果的基础上，保持积木①、②、③的相对位置不变. 按表 2 中手指方向推动积木①②③的组合.

问题 1　计算积木①②③组合重心的初始位置.

问题 2　当积木①②③组合被推出最远时，它的重心位置在哪里？这时积木①、②、③的重心又分别在哪里？请仿照表 1，在表 2 的蓝色框中标注出积木①②③组合的重心位置，记作点 N_3.

问题 3　积木①②③组合的最远延伸长度是多少？请填入表 2.

表 2 延伸 3 块积木活动记录表

推动积木③	延伸 3 块积木至最远
	
	积木①②③组合最远延伸长度=______

活动 3 延伸 4 块积木

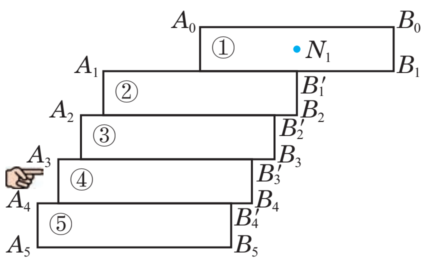
在活动 2 结果的基础上，保持积木①、②、③、④的相对位置不变．按表 3 中手指方向推动积木①②③④的组合．

问题 1　计算积木①②③④组合重心的初始位置．

问题 2　当积木①②③④组合被推出最远时，它的重心位置在哪里？这时积木①、②、③、④的重心又分别在哪里？请仿照表 2，在表 3 的蓝色框中标注出积木①②③④组合的重心位置，记作点 N_4．

问题 3　积木①②③④组合的最远延伸长度是多少？请填入表 3．

表 3 延伸 4 块积木活动记录表

推动积木④	延伸 4 块积木至最远
	
	积木①②③④组合最远延伸长度=______

拓展活动

（1）如果有 n 块长度为 l 的积木，按照上述的堆叠方式，写出 n 块积木可延伸的最大长度.

（2）如果有足够多的积木，按照上述的堆叠方式，是否可以将积木组合延伸至无穷远？请说明理由.

田径比赛中的数学

我国田径运动员在国际体育赛事中屡获佳绩，我们在为运动员的精彩表现鼓掌时有没有想过田径比赛和数学的关系？

田赛项目成绩确定中的数学

活动 1　铅球比赛成绩的确定

学校的铅球场地，由投掷区、抵趾板和落地区组成，如图 1 所示. 运动员推出的铅球着地后会留下痕迹. 裁判员会按照如下步骤测量并给出成绩：

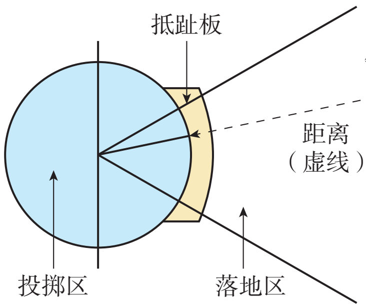


图 1　铅球场地平面图

1. 将皮尺的零刻度线拉至铅球落点；

2. 将皮尺的另一端拉长并经过投掷区的圆心；

3. 将皮尺拉直，读取皮尺上落在投掷区抵趾板内沿处的数值，作为运动员的成绩.

从上面的步骤中，你能找到铅球比赛成绩确定的数学依据吗？请用数学语言表示铅球运动员的成绩.

活动 2　请查阅资料，叙述跳远比赛成绩的确定方法，并说明其依据的数学原理.

活动 3　请查阅资料，叙述跳高比赛成绩的确定方法，并说明其依据的数学原理.

径赛跑道中的数学

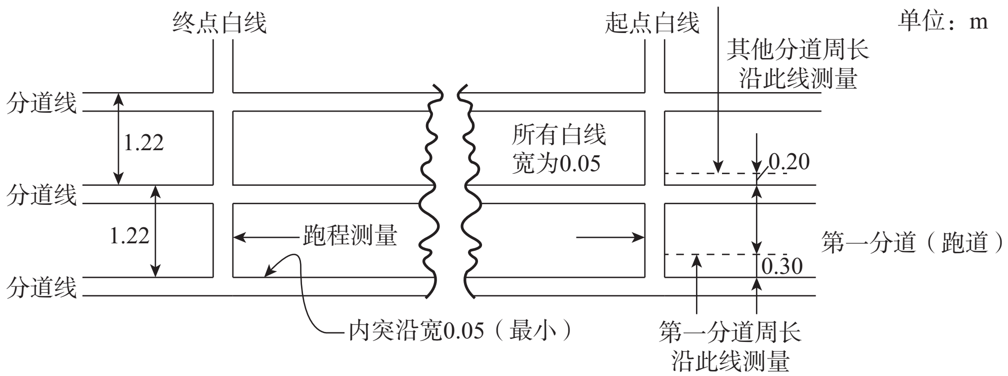
我们在观看田径比赛时，会注意到径赛跑道上有很多标志线. 例如 400 m 比赛的起跑线在每个赛道上是不同的，这是为什么呢?

图 2 田径赛场

活动 1 请查阅 400 m 标准跑道的相关数据，并填空.

名称(400 m 标准跑道)	长度或宽度(单位:m)	数据来源
第一分道(跑道)(最内侧)周长测量线的长度		
分道线(白线)的宽度		
一条分道的标准宽度(沿跑进方向的右侧分道线的宽度计入每条分道的宽度)		
弯道最内侧半径		
一侧弯道最内侧长度(两侧弯道长度相等)		
直道长度		

径赛规则规定，第一分道(跑道)周长的测量线是距离内突沿的外沿 0.30 m 处，其余各条分道的周长测量线是距离里侧分道线的外沿 0.20 m 处.



注：图中比例未统一，数据仅供参考.

图 3 跑道长度测量点位示意图

(引用：国家市场监督管理总局和国家标准化管理委员会发布. 体育场地使用要求及检验方法第 6 部分：田径场地. 2020－11－19 发布，第 12 页.)

活动 2 请根据活动 1 的数据，通过计算，确定 400 m 比赛时，第 2 跑道的起跑线与第 1 跑道的起跑线应该相差多少(结果精确到 0.01 m)?

活动 3 请通过实际测量，判断你所在学校或附近体育场馆的跑道比赛起跑线的设置是否规范，如果不规范，请给出合理的修改建议.

绘制示意图

活动 1 测量你所在的学校或附近体育场馆的跑道数据，根据测量所得数据绘制平面示意图.

活动 2 测量你所在的学校的铅球(或实心球)投掷区的数据，根据测量所得数据绘制平面示意图.

活动 3 制作展示海报，在班级进行交流，互相学习，总结不足，并改进示意图.

附　录

部分中英文词汇索引

15. 一元一次不等式

16. 相交线与平行线

17. 三角形

直角三角形	right triangle	67
钝角三角形	obtuse triangle	67
等腰三角形	isosceles triangle	67
等边三角形	equilateral triangle	67
高［线］	altitude	68
中线	median	68
（三角形的）外角	exterior angle (of a triangle)	74
全等形	congruent figures	82
全等三角形	congruent triangles	82

18. 等腰三角形

垂直平分线，中垂线	perpendicular bisector	132

后　记

本套教科书根据教育部颁布的《义务教育数学课程标准（2022 年版）》编写．

本册教科书是七年级下册．在主编李大潜的主持下，由徐斌艳任本册主编，编写人员分别为：

王春明、应坚刚、金荣生（第 15 章），王松萍、胡军、周子翔、应坚刚、金荣生（第 16 章），陶志诚、高洁、应坚刚、金荣生（第 17 章），王松萍、高洁、周子翔、应坚刚、金荣生（第 18 章），朱雁、陆立强、王鼎、王海生（综合与实践）．

感谢编写团队的团结协作和不懈努力，并对王建磐教授的协助表示衷心的谢忱．

编写过程中，上海市课程教育教学研究基地（中小学课程方案基地）、上海市心理教育教学研究基地、上海基础教育教材建设重点研究基地、两个上海市数学教育教学研究基地（分别设在复旦大学和华东师范大学）等上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地对教科书编写工作给予了大力支持，在此表示衷心的感谢．

我们要感谢一直支持、关心和帮助我们工作的同志和朋友们．大家的热忱指导和帮助，我们定会铭记于心，并化为我们的工作动力．

欢迎广大师生来电来函提出宝贵意见．

联系电话：021–64319241（内容）　021–64373213（印刷或装订）

电子邮箱：jcjy@seph.com.cn

地　　址：上海市闵行区号景路 159 弄 C 座上海教育出版社（201101）

SHUXUE

数学

七年级 下册

ISBN 978-7-5720-3213-4

定 价： 10.50 元

绿色印刷产品