Shuxue
Jiaoxue Cankao Ziliao

普通高中

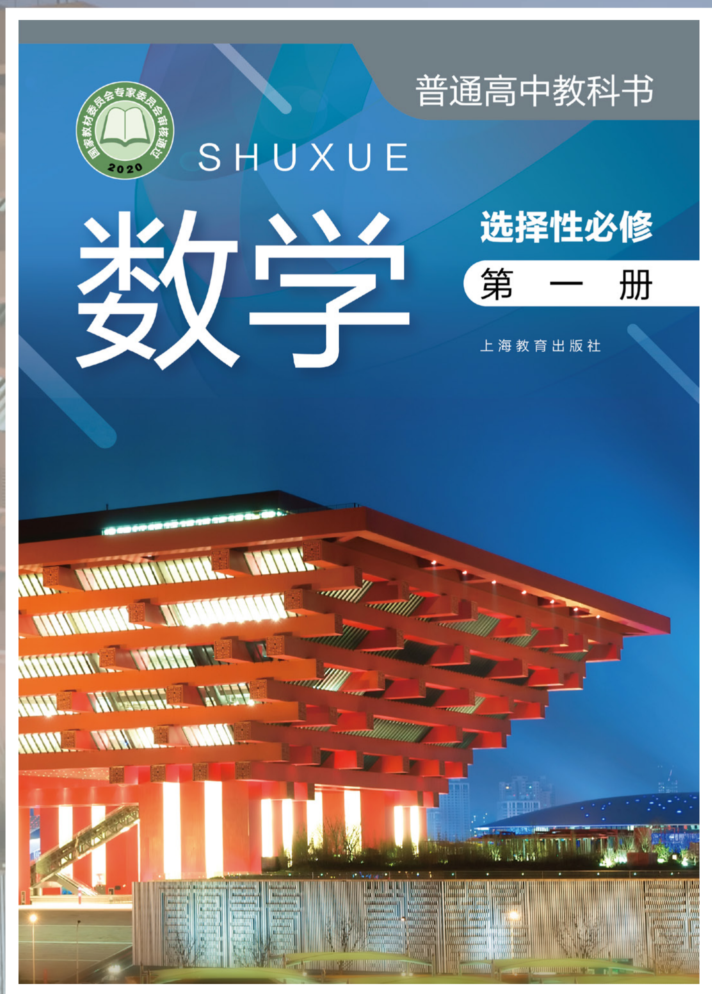
数学

教 学 参 考 资 料

选择性必修

第 一 册

上 海 教 育 出 版 社



普通高中

Shuxue
Jiaoxue Cankao Ziliao

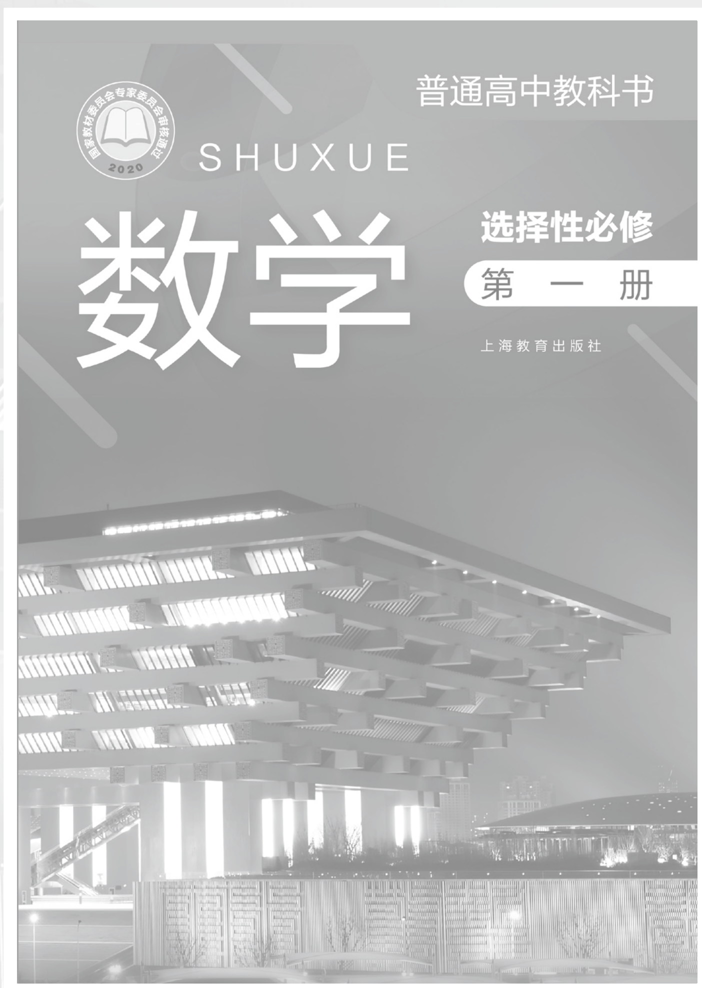
数学

教学参考资料

选择性必修

第 一 册

上海教育出版社



主　　编　李大潜　王建磐
副 主 编　应坚刚　鲍建生
本册编写人员　曾国光　虞　涛　李　英　王　华　施洪亮　叶莎莎　许亚善

责任编辑　周明旭
装帧设计　周　吉

图片提供　上海教育出版社有限公司（P112两幅图）
插图绘制　朱泽宇

普通高中　数学教学参考资料　选择性必修　第一册
上海市中小学（幼儿园）课程改革委员会组织编写

出　　版　上海教育出版社有限公司（上海市闵行区号景路159弄C座）
发　　行　上海新华书店
印　　刷　上海新华印刷有限公司
版　　次　2022年1月第1版
印　　次　2024年12月第4次
开　　本　890×1240　1/16
印　　张　10
字　　数　250 千字
书　　号　ISBN 978-7-5720-1315-7/G·1030
定　　价　30.00 元

目　　录

绪论 …… 1

第 1 章　平面直角坐标系中的直线 …… 10

一、本章概述 …… 10

二、教材分析与教学建议 …… 15

三、参考答案或提示 …… 34

四、相关阅读材料 …… 41

第 2 章　圆锥曲线 …… 43

一、本章概述 …… 43

二、教材分析与教学建议 …… 49

三、参考答案或提示 …… 90

四、相关阅读材料 …… 98

第 3 章　空间向量及其应用 …… 101

一、本章概述 …… 101

二、教材分析与教学建议 …… 105

三、参考答案或提示 …… 118

四、相关阅读材料 …… 124

第 4 章　数列 ······ 125
一、本章概述 ······ 125
二、教材分析与教学建议 ······ 129
三、参考答案或提示 ······ 141
四、相关阅读材料 ······ 151

绪　论

本套教学参考资料(以下统称“本套教参”)与李大潜、王建磐主编，上海教育出版社出版的《普通高中教科书·数学》(以下统称“本套教材”)配套使用，本套教材依据中华人民共和国教育部制定并颁布实施的《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》(以下简称“国家课程标准”)编制，并经国家教材委员会专家委员会审核通过.

一、本套教材的总体结构框架

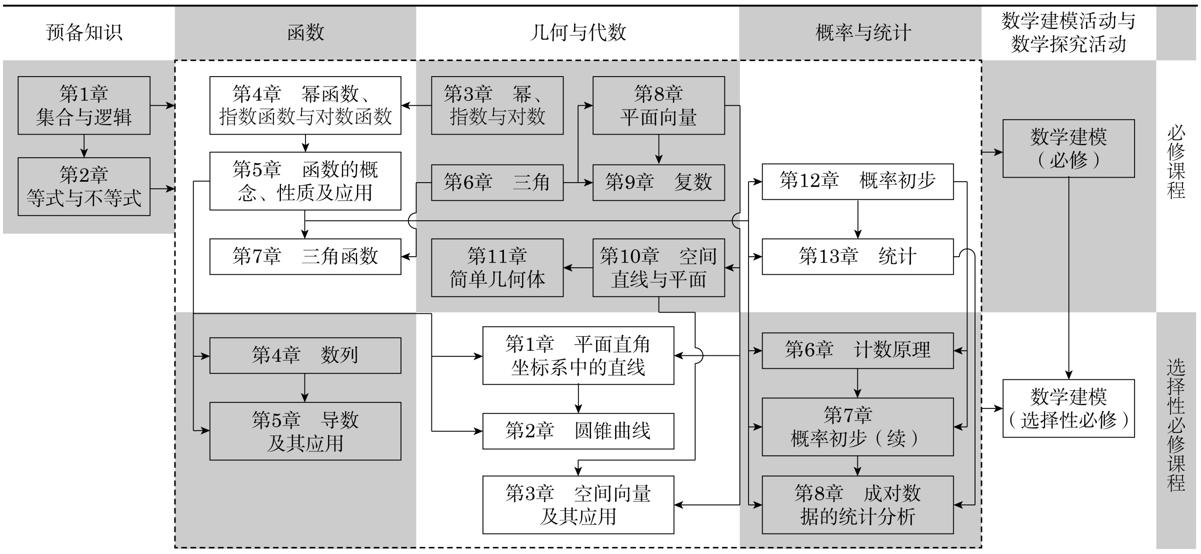
国家课程标准把高中数学课程分为必修课程、选择性必修课程和选修课程，并规定：必修课程为学生发展提供共同基础，是高中毕业的数学学业水平考试的基本内容，也是高考的内容要求；选择性必修课程是供学生选择的课程，也是高考的内容要求；选修课程为学生确定发展方向提供引导，为学生展示数学才能提供平台，为学生发展数学兴趣提供选择，为大学自主招生提供参考①.

本套教材仅包含必修课程和选择性必修课程.

国家课程标准把必修课程和选择性必修课程所囊括的数学内容分为预备知识、函数、几何与代数、概率与统计、数学建模活动与数学探究活动 5 个主题②. 本套教材把这 5 个主题及其具体要求组织成了必修课程 13 章和数学建模 1 册，选择性必修课程 8 章和数学建模 1 册. 这些章的标题以及各章之间的逻辑联系如下页图所示.

① 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京：人民教育出版社，2020：9，11-12.

② 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京：人民教育出版社，2020：13-14，36-37.



说明：(1) 数学是一个整体，教材各章之间或多或少都存在联系，上图仅标出一些主要联系.

(2) 预备知识主题下的两章为高中数学学习提供基本语言、基本工具和基本思维方式，因此它们是整个知识体系的基础；数学建模是给学生提供解决实际问题的训练和实践，可以建立在任何数学基础上.

(3) 在数学建模活动与数学探究活动主题下，上图只列了两册数学建模，并没有列出数学探究的内容. 其实，数学探究的内容以“探究与实践”专栏、“课后阅读”专栏、“拓展与思考”的习题以及某些边框分散在教材中. 教师可以利用这些素材引导学生进行自主探究，也可以根据教学内容自行设计数学探究活动，让学生学得更加生动活泼.

(4) 国家课程标准把幂、指数与对数的运算融在幂函数、指数函数与对数函数中，把三角的定义、三角恒等变换以及解三角形等非函数内容都归在三角函数标题下，所以相关的内容也就都在“函数”主题下了；本套教材把这些非函数的内容从函数标题下独立出来，形成了必修课程的第 3 章“幂、指数与对数”及第 6 章“三角”，把这两章归到“几何与代数”主题下是更顺理成章的. 当然，这两章内容与紧接在后面的函数的学习密切相连，在课程结构的安排上仍把它们归在函数主题一起考虑.

本套教材共有必修课程教材四册.

- 必修第一册：第 1 章至第 5 章；
- 必修第二册：第 6 章至第 9 章；
- 必修第三册：第 10 章至第 13 章；

- 必修第四册：数学建模.

本套教材共有选择性必修课程教材三册.

- 选择性必修第一册：第 1 章至第 4 章；
- 选择性必修第二册：第 5 章至第 8 章；
- 选择性必修第三册：数学建模.

除数学建模外的五册教材可以安排从高中一年级至高中三年级第一学期共五个学期教学. 每册内容没有撑足教学时数，留一定的机动课时供教师根据实际需要灵活掌握，可用作重点或难点的强化课、复习课、习题课、数学建模活动、数学探究活动等，也可用于安排选修课程或校本课程内容的学习. 数学建模内容与数学知识的逻辑结构没有直接的关系，两册数学建模教材不是前三册或前两册教材的后继，而是包含比教学课时数要求更多的内容，供各个年段灵活地、有选择地使用，以实现数学建模的教学目标.

二、本套教材的编写思想与主要特点

本套教材是在上海市教育委员会组织下，由设在复旦大学和华东师范大学的上海市数学教育教学研究基地（上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地）联合主持编写的，由李大潜、王建磐担任主编. 教材编写过程中，我们始终坚持正确的政治方向和价值导向，科学地处理了教学内容的编排，反复认真地打磨，努力做到结构严谨、体例活泼、特色鲜明，体现了理性精神和创新意识，有较高的科学品位和学科人文情怀，希望能为广大师生喜闻乐见，对学生学业水平的提升，数学学科核心素养发展和社会责任感的培育都有促进作用.

我们认为本套教材在编写思想上有所突破，在内容呈现上有一些特点. 具体体现在以下几个方面.

（1）关注“立德树人”，课程育人. 通过各种素材与知识本体的有机融合，有效落实了立德树人的根本任务，明确体现了“四个自信”和社会主义核心价值观，注重培养学生严谨求实的科学态度.

章首图的选用让学生在最初一瞥中体会中国共产党的光辉历史和祖国社会主义建设的成就；用现代化建设的新成就作为情景引入数学概念，让学生在学习知识的同时看到祖国发展的日新月异；例习题和“探究与实践”“课后阅读”等专栏中包含了各种热

点问题和重大主题教育的内容；重视数学史在数学教育中的作用，许多题附有历史的简述，既体现人类文化知识的积累和创新的过程，也帮助学生理解和掌握相关的数学知识；在数学史阐述中，特别注意我国历代数学家及其成就以及西方数学的脉络中我国学者(在学术、传播或中国化等方面)的贡献.

(2) 体现“国家标准，上海特色，国际水平”. 基于国家课程标准，但同时也对上海两期课改的经验有所继承，对东部发达地区的国际化大型城市这一特点有所关注，对数学链条上缺失的关键节点有所弥补.

本套教材在吸收上海两期课改(“一期课改”和“二期课改”)中已经成熟的经验方面，比较典型的例子有：数学归纳法，这是国家课程标准中标有 * 号的选学内容，本套教材将其 * 号去掉，归入正常教学要求；无穷递缩等比数列的和作为极限思想的朴素表述，与求导呼应；把反函数、参数方程、极坐标方程等内容以标 * 号的方式加入到本套教材中，供学校和教师选用. 这些内容曾出现在上海“二期课改”的教材中，学生的接受度较高.

对一些数学链条中关键的节点做适当的弥补. 例如，引入反证法，希望以此简化部分数学证明，提高学生逻辑推理能力；比较全面地介绍了直线方程的各种形式，既夯实解析几何的基础，也建立解析几何与数学其他分支的联结点，如斜截式方程紧密联系一次函数，而直线的法向量与点法式方程是立体几何中平面法向量的预演.

(3) 以国家课程标准所描述的“函数”“代数与几何”“概率与统计”三个主题为教材发展的三条主线，主线内部一气呵成(除了跨越必修与选择性必修的必要隔断外)，形成层层递进的章节设计，体现了整体性和连贯性，避免在发展主线间的反复变换，使学生不仅能更好地了解数学整体的思想和结构，也能了解数学不同分支之间的差异，对培养学生的数学素养更有好处.

(4) 注重“从特殊到一般，再指导特殊”的认识论规律. 例如，在函数主线内部，没有从给出函数的一般定义入手，而是先让幂函数、指数函数、对数函数作为“特殊”出现，然后提出函数的一般概念，再在“一般”指导下进入三角函数的学习. 这种处理方法在其他专题上也可以找到踪影：学过直线方程、圆锥曲线方程后，引出曲线方程的严格定义，然后用例题和习题的形式求一些轨迹的方程，再介绍曲线的参数方程和极坐标方程；在“简单几何体”一章中，先讲柱体与锥体，然后讨论多面体与旋转体，再“特殊化”到球的学习；“数列”一章，在学过等差数列、等比数列后，介绍一般数列

的概念与性质，特别关注用递推公式表示的数列，然后引入了数学归纳法，全章最后落笔于用迭代方法求$\sqrt{2}$的近似值，这是用递推公式表示数列的实际例子.

（5）在必修课程第 10 章“空间直线与平面”中，给出“立体几何”相对完整严格的演绎法阐述，意在努力克服学生的空间直观想象和逻辑推理上的不足. 在选择性必修课程第 3 章“空间向量及其应用”的章末回到立体几何，用向量方法解决立体几何问题，从几何问题代数化的角度引出解题新思路，加深对立体几何的理解，反过来又很好地诠释了学习空间向量的意义.

（6）数学建模单独成册. 国家课程标准把数学建模活动与数学探究活动作为一条单列的主线，充分体现了对数学建模的重视程度. 数学建模与数学知识的关系是强调已经学得的知识(不一定是刚刚学得的，一般也并不指定哪些具体的知识点)在解决实际问题中的应用，因此数学建模活动和数学知识体系的发展并无直接的关联性，数学建模活动的教学不应依附于特定知识性内容的教学，而应该强调它的活动性、探索性和综合性，在过程中不断提高学生分析问题、解决问题的能力和综合应用数学知识的能力，并充分激发学生的创新精神和创造意识.

基于这种想法，把数学建模内容独立出来，按必修和选择性必修分别单独成册. 这样做符合课程标准的要求，符合数学建模内容的特点，并至少在以下四个方面凸显它的优势：

- 数学建模单独的物理存在给教师和学生在强调数学建模学习和数学建模核心素养培养上更为直观的感受，更能激起数学建模教与学的热情；
- 独立的数学建模分册明确地显示数学建模不是在数学学习的某一特定节点上的内容，也不是新增的数学知识，而是在数学教学过程中随时随地可以开展的教学实践活动；
- 单独成册的数学建模教材有较大的容量，可以提供更多的活动案例，让教师和学生可以依据自己的兴趣和特长做多样的选择；
- 单独成册的数学建模教材以它的相对系统性和完整性帮助教师理解数学建模的意义和特点，逐步体会并形成数学建模的教学规范，从而更好地帮助学生开展相应的数学建模活动，体验数学建模的全过程，领悟数学建模的真谛.

（7）本套教材另一个与众不同的地方是采用“娓娓道来”的叙事方式，它使得教材既是一个“教”本，也是一个“读”本，学生可以在阅读中了解数学，喜欢数学，学好数

学. 正文的这种叙事方式使教师和学生更加注重数学精髓，体验数学严谨，掌握数学要义，提高数学素养，引导教师在教学中避免“重解题、轻概念、轻思想”的倾向.

三、本套教参的主要特点

本套教参编撰的目的是使教师理解教科书编制所依据的《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》，体会教材的编制特色和主要思想，把握教材所包含的数学知识的体系和脉络，掌握教学过程的关键，从而很好地完成从课程标准和教材所描述的“期望课程”“潜在实施课程”到教学过程的“实施课程”和学生习得的“获得课程”的转变.

本套教参与教材分册和章节安排均一致，即教参的分册和章节目录均与教材一致. 但教参没有直接把教材复制在内，也不是平铺直叙地解释教材的内容. 教参着重讲出编写者的思想及体会，明确各章的定位，剖析重点和难点，厘清容易混淆的地方，帮助教师把握课程标准的基本理念和目标要求，强调数学核心素养的落实，等等，从而开拓教师思维，优化教学方法. 从这个角度讲，教参又是课本内容的深化和补充，成为教材(潜在实施课程)到教学(实施课程)的中介和桥梁.

教材前言强调，“在任何情况下，都要基于课程标准，贯彻‘少而精’‘简而明’的原则，精心选择与组织教材内容，抓住本质，返璞归真，尽可能给学生以明快、清新的感受，使学生能更深入地领会数学的真谛，让数学成为广大学生喜闻乐见的一门课程. ”这是本套教材坚持的基本特色. 教材的许多特色隐含在内容选取、编排和行文中. 教参将揭示和突出教材的基本特色以及教材编制过程落实这个特色所采取的具体措施和处理方式，并充分注意同一主题内前置和后续内容的衔接以及一个主题的内容与其他主题甚至其他学科内容的关联. 这种衔接和关联在章节导言、总结部分以及在相关知识内容阐述中有明确的交代. 这样做的目的是让教师更加深刻地体会整个高中阶段数学是一个知识的网络，并在教学中把这个认知传递给学生.

教参的每一章因所涉及的内容以及编写者的风格特点可能会有所差异，但我们追求每章总体结构基本统一，关键要素基本具备.

每一章的教参包括“本章概述”“教材分析与教学建议”“参考答案或提示”和“相关阅读材料”四个部分.

“本章概述”部分的主要栏目有“总体要求”“课时安排建议”“内容编排与特色”“教学提示”与“评价建议”等. 特别地，“总体要求”中通过与课程标准、“二期课改”教材

的联系与对比，围绕着本章内容的重要性、与前后知识的联系和课程目标等内容进行阐述.

“教材分析与教学建议”部分按节编写，每节有“教学重点”“内容分析”“注意事项”“教学建议”等栏目.

“参考答案或提示”是教参的常规内容，但我们希望能够尝试给出一些思想或方法的提示.

给出“相关阅读材料”是一个新的尝试，我们希望为教师和学生的课外阅读提供一些提示或指导. 所列文献、材料以中文为主，但也会包含少量英文文献.

四、选择性必修教材第一册中的一些关注点

选择性必修教材第一册一共四章，前两章是平面解析几何的内容，其特点是通过平面直角坐标系，建立点与它的坐标(有序实数对)之间的一一对应，建立曲线(包括直线)的方程，从而建立“数”与“形”的联系，用代数的观点解决几何问题.

第 1 章在平面直角坐标系的框架下讨论直线的问题. 学生对直线并不陌生，但这一章所采取的是一种新的思路和新的方法，通过点的坐标和直线的方程，把几何的问题化成了与二元一次方程相关的代数问题，通过方程的建立和求解，得到几何问题的结论. 这个过程所启发的思想和所引入的方法是解析几何的通法通则，即要讨论与平面曲线相关的几何问题，先建立曲线的方程，把几何问题化归为与方程相关的代数问题，通过求解代数问题而得到原几何问题的结论. 这个方法不仅能解决学生已经熟悉的直线、圆的相关问题，还能对一些完全陌生的曲线(如椭圆、双曲线、抛物线)进行深入的研究.

第 2 章的主要内容是用第 1 章所引入的思想与方法定义并研究被统称为“圆锥曲线”的一大类曲线，包括椭圆(圆可以看成它的特例)、双曲线和抛物线. 这类曲线之所以有这样的统称，是因为它们都可以通过平面截一个圆锥面而得到. 又由于所有这些曲线都可以用二元二次方程来表示(并且构成了二元二次方程所表示曲线的主体)，这些曲线也被称为“二次曲线”.

“2.1 圆”是学生所熟悉的几何对象在解析几何语境中的再演绎，可以和第 1 章一起成为学生从平面几何走向解析几何的一个非常恰当的中间台阶. 随后而来的椭圆、双曲线、抛物线的处理，要注意它们的共性：定义上它们都是与两个参照对象(点或

直线）的距离满足一定条件的点的轨迹；它们的标准方程都是在合适的平面直角坐标系下所列出的距离等式化简得到的形式简单、对称性好的二元二次方程；对它们性质也主要关注了对称性、范围以及相关的特殊点、线和度量. 因此，这三节的教学，重点要放在椭圆一节，讲好椭圆，以期学生可以触类旁通.

“曲线方程”的概念是平面解析几何理论的支柱，它在教材的第 1、2 两章反复出现，不断深化，希望学生通过循序渐进的学习，对这个概念的内涵的理解能够越来越到位.

第 2 章的第 5 节是“挂靠”在这一章的内容，它把平面解析几何的三个重要主题浓缩在一节里，作为学生选学的内容. 第一个主题是求轨迹的方程，它是反复出现的“曲线方程”概念应用的新的境界，表现在轨迹定义上的多样性，不再限制在特殊类型的曲线上. 第二个主题“参数方程”和第三个主题“极坐标方程”都是解析几何中的重要内容，限于教材的难度和容量，都只作科普性的介绍.

第 3 章的“空间向量及其应用”是必修课程第 8 章“平面向量”的继续. 本册教材这一章的特点在于建立空间向量与平面向量之间的联系通道，一方面把空间中共面向量的问题化归为平面向量处理，另一方面把对平面向量所建立的理论进行类比与提升，建立空间向量的基本定理和坐标表示.

在高中课程中引入空间向量的初衷是用空间向量处理立体几何问题，降低立体几何学习的难度. 本套教材虽然加强了立体几何的演绎体系，使得立体几何可以不依赖于向量而发展，但仍希望学习空间向量的初衷得以延续. 为此，在这一章 3.4 节集中介绍了空间向量在判断空间直线、平面的位置关系，求距离和求角的大小等方面的应用.

第 4 章除了以“数列”为核心内容外，还包含了“数学归纳法”和“用迭代序列求$\sqrt{2}$的近似值”两个相关的主题，以“递推”的思想贯串起来. 全章始于等差数列和等比数列，它们都是用递推方法定义出来的数列，它们的通项公式、前 n 项和公式等也都可以用递推过程推导出来；一般数列中强调了用递推公式表示的数列；数学归纳法中从命题对 $n=k$ 成立的假设出发证明命题对 $n=k+1$ 也成立，也是一个递推的过程；最后，迭代法求近似值就是用一个递推公式重复计算，求得越来越趋近于精确值的过程.

这一章中有两点要加以特别关注. 一是数列的极限，它在无穷递缩（即公比绝对

值小于 1 的)等比数列求和公式的推导和迭代法求近似值的过程中都要用到. 但是,无论是这一章的数列极限还是下一章的函数极限,教材都只给了描述性的定义. 教师要通过直观的描述,努力让学生体会其思想. 另一个要关注的点是数学归纳法. 要让学生了解数学归纳法是完全归纳法,是演绎推理的重要手段,但它的可靠性依赖于证明过程的两个步骤都准确无误地完成. 建立数学归纳法的理论基础不是高中阶段的数学课程可以讲清楚的,但教师完全可以用递推的思想描述性地让学生理解其中的奥妙.

第 1 章　平面直角坐标系中的直线

一、本章概述

总体要求

在本章和下一章中我们将学习平面解析几何的初步知识与方法. 平面解析几何的思想是通过建立适当的平面坐标系，用方程表示曲线，通过研究方程的特点来研究曲线的特征，从而用代数的观点与方法解决几何问题.

通过初中阶段的平面几何课程，学生学习了直线，知道两点可以确定一条直线，知道两条直线的相交、平行与垂直的几何特征，知道可以通过两条相交直线的夹角确定其相对位置；在“图形与坐标”中，学生学习了平面直角坐标系，知道平面直角坐标系可以确定平面上图形的位置，初步体会了通过坐标讨论平面图形的运动与对称问题；在初中代数中，学生学习了一次函数，知道一次函数的图像是直线，可以通过直线的倾斜方向判断一次函数的单调性，体验了“由数到形”再“由形到数”的数形结合过程.

本章将从代数的角度研究直线. 在平面直角坐标系中认识直线的几何特征并掌握倾斜角和斜率的概念；学习直线不同形式的方程，学会根据实际需要选择不同形式的直线方程来解决问题；学习并掌握利用直线方程来判定两条直线位置关系的方法，学习如何根据直线方程求两条直线的夹角并掌握夹角的余弦公式；学习如何根据点的坐标和直线方程求点到直线的距离，掌握点到直线的距离公式及两条平行线之间的距离公式等.

通过方程来研究曲线的性质，是平面解析几何的特点与优点. 曲线方程概念的建立是结合本章与下一章的内容逐步完成的. 本章学习建立直线与二元一次方程的联系，并藉以体会曲线方程的基本思想和验证曲线方程的基本步骤.

通过本章的学习，可以帮助学生体验在平面直角坐标系中，如何用代数的方法研究几何问题，感悟其中蕴含的丰富的数学思想，促进学生直观想象、数学运算、逻辑推理、数学抽象和数学建模等数学学科核心素养的发展.

课时安排建议

本章的课时安排建议为 9+1，共计 10 课时. 建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
1.1 直线的倾斜角与斜率	1	
1.2 直线的方程	4	几种特殊形式的直线方程　2 课时
		直线的一般式方程　2 课时
1.3 两条直线的位置关系	3	两条直线的相交、平行与重合　1 课时
		两条直线垂直的判定与夹角的求法　2 课时
1.4 点到直线的距离	1	
复习与小结	1	

内容编排与特色

本章内容共分为四节，分别是 1.1 直线的倾斜角与斜率，1.2 直线的方程，1.3 两条直线的位置关系，1.4 点到直线的距离.

“1.1 直线的倾斜角与斜率”主要介绍在平面直角坐标系中与直线相关的两个量——倾斜角与斜率，为直线方程的引入作准备. 倾斜角是个几何量，是直接表示直线相对于 x 轴的“倾斜程度”的角. 而与倾斜角直接联系的另一个量是直线的斜率，它定义为倾斜角的正切. 经过正切函数的转化，量的属性发生了根本的变化，斜率是直线上点的坐标的简单的代数式，也在直线方程的系数中有直接的表达. 从这个角度看，斜率与其说是一个几何量，不如说是一个代数量. 解析几何部分的第一节课就充分体现了解析几何最重要的特征：把几何量与代数量联系起来，为用代数的观点解决几何问题作准备.

“1.2 直线的方程”主要介绍三种不同形式的直线方程：点斜式方程、两点式方程与一般式方程. 作为点斜式方程的特例，教材还介绍了直线的斜截式方程；在直线的

一般式方程的学习中，引入了直线的法向量概念，并在此基础上介绍了直线的点法式方程.

平面解析几何是要通过研究曲线的方程(代数对象)来研究平面上的曲线(几何对象)，因此平面解析几何理论赖以建立的支柱是曲线方程的概念. 从严密的逻辑角度，这个概念应该一开始就给出，这样才能顺理成章地讨论直线的方程、圆锥曲线的方程等. 但一般性的曲线方程的定义是高度抽象的，在学生对曲线还没有感性认识和知识储备的情况下，定义一般意义的曲线方程会让学生无所适从. 本册教材采用的策略是把难点分散，为学生搭建层层递进的理解台阶. 本章只出现“直线的方程”的概念，分两个台阶实现，并且没有严格地使用“定义”的形式给出：第一台阶是一个有具体数字的例子，其伏笔在 1.1 节的例 3 中，准确的描述在 1.2 节的第 1 小节的引言部分：从“与点 $A(-1,2)$、$B(3,4)$共线的点 $C(x,y)$的坐标一定满足关系式 $y-2=\frac{1}{2}(x+1)$”和“如果点 $C(x,y)$的坐标满足关系式 $y-2=\frac{1}{2}(x+1)$，那么点 $C(x,y)$一定与点 $A(-1,2)$、$B(3,4)$共线”，推出“经过点 $A(-1,2)$、$B(3,4)$的直线 AB 上的点正好是以方程 $y-2=\frac{1}{2}(x+1)$的解作为坐标的点”，于是给出了“直线 AB 的方程是 $y-2=\frac{1}{2}(x+1)$”与“方程 $y-2=\frac{1}{2}(x+1)$表示了直线 AB”的精确含义.

第二台阶是把具体数字变成字母，从推导点斜式方程入手，从“直线上的点的坐标都满足方程”和“满足方程的点都在直线上”两个方向建立起直线方程的概念. 两点式方程是点斜式方程的等价变形，其引入没有纠缠于两个方向的论证. 一般式方程的引入在逻辑上有点不同：先说明所得到的特殊形式的直线方程都可以等价变形为一般式方程，再说明一般式方程都是特殊形式变形而成. 最后，在点法式方程的说明中把上述两个方向论证改写成充要条件，学生应该不会有大的障碍.

曲线方程的进一步学习在下一章继续展开.

“1.3 两条直线的位置关系”学习用直线的方程判断两条直线的位置关系，从直线的方程出发，结合直线的几何特征，判断两条直线是否平行、重合或相交，判定两条直线是否垂直，求两条相交直线的夹角. 在内容的编排上，首先学习的是根据方程判断两条直线常见的位置关系：相交、平行与重合；接着研究其中的相交关系，由特殊

的垂直关系的判定到一般情况下的夹角的求法. 展现了由一般到特殊再到一般的认知顺序. 通过这些知识的学习，引导学生体验如何通过代数的方法解决几何问题，提高数学运算的能力. 这里对代数方法的理解，可以从研究直线方程的解的特点出发，也可以从方程得到直线的几何特征出发来解决与直线有关的问题.

“1.4 点到直线的距离”学习如何求点到直线的距离，需要掌握点到直线的距离公式与两条平行线间的距离公式. 本节首先探索如何根据点的坐标和直线方程求点到直线之间的距离，经过分析和比较，发现从法向量的角度推导点到直线的距离公式最为简便，这是对“二期课改”教材的继承. 在掌握了点到直线的距离公式后，作为该公式的应用和巩固，推导得到两条平行线之间的距离公式. 考虑到课程标准的要求，本节没有安排点到直线的有向距离的内容，这是有别于“二期课改”教材的地方.

总之，本章以“如何用代数的方法研究几何问题”为主线，以学生熟悉的几何知识——直线——为载体，引导学生学习和体验如何用代数的方法表示直线，如何用直线的方程分析和解决与直线有关的问题. 在掌握直线的知识和方法的基础上，帮助学生初步学习解析几何的方法，进一步体验数形结合的思想.

教学提示

在本章的教学中，应引导学生重视从“方程”的角度研究“直线”的过程，强调平面直角坐标系在这个过程中的基础作用. 为了减轻学生学习的难度，平面直角坐标系通常是给定的，我们更关注的是在平面直角坐标系中，如何根据给定条件确定直线的方程，学会用“数”的知识解决“形”的问题.

作为平面几何内容的直线，学生有很好的认知基础，所以学习新知识时可以从学生已知的几何基础出发，思考在平面直角坐标系中如何用“数”表示. 例如，平面几何中两点确定一条直线，那么在平面直角坐标系中两点的坐标就确定了经过这两点的直线的位置. 在平面直角坐标系中一点和倾斜角可以确定直线的位置，其中点可以用坐标表示，倾斜角如何用坐标表示呢？这就有了斜率的定义. 这些知识的生成是理性思维的结果，适当的数学情境也是创设问题情境的一种方式.

对直线的方程概念的认识是一个渐进的过程，本章虽然没有明确给出曲线的方程的定义，但是在求直线的点斜式方程、点法式方程时，都在渗透两个要点：一是直线上任意一点的坐标都满足方程，二是以方程的解为坐标的点一定在直线上. 两个要点

不断再现，促进理解，为第 2 章进一步学习和理解“曲线的方程”打下基础.

在本章的教学过程中，既要突出直线的方程的代数作用，如通过研究方程的解来判断一个点是否在一条直线上，判断两条直线是否相交、平行或重合；也要挖掘直线的方程中蕴含的几何特征，如直线的倾斜角、法向量，为判断两条直线的位置关系、求点到直线的距离等问题拓展思路.

信息技术的应用会给教学带来方便，促进学生理解有关的知识. 教学中，可以适当应用教学软件，动态地展现一些过程，降低抽象思维的难度. 例如，直线的倾斜程度如何随斜率的变化而变化；直线的位置如何随着一些参数的变化而变化.

作为解析几何的起始章节，在教学中可适当穿插一些数学史的知识，组织学生收集、阅读解析几何的形成和发展的历史资料(例如，参考文献[3][4][5]的有关章节)，撰写小论文，论述解析几何发展的过程、重要结果、主要任务、关键事件及其对人类文明的贡献，彰显数学的人文价值.

评价建议

本章的教学可以从以下几个角度进行评价：

关注学生是否能体会和理解解析几何的基本思想，体会坐标系在建立几何对象与代数描述之间重要的桥梁作用，理解直线方程概念在联系直线的几何理论与方程的代数性质之间的作用.

关注学生对本章引入的基本概念的掌握和理解. 例如，理解倾斜角、斜率及其在表达直线的几何性质方面的意义，理解直线的方程的概念，理解从正反两个方面论证一个方程是给定直线的方程的必要性，熟悉直线的不同形式方程之间的关系，熟练进行直线不同形式方程的转换.

关注学生是否在学习知识的过程中经历和体验了知识的发生发展过程. 例如，直线的倾斜角是怎么来的？为什么有了倾斜角还需要定义斜率？直线和二元一次方程有什么关系？直线法向量的几何意义和代数刻画.

关注学生是否掌握了本章的基本方法，能否用二元一次方程或二元一次方程组的方法解决直线或直线间关系的几何问题. 例如，根据方程判定两条直线的位置关系的方法，通过解方程组求两条直线的交点坐标，根据直线方程求两条直线的夹角及求点到直线的距离等.

关注学生在思考和解决直线问题时的思维过程. 例如，能否根据问题情境合理选择直线的方程形式，能否多角度思考判定两条直线的位置关系的方法，能否结合图形思考两条直线的法向量的夹角与直线夹角的关系，能否用多种方法求点到直线的距离等.

本章教学的一个关键的评价指标是学生是否初步掌握了用二元一次方程或方程组解决与直线有关的几何问题，了解解析几何的基本特点. 当然，在评价过程中要充分注意到这是解析几何的起始阶段，对直线和方程的关系的认识是一个逐步加深的过程，对解析几何的思想和方法是一个学习和体验的过程，不宜在开始阶段操之过急.

本章涉及较多的符号运算与数形结合过程，可以重点发展与评价学生在数学运算和直观想象方面的数学学科核心素养.

二、教材分析与教学建议

1.1　直线的倾斜角与斜率

教学重点

掌握直线的倾斜角和斜率的概念及其相互联系，理解倾斜角(或斜率)在决定直线与平面直角坐标系的相对位置关系中的重要作用，熟悉用直线上两点的坐标表示直线斜率的公式，初步体会用代数工具表达几何图形的思想.

内容分析

“两点确定一条直线”，这是数学中的常识了. 在建立了平面直角坐标系的平面上，当然两点还是确定一条直线，但和平面几何不一样的是，两点不仅仅是作业纸上点出的两个点，它们所决定的直线也不仅仅是用直尺把两点连接起来的线. 现在所谈的点，要给出点的坐标；所谈的直线，要写出直线的方程.

下一节我们将准确地给出“两点确定一条直线”的解析几何描述——直线的两点式方程. 在两点式方程推导过程中，跟直线有关的一个代数量“斜率”起了很大的作用，而与这个代数量直接联系的几何量是直线的“倾斜角”. 因此，作为“1.2 直线的方程”

的前导，本节先介绍直线的倾斜角与斜率.

我们都在给定的平面直角坐标系中讨论问题.

直线的倾斜角是个几何量，是直接表示直线相对于 x 轴的“倾斜程度”的角. 精确地说，直线 l 的倾斜角 θ 是 x 轴绕直线 l 与 x 轴的交点沿逆时针方向旋转到与 l 的重合位置所转过的最小正角. 如果直线 l 与 x 轴平行或重合，定义 $\theta=0$. 这样，$0\leqslant\theta<\pi$.

与倾斜角直接联系的是直线的斜率 $k=\tan\theta$$\left(\text{当}\,\theta=\dfrac{\pi}{2}\text{时，斜率不存在}\right)$. 经过正切函数的转化，量的属性发生了根本的变化：k 是直线 l 上点的坐标的简单代数式——经过两点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$ 的直线 l 的斜率是

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

倾斜角(或斜率)的重要意义在于，给了直线的倾斜角(或斜率)，直线的方向就完全确定了. 这句话的准确含义是，所有具有这个倾斜角(或斜率)的直线都平行. 这个结论的依据是“两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行”. 于是，如果还知道直线上的一点，这条直线就完全确定了，根据是“经过直线外的一点，有且只有一条直线与已知直线平行”，即著名的欧几里得第五公设(的等价命题).

下一节一开始我们将讨论如何把第五公设所说的这条直线从解析几何的角度给确定出来，也就是说，如果给定已知直线的斜率和直线上一点，我们要求出这个唯一存在的直线的方程. 本节的例 3 是解决这个问题的先导.

本节有 3 道例题.

例 1 是对经过两点的直线的斜率公式的简单应用，并巩固倾斜角与斜率的关系，教学时需要提醒学生注意斜率公式中两个坐标的顺序，可通过变式说明斜率符号变化对直线“倾斜方向”的影响.

例 2 是与已学知识的联系. 初中阶段学生已经知道了一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图像是直线，并把其中的 k 称为斜率. 本例验证了初中就一次函数所定义的“斜率”确实是现在一般意义下的“斜率”，解释了一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 中系数 k 的几何意义. 本例沟通初中所学的一次函数图像与这里的直线方程之间的联系，巩固了经过两点的直线的斜率公式，也为直线的斜截式方程作了铺垫.

例 3 有一个承上启下的作用，既学习了如何应用斜率知识解决三点共线问题，又

为下一节如何求直线的方程埋下伏笔.

注意事项

把直线的倾斜角和斜率作为本章的第一节内容，有别于“二期课改”教材，既为了突出斜率在直线方程中的作用，也考虑到学生对解析几何方法的学习需要适应过程，并为进一步学习直线的方程作准备.

直线 l 的倾斜角不是 l 与 x 轴作为两条直线的夹角. 我们约定，两条直线的夹角是它们所成的两组对顶角中较小的那对角的大小，从而取值范围是 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，而倾斜角取值范围是 $[0,\pi)$.

从解析几何的角度看，斜率的概念远比倾斜角重要. 这主要因为它是代数量，可以直接从直线上点的坐标、直线方程的系数上读得，或者经过简单代数运算获得. 斜率对于刻画直线在平面直角坐标系中的位置和讨论直线的性质是非常方便的.

直线的斜率在后续课程的学习中还会发挥很大的作用. 例如，“在导数及其应用”一章(选择性必修课程第 5 章)的学习中，学生将知道，函数在一点的导数实际上确定了它的图像在这一点上切线的斜率，它与函数的单调性、极值等有密切联系.

教学建议

作为解析几何的第一节课，要开宗明义，强调解析几何的研究思路是通过引进坐标系，建立几何对象与代数量之间的联系，从而用代数的观点与方法解决几何问题. 要突出平面直角坐标系的作用，要强调放在平面直角坐标系中思考和解决几何问题的新思路. “内容分析”部分为这种思路的课程引入和实施作了尝试，可供参考.

“倾斜角”与“斜率”就是一对典型的“几何描述”与“代数刻画”的孪生概念，前者给出了直线与坐标系相对位置关系的几何直观描述，而后者则把直观描述转换为点的坐标之间的数值关系.

这里所定义的斜率与初中学习一次函数时所定义的斜率的一致性在例 2 中讲清了. 不要认为这是一个可有可无的例题，它对理清学生的思路，建立前后知识的关联是有意义的.

斜率不存在的情况教材只用一句话和一张图(图 1－1－2)说明，可适当展开. 不同的斜率值(>0、$=0$ 或 <0)以及对应的倾斜角的变化和直线在几何上的不同特征要通过“数形结合”呈现，引导学生用运动的观点加以分析，让学生加深印象.

例 3 的承上启下作用要重视.

1.2　直线的方程

教学重点

从具体数字例子到一般字母表述，逐步体会“直线方程”的含义，并了解几何对象“直线”与代数对象“二元一次方程”之间的对应关系，为几何问题代数化提供新的天地. 在学习过程中，要注意体会“直线上点的坐标均是二元一次方程的解，而以二元一次方程的解为坐标的点均在直线上”这一双向的验证过程，为下一章学习“曲线方程”打好基础.

在直线方程的学习中，重点关注点斜式、两点式和一般式的直线方程，了解它们的推导过程或引入方式，掌握它们的主要特征，并能在问题的情境中选用恰当的方程形式解决问题. 理解直线的法向量的几何意义与代数表达，能初步使用法向量解决相关的问题.

内容分析

本节的第 1 小节学习特殊形式的直线方程，主要介绍了点斜式方程与两点式方程，斜截式方程也作为特例被提及. 整个论述基于上一节所推导的经过两点的直线的斜率公式.

点斜式方程的讨论始于上一节例 3，这个例题就一个具体的数字例子实际上给出了直线的方程，不过只验证了直线上的任何点的坐标都满足方程. 本节第 1 小节的引言重复了上一节例 3 的结果，并添加了关于坐标满足方程的任何点一定在直线上的补白，于是可以严格地把例 3 中得到的关系式称为所求直线的方程. 如前所述，这是理解“直线的方程”的第一台阶.

第 1 小节点斜式方程与两点式方程的推导完全依赖于上一节的斜率公式，推导过程也与上一节的例 3 没有本质的差别(除了具体的数字变成了一般的字母). 值得指出的是，在点斜式方程推导出来后，教材除了说明直线上的任何点的坐标都满足方程外，还切切实实验证了坐标满足方程的任何点一定在直线上. 这样完整地分别从两个方向论证一个方程是给定直线的方程在教材中仅此一处(后文在点法式方程验证时，用了充要条件的语言描述)，这是理解“直线的方程”的第二台阶，教学中应该把握住.

作为点斜式方程的特例，第 1 小节还介绍了(直线在 y 轴上的)截距概念和斜截式

方程. 当斜率不为 0 时，斜截式方程就是一次函数的表达式. 除了考虑直线在 y 轴上的截距，当然还可以考虑它在 x 轴上的截距，如果两个截距都不是 0，还可以用两个截距把直线的方程写出来(见习题 1.2A 组第 8 题)，习惯上称它为直线的截距式方程(只要求学生能完成习题，截距式方程的概念及应用不作要求).

点斜式方程是用解析几何方法在由斜率决定的一组平行线中确定过定点的唯一直线，而两点式方程就是“两点确定一条直线”这一几何常识的解析几何表达. 这些方程分别体现直线的不同几何要素. 解决与直线相关的问题时，根据问题提供的几何要素采用不同形式的直线方程，往往可以取得意想不到的效果. 这里蕴含的代数观点解决几何问题的解析几何特征很值得细细体会.

第 2 小节讨论直线的一般式方程的切入点是代数的. 既然直线的点斜式和两点式方程都是二元一次方程，我们就舍弃方程特殊形式及其几何背景，从代数角度考虑最一般的二元一次方程

$$ax+by+c=0 \quad (a\text{、}b\text{ 不同时为零}). \qquad ①$$

注意这里的“a、b 不同时为零”不是外加的条件，因为如果 a、b 同时为零，①式仅为 $c=0$，不再是一个二元一次方程. 我们允许一个未知数带零系数，但仍视为二元一次方程(而不是一元一次方程)讨论它的解和几何意义.

我们已经知道：

所有直线的方程都可以用①式那样的二元一次方程表示(所有直线都可以用两点式方程表示，即使斜率不存在也可以，参看本册教材第 8 页，从而都可以化成①式那样的二元一次方程).

我们还想知道：

(1) 是不是①式那样的二元一次方程都表示一条直线?(这个问题有了肯定的回答后，我们才能称方程①为直线的一般式方程!)

(2) 纯代数方式引入的方程①是否也揭示直线的一些几何性质呢?

问题(1)容易解决：如果 $b\neq 0$，①式可化为斜截式方程，从而表示一条直线；当 $b=0$ 时，必有 $a\neq 0$，方程①的解集是 $\left\{\left(-\dfrac{c}{a},m\right)\middle| m\in\mathbf{R}\right\}$，从而它表示过点 $\left(-\dfrac{c}{a},0\right)$ 且垂直于 x 轴的直线(注意：这里把 $b=0$ 时的方程①还看成二元一次方程，才有上述的解集).

问题(2)的讨论导致一个新的概念——直线的法向量——的出现，从而把向量工具引入到解析几何中. 所谓直线的法向量是和直线上所有向量都垂直的非零向量. 一个令人惊奇的结论是：以直线的一般式方程①中的一次项系数为坐标的向量(a,b)是直线的一个法向量. 这个结论的证明在例 9 中.

用给定的向量作法向量的直线互相都平行，和点斜式方程类似，只要再给定直线上的一个点，就把直线完全确定下来了. 这就给出了直线的点法式方程的概念：过点$M(x_0,y_0)$且有法向量$\vec{n}=(a,b)$的直线的方程是

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0. \qquad ②$$

教材用向量数量积的形式给出了点$P(x,y)$在直线上的充要条件，进而推出点$P(x,y)$在直线上的充要条件是其坐标满足方程②. 这里又一次给出了直线方程的验证，不过不是从“直线上的任何点的坐标都满足方程”和“坐标满足方程的任何点一定在直线上”两个方向分别验证，而是以充要条件的形式一起完成了两个方向的验证. 因为对“直线的方程”的理解没有在第二台阶的基础上作质的提升，所以没把这段论述当作更高的台阶.

点法式方程的学习在很大程度上是对“二期课改”教材的继承. 点法式方程为后继学习两条直线的位置关系、点到直线的距离等内容提供了新的思路和方法.

本节共 11 道例题.

例 1 是为巩固点斜式方程与倾斜角、斜率、截距等概念而设计的一道简单题目.

例 2 给出了判定一个已知点是否在一条直线上的代数方法——判断点的坐标是否是方程的解. 虽然方法简单，但是原理很深刻，可以算是理解“直线的方程”的一道例题. 当然，作判断之前应该先根据题设条件求出直线的一个方程，教材所用的方法是用待定系数法求出斜截式方程. 其实，此题解答更佳方案是使用截距式方程(参看习题 1.2A 组第 8 题). 教材对直线的截距式方程不作要求，但如果教学时间比较宽裕，让学生见识一下也未尝不可.

例 3 与例 4 是为了巩固直线的两点式方程，例 4 是在三角形的背景下求直线方程，其中还出现了垂直于x轴的直线的方程.

例 5 是对前面所学的直线不同形式的方程的应用，可以选用两点式方程也可以选择点斜式方程，教学中不要局限于一种解法.

例 6 是求直线方程问题的反问题，由直线的一般式方程作出其几何图形，并求直线斜率和在y轴上的截距. 作出直线最一般的办法是找出直线上的两点，或者找出直

线与平面直角坐标系的几何关联(平行、垂直、夹角等)，教材给出的本例第(1)小题的解答是找到直线上的一个点，并且知道直线平行于 x 轴；第(2)小题用了最通用的方法，找出直线上的两个点. 从方程找直线的斜率和截距不过是把一般式方程变形为所需要的特殊形式的方程.

例 7 实际上是对本节内容的一个突破，从讨论单条直线到讨论具有某种共同特征的一组直线. 此例给出的是过一个特定点的直线系，问题没有太大难度，把方程作一些变形就可以得到要证明的结果. 但是，本例可能给学生带来一些新的见识和新的启发. 注意：带参数的直线系的问题可以不断地增大难度，教师不要在这方面变换题目强化练习，就本例给学生一些直观的体会就可以了.

例 8 讨论直角坐标平面上带参量的直线方程中参量取值与直线所经过的区域的关系，问题比较综合. 解题的关键是把题设条件转化为关于参量的不等式，然后解不等式得到参量的取值范围. 为了能使用题设的几何条件，解题的第一步必须把方程化为与几何条件相关的特殊形式. 教材所给的解法是把方程化为斜截式. 方程转化的过程如要用含参量的代数式作分母，必须排除分母为 0 的情况，或者把分母为 0 的情况单独考虑. 本例要作分母的是代数式 m，解题一开始就把 $m=0$ 的情况排除了，于是把方程化为斜截式就没有困难了. 解题的第二步是把题设用方程系数的不等式表示出来. 本例中，因为直线过第一、第二象限，它在 y 轴上的截距大于 0 是马上得到的. 但是由直线过第一、第二与第四象限而得出直线的斜率小于 0 似乎不那么直观. 可以反过来考虑：斜率大于 0 的斜截式方程 $y=kx+b$ 所表示的直线一定过第三象限，事实上，只要取 x 为小于 $-\dfrac{b}{k}$ 的负数，则 x、y 都取负值了. 解题的最后一步是解不等式，这是必修课程第 2 章的内容，不赘述.

本例的上述解法可以说是通法通则，便于学生模仿. 但本例的如下解法或许更为简便：先排除 $m=0$ 与 $m=-1$ 的情况，然后在方程中分别令 $x=0$ 与 $y=0$，得到直线在 y 轴与 x 轴上的截距分别为 $\dfrac{m-2}{m}$ 与 $\dfrac{m-2}{m+1}$，而由题设推知这两个截距都是正的，于是解不等式组

$$\begin{cases}\dfrac{m-2}{m}>0,\\[2ex]\dfrac{m-2}{m+1}>0\end{cases}$$

就可以了.

例 9 是为了引出直线的法向量概念并证明以直线一般式方程的一次项系数为坐标的向量是直线的法向量.

例 10 是点法式方程的简单应用，同时也复习了一个向量的坐标等于它的终点坐标减去起点坐标.

例 11 是用点法式方程解决几何图形面积的一个综合应用，与例 8 有相似之处. 先根据条件写出直线的点法式方程，排除特殊情况(直线平行于坐标轴的情况)，然后求出直线在两个坐标轴上的截距，而直线与坐标轴围成的三角形的面积不过是两个截距绝对值之积的一半，因此马上可以列出关于参量 m 的方程并解出结果.

注意事项

1. 在本节教材引言中，说过“任何直线的方程都是关于 x 与 y 的二元一次方程”和“任何关于 x 与 y 的二元一次方程都表示一条直线”. 这两句话的第二句完全没有问题；如果局限在平面直角坐标系中的直线和关于 x 与 y 的二元一次方程的关系上说，第一句话也是对的. 更严格的表述见本册教材 2.1 节第 1 小节的第一段，教师应按此口径进行教学. 但教师应该了解，如果讨论一般的曲线的语境中的直线，没有了二元一次方程的限定，上述第一句话就有欠缺了，我们至多可以说“任何直线的方程都可以取为关于 x 与 y 的二元一次方程”. 例如，根据本册教材 2.1 节的第 1 小节第二段的定义，$x^2-2xy+y^2=0$ 和 $(x-y)(x^2+y^2+1)=0$ 都是第一、第三象限角的平分线 l 的方程，但它们不是二元一次方程. 当然，更深入的数学学习可以把这两个方程定义的曲线和直线 l(它对应的二元一次方程是 $x-y=0$)区分开来：$x^2-2xy+y^2=0$ 表示的是两条 l 重合在一起的二重直线；$(x-y)(x^2+y^2+1)=0$ 表示的是由直线 l 与一个虚曲线组成的多分支曲线. 这段文字不是要把更高深的数学引入到教师的理解和教学中去，而是提醒有这样一个有歧义的地方存在，如果有学生提出类似的复杂方程作为直线的方程，只要符合教材 2.1 节第 1 小节第二段的定义，就应该认为是正确的，并对学生的探索精神加以鼓励.

2. 有些特殊形式的直线方程并不是对所有直线都适用. 例如，只有当直线的斜率存在(即直线不垂直于 x 轴)时，谈论它的点斜式方程才是有意义的. 又如，两个坐标对称形式的两点式方程

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

只有当直线不垂直于任何坐标轴时才有意义. 但不等于说只有当直线不垂直于任何坐标轴时才有两点式方程. 例如，本册教材第 8 页所示，可以把直线的两点式方程改写为

$$(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1),$$

它就适用于所有情况.

3. 作为点斜式方程的特例，斜截式方程要作为教学内容出现，特别关注它与一次函数的关系. 截距式方程的定义只在习题中出现，不作为教学要求，但两个截距都在正文中明确定义，作为教学要求.

4. 与坐标轴平行的直线也要让学生了解，特别要让学生体会到表示这些特殊位置的直线的方程 $x=a$ 和 $y=b$ 要看成二元一次方程，而不是一元一次方程，从而它们的解集分别是$\{(a,n)|n\in\mathbf{R}\}$和$\{(m,b)|m\in\mathbf{R}\}$，分别表示垂直于 x 轴且在 x 轴上截距为 a 的直线和垂直于 y 轴且在 y 轴上截距为 b 的直线. 前者倾斜角为$\frac{\pi}{2}$，斜率不存在；后者倾斜角为 0，斜率为 0. 还要注意，当 $a=0$ 时，方程 $x=a$ 表示 y 轴；当 $b=0$ 时，方程 $y=b$ 表示 x 轴.

5. 教材中直线的一般式方程引入时作为承上启下的第一句话“不管哪种形式的直线方程都是关于 x 与 y 的二元一次方程”，但这句话本质是让最一般的二元一次方程 $ax+by+c=0$(a、b 不同时为零)在这里“亮相”.

关于这个方程，注意三点：其一，教材中“因此都可以化为”几个字不过说了学生都已经熟悉的平凡事实，没有必要把让学生理解“化”、动手“化”当作教学的关注点；其二，确实要向学生强调条件“a、b 不同时为零”，当上下文不足以判断“a、b 不同时为零”时，要把它写在方程表达式后面作为附加说明，但更重要的是要让学生真正明白这个条件是自然的而不是外加的，因为当 a、b 同时为零时，$ax+by+c=0$ 变成了 $c=0$，它不再是直线方程了；其三，如果 a、b 中恰有一个为零时，就表示了上文所说的垂直于坐标轴的直线，这个问题要予以关注.

如前所述，只有验证了所有形如①式的方程都表示一条直线后，才能称①式为直线的一般式方程. 还要注意的是，直线的一般式方程可以差一个非零的常数倍，$ax+by+c=0$(a、b 不同时为零)与 $max+mby+mc=0$($m\neq0$)表示的是同一条直线(当

然，作为二元一次方程而言，它们也是同解的方程）.

令人惊奇的是，一般式方程竟然揭示了直线的一个重要几何性质：以它的一次项系数为坐标的向量是直线的法向量！法向量的自然出现使得向量成为解析几何里研究直线的重要工具，对这一点应该在本节予以强调，同时要指出本章后面几节将看到法向量的作用.

6. 与直线相关的向量还有直线的方向向量，它最直观的定义是由直线上两个不同点分别作为起点和终点的向量. 例 9 中的向量$\overrightarrow{AB}$和点法式方程推导过程中的向量$\overrightarrow{MP}$都是直线 l 的方向向量. 当然，直线的方向向量作平移后还是这条直线的方向向量，因为平移前后的向量是同一个向量. 因此，方向向量也可以定义为“与直线上任何两点构成的向量均平行的非零向量”（见习题 1.2B 组第 11 题），这里的“均”在定义时强调，实际只要对直线上一条非零向量验证就可以了. 因为法向量垂直于直线上的任何向量，方向向量平行于直线上的任何向量，所以方向向量垂直于法向量，直线的方向向量还可以定义为“与直线的法向量垂直的非零向量”.

和法向量类似，方向向量也具备普适性，可以替代法向量处理本节的所有问题，适用于所有直线，没有例外. 教材采用法向量可以说只是一种选择. 一般式方程①所表示直线的方向向量也可以从方程①的表达式中读出：因为(a,b)是直线的法向量，而$(a,b)\cdot(b,-a)=0$，所以向量$(b,-a)$是这条直线的方向向量.

教学建议

在本节的第 1 小节，要特别重视点斜式方程的学习，因为它是我们学习的第一种直线方程. 教材在点斜式方程的引入上做足了文章. 先是在上一节预置了例 3，承上启下，实际上求出了一个点斜式方程，但未出现直线方程的概念，留待本节第 1 小节引言对例 3 的结果加以复述，引出直线方程的概念；然后就一般的情形推导点斜式方程，强调直线方程验证的两个方向. 两点式方程的推导本质上还是点斜式方程的推导，不过从给定斜率改为从已知两点求出斜率. 两点式方程的推导几乎就是上一节例 3 的翻版，只不过把具体的数字改为字母. 教材设计这样的往复循环，是为了让学生一开始就能由浅入深，对直线的点斜式方程与两点式方程有很好的理解和把握.

前文已经说明，两点式方程和点斜式方程可以理解为“两点确定一条直线”和“经过直线外的一点，有且只有一条直线与已知直线平行”这些几何命题在解析几何语境下的实现. 这样体现数形结合的数学思想在教学中要尽量展现.

一般式方程宜从代数角度引入. 因为直线的点斜式与两点式等特殊形式的方程都

可以化为形如①式的方程，只要再验证了所有形如①式的方程都表示一条直线以后，就可以称形如①式的方程为直线的一般式方程.

在一般式方程教学中，学生真正可能产生认知困难的是当 a 、b 恰好有一个是零时如何理解方程(或者学生忽略这种情况，只会形式地标注“a 、b 不同时为零”). 要让学生区分关于 x 、y 的二元一次方程 $x+c=0$ 与一元一次方程 $x+c=0$，前者的解集应该在平面直角坐标系中描述，是过点$(-c,0)$且垂直于 x 轴的直线，而后者的解集应该在数轴上描述，是一个坐标为$-c$ 的点.

除了教材所提供的点法式方程的推导过程外，可以从另一个角度“直观地”验证方程②是过点 $M(x_0,y_0)$且有法向量 $\vec{n}=(a,b)$的直线的方程：由一般式方程系数的性质得知，方程②所表示的直线有法向量 $\vec{n}=(a,b)$，再把 $x=x_0$，$y=y_0$代入，立刻就验证了这条直线过点 $M(x_0,y_0)$.

点法式方程在数学思想上可以类比点斜式方程. 法向量和斜率都决定了平面上一组平行线(即决定了平面上的一个方向)，再添加一个定点，就把一条直线确定下来了. 这本质上是欧几里得第五公设.

教材反复出现关于“直线方程”概念的描述，关键是要双向验证点的坐标与方程的解的关系，即给定直线上的任意一点的坐标都是给定方程的解，反过来，以给定方程的解为坐标的点一定在给定的直线上. 教材有层次地推进这个概念的认识，从具体数字的例子(第一台阶)到一般的论述(第二台阶)，两个方向的验证还可以用充要条件表述(教材中关于点法式方程的说明). 所有这些素材应该结合每次出现的情境因势利导，潜移默化地渗透在教学过程中，避免生硬的灌输.

本节的例题较多，多数例题教材上没有给出图形，教学时应尽可能画出示意图，帮助学生积累直线与坐标平面的直观经验，培养数形结合的意识.

1.3 两条直线的位置关系

教学重点

本节中，我们将学习如何用代数的方法来研究直线中的一些基本问题，包括根据两条直线的方程判断两条直线的相交、平行与重合的位置关系，判断两条直线是否垂直，求两条直线的夹角等. 在学习这些知识的过程中，既要体验方程的思想，根据方程组解的情况判定两条直线的位置关系；也要关注数形结合的方法，根据直线方程中所反映的几何要素，如倾斜角、法向量，来帮助解决有关问题.

内容分析

本节包含两小节，第 1 小节是根据两条直线的方程判定两条直线的位置关系；第 2 小节进一步用两条直线的方程判定两条直线是否垂直以及求两条直线的夹角.

给定两条直线

$$\begin{array}{l} l_1：a_1x+b_1y+c_1=0\ (a_1、b_1\text{不同时为零}), \\ l_2：a_2x+b_2y+c_2=0\ (a_2、b_2\text{不同时为零}). \end{array} \quad ③$$

第 1 小节是判断③式所示的两条直线平行、相交与重合. 用两条直线的公共点个数来描述，就是判断它们何时没有公共点、何时恰好有一个公共点以及何时有无穷多公共点；转成代数语言就是判断两个方程组成的二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, & ④ \\ a_2x+b_2y+c_2=0 & ⑤ \end{cases}$$

何时无解、何时有唯一解以及何时有无穷多解. 这纯粹是二元一次方程组求解的问题，是典型的解析几何的方法. 学生应该熟悉有唯一解的二元一次方程组的求解，但对无解或者有无穷多解的情况可能相对陌生一些，在分情况讨论时教师要更关注非唯一解的情况. 经过分情况讨论，得到如下充要条件：

$$\left.\begin{array}{l} l_1\text{与}l_2\text{重合} \Leftrightarrow \text{存在 }\lambda\in\mathbf{R}\text{，使得}a_1=\lambda a_2，b_1=\lambda b_2\text{，且}c_1=\lambda c_2； \\ l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow \text{存在 }\lambda\in\mathbf{R}\text{，使得}a_1=\lambda a_2，b_1=\lambda b_2\text{，但}c_1\neq\lambda c_2； \\ l_1\text{与}l_2\text{相交} \Leftrightarrow a_1b_2\neq a_2b_1. \end{array}\right\} \quad ⑥$$

在相交的情况下，交点坐标(x,y)是方程组的唯一解①

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_2b_1-c_1b_2}{a_1b_2-a_2b_1}, \\ y=\dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \end{cases} \quad ⑦$$

---

① 由方程④⑤联立的方程组(当$a_1b_2\neq a_2b_1$时)的解也可以用行列式写成更便于记忆的形式：

$$\begin{cases} x=-\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \\ y=-\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \end{cases}$$

注意：在线性代数课程中，一次方程组的常数项通常写在等号的右边，而这里的方程组的常数项和其他项一起写在等号的左边，所以和线性代数里的公式相比，这里解的表达式多了一个负号. 本注解内容仅供教师参考，不作为教学内容.

上一节已经学过，法向量和斜率都给出了平行的直线，所以很容易得到：两条直线平行或重合当且仅当它们的法向量平行(从而两条直线相交当且仅当它们的法向量不平行)；当直线的斜率存在时，两条直线平行或重合当且仅当它们的斜率相等(从而两条直线相交当且仅当它们的斜率不相等). 这些推理并不依赖于上面的充要条件⑥. 但如果注意到两条直线的法向量分别是$\overrightarrow{n_1}=(a_1,b_1)$与$\overrightarrow{n_2}=(a_2,b_2)$，斜率分别是$k_1=-\dfrac{a_1}{b_1}$与$k_2=-\dfrac{a_2}{b_2}$(此时要假定$b_1$与$b_2$均不为零)，那么用法向量和斜率表达的充要条件也是上述充要条件⑥的推论. 但无论如何，这两种方式表达的充要条件更侧重抓直线的几何要素，在数形结合上体现得更直观，更生动活泼.

第1小节可以说是非常“初等”的，只靠二元一次方程组的求解就可以达到我们的目的；但第2小节我们就要依靠向量的工具了. 自然想起使用直线的法向量，因为它的坐标可以从直线的一般式方程上自然地读得.

第2小节的思路是把关于直线的问题化归为关于两条直线的法向量$\overrightarrow{n_1}=(a_1,b_1)$与$\overrightarrow{n_2}=(a_2,b_2)$的问题，关键是理清楚两条直线的垂直与否或夹角大小与法向量的垂直与否或所成角大小的关系.

两条直线的垂直判定问题只是求夹角问题的特例，比一般的求夹角问题简单. 教材把垂直判定放在求夹角之前，是先易后难、先特殊后一般的思路，给学生铺设理解的台阶.

两条直线垂直当且仅当它们的法向量垂直，这是很容易理解的，本册教材第19页的图1－3－1也给出了直观的几何描述. 再回顾必修课程8.3节给出的用向量坐标表述的向量垂直的充要条件(必修第二册第124页)，马上得出

$$l_1\perp l_2\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0.$$

当b_1、b_2都不等于零时(即l_1、l_2都有斜率时)，教材还提到了充要条件

$$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1,$$

这也是很有用的结论，特别是当直线的方程是由点斜式或斜截式给出时.

求直线夹角稍微复杂一些，复杂在直线夹角和它们的法向量所成角的关系不像垂直情况那么一目了然. 本册教材图1－3－2及其说明文字论证了直线夹角α与它们的法向量所成角θ的关系是相等或互补，考虑到$0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，从必修课程8.3节给出的用

向量坐标表述的两个向量所成角的公式立即得到

$$\cos\alpha=|\cos\theta|=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

本节共有 7 道例题.

例 1 与例 2 是为了巩固“如何根据直线方程判定两条直线位置关系”这个方法. 例 1 的作用是让学生体会根据所给方程的不同形式，选择合适方法判定两条直线的位置关系，同时巩固如何求两条相交直线的交点坐标. 例 2 给出的两条直线是含参数 m 的一般式方程，研究两条直线的位置关系如何随着参数 m 的变化而变化. 其解题的突破口是利用两条直线相交的充要条件，先求出当参数 m 满足什么条件时两条直线相交，再区分平行与重合的情况.

例 3、例 4 与例 5 是对“如何根据方程判定两条直线是否垂直”这个方法的巩固和应用. 例 3 联系充要条件$l_1\perp l_2\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$；例 4 联系充要条件$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$；例 5 是应用两条直线垂直关系综合解决问题，设直线方程时可以选择点斜式，也可以选择点法式，解决问题时还应该结合图形，培养学生综合应用所学知识解决问题的能力.

例 6 和例 7 是为了巩固两条直线之间的夹角的余弦公式. 例 6 是直接应用夹角的余弦公式求两条直线的夹角；例 7 是已知两条直线的夹角，用解方程的方法求出另一条直线的一个法向量. 在例 7 的解题过程中，会有一条斜率不存在的直线符合题意. 若用点斜式设方程，要注意思维的严谨性，先考虑斜率不存在的情况，再考虑斜率存在的情况. 这样思考，避免漏解.

注意事项

数学课程标准在解析几何中对两条直线的夹角已不作要求. 本教材之所以保留这一内容，其原因主要有：一是保持知识的相对完整性，与平面几何相呼应；二是凸显引入点法式方程的优势；三是延续“二期课改”教材的内容要求. 但只限于概念及公式的简单运用，不宜作更多的拓展.

用两条直线的法向量来判断两条直线是否垂直以及求两条直线的夹角，可以说是对上海市“二期课改”教材特点的继承，但从数学本身来说，法向量方法也是具有很大的优势的，因为：其一，对于以一般式方程给出的两条直线，法向量是可以直接读出的；其二，法向量方法适用于所有直线，没有例外. 若用斜率而不是法向量讨论问题，则会陷

入讨论斜率存在和不存在的困境. 当然，这是一般而言，解决数学问题不应过分追求套路，而应该针对具体问题采用更恰当的方法. 例如，如果两条直线是用点斜式方程给出的，用斜率讨论常常是最佳选择，因为化为一般式再求法向量，往往可能多花精力.

与直线相关的另外一个重要的向量，即上文提到的直线的方向向量，可以替代法向量处理本节的所有问题，它也具备普适性，适用于所有直线，没有例外. 和法向量类似，方向向量也可以从直线的一般式方程中读出；而且由于向量本身就在直线上，向量所成的角与直线夹角的关系似乎更加直截了当(但仍然逃脱不了分情况讨论). 在平面解析几何中处理直线问题时，选择法向量或方向向量本身没有明显的优劣之分，但选用法向量的一个优势是它可作为第 3 章用法向量处理平面问题的预演，为学生理解平面法向量相关技巧铺设了一个台阶.

在第 3 章“3.4 空间向量在立体几何中的应用”中，刻画直线的方向将用方向向量，因为在三维空间中，与一条直线垂直的平面中，任何向量都与这条直线垂直，所以无法定义直线的法向量. 一个平面不可能像直线一样定义方向向量，因为平面上有无数不平行的向量，但平面的法向量可以明确定义，并且法向量和平面上的一个点就完全确定了这个平面，可见平面的法向量在平面研究中有特别重要的意义. 本节有关直线法向量的一些几何讨论将在第 3 章拓展到平面法向量的讨论上.

教学建议

本节的学习，仍应始终围绕“用代数的方法解决几何问题”这一解析几何的核心思想展开，突出用直线方程来研究和解决与直线有关的问题.

第 1 小节讨论平面上两条直线的位置关系时，把两条直线的方程联立求解，并通过解的个数来判定两条直线的相交、重合或平行，这是解析几何的经典做法. 解二元一次方程组是学生已学知识，直线的相交、重合与平行也是平面几何的最基本的内容，但把二者联系起来，需要学生深刻体会通过联立方程与求方程组解的个数来判断两条直线的位置关系这一原理，其核心是“点在直线上的充要条件是点的坐标满足该直线的方程”，这也是通过联立方程求两条直线交点坐标的基础.

教材的处理方法是：不急着直接解方程组，而是从两个方程的系数分析，得出无数组解(两直线重合)和无解(两直线平行)的两个极端情况，再对$a_1b_2\neq a_2b_1$的情况，求解方程组得出直线交点的坐标(见⑦式).

教师也可以先不作系数分析，直接让学生着手解④和⑤联立的方程组.

分别把方程④$\times b_2-$⑤$\times b_1$和⑤$\times a_1-$④$\times a_2$，方程组变形为

$$\begin{cases}(a_1b_2-a_2b_1)x+(c_1b_2-c_2b_1)=0,\\(a_1b_2-a_2b_1)y+(c_2a_1-c_1a_2)=0.\end{cases}$$

在此基础上再分三种情况讨论，就可得出等价条件⑥.

用直线的斜率或法向量来判定直线相交还是平行(或重合)，也可以看成从解方程组得到的等价条件⑥的推论，也可以从斜率、法向量所表达的几何意义直接推出，教师可以灵活处理. 这些内容拓宽了学生的视野，在数形结合上体现得更直观，更生动活泼. 法向量在本小节没有扮演舍我其谁的重要角色，但它在这里的出现，为下一小节和 1.4 节中的关键作用作了预演和铺垫.

第 2 小节学习的关键有两个方面，一是平面向量的相关内容的回顾，最主要的是向量的数量积及其在坐标表示下的公式(向量数量积的公式、向量所成角的公式以及由此推出的向量垂直的充要条件)；另一个关键是从几何上分析清楚两条直线的夹角与它们的法向量所成的角之间的关系.

直线垂直与法向量垂直的关系简单直观，这里不再赘述.

为了分析两条直线的夹角与它们的法向量所成的角之间的关系，本册教材用了图 1－3－2，说明两角有互补和相等两种情况出现. 注意到法向量的负向量仍是这条直线的法向量，总可以把问题归结到图 1－3－2 所示的两种情况. 可能有些教师认为这样归结还不如穷举所有可能，穷举也是可以采取的数学方法. 为此，这里把图 1－3－2 扩充成图 1－R1，共列出四种可能. 可以引导学生分析把一个法向量用它的负向量代替，就可以把图 1－R1 的四种情况化为前两种情况(即图 1－3－2 所示的两种情况).

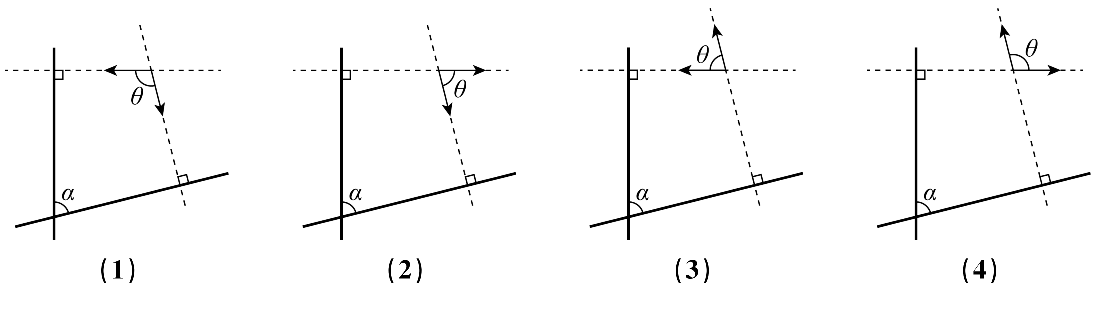


图 1－R1

由于两条直线夹角 α 大小的取值范围约定为 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，总有 $\cos\alpha\geqslant0$，推得 $\cos\alpha=|\cos\theta|$，得出两条直线夹角余弦的公式.

这里可以看出，直线夹角大小的取值范围的这种约定给我们带来很大的方便，它使我们不必费精力去精确地判断何时 $\cos\alpha=\cos\theta$，何时 $\cos\alpha=-\cos\theta$，绝对值符号就解决问题了. 这种方便在第 3 章“空间向量及其应用”的 3.4 节中也得以体现，空间直线所成角大小的取值范围和空间直线与平面所成角大小的取值范围也有类似的约定，绝对值符号的应用省去了一些细节的判断.

1.4　点到直线的距离

教学重点

本节的教学重点在于让学生掌握点到直线的距离的公式，并了解公式的推导过程，体验数形结合的思想和向量方法的应用.

内容分析

给定平面上的一个点和一条直线，几何上关心的问题自然是：(1)点是否在直线上？(2)如果点不在直线上，它到直线的距离是多少？解析几何中在相同的条件下我们关心的依然是这两个问题，不过给定条件和问题答案必须用点的坐标和直线的方程来描述. 也就是说，给定的条件是一个点的坐标和一条直线的方程，上述问题(1)的判断在 1.2 节已有回答：点在直线上当且仅当点的坐标满足直线的方程. 当点不在直线上时，如何用点的坐标和直线的方程表示出点到直线的距离，这是本节要解决的问题. 于是，设给定直线 l：$ax+by+c=0$(a、b 不同时为零)和直线外一点 $P(x_0,y_0)$，要求点 P 与直线 l 的距离.

学习了平面几何和解析几何的学生很自然的想法是写出过点 P 并垂直于直线 l 的直线 l' 的方程，求直线 l' 与已知直线 l 交点 $Q(x_Q,y_Q)$ 的坐标，再求线段 PQ 的长度 d. 这肯定是可行的解决问题方案. 教材没有对这个方案提供细节，只说计算量比较大，然后转到向量方法. 这里就这个方案提供一个完整的解题过程，包括其中一些技巧性的提示，供教师参考.

因为 $(a,b)\cdot(b,-a)=0$，所以所有垂直于直线 l 的直线具有法向量 $(b,-a)$，直线 l' 的点法式方程为 l'：$b(x-x_0)-a(y-y_0)=0$. 这样，点 Q 的坐标是方程组

$$\begin{cases}ax+by+c=0,\\ b(x-x_0)-a(y-y_0)=0\end{cases}$$

的解. 考虑到要计算的是 $|PQ|=\sqrt{(x_Q-x_0)^2+(y_Q-y_0)^2}$，不妨把上述方程组整理

成关于未知数 $x-x_0$ 与 $y-y_0$ 的二元一次方程组，得

$$\begin{cases}a(x-x_0)+b(y-y_0)=-(ax_0+by_0+c),\\ b(x-x_0)-a(y-y_0)=0.\end{cases}$$

又容易看出，把两个方程两侧分别平方后相加，关于未知数的项只有 $x-x_0$ 与 $y-y_0$ 的平方项，即有

$$(a^2+b^2)[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]=(ax_0+by_0+c)^2,$$

这与我们所希望的结果在形式上很接近. 点 $Q(x_Q, y_Q)$ 的坐标满足这个方程，所以

$$(x_Q-x_0)^2+(y_Q-y_0)^2=\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}.$$

此式两边开平方，得

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad ⑧$$

上述解法主体是纯代数的，但在求直线 l' 的方程时还是用了直线的法向量和点法式方程(当然，这也是可以回避的，但我们要从源头上去绕圈子了. 这似乎对我们本节课的学习没有更多的启迪).

本册教材没有采用前面的计算，而是把求 $d=|\overrightarrow{PQ}|$ 的问题转化为求 $\overrightarrow{PQ}$ 与法向量 $\vec{n}=(a, b)$ 的数量积的问题：由于 $\overrightarrow{PQ}/\!/\vec{n}$，$\cos\langle\overrightarrow{PQ}, \vec{n}\rangle=\pm 1$，因此 $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}=\pm|\overrightarrow{PQ}||\vec{n}|$，从而

$$d=|\overrightarrow{PQ}|=\frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|},$$

后续的推导也给出了公式⑧.

本节有 3 道例题.

例 1 是点到直线距离公式的简单应用.

例 2 是用点到直线的距离公式，求两条平行直线之间的距离，并由特殊到一般，拓展得到任意两条平行直线 $ax+by+c_1=0$ 与 $ax+by+c_2=0$(a、b 不同时为零)之间的距离公式

$$d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

在推导过程中将平行线之间的距离化归为点到直线的距离以及计算过程中的整体代换的方法是值得学习的.

例 3 是为了巩固两条平行直线之间的距离公式，同时也巩固了根据已知直线方程设其平行线方程的方法.

注意事项

1. 教材推导公式⑧时用了垂足 Q，但这个垂足条件不是本质需要的，只是承接上一段的论述信手拈来，便于学生理解罢了. 事实上，在直线 l 上任取一点 M 来代替垂足 Q，同样可以得出 $d=\dfrac{|\overrightarrow{PM}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$(但 $d=|\overrightarrow{PM}|$一般是不成立的)，不过其理由变成了点 P 到直线 l 的距离 d 是向量$\overrightarrow{PM}$(其中点 M 在直线 l 上)在 l 的法向量 $\vec{n}$ 方向上投影的模. 根据向量投影的公式(必修第二册第 111 页)和向量的数量积的定义(必修第二册第 112 页)，可得$\overrightarrow{PM}$在 $\vec{n}$ 方向上投影是

$$\frac{|\overrightarrow{PM}|\cos\langle\overrightarrow{PM},\vec{n}\rangle}{|\vec{n}|}\vec{n}=\frac{|\overrightarrow{PM}||\vec{n}|\cos\langle\overrightarrow{PM},\vec{n}\rangle}{|\vec{n}|^2}\vec{n}=\frac{\overrightarrow{PM}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n},$$

于是 d 等于它的模，即

$$d=\frac{|\overrightarrow{PM}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}.$$

再用点 M 的坐标(x_M,y_M)代替点 Q 的坐标(x_Q,y_Q)就可仿照教材进行后续推导，得到公式⑧.

这里的$\overrightarrow{PM}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}$，或者更一般地，对直线 l 上的任意两点 M 与 M'，都可得到$\overrightarrow{PM}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{PM'}\cdot\vec{n}$，这在向量理论中是很容易理解的，这是因为$\overrightarrow{PM'}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MM'}$，而$\overrightarrow{MM'}\perp\vec{n}$，从而

$$\overrightarrow{PM'}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{PM}\cdot\vec{n}+\overrightarrow{MM'}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{PM}\cdot\vec{n}.$$

2. 在分析和推导点到直线的距离公式中，要充分尊重学生的思维过程，提倡通性通法，鼓励发散性思维，不否定和排斥用设方程、解方程组的方法求垂足的坐标，再求点到直线距离的方法；不排斥结合几何图形，用一些几何的方法求点到直线的距离公式.

3. 与“二期课改”教材不同的是，本册教材不要求学习点到直线的有向距离公式，即 $\delta=\dfrac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 教师不必纠缠于此主题.

教学建议

本节课题的引入，可以创设生活情境，从生活中需要计算的点到直线的距离开

始；也可以从数学的角度提出，在平面直角坐标系中，因为坐标(x_0, y_0)确定一个点（设为 P），关于 x、y 的二元一次方程 $ax+by+c=0$ 确定一条直线（设为 l），所以一定可以用 x_0、y_0、a、b、c 来表示点 P 到直线 l 的距离；还可以从特殊到一般，由具体到抽象. 如何选择，由学生的认知基础决定.

建议将距离公式的推导设计成一个探索过程，教师和学生一起经历. 可以从学生最容易想到的解方程组入手. 参考“内容分析”部分所给的解方程过程，引导学生进行未知数的替换，并探索捷径走向我们的目标. 可以设想，如果要求未知数的解，再作平方和及开平方以计算距离，势必非常复杂和冗长. 让学生在教师指导下实践把过程的中间结果和目标相比，从而接近目标、达到目标，享受灵活解题的乐趣.

用向量的数量积方式推导公式素材的选取可以有弹性. 可以根据学生的条件在“垂足”（教材中的方法）和直线上任意点（“注意事项”之 1）中选择一种加以处理. 如果学生有足够的余力，可以从特殊到一般，两种情况都讲，并体会其中的思维发展，复习向量的有关知识.

三、参考答案或提示

1.1 直线的倾斜角与斜率

练习 1.1

1. （1）斜率为-1，倾斜角为 $135°$.　　（2）斜率为$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，倾斜角为 $150°$.

2. 直线 OB 和 AC 的斜率为 1 和-1.

3. 证明略.

习题 1.1

A 组

1. 直线 l_1 的倾斜角为$\dfrac{5\pi}{6}$，斜率为$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；直线 l_2 的倾斜角为$\dfrac{\pi}{3}$，斜率为$\sqrt{3}$.

2. （1）斜率为-3，倾斜角为 $\pi-\arctan 3$.

(2) 当 $a<2$ 时，斜率为$\dfrac{3}{2-a}$，倾斜角为 $\arctan\dfrac{3}{2-a}$；

当 $a=2$ 时，斜率不存在，倾斜角为$\dfrac{\pi}{2}$；

当 $a>2$ 时，斜率为$\dfrac{3}{2-a}$，倾斜角为 $\pi-\arctan\dfrac{3}{a-2}$.

3. (1) $[1,\sqrt{3}]$.　　(2) $(-\infty,-\sqrt{3})$.

4. $a=-\dfrac{5}{7}$，斜率为$-\dfrac{1}{6}$.

5. $\left[\dfrac{2}{5},\dfrac{5}{3}\right]$.

B 组

1. 当 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时，直线 l 的倾斜角为$\dfrac{\pi}{2}-\theta$；当 $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$时，直线 l 的倾斜角为$\dfrac{3\pi}{2}-\theta$.

2. 证明略.

3. 当 $k=0$ 时，为 $\vec{a}$；当 $k\neq0$ 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}=(1,0)$为锐角时，向量投影为$\left(\dfrac{|\vec{a}|}{\sqrt{1+k^2}},0\right)$；当 $k\neq0$ 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}=(1,0)$为钝角时，向量投影为$\left(\dfrac{-|\vec{a}|}{\sqrt{1+k^2}},0\right)$.

1.2　直线的方程

练习 1.2(1)

1. $y-3=(-1)\cdot(x+2)$.

2. $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$.

3. $x=2$.

4. $y=-x-3$ 或 $y=\dfrac{1}{2}x$.

练习 1.2(2)

1. $\dfrac{y-3}{6-3}=\dfrac{x+2}{0-(-2)}$，即$\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{x+2}{2}$.

2. $a=-2$，直线 l 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.

3. 边 OA、OB 与 AB 的中线所在直线的方程分别为 $y=-\frac{3}{2}x+3$，$y=-\frac{3}{8}x+\frac{3}{2}$与 $y=\frac{3}{4}x$.

练习 1.2(3)

1.（1）斜率不存在，倾斜角为$\frac{\pi}{2}$.　（2）斜率为-1，倾斜角为$\frac{3\pi}{4}$.

（3）斜率为$-\frac{1}{2}$，倾斜角为 $\pi-\arctan\frac{1}{2}$.　（4）斜率为 0，倾斜角为 0.

2. 证明略(过定点$(-1,0)$).

3. $(0,3)$.

练习 1.2(4)

1.（1）$(2,-3)$.　（2）$(3,2)$.　（3）$(1,0)$.　（4）$(1,-2)$.(说明：本题答案不唯一)

2. $a=-\frac{9}{4}$.

3.（1）$x-2y+1=0$.　（2）$2x-y-1=0$.

习题 1.2

A 组

1. $y-5=\frac{4}{3}(x-3)$.

2. $y=-\frac{3}{4}x+4$ 或 $y=\frac{3}{4}x+4$.

3.（1）l_1 的斜率为$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，在 x 轴上的截距为$-\sqrt{3}-1$，在 y 轴上的截距为$-1-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（2）l_2 的斜率为-3，在 x 轴上的截距为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，在 y 轴上的截距为$\sqrt{3}$.

4.（1）$\pi-\arctan 5$.　（2）$\frac{2}{5}$.

5. $y-1=\frac{5+\sqrt{33}}{4}(x+2)$或 $y-1=\frac{5-\sqrt{33}}{4}(x+2)$.

6.（1）$\frac{y-0}{7-0}=\frac{x-2}{3-2}$，即$\frac{y}{7}=x-2$.　　（2）$\frac{y-0}{-1-0}=\frac{x-3}{0-3}$，即 $y=\frac{x-3}{3}$.

7.（1）$x+3y+3=0$.　　（2）$3x-y-1=0$.

8. 证明略.

9. $y=\frac{3}{2}x+14$，弹簧自身长度为 14 cm.

10.（1）斜率为 3，倾斜角为$\arctan 3$.

（2）斜率为$-\frac{3}{2}$，倾斜角为 $\pi-\arctan\frac{3}{2}$.

11.（1）$ab\neq 0$.　　（2）$ac>0$ 且 $bc>0$（即 a、b、c 同号）

12.（1）$a=1$.　　（2）$a=\frac{4}{3}$.

13. $6(x-1)-5(y-1)=0$.

14. $k=1$ 或$-\frac{6}{5}$.

B 组

1. 边 AD、CD 所在直线的方程分别为 $2x+y-4=0$，$x-y+4=0$.

2. $x-y-3=0$.

3.（1）$\left[\frac{3}{4},6\right]$.　　（2）$[-2,4]$.

4. 边 BC、AC 所在直线的方程分别为 $11x+6y-26=0$，$x=-2$.

5. $2x+3y-1=0$.

6. 如图 1－R2，以 C 为坐标原点，以经过 A、E 的直线为 x 轴，$\overrightarrow{AE}$的方向为 x 轴的正方向，过点 C 且垂直于 AE 的直线为 y 轴，则 AB、BC、CD、DE 所在直线的方程分别为 $y=-(2+\sqrt{3})x-\sqrt{6}-\sqrt{2}$，$y=(2+\sqrt{3})x$，$y=-(2+\sqrt{3})x$，$y=(2+\sqrt{3})x-\sqrt{6}-\sqrt{2}$. 本题答案不唯一，因为可以选择不同的坐标系，从而会有不同的方程.

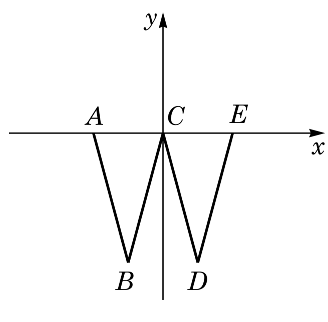


图 1－R2

7. 证明略$\left(面积为\frac{1}{8}\right)$.

8.（1）$\left(-\infty,\frac{4}{3}\right]\cup\left[\frac{5}{3},+\infty\right)$.　（2）证明略(过定点$(-5,-2)$).

9.（1）$5x-y+5=0$.　（2）$5x-y+10\sqrt{2}=0$ 或 $5x-y-10\sqrt{2}=0$.

10. 倾斜角为 $\theta=\begin{cases}\arctan\left(-\dfrac{a}{b}\right), & ab<0,\\ \pi-\arctan\dfrac{a}{b}, & ab>0.\end{cases}$

11. $v(x-x_0)-u(y-y_0)=0$.

1.3　两条直线的位置关系

练习 1.3(1)

1.（1）相交于点$\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{9}\right)$.　（2）平行.

2. $a=0$ 或 $a=-2$.

3. $2x+y-11=0$.

练习 1.3(2)

1. $a=\frac{1}{2}$.

2.（1）$x=-1$.　（2）$x+y+2=0$.

（3）$x-2y-1=0$.　（4）$x\sin\theta-y\cos\theta+\sin\theta-\cos\theta=0$.

练习 1.3(3)

1.（1）$\arccos\frac{\sqrt{170}}{170}$.　（2）$\arccos\frac{7\sqrt{65}}{65}$.

2. $k=2-\sqrt{3}$ 或 $k=-2-\sqrt{3}$.

3. $(2+\sqrt{3})x-y-11-4\sqrt{3}=0$ 或 $(2-\sqrt{3})x-y-11+4\sqrt{3}=0$.

习题 1.3

A 组

1.（1）重合.　（2）相交.　（3）平行.

2.（1）$t\neq8$ 且 $t\neq-5$.　（2）$t=-5$.　（3）$t=8$

3. $t=2$ 或 $t=-1$.

4. $a=-2$.

5. 证明略.

6. $k=1$ 或 $k=4$.

7. （1）$3x-2y-1=0$.　（2）$3x-2y+6=0$ 或 $3x-2y-6=0$.

8. $x-2y-6=0$，$2x+y-7=0$.

9. （1）$\frac{\pi}{4}$.　（2）$\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.　（3）$\arccos\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

10. $m=0$.

11. 直角边 AC 所在直线的方程为 $2x+y-6=0$；斜边 AB 所在直线的方程为 $3x-y+6=0$ 或 $x+3y-18=0$.

B 组

1. $b=\sqrt{3}$ 或 $b=-\sqrt{3}$.

2. 证明略，所有这些直线的公共点是$\left(\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)$.

3. $a=1$.

4. 与直线 $x+4y-7=0$ 垂直、平行的直线的方程分别为 $4x-y-5=0$，$x+4y+3=0$.

5. 边 AC、AB、BC 所在直线的方程分别为 $2x+7y+22=0$，$7x+2y-13=0$，$x-y+2=0$.

6. $3x+y-5=0$.

7. $7x-2y-11=0$.

1.4　点到直线的距离

练习 1.4

1. （1）$d=5$.　（2）$d=4$.　（3）$d=3\sqrt{2}$.　（4）$d=\sqrt{10}$.

2. $\frac{8}{5}$.

习题 1.4

A 组

1. （1）$\sqrt{13}$.　（2）$\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

2. $a=\frac{8}{3}$或 $a=16$.

3.（1）$\frac{\sqrt{13}}{26}$.　（2）$\frac{\sqrt{7}}{7}$.

4. $a=3$ 或 $a=-4$.

B组

1. $y+2=0$ 或 $24x-7y-74=0$ 或 $4x+3y+6=0$ 或 $4x+3y-14=0$.

2. 3.

3. $y=-(2+\sqrt{3})x+3+\sqrt{3}$ 或 $y=(2-\sqrt{3})x-1+\sqrt{3}$.

复习题

A组

1. $\arctan\frac{\sqrt{2}}{4}$.

2. $a=0$ 或 $a=-\frac{3}{2}$.

3. $x+y-7=0$.

4. $a=0$ 或 $a=-\frac{4}{3}$.

5. $\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right)$.

6. $x+y-1=0$ 或 $2x+3y=0$.

7. $a=0$.

8.（1）$\left(-\frac{3}{4},\frac{7}{4}\right)$.　（2）边 BC、DC 所在直线的方程分别为 $3x-y-6=0$，$x+y-6=0$.

9.（1）$m\neq 3$ 且 $m\neq -1$.　（2）$m=\frac{1}{2}$.　（3）$m=-1$.　（4）$m=3$.

10. $x+y+7=0$ 或 $x+y-7=0$ 或 $x-y+7=0$ 或 $x-y-7=0$.

11. $2x+3y+7=0$.

12. $4x-3y+6=0$ 或 $4x-3y-4=0$.

13.（1）$\begin{cases}a=2,\\b=-2\end{cases}$或$\begin{cases}a=-2,\\b=-6.\end{cases}$　（2）$a=\frac{3}{2}$，$b=3$.

B 组

1. $\left(-\infty,-\frac{7}{2}\right]\cup[1,+\infty)$.

2. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)\cup\left(1,\sqrt{3}\right)$.

3. $2x-3y=0$.

4. $9x-46y+102=0$.

5. 3.

6. d 的最大值为$\sqrt{26}$，l_1、l_2 的方程分别为 $x-5y-1=0$，$x-5y+25=0$.

7. (1) $x+2y-4=0$.　　(2) $x+y-3=0$，最小值为 4.

拓展与思考

1. 图形略，面积为 2.

2. 证明略.

3. $m\in\left\{4,\frac{2}{3},-1,-\frac{1}{6}\right\}$.

4. $\sqrt{5}$.

四、相关阅读材料

参考文献

[1] 刘连璞. 平面解析几何方法与研究第 1 卷[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.

[2] 刘连璞. 平面解析几何方法与研究第 2 卷[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.

[3] 刘连璞. 平面解析几何方法与研究第 3 卷[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.

[4] 赵生初. 向量观念下的直线方程与立体几何[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2020.

[5] 汪晓勤，韩祥临. 中学数学中的数学史[M]. 北京：科学出版社，2002.

[6] 斯科特. 数学史[M]. 侯德润，张兰，译. 桂林：广西师范大学出版社，2002.

[7] 李文林. 数学史概论(第二版)[M]. 北京：高等教育出版社，2002.

第 2 章　圆锥曲线

一、本章概述

总体要求

本章继续上一章开始的平面解析几何的学习.

在上一章学习中，学生通过直线方程的建立和用直线方程探究直线的几何性质的体验，已经了解了平面解析几何的思想是通过建立适当的平面坐标系，用方程表示曲线，通过研究方程的特点来研究曲线的特征，从而用代数的观点与方法解决几何问题. 本章内容是解析几何内容的进一步深化，进入二元二次方程所表示的曲线（称为二次曲线，由于与圆锥面截线的关系，又称为圆锥曲线）的学习. 相比于二元一次方程，一般的二元二次方程要复杂得多，本课程容量和深度的限制使得我们无法对二次曲线和二元二次方程进行全面的探讨. 本章 2.1 至 2.4 节仅对圆（椭圆的特例）、椭圆、双曲线和抛物线等圆锥曲线进行分门别类的讨论，建立它们的方程（除了圆以外，我们只关注它们的“标准方程”），并用它们的方程对它们的几何性质进行探讨.

“圆锥曲线”这一章内容丰富，应用广泛，它是平面解析几何课程的主体.

圆锥曲线方程的建立，远不是两点确定直线从而导出直线方程那么简单. 它要通过对每类曲线的定义、几何性质、主要参数的数量关系的深入分析，从轨迹的观点列出含曲线上点的坐标的等式，再予以化简整理. 但是，几类不同圆锥曲线的定义以及方程的建立过程又有许多相似之处，曲线几何性质对参数的依赖又可以进行对比与联系. 因此，在 2.1 至 2.4 节的学习中，要充分利用分类思想、类比思想、变式思想，了解并能明确区分不同类型圆锥曲线的定义，体验方程的推导过程，熟悉这些曲线方程的共性和个性，了解不同曲线的主要参数的差异及其在曲线几何性质中的体现.

由于圆锥曲线与现实生活和科技发展千丝万缕的联系，应该让学生了解圆锥曲线

的实际背景，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用，能用各种圆锥曲线的方程解决一些简单的数学问题与实际问题. 特别要体会数学与自然界的密切联系，培养用数学模型去解决实际问题的应用意识，提高对数学应用价值的认识.

本章继续逐步深入阐释曲线方程概念，2.1 节的第 1 小节总结了上一章对直线方程的理解，给出直线方程的严格定义，并推而广之给出了曲线方程的定义. 因此，这节随后讨论的曲线方程就建立在这个严格定义之上.

本章“2.5 曲线与方程”一节整体打了 * 号，是选学的内容，也并不是“圆锥曲线”的有机组成，只是“外挂”于此. 这节内容包括了求轨迹的方程、参数方程和极坐标方程等主题. 这里的“求轨迹的方程”主题可以看成是对曲线方程的概念理解的再次深化；参数方程和极坐标方程都是解析几何中有丰富内涵的独立存在的主题，这节只给了简单的引论. 这节对拓展学生视野是有益处的，希望学有余力的学生不要轻易放弃.

尽管除了圆之外，圆锥曲线并不是平面几何课程的内容，学生对这些曲线的几何性质并没有知识储备，但在本章学习中，这些曲线的定义和关键性质都有明确的几何描述和相应的代数刻画. 因此，应引导学生进一步理解用代数方法研究几何问题的思想，进一步熟悉解析几何的基本方法，进一步体会数形结合的思想. 同时，让学生体会平面解析几何并不仅仅是把平面几何内容“解析化”，而是有它自己的特长和优势，可以拓展出更广阔的天地. 要鼓励学生对问题进行主动的探究，形成对数学的积极情感，提高学习数学的兴趣与能力，并在对数学问题的探索过程中培养严谨认真的科学态度，提升直观想象、数学运算、数学建模、逻辑推理和数学抽象诸方面的数学学科核心素养.

课时安排建议

本章的课时安排建议为 19(14＋5*)＋1，共计 20 课时. 建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
2.1 圆	6	曲线方程的概念　0.5 课时
		圆的标准方程　1.5 课时
		圆的一般方程　1 课时
		直线与圆的位置关系　1 课时
		圆与圆的位置关系　1 课时
		探究与实践　1 课时

（续表）

章节名	建议课时	具体课时分配建议
2.2 椭圆	3	椭圆的标准方程　1 课时
		椭圆的性质　2 课时
2.3 双曲线	3	双曲线的标准方程　1 课时
		双曲线的性质　2 课时
2.4 抛物线	2	抛物线的标准方程　1 课时
		抛物线的性质　1 课时
*2.5 曲线与方程	5	求轨迹的方程　1 课时
		简单的参数方程　1 课时
		极坐标系与极坐标方程　2 课时
		极坐标与直角坐标的互化　1 课时
复习与小结	1	

内容编排与特色

本章内容共分为五节，其中“2.1 圆”“2.2 椭圆”“2.3 双曲线”和“2.4 抛物线”四节是关于圆锥曲线的；最后一节，即“2.5 曲线与方程”，把“曲线方程”主题进行集中的再加强，并把参数方程和极坐标方程这两个重要但本套教材又无法深入展开的主题作了科普式的介绍. 全节加 * 号，供学有余力的学生选学.

2.1 节的第 1 小节“曲线方程的概念”起着衔接第 1 章和第 2 章的作用. 这是继上一章为让学生逐步理解“曲线方程”这一平面解析几何的支柱性概念的两个台阶后而搭建的第三个台阶，先明确定义了直线的方程，准确阐述了直线和二元一次方程的联系，然后推而广之定义了曲线方程的一般概念，为后续内容学习建立一个严格的理论基础.

“2.1 圆”的其他小节聚焦于圆的内容. 圆是学生在平面几何课程中已经熟悉的基本轨迹之一，也是方程形式最简单的圆锥曲线，可以讨论得比较深入全面，所以从圆开始学习二次曲线. 教材从确定一个圆的两个几何要素(圆心和半径)出发，运用两点距离公式导出圆的标准方程(注意，这里的“标准方程”和后三节所说的“标准方程”有质的差别，这里的“标准方程”实际上是很一般化的，圆心可以在任何位置，半径可以是任何正数；后三节所说的“标准方程”都指的是把曲线固定在坐标系特定位置后得到的方程). 把标准方程的括号展开并整理后得到的二元二次方程就是圆的一般方程，

教材反过来讨论了二元二次方程成为圆的一般方程所应满足的条件. 本节的最后两小节分别讨论了直线与圆的位置关系和圆与圆的位置关系，所用的方法与上一章讨论两直线位置关系时用的解联立方程组的方法有异曲同工之妙.

2.2 节、2.3 节和 2.4 节的结构几乎是一样的，每一节包括两小节，第 1 小节给出曲线的几何定义，建立合适的平面直角坐标系，推导并验证曲线的标准方程；第 2 小节采用数形结合的方式讨论所给曲线的几何性质.

“2.2 椭圆”是平面解析几何的核心内容，起着“承前启后”的作用. 一方面，圆是椭圆的特殊情形，这节从圆自然地过渡到椭圆；由于圆具有非常多的几何性质，在处理圆的许多问题时可以直接利用几何方法，通过圆与椭圆的类比，使学生认识到解析法在处理一般二次曲线上的优势. 另一方面，椭圆的学习可以为后继的双曲线和抛物线提供一般的思维模式. 对学生来说，椭圆是第一次通过代数角度引入和研究的曲线，但教材给出了不同的现实与科学情境，使学生初步感受到研究的必要性.

“2.3 双曲线”和“2.4 抛物线”可以看成“2.2 椭圆”的“变式”，首先它延续同样的教学思路，但由于曲线定义条件的变化，曲线方程就有很大的不同，讨论性质时也要关注各自的特点. 2.2 节、2.3 节和 2.4 节根据曲线与方程的对应关系，通过研究方程来研究曲线的几何性质，使几何图形的研究实现了数与形的有机结合. 其中穿插了不少圆锥曲线的几何性质实际运用的例子，展现了在航天、航海、光学和声学中的广泛应用，旨在培养学生应用数学知识分析解决实际问题的能力.

本章最后一节，“2.5 曲线与方程”是打 * 号的选学内容，主要有两个目的：一是进一步的抽象，在更一般的层面上讨论曲线与方程的关系，成为“曲线方程”理解的第四台阶，着重在回顾、总结和实践上；二是拓展，从普通直角坐标方程拓展到参数方程，从直角坐标系拓展到极坐标系. 教材着重介绍参数方程和极坐标方程的基本概念、意义及简单应用.

本章安排了丰富的“课后阅读”资料. 第一个“课后阅读”《章名“圆锥曲线”释义》重在给学生释疑解惑，使学生理解用“圆锥曲线”命名这一类曲线的来龙去脉，这是面向全体学生的一个阅读材料. 第二个“课后阅读”《圆锥曲线的统一定义及其极坐标方程》给出了在数学上十分优美与深刻的圆锥曲线(但不包括圆)的统一定义，揭示了离心率量变到质变的规律，阐明了三种圆锥曲线的本质特征及其内在联系和区别. 本“课后阅读”难度较大，还涉及极坐标方程等加 * 号的内容，不宜作为全体学生的教学要求. 第三个“课后阅读”《圆锥曲线简史》提供了一些包括圆锥曲线发展和

在中国传播的历史资料，可供对数学史感兴趣的学生自行选读.

总之，本册教材一方面依据国家课程标准和学生的可接受性，采用从具体到抽象的逻辑进程，突出了教学的重点；另一方面也考虑到了知识体系的完整性和严谨性，采用选学的方式，打开学生的视野，为学有余力的学生提供更多的学习机会.

教学提示

国家课程标准强调在圆锥曲线教学过程中，应让学生了解圆锥曲线的来龙去脉，强调其几何背景，强调圆锥曲线学习的过程和方法. 在本章的教学中，应引导学生经历以下有序的、连贯的学习过程："根据具体问题情境的特点，建立平面直角坐标系；根据几何问题和图形的特点，用代数语言把几何问题转化成为代数问题；根据对几何问题(图形)的分析，探索解决问题的思路；运用代数方法得到结论；给出代数结论合理的几何解释，解决几何问题."

概念引入的组织方式可以多种多样，如尺规作图、动态作图、演示实验甚至折纸游戏等，让学生直观感知圆锥曲线的发生发展过程，通过对问题的分析，抽象出圆锥曲线的定义，体现了具体到抽象的数学学科核心素养.

要使学生全面、准确地掌握椭圆、双曲线、抛物线的定义. 圆锥曲线的定义不仅是导出圆锥曲线标准方程的依据，而且是圆锥曲线其他几何性质之"源". 因此，利用定义解决问题是一种最基本的方法. 应该帮助学生逐步学会运用定义探求解决问题的思路，总结解决问题的规律，化繁为简，从而收到事半功倍的效果.

在教学中，引导学生通过类比，用"变式"的思想将对椭圆的研究方法运用于双曲线、抛物线. 这样既有利于学生从整体上把握圆锥曲线的知识，又有利于学生掌握研究问题的一般方法.

根据方程的代数特征来研究圆锥曲线的对称性、范围、顶点等性质，数形结合的思想与方法在研究圆锥曲线的几何性质中得到充分体现，同时也说明了用代数方法研究几何问题的优越性.

为了充分利用学生的直观感知，应尽量利用圆锥曲线的图形特征. 建议在教学过程中运用动态几何软件或图形计算器等多种工具. 国家课程标准提到应充分发挥信息技术的作用，通过计算机软件向学生演示方程中参数的变化对方程所表示的曲线的影响，使学生进一步理解曲线与方程的关系.

圆锥曲线与实际生活、历史发展的联系是非常紧密的，教学中应该注意突出这一特点，鼓励学生了解圆锥曲线的实际背景，感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际

问题中的作用.

此外，圆锥曲线具有丰富的文化价值. 在教学中，可以组织学生收集、阅读平面解析几何的形成与发展的历史资料，查找圆锥曲线的相关资料，撰写小论文，论述平面解析几何发展的过程、重要结果、主要人物、关键事件及其对人类文明的贡献.

评价建议

本章的评价不仅关注学生对圆锥曲线相关知识的掌握情况，还要关注学生的学习历程，以及对数学思想方法、数学素养和综合实践能力的掌握情况.

在知识和技能上，要求学生：回顾确定圆的几何要素，在平面直角坐标系中，探索并掌握圆的标准方程与一般方程；能根据给定直线、圆的方程，判断直线与圆、圆与圆的位置关系；掌握椭圆的定义、标准方程及简单几何性质；了解双曲线与抛物线的定义、几何图形和标准方程，以及它们的简单几何性质.

在经验和过程上，要求学生：能够掌握平面解析几何解决问题的基本过程，根据具体问题情境的特点，建立平面直角坐标系；根据几何问题和图形的特点，用代数语言把几何问题转化成为代数问题；根据对几何问题(图形)的分析，探索解决问题的思路；运用代数方法得到结论；给出代数结论合理的几何解释，解决几何问题. 能够根据不同的情境，建立平面直线和圆的方程，建立椭圆、双曲线、抛物线的标准方程，领悟利用方程研究曲线性质的基本步骤和一般方法.

在思想和方法上，要求学生：能够运用代数的方法研究上述曲线之间的基本关系，能够运用平面解析几何的思想解决一些简单的实际问题. 形成通过坐标系建立曲线的方程，再用代数方法研究曲线性质的基本思想，建立事物相互转化的观念. 在数学探究过程中，类比、特殊化和一般化是我们发现和提出问题的基本思维方法. 理解与运用方程的思想方法探索解题途径、优化解题过程. 关注学生能否应用圆锥曲线的知识解决问题，以及在知识应用过程中数形结合的能力、思维能力的发展情况. 培养学生会用圆锥曲线的知识去观察、解决一些简单的实际问题，逐步具有运用数学的意识和能力.

教师组织对圆锥曲线有兴趣的学生开展各种拓展活动. 例如，可以设计折纸、投影、截面等各种活动，使学生经历圆锥曲线的发生发展过程，考查学生观察、发现和分析思考，以及动手操作能力；可以利用“课后阅读”，探索圆锥曲线的统一定义；还可以研究“两定点距离之积为常数的点的轨迹(卡西尼卵形线)”，考查学生是否能把教材中的学习历程迁移到新内容新问题的学习中；可以利用教材中例题的延伸，如研究

"抛物线的焦点弦性质"，让学生系统整理所学知识和各种相关问题，学会学习，学会反思. 这些活动中图形计算器或计算机的使用是值得鼓励的. 但注意两点：一，这些拓展活动不是针对全体学生的，这里的要求不应成为课程的基本要求；二，教师组织的拓展活动也要在适度范围内开展.

二、教材分析与教学建议

2.1 圆

教学重点

进一步理解曲线方程的概念，加深学生对"点在曲线上"与"点的坐标是方程的解"之间联系的理解，建立起确认曲线方程必须进行双向验证的意识.

能够根据所给条件，建立圆的标准方程或一般方程，能够进行圆的标准方程和一般方程之间的互化. 在问题情境中，能够根据不同的需要选择恰当的方法(如平面几何方法、代数方法)判断直线与圆、圆与圆的位置关系. 进一步体会运用方程研究曲线性质和位置关系的思想方法.

内容分析

本节内容有：曲线方程的概念、圆的标准方程、圆的一般方程、直线与圆的位置关系、圆与圆的位置关系.

曲线方程的概念比较抽象，是解析几何的一个教学难点，如上一章教参所述，本册教材采用的策略是把难点分散，搭建层层递进的理解台阶.上一章已经搭建了两个台阶，学生对直线方程已有了实践和理论的体会，本节应该通过回顾直线上点的坐标和直线方程的解之间的对应关系，总结出直线方程的严格定义，建立直线与二元一次方程之间的对应关系，然后引导学生把直线方程定义推广为一般的曲线方程的定义，并强调定义中的"给定曲线上的每一个点的坐标都是该给定方程的解"和"以给定方程的解为坐标的点都在该给定曲线上"这两个条件在定义中的意义.

这简短的一小节内容为本章的发展建立了严格的理论基础.

圆是特殊的圆锥曲线，也是学生熟悉的图形. 初中阶段学习了圆的定义和一些基本性质，本节在学生熟悉的圆的知识的基础上用解析几何处理圆的有关问题，解析地

讨论了直线与圆、圆与圆的位置关系.

从确定圆的几何要素出发，通过坐标系建立圆的方程，对学生而言也许并没有什么难度，但其中所蕴含的基本思想和所采用的基本方法却是本章的灵魂，后面椭圆、双曲线、抛物线方程的建立，都是这种思想和方法的继承，无非是问题的复杂程度有所变化而已.

但是，圆是学生接触的第一个非直线的曲线，把它作为圆锥曲线内容的引入，又有其非常明显的优势：

其一，学生在平面几何中对圆的知识已有相对深入的了解，本节要学习的直线与圆、圆与圆的位置关系在平面几何中都有相应的论述. 因此，演绎几何与解析几何在这里可以同场出现，展示各自的风采，相辅相成，共同促进学生对知识的理解和掌握. 两种几何的同场是其他圆锥曲线所无法做到的.

其二，我们可以毫无困难地建立起平面上任何位置的一个圆的方程，可以对圆的一般方程进行讨论，但在教材篇幅和难度的限制下，我们无法对其他圆锥曲线做同样的事.

因此，应该珍惜“圆”这一部分内容在对圆锥曲线理论的建立和帮助学生建立解析几何观中的重要作用，通过这一节的教与学，让学生对解析几何的理解上升到一个新的高度.

本节共有 12 道例题.

例 1 是一道基本题，利用已知条件求出圆心和半径后，套用圆的标准方程即可. 本例还可以用平面几何中的定理“直径所对的圆周角是直角”，借助向量知识给出如下解答：设 $N(x,y)$为圆 C 上任意一点，则$\overrightarrow{NP}\perp\overrightarrow{NQ}$，即$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{NQ}=0$. 因为$\overrightarrow{NP}=(3-x,4-y)$，$\overrightarrow{NQ}=(-5-x,6-y)$，所以$(3-x)(-5-x)+(4-y)(6-y)=0$，整理即得所求圆的方程.

例 2 是在给定条件下求动点轨迹的方程，这也是解析几何的基本问题之一. 解决这类问题就是要从动点的轨迹条件中寻找相等关系，将具有几何特征的相等关系转化为含坐标的轨迹方程.

本例要求根据题设条件自己选择坐标系，这种情况以前出现不多，教师需要在选择坐标系上给予指导，使学生明白，选择适合的坐标系可以使方程的形式更简洁. 但选择可以多样，简洁程度也没有强求的标准，不要让学生觉得教材上的或者课堂上教师讲的选择是唯一的.

例 3 是圆的标准方程的实际应用. 已知半径，只需利用勾股定理，求出圆心坐标即可. 要注意的是：这里是求圆弧的方程，故需注明坐标的取值范围. 事实上，只需限制 $y \geqslant 0$ 即可.

例 4 实际上是用待定系数法求圆的标准方程. 先设圆的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，再求圆心坐标(a,b)与圆的半径 r，在此过程中，关注圆与 y 轴相切的代数刻画，以及弦长与半径、圆心到弦的距离(弦心距)之间的关系.

例 5 只要列出圆的一般方程，用待定系数法求系数即可. 当然，求出方程后需验证判别式大于零，才能保证得到的是圆的方程. 这是“不在同一条直线上的三点确定一个圆”的具体例子. 可以让学生试试看，如果所给的三点在同一条直线上，用待定系数法会出现什么情况.

例 6 看起来复杂，其实看准目标按部就班，解题并无难度. 目标是求参数 t 的值，过程中还应时时关注 t 满足的条件；方法是把圆的方程和直线方程联立求它们的交点，这是解析几何的标准做法. 具体地说，先从圆的方程的判别式求得 $t<1$；又从直线与圆有两个交点的条件得知消元后的一元二次方程 $5x^2-2x+t=0$ 的判别式 $(-2)^2-20t>0$，即 $t<\dfrac{1}{5}$，与 $t<1$ 没有冲突；最后，由韦达定理得到 $x_1x_2=\dfrac{t}{5}$，又从直线方程得到 $y_1=-2x_1$，$y_2=-2x_2$，于是$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=t$，结合题设得到 $t=-1$，与$t<\dfrac{1}{5}$没有冲突. 这样，求得符合要求的 t 值与圆的方程.

例 7 采用的是解析几何的通法：联立直线与曲线的方程组，通过讨论方程组的解的个数解决直线与曲线的交点个数问题. 对于本例来说，由于圆的圆心为原点、半径为 3，因此还可利用圆心到直线的距离 $d=\dfrac{|b|}{\sqrt{5}}$与半径 3 的大小关系进行求解.

例 8 的第(1)小题中，证明的关键是用平面几何的关于“过切点的半径垂直于切线”的结论. 据此，从圆心到切点的向量是切线的法向量，因此切线的点法式方程立即可以写出. 本小题及其推导过程可以轻而易举地推广到任意位置的圆，得到：若 $M(x_0,y_0)$为圆 C：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上一点，则过点 M 的圆 C 的切线方程为 $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$.事实上，此时过点 M 的切线具有法向量(x_0-a,y_0-b)，从而它的点法式方程为$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$，此式与$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$左右两侧分别相加并整理，便得到所需的结论.

本例的第(2)小题中，从圆外一点可以作该圆的两条切线这个结论是一个关键.

假设切线有斜率的讨论只找到一条切线时，另一条切线只能在没有斜率的直线中去找，再注意到圆心到该直线的距离必须等于半径，就说明 $x-2=0$ 是另一条切线的方程.

本例两个小题的解法都很好地利用了圆的切线性质，解题的几何背景清晰，解法也相对比较简洁. 教学时还可以鼓励学生尝试运用更一般的方法：先用待定系数法设出切线的方程，与圆的方程联立后利用相切的条件(即方程有重根)确定待定系数.

例 9 的解法依赖于一个平面几何结论：圆心到弦的中点的连线垂直于这条弦. 于是对动点 C，$\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{MC}$总是互相垂直的，从而问题转化为求满足$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{MC}$的点 C 的轨迹.

例 10 采用了解联立方程组的方法求出两圆的两个交点坐标，所以两圆相交. 本例还可以考虑另一种方法：将两个圆的方程都化为标准方程，求出两圆的圆心C_1、C_2和半径r_1、r_2，从$|r_1-r_2|<|C_1C_2|<r_1+r_2$判断两圆相交.

例 11 先用类似于上一段文字提到的例 10 第二个方法：将两个圆的方程都化为标准方程，求出两圆的圆心C_1、C_2和半径r_1、r_2，但本例中$|C_1C_2|=|r_1-r_2|$，所以两圆内切，但此时无法给出切点坐标. 于是回到例 10 的第一个方法，解联立方程组，求得两圆只有一个公共点，它就是切点. 这个方法可以求出切点坐标，但无法判断是内切还是外切. 每个方法都只能给出部分结果，所以必须两种方法并用.

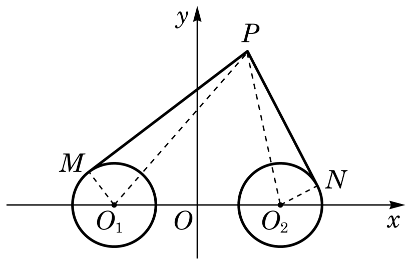


图 2 - R1

例 12 是直线与圆、圆与圆位置关系的综合问题，坐标系的选择是自然的，问题的难点在于从动点 P 作出的切线的两个切点也是随着 P 的运动而运动. 三点一起动，很难把题设条件转化为代数等式. 因此，本例的关键是将运动的切点换成固定的点，合理的选择是两个圆的圆心，因为圆心在整个过程中保持不变，而且动点 P 到两个固定点的距离和两条切线长有直接的数量关系：由于过切点的半径垂直于切线，两圆的半径都是 1(图 2 - R1)，用勾股定理即得$|PM|^2=|PO_1|^2-1$，$|PN|^2=|PO_2|^2-1$，题设关于切线长的条件$|PM|=\sqrt{2}|PN|$就转化为关于动点 P 到两个圆心距离之间的关系$|PO_1|^2-1=2(|PO_2|^2-1)$，后续的解题过程就顺理成章了.

本例可作一些简单的推广，如两个给定圆的半径可以不等，动点到两给定圆的切线长之比也可以是其他的定值等. 在这些变式中，一般情况下动点轨迹仍然是圆，一

个特殊的情况是：当两切线长相等时，动点轨迹退化为直线.

注意事项

1. 作为对“曲线方程”概念理解的第三台阶，本节一开始有“曲线方程的概念”，既是对第 1 章直线方程理解的深化和总结，给出“直线方程”的严格定义，又推而广之给出一般的“曲线方程”的定义，为本章后续内容的学习奠定理论基础. 这里关键是加深学生对“点在曲线上”与“点的坐标是方程的解”之间联系的理解，建立起确认曲线方程必须进行双向验证的意识. 尽管在教材中一般是推导方程的过程(通过曲线的定义找出方程，也即验证曲线上的点的坐标都满足方程)比较详细，而为了行文简洁，有时会把另一个方向的论证(即验证以方程的解为坐标的点都在曲线上)省略，只以“可以证明”“可以验证”之类的话开头，简单带过，但这绝不意味着另一方向验证可有可无，必要时可以让学生把教材中省略的验证补充完整.

2. 圆心位置和圆的半径这两个要素确定了一个圆，教材就从这两个要素出发，给出了圆的标准方程. 但在现实或者几何学中，也可以用其他要素来确定一个圆. 例如，不在同一条直线上的三点确定一个圆. 怎么求这个圆的方程？可以先用平面几何方法求圆心和半径，然后写出圆的标准方程，这似乎太“几何化”了，推理和计算比较复杂，解析几何的特点和优势体现不了；也可以在教材里增加一小节“圆的三点式方程”，类比于直线的两点式方程，但这个“三点式方程”似乎谈不上有什么独立存在的价值，独立成节意义不大. 实际上，形形色色的条件，只要能完全确定一个圆，圆的方程都可以用待定系数法求出. 这个方法的一般步骤是，先设定圆的方程(标准方程或一般方程)，其中系数(a、b、r 或 D、E、F)待定；用给定的条件(必要时借助一些几何定理或公式)列出系数之间的关系式；根据这些关系式解出系数，圆的方程就得到了. 例 5 就是这样的例子. 还要指出的是，用待定系数法求圆的方程时，圆的一般方程往往更为方便，因为其系数之间都是线性关系.

3. 为把圆的一般方程化为圆的标准方程，需要用到一元二次式的配方法，这是初中教材解一元二次方程或者推导一元二次方程求根公式时用的方法，但可能学生会套用求根公式而不一定熟练掌握配方法，教师可在讲述圆的一般方程及其判别式时，适当复习一元二次式的配方过程.

4. 在判断直线与圆、圆与圆的位置关系时，既有几何的方法，通过弦心距与半径、圆心距与半径的大小关系来判断；又有代数的方法，通过解联立方程组，讨论解的不同情形来判断. 在大部分情形，两种方法提供了几何思路与代数思路的对照和比

较，让学生对问题有更深的体会. 但要注意，有时候一种方法有不足之处，需要另一种方法补充，参看例 11.

更一般地说，解决圆以及圆与直线的许多问题，都有几何的方法和代数的方法，常常还要把两种方法结合起来使用. 可以启发学生注重从问题情境出发，尝试不同的解题思路，选择适当的方法，寻找最佳的解题方案. 但教学中要突出代数方法的运用，把握这一主线，引导学生充分体会坐标与方程方法的基本思想. 一方面是因为本章属于解析几何，用代数的观点解决几何问题是解析几何的主要思想，而且对于大部分问题，用代数方法解决更为简便；另一方面还在于初中阶段对圆的教学要求不高，学生对纯几何的一些基本方法和基本结论并不熟悉，过多地回顾纯几何内容反而增加教与学的难度. 还希望教师控制教学难度，避免编制繁琐或偏重技巧的难题.

直线与圆、圆与圆的位置关系中的相切关系是沿用纯几何的定义，即直线和圆只有一个公共点时称直线与圆相切，两圆相切也定义为它们只有一个公共点. 这种定义没有触及“相切”关系的本质，不能随意推广(本册教材第 54 页把直线与圆的相切定义推广到直线与椭圆，但就到此止步了；本册教材第 71 页特地说明了这个定义在抛物线的情况下是不恰当的).

教学建议

关于“曲线方程的概念”小节，这里再强调一下：这一小节内容是整个平面解析几何的理论支柱，不是把这两个段落文字读完并解释一番就结束了，需要引导和启发学生在学习过程中不断深入体会，加深理解，从“必然王国”走向“自由王国”. 作为“曲线方程”理解的第四台阶，在“2.5 曲线与方程”的第 1 小节中还会回到这一话题，并举了反例(2.5 节的例 1)说明“曲线方程”定义中两个方向的验证缺一不可. 但由于 2.5 节是加 * 号的选学内容，部分学生不会接触到那里的内容，教师可以把反例放到本节适当的地方(例如在圆的定义的两个方向验证完成后)讲授.

圆在自然界和生活、生产、技术等各个方面随处可见，学生也非常熟悉，第 2 小节“圆的标准方程”的现实情境引入三言两语即可，无需过多渲染. 但是，圆作为数学的研究对象，只在初中的平面几何部分出现，也不是太深入. 本节要从解析几何角度学习圆，解决与圆相关的数学问题，重温演绎几何得到的圆的基本几何性质与相关的一些命题定理，对本节的理解，对解析几何和演绎几何的对比与结合是有益的. 因此，在本节教学过程中应适当复习圆的有关内容. 这种复习可以分两种方式进行，一

种方式是在圆的引入部分，回忆圆的定义，与圆相关的重要直线、线段，如半径、直径、弦、切线、割线等，如有可能再回忆一些相关的重要性质. 引入部分的复习回顾要抓住关键，少而精，重在唤起学生的记忆，对下一步的学习有所启发. 另一种方式是结合课程讲授的内容或例题的解答过程，把相关的几何知识或者几何演绎推理过程结合进去. 这时的回顾要切题，如果发现学生知识的缺漏，尽可能用简洁的语言补上.

数学上对圆的理解和研究有悠久的历史. 在中国，早在春秋时期面世的《墨经》一书中就指出“圜(圆)，一中同长也”，这与现代数学给圆下的定义“圆是(平面上)到一个定点的距离等于定长的点的轨迹”一致.

平面几何中就是采用圆的这个定义，其中定点称为圆心，定长(必须大于零)称为半径(“半径”一词亦指连接圆心和圆上一点的线段). 平面解析几何仍然采用圆的这个定义，不过这时圆心必须明确给出坐标，半径是一个正实数.

圆的方程的推导是很容易的事，但这是准确定义了“曲线的方程”以后介绍的第一个实例，必须认真地从“给定曲线上的每一个点的坐标都是给定方程的解”和“以给定方程的解为坐标的点都在给定曲线上”两个方向验证所推导得到的方程是所给定的圆的方程.

验证“给定曲线上的每一个点的坐标都是给定方程的解”(这个过程常常与推导方程的过程一起完成)：给定圆心 $C(a,b)$ 与圆的半径 $r>0$，设 $P(x,y)$ 是圆上任意一点，则由圆的定义，点 P 到点 C 的距离等于 r，即点 P 的坐标 (x,y) 满足 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$，两边平方后，得点 P 的坐标 (x,y) 是方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{①}$$

的解.

验证“以给定方程的解为坐标的点都在给定曲线上”：如果点 $M(x_1, y_1)$ 的坐标是方程①的解，即 $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2$，因为 $r>0$，两边开平方，得

$$\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}=r,$$

即点 $M(x_1, y_1)$ 到点 $C(a,b)$ 的距离等于 r，由圆的定义，点 M 在以点 C 为圆心、以 r 为半径的圆上.

只有完成了以上两个方向的验证，才可以说方程①是以点 $C(a,b)$ 为圆心、以 r 为半径的圆的方程.

圆的标准方程直接刻画了圆的本质特征：圆心位置和半径大小. 为使学生掌握圆的标准方程，教学中要重视以下两种经历，即由圆的标准方程求得圆心坐标和半径大

小，以及根据圆心坐标与半径大小写出圆的标准方程，着重让学生体会数形的对应关系，把形的问题转化为数的问题来研究.

第 3 小节“圆的一般方程”教学时要注意“2.1 圆”与随后的“2.2 椭圆”“2.3 双曲线”“2.4 抛物线”在“标准方程”这一术语使用上的差异. 在后面三节，“标准方程”都是指在特定位置上的曲线的方程，但在“2.1 圆”中，圆心在任何位置并具有任何(正)半径的圆都可以用圆的标准方程表示，从这个角度看，圆的标准方程就是圆的“一般方程”. 但本节教材把“圆的一般方程”这一术语用于特指用二元二次方程的一般形式表达的圆的方程.

教材通过把圆的标准方程展开、整理，得到圆的一般方程所应具有的形式

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0, \tag{②}$$

其中 D、E、F 是实常数. 教材没有明确指出相比于一般的二元二次方程，方程②在形式上具有哪些特征. 教师可以写出关于 x、y 的二元二次方程的一般形式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

其中 A、B、C、D、E、F 都是实常数，系数 A、B、C 中至少一个非零，并把上述两个方程相比得知圆的一般方程在形式上有以下特征：

(1) 平方项系数 $A=C=1$(这个条件等价于要求 $A=C\neq 0$)；

(2) 交错项 xy 不出现，即 $B=0$.

方程②还不能称为圆的一般方程，因为我们还不知道它是否表示一个圆.

方程②的左侧是一个关于 x 的二次项系数为 1 的二次式和一个关于 y 的二次项系数为 1 的二次式之和，可以把两个二次式分别配方，并把“多余”的常数移到等号右侧，就得到方程

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}.$$

把它和圆的标准方程①相比，马上就知道方程②要表示一个圆的充要条件是 $D^2+E^2-4F>0$. 这样，就把满足 $D^2+E^2-4F>0$ 的方程②称为圆的一般方程，至此完成了圆的一般方程的定义.

学生容易忽略条件 $D^2+E^2-4F>0$ 而把方程②直接称为圆的一般方程，因此在教学中应突出配方的过程，应讲清右边常数项必须是正数的理由，让学生知其然，更知其所以然，避免产生似是而非的理解.

直线与圆、圆与圆的位置关系的讨论，是规范的解析几何方法：求解联立方程组，

找出直线与圆或圆与圆的公共点，判断相交、相切或者相离．这与“1.3 两条直线的位置关系”中的第 1 小节中判断两条直线的相交、平行与重合的思路和方法一脉相承．由于这些问题用几何方法也可以解决，教学中要强调解析几何用代数方法研究几何问题的思想方法，纯几何方法可以作为辅助、对比与参照．例如，讨论两圆位置关系时，教材先从圆的方程读出两圆的圆心坐标和半径，求出圆心距，然后从几何的视角，根据圆心距与半径关系的不等式判断两圆的位置关系，这可以算是几何与代数方法的混合使用，或者说本质上是几何的方法，作为后面解方程方法的辅助和参照(解方程方法无法判断两个圆的外切与内切，几何方法上场就起了关键作用)．教学中，重点还是在用代数方程的特性来研究直线与圆、圆与圆的位置关系上．

这里有两点需要说明．其一，讨论两圆位置关系时，要解两个二元二次方程联立的方程组，这不包含在初中所学的解方程知识中．但这里的两个二元二次方程的二次项完全相同，两个方程相减马上就把原来的方程组简化为一个二元二次方程和一个二元一次方程联立的方程组，解方程就不是难题了．但对其他圆锥曲线，类似的困难可能就难以克服，教师出题时要注意这一点．

其二，本节谈到了直线与圆的相切和两圆的相切，如前所述，这里用的是初中几何课程中相切的定义．要提醒学生，此定义不能随意推广．曲线的切线将在选择性必修第二册“5.1 导数的概念及意义”的第 2 小节“导数的几何意义”中给出准确定义．

2.2　椭圆

教学重点

让学生从日常生活、科学技术等方面找出椭圆的例子，建立椭圆的直观形象．理解椭圆的定义，并能在教材所给的平面直角坐标系中建立椭圆的标准方程．借助椭圆的标准方程研究椭圆的主要特殊点、重要参数和相关性质，包括椭圆的长轴、短轴、焦点、顶点、焦距和离心率及其相互关系，以及椭圆的对称性和取值范围．

进一步体会曲线方程的概念．理解解析几何中研究曲线的一般程序：当用点的轨迹或其他方式给出曲线定义后，建立适当的坐标系，求出并验证曲线的方程，再利用方程讨论曲线的几何性质．

内容分析

尽管圆可以看成椭圆的特例，但除非另行指出，本节讨论中的椭圆不包括圆．

本节的第 1 小节是椭圆标准方程的推导．

椭圆是一种在日常生活中常见的几何曲线，教材提供了几种有代表性的情境，包

括天体运动轨迹、篮球在不垂直于地面的平行光照射下在地面上的投影的边界线以及倾斜的水杯中液面的边界线等. 此外，还可以把椭圆看作是圆的“均匀压缩”的结果(图 2－R2)，这有助于建立圆与椭圆的联系.

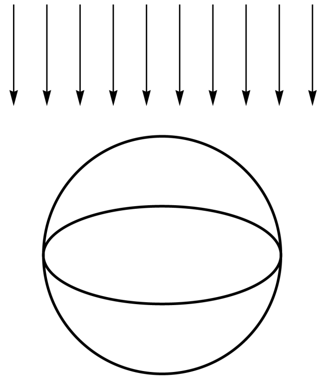


图 2－R2

椭圆有许多不同的定义，本节教材所给的是由德国天文学家开普勒(J. Kepler)引入的椭圆的经典定义，即椭圆是到两定点距离之和为定值的点的轨迹. 采用这个定义，一方面容易在课堂上让学生进行实际操作，展示椭圆的发生过程，帮助学生建立椭圆的直观经验，另一方面也容易据此建立起椭圆方程，展示特殊点和有关参量.

在“2.4 抛物线”后面的课后阅读中，从平面截圆锥面的观点给出包括椭圆在内的所有圆锥曲线；在“2.5 曲线与方程”后面的课后阅读中，给出所有圆锥曲线的统一定义“圆锥曲线是到一个定点和到一条定直线距离之比为定值的点的轨迹”，这里的圆锥曲线包括椭圆，但遗憾的是不包括椭圆的特例——圆. 这段文字是对上段所说的“有许多不同的定义”的一个注解，并不是在椭圆的引入阶段就要抛出这些内容，至多可以告诉学生本章后面还会有椭圆(以及其他圆锥曲线)的其他定义.

推导椭圆的标准方程时，我们要先引入一个方便的平面直角坐标系，这句话等价于说，我们把椭圆小心翼翼地摆放在坐标系的一个特殊位置. 这与“2.1 圆”的情况完全不同，在 2.1 节，我们对任何位置的圆都可以轻松给出其标准方程！

设所给的椭圆是到两个定点 F_1、F_2的距离之和等于常数 $2a$($2a>|F_1F_2|=2c$)的点的轨迹. 我们总是假定点 F_1与点 F_2不重合，从而 $c>0$，这种假设下圆就不在讨论的范围内了. 可以启发学生怎么去引入方便的平面直角坐标系：直线 F_1F_2有特殊意义，要把它作为一条坐标轴(比如 x 轴)；方向可以随意，习惯上取成$\overrightarrow{F_1F_2}$；曲线的定义关于点 F_1、F_2是对称的，可以想象得到的曲线关于线段 F_1F_2的中点是对称的，因此把这个中点取为坐标原点是比较方便的. 于是坐标系就建立起来了，点 F_1、F_2(称为椭圆的焦点)的坐标分别是$(-c,0)$、$(c,0)$. 用两点距离公式得知平面上一个点 $M(x,y)$到两个定点 F_1、F_2的距离之和等于常数 $2a$ 的条件等价于方程

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \qquad ③$$

成立，因此，据本章开头所给的曲线方程的定义，方程③实际上就是椭圆的方程. 但这是一个无理方程，形式上不够漂亮，也不便于利用它对椭圆的几何性质作深入的研

究；而我们前面说过，圆锥曲线即二次曲线，希望用精美的二元二次方程来表示椭圆，对圆我们做到了，对椭圆也可以做到.

方程③化简的主要目标是去掉根号，化无理方程为有理整式方程. 实现这一目标最常用的策略是方程两边同时平方(圆的方程化简时就是这样做的)，教材使用的就是这个策略，不过平方之前先把一个根式移到了等号的右边. 也可以不进行移项，直接把方程③两边平方. 进行一次方程两边同时平方不可能完全去掉根号，还要把平方后的方程整理，在方程的一侧留下根号，把不带根号的各项全部放在方程的另一侧，这样，再次把方程两边同时平方，就彻底去掉根号了. 这时，得到的方程整理后变成

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2). \tag{④}$$

由于 $a>c>0$，可设 $a^2-c^2=b^2$，其中 $b>0$. 这样，方程④变形为

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

方程两边再同时除以 a^2b^2，便得到椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0). \tag{⑤}$$

如果选取坐标系时把焦点所在的直线取成 y 轴，仍把焦点连线的中点取为坐标原点，那么同样的推理得到椭圆的另一形式的标准方程

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0). \tag{⑥}$$

这个过程只要用一个简单说明就可以了. 不过要提醒学生，方程⑤和⑥的区别不是形式上的把含 x 的项写在前面还是后面的问题，而是在方程⑤中含 x 项的分母大于含 y 项的分母，而方程⑥正相反.

本节的第 2 小节讨论椭圆的性质.

椭圆的定义也可以看成椭圆的一个重要性质. 可以让学生先简单回顾一下：椭圆是平面上到两个定点 F_1、F_2的距离之和等于常数 $2a(2a>|F_1F_2|)$的点的轨迹.

定点 F_1、F_2称为椭圆的焦点，它们的距离(记作 $2c$)称为椭圆的焦距.

条件 $a>c$ 是定义一个椭圆必须具备的前提条件，因为当 $a<c$ 时不可能有满足条件的点，而当 $a=c$ 时，满足条件的点的轨迹是线段 F_1F_2.

把坐标原点放在线段 F_1F_2的中点，把焦点放在 x 轴或 y 轴上，分别给出了椭圆的标准方程⑤或⑥，其中 b 是满足 $b^2=a^2-c^2$的正数. 于是方程表达式后面的条件 $a>b>0$ 是从定义和方程的推导过程自然得出的.

本小节关于椭圆性质的讨论就是基于椭圆的标准方程⑤或⑥，教材以方程⑤为

例，方程⑥的情况可类推.

从解析几何的角度关注椭圆(或更一般地，圆锥曲线)的性质，往往关注它的对称性，它的点分布的范围，它的重要参数，与它有关的特殊点、特殊直线(或线段)等.讨论这些性质的方法大多是几何观察、代数验证，充分体现数形结合的数学思想. 这里相关的图形见本册教材第 51 页.

对称性：观察看出椭圆是轴对称图形，也是中心对称图形，两条坐标轴都是对称轴，坐标原点是对称中心. 验证方法是把椭圆上一点 $M_1(x, y)$关于坐标轴的对称点 $M_2(-x, y)$、$M_3(x, -y)$和关于坐标原点的对称点 $M_4(-x, -y)$的坐标代入椭圆的方程，验证这些点也在椭圆上.

顶点：与其说是性质，不如说是给出一批定义. 椭圆与两条坐标轴的交点 $A_1(-a, 0)$、$A_2(a, 0)$、$B_1(0, -b)$、$B_2(0, b)$称为椭圆的顶点，线段 A_1A_2(其长度为 $2a$)称为椭圆的长轴，线段 B_1B_2(其长度为 $2b$)称为椭圆的短轴，正数 a、b、c 分别称为椭圆的长半轴长、短半轴长和半焦距，它们的关系是 $a^2=b^2+c^2$.

范围：从图上可以看出椭圆位于直线 $x=\pm a$ 和直线 $y=\pm b$ 所围成的矩形区域内，也就是说，椭圆上的点的坐标满足

$$-a\leqslant x\leqslant a，-b\leqslant y\leqslant b.$$

从代数上看，这是因为从椭圆的方程⑤推出

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1，\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1.$$

离心率：这是一个新的概念，在圆锥曲线的研究中有重要作用. 对于椭圆而言，离心率定义为椭圆的(半)焦距与长(半)轴长的比 $e=\dfrac{c}{a}$，它取值范围是 $0<e<1$. 当 e 越接近于 1，椭圆越扁；当 e 越接近于 0，椭圆越接近于圆(圆可以看成椭圆当 e 无限趋近于 0 时的极限图形).

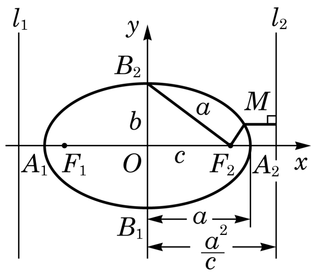
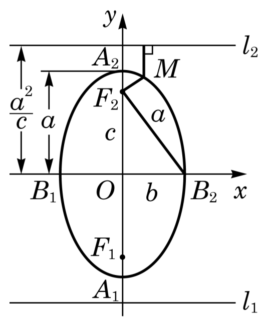
准线：准线也是圆锥曲线理论中的一个重要概念，但教材正文除抛物线外没有涉及准线，只在课后阅读《圆锥曲线的统一定义及其极坐标方程》中提到了椭圆和双曲线的准线. 这里把相关内容叙述一下，供教师参考，但不作为对学生的要求. 椭圆的准线是直线

$$l_1：x=-\frac{a^2}{c} 与 l_2：x=\frac{a^2}{c}.$$

准线和焦点、离心率一起，可以给出椭圆的另一个定义(也就是“圆锥曲线的统一定

义”在椭圆情况的描述)：椭圆是到焦点 $F(c,0)$ 与到准线 $x=\dfrac{a^2}{c}$ 的距离之比等于离心率 $e(0<e<1)$ 的点的轨迹. 详见本册教材第 86 页的课后阅读.

焦点在不同坐标轴上的椭圆的标准方程、图形和性质的异同之处见下表：

焦点位置	在 x 轴上	在 y 轴上
标准方程	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$	$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$
图形		
焦点	$F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$、$F_2(0,c)$
顶点	$A_1(-a,0)$、$A_2(a,0)$、 $B_1(0,-b)$、$B_2(0,b)$	$A_1(-b,0)$、$A_2(b,0)$、 $B_1(0,-a)$、$B_2(0,a)$
轴	长轴 A_1A_2，短轴 B_1B_2	长轴 A_1A_2，短轴 B_1B_2
范围	$-a\leqslant x\leqslant a$，$-b\leqslant y\leqslant b$	$-a\leqslant y\leqslant a$，$-b\leqslant x\leqslant b$
离心率	$e=\dfrac{c}{a}$，$0<e<1$	$e=\dfrac{c}{a}$，$0<e<1$
准线	l_1：$x=-\dfrac{a^2}{c}$，l_2：$x=\dfrac{a^2}{c}$	l_1：$y=-\dfrac{a^2}{c}$，l_2：$y=\dfrac{a^2}{c}$

本节共 5 道例题，前 3 道题是基本题，主要是帮助概念的理解，难度不大.

例 1 是完全按照椭圆的定义条件求椭圆的标准方程. 要注意两点：其一，题目已知条件是 $2a$ 与 $2c$，要用 $a^2-c^2=b^2$ 求出 b；其二，题目没有限定焦点在哪条坐标轴上，所以要考虑两种情况，得到两个标准方程.

例 2 是用待定系数法求椭圆的标准方程. 先写出椭圆的标准方程，系数 a 和 b 待定，据椭圆的焦距和椭圆上一个已知点这两个条件，列出两个方程，求出系数 a 和 b.

例 3 的目的是让学生从椭圆的方程求出椭圆的重要几何量. 先将椭圆方程化为标准方程，求出长半轴 a 与短半轴 b，再从 a 和 b 得到其他所要求的几何量.

例 4 是椭圆的应用问题，注意科学问题到数学问题的近似化和语言转换. 在地

球卫星轨道尺度下讨论问题，卫星可以近似看成一个点；地球不能看成一个点，而是近似地看成一个球，所以可以谈它的中心和半径. 在椭圆焦点上的不是地球，而是地球的中心；题目虽已明确说明近地点、远地点是椭圆长轴的两个端点，但从这两个点到焦点的距离应该是这两个点到地球表面的距离再加上地球的半径. 另外，椭圆的中心到焦点的距离是半焦距. 注意到这些量之间的关系，教材解题过程的计算就顺理成章了.

例 5 讨论的是直线和椭圆的公共点个数，用的是解析几何的通用方法，解直线方程和椭圆方程的联立方程组. 把直线方程代入椭圆方程消去一个未知数后会得到一个一元二次方程，根据此方程的判别式就确定了直线与椭圆有两个公共点、一个公共点或者没有公共点.

注意事项

1. 讲椭圆定义时，要关注定义中给定的常数要大于$|F_1F_2|$(即条件 $a>c>0$)的约束. 为纠正学生对约束条件“$2a>|F_1F_2|$”的忽视，可让学生尝试对“$2a=|F_1F_2|$”“$2a<|F_1F_2|$”分别作图，以体验条件“$2a>|F_1F_2|$”的必要性. 若常数等于$|F_1F_2|$，则点 M 的轨迹是线段 F_1F_2；若常数小于$|F_1F_2|$，则轨迹不存在.

常量 b 的引进是很巧妙的一招. 一方面有可能性，即由 $a>c>0$，得知 $a^2-c^2>0$，所以可令 $b^2=a^2-c^2>0$ ($b>0$)；另一方面还要突出必要性，即使得到的方程的形式简洁美观(在第 1 小节就可以讲)，且 b 有明显的几何意义(可在第 2 小节讲).

2. 应该强调，教材关于椭圆(以及以后的双曲线与抛物线)的教学，不是对坐标系中的任意位置的曲线的讨论(与前一节“圆”不一样)，而是先根据曲线定义选择比较特殊的坐标系(这等价于说，只考虑坐标系中特殊位置的曲线). 坐标系的选择要尽量考虑曲线的对称性、关键要素表达的简洁性等. 这方面不是要塞给学生几条硬性的原则，而是通过具体的例子(例如本节的椭圆)，给学生以启发. 还可以告诉学生，坐标系的选择不是唯一的. 教材之所以能选择坐标系使得椭圆方程有极佳的表现形式，有上述思想的体现，也有前人经验的总结，有时还可能由不同情境决定. 例如，双曲线 $x^2-y^2=1$ 在反比例函数的情境下由于坐标系选择的不同，表现为曲线 $xy=\dfrac{1}{2}$(见本书第 73—74 页). 抛物线的研究和二次函数图像的研究由于情境不同，坐标系选择不同，方程也有不同的表现.

对于坐标平面上任意位置的椭圆(以及双曲线、抛物线)方程的研究，不在本套教

材范围内.

3. 方程③到方程⑤的化简过程可以有多种不同的方法. 教材介绍的是移项后方程两边平方的方法，我们前面还提到不移项而直接把方程③两边平方的方法. 这两种方法都是经典的，教材编写时经常采用.

在教学实践中教师还可以使用一些小诀窍，另辟蹊径化简方程. 下面两个例子都是设法把方程化为一个根式等于一个有理式的形式，再做两边平方进行化简：

（1）根据方程③，a 是$\sqrt{(x+c)^2+y^2}$与$\sqrt{(x-c)^2+y^2}$的等差中项，于是可设

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a-d，\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a+d.$$

两个方程各自两边平方，再相减与相加，分别得到

$$d=-\frac{c}{a}x \text{ 与 } x^2+y^2+c^2=a^2+d^2,$$

把前式 d 的表达式代入后式，整理后便得到方程④，进而推出方程⑤.

（2）把方程③两边同时乘$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，整理得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\frac{2cx}{a},$$

此方程与方程③两边相加，化简得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{cx}{a},$$

再两边平方并整理也得到方程④.

4. 关于证明以方程⑤的解为坐标的点一定在椭圆上，教材在说明了“椭圆上任意一点的坐标都是方程的解”后，为避免累赘，只用一句话“反过来，可以证明以方程的解为坐标的点都在椭圆上”带过. 下面针对教材里的方程化简过程给出了“反过来”证明的关键点.

从推导过程我们已经知道方程③的解一定是方程⑤的解. 要证明以方程⑤的解为坐标的点一定在给定的椭圆上，就是要证明方程⑤的解一定是方程③的解，即证明方程③与方程⑤有相同的解集(也可以说方程③与方程⑤是同解方程，或者说从方程③变形到方程⑤的过程没有产生增根). 从方程理论知道，方程的移项、合并同类项或同时乘(除以)非零常数都不会产生增根，审视我们的变形过程，可能产生增根的是两次的“方程两边同时平方”. 抽象地说，要排除从 $A=B$ 变形为 $A^2=B^2$ 过程中产生增根，就是要从 $A^2=B^2$ 能倒推回 $A=B$. 显然，只要能保证 A 与 B 同时大于等于 0 (或同时小于等于 0)就可以了.

回到教材变形过程中两次“两边平方”前的方程，它们分别是

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

与

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

因此，我们要从方程⑤(以及 $a^2-c^2=b^2$，$a>c>0$ 的假设中)推出

$$2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\geqslant 0 \text{ 与 } a^2-cx\geqslant 0.$$

先证后一不等式. 当 $x\leqslant 0$，不等式 $a^2-cx\geqslant 0$ 当然成立；从方程⑤推知 $x^2\leqslant a^2$，当 $x\geqslant 0$ 时，则有 $x\leqslant a$，于是 $a^2>cx$. 所以不等式 $a^2-cx\geqslant 0$ 成立.

为证第一个不等式，首先注意不等式 $a^2+cx\geqslant 0$ 也成立，这可以仿照不等式 $a^2-cx\geqslant 0$ 的证明得到，也可以直接从方程⑤关于 x 与 $-x$ 的对称性得到. 又从方程⑤得到 $y^2=b^2-\dfrac{b^2}{a^2}x^2$，于是

$$(x-c)^2+y^2=x^2-2cx+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2=\frac{c^2}{a^2}x^2-2cx+a^2\leqslant 4a^2,$$

最后一个不等式依据是 $-cx\leqslant a^2$，$\dfrac{c^2}{a^2}<1$ 与 $x^2<a^2$. 这样，

$$2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\geqslant 2a-\sqrt{4a^2}=0,$$

正如所求.

有了这两个关键步骤的倒推，教材中所说的将“推理过程反过来推演即可”也就不难了.

5. 离心率：离心率的概念比较抽象，学生此时还没有学习用准线和离心率给出椭圆的第二定义，不容易理解离心率的几何意义，可通过图形说明离心率的大小对椭圆形状的影响. 椭圆的形状千变万化，在直观上有一个椭圆“扁平度”的概念. 椭圆定义中只有两个参数 a 和 c，当然任意给定一组 a、c（$a>c$）的值，就对应一个唯一形状的椭圆. 让学生利用数学软件制作动画演示实验，观察 a 和 c 对椭圆“扁平度”的影响：a 和 c 都影响椭圆的“扁平度”，且互相关联着：当 a 不变时，c 越大椭圆越扁，c 越小椭圆越圆；当 c 不变时，a 越大椭圆越圆，a 越小椭圆越扁. 如何找到一个量，能够刻画不同尺寸下的椭圆的“扁平度”？即只要这个量相等，无论椭圆大小如何，它的“扁平度”是一样的. 换言之，这两个椭圆是相似的，即可以通过放大或缩小其中一个椭圆，使两个椭圆重合. 很自然的想法是把两个量(a 和 c)一个放在分母，一个放在

分子，使得原来反向影响“扁平度”的两个量变成同向影响“扁平度”的量，这样就有了离心率 $e=\frac{c}{a}$，“扁平度”从一个直观感受的概念变成了可以度量的概念. 这样描述从直观到理性的推进过程虽然还比较粗糙，但能够帮助学生克服认知障碍，形成对离心率的感性和理性的认识.

数学史上离心率概念的提出与上段描述有着相同的逻辑. 天文学领域需要计算行星的运行轨道，这些行星的运行轨道通常是圆扁程度不一的椭圆，而离心率就是为了描述轨道圆扁程度而引入的一个量. 不仅如此，天文学家还发现太阳系的八大行星都是在以太阳为焦点的椭圆形轨道上运行，这些轨道偏离太阳的程度也不一样，因此人们就把离心率称为“偏心率”. 行星和太阳之间的距离是在变化的，其中在近日点处离太阳最近，偏离距离为 $a-c$，在远日点处离太阳最远，偏离距离为 $a+c$. 人们发现不能直接用最近距离和最远距离表示偏心率，因为这两个值不仅和运行轨道的圆扁程度有关，还受轨道半径大小的影响，也就是说需要构造一个“稳定”的量来表示偏心率. 最后经过反复尝试，发现$\frac{(a+c)-(a-c)}{(a+c)+(a+c)}=\frac{c}{a}$的值和椭圆大小无关，却能很好地刻画椭圆的圆扁程度，于是人们就选择了 $e=\frac{c}{a}$来表示离心率. 这样从数学发生发展的角度很好地解释了离心率的起源.

6. 从圆到椭圆：前文提到在一个方向上“均匀压缩”一个圆可以得到椭圆，但这个描述是粗糙的、非数学的，这里作一些补充. “均匀压缩”(或者更一般地，“均匀伸缩”)可以和向量的数量倍数联系，但我们只考虑如下简单的情况：给定两个正常数 a、b 分别作为 x 轴、y 轴方向上的伸缩指数，把平面上的一个点 (x,y) 对应到点 $(X,Y)=(ax,by)$ 就定义了平面上的一个“均匀伸缩”. 圆 $x^2+y^2=1$ 的方程可以改写成 $\frac{(ax)^2}{a^2}+\frac{(by)^2}{b^2}=1$，即 $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$，可见圆经过了伸缩变换以后变成了一个椭圆.

这样从圆的方程推椭圆的方程虽然简单，还揭示了圆与椭圆的联系，但椭圆的几何性质难以从这个推导过程获得.

教学建议

本节是实质性学习圆锥曲线的第一节，对于后续学习双曲线、抛物线等圆锥曲线有着重要的指导作用. 所以本节应当适当详讲，让学生有较好的体验，为后续内容的学习建立比较好的基础.

在椭圆的教学中，关注以下几个方面：

1. 情境引入：在生活与科学技术中，椭圆的例子并不少见，教材提供了天体运行轨迹、篮球在不垂直于地面的平行光照射下的在地面上的投影边界线和倾斜的水杯中的液面边界线等例子. 可以提前布置学生上网或在熟悉的生活、生产情境中找出自己的例子，在课堂上交流.

学生对椭圆的定义是不熟悉的，从几何实验角度引入椭圆定义是恰当的. 本节教材所给出的实验是经典的，也是很容易实现的，可由教师做演示，但更好的方式是让学生自己做实验，让学生自己准备一块纤维板或硬纸板，两个图钉和一段无弹性的细绳即可. 让学生动手操作，观察和分析教材所给的实验过程，从中抽象概括出椭圆的定义，并给出约束条件.

图形计算器或计算机的辅助也有益于学生的理解，用适当的设备和软件，通过输入参数画出椭圆图形，加深学生的印象.

2. 方程的推导：结合实验中画出的图形建立坐标系，容易为学生所接受，但也可鼓励学生通过对称性合理地建立直角坐标系. 接着，设椭圆上任意一点坐标为 $M(x,y)$，椭圆的焦距为 $2c(c>0)$，椭圆上任一点到两焦点距离的和为 $2a(a>0)$. 添加系数 2 可避免用分数形式表示焦点及长轴两端点的坐标，使导出的椭圆方程形式简单. 再根据定义，写出适合条件的点 M 的集合

$$P=\{M\mid |MF_1|+|MF_2|=2a,\ 2a>|F_1F_2|\}.$$

这一步其实是可有可无的，放在这里的目的是给学生用集合的语言表示几何轨迹的一个范例. 实质性的一步是把轨迹的条件用方程③给出. 方程③所给出的条件与椭圆定义所描述的条件是等价的，根据 2.1 节中关于曲线方程的定义，方程③就是所给定的椭圆的方程.

但方程③是一个无理方程，形式复杂，不对称，难以记忆和使用，我们要对其进行化简. 首先要让学生明确化简目标，即消去方程中的根式，并尽可能整理成简洁的有理方程. 要抓住“消去方程中的根式”这一关键问题，常用的方法是两边平方，过程虽较繁琐，耐心演算一般能解决问题. 可启发学生自己（或在教师引导下）来进行化简，得出结论后再与教材对照.

除了直接的方程两边平方，化简过程还可以使用一些小诀窍，变出新的花样. 我们在“注意事项”之 3 中给出了两种方法. 但要注意，尽管方程的化简过程比较繁琐，但不是本节的核心内容，教师不应该在这里就这个过程作变式教学，选用一种化简方

法就可以了.

3.反向验证问题：教材对反过来验证“以方程⑤的解为坐标的点一定在给定的椭圆上”没有过多着墨，只说“将上述推理过程反过来推演即可”. 建议这一段的教学中给出这一结论的细节论证，一方面由于椭圆是定义了“曲线方程”之后的第二个实例，且第一个实例(圆)的两个方向验证都十分简单，学生还不会有深刻的印象，“椭圆”接在“圆”之后，对加深学生对“曲线方程”的概念理解有比较大的帮助；另一方面，详讲“椭圆”这一节后，因双曲线与抛物线的内容与椭圆有很大的相似性，学生可以触类旁通，课堂上略讲就比较合理了. 针对教材所给的椭圆方程的化简过程，“注意事项”之4给出了反向证明的关键点.

请注意，如果教师在方程推导时采用别的化简过程，反向证明的关键点或许不一样，但基本精神是一样的，即找到可能产生增根的变形步骤，排除增根.

在曲线方程的教学中，如何把握“反过来”方向的教学要求，以下两点供参考：其一，学生要牢固建立曲线和方程的对应中两个方向验证的意识；其二，在题目或教师的要求下，学生能够进行反方向的证明或讲清反向证明的基本步骤和关键点，不至于手足无措.

4.椭圆的性质问题：对学生来说，没有平面几何知识储备，系统地利用方程来研究曲线的几何性质现在还是第一次. 本节中，涉及的概念和公式较多，大多直接从方程得出，教学时要结合图形进行讲解，让学生先从图形的感性认识出发，了解每个概念、性质的几何意义，建立直观的几何形象，然后从椭圆的方程角度证明从图形的直观感知获得的结论.

在讲椭圆性质的同时，可以适当拓展到用解析几何研究曲线性质的一些通法通则，不求完整系统，只针对椭圆情况用到的方法推广到一般方法即可. 例如，讲椭圆的对称性时可以推广到任意曲线关于坐标轴、坐标原点的对称性的判定；讲顶点时回顾一下曲线和直线公共点的求法.

解析法研究图形的性质是通过对方程的讨论进行的，方程是建立在坐标系的基础上. 同一曲线由于坐标系选取不同，方程的形式也不同，得出的曲线性质也往往可以用坐标或方程的形式表达. 但要注意，曲线的许多性质是内在的，即与坐标系的选取无关. 教学时，可以用尽可能简洁的语言向学生讲清图形的内在性质，把内在性质与它们的坐标或方程表现形式区分开来.

例如，从本节第2小节中至少可以看出椭圆的如下内在性质，其表述只用到椭圆

的定义条件，即椭圆是平面上到两个点 F_1、F_2（称为焦点）的距离之和等于常数 $2a(2a>|F_1F_2|=2c)$ 的点的轨迹：(1)椭圆是中心对称图形，其对称中心是线段 F_1F_2 的中点 O；(2)椭圆是轴对称图形，有两条对称轴，一条是线段 F_1F_2 所在的直线，另一条是过点 O 所作的 F_1F_2 的垂线；(3)椭圆与两条对称轴的交点称为椭圆的顶点，它们分别是位于线段 F_1F_2 所在的直线上的点 A_1、A_2 和位于线段 F_1F_2 垂直平分线上的点 B_1、B_2；(4)线段 A_1A_2 称为椭圆的长轴，其长度 $|A_1A_2|=2a$，线段 B_1B_2 称为椭圆的短轴，其长度 $|B_1B_2|=2b$，其中 b 是满足 $a^2-c^2=b^2$ 的正数；(5)过四个顶点分别作对称轴的平行线，整个椭圆位于四条直线所围成的矩形中；(6)比值 $e=\frac{c}{a}$ 称为椭圆的离心率，它满足 $0<e<1$，e 越接近 1，椭圆越扁，而 e 越接近 0，椭圆越接近圆.

5. 直线与椭圆的公共点：关于直线与椭圆的公共点，教材没有专门列为小节，只用例 5 让学生有所体会. 教学中应以这个例题为抓手，引导学生回忆求直线与曲线(甚至更一般的曲线与曲线)公共点的通法通则，即把直线和曲线的方程联立求解. 当然，由于解方程技术上的限制，我们只能处理一些比较简单的情况，包括上一节的求直线与圆或圆与圆的公共点的问题以及例 5 的直线与椭圆的公共点问题. 例 5 的问题可以推而广之，讨论直线与圆锥曲线的公共点问题，因为把直线方程(二元一次方程)代入到圆锥曲线方程(二元二次方程)消去一个未知数后，总会得到一个一元二次方程，这是学生都能解的. 根据这个一元二次方程的判别式就确定了直线与椭圆有两个公共点、一个公共点或者没有公共点.

在讲完例 5 后简单介绍一下椭圆的切线. 关于椭圆切线的光学性质及其应用，目前的课程标准中已不作要求，只在边框中提及，可以鼓励有兴趣的学生到图书馆或上网阅读相关资料. 要注意，平面几何中的“和圆有且只有一个公共点的直线是圆的切线”到这里的“和椭圆有且只有一个公共点的直线是椭圆的切线”，均没有触及切线本质属性的推广，无法继续往前走了. 包括双曲线与抛物线在内的一般曲线的切线不再能用公共点个数来描述了，所以后两节的教学中不应再涉及切线问题.

2.3 双曲线

教学重点

让学生从演示实验中体验双曲线的形成过程，并能抽象概括出双曲线的定义；能在教材给定的平面直角坐标系中建立双曲线的标准方程. 借助标准方程研究双曲线的

主要特殊点、重要参数和相关性质，包括双曲线的实轴、虚轴、渐近线、焦点、顶点、焦距、离心率及其相互关系，以及双曲线的对称性和取值范围.

让学生直观体会并能用代数语言描述双曲线与它的渐近线无限趋近但永不相交.

内容分析

本节的第 1 小节是双曲线标准方程的推导.

双曲线的引入从数学实验开始. 通过数学实验，学生同时获得双曲线的感性和理性的认识：感性的认识是通过实验，画出双曲线的图形，有了双曲线的最初形象；理性认识是通过作图的过程总结出了双曲线的定义.

有了双曲线定义后，下一步是建立合适的平面直角坐标系，建立方程并化简，推出双曲线的标准方程. 与椭圆情况类似，两个定点 F_1、F_2 称为双曲线的焦点，它们之间的距离(记为 $2c$)称为双曲线的焦距. 在推导过程中还要引进参数 b，它是满足 $b^2=c^2-a^2$ 的正数. 焦点放置在 x 轴上或 y 轴上，线段 F_1F_2 的垂直平分线为另一条坐标轴，向量$\overrightarrow{F_1F_2}$的方向作为 x 轴或 y 轴的正向，分别得到双曲线的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0) \quad ⑦$$

与

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0). \quad ⑧$$

本节的第 2 小节讨论双曲线的性质.

以方程⑦为例，讨论双曲线的性质. 方程⑧所表示的双曲线的性质可类推.

双曲线对称性的讨论以及双曲线在直线 $x=a$ 与 $x=-a$ 所夹区域之外的讨论与椭圆情况类似，不赘述.

双曲线的其他性质都与双曲线的渐近线相关.

渐近线其实是解析几何中讨论曲线性质的一个重要关注点，但它的真正理解需要极限的概念，学生的理解和掌握有一定的困难. 在圆锥曲线中，只有双曲线有渐近线，所以渐近线及其性质的教学成为双曲线性质这一小节的重点与难点.

先看双曲线的顶点与轴. 仿照椭圆的做法，把双曲线与坐标轴的交点叫做双曲线的顶点，但与椭圆不一样的是，只能得到在 x 轴上的两个顶点 $A_1(-a,0)$ 与 $A_2(a,0)$；双曲线与 y 轴没有交点，因为在双曲线方程中令 $x=0$，得到的方程 $-\frac{y^2}{b^2}=1$ 没有实数根. 但我们固执一下，仍把 y 轴上的点 $B_1(0,-b)$ 与 $B_2(0,b)$在图上画出来(可

以看作虚拟的顶点，但教材没用这个术语)，于是我们得到双曲线的两条轴：轴 A_1A_2 是实际存在的，称之为双曲线的实轴；轴 B_1B_2 只是虚拟的，称之为双曲线的虚轴. 于是 a 与 b 分别称为双曲线的实半轴长与虚半轴长.

到现在为止，点 B_1、B_2 与虚轴 B_1B_2 似乎没有多少几何意义. 但我们再往前走一步，它们的几何意义就会渐露端倪：

如图 2－R3，过点 A_1、A_2、B_1、B_2 作坐标轴的平行线，这两组平行线所围成矩形的四个顶点是$(a,-b)$、(a,b)、$(-a,b)$与$(-a,-b)$，其对角线所在直线的方程是

$$y=\frac{b}{a}x \text{ 与 } y=-\frac{b}{a}x. \qquad ⑨$$

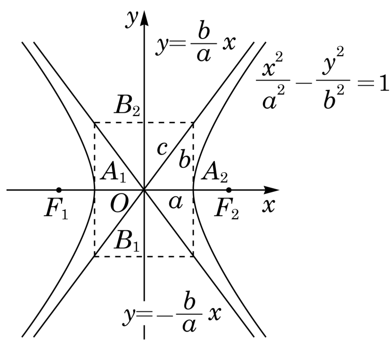


图 2－R3

这两条直线称为双曲线⑦的渐近线. 这两条直线的方程也可以分别写成

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \text{ 与 } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$$

的形式，有时也可以把两个方程合并，写成二次方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$$

这些形式也许更便于记忆.

双曲线的渐近线⑨和双曲线⑦的关系是：当$|x|$逐渐增大时，双曲线无限趋近于它的渐近线，但永远不会与渐近线相交.

教材以第一象限中的图形为例证明了这个结果，其他象限的情况可用双曲线的对称性得到.

双曲线的渐近线给双曲线的范围以另外一种描述：双曲线位于以两条渐近线为边界的左、右平面区域内(图 2－R4).

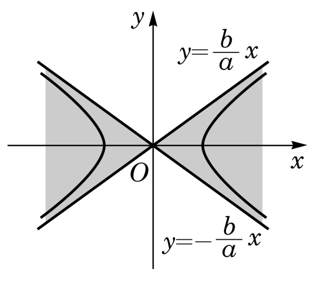


图 2－R4

教材在分象限证明“双曲线无限趋近于它的渐近线，但永远不会与渐近线相交”时实际上已经证明了这一结果，因为那里证明了在第一象限双曲线总在渐近线的下方，由对称性，在第二象限双曲线也总在渐近线的下方. 因此，在上半平面，双曲线总在渐近线的下方；再由对称性，在下半平面，双曲线总在渐近线的上方. 双曲线的范围描述由此就可以得出.

双曲线的范围描述还可以从另一个角度看. 双曲线两支的顶点分别在以两条渐近

线为边界的左、右平面区域内，但作为连绵不断的双曲线的一支，如果要突破区域的局限，那么必须与区域的边界相交. 但当双曲线的两条渐近线写成$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$的形式时，这个方程和方程⑦联立得到的方程组是无解的，这说明双曲线与它的渐近线是不相交的. 这个矛盾就说明了双曲线只能位于以两条渐近线为边界的左、右平面区域内.

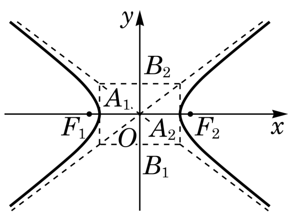
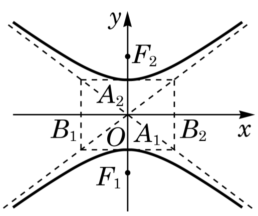
与椭圆类似地定义双曲线的离心率$e=\frac{c}{a}$，因为在双曲线的情形下$c>a>0$，所以双曲线的离心率$e>1$.

椭圆的离心率刻画了椭圆的扁平程度，双曲线的离心率又有什么几何意义呢？双曲线各参数之间有关系$c^2-a^2=b^2$，于是$\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}-1$，由此推得$\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$，于是双曲线渐近线的方程可以改写成

$$y=\sqrt{e^2-1}\,x \text{ 和 } y=-\sqrt{e^2-1}\,x.$$

可见离心率越大，双曲线渐近线的斜率的绝对值越大，两条渐近线在x轴正和负方向所张的角越大，这样双曲线的开口就越阔.

焦点在不同坐标轴上的双曲线的标准方程、图形和性质的异同之处见下表：

焦点位置	在x轴上	在y轴上
标准方程	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$
图形		
焦点	$F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$、$F_2(0,c)$
顶点	$A_1(-a,0)$、$A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$、$A_2(0,a)$
轴	实轴A_1A_2，虚轴B_1B_2	实轴A_1A_2，虚轴B_1B_2
渐近线	$y=\frac{b}{a}x$和$y=-\frac{b}{a}x$	$x=\frac{b}{a}y$和$x=-\frac{b}{a}y$
范围	$x\leqslant -a$与$x\geqslant a$； 位于以两条渐近线为边界的左、右平面区域内	$y\leqslant -a$与$y\geqslant a$； 位于以两条渐近线为边界的上、下平面区域内

（续表）

焦点位置	在 x 轴上	在 y 轴上
离心率	$e=\frac{c}{a}$，$e>1$	$e=\frac{c}{a}$，$e>1$
准线	l_1：$x=-\frac{a^2}{c}$，l_2：$x=\frac{a^2}{c}$	l_1：$y=-\frac{a^2}{c}$，l_2：$y=\frac{a^2}{c}$

上表中列入了双曲线准线的方程，仅供教师参考.

本节共有 7 道例题.

例 1 关注双曲线的两种标准方程及其对应的图形在坐标系中的位置.

例 2 关注双曲线定义中的两个要素：要素一，定义中的“绝对值”条件不能缺少；要素二，参数 $2a$（双曲线上的点到两个焦点距离之差的绝对值）必须小于焦距. 第(1)小题所给的条件是 $|MF_1|-|MF_2|=4<|F_1F_2|=6$，虽满足要素二，但不满足要素一，无法得到完整的双曲线，只能得到双曲线上到左焦点 F_1 的距离大于到右焦点 F_2 的距离的点，即双曲线的右支 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1(x>0)$. 第(2)小题所给的条件 $2a=|F_1F_2|$ 不满足要素二，即使满足要素一，也只能得到 x 轴上以点 F_2 为端点向右和以点 F_1 为端点向左的两条射线；但现在也不满足要素一，我们得到的只有这两条射线的右边一条，即 x 轴上以点 F_2 为端点向右的射线.

例 3 是双曲线用于定位的一个实际应用题. 把问题数学化，就是找出到点 A 的距离比到点 B 的距离少 $340\times4=1\,360$ m 的点的轨迹. 这是个双曲线的问题，点 A 与点 B 是焦点. 把焦点 A、B 放在 x 轴上，以线段 AB 的中点为原点，以向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向作为 x 轴的正方向，因为 $2c=1\,360<2\,000=|AB|$，所求的轨迹是双曲线的左支.

注意，所给的条件只能确定爆炸点的轨迹，实际问题中若要确定爆炸点的准确位置，则应再增加一个条件.

关于双曲线定位系统的应用可以让感兴趣的学生自行查找相关资料.

例 4 研究双曲线的性质，先要把双曲线方程化为标准方程.

例 5 的解题要分两步走：

第一步，判断焦点在 x 轴上还是在 y 轴上. 根据点(4,3)与渐近线 $y=\frac{1}{2}x$ 上具有相同横坐标或纵坐标的点的位置关系，可以判断双曲线是在两条渐近线 $y=\frac{1}{2}x$ 和

$y=-\frac{1}{2}x$ 划分出来的哪个区域，从而得知焦点在 x 轴上还是在 y 轴上. 本例点(4,3)在渐近线 $y=\frac{1}{2}x$ 上具有相同横坐标的点(4,2)的上方，所以双曲线在渐近线 $y=\frac{1}{2}x$ 和 $y=-\frac{1}{2}x$ 划分出来的上、下区域内，于是焦点在 y 轴上.

第二步，列出双曲线的方程，参数 a、b 待定，利用渐近线方程和点(4,3)在曲线上的条件，建立关于 a、b 的方程组并求解.

例 6 是直线和双曲线的公共点问题，用解析几何的通用方法解直线方程与双曲线方程联立的方程组. 本例解方程组中经过消元得到的方程 $(1-k^2)x^2=1$ 相对简单，无需援引一元二次方程的判别式就可得出结论：$|k|<1$ 时方程有两个实根，即直线与双曲线有两个公共点；$|k|=1$ 时方程无解，$|k|>1$ 时方程无实根，这两种情况直线与双曲线都没有公共点；直线和双曲线只有一个公共点的情况不存在.

注意本例后面的几何说明，引导学生数形结合理解问题.

例 7 又是一个实际应用题，要注意简化情境并用数学语言表达问题. 先取通过中轴的剖面，把立体问题简化为平面问题，旋转面在剖面上的截痕就是生成旋转面的双曲线，旋转轴是双曲线的一条对称轴，曲面最小半径处在剖面上给出了双曲线的两个顶点，由此可以建立平面直角坐标系，上、下口半径分别给出双曲线上的两组对称的点. 取中轴为 y 轴，中轴的过两个顶点的垂线为 x 轴，以 m 为单位长，建立平面直角坐标系. 在这个平面直角坐标系中建立双曲线的标准方程，题设条件给出 $a=12$，又从点 $B(25,y_1)$、$C(13,y_1+55)$ 在双曲线上，得到关于 b 与 y_1 的两个方程，联立求解即可.

注意事项

1. 跟椭圆情况类似，本套教材不讨论坐标系中任意位置的双曲线，而是先根据双曲线的定义选择比较特殊的坐标系(这等价于说，只考虑坐标系中特殊位置的曲线). 这里坐标系的选择与椭圆情况一样，把焦点放在坐标轴上，坐标原点是连接焦点的线段的中点. 这种选择能把双曲线的对称性、渐近线等性质表现得更好. 但有时其他的选择也有不错的效果，例如，如果把等轴双曲线的焦点放在了第一、三象限角的平分线上(坐标原点仍然是焦点连线的中点)，就表现为曲线 $xy=\frac{a^2}{2}$ 的形式. 这类曲线在初中研究反比例函数时就接触过.

要提醒学生，每条双曲线都有两支(不能称为两条双曲线)，并可以直观地说由方

程⑦表示的双曲线的两支在水平方向上分布，而由方程⑧表示的双曲线的两支在铅垂方向上分布.

对于坐标平面上任意位置的双曲线方程的研究，不在本套教材范围内.

2. 参数 b 的引进与椭圆情况形似实异. 由于 $a<c$(而不是像椭圆那样 $a>c$)，参数 b 定义为满足 $b^2=c^2-a^2$ 的正数(而不是像椭圆那样定义为满足 $b^2=a^2-c^2$ 的正数). 虽然双曲线方程与椭圆方程只相差一项的符号，但曲线面目全非；方程中两个参量 a、b 与椭圆相比也有很大的差异，椭圆中两个参量可比较大小($b<a$)，但对于双曲线，参数 a 与 b 之间没有确定的大小关系.

给出两种形式的标准方程后，要说明一下两个方程的关键差异点. 与椭圆不一样的是，由于 a 与 b 之间没有确定的大小关系，区分两类标准方程也不再是依据分母的大小，而是依据 x^2 与 y^2 项中哪个有正系数：如果 x^2 项有正系数，那么双曲线焦点在 x 轴上；如果 y^2 项有正系数，那么双曲线焦点在 y 轴上.

3. 双曲线的渐近线在圆锥曲线中是独有的，包含了重要的极限思想. 但本套教材(即使在选择性必修第二册“第 5 章　导数及其应用”中)并没有对极限给出严格的定义，更谈不上对极限思想的阐述了. 教师可以在渐近线的教学中谈及极限，并用直观、朴素的语言介绍其中的要点.

4. 在椭圆方程中如果 $a=b$，那么得到圆心在原点、半径为 a 的圆. 双曲线方程中如果 $a=b$，那么得到等轴双曲线. 实半轴长为 a 的等轴双曲线的半焦距 $c=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$，标准方程是$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$，也可以更方便地写成 $x^2-y^2=a^2$.

等轴双曲线与初中所学的反比例函数有联系. 可以从以下两个角度建立这个联系. 以下两点内容供教师参考，不宜作为课堂的内容，但可以作为学生拓展活动的素材.

(1) 如果做变量代换$\begin{cases}\sqrt{2}X=x-y,\\ \sqrt{2}Y=x+y,\end{cases}$那么该双曲线的方程变为 $XY=\frac{a^2}{2}$. 学生一定很熟悉最后这个方程，它表示 X 与 Y 成反比例. 做变量代换等价于做坐标变换. 注意，这里的系数$\sqrt{2}$是为了保证变换前后的坐标系有相同的单位长度. 由此可以看出，在适当的坐标系下，等轴双曲线是反比例函数的图像.

(2) 从双曲线的定义出发，通过选取不同的坐标系，得到反比例函数的图像. 考虑半焦距为 $c=\sqrt{2}a$，实半轴长为 a 的双曲线. 选平面直角坐标系，使得双曲线的两个焦点在第一、第三象限角的平分线(即直线 $y=x$)上，关于坐标原点对称(图 2-R5). 容

易看出，此时两个焦点分别为 $F_1(-a,-a)$ 与 $F_2(a,a)$，于是双曲线的方程为

$$\left|\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}-\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}\right|=2a,$$

亦即

$$\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}=\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}\pm 2a,$$

方程两边平方并整理得

$$x+y-a=\pm\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2},$$

方程两边再次平方，整理得

$$xy=\frac{a^2}{2}.$$

此时两条坐标轴为双曲线的两条渐近线.

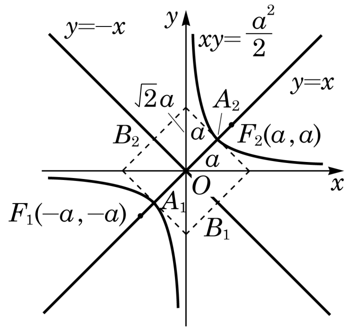


图 2 - R5

如果把双曲线的焦点放在第二、四象限角的平分线(即直线 $y=-x$)上，同样的推理可得方程 $xy=-\frac{a^2}{2}$.

教学建议

与椭圆的引入类似，双曲线的引入也从数学实验开始. 但双曲线的实验要比椭圆的实验复杂，工具上从一段细绳换成了一段拉链，椭圆实验中的一气呵成变成了双曲线实验中的分四段拼接而成. 教师应和学生一起耐心地把实验做完，从一开始给学生建立双曲线的直观形象. 在引入阶段，要强调两点：其一双曲线是由不相交的两支组成的一个整体(而不能称它们为两条双曲线)，其二双曲线是可以无限延伸的，而不是像椭圆那样是有限空间中的封闭曲线. 双曲线有别于其他圆锥曲线的另一个重要特点是它有渐近线，但讲定义阶段不宜涉及.

双曲线定义和椭圆定义很相似，最重要的差别是把椭圆定义中的“和”改为双曲线定义中的“差”. 由于一字之差，定义不得不在两个地方作调整. 其一，是把椭圆定义中的对常数 $2a$ 的限制“$2a>|F_1F_2|$”改为“$2a<|F_1F_2|$”. 这个条件的变动是自然的，因为当双曲线上的点与两个定点不在同一条直线上时，曲线上的点与两个定点形成一个三角形，此三角形中两边之差小于第三条边，就得出 $2a<|F_1F_2|=2c$. 当 $2a=|F_1F_2|$时，轨迹是分别以 F_1、F_2 为端点的两条射线；当 $2a>|F_1F_2|$时，无轨迹.

其二，椭圆定义中的“到两个定点 F_1、F_2 距离之和”改成了“到两个定点 F_1、F_2 距离之差的绝对值”. 讨论“之和”时加不加“绝对值”没有差别，定义对两个焦点 F_1、

F_2 自然是对称的，但在考虑“之差”时会出现负值，如果没有“绝对值”的条件，满足 $|MF_1|-|MF_2|=2a$ 的点的集合与满足 $|MF_2|-|MF_1|=2a$ 的点的集合是完全不同的，结合前面所做的数学实验可以看到，前者是靠近 F_2 的一支曲线，后者则是靠近 F_1 的一支曲线，这样的定义对两个焦点是不对称的，并且没有把双曲线的两支都包括在内.

准确理解双曲线的定义后，建立合适的平面直角坐标系，写出双曲线的方程并把它化简为标准方程，这与椭圆的情况类似，只是要注意一开始给出的方程

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a$$

是个带绝对值符号的方程，但绝对值符号可以消化在方程两边平方的过程中，不会对化简过程产生实质性的困难. 方程的化简与椭圆情况类似，可以让学生自行完成，或在教师指导下由学生完成.

由于椭圆情况对反向证明(证明以方程的解为坐标的点都在曲线上)已有细节的说明或论证了，双曲线的情况可以略讲，比如像教材那样提一句，或者略微深入一点，说一下证明过程的关键点. 但是，不能不提及反向证明.

在双曲线的性质这一小节中，有些内容与椭圆的情况完全类似，但有些内容与椭圆差别很大，并有一定的难度. 这一小节教学中有三个关键点，一是让学生体会和理解双曲线的无限伸展性，与椭圆是有限空间中的封闭曲线形成鲜明对比；二是虚轴的引进及其几何意义；三是渐近线的引进及其性质的证明. 这里的难点是渐近线的引进及其性质. 建议把渐近线的引进与虚轴的几何意义联系起来：过实轴与虚轴的端点作坐标轴的平行线，四条直线围成的矩形的对角线所在的直线称为双曲线的渐近线. 这样，渐近线的方程不会凭空而来，而且双曲线的几何性质又凸显了双曲线的虚轴和实轴一样有重要的几何意义. 本节教参的“内容分析”部分给出了这样处理的方案，供参考.

本小节教材在讨论双曲线顶点的段落中提到了“等轴双曲线”，并没有对等轴双曲线的性质以及它与初中数学所学的反比例函数的图像联系起来，但本章复习题中的“拓展与思考”第 3 题涉及了这个内容. 教参把与此主题相关的内容放在“注意事项”中，供参考.

2.4 抛物线

教学重点

本节要让学生通过现实情境进一步感知抛物线的形状，通过抛物线的实验演示认

识抛物线形成的过程，从而能够准确描述出抛物线的定义，并建立合适的坐标系推导抛物线方程，探究不同的直角坐标系与方程之间的关系，研究抛物线的几何性质及其简单应用，判断和研究直线与抛物线的位置关系.

本节的学习将完成整个圆锥曲线的核心内容，学生对解析几何的基本思想方法应该有一个比较透彻的理解，并能自觉地运用解析几何思想方法独立解决问题. 因此，在本节的教学过程中，应该把前面经历的学习过程和思想方法统一起来，深刻体会解析几何的思想方法和解决问题的基本策略.

内容分析

第 1 小节是抛物线的定义及其标准方程的推导.

抛物线是学生非常熟悉的曲线，教材给出了非常丰富的情境实例，教师应注意使用.

但要注意的是，从这些情境实例，甚至从抛物线作为二次函数的图像的角度，很难总结出抛物线最有特征的几何性质，从而给出抛物线的几何定义. 所以必须从新的视角看抛物线. 这个新视角从一个数学实验开始. 通过实验，从几何角度抽象地定义一条叫做“抛物线”的曲线：平面上到一个定点 F 和到一条定直线 l(F 不在 l 上)距离相等的点的轨迹叫做抛物线，点 F 叫做抛物线的焦点，直线 l 叫做抛物线的准线. 与椭圆和双曲线不同的是，抛物线只有一个焦点，在它的定义里必须用到准线. 使用焦点和准线的定义方法也适用于椭圆和双曲线，参看本章的“课后阅读”《圆锥曲线的统一定义及其极坐标方程》.

抛物线的几何定义与坐标系无关，但为了推导抛物线的标准方程，必须恰当地建立平面直角坐标系. 对抛物线而言，坐标系有四种恰当的选择，从而得出四种不同形式的标准方程：

$$y^2=2px(p>0)，y^2=-2px(p>0)，$$

$$x^2=2py(p>0)，x^2=-2py(p>0)，$$

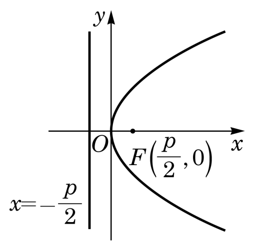
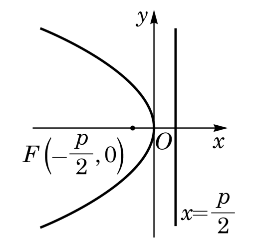
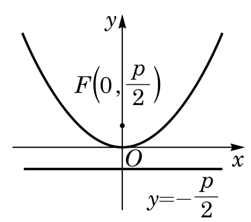
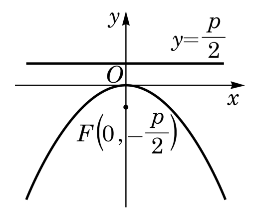
其中 p 是抛物线焦点到准线的距离.

抛物线的标准方程 $x^2=2py(p>0)$与 $x^2=-2py(p>0)$是 y 关于 x 的二次函数 $y=\frac{1}{2p}x^2$与 $y=-\frac{1}{2p}x^2$，所以这两个标准方程所表示的抛物线也就是相应二次函数的图像. 这样的观察使我们知道这里所定义的“抛物线”与已有认知的抛物线是一致的，从而把新知识融入已有的知识体系中，同已有知识以及各种实际应用建立联系，让知

识系统化.

第 2 小节“抛物线的性质”远没有椭圆或双曲线同主题小节那么丰富多彩. 本小节只涉及抛物线的两个性质：其一，它的对称性，只有一条对称轴，即焦点所在的坐标轴，没有对称中心. 对称轴与抛物线的交点称为抛物线的顶点(在标准方程情况下，顶点永远是坐标原点). 其二，抛物线的范围，曲线只在非对称轴的那条坐标轴(含焦点)的一侧(包含原点在内)，两变量的绝对值无限增长，形成对称轴正或负方向上的开口，p 越大，开口张开的速度越快.

焦点位置四种不同选择下抛物线的标准方程、图形和性质的异同之处见下表：

焦点位置	x 轴正半轴	x 轴负半轴	y 轴正半轴	y 轴负半轴
标准方程	$y^2=2px(p>0)$	$y^2=-2px(p>0)$	$x^2=2py(p>0)$	$x^2=-2py(p>0)$
图形				
焦点	$F\left(\frac{p}{2},0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2},0\right)$	$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$	$F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$
准线	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
顶点	$O(0,0)$	$O(0,0)$	$O(0,0)$	$O(0,0)$
对称轴	x 轴	x 轴	y 轴	y 轴

本节共有 5 道例题.

例 1 的题设关于顶点和焦点的描述确保了这个抛物线所在的位置给出的是标准方程；由于抛物线上有第三象限的点，抛物线的开口只能向左或向下. 但题设没有明确焦点在哪条坐标轴上，所以分两种情况列出方程，用待定系数法进行求解.

例 2 要证明圆与准线相切，可以用解析几何的方法，先求出圆的方程，再联立方程求圆与准线的公共点个数. 这个方法是可行的. 但针对本例，教材使用的纯几何的方法更为简单，其关键是证明圆心到准线的距离等于半径，先用抛物线的定义证明圆的直径 AB 的长度等于 AB 的两个端点到准线距离之和，又从梯形的中位线定理得知圆心到准线的距离等于 AB 的两个端点到准线距离之和的一半，于是圆心到准线的距

离等于半径.

例 3 的解题中先用点斜式写出弦所在直线的方程，与抛物线方程联立消去 y 后得到一个关于 x 的一元二次方程，它的两根是弦的两个端点的横坐标. 但不必解此方程，因为从抛物线的定义可把弦长转化为弦的两个端点到准线的距离之和，它只与两个端点横坐标之和相关，于是，对前述方程用韦达定理即可.

例 4 在设定直线方程时要分类讨论. 教材的解法是先分直线有斜率和无斜率两类，有斜率(设为 k)时用点斜式设定方程，与抛物线方程联立，消元得方程 $k^2x^2+2(k-1)x+1=0$. 此时再作第二次分类，分成 $k=0$ 与 $k\neq 0$ 两类. 前者是一个一元一次方程，只有一个根，得到符合条件的直线 $y=1$；后者是一元二次方程，其判别式为零时方程只有一个根(重根)，得到符合条件的直线 $y=\frac{1}{2}x+1$.

对于无斜率情况，直线方程可设为 $x=a$，代入抛物线方程消元，得到方程 $y^2=2a$，当且仅当 $a=0$ 时此方程只有一个根(重根)，得到符合条件的直线 $x=0$.

注意三点：(1)本例也可以一开始就分类为斜率为零、斜率非零与无斜率三种情况讨论；(2)无斜率的情况，教材上用观察图形得到直线 $x=0$，这里补充了完整的解析法；(3)这里强调了重根和非重根的情况，与直线是否为抛物线的切线的判断有关(见“注意事项”之 4)，供教师参考.

例 5 的应用问题的解决首先要选择和建立平面直角坐标系，其次要注意灯泡离反射镜的顶点的距离即是焦点到顶点的距离. 可以通过本例的边框让有兴趣的学生去了解更多的圆锥曲线的光学性质.

注意事项

1. 关于抛物线的定义. 许多学生对抛物线的直观形象很熟悉，包括本节课程作为情境引入的那些例子. 但在有限的纸面上所建立的无限伸展图形的直观形象是很不可靠的. 例如，仅从有限图形上看，双曲线的一支和抛物线似乎就很难区分. 在本节之前，数学上抛物线仅作为二次函数的图像在初中数学中出现过，但那不是抛物线的严格定义，无论是直观的理解还是函数的图像，都无法得到太多抛物线的内在性质.

本节的抛物线定义对学生而言是完全陌生的内容，它不是建立在我们对抛物线已有知识之上的，而是另起炉灶，从纯几何的角度进入的，用严格的数学语言定义了数学对象——抛物线. 从这个角度说，抛物线是一个新的数学概念，只有导出抛物线的

方程并与二次函数进行比较以后，才能把这个新的抛物线概念与以前学过的作为二次函数图像的抛物线概念联系起来，把抛物线相关的各种知识在更高层面上进行整合和完善，建立起抛物线研究的基础.

抛物线定义中只有一个约束条件，即焦点 F 不在准线 l 上. 若 F 在 l 上，则轨迹是过点 F 且垂直于 l 的直线.

2. 坐标系的选择. 抛物线的定义不涉及坐标系，所以这个定义包括了坐标平面上的任意位置和开口任意朝向的抛物线. 但是，要用最简洁的方程把抛物线表示出来，就要把坐标系选在最好的位置上. 把一条坐标轴选在抛物线的对称轴即焦点到准线的垂线上，把原点设在焦点与垂足连线的中点(抛物线的顶点)上. 与椭圆、双曲线不同的是，由于抛物线没有第二条对称轴，选定焦点所在的坐标轴后，还需要进一步选择焦点是在坐标轴的正半轴还是负半轴. 于是得到四种形式的抛物线标准方程.

3. 关于离心率. 抛物线理论内部没有离心率的定义. 通常讲的抛物线的离心率为 1 是在圆锥曲线统一定义(见“课后阅读”《圆锥曲线的统一定义及其极坐标方程》)中比较得出的，是区别椭圆、双曲线与抛物线的参数，只有在统一讨论圆锥曲线时，谈抛物线的离心率才是有意义的. 在仅讨论抛物线时，一个恒为常数的参数不可能对不同抛物线的形状、性质与方程的差异产生任何影响. 因此，不应该把离心率这个术语引入到抛物线理论内部.

4. 切线问题. 例 4 要找出过点 $M(0,1)$ 且与抛物线 $y^2=2x$ 只有一个公共点的直线，解题后找到 3 条直线：$y=1$，$y=\frac{1}{2}x+1$ 与 $x=0$. 一条与椭圆只有一个公共点的直线可以称为椭圆的切线，这个例题告诉我们类似的说法对抛物线是不恰当的，直线 $y=1$ 与抛物线虽然只有一个公共点，但直观的理解它就不应该是抛物线的切线. 但是，这种直观理解的依据是什么？另外两条直线是不是抛物线的切线？依据是什么？问题在于教材迄今为止没有对曲线的切线给出过定义，只是在初中课程中定义过圆的切线，它是与圆只有一个公共点的直线，在本章“2.2 椭圆”的例 5 结束之后把圆的切线的定义推广到椭圆：如果一条直线和一个椭圆只有一个公共点，这条直线称为这个椭圆的切线. 进一步的推广在抛物线这里就碰到障碍了，因此抛物线的切线是没有定义过的. 严格地说，目前我们没有任何依据判断上述三条直线是或不是抛物线的切线. 教材中的这一段论述的意义在于告诉学生，不能简单地把圆或椭圆切线的定义

推广到抛物线，否则就会碰到像直线 $y=1$ 是抛物线 $y^2=2x$ 的切线那样有悖于数学直观的情况. 这里只说“有悖于数学直观”，因为要严格地判定一条直线是或不是一条曲线的切线，只能根据切线的定义，参看本套教材选择性必修第二册“5.1 导数的概念及意义”之“2 导数的几何意义”.

部分教师会用“当直线和曲线有两个重合的公共点”来定义曲线的切线，具体的解释是当求公共点时，其纵坐标或横坐标是由一个二次方程的重根得到的. 用这个定义可以判断例 4 中的直线 $y=\frac{1}{2}x+1$ 与 $x=0$ 是抛物线 $y^2=2x$ 的切线，但直线 $y=1$ 不是. 然而，这个定义虽然比较接近切线的严格定义，在圆锥曲线语境中也比较实用，但是它从未在从初中到现在的课程中被使用过，学生的理解可能也只停留在操作层面，对其几何实质体会不深. 因此不建议进行这样的教学.

总之，本节例 4 的教学引出的切线话题只是让学生理解圆和椭圆的切线的定义不能进一步推广就可以了.

教学建议

在情境引入部分，一方面可让学生回忆在初中学习二次函数图像时，通过列表、描点、连线得到作为二次函数图像的抛物线；在物理课程学习中对篮球从手中投出后的运动轨迹上的每一点进行力学分析，得知轨迹可由一个二次函数刻画，所以也是抛物线. 这些例子是学生目前对抛物线仅有的理性认识. 另一方面，教材中其他实例可以让学生对抛物线有更多的感性认识，启发学生思考我们是否已经给抛物线这个几何对象以一个几何的定义，是否对抛物线的性质有比较多的了解. 例如，可以设计如下一些问题，引导学生思考：如果把一个二次函数的图像在坐标系中旋转 90°，它还是函数的图像吗？它还是抛物线吗？相信学生对这两个问题都会给出正确的回答，前者应回答“不是”，后者应回答“是”. 接下来的问题是，既然旋转以后的曲线不再是函数的图像，如果只认可二次函数的图像是抛物线，那么旋转以后的曲线怎么又是抛物线呢？这就将学生引导到给抛物线一个脱离函数图像、不涉及坐标系的定义的思路，这样的定义只能从抛物线内在的几何性质来刻画. 这启发我们另辟蹊径，先抛开上面这些背景材料，进行数学实验，从几何角度抽象地定义一条叫做“抛物线”的曲线.

定义了抛物线以后，为使抛物线的标准方程简洁，选择合适的平面直角坐标系也是至关重要的. 过焦点 F 作准线的垂线(垂足为 K)，从定义可以看出，抛物线关于这条垂线对称，所以可以把这条垂线作为一条坐标轴；原点的最佳选择是 F 和 K 的连

线 KF 的中点，因为这样抛物线和坐标轴交于坐标原点(这个交点是抛物线唯一的顶点).

这样设定坐标原点和一条坐标轴后，我们还有四种不同的选择：焦点在 x 轴上的有两种，分别把焦点置于 x 轴的正半轴和负半轴上；焦点在 y 轴上的有两种，分别把焦点置于 y 轴的正半轴和负半轴上. 这四种选择没有优劣之分，我们把对应的抛物线方程都称为它的标准方程. 设焦点到准线的距离 $|KF|=p$，由于约定焦点不在准线上，自然有了约束条件 $p>0$. 这样，针对焦点位置的四种选择，焦点坐标和准线方程分别如下：

$$\left(\frac{p}{2},\ 0\right),\ x=-\frac{p}{2};\ \left(-\frac{p}{2},\ 0\right),\ x=\frac{p}{2};$$

$$\left(0,\ \frac{p}{2}\right),\ y=-\frac{p}{2};\ \left(0,\ -\frac{p}{2}\right),\ y=\frac{p}{2}.$$

教材以第一种情况(焦点在 x 轴的正半轴上)为例推导抛物线的标准方程. 根据定义，列方程时要用到点到直线的距离公式(见本册教材 1.4 节). 列出方程后的化简过程比椭圆和双曲线的情况要简单得多，可以让学生自行完成. 得到的抛物线标准方程是

$$y^2=2px(p>0).$$

另外三种情况下抛物线的标准方程分别是

$$y^2=-2px(p>0),\ x^2=2py(p>0)\text{与}\ x^2=-2py(p>0).$$

后两个方程使得这里讨论的抛物线直接联系上了初中课程所学的二次函数的图像. 要善于调动学生对已学知识的记忆，建立起他们对抛物线的图形及其要素的认知，这样就可以直接转入第 2 小节的学习.

抛物线性质的研究相对简单，可以让学生在椭圆、双曲线学习经历的基础上，针对抛物线的一类标准方程，自主探索抛物线的范围、对称性、顶点等几何性质，再与其他类型的标准方程进行对照.

圆锥曲线的学习到此告一段落了. 应以圆锥曲线为载体，让学生总结一下解析几何学习的“基本套路”，即一个有序的、连贯的一般过程：“根据具体问题情境的特点，建立平面直角坐标系；根据几何问题和图形的特点，用代数语言把几何问题转化为代数问题；根据对几何问题(图形)的分析，探索解决问题的思路；运用代数方法得到结论；给出代数结论合理的几何解释，解决几何问题.”这个总结有利于进入下一节的学习.

*2.5　曲线与方程

教学重点

在直线、圆锥曲线学习的基础上，进一步理解曲线方程的概念；以简单的几何轨迹问题为例，学会求曲线方程的一般方法和步骤.

理解参数方程的意义，领会建立曲线的参数方程的方法，形成参数思想并懂得参数法的基本运用.

通过实例引入极坐标系，理解建立极坐标系和极坐标方程的意义，体会平面坐标系的多样性，会在简单情形下求轨迹的极坐标方程，能进行简单情形下的极坐标方程与直角坐标方程的互化.

内容分析

本节整体为选学内容，而且不是“圆锥曲线”主题所能涵盖的. 通过本节内容的学习，旨在对解析几何有一个更多的了解. 本节内容包括三个主题：主题一是求轨迹的方程(主要在第 1 小节)，主题二是参数方程(第 2 小节)，主题三是极坐标方程(第 3、4 小节).

主题一是从上一章开始的为学生逐步理解“曲线方程”概念而搭建的第四台阶，它主要集中在第 1 小节，用稍许不同的表述方式复习了“2.1 圆”中的第 1 小节“曲线方程的概念”中给曲线方程所下的定义，并通过例题、练习和习题给出求曲线方程的实例，归纳求轨迹方程的三个基本步骤，促进学生对曲线方程这个抽象概念的理解. 本主题的思想贯穿本节，在参数方程和极坐标方程的语境中也都会有它略有变形的体现.

在主题一之下有 3 道例题，即本节的例 1 至例 3. 这些例题除了训练学生求轨迹方程的一些技巧外，还关注了曲线方程定义中正反两个方面(即本小节所总结的定义曲线方程的两个条件)的验证.

例 1 用反例说明曲线方程的定义中正反两方面的条件缺一不可.

例 2 是求轨迹方程的标准做法：按照动点的条件列一个方程，然后验证条件②，即验证以方程的解为坐标的点都在动点的轨迹上.

例 3 利用题设条件的等价变形给出了同时验证条件①和条件②的一般范式和表达方法.

“参数方程”和“极坐标方程”两个主题的内容都非常丰富，在解析几何中它们都可以独立成章. 但本套教材囿于课程标准对课程内容的选择和难度控制以及篇幅的局限，没有深入展开相关内容，而只做简单的普及性的介绍，旨在拓展学生的知识面，

让学生体会数学世界的多样性.

有时曲线的方程不是简单地表达为曲线上点的两个坐标所满足的二元方程，而是把点的两个坐标各自表达为第三个变量(参数)的函数，这就是曲线的参数方程. 曲线参数方程的一般形式是

$$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t), \end{cases} \tag{⑩}$$

其中参数 t 有可能被限定在某个范围内变动. 严格地说，如果给定平面上的曲线 C 和方程组⑩，如果对于 t 的每一个允许值，由方程组⑩所确定的点 $P(x,y)$都在曲线 C 上；反之，对于曲线上任意一点 $P(x,y)$，都存在 t 的某个允许值使得方程组⑩成立，那么方程组⑩就叫做曲线 C 的参数方程. 教材里的这个定义是前面已经反复出现的曲线方程定义在带参数情况下的表述.

教材以炮弹被击发后运动轨迹的推导作为例子，自然引出以时间为参数的参数方程，也给出了消去参数而得到普通曲线方程的过程. 但要注意，不是所有的参数方程都能消去参数而得到普通方程.

在主题二之下有两道例题，即本节的例 4 与例 5.

例 4 中所有去截椭圆的直线都具有 $y=x+b$ 的形式，可将 b 取为参数. 把直线方程和椭圆方程联立，消去 y，得到关于 x 的一元二次方程(带参数 b)，要使直线和椭圆有两个公共点，此方程的判别式必须大于零，从中求出参数 b 应该满足的条件；再回到联立方程，可以循规蹈矩地求出直线和椭圆的两个公共点的坐标(用参数 b 表示)，进而求出以这两个公共点为端点的线段的中点坐标(用参数 b 表示)，这就是所求轨迹的参数方程. 但教材没有真正求出线段端点的坐标，而是用韦达定理给出两个端点的横坐标之和，它的一半就是中点的横坐标，再由直线方程算出中点的纵坐标.

把这个参数方程化成普通方程是很容易的事.

例 5 是参数方程在解题中应用的一个例子，用的是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程

$$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=b\sin\theta, \end{cases} \quad \theta\in\mathbf{R}.$$

验证这是椭圆的参数方程(至少针对 $a=4$，$b=3$ 的情况)是解这道题的前提，要让学生先进行这个验证. 有了上述参数方程后，解题过程纯粹是三角函数的变形了，其中关键的技巧是设定一个锐角 φ 使得

$$4\cos\theta+3\sin\theta=5\sin(\theta+\varphi).$$

该方法不是只针对勾股数 3、4、5 的，可以推广到一般情况：对任意正数 a、b，可以找到锐角 φ 使得

$$\sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

于是

$$a\cos\theta+b\sin\theta=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\varphi\cos\theta+\cos\varphi\sin\theta)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi).$$

参看必修第二册第 33—34 页上的例 10 第(3)小题.

要确定平面上的点，常用平面直角坐标系，但是平面直角坐标系并不是平面上唯一的坐标系. 极坐标系是另一种常见的坐标系，而且对于某些问题的研究(例如第 3 小节作为情境引入的等速螺线和雷达定位)，用极坐标系比使用直角坐标系更为方便.

在平面上给定一点 O(称为极点)和从点 O 出发的一条射线 Ox(称为极轴)，并选定单位长度和旋转角的正方向(一般是逆时针方向)，就在平面上确定了一个极坐标系，平面上一点 M 的位置可以用有序实数对(ρ,θ)(称为点的极坐标)表示，其中 $\rho=|OM|$(称为极径)，θ 是射线 Ox 到射线 OM 的旋转角(称为极角).

必须特别注意的是，点的极坐标不是唯一确定的，有三种情况：(1)如果(ρ,θ)是一点的极坐标，那么$(\rho,\theta+2n\pi)(n\in\mathbf{Z})$都是这一点的极坐标；(2)我们还允许极径取负值，当 $\rho<0$ 时，规定(ρ,θ)所指的点是$(-\rho,\theta+\pi)$；(3)极点的极角可以取任意角.

由于点的极坐标的不唯一性，在极坐标系中曲线的方程的定义要作相应的变形：

在建立了极坐标系的平面上给定一条曲线 C 和含 ρ、θ 的方程 $F(\rho,\theta)=0$，如果(1)以方程 $F(\rho,\theta)=0$ 的解为极坐标的点都在曲线 C 上，(2)曲线 C 上每一点的所有极坐标中，至少有一个极坐标(ρ,θ)是方程 $F(\rho,\theta)=0$ 的解，那么称方程 $F(\rho,\theta)=0$ 是曲线 C 的方程. 注意：其中并不要求一点的所有极坐标满足方程，而只要这点的一个极坐标满足方程.

很容易建立起点的极坐标与直角坐标的互化公式：设平面上一点 M 的直角坐标为(x,y)，极坐标为(ρ,θ)，则

$$x=\rho\cos\theta,\qquad y=\rho\sin\theta;$$

$$\rho^2=x^2+y^2,\quad \tan\theta=\frac{y}{x}(x\neq0).$$

从极坐标求直角坐标，直接套用公式就可以了. 从直角坐标求极坐标时，通常取 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，而从 $\tan\theta$ 的值确定角 θ 时，要参考点 M 所在的象限，通常取满足条件 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的角 θ. 此外，当 $x=0$ 时，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$或 $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$，视 $y>0$ 或 $y<0$ 而定. 如果从直角坐标求极坐标时，还要满足某些额外的要求(如要满足某个方程)，则要在点的所有极坐标中寻找符合要求的坐标，这个问题不做深究.

在主题三之下有 6 道例题，即本节的例 6 至例 11.

例 6 直接套用定义. 注意教材解答中的“可”字，它隐含了这些点的极坐标还有别的取法.

例 7 是求曲线极坐标方程的题，这种题的一般解法是设曲线上点的极坐标为(ρ,θ)，根据题设条件可建立 ρ 与 θ 的关系，即曲线的极坐标方程. 这个过程实际上保证了曲线上每一点至少有一个极坐标满足所得到的方程. 反过来要验证的是以方程的解为极坐标的点都在曲线上(要提醒学生有验证的意识，但有时可省略验证的细节). 本例关系式为 $\rho=2a\cos\theta$，当$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$且 $\theta\neq0$ 时的推导依赖于平面几何的一个定理——直径所对的圆周角是直角；$\theta=0$ 与 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$的情况单独验证可知此关系式也成立. 本例反过来的验证是显然的：在从极点出发且与极轴成角 θ 的射线上只有一点(ρ,θ)满足 $\rho=2a\cos\theta$，而所给的圆上已经有一点满足这个方程了，所以以方程 $\rho=2a\cos\theta$ 的解为极坐标的点只能是圆上的这一点.

例 8 也是求曲线极坐标方程的题，要利用正弦定理建立直线的极坐标方程 $\rho\sin(\varphi-\theta)=a\sin\varphi$，不过要分为点在已知点 $M(a,0)$的上方与下方讨论，两种情况处理方式完全一样；还要验证点 $M(a,0)$也满足这个关系.

当 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$时，所求直线是过点 $M(a,0)$且垂直于极轴的直线，方程变成 $\rho\cos\theta=a$.

例 9 推导等速螺线(或称阿基米德螺线)的极坐标方程. 等速螺线有简单的极坐标方程，但在直角坐标系中它的方程非常复杂，所以研究等速螺线时极坐标系就发挥了不可替代的作用. 本例的质点 M 所做的是极径上的匀速运动和极角的等角速度旋转运动的复合运动，以时间为参数，分别列出极径上的匀速运动和极角的等角速度旋转运动的方程，得到的是质点 M 的运动轨迹在极坐标系下的参数方程，再消去时间参数就得到此运动轨迹的(普通)极坐标方程.

等速螺线在本主题开始部分是作为情境引入的，这道例题之后应回顾情境引入的相关内容，鼓励有兴趣的学生进一步了解等速螺线的性质和应用. 或更进一步，可介绍一些其他螺线(如对数螺线 $\rho=ae^{\theta}$)，鼓励学有余力的学生作为拓展课题去搜集、整理、归纳资料，了解其他常见螺线以及极坐标系和极坐标方程在螺线研究中的作用，撰写小论文.

例 10 求直角坐标系中方程 $x-y=0$ 所表示直线的极坐标方程. 在极径不取负值的约定下，得到两个方程 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 与 $\theta=\frac{5\pi}{4}$，分别表示从极点出发向相反方向的两条射线(极点都在这两条射线上)，合起来才能把直线完全表示出来.但要注意，如果允许极径取负值，那么单个方程 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 或 $\theta=\frac{5\pi}{4}$ 就可以表示整条直线了.

例 11 要求极坐标系中方程 $\rho=4\cos\theta$ 所表示曲线的直角坐标方程. 当 $\rho\neq0$ 时，原方程两端同时乘 ρ，得 $\rho^2=4\rho\cos\theta$，对照直角坐标与极坐标互化的公式得到 $x^2+y^2=4x$，即 $(x-2)^2+y^2=4$，这是以 $(2,0)$ 为圆心、以 2 为半径的圆. 当 $\rho=0$ 时，极坐标方程表示的只有一个极点，在直角坐标系中只有原点 $(0,0)$.

注意事项

1. 本节是带 * 号的教学内容，各校是否进行教学，可根据各校的实际情况而定.

2. 按照曲线方程的定义，求轨迹方程时，三个步骤缺一不可，对于步骤 3，验证以该方程的解为坐标的点都在给定的轨迹上，在推导椭圆、双曲线和抛物线方程的过程中，为避免行文的累赘，没有给出完整推演(教参给出了椭圆情况的反向推演). 一般求轨迹方程时，对反方向验证的过程也常常从略. 这不意味着可以“不必证明”，而只是为降低难度，略去证明过程，但对反过来推演的验证意识不可少，以保证所求轨迹方程符合必备的两个条件.

3. 参数方程教学中，要注重强调有时建立两个变量 x 与 y 之间的直接联系比较困难，甚至不可能，而有些特殊的变量却与 x、y 都有相对比较直接的联系，于是可以借此参数建立两个变量之间的间接联系，从而使学生明确学习参数方程的现实意义. 建立和使用曲线的参数方程应注意：(1)应明确知道参数方程中参数 t 的变化范围(当然也可以是整个实数集 $\mathbf{R}$)；(2)给出参数 t 的一个值后，应能唯一地求出对应 x、y 的值，因而得出唯一的对应点，这样才可以建立曲线的参数方程以探求曲线上点的运动规律；(3)除了时间参数外，还有许多物理量和几何度量也都可以作为参数，要根据实际问题的背景、性质或数学问题的特点来合理地选择参数；(4)除非另行要求，

曲线的参数方程未必都要化为普通方程(有时化为普通方程是“不可能完成的任务”)；(5)曲线参数方程的思想不仅适用于直角坐标系下的曲线方程，也适合其他坐标系(目前学生只了解极坐标系)下的曲线方程，参看例 9.

4. 椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=b\sin\theta, \end{cases} \theta\in\mathbf{R}$$

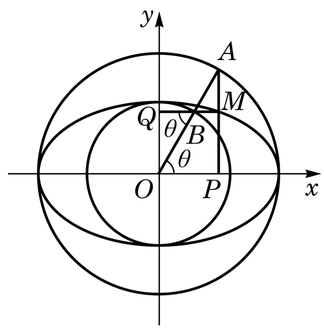


图 2－R6

有很多应用. 例 5 根据椭圆方程的代数特征进行换元的思路导出这个参数方程是比较自然的，但缺憾的是其中的参数 θ 的几何意义没有显现出来. 下面简单说明如何从几何角度导出参数方程. 如图 2－R6，设给定的椭圆是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$，$M(x,y)$是椭圆上的一个点. 以坐标原点为圆心，以 a、b 为半径分别做圆，过点 M 作 x 轴的垂线 MP 与大圆交于点 A，连接 OA 与小圆交于点 B，再过点 B 作 y 轴的垂线 BQ. 记 $\angle POA=\angle QBO=\theta$，则 $x=|OP|=|OA|\cos\theta=a\cos\theta$，$|OQ|=|OB|\sin\theta=b\sin\theta$. 这样，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{|OQ|^2}{b^2}=1$. 因此，$|OQ|=y$，从而直线 BQ 与 AP 的交点是 $M(x,y)$，而 θ 就是椭圆参数方程中的参数.

5. 在极坐标系中，由于点的极坐标的多值性，求曲线的极坐标方程，不可能要求曲线上一点的所有极坐标都满足曲线的方程. 例如，对于给定曲线 $\rho=\theta$，点 $P\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ 在曲线上，但 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right)$ 也是点 P 的极坐标，它却不满足方程 $\rho=\theta$. 所以在极坐标系中，确定一点 P 是否在某一曲线 C：$F(\rho,\theta)=0$ 上，只需点 P 的所有极坐标中有一个极坐标 (ρ_0,θ_0) 满足方程 $F(\rho,\theta)=0$ 即可. 因此，对于极坐标方程，本节开篇所描述的曲线与方程关系必须改成第 3 小节所列的关系.

6. 对于第 4 小节所述的极坐标和直角坐标的互化公式，请注意这一小节所给的三个前提条件：(1)极点与直角坐标系的原点重合；(2)极轴与直角坐标系横轴的正半轴重合；(3)两坐标系的长度单位相同.

7. 本节内容庞杂，每个主题都有很大的扩充余地，教学中把握两点：(1)先保持每个主题的相对独立性，让学生理解体会以后再考虑与其他主题的联系. 例如，参数方程主题的例题、习题应该服务于参数方程的教学，让学生理解参数方程的基本思想和基本操作，不要以多种解答或更简单的解法为由，让参数思想被其他方法的解题所

淹没.（2)每个主题的容量和难度要控制. 特别地，本套教材与上海的“二期课改”教材在相关内容上定位不同，要求差异很大，在课堂教学上不要过多借用“二期课改”教材的内容.

教学建议

本节多主题，每个主题应有不同的教学策略.

主题一是从上一章开始的曲线方程概念理解的第四台阶，是这个概念的总结，并辅以相对集中的训练. 应对这两章相关的内容有个回顾，并强调前面关于这个概念的学习都是依附于直线和圆锥曲线的学习并为其提供基本的理论支撑而进行的. 本小节以“曲线方程”的学习为本体，例题和习题是以深化这个概念的理解而组织的，这是教与学中要加以注意的.

主题二从熟悉的炮弹运动轨迹出发，方程推导中借助时间变量 t 间接地把炮弹运动中点的两个坐标联系起来，顺理成章地给出了参数方程. 这个案例要讲得自然，不要一开始就刻意强调“参数”和“参数方程”，要在方程组

$$\begin{cases} x=v_0 t\cos\alpha, \\ y=v_0 t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2, \end{cases} 0\leqslant t\leqslant t_1$$

导出后，在方程结构的分析中提出参数和参数方程的概念，再作推广，给出抽象的参数方程的概念，进而进行抽象理论的学习和进一步的实践.

这个炮弹飞行轨迹的案例与本节的例题都是可以化为普通方程的. 应向学生指出：普通方程是相对于参数方程而言的，它反映了坐标变量 x 与 y 之间的直接联系；而参数方程是通过参数反映坐标变量 x 与 y 之间的间接联系. 如果参数方程可以化为普通方程，那么普通方程和参数方程是同一曲线的两种不同表达形式，在数学上是等价的表达，但在实际使用上，两种表达有各自的用武之地. 还要强调一下，不是所有的参数方程都可以消去参数得到普通方程，教材举了小虫在平面上爬行的例子，可能会颠覆学生对函数的理解，值得体会.

主题三的教学很重要的一点是要让学生体会极坐标的引进不仅仅是数学理论上追求多样化，更重要的是实践和理论上的许多问题的解决必须依赖极坐标系与极坐标方程的使用. 等速螺线是一个简单且又非常典型的例子，雷达定位也是学生能够理解的. 教材把等速螺线作为情境引入，一开始就介绍了等速螺线的基本特点，由于它把匀角速度的旋转转化为匀速直线运动，在工程、机械上有很多应用，如教材所介绍的心形

转轮. 但是，在直角坐标系中几乎无法研究等速螺线，而引进极坐标系以后，等速螺线的形式简单，推导容易. 教学中要用好等速螺线的例子，从一开始引进作为情境，再到后面的例 9 回到这个例子，圆满地解决了它的方程问题. 应以这个例子激发学生学习极坐标系的兴趣.

要让学生体会极坐标系与直角坐标系的相仿与相异之处. 相仿之处是都要用两个实数确定一个点(这应与平面的维数为 2 联系起来)，而主要相异之处是在极坐标系中点和它的坐标不是一一对应的，一个点有不同的极坐标. 这个相异之处使得在极坐标系中曲线方程的定义要适当调整：一个点在曲线上只要求点的一个(而不是所有)极坐标满足曲线方程.

掌握点的直角坐标和极坐标的互化公式，并能用于进行一些曲线的直角坐标方程和极坐标方程的互化. 但也要让学生理解，并不是所有曲线的方程都能方便地进行两种坐标系下的互化，特别是从极坐标方程转化为直角坐标方程要涉及反三角函数，形式复杂且不实用.

参数方程和极坐标都是平面解析几何的重要内容，是进一步学习数学的基础，很多实际问题也需要用参数方程和极坐标来解决. 与“二期课改”教材不同，为降低难度，按照课程标准的要求，这两部分内容不再独立成章，且确定为选学内容. 在教学时，可根据学情需要灵活处理：既可以作为拓展内容，进行点拨式的介绍；也可作为课外阅读材料，供有兴趣的学生在自主学习的基础上，开展相关的小课题研究等.

三、参考答案或提示

2.1 圆

练习 2.1(1)

1. $(x-3)^2+(y-4)^2=53$.

2. $(x+1)^2+(y-2)^2=13$.

3. $(x-5)^2+(y-4)^2=25$.

练习 2.1(2)

1. $x^2+y^2-5x-y+4=0$.

2. 当 $\lambda=-1$ 时，表示直线 $x-y=0$；当 $\lambda\neq-1$ 时，表示以$\left(\dfrac{\lambda}{1+\lambda},\dfrac{1}{1+\lambda}\right)$为圆心，以$\dfrac{\sqrt{1+\lambda^2}}{|1+\lambda|}$为半径的圆.

3. $x^2+y^2-\dfrac{25}{2}x+25=0$.

练习 2.1(3)

1.（1）$3x-4y+25=0$.　（2）$x=2$ 或 $3x-4y+10=0$

2.（1）$-2<a<2$.　（2）$a=2$ 或 $a=-2$.　（3）$a>2$ 或 $a<-2$.

3. $x+y-2=0$ 或 $7x+17y+26=0$.

练习 2.1(4)

1. 当 $m=\dfrac{7}{2}$时内切，当$\dfrac{7}{6}<m<\dfrac{7}{2}$时相交.

2. $\left(x-\dfrac{24}{5}\right)^2+\left(y+\dfrac{18}{5}\right)^2=1$.

3. $\sqrt{10}$.

习题 2.1

A 组

1.（1）$\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+(y-3)^2=3$.　（2）$(x-\sqrt{2})^2+(y-1)^2=6$.　（3）$(x-3)^2+(y-1)^2=5$ 或 $(x-3)^2+(y+1)^2=5$.

2.（1）$a^2+b^2=r^2$.　（2）$b=0$.　（3）$|b|=r$.　（4）$|a|=|b|=r$.

3. $(x-4)^2+(y-5)^2=10$.

4. $a=-1$.

5. $x-y+1=0$.

6. $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}(a^2+b^2)$.

7. 相切.

8. $3x-2y-3=0$.

9. $\left(x-\dfrac{12}{5}\right)^2+\left(y+\dfrac{16}{5}\right)^2=1$.

10. $(x+2)^2+(y+3)^2=13$.

11. 3.86 m.

B 组

1. $2x+3y-13=0$.

2. $(x-1)^2+(y+2)^2=2$ 或 $(x-9)^2+(y+18)^2=338$.

3. $2\sqrt{7}$.

4. $(x-4)^2+(y-3)^2=8$.

5. $x^2+y^2-y=0$.

6. $x=5$ 或 $y=-5$.

7. $[1,\sqrt{2})$.

8. $3\sqrt{2}$.

9. $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.

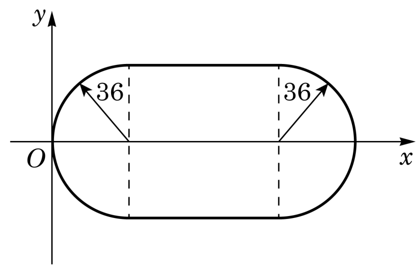


图 2－R7

10.（1）87 m.　（2）建立如图 2－R7 所示的平面直角坐标系，则所求的函数表达式为 $y=\begin{cases}\sqrt{72x-x^2}, & 0\leqslant x<36, \\ 36, & 36\leqslant x\leqslant 236-36\pi, \\ \sqrt{1\,296-(x-236+36\pi)^2}, & 236-36\pi<x<272-36\pi.\end{cases}$

2.2　椭圆

练习 2.2(1)

1.（1）$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.　（2）$\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{x^2}{32}=1$.　（3）$y=0(-4\leqslant x\leqslant 4)$.

2.（1）$\dfrac{y^2}{16}+x^2=1$.　（2）$\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$ 或 $\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{5}=1$.

练习 2.2(2)

1.（1）长轴长 4，短轴长 $2\sqrt{3}$，焦点坐标为 $(-1,0)$、$(1,0)$，顶点坐标为 $(2,0)$、$(-2,0)$、$(0,-\sqrt{3})$、$(0,\sqrt{3})$.

（2）长轴长 10，短轴长 4，焦点坐标为 $(0,-\sqrt{21})$、$(0,\sqrt{21})$，顶点坐标为 $(-2,0)$、$(2,0)$、$(0,-5)$、$(0,5)$.

2.（1）第 2 个椭圆更接近于圆.　（2）第 2 个椭圆更接近于圆.

3. $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$.

练习 2.2(3)

1. 10，2.

2. 40.

3. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$或$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

习题 2.2

A 组

1. $(0,16)$.

2. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

4. $b=2$ 或 $b=-2$.

5. $[1,5)\cup(5,+\infty)$.

B 组

1. (1) $3\sqrt{3}$.　　(2) 90°.

2. $\dfrac{x^2}{(5.9\times10^8)^2}+\dfrac{y^2}{(5.8\times10^8)^2}=1$.

2.3　双曲线

练习 2.3(1)

1. (1) $y=0(x\geqslant5)$.　　(2) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1(x\geqslant4)$.　　(3) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

2. 16.

3. 9.

练习 2.3(2)

1. (1) 实半轴长 4，虚半轴长 3，离心率为$\dfrac{5}{4}$，焦点坐标为$(-5,0)$、$(5,0)$，顶点坐标为$(-4,0)$、$(4,0)$，渐近线方程为 $y=\dfrac{3}{4}x$ 和 $y=-\dfrac{3}{4}x$.

(2) 实半轴长 2，虚半轴长$\sqrt{3}$，离心率为$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，焦点坐标为$(0,-\sqrt{7})$、$(0,\sqrt{7})$，顶点坐标为$(0,-2)$、$(0,2)$，渐近线方程为 $y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x$ 和 $y=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x$.

2. A.

3. 是.

练习 2.3(3)

1. (1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{3}=1$.　　(2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

2. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda>0)$.

3. 提示：叙述双曲线的对称性、顶点、范围、离心率、渐近线五个性质.

习题 2.3

A 组

1. 22.

2. $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 或 $y^2-\frac{x^2}{2}=1$.

3. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 或 $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$.

4. $(-\infty,-2)$.

5. $2x^2-y^2=1$.

B 组

1. $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$.

2. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

3. 北偏东 30°.

2.4　抛物线

练习 2.4(1)

1. 略.

2. (1) $y^2=-8x$.　　(2) $x^2=-4y$.

3. $(8,4\sqrt{2})$或$(8,-4\sqrt{2})$.

练习 2.4(2)

1. B.

2. $\frac{19}{20}$.

3. $\left(\frac{1}{4},0\right)$，$x=-\frac{1}{4}$.

习题 2.4

A 组

1. $\left(\frac{a}{4},0\right)$，$x=-\frac{a}{4}$.

2. 2.

3. $x^2=-12y$.

4. $k=0$ 或 $k=-\frac{1}{2}$.

5. 以隧道顶部为坐标原点，过顶点的铅垂线所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系，有 $x^2=-5y$.

B 组

1. $y^2=4x$ 或 $y=0(x<0)$.

2. 证明略.

3. 证明略.

*2.5 曲线与方程

练习 2.5(1)

1. (1) 否.　(2) 否.　(3) 是.

2. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1(y\neq 0)$.

3. $y=2x^2-12x+\frac{39}{2}$.

练习 2.5(2)

1. 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

2. $\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}\cos\theta,\\ y=\frac{1}{2}\sin\theta\end{cases}(\theta\in\mathbf{R})$.

3. $\begin{cases}x=1+9t,\\ y=1+12t\end{cases}(t\geqslant 0)$.

练习 2.5(3)

1. （1）$A\left(3,\dfrac{\pi}{2}\right)$、$B\left(4,\dfrac{5\pi}{6}\right)$、$C\left(5,\dfrac{\pi}{12}\right)$、$D\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{7\pi}{6}\right)$、$E\left(1,\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

（2）$A\left(-3,\dfrac{3\pi}{2}\right)$、$B\left(-4,\dfrac{11\pi}{6}\right)$、$C\left(-5,\dfrac{13\pi}{12}\right)$、$D\left(-\dfrac{7}{2},\dfrac{\pi}{6}\right)$、$E\left(-1,\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

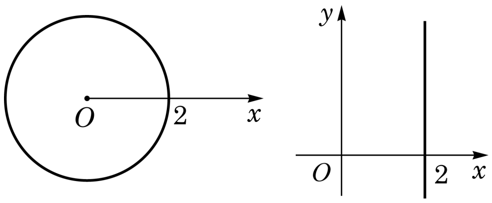
2. A 和 B 关于极轴对称，A 和 C 关于极点对称.

练习 2.5(4)

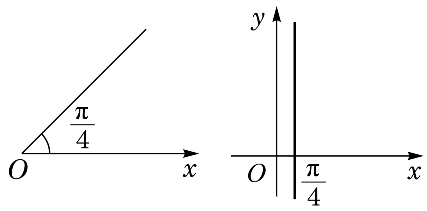
1. $\rho\cos\theta=a\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. （1）$\rho=a(\theta\in\mathbf{R})$.　　（2）$\rho=2a\sin\theta(\theta\in\mathbf{R})$.

3. （1）



（2）



练习 2.5(5)

1. （1）$(\sqrt{3},1)$.　　（2）$\left(2,\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

2. $\rho=2a\sin\theta$.

3. $x^2+y^2=x+y$.

习题 2.5

A 组

1. 略.

2. 证明略.

3. $k=3$ 或 $k=-2$.

4. $x^2+y^2=4$.

5. $x^2+y^2=16$.

6. 证明略.

7. $(3y-1)^2=6x-2$.

8. $\rho\sin\theta=2(0<\theta<\pi)$.

9. $\sqrt{2}$.

B 组

1. 略.

2. $3x-y+1=0$.

3. 证明略.

4. $\dfrac{2\sqrt{10}+2\sqrt{5}}{5}$.

5. 轨迹方程为$(1-k^2)x^2+y^2+4(4k^2-1)x=64k^2-4$.

当 $k=0$ 时，表示一个点$(2,0)$；当 $0<k<1$ 时，表示椭圆；当 $k=1$ 时，表示抛物线；当 $k>1$ 时，表示双曲线.

6. $\left(-\dfrac{2\sqrt{13}}{13},\dfrac{2\sqrt{13}}{13}\right)$.

7. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

复习题

A 组

1. (1) 错误.　(2) 正确.　(3) 错误.

2. 相切.

3. (1) 错误.　(2) 正确.　(3) 正确.

4. $a=1$ 或 $a=-1$.

5. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

6. $(x-3\sqrt{5})^2+y^2=9$.

7. $\dfrac{3}{2}$.

8. $x^2+9y^2=4$.

9. 证明略.

10. (1) $x-y+\sqrt{2}=0$ 或 $x-y-\sqrt{2}=0$.　(2) $x-y+\sqrt{2}=0$ 或 $x+y-\sqrt{2}=0$.

11. C.

12. $x^2+\dfrac{4y^2}{3}=1$.

B 组

1. $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}(x\neq 0)$.

2. 9.

3. 3.

4. 0 或$-\dfrac{1}{2}$.

5. $k<0$ 时，表示焦点在 y 轴上的双曲线；当 $k=0$，表示两条平行直线；当 $0<k<1$ 时，表示焦点在 x 轴上的椭圆；当 $k=1$ 时，表示圆；当 $k>1$ 时，表示焦点在 y 轴上的椭圆.

6. 当$\dfrac{a}{b}\geqslant\sqrt{2}$时，弦 BP 的最大值为$\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$；当$1<\dfrac{a}{b}<\sqrt{2}$时，弦 BP 的最大值为 $2b$.

7. 2.

8. $4.6h$，$5h$.

拓展与思考

1. $y^2=k(x^2-36)$. 当 $k=0$，表示直线 $y=0$；当 $k>0$ 时，表示焦点在 x 轴上的双曲线；当$-1<k<0$ 时，表示焦点在 x 轴上的椭圆；当 $k=-1$ 时，表示圆；当 $k<-1$ 时，表示焦点在 y 轴上的椭圆.

2. 焦点坐标为$(\sqrt{2},\sqrt{2})$和$(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

3. 略.

4. 点 P 的轨迹方程为$\left(\dfrac{4x^2}{25}+\dfrac{4y^2}{9}-1\right)\left(\dfrac{4x^2}{9}-\dfrac{4y^2}{7}-1\right)=0$，$x\in\left(-\infty,-\dfrac{15}{8}\right)\cup\left(-\dfrac{15}{8},+\infty\right)$，即点 P 的轨迹为椭圆和双曲线组成的图形$\left(\text{不包括点}\left(-\dfrac{15}{8},\dfrac{3\sqrt{7}}{8}\right)、\left(-\dfrac{15}{8},-\dfrac{3\sqrt{7}}{8}\right)\right)$.

四、相关阅读材料

参考文献

[1] 阿波罗尼奥斯. 圆锥曲线论(卷Ⅰ-卷Ⅳ)第 2 版[M]. 朱恩宽，等译. 西安：陕

西科学技术出版社，2018.

[2] 阿波罗尼奥斯. 圆锥曲线论(卷Ⅴ-卷Ⅶ)[M]. 朱恩宽,等译. 西安：陕西科学技术出版社，2014.

[3] 刘连璞. 平面解析几何方法与研究第 1 卷[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.

[4] 刘连璞. 平面解析几何方法与研究第 2 卷[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.

[5] 刘连璞. 平面解析几何方法与研究第 3 卷[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.

附　　录

二次曲线的分类

学了椭圆(包括圆)、双曲线和抛物线之后，对二次曲线似乎有盲人摸象之感，难以获得全貌. 事实上，这三类曲线已经是二次曲线的主体了，其余的无非是一些退化的曲线或者虚曲线. 为让教师能接触更高的观点，更好地把握本章的内容，特引用谷超豪主编的《数学词典》(上海辞书出版社 1992 年版)第 177 页的内容，但把原书表格中的最后一列“化简后的方程”改为“标准方程”，没有强调化简后的方程与二次方程的不变量、半不变量的关系. 这些内容仅供教师参考，不能作为教学内容.

在平面直角坐标系中，x、y 的二次方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

(其中 $A^2+B^2+C^2\neq 0$)所表示的曲线称为二次曲线. 利用二次曲线平移、旋转的不变量 $H=A+C$，$\Delta=B^2-4AC$，

$$\Theta=\begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}$$

和半不变量 $K=D^2+E^2-4AF-4CF$，可对二次曲线分类如下表：

<table>
<tr><th>型别</th><th colspan="2">判定条件</th><th>类别</th><th>标准方程</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$\Delta<0$
椭圆型</td><td rowspan="2">$\Theta\neq0$</td><td>$H\Theta<0$</td><td>椭圆</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$</td></tr>
<tr><td>$H\Theta>0$</td><td>无轨迹
（虚椭圆）</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Theta=0$</td><td>点椭圆</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta>0$
双曲型</td><td colspan="2">$\Theta\neq0$</td><td>双曲线</td><td>$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Theta=0$</td><td>两相交直线</td><td>$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\Delta=0$
抛物型</td><td colspan="2">$\Theta\neq0$</td><td>抛物线</td><td>$y^2=2px$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\Theta=0$</td><td>$K>0$</td><td>两平行直线</td><td>$y^2=a^2(a\neq0)$</td></tr>
<tr><td>$K=0$</td><td>两重合直线</td><td>$y^2=0$</td></tr>
<tr><td>$K<0$</td><td>无轨迹
（两虚平行直线）</td><td>$y^2=-a^2(a\neq0)$</td></tr>
</table>

第 3 章　空间向量及其应用

一、本章概述

总体要求

我们生活在三维空间中，空间向量或者说三维空间中的向量理论是从几何直观角度讲述向量的最高境界了. 空间向量知识是平面向量知识的延伸与拓展，从概念理解到问题解决，或可直接化归到平面向量，或可对平面向量的理论进行类比与提升. 因此，本章的学习，特别要帮助学生在复习平面向量的基础上，理解空间向量的概念、运算、基本定理和应用，体会平面向量和空间向量理论上的一脉相承，掌握它们的共性和差异.

正如必修课程第 8 章“平面向量”的章首语所说，向量理论“可把有关的几何问题简便地转化为相应代数问题来处理”. 在“平面向量”一章，由于只能处理平面上的问题，学生对向量这一化几何问题为代数问题的神奇功能和强大威力可能体会还不深刻. 本章中，向量将为处理立体几何问题展现新视角，把许多三维空间中的逻辑推理和度量问题归结到向量的计算，使向量方法成为研究几何问题的有效工具. 因此，本章学习的另一个要求是，使学生能运用空间向量方法研究空间基本图形的位置关系和度量问题，体会向量方法和纯几何方法在研究立体几何问题中的共性与差异，进一步发展空间想象能力和几何直观能力.

课时安排建议

本章的课时安排建议为 10＋2，共计 12 课时. 建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
3.1 空间向量及其运算	2	

（续表）

章节名	建议课时	具体课时分配建议
3.2 空间向量基本定理	2	向量共面的充要条件　1课时
		空间向量基本定理　1课时
3.3 空间向量的坐标表示	2	空间直角坐标系　1课时
		空间向量的坐标表示　1课时
3.4 空间向量在立体几何中的应用	4	判断空间直线、平面的位置关系　1课时
		求距离　1课时
		求角的大小　2课时
复习与小结	2	

内容编排与特色

本章内容共分为四节，分别是 3.1 空间向量及其运算，3.2 空间向量基本定理，3.3 空间向量的坐标表示，3.4 空间向量在立体几何中的应用. 其中，前三节建立起空间向量的基本理论，最后一节介绍空间向量的应用.

“3.1 空间向量及其运算”没有按常规给出空间向量及其运算的定义，证明相关的性质，而是采用直接引用平面向量内容的方法，把貌似庞杂的空间向量及其运算的内容快速地在一节内解决. 这里的逻辑是：(1)单个向量的问题无所谓“平面”与“空间”，所以向量的定义、向量的模、单位向量、零向量、负向量以及向量的数乘运算等定义和性质都可以直接套用平面向量的内容；(2)共面向量的问题都可以归结为平面向量问题，特别地，因为两个向量一定共面，所以只涉及两个向量的问题可以直接用平面向量理论解决，这样就可以定义平行向量、相等向量、向量的加减法和向量的数量积；(3)与上述定义相关的一些性质(如向量加法的结合律、向量加法的“首尾规则”、向量的数量积对向量加法的分配律)，虽然涉及三个向量，但“局部地”看待问题，都可以化归到共面的情况.

空间向量理论中直接可以化归到平面向量的内容基本都囊括在 3.1 节中，3.2 节和 3.3 节所涉及的是不能直接化归的主题. 但这样的主题也不是与平面向量毫无关系，而是在平面向量理论的基础上进行类比与提升.

“3.2 空间向量基本定理”所涉及的空间向量基本定理就是必修课程 8.3 节第 1 小节“(平面)向量基本定理”的类比与提升. 第 1 小节“向量共面的充要条件”实际上是必修课程中平面向量基本定理的复习与(在空间向量背景下的)再现，并为第 2 小节“空间向量基本定理”的证明作一些准备. 通过与平面向量的类比，第 2 小节给出了“空间向量基本定理”并加以证明. 由于有了“空间向量基本定理”，我们才可能建立空间向量的坐标表示.

“3.3 空间向量的坐标表示”，为了建立空间向量的坐标表示，我们必须有三维空间的坐标系. 这本是数学体系的“基本建设”，独立于向量内容，但由于空间解析几何不是本套教材的内容，空间坐标系的内容在此之前没有出现过，因此我们不得不花一小节做补缺补漏工作，这就有了以“空间直角坐标系”为标题的 3.3 节第 1 小节. 空间直角坐标系是平面直角坐标系的拓展. 教材以正方体为基本模型，采用“右手制”方法构建空间直角坐标系，并定义了必须的相关概念，特别是建立了空间中的点与实数的有序三元组的一一对应关系，于是有了空间中点的坐标的概念. 有了这一“基本建设”之后，3.3 节第 2 小节就进入了“空间向量的坐标表示”主题. 仿照平面向量的坐标表示，利用空间向量基本定理，把空间的向量都表示成了坐标轴正方向上的单位向量的线性组合，其系数就给出了空间向量的坐标表示. 与平面向量的坐标表示类比，空间向量的和差、数乘、模以及数量积均有简洁的坐标形式，并进一步推出空间两点的距离公式、空间向量夹角的余弦公式，给出空间向量平行、垂直的充要条件，为后续解决立体几何问题奠定了基础.

“3.4 空间向量在立体几何中的应用”介绍了空间向量在立体几何基本问题中的应用. 前面已经学习了两向量平行、垂直的判断及向量共面内容，在此基础上，本节着重关注“判断空间直线、平面的位置关系”“求距离”和“求角的大小”三类问题.

把几何问题转化为向量问题的关键是找出与几何对象密切相关的向量，本节的引言指出了这些相关向量：直线的方向向量和平面的法向量. 第 1 小节“判断空间直线、平面的位置关系”就是把线线、线面和面面的垂直或平行的判定归结到相关向量的垂直或平行的判定. 第 2 小节“求距离”包含了求点到平面的距离、平面的平行线到平面的距离以及平行平面间的距离，其中关键是点到平面的距离，其余的都可归结到这种

情况. 给定点 A 与平面 α，在 α 上任取一点 B，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与平面 α 的单位法向量数量积的绝对值就给出了点 A 到平面 α 的距离，这样我们就解决了上述所有的求距离问题. 第 3 小节“求角的大小”包括线线(含异面直线)所成的角、线面所成的角和面面所成的角(即二面角)的问题. 利用直线的方向向量和平面的法向量，将这些问题都转化为向量的夹角问题，但这个夹角与原来要求的角的关系要分类讨论.

教学提示

本章的教学中，注意与必修课程第 8 章“平面向量”的密切联系，在进一步回顾和体会“平面向量”内容的基础上，分析哪些知识可以直接转移到空间向量的语境，哪些知识必须加以改造以适合空间向量的语境. 从这个视角展开这一章的学习，可以做到事半功倍，高屋建瓴，让学生站在理论体系的高度理解和掌握所学的知识.

在对平面向量理解的基础上，获得空间向量的概念，建立从平面向量到空间向量的双向通道：一是“向上”的通道，即把向量的定义、向量的模、零向量、相等向量、平行向量、负向量、单位向量等概念以及向量的加、减、数乘、数量积等运算的定义直接提升到空间向量的语境，理解这种提升的合理性和数学上的严格性；二是“向下”通道，只要是共面向量的问题，都可以用平面向量的理论和方法予以解决. 特别地，任意两个向量都是共面的(所以没有“异面向量”概念，与立体几何有很大的差别，让学生想想为什么)，任何只涉及两个向量的问题都是平面向量问题.

理解空间向量基本定理和空间向量的坐标表示不可能直接归结为平面向量的问题，但学生并不缺乏从二维平面到三维空间的经验，可以让他们从平面向量的问题中获得启发，想象空间向量语境下对应结论的表述，然后教师和学生一起完成从平面到空间的拓展和推广. 这也是一个“向上”的通道.

在向量的理论学习时就要让学生注意到向量既有几何特征也有代数特征，让学生理解把向量的几何特性(平行、垂直、夹角等)转化为坐标的计算就是一种数形结合的思想. 在此基础上，解决几何问题时，让学生找到关键的向量，把几何论证和度量问题转化为向量的问题，通过与向量相关的推理和计算，解决几何问题，这是 3.4 节的基本内容和基本方法. 这个方法常常被称为解决几何问题的“向量方法”，它往往比纯粹几何方法更简洁、更有效. 但在教学中，要避免学生只关注于程序化的向量计算，

而忽略几何问题的实质和所提供的空间观念的训练.

评价建议

要注意学生对平面向量知识的复习，然后在从平面走向空间的学习过程中，注重空间观念的进一步形成和用向量方法解决几何问题的观念的建立.

空间向量理论的基本框架完全平行于平面向量理论，因此要考查学生对于向量的概念、向量的线性运算、向量的数量积，以及空间向量基本定理与空间向量的坐标表示等方面知识的掌握情况. 向量共面要得到足够的重视，考查学生是否能灵活应用共面概念，把空间向量的问题化归为平面向量问题来讨论. 空间向量的学习要继续平面向量学习过程中对数学抽象、逻辑推理、数学运算、直观想象等数学学科核心素养的培养，聚焦于这些素养的考查.

空间向量与立体几何有密切的联系，要关注学生在解决立体几何问题中向量工具正确、有效的使用，能把教材所列举的几类立体几何问题转化为向量问题，以向量的运算研究点、线、面之间的位置关系或距离与角度，用运算结果解释几何意义.

二、教材分析与教学建议

3.1 空间向量及其运算

教学重点

通过平面向量的复习，让学生建立起平面向量和空间向量的密切联系，把平面向量上已经建立起来的向量概念及其运算的知识迁移到空间向量. 向量共面的概念在本节第一次提出，下一节还会深入学习. 本节要让学生明白，“共面”是把空间向量问题归结为平面向量处理的关键. 还要让学生理解任意两个向量都是共面的(让学生讲出为什么，要让他们体会空间向量理论与立体几何的差异).

内容分析

让学生回忆必修课程 8.1 节关于向量的定义是很有意义的. 那里给向量下定义有

一个从描述性到比较严格的数学定义的“三部曲”：第一步是描述性的“既有大小又有方向的量”；第二步明确地说“一个向量由两个要素定义，一是它的大小(一个非负实数)，一是它的方向”(这一章的教学参考资料中用更数学化的术语“二元组”把这句话演绎成严格的数学定义了)；第三步是给出向量的几何表示，即用有向线段来表示向量，使向量的研究有一个几何的基础. 回忆这个过程不是简单地复习旧知识，而是提醒学生注意整个“三部曲”不是只给“平面向量”下定义，而是给“向量”下定义，因此这个定义同等地适用于空间的任何向量. 至于在“平面向量”章名下研究的是什么，在必修课程 8.1 节有交代：“本章只研究在一个平面上的向量，就是要求所涉及的所有向量都能用同一个平面上的有向线段表示出来.”

从这个回顾可以看出：

(1) 单个向量的问题无所谓“平面”与“空间”，所以向量的定义、向量的模、单位向量、零向量、负向量以及向量的数乘运算等定义和性质都可以直接套用平面向量的内容.

(2) 多个向量只要在一个平面上，就可以归结为平面向量问题. 因此，自然引入“共面向量”的概念. 特别地，任意两个向量都是共面的. 这样，只涉及两个向量的问题都是平面向量问题，所以平行向量、相等向量、向量的加减法和向量的数量积都可以从平面向量中直接借用.

(3) 要证明一些运算的规律和性质，有时仅讨论两个向量是不够的，因为难以保证所涉及的向量共面，所以关于平面向量的结论不能直接套用到空间向量上，比较典型的例子有向量加法结合律以及向量的数量积对向量加法的分配律. 这些问题的解决要靠“局部”的方法，即先考虑涉及的两个向量的问题，忽略其他向量，得出关于两个向量的中间结果后，再加入向量继续讨论. 本册教材第 96—97 页给出了向量加法结合律的证明，请教师细细体会这里“局部”一词的意义. 将证明加法结合律的方法略加推广，就证明了空间向量加法的“首尾规则”.

在教材中，向量的数量积对向量加法的分配律的证明是作为一道练习题(练习 3.1(2)的第 2 题)留给学生. 这道题的证明可以照搬平面的情形：必修第二册第 112 页上的例 2 完全适合于空间向量的情形(只要把图 8-2-5 中$\triangle OBC$看成空间的三角形

就可以了)[①]，然后照搬第 113—114 页上向量数量积对加法的分配律的证明.

本节共安排 4 道例题.

例 1 在正方体中体现空间相等向量、负向量，体现向量的加法运算与“首尾规则”，结果都不难，但是要求对前面知识进行系统复习. 特别注意，第 (3)小题是开放题，虽然教材提供了两个答案，但教师可以在课堂上营造学生参与的机会，让学生学得生动活泼，也能提出更多的例子来阐释本节的基本概念.

例 2 要求用长方体中从一个顶点 A 出发的三条边所对应的向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$的线性组合分别表示四个向量，既是本节向量线性运算的问题，也是下一节空间向量基本定理的预演. 如果课堂时间允许，教师可以提出一些对下一节内容有启发性的思考题，例如：“少了 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$中的一个向量，是否还可以把所有这些向量都表示出来?”“所有这些线性组合的式子是不是唯一的?”

例 3 是向量数量积的问题. 因为空间任意两个向量共面，所以这些问题本质上和平面向量问题是一样的. 但在空间情境下，向量之间的关系更为复杂，对学生空间感也有一定的要求. 同时，还要注意本例 4 个小题难度设置上的递进：第(1)小题在相关向量的模与夹角求出后，直接套用向量数量积的公式即可；第(2)小题要把向量分解成和式，然后使用数量积对向量加法的分配律；第(3)小题在第(2)小题的基础上再

---

① 这里要把必修第二册第 111 页第一段中投影向量的定义直接推广到空间向量的情形. 这个定义其实隐含着有向线段投影的一个简单性质：有向线段的平移不影响投影的大小与方向. 只有这样，才可能把有向线段的投影直接定义为它所表示的向量的投影. 这在平面情形是个很显然的事实，所以在必修第二册讲述平面向量时并没有在此花费笔墨. 在三维空间的情形，如果碰到被投影有向线段和投影的目标直线异面时，这一性质并不是一目了然，因此可能会有教师或学生质疑必修第二册第 111 页的定义直接用到空间向量的合理性. 这里简述一个论证. 如图 3 - R1，要把有向线段 AB 投影到直线 l 上，我们过点 A 与点 B 分别作垂直于直线 l 的平面 α 与 β，两平面与直线 l 分别交于点 A'与点 B'，那么有向线段 AB 在直线 l 上的投影是 $A'B'$. 我们把 AB 平移到与直线 l 共面的位置上，如果投影不变，那么把问题归结到平面的情形了. 过点 A'作有向线段 $A'B''$平行于有向线段 AB，交平面 β 于点 B''，则由 $\alpha /\!/ \beta$,可推得 $AA' /\!/ \beta$，再推得 $AA' /\!/ BB''$. 于是四边形 $AA'B''B$ 是平行四边形，从而有向线段 $A'B''$是有向线段 AB 的平移. 但有向线段 $A'B''$在直线 l 上的投影依然是 $A'B'$. 这是我们所需要的结果.

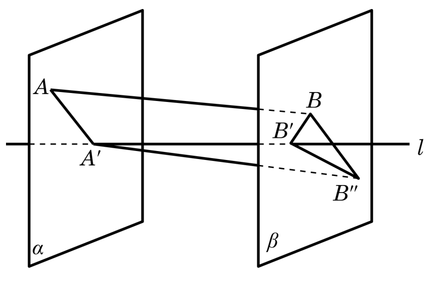


图 3 - R1

这个证明供教师参考，不必作为课堂的教学材料或课后的阅读材料. 学生可以直接承认投影向量定义的推广.

用数量积公式来求向量所成的角；第(4)小题要用向量的数量积来证明向量的垂直. 第(4)小题还可以利用立体几何中的三垂线定理证明，这可让学生体会空间向量与立体几何的互相影响和渗透.

例 4 是一个纯立体几何的题目，要在一个平行六面体中证明三点共线. 设置此例题的目的是让学生尝试几何问题和向量问题的互相转换以及向量计算在几何证明中的作用. 启发学生从求证三点共线转为求证两向量平行，即证明其中一个向量是另一个向量的数量倍数. 要得到这种倍数关系，在例 2 启发下把所涉及的两个向量都表示成从一点出发的三条边向量的线性组合就是顺理成章的事了.

注意事项

尽管空间向量的定义、表示方法及相关概念都由平面向量的复习直接引入，但要尽量结合空间图形对相应的概念和运算加以阐释，加强学生的空间体验，由向量及其运算的表述与图形的互相转换，加深对空间向量的理解.

没有异面向量的概念，即任意两个向量都是共面的. 但是，表示两个向量的有向线段可以是异面的，因此教学中要特别厘清向量和表示向量的有向线段的区别；面对与向量相关的问题，要善于找出更方便的有向线段来表示向量，使问题解决过程更为简单. 另外，几何上的异面直线问题，用向量方法求解时就没有“异面”的障碍，解题也会更直截了当(如例 3 第(3)小题，如果题目改为求线段 AE 与 C_1A_1 所成的角，就是异面直线问题了，但用向量表达的原题就没有涉及异面直线).

向量平行的充要条件(亦可称为“共线向量定理”)与平面情形完全一样(参看必修第二册第 105 页)，本章教材重述的一个重要的目的是为了紧随其后的例 4 的应用. 必须注意的是，这里的“平行”指的是向量意义下的平行，如考虑表示向量的有向线段的平行问题，还要把重合的情况排除掉. 事实上，例 4 证明了两个向量平行后，由于相应的有向线段有公共的起点，因此它们是重合的.

对向量的数量积谈结合律是没有意义的，而不是满足不满足结合律的问题. 这在必修第二册第 113 页的边框中已经说得很清楚了. 还要注意同一个边框中说的，向量的数量积不满足消去律. 消去律的不成立可以用一个极端的反例让学生有更深刻的体会：两个互相垂直的向量的数量积是 0，如果消去律成立，就会导致其中某个向量一定是零向量，这显然是荒唐的.

教学建议

引导学生用类比的方法，经历向量及其运算由平面向空间推广的过程. 由平面向量相关内容的复习，推广到空间向量的相应内容，这个过程尽量让学生直接参与，而不是疾风暴雨式地把所有内容灌输给学生.

3.2　空间向量基本定理

教学重点

了解从“(平面)向量基本定理”到“向量共面的充要条件”的转化，并进一步到“空间向量基本定理”的推广. 体会“向量共面”在解决向量问题中的作用，理解空间向量基本定理的内涵，并能解决相关的问题.

内容分析

上一节把空间向量的概念和运算通过“共面向量”转化为平面向量问题，借用平面向量理论使学生快速地建立起了空间向量理论的基本框架. 通过上一节的学习，学生应当能够体会“共面向量”在解决空间向量问题时的重要作用. 本节教材趁热打铁，仍从“向量共面”入手，先介绍“向量共面的充要条件”.

“向量共面的充要条件”本质上是“(平面)向量基本定理”在空间向量语境中的表述，因此“向量共面的充要条件”这一小节既是必修课程 8.3 节第 1 小节的“(平面)向量基本定理”的复习，也是后续介绍和证明“空间向量基本定理”的铺垫.

“空间向量基本定理”是“(平面)向量基本定理”在空间情形的推广，它的条件和结论都是“(平面)向量基本定理”的类比，学生在理解上不会有大的困难. 这个定理是下一节“空间向量的坐标表示”的理论基础，必须加以重视.

本节共安排 3 道例题.

例 1 是“向量共面的充要条件”的直接应用，要求在一个长方体内判断三个有向线段表示的向量是否共面，其方法是通过一些直观的线性组合关系和向量的运算，得到三个向量中的一个是其余两个的线性组合，从而它们共面.

本例虽然简单，但教师要“借题发挥”，给学生一些启发. 一是，空间中的几何直观对解题很重要，学生要在学习过程中培养；二是，向量的共面不是立体几何中的线段的共面，要特别注意.

例 2 给出了空间线面垂直判定定理的向量证明方法，利用向量共面的充要条件和

互相垂直向量的数量积为零的结论，比较简单地证明了空间线面垂直判定定理.

本例是向量方法在立体几何中的一个应用，可以看出向量方法有时有明显的优势. 除了这个例题外，上一节的例 4 也是几何问题的向量解法. 又如，立体几何中的四点共面就可以用“向量共面的充要条件”加以解决：从四点中的一点出发，分别作连接其余三点的三个向量，则四点共面当且仅当所得到的三个向量共面.

例 3 是在正四面体中，用三个不共面的棱向量的线性组合表示其他棱向量和高向量的问题. 本例解题过程开放，答案多样，提供学生理解和熟悉“空间向量基本定理”的机会. 注意，题目要求所选的三个不共面向量所在的棱可以有公共点,也可以没有公共点. 当然，对于三个不共面向量而言，总可以平移到有公共端点的位置，但对本例而言，这样的平移未必是解题的最佳方案. 依托正四面体的几何结构，找出向量之间的关系，是更为直截了当的.

注意事项

本节中的“空间向量基本定理”是在最一般的意义下叙述的，没有给三个不共面向量添加额外的要求，不要求它们互相正交，也不要求它们是单位向量. 从这个角度看，这个定理远远超过了为向量的坐标表示提供理论基础的作用. 但这种一般形式的基本定理，在向量理论内部和向量的应用上都是有意义的. 因此，本节要让学生体会一般的情况，不应提出“正交”问题(例 3 设置为正四面体，也隐含着这种想法).

空间的图形可以非常复杂，也大多可以用来讨论其中的向量关系. 但我们坚决反对这样的做法. 一般而言，要求学生能够基于常见的图形理解和处理向量的关系就可以了.

向量在立体几何中的应用，3.4 节会专门讨论，本节不要纠缠和深化. 例如，空间四点共面的判定是“向量共面的充要条件”的直接推论，用一句话交代一下未尝不可(前面已经作了这个交代)，不宜再写出复杂形式的“空间四点共面判定”的定理，让学生难以理清其中的关系，徒增负担.

教学建议

“向量共面的充要条件”本质上是“(平面)向量基本定理”在空间向量语境中的表述. 更准确地说，“向量共面的充要条件”中的必要条件(“共面”⇒“线性组合”)就是“(平面)向量基本定理”. 而“向量共面的充要条件”中的充分条件(“线性组合”⇒“共面”)在平面向量的情况下是一句废话，因为平面向量理论只讨论“能用同一个平面上

的有向线段表示出来”的向量(见必修第二册第 98 页)，用现在的术语说，就是只讨论共面向量，因此“(平面)向量基本定理”中没有必要把这个充分条件说出来，也就不需要采取“充要条件”的表述形式. 在空间向量的情形下，上述充分条件也是一个平凡的结论，其证明非常简单(见本册教材第 103 页).

由于“向量共面的充要条件”与“(平面)向量基本定理”的密切联系，本节教学应该从“(平面)向量基本定理”的回顾开始，引导学生从“(平面)向量基本定理”得到“向量共面的充要条件”.

再进一步启发学生，既然“(平面)向量基本定理”只相当于“向量共面的充要条件”，无法描述空间的任意向量，那么在空间向量理论中是否可以建立类似于“(平面)向量基本定理”的“基本定理”呢？可以启发学生：共面向量的线性组合都只能产生共面向量，因此要表示出所有空间向量，一定要有不共面的向量，从而至少要有三个向量. 上一节例 2 提示三个不共面的向量能够达到目的，这就自然地引入了“空间向量基本定理”的表述.

如前所述，学生对“空间向量基本定理”在理解上不会有大的困难，但和平面情况相比，证明难度增加不少. 特别地，其中线性组合存在性的证明主要是立体几何的演绎方法，且脱离开了本教材所常用的平行六面体图形，但它的基本思路与上一节没有本质的区别：把问题“局部地”化归为平面问题，然后用“(平面)向量基本定理”(或者说“向量共面的充要条件”)逐步地解决问题.

3.3　空间向量的坐标表示

教学重点

了解空间直角坐标系，感受建立空间直角坐标系的必要性，会用空间直角坐标刻画点的位置.

掌握空间向量的坐标表示，掌握坐标表示下空间向量线性运算的计算公式，掌握坐标形式下空间向量数量积的计算公式及其变形.

内容分析

第 1 小节定义空间直角坐标系. 如前所述，这本是数学体系的“基本建设”，独立于向量内容，但由于空间解析几何不是本套教材的内容，空间坐标系的内容在此之前没有出现过，因此我们不得不用这一小节做补缺补漏工作.

与平面直角坐标系类比，三条两两正交的坐标轴、三个坐标平面、八个卦限等概念虽需要一定的空间想象力来理解，但也都是顺理成章的. 对学生而言，可能有两个难点. 一是坐标系的制式. 应告诉学生这是为了建立规范而作的约定，教材中约定了坐标系采用右手制，并用学生非常熟悉的“点赞”手势表明了这一制式下三个坐标轴正向的指向，有利于学生记忆和使用. 还可以告诉学生，平面直角坐标系也有制式问题，从 x 轴正向逆时针转90°到 y 轴正向的坐标系也是“右手制”的，可以用人的右手拇指与食指的关系来说明(图 3－R2). 我们也可以用如图 3－R3 所示的右手拇指、食指和中指的关系来说明右手制空间直角坐标系.

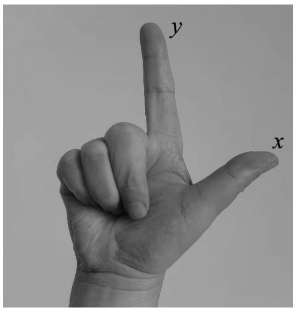


图 3－R2　平面右手制坐标系

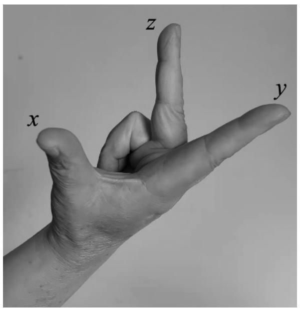


图 3－R3　空间右手制坐标系

在空间直角坐标系中确定点的坐标需要学生有一定的空间想象能力，所以这可能成为学生的另一个难点. 教材采用以给定点为一个顶点作与坐标平面围成的长方体的方法求得点的坐标，这也是平面情形的推广. 在平面情形，点的坐标可以看成是用以给定点为一个顶点作与坐标轴围成矩形的方法得到的. 当然，平面情形更容易理解的是过给定点作坐标轴的垂线而得到. 这样来定义空间点的坐标也是可行的，本册教材第 109 页的边框有这个说明，其理由是：垂直于一条给定直线的平面中的任何直线都垂直于给定直线.

有了空间直角坐标系，就可以类比平面向量的坐标表示，引出空间向量的坐标表示，使向量的线性运算、模以及数量积都可以用很简洁的公式表达出来. 这些公式推导过程简单，容易记忆，方便使用，是向量在几何以及其他领域应用的基础.

平面向量和空间向量的坐标表示是对高维向量定义的启示. 不过，高维向量的学习要到大学的线性代数(或高等代数)课程中了.

本节有两道例题.

例 1 是求空间直角坐标系中点关于某个平面的对称点，是为学生熟悉空间直角坐

标系而设计的. 教材首先作了长方体关于平面的对称长方体，给出空间直角坐标系找对称点的一个方法. 在构造这个对称图形的过程中，用到了关于直线的对称点，所以解题的基本思路是将关于平面的对称问题转化为关于直线的对称问题. 此问题当然也可以设计成关于原点对称或关于坐标轴对称的问题. 不过空间直角坐标系在本章中只是“补缺补漏”的角色，这类练习不宜过分.

例 2 是学习了空间向量的坐标表示后，求向量夹角的余弦值以及求证向量垂直，解题方法是坐标的简单运算.

注意事项

把向量终点坐标直接作为向量坐标的前提是向量的起点是坐标原点 O，即这个向量必须是位置向量. 如果向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的端点坐标分别为 $P(x_1,y_1,z_1)$ 与 $Q(x_2,y_2,z_2)$，要得到向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的坐标，按定义必须先把向量平移，使点 P 落到坐标原点 O 上. 但下面的公式使用起来更为方便：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}&=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)\\&=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).\end{aligned}$$

教学建议

空间直角坐标系是平面直角坐标系的类比，同时又是从生活中常见的长方体、正方体等几何体抽象出来的.

作为空间概念的空间直角坐标系的建立，需要尽可能创设生活中熟悉的场景，借用立体几何常见的图形，采用观察、画图、想象，逐步形成带坐标构架的空间的观念.

空间向量的坐标表示，教学中可以从平面到空间作类比推广. 向量的坐标表示本质上是一样的，向量的线性运算和数量积也都与平面向量具有类似的法则，只是表达形式略微复杂而已. 这一推广过程应尽量让学生自行经历.

3.4 空间向量在立体几何中的应用

教学重点

理解并掌握通过空间向量的运算，解决立体几何问题的方法，会用向量方法判断空间线面位置关系、计算距离和空间各种角的大小.

内容分析

立体几何所讨论的对象是空间的点、直线、平面等元素，本节我们需要将它们与

向量建立联系. 教材首先介绍与直线密切相关的向量——直线的方向向量，以及与平面密切相关的向量——平面的法向量，并指出用向量方法解决有关直线和平面的问题，一般先把相应的问题转化为关于这些向量的问题然后加以解决. 相对于纯几何方法，向量方法只要考虑方向向量与法向量的关系即可，基于所建立的向量理论，很多问题可以转化为关于向量的计算，降低了演绎推理的难度.

本节教材有三个小节，分别是空间中的直线、平面平行和垂直关系的判断，求点到平面的距离(以及平面的平行线到平面的距离、平行平面间的距离)，求角(包括空间直线所成角、直线和平面所成角和二面角)的大小.

本节各小节都以精选的具有典型性的例题贯串，在例题的前后总结出具有一般意义的命题或公式，指导学生在解决类似问题时直接引用.

第 1 小节“判断空间直线、平面的位置关系”有两道例题：

例 1 是立体几何中的“三垂线定理”的向量证明，把直线的垂直问题转化为方向向量的垂直问题，再用向量理论中证明向量垂直的常用方法(证明向量的数量积为 0)加以证明. 这个定理曾用纯几何方法证明过(必修第三册 10.3 节第 4 小节). 让学生比较两个不同的证明，体会向量方法和纯几何方法的差异.

例 2 是在一个正方体中判定线面垂直、面面平行. 有了正方体(或更一般的长方体)，常常会选择以一个顶点作为坐标原点，以此顶点出发的三条棱所在直线作为坐标轴建立空间直角坐标系，写出各顶点的坐标以及相关直线的向量表示，这样证明垂直或平行不过是一些简单的数值计算. 本例第(1)小题就是这样处理的；第(2)小题是第(1)小题的直接推论.

结合这两道例题，教材列出了直线、平面的平行与垂直用向量语言表达的三个充要条件：

(1) 两条直线平行的充要条件是它们的方向向量平行；两条直线垂直的充要条件是它们的方向向量垂直.

(2) 直线和平面垂直的充要条件是直线的方向向量为平面的法向量；不在平面上的一条直线和平面平行的充要条件是直线的方向向量垂直于平面的法向量.

(3) 两个平面垂直的充要条件是它们的法向量垂直；两个平面平行的充要条件是它们的法向量平行.

第(3)点中的前半部分也可以改述为：两个平面垂直的充要条件是其中一个平面

过另一个平面的法向量. 本章教材中的内容提要就是这样叙述的(本册教材第 126 页).

第 2 小节“求距离”中不能简单地把直线问题转化为直线的方向向量问题、把平面问题转化为平面的法向量问题，这是因为向量可以在空间中平移，所以没有向量间距离的概念，平行的直线、平面间的距离不能直接转化为向量问题，但在解决问题过程中，向量依然发挥重要作用. 本节的例题包括点到平面的距离、平面的平行线与平面的距离以及两个平行平面间的距离. 后两个距离归结到点到平面的距离，因为平面的平行线与平面的距离就是平行线上一点到平面的距离，两个平行平面间的距离就是其中一个平面上一点到另一个平面的距离.

求点到平面的距离的具体做法是：先连接给定点到平面上任意一点，所得到的线段在平面法向量方向上投影的模就是点到平面的垂线段的长，即点到平面的距离. 于是，任意给定一点 A 到平面的距离 d 由公式

$$d=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\vec{n}|}=|\overrightarrow{n_0}\cdot\overrightarrow{AB}| \qquad ①$$

给出，其中 $\vec{n}$ 是平面的一个法向量，$\overrightarrow{n_0}$是 $\vec{n}$ 的单位向量，B 是平面上的任意一点.

例 3 第(1)小题是直接应用公式①求点到平面的距离，不过求平面的法向量要用待定系数法，并且所列的方程组有无数组解(这不奇怪，平面的法向量有无数个)，任取一个就行. 例 3 第(2)小题求平面的平行线与平面的距离，化为点到平面的距离问题.

例 4 求两个平行平面间的距离，也化为求点到平面的距离问题. 求法向量时也要用到待定系数法，并有不唯一的解. 前面已经说过，不再重复.

第 3 小节“求角的大小”中的“角”包含了两条直线所成的角、直线和平面所成的角以及二面角的平面角. 所有的问题都化为求向量(直线的方向向量、平面的法向量)的夹角问题，所以可以使用向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角余弦公式

$$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \qquad ②$$

分析所得到的向量夹角与我们所要求角的关系，结合公式②，教材给出以下三个公式：

如果两条直线的方向向量分别是$\overrightarrow{r_1}$与$\overrightarrow{r_2}$，那么这两条直线所成角 θ 的大小决定于公式

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{r_1}\cdot\overrightarrow{r_2}|}{|\overrightarrow{r_1}||\overrightarrow{r_2}|}. \qquad ③$$

如果直线的方向向量是 $\vec{r}$，平面的法向量是 $\vec{n}$，那么直线与平面所成角 θ 的大小决定于公式

$$\sin\theta=\frac{|\vec{r}\cdot\vec{n}|}{|\vec{r}||\vec{n}|}. \qquad ④$$

如果两个平面的法向量分别是$\overrightarrow{n_1}$与$\overrightarrow{n_2}$，那么这两个平面所成锐二面角(或直二面角)θ 的大小决定于公式

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}. \qquad ⑤$$

公式③④⑤的右侧都带有绝对值符号，其原因是法向量和方向向量的取法可能改变它们夹角余弦的符号(但不改变绝对值). 我们没有必要去跟踪每一个可能的选择，分析可能出现的符号，而是倒过来从我们的目标看，无论是两条直线所成角的大小，还是直线和平面所成角的大小，都约定取值在 0 至$\dfrac{\pi}{2}$之间，两个平面所成的锐二面角(或直二面角)的平面角大小也在 0 至$\dfrac{\pi}{2}$之间. 也就是说，无论我们所取向量夹角的余弦或正弦为何值，我们所要求的角的三角函数值一定是非负的.

公式④左侧出现了正弦函数，其余两个公式左侧仍保留余弦函数. 教材对此有细节的分析，教学中可以使用，也可以让学生自行学习理解. 还可以让学生直观地理解和记住这里出现的函数：如果几何对象和所对应的向量都平行(公式③)或者都垂直(公式⑤)，向量的夹角和几何对象所成的角相等或互补，从而公式中不改变函数名(仍是余弦函数)；如果几何对象和所对应的向量一个平行，一个垂直(公式④)，向量的夹角和几何对象所成的角互余，所以要把余弦函数换成正弦函数.

例 5 是求空间中两直线所成角的大小. 恰当地构建空间直角坐标系后，适当取直线的方向向量，再利用公式③计算即可. 不过要注意，例 5 在公式之前出现，由于方向向量取得好，没有出现负的余弦值，因此有没有绝对值符号就无关紧要了. 如果教师愿意把例 5 所提供的到公式③的台阶提高一点，也可以选择其他方向向量，使得负的余弦值出现，那样从例 5 到公式③就更平缓了.

例 6 是求空间直线与平面所成角的大小. 恰当地构建空间直角坐标系后，求平面的法向量与直线的方向向量，再利用公式④计算即可.

例 7 是求两个平面所成二面角的大小. 构建空间直角坐标系后，选择平面的法向

量，再利用公式⑤先求出锐二面角的大小，它的补角就是另一个二面角.

注意事项

1. 求平面法向量常常要用待定系数法. 由于法向量不是唯一的，因此待定系数法给出的方程组不止一组解，其中有的系数可以自由取值，再解出其他系数.

2. 本节中常常会把几何问题和向量问题一起考虑，特别要注意两个语境下一些表达的差别. 例如，谈论平行时，向量的情况等同于说共线，但是在几何学语境中，共线的两条直线（即重合的两条直线）不被认为是平行的. 因此，前面提到的充要条件“两条直线平行的充要条件是它们的方向向量平行”中的“两条直线”指的是“两条不同的直线”. 同样的道理，充要条件“两个平面平行的充要条件是它们的法向量平行”中的“两个平面”指的是“两个不同的平面”. 不要简单地用“$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{r_1} /\!/ \overrightarrow{r_2}$”（$\overrightarrow{r_1}$、$\overrightarrow{r_2}$分别是直线 l_1、l_2 的方向向量）之类符号表述来代替相应的语言表述的充要条件，除非附加条件“l_1 不同于 l_2”.

3. 异面直线问题也是几何与向量的重要差别. 由于没有异面向量，有时给我们带来很大的便利，例如例 5 求的是两条异面直线所成的角，几何方法有一定难度，但向量法只要套用公式即可，甚至无须知道这是两条异面直线. 但与异面直线相关的另外一些问题，转为向量问题的又未必有明显的优势，如求异面直线的距离问题.

4. 记住约定：两条直线所成角的大小、直线和平面所成角的大小都约定取值在 0 至$\dfrac{\pi}{2}$之间. 在这些约定下公式③④才是正确的.

教学建议

空间向量是立体几何学习中一个有效的辅助工具，不宜以空间向量的计算完全替代立体几何的学习. 空间向量方法解决立体几何问题一定要结合具体直观的图形讲授内容，借助图形理解运算与几何对象的特征. 立体几何的理论体系的基本框架，主要的定理、公式和演绎方法，以及通过立体几何学习建立起来的空间感、空间问题抽象能力和空间图形的作图、读图、识图能力，不应该由于向量方法的引入而被削弱. 因此，在本节教学中一方面应关注立体几何的本体，通过立体几何知识的回顾，问题的分析，理清向量方法解决问题的思路，寻找立体几何与空间向量的连接点，总结出本节的相关结论和公式. 特别地，在第 3 小节三个公式的推导过程中，要让学生看懂空间图形，并从中找出角的大小的关系. 如能借助立体教具或几何教学软件模拟，让学

生体会其中的诀窍，则有事半功倍之效．但在另一方面，也要显示空间向量在解决立体几何问题中的作用，让学生体会在基本规则、基本方法建立之后，向量方法常常就是套用成法、计算求解，这有其十分明显的优势．

正如本章的许多内容都是平面向量的相应内容在空间的拓展与延伸，利用空间向量解决立体几何问题也是用平面向量解决平面几何问题的拓展与延伸，需要充分利用学生已有的利用平面向量解决平面几何问题的知识基础与学习经验（参看必修课程 8.4 节）作类比与推广，在拓展中获得新的意境．

三、参考答案或提示

3.1　空间向量及其运算

练习 3.1(1)

1. 空间向量可以任意平行移动，所以没有异面向量概念．

2. 如$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AA_1}$、$\overrightarrow{A_1C_1}$，答案不唯一．

3.（1）$2\vec{a}+5\vec{b}-24\vec{c}$．　（2）$\overrightarrow{CA}$．

练习 3.1(2)

1. $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB})=\frac{1}{2}a^2$；

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BD})=-\frac{1}{4}a^2$．

2. 由于空间向量在一条直线上的投影是其起点的投影指向终点的投影的向量，必修第二册第 112 页上关于向量投影的和等于和的投影的证明完全适合于空间向量的情况（不过，图 8－2－5 最好改成显示空间向量的情况的图 3－R4，图中平面 α、β、γ 分别是过点 O、B、C 且垂直于直线 l 的平面，是为了让学生更好地

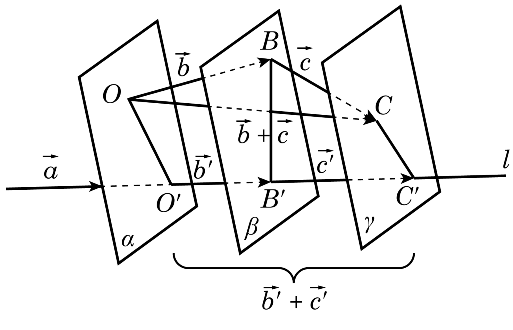


图 3－R4

建立空间图形的感觉而加上的)，于是，如必修第二册第 113 页所说，向量的数量积对向量加法的分配律就成立(细节补充参看必修第二册教学参考资料第 71 页).

习题 3.1

A 组

1. (1) 与$\overrightarrow{AC'}$有相等模的向量为：$\overrightarrow{C'A}$、$\overrightarrow{BD'}$、$\overrightarrow{D'B}$、$\overrightarrow{CA'}$、$\overrightarrow{A'C}$、$\overrightarrow{DB'}$、$\overrightarrow{B'D}$.

(2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D'C'}$.

(3) 略.

2. $\overrightarrow{A_1B}=\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{CB}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

3. $\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'E})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AA'}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

4. (1) $-\dfrac{7}{2}$.　　(2) $\sqrt{11}$.

5. 证明略.

6. (1) G、M、M_1 共线，证明略.　　(2) G、N、N_1 共线，证明略.

B 组

1. 证明略.

2. (1) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{1}{2}$，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}=\dfrac{1}{2|\overrightarrow{BD}|}$，所以线段 BD 增长时，$\cos\theta$ 减小. 又 $y=\cos\theta$ 在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上是减函数，所以线段 BD 增长时，角 θ 增大.

(2) 点 D 在平面 ABC 上的射影不可能在直线 BC 上. 证明略.

3. 证明略.

3.2　空间向量基本定理

练习 3.2

1. (1) 假命题.　　(2) 假命题.　　(3) 真命题.

2. (1) $\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1D_1}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$；

$\overrightarrow{A_1F}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=-\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$.

(2) 由(1)及$\overrightarrow{B_1C}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BC}=-\vec{a}+\vec{c}$，得$\overrightarrow{A_1F}\cdot\overrightarrow{B_1C}=\left(-\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot(-\vec{a}+$

$\vec{c})=2|\vec{a}|^2$.

(3) 计算得到$\overrightarrow{A_1F}\cdot\overrightarrow{DE}=0$. 所以，$\overrightarrow{A_1F}\perp\overrightarrow{DE}$.

习题 3.2

A 组

1. $\overrightarrow{D_1B}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$是$\vec{a}/\!/\vec{b}$的充分条件，但不是必要条件.

3. (1) $\lambda=1$，$\mu=-1$，$\nu=1$.　　(2) $\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=\frac{1}{2}$，$\nu=1$.

4. 证明略.

B 组

1. O 为平面 ABC 外一点，则点 P 在平面 ABC 上的充要条件是：存在实数 x、y、z，满足$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，且 $x+y+z=1$. 证明略.

2. 证明略.

3. (1) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{B_1C}=\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)\cdot(-\vec{b}+\vec{c})=0$，所以$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{B_1C}$.

(2) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{C_1G}=\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\vec{a}-\vec{b}\right)=-\frac{1}{8}|\vec{a}|^2+\frac{1}{2}|\vec{b}|^2=\frac{3}{8}$，

$\cos\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{C_1G}\rangle=\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{C_1G}}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{C_1G}|}=\frac{\sqrt{51}}{17}$.

(3) $\frac{\sqrt{41}}{8}$.

3.3　空间向量的坐标表示

练习 3.3

1. (1) 点 P 在坐标平面上：xOy 平面坐标$(x,y,0)$；xOz 平面坐标$(x,0,z)$；yOz 平面坐标$(0,y,z)$.

(2) 点 P 在坐标轴上：x 轴$(x,0,0)$；y 轴$(0,y,0)$；z 轴$(0,0,z)$.

2. 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $135°$.

3. $m=-6$，$n=\frac{1}{3}$.

习题 3.3

A 组

1. 以 A 为坐标原点，分别以射线 AB、AD、AA_1 为 x 轴、y 轴、z 轴的正半轴建立空间直角坐标系，则长方体各顶点的坐标分别为 $A(0,0,0)$、$B(14,0,0)$、$C(14,6,0)$、$D(0,6,0)$、$A_1(0,0,10)$、$B_1(14,0,10)$、$C_1(14,6,10)$、$D_1(0,6,10)$.

2. 如图 3－R5，设正方形边长为 a，$|PA|=|AD|=a$，则有关点的坐标分别为 $A(0,0,0)$、$P(0,0,a)$、$B(a,0,0)$、$C(a,a,0)$、$D(0,a,0)$.

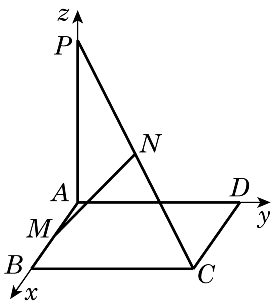


图 3－R5

AB、PC 的中点分别是 $M\left(\frac{a}{2},0,0\right)$、$N\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$，故 $\overrightarrow{MN}=\left(0,\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$，$\overrightarrow{DC}=(a,0,0)$.

3. (1) 向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{3}{4}\pi$.　(2) 向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 所在直线的夹角 $\frac{\pi}{4}$.

4. $D(2,5,-7)$.

5. $\cos\alpha=\frac{(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}}{|\vec{a}-\vec{b}||\vec{c}|}=\frac{(a_1-b_1)x}{mx}=\frac{a_1-b_1}{m}$.

B 组

1. $\angle ABC=\frac{3}{4}\pi$.

2. (1) $7\sqrt{3}$.　(2) $\vec{a}=(1,1,1)$ 或 $\vec{a}=(-1,-1,-1)$.

3. (1) $\overrightarrow{BN}=(1,-1,1)$，$|\overrightarrow{BN}|=\sqrt{3}$.　(2) $\cos\langle\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{CB_1}\rangle=\frac{\sqrt{30}}{10}$.　(3) 证明略.

3.4　空间向量在立体几何中的应用

练习 3.4(1)

1. 证明略.

2. 证明略.

3. 证明略.

练习 3.4(2)

1. $\frac{6}{7}$.

2. $\frac{1}{2}$.

练习 3.4(3)

1. $\arccos\frac{5\sqrt{2}}{8}$.

2. (1) 证明略.　　(2) E 是 AB 的中点.

练习 3.4(4)

1. $\pi-\arccos\frac{2}{3}$.

2. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

3. $\pi-\arccos\frac{1}{10}$.

习题 3.4

A 组

1. $\arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

2. 证明略.

3. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. 证明略.

5. $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$ 与 $\pi-\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$.

6. (1) $\arcsin\frac{\sqrt{70}}{14}$.　　(2) $\frac{5\sqrt{14}}{14}$.

B 组

1. 证明略.

2. (1) 证明略.　　(2) $\arccos\frac{2}{3}$.

3. $\dfrac{\pi}{2}$.

4. $\dfrac{\pi}{4}$与$\dfrac{3\pi}{4}$.

5. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

复习题

A 组

1. $M\left(\dfrac{x+x'}{2},\dfrac{y+y'}{2},\dfrac{z+z'}{2}\right)$.

2. $-\dfrac{a^2}{8}$.

3. (1) $\overrightarrow{AD}$在$\overrightarrow{AB}$方向上的投影向量是$\left(\dfrac{7}{3},\dfrac{7}{6},\dfrac{7}{6}\right)$;

$\overrightarrow{AD}$在$\overrightarrow{BC}$方向上的投影向量是$(0,0,0)$;

$\overrightarrow{AD}$在$\overrightarrow{CA}$方向上的投影向量是$\left(\dfrac{7}{2},0,\dfrac{7}{2}\right)$.

(2) $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

4. (1) 证明略. (2) $\arcsin\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

5. $\dfrac{\pi}{3}$.

6. (1) 证明略. (2) 2.

7. (1) 证明略. (2) $\sqrt{2}$.

8. (1) $\dfrac{\pi}{3}$. (2) $\dfrac{5}{6}$.

9. (1) 证明略. (2) $\arccos\dfrac{2}{3}$.

B 组

1. $\dfrac{\pi}{6}$.

2.（1）证明略.　　（2）$\lambda+\mu+\nu=\frac{1}{3}$.

3.（1）证明略.　　（2）$\arccos\frac{\sqrt{15}}{15}$.

4.（1）证明略.　　（2）$\arccos\frac{2}{3}$与$\pi-\arccos\frac{2}{3}$.

拓展与思考

1.（1）证明略.　　（2）$\lambda=1$.　　（3）$\left(\frac{1}{3},1\right)$.

2.（1）证明略.　　（2）$\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$.

四、相关阅读材料

参考文献

[1] 张景中，彭翕成. 绕来绕去的向量法[M]. 北京：科学出版社，2010.

[2] 赵生初. 向量观念下的直线方程与立体几何[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2020.

第 4 章　数　　列

一、本章概述

总体要求

数列是反映自然规律的一个基本数学模型，对数列的研究基于现实生产、生活的需要. 例如，在若干离散的时间节点，记录某种事物数量的变化，并按时间先后顺序排列起来就得到一个数列. 数列是一个重要的数学概念，上至一个国家每年的国内生产总值(GDP)，下至一个人每年的身高或体重，都可以用数列表示. 数列在整个中学数学教学中，处于一个知识汇合点的地位，很多知识都与数列有着密切联系，以前学过的数、式、方程、函数等知识在此可得到充分的应用，而数列的学习又为以后学习极限等内容作了铺垫.

学生在进入高中前,在找规律填数字等的练习中可能已对等差数列、等比数列的变化规律有了一些感性认识，而进入高中阶段，学生则要对等差数列和等比数列的定义和性质有较为系统及确切的认知，并通过建立与等差数列或等比数列相应的数学模型，解决日常生活和现实世界中的某些实际问题. 数学归纳法是一种通过两步达到完全归纳的有效方法，可以简单地证明与正整数 n 有关的一些数学命题，可用来证明与数列有关的公式，但其应用远远不限于数列. 本章中所讲的数学归纳法和数列极限等内容可以使学生对“无限”有进一步的认识，也反映了从量变到质变的辩证规律.

在本章的学习中，学生将掌握等差数列和等比数列的变化规律，建立通项公式和前 n 项和公式；能运用等差数列、等比数列解决简单的实际问题和数学问题，感受数学模型的现实意义与应用；通过日常生活和数学中的实例，了解一般数列的概念和表示方法；了解数学归纳法的原理，并能用数学归纳法证明与数列有关的一些简单命题；通过用迭代序列求 $\sqrt{2}$ 的近似值初步了解算法的思想.

课时安排建议

本章的课时安排建议为 11(10+1*)+1，共计 12 课时，建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
4.1 等差数列	2	等差数列及其通项公式　1 课时
		等差数列的前 n 项和　1 课时
4.2 等比数列	3	等比数列及其通项公式　1 课时
		等比数列的前 n 项和　2 课时
4.3 数列	3	数列的概念与性质　1 课时
		数列的递推公式　1 课时
		习题课　1 课时
4.4 数学归纳法	2	数学归纳法　1 课时
		数学归纳法的应用　1 课时
*4.5 用迭代序列求 $\sqrt{2}$ 的近似值	1	
复习与小结	1	

内容编排与特色

本章内容共分为 5 节：4.1 等差数列，4.2 等比数列，4.3 数列，4.4 数学归纳法，*4.5 用迭代序列求 $\sqrt{2}$ 的近似值.

“4.1 等差数列”一节，从生活中的实例入手，在具体的问题情境中发现规律，抽象出等差数列的概念. 用数学表达式呈现等差数列的定义，即得到等差数列的递推公式，据此可以得到等差数列的通项公式，进而可以研究等差数列的性质以及其前 n 项和. 这样，按照“定义⇨递推公式⇨通项公式⇨数列的性质与数列求和⇨简单运用”这一主线，可展现等差数列的内容.

“4.2 等比数列”一节，从代数与几何问题的实例入手，在具体的问题情境中发现规律，抽象出等比数列的概念. 用数学表达式呈现等比数列的定义，即得到等比数列的递推公式，据此可以得到等比数列的通项公式，进而可以研究等比数列的性质以及其前 n 项和. 仍然按照“定义⇨递推公式⇨通项公式⇨数列的性质与数列求和⇨简单运用”这样的主线来展现等比数列的内容. 本节介绍了数列极限的描述性定义，并给出了当公比 q 满足条件 $0<|q|<1$ 时等比数列的前 n 项和的极限，为后续导数章节的

学习作铺垫.

“4.3 数列”一节，在已经掌握了等差数列、等比数列这两种特殊数列的基础上，通过日常生活与数学中的实例，抽象出数列是按照一定顺序排列的一列数这一定义. 对于一些数列，可以借助通项公式研究该数列的性质，也可以从建立数列的递推关系入手，按照“递推公式⇨通项公式⇨数列的性质与数列求和⇨简单运用”这样的主线进行研究. 在借助递推公式求通项公式的过程中，体会将一些一般数列的问题转化为等差数列、等比数列处理的可能性及相应的处理办法，体会化归思想的价值.

“4.4 数学归纳法”一节，以多米诺骨牌作为类比，让学生感悟数学归纳法是一种严谨的数学证明方法，可以通过两步完成相应命题对 n 取所有正整数时都成立的证明，并体验归纳—猜想—证明的科学探索过程.

“*4.5 用迭代序列求 $\sqrt{2}$ 的近似值”一节，介绍用递推公式进行近似计算的迭代算法. 这是新增加的一节内容，说明实际生活中数列递推关系的应用远不限于以往教材中所涉及的一些问题. 现代应用数学的一个重要发展趋势是对算法的重视，一些企业现在甚至已明确提出了算法是它们的核心竞争力！从这点出发，在介绍了利用递推公式研究数列的方法后，适当地强调算法，适当地加强算法思想的阐述和对学生算法方面的引领和训练，不仅可以进一步显示数列的递推公式的深刻意义和作用，彰显它们是设计相应算法的重要理论基础，也可以在数学基础教育中体现现代化的精神，反映信息社会的特点和需要，全面提升学生的数学运算与数据分析方面的核心素养.

综上所述，本章的内容以数列的递推公式作为一条明线来安排结构，即先研究两种具有特殊递推关系的数列——等差数列和等比数列，再在此基础上研究一般的数列，随后的数学归纳法本质上也是证明递推关系，最后通过“算法”理解数列递推公式的实际意义与作用；同时，以研究数学问题的基本方法作为一条暗线来提升学生的数学核心素养，即按照从特殊到一般、从具体到抽象、从归纳猜想到数学论证的方法培养学生的数学研究能力与实际应用能力，全面提升学生的数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算、数据分析、数学建模的核心素养.

教学提示

（1）本章内含类比、归纳、数形结合、方程、算法、从特殊到一般等重要的数学思想方法. 这些思想方法是人类在长期实践中经过千锤百炼得出的，自然清晰、合乎

情理．在实际教学中，应引导学生以知识为载体，重视数学思想方法的教学和领悟．例如：

类比思想．等差数列与等比数列在定义、通项公式、递推公式、一些相关的性质和解题方法上都有可类比之处．

归纳思想．在等差数列、等比数列的概念及其前 n 项和公式的得出和推导过程中，学生可获得观察、猜想、发现、归纳、概括、总结等学习过程的体验，体现了归纳思想的具体运用．

数形结合思想．这一思想在等差数列的前 n 项和公式与等比数列定义的引入方面都有具体的应用，数列中的很多问题也可以借助(函数)图像的背景来研究．

方程思想．本章内容中有关数量关系的探究方面，可关注方程思想的渗透．

算法思想．从数列通项公式的求解，到等差数列、等比数列的前 n 项和公式的推导，以及用迭代序列求 $\sqrt{2}$ 的近似值，都贯彻了算法思想．

从特殊到一般的思想．本章按照从特殊到一般、从具体到抽象、从归纳猜想到数学论证的原则安排学习内容．可以把数列的递推关系作为一条主线贯穿全章，从特殊的递推关系推广到一般的递推关系．

（2）本章内容的呈现体现了“现实情境⇨数学模型⇨现实问题的应用”的特点，教师在教学过程中应通过具体实例(如购房贷款、放射性物质的衰变、人口增长等)帮助学生理解等差数列、等比数列以及数列的定义、性质和应用，也可以组织学生收集、阅读数列方面的有关研究成果，如《九章算术》《四元玉鉴》等，感悟我国古代数学的辉煌成就．要注重对学生从实际问题抽象出数学模型能力的培养．本章对数列的实际应用背景增加了，而对涉及数列中各量之间基本关系的繁难的技能训练题目，要求则有所降低，只要保证能达到基本技能训练的目的就可以了．

评价建议

本章的评价在知识的层面上应关注以下几点：

（1）关注学生是否了解与掌握等差数列、等比数列的定义；是否会求等差数列的公差、通项公式、等差中项和等差数列的前 n 项和；是否会求等比数列的公比、通项公式、等比中项和等比数列的前 n 项和．

（2）关注学生对于数列及其表示方法的理解；是否能利用数列的通项公式判断数

列的单调性和求解最大项、最小项等问题；是否能借助数列的递推关系并构建相应的算法解决简单的实际问题.

（3）关注学生是否正确掌握数学归纳法的本质和步骤.

本章的评价在数学核心素养的层面上应关注以下几点：

（1）数学抽象. 本章对数学抽象要求较高，在建立等差数列、等比数列、数列的定义，研究等差数列、等比数列的性质时，都离不开数学抽象. 在教学过程中，教师应创设合适的教学情境，关注学生能否在具体的问题情境中发现规律，抽象出等差数列、等比数列、数列的相关概念，并探究等差数列、等比数列的性质.

（2）逻辑推理. 本章蕴含着丰富的逻辑推理. 例如，研究数列从特殊数列(等差数列、等比数列)到一般数列的思想；解决数列问题的化归思想；数学归纳法中用两步完成对任意正整数都成立的证明；无穷等比数列求和中从量变到质变的辩证规律；等等.

（3）数学运算. 从求解数列的通项公式及进行数列求和的运算，到选择一个合适的算法，并根据收敛速度判断算法的优劣性，都体现了本章对数学运算这一核心素养的关注.

（4）数学建模. 生活中具有大量的数列原型，如存款利息、购房贷款、资产折旧等，根据本章内容可以设法解决这些实际问题. 在实际教学中，应关注学生能否将本章的知识用于解决实际问题，并在此过程中获得更多的知识和技能，提升核心素养. 建议教师通过生活中的数列模型多元性评价考查学生的综合能力.

二、教材分析与教学建议

4.1 等差数列

教学重点

掌握等差数列的定义、公差、等差中项、等差数列的通项公式；

利用等差数列的前 n 项和公式解决有关问题；

利用等差数列知识解决简单的实际问题.

内容分析

学生在进入高中之前，在找规律填数字等的练习中，可能已了解等差数列这种特殊的数列. 本章以这种特殊数列为开端，符合学生的认知规律，不但可以减轻学生的学习负担，而且能使学生更好地理解课程内容. 教材中先给出了数列的一些基本概念，为学习等差数列作铺垫，然后给出了现实生活中的三个数列模型，给出了等差数列的现实背景，目的是让学生切实感受到等差数列是现实生活中大量存在的数列模型. 通过寻求来自生活实例的数列的共同特点，抽象出等差数列的定义. 在引入等差数列的定义后，介绍了最简单的等差数列，即由三个数组成的等差数列，引出了等差中项的概念，也隐含了两种证明等差数列的基本方法.

随后将等差数列相邻两项的关系式逐个罗列出来，通过观察，学生可以发现将 $n-1$ 个关系式进行累加就能得到等差数列的通项公式.

在“等差数列的前 n 项和”这小节中，教材从历史上一个比较有名的求和例子：求 $1+2+3+\cdots+100$ 的高斯算法出发，不但引起学生对等差数列求和问题的兴趣，而且使学生发现“有穷的等差数列其任意给定的第 k 项与倒数第 k 项的和等于首项与末项的和”这个规律，为接下来计算等差数列的前 n 项和作好铺垫. 随后用我国宋代数学家杨辉提出的垛草问题，使学生从形的角度理解等差数列求和问题，也使学生感悟到我国古代辉煌的数学成就. 等差数列的前 n 项和公式有两个，前者反映了等差数列的任意的第 k 项与倒数第 k 项的和等于首项与末项的和这个内在性质，体现了等差中项即平均值的思想；后者反映了等差数列的前 n 项和与它的基本量即首项及公差之间的关系，而且表现为关于 n 的一个“二次函数”. 两者从不同角度反映了等差数列的性质.

例 1.等差数列的通项公式中涉及四个量：首项 a_1、序数 n、公差 d 和所关注的项 a_n. 四个量中只要知道其中任意三个，就可以求出第四个量. 但“已知”的三个量，并不一定直接给出，如本例中公差 d 要从所给出的项中求得.

例 2 是用等差数列解决实际问题的一个简单应用. 目的是让学生学会从实际问题中抽象出等差数列的模型，再用等差数列的知识解决实际问题.

例 3 旨在利用定义证明等差数列. 教学中可以利用本例说明：等差数列的通项公式也可以写成 $a_n=f(n)=(p+q)+(n-1)p$，其中 $p+q$ 是等差数列的首项，p 是公差.

例 4.等差数列的前 n 项和的公式涉及四个量. 对于公式 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，四个量分别为前 n 项和 S_n、项数 n、首项 a_1 和末项 a_n，该公式的侧重点为通过等差中项，即这一列数的算术平均数,求和；对于公式 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，四个量分别为前 n 项和 S_n、项数 n、首项 a_1 和公差 d，该公式的侧重点为利用等差数列的基本量，即等差数列的首项 a_1 和公差 d，进行求解. 一般地，直接或间接地给出四个量中的三个量，可以求出第四个量. 这两个公式要根据实际情况灵活运用.

例 5 的目的是建立等差数列的前 n 项和与解方程之间的联系. 已知几个量，通过解方程得出其余的未知量. 本例的教学可以让学生体会方程的思想. 作为拓展，也可以引导学生思考数列 S_{10}，$S_{20}-S_{10}$，$S_{30}-S_{20}$是否为等差数列.

例 6 中利用 S_n，结合 $S_1=a_1$，$S_n-S_{n-1}=a_n(n\geqslant 2)$解得 a_1、a_n. 再利用等差数列的定义 $a_n-a_{n-1}=d(n\geqslant 2)$，证明数列$\{a_n\}$是等差数列. 在教学中可以让学有余力的学生思考：如果 $S_n=pn^2+qn+r$，其中 p、q、r 均为常数，那么数列$\{a_n\}$是否为等差数列?

注意事项

与“二期课改”教材的编排不同，本节是本章的起始课. 本节的要求主要停留在求解等差数列的相关问题上，将已知量与未知量均转化为等差数列的基本量,即首项 a_1 和公差 d，进而求解，主要培养学生在数学抽象与数学运算方面的核心素养. 要避免在章节一开始就涉及很多等差数列的性质与一些偏重技巧的难题.

教学建议

在介绍等差数列概念这一环节中，可以让学生举出一些等差数列的实际例子，以加深对等差数列的理解. 利用等差数列的递推公式得到等差数列的通项公式这一环节，因为是本章第一节课，可以根据学生情况选取累加法或采用归纳猜想的方法先得到通项公式，等后续学完数学归纳法后再严格证明. 对等差数列的前 n 项和公式的探究是建立在高斯算法的例子上的. 高斯算法比较巧妙，蕴含求等差数列的前 n 项和一般的规律性. 教学时，应给学生提供充裕的时间和空间，让学生自己去观察、探索发现这种数列的内在规律. 从高斯算法到一般的求和公式，体现了人们在认识事物时从特殊到一般的方法，也是我们解决问题常用的思考方法和研究方法. 教材中的两个等

差数列的前 n 项和公式各有侧重，对于这两个公式，初学的学生在解决一些问题时，往往不知道该如何选取. 教师应引导学生对这两个公式进行分析，根据各自的特点选择合适的公式.

4.2　等比数列

教学重点

掌握等比数列的定义、公比、等比中项、等比数列的通项公式；

利用等比数列的前 n 项和公式解决有关问题；

利用等比数列知识解决简单的实际问题；

理解直观描述的数列极限的意义，掌握公比 q 满足 $0<|q|<1$ 的无穷等比数列前 n 项和的极限.

内容分析

与等差数列类似，等比数列的定义也是通过实例抽象出来的. 本节分别从数和形的角度给出了三个实例，由此抽象出等比数列的定义. 在引入了等比数列的定义后，我们介绍了最简单的等比数列，即由三个数组成的等比数列，由此引出了等比中项的概念，也隐含了两种证明等比数列的基本方法.

将等比数列相邻两项的关系式依次罗列出来，通过观察，学生可以发现将 $n-1$ 个关系式进行累乘就能得到等比数列的通项公式. 也可以先让学生归纳猜想，等后续学习数学归纳法后再完成严格证明.

等比数列的前 n 项和公式的推导方法有很多，教材中采用的是错位相减法. 等比数列的前 n 项和公式有两个，一个公式是利用等比数列的首项 a_1 和公比 q 这两个基本量进行求解，另一个公式则在数列末项已知的情况下使用比较便利. 有了等比数列的通项公式和前 n 项和公式，如果已知 a_1、a_n、q、n、S_n 五个量中的任意三个，就可以求出其余的两个，这其中渗透了方程的思想.

随后，本节将有限项等比数列求和问题推广到无穷等比数列求和问题，引入了极限的描述性定义. 从《庄子》中“一尺之棰”的问题引入，体现了我国古代学者的极限思想，并给出了当公比 q 满足 $0<|q|<1$ 时等比数列的前 n 项和的极限，为后续导数章节作铺垫.

例 1.等比数列的通项公式中涉及四个量：首项 a_1、序数 n、公比 q 和所关注的项

a_n，其中基本量为首项 a_1 和公比 q，将等比数列的各项均转化为基本量进而求解的过程，可以帮助学生体会通项公式的作用，及其与给出已知条件所导出的方程之间的联系.

例 2 的教学应关注以下几个方面：

（1）帮助学生发现实际情境中数列各项之间的关系，培养学生从实际问题中抽象出相应数学模型的能力.

（2）通过本例的解答可以告诉学生，通项公式反映了数列的本质特征，关于等比数列的问题首先应该想到它的通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}$. 由所给的条件，知道 a_n、a_1、q、n 中的某几项，把它们代入通项公式，就可以求解以其余项为未知数的方程.

（3）用对数的知识解方程可以帮助学生回顾对数的性质.

例 3.理解等差数列和等比数列的项与项之间的特殊关系，有利于灵活、快速地处理与这两种数列相关的问题. 利用等差中项或等比中项的特点，即任意相邻三项之间满足 $2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\geqslant 2)$ 或 $a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}(n\geqslant 2)$，进行求解. 结合本例，也可以让学生感悟等差数列与正项等比数列之间可以相互转化.

例 4.与等差数列的前 n 项和公式类似，等比数列的前 n 项和公式也涉及四个量：首项 a_1、公比 q、前 n 项和 S_n 以及项数 n(或末项 a_n). 给出其中三个量，可以求得第四个量.

例 5 是例 4 的反向思考，旨在凸显等比数列的基本量是求解问题的关键.

例 6 利用 S_n，结合 $S_1=a_1$，$S_n-S_{n-1}=a_n(n\geqslant 2)$解得 a_1 及 a_n. 再利用等比数列的定义 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=q(n\geqslant 2)$证明数列$\{a_n\}$是等比数列. 还可以引导学有余力的学生思考：如果 $S_n=Aq^n+B(q\neq 0,1)$，其中 A、B 均为常数，数列$\{a_n\}$是否为等比数列？

例 7 把无限循环小数化为分数，是无穷等比数列的前 n 项和的极限有关公式的基本应用. 在求解过程中应该注重循环小数化为分数的方法，即把它化为求无穷等比数列的前 n 项和的极限. 不必要求学生死记硬背将循环小数化为分数的一些结论. 在本例后可以引导学有余力的学生思考 $0.\dot{9}=1$ 的证明.

例 8 的求解过程中，从 $a_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a_1$ 猜想出 a_n 的表达式是不严格的，因为在题设中没有给出数列$\{a_n\}$是等比数列的假设. 应证明当 $n\geqslant 2$ 时，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$为定值，才能断定数

列$\{a_n\}$是等比数列，进而才可以利用其首项和公比，求解周长和与面积和的极限.

注意事项

等比数列的公比 q 可以是任意一个给定的非零常数，在中学阶段只考虑其为实数的情形而不考虑复数. 要注意等比数列的首项和公比都规定不能为 0，否则相应的数列就毫无研究的价值了. 因此，一些在等差数列时成立的结论，到等比数列就不一定成立了. 例如，若数列$\{a_n\}$为等比数列，记其前 n 项和为 S_n，则 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$就不一定是等比数列了，因为可能会有首项 $S_n=0$ 的情形出现. 此外，在等差数列与等比数列的类比中还要小心正负符号的问题，如 1 与 4 的等比中项为± 2 两解，而对于等比数列$\{a_n\}$，如果 $a_1=1$，$a_5=4$，那么等比中项 a_3 只有一解 2，否则 a_2 与 a_4 无实数解. 总之，要注意等比数列的项有正负的可能以及非零的特征，这是在进行等差数列与等比数列类比的过程中要提醒学生注意的地方. 另外，在等比数列求和时，要分类讨论公比 q 是否等于 1，这也是学生容易忽略的地方.

教学建议

与等差数列一样，等比数列在现实生活中也有广泛的应用. 等比数列的教学可以选择更多有实际背景的例子(如教育贷款、购房贷款、放射性物质的衰变、人口增长等)，也可以让学生自己举一些实际生活的例子，进一步培养学生从实际问题中抽象出数列模型的能力和用数学知识解决实际问题的能力. 等比数列与等差数列之间存在着很多类似的地方，但也有一些本质上的不同，既要启发学生的类比思维，又要避免学生把二者混淆. 在教学中，要始终强调等比数列的定义和体现等比数列本质的公比 q. 同时，要培养学生的类比推理能力，等比数列的定义及通项公式等都可以让学生类比等差数列自行给出，还可以让学生自行列表从定义、通项公式、递推公式等角度类比两类数列的有关知识及异同. 也可以启发学生从运算的角度进行类比：等差数列中相邻两项的差为常数，因此可以研究两个等差数列对应项的和或差；而等比数列中相邻两项的商为常数，因此可以研究两个等比数列对应项的积或商. 教师也可以开放性地让学生通过运算构造出新的数列，并利用定义判断该数列是否为等差数列或等比数列.

4.3 数列

教学重点

理解数列的概念；

理解单调数列，会判断简单数列的单调性，并求解简单数列的最大项、最小项；

理解通项公式和递推公式是表示数列的方法.

内容分析

在学习等差数列、等比数列两种特殊数列的基础上，结合一些生活中的例子，让学生感悟按照一定顺序排列的一列数即为数列. 这个排列的顺序不一定有规律可循. 排列顺序不同即为不同的数列，这是数列与数集的一个区别；此外，数列中的项可以重复，而数集中的元素不可重复，这也是数列与数集的一个区别. 给定数列$\{a_n\}$，如果可以用一个关于序数n的公式来表述数列中的任一项a_n，那么这个公式就称为数列$\{a_n\}$的通项公式.

数列按照项数是否有限分为有穷数列与无穷数列；而按照数列中项的变化趋势可分为增数列、减数列和常数列等. 数列的简单表示方法有：列表法，通项公式，递推公式. 根据数列的通项公式与单调数列的定义，可以判断一些简单数列的单调性，并求解最大项、最小项问题.

因为已掌握等差数列、等比数列这两种特殊的数列，与“二期课改”教材中学生学习本节时的知识基础不同，本节课可以对学生解决一般数列问题提出更高的要求，在利用递推公式表示数列时引入了根据实际情况寻找数列递推关系的问题. 本节还涉及将某些一般数列转化为等差数列或等比数列进而求解的问题，这可以让学生感悟研究数学问题的一般方法，即将未知的问题转化为已知问题进而求解的化归思想.

例 1.由通项公式求数列的项，只需把项的序数代入通项公式就能得到. 在本例的教学过程中，教师可以引导学有余力的学生把数列的图像画出来，从而让学生感悟数列与函数之间的联系与区别.

例 2.根据单调数列的定义，判断数列的单调性，即判断$a_{n+1}-a_n$与 0 的大小关系.

例 3.利用数列的单调性判断数列的最大项、最小项问题.

例 4 旨在引导学生在实际生活中通过寻求数列的递推关系作为突破点来研究相关数列. 帮助学生体会在实际问题中寻求数列的递推关系往往是更加容易的，通过思考数列的后一项与其前一项(或者前几项)的关系求得数列的递推公式，再据此利用等差数列一节中介绍的累加法，就可以得到数列的通项公式.

例 5 旨在引导学生思考对于某些一般数列，可以通过构造的方法将其转化为等差数列或等比数列这两种特殊数列进行求解，体现了数学的化归思想. 本例的实际背景

可以参见本章复习题的拓展与思考的第 1 题. 对于学有余力的学生，可以让他们先考虑拓展与思考的第 1 题，尝试寻求到本例的递推关系后再求解，以培养学生的数学建模与逻辑思维能力.

注意事项

本节在本章所处的位置与“二期课改”教材中的相应位置不同，对学生的要求也要更高些. 因为前面已介绍了等差数列与等比数列这两种特殊的数列，学生容易误解为数列都是有规律可循的一列数，在教学中，教师可以让学生多举一些实例加深对数列概念的理解.

对于将某些一般数列转化为等差数列、等比数列进而求解的问题，如本节例 5，旨在给学生呈现数学的一种化归的思想，而并非强调将一般的递推公式转化为等差数列、等比数列的技巧性要求，切忌让学生大量操练与记忆一些能转化为等差数列、等比数列的特殊的递推关系. 本节例 4，则是想让学生感悟在实际问题中如何利用数列的知识建立模型，沿着“递推公式⇨通项公式⇨数列的性质与数列求和⇨简单运用”这样的路径开展研究，培养学生思考问题的习惯并提高解决问题的能力，提升学生的数学抽象、直观想象与逻辑推理的数学核心素养，因此，应避免编制烦琐而仅偏重技巧的难题.

教学建议

数列可视为一种函数，其定义域是正整数集的一个子集，而值域则是由其所有项组成的数集；反之，对于定义域为正整数集的子集的函数 $y=f(x)$，其函数值也可以组成一个数列. 以这种方式所定义的函数，在必修课程第 5 章中并没有重点讲述，对学生而言是一个新的东西. 在本节中可以不涉及这一方面的内容，并不会影响对主题的理解，但如果要讲到这一点，那么一定要花一些时间讲清楚. 因为函数与数列对于学生而言是两大难点，教师可以根据学生情况，在学生已掌握等差数列、等比数列两种特殊数列的基础上，将数列与函数的联系介绍给学生，但也只需点到为止，使学生对此有一个概念就可以了. 本节与“二期课改”教材相比，增加了判断数列单调性，并求数列最大项、最小项的例题. 在讲解这些例题时，可以让学生利用定义来判断数列的单调性，也可以引导学生思考哪些通项公式还能用函数的方法判断单调性，并且要注意数列与函数的联系与区别，感受离散与连续的关系.

4.4　数学归纳法

教学重点

理解数学归纳法的基本原理；

掌握数学归纳法证明命题的一般步骤；

会用数学归纳法证明一些与数列相关的命题，进一步养成严格推理的习惯.

内容分析

数学推理中，常用的方法是演绎法和归纳法. 归纳推理又可以分为完全归纳法和不完全归纳法. 完全归纳法所得出的结论是可靠的，因为它考虑了问题涉及的所有对象；不完全归纳法得出的结论不一定可靠，因为它只考察了某件事情的部分对象. 在数学问题中，有一类问题是与正整数有关的命题，因为正整数有无限多个，不可能对所有正整数进行一一验证，通常用枚举法达到完全归纳是不可能的，这就需要一种新的方法——数学归纳法. 数学归纳法是一种通过两步，使得 n 可以遍历正整数集，达到完全归纳的方法. 这种方法简单有效，是一种重要的数学研究工具.

本节的主线是：以问题情境激发数学归纳法的学习兴趣⇨多米诺骨牌蕴含的原理分析⇨用多米诺骨牌原理解决一个数学实例⇨从实例中概括出数学归纳法⇨利用数学归纳法解决数列问题.

首先，通过探究数列$\{a_n\}$的通项公式，说明探索新的证明方法的必要性. 通过相关问题的引入，不但可以激发学生学习数学归纳法的兴趣，而且可以指明寻求新方法的方向，即通过有限个步骤的推理，证明 n 取所有正整数时猜想都成立. 然后，详细分析“多米诺骨牌”全部倒下的两个条件，引导学生通过类比，证明数列的通项公式是 $a_n=\dfrac{1}{n}$ 这个猜想. 这样，就从生活实例和数学证明两个方面为给出数学归纳法的原理奠定了坚实基础. 有了上述内容的铺垫，数学归纳法基本原理的得出就非常自然了. 形象地说，数学归纳法的基本原理相当于有无限多块牌的多米诺骨牌游戏，其核心是归纳递推.

例 1.在用数学归纳法证明的第(2)步中，在证明“$n=k+1$ 时命题也成立”时，必须用到“$n=k$ 时命题成立”的归纳假设，否则是不符合数学归纳法的要求的. 但初学者往往不注意这点. 例如，在证明本例的第(2)步时，经常出现以下的错误：

(2) 假设当 $n=k$ 时，等式成立，即 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$，
那么当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]\\=&1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)\\=&\frac{(k+1)[1+(2k+1)]}{2}\\=&(k+1)^2,\end{aligned}$$

等式也成立.

为纠正这类错误，可以让学生讨论，辨析上述证明方法是否是数学归纳法. 通过讨论让学生进一步明确，数学归纳法要由假设当 $n=k$ 时命题 $P(k)$ 正确，推证当 $n=k+1$ 时命题 $P(k+1)$ 也正确，其基本思想是证明“$P(k)\Rightarrow P(k+1)$”这个蕴含关系是成立的，即证明命题的正确具有传递性. 而上述证明没有证明命题的正确具有传递性，仅是利用等差数列的前 n 项和公式，因此并不是数学归纳法的证明.

例 2.在证明当 $n=k+1$ 时命题也成立的过程中，应把结论成立的结果即“$\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$”作为证明的目标. 这既利于产生合理的思路，又便于简洁的表达.

例 3、例 4 这两例的共同特点都是先猜想再论证. 例 3 先算出前几项的值，并观察这些项的值与相应项的序数间的内在规律，然后猜想通项公式的可能形式. 例 4 是先假设存在这样的常数，因为是恒等式，故当 $n=1$，2，3 时的等式均成立，因此可以得到关于 a、b、c 的三元一次方程组进而求解，从而得到猜想. 不论是例 3 还是例 4，此时所得到的猜想是以对部分已知事实的归纳为依据的，因此猜想是一种合情推理，是探索新知识、发现新规律的非常重要的一步；但由于猜想是建立在不够充分的事实基础上，还存在正确与错误两种可能性，必须进一步证明，这时就可以用数学归纳法. 这说明只有将数学归纳法与合情推理结合起来，才能体现归纳—猜想—论证这样一种科学的思维模式.

注意事项

数学归纳法一般被用于证明某些与正整数 n 有关的数学命题，但并不是所有与正整数有关的命题都一定可以用数学归纳法得到有效的证明. 例如，用数学归纳法就难以证明数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$($n$ 为正整数)是单调数列. 一般地，从 $n=k$ 时的情形过渡到 $n=k+1$ 时的情形，如果问题中存在可利用的递推关系，那么数学归纳法有用武之地，否则数学归纳法就难以使用. 对数学归纳法有一个正确的整体认识，对于提升使

用数学归纳法的能力，提升逻辑推理的核心素养很重要.

教学建议

教学中，要强调用数学归纳法进行证明时，“归纳基础”和“归纳递推”两个步骤缺一不可，其中第一步是命题递推的基础，第二步是命题递推的根据. 只有把两个步骤中的结论结合起来，才能断定命题对所有正整数都成立. 具体可作如下说明：

（1）第一步——归纳基础

学生初学数学归纳法时，往往把注意力集中在第二步归纳递推上，而对第一步的作用感到可有可无. 为使学生对此能有所认识，教学中应强调归纳基础的作用，说明如果没有它，证明就如同空中楼阁，是不可靠的. 教师也可以结合练习 4.4(1)第 1 题的(1)进行具体说明. 在教学中还应提醒学生，在用数学归纳法进行证明时，第一步从 n 等于几开始，要根据具体问题而定. 一般地，如果要证明的命题是对全体正整数都成立，那么要从 $n=1$ 证起；如果要证明的命题是对不小于 n_0 的全体正整数都成立，那么要从 $n=n_0$ 证起；如果要证明命题是对全体自然数都成立的，那么要从 $n=0$ 证起.

（2）第二步——归纳递推

这一步中，学生往往会产生这样的疑惑，为什么可以先假设 $n=k(k\geqslant n_0$，k 为正整数)时命题成立呢？“结论”怎么可以作为条件来使用呢？教学中应使学生明白，这一步实际上是证明一个条件命题：“假设 $n=k(k\geqslant n_0$，k 为正整数)时命题成立，证明当 $n=k+1$ 时命题也成立”，其本质是证明一个递推关系. 归纳递推的作用是从前往后传递，有了这种向后传递的关系，就能从一个起点即归纳基础不断发展，以至无穷. 教学中教师也可以结合练习 4.4(1)第 1 题的(2)进行具体说明.

*4.5 用迭代序列求$\sqrt{2}$的近似值

教学重点

了解基于用递推公式表示的近似计算的迭代算法，而算法的优劣取决于迭代的收敛速度；

通过日常生活和数学中的实例，感受算法的作用.

内容分析

古希腊数学家发明了基于公理化的演绎方法，这对数学发展甚至于对科学的发展均是一个伟大的贡献. 与古希腊数学相比，中世纪的东方数学表现出强烈的算法精

神，中国古代数学就以算法见长. 算法是数学的一个组成部分，它体现了与演绎思想不同的思想方法，它用符合逻辑顺序的计算步骤来解决数学问题. 在计算机已进入人类生活各个领域的今天，算法知识已成为公民必备的修养.

在现实生活中，存在大量的很难得到其精确解的复杂方程，但从应用的需要看，求得一个具有高精度的近似解就已足够. 本节在学生已理解数列递推关系的本质后，继续启发学生利用现有的数学知识，针对具体的应用需要，通过选取适当的首项与递推公式，得到一个越来越趋近于相应精确解的数列，这就形成了一个相应的算法.

本节先介绍了计算 $\sqrt{2}$ 的巴比伦算法. 以该算法为载体，让学生感悟通过方程的等价变形，可以构造一个递推公式，选定一个初值，就可以形成一个迭代序列. 如果对这样的迭代序列 $\{x_n\}$，当 $n\to+\infty$ 时，x_n 会越来越趋近于常数 $\sqrt{2}$，那么该迭代序列就可以用来提供 $\sqrt{2}$ 的近似值. 作为反例，除了巴比伦算法的迭代序列，本节还提供了另一个通过方程 $x^2=2$ 构造的迭代序列，但是却不能收敛于 $\sqrt{2}$ 的例子，由此来说明如何判断一个算法是“可行的”还是“不可行的”. 此外，根据方程 $x^2=2$ 构造的第三个迭代序列是“可行的”，但利用计算器可发现该迭代序列趋近于极限 $\sqrt{2}$ 的速度远比巴比伦算法慢，这可以使学生在感悟算法“可行的”基础上，还要追求更“优秀”. 实际上，算法中递推公式的设计与初值的选取常常要基于实际问题的背景，并经过实践的检验. 算法这节对提升学生的数学运算与数据分析的核心素养有重要作用.

注意事项

本节教学旨在以计算 $\sqrt{2}$ 近似值的巴比伦算法为载体，培养学生在数学运算与数据分析方面的核心素养，让学生感悟算法在现今信息时代的重要性. 具体计算 $\sqrt{2}$ 这个数的近似值并非是本节的重点，切忌在教学过程中为计算 $\sqrt{2}$ 的近似值编制各种繁杂的迭代序列.

教学建议

早在公元前 1 世纪，我国经典数学著作《九章算术》就介绍了笔算开平方的算法. 可以让学生课下自学如何笔算开平方，也可以让学生查阅资料了解一些中国古代数学算法方面的成就，如更相减损术、盈亏术、方程术、球积术等，让学生感受我国古代数学成就的灿烂辉煌. 算法对于培养学生逻辑思维能力以及适应现代社会生活的能力都会起到重要作用.

三、参考答案或提示

4.1 等差数列

练习 4.1(1)

1. D.

2. (1) $a_8=27$. (2) $a_1=10$. (3) $n=13$.

3. 提示：将等差数列各项转化为由首项 a_1 与公差 d 表示.

练习 4.1(2)

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} 2i=n(n+1)$.

2. (1) $S_8=-88$. (2) $S_{15}=150$.

3. 提示：先求出通项公式 $a_n=2n-4$，再进行证明.

习题 4.1

A 组

1. (1) 4. (2) a^2+b^2.

2. (1) $a_{10}=29$. (2) $n=10$. (3) $d=3$. (4) $a_1=\dfrac{23}{2}$.

3. 提示：将等差数列各项转化为由首项 a_1 与公差 d 表示.

4. (1) $a_1=22$，$d=9$. (2) $a_9=17$.

5. (1) $d=\dfrac{17}{13}$，$n=27$. (2) $a_1=11$，$a_{37}=23$. (3) $n=15$，$a_{15}=-\dfrac{3}{2}$. (4) $a_1=-38$，$S_{15}=-360$.

6. (1) $S_8=44$. (2) $S_{12}=-\dfrac{82}{5}$.

7. (1) $S_{17}=\dfrac{17}{2}$. (2) $a_{11}=20$. (3) $S_{20}=10$. (4) $S_{16}=20$.

8. 不妨设$\angle A\leqslant\angle B\leqslant\angle C$，可得 $3\angle B=180^\circ$，$\angle B=60^\circ$；反之，不妨设$\angle B=60^\circ$，则$\angle A+\angle C=120^\circ=2\angle B$，得证.

9. 第 5 节的容积为$\dfrac{67}{66}$升.

B 组

1.（1）成立.　　（2）一定是等差数列.

2.（1）$\sum\limits_{i=1}^{10} a_{2i-1}=a_1+a_3+\cdots+a_{19}=190$.

（2）$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}=\sum\limits_{i=1}^{10} a_{2i}=210$.

3. S_n 的最小值为 $S_2=-4$.

4. $S_{p+q}=-(p+q)$.

5. 设凸多边形的边数为 n，于是其内角和的度数为 $180(n-2)$. 由 $180(n-2)=120n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 5$，解得 $n=9$ 或 16.

当 $n=16$ 时，最大内角度数 $a_n=120+15\times 5=195>180$，与凸多边形矛盾；

当 $n=9$ 时，最大内角度数 $a_n=160<180$ 满足条件.

所以该多边形是九边形.

6. 生产第 9 档次的产品可获得最大利润，最大利润为 864 元.

4.2　等比数列

练习 4.2(1)

1. C.

2.（1）$a_5=-48$.　　（2）$n=5$.　　（3）$q=\pm\sqrt{3}$.　　（4）$a_1=8$.

3. 提示：将等比数列各项转化为由首项 a_1 与公比 q 表示.

练习 4.2(2)

1.（1）$S_6=189$.　　（2）$S_n=-\frac{91}{45}$.

2. $S_{15}=210$.

3. 第二天走了 96 里.

练习 4.2(3)

1. $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i=\frac{1}{2}$.

2.（1）$0.\dot{1}\dot{3}=\frac{13}{99}$.　　（2）$1.3\dot{3}\dot{2}=\frac{1\,319}{990}$.

3. 所有等边三角形 $A_iB_iC_i$（$i=1, 2, 3\cdots$）的面积组成的数列为$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{16}$，…，$\left(\frac{1}{4}\right)^n$…. 这是以$\frac{1}{4}$为首项、以$\frac{1}{4}$为公比的等比数列，因此所有等边三角形 $A_iB_iC_i$（$i=1, 2, 3\cdots$）的面积的和为$\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$.

习题 4.2

A 组

1. （1）$\pm\sqrt{2}$.　　（2）$\pm ab(a^2+b^2)$.

2. （1）$a_1=128$，$q=\frac{1}{2}$.　　（2）$a_{15}=2$.　　（3）$a_{12}=3$.

3. （1）因为$\frac{2a_{n+1}}{2a_n}=q$，所以数列$\{2a_n\}$是以 $2a_1$ 为首项、以 q 为公比的等比数列.

（2）不一定，如 $a_n=(-1)^n$.

4. 由 $a_n=a_1q_1^{n-1}$，$b_n=b_1q_2^{n-1}$，得 $a_nb_n=a_1b_1(q_1q_2)^{n-1}$. 当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{a_nb_n}{a_{n-1}b_{n-1}}=q_1q_2$. 因此，数列$\{a_nb_n\}$是一个以 a_1b_1 为首项、以 q_1q_2 为公比的等比数列.

5. 由 $b^2=ac$，$a^2+b^2=c^2$，消去 b，得 $a^2+ac-c^2=0$，解得$\frac{a}{c}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$(负根已舍).

6. 设每次革新后成本下降的百分比是 x. 由题意，$105(1-x)^4=60$，解得 $x\approx 0.131$. 因此，每次革新后成本下降的百分比约为 13.1%.

7. （1）$S_5=605$.　　（2）$S_8=\frac{255}{16}$.　　（3）$S_n=-\frac{1\,365}{1\,024}$.　　（4）$a_1=24$.

8. $a_n=2\cdot(-1)^{n-1}$或 $a_n=\frac{1}{2}\cdot(-2)^{n-1}$.

9. 小球每次下落经过的路程构成以 100 为首项、以$\frac{1}{2}$为公比的等比数列，设为$\{a_n\}$.

（1）$a_1=100$，第 10 次着地时，经过的路程共有 $a_1+2(a_2+a_3+\cdots+a_{10})=299\frac{39}{64}$ m.

（2）因为第 n 次着地时经过的总路程为 $S_n=a_1+2(a_2+a_3+\cdots+a_n)=300-\frac{200}{2^{n-1}}$，对任意给定的正整数 n 均有 $S_n<300$. 因此，不可能在某一次着地时总路程超过 300 m.

B 组

1. 提示：利用等比中项的定义证明.

2. 提示：求和展开式的各项依次构成以 a^n 为首项、以 $\frac{a}{b}$ 为公比的等比数列.

3. 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列. 利用 $a_n=q^{n-1}$ 证明.

4.（1）提示：利用等比数列定义.　　（2）$a_n=2n-3$ 或 $a_n=5-2n$.

5.（1）$r_1=\frac{10}{3}$，当 $n\geqslant 2$ 时，由 $\frac{r_{n-1}-r_n}{r_{n-1}+r_n}=\frac{5}{13}$，得 $\frac{r_n}{r_{n-1}}=\frac{4}{9}$.

因此，数列 $\{r_n\}$ 是以 $\frac{10}{3}$ 为首项、以 $\frac{4}{9}$ 为公比的等比数列.

（2）$L_n=\pi(r_1+r_2+\cdots+r_n)=6\pi\cdot\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$.

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}L_n=6\pi$.

4.3　数列

练习 4.3(1)

1.

n	1	2	$\cdots$	5	$\cdots$	12	$\cdots$	n	$\cdots$
a_n	2	6	$\cdots$	30	$\cdots$	156	$\cdots$	$n(n+1)$	$\cdots$

2. $a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=9$，$a_4=27$. 数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式为 $a_n=3^{n-1}$.

3. $a_{n+1}-a_n=|2n-5|-|2n-7|$. 当 $n=1$、2 时，$a_{n+1}<a_n$；当 $n=3$ 时，$a_{n+1}=a_n$；当 $n\geqslant 4$ 时，$a_{n+1}>a_n$.

因此，该数列的最小项为第 3 项和第 4 项，其值为 1：$a_3=a_4=1$.

练习 4.3(2)

1.（1）$a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=\frac{9}{4}$，$a_4=\frac{16}{9}$，$a_5=\frac{25}{16}$.

(2) $a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^2, & n\geqslant 2.\end{cases}$

2. $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=\lg\dfrac{n}{n-1}+\lg\dfrac{n-1}{n-2}+\cdots+\lg\dfrac{2}{1}+2=2+\lg n$.

3. (1) 当 $n=1$ 时，首项为 $a_1+3=4$. 当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n+3=2a_{n-1}+3+3=2(a_{n-1}+3)$.

显然 $a_n>0$，进而 $a_n+3>0$. 故 $\dfrac{a_n+3}{a_{n-1}+3}=2$ 为常数.

因此，数列 $\{a_n+3\}$ 是以 4 为首项、以 2 为公比的等比数列.

(2) 由(1)，$a_n+3=2^{n+1}$，故 $a_n=2^{n+1}-3$.

习题 4.3

A 组

1. (1) $a_1=-4$，$a_2=-6$，$a_3=-6$，$a_4=-4$.

(2) $a_1=-\dfrac{1}{2}$，$a_2=\dfrac{1}{2}$，$a_3=-\dfrac{1}{2}$，$a_4=\dfrac{1}{2}$.

2. 由 $\dfrac{n^2+n-1}{3}=79\dfrac{2}{3}$，解得 $n=15$(负根已舍). 所以 $79\dfrac{2}{3}$ 是该数列的第 15 项.

3. (1) $a_1=-2$，$a_2=-7$，$a_3=-10$，$a_4=-11$，$a_5=-10$.

(2) $a_n=(n-4)^2-11$，最小项为 $a_4=-11$.

4. 因为 $a_{n+1}-a_n=(3n+1)\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n+1}-(3n-2)\left(\dfrac{3}{5}\right)^n=\dfrac{13-6n}{5}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$，所以，当 $n=1$，2 时，$a_{n+1}>a_n$；当 $n\geqslant 3$ 时，$a_{n+1}<a_n$.

于是，该数列第 3 项为最大项，而 $a_1=\dfrac{3}{5}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，所以数列 $\{a_n\}$ 无最小项.

5. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

6. 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 中的最小项为第 6 项 $\dfrac{a_6}{6}=\dfrac{21}{2}$.

7. (1) 73 个.

（2）设每张图中挖掉的正方形的总数所组成的数列为$\{a_n\}$. 该数列满足的递推公式为$a_n=a_{n-1}+8^{n-1}(n\geqslant2)$或$a_n=8a_{n-1}+1(n\geqslant2)$.

B 组

1. 数列$\{a_n\}$的最大项为第 10 项，$a_{10}=\dfrac{10-\sqrt{97}}{10-\sqrt{98}}$，最小项为第 9 项，$a_9=\dfrac{9-\sqrt{97}}{9-\sqrt{98}}$.

2. $(-3,+\infty)$.

3. 数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ 2\cdot3^{n-2}, & n\geqslant2.\end{cases}$

4.（1）数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=4\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$.

（2）提示：因为数列$\{b_n\}$的最大项为$b_3=\dfrac{80}{9}<9$，所以不存在正整数m，使得$b_m\geqslant9$成立.

5. 从第 1 年年初起，设该厂第n年底的剩余资金为a_n万元，每年应扣除消费基金x万元. 于是有$a_1=1\,500-x$，及$a_{n+1}=1.5a_n-x$，后者进一步变形为$a_{n+1}-2x=1.5(a_n-2x)$. 所以$\{a_n-2x\}$是以 1.5 为公比的等比数列，$a_n-2x=1.5^{n-1}(1\,500-3x)$. 根据题意知$a_5=1.5^4(1\,500-3x)+2x\geqslant2\,000$，解得$x\leqslant\dfrac{1\,500\times1.5^4-2\,000}{3\times1.5^4-2}$，其中$\dfrac{1\,500\times1.5^4-2\,000}{3\times1.5^4-2}\approx424.17$.

所以这家皮革厂每年至多扣除消费基金 424 万元，才能在第 5 年年底扣除消费基金后至少有 2 000 万元的资金.

4.4　数学归纳法

练习 4.4(1)

1.（1）错误在于缺少数学归纳法步骤(1)(归纳基础). 实际上，当$n=1$时，左边$=2$，而右边$=3$，等式不成立. 这个命题是错误的命题.

（2）错误在于数学归纳法步骤(2)中，进行递推论证时没用到归纳假设. 这意味

着不用数学归纳法就可以直接证明等式.

2. 略.

3. 略.

练习 4.4(2)

1. $S_1=\frac{1}{2}$，$S_2=\frac{2}{3}$，$S_3=\frac{3}{4}$，$S_4=\frac{4}{5}$.

猜想 $S_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$. 数学归纳法证明略.

2. (1) $a_2=\frac{3}{4}$，$a_3=\frac{3}{5}$，$a_4=\frac{1}{2}$.

(2) 猜想 $a_n=\frac{3}{n+2}$. 数学归纳法证明略.

3. 假设存在常数 a、b，使等式 $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=an^3+bn$ 对任意正整数 n 都成立. 当 $n=1$，2 时，等式成立，得 $a=\frac{4}{3}$，$b=-\frac{1}{3}$.

由此猜想 $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{4}{3}n^3-\frac{1}{3}n$ 对任意正整数 n 都成立. 数学归纳法证明略.

习题 4.4

A 组

1. C.

2. 略.

3. 略.

4. 略.

B 组

1. 略.

2. 略.

3. 假设存在一次函数 $y=g(x)$，其中 $g(x)=kx+b$，使得等式成立.

当 $n=2$ 时，由 $a_1=g(2)(a_2-1)$，得 $g(2)=2$；

当 $n=3$ 时，由 $a_1+a_2=g(3)(a_3-1)$，得 $g(3)=3$.

于是，可解得 $k=1$，$b=0$，即 $g(x)=x$.

数学归纳法证明略.

*4.5 用迭代序列求$\sqrt{2}$的近似值

练习 4.5

1. 将 $x_1=-2$ 代入 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$，得到迭代序列的前 5 项如下表所示：

n	x_n
1	-2
2	-1.5
3	$-1.416\,666\,667$
4	$-1.414\,215\,686$
5	$-1.414\,213\,562$

2. 将 $x_1=-2$ 代入 $x_{n+1}=1+\frac{1}{x_n+1}$，得到迭代序列的前 8 项如下表所示：

n	x_n
1	-2
2	0
3	2
4	1.333 333 333
5	1.428 571 429
6	1.411 764 706
7	1.414 634 146
8	1.414 141 414

3. 递推公式为 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{3}{x_n}\right)$.

该迭代序列的前 5 项如下表所示：

n	x_n
1	1
2	2
3	1.75
4	1.732 142 857
5	1.732 050 81

复习题

A 组

1. (1) ①②③.　　(2) ①③.

2. (1) B.　　(2) D.

3. $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{99}+a_{100}=145$.

4. 数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3n-9$.

5. 提示：设数列$\{a_n\}$的公差为 d，利用$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d$ 结合定义法证明.

6. $a_5a_6=9$.

7. 这个数列的前 15 项和最大，最大值为 225.

8. 这个数列为 2，4，6，9 或 2，$\frac{1}{4}$，$-\frac{3}{2}$，9.

9. 公比为 1 或$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

10. 略.

11. (1) 1，$\frac{4}{3}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{8}{5}$.

(2) 猜想$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{2n}{n+1}$. 数学归纳法证明略.

B 组

1. (1) B.　　(2) D.

2. 提示：设公比为 q，由 $2S_9=S_3+S_6$，得 $q^3=-\dfrac{1}{2}$，利用等差中项定义证明.

3. 提示：(1) 当 $n\leqslant 9$ 时，$19-n\geqslant 10$. 因为 $a_{n+1}+a_{19-n}=a_{n+2}+a_{18-n}=\cdots=2a_{10}=0$，所以 $a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{18-n}+a_{19-n}=0$，两边同加 $a_1+a_2+\cdots+a_n$，得 $a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{19-n}=a_1+a_2+\cdots+a_n$，得证.

当 $10\leqslant n\leqslant 19$ 时，$19-n\leqslant 9$. 同理可证.

(2) 在等比数列 $\{b_n\}$ 中，若 $b_9=1$，则 $b_1b_2\cdot\cdots\cdot b_n=b_1b_2\cdot\cdots\cdot b_{17-n}$ 对于一切小于 17 的正整数 n 都成立.

4. 提示：(1) $a_n\neq 0$，把递推公式两边同时取倒数，有 $\dfrac{1}{a_n}=2+\dfrac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2)$，所以 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是以 $\dfrac{1}{a_1}=3$ 为首项、以 2 为公差的等差数列.

(2) $b_n=\begin{cases}2, & n=1,\\ \dfrac{n}{2n+1}, & n\geqslant 2,\end{cases}$ 因此数列 $\{b_n\}$ 的最大项为 $b_1=2$，最小项为 $b_2=\dfrac{2}{5}$.

5. 提示：由 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，知 $S_{n-1}=\dfrac{(n-1)(a_1+a_{n-1})}{2}(n\geqslant 2)$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}-\dfrac{(n-1)(a_1+a_{n-1})}{2}(n\geqslant 2)$， ①

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\dfrac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2}-\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$. ②

②−①并整理，得 $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2)$，即 $2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\geqslant 2)$.

所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

6. 略.

7. 提示：假设存在常数 a、b、c，使等式 $1\cdot(n^2-1^2)+2\cdot(n^2-2^2)+3\cdot(n^2-3^2)+\cdots+n\cdot(n^2-n^2)=an^4+bn^2+c$ 对任意正整数 n 都成立.

当 $n=1$，2，3 时，等式均应成立，可解得 $a=\dfrac{1}{4}$，$b=-\dfrac{1}{4}$，$c=0$.

由此猜想 $1\cdot(n^2-1^2)+2\cdot(n^2-2^2)+3\cdot(n^2-3^2)+\cdots+n\cdot(n^2-n^2)=\dfrac{1}{4}n^4-\dfrac{1}{4}n^2$ 对任意正整数 n 都成立. 数学归纳法证明略.

拓展与思考

1. 提示：设将第 n 个金属片从 1 号直杆移到 3 号直杆需移动的最少次数记为 a_n. 要先说明数列$\{a_n\}$满足递推关系：$a_n=2a_{n-1}+1(n\geqslant 2)$.

据此得到数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n-1$，因此最少需要移动 2^n-1 次.

2. (1) 设 M_n 的周长为 L_n，其通项公式为 $L_n=3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$.

(2) 设 M_n 的面积为 A_n，可证明 $A_n=\frac{2\sqrt{3}}{5}-\frac{3\sqrt{3}}{20}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$.

(3) 当 n 无限增大时，L_n 也随之无限增大，而 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

因此，科克雪花曲线所围成的图形是周长无限增大而面积却有极限的图形，且面积的极限为$\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

四、相关阅读材料

参考文献

[1] 华罗庚. 数学归纳法[M]. 上海：上海教育出版社，1963.

[2] 李大潜. 黄金分割漫话[M]. 北京：高等教育出版社，2007.

后　　记

本套教学参考资料与李大潜、王建磐主编，上海教育出版社出版的《普通高中教科书·数学》配套使用，本套教材根据中华人民共和国教育部制定并颁布实施的《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》编制，并经国家教材委员会专家委员会审核通过.

本套教材是由设在复旦大学和华东师范大学的两个上海市数学教育教学研究基地(上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地)联合主持编写的. 编写工作依据高中数学课程标准的具体要求，努力符合教育规律和高中学生的认知规律，结合上海城市发展定位和课程改革基础，并力求充分体现特色. 希望我们的这一努力能经得起实践和时间的检验，对扎实推进数学的基础教育发挥积极的作用.

本书是与选择性必修第一册教材配套的教学参考资料，共为四章，各章编写人员分别为

曾国光(第 1 章)

虞涛、李英(第 2 章)

王华、施洪亮(第 3 章)

叶莎莎、许亚善(第 4 章)

限于编写者的水平，也由于新编教材尚缺乏教学实践的检验，不妥及疏漏之处在所难免，恳请广大师生及读者不吝赐教. 宝贵意见请通过邮箱 gaozhongshuxue@seph.com.cn 反馈，不胜感激.

2021 年 12 月

图书在版编目（CIP）数据

普通高中数学教学参考资料：选择性必修. 第一册 / 上海市中小学（幼儿园）课程改革委员会组织编写. —上海：上海教育出版社，2022.1（2024.12重印）
ISBN 978-7-5720-1315-7

Ⅰ. ①普… Ⅱ. ①上… Ⅲ. ①中学数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2022)第004338号

经上海市中小学教材审查委员会审查
准予使用　　准用号 Ⅱ-GJ-2022002

中国环境标志
CHINA ENVIRONMENTAL LABELLING

绿色印刷产品

ISBN 978-7-5720-1315-7

9 787572 013157 >

定　价：　30.00元