九年义务教育课本

七年级 第二学期

（试用本）

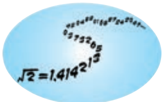
上海教育出版社

数学

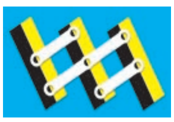
数学

MATHEMATICS

目　录

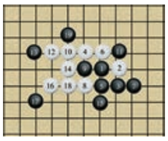


第十二章　实数

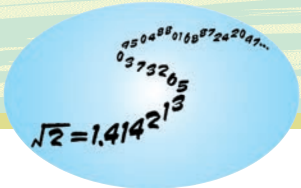


第十三章　相交线　平行线

第十四章 三角形 …… 71



第十五章　平面直角坐标系



第十二章　实　　数

人类对于数的认识，经历了一个逐步扩展的过程．一开始，先有自然数，接着出现了分数和小数；引入负数之后，数的范围扩大到了有理数．人们原以为，数的扩充可以到此为止，有理数已经够用了．

不料，在公元前400多年，古希腊的毕达哥拉斯学派发现了一类新的数，例如面积为2、3、5、…的正方形的边长等．他们用数学的严格说理方法，断定这些新的数不是有理数．还有一些数，例如圆周率 π，也不是有理数．

这些新的数既然不是有理数，就被称为无理数．有理数和无理数合起来，统称为实数．实数的内容非常丰富，特别是和“乘方运算”的逆运算——开方运算密切相关．

本章将把数的范围从有理数扩大到实数，从而使我们对于数及其运算的认识进一步得到完善．

12

第 1 节　实数的概念

12.1　实数的概念

如果把整数看作分母为1的分数，那么有理数就是用两个整数之比表示的分数：$\frac{p}{q}$（其中$q\neq0$）.从古埃及到古代中国的数学，都认为任何一个量，总可以用有理数来表示.但是，出生于公元前约470年的古希腊数学家希帕斯（Hippasus）发现了一种实际存在的量，却不能表示为两个整数之比.当时，希帕斯所在的毕达哥拉斯（Pythagoras）学派认为这不合常理，是一种怪异，传说他们把希帕斯扔到大海淹死了.后来人们知道，这是一个伟大的发现，是人类理性智慧的胜利.

现在让我们随着前人的脚步，通过对下列问题的探索和思考，初步认识实数，同时学习人类理性精神的光辉典范.

问题 1

面积为2的正方形存在吗？

操作

如图12－1所示，把边长为1的两个正方形，分别沿着它们的一条对角线剪开，得到四个形状一样的直角三角形，它们的面积都是$\frac{1}{2}$；再把这四个直角三角形拼成一个四边形$ABCD$.

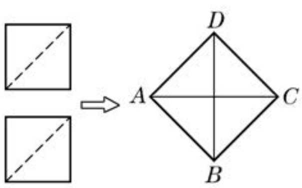


图12－1

由以上操作可知，四边形$ABCD$是面积为2的正方形.

问题 2

正方形$ABCD$的边长怎样表示？

分析　设正方形$ABCD$的边长为x，那么$x^2=2$，即x是这样的一个数，它的平方等于2.

这个数所表示的正方形$ABCD$的边长，是现实世界中真实存在的线段的长度．由于这个数和2有关，我们现在用$\sqrt{2}$（读作"根号2"）来表示.

同样，还有面积为3、5等的正方形，其边长分别用$\sqrt{3}$（读作"根号3"）、$\sqrt{5}$（读作"根号5"）等来表示.

问题 3

$\sqrt{2}$是有理数吗?

前面已经说过有理数就是分数，我们还知道一个分数可以表示为有限小数（包括整数），或者表示为无限循环小数．但是，当年希帕斯发现$\sqrt{2}$这个数肯定不能表示为分数．也就是说，$\sqrt{2}$不是有理数，那就不能是有限小数，也不能是无限循环小数．于是，$\sqrt{2}$只能是"无限不循环小数"了．这是一种新的"数"，是我们要研究的对象.

> $\sqrt{2}$不是有理数的理由见阅读材料.

问题 4

无限不循环小数还有吗?

事实上，面积为3、5、6、7、8、10等的正方形的边长都是无限不循环小数，我们熟悉的圆周率π也是无限不循环小数.

此外，我们还可以自己构造一些无限不循环小数．例如：

0.101 001 000 100 001…(它的位数无限，相邻两个1之间0的个数依次加1个)；

0.123 456 789 101 112 131 415 161 718 192 021…(连续不断地依次写正整数)等.

> 无限不循环小数的个数无穷无尽，我们在后面的学习中将进一步认识.

无限不循环小数叫做**无理数**（irrational number）.

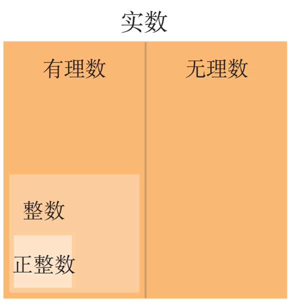
无理数也有正、负之分．如$\sqrt{2}$、π、0.101 001 000 1…等这样的数叫做正无理数（有时在这些数的前面加上“+”号）；如$-\sqrt{2}$、$-\pi$、$-0.101\ 001\ 000\ 1\cdots$等这样的数叫做负无理数(这些数前面的“−”号不可省略)．

只有符号不同的两个无理数，如$\sqrt{2}$与$-\sqrt{2}$，π与$-\pi$，它们互为相反数．

> 有理数和无理数统称为实数(real number)．

实数可以这样分类：

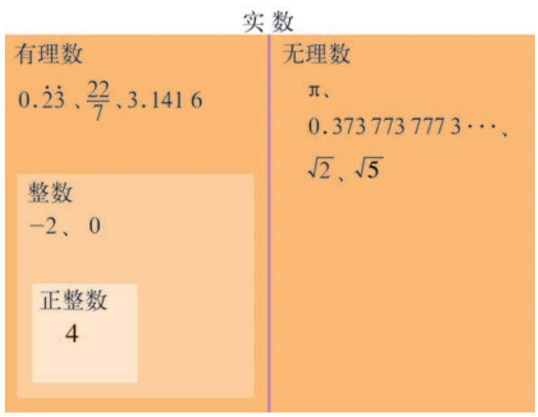
- 实数
  - 有理数（正有理数、零、负有理数）——有限小数或无限循环小数
  - 无理数（正无理数、负无理数）——无限不循环小数



例题1 将下列各数放入图中适当的位置：

0、−2、$\sqrt{2}$、4、3.141 6、$0.\dot{2}\dot{3}$、$\frac{22}{7}$、$\sqrt{5}$、π、0.373 773 777 3…(它的位数无限且相邻两个“3”之间“7”的个数依次加1个)．

解 各数放置如下：



例题2　判断下列说法是否正确，并说明理由：

(1) 无限小数都是无理数；

(2) 无理数都是无限小数；

(3) 正实数包括正有理数和正无理数；

(4) 实数可以分为正实数和负实数两类．

解　(1) 无限小数包括无限循环小数和无限不循环小数，其中无限循环小数是有理数，所以(1)不正确．

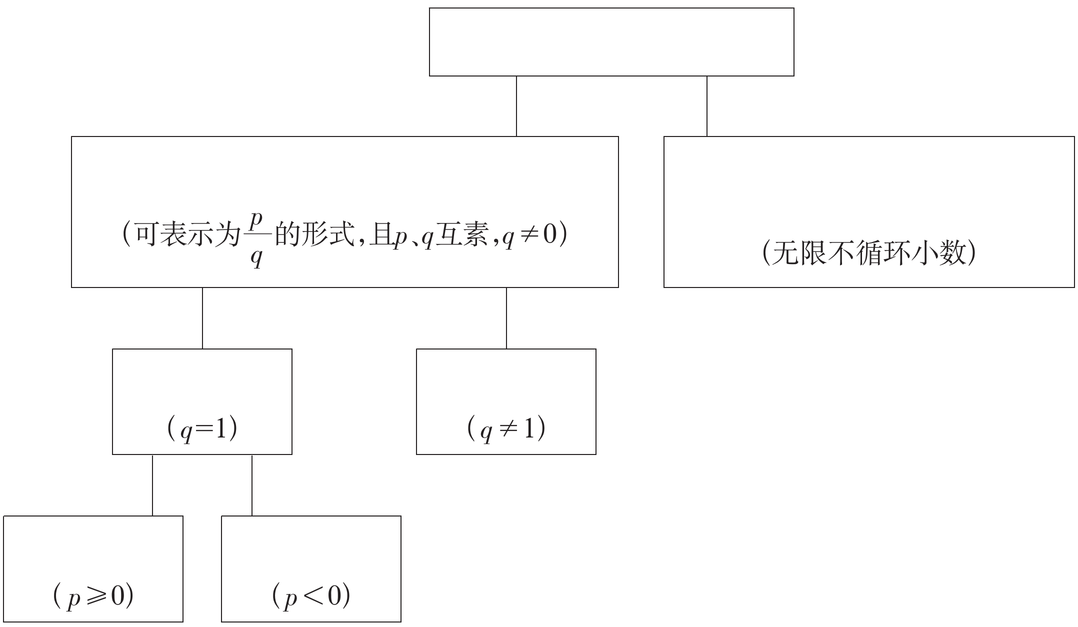
(2) 无理数是无限不循环小数，当然也是无限小数，所以(2)正确．

(3) 正实数按有理数和无理数分类，可分为正有理数和正无理数，所以(3)正确．

(4) 因为零是实数，但它既不是正实数，也不是负实数，而在(4)的实数分类中没有把零包含在内，所以(4)不正确．

练习12.1

1. 回想以前学过的有理数分类方法，考虑实数还可以怎样分类．
2. 将“负整数”“有理数”“整数”“分数（分母不为1）”“无理数”“自然数”“实数”分别填入下面合适的框内（p、q是整数）：



12 第 2 节　数的开方

12.2　平方根和开平方

我们在上一节认识了像$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$这样的无理数，它们的表示形式中都有“$\sqrt{\ }$”，现在来学习与这类数有关的概念和运算.

问题 1

小丽家中有一张方桌，桌面是面积为64平方分米的正方形．这个正方形桌面的边长是多少分米?

$(-8)\times(-8)=(-8)^2=64$.

但桌面的边长不能是负数.

分析　这是“已知正方形的面积，求它的边长”的问题．设正方形桌面的边长为 x 分米．根据已知条件，得

$$x^2=64.$$

因为$8\times8=8^2=64$，所以桌面的边长为8分米.

上述问题就是“已知一个数的平方，求这个数”.

$a\geqslant0$.

> 如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的**平方根** (square root).
>
> 求一个数 a 的平方根的运算叫做**开平方** (extraction of square root)，a 叫做**被开方数**.

例如，求64的平方根，就要对64进行“开平方”的运算，64是被开方数．这就要找出满足$x^2=64$的数x，因为$8^2=64$，$(-8)^2=64$，所以64的平方根是±8.

在平方根概念中，涉及平方运算．我们规定无理数的平方遵循同有理数一样的符号法则.

例题1　求下列各数的平方根：

(1) 4；　　(2) 0.16；　　(3) $\frac{9}{25}$.

解　(1) 因为 $2^2=4$，$(-2)^2=4$，所以 4 的平方根是 ± 2.

(2) 因为 $0.4^2=0.16$，$(-0.4)^2=0.16$，所以 0.16 的平方根是 ± 0.4.

(3) 因为 $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$，$\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$，所以 $\frac{9}{25}$ 的平方根是 $\pm\frac{3}{5}$.

思考 1

零有平方根吗？负数有平方根吗？

在实数范围内，“正数”指“正实数”，“负数”指“负实数”.

负数的平方根问题在高中数学中将进一步研究.

我们看到：一个正数有两个平方根，它们互为相反数；零的平方根是零；负数没有平方根.

> 正数 a 的两个平方根可以用“$\pm\sqrt{a}$”表示，其中 $\sqrt{a}$ 表示 a 的正平方根(又叫算术平方根)，读作“根号 a”；$-\sqrt{a}$ 表示 a 的负平方根，读作“负根号 a”.
>
> 零的平方根记作 $\sqrt{0}$，$\sqrt{0}=0$.

开平方与平方互为逆运算. 根据平方根的意义，我们得到

一个正数的平方根的平方等于这个数.

(1) 当 $a>0$ 时，$(\sqrt{a})^2=a$，$(-\sqrt{a})^2=a$.

一个正(负)数的平方的正平方根等于这个数(这个数的相反数).

(2) 当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a^2}=a$；

当 $a<0$ 时，$\sqrt{a^2}=-a$.

还可以讨论负平方根的情况.

或者

$\sqrt{225}=\sqrt{5\times5\times3\times3}$

$=\sqrt{(5\times3)^2}=\sqrt{15^2}=15.$

例题2 求下列各数的正平方根：

(1) 225； (2) 0.000 1； (3) $\frac{9}{121}$.

解 (1) $\sqrt{225}=\sqrt{15^2}=15.$

(2) $\sqrt{0.0001}=\sqrt{0.01^2}=0.01.$

(3) $\sqrt{\frac{9}{121}}=\sqrt{\left(\frac{3}{11}\right)^2}=\frac{3}{11}.$

如果被开方数可以表示为某正数的平方，那么它的正平方根就是这个正数.

思考 2

$\sqrt{(-4)^2}=\sqrt{4^2}.$

$\sqrt{(-4)^2}=?$

练习12.2(1)

1. 求下列各数的平方根：

(1) 25； (2) $\frac{16}{81}$； (3) 0.36.

2. 下列等式是否正确？如果不正确，请改正：

(1) $\sqrt{-49}=-7$； (2) $\sqrt{(-3)^2}=3$；

(3) $-\sqrt{(-5)^2}=5$； (4) $\sqrt{81}=\pm9.$

3. 学校要围一个占地面积为144平方米的正方形花圃，需要准备多长的竹篱笆？

前面已经说明，面积为2的正方形存在，这个正方形的边长可用$\sqrt{2}$表示，它是一个无理数.

因为$(\sqrt{2})^2=2$，所以$\sqrt{2}$是2的一个平方根.

问题 2

$\sqrt{2}$这个数究竟有多大？

利用计算器，可以直接求出$\sqrt{2}$的近似值.为体验获得近似值的过程，我们来进行以下探索.

探索

两个正方形中，面积较大的正方形的边长较长.

(1) 因为$1^2=1, 2^2=4, (\sqrt{2})^2=2$，

而 $1<2<4$，

所以 $1<\sqrt{2}<2$.

(2) 从1开始，每次增加0.1，利用计算器顺次计算1.1、1.2、1.3、…、1.9的平方的值，当其中某数的平方大于2时即停止，得$1.4^2<2<1.5^2$，所以$1.4<\sqrt{2}<1.5$.

(3) 从1.4开始，每次增加0.01，类似(2)进行计算和比较，得$1.41^2<2<1.42^2$，所以$1.41<\sqrt{2}<1.42$.

(4) 类似上述的尝试再继续进行下去，可得

$$1.414<\sqrt{2}<1.415,$$

$$1.414\,2<\sqrt{2}<1.414\,3,$$

$$\cdots\cdots$$

这一探索过程，体现了"逐步逼近"的思想方法.

从中可以看到，随着左右夹逼$\sqrt{2}$的两个小数的位数不断增加，$\sqrt{2}$与这两个小数的差别越来越小.

利用计算机技术，可以求出

$\sqrt{2}=1.414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,688\,724\,209\cdots$

类似地，$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$分别是3和5的一个平方根，它们是无理数. 对它们的大小的估计，也可用左右夹逼的方法来得到.

因为$(-\sqrt{2})^2=(\sqrt{2})^2=2$，可知$-\sqrt{2}$也是2的一个平方根.

同理，$-\sqrt{3}$、$-\sqrt{5}$也分别是3和5的一个平方根.

用计算器开平方的按键顺序与计算器型号有关，具体操作要看该型号计算器的使用说明书.

在实数范围内，任意一个正数都有两个平方根．求出了它的正平方根，可知它的相反数就是另一平方根.

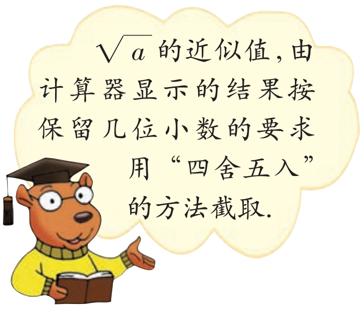
对于任意给定的一个正数a，可以利用计算器来求它的正平方根或求得正平方根的近似值.

例题3 用计算器，求值(近似值保留四位小数)：

(1) $\sqrt{5}$； (2) $\sqrt{125}$；

(3) $\sqrt{441}$； (4) $\sqrt{5.78}$；

(5) $\sqrt{0.0392}$； (6) $\sqrt{64516}$.



解 (1) $\sqrt{5}\approx 2.2361$.

(2) $\sqrt{125}\approx 11.1803$.

(3) $\sqrt{441}=21$.

(4) $\sqrt{5.78}\approx 2.4042$.

(5) $\sqrt{0.0392}\approx 0.1980$.

(6) $\sqrt{64516}=254$.

使用计算器求$\sqrt{a}$，当输入正数a的位数不超过十个时，如果所显示的结果其位数超过五个，那么这个结果是$\sqrt{a}$的一个近似值；否则是准确值.

例题4 用计算器，求下列各数的平方根的近似值(保留三位小数)：

(1) 8； (2) 108；

(3) $\frac{3}{7}$； (4) $2\frac{4}{9}$.

解 (1) $\sqrt{8}\approx 2.828$，还有$-\sqrt{8}\approx -2.828$.

(2) $\sqrt{108}\approx 10.392$，还有$-\sqrt{108}\approx -10.392$.

(3) $\sqrt{\frac{3}{7}}\approx 0.655$，还有$-\sqrt{\frac{3}{7}}\approx -0.655$.

(4) $\sqrt{2\frac{4}{9}}\approx 1.563$，还有$-\sqrt{2\frac{4}{9}}\approx -1.563$.

练习12.2(2)

1 求值：

(1) $-\sqrt{\dfrac{4}{49}}$；　(2) $\sqrt{|-1.21|}$；　(3) $\sqrt{0.0196}$；　(4) $\sqrt{(-6)^2}$.

2 用计算器，求近似值(保留三位小数)：

(1) $\sqrt{7}$；　(2) $\sqrt{12}$；　(3) $\sqrt{98}$；　(4) $\sqrt{6\dfrac{8}{13}}$.

3 用计算器，求下列各数的平方根的近似值(保留四位小数)：

(1) 11；　(2) $\dfrac{1}{6}$；　(3) 32.4；　(4) $2\dfrac{3}{7}$.

12.3　立方根和开立方

问题

已知一个正方体的体积是64立方分米，那么这个正方体的棱长是多少分米？

上述问题就是“已知一个数的立方，求这个数”.

如果一个数的立方等于a，那么这个数叫做a的**立方根**(cube root)，用“$\sqrt[3]{a}$”表示，读作“三次根号a”，$\sqrt[3]{a}$中的a叫做**被开方数**，“3”叫做**根指数**.

求一个数a的立方根的运算叫做**开立方**(extraction of cubic root).

例题1 求下列各数的立方根：

(1) 1 000； (2) $-\dfrac{8}{27}$； (3) -0.001； (4) 0.

解 (1) 因为$10^3=1\,000$，所以$\sqrt[3]{1\,000}=10$.

(2) 因为$\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3=-\dfrac{8}{27}$，所以$\sqrt[3]{-\dfrac{8}{27}}=-\dfrac{2}{3}$.

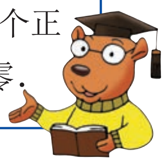
(3) 因为$(-0.1)^3=-0.001$，所以$\sqrt[3]{-0.001}=-0.1$.

(4) 因为$0^3=0$，所以$\sqrt[3]{0}=0$.

想一想

任意一个正数的立方根都是正数吗？

正数的立方是一个正数，负数的立方是一个负数，零的立方等于零，所以正数的立方根是一个正数，负数的立方根是一个负数，零的立方根是零.



在初中阶段，开立方运算中涉及的被开方数及立方根，都在实数范围内.

任意一个实数都有立方根，而且只有一个立方根.

类似于平方与开平方之间的关系，根据立方根的意义，可以得到

$$(\sqrt[3]{a})^3=a,\sqrt[3]{a^3}=a.$$

例题2 求值：

(1) $\sqrt[3]{(-8)^3}$； (2) $\sqrt[3]{216}$；

(3) $\sqrt[3]{10^{-6}}$； (4) $\sqrt[3]{-5^3}$.

解 (1) $\sqrt[3]{(-8)^3}=-8$.

(2) $\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{6^3}=6$.

(3) $\sqrt[3]{10^{-6}}=\sqrt[3]{(10^{-2})^3}=10^{-2}=0.01$.

(4) $\sqrt[3]{-5^3}=\sqrt[3]{(-5)^3}=-5$.

一个数的立方根可能是有理数，也可能是无理数. 我们

可以利用计算器来求一个数的立方根或这个立方根的近似值.

例题3　用计算器,求值(近似值保留四位小数):

(1) $\sqrt[3]{24}$;　　(2) $\sqrt[3]{17\,576}$;

(3) $\sqrt[3]{-3.96}$;　　(4) $\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}$.

解　(1) $\sqrt[3]{24}\approx 2.884\,5$.

(2) $\sqrt[3]{17\,576}=26$.

(3) $\sqrt[3]{-3.96}\approx -1.582\,1$.

(4) $\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}\approx 1.386\,7$.

例题4　用计算器,求下列立方根,直接写出计算器显示的结果:

(1) $\sqrt[3]{6}$;　　(2) $\sqrt[3]{-6}$;

(3) $\sqrt[3]{6\,000}$;　　(4) $\sqrt[3]{0.006}$.

解　(1) $\sqrt[3]{6}\approx 1.817\,120\,593$.

(2) $\sqrt[3]{-6}\approx -1.817\,120\,593$.

(3) $\sqrt[3]{6\,000}\approx 18.171\,205\,93$.

(4) $\sqrt[3]{0.006}\approx 0.181\,712\,059$.

思考

比较例题4各小题中的被开方数和所得立方根，你有什么发现?

练习12.3

1. 下列说法是否正确?如果不正确,请说明理由.

(1) 4 的平方根是 ±2;　　(2) 8 的立方根是 ±2;

(3) −27 的立方根是 −3;　　(4) 9 的平方根是 3.

2. 已知$a^3=-125$，$b^3=-\dfrac{1}{216}$，$c^3=0.064$，求 a、b、c 的值.

3. 用计算器，求近似值(保留四位小数)：

(1) $\sqrt[3]{2\,006}$；　　(2) $\sqrt[3]{9\dfrac{3}{8}}$；　　(3) $\sqrt[3]{-1\,937.7}$.

4. 用计算器，求下列立方根，直接写出计算器显示的结果：

$$\sqrt[3]{0.4}、\sqrt[3]{0.04}、\sqrt[3]{4}、\sqrt[3]{40}、\sqrt[3]{400}、\sqrt[3]{4\,000}.$$

12.4　n 次方根

在乘方运算中，有平方、立方以及 n 次方(n 是大于 3 的整数)等运算. 我们已经对平方和立方的逆运算——开平方和开立方进行了讨论，知道了平方根和立方根的概念. 对于 n 次方 (n 是大于 3 的整数)运算，同样也有逆运算. 现在，我们把平方根和立方根的概念加以推广.

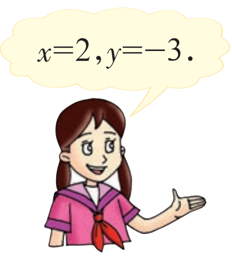
> 如果一个数的 n 次方(n 是大于 1 的整数)等于 a，那么这个数叫做a的**n次方根**(n-th root). 当n为奇数时，这个数为 a 的奇次方根；当 n 为偶数时，这个数为 a 的偶次方根.
>
> 求一个数 a 的 n 次方根的运算叫做**开 n 次方**，a 叫做**被开方数**，n 叫做**根指数**.

当 n=2、3 时，这个数通常称为平方根、立方根，其运算称为开平方、开立方.

有时 n 次方根简称“方根”；开 n 次方简称“开方”.

根据乘方和方根的意义，讨论下列问题：

问题 1



(1) 2^7=________，$(-2)^7$=________；

如果 x^7=128，那么 x=________.

(2) 3^5=________，$(-3)^5$=________；

如果 y^5=−243，那么 y=________.

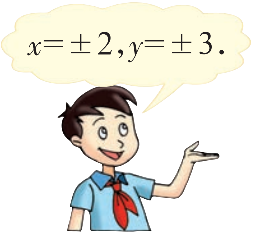
思考 1

与立方根类比.

(1) 当根指数 n 为奇数时,n 次方根应如何表示?

(2) 是不是任何一个数都有奇次方根?

问题 2



(1) $2^6=$________,$(-2)^6=$________;

如果 $x^6=64$, 那么 $x=$________.

(2) $3^4=$________,$(-3)^4=$________;

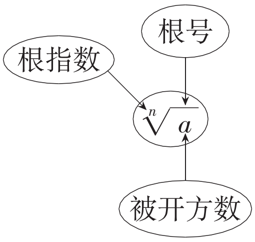
如果 $y^4=81$, 那么 $y=$________.

思考 2

与平方根类比.

(1) 当根指数n为偶数时,n次方根应如何表示?

(2) 是不是任何一个数都有偶次方根?



所概括的结论适用于实数范围.

实数 a 的奇次方根有且只有一个,用“$\sqrt[n]{a}$”表示.其中被开方数 a 是任意一个实数,根指数 n 是大于1的奇数.

正数 a 的偶次方根有两个,它们互为相反数,正 n 次方根用“$\sqrt[n]{a}$”表示,负n次方根用“$-\sqrt[n]{a}$”表示.其中被开方数 $a>0$,根指数 n 是正偶数(当 $n=2$时,在$\pm\sqrt[n]{a}$ 中省略 n).

负数的偶次方根不存在.

零的 n 次方根等于零,表示为$\sqrt[n]{0}=0$.

“$\sqrt[n]{a}$”读作“n 次根号 a”.

例如，求$-1\ 024$的5次方根，就是对$-1\ 024$进行开5次方的运算．因为$(-4)^5=-1\ 024$，所以$\sqrt[5]{-1\ 024}=-4$．

又如，求$1\ 024$的10次方根，就是对$1\ 024$进行开10次方的运算．因为$2^{10}=1\ 024$，所以$\sqrt[10]{1\ 024}=2$，还有$-\sqrt[10]{1\ 024}=-2$．

例题1 (1) 求$-\dfrac{32}{243}$的5次方根；

(2) 求$(-8)^2$的6次方根．

解 (1) $\sqrt[5]{-\dfrac{32}{243}}=\sqrt[5]{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^5}=-\dfrac{2}{3}$．

(2) $\sqrt[6]{(-8)^2}=\sqrt[6]{8^2}=\sqrt[6]{(2^3)^2}=\sqrt[6]{2^6}=2$，

还有$-\sqrt[6]{(-8)^2}=-2$．

按键方法见该型号计算器的使用说明书．

例题2 用计算器，求近似值(保留三位小数)：

(1) $\sqrt[4]{8\ 600}$；　　(2) $\sqrt[5]{-15.68}$．

解 (1) $\sqrt[4]{8\ 600}\approx 9.630$．

(2) $\sqrt[5]{-15.68}\approx -1.734$．

练习12.4

1. 求值：

(1) $\sqrt[5]{32}$；　　(2) $\sqrt[4]{625}$；　　(3) $\sqrt[6]{\left(-\dfrac{1}{8}\right)^2}$．

2. 用计算器，求近似值(保留三位小数)：

(1) $\sqrt[4]{1\ 000}$；　　(2) $\sqrt[5]{-640}$；　　(3) $-\sqrt[6]{518}$．

3. 用计算器，求近似值(保留三位小数)：

(1) $\sqrt[5]{-2\dfrac{3}{5}}$；　　(2) $\sqrt[10]{0.3}$．

12

第 3 节　实数的运算

12.5　用数轴上的点表示实数

我们知道,每一个有理数都可以用数轴上的一个点来表示.

问题

一个无理数可以用数轴上的一个点来表示吗?

操作 1

我们先尝试用数轴上的一个点来表示无理数$\sqrt{2}$.

由前面的学习，我们知道两个边长为1的小正方形可以拼成一个面积为2 的正方形,它的边长为$\sqrt{2}$(图12－2(1)中的正方形$ABCD$). 观察正方形$ABCD$,可知它的一边是一个直角三角形的斜边,这个直角三角形的两条直角边长都是1. 这样,我们就可以在数轴上确定一个点来表示$\sqrt{2}$.

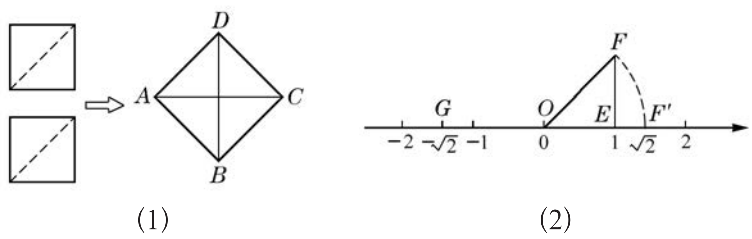


图12－2

如图12－2(2),在数轴上找出表示数1的点E,以E为顶点、EO为一边,在数轴的上方画一个直角三角形OEF,使另一直

角边 $EF=1$，则$OF=\sqrt{2}$．

在数轴的正半轴上截取$OF'=OF$，这样确定的点F'是表示无理数$\sqrt{2}$的点．

如果在数轴的负半轴上截取$OG=OF'$，那么这样确定的点G是表示无理数$-\sqrt{2}$的点．

操作 2

数轴上表示无理数 π 的点，可以采用如下方法来确定：

把直径等于1个单位长的圆放在数轴上面，这时圆上的点A与原点O重合．将圆在数轴上面向右滚动一周，点A运动到点A'位置，点A'与数轴上的一点B重合，如图12－3所示．可知线段OB的长等于圆周长，即$OB=\pi$，所得点B是数轴上表示无理数 π 的点．

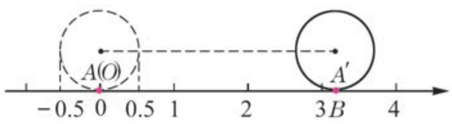


图12－3

任意一个无理数，要在数轴上确定表示它的点可用“夹逼”的方法解决．

例如，无理数$\sqrt[3]{4}=1.587\ 401\ 052\cdots$．取小数位数相同的两个有限小数$t_1=1.58$，$t_2=1.59$，得$t_1<\sqrt[3]{4}<t_2$．设$t_1$、$t_2$在数轴上所对应的点分别为$T_1$和$T_2$，那么表示$\sqrt[3]{4}$的点在线段$T_1T_2$内，而$T_1T_2$的长等于0.01．我们可以想象，如果所取的两个有限小数t_1、t_2的小数位数越多，那么线段T_1T_2的长度越小；而且随着所取小数的位数不断增加，线段T_1T_2的长度越来越接近于0，最后收缩为一点T，这就是在数轴上表示$\sqrt[3]{4}$的点，并且是唯一的．

许多无理数都可以用画图的方法找到数轴上的一个点来表示它．一般地，我们可以用无限不循环小数的近似值来确定这个点的位置，这里不再进一步讨论．

每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示，而且这样的点是唯一的，它是这个实数在数轴上所对应的点． 事实上，全体实数所对应的点布满整个数轴．

反过来，数轴上的每一个点也都可以用唯一的一个实数来表示．

一个无理数 t 在数轴上所对应的点 T，可以利用 t 的近似值（有理数）所对应的点 T' 来大致确定．如$t=\sqrt[3]{4}$，可先用计算器找出一个接近$\sqrt[3]{4}$的有理数，比如 1.6，可知 1.6比$\sqrt[3]{4}$略大，于是在数轴上，$\sqrt[3]{4}$所对应的点 T 在 1.6 的对应点 T' 稍微偏左的位置．

$$|a|=\begin{cases}a, & \text{当 } a>0 \text{ 时；}\\ 0, & \text{当 } a=0 \text{ 时；}\\ -a, & \text{当 } a<0 \text{ 时.}\end{cases}$$

有理数范围内已有的绝对值、相反数等概念，在实数范围内有同样的意义.

一个实数在数轴上所对应的点到原点的距离叫做这个数的绝对值．实数 a 的绝对值记作 $|a|$.

绝对值相等、符号相反的两个数叫做互为相反数；零的相反数是零．非零实数 a 的相反数是 $-a$.

两个实数也可以比较大小，其大小顺序的规定同有理数一样.

负数小于零；零小于正数.

两个正数，绝对值大的数较大；两个负数，绝对值大的数较小.

从数轴上看，右边的点所表示的数总比左边的点所表示的数大.

例题1　比较下列每组数的大小：

(1) $\sqrt{5}$ 与 $-\sqrt{6}$；

(2) $\sqrt{5}$ 与 $\sqrt{6}$；

(3) $-\sqrt{5}$ 与 $-\sqrt{6}$；

(4) π 与 $\left|-\sqrt{10}\right|$.

解　(1) 因为负数小于正数，所以 $-\sqrt{6}<\sqrt{5}$.

(2) 因为 $\sqrt{5}\approx2.236$，$\sqrt{6}\approx2.449$，所以

$$\sqrt{5}<\sqrt{6}.$$

(3) $\left|-\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}$，$\left|-\sqrt{6}\right|=\sqrt{6}$.

因为 $\sqrt{5}<\sqrt{6}$，所以 $-\sqrt{5}>-\sqrt{6}$.

(4) 因为 $\pi<3.15$，

$$\left|-\sqrt{10}\right|=\sqrt{10}\approx3.162>3.15,$$

所以

$$\pi<\left|-\sqrt{10}\right|.$$

例题2 如图12－4，已知数轴上的四个点 A、B、C、D 所对应的实数依次是 $\sqrt{2}$、$-\dfrac{2}{3}$、$2\dfrac{1}{2}$、$-\sqrt{5}$，O 为原点，求线段 OA、OB、OC、OD 的长度.

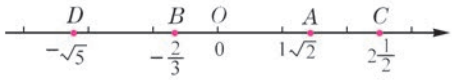


图12－4

解 线段 OA 的长度等于点 A 到原点 O 的距离，得

$$OA=|\sqrt{2}|=\sqrt{2}.$$

同理，得

$$OB=\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3},$$

$$OC=\left|2\frac{1}{2}\right|=2\frac{1}{2},$$

$$OD=|-\sqrt{5}|=\sqrt{5}.$$

思考

如图12－4，怎样根据点 B、C 分别对应的数来求线段 BC 的长度？

线段 BC 的长度是线段 OB 与 OC 的长度之和，得

$BC=OB+OC=\dfrac{2}{3}+2\dfrac{1}{2}=3\dfrac{1}{6}$.

线段 BC 的长度等于点 C 对应的数减去点 B 对应的数，即

$BC=2\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{2}{3}\right)=3\dfrac{1}{6}$.

线段 BC 的长度等于点 B 对应的数减去点 C 对应的数所得差的绝对值，即

$BC=\left|-\dfrac{2}{3}-2\dfrac{1}{2}\right|=\left|-3\dfrac{1}{6}\right|=3\dfrac{1}{6}$.

在数轴上，如果点 A、点 B 所对应的数分别为 a、b，那么 A、B 两点的距离

$$AB=|a-b|.$$

练习12.5

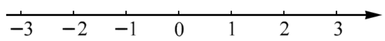
1 写出下列各数的相反数、绝对值，并用计算器求出它们的近似值(保留四位小数)：

(1) $\sqrt[3]{-9}$；　　　　(2) $\sqrt[4]{\dfrac{8}{125}}$.

2 比较下列各组数的大小：

(1) 10与$\sqrt{64}$；　　　　(2) -2与$-\sqrt{5}$；　　　　(3) $-\sqrt{12}$与-8.

3 在数轴上分别标出$-\sqrt[3]{5}$、$\sqrt{5}$所对应的点的大致位置.



(第3题)

4 已知数轴上的四点A、B、C、D所对应的数依次是-1.2、$-3\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{3}{4}$、4.3.

(1) 在数轴上描出点A、B、C、D；

(2) 分别求A与B、C与D、A与C两点的距离.

12.6　实数的运算

还可以借助于图形，直观地理解两个正实数(其中至少有一个是无理数)的和或积一定存在且唯一．如：把“两个正实数的和”看成分别以这两个实数为长度的两条线段的和；把“两个正实数的积”看成以如上所说两条线段为邻边的长方形的面积.

实数的加、减、乘、除、乘方等运算的意义，与有理数运算的意义一样.

实数都可以表示为小数(包括整数)的形式，其中无理数是无限不循环小数．在实数运算中，对于涉及无限小数的运算，可以根据保留几位小数的要求，取无限小数的近似值(有限小数)进行运算，逐步接近原来运算的结果.这样，实数的运算就转化为有限小数的运算.

我们学过的有理数的运算法则、运算性质以及运算顺序的规定，在实数范围内仍旧适用．开方与乘方是同级运算.

当 a 是有理数时，$a\cdot\sqrt[n]{b}$ 一般要写成 $a\sqrt[n]{b}$，如 $\frac{3}{2}\times\sqrt{5}$ 应写成 $\frac{3}{2}\sqrt{5}$．要注意：$\frac{3}{2}\sqrt{5}$ 不能写成 $1\frac{1}{2}\sqrt{5}$ 或 $\sqrt{5}\ \frac{3}{2}$．

对于涉及无理数的实数运算，如果没有指明运算结果保留几位小数，那么通常是利用实数的运算法则和运算性质对算式进行化简，其结果可能是化简了的一个算式，如 $2+\sqrt{3}$、$2\sqrt{3}$．

例题1 不用计算器，计算：

(1) $2\sqrt{7}+3\sqrt{7}-\sqrt{7}$；

(2) $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\div\frac{1}{\sqrt{2}}$；

(3) $(\sqrt{5})^3$；

(4) $(3-2\sqrt{3})\div\sqrt{3}$．

可类比合并同类项．

解 (1) $2\sqrt{7}+3\sqrt{7}-\sqrt{7}$

$=(2+3-1)\sqrt{7}$ (乘法对于加法的分配律)

$=4\sqrt{7}$．

(2) $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\div\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ (除法法则)

$=(\sqrt{2})^2\times\sqrt{3}$ (乘法交换律及平方的意义)

$=2\sqrt{3}$ (平方根的意义)．

(3) $(\sqrt{5})^3$

$=(\sqrt{5})^2\times\sqrt{5}$ (乘方的意义)

$=5\sqrt{5}$ (平方根的意义)．

(4) $(3-2\sqrt{3})\div\sqrt{3}$

$=[(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}]\times\frac{1}{\sqrt{3}}$ (平方根的意义及除法法则)

$=(\sqrt{3})^2\times\frac{1}{\sqrt{3}}-2\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}$ (乘法对于加法

的分配律)

$$=\sqrt{3}-2.$$

例题2　用计算器计算，写出计算器显示的计算结果近似值：

(1) $\sqrt{5}\times\sqrt{6}$、$\sqrt{5\times6}$；

(2) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$、$\sqrt{\dfrac{5}{6}}$.

解　(1) $\sqrt{5}\times\sqrt{6}=\sqrt{30}\approx5.477\ 225\ 575$,

$\sqrt{5\times6}=\sqrt{30}\approx5.477\ 225\ 575$.

(2) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}\approx0.912\ 870\ 929$,

$\sqrt{\dfrac{5}{6}}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}\approx0.912\ 870\ 929$.

想一想

在计算器显示计算结果的过程中，出现了

$$\sqrt{5}\times\sqrt{6}=\sqrt{30},\sqrt{5\times6}=\sqrt{30},$$

即 $$\sqrt{5\times6}=\sqrt{5}\times\sqrt{6}.$$

类似地， $$\sqrt{\frac{5}{6}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.$$

这两个等式为什么成立？一般情况怎样？

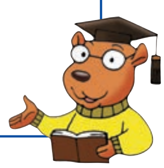
这两个等式中，a、b可以为0吗？

设$a>0,b>0$，可知

$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2=ab$.

根据平方根的意义，得$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$.

同理　$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.



例题3 不用计算器，计算：

(1) $\sqrt{(-3)^2+(\sqrt{7})^2}$；

(2) $(\sqrt{3})^9\div(\sqrt{3})^7$；

(3) $(-2\sqrt{3}+2+3\sqrt{3})\times\sqrt{3}$；

(4) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$.

解 (1) $\sqrt{(-3)^2+(\sqrt{7})^2}=\sqrt{9+7}=\sqrt{16}=4$.

(2) $(\sqrt{3})^9\div(\sqrt{3})^7=(\sqrt{3})^{9-7}=(\sqrt{3})^2=3$.

(3) $(-2\sqrt{3}+2+3\sqrt{3})\times\sqrt{3}$

$=(-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}+2)\times\sqrt{3}$

$=(\sqrt{3}+2)\times\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}\times\sqrt{3}+2\times\sqrt{3}$

$=3+2\sqrt{3}$.

(4) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$

$=[(\sqrt{3}-\sqrt{2})\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})]^2$

$=[(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2]^2$

$=(3-2)^2$

$=1$.

$a^2\cdot b^2=(a\cdot b)^2$.

练习12.6(1)

1. 不用计算器，计算：

(1) $2\sqrt{6}+3\sqrt{6}-4\sqrt{6}$；

(2) $\sqrt{5}\div\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\div2\sqrt{5}$；

(3) $\sqrt{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)}$；

(4) $(\sqrt{5})^2-(\sqrt{13})^2+\sqrt[3]{125}$.

2. 不用计算器，计算：

(1) $(\sqrt{2})^3+(\sqrt{2}\times\sqrt{3})^2$；

(2) $\sqrt{\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{-2}+(\sqrt{10})^2}$；

(3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}\right)^{-1}+\sqrt{5}\times\sqrt{20}$；

(4) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}+(\sqrt{2}-1)^0$.

在实数运算中，常常要进行近似计算．现在我们对近似计算中有关的一些概念和问题，简要地进行整理和讨论．

上海中心大厦的建筑总高度为632米，地上127层，地下5层，总建筑面积为578 000平方米．在上述数量中，127、5是准确数，而632和578 000是近似数．

位于贵州省黔南州平塘县的500米口径球面射电望远镜(FAST)被誉为“中国天眼”．这座望远镜的外形像一口巨大的锅，其接收信号的反射面面积为250 000平方米．这里表示望远镜的球面口径和反射面面积大小的数也是近似数．

一般来说，完全符合实际地表示一个量多少的数叫做准确数；与准确数达到一定接近程度的数叫做近似数(或近似值)．

议一议

下列数据中，哪些是近似数？哪些是准确数？

(1) 上海科技馆的建筑面积约 98 000 平方米；

(2) 我们班里有 9 位同学的身高为 1.65 米；

(3) 地球赤道的半径约 6 378 千米．

(4) 月球以1.02千米/秒的速度，在椭圆轨道上绕地球公转，离地球时近时远，最近时约36万千米，最远时约40万千米．

3.14是π的精确到百分位的近似数，按照“四舍五入”的规则，可知$3.135 \leqslant \pi < 3.145$；

3.141 6是π的精确到万分位的近似数，按照“四舍五入”的规则，可知$3.141\,55 \leqslant \pi < 3.141\,65$.

3.141 6的精确度比3.14的精确度高.

取近似数时一般用“四舍五入”法，另外还有“进一法”和“去尾法”.

思考

3.14是圆周率π的近似数，3.141 6也是π的近似数，两者有什么区别？

对于近似数，要考虑它与相应准确数的接近程度.

近似数与准确数的接近程度即近似程度．对近似程度的要求，叫做**精确度**.

近似数的精确度通常有以下两种表述方式：

一种是精确到哪一个数位．例如，指明圆周率π的近似数“保留两位小数”（或“精确到百分位”，或“精确到0.01”），这时用“四舍五入”法得到$\pi \approx 3.14$；又如，指明3 485.26的近似数“精确到百位”，这时用“四舍五入”法得到$3\,485.26 \approx 3.5 \times 10^3$.

另一种是指定保留几个有效数字．对于一个近似数，从左边第一个不是零的数字起，往右到末位数字为止的所有数字，叫做这个近似数的**有效数字**(significant figure)．例如，指明圆周率π“保留五个有效数字”，这时用“四舍五入”法得到$\pi \approx 3.141\,6$；又如，指明3 485.26的近似数“保留三个有效数字”，这时用“四舍五入”法得到$3\,485.26 \approx 3.49 \times 10^3$.

例题4　下列近似数各精确到哪一个数位？各有几个有效数字？

(1) 2 000；　　(2) 0.618；

(3) 7.20万；　　(4) 5.10×10^5.

解　(1) 近似数 2 000 精确到个位，

它有四个有效数字：2、0、0、0.

(2) 近似数 0.618 精确到千分位，

它有三个有效数字：6、1、8.

(3) 近似数 7.20 万精确到百位，

它有三个有效数字：7、2、0．

(4) 近似数 5.10×10^5 精确到千位，

它有三个有效数字：5、1、0．

例题5　月球沿着一定的轨道围绕地球运动，它在近地点时与地球相距约为 363 300 千米，在远地点时与地球相距约为 405 500 千米．按下列精确度要求，用科学记数法表示这两个数的近似数：

(1) 精确到万位；

(2) 保留三个有效数字．

解　(1) $363\,300\approx3.6\times10^5$，

$405\,500\approx4.1\times10^5$．

(2) $363\,300\approx3.63\times10^5$，

$405\,500\approx4.06\times10^5$．

练习12.6(2)

1. 列举现实生活中用准确数和近似数表示量多少的两个实例．
2. 填空：

(1) 近似数 3.45 有________个有效数字，它们是________；

(2) 近似数 3.450 有________个有效数字，它们是________；

(3) 近似数 3.045 0 有________个有效数字，它们是________；

(4) 近似数 0.045 0 有________个有效数字，它们是________；

(5) 近似数 $-0.450\,0$ 有________个有效数字，它们是________．

3. 下列近似数各精确到哪一个数位？各有几个有效数字？

(1) 40 040；　　(2) –0.250；

(3) 5.50万；　　(4) 5.5×10^4．

4. “神舟六号”飞船在太空中飞行的速度达到7.820 185千米/秒，按下列要求分别取这个数的近似数：

(1) 精确到十分位；　　(2) 保留四个有效数字．

例题6 按指定的精确度要求计算：

(1) $\sqrt{37}+0.26-\sqrt[3]{5}$(精确到0.01)；

(2) $\left(-\dfrac{5}{8}\right)\times\sqrt{3}\div2\sqrt{5}$(保留三个有效数字).

在进行近似计算时，中间过程中的近似数一般比指定的精确度要求多一位，对最后所得结果按指定精确度要求取近似值.

如果向计算器直接输入算式进行计算，那么只要对最后显示的结果按指定精确度要求取近似值.

解 (1) $\sqrt{37}+0.26-\sqrt[3]{5}$

$\approx6.083+0.26-1.710$

$\approx4.63.$

或向计算器直接输入算式进行计算：

$\sqrt{37}+0.26-\sqrt[3]{5}$

$\approx4.632\ 786\ 584$

$\approx4.63.$

将算式输入计算器时要对除数$2\sqrt{5}$添括号，$-0.242\ 061\ 459$是向计算器输入算式后所显示出来的计算结果.

(2) $\left(-\dfrac{5}{8}\right)\times\sqrt{3}\div2\sqrt{5}$

$\approx-0.242\ 061\ 459$

$\approx-0.242.$

例题7 已知 $v_1=\sqrt{gR}$，$v_2=\sqrt{2gR}$．当 $g\approx9.807$，$R\approx6.378\times10^6$时，求 v_1 和 v_2 的近似值(保留三个有效数字).

解 当 $g\approx9.807$，$R\approx6.378\times10^6$时，

$v_1=\sqrt{gR}\approx\sqrt{9.807\times6.378\times10^6}\approx7.91\times10^3$，

$v_2=\sqrt{2gR}\approx\sqrt{2\times9.807\times6.378\times10^6}\approx1.12\times10^4$.

当 g 表示重力加速度，R 表示地球的赤道半径时，所得 v_1、v_2 的结果分别是第一宇宙速度和第二宇宙速度的近似值(单位：米/秒).

例题8 伞兵在高空跳离飞机往下降落，在打开降落伞前，下降的高度 h(米)与下降的时间 t(秒)的关系可以近似地表示为 $h=4.9t^2$(不计空气阻力)．一个伞兵在打开降落伞前的一段时间内下降了 920 米，这段时间大约有多少秒(精确到1秒)?

解 由 $h=4.9t^2$，$h=920$，得 $t^2=\dfrac{920}{4.9}$.

又因为 $t>0$，所以 $t=\sqrt{\dfrac{920}{4.9}}\approx 14$(秒).

答：这段时间大约有14秒.

例题9　在地面上围建一个花坛，底部形状设计如图12－5所示，它的外周由圆弧 ABC 与正方形 $ADEC$ 的三条边组成．已知圆弧的半径 $r=OA=AD$，$\angle AOC=60°$，正方形 $ADEC$ 的面积为 30 m^2，求花坛底部的周长(保留三个有效数字).

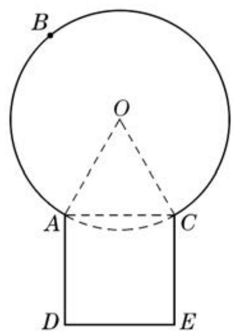


图12－5

解　因为正方形 $ADEC$ 的面积为 30 m^2，所以

$$AD=\sqrt{30}(\mathrm{m}).$$

由圆弧的半径 $r=AD$，$\angle AOC=60°$，得$r=\sqrt{30}$，弧 ABC所对的圆心角为300°.

所以弧 ABC 的长

$$l=\frac{300\pi r}{180}\approx 28.68(\mathrm{m}).$$

花坛底部的周长为

$$l+3\cdot AD\approx 28.68+3\sqrt{30}\approx 45.1(\mathrm{m}).$$

答：花坛底部的周长约为 45.1 m.

练习12.6(3)

1. 计算 (精确到0.01)：

(1) $\sqrt[3]{2.6}-\sqrt{3}$；　　(2) $\dfrac{\sqrt{20}-1}{\sqrt{10}}$；　　(3) $\left(\sqrt{15}+4\right)^2$.

2. 计算：

(1) $4.15-\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)$(精确到百分位)；

(2) $2\sqrt{6}+\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}-\dfrac{4}{\sqrt{3}}$(保留三个有效数字).

3. 人站在距地面 h 千米的高处，能看到的最远距离 $d\approx 112\sqrt{h}$ (单位：千米)．上海“东方明珠”太空舱距地面的高度为350 米，如果没有障碍物的影响，站在太空舱的人可以看到多远？ (精确到0.01千米)

12

第 4 节　分数指数幂

12.7　分数指数幂

我们知道，减法是加法的逆运算，按照“减去一个数等于加上这个数的相反数”，减法运算可以转化为加法运算；同样，除法运算也可以转化为乘法运算．那么对互为逆运算的乘方与开方，能否将开方运算转化为某种乘方形式的运算呢？

思考

先讨论一个具体的例子：

把$\sqrt[3]{2}$表示为 2 的 m 次幂形式．

分析　因为 2 的任何整数指数幂都是有理数，而$\sqrt[3]{2}$是一个无理数，可知 m 不是整数．

因此必须将指数的取值范围扩大，才有可能把$\sqrt[3]{2}$表示为 2^m 的形式．

假设$\sqrt[3]{2}=2^m$ 成立，那么$(\sqrt[3]{2})^3=(2^m)^3$．

我们在保持原来整数指数幂的运算性质的原则上扩大指数的取值范围．由

或者这样思考：由$(\sqrt[3]{2})^3=(2^m)^3$及所要保持的运算性质，得$2^{3m}=2$．应有$3m=1$，即$m=\dfrac{1}{3}$．

$$(\sqrt[3]{2})^3=2,\ \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3=2^{\frac{1}{3}\times 3}=2^1=2,$$

通过比较得到 $\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$．

把指数的取值范围扩大到分数，我们规定：

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\ (a\geqslant 0),$$

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\ (a>0),$$

其中m、n为正整数，$n>1$.

当 m 与 n 互素时，如果 n 为奇数，那么分数指数幂中的底数 a 可为负数.

上面规定中的 $a^{\frac{m}{n}}$ 和 $a^{-\frac{m}{n}}$ 叫做分数指数幂，a 是底数.

整数指数幂和分数指数幂统称为有理数指数幂.

指数的取值范围扩大到有理数后，方根就可以表示为幂的形式，开方运算可以转化为乘方形式的运算.

例题1　把下列方根化为幂的形式：

(1) $\sqrt[3]{5}$；　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$；

(3) $\sqrt[4]{5^3}$；　　(4) $\sqrt[4]{9}$.

解　(1) $\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}$.

(2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}}=5^{-\frac{2}{3}}$.

(3) $\sqrt[4]{5^3}=5^{\frac{3}{4}}$.

(4) $\sqrt[4]{9}=9^{\frac{1}{4}}\left(\text{或}\sqrt[4]{9}=\sqrt[4]{3^2}=3^{\frac{2}{4}}=3^{\frac{1}{2}}\right)$.

一个正数的分数指数幂的值是一个正数.

求分数指数幂的值，就是求一个数的方根，可将分数指数幂表示成方根的形式再求值. 如：

$49^{\frac{1}{2}}=\sqrt{49}=7$.

例题2　计算：

(1) $49^{\frac{1}{2}}$；　　(2) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$；

(3) $16^{-\frac{1}{4}}$；　　(4) $4^{\frac{1}{2}}\times 27^{\frac{1}{3}}$.

解　(1) $49^{\frac{1}{2}}=7$.

(2) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$.

(3) $16^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$.

(4) $4^{\frac{1}{2}}\times 27^{\frac{1}{3}}=2\times 3=6$.

例题3 用计算器,计算(保留三位小数):

(1) $6^{\frac{1}{3}}$; (2) $9^{\frac{2}{3}}$;

(3) $6.4^{-\frac{1}{4}}$; (4) $\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{3}{4}}$.

利用计算器,可直接求出一个分数指数幂的值. 可参照计算器的使用说明书,学习并掌握它的基本操作方法.

要熟悉求分数指数幂的值与相应的乘方、开方运算之间的关系,如$9^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{9^2}\approx 4.327$.

解 (1) $6^{\frac{1}{3}}\approx 1.817$.

(2) $9^{\frac{2}{3}}\approx 4.327$.

(3) $6.4^{-\frac{1}{4}}\approx 0.629$.

(4) $\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{3}{4}}\approx 0.777$.

练习12.7(1)

1. 把下列方根化为幂的形式:

(1) $\sqrt[3]{4}$; (2) $\sqrt[4]{2^3}$; (3) $\frac{1}{\sqrt{8}}$; (4) $\sqrt[5]{\frac{1}{3}}$.

2. 计算(口答):

(1) $9^{\frac{1}{2}}$; (2) $121^{\frac{1}{2}}$; (3) $144^{\frac{1}{2}}$;

(4) $64^{\frac{1}{3}}$; (5) $125^{\frac{1}{3}}$; (6) $256^{\frac{1}{4}}$.

3. 用计算器,计算(保留三位小数):

(1) $36^{\frac{1}{3}}$; (2) $12^{-\frac{3}{2}}$; (3) $\left(\frac{8}{15}\right)^{\frac{1}{4}}$; (4) $-10^{-\frac{2}{5}}$.

运用负指数幂的意义，则性质(1)可表述为

$a^p\cdot a^q=a^{p+q}$；

性质(3)可表述为

$(ab)^p=a^pb^p$.

有理数指数幂有下列运算性质：

设 $a>0,b>0$，p、q 为有理数，那么

(1) $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$，$a^p\div a^q=a^{p-q}$.

(2) $(a^p)^q=a^{pq}$.

(3) $(ab)^p=a^pb^p$，$\left(\dfrac{a}{b}\right)^p=\dfrac{a^p}{b^p}$.

例题4　计算：

(1) $(8\times27)^{\frac{1}{3}}$；　(2) $2^{\frac{1}{2}}\times8^{\frac{1}{2}}$；

(3) $\left(4^{\frac{2}{3}}\div6^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}$；　(4) $\left(5^{\frac{3}{2}}\times25^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

解　(1) $(8\times27)^{\frac{1}{3}}=(2^3\times3^3)^{\frac{1}{3}}=(2\times3)^{3\times\frac{1}{3}}=6^1=6$.

(2) $2^{\frac{1}{2}}\times8^{\frac{1}{2}}=(2\times8)^{\frac{1}{2}}=16^{\frac{1}{2}}=4$.

(3) $\left(4^{\frac{2}{3}}\div6^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}=4^{\frac{2}{3}\times(-3)}\div6^{\frac{1}{3}\times(-3)}=4^{-2}\div6^{-1}=\dfrac{1}{16}\times6=\dfrac{3}{8}$.

(4) $\left(5^{\frac{3}{2}}\times25^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left[5^{\frac{3}{2}}\times(5^2)^{-\frac{3}{4}}\right]^{\frac{1}{3}}=\left[5^{\frac{3}{2}+2\times\left(-\frac{3}{4}\right)}\right]^{\frac{1}{3}}=(5^0)^{\frac{1}{3}}=5^0=1$.

第(2)题也可这样解：

$2^{\frac{1}{2}}\times8^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\times(2^3)^{\frac{1}{2}}$

$=2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}=2^2=4$.

例题5　计算(结果表示为含幂的形式)：

(1) $5^{\frac{2}{3}}\times5^{\frac{1}{2}}$；　(2) $6^{\frac{1}{3}}\div6$；

(3) $\left(8^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}}$；　(4) $(12^3\times4^3)^{\frac{1}{6}}$.

解　(1) $5^{\frac{2}{3}}\times5^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}=5^{\frac{7}{6}}$.

(2) $6^{\frac{1}{3}}\div6=6^{\frac{1}{3}-1}=6^{-\frac{2}{3}}$.

(3) $\left(8^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}}=8^{\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{4}\right)}=8^{-\frac{1}{6}}$.

(4) $(12^3\times4^3)^{\frac{1}{6}}=(12\times4)^{3\times\frac{1}{6}}=48^{\frac{1}{2}}$.

第(3)题的结果还可化为 $2^{-\frac{1}{2}}$.

例题6　用计算器，计算(保留三位小数)：

(1) $4^{\frac{2}{3}}\times 5^{\frac{1}{3}}$；　　(2) $8^{\frac{3}{2}}\div 2^{\frac{2}{3}}$；

(3) $\left(3^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}}\right)^{4}$；　　(4) $\left(6^{\frac{3}{4}}\times 4^{\frac{1}{3}}\right)^{2}$.

解　(1) $4^{\frac{2}{3}}\times 5^{\frac{1}{3}}\approx 4.309$.

(2) $8^{\frac{3}{2}}\div 2^{\frac{2}{3}}\approx 14.254$.

(3) $\left(3^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}}\right)^{4}\approx 247.935$.

(4) $\left(6^{\frac{3}{4}}\times 4^{\frac{1}{3}}\right)^{2}\approx 37.034$.

练习12.7(2)

1. 计算：

(1) $\left(3^{\frac{1}{2}}\times 5^{\frac{1}{2}}\right)^{4}$；　　(2) $\left(3^{\frac{4}{3}}\times 5^{2}\right)^{\frac{3}{2}}$；

(3) $(2^{2}\div 3^{2})^{\frac{1}{2}}$；　　(4) $\left(2^{\frac{1}{3}}\div 3^{\frac{1}{2}}\right)^{6}$.

2. 计算 (结果表示为含幂的形式)：

(1) $9^{\frac{1}{6}}\times 9^{\frac{2}{3}}$；　　(2) $7^{\frac{1}{4}}\times 7^{2}$；

(3) $\left(27^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}$；　　(4) $(3^{5}\times 2^{5})^{\frac{1}{6}}$；

(5) $5^{-\frac{1}{2}}\times 5^{\frac{1}{2}}$；　　(6) $\left(2^{\frac{1}{2}}\div 3^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}$.

3. 用计算器，计算(保留三位小数)：

(1) $6^{\frac{2}{3}}\times 4^{\frac{2}{3}}$；　　(2) $5^{\frac{2}{3}}\div 10^{\frac{3}{4}}$；

(3) $\left(3^{\frac{1}{3}}-4^{-\frac{1}{3}}\right)^{3}$；　　(4) $\left(5^{-\frac{1}{2}}+6^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

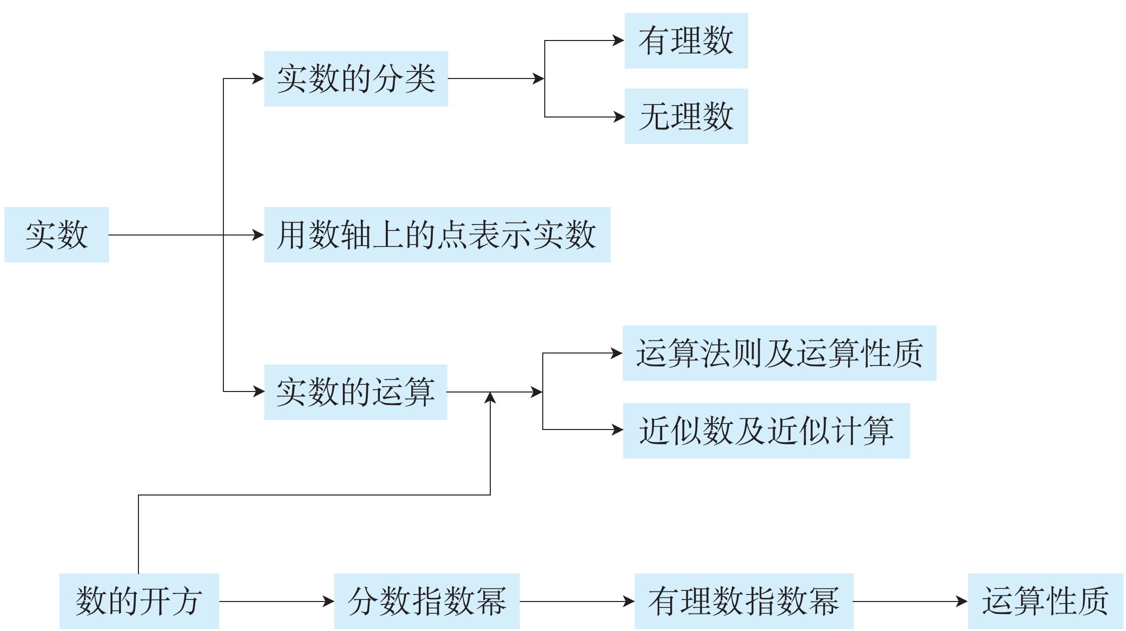
本章小结

在本章中，我们把数的范围从有理数扩大到了实数．这样，现实世界中有关长度、面积、体积等度量的结果，就都可以用实数来准确表示．从数学上看，在实数范围内对任何数施行开方运算（除了负数开偶次方）都可以通行无阻．这既满足了实际应用的需要，也解决了数学内部的矛盾．对于无理数的学习，难点是如何跨越“无限”，要正确领会“无限不循环小数”的意义，体会“逐步逼近”的思想，从“有限”出发认识“无限”．

我们大量接触的无理数是由开方运算得到的．因此，我们必须深刻理解“数”的开方的意义，理解乘方和开方是一对互逆的运算，注意偶数次开方和奇数次开方的区别．

数的开方一般用计算器求其近似值．但是，更重要的是不求出值，却能够将数的开方、乘方以及与加、减、乘、除等进行熟练而准确的混合运算（乘方包括分数指数幂）．实数的运算，是初中数学的基本知识和基本技能的重要组成部分．

本章知识结构框图如下：



阅读材料

“无理数”的由来

在2 400多年前，古希腊毕达哥拉斯学派的弟子希帕斯发现了一个惊人的事实：以一个正方形的边为长度单位去量这个正方形的对角线，这一对角线的长度不能用有理数表示．希帕斯的发现，第一次向人们揭示了原来的有理数存在缺陷，说明并不是任意线段的长度都能用有理数来表示；也说明有理数并没有布满数轴，在数轴上存在着不能用有理数表示的“孔隙”．这一伟大的发现，引起了人们对一种新的数的研究，促使人们从依靠直觉、经验而转向重视理性分析和论证，推动了公理几何学与逻辑学的发展，并且孕育了微积分的思想萌芽．这种新的数是无限不循环小数，被称为无理数．数学家经过长期的坚持不懈的努力，在这一认识的基础上逐步建立了实数的理论．

为什么$\sqrt{2}$不可能是一个有理数？现在我们用代数方法来解答这个问题．

假设$\sqrt{2}$是一个有理数，那么可以得到$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$，其中a、b是整数，a与b互素，且$b\neq 0$．这时，就有

$$2=\left(\frac{a}{b}\right)^2,$$

于是$a^2=2b^2$，则a是2的倍数．

再设$a=2m$，其中m是整数，就有

$$(2m)^2=2b^2,$$

也就是

$$b^2=2m^2,$$

所以b也是2的倍数．可见a与b不是互素的，与前面所假设的a与b互素相矛盾．因此$\sqrt{2}$不可能是一个有理数．

第十三章　相交线　平行线

同一平面内两条不重合的直线，要么相交，要么平行.

两条或多条直线相交，就出现很多的角．那么各个角之间有什么关系？

小学里曾经学习过平行线，那时只是观察一些实际物体的轮廓，如下面各图中的那些“平行线段”．可是，线段向两方无限延长才是直线．试问，“无限”的延长过程，我们能够观察到吗？看上去两条直线好像平行，请问如何判断？

对图形的研究，只凭观察、测量、类比、归纳是不够的．要形成对图形的正确认识，需要“直观”加“想象”，“经验”加“说理”.

13

第 1 节　相交线

13.1　邻补角、对顶角

取两根木条，将它们用一枚钉子钉在一起，给我们以两条直线相交的形象(图13－1).

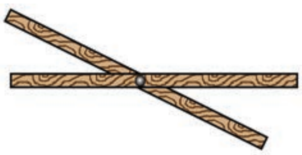


图13－1

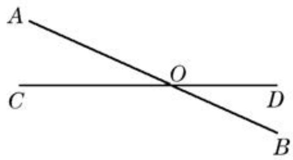


图13－2

在图13－2中，直线 AB 与 CD 相交. 也就是说，直线 AB 与 CD 是相交线，点 O 是它们的交点.

两条直线相交，只有一个交点. 这是因为，假如两条直线相交有两个交点，那么经过这两个交点就有了两条直线，这与我们学过的“经过两点只有一条直线”相矛盾.

所以两条直线有两个交点是不可能的.

问题

直线 AB 与 CD 相交，形成了四个小于平角的角，如图13－3中的∠1、∠2、∠3、∠4. 任取其中两个角，它们之间存在怎样的位置关系与数量关系？

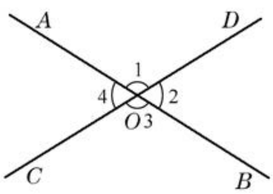


图13－3

观察图13－3，∠1与∠2有一条公共边OD，它们的另一条边OA、OB互为反向延长线，具有这种关系的两个角叫做互为邻补角 (adjacent angles on a straight line).

“互为邻补角”包括两角之间的位置关系与数量关系两个方面的要求；而互为补角仅指两角之间的数量关系.

如图13 - 3，$\angle 1$与$\angle 3$有一个公共顶点O，并且$\angle 1$的两边OA、OD分别与$\angle 3$的两边OB、OC互为反向延长线，具有这种关系的两个角叫做互为对顶角 (vertical angles) .

对于两个互为对顶角的角，我们凭观察就可以获得“对顶角相等”的认识. 下面，我们通过“说理”来确认它的正确性.

“等量代换”“等量减等量，差相等”，人们公认它们正确，是用来说理的基本事实. 常用的基本事实还有：“等量加等量，和相等”“等量的同倍量相等”“等量的同分量相等”“全量等于各部分量的和”，它们与“等量减等量，差相等”统称为等式性质.

因为$\angle 1$与$\angle 2$、$\angle 2$与$\angle 3$分别是邻补角 (已知) ，

所以$\angle 1+\angle 2=180°$，$\angle 2+\angle 3=180°$ (邻补角的意义)，

得$\angle 1+\angle 2=\angle 2+\angle 3$(等量代换).

所以$\angle 1=\angle 3$(等量减等量，差相等).

类似地，可以说明$\angle 2=\angle 4$.

这样，我们得到了对顶角的性质：

> 对顶角相等.

例题 1　如图 13 - 4，已知直线AB、CD相交于点O，$\angle AOC=50°$，求$\angle BOD$、$\angle AOD$、$\angle BOC$的度数.

解　因为直线AB、CD相交于点O，所以$\angle BOD$与$\angle AOC$是对顶角，得

$$\angle BOD=\angle AOC=50°.$$

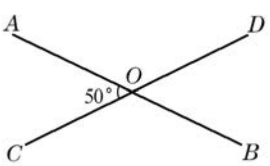


图13 - 4

因为直线 AB、CD 相交于点 O，所以 $\angle AOD$ 与 $\angle AOC$ 是邻补角，得

$$\angle AOD=180°-\angle AOC=180°-50°=130°.$$

因为 $\angle BOC$ 与 $\angle AOD$ 是对顶角，

所以 $\angle BOC=\angle AOD=130°$.

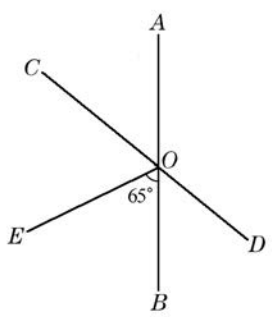


图13－5

例题2 如图13－5，直线AB、CD相交于点O，OE平分$\angle BOC$．已知$\angle BOE=65°$，求$\angle AOD$、$\angle AOC$的度数．

解 因为OE平分$\angle BOC$，

所以$\angle BOC=2\angle BOE=2\times65°=130°$.

因为直线 AB、CD 相交于点 O，

所以 $\angle BOC$ 与 $\angle AOD$ 是对顶角，

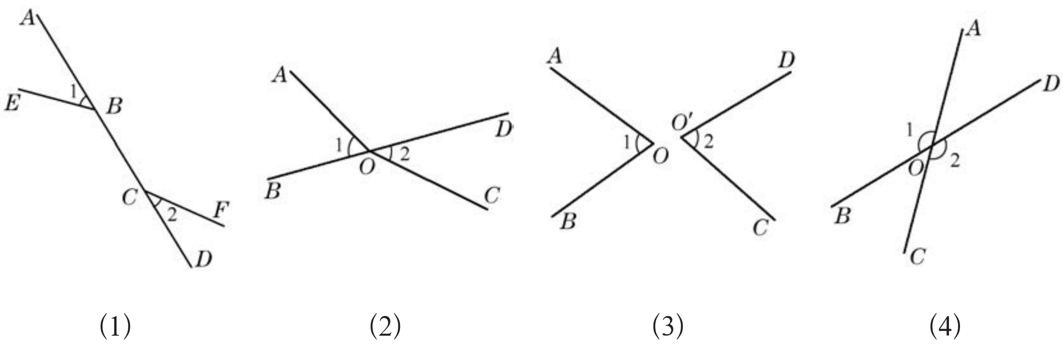
所以 $\angle AOD=\angle BOC=130°$.

而 $\angle BOC$ 与 $\angle AOC$ 是邻补角，

所以 $\angle AOC=180°-\angle BOC=180°-130°=50°$.

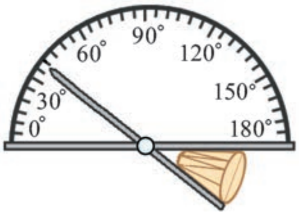
练习13.1

1. 下列图中，$\angle1$与$\angle2$是不是对顶角？

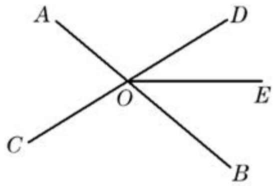


（第1题）

2 如图所示是一个对顶角量角器，请你说出它的测量原理.



(第2题)



(第3题)

3 如图，已知直线AB、CD相交于点O，OE平分$\angle BOD$，$\angle BOE=36°$，求$\angle AOC$的度数.

13.2　垂线

两条直线的夹角α满足$0°<\alpha\leqslant 90°$.

1. 垂线与斜线

两条直线相交形成四个小于平角的角，其中不大于直角的角叫做两条直线的夹角. 如图13－6，两条直线AB、CD相交于点O，$\angle AOC=40°$，那么$\angle AOC$是直线AB与CD的夹角；它们的夹角大小是40°.

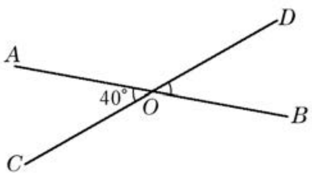


图13－6

想一想

如图13－7，直线AB与CD相交于点O，$\angle AOD=150°$，它们的夹角是几度？

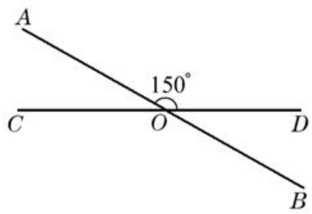


图13－7

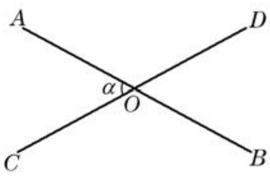


图13－8

如果两条直线的夹角为锐角，那么就说这两条直线互相斜交，其中一条直线叫做另一条直线的斜线.

如图13－8，直线AB与CD斜交.

观察

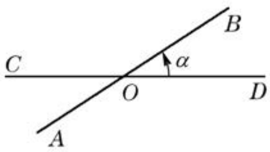


图13－9

如图13－9，两条直线 AB、CD 相交于点 O，当直线 AB 绕点 O 旋转时，直线 AB 与 CD 的夹角 α 的大小也在发生变化．AB 旋转到一定的位置时，可得 $\alpha=90°$．

如果两条直线的夹角为直角，那么就说这两条直线**互相垂直**（perpendicular），其中一条直线叫做另一条直线的**垂线**（perpendicular line），它们的交点叫做**垂足**（foot of a perpendicular）．

在直线 AB 与 CD 的相交处标上如“ㄱ”的符号，表示直线 AB、CD 互相垂直．

“垂直”用符号“⊥”表示，读作“垂直于”．直线 AB 与 CD 垂直，写作“$AB \perp CD$”．

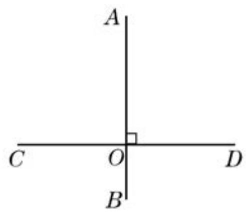


图13－10

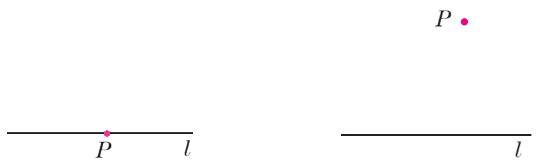
如图13－10，已知 $\angle AOC=90°$，可以得出 $AB \perp CD$，垂足为点 O；反过来，已知 $AB \perp CD$，垂足为点 O，可以得出 $\angle AOC=\angle AOD=\angle BOC=\angle BOD=90°$．

在日常生活中，我们经常可以看到互相垂直的直线形象，如下图所示．

你还能举出一些在周围世界中看到的互相垂直的直线形象的例子吗？

思考 1

(1) 如图13－11(1)，在平面内经过直线上一点 P 作已知直线 l 的垂线，这样的垂线能作几条？



(1)　　　　　　(2)

图13－11

(2) 如图13－11(2)，经过直线外一点 P 作已知直线 l 的垂线，这样的垂线能作几条？

通过操作实践，所得到的结果说明垂线有这样的基本性质：

> 简单地说：在平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.

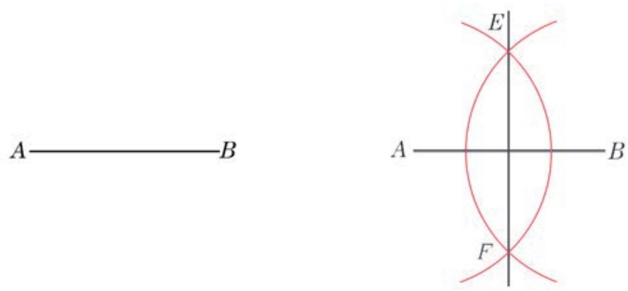
> 在平面内，经过直线上或直线外的一点作已知直线的垂线可以作一条，并且只能作一条.

想一想

还记得用直尺、圆规作出已知线段的中点吗？

> 过线段中点且垂直于这条线段的直线叫做这条线段的垂直平分线，简称中垂线.

例题1　如图13－12(1)，已知线段 AB，用直尺、圆规作出它的垂直平分线.



(1)　　　　　　(2)

图13－12

解　(1) 如图13－12(2)，以点 A 为圆心、大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧，以点 B 为圆心、同样长为半径作弧，两弧分别相交于点 E、F；

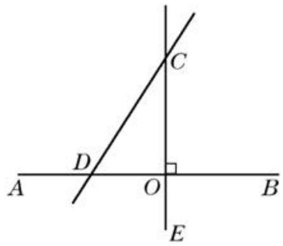
(2) 作直线 EF.

直线 EF 就是所求作的线段 AB 的垂直平分线.

> 这种作图方法所依据的原理将在以后学习.

练习13.2(1)

1. 填空：如图（图中 $\angle COB$ 是直角），



（第1题）

(1) 直线________与直线________相交于点 D；

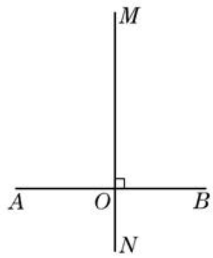
(2) 直线________$\perp$直线________，________为垂足；

(3) 过点 C 有且只有________条直线与直线 AB 垂直；

(4) 用刻度尺测量：点 C 到点 D 的距离是________cm，

点 C 到点 O 的距离是________cm，可知线段 CO 比线段________短.

2. 填空：如图，



（第2题）

(1) 因为 $\angle AOM=90°$（已知），

所以________$\perp$________.

(2) 因为 $MN\perp AB$，垂足为点 O，

所以$\angle$________=________°.

(3) 因为 MN 是线段 AB 的垂直平分线，点 O 为垂足（已知），

所以 MN________AB，________=________.

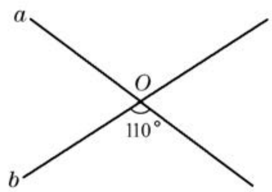
(4) 因为$\angle BOM=90°$（已知），

所以________$\perp$________.

又因为 $AO=BO$（已知），

所以________是________的垂直平分线.

3. 如图，直线 a、b 的夹角是________°.



（第3题）

2. 点到直线的距离

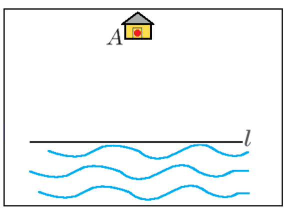


图13－13

思考 2

如图13－13，小明要从家门口 A 处出发走到河边 l.你能告诉他怎样走才能使路程最短吗？

操作

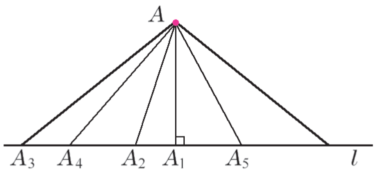


图13－14

如图13－14，已知直线 l 以及 l 外一点 A，过点 A 作直线 l 的垂线，垂足为点 A_1，另外在直线 l 上任取四个点：A_2、A_3、A_4、A_5，分别联结 AA_2、AA_3、AA_4、AA_5，量出线段 AA_1、AA_2、AA_3、AA_4、AA_5 的长度，这样就相应得到点 A 到直线 l 上五个点的距离．

思考 3

这些距离都相等吗？

这些距离与直线 l 上点的位置有什么关系？

图13－14中线段 AA_1 为点 A 到直线 l 的垂线段，其他线段 AA_2、AA_3、……都是斜线段，其中 AA_1 最短．

简单地说：垂线段最短．

联结直线外一点与直线上各点的所有线段中，垂线段最短．

直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫做这个**点到直线的距离**．

如果一个点在直线l上，那么就说这个点到直线l的距离为零．

例题2　指出图13－15中线段 AC、BC、AD、BD、CD 的长分别表示哪个点到哪条直线的距离．

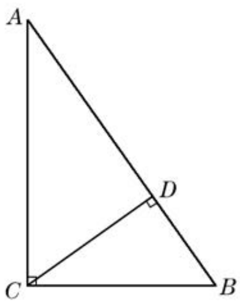


图13－15

解　线段 AC 的长是点 A 到直线 BC 的距离；

线段 BC 的长是点 B 到直线 AC 的距离；

线段 AD 的长是点 A 到直线 CD 的距离；

线段 BD 的长是点 B 到直线 CD 的距离；

线段 CD 的长是点 C 到直线 AB 的距离.

在思考2中，小明所走的路线，是从 A 到河边的垂线段. 如果已知图13－13中以1毫米表示实际长度20米，那么只要量出点 A 到直线 l 的距离（单位：毫米），就可以算出小明家门口 A 处到河边 l 的距离（单位：米），这也是小明到河边的最短路程.

练习13.2(2)

1. 选择题：

点到直线的距离是指（　　）

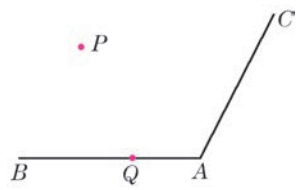
(A) 直线外的一点到这条直线的垂线；

(B) 直线外的一点到这条直线的垂线段；

(C) 直线外的一点到这条直线的垂线的长；

(D) 直线外的一点到这条直线的垂线段的长.

2. 按下列要求画图并填空：如图，



（第2题）

(1) 过点 P 画 $PD\perp AB$，垂足为点 D；

(2) 过点 P 画 $PE\perp AC$，垂足为点 E；

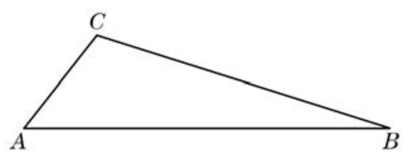
(3) 点 P、Q 两点间的距离是线段________的长度，PD的长度表示____________的距离；

(4) 点 P 到直线 AC 的距离是线段________的长度；

(5) 点 Q 到直线 AB 的距离是________________________.

3. (1) 如果一点在直线上，那么这点到该直线的距离为________.

(2) 在图中分别画出表示点 C 到直线 AB 的距离、点 B 到直线 AC 的距离的线段，再分别量出这些距离.



（第3(2)题）

13.3　同位角、内错角、同旁内角

如图13-16，在同一平面内，直线 l 与直线 a、b 分别相交于点 P、Q，这样的情形可以说成“直线 a、b 被直线 l 所截”，直线 l 叫做截线．

像这样的图形简称为“三线八角”图．

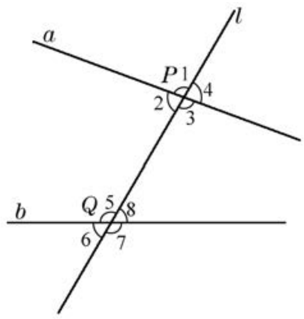


图13-16

直线a、b被直线l所截，所得到的八个角中，每两个角之间的位置关系除了对顶角与邻补角外，还有其他位置关系吗？

观察 1

∠1与∠5有怎样的位置关系？

∠1与∠5都在截线 l 的同旁，又分别处在直线 a、b 相同一侧的位置．具有这样位置关系的一对角叫做**同位角**（corresponding angles）．

∠2与∠6、∠3与∠7、∠4与∠8也分别是同位角．

观察 2

∠2与∠8有怎样的位置关系？

∠2与∠8在截线 l 的两旁，又在直线 a、b 之间．具有这样位置关系的一对角叫做**内错角**（alternate interior angles）．

∠3与∠5也是内错角．

观察 3

∠2与∠5有怎样的位置关系？

∠2与∠5 在截线 l 的同旁，并且这两个角在直线 a、b 之间．具有这样位置关系的一对角叫做同旁内角(interior angles on the same side)．

∠3与∠8也是同旁内角．

同位角、内错角、同旁内角有以下共同特征：

在每对角中，两个角的顶点不重合；每个角有一条边在截线上．

例题 如图13－17，直线 a、b 被直线 l 所截，分别指出图中的同位角、内错角、同旁内角，并任选一对角说明它们是哪两条直线被哪一条直线所截得到的．

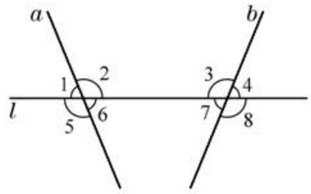


图13－17

解 同位角有∠1与∠3，∠2与∠4，∠5与∠7，∠6与∠8．

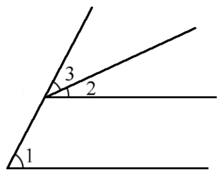
内错角有∠2与∠7，∠3与∠6．

同旁内角有∠2与∠3，∠6与∠7．

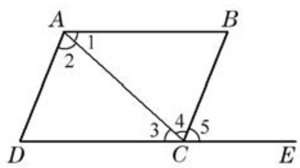
其中∠1与∠3是直线 a、b 被直线 l 所截得到的同位角．

练习13.3

1 如图，∠1与∠2是同位角吗？∠1与∠3呢？



（第1题）



（第2题）

2 判断题：(正确的在括号内填入“✓”，错误的填入“×”)

(1) 图中，∠D与∠5是同位角（　　　　），

∠D与∠ACE是同位角（　　　　）；

(2) 图中，$\angle 1$与$\angle 5$是内错角（　　　　），

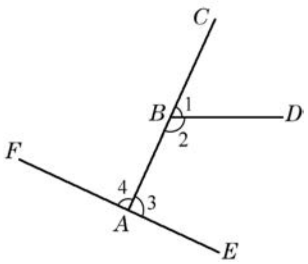
$\angle 2$与$\angle 4$是内错角（　　　　）；

(3) 图中，$\angle B$与$\angle D$是同旁内角（　　　　），

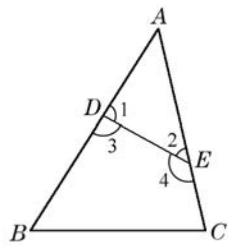
$\angle 2$与$\angle 3$是同旁内角（　　　　）.

3 (1) 指出图(1)中的同位角、内错角、同旁内角；

(2) 指出图(2)中的同位角，并说明每对同位角是哪两条直线被哪条直线所截得到的.



(1)



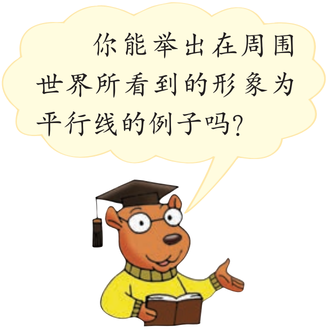
(2)

（第3题）

13

第 2 节　平行线

13.4　平行线的判定



在周围世界中到处可见平行线的形象,我们在小学已学习了一些平行线的初步知识.

同一平面内不相交的两条直线叫做平行线 (parallel line).“平行”用符号“//”表示.

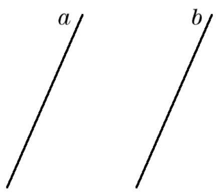


图13－18

如图13－18,直线a和直线b是平行线,也称它们互相平行,记作“$a // b$”,读作“a 平行于 b”.

由于直线是向两方无限延伸的,而我们看到的只是直线的一部分,因此要用“不相交”去判定两条直线平行是十分困难的.

下面,我们尝试如何画平行线.

操作 1

利用直尺和三角尺画平行线.

(1) 画一条直线 a, 将三角尺的一边 AB 紧靠直线 a,将直尺紧靠三角尺的另一边 AC,如图13－19(1)所示;

(2) 将三角尺沿直尺由原来的位置推移到另一个位置，如图13-19(2)所示；

(3) 沿着三角尺原先紧靠直线 a 的那一边，画直线b，如图13-19(3)所示.

这样就得到了两条平行直线a、b，即$a\parallel b$，如图13-19(4)所示.

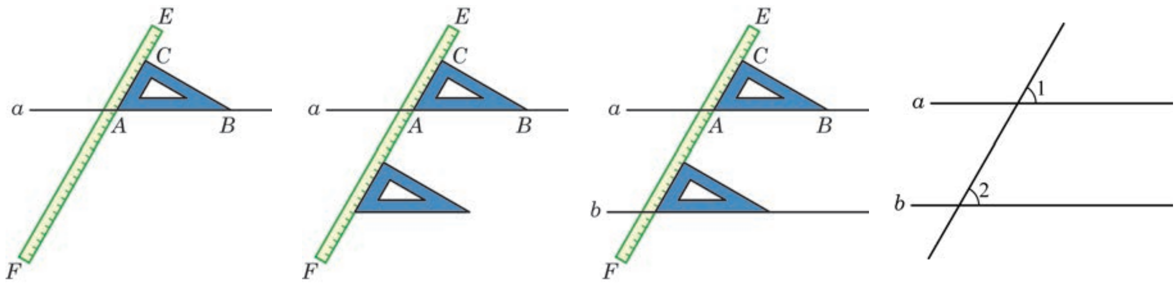
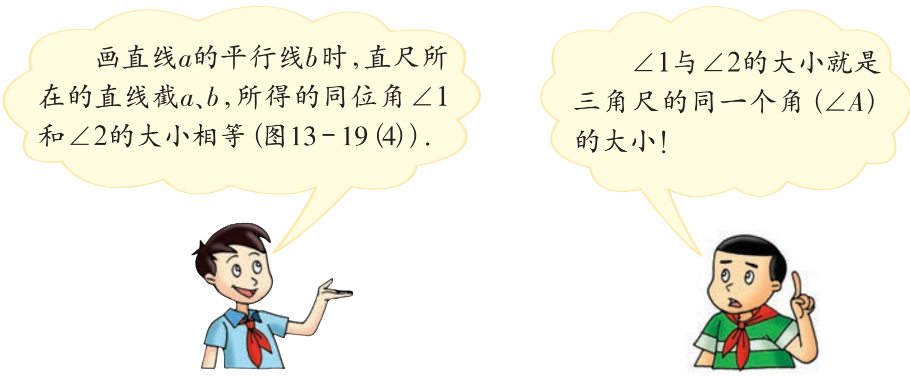


图13-19

思考 1

在画平行线的操作过程中，三角尺起着什么样的作用？



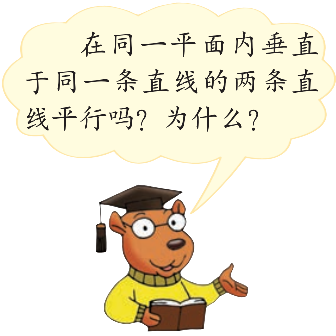
从图13-19(4)中可以看到，原来的两条直线a、b通过添加截线构成了“三线八角”图，这就有可能借助于相关角的大小关系来判定a、b是否平行.

事实上，画直线 b 时，只要保持同位角$\angle 1$、$\angle 2$满足$\angle 1=\angle 2$，那么画出的直线 b 就平行于直线 a.这样画平行线的方法就是运用了两条直线平行的一种判定方法，这就是两条直线平行的判定方法1：

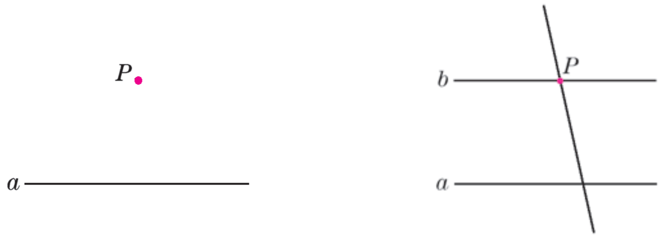
简单地说：同位角相等，两直线平行.

两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行.

思考 2



如图13－20（1），经过直线 a 外一点 P 画直线 a 的平行线，可以画几条？



(1)　　　　(2)

图13－20

操作 2

用平移三角尺的方法画出经过直线 a 外一点 P、且平行于直线 a 的直线 b，如图13－20(2)所示. 操作的结果说明：经过直线外一点画这条直线的平行线可以画一条，并且只能画一条.

也就是说，平行线具有以下基本性质：

经过直线外的一点，有且只有一条直线与已知直线平行.

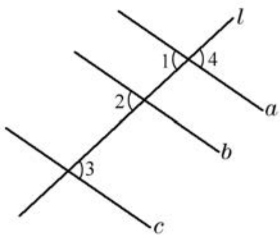


图13－21

例题1　如图13－21，直线 l 与直线 a、b、c 分别相交，且 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$.

(1) 从 $\angle 1=\angle 2$ 可以得出哪两条直线平行？为什么？

(2) 从 $\angle 1=\angle 3$ 可以得出哪两条直线平行？为什么？

解　(1) 因为 $\angle 1=\angle 2$（已知），

所以 $a /\!/ b$（同位角相等，两直线平行）.

(2) 将 $\angle 1$ 的对顶角记作 $\angle 4$，则

$\angle 1=\angle 4$（对顶角相等）．

由$\angle 1=\angle 3$（已知），

得$\angle 3=\angle 4$（等量代换）．

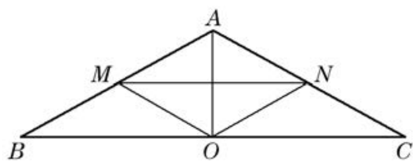
所以 $a \parallel c$（同位角相等，两直线平行）．

想一想

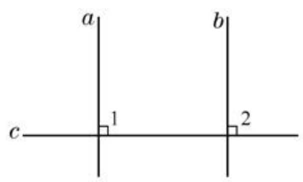
例题 1 中$b \parallel c$吗？为什么？

练习13.4(1)

1. 如图，为了加固房屋，要在人字型屋架上加一条横梁 MN，使$MN \parallel BC$．如果$\angle ABC=29°$，那么$\angle AMN$ 应为多少度？



（第1题）



（第2题）

2. 如果同一平面内的两条直线垂直于同一条直线，那么这两条直线平行吗？

(1) 写出结论；

(2) 根据图示，请填写理由，说明直线 a 与直线 b 平行．(在解答中的横线上及括号内填写适当的语句或符号、数字．本册中此类题同此要求)

解：(1) ________．

(2) 如图，因为$a \perp c$，$b \perp c$（　　　　），

所以$\angle 1=$________°，$\angle 2=$________°（垂直的意义）．

得$\angle 1=\angle 2$（等量代换）．

所以 a________b（　　　　　　　　　　　　）．

3. 如图，如果$\angle 1=110°$，$\angle 2=70°$，那么$AB \parallel CD$吗？为什么？

解：将$\angle 1$的邻补角记作$\angle 3$，则

$\angle 1+\angle 3=180°$（邻补角的意义）.

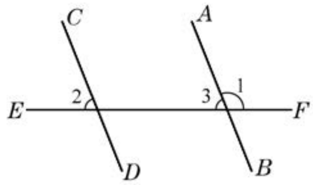
因为$\angle 1=110°$（　　　　），

所以$\angle 3=180°-\angle 1=180°-110°=70°$（等式性质）.

又因为$\angle 2=70°$（　　　　），

得$\angle 2$________$\angle 3$（　　　　），

所以$AB\parallel CD$（　　　　　　　　　　）.



（第3题）

4 按下列语句画图：

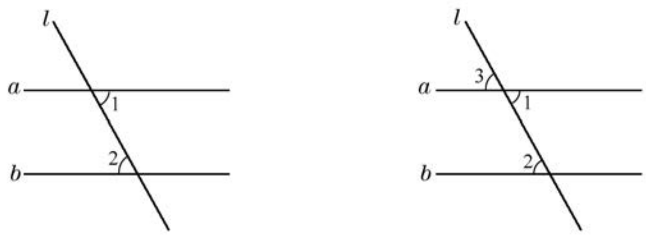
(1) 点 P 是直线 a 外一点，直线b经过点 P 且与直线 a 平行；

(2) 直线 a、b 是相交直线，点 P 是直线 a、b 外一点，直线 c 经过点 P 且与直线 a 平行，与直线 b 相交于点 M.

我们已经知道，利用同位角相等可以判定两条直线平行，那么是否可以利用内错角或同旁内角来判定两条直线平行呢？

思考 3

如图13－22(1)，直线 a、b 被直线 l 所截，$\angle 1$与$\angle 2$是内错角，且$\angle 1=\angle 2$，那么直线 a、b 有怎样的位置关系？为什么？



(1)　　　　(2)

图13－22

如图13－22(2)，将$\angle 1$的对顶角记作$\angle 3$，则

$\angle 1=\angle 3$（对顶角相等）.

因为$\angle 1=\angle 2$（已知），

得$\angle 2=\angle 3$（等量代换），

所以 $a\parallel b$（同位角相等，两直线平行）.

由此，得到了平行线的判定方法2：

简单地说：内错角相等，两直线平行．

> 两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行．

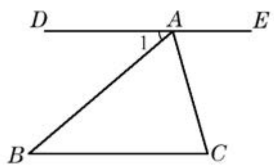


图13－23

例题2　如图13－23，已知$\angle 1=40°$，$\angle B=40°$．DE与BC平行吗？为什么？

解　由$\angle 1=40°$，$\angle B=40°$（已知），

得$\angle 1=\angle B$（等量代换），

所以$DE \parallel BC$（内错角相等，两直线平行）．

在这里的“$DE \parallel BC$”中，BC是指线段BC所在的直线BC．

思考 4

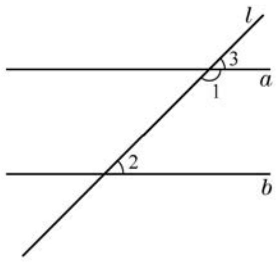


图13－24

如图13－24，直线a、b被直线l所截，$\angle 1$与$\angle 2$是同旁内角，如果$\angle 1+\angle 2=180°$，那么直线a、b的位置关系如何？为什么？

将$\angle 1$的邻补角记作$\angle 3$，则

$\angle 1+\angle 3=180°$（为什么？）．

由$\angle 1+\angle 2=180°$（已知），

得$\angle 2=\angle 3$（为什么？），

所以$a \parallel b$（为什么？）．

由此，可得到平行线的判定方法3：

简单地说，同旁内角互补，两直线平行．

> 两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么这两条直线平行．

例题3　如图13－25，直线a、b被直线c所截，已知$\angle 1=60°$，$\angle 2=120°$，直线a与b平行吗？为什么？

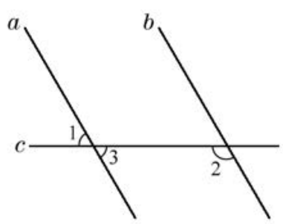


图13－25

解　将$\angle 1$的对顶角记作$\angle 3$，则

$\angle 1=\angle 3=60°$（对顶角相等）．

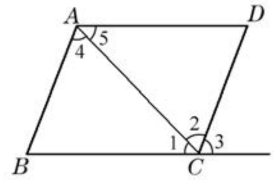
因为$\angle 2=120°$（已知），

得$\angle 2+\angle 3=120°+60°=180°$，

所以 $a \parallel b$（同旁内角互补，两直线平行）．

练习13.4(2)

1 填空：如图，



（第1题）

(1) 因为$\angle B=\angle 3$（已知），

所以________ // ________(　　　　　　　　　　　　　　　　).

(2) 因为$\angle D=\angle 3$（已知），

所以________ // ________(　　　　　　　　　　　　　　　　).

(3) 因为$\angle B+\angle BCD=180°$（已知），

所以________ // ________(　　　　　　　　　　　　　　　　).

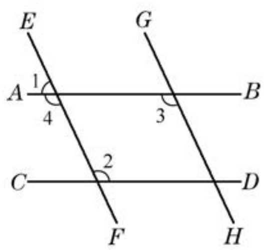
(4) 因为$\angle D+\angle$___$=180°$（已知），

所以$AD \parallel BC$（　　　　　　　　　　　　　　　　）.

(5) 因为$\angle 4=\angle$____（已知），

所以$AB \parallel CD$（　　　　　　　　　　　　　　　　）.

2 如图，已知$\angle 1=65°$，$\angle 2=\angle 3=115°$，那么AB与CD平行吗？ EF与GH平行吗？为什么？



（第2题）

解：将$\angle 1$的邻补角记作$\angle 4$，则

$\angle 1+\angle 4=180°$(　　　　　　　　　　).

因为$\angle 1=65°$(　　　　　　　　　　)，

所以$\angle 4=180°-\angle 1=180°-65°=115°$.

因为$\angle 2=115°$(　　　　　　　　　　)，

所以$\angle 2=\angle 4$(　　　　　　　　　　).

所以________ // ________(　　　　　　　　　　　　　　　　).

因为$\angle 4=115°$，

$\angle 3=115°$(　　　　　　　　　　)，

所以$\angle 3=\angle 4$(　　　　　　　　　　).

所以________ // ________(　　　　　　　　　　　　　　　　).

你还有其他解法吗？

两条直线被第三条直线所截，可以依据同位角相等，或内错角相等，或同旁内角互补，判定这两条直线平行.

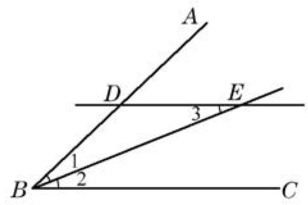


图13－26

例题4　如图13－26，已知BE平分$\angle ABC$，$\angle 1=\angle 3$，DE与BC平行吗？为什么？

解　因为BE平分$\angle ABC$（已知），

所以$\angle 1=\angle 2$（角的平分线的意义）.

因为$\angle 1=\angle 3$（已知），

所以$\angle 2=\angle 3$（等量代换），

得$DE \parallel BC$（内错角相等，两直线平行）.

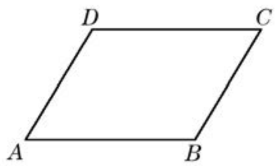


图13－27

例题5　如图13－27，已知$\angle A$与$\angle D$互补，可以判断哪两条直线互相平行？$\angle B$与哪个角互补，可以判断直线AD与BC平行？

解　因为$\angle A$与$\angle D$互补（已知），

所以$AB \parallel CD$（同旁内角互补，两直线平行）.

当$\angle B$与$\angle A$互补时，AD与BC平行(同旁内角互补，两直线平行).

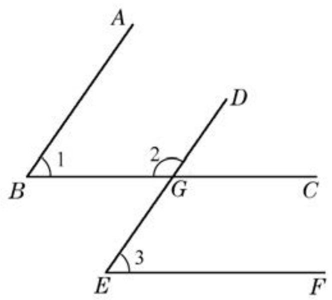


图13－28

例题6　如图13－28，已知$\angle 1=\angle 3$，$\angle 2$与$\angle 3$互补，那么可以判断哪几组直线互相平行？

解　因为$\angle 2$与$\angle 3$互补（已知），

所以$\angle 2+\angle 3=180°$（两角互补的意义）.

由$\angle 1=\angle 3$（已知），

得$\angle 2+\angle 1=180°$（等量代换），

所以$AB \parallel DE$（同旁内角互补，两直线平行）.

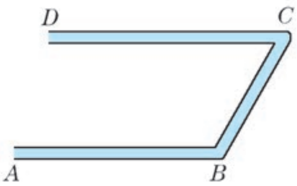
由$\angle 2=\angle EGC$（对顶角相等），

得$\angle EGC+\angle 3=180°$（等量代换），

所以$BC \parallel EF$（同旁内角互补，两直线平行）.

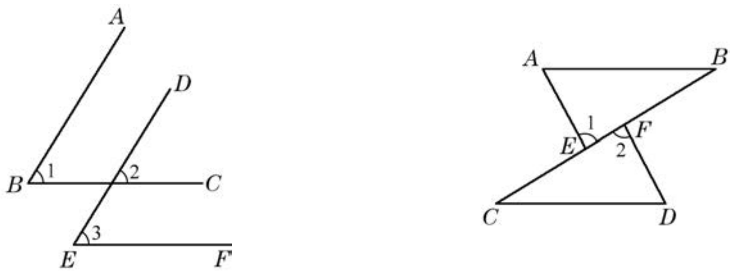
练习13.4(3)

1. 如图，弯形管道 $ABCD$ 的拐角 $\angle ABC = 120^\circ$，$\angle BCD = 60^\circ$，管道 AB 与 CD 平行吗？为什么？



（第1题）

2. 填空：如图，



(1)　　　　(2)

（第2题）

(1) 因为 $\angle 1=\angle 2$（已知），

所以________ ∥ ________(　　　　　　　　　　　　　　　　　　).

因为 $\angle 2=\angle 3$（已知），

所以________ ∥ ________(　　　　　　　　　　　　　　　　　　).

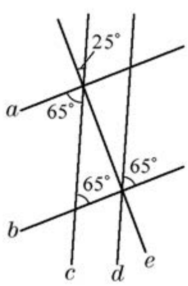
(2) 因为 $\angle 1=\angle 2$（已知），

所以________ ∥ ________(　　　　　　　　　　　　　　　　　　).

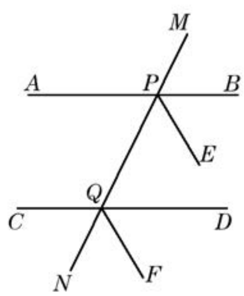
因为 $\angle B=\angle C$（已知），

所以________ ∥ ________(　　　　　　　　　　　　　　　　　　).

3. 根据图中给出的条件，指出互相平行的直线.



（第3题）



（第4题）

4. 已知直线 AB、CD 被直线 MN 所截，PE 平分 $\angle BPQ$，QF 平分 $\angle DQN$. 如果 $\angle BPQ=\angle DQN$，那么 PE 与 QF 平行吗？为什么？

13.5　平行线的性质

利用同位角相等，可以判定两条直线平行．反过来，如果两条直线平行，同位角相等吗？

操作 1

练习簿的内页中有一条条横线，每两条横线都是平行线．

(1) 任意画一条直线去截这些平行线；

(2) 从中任意取两条平行线与这条截线构成“三线八角”图；

(3) 从图中任意取一对同位角进行观察、测量．

观察、测量后可以得出“这对同位角相等”的结论．

我们把这一基本事实作为平行线的性质1：

简单地说：两直线平行，同位角相等．

两条平行线被第三条直线所截，同位角相等．

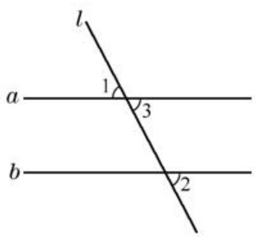


图13－29

例题1　如图13－29，已知直线 a、b 被直线 l 所截，$a\parallel b$，$\angle 1=50°$，求 $\angle 2$ 的度数．

解　将 $\angle 1$ 的对顶角记作 $\angle 3$，则

$\angle 1=\angle 3$（对顶角相等）．

因为 $\angle 1=50°$（已知），

所以 $\angle 3=50°$（等量代换）．

由 $a\parallel b$（已知），

得 $\angle 3=\angle 2$（两直线平行，同位角相等），

所以 $\angle 2=50°$（等量代换）．

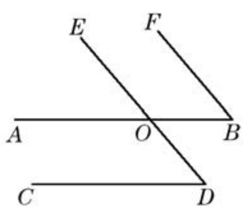


图13－30

例题2　如图13－30，已知 $\angle B=\angle D$，$AB\parallel CD$，那么 DE 与 BF 平行吗？为什么？

解　因为$AB \parallel CD$(已知),

所以$\angle AOE=\angle D$(两直线平行,同位角相等).

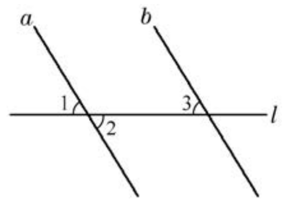
由$\angle B=\angle D$(已知),

得$\angle AOE=\angle B$（等量代换）,

所以$DE \parallel BF$(同位角相等,两直线平行).

练习13.5(1)

1. 如图,已知直线a、b被直线l所截,且$a \parallel b$,$\angle 1+\angle 2=100°$,求$\angle 3$的度数.



（第1题）

解:因为$\angle 1$与$\angle 2$是对顶角,

所以$\angle 1=$____(　　　　　　　　　　　　).

因为$\angle 1+\angle 2=100°$(已知),

得$2\angle 1=100°$(等量代换).

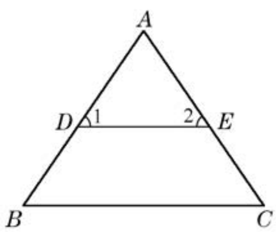
所以$\angle 1=$____°(等式性质).

因为$a \parallel b$(已知),

得$\angle 1=\angle 3$(　　　　　　　　　　　　).

所以$\angle 3=$____°(等量代换).

2. 如图,已知$DE \parallel BC$,如果$\angle 1=\angle 2$,那么$\angle B$与$\angle C$相等吗?为什么?



（第2题）

解:因为$DE \parallel BC$(　　　　),

所以$\angle 1=$________,

$\angle 2=$________(　　　　　　　　　　　　).

因为$\angle 1=\angle 2$(　　　　),

所以________=________(　　　　　　　　　　).

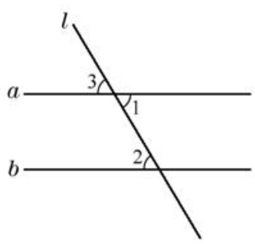


图13－31

我们已经知道:两直线平行,同位角相等.那么这时一对内错角的大小之间有什么关系呢?一对同旁内角的大小之间又有什么关系呢?

如图13－31,直线a、b被直线l所截,$a \parallel b$,$\angle 1$与$\angle 2$是一对内错角.

$\angle 1$的对顶角记作$\angle 3$,则

$\angle 1=\angle 3$（对顶角相等）.

因为 $a \parallel b$（已知），

得 $\angle 3=\angle 2$（两直线平行，同位角相等）.

所以 $\angle 1=\angle 2$（等量代换）.

由此，我们得到平行线的性质2：

简单地说：两直线平行，内错角相等.

两条平行线被第三条直线所截，内错角相等.

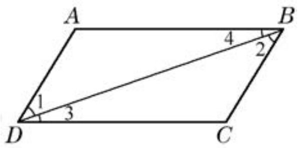


图13－32

例题3　如图13－32，已知 $AB \parallel DC$，$AD \parallel BC$，那么 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 相等吗？$\angle 3$ 与 $\angle 4$ 呢？

解　因为 $AD \parallel BC$（已知），

所以 $\angle 1=\angle 2$（两直线平行，内错角相等）.

因为 $AB \parallel DC$（已知），

所以 $\angle 3=\angle 4$（两直线平行，内错角相等）.

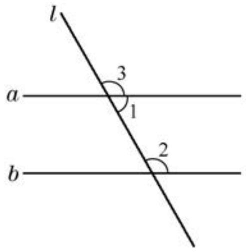


图13－33

如图13－33，直线 a、b 被直线 l 所截，$a \parallel b$，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是一对同旁内角.

将 $\angle 1$ 的邻补角记作 $\angle 3$，则

$\angle 1+\angle 3=180°$（邻补角的意义）.

因为 $a \parallel b$（已知），

得 $\angle 3=\angle 2$（两直线平行，同位角相等），

所以 $\angle 1+\angle 2=180°$（等量代换）.

由此，我们得到平行线的性质3：

简单地说：两直线平行，同旁内角互补.

两条平行线被第三条直线所截，同旁内角互补.

思考

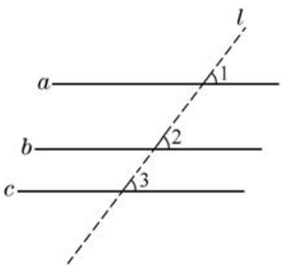


图13－34

如图13－34，已知 $a \parallel b$，$b \parallel c$. 这时，直线 a 与 c 有怎样的位置关系？

为运用平行线的判定与性质，我们添一条直线 l，分别与直线 a、b、c 相交.

因为 $a // b$ (已知),

所以 $\angle 1=\angle 2$ (两直线平行,同位角相等).

因为 $b // c$ (已知),

所以 $\angle 2=\angle 3$ (两直线平行,同位角相等).

于是,得 $\angle 1=\angle 3$ (等量代换).

所以 $a // c$ (同位角相等,两直线平行).

由此得到结论:

如果两条直线都与第三条直线平行,那么这两条直线也互相平行.

这个事实也可以这样叙述:对于直线 a、b、c,如果 $a // b$,$b // c$,那么 $a // c$. 平行线的这一事实称为平行的传递性.

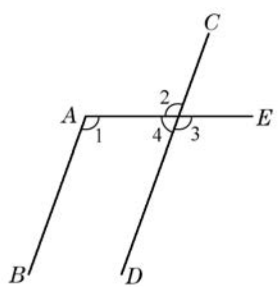
练习13.5(2)

1. 如图,已知直线 AB、CD 被直线 AE 所截,且 $AB // CD$.

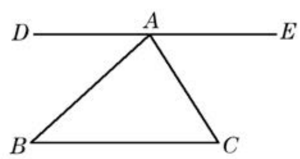
(1) 从 $\angle 1=115°$,可以得到 $\angle 3$ 是多少度?为什么?

(2) 从 $\angle 1=115°$,可以得到 $\angle 2$ 是多少度?为什么?

(3) 从 $\angle 1=115°$,可以得到 $\angle 4$ 是多少度?为什么?



(第1题)



(第2题)

2. 如图,直线 DE 经过点 A,$DE // BC$,$\angle B=42°$,$\angle C=57°$,求 $\angle DAB$、$\angle CAD$ 的度数.

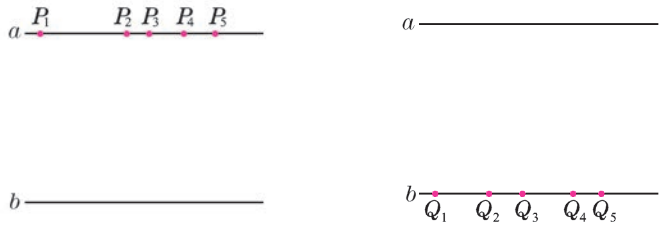
3. 指出练习13.4(3)第3题中互相垂直的直线.

操作 2

如图13-35,已知直线 a、b,且 $a // b$.

在图13-35(1)的直线 a 上任取5个点:点 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5,

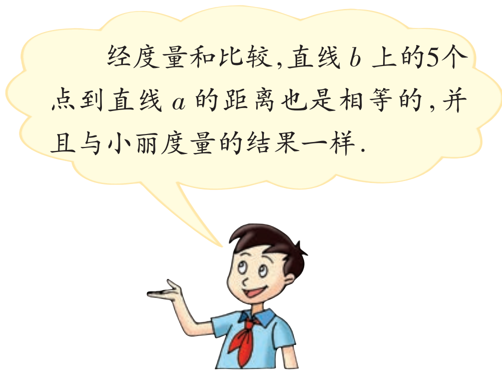
度量它们到直线b的距离，你能得到什么结论？



(1)　　　　(2)

图13－35

在图13－35 (2) 的直线 b 上任取5个点作类似的度量，能否得到同样的结论？



这个结论以后将加以说理.

事实上，我们有如下的结论：

当直线 a 平行于直线 b 时，直线 a（或直线 b）上任意一点到直线 b（或直线 a）的距离都相等.

两条平行线中，任意一条直线上的所有点到另一条直线的距离都是一个定值，这个定值叫做这**两条平行线间的距离**.

操作 3

请你量出数学课本封面上两条长边之间的距离.

例题4　如图13－36，直线 $a /\!/ b$．点 A、E、F 在直线 a 上，点 B、C、D 在直线 b 上，$BC=EF$，三角形 ABC 与三角形 DEF 的面积相等吗？为什么？

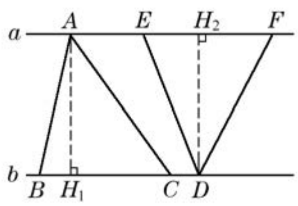


图13－36

解 作$AH_1 \perp b$，垂足为点H_1，作$DH_2 \perp a$，垂足为点H_2，由$a // b$，得$AH_1 = DH_2$(平行线间距离的意义)．

设三角形ABC和三角形DEF的面积分别为S_1、S_2．

因为 $S_1 = \frac{1}{2} BC \cdot AH_1$（三角形面积公式），

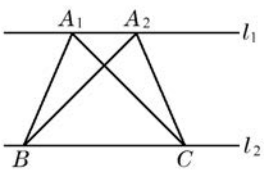
$S_2 = \frac{1}{2} EF \cdot DH_2$，

又因为 $BC = EF$（已知），

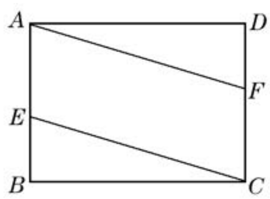
所以$S_1 = S_2$（等量代换）．

练习13.5(3)

1. 如图，已知直线$l_1 // l_2$，那么三角形A_1BC与三角形A_2BC的面积相等吗？为什么？



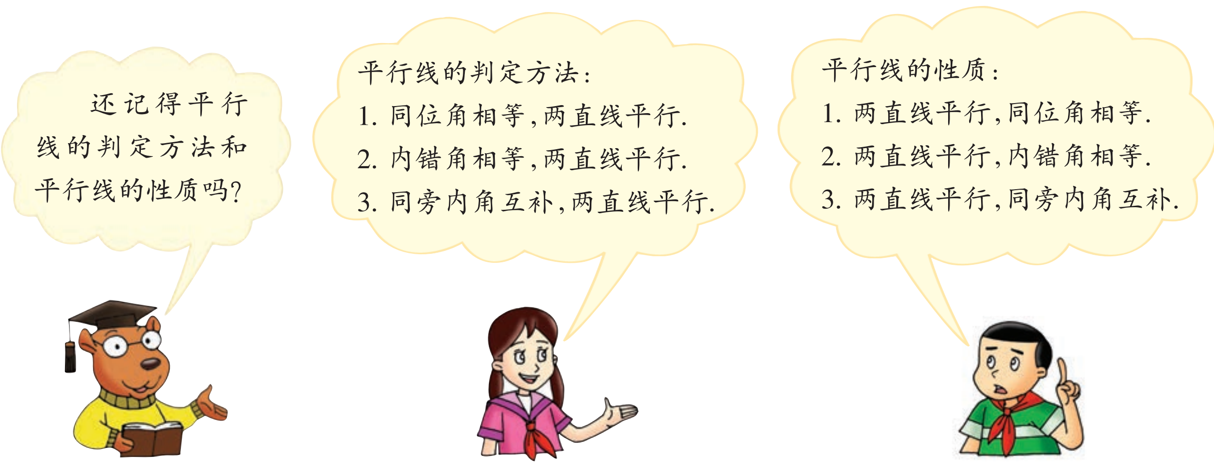
（第1题）



（第2题）

2. 如图，已知点E、F分别在长方形$ABCD$的边AB、CD上，且$AF // CE$．请分别度量AE与CF之间的距离、AF与CE之间的距离(精确到0.1 cm)．

下面利用平行线的判定和性质来解决一些问题．



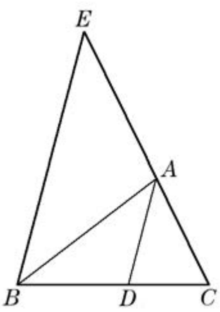


图13－37

例题5　如图13－37，已知$\angle BAD=\angle CAD$，$AD \parallel BE$，试说明$\angle ABE$与$\angle E$相等的理由．

解　因为$AD \parallel BE$（已知），

所以$\angle CAD=\angle E$（两直线平行，同位角相等），

$\angle BAD=\angle ABE$（两直线平行，内错角相等）．

因为$\angle BAD=\angle CAD$（已知），

所以$\angle ABE=\angle E$（等量代换）．

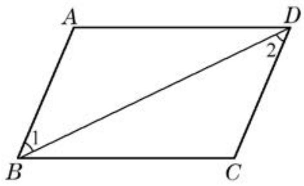


图13－38

例题6　如图13－38，已知$\angle ABC=62°$，$\angle 1=\angle 2$，求$\angle C$的度数．

解　因为$\angle 1=\angle 2$（已知），

所以$AB \parallel CD$（内错角相等，两直线平行），

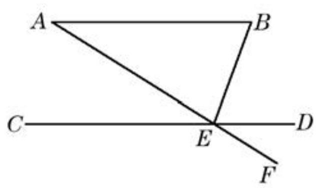
得$\angle ABC+\angle C=180°$（两直线平行，同旁内角互补）．

因为$\angle ABC=62°$（已知），

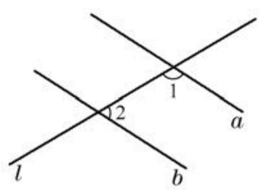
所以$\angle C=180°-\angle ABC=180°-62°=118°$（等式性质）．

练习13.5(4)

1. 如图，已知$AB \parallel CD$，$\angle A=32°$，$\angle B=68°$，求$\angle BEF$的度数．



（第1题）



（第2题）

2. 如图，已知直线a、b被直线l所截，$a \parallel b$，且$\angle 1=(3x+16)°$，$\angle 2=(2x-11)°$，求$\angle 1$、$\angle 2$的度数．

3. (1) 如图，已知$AB \parallel CD$，那么$\angle B+\angle BED+\angle D$等于多少度？为什么？

　解：过点E作$EF \parallel AB$，

　得$\angle B+\angle BEF=180°$(　　　　　　　　　　　　)．

因为 $AB\parallel CD$ (　　　　　)，

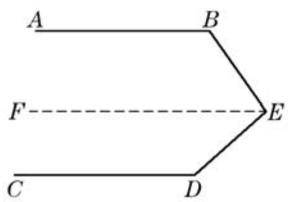
$EF\parallel AB$ (所作)，

所以 $EF\parallel CD$ (　　　　　　　　　　　　　　)．

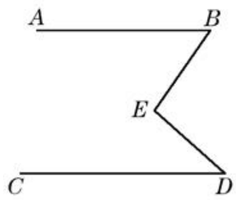
得 $\angle$__________ $+\angle$__________ $=180°$ (两直线平行，同旁内角互补)．

因此 $\angle B+\angle BEF+\angle DEF+\angle D=$__________°，

即 $\angle B+\angle BED+\angle D=$__________°．



(1)



(2)

(第3题)

(2) 如图，在第(1)小题中改变点 E 的位置，如图 (2) 所示，那么$\angle B$、$\angle BED$、$\angle D$有怎样的数量关系？为什么？

(3) 第(1)(2)两小题还有其他解法吗？试一试．

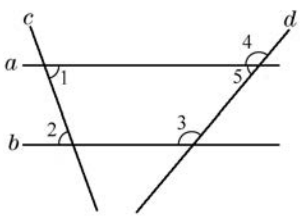


图13－39

例题7 如图13－39，直线 a、b 被直线 c、d 所截，且 $a\parallel b$，$\angle 1=70°$，$\angle 5=50°$，这时$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$各是多少度？为什么？

解 因为 $a\parallel b$ (已知)，

所以$\angle 1=\angle 2$ (两直线平行，内错角相等)．

因为$\angle 1=70°$(已知)，

所以$\angle 2=70°$ (等量代换)．

因为 $a\parallel b$ (已知)，

所以$\angle 3+\angle 5=180°$(两直线平行，同旁内角互补)，

$\angle 3=\angle 4$(两直线平行，同位角相等)．

因为$\angle 5=50°$ (已知)，

所以$\angle 3=\angle 4=180°-\angle 5=130°$．

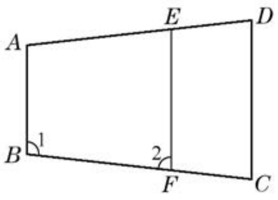


图13－40

例题8　如图13－40，已知 $AB\parallel CD$，$\angle 1+\angle 2=180°$，那么 CD 与 EF 平行吗？为什么？

解　因为 $AB\parallel CD$（已知），

所以 $\angle 1+\angle C=180°$（两直线平行，同旁内角互补）．

因为 $\angle 1+\angle 2=180°$（已知），

得 $\angle 2=\angle C$（同角的补角相等），

所以 $CD\parallel EF$（同位角相等，两直线平行）．

想一想

对于例题8，还能用其他方法来说明结论正确吗？

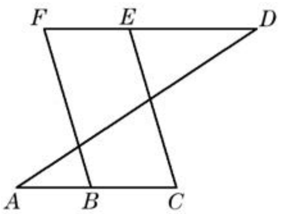


图13－41

例题9　如图13－41，已知 $\angle A=\angle D$，$\angle C=\angle F$，那么 CE 与 BF 平行吗？为什么？

解　因为 $\angle A=\angle D$（已知），

所以 $AC\parallel DF$（内错角相等，两直线平行），

得 $\angle F=\angle FBA$（两直线平行，内错角相等）．

因为 $\angle C=\angle F$（已知），

得 $\angle FBA=\angle C$（等量代换）．

所以 $CE\parallel BF$（同位角相等，两直线平行）．

练习13.5(5)

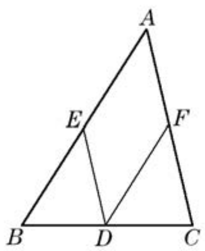
1. 填空：如图，

(1) 因为 $\angle A=\angle$________（已知），

所以 $AB\parallel DF$（　　　　　　　　　　　　　）．

(2) 因为 $\angle BDE=\angle$________（已知），

所以 $DE\parallel AC$（　　　　　　　　　　　　　）．



（第1题）

(3) 因为$\angle A+\angle$________$=180^{\circ}$(已知),

所以$DF\parallel AB$(   ).

(4) 因为$\angle DFC=\angle$________(已知),

所以$DE\parallel AC$(   ).

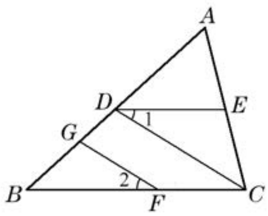
(5) 因为$DF\parallel AB$(已知),

所以$\angle B=\angle$________(   ).

(6) 因为$DE\parallel AC$(已知),

所以$\angle BED=\angle$________(   ).

2 如图,已知$CD\parallel GF$,$\angle 1=\angle 2$,那么DE与BC平行吗?为什么?



(第2题)

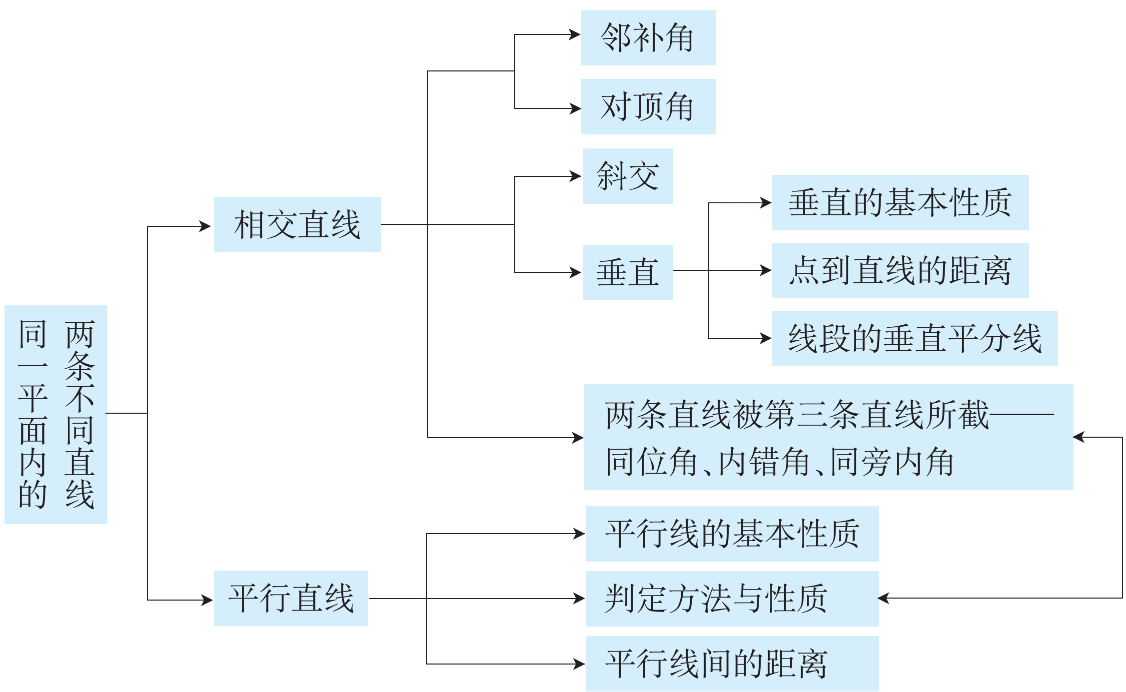
本章小结

两直线交于一点，形成四个小于平角的角．“对顶角相等”，是我们第一次通过说理获得的结论．对这样“明显正确”的结果是否需要说理？如何说理？认真体会，将会受益无穷．

平行线段和垂直线段到处可见．但是，线段无限延长才成为直线．平行线是同一平面内不相交的两条直线，这一“无限延长不相交”的特征无法直接观察．于是，我们借助于两条直线被第三条直线所截形成的角（同位角、内错角或同旁内角）的关系，得到了平行线的判定方法以及有关性质，终于把“无限”的想象转化成“有限”的判定，这是智慧．

在“平行线”的研究中，除了“同位角相等，两直线平行”“两直线平行，同位角相等”没有经过说理外（它们可以看作公认为正确的基本事实），其余有关平行线的判定方法和平行线的性质的正确性，都是从基本事实出发进行说理后被确认的．通过本章的学习，我们要逐步懂得数学的说理，学习几何语言，用比较简约、明确的语言表达说理过程．

本章知识结构框图如下：



探究活动

平行线被折线所截问题

两条平行直线被第三条直线所截，得到同位角相等，内错角相等，同旁内角互补．将第三条夹在平行线间的线段改为折线，这时会有一系列的角，那么这些角的大小之间有什么关系？

探索1

如图13－42(1)，已知直线 a 与直线 b 平行，折线 APB 是夹在 a 与 b 之间的一条折线，$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$的大小之间有什么关系？为什么？

探索2

在探索1中，折线 APB 只有一个折，如果增加一个折，如图13－42(2)，已知直线 a 与直线 b 平行，折线 AB 是夹在 a 与 b 之间的一条折线，$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$的大小之间有什么关系？为什么？

探索3

如图13－42(3)，再多加一个折，结果会怎样？

***探索4**

如图13－42(4)，若有 n 个折，结果又如何？

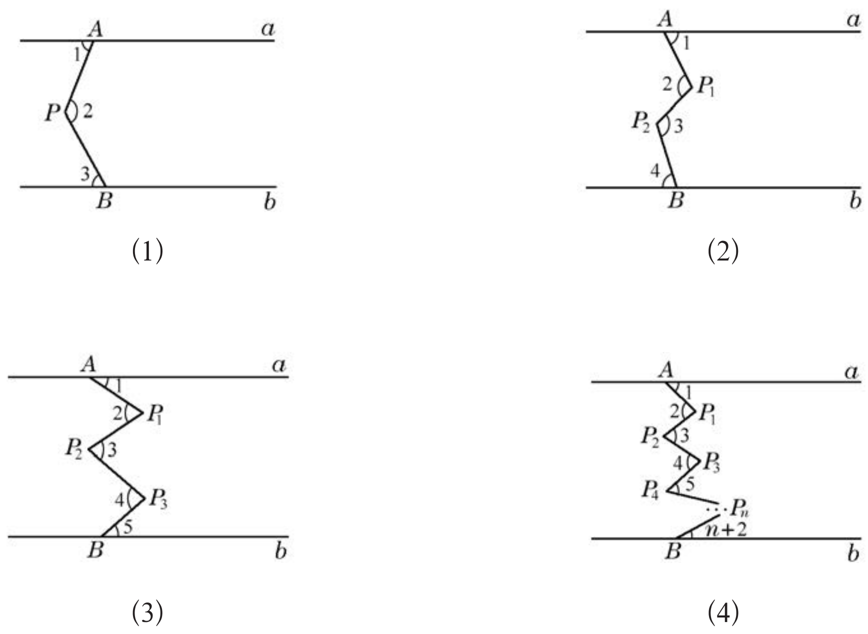


图13－42

第十四章　三　角　形

三角形是一种基本的几何图形，从宏伟的建筑物到微小的分子结构，常常与三角形有关；在现实世界中，处处都有三角形的形象．

本章我们将对三角形的构成及其性质进行探索和研究，由此获得的知识和经验，是认识其他图形的基础．

14

第 1 节　三角形的有关概念与性质

14.1　三角形的有关概念

1. 三角形的有关线段

我们知道，由不在同一直线上的三条线段首尾顺次联结所组成的图形叫做三角形(triangle)．

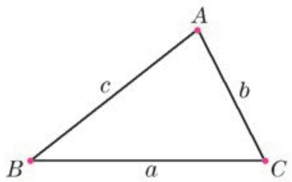


图14－1

如图14－1，线段 AB、BC、CA 是三角形的边；点 A、B、C 是三角形的顶点；$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 是相邻两边组成的角，叫做三角形的内角，简称三角形的角．

顶点是 A、B、C的三角形，记作“$\triangle ABC$”，读作“三角形 ABC”．$\triangle ABC$的三边有时也用 a、b、c 来表示，如图14－1，顶点 A 所对的边用 a 表示，顶点 B 所对的边用 b 表示，顶点 C 所对的边用 c 表示．

操作 1

分别用下列各组的三根细棒来围三角形．

(1) 细棒的长分别是 7 厘米、12 厘米、15 厘米；

(2) 细棒的长分别是 7 厘米、9 厘米、15 厘米；

(3) 细棒的长分别是 7 厘米、8 厘米、15 厘米；

(4) 细棒的长分别是 7 厘米、7 厘米、15 厘米．

思考 1

为什么有些组中的三根细棒不能围成三角形？三根细棒的长度必须具备怎样的条件才能围成三角形呢？

通过操作知道，第(3)(4)组中的三根细棒不能围成三角形，第(1)(2)组中的三根细棒能围成三角形.

一般地，在三条线段中，如果两条较短线段的和大于第三条最长的线段，那么以这三条线段为边就能构成一个三角形；否则，它们不能构成三角形.

如图14－1，$\triangle ABC$ 的三边为 a、b、c．线段 c 是联结 A、B 两点的线段，a 与 b 组成联结 A、B 两点的折线段．根据线段的基本性质（在所有联结两点的线中，线段最短）可知

$$a+b>c.$$

同理，$b+c>a$，$c+a>b$.

由此得到，三角形的三边有以下关系：

运用不等式性质，还可得到“三角形任意两边的差小于第三边”.

三角形任意两边的和大于第三边.

例题　有两根长度分别为5 cm、7 cm的木棒，用长度为13 cm的木棒与它们能拼成三角形吗？用长度为2 cm的木棒呢？

解　用长度为 13 cm 的木棒时，因为 $5+7=12<13$，所以这三根木棒不能拼成三角形.

用长度为 2 cm 的木棒时，因为 $2+5=7$，所以这三根木棒也不能拼成三角形.

在三角形中，从一个顶点向它的对边所在的直线画垂线，顶点和垂足之间的线段叫做三角形的高（altitude）.联结一个顶点及其对边中点的线段叫做三角形的中线（median）.三角形一个内角的平分线与这个角的对边相交，这个角的顶点与交点之间的线段叫做三角形的角平分线（bisector of angle）.

如图14－2(1)中，$AD\perp BC$，垂足为 D，线段 AD 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上的高；在图14－2(2)中，点 E 在 BC 上，$BE=CE$，线段

AE是$\triangle ABC$边BC上的中线；在图14－2(3)中，$\angle BAF=\angle CAF$，线段AF是$\triangle ABC$的角平分线．

操作 2

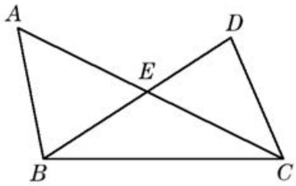
在图14－2中，用同样的方法分别画出$\triangle ABC$的另外两条高、中线和角平分线．

(1)　　(2)　　(3)

图14－2

练习14.1(1)

1. 图中有几个不同的三角形？用符号表示这些三角形．



（第1题）

2. 用下列长度的三根铁条首尾顺次联结，能做成三角形框架的是　　　　（　　）

(A) 23 cm、10 cm、8 cm；　　(B) 15 cm、23 cm、8 cm；

(C) 18 cm、10 cm、23 cm；　　(D) 18 cm、10 cm、8 cm．

3. (1) 如图(1)，AD、BE、CF是$\triangle ABC$的三条中线，那么$AB=2$________$=2$________，$BD=\frac{1}{2}$________，$AE=$________；

(1)　　(2)

（第3题）

(2) 如图(2),AD、BE、CF是$\triangle ABC$的三条角平分线,那么$\angle BAD=$__________,$\angle ABE=\frac{1}{2}$__________,$\angle ACB=2$__________.

4 有四根木棒,它们的长分别是 4 dm、6 dm、8 dm、12 dm,要选用其中的三根木棒钉成三角架,请你选择三根木棒,并说明理由.

2. 三角形的分类

思考 2

如图14-3,各三角形的内角有什么特征?

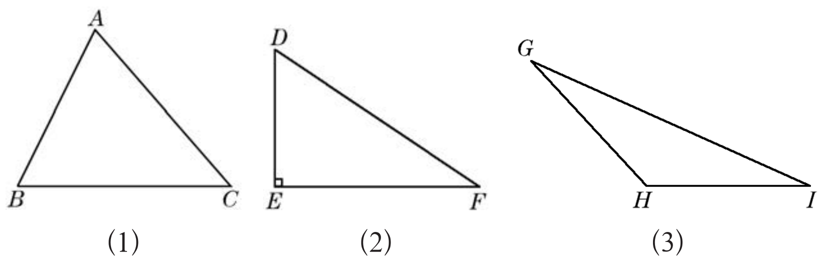


图14-3

观察图14-3中各三角形的三个内角,可以发现,三角形 ABC 的三个内角均为锐角;三角形 DEF 有一个内角是直角;三角形 GHI 有一个内角是钝角.

> 三个内角都是锐角的三角形叫做**锐角三角形**(acute triangle);有一个内角是直角的三角形叫做**直角三角形**(right triangle);有一个内角是钝角的三角形叫做**钝角三角形**(obtuse triangle).

三角形可以按角来分类,分为锐角三角形、直角三角形、钝角三角形.

在直角三角形中,夹直角的两条边叫做**直角边**,直角所对的边叫做**斜边**.直角三角形可用符号“Rt△”表示,例如直角三角形 ABC 可以表示为“Rt$\triangle ABC$”,读作“直角三角形 ABC”.

思考 3

如图14－4,各三角形的边有什么特征?

观察图14－4中各三角形的三边之间的大小,可以发现,三角形 ABC 的三边互不相等;三角形 DEF 有两条边相等;三角形 GHI 的三边都相等.

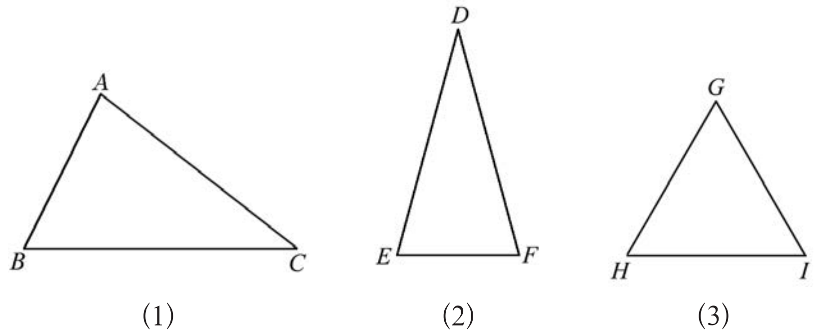


图14－4

> 三边互不相等的三角形叫做**不等边三角形**;
>
> 有两边相等的三角形叫做**等腰三角形**(isosceles triangle);
>
> 三边都相等的三角形叫做**等边三角形**(equilateral triangle).

三角形按边来分类,可分为不等边三角形和等腰三角形.等边三角形是特殊的等腰三角形.

思考 4

我们使用的有 45° 角的三角板是什么类型的三角形?

操作 3

分别在图 14—5 的锐角三角形、直角三角形和钝角三角形中,画出三条中线、三条角平分线及三条边上的高.

(1) 画三角形的中线;(图14－5(1)、(2)、(3))

(2) 画三角形的角平分线;(图14－5(4)、(5)、(6))

(3) 画三角形的高.(图14－5(7)、(8)、(9))

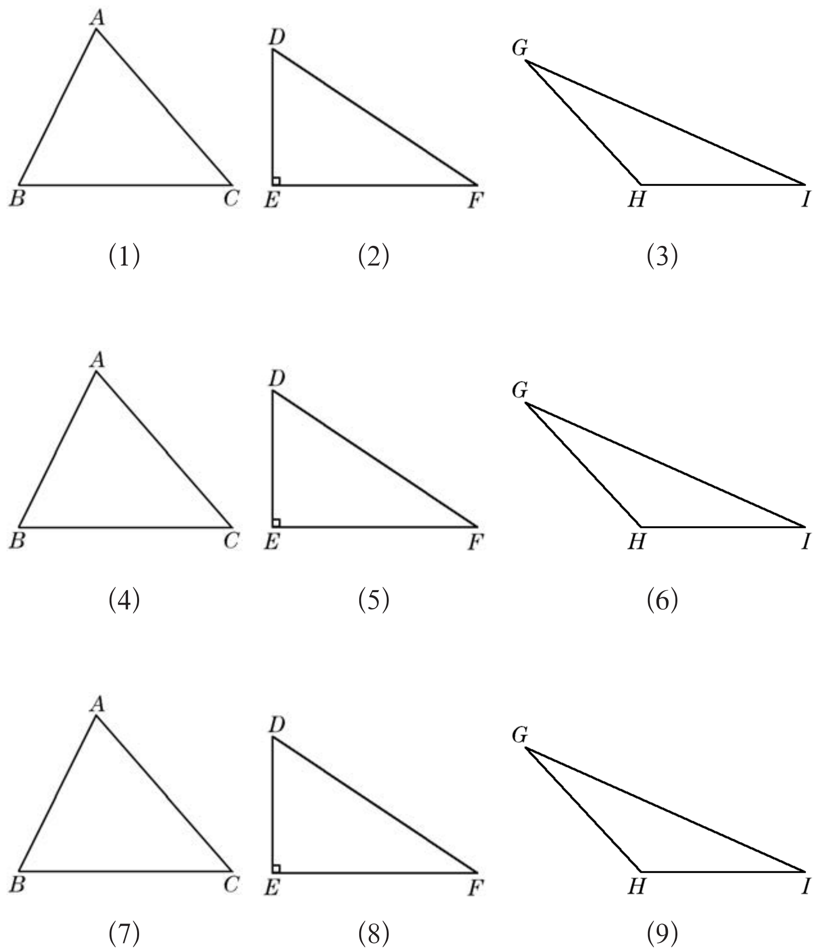


图14－5

观察所画图形可见：

三角形的三条中线相交于三角形内一点.

三角形的三条角平分线相交于三角形内一点.

三角形的三条高所在的直线相交于一点的位置情况有三种：

锐角三角形的三条高的交点在三角形内；

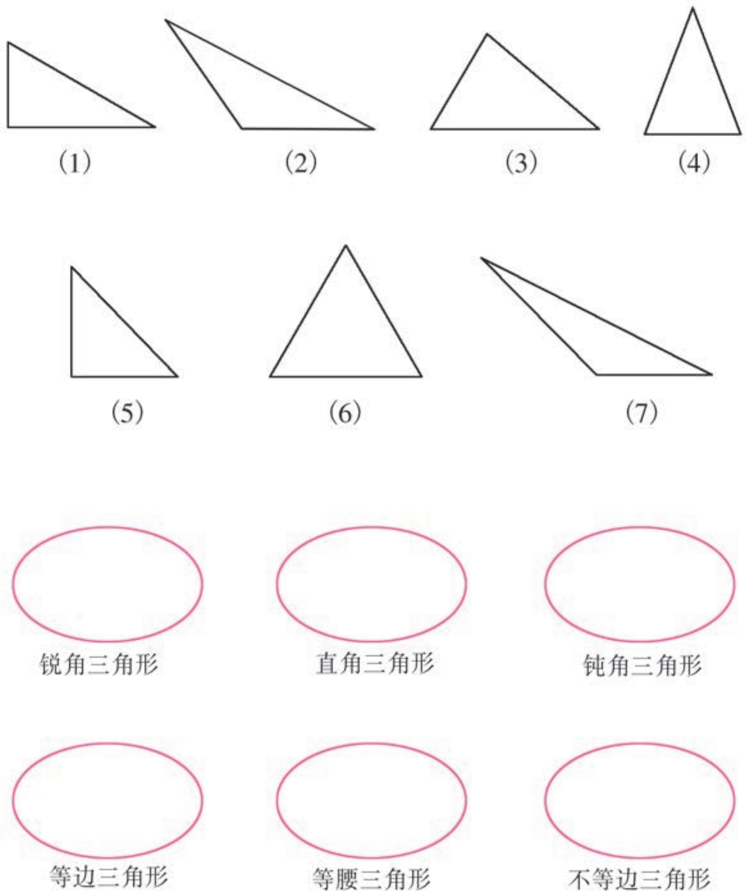
直角三角形的三条高的交点在直角顶点；

钝角三角形的三条高所在直线的交点在三角形外.

> 三角形的三条中线、三条角平分线、三条高所在直线分别交于一点，这是很有价值的发现. 以后会逐步加以说明理由.

练习14.1(2)

1 观察下面的三角形,并把它们的标号填入相应的圈内.



(第1题)

2 已知 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

(1) 如果 $AB=5$ cm, $BC=10$ cm,那么 AC 的长度是多少?

(2) 如果 $AB=5$ cm, $BC=8$ cm,那么 AC 的长度是多少?

3 如图,已知点 A、B,试以点 A、B 为两个顶点,画等腰直角三角形 ABC.这样的三角形可以画几个?

(第3题)

14.2 三角形的内角和

操作

爱动脑筋的小杰从一块三角形纸板裁下它的三个角，拼在一起，如图14-6所示.

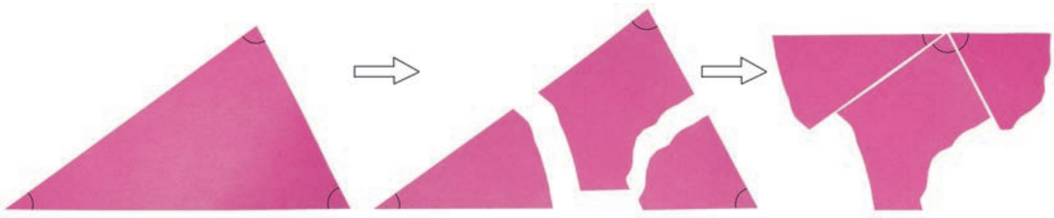


图14-6

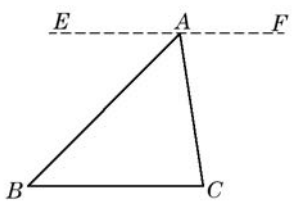


图14-7

由此猜想：

三角形的三个内角和等于 180°.

对于上述猜想的正确性，说理如下：

过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 作直线 $EF \parallel BC$（图14-7）. 由平行线的性质，得

$\angle EAB = \angle B$，$\angle FAC = \angle C$ （两直线平行，内错角相等）.

因为 E、A、F 在直线 EF 上（所作），

得 $\angle EAB + \angle BAC + \angle FAC = 180°$（平角的意义），

所以 $\angle B + \angle BAC + \angle C = 180°$（等量代换）.

通过说理，得到三角形的内角和性质：

> 三角形的内角和等于180°.

思考 1

一个三角形的三个内角中最多有几个钝角？几个直角？

例题1 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B=35°$，$\angle C=55°$，求 $\angle A$ 的度数，并判断 $\triangle ABC$ 的类型.

解　因为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$是$\triangle ABC$的三个内角(已知),

所以$\angle A+\angle B+\angle C=180°$（三角形的内角和等于180°）.

由$\angle B=35°$，$\angle C=55°$（已知），

得$\angle A=180°-\angle B-\angle C=180°-35°-55°=90°$（等式性质）.

所以$\triangle ABC$是直角三角形.

例题2　在$\triangle ABC$中，已知$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$，求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的度数.

解　根据题意,可设$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的度数分别为x、$2x$、$3x$.

因为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$是$\triangle ABC$的三个内角（已知），

所以$\angle A+\angle B+\angle C=180°$（三角形的内角和等于180°），

即　$x+2x+3x=180$.

解得　$x=30$.

所以　$\angle A=30°$，$\angle B=60°$，$\angle C=90°$.

练习14.2(1)

1. 判断下列各组角度的角是否为同一个三角形的内角：

(1) 80°、95°、5°；　(2) 60°、20°、90°；

(3) 35°、40°、105°；　(4) 73°、50°、57°.

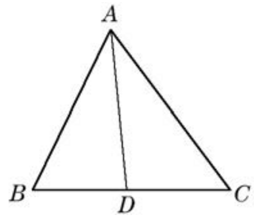
2. 已知$\triangle ABC$中两个内角的度数,判断$\triangle ABC$的类型：

(1) $\angle A=30°$，$\angle B=40°$；

(2) $\angle B=32°$，$\angle C=58°$；

(3) $\angle A=60°$，$\angle C=50°$.

3. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=60°$，$\angle C=45°$，AD是$\triangle ABC$的角平分线,求$\angle ADC$的度数.



（第3题）

4. 在$\triangle ABC$中,已知$\angle A:\angle B:\angle C=2:3:4$,求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的度数.

观察

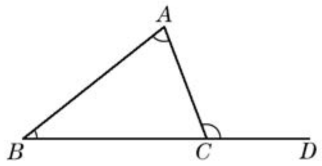


图14－8

如图14－8，延长 $\triangle ABC$ 的一边 BC，得到 $\angle ACD$，则 $\angle ACD$ 是 $\angle ACB$ 的邻补角．我们把三角形一个内角的邻补角叫做三角形的外角 (exterior angle of triangle)．图14－8中 $\angle ACD$ 是 $\triangle ABC$ 的一个外角，而 $\angle ACB$ 是与它相邻的内角．

思考 2

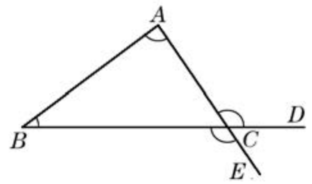


图14－9

三角形中，与一个内角相邻的外角有几个？

如图14－9，作 BC 的延长线 CD，作 AC 的延长线 CE，可知 $\angle ACD$、$\angle BCE$ 都是与 $\angle ACB$ 相邻的外角，这两个外角是对顶角，它们的大小相等．

思考 3

三角形的外角与内角之间有怎样的数量关系？

因为 $\angle ACD+\angle ACB=180^\circ$（平角的意义），

$\angle A+\angle B+\angle ACB=180^\circ$（三角形的内角和等于180°），

所以 $\angle ACD+\angle ACB=\angle A+\angle B+\angle ACB$（等量代换），

得 $\angle ACD=\angle A+\angle B$（等式性质）．

由此可知，三角形外角有两个性质：

> 三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和；
> 三角形的一个外角大于任何一个与它不相邻的内角．

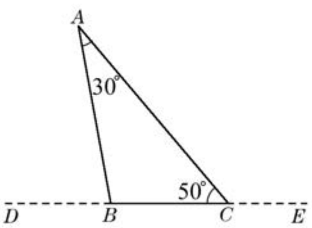


图14－10

例题3 已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=30^\circ$，$\angle C=50^\circ$，求分别与 $\angle B$、$\angle C$ 相邻的一个外角的度数．

解 如图14－10，作 CB 的延长线 BD，则 $\angle ABD$ 是与 $\angle ABC$ 相邻的一个外角．

由 $\angle ABD=\angle A+\angle ACB$（三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和），得

$$\angle ABD=30^\circ+50^\circ=80^\circ.$$

作 BC 的延长线 CE，则 $\angle ACE$ 是与 $\angle ACB$ 相邻的一个外角.

由 $\angle ACE+\angle ACB=180^\circ$ (平角的意义)，得

$$\begin{aligned}\angle ACE&=180^\circ-\angle ACB\\&=180^\circ-50^\circ\\&=130^\circ.\end{aligned}$$

例题4 如图14－11，已知 $\angle BAC=70^\circ$，D是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的一点，且 $\angle CAD=\angle C$，$\angle ADB=80^\circ$. 求：

(1) $\angle C$的度数；

(2) $\angle B$的度数.

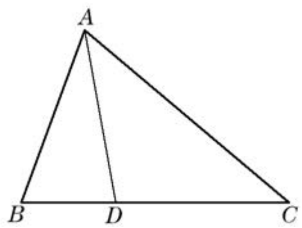


图14－11

解 (1) 因为 $\angle ADB=\angle CAD+\angle C$ (三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和)，

又 $\angle CAD=\angle C$，$\angle ADB=80^\circ$ (已知)，

所以 $\angle C+\angle C=80^\circ$ (等量代换).

所以 $\angle C=\dfrac{1}{2}\times 80^\circ=40^\circ$ (等式性质).

(2) 因为 $\angle BAC+\angle B+\angle C=180^\circ$ (三角形的内角和等于180°)，

又 $\angle BAC=70^\circ$ (已知)，

所以 $70^\circ+\angle B+40^\circ=180^\circ$ (等量代换).

所以 $\angle B=180^\circ-\angle BAC-\angle C=180^\circ-70^\circ-40^\circ=70^\circ$ (等式性质).

思考 4

三角形的内角和等于180°，三角形的外角和等于多少度?

对于三角形的每个内角，从与它相邻的两个外角中取一个，这样取得的三个外角相加所得的和，叫做三角形的外角和.

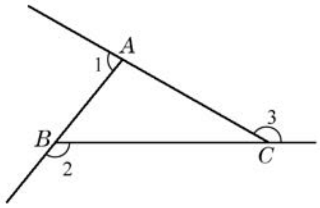


图14－12

如图14－12，$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$是三角形的外角，$\angle 1+\angle 2+\angle 3$就是$\triangle ABC$的外角和.

因为$\angle 1=\angle ABC+\angle ACB$，

$\angle 2=\angle BAC+\angle ACB$，

$\angle 3=\angle BAC+\angle ABC$（三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和），

所以$\angle 1+\angle 2+\angle 3=2(\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB)$（等式性质）.

又因为$\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=180°$（三角形的内角和等于180°），

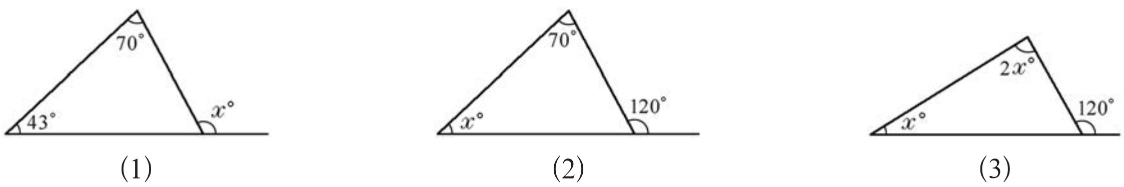
所以$\angle 1+\angle 2+\angle 3=2\times 180°=360°$（等量代换）.

由此，我们得到三角形的外角和性质：

> 三角形的外角和等于360°.

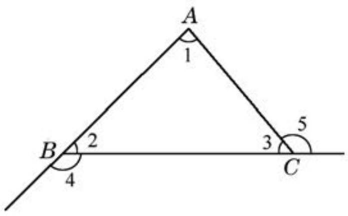
练习14.2(2)

1. 求下列图中x：

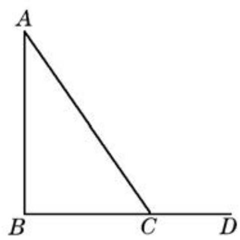


（第1题）

2. 如图，$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$是$\triangle ABC$的三个内角，$\angle 4$、$\angle 5$是三角形的外角，已知$\angle 1=85°$，$\angle 5=130°$，求$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$的度数.



（第2题）



（第3题）

3. 如图，在$\triangle ABC$中，已知$\angle B=90°$，$\angle ACD=4\angle A$，求$\angle A$的度数.

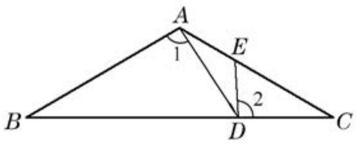


图14－13

例题5 如图14－13，在 $\triangle ABC$ 中，已知点 D 是边 BC 上的一点，且 $\angle ADE=\angle B$，那么 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 相等吗？为什么？

解 因为 $\angle ADC=\angle B+\angle 1$（三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和），

即 $\angle ADE+\angle 2=\angle B+\angle 1$.

又 $\angle ADE=\angle B$（已知），

所以 $\angle 1=\angle 2$（等式性质）.

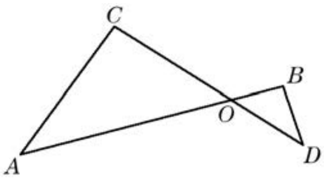


图14－14

例题6 如图14－14，直线 AB、CD 相交于点 O，已知 $\angle B=\angle C$，$\angle A=40°$，求 $\angle D$ 的度数.

解 方法一：因为 $\angle A+\angle C+\angle AOC=180°$，

$\angle D+\angle B+\angle BOD=180°$（三角形的内角和等于180°），

所以 $\angle D+\angle B+\angle BOD=\angle A+\angle C+\angle AOC$（等量代换）.

又 $\angle BOD=\angle AOC$（对顶角相等），

$\angle B=\angle C$（已知），

所以 $\angle D=\angle A$（等式性质）.

由 $\angle A=40°$（已知），

得 $\angle D=40°$（等量代换）.

方法二：因为 $\angle AOD=\angle A+\angle C$，

$\angle AOD=\angle D+\angle B$（三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和），

所以 $\angle D+\angle B=\angle A+\angle C$（等量代换）.

又因为 $\angle B=\angle C$（已知），

所以 $\angle D=\angle A$（等式性质）.

由 $\angle A=40°$（已知），

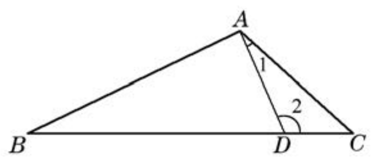
得 $\angle D=40°$（等量代换）.

想一想

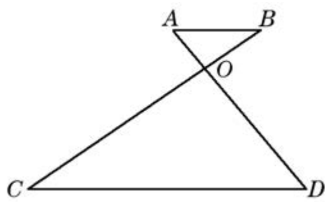
如果给定了三角形的三个内角，那么这个三角形的大小是否确定？

练习14.2(3)

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知点 D 是边 BC 上的一点，且 $\angle 1=\angle B$. 那么 $\angle BAC$ 与 $\angle 2$ 相等吗？为什么？

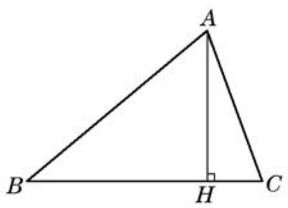


（第1题）

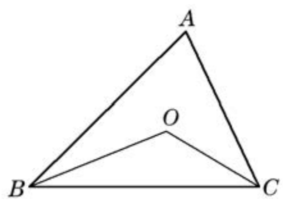


（第2题）

2. 如图，已知 $AB\parallel CD$，AD 与 BC 相交于点 O，$\angle A=50°$，$\angle AOC=85°$，求 $\angle C$ 的度数.
3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle BAC=\angle C=70°$，$AH\perp BC$，求 $\angle B$、$\angle BAH$ 的度数.



（第3题）



（第4题）

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=70°$，$\angle ABC$、$\angle ACB$ 的平分线 OB、OC 相交于点 O，求 $\angle BOC$ 的度数.

14 第2节 全等三角形

14.3 全等三角形的概念与性质

1. 全等三角形的概念与性质

观察

在图14－15的平面图形中，形状和大小完全相同的图形有哪几对？

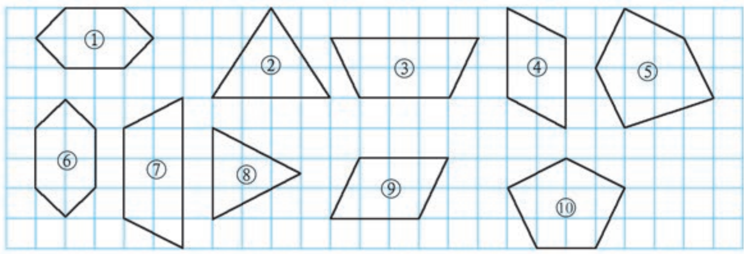


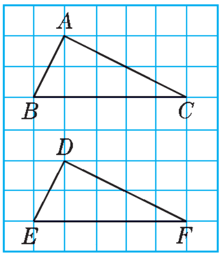
图14－15

判断两个图形的形状和大小是否完全相同，可以把两个图形叠在一起，看它们是否重合．利用这种方法可以发现，图形①和⑥叠在一起可以重合，即形状和大小完全相同．其他的图形如③和⑦、④和⑨也是如此．

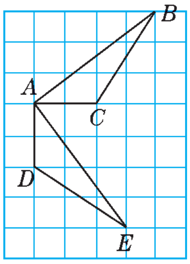
我们知道，图形的翻折、旋转、平移是图形的三种基本运动．图形经过这样的运动，位置发生了变化，但形状、大小没有改变．反过来，形状、大小相同的两个图形经过基本运动一定能够重合．

想一想

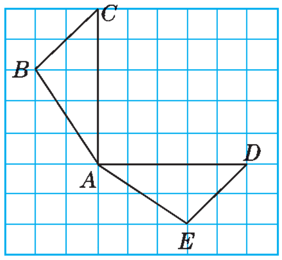
图14－16中的四对图形，每对图形中的一个图形经过某种基本运动后是否都能与另一个图形重合？



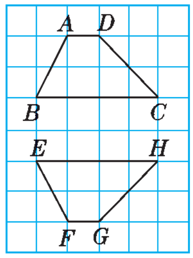
(1)



(2)



(3)



(4)

图14－16

能够重合的两个图形叫做**全等形**(congruent figures)．图14－16中的每对图形都是全等形．

两个三角形是全等形，就说它们是**全等三角形**．两个全等三角形，经过运动后一定重合，相互重合的顶点叫做**对应顶点**；相互重合的边叫做**对应边**；相互重合的角叫做**对应角**．

用符号表示两个全等三角形时，通常把对应顶点的字母写在对应的位置上．

例如，图14－16(1)中，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是全等三角形，记作 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，符号“$\cong$”表示全等，读作“全等于”，其中 A 和 D、B 和 E、C 和 F 分别表示对应顶点；AB 和 DE、BC 和 EF、CA 和 FD 分别表示对应边；$\angle A$ 和 $\angle D$、$\angle B$ 和 $\angle E$、$\angle C$ 和 $\angle F$ 分别表示对应角．

由于两个全等三角形的对应边能够相互重合，对应角也能够相互重合，因此全等三角形具有以下性质：

全等三角形的对应边相等，对应角相等．

例如，图14－16(1)中，$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，$AB$ 与 DE 是对应边，由全等三角形的对应边相等的性质，得 $AB=DE$．同样，我们还可以得到 $BC=EF$，$CA=FD$．由全等三角形对应角相等的性质，可得 $\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$．

思考

图14－16(2)、图14－16(3)中，关于两个全等三角形的对应顶点、对应边和对应角的情况如何呢？

例题1 如图14－17，已知 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，顶点$A$、$B$、$C$分别与顶点 D、E、F 对应，$AB=2$ cm，$\angle A=60°$，$\angle B=70°$， 求 DE、$\angle D$ 和 $\angle F$ 的值.

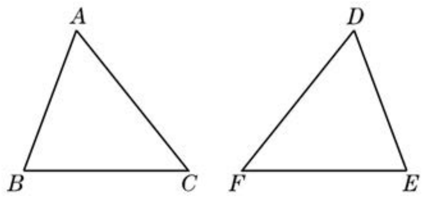


图14－17

解 因为 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$（已知），顶点$A$、$B$、$C$ 分别与顶点 D、E、F 对应，

所以 $AB=DE$（全等三角形的对应边相等），

$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$（全等三角形的对应角相等）.

由 $AB=2$ cm，$\angle A=60°$，$\angle B=70°$（已知），

得 $DE=2$ cm，$\angle D=60°$，$\angle E=70°$（等量代换）.

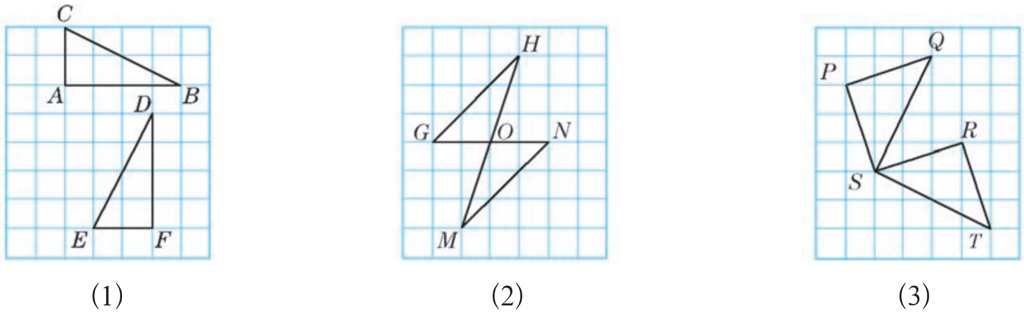
再由 $\angle D+\angle E+\angle F=180°$（三角形的内角和等于180°），

得 $\angle F=50°$.

所以 $DE=2$ cm，$\angle D=60°$，$\angle F=50°$.

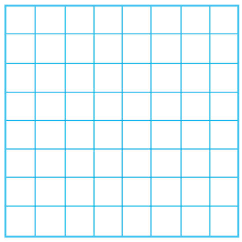
练习14.3(1)

1. 图 (1) (2) (3) 中给出的每对三角形都是全等三角形.用符号表示各对全等三角形，并指出其对应边和对应角.



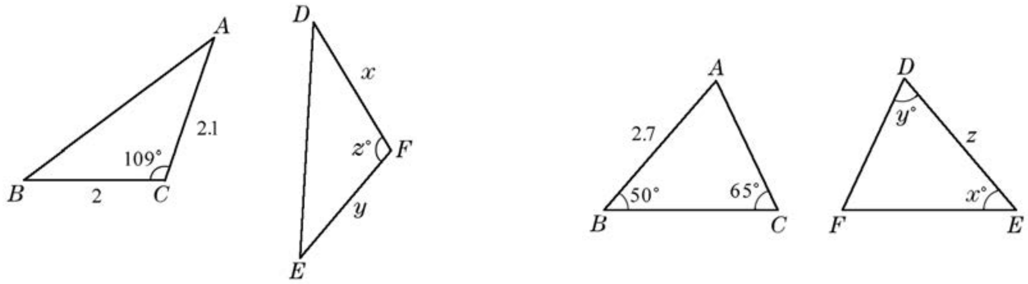
（第1题）

2 在下列方格图中画两个全等三角形，并用符号表示出来.



（第2题）

3 如图，已知 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，顶点 A、B、C 分别与顶点 D、E、F 对应，求图中的 x、y、z 的值.



(1)　　　(2)

（第3题）

2. 画三角形

我们知道，一个三角形有六个元素（三条边、三个内角），给定一个三角形，这个三角形的边长和角的大小就完全确定了. 反过来，要确定一个三角形的形状和大小，至少需要给定这个三角形的几个元素？我们通过画图来进行探究.

首先，给定了三角形的两个元素，在这样的条件下画三角形，所画出的三角形的形状和大小是否确定？如：

(1) 已知三角形的两条边的长分别为 3 cm、4 cm；

(2) 已知三角形的一个内角为 45°，一条边长为 4 cm；

(3) 已知三角形的两个内角分别为 45°、60°.

通过上面的画图可知，只给定三角形的两个元素，画出的三角形的形状和大小是不确定的.

其次，给定三角形的三个元素，在这样的条件下画三角形，所画的三角形的形状和大小是否确定？（想一想，给出三个角，形状和大小能否确定）

其实，要确定一个三角形的形状和大小，关键是要确定它的三个顶点的相对位置. 如果已知三角形一边的长，就可

以确定这条边的两个端点的相对位置，即三角形的两个顶点的相对位置，这时，关键就是确定三角形的第三个顶点的位置.

下面，我们按给定的三个元素分别为如下几种情况来画三角形：

(1) 两角及其夹边；　　(2) 两边及其夹角；

(3) 三边；　　(4) 两角及其中一角的对边.

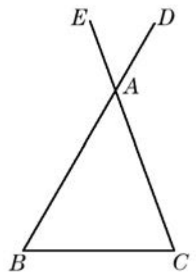


图14－18

例题2　画$\triangle ABC$，使$BC=2\text{cm}$，$\angle ABC=60°$，$\angle ACB=70°$.

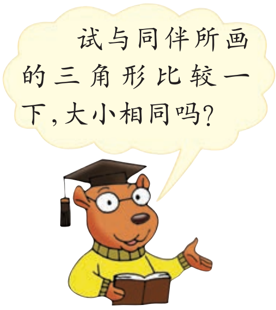
解　如图14－18所示，

(1) 画线段BC，使$BC=2\text{ cm}$；

(2) 以射线BC为一边，画$\angle DBC=60°$；

(3) 以射线CB为一边，画$\angle ECB=70°$，且使$\angle ECB$与$\angle DBC$在直线BC的同一侧，得射线CE与BD相交于点A.

$\triangle ABC$就是所要画的三角形.



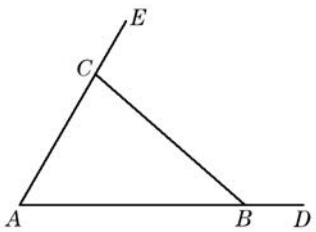


图14－19

例题3　画$\triangle ABC$，使$AB=3\text{ cm}$，$AC=2\text{ cm}$，$\angle A=60°$.

解　如图14－19所示，

(1) 画$\angle DAE=60°$；

(2) 在射线AD上，截取线段AB，使$AB=3\text{ cm}$；

(3) 在射线AE上，截取线段AC，使$AC=2\text{ cm}$；

(4) 联结BC.

$\triangle ABC$就是所要画的三角形.

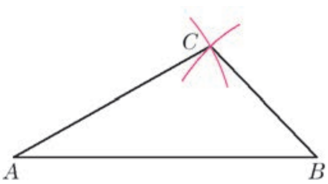


图14－20

例题4　画$\triangle ABC$，使$AB=4\text{ cm}$，$BC=2\text{ cm}$，$AC=3\text{ cm}$.

解　如图14－20所示，

(1) 画线段$AB=4\text{ cm}$；

(2) 以点A为圆心、3 cm为半径画圆弧；

(3) 以点B为圆心、2 cm为半径画圆弧，与前一条圆弧交于点C；

(4) 分别联结AC、BC.

$\triangle ABC$就是所要画的三角形.

比较画出的三角形所给定的条件，可以知道：如果已知三角形的六个元素中的如下三个元素：两角及其夹边；两边及其夹角；三边，那么画出的三角形的形状和大小是完全确定的.

想一想，如果给定的条件是两角及其中一角的对边，那么画出的三角形完全确定吗？

练习14.3(2)

1. 画 $\triangle ABC$，使 $AB=5\ \text{cm}$，$BC=4\ \text{cm}$，$AC=6\ \text{cm}$.
2. 画 $\triangle ABC$，使 $AB=4\ \text{cm}$，$AC=3\ \text{cm}$，$\angle A=45^\circ$.
3. 画 $\triangle ABC$，使 $\angle A=40^\circ$，$\angle B=45^\circ$，$AB=4\ \text{cm}$.
4. 画 $\triangle ABC$，使 $\angle A=45^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$AC=3\ \text{cm}$.

14.4 全等三角形的判定

通过画三角形的操作实践，我们认识到，按照给定“两边及其夹角”或“两角及其夹边”或“两角及其中一角的对边”或“三边”这样的三个条件所画出的三角形都能够互相重合；一个三角形的形状和大小，可以由这个三角形中“两边及其夹角”或“两角及其夹边”或“两角及其中一角的对边”或“三边”这样的三个元素确定.

这就是说，如果两个三角形满足如上所述的三个条件，那么它们就是全等三角形.

下面，我们对两个三角形全等的条件进行讨论.

1. 已知条件为“两边及其夹角对应相等”.

如图14-21，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，已知 $AB=A'B'$，$\angle A=\angle A'$，$AC=A'C'$，那么 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

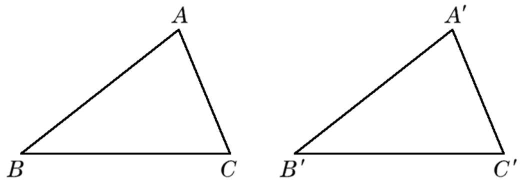


图14－21

说理过程如下：

把 $\triangle ABC$ 放到 $\triangle A'B'C'$ 上，使 $\angle A$ 的顶点与 $\angle A'$ 的顶点重合；由于 $\angle A=\angle A'$，因此可以使射线 AB、AC 分别落在射线 $A'B'$、$A'C'$ 上. 因为 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$，所以点 B、C 分别与点 B'、C' 重合，这样 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 重合，即 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

全等三角形判定方法1　在两个三角形中，如果有两条边及它们的夹角对应相等，那么这两个三角形全等（简记为 S.A.S）.

例题1　如图14－22，已知 $AB=AD$，$AC=AE$，$\angle BAC=\angle DAE$，说明 $\triangle BAC$ 与 $\triangle DAE$ 全等的理由.

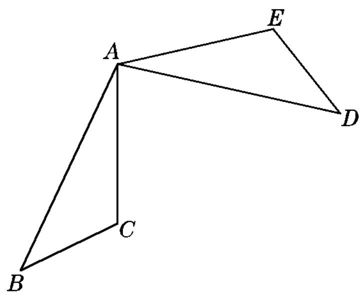


图14－22

解　在 $\triangle BAC$ 与 $\triangle DAE$ 中，

$$\begin{cases} AB=AD\ (\text{已知}), \\ \angle BAC=\angle DAE\ (\text{已知}), \\ AC=AE\ (\text{已知}), \end{cases}$$

所以 $\triangle BAC \cong \triangle DAE$ (S.A.S).

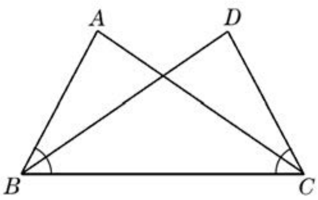


图14－23

例题2　如图14－23，已知 $AB=CD$，$\angle ABC=\angle DCB$，那么 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DCB$ 是否全等？为什么？

解　$\triangle ABC$ 与 $\triangle DCB$ 一定全等.

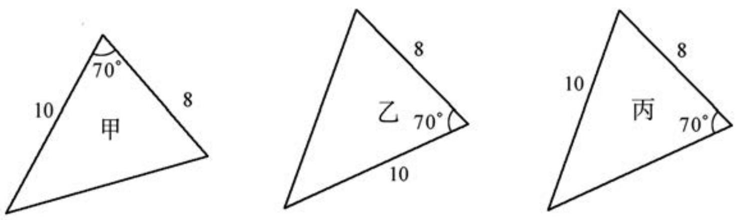
在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DCB$ 中,

$$\begin{cases} AB=DC\text{(已知)}, \\ \angle ABC=\angle DCB\text{(已知)}, \\ BC=CB\text{(公共边)}, \end{cases}$$

所以 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (S.A.S).

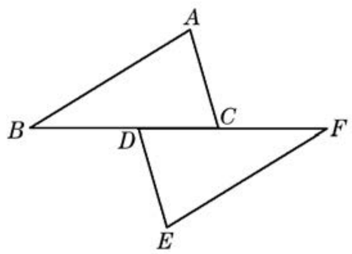
练习14.4(1)

1 在图中找出全等的三角形,并说明全等的理由.



(第1题)

2 如图,已知 $AC \parallel DE$, $AC=ED$, $BD=FC$.请填写理由,说明 $\triangle ABC \cong \triangle EFD$.



(第2题)

解:因为 $AC \parallel DE$(已知),

所以 $\angle ACB=\angle EDF$(　　　　　　　　　　).

因为 $BD=FC$(已知),

所以 $BD+DC=FC+DC$(等式性质),

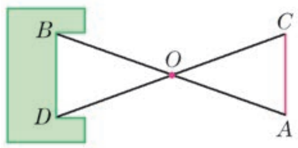
即 $BC=FD$.

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle EFD$ 中,

$$\begin{cases} AC=ED\text{(已知)}, \\ \angle ACB=\angle EDF, \\ BC=FD, \end{cases}$$

所以 $\triangle ABC \cong \triangle EFD$(　　　　　　).

3 如图,把两根钢条 AB、CD 的中点合在一起,可以做成一个测量工件内槽宽的工具(卡钳),只要测得 AC 的长,就可知工件的内径 BD 的长,你明白其中的道理吗?



(第3题)

解：因为 AB、CD 的中点都是点 O，

所以 $AO=OB$（线段中点的意义），

__________（线段中点的意义）.

在 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOD$ 中，

$$\begin{cases} AO=BO, \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \quad (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad), \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \end{cases}$$

所以 $\triangle AOC \cong \triangle BOD$（S.A.S）.

从而得到 $BD=AC$（　　　　　　　　　　　　）.

2. 已知条件为“两角及其夹边对应相等”.

如图14－24，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，已知 $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$AB=A'B'$，那么 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

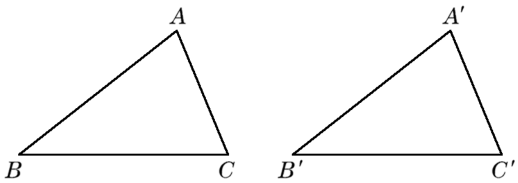


图14－24

说理过程如下：

把 $\triangle ABC$ 放在 $\triangle A'B'C'$ 上，因为 $AB=A'B'$，可以使 AB 与 $A'B'$ 重合，并使点 C 和点 C' 在 AB（$A'B'$）的同一侧，这时点 A 与点 A' 重合，点 B 与点 B' 重合. 由于 $\angle A=\angle A'$，因此射线 AC 与 $A'C'$ 叠合；由于 $\angle B=\angle B'$，因此射线 BC 与 $B'C'$ 叠合. 于是点 C（射线 AC 与 BC 的交点）与点 C'（射线 $A'C'$ 与 $B'C'$ 的交点）重合. 这样 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 重合，即 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

> 全等三角形判定方法2　在两个三角形中，如果有两个角及它们的夹边对应相等，那么这两个三角形全等（简记为A.S.A）.

3. 已知条件为“两角及其中一角的对边对应相等”.

如图14－25,在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中,已知 $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $AC=A'C'$,那么 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

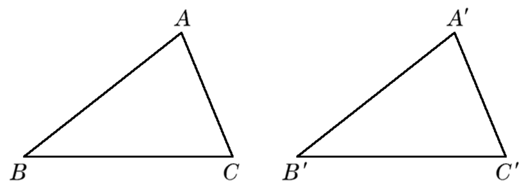


图14－25

利用三角形的内角和等于180°,我们可以得到 $\angle C=\angle C'$,再运用全等三角形判定方法2(A.S.A),可以说明上述结论是正确的.

> 全等三角形的判定方法3　在两个三角形中,如果有两个角及其中一个角的对边对应相等,那么这两个三角形全等(简记为A.A.S).

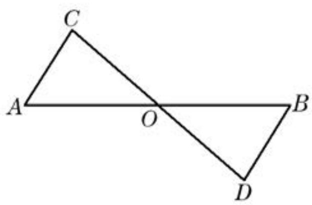


图14－26

例题3　如图14－26,已知 AB 与 CD 相交于点 O, $AO=BO$, $\angle A=\angle B$,说明 $\triangle AOC$ 与 $\triangle BOD$全等的理由.

解　在 $\triangle AOC$ 与 $\triangle BOD$ 中,

$$\begin{cases}\angle A=\angle B\text{（已知）},\\ AO=BO\text{（已知）},\\ \angle AOC=\angle BOD\text{（对顶角相等）},\end{cases}$$

所以 $\triangle AOC \cong \triangle BOD$(A.S.A).

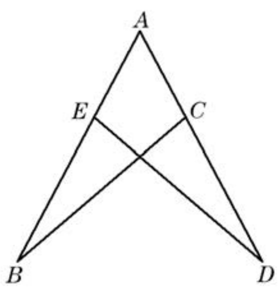


图14－27

例题4　如图14－27,已知 $AE=AC$, $\angle B=\angle D$,说明 $\triangle DEA$ 与 $\triangle BCA$全等的理由.

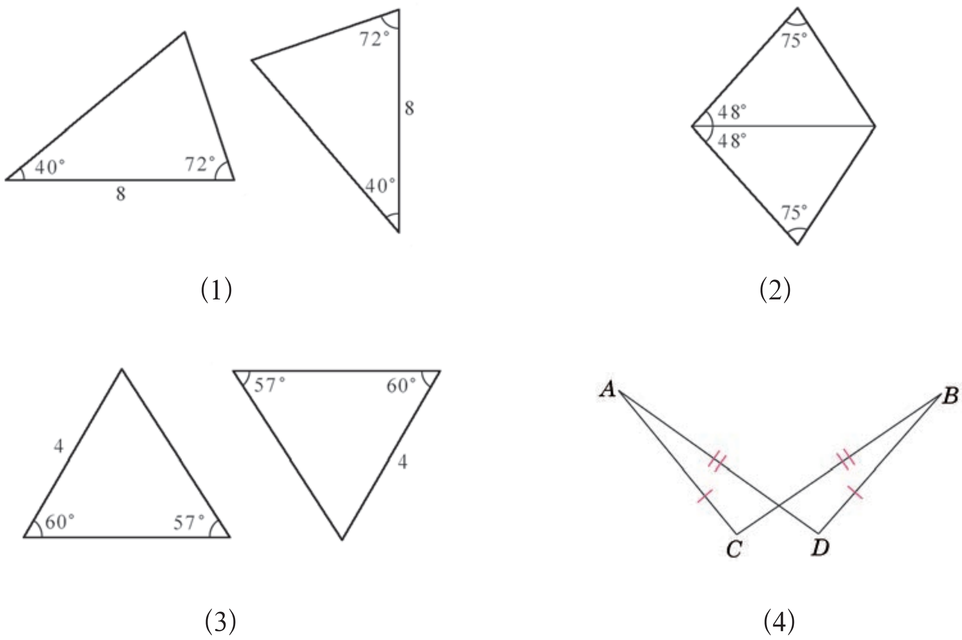
解　在 $\triangle DEA$ 与 $\triangle BCA$ 中,

$$\begin{cases}\angle D=\angle B\text{（已知）},\\ \angle A=\angle A\text{（公共角）},\\ AE=AC\text{（已知）},\end{cases}$$

所以 $\triangle DEA \cong \triangle BCA$(A.A.S).

练习14.4(2)

1. 判定下列各对三角形是否全等，如果全等，请说出理由.

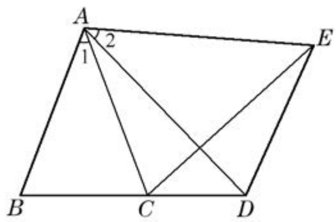


（第1题）

2. 如图，小明不慎把三角形模具打碎为三块，他是否可以只带其中的一块碎片到商店去，就能配一块与原来一样的三角形模具呢？如果可以，应该带哪块去？为什么？

（第2题）

3. 如图，$\angle 1=\angle 2$，$AD=AE$，$\angle B=\angle ACE$，且 B、C、D 三点在一直线上，请填写理由，说明 BD 与 CE 相等.



（第3题）

解：因为$\angle 1=\angle 2$（已知），

所以$\angle 1+\angle CAD=\angle 2+\angle CAD$（等式性质），

得$\angle$__________$=\angle$__________.

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACE$ 中，

$$\begin{cases} \angle BAD=\angle CAE, \\ \angle B=\angle ACE\text{（已知）}, \\ AD=AE\text{（已知）}, \end{cases}$$

所以 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$（　　　　）.

因此 $BD=CE$（　　　　　　　　　）.

4. 已知条件为“三边对应相等”.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，已知 $AB=A'B'$，$BC=B'C'$，$CA=C'A'$，那么 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

关于“三边对应相等的两个三角形全等”的说理将在以后补上.

全等三角形判定方法4　在两个三角形中，如果有三条边对应相等，那么这两个三角形全等(简记为S.S.S).

如果三角形的三条边长固定，那么这个三角形的形状和大小就完全确定了．三角形的这个性质叫做三角形的稳定性.

三角形的稳定性在生产实践中有广泛的应用，例如，桥梁拉杆、电视塔架底座、高压电线塔、摄像机所用的三角架等都有三角形结构.

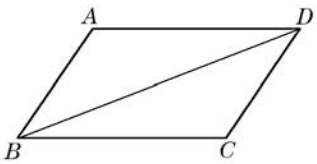


图14－28

例题5　如图14－28，已知 $AB=CD$，$BC=AD$，说明 $\triangle ABD$ 与 $\triangle CDB$ 全等的理由.

解　在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle CDB$ 中，

$$\begin{cases} AB=CD\ (\text{已知}), \\ AD=CB\ (\text{已知}), \\ BD=DB\ (\text{公共边}), \end{cases}$$

所以 $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (S.S.S) .

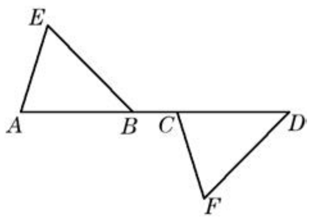


图14－29

例题6　如图14－29，点 A、B、C、D 在一条直线上．已知 $AC=DB$，$AE=CF$，$BE=DF$，说明 $\triangle ABE$ 与 $\triangle CDF$ 全等的理由.

解　因为 $AC=DB$ (已知)，

所以 $AC-BC=DB-BC$（等式性质），

即 $AB=CD$.

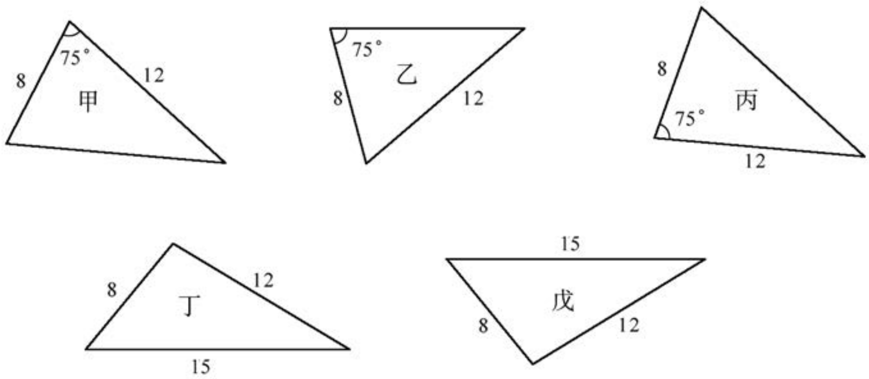
在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases} AB=CD, \\ AE=CF\text{（已知）}, \\ BE=DF\text{（已知）}, \end{cases}$$

所以 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$（S.S.S）.

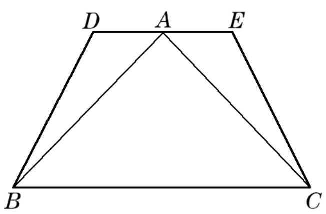
练习14.4(3)

1. 找出图中的全等三角形，并说明它们全等的理由.

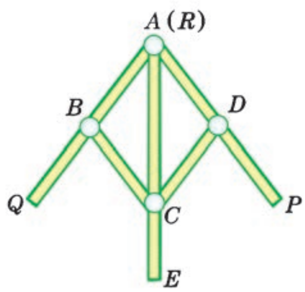


（第1题）

2. 如图，已知 $BD=CE$，$AB=AC$，点 A 是 DE 的中点，说明 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACE$ 全等的理由.



（第2题）



（第3题）

3. 如图，仪器 $ABCD$ 可以用来平分一个角，其中 $AB=AD$，$BC=DC$，将仪器上的点 A 与 $\angle PRQ$ 的顶点 R 重合，调整 AB 和 AD，使它们落在角的两边上，沿 AC 画一条射线 AE，AE 就是 $\angle PRQ$ 的平分线，你能说明其中的道理吗？

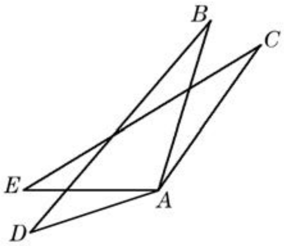


图14－30

例题7 如图14－30，已知 $AB=AC$，$AD=AE$，$\angle BAC=\angle DAE$，说明 $\triangle DAB$ 与 $\triangle EAC$ 全等的理由．

解 因为 $\angle BAC=\angle DAE$（已知），

所以 $\angle BAC+\angle BAE=\angle DAE+\angle BAE$（等式性质），

即 $\angle EAC=\angle DAB$．

在 $\triangle DAB$ 与 $\triangle EAC$ 中，

$$\begin{cases} AB=AC\ (\text{已知}), \\ \angle DAB=\angle EAC, \\ AD=AE\ (\text{已知}), \end{cases}$$

所以 $\triangle DAB\cong\triangle EAC$（S.A.S）．

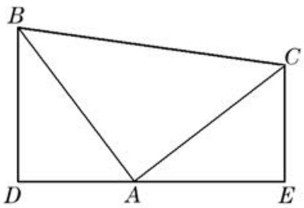


图14－31

例题8 如图14－31，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle BAC=90°$，$AB=AC$，点 A 在 DE 上，$\angle D=90°$，$\angle E=90°$．

(1) 说明 $\angle BAD$ 与 $\angle ACE$ 相等的理由．

(2) 说明 $\triangle BDA$ 与 $\triangle AEC$ 全等的理由．

解 (1) 因为点 A 在 DE 上（已知），

所以 $\angle BAD+\angle BAC+\angle CAE=180°$（平角的意义）．

又因为 $\angle BAC=90°$（已知），

所以 $\angle CAE+\angle BAD=90°$（等式性质）．

因为 $\angle ACE+\angle CAE+\angle E=180°$（三角形的内角和等于180°），

$\angle E=90°$（已知），

所以 $\angle ACE+\angle CAE=90°$（等式性质）．

因此 $\angle BAD=\angle ACE$（同角的余角相等）．

(2) 因为 $\angle D=90°$，$\angle E=90°$（已知），

所以 $\angle D=\angle E$（等量代换）．

在 $\triangle BDA$ 与 $\triangle AEC$中，

$$\begin{cases} \angle D=\angle E, \\ \angle BAD=\angle ACE, \\ AB=AC\ (\text{已知}), \end{cases}$$

所以 $\triangle BDA\cong\triangle AEC$（A.A.S）．

练习14.4(4)

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle ABC=\angle ACB$，BD、CE 分别平分 $\angle ABC$、$\angle ACB$，那么 $\triangle BDC$ 与 $\triangle CEB$ 全等吗？为什么？

解：因为 BD、CE 分别平分 $\angle ABC$、$\angle ACB$（已知），

所以 $\angle DBC=\frac{1}{2}$________，$\angle ECB=\frac{1}{2}$________（　　　）.

由 $\angle ABC=\angle ACB$（已知），

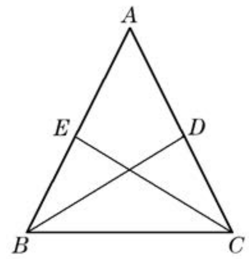
得 $\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\angle ACB$（　　　）.

所以 $\angle DBC=\angle ECB$（等量代换）.

在 $\triangle BDC$ 与 $\triangle CEB$ 中，

$$\begin{cases} \underline{\qquad\qquad}, \\ \underline{\qquad\qquad}(\qquad), \\ \underline{\qquad\qquad}(\qquad), \end{cases}$$

所以 $\triangle BDC\cong\triangle CEB$（A.S.A）.

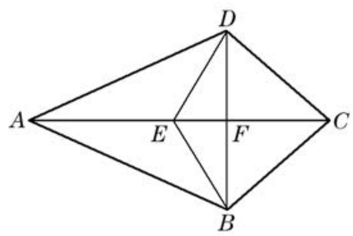


（第1题）

2. 如图，四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 相交于点 F，E 为 AC 上一点，且 $AD=AB$，$ED=EB$.

(1) 说明$\triangle AED$ 与 $\triangle AEB$ 全等的理由；

(2) 说明$\triangle EBF$ 与 $\triangle EDF$ 全等的理由.



（第2题）

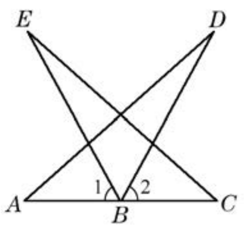


图14－32

例题9　如图14－32，已知点 B 是线段 AC 的中点，$BD=BE$，$\angle 1=\angle 2$. 试说明 $\triangle ADB$ 与 $\triangle CEB$ 全等的理由.

解　因为$\angle 1=\angle 2$（已知），

所以$\angle 1+\angle EBD=\angle 2+\angle EBD$（等式性质），

即$\angle ABD=\angle CBE$.

因为点 B 是 AC 的中点（已知），

所以 $AB=CB$（线段中点的意义）.

在 $\triangle ADB$ 与 $\triangle CEB$ 中，

$$\begin{cases} AB=CB, \\ \angle ABD=\angle CBE, \\ BD=BE（已知）, \end{cases}$$

所以 $\triangle ADB\cong\triangle CEB$（S.A.S）.

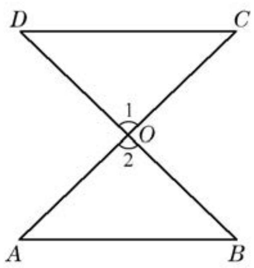


图14－33

例题10 如图14－33，已知 AC 与 BD 相交于点 O，且点 O 是 BD 的中点，$AB /\!/ CD$。试说明 $\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$ 全等的理由。

解 因为点 O 是 BD 的中点（已知），

所以 $DO=BO$（线段中点的意义）。

因为 $AB /\!/ CD$（已知），

所以 $\angle A=\angle C$（两直线平行，内错角相等）。

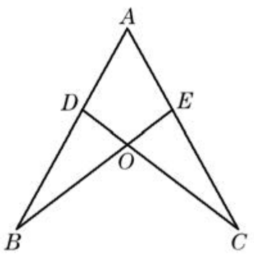
在 $\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$ 中，

$$\begin{cases}\angle A=\angle C,\\ \angle 2=\angle 1\ (\text{对顶角相等}),\\ BO=DO,\end{cases}$$

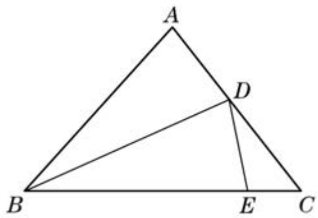
所以 $\triangle AOB \cong \triangle COD$（A.A.S）。

练习14.4(5)

1. 如图，已知 BE 与 CD 相交于点 O，且 $BO=CO$，$\angle ADC=\angle AEB$。那么 $\triangle BDO$ 与 $\triangle CEO$ 全等吗？为什么？



（第1题）



（第2题）

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别在 AC、BC 上，已知 $AD=DE$，$AB=BE$，$\angle A=80°$，求 $\angle BED$ 的大小。

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知点 D、E、F 分别在边 BC、AC、AB 上，且 $FD=DE$，$BF=CD$，$\angle FDE=\angle B$，那么 $\angle B$ 与 $\angle C$ 的大小关系如何？为什么？

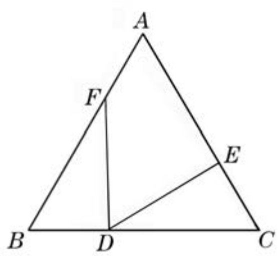
解：$\angle B=\angle C$。

因为 $\angle FDC=\angle B+\angle DFB$（　　　　　　　　），

即 $\angle FDE+\angle EDC=\angle B+\angle DFB$。

又因为 $\angle FDE=\angle B$（已知），

所以 $\angle$__________ $=\angle$__________。



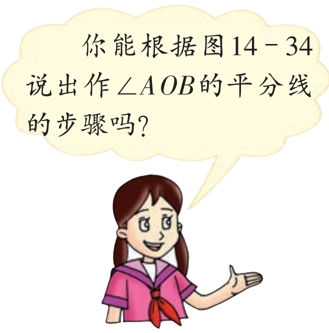
（第3题）

在 $\triangle EDC$ 与 $\triangle DFB$ 中，

$$\begin{cases} DE=DF\text{（已知）}, \\ \angle EDC=\angle DFB, \\ CD=BF\text{（已知）}, \end{cases}$$

所以 $\triangle EDC \cong \triangle DFB$（　　　　　　　）．

因此 $\angle B=\angle C$（　　　　　　　　　　　　）．



例题11　如图14－34，根据六年级第二学期学过的用直尺、圆规作角的平分线的方法，画出了 $\angle AOB$ 的平分线，请说明这种方法正确的理由.

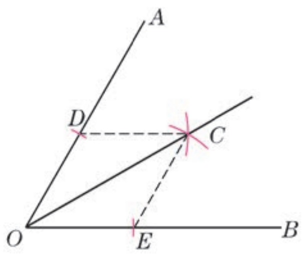


图14－34

解　联结 CD、CE.

在 $\triangle OCD$ 和 $\triangle OCE$ 中，

$$\begin{cases} OD=OE\text{（所作）}, \\ DC=EC\text{（画弧时所取的半径相等）}, \\ OC=OC\text{（公共边）}. \end{cases}$$

所以 $\triangle OCD \cong \triangle OCE$（S.S.S），

得 $\angle COD=\angle COE$（全等三角形的对应角相等）.

即 OC 是 $\angle AOB$ 的平分线.

例题12　如图14－35，已知 $AD\perp AB$，$AE\perp AC$，$AD=AB$，$AE=AC$，那么 DC 与 BE 相等吗？为什么？

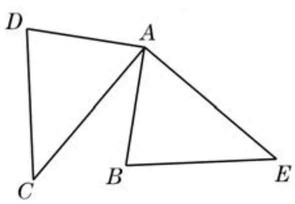


图14－35

解　因为 $AD\perp AB$，$AE\perp AC$（已知），

所以 $\angle DAB=\angle EAC=90^\circ$（垂直的意义），

得 $\angle DAB-\angle BAC=\angle EAC-\angle BAC$（等式性质），

即 $\angle DAC=\angle BAE$.

在 $\triangle ADC$ 与 $\triangle ABE$ 中，

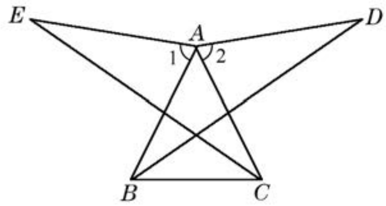
$$\begin{cases} AD=AB\text{（已知）}, \\ \angle DAC=\angle BAE, \\ AC=AE\text{（已知）}, \end{cases}$$

所以 $\triangle ADC \cong \triangle ABE$（S.A.S）.

因此 $DC=BE$（全等三角形的对应边相等）.

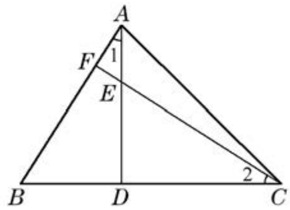
练习14.4(6)

1. 如图,已知$\angle 1=\angle 2$,$AB=AC$,$AD=AE$,那么 $\angle D$ 与 $\angle E$相等吗?为什么?



(第1题)

2. 如图,已知在 $\triangle ABC$ 中,$AD\perp BC$,D 是垂足,E 是 AD 上一点,联结 CE 并延长交 AB 于点 F,且 $CE=AB$,$\angle 1=\angle 2$,请填写理由,说明 $AD=DC$.



(第2题)

解:因为 $AD\perp BC$,

所以__________=90°,__________=90°(垂直的意义).

所以__________=__________(   ).

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CED$中,

____________________(   ),

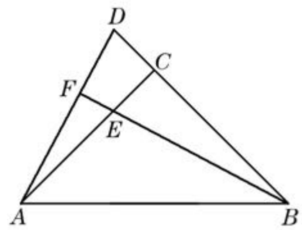
____________________,

____________________(   ).

所以 $\triangle ABD\cong\triangle CED$ (A.A.S),

从而得到 $AD=DC$ (   ).

3. 如图,在Rt$\triangle ABC$ 中,已知 $\angle ACB=90°$,$CA=CB$.点 D 在 BC 的延长线上,点 E 在 AC 上,且 $CD=CE$,联结 BE、AD,延长 BE 与 AD 相交于点 F.试说明 $AD=BE$ 的理由.



(第3题)

14

第3节　等腰三角形

14.5　等腰三角形的性质

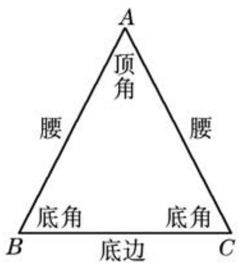


图14－36

我们知道，等腰三角形有两条边相等．如图14－36，$\triangle ABC$是等腰三角形，$AB=AC$．这时，边AB和AC是它的腰，BC是底边；$\angle A$是它的顶角，$\angle B$和$\angle C$是底角，下面，我们来研究等腰三角形两个底角的大小关系．

问题

等腰三角形的两个底角具有怎样的大小关系？

操作

在纸上画一个等腰三角形ABC，其中$AB=AC$，再画出顶角的平分线AD，设AD与BC相交于点D（图14－37）．

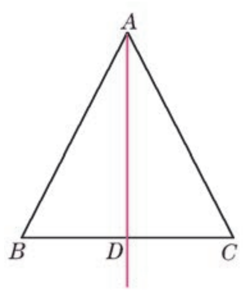


图14－37

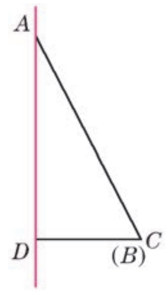
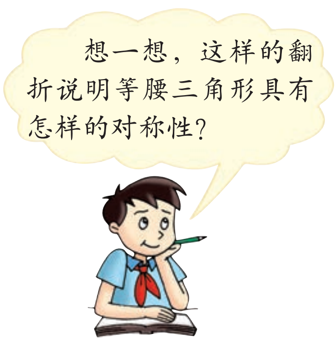


图14－38

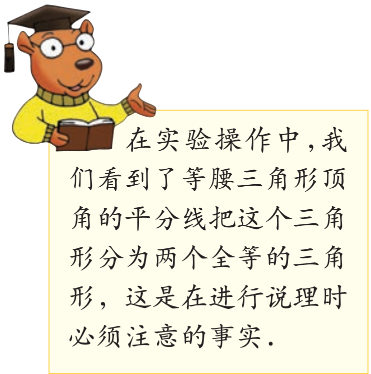


把$\triangle ABC$纸片剪下，将$\triangle ABD$沿着直线AD翻折．

因为$\angle BAD=\angle CAD$，所以将$\triangle ABC$沿着AD翻折后，射线AB与射线AC叠合．由于$AB=AC$，因此线段AB与线段AC重合，于是点B与点C重合．又因为点D与点D重

合，所以线段 BD 与线段 CD 也重合（图 14－38），因此 $\angle B=\angle C$.

通过实验操作并用叠合法说理，我们得到了等腰三角形的一个性质：



> 等腰三角形的两个底角相等（简称“等边对等角”）.

我们可以直接利用全等三角形对等腰三角形的性质进行说理.

如图14－39，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=AC$，说明 $\angle B=\angle C$ 的理由.

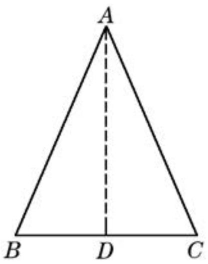


图14－39

解　过点 A 作 $\angle BAC$ 的平分线 AD，AD 和 BC 相交于点 D.

因为 AD 平分 $\angle BAC$（已知），

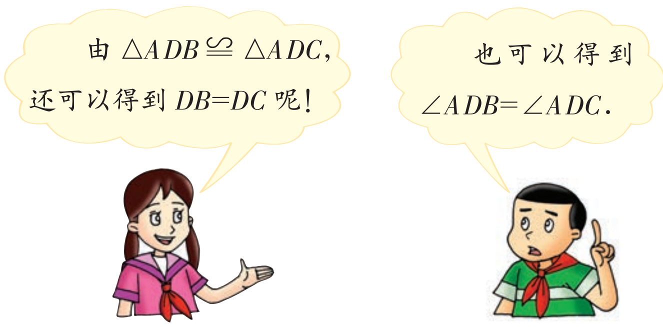
所以 $\angle BAD=\angle CAD$（角的平分线的意义）.

在 $\triangle ADB$ 与 $\triangle ADC$ 中，

$$\begin{cases} AB=AC\ (\text{已知}), \\ \angle BAD=\angle CAD, \\ AD=AD\ (\text{公共边}), \end{cases}$$

所以 $\triangle ADB \cong \triangle ADC$（S.A.S），

得 $\angle B=\angle C$（全等三角形的对应角相等）.



在图14－39中，因为 $\angle ADB$ 与 $\angle ADC$ 互补，所以又能推出 $\angle ADB=\angle ADC=90^\circ$，即 $AD\perp BC$.

由此可见，线段 AD 既是等腰三角形 ABC 的顶角平分线，又是底边 BC 上的中线，也是底边 BC 上的高.

等腰三角形的这个性质可表述如下：

等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合（简称为“等腰三角形的三线合一”）.

上面的说理过程还表明：

等腰三角形是轴对称图形，它的对称轴是顶角平分线所在的直线.

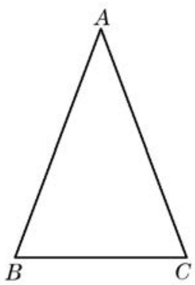


图14－40

例题1 如图14－40，已知 $AB=AC$，$\angle B=70°$，求：

(1) $\angle C$的度数；

(2) $\angle A$的度数.

解 (1) 因为 $AB=AC$（已知），

所以 $\angle C=\angle B$（等边对等角）.

由 $\angle B=70°$（已知），

得 $\angle C=70°$.

(2) 因为 $\angle B=\angle C=70°$，

又 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$（三角形的内角和等于180°），

所以 $\angle A=180°-70°-70°=40°$.

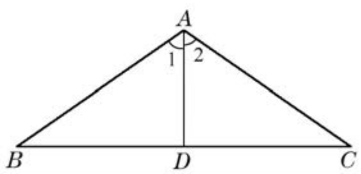


图14－41

例题2 如图14－41，已知 $AB=AC$，$\angle BAC=110°$，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线.

(1) 求$\angle 1$和$\angle 2$的度数；

(2) $AD\perp BC$吗？为什么？

解 (1) 因为 $AB=AC$（已知），

所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

由 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线（已知），

得$\angle 1=\angle 2=\dfrac{1}{2}\angle BAC$（等腰三角形的三线合一）.

由 $\angle BAC=110°$（已知），

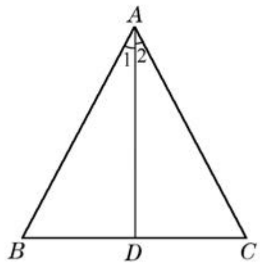
得$\angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\times 110°=55°$（等式性质）.

(2) 因为 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，AD 是 $\triangle ABC$ 底边上的中线（已知），

所以 $AD\perp BC$（等腰三角形的三线合一）.

练习14.5

1 将"等腰三角形三线合一"的性质用符号表示：



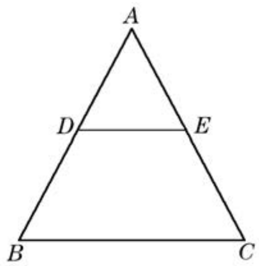
（第1题）

(1) "等腰三角形的顶角平分线平分底边并且垂直于底边".在 $\triangle ABC$ 中，如果 $AB=AC$，$\angle 1=\angle 2$，那么________=________，且__________.

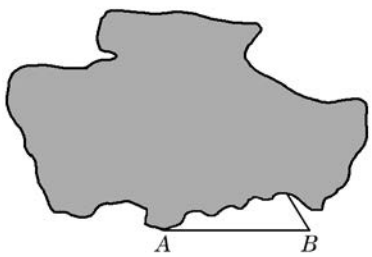
(2) "等腰三角形底边上的中线垂直于底边，并且平分顶角".在 $\triangle ABC$中，如果 $AB=AC$，____________，那么__________，且______________.

(3) "等腰三角形底边上的高平分底边和顶角".在 $\triangle ABC$ 中，如果 $AB=AC$，________，那么__________，且__________.

2 如图，已知 $AB=AC$，$AD=AE$，说明 $DE\parallel BC$ 的理由.



（第2题）



（第3题）

3 小明练习册上的一个等腰三角形被墨迹污染了，只有它的底边 AB 和 $\angle B$ 还保留着.请你画出练习册上原来的等腰三角形形状.

14.6　等腰三角形的判定

问题

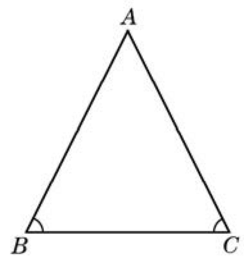


图14－42

在一个三角形中，如果有两个角相等，那么这个三角形是等腰三角形吗？

分析　如图14－42，$\triangle ABC$ 中的 $\angle B=\angle C$，如果能将 $\triangle ABC$ 分成两个全等的三角形，那么就可以利用全等三角形的对应边相等的性质来说明理由．

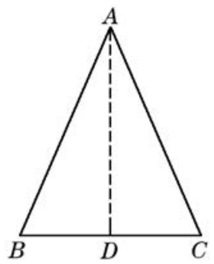


图14－43

如图14－43，作 $\triangle ABC$ 的平分 $\angle A$ 的角平分线 AD，则 $\angle BAD=\angle CAD$（角的平分线意义）．

在 $\triangle ADB$ 与 $\triangle ADC$ 中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle C\text{（已知）},\\ \angle BAD=\angle CAD,\\ AD=AD\text{（公共边）},\end{cases}$$

所以 $\triangle ADB\cong\triangle ADC$（A.A.S），

得 $AB=AC$（全等三角形的对应边相等）．

因此 $\triangle ABC$ 是等腰三角形．

还可用其他添置辅助线的方法来说明结论正确吗？

于是，我们得到了等腰三角形的判定方法：

> 如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等，这个三角形是等腰三角形（简称为“等角对等边”）．

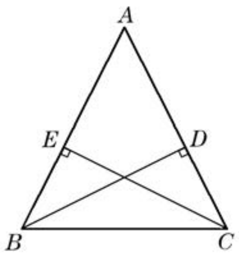


图14－44

例题1 如图14－44，在 $\triangle ABC$ 中，已知 BD、CE 分别是边 AC、AB 上的高，且 $\angle DBC=\angle ECB$，说明 $\triangle ABC$ 是等腰三角形的理由.

解 因为 BD、CE分别是边 AC、AB 上的高，

所以 $\angle BDC=\angle CEB=90°$（三角形的高的意义）.

在 $\triangle BDC$ 和 $\triangle CEB$中，

$$\begin{cases}\angle BDC=\angle CEB,\\ \angle DBC=\angle ECB\ \text{（已知）},\\ BC=CB\ \text{（公共边）},\end{cases}$$

所以 $\triangle BDC\cong\triangle CEB$（A.A.S），

得 $\angle ACB=\angle ABC$（全等三角形的对应角相等）.

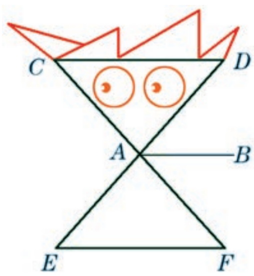
因此 $AB=AC$（等角对等边），

即 $\triangle ABC$是等腰三角形.

想一想，你还能用别的方法说明吗？

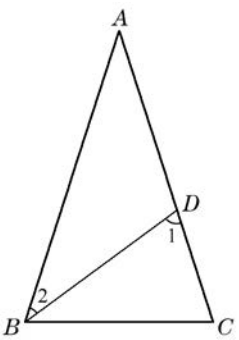
练习14.6(1)

1. 某卡通形象如图所示，其中射线 AB 是 $\triangle ACD$ 的外角平分线，且 $AB\parallel CD$，你能说明呈现卡通形象头部的 $\triangle ACD$ 是等腰三角形的理由吗？

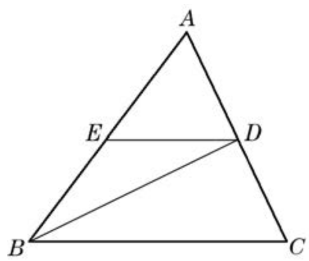


（第1题）

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle 1=72°$，$\angle 2=36°$，$\angle C=72°$.
   (1) 说明 $\triangle BCD$是等腰三角形的理由.
   (2) 找出图中其他的等腰三角形.
   (3) 试一试，你能说明 (2) 中所找的三角形是等腰三角形的理由吗？



（第2题）



（第3题）

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，BD平分 $\angle ABC$，过点 D 作 BC 的平行线 DE，交 AB 于 E，试说明 $DE=BE$ 的理由.

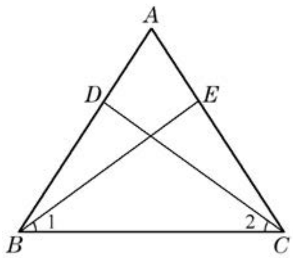


图14－45

例题2　如图14－45，在 $\triangle ABC$ 中，已知点 D、E 分别在 AB、AC 上，且 $BE=CD$，$\angle 1=\angle 2$，试说明 $\triangle ABC$ 是等腰三角形的理由．

分析　要说明 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，就是要说明 $AB=AC$，这可以通过说明 $\angle ABC=\angle ACB$ 得到．而 $\angle ABC=\angle ACB$，可由 $\triangle DBC\cong\triangle ECB$ 得到．

解　在 $\triangle ECB$ 和 $\triangle DBC$ 中，

$$\begin{cases} BE=CD\ (\text{已知}), \\ \angle 1=\angle 2\ (\text{已知}), \\ BC=CB\ (\text{公共边}), \end{cases}$$

所以 $\triangle ECB\cong\triangle DBC$（S.A.S），

得 $\angle ECB=\angle DBC$（全等三角形的对应角相等）．

可知 $AB=AC$（等角对等边）．

所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形．

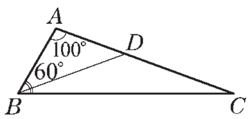


图14－46

例题3　如图14－46，点D在$\triangle ABC$的边AC上，已知$\angle A=100°$，$\angle ABC=60°$，$\angle ABD=40°$，试指出图中的相等线段，并说明理由．

分析　图中各线段可分别看作是三角形的边，已知条件中指明了几个角的大小，由此考虑利用在一个三角形中“等角对等边”来寻找和判断图中的相等线段．

解　图中的相等线段：$BD=DC$，$AB=AD$．

说理如下：

因为 $\angle A=100°$（已知），$\angle ABD=40°$（已知），

而 $\angle A+\angle ABD+\angle ADB=180°$（三角形的内角和等于180°），

所以 $\angle ADB=180°-\angle A-\angle ABD=40°$，

得 $\angle ABD=\angle ADB$，

所以 $AB=AD$（等角对等边）.

因为 $\angle ABC=60°$，$\angle ABD=40°$，

所以 $\angle DBC=\angle ABC-\angle ABD=20°$（等式性质）.

因为$\angle A+\angle ABC+\angle C=180°$（三角形的内角和等于180°），

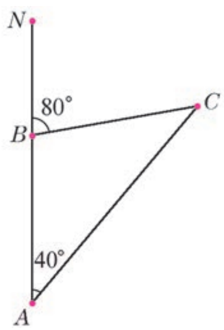
所 以 $\angle C=180°-\angle A-\angle ABC=20°$，

得$\angle C=\angle DBC$.

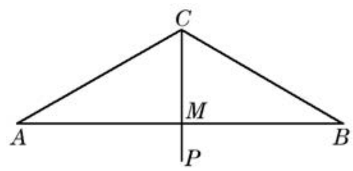
所以$DB=DC$（等角对等边）.

练习14.6(2)

1 如图，轮船由 A 处以每小时20海里的速度向正北方向航行，此时，测得灯塔 C 在北偏东40°的方向（即 $\angle NAC=40°$），半小时后，轮船航行到 B 处，测得灯塔 C 在北偏东80°的方向（即 $\angle NBC=80°$）.求轮船在 B 处时与灯塔 C 的距离.



（第1题）



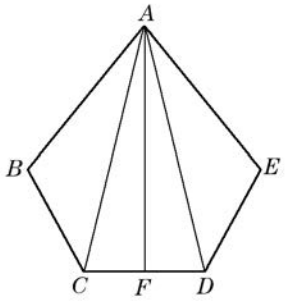
（第2题）

2 如图，一座桥梁的支架是一个等腰三角形 ABC，$AC=BC$，AB 是一条水平的横梁，跨度 $AB=20$米，$\angle ACB=120°$，从桥顶 C 处悬挂铅垂线 CP，CP 与 AB 交于点 M.求：

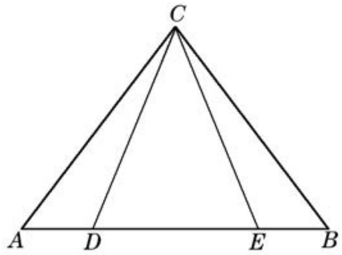
(1) AM 的长；

(2) $\angle ACP$ 的度数.

3 如图，已知 $AB=AE$，$\angle B=\angle E$，$BC=ED$，点 F 是 CD 的中点，联结 AF，试判断 AF 与 CD 的位置关系，并说明理由.



(第3题)



(第4题)

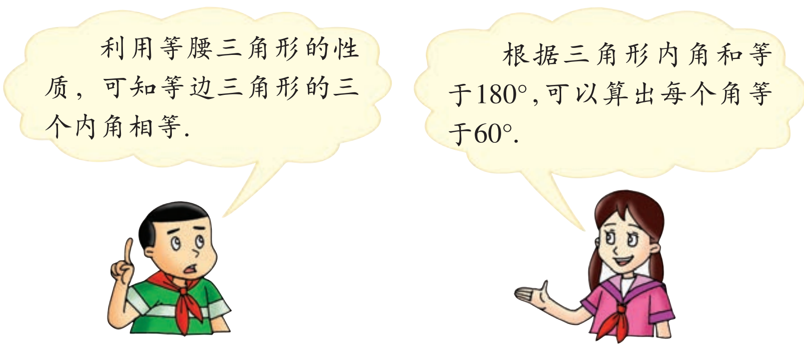
4 如图，已知点 D、E 在 AB 上，且 $AC=BC$，$AE=BD$，试说明 $\triangle CDE$ 是等腰三角形的理由.

14.7 等边三角形

等边三角形是特殊的等腰三角形，它的三边都相等.

思考 1

等边三角形的三个内角分别是多少度?



等边三角形有这样的性质：

> 等边三角形的每个内角等于60°.

思考 2

如何判定一个三角形是等边三角形呢?

根据等腰三角形的判定方法，我们可以得到下面判定等边三角形的方法：

> 三个内角都相等的三角形是等边三角形.

讨论

两边相等的三角形，满足怎样的条件就能成为等边三角形？

我们可以从它的边与角两类元素应满足的条件来考虑.

(1) 底边与腰相等.

满足底边与腰相等的条件,可以直接得到这个三角形是等边三角形.于是得到

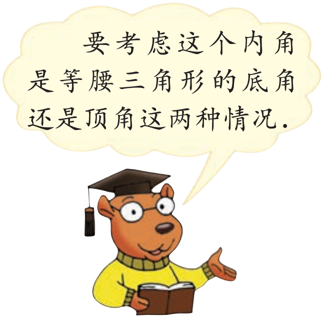
腰与底边相等的等腰三角形是等边三角形.

这是从“等边三角形的每个内角等于60°”，反过来思考后提出的.

(2) 一个内角为60°.

要满足有一个内角等于60°的条件,其中包括两种情况：

① 底角为60°角.



如图14－47,已知 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,且 $\angle B=60°$.

因为 $AB=AC$, $\angle B=60°$ (已知),

所以 $\angle B=\angle C=60°$ (等边对等角).

又由 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$ (三角形的内角和等于180°),

得 $\angle A=180°-\angle B-\angle C=180°-60°-60°=60°$.

所以 $\angle A=\angle B=\angle C$.

所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形 (三个内角都相等的三角形是等边三角形).

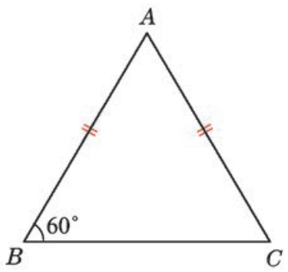


图14－47

② 顶角为60°角.

如图14－48,已知 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,且$\angle A=60°$.

我们可以类似①那样说明 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

由①②得到

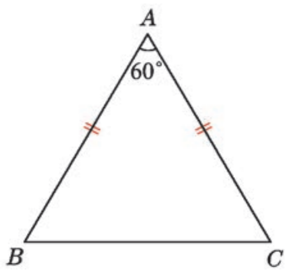


图14－48

有一个内角等于60°的等腰三角形是等边三角形.

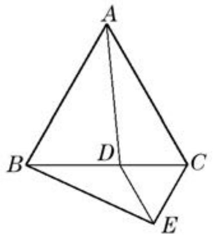


图14－49

例题 如图14－49，在等边三角形 ABC 的边 BC 上任取一点 D，以 CD 为边向外作等边三角形 CDE，联结 AD、BE，试说明 $BE=AD$ 的理由．

解 因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形（已知），

所以 $AC=BC$，$\angle ACD=60°$（等边三角形的性质）．

因为 $\triangle CDE$ 是等边三角形（已知），

所以 $CD=CE$，$\angle BCE=60°$．

所以 $\angle ACD=\angle BCE$（等量代换）．

在 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BCE$ 中，

$$\begin{cases} AC=BC, \\ \angle ACD=\angle BCE, \\ CD=CE, \end{cases}$$

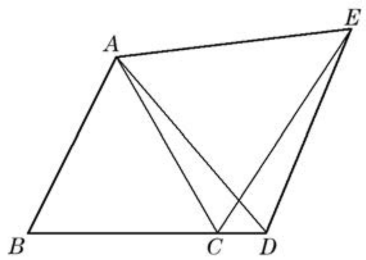
所以 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$（S.A.S），

得 $BE=AD$（全等三角形的对应边相等）．

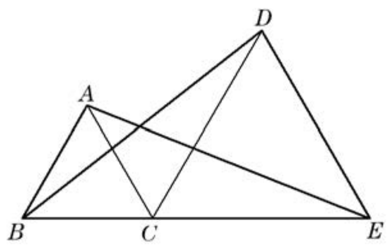
练习14.7

1. 如图，已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形，D 为 BC 延长线上一点，CE平分 $\angle ACD$，$CE=BD$，试说明 $\triangle DAB$ 与 $\triangle EAC$ 全等的理由．

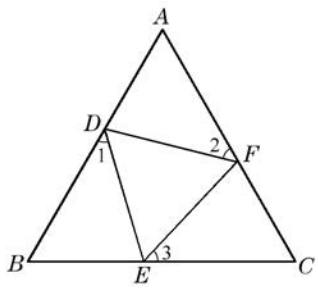
2. 如图，已知点 B、C、E 在一直线上，$\triangle ABC$、$\triangle DCE$ 都是等边三角形，联结 AE、BD，试说明 $\triangle ACE$ 与 $\triangle BCD$ 全等的理由．



（第1题）



（第2题）



（第3题）

3. 如图，已知点 D、E、F 分别在 AB、BC、CA 上，$\triangle DEF$ 是等边三角形，且 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$，$\triangle ABC$ 是等边三角形吗？试说明理由．

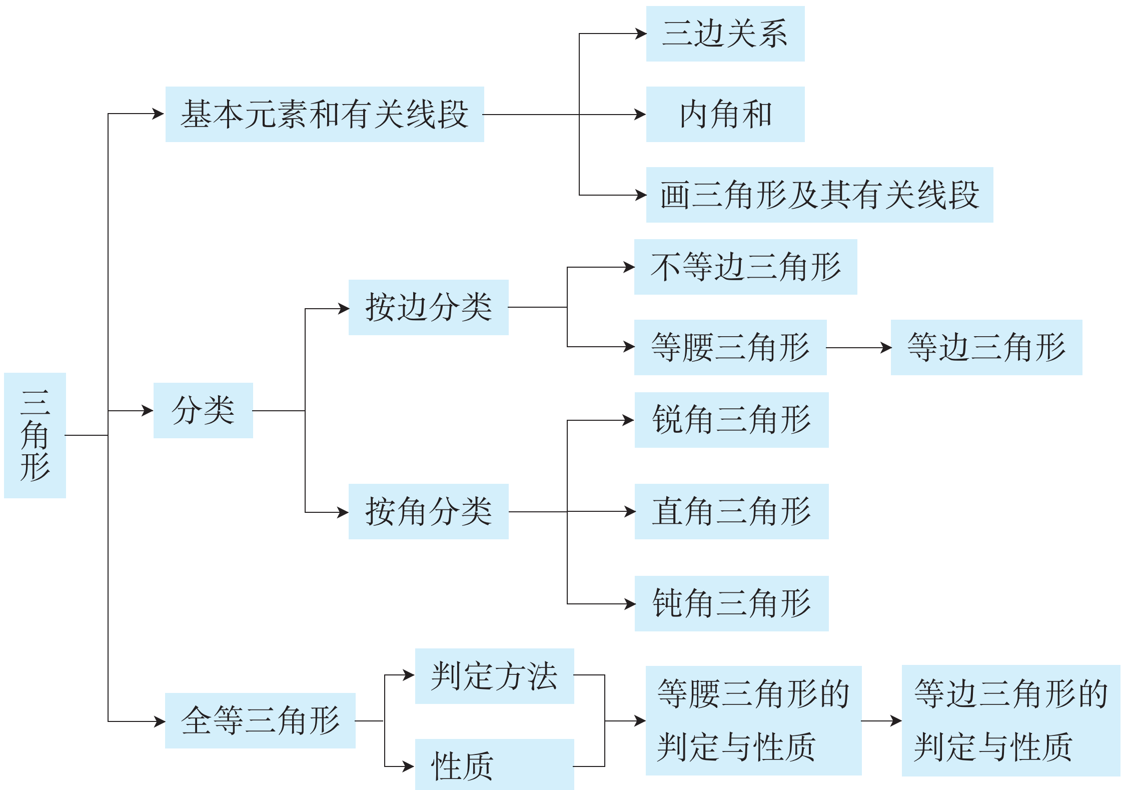
本章小结

本章我们学习了三角形的有关概念以及三边之间的关系、内角和的性质，讨论了三角形的分类；学习了全等三角形的概念、性质以及判定方法．在此基础上，进一步学习了等腰三角形的性质与判定；再对等腰三角形的特例等边三角形进行了研究．

三角形全等，是本章的核心概念．同一个三角形，在不同的位置呈现出不同的状态，正如一个数可以写出不同的形式 (如$6=2\times3=3\times2=2+4=4+2$) 一样．有数的相等，也有三角形的全等．数学概念有很多是相通的，彼此联系但又有区别．数可以算，图形则可以运动．

全等三角形的判定与性质，可用来判断几何图形中某些线段相等、角相等，这是一种基本方法．例如用来研究等腰三角形、等边三角形的性质，就卓有成效．数学是科学的语言．用简约、明确的语言进行“说理”是数学的特点之一，它能帮助我们认识几何图形的本质，推“陈”出“新”，准确地获得更多的新结论，因此务必注意“怎样说理”的过程，逐步地熟悉它，运用它．

本章知识结构框图如下：



阅读材料

“边.边.角”能判定三角形全等吗?

我们已经学习了三角形全等的四个判定方法,即“边.角.边”“角.边.角”“角.角.边”“边.边.边”;又知道“角.角.角”不能作为判定方法.

“边.边.角”能否作为判定三角形全等的方法呢?

让我们先看下面的情况.

如图14－50,$\triangle ABC$中,C' 是边 BC 上的一点,$AC'=AC$. $\triangle ABC$和$\triangle ABC'$ 全等吗?

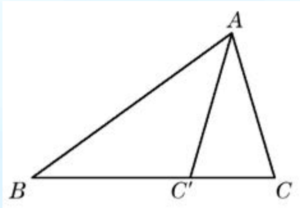


图14－50

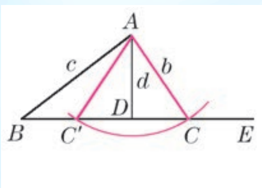
在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABC'$ 中,$AC=AC'$(已知),$AB=AB$(公共边),$\angle ABC=\angle ABC'$(公共角),完全符合“边.边.角”的条件,但显然 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABC'$ 不全等.

其实,在“边.边.角”条件中,已知一边,就可以确定三角形两个顶点的位置,关键是能否由其余条件确定第三个顶点的位置.

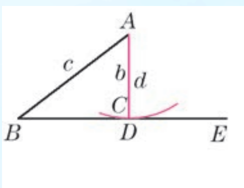
我们来讨论这样一个问题:已知线段 b、c 和 角 β,画$\triangle ABC$,使 $AB=c$,$AC=b$,$\angle B=\beta$.

在图14－51中,画线段 $AB=c$,就可以确定顶点 A、B 的相对位置;画$\angle ABE=\beta$(设β为锐角),就可以知道顶点 C 应该在射线 BE 上.但点 C 究竟在射线 BE 的哪个位置上? 这将由 AC 的长度来决定.

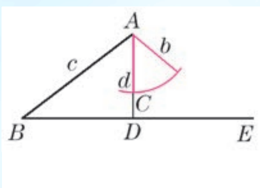
在图14－51中,过 A 作 BE 的垂线,垂足为 D,则 AD 为点 A 到边 BE 的距离,它是确定的,设这一距离为 d($d<c$). 如果 $\triangle ABC$ 的 第三个顶点 C 可以确定,那么应该满足两个条件:(1) 点 C 在 BE 上;(2) 点 C、A 的距离 $AC=b$. 因此,我们可



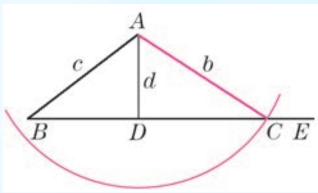
(1)



(2)



(3)



(4)

图14－51

以用圆规以点 A 为圆心、b 为半径作弧，利用圆弧与射线 BE 是否有公共点以及公共点个数的情况来判断第三个顶点 C 的确定状况．

如图14－51（1），如果 $d<b<c$，那么圆弧与射线 BE 有两个公共点（C、C'），即可以作出两个三角形：$\triangle ABC$ 与 $\triangle ABC'$；

如图14－51（2），如果 $b=d$，那么圆弧与射线 BE 有一个公共点（C），这个公共点与点 D 重合，即可以作出一个直角三角形 ABC，其中 $\angle C=90°$；

如图14－51（3），如果 $b<d$，那么圆弧与射线 BE 没有公共点，这时无法作出 $\triangle ABC$．

如图14－51（4），如果 $b>c$，那么圆弧与射线 BE 有一个公共点（C），这个公共点与点 D 不重合，即可以作出一个 $\triangle ABC$．

以上是对 β 为锐角时的情况所作的讨论．如果 β 分别为直角、钝角，那么情况又如何呢？同学们不妨一试．

综上所述，可见“边．边．角”的确不能作为判定三角形全等的方法．

七巧板问题

七巧板游戏是中国人智慧的结晶，是一种动脑筋的游戏．

图14－52是一张正方形的纸片，上面画着白色线条．把这张正方形的纸片贴在薄木板上，按白色线条锯断，并涂上相应的颜色，于是得到七个小片：一个正方形、一个平行四边形、两个大三角形、两个小三角形和一个中等三角形，这就是七巧板．

图14－52

利用七巧板可以拼组各种图案．如图14－53所示，这是用七块板拼出的小公鸡、狐狸、小鸟展翅、护士奔跑．

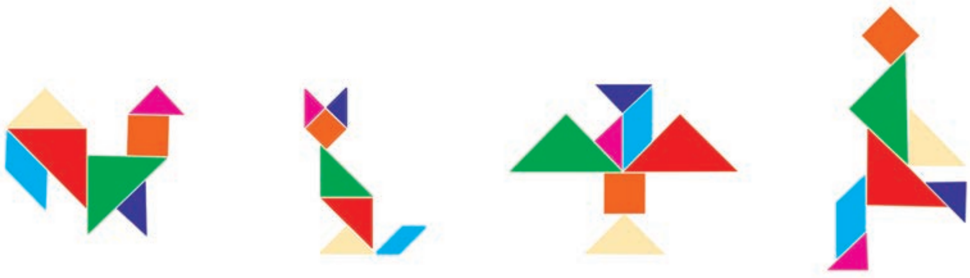


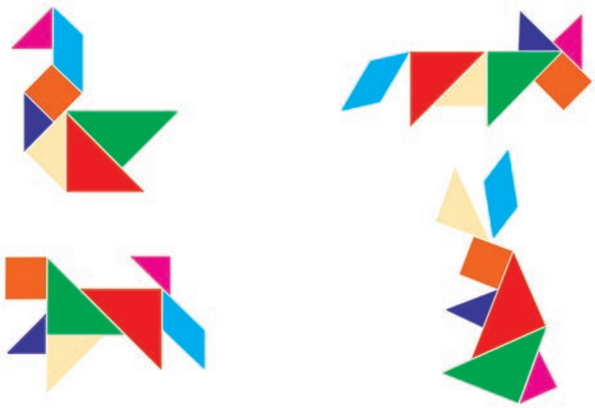
图14－53

拼七巧板有两条规则：

第一，每个图形都要把七块板全摆进去，一块也不能留下；

第二，各块板不得相互压盖，只许互相贴紧，且中间不留空白.

用七巧板还能拼组出各种各样有趣的图案，如图14－54、14－55所示：



这里的动物可爱吗？

图14－54

这里的人物动作可丰富啦！

图14－55

试一试：你能用七巧板拼组出更多的图案吗？

探究活动二

分割等腰三角形

阅读理解

如图14－56，已知$\triangle ABC$中，$\angle A=100°$，$\angle B=60°$，能否画一条直线MN，将$\triangle ABC$分成两个等腰三角形？

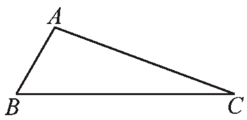


图14－56

对于这个问题，可以这样分析：如果能画出符合要求的直线MN，那么这条直线一定经过$\triangle ABC$的一个顶点并与这个顶点所对的边相交（为什么？）．由此可知，在$\triangle ABC$的三个内角中，必须分割其中一个内角而保留另两个内角；并且还可知那个最小内角必定被保留．

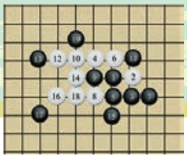
联想第14.6节例题3，可知图14－46中线段BD所在的直线将$\triangle ABC$分成两个等腰三角形，这条直线就是所要画的直线MN．再尝试画经过顶点A的直线，只需分析将$\angle A$分成大小为20°和80°，或60°和40°这样两个角的情况，可知经过顶点A的直线不可能将$\triangle ABC$分成两个等腰三角形．

尝试实践

给定一张等腰三角形纸片，剪一刀后，被分成两张等腰三角形纸片．这个给定的等腰三角形纸片的每个内角是几度？把符合要求的等腰三角形尽可能列举出来．

考虑问题的思路：

- 剪一刀后把原三角形分成两个三角形，这样的分割线一定只经过原三角形的一个顶点．因为不经过任何一个顶点所剪成的两部分中，一部分是一个三角形，另一部分是一个四边形；而分割线不可能经过原三角形的两个顶点．
- 对分割线经过原等腰三角形一个顶点的情况要分类讨论：（1） 经过等腰三角形顶角的顶点；（2）经过等腰三角形底角的顶点．
- 对分割线经过等腰三角形顶角的顶点的情况再进行分类讨论．
- 对分割线经过等腰三角形底角的顶点的情况再进行分类讨论．



第十五章　平面直角坐标系

我们在第十二章关于实数的学习中知道，每一个实数都可以用数轴上唯一的一个点来表示；反过来，数轴上的每一个点也都可以用唯一的一个实数来表示．在数学上就说数轴上的所有点与实数的全体有一一对应的关系．这样把“数”与“形”相互联系起来，对我们研究数学问题有很大的帮助．

那么，平面上的点能不能用实数来表示？观察下面的图片，整齐的队伍中每一个战士所在的位置可以用行数和列数来表示，电影院里的座位也可以用排数和号数来表示，它会使我们对于用实数来表示平面上一个点的位置产生联想．

怎样建立平面上的点与实数的联系？怎样用数学的语言和方法来表达？这就是我们在本章学习的内容．

15

第 1 节　平面直角坐标系

15.1　平面直角坐标系

我们知道，在直线上规定了原点、正方向和单位长度，这一直线就是一条数轴；数轴上的所有点与全体实数之间具有一一对应的关系．这一对应关系得以建立，它的基础是在直线上选取了一个点为基点（原点），同时规定正方向，使直线上的点位于基点两侧的分布状况可与实数有正、负之分的符号特征相联系；基点为分界点．而规定了单位长度，使直线上的点与基点的距离可与实数的绝对值相联系．

平面是向各方无限伸展的．平面内有无数多条直线，每条直线上又有无数多个点，因此平面内的所有点不能像直线上的点那样用一个实数来表示．

问题

怎样建立平面上的点与实数之间的联系呢？

电影院里的座位标明了排数和号数，观众根据电影票可以在电影院里找到被指定的座位．这就是说，电影院里的每一个座位与由有序的两个正整数组成的一个"数对"建立了对应关系．由此联想，可以考虑用"数对"来表示平面内的点．把有序的两个正整数所组成的"数对"扩大为由有序的两个非零实数组成的"数对"，那么它们的正、负号组合情况有四种，而两条相交直线把平面分为四个区域，可使平面内的点的分布状况与"数对"的符号组合情况相联系；两条直线为分界线．

在平面内取一点O，过点 O 画两条互相垂直的数轴，且使它们以点O为公共原点．这样，就在平面内建立了一个直角坐标系(orthogonal coordinate system)．通常，所画的两

条数轴中，有一条是水平放置的，它的正方向向右，这条数轴叫做横轴(abscissa axis)(记作x轴)；另一条是铅直放置的，它的正方向向上，这条数轴叫做纵轴(ordinate axis)(记作y轴)．如图15－1所示，记作平面直角坐标系xOy；点O叫做坐标原点(简称原点)，x轴和y轴统称为坐标轴．

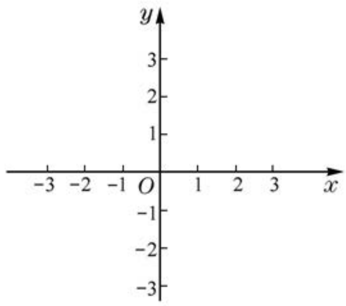


图 15－1

建立了直角坐标系的平面叫做直角坐标平面(简称坐标平面)．

这样，原来平面内的点都可以用有序实数对来表示．

操作 1

已知直角坐标平面内一点A，用下面的方法可确定表示点A的“数对”：

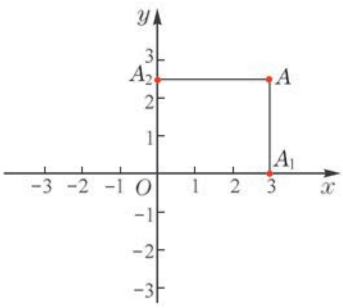


图 15－2

如图15－2，过点A作x轴的垂线，垂足为A_1，得到A_1在x轴上所对应的实数是3；再过点A作y轴的垂线，垂足为A_2，得到A_2在y轴上所对应的实数是2.5． 因为过一点作已知直线的垂线能且只能作一条，所以A_1、A_2是唯一确定的，可知A_1、A_2分别所对应的实数3和2.5也是唯一确定的．把3写在前，2.5写在后，组成“有序实数对”，记为(3，2.5)，那么(3，2.5)就表示点A．

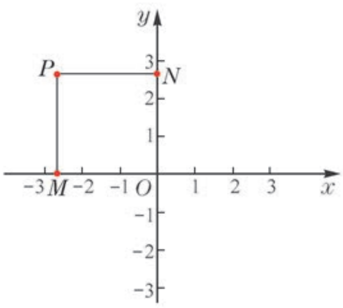


图15－3

一般地，对于直角坐标平面内的任意一点P，如图15－3，过点P作x轴的垂线，垂足为M，可得点M在x轴上所对应的实数a；再过点P作y轴的垂线，垂足为N，可得点N在y轴上所对应的实数b，那么有序实数对(a,b)表示点P，这样的有序实数对是唯一确定的．反过来，任意给定一对有序实数(a,b)，可在x

严格地说，平面直角坐标系不仅指互相垂直且有公共原点的两条数轴，还包括使平面内的点与有序实数对建立对应关系的规则.

轴上描出实数a所对应的点M，在y轴上描出实数b所对应的点N；再过点M作x轴的垂线，过点N作y轴的垂线，那么这两条垂线的交点P表示有序实数对(a,b)，这样的点也是唯一确定的. 于是，平面内的每一点都有唯一的有序实数对与它对应.

在(a,b)中，a、b 的顺序不能颠倒. 当 $a\neq b$ 时，(a,b)与(b,a)表示不同的点.

> 在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 所对应的有序实数对(a,b)叫做点 P 的坐标，记作 $P(a,b)$，其中 a 叫做横坐标(abscissa)，b 叫做纵坐标(ordinate).

原点 O 的坐标是$(0,0)$.

例题1 写出图15－4中直角坐标平面内各点的坐标.

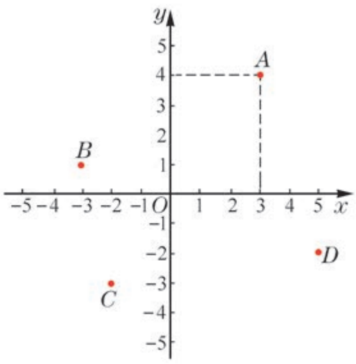


图15－4

解 过点 A 作 x 轴的垂线，垂足在 x 轴上对应的实数是 3；再过点 A 作 y 轴的垂线，垂足在 y 轴上对应的实数是 4，所以点 A 的坐标是$(3, 4)$.

同理，点 B 的坐标是$(-3, 1)$；

点 C 的坐标是$(-2, -3)$；

点 D 的坐标是$(5, -2)$.

例题2 写出图15－5中坐标轴上的点 E、F 的坐标.

解 过点 E 作 x 轴的垂线，垂足为 E，点 E 在 x 轴上对应的实数是-4；过点 E 作 y 轴的垂线，垂足为 O，点 O 在 y 轴上

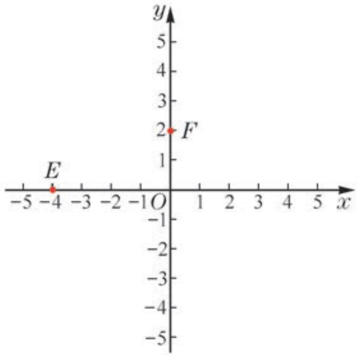


图15-5

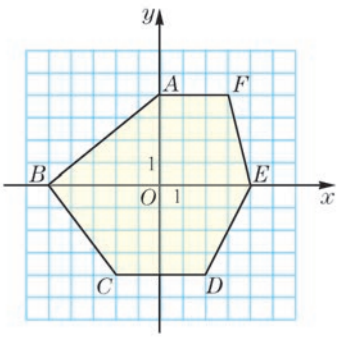
对应的实数是 0. 因此点E的横坐标是 -4, 纵坐标是 0, 所以点 E 的坐标是$(-4, 0)$.

用同样的方法可以得到点 F 的坐标是$(0, 2)$.

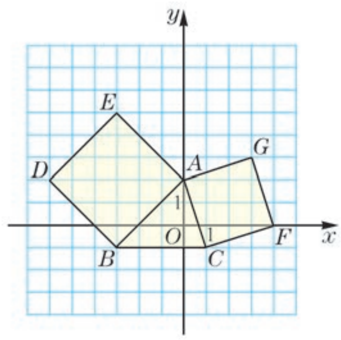
练习15.1(1)

1. 写出图中 A、B、C、D、E、F 各点的坐标.

A________, B________, C________, D________, E________, F________.



(第1题)



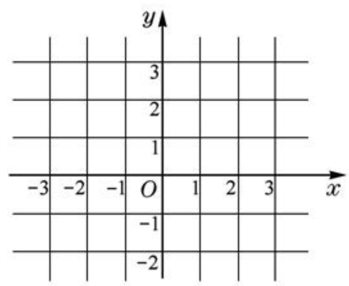
(第2题)

2. 写出图中点 A、B、C、D、E、F、G 的坐标.

A________, B________, C________, D________,

E________, F________, G________.

3. 在直角坐标平面内，横坐标与纵坐标都是整数的点叫做格点；顶点都是格点的三角形叫做格点三角形. 已知格点 $A(-2,1)$, $B(1,3)$, $C(2,-1)$, 请在图中画出以A、B、C为顶点的格点三角形，并求$\triangle ABC$的面积.



(第3题)

例题3 在直角坐标平面内，已知 $A(2.5, -5)$、$B(0, 3)$、$C(-2.5, -5)$、$D(4, 0)$、$E(-4, 0)$. 根据坐标描出各点，并把这些点按 $A-B-C-D-E-A$ 顺次联结起来，再观察所得图形的形状.

在直角坐标平面内给出一个点，就可以确定它的坐标，如例题1.反过来，根据点的坐标，我们也可以确定点的位置，如例题3.

解 在 x 轴上找出 2.5 所对应的点 M，在 y 轴上找出 -5 所对应的点 N；再过点 M 作 x 轴的垂线，过点 N 作 y 轴的垂线，那么这两条垂线的交点就是点 A.

用同样的方法，可以描出点 B、C、D、E.

顺次联结各点，所得图形的形状像一个五角星，如图15-6所示.

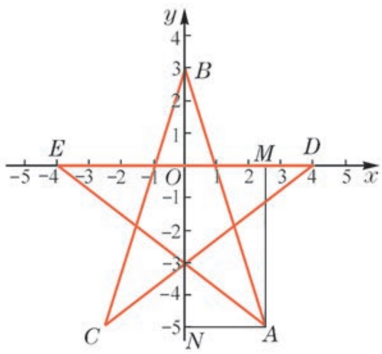


图15-6

这两条坐标轴也是直角坐标平面的组成部分.

如图15-7所示，平面直角坐标系的两条坐标轴把平面分成四个区域. 这四个区域依次叫做第一象限、第二象限、第三象限、第四象限. 同时规定，x 轴、y 轴不属于任何象限.

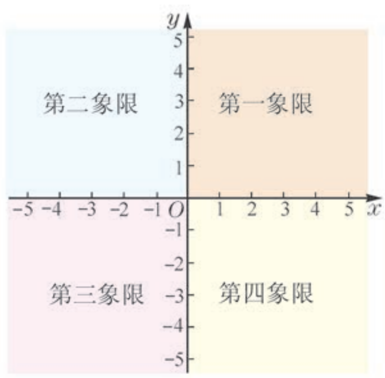


图15-7

思考

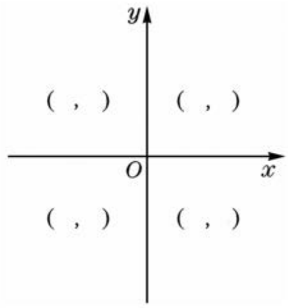


图15－8

各个象限内点的横坐标和纵坐标的符号有什么特征？x 轴上的点的纵坐标有什么特征？y 轴上的点的横坐标有什么特征？

试在图15－8中的括号内，用“+”“－”号表示各象限内点的横坐标和纵坐标的符号特征.

x 轴上的点的纵坐标为0；y 轴上的点的横坐标为0.

探究

如图15－9，经过点 $A(2，3)$分别作 x 轴的垂线 AM 和 y 轴的垂线 AN，垂足分别是点 M、N. 那么直线 AM 上的点的横坐标有什么特征？直线 AN 上的点的纵坐标有什么特征？

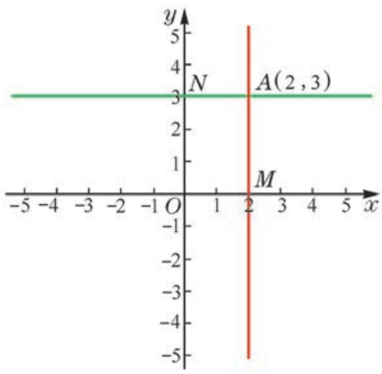
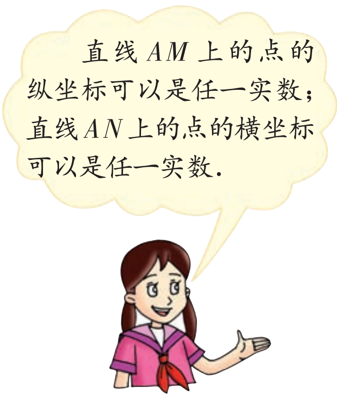


图15－9

操作 2

过直线 AM 上的任何一点作 x 轴的垂线，垂足都是 M，所以直线 AM 上的点的横坐标都是2. 同理，直线 AN 上的点的纵坐标都是3.

这时，我们把直线 AM 表示为直线 $x=2$，把直线 AN 表示为直线 $y=3$.



经过点 $A(a，b)$且垂直于 x 轴的直线可以表示为直线 $x=a$，经过点 $A(a，b)$且垂直于 y 轴的直线可以表示为直线 $y=b$.

练习15.1(2)

1. 填空：

(1) 第________象限内的点的横坐标和纵坐标都是负数；

(2) 第________象限内的点的横坐标和纵坐标异号；

(3) 经过点 $Q(1,-5)$ 且垂直于 y 轴的直线可以表示为直线________；

(4) 经过点 $P(0,1)$ 且垂直于 x 轴的直线可以表示为直线________.

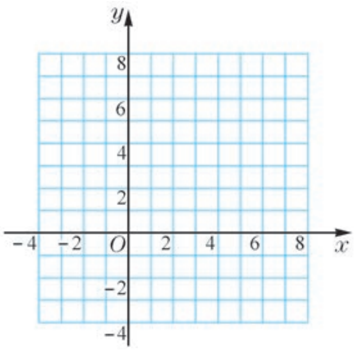
2. 在直角坐标平面内描出下列12个点：

$A_1(4,4)$、 $A_2(4,2)$、 $A_3(2,2)$、 $A_4(2,0)$、

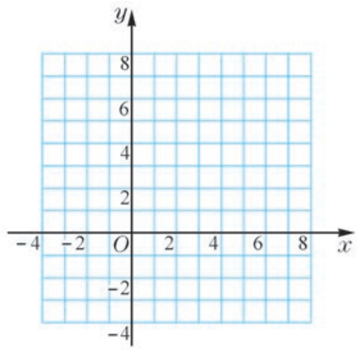
$A_5(5,0)$、 $A_6(5,-2)$、 $A_7(-3,-2)$、 $A_8(-3,0)$、

$A_9(0,0)$、 $A_{10}(0,7)$、 $A_{11}(2,7)$、 $A_{12}(2,4)$.

再把这些点顺次联结成一个封闭图形，它像一个什么字？



(第2题)



(第3题)

3. 在直角坐标平面内，已知点 $A(0,2)$、$B(2,0)$、$C(3,1)$. 在图中，

(1) 画 $\triangle ABC$；

(2) 利用方格画一个 $\triangle A_1B_1C_1$，使得 $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC$，并写出点 A_1、B_1、C_1的坐标.

15 第 2 节 直角坐标平面内点的运动

15.2 直角坐标平面内点的运动

在数轴上，如果点 A、B 所对应的实数分别是 a、b，那么 A、B 两点的距离 $AB=|a-b|$．

思考

在直角坐标平面内，已知 x 轴上的两个点 $A(x_1,0)$和 $B(x_2,0)$，y 轴上的两个点 $C(0, y_1)$和 $D(0, y_2)$，如何计算 A、B 两点的距离以及 C、D 两点的距离呢？

问题

如图15－10，在直角坐标平面内，直线 AB 平行于 x 轴，直线 CD 平行于 y 轴．已知点 $A(-3, 3)$、$B(4, 3)$、$C(2, -2)$、$D(2, 4)$，那么 A、B 两点的距离 AB 是多少？C、D 两点的距离 CD 是多少？

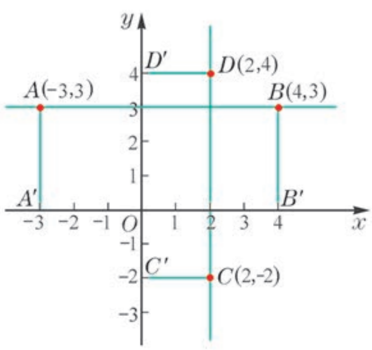


图15－10

如图15-10，分别过A、B两点作x轴的垂线，垂足分别为A'、B'，那么点A'、B'的坐标分别为$(-3, 0)$、$(4, 0)$．所以

$$AB=A'B'=|(-3)-4|=7.$$

用同样的方法，可得

$$CD=C'D'=|(-2)-4|=6.$$

四边形$AA'B'B$是长方形．

在直角坐标平面内，

平行于x轴的直线上的两点$A(x_1, y)$、$B(x_2, y)$的距离$AB=|x_1-x_2|$；

平行于y轴的直线上的两点$C(x, y_1)$、$D(x, y_2)$的距离$CD=|y_1-y_2|$．

例题1　如图15-11，在梯形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，写出点A、B、C、D的坐标，并求图中梯形$ABCD$的面积．

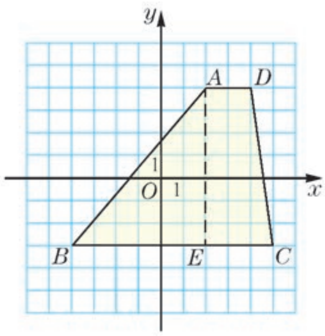


图15-11

解　画出梯形的高AE．　点A、B、C、D、E的坐标分别为$(2, 4)$、$(-4, -3)$、$(5, -3)$、$(4, 4)$、$(2, -3)$，因此

$$BC=|-4-5|=9,$$

$$AD=|2-4|=2,$$

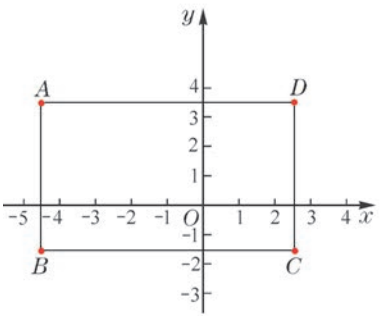
$$AE=|4-(-3)|=7.$$

所以梯形$ABCD$的面积

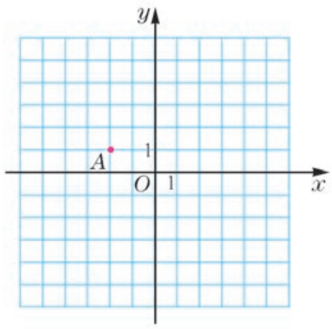
$$S=\frac{1}{2}\cdot(AD+BC)\cdot AE=\frac{1}{2}\times(2+9)\times 7=\frac{77}{2}=38\frac{1}{2}.$$

练习15.2(1)

1. 如图，长方形 $ABCD$ 的各边分别与 x 轴或 y 轴平行，已知 $A(-4.5, 3.5)$、$B(-4.5, -1.5)$、$C(2.5, -1.5)$、$D(2.5, 3.5)$，那么这个长方形的周长是多少？面积是多少？



(第1题)



(第2题)

2. 如图，在直角坐标平面内，已知点A的位置.

(1) 描出点 B，使直线 AB 平行于 x 轴，并且 A、B 两点的距离为3个单位；

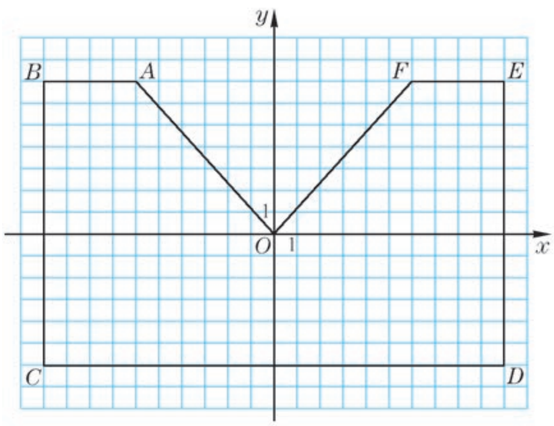
(2) 描出点 C，使直线 AC 平行于 y 轴，并且 A、C 两点的距离为5个单位；

(3) 点 B 的坐标为______________，点 C 的坐标为______________.

3. 直角坐标平面内的一个图形如图所示.

(1) 写出点 A、B、C、D、E、F 的坐标；

(2) 求这个图形的面积.



(第3题)

探究 1

在直角坐标平面内，如果点 $M(x, y)$ 沿着与坐标轴平行的某一方向平移 m $(m>0)$ 个单位，到达点 M' 的位置，那么这个对应点 M' 的坐标是什么？

操作 1

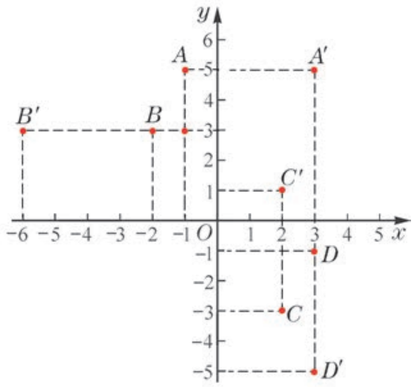


图15－12

如图15－12，将点 $A\ (-1, 5)$ 向右平移4个单位，到达点 A' 的位置，这个点 A' 的坐标是 $(3, 5)$；

将点 $B\ (-2, 3)$ 向左平移4个单位，到达点 B' 的位置，这个点 B' 的坐标是 $(-6, 3)$；

将点 $C\ (2, -3)$ 向上平移4个单位，到达点 C' 的位置，这个点 C' 的坐标是 $(2, 1)$；

将点 $D\ (3, -1)$ 向下平移4个单位，到达点 D' 的位置，这个点 D' 的坐标是 $(3, -5)$.

> 一般地，如果点 $M(x, y)$ 沿着与 x 轴或 y 轴平行的方向平移 $m(m>0)$ 个单位，那么
>
> 向右平移所对应的点的坐标为$(x+m, y)$；
>
> 向左平移所对应的点的坐标为$(x-m, y)$；
>
> 向上平移所对应的点的坐标为$(x, y+m)$；
>
> 向下平移所对应的点的坐标为$(x, y-m)$.

例题2 如图15－13，在直角坐标平面内，已知点 $A(-2, -3)$、$B(-2, 4)$，将点 A 向右平移7个单位到达点 C.

(1) 求 A、B 两点的距离；

(2) 写出点 C 的坐标；

(3) 判断 $\triangle ABC$ 的形状.

解 (1) $AB=|-3-4|=7$.

(2) 因为将点 A 向右平移7个单位到达点 C,所以将点 A 的横坐标加7,纵坐标不变,可得到点 C 的坐标是$(5, -3)$.

(3) 因为 $AC=7$, $AB=7$,且 $\angle A=90°$,所以 $\triangle ABC$是等腰直角三角形.

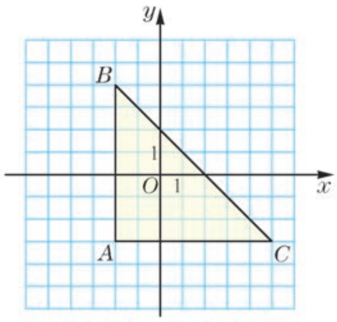


图15-13

练习15.2(2)

1 填空:

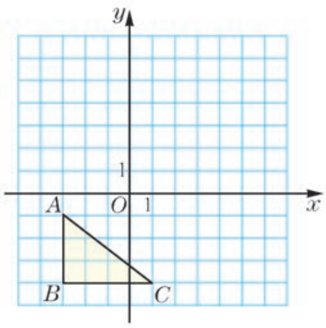
(1) 点 $P(4, -2)$ 向左平移7个单位所对应的点的坐标是________;

(2) 点 $Q(-3, -1)$ 向上平移5个单位所对应的点的坐标是________;

(3) 点$M(-6, -4)$向________平移________个单位所对应的点的坐标是$(3, -4)$;

(4) 点$N(-1, 5)$向________平移________个单位所对应的点的坐标是$(-1, 0)$.

2 如图, 将 $\triangle ABC$ 先向上平移8个单位得到 $\triangle A_1B_1C_1$, 再将 $\triangle ABC$ 向右平移6个单位得到 $\triangle A_2B_2C_2$,写出各个三角形的顶点的坐标.



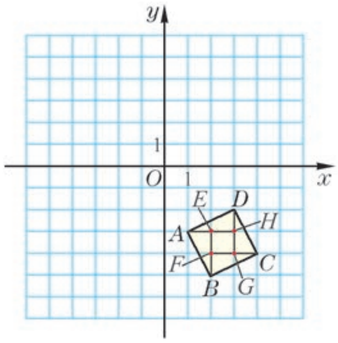
(第2题)

A________,A_1________,A_2________;

B________,B_1________,B_2________;

C________,C_1________,C_2________.

3 将直角坐标平面内的已知图形先向上平移 5 个单位，接着向左平移4个单位，画出经过这两次平移后所得到的图形；再写出点 A、B、C、D、E、G 所对应的点的坐标．



（第3题）

探究 2

在直角坐标平面内，与点 $M(x, y)$ 关于 x 轴或 y 轴对称的点的坐标是什么？

操作 2

轴对称中，对称轴垂直平分两个对称点的连线．

在直角坐标平面内，描出点 $A(-3, 2)$，再描出与点 A 关于 x 轴对称的点 B，与点 A 关于 y 轴对称的点 C，如图15－14所示．利用两个点关于一直线对称的性质，可知点 B 的坐标是$(-3, -2)$，点 C 的坐标是$(3, 2)$．

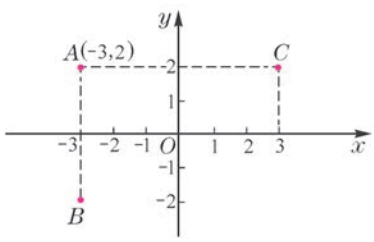


图15－14

一般地，在直角坐标平面内，与点 $M(x, y)$关于 x轴对称的点的坐标为$(x, -y)$；与点 $M(x, y)$关于 y 轴对称的点的坐标为$(-x, y)$．

例题3 在直角坐标平面内，已知点 $A\ (0,\ 3)$与点 C 关于 x 轴对称，点 $B\ (-3,\ -5)$与点 D 关于 y 轴对称，写出点 C、D 的坐标，并把这些点按 $A-B-C-D-A$ 顺次联结起来，观察所得图形的形状.

解 因为点 $A(0,\ 3)$与点 C 关于 x 轴对称，所以点 C 的坐标为$(0,\ -3)$；因为点 $B(-3,\ -5)$ 与点 D 关于 y 轴对称，所以点 D 的坐标为$(3,\ -5)$.

按 $A-B-C-D-A$ 顺次联结起来所得的图形是箭头的形状，如图15－15所示.

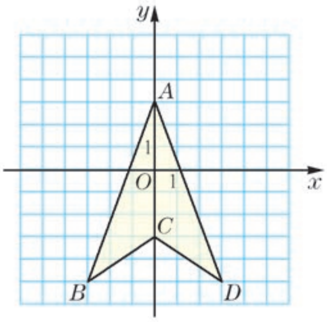


图15－15

探究 3

在直角坐标平面内，与点$M(x,y)$ 关于原点对称的点的坐标是什么？

操作 3

在直角坐标平面内，描出点 $A\,(-3,\ 2)$，再描出与点 A 关于原点 O 对称的点 B，如图15－16所示. 分别过点 A、B 作 x 轴的垂线，垂足分别为 A'、B'. 因为 $OA'=OB'$(为什么？)，所以点 A 与点 B 的横坐标互为相反数；同样，点 A 与点 B 的纵坐标也互为相反数. 于是得到点 B 的坐标是$(3,-2)$.

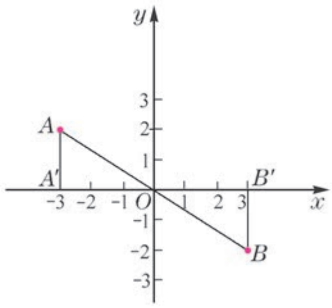
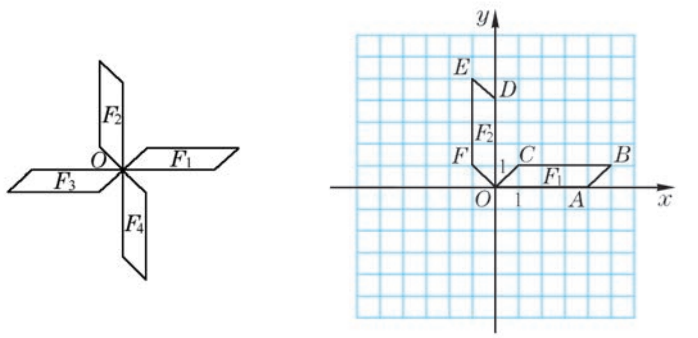


图15－16

中心对称中，对称中心平分两个对称点的连线.

一般地，在直角坐标平面内，与点 $M\,(x,\ y)$关于原点对称的点的坐标为$(-x,\ -y)$.

例题4 图15－17 (1) 是一个风车的图案，F_1、F_2、F_3、F_4表示风车的四个叶片，图案是一个中心对称图形，点O是对称中心.



(1) (2)

图15－17

在直角坐标平面内，画出了这个风车图案中的两个叶片 F_1、F_2，如图15－17 (2) 所示，其中 O 为坐标原点，叶片 F_1 的一边 OA 在 x 轴上，叶片 F_2 的一边 OD 在 y 轴上．试在图15－17 (2) 中画出风车图案中的另外两个叶片 F_3、F_4．

分析 因为风车的图案是关于点 O 成中心对称的图形，所以叶片 F_3、F_4 分别与叶片 F_1、F_2 关于点 O 成中心对称．要画出叶片 F_3，其关键是确定与叶片 F_1 中的点 A、B、C 关于点 O 成中心对称的点的位置．类似地，可画出叶片 F_4．

解 叶片 F_1 中的点 A、B、C 的坐标分别为(4，0)、(5，1)、(1、1)，设与点 A、B、C 关于点 O 成中心对称的点分别为 A'、B'、C'，可知 $A'(-4,0)$、$B'(-5,-1)$、$C'(-1,-1)$．

描出点 A'、B'、C'，联结 OA'、$A'B'$、$B'C'$、$C'O$．

四边形 $OA'B'C'$ 就是所要画的叶片 F_3，如图15－18所示．

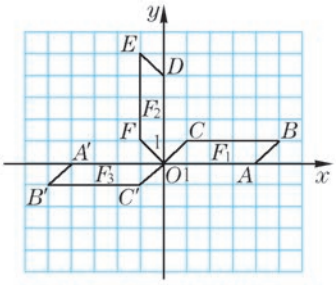


图15－18

想一想

请同学自己在图15－18中画出叶片 F_4．

练习15.2(3)

1. 口答：

(1) 与点 $P(-4, -\sqrt{2})$ 关于 x 轴对称的点的坐标是________；

(2) 与点 $Q(\sqrt{3}, -1)$ 关于 y 轴对称的点的坐标是________；

(3) 与点 $M(0, -\sqrt{2})$ 关于 x 轴对称的点的坐标是________；

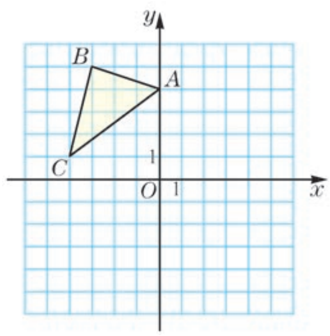
(4) 与点 $N(x, 0)$ 关于 y 轴对称的点的坐标是________．

2. 在右图中，画出 $\triangle ABC$ 分别关于 x 轴、y 轴对称的图形 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$，再写出各个三角形的顶点坐标．

A________，A_1________，A_2________；

B________，B_1________，B_2________；

C________，C_1________，C_2________．



(第2题)

3 口答：

(1) 与点 $P(-4, 3)$关于原点 O 对称的点的坐标是________；

(2) 与点 $Q(\sqrt{3}, 0)$关于原点 O 对称的点的坐标是________；

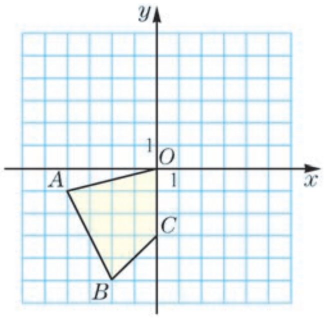
(3) 与点 $M(0, -\sqrt{2})$关于原点 O 对称的点的坐标是________；

(4) 与点 $N(x, y)$关于原点 O 对称的点的坐标是________；

(5) 如果点 A 在第三象限，那么与点 A 关于原点 O 对称的点在第________象限；

(6) 如果点 B 在 x 轴的正半轴上，那么与点 B 关于原点 O 对称的点在________.

4 如图，画出四边形 $OABC$ 关于原点 O 对称的四边形 $OA_1B_1C_1$，再写出这两个四边形的顶点坐标.

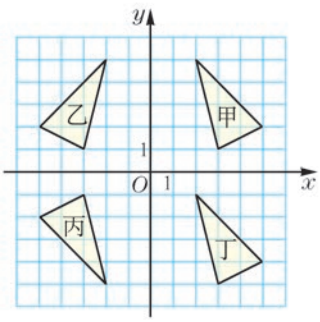


(第4题)

A________，B________，C________；

A_1________，B_1________，C_1________.

5 直角坐标平面内，有标记为甲、乙、丙、丁的四个三角形，如图所示.



(第5题)

(1) 哪两个三角形关于 x 轴对称？

(2) 哪两个三角形关于 y 轴对称？

(3) 哪两个三角形关于原点 O 对称？

(4) 哪个三角形经过怎样的平移可以得到另一个三角形？

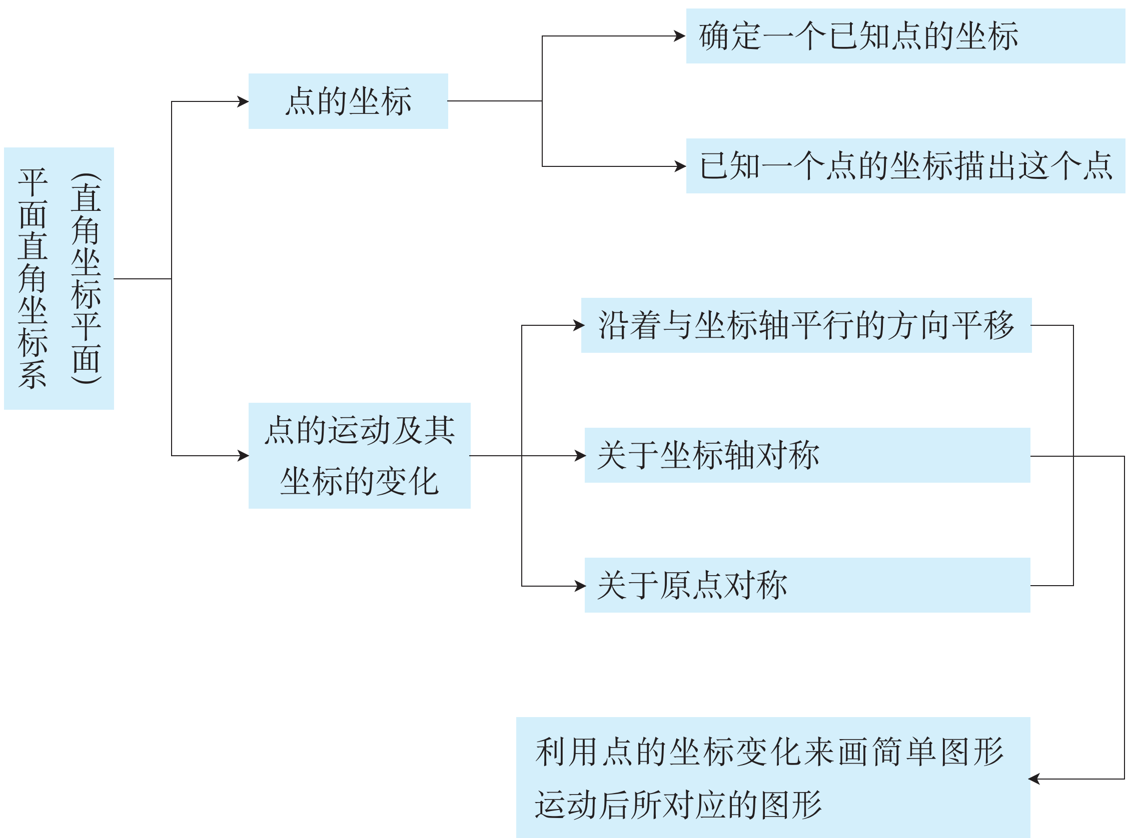
本章小结

本章我们主要学习了平面直角坐标系的有关概念，点与坐标的对应关系，以及用坐标的变化来刻画平面内点的运动．

平面直角坐标系是一个平台，它把“数”与“形”相互联系起来，这样，我们就可以用数形结合的思想方法来研究数学问题．平面直角坐标系的建立，关键是选取一个适当的原点以及两条互相垂直的、有公共原点的数轴(这是人为的)，于是，平面内的所有点就可以用一对一对的有序实数来表示．平面直角坐标系把平面分成四个象限，有序实数对的正负号组合分别为各象限点的标志，这是一种新的思考．

点的位置变动，现在可以用“数”的运算来表示，数学因此向前跨进了一大步．

本章知识结构框图如下：



探究活动一

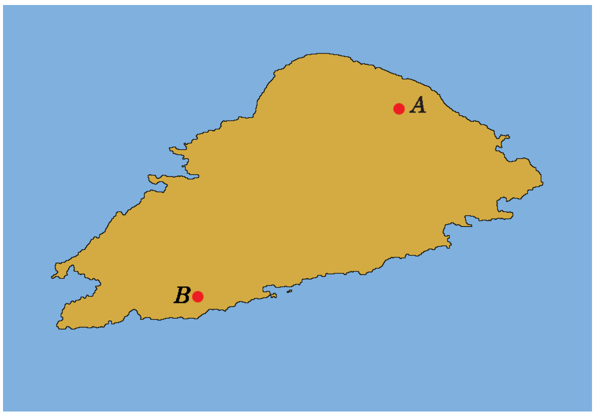
珍宝藏在哪里?

在直角坐标平面内,已知一个点可以确定它的坐标;已知一个点的坐标也可以确定它在平面内的位置. 但是,有时碰到的问题并非这样直截了当.

一个寻宝者,从散传的资料中看到,在一个海岛上有一个隐秘的地洞,里面藏着许多珍宝. 资料中对藏宝地点的描述是这样的:这个海岛上有两块天然巨石,海岛的地图上分别用点 A、B 表示;在一个平面直角坐标系中,这两点的坐标是 $A(8,2)$、$B(-6,-4)$,藏宝地点的坐标是 $(3,3)$.

面对这段文字,他只知道岛上有宝,但无法寻找. 于是,他继续想方设法查看其他资料,好不容易发现了那张与描述藏宝地点相关的海岛地图,可是图上只标出了 A、B 两点的位置,如图15-19所示.

寻宝者还是不能确定藏宝的地点在哪里,你能在地图上标出这个藏宝地点吗?



海岛地图

图 15-19

探究活动二

一种新的棋谱记法

五子棋是起源于中国古代的传统黑白棋种之一．早在“尧造围棋”以前，民间就已有五子棋游戏．它简单易学、趣味无穷．

下面介绍一种简单的五子棋下法规则：

(1) 两人下棋，一人执黑，一人执白，黑棋先行，每人轮流下一次．

(2) 如果一方在横、竖、斜其中一个方向上抢先摆放连续五个子(中间不能夹另一方的子)，那么该方获胜．

如图15－20为一局五子棋的棋谱．为了表示棋子在棋盘上的位置，下面介绍一种新的棋谱记法．我们以棋盘上的黑1所在的位置为原点，黑1所在的横线和纵线分别为 x 轴、y 轴，分别取向右、向上方向为正方向．以每个小方格的边长为单位长度，建立平面直角坐标系 xOy，如图15－20．这样黑19可以记作 $(-2,2)$，黑7可以记作 $(2,-1)$．

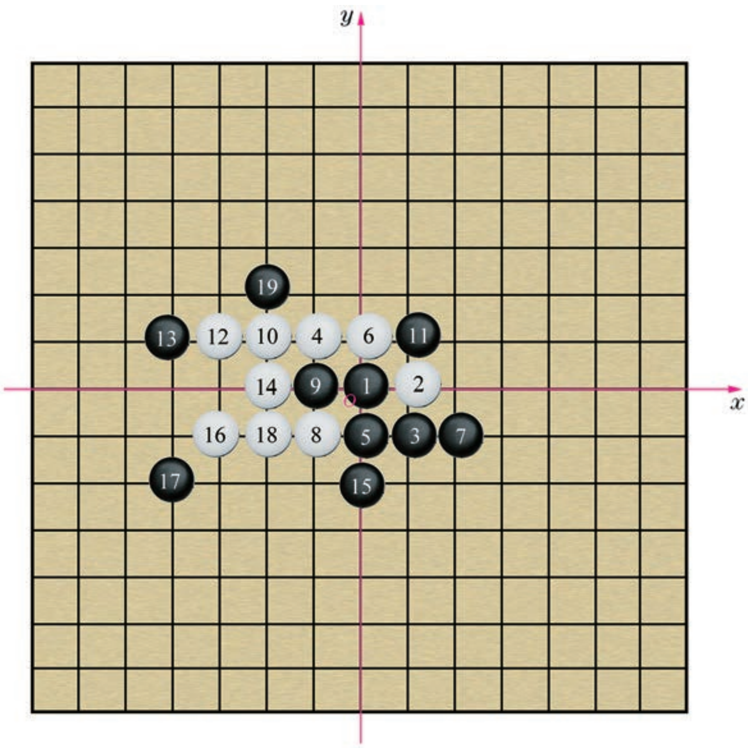


图15－20

图15-20所示的一局五子棋的前4步棋的下法，可记录如下：

黑1(0,0)	白2(1,0)
黑3(1,−1)	白4(−1,1)

(1) 请你把后面的下法用上面的表示方法记录下来：

(2) 图15-20所示的这局棋现轮到白棋下，如果你有兴趣，可进一步思考：下一步棋下在何处，白方最后一定获胜？请用上面的表示方法记录双方下棋的过程．再想一想，白方还有其他获胜的下法吗？

说　明

本册教材根据上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会制定的课程方案和《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》编写,供九年义务教育七年级第二学期试用.

本教材由上海师范大学主持编写,经上海市中小学教材审查委员会审查准予试用.

本册教材的编写人员有:

主编:邱万作　　分册主编:叶锦义

特约撰稿人(按姓氏笔画为序):史荣铨　张惠林　沈　洁

邵世开　陆海兵

2019年教材修订组成员:叶锦义　邵世开　沈　洁

陆海兵　徐晓燕　顾跃平

欢迎广大师生来电来函指出教材的差错和不足,提出宝贵意见.出版社电话:021-64319241.

本册教材图片提供信息:

壹图网(封面一幅图,P25一幅图,P27一幅图,P37三幅图,P42两幅图,P71两幅图,P97两幅图,P121两幅图,P122一幅图);图虫网(P1一幅图,P25两幅图,P71一幅图);上海教育出版社(P121一幅图)

插图绘制:黄国荣、顾云明、张惠卿、周吉、刘铁彬等

经上海市中小学教材审查委员会审查
准予试用　　准用号 II-CB-2019058

责任编辑　张莹莹

九年义务教育课本

数　　学

七年级第二学期

(试用本)

上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会

上海世纪出版股份有限公司
上　海　教　育　出　版　社 出版

（上海市闵行区号景路159弄C座　　邮政编码：201101）

上海 新华书店 发行　　　上海华顿书刊印刷有限公司印刷

开本 890×1240　1/16　印张 9.25

2019年12月第1版　　2022年12月第4次印刷

ISBN 978-7-5444-9641-4/G·7949

定价：11.60元

全国物价举报电话：12315

此书如有印、装质量问题，请向本社调换　上海教育出版社电话：021-64373213

绿色印刷产品

ISBN 978-7-5444-9641-4