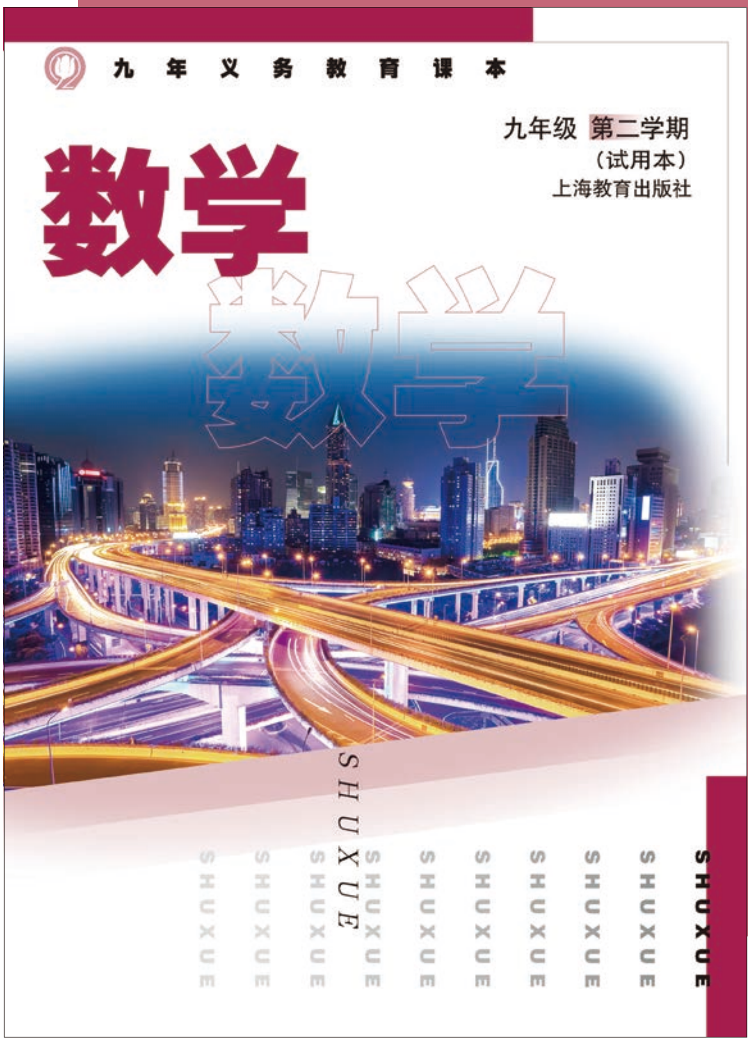
九 年 义 务 教 育

九年级　第二学期

（试用本）

数学

教学参考资料



上海教育出版社

目　录

注 1　标有“ * ”号的章名均配有原课本的缩小文本.

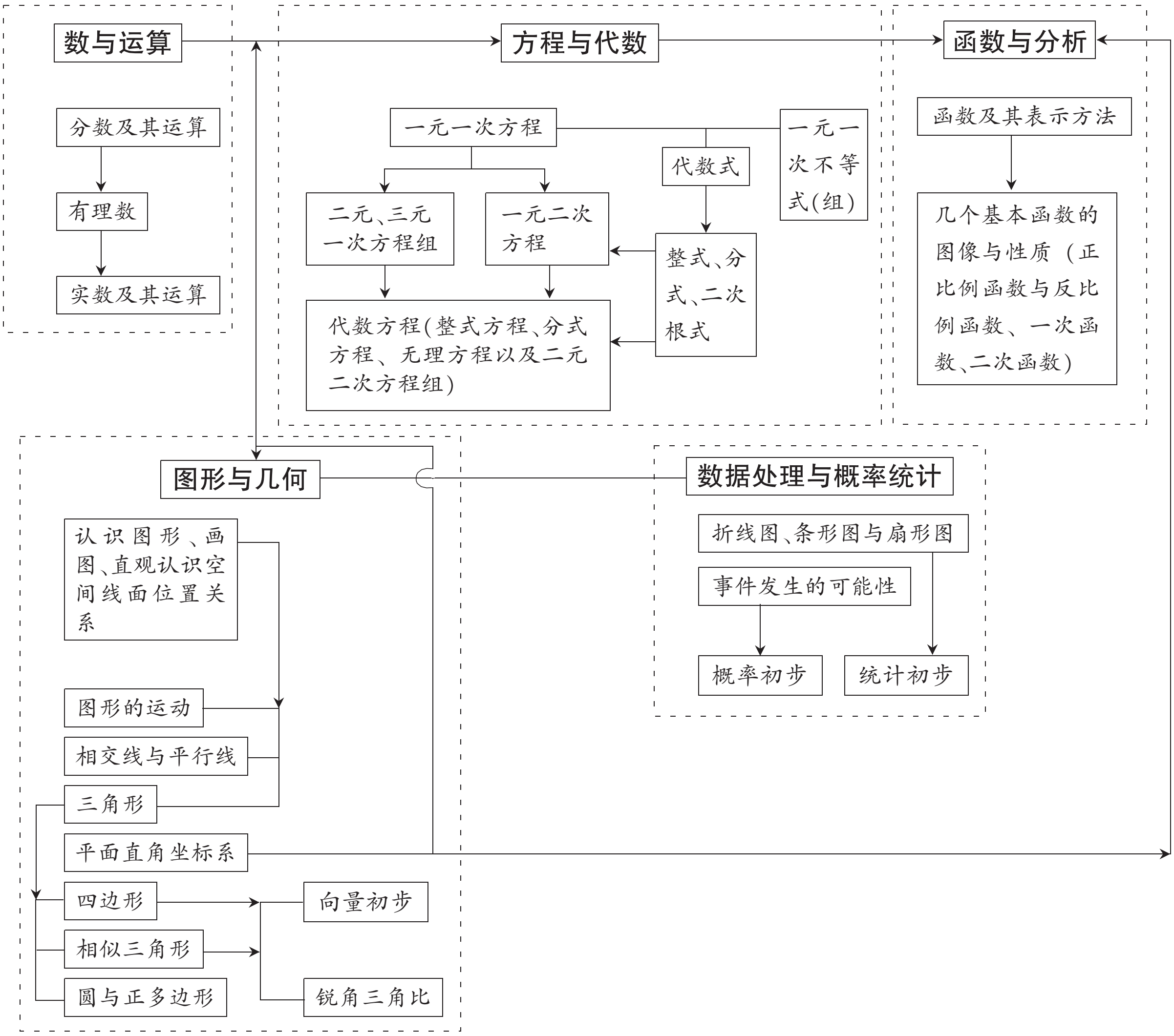
注 2　括号“(　)”内页码为课本相应页码.

课 本 简 介

一、初中数学课本内容框架体系

1. 知识内容框图

《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》中指明,数学课程内容包括"基本内容""拓展内容"和"专题研究与实践"三类."基本内容"是所有学生必备的、共同的数学基础;这些内容按其所属知识领域,分为"数与运算""方程与代数""图形与几何""函数与分析""数据处理与概率统计"等五个部分,它们自成系统,又相互联系,构成一个有机的整体.根据数学知识内容"通盘设计、分阶段安排"的原则,初中数学基本内容框图如下:



2. 内容编排简述

初中数学学习内容的安排,基本格局是"二二分段,九年级分层"."二二分段"的设计,主要是从初中学生数学认知发展的水平着眼,对不同年级的数学内容采用有差别的处理方式,六、七年级的数学中偏重于直观感知、形象思维的活动,八、九年级的数学中逐步提高理性分析、逻辑思维的要求;"九年级分层"的构想,主要是考虑到适应学生"个性差异"和引导学生"合理分流"的需要,适当增加课程的选择性.这一格局,

体现了遵循数学学习的规律、重视为全体学生打好共同的数学基础、同时适应不同学生对数学的需要的课程理念.

数学基本内容各部分，设计为若干个学习主题，组成学习序列.初中数学课本的编写，在把握各部分内容的发展主线和相互联系的基础上，采取“多线有序并进、螺旋上升，内容互相穿插、混合编排”的方式.

九年级数学分为基本内容和拓展II内容两部分.其中，基本内容是所有学生必学的内容；拓展II提供希望进入普通高中的学生修习，帮助学生做好初、高中数学的知识衔接.

九年级数学内容分层的具体安排如下：

学习主题	基本内容	拓展Ⅱ内容	相联接的高中内容
一元二次方程	（八年级）一元二次方程的概念和解法.	一元二次方程的根与系数关系.	一元二次方程的根与系数关系的运用.
二次函数	二次函数的概念、图像和直观性质；已知二次函数图像上的三点求函数解析式.	二次函数与一元二次方程之间的联系；二次函数解析式的确定；二次函数的基本性质.	一元二次不等式的解法；函数基本性质的解析研究等.
圆	圆的有关概念；圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理；垂径定理；直线与圆、圆与圆的位置关系；圆与正多边形.	直线与圆、圆与圆的位置关系的判定定理和性质定理；与圆有关的角；与圆有关的比例线段；四点共圆.	命题研究；解析几何中的圆；正弦定理等.

3. 课本使用要点

(1) 全面把握课程目标.

数学教育在发展和完善人的教育活动中、在形成人类理性思维和促进个人智力发展的过程中，发挥着独特的、不可替代的作用.要充分认识数学的育人功能，确立正确的数学教育目的观.数学课程及其教学，不仅要关注学生对数学知识、技能、思想方法的掌握，关注其数学能力的发展，而且要有助于学生理解数学的社会价值、领略数学文化的内涵，体验数学思维方式和方法，形成良好的数学思维品质，促使学生的数学素养全面提高；要让学生学习自行获取数学知识的方法，体会数学思考和再创造的过程，增强学习的兴趣和自信心，不断提高自主学习的能力，帮助学生确立终身学习的愿望，奠定终身发展的基础.

数学课程目标体系，含有“知识与技能”“过程与方法”“情感态度与价值观”三个维度，分为总目标和学段目标两个层次，它们通过全程的数学教学整体实现.课程内容主题的学习要求，是课程目标的具体化体现和形成性标志；恰当制订、有效落实各章和每节课的教学目标，是逐步达成课程目标的根本保证.

数学课程目标，对数学教学具有定向和引导的意义.每课教学目标的制订，要全面关注三个维度，针对教学实际，指向明确，定位准确，力求适切、可行.

(2) 精心组织教学内容.

数学课本是课程内容的重要载体，为教学提供了基本素材，具有系统性，也有通用性；课本内容的安排，显示了对教学材料进行组织的一条基本线索和一种可取形式，有借鉴性又有局限性.不同班级、不同学生使用同样的课本，必须有区别地对待、有适当的调整.所以，具体教学中的内容组织，既要尊重课本，更要活用课本，整体把握课本要求，创造性地使用课本素材.要在研读课本、分析学生的基础上，从达成目标的需要着眼，从学生学习的实际出发，恰当选取和组织每课教学的素材内容.要体现内容与目标要求的一致性以及与学生现有认知水平的适切性；要重视内容的基础性、层次性、结构性和可接受性；要有助于学生对数学的认识和理解、有助于激发学生学习数学的兴趣和信心.

教学内容的组织，还要强调应更多地关注教学的主导目标和重点内容，关注数学的基本运用及其与现实生活的联系，注重于打好基础、促进发展；不要在细枝末节上纠缠，不要搞过于繁杂和偏重技巧的统一训练.

(3) 合理安排教学过程.

数学教学是学生在教师指导下主动学习课程的真实过程.在教学过程中,教师、学生、教学内容、教学环境等众多因素共同作用、相互影响,推动教学的实施.教学过程的设计,要尊重和确立学生的学习主体地位,坚持“教”为“学”服务的原则;要强调有效发挥学生在学习活动中的主动、能动作用,发挥教师对学生学习的指导、促进作用,体现教师主导与学生主动相统一,师生互动,共同发展;要切实加强数学基础教学,重视过程教学,遵循学生认识数学的一般规律和数学发展的逻辑顺序,展现有效落实数学基本知识、基本技能、基本能力和基本应用的教学途径,同时把接受性学习与探究性学习、个体学习与合作学习等多种方式适当组合运用于其中,将体验探索、发现过程和经历数学化、再创造过程等目标要求有机整合于其中;要创设良好的认知环境,适切应用现代信息技术,构建民主、平等、和谐的师生关系,提供开放、自主的活动空间和丰富多样的学习资源,促进学生积极、自由地思维,生动、活泼地发展.

数学课本的编写,力求体现过程模式,展现知识的发生、发展和形成的过程,通过“问题—活动”引导学生探索求知.课本内容的呈现方式,为改善教学过程提供了一定的思考基础和有利条件.教学实施过程的具体安排,与教师、学生、环境等各方面因素有关.要对课本内容进行教学法的加工,要注意课堂生成资源的利用,要注意及时反馈和调节,使教学过程充满活力;要为学生自主活动提供机会和条件,发挥师生的积极性、创造性,营造良好的认知环境,激活课堂.

(4) 切实改进学习评价.

数学学习评价是对学生通过数学学习所取得的成果和达到的水平作出评判,同时对学生改进学习和完善自我进行导向;它又是实施教学反馈、评估和决策的重要环节.学习评价应强化其教育功能和激励作用,更多地肯定进步、鼓励成功、鼓舞信心;评价的结果应更多地用于帮助师生改进数学的教与学,引导师生正确把握目标、能动发展,鼓励学生努力学习、奋发上进.

学习评价活动有期中、期末测试和章节测验,还包括对每一节课达成学习目标的情况分析和对学生日常学习表现的考察,这些都是形成性评价活动.初中毕业考试及学业评定,是学段的终结性评价.

形成性评价,其立足点是“形成、改进”,着眼点是“引导、促进”.形成性学习评价的实施,不仅要评价学生通过数学学习所取得的成果和达到的水平,更要重视学生在学习过程中的变化和发展,关注学生在学习活动中所表现出来的主体精神、进取态度、行为习惯、思维品质和学习潜力.由此,学习评价的方式和方法应多种多样,评价结果的报告和解释应重视定性与定量相结合、统一性与灵活性相结合,体现评价的全面性、动态性、综合性和激励性.

长期以来,学习评价活动偏重于书面考试和分数评定,注重于认知发展的水平,因此必须改进和完善学习评价.要端正学习评价的目的,建立起“主体多元、方法多样”的评价体系,加强过程性评价,实施发展性评价.

必须强调,形成性学习评价,应更多地关注学生在学习过程中的变化和发展,注重对学生达成课程目标的启发和引导.应重视对学生课堂学习情况的分析、日常学习表现的观察,加强评价者与被评价者之间的沟通和交流.应准确把握测试命题的内容和要求,对数学基础知识和基本技能的考查,要把握基本要求、突出教学重点、注重理解实质、体现数学思想方法,发挥测试命题对用好数学课本、加强数学基础教学的积极导向作用.

二、本册课本内容编写说明

九年级第二学期数学课本(以下简称本册课本),含“圆与正多边形”“统计初步”两章内容,还有配合各章内容的练习部分.

1. 编写思路

本册课本基本内容的确定,其依据是《上海市中小学数学课程标准(试行本)》;内容的安排,是在“二二分段,九年级分层”的框架下进行的.

课本编写的整体思路是:在继承一期课改数学教材编写的积极成果及经验的基础上,推进改革和创新;正确把握教学基本要求,注重基础;关注学生学习数学的过程,改善内容呈现方式;加强数学与现实的联系,反映数学的实际应用.

（1）注重基础.

在一期课改数学课本中，包含有“圆”和“统计初步”的内容.相对于以往的教材，一期课改数学课本关于圆的内容进行了必要的精简，关于统计知识的介绍体现了简明和实用的特点，教学的总体情况良好，但也有教师反映安排在七年级实验几何中有关圆的部分内容的学习难度偏高.在本册课本的编写中，对于圆的内容处理，着重于相对集中有关圆的内容的教学，并落实“分层”的要求；有关统计初步的内容，基本保持一期课改数学课本中的框架，着重于调整例题，使内容有新的时代气息.

本册课本中重新组织了“圆与正多边形”一章，主要内容包括“圆的基本性质”“直线与圆、圆与圆的位置关系”“正多边形与圆”等三部分，注重于建立圆的知识基础和展现关于圆的研究的基本方法.而对圆的深入研究，如涉及圆的切线的判定定理和性质定理、两圆的公切线、与圆有关的角和有关的比例线段等内容，安排在数学拓展II中“直线与圆”一章.

“统计初步”一章的主要内容是统计的意义和基本的统计量.在内容处理上，强调“初步”、力求“朴实”，注重于实例的讨论和分析，突出统计的基本思想和方法，切实控制理论难度.

本册课本练习部分中的习题安排，重视基本训练，着重体现促进学生形成基本概念、理解基础知识、掌握基本技能、学会基本运用的需要；习题中也有一些开放性、探究性、实践性等方面的问题，体现了对于发展性训练的关注.有关习题的编选，注意合理配置、分层要求，有统一性也有多样性.“试一试”栏目下的题目，一般有较高的难度，这样的题目不要求所有学生都去做，主要提供给有学习兴趣的学生进行研究和讨论，进一步培养学生的探究意识和钻研精神，满足不同学生的学习需要.

（2）展现过程.

本册课本内容的呈现，主要采用“过程模式”，努力体现“问题驱动”.通过“问题——活动”的安排，引导学生探索求知，促进学生主动学习；同时注意“螺旋上升”的分层设计，形成内容递进层次.课本中保持有“问题”“思考”“操作”“想一想”“议一议”“试一试”等栏目，有边款点拨、方框解说等版式，以指导学生开展数学活动，帮助学生把握重点和释疑解难，促进学生深入地思考.在“圆与正多边形”中，注意有关基本内容与拓展内容之间的发展性联系和层次性差别，从整体上适当地进行处理；还注意从实验几何到论证几何的认知发展过程，组织开展“实验—归纳—证明”的学习活动.

（3）重视应用.

本册课本重视数学知识与现实生活的联系，重视知识的实际应用.在学习圆的有关知识的基础上，安排了如“赵州桥”“圆材埋壁”“秋千”中的有关几何计算问题；还结合环境保护教育，以高架道路上安装“隔音板”为背景设计实际应用问题.在“统计初步”中，有大量的联系实际的、有生活气息的例题和练习题，以帮助学生通过对实例的分析和归纳获得统计的有关知识，通过用有关知识解决和解释简单的实际问题学习统计知识的应用.

各章末尾配备有“阅读材料”或“探究活动”，进一步体现关于加强知识应用的要求.“怎样用尺规作正五边形”“统计图各有奥妙”的阅读材料，重在引导学生进行学习过程的反思和经验总结，了解知识的应用；“生活中的一个覆盖问题”的探究活动，旨在促进学生开展数学应用的实践，体会数学与现实的联系.

2. 内容提要

通过六年级到九年级第一学期的数学教学，学生获得了“实数知识基础”“初等代数知识基础”，完成了“初等代数函数”的基础性研究；又从实验几何进入到论证几何领域，从直观认识事件发生的可能性进而对概率知识有了初步的了解.本册的两章内容，是初中数学基本内容的结尾，至此关于平面几何基础知识系统的构建基本完善，关于概率与统计初步知识的介绍告一段落.

第二十八章“圆与正多边形”，首先在六年级直观认识圆、弧、圆心角的基础上，讨论圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系；以圆的对称性为认识起点，引进垂径定理.然后通过操作实验，引出直线与圆相离、相切、相交等位置关系；利用圆心到直线的距离与半径长之间的数量关系，描述直线与圆的位置关系；并引进切线、割线的概念，主要通过有关数量关系进行判断；引进圆的切线的判定定理，主要用于解决画圆的切线的问题.再通过圆的运动，引出圆与圆相离、相切、相交等位置关系；利用两圆的圆心距与两圆半径长之间的数量关系，描述圆与圆的位置关系.另外，还讨论了关于正多边形的有关概念以及正多边形的基本性质，主

要涉及正多边形及其中心、中心角、半径、边心距等概念，以及在正三角形、正方形、正六边形中认识与有关概念相联系的基本图形，运用解直角三角形的方法解决一些简单的问题.

第二十八章“统计初步”，首先对学生学过的列表和画折线图、条形图、扇形图等整理数据的方法进行回顾，帮助学生加深认识并掌握有关数据表示的基本方法.然后通过举例，解说统计的意义以及利用统计图表获取信息的方法，简明地显示统计的作用；再引进表示一组数据的平均水平、波动程度、分布情况的量（特征值），介绍频数分布直方图和频率分布直方图，并用于解决或解释简单的实际问题.

3. 课时安排

各章教学的课时数建议如下：

第二十七章　圆与正多边形　　14 课时

第二十八章　统计初步　　10 课时

第二十七章　圆与正多边形

一、教学目标

1. 知道“不在同一直线上三个点确定一个圆”，能画出过已知不在同一直线上三点的圆；了解三角形的外接圆和外心以及圆内接三角形、圆内接多边形的概念.

2. 理解圆的旋转不变性；理解圆心角、弧、弦、弦心距的概念，经历关于圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的探索过程，掌握其关系定理以及这一定理的推论.

3. 掌握垂径定理及其推论，会用垂径定理及其推论解决有关数学问题；在导出垂径定理的过程中，进一步体验“实验—归纳—猜测—证明”的方法.

4. 初步掌握点与圆、直线与圆、圆与圆的各种位置关系及其相应的数量关系；在探究这些位置关系与相应数量关系的关联的过程中，体会运动变化、分类讨论的思想以及量变引起质变的观点.

5. 初步掌握相交或相切两圆的连心线性质定理.

6.掌握正多边形的有关概念和基本性质，会画正三、四、六边形.

二、课时安排

本章教学共14课时，建议分配如下：

27.1	圆的确定	1课时
27.2	圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系	3课时
27.3	垂径定理	3课时
27.4	直线与圆的位置关系	1课时
27.5	圆与圆的位置关系	3课时
27.6	正多边形与圆	2课时
本章小结		1课时

三、设计说明

前面关于平面几何的研究，主要以直线型图形为对象，讨论图形的有关性质以及相互关系.学生在前一阶段的几何学习中，通过实验归纳、演绎推理等方式，认识了许多图形的性质，积累了一定的数学活动经验；同时，对于图形的平移、翻折、旋转、放缩等运动以及图形变换的思想，有了一定的了解.

本章所研究的图形，是最简单的曲线——圆.在平面内，两点确定一条直线，不在同一直线上的三点确定一个圆.圆是一种特殊的图形，它既是中心对称图形又是轴对称图形；同时，圆还具有旋转不变性.本章内容的编写，充分注意利用学生已有的经验，注意体现圆的特性以及论证几何的要求.例如，用翻折、旋转的方法探索圆的对称性；用旋转变换的方法探索圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系，然后用推理证明的方法确立其相互关系定理；用轴对称变换的方法探索垂径定理及其推论，然后加以证明.关于直线与圆、圆与圆的位置关系的研究，是从图形运动切入的，通过操作、观察、分析、归纳等实验活动，形成有关位置关系的概念；然后通过对有关几何量进行数量关系的分析，揭示各种位置关系相应的数量关系的特征.正多边形是特殊的多边形，它与圆有类似的特性，同样既是旋转对称图形又是轴对称图形，而且任何一个正多边形都有外接圆，因此将正多边形整合于圆的讨论之中.

在一期课改数学课本中，有关“圆的确定”以及“圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系”和“垂径定理”等内容，安排在实验几何部分.在本册课本中，这些内容在论证几何范畴内，但由于它是研究曲线型图形的开端，且又适宜于运用实验方法进行探究，所以对这些内容的处理，采用了“归纳与演绎”相结合的方法，重视展现“实验—归纳—猜测—证明”的全过程.对于直线与圆、圆与圆的位置关系的讨论，也是从操作、观察着手，然后进行规范的数学描述和相关的数量关系分析；在数学拓展Ⅱ中，再进一步探讨同直线与圆、圆与圆

的位置关系有关的定理.

本章各节内容中,都涉及分类讨论的问题.分类讨论的思想,是贯穿于本章的一种重要数学思想.本章还列举了一些具有实际背景的数学问题,以激发学生的学习兴趣,同时增强学生运用数学知识解决实际问题的意识,提高解决实际问题的能力,促进学生从形象思维到抽象思维的发展.

四、教学建议

1. 注重对概念本质的理解,准确把握概念.本章内容中有较多的新概念,对概念的教学要注意从"形"的角度去认识和辨析,但对概念的严格定义不能要求过高.在概念教学中,要重视运用启发式教学,让学生根据"形"的特征获得对几何概念的直观认识,鼓励学生用自己的语言描述有关概念,再进一步理解有关概念的文字表述,促进学生主动学习.例如弧、弦、圆心角、弦心距、等弧、等圆等概念的教学,可对照图形进行解说,并留给学生一定的思考空间与时间进行感知,从而让学生知道,概念并不是简单的规定,而是对事物本质的一种认识和概括.另外,教学中要注意概念之间的区别和联系,如"优弧与劣弧""同圆与等圆""弓形与拱形""弦心距与边心距"等各对概念中,两个概念之间有某些共同之处又有区别,要引导学生分辨清楚.

2. 关注图形动态变化过程,引导学生尝试定量分析的研究方法.本章中对直线与圆的位置关系、圆与圆的位置关系的探讨,都有操作活动环节,一方面让学生进一步体验"实验—归纳—猜测—证明"的研究方法,另一方面让学生体验图形运动变化的过程.在教学中,不可忽略有关的操作活动环节,要让学生亲自实践、认真观察,获得形成概念的过程经历.在学生学习了推理证明之后,不能抛弃实验归纳的方法,而且体会到适时、恰当的"操作"还是需要的,它有利于学生增强对问题的感性认识;同时以运动的观点,直观地揭示事物本质,有利于学生加深对知识的理解.

要引导学生学习从定量分析的角度研究几何问题.比如关于直线与圆的位置关系,它以直线与圆的公共点个数来描述,又可从圆心到直线距离与圆的半径长之间的数量关系进行研究;又如关于两圆的位置关系,它以两圆的公共点个数来描述,又可从两圆圆心距与两圆半径长之间的数量关系进行研究.而关于直线与圆、圆与圆的位置关系的研究,可以采用类比的教学方法.在研究过程中,还可让学生进一步体会量变引起质变的辩证观点.

3. 注重学生对于基础知识与基本技能的掌握,提高基本能力.本章要求学生理解与圆有关的概念、圆的性质等内容以及其中蕴涵的数学思想方法,会画三角形的外接圆、平分弧,会画正三角形和正四边形、正六边形以及能运用推理方法证明圆中的有关性质及其推论,能运用所学的圆的知识分析和解决一些简单的实际问题等.在教学中,要注意基础知识和基本技能的落实,重视数学基本能力以及一般能力的提高.贯穿于本章的分类讨论的数学思想方法,也是具有普遍意义的一种思维方式方法,因此有重要的教育价值;本章还列举了一些具有实际背景的数学问题,以激发学生的学习兴趣,同时增强学生运用数学知识解决实际问题的意识,提高解决实际问题的能力.本章关于切线的判定定理,着重于为过圆上一点画圆的切线提供依据,对于它在几何证明中的运用不作要求;关于相交或相切的两圆连心线性质的运用,以及运用正多边形基本性质进行几何计算,要参照课本示例及有关练习题,严格控制难度.

4. 重视多媒体技术的运用.要恰当运用现代多媒体技术,有效利用计算机的画图功能和动态显示功能,帮助学生正确认识几何图形的特征,促进学生从形象思维到抽象思维的发展.在引进直线与圆、圆与圆的位置关系时,可运用多媒体向学生展示现实生活中体现它们位置关系特征的图片或形象资料,或为学生演示它们位置关系变化的动态过程.让学生在操作实践中,结合多媒体提供的材料,认识直线与圆、圆与圆的位置关系及相应的数量关系的特征;再引导学生从图形的运动变化中归纳其性质,并建立起性质与图形之间的联系,体会数形结合思想.

五、评价建议

1. 关注学生学习兴趣的发展和基本要求的落实.学生在本章学习之前,虽然已经学过圆的概念以及圆的周长、弧长、面积的计算等知识,但对于圆的有关性质以及与圆有关的图形的探讨是从本章开始的,所以

要注意前后知识的衔接和过渡，注意实验归纳和演绎推理的结合，强调教学内容的平实性和教学要求的朴实性.要关注以往所学数学思想方法在本章知识学习过程中的基本运用，要体现圆的知识反过来在解决以往问题上的独特作用.在学习评价中，应重在学生学习兴趣的发展和基本要求的落实.

2. 关注学生思考方式的多样化.要重视对学生在观察、操作、推理证明等活动中的表现进行评价，包括学生在活动中的主动性、参与度、与同学合作交流的意识，还有思考与表达的条理性、自主评价的积极性等.而对有关概念学习的评价，主要关注学生在进行实例的分析和解释时是否能正确运用有关概念；对有关性质学习的评价，要更多地关注学生在具体的思考方法中是否能正确运用有关性质；对有关计算的评价，要关注学生是否懂得其中所依据的基本算理.

3. 关注学生对数学思想方法的领会.本章中蕴含了分类讨论、类比、数形结合等数学思想和方法，以及从特殊到一般、从一般到特殊、从定性讨论到定量分析等解决问题的策略和方法.这些是本章教学的重要内容，是学生进一步学习数学的基础.要通过教学讲评，引导学生逐步认识、深入体会有关的数学思想方法，并采用适当的方式进行反馈.在学习评价中，要体现对于有关数学思想方法教学的检测要求.

4. 鼓励学生积极探究和实践.本章在“操作”“思考”等栏目下，安排有多种多样的数学活动.要创设条件和提供机会，让学生积极参与活动，并进行鼓励性评价；要指导学生利用“阅读材料”学习用尺规作正五边形，利用“探究活动”材料开展探究性学习，并通过积极的评价，引导学生关心身边的数学问题，用学到的数学知识解决简单的实际问题.

Yuan Yu Zhengduobianxing

27 第二十七章　圆与正多边形

自行车的车轮、游乐园的大转盘，在转动中显现出“圆”的和谐、匀称之美；奥林匹克运动会的五环标志，用“圆”表达了“团结”“公正”的意境.

圆是最简单的封闭曲线，也是现实生活中常见的图形.

人们对于圆的认识和研究，年代久远，情有独钟.古希腊数学家认为：一切立体图形中最美的是球形，一切平面图形中最美的是圆形.在平面上，对于任意一个圆，以圆心为旋转中心，无论将这个圆怎样旋转，它总是与原来的图形重合；过圆心任意画一条直线，这个圆被直线分成的两部分总是一样的.在平面上，周长一定的封闭图形中圆的面积最大；面积一定的封闭图形中圆的周长最小.可见，圆有许多优良的特性，你能感受到吗？

章头图中的图片，是耸立在游乐园的一个大转盘.图中突出了圆的形象，又暗示了圆与正多边形有某种联系，从而让学生对圆的特征获得感性的认识.

章头语中指出，“圆是最简单的封闭曲线，也是现实生活中常见的图形”；“圆有许多优良的特性”，揭示了对于圆的性质进行研究的价值和意义.

“对于任意一个圆，以圆心为旋转中心，无论将这个圆怎样旋转，它总是与原来的图形重合；过圆心任意画一条直线，这个圆被直线分成的两部分总是一样的.”这句话清晰地说明圆具有完美的双重对称性.

古希腊数学家认为，“一切平面图形中最美的是圆形”.在教学中，可以尝试让学生列举生活中的例子，或利用多媒体展示现实生活中圆的形象和实际应用，让学生初步体会圆的美，同时激发学生进一步探究圆的性质的兴趣.

先复习圆的定义以及圆心、半径的概念，并让学生理解边款中的说明，了解圆的符号表示.这是本节学习的基础.

操作

让学生通过画图操作，直观认识点与圆的三种位置关系.

在平面上给定一个圆，这时这个平面可看作由三个部分组成，即圆周部分以及被圆周分割所成的两个部分.以圆周为分界线所成的两部分，分别叫做圆的内部和外部，可结合图 27－2 进行讲解.

明确了“圆内”“圆外”的概念以后，再引导学生利用图 27－1直观地认识平面上的点与圆的各种位置关系，并进行定量分析.前面的操作中，已经隐含点与圆的位置关系可由点到圆心的距离与圆的半径长的数量关系确定；可在图 27－1 上再描一些点，帮助学生从点到圆心的距离与圆的半径长的数量关系着眼，进一步认识点与圆的不同位置关系.

Yuan De Jiben Xingzhi

第一节　圆的基本性质

27.1　圆的确定

圆上的点到圆心的距离都等于定长；到圆心的距离等于该定长的点都在圆上.
同圆的半径长相等.

我们知道，圆是平面上到一个定点的距离等于定长的所有点所成的图形，这个定点是圆心，联结圆心和圆上任意一点的线段是圆的半径，这个定长是圆的半径长.

以点 O 为圆心的圆称为圆 O，记作⊙O.

操作

在平面上，以已知点 O 为圆心、1 厘米为半径长画圆；再过点 O 任意画一条射线 OM，在 OM 上分别取点 A、B、C，使 OA、OB、OC 的长分别是 0.5 厘米、1 厘米和 1.5 厘米.

画出⊙O 及点 A、B、C，如图 27－1.怎样描述点 A、B、C 与圆 O 的位置关系呢？

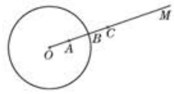


图 27－1

在圆所在的平面上，以圆周为分界线，含圆心的部分叫做圆的内部（简称圆内），不含圆心的部分叫做圆的外部（简称圆外），如图 27－2 所示.

图 27－2

在图 27－1 中，点 A 在⊙O 内，点 B 在⊙O 上，点 C 在⊙O 外.

一般来说，对于给定的一个圆，平面上的点与这个圆的位置

2　第二十七章　圆与正多边形

【教学目标】

（1） 知道点与圆的三种位置关系及其判定方法，并能初步运用点与圆的位置关系的判定方法解决有关数学问题.

（2） 经历以过已知点画圆为线索探索确定一个圆所需条件的过程；知道“不在同一直线上三个点确定一个圆”，能画出过已知不在同一直线上三点的圆.

（3） 了解三角形的外心、外接圆、圆的内接三角形以及多边形的外接圆、圆的内接多边形等概念.

【注意事项】

学生在小学初步认识了圆，在八年级时知道“圆是平面上到一个定点的距离等于定长的点的轨迹”.本节开头对于圆的基本知识的复习，着重于圆的定义以及圆心、半径的概念.要指明圆的半径是“线段”，其长度为圆的半径长，在数学表达中应注意半径与半径长的区分.关于圆的定义，在这里没有使用术语“轨迹”而以“所有点所成的图形”来描述，主要是为使表述通俗些；在学生对“轨迹”有明确认识的情况下，可利用“轨迹”来叙述圆的定义.另外，在平面几何中，“圆”与“圆周”通用，不必拘泥，更不要引导学生去区分使用.

关系有三种：点在圆内，点在圆上，点在圆外.一个点与这个圆的位置关系，可用这个点到圆心的距离与圆的半径长这两个量的大小关系来描述.

设一个圆的半径长为 R，点 P 到圆心的距离为 d，则

点 P 在圆外 $\Leftrightarrow d>R$；
点 P 在圆上 $\Leftrightarrow d=R$；
点 P 在圆内 $\Leftrightarrow 0\leqslant d<R$.

符号“$\Leftrightarrow$”读作“等价于”，表示这个符号两边的数学事实可由左边推出右边，也可由右边推出左边.

例题1 已知线段 AB 和点 C，$\odot C$ 经过点 A.根据如下所给点 C 的位置，判断点 B 与 $\odot C$ 的位置关系.

(1) 如图 27－3(1)，点 C 在线段 AB 的垂直平分线 MN 上；

(2) 如图 27－3(2)，点 C 在线段 AB 上，且 $0<AC<\frac{1}{2}AB$.

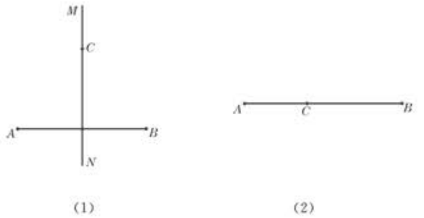


图 27－3

解 (1) ∵ $\odot C$ 经过点 A，
∴ CA 是 $\odot C$ 的半径.
∵ 点 C 在线段 AB 的垂直平分线上，
∴ $CB=CA$.
∴ 点 B 在 $\odot C$ 上.
(2) ∵ 点 C 在线段 AB 上，
∴ $AC+BC=AB$.
又∵ $AC<\frac{1}{2}AB$，
∴ $BC>\frac{1}{2}AB$.
得 $BC>AC$.
∵ AC 是 $\odot C$ 的半径，
∴ 点 B 在 $\odot C$ 外.

第一节 圆的基本性质 3

让学生归纳点与圆的不同位置关系表现在点到圆心的距离与圆的半径长这两个量的数量关系方面所具有的特征.要向学生解释符号“$\Leftrightarrow$”的含义，并使学生知道可利用这两个量的大小关系来判断点与圆的位置关系.

例题 1

本题是对于点与圆的位置关系进行判断的问题，是点与圆的位置关系判定方法的初步运用.

教学时，可在图 27－3 中画出 $\odot C$，帮助学生分清问题中所涉及的 $\odot C$ 的半径和表示点 B 到圆心的距离的线段；再通过线段长度的比较，对点 B 与 $\odot C$ 的位置关系作出判断.

【注意事项】

(1) 关于点与圆的位置关系，可先利用图形的直观性，归纳出它们有三种位置情况；然后引导学生利用圆的定义认识“点在圆上”就是“这个点到圆心的距离等于圆的半径长”，再将点与圆的三种位置情况用“这个点到圆心的距离与圆的半径长这两个量的大小关系”描述出来.

(2) 关于符号“$\Leftrightarrow$”的解释可参照“边款”，不要引进“充分必要条件”或“等价关系”等术语.在这里，对于点 P 与圆的位置关系的描述利用了符号“$\Leftrightarrow$ ”，可针对这一具体情况进行讲解.如 “点 P 在圆外 $\Leftrightarrow d>R$”(其中 R 是圆的半径长，d 是点 P 到圆心的距离)，可向学生指出这一说法有两个方面的含义：一是“如果点 P 在圆外，那么 $d>R$”(这是点 P 在圆外的性质)；二是“如果 $d>R$，那么点 P 在圆外”(这是点 P 在圆外的判定方法).

思考

引导学生认识“在平面上，经过给定两点的圆有无数个”，并知道这些圆的圆心的位置特征，为接下来讨论“经过三点的圆”的问题作好准备.

问题

从“经过给定两点的圆有无数个”提出“经过给定三点的圆有多少个”的问题，让学生探索“确定一个圆”所需要的条件.

在问题讨论的过程中，一要强调一个圆由它的圆心位置和半径长所确定，二要学生注意经过给定两点的圆的圆心一定在联结这两点的线段的垂直平分线上(也可用“轨迹”表述). 在此基础上，将经过给定三点画圆的问题化归为经过给定两点画圆的问题进行讨论；再从利用“交轨法”确定经过给定三点的圆的圆心位置着眼，引出对于这三点位置关系的分析，从三点是否在同一直线上分类进行解决. 最后导出定理“不在同一直线上三个点确定一个圆”.

思考

由例题1(1)可知，如果以CA为半径的$\odot C$的圆心C在线段AB的垂直平分线上，那么$\odot C$经过A、B两点. 反过来，如果$\odot C$经过A、B两点，那么圆心C一定在线段AB的垂直平分线上吗？

由$\odot C$过A、B两点，得$CA=CB$，可知圆心C在线段AB的垂直平分线上.

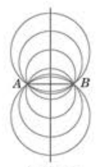


图 27－4

在平面上，经过给定两点的圆有无数个，这些圆的圆心一定在联结这两点的线段的垂直平分线上(如图27－4所示).

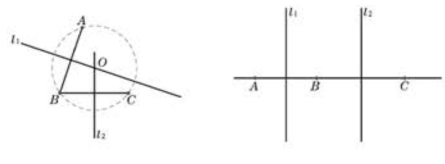
问题

在平面上，经过给定三点的圆是否仍然“有无数个”？圆心位置又如何？

设给定的三点为A、B、C，则经过A、B两点的圆的圆心在线段AB的垂直平分线l_1上；经过B、C两点的圆的圆心在线段BC的垂直平分线l_2上.

(1) 如果A、B、C三点不在同一直线上，那么l_1与l_2必定相交. 设交点为O(如图27－5(1)所示)，则以点O为圆心、OB为半径的圆经过A、B、C三点. 因为l_1与l_2的交点唯一，所以经过A、B、C三点的圆有且只有一个.

(2) 如果A、B、C三点在同一直线上，那么l_1与l_2平行(如图27－5(2)所示). 这时，经过A、B、C三点的圆不存在.



(1)　　(2)

图 27－5

所以，经过不在同一直线上的三点可以作一个且只可以作一个圆. 这就得到：

定理　不在同一直线上的三个点确定一个圆.

三角形的三个顶点确定一个圆. 经过一个三角形各顶点的圆叫做这个三角形的外接圆，外接圆的圆心叫做这个三角形的外心；这个三角形叫做这个圆的内接三角形.

4　第二十七章　圆与正多边形

【注意事项】

(1) 以过已知点画圆为线索确定一个圆所需的条件进行探索，也可设计为对有关问题系列进行讨论. 如问题1：在平面上经过给定一点的圆有多少个？怎样画出一个符合要求的圆？问题2：在平面上经过给定两点的圆有多少个？符合要求的圆的圆心位置一定在联结这两点的线段的垂直平分线上吗？怎样画出一个符合要求的圆？问题3：在平面上经过给定三点的圆一定存在吗？如果存在，试将符合要求的圆画出来. 通过对这些问题的讨论，得到“不在同一直线上三个点确定一个圆”的结论.

(2) 对于定理“不在同一直线上三个点确定一个圆”，要强调给定的三点“不在同一直线上”，同时要让学生知道“经过同一直线上三点的圆不存在”的理由，帮助学生从正反两方面正确认识这个定理的条件.

(3) 本节在讨论“经过给定三点的圆”的个数情况的基础上，通过练习27.1第3题引导学生对“经过给定四点的圆”的存在性问题进行思考. 注意题中指明了所给四点“不在一直线上”和只要“举例说明”，教学时不必提出“经过平面上给定四点的圆是否存在”的问题进行一般性的讨论.

如图 27-6，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形.

如果一个圆经过一个多边形的各顶点，那么这个圆叫做这个多边形的外接圆，这个多边形叫做这个圆的内接多边形.

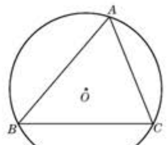


图 27-6

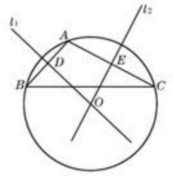


图 27-7

例题2 已知钝角三角形 ABC，用直尺和圆规作出这个三角形的外接圆.

作法 如图 27-7 所示，

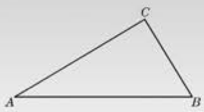
1. 作线段 AB 的垂直平分线 l_1.
2. 作线段 AC 的垂直平分线 l_2，设 l_2 与 l_1 相交于点 O.
3. 以点 O 为圆心、OA 为半径作 $\odot O$.

$\odot O$ 就是所求作的圆.

分别联结 OA、OB、OC，可知 $OB=OA$，$OC=OA$，所以 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆.钝角三角形的外接圆的圆心在这个三角形的外部.

练习 27.1

1. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，求作 $\triangle ABC$ 的外接圆.



（第 1 题）

2. 指出第 1 题所画的外接圆的圆心位置，并说明理由.
3. 经过无三点共线的任意四点，是否一定可以作一个圆？试举例说明.

引进三角形（多边形）的外接圆、三角形的外心、圆的内接三角形（多边形）等概念.

例题 2

本例着重于说明画三角形的外接圆的方法.画三角形的外接圆，其实就是经过不在同一直线上三点画圆，可让学生先尝试然后再讲解.

练习 27.1

1. 分别作 Rt$\triangle ABC$ 的边 AC、BC 的垂直平分线，它们的交点设为 O，以点 O 为圆心、OA 为半径画圆.图略.

2. 圆心位于斜边 AB 的中点.设斜边 AB 的中点为 O'，可知 $O'A=O'B=O'C$，即 O' 是 $\triangle ABC$ 的外心；而三角形的外接圆是唯一确定的，因此点 O 与点 O' 重合.

3. 经过无三点共线的任意四点，不一定可以作一个圆.例如：已知平行四边形 $ABCD$，可知顶点 A、B、C、D 无三点共线.如果平行四边形 $ABCD$ 是矩形，那么经过点 A、B、C、D 可以作一个圆；如果平行四边形 $ABCD$ 不是矩形，那么经过点 A、B、C、D 不可以作一个圆.

【注意事项】

（1）课本中特意安排例题 2 画一个钝角三角形的外接圆，并在“边款”指出钝角三角形的外心在这个三角形的外部；又通过练习 27.1 第 1、2 题的安排，让学生看到（可进一步推断）直角三角形的外心是这个直角三角形斜边的中点.而在图 27-5（1）和图 27-6 中，显示出锐角三角形的外心在这个三角形的内部，可引导学生进行观察和分析.在教学中，要注意课本有意引起学生对不同类型三角形的外心的位置特征的关注，让学生在学会画出三角形的外接圆的同时，总结出不同类型的三角形外心的位置特征.

（2）例题 2 是一道几何作图题，解题时说明了“作法”.学生解答本章作图题时，可以不写“作法”及其依据，但要保留作图痕迹，以此呈现作图过程；最后要指出图中显示的所作的图形.如例题 2 由学生解答时，可写为“解”，然后作图（保留痕迹），最后指出“$\odot O$ 是所求作的图形”（在图中圆心处要标上字母 O）.

【本课重点】

引进圆心角、弧、弦、弦心距等概念，导出同圆或等圆中圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理.

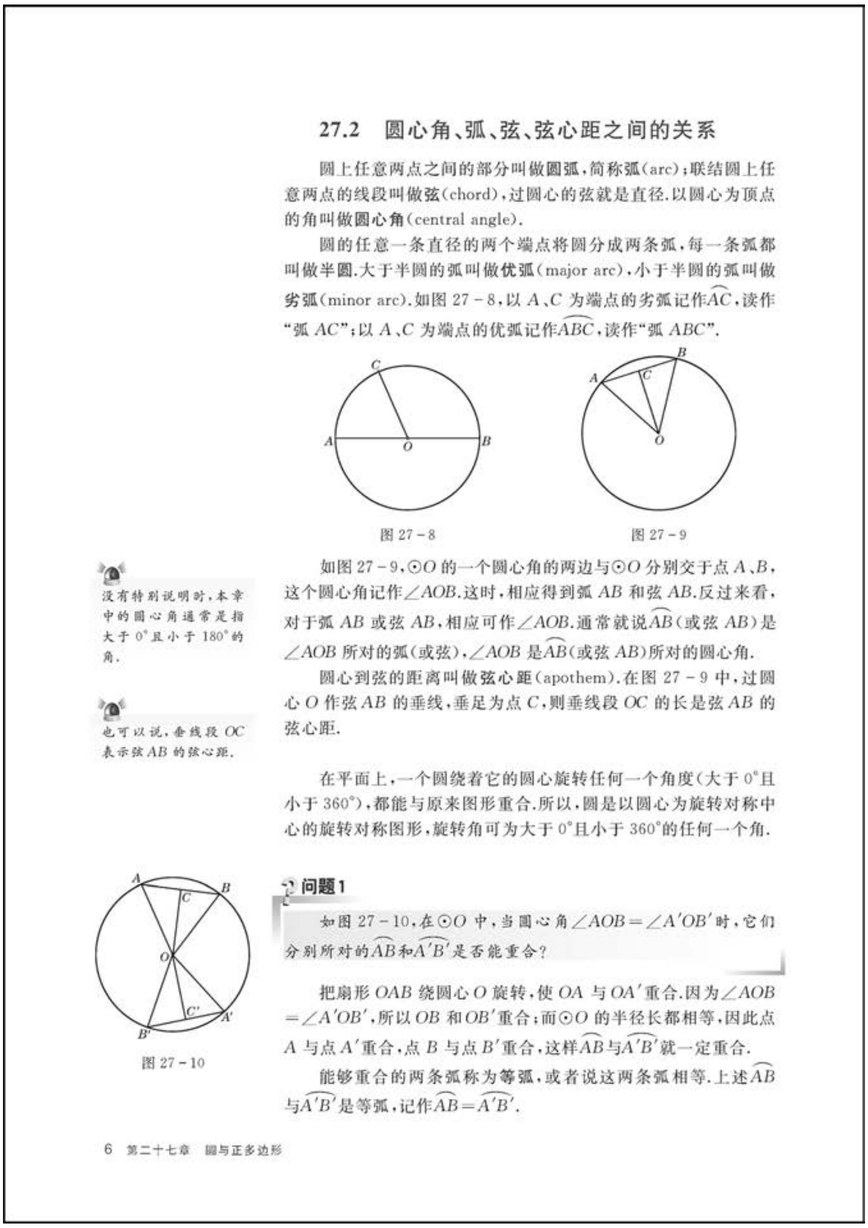
关于圆心角、弧、弦、弦心距等概念，要结合图形进行讲解；要强调弦心距是“距离”，可通过从圆心作弦的垂线段将弦心距用图形表示出来，表述为“这一垂线段表示弦心距”.

为了便于研究讨论，“边款”中特别指出“本章中的圆心角通常是指大于 0°小于 180°的角”，要让学生注意.

问题 1

在指出了圆是一个旋转对称图形的基础上，引导学生探索同圆中两个相等的圆心角分别所对的弧是否相等.

利用圆的旋转不变性并采用叠合法，可得到“相等的圆心角所对的弧相等”的结论.要注意“两条弧相等”是指“两条弧能够重合”，而不仅仅指两条弧的长度相等，因此不能利用弧长计算公式来推出问题 1 的结论.



27.2 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系

圆上任意两点之间的部分叫做**圆弧**，简称**弧**(arc)；联结圆上任意两点的线段叫做**弦**(chord)，过圆心的弦就是直径.以圆心为顶点的角叫做**圆心角**(central angle).

圆的任意一条直径的两个端点将圆分成两条弧，每一条弧都叫做半圆.大于半圆的弧叫做**优弧**(major arc)，小于半圆的弧叫做**劣弧**(minor arc).如图 27－8，以 A、C 为端点的劣弧记作$\overset{\frown}{AC}$，读作“弧 AC”；以 A、C 为端点的优弧记作$\overset{\frown}{ABC}$，读作“弧 ABC”.

图 27－8　　图 27－9

没有特别说明时，本章中的圆心角通常是指大于 0°且小于 180°的角.

如图 27－9，$\odot O$ 的一个圆心角的两边与$\odot O$ 分别交于点 A、B，这个圆心角记作$\angle AOB$.这时，相应得到弧 AB 和弦 AB.反过来看，对于弧 AB 或弦 AB，相应可作$\angle AOB$.通常就说$\overset{\frown}{AB}$(或弦 AB)是$\angle AOB$ 所对的弧(或弦)，$\angle AOB$ 是$\overset{\frown}{AB}$(或弦 AB)所对的圆心角.

也可以说，垂线段 OC 表示弦 AB 的弦心距.

圆心到弦的距离叫做**弦心距**(apothem).在图 27－9 中，过圆心 O 作弦 AB 的垂线，垂足为点 C，则垂线段 OC 的长是弦 AB 的弦心距.

在平面上，一个圆绕着它的圆心旋转任何一个角度(大于 0°且小于 360°)，都能与原来图形重合.所以，圆是以圆心为旋转对称中心的旋转对称图形，旋转角可为大于 0°且小于 360°的任何一个角.

问题1

如图 27－10，在$\odot O$ 中，当圆心角$\angle AOB=\angle A'OB'$时，它们分别所对的$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{A'B'}$是否能重合？

图 27－10

把扇形 OAB 绕圆心 O 旋转，使 OA 与 OA'重合.因为$\angle AOB=\angle A'OB'$，所以 OB 和 OB'重合；而$\odot O$ 的半径长都相等，因此点 A 与点 A'重合，点 B 与点 B'重合，这样$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{A'B'}$就一定重合.

能够重合的两条弧称为**等弧**，或者说这两条弧相等.上述$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{A'B'}$是等弧，记作$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$.

6　第二十七章　圆与正多边形

【教学目标】

(1) 理解圆心角、弧、弦、弦心距等概念，知道圆是一个旋转对称图形，理解圆的旋转不变性.

(2) 经历利用圆的旋转不变性探索同圆中圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的过程，掌握同圆或等圆中圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理及其推论，能运用这一定理及其推论解决有关数学问题.

半径长相等的两个圆一定能够重合，我们把半径长相等的两个圆称为等圆.

在上述问题中，$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{A'B'}$所对的弦分别是 AB 和 $A'B'$.通过旋转可知，AB 与 $A'B'$ 重合，两弦的垂线段 OC、OC' 也重合(为什么)，得 $AB=A'B'$，$OC=OC'$.

等圆可看作同一个圆移动到不同的位置时的图形.

于是，可以得到关于圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理：

定理　在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦的弦心距相等.

例题1　如图 27－11，$\odot O$ 是$\triangle ABC$ 的外接圆，$\angle AOB=\angle AOC=120°$.

(1) 求证：$\triangle ABC$ 是等边三角形；

(2) 如果 BC 的弦心距为 3 厘米，求 AB、AC 的弦心距.

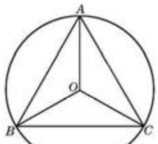


图 27－11

解　(1) ∵　$\angle AOB+\angle AOC+\angle BOC=360°$，

$\angle AOB=\angle AOC=120°$，

∴　$\angle BOC=360°-120°-120°=120°$，

得　$\angle AOB=\angle AOC=\angle BOC$.

∴　$AB=AC=BC$，

即$\triangle ABC$ 是等边三角形.

(2) ∵　$\angle AOB=\angle AOC=\angle BOC$，$AB$、$AC$、$BC$ 分别是$\angle AOB$、$\angle AOC$、$\angle BOC$ 所对的弦，

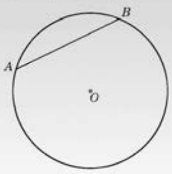
∴　弦 AB、AC、BC 的弦心距相等.

∵　BC 的弦心距为 3 厘米，

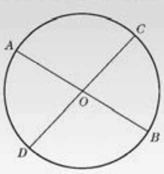
∴　AB、AC 的弦心距为 3 厘米.

练习 27.2(1)

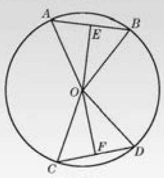
1. 如图，$\overset{\frown}{AB}$与弦 AB 哪条长？为什么？
2. 如图，在$\odot O$ 中，如果 AB、CD 是直径，那么图中相等的弧有哪些？为什么？



(第 1 题)



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，已知在$\odot O$ 中，AB、CD 分别是弦，$OE\perp AB$，$OF\perp CD$，垂足分别是点 E、F. 请添加一个条件，使得 $OE=OF$.

第一节　圆的基本性质　7

随着问题 1 的解决，同时得到“相等的圆心角所对的弦相等、所对的弦的弦心距离相等”，然后归纳定理.

“边款”给出了对于“等圆”与“同圆”内在联系的一种理解.

例题 1

这是圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理的初步运用. 要注意帮助学生理解定理中涉及的“所对”的要求，同时注意不能在“弦心距”前面加“所对”两字.

练习 27.2(1)

1. $\overset{\frown}{AB}$比弦 AB 长.因为两点之间，线段最短.

2. $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AD}$，$\overset{\frown}{ACB}=\overset{\frown}{ADB}=\overset{\frown}{CAD}=\overset{\frown}{CBD}$，$\overset{\frown}{DAB}=\overset{\frown}{ADC}$，$\overset{\frown}{ACD}=\overset{\frown}{BAC}$.理由略.

3. 添加条件：$\angle AOB=\angle COD$，或 $AB=CD$，或 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.

【注意事项】

(1) 在圆心角、弧、弦、弦心距等概念的教学中，要讲清每个概念的含义，帮助学生正确理解概念的文字描述.如：“弦心距是圆心到弦的距离”，即圆心到弦的垂线段的长，而不是圆心到弦的垂线段；“等弧是指能够重合的两条弧”，它包含形状相同、长度相等两层含义，而不仅仅是长度相等.还要注意“圆的直径是弦”“半圆所对的圆心角是一个平角”等特殊情况.

(2) 问题 1 的解决以及推广，主要采用实验的方法，通过操作说理来获得结论.在教学中，可利用多媒体或直观教具，演示实验活动过程.

【本课重点】

导出圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理的推论，并进行简单的运用.

问题 2

引导学生进一步探讨同圆中的圆心角、弧、弦、弦心距之间关系，着重于从已有定理进行逆向思考提出问题再展开讨论.

分别由弧相等、弦相等、弦心距相等的条件得到圆心角相等，再根据前一定理可以推出其他几组量也相等.

在“边款”中指出，问题 2 可利用圆的旋转不变性来解决.这里采用推理的方法来导出结论，一是为体现论证几何的要求，二是使问题(3)结论的推导过程简明些.在教学中，可先用实验操作的方法获得问题的结论，再进行演绎证明.也可根据学生的数学学习实际情况，只通过操作说理来确认结论.

圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理表明，在同圆或等圆中，圆心角、圆心角所对的弧和弦以及弦的弦心距得到的四组量之间有密切联系.

问题2

如图 27-12，在⊙O 中，AB、CD 是两条弦，OE、OF 分别表示 AB、CD 的弦心距.

(1) 如果 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，那么 $\angle AOB$ 与 $\angle COD$ 相等吗？

(2) 如果 $AB=CD$，那么 $\angle AOB$ 与 $\angle COD$ 相等吗？

(3) 如果 $OE=OF$，那么 $\angle AOB$ 与 $\angle COD$ 相等吗？

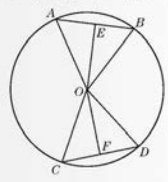


图 27-12

我们用推理证明的方法来解决上面的问题.

证明：(1) 设 $\angle AOB=m^\circ$，$\angle COD=n^\circ$，⊙O 的半径长为 r，则

$$\overset{\frown}{AB}\text{的长 } l_1=\frac{m\pi r}{180}；\overset{\frown}{CD}\text{的长 } l_2=\frac{n\pi r}{180}.$$

∵ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，

∴ $l_1=l_2$，即 $\frac{m\pi r}{180}=\frac{n\pi r}{180}$，

得 $m=n$.

∴ $\angle AOB=\angle COD$.

(2) ∵ $AB=CD$，$OA=OB=OC=OD$，

∴ $\triangle AOB\cong\triangle COD$.

∴ $\angle AOB=\angle COD$.

(3) ∵ OE、OF 分别表示 AB、CD 的弦心距，

∴ $OE\perp AB$，$OF\perp CD$，得 $\angle OEA=\angle OFC=90^\circ$.

又 ∵ $OE=OF$，$OA=OC$，

∴ $Rt\triangle OEA\cong Rt\triangle OFC$，

得 $\angle AOE=\angle COF$.

∵ $OA=OB$，$OC=OD$，

∴ $\angle AOB=2\angle AOE$，$\angle COD=2\angle COF$.

∴ $\angle AOB=\angle COD$.

我们也可利用圆的旋转对称性来解决上面的问题(1)、(2)、(3).

8 第二十七章 圆与正多边形

【注意事项】

(1) 有关“圆心角、弧、弦、弦心距之间关系”的内容，一期课改数学课本中安排在实验几何部分，而现在进入论证几何的范畴.课本中对这些内容的处理，考虑到要适当降低认识的起点，并注意到运用实验方法容易获得最初的结论，因此在整体上采用了“归纳与演绎”相结合的方法.

(2) 由于圆心角大小决定了它所对的弧是优弧还是劣弧，所以一个圆心角所对的弧是唯一的.在“圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理”的文字描述中，圆心角所对的弧不必加上优弧或劣弧的说明.但是，一条非直径的弦所对的弧可能是劣弧也可能是优弧，因此在这一定理的推论中，要指明两条弧同为劣弧或同为优弧.另外要让学生注意，在圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理及其推论中，有一个前提条件是“在同圆或等圆中”，不可忽略.

在问题(1)、(2)、(3)中，除了可以推出$\angle AOB=\angle COD$外，利用关于圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理可知其余两组量也相等.

因此，圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理有以下推论：

推论　在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条劣弧(或优弧)、两条弦、两条弦的弦心距得到的四组量中有一组量相等，那么它们所对应的其余三组量也分别相等.

这个推论可简单表述如下：
在同圆或等圆中，圆心角相等⇔劣弧(或优弧)相等⇔弦相等⇔弦心距相等.

例题2　已知：如图27－13，在$\odot O$中，$OE\perp AB$，$OF\perp CD$，垂足分别是点E、F，且$OE=OF$.

求证：$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

证明　$\because$　$OE\perp AB$，$OF\perp CD$，垂足分别是点E、F，

$\therefore$　OE、OF分别表示弦AB、CD的弦心距.

$\because$　$OE=OF$，

$\therefore$　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，

即　$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{CB}+\overset{\frown}{BD}$.

$\therefore$　$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

同圆或等圆上的两条弧，可像线段的和与差一样作出它们的和与差，并分别用“＋”“－”号表达.

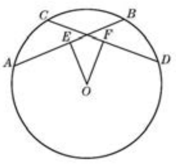


图27－13

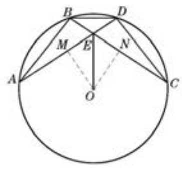


图27－14

例题3　已知：如图27－14，在$\odot O$中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，$AD$、$BC$相交于点$E$.

求证：(1) $\triangle ABD\cong\triangle CDB$；(2) EO平分$\angle AEC$.

证明　$\because$　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，

$\therefore$　$AB=CD$；

$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{CD}$，即　$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CB}$，得　$AD=CB$.

$\because$　$AB=CD$，$AD=CB$，$BD=DB$，

$\therefore$　$\triangle ABD\cong\triangle CDB$.

(2) 过点O作$OM\perp AD$、$ON\perp CB$，垂足分别为点M、N，则OM、ON分别表示AD和CB的弦心距.

$\because$　$AD=CB$，

$\therefore$　$OM=ON$.

$\therefore$　点O在$\angle AEC$的平分线上，即EO平分$\angle AEC$.

第一节　圆的基本性质　9

在解决问题2的基础上，再结合圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理，可得这个定理的推论.“边款”中的表述，有利于学生记忆，但对符号“⇔”的意义还是要作出类似于前面所述的解释.

例题2

这是圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理推论的初步运用.教学时，要指导学生根据“边款”的说明，理解两条弧的和与差的含义，并强调这两条弧应在“同圆或等圆上”的条件.

例题3

这是圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理推论在几何证明中的运用.

题(1)的证明，关键是能由两弧相等看到它们分别所对的弦相等，从而利用“边边边”判定两个三角形全等.

在题(2)的证明中，利用了定理“在一个角的内部且到角的两边距离相等的点，在这个角的平分线上”，使其过程显得简捷.但学生对这个定理的运用可能不太熟悉，在分析证明思路时，要适当进行引导.

【注意事项】

“边款”中说明了弧的和与差的意义.教学时，可类比线段的和与差的符号表示，指导学生学会用“＋”“－”符号表达两弧的和与差，另外使学生体会到运用圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理推论可使证明过程更为简明扼要.

练习 27.2(2)

1. 提示：先由已知$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$，推出$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AB}$.

2. 提示：联结 OD.

3. 提示：先由弦 $AD=BC$，得$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$，推出$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，再推出 $ON=OM$.

【本课重点】

运用圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理及其推论解决有关数学问题.

例题 4

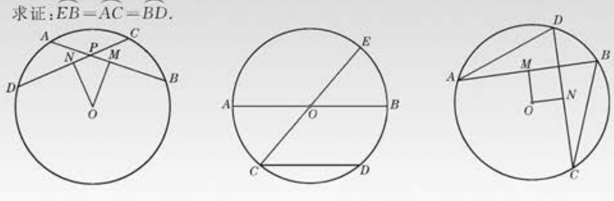
这是圆心角、弧、弦、弦心距之间关系定理的推论的简单运用.在题(1)的分析中，要让学生注意到圆心 O 在$\angle AFD$ 的平分线上和角的平分线性质的运用.

例题 5

这是圆心角、弧、弦、弦心距之间关系定理的推论在较复杂情景中的运用.对于证明思路的分析，可先从待证的平行、垂直关系考虑，分别探寻有关的角需要具有的数量关系的特征；再从已知条件联想可知结论，导出所需的有关角的数量关系.

练习 27.2(2)

1. 已知：如图，⊙O 的弦 AB 与 CD 相交于点 P，$OM\perp AB$，$ON\perp DC$，垂足分别是点 M、N，且$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$.
求证：$OM=ON$.
2. 已知：如图，AB、CE 是⊙O 的直径，CD 是⊙O 的弦，$CD\parallel AB$.
求证：$\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.



(第 1 题)　　(第 2 题)　　(第 3 题)

3. 已知：如图，AD、BC 是⊙O 的弦，$AD=BC$，OM、ON 分别表示弦 AB 和 CD 的弦心距.
求证：$OM=ON$.

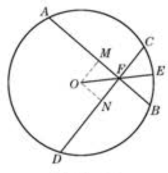


图 27－15

例题4　已知：如图 27－15，点 F 在⊙O 的半径 OE 上，AB 和 CD 是过点 F 的弦，且$\angle AFO=\angle DFO$.

求证：(1) $AB=CD$；(2) $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

证明　(1) 过点 O 作 $OM\perp AB$，$ON\perp CD$，垂足分别是点 M、N，则 OM、ON 分别表示 AB 和 CD 的弦心距.

∵　$\angle AFO=\angle DFO$，

∴　$OM=ON$.

∴　$AB=CD$.

(2) ∵　$AB=CD$，

∴　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，

即　$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{CB}+\overset{\frown}{BD}$.

∴　$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

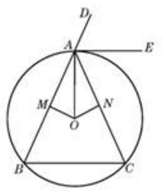


图 27－16

例题5　已知：如图 27－16，⊙O 是△ABC 的外接圆，AE 平分△ABC 的外角$\angle DAC$，$OM\perp AB$，$ON\perp AC$，垂足分别是点 M、N，且 $OM=ON$.

求证：(1) $AE\parallel BC$；(2) $AO\perp AE$.

证明　(1) ∵　$OM\perp AB$，$ON\perp AC$，垂足分别是点 M、N，

∴　OM、ON 分别表示弦 AB 和 AC 的弦心距.

10　第二十七章　圆与正多边形

【注意事项】

(1) 在例题 4(1)和前面例题 3(2)的证明中，添加了两条分别表示两弦的弦心距的线段为辅助线，以形成将"弦相等⇔弦心距相等"的运用与角的平分线性质定理的运用相联系的图形直观.可让学生总结相关经验，并注意添辅助线过程的规范表达.再进一步引导学生认识，如本题添置的辅助线，在建立圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系时，是常用的.

(2) 在分析例题 5 的已知条件时，要注意线段 OM 和 ON 既分别表示弦 AB 和 AC 的弦心距，又分别表示点 O 到$\angle BAC$ 两边的距离，于是由"$OM=ON$"可知 $AB=AC$ 和点 O 在$\angle BAC$ 的平分线上，这是证明例题 5(1)(2)的起点.反过来，如果已知 $AB=AC$ 或点 O 在$\angle BAC$ 的平分线上，那么可知 $OM=ON$.要让学生熟悉这些基本联系.

(3) 在例题 4 和例题 5 的教学之后，可由师生共同总结，从而明确"运用圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理的推论，是证明圆内线段相等、角相等、弧相等的重要思路".

又∵ $OM=ON$，

∴ $AB=AC$，

得 $\angle B=\angle C$.

∵ $\angle DAC=\angle B+\angle C$，

∴ $\angle DAC=2\angle B$.

∵ AE 平分$\angle DAC$，

∴ $\angle DAC=2\angle DAE$，

得 $\angle B=\angle DAE$.

∴ $AE \parallel BC$.

(2) ∵ $OM\perp AB$，$ON\perp AC$，$OM=ON$，

∴ 点 O 在$\angle BAC$ 的平分线上，即 AO 平分$\angle BAC$，

得 $\angle BAC=2\angle OAN$.

∵ $\angle BAC+\angle DAC=180^\circ$，

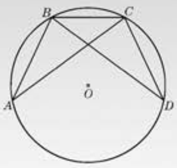
即 $2\angle OAN+2\angle CAE=180^\circ$.

∴ $\angle OAN+\angle CAE=90^\circ$.

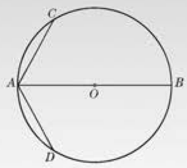
∴ $AO\perp AE$.

练习 27.2(3)

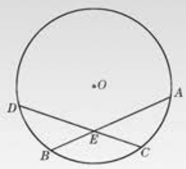
1. 已知：如图，AB、CD 是$\odot O$ 的弦，且 $AB=CD$.
   求证：$\triangle ACB\cong\triangle DBC$.
2. 已知：如图，AB 是$\odot O$ 的直径，AC 和 AD 是分别位于 AB 两侧的两条相等的弦.
   求证：AB 平分$\angle CAD$.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 已知：如图，$\odot O$ 的弦 AB 与 CD 相交于点 E，$AB=CD$.
   求证：$AE=DE$.

27.3 垂径定理

将一张圆形纸片沿着它的任意一条直径翻折，可以看到直径两侧的两个半圆互相重合.由此说明：

练习 27.2(3)

1. 提示：由 $AB=CD$，可知$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.再类似于例题 3 推出结论.

2. 提示：过点 O 作 $OM\perp AC$，$ON\perp AD$，垂足分别为 M、N，利用定理的推论得到 $OM=ON$，从而得到 AB 平分$\angle CAD$.

3. 提示：过点 O 作 $OM\perp AB$，$ON\perp CD$，垂足分别为 M、N；联结 OE、OA、OD.推出 $OM=ON$，可证$\triangle OAM\cong\triangle ODN$，$\triangle OME\cong\triangle ONE$，则 $AM=DN$，$ME=NE$，所以 $AE=DE$.

【注意事项】

在例题 4、例题 5 的教学小结中，可提出将原题的题设与结论适当交换，让学有余力的学生在课外进行证明，帮助学生结合图形把握题中条件与结论之间的联系，引导学生反思学习和举一反三.

【本课重点】

导出垂径定理，并进行初步的运用.

学生知道“圆是轴对称图形”，在此通过复习帮助学生加深认识.

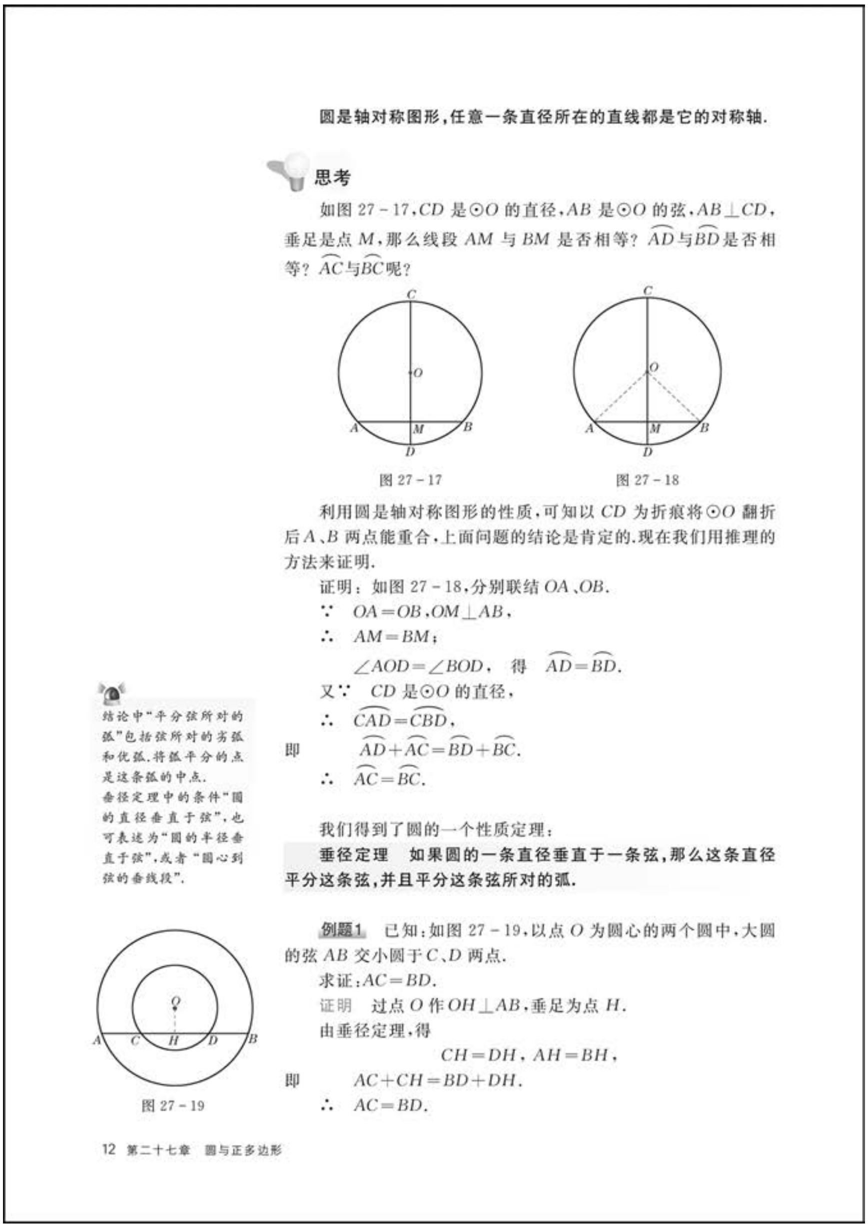
思考

通过提出问题，引导学生探究圆中垂直于弦的直径的性质.

可先让学生利用圆的轴对称性进行操作说理，获得关于所提问题的结论；再用推理的方法证明结论，得到“垂径定理”.还可指出，添加圆的半径是常用的辅助线.

例题 1

本题是垂径定理的初步运用.注意到在两个同心圆中，线段 AB、CD 分别是两圆的弦，且线段 CD 是线段 AB 的一部分；而由图可见，要证明 $AC=BD$ 只需证明线段 AB 与 CD 线段以同一点为中点，于是考虑利用垂径定理来进行推导.



圆是轴对称图形，任意一条直径所在的直线都是它的对称轴.

思考

如图 27－17，CD 是⊙O 的直径，AB 是⊙O 的弦，$AB\perp CD$，垂足是点 M，那么线段 AM 与 BM 是否相等？$\overset{\frown}{AD}$与$\overset{\frown}{BD}$是否相等？$\overset{\frown}{AC}$与$\overset{\frown}{BC}$呢？

图 27－17　　图 27－18

利用圆是轴对称图形的性质，可知以 CD 为折痕将⊙O 翻折后 A、B 两点能重合，上面问题的结论是肯定的.现在我们用推理的方法来证明.

证明：如图 27－18，分别联结 OA、OB.

∵ $OA=OB$，$OM\perp AB$，

∴ $AM=BM$；

$\angle AOD=\angle BOD$，得 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$.

又∵ CD 是⊙O 的直径，

∴ $\overset{\frown}{CAD}=\overset{\frown}{CBD}$，

即 $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{BC}$.

∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$.

结论中“平分弦所对的弧”包括弦所对的劣弧和优弧.将弧平分的点是这条弧的中点.
垂径定理中的条件“圆的直径垂直于弦”，也可表述为“圆的半径垂直于弦”，或者“圆心到弦的垂线段”.

我们得到了圆的一个性质定理：

垂径定理　如果圆的一条直径垂直于一条弦，那么这条直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的弧.

例题1　已知：如图 27－19，以点 O 为圆心的两个圆中，大圆的弦 AB 交小圆于 C、D 两点.

求证：$AC=BD$.

证明　过点 O 作 $OH\perp AB$，垂足为点 H.

由垂径定理，得

$$CH=DH，AH=BH，$$

即 $AC+CH=BD+DH$.

∴ $AC=BD$.

图 27－19

12 第二十七章　圆与正多边形

【教学目标】

（1）经历利用圆的轴对称性探究垂直于弦的直径的性质的过程，掌握垂径定理.

（2）掌握垂径定理的推论，在推导与由一直线经过圆心、垂直于弦、平分弦、平分弦所对的弧这四组关系构成的定理的过程中，体会分类讨论思想.

（3）能初步运用垂径定理及其推论解决有关数学问题.

【注意事项】

（1）关于垂径定理的推导，利用圆的轴对称性进行操作说理是有效的.教师可根据学生实际，用叠合法表述推导过程，适当降低论证的层次.

（2）关于例题 1 的证明，学生可能对通过添置“圆心到弦的垂线段”为辅助线后直接运用垂径定理感到陌生，还是习惯于运用等腰三角形“三线合一”的性质来解决.教师可引导学生比较不同的证明方法，指出垂径定理是利用等腰三角形“三线合一”性质推导出来的，帮助学生理解垂径定理是在特定情况下对等腰三角形“三线合一”的“兼容”，直接运用垂径定理可使证明过程精简.

例题2 一千四百多年前，我国隋代建造的赵州石拱桥的桥拱是圆弧形.已知桥拱的跨度（弧所对的弦的长）约为 37.02 米，拱高（弧的中点到弦的距离）约为 7.2 米，求桥拱所在圆的半径长（精确到 0.1 米）.

解 如图 27－20，用 $\overset{\frown}{AB}$ 表示桥拱，$\overset{\frown}{AB}$ 所在圆的圆心为 O，$\odot O$ 的半径长为 R.联结 AB，过圆心 O 作半径 OC 垂直于弦 AB，垂足为点 D.根据垂径定理，可知 D 是 AB 的中点，C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，则 CD 就是拱高.由题设知

$$AB=37.02\text{ 米}，CD=7.2\text{ 米}，$$

得 $AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 37.02=18.51$（米），

$OD=OC-CD=R-7.2.$

在 $\mathrm{Rt}\triangle OAD$ 中，由勾股定理，得

$$AD^2+OD^2=OA^2,$$

即 $18.51^2+(R-7.2)^2=R^2.$

整理，得 $14.4R=394.460\ 1.$

解得 $R\approx 27.4$（米）.

答：桥拱所在圆的半径长约为 27.4 米.

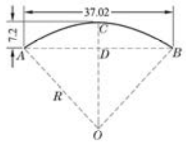


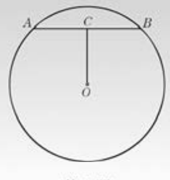
图 27－20

弓形的弧可以是劣弧，也可以是优弧或半圆.弓形中的曲线一定是圆弧，拱形中的曲线不一定是圆弧.

由圆的弦及其所对的弧组成的图形叫做**弓形**，例题 2 中的拱高也叫弓形高.

练习 27.3(1)

1. 如图，已知$\odot O$ 的弦 AB 长为 10，半径长 R 为 7，OC 表示 AB 的弦心距，求 OC 的长.
2. 已知：$\odot O$ 的半径长为 50 厘米，弦 AB 长 50 厘米.
求：(1) 点 O 到 AB 的距离；(2) $\angle AOB$ 的大小.



（第 1 题）

（第 3 题）

（第 4 题）

第一节 圆的基本性质 13

例题 2

本题以赵州石拱桥为背景，是垂径定理在解决实际问题中的运用.

教学时，要指导学生正确审题，根据题意画出或读懂图 27－20，将实际问题抽象为数学问题.要关注这个转化的过程，然后将问题归结为直角三角形中的计算问题.

赵州桥的历史悠久，体现了我国古代的文明和劳动人民的智慧，可结合进行爱国主义教育.

关于弓形的概念，只要求学生知道."边款"中说明了弓形与拱形有区别.

练习 27.3(1)

1. $OC=2\sqrt{6}$.

2. (1) $OD=25\sqrt{3}$ 厘米；

(2) $\angle AOB=60°$.

3. (1) $AB=2AD=4$ 厘米；

(2) $\overset{\frown}{AC}$ 的长为 2.5 厘米.

4. 联结 OP.过 P 作 $AB\perp OP$，交$\odot O$ 于 A 与 B 两点，则弦 AB 为所作.

【注意事项】

(1) "边款"中特别指出，垂径定理中的条件"圆的直径垂直于弦"，也可表述为"圆的半径垂直于弦"，或者"圆心到弦的垂线段".要帮助学生理解这个条件的实质是指"一条过圆心的直线（或直线部分）与圆的一条弦具有垂直关系"，于是在具体情景中，可灵活运用垂径定理分析和解决问题.还要注意，垂径定理条件中的"弦"可以是直径；结论中"平分弦所对的弧"包括弦所对的劣弧和优弧.

(2) 在例题 1 和例题 2 教学的基础上，可进一步让学生明确，在圆中利用垂直于弦的直径（或半径、或过圆心的垂线段），是证明线段相等、弧相等的重要思路.

(3) 关于赵州桥的历史、优点及其文化价值，可查找一些资料再向学生介绍.赵州桥建于隋大业（公元 595－605）年间，是单孔圆弧拱石桥，全长 64.4 米，宽 9 米.它是世界上最古老的圆弧拱桥，其跨度大、扁平率低，是建筑史上一个可贵的创造，在 1991 年被美国土木工程师学会选定为世界第十二处"国际土木工程历史古迹".

【本课重点】

导出垂径定理的推论，并进行初步的运用.

问题 1

从对垂径定理进行逆向思考提出问题，引导学生探讨垂径定理的逆命题是否为真命题.

可先让学生提出问题，再推导结论.由于推导过程与垂径定理的证明类似，因此可让学生完成.然后，将所得结论进行概括.

以“圆的直径平分弦”为条件时，要指明“这条弦不是直径”.由学生提问和讨论时，有可能出现条件不完整、概括不全面的情况，可通过引导学生反思来完善.

问题 2

将垂径定理中涉及的几何关系重新组合命题，让学生判断真假，探讨新的关系定理.

以圆中两条相交弦为研究对象，其中问题(1)是当其中一条弦平分另一条弦及它所对的弧时这两条弦是否垂直？问题(2)是当两条弦互相垂直且其中一条弦平分另一条弦所对的弧时这条弦是否平分另一条弦？这两个问题有互逆性.

3. 如图，已知⊙O 的半径 OC 垂直于弦 AB，垂足为点 D，AD 长 2 厘米，弧 AB 长 5 厘米.求：(1) AB 的长； (2) 弧 AC 的长.
4. 如图，已知 P 是⊙O 内一点.画一条弦 AB，使 AB 经过点 P，并且 $AP=PB$.

垂径定理指出了圆的直径与弦及弦所对的弧之间的关联，即由直径“垂直”于弦得到“平分”弦(弧).

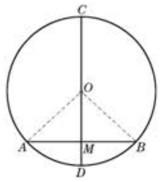


图 27－21

问题1

如图 27－21，CD 是⊙O 的直径，AB 是弦(不是直径)，CD 与 AB 交于点 M.

(1) 如果 $AM=BM$，那么 CD 与 AB 垂直吗?

(2) 如果 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，那么 CD 与 AB 垂直吗?

在图 27－21 中，分别联结 OA、OB，得$\triangle AOB$ 是等腰三角形.利用等腰三角形的“三线合一”性质，可推出 CD 与 AB 垂直.

想一想，问题 1 为什么要指明弦 AB 不是直径？如果弦 AB 是直径，(1) 中的结论还成立吗?

由此归纳得到以下结论：

如果圆的直径平分弦(这条弦不是直径)，那么这条直径垂直于这条弦，并且平分这条弦所对的弧.

如果圆的直径平分弧，那么这条直径就垂直平分这条弧所对的弦.

在圆中，圆心到弦的两个端点的距离都等于圆的半径.由线段垂直平分线定理的逆定理，可知圆心一定在弦的垂直平分线上.于是得到：

如果一条直线是弦的垂直平分线，那么这条直线经过圆心，并且平分这条弦所对的弧.

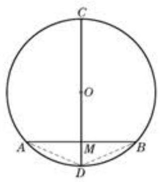


图 27－22

问题2

如图 27－22，在⊙O 中，弦 CD 与弦 AB 交于点 M.

(1) 如果 $AM=BM$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，那么 CD 与 AB 垂直吗?

(2) 如果 $CD\perp AB$，垂足为点 M，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，那么 AM 与 BM 相等吗?

问题中的条件有“弧相等”，可知它们“所对的弦相等”.如图 27－22，分别联结 AD、BD，得 $AD=BD$，则$\triangle DAB$ 是等腰三角形.

14 第二十七章 圆与正多边形

【注意事项】

(1) 在导出了垂径定理后，通过问题 1 和问题 2，进一步讨论了圆的直径平分弦或弦所对弧、直径垂直于弦等位置关系之间的内在联系.利用等腰三角形“三线合一”的性质和垂径定理，可以推出一些新的推论，其推导过程可让学生表述.另外，在讨论问题 2 之前，要让学生明确“垂直平分弦的直线一定过圆心”，这是导出问题 2 有关结论的关键.

(2) 由问题 1、2 讨论所得到的结论，已经用黑体字表述为定理形式，它们都可称为垂径定理的推论.

(3) 课本中对于本节教学的过程设计，主要采用“问题驱动”的方法研究垂径定理及其推论，其中渗透了分类讨论的思想，同时对学生有引导探究学习和发展归纳能力的要求.教学时，可与圆心角、弧、弦、弦心距之间关系一节的教学类比，帮助学生进一步体验“问题驱动”的学习过程并把握学习要求.还要让学生认识到，圆的旋转对称性和轴对称性，是研究圆的其他有关性质的基础，前一节利用圆的旋转对称性得到了圆的一部分性质，本节利用圆的轴对称性充实了圆的有关性质.

再利用等腰三角形的“三线合一”性质，(1) 可由 $AM=BM$，推出 $CD\perp AB$；(2) 可由 $CD\perp AB$，推出 $AM=BM$.这时还可以进一步看到，CD 垂直平分弦 AB，因此 CD 一定经过圆心 O.

由此得到以下结论：

如果一条直线平分弦和弦所对的一条弧，那么这条直线经过圆心，并且垂直于这条弦.

如果一条直线垂直于弦，并且平分弦所对的一条弧，那么这条直线经过圆心，并且平分这条弦.

当条件为“直线经过圆心”“平分弦”时，还要指出这条弦不是直径，才能推出其余两组关系.

总结上面的讨论，可以概括为：

在圆中，对于某一条直线“经过圆心”“垂直于弦”“平分弦”“平分弦所对的弧”这四组关系中，如果有两组关系成立，那么其余两组关系也成立.

例题3 如图 27－23，已知⊙O 中，C 是$\overset{\frown}{AB}$的中点，OC 交弦 AB 于点 D，$\angle AOB=120^\circ$，$AD=8$.求 OA 的长.

解 ∵ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$，$OC$ 是半径，

∴ $\angle AOC=\angle BOC$，$OC\perp AB$，

得 $\angle AOC=\dfrac{1}{2}\angle AOB$，$\angle ODA=90^\circ$.

∵ $\angle AOB=120^\circ$，

∴ $\angle AOD=\dfrac{1}{2}\times 120^\circ=60^\circ$.

由 $\sin\angle AOD=\dfrac{AD}{AO}$，$AD=8$，

得 $\sin 60^\circ=\dfrac{8}{AO}$.

∴ $AO=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

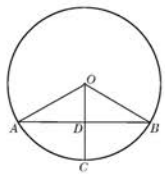


图 27－23

例题4 已知$\overset{\frown}{AB}$，用直尺和圆规平分这条弧.

作法 如图 27－24，

1. 联结 AB.

2. 作线段 AB 的垂直平分线 MN，垂足为点 C，MN 交$\overset{\frown}{AB}$于点 D.

$\overset{\frown}{AB}$被点 D 平分.

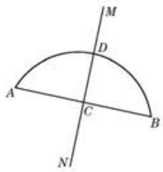


图 27－24

想一想

例题 4 中作图的依据是什么？

第一节 圆的基本性质 15

让学生推导问题 2(1) 和 (2) 的结论时，如有必要，可提示学生由已知两弧相等联想到“$AD=BD$”.

在解决问题 2 后，再指出 CD 一定经过圆心，然后概括所得结论.

例题 3

本题是垂径定理推论的初步运用.解题的关键是利用圆中等弧分别所对的圆心角相等以及垂径定理的推论，将问题化归为解直角三角形.要注意垂径定理推论的直接运用，不要再回到等腰三角形“三线合一”性质的运用；同时灵活运用锐角三角比知识，以简化计算过程.

例题 4

本题是运用垂径定理推论“等分一条已知弧”的作图题.教学时可先让学生提出作图的方法，再引导学生认识平分弧与平分线段的方法是一样的.

想一想

提醒学生要明确例题 4 中作图的依据，从中体会垂径定理推论的运用.

【注意事项】

(1) 课本中概括了结论：在圆中，对于某一条直线“经过圆心”“垂直于弦”“平分弦”“平分弦所对的弧”这四组关系中，如果其中有两组关系成立，那么其余两组关系也成立.这样的概括，有助于学生记忆垂径定理及其推论；同时要提醒学生注意“边款”中的说明.

(2) 通过例题 4 让学生知道：平分联结两点的线段或圆弧，只要作出联结这两点的线段的垂直平分线就可确定分点.还可结合本题，让学生进一步讨论如何找出一条弧所在圆的圆心位置，并说出作图的理由.

练习 27.3(2)

1. (1) $\overset{\frown}{BD}$所对的圆心角大小为 $120°$；

(2) $OC \perp BD$.平分一条弦所对的弧的直径垂直于这条弦.

2. 在圆砂轮片上任意画两条不平行的弦，再分别作这两条弦的垂直平分线，则这两条垂直平分线的交点就是圆心；然后画圆(略).

3. (1) $\angle AOB = 30°$；

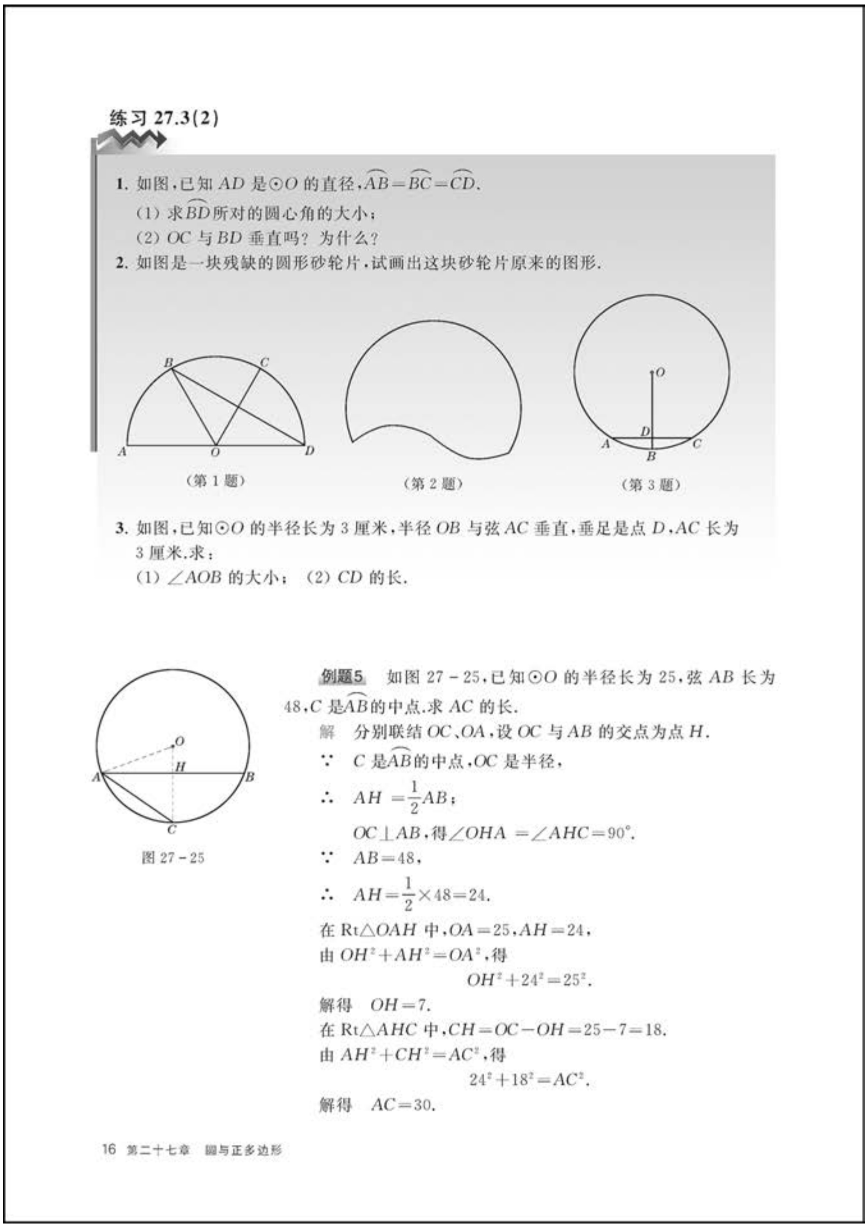
(2) $CD = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{3}{2}$厘米.

【本课重点】

运用垂径定理及其推论解决有关数学问题.

例题 5

本题是垂径定理的推论在几何计算中的运用.注意到已知条件中“C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点”联想“$OC \perp AB$”，从而适当添置辅助线，是解题的关键.通过本题让学生体会，在解决圆中有关线段长度的计算问题时，利用垂径定理的推论构造直角三角形再进一步解直角三角形，是一种有效的方法.



练习 27.3(2)

1. 如图，已知 AD 是$\odot O$ 的直径，$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$.
   (1) 求$\overset{\frown}{BD}$所对的圆心角的大小；
   (2) OC 与 BD 垂直吗？为什么？
2. 如图是一块残缺的圆形砂轮片，试画出这块砂轮片原来的图形.

(第 1 题)　　(第 2 题)　　(第 3 题)

3. 如图，已知$\odot O$ 的半径长为 3 厘米，半径 OB 与弦 AC 垂直，垂足是点 D，AC 长为 3 厘米.求：
   (1) $\angle AOB$ 的大小；(2) CD 的长.

图 27 - 25

例题5 如图 27 - 25，已知$\odot O$ 的半径长为 25，弦 AB 长为 48，C 是$\overset{\frown}{AB}$的中点.求 AC 的长.

解　分别联结 OC、OA，设 OC 与 AB 的交点为点 H.

∵　C 是$\overset{\frown}{AB}$的中点，OC 是半径，

∴　$AH = \dfrac{1}{2}AB$；

$OC \perp AB$，得$\angle OHA = \angle AHC = 90°$.

∵　$AB = 48$，

∴　$AH = \dfrac{1}{2} \times 48 = 24$.

在 Rt$\triangle OAH$ 中，$OA = 25$，$AH = 24$，

由 $OH^2 + AH^2 = OA^2$，得

$$OH^2 + 24^2 = 25^2.$$

解得　$OH = 7$.

在 Rt$\triangle AHC$ 中，$CH = OC - OH = 25 - 7 = 18$.

由 $AH^2 + CH^2 = AC^2$，得

$$24^2 + 18^2 = AC^2.$$

解得　$AC = 30$.

16　第二十七章　圆与正多边形

例题6 如图 27－26，已知 AB、CD 是 $\odot O$ 的弦，且 $AB=CD$，$OM\perp AB$，$ON\perp CD$，垂足分别是点 M、N，BA、DC 的延长线交于点 P.

求证：$PA=PC$.

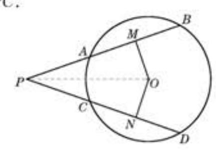


图 27－26

证明 联结 PO.

$\because$ $OM\perp AB$，$ON\perp CD$，

$\therefore$ $\angle OMP=90^\circ$，$\angle ONP=90^\circ$；

$AM=\frac{1}{2}AB$，$CN=\frac{1}{2}CD$.

$\because$ $AB=CD$，

$\therefore$ $OM=ON$，$AM=CN$.

$\because$ $PO=PO$，$OM=ON$，

$\therefore$ $\text{Rt}\triangle PMO\cong\text{Rt}\triangle PNO$，

得 $PM=PN$，

即 $PA+AM=PC+CN$.

$\therefore$ $PA=PC$.

例题7 如图 27－27，已知 $\odot O$ 的半径长 R 为 5，弦 AB 与弦 CD 平行，它们之间的距离为 7，AB 长 6.求弦 CD 的长.

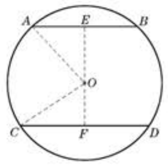


图 27－27

解 过点 O 作 $OE\perp AB$，垂足为点 E，延长 EO 交 CD 于点 F；分别联结 OA、OC.

$\because$ $AB\parallel CD$，

$\therefore$ $OF\perp CD$.

得 EF 的长是 AB 与 CD 之间的距离，即 $EF=7$；

且 $AE=\frac{1}{2}AB$，$CF=\frac{1}{2}CD$，$\angle OEA=90^\circ$，$\angle OFC=90^\circ$.

$\because$ $AB=6$，

$\therefore$ $AE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 6=3$.

在 $\text{Rt}\triangle OAE$ 中，$OA=R=5$，$AE=3$，

由 $AE^2+OE^2=OA^2$，得

$$3^2+OE^2=5^2.$$

解得 $OE=4$.

第一节 圆的基本性质 17

例题 6

本题是垂径定理在几何证明中的运用，有一定的综合要求.在证明思路的分析中，可引导学生由已知条件看到"$OM=ON$，$AM=CN$"，由待证结论想到只要证明"$PM=PN$"，从而想到联结 OP，构造两个全等三角形.

例题 7

本题是圆中平行弦的有关计算问题.解题的基本思路是构造直角三角形，利用勾股定理进行计算.作出线段 EF 来表示平行弦 AB 与 CD 之间的距离具有关键作用，要注意作辅助线的表达要求.

【注意事项】

(1) 完成了例题 6 的证明以后，可根据学生实际情况，再引导学生思考：如果 $\odot O$ 的弦 BA、DC 的延长线交于点 P，且 $PA=PC$，那么 $AB=CD$ 是否成立？证明你的结论.这是将例题 6 中的条件与结论对调后形成的问题，促进学生进行反思性学习，体会研究图形的方法，把握图形中有关元素的内在联系.

(2) 在例题 7 的学习小结中，要让学生注意：由于两平行弦间的距离大于圆的半径，因此这两条弦在圆心的两侧.再结合练习 27－3(3)第 3 题，可让学生进一步明确，如果两平行弦间的距离小于圆的半径，那么这两条弦可能在圆心的两侧，也可能在圆心的同侧.再指出当圆的半径长给定以后，这个圆的两平行弦的长及它们之间的距离这三个量中，知两个可求第三个.以此引导学生重视进行解题经验和规律的总结.

练习 27.3(3)

1. 提示：过点 O 作 $OM \perp AB$，$ON \perp CD$，M、N 为垂足，可知 $OM = ON$，得 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$，所以 $\overset{\frown}{ABD} = \overset{\frown}{CDB}$.

2. 由已知条件可知 $\triangle OEF$ 是等腰直角三角形，得 $EF = OF = 2$，于是 $DF = 5$，所以 $CD = 2DF = 10$.

3. AB 和 CD 之间的距离为 1 或 7.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OFC$ 中，

$OF = EF - OE = 7 - 4 = 3$，$OC = R = 5$.

由 $OC^2 = OF^2 + CF^2$，得

$$5^2 = 3^2 + CF^2.$$

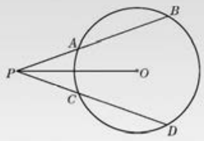
解得　$CF = 4$.

所以　$CD = 2CF = 2 \times 4 = 8$.

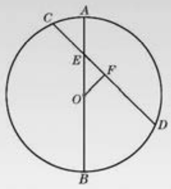
练习 27.3(3)

1. 已知：如图，PB、PD 与⊙O 分别交于点 A、B 和点 C、D，且 PO 平分 $\angle BPD$.

求证：$\overset{\frown}{ABD} = \overset{\frown}{CDB}$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知 AB 是⊙O 的直径，弦 CD 交 AB 于点 E，$\angle CEA = 45°$，$OF \perp CD$，垂足为点 F，$DE = 7$，$OF = 2$. 求 CD 的长.

3. 已知⊙O 的半径长为 5，弦 AB 与弦 CD 平行，$AB = 6$，$CD = 8$. 求 AB 与 CD 之间的距离.

Zhixian Yu Yuan
Yuan Yu Yuan De Weizhiguanxi

第二节　直线与圆、圆与圆的位置关系

27.4　直线与圆的位置关系

直线与圆的位置关系有几种情况？我们通过以下操作再进行观察.

操作

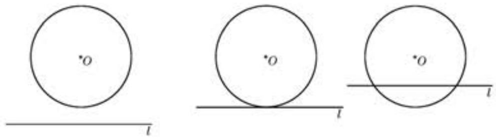
在纸上画一条直线，将一枚硬币放在纸上，从直线的一侧向另一侧缓慢移动.把硬币的边缘看作一个圆，在硬币移动的过程中，观察直线与圆的公共点的个数.

通过操作可以看到，直线与圆的公共点的个数有三种情况：没有公共点，有唯一公共点，有两个公共点.

当直线与圆没有公共点时，叫做直线与圆**相离**，如图 27－28(1)所示.

当直线与圆有唯一公共点时，叫做直线与圆**相切**，如图 27－28(2)所示.这时直线叫做圆的**切线**(tangent line)，唯一的公共点叫做**切点**.

当直线与圆有两个公共点(即交点)时，叫做直线与圆**相交**，如图 27－28(3)所示.这时直线叫做圆的**割线**(secant line).



(1)　　(2)　　(3)

图 27－28

因此，根据直线与圆公共点个数的情况，相应得到直线与圆的位置关系有三种：相离，相切，相交.

第二节　直线与圆、圆与圆的位置关系　19

操作

让学生通过操作和观察，直观地认识直线与圆的位置关系情况，在此基础上归纳它们的三种位置关系.

在操作活动中，要强调将硬币的边缘看作一个圆并从直线一侧向另一侧移动硬币，同时关注这个圆与直线的公共点个数.可利用多媒体演示这一操作过程；要引导学生将观察所见直线与圆的公共点个数情况进行分类，然后归纳直线与圆的三种位置关系.

直线与圆的三种位置关系是依据直线与圆的公共点个数情况来定义的，图 27－28 是这三种位置关系的直观表示.可提出问题：直线与圆的公共点有可能出现三个吗？怎样才能正确判断直线与圆的公共点有且只有一个？让学生讨论.

【教学目标】

(1) 经历有关直线与圆三种位置关系的操作和归纳过程，体会运动变化、分类讨论的思想.

(2) 初步掌握直线与圆的各种位置关系及其相应数量关系的特征，通过将直线与圆的各种位置关系转化为相应的数量关系，体会数量分析的研究方法以及量变引起质变的观点.

(3) 会进行“直线与圆的位置关系”“圆心到直线的距离与圆的半径长的大小关系”这两者之间的相互转化，并能初步用于解决有关数学问题.

(4) 知道圆的切线的判定定理，会画经过圆上一点的圆的切线.

思考

利用图形的直观和“边款”的提示，引导学生思考直线与圆的位置关系同圆的半径长 R、圆心到直线的距离 d 这两个量的大小关系之间的联系，用定量分析的方法对直线与圆的位置关系进行研究.

对直线与圆的位置关系相应的数量关系特征进行分析时，不仅要指出由直线与圆的位置关系可推出 d 与 R 的大小关系，还要指出由 d 与 R 的大小关系可确定直线与圆的位置关系. 然后，将直线与圆的位置关系用相应的数量关系进行描述；并进一步指出，符号“$\Leftrightarrow$ ”的左右两边可互相推出，从左推出右表明了直线与圆的不同位置关系分别所具有的性质，从右推出左表明了判定直线与圆的不同位置关系的方法.

将“$d=R$ ”用图形表示出来，可归纳出直线与圆相切，从而得到切线的判定定理.

一个圆的位置和大小，由圆心和半径长确定；直线与圆的位置关系，点与圆心和半径长有关.

思考

如图 27－29，已知$\odot O$ 的半径长为 R，圆心 O 到直线 l 的距离为 d. 直线与圆的三种位置关系与 R、d 两者的大小关系之间有着怎样的联系？

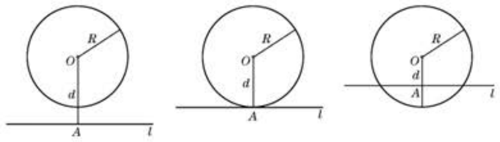


图 27－29

当直线 l 与$\odot O$ 相离时，l 上的点都在$\odot O$ 外，则 $d>R$. 反过来，当 $d>R$ 时，l 上的点都在$\odot O$ 外，则直线 l 与$\odot O$ 相离.

当直线 l 与$\odot O$ 相切时，切点 A 是它们唯一的公共点，则 $OA=R$；而 l 上的其他所有点都在$\odot O$ 外，即其他的点与圆心 O 的距离都大于 R，所以 $d=R$. 反过来，当 $d=R$ 时，作 $OA\perp l$，垂足为点 A，则 $OA=R$；而 l 上除 A 外的其他点与圆心 O 的距离都大于 R，即其他所有点都在$\odot O$ 外，则直线 l 与$\odot O$ 相切于点 A.

当直线 l 与$\odot O$ 相交时，l 上两交点间的点在圆内，则 $d<R$. 反过来，当 $d<R$ 时，l 上一定有些点在圆内，则直线 l 与$\odot O$ 相交.

因此，直线与圆的位置关系可以用数量关系来描述：

如果$\odot O$ 的半径长为 R，圆心 O 到直线 l 的距离为 d，那么

直线 l 与$\odot O$ 相交 $\Leftrightarrow 0\leqslant d<R$；

直线 l 与$\odot O$ 相切 $\Leftrightarrow d=R$；

直线 l 与$\odot O$ 相离 $\Leftrightarrow d>R$.

当 $d=0$ 时，直线 l 经过圆心 O（l 与$\odot O$ 相交）.

通过上面直线与$\odot O$ 相切时对 $d=R$ 的分析，还可以归纳以下定理：

切线的判定定理　**经过半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线.**

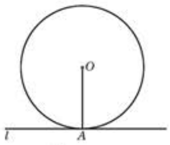


图 27－30

我们来证明这个定理.

已知：如图 27－30，OA 是$\odot O$ 的半径，直线 l 与 OA 垂直，垂足是点 A.

求证：直线 l 是$\odot O$ 的切线.

20 第二十七章　圆与正多边形

【注意事项】

（1）“直线与圆的位置关系”与“点与圆的位置关系”有密切联系，有关内容的编排方式也相类似. 在教学中，可先让学生动手操作，以图形运动的手段，直观展现知识发生的过程，增强教学的直观性和趣味性，并猜测直线与圆可能存在的位置关系；然后，归纳并确定直线与圆具有相离、相切、相交三种位置关系. 在对于直线与圆位置关系的相应数量关系的研究中，鉴于学生已有将点与圆的位置关系中转化为圆的半径、点到圆心的距离两量大小关系的认知基础，所以本课可用类比迁移的方法实施教学.

（2）对于切线的判定定理，本课只要求学生知道这个定理并会用于画图，不涉及定理的其他运用. 在九年级数学拓展Ⅱ课本中，安排有切线的判定定理及性质定理的学习内容.

证明：∵ 直线 $l \perp OA$，垂足是点 A，

∴ 半径 OA 表示点 O 到直线 l 的距离.

∵ 圆心 O 到 l 的距离等于半径长，

∴ 直线 l 是⊙O 的切线.

例题1 经过⊙O 上一点 M 作⊙O 的切线.

作法 1. 联结 OM.

2. 过点 M 作直线 l 垂直于 OM.

则直线 l 就是所求作的切线.

请同学们自己在图 27－31 中完成作图.

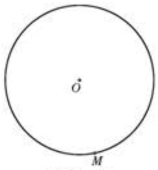


图 27－31

例题2 如图 27－32，已知 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=3$，$BC=4$.

(1) 圆心为点 C、半径长 R 为 2 的圆与直线 AB 有怎样的位置关系？

(2) 圆心为点 C、半径长 R 为 4 的圆与直线 AB 有怎样的位置关系？

(3) 如果以点 C 为圆心的圆与直线 AB 有公共点，那么⊙C 的半径 R 的取值范围是什么？

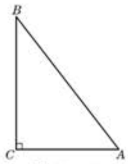


图 27－32

解 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=3$，$BC=4$，

由勾股定理，得 $AB=5$.

设点 C 到 AB 的距离为 d，则

$$\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot d,$$

即

$$\frac{1}{2}\times3\times4=\frac{1}{2}\times5d.$$

解得 $d=2.4$.

(1) 因为 $2.4>2$，即 $d>R$，

所以，半径长 R 为 2 的⊙C 与直线 AB 相离.

(2) 因为 $2.4<4$，即 $d<R$，

所以，半径长 R 为 4 的⊙C 与直线 AB 相交.

(3) 如果以点 C 为圆心的圆与直线 AB 有公共点，那么⊙C 与直线 AB 相切或相交.

所以，当 $R\geqslant2.4$ 时，⊙C 与直线 AB 有公共点 .

关于切线判定定理的证明，只要求学生了解.

例题 1

本题指明了经过圆上一点画圆的切线的方法，画图的依据是切线的判定定理.

例题 2

本题是关于直线与圆位置关系的判定方法的运用.

为求圆心到直线的距离，即求直角三角形 ABC 中顶点 C 到斜边 AB 的距离，这里采用了面积法.要让学生掌握这种求距离的方法.

实际上，表示顶点 C 到斜边 AB 的距离的垂线段，就是斜边上的高，这一垂线段具有双重意义.

练习 27.4

1. (1) 直线 l 和圆有两个公共点；

(2) 直线 l 和圆有唯一的公共点；

(3) 直线 l 和圆没有公共点.

理由略.

2. $R>5$.

3. (1) $0<r<\frac{12}{5}$(厘米)；

(2) $r>\frac{12}{5}$(厘米).

【本课重点】

探讨圆与圆的各种位置关系情况，引进圆与圆位置关系的有关概念，揭示两圆各种位置关系在这两圆的圆心距和半径长之间的数量关系上所体现出来的特征.

操作

让学生通过操作和观察，直观地认识圆与圆的位置关系情况，在此基础上归纳两圆的各种位置关系.

在纸上画一个半径长为2.5厘米的圆和一条过圆心的直线，是要使所画的圆比硬币大，使硬币的移动过程更简明，便于学生观察和归纳两圆的位置情况.要强调将硬币的边缘看作一个圆和着重观察两圆的公共点个数.

练习 27.4

1. 已知圆的半径长 R 等于 4，根据下列圆心到直线 l 的距离 d 的大小，指出直线 l 和圆有几个公共点，并说明理由：
(1) $d=3$； (2) $d=4$； (3) $d=5$.
2. 已知直线 l 与半径长为 R 的⊙O 相交，且点 O 到直线 l 的距离为 5，求 R 的取值范围.
3. 已知 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=3$ 厘米，$BC=4$ 厘米.
(1) 如果以点 C 为圆心的圆与斜边 AB 所在的直线没有公共点，那么⊙C 的半径的取值范围是什么？
(2) 如果以点 C 为圆心的圆与斜边 AB 所在的直线有两个公共点，那么⊙C 的半径的取值范围是什么？

27.5 圆与圆的位置关系

操作

在纸上画一个半径为 2.5 厘米的圆，再过圆心画一条直线.把一枚硬币放在所画圆的外部，使硬币的中心大致在所画的直线上.然后，将硬币沿着直线从圆的外部到内部、再向外部缓慢移动.把硬币的边缘看作一个圆，在硬币移动的过程中，观察两个圆的公共点的个数.

想一想，两个不同的圆的公共点可能有三个吗？

通过操作可以看到，两个圆的公共点的个数有三种情况：没有公共点，有唯一的公共点，有两个公共点.

当硬币的边缘与所画的圆没有公共点时，这枚硬币可能在圆外，也可能在圆内.

22 第二十七章 圆与正多边形

【教学目标】

(1) 经历圆与圆的位置关系的探索过程，进一步领会运动变化、类比、分类等数学思想，体会事物之间相互联系、量变引起质变等辩证唯物主义观点.

(2) 理解圆与圆的位置关系及其有关概念，初步掌握圆与圆各种位置关系相应的数量关系的特征，会进行“圆与圆的位置关系”“两圆圆心距与这两圆半径长之和或差的大小关系”这两者之间的相互转化，并能初步运用这些知识解决有关问题.

(3) 初步掌握相交或相切两圆的连心线性质定理.

(4) 在研究两圆位置关系以及有关知识运用的过程中，发展分析归纳、抽象概括、推理判断和数学应用能力.

【注意事项】

(1) 在学生通过操作和观察，明确了两圆公共点的个数情况后，可提出“边款”中的问题让学生讨论.由于三角形的外接圆只有一个，所以两个不同的圆的公共点不可能有三个.

(2) 操作活动中所涉及的两圆的大小不同，有利于归纳两圆的各种位置情况.关于两个等圆的位置关系的讨论，可在后面进行补充说明.另外，相交两圆的圆心可能在这两圆公共弦的两侧，也可能在同侧，可补充图示进行说明.

当硬币的边缘与所画的圆有唯一公共点时，除这公共点外，这枚硬币可能在圆外，也可能在圆内.

归纳两圆的位置关系的特征，如图 27－33 所示.

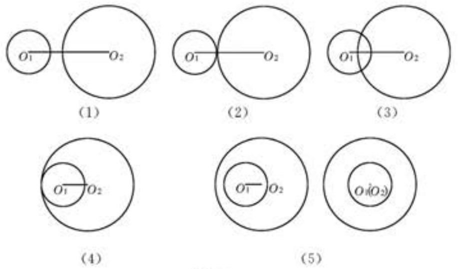


图 27－33

图 27－33(1)中，两个圆没有公共点，并且每个圆上的点都在另一个圆的外部，叫做这两个圆**外离**.

图 27－33(2)中，两个圆有唯一的公共点，并且除了这个公共点以外，每个圆上的点都在另一个圆的外部，叫做这两个圆**外切**.这个唯一的公共点叫做**切点**.

图 27－33(3)中，两个圆有两个公共点，叫做这两个圆**相交**.

图 27－33(4)中，两个圆有唯一的公共点，并且除了这个公共点以外，一个圆上的点都在另一个圆的内部，叫做这两个圆**内切**.这个唯一的公共点叫做**切点**.

图 27－33(5)中，两个圆没有公共点，并且一个圆上的点都在另一个圆的内部，叫做这两个圆**内含**.当两个圆的圆心重合时，称它们为**同心圆**.

一般地，两圆的位置关系有五种情况：外离、外切、相交、内切、内含.两个圆外离或内含时，也可以叫做两圆相离；两个圆外切或内切时，也可以叫做两圆相切.

半径相等的两个圆不可能内切，也不可能内含.

两个圆的圆心之间的距离叫做**圆心距**.经过两个圆的圆心的直线叫做**连心线**.

问题

两圆的位置关系与由这两圆的半径长和圆心距构成的数量关系之间有着怎样的联系？

由图 27－33 可见，$\odot O_1$、$\odot O_2$的位置关系与两圆半径的和或差相对于圆心距 d 的大小有关.

第二节　直线与圆、圆与圆的位置关系　23

关于两圆位置关系情况的归纳，可先让学生类比直线与圆的位置关系，初步概述为相离、相切、相交这样三种；然后引导学生进一步分析两圆相离或相切时的位置特征，分别引出“外离、内含”和“外切、内切”，再明确两圆的位置关系有五种情况，并用图形语言表达出来.在直观认识的基础上，给出两圆各种位置关系的定义及有关概念.

在“边款”中指出了两个等圆的位置关系中不存在内切和内含这两种情况，可通过操作演示进行说明.

引进圆心距和连心线的概念.要让学生注意，圆心距是两点距离，连心线是一条直线.

问题

类比关于直线与圆的位置关系的讨论，利用图形的直观，引导学生探讨两圆的各种位置关系与这两圆的圆心距和半径长之间相应的数量关系，并用文字语言与符号语言表述.

【注意事项】

(1) 在两圆位置关系的教学中，要重视学生的操作、观察活动，重视学生在直线与圆位置关系的研究中的经验.可让学生先根据两圆公共点的个数情况归纳出两圆的位置关系可能相离、相切或相交；然后进一步观察小圆的整体在大圆的外部还是内部(公共点除外)，发现两圆相离或相切时各有两种情况，从而形成对于两圆位置关系的完整认识.关于两圆各种位置关系的定义，可让学生先说，然后再加以规范.要让学生动口、动手、动脑，进行观察、思考、归纳，经历对于两圆位置关系的探究和概括过程，在获得知识的同时发展能力.

(2)鉴于学生已有利用圆心到直线的距离与圆的半径长这两量的大小关系描述直线与圆的位置关系的认知基础，因此可运用类比、迁移的方法对两圆的位置关系进行定量分析.“问题”栏目中问题的提出，可参考“边款”中的说明进行引导；在指导学生讨论问题时，可利用图 27－33 中的图形，从两圆外离着手，让学生找出表示圆心距的线段及两圆在这线段上的半径，归纳出圆心距大于两圆半径长之和的结论；再顺次对两圆外切、相交、内切、内含的位置情况，类似地分析圆心距与这两圆的半径长之和或差之间的大小关系；最后，归纳整理关于这一问题讨论的结论.

关于两圆各种位置关系和相应的数量关系的特征的导出，主要是利用图 27 - 33 的直观性，让学生确认有关结论.具体的解说，可根据学生学习的实际情况处理，一般只要参照“边款”中的提示作简要说明.

注意当 $R_1=R_2$ 时，两圆不可能内切或内含；当 $R_1\neq R_2$ 且 $d=0$ 时，两圆是同心圆.

例题 1

利用两圆的圆心距与半径长的数量关系式，可判断两圆的位置关系，本题是这一判定方法的直接运用.要注意判断过程的规范表达；要强调两圆的位置关系有五种情况，题(1)、题(3)的结论不要笼统地表述为相切和相离.

如果两圆的半径长分别为 R_1 和 R_2，圆心距为 d，那么两圆的位置关系可用 R_1、R_2 和 d 之间的数量关系表达，具体表达如下：

两圆外离 $\Leftrightarrow d>R_1+R_2$；
两圆外切 $\Leftrightarrow d=R_1+R_2$；
两圆相交 $\Leftrightarrow |R_1-R_2|<d<R_1+R_2$；
两圆内切 $\Leftrightarrow 0<d=|R_1-R_2|$；
两圆内含 $\Leftrightarrow 0\leqslant d<|R_1-R_2|$.

当两圆内切时，两圆的半径长不可能相等，因此必然有 $d>0$.

推导时，通常利用两圆的公共点或连心线与两圆的交点，作出两圆的半径；再找出表示两半径长的和或差的线段(或折线)；然后与两个圆心间的线段进行比较、分析.

两圆的半径长、圆心距之间的数量关系，是两圆位置关系的代数表达形式.这些数量关系式可借助于图形的直观性来推导.如对于两圆相交的情况，由图 27 - 34，利用“三角形任意两边的和大于第三边，任意两边的差小于第三边”，就能得到 R_1、R_2、d 之间的数量关系了.

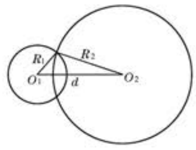


图 27 - 34

例题1 已知$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的半径长分别为 3 和 4，根据下列条件判断$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的位置关系：

(1) $O_1O_2=7$； (2) $O_1O_2=4$； (3) $O_1O_2=0.5$.

解 分别用 R_1、R_2、d 表示$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径长及圆心距.

(1) 由 $R_1=3$，$R_2=4$，得 $R_1+R_2=7$.

$\because$ $d=7$，

$\therefore$ $d=R_1+R_2$.

所以，$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的位置关系是外切.

(2) 由 $R_1=3$，$R_2=4$，得 $|R_1-R_2|=1$，$R_1+R_2=7$.

$\because$ $d=4$，

$\therefore$ $|R_1-R_2|<d<R_1+R_2$.

所以，$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的位置关系是相交.

(3) 由 $R_1=3$，$R_2=4$，得 $|R_1-R_2|=1$.

$\because$ $d=0.5$，

$\therefore$ $d<|R_1-R_2|$.

所以，$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的位置关系是内含.

24 第二十七章 圆与正多边形

【注意事项】

(1) 将两圆的各种位置关系用这两圆的圆心距 d 与半径长 R_1、R_2 之间的数量关系式分别表示时，直接运用了符号“$\Leftrightarrow$ ”，这里不必进行严格的说理，只要指出在这一表达形式中，从左推出右表明了两圆的不同位置关系分别所具有的性质，从右推出左表明了判定两圆不同位置关系的方法.

(2) 探讨两圆相交相应的数量关系特征时，利用图 27 - 34 比图 27 - 33(3)更加简明.在整理两圆各种位置关系相应的数量关系特征时，可引导学生从非负实数 d 连续变化去分析，在数轴 OX 的正半轴上取点 A、B 分别表示数 $|R_1-R_2|$ 和 R_1+R_2，则数轴上有线段 OA、线段 AB 和射线 BX.当表示非负实数 d 的点位于射线 BX(点 B 除外)或点 B、线段 AB(点 A、B 除外)、点 A、线段 OA(点 A 除外)上时，这两圆的位置关系依次是外离或外切、相交、内切、内含.利用图示，可帮助学生记忆.

(3) 同心圆是圆心相同、半径长不同的几个圆.两圆为同心圆是两圆内含的一种特殊情况.

例题2 如图 27 - 35，已知$\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 两两外切，且 $AB=3$ 厘米，$BC=5$ 厘米，$AC=6$ 厘米，求这三个圆的半径长.

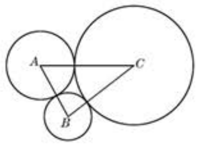


图 27 - 35

解 设$\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 的半径长分别为 x 厘米、y 厘米、z 厘米.

∵ $\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 两两外切，

∴ $AB=x+y$，$BC=y+z$，$CA=z+x$.

根据题意，得关于 x、y、z 的方程组

$$\begin{cases} x+y=3, \\ y+z=5, \\ z+x=6. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=1, \\ z=4. \end{cases}$

所以，$\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 的半径长分别为 2 厘米、1 厘米、4 厘米.

练习 27.5(1)

1. 判断题（正确的打“√”，错误的打“×”）：
   (1) 已知$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径长分别为 R_1、R_2，圆心距为 d，如果 $R_1=1$，$R_2=2$，$d=0.5$，那么$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 相交. （ ）
   (2) 已知$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径长分别为 R_1、R_2，如果 $R_1=5$，$R_2=3$，且$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 相切，那么圆心距 $d=8$. （ ）
   (3) 如果两圆相离，那么圆心距一定大于 0. （ ）
2. 已知$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的半径长分别为 1 和 3，根据下列条件判断$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的位置关系：
   (1) $O_1O_2=5$； (2) $O_1O_2=4$； (3) $O_1O_2=3$；
   (4) $O_1O_2=2$； (5) $O_1O_2=1$.
3. 已知两圆内切，圆心距为 2 厘米，其中一个圆的半径长为 3 厘米，求另一个圆的半径长.
4. 已知两圆的直径长分别为 6 厘米和 8 厘米，圆心距为 14 厘米，试说明这两个圆的位置关系.

例题 2

本题是利用两圆外切相应的数量关系式进行几何计算.要告诉学生三个圆“两两外切”的含义，这是指三个圆中每两个圆都外切；要让学生体会方程思想，通过“设元”和列方程组来求解，可简化计算过程.

练习 27.5(1)

1. (1) ×；(2) ×；(3) ×.

2. (1) 外离；(2) 外切；(3) 相交；(4) 内切；(5) 内含.

3. 5 厘米或 1 厘米 .

4. 外离.

【本课重点】

运用两圆位置关系的知识解决有关数学问题.

例题 3

本题是相切两圆相应的数量关系式的基本运用.

要指导学生正确理解概念,注意审题.从两圆相切,知道这两圆可能外切也可能内切,注意分类讨论.

例题 4

本题是例题 2 的变式.如果三个圆两两外切,那么以这三个圆的圆心为顶点的三角形,其三边长分别等于其中两圆的半径长的和.根据已知条件,可作出一个三角形从而确定这三个圆的圆心的位置.

例题3　已知⊙A 和⊙B 相切,圆心距 d 为 10 厘米,其中⊙A 的半径长是 4 厘米,求⊙B 的半径长.

解　设⊙B 的半径长为 r 厘米.

(1) 如果⊙A 和⊙B 外切,那么

$$d=4+r=10.$$

得　$r=6$.

(2) 如果⊙A 和⊙B 内切,那么

$$d=|r-4|=10.$$

得　$r=14$　或　$r=-6$(舍去).

所以,⊙B 的半径长为 6 厘米或 14 厘米.

例题4　分别以 1 厘米、1.5 厘米、2 厘米为半径长作圆,使它们两两外切.

分析　假定符合条件的三个圆已作出,圆心分别为 O_1、O_2、O_3.设⊙O_1、⊙O_2、⊙O_3 的半径长分别为 1 厘米、1.5 厘米和 2 厘米.由于这三个圆两两外切,可知

$$O_1O_2=1+1.5=2.5 \text{ 厘米};$$
$$O_2O_3=1.5+2=3.5 \text{ 厘米};$$
$$O_1O_3=1+2=3 \text{ 厘米}.$$

由于$\triangle O_1O_2O_3$ 的三边长确定,$\triangle O_1O_2O_3$ 就可以作出.

因此可利用$\triangle O_1O_2O_3$ 来定圆心,然后作圆.

作法　如图 27－36 所示,

1. 作$\triangle O_1O_2O_3$,使得 $O_1O_2=2.5$ 厘米,$O_2O_3=3.5$ 厘米,$O_1O_3=3$ 厘米.

2. 分别以 O_1、O_2、O_3 为圆心,相应地分别以 1 厘米、1.5 厘米、2 厘米为半径长,作⊙O_1、⊙O_2、⊙O_3.

⊙O_1、⊙O_2、⊙O_3 就是所求作的圆.

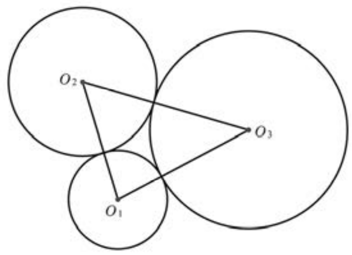


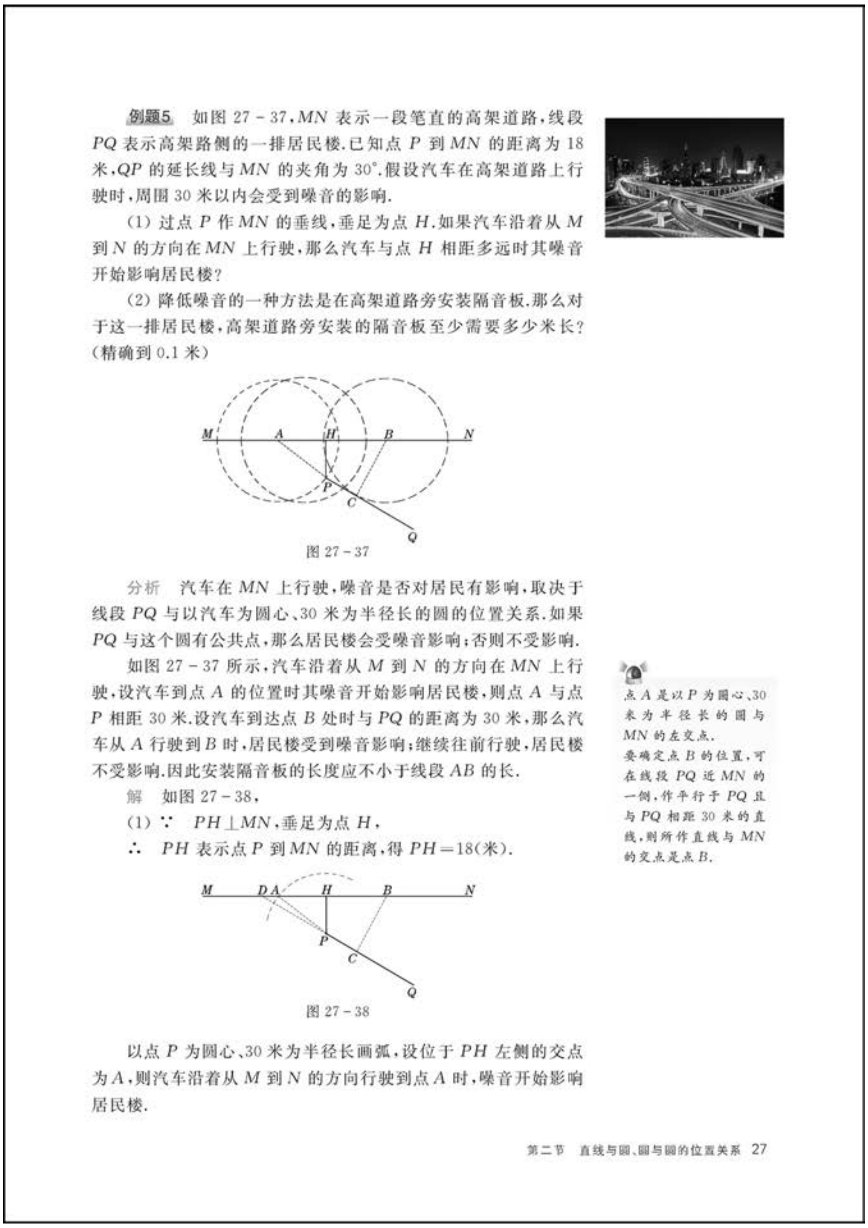
图 27－36

26 第二十七章　圆与正多边形

【注意事项】

(1) 在例题 3 的教学中,要让学生通过解题体会到,由两圆外切(或内切),可知这两圆的圆心距与这两圆半径长的和(或差的绝对值)相等;于是在圆心距、两圆半径长这三个量中,知其二可求第三个.

(2) 在例题 4 的教学中,要指出:本题是一道几何作图题,其中“分析”是解题过程中必不可少的步骤,而“假定符合条件的某图形已作出”是分析的出发点,是作图语言中的“范句”;但这一“分析”过程,不要求学生作书面表达.



例题5 如图 27 - 37，MN 表示一段笔直的高架道路，线段 PQ 表示高架路侧的一排居民楼.已知点 P 到 MN 的距离为 18 米，QP 的延长线与 MN 的夹角为 30°.假设汽车在高架道路上行驶时，周围 30 米以内会受到噪音的影响.

(1) 过点 P 作 MN 的垂线，垂足为点 H.如果汽车沿着从 M 到 N 的方向在 MN 上行驶，那么汽车与点 H 相距多远时其噪音开始影响居民楼?

(2) 降低噪音的一种方法是在高架道路旁安装隔音板.那么对于这一排居民楼，高架道路旁安装的隔音板至少需要多少米长?(精确到 0.1 米)

图 27 - 37

分析 汽车在 MN 上行驶，噪音是否对居民有影响，取决于线段 PQ 与以汽车为圆心、30 米为半径长的圆的位置关系.如果 PQ 与这个圆有公共点，那么居民楼会受噪音影响；否则不受影响.

如图 27 - 37 所示，汽车沿着从 M 到 N 的方向在 MN 上行驶，设汽车到点 A 的位置时其噪音开始影响居民楼，则点 A 与点 P 相距 30 米.设汽车到达点 B 处时与 PQ 的距离为 30 米，那么汽车从 A 行驶到 B 时，居民楼受到噪音影响；继续往前行驶，居民楼不受影响.因此安装隔音板的长度应不小于线段 AB 的长.

点 A 是以 P 为圆心、30 米为半径长的圆与 MN 的左交点.
要确定点 B 的位置，可在线段 PQ 近 MN 的一侧，作平行于 PQ 且与 PQ 相距 30 米的直线，则所作直线与 MN 的交点是点 B.

解 如图 27 - 38.

(1) ∵ $PH \perp MN$，垂足为点 H，

∴ PH 表示点 P 到 MN 的距离，得 $PH=18$(米).

图 27 - 38

以点 P 为圆心、30 米为半径长画弧，设位于 PH 左侧的交点为 A，则汽车沿着从 M 到 N 的方向行驶到点 A 时，噪音开始影响居民楼.

第二节 直线与圆、圆与圆的位置关系 27

例题 5

本题是有实际背景的数学应用题，综合运用了与圆有关的知识和解直角三角形的知识，整合了环境保护教育的要求.

题(1)是为解决题(2)进行铺垫而设计的，其实是一个台阶.尽管如此，解答本题仍有一定的难度. 教学时可根据学生学习的实际情况进行处理，可采用教师讲解为主的方法，或进一步铺设台阶、分段解决问题；也可改用简单一些的实际应用问题.

在分析解题思路时，首先要搞清楚“汽车行驶时周围 30 米以内会受到噪音的影响”的含义和在什么情况下行驶在高架道路上的汽车的噪音会影响居民楼；然后将这个实际问题抽象为一个数学问题，把题(1)转化为求线段 AH 的长，题(2)转化为求线段 AB 的长.

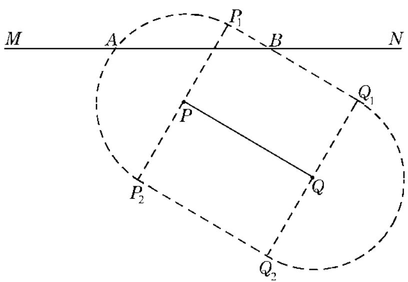
在题(1)的基础上解题(2)，关键是确定点 B 的位置.在分析时只需在图上设定点 B，而实际上可用作图方法确定点 B 的位置，“边款”中对此作了说明.

【注意事项】

(1) 例题 5 是初中数学中体现数学建模思想的一个实际应用题，通过本题教学，让学生初步了解数学建模的思想和过程.但对有关建模的术语及基本方法，教学时不必进行解说.图 27 - 37 是例题 5 所述实际问题抽象为数学问题的图示，而图 27 - 38 是解题时使用的图，其中 PD、AP、BC 是辅助线.

(2) 将例题 5 化为数学问题后，题(1)(2)分别是求线段 AH、AB 的长.对题(1)求解的分析，要让学生注意 PH 是表示点 P 到直线 MN 的距离的线段，而 A、P 两点的距离等于 30 米；为求 AH 的长，只要联结 AP，构造直角三角形 APH 就能解决.对题(2)求解的分析，先要明确为求 AB 的长只需求线段 HB 的长；再让学生注意点 B 到直线 PQ 的距离等于 30 米，QP 的延长线与 MN 的夹角等于 30°，由此考虑构造直角三角形 DCB，又得直角三角形 DPH，而这两个直角三角形都可解；然后指出只需求出线段 DH 和 DB 的长就能解决问题.

(3) 关于例题 5 的解题思路分析，也可从“汽车周围 30 米以内会受到噪音的影响”着眼，先画出汽车噪音会影响居民楼的区域，再探索解法.如图，作矩形 $P_1P_2Q_2Q_1$，它以 PQ 为对称轴，过点 P 且垂直于 PQ 的边 P_1P_2 长 60 米，边 Q_1Q_2 过点 Q；再分别以 P_1P_2、Q_1Q_2 为直径在矩形外作半圆，则由这两个半圆及矩形所成图形的内部(含边界)是噪音会影响居民楼的区域.设高架道路 MN 在这个区域内的部分为线段 AB，可知题(2)即求 AB 的长.



(4) 在例题 5 中，如果不设置题(1)，那么这个问题更具有实际意义，也更具有挑战性.但问题的难度太大，不适宜用于课堂教学.关于数学实际应用的问题，要注意控制难度.

练习 27.5(2)

1. 相离.

2. 2 或 16.

3. 相交.

【本课重点】

引进相交两圆的连心线和相切两圆的连心线的性质定理,并进行初步运用.

复习"圆是轴对称图形"的性质,由此得到"两圆的连心线是这两个圆所成图形的对称轴",从而导出相交两圆的连心线的性质定理.

联结 PA,得$\angle PHA=90°$,$PA=30$(米).

在 Rt$\triangle PAH$ 中,由勾股定理,得 $AH=24$(米).

答:当汽车与点 H 相距 24 米时,其噪音开始影响居民楼.

(2) 设 MN 上一点 B 与直线 PQ 的距离为 30 米,则汽车再往前行驶时,PQ 与以汽车为圆心、30 米为半径长的圆相离,噪音不影响居民楼.

过点 B 作 $BC\perp PQ$,垂足为点 C,得$\angle BCP=90°$,$BC=30$ 米.

设 QP 的延长线与 MN 相交于点 D,则$\angle PDH=30°$.

在 Rt$\triangle DPH$ 中,由 $\cot\angle PDH=\dfrac{DH}{PH}$,得

$$DH=PH\cdot\cot30°=18\sqrt{3}(米).$$

在 Rt$\triangle DCB$ 中,$DB=2BC=60$(米),

则 $HB=DB-DH=60-18\sqrt{3}\approx28.9$(米),

$AB\approx24+28.9=52.9$(米).

答:这段高架路旁安装的隔音板至少需要 52.9 米长.

练习 27.5(2)

1. 已知$\triangle ABC$ 中,$AB=AC=2$,$\angle B=30°$,那么以顶点 B 为圆心、$\sqrt{2}$ 为半径长的圆与直线 AC 的位置关系是什么?
2. 已知$\odot O$ 的半径长 R 为 7,直线 l_1 平行于直线 l_2,且 l_1 与$\odot O$ 相切,圆心 O 到 l_2 的距离为 9,求 l_1 与 l_2 之间的距离.
3. 已知两圆的半径长之比是 5∶2,且当两圆内切时圆心距为 9 厘米,那么当两圆的圆心距增大到 18 厘米时,这两圆的位置关系是什么?

圆是轴对称图形,经过圆心的任意一条直线都是圆的对称轴.由此可知,两圆的连心线是这两个圆所成图形的对称轴.

如果两个圆相交,那么它们的两个交点关于连心线对称.于是,可推出以下定理:

定理 相交两圆的连心线垂直平分两圆的公共弦.

我们来证明这个定理.

已知:如图 27-39,$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 相交于点 A 和点 B.

求证:直线 O_1O_2 垂直平分公共弦 AB.

28 第二十七章 圆与正多边形

【注意事项】

"相交两圆的两个交点关于连心线对称",这是引出相交两圆的连心线性质定理的认识基础.这个事实可用"翻折"加以说理:"沿着连心线将其一侧两个半圆向另一侧翻折,则一侧的两个半圆分别与另一侧相应的两个半圆重合,因此一侧两个半圆的交点与另一侧两个半圆的交点重合.这就是说,相交两圆的两个交点关于连心线对称".

"两点关于某一直线对称"与"某一直线垂直平分联结两点的线段"其实是一回事.相交两圆的连心线性质定理,可由 A、B 两点关于直线 O_1O_2 对称直接得到;这里考虑到"轴对称"概念是在实验几何中所学的内容,因此再对这个定理进行了演绎证明.

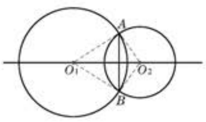


图 27－39

证明：分别联结 AO_1、BO_1、AO_2、BO_2.

∵ $AO_1=BO_1$，

∴ 点 O_1 在线段 AB 的垂直平分线上.

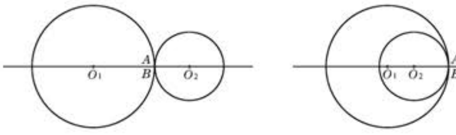
同理，点 O_2 在线段 AB 的垂直平分线上.

所以，直线 O_1O_2 是线段 AB 的垂直平分线，即直线 O_1O_2 垂直平分公共弦 AB.

思考

在图 27－39 中，固定⊙O_1，将⊙O_2 向右移动并使直线 O_1O_2 的位置保持不变.在移动过程中，可见 A、B 两点越来越靠近.当两圆移动到外切的位置时（如图 27－40(1)），A、B 两点一定重合吗？切点与直线 O_1O_2 的位置关系是什么？

同样地，将⊙O_2 向左移动.当两圆移动到内切的位置时（如图 27－40(2)），A、B 两点一定重合吗？切点与直线 O_1O_2 的位置关系是什么？



(1)　　　(2)

图 27－40

因为直线 O_1O_2 是两圆的公共对称轴，所以两圆相切时，切点一定在直线 O_1O_2 上.否则，根据图形关于直线 O_1O_2 成轴对称，就会出现这两圆有两个公共点的错误.

由此可归纳出以下定理：

定理　相切两圆的连心线经过切点.

例题6　已知：如图 27－41，⊙O_1 和⊙O_2 相交于 A、B 两点，线段 O_1O_2 的延长线交⊙O_2 于点 C，CA、CB 的延长线分别交⊙O_1 于点 D、E.

求证：$AD=BE$.

证明　联结 AB.

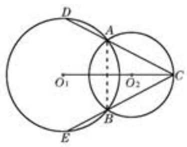


图 27－41

第二节　直线与圆、圆与圆的位置关系　29

关于相交两圆的连心线性质定理的证明，可让学生先想先说，然后进行整理和规范化.

思考

引导学生通过实验和观察，发现相切两圆的切点在连心线上.

关于相切两圆的连心线性质定理的证明，这里不作教学要求.在“边款”中，对相切两圆的切点在连心线上进行了说理，其思路是“反证法”，学生只要了解.

例题 6

本题是相交两圆连心线性质定理的初步应用. 可让学生先思考和讨论，提出证题思路，教师再进行指导和评议.

如需教师分析证题思路，可先指出 AD、BE 是⊙O_1 的两条弦，因此只需证明它们的弦心距相等；再让学生注意这两弦的弦心距就是点 O_1 到∠DCE 两边的距离，于是只需证明 CO_1 是∠DCE 的平分线；然后联想相交两圆的连心线的性质（或考虑其他途径），进行推导.

可进一步指出，两圆相交时，添加公共弦是解决有关问题的常用辅助线.

【注意事项】

在相切两圆的连心线性质定理的教学中，只要学生能直观地认定切点在连心线上，知道连心线一定过切点.可利用多媒体演示“思考”栏目中关于图形移动的过程，指导学生进行观察和思考，得到“切点在连心线上”的结论，不必要求学生严格地说出理由.

学生容易看出相切两圆所成图形的轴对称性及对称轴，但要说明切点在连心线上则有一定困难，规范地证明需用“反证法”，对学生不作教学要求.

相切两圆的连心线性质定理的证明如下（提供教师参考；图略）：

假设⊙O_1 与⊙O_2 相切，切点 T 不在 O_1O_2 上，则点 T 关于连心线 O_1O_2 的对称点 T' 也是这两圆的公共点，这与已知⊙O_1 与⊙O_2 相切只有一个公共点矛盾，因此切点 T 一定在连心线 O_1O_2 上，即连心线 O_1O_2 经过切点 T.

练习 27.5(3)

1. 提示：过点 O、A 作直线，在直线 OA 上点 A 的两侧分别截取长度为 2 厘米的线段 AB_1 和 AB_2，然后分别以 B_1 和 B_2 为圆心、2 厘米为半径长画圆.本题两解，图略.

2. (1) $\angle ACD=30^\circ$；

(2) $2\sqrt{3}$.

3. 提示：作直线 O_1O_2，可知此直线经过点 T；然后证明 $\angle O_1AT=\angle O_2BT$.

4. 24.

∵ O_1O_2 是连心线，AB 是公共弦，

∴ O_1O_2 垂直平分 AB，

得 $AC=BC$.

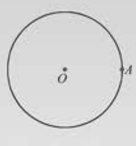
∴ CO_1 平分 $\angle DCE$.

于是，点 O_1 到 DC、EC 的距离相等，即弦 AD、弦 BE 的弦心距相等.

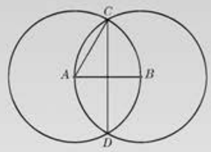
∴ $AD=BE$.

练习 27.5(3)

1. 如图，已知点 A 在半径长为 1.4 厘米的⊙O 上，求作一个半径长为 2 厘米的圆，使它与⊙O 相切于点 A.



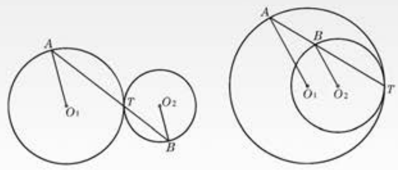
(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，已知线段 AB，分别以点 A、B 为圆心并以 AB 为半径的两圆相交于 C、D 两点.
(1) 求 $\angle ACD$ 的度数； (2) 如果 AB 的长为 2，求 CD 的长.

3. 已知：如图，⊙O_1 与⊙O_2 相切于点 T，经过点 T 的直线与⊙O_1、⊙O_2 分别相交于另一点 A 和 B.
求证：$O_1A \parallel O_2B$.



(第 3 题)

4. 已知相交两圆的半径长分别为 15 和 20，圆心距为 25，求两圆的公共弦的长.

30 第二十七章 圆与正多边形

Zhengduobianxing Yu Yuan

第三节　正多边形与圆

27.6　正多边形与圆

等边三角形和正方形是特殊的多边形，它们共同的特征是各边相等、各角也相等.

一般地，各边相等、各角也相等的多边形叫做**正多边形**（regular polygon）.

等边三角形是正三角形，正方形是正四边形.有 n 条边的正多边形（n 是正整数，且 $n\geqslant 3$）就称作正 n 边形.

问题1

正三角形和正方形是轴对称图形.正 n 边形都是轴对称图形吗？如果是，那么对称轴有几条？这些对称轴的分布有什么特点？

采用操作、观察的方法，可见正多边形都是轴对称图形.

如图 27－42，正三角形、正五边形、正七边形的对称轴的条数分别为 3 条、5 条和 7 条；各边的垂直平分线都是这个图形的对称轴.

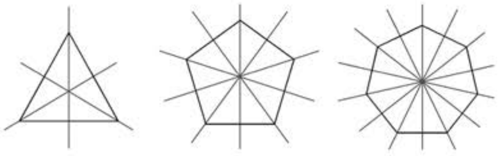


图 27－42

如图 27－43，正方形、正六边形、正八边形的对称轴的条数分别为 4 条、6 条和 8 条；过相对两内角的顶点的直线，或一边的垂直平分线都是这个图形的对称轴.

互相平行的两边的两条垂直平分线重合.

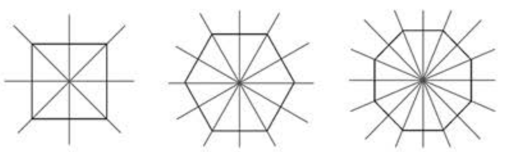


图 27－43

第三节　正多边形与圆　31

【本课重点】

明确正多边形的定义，探讨正多边形的轴对称性、中心对称性以及旋转对称性，引进正多边形的中心、中心角、半径、边心距等概念.

在复习等边三角形和正方形概念的基础上，给出正多边形的定义.

问题 1

引导学生探讨正多边形的轴对称性.

“正多边形都是轴对称图形”的结论，是通过操作实验后归纳出来的，要适当展现形成结论的过程，可选取几个正多边形如正五边形、正六边形等，进行演示性实验，然后让学生确认这个结论并认识对称轴的位置特征.

关于正 n 边形的对称轴的讨论，可先让学生画出正五边形、正六边形等图形的所有对称轴，再观察图 27－43 中正七边形、正八边形的所有对称轴，获得对“正 n 边形的对称轴有 n 条”的具体认识.

【教学目标】

（1）理解正多边形以及正多边形的中心、中心角、半径、边心距等概念.

（2）经历关于正多边形的轴对称性、中心对称性以及旋转对称性的探讨过程，知道正多边形是轴对称图形和旋转对称图形，会求正 n 边形的中心角的大小.

（3）能在以正多边形的一边为底边、两条半径为腰的等腰三角形中将正多边形的边长、半径长、边心距、中心角这四个量表示出来，会在正三角形、正方形、正六边形中进行简单的几何计算.

（4）会利用等分圆周画正三角形、正四边形、正六边形.

试一试

在具体讨论正 n 边形的对称轴情况的基础上，让学生归纳一般的结论，知道正 n 边形的对称轴有 n 条以及对称轴分布的特点 .

问题 2

引导学生探讨正多边形的中心对称性.

对“问题 2”的讨论，可参照“问题 1”的讨论展开. 要适当展现实验活动过程，让学生通过对具体图形的观察和分析，归纳得到“边数为奇数的正多边形不是中心对称图形，边数为偶数的正多边形是中心对称图形”的结论.

“正 n 边形的 n 条对称轴交于一点”的结论，只要让学生根据对正三角形、正方形研究的已有经验利用如图 27 - 43 所示的图形直观来认识，不必深究. 在此基础上，引进正多边形的有关概念.

想一想

让学生进一步认识正多边形具有旋转对称性.

试一试

归纳正 n 边形的对称轴的条数以及这些对称轴分布的特点(分 n 为奇数和偶数进行说明).

问题2

正三角形不是中心对称图形，正方形是中心对称图形. 当 $n \geqslant 5$ 时，正 n 边形是中心对称图形吗？如果是，那么对称中心在什么位置？

同样采用操作和观察的方法，可见当 n 为奇数时，正 n 边形不是中心对称图形；当 n 为偶数时，正 n 边形是中心对称图形，对称中心是它的两条对称轴的交点.

在一个多边形的内部且与多边形各边相切的圆叫做这个多边形的内切圆.

正 n 边形的 n 条对称轴交于一点. 根据正 n 边形是轴对称图形及其 n 条对称轴的位置特征，可知这个交点到正 n 边形各顶点的距离相等，到正 n 边形各边的距离也相等.

由此可见，任何一个正多边形都有一个外接圆和一个内切圆，外接圆和内切圆的圆心都是这个正多边形的对称轴的交点.

正多边形的外接圆(或内切圆)的圆心叫做**正多边形的中心**. 正多边形的外接圆的半径叫做**正多边形的半径**，正多边形的内切圆的半径长叫做**正多边形的边心距**.

正多边形各边所对的关于外接圆的圆心角都相等. 正多边形一边所对的关于外接圆的圆心角叫做**正多边形的中心角**.

想一想

观察图 27 - 44，正三角形绕着它的中心每旋转多少度可以与它自身重合？正方形呢？正六边形呢？它们具有怎样的旋转对称性？

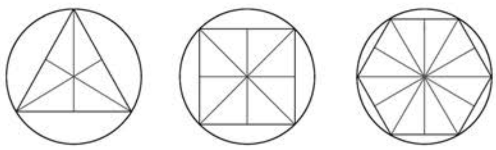


图 27 - 44

32 第二十七章 圆与正多边形

【注意事项】

(1) 本课有关正多边形的内容，是学生熟悉的等边三角形和正方形有关知识的扩展，主要采用实验、归纳的方法进行研讨. 要引导学生运用已有的知识经验来分析和思考问题，帮助学生建立新旧知识的联系. 在扩展知识的过程中，运用了从特殊到一般的策略和分类讨论的思想，要让学生体会.

(2) 要帮助学生正确理解正多边形以及正多边形的中心、中心角、半径、边心距等有关概念. 可结合解答练习 27 - 6(1)，从正反两方面认识正多边形的本质特征；在实践活动中掌握公式“正 n 边形的中心角等于 $\dfrac{360^\circ}{n}$”，确认正 n 边形是旋转对称图形，其旋转角大小为 $k \cdot \dfrac{360^\circ}{n}$(式中 k 是小于 n 的正整数). 需要指出：关于正 n 边形的旋转角大小的数学表达式，揭示了“作为旋转对称图形的正 n 边形的旋转角与这个正 n 边形的中心角两者之间的数量关系”. 关于计算正 n 边形的中心角和旋转角的大小的两个公式，可以直接运用.

(3) 注意正多边形与圆之间的联系. 每个正多边形都有一个外接圆和一个内切圆；以一个圆周的 n 等分点为顶点的 n 边形是正 n 边形. 关于正多边形的内切圆，只要指出这个正多边形的各边与圆都相切，不必作进一步的讲解.

练习 27.6(1)

1. 矩形和菱形是正方形吗？为什么？
2. (1) 如图(1)，已知点 A、B、C、D、E、F 分别在正三角形的边上，$AB /\!/ DE$，$BC /\!/ EF$，$CD /\!/ AF$，那么六边形 $ABCDEF$ 的各角相等吗？它是正六边形吗？
   (2) 如图(2)，已知 A、B、C、D、E、F 是六个等圆的圆心，每个圆都经过相邻两圆的圆心，那么六边形 $ABCDEF$ 的各边相等吗？它是正六边形吗？

（第 2 题）

3. 正三角形的中心角等于________度，正方形的中心角等于________度，正六边形的中心角等于________度.
4. 求证：在正 n 边形中，(1) 中心角等于 $\frac{360^\circ}{n}$；(2) 中心角与每个内角互补.

正多边形的中心是这个正多边形的外接圆的圆心，也是内切圆的圆心.

联结中心和正多边形的各顶点，所得线段都是外接圆的半径，相邻两条半径的夹角是中心角.

因此在正 n 边形中，分别经过各顶点的这些半径将这个正 n 边形分成 n 个全等的等腰三角形.每个等腰三角形的腰是正 n 边形的半径，底边是正 n 边形的边，顶角是正 n 边形的中心角；底边上的高是正 n 边形的内切圆的半径，它的长是正 n 边形的边心距.

如图 27－45，点 O 是正 n 边形的中心，AB 是正 n 边形的一边，等腰三角形 OAB 是这个正 n 边形中的一个基本图形.

设正 n 边形的半径长为 R_n、中心角为 α_n、边长为 a_n、边心距为 r_n，则利用等腰三角形 OAB，通过解直角三角形 OAH，可由其中两个量求出其余的两个量.进一步还可以求出这个正 n 边形的周长及面积.

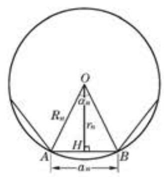


图 27－45

第三节　正多边形与圆　33

练习 27.6(1)

1. 矩形和菱形不一定是正方形.因为矩形的四条边可能不相等，菱形的四个角可能不相等.

2. (1) 六边形 $ABCDEF$ 各角相等，但不一定是正六边形；(2) 六边形 $ABCDEF$ 各边相等，但不一定是正六边形.

3. 120°，90°，60°.

4. 提示：(1) 正 n 边形各边所对的关于外接圆的圆心角共有 n 个，这 n 个角相等且它们的和等于 360°；

(2) 正 n 边形的每个内角等于$\frac{(n-2)180^\circ}{n}$.

【本课重点】

引进以正多边形的一边为底边、两条半径为腰的等腰三角形，并在正三角形、正四边形、正六边形中利用这个等腰三角形进行简单的几何计算；举例说明利用等分圆周画正多边形的方法.

在一个正 n 边形中，联结这个正 n 边形的中心和各顶点，指出这个正 n 边形被分成 n 个全等的等腰三角形.然后在一个等腰三角形中将正 n 边形的边长、半径长、边心距、中心角这四个量表示出来，如图 27－45.

【注意事项】

(1) 图 27－45 是对于一个正 n 边形，在一个等腰三角形中表示它的边长、半径长、边心距、中心角这四个量的示意图，其中表示边心距 r_n 的线段 OH 是边 AB 上的高，线段 OH 垂直平分线段 AB.在由此所得的直角三角形 OAH 中，它的三边长分别为 R_n、r_n、$\frac{a_n}{2}$，它的两个锐角分别等于$\frac{180^\circ}{n}$(即$\frac{\alpha_n}{2}$)、$\frac{(n-2)90^\circ}{n}$.于是，知道 R_n、r_n、a_n、α_n 中的两个量可求其余的两个量.教学时，可用正五边形为例进行讲解.

(2) 利用图 27－45 所示的等腰三角形进行有关几何计算，主要涉及正三角形、正方形和正六边形.

例题 1

通过本题，说明利用正 n 边形中的一个等腰三角形进行有关的几何计算的方法，题中涉及正三角形.

注意结合解题，帮助学生理解正多边形的有关概念.

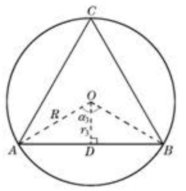


图 27－46

例题1 如图 27－46，已知正三角形 ABC 的半径长为 R，求这个正三角形的中心角 α_3、边长 a_3、边心距 r_3、周长 p_3 和面积 S_3.

解 设正三角形 ABC 的中心是点 O，分别联结 OA、OB；作 $\triangle OAB$ 的高 OD（如图 27－46）.

$\because$ $\alpha_3=\dfrac{360^\circ}{3}=120^\circ$，

$\therefore$ $\angle AOD=\dfrac{1}{2}\alpha_3=60^\circ$.

则 $a_3=2\cdot R\sin\angle AOD=2R\sin 60^\circ=\sqrt{3}R$.

$\therefore$ $p_3=3a_3=3\sqrt{3}R$.

$\because$ $r_3=R\cos\angle AOD=R\cos 60^\circ=\dfrac{R}{2}$，

$\therefore$ $S_3=3\cdot\dfrac{1}{2}a_3r_3=3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}R\cdot\dfrac{1}{2}R=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

例题 2

通过本题，说明利用等分圆周画正六边形的方法.

本题教学后，可让学生思考如何作已知圆的内接正三角形或正方形，完成练习 27.6(2) 第 4、5 题.注意，画圆的内接正方形时，可利用正方形的中心角等于 90°来等分圆周.

正六边形的中心角等于 60°，可知正六边形的边长等于半径长.

例题2 已知⊙O，试用直尺和圆规作⊙O 的内接正六边形.

作法 作法一：如图 27－47，

1. 作⊙O 的直径 AB.

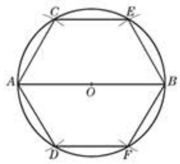


图 27－47

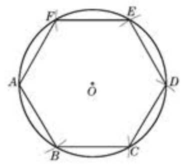


图 27－48

2. 以 A 为圆心、AO 为半径作弧，交⊙O 于 C、D 两点.
3. 以 B 为圆心、BO 为半径作弧，交⊙O 于 E、F 两点.
4. 顺次联结 AD、DF、FB、BE、EC、CA.

六边形 $ADFBEC$ 就是所求作的圆内接正六边形.

作法二：如图 27－48，

1. 在⊙O 上任取一点 A，以 A 为圆心、AO 为半径作弧，在⊙O 上截得一点 B.
2. 以 B 为圆心、AO 为半径作弧，在⊙O 上截得一点 C；再如此从点 C 逐次截得点 D、E、F.
3. 顺次联结 AB、BC、CD、DE、EF、FA.

六边形 $ABCDEF$ 就是所求作的圆内接正六边形.

34 第二十七章 圆与正多边形

【注意问题】

(1) 有关作图题，学生解答时可以不写作法，但要保留作图痕迹并写出结论，要提醒学生注意.

(2) 通过本课学习，可以知道正三角形的外心、内心、垂心、重心这“四心”重合于正三角形的中心.

练习 27.6(2)

1. 已知圆的半径长为 R，求这个圆的内接正方形和内接正六边形的边长、边心距、周长和面积.
2. 已知正方形的边长为 20 厘米，求这个正方形的半径长和边心距.
3. 设正三角形的边长为 a.
   (1) 求这个正三角形的边心距、半径长和高；
   (2) 求证：边心距 ∶ 半径长 ∶ 高 $=1:2:3$.
4. 已知圆的半径长为 2 厘米，用圆规和直尺作这个圆的内接正三角形(不写作法).
5. 已知圆的半径长为 2 厘米，用圆规和直尺作这个圆的内接正方形(不写作法).

第三节　正多边形与圆　35

练习 27.6(2)

1. $a_4=\sqrt{2}R$，$a_6=R$；

$r_4=\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$，$r_6=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R$；

$p_4=4\sqrt{2}R$，$p_6=6R$；

$S_4=2R^2$，$S_6=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}R^2$.

2. 半径长等于 $10\sqrt{2}$ 厘米，边心距等于 10 厘米.

3. (1) 边心距等于$\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$，

半径长等于$\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，

高等于$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$；

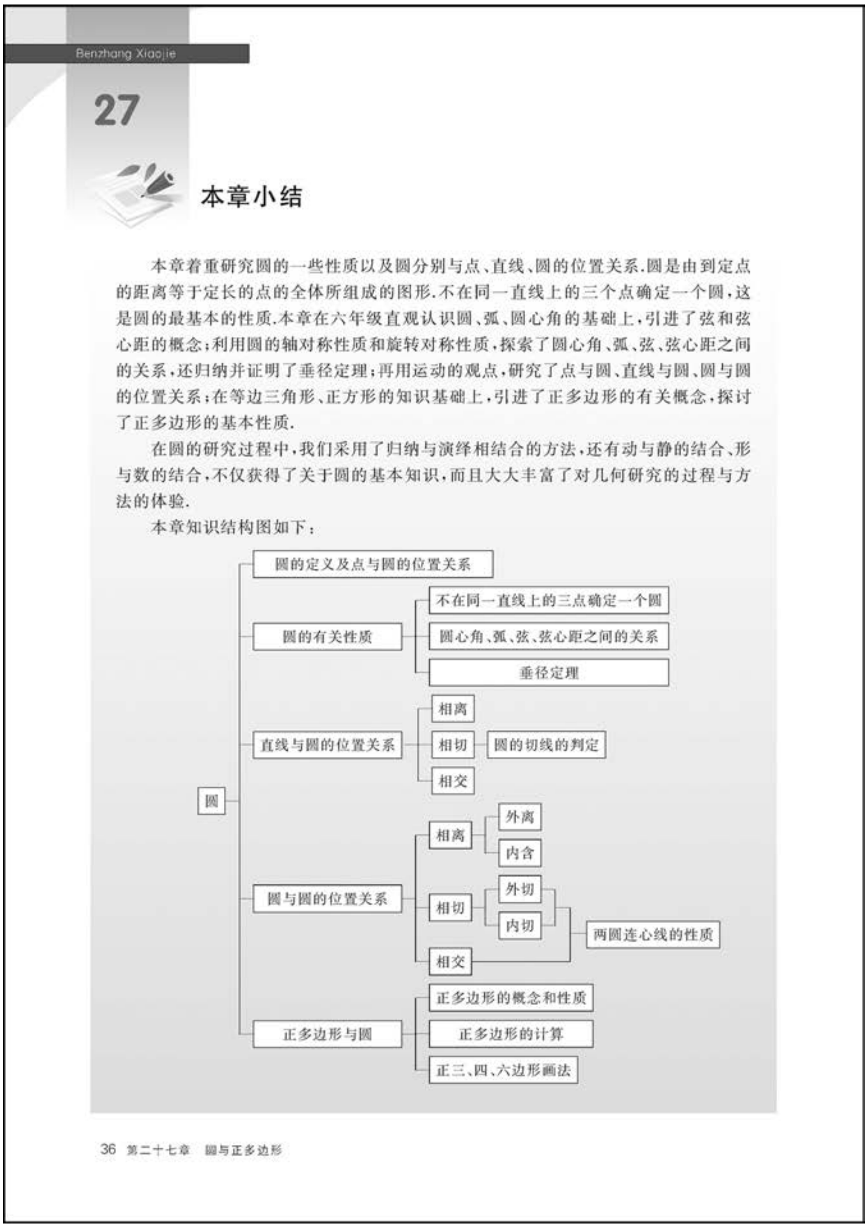
(2) 略.

4. 略.

5. 略.

平面图形的类型多种多样、丰富多彩，图形之间相互联系、生动组合，这是数学源于生活、用于生活的真实反映.初中平面几何研究的图形，大都是直线型，只有圆形是曲线型.本章对于圆的研究，充实了平面几何知识的基础.

在本章的小结中，关于知识内容的整理，可引导学生从圆的定义以及它所具有的优良对称性出发，关注圆的有关性质；从几何研究重视图形之间的相互关系出发，关注直线与圆、圆与圆的位置关系以及正多边形与圆的联系.然后，让学生利用“本章知识结构图”，将知识内容系统化.


Benzhang Xiaojie

27

本章小结

本章着重研究圆的一些性质以及圆分别与点、直线、圆的位置关系.圆是由到定点的距离等于定长的点的全体所组成的图形.不在同一直线上的三个点确定一个圆，这是圆的最基本的性质.本章在六年级直观认识圆、弧、圆心角的基础上，引进了弦和弦心距的概念；利用圆的轴对称性质和旋转对称性质，探索了圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系，还归纳并证明了垂径定理；再用运动的观点，研究了点与圆、直线与圆、圆与圆的位置关系；在等边三角形、正方形的知识基础上，引进了正多边形的有关概念，探讨了正多边形的基本性质.

在圆的研究过程中，我们采用了归纳与演绎相结合的方法，还有动与静的结合、形与数的结合，不仅获得了关于圆的基本知识，而且大大丰富了对几何研究的过程与方法的体验.

本章知识结构图如下：

- 圆
  - 圆的定义及点与圆的位置关系
  - 圆的有关性质
    - 不在同一直线上的三点确定一个圆
    - 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系
    - 垂径定理
  - 直线与圆的位置关系
    - 相离
    - 相切 — 圆的切线的判定
    - 相交
  - 圆与圆的位置关系
    - 相离
      - 外离
      - 内含
    - 相切
      - 外切 — 两圆连心线的性质
      - 内切 — 两圆连心线的性质
    - 相交 — 两圆连心线的性质
  - 正多边形与圆
    - 正多边形的概念和性质
    - 正多边形的计算
    - 正三、四、六边形画法

36 第二十七章 圆与正多边形

本章对圆心角、弧、弦、弦心距之间关系和对垂直于弦的直径的特征的讨论，形成了一系列定理，它们被分别归结为四组等量之间的“等价”关系和四组位置关系两两结合构成的推出关系，把这些定理有机地整合，展示了几何研究的求简思考方法；而对点与圆、直线与圆、圆与圆的位置关系的讨论，通过对确定各种位置关系的有关量的分析，把各种位置关系用相应的数量关系式进行描述，展现了几何研究的定量分析方法.在整理知识时，要让学生从中得到启示.

要引导学生回顾知识形成的过程，从中进一步体会归纳、演绎、分类讨论、数形结合等数学思想方法的运用.还要指出，本章对圆的研究，重视实验归纳与演绎推理相结合.实验归纳是几何研究的重要方法，在论证几何仍要重视它的运用，要发挥它在探究发现规律、探索分析证明思路中的重要作用.

Yuedu Cailiao

27

阅读材料

怎样用尺规作正五边形

先介绍一种用尺规作圆内接正五边形的方法.

如图 27－49(1)，作⊙O 的两条互相垂直的直径 PQ 和 AF；取半径 OP 的中点 M；再以 M 为圆心、MA 为半径作弧，和半径 OQ 相交于点 N，则⊙O 的内接正五边形的边长等于线段 AN 的长.

以点 A 为圆心、AN 为半径作弧，与⊙O 相截，得交点 B.继续以点 B 为圆心、AN 为半径，在⊙O 上再截，如此连续截 3 次，依次得分点 C、D、E.顺次联结 AB、BC、CD、DE、EA，则五边形 $ABCDE$ 是⊙O 的内接正五边形.

如果顺次联结 AC、CE、EB、BD、DA，那么就得到一个正五角星，如图 27－49(2)所示.

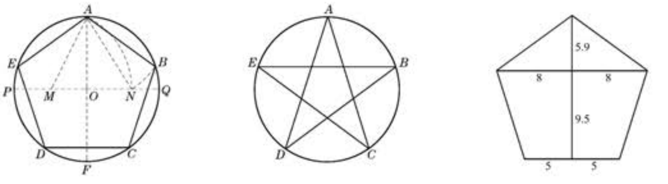


图 27－49

再介绍正五边形的一种近似作法，它是在实践经验的基础上总结出来的.这种近似作法的口诀是："九五顶五九，八五两边分."含意如图 27－49(3)所示.

例如，利用"九五顶五九，八五两边分"这个口诀，作边长为 2 厘米的正五边形.

假设边长为 2 厘米的正五边形 $ABCDE$ 已经作出，如图 27－50.作 AB 边的垂直平分线，设垂足为点 F，点 D 必在这条垂直平分线上.联结 EC，交 DF 于点 G.

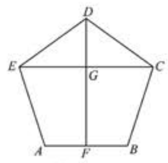


图 27－50

根据口诀，应有 $AF=\frac{1}{2}AB=1$ 厘米，则 $EG=GC=\frac{8}{5}AF=1.6$ 厘米，$FG=\frac{9.5}{5}AF=1.9$ 厘米，$DG=\frac{5.9}{5}AF=1.18$ 厘米.

计算出各条线段的长度后，就可以作出这个正五边形，请自己完成作图.

【设计意图】

学生在本章的学习中，知道了利用等分圆周画正三角形、正四边形、正六边形的方法.正五边形也是比较简单又常见的图形，而画正五边形的方法并不简单.本阅读材料主要是向学生介绍用尺规作正五边形的方法，包括严格作法和近似作法，还指出了作正五角星的方法；同时，通过作正五边形，引导学生进一步思考有关正多边形的作图问题，更加重视作图技能的训练，更多地了解数学知识的实践应用.

【活动建议】

可先让学生查阅有关资料，再让学生尝试作正五边形，体验本材料介绍的作图方法.

在学生学会了作正五边形的基础上，可鼓励学生思考这种作图方法的正确性，说明为什么这样作出的五边形是正五边形.

教师可借助于多媒体演示作图过程.

【设计意图】

在草坪上安装一些喷头，通过喷头向草坪喷水来养草护绿，这是在生活中可见的情景.在一块较大的草坪上如何合理安装喷头，是一个有实际意义的问题.在这一背景下设计本项探究活动，旨在引导学生关心周围世界，学会从现实生活中提出问题，并积极探究、努力解决问题；促进学生重视数学与现实的联系，增强数学应用的意识，并获得将实际问题抽象为数学问题的体验和进行探究活动的经验，提高数学应用能力.

【活动建议】

可采用小组讨论的方式，组织学生开展探究活动；倡导学生使用计算器.

要求各小组提出解题报告，再进行交流和评价.鼓励学生将原问题引申、变化，例如将原正方形草坪的边长变大或喷头喷洒圆面的半径长变小，或者将草坪的形状改为其他简单图形等.

Tanjiu Huodong

27

探究活动

生活中的一个覆盖问题

有一块边长为 10 米的正方形草坪，需要安装喷头定时喷水养草.如果一个喷头的喷洒范围是半径长为 3.3 米的圆面，那么至少要安装几个这样的喷头，才能使喷水洒遍整个草坪？

提示 这个问题可转化为用圆面覆盖正方形面的数学问题.

依次分别用一个圆、两个相同的圆、三个相同的圆……的圆面去完全覆盖一个边长为 10 米的正方形面，每次使相应的圆的半径长尽可能小并求出这个值.假设用 k 个相同圆的圆面去完全覆盖这个正方形面，圆的半径长至少为 r 米，则当 $r>3.3$ 时，可知安装 k 个这样的喷头不能使喷水洒遍整个草坪；而第一次出现 $r<3.3$ 时所对应的 k，就是能使喷水洒遍整个草坪的最少的喷头数.

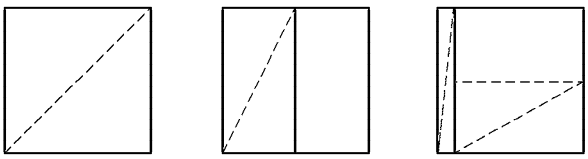
38 第二十七章 圆与正多边形

【参考答案】

至少要安装 5 个这样的喷头.

说明：如果按“提示”所述进行探究，设用 k 个相同的圆面去覆盖边长为 10 米的正方形面时，圆的半径长至少为 r_k 米，那么 $r_1\approx7.07$；$r_2\approx5.59$；$r_3\approx5.04$；$r_4\approx3.54$；$r_5\approx3.299$；….

以下给出 $k=1,2,3$ 时的方案示意图：



$k=1$　　$k=2$　　$k=3$

图中虚线表示覆盖这个正方形的圆面中一个圆的一条直径.取 $k=2$ 时，图中左右两个矩形全等；取 $k=3$时，图中上下两个矩形全等.

例如，取 $k=3$ 时，由正方形的边长为 10 米和图示，设上下两个全等矩形的未知边的长为 x 米，可列出方程 $x^2+5^2=(10-x)^2+10^2$，求出 x，再求出 r_3.

第二十八章　统计初步

一、教学目标

1. 知道数据整理和表示的常用方法，会制作表格和画条形图、折线图、扇形图；能从这些图表中获取相关信息.

2. 知道统计的意义，理解统计中的总体、个体、样本、普查、抽样调查、随机样本等有关概念；知道用随机样本推断总体是重要的统计思想，并初步体会这一统计思想的运用.

3. 理解平均数、加权平均数、中位数和众数等概念，会求一组数据的平均数或加权平均数；会确定一组数据的中位数和众数；能根据实际问题，在平均数、中位数和众数中选择合适的量来表示一组数据的平均水平.

4. 理解方差、标准差的概念，会计算一组数据的方差和标准差；能根据一组数据的方差或标准差来解释数据的波动性.

5. 理解组频率的概念；对一组数据，在给定分组的情况下会制作频数分布表、频率分布表，会绘制频数分布直方图和频率分布直方图；能从频数分布直方图和频率分布直方图中获取有关信息以及判断数据分布的情况.

6. 获得参与统计活动的体验和经验，在统计活动中增强团队合作精神和社会实践能力.

7. 具有初步的统计意识，能运用所学的统计知识解决现实生活中的简单的统计问题.

二、课时安排

本章教学共10课时，建议分配如下：

28.1	数据整理与表示	1课时
28.2	统计的意义	1课时
28.3	表示一组数据平均水平的量	2课时
28.4	表示一组数据波动程度的量	2课时
28.5	表示一组数据分布的量	2课时
28.6	统计实习	1课时
本章小结		1课时

三、设计说明

学生在以前的数学学习中，已经知道有关统计的一些知识，对于数据收集和整理的方法有所了解，会画折线图、条形图和扇形图等.本章内容的编排，是从回顾和整理以前课本中已有的统计知识开始，通过具体事例对统计的意义进行说明，再引入与数据分析有关的基本统计量和统计图.本章的基本内容包括数据整理与表示、统计的意义、表示一组数据平均水平的量、表示一组数据波动程度的量和表示一组数据分布的量；对一组数据的研究，先关注这组数据的平均水平，然后分析这组数据在平均数上下波动的程度，最后考察这组数据分布的状态，形成了一个逐步深入、循序渐进的研究过程.

本章内容相对于一期课改数学课本中的“统计”内容，作了一些必要的调整.一方面，强化了从统计图中获取信息的要求，适当补充了一些基本概念，加强了从局部估计整体的统计思想的运用.现在课本中，引用了多种多样的与现实生活相关的统计资料，让学生面对各种来自生活的、具有真实背景的统计图表，从中感受到数学与生活有紧密联系、数学服务于生活；又增加了“样本容量”“众数”等概念，充实知识基础；还指出在人口、身高、体重等问题中，可以通过大容量的随机样本的分布来估计总体的分布.另一方面，更加注重统计学习初步阶段的安排，注意突出主干知识，删除或简化了一些次要的概念和过难的内容.现在的课本，统计图中删去“茎叶图”，在一组数据波动程度的讨论中删去了“变异系数”；而对于用随机样本的方

差、标准差推断总体的方差和标准差，则不作为教学要求，这是因为如要根据随机样本推断总体的方差，那么方差的计算公式应为 $\sigma^2=\frac{1}{n-1}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$，所推断的总体的标准差为 $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$，学生对此难于理解，所以课本中不出现上述公式.

本章重视利用计算器进行数据处理，在有关平均数、方差和标准差的计算以及其他繁难的数值计算中，倡导使用计算器，让学生集中精力学习统计的基本思想和方法，关注用统计知识解释有关实际问题.

四、教学建议

1. 把握教学基本要求，抓住重点、化解难点. 本章涉及的概念较多，教学中要分层次、抓重点、把握不同要求.如“统计的意义”一节中出现了“总体”“个体”“样本”“样本容量”“普查”“抽样调查”“随机样本”等概念，其中“样本容量”只要求学生知道；“总体”“个体”“样本”“普查”“抽样调查”则要求理解.“随机样本”是一个重点概念，也是教学难点，学生不但要理解，还要会应用.

又如关于“表示一组数据平均水平的量”的教学，要求学生理解“平均数”“加权平均数”“中位数”和“众数”等概念，并会进行计算，会从中选取更加适合于反映一组数据平均水平的量；而对于“截尾平均数”，只要求学生知道.还要注意，学生对加权平均数中“权”的理解、对涉及与众数相关的问题的回答、对选用哪一个量才更适合于反映一组数据的平均水平等，可能会感到困难或产生困惑，教师要多加解释并举例说明.

本章重视学生从统计图中获取信息的能力培养，重视学生对概念实质的认识，并在内容呈现中有积极体现，教学时要切实关注.例如在一张统计图中出现几组数据，要求学生能从中获取信息，或通过两个统计图的信息互补来完善统计图等，有利于学生提高识图和获取信息的能力.又如为帮助学生认识方差和标准差是“表示一组数据波动的量”，课本中将数据围绕平均数上下波动的情况用一个图来表示，让学生获得直观性认识，从而引起实质性思考.

在教学中要注意化解难点.例如，在“数据整理与表示”一节中，出现了复合型的条形图，课本中对此有铺垫性安排，先复习简单的条形图，再扩展到较复杂的条形图.在这一节的问题讨论中，出现的反映第五次全国人口普查时公民受教育状况的条形图，其中只有一组数据；再在例题 1 中出现的反映第三、四、五次全国人口普查时公民受教育状况的条形图，其中有三组数据，教学时可循序渐进、逐步到位.又如，在一张统计图中出现几组数据时，其信息的获取是教学的一个难点，可将几组数据分别画到各自的统计图中，再进行比较，使难点得到化解.再如，通过两个统计图的信息互补来完善统计图，也是教学的一个难点，可引导学生先构造表格再填空，利用表格来过渡，从而化难为易.

2. 重视展现过程和进行数学思想方法教学. 本章统计内容的展开，注意体现“实践—理论—实践”的认识过程.一般的安排是：先通过丰富的实例，让学生具体感受统计活动；然后描述统计的有关概念和方法，让学生学习一些理论知识；再通过统计的举例或实习，将理论与实践相结合，帮助学生形成正确的认识.

学生已有概率学习的经验和概率的初步知识，在本章教学中，要注意新旧知识的联系，引导学生用类比的方法进行学习，形成知识的迁移.例如在学习用“捉放捉”方法估计总体数量之前，可让学生思考：一个袋中有许多白弹子、有 10 个红弹子，如何通过试验来估计袋中白弹子的数量？引导学生利用“摸弹子”的经验来认识“捉放捉”的方法；又如在学习频数和组频率的概念时，可先让学生回忆随机事件试验中的频数、频率的概念，再迁移到当前的学习中.还有，如“随机样本”与“随机事件”，其“随机”的含义是相近的，将两者进行类比，有助于学生理解新的概念.

要强调从局部推断整体的统计思想，一方面要帮助学生学会从随机样本的平均数来推断总体的平均数，并知道对于人口、体重、身高问题可通过大容量的随机样本的分布来推断总体的分布（但不要轻易用随机样本的分布推断其他总体的分布）；另一方面，要防止统计推断的误用，产生这类错误的原因有可能是把非随机样本当作随机样本，也有可能是样本容量太小，要提醒学生注意.

3. 重视统计的实践活动以及现代信息技术的运用. 本章内容与现实生活的联系紧密，还有一些联系实

际的统计作业以及统计实习.要有效展开多种多样的统计活动,让学生在实践中学习统计知识,培养统计意识,体会统计的重要性和广泛应用性.

本章在数据处理和分析中,常会出现繁复的数值计算,要求学生利用计算器来完成计算.课本中提供了利用常见型号计算器求样本的平均数、方差、标准差的操作程序,教学中要指导学生根据所持计算器的说明书,学会使用计算器求有关统计量的操作方法.

五、评价建议

1. 关注学生对统计意义的认识和基本能力的发展. 当今社会是信息社会,在"统计"教学中应加强对学生的统计意识和信息处理能力的培养.要通过评价,促进学生正确认识统计的意义和作用,形成处理信息的基本能力.在评价中,要关注学生在信息的获取、整理、分析和判断方面的表现,有效检测学生的有关能力发展和技能掌握的情况,例如:对简单的条形图、折线图、扇形图以及反映几组数据的条形图、折线图的识图能力和从图中获取信息的能力,整理和分析数据、构造表格、绘制相应统计图的能力,对各种统计量的计算、解释和应用的能力,使用计算器进行数据处理的技能等.

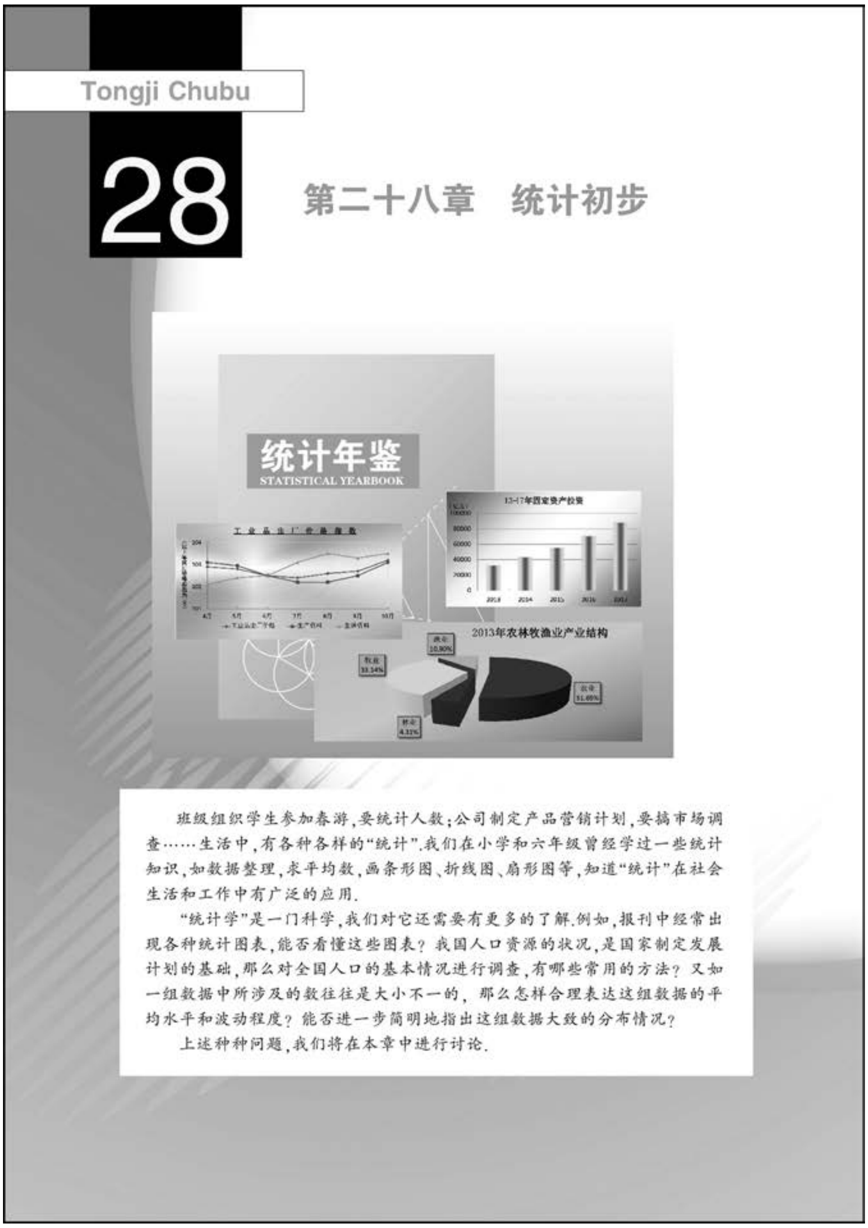
2. 关注学生对统计的有关概念和基本方法的掌握. 要通过评价,引导学生正确理解概念,学会统计的基本方法.例如,学生应知道随机样本与非随机样本的区别,应能根据平均数、方差来说明全组数据的特性,应能根据频数、组频率说明全组数据的分布情况等,要检测学生落实这些学习要求的情况.还要对学生在运用统计知识解决实际问题的活动中所获得的经验和方法进行评价,关注学生提出问题、确定调查方案、通过调查获得数据、通过分析和研究得出结论的全过程.

3. 关注学生在统计学习过程中情感、态度的变化. 统计初步知识的学习过程以及统计实习活动,对培养学生的数学应用能力、人际交往能力、社会实践能力、团队合作精神和科学态度,有重要的和积极的影响.要为学生开展统计活动提供机会,组织学生有效参与,并对学生在活动中的表现进行鼓励性评价;要关注学生在统计活动中的过程经历和情感体验,关注学生所获得的经验和体会,可安排学生进行小结和交流,相互促进.

章头图的背景是“中国统计年鉴”，从中选了三幅统计图，分别是条形图、折线图和扇形图.它与章头语相配合，一是说明统计知识在社会生活和生产实际中有广泛的应用；二是说明读懂有关统计图、从统计图中提取信息对每个公民有重要的意义.

针对章头图，还可向学生进一步指出，统计图是在收集、整理数据的基础上绘制出来的，它所提供的信息可能是研究对象中一部分对象的信息，而且由图中直观显示的信息还可以推断一些隐含的信息.我们在本章将学习如何进行统计调查、统计分析和推断，了解总体与样本的概念、样本分析与总体估计的联系，从中体会统计的思想、方法和应用价值.

章头语中还阐述了本章要讨论的问题，比如对全国人口进行调查有哪些常用方法，如何合理表达一组数据的平均水平和波动程度，以及一组数据的大致分布情况等，以引起学生学习统计的兴趣.



Tongji Chubu

28 第二十八章　统计初步

班级组织学生参加春游，要统计人数；公司制定产品营销计划，要搞市场调查……生活中，有各种各样的“统计”.我们在小学和六年级曾经学过一些统计知识，如数据整理，求平均数，画条形图、折线图、扇形图等，知道“统计”在社会生活和工作中有广泛的应用.

“统计学”是一门科学，我们对它还需要有更多的了解.例如，报刊中经常出现各种统计图表，能否看懂这些图表？我国人口资源的状况，是国家制定发展计划的基础，那么对全国人口的基本情况进行调查，有哪些常用的方法？又如一组数据中所涉及的数往往是大小不一的，那么怎样合理表达这组数据的平均水平和波动程度？能否进一步简明地指出这组数据大致的分布情况？

上述种种问题，我们将在本章中进行讨论.

Tongji De Yiyi

第一节 统计的意义

28.1 数据整理与表示

生活中，我们经常碰到各种数据，如下面问题中的(1)、(2)、(3).这些数据传递了许多信息，有助于我们了解事实、分析情况和作出判断.

问题

下列数据能否用表格或图形的方式表示出来？

(1) 在2000年第五次全国人口普查中，关于我国公民受教育状况的调查结果是：每1 000人中具有初中文化程度的约有340人，具有高中文化程度的约有111人，具有大学文化程度的约有36人.(说明：此统计数据未包括我国的香港特别行政区、澳门特别行政区和台湾省的数据)

(2) 某学生每天进行1 500米跑运动.一个阶段内的七次测试情况是：前三次每次跑完全程各用时7分30秒，第四次用时7分钟，第五次用时6分48秒，第六次用时6分30秒，第七次用时6分18秒.

(3) 据调查，某校九年级有300名学生，其中30%的学生步行上学，50%的学生乘公交车上学，15%的学生骑车上学，其余的学生用其他交通工具上学.

上述数据都可利用表格、图形来表示.

关于数据表示的方法，以前已介绍过条形图、折线图和扇形图.

如问题(1)第五次人口普查中关于公民受教育状况的数据，可用列表的方法表达，如表28.1－1所示；也可画成条形图，如图28－1所示.

文化程度	每1 000人中所占人数
初中	340
高中	111
大学	36

表28.1－1

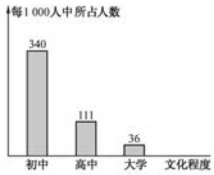


图28－1

40 第二十八章 统计初步

问题

通过提出问题和解决问题，引导学生回顾以前学过的有关数据整理的常用方法.

所提问题按不同的实际背景分设三个小题，题(1)的背景是第五次全国人口普查；题(2)(3)的背景都与学校生活有关.

针对“问题”进行教学时，可先让学生回想以前学过的有关数据整理和表示的知识，分别提出各小题所列数据的表示方法；然后进行交流，并选定适用于各小题的表示方法；再让学生尝试画出各小题用于表示数据的图形，教师进行讲评并指出画图时需要注意的事项.要让学生从中体会，统计与我们的实际生活有密切联系；表格以及条形图、折线图和扇形图，是数据整理和表示的常用方法，要注意适当选用.

题(1)的数据用条形图表示，直观地显示出各数据大小的差异.画图时要根据数据大小来求矩形高度，如表示“高中”“初中”的矩形高度分别应是表示“大学”矩形高度的3.1倍和9.4倍.

【教学目标】

(1) 会制作表格和绘制条形图、折线图、扇形图对数据进行整理和表示；知道条形图、折线图、扇形图各自的特点，能从图中获取相关信息.

(2) 会从较复杂的条形图、折线图或从互补的两个统计图中获取信息.

这个条形图清楚地显示了具有不同文化程度的人在数量上的差异.

又如问题(2)某学生 1 500 米跑所用的时间,用列表的方法表达,如表 28.1-2 所示;画成折线图,如图 28-2 所示.

测试序号	1	2	3	4	5	6	7
时间(分)	7.5	7.5	7.5	7	6.8	6.5	6.3

表 28.1-2

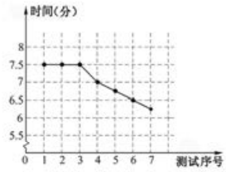


图 28-2

题(2)的数据用折线图表示,直观地显示出这些数据变化的情况.

在图 28-2 中,“时间”轴上从 0 到 5.5 这一段是用带折的线显示的,这样的“简略线”表示这一段略去,从而突出这条轴上与画折线图有关的部分.这是画折线图时常用的方法.

图 28-2 是折线图,不是函数图像,其中不涉及定义域的问题,故各点间用实线联结.

这个折线图形象地描述了这位学生 1 500 米跑所用时间逐渐减少的情况,能“看到”坚持跑步的成效.

再如问题(3)某校九年级学生上学方式的调查情况,可用列表的方法表达,如表 28.1-3 所示.而由步行、乘公交车、骑车上学的百分比,可推算利用其他交通工具上学的学生占 5%,于是也可画成扇形图,如图 28-3 所示.

上学方式	步行	乘公交车	骑车	其他
百分比(%)	30	50	15	5

表 28.1-3

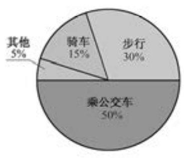


图 28-3

题(3)的数据用扇形图表示,直观地显示出各部分在整体中所占比的大小.

画题(3)的扇形图时,可先复习图中各扇形的圆心角的计算.各扇形的圆心角大小等于 360° 乘以相应百分比所得的积,如扇形图中表示“步行”的扇形的圆心角 $\alpha=360^\circ\times30\%=108^\circ$.

这个扇形图直观地反映了步行或利用不同交通工具上学的学生人数在总人数中所占的百分比.

注意图中扇形圆心角的计算,如“其他”所在扇形的圆心角为 $360^\circ\times5\%=18^\circ$.

条形图、折线图和扇形图是常用的统计图.一般来说,条形图有利于比较数据的差异;折线图可以直观地反映出数据变化的趋势;而扇形图则凸显了由数据所体现出来的部分与整体的关系.

对于调查、收集得来的数据,通常要根据某种要求进行整理,为人们分析研究问题提供方便.列表和画条形图、折线图、扇形图等,都是常用的整理数据的方法,可根据不同要求选择使用.这样的表和图简称为统计图表.

我们在报刊、书籍或互联网上,经常会见到各种图表,要学会

第一节 统计的意义 41

结合实例,指出条形图、折线图和扇形图各自的特点和长处.要让学生注意,在整理和表示数据时,可根据不同要求,选用这三种统计图中最适合一种;但选择结果往往不是唯一的.

【注意事项】

(1) 学生以前曾学过条形图、折线图和扇形图,本课教学时可先复习这三种统计图.

(2) 将具体问题中的数据用表格形式表示出来,是一项重要的又容易忽略的技能,在数据整理中要多加关注,指导学生学会制作表格并重视表格的作用.表格中包含了构成相应统计图的全部要素,构造表格是为画统计图做准备.教学时可让学生在教师提示下自己动手制作表格,再通过讲评加以完善.

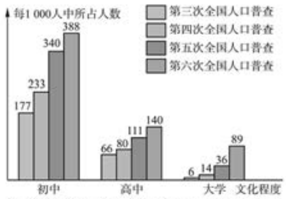
(3) 在整理和表示数据时,选用条形图、折线图、扇形图中哪种统计图比较合适,需要根据实际情况进行判断.可列举几个实例,让学生判断选用哪种统计图并说明理由.

(4) 从统计图表中获取有关数据的信息,是对学生能力培养的要求之一.要指导学生关心在媒体上经常可见的各种图表,培养从条形图、折线图和扇形图中获取信息的能力.

从图表中获取各种信息.

例题1 我国分别在1982年、1990年、2000年和2010年进行了第三、四、五、六次全国人口普查.图28-4是四次全国人口普查中关于公民受教育状况的统计图.

这个统计图是由单一条形图扩展而成的多重条形图.注意图中数据的对应情况:“□”“□”“□”“□”依次对应第三次、第四次、第五次、第六次人口普查.



注:图中统计数据未包括我国的香港特别行政区、澳门特别行政区和台湾省的数据.

图28-4

根据这个条形图,回答下列问题:

(1) 从第三次人口普查到第四次人口普查,每1 000人中具有初中文化程度的人数增加多少?

(2) 从第四次人口普查到第五次人口普查,每1 000人中具有高中文化程度的人数增加多少?

(3) 从1982年到1990年,每1 000人中具有大学文化程度的人数平均每年增加几人?从2000年到2010年呢?

分析　图中初中、高中、大学每个学段都有相应三次人口普查的数据,可根据这些数据回答相应的问题.

解　(1)　$233-177=56$(人).

所以从第三次人口普查到第四次人口普查,每1 000人中具有初中文化程度的人数增加了56人.

(2)　$111-80=31$(人).

所以从第四次人口普查到第五次人口普查,每1 000人中具有高中文化程度的人数增加了31人.

(3)　$\frac{14-6}{8}=1$(人).

所以从1982年到1990年,每1 000人中具有大学文化程度的人数平均每年增加1人.

$$\frac{89-36}{10}=5.3\text{(人)}.$$

所以从2000年到2010年,每1 000人中具有大学文化程度的人数平均每年增加5.3人.

42 第二十八章　统计初步

例题1

本题以我国进行的四次全国人口普查为背景,引导学生学习从统计图中获取有关信息.

相对于“问题”中题(1)所画的图28-1,本题中给出的图28-4是复合条形图.图中横轴上,标有关于“文化程度”的“初中”“高中”“大学”三种程度,每种程度相应有四个矩形;结合纵轴上标有“每1000人所占人数”,可知每个矩形的高度表示每1000人中具有矩形下所标文化程度的人数.由此可见,这个图是如同图28-1这样的三个条形图的复合,它同时提供了“四次全国人口普查”中关于公民受教育状况的信息;而且突出了每种文化程度的人数在四次普查中的差异.

可先让学生读图和回答问题,然后针对学生在审题或读图中可能出现的错误进行指导,并让学生从中感受我国教育事业的迅速发展.

【注意事项】

(1) 要让学生注意图28-4中表示第三、四、五、六次人口普查结果的不同标识.

(2) 在利用图28-4回答问题以后,可问学生,如果图中只提供第四、五两次全国人口普查的有关信息,那么统计图会发生什么变化?如果图中再加上第二次全国人口普查的有关信息,那么该加在图中什么地方?以此让学生对复杂条形图的结构有所了解.

(3) 图28-4突出了每种文化程度的人数在四次普查中的差异,如果要突出每次人口普查中三种文化程度人数的差异,可将横轴改为“人口普查次序”,而将三种文化程度用不同的标识显示.

例题 2

本题通过两个不完整的统计图提供有关的统计信息，要求学生注意两个统计图之间的联系，并根据两图的信息互补来回答问题.

图 28－5(1)中的条形图和扇形图是表示同一组数据的不同图形，可引导学生先读这两个统计图，从中明确产值分配的项目及已知的有关金额或所占百分比；然后可构造表格，再寻找解决问题的突破口.

注意到生产成本这一项目的金额和它占产值的百分比都是已知，于是可求解题(1)，再完成题(2).

本题也可通过对两个统计图的分析，得到税前利润 20 万元占产值的 25%，然后解答题(1)和题(2).

练习 28.1

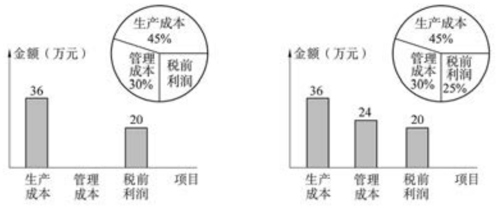
1. 用折线图可较好地反映出六次全国人口普查中关于全国人口数增长的趋势.

横轴上依次标记“普查年份”，1953 年之前用简略线表示.折线图略.

例题2 某企业七月份的产值的分配，画成扇形图和条形图如图 28－5(1)所示.结合扇形图和条形图回答下列问题：

(1) 该企业七月份的产值是多少万元？管理成本是多少万元？

(2) 请将两图中缺少的部分补充完整.



(1) (2)

图 28－5

解 (1) 从条形图和扇形图可知，该企业七月份的生产成本为 36 万元，占产值的 45%，所以七月份的产值为

$$36 \div 45\% = 80(\text{万元});$$

管理成本为

$$80 - 36 - 20 = 24(\text{万元}).$$

(2) 税前利润所占百分比为 $1 - 45\% - 30\% = 25\%$.

在条形图中补上“管理成本 24”，在扇形图“税前利润”所对应的扇形内补上“25%”.

完整的统计图如图 28－5(2)所示.

练习 28.1

1. 从 1953 年到 2010 年，我国进行了六次人口普查.下表是历次普查中关于全国人口数量调查的统计表(人口数精确到 0.01 亿)：

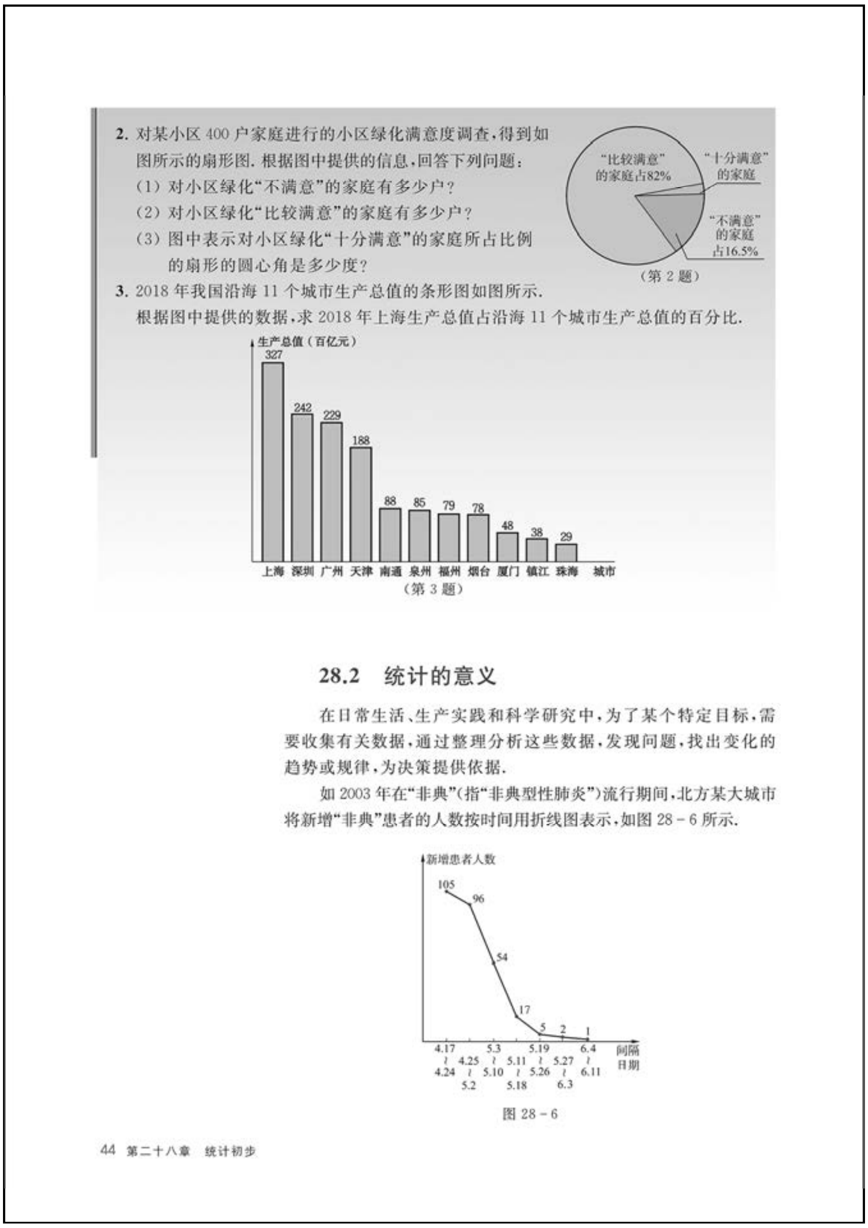
普查年份	1953 年	1964 年	1982 年	1990 年	2000 年	2010 年
人口数(亿)	6.02	7.23	10.32	11.60	12.95	13.71

请制作适当的统计图来表示上述数据.

【注意事项】

(1) 由于学生在“统计初步”之前已经学过条形图、折线图和扇形图，因此本课对这三种统计图的学习要求在原来的基础上有所提高，如出现了复合型的条形图和关于两个不完整的统计图的讨论问题.要求学生在较复杂的条形图或信息互补的统计图中获取信息，是本课教学的一个难点，需对学生多加指导和帮助.

(2) 例题 2 中的条形图(图 28－5)，其横轴上列出的项目没有顺序性，因此在轴上不加箭头.



2. 对某小区 400 户家庭进行的小区绿化满意度调查，得到如图所示的扇形图. 根据图中提供的信息，回答下列问题：

(1) 对小区绿化“不满意”的家庭有多少户？

(2) 对小区绿化“比较满意”的家庭有多少户？

(3) 图中表示对小区绿化“十分满意”的家庭所占比例的扇形的圆心角是多少度？

（第 2 题）

3. 2018 年我国沿海 11 个城市生产总值的条形图如图所示. 根据图中提供的数据，求 2018 年上海生产总值占沿海 11 个城市生产总值的百分比.

（第 3 题）

28.2 统计的意义

在日常生活、生产实践和科学研究中，为了某个特定目标，需要收集有关数据，通过整理分析这些数据，发现问题，找出变化的趋势或规律，为决策提供依据.

如 2003 年在“非典”(指“非典型性肺炎”)流行期间，北方某大城市将新增“非典”患者的人数按时间用折线图表示，如图 28－6 所示.

图 28－6

44 第二十八章 统计初步

2. (1) 66 户；

(2) 328 户；

(3) 5°24′(注意所占百分比与相应扇形圆心角的对应关系).

3. 约为 22.9%.

可先适当介绍我国在 2003 年发生“非典型性肺炎”的情况和战胜“非典”的事迹，然后以控制“非典型性肺炎”传播所进行的统计调查和研究为例，说明统计的重要性，调动学生学习统计的积极性.同时让学生具体感知“统计学”的含义.

图 28－6 是对该市市民患“非典”情况进行普查后的统计结果，从这个折线图可知各个时段内新增患者的人数.

【教学目标】

(1) 知道统计的意义，理解总体、个体、样本、普查、抽样调查等有关概念，知道样本容量是指样本中的个体数.

(2) 理解随机样本的含义，知道用随机样本来推断总体是重要的统计思想，初步会用这样的思想方法来估计总体数量.

图 28－7 是从某医院收治的“非典”患者的年龄分布进行统计，从扇形图和条形图中分别可看出各年龄段的患者相对于总人数的占比以及具体人数.

关于某市和某医院“非典”发生情况的有关数据整理和表示，分别使用了用折线图、扇形图和条形图，显示了这三个统计图在统计分析中各自的优点，要让学生体会.

引进统计调查中的有关概念.关于总体、个体、样本、样本容量的概念，可结合具体事例进行解释.

例题

本题是为帮助学生理解统计调查中的有关概念.

要提醒学生注意题中选项 B 与 D 的区别.在这项调查中，调查对象是“学生的体重”而不是“学生”，因此样本是被抽取的 50 名学生的体重，而不是被抽取的 50 名学生.

由图可见，从 4 月 17 日到 6 月 11 日这段时间内，随着时间的推移，“非典”在该市的传播被有效控制.

某医院将“非典”患者人数按年龄整理，分别用扇形图、条形图表示，如图 28－7 所示.

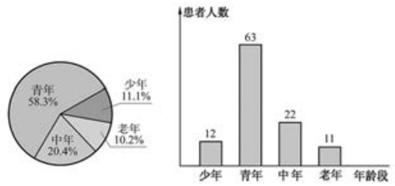


图 28－7

从图中可以看出，“非典”患者人群中，青年人多于老年人.

将上述统计数据进行整理与分析，对战胜“非典”的决策有很大帮助.在数据的整理与分析中，运用了统计学的知识.

统计学(statistics)是研究如何收集、处理、分析数据从而得出结论或找出规律的科学.

为了研究问题，就要通过调查收集数据.

调查时，调查对象的全体叫做**总体**(population)，其中每一个调查对象叫做**个体**(individual).从总体中取出的一部分个体叫做总体的一个**样本**(sample)，样本中个体的数量叫做**样本容量**.

收集数据的方法一般有两种，即普查和抽样调查.

普查是收集数据的一种基本方法，需要对总体中的每个个体都进行调查，所费的人力、物力和时间较多.这一方法的优点是数据准确度较高，调查的结论较可靠.如我国进行了多次全国人口普查，为国家制定发展计划提供了重要的依据.

抽样调查是从总体中抽取样本进行调查，并以此来估计整体的情况.抽样调查与普查相比更省时省力，但要按一定的统计方法收集数据.抽样调查是收集数据最常用的方法，如我国也曾多次进行过以内地总人口 1% 的人口为对象的抽样调查.

有些调查是不可能对所有的对象进行的.比如要调查一批日光灯管的寿命，这时往往采取抽样调查的方法，即对其中一部分灯管进行试验，然后根据试验的结果估计其余灯管的寿命.

例题 为了了解某校九年级 400 名学生的体重情况，从中抽取 50 名学生的体重进行分析.在这项调查中，样本是指 (　　)

(A) 400 名学生；　　(B) 被抽取的 50 名学生；

(C) 400 名学生的体重；　　(D) 被抽取的 50 名学生的体重.

【注意事项】

(1) 对统计调查中有关概念的教学，要注意把握要求.如对“总体”“个体”“样本”“普查”“抽样调查”“随机样本”的学习要求是解释性理解水平，学生应能在具体的问题情境中辨析和解释有关概念；而对“统计学”“样本容量”，其学习要求是记忆水平.

(2) 总体、个体、样本、样本容量是统计中最基本的概念.对“总体”的讲述，关键是要明确“调查对象”的含义.本章是介绍统计的初步知识，可向学生说明，统计调查中所关注的是事物或现象的数量特征表现，通过数量特征的名称和具体数值来反映.因此，“总体”中所涉及的“对象”是反映事物或现象的数量特征的名称和具体数值.由此可见，由调查对象的全体所构成的总体是一组统计数值，其中的每一个数值是个体，从总体中取出的一部分个体称为样本.样本容量是指样本中所含个体的个数，是“数”出来的.

分析　在这项调查中，调查对象是学生的体重.由总体、样本的概念可知，400 名学生的体重是总体，被抽取的 50 名学生的体重是样本.

解　选(D).

用样本来推断总体，即从局部来推断整体，是重要的统计思想.

问题

如果要估计某自然保护区内黑叶猴的数量，能否通过局部来推断整体呢？

可考虑通过对局部情况的调查分析，来推断整体情况.

比如在保护区内不同的地方，将 20 只黑叶猴背上涂一个色块做标记，再放归野外，一个月后如果在保护区内不同的地方观察到 60 只黑叶猴，发现其中 2 只黑叶猴有记号，那么我们就能粗略估计该自然保护区里黑叶猴的数量.这里假定有记号的黑叶猴在自然保护区里是均匀分布的，观察到的黑叶猴又是随机的，因此 60 只黑叶猴中出现有记号的黑叶猴数与 60 的比，应该与保护区所有黑叶猴中存在 20 只有记号的黑叶猴数与黑叶猴总数的比大致相同.

设保护区里有 x 只黑叶猴，则 $\frac{2}{60}=\frac{20}{x}$，得 $x=600$.所以，估计自然保护区里大约有 600 只黑叶猴.

为了能准确地推断总体，样本的选择要具有代表性，每个个体都应有均等的机会被选中.

具有代表性的样本叫做**随机样本**(random sample).

例如我国在 2005 年底开展了内地人口抽样调查工作.这项调查以我国内地人口为总体，在各省、自治区、直辖市(港、澳、台地区除外)分层、多阶段地抽取样本.调查的样本容量为 1 705 万，占全国总人口的 1.31%.

某网站曾在 2002 年发布 22 个城市职工的年薪排名，称某市职工平均年薪为 3.3 万元，而该市统计部门说，职工实际平均年薪仅 1.4 万元.网站发布的信息失真的原因是年薪调查在网上进行，被调查对象中具有大专、本科学历的人数占 81%，在薪金较高的企业工作的人数占 44.7%.这样的样本不具有代表性，不是随机样本.

46 第二十八章　统计初步

问题

提出关于估计保护区内黑叶猴数量的问题，通过问题的解决，说明“用样本推断整体”的统计思想的运用，并引出一种推断的方法.

关于保护区内黑叶猴数量的估计，是本课教学的难点.为化解难点，可引导学生联系概率有关知识进行思考.如提出问题 1：如果布袋中有许多白弹子和 10 颗红弹子，所有的弹子除颜色外没有其他差别，能否通过试验来估计袋中白弹子的数量？再提出问题 2：如果布袋里都是同样的白弹子，能否创设如同问题 1 的情境，从而化归为问题 1 来估计这个布袋里白弹子的数量？

分析解题思路时，要注意“有记号的黑叶猴在自然保护区内是均匀分布的，观察到的黑叶猴又是随机的”这一假定，并指出这是一个重要的前提条件.

引出“随机样本”的概念，再从正反两方面举例进行解释.

关于 22 个城市职工的年薪排名，是一个由于样本的非随机性而作出错误推断的典型事例.同类事例还有很多，要提醒学生重视随机样本的概念，并注意“用样本推断整体”时必须选取随机样本.

【注意事项】

为估计保护区内的黑叶猴数量，先“捉”少量黑叶猴并涂上标记，然后“放”归保护区，重新再“捉”(观察)一定数量黑叶猴看其中多少个有标记，在所述“假定”的前提下，通过计算可对保护区内的黑叶猴数量作出估计.像这种“用样本来估计总体数量”的方法可形象地说成“捉放捉”，在类似的问题情境中可采用这种方法.

练习 28.2

1. (2)和(4)正确.

2. 所作的推断不合理,因为国庆节假期中的每天营业额不具代表性.

3. 设鱼塘里有 x 条鱼.根据题意,得 $\frac{2}{60}=\frac{50}{x}$,解得 $x=1500$(条).

练习 28.2

1. 某市有 6 万名初中毕业生参加升学考试,为了了解 6 万名学生的数学成绩,从中抽取 1 500 名考生的数学成绩进行统计分析.判断下列说法中哪些是正确的:

(1) 6 万名考生是总体;

(2) 6 万名考生中每位考生的数学成绩是个体;

(3) 1 500 名考生是总体的一个样本;

(4) 样本的容量是 1 500.

2. 某出租车公司在国庆节放假期间平均每天的营业额为 5 万元,由此推算 10 月份的总营业额为 $5\times31=155$(万元).根据所学的统计知识,你认为这样推断 10 月份的总营业额合理吗?

3. 为了估计鱼塘里鱼的数量,养殖工人网住 50 条鱼,在每条鱼的尾巴上做个记号后放回鱼塘.等鱼游散后再网住 60 条鱼,发现其中有 2 条鱼尾巴上有记号.该鱼塘里约有多少条鱼?

第一节 统计的意义 47

【注意事项】

(1) 可补充一些事例,帮助学生对“总体”“个体”“样本”“随机样本”等概念加深理解.关于一个样本是否为随机样本的判断,通常不容易把握,在列举事例时要指明样本是如何抽取的或所取样本的特点,让学生直接感知样本的随机性.

(2) 在估计黑叶猴数量的问题讨论中,假定了“有记号的黑叶猴在自然保护区内是均匀分布的,观察到的黑叶猴又是随机的”,就是强调在抽样调查中所取样本是随机样本,这是用样本估计总体数量具有合理性的前提.在练习 28.2 第 3 题中,指出了“等鱼游散后再网鱼”,这样取得的样本是随机样本,因此可用所取样本来估计总体数量.

(3) 从样本推断总体,是一种重要的数学思想.运用这一思想方法时,最容易犯的错误一是样本非随机,二是样本容量太小,要提醒学生注意.这一统计思想在初中阶段的运用中,只强调样本的随机性,不涉及如何抽取样本、取多大的样本、所推得的结果有多大可信度等问题.

Jiben De Tongjiliang

第二节　基本的统计量

28.3　表示一组数据平均水平的量

1. 平均数与加权平均数

问题1

我国运动员刘翔在雅典奥运会获得男子110米栏项目的金牌.他在2006年及以前参加该项目的重大国际赛事取得的成绩分别是12.88秒、13.15秒和12.91秒；古巴运动员罗伯斯在2006年及以前的国际赛事中取得的成绩分别是13.04秒、13秒和13.08秒；前世界名将内赫米亚赫曾跑出过13.16秒、13秒和12.93秒的成绩.综合他们的三次成绩来看，谁跑得最快？

要从三次成绩来判断谁跑得最快，就要比较这三个运动员的成绩的平均数.

刘翔的成绩的平均数是

$$(12.88+13.15+12.91)\div 3=12.98(\text{秒})；$$

罗伯斯的成绩的平均数是

$$(13.04+13+13.08)\div 3=13.04(\text{秒})；$$

内赫米亚赫的成绩的平均数是

$$(13.16+13+12.93)\div 3=13.03(\text{秒}).$$

从成绩的平均数来看，刘翔跑得最快，内赫米亚赫第二，罗伯斯第三.

一般地，如果一组数据：$x_1, x_2, \cdots, x_n$，它们的平均数记作 $\bar{x}$（读/eks bɑ:/），这时

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n).\qquad ①$$

平均数反映了这组数据的平均水平，式①是计算平均数的公式.

由于问题1中的数据都在13秒附近，所以刘翔的成绩的平均数 $\bar{x}$ 还可以这样计算：

48　第二十八章　统计初步

【本课重点】

引进平均数的计算公式以及样本平均数、总体平均数、加权平均数等概念；导出加权平均数的计算公式；介绍用计算器计算平均数的操作方法.

问题1

学生早已知道平均数的概念和计算.本问题是一个有体育比赛实际背景的关于平均数应用的问题，可让学生讨论和自主解决.

在解决问题1的过程中，涉及求平均数的计算和对平均成绩含义的解释.可引导学生通过对解题活动的反思和小结，概括出计算平均数的公式①和②；并体会平均数是表示一组数据平均水平的量（或者说平均数是衡量一组数据平均水平的特征值）.

【教学目标】

（1）理解平均数、加权平均数的概念，会用有关公式计算一组数据的平均数或加权平均数，掌握用计算器计算平均数的技能；理解样本平均数和总体平均数，会根据随机样本的平均数估计总体平均数.

（2）理解中位数和众数的概念，会确定一组数据的中位数和众数；知道截尾平均数.

（3）知道平均数、中位数和众数的特点；能根据实际问题，从中选择合适的量来表示问题中一组数据的平均水平.

平均数的计算公式②是公式①的变形，可让学生推导．计算一组数据的平均数时，利用公式②有时会简便些．还要注意“边款”中的说明，让学生知道公式②反映了“将一组数据中的每一个数都加上（或减去）同一个数”时其平均数变化的规律．

可将“一组数据”与总体或样本相联系，由“一组数据的平均数”引出样本平均数和总体平均数的概念．再直接告诉学生，在一定条件下，可用样本平均数来估计总体平均数．

例题 1

本题是“用样本平均数来估计总体平均数”的统计思想方法的运用；同时为引进“加权平均数”作铺垫．

可先让学生自主计算所取 100 粒种子发芽所需天数的平均数；再通过讲评计算过程，给出具有公式③特征的表达式；然后进行一般性概括，引出计算公式③．

$(12.88+13.15+12.91)\div 3$
$=(13-0.12+13+0.15+13-0.09)\div 3$
$=13+(-0.12+0.15-0.09)\div 3$
$=13-0.06\div 3$
$=12.98$（秒）．

如果一组数据所含的 n 个数 x_1、x_2、…、x_n 都在常数 a 附近波动，那么可将它们写成 $x_1=x_1'+a$，$x_2=x_2'+a$，…，$x_n=x_n'+a$．再把 $\frac{1}{n}(x_1'+x_2'+\cdots+x_n')$ 记作 $\bar{x}'$，可得

$$\bar{x}=\bar{x}'+a. \quad ②$$

对式②也可以这样理解：将一组数据 x_1'、x_2'、…、x_n' 的每个数都加 a，那么新数据 $x_1'+a$、$x_2'+a$、…、$x_n'+a$ 的平均数 $\bar{x}$ 等于原数据的平均数 $\bar{x}'$ 加 a．

我们把样本中所有个体的平均数称为**样本平均数**（sample mean）；把总体中所有个体的平均数称为**总体平均数**（population mean）．随机样本的容量越大，样本平均数就越接近于总体平均数．必要时，可以用样本平均数来估计总体平均数．

例题1 为掌握某作物种子的发芽情况，可随机取出 100 粒种子，在适宜的温度下做发芽天数的试验．如果试验的结果如表 28.3－1 所示，你能估计出该作物种子发芽的天数的平均数吗？

天数	1	2	3	4
发芽数	15	45	35	5

表 28.3－1

分析　在一批种子中随机抽取足够多的种子，通过试验就可推断这批种子发芽的天数的平均数．

由表中可见，发芽所需天数为 1 天、2 天、3 天、4 天的种子数分别为 15 粒、45 粒、35 粒、5 粒．将这 100 粒种子发芽天数的总和除以 100，就可以得到这 100 粒种子发芽所需天数的平均数．

有人这样计算发芽的平均天数：$(1+2+3+4)\div 4=2.5$（天），你说对吗？

解　$\frac{1}{100}\times(15\times 1+45\times 2+35\times 3+5\times 4)=2.3$（天）．

因此，这 100 粒种子发芽的天数的平均数为 2.3 天．

估计该作物种子发芽的天数的平均数是 2.3 天左右．

例题 1 中的算法可用下面的公式表示：

$$\bar{x}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_kx_k}{f_1+f_2+\cdots+f_k}. \quad ③$$

这里的 x_1、x_2、…、x_k 和 f_1、f_2、…、f_k 在不同的问题中有不同的

第二节　基本的统计量　49

【注意事项】

要向学生强调，用样本平均数推断总体平均数时，有两个前提条件．其一是所取样本为随机样本，其二是样本容量足够大．但对随机抽样的方法和样本容量的确定不必深究，如在例题 1 的教学中，分析题意时要指出题中“随机取出 100 粒种子”的重要作用，但不必解释如何“随机取出”和为什么取“100 粒”．

意义.在例题 1 中,x_1、x_2、x_3、x_4 分别表示种子发芽的天数;f_1、f_2、f_3、f_4 分别表示数据 x_1、x_2、x_3、x_4 出现的次数;由题意可知 $f_1+f_2+f_3+f_4=100$.

设 $m_1=\frac{f_1}{f_1+f_2+\cdots+f_k}$, $m_2=\frac{f_2}{f_1+f_2+\cdots+f_k}$, $\cdots$, $m_k=\frac{f_k}{f_1+f_2+\cdots+f_k}$,则公式③可写成

$$\bar{x}=m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_kx_k. \quad ④$$

其中 m_1、m_2、$\cdots$、m_k 叫做权.它们体现了 x_1、x_2、$\cdots$、x_k 对平均数 $\bar{x}$ 所产生的影响.

如果有 k 个数据 x_1、x_2、$\cdots$、x_k,它们相应的权数为 m_1、m_2、$\cdots$、m_k,那么由公式③或④给出的 $\bar{x}$ 叫做这 k 个数的加权平均数(weighted mean).

通常情况下,加权平均数中的权数的和为 1.

当各数据对平均数产生的影响不同时,可用加权平均数.当

$$m_1=m_2=\cdots=m_k=\frac{1}{k}$$

时,公式④就与公式①相同,因此公式①是公式④的特例.

例题2 某市 9 月份 30 天中的空气污染指数统计如表 28.3-2 所示(当 $w\leqslant50$ 时,空气质量为优;当 $50<w\leqslant100$ 时,空气质量为良;当 $100<w\leqslant150$ 时,空气质量为轻微污染):

(w)污染指数	42	45	61	65	72	86	88	90	91
天数	2	1	3	1	1	2	3	1	2
(w)污染指数	93	100	103	104	109	113	115	117	141
天数	2	1	2	1	2	1	1	3	1

表 28.3-2

试计算 9 月份空气污染指数的平均数;再指出这个市在 9 月份的空气质量属于哪个级别.

操作

我们用计算器来计算这组数据的平均数 $\bar{x}$,常用计算器的操作步骤及按键过程(选取不同型号计算器可参照该型号计算器使用说明书)如下:

50 第二十八章 统计初步

要结合例题 1 中平均数计算的过程,讲解"权"的含义及其对平均数的影响.然后,引进"加权平均数"的概念,讲解它与"平均数"两个概念的区别及联系.

可向学生指出,计算"加权平均数"时常用公式③,而公式④着重于说明"权"的作用.

例题 2

本题是"加权平均数"的实际应用,同时渗透环境保护教育.

题中涉及的数据较多,计算较繁琐.在此安排了用计算器计算一组数据的平均数的操作活动.

操作

让学生利用计算器来求一组数据的加权平均数.要指导学生学习使用计算器的有关操作方法,注意不同型号的计算器的操作方法可能不一样,可参照该计算器的说明书进行操作.

【注意事项】

(1) 在例题 1 的教学中,要注意发挥这个例题的作用:一是关于平均数计算的巩固训练;二是用随机样本的平均数估计总体平均数的实际应用;三是为引出加权平均数概念进行准备.

(2) 加权平均数的引进采用了从特殊到一般的方法,有一个从具体感知到抽象概括的过程.要结合具体事例如例题 1 来讲解加权平均数及其计算公式③和④,帮助学生理解有关概念以及公式③和④中字母的含义.

用计算器求得一组数据的平均数后，可直接写出结果，不必表述使用计算器的操作过程.

序号	步骤	按键	屏幕显示
1	进入统计模式	MODE 2	屏幕上方出现“SD”
2	清除存储旧内容	SHIFT CLR 1 =	stat clear 0
3	输入 2 个 42	4 2 DT DT	$n=$ 2
4	输入 45	4 5 DT	$n=$ 3
5	输入 3 个 61	6 1 SHIFT ; 3 DT	$n=$ 6
	……		
20	输入 141	1 4 1 DT	$n=$ 30
21	求 $\bar{x}$	SHIFT S−VAR 1 =	$\bar{x}$ 89.7

解　利用计算器计算，得 $\bar{x}=89.7$.

所以这个市 9 月份空气污染指数的平均数是 89.7；空气质量为良.

练习 28.3(1)

1. 某大桥连续 7 天的车流量分别为 8.0、8.3、9.1、8.5、8.2、8.4、9.0（单位：千辆/日），这 7 天车流量的平均数为________千辆/日.

2. 我国 2016 年、2017 年、2018 年的粮食产量如图所示（本题中统计数据未包括我国的香港特别行政区、澳门特别行政区和台湾省的数据）. 观察统计图，并回答相应问题：

（第 2 题）

（1）按我国 13.95 亿人口计算，2018 年人均粮食产量为多少千克（精确到 1 千克）？

（2）求三年粮食产量的平均数.

第二节　基本的统计量　51

练习 28.3(1)

1. 8.5.

2.（1）约 472 千克；

（2）6.5998 亿吨.

3. 5.75 吨.

3. 某居委会表彰了社区内 100 户节约用水的家庭，5 月份这 100 户家庭节约用水的情况如下表所示：

每户节水量(单位：吨)	5	6	7.5
节水户户数	52	30	18

5 月份这 100 户家庭节水量的平均数是多少吨？

2. 中位数、众数和截尾平均数

问题2

小张到商场购物，正值商场搞促销活动.商场规定购物金额满 300 元的顾客可参加一次抽奖，并宣称人人有奖，奖金的平均数达 40 元.小张购物后参加了抽奖，但只获得 10 元奖金，而且看到大部分人抽得的奖金都只有 10 元或 20 元.表 28.3－3 是本次活动抽奖情况的记录.

奖金(元)	2 500	50	20	10
人数(个)	1	11	37	61

表 28.3－3

(1) 商场宣称的奖金的平均数与实际相符吗？

(2) 你觉得商场用平均数来表示中奖金额的平均水平合适吗？

设奖金的平均数为 $\bar{x}$，用加权平均数的方法计算，得

$$\bar{x}=\frac{1\times 2\,500+11\times 50+37\times 20+61\times 10}{1+11+37+61}=40.$$

可见奖金的平均数的确是 40 元.

算式中，$\frac{1}{110}$、$\frac{11}{110}$、$\frac{37}{110}$、$\frac{61}{110}$ 分别是奖金数 2 500、50、20、10 的权数.

本例中有 98 人抽到的奖金只有 10 元～20 元，仅 12 人抽到的奖金超过 40 元.平均数失去代表性的原因是 2 500 与其他数据相差太大，对平均数的影响也大，这时用平均数来表示中奖金额的平均水平不合适.

上面的例子表明，当数据中出现极端值时，平均数有时不能很好地反映数据的平均水平.

52 第二十八章 统计初步

【本课重点】

引进中位数和众数的概念，并让学生认识平均数、中位数、众数各自的特性以及它们在表示一组数据平均水平中的作用.

问题 2

本题是加权平均数的实际应用，也是引出中位数和众数概念的载体.

题(1)和题(2)是由问题 2 的情境与人的直觉之间存在很大差异而提出来的.题(1)其实就是求奖金的平均数；题(2)是引导学生思考为什么多数人中奖的金额都大大低于平均数.

可让学生自主解决题(1)，然后共同讨论题(2)，从中看到用平均数表示一组数据的平均水平有时并不合适.教师再进一步指出，当一组数据中出现极端值时，平均数不一定能确切地反映这组数据的平均水平，因此需要考虑引进其他的量来表示一组数据平均水平.

【注意事项】

对于加权平均数的理解和应用，是教学的一个重点也是难点.要帮助学生认识“权”的含义和作用，从而正确计算加权平均数.在课本“边款”中指出了问题 2 所列各奖金数相应的权数，要让学生注意并有明确认识；在后面涉及有关加权平均数的计算时，可同样对相应的权数进行分析和解释，帮助学生逐步加深对“权”的认识.

利用问题 2 提供的事例，引进中位数和众数的概念.在教学中，要提醒学生注意中位数与中位数的序号的区别，注意众数与众数出现的频数的区别.

将各人的中奖金额从小到大排列：

$$\underbrace{10,10,\cdots,10}_{61个},\ \underbrace{20,20,\cdots,20}_{37个},\ \underbrace{50,50,\cdots,50}_{11个},\ \underbrace{2\,500}_{1个},$$

可以看出，中奖金额共有 110 个数据，第 55、56 两个数据正好居中，它们对应的中奖金额都是 10 元；而中奖金额 10 元出现的次数最多，共 61 次.

一般地，将 n 个数据按大小顺序排列，居中的一个数据（n 为奇数时），或居中的两个数据（n 为偶数时）的平均数，称为这组数据的**中位数**(median)；出现次数最多的数据称为**众数**(mode).

将一组 n 个数据按大小顺序排列，当 n 为奇数时，第 $\frac{n+1}{2}$ 个数据是中位数；当 n 为偶数时，第 $\frac{n}{2}$ 和第 $\frac{n}{2}+1$ 两个数据的平均数是中位数.

在问题 2 中，总数为 110 个的数据，排列居中的两个数据的平均数是 10 元，即中位数；出现次数最多的数据也是 10 元，即众数.用中位数 10 元或众数 10 元来表示中奖金额的平均水平是比较合适的.

例题 3

本题是有关平均数的计算、中位数和众数的确定以及选用合适的量表示一组数据平均水平的实际应用问题，帮助学生加深理解平均数、中位数、众数的概念，掌握确定这些量的方法.

题(1)中的平均数是加权平均数，可利用公式③或用计算器进行计算.

题(4)要求从平均数、中位数、众数中选用合适的量来表示所给这组数据的平均水平，再次显示当一组数据中出现极端值时不宜选用平均数，这时选用中位数(或众数)更合适.

例题3 某集团公司有 9 个子公司，各个子公司所创年利润的情况如下表所示.

年利润(千万元)	16	4	3	2
子公司个数	1	2	4	2

表 28.3－4

根据表中的信息，回答下列问题：

(1) 各子公司所创年利润的平均数是多少万元？

(2) 各子公司所创年利润的中位数是多少万元？

(3) 各子公司所创年利润的众数是多少万元？

(4) 你认为应该使用上述哪一个量来表示各子公司所创年利润的平均水平比较合适？

解 (1)设各子公司所创年利润的平均数为 $\bar{x}$，那么

$$\bar{x}=\frac{1}{9}\times(1\times16+2\times4+4\times3+2\times2)\approx4.44(千万元).$$

(2) 将 9 个子公司所创年利润从大到小排列，第 5 个数据 3 千万元在中间，所以各子公司所创年利润的中位数是 3 千万元.

(3) 看这 9 个子公司所创年利润数据出现的次数，3 千万元出现的次数(4 次)最多，所以各子公司所创年利润的众数是 3 千万元.

(4) 由于平均数 4.44 千万元比 8 个子公司所创的年利润都高，所以用平均数来表示各子公司所创年利润的平均水平不合适.而中位数及众数都是 3 千万元，可见用它们来表示各子公司所创年利润的平均水平比较合适.

第二节 基本的统计量 53

【注意事项】

(1) 确定一组数据的中位数时，首先需将这组数据按照大小顺序排列再找出居中的数.要注意组中居中的数的规定与组中所含全部数的个数是奇数还是偶数有关；组中如有重复出现的数据，则要按这个数据出现的次数计个数.

(2) 一组数据的中位数和众数，是这组数据中处于某个特定位置上的数值(也可能是相邻两个位置的数值的平均值)，因此它们可称为“位置平均数”，注意不要与这个位置的序号相混淆.在实际问题中，中位数和众数都有单位，它们的单位与平均数的单位相同.

(3) 任何一组数据都有唯一确定的平均数和中位数，而一组数据中可能出现几个众数.例如：问题 2 所列奖金数这组数据的众数是唯一的；而“1，1，1，0，2，2，2，3，4” 这组数据的众数是 1 和 2.一般来说，中位数和众数是描述一组数据的集中趋势的特征值.

(4) 一组数据的平均水平通常可用平均数来衡量，而中位数和众数描述了一组数据的集中趋势，它们从不同侧面反映了这组数据的平均水平，所以平均数、中位数、众数都是表示一组数据平均水平的量，但它们并不是同样地合适.例如当一组数据中出现极端值时，不宜选用平均数来反映这组数据的平均水平；当一组数据中有多个数据出现的次数相同或相近，即次数分配无明显集中时，众数缺乏代表性，这时不宜用众数来反映这组数据的平均水平.

截尾后，歌手的得分可看作加权平均数，这时算式中 $\frac{2}{5}$、$\frac{3}{5}$ 分别是8.5、9的权数。这种评分规则能削弱打分过程中人为的不公正因素的影响.

在实际生活中，还有一种“截尾平均数”.如在一次演唱比赛中，某歌手演唱结束后，七个评委评定的分数分别是7.5、8.5、8.5、9、9、9.5、9.组委会规定歌手的得分是“去掉一个最高分，去掉一个最低分，取其余5个分数的平均分”.按此规定，去掉7.5和9.5，该歌手的得分是

$$\frac{2\times8.5+3\times9}{2+3}=8.8(\text{分}).$$

这个得分是截尾平均数.

议一议

平均数、中位数和众数有哪些共同点和不同点？

平均数、中位数和众数都反映一组数据的平均水平，它们是表示一组数据平均水平的量.

平均数比较敏感，能反映所有数据的情况，在统计计算中有重要的作用，缺点是易受极端值的影响.

中位数和众数不受极端值的影响，运算简单，但不能反映所有数据的情况.一组数据的中位数是唯一的，而众数有可能不唯一.

例题4 某初级中学提倡篮球运动，将投篮命中率作为考查学生体育成绩的一个项目.为了制订切合本校学生实际的合格标准，从各年级随机抽取50名学生进行10次投篮命中次数的测试，结果如表28.3－5所示.

次数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
人数	1	8	10	7	6	6	5	4	1	2	0

表28.3－5

(1) 求测试数据的平均数、中位数和众数；

(2) 你认为哪一个表示平均水平的量作为合格标准较为合适？试简要说明理由.

解 (1) 设50名学生10次投篮命中次数的平均数为 $\bar{x}$，则

$$\bar{x}=\frac{1}{50}\times(0\times1+1\times8+2\times10+3\times7+4\times6+5\times6+6\times5+7\times4+8\times1+9\times2+10\times0)=3.74(\text{次}).$$

平均数是3.74次.

将50名学生10次投篮命中次数的数据从小到大排列，第25、

54 第二十八章 统计初步

关于“截尾平均数”，只要求学生知道.

议一议

让学生对平均数、中位数、众数在统计中的作用以及它们各自的优缺点进行总结.

关于平均数、中位数、众数各自的优缺点，可结合具体事例加以说明.

例题 4

本题是以某校开展篮球运动为背景设计的关于平均数、中位数、众数实际应用的问题，引导学生重视培养数学应用的意识和能力.

学生在前面的学习中已经获得解决类似问题的经验，本题可让学生讨论和自主解决.关于题(2)的答案，要让学生充分发表意见，通过将平均数、中位数、众数用于解释实际问题，加深对概念的理解.

【注意事项】

(1) 在例题4中，由题(2)提出一项体育成绩合格标准，其答案不是唯一的，其理由也并非是完全数学的.但这个“合格标准”应体现积极引导和激励的作用，而且极大部分学生经过一定的训练都能达到.课本中题(2)的答案是“用中位数比较合适”；如果学生提出将平均数四舍五入，以投入4个为合格标准也是可以的；或以某种理由提出选用众数2也行.

(2) 用平均数、中位数、众数中的哪一个量反映一组数据的平均水平更合适，在不同的问题中有不同的选择，要对具体问题进行具体分析，如问题2、例题3、例题4所示.从不同角度看问题，答案有时不是唯一的，或可能截然不同.又从练习28.3(2)第3题，可以进一步看到众数的实际意义，因为有些实际决策问题，常由大多数对象的偏好和选择而定.

练习 28.3(2)

1. 可能出现的情景是 6 个青少年在一起玩.应该用中位数或众数来代表他们的平均年龄更为合适.

2. 平均数是 0.1,中位数和众数都是 0.

3. 多进 40 码的鞋.这个号码是众数.

【本课重点】

通过对一组数据的波动性的分析,引进方差和标准差的概念和计算方法,并初步进行实际应用.

问题 1

以某食品厂两条流水线的生产情况为背景,提出关于流水线生产的食品的重量波动性问题,让学生进行讨论和分析,为引进方差和标准差的概念进行铺垫.

对题(1)要求进行的平均数计算,解题时选用了公式②,这不仅可使计算过程较简便些,而且有利于学生感知同组内各数据相对于平均数的偏差大小.

26 这两个在中间的数据都是 3,因此中位数是 3 次.

众数是 2 次.

(2) 考虑到超过一半以上的学生 10 次投篮命中次数都在 3 次或 3 次以上,因此以中位数 3 次作为合格标准较为适宜.

练习 28.3(2)

1. 有人说草地上有 6 人在玩,他们的平均年龄为 14 岁,这时你的脑海里会出现什么情景?如果告诉你这是一位 54 岁的大妈领着 5 个 6 岁的小朋友在玩,那么与你的想象大体一致吗?应该用平均数、中位数、众数中的哪一个数来代表他们的平均年龄更为合适?
2. 求下列 10 个数据的平均数、众数和中位数:
   0, −1, 2, 1, 0, −2, 0, 2, −1, 0.
3. 某商店在一周内卖出某种品牌鞋的尺寸记录如下:
   38, 42, 38, 41, 40, 36, 39, 40, 35, 40, 43.
   商店进货时,应考虑多进的是哪个号码的鞋?这个号码是平均数、中位数、众数中的哪一个数?

28.4 表示一组数据波动程度的量

方差与标准差

问题1

某食品厂有甲乙两条流水线生产某种 100 克的袋装食品,在试生产时,从这两条流水线分别随机各抽取 5 袋食品,称出各袋食品的重量(克)分别是:

甲:100,101,99,101,99;

乙:102,98,101,98,101.

(1) 甲乙两条流水线各自生产的 5 袋食品重量的平均数分别是多少克?

(2) 哪一条流水线生产的 5 袋食品的重量波动较小?

将甲乙两条流水线各自生产的 5 袋食品重量的平均数分别记作 $\bar{x}_{甲}$ 和 $\bar{x}_{乙}$,得

$$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{5}\times(0+1-1+1-1)+100=100(克), \quad ①$$

$$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{5}\times(2-2+1-2+1)+100=100(克). \quad ②$$

由于数据在 100 附近,所以用算式 $\bar{x}=\bar{x}'+a$ 计算.

第二节 基本的统计量 55

【教学目标】

(1) 经历方差和标准差概念的引进和形成过程,知道方差和标准差是表示一组数据波动程度的量.

(2) 会计算一组数据的方差和标准差,掌握用计算器计算方差和标准差的技能.

(3) 能根据一组数据的方差或标准差来解释数据的波动性,并用于解决简单的实际问题.

【注意事项】

(1) “波动”是生活语言,而“离散”是数学术语,本章引用“波动”而回避用“离散”,有利于学生理解有关概念.可进一步指出,一组数据的波动,是相对于这组数据的平均水平(用平均数表示)而言.在本节编写中,运用了图形来直观地表现数据的波动,有利于学生理解一组数据的波动性,进而理解为什么方差、标准差能度量一组数据的波动性.

(2) 在问题 1 中,样本容量较小,不要以此推断哪条流水线生产袋装食品的重量波动小.本章只讨论样本的波动性,不要求从样本的波动大小去推断总体的波动大小.

可见两条流水线生产的 5 袋食品重量的平均数都是 100 克.

我们把甲乙两条流水线各 5 袋食品的重量用图 28－8 表示出来.

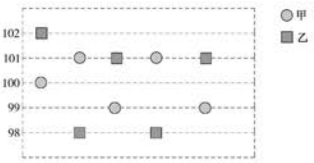


图 28－8

可以看出，两组数据都在 100 附近，但甲的数据波动程度较小，乙的数据波动程度较大.

如果一组数据：$x_1, x_2, \cdots, x_n$，它们的平均数为 $\bar{x}$，那么这 n 个数与平均数 $\bar{x}$ 的差的平方分别为

$$(x_1-\bar{x})^2,\ (x_2-\bar{x})^2, \cdots, (x_n-\bar{x})^2,$$

它们的平均数叫做这 n 个数的**方差**(variance)，记作 s^2.即

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]. \qquad ①$$

式①、式②中的求和是对非负数实施的，可见只有当这些非负数都为 0 时其和才为零.

方差的非负平方根叫做**标准差**(standard deviation)，记作 s.即

$$s=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]}. \qquad ②$$

如未指明要写方差的单位，通常就将它省略.

方差的单位为数据的单位的平方，标准差的单位与数据的单位相同.

方差与标准差反映了一组数据波动的大小，即一组数据偏离平均数的程度.从计算公式可知，一组数据越接近于它们的平均数，方差与标准差就越小，这时平均数就越具有代表性.还可以看到，只有当一组数据中所有的数都相等时，方差与标准差才可能为零.

在问题 1 中，如果用 $s_甲^2$ 和 $s_乙^2$ 分别表示甲乙两条流水线生产的 5 袋食品重量的方差，那么

$$\begin{aligned} s_甲^2 &= \frac{1}{5}\times[(100-100)^2+(101-100)^2+(99-100)^2 \\ &\quad +(101-100)^2+(99-100)^2] \\ &= \frac{1}{5}\times[0^2+1^2+(-1)^2+1^2+(-1)^2] \\ &= 0.8; \end{aligned}$$

56 第二十八章 统计初步

对题(2)中袋装食品重量的波动情况进行分析时，利用了图 28－9 的直观性.教学时，可先指出一组数据的波动是以这组数据的平均数为参照而显示出来的，波动的大小取决于组内各数据与平均数的偏差大小；然后再让学生观察图28－9，将两组数据在图中显示的情况进行比较，获得对题(2)结果的直观认识.

在解决问题 1 的基础上，可引导学生进一步思考下列问题：基于图形的直观和两组数据的比较来分析数据的波动情况有什么局限性？怎样用数量来描述一组数据的波动情况？

通过问题 1 的解决和深入思考，让学生从一组数据波动情况的直观显示进而获得用数量加以描述的启示，这是引进方差和标准差概念的认知准备.然后给出方差和标准差的概念及其计算公式，教师再结合问题 1 中的图 28－9 以及两组数据的方差和标准差的计算，进行具体的讲解.

【注意事项】

(1) 基于图形的直观和两组数据的比较来分析数据的波动情况，通常需要借助于正确地画图和观察，而这是并不一定能够实现的，即使可行也只是“比较”的结果，因此有必要用数量来描述一组数据的波动情况.

(2) 讨论怎样用数量来描述一组数据的波动情况时，可让学生发表意见，他们可能提出“用各数减平均数的差”，或“用各数减平均数的差的绝对值”来表示组内各数据相对于平均数的偏差；再通过对它们“求和”或者“求和后再求平均数”来描述一组数据的波动情况.这样的思考有积极意义，但对此是否可行不要评价，只要指出统计学中是用“各数减平均数所得差的平方”来表示组内各数据与平均数的偏差，然后给出方差、再给出标准差的表达式.

(3) 可结合图 28－9 指出 $(x_i-\bar{x})^2$ 在图中表示第 i 个数据与平均数的距离的平方，帮助学生直观体会“方差”与平方有关，并理解为什么方差越大说明这组数据波动程度越大.

问题 1 的讨论是针对从两条流水线上分别抽取的 5 袋食品的重量的波动性，要注意所得结论的表述，不能由此推断“总体”的波动大小，对此在“边款”中已作说明.

例题 1

本例是方差和标准差的实际应用，引导学生学会用所学知识解决和解释简单的实际问题.

选什么样的运动员参赛，与参赛的过程及目的有关.在对问题的分析中，指出了挑选的原则，可向学生进一步解释，题(2)中对夺得金牌所要达到的成绩有估计，在两人都有夺取金牌的实力的情况下，当然要选成绩稳定的运动员.

$$s_{乙}^2=\frac{1}{5}\times[(102-100)^2+(98-100)^2+(101-100)^2+(98-100)^2+(101-100)^2]$$
$$=\frac{1}{5}\times[2^2+(-2)^2+1^2+(-2)^2+1^2]$$
$$=2.8.$$

如果用 $s_{甲}$ 和 $s_{乙}$ 分别表示甲乙两条流水线生产的袋装食品重量的标准差，那么

$$s_{甲}=\sqrt{0.8}\approx0.894(克)；\quad s_{乙}=\sqrt{2.8}\approx1.67(克).$$

因为 $s_{甲}<s_{乙}$（或 $s_{甲}^2<s_{乙}^2$），所以乙流水线生产的 5 袋食品重量的波动较大，甲流水线生产的 5 袋食品的重量波动较小.

如要推断两条流水线生产的袋装食品的重量波动程度大小，需抽取适量的样本，并用统计学中采用的方法进行推断和误差估计.

例题1 某区要从甲乙两名射击运动员中挑选一人参加全市比赛.在选拔赛中，每人进行了 5 次射击，甲的成绩(环)为：

9.7，10，9.6，9.8，9.9；

乙的成绩的平均数为 9.8 环，方差为 0.032.

(1) 甲的射击成绩的平均数和方差分别是多少？

(2) 据估计，如果成绩的平均数达到 9.8 环就可能夺得金牌，为了夺得金牌，应选谁参加比赛？

分析 先计算甲运动员的成绩的平均数，再比较两人的成绩的平均数.如果成绩的平均数不同，那么谁的成绩的平均数大选谁是公正的；如果成绩的平均数相同，那么要根据两人成绩的方差，再确定选谁参加比赛.

解 设甲的成绩的平均数为 $\bar{x}_{甲}$，则

$$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{5}\times(-0.3+0-0.4-0.2-0.1)+10$$
$$=-0.2+10=9.8(环).$$

两名运动员的成绩的平均数都是 9.8 环.

设甲的成绩的方差为 $s_{甲}^2$，则

$$s_{甲}^2=\frac{1}{5}\times[(-0.1)^2+0.2^2+(-0.2)^2+0^2+0.1^2]$$
$$=0.02.$$

因为 $s_{甲}^2=0.02<0.032$，所以甲运动员的成绩较稳定，乙运动员的成绩波动较大.

为了夺得金牌，应选成绩较稳定的甲运动员参加比赛.

第二节 基本的统计量 57

【注意事项】

(1) 按照前面“边款”中的说明，问题 1 中的方差计算结果，省略了它的单位(克^2)；在后面的例题中，同样也省略方差的单位.但要注意，实际问题中一组数据的方差是有单位的，即为数据已有单位的平方；但这样的单位通常没有明确的物理意义而是在运算中形成的.再由方差得到标准差时，可知标准差的单位与数据已有单位相同，标准差的单位通常需要指出.

(2) 本章中不引进样本的方差和标准差以及总体的方差和标准差，当然也不要求由随机样本来估计总体的方差或标准差.要注意，用样本估计总体的方差和标准差时，所用的公式与本节中的公式有所不同，在本章不要涉及这类推断问题.

例题2 100 克的鱼肉和 100 克的家禽肉中，蛋白质的含量如图 28－9 所示.

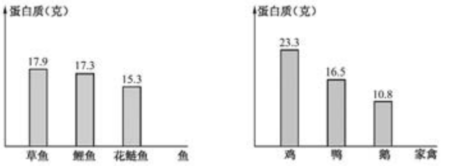


图 28－9

(1) 100 克的鱼肉和 100 克的家禽肉中，蛋白质含量的平均数各是多少克(精确到 0.01 克)？

(2) 100 克的鱼肉和 100 克的家禽肉中，蛋白质含量的平均数中，哪一个更具有代表性？请说说判断的理由.

分析　先分别计算鱼肉和家禽肉中蛋白质含量的平均数，然后计算相应的方差.方差反映一组数据的波动的程度，方差越小，则这组数据的波动就越小，平均数的代表性就越大.

解　(1)用 $\bar{x}$、$\bar{x}'$分别表示 100 克的鱼肉和 100 克的家禽肉中蛋白质含量的平均数，则

$$\bar{x}=(17.9+17.3+15.3)\div 3\approx 16.83(\text{克});$$

$$\bar{x}'=(23.3+16.5+10.8)\div 3\approx 16.87(\text{克}).$$

(2) 用 s^2、s'^2 分别表示 100 克的鱼肉和 100 克的家禽肉中蛋白质含量的方差，则

$$s^2=\frac{1}{3}\times[(17.9-16.83)^2+(17.3-16.83)^2+(15.3-16.83)^2]$$
$$\approx 1.24;$$

$$s'^2=\frac{1}{3}\times[(23.3-16.87)^2+(16.5-16.87)^2+(10.8-16.87)^2]$$
$$\approx 26.1.$$

因为 $s'^2>s^2$，所以 100 克的鱼肉中蛋白质含量的平均数更具有代表性.

练习 28.4(1)

1. 甲乙两人在射击比赛中，打靶的次数相同，且所得环数的平均数 $\bar{x}_甲=\bar{x}_乙$. 如果甲的射击成绩比较稳定，那么方差的大小关系是 $s^2_甲$________$s^2_乙$.
2. 数据 90、91、92、93 的标准差是　(　　)

(A) $\sqrt{2}$；　(B) $\frac{5}{4}$；　(C) $\frac{\sqrt{5}}{4}$；　(D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

58 第二十八章　统计初步

例题 2

本题是有关方差实际应用的问题，还有识图训练的要求.题中的数据来自食品成分的有关资料.

由于 100 克鱼肉或 100 克的家禽肉中的蛋白质含量的平均数很接近，因此用方差来比较它们的波动程度是合适的.

练习 28.4(1)

1. <.

2. D.(提示：$\bar{x}=91.5$)

3. A.(提示：$\bar{x}_甲=6$，$\bar{x}_乙=6$；

$$s^2_甲=\frac{1}{4}(4^2\times 2+2^2\times 2)=10,$$

$$s^2_乙=\frac{1}{4}(3^2\times 2+1^2\times 2)=5).$$

【注意事项】

当两组数据的平均数相差较大时，不能直接用方差来比较两者的波动程度，通常可利用“变异系数”来比较它们相对的波动程度.本章不涉及有关“变异系数”的教学要求，不必补充这一内容.

【本课重点】

通过具体事例，让学生探讨当一组数据中的各数同时增加（或减少）相同的数值时，所得新数据与原数据的波动大小是否发生变化；引导学生学习用计算器计算方差和标准差以及用方差或标准差解释实际问题.

问题 2

将问题 1 所列数据中各数同时增加相同的数值，探讨所得新数据与原数据的波动大小是否发生变化.可让学生先进行思考和分析，在讨论的基础上再归纳结论.

教师在讲解时，可在给出两组数据后，先让学生讨论两组数据的平均数是否相同，并利用平均数的计算公式②得到第二组数据的平均数等于第一组数据的平均数加 900；然后讨论两组数据的方差是否变化.要展示图 28 - 10 以及其中一组新数据的方差计算过程，帮助学生从感性到理性逐步深入地认识新数据与原数据的波动大小一样.

注意指导学生用计算器进行有关计算，并学会根据方差或标准差大小回答与数据波动性有关的问题.

3. 甲乙两组数据如下：

甲：2，4，6，8，10；

乙：3，5，6，7，9.

用 $s^2_{甲}$ 和 $s^2_{乙}$ 分别表示这两组数据的方差，那么 （　　）

(A) $s^2_{甲}>s^2_{乙}$； (B) $s^2_{甲}<s^2_{乙}$；

(C) $s^2_{甲}=s^2_{乙}$； (D) $s^2_{甲}$ 与 $s^2_{乙}$ 大小不定.

问题2

将问题 1 中的每个数据都加 900，得到新数据：

甲：1 000，1 001，999，1 001，999；

乙：1 002，998，1 001，998，1 001.

根据平均数的公式②，可知两组数据的平均数从 100 变为 1 000. 那么甲乙两组数据的方差与原先相比是否会发生变化？

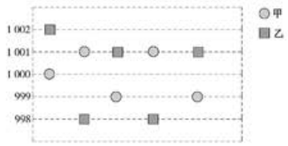


图 28 - 10

观察图 28 - 10，可见两组新数据确实在 1 000 上下波动，但与原先（见图 28 - 8）相比，波动程度却没有变化.

下面以甲组新数据来验证这个结论.

设甲组新数据的方差为 $s^2_{甲}$，则

$$s^2_{甲}=\frac{1}{5}\times[(1\,000-1\,000)^2+(1\,001-1\,000)^2+(999-1\,000)^2+(1\,001-1\,000)^2+(999-1\,000)^2]$$
$$=\frac{1}{5}\times[0^2+1^2+(-1)^2+1^2+(-1)^2]$$
$$=0.8.$$

可见甲组新数据的方差与原数据的方差相同.

一般地，已知一组数据：$x_1,x_2,\cdots,x_n$，它们的方差为 s^2，那么一组新数据：$x_1+a,x_2+a,\cdots,x_n+a$，这组数据的方差仍为 s^2.

第二节　基本的统计量 59

【注意事项】

将一组数据中的各数同时增加相同的数值 a，得到一组新数据.可引导学生归纳：

已知一组数据：$x_1,x_2,\cdots,x_n$，可知新组数据为 $x_1+a,x_2+a,\cdots,x_n+a$.设原组数据的平均数为 $\overline{x}$，其方差和标准差分别为 s^2、s，则新组数据的平均数为 $\overline{x}+a$（可由前面关于平均数计算公式②得到），而方差和标准差仍分别为 s^2、s.

方差和标准差的计算往往比较复杂，可用计算器来进行运算.

如一组数据为：$-2,0,0,1,1,1$.用计算器计算这组数据的标准差 s 和方差 s^2，其操作步骤及按键过程（选取不同型号计算器可参照该型号计算器使用说明书）如下：

序号	步骤	按键	屏幕显示
1	进入统计模式	MODE 2	屏幕上方出现“SD”
2	清除存储旧内容	SHIFT CLR 1 =	stat clear 0
3	输入-2	(−) 2 DT	$n=$ 1
4	输入 2 个 0	0 DT DT	$n=$ 3
5	输入 3 个 1	1 SHIFT ; 3 DT	$n=$ 6
6	求 s	SHIFT S−VAR 2 =	$x\delta n$ 1.067187373
7	求 s^2	X^2 =	1.138888889

例题3 甲乙两班举行电脑汉字输入速度比赛，各选 10 名学生参加，各班参赛学生每分钟输入汉字个数的统计如图 28-11 所示.

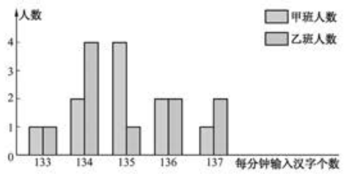


图 28-11

（1）在下表中填写乙班学生的相关数据：

输入汉字的有关统计量	众数（个）	中位数（个）	平均数 $\bar{x}$（个）	方差 s^2
甲班学生	135	135	135	1.2
乙班学生				

举例演示利用计算器计算一组数据的方差和标准差的过程.

注意与求 $\bar{x}$ 时的按键过程进行比较：

按 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{S}-\text{VAR}}$

后显示：$\bar{x}$ 1　$x\sigma_n$ 2　$x\sigma_{n-1}$ 3

按 $\boxed{1}$ 显示平均数后，

再按 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{S}-\text{VAR}}$ $\boxed{2}$ 显示标准差.

例题 3

本题是关于方差的实际应用问题.题中给出的统计图是复合条形图，要求学生能从图中获取信息；再通过题（1）帮助学生熟悉有关统计量的计算，通过题（2）让学生体验用有关统计知识解释实际问题.

【注意事项】

（1）课本中举例说明了用计算器计算一组数据的方差、标准差的操作过程，但所用计算器的型号不同时，按键情况及其过程显示可能都有所不同.关于计算器使用的教学，可指导学生参照计算器操作的“说明书”.

（2）在例题 3 的教学中，题（1）填写表格可让学生自主完成，如有学生将众数误为“4”，要进行评讲并提醒注意；题（2）可先让学生考虑，根据前面所学统计知识可从哪些方面来评价两班学生的比赛成绩，然后进行分析和交流看法，教师再讲评.

（3）在解答与两组数据波动有关的问题时，如果只要比较两组数据的波动性大小而不要求计算方差、标准差，那么可根据具体情况灵活解决.有时可通过数据波动图形判断；或在知道平均数时，可将两组数据中相同数据抵消，再根据剩余数据的波动性作出判断.要提醒学生注意，有时可利用数据波动性的概念来分析和解决有关问题.

（4）笔算方差、标准差时，先要求出平均数，因此本节学习的过程也是求平均数的练习和巩固过程.

一组数据的波动程度小，或者说一组数据的方差小，说明数据比较集中，用于题(2)可知甲班学生的成绩较稳定.

练习 28.4(2)

1. (1)和(2)正确.

2. 该班组在 10 天中生产的次品的平均数是 1.5 个；中位数、众数都是 2 个；方差是 1.25.

3. 两组学生成绩的中位数都是 80 分.甲组众数为 90 分，乙组众数为 70 分.用计算器计算，得 $\bar{x}_{甲}=80$，$s_{甲}^2=172$；$\bar{x}_{乙}=80$，$s_{乙}^2=256$.可知甲乙两组学生的科技知识竞赛成绩的平均水平相同，但乙组的成绩两极分化较大，甲组的平均成绩更具有代表性.

(2) 根据所学的统计知识，评价甲乙两班学生的比赛成绩.

解 (1) 从条形图中可直接看出，乙班学生每分钟输入汉字个数的众数是 134 个，中位数是 $\frac{134+135}{2}=134.5$(个)；

平均数是

$$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{10}\times(1\times133+4\times134+1\times135+2\times136+2\times137)$$
$$=135(个)；$$

方差是

$$s_{乙}^2=\frac{1}{10}\times[(133-135)^2+4\times(134-135)^2+(135-135)^2$$
$$+2\times(136-135)^2+2\times(137-135)^2]$$
$$=1.8.$$

(2) 因为平均数包含了所有参赛学生的信息，所以用平均数比较两班的比赛成绩更为公平.

因为 $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}=135$(个)，所以甲乙两班参赛学生的水平相同.

比较两班成绩的方差，因为 $s_{甲}^2<s_{乙}^2$，所以乙班参赛学生的成绩波动较大，而甲班参赛学生的成绩较稳定.

练习 28.4(2)

1. (口答)已知两组数据：x_1, x_2, x_3 和 x_1+2, x_2+2, x_3+2.判断下列说法是否正确：
   (1) 平均数不相等，方差相等；
   (2) 中位数不相等，方差相等；
   (3) 平均数相等，方差不相等；
   (4) 中位数相等，方差不相等.
2. 某厂对一个班组生产的零件进行调查.该班组在 10 天中每天所出的次品数如下(单位：个)：

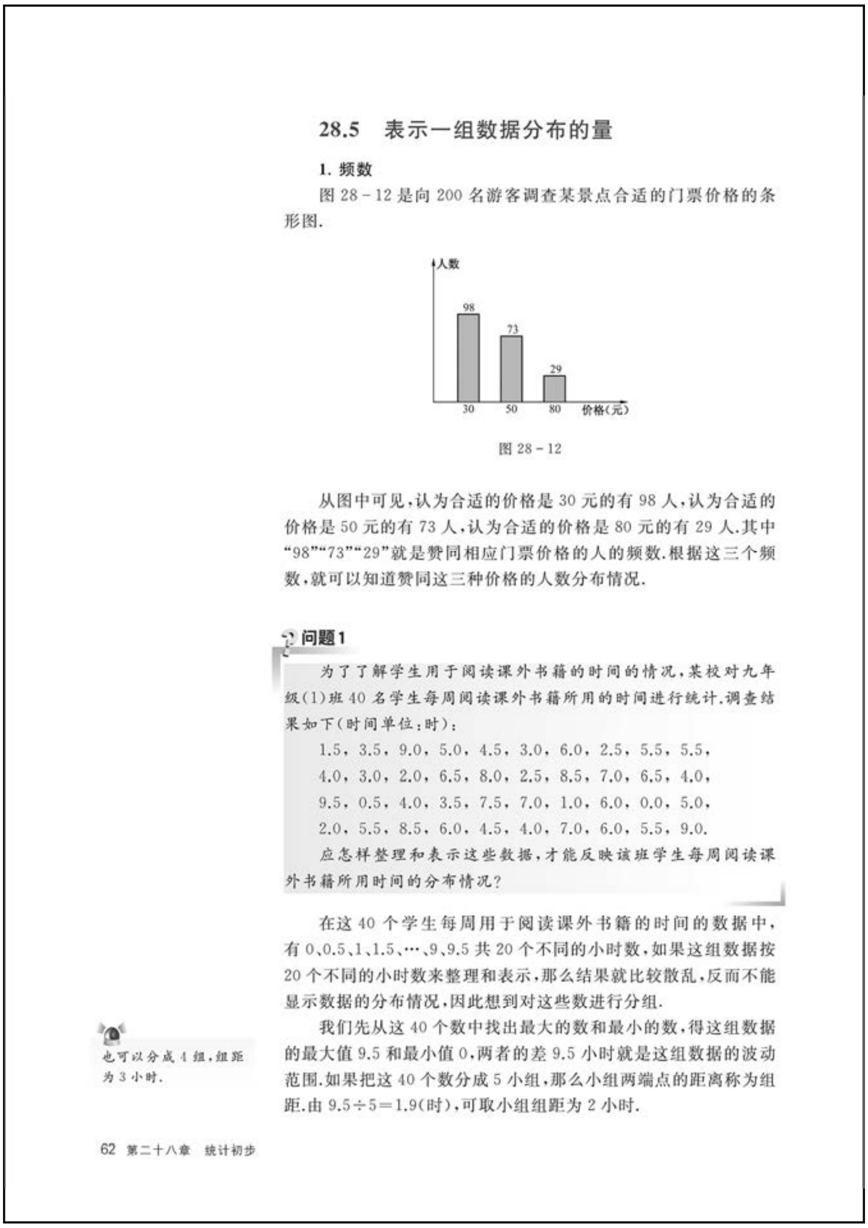
   0，2，0，2，3，0，2，3，1，2.

   求该班组在 10 天中生产出的次品的平均数、中位数、众数和方差.
3. 在一次科技知识竞赛中，两组学生的成绩如下表所示：

分数		50	60	70	80	90	100
人数	甲组	2	5	10	13	14	6
	乙组	4	4	16	2	12	12

请根据你所学过的统计知识，对两组学生在这次竞赛中的成绩的平均数及成绩的波动程度进行评判，并说明理由.

第二节 基本的统计量 61



28.5 表示一组数据分布的量

1. 频数

图 28－12 是向 200 名游客调查某景点合适的门票价格的条形图.

图 28－12

从图中可见，认为合适的价格是 30 元的有 98 人，认为合适的价格是 50 元的有 73 人，认为合适的价格是 80 元的有 29 人.其中“98”“73”“29”就是赞同相应门票价格的人的频数.根据这三个频数，就可以知道赞同这三种价格的人数分布情况.

问题1

为了了解学生用于阅读课外书籍的时间的情况，某校对九年级(1)班 40 名学生每周阅读课外书籍所用的时间进行统计.调查结果如下(时间单位：时)：

1.5，3.5，9.0，5.0，4.5，3.0，6.0，2.5，5.5，5.5，
4.0，3.0，2.0，6.5，8.0，2.5，8.5，7.0，6.5，4.0，
9.5，0.5，4.0，3.5，7.5，7.0，1.0，6.0，0.0，5.0，
2.0，5.5，8.5，6.0，4.5，4.0，7.0，6.0，5.5，9.0.

应怎样整理和表示这些数据，才能反映该班学生每周阅读课外书籍所用时间的分布情况？

在这 40 个学生每周用于阅读课外书籍的时间的数据中，有 0、0.5、1、1.5、…、9、9.5 共 20 个不同的小时数，如果这组数据按 20 个不同的小时数来整理和表示，那么结果就比较散乱，反而不能显示数据的分布情况，因此想到对这些数进行分组.

我们先从这 40 个数中找出最大的数和最小的数，得这组数据的最大值 9.5 和最小值 0，两者的差 9.5 小时就是这组数据的波动范围.如果把这 40 个数分成 5 小组，那么小组两端点的距离称为组距.由 9.5÷5＝1.9(时)，可取小组组距为 2 小时.

也可以分成 4 组，组距为 3 小时.

62 第二十八章 统计初步

【本课重点】

通过具体事例，让学生体会按照一定的标志进行统计分组以分析数据分布情况的必要性，并帮助学生初步学会构造频数分布表、绘制频数分布直方图以及从图中获取有关信息.

在关于门票价格的调查分析中，复习曾在概率初步中出现过的“频数”概念，同时让学生直观地认识“分布”的含意，为讨论问题 1 做准备.

问题 1

以调查学生每周用于阅读课外书籍的时间为背景，提出关于数据分布情况分析的问题；通过解决问题，引进频数分布直方图.

这个问题中关于学生课外阅读时间的调查结果共有 40 个数，如问“怎样表示平均水平”，学生不难回答；现从“显示数据分布情况”提出对数据进行整理和表示的要求，学生面临的问题是全新的.在学生讨论和解决问题 1 的过程中，教师要多加引导和讲解.

【教学目标】

(1) 理解组频率的含义，知道可用频数、频率来表示一组数据的分布；对一组数据，在给定统计分组的情况下会制作频数分布表、频率分布表，会绘制频数分布直方图和频率分布直方图.

(2) 能从频数分布直方图和频率分布直方图中获取有关信息以及判断数据分布的情况.

(3) 对人口、体重、身高等实际问题进行数据分析时，能从随机样本的分布估计总体的分布.

【注意事项】

引导学生讨论问题 1 时，可将关于门票价格调查的引例中游客认为合适的价格所出现的三个价格数作为调查结果，让学生体会“频数”与数据分布情况的关系；然后将问题 1 与引例类比，看到问题 1 可用题中所含二十个不同数据的频数来解决；再指出这样的表示不够简明，而且通常不需要这样细致，于是提出可按照一定的标志进行统计分组后再整理，让学生从中认识分组的必要性.在此基础上，进一步引进“频数分布表”和“频数分布直观图”.注意，“频数”通常是在“分组”的情况下相对于“每一个组”而言，其实是“组频数”.

要向学生说明分组的方法和“组距”的含义；并注意“每个小组可包括最小值，不包括最大值”的约定.这个约定在本章始终不变，以免引起混乱.

频数分布表是画频数分布直方图的基础，通过频数分布表可清楚看到各组的频数.

频数分布直方图中各小矩形的高即频数.从频数分布直方图中可直观看出各组的频数差别.

画出关于问题 1 的频数分布直方图后，要指导学生“读图”，让学生从中体会频数分布直方图是表示数据分布情况的一种方法，同时培养识图能力.

再列频数分布表.有些数正好在两小组的分界点上，为了使各数既不重复也不遗漏，我们规定每个小组可包括最小值，不包括最大值.于是得到频数分布表，如表 28.5－1 所示.

一个小组的频数是指落在这个小组内的数据累计出现的次数.

分　组	次数记录	频　数
0—2	𠀎	4
2—4	正下	8
4—6	正正丅	12
6—8	正正	10
8—10	正一	6

表 28.5－1

最后根据频数分布表来画统计图.以横轴表示学生每周用于阅读课外书籍的小时数，纵轴表示人数，绘制统计图如图 28－13 所示.

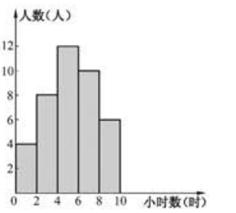


图 28－13

我们把反映各小组中相关数据出现的频数的统计图叫做**频数分布直方图**.

从图 28－13 中可见，学生每周用于阅读课外书籍的时间 t(时)中，满足 $4\leqslant t<6$ 的最多，达 12 人；其次是满足 $6\leqslant t<8$ 的有 10 人；另外，满足 $2\leqslant t<4$ 的有 8 人，满足 $8\leqslant t<10$ 的有 6 人；而满足 $0\leqslant t<2$ 的最少，只有 4 人.

利用频数分布直方图可以直观地看到学生每周用于阅读课外

第二节　基本的统计量　63

【注意事项】

（1）在问题 1 的教学小结中，可进一步指出，如果按学生课外阅读时间调查结果的二十个不同数据来整理它们的分布情况，那么表示出来既烦琐又凌乱，数据分布的规律性也不清晰；而将这些数分成 5(或 4)组后进行整理和表示，不仅过程比较简明，而且可见其频数(频率)的分布呈现出两头小、中间大的特征，帮助学生理解数据分组的必要性.

（2）对一组数据，课本中约定分组时“每个小组可包括最小值，不包括最大值”，这样可使每个数据必定在并且只在一个小组内.

书籍时间的分布情况.

通过问题 1 的讨论,归纳频数分布直方图的绘制步骤如下:

(1) 收集原始数据.

在问题 1 中首先是对九年级(1)班全体 40 名学生进行普查,得到学生每周用于阅读课外书籍的时间.

(2) 计算最大值减去最小值的差.

在问题 1 列出的 40 个数据中,最大数是 9.5,最小数是 0,9.5−0=9.5,由此得到这组数据波动的范围.

(3) 决定组数与组距.

一般数据越多,分组也越多,当数据在 100 个左右时分成 5—12 小组为宜.在问题 1 中有 40 个数据,可分成 4 或 5 小组,组距相应为 3 或 2 小时.

(4) 列频数分布表.

通常规定各小组包括最小值,不包括最大值.分组后对各个小组作频数累计,得出频数.

(5) 绘制频数分布直方图.

在问题 1 中,以横轴表示学生每周用于阅读课外书籍的时间,纵轴表示相应的人数.

在纵轴表示频数的直方图中,每个小矩形的高表示相应小组的频数.

从频数分布直方图中可以获得很多信息.

例题1 A 班学生参加环保知识竞赛,已知竞赛得分都是整数.把参赛学生的成绩整理后分成 6 小组,画出竞赛成绩的频数分布直方图,如图 28－14 所示.根据图中的信息回答下列问题:

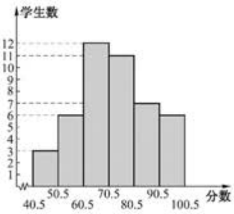


图 28－14

结合问题 1 的解决过程,引导学生归纳画频数分布直方图的一般步骤,并要求学生掌握.

收集数据是统计的基础,也是难点之一,将安排学生在统计实习中进行实践.

在有关练习题中,对于“如何分组”一般都是指定的,不要求学生根据样本容量和数据波动范围自己进行分组.

例题 1

本题着重于帮助学生学会从频数分布直方图中获取有关信息,并用于分析和解决有关问题.

读频数分布直方图时，要注意图中“每个小组可包括最低值，不包括最高值”.

由本例可知，从频数分布直方图中，通常可看出中位数所在的小组及各小组数据的频数及相应的比例.

练习 28.5(1)

1. (1) 中位数在 $4\leqslant t<6$ 的小组内（从左起第 3 小组）；

(2) 55%.

2. 五个小组的频数依次是 7、10、9、8、6，频数分布直方图略.

(1) A 班共有多少名学生参赛？

(2) 成绩的中位数落在哪个小组数据范围内？

(3) 求成绩高于 60 分的学生占全班参赛人数的百分率.

解 (1) 从频数分布直方图中各小矩形的高可以知道各小组的频数.由此可知 A 班参赛学生的人数是

$$3+6+12+11+7+6=45(\text{人}).$$

(2) 将 45 个成绩从大到小排列，居中的第 23 个成绩是中位数.根据各小组的人数可知，第 23 个成绩在 70.5—80.5 的小组里.

(3) $$\frac{1}{45}\times(12+11+7+6)=80\%,$$

所以，成绩高于 60 分的学生人数占全班参赛学生人数的 80%.

练习 28.5(1)

1. 根据图 28－13，试回答下列问题：

(1) 学生每周用于阅读课外书籍的时间的中位数在哪个小组？

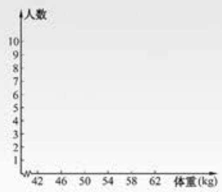
(2) 学生每周用于阅读课外书籍的时间在 4—8（不含 8）小时的人占学生总人数的百分比是多少？

2. 某班 40 名学生体重(kg)记录如下：

44，46，43，51，51，52，48，46，45，59，
57，49，42，50，54，43，44，49，51，53，
52，54，49，61，54，56，48，47，59，53，
59，58，48，51，43，48，60，54，57，55.

若将数据分成 5 小组，试先填表，再画频数分布直方图.

分　组	次数记录	频　数
42—46		
46—50		
50—54		
54—58		
58—62		



（第 2 题）

2. 频率

问题2

在例题 1 中，A 班学生参加环保知识竞赛的成绩的频数分布直方图如图 28－14 所示.如果 B 班学生参加同一环保知识竞赛的成绩的频数分布直方图如图 28－15 所示，那么应该如何比较 A、B 两班参赛学生成绩的分布情况？

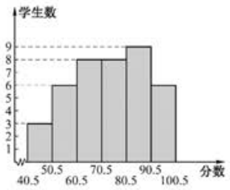


图 28－15

已知 A 班参赛学生有 45 名，而从图 28－15 中可知，B 班参赛学生有 40 名.因此直接从各小组的频数来比较 A、B 两班参赛学生成绩的分布情况就比较困难.

如果将每小组的频数除以全组数据总的个数，就可以得到各小组数据的频数与全组数据总个数的比值，我们把这个比值叫做**组频率**.

$$组频率=\frac{小组中数据的频数}{全组数据的总个数}.$$

由于组频率表示比值大小，因此可以用组频率来比较人数不同的两个班学生成绩的分布情况.

下面以问题 1 为例，说明如何画频率分布直方图.

在问题 1 中，数据总数为 40.将各小组频数除以 40，可得各小组的频率.再将频数分布表扩充就得到频率分布表，如表 28.5－2 所示.

分　组	频　数	频　率
0—2	4	0.1
2—4	8	0.2
4—6	12	0.3
6—8	10	0.25
8—10	6	0.15

表 28.5－2

66 第二十八章　统计初步

【本课重点】

通过具体事例，引进“组频率”的概念，帮助学生初步学会构造频率分布表、绘制频率直方图以及从图中获取有关信息.

问题 2

以人数不同的两个班学生参加同一项知识竞赛为背景，提出如何比较这两班学生成绩的分布情况的问题，通过问题讨论，引进“组频率”的概念，并让学生认识用频率分析数据的必要性.

在 A、B 两班的人数不同的情况下，学生容易理解用各小组的“频数”来比较这两班学生成绩的分布情况是不合适的；教师再以学生在概率中学过的“频率”引导学生思考，然后引进“组频率”的概念，并指出频率是与全组数据总个数有关的一个相对指标.

在解决问题 1 时，引进了“频数分布直方图”；于是提出关于绘制“频率分布直方图”的问题，并讲述画法.

“频率分布表”是由“频数分布表”扩充而得到的，注意它们针对同样的分组.

【注意事项】

(1) 在数据分布情况的表示中，频数与频率是两个既有联系又有差别的指标.根据一组数据的波动范围进行适当分组以后，频数是指一个小组中所含各数据出现的次数，它是只与这个小组有关的一个绝对指标；频率不仅与这个小组的频数有关，而且是与全组数据的总个数有关的一个相对指标.因此，当两组数据的总个数不相同而要比较它们的分布情况时，作为绝对指标的频数就不能正确地反映这两组数据分布情况的异同，这时只有用组频率这个相对指标才能进行比较.教师对此要适当讲解，以帮助学生理解引入“组频率”的必要性，从而激发学生学习“组频率”以及“频率分布直方图”的兴趣.

(2) 要让学生掌握“组频率”的计算，并能将频数分布表扩展为频率分布表；同时让学生明确“各小组的组频率之和为 1”.

在讲解“频率分布直方图”时，要着重指出纵轴所表示的意义，并针对问题 1 中的具体事例，解释各小矩形的纵向边长的计算过程.

直接告诉学生，关于人口、身高、体重等可通过大容量的随机样本的分布来推断总体的分布，使学生感到下面对例题 2 的讨论是有意义的而且思路正确.实际上，人口、身高、体重等总体的分布属于正态分布，而在正态分布的情况下这样的推断是可行的，但对此不必向学生解释.

例题 2

本题着重于帮助学生学习频率分布直方图的画法，并学会从图中获取有关信息.

要向学生指出，题中对体重分组时仍按“每组可包括最低值，不包括最高值”的约定.这样，对题(3)分析和解答就不会有歧义.

通常在频率分布直方图中，用每小组对应的小矩形的面积表示该小组的组频率.因此在频率分布直方图中，纵轴表示频率与组距的商，即“$\dfrac{频率}{组距}$”，横轴的意义与频数分布直方图相同.画出问题 1 中学生每周用于阅读课外书籍时间的频率分布直方图，如图 28－16 所示.

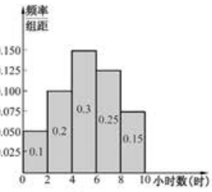


图 28－16

对于人口、身高、体重等问题，我们可以通过大容量的随机样本的分布来推断总体的分布.

例题2 为了了解全区 6 000 名初中毕业生的体重情况，随机抽测了 400 名学生的体重.统计结果列表 28.5－3 如下：

体重(kg)	频　数	频　率
40—45	44	
45—50	66	
50—55	84	
55—60	86	
60—65	72	
65—70	48	

表 28.5－3

(1) 计算组频率，并填入表格中；

(2) 画出样本频率分布直方图，图中各小矩形面积的和等于多少？

(3) 估计全区初中毕业生中体重小于 60 千克且不小于 50 千克的学生人数.

解 (1) 将各小组频数除以 400，依次得各小组频率为

0.11，0.165，0.21，0.215，0.18 和 0.12.

【注意事项】

(1) 在例题 2 中，给出了“分组”的具体设计，不要求学生自己确定合适的组数和组距；在练习题中，一般也同样给出“分组”的具体设计.

(2) 画频率分布直方图时，如何确定纵轴上的相应数值是一个难点.在例题 2 的教学中，关于频率分布直方图的画图过程主要由教师讲解和演示.

(3) 对于频率分布直方图的教学，要注意以下几点：①一般不要求学生会完全自主地确定频率分布直方图中纵轴上的相应数值；②对于具体问题，在已给出与绘制频率分布直方图有关的横、纵两轴的基础上，要求学生能画出频率分布直方图或完善这个图形；③要求学生能从频率分布直方图中获取有关信息.

填入表内，如表 28.5－4 所示.

体重(kg)	频　数	频　率
40—45	44	0.11
45—50	66	0.165
50—55	84	0.21
55—60	86	0.215
60—65	72	0.18
65—70	48	0.12

表 28.5－4

(2) 画出频率分布直方图，如图 28－17 所示.

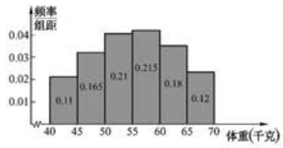


图 28－17

因为组频率的和为 1，所以频率分布直方图中各小矩形的面积和为 1.

(3) 样本中小于 60 千克且不小于 50 千克的频率为 0.21＋0.215＝0.425，估计全区初中毕业生体重在此范围的学生人数约为

$$6\,000\times0.425=2\,550(\text{人}).$$

在频率分布直方图中，各小矩形的宽是组距，面积是相应小组的频率，因此小矩形的高是频率除以组距.如第一小组的小矩形的高为 0.11÷5＝0.022.

练习 28.5(2)

1. 某中学数学教研组有 25 名教师，将他们按年龄分成三个小组，在 38—45(岁)小组内有 8 名教师，那么这个小组的组频率是________.
2. 根据本节例题 1 和问题 2 中 A、B 两班学生参加环保知识竞赛的成绩情况，编制频率分布表，画出相应频率分布直方图，并分析两班成绩的特征.

68 第二十八章 统计初步

通过例题 2 的教学，要让学生对画频率分布直方图的过程有基本了解.

在本题的教学小结中，要指出：①频率分布表与频数分布表之间的联系；②频率分布直方图与频数分布直方图这两个图中的小矩形表示不同的意义，即频数分布直方图中小矩形的高表示相应小组的频数，频率分布直方图中小矩形的面积表示相应小组的组频率，且各小矩形的面积和为 1；③由于频率分布直方图中纵轴上的数值并不直接显示组频率，所以将组频率写在相应的小矩形内.

练习 28.5(2)

1. 0.32.

2. A、B 班学生参加环保知识竞赛成绩的频率分布表如下：

分组	A 班频率	B 班频率
40.5—50.5	0.067	0.075
50.5—60.5	0.133	0.15
60.5—70.5	0.267	0.20
70.5—80.5	0.244	0.20
80.5—90.5	0.156	0.225
90.5—100.5	0.133	0.15

频率分布直方图略.

从图(或表)中可见，在 40.5—60.5 的低分组，A 班成绩频率为 0.20，B 班成绩频率为 0.225，说明 B 班低分学生比例略高；在 60.5—80.5 的分数组，A 班成绩频率为 0.511，B 班成绩频率为 0.40，说明 A、B 两班学生成绩在这一分数组较多，但 A 班所占比例大些；而在 80.5—100.5 的高分组，A 班成绩频率为0.289，B 班成绩频率为 0.375，可见 B 班高分学生比例明显高于 A 班，故 B 班学生成绩两极分化现象较明显.

例题 1

这是将统计知识用于调查和分析生活实际问题的举例，为学生开展统计实习活动提供有益的启示.

题中涉及公交车、载重车和小车三类被调查车辆，列出了周五、周六两天在 6:00 ～ 22:00 时间段每小时的车流量，共有 6 组数据；本题要求对调查结果进行数据分析，包括计算平均数和方差、画折线图和频数分布直方图等.通过整理多个调查对象的几组数据，或整理一个调查对象在时间、空间两方面的数据，让学生面对生活中的真实问题，培养处理实际数据的能力.

表 28.6 - 1 是关于车流量的调查结果，读表格时要让学生分辨三类车在周五、周六两天的车流量所构成的这 6 组数据在表中的位置.

28.6 统计实习

例题1 交警大队为了了解某道路机动车的流量，在周五、周六两天，从 6:00 到 22:00 对过往车辆的数量进行调查.调查结果如表 28.6 - 1 所示.

时间	公交车		载重车		小车	
	周五	周六	周五	周六	周五	周六
6:00～7:00	14	10	42	20	354	249
7:00～8:00	34	28	54	28	535	352
8:00～9:00	32	29	125	40	374	462
9:00～10:00	25	24	134	32	332	330
10:00～11:00	27	20	112	46	340	312
11:00～12:00	28	26	108	38	390	320
12:00～13:00	30	29	124	50	442	438
13:00～14:00	26	22	131	44	454	448
14:00～15:00	27	20	126	45	422	388
15:00～16:00	28	20	120	41	402	330
16:00～17:00	30	23	104	32	362	342
17:00～18:00	35	27	112	32	484	454
18:00～19:00	30	25	82	22	471	470
19:00～20:00	22	22	53	23	364	482
20:00～21:00	18	17	53	24	348	384
21:00～22:00	10	10	68	36	312	344

表 28.6 - 1

第二节 基本的统计量 69

【教学目标】

(1) 通过统计实习，感受统计知识在现实生活中的广泛应用和在科学决策中的重要作用，增强统计意识，获得参与统计活动的体验和经验.

(2) 能运用所学的统计知识解决现实生活中的简单的统计问题，在统计活动中增强团队合作精神和社会实践能力.

(1) 分别求周五、周六 6:00～22:00 时段内公交车每小时流量的平均数和方差，并指出这两天中公交车流量的情况有什么不同；

(2) 在同一张图内，从 6:00 开始，按时间顺序，画出载重车在周五、周六每 2 小时的车流量折线图；

(3) 按时间顺序画出小车在周六从 6:00 开始，每 2 小时的车流量频数分布直方图.

解 (1) 设周五公交车每小时流量的平均数为 $\bar{x}$，方差为 s^2，周六公交车每小时流量的平均数为 $\overline{x'}$，方差为 s'^2. 那么，

$$\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{1}{16}\times(14+34+32+25+27+28+30+26+27+28\\&\quad+30+35+30+22+18+10)\\&=26,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s^2&=\frac{1}{16}\times[(14-26)^2+(34-26)^2+(32-26)^2\\&\quad+(25-26)^2+(27-26)^2+(28-26)^2\\&\quad+(30-26)^2+(26-26)^2+(27-26)^2\\&\quad+(28-26)^2+(30-26)^2+(35-26)^2\\&\quad+(30-26)^2+(22-26)^2+(18-26)^2\\&\quad+(10-26)^2]\\&=45;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{x'}&=\frac{1}{16}\times(10+28+29+24+20+26+29+22+20+20\\&\quad+23+27+25+22+17+10)\\&=22,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s'^2&=\frac{1}{16}\times[(10-22)^2+(28-22)^2+(29-22)^2\\&\quad+(24-22)^2+(20-22)^2+(26-22)^2\\&\quad+(29-22)^2+(22-22)^2+(20-22)^2\\&\quad+(20-22)^2+(23-22)^2+(27-22)^2\\&\quad+(25-22)^2+(22-22)^2+(17-22)^2\\&\quad+(10-22)^2]\\&=32.125.\end{aligned}$$

由计算结果可知，周五公交车平均每小时比周六多 4 辆；两天中公交车流量的方差的大小关系是 $s^2>s'^2$，说明周五公交车流量的波动程度较大. 对比两天中公交车的流量，可以发现，周五公交车流量波动大的原因是上下午高峰时段的公交车流量显著增加.

70 第二十八章 统计初步

题(1)解答中的计算较繁杂，可用计算器进行计算.

要让学生知道，真实的统计问题中往往包含大量的数据，要会利用计算器处理数据. 有条件的学校还可以利用计算机中的“电子表格”，帮助学生学习如何处理大量的数据.

在完成题(1)有关计算的基础上，可让学生进一步讨论通过数据分析可得出的一些判断.

【注意事项】

(1) 学生对有关统计量的计算一般都能掌握，但在实际问题中要利用计算结果揭示有关规律、解释某些现象或作出一些判断，往往会感到困难. 在题(1)中，提出了有关统计分析的问题，可让学生讨论，如：两天中公交车流量的方差有差异，由此可得到什么样的判断？出现方差不等的原因是什么？在完成题(2)(3)后，同样可提出问题让学生讨论.

(2) 在例题教学以及统计实习过程中，要鼓励学生提出自己的问题，并通过数据分析寻找到答案或结论，培养学生提出问题、研究和解决问题的能力.

解题(2)时，要将表 28.6－1 中的有关数据先进行合并，构造新的表格如表 28.6－2，然后画折线图.

在同一个图中画出周五、周六每 2 小时载重车流量的折线图，可看作将两个折线图复合，要注意图中对周五、周六数据在对应点的标注上，应显示出明显的差异并要作相应的说明.

解题(3)时，要将表28.6－1 中的有关数据先进行合并，构造新的表格表 28.6－3，然后画频数分布直方图.

例题 2

本题涉及世界人口在时间、空间两个方面的数据，帮助学生进一步掌握数据表示的方法和体会统计知识的应用.

题中的世界人口数据，有历史真实的数据，又有预测的数据；有按年份给出的数据，又有按地域空间给出的数据.而关于人口增长的问题，已在全社会引起关注.

建议本题由学生独立完成，还可让学生进一步提出问题，自己寻找答案.

(2) 将周五、周六从 6:00 到 22:00 按时间顺序，每 2 小时内通过的载重车数量整理成表 28.6－2.

根据所整理的数据，画折线图，如图 28－18 所示.

时　间	周五流量	周六流量
6:00～8:00	96	48
8:00～10:00	259	72
10:00～12:00	220	84
12:00～14:00	255	94
14:00～16:00	246	86
16:00～18:00	216	64
18:00～20:00	135	45
20:00～22:00	121	60

表 28.6－2

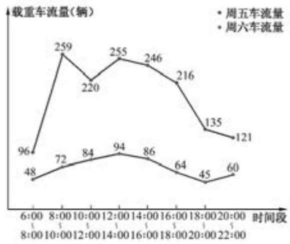


图 28－18

(3) 将周六从 6:00 到 22:00 按时间顺序，每 2 小时通过的小车数量整理成表 28.6－3.

根据所整理的数据，画频数分布直方图，如图 28－19 所示.

时　间	周六流量
6:00～8:00	601
8:00～10:00	792
10:00～12:00	632
12:00～14:00	886
14:00～16:00	718
16:00～18:00	796
18:00～20:00	952
20:00～22:00	728

表 28.6－3

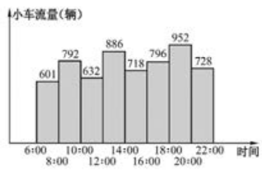


图 28－19

例题2 某机构公布的数据表明：1957 年世界人口为 30 亿，1974 年达 40 亿，1987 年达 50 亿，1999 年达 60 亿.预测世界人口 2025 年将达 80 亿，2050 年将超过 90 亿.预计 2050 年亚洲的人口最多，将达到 52.68 亿，北美洲 3.92 亿，欧洲 8.28 亿，拉丁美洲及加勒比地区 8.09 亿，非洲 17.68 亿.

第二节　基本的统计量　71

【注意事项】

(1) 例题 1(2)(3)是对每 2 小时的车流量进行分析，因此要将每小时车流量转为每 2 小时车流量，构造新的表格后再画图.解例题 1 也是复习有关平均数、标准差、方差的计算以及有关统计图的画法的过程.

(2) 在完成例题 1(2)(3)后，可通过提问和讨论，让学生从图中看到非工作日载重汽车的流量比工作日显著减少，而小车在各时间段的流量都较大；还可再进一步联想有关出行安全、环境保护等问题.通过回答问题，让学生知道在这些调查数据中有大量的信息可供挖掘.

根据上述数据，按要求画图并回答问题：

（1）画出从 1957 年到 2050 年世界人口变化的折线图；

（2）画出 2050 年世界人口分布的扇形图；

（3）2050 年亚洲人口占世界人口的比例约是多少？

解 （1）世界人口变化的折线图如图 28－20 所示.

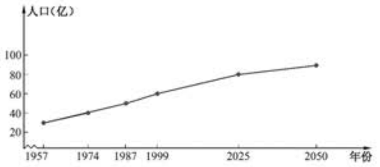


图 28－20

（2）将 2050 年各大洲的人口数相加，得 90.65 亿，人口分布的扇形图如图 28－21 所示.

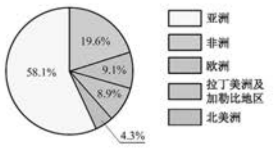


图 28－21

（3）从世界人口分布的扇形图可知，2050 年亚洲人口占世界人口的比例约为 58.1%.

练习 28.6

从本校六至九年级的每个年级的学生中，各随机抽取 20 名男生和 20 名女生的身高、体重作为样本，计算九年级学生的身高、体重的样本的平均数和方差. 分别画出八年级中男女生身高的样本的频数分布直方图；分别画出六、七年级男生身高的样本的频率分布直方图.

72 第二十八章 统计初步

题(1)的折线图直观地反映了世界人口数随年份变化而增加的情况.

在题(2)中，要注意预测 2050 年世界人口数“超过 90 亿”只是大概数量；制作扇形图时要将预计 2050 年各地人口数相加，算出世界人口总和的准确数.扇形图反映了 2050 年世界人口在地域上的分布情况.

题(3)是看图回答问题.

练习 28.6

略.

【注意事项】

（1）要通过例题 1 和例题 2 的教学，让学生感到统计与现实生活的联系十分密切，到处可以找到运用统计思想方法来分析问题的事例.

（2）练习 28.6 安排的统计活动，可让学生自己提出抽取随机样本的方案，并讨论什么样的样本是随机样本，认真完成练习的各项要求.

（3）关于本课的练习，可让学生自主提出一项统计任务，独立进行调查，再对数据进行整理计算，画出所需的统计图.也可由教师另行设计实习内容，选择有教育意义、有趣味性、贴近学生生活的课题，组织学生进行统计活动.要明确活动要求，并强调组织纪律和安全；要充分发挥学生的主动性和积极性，在统计活动实践中培养学生的团队合作精神，培养学生提出问题、解决问题的能力以及实践能力和创新精神.

本章内容是“统计学”的入门，主要围绕数据收集和数据处理等统计活动，讲述了统计的有关基本概念和基本方法.

在知识结构图中，大致展现了与统计初步有关活动的一般过程，列出了本章学习的知识内容要点，在进行小结时，要让学生形成系统的认识.同时，进一步明确统计的一些基本步骤，如收集数据、处理数据、分析数据、形成判断或找出规律.

要向学生强调对有关统计量和统计图的意义的理解，不仅仅会进行计算和画图，而且能用于解释实际问题.还要学生重视在学习统计实例的过程中所获得的体验，增强统计意识；并进一步关心生活中的统计问题，学习如何通过各种统计量或统计图来揭示事物的特殊性或规律性的东西.

还要提醒学生注意，数据收集是统计活动的起始步骤又是重要环节，如果进行抽样调查，就一定要注意样本的随机性；如果要根据样本推断总体，那么还必须使样本容量足够大.

由统计学可知，随机样本还要满足独立性，但在初中学习阶段我们不讨论.

Benzhang Xiaojie

28

本章小结

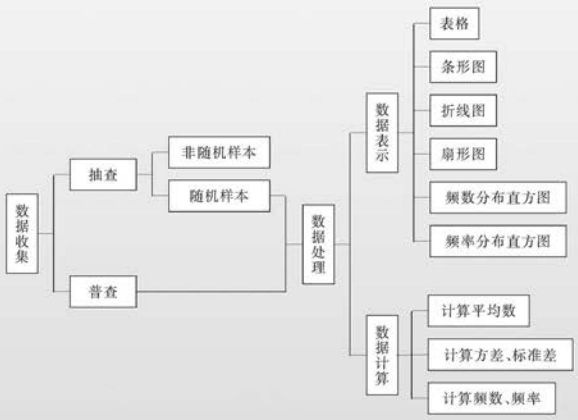
为了研究问题，我们要收集数据，经过整理和计算后，将一组数据用合适的形式表示出来，以供分析研究，达到解决问题或决策的目的，这些就是统计的任务.本章主要学习了统计的意义以及统计量的计算、数据的分布及其初步应用.

平均数是一个重要的统计量，在统计计算中起着重要的作用.当有些数据偏差较大时，有时用中位数或众数来表示一组数据的平均水平.

方差和标准差也是重要的统计量，它们反映出一组数据波动程度的大小.对于数据的分布情况，用频数分布直方图和频率分布直方图加以研究.

通过抽查取得样本，可由样本来推断总体.样本应满足一定的条件，限于初中阶段所学内容，本章只提出了样本的随机性或代表性.本章所学的有关方差、标准差的计算公式，并不适合由样本推断总体的方差和标准差.

本章知识结构图如下：



本章小结 73

Yuedu Cailiao

28

阅读材料

统计图各有奥妙

境外某企业有 5 个股东，100 名工人.年底公布企业经营业绩，如下表所示：

	2001 年	2002 年	2003 年
股东红利总额	5 万美元	7.5 万美元	10 万美元
工资总额	10 万美元	12.5 万美元	15 万美元

董事长和工会组织负责人根据表中的数据，分别绘制了下面的统计图 1 和图 2.

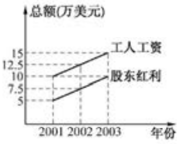


图 1

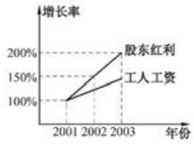


图 2

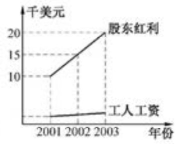


图 3

董事长依据他所画的图 1，指出企业在这三年内股东红利与工人工资是平行增长的.

工会组织负责人依据图 2，指出企业在这三年内股东的红利翻了一番，但工人的工资只增加了 50%，所以工人的工资还应该再提高.

而工人根据表格中的数据绘制出统计图 3，他们认为，企业在这三年内股东的平均红利从 1 万美元增至 2 万美元，而工人的平均工资从 1 000 美元增加到 1 500 美元，工人平均工资的增加部分只占股东红利增加部分的 $\frac{1}{20}$，工人的工资增加太少.

根据同样的数据，但是从不同的角度来整理分析这些数据，就可以揭示同一事物的不同侧面.

【设计意图】

本材料中提供了一个比较典型的统计案例.希望学生通过阅读本材料，获得以下基本认识：数据是客观的，但如何引用数据和用来说明什么样的观点，却有很强的主观性；如果要了解事物的本质，就要从多方面、多角度进行数据分析，以掌握全面的情况；要从众多的统计数据中把握问题的本质，并不是一件容易的事.

【活动建议】

让学生自主阅读，教师进行必要的指导.

可组织学生交流阅读本材料后的体会，以加深认识，努力提高用统计图整理和表示信息的能力，提高从统计图中获得信息以及对信息进行判断和应用的能力.

练习部分参考答案

第二十七章　圆与正多边形

习题 27.1

1. 作图略.第一个锐角三角形的外心在三角形的内部,第二个直角三角形的外心是斜边上的中点,第三个钝角三角形的外心在三角形的外部.

2. $\odot O$ 存在两个,作图略.

3. 外部,内部.

4. 2.5.

5. 点 P 在$\odot O$ 上.

习题 27.2(1)

1. 弦 EF,弦 AB,$\overset{\frown}{ABF}$(或$\overset{\frown}{CDB}$,$\overset{\frown}{EFB}$等),$\overset{\frown}{EA}$(或$\overset{\frown}{AF}$,$\overset{\frown}{CB}$等).

2. 不一定,一定.

3. 提示:联结 OC,只要证明$\angle COD=\angle DOB$.

4. 提示:联结 OD,推出$\angle AOC=\angle BOD=\angle EOB$,可得 $AC=BD=BE$.

习题 27.2(2)

1. (1) $\angle AOD$,$\angle COB$,$\angle DOC$;(2) $\angle DOB$,$\angle DOE$,$\angle EOB$.

2. 40°.

3. (1) 真命题; (2) 假命题; (3) 真命题; (4) 假命题.

4. $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{EB}$,$\angle DAC=\angle EAB$,$\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{CB}$,$\angle DAE=\angle CAB$,$S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ABE}$.

习题 27.2(3)

1. 提示:过点 O 分别作 $OM\perp AB$,$ON\perp CB$,垂足分别为点 M、N,可得 $OM=ON$,再由圆的性质定理推出 $AD=CE$.

2. 提示:过点 O 作 $OM\perp CD$,$ON\perp AB$,垂足分别为 M、N.

3. 提示:先推出$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$.

4. 提示:过点 O_1、O_2 分别作 $O_1H\perp AB$,$O_2I\perp CD$,垂足分别为 H、I.由$\triangle O_1HM\cong\triangle O_2IM$,推出 $O_1H=O_2I$,得$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.

习题 27.3(1)

1. 24,2,10.

2. 50°.

3. 5.5 厘米.

4. 略.

5. 2.6 尺.

6. 3.625 米.

习题 27.3(2)

1. 40.

2. 30,$6-3\sqrt{3}$.

3. 提示:联结 OM、ON,只要证明 $OM=ON$.

4. 提示:(1) 由 $AB\perp MN$ 且 AB 为直径,得 $PM=PN$,又由 $AB\perp MN$ 和 $OE=OF$,得 $PE=PF$,可推出 $ME=NF$;

(2) 由 $AB\perp MN$,$OE=OF$,推出$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{AN}$,$\angle AOC=\angle AOD$,可得$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$,因此$\overset{\frown}{MC}=\overset{\frown}{ND}$.

习题 27.3(3)

1. 提示:联结 OM、ON、OP,可推出 $OM=ON$,得$\triangle PMO\cong\triangle PNO$,因此$\triangle PMN$ 是等腰三角形(还有其他证明方法).

2. $\frac{25}{6}$厘米.

3. 8 厘米^2 或 32 厘米^2.

4. 8.

5. 提示:分别过点 O_1、O_2 作 $O_1M\perp AB$,$O_2N\perp AB$,垂足分别为 M、N,可推出 $MP=NP$;由垂径定理得 $AP=2MP$,$PB=2NP$,所以 $AP=BP$.

习题 27.4

1. 两,相交.

2. $0<R<5$.

3. 相交或相切.

4. 相交.

5. 相切.

6. (1) $\frac{2\sqrt{3}}{3}<m\leqslant 4$; (2) $1\leqslant m<\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

习题 27.5(1)

1. 相交.

2. 3 或 1.

3. 2 或 8.

4. 2 厘米,1 厘米,3 厘米.

5. 相交.

习题 27.5(2)

1. 1.

2. 1 或 5.

3. (1) $6<R\leqslant 8$ 或 $R=4.8$; (2) $4.8<R\leqslant 6$; (3) $0<R<4.8$ 或 $R>8$.

4. $1<R<8$.

5. 两圆内切或外切.

习题 27.5(3)

1. $\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 的半径长分别为 3.5 厘米,2.5 厘米,7.5 厘米.

2. 提示:联结 O_1A、O_1O_2、O_2B,只要证明四边形 O_1ABO_2 是平行四边形.

3. 25 或 7.

4. $2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$或 $2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

5. (1) 提示:分别利用 O_1 到 AB 的距离等于$\odot O_1$ 的半径、圆心距 O_1O 等于$\odot O$ 与$\odot O_1$ 的半径之差进行证明.
(2) 1. 提示:联结 O_1O_2、OO_2,再作 $O_2D\perp AB$,$O_2E\perp OO_1$,垂足分别为点 D 和 E.然后,利用相切关系相应的数量关系以及勾股定理进行计算.

习题 27.6(1)

1. (1) $n=4$; (2) $n=3$; (3) $n=6$; (4) $n=5$.

2. 略.

3. 60°或 12°.

4. 略.

习题 27.6(2)

1. 半径长为 2 厘米,边长为 $2\sqrt{3}$厘米,周长为 $6\sqrt{3}$厘米,面积为 $3\sqrt{3}$平方厘米.

2. 半径长为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$厘米，边长为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$厘米，周长为 $4\sqrt{3}$厘米，面积为 $2\sqrt{3}$平方厘米.

3. 半径长为 1 厘米，边心距为$\frac{\sqrt{2}}{2}$厘米，边长为$\sqrt{2}$厘米.

4. 略.

5. 略.

复习题

A 组

1. (1) D； (2) A； (3) A； (4) B； (5) C.
2. (1) $12<r<13$； (2) 8； (3) 两； (4) 相交或相切； (5) 5 厘米或 1 厘米； (6) $1<r<7$，$0<r<1$ 或 $r>7$； (7) 9； (8) 二十四(由于 BC 为最长边，所以不考虑$\frac{24}{7}$这种情况，而且此时边数 n 不为整数).
3. 略.
4. 7.2 厘米.
5. 提示：联结 OB，可推出 $OB=10$.
6. 提示：过点 O 作 $OH\perp CD$，垂足为 H，可证明 $CH=DH$，从而推出 $EO=FO$，所以 $AE=BF$.

复习题

B 组

1. (1) 2 或 5； (2) 6； (3) $2<r<4$； (4) $\frac{12}{5}\leqslant r\leqslant 4$； (5) 1 厘米或 4 厘米.
2. $(2+3\sqrt{7},0)$或$(2-3\sqrt{7},0)$或$(2+\sqrt{15},0)$或$(2-\sqrt{15},0)$.
3. 10 厘米.
4. 提示：分别过点 O_1、O_2 作 $O_1H\perp AB$，$O_2I\perp CD$，垂足分别为 H、I.推出四边形 O_1HIO_2 是平行四边形，得 $O_1H=O_2I$，因此 $AB=CD$.
5. 提示：首先应考虑使正方形的各顶点在扇形的边界上，并注意扇形关于它的中心角的平分线所在直线对称，而正方形也是轴对称图形，然后分两种情况讨论：①这个正方形有两个顶点同在扇形边界的一条半径上，另外两个顶点分别在扇形边界的另一条半径和弧上；②这个正方形有两个顶点各在扇形边界的一条半径上，另外两个顶点同在扇形的弧上.在①的情况下，正方形的面积 $S_1\approx 0.2867$；在②的情况下，正方形的面积 $S_2\approx 0.2679$.于是应如①截取正方形，这时它的面积 $S_1\approx 0.29$.图略.

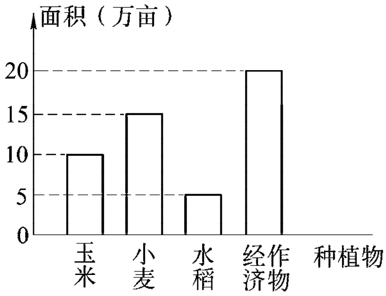
第二十八章　统计初步

习题 28.1

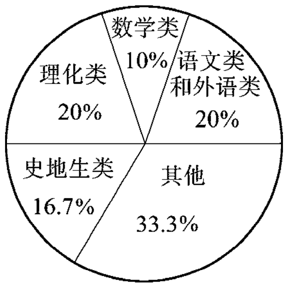
1. 折线.
2. 中国体育代表团在五届奥运会上所获奖牌情况：

奖牌/年份	金牌	奖牌总数
2000	28	59
2004	32	63
2008	48	101
2012	38	92
2016	26	70

3. 2014 年 1000 只，2015 年 1500 只，2016 年 2000 只，2017 年 3000 只，2018 年 3500 只.
4. 某县种植玉米、小麦、水稻和经济作物面积的情况如图所示：



5. 学校图书馆学科类藏书的扇形统计图为：



习题 28.2

1. 普查，总体，个体.

2. 正确的是说法(3).

3. 40.

4. 不能.因为 8 月份开空调用电量大，常温时一般不开空调，故不能根据 8 月份的电费推算全年电费.

5. 约 500 条.设鱼塘中有 x 条鱼，据题意得 $\frac{36}{150}=\frac{120}{x}$，解得 $x=500$（条）.

习题 28.3(1)

1. 15.

2. 1.

3. 5.

4. 1110，1.

5. D.

6. $\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}$，$\frac{a}{a+b+c}$.

习题 28.3(2)

1. 9.76.

2. 95，90，90.

3. B.

4. 平均数：$\frac{65\%\times10400\times10+20\%\times10400\times12+15\%\times10400\times14}{10400}=0.65\times10+0.2\times12+0.15\times14=11$(元)；

中位数：10400 个数据中间是 5200 和 5201 这两个数，又 $65\%\times10400=6760>5201$，故中位数为 10(元)；

众数：由于 10 元盒饭有 6760 个，而 12 元、14 元的盒饭数分别为 2080、1560 个，所以众数为 10(元).

5. (1) $a=\frac{35\times158-166+160}{35}=158-\frac{6}{35}<158$.选(B).

(2) 因为中位数是按身高排序的第 18 个数，原来的中位数是 158，所以如从小到大排序，无论是 166 还是 160 都在 18 个数之后，可知对中位数无影响.选(C).

习题 28.4(1)

1. A 公司销售额的标准差较大.

2. 20，3.

3. D.

4. 甲.

5. $\sqrt{2}$.

习题 28.4(2)

1. 不会.

2. $\bar{x}=205$, $207-205=2<5$, $s=8.33>8$,所以该分装机运行不正常.

3. 甲仪仗队较为整齐.可将甲乙两组中相同的数据抵消,甲队剩下 177、177、179、179,乙队剩下 176、176、180、180,由此可知甲乙两组平均身高相同,乙队数据比甲队的波动要大.

4. $\bar{x}=3$, $s^2=\frac{1}{5}(2^2\times2+1^2\times2)=2$; $\overline{x'}=9$, $s'^2=\frac{1}{5}(6^2\times2+3^2\times2)=18$; $\frac{s'^2}{s^2}=\frac{18}{2}=9$.

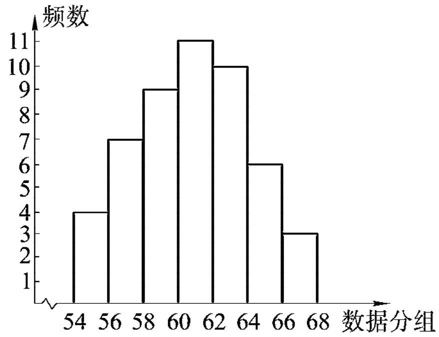
习题 28.5(1)

1. A.

2. 8.

3. Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ级蔬菜和水果的频数分别为 8,2,2.

4. 这组数据的频数分布直方图为:



习题 28.5(2)

1. 0—13,13—26,26—39,39—52,52—65,65—78,78—91,91—104.

2. 18 天,0.6.

3. (1)“的”字频率趋近 0.055,“了”字频率趋近 0.01; (2)“的”字出现的频率高.

4. (1) 0.18; (2) 12 人; (3) 80—90 分数段内; (4) 240 人.

习题 28.6

略.

复习题

A 组

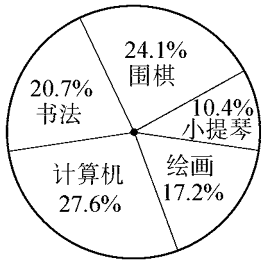
1. (1) 58;

(2) 计算机小组;

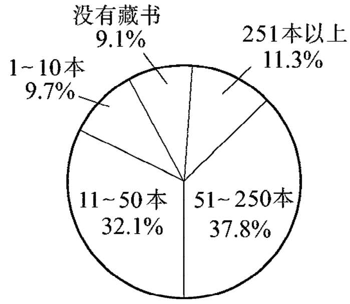
(3) 统计表为:

兴趣小组	小提琴	围棋	书法	计算机	绘画
人数	6	14	12	16	10

(4) 扇形统计图为:



2. 扇形统计图如图所示.扇形最大圆心角约为 136.1°.



3. D.

4. 4 个口袋(因为众数是 4).

5. (1) 1.5,1.5； (2) $\bar{x}=\dfrac{20\times 1+120\times 1.5+60\times 2}{20+120+60}=1.6$,即 3 月份平均每户节约用水 1.6 立方米.

6. (1) 甲乙两班学生的体育成绩的众数都是 75 分；

(2) 甲乙班各有 50 名学生；

(3) 通过观察条形图,可知乙班学生体育成绩差距较大,甲班学生体育成绩的平均数更具代表性.

$\bar{x}_{甲}=\dfrac{5\times 55+10\times 65+20\times 75+10\times 85+5\times 95}{50}=75$,

$s^2_{甲}=\dfrac{1}{50}(20^2\times 10+10^2\times 20)=120$；

$\bar{x}_{乙}=\dfrac{8\times 55+10\times 65+14\times 75+10\times 85+8\times 95}{50}=75$,

$s^2_{乙}=\dfrac{1}{50}(20^2\times 16+10^2\times 20)=168$.

7. 不能.因为甲机床加工了 20 个零件,而乙机床加工了 40 个零件,总数不一样,不能根据频数判断.

用频率比较,如下表所示：

	甲机床(频率)	乙机床(频率)
一等品	0.8	0.75
二等品	0.1	0.15
三等品	0.1	0.1

可见甲乙机床相比,三等品频率一样,但甲机床二等品频率为 0.1、一等品频率为 0.8,而乙机床二等品频率为 0.15、一等品频率为 0.75,可见甲机床加工零件更好.

8.

分组	频数	频率
21—23	2	0.1
23—25	3	0.15
25—27	8	0.4
27—29	5	0.25
29—31	2	0.1
合计	20	1

(每组可含最低值,不含最高值)

B 组

1. (1) $\bar{x}=\dfrac{4\times4+5\times10+8\times16+7\times20+6\times24+4\times28+2\times32}{4+5+8+7+6+4+2}=18.17(℃)$；

(2) 估计该城市一年的平均气温是 18℃左右.

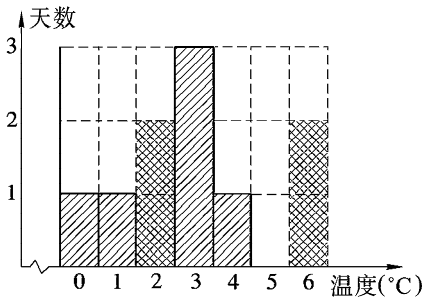
2. (1) $\bar{x}_{甲}=601.6$(厘米)，$\bar{x}_{乙}=599.3$(厘米)；

(2) $s^2_{甲}=65.84$，$s^2_{乙}=284.21$；

(3) 甲成绩比乙成绩略好，甲成绩较稳定，乙成绩波动较大；

(4) 为夺冠应派甲；为破记录应派乙，因为甲的成绩达到或超过 6.10 米的频率是 0.3，而乙的频率为 0.4.

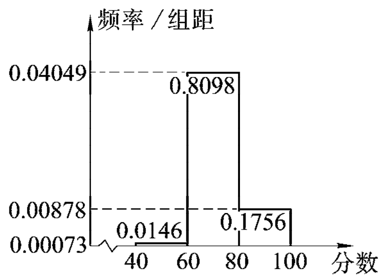
3. 补全后的条形图为：



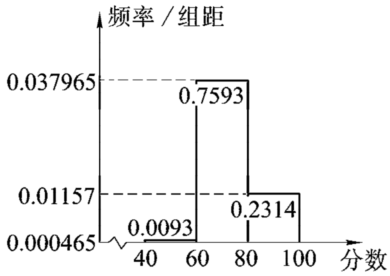
4. (1) 如表：

成绩	甲校		乙校	
	频数	频率	频数	频率
不合格 40 分～60 分	3	0.0146	1	0.0093
合格 60 分～80 分	166	0.8098	82	0.7593
优良 80 分～100 分	36	0.1756	25	0.2314
合计	205	1	108	1

(2) 频率分布直方图分别为：



甲校学生英语听力测试成绩频率分布直方图



乙校学生英语听力测试成绩频率分布直方图

(3) 甲校学生英语听力测试成绩不合格率比乙校高，而优良率比乙校低，故甲校学生英语听力测试成绩不如乙校.

说　　明

本册教材根据上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会制定的课程方案和《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》编写,供九年义务教育九年级第二学期试用.

本教材由上海师范大学主持编写,经上海市中小学教材审查委员会审查准予试用.

本册教材的编写人员有:

主　编:邱万作　　分册主编:蔡则彪

特约撰稿人(按姓氏笔画为序):陆海兵　蔡则彪

2019 年教材修订组成员:叶锦义　邵世开　沈　洁

陆海兵　徐晓燕　顾跃平

欢迎广大师生来电来函指出教材的差错和不足,提出宝贵意见.出版社电话:021-64319241.

插图绘制:黄国荣、顾云明

图书在版编目(CIP)数据

九年义务教育数学教学参考资料. 九年级. 第二学期:试用本 / 上海市中小学（幼儿园）课程改革委员会编. — 上海：上海教育出版社, 2019.12（2024.12重印）
ISBN 978−7−5444−9651−3

Ⅰ. ①九… Ⅱ. ①上… Ⅲ. ①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ. ①G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第276853号

经上海市中小学教材审查委员会审查
准予试用　　　准用号 Ⅱ-CJ-2019026

责任编辑　缴　麟
　　　　　章佳维

九年义务教育

数学教学参考资料

九年级第二学期

(试用本)

上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会

上海世纪出版股份有限公司
上　海　教　育　出　版　社 出版

（上海市闵行区号景路159弄C座　　邮政编码:201101）

上海新华书店发行　　上海景条印刷有限公司印刷

开本 890×1240　1/16　印张 6

2019年12月第1版　　2024年12月第6次印刷

ISBN 978-7-5444-9651-3/G·7959

定价:15.00元

此书如有印、装质量问题,请向本社调换　上海教育出版社电话：021-64373213

中国环境标志
CHINA ENVIRONMENTAL LABELLING
绿色印刷产品

ISBN 978-7-5444-9651-3