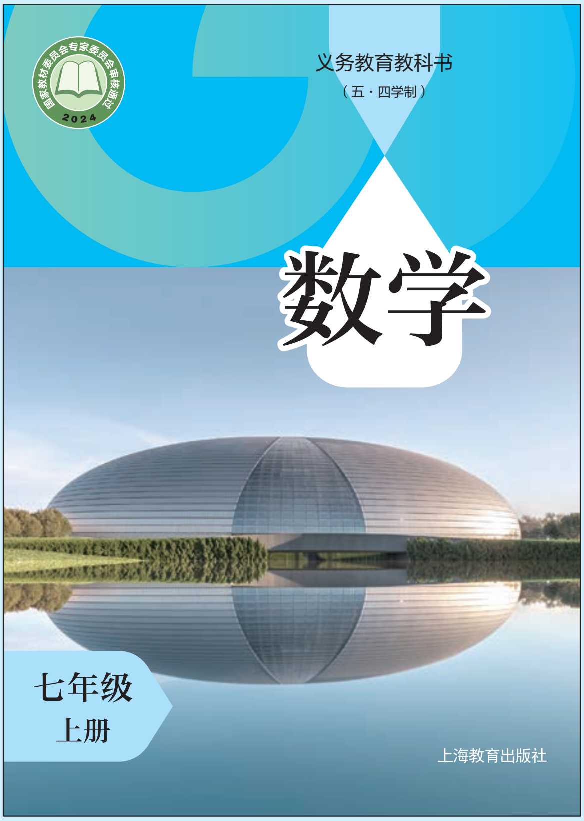
义务教育教科书

（五·四学制）

数学

教学参考资料



七年级
上册

上海教育出版社

义务教育教科书

（五·四学制）

数学
教学参考资料

七年级
上册

主编　李大潜

上海教育出版社

图书在版编目（CIP）数据
义务教育教科书：五・四学制. 数学教学参考资料
七年级 上册 / 李大潜主编. — 上海：上海教育出版社，
2024.7. — ISBN 978−7−5720−2872−4
I. G634
中国国家版本馆CIP数据核字第2024A1V991号

主　　编：李大潜
本册主编：徐斌艳
本册编写人员：许亚善　王海生　沈　洁　鲁海燕　朱丽霞　朱　雁　陆立强　徐斌艳

责任编辑：周明旭　章佳维
装帧设计：王　捷　周　吉

本书图片由图虫・创意提供

义务教育教科书（五・四学制）　数学教学参考资料　七年级上册

出　版　上海教育出版社（上海市闵行区号景路159弄C座）
发　行　上海新华书店
印　刷　上海中华印刷有限公司
版　次　2024年7月第1版
印　次　2024年7月第1次印刷
开　本　787 毫米×1092 毫米　1/16
印　张　13.75
字　数　326 千字
书　号　ISBN 978−7−5720−2872−4/G·2541
定　价　41.50 元

目　录

绪　论

本套《数学教学参考资料》与李大潜主编的《义务教育教科书（五·四学制）数学》（六年级至九年级）（以下简称“本套教科书”）配套使用. 本套教科书依据教育部制定并颁布实施的《义务教育数学课程标准（2022 年版）》（以下简称《课标 2022 年版》）编制，并经国家教材委员会专家委员会审核通过.

一、本套教科书的总体结构框架

1. 教科书结构体系

根据“五四”学制特点，义务教育初中阶段包括六年级至九年级，每个年级两个学期，简述为上、下学期，因此本套教科书包括六年级至九年级的教科书，每个年级分上、下两册，共计八册.

本套教科书依据《课标 2022 年版》的要求，将教学内容按照主题进行划分并依次呈现，突出数与代数、图形与几何、统计与概率、综合与实践四个领域，这四个领域也贯穿了整套教科书. 对于每个领域的内容编排，将整个领域视为一个整体，有序地呈现相应知识点，并兼顾知识点之间的有机联系，按照知识发生发展的规律和学生的认知水平循序渐进、逐次展开. 本套教科书的结构体系如表一所示.

表一　教科书结构体系

<table>
<tr><th>年级/册次</th><th>数与代数</th><th>图形与几何</th><th>统计与概率</th><th>综合与实践</th></tr>
<tr><td rowspan="4">六年级
上册</td><td>第 1 章　有理数</td><td></td><td></td><td rowspan="4">• 你的膳食健康吗?
• 上海一日游计划制订</td></tr>
<tr><td>第 2 章　简单的代数式</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>第 3 章　一元一次方程</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>第 4 章　线段与角</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">六年级
下册</td><td>第 5 章　比与比例</td><td></td><td></td><td rowspan="5">• 旋转的齿轮
• 中国的能源生产与消费</td></tr>
<tr><td></td><td>第 6 章　圆与扇形</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>第 7 章　可能性与统计图表</td></tr>
<tr><td></td><td>第 8 章　圆柱与圆锥</td><td></td></tr>
<tr><td>第 9 章　二元一次方程组</td><td></td><td></td></tr>
</table>

（续表）

年级/册次	数与代数	图形与几何	统计与概率	综合与实践
七年级上册	第 10 章　整式的加减			• 从传统连续纹样到现代镶嵌图案 • 制订“阅读之星”评选方案
	第 11 章　整式的乘除			
	第 12 章　因式分解			
	第 13 章　分式			
		第 14 章　图形的运动		
七年级下册	第 15 章　一元一次不等式			• 积木可以叠多远？ • 田径比赛中的数学
		第 16 章　相交线与平行线		
		第 17 章　三角形		
		第 18 章　等腰三角形		
八年级上册	第 19 章　实数			• 理财小课堂 • “勾股定理”证明中的中国智慧
	第 20 章　二次根式			
	第 21 章　一元二次方程			
		第 22 章　直角三角形		
八年级下册		第 23 章　四边形		• 折纸与数学 • 神奇的密码
		第 24 章　平面直角坐标系		
	第 25 章　一次函数			
	第 26 章　反比例函数			
九年级上册	第 27 章　二次函数			• 探寻测量高度的方法 • 城市原点
		第 28 章　相似三角形		
		第 29 章　三角初步		
		第 30 章　投影与视图		
九年级下册		第 31 章　圆		• 碳足迹——无所不在的二氧化碳排放 • 血型的秘密
			第 32 章　抽样与数据分析	
			第 33 章　概率初步	

2. 教科书的基本体例

本套教科书的基本体例采用单元(章)结构，每个单元呈现一个完整的知识模块. 在以数学核心内容为主的数与代数、图形与几何、统计与概率领域，相应章节的编写结构层次为：章—节—课时，以课时为基本单位. 在每个基本单位中有固定的栏目〔如概念(定义、性质、定理、法则等)、问题、例题、课堂练习、节习题〕，特色小栏目(观察、操作、思考、探究、讨

论、归纳). 在每一章又设计章的固有栏目(如章首图、章首语、阅读材料、内容提要、复习题).

在培养学生综合运用所学知识和方法解决实际问题的综合与实践领域，每册有 2 个实践活动，以活动为基本单位. 在每个基本单位中有针对主题的问题情境引入语、活动串(任务串、问题串)、拓展反思等栏目，其中每个活动串包含活动任务要求或问题、学生活动要求等内容.

3. 栏目功能定位及编写说明

本套教科书呈现上大致可分为基本栏目板块、特色小栏目板块以及各章固有栏目板块. 教科书在栏目设置上一方面借鉴了上海“二期课改”教科书中具有较高使用价值的栏目，修改、提升和进一步完善其具体内容的设计；另一方面结合《课标 2022 年版》要求，增设若干特色小栏目，以满足义务教育阶段数学课程改革的需求.

(1) 基本栏目板块

概念 (定义、性质、定理、法则等) 以文字叙述的形式呈现一节课要求学生必须掌握的核心内容，包括概念、定义、性质、公理、定理、法则、公式、原理等，帮助学生准确把握本节课的核心知识. 该板块内容一般安排在例题之前或者例题之间. 六、七年级教科书多以描述性语言的形式表述，而八、九年级教科书的表述逐步强调严谨性.

例题 为学生及时巩固理解数学概念(定义、性质、定理、法则等)提供平台，加强概念在数学或实际问题中的运用. 学生通过参与分析和解答典型题目，及时加深对概念(定义、性质、定理、法则等)的理解和运用，经历理解问题、分析问题、解决问题、拓展性思考问题的过程，要求学生能够在教师的引导与讲解下，深度参与题目的分析、解答和讨论.

课堂练习 旨在通过适度(兼顾难度和时间)的练习题，巩固学生对新知的掌握，并对学生的学习效果进行检测. 学生通过完成课堂练习获得及时巩固所学知识的机会，深化对知识的理解. 习题选编与课堂例题的题型、难度基本匹配，从而满足学生对本课时新授内容的基本训练需求.

(2) 特色小栏目板块

针对《课标 2022 年版》提出的课程目标，即培养学生数学素养，会用数学的眼光观察现实世界(主要表现为抽象能力、几何直观、空间观念与创新意识)，会用数学的思维思考现实世界(主要表现为运算能力、推理意识或推理能力)，会用数学的语言表达现实世界(主要表现为数据意识或数据观念、模型观念、应用意识)，对上海“二期课改”教科书上的小栏目进行补充和优化，本套教科书中的小栏目定位见表二.

表二　小栏目功能定位及编写说明

栏目名称	功能定位与编写说明
观察	本栏目作为数学活动的一种形式体现，为后续知识的引入、介绍或应用等奠定基础. 要求学生通过观察图形或现象等，发现其中蕴含的共同点或不同点、特征和性质等，从而归纳推理得出合适的数学结论. 教师引导学生在观察的过程中深入理解知识要点，体会数学思想和方法. 本栏目要帮助学生“会用数学的眼光观察现实世界”，基于观察学会发现客观世界或现象中的数学关系或特征.

（续表）

栏目名称	功能定位与编写说明
操作	本栏目为学生直观感知并理解数学结论提供实践操作的机会，有助于提高学生的动手实践能力. 学生根据操作的步骤流程及相应要求，通过实验、绘图等方式探究数学规律或验证数学性质、定理等，并基于具体操作抽象出数学知识. 本栏目要求学生能够切实动手操作，以激发学生在现实世界中亲自实践的兴趣，从而引导学生通过具体操作活动感知如何从数学的角度发现问题，逐渐尝试“会用数学的眼光观察现实世界”.
思考	本栏目是以问题或问题串的形式为结论的推出搭建合适的脚手架. 学生通过思考简短且指向性明确(即指向某个具体细节或关键点)的问题(串)，或引发对新知的感悟，或拓展数学思维. 本栏目以问题适时启发学生思考，引导学生“会用数学的思维思考现实世界”.
探究	本栏目是以问题或活动的形式为学生经历数学知识内容的“再发现”过程提供探索的机会. 学生通过参与探究活动，尝试学会问题解决的策略、思想和方法，获得对数学概念、性质、定理等的理解. 本栏目旨在让学生“会用数学的思维思考现实世界”，要求学生更多地参与且经历相对独立的思考过程，从而发现数学事实及规律.
讨论	本栏目作为学生合作学习的载体，为学生沟通交流对数学知识内容的理解与感悟创设平台，旨在激发学生的求知欲和表达欲. 学生通过对问题素材的思考与分析，参与小组交流、班级交流等不同形式的同伴讨论，在互相沟通表达的过程中拓宽知识内容的广度和深度，领悟数学思想方法. 本栏目要求学生深度参与数学语言的表达与交流活动，在参与中“会用数学的语言表达现实世界”，发展数学表达与交流能力.
归纳	本栏目是为学生提炼、概括并表达数学结论提供机会. 学生在观察和操作等实践活动基础上，对经猜想验证的数学结论或知识进行提炼总结，并使用数学的语言表述为严谨的数学概念、性质或规则等. 本栏目要求学生“会用数学的语言表达现实世界”，在总结归纳数学知识的过程中逐渐养成用数学语言表达的习惯，能逐渐用严谨的数学语言陈述自己得到的结论，解释结论的合理性等，提升总结提炼能力.

（3）各章固有栏目板块

章首　以图文相结合的形式作为每一单元(章)的开头部分，旨在引导学生带着探究的热情进入新知的学习. 文字性表述围绕本章内容在数学中的地位和意义，与其他章的关联，以及学习重点展开. 章首图的设计和选用，结合单元内容特点，有机融入重大主题的教育内容，力图展现在党的领导下，我国现代化建设在各个领域取得的伟大成就.

提示　以解释性文字、拓展性介绍或启发性思考内容的形式对正文内容进行补充，为学生进一步理解正文内容提供支持与帮助. 学生通过栏目的内容延伸，深化对知识内容的认识，拓宽知识视野. 以书页的样式伴文排列，在内容上除了可以是对数学知识的进一步补充，还可以体现一些学科的拓展和现实情境的延伸等.

内容提要　通过概念梳理，系统回顾并概括本章学习内容，列出本章重要的知识点、结论与公式，帮助学生整理复习数学知识，建构自身的数学内容体系.

阅读材料　以图文并茂的形式提供史料、背景材料、知识应用及课外活动题材等阅读材料，供学生选择阅读或使用，开阔数学视野. 主要呈现数学文化、数学史、数学趣题、科普知识、中华优秀传统文化等，旨在提高学生的科学文化素养，集中体现数学课程的育人价值.

二、本套教科书的编写思想和主要特点

在教科书编写过程中，我们始终坚持正确的政治方向和育人为本的价值导向，全面贯彻党的教育方针和政策，围绕立德树人根本任务，努力实现义务教育阶段的培养目标，在提高数学学习质量的同时，落实学科核心素养，使得人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展. 我们希望编写一套经得起历史和实践检验的优秀教科书，将教科书作为推进教学改革的载体，通过教科书改变教学，通过教科书引导考试，让数学成为广大师生喜闻乐见的一门课程.

在编写过程中，我们注重吸收上海两期课改（“一期课改”和“二期课改”）的经验，同时依据《课标 2022 年版》科学地处理教学内容的编排. 本套教科书结构严谨、体例活泼、特色鲜明，体现了理性精神和人文情怀，有望促进学生数学核心素养的发展、创新意识的提高和社会责任感的增强.

本套教科书的编写思想和主要特点，具体体现在如下几个方面.

（1）遵循课程标准，吸取课改经验. 我们努力遵循国家课程标准的基本精神及指导思想，参照国家课程标准中的具体安排与建议，吸收上海在“五四”学制课程教材研究与实践中的有益经验，将已有的初中数学教科书作为本次编写的迭代初始值，在可能的范围内有的放矢地调整、提升与改进.

（2）内容削枝强干、提质减负，表述简明扼要、单刀直入. 教科书内容应该掌握到怎样的程度，是教科书的编写者及讲课的教师必须面临且迫切需要解决的一个问题. 对初中阶段的教科书，我们尽可能对内容精准定位、降低难度，关注数学的本质内容、内在发展和数学的应用，避免片面地追求严格化；用朴实无华且单刀直入的方式加以呈现，增加亲和力. 既提高质量，帮助学生打好必要的基础，又把时间和自由留给学生，切实减轻学生的负担，实现双赢的目标.

（3）整体架构科学合理，重视衔接和交叉. 根据《课标 2022 年版》中“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”这三大知识领域内在的逻辑关系和知识链条，相对集中地安排各领域内容. 各分册兼顾了不同领域，精心设计领域交叉或承上启下的章节. 例如，为更充分地发挥平面几何在培养逻辑推理中的独特作用，从七年级下册开始，将“相交线与平行线”“三角形”“等腰三角形”“直角三角形”“四边形”“相似三角形”“圆”等与几何推理密切相关的内容，以 3 至 4 章为一个小板块，相对集中进行教学. 又如，根据八、九年级的学习要求，结合学生认知的特点和能力，在八年级上册依次呈现实数、二次根式、一元二次方程、直角三角形（含勾股定理），联系紧密，八年级下册有平面直角坐标系、一次函数、反比例函数，紧接着在九年级上册将二次函数作为初中函数的收官. 与高中关系密切的三角初步、圆、投影与视图、抽样与数据分析、概率初步依次安排在九年级上册和九年级下册.

（4）小初高整体设计，前后呼应且顺畅. 按照《课标 2022 年版》对小学和初中数学课程的一体化标准，强调小学与初中的衔接. 充分考虑到上海教育的实际情况和“五四”学制的特殊性，在学段内容划分及与小学、高中数学教科书的有效衔接上，做了精细设计. 例如，在六年

级上册的“第 1 章有理数”中，首先巩固了小学分数和有限小数的四则运算和互相转化. 在介绍有理数的同时回顾和整理了小学中对数的认识，并顺势过渡到“第 2 章简单的代数式”，作为初中代数学习的开端. 在“一元一次方程”中，在引入一元一次方程、二元一次方程组解决实际问题时，与小学的算术解法作对比，以体现方程解法的优越性. 例如，在“一元二次方程”中，出现涉及可化为一元二次方程的分式方程的应用，为新编高中教科书中求解可化为一元二次不等式的分式不等式作铺垫，体现了从初中到高中递进的学习规律.

（5）加强逻辑推理，提升几何和代数推理能力. 针对初中阶段学生的数学认识将从以感性与直观为主上升到以理性与推理为主的特点和要求，加强对学生逻辑思维、推理能力、论证表达的培养. 例如，突出初中几何在培养逻辑思维中的关键作用，加强几何论证的学习. 在“相交线与平行线”中，从简单命题的证明开始，给出逻辑清晰、推理严格的证明示范. 在每个例题中，都力求论证逻辑思路清晰，表达清楚，随着知识的深入，循序渐进地逐步提高论证的要求，让学生在潜移默化之中学会推理论证的思想方法. 又如，在“整式乘除的性质”“负整数指数幂的乘法性质”“二次根式的乘法性质”“根式运算性质的推导”等知识点中，都增加了代数推理的内容.

（6）科学界定重要概念的内涵，调整重要结论的定位与分层. 坚持科学性、适宜性和一致性，同时考虑学生的理解、接受程度和使用的便利性，重新界定一部分概念和性质. 调整了一些重要结论的定位和分层. 例如，明确一些重要概念：整式也称多项式，单项式是特殊的多项式；分式也称有理式，整式是特殊的分式；梯形是一组对边平行的四边形，平行四边形是特殊的梯形. 又如，调整一些结论的定位：“垂线段最短”由基本事实(公理)改为定理，在“直角三角形”中作为定理加以证明；“平行线分线段成比例”，由基本事实(公理)改为定理，在“相似三角形”中作为定理加以证明；“一个内角等于 60°的等腰三角形是等边三角形”由定理改为例题；“直角三角形中的 30°角所对直角边是斜边的一半”由定理改为例题.

（7）“综合与实践”的内容情境丰富、跨学科特征鲜明. 按照《课标 2022 年版》对“综合与实践”的要求，灵活采用“主题式学习”和“项目式学习”两种“综合与实践”的呈现方式. 例如，六年级上册的“你的膳食健康吗?”是主题式活动，“上海一日游计划制订”是主题式与项目式相结合的学习活动. 这同时实现了从小学到初中对“综合与实践”不同要求的过渡. 情境设计丰富，有跨学科特征，活动意图明确，任务清晰，具有可操作性. 例如，为“综合与实践”设计丰富的任务情境，包括社会生活(如“理财小课堂”)、科学技术(如“旋转的齿轮”)和数学文化(如“‘勾股定理’证明中的中国智慧”)等. 同时还兼顾跨学科内容的设计，包括营养学(如“你的膳食健康吗?”)、物理学(如“积木可以叠多远?”)、金融学(如“理财小课堂”)、工程学(如“旋转的齿轮”)、艺术(如“从传统连续纹样到现代镶嵌图案”)等.

三、本套教学参考资料的编写意图与结构

本套教学参考资料编撰的目的是使教师理解教科书编制所依据的《课标 2022 年版》，体会教科书的编制特色和主要思想，把握教科书所包含的数学知识的体系和脉络，掌握教学过程的关键，从而很好地完成从课程标准和教科书所描述的“期望课程”“可实施课程”到教学过程

的“实施课程”和学生习得的“获得课程”的转变. 教学参考资料侧重给出编写者的思想及体会，明确各章的定位，剖析重点和难点，厘清容易混淆的地方，帮助教师把握《课标 2022 年版》的基本理念和目标要求，强调数学核心素养的落实，从而开拓教师思维，优化教学方法. 从这个角度讲，教学参考资料又是对教科书内容的深化和补充，成为教科书(可实施课程)到教学(实施课程)的中介和桥梁.

在任何情况下，教科书都要基于《课标 2022 年版》，贯彻“少而精”“简而明”的原则. 精心选择与组织教科书内容，抓住本质，返璞归真，尽可能给学生以明快、清新的感受，使学生能更深入地领会数学的真谛，让数学成为广大学生喜闻乐见的一门课程. 这是本套教科书坚持的基本特色. 教科书的许多特色隐含在内容的选取、编排和行文中. 教学参考资料将揭示和突出教科书的基本特色以及教科书编制过程落实这个特色所采取的具体措施和处理方式，并充分注意同一主题内前置和后续内容的衔接以及一个主题的内容与其他主题甚至其他学科内容的关联. 这种衔接和关联在章首语、内容提要以及在相关知识内容阐述中有明确的交代. 这样做的目的是让教师更加深刻地体会整个初中阶段数学是一个知识的网络，并在教学中把这种认知传递给学生.

本套教学参考资料与教科书的分册和章节安排一致，即教学参考资料的分册和章节目录均与教科书一致. 每册教学参考资料由四个主要部分组成：绪论部分、总论部分、分论部分和附录部分，具体结构如下：

（1）绪论部分

主要介绍整套教科书的总体结构框架、编写理念，以及本册教科书的编写说明和特色等.

（2）总论部分

针对《义务教育教科书(五・四学制)数学》的每一章内容，教学参考资料从“总体要求”“课时安排建议”“内容编排与特色”“教学提示”“评价建议”5 个方面，对各章的内容进行细致的阐述和说明. 其中，在“总体要求”中，该部分强调每一章内容的重要性及与前后章节的联系，明确课程内容要求和素养目标，与课程标准对应，指引教师把握教学方向. 在“课时安排建议”中，根据章节内容，提供课时分配建议，包括章末小结和阶段性习题课等环节，确保教学完整性和节奏合理性. 在“内容编排与特色”中，阐述章节内容的编排思路和特色，提炼教科书编写特点，帮助教师理解整体框架和逻辑. 在“教学提示”中，基于课程标准，为每一章教学提供具体提示和建议，涉及内容顺序、问题情境、核心概念把握及信息技术运用，优化教学方法. 在“评价建议”中，结合章节内容，从知识、素养、数学思想文化等方面提出评价建议，关注数学过程、概念本质、思维表达及应用，为课程评价提供指导.

（3）分论部分

为了帮助教师更好地理解和把握教科书内容，本部分将按照“章—节—课时”的形式，对教科书进行细致的解析. 其中，包含了以节为单位的“本节教学目标”和以课时为单位的“本课教学重点”“本课教学建议”“本课内容分析”栏目.

“本节教学目标”中明确提出学生通过本节学习后应达到的具体预期效果. 这些目标的设定，紧密围绕《课标 2022 年版》的内容要求和学业要求展开，强调学生对知识点的掌握，关注对其素养、能力的培养和提升.

“本课教学重点”中指出本节课教学中需要特别强调和关注的内容. 这些重点通常是教学中的核心知识点或关键能力，对于实现教学目标具有重要意义.

“本课教学建议”为教师使用本套教科书进行教学，提供具体的教学方法和策略指导. 这些建议基于课程标准、教材内容和学生实际情况，旨在帮助教师更有效地组织课堂教学活动.

“本课内容分析”深入解读本节课的教科书内容，旨在帮助教师全面把握教材编排，包括说明概念表述、例题设计、思考观察等栏目的教学建议，以及教学过程中可能存在的难点和教学注意事项等.

（4）附录部分

本次教材的编制包括了三个品种：教科书(课本)、教学参考资料、练习部分(练习册). 其中，教科书中的课堂练习、节习题、章复习题与练习部分中的习题，形成了一个完整的习题训练和检测系统. 而这些习题的答案或解答提示都呈现在教学参考资料中，以便教师能完整全面地检测和评价教学效果.

四、教科书特色小栏目和固有栏目的教学建议

根据教科书特色小栏目板块的功能定位，在教学中可以参照如下建议使用小栏目：

观察　教师组织学生关注这个栏目呈现的表达式、图形或问题等,通过直观或者归纳等发现数学性质、特征或者数学结论等.

操作　教师组织学生参考这个栏目给出的步骤流程，进行实验、绘图等实践活动，感受和探究数学规律或验证数学性质、定理等.

思考　教师组织学生对栏目给出的内容进行思考、分析或解答，其目的是对之前所学内容的延伸，或者通过问题引出后续进一步学习的内容.

探究　教师组织学生对这个栏目给出的内容进行探索，其目的是加深学生对数学概念、性质、定理等的理解，让学生经历独立思考过程. 本栏目的内容在深度、综合性、开放性方面要求很高，有些属于初高衔接内容，教师不一定在课堂上给出答案，可以鼓励学生在课后进一步思考.

讨论　教师组织学生针对这个栏目提出的问题，进行全班集体的交流和讨论，或者学生在小组中展开数学交流.

归纳　教师组织学生根据之前学习的内容，让学生提炼概括出可能的数学概念、性质或者定理，并进行表达. 教师应对学生的表达进行规范化，必要时给予纠正.

本教科书的各章有若干相对固有的栏目，在教学中可以灵活处理.

章首语　教师可以在每章开始时，组织学生阅读并讨论章首语，让学生初步了解每章要学习的内容，为每章学习做好准备. 在每章结束时，再回顾章首页进一步体会.

提示　教师组织学生结合教科书正文阅读或浏览提示部分的说明，拓展学生对所学内容的理解.

内容提要　教师组织学生在每章结束时，阅读内容提要，复习每章所学的概念、性质、定理等. 需要特别指出的是，几何章节中内容提要里出现的性质和定理，是进行几何推理的起

点，可以直接使用.

阅读材料　教师在完成课时内容学习以后，鼓励学生使用阅读材料，了解数学文化和数学史，或者见识数学趣题，开阔数学视野，帮助学生提高文化素养、陶冶道德情操.

五、七年级上册教科书编写特色

我们根据《课标 2022 年版》共编写了初中(六年级至九年级)数学教科书八册. 七年级上册由“整式的加减”“整式的乘除”“因式分解”“分式”“图形的运动”和“综合与实践”6 个单元(章)组成.

第 10～12 章介绍整式，第 13 章介绍分式. 这些章上承六年级上册的“简单的代数式”，下启八年级上册的“二次根式”，根据代数式内在的逻辑关系，螺旋式上升地安排教科书内容，合理地架构起代数式的知识体系. 第 14 章属于“图形与几何”，介绍了图形的运动.

第 10 章　整式的加减

本章明确了一些重要概念，将整式等同于多项式，这样单项式也是多项式. 此外，将整式的项数和次数的概念放在了合并同类项之后，有助于学生对这两个概念的准确理解与掌握.

第 11 章　整式的乘除

本章保留了整式除法的内容，是对上海“二期课改”经验的继承. 用一些简单的例子引导学生掌握整式的简单除法，在内容上保持整式四则运算的完整性. 在“整式乘除的性质”知识点中，增加了代数推理的内容.

第 12 章　因式分解

因式分解的概念通过整式乘法的逆向过程引入，因式分解的方法通过整式乘法的逆向思考引入，所以教师应关注学生逆向思维的培养. 在因式分解概念的教学中，教师应强调因式分解要适当降次，只提取常数因式不属于因式分解. 在因式分解方法的教学中，教师应注意既不要让学生生硬地套用方法，也不要过度强调因式分解的技巧.

第 13 章　分式

本章明确将分式等同于有理式，整式是特殊的分式. 最简分式是指分子和分母没有一次及以上的公因式的分式.

第 14 章　图形的运动

本章介绍了三种基本运动以及两种对称. 上海“二期课改”教科书对图形的运动是通过几何直观定义的，而本教科书对图形的运动是通过点的运动定义的. 只要引入平面直角坐标系，就可以通过坐标的变化来刻画点的运动，由此图形的运动也会有更严密的数学刻画.

综合与实践

“综合与实践”，不是以传授知识为主的教学内容，而是通过适当拓宽知识面，利用“综合与实践”的形式，促进学生动手动脑，培养他们养成思考的习惯，培养他们的实践能力和创新能力，以增加他们对数学知识的深入了解与感悟，提高他们的应用意识.

本册安排两个内容：“从传统连续纹样到现代镶嵌图案”“制订‘阅读之星’评选方案”. 前者是主题式活动，后者是主题式与项目式相结合的学习活动.

从“传统连续纹样到现代镶嵌图案”，旨在引导学生会用数学眼光提取装饰图样的特征，发现图形的形成原理，并能通过动手实践，还原或构造镶嵌图案，体会数学在艺术创造中的神奇作用. 其中涉及的数学内容有图形的运动，可以通过活动提升学生的数学核心素养.

“制订‘阅读之星’评选方案”，旨在给予学生主动权，让他们自己制订评选方案，选拔出优秀的阅读者，授予“阅读之星”称号. 涉及的数学内容有整式的值的比较、数学建模等，通过活动培养学生灵活应用数学知识的能力.

本套教科书在整式的处理上的独特之处在于将内容拆分为“简单的代数式”“整式的加减”“整式的乘除”“因式分解”，加上“分式”与“二次根式”两章，组成了代数式的知识结构体系. 整个代数式的课程分布于六年级到八年级，其中有四章集中在七年级上册，这样既不失整体性，又利于分阶段学习巩固.

第 10 章　整式的加减

一、本章概述

1. 总体要求

整式作为一类基本的代数式，不仅在初等代数中占据重要位置，在现代数学的多个分支中也有应用. 本章作为整式学习的起点，研究对象从数转向式，要求从数学抽象的角度体会用字母表示数的意义.

本章在六年级代数式学习的基础上加以展开，主要任务是介绍整式的概念、整式的整理(合并同类项)以及整式的加减运算，为下一章学习整式的乘除法作铺垫. 本章学习的主要目标是理解整式的概念，掌握合并同类项和去括号的方法，能进行简单的整式加减运算. 通过本章的学习，学生能够根据整式加减的运算法则和运算律进行正确的计算，进一步提升运算能力.

2. 课时安排建议

本章共 9 课时，具体课时分配建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
10.1 整式	1 课时	整式　1 课时
10.2 合并同类项	2 课时	合并同类项　2 课时
习题课	1 课时	
10.3 整式的加法和减法	2 课时	整式的加法和减法　2 课时
习题课	1 课时	
复习与小结	2 课时	

3. 内容编排与特色

本章内容分为三节，分别是“10.1 整式”“10.2 合并同类项”与“10.3 整式的加法和减法”.

“10.1 整式”一节，从学生熟悉的实际问题出发，通过对所列代数式的观察，归纳出这些代数式的特征，揭示单项式和整式的本质特征，促进对整式有关概念的理解和掌握. 与上海

“二期课改”教科书相比，我们对多项式的定义作了调整，将多项式等同于整式，因此单项式也是多项式.

“10.2 合并同类项”一节，基于学生有一次项和合并一次同类项的学习积累（六年级上册），进一步学习整式的同类项与合并同类项. 与上海“二期课改”教科书编排不同，我们将整式的项数和次数的概念放在了合并同类项之后，有利于学生对这两个概念的准确理解与掌握，减少歧义.

“10.3 整式的加法和减法”一节，基于学生有一次式去括号方法的学习积累（六年级上册），并在掌握“去括号方法”和“合并同类项法则”的基础上，学习整式的加减运算法则.

总体而论，与上海“二期课改”教科书相比，我们将整式加减独立成章，起到承上启下的作用. 一方面，学生在六年级已经学习了代数式与一次式的相关概念，经过一段时间的知识沉淀和积累，已经具有一定的抽象能力，为从数的学习过渡到式的学习打好基础，可以更好地理解整式的概念和运算. 另一方面，本章也可为后面的整式乘除、因式分解以及分式的相关学习奠定基础.

4. 教学提示

本章的主要内容是整式的相关概念和整式的加减运算法则，因此教师在教学中应该重视基本概念的落实以及运算能力的培养.

教学中教师应该引导学生进一步深入理解代数式的意义，通过基于整式的加减运算，初步建立符号意识，感悟数学的抽象性. 教学中需要注意对学生抽象能力的培养，帮助学生理解数与式的关系，进一步体会字母表示数的意义. 作为整式的起始章，教学不宜操之过急，要循序渐进地加以引导.

教学中，宜给学生充分机会进行符号语言的表达，进一步对学生用数学的语言表达现实世界这一核心素养进行培养.

5. 评价建议

重视学生对于整式的相关概念的理解和掌握. 鉴于本章是整式的运算的基础，要求学生对照代数式的概念，学会从数过渡到式，体会数学的抽象；鉴于代数式的抽象性，如果学生对代数式理解存在困难，要加以鼓励，通过具体的实例阐述代数式的优越性.

重视学生对于整式加减运算能力的训练. 对照一次式的运算，体会合并同类项与去括号方法，提升整式的运算能力，为后续因式分解、分式运算、解方程的学习奠定基础.

二、教科书分析与教学建议

10.1 整式

本节教学目标

（1）理解单项式和整式的概念.

（2）会求单项式的次数和系数.

（3）理解同类项的概念，能够判断几个单项式是不是同类项.

（以下分析对应课本第 2～4 页）

本课教学重点

理解整式、单项式、同类项等概念.

本课教学建议

（1）对于单项式的系数概念，要注意符号也是系数的一部分. 教学时可以通过举一些实例加深学生对单项式系数的概念的理解，对于不同形式的单项式，能正确求出其系数.

（2）教学时应该强调单项式的次数是单项式中所有字母的指数的和，用单项式次数反映字母相乘的次数. 对于只含有一个字母的单项式，字母的指数就是这个单项式的次数；对于有两个或两个以上字母的单项式，所有字母的指数和就是这个单项式的次数.

（3）本章对上海“二期课改”教科书中多项式的概念进行了修改，使得单项式也是多项式，多项式就是整式. 因此在学习过程中应淡化多项式，以整式替代多项式，这为后续分式有关概念的学习做了准备，同时因为这与上海“二期课改”教科书中对多项式的定义是不同的，教师在教学中应该加以重视.

（4）教学中应该注意单项式 0 与零次单项式的区别.

本课内容分析

回顾“一次式”的相关知识，比较“一次式”与“整式”的相关概念，加深对单项式、单项式的系数、单项式的次数等相关概念的理解.

10.1 整式

我们看以下几个例子：

(1) 棱长为 a 的正方体的表面积为 $6a^2$，体积为 a^3；

(2) 铅笔的单价是 x 元，圆珠笔的单价是铅笔单价的 2.5 倍，则圆珠笔的单价是 $2.5x$ 元；

(3) 全校学生总人数是 m，其中女生占总人数的 48%，则女生人数是 $48\%m$；

(4) 一辆汽车的速度是 v km/h，它 t h 行驶的路程为 vt km.

上面的例子中得到了一组代数式：$6a^2$、a^3、$2.5x$、$48\%m$、vt.

数和字母的乘积叫作单项式.

> 单独一个数或一个字母也是一个单项式.

上面列出的代数式都是单项式. 其中 $6a^2$ 的数字因数为 6，称 $6a^2$ 的系数是 6；a^3 的数字因数为 1，称 a^3 的系数是 1. 一个含字母的单项式中的数字因数叫作这个单项式的系数. 例如，上面例子中的一组单项式的系数分别为 6、1、2.5、48%、1.

一个单项式中，所有字母的指数的和叫作这个单项式的次数. 例如，$6a^2$、a^3、$2.5x$、$48\%m$、vt 的次数分别为 2、3、1、1、2.

特别地，非零的数是零次单项式，如 5、$-\frac{5}{2}$ 都是零次单项式.

例 1 请指出下列单项式的系数和次数：

(1) ab； (2) $\frac{3}{7}s^3t^2$； (3) $-\frac{5x^4y^2}{11}$.

解 (1) 单项式 ab 的系数是 1，次数是 2.

(2) 单项式 $\frac{3}{7}s^3t^2$ 的系数是 $\frac{3}{7}$，次数是 5.

(3) 单项式 $-\frac{5x^4y^2}{11}$ 的系数是 $-\frac{5}{11}$，次数是 6.

对于两个单项式，如果它们所含字母相同，且相同字母的指数也相同，

2 第10章 整式的加减

那么称这两个单项式为同类项.

例 2 判断下列各组单项式是不是同类项：

(1) a 与 $3a$；

(2) $2xy$ 与 $2x$；

(3) $2a^2b^2$ 与 $-3b^2a^2$；

(4) $3x^2y$ 与 $2y^2x$.

解 (1) a 与 $3a$ 这两个单项式所含字母相同，均为字母 a，且字母 a 的指数也相同，都是 1，所以它们是同类项.

(2) $2xy$ 与 $2x$ 这两个单项式所含字母不相同，前者含字母 y，而后者不含字母 y，所以它们不是同类项.

(3) $2a^2b^2$ 与 $-3b^2a^2$ 这两个单项式虽然所含字母顺序不同，但是它们所含字母相同，均为字母 a 和 b，且相同字母的指数也相同，所以它们是同类项.

(4) $3x^2y$ 与 $2y^2x$ 这两个单项式虽然所含字母相同，均为字母 x 和 y，但是相同字母的指数不相同，前者中字母 x 的指数为 2，而后者中字母 x 的指数为 1，所以它们不是同类项.

例 3 当 m 和 n 为何值时，关于 x、y 的单项式 $\frac{1}{3}x^{n-1}y^m$ 与 $-x^{2m}y^4$ 是同类项？

解 因为关于 x、y 的单项式 $\frac{1}{3}x^{n-1}y^m$ 与 $-x^{2m}y^4$ 是同类项，所以

$$\begin{cases} n-1=2m, \\ m=4. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} m=4, \\ n=9. \end{cases}$$

因此 m 的值为 4，n 的值为 9.

观察下面一组代数式：

$$4a^2-3b^3、-m+4、3t^2-t-4、2ab+2ac+2bc.$$

它们都是由单项式求和而得到的代数式.

10.1 整式 | 3

根据同类项的概念建立关于 m 与 n 的二元一次方程组，求得 m 与 n 的值. 教师在自主命题时，应注意避免此类题目的指数出现负数或分数的情况.

有限个单项式求和得到的代数式仍有可能是单项式，如$-\frac{t}{3}+\frac{t}{2}=\frac{t}{6}$，因此单项式也是整式.

与上海“二期课改”教科书的定义不同，整式不是通过多项式定义的.

课堂练习 10.1

1. 从左到右、从上到下依次填写：-1；1；$-\frac{5}{11}$；-27；$\frac{5}{7}$；5；7；9；6；2.

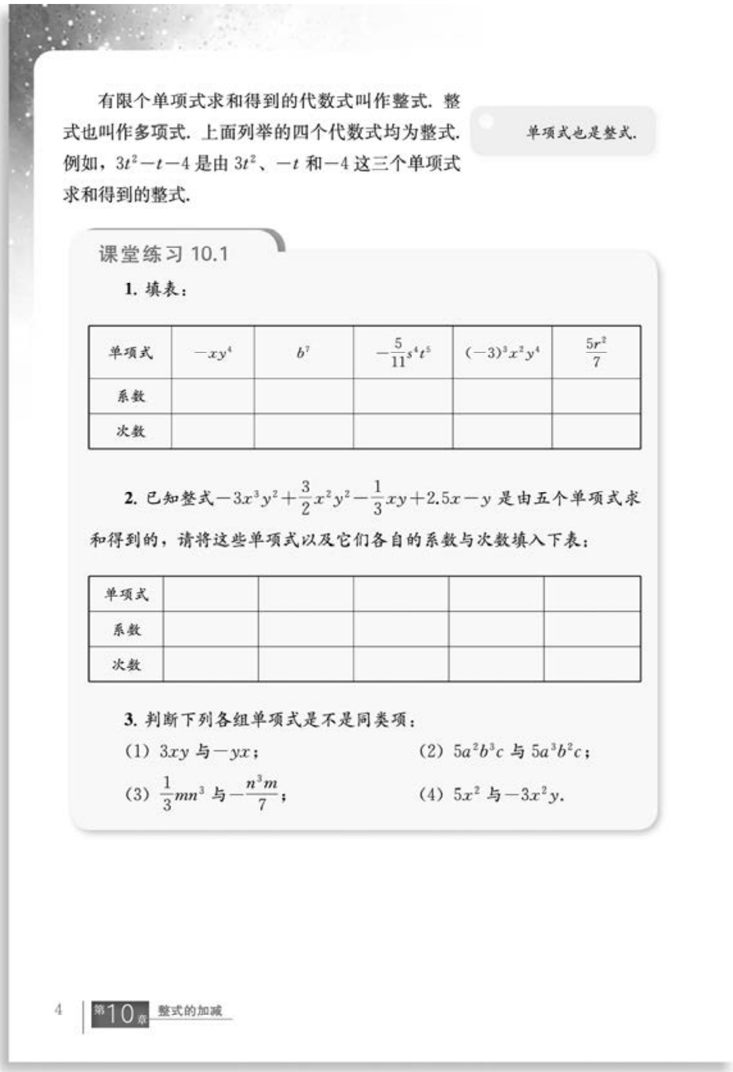
2. 从左到右、从上到下依次填写：$-3x^3y^2$；$\frac{3}{2}x^2y^2$；$-\frac{1}{3}xy$；$2.5x$；$-y$；-3；$\frac{3}{2}$；$-\frac{1}{3}$；2.5；-1；5；4；2；1；1.

3. (1) 是.

(2) 不是.

(3) 是.

(4) 不是.



有限个单项式求和得到的代数式叫作整式. 整式也叫作多项式. 上面列举的四个代数式均为整式. 例如，$3t^2-t-4$ 是由 $3t^2$、$-t$ 和 -4 这三个单项式求和得到的整式.

单项式也是整式.

课堂练习 10.1

1. 填表：

单项式	$-xy^4$	b^7	$-\frac{5}{11}s^4t^5$	$(-3)^3x^2y^4$	$\frac{5r^2}{7}$
系数					
次数					

2. 已知整式$-3x^3y^2+\frac{3}{2}x^2y^2-\frac{1}{3}xy+2.5x-y$ 是由五个单项式求和得到的，请将这些单项式以及它们各自的系数与次数填入下表：

单项式					
系数					
次数					

3. 判断下列各组单项式是不是同类项：

(1) $3xy$ 与 $-yx$；

(2) $5a^2b^3c$ 与 $5a^3b^2c$；

(3) $\frac{1}{3}mn^3$ 与 $-\frac{n^3m}{7}$；

(4) $5x^2$ 与 $-3x^2y$.

4 第10章 整式的加减

10.2　合并同类项

本节教学目标

（1）掌握合并同类项的运算法则.

（2）理解整式的项和次数的概念，能够判断一个整式的项数和次数.

（3）会把整式按照某个字母进行升幂排列或降幂排列.

（以下分析对应课本第 5～6 页）

本课教学重点

掌握合并同类项的运算法则，能把一个整式合并同类项后再求值.

本课教学建议

（1）对于项数较多的整式，建议教学时在同类项下面用“一条短线”“两条短线”“曲线”等记号分别标识同类项. 这样可使学生一目了然地看清同类项，避免发生漏项、错项等问题.

（2）求代数式的值，一般先合并同类项，再代入计算，方便运算.

本课内容分析

回顾合并一次式的同类项知识，比较“一次式”与“整式”的合并同类项，注重合并同类项的化简及求解.

10.2 合并同类项

在之前的学习中，我们已经掌握了合并一次式的同类项. 假设有两个边长分别为 a 和 $3a$ 的正方形，它们的周长之和为 $4a+12a$，利用乘法对加法的分配律，可以写成 $4a+12a=(4+12)a=16a$. 同样地，这两个正方形的面积之和为 a^2+9a^2，利用乘法对加法的分配律，可以写成 $a^2+9a^2=(1+9)a^2=10a^2$.

像这样，把整式中的同类项合并成一项的过程叫作合并同类项.

在合并同类项时，把同类项的系数相加的结果作为合并后的系数，而字母和字母的指数不变.

例 1 合并同类项：

(1) $2x^3+3x^3-(-4x^3)$；

(2) $14m^2-3n^3+5mn-11m^2+12n^3-7mn$；

(3) $\frac{3}{2}x^2y-\frac{2}{3}x^2y-z^4+\frac{1}{6}yx^2+z^4$.

解 (1) $2x^3+3x^3-(-4x^3)$

$=(2+3+4)x^3$

$=9x^3$.

(2) $14m^2-3n^3+5mn-11m^2+12n^3-7mn$

$=(14-11)m^2+(-3+12)n^3+(5-7)mn$

$=3m^2+9n^3-2mn$.

(3) $\frac{3}{2}x^2y-\frac{2}{3}x^2y-z^4+\frac{1}{6}yx^2+z^4$

$=\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)x^2y+(-1+1)z^4$

$=x^2y+0z^4$

$=x^2y$.

例 2 先合并同类项，再求值：

(1) $3x-2y-4x+6y+1$，其中 $x=2$，$y=3$；

(2) $2x^2-4xy-3y^2+4xy+5+2y^2$，其中 $x=\frac{1}{2}$，$y=2$.

解 (1) $3x-2y-4x+6y+1$

$=(3-4)x+(-2+6)y+1$

$=-x+4y+1$.

当 $x=2$，$y=3$ 时，原式 $=-2+4\times3+1=11$.

(2) $2x^2-4xy-3y^2+4xy+5+2y^2$

$=2x^2+(-4+4)xy+(-3+2)y^2+5$

$=2x^2-y^2+5$.

当 $x=\frac{1}{2}$，$y=2$ 时，原式 $=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-2^2+5=\frac{3}{2}$.

课堂练习 10.2(1)

1. 合并同类项：

(1) $\frac{1}{5}a^2-\frac{7}{15}a^2+\frac{8}{3}a^2$；

(2) $-2x^3-25x+4x^3+11x-2x^3+28$.

2. 先合并同类项，再求值：

(1) $5x^2+4-3x^2-5x-4+6x$，其中 $x=-3$；

(2) $4a+b^2+3ab-b^2-4a+3ab$，其中 $a=\frac{1}{3}$，$b=-\frac{1}{2}$.

合并同类项后，整式中的每一个单项式叫作整式的项，每一项的次数是几，就称为几次项，不含字母的项叫作常数项. 各项中次数最高项的次数叫作这个整式的次数. 合并同类项后，整式有几项，就称为几项式.

回顾代数式的值的概念，会求整式的值.

课堂练习 10.2(1)

1. (1) $\frac{12}{5}a^2$.

(2) $-14x+28$.

2. (1) 合并同类项，得 $2x^2+x$；代入求值，得 15.

(2) 合并同类项，得 $6ab$；代入求值，得 -1.

（以下分析对应课本第 6～8 页）

本课教学重点

理解整式的次数和项数的概念，能够把一个整式按照某个字母作升幂排列或降幂排列.

本课教学建议

（1）教学中应该强调确定一个整式的项数和次数应该建立在这个整式已化简的基础上.

（2）强调把某个整式按照某一个字母的指数作升幂排列或降幂排列，是为了今后计算的方便. 排列时，关注点在于这个字母指数的大小.

（3）要注意合并同类项后，非零的数是一个零次单项式. 整式 0 没有次数，但是在课堂教学中不必特意提出.

例 2 先合并同类项，再求值：

(1) $3x-2y-4x+6y+1$，其中 $x=2$，$y=3$；

(2) $2x^2-4xy-3y^2+4xy+5+2y^2$，其中 $x=\frac{1}{2}$，$y=2$.

解 (1) $3x-2y-4x+6y+1$

$=(3-4)x+(-2+6)y+1$

$=-x+4y+1$.

当 $x=2$，$y=3$ 时，原式$=-2+4\times3+1=11$.

(2) $2x^2-4xy-3y^2+4xy+5+2y^2$

$=2x^2+(-4+4)xy+(-3+2)y^2+5$

$=2x^2-y^2+5$.

当 $x=\frac{1}{2}$，$y=2$ 时，原式$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-2^2+5=\frac{3}{2}$.

课堂练习 10.2(1)

1. 合并同类项：

(1) $\frac{1}{5}a^2-\frac{7}{15}a^2+\frac{8}{3}a^2$；

(2) $-2x^3-25x+4x^3+11x-2x^3+28$.

2. 先合并同类项，再求值：

(1) $5x^2+4-3x^2-5x-4+6x$，其中 $x=-3$；

(2) $4a+b^2+3ab-b^2-4a+3ab$，其中 $a=\frac{1}{3}$，$b=-\frac{1}{2}$.

合并同类项后，整式中的每一个单项式叫作整式的项，每一项的次数是几，就称为几次项，不含字母的项叫作常数项. 各项中次数最高项的次数叫作这个整式的次数. 合并同类项后，整式有几项，就称为几项式.

6 第10章 整式的加减

本课内容分析

强调判断整式的项数与次数的前提是完成合并同类项.

例如，$3t^2-t-4$ 的次数为 2，有 3 项，所以称为二次三项式. 其中，$3t^2$ 是二次项，$-t$ 是一次项，-4 是常数项.

例 3 判断下列整式的次数：

(1) $4c^5-3c^2+1$；

(2) $x^4-x^2y+x^2y^3-y^3$.

解 (1) 因为 $4c^5$ 是次数最高的项，其次数为 5，所以 $4c^5-3c^2+1$ 的次数是 5.

(2) 因为 x^2y^3 是次数最高的项，其次数为 5，所以 $x^4-x^2y+x^2y^3-y^3$ 的次数是 5.

为了表达方便或计算需要，在合并同类项后，可以根据加法的交换律将一个整式中的各项按照其中某一个字母指数的大小顺序来排列.

例如，将 $x^2+5x+4x^4-3x^3+2$ 按 x 的指数从大到小的顺序排列，写成 $4x^4-3x^3+x^2+5x+2$，称为按 x 降幂排列；或者按 x 的指数从小到大的顺序排列，写成 $2+5x+x^2-3x^3+4x^4$，称为按 x 升幂排列.

在重新排列时，要留意各项的符号，如果出现负号，移动时不要遗漏.

例 4 将 $2r-r^2+\frac{4}{3}r^3-4$ 按 r 降幂排列.

解 将 $2r-r^2+\frac{4}{3}r^3-4$ 按 r 降幂排列为 $\frac{4}{3}r^3-r^2+2r-4$.

例 5 将 $3+6x^2y^3-2xy^4-5x^3y-4x^4y^2$ 按照下列要求排列：

(1) 按 x 升幂排列；

(2) 按 y 降幂排列.

解 (1) 将 $3+6x^2y^3-2xy^4-5x^3y-4x^4y^2$ 按 x 升幂排列为 $3-2xy^4+6x^2y^3-5x^3y-4x^4y^2$.

(2) 将 $3+6x^2y^3-2xy^4-5x^3y-4x^4y^2$ 按 y 降幂排列为 $-2xy^4+6x^2y^3-4x^4y^2-5x^3y+3$.

课堂练习 10.2(2)

1. 填表：

整式	$3x^5-8x^2-3x+1$	$-a^3+5a^6-7$	$-\frac{2}{3}a^2b^3c+\frac{4}{5}a^3b^2-\frac{1}{4}bc^2-2$
次数			
项数			
常数项			

2. 将下列整式按 x 升幂排列：

(1) $14x-3x^2-7-2x^4$；　　(2) $3x^3y+xy^2-x^5-6y^3$.

3. 将下列整式按 y 降幂排列：

(1) $\frac{3}{2}y-5y^2+\frac{5}{7}$；　　(2) $-7+6y+y^2-11y^4-3y^3$.

习题 10.1—10.2

A

1. 给出以下单项式：

a、$3ab$、$\frac{1}{2}a^2b$、$2b^2a$、a^2、b^2、$\frac{1}{3}ab$、$2.5a^2b$、$4ab^2$、a^2b^2、$\frac{ab}{4}$、$-\frac{1}{5}a^2b$、$-\frac{2}{3}b^2a$.

(1) a^2b 的同类项有：________；

(2) $-ab$ 的同类项有：________；

(3) $3ab^2$ 的同类项有：________.

2. 合并同类项：

(1) $3a-2a^2+4-3a^2+a$；

8 | 第10章 整式的加减

课堂练习 10.2(2)

1. 从左到右、从上到下依次填写：5；6；6；4；3；4；1；-7；-2.

2. (1) $-7+14x-3x^2-2x^4$.

(2) $-6y^3+xy^2+3x^3y-x^5$.

3. (1) $-5y^2+\frac{3}{2}y+\frac{5}{7}$.

(2) $-11y^4-3y^3+y^2+6y-7$.

习题 10.1—10.2

1. (1) $\frac{1}{2}a^2b$、$2.5a^2b$、$-\frac{1}{5}a^2b$.

(2) $3ab$、$\frac{1}{3}ab$、$\frac{ab}{4}$.

(3) $2b^2a$、$4ab^2$、$-\frac{2}{3}b^2a$.

2. (1) $-5a^2+4a+4$.

（2）$-2x^2$.

（3）$5a^2b+4ab-6ab^2$.

（4）$6xy-11$.

3.（1）化简，得$\frac{13}{6}a$；代入求值，得 26.

（2）化简，得 $2y^2+2xy$；代入求值，得 3.

4. 化简，得$-2(m+n)^2+2(m+n)-7$；代入求值，得-19.

5. 由题意，得 $x=4$，$y=5$. 原式化简，得$-\frac{2}{3}x^2y+\frac{8}{3}xy^2$；代入求值，得 $\frac{640}{3}$.

（2）$xy+2xy-3x^2-3xy+x^2$；

（3）$5a^2b-3ab-4ab^2+7ab-2ab^2$；

（4）$4-2xy+7xy-15+xy$.

3. 求下列整式的值：

（1）$3a^2+2a-\frac{4}{3}a^2+\frac{1}{2}a-\frac{5}{3}a^2-\frac{1}{3}a$，其中 $a=12$；

（2）$3x^2-4xy+6xy-3x^2+2y^2$，其中 $x=\frac{5}{2}$，$y=-3$.

B

4. 求代数式的值：$2(m+n)^2-3(m+n)-4(m+n)^2-7+5(m+n)$，其中 $m=-3$，$n=1$.

5. 当 $|x-4|+|x-y+1|=0$ 时，求整式$\frac{1}{3}x^2y+\frac{5}{3}xy^2-x^2y+xy^2$ 的值.

10.2 合并同类项 9

10.3　整式的加法和减法

本节教学目标

（1）掌握去括号方法在整式加减中的应用.

（2）掌握整式的加减运算法则，理解整式加减即为去括号后的合并同类项.

（3）在整式去括号方法的学习过程中，通过与有理数中去括号方法的比较，感悟类比的思想方法在数学学习中的应用.

（以下分析对应课本第 10～11 页）

本课教学重点

掌握去括号方法.

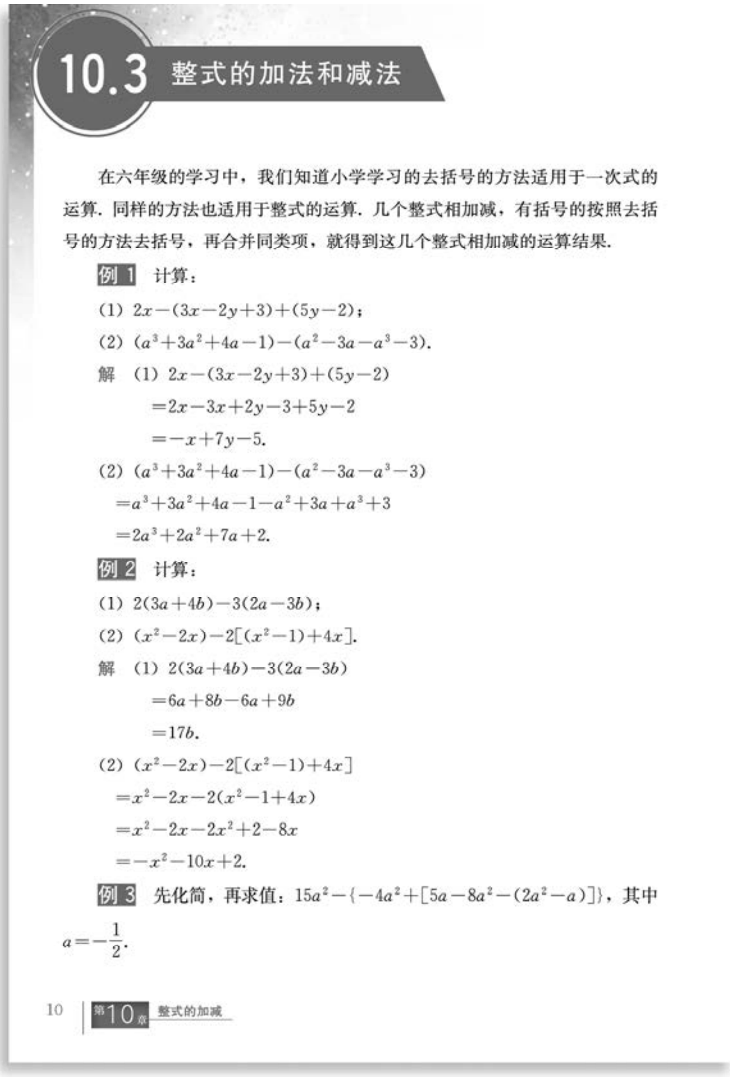
本课教学建议

从学生已经掌握的有理数去括号方法，引出整式去括号方法. 在教学时，也可以通过其他例子让学生自己得出去括号方法，然后通过适量的练习加以巩固. 要强调的是：如果括号前是负号，那么去括号时，括号内的每一项都要改变符号.

本课内容分析

教学时应让学生充分关注去括号后各项的符号是否正确，然后用记号表示出同类项，最后合并同类项.

去括号时，要注意括号前面的系数和符号.



10.3 整式的加法和减法

在六年级的学习中，我们知道小学学习的去括号的方法适用于一次式的运算. 同样的方法也适用于整式的运算. 几个整式相加减，有括号的按照去括号的方法去括号，再合并同类项，就得到这几个整式相加减的运算结果.

例 1 计算：

(1) $2x-(3x-2y+3)+(5y-2)$；

(2) $(a^3+3a^2+4a-1)-(a^2-3a-a^3-3)$.

解 (1) $2x-(3x-2y+3)+(5y-2)$

$=2x-3x+2y-3+5y-2$

$=-x+7y-5$.

(2) $(a^3+3a^2+4a-1)-(a^2-3a-a^3-3)$

$=a^3+3a^2+4a-1-a^2+3a+a^3+3$

$=2a^3+2a^2+7a+2$.

例 2 计算：

(1) $2(3a+4b)-3(2a-3b)$；

(2) $(x^2-2x)-2[(x^2-1)+4x]$.

解 (1) $2(3a+4b)-3(2a-3b)$

$=6a+8b-6a+9b$

$=17b$.

(2) $(x^2-2x)-2[(x^2-1)+4x]$

$=x^2-2x-2(x^2-1+4x)$

$=x^2-2x-2x^2+2-8x$

$=-x^2-10x+2$.

例 3 先化简，再求值：$15a^2-\{-4a^2+[5a-8a^2-(2a^2-a)]\}$，其中 $a=-\frac{1}{2}$.

10 第10章 整式的加减

分析　本题求值的代数式中包含了大、中、小三种括号，我们可以按照去括号的方法，先去小括号，再去中括号，最后去大括号.

解　$15a^2-\{-4a^2+[5a-8a^2-(2a^2-a)]\}$

$=15a^2-[-4a^2+(5a-8a^2-2a^2+a)]$

$=15a^2-[-4a^2+(6a-10a^2)]$

$=15a^2-(-4a^2+6a-10a^2)$

$=15a^2+14a^2-6a$

$=29a^2-6a$.

当 $a=-\frac{1}{2}$时，原式$=29\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2-6\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{29}{4}+3=\frac{41}{4}$.

课堂练习 10.3(1)

1. 计算：

(1) $(x-y-z)-(2x+3y+2z)$；

(2) $-(2a^2+4a+5)+(3a^2-7a-8)$.

2. 计算：

(1) $2x-\left(3x-\frac{x-2}{2}\right)+\left[5x-\frac{3}{2}(x-2)\right]$；

(2) $-(3a+2b)+3(4b-3a+1)-2(2a-b-3)$.

3. 已知 $x=\frac{1}{2}$，$y=1$，求代数式 $\frac{1}{2}x-\left[x^2+2y^2-\left(\frac{1}{2}x-3\right)\right]+(2x^2+3y^2+4)$的值.

例 4　求 $4x^2+y^2-5xy$ 与 $3xy+4y^2-7x^2$ 的和.

解　$(4x^2+y^2-5xy)+(3xy+4y^2-7x^2)$

$=4x^2+y^2-5xy+3xy+4y^2-7x^2$

$=-3x^2+5y^2-2xy$.

10.3　整式的加法和减法　11

例 3 的代数式含大、中、小三种括号，教师可以引导学生思考去括号的顺序.

课堂练习 10.3(1)

1. (1) $-x-4y-3z$.

(2) $a^2-11a-13$.

2. (1) $3x+2$.

(2) $-16a+12b+9$.

3. 先化简，得 x^2+y^2+x+1；再代入求值，得 $2\frac{3}{4}$.

（以下分析对应课本第 11～12 页）

本课教学重点

掌握整式的加减运算法则.

本课教学建议

（1）在求整式的和时，先列式. 列式时，应添加必要的括号，以避免出现符号的错误.

（2）引导学生体会如何根据题目的特征确定去括号的顺序.

例 5 已知 $2a^3-13a+11$ 与某个整式的和是 $5+6a+3a^2-3a^3$，求这个整式.

分析 所求的整式应为 $5+6a+3a^2-3a^3$ 减去 $2a^3-13a+11$ 的差.

解 根据题意，得

$$\begin{aligned}&(5+6a+3a^2-3a^3)-(2a^3-13a+11)\\=&5+6a+3a^2-3a^3-2a^3+13a-11\\=&-5a^3+3a^2+19a-6.\end{aligned}$$

因此，所求的整式是 $-5a^3+3a^2+19a-6$.

例 6 已知 $A=2x^2-7x+2$，$B=3x^2-5x+4$，$C=x^2+2x-5$，求 $A-B+C$.

解 $A-B+C$

$$\begin{aligned}&=(2x^2-7x+2)-(3x^2-5x+4)+(x^2+2x-5)\\&=2x^2-7x+2-3x^2+5x-4+x^2+2x-5\\&=-7.\end{aligned}$$

探究

一个五次整式与一个四次整式的和是一个几次整式？

一个五次整式与一个五次整式的和是一个几次整式？

课堂练习 10.3(2)

1. 求 $3x+5y-\frac{1}{4}$ 与 $\frac{1}{2}x-3y+\frac{1}{2}$ 的和.

2. 求 $\frac{1}{2}x^2-3xy+\frac{1}{4}$ 减去 $-\frac{2}{3}x^2+xy-\frac{2}{3}$ 的差.

3. 计算：$\frac{1}{2}x^2-(x^2-2x+3)+(x-2)-\left(\frac{2}{3}x^2-2x+\frac{1}{2}\right)$.

本课内容分析

对于只含一个字母的整式，进行加减运算后所得到的结果一般写成这个字母的降幂排列形式.

探究 一个五次整式与一个四次整式的和是一个五次整式；一个五次整式与一个五次整式的和是一个次数不大于 5 的整式或整式 0.

课堂练习 10.3(2)

1. $\frac{7}{2}x+2y+\frac{1}{4}$.

2. $\frac{7}{6}x^2-4xy+\frac{11}{12}$.

3. $-\frac{7}{6}x^2+5x-\frac{11}{2}$.

习题 10.3

1.（1）x^3.

（2）$-2x^2+2y^2$.

（3）$-\frac{1}{2}a^2b+\frac{1}{3}ab-1$.

2. $6a+\frac{9}{2}ab-\frac{5}{6}b$.

3. $-2x^2+xy-\frac{5}{2}y^2$.

4. $2x^2-\frac{5}{2}x+6$.

5. 先化简，得 $2x^2-3$；再代入求值，得$-\frac{5}{2}$.

6. 由题意，得 $B=-\frac{11}{2}x^2-5xy+10y^2$.

习题 10.3

A

1. 计算：

（1）$4x^3-(-6x^3)+(-9x^3)$；

（2）$(7xy-x^2+y^2)-(x^2-y^2+7xy)$；

（3）$-\frac{2}{3}ab+\frac{1}{4}a^2b+ab+\left(-\frac{3}{4}a^2b\right)-1$.

2. 求 $4a+3ab-\frac{1}{2}b$ 减去 $-2a-\frac{3}{2}ab+\frac{1}{3}b$ 的差.

3. 已知某个整式与 $3x^2+2y^2$ 的和是 $x^2+xy-\frac{1}{2}y^2$，求这个整式.

4. 已知 $2(x^2-x+2)$ 减去某个整式所得的差是 $\frac{1}{2}x-2$，求这个整式.

5. 先化简，再求值：$2(x^2-x)-[x-3(2x^2+x-1)]-6x^2$，其中 $x=-\frac{1}{2}$.

B

6. 已知整式 A、B、C 满足 $A-2B=3C$，其中 $A=x^2-xy+2y^2$，$C=4x^2+3xy-6y^2$. 求整式 B.

10.3 整式的加法和减法 13

◎复习题

A

1. 填空题：

(1) $2x^4+4x^2-3$ 是______次______项式，其常数项是______.

(2) 若 $(a-2)x^2y^{a+3}$ 是关于 x、y 的六次单项式，则 $a=$______.

(3) 将 $-2x^5y^5-x^4y^6-3xy^4+\frac{1}{2}x^2y^3-3y-\frac{1}{4}x^3y^2$ 按下列要求排列：

按 x 降幂排列：______________________________.

按 y 升幂排列：______________________________.

(4) 若 $\frac{1}{2}x^2yz$ 与 $-\frac{1}{3}x^ayz^b$ 是同类项，则 $a=$______，$b=$______.

2. 选择题：

(1) 下列各组单项式中，不是同类项的是 ( )

A. $-\frac{x}{5}$ 与 x；　　B. $4xy^2$ 与 $-4y^2x$；

C. $\frac{6}{7}x^5y$ 与 $\frac{6}{7}x$；　　D. -4 与 $\frac{\pi}{2}$.

(2) 如果 x、y 互为相反数，a、b 互为倒数，那么 $\frac{1}{3}(x+y)+3ab$ 的值是 ( )

A. 3；　　B. 0；

C. -3；　　D. 以上都不对.

(3) 如果 $a-(b+c-d)=(a-c)+A$，那么 A 等于 ( )

A. $d-b$；　　B. $-b-d$；

C. $b-d$；　　D. $b+d$.

(4) 下面是小华做的一道整式的加减运算题，但她不小心把一滴墨水滴在了上面：

1. (1) 四；三；-3.

(2) 1.

(3) $-2x^5y^5-x^4y^6-\frac{1}{4}x^3y^2+\frac{1}{2}x^2y^3-3xy^4-3y$；

$-3y-\frac{1}{4}x^3y^2+\frac{1}{2}x^2y^3-3xy^4-2x^5y^5-x^4y^6$.

(4) 2；1.

2. (1) C.

(2) A.

(3) A.

(4) C.

$\left(-x^2+3xy-\frac{1}{2}y^2\right)-\left(-\frac{1}{2}x^2+4xy-\frac{3}{2}y^2\right)=-\frac{1}{2}x^2\ \underline{\qquad}+y^2$,

阴影部分即为被墨迹遮住的部分. 被墨迹遮住的一项应是 （　　）

A. $-7xy$； B. $+7xy$； C. $-xy$； D. $+xy$.

3. 先化简，再求值：$-3x^2-2y^2+\frac{3}{2}x^2+4y^2-4$，其中 $x=-1$，$y=\frac{5}{2}$.

4. 已知 $A=3a^2-2a+1$，$B=5a^2-3a+2$，求 $2A-3B$.

B

5. 已知$(a-4)x^3-x^b+x-b$ 是关于 x 的二次三项式，求 $a-b$.

6. 已知关于 x 的整式 $ax^3-2x^2+6+(a-1)x^2+2bx-7$ 中不含 x 的一次项和二次项，求 a、b 的值.

7. 有这样一道题“当 $a=2$，$b=-2$ 时，求 $3a^3b^3-\frac{1}{2}a^2b+b-\left(4a^3b^3-\frac{1}{4}a^2b-b^2\right)+\left(a^3b^3+\frac{1}{4}a^2b\right)-2b^2+3$ 的值”. 甲同学做题时把 $a=2$ 错抄成 $a=-2$，乙同学没抄错题，但他们做出的结果却一样，你知道这是怎么回事吗？请说明理由.

8. 如果当 $x=2$ 时，px^3+qx+1 的值等于 1 000，那么当 $x=-2$ 时，px^3+qx+1 的值是多少？

3. 先化简，得 $-\frac{3}{2}x^2+2y^2-4$；再代入求值，得 7.

4. $-9a^2+5a-4$.

5. 由题意，得 $a=4$，$b=2$. 因此，$a-b=2$.

6. 由题意，得 $a=3$，$b=0$.

7. 原式化简，得 $-b^2+b+3$. 化简后的式子中不含字母 a，因此 a 的取值不影响结果.

8. -998.

第 11 章　整式的乘除

一、本章概述

1. 总体要求

整式的乘除属于整式的四则运算，本章旨在将数的乘除运算推广到式的乘除运算. 整式的乘除作为整式的重要内容，既是学习下一章因式分解的关键，也是进一步学习分式、根式等代数式以及方程和函数的基础.

本章通过正整数指数幂的性质引出整式的乘法. 在此基础上，得到一些常用的乘法公式，并给出一些特定整式的除法. 通过本章的学习，要求学生掌握整式的乘除运算，夯实整式的运算基础. 这样，有助于学生养成有条理、有依据思考问题的习惯，养成一丝不苟、严谨求实的科学态度. 此外，在从数的运算到式的运算的过程中，能逐步提升学生的抽象能力，促进学生数学推理能力的发展.

2. 课时安排建议

本章共 16 课时，具体课时分配建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
11.1 整式的乘法	5	同底数幂的乘法　1 课时
		幂的乘方　1 课时
		积的乘方　1 课时
		整式的乘法　2 课时
习题课	1	
11.2 乘法公式	4	乘法公式　4 课时
习题课	1	
11.3 整式的除法	3	同底数幂的除法　1 课时
		单项式除以单项式　1 课时
		整式除以单项式　1 课时
习题课	1	
复习与小结	1	

3. 内容编排与特色

本章主要内容是整式的乘法与除法，安排了三节内容，分别是“11.1 整式的乘法”“11.2 乘法公式”和“11.3 整式的除法”.

“11.1 整式的乘法”由数的乘方抽象到字母的乘方，由具体的数到抽象的式，循序渐进地得到正整数指数幂的性质；基于正整数指数幂的运算得到单项式的乘法；基于运算律将整式的乘法转化为若干个单项式的积的和.

“11.2 乘法公式”独立成节，以突出平方差公式与完全平方公式的重要性. 此外，借助数形结合思想，强化了对公式的理解，为下一章“因式分解”提供知识和技能基础.

“11.3 整式的除法”，《课标 2022 年版》对这部分内容不作要求，本章教科书则继承了上海“二期课改”的经验，以保持整式四则运算的完整性. 在编排顺序上则有所调整：在上海“二期课改”教科书中，“因式分解”紧接“整式乘法”；而本章中“整式乘法”后面紧接着的是“整式除法”. 在内容要求上，仅限除式是单项式，此外，由于将整式除法视为整式乘法的逆运算，除法运算只处理可以除尽的情形. 对于更复杂的情形则不作要求，并提供了阅读材料供学有余力的学生参考.

总体而言，将上海“二期课改”教科书中“整式”一章的第 3、第 4 和第 6 节抽取出来，独立成章，突出强化整式的运算，体现整式作为代数式起点的重要性，进一步体会“用字母表示数”，为形成从数到式的抽象能力和推理能力的培养打好基础.

4. 教学提示

本章的教学重点是整式的乘法与乘法公式.

整式乘法的基础是幂的性质. 学生初次接触幂的运算不仅会感觉抽象，也容易混淆. 为了更好地让学生掌握幂的运算，教学中必须重视幂的性质的探究过程及其意义，让学生通过对这些性质的比较与辨析，会进行幂的运算.

引导学生通过观察、思考并归纳得出乘法公式后，借助几何背景理解并诠释这些公式，体会数形结合思想. 此外，乘法公式的灵活运用是教学的重点，也是难点.

在学习过程中，让学生体会公式的特征，理解公式中的字母可以抽象地表示整式的思想.

在教学时要留意：不要拔高对整式乘法与除法的运算要求.

5. 评价建议

关注学生运算能力的提高. 本章的首要目标是培养学生的整式运算能力. 在学生了解了正整数指数幂的意义和性质后，进行幂的运算与整式乘除法时，要关注学生运算的方法与运算的顺序是否正确，对算理是否理解，运算方法是否优化. 要关注学生是否能准确、合理、简洁地运用整式乘法公式运算和推理，从而能循序渐进地理解运算的本质.

关注学生抽象能力的发展. 在本章中，学生的学习将从数的幂运算过渡到字母的幂运算，从数的乘除法过渡到式的乘除法，经历从数的具体运算过渡到式的抽象运算的过程. 在这一过程中，要关注学生对字母可以像数一样进行运算与推理的理解，要让学生知道通过字母运算与推理得到的结论具有一般性，让学生体会数式通性并感受数学抽象的魅力，进而催生学生抽象能力的萌芽.

二、教科书分析与教学建议

11.1 整式的乘法

本节教学目标

（1）了解正整数指数幂的意义和性质，会用文字语言和符号语言表述正整数指数幂的基本性质，能根据正整数指数幂的基本性质进行幂的运算. 由正整数指数幂导出整式的乘法，能进行简单的整式乘法运算.

（2）通过基于符号的运算和推理，建立符号意识，感悟数学结论的一般性，理解运算方法与运算律的关系，提升运算能力.

（以下分析对应课本第 18～20 页）

本课教学重点

发现并归纳同底数幂的乘法性质，能较熟练地运用该性质进行幂的运算.

本课教学建议

（1）重视对乘方、底数、指数及幂等概念的理解.

（2）同底数幂的乘法性质的得出，是通过对幂的底数与指数逐步抽象得到的. 教学时，要注意每一步的依据，以及对学生归纳能力的培养.

（3）教学时，要求学生会用文字语言和符号语言表达幂的性质，并理解为什么同底数幂的乘法结果是指数相加，幂的乘方是指数相乘，积的乘方是乘方的积. 在本课教学的最后，引导学有余力的学生思考：研究整式的乘除，为什么要先学习幂的运算？

11.1 整式的乘法

1. 同底数幂的乘法

我们知道，$a \cdot a \cdot a$ 表示三个 a 相乘，记作 a^3，叫作"a 的立方"或"a 的三次方".

底数→a^n←指数
幂

一般地，将 n 个 a 相乘的运算叫作乘方，$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \cdot a}_{n\text{个}a}$ 记作 a^n，乘方的结果叫作幂. 在 a^n 中，a 叫作底数，正整数 n 叫作指数. a^n 读作"a 的 n 次方"，当 a^n 被看作是 a 的 n 次方的结果时，也读作"a 的 n 次幂". 当 $n=1$ 时，我们规定：$a^1=a$.

观察

$2^2 \times 2^3=(2\times2)\times(2\times2\times2)=2\times2\times2\times2\times2=2^5=2^{2+3}$；

$a^2 \cdot a^3=(a \cdot a)\cdot(a \cdot a \cdot a)=a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a=a^5=a^{2+3}$.

一般地，设 m、n 是正整数，如何计算 $a^m \cdot a^n$？

事实上，

$$
\begin{aligned}
& a^m \cdot a^n \\
=& (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \cdot a}_{m\text{个}a}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \cdot a}_{n\text{个}a}) \quad \text{（乘方的意义）} \\
=& \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \cdot a}_{(m+n)\text{个}a} \\
=& a^{m+n} \quad \text{（乘方的意义）}.
\end{aligned}
$$

同底数幂的乘法性质：

$$a^m \cdot a^n=a^{m+n}\ （m、n 是正整数）.$$

同底数幂相乘，底数不变，指数相加.

同底数幂的乘法运算，可以转化为指数的加法运算.

18 第11章 整式的乘除

本课内容分析

对于同底数幂的乘法性质，指数 m、n 都必须是正整数；底数 a 可以在有理数范围内取值，随着学习的深入、数系的扩展，可以在实数范围内取值.

例 1(5)是三个同底数幂的连乘，通过结合律分解成两次同底数幂相乘的运算.

例 2(1)(2)用同底数幂乘法性质时，首先关注是否具备同底数幂的条件. 例 2(3)中既有乘法运算也有减法运算，此类混合运算要注意运算顺序.

课堂练习 11.1(1)

1. (1) 不正确，应是 x^5.

(2) 不正确，应是 $2x^2$.

2. (1) $\left(\frac{3}{7}\right)^8$.

(2) a^5.

(3) x^9.

(4) $(b-a)^5$.

3. (1) $2a^7$.

(2) $10a-a^{10}$.

例 1 计算下列各式，结果用幂的形式表示：

(1) $10^2\times10^3$；

(2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^5$；

(3) $a^2\cdot a^4$；

(4) $(a-b)\cdot(a-b)^3$；

(5) $y\cdot y^2\cdot y^3$.

解 (1) $10^2\times10^3=10^{2+3}=10^5$.

(2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^5=\left(-\frac{1}{2}\right)^{4+5}=\left(-\frac{1}{2}\right)^9$.

(3) $a^2\cdot a^4=a^{2+4}=a^6$.

(4) $(a-b)\cdot(a-b)^3=(a-b)^{1+3}=(a-b)^4$.

(5) $y\cdot y^2\cdot y^3=y^{1+2}\cdot y^3=y^{1+2+3}=y^6$.

一般地，$a^m\cdot a^n\cdot a^p=a^{m+n+p}$（$m$、$n$、$p$ 都是正整数）.

例 2 计算：

(1) $(-b^2)\cdot(-b^3)$；

(2) $x^3\cdot(-x^4)$；

(3) $a^3\cdot a^3-a^3-a^3$.

解 (1) $(-b^2)\cdot(-b^3)=(-1)\times(-1)\cdot b^2\cdot b^3=b^{2+3}=b^5$.

(2) $x^3\cdot(-x^4)=-x^3\cdot x^4=-x^{3+4}=-x^7$.

(3) $a^3\cdot a^3-a^3-a^3=a^{3+3}-(a^3+a^3)=a^6-2a^3$.

课堂练习 11.1(1)

1. 下列计算是否正确？如果不正确，应该如何改正？

(1) $x^4\cdot x=x^4$；　　(2) $x^2+x^2=x^4$.

2. 计算下列各式，结果用幂的形式表示：

(1) $\left(\frac{3}{7}\right)^3\times\left(\frac{3}{7}\right)^5$；　　(2) $(-a)\cdot a^2\cdot(-a^2)$；

11.1 整式的乘法 19

（以下分析对应课本第 20～21 页）

本课教学重点

运用同底数幂的乘法性质导出幂的乘方性质，能较熟练地运用该性质进行幂的运算.

本课教学建议

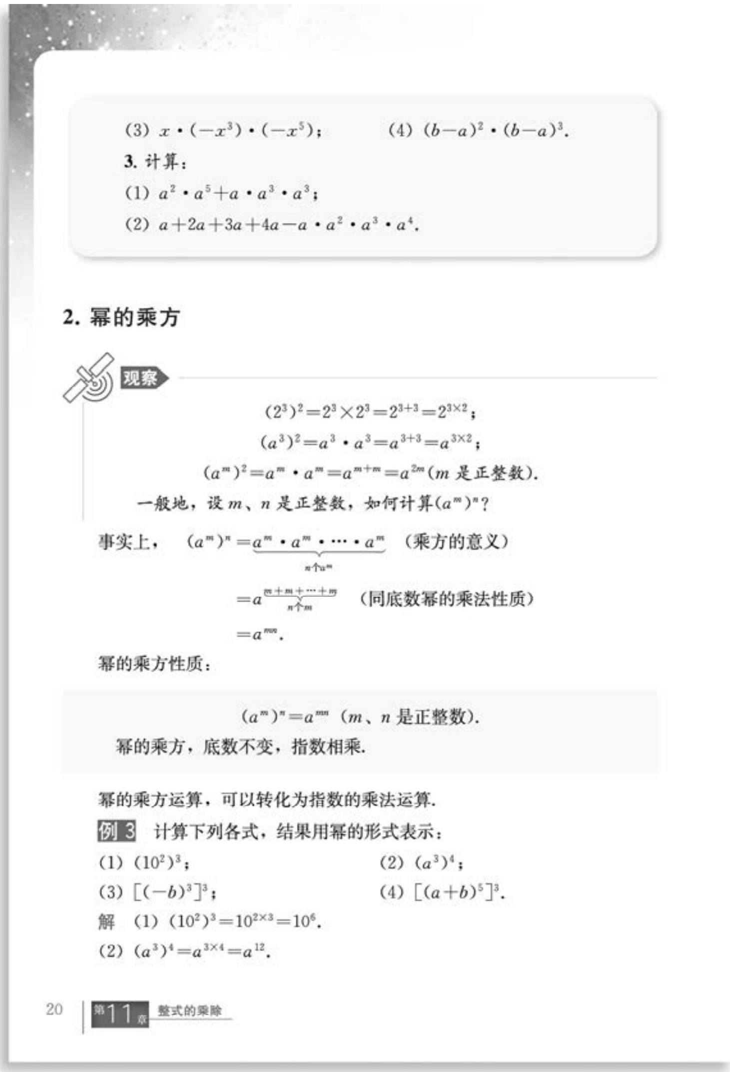
（1）根据乘法的结合律，体会乘方即为若干相同因数的连乘运算，重视从同底数幂的乘法性质导出幂的乘方性质的推导过程.

（2）教学时，要求学生会用文字语言和符号语言表达幂的乘方，并理解幂的乘方性质.

本课内容分析

对于幂的乘方性质，指数 m、n 都必须是正整数；底数 a 目前可在有理数范围内取值，随着学习的深入、数系的扩展，以后可以在实数范围内取值. 此外，一方面要提醒学生关注 m、n 表示不同的意义；另一方面，注意 $(a^m)^n$ 与 $(a^n)^m$，都等于 a^{mn}.

例 3 要求结果写成幂的形式，其中例 3（3）应写成 $(-b)^9$，不写成 $-b^9$.



(3) $x\cdot(-x^3)\cdot(-x^5)$；　　(4) $(b-a)^2\cdot(b-a)^3$.

3. 计算：

(1) $a^2\cdot a^5+a\cdot a^3\cdot a^3$；

(2) $a+2a+3a+4a-a\cdot a^2\cdot a^3\cdot a^4$.

2. 幂的乘方

观察

$$(2^3)^2=2^3\times2^3=2^{3+3}=2^{3\times2};$$
$$(a^3)^2=a^3\cdot a^3=a^{3+3}=a^{3\times2};$$
$$(a^m)^2=a^m\cdot a^m=a^{m+m}=a^{2m}\ (m\text{ 是正整数}).$$

一般地，设 m、n 是正整数，如何计算 $(a^m)^n$？

事实上，$(a^m)^n=\underbrace{a^m\cdot a^m\cdot\cdots\cdot a^m}_{n\text{个}a^m}$（乘方的意义）

$=a^{\underbrace{m+m+\cdots+m}_{n\text{个}m}}$（同底数幂的乘法性质）

$=a^{mn}$.

幂的乘方性质：

$(a^m)^n=a^{mn}$（m、n 是正整数）.

幂的乘方，底数不变，指数相乘.

幂的乘方运算，可以转化为指数的乘法运算.

例 3 计算下列各式，结果用幂的形式表示：

(1) $(10^2)^3$；　　(2) $(a^3)^4$；

(3) $[(-b)^3]^3$；　　(4) $[(a+b)^5]^3$.

解　(1) $(10^2)^3=10^{2\times3}=10^6$.

(2) $(a^3)^4=a^{3\times4}=a^{12}$.

20　第 11 章　整式的乘除

(3) $[(-b)^3]^3=(-b)^{3\times3}=(-b)^9$.

(4) $[(a+b)^5]^3=(a+b)^{5\times3}=(a+b)^{15}$.

例 4 计算：

(1) $(a^3)^4\cdot(a^4)^3\cdot a$；　　(2) $(x^3)^2\cdot(x^3)^5$.

解 (1) $(a^3)^4\cdot(a^4)^3\cdot a$

$=a^{3\times4}\cdot a^{4\times3}\cdot a$

$=a^{12+12+1}=a^{25}$.

(2) $(x^3)^2\cdot(x^3)^5$

$=x^6\cdot x^{15}$

$=x^{21}$.

(2) 也能这样算：

$(x^3)^2\cdot(x^3)^5$

$=(x^3)^{2+5}$

$=(x^3)^7$

$=x^{21}$.

例 5 计算：

(1) $(a^2)^3+a^2\cdot a^3$；

(2) $m+2m+3m+m\cdot m^2\cdot m^3-(m^2)^3$.

解 (1) $(a^2)^3+a^2\cdot a^3=a^{2\times3}+a^{2+3}=a^6+a^5$.

(2) $m+2m+3m+m\cdot m^2\cdot m^3-(m^2)^3$

$=6m+m^6-m^6$

$=6m$.

课堂练习 11.1(2)

1. 下列计算是否正确？如果不正确，应该如何改正？

(1) $(a^5)^2=a^7$；　　(2) $a^5\cdot a^2=a^{10}$.

2. 计算下列各式，结果用幂的形式表示：

(1) $(x^4)^3\cdot x^2$；　　(2) $-(x^3)^5\cdot(-x^3)$；

(3) $y^3\cdot(y^2)^3\cdot(y^3)^2$；　　(4) $(-x)\cdot[(-x)^2]^3$；

(5) $[(x-y)^3]^2$；　　(6) $[(a+1)^3]^4\cdot(a+1)^3$.

3. 随着科技的进步，纳米技术的运用越来越广泛．1 米$=10^9$ 纳米，那么 1 米^2=________纳米^2.

11.1 整式的乘法 | 21

例 4 中需要同时运用同底数幂的乘法性质以及幂的乘方性质，需要检查性质运用的条件，再确定性质运用的先后顺序.

例 5(2)中不仅要运用幂的两个性质，还要进行整式的加减，需要注意运算顺序.

课堂练习 11.1(2)

1. (1) 不正确，应是 a^{10}.

(2) 不正确，应是 a^7.

2. (1) x^{14}.

(2) x^{18}.

(3) y^{15}.

(4) $(-x)^7$.

(5) $(x-y)^6$.

(6) $(a+1)^{15}$.

3. 10^{18}.

（以下分析对应课本第 22～24 页）

本课教学重点

发现并归纳积的乘方性质，能较熟练地运用乘方性质进行幂的运算.

本课教学建议

（1）幂的运算的三个性质用字母表示具有简约性、抽象性，但学生可能会混淆，所以需要从幂的结构上准确理解每一个幂的底数和指数，把握每一个运算性质使用的条件，提升幂的运算能力.

（2）在教学中，要求学生会用文字语言和符号语言表达积的乘方，并理解积的乘方性质.

3. 积的乘方

观察

$(ab)^2=(ab)\cdot(ab)=(a\cdot a)\cdot(b\cdot b)=a^2b^2$；

$(ab)^3=(ab)\cdot(ab)\cdot(ab)=(a\cdot a\cdot a)\cdot(b\cdot b\cdot b)=a^3b^3$.

一般地，设 n 是正整数，如何计算 $(ab)^n$？

事实上，

$$(ab)^n=\underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\cdots\cdot(ab)}_{n\text{个}ab}\quad\text{（乘方的意义）}$$

$$=\underbrace{(a\cdot a\cdot\cdots\cdot a)}_{n\text{个}a}\cdot\underbrace{(b\cdot b\cdot\cdots\cdot b)}_{n\text{个}b}\quad\text{（乘法的交换律、结合律）}$$

$$=a^nb^n\quad\text{（乘方的意义）.}$$

积的乘方性质：

$$(ab)^n=a^nb^n\quad(n\text{ 是正整数}).$$

积的乘方，等于乘方的积.

例 6 计算：

(1) $(4m)^2$；

(2) $\left(\frac{2}{3}a\right)^3$；

(3) $(-xy^2)^3$；

(4) $(-3ab^2)^4$.

解 (1) $(4m)^2=4^2\cdot m^2=16m^2$.

(2) $\left(\frac{2}{3}a\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot a^3=\frac{8}{27}a^3$.

(3) $(-xy^2)^3=(-x)^3\cdot(y^2)^3=(-1)^3\cdot x^3\cdot y^6=-x^3y^6$.

(4) $(-3ab^2)^4=(-3a)^4\cdot(b^2)^4=(-3)^4\cdot a^4\cdot b^8=81a^4b^8$.

22 第11章 整式的乘除

本课内容分析

两个因式的积的乘方性质可以推广到有限个因式的积的乘方.

思考

计算：$(abc)^n$（n 是正整数）.

事实上，$(abc)^n=(ab)^n\cdot c^n=a^nb^nc^n$.

例 7 计算：

(1) $(xy^2z^3)^5$；

(2) $(2ab^2)^2\cdot(2ab^2)^3$.

解 (1) $(xy^2z^3)^5=x^5\cdot(y^2)^5\cdot(z^3)^5$

$=x^5\cdot y^{10}\cdot z^{15}$

$=x^5y^{10}z^{15}$.

(2) $(2ab^2)^2\cdot(2ab^2)^3=(2ab^2)^5$

$=2^5\cdot a^5\cdot(b^2)^5$

$=32a^5b^{10}$.

例 8 计算：

(1) $x^2\cdot x^3+(3x^2)^3+(-2x)^5$；

(2) $(-a)\cdot a^{n+1}+(-3a)^2\cdot a^n$（$n$ 是正整数）；

(3) $[3(x+y)^3]^2-[2(x+y)^2]^3$（结果用幂的形式表示）.

解 (1) $x^2\cdot x^3+(3x^2)^3+(-2x)^5$

$=x^5+3^3\cdot(x^2)^3+(-2)^5\cdot x^5$

$=x^5+27x^6-32x^5$

$=27x^6-31x^5$.

(2) $(-a)\cdot a^{n+1}+(-3a)^2\cdot a^n$

$=-a^{1+(n+1)}+(-3)^2a^2\cdot a^n$

$=-a^{n+2}+9a^{n+2}$

$=8a^{n+2}$.

(3) $[3(x+y)^3]^2-[2(x+y)^2]^3$

$=9(x+y)^6-8(x+y)^6$

$=(x+y)^6$.

11.1 整式的乘法 | 23

例 7(2)，把 $2ab^2$ 看成一个整体，先运用同底数幂的性质得 $(2ab^2)^5$，再运用积的乘方性质，使得计算比较简便.

例 8 是正整数指数幂性质的综合运用，同时涉及整式的加减，对学生的运算能力有更高的要求：注意运算顺序、运算性质以及符号.

课堂练习 11.1(3)

1. 下列计算是否正确？如果不正确，应该如何改正？

(1) $(3a)^2=3a^2$；　(2) $(a^3b^2)^3=a^6b^5$；

(3) $(-2ab^2)^3=-8a^3b^6$；　(4) $\left(\frac{2}{3}a^2b^2\right)^3=\frac{8}{9}a^6b^6$.

2. 计算：

(1) $(-x^3y^2)^3$；

(2) $\left(\frac{3}{4}xy^2z\right)^2$.

3. 计算：

(1) $(m^2)^3\cdot(2m)^4\cdot(-m)^2$；

(2) $x\cdot x^2\cdot x^{n-3}-(-x)^2\cdot x^{n-2}$（$n$ 是大于 3 的正整数）；

(3) $(x-y)^2\cdot(x-y)^3\cdot(y-x)^4$（结果用幂的形式表示）；

(4) $[(a+b)^3]^2-[(-a-b)^2]^3$.

4. 整式的乘法

问题 光在真空中的速度约为 3×10^5 km/s，1 光年是指光在真空中经过 1 年所行的距离，它是一个长度单位. 若取一年的时间约为 3.15×10^7 s，则 1 光年的距离大约为多少？

1 光年等于光在真空中的速度乘一年的时间，即

$$\begin{aligned}&(3\times10^5)\times(3.15\times10^7)\\=&(3\times3.15)\times(10^5\times10^7)\\=&9.45\times10^{12}(\text{km}).\end{aligned}$$

所以 1 光年的距离大约为 9.45×10^{12} km.

课堂练习 11.1(3)

1. (1) 不正确，应是 $9a^2$.

(2) 不正确，应是 a^9b^6.

(3) 正确.

(4) 不正确，应是 $\frac{8}{27}a^6b^6$.

2. (1) $-x^9y^6$.

(2) $\frac{9}{16}x^2y^4z^2$.

3. (1) $16m^{12}$.

(2) 0.

(3) $(x-y)^9$.

(4) 0.

（以下分析对应课本第 24～27 页）

本课教学重点

掌握简单的单项式与整式的乘法运算，理解其依据是乘法的运算律，进一步体会式可以类似数一样进行乘法运算.

本课教学建议

（1）利用教科书安排的第一个“思考”，引导学生去探索单项式与单项式的乘法.

（2）参照数的运算中乘法对加法的分配律，引导学生从单项式与单项式的乘法过渡到单项式与整式的乘法.

（3）强调单项式与整式的积仍是整式，留意积的项数应与原整式的项数一致，不要漏项.

思考

$$3ax^5 \cdot bx^7=(3a \cdot b) \cdot (x^5 \cdot x^7)=3abx^{12}.$$

以上计算是单项式与单项式相乘，用到了哪些运算律与运算法则？

单项式与单项式相乘，把它们的系数、同底数幂分别相乘.

例 9 计算：

(1) $\frac{1}{2}xy^2 \cdot (-x^2z)$；　　(2) $(-4ax^2) \cdot (-3a^2x^3)$；

(3) $(-2x)^3 \cdot (5x^2y)^2$.

解 (1) $\frac{1}{2}xy^2 \cdot (-x^2z)$

$=\frac{1}{2}\times(-1) \cdot (x \cdot x^2) \cdot y^2 \cdot z$

$=-\frac{1}{2}x^3y^2z.$

(2) $(-4ax^2) \cdot (-3a^2x^3)$

$=[(-4)\times(-3)] \cdot (a \cdot a^2) \cdot (x^2 \cdot x^3)$

$=12a^3x^5.$

(3) $(-2x)^3 \cdot (5x^2y)^2$

$=(-8x^3) \cdot (25x^4y^2)$

$=(-8\times 25) \cdot (x^3 \cdot x^4) \cdot y^2$

$=-200x^7y^2.$

例 10 求单项式 $-2x^2y$、$5xy^3$ 与 $-\frac{3}{5}x^2y^2$ 的乘积.

解 $(-2x^2y) \cdot (5xy^3) \cdot \left(-\frac{3}{5}x^2y^2\right)$

$=\left[(-2)\times5\times\left(-\frac{3}{5}\right)\right] \cdot (x^2 \cdot x \cdot x^2) \cdot (y \cdot y^3 \cdot y^2)$

$=6x^5y^6.$

11.1 整式的乘法 25

本课内容分析

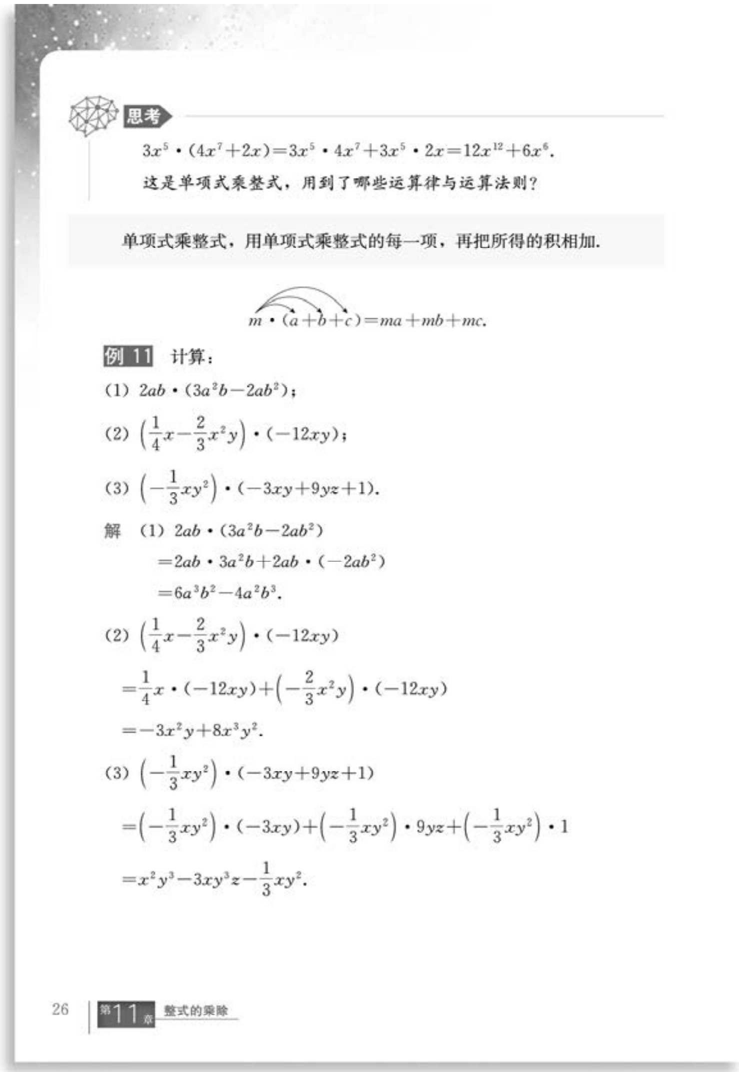
由于字母可以像数一样进行运算与推理，整式可以作乘法运算，依据乘法交换律和结合律以及乘法对加法的分配律，整式的乘法可转化为单项式乘单项式，所以单项式与单项式的乘法是整式乘法的基础，地位重要.

例 9，两个相乘的单项式，如果出现字母不同的情形，根据乘法交换律，对应于不同字母的幂在积中予以保留. 如在例 9（1）中，第一个单项式 $\frac{1}{2}xy^2$ 有字母 y、没有字母 z，第二个单项式 $-x^2z$ 有字母 z、没有字母 y，它们对应的幂 y^2 以及 z，均在结果中予以保留.

系数相乘时，先确定符号，再计算绝对值.

单项式乘整式依据了乘法对加法的分配律.

例 11，单项式乘整式时，要检查是否漏乘，结果的项数应与原整式的项数一致.



思考

$3x^5\cdot(4x^7+2x)=3x^5\cdot 4x^7+3x^5\cdot 2x=12x^{12}+6x^6$.

这是单项式乘整式，用到了哪些运算律与运算法则？

单项式乘整式，用单项式乘整式的每一项，再把所得的积相加.

$$m\cdot(a+b+c)=ma+mb+mc.$$

例 11 计算：

(1) $2ab\cdot(3a^2b-2ab^2)$；

(2) $\left(\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}x^2y\right)\cdot(-12xy)$；

(3) $\left(-\frac{1}{3}xy^2\right)\cdot(-3xy+9yz+1)$.

解 (1) $2ab\cdot(3a^2b-2ab^2)$

$=2ab\cdot 3a^2b+2ab\cdot(-2ab^2)$

$=6a^3b^2-4a^2b^3$.

(2) $\left(\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}x^2y\right)\cdot(-12xy)$

$=\frac{1}{4}x\cdot(-12xy)+\left(-\frac{2}{3}x^2y\right)\cdot(-12xy)$

$=-3x^2y+8x^3y^2$.

(3) $\left(-\frac{1}{3}xy^2\right)\cdot(-3xy+9yz+1)$

$=\left(-\frac{1}{3}xy^2\right)\cdot(-3xy)+\left(-\frac{1}{3}xy^2\right)\cdot 9yz+\left(-\frac{1}{3}xy^2\right)\cdot 1$

$=x^2y^3-3xy^3z-\frac{1}{3}xy^2$.

26 第11章 整式的乘除

讨论

如何求图 11-1-1 中涂色部分的面积？

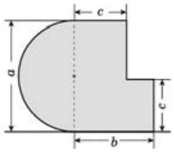


图 11-1-1

课堂练习 11.1(4)

1. 计算：

(1) $\frac{5}{12}ab^2 \cdot 3ab$；　　(2) $(-x^2y)\cdot(2xy)^3$；

(3) $-x\cdot(x^2+2x-2)$；　　(4) $(4a^3-2a+1)\cdot(-2a)^2$.

2. 计算：

(1) $b\cdot(a+b)-a\cdot(b-a)$；　(2) $x\cdot(x-y)-y\cdot(x-y)$；

(3) $a\cdot(a^2+a+1)+(-1)\cdot(a^2+a+1)$；

(4) $x\cdot(x^2-x-1)+2\cdot(x^2+1)-\frac{1}{3}x\cdot(3x^2+6x)$.

思考

如何计算 $(2x^3+3xy)\cdot(x+y^2)$？

可以把 $x+y^2$ 看成一个整体，运用乘法对加法的分配律计算，得

$$\begin{aligned}&(2x^3+3xy)\cdot(x+y^2)\\=&2x^3\cdot(x+y^2)+3xy\cdot(x+y^2)\\=&2x^3\cdot x+2x^3\cdot y^2+3xy\cdot x+3xy\cdot y^2\\=&2x^4+2x^3y^2+3x^2y+3xy^3.\end{aligned}$$

11.1　整式的乘法　27

讨论　求涂色部分的面积，旨在让学生通过多种方法对图形进行割补，然后求面积，感受整式四则运算在实际问题中的运用. 涂色部分的面积是 $\frac{1}{8}\pi a^2+ac+bc-c^2$

课堂练习 11.1(4)

1. (1) $\frac{5}{4}a^2b^3$.

(2) $-8x^5y^4$.

(3) $-x^3-2x^2+2x$.

(4) $16a^5-8a^3+4a^2$.

2. (1) a^2+b^2.

(2) $x^2-2xy+y^2$.

(3) a^3-1.

(4) $-x^2-x+2$.

（以下分析对应课本第 27～29 页）

本课教学重点

掌握简单的整式与整式的乘法运算，理解其依据是乘法的运算律.

本课教学建议

（1）从单项式与单项式的乘法、单项式与整式的乘法到整式与整式的乘法，引导学生体会整式乘法引入的逻辑顺序.

（2）运用乘法对加法的分配律，整式与整式的乘法可以转化为单项式与整式的乘法. 这里重点是整式乘法运算能力的培养.

讨论

如何求图 11-1-1 中涂色部分的面积？

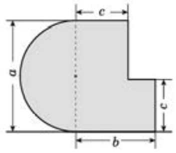


图 11-1-1

课堂练习 11.1(4)

1. 计算：

(1) $\frac{5}{12}ab^2\cdot 3ab$；　(2) $(-x^2y)\cdot(2xy)^3$；

(3) $-x\cdot(x^2+2x-2)$；　(4) $(4a^3-2a+1)\cdot(-2a)^2$.

2. 计算：

(1) $b\cdot(a+b)-a\cdot(b-a)$；　(2) $x\cdot(x-y)-y\cdot(x-y)$；

(3) $a\cdot(a^2+a+1)+(-1)\cdot(a^2+a+1)$；

(4) $x\cdot(x^2-x-1)+2\cdot(x^2+1)-\frac{1}{3}x\cdot(3x^2+6x)$.

思考

如何计算 $(2x^3+3xy)\cdot(x+y^2)$？

可以把 $x+y^2$ 看成一个整体，运用乘法对加法的分配律计算，得

$$\begin{aligned}&(2x^3+3xy)\cdot(x+y^2)\\=&2x^3\cdot(x+y^2)+3xy\cdot(x+y^2)\\=&2x^3\cdot x+2x^3\cdot y^2+3xy\cdot x+3xy\cdot y^2\\=&2x^4+2x^3y^2+3x^2y+3xy^3.\end{aligned}$$

11.1　整式的乘法　27

本课内容分析

把 $x+y^2$ 看成一个整体，需要一些抽象的思维，学生在理解上可能会有困难，需要引导.

这里本质上运用了两次乘法对加法的分配律.

整式与整式相乘要防止“漏项”，可从项数观察，在没有合并同类项时，积的项数应是原来两个整式项数的积. 如果积中有同类项，需要合并，确保结果最简.

整式与整式相乘，先用一个整式的每一项乘另一个整式中的每一项，再把所得的积相加.

$$(a+b)\cdot(m+n)=am+an+bm+bn.$$

例 12 计算：

(1) $(x-2)\cdot(y+3)$；

(2) $(2a+b)\cdot(a-3b)$；

(3) $(m+n)\cdot(m^2-mn+n^2)$.

解 (1) $(x-2)\cdot(y+3)=xy+3x-2y-6$.

(2) $(2a+b)\cdot(a-3b)=2a^2-6ab+ab-3b^2=2a^2-5ab-3b^2$.

(3) $(m+n)\cdot(m^2-mn+n^2)$

$=m^3-m^2n+mn^2+m^2n-mn^2+n^3$

$=m^3+n^3$.

例 13 计算：

(1) $(x+y)\cdot(x-y)\cdot(x^2+y^2)$；

(2) $(x+y)\cdot(x^2-2xy+y^2)-y\cdot(x^2+y^2)$.

解 (1) $(x+y)\cdot(x-y)\cdot(x^2+y^2)$

$=(x^2-xy+xy-y^2)\cdot(x^2+y^2)$

$=(x^2-y^2)\cdot(x^2+y^2)$

$=x^4+x^2y^2-x^2y^2-y^4$

$=x^4-y^4$.

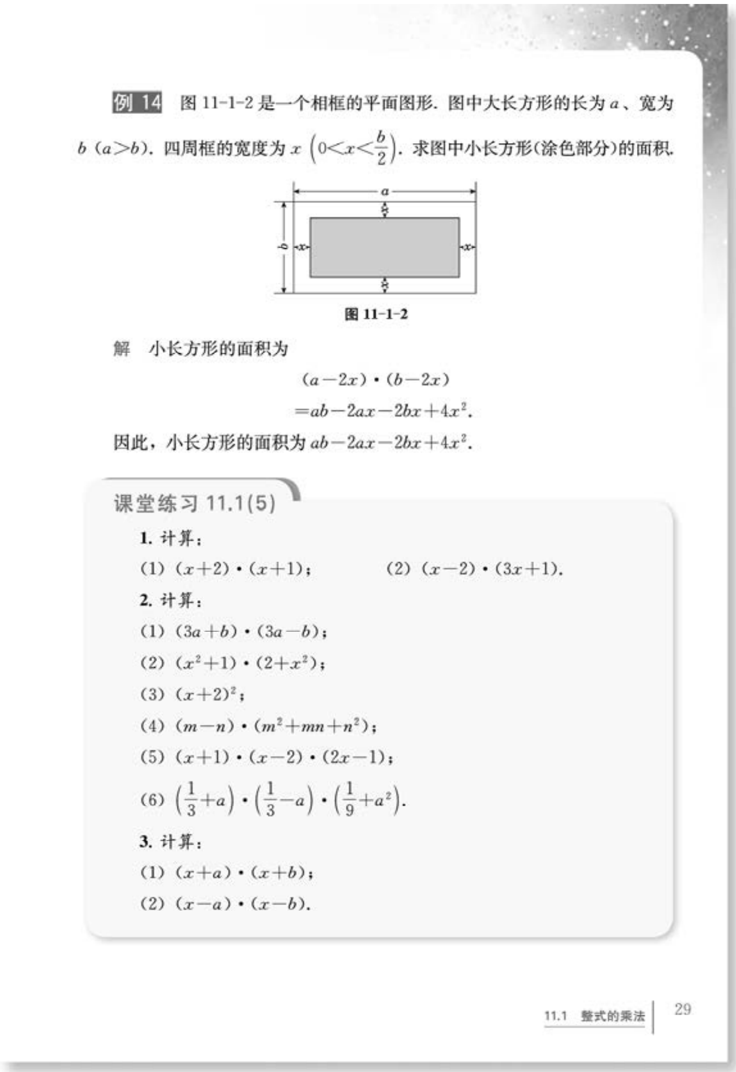
(2) $(x+y)\cdot(x^2-2xy+y^2)-y\cdot(x^2+y^2)$

$=x^3-2x^2y+xy^2+x^2y-2xy^2+y^3-x^2y-y^3$

$=x^3-2x^2y-xy^2$.

28 第11章 整式的乘除

例 13，进行整式的混合运算，须注意运算顺序并把结果化到最简.



例 14 图 11-1-2 是一个相框的平面图形. 图中大长方形的长为 a、宽为 b $(a>b)$. 四周框的宽度为 x $\left(0<x<\frac{b}{2}\right)$. 求图中小长方形(涂色部分)的面积.

图 11-1-2

解　小长方形的面积为

$$
\begin{aligned}
&(a-2x)\cdot(b-2x)\\
=&ab-2ax-2bx+4x^2.
\end{aligned}
$$

因此，小长方形的面积为 $ab-2ax-2bx+4x^2$.

课堂练习 11.1(5)

1. 计算：

(1) $(x+2)\cdot(x+1)$；　　(2) $(x-2)\cdot(3x+1)$.

2. 计算：

(1) $(3a+b)\cdot(3a-b)$；

(2) $(x^2+1)\cdot(2+x^2)$；

(3) $(x+2)^2$；

(4) $(m-n)\cdot(m^2+mn+n^2)$；

(5) $(x+1)\cdot(x-2)\cdot(2x-1)$；

(6) $\left(\frac{1}{3}+a\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-a\right)\cdot\left(\frac{1}{9}+a^2\right)$.

3. 计算：

(1) $(x+a)\cdot(x+b)$；

(2) $(x-a)\cdot(x-b)$.

11.1　整式的乘法　29

例 14，基于实际生活中的情景求涂色部分的面积，是整式乘法的直接运用.

课堂练习 11.1(5)

1. (1) x^2+3x+2.

(2) $3x^2-5x-2$.

2. (1) $9a^2-b^2$.

(2) x^4+3x^2+2.

(3) x^2+4x+4.

(4) m^3-n^3.

(5) $2x^3-3x^2-3x+2$.

(6) $\frac{1}{81}-a^4$.

3. (1) $x^2+ax+bx+ab$.

(2) $x^2-ax-bx+ab$.

习题 11.1

1. 从左到右、从上到下依次填写：$\frac{2}{3}a$，4，$\left(\frac{2}{3}a\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a\right)$；$2+a$，3，$(2+a)\cdot(2+a)\cdot(2+a)$.

2. $\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}$；$\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}$；8；$\left(\frac{5}{3}\right)^8$.

3.（1）10^5

（2）2^{10}.

（3）$(-a)^9$.

（4）$(m-n)^{12}$.

4.（1）C.

（2）D.

（3）A.

（4）B.

习题 11.1

A

1. 填表：

幂	底数	指数	积的形式
$(-3y)^2$	$-3y$	2	$(-3y)\cdot(-3y)$
$\left(\frac{2}{3}a\right)^4$			
$(2+a)^3$			

2. 按要求填空：

$\left(\frac{5}{3}\right)^3\times\left(\frac{5}{3}\right)^5$

$=(\_\_\_\_\_\_\_\_)\times(\_\_\_\_\_\_\_\_)$（将幂表示成积的形式）

$=\underbrace{\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{5}{3}}_{(\quad)\text{个}\frac{5}{3}}$（乘法结合律）

$=\_\_\_\_\_\_$（将积表示成幂的形式）.

3. 填空题(结果用幂的形式表示)：

(1) $10\times10^4=\_\_\_\_\_\_$；

(2) $(-2)^4\times(-2)^6=\_\_\_\_\_\_$；

(3) $(-a)\cdot(-a)^3\cdot(-a)^5=\_\_\_\_\_\_$；

(4) $(m-n)^2\cdot(m-n)^4\cdot(m-n)^6=\_\_\_\_\_\_$.

4. 选择题：

(1) $(2a^2)^3$ 的结果是（　）

A. $2a^6$；　B. $8a^5$；　C. $8a^6$；　D. $8a^8$.

(2) $2a^2 \cdot 3a^3$ 的结果是 ( )

A. $5a^5$； B. $6a^6$；

C. $5a^6$； D. $6a^5$.

(3) 下列计算中正确的是 ( )

A. $2a+3a=5a$； B. $a^2 \cdot a^3=a^6$；

C. $2a \cdot 3a=5a^2$； D. $(a^2)^3=a^5$.

(4) 如果 A、B 都是关于 x 的单项式，且 $A \cdot B$ 是一个九次单项式，$A+B$ 是一个五次式，那么 $A-B$ 的次数 ( )

A. 一定是 9； B. 一定是 5；

C. 一定是 4； D. 无法确定.

5. 计算：

(1) $a^4 \cdot a^5+a \cdot a^4 \cdot a^4$；

(2) $a^2 \cdot (a^2)^3 \cdot (a^2)^5$；

(3) $a^3 \cdot a^5-(a^3)^5$；

(4) $(-x)^2 \cdot (-x^6) \cdot (-x^2)^3$；

(5) $(x-y) \cdot (y-x)^5+(x-y)^2 \cdot (y-x)^4$；

(6) $(-2a^2)^3+(-3a^3)^2+(-a)^6$；

(7) $\left(-\frac{1}{2}a^2b\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}ab^2\right)-(-ab)^3$；

(8) $\left(4x^2-\frac{4}{9}x+1\right) \cdot (-3x^2)$；

(9) $(x^2+3) \cdot (x^2-9)$；

(10) $5x \cdot (x^2-2x-1)-x \cdot (2x+3) \cdot (x-5)$.

B

6. 已知 $y \cdot (y-2)-2=0$，求 $3 \cdot (y+1) \cdot (y-3)+2$ 的值.

7. 将关于 x 的一次二项式 $ax+b$ 与二次三项式 x^2+2x+3 相乘，积中不出现一次项，且二次项系数为 1. 求 a、b 的值.

5. (1) $2a^9$.

(2) a^{18}.

(3) a^8-a^{15}.

(4) x^{14}.

(5) 0.

(6) $2a^6$.

(7) $\frac{6}{5}a^3b^3$.

(8) $-12x^4+\frac{4}{3}x^3-3x^2$.

(9) x^4-6x^2-27.

(10) $3x^3-3x^2+10x$.

6. -1.

7. $a=2$， $b=-3$.

8. （1）$x^{n+1}-1$.

（2）1 023.　提示：原式$=2^{10}-1=1\ 023$.

8. 观察下列各式：

$$(x-1)\cdot(x+1)=x^2-1;$$

$$(x-1)\cdot(x^2+x+1)=x^3-1;$$

$$(x-1)\cdot(x^3+x^2+x+1)=x^4-1.$$

（1）根据以上各式的规律，可得：

$(x-1)\cdot(x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1)=$________（$n$ 是正整数）；

（2）运用(1)获得的结论，计算 $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^9$ 的值.

11.2　乘法公式

本节教学目标

运用整式乘法导出平方差公式以及完全平方公式，能辨识公式的结构特征，了解公式的几何背景，能利用乘法公式进行简单的运算和推理.

（以下分析对应课本第 33～34 页）

本课教学重点

经历平方差公式的探求过程，能辨识公式的结构特征，知道平方差公式的几何背景，能利用平方差公式进行简单的运算和推理.

本课教学建议

（1）理解平方差公式是整式乘法的一个特例.

（2）重视平方差公式的符号语言，提高学生数学语言的表达能力，并在使用平方差公式运算时，形成符号意识，发展运算能力.

本课内容分析

本课内容自然地承接了一般的整式乘整式的方法，从“一般到特殊”，着重学习几个具有研究与使用价值的整式乘整式的内容与方法.

通过计算图 11-2-1 中(1)与(2)的涂色组合图形的面积，让学生对平方差公式的几何背景有“直观”认识，知道每项所指代的意义. 加深对公式结构的理解，感受数形结合的魅力.

体验用符号、文字和图形三种方式刻画平方差公式.

11.2 乘法公式

思考

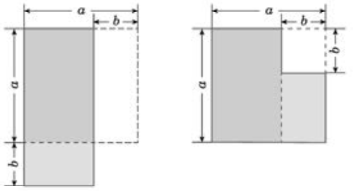
$(a+b)(a-b)$ 的结果有什么特征？

$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$，即两个数的和与这两个数的差的乘积等于这两个数的平方的差.

> 平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

思考

分别计算图 11-2-1(1)(2) 中涂色组合图形的面积，你能从中发现平方差公式吗？



(1)　　(2)

图 11-2-1

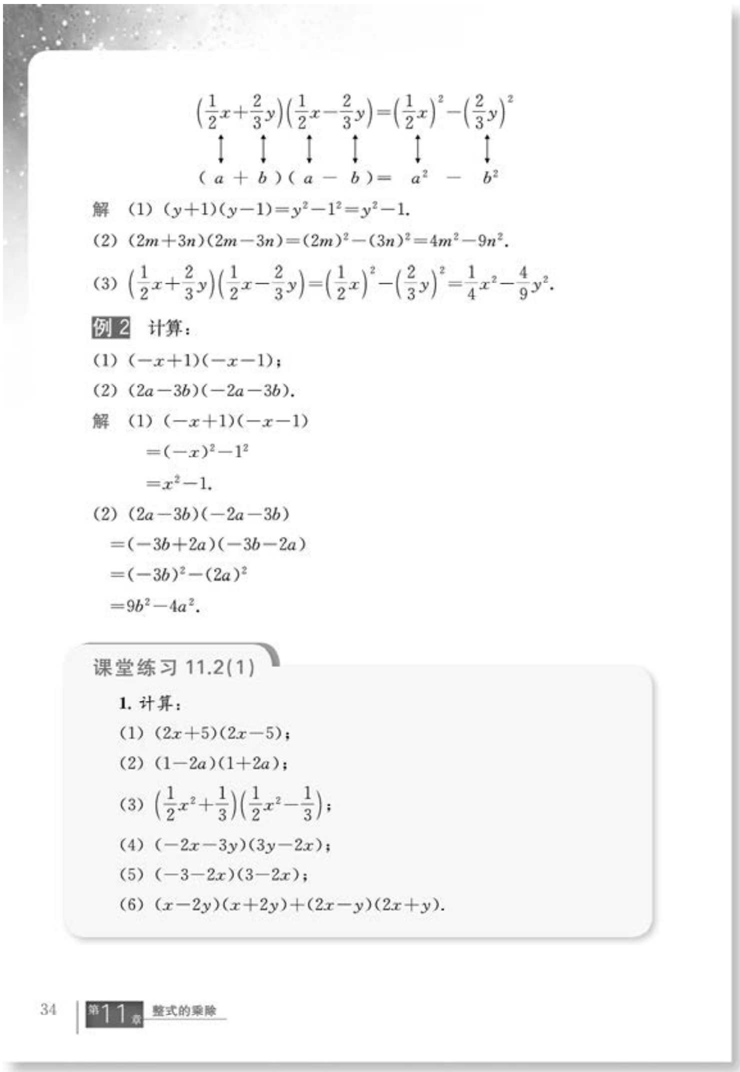
满足平方差公式特征的整式乘法，可以用平方差公式直接写出运算结果.

例 1 计算：

(1) $(y+1)(y-1)$；　　(2) $(2m+3n)(2m-3n)$；

(3) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y\right)$.

分析　以(3)为例，我们可以应用平方差公式：



$$\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y\right)=\left(\frac{1}{2}x\right)^2-\left(\frac{2}{3}y\right)^2$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

解 (1) $(y+1)(y-1)=y^2-1^2=y^2-1$.

(2) $(2m+3n)(2m-3n)=(2m)^2-(3n)^2=4m^2-9n^2$.

(3) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y\right)=\left(\frac{1}{2}x\right)^2-\left(\frac{2}{3}y\right)^2=\frac{1}{4}x^2-\frac{4}{9}y^2$.

例 2 计算：

(1) $(-x+1)(-x-1)$；

(2) $(2a-3b)(-2a-3b)$.

解 (1) $(-x+1)(-x-1)$

$=(-x)^2-1^2$

$=x^2-1$.

(2) $(2a-3b)(-2a-3b)$

$=(-3b+2a)(-3b-2a)$

$=(-3b)^2-(2a)^2$

$=9b^2-4a^2$.

课堂练习 11.2(1)

1. 计算：

(1) $(2x+5)(2x-5)$；

(2) $(1-2a)(1+2a)$；

(3) $\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}\right)$；

(4) $(-2x-3y)(3y-2x)$；

(5) $(-3-2x)(3-2x)$；

(6) $(x-2y)(x+2y)+(2x-y)(2x+y)$.

34 第11章 整式的乘除

理解平方差公式中字母的含义，公式中的 a、b 既可以表示具体的数，也可以表示更一般的整式.

课堂练习 11.2(1)

1.（1）$4x^2-25$.

（2）$1-4a^2$.

（3）$\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{9}$.

（4）$4x^2-9y^2$.

（5）$4x^2-9$.

（6）$5x^2-5y^2$.

（以下分析对应课本第 35～37 页）

本课教学重点

经历完全平方公式的探求过程，能辨识完全平方公式的结构特征，知道完全平方公式的几何背景，能利用完全平方公式进行简单的运算和推理.

本课教学建议

（1）理解两个完全平方公式内在的一致性.

（2）重视完全平方公式的符号语言的表述，提高学生数学语言的表达能力.

（3）通过例题加深对完全平方公式结构特征的认识.

（4）在运用完全平方公式运算时，形成符号意识，发展运算能力.

思考

$(a+b)^2$ 和 $(a-b)^2$ 的结果有什么特征？

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$，即两数和(或差)的平方，等于这两个数的平方的和，加上(或减去)这两个数的积的两倍.

完全平方公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

思考

你能分别根据图 11-2-2(1)(2)中涂色组合图形的面积计算发现两个完全平方公式吗？

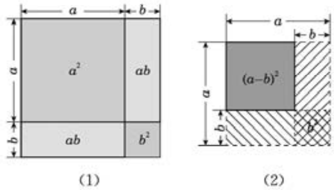


图 11-2-2

对于满足完全平方公式特征的整式乘法，可以利用完全平方公式直接写出运算结果. 平方差公式与完全平方公式是常用的乘法公式.

例 3 计算：

(1) $(x+1)^2$；　　(2) $(m+2n)^2$；

(3) $(3-y)^2$；　　(4) $\left(\frac{1}{2}t-1\right)^2$.

解 (1) $(x+1)^2=x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2=x^2+2x+1$.

(2) $(m+2n)^2=m^2+2\cdot m\cdot(2n)+(2n)^2=m^2+4mn+4n^2$.

(3) $(3-y)^2=9-2\times3\cdot y+y^2=9-6y+y^2$.

11.2 乘法公式　35

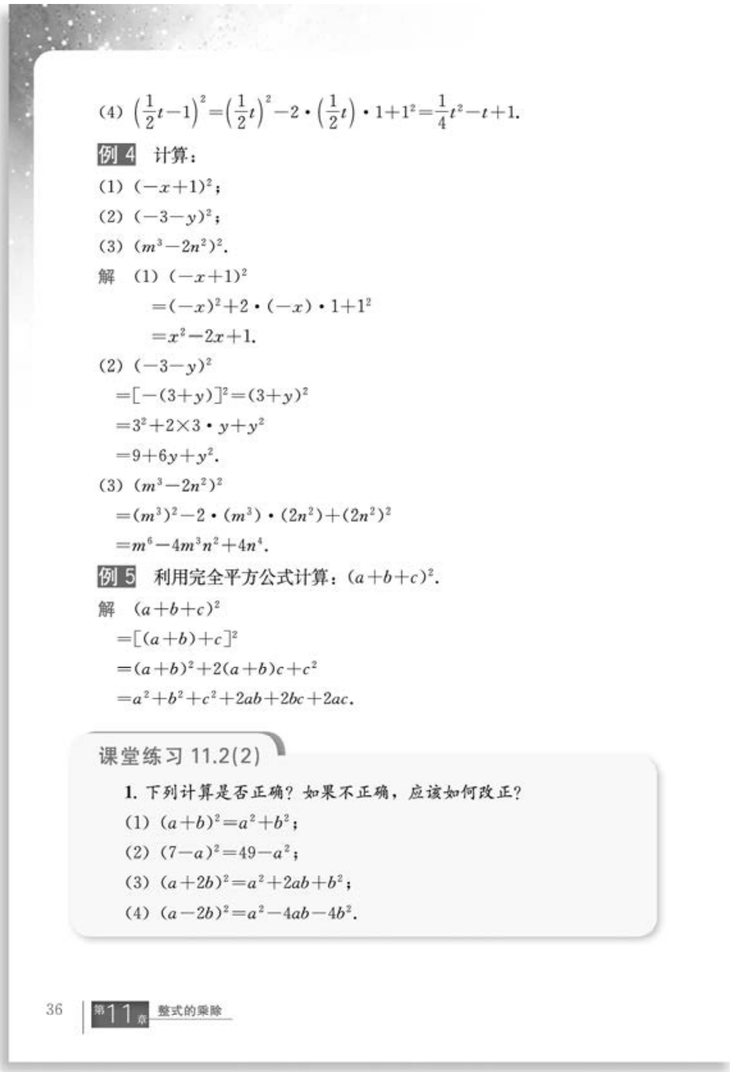
本课内容分析

将一个公式的“b”用“$-b$”代替，得到另一个公式，体会两个完全平方公式内在的一致性.

通过计算图 11-2-2 中(1)与(2)的涂色组合图形的面积，让学生对完全平方公式的几何背景有“直观”认识，知道每项所指代的意义. 加深对公式结构的理解，感受数形结合的魅力.

注意图形面积相加时用“补”，相减时用“割”.

体验用符号、文字和图形三种方式刻画完全平方公式.



(4) $\left(\frac{1}{2}t-1\right)^2=\left(\frac{1}{2}t\right)^2-2\cdot\left(\frac{1}{2}t\right)\cdot 1+1^2=\frac{1}{4}t^2-t+1.$

例 4 计算：

(1) $(-x+1)^2$；

(2) $(-3-y)^2$；

(3) $(m^3-2n^2)^2$.

解 (1) $(-x+1)^2$

$=(-x)^2+2\cdot(-x)\cdot 1+1^2$

$=x^2-2x+1.$

(2) $(-3-y)^2$

$=[-(3+y)]^2=(3+y)^2$

$=3^2+2\times 3\cdot y+y^2$

$=9+6y+y^2.$

(3) $(m^3-2n^2)^2$

$=(m^3)^2-2\cdot(m^3)\cdot(2n^2)+(2n^2)^2$

$=m^6-4m^3n^2+4n^4.$

例 5 利用完全平方公式计算：$(a+b+c)^2$.

解 $(a+b+c)^2$

$=[(a+b)+c]^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac.$

课堂练习 11.2(2)

1. 下列计算是否正确？如果不正确，应该如何改正？

(1) $(a+b)^2=a^2+b^2$；

(2) $(7-a)^2=49-a^2$；

(3) $(a+2b)^2=a^2+2ab+b^2$；

(4) $(a-2b)^2=a^2-4ab-4b^2$.

36 第11章 整式的乘除

例 5，可以把$(a+b)$看作一个整体，然后用完全平方公式；也可以先把$(b+c)$看作一个整体，再用完全平方公式，得到的结果是一致的.

课堂练习 11.2(2)

1. (1) 不正确，应是 $a^2+2ab+b^2$.

(2) 不正确，应是 $49-14a+a^2$.

(3) 不正确，应是 $a^2+4ab+4b^2$.

(4) 不正确，应是 $a^2-4ab+4b^2$.

2. (1) $4x^2+4xy+y^2$.

(2) $a^2+2ab+b^2$.

(3) $\frac{1}{16}m^2-\frac{1}{3}mn+\frac{4}{9}n^2$.

(4) $a^6-4a^3b^3+4b^6$.

(5) $16x^4-72x^2+81$.

(6) $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$.

（以下分析对应课本第 37～38 页）

本课教学重点

选用适当的乘法公式进行整式运算.

本课教学建议

（1）鼓励学生正确运用乘法公式，除了要掌握乘法公式的结构特征外，还要理解公式中字母的广泛含义：公式中的字母可以表示具体的数，也可以表示整式. 只要具有公式的结构特征，就可以运用公式运算.

（2）教学时，由易到难，引导学生选择适当的公式，积累灵活运用公式运算的经验，感受学习乘法公式的价值.

2. 计算：

(1) $(2x+y)^2$；　　(2) $(-a-b)^2$；

(3) $\left(\frac{1}{4}m-\frac{2}{3}n\right)^2$；　　(4) $(-a^3+2b^3)^2$；

(5) $(2x+3)(2x-3)(4x^2-9)$；　　(6) $(a+b-c)^2$.

例 6 计算：

(1) $(x^2+3y)(-3y-x^2)$；

(2) $(2a+3b)^2-(2a-3b)^2$；

(3) $(m+2n)(m-2n)(m^2+4n^2)$.

解 (1) $(x^2+3y)(-3y-x^2)$

$=(x^2+3y)[-(x^2+3y)]$

$=-(x^2+3y)^2$

$=-(x^4+6x^2y+9y^2)$

$=-x^4-6x^2y-9y^2$.

(2) $(2a+3b)^2-(2a-3b)^2$

$=(4a^2+12ab+9b^2)-(4a^2-12ab+9b^2)$

$=24ab$.

(3) $(m+2n)(m-2n)(m^2+4n^2)$

$=(m^2-4n^2)(m^2+4n^2)$

$=m^4-16n^4$.

例 7 计算：

(1) $(a-2b+3c)^2$；

(2) $(a+b-c)(a-b+c)$.

解 (1) $(a-2b+3c)^2$

$=[(a-2b)+3c]^2$

$=(a-2b)^2+2(a-2b)\cdot 3c+(3c)^2$

本课内容分析

例 6 与例 7 需要选择适当的乘法公式进行运算，特别是例 7(2)，根据公式正确添括号后，才能运用公式简便运算. 通过例题的学习，理解只有符合公式特征的整式乘法才能运用公式简便运算.

$=a^2-4ab+4b^2+6ac-12bc+9c^2$

$=a^2+4b^2+9c^2-4ab+6ac-12bc$.

(2) $(a+b-c)(a-b+c)$

$=[a+(b-c)][a-(b-c)]$

$=a^2-(b-c)^2$

$=a^2-(b^2-2bc+c^2)$

$=a^2-b^2+2bc-c^2$.

例 8 利用乘法公式计算：

(1) 101×99；　　　　(2) 98^2.

解 (1) $101\times99=(100+1)\times(100-1)=100^2-1^2=9\,999$.

(2) $98^2=(100-2)^2=100^2-2\times100\times2+2^2=9\,604$.

课堂练习 11.2(3)

1. 利用平方差公式计算：

(1) 88×92；　　　　(2) $99\frac{3}{4}\times100\frac{1}{4}$.

2. 利用完全平方公式计算：

(1) 102^2；　　　　(2) 99.9^2.

3. 计算：

(1) $(-x+y)(x-y)$；　　　　(2) $(-x-y)(x+y)$；

(3) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$；　　　　(4) $(a+2b-3)(a-2b+3)$.

利用乘法公式，可以较简便地求某些代数式的值和计算.

例 9 已知$(a+b)^2=9$，$(a-b)^2=25$. 求 a^2+b^2 与 ab 的值.

解 因为$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，所以

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2,$$

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$$

例 8 是用乘法公式进行具体数的计算，使学生体会到计算时使用公式的乐趣与价值. 可以激发学生的好奇心与学习的积极性.

课堂练习 11.2(3)

1.（1）8 096.

（2）$9\,999\frac{15}{16}$.

2.（1）10 404.

（2）9 980.01.

3.（1）$-x^2+2xy-y^2$.

（2）$-x^2-2xy-y^2$.

（3）x^4-16.

（4）$a^2-4b^2+12b-9$.

（以下分析对应课本第 38～40 页）

本课教学重点

会利用乘法公式求某些代数式的值，并会利用乘法公式简便运算以及解决一些实际问题.

本课教学建议

在学生已经掌握了乘法公式的基础上，鼓励学生关注乘法公式的变形与它们之间的关系，结合具体的例题，引导学生发现$(a+b)^2$、$(a-b)^2$、a^2+b^2、ab 这四者中，已知其中两个就可以求其他两个；让学生体验运用乘法公式解决实际问题，感受乘法公式的魅力.

$=a^2-4ab+4b^2+6ac-12bc+9c^2$

$=a^2+4b^2+9c^2-4ab+6ac-12bc.$

(2) $(a+b-c)(a-b+c)$

$=[a+(b-c)][a-(b-c)]$

$=a^2-(b-c)^2$

$=a^2-(b^2-2bc+c^2)$

$=a^2-b^2+2bc-c^2.$

例 8 利用乘法公式计算：

(1) 101×99； (2) 98^2.

解 (1) $101\times99=(100+1)\times(100-1)=100^2-1^2=9\,999.$

(2) $98^2=(100-2)^2=100^2-2\times100\times2+2^2=9\,604.$

课堂练习 11.2(3)

1. 利用平方差公式计算：

(1) 88×92； (2) $99\frac{3}{4}\times100\frac{1}{4}$.

2. 利用完全平方公式计算：

(1) 102^2； (2) 99.9^2.

3. 计算：

(1) $(-x+y)(x-y)$； (2) $(-x-y)(x+y)$；

(3) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$； (4) $(a+2b-3)(a-2b+3)$.

利用乘法公式，可以较简便地求某些代数式的值和计算.

例 9 已知$(a+b)^2=9$，$(a-b)^2=25$. 求 a^2+b^2 与 ab 的值.

解 因为$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，所以

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2,$$

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$$

38 第11章 整式的乘除

本课内容分析

利用乘法公式可以求某些代数式的值.

例 9 揭示了$(a+b)^2$、$(a-b)^2$、a^2+b^2、ab 这四者中，已知其中任意两个，就可以求其他两个，也为后续学习一元二次方程的根与系数关系作准备.

这样，

$$a^2+b^2=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2},$$

$$ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}.$$

当$(a+b)^2=9$，$(a-b)^2=25$时，$a^2+b^2=17$，$ab=-4$.

例 10 计算：$998\times1\,002+4$.

解 $998\times1\,002+4=(1\,000-2)\times(1\,000+2)+4$

$=1\,000^2-2^2+4=1\,000\,000$.

例 11 如图 11-2-3，一张直径为 $a+2b$ 的圆形纸片，从中挖去直径分别为 a、b、b 的三个圆形纸片．求剩下纸片的面积（结果保留 π）.

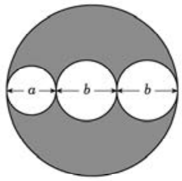


图 11-2-3

解 剩下纸片的面积为

$$\pi\left(\frac{a+2b}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{\pi}{4}[(a+2b)^2-a^2-b^2-b^2]$$

$$=\frac{\pi}{4}(4ab+2b^2)=\pi ab+\frac{\pi}{2}b^2.$$

因此，剩下纸片的面积为 $\pi ab+\frac{\pi}{2}b^2$.

课堂练习 11.2(4)

1. 计算：$987^2-986\times988$.

2. 已知 $a+b=5$，$ab=6$．求 a^2+b^2 与 $(a-b)^2$ 的值.

3. 先化简，再求值：$(a-2b)(a-3b)+(a-2b)^2-2(a-3b)^2$，其中 $a=-\frac{1}{3}$，$b=-2$.

11.2 乘法公式 39

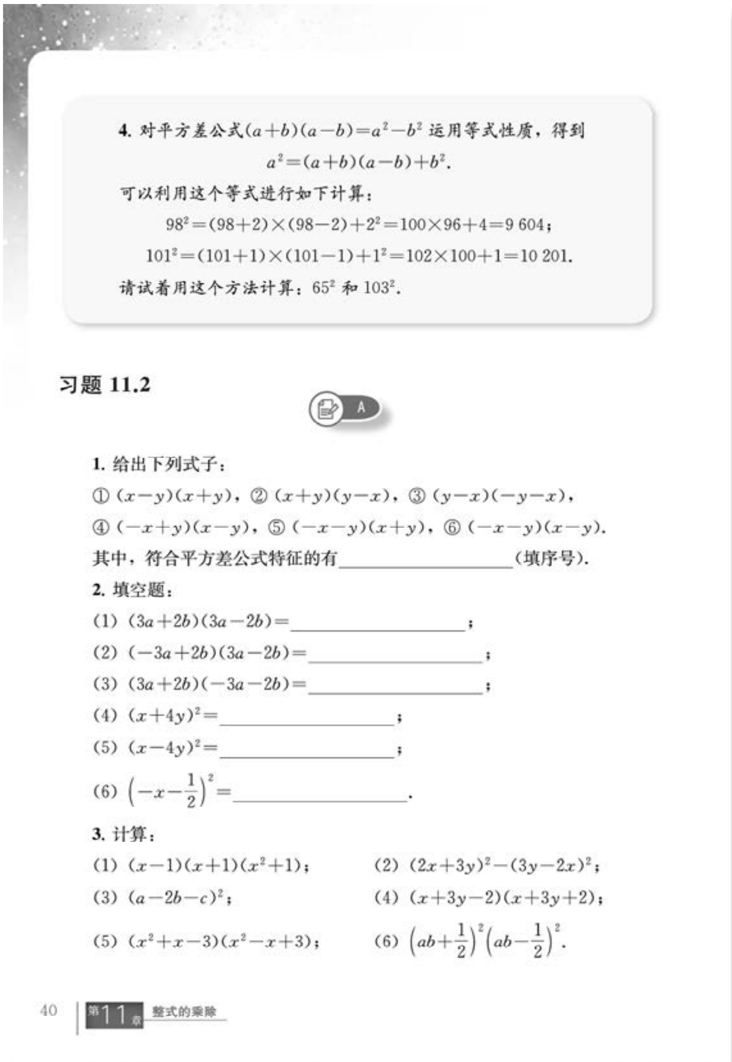
例 11 是实际问题，在解答过程中运用了乘法公式和乘法分配律，使得运算简便.

课堂练习 11.2(4)

1. 1.

2. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=13$；$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=1$.

3. 化简得 $3ab-8b^2$．当 $a=-\frac{1}{3}$，$b=-2$ 时，代数式的值为-30.



4. 对平方差公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$运用等式性质，得到

$$a^2=(a+b)(a-b)+b^2.$$

可以利用这个等式进行如下计算：

$$98^2=(98+2)\times(98-2)+2^2=100\times96+4=9\ 604;$$

$$101^2=(101+1)\times(101-1)+1^2=102\times100+1=10\ 201.$$

请试着用这个方法计算：65^2 和 103^2.

习题 11.2

A

1. 给出下列式子：

① $(x-y)(x+y)$，② $(x+y)(y-x)$，③ $(y-x)(-y-x)$，

④ $(-x+y)(x-y)$，⑤ $(-x-y)(x+y)$，⑥ $(-x-y)(x-y)$.

其中，符合平方差公式特征的有________（填序号）.

2. 填空题：

(1) $(3a+2b)(3a-2b)=$________；

(2) $(-3a+2b)(3a-2b)=$________；

(3) $(3a+2b)(-3a-2b)=$________；

(4) $(x+4y)^2=$________；

(5) $(x-4y)^2=$________；

(6) $\left(-x-\frac{1}{2}\right)^2=$________.

3. 计算：

(1) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$；　(2) $(2x+3y)^2-(3y-2x)^2$；

(3) $(a-2b-c)^2$；　(4) $(x+3y-2)(x+3y+2)$；

(5) $(x^2+x-3)(x^2-x+3)$；　(6) $\left(ab+\frac{1}{2}\right)^2\left(ab-\frac{1}{2}\right)^2$.

4. $65^2=(65+5)\times(65-5)+5^2=4\ 225$；$103^2=(103+3)\times(103-3)+3^2=10\ 609$.

习题 11.2

1. ①②③⑥.

2. (1) $9a^2-4b^2$.

(2) $-9a^2+12ab-4b^2$.

(3) $-9a^2-12ab-4b^2$.

(4) $x^2+8xy+16y^2$.

(5) $x^2-8xy+16y^2$.

(6) $x^2+x+\frac{1}{4}$.

3. (1) x^4-1.

(2) $24xy$.

(3) $a^2+4b^2+c^2-4ab+4bc-2ac$.

(4) $x^2+6xy+9y^2-4$.

(5) x^4-x^2+6x-9.

(6) $a^4b^4-\frac{1}{2}a^2b^2+\frac{1}{16}$.

4. （1）$399\frac{77}{81}$.

（2）1 592.01.

5. $\frac{13}{2}$或$-\frac{11}{2}$.

6. （1）13.

（2）97.

4. 简便计算：

（1）$-19\frac{7}{9}\times\left(-20\frac{2}{9}\right)$；　　　（2）$39.9^2$.

5. 已知关于 x 的整式 $9x^2+(2k-1)x+4$ 是某个关于 x 的整式的平方，求 k 的值.

B

6. 已知$(a-b)^2=25$，$ab=-6$. 求下列各式的值：

（1）a^2+b^2；　　　（2）a^4+b^4.

11.2 乘法公式　41

11.3　整式的除法

本节教学目标

（1）类比同底数幂乘法，通过探索、归纳得出同底数幂的除法性质，并会用同底数幂的除法性质进行运算.

（2）运用除法与乘法互为逆运算的关系，探索整式与单项式的除法，并能进行简单的整式除法运算.

（以下分析对应课本第 42～44 页）

本课教学重点

探索并归纳同底数幂的除法性质，能较熟练地运用同底数幂的除法性质进行运算，发展运算能力.

本课教学建议

（1）将同底数幂的乘法与除法性质放在一起，体会除法是乘法的逆运算. 理解规定：“$a^0=1(a\neq 0)$”的原因与意义.

（2）准确把握同底数幂的除法性质的适用条件.

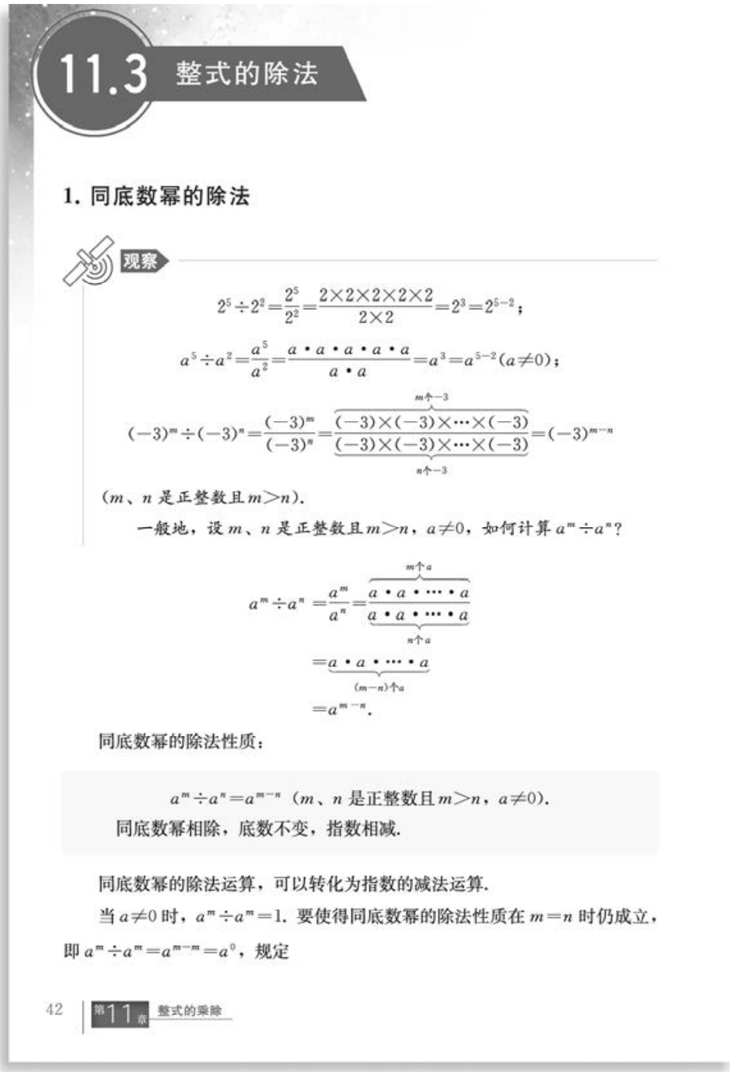
本课内容分析

在同底数幂的除法性质中，指数须是正整数，被除式中幂的指数大于除式中幂的指数，且底数不能等于零.

根据同底数幂的乘法性质，可得

$$a^{n}\cdot a^{m-n}=a^{m}.$$

若将除法看作乘法的逆运算，上式与同底数幂的除法性质相容.



11.3 整式的除法

1. 同底数幂的除法

观察

$$2^{5}\div 2^{2}=\frac{2^{5}}{2^{2}}=\frac{2\times2\times2\times2\times2}{2\times2}=2^{3}=2^{5-2};$$

$$a^{5}\div a^{2}=\frac{a^{5}}{a^{2}}=\frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a}=a^{3}=a^{5-2}(a\neq0);$$

$$(-3)^{m}\div(-3)^{n}=\frac{(-3)^{m}}{(-3)^{n}}=\frac{\overbrace{(-3)\times(-3)\times\cdots\times(-3)}^{m\text{个}-3}}{\underbrace{(-3)\times(-3)\times\cdots\times(-3)}_{n\text{个}-3}}=(-3)^{m-n}$$

(m、n 是正整数且 $m>n$).

一般地，设 m、n 是正整数且 $m>n$，$a\neq0$，如何计算 $a^{m}\div a^{n}$?

$$\begin{aligned}a^{m}\div a^{n}&=\frac{a^{m}}{a^{n}}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{m\text{个}a}}{\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}a}}\\&=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{(m-n)\text{个}a}\\&=a^{m-n}.\end{aligned}$$

同底数幂的除法性质：

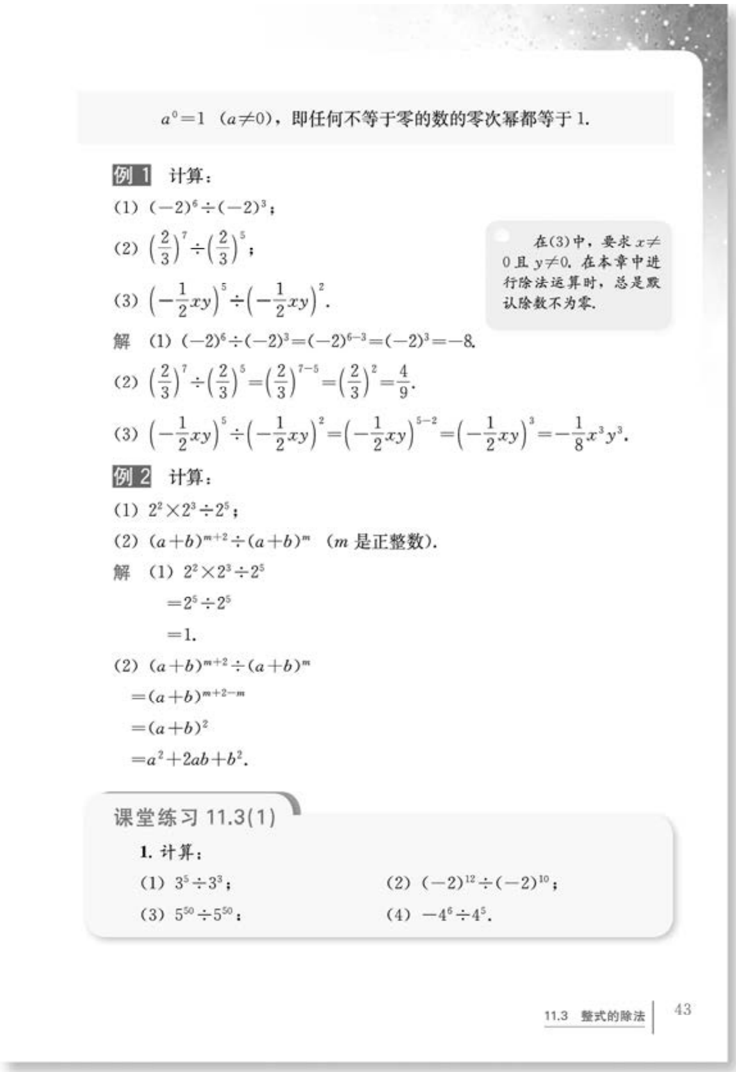
$a^{m}\div a^{n}=a^{m-n}$ (m、n 是正整数且 $m>n$，$a\neq0$).

同底数幂相除，底数不变，指数相减.

同底数幂的除法运算，可以转化为指数的减法运算.

当 $a\neq0$ 时，$a^{m}\div a^{m}=1$. 要使得同底数幂的除法性质在 $m=n$ 时仍成立，即 $a^{m}\div a^{m}=a^{m-m}=a^{0}$，规定

42 | 第11章 整式的乘除



$a^0=1$ $(a\neq 0)$，即任何不等于零的数的零次幂都等于 1.

例 1 计算：

(1) $(-2)^6\div(-2)^3$；

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^7\div\left(\frac{2}{3}\right)^5$；

(3) $\left(-\frac{1}{2}xy\right)^5\div\left(-\frac{1}{2}xy\right)^2$.

在(3)中，要求 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$. 在本章中进行除法运算时，总是默认除数不为零.

解 (1) $(-2)^6\div(-2)^3=(-2)^{6-3}=(-2)^3=-8$.

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^7\div\left(\frac{2}{3}\right)^5=\left(\frac{2}{3}\right)^{7-5}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$.

(3) $\left(-\frac{1}{2}xy\right)^5\div\left(-\frac{1}{2}xy\right)^2=\left(-\frac{1}{2}xy\right)^{5-2}=\left(-\frac{1}{2}xy\right)^3=-\frac{1}{8}x^3y^3$.

例 2 计算：

(1) $2^2\times2^3\div2^5$；

(2) $(a+b)^{m+2}\div(a+b)^m$ （m 是正整数）.

解 (1) $2^2\times2^3\div2^5$

$=2^5\div2^5$

$=1$.

(2) $(a+b)^{m+2}\div(a+b)^m$

$=(a+b)^{m+2-m}$

$=(a+b)^2$

$=a^2+2ab+b^2$.

课堂练习 11.3(1)

1. 计算：

(1) $3^5\div3^3$；　(2) $(-2)^{12}\div(-2)^{10}$；

(3) $5^{50}\div5^{50}$；　(4) $-4^6\div4^5$.

11.3 整式的除法 | 43

这里的“规定”是基于“两个相等的非零数相除得到的商为 1”. 同底数幂的除法性质以及乘法性质中的指数都可以从正整数推广到自然数.

课堂练习 11.3(1)

1. (1) 9.

(2) 4.

(3) 1.

(4) -4.

2. (1) a^3.

(2) -1.

(3) $\frac{9}{16}$.

3. (1) $-8x^3y^3$.

(2) 3.

（以下分析对应课本第 44～45 页）

本课教学重点

运用乘法与除法互为逆运算的关系，结合同底数幂的除法性质，掌握单项式与单项式的除法.

本课教学建议

充分利用教科书安排的思考栏目的内容，让学生去探索单项式与单项式的除法，鼓励学生从乘法运算性质归纳出除法运算性质，提高学生的自主学习能力.

2. 计算：

（1）$a^{10}\div a^{7}$；　　（2）$-x^{102}\div x^{102}$；

（3）$\left(\frac{3}{4}\right)^{6}\div\left(\frac{3}{4}\right)^{4}$.

3. 计算：

（1）$(-2xy)^{5}\div(-2xy)^{2}$；　　（2）$-3^{6}\div(-3)^{5}\times(-3)^{0}$.

2. 单项式除以单项式

问题　2022 年我国粮食总产量大约为 7.0×10^{11} kg. 如果按我国人口 1.4×10^{9} 人计算，那么人均粮食产量大约是多少？

计算：$(7.0\times10^{11})\div(1.4\times10^{9})$.

$$\begin{aligned}&(7.0\times10^{11})\div(1.4\times10^{9})\\=&(7.0\div1.4)\times(10^{11}\div10^{9})\\=&5\times10^{2}(\text{kg}).\end{aligned}$$

> $(7.0\times10^{11})\div(1.4\times10^{9})=\dfrac{7.0\times10^{11}}{1.4\times10^{9}}$.

思考

如何用单项式和单项式的乘法验证上面的计算？

可以计算 $(5x^{2})\cdot(1.4x^{9})=(5\times1.4)\cdot(x^{2}\cdot x^{9})=7x^{11}$，由于除法是乘法的逆运算，因此

$$\begin{aligned}7x^{11}\div1.4x^{9}&=(7\div1.4)\cdot(x^{11}\div x^{9})\\&=5x^{11-9}=5x^{2}.\end{aligned}$$

> 这里，$7x^{11}\div1.4x^{9}$ 指的是 $(7x^{11})\div(1.4x^{9})$. 今后，在以单项式作为除式时，我们总是这样处理.

两个单项式相除，把系数和同底数幂分别相除.

本课内容分析

本课中单项式除以单项式，注意被除式中幂的指数大于或等于除式中幂的指数，所得结果仍是单项式.

系数相除时，先确定符号，再计算绝对值.

例 3 计算：

(1) $16x^5y^6\div4x^2y^5$；

(2) $-3a^3b^6c\div6ab^3$；

(3) $m^4n^5\div\left(-\frac{2}{3}mn\right)$.

解 (1) $16x^5y^6\div4x^2y^5$

$=(16\div4)\cdot(x^5\div x^2)\cdot(y^6\div y^5)$

$=4x^{5-2}y^{6-5}=4x^3y$.

(2) $-3a^3b^6c\div6ab^3$

$=(-3\div6)\cdot(a^3\div a)\cdot(b^6\div b^3)\cdot c$

$=-\frac{1}{2}a^{3-1}b^{6-3}c=-\frac{1}{2}a^2b^3c$.

(3) $m^4n^5\div\left(-\frac{2}{3}mn\right)=\left[1\div\left(-\frac{2}{3}\right)\right]m^{4-1}n^{5-1}=-\frac{3}{2}m^3n^4$.

课堂练习 11.3(2)

1. 计算：

(1) $10a^8\div2a^4$；　(2) $a^4bc\div2ab$；

(3) $-4ax^2\div6x^2$；　(4) $3x^7y^3\div\left(-\frac{1}{3}xy^2\right)$.

2. 填空题：

(1) (______)$\div2ab=6ab^2$；

(2) (______)$\div(-5xy^2)=15xy$；

(3) $125a^2x^3\div$(______)$=5a$；

(4) $24a^3b^2\div$(______)$=-3ab$.

例 3，两个相除的单项式，如果出现被除式的字母比除式字母多的情形，那么根据乘法交换律，多出现的字母，其对应的幂在结果中予以保留．如在例 3(2)中，被除式$-3a^3b^6c$比除式$6ab^3$多一个字母c，它对应的幂c在结果中予以保留．

课堂练习 11.3(2)

1. (1) $5a^4$.

(2) $\frac{1}{2}a^3c$.

(3) $-\frac{2}{3}a$.

(4) $-9x^6y$.

2. (1) $12a^2b^3$.

(2) $-75x^2y^3$.

(3) $25ax^3$.

(4) $-8a^2b$.

（以下分析对应课本第 46～47 页）

本课教学重点

掌握整式除以单项式的简单运算.

本课教学建议

（1）基于乘法对加法的分配律以及乘法与除法互为逆运算，体会整式除以单项式可以转化为若干个单项式除以单项式的运算.

（2）体会单项式与整式的乘法运算、整式与单项式的除法运算两者的关系.

本课内容分析

例 4 中出现了被除式中某项与除式完全相同的情形，注意不要漏写得到的商“1”.

这里是把整式除以单项式作为整式乘法的逆运算来处理的，所以商也仅限于整式.

3. 整式除以单项式

思考

$$(ma+mb+mc)\div m=a+b+c.$$

你能用整式乘法验证这个结果吗?

整式除以单项式，先用整式的每一项除以单项式，再把所得的商相加.

例 4 计算:

(1) $(21a^3-14a^2-7a)\div 7a$;

(2) $(10m^5n^4+5m^3n^2-15mn)\div(-15mn)$;

(3) $\left(-\frac{2}{3}x^2y^3+\frac{3}{4}xy^2-2x^2y\right)\div\left(-\frac{1}{2}xy\right)$;

(4) $(3c^3d-6c^2d^2+c^2)\div(-3c^2)$.

解 (1) $(21a^3-14a^2-7a)\div 7a$

$=21a^3\div 7a-14a^2\div 7a-7a\div 7a$

$=3a^2-2a-1.$

(2) $(10m^5n^4+5m^3n^2-15mn)\div(-15mn)$

$=10m^5n^4\div(-15mn)+5m^3n^2\div(-15mn)-15mn\div(-15mn)$

$=-\frac{2}{3}m^4n^3-\frac{1}{3}m^2n+1.$

(3) $\left(-\frac{2}{3}x^2y^3+\frac{3}{4}xy^2-2x^2y\right)\div\left(-\frac{1}{2}xy\right)$

$=\left(-\frac{2}{3}x^2y^3\right)\div\left(-\frac{1}{2}xy\right)+\frac{3}{4}xy^2\div\left(-\frac{1}{2}xy\right)-2x^2y\div\left(-\frac{1}{2}xy\right)$

$=\frac{4}{3}xy^2-\frac{3}{2}y+4x.$

(4) $(3c^3d-6c^2d^2+c^2)\div(-3c^2)$

$=3c^3d\div(-3c^2)-6c^2d^2\div(-3c^2)+c^2\div(-3c^2)$

$=-cd+2d^2-\dfrac{1}{3}$.

课堂练习 11.3(3)

1. 计算：

(1) $(4a^3-2a^2+2a)\div 2a$；

(2) $(12ax^3-27ax)\div 3ax$；

(3) $(-18x^3y^2+12x^2y^3-6x^2y^2)\div(-3x^2y^2)$.

2. 计算：

(1) $6a(2a^3+3a^2+4a)\div 12a^2$；

(2) $(18x^2y^2-30x^3y^2)\div 3x\div 2y^2$.

习题 11.3

A

1. (口答)计算：

(1) $a^3\div a^3$； (2) $a^8\div a^4$；

(3) $a^9\div a^3\cdot a$； (4) $a^5\div(a^3\cdot a^2)$.

2. 计算：

(1) $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^7\div\left(-\dfrac{2}{5}\right)^5\div\dfrac{2}{5}$；

(2) $(4\times10^2)^3\div(-2\times10^3)$；

(3) $(x^4)^2\div x^5\div(-x)^2$；

(4) $(a^3\cdot a^2)^2\div(a^3\div a)^3$；

(5) $2a^3\div 3a^2$；

11.3 整式的除法 47

课堂练习 11.3(3)

1. (1) $2a^2-a+1$.

(2) $4x^2-9$.

(3) $6x-4y+2$.

2. (1) $a^2+\dfrac{3}{2}a+2$.

(2) $3x-5x^2$.

习题 11.3

1. (1) 1.

(2) a^4.

(3) a^7.

(4) 1.

2. (1) $\dfrac{2}{5}$.

(2) $-32\,000$.

(3) x.

(4) a^4.

(5) $\dfrac{2}{3}a$.

(6) $-9x^6yz$.

(7) $4xy^2-1$.

(8) $-x^2y+\dfrac{3}{2}xy^2-\dfrac{5}{2}y^3$.

(6) $3x^7y^3z \div \left(-\frac{1}{3}xy^2\right)$;

(7) $(20x^2y^2-5x) \div 5x$;

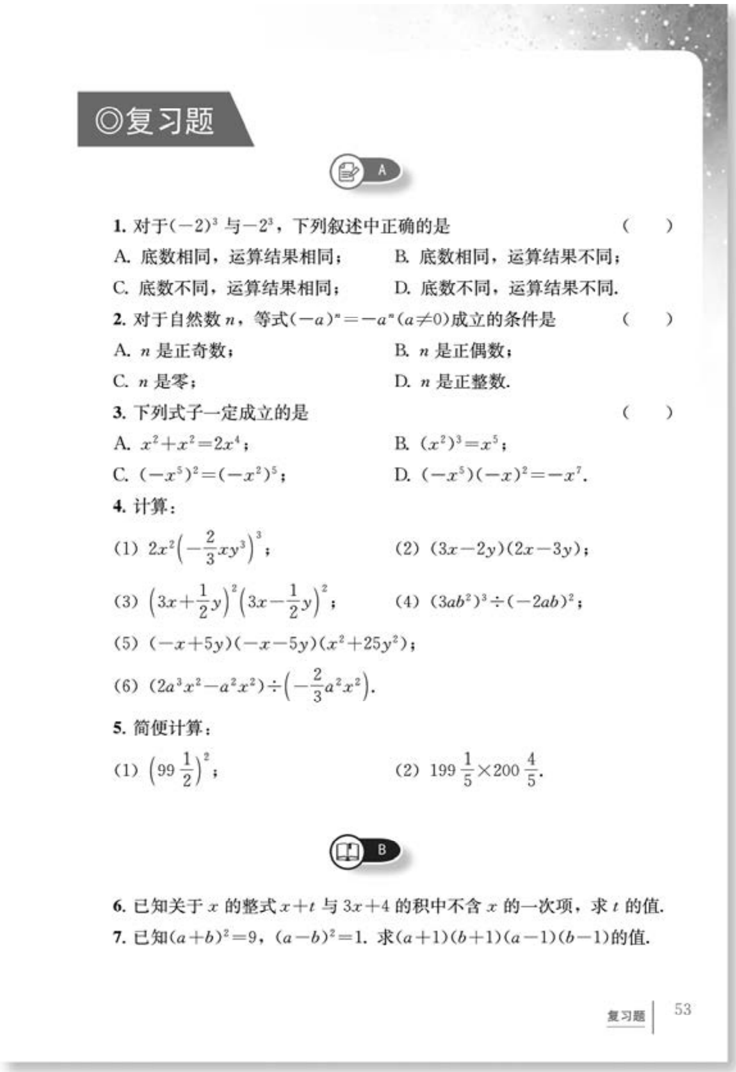
(8) $2x^2y^3(2x^2-3xy+5y^2) \div (-4x^2y^2)$.

B

3. 先化简，再求值：$(3a^{n+2}+9a^{n+1}-a^n) \div (-6a^n)$，其中 $a=-2$（n 是正整数）.

48 第11章 整式的乘除

3. 化简得 $-\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{2}a+\frac{1}{6}$. 当 $a=-2$ 时，代数式的值为 $1\frac{1}{6}$.



◎复习题

A

1. 对于$(-2)^3$与-2^3，下列叙述中正确的是（　　）

A. 底数相同，运算结果相同；　B. 底数相同，运算结果不同；

C. 底数不同，运算结果相同；　D. 底数不同，运算结果不同.

2. 对于自然数n，等式$(-a)^n=-a^n(a\neq0)$成立的条件是（　　）

A. n是正奇数；　B. n是正偶数；

C. n是零；　D. n是正整数.

3. 下列式子一定成立的是（　　）

A. $x^2+x^2=2x^4$；　B. $(x^2)^3=x^5$；

C. $(-x^5)^2=(-x^2)^5$；　D. $(-x^5)(-x)^2=-x^7$.

4. 计算：

(1) $2x^2\left(-\frac{2}{3}xy^3\right)^3$；　(2) $(3x-2y)(2x-3y)$；

(3) $\left(3x+\frac{1}{2}y\right)^2\left(3x-\frac{1}{2}y\right)^2$；　(4) $(3ab^2)^3\div(-2ab)^2$；

(5) $(-x+5y)(-x-5y)(x^2+25y^2)$；

(6) $(2a^3x^2-a^2x^2)\div\left(-\frac{2}{3}a^2x^2\right)$.

5. 简便计算：

(1) $\left(99\frac{1}{2}\right)^2$；　(2) $199\frac{1}{5}\times200\frac{4}{5}$.

B

6. 已知关于x的整式$x+t$与$3x+4$的积中不含x的一次项，求t的值.

7. 已知$(a+b)^2=9$，$(a-b)^2=1$. 求$(a+1)(b+1)(a-1)(b-1)$的值.

复习题　53

复习题

1. C.

2. A.

3. D.

4. (1) $-\frac{16}{27}x^5y^9$.

(2) $6x^2-13xy+6y^2$.

(3) $81x^4-\frac{9}{2}x^2y^2+\frac{1}{16}y^4$.

(4) $\frac{27}{4}ab^4$.

(5) x^4-625y^4.

(6) $-3a+\frac{3}{2}$.

5. (1) $9\,900\frac{1}{4}$.

(2) $39\,999\frac{9}{25}$.

6. $-\frac{4}{3}$.

7. 0. 提示. 由已知，得$a^2+b^2=5$，$ab=2$. 所以

$$\begin{aligned}&(a+1)(b+1)(a-1)(b-1)\\=&(a^2-1)(b^2-1)\\=&(ab)^2-(a^2+b^2)+1\\=&0.\end{aligned}$$

第 12 章　因式分解

一、本章概述

1. 总体要求

因式分解是整式的一种重要的恒等变形，是研究整式的有效工具，在分式的化简和方程的求解中发挥重要的作用. 本章上承整式的乘法，可以将因式分解视为整式乘法运算的逆向过程；下启分式的化简，将分子、分母分别进行因式分解，通过约去公因式达到化简的目的.

本章以因式分解和整式乘法的关系为主线，理解因式分解的概念，掌握因式分解的方法. 通过本章的学习，要能用提取公因式法、公式法等基本方法进行因式分解；能选择合理的方法进行因式分解，培养运算能力.

2. 课时安排与建议

本章共 8 课时，具体课时分配建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
12.1 因式分解的意义	1	因式分解的意义　1 课时
12.2 因式分解的方法	5	因式分解的方法　5 课时
习题课	1	
复习与小结	1	

3. 内容编排与特色

本章内容分为两节，分别是“12.1 因式分解的意义”和“12.2 因式分解的方法”，前一节介绍概念，后一节介绍方法.

第 1 节“因式分解的意义”，通过整式乘法的逆向过程引出因式分解，提出因式分解的严格定义，并指出因式分解的原则. 上海“二期课改”教科书将因式分解的概念和提取公因式合在一起安排为一课时，本教科书将“因式分解的意义”单列成节表述概念，第二节介绍方法，内容结构明晰，侧重对因式分解概念的理解.

第 2 节“因式分解的方法”，主要学习提取公因式法、公式法等因式分解的基本方法；传承上海教改经验，介绍二次项系数为 1 的二次三项式的十字相乘法；作为提取公因式法和公式法的应用，体会通过适当分组进行因式分解的过程. 与上海“二期课改”教科书中分别以“提取公因式法”“公式法”“十字相乘法”“分组分解法”为名，分四节学习因式分解的方法相比，本教科书意在弱化方法的名称，不过度强调因式分解的技巧.

本章的最大特色体现在结构和思维两方面. 从内容结构上看，因式分解的概念单独成一节，强化了概念；因式分解的方法整体成一节，弱化了技巧. 从思维方法上看，因式分解的概念和方法通过整式乘法的逆向过程引入，应关注逆向思维的运用.

4. 教学提示

注意对因式分解概念的理解. 与传统教科书中因式分解的概念相比，明确地指出“化为几个次数更低的整式的积”，更加强调因式分解的降次作用，在教学过程中要关注这一核心概念的变化.

注意对因式分解方法的教学内容和要求的把握. 因式分解的方法灵活多变，是初中数学教学的难点，本章主要学习提取公因式法、公式法等基本方法. 教科书中公式法直接利用公式不超过二次，十字相乘法也仅限于二次项系数为 1 的二次三项式. 教师应认真理解教科书编写意图，不宜随意拓展教学内容或提高教学要求.

通过观察、思考培养学生逆向思维的习惯. 对于因式分解概念的教学，要充分运用教科书中的观察、思考环节，让学生经历逆向思维的过程，感受因式分解和整式乘法的关系，加深对因式分解概念的理解. 在因式分解方法的探索过程中，要充分利用整式乘法的问题情境，通过观察，领会提取公因式法、公式法、十字相乘法与整式乘法之间的关系，明确因式分解可以通过整式的乘法进行检验，培养学生逆向思维的习惯.

通过充分交流发展学生观察归纳和分析应用的能力. 在因式分解概念的理解和方法的探索过程中，结合观察和思考，引导学生开展切实的交流，发展学生的观察归纳能力. 不同的整式进行因式分解需用不同的方法，应具体问题具体分析. 在教学时要引导学生发现整式的特征，选择适当的方法，进行因式分解的尝试，发展学生的分析应用能力.

5. 评价建议

重视学生对因式分解概念的理解. 关注因式分解的研究对象，关注因式分解的结果是否为积的形式，各个因式是否为次数更低的整式，关注各个因式是否不能再因式分解.

重视学生因式分解能力的形成. 关注学生是否理解因式分解和整式乘法的关系，是否会用整式乘法检验因式分解的结果. 关注学生能否选择适当的方法进行因式分解，能否正确地将一个整式因式分解. 因式分解需要学生有较高的观察能力、分析能力和应用能力，在评价时还要关注学生的不同思维方式，鼓励和引导学生积极思考，培养学生潜在的思维能力和创新能力.

鼓励学生观察归纳、思考探索和交流表达. 关注学生是否积极参与因式分解方法的探索过程，在因式分解的过程中是否能提出不同的解决方法，是否能用数学语言与同伴交流自己的想法，对学生主动的思维活动和数学表达都应给予积极的评价.

二、教科书分析与教学建议

12.1　因式分解的意义

本节教学目标

经历逆向思维的过程，理解因式分解和整式乘法的关系；理解因式分解的概念.

（以下分析对应课本第 55～57 页）

本课教学重点

理解因式分解的概念.

本课教学建议

（1）要重视通过整式乘法的逆向思考提出问题的过程，促进学生对因式分解概念的理解，培养学生观察归纳的能力.

（2）重视对因式分解概念的理解，关注因式分解的作用是降次，强调因式分解的原则是分解到底.

本课内容分析

在整式乘法的学习基础上，引导学生经历逆向思考的过程，引出因式分解的概念，引发学生对因式分解和整式乘法关系的思考.

根据因式的定义，非零常数都是任意整式的因式，教学中不用过分强调.

因式分解的定义强调了因式分解的作用是降次.

在学生初步认识因式分解时，通过具体的例子说明因式分解的原则，一般要分解到每个因式都不能再分解为止. 这里的不能再分解是指在规定的范围内，如果没有特殊说明，本章因式分解的结果中，各因式的系数都要求是有理数.

例 1 关注对因式分解概念的理解，要注意区别因式分解和整式乘法，因式分解的结果要以积的形式表示.

12.1 因式分解的意义

我们已经学习了整式的乘法，可以将几个整式的乘积化为一个整式. 如：

$$m(a+b+c)=ma+mb+mc;$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

反过来，有时候我们需要将一个整式化为几个整式的积.

思考

你能把下列整式化为几个整式的积吗?

(1) $ma+mb+mc=$__________;

(2) $a^2-b^2=$__________;

(3) $a^2-2ab+b^2=$__________.

几个整式相乘，其中每个整式都称为积的因式. 把含多个项的整式化为几个次数更低的整式的积，叫作把这个整式因式分解. 如：

$$x^2+x=x(x+1);$$

$$x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1).$$

其中，x、$x+1$ 是 x^2+x 的因式，x^2+1、$x+1$、$x-1$ 是 x^4-1 的因式.

因式分解一般要分解到每个因式都不能再分解为止，如在 x^4-1 因式分解的过程中，因式 x^2+1 不能继续因式分解，x^2-1 还能继续因式分解为 $(x+1)(x-1)$.

例 1 下列等式中，哪些从左到右的变形是因式分解?

(1) $(x-2)(x+3)=x^2+x-6$;

(2) $6m^3+9m=3m(2m^2+3)$;

(3) $4y^2-4y+1=(2y-1)^2$;

(4) $a^2-b^2+3=(a+b)(a-b)+3$.

分析　(1) 等式$(x-2)(x+3)=x^2+x-6$从左到右的变形是整式的乘法运算；

(2) 等式$6m^3+9m=3m(2m^2+3)$从左到右的变形可看作将$6m^3+9m$化为$3m$与$2m^2+3$的乘积，是因式分解；

(3) 等式$4y^2-4y+1=(2y-1)^2$从左到右的变形可看作将$4y^2-4y+1$化为$2y-1$与$2y-1$的乘积，是因式分解；

(4) 等式$a^2-b^2+3=(a+b)(a-b)+3$的右边不是几个整式的积，而是$(a+b)(a-b)$与3的和，不是因式分解.

解　(1) 不是.

(2) 是.

(3) 是.

(4) 不是.

思考

因式分解和整式乘法有什么关系？试举例说明.

课堂练习 12.1

1. (口答)下列等式中，哪些从左到右的变形是因式分解？

(1) $1+2x+3x^2=1+x(2+3x)$；

(2) $3x(x+y)=3x^2+3xy$；

(3) $6a^2b+3ab^2-ab=ab(6a+3b-1)$；

(4) $m^2-9n^2=(m+3n)(m-3n)$.

2. 利用整式的乘法计算下列各式：

(1) $3x(x+2)=$__________；

(2) $(5x+1)(5x-1)=$__________；

(3) $(a-4)^2=$__________；

因式分解的概念是本课的教学重点，根据教学建议和实际教学需要，可以适当补充例子，促进学生对因式分解概念的理解，但不宜过度挖掘. 例如，因式分解的研究对象是非单项式的整式，所以$\frac{1}{n^2}-1=\left(\frac{1}{n}+1\right)\left(\frac{1}{n}-1\right)$不是因式分解，$3xy=3x\cdot y$也不是因式分解；因式分解的作用是降次，所以$2x+4=2(x+2)$不是因式分解；因式分解的原则是分解到底，所以$x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)$未完成因式分解.

课堂练习 12.1

1. (1) 不是.

(2) 不是.

(3) 是.

(4) 是.

2. (1) $3x^2+6x$.

(2) $25x^2-1$.

(3) $a^2-8a+16$.

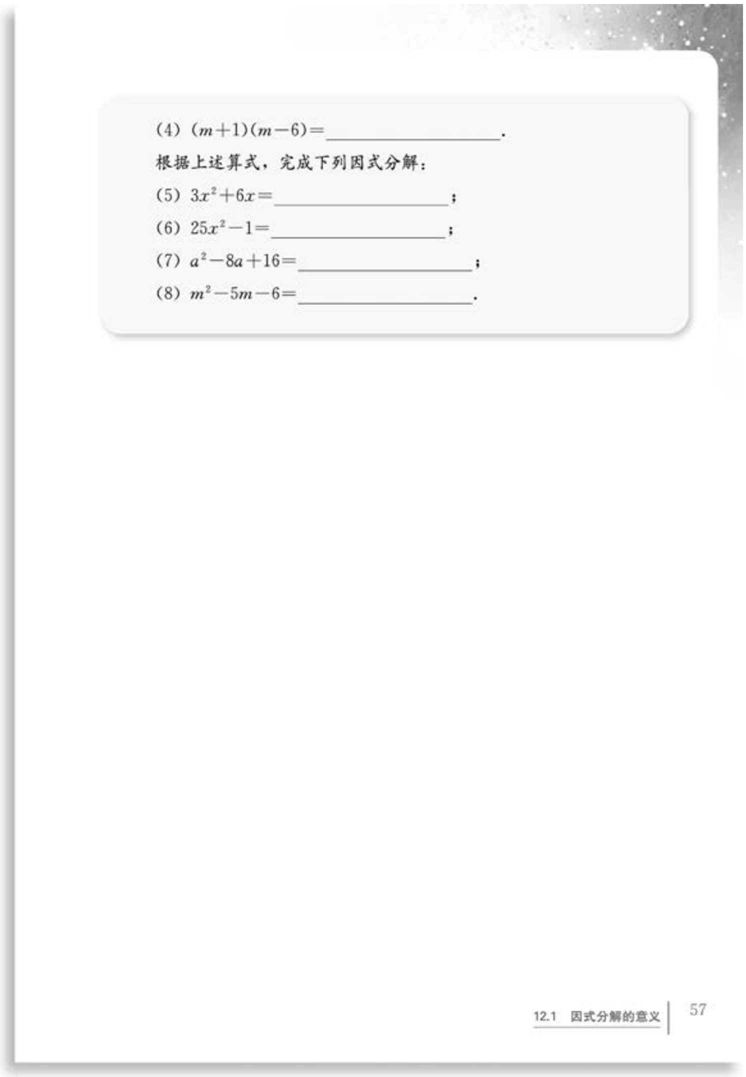
(4) m^2-5m-6.

(5) $3x(x+2)$.

(6) $(5x+1)(5x-1)$.

(7) $(a-4)^2$.

(8) $(m+1)(m-6)$.



(4) $(m+1)(m-6)=$________________.

根据上述算式，完成下列因式分解：

(5) $3x^2+6x=$________________；

(6) $25x^2-1=$________________；

(7) $a^2-8a+16=$________________；

(8) $m^2-5m-6=$________________.

12.1 因式分解的意义 57

12.2 因式分解的方法

本节教学目标

（1）能用提取公因式法进行因式分解.

（2）能用公式法进行因式分解.

（3）理解十字相乘法，能用十字相乘法将二次项系数为 1 的二次三项式因式分解.

（4）经历初步综合多种方法进行因式分解的过程，能选择合理的因式分解方法，提升运算能力.

（以下分析对应课本第 58～59 页）

本课教学重点

能用提取公因式法进行因式分解.

本课教学建议

（1）要重视提取公因式法的探索过程，体会提取公因式法和整式乘法的关系，会用整式的乘法检验提取公因式的结果.

（2）教学中不应刻意提高要求，增加难度，注意提取公因式时字母指数仅限于正整数，不考虑字母指数是字母的情况.

本课内容分析

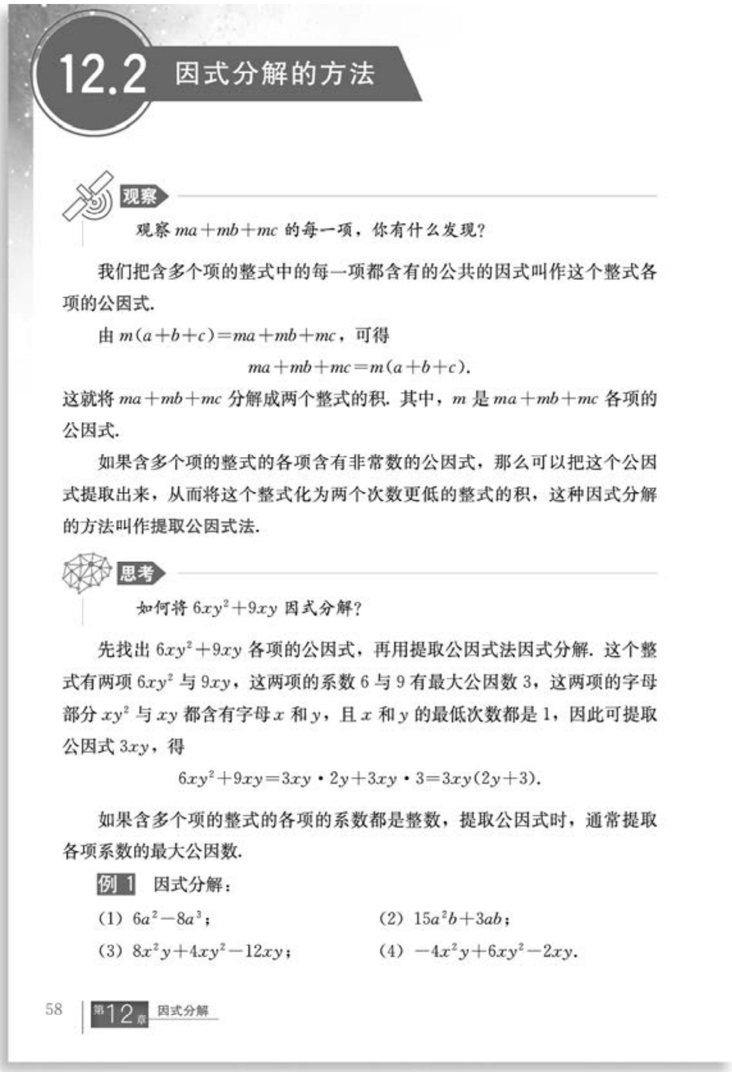
公因式的概念是学习提取公因式法的关键，要强调“公因式是整式中的每一项都含有的因式”.

提取公因式法是最基本的因式分解的方法.

尽管常数也是因式，但因式分解的作用是降次，其结果是几个次数更低的整式的积，所以提取公因式法中明确指出提取的公因式是“非常数的公因式”.

思考 要引导学生积极交流，积累确定公因式的初步经验，启发学生理解提取的公因式应是各项相同字母的最低次幂的积.

根据因式分解的定义，提取公因式时可以不提取各项系数的最大公因数，如 $6x^2y+9xy=xy(6x+9)$ 也是正确的因式分解，但习惯上我们会提取各项系数的最大公因数.


12.2 因式分解的方法

观察

观察 $ma+mb+mc$ 的每一项，你有什么发现？

我们把含多个项的整式中的每一项都含有的公共的因式叫作这个整式各项的公因式.

由 $m(a+b+c)=ma+mb+mc$，可得

$$ma+mb+mc=m(a+b+c).$$

这就将 $ma+mb+mc$ 分解成两个整式的积. 其中，m 是 $ma+mb+mc$ 各项的公因式.

如果含多个项的整式的各项含有非常数的公因式，那么可以把这个公因式提取出来，从而将这个整式化为两个次数更低的整式的积，这种因式分解的方法叫作提取公因式法.

思考

如何将 $6xy^2+9xy$ 因式分解？

先找出 $6xy^2+9xy$ 各项的公因式，再用提取公因式法因式分解. 这个整式有两项 $6xy^2$ 与 $9xy$，这两项的系数 6 与 9 有最大公因数 3，这两项的字母部分 xy^2 与 xy 都含有字母 x 和 y，且 x 和 y 的最低次数都是 1，因此可提取公因式 $3xy$，得

$$6xy^2+9xy=3xy\cdot 2y+3xy\cdot 3=3xy(2y+3).$$

如果含多个项的整式的各项的系数都是整数，提取公因式时，通常提取各项系数的最大公因数.

例 1 因式分解：

(1) $6a^2-8a^3$； (2) $15a^2b+3ab$；

(3) $8x^2y+4xy^2-12xy$； (4) $-4x^2y+6xy^2-2xy$.

58 第 12 章 因式分解

例 1 在教学时要注意规范书写，避免学生初学时出现漏项的情况，熟练以后可以直接写出结果. 可以让学生用整式的乘法检验因式分解的结果是否漏项，再次体会两者之间的关系.

解 (1) $6a^2-8a^3=2a^2\cdot 3-2a^2\cdot 4a=2a^2(3-4a)$.

(2) $15a^2b+3ab=3ab\cdot 5a+3ab\cdot 1=3ab(5a+1)$.

(3) $8x^2y+4xy^2-12xy=4xy\cdot 2x+4xy\cdot y-4xy\cdot 3$

$=4xy(2x+y-3)$.

(4) $-4x^2y+6xy^2-2xy=-(4x^2y-6xy^2+2xy)$

$=-(2xy\cdot 2x-2xy\cdot 3y+2xy\cdot 1)$

$=-2xy(2x-3y+1)$.

例 2 因式分解：

(1) $a(x+y)+b(x+y)$；

(2) $x(a-b)^2-y(b-a)^3$.

解 (1) $a(x+y)+b(x+y)$

$=(x+y)(a+b)$.

(2) $x(a-b)^2-y(b-a)^3$

$=x(a-b)^2+y(a-b)^3$

$=(a-b)^2(x+ay-by)$.

(1)中，将 $x+y$ 看作一个整体，作为公因式提取.

课堂练习 12.2(1)

1. 因式分解：

(1) $2ax^3+6a^2x^2$； (2) $3x^2y+6xy^2z-3xy$；

(3) $-5abc+10ab+15a$； (4) $27a^2bc-9ab^2c+3abc^2$.

2. 填空题：

(1) $2m(y-x)^2=(\quad)(x-y)^2$；

(2) $2m(y-x)^3=(\quad)(x-y)^3$.

3. 因式分解：

(1) $3a(m-n)-2b(m-n)$；

(2) $2(x-y)^2-(y-x)$.

例 1(2)、例 1(4)，引导学生关注最后一项，提取公因式后，不要漏掉“$+1$”. 对于例 1(4)，一般先提取负号，再提取公因式，熟练以后可以两步合并，但需要注意符号的变化.

例 2，引导学生体会公因式可以是含多个项的整式. 例 2(2)进一步解决符号问题，教学中要引导学生理解 $a-b$ 与 $b-a$，$(a-b)^2$ 与 $(b-a)^2$ 的关系，根据学情可以进一步引发学生对 $(a-b)^n$ 与 $(b-a)^n$（n 为正整数）关系的思考. 例 2(2)也可以将 $(a-b)^2$ 转化为 $(b-a)^2$，教学时可以让学生体会因式分解的不同路径和结果的不同形式.

课堂练习 12.2(1)

1. (1) $2ax^2(x+3a)$.

(2) $3xy(x+2yz-1)$.

(3) $-5a(bc-2b-3)$.

(4) $3abc(9a-3b+c)$.

2. (1) $2m$.

(2) $-2m$.

3. (1) $(m-n)(3a-2b)$.

(2) $(y-x)(2y-2x-1)$.

（以下分析对应课本第 60～61 页）

本课教学重点

能用平方差公式进行因式分解.

本课教学建议

（1）要重视用平方差公式进行因式分解的探索过程，体会平方差公式在因式分解中的作用，进一步理解因式分解和整式乘法的关系.

（2）要重视对一个整式是否符合平方差公式特征的分析，促进学生用平方差公式进行因式分解能力的形成.

（3）教学中不应刻意提高要求，增加难度. 注意用平方差公式因式分解时直接利用公式不超过二次，指数为正整数.

观察

a^2-b^2 有什么特征？

由平方差公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，可得

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

这就将 a^2-b^2 分解成两个整式的积.

平方差公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 从左到右的变形是整式的乘法，从右到左的变形是因式分解. 如果一个整式符合平方差公式的特征，那么就可以用平方差公式把它因式分解.

例 3 因式分解：

(1) $1-9x^2$；

(2) $-4x^2+y^2$；

(3) $\frac{9}{16}a^2-b^2$；

(4) $(a+b)^2-(a+c)^2$.

解 (1) $1-9x^2$

$=1-(3x)^2$

$=(1+3x)(1-3x)$.

(2) $-4x^2+y^2$

$=y^2-(2x)^2$

$=(y+2x)(y-2x)$.

(3) $\frac{9}{16}a^2-b^2$

$=\left(\frac{3}{4}a\right)^2-b^2$

$=\left(\frac{3}{4}a+b\right)\left(\frac{3}{4}a-b\right)$.

(4) $(a+b)^2-(a+c)^2$

$=[(a+b)+(a+c)][(a+b)-(a+c)]$

60 第12章 因式分解

本课内容分析

用平方差公式因式分解的关键在于把握公式的特征，把一个整式看成两个数或式的平方差.

例 3 直接利用平方差公式因式分解，四个问题循序渐进，注意让学生体会公式中的“a”“b”不仅可以表示具体的数，还可以抽象地表示一个整式.

例 3(4)，平方差公式中的“a”“b”都表示一个二项式，分解后的两个因式需要化简整理.

教学中可以让学生用整式的乘法检验因式分解的结果.

例 4 引导学生体会因式分解的基本思路：观察整式，如果各项含有公因式，先提取公因式，再考虑是否能用其他方法因式分解，直至每个因式都不能再分解为止.

课堂练习 12.2(2)

1.（1）不能.（理由略）

（2）能.（理由略）

（3）能.（理由略）

（4）不能.（理由略）

2.（1）$(x+4)(x-4)$.

（2）$\left(x+\dfrac{2}{5}y\right)\left(x-\dfrac{2}{5}y\right)$.

（3）$9a^2(b+3)(b-3)$.

（4）$(a+b)(a-b)^2$.

3.（1）$\pi R^2-\pi r^2$.

（2）$\pi R^2-\pi r^2=\pi(R^2-r^2)=\pi(R+r)(R-r)=87.92$.

$=(2a+b+c)(b-c)$.

例 4 因式分解：

(1) $3x^3-12x$；

(2) x^4-81.

解 (1) $3x^3-12x$

$=3x(x^2-4)$

$=3x(x+2)(x-2)$.

(2) x^4-81

$=(x^2)^2-9^2$

$=(x^2+9)(x^2-9)$

$=(x^2+9)(x+3)(x-3)$.

当整式的各项含有公因式时，通常先提取公因式，然后再考虑是否能进一步因式分解.

因式分解要分解到每个因式都不能再分解为止. 如 x^2-9 还能分解为 $(x+3)(x-3)$.

课堂练习 12.2(2)

1.（口答）下列整式能用平方差公式因式分解吗？为什么？

(1) $4+a^2$； (2) $4-a^2$；

(3) $-4+a^2$； (4) $-4-a^2$.

2. 因式分解：

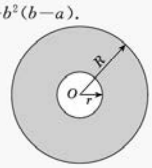
(1) x^2-16； (2) $x^2-\dfrac{4}{25}y^2$；

(3) $9a^2b^2-81a^2$； (4) $a^2(a-b)+b^2(b-a)$.

3. 如图，大小两圆的圆心相同，已知它们的半径分别为 R 和 r.

(1) 用含 R 和 r 的代数式表示圆环的面积；

(2) 如果 $R=5.5$，$r=1.5$，求圆环的面积（π 取 3.14).



（第 3 题）

（以下分析对应课本第 62～64 页）

本课教学重点

能用完全平方公式进行因式分解.

本课教学建议

（1）对比研究平方差公式进行因式分解的方法，引导学生探索如何用完全平方公式进行因式分解.

（2）要重视对一个整式是否符合完全平方公式特征的分析，促进学生用完全平方公式进行因式分解能力的形成.

（3）引导学生体会将一个整式抽象成公式中的字母“a”或“b”的过程. 注意控制难度，公式中的字母表示一个整式时，这个整式不超过两项；因式分解时直接利用公式不超过二次，指数为正整数.

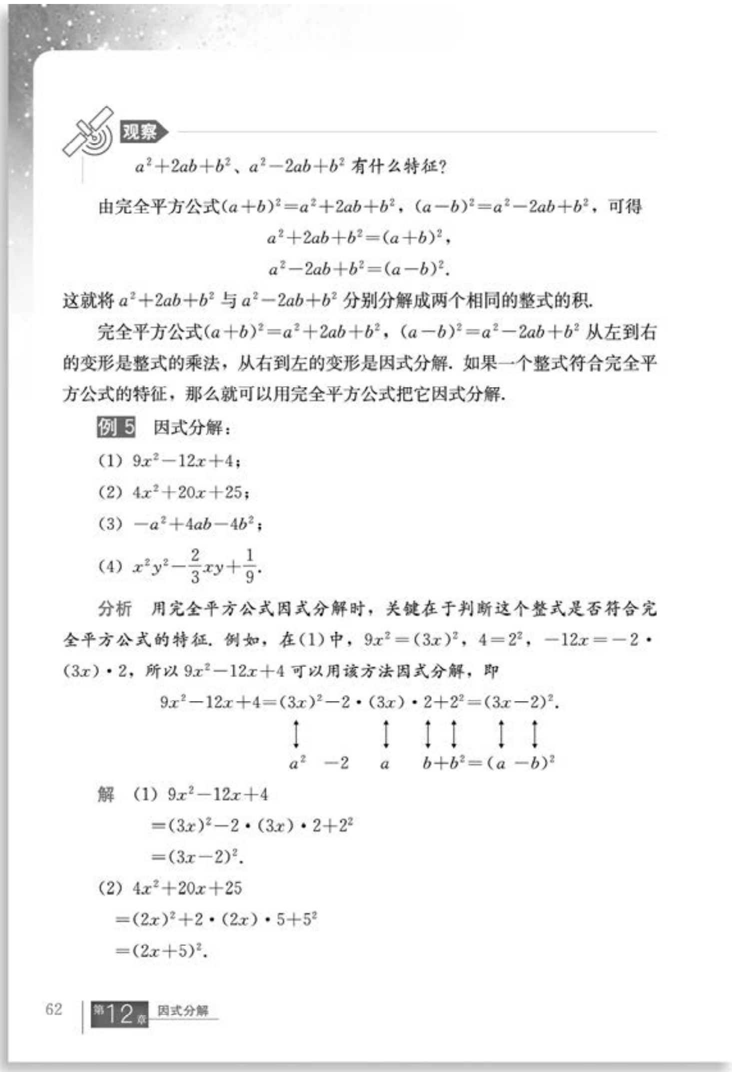
本课内容分析

用完全平方公式因式分解的关键在于把握公式的特征，把一个整式看成两个数或式的平方和，加上(或减去)它们的积的两倍.

例 5(1)、例 5(2)、例 5(4) 直接利用完全平方公式因式分解，例 5(3)提取负号后，即可以用完全平方公式因式分解.

注意让学生体会公式中的“a”“b”分别是什么，不仅可以表示具体的数，还可以抽象地表示一个整式.

教学中同样可以让学生用整式的乘法检验因式分解的结果.



观察

$a^2+2ab+b^2$、$a^2-2ab+b^2$ 有什么特征？

由完全平方公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，可得

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

这就将 $a^2+2ab+b^2$ 与 $a^2-2ab+b^2$ 分别分解成两个相同的整式的积.

完全平方公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 从左到右的变形是整式的乘法，从右到左的变形是因式分解. 如果一个整式符合完全平方公式的特征，那么就可以用完全平方公式把它因式分解.

例 5 因式分解：

(1) $9x^2-12x+4$；

(2) $4x^2+20x+25$；

(3) $-a^2+4ab-4b^2$；

(4) $x^2y^2-\frac{2}{3}xy+\frac{1}{9}$.

分析 用完全平方公式因式分解时，关键在于判断这个整式是否符合完全平方公式的特征. 例如，在(1)中，$9x^2=(3x)^2$，$4=2^2$，$-12x=-2\cdot(3x)\cdot 2$，所以 $9x^2-12x+4$ 可以用该方法因式分解，即

$$9x^2-12x+4=(3x)^2-2\cdot(3x)\cdot 2+2^2=(3x-2)^2.$$
$$a^2 \quad -2 \quad a \quad b+b^2=(a\ -b)^2$$

解 (1) $9x^2-12x+4$

$=(3x)^2-2\cdot(3x)\cdot 2+2^2$

$=(3x-2)^2$.

(2) $4x^2+20x+25$

$=(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot 5+5^2$

$=(2x+5)^2$.

62 第12章 因式分解

(3) $-a^2+4ab-4b^2$

$=-(a^2-4ab+4b^2)$

$=-[a^2-2\cdot a\cdot(2b)+(2b)^2]$

$=-(a-2b)^2$.

(4) $x^2y^2-\frac{2}{3}xy+\frac{1}{9}$

$=(xy)^2-2\cdot(xy)\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$=\left(xy-\frac{1}{3}\right)^2$.

例 6 因式分解：

(1) $2ax^2-12axy+18ay^2$；

(2) $(x+y)^2+8(x+y)+16$.

解 (1) $2ax^2-12axy+18ay^2$

$=2a(x^2-6xy+9y^2)$

$=2a(x-3y)^2$.

(2) $(x+y)^2+8(x+y)+16$

$=(x+y)^2+2\cdot(x+y)\cdot4+4^2$

$=(x+y+4)^2$.

根据因式分解和整式乘法的关系，可以用平方差公式和完全平方公式将具有特殊形式的整式因式分解. 像这样，根据常用的乘法公式将整式因式分解的方法叫作公式法.

课堂练习 12.2(3)

1. (口答)下列整式能用完全平方公式因式分解吗？为什么？

(1) $a^2+4a+16$； (2) $4x^2+4x-1$；

(3) $9b^2-24b+16$； (4) $-x^2-10x-25$.

例 6，引导学生养成观察分析的思维习惯. 例 6(1)让学生先通过观察发现公因式，提取公因式，再考虑是否需要作进一步的分解. 例 6(2)中把二项式 $x+y$ 抽象成完全平方公式中的“a”，然后利用公式法进行因式分解.

用公式法进行因式分解时，常将 x^2、xy、$x+y$ 等整式抽象地看作公式中的“a”或“b”，此类例题分别设计在例 4(2)、例 5(4)、例 6(2)，教学时可以根据需要适当补充，让学生进一步体会将一个整式抽象成公式中的字母“a”或“b”的过程.

课堂练习 12.2(3)

1. (1) 不能.(理由略)

(2) 不能.(理由略)

(3) 能.(理由略)

(4) 能.(理由略)

2. (1) $(2a+3)^2$.

(2) $\left(m+\frac{1}{2}\right)^2$.

(3) $(x-8y)^2$.

(4) $-(mn-4)^2$.

3. (1) $8a(x+a)^2$.

(2) $(2x-y-5)^2$.

（以下分析对应课本第 64～67 页）

本课教学重点

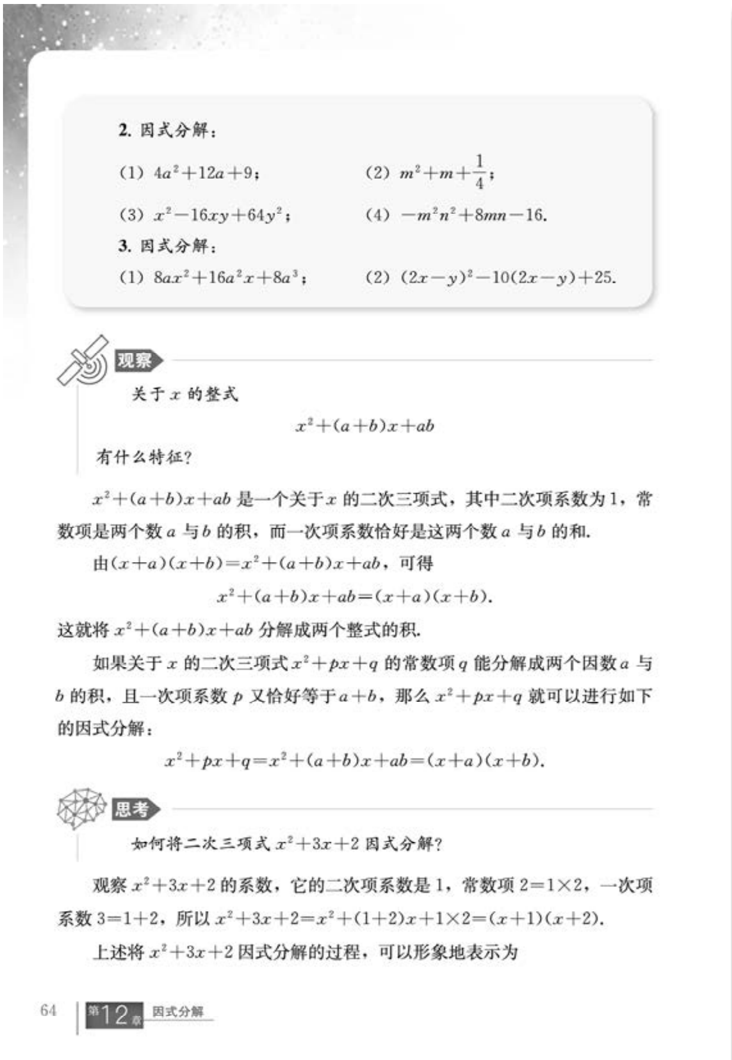
理解十字相乘法，能用十字相乘法将二次项系数为 1 的二次三项式因式分解.

本课教学建议

（1）十字相乘法的概念比较抽象，教学中要重视对问题“如何将二次三项式 x^2+3x+2 因式分解”的思考，引导学生经历从具体的实例概括出十字相乘法的过程，促进学生对十字相乘法的理解.

（2）在初学十字相乘法时，要引导学生充分经历将常数项分解因数，而后判断两因数的和是否正好等于一次项系数的“凑数”过程. 要鼓励尝试，允许失败，通过不断调整，积累经验，提高学生用十字相乘法进行因式分解的能力.

（3）注意控制教学内容和难度，十字相乘法仅限于二次项系数为 1 的二次三项式的因式分解.



2. 因式分解：

(1) $4a^2+12a+9$；　(2) $m^2+m+\frac{1}{4}$；

(3) $x^2-16xy+64y^2$；　(4) $-m^2n^2+8mn-16$.

3. 因式分解：

(1) $8ax^2+16a^2x+8a^3$；　(2) $(2x-y)^2-10(2x-y)+25$.

观察

关于 x 的整式

$$x^2+(a+b)x+ab$$

有什么特征？

$x^2+(a+b)x+ab$ 是一个关于 x 的二次三项式，其中二次项系数为 1，常数项是两个数 a 与 b 的积，而一次项系数恰好是这两个数 a 与 b 的和.

由 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$，可得

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b).$$

这就将 $x^2+(a+b)x+ab$ 分解成两个整式的积.

如果关于 x 的二次三项式 x^2+px+q 的常数项 q 能分解成两个因数 a 与 b 的积，且一次项系数 p 又恰好等于 $a+b$，那么 x^2+px+q 就可以进行如下的因式分解：

$$x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b).$$

思考

如何将二次三项式 x^2+3x+2 因式分解？

观察 x^2+3x+2 的系数，它的二次项系数是 1，常数项 $2=1\times2$，一次项系数 $3=1+2$，所以 $x^2+3x+2=x^2+(1+2)x+1\times2=(x+1)(x+2)$.

上述将 x^2+3x+2 因式分解的过程，可以形象地表示为

64　第12章　因式分解

本课内容分析

十字相乘法是整式乘法 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ 的逆向过程.

十字相乘法的过程用文字语言表述比较抽象，教学时注意引导学生结合符号表达进行理解.

重视对具体的二次三项式 x^2+3x+2 的分析过程，鼓励学生积极尝试.

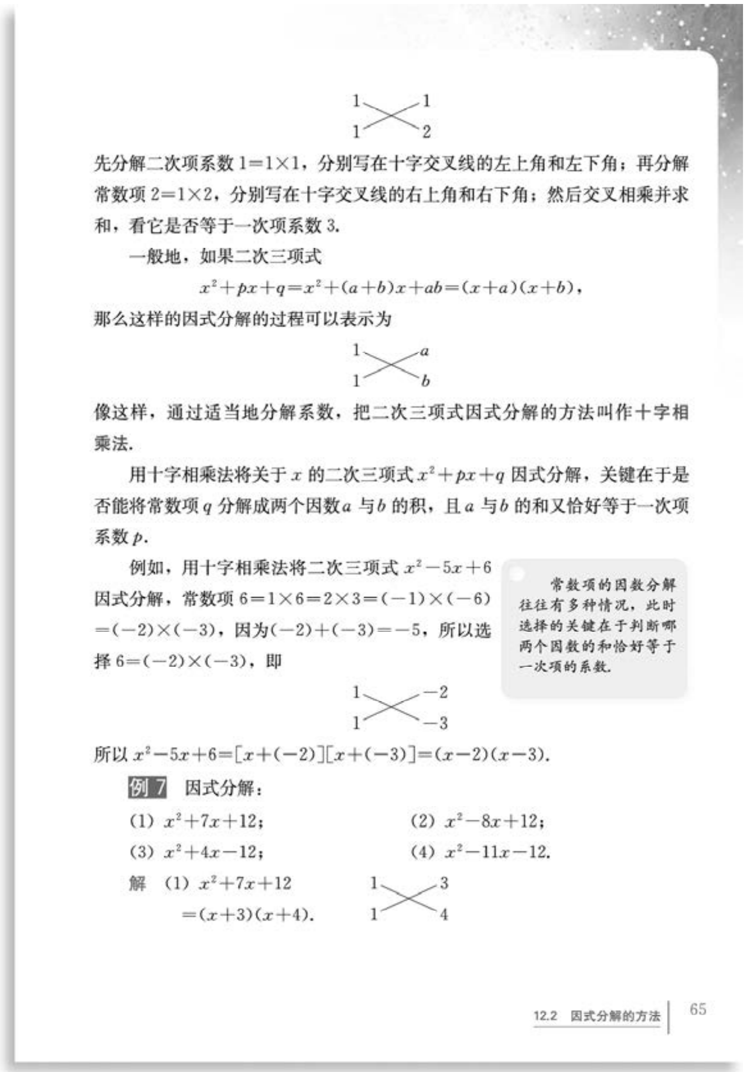
提取公因式法是因式分解最基本的方法. 事实上，如果将整式 $x^2+(a+b)x+ab$ 展开，即得 $x^2+ax+bx+ab$，我们知道，$x^2+ax+bx+ab=(x^2+ax)+(bx+ab)=x(x+a)+b(x+a)=(x+a)(x+b)$，于是十字相乘法也可归结为提取公因式法. 此外，用完全平方公式进行因式分解可视为十字相乘法的特殊情况，平方差公式 a^2-b^2 可以化为 $a^2+ab-ab-b^2$，从这个角度看，公式法也可归结为提取公因式法.

尝试成功后，引导学生经历将因式分解的过程形象地表示为十字交叉线的过程.

在具体实例的基础上理解十字相乘法，注意仅限于二次项系数为 1 的二次三项式.

引导学生提炼用十字相乘法进行因式分解的关键，并以 x^2-5x+6 为例，展现将常数项因数分解以及如何进行选择的过程，帮助学生建立十字相乘法因式分解的直观经验.

例 7(1)、例 7(2)的常数项都是 12，例 7(3)、例 7(4)的常数项都是 -12，在充分尝试的基础上，可以引导学生体会常数项的符号对“凑数”的影响，鼓励学生积极思考，大胆表达.



$$\begin{array}{ccc}1 & & 1\\ & \times & \\ 1 & & 2\end{array}$$

先分解二次项系数 $1=1\times1$，分别写在十字交叉线的左上角和左下角；再分解常数项 $2=1\times2$，分别写在十字交叉线的右上角和右下角；然后交叉相乘并求和，看它是否等于一次项系数 3.

一般地，如果二次三项式

$$x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b),$$

那么这样的因式分解的过程可以表示为

$$\begin{array}{ccc}1 & & a\\ & \times & \\ 1 & & b\end{array}$$

像这样，通过适当地分解系数，把二次三项式因式分解的方法叫作十字相乘法.

用十字相乘法将关于 x 的二次三项式 x^2+px+q 因式分解，关键在于是否能将常数项 q 分解成两个因数 a 与 b 的积，且 a 与 b 的和又恰好等于一次项系数 p.

例如，用十字相乘法将二次三项式 x^2-5x+6 因式分解，常数项 $6=1\times6=2\times3=(-1)\times(-6)=(-2)\times(-3)$，因为 $(-2)+(-3)=-5$，所以选择 $6=(-2)\times(-3)$，即

常数项的因数分解往往有多种情况，此时选择的关键在于判断哪两个因数的和恰好等于一次项的系数.

$$\begin{array}{ccc}1 & & -2\\ & \times & \\ 1 & & -3\end{array}$$

所以 $x^2-5x+6=[x+(-2)][x+(-3)]=(x-2)(x-3)$.

例 7 因式分解：

(1) $x^2+7x+12$；(2) $x^2-8x+12$；

(3) $x^2+4x-12$；(4) $x^2-11x-12$.

解 (1) $x^2+7x+12$
$=(x+3)(x+4)$.

$$\begin{array}{ccc}1 & & 3\\ & \times & \\ 1 & & 4\end{array}$$

12.2 因式分解的方法 65

注意用十字相乘法对二次项系数为 1 的二次三项式进行因式分解时，a 与 b 的位置可以互换. 在学生积累了一定的十字相乘法运用经验后，可以作为结论提出，并请学生说明理由.

(2) $x^2-8x+12$

$=(x-6)(x-2)$.

$$\begin{array}{ccc}1 & \times & -6\\ 1 & & -2\end{array}$$

(3) $x^2+4x-12$

$=(x-2)(x+6)$.

$$\begin{array}{ccc}1 & \times & -2\\ 1 & & 6\end{array}$$

(4) $x^2-11x-12$

$=(x+1)(x-12)$.

$$\begin{array}{ccc}1 & \times & 1\\ 1 & & -12\end{array}$$

思考

如何将 $x^2+7xy+12y^2$ 因式分解？

类比二次三项式 $x^2+7x+12$ 的因式分解，同样考虑十字相乘法．将 $x^2+7xy+12y^2$ 看作关于 x 的二次三项式，它的二次项系数是 1，常数项 $12y^2=3y\cdot 4y$，一次项系数 $7y=3y+4y$．于是有

$$\begin{array}{ccc}1 & \times & 3y\\ 1 & & 4y\end{array}$$

因此 $x^2+7xy+12y^2=(x+3y)(x+4y)$．

例 8 因式分解：

(1) $x^2+6xy+8y^2$；　　(2) $x^2+5xy-6y^2$．

解 (1) $x^2+6xy+8y^2$

$=(x+2y)(x+4y)$．

$$\begin{array}{ccc}1 & \times & 2y\\ 1 & & 4y\end{array}$$

(2) $x^2+5xy-6y^2$

$=(x-y)(x+6y)$．

$$\begin{array}{ccc}1 & \times & -y\\ 1 & & 6y\end{array}$$

课堂练习 12.2(4)

1. 因式分解：

(1) x^2+3x-4；　　(2) $x^2-5x-24$；

(3) $x^2+12x+27$；　　(4) $x^2-9x+14$．

66 第12章 因式分解

十字相乘法尝试成功后，要注意表达规范.

事实上，例 7(1)中的 $x^2+7x+12$ 就是 $x^2+7xy+12y^2$ 当 $y=1$ 时的情形.

课堂练习 12.2(4)

1. (1) $(x+4)(x-1)$.

(2) $(x-8)(x+3)$.

(3) $(x+3)(x+9)$.

(4) $(x-2)(x-7)$.

2. (1) $(x+3y)(x-2y)$.

(2) $(x-5y)(x+2y)$.

（以下分析对应课本第 67～69 页）

本课教学重点

能初步综合多种方法进行因式分解.

本课教学建议

（1）本课时内容作为因式分解多种方法的初步综合，教学时要注意引导学生养成观察整式的特征的思维习惯，选择合理的方法进行因式分解，发展学生的分析能力和应用能力.

（2）因式分解的过程中，分组是手段，目的在于发现公因式或者利用公式. 在教学中要注重学生对分组的关键的理解，鼓励学生尝试不同的分组方式，体会因式分解的不同方法.

（3）本课时意在通过将含有四项的整式进行因式分解，体会因式分解方法的初步综合，教学中不应刻意提高要求，增加难度.

2. 因式分解：

(1) $x^2+xy-6y^2$；　　(2) $x^2-3xy-10y^2$.

思考

如何将 $ax+ay+bx+by$ 因式分解？

观察 $ax+ay+bx+by$ 的特征，它的前两项、后两项分别有公因式 a 与 b，如果把它的项分成 $ax+ay$ 与 $bx+by$ 两组，从前一组中提取公因式 a，从后一组中提取公因式 b，那么得到的另一个因式都是 $x+y$，就可以继续提取公因式把这个整式因式分解，即

$$\begin{aligned}&ax+ay+bx+by\\=&(ax+ay)+(bx+by)\\=&a(x+y)+b(x+y)\\=&(x+y)(a+b).\end{aligned}$$

观察 $ax+ay+bx+by$ 的特征，你还有其他的分组方法因式分解吗？

例 9 因式分解：

(1) $ab-ac+b-c$；

(2) $3x^2y+6xy-4x-8$.

解 (1) $ab-ac+b-c$

$=(ab-ac)+(b-c)$

$=a(b-c)+(b-c)$

$=(a+1)(b-c)$.

(2) $3x^2y+6xy-4x-8$

$=(3x^2y+6xy)-(4x+8)$

$=3xy(x+2)-4(x+2)$

$=(3xy-4)(x+2)$.

本课内容分析

引导学生以因式分解为目的，观察整式的特征.

思考 前两项与后两项分组后，有公因式 $x+y$，可以继续用提取公因式法因式分解. 引导学生初步体会分组的关键是分组后能继续因式分解.

例 9 通过适当的两两分组进行因式分解，是提取公因式法的运用.

教学中要鼓励学生尝试不同的分组方法.

思考 前三项与最后一项分组后，可以利用公式法因式分解. 重视引导学生理解分组的关键是分组后能继续因式分解.

例 10 通过适当的分组因式分解，是提取公因式法和公式法的初步综合.

讨论

还有其他的分组方法可以对例 9 中的整式因式分解吗？如果有，那么因式分解的结果是否相同？

思考

如何将 $a^2+2ab+b^2-1$ 因式分解？

观察 $a^2+2ab+b^2-1$ 的特征，它的前面三项符合完全平方公式的特征，即 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，如果把它的项分成 $a^2+2ab+b^2$ 与 -1 两组，就可以继续用公式法因式分解，即

$$\begin{aligned}&a^2+2ab+b^2-1\\=&(a^2+2ab+b^2)-1\\=&(a+b)^2-1^2\\=&(a+b+1)(a+b-1).\end{aligned}$$

例 10 因式分解：

(1) $x^2-4xy+4y^2-4$； (2) $9a^2-3a+b-b^2$.

分析 $x^2-4xy+4y^2-4$ 的前面三项符合完全平方公式的特征，分组后可以用公式法因式分解；将 $9a^2-3a+b-b^2$ 的第一项与第四项分为一组，第二项与第三项分为一组，第一组用公式法因式分解后与第二组有公因式 $3a-b$，可以用提取公因式法因式分解.

解 (1) $x^2-4xy+4y^2-4$

$=(x^2-4xy+4y^2)-4$

$=(x-2y)^2-4$

$=(x-2y+2)(x-2y-2)$.

(2) $9a^2-3a+b-b^2$

$=(9a^2-b^2)-(3a-b)$

$=(3a+b)(3a-b)-(3a-b)$

$=(3a-b)(3a+b-1)$.

68 第12章 因式分解

观察整式的特征，通过适当分组，我们可以将某些整式因式分解.

课堂练习 12.2(5)

1. 因式分解：

(1) $a^2-ab-2a+2b$；　　(2) $3a-9b+2ac-6bc$；

(3) $x^2+3y-xy-3x$；　　(4) $x^3+2x^2y-9x-18y$.

2. 因式分解：

(1) $x^2+4y^2-1-4xy$；　　(2) $a^2-b^2-c^2+2bc$；

(3) $x^2-2x+6y-9y^2$；　　(4) a^2+2a-b^2-2b.

习题 12.1—12.2

A

1. 下列从左到右的等式变形是不是因式分解？如果不是，请说明理由.

(1) $a^2-2a+1=a(a-2)+1$；　　(2) $(x-1)(x+6)=x^2+5x-6$；

(3) $x^3-x=x(x+1)(x-1)$；　　(4) $m+4=m\left(1+\frac{4}{m}\right)$.

2. 已知整式 x^2-5x+a 因式分解的结果是 $(x+b)^2$，求 a、b 的值.

3. 因式分解：

(1) $12x^3yz-30xy^2$；

(2) $-4a^2b+6ab^2-2ab$；

(3) $15p(p+q)-10q(p+q)$；

(4) $(m-n)(p-q)-(n-m)^2(q-p)$.

4. 因式分解：

(1) $1-25a^2$；　　(2) $(x+y)^2-4(x-y)^2$；

(3) $a^2-16a+64$；　　(4) $4x^2+20x+25$.

12.2 因式分解的方法　69

课堂练习 12.2(5)

1. (1) $(a-b)(a-2)$.

(2) $(a-3b)(2c+3)$.

(3) $(x-y)(x-3)$.

(4) $(x+2y)(x+3)(x-3)$.

2. (1) $(x-2y+1)(x-2y-1)$.

(2) $(a+b-c)(a-b+c)$.

(3) $(x-3y)(x+3y-2)$.

(4) $(a-b)(a+b+2)$.

习题 12.1—12.2

1. (1) 不是，等式的右边不是整式的积.

(2) 不是，等式从左到右的变形是整式的乘法.

(3) 是.

(4) 不是，等式的右边 $1+\frac{4}{m}$ 不是整式.

2. $a=\frac{25}{4}$，$b=-\frac{5}{2}$.

3. (1) $6xy(2x^2z-5y)$.

(2) $-2ab(2a-3b+1)$.

(3) $5(p+q)(3p-2q)$.

(4) $(m-n)(p-q)(1+m-n)$.

4. (1) $(1+5a)(1-5a)$.

(2) $(3x-y)(3y-x)$.

(3) $(a-8)^2$.

(4) $(2x+5)^2$.

5. (1) $(x-6)(x-9)$.

(2) $(a+4)(a+8)$.

(3) $(x+2)(x^2-2)$.

(4) $(1+a+b)(1-a-b)$.

6. $a^2+ac-ab-bc$

$=a(a+c)-b(a+c)$

$=(a+c)(a-b)$.

由 $a-b=2$，$b+c=-5$，得 $a+c=-3$.

所以 $a^2+ac-ab-bc=-3\times2=-6$.

7. (1) $-(x-y)^2$.

(2) $(x+y)^2(x-y)^2$.

(3) $(a-b)(a+b)^2$.

(4) $(x-3)^2(x+1)^2$.

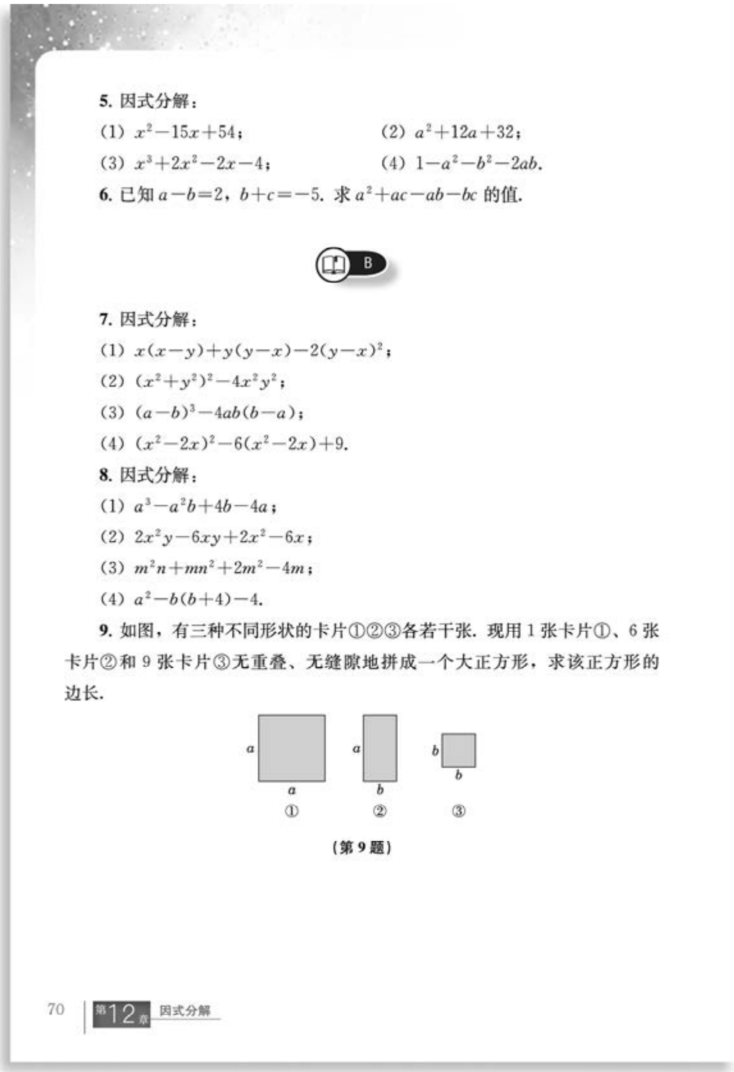
8. (1) $(a-b)(a+2)\cdot(a-2)$.

(2) $2x(x-3)(y+1)$.

(3) $m(n+2)(m+n-2)$.

(4) $(a+b+2)(a-b-2)$.

9. $a^2+6ab+9b^2=(a+3b)^2$，所以拼成的大正方形的边长为 $a+3b$.



5. 因式分解：

(1) $x^2-15x+54$；　　(2) $a^2+12a+32$；

(3) x^3+2x^2-2x-4；　　(4) $1-a^2-b^2-2ab$.

6. 已知 $a-b=2$，$b+c=-5$. 求 $a^2+ac-ab-bc$ 的值.

B

7. 因式分解：

(1) $x(x-y)+y(y-x)-2(y-x)^2$；

(2) $(x^2+y^2)^2-4x^2y^2$；

(3) $(a-b)^3-4ab(b-a)$；

(4) $(x^2-2x)^2-6(x^2-2x)+9$.

8. 因式分解：

(1) $a^3-a^2b+4b-4a$；

(2) $2x^2y-6xy+2x^2-6x$；

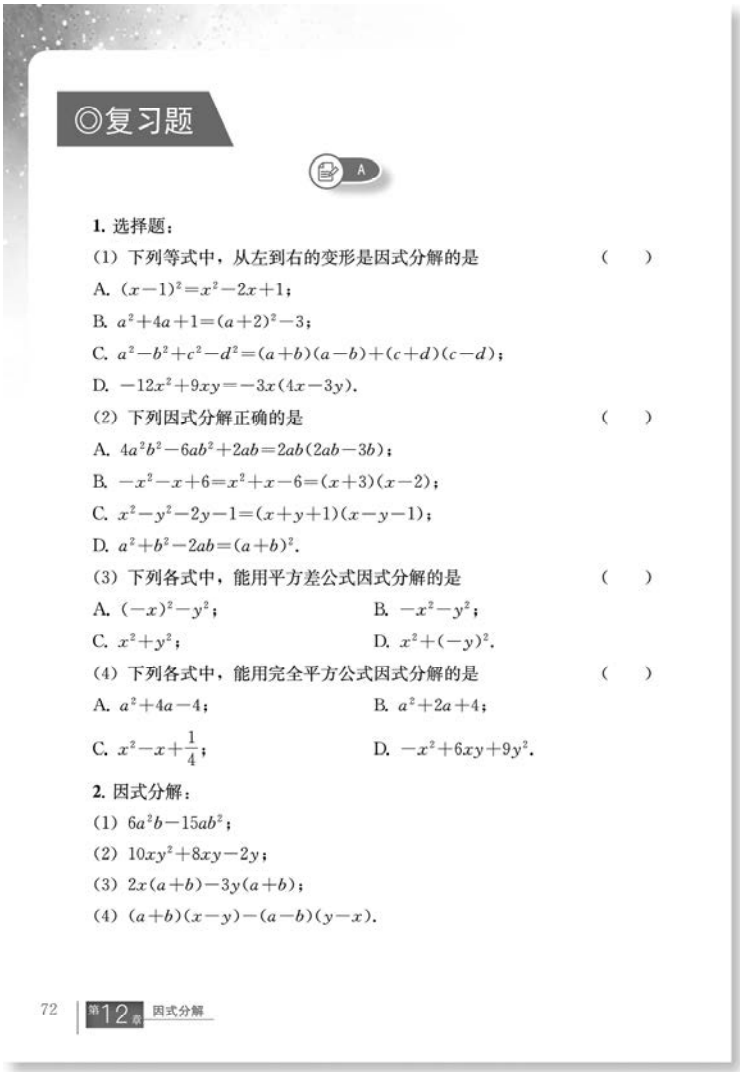
(3) $m^2n+mn^2+2m^2-4m$；

(4) $a^2-b(b+4)-4$.

9. 如图，有三种不同形状的卡片①②③各若干张. 现用 1 张卡片①、6 张卡片②和 9 张卡片③无重叠、无缝隙地拼成一个大正方形，求该正方形的边长.

（第 9 题）

70 第12章 因式分解



◎复习题

A

1. 选择题：

（1）下列等式中，从左到右的变形是因式分解的是　（　）

A. $(x-1)^2=x^2-2x+1$；

B. $a^2+4a+1=(a+2)^2-3$；

C. $a^2-b^2+c^2-d^2=(a+b)(a-b)+(c+d)(c-d)$；

D. $-12x^2+9xy=-3x(4x-3y)$.

（2）下列因式分解正确的是　（　）

A. $4a^2b^2-6ab^2+2ab=2ab(2ab-3b)$；

B. $-x^2-x+6=x^2+x-6=(x+3)(x-2)$；

C. $x^2-y^2-2y-1=(x+y+1)(x-y-1)$；

D. $a^2+b^2-2ab=(a+b)^2$.

（3）下列各式中，能用平方差公式因式分解的是　（　）

A. $(-x)^2-y^2$；　　B. $-x^2-y^2$；

C. x^2+y^2；　　D. $x^2+(-y)^2$.

（4）下列各式中，能用完全平方公式因式分解的是　（　）

A. a^2+4a-4；　　B. a^2+2a+4；

C. $x^2-x+\frac{1}{4}$；　　D. $-x^2+6xy+9y^2$.

2. 因式分解：

（1）$6a^2b-15ab^2$；

（2）$10xy^2+8xy-2y$；

（3）$2x(a+b)-3y(a+b)$；

（4）$(a+b)(x-y)-(a-b)(y-x)$.

72　第12章　因式分解

复习题

1.（1）D.

（2）C.

（3）A.

（4）C.

2.（1）$3ab(2a-5b)$.

（2）$2y(5xy+4x-1)$.

（3）$(a+b)(2x-3y)$.

（4）$2a(x-y)$.

3. (1) $(5x+4y)(5x-4y)$.

(2) $(2a-3)^2$.

(3) $n(4n+3m)(4n-3m)$.

(4) $(x-y-t)^2$.

4. (1) $(x-2)(x-9)$.

(2) $(x-y)(x-9y)$.

(3) $(x-y)(x-z)$.

(4) $(a+2b-c)(a-2b+c)$.

5. (1) $S=a^2-4b^2$.

(2) $S=a^2-4b^2=(a+2b)(a-2b)$.

当 $a=15.2$，$b=2.6$ 时，

$S=(15.2+2\times2.6)\times(15.2-2\times2.6)=20.4\times10=204(\text{m}^2)$.

6. (1) 5；-3.

(2) 7.

(3) $\frac{1}{2}$.

7. (1) $-(x-1)^2(x+1)$.

(2) $(x+2y)(x+3)(x-3)$.

3. 因式分解：

(1) $25x^2-16y^2$；

(2) $4a^2-12a+9$；

(3) $16n^3-9m^2n$；

(4) $(x-y)^2-2t(x-y)+t^2$.

4. 因式分解：

(1) $x^2-11x+18$；

(2) $x^2-10xy+9y^2$；

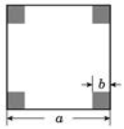
(3) $x^2-xy+yz-xz$；

(4) $a^2-4b^2-c^2+4bc$.

5. 如图，在一块边长为 a m 的正方形空地的四角各留出一块边长为 b m$\left(b<\frac{a}{2}\right)$的正方形，用来修建花坛，其余地方均为草坪.

(1) 用含 a、b 的代数式表示草坪的面积 S；

(2) 当 $a=15.2$，$b=2.6$ 时，利用因式分解计算此时草坪的面积.



(第 5 题)

B

6. 填空题：

(1) 如果 $2x^2+px+q$ 因式分解的结果为 $(x+3)(2x-1)$，那么 $p=$______，$q=$______；

(2) 如果 $x-3y=5$，$x^2-9y^2=35$，那么 $x+3y=$______；

(3) 如果 $a+b=-1$，那么 $\frac{1}{2}a^2+ab+\frac{1}{2}b^2$ 的值为______.

7. 因式分解：

(1) $x-1+x^2(1-x)$；

(2) $x^3+2x^2y-9x-18y$；

复习题 73

(3) $(x^2+5x)^2+5(x^2+5x)-6$；

(4) $(x-y)^2-2(x-y)-a^2+1$.

8. (1) 如果关于 x 的整式 x^2+px+6 可以因式分解为 $(x+a)(x+b)$，其中 a、b 均为整数，那么满足条件的 p 的值有多少个？为什么？

(2) 如果关于 x 的整式 x^2+6x+q 可以因式分解为 $(x+c)(x+d)$，其中 c、d 均为整数，那么满足条件的 q 的值有多少个？为什么？

74 第12章 因式分解

(3) $(x+2)(x+3)(x^2+5x-1)$.

(4) $(x-y-1+a)(x-y-1-a)$.

8. (1) 因为满足 $ab=6$ 的整数 a、b 有 8 组，分别是

$\begin{cases}a=1,\\ b=6,\end{cases}$ $\begin{cases}a=6,\\ b=1,\end{cases}$

$\begin{cases}a=2,\\ b=3,\end{cases}$ $\begin{cases}a=3,\\ b=2,\end{cases}$

$\begin{cases}a=-1,\\ b=-6,\end{cases}$ $\begin{cases}a=-6,\\ b=-1,\end{cases}$

$\begin{cases}a=-2,\\ b=-3,\end{cases}$ $\begin{cases}a=-3,\\ b=-2.\end{cases}$

因为 $p=a+b$，所以满足条件的 p 的值有 4 个，分别是 7，5，-7，-5.

(2) 因为满足 $c+d=6$ 的整数 c、d 有无数组，而 $q=cd$，所以满足条件的 q 的值有无数个.

第 13 章　分　　式

一、本章概述

1. 总体要求

分式是初中代数的一个基本概念. 分式在加减乘除四则运算下是封闭的. 分式是整式的延伸，通过学习分式能进一步巩固整式的学习成果. 本章是在整式的运算、因式分解及一元一次方程的解法等知识基础上展开的.

首先，本章要求学生了解分式和最简分式的概念，能利用分式的基本性质进行约分和通分并化简分式，能对简单的分式进行加、减、乘、除运算并将结果化为最简分式；其次，学习负指数幂的运算；最后，学习分式方程的概念和可化为一元一次方程的分式方程的解法与简单应用.

分式运算的学习有助于提高学生的运算能力. 由于可以借助分式建立方程的数学模型解决一些实际问题，因此分式的相关知识和技能有助于提高学生解决实际问题的能力.

2. 课时安排建议

本章共 10 课时，具体课时分配建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
13.1 分式及其性质	2	分式　1 课时
		分式的基本性质　1 课时
13.2 分式的运算	3	分式的乘除　1 课时
		分式的加减　1 课时
		整数指数幂　1 课时
习题课	1	
13.3 分式方程	2	分式方程　2 课时
习题课	1	
复习与小结	1	

3. 内容编排与特色

本章内容分为 3 节，分别是“13.1 分式及其性质”“13.2 分式的运算”和“13.3 分式方程”.

“13.1 分式及其性质”一节介绍分式的概念及其基本性质，通过约分引入最简分式的概念. 与上海“二期课改”教科书不同，分式的概念是通过类比分数引入的，达到了“数”与“式”的统一，只有在分母的值不为 0 时，分式才有意义. 对于“最简分式”概念的界定侧重于“式”，不在于“数”，只需要“分子和分母没有一次及以上的公因式”即可.

“13.2 分式的运算”一节介绍了分式的四则运算并引入整数指数幂的概念及其运算法则. 分式的运算延续“二期课改”教科书的安排，从乘除法到加减法，先易后难进行编排，结构清晰. 负整数指数则通过分式的除法加以定义，从而将幂的性质从正整数指数拓展到整数指数. 鉴于此，我们把整数指数幂纳入“分式的运算”中，而上海“二期课改”教科书是在“分式方程”后介绍整数指数幂. 这样的改变，旨在揭示整数指数幂与分式的运算的本质联系.

“13.3 分式方程”一节介绍分式方程的概念、可化为一元一次方程的分式方程的解法，以及一些分式方程的具体应用实例.

本章的三节内容按照“概念—运算—应用”开展，整体结构清晰. 与整式章节一致，本章也遵循了从“数”到“式”的抽象以及“数”与“式”的统一. 同时，从整式过渡到分式，引入自然，与前述内容契合度高.

4. 教学提示

重视分数与分式的关系，达到“数”与“式”统一. 分式与整式的关系可类比分数与整数：分数可以看作在分母不为 0 的情况下，两个整数相除；分式可以看作在分母为非零整式的情况下，两个整式相除. 在教学中，教师可以通过改变分式分母中字母的取值，使学生理解分式分母的值不为 0 即分式有意义.

重视分式的四则运算，发展运算能力. 基于通分和约分法则，分式的四则运算可以化归为整式的四则运算. 通过分式运算的训练，既可以强化整式的运算，也有助于加深对分式的理解.

重视思维严密性的培养，积累处理实际问题的经验. 让学生理解解分式方程过程中可能产生增根的原因，明确解分式方程验根的必要性，体会思维的严密性. 此外，通过解决以具体的生活实例为背景的可化为一元一次方程的分式方程的应用问题，让学生感知数学建模的过程，积累处理实际问题的经验.

5. 评价建议

关注分式基础知识的评价以及分式四则运算水平的评价. 本章主要内容包括分式的概念、基本性质、基本运算以及分式方程的概念、解法和应用等. 教学中应注意考查学生是否切实理

解、掌握知识点. 分式四则运算是本章的重点，也是基本要求，教学中应注意考查学生运算技能是否达标.

关注学生思维能力水平的评价. 一方面，本章中通过设计观察、猜想、论证等学习活动，让学生经历类比分数的运算法则抽象出分式的运算法则，体验从特殊到一般，从具体到抽象的过程，逐步学习分式的运算. 另一方面，基于分式方程的求解过程，让学生理解验根的意义，感悟思维的严密性. 教学中应注意考查思维的逻辑性，不要片面地追求形式.

二、教科书分析与教学建议

13.1 分式及其性质

本节教学目标

（1）通过实际生活中的例子，类比分数理解分式的概念，进一步体会用“字母表示数”的意义.

（2）会求分式有意义时字母所满足的条件以及分式的值为 0 时字母的取值.

（3）掌握分式的基本性质，了解最简分式，能熟练约分至最简分式，提高运算能力.

（以下分析对应课本第 76～78 页）

本课教学重点

理解分式的概念、分式有意义的条件以及分式的值.

本课教学建议

（1）重视分数与分式的联系，将“数”过渡到“式”. 教学时，从实际生活中的例子出发，让学生对分式有直观感受，再类比分数引入分式的概念. 参照整数是分数的特例，明确整式是分式的特例，将分式等同于有理式，这是与以往教科书的不同之处.

（2）分式有意义的条件是分母的值不为 0. 这是研究分式的前提，讨论分式的值也需在此前提下进行. 如无特殊说明，本章中出现的分式都假设有意义. 除非明确求分式中字母的取值范围，否则不需要对字母展开讨论以满足分母的值不为 0 的要求，避免教学中的注意点过于分散.

本课内容分析

分数是整数除以整数，将“数”推广到“式”，引出分式的概念. 这样，分式概念的引入很自然，教学中不宜对分式的概念过度解读.

将有理式等同于分式，弱化有理式的概念.

例 1，通过回顾求代数式的值的方法，求分式的值.

13.1 分式及其性质

1. 分式

两个整数相除，可以用分数表示，如：$5 \div 3=\frac{5}{3}$. 两个整式相除，应该如何表示呢？

问题

(1) 长方形的面积是 S，长是 x，宽是多少？

(2) 走一段 10 km 的路，骑车需用 t h，步行需用的时间是骑车的 2 倍还多 1 h. 步行的速度是多少？

(3) 一名篮球运动员在一场比赛中投进 a 个罚球(每 1 球得 1 分)、b 个 2 分球、c 个 3 分球. 这名篮球运动员的 3 分球得分占其总得分的几分之几？

上述问题的结果可以依次表示为 $\frac{S}{x}$、$\frac{10}{2t+1}$ 和 $\frac{3c}{a+2b+3c}$. 一般地，对于两个整式 A、B(B 是非零整式)，$A \div B$ 可以表示为 $\frac{A}{B}$ 的形式，$\frac{A}{B}$ 叫作分式，也称为有理式，其中 A 称为分子，B 称为分母. 本章主要讨论分母中含有字母的分式.

用数值代替分式中的字母，计算得出的代数式的值就是分式的值.

例 1 当 $x=-3$，$y=2$ 时，分别计算下列分式的值：

(1) $\frac{3x-2y}{x}$；　　(2) $\frac{y+6}{x+7}$.

解 当 $x=-3$，$y=2$ 时，

(1) $\frac{3x-2y}{x}=\frac{3\times(-3)-2\times 2}{-3}=\frac{-13}{-3}=\frac{13}{3}$.

(2) $\frac{y+6}{x+7}=\frac{2+6}{-3+7}=\frac{8}{4}=2$.

76 第13章 分式

思考

求分式 $\dfrac{y-3}{x+7}$ 的值时，x 能取 -7 吗？

当 $x=-7$ 时，分母 $x+7=0$，所以 x 不能取 -7.

一般地，分母的值为 0 时，分式无意义；分母的值不为 0 时，分式有意义.

例 2 当 x 取什么值时，下列分式有意义？

(1) $\dfrac{x^2+1}{2x}$；

(2) $\dfrac{x+5}{x+2}$；

(3) $\dfrac{2x}{x^2+1}$.

解 (1) 由 $2x=0$，得 $x=0$. 所以 $x\neq0$ 时，分式 $\dfrac{x^2+1}{2x}$ 有意义.

(2) 由 $x+2=0$，得 $x=-2$. 所以 $x\neq-2$ 时，分式 $\dfrac{x+5}{x+2}$ 有意义.

(3) 因为 $x^2+1\neq0$，所以 x 取一切数时，分式 $\dfrac{2x}{x^2+1}$ 有意义.

例 3 当 x 取什么值时，分式 $\dfrac{2x+1}{3x-1}$ 的值为 0？

分析 在分式中，只有当分子的值为 0 且分母的值不为 0 时，分式的值才为 0.

解 由分子 $2x+1=0$，得 $x=-\dfrac{1}{2}$.

当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，分母 $3x-1=3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)-1=-\dfrac{5}{2}\neq0$. 所以，当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，分式 $\dfrac{2x+1}{3x-1}$ 的值为 0.

13.1 分式及其性质 77

思考 参照分数有意义的条件，引入“思考”栏目，旨在引导学生思考分式有意义的条件.

例 2，体会分母的值不为 0 是分式有意义的前提. 一般情况下，这类问题要求出满足相应条件的所有取值.

例 3，强调讨论分式的值的前提是分母的值不为 0.

课堂练习 13.1(1)

1. (1) $\dfrac{3}{x}$.

(2) $\dfrac{2ax}{by}$.

(3) $\dfrac{x^2+1}{x}$.

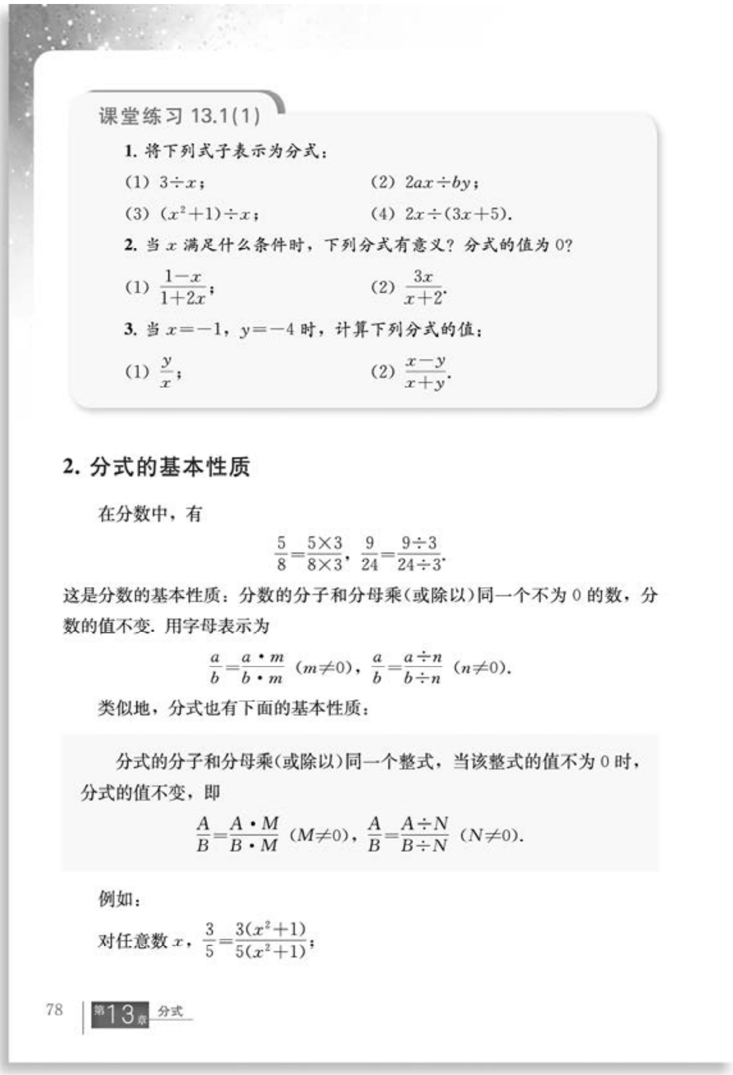
(4) $\dfrac{2x}{3x+5}$.

2. (1) $x\neq -\dfrac{1}{2}$；$x=1$.

(2) $x\neq -2$；$x=0$.

3. (1) 4.

(2) $-\dfrac{3}{5}$.



课堂练习 13.1(1)

1. 将下列式子表示为分式：

(1) $3\div x$；　(2) $2ax\div by$；

(3) $(x^2+1)\div x$；　(4) $2x\div(3x+5)$.

2. 当 x 满足什么条件时，下列分式有意义？分式的值为 0？

(1) $\dfrac{1-x}{1+2x}$；　(2) $\dfrac{3x}{x+2}$.

3. 当 $x=-1$，$y=-4$ 时，计算下列分式的值：

(1) $\dfrac{y}{x}$；　(2) $\dfrac{x-y}{x+y}$.

2. 分式的基本性质

在分数中，有

$$\frac{5}{8}=\frac{5\times3}{8\times3},\ \frac{9}{24}=\frac{9\div3}{24\div3}.$$

这是分数的基本性质：分数的分子和分母乘(或除以)同一个不为 0 的数，分数的值不变. 用字母表示为

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}\ (m\neq0),\ \frac{a}{b}=\frac{a\div n}{b\div n}\ (n\neq0).$$

类似地，分式也有下面的基本性质：

分式的分子和分母乘(或除以)同一个整式，当该整式的值不为 0 时，分式的值不变，即

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot M}{B\cdot M}\ (M\neq0),\ \frac{A}{B}=\frac{A\div N}{B\div N}\ (N\neq0).$$

例如：

对任意数 x，$\dfrac{3}{5}=\dfrac{3(x^2+1)}{5(x^2+1)}$；

78　第13章　分式

（以下分析对应课本第 78～80 页）

本课教学重点

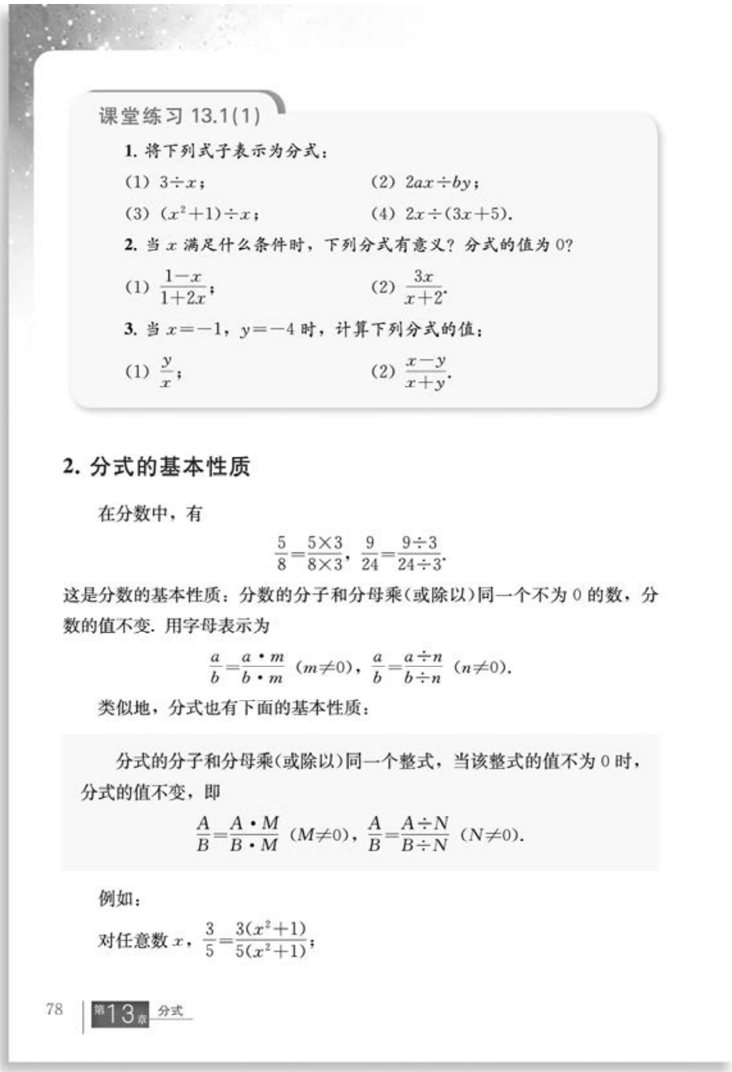
掌握分式的基本性质，了解最简分式的概念.

本课教学建议

（1）分式的基本性质是分式运算的基础. 参照分数的基本性质，将“数”抽象到“式”，自然引入分式的基本性质. 教学中，引导学生勇于思考，大胆质疑，猜想论证.

（2）约分作为分式基本性质的应用，强调其关键在于提取公因式. 约分一般要使结果成为最简分式.

（3）最简分式的概念是与上海“二期课改”教科书不同的，是“分子和分母没有一次及以上的公因式”，这里强调的是“式”(非数的式)的化简，对于“数”的化简不作要求.



课堂练习 13.1(1)

1. 将下列式子表示为分式：

(1) $3\div x$； (2) $2ax\div by$；

(3) $(x^2+1)\div x$； (4) $2x\div(3x+5)$.

2. 当 x 满足什么条件时，下列分式有意义？分式的值为 0？

(1) $\dfrac{1-x}{1+2x}$； (2) $\dfrac{3x}{x+2}$.

3. 当 $x=-1$，$y=-4$ 时，计算下列分式的值：

(1) $\dfrac{y}{x}$； (2) $\dfrac{x-y}{x+y}$.

2. 分式的基本性质

在分数中，有

$$\frac{5}{8}=\frac{5\times3}{8\times3},\ \frac{9}{24}=\frac{9\div3}{24\div3}.$$

这是分数的基本性质：分数的分子和分母乘(或除以)同一个不为 0 的数，分数的值不变. 用字母表示为

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}\ (m\neq0),\ \frac{a}{b}=\frac{a\div n}{b\div n}\ (n\neq0).$$

类似地，分式也有下面的基本性质：

分式的分子和分母乘(或除以)同一个整式，当该整式的值不为 0 时，分式的值不变，即

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot M}{B\cdot M}\ (M\neq0),\ \frac{A}{B}=\frac{A\div N}{B\div N}\ (N\neq0).$$

例如：

对任意数 x，$\dfrac{3}{5}=\dfrac{3(x^2+1)}{5(x^2+1)}$；

78 第13章 分式

本课内容分析

注意此处 $x^2+1\neq0$，分式的基本性质成立.

当 $3x\neq0$ 时，$\dfrac{3}{5}=\dfrac{3\times3x}{5\times3x}=\dfrac{9x}{15x}$；

当 $2xy\neq0$ 时，$\dfrac{-6xy^2}{10x^2y}=\dfrac{-6xy^2\div2xy}{10x^2y\div2xy}=-\dfrac{3y}{5x}$.

此处运用分式的基本性质，必须强调 $3x\neq0$ 或 $2xy\neq0$ 的条件.

$2xy$ 是分式 $\dfrac{-6xy^2}{10x^2y}$ 分子、分母的一个公因式，运用分式的基本性质，可以把分子、分母中的 $2xy$ 约去. 像这样，把一个分式的分子与分母中的公因式约去的过程，叫作约分.

点明约分的目的在于化简.

当 $2xy=0$ 时，$\dfrac{-6xy^2}{10x^2y}$ 无意义，约分无法进行.

如无特殊说明，本章出现的分式的变形与运算，总是在分式有意义的前提下进行.

例 4 约分：

(1) $\dfrac{6x^2y}{9xy^2}$；

(2) $\dfrac{35(x-y)^2}{45(x-y)^3}$；

(3) $\dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)}$.

例 4 的设计，旨在通过观察直接发现公因式.

解 (1) $\dfrac{6x^2y}{9xy^2}=\dfrac{2x\cdot(3xy)}{3y\cdot(3xy)}=\dfrac{2x}{3y}$.

(2) $\dfrac{35(x-y)^2}{45(x-y)^3}=\dfrac{7\times5(x-y)^2}{9(x-y)\cdot5(x-y)^2}=\dfrac{7}{9(x-y)}$.

(3) $\dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{1}{x-2}$.

分式 $\dfrac{2x}{3y}$、$\dfrac{7}{9(x-y)}$、$\dfrac{1}{x-2}$ 的分子与分母没有一次及以上的公因式，这样的分式叫作最简分式. $\dfrac{6x}{9y}$ 与 $\dfrac{2x}{3y}$ 都是最简分式，习惯上，在结果中将 $\dfrac{6x}{9y}$ 化为 $\dfrac{2x}{3y}$.

根据最简分式的概念把 $\dfrac{6x^2y}{9xy^2}$ 化简为 $\dfrac{6x}{9y}$，也是正确的.

约分可以化简分式. 如果分式的分子和分母是几个因式的积的形式，可约去相同因式. 有时，需要先对分子、分母因式分解，再约分. 分式的约分一般要使结果成为最简分式.

例 5，需要先对分子、分母因式分解，再约分.

例 5 化简：

（1）$\dfrac{x-2}{x^2-4x+4}$；

（2）$\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$；

（3）$\dfrac{15b-5a}{2a-6b}$.

解 （1）$\dfrac{x-2}{x^2-4x+4}=\dfrac{x-2}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{x-2}$.

（2）$\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}=\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{x+2}{x+3}$.

（3）$\dfrac{15b-5a}{2a-6b}=\dfrac{5(3b-a)}{2(a-3b)}=-\dfrac{5(a-3b)}{2(a-3b)}=-\dfrac{5}{2}$.

课堂练习 13.1(2)

1. 下列分式中，哪些是最简分式？

$\dfrac{6ab}{5a^2}$、$\dfrac{3(a^2-b^2)}{a+b}$、$\dfrac{x+1}{2x+1}$、$\dfrac{x-1}{3x-3}$.

2. 化简：

（1）$\dfrac{6m^2n^3}{3mn}$；　　（2）$\dfrac{-20x}{25x^2}$；

（3）$\dfrac{9ab}{12a^2}$；　　（4）$\dfrac{2(x+y)^2}{x+y}$.

3. 化简：

（1）$\dfrac{x-5}{15-3x}$；　　（2）$\dfrac{x^2-2x}{4-2x}$；

（3）$\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$；　　（4）$\dfrac{x^2-x-2}{x^2+6x+5}$.

课堂练习 13.1(2)

1. $\dfrac{x+1}{2x+1}$.

2. （1）$2mn^2$.

（2）$-\dfrac{4}{5x}$.

（3）$\dfrac{3b}{4a}$.

（4）$2x+2y$.

3. （1）$-\dfrac{1}{3}$.

（2）$-\dfrac{x}{2}$.

（3）$x+3$.

（4）$\dfrac{x-2}{x+5}$.

习题 13.1

A

1. 将下列式子表示为分式：

(1) $a\div b$； (2) $3\div 2ab$；

(3) $ab\div(a+b)$； (4) $(x^2+y^2)\div 2xy$.

2. 当 x 满足什么条件时，下列分式有意义？分式的值为 0？

(1) $\dfrac{x+2}{3x}$； (2) $\dfrac{-x+5}{3-x}$； (3) $\dfrac{x-8}{3+x^2}$.

3. 求下列各分式的值：

(1) $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2x+1}$，其中 $x=3$；

(2) $\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，其中 $x=-\dfrac{1}{2}$，$y=2$.

4. 化简：

(1) $\dfrac{4a^2}{16a^4}$； (2) $-\dfrac{18xy}{27x^2y^2}$； (3) $\dfrac{12(x+y)^2}{20(x+y)(x+2y)}$.

5. 化简：

(1) $\dfrac{9x-9}{4-4x}$； (2) $\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$； (3) $\dfrac{x^2-4x+4}{2x-4}$.

B

6. 甲、乙两人从一条公路的某处出发，同向而行，乙提前 1 h 出发．已知甲的速度为 a km/h，乙的速度为 b km/h，$a>b$．那么甲追上乙需要多少时间？当 $a=6$，$b=5$ 时，甲追上乙需要多少时间？

习题 13.1

1. (1) $\dfrac{a}{b}$.

(2) $\dfrac{3}{2ab}$.

(3) $\dfrac{ab}{a+b}$.

(4) $\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$.

2. (1) $x\neq 0$；$x=-2$.

(2) $x\neq 3$；$x=5$.

(3) 一切数，$x=8$.

3. (1) $\dfrac{7}{16}$.

(2) $-\dfrac{8}{17}$.

4. (1) $\dfrac{1}{4a^2}$.

(2) $-\dfrac{2}{3xy}$.

(3) $\dfrac{3x+3y}{5x+10y}$.

5. (1) $-\dfrac{9}{4}$.

(2) $\dfrac{x+1}{x+2}$.

(3) $\dfrac{x-2}{2}$.

6. $\dfrac{b}{a-b}$ h；5 h. 提示：设甲追上乙需要 t h，根据题意，可得 $at=b(t+1)$，解得 $t=\dfrac{b}{a-b}$. 把 $a=6$，$b=5$ 代入得 $t=5$.

13.2 分式的运算

本节教学目标

（1）类比分数的乘除法法则引入分式的乘除法法则，掌握分式的乘除运算，体会从数到式的数学抽象.

（2）类比分数的通分引入分式的通分，掌握分式的加减运算，体会类比与转化的数学思想，提高运算能力.

（3）理解负整数指数幂的定义，经历整数指数幂的运算性质的推导过程，掌握整数指数幂的性质及其运算，发展推理能力.

（以下分析对应课本第 82～85 页）

本课教学重点

掌握分式的乘除运算.

本课教学建议

（1）理解数属于式，分式包含分数，分式的乘除法法则应该兼容分数的乘除法法则.

（2）通过文字语言和符号语言把握分式的乘除法法则的表述，引导学生提高数学表达能力. 在理解法则的基础上，引导学生掌握简单的分式乘除运算.

13.2 分式的运算

1. 分式的乘除

讨论

（1）类比 $\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{4\times3}{5\times2}$，$\frac{16}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{16\times3}{5\times4}$，如何计算 $\frac{x^2}{5}\cdot\frac{3}{x}$？

（2）类比 $\frac{4}{5}\div\frac{3}{25}=\frac{4}{5}\times\frac{25}{3}$，$\frac{4}{7}\div\frac{3}{49}=\frac{4}{7}\times\frac{49}{3}$，如何计算 $\frac{4}{x}\div\frac{3}{x^2}$？

与分数的乘除法的法则类似，分式的乘除法的法则如下：

两个分式相乘，将分子相乘的积作分子，分母相乘的积作分母.
分式除以分式，将除式的分子和分母颠倒位置后，再与被除式相乘.
用式子表示为：

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D},\ \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}.$$

例 1 计算：

（1）$\frac{2a^2}{3}\cdot\frac{b}{4a}$；　　（2）$\frac{3y(x+3)}{x-3}\cdot\frac{2(x-3)}{9y^2}$.

解 （1）$\frac{2a^2}{3}\cdot\frac{b}{4a}=\frac{2a^2b}{3\times4a}=\frac{ab}{6}$.

（2）$\frac{3y(x+3)}{x-3}\cdot\frac{2(x-3)}{9y^2}$

$=\frac{6y(x+3)(x-3)}{9y^2(x-3)}$

$=\frac{2(x+3)}{3y}$.

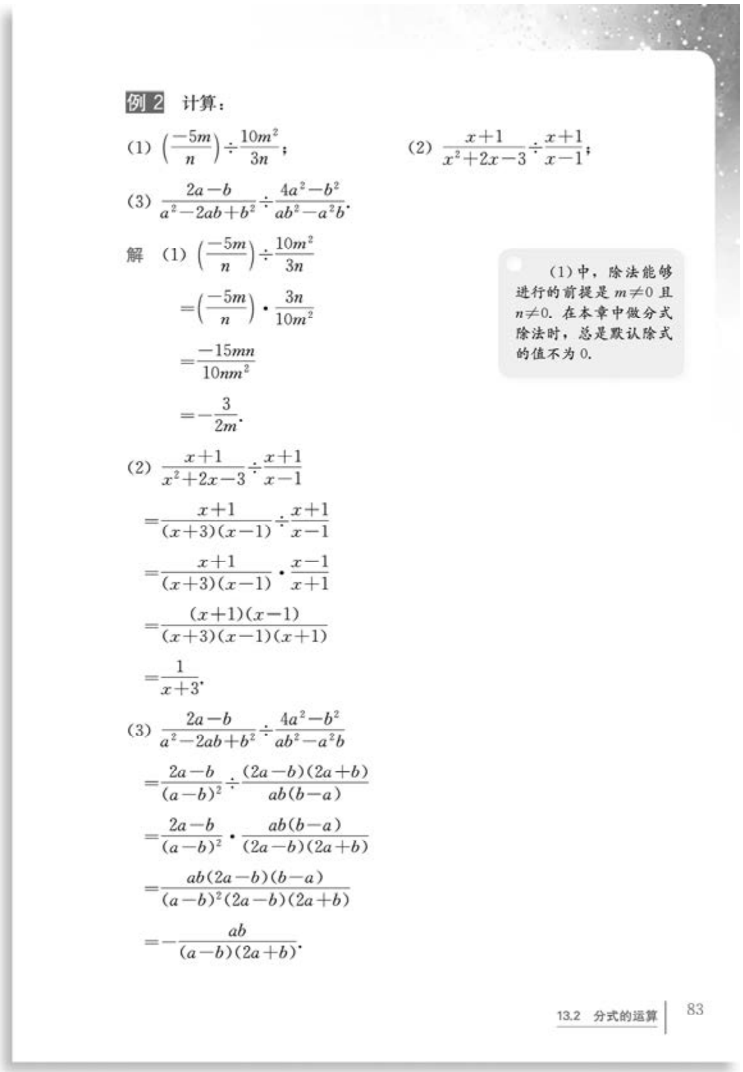
本课内容分析

分式进行乘除运算时，需要强调分式有意义，即分母的值不为 0.

将分式的乘除法法则用文字语言和符号语言进行表述. 可以培养学生数学表达能力，加深对法则的理解.

例 1，旨在通过训练，掌握分式的乘法运算.

例 2，利用分式的除法法则，将分式除法运算转化为乘法运算，体会乘法与除法的互逆性质．例 2(1)，一般地，运算最终结果的负号放在分数线前面．例 2(2)在运用法则之前，需要对前一个分式的分母因式分解，再作约分化简．例 2(3)可让学生基于分式的除法法则，结合整式的因式分解作化简．可以引导学生尝试不同的解法．注意运算结果需化为最简分式．



例 2 计算：

(1) $\left(\dfrac{-5m}{n}\right)\div\dfrac{10m^2}{3n}$；　　(2) $\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}\div\dfrac{x+1}{x-1}$；

(3) $\dfrac{2a-b}{a^2-2ab+b^2}\div\dfrac{4a^2-b^2}{ab^2-a^2b}$.

解 (1) $\left(\dfrac{-5m}{n}\right)\div\dfrac{10m^2}{3n}$

$=\left(\dfrac{-5m}{n}\right)\cdot\dfrac{3n}{10m^2}$

$=\dfrac{-15mn}{10nm^2}$

$=-\dfrac{3}{2m}$.

(2) $\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}\div\dfrac{x+1}{x-1}$

$=\dfrac{x+1}{(x+3)(x-1)}\div\dfrac{x+1}{x-1}$

$=\dfrac{x+1}{(x+3)(x-1)}\cdot\dfrac{x-1}{x+1}$

$=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{1}{x+3}$.

(3) $\dfrac{2a-b}{a^2-2ab+b^2}\div\dfrac{4a^2-b^2}{ab^2-a^2b}$

$=\dfrac{2a-b}{(a-b)^2}\div\dfrac{(2a-b)(2a+b)}{ab(b-a)}$

$=\dfrac{2a-b}{(a-b)^2}\cdot\dfrac{ab(b-a)}{(2a-b)(2a+b)}$

$=\dfrac{ab(2a-b)(b-a)}{(a-b)^2(2a-b)(2a+b)}$

$=-\dfrac{ab}{(a-b)(2a+b)}$.

(1)中，除法能够进行的前提是 $m\neq0$ 且 $n\neq0$．在本章中做分式除法时，总是默认除式的值不为 0．

13.2 分式的运算　83

分式的运算结果一般要化简为最简分式.

例 3 如图 13-2-1，用一个半径为 r m 的半圆和一个一边长度为 h m 的长方形，组成一扇窗. 根据设计要求，整扇窗的面积为 4 m^2.

(1) 用含 r 的代数式表示 h；

(2) 当 $r=1$ 时，求窗的高度（π 取 3.14，结果精确到 0.01 m).

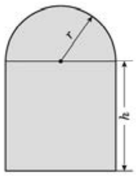


图 13-2-1

分析 窗的面积等于半圆的面积与长方形的面积之和. 窗的高度等于 h 与 r 的和.

解 (1) 由 $\frac{1}{2}\pi r^2+2rh=4$，得

$$2rh=4-\frac{1}{2}\pi r^2.$$

从而 $h=\frac{1}{2r}\left(4-\frac{1}{2}\pi r^2\right)$，因此

$$h=\frac{2}{r}-\frac{1}{4}\pi r.$$

(2) 当 $r=1$ 时，$h=\frac{2}{1}-\frac{1}{4}\times 3.14\times 1=1.215$ (m).

$$h+r=1.215+1=2.215\approx 2.22\ (\text{m}).$$

答：窗的高度约为 2.22 m.

课堂练习 13.2(1)

1. 计算：

(1) $\frac{2}{x}\cdot\frac{x}{4}$；

(2) $\frac{3x^2y}{4}\cdot\frac{y}{6x}$；

(3) $\frac{2}{2x+1}\cdot\frac{1}{2x+1}$.

例 3，旨在引导学生体验分式在实际生活中的应用，为下一节分式方程作铺垫. 例 3(1) 求分式，例 3(2) 求分式的值. 例 3(2) 允许学生使用计算器.

课堂练习 13.2(1)

1. (1) $\frac{1}{2}$.

(2) $\frac{xy^2}{8}$.

(3) $\frac{2}{4x^2+4x+1}$.

2. (1) $-2x-4$.

(2) $\frac{5}{6x}$.

(3) $\frac{x-3}{x+2}$.

（以下分析对应课本第 85～88 页）

本课教学重点

掌握基于通分的分式加减运算.

本课教学建议

（1）理解分式包含分数，分式的加减法法则应该兼容分数的加减法法则.

（2）对同分母与异分母两种情形分别作分式的加减运算，引导学生把握分式的加减法法则的表述，掌握简单的分式加减运算.

（3）出于“削枝强干”的原则，去除了“最简公分母”的概念. 在通分内容的教学时，不必强调一定要用最简公分母作通分，可以引导学生用不同的方式进行运算，简洁为上，不要将运算过程模式化.

2. 计算：

(1) $\frac{x^2-4}{x+1}\cdot\frac{2x+2}{2-x}$；　　(2) $\frac{2x+1}{x}\div\frac{6+12x}{5}$；

(3) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x+2}\div\frac{x-2}{x+1}$.

2. 分式的加减

讨论

(1) 类比 $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2+1}{5}=\frac{3}{5}$，如何计算 $\frac{2}{x}+\frac{1}{x}$？

(2) 类比 $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，如何计算 $\frac{3}{x}-\frac{1}{x}$？

与同分母的分数加减法类似，同分母分式的加减法法则如下：

同分母分式相加减，分母不变，分子相加减.

例 4 计算：

(1) $\frac{x}{3x-1}+\frac{3}{3x-1}$；　　(2) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{x}{x^2-4}$；

(3) $\frac{3x^2-1}{x^2-3x+2}-\frac{x+2}{x^2-3x+2}+\frac{1-2x^2}{x^2-3x+2}$.

解　(1) $\frac{x}{3x-1}+\frac{3}{3x-1}=\frac{x+3}{3x-1}$.

(2) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{x}{x^2-4}$

$=\frac{2-x}{x^2-4}$

13.2　分式的运算　85

本课内容分析

对比分式的乘除法法则，引导学生思考为什么分式的加减法法则需要分类讨论.

例 4，运用同分母分式加减法法则后，结果需要化成最简分式.

$=\frac{2-x}{(x-2)(x+2)}$

$=-\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}$

$=-\frac{1}{x+2}$.

(3) $\frac{3x^2-1}{x^2-3x+2}-\frac{x+2}{x^2-3x+2}+\frac{1-2x^2}{x^2-3x+2}$

$=\frac{3x^2-1-(x+2)+1-2x^2}{x^2-3x+2}$

$=\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$

$=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x-1)}$

$=\frac{x+1}{x-1}$.

讨论　旨在借助回顾分数的加减运算，抛出问题.

讨论

(1) 类比 $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}+\frac{2}{12}=\frac{9+2}{12}=\frac{11}{12}$，如何计算 $\frac{3}{2x}+\frac{1}{3x}$？

(2) 类比 $\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{6}{9}-\frac{1}{9}=\frac{6-1}{9}=\frac{5}{9}$，如何计算 $\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$？

类比分数的通分，引入分式通分的定义.

异分母分数相加减，先将它们转化为分母相同的分数，再利用同分母分数的加减法法则进行计算. 异分母分式的加减与之类似. 将几个异分母分式分别化为与原来分式的值相等的同分母分式的过程叫作通分. 例如

$$\frac{3}{2x}+\frac{1}{3x}=\frac{9}{6x}+\frac{2}{6x}=\frac{11}{6x},$$

其中 $6x$ 称为 $\frac{3}{2x}$ 和 $\frac{1}{3x}$ 的公分母.

通分的作用在于将异分母转化为同分母.

异分母分式相加减，先将它们通分，然后进行加减.

例 5 计算：

(1) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$；

(2) $\dfrac{x}{x^2-y^2}-\dfrac{1}{x+y}$；

(3) $\dfrac{y}{2x}+\dfrac{x}{y}-\dfrac{2x-1}{y^2}$.

分析 (1) $\dfrac{x}{2}$ 和 $\dfrac{2}{x}$ 的公分母可取为 $2x$；

(2) 因为 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，所以 $\dfrac{x}{x^2-y^2}$ 和 $\dfrac{1}{x+y}$ 的公分母可取为 x^2-y^2；

(3) $\dfrac{y}{2x}$、$\dfrac{x}{y}$ 和 $\dfrac{2x-1}{y^2}$ 的公分母可取为 $2xy^2$.

解 (1) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{x\cdot x}{2x}+\dfrac{2\times 2}{2x}=\dfrac{x^2+4}{2x}$.

(2) $\dfrac{x}{x^2-y^2}-\dfrac{1}{x+y}$

$=\dfrac{x}{x^2-y^2}-\dfrac{x-y}{(x+y)(x-y)}$

$=\dfrac{x-x+y}{x^2-y^2}$

$=\dfrac{y}{x^2-y^2}$.

(3) $\dfrac{y}{2x}+\dfrac{x}{y}-\dfrac{2x-1}{y^2}$

$=\dfrac{y\cdot y^2}{2x\cdot y^2}+\dfrac{x\cdot 2xy}{y\cdot 2xy}-\dfrac{(2x-1)\cdot 2x}{y^2\cdot 2x}$

$=\dfrac{y^3+2x^2y-4x^2+2x}{2xy^2}$.

13.2 分式的运算 87

例 5 是异分母分式的加减法运算. 解题的关键在于找出公分母. 减法运算中要特别注意分数线的“括号”功能，这是学生容易出错的地方. 初学时可再写一步添加括号的过程.

课堂练习 13.2(2)

1. (1) $\dfrac{1}{3x}$.

(2) $\dfrac{2}{b}$.

(3) $\dfrac{1}{1-x}$.

2. (1) 不正确，应是

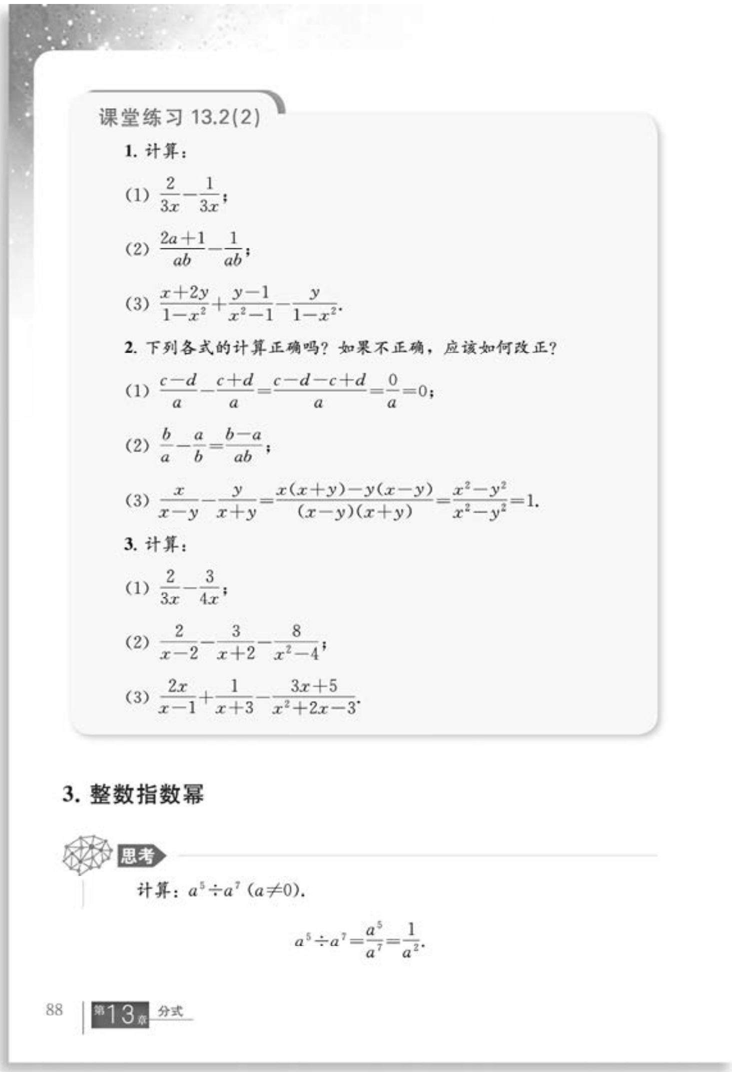
$$\frac{c-d}{a}-\frac{c+d}{a}$$
$$=\frac{c-d-c-d}{a}$$
$$=-\frac{2d}{a}.$$

(2) 不正确，应是

$$\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=\frac{b^2-a^2}{ab}.$$

(3) 不正确，应是

$$\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}$$
$$=\frac{x(x+y)-y(x-y)}{(x-y)(x+y)}$$
$$=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}.$$



课堂练习 13.2(2)

1. 计算：

(1) $\dfrac{2}{3x}-\dfrac{1}{3x}$；

(2) $\dfrac{2a+1}{ab}-\dfrac{1}{ab}$；

(3) $\dfrac{x+2y}{1-x^2}+\dfrac{y-1}{x^2-1}-\dfrac{y}{1-x^2}$.

2. 下列各式的计算正确吗？如果不正确，应该如何改正？

(1) $\dfrac{c-d}{a}-\dfrac{c+d}{a}=\dfrac{c-d-c+d}{a}=\dfrac{0}{a}=0$；

(2) $\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{b-a}{ab}$；

(3) $\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}=\dfrac{x(x+y)-y(x-y)}{(x-y)(x+y)}=\dfrac{x^2-y^2}{x^2-y^2}=1$.

3. 计算：

(1) $\dfrac{2}{3x}-\dfrac{3}{4x}$；

(2) $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{8}{x^2-4}$；

(3) $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{3x+5}{x^2+2x-3}$.

3. 整数指数幂

思考

计算：$a^5\div a^7\ (a\neq 0)$.

$$a^5\div a^7=\frac{a^5}{a^7}=\frac{1}{a^2}.$$

88 第13章 分式

3. (1) $-\dfrac{1}{12x}$.

(2) $-\dfrac{1}{x+2}$. 提示：原式$=\dfrac{2x+4-(3x-6)-8}{(x+2)(x-2)}=-\dfrac{1}{x+2}$.

(3) 2. 提示：原式$=\dfrac{2x^2+6x+x-1-3x-5}{(x-1)(x+3)}=2$.

（以下分析对应课本第 88～91 页）

本课教学重点

理解整数指数幂的定义，掌握整数指数幂的运算性质.

本课教学建议

（1）通过负整数指数幂的定义，将幂的运算性质从正整数指数推广到整数指数.

（2）本课难点是检验同底数幂的乘法对整数指数成立. 可以引导学生对 m、n 进行分类讨论，基于正整数指数的同底数幂的乘除法性质证明结论.

本课内容分析

此“规定”本质上是给符号 a^{-n} 下定义，方便用数学符号表示幂运算. 不要让学生产生此“规定”是逻辑推理所得的误解.

当 m、n 是正整数，且 $m>n$ 或 $m=n$ 时，有 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ $(a\neq 0)$. 如果以上性质对 $m<n$ 仍然成立，那么 $a^5\div a^7=a^{5-7}=a^{-2}$. 这样会得到 $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$.

由此，规定

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\ (a\neq 0,\ n\text{ 是正整数}).$$

到现在为止，在 $a\neq 0$ 时，a^n 中的指数 n 可以是正整数、零或负整数.

当 m、n 是正整数且 $m<n$ 时，$a^m\div a^n=\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m\div a^m}{a^n\div a^m}=\frac{1}{a^{n-m}}=a^{m-n}$.

因此，

$$a^m\div a^n=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\ (a\neq 0,\ m\text{、}n\text{ 是正整数}).$$

例 6 计算：

(1) $2^6\div 2^8$；　(2) $10^{101}\div 10^{104}$；　(3) $5^{12}\div 5^{12}$.

解 (1) $2^6\div 2^8=2^{6-8}=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$.

(2) $10^{101}\div 10^{104}=10^{101-104}=10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1\,000}$.

(3) $5^{12}\div 5^{12}=5^{12-12}=5^0=1$.

思考 对于思考栏目，直接从底数为 2 的实例猜想同底数幂的乘法性质对整数指数都成立的结论，引导学生通过对 m、n 进行分类讨论加以证明.

思考

我们知道 $2^2\times 2^5=2^{2+5}$，那么 $2^2\times 2^{-5}$ 是否等于 $2^{2+(-5)}$？

当 $a\neq 0$ 时，$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ 是否对任意整数 m、n 都成立？

下面我们先讨论 m 是任意整数且 n 是负整数的情况：

(1) 当 $m>0$ 时，由 $-n$ 是正整数，得

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n};$$

(2) 当 $m=0$ 时，

$$a^m \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^{0+n} = a^{m+n};$$

(3) 当 $m<0$ 时，由 $-m$、$-n$ 是正整数，得

$$a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

当 m 是任意整数且 n 是正整数或 0 时，也可以验证 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 是成立的.

随着指数的取值范围由正整数扩大到全体整数，前面学过的正整数指数幂的运算性质也推广到了整数指数幂.

> 当 a、b 不为 0 时，对于整数指数幂，有
> (1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
> (2) $(ab)^n = a^n b^n$;
> (3) $(a^m)^n = a^{mn}$.

思考

当 $a \neq 0$ 时，对于任意整数 m、n，是否有 $a^m \div a^n = a^{m-n}$？

例 7 计算：

(1) $x^{-5} \cdot x^2$; (2) $(2^{-2})^3$;

(3) $10^0 \div 3^{-3}$; (4) $(3a)^3 \cdot (2a)^{-2}$.

解 (1) $x^{-5} \cdot x^2 = x^{(-5)+2} = x^{-3}$.

(2) $(2^{-2})^3 = 2^{(-2)\times 3} = 2^{-6} = \frac{1}{64}$.

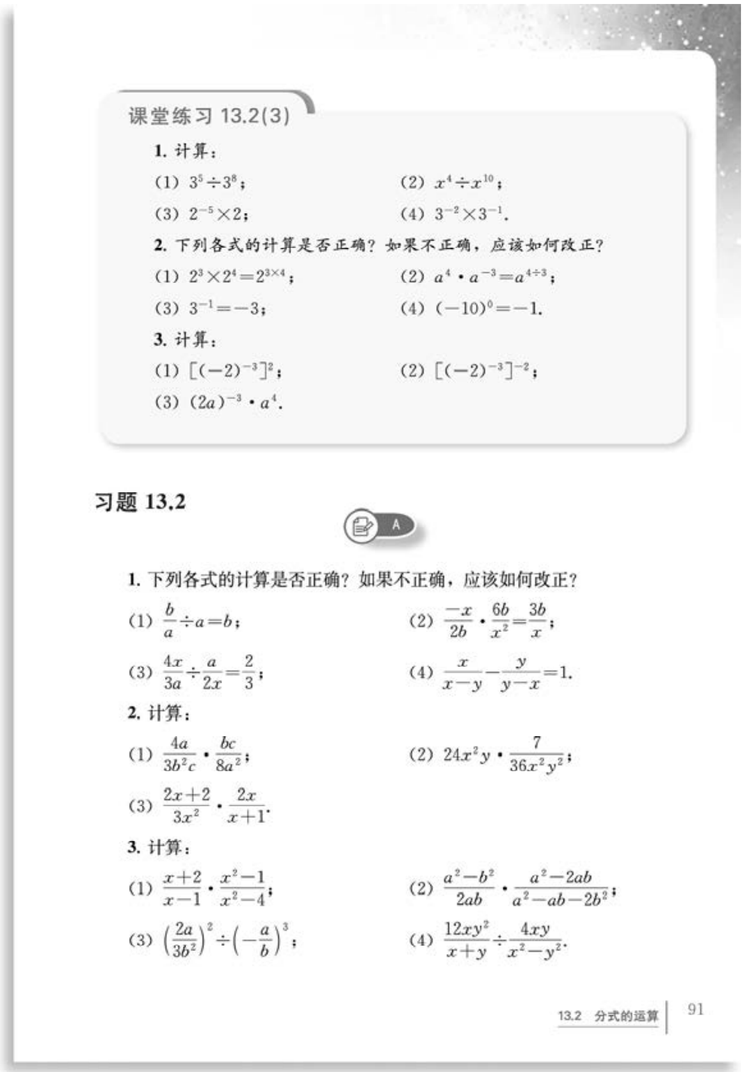
(3) $10^0 \div 3^{-3} = 1 \div \frac{1}{3^3} = 1 \times 3^3 = 27$.

(4) $(3a)^3 \cdot (2a)^{-2} = 3^3 \cdot a^3 \cdot 2^{-2} \cdot a^{-2} = 3^3 \times 2^{-2} \cdot a^{3-2} = \frac{27}{4}a$.

90 第13章 分式

引导学生体会证明中分别运用了哪些性质.

引导学生通过回顾正整数指数幂的三条运算性质，归纳结论.


课堂练习 13.2(3)

1. 计算：

(1) $3^5\div3^8$；　(2) $x^4\div x^{10}$；

(3) $2^{-5}\times2$；　(4) $3^{-2}\times3^{-1}$.

2. 下列各式的计算是否正确？如果不正确，应该如何改正？

(1) $2^3\times2^4=2^{3\times4}$；　(2) $a^4\cdot a^{-3}=a^{4\div3}$；

(3) $3^{-1}=-3$；　(4) $(-10)^0=-1$.

3. 计算：

(1) $[(-2)^{-3}]^2$；　(2) $[(-2)^{-3}]^{-2}$；

(3) $(2a)^{-3}\cdot a^4$.

习题 13.2

A

1. 下列各式的计算是否正确？如果不正确，应该如何改正？

(1) $\frac{b}{a}\div a=b$；　(2) $\frac{-x}{2b}\cdot\frac{6b}{x^2}=\frac{3b}{x}$；

(3) $\frac{4x}{3a}\div\frac{a}{2x}=\frac{2}{3}$；　(4) $\frac{x}{x-y}-\frac{y}{y-x}=1$.

2. 计算：

(1) $\frac{4a}{3b^2c}\cdot\frac{bc}{8a^2}$；　(2) $24x^2y\cdot\frac{7}{36x^2y^2}$；

(3) $\frac{2x+2}{3x^2}\cdot\frac{2x}{x+1}$.

3. 计算：

(1) $\frac{x+2}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{x^2-4}$；　(2) $\frac{a^2-b^2}{2ab}\cdot\frac{a^2-2ab}{a^2-ab-2b^2}$；

(3) $\left(\frac{2a}{3b^2}\right)^2\div\left(-\frac{a}{b}\right)^3$；　(4) $\frac{12xy^2}{x+y}\div\frac{4xy}{x^2-y^2}$.

13.2 分式的运算 91

课堂练习 13.2(3)

1. (1) $\frac{1}{27}$.

(2) $\frac{1}{x^6}$.

(3) $\frac{1}{16}$.

(4) $\frac{1}{27}$.

2. (1) 不正确，应是 2^{3+4}.

(2) 不正确，应是 a^{4-3}.

(3) 不正确，应是 $\frac{1}{3}$.

(4) 不正确，应是 1.

3. (1) $\frac{1}{64}$.

(2) 64.

(3) $\frac{a}{8}$.

习题 13.2

1. (1) 不正确，应是 $\frac{b}{a^2}$.

(2) 不正确，应是 $-\frac{3}{x}$.

(3) 不正确，应是 $\frac{8x^2}{3a^2}$.

(4) 不正确，应是 $\frac{x+y}{x-y}$.

2. (1) $\frac{1}{6ab}$.　(2) $\frac{14}{3y}$.　(3) $\frac{4}{3x}$.

3. (1) $\frac{x+1}{x-2}$.

(2) $\frac{a-b}{2b}$.　提示：原式$=\frac{(a-b)(a+b)}{2ab}\cdot\frac{a(a-2b)}{(a-2b)(a+b)}=\frac{a-b}{2b}$.

(3) $-\frac{4}{9ab}$.

(4) $3xy-3y^2$.　提示：原式$=\frac{12xy^2}{x+y}\cdot\frac{(x+y)(x-y)}{4xy}=3y(x-y)$.

4. 计算：

(1) $\frac{2}{3x}+\frac{5}{6x}$；　　(2) $\frac{2}{x}-\frac{2x-1}{x^2}$；

(3) $\frac{c}{ab}+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}$；　　(4) $\frac{3}{x}-\frac{3}{x+1}$；

(5) $\frac{x}{x+2}-\frac{8}{x^2-4}$；　　(6) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

5. 将下列各式表示成只含有正整数指数幂的形式：

(1) $-x^{-2}$；　　(2) $2x^2y^{-3}$；

(3) $5xy(x+y)^{-2}$；　　(4) $4^{-3}a^{-1}b^2$.

6. 将下列各式表示成不含分母的形式：

(1) $-\frac{2}{xy}$；　　(2) $\frac{2xy}{x+2y}$；

(3) $\frac{a+b}{2a^2b^3}$；　　(4) $\frac{2a}{x^2y^2(x^2+y^2)}$.

7. 计算：

(1) $(-a^2)^3\cdot(-a^3)^{-2}$；　　(2) $(2ab^2)^2\cdot(3ab)^{-3}$；

(3) $\left(\frac{4}{ab}\right)^4\div\left(\frac{a^2b}{8}\right)^{-3}$；　　(4) $(2x)^{-4}+(4x^2)^{-2}$；

(5) $xy(x^{-1}+y^{-1})$；　　(6) $\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}$.

B

8. 先化简，再求值：$\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{x^2-1}\div\frac{x^2+4x+3}{x^2-2x+1}$，其中 $x=-2$.

9. 市场里有甲、乙两种苹果. 甲种苹果每箱质量为 m kg，售价 a 元；乙种苹果每箱质量为 n kg，售价 b 元. 每千克甲种苹果的价格是乙种苹果的多少倍?

4. (1) $\frac{3}{2x}$.

(2) $\frac{1}{x^2}$.

(3) $\frac{c^2+a^2+b^2}{abc}$.

(4) $\frac{3}{x^2+x}$.

(5) $\frac{x-4}{x-2}$.

(6) $\frac{x+1}{x-1}$.

5. (1) $-\frac{1}{x^2}$.

(2) $\frac{2x^2}{y^3}$.

(3) $\frac{5xy}{(x+y)^2}$.

(4) $\frac{b^2}{4^3a}$.

6. (1) $-2x^{-1}y^{-1}$.

(2) $2xy(x+2y)^{-1}$.

(3) $2^{-1}a^{-2}b^{-3}(a+b)$.

(4) $2ax^{-2}y^{-2}(x^2+y^2)^{-1}$.

7. (1) -1.　(2) $\frac{4b}{27a}$.　(3) $\frac{a^2}{2b}$.　(4) $\frac{1}{8x^4}$.　(5) $x+y$.　(6) $\frac{xy}{x+y}$.

8. 原式$=\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x^2-2x+1}{x^2+4x+3}$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{(x-1)^2}{(x+3)(x+1)}$$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x+1}{(x+1)^2}-\frac{x-1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2}{(x+1)^2}.$$

当 $x=-2$ 时，原式$=2$.

9. $\frac{an}{bm}$.

13.3　分式方程

本节教学目标

（1）理解分式方程的概念以及分式方程的求解方法，会求解可化为一元一次方程的分式方程.

（2）理解解分式方程时产生增根的原因，掌握解分式方程的验根方法，逐步养成重依据、尊重逻辑的思维习惯.

（3）会根据实际问题的背景建立分式方程，运用分式方程的知识解应用题，初步感知数学建模的基本过程，增强应用意识.

（以下分析对应课本第 93～95 页）

本课教学重点

掌握可化为一元一次方程的分式方程的解法，理解解分式方程时产生增根的原因.

本课教学建议

（1）注意概念的辨析:“分式方程”作为一个专有名词呈现. 尽管整式属于分式，但是“分式方程”不是“分式的方程”，可以理解为“非整式的分式的方程”. 将“分式方程”与“整式方程”两个概念对立起来，一方面是基于分式方程的解法，通过去分母可将分式方程转化为整式方程（如果是分母中不含字母的方程，无须去分母）；另一方面，分式方程需要验根，整式方程无须验根.

（2）理解解分式方程时产生增根的原因在于通过去分母将分式方程转化为整式方程的过程不是恒等变形.

（3）本节可求解的分式方程只限于可化为一元一次方程的分式方程.

13.3 分式方程

问题 京沪高铁上海虹桥站至北京南站全程约 1 318 km. 如果某趟列车的平均速度提高 $\frac{1}{6}$，其从上海虹桥站至北京南站的行驶时间将缩短 37 min，那么这趟列车提速前后的平均速度分别为多少(结果精确到 1 km/h)?

设火车提速前的平均速度是 x km/h，根据问题可以列出方程

$$\frac{1\,318}{x}-\frac{1\,318}{\left(1+\frac{1}{6}\right)x}=\frac{37}{60}.$$

像这样，分母里含有未知数的方程叫作分式方程. 像一元一次方程等分母里不含有未知数的方程称为整式方程. 只含有一个未知数的方程的解称为这个方程的根.

解分式方程的关键是把分母“去掉”，将其转化成整式方程.

分式方程 $\frac{1\,318}{x}-\frac{1\,318}{\left(1+\frac{1}{6}\right)x}=\frac{37}{60}$ 的两边都乘公分母 $\frac{7}{6}x$，得到一元一次方程

$$1\,318\times\frac{7}{6}-1\,318=\frac{37}{60}\times\frac{7}{6}x.$$

解得

$$x\approx 305.$$

所以这趟列车提速前的平均速度约为 305 km/h，提速后的平均速度约为 356 km/h.

观察分式方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x^2+x}$.

方程的两边都乘公分母 $x(x+1)$，得到一元一次方程

$$(x+1)+x=1.$$

解得

$$x=0.$$

本课内容分析

从实际问题引出分母中含有未知数的方程，引导学生对分式方程有直观的理解.

对于新型方程（分式方程），通过转化（去分母）成已学过的方程（整式方程中的一元一次方程）予以求解，这是一种常用的研究路径.

通过例子让学生感受解分式方程时会产生增根.

由于 $x=0$ 使 $\frac{1}{x}$ 的分母的值为 0，因此，0 不是原分式方程的根，原分式方程无解.

在分式方程变形时，有时会产生不符合原分式方程的根，这种根叫作原分式方程的增根，应舍去. 检验一个数是否是方程的根的过程，称为验根.

在上面的求解中，$x=0$ 是分式方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x^2+x}$ 的增根.

思考　引导学生认识解分式方程时产生增根的原因.

思考

解分式方程为什么会产生增根?

在分式方程两边同乘一个整式，由于这个整式的值可能为 0，这就可能产生增根.

本节我们研究可化为一元一次方程的分式方程.

例 1 与例 2 对比，表明解分式方程可能产生增根，因而需要验根.

例 1　解方程 $\frac{2x-1}{3x+1}=\frac{1}{2}$.

解　方程两边同乘 $2(3x+1)$，得

$$2(2x-1)=3x+1.$$

去括号，得　$4x-2=3x+1$.

移项，化简，得　$x=3$.

将 $x=3$ 代入原方程检验，得

$$左边=\frac{2\times3-1}{3\times3+1}=\frac{1}{2}=右边.$$

所以原方程的解是 $x=3$.

除了直接代入方程验根，可以根据增根产生的原因探讨验根的方法.

例 2　解方程 $\frac{x}{x-1}+1=\frac{1}{x-1}$.

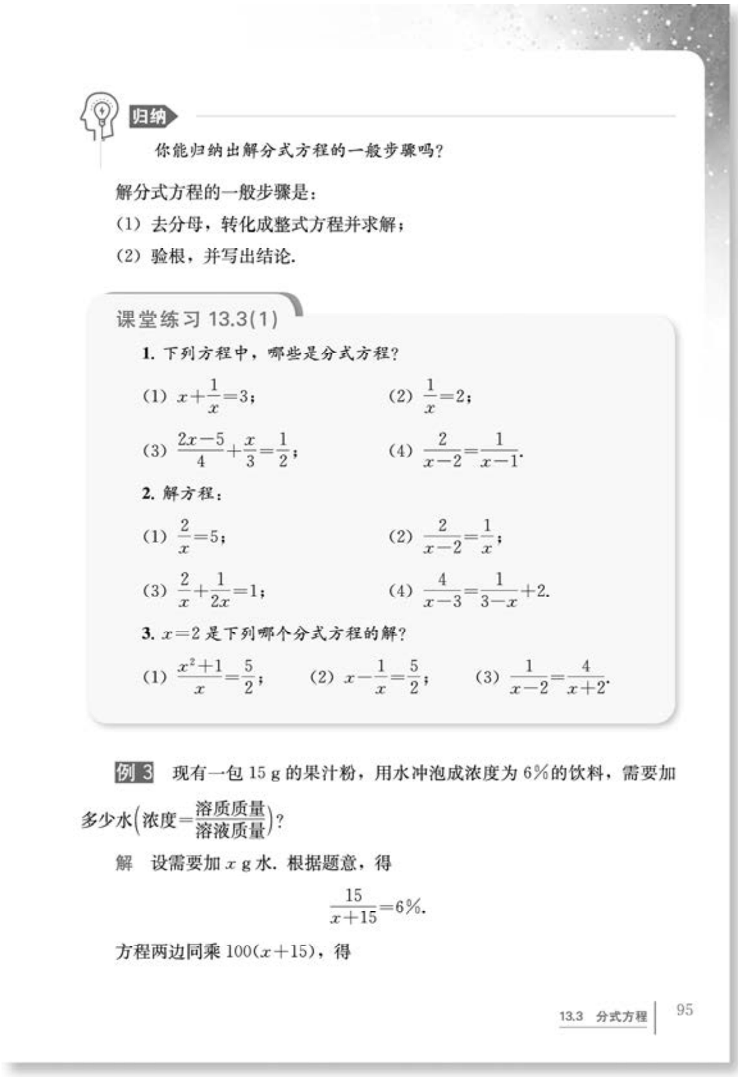
解　方程两边同乘 $x-1$，得 $x+(x-1)=1$.

移项，化简，得　$x=1$.

将 $x=1$ 代入原方程检验，此时方程中分式的分母的值为 0，分式无意义.

所以 $x=1$ 不是原方程的解. 原方程无解.

94　第13章　分式


归纳

你能归纳出解分式方程的一般步骤吗？

解分式方程的一般步骤是：

(1) 去分母，转化成整式方程并求解；

(2) 验根，并写出结论.

课堂练习 13.3(1)

1. 下列方程中，哪些是分式方程？

(1) $x+\frac{1}{x}=3$； (2) $\frac{1}{x}=2$；

(3) $\frac{2x-5}{4}+\frac{x}{3}=\frac{1}{2}$； (4) $\frac{2}{x-2}=\frac{1}{x-1}$.

2. 解方程：

(1) $\frac{2}{x}=5$； (2) $\frac{2}{x-2}=\frac{1}{x}$；

(3) $\frac{2}{x}+\frac{1}{2x}=1$； (4) $\frac{4}{x-3}=\frac{1}{3-x}+2$.

3. $x=2$ 是下列哪个分式方程的解？

(1) $\frac{x^2+1}{x}=\frac{5}{2}$； (2) $x-\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$； (3) $\frac{1}{x-2}=\frac{4}{x+2}$.

例 3 现有一包 15 g 的果汁粉，用水冲泡成浓度为 6% 的饮料，需要加多少水$\left(\text{浓度}=\frac{\text{溶质质量}}{\text{溶液质量}}\right)$？

解 设需要加 x g 水. 根据题意，得

$$\frac{15}{x+15}=6\%.$$

方程两边同乘 $100(x+15)$，得

13.3 分式方程 95

通过例 1 与例 2，可以引导学生归纳解分式方程的一般步骤.

课堂练习 13.3(1)

1. (1)(2)(4)为分式方程.

2. (1) $x=\frac{2}{5}$.

(2) $x=-2$.

(3) $x=\frac{5}{2}$.

(4) $x=\frac{11}{2}$.

3. $x=2$ 是方程(1)的解.

（以下分析对应课本第 95～98 页）

本课教学重点

会求解可化为一元一次方程的分式方程的应用题.

本课教学建议

（1）在列分式方程解应用题的过程中，关键在于列方程. 选定一个未知量，通过确定等量关系列出方程，再予以求解.

（2）分式方程在现实生活中有较多的应用场景. 教学时，鼓励学生改编或创编问题，并列方程解答问题，培养学生在现实生活中发现问题、提出问题和解决问题的能力.

归纳

你能归纳出解分式方程的一般步骤吗？

解分式方程的一般步骤是：

（1）去分母，转化成整式方程并求解；

（2）验根，并写出结论.

课堂练习 13.3(1)

1. 下列方程中，哪些是分式方程？

（1）$x+\frac{1}{x}=3$；　（2）$\frac{1}{x}=2$；

（3）$\frac{2x-5}{4}+\frac{x}{3}=\frac{1}{2}$；　（4）$\frac{2}{x-2}=\frac{1}{x-1}$.

2. 解方程：

（1）$\frac{2}{x}=5$；　（2）$\frac{2}{x-2}=\frac{1}{x}$；

（3）$\frac{2}{x}+\frac{1}{2x}=1$；　（4）$\frac{4}{x-3}=\frac{1}{3-x}+2$.

3. $x=2$ 是下列哪个分式方程的解？

（1）$\frac{x^2+1}{x}=\frac{5}{2}$；　（2）$x-\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$；　（3）$\frac{1}{x-2}=\frac{4}{x+2}$.

例 3 现有一包 15 g 的果汁粉，用水冲泡成浓度为 6% 的饮料，需要加多少水$\left(浓度=\frac{溶质质量}{溶液质量}\right)$？

解　设需要加 x g 水. 根据题意，得

$$\frac{15}{x+15}=6\%.$$

方程两边同乘 $100(x+15)$，得

13.3 分式方程　95

本课内容分析

例 3 是浓度问题. 需对所涉及的溶质、溶液等名词作具体解释，教师应示范应用题的解题步骤和书写格式. 本题基于浓度建立方程.

$$1\,500=6(x+15).$$

解得 $$x=235.$$

经检验，$x=235$ 是原方程的解.

答：需要加 235 g 水.

例 4，基于所购电器的数量建立方程.

例 4 某商店促销，购买某款电器每台可享受减免 300 元的优惠. 若同样用 33 000 元购买若干台此款电器，优惠后可购买的台数比优惠前多 10%，这款电器优惠前的售价为多少元?

分析　根据“优惠后可购买的台数比优惠前多 10%”，可以得到“优惠前 33 000 元购买的台数×(1+10%)=优惠后 33 000 元购买的台数”.

处理实际问题时，要注意求得的未知数必须符合实际意义.

解　设该款电器优惠前的售价为 x 元. 根据题意，可得

$$\frac{33\,000}{x}\times(1+10\%)=\frac{33\,000}{x-300},$$

即 $$\frac{1.1}{x}=\frac{1}{x-300}.$$

方程两边同乘 $x(x-300)$，得

$$1.1(x-300)=x.$$

解得 $$x=3\,300.$$

经检验，$x=3\,300$ 是原方程的解.

答：这款电器优惠前的售价为 3 300 元.

例 5 是关于速度、时间、路程三者之间关系的问题. 本题基于两车到达目的地所用的时间差建立方程.

例 5 甲地至乙地的铁路路程约 300 km. 如果行驶在这一路段的快车与慢车的车速之比为 5∶3，快车比慢车快 1 h 到达，那么甲地至乙地的快车与慢车的速度各是多少?

分析　根据“快车与慢车的车速之比为 5∶3”，若设快车的速度是 $5x$ km/h，则慢车的速度是 $3x$ km/h. 由速度、时间、路程之间的关系，可列出表 13-1：

96　第13章　分式

表 13-1

车型	速度/(km/h)	路程/km	时间/h
快车	$5x$	300	$\frac{300}{5x}$
慢车	$3x$	300	$\frac{300}{3x}$

根据“快车比慢车快 1 h 到达”，可以得到“慢车所用时间－快车所用时间＝1 h”，据此可以列出方程.

解　设甲地至乙地的快车的速度是 $5x$ km/h，则慢车的速度是 $3x$ km/h.

根据题意，可得

$$\frac{300}{3x}-\frac{300}{5x}=1.$$

方程两边同乘 $15x$，得

$$300\times5-300\times3=15x.$$

解得　　$x=40.$

经检验，$x=40$ 是原方程的解.

$5x=200$，$3x=120$.

答：甲地至乙地的快车的速度是 200 km/h，慢车的速度是 120 km/h.

课堂练习 13.3(2)

1. 某中学七年级学生到距离学校 15 km 的青少年营地活动，先遣部队的行进速度是大部队行进速度的 1.2 倍，预计比大部队早 0.5 h 到达目的地. 求先遣部队与大部队各自的行进速度.

2. 甲、乙两单位为爱心基金捐款，甲单位捐款 4 800 元，乙单位捐款 6 000 元. 已知乙单位捐款人数比甲单位多 10 人，且两单位人均捐款额相等. 这两单位共有多少人捐款？人均捐款额是多少？

13.3 分式方程　97

教师在选题时，注意所举的问题应为可以化为一元一次方程的分式方程.

课堂练习 13.3(2)

1. 设大部队的速度为 x km/h，则先遣部队的速度为 $1.2x$ km/h. 根据题意，可得 $\frac{15}{x}-\frac{15}{1.2x}=\frac{1}{2}$.

解得 $x=5$.

经检验，$x=5$ 是原方程的解.

所以 $1.2x=1.2\times5=6$.

答：先遣部队的行进速度为 6 km/h，大部队的行进速度为 5 km/h.

2. 设甲单位有 x 人捐款，则乙单位有 $(x+10)$ 人捐款. 根据题意，可得 $\frac{4\,800}{x}=\frac{6\,000}{x+10}$.

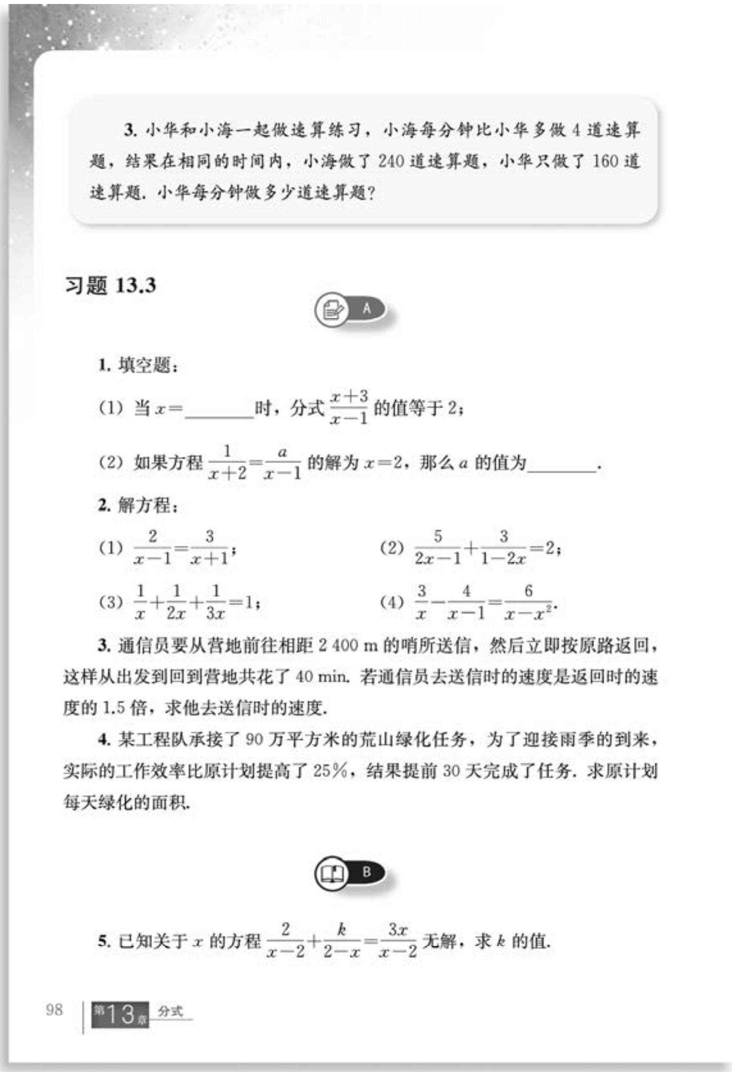
解得 $x=40$.

经检验，$x=40$ 是原方程的解.

所以 $x+10=50$.

所以共有 $40+50=90$(人)，人均捐款额是$(4\,800+6\,000)\div90=120$(元).

答：这两单位共有 90 人捐款，人均捐款额是 120 元.



3. 小华和小海一起做速算练习，小海每分钟比小华多做 4 道速算题，结果在相同的时间内，小海做了 240 道速算题，小华只做了 160 道速算题. 小华每分钟做多少道速算题?

习题 13.3

A

1. 填空题：

(1) 当 $x=$______时，分式 $\dfrac{x+3}{x-1}$ 的值等于 2；

(2) 如果方程 $\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{a}{x-1}$ 的解为 $x=2$，那么 a 的值为______.

2. 解方程：

(1) $\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{3}{x+1}$；　　(2) $\dfrac{5}{2x-1}+\dfrac{3}{1-2x}=2$；

(3) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3x}=1$；　　(4) $\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{6}{x-x^2}$.

3. 通信员要从营地前往相距 2 400 m 的哨所送信，然后立即按原路返回，这样从出发到回到营地共花了 40 min. 若通信员去送信时的速度是返回时的速度的 1.5 倍，求他去送信时的速度.

4. 某工程队承接了 90 万平方米的荒山绿化任务，为了迎接雨季的到来，实际的工作效率比原计划提高了 25%，结果提前 30 天完成了任务. 求原计划每天绿化的面积.

B

5. 已知关于 x 的方程 $\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{k}{2-x}=\dfrac{3x}{x-2}$ 无解，求 k 的值.

98　第13章 分式

3. 设小华每分钟做 x 道速算题. 根据题意，可得 $\dfrac{240}{x+4}=\dfrac{160}{x}$.

解得 $x=8$.

经检验，$x=8$ 是原方程的解.

答：小华每分钟做 8 道速算题.

习题 13.3

1.（1）5.

（2）$\dfrac{1}{4}$.

2.（1）$x=5$.

（2）$x=1$.

（3）$x=\dfrac{11}{6}$.

（4）$x=3$.

3. 设通信员返回的速度为 x m/min，则他去送信时的速度为 $1.5x$ m/min. 根据题意，可得 $\dfrac{2\ 400}{1.5x}+\dfrac{2\ 400}{x}=40$.

解得 $x=100$.

经检验，$x=100$ 是原方程的解.

所以 $1.5x=150$.

答：他去送信时的速度为 150 m/min.

4. 设原计划每天绿化的面积为 x 万平方米. 根据题意，可得 $\dfrac{90}{x}-\dfrac{90}{(1+25\%)x}=30$.

解得 $x=0.6$.

经检验，$x=0.6$ 是原方程的解.

答：原计划每天绿化的面积为 0.6 万平方米.

5. -4. 提示：根据题意，可得 $2-k=3x$，解得 $x=\dfrac{2-k}{3}$. 因为原分式方程无解，则原分式方程有增根，所以 $x=2$，即 $x=\dfrac{2-k}{3}=2$，解得 $k=-4$.

6. 某班组织登山活动，分甲、乙两组从山脚下沿着同一条道路，同时向山顶进发. 已知甲、乙两组行进同一段路所用的时间之比为 2∶3.

（1）直接写出甲、乙两组行进的速度之比；

（2）当甲组到达山顶时，乙组行进到山腰 A 处，且 A 处离山顶的路程尚有 1.2 km，求山脚离山顶的路程.

6.（1）3∶2.

（2）设山脚离山顶的路程为 x km. 根据题意，可得 $\frac{x}{x-1.2}=\frac{3}{2}$.

解得 $x=3.6$.

经检验，$x=3.6$ 是原方程的解.

答：山脚离山顶的路程为 3.6 km.

复习题

1. (1) $x\neq\frac{2}{3}$.

(2) $\frac{1}{x-2}$.

(3) $\frac{1}{2x}$.

(4) $\frac{2}{3a}$.

(5) x.

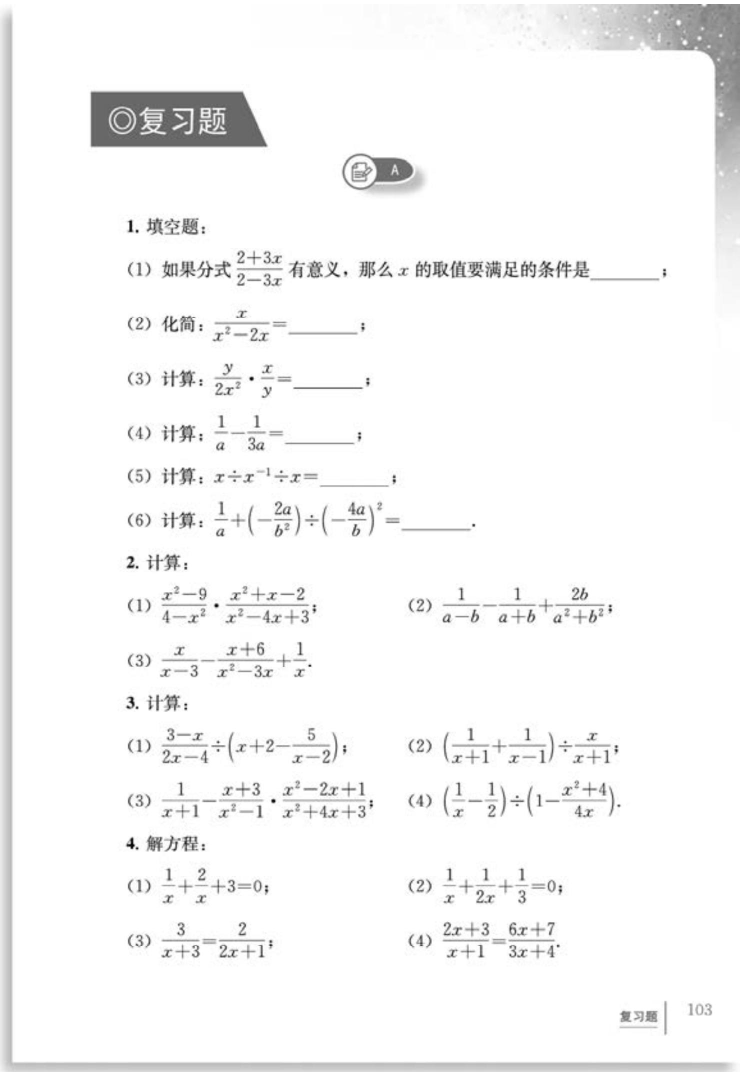
(6) $\frac{7}{8a}$.

2. (1) $-\frac{x+3}{x-2}$. 提示：原式 $=-\frac{(x+3)(x-3)}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)(x-1)}=-\frac{x+3}{x-2}$.

(2) $\frac{4a^2b}{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}$.

提示：原式 $=\frac{2b}{a^2-b^2}+\frac{2b}{a^2+b^2}$

$=\frac{4a^2b}{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}$.



◎复习题

A

1. 填空题：

(1) 如果分式 $\frac{2+3x}{2-3x}$ 有意义，那么 x 的取值要满足的条件是______；

(2) 化简：$\frac{x}{x^2-2x}=$______；

(3) 计算：$\frac{y}{2x^2}\cdot\frac{x}{y}=$______；

(4) 计算：$\frac{1}{a}-\frac{1}{3a}=$______；

(5) 计算：$x\div x^{-1}\div x=$______；

(6) 计算：$\frac{1}{a}+\left(-\frac{2a}{b^2}\right)\div\left(-\frac{4a}{b}\right)^2=$______.

2. 计算：

(1) $\frac{x^2-9}{4-x^2}\cdot\frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$；　(2) $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}+\frac{2b}{a^2+b^2}$；

(3) $\frac{x}{x-3}-\frac{x+6}{x^2-3x}+\frac{1}{x}$.

3. 计算：

(1) $\frac{3-x}{2x-4}\div\left(x+2-\frac{5}{x-2}\right)$；　(2) $\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)\div\frac{x}{x+1}$；

(3) $\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-2x+1}{x^2+4x+3}$；　(4) $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\div\left(1-\frac{x^2+4}{4x}\right)$.

4. 解方程：

(1) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+3=0$；　(2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{3}=0$；

(3) $\frac{3}{x+3}=\frac{2}{2x+1}$；　(4) $\frac{2x+3}{x+1}=\frac{6x+7}{3x+4}$.

复习题　103

(3) $\frac{x+3}{x}$. 提示：原式 $=\frac{x^2-x-6+x-3}{x(x-3)}=\frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)}=\frac{x+3}{x}$.

3. (1) $\frac{1}{-2(x+3)}$. (2) $\frac{2}{x-1}$. (3) $\frac{2}{(x+1)^2}$. (4) $\frac{2}{x-2}$.

4. (1) $x=-1$. (2) $x=-\frac{9}{2}$. (3) $x=\frac{3}{4}$. (4) $x=-\frac{5}{4}$.

5. 甲、乙两名学生各在电脑上输入 1 500 个汉字. 乙的输入速度是甲的 3 倍，且比甲少用 20 min 完成任务. 他们两人平均每分钟各输入多少个汉字？

6. 已知 A、B 两地相距 120 km，甲、乙两人都要从 A 地前往 B 地. 若甲所用的时间比乙少 1 h，且甲的速度是乙的 1.5 倍，求甲、乙各自的速度.

B

7. 如果关于 x 的方程 $\frac{ax+1}{x-1}=1$ 无解，那么 $a=$________.

8. 先化简，再求值：$\frac{x^2+xy}{x^2-2xy-3y^2}\cdot\frac{3y-x}{x-y}+(x^{-1}+y^{-1})\div(x^{-1}-y^{-1})$，其中 $x=2$，$y=-1$.

9. 化简：$\frac{x^2-9}{x+3}$.

甲的解法：$\frac{x^2-9}{x+3}=\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}=x-3$.

乙的解法：$\frac{x^2-9}{x+3}=\frac{(x^2-9)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\frac{(x^2-9)(x-3)}{x^2-9}=x-3$.

甲、乙两人的解法是否都正确？为什么？

104 第13章 分式

5. 设甲平均每分钟输入 x 个汉字，那么乙平均每分钟输入 $3x$ 个汉字. 根据题意，可得 $\frac{1\,500}{3x}=\frac{1\,500}{x}-20$.

解得 $x=50$.

经检验，$x=50$ 是原方程的解.

所以 $3x=150$.

答：甲平均每分钟输入 50 个汉字，乙平均每分钟输入 150 个汉字.

6. 设乙的速度为 x km/h，则甲的速度为 $1.5x$ km/h. 根据题意，可得 $\frac{120}{x}-\frac{120}{1.5x}=1$.

解得 $x=40$.

经检验，$x=40$ 是原方程的解.

所以 $1.5x=60$.

答：甲的速度为 60 km/h，乙的速度为 40 km/h.

7. -1 或 1.

8. 化简得 $\frac{2x+y}{y-x}$，将 $x=2$，$y=-1$ 代入得 -1.

9. 甲的解法正确，乙的解法不正确. 利用分式基本性质进行约分，分子和分母同乘同一个值不为 0 的整式，分式的值不变. 乙的解法中分子和分母同乘 $x-3$，不能保证 $x\neq3$，即不能保证 $x-3$ 的值不为 0，因此乙的解法是不正确的.

第 14 章　图形的运动

一、本章概述

1. 总体要求

图形的运动是初中阶段“图形与几何”领域的一个主题，教学中指导学生从运动变化的角度学习几何图形运动前后的变化关系. 本章主要以直观与操作相结合，发现图形运动的对称性. 图形的运动规律的几何论证将在引入平面直角坐标系后作进一步阐述.

本章从平移、旋转、轴对称这三种基本运动出发，让学生理解几何图形在平移、旋转和轴对称下的变化规律和变化中的不变量. 通过本章的学习，让学生学会用运动的观点看待图形，感知几何图形的对称美，为今后研究图形的全等和相似奠定基础.

2. 课时安排

本章共 11 课时， 具体课时分配建议如下：

章节名	建议课时	具体课时分配建议
14.1 平移	2	平移　2 课时
习题课	1	
14.2 旋转	1	旋转　1 课时
习题课	1	
14.3 轴对称	2	图形的翻折与轴对称图形　1 课时
		轴对称　1 课时
习题课	1	
14.4 中心对称	1	中心对称　1 课时
复习与小结	2	

3. 内容编排与特色

本章共四节，分别是“14.1 平移”“14.2 旋转”“14.3 轴对称”“14.4 中心对称”.

本章内容按照“三种运动、两种对称”的体系编排. “14.1 平移”“14.2 旋转”“14.3 轴对称”对应三种基本运动. 这三节都以学生生活中的实例为背景，由操作出发，通过观察，感悟三种图形运动的概念，总结三种图形运动的性质，最后进行简单应用，培养学生用数学的眼光观察现实世界，用数学的思维思考现实世界的素养. “14.4 中心对称”对应一种特殊的旋转运动——旋转 180°.

“14.3 轴对称”与“14.4 中心对称”对应两种对称，主要要求学生掌握与运动有关的对称图形的特征和性质，感受图形的对称美.

上海“二期课改”教科书只列三节，分别对应三种基本运动，将“中心对称”纳入“旋转”一节. 而本章把“中心对称”单列成一节，强调旋转 180°运动与中心对称. 此外，上海“二期课改”教科书对图形的运动是通过几何直观定义的，而本章对图形的运动是通过点的运动定义的. 只要引入平面直角坐标系，就可以通过坐标的变化来刻画点的运动，基于本章的定义就可以对图形的运动有更严密的数学刻画，更好地把握图形运动的本质.

4. 教学提示

图形的三种运动(平移、旋转与轴对称)是基于点的运动，因此教师应该重视引导学生理解点的运动和图形运动之间的关系. 同样地，引导学生理解三种图形运动的基本概念和基本性质. 教学中重视对两种对称图形(轴对称图形和中心对称图形)概念的理解与辨析，引导学生明确两者之间的联系与区别.

考虑到七年级学生的认知水平、年龄特征，教科书中对这三种基本运动的研究仅限于操作的层面，主要是通过观察和实验对图形的运动获得形象认知，观察图形运动过程中的变量和不变量，找出规律. 教学中对于图形运动的画图要求不宜太高，如平移的画图应只要求学生会在方格纸上画沿横、纵方向平移后的图形等.

教学中教师可以合理地使用多媒体辅助教学，帮助学生理解相关知识点，要重视学生动手操作能力的培养.

5. 评价建议

关注学生对图形运动的基本概念和基本性质的理解与掌握. 对于图形的平移、旋转与轴对称，学生应理解三种基本运动的基本特征，知道运动过程中的不变量，理解几何图形的对称性.

重视学生对图形运动的画图能力的培养. 画图能力是初中生必备的数学基本技能之一，在本章中应关注对学生画三种图形运动后的图形的能力的培养，这也是为后续的学习与问题解决奠定基础.

发展学生的抽象能力. 学生经历对现实生活中图形运动的抽象过程，能认识平移、旋转、轴对称的特征，体会运动前后图形的变与不变，感受数学的美，逐步形成空间观念和几何直观.

二、教科书分析与教学建议

14.1 平移

本节教学目标

（1）理解图形平移的概念，知道图形的平移距离、平移方向等概念.

（2）通过经历观察、测量等活动的过程，归纳出图形平移后对应点、对应角、对应线段的性质以及图形的形状、大小保持不变的特点. 掌握基本性质：一个图形和它经过平移所得的图形中，两组对应点的连线平行(或在同一直线上)且相等.

（3）通过理解图形的平移与图形上的点的平移之间的关系，会在方格纸上画出经过平移后的图形，体会平移变换的思想.

（以下分析对应课本第 106～109 页）

本课教学重点

理解经过平移运动后，图形的形状和大小保持不变.

本课教学建议

（1）教学中引导学生结合生活实例，形成图形平移的直观印象，再基于点的移动引入图形平移的概念. 这样是从学生的认知水平出发设计问题，易于学生理解概念，符合学生的认知规律.

（2）在介绍图形平移的生活实例时，应先将具体的物体抽象为平面图形，如将移门抽象为长方形，然后将具体物体的移动抽象为平面图形的移动，如将移门的移动抽象为长方形的移动. 将长方形作为一种特殊图形，进一步引出一般图形的平移，这样的过程有助于学生对平移概念的理解.

14.1 平移

图 14-1-1 是生活中常见的衣橱移门，当推动门把手时，门会从一个位置沿轨道移动到另一个位置. 如果把这扇门看作一个长方形，那么门的移动就是这个长方形移动到另一个位置.

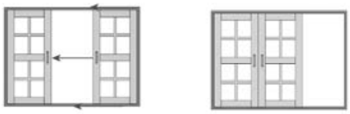


图 14-1-1

观察门移动的过程，可以得到以下结论：

(1) 在移动门时，门的大小不会改变；

(2) 如果门把手向左移动 0.75 m，那么这扇门的其他部分也向左移动 0.75 m.

在平面上，将图形上的所有点都按照某个方向作相同距离的位置移动，叫作图形的平移.

如图 14-1-2，移动三角形 ABC 得到三角形 $A_1B_1C_1$. 平移的方向为射线 AA_1 的方向，平移的距离是线段 AA_1 的长度. 其中，点 A 与点 A_1 是对应点；线段 AB 与线段 A_1B_1 是对应线段，它们的长度相等；$\angle BAC$ 与 $\angle B_1A_1C_1$ 是对应角，它们的大小也相等.

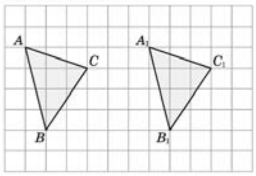


图 14-1-2

本课内容分析

基于具体实例，理解平面图形的平移的概念.

图形的平移是通过点的平移定义的.

从上面的例子可以得到图形的平移具有以下性质：

（1）图形平移后，每组对应点之间的距离相等；

（2）对应点所连接的线段平行（或在同一直线上）且相等；

（3）对应角的大小相等；对应线段平行（或在同一直线上）且相等；

（4）平移后得到的图形与原图形形状相同，大小相等.

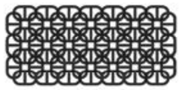


图 14-1-3

图形平移前后对应点之间的距离叫作图形平移的距离.

图形的平移在日常生活中有着广泛的应用，图 14-1-3 是由一个基本图形通过多次平移后得到的组合图形.

操作

设计一个图案，使其由一个基本图形多次平移后组合得到.

例 1 如图 14-1-4，将三角形 ABC 向右平移 4 格，再向下平移 3 格后的图形为三角形 $A_1B_1C_1$.

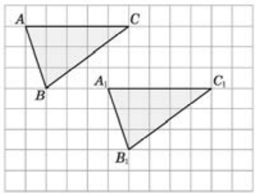


图 14-1-4

（1）点 B、C 的对应点分别是哪两个点？

（2）线段 AC 的对应线段是哪条线段？它们的长度相等吗？$\angle ABC$ 的对应角是哪个角？它们的大小相等吗？

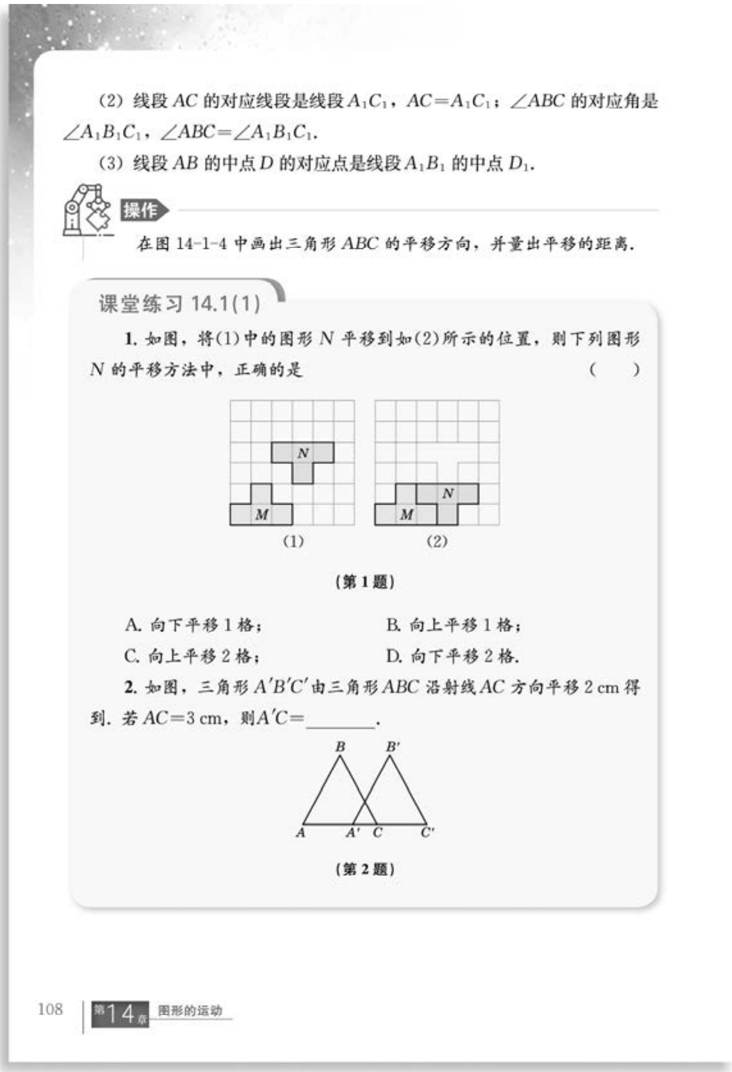
（3）如果线段 AB 的中点是 D，那么能确定它的对应点的位置吗？

解 （1）点 B、C 的对应点分别是点 B_1、C_1.

教师可以引导学生讨论对应点、对应线段、对应角这些几何元素之间的关系，归纳所发现的结论. 在教学活动设计上，可采用小组分工合作的形式.

操作 调动学生发挥想象力，在班级中展示学生的设计，引导学生感悟数学图形的美.

例 1，通过三角形的平移运动，由学生确定对应点、对应线段、对应角，加深学生对图形平移的有关概念和性质的理解与掌握.



（2）线段 AC 的对应线段是线段 A_1C_1，$AC=A_1C_1$；$\angle ABC$ 的对应角是 $\angle A_1B_1C_1$，$\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$.

（3）线段 AB 的中点 D 的对应点是线段 A_1B_1 的中点 D_1.

操作

在图 14-1-4 中画出三角形 ABC 的平移方向，并量出平移的距离.

课堂练习 14.1(1)

1. 如图，将(1)中的图形 N 平移到如(2)所示的位置，则下列图形 N 的平移方法中，正确的是（　　）

(1)　　(2)

（第 1 题）

A. 向下平移 1 格；　　B. 向上平移 1 格；

C. 向上平移 2 格；　　D. 向下平移 2 格.

2. 如图，三角形 $A'B'C'$ 由三角形 ABC 沿射线 AC 方向平移 2 cm 得到. 若 $AC=3$ cm，则 $A'C=$________.

（第 2 题）

操作　目的在于加深学生对于平移方向和平移距离的理解.

课堂练习 14.1(1)

1. D.

2. 1 cm.

3.（1）右；9；下；3.（答案不唯一）

（2）略.

（以下分析对应课本第 109～111 页）

本课教学重点

会在方格纸上画出图形按一定要求平移后的图形.

本课教学建议

（1）只限于在方格纸上画出平移后的图形.

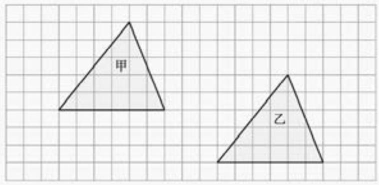
（2）引导学生区分平移前后的图形.

（3）强调一个多边形的平移运动可以通过各个顶点的平移运动得到，因此关键是找到对应顶点.

3. 如图，每个小方格的边长都是 1 个单位长度. 平移后三角形甲与三角形乙重合.

（1）把三角形甲向______平移______个单位长度，再向______平移______个单位长度，使与三角形乙重合.

（2）要使这两个三角形重合，你还有其他平移的方法吗？请说出其中一种.



（第 3 题）

例 2 如图 14-1-5，将等边三角形 FBD 分割成 4 个小等边三角形，假设它们的边长为 1.3 cm，你能通过平移三角形 ABC 得到其他三角形吗？若能，请说出平移的方向和距离.

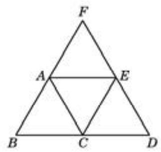


图 14-1-5

解 将三角形 ABC 沿着射线 BA 方向平移 1.3 cm，可以得到三角形 FAE；将三角形 ABC 沿着射线 BC 方向平移 1.3 cm，可以得到三角形 ECD.

不能通过平移三角形 ABC 得到三角形 ACE.

例 3 如图 14-1-6，请回答下列问题：

（1）将图中四边形 $ABCD$ 向右平移 6 格，画出平移后的图形 $A'B'C'D'$.

（2）线段 BC 与线段 $B'C'$ 之间有怎样的位置关系？

本课内容分析

图形平移的前提是确定平移的方向和平移的距离.

(3) 线段 AB 与线段 $A'B'$、$\angle B$ 与 $\angle B'$ 各有怎样的大小关系？

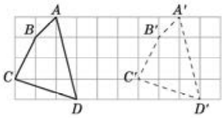


图 14-1-6

解 (1) 分别将点 A、B、C、D 向右平移 6 格，得到对应点 A'、B'、C'、D'，再依次连接 $A'B'$、$B'C'$、$C'D'$、$D'A'$，则四边形 $A'B'C'D'$ 就是将四边形 $ABCD$ 向右平移 6 格所得的四边形.

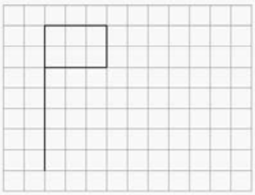
(2) 因为线段 BC 与线段 $B'C'$ 是对应线段，所以 $BC /\!/ B'C'$.

(3) 因为线段 AB 与线段 $A'B'$ 是对应线段，所以 $AB = A'B'$；又因为 $\angle B$ 和 $\angle B'$ 是对应角，所以 $\angle B = \angle B'$.

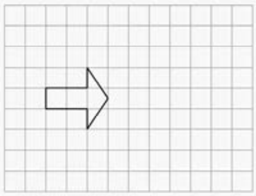
根据图形平移的性质，画出平移后的四边形的关键是画出平移后四边形的四个顶点.

课堂练习 14.1(2)

1. 如图，把旗状图形向右平移 2 格，画出平移后的图形.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，把箭头图形先向右平移 4 格，再向下平移 2 格，画出平移后的图形.

课堂练习 14.1(2)

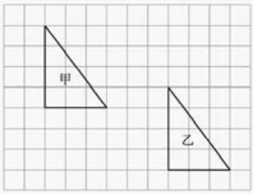
1～2. 略.

3. 图略；平移的距离约为 3.3 cm.

习题 14.1

1. A.

3. 如图，怎样将三角形甲平移到三角形乙的位置？画出平移的方向，量出平移的距离(结果精确到 0.1 cm).

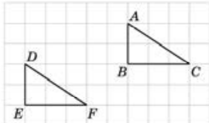


(第 3 题)

习题 14.1

A

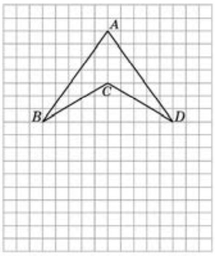
1. 如图，每个小方格的边长都是 1 个单位长度. 将三角形 ABC 平移到三角形 DEF 的位置，下面正确的平移步骤是 （　）



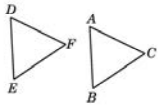
(第 1 题)

A. 先把三角形 ABC 向左平移 5 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度；
B. 先把三角形 ABC 向右平移 5 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度；
C. 先把三角形 ABC 向左平移 5 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度；
D. 先把三角形 ABC 向右平移 5 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度.

2. 把图中的图形向下平移 3 格，画出平移后的图形，并写出点 A、B、C、D 的对应点.



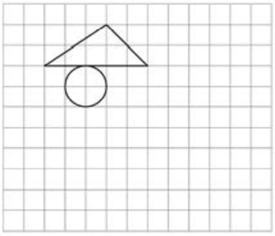
（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，三角形 ABC 和三角形 DEF 都是等边三角形，其中一个等边三角形经过平移后成为另一个等边三角形. 指出点 A、B、C 的对应点，线段 AB、BC、AC 的对应线段和 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对应角.

4. 把图中的图形先向下平移 2 格，再向右平移 4 格，画出平移后的图形.



（第 4 题）

112 | 第 14 章 图形的运动

2. 略.

3. 点 A 的对应点是点 D，点 B 的对应点是点 E，点 C 的对应点是点 F；线段 AB 的对应线段是线段 DE，线段 BC 的对应线段是线段 EF，线段 AC 的对应线段是线段 DF；$\angle A$ 的对应角是 $\angle D$，$\angle B$ 的对应角是 $\angle E$，$\angle C$ 的对应角是 $\angle F$.

4. 略.

5.（1）1.

（2） 2 对．AB 与 DE，AC 与 DF.

（3）$1:1:1$.

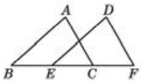
B

5. 如图，已知在三角形 ABC 中，$BC=4$ cm，把三角形 ABC 沿射线 BC 方向平移 2 cm，得到三角形 DEF.

（1）图中与 $\angle B$ 相等的角有多少个？

（2）图中共有多少对相互平行且长度相等的线段？请把它们写出来．

（3）求 $BE:EC:CF$.



（第 5 题）

14.2 旋转

本节教学目标

（1）了解图形旋转的概念，理解旋转中心、旋转角的意义.
（2）经历具体的操作活动，初步体会图形在旋转运动过程中的不变性.
（3）会画出简单图形绕某一点旋转运动后的图形.

（以下分析对应课本第 114～117 页）

本课教学重点

（1）理解经过旋转运动后，图形的形状和大小保持不变，以及对应点、对应线段、对应角的基本性质.

（2）会画出简单图形绕某一点旋转运动后的图形.

本课教学建议

（1）通过直观操作与演示，总结旋转运动的特点，把握旋转中心与旋转角的概念，归纳图形旋转的相关性质.

（2）重视信息技术的演示或实物的操作，让学生感悟旋转变化的基本特征，体会感知图形变化是需要参照物的.

（3）在举例时，注意应将生活中的三维实例抽象为平面图形.

本课内容分析

基于生活实例，形成图形旋转的直观印象，获得感性认识. 归纳这一类图形运动的共同特征.

图形的旋转也是通过点的运动定义的.

通过操作与演示，引导学生在动态变化中提取“旋转中心”“旋转角”. 难点是确定旋转角的大小，理解图形的旋转不变性.

14.2 旋转

在日常生活中，我们会遇到图形的转动. 如图 14-2-1，电扇的叶片从位置 A 绕点 O 按顺时针方向转动 150°，转动到位置 B；铣床的铣刀从位置 C 绕点 O' 按顺时针方向转动 40°，转动到位置 D.

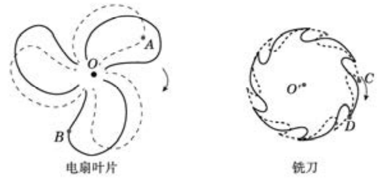


图 14-2-1

从上述例子可以看到，电扇叶片的转动、铣床铣刀的转动，虽然转动的角度各不相同，但它们有两个共同的特点：(1)图形都围绕着一个定点作转动；(2)都有一个转动的角度. 由此可以得到图形旋转的定义.

在平面上，将一个图形上的所有点绕一个定点按某个方向转动一个角度，这样的运动叫作图形的旋转，这个定点叫作旋转中心，转动的角叫作旋转角.

“某个方向”是指“顺时针方向”或者“逆时针方向”. 图形的旋转具有下列特点：旋转前的图形与旋转后的图形形状相同，大小相等.

例如，在图 14-2-2 中，三角形 ABC 绕点 O 按顺时针方向旋转一个角度成为三角形 $A_1B_1C_1$，点 O 是旋转中心，$\angle AOA_1$ 是旋转角. 在三角形 ABC 的旋转中，点 A 与点 A_1 是对应点；线段 AB 与线段 A_1B_1 是对应线段，它们的长度相等；$\angle BAC$ 与 $\angle B_1A_1C_1$ 是对应角，这两个角的大小也相等.

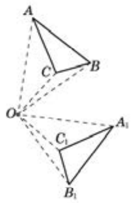


图 14-2-2

114 第14章 图形的运动

在图 14-2-2 中，你还能找出其他的对应线段和对应角吗？还有其他的旋转角吗？

操作

如图 14-2-3，将一张正方形纸片两条对角线的公共点用大头针钉住. 旋转正方形，至少旋转多少度才可以使它与初始位置的正方形重合？每旋转多少度会重复上述现象？

图 14-2-3

例 1 如图 14-2-4，O 是三角形 ABC 内一点，将一枚图钉钉在点 O 处，把三角形 ABC 按逆时针方向旋转成为三角形 $A_1B_1C_1$.

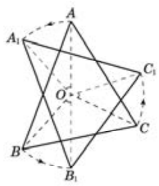


图 14-2-4

(1) 确定这个旋转的旋转中心和旋转角；

(2) 找出点 A、B、C 的对应点，并判断每一组对应点到旋转中心的距离是否相等；

(3) 找出线段 AB、BC、AC 的对应线段，并判断每一组对应线段是否相等；

(4) 找出 $\angle ABC$、$\angle BAC$ 和 $\angle BCA$ 的对应角，并判断每一组对应角是否相等.

解 (1) 旋转中心是点 O，旋转角为 $\angle AOA_1$（或 $\angle BOB_1$、$\angle COC_1$）.

(2) 点 A 与点 A_1 是一组对应点，$OA=OA_1$；点 B 与点 B_1 是一组对应点，$OB=OB_1$；点 C 与点 C_1 是一组对应点，$OC=OC_1$.

(3) 线段 AB 与线段 A_1B_1 是一组对应线段，$AB=A_1B_1$；线段 BC 与线段 B_1C_1 是一组对应线段，$BC=B_1C_1$；线段 AC 与线段 A_1C_1 是一组对应线段，$AC=A_1C_1$.

(4) $\angle ABC$ 与 $\angle A_1B_1C_1$ 是一组对应角，$\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$；$\angle BAC$ 与 $\angle B_1A_1C_1$ 是一组对应角，$\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$；$\angle BCA$ 与 $\angle B_1C_1A_1$ 是一组对应角，$\angle BCA=\angle B_1C_1A_1$.

操作 通过操作，引导学生发现绕正方形中心旋转正方形时，旋转90°就可以使它与初始位置的正方形重合，且每旋转 90°都会发生重合.

思考　通过思考与讨论，引导学生归纳总结出图形旋转的性质.

例 2，画三角形经旋转后的图形的关键是画出顶点旋转后的对应点.

通过例题，使学生体会顶点的旋转角度相同且图形中各点的旋转角度也相同.

思考

如果把图 14-2-4 中的三角形 ABC 绕点 O 按顺时针方向旋转 $90°$，那么线段 OA、OB、OC 旋转的角度是多少？

上面一些例子告诉我们，图形的旋转具有以下性质：

(1) 图形旋转后，对应点到旋转中心的距离相等；

(2) 两组对应点分别与旋转中心连线，所成的角的角度相等；

(3) 对应线段的长度相等，对应角的大小相等；

(4) 旋转后得到的图形与原图形形状相同，大小相等.

例 2　如图 14-2-5(1)，已知点 O 与三角形 ABC，画出三角形 ABC 绕点 O 按逆时针方向旋转 $45°$后的图形.

分析　因为图形旋转不改变图形的形状，对图形旋转的画图，关键是要确定表示图形的“关键点”，找出这些点在旋转后的对应点，并按照原图形顺序连接这些对应点. 这里，图形三角形 ABC 的“关键点”是顶点 A、B、C，只需画出它们绕点 O 旋转后的对应点 A_1、B_1、C_1，就可得到所求的图形.

解　(1) 把三角形 ABC 的顶点 A、B、C 与旋转中心 O 连接起来，得到 OA、OB、OC.

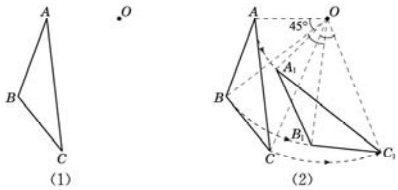


图 14-2-5

(2) 以 OA 为始边，逆时针方向作 $45°$角，在角的终边上截取 OA_1，使 $OA=OA_1$，得到点 A 的对应点 A_1.

(3) 类似步骤(2)的操作，可分别得到点 B、C 的对应点 B_1、C_1.

(4) 依次连接 A_1B_1、B_1C_1、C_1A_1，得到三角形 $A_1B_1C_1$，如图 14-2-5(2).

116　第 14 章　图形的运动

三角形 $A_1B_1C_1$ 就是三角形 ABC 绕点 O 按逆时针方向旋转 45°后的图形.

操作

(1) 如图 14-2-6(1)，点 A 绕点 O 按逆时针方向旋转 90°后，经过的路线是怎样的图形?

(1)　　　　(2)

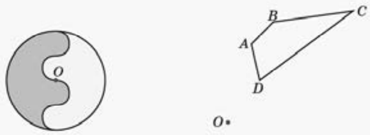
图 14-2-6

(2) 如图 14-2-6(2)，线段 AB 绕点 A 按顺时针方向旋转 45°后，它所扫过的平面部分是怎样的图形? 如果 $AB=3$ cm，那么这个图形的面积是多少?

课堂练习 14.2

1. 画一个直角，并画出这个直角绕它的顶点按逆时针方向旋转 120°后的图形.

2. 如图，绿色图形绕点 O 按逆时针方向旋转几度后能与黄色图形重合?



(第 2 题)　　　　(第 3 题)

3. 画出图中以点 O 为旋转中心按逆时针方向旋转 60°后的图形.

操作　引导学生通过操作，感悟点动成线、线动成面的轨迹思想.

课堂练习 14.2

1. 略.

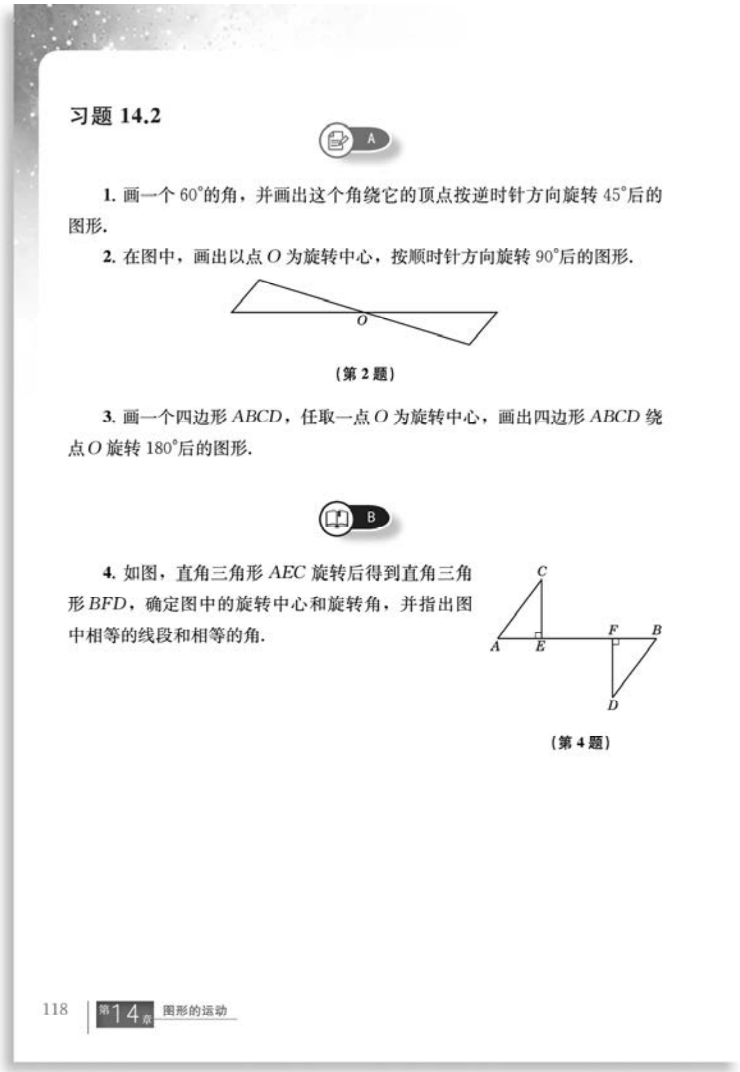
2. 180°.

3. 略.

习题 14.2

1～3. 略.

4. 旋转中心是 AB 的中点，旋转角是 180°，相等的线段：$AE=BF$，$AF=BE$，$AC=BD$，$CE=DF$；相等的角：$\angle A=\angle B$，$\angle C=\angle D$，$\angle AEC=\angle BFD=\angle CEF=\angle DFE$.



习题 14.2

A

1. 画一个 60° 的角，并画出这个角绕它的顶点按逆时针方向旋转 45° 后的图形.

2. 在图中，画出以点 O 为旋转中心，按顺时针方向旋转 90° 后的图形.

（第 2 题）

3. 画一个四边形 $ABCD$，任取一点 O 为旋转中心，画出四边形 $ABCD$ 绕点 O 旋转 180° 后的图形.

B

4. 如图，直角三角形 AEC 旋转后得到直角三角形 BFD，确定图中的旋转中心和旋转角，并指出图中相等的线段和相等的角.

（第 4 题）

118 | 第 14 章 图形的运动

14.3　轴对称

本节教学目标

（1）经历操作与观察，认识图形轴对称运动的过程，知道经过轴对称运动的图形具有保持形状、大小不变的性质.

（2）理解轴对称图形的概念，会画轴对称图形的对称轴.

（3）用图形运动的观点理解两个图形关于一条直线成轴对称的意义，掌握两个图形成轴对称的性质.

（4）能画出成轴对称的两个图形的对称轴，会画已知图形关于某条直线对称的图形.

（以下分析对应课本第 119～121 页）

本课教学重点

理解轴对称图形的意义，并会画出轴对称图形的对称轴.

本课教学建议

（1）通过观察生活中的实例，形成图形翻折的直观感受与感性认识. 但需要注意的是，在举例时应将实例抽象为平面图形.

（2）教师引导学生归纳翻折后重合图形的共同特征，引入轴对称图形的概念.

（3）强调对称轴必须是直线，如圆的对称轴是其一条直径所在的直线.

14.3 轴对称

本课内容分析

由学生熟悉的“双喜剪纸”和“京剧脸谱”帮助学生形成对图形翻折运动的直观印象.

1. 图形的翻折与轴对称图形

在日常生活及工作中，还会看到一类图形，将它们沿着某一条直线翻折，其在直线两边的部分能够重合. 如图 14-3-1，将“囍”在直线 l 左边的部分沿着直线 l 翻折，l 两边的“喜”字重合. 如图 14-3-2 中的京剧脸谱，将它在直线 l 左边的部分沿着 l 翻折，与右边部分重合.

图 14-3-1

图 14-3-2

通过三角形的翻折，帮助学生理解对应点、对应角和对应线段.

如图 14-3-3，三角形 ABC 和三角形 $A_1B_1C_1$ 沿着直线 l 翻折后重合，点 A 与点 A_1 是对应点，线段 AB 与线段 A_1B_1 是对应线段，$\angle A$ 与 $\angle A_1$ 是对应角.

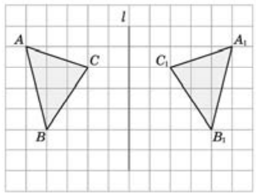
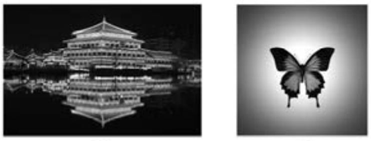


图 14-3-3

14.3 轴对称 119

操作

对图 14-3-4 中的两幅摄影作品，试分别找到一条直线，将它们各自沿着该直线翻折，使直线两边的部分重合.



(1)　　(2)

图 14-3-4

若将一个图形沿着某一条直线翻折过来，直线两边的部分能够相互重合，这个图形叫作轴对称图形，这条直线是它的对称轴，也称这个图形关于这条直线对称.

线段、角、正方形和圆都是常见的轴对称图形.

例 1 判断图 14-3-5 中的四个图形是不是轴对称图形. 如果是轴对称图形，请画出该图形的所有对称轴.

(1)　(2)　(3)　(4)

图 14-3-5

解 (1)(2)(3)是轴对称图形，它们的对称轴如图 14-3-6 所示. (4)不是轴对称图形.

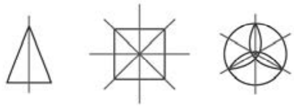


图 14-3-6

操作　通过动手操作，感受轴对称图形的特征.

归纳轴对称图形的概念.

例 1，注意所画的对称轴应该是直线.

课堂练习 14.3(1)

1. 略.

2. 有；3.

3. (2)(3)(4)是轴对称图形；图略.

课堂练习 14.3(1)

1. 将一张 A4 纸对折后，再剪出一个图形，然后展开，使它成为一个等腰三角形.

2. 已知三角形 ABC 是等边三角形，它有没有对称轴？如果有对称轴，有几条？

3. 在下列图形中找出轴对称图形，并分别画出它们的一条对称轴.

(1) (2)

(3) (4)

（第 3 题）

2. 轴对称

观察

对图 14-3-7 中的两幅图，你能发现什么共同的特征？

l l

图 14-3-7

把一个图形沿着某一条直线翻折，如果它能够与另一个图形重合，那么就称这两个图形关于这条直线成轴对称，这条直线叫作对称轴. 翻折后能够重合的点叫作对称点.

14.3 轴对称 121

（以下分析对应课本第 121～124 页）

本课教学重点

理解两个图形关于一条直线成轴对称的概念，能画出一个图形关于某条直线对称的图形.

本课教学建议

（1）从图形运动的角度看，可以把“两个图形关于一条直线成轴对称”中的两个图形，一个看作是运动前的图形，一个是运动后的图形，并体会运动前后的图形中的变与不变.

（2）重视学生的画图，引导学生规范地画出一个图形关于某条直线对称的图形.

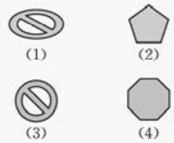
（3）理解两个图形关于某条直线成轴对称的性质(类似前面两种运动的性质).

课堂练习 14.3(1)

1. 将一张 A4 纸对折后，再剪出一个图形，然后展开，使它成为一个等腰三角形.

2. 已知三角形 ABC 是等边三角形，它有没有对称轴？如果有对称轴，有几条？

3. 在下列图形中找出轴对称图形，并分别画出它们的一条对称轴.



（第 3 题）

2. 轴对称

观察

对图 14-3-7 中的两幅图，你能发现什么共同的特征？

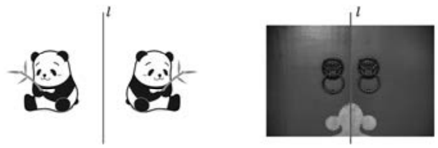


图 14-3-7

把一个图形沿着某一条直线翻折，如果它能够与另一个图形重合，那么就称这两个图形关于这条直线成轴对称，这条直线叫作对称轴．翻折后能够重合的点叫作对称点.

14.3 轴对称 121

本课内容分析

比较两个概念——“轴对称图形”以及“两个图形关于某条直线成轴对称”，提出的背景及它们各自的意义.

如图 14-3-8，三角形 ABC 沿着直线 MN 翻折后，与三角形 $A_1B_1C_1$ 重合，三角形 ABC 与三角形 $A_1B_1C_1$ 关于直线 MN 成轴对称，直线 MN 是对称轴，点 A 与点 A_1、点 B 与点 B_1、点 C 与点 C_1 是关于直线 MN 的对称点；线段 AB 与线段 A_1B_1 是对应线段，对应线段 AB 与 A_1B_1 长度相等；$\angle B$ 和 $\angle B_1$ 是对应角，对应角 $\angle B$ 与 $\angle B_1$ 大小相等.

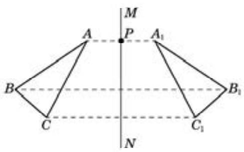


图 14-3-8

思考

图 14-3-8 中还有其他关于直线 MN 成轴对称的线段或角吗？

在图 14-3-8 中，点 A 与点 A_1 是对称点，设 AA_1 与对称轴 MN 交于点 P，将三角形 ABC 沿着直线 MN 翻折后，点 A 与点 A_1 重合，$AP=A_1P$，$\angle MPA=\angle MPA_1=90°$.

两个图形关于一条直线成轴对称，具有下面的性质：

(1) 对应线段的长度相等，对应角的大小相等，这两个图形形状相同，大小相等；

(2) 连接对称点的线段和对称轴垂直，并且被对称轴平分.

例 2 如图 14-3-9(1)，画出四边形 $ABCD$ 关于直线 l 成轴对称的图形.

分析　利用两个成轴对称图形的性质，可知只需找出图形的“关键点”，即四边形四个顶点关于直线 l 的对称点，就可得到所求的图形.

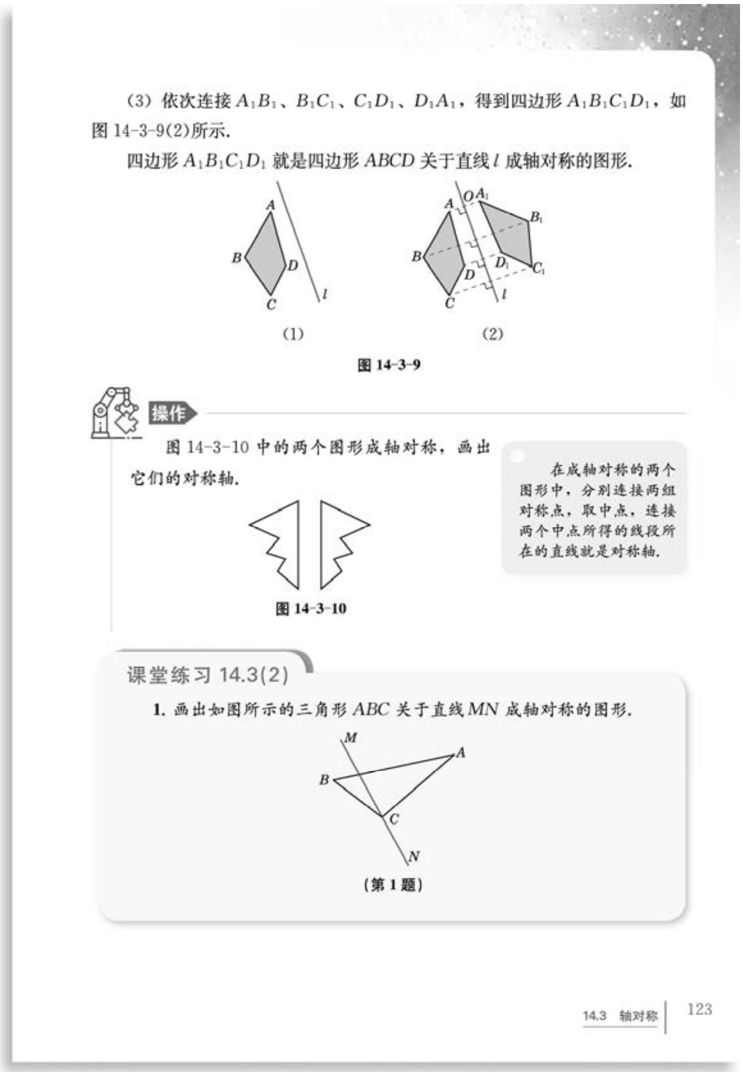
解　(1) 过点 A 画直线 l 的垂线 AO，垂足为 O. 延长 AO 到点 A_1，使 $OA_1=OA$，就得到点 A 关于直线 l 的对称点 A_1.

(2) 类似步骤(1)的操作，分别画出点 B、C、D 关于直线 l 的对称点 B_1、C_1、D_1.

建立两个概念之间的联系. 一方面，如果把轴对称图形中位于对称轴两旁的部分看作两个图形，那么它们是成轴对称的；另一方面，如果把关于某条直线成轴对称的两个图形看作一个整体，那么它是轴对称图形.

思考　通过思考，引导学生归纳两个图形成轴对称的性质.

例 2 的画图要求学生规范操作，可以借助三角尺和圆规.



(3) 依次连接 A_1B_1、B_1C_1、C_1D_1、D_1A_1，得到四边形 $A_1B_1C_1D_1$，如图 14-3-9(2)所示.

四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 就是四边形 $ABCD$ 关于直线 l 成轴对称的图形.

(1) (2)

图 14-3-9

操作

图 14-3-10 中的两个图形成轴对称，画出它们的对称轴.

在成轴对称的两个图形中，分别连接两组对称点，取中点，连接两个中点所得的线段所在的直线就是对称轴.

图 14-3-10

课堂练习 14.3(2)

1. 画出如图所示的三角形 ABC 关于直线 MN 成轴对称的图形.

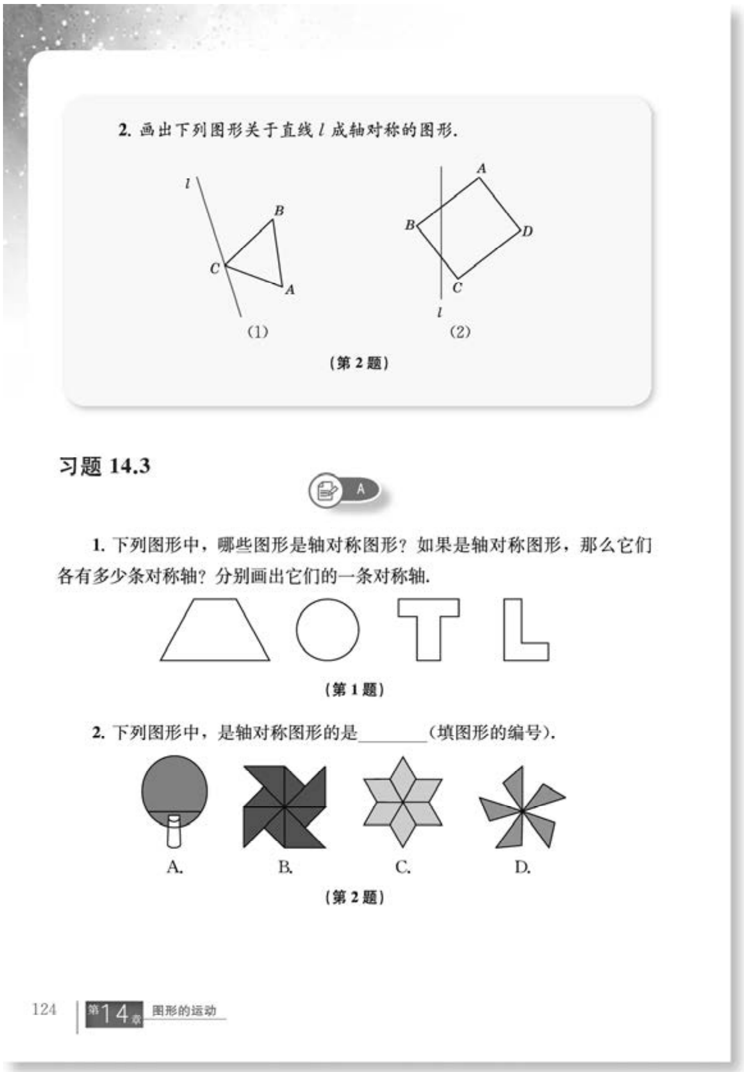
(第 1 题)

14.3 轴对称 123

操作　引导学生掌握画出成轴对称的两个图形的对称轴.

课堂练习 14.3(2)

1～2. 略.



2. 画出下列图形关于直线 l 成轴对称的图形.

(1)　　(2)

（第 2 题）

习题 14.3

A

1. 下列图形中，哪些图形是轴对称图形？如果是轴对称图形，那么它们各有多少条对称轴？分别画出它们的一条对称轴.

（第 1 题）

2. 下列图形中，是轴对称图形的是________（填图形的编号）.

A.　B.　C.　D.

（第 2 题）

124 第14章 图形的运动

习题 14.3

1. 前三个图形是轴对称图形. 第一个图形有 1 条对称轴，第二个图形有无数条对称轴，第三个图形有 1 条对称轴. 图略.

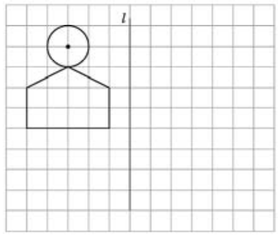
2. A、C.

3. 略.

4. 这五个图形都是轴对称图形. 图略.

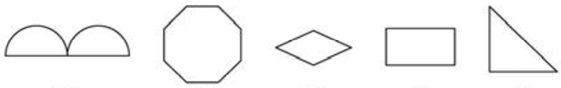
5. 略.

3. 画出与图中图形关于直线 l 成轴对称的图形.



（第 3 题）

4. 下列图形中，哪些是轴对称图形？如果是轴对称图形，画出一条对称轴.



(1)　(2)　(3)　(4)　(5)

（第 4 题）

B

5. 下列各图形是轴对称图形，画出它们的所有对称轴.

(1)　(2)　(3)

（第 5 题）

14.4　中心对称

本节教学目标

（1）理解中心对称图形和两个图形成中心对称的概念.

（2）掌握两个图形成中心对称的性质，会画已知图形关于某点成中心对称的图形.

（3）能找到成中心对称的两个图形的对称中心.

（4）通过对中心对称图形的学习，进一步发现自然界中的对称美，感悟图形有规律变化的美.

（以下分析对应课本第 126～129 页）

本课教学重点

（1）理解中心对称图形与两个图形成中心对称的概念.

（2）会用有关性质画已知图形关于某点成中心对称的图形.

本课教学建议

（1）从图形运动的角度看，把“两个图形关于定点对称”中的两个图形，一个看作是运动前的图形，一个是运动后的图形，这个图形运动对应于“旋转 180°”. 两个图形成中心对称的性质就是这种运动的性质.

（2）掌握两个图形关于某点成中心对称的性质，简要说明理由即可.

（3）重视学生的画图，引导学生规范地画出一个图形关于某点成中心对称的图形.

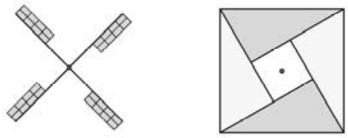
本课内容分析

引导学生发现所给图形的特征，并尝试归纳共同特征，进而抽象出中心对称图形的概念.

尝试直接用“旋转 180°”的角度理解中心对称.

14.4 中心对称

观察图 14-4-1 中的两个图形，它们各自绕一个点旋转 180°后，都能与原图形重合.



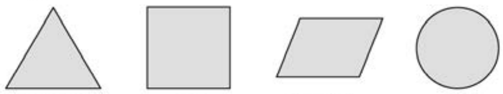
(1)　　(2)

图 14-4-1

如果一个图形上的所有点绕着所在平面上的一个定点旋转 180°后，能与原图形重合，那么这个图形叫作中心对称图形，这个定点叫作对称中心.

思考

如图 14-4-2，等边三角形、正方形、平行四边形、圆是不是中心对称图形？



等边三角形　　正方形　　平行四边形　　圆

图 14-4-2

在平面上，一个图形绕着一个定点旋转 180°后，能与另一个图形重合，这两个图形称为关于这个定点对称，也称这两个图形成中心对称，这个定点称为对称中心.

如果两个图形关于点 O 成中心对称，那么对于一个图形中的一点 P 绕点 O 旋转 180°后，就与另一个图形中的一点 P' 重合. 这时，点 P 与点 P' 是这两

126 | 第 14 章 图形的运动

个成中心对称的图形的对应点，也叫作关于点 O 的对称点.

如图 14-4-3，三角形 ABC 与三角形 DEF 关于点 O 成中心对称，点 A 的对称点是点 D，线段 AB 的对应线段是线段 DE，$\angle BAC$ 的对应角是 $\angle EDF$.

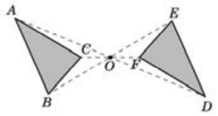


图 14-4-3

操作

你能写出图 14-4-3 中其他的对称点、对应线段和对应角吗?

如图 14-4-3，将三角形 ABC 绕点 O 旋转，点 A 和点 D 是对称点，点 O 为对称中心. 根据旋转的性质，$OA=OD$. 又因为旋转角为 $180°$，所以 A、O、D 三点在同一直线上.

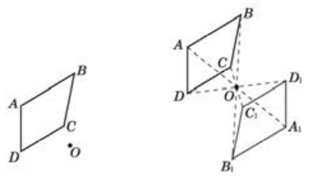
两个关于一点成中心对称的图形，具有下面的性质：

(1) 对应线段平行(或在同一直线上)且相等；

(2) 连接每组对称点的线段都经过对称中心，并且被对称中心平分.

例 1 如图 14-4-4(1)，画出四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称的图形.

分析 利用图形旋转的性质，可知只需找出四边形的“关键点”，即四个顶点 A、B、C、D 关于点 O 的对称点，就可得到所求的图形.



(1) (2)

图 14-4-4

14.4 中心对称 | 127

类比“轴对称”一节，引导学生分析“中心对称图形”与“两个图形成中心对称”的区别与联系.

操作 通过操作引导学生总结归纳两个图形成中心对称的性质.

基于这些性质，会画已知图形关于某点成中心对称的图形.

例 1，根据“两个图形关于一点成中心对称”的性质，画四边形关于某点成中心对称的图形，关键是寻找四个顶点的对称点.

解 (1) 连接 AO 并延长到点 A_1，使 $OA_1=OA$，得到点 A 的对称点 A_1.

(2) 类似步骤(1)的操作，可以画出点 B、C、D 关于点 O 的对称点 B_1、C_1、D_1.

(3) 依次连接 A_1B_1、B_1C_1、C_1D_1、D_1A_1，得到四边形 $A_1B_1C_1D_1$，如图 14-4-4(2)所示.

四边形 $ABCD$ 和四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是两个关于点 O 成中心对称的图形.

操作

把图 14-4-5 中的三角形 ABC 绕着边 AB 的中点 O 旋转 180°，画出旋转后的图形. 旋转后得到的图形和原来的三角形 ABC 组成的组合图形是以前学过的哪一种几何图形？

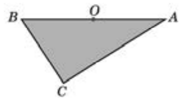
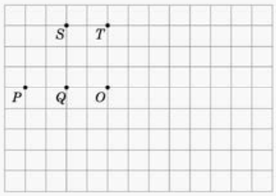


图 14-4-5

课堂练习 14.4

1. 画出图 14-4-5 中与三角形 ABC 关于点 O 成中心对称的图形.
2. 如图，有 O、P、Q、S、T 五个点.



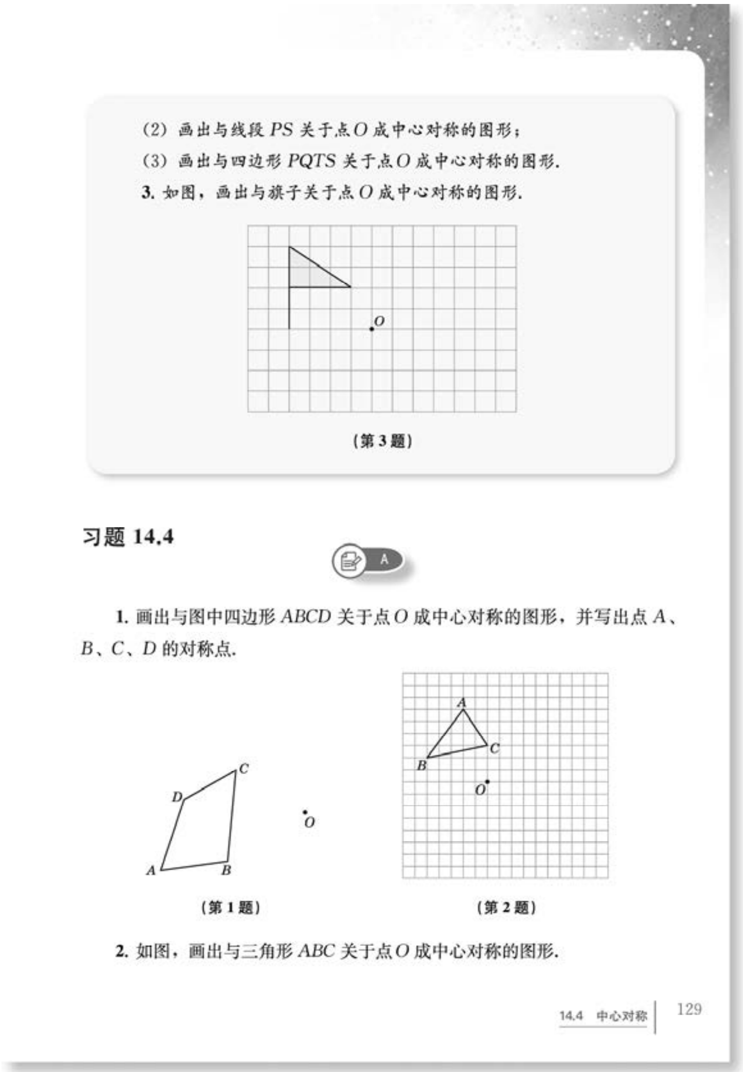
(第 2 题)

(1) 分别画出与点 P、Q、S、T 关于点 O 成中心对称的点；

操作 这个组合图形是以前学过的平行四边形. 如果将这个组合图形看作一个整体，将它绕点 O 旋转 180°后能与原组合图形完全重合，由此可知平行四边形是中心对称图形.

课堂练习 14.4

1～3. 略.


（2）画出与线段 PS 关于点 O 成中心对称的图形；

（3）画出与四边形 $PQTS$ 关于点 O 成中心对称的图形.

3. 如图，画出与旗子关于点 O 成中心对称的图形.

（第 3 题）

习题 14.4

A

1. 画出与图中四边形 $ABCD$ 关于点 O 成中心对称的图形，并写出点 A、B、C、D 的对称点.

（第 1 题）　　（第 2 题）

2. 如图，画出与三角形 ABC 关于点 O 成中心对称的图形.

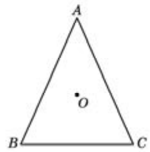
14.4 中心对称　129

习题 14.4

1～3. 略.

4. 第一张纸牌；理由略.

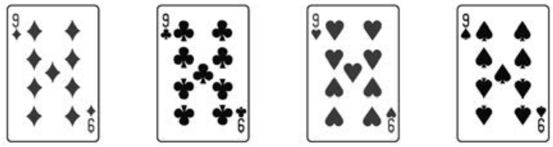
3. 如图，画出与三角形 ABC 关于点 O 成中心对称的图形.



（第 3 题）

B

4. 如图，桌上放着四张纸牌，现将其中的某一张纸牌在原地旋转 180°，发现旋转后在桌上看到的纸牌中的图案与原先一模一样. 你能判断出旋转的是哪一张纸牌吗？为什么？



(1)　(2)　(3)　(4)

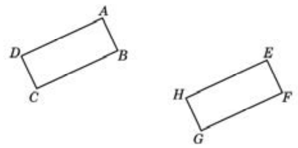
（第 4 题）

130 第14章 图形的运动

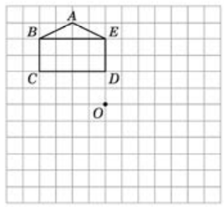
◎复习题

A

1. 长方形 $EFGH$ 是由长方形 $ABCD$ 平移后得到的，请分别写出点 A、C 的对应点，线段 AB、CD 的对应线段，$\angle ADC$ 的对应角.



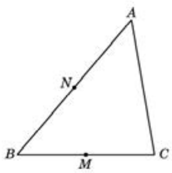
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，画出与图中图形关于点 O 成中心对称的图形.

3. 把三角形 ABC 绕着边 BC、BA 的中点 M、N 分别旋转 180°，画出旋转后所得的图形.



（第 3 题）

复习题

1. 点 A 的对应点是点 E，点 C 的对应点是点 G；线段 AB 的对应线段是线段 EF，线段 CD 的对应线段是线段 GH；$\angle ADC$ 的对应角是$\angle EHG$.

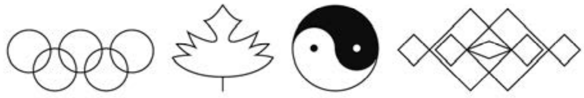
2～3. 略.

4. D.

5～6. 略.

7. 3 个，点 C、点 D 以及 CD 的中点.

4. 下列图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是 （　　）



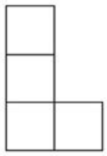
A.　　B.　　C.　　D.

B

5. 画出一个图形，使所画图形中同时有正方形和圆，并且这个图形既是轴对称图形，又是中心对称图形.

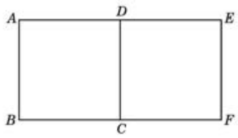
6. (1) 如图，由 4 个同样的小正方形所组成的图形，请再补上一个同样的小正方形，使由 5 个小正方形组成的图形成为一个轴对称图形；

(2) 如图，由 4 个同样的小正方形所组成的图形，请再补上一个同样的小正方形，使由 5 个小正方形组成的图形成为一个中心对称图形.



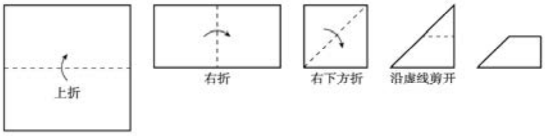
（第 6 题）

7. 如图，四边形 $CDEF$ 旋转后能与正方形 $ABCD$ 重合，那么图形所在的平面上可以作为旋转中心的点共有几个？请一一指出.



（第 7 题）

8. 如图，把一张正方形纸片对折三次后，沿虚线剪开，画出最后所得的纸片展开后的图形. 它是轴对称图形吗？



（第 8 题）

8. 图略. 是.

综合与实践

从传统连续纹样到现代镶嵌图案

情境与主题分析

通过几何变换研究几何甚至代数问题是现代数学研究中的重要方法之一．在中小学数学教科书中，主要通过图形的运动、变化启发学生动态研究图形的特征，克服静态思考方式的不足．例如，对于较复杂的平面几何问题，通过变换(如平移、旋转、轴对称等)往往可以将原本分散的几何条件相对集中，从而使条件与结论的关联性一目了然．从某种意义上讲，传统“辅助线”可视为已知图形的某个元素在变换下的对应元素．可以说，图形变换是学生整体认识图形，发现图形内部联系，探索和推理论证思路的重要工具之一，有助于培养学生的几何直观、空间观念和推理论证能力．

中国传统文化中的二方连续纹样和四方连续纹样，正是通过单位纹样的平移、旋转、轴对称等变换而构成的．其中，二方连续纹样多以条形或带状排列，而四方连续纹样则由单位纹样向四周连续扩展伸展而得．前者广泛用于建筑、日用器皿、书籍装帧、物品包装、服饰边缘、装饰间隔等，后者则广泛应用于纺织面料、室内装饰材料、包装纸、无缝贴图的设计等．

现代艺术中也常见基于单位纹样的连续列阵．区别于传统的二方连续和四方连续纹样，现代艺术中的单位纹样多见不规则图案．将这些不规则的单位纹样进行拼接，使彼此之间不留空隙、不重叠地铺成一片，称为密铺，也即平面图形的镶嵌．荷兰艺术家埃舍尔利用各种几何变换设计出诸多魔幻的镶嵌图案．数学家找到近 20 种可用于镶嵌的几何群组，令人吃惊的是，埃舍尔的镶嵌图形作品恰巧自觉或不自觉地运用了这些几何群组．从这个意义上看，埃舍尔称得上是艺术世界里的数学家．

活动过程分析

本实践活动要求学生能用数学的眼光研究装饰纹样的特征，基于基本几何变换发现图形的形成原理，并能通过动手实践，还原或构造镶嵌图案．通过本次活动，发展学生的几何直观、空间观念和创新意识，引导学生体会数学在艺术创造中的神奇作用，感悟数学的审美价值．

活动 1 二方连续纹样与唐草纹

- **设计**

观察表 1“二方连续纹样中的单位纹样及其变换方式”中的二方连续纹样，找出单位纹样及其变换方式.

- **意图**

1. 引导学生识别单位纹样.
2. 引导学生识别变换方式.

活动 2 四方连续纹样

- **设计**

观察表 2“四方连续纹样中的单位纹样及其变换方式”中的四方连续纹样，找出单位纹样及其变换方式.

- **意图**

1. 引导学生识别单位纹样.
2. 引导学生识别变换方式.

活动 3 鸽子瓷砖变形记

- **设计**

观察图 5 中鸽子瓷砖的变形过程，根据单位图案信息，找出表 3“拼接鸽子瓷砖”中各鸽子瓷砖图案可能基于的基本图形及变换方式，通过四方连续还原出鸽子瓷砖图案.

- **意图**

1. 引导学生从不规则单位图案识别出图形变换过程中最基本的图形.
2. 引导学生识别变换方式.
3. 帮助学生利用发现的基本图形，通过四方连续还原鸽子瓷砖图案.

教学过程设计

本实践活动大约需要 6 个课时，建议课内用 4 个课时，课外安排 2 个课时. 可参考如下教学安排.

从传统连续纹样到现代镶嵌图案

图 1

图 1 展示的是湖北省博物馆的镇馆之宝——越王勾践剑，被尊为“百兵之祖”. 除了剑身正面所刻的八字鸟篆铭文“越王鸠浅　自作用剑”（意为：越王勾践亲自督造并使用的剑），这把剑吸引人的还有剑身上呈网状分布的菱形花纹，从顶端到剑锋连续排列，浑然一体.

这种以基本（单位）纹样（图案）为基础，根据一定的变换方式（如：平移、旋转、轴对称等）重复排列所构成的不间断图案称为连续纹样. 按纹样排列方式的不同一般分为二方连续纹样和四方连续纹样，富有中国传统审美趣味.

活动 1　二方连续纹样与唐草纹

二方连续纹样是指一个单位图案沿上下或左右方向连续排列所形成的横式或纵式带状纹样（也叫花边纹样），富有节奏和韵律感. 越王勾践剑采用了二方连续纹样设计.

唐代较多取忍冬、荷花、兰花、牡丹等花草图案构成二方连续纹样，这些花草的枝茎滋长延伸、蔓蔓不断，有茂盛、长久的吉祥寓意. 因盛行于唐代，故名“唐草纹”. 唐草纹经过恰当的变形后，可以装饰在各种实用器物上. 图 2 展示的三件唐代器物，造型精美细腻，无论外沿还是内壁，都有清晰可见的二方连续花纹图饰，其结构严谨中又带有大唐一贯的典雅富丽风格，是难得的珍宝.

［唐］鸳鸯莲瓣纹金碗　　［唐］鎏金双狮纹银碗　　［唐］鎏金飞狮纹盒顶盖

图 2

136 | 综合与实践

- **引入**

观察越王勾践剑剑身上的菱形花纹，发现其是由基本纹样通过多次平移构成的，引入连续纹样的概念，并进一步提出二方连续和四方连续两种构图方式.

- **教学建议**

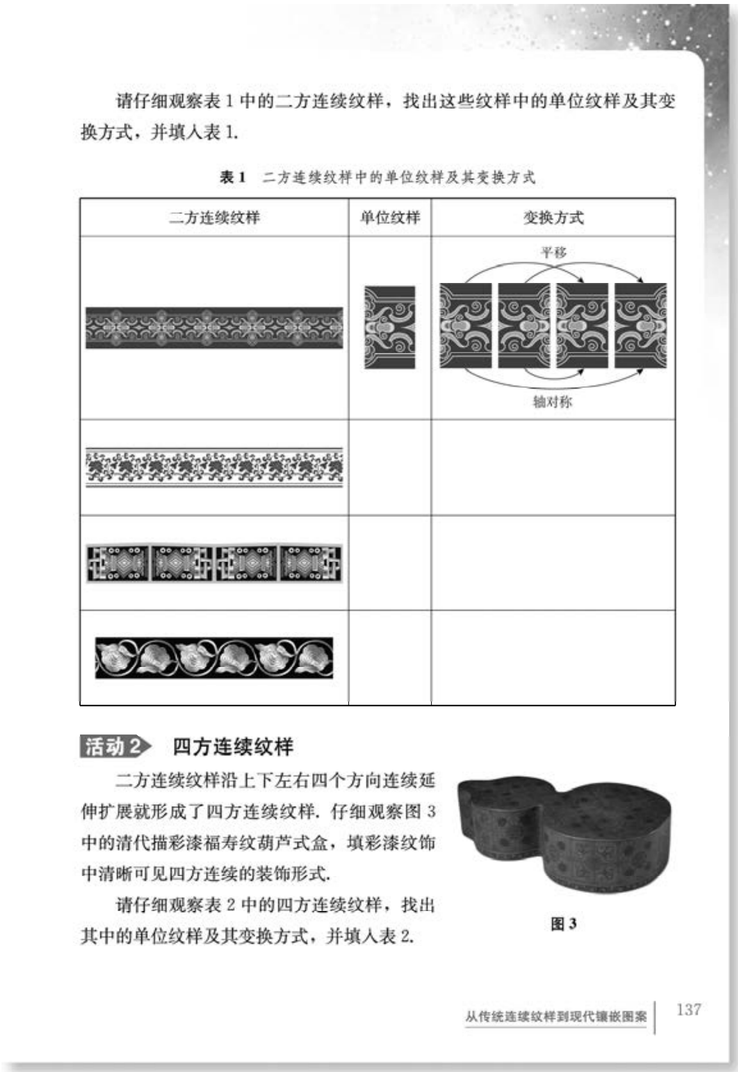
1. 教师可利用各种形式的素材（图片、视频或实物等）展示各类具有连续纹样特征的纹样，引导学生观察并猜想构成这些纹样的可能的构图方式，特别关注单一方向（二方连续）和纵横方向（四方连续）的构图方式.

2. 教师可进一步启发学生自行发现生活中的类似纹样，并按构图方式进行简单归类.

活动 1

介绍二方连续纹样的概念，说明越王勾践剑剑身图案采用二方连续纹样设计.

观察图 2 中的唐草纹，识别单位纹样及相应的变换方式，体验大唐的典雅富丽风格和图形变换的魅力.



请仔细观察表1中的二方连续纹样，找出这些纹样中的单位纹样及其变换方式，并填入表1.

表1　二方连续纹样中的单位纹样及其变换方式

二方连续纹样	单位纹样	变换方式
		平移 轴对称

活动2　四方连续纹样

二方连续纹样沿上下左右四个方向连续延伸扩展就形成了四方连续纹样. 仔细观察图3中的清代描彩漆福寿纹葫芦式盒，填彩漆纹饰中清晰可见四方连续的装饰形式.

请仔细观察表2中的四方连续纹样，找出其中的单位纹样及其变换方式，并填入表2.

图3

从传统连续纹样到现代镶嵌图案　137

观察表1中第一行的纹样，理解其单位纹样及相应的几何变换方式.

观察表1中其余三行的纹样，识别单位纹样及相应的几何变换方式. 表1填写如下：

	平移
	轴对称、平移
	旋转、平移

• **教学建议**

1. 引导学生利用学具观察表1中第一行的纹样，根据教科书提示，了解单位纹样的概念，通过提示的几何变换构建目标纹样.

2. 引导学生利用学具，识别表1中第二行纹样的单位纹样及相应的几何变换.

3. 表1中第三、第四行的纹样各包含两种几何变换，可根据学生的能力，考虑全体学生一起进行活动或分组进行活动.

• **建议课时**　1课时

活动2

对比二方连续纹样，介绍四方连续纹样的概念.

观察图3中的纹样，感受图形变换的魅力.

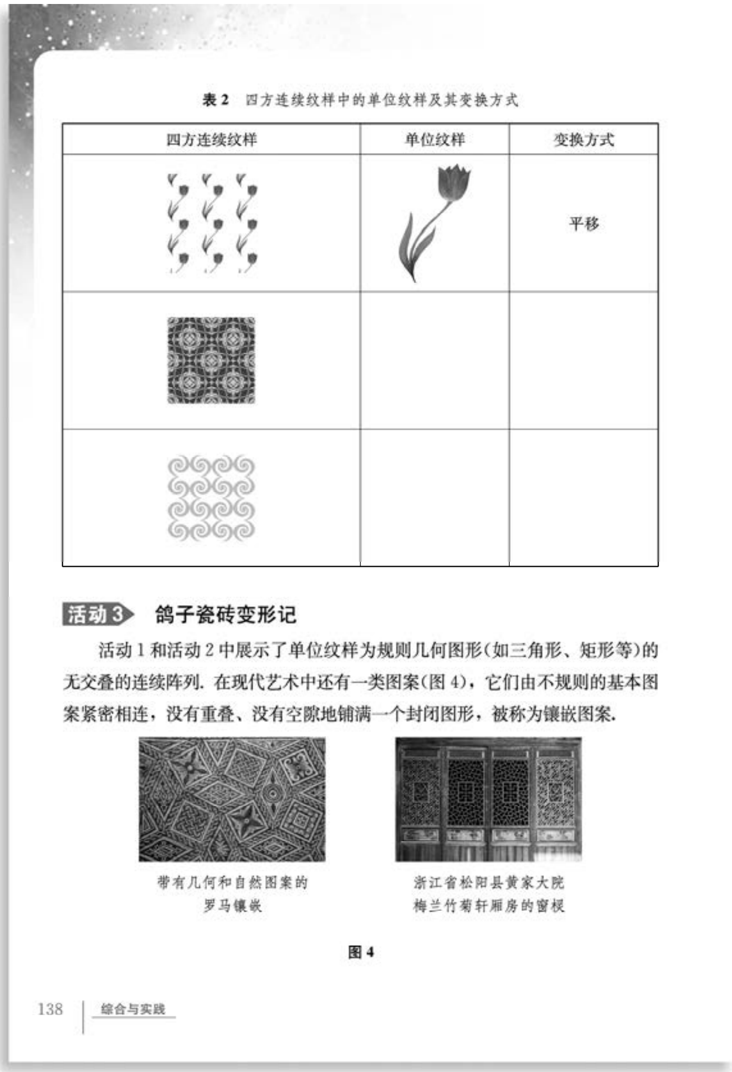


表 2 四方连续纹样中的单位纹样及其变换方式

四方连续纹样	单位纹样	变换方式
		平移

活动 3 鸽子瓷砖变形记

活动 1 和活动 2 中展示了单位纹样为规则几何图形(如三角形、矩形等)的无交叠的连续阵列. 在现代艺术中还有一类图案(图 4)，它们由不规则的基本图案紧密相连，没有重叠、没有空隙地铺满一个封闭图形，被称为镶嵌图案.

带有几何和自然图案的罗马镶嵌

浙江省松阳县黄家大院梅兰竹菊轩厢房的窗棂

图 4

138 | 综合与实践

观察表 2 中第一行的纹样，理解其单位纹样及相应的变换方式.

观察表 2 中其余两行中的纹样，识别单位纹样及相应的变换方式. 表 2 填写如下：

	平移
	旋转、平移

• **教学建议**

1. 引导学生利用学具观察表 2 中第一行的纹样，找到其中的单位纹样及相应的几何变换方式，并按照教科书的提示构建出目标纹样，体会单位纹样的不同会导致相应不同的几何变换. 由此引入四方连续纹样的概念，并与二方连续纹样进行对比.

2. 引导学生利用学具，识别表 2 中第二行纹样的单位纹样及相应的几何变换.

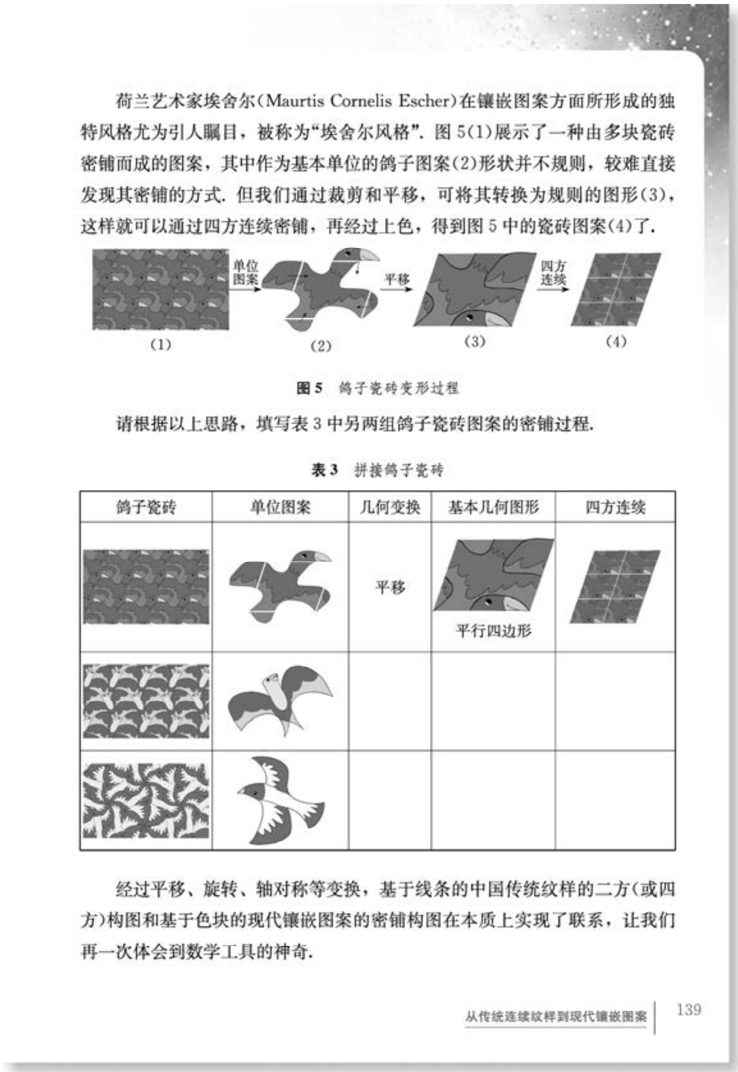
3. 表 2 中第三行的纹样可从不同视角构图，鼓励学生利用学具识别相关的单位纹样及相应的几何变换.

4. 若时间允许，可要求学生再次查看表 2 纹样，讨论是否可以找出新的单位纹样及其变换.

• **建议课时** 1 课时

活动 3

对比活动 1 和活动 2 中的单位纹样的规则性，观察图 4 中图形的单位纹样的不规则性，并引入镶嵌的概念.


荷兰艺术家埃舍尔(Maurtis Cornelis Escher)在镶嵌图案方面所形成的独特风格尤为引人瞩目，被称为“埃舍尔风格”. 图 5(1)展示了一种由多块瓷砖密铺而成的图案，其中作为基本单位的鸽子图案(2)形状并不规则，较难直接发现其密铺的方式. 但我们通过裁剪和平移，可将其转换为规则的图形(3)，这样就可以通过四方连续密铺，再经过上色，得到图 5 中的瓷砖图案(4)了.

单位图案　平移　四方连续

(1)　(2)　(3)　(4)

图 5　鸽子瓷砖变形过程

请根据以上思路，填写表 3 中另两组鸽子瓷砖图案的密铺过程.

表 3　拼接鸽子瓷砖

鸽子瓷砖	单位图案	几何变换	基本几何图形	四方连续
		平移	平行四边形	

经过平移、旋转、轴对称等变换，基于线条的中国传统纹样的二方(或四方)构图和基于色块的现代镶嵌图案的密铺构图在本质上实现了联系，让我们再一次体会到数学工具的神奇.

从传统连续纹样到现代镶嵌图案　139

介绍荷兰艺术家埃舍尔及具有其风格的鸽子图案，讲解图 5(1)中的单位图案〔图5(2)〕是如何通过平移变换成规则几何图形〔图 5(3)〕——平行四边形，再通过四方连续密铺还原出原有的鸽子图案.

观察表 3 中的另两个鸽子瓷砖图案，按照图 5 中的构图思路，通过恰当的几何变换，构成基本几何图形，通过四方连续还原鸽子瓷砖. 表 3 填写如下：

几何变换	基本几何图形	四方连续
轴对称、旋转、平移	 (单面打印拼接)  (双面打印拼接)	 (单面打印拼接)  (双面打印拼接)
旋转、平移	 三角形	

- **教学建议**

1. 教师可利用各种形式的素材(图片、视频或实物等)展示埃舍尔的一些艺术品，让学生感受数学的魅力.

2. 引导学生利用学具，根据教科书的提示还原图 5 中的鸽子图形，关注活动 3 中的单位纹样与活动 1、活动 2 的区别(不规则性)，并理解表 3 中第一行的几何变换、基本几何图形、四方连续等相关提法.

3. 根据学生的能力，考虑引导全体学生或各组学生利用学具还原表 3 中第二行的鸽子纹样.

4. 对于表 3 中第三行的鸽子纹样的还原活动，可根据学生的能力考虑在课外完成.

- **课时建议**　2 课时(课内)+1 课时(课外)

◎ **小组活动**

将学生分成若干小组进行设计并作成果展示.

- **教学建议**

本活动内容适合部分有兴趣的学生.

- **课时建议**　1 课时（课外）

◎ **小组活动**

请参照活动 3 的构图方式，设计出自己的图样，再请组内其他同学推测出你的构图规律.

140　综合与实践

教学评价建议

本实践活动的评价可从三方面展开，包括个人活动的“学习任务完成情况”和“活动体验和习得”，以及小组活动的“小组成员互评”.

表一　学习任务完成情况评价表

学生姓名：								
学习任务	**内容**		**评分**					**总计**
			5	**4**	**3**	**2**	**1**	
活动 1	表 1 第 2 行	识别单位纹样						
		识别几何变换方式						
	表 1 第 3 行	识别单位纹样						
		识别几何变换方式						
	表 1 第 4 行	识别单位纹样						
		识别几何变换方式						（满分 30）
活动 2	表 2 第 2 行	识别单位纹样						
		识别几何变换方式						
	表 2 第 3 行	识别单位纹样						
		识别几何变换方式						（满分 20）
活动 3	表 3 第 2 行	拆解鸽子						
		说明几何变换方式						
		拼出基本几何图形						
		还原鸽子图案						
	表 3 第 3 行	拆解鸽子						
		说明几何变换方式						
		拼出基本几何图形						
		还原鸽子图案						（满分 40）
小组活动	作品展示							
	作品说明							（满分 10）

注：表一用 1～5 依次表示你在每项任务上的完成程度，并累计得到本活动的整体完成度得分(满分 100).

表二　活动体验和习得自评表

学生姓名：							
维度	**说明**	**内容 1**	**内容 2**	**内容 3**	**内容 4**	**内容 5**	**得分**
知识建构	试写出新学到的知识 (1～5 项)						

（续表）

维度	说明	内容 1	内容 2	内容 3	内容 4	内容 5	得分
沟通	试写出你曾在课堂上提出的见解（1～5 项）						
个人学习	试写出你获取重要知识的来源（1～5 项）						
价值观/态度	试写出完成各活动时你的体验或见解（1～5 项）						

注：表二中内容 1～内容 5 表示在每个维度指向的具体内容，得分为内容的数量(满分 5 分)，并累计得到本活动的整体活动体验得分(满分 20 分).

表三　小组成员互评

小组名称：					
指标	小组成员姓名				
他(她)的意见对我很有帮助					
他(她)经常督促/鼓励小组其他成员积极参与活动					
他(她)能够按时完成自己应做的工作和任务					
我对他(她)的表现满意					
他(她)对小组的贡献突出					
如果有机会，我非常愿意与他(她)再分到一组					

注：在表三中勾选符合指标说明的小组成员．累计得到各成员的整体表现分，得分为勾选的数量(满分 6 分).

制订“阅读之星”评选方案

情境与主题分析

书籍是人类进步的阶梯. 读书可以陶冶情操、提升修养、开阔视野. 对学生阅读能力的培养，有助于学生德智体美劳全面发展. 为了给中小学生营造良好的阅读氛围，2020 年教育部基础教育课程教材发展中心发布了《中小学生阅读指导目录》，列出建议学生阅读的 300 种图书，涉及人文社科、文学、自然科学和艺术四大领域.

本实践活动旨在给予学生主动权，让学生自己制订评选方案，选拔出优秀的阅读者，并赋予他们“阅读之星”的称号. 指标的选取和量化是活动的关键，根据哪些指标来评判阅读者没有固定答案，需要学生自行选择. 如何将选定的指标量化，并根据这些量化指标之间的联系，生成数量模型，将学生的阅读情况排序是一个难点，需要学生在教师的指导下，根据真实场景给出评选方案.

通过这样的实践活动，学生将经历如何利用数学工具开发评价阅读水平方案的过程，这不仅可以提高学生的阅读兴趣，而且可以让他们体验如何用数学语言来解决现实生活中常见的评价问题.

活动过程分析

学生通过“阅读之星”评选方案的制订，体会如何根据真实情境检验初始评选方案，并改进优化. 这要求学生从数学视角思考并逐步优化评选方案，最终构建出一个较为合理的办法.

活动 1

- 内容

1. 学生根据活动情境中评选指标与阅读水平的联系进行讨论，如书籍的数量、书籍的总页数等.

2. 思考并分析初始评选方案中的整式模型能否选拔出真正的“阅读之星”，通过方案的试用，发现该方案的缺陷.

- 意图

1. 引导学生用数学语言描述真实场景中的任务，即评选任务.

2. 培养学生在真实活动中检验并优化简单的数学模型的能力.

活动 2

- 内容

1. 使用给出的阅读评价方案对真实阅读数据进行评价，通过分析评价结果，反思该评价方案的不足.

2. 学生可以通过小组讨论，优化评选方案.

- 意图

引导学生审视给出的评价方案的不足，从数学角度思考并改进方案.

活动 3

- **内容**

1. 学生分组活动，根据活动 1 和活动 2 的经验，讨论并构建一个更为合理的“阅读之星”评选方案，并加以解释.

2. 根据各组提出的评选方案，结合真实数据开展“阅读之星”评选，并基于评选结果，分析各小组评选方案的优劣.

3. 邀请语文教师或其他学科的教师共同参与“阅读之星”评选方案的制订，建立更适合阅读评比的(数学)模型. 利用模型在更大范围内开展“阅读之星”的评选工作.

- **意图**

帮助学生积累用数学思维和数学语言解决真实问题的经验，学会将评选方案制订的方法迁移至其他的学校评选项目中，学会做学习的主人.

教学过程设计

本实践活动包括三个子活动，从引导学生分析和理解评选方案，到鼓励学生构建评选方案，为学生创设了丰富的活动空间，使学生经历面对真实任务，寻找数量之间关系，建立、检验和改进评价模型(数学模型)的过程.

制订“阅读之星”评选方案

书籍是人类进步的阶梯. 为引导学生读好书、读经典，2020 年我国教育部发布《中小学生阅读指导目录》，列出 300 种图书，分为人文社科、文学、自然科学和艺术四类，其中小学 110 种、初中 100 种、高中 90 种.

某校要举行“阅读之星”评选活动，成立了“阅读之星”评选小组，向全校学生征集评选方案，要求在制订方案时考虑如下几个因素：(1)书籍的数量；(2)书籍的类别数；(3)书籍的总页数；(4)学生提交的读书报告的质量.

活动 1

评选小组收到一份“阅读之星”的评选方案. 该方案根据阅读书籍的数量和总页数给同学计分，得分排前十位的同学入围“阅读之星”. 具体方案如图 1 所示.

> 为鼓励同学们多读书，建议考虑两个因素：书籍的数量和书籍的总页数.
>
> 若某同学阅读书籍的数量为A，总页数为B，则其“阅读之星”得分计为：$10A+0.1B$. 假设小海一个学期共读了6本书，总页数750页，那么他的“阅读之星”得分为：$10A+0.1B=10\times6+0.1\times750=135$.
>
> “阅读之星”得分每学期计算一次，得分排前十位的同学当选为学期“阅读之星”.

图 1 “阅读之星”评选方案一

(1) 请讨论，为什么书籍的总页数 B 前的系数比书籍的数量 A 前的系数小很多？

(2) 根据上述方案，选出班级中阅读得分排前十位的同学，授予“阅读之星”称号. 请他们分享阅读的书目.

(3) 你对上面的方案有什么补充意见？

制订“阅读之星”评选方案 141

活动 1

- **教学设计**

1. 教师组织学生讨论阅读的意义，交流阅读经验，思考评价阅读情况依据的指标或者因素.

2. 指导学生读懂“阅读之星”评选方案一(图 1)，讨论并回答列举的三个问题.

例如，在计分方案 $10A+0.1B$ 中，为什么 B(阅读书籍的总页数)前的系数小于 A(阅读书籍的数量)前的系数？可能的回答是：一般而言，学生阅读书籍的数量和这些书籍的总页数有明显的差别，如果系数相近，那么总分将主要由阅读书籍的总页数决定. 根据阅读活动的意义，阅读书籍的总页数的重要性应该小于阅读书籍的数量，因此在计分方案中 B 的系数也应该明显小于 A 的系数.

3. 组织学生在班级中有序开展“阅读之星”评选活动，比较学生的得分，思考评选方案的改进思路.

- **注意事项**

1. 教师可以事先了解喜爱阅读的学生，邀请他们在课堂上分享阅读经验，激发学生参与本实践活动的兴趣.

2. 因为需要在课堂上对学生的阅读情况进行调查，建议教师根据评选方案一，准备好电子表格，保证快速和准确地计算出学生阅读情况的排名.

3. 教师收集学生对问题(3)的讨论结果，为活动 2 作铺垫.

- **课时建议** 1 课时

活动 2

对于评选方案一，有人建议将“书籍的类别数”作为评选的考虑因素，于是有了第二个方案，如图 2 所示.

> 为鼓励同学们多读书、广读书，建议考虑三个因素：书籍的数量、书籍的总页数和书籍的类别数.
>
> 若某同学阅读书籍的数量为A，书籍的总页数为B，书籍的类别数为C，则其“阅读之星”得分计为：$10A+0.1B+5C$. 假设小海一个学期共读了6本书，其中2本属于人文社科、4本属于自然科学，小海所读书籍的类别数为2，6本书的总页数为750页，那么得分为：$10A+0.1B+5C=10\times6+0.1\times750+5\times2=145$.
>
> “阅读之星”得分每学期计算一次，得分排前十位的同学当选为学期“阅读之星”.

图 2 “阅读之星”评选方案二

(1) 请讨论 A、B、C 前的系数是否合理.

(2) 根据上述方案，选出班级中阅读得分排前十位的同学，授予“阅读之星”称号. 请他们分享阅读的书目.

(3) 你对上面的方案有什么补充意见?

活动 3

比较活动 1 和活动 2，可以发现方案考虑的因素不同，评选结果可能不同. 一般来说，评选方案需要不断改进.

> 1. 考虑哪些因素：书籍的数量、书籍的总页数……?
> 2. 为什么考虑这些因素：多读书……?
> 3. 每个因素前的系数大小应该如何确定?
> 4. 用字母表示考虑的因素，建立一个计分的方法.
> 5. 举例说明，如何使用计分方法.

图 3

活动 2

• **教学设计**

1. 教师可以展示对活动 1 中的问题(3)的讨论结果，引导学生讨论并理解给出的“阅读之星”评选方案二(图 2).

2. 引导学生讨论方案二的计分模型，分析模型中各个指标系数的意义.

3. 组织学生利用方案二现场调查阅读情况，根据得分，选出“阅读之星”. 进一步讨论方案二的合理性，提出改进意见.

• **注意事项**

1. 因为需要在课中对学生的阅读情况进行调查，同样建议教师根据评选方案二，准备好电子表格，保证快速和准确地计算出学生阅读情况的排名.

2. 教师收集好学生对问题(3)的讨论结果，为下一个活动作铺垫.

• **课时建议** 1 课时

请分组讨论，参考图 3 中所列的问题，制订一个“阅读之星”评选方案.

各小组展示所制订的“阅读之星”评选方案，讨论得到最佳方案. 用你们的最佳方案评选出全班的“阅读之星”.

制订“阅读之星”评选方案 143

活动 3

- **教学设计**

1. 教师展示活动 1 和活动 2 中学生对评选方案改进的建议，鼓励学生编制更为合理的评选方案.

2. 组织学生分组活动. 各组参考图 3，讨论制订更合理的评选方案需要考虑的因素，给出评分办法，并参考评选方案一、二的格式，写出新的方案.

3. 各小组分享评选方案，并说明各自的设计思路. 鼓励学生用数学语言解释方案.

4. 利用课后时间，各小组改进优化评选方案. 然后，利用评选方案，在更大范围(全年级或者全校)内调查学生的阅读情况. 利用教师准备好的电子表格，计算得分以及排名，选拔出全年级或者全校的“阅读之星”.

- **注意事项**

1. 教师可以提前与语文教师或其他学科的教师讨论，了解、评价学生阅读能力的指标体系，以便科学、专业地点评各组的评选方案.

2. 可以邀约语文教师参与活动 3，并请他们点评各小组制订的评选方案.

3. 根据学生提供的评选方案，帮助他们准备好电子表格.

4. 得到评选结果并不是终点，可以鼓励学生自发组织阅读沙龙等促进阅读的活动，发挥“阅读之星”的影响力.

- **课时建议** 2 课时

评价建议

在本实践活动中，学生面对的是评选“阅读之星”的真实任务，探索合理、科学的评选方案，认识到可以用数学模型表达方案. 这是一个综合性的跨学科任务，主要以小组形式开展活动. 可以利用如下表格评价学生的活动表现.

表一　个人表现自评

学生姓名：	所在小组名称：				
小组分工（主要负责哪些任务）：					
活动内容	**评分**				
	5	**4**	**3**	**2**	**1**
知识建构的丰富性					
表达交流的流畅性					
个人学习的主动性					
学习成功的体验度					

表二　小组活动评价

小组名称：	成员姓名：				
评价内容	**评分**				
	5	**4**	**3**	**2**	**1**
评选方案交流					
数学模型表达					
评选方案互评					
改进建议分享					
小组分工协作					
小组有哪些其他收获？哪些困惑？					

最后，教师可综合以上两个表格对每名学生在本次活动中的表现作出评价.

附录

《练习部分》参考答案与提示

第 10 章　整式的加减

10.1　整式

课后练习 10.1

1.

单项式	$-4a^2b^3$	$3m^4$	$(-5)^2x^3y^4z$	$\dfrac{ab^3c^2}{11}$	$\left(-\dfrac{2}{5}\right)^3p^2q^2$
系数	-4	3	25	$\dfrac{1}{11}$	$-\dfrac{8}{125}$
次数	5	4	8	6	4

2.

单项式	$-5m^3n^2$	$\dfrac{4}{7}m^2n^3$	$-\dfrac{5}{9}mn^2$	$-(-1.2)^2mn$	$3n^3$
系数	-5	$\dfrac{4}{7}$	$-\dfrac{5}{9}$	-1.44	3
次数	5	5	3	2	3

3.（1）是.（2）是.（3）不是.（4）是.

4. $-a^2b^3c^3$.（答案不唯一）

10.2　合并同类项

课后练习 10.2(1)

1.（1）$2a^2$.（2）x^3-6x^2-15x.（3）$-100+4st$.（4）$-\dfrac{16}{7}x^3y^4$.（5）$3t^{n-2}$.

（6）$15ab-\dfrac{13}{6}ac$.

2.（1）合并后的结果为 a^3b^2+4ab，代入求值，得 -12.

（2）合并后的结果为 $5x^2-10x+2$，代入求值，得 25.8.

3. 由题意，得 $\begin{cases}n+1=3,\\4=m-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=6,\\n=2.\end{cases}$ 整式化简的结果为 $5mn$，代入求值，得原式 $=5\times$

$6\times2=60$.

4. 化简的结果为$-2(m+n)^2+2(m+n)-7$，代入求值，得-19.

课后练习 10.2(2)

1.

整式	$3x^4+3x^2-5$	$-\frac{2}{3}a^2b^3c+\frac{4}{5}a^3b-\frac{1}{6}b^4-\frac{4}{7}$	$-a^3+4a^5-6a^6+2a^7+3a^2$
次数	4	6	7
项数	3	4	5
常数项	-5	$-\frac{4}{7}$	0
最高次项	$3x^4$	$-\frac{2}{3}a^2b^3c$	$2a^7$

2.（1）$-x^4+2x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{7}x-\frac{3}{5}$.（2）$x^3y-\frac{3}{4}x^2z+xy^2z-\frac{1}{2}yz^2$.

3.（1）$-x^4+3x^3y-2x^2y^2-y^3-5y^4$.（2）$-x^4-3x^3y+xy^2+2y^4$.

4. 由题意，得$m=5$，$n=2$. 所以整式为$-x^2+6x-5$，代入求值，得原式$=-(-1)^2+6\times(-1)-5=-12$.

5. $3a^6-a^4-a^2-a$.（答案不唯一）

10.3　整式的加法和减法

课后练习 10.3(1)

1.（1）$-x^2+2x+2$.（2）$-x^3-x^2-x+1$.（3）$-\frac{3}{2}x^2+xy-\frac{11}{3}y^2$.

（4）$\frac{11}{2}x^2+3x-\frac{17}{2}$.

2.（1）$-2x+y+9z$.（2）a^3+a^2-3a+1.

3. 化简的结果为$2x^2-3$，代入求值，得原式$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2-3=-\frac{5}{2}$.

4. 化简的结果为$10b^2+ab$，代入求值的结果略.

课后练习 10.3(2)

1. $\frac{5}{2}x^2+y^2+1$.

2. $6a+\frac{9}{2}ab-\frac{5}{6}b$.

3. $-2x^2+xy-\frac{5}{2}y^2$.

4. $a^2+\frac{3}{2}ab-2b^2$.

5. $2x^2-\frac{5}{2}x+6$.

6. $3A+B-2C=3(x^2-3x+7)+(-x^2+5x-11)-2(-2x^2+x-5)=6x^2-6x+20$.

7. x^4+x^2、x^4-x^2.（答案不唯一）

第 11 章　整式的乘除

11.1　整式的乘法

课后练习 11.1(1)

1.

幂	底数	指数	积的形式
$(-2m)^2$	$-2m$	2	$(-2m)\cdot(-2m)$
$\left(\frac{3}{2}x\right)^3$	$\frac{3}{2}x$	3	$\left(\frac{3}{2}x\right)\cdot\left(\frac{3}{2}x\right)\cdot\left(\frac{3}{2}x\right)$
$(3+y)^4$	$3+y$	4	$(3+y)\cdot(3+y)\cdot(3+y)\cdot(3+y)$

2. $\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)$；$\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)$；5；$\left(-\frac{2}{3}\right)^5$.

3. (1) D.　(2) D.

4. (1) $-x^5$.　(2) $-a^{10}$.　(3) x^{10}.　(4) $2a^6$.　(5) $3a+a^3$.　(6) 0.

5. a^n；$-a^n$.

6. $2^{100}-2^{99}=2\times2^{99}-2^{99}=2^{99}$.

7. $a^{m+n}=a^m\cdot a^n=32\times4=128$.

课后练习 11.1(2)

1. (1) C.　(2) D.

2. (1) a^6.　(2) $(-a)^9$.　(3) $(x+y)^8$.　(4) x^{24}.　(5) $(-x)^{35}$.

3. (1) a^{17}.　(2) x^8.　(3) $(a+b)^{13}$.　(4) $(x-y)^{15}$.

4. (1) a^6-a^8.　(2) $3x^{12}$.　(3) 0.　(4) $10a+2a^{10}$.

5. 当 n 为正偶数时，$(-x^2)^n=x^{2n}$；当 n 为正奇数时，$(-x^2)^n=-x^{2n}$.

6. (1) 由 $4^{20}=2^{40}$，$8^{10}=2^{30}$，得 $4^{20}>8^{10}$.　(2) 由 $7^{20}=49^{10}$，得 $7^{20}<50^{10}$.

7. 10^{16}.　提示：1 亿$=10^4\times10^4=10^8$，1 兆$=10^4\times10^4\times10^8=10^{16}$.

课后练习 11.1(3)

1. (1) D.　(2) D.

2. (1) a^6b^9.　(2) $16a^8$.　(3) $\frac{1}{8}a^9b^{15}$.　(4) $\frac{9}{4}x^4y^2$.　(5) $-\frac{8}{27}a^6b^9c^{12}$.　(6) 100.

3. (1) $9x^2$. (2) 0. (3) $2x^8y^{12}$. (4) $2a^6$. (5) $5(a-b)^6$. (6) $-28x^{3n+3}$.

4. $8^{16}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{25}=-2^{48}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{50}=-\frac{1}{4}$.

5. $(x^2y^3)^n=(x^n)^2\cdot(y^n)^3=5\ 184$.

6. $4^m\cdot 2^n=2^{2m+n}=2^7=128$.

课后练习 11.1(4)

1. (1) $-\frac{3}{2}a^5$. (2) $6y^{n+2}$. (3) $-\frac{1}{3}a^3b^2c$. (4) $(b-a)^7$. (5) $\frac{2}{3}a^3b-\frac{4}{3}a^2b^2+\frac{1}{3}ab$. (6) $-3x^3y^2+6x^2y^2+3xy$.

2. (1) $-2.7ax^3y^3$. (2) $3x^6y^6z$. (3) $12x^6y^3$. (4) $-26x^{14}$. (5) $-\frac{17}{9}a^4b^6$. (6) x^3-8x^2+3x. (7) $-\frac{1}{3}x^4y^3-\frac{4}{15}x^3y^4$. (8) 0.

3. -2；$\frac{4}{3}$. 提示：$3(a^{1-x}b^{3y})^2=3a^{2-2x}b^{6y}$，则 $2-2x=6$，$6y=8$.

4. $ab\cdot(a^2b^5-ab^3-b)=(ab^2)^3-(ab^2)^2-ab^2=-33$.

课后练习 11.1(5)

1. (1) a^2+5a+6. (2) a^4-a^2-6. (3) y^6-5y^3+6. (4) a^2b^2+ab-6.

2. $2a+b$；$a+b$；$(2a+b)\cdot(a+b)$；$2a^2+3ab+b^2$；$(2a+b)\cdot(a+b)=2a^2+3ab+b^2$.

3. (1) $\frac{1}{2}+4x^2-2x-16x^3$. (2) $-x^2y^2+6x^3-5y^3+30xy$. (3) $x^2+\frac{5}{6}xy-y^2$. (4) a^3-8b^3. (5) $23xy+30y^2$.

4. $\frac{1}{2}$.

5. $ab+2bc+4c^2$.

6. $(x+1)\cdot(y+1)=xy+x+y+1=-14$.

7. $(3-a)\cdot(2+a)=6+a-a^2=6-(a^2-a)=-6$.

11.2 乘法公式

课后练习 11.2(1)

1. (1)(2)(3)可以用平方差公式.

(1) $(-2x+3y)(-2x-3y)=4x^2-9y^2$.

(2) $(-2x+3y)(2x+3y)=(3y+2x)(3y-2x)=9y^2-4x^2$.

(3) $(-2x-3y)(2x-3y)=(-3y+2x)(-3y-2x)=9y^2-4x^2$.

2. (1) $a-\frac{1}{2}$. (2) $2a+1$. (3) $\frac{1}{3}$；$\frac{1}{3}$. (4) $-y-x$.

3.（1）$y^6-0.09x^2$.（2）$25x^4-4x^2y^2$.（3）$9b^2-\frac{4}{9}a^2$.（4）x^4-4y^2.（5）x^4-81.（6）$-y^{2n}+x^{m+n}$.（7）$3x^2-17$.（8）$2x^2-7y^2+3xy$.

4. a^2-b^2；$a+b$；$a-b$；$(a+b)(a-b)$；$(a+b)(a-b)$；a^2-b^2.

课后练习 11.2(2)

1.（1）y^2+4y+4.（2）$9-12a+4a^2$.（3）$\frac{1}{4}-3x+9x^2$.（4）$\frac{1}{9}a^2+2ab+9b^2$.（5）$-x^2+2xy-y^2$.（6）$-x^2-2xy-y^2$.（7）$2a^2+2b^2$.（8）$4ab$.

2.（1）$10xy$.（2）$\frac{1}{4}$；$\frac{1}{2}$.

3.（1）$\frac{4}{9}m^2-mn+\frac{9}{16}n^2$.（2）$a^2-4ab^3+4b^6$.（3）$\frac{1}{9}x^4+\frac{2}{3}x^2y+y^2$.（4）$x^2+4y^2+9z^2-4xy+6xz-12yz$.（5）$-5a^2+24ab+5b^2$.（6）$4a^4-\frac{1}{4}$.（7）$10x^2-16$.（8）$4a^2+12a+21$.

4. 由 $4a^2+b^2+2a-2b+1\frac{1}{4}=0$，得$\left(2a+\frac{1}{2}\right)^2+(b-1)^2=0$，所以 $a=-\frac{1}{4}$且 $b=1$，得 $a^2+b^2=1\frac{1}{16}$.

课后练习 11.2(3)

1.（1）$4-x^2$.（2）x^2-4x+4.（3）$x^2y^2-\frac{8}{9}xy+\frac{16}{81}$.（4）$0.25+a+a^2$.

2.（1）$-x-\frac{1}{3}$.（2）m^2-7.（3）$\frac{1}{3}$；$\frac{2}{3}a$.（4）$\frac{1}{36}$；x；$\frac{1}{6}$.

3. 6 或-6.

4.（1）$81y^4-16$.（2）a^4-2a^2+1.（3）$2x+5$.（4）$-x^2-13x-24$.（5）$-10a^2+4a+29$.（6）$3x^2+\frac{1}{4}$.（7）$a^2+4b^2+c^2-4ab-2ac+4bc$.（8）$a^2-6a+9-4b^2$.（9）$x^4-x^2-10x-25$.（10）$16x^4-72x^2+81$.

5. $\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\times\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\times\left(1+\frac{1}{2^{16}}\right)+\frac{1}{2^{31}}$

$=2\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\times\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\times\left(1+\frac{1}{2^{16}}\right)+\frac{1}{2^{31}}$

$=2\times\left(1-\frac{1}{2^{32}}\right)+\frac{1}{2^{31}}=2$.

课后练习 11.2(4)

1. $ab=\frac{a^2+b^2-(a-b)^2}{2}=-12$，$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=1$.

2. $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab=25$，$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=17$.

3. 由 $a(a+1)-(a^2+b)=3$，得 $a-b=3$，所以 $a^2-2ab+b^2=9$. 所以$\frac{a^2+b^2}{2}-ab=\frac{a^2-2ab+b^2}{2}=\frac{9}{2}$.

4. 化简$(3a-2b)^2-2(2a-3b)^2$，得 $a^2+12ab-14b^2$. 当 $a=-\frac{1}{3}$，$b=-2$ 时，其值为$-47\frac{8}{9}$.

5. $3\,000^2-2\,998\times3\,002=3\,000^2-(3\,000-2)\times(3\,000+2)=4$.

6. (1) $99.8^2=(100-0.2)^2=100^2-2\times100\times0.2+0.2^2=9\,960.04$.

$99.8^2=(99.8+0.2)\times(99.8-0.2)+0.2^2=9\,960.04$.

(2) $85^2=(90-5)^2=90^2-2\times90\times5+5^2=7\,225$；

$85^2=(85+5)\times(85-5)+5^2=7\,225$.

7. $(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$.

11.3　整式的除法

课后练习 11.3(1)

1. (1) B. (2) D.

2. (1) a^6. (2) x^3y^3. (3) 1. (4) a^6. (5) $-x-y$. (6) $x^2-2xy+y^2$.

3. (1) x^9. (2) a^8.

4. $x\neq\frac{3}{4}$.

5. $-\frac{1}{2}$.

6. (1) $\frac{2}{5}$. (2) $-a^7$. (3) -5. (4) x. (5) a^2. (6) a^4.

7. $a^{2x-y}=(a^x)^2\div a^y=\frac{1}{4}$.

8. -3、3、1. 提示：当 $x-2=-1$ 时，$x=1$，此时有$(-1)^4=1$，满足题意；当 $x-2=1$ 时，$x=3$，此时 $1^6=1$，满足题意；当 $x+3=0$ 时，$x=-3$，此时$(-5)^0=1$，满足题意.

课后练习 11.3(2)

1. (1) $3a^4$. (2) $\frac{2}{3}a$. (3) 1. (4) $-\frac{10}{3}a^4$. (5) $\frac{1}{2}a^3c$. (6) $9x^6y$.

2. (1) $\frac{1}{2}x^5y$. (2) $-2x^9$. (3) x^4y^{10}. (4) $3(a-b)^2$.

3. (1) $-\frac{4}{3}y^{10}$. (2) $-\frac{4}{9}ab^3c$. (3) $\frac{27}{4}ab^4$. (4) $\frac{1}{6}a$. (5) $-75x^6y^6z^2$. (6) $3a^3$. (7) $\frac{2}{3}a^5$. (8) $-3a^4-2a^2b+b^2$.

4. 由 $2a^2+9b^2-4a+6b+3=0$，得 $2(a-1)^2+(3b+1)^2=0$，所以 $a=1$ 且 $b=-\frac{1}{3}$. 从而 $a^7b^{13}\div\left(-\frac{1}{3}a^2b^3\right)^3=-27ab^4=-\frac{1}{3}$.

课后练习 11.3(3)

1. ④.

2. (1) $8xy^2-12y+1$. (2) $12a^4b^2-8a^5b^3-4a^8b^2$.

3. (1) $-3a+\frac{3}{2}x$. (2) $7a^4-3a^3$. (3) $6x^2+3xy-2y^2$. (4) $-\frac{1}{4}a^3+\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{4}a+1$. (5) $-2x^2y+3xy^2-5y^3$. (6) $9ab-2$.

4. $B=-\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}ax+\frac{3}{8}x^2$.

5. 化简 $(9a^{n+2}+3a^{n+1}-a^{n-1})\div(-6a^{n-1})$，得 $-\frac{3}{2}a^3-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{6}$. 当 $a=-2$ 时，其值是 $10\frac{1}{6}$.

第 12 章　因式分解

12.1　因式分解的意义

课后练习 12.1

1. C.

2. (1) $3xy(2x-y)$. (2) $(a^2+2a+3)a$. (3) $(x+3)(x-3)$. (4) $(2a+b)(a+2b)$.

3. (1) $-2x^3-4x^2-6x$. (2) y^2-x^2. (3) $a^2-4ab+4b^2$. (4) $x^2-4x-21$.

4. 由 $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$，得二次项为 x^2，常数项为 6. 由 $(x-6)(x+1)=x^2-5x-6$，得二次项为 x^2，一次项为 $-5x$. 所以这个二次三项式是 x^2-5x+6.

5. (1) 二；三；1；一；二；1.

(2) 因式分解；整式乘法.

(3) 设另一个因式是 $ax-3$，则 $mx^2+4x-15=(2x+5)(ax-3)$. 可得 $mx^2+4x-15=2ax^2+(5a-6)x-15$，所以 $\begin{cases}5a-6=4,\\2a=m.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\m=4.\end{cases}$ 所以另一个因式是 $2x-3$，m 的值是 4.

12.2　因式分解的方法

课后练习 12.2(1)

1. (1) $18a^2b$、$12b^2a$、$-6a^3b$、$36ab^3$、$-24ab$、$30a^2b^2$. (2) $18a^2b$、$-9a^2$、$12b^2a$、$-6a^3b$、$36ab^3$、$-24ab$、$30a^2b^2$. (3) $12b^2a$、$36ab^3$、$4b^2$、$30a^2b^2$.

2. (1) $3a(2a^2-1)$. (2) $-25a(a-2)$. (3) $6x(4y-3x^2+2x^3)$. (4) $2x^2y(9xy+$

$6y-x$）．（5）$-2nm(1-2n+3m^2)$．（6）$9m^2n^2(mn^2-3m^2n+9)$．

3.（1）$a-b$．（2）$x-2y-3$．（3）$-$．（4）5．（5）$y-x-3$．

4.（1）$(x+y)^2(1-x-y)$．（2）$(y-x)^2(1-y+x)$．（3）$(x-y)(2-3x+3y)$．（4）$2ab(a+b)(2b-a)$．（5）$2x(x+y)(x-y)$．（6）$2a(a-3)(4a+1)$．

5.（1）① $(1+x)^2$．② $(1+x)^3$．③ $(1+x)^4$．

（2）$(1+x)^{n+1}$．提示：$1+x+x(x+1)+x(x+1)^2+\cdots+x(x+1)^n=(1+x)[1+x+x(1+x)+\cdots+x(1+x)^{n-1}]=(1+x)^2[1+x+x(1+x)+\cdots+x(1+x)^{n-2}]=\cdots=(1+x)^n(1+x)=(1+x)^{n+1}$．

课后练习 12.2(2)

1. C.

2.（1）$(x+10)(x-10)$．（2）$(2a+3b)(2a-3b)$．（3）$\left(ab+\frac{1}{3}\right)\left(ab-\frac{1}{3}\right)$．（4）$(5x+4)(5x-4)$．

3.（1）$2a(a+2)(a-2)$．（2）$(x^2+4)(x+2)(x-2)$．（3）$(a+3b)(a-b)$．（4）$(3x+4a+4b)(3x-4a-4b)$．（5）$\frac{1}{8}x^2y^2(2x+y)(2x-y)$．（6）$ab(9a^2b^2+1)\cdot(3ab+1)(3ab-1)$．（7）$4xy(x+y)(x-y)$．（8）$(x-2y)(5x-10y+2)(5x-10y-2)$．

4.（1）$\pi R^2-4\pi r^2$．

（2）$\pi R^2-4\pi r^2=\pi(R^2-4r^2)=\pi(R+2r)(R-2r)=3.14\times 11.2\times 4=140.672(\mathrm{cm}^2)$．

5.（1）① $\frac{3}{4}$．② $\frac{2}{3}$．③ $\frac{5}{8}$．

（2）$\frac{n+1}{2n}$．理由如下：

$$\begin{aligned}原式&=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}\\&=\frac{n+1}{2n}.\end{aligned}$$

课后练习 12.2(3)

1. ②④.

2.（1）$(a-3b)^2$．（2）$(4+3m)^2$．（3）$\left(ab-\frac{1}{2}\right)^2$．（4）$(7x-y)^2$．（5）$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}x^2\right)^2$．（6）$(5a-2b)^2$．

3.（1）$3a(a-2)^2$．（2）$-(ab+3)^2$．（3）$\frac{1}{16}mn(2m-n)^2$．（4）$(a+1)^2(a-1)^2$．

(5) $(x-2y+6)^2$. (6) $9(a+b)^2$.

4. (1) x^2+3x+2. (2) 原式$=a(a+2)+1=a^2+2a+1=(a+1)^2=(x^2+3x+1)^2$.

5. (1) 9. (2) ± 6. (3) 1.

(4) ① $x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-4x^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.

② $m^4+m^2n^2+n^4=(m^4+2m^2n^2+n^4)-m^2n^2=(m^2+n^2)^2-m^2n^2=(m^2+n^2+mn)\cdot(m^2+n^2-mn)$.

课后练习 12.2(4)

1. (1) $9=1\times 9=3\times 3=(-1)\times(-9)=(-3)\times(-3)$.

(2) $15=1\times 15=3\times 5=(-1)\times(-15)=(-3)\times(-5)$.

(3) $-12=(-1)\times 12=(-2)\times 6=(-3)\times 4=(-4)\times 3=(-6)\times 2=(-12)\times 1$.

(4) $-28=(-1)\times 28=(-2)\times 14=(-4)\times 7=(-7)\times 4=(-14)\times 2=(-28)\times 1$.

2. (1) $(a+2)(a+1)$. (2) $(a-1)(a-2)$. (3) $(a+8)(a+1)$. (4) $(a-2)(a-4)$. (5) $(a-2)(a+1)$. (6) $(a+2)(a-1)$. (7) $(a-4)(a+2)$. (8) $(a+8)(a-1)$.

3. (1) $(a+3)(a+5)$. (2) $(x-4)(x-6)$. (3) $(x-9)(x+2)$. (4) $(a+16)(a-2)$.

4. (1) $(x+10y)(x+15y)$. (2) $(a-2b)(a-10b)$. (3) $3ab^2(a-1)(a-3)$. (4) $-2xy(x+y)(x-4y)$.

5. (1) $(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$. (2) $(xy+2)(xy-7)$. (3) $4(x+1)(x+6)$.

课后练习 12.2(5)

1. (1) $y(2+3x)$. (2) $(a+2)(2+3b)$. (3) $(a+2)(2+3b)$.

2. (1) $(x+3)(x-3)$. (2) $(a-2b+3)(a-2b-3)$. (3) $(a-2b+3)(a-2b-3)$.

3. (1) $(y+2)(x+1)$. (2) $(2a+3)(3b+2)$. (3) $(3t-s)(2a+b)$. (4) $(x+1)\cdot(x-1)(y+1)(y-1)$.

4. (1) $(3+a-2b)(3-a+2b)$. (2) $(2a-3b+c)(2a-3b-c)$. (3) $(x+2y)\cdot(x-2y-1)$. (4) $(x-5y-3)(x-5y)$.

5. 不正确. 因为整式 $x+y+xy+1$ 还能继续因式分解为$(x+1)(y+1)$.

第 13 章　分　　式

13.1　分式及其性质

课后练习 13.1(1)

1. (1) $\dfrac{x}{y}$. (2) $\dfrac{2}{ab}$. (3) $-\dfrac{2ab}{a+2b}$. (4) $\dfrac{a^2+b^2}{a}$. (5) $-\dfrac{4x}{5ab^2}$. (6) $\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

2. (1) $x\neq -2$. (2) $x\neq -\dfrac{1}{2}$. (3) $x\neq 1$ 且 $x\neq -1$. (4) x 为一切数.

3. (1) $\dfrac{1}{5}$. (2) $-\dfrac{4}{9}$.

4. (1) $x=2$. (2) $x=-2$.

5. 由 $x=2$，$\frac{2x+a}{x-b}$无意义，可得 $2-b=0$，解得 $b=2$. 由 $x=0.5$，分式的值为 0，得 $1+a=0$，解得 $a=-1$. 故原分式为 $\frac{2x-1}{x-2}$. 把 $x=c$ 代入，得 $\frac{2c-1}{c-2}=3$，解得 $c=5$.

6. 0、-2、2、-4. 提示：$a+1$ 的值为 1、-1、3 或-3.

课后练习 13.1(2)

1. C.

2. (1) 4；9；150. (2) $4x^2$；$9y^2$；$150xy^3$. (3) $2x+4$；$3x+3$；x^2+2x；$2x^3+2x^2$.

3. (1) $\frac{1}{4x}$. (2) $-\frac{2}{3ab}$. (3) $-\frac{3m}{2n}$. (4) $\frac{5x+5y}{3x-3y}$.

4. (1) $-\frac{2}{3}$. (2) $\frac{x+1}{x+3}$. (3) $\frac{x-4}{2}$. (4) $\frac{3x-12}{x+1}$. (5) $-\frac{x-3}{x-5}$. (6) $\frac{x-1}{y-1}$.

5. (1) $\frac{a+b}{2a-b}$.

(2) $\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(2a-b)[a^2-a(a-b)+(a-b)^2]}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(2a-b)(a^2-ab+b^2)}=\frac{a+b}{2a-b}$.

13.2 分式的运算

课后练习 13.2(1)

1. C.

2. (1) $\frac{y+2}{x+1}$. (2) $\frac{a-b}{a+b}$.

3. (1) $\frac{4a}{c}$. (2) $\frac{18}{x^2}$. (3) $24ay$. (4) $\frac{9}{2}x$.

4. (1) $2x-4$. (2) $\frac{x+3}{2-x}$. (3) $\frac{x^2-2xy}{x+2y}$. (4) $\frac{2}{x^3-x^2y}$. (5) $-\frac{243y}{128x}$. (6) $2a^3b$. (7) $\frac{x-1}{2x+6}$.

5. 化简得 $\frac{a-2}{a+1}$，将 $a=-\frac{1}{2}$代入得-5.

6. (1) $\frac{1\,125}{(12.5-x)^2}$ cm. (2) 4.05 cm.

课后练习 13.2(2)

1. (1) $\frac{8}{xy}$. (2) $\frac{1}{2x}$. (3) 3. (4) $\frac{1}{a}$. (5) 8. (6) $\frac{2}{x+y}$.

2. (1) $6y$；$4x^2$. (2) $6a^2$；$3b^2$；$2c^2$. (3) $x-y$；$2x+2y$. (4) x^2+2x+1；x^2+x-2.

3.（1）$\frac{a^2+b^2}{ab}$.（2）$\frac{1}{2x}$.（3）$\frac{1}{a+3}$.（4）$\frac{x-5y}{x^2-y^2}$.（5）$\frac{x+2}{x}$.（6）0.

4.（1）$\frac{7}{1+a}$.（2）$\frac{2x}{x+1}$.（3）$\frac{a+2}{a-2}$.

5. ①；正确结果为 $\frac{y^2}{x+y}$.

6. 化简得 $\frac{x+1}{x-1}$.（1）2.（2）不能. 当 $\frac{x+1}{x-1}=-1$，解得 $x=0$，但当 $x=0$ 时，$\frac{x}{x+1}$的值为 0，除数不能为 0，故原代数式的值不能等于-1.

课后练习 13.2(3)

1.（1）$\frac{1}{16}$.（2）9.（3）1.（4）2.

2.（1）a^6.（2）a^2.（3）a^{-2}.（4）5^{-5}.（5）x^{-4}.（6）$(-a)^{-5}$.

3.（1）$\frac{1}{a^6}$.（2）$\frac{2x^3}{y^2}$.（3）$\frac{1}{3^2(x+y)^3}$.（4）$\frac{2y^3}{x}$.

4.（1）$-2c^{-2}x$.（2）$2x(x^2+y^2)^{-1}$.（3）$5^{-1}x^{-1}y^{-1}(x+y)^2$.（4）$-4^{-1}a^{-2}x(a^2+b^2)^{-1}$.

5.（1）$-\frac{1}{a^{12}}$.（2）$\frac{27}{4}ab^4$.（3）$\frac{1}{32x^6}$.（4）$\frac{1}{y-x}$.（5）$\frac{y+x}{y-x}$.（6）$\frac{4}{9y^2}$.

6. 化简得$\frac{1}{4}x^3y^{-4}$，将 $x=4$，$y=2$ 代入得 1.

13.3 分式方程

课后练习 13.3(1)

1. C.

2. A.

3.（1）$x=-\frac{9}{4}$.（2）$x=-2$.（3）$x=-1$.（4）$x=2$ 是增根，原方程无解.

4. $\frac{7}{8}$.

5. 1.

6.（1）因为原方程可能有增根 $x=1$，所以还要保证 $a-2\neq 1$，即 $a\neq 3$.

（2）$m<\frac{1}{2}$且$m\neq -\frac{1}{4}$. 提示：$x=\frac{3}{2m-1}$，且 x 不能取-2.

课后练习 13.3(2)

1. C.

2. A.

3. 甲队每天安装 33 台空调，乙队每天安装 30 台空调.

4. A 型汽车的进价为每辆 15 万元，B 型汽车的进价为每辆 10 万元.

5. 参加这项活动的预定人数为 15.

6.（1）甲、乙两种款型的 T 恤衫分别购进 100、50 件.

（2）40.

第 14 章　图形的运动

14.1　平移

课后练习 14.1(1)

1. C.

2. 3 cm.

3. $\angle CBE=30^{\circ}$.

4. 13 cm.

课后练习 14.1(2)

1. 略.

2. 略.

3. 图略；线段 AB 扫过的图形的面积是 18.

4. 先向右平移 2 格，再向下平移 3 格(答案不唯一).

14.2　旋转

课后练习 14.2

1. 点 O；$\angle AOD$（$\angle BOE$）；相等；相等.

2. 略.

3.（1）点 C.（2）逆时针；90°.（3）3 cm.

4. 略.

14.3　轴对称

课后练习 14.3(1)

1. A.

2. C.

3. B.

4. 略.

5. 图略.　提示：有两条对称轴.

课后练习 14.3(2)

1～5. 略.

14.4 中心对称

课后练习 14.4

1. A.

2～5. 略.

后　记

本套教学参考资料与李大潜主编、上海教育出版社出版的《义务教育教科书（五·四学制）数学》配套使用.

本册教学参考资料是七年级上册. 在主编李大潜的主持下，由徐斌艳任本册主编，参与编写人员为：

王海生、许亚善（第 10 章）

沈洁、许亚善（第 11 章）

鲁海燕、许亚善（第 12 章）

朱丽霞、许亚善（第 13 章）

王海生、许亚善（第 14 章）

朱雁、徐斌艳、陆立强（综合与实践）

感谢编写团队的团结协作和不懈努力. 编写过程中，上海市课程教育教学研究基地（中小学课程方案基地）、上海市心理教育教学研究基地、上海基础教育教材建设重点研究基地、两个上海市数学教育教学研究基地（分别设在复旦大学和华东师范大学）等上海高校"立德树人"人文社会科学重点研究基地对编写工作给予了大力支持，在此表示衷心的感谢.

我们要感谢一直支持、关心和帮助我们工作的同志和朋友们. 大家的热忱指导和帮助，我们定会铭记于心，并化为我们的工作动力.

欢迎广大师生来电来函提出宝贵的意见.

联系电话：021－64319241（内容）　021－64373213（印刷或装订）

电子邮箱：jcjy@seph.com.cn

地　　址：上海市闵行区号景路 159 弄 C 座上海教育出版社（201101）

SHUXUE

JIAOXUE CANKAO ZILIAO

经上海市教材审查和评价委员会审查
准予使用　准用号 SD-CJ-2024005

数学　教学参考资料

七年级　上册

ISBN 978-7-5720-2872-4

定　价：41.50 元

绿色印刷产品