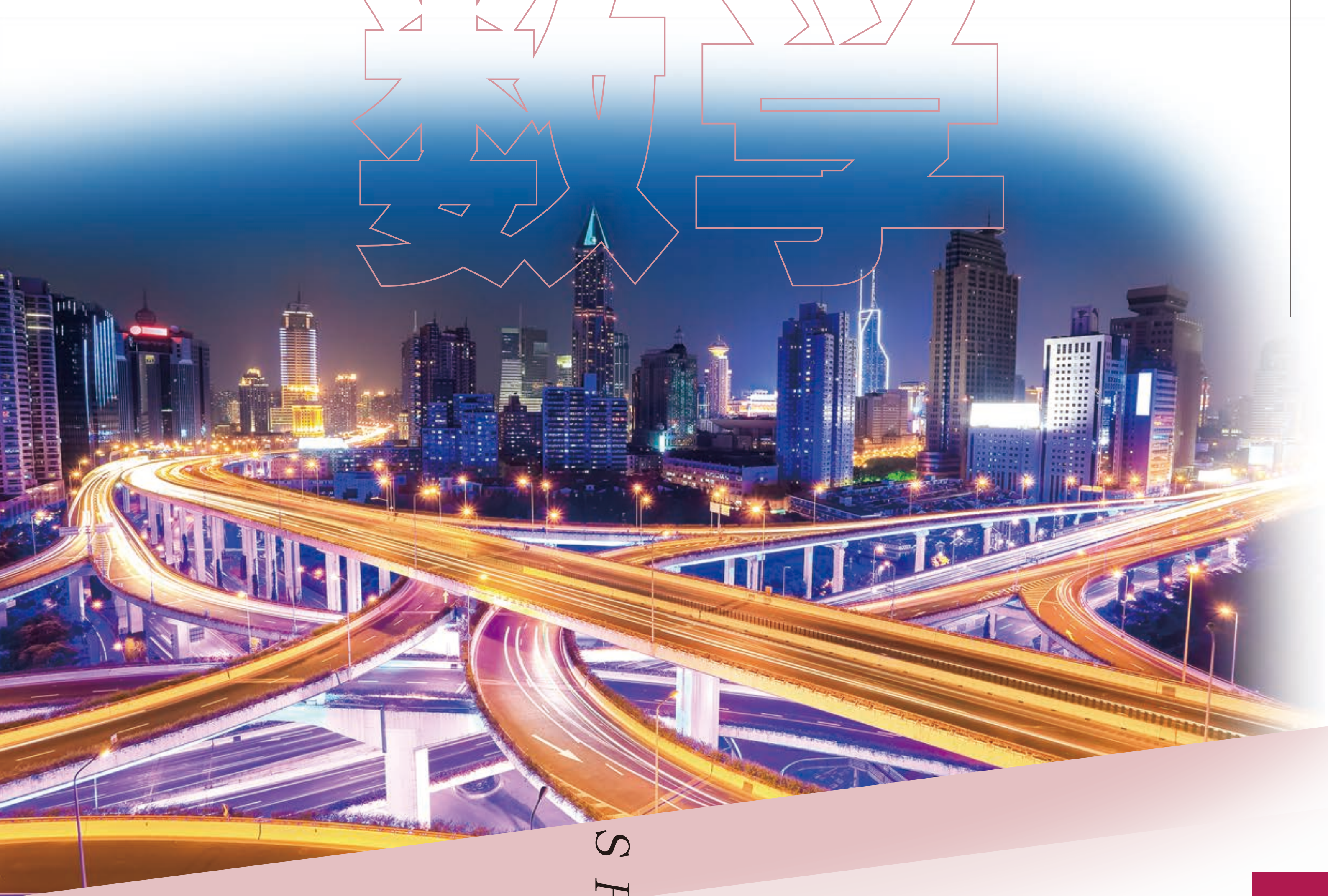
九年义务教育课本

数学

九年级 第二学期

（试用本）

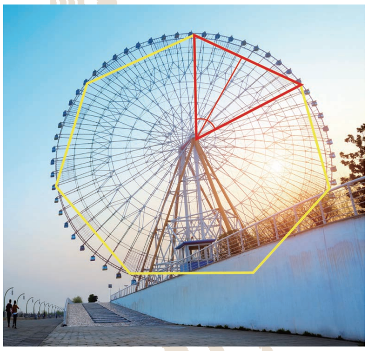
上海教育出版社



SHUXUE

目录

27



28

第二十八章　统计初步 ······ 39

Yuan Yu Zhengduobianxing

27 第二十七章　圆与正多边形

自行车的车轮、游乐园的大转盘，在转动中显现出“圆”的和谐、匀称之美；奥林匹克运动会的五环标志，用“圆”表达了“团结”“公正”的意境.

圆是最简单的封闭曲线，也是现实生活中常见的图形.

人们对于圆的认识和研究，年代久远，情有独钟.古希腊数学家认为：一切立体图形中最美的是球形，一切平面图形中最美的是圆形.在平面上，对于任意一个圆，以圆心为旋转中心，无论将这个圆怎样旋转，它总是与原来的图形重合；过圆心任意画一条直线，这个圆被直线分成的两部分总是一样的.在平面上，周长一定的封闭图形中圆的面积最大；面积一定的封闭图形中圆的周长最小.可见，圆有许多优良的特性，你能感受到吗？

第一节　圆的基本性质

27.1　圆的确定

圆上的点到圆心的距离都等于定长；到圆心的距离等于该定长的点都在圆上.
同圆的半径长相等.

我们知道，圆是平面上到一个定点的距离等于定长的所有点所成的图形，这个定点是圆心，联结圆心和圆上任意一点的线段是圆的半径，这个定长是圆的半径长.

以点 O 为圆心的圆称为圆 O，记作$\odot O$.

操作

在平面上，以已知点 O 为圆心、1 厘米为半径长画圆；再过点 O 任意画一条射线 OM，在 OM 上分别取点 A、B、C，使 OA、OB、OC 的长分别是 0.5 厘米、1 厘米和 1.5 厘米.

画出$\odot O$ 及点 A、B、C，如图 27－1.怎样描述点 A、B、C 与圆 O 的位置关系呢？

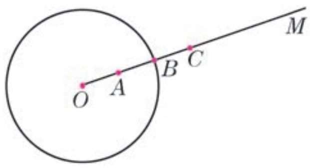


图 27－1

在圆所在的平面上，以圆周为分界线，含圆心的部分叫做圆的内部（简称圆内），不含圆心的部分叫做圆的外部（简称圆外），如图 27－2 所示.

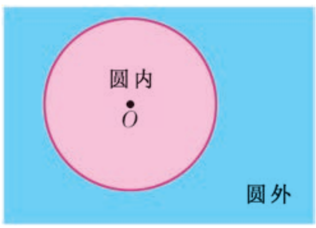


图 27－2

在图 27－1 中，点 A 在$\odot O$ 内，点 B 在$\odot O$ 上，点 C 在$\odot O$ 外.

一般来说，对于给定的一个圆，平面上的点与这个圆的位置

关系有三种：点在圆内，点在圆上，点在圆外.一个点与这个圆的位置关系，可用这个点到圆心的距离与圆的半径长这两个量的大小关系来描述.

设一个圆的半径长为 R，点 P 到圆心的距离为 d，则

点 P 在圆外 $\Leftrightarrow d>R$；
点 P 在圆上 $\Leftrightarrow d=R$；
点 P 在圆内 $\Leftrightarrow 0\leqslant d<R$.

符号“$\Leftrightarrow$”读作“等价于”，表示这个符号两边的数学事实可由左边推出右边，也可由右边推出左边.

例题1 已知线段 AB 和点 C，$\odot C$ 经过点 A.根据如下所给点 C 的位置，判断点 B 与 $\odot C$ 的位置关系.

(1) 如图 27－3(1)，点 C 在线段 AB 的垂直平分线 MN 上；

(2) 如图 27－3(2)，点 C 在线段 AB 上，且 $0<AC<\frac{1}{2}AB$.

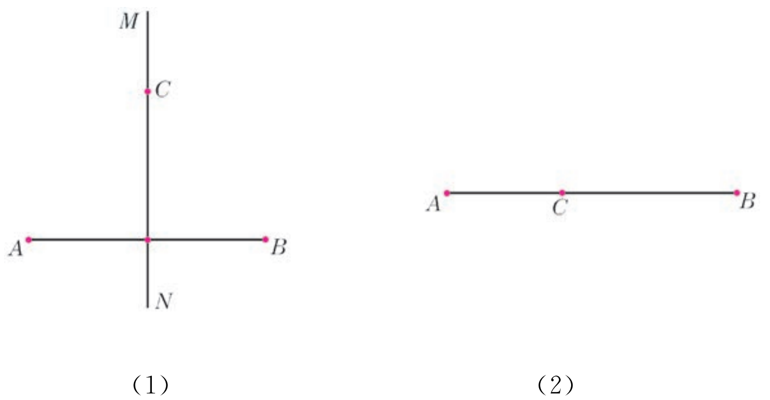


图 27－3

解 (1) $\because$ $\odot C$ 经过点 A，

$\therefore$ CA 是 $\odot C$ 的半径.

$\because$ 点 C 在线段 AB 的垂直平分线上，

$\therefore$ $CB=CA$.

$\therefore$ 点 B 在 $\odot C$ 上.

(2) $\because$ 点 C 在线段 AB 上，

$\therefore$ $AC+BC=AB$.

又 $\because$ $AC<\frac{1}{2}AB$，

$\therefore$ $BC>\frac{1}{2}AB$.

得 $BC>AC$.

$\because$ AC 是 $\odot C$ 的半径，

$\therefore$ 点 B 在 $\odot C$ 外.

思考

由例题 1(1)可知，如果以 CA 为半径的$\odot C$ 的圆心 C 在线段 AB 的垂直平分线上，那么$\odot C$ 经过 A、B 两点.反过来，如果$\odot C$ 经过 A、B 两点，那么圆心 C 一定在线段 AB 的垂直平分线上吗？

由$\odot C$ 过 A、B 两点，得 $CA=CB$，可知圆心 C 在线段 AB 的垂直平分线上.

在平面上，经过给定两点的圆有无数个，这些圆的圆心一定在联结这两点的线段的垂直平分线上(如图 27－4 所示).

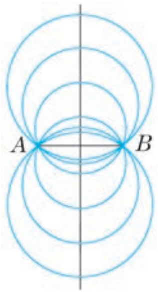


图 27－4

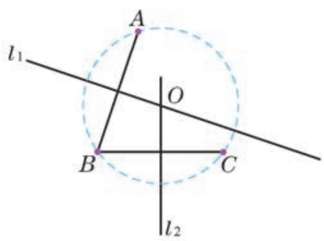
问题

在平面上，经过给定三点的圆是否仍然“有无数个”？圆心位置又如何？

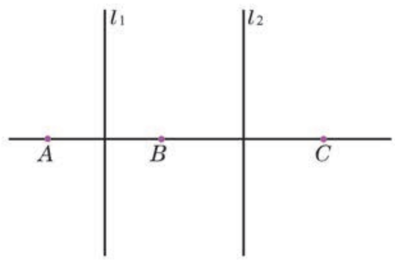
设给定的三点为 A、B、C，则经过 A、B 两点的圆的圆心在线段 AB 的垂直平分线 l_1 上；经过 B、C 两点的圆的圆心在线段 BC 的垂直平分线 l_2 上.

(1) 如果 A、B、C 三点不在同一直线上，那么 l_1 与 l_2 必定相交.设交点为 O(如图 27－5(1)所示)，则以点 O 为圆心、OB 为半径的圆经过 A、B、C 三点.因为 l_1 与 l_2 的交点唯一，所以经过 A、B、C 三点的圆有且只有一个.

(2) 如果 A、B、C 三点在同一直线上，那么 l_1 与 l_2 平行(如图 27－5(2)所示).这时，经过 A、B、C 三点的圆不存在.



(1)



(2)

图 27－5

所以，经过不在同一直线上的三点可以作一个且只可以作一个圆.这就得到：

定理　不在同一直线上的三个点确定一个圆.

三角形的三个顶点确定一个圆.经过一个三角形各顶点的圆叫做这个**三角形的外接圆**，外接圆的圆心叫做这个**三角形的外心**；这个三角形叫做这个**圆的内接三角形**.

如图 27－6，⊙O 是△ABC 的外接圆，△ABC 是⊙O 的内接三角形.

如果一个圆经过一个多边形的各顶点，那么这个圆叫做这个**多边形的外接圆**，这个多边形叫做这个**圆的内接多边形**.

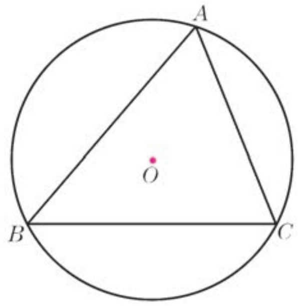


图 27－6

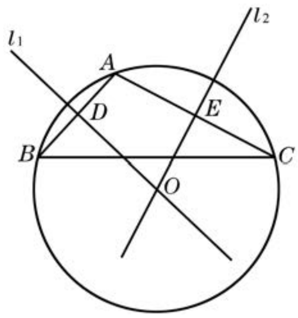


图 27－7

例题2 已知钝角三角形 ABC，用直尺和圆规作出这个三角形的外接圆.

作法 如图 27－7 所示，

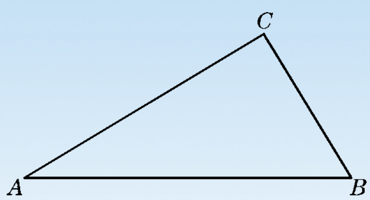
1. 作线段 AB 的垂直平分线 l_1.
2. 作线段 AC 的垂直平分线 l_2，设 l_2 与 l_1 相交于点 O.
3. 以点 O 为圆心、OA 为半径作⊙O.

⊙O 就是所求作的圆.

分别联结 OA、OB、OC，可知 $OB=OA$，$OC=OA$，所以⊙O 是△ABC 的外接圆.钝角三角形的外接圆的圆心在这个三角形的外部.

练习 27.1

1. 如图，已知△ABC 中，$\angle C=90°$，求作△ABC 的外接圆.



（第 1 题）

2. 指出第 1 题所画的外接圆的圆心位置，并说明理由.

3. 经过无三点共线的任意四点，是否一定可以作一个圆？试举例说明.

27.2 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系

圆上任意两点之间的部分叫做**圆弧**，简称**弧**(arc)；联结圆上任意两点的线段叫做**弦**(chord)，过圆心的弦就是直径.以圆心为顶点的角叫做**圆心角**(central angle).

圆的任意一条直径的两个端点将圆分成两条弧，每一条弧都叫做**半圆**.大于半圆的弧叫做**优弧**(major arc)，小于半圆的弧叫做**劣弧**(minor arc).如图 27－8，以 A、C 为端点的劣弧记作$\overset{\frown}{AC}$，读作"弧 AC"；以 A、C 为端点的优弧记作$\overset{\frown}{ABC}$，读作"弧 ABC".

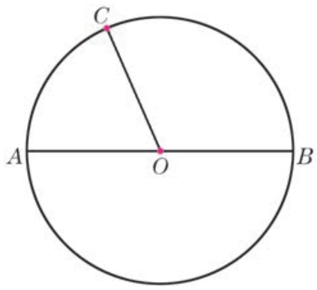


图 27－8

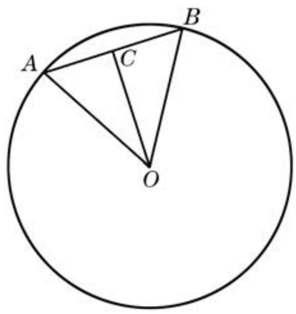


图 27－9

没有特别说明时，本章中的圆心角通常是指大于 0°且小于 180°的角.

如图 27－9，⊙O 的一个圆心角的两边与⊙O 分别交于点 A、B，这个圆心角记作$\angle AOB$.这时，相应得到弧 AB 和弦 AB.反过来看，对于弧 AB 或弦 AB，相应可作$\angle AOB$.通常就说$\overset{\frown}{AB}$(或弦 AB)是$\angle AOB$ 所对的弧(或弦)，$\angle AOB$ 是$\overset{\frown}{AB}$(或弦 AB)所对的圆心角.

也可以说，垂线段 OC 表示弦 AB 的弦心距.

圆心到弦的距离叫做**弦心距**(apothem).在图 27－9 中，过圆心 O 作弦 AB 的垂线，垂足为点 C，则垂线段 OC 的长是弦 AB 的弦心距.

在平面上，一个圆绕着它的圆心旋转任何一个角度(大于 0°且小于 360°)，都能与原来图形重合.所以，圆是以圆心为旋转对称中心的旋转对称图形，旋转角可为大于 0°且小于 360°的任何一个角.

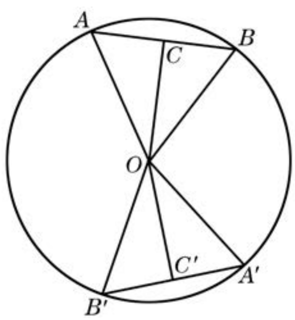


图 27－10

问题 1

如图 27－10，在⊙O 中，当圆心角$\angle AOB=\angle A'OB'$时，它们分别所对的$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{A'B'}$是否能重合?

把扇形 OAB 绕圆心 O 旋转，使 OA 与 OA'重合.因为$\angle AOB=\angle A'OB'$，所以 OB 和 OB'重合；而⊙O 的半径长都相等，因此点 A 与点 A'重合，点 B 与点 B'重合，这样$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{A'B'}$就一定重合.

能够重合的两条弧称为**等弧**，或者说这两条弧相等.上述$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{A'B'}$是等弧，记作$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$.

半径长相等的两个圆一定能够重合，我们把半径长相等的两个圆称为**等圆**.

> 等圆可看作同一个圆移动到不同的位置时的图形.

在上述问题中，$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{A'B'}$所对的弦分别是 AB 和 $A'B'$.通过旋转可知，AB 与 $A'B'$重合，两弦的垂线段 OC、OC'也重合(为什么)，得 $AB=A'B'$，$OC=OC'$.

于是，可以得到关于圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理：

定理　在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦的弦心距相等.

例题1　如图 27－11，$\odot O$ 是$\triangle ABC$ 的外接圆，$\angle AOB=\angle AOC=120°$.

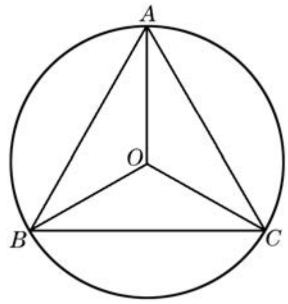


图 27－11

(1) 求证：$\triangle ABC$ 是等边三角形；

(2) 如果 BC 的弦心距为 3 厘米，求 AB、AC 的弦心距.

解　(1) ∵　$\angle AOB+\angle AOC+\angle BOC=360°$，

$\angle AOB=\angle AOC=120°$，

∴　$\angle BOC=360°-120°-120°=120°$，

得　$\angle AOB=\angle AOC=\angle BOC$.

∴　$AB=AC=BC$，

即$\triangle ABC$ 是等边三角形.

(2) ∵　$\angle AOB=\angle AOC=\angle BOC$，$AB$、$AC$、$BC$ 分别是$\angle AOB$、$\angle AOC$、$\angle BOC$ 所对的弦，

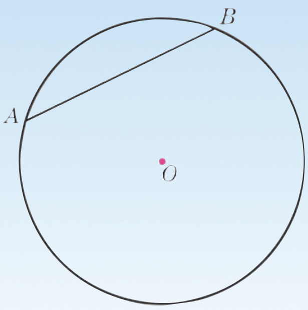
∴　弦 AB、AC、BC 的弦心距相等.

∵　BC 的弦心距为 3 厘米，

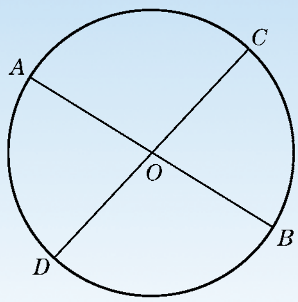
∴　AB、AC 的弦心距为 3 厘米.

练习 27.2(1)

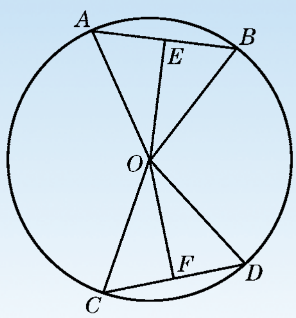
1. 如图，$\overset{\frown}{AB}$与弦 AB 哪条长？为什么？
2. 如图，在$\odot O$ 中，如果 AB、CD 是直径，那么图中相等的弧有哪些？为什么？



(第 1 题)



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，已知在$\odot O$ 中，AB、CD 分别是弦，$OE\perp AB$，$OF\perp CD$，垂足分别是点 E、F. 请添加一个条件，使得 $OE=OF$.

圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理表明，在同圆或等圆中，圆心角、圆心角所对的弧和弦以及弦的弦心距得到的四组量之间有密切联系.

问题2

如图 27－12，在⊙O 中，AB、CD 是两条弦，OE、OF 分别表示 AB、CD 的弦心距.

(1) 如果$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，那么$\angle AOB$ 与$\angle COD$ 相等吗？

(2) 如果 $AB=CD$，那么$\angle AOB$ 与$\angle COD$ 相等吗？

(3) 如果 $OE=OF$，那么$\angle AOB$ 与$\angle COD$ 相等吗？

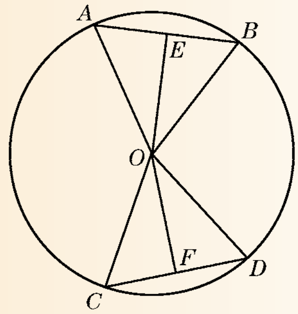


图 27－12

我们用推理证明的方法来解决上面的问题.

证明：(1) 设$\angle AOB=m^\circ$，$\angle COD=n^\circ$，⊙O 的半径长为 r，则

$$\overset{\frown}{AB}\text{的长 } l_1=\frac{m\pi r}{180}；\ \overset{\frown}{CD}\text{的长 } l_2=\frac{n\pi r}{180}.$$

∵ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，

∴ $l_1=l_2$，即$\frac{m\pi r}{180}=\frac{n\pi r}{180}$，

得 $m=n$.

∴ $\angle AOB=\angle COD$.

(2) ∵ $AB=CD$，$OA=OB=OC=OD$，

∴ $\triangle AOB\cong\triangle COD$.

∴ $\angle AOB=\angle COD$.

(3) ∵ OE、OF 分别表示 AB、CD 的弦心距，

∴ $OE\perp AB$，$OF\perp CD$，得$\angle OEA=\angle OFC=90^\circ$.

又 ∵ $OE=OF$，$OA=OC$，

∴ $\mathrm{Rt}\triangle OEA\cong\mathrm{Rt}\triangle OFC$，

得 $\angle AOE=\angle COF$.

∵ $OA=OB$，$OC=OD$，

∴ $\angle AOB=2\angle AOE$，$\angle COD=2\angle COF$.

∴ $\angle AOB=\angle COD$.

我们也可利用圆的旋转对称性来解决上面的问题(1)、(2)、(3).

在问题(1)、(2)、(3)中，除了可以推出$\angle AOB=\angle COD$外，利用关于圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理可知其余两组量也相等.

因此，圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理有以下推论：

推论　在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条劣弧(或优弧)、两条弦、两条弦的弦心距得到的四组量中有一组量相等，那么它们所对应的其余三组量也分别相等.

这个推论可简单表述如下：
在同圆或等圆中，圆心角相等$\Leftrightarrow$劣弧(或优弧)相等$\Leftrightarrow$弦相等$\Leftrightarrow$弦心距相等.

例题2　已知：如图27-13，在$\odot O$中，$OE\perp AB$，$OF\perp CD$，垂足分别是点E、F，且$OE=OF$.

求证：$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

证明　$\because$　$OE\perp AB$，$OF\perp CD$，垂足分别是点E、F，

$\therefore$　OE、OF分别表示弦AB、CD的弦心距.

$\because$　$OE=OF$，

$\therefore$　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，

即　$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{CB}+\overset{\frown}{BD}$.

$\therefore$　$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

同圆或等圆上的两条弧，可像线段的和与差一样作出它们的和与差，并分别用“+”“-”号表达.

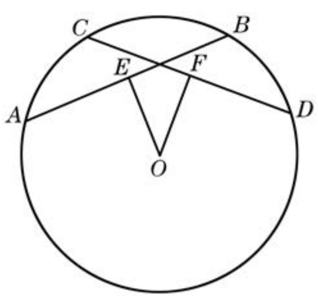


图27-13

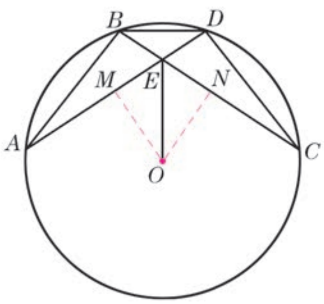


图27-14

例题3　已知：如图27-14，在$\odot O$中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，$AD$、$BC$相交于点$E$.

求证：(1) $\triangle ABD\cong\triangle CDB$；　(2) EO平分$\angle AEC$.

证明　$\because$　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，

$\therefore$　$AB=CD$；

$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{CD}$，即　$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CB}$，得　$AD=CB$.

$\because$　$AB=CD$，$AD=CB$，$BD=DB$，

$\therefore$　$\triangle ABD\cong\triangle CDB$.

(2) 过点O作$OM\perp AD$、$ON\perp CB$，垂足分别为点M、N，则OM、ON分别表示AD和CB的弦心距.

$\because$　$AD=CB$，

$\therefore$　$OM=ON$.

$\therefore$　点O在$\angle AEC$的平分线上，即EO平分$\angle AEC$.

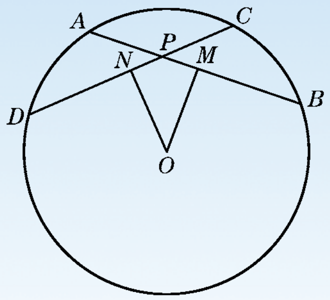
练习 27.2(2)

1. 已知：如图，$\odot O$ 的弦 AB 与 CD 相交于点 P，$OM\perp AB$，$ON\perp DC$，垂足分别是点 M、N，且 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$.

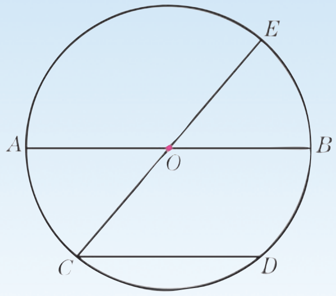
求证：$OM=ON$.

2. 已知：如图，AB、CE 是$\odot O$ 的直径，CD 是$\odot O$ 的弦，$CD/\!/AB$.

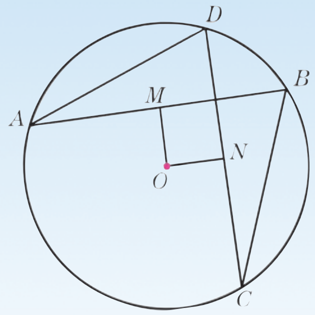
求证：$\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 已知：如图，AD、BC 是$\odot O$ 的弦，$AD=BC$，OM、ON 分别表示弦 AB 和 CD 的弦心距.
求证：$OM=ON$.

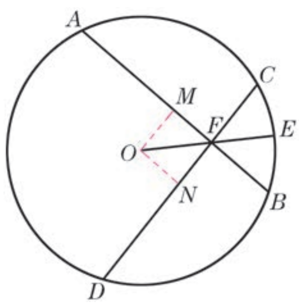


图 27－15

例题4 已知：如图 27－15，点 F 在$\odot O$ 的半径 OE 上，AB 和 CD 是过点 F 的弦，且$\angle AFO=\angle DFO$.

求证：(1) $AB=CD$； (2) $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

证明 (1) 过点 O 作 $OM\perp AB$、$ON\perp CD$，垂足分别是点 M、N，则 OM、ON 分别表示 AB 和 CD 的弦心距.

$\because$ $\angle AFO=\angle DFO$，

$\therefore$ $OM=ON$.

$\therefore$ $AB=CD$.

(2) $\because$ $AB=CD$，

$\therefore$ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，

即 $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{CB}+\overset{\frown}{BD}$.

$\therefore$ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

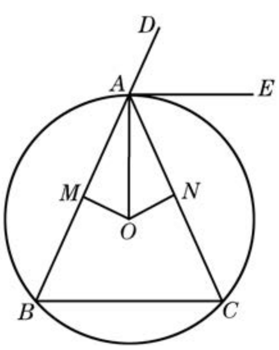


图 27－16

例题5 已知：如图 27－16，$\odot O$ 是$\triangle ABC$ 的外接圆，AE 平分$\triangle ABC$ 的外角$\angle DAC$，$OM\perp AB$，$ON\perp AC$，垂足分别是点 M、N，且 $OM=ON$.

求证：(1) $AE/\!/BC$； (2) $AO\perp AE$.

证明 (1) $\because$ $OM\perp AB$，$ON\perp AC$，垂足分别是点 M、N，

$\therefore$ OM、ON 分别表示弦 AB 和 AC 的弦心距.

又∵　$OM=ON$，

∴　$AB=AC$，

得　　$\angle B=\angle C$.

∵　$\angle DAC=\angle B+\angle C$，

∴　$\angle DAC=2\angle B$.

∵　AE 平分$\angle DAC$，

∴　$\angle DAC=2\angle DAE$，

得　　$\angle B=\angle DAE$.

∴　$AE/\!/BC$.

(2) ∵　$OM\perp AB$，$ON\perp AC$，$OM=ON$，

∴　点 O 在$\angle BAC$ 的平分线上，即 AO 平分$\angle BAC$，

得　　$\angle BAC=2\angle OAN$.

∵　$\angle BAC+\angle DAC=180°$，

即　　$2\angle OAN+2\angle CAE=180°$.

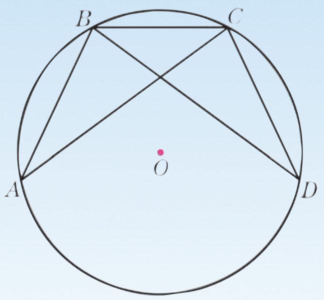
∴　$\angle OAN+\angle CAE=90°$.

∴　$AO\perp AE$.

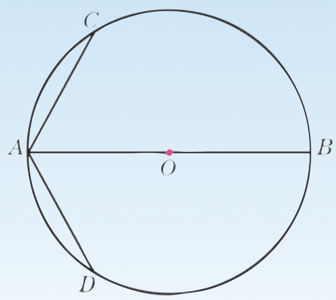
练习 27.2(3)

1. 已知：如图，AB、CD 是⊙O 的弦，且 $AB=CD$.
求证：$\triangle ACB\cong\triangle DBC$.

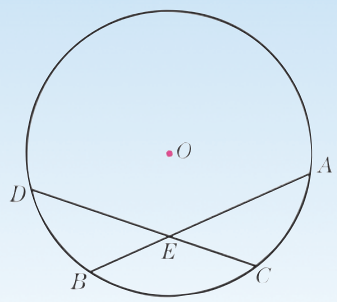
2. 已知：如图，AB 是⊙O 的直径，AC 和 AD 是分别位于 AB 两侧的两条相等的弦.
求证：AB 平分$\angle CAD$.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 已知：如图，⊙O 的弦 AB 与 CD 相交于点 E，$AB=CD$.
求证：$AE=DE$.

27.3　垂径定理

将一张圆形纸片沿着它的任意一条直径翻折，可以看到直径两侧的两个半圆互相重合.由此说明：

圆是轴对称图形,任意一条直径所在的直线都是它的对称轴.

思考

如图 27－17,CD 是$\odot O$ 的直径,AB 是$\odot O$ 的弦,$AB\perp CD$,垂足是点 M,那么线段 AM 与 BM 是否相等? $\overset{\frown}{AD}$与$\overset{\frown}{BD}$是否相等? $\overset{\frown}{AC}$与$\overset{\frown}{BC}$呢?

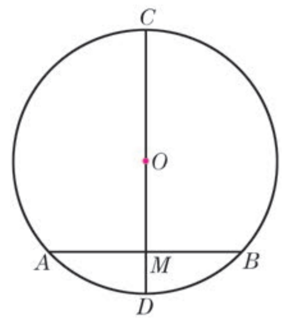


图 27－17

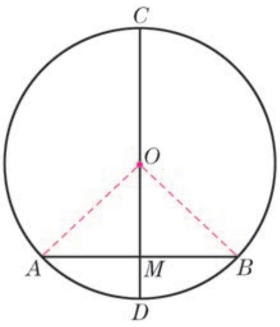


图 27－18

利用圆是轴对称图形的性质,可知以 CD 为折痕将$\odot O$ 翻折后 A、B 两点能重合,上面问题的结论是肯定的.现在我们用推理的方法来证明.

证明:如图 27－18,分别联结 OA、OB.

$\because$ $OA=OB$,$OM\perp AB$,

$\therefore$ $AM=BM$;

$\angle AOD=\angle BOD$, 得 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$.

又$\because$ CD 是$\odot O$ 的直径,

$\therefore$ $\overset{\frown}{CAD}=\overset{\frown}{CBD}$,

即 $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{BC}$.

$\therefore$ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$.

结论中"平分弦所对的弧"包括弦所对的劣弧和优弧.将弧平分的点是这条弧的中点.

垂径定理中的条件"圆的直径垂直于弦",也可表述为"圆的半径垂直于弦",或者"圆心到弦的垂线段".

我们得到了圆的一个性质定理:

垂径定理　如果圆的一条直径垂直于一条弦,那么这条直径平分这条弦,并且平分这条弦所对的弧.

例题1　已知:如图 27－19,以点 O 为圆心的两个圆中,大圆的弦 AB 交小圆于 C、D 两点.

求证:$AC=BD$.

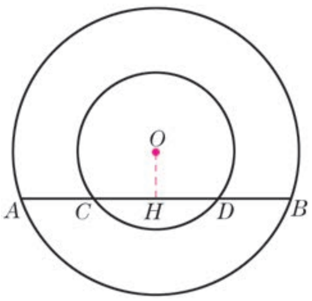


图 27－19

证明　过点 O 作 $OH\perp AB$,垂足为点 H.

由垂径定理,得

$$CH=DH,\ AH=BH,$$

即 $AC+CH=BD+DH$.

$\therefore$ $AC=BD$.

例题2 一千四百多年前，我国隋代建造的赵州石拱桥的桥拱是圆弧形.已知桥拱的跨度(弧所对的弦的长)约为 37.02 米，拱高(弧的中点到弦的距离)约为 7.2 米，求桥拱所在圆的半径长(精确到 0.1 米).

解 如图 27－20，用$\overset{\frown}{AB}$表示桥拱，$\overset{\frown}{AB}$所在圆的圆心为 O，$\odot O$ 的半径长为 R.联结 AB，过圆心 O 作半径 OC 垂直于弦 AB，垂足为点 D.根据垂径定理，可知 D 是 AB 的中点，C 是$\overset{\frown}{AB}$的中点，则 CD 就是拱高.由题设知

$$AB=37.02\text{ 米},CD=7.2\text{ 米},$$

得 $AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 37.02=18.51(\text{米})$，

$OD=OC-CD=R-7.2$.

在 Rt$\triangle OAD$ 中，由勾股定理，得

$$AD^2+OD^2=OA^2,$$

即 $18.51^2+(R-7.2)^2=R^2$.

整理，得 $14.4R=394.460\,1$.

解得 $R\approx 27.4$(米).

答：桥拱所在圆的半径长约为 27.4 米.

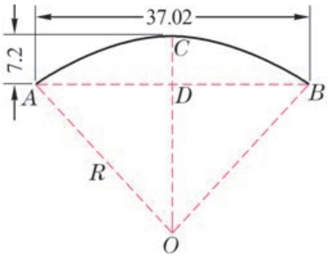


图 27－20

由圆的弦及其所对的弧组成的图形叫做**弓形**，例题 2 中的拱高也叫弓形高.

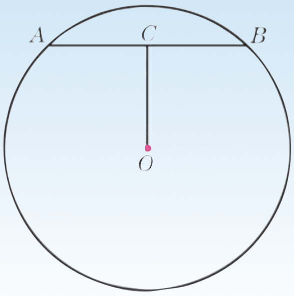
弓形的弧可以是劣弧，也可以是优弧或半圆.弓形中的曲线一定是圆弧，拱形中的曲线不一定是圆弧.

练习 27.3(1)

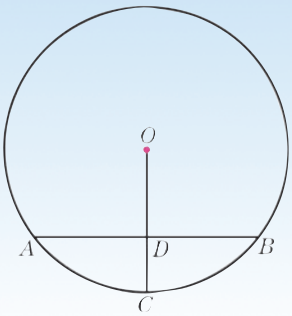
1. 如图，已知$\odot O$ 的弦 AB 长为 10，半径长 R 为 7，OC 表示 AB 的弦心距，求 OC 的长.

2. 已知：$\odot O$ 的半径长为 50 厘米，弦 AB 长 50 厘米.

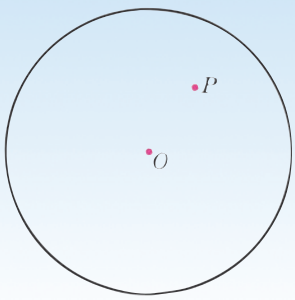
求：(1) 点 O 到 AB 的距离； (2) $\angle AOB$ 的大小.



(第 1 题)



(第 3 题)



(第 4 题)

3. 如图，已知⊙O 的半径 OC 垂直于弦 AB，垂足为点 D，AD 长 2 厘米，弧 AB 长 5 厘米.求：(1) AB 的长；　(2) 弧 AC 的长.

4. 如图，已知 P 是⊙O 内一点.画一条弦 AB，使 AB 经过点 P，并且 $AP=PB$.

垂径定理指出了圆的直径与弦及弦所对的弧之间的关联，即由直径“垂直”于弦得到“平分”弦(弧).

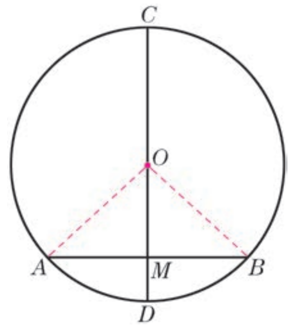


图 27－21

问题 1

如图 27－21，CD 是⊙O 的直径，AB 是弦(不是直径)，CD 与 AB 交于点 M.

(1) 如果 $AM=BM$，那么 CD 与 AB 垂直吗?

(2) 如果$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，那么 CD 与 AB 垂直吗?

在图 27－21 中，分别联结 OA、OB，得△AOB 是等腰三角形.利用等腰三角形的“三线合一”性质，可推出 CD 与 AB 垂直.

想一想，问题 1 为什么要指明弦 AB 不是直径? 如果弦 AB 是直径，(1) 中的结论还成立吗?

由此归纳得到以下结论：

如果圆的直径平分弦(这条弦不是直径)，那么这条直径垂直于这条弦，并且平分这条弦所对的弧.

如果圆的直径平分弧，那么这条直径就垂直平分这条弧所对的弦.

在圆中，圆心到弦的两个端点的距离都等于圆的半径.由线段垂直平分线定理的逆定理，可知圆心一定在弦的垂直平分线上.于是得到：

如果一条直线是弦的垂直平分线，那么这条直线经过圆心，并且平分这条弦所对的弧.

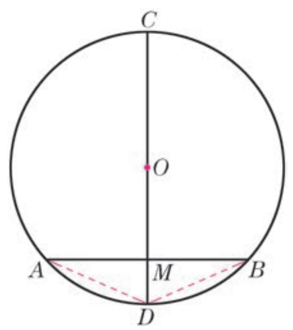


图 27－22

问题 2

如图 27－22，在⊙O 中，弦 CD 与弦 AB 交于点 M.

(1) 如果 $AM=BM$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，那么 CD 与 AB 垂直吗?

(2) 如果 $CD\perp AB$，垂足为点 M，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，那么 AM 与 BM 相等吗?

问题中的条件有“弧相等”，可知它们“所对的弦相等”.如图 27－22，分别联结 AD、BD，得 $AD=BD$，则△DAB 是等腰三角形.

再利用等腰三角形的“三线合一”性质，（1）可由 $AM=BM$，推出 $CD\perp AB$；（2）可由 $CD\perp AB$，推出 $AM=BM$.这时还可以进一步看到，CD 垂直平分弦 AB，因此 CD 一定经过圆心 O.

由此得到以下结论：

如果一条直线平分弦和弦所对的一条弧，那么这条直线经过圆心，并且垂直于这条弦.

如果一条直线垂直于弦，并且平分弦所对的一条弧，那么这条直线经过圆心，并且平分这条弦.

当条件为“直线经过圆心”“平分弦”时，还要指出这条弦不是直径，才能推出其余两组关系.

总结上面的讨论，可以概括为：

在圆中，对于某一条直线“经过圆心”“垂直于弦”“平分弦”“平分弦所对的弧”这四组关系中，如果有两组关系成立，那么其余两组关系也成立.

例题3 如图 27－23，已知⊙O 中，C 是$\overset{\frown}{AB}$的中点，OC 交弦 AB 于点 D，$\angle AOB=120°$，$AD=8$.求 OA 的长.

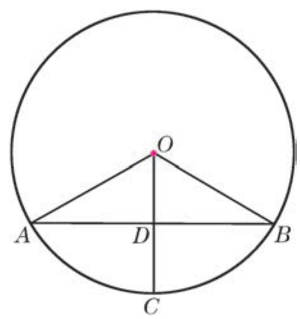


图 27－23

解 ∵ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$，$OC$ 是半径，

∴ $\angle AOC=\angle BOC$，$OC\perp AB$，

得 $\angle AOC=\dfrac{1}{2}\angle AOB$，$\angle ODA=90°$.

∵ $\angle AOB=120°$，

∴ $\angle AOD=\dfrac{1}{2}\times 120°=60°$.

由 $\sin\angle AOD=\dfrac{AD}{AO}$，$AD=8$，

得 $\sin 60°=\dfrac{8}{AO}$.

∴ $AO=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

例题4 已知$\overset{\frown}{AB}$，用直尺和圆规平分这条弧.

作法 如图 27－24，

1. 联结 AB.

2. 作线段 AB 的垂直平分线 MN，垂足为点 C，MN 交$\overset{\frown}{AB}$于点 D.

$\overset{\frown}{AB}$被点 D 平分.

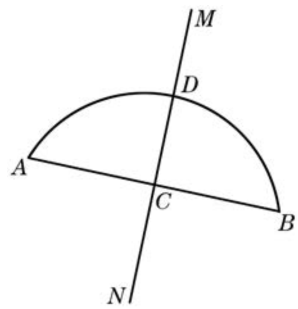


图 27－24

想一想

例题 4 中作图的依据是什么？

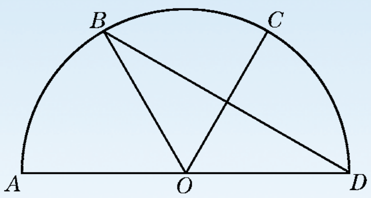
练习 27.3(2)

1. 如图，已知 AD 是⊙O 的直径，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$.

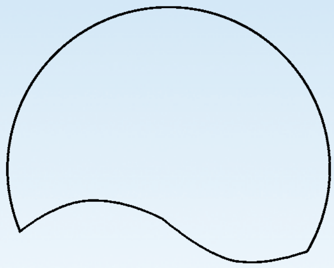
（1）求$\overset{\frown}{BD}$所对的圆心角的大小；

（2）OC 与 BD 垂直吗？为什么？

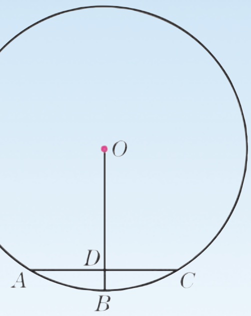
2. 如图是一块残缺的圆形砂轮片，试画出这块砂轮片原来的图形.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，已知⊙O 的半径长为 3 厘米，半径 OB 与弦 AC 垂直，垂足是点 D，AC 长为 3 厘米.求：

（1）$\angle AOB$ 的大小；（2）CD 的长.

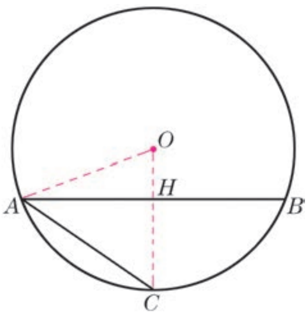


图 27－25

例题5 如图 27－25，已知⊙O 的半径长为 25，弦 AB 长为 48，C 是$\overset{\frown}{AB}$的中点.求 AC 的长.

解 分别联结 OC、OA，设 OC 与 AB 的交点为点 H.

∵ C 是$\overset{\frown}{AB}$的中点，OC 是半径，

∴ $AH=\frac{1}{2}AB$；

$OC\perp AB$，得$\angle OHA=\angle AHC=90°$.

∵ $AB=48$，

∴ $AH=\frac{1}{2}\times 48=24$.

在 Rt△OAH 中，$OA=25$，$AH=24$，

由 $OH^2+AH^2=OA^2$，得

$$OH^2+24^2=25^2.$$

解得 $OH=7$.

在 Rt△AHC 中，$CH=OC-OH=25-7=18$.

由 $AH^2+CH^2=AC^2$，得

$$24^2+18^2=AC^2.$$

解得 $AC=30$.

例题6 如图 27-26,已知 AB、CD 是⊙O 的弦,且 $AB=CD$,$OM\perp AB$,$ON\perp CD$,垂足分别是点 M、N,BA、DC 的延长线交于点 P.

求证:$PA=PC$.

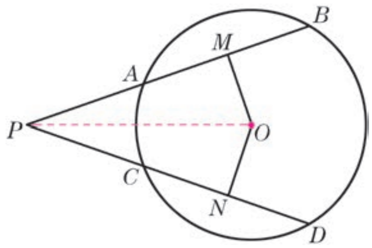


图 27-26

证明 联结 PO.

∵ $OM\perp AB$,$ON\perp CD$,

∴ $\angle OMP=90^\circ$,$\angle ONP=90^\circ$;

$AM=\dfrac{1}{2}AB$,$CN=\dfrac{1}{2}CD$.

∵ $AB=CD$,

∴ $OM=ON$,$AM=CN$.

∵ $PO=PO$,$OM=ON$,

∴ $\mathrm{Rt}\triangle PMO\cong\mathrm{Rt}\triangle PNO$,

得 $PM=PN$,

即 $PA+AM=PC+CN$.

∴ $PA=PC$.

例题7 如图 27-27,已知⊙O 的半径长 R 为 5,弦 AB 与弦 CD 平行,它们之间的距离为 7,AB 长 6.求弦 CD 的长.

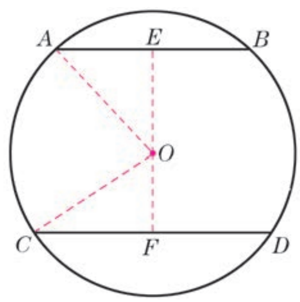


图 27-27

解 过点 O 作 $OE\perp AB$,垂足为点 E,延长 EO 交 CD 于点 F;分别联结 OA、OC.

∵ $AB/\!/CD$,

∴ $OF\perp CD$.

得 EF 的长是 AB 与 CD 之间的距离,即 $EF=7$;

且 $AE=\dfrac{1}{2}AB$,$CF=\dfrac{1}{2}CD$,$\angle OEA=90^\circ$,$\angle OFC=90^\circ$.

∵ $AB=6$,

∴ $AE=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\times 6=3$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OAE$ 中,$OA=R=5$,$AE=3$,

由 $AE^2+OE^2=OA^2$,得

$$3^2+OE^2=5^2.$$

解得 $OE=4$.

在 Rt△OFC 中，

$OF=EF-OE=7-4=3$，$OC=R=5$.

由 $OC^2=OF^2+CF^2$，得

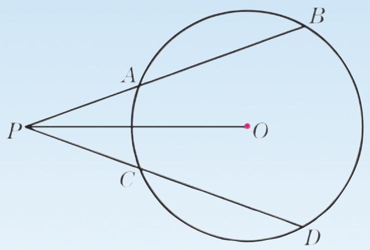
$$5^2=3^2+CF^2.$$

解得　$CF=4$.

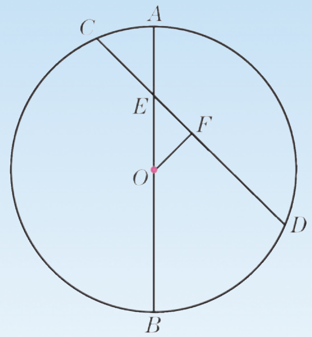
所以　$CD=2CF=2\times4=8$.

练习 27.3(3)

1. 已知：如图，PB、PD 与⊙O 分别交于点 A、B 和点 C、D，且 PO 平分∠BPD. 求证：$\overset{\frown}{ABD}=\overset{\frown}{CDB}$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知 AB 是⊙O 的直径，弦 CD 交 AB 于点 E，$\angle CEA=45^\circ$，$OF\perp CD$，垂足为点 F，$DE=7$，$OF=2$.求 CD 的长.

3. 已知⊙O 的半径长为 5，弦 AB 与弦 CD 平行，$AB=6$，$CD=8$.求 AB 与 CD 之间的距离.

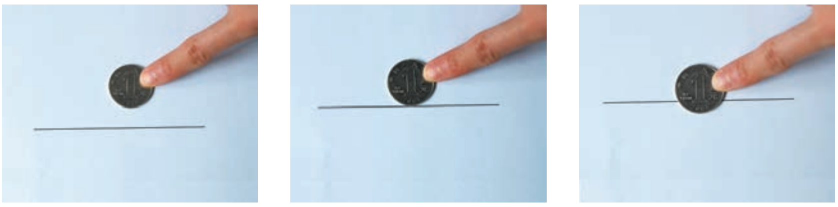
第二节　直线与圆、圆与圆的位置关系

27.4　直线与圆的位置关系

直线与圆的位置关系有几种情况？我们通过以下操作再进行观察.

操作

在纸上画一条直线，将一枚硬币放在纸上，从直线的一侧向另一侧缓慢移动.把硬币的边缘看作一个圆，在硬币移动的过程中，观察直线与圆的公共点的个数.

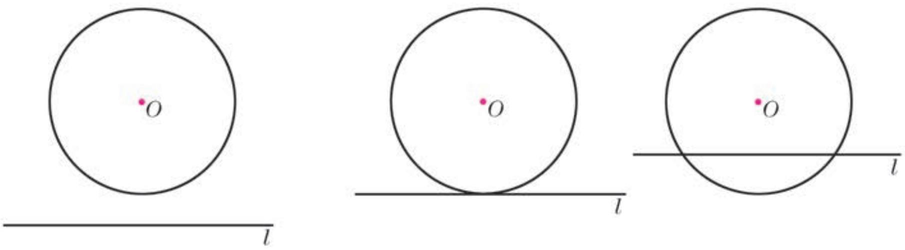


通过操作可以看到，直线与圆的公共点的个数有三种情况：没有公共点，有唯一公共点，有两个公共点.

当直线与圆没有公共点时，叫做直线与圆**相离**，如图 27－28(1)所示.

当直线与圆有唯一公共点时，叫做直线与圆**相切**，如图 27－28(2)所示.这时直线叫做圆的**切线**(tangent line)，唯一的公共点叫做**切点**.

当直线与圆有两个公共点(即交点)时，叫做直线与圆**相交**，如图 27－28(3)所示.这时直线叫做圆的**割线**(secant line).



(1)　(2)　(3)

图 27－28

因此，根据直线与圆公共点个数的情况，相应得到直线与圆的位置关系有三种：相离，相切，相交.

一个圆的位置和大小，由圆心和半径长确定；直线与圆的位置关系，应与圆心和半径长有关.

思考

如图 27－29，已知⊙O 的半径长为 R，圆心 O 到直线 l 的距离为 d.直线与圆的三种位置关系与 R、d 两者的大小关系之间有着怎样的联系？

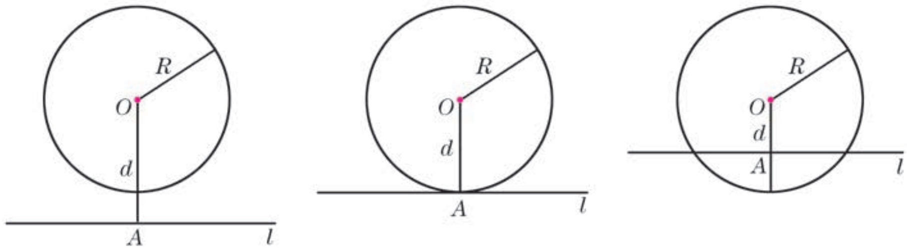


图 27－29

当直线 l 与⊙O 相离时，l 上的点都在⊙O 外，则 $d>R$.反过来，当 $d>R$ 时，l 上的点都在⊙O 外，则直线 l 与⊙O 相离.

当直线 l 与⊙O 相切时，切点 A 是它们唯一的公共点，则 $OA=R$；而 l 上的其他所有点都在⊙O 外，即其他的点与圆心 O 的距离都大于 R，所以 $d=R$.反过来，当 $d=R$ 时，作 $OA\perp l$，垂足为点 A，则 $OA=R$；而 l 上除 A 外的其他点与圆心 O 的距离都大于 R，即其他所有点都在⊙O 外，则直线 l 与⊙O 相切于点 A.

当直线 l 与⊙O 相交时，l 上两交点间的点在圆内，则 $d<R$.反过来，当 $d<R$ 时，l 上一定有些点在圆内，则直线 l 与⊙O 相交.

因此，直线与圆的位置关系可以用数量关系来描述：

当 $d=0$ 时，直线 l 经过圆心 O(l 与⊙O 相交).

如果⊙O 的半径长为 R，圆心 O 到直线 l 的距离为 d，那么

直线 l 与⊙O 相交 $\Leftrightarrow 0\leqslant d<R$；

直线 l 与⊙O 相切 $\Leftrightarrow d=R$；

直线 l 与⊙O 相离 $\Leftrightarrow d>R$.

通过上面直线与⊙O 相切时对 $d=R$ 的分析，还可以归纳以下定理：

切线的判定定理　经过半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

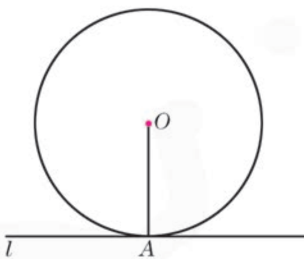


图 27－30

我们来证明这个定理.

已知：如图 27－30，OA 是⊙O 的半径，直线 l 与 OA 垂直，垂足是点 A.

求证：直线 l 是⊙O 的切线.

证明：∵　直线 $l \perp OA$，垂足是点 A，

∴　半径 OA 表示点 O 到直线 l 的距离.

∵　圆心 O 到 l 的距离等于半径长，

∴　直线 l 是⊙O 的切线.

例题1　经过⊙O 上一点 M 作⊙O 的切线.

作法　1. 联结 OM.

2. 过点 M 作直线 l 垂直于 OM.

则直线 l 就是所求作的切线.

请同学们自己在图 27－31 中完成作图.

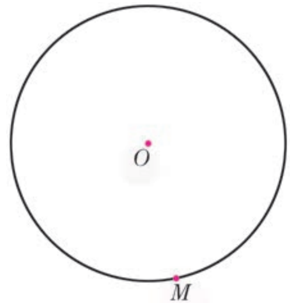


图 27－31

例题2　如图 27－32，已知 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=3$，$BC=4$.

(1) 圆心为点 C、半径长 R 为 2 的圆与直线 AB 有怎样的位置关系？

(2) 圆心为点 C、半径长 R 为 4 的圆与直线 AB 有怎样的位置关系？

(3) 如果以点 C 为圆心的圆与直线 AB 有公共点，那么⊙C 的半径 R 的取值范围是什么？

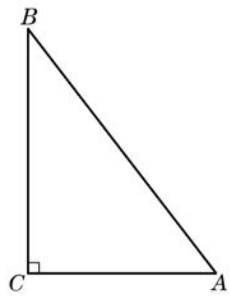


图 27－32

解　在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=3$，$BC=4$，

由勾股定理，得 $AB=5$.

设点 C 到 AB 的距离为 d，则

$$\frac{1}{2}AC \cdot BC=\frac{1}{2}AB \cdot d,$$

即

$$\frac{1}{2}\times 3\times 4=\frac{1}{2}\times 5d.$$

解得　$d=2.4$.

(1) 因为 $2.4>2$，即 $d>R$，

所以，半径长 R 为 2 的⊙C 与直线 AB 相离.

(2) 因为 $2.4<4$，即 $d<R$，

所以，半径长 R 为 4 的⊙C 与直线 AB 相交.

(3) 如果以点 C 为圆心的圆与直线 AB 有公共点，那么⊙C 与直线 AB 相切或相交.

所以，当 $R\geqslant 2.4$ 时，⊙C 与直线 AB 有公共点 .

练习 27.4

1. 已知圆的半径长 R 等于 4，根据下列圆心到直线 l 的距离 d 的大小，指出直线 l 和圆有几个公共点，并说明理由：

(1) $d=3$； (2) $d=4$； (3) $d=5$.

2. 已知直线 l 与半径长为 R 的 $\odot O$ 相交，且点 O 到直线 l 的距离为 5，求 R 的取值范围.

3. 已知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=3$ 厘米，$BC=4$ 厘米.

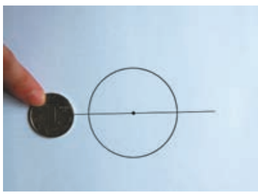
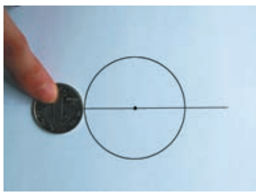
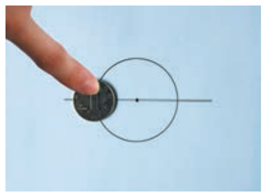
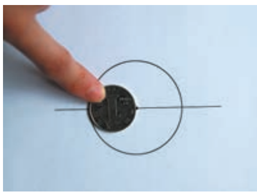
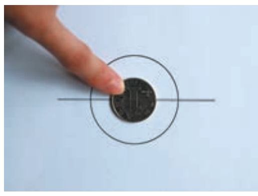
(1) 如果以点 C 为圆心的圆与斜边 AB 所在的直线没有公共点，那么 $\odot C$ 的半径的取值范围是什么？

(2) 如果以点 C 为圆心的圆与斜边 AB 所在的直线有两个公共点，那么 $\odot C$ 的半径的取值范围是什么？

27.5 圆与圆的位置关系

操作

在纸上画一个半径为 2.5 厘米的圆，再过圆心画一条直线. 把一枚硬币放在所画圆的外部，使硬币的中心大致在所画的直线上. 然后，将硬币沿着直线从圆的外部到内部、再向外部缓慢移动. 把硬币的边缘看作一个圆，在硬币移动的过程中，观察两个圆的公共点的个数.

通过操作可以看到，两个圆的公共点的个数有三种情况：没有公共点，有唯一的公共点，有两个公共点.

想一想，两个不同的圆的公共点可能有三个吗？

当硬币的边缘与所画的圆没有公共点时，这枚硬币可能在圆外，也可能在圆内.

当硬币的边缘与所画的圆有唯一公共点时，除这公共点外，这枚硬币可能在圆外，也可能在圆内.

归纳两圆的位置关系的特征，如图 27－33 所示.

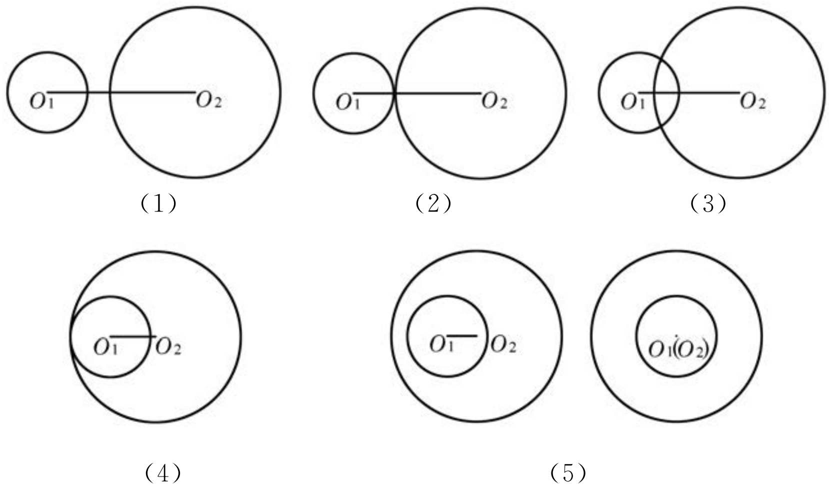


图 27－33

图 27－33(1)中，两个圆没有公共点，并且每个圆上的点都在另一个圆的外部，叫做这两个圆**外离**.

图 27－33(2)中，两个圆有唯一的公共点，并且除了这个公共点以外，每个圆上的点都在另一个圆的外部，叫做这两个圆**外切**.这个唯一的公共点叫做**切点**.

图 27－33(3)中，两个圆有两个公共点，叫做这两个圆**相交**.

图 27－33(4)中，两个圆有唯一的公共点，并且除了这个公共点以外，一个圆上的点都在另一个圆的内部，叫做这两个圆**内切**.这个唯一的公共点叫做**切点**.

图 27－33(5)中，两个圆没有公共点，并且一个圆上的点都在另一个圆的内部，叫做这两个圆**内含**.当两个圆的圆心重合时，称它们为**同心圆**.

一般地，两圆的位置关系有五种情况：外离、外切、相交、内切、内含.两个圆外离或内含时，也可以叫做两圆相离；两个圆外切或内切时，也可以叫做两圆相切.

半径相等的两个圆不可能内切，也不可能内含.

两个圆的圆心之间的距离叫做**圆心距**.经过两个圆的圆心的直线叫做**连心线**.

问题

两圆的位置关系与由这两圆的半径长和圆心距构成的数量关系之间有着怎样的联系？

由图 27－33 可见，$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的位置关系与两圆半径的和或差相对于圆心距 d 的大小有关.

如果两圆的半径长分别为 R_1 和 R_2，圆心距为 d，那么两圆的位置关系可用 R_1、R_2 和 d 之间的数量关系表达，具体表达如下：

两圆外离 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{d > R_1 + R_2}$；

两圆外切 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{d = R_1 + R_2}$；

两圆相交 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2}$；

两圆内切 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{0 < d = |R_1 - R_2|}$；

两圆内含 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{0 \leqslant d < |R_1 - R_2|}$.

> 当两圆内切时，两圆的半径长不可能相等，因此必然有 $d>0$.

> 推导时，通常利用两圆的公共点或连心线与两圆的交点，作出两圆的半径；再找出表示两半径长的和或差的线段（或折线）；然后与两个圆心间的线段进行比较、分析.

两圆的半径长、圆心距之间的数量关系，是两圆位置关系的代数表达形式.这些数量关系式可借助于图形的直观性来推导.如对于两圆相交的情况，由图 27－34，利用“三角形任意两边的和大于第三边，任意两边的差小于第三边”，就能得到 R_1、R_2、d 之间的数量关系了.

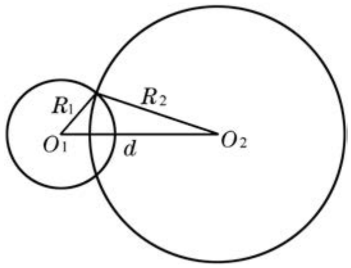


图 27－34

例题1 已知$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的半径长分别为 3 和 4，根据下列条件判断$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的位置关系：

（1）$O_1O_2=7$；（2）$O_1O_2=4$；（3）$O_1O_2=0.5$.

解 分别用 R_1、R_2、d 表示$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径长及圆心距.

（1）由 $R_1=3$，$R_2=4$，得 $R_1+R_2=7$.

$\because$ $d=7$，

$\therefore$ $d=R_1+R_2$.

所以，$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的位置关系是外切.

（2）由 $R_1=3$，$R_2=4$，得 $|R_1-R_2|=1$，$R_1+R_2=7$.

$\because$ $d=4$，

$\therefore$ $|R_1-R_2|<d<R_1+R_2$.

所以，$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的位置关系是相交.

（3）由 $R_1=3$，$R_2=4$，得 $|R_1-R_2|=1$.

$\because$ $d=0.5$，

$\therefore$ $d<|R_1-R_2|$.

所以，$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的位置关系是内含.

例题2 如图 27－35，已知$\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 两两外切，且 $AB=3$ 厘米，$BC=5$ 厘米，$AC=6$ 厘米，求这三个圆的半径长.

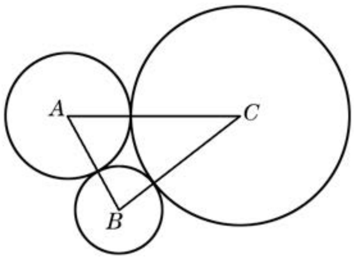


图 27－35

解 设$\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 的半径长分别为 x 厘米、y 厘米、z 厘米.

∵ $\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 两两外切，

∴ $AB=x+y$，$BC=y+z$，$CA=z+x$.

根据题意，得关于 x、y、z 的方程组

$$\begin{cases} x+y=3, \\ y+z=5, \\ z+x=6. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=1, \\ z=4. \end{cases}$

所以，$\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 的半径长分别为 2 厘米、1 厘米、4 厘米.

练习 27.5(1)

1. 判断题（正确的打“√”，错误的打“×”）：

(1) 已知$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径长分别为 R_1、R_2，圆心距为 d，如果 $R_1=1$，$R_2=2$，$d=0.5$，那么$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 相交. (　　)

(2) 已知$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径长分别为 R_1、R_2，如果 $R_1=5$，$R_2=3$，且$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 相切，那么圆心距 $d=8$. (　　)

(3) 如果两圆相离，那么圆心距一定大于 0. (　　)

2. 已知$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的半径长分别为 1 和 3，根据下列条件判断$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 的位置关系：

(1) $O_1O_2=5$；　　(2) $O_1O_2=4$；　　(3) $O_1O_2=3$；

(4) $O_1O_2=2$；　　(5) $O_1O_2=1$.

3. 已知两圆内切，圆心距为 2 厘米，其中一个圆的半径长为 3 厘米，求另一个圆的半径长.

4. 已知两圆的直径长分别为 6 厘米和 8 厘米，圆心距为 14 厘米，试说明这两个圆的位置关系.

例题3 已知$\odot A$和$\odot B$相切,圆心距d为10厘米,其中$\odot A$的半径长是4厘米,求$\odot B$的半径长.

解 设$\odot B$的半径长为r厘米.

(1) 如果$\odot A$和$\odot B$外切,那么

$$d=4+r=10.$$

得 $r=6$.

(2) 如果$\odot A$和$\odot B$内切,那么

$$d=|r-4|=10.$$

得 $r=14$ 或 $r=-6$(舍去).

所以,$\odot B$的半径长为6厘米或14厘米.

例题4 分别以1厘米、1.5厘米、2厘米为半径长作圆,使它们两两外切.

分析 假定符合条件的三个圆已作出,圆心分别为O_1、O_2、O_3.设$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$的半径长分别为1厘米、1.5厘米和2厘米.由于这三个圆两两外切,可知

$$O_1O_2=1+1.5=2.5\text{ 厘米};$$
$$O_2O_3=1.5+2=3.5\text{ 厘米};$$
$$O_1O_3=1+2=3\text{ 厘米}.$$

由于$\triangle O_1O_2O_3$的三边长确定,$\triangle O_1O_2O_3$就可以作出.

因此可利用$\triangle O_1O_2O_3$来定圆心,然后作圆.

作法 如图27-36所示,

1. 作$\triangle O_1O_2O_3$,使得$O_1O_2=2.5$厘米,$O_2O_3=3.5$厘米,$O_1O_3=3$厘米.

2. 分别以O_1、O_2、O_3为圆心,相应地分别以1厘米、1.5厘米、2厘米为半径长,作$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$.

$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$就是所求作的圆.

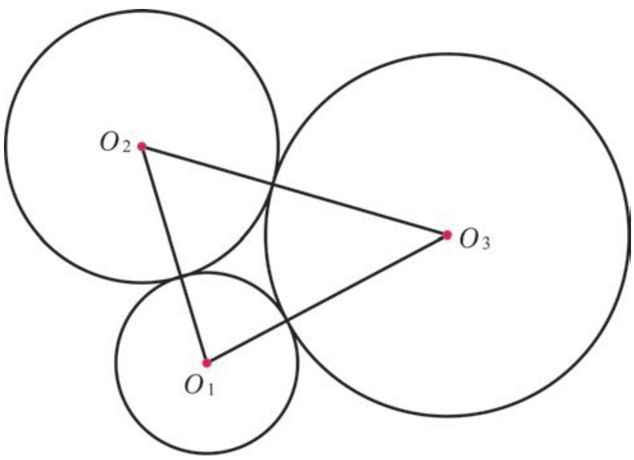


图27-36

例题5　如图 27－37，MN 表示一段笔直的高架道路，线段 PQ 表示高架路侧的一排居民楼.已知点 P 到 MN 的距离为 18 米，QP 的延长线与 MN 的夹角为 30°.假设汽车在高架道路上行驶时，周围 30 米以内会受到噪音的影响.

（1）过点 P 作 MN 的垂线，垂足为点 H.如果汽车沿着从 M 到 N 的方向在 MN 上行驶，那么汽车与点 H 相距多远时其噪音开始影响居民楼？

（2）降低噪音的一种方法是在高架道路旁安装隔音板.那么对于这一排居民楼，高架道路旁安装的隔音板至少需要多少米长？（精确到 0.1 米）

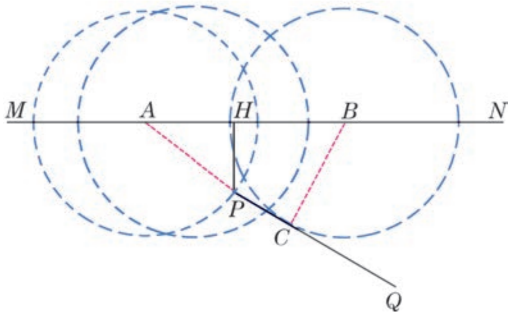


图 27－37

分析　汽车在 MN 上行驶，噪音是否对居民有影响，取决于线段 PQ 与以汽车为圆心、30 米为半径长的圆的位置关系.如果 PQ 与这个圆有公共点，那么居民楼会受噪音影响；否则不受影响.

如图 27－37 所示，汽车沿着从 M 到 N 的方向在 MN 上行驶，设汽车到点 A 的位置时其噪音开始影响居民楼，则点 A 与点 P 相距 30 米.设汽车到达点 B 处时与 PQ 的距离为 30 米，那么汽车从 A 行驶到 B 时，居民楼受到噪音影响；继续往前行驶，居民楼不受影响.因此安装隔音板的长度应不小于线段 AB 的长.

点 A 是以 P 为圆心、30 米为半径长的圆与 MN 的左交点.
要确定点 B 的位置，可在线段 PQ 近 MN 的一侧，作平行于 PQ 且与 PQ 相距 30 米的直线，则所作直线与 MN 的交点是点 B.

解　如图 27－38，

（1）∵　$PH \perp MN$，垂足为点 H，

∴　PH 表示点 P 到 MN 的距离，得 $PH = 18$（米）.

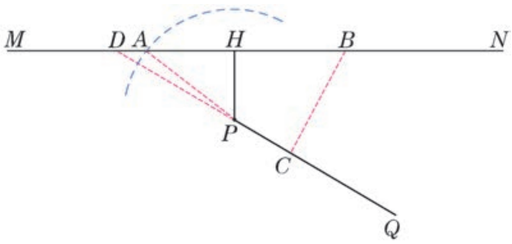


图 27－38

以点 P 为圆心、30 米为半径长画弧，设位于 PH 左侧的交点为 A，则汽车沿着从 M 到 N 的方向行驶到点 A 时，噪音开始影响居民楼.

联结 PA，得$\angle PHA=90°$，$PA=30$(米).

在 Rt$\triangle PAH$ 中，由勾股定理，得 $AH=24$(米).

答：当汽车与点 H 相距 24 米时，其噪音开始影响居民楼.

(2) 设 MN 上一点 B 与直线 PQ 的距离为 30 米，则汽车再往前行驶时，PQ 与以汽车为圆心、30 米为半径长的圆相离，噪音不影响居民楼.

过点 B 作 $BC \perp PQ$，垂足为点 C，得$\angle BCP=90°$，$BC=30$ 米.

设 QP 的延长线与 MN 相交于点 D，则$\angle PDH=30°$.

在 Rt$\triangle DPH$ 中，由 $\cot\angle PDH=\dfrac{DH}{PH}$，得

$$DH=PH \cdot \cot 30°=18\sqrt{3}\text{(米)}.$$

在 Rt$\triangle DCB$ 中，$DB=2BC=60$(米)，

则 $HB=DB-DH=60-18\sqrt{3}\approx 28.9$(米)，

$AB\approx 24+28.9=52.9$(米).

答：这段高架路旁安装的隔音板至少需要 52.9 米长.

练习 27.5(2)

1. 已知$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=2$，$\angle B=30°$，那么以顶点 B 为圆心、$\sqrt{2}$ 为半径长的圆与直线 AC 的位置关系是什么？

2. 已知$\odot O$ 的半径长 R 为 7，直线 l_1 平行于直线 l_2，且 l_1 与$\odot O$ 相切，圆心 O 到 l_2 的距离为 9，求 l_1 与 l_2 之间的距离.

3. 已知两圆的半径长之比是 5∶2，且当两圆内切时圆心距为 9 厘米，那么当两圆的圆心距增大到 18 厘米时，这两圆的位置关系是什么？

圆是轴对称图形，经过圆心的任意一条直线都是圆的对称轴.由此可知，两圆的连心线是这两个圆所成图形的对称轴.

如果两个圆相交，那么它们的两个交点关于连心线对称.于是，可推出以下定理：

定理　相交两圆的连心线垂直平分两圆的公共弦.

我们来证明这个定理.

已知：如图 27 - 39，$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 相交于点 A 和点 B.

求证：直线 O_1O_2 垂直平分公共弦 AB.

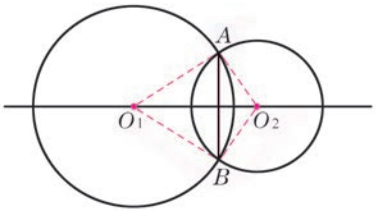


图 27 - 39

证明：分别联结 AO_1、BO_1、AO_2、BO_2.

∵　$AO_1=BO_1$，

∴　点 O_1 在线段 AB 的垂直平分线上.

同理，点 O_2 在线段 AB 的垂直平分线上.

所以，直线 O_1O_2 是线段 AB 的垂直平分线，即直线 O_1O_2 垂直平分公共弦 AB.

思考

在图 27 - 39 中，固定⊙O_1，将⊙O_2 向右移动并使直线 O_1O_2 的位置保持不变.在移动过程中，可见 A、B 两点越来越靠近.当两圆移动到外切的位置时(如图 27 - 40(1))，A、B 两点一定重合吗?切点与直线 O_1O_2 的位置关系是什么?

同样地，将⊙O_2 向左移动.当两圆移动到内切的位置时(如图 27 - 40(2))，A、B 两点一定重合吗? 切点与直线 O_1O_2 的位置关系是什么?

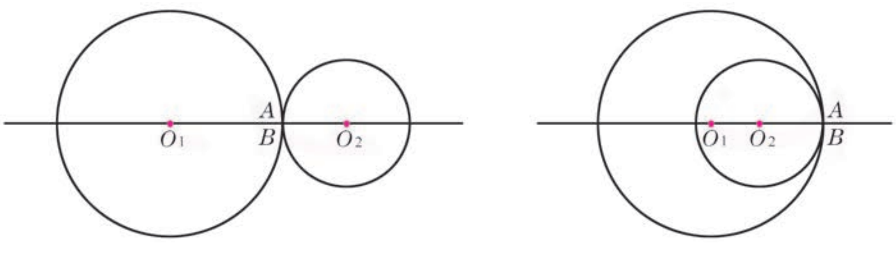


图 27 - 40

因为直线 O_1O_2 是两圆的公共对称轴，所以两圆相切时，切点一定在直线 O_1O_2 上.否则，根据图形关于直线 O_1O_2 成轴对称，就会出现这两圆有两个公共点的错误.

由此可归纳出以下定理：

定理　相切两圆的连心线经过切点.

例题6　已知：如图 27 - 41，⊙O_1 和⊙O_2 相交于 A、B 两点，线段 O_1O_2 的延长线交⊙O_2 于点 C，CA、CB 的延长线分别交⊙O_1 于点 D、E.

求证：$AD=BE$.

证明　联结 AB.

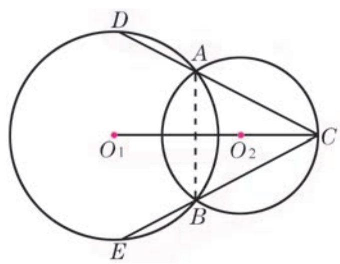


图 27 - 41

∵　O_1O_2 是连心线，AB 是公共弦，

∴　O_1O_2 垂直平分 AB，

得　　$AC=BC$.

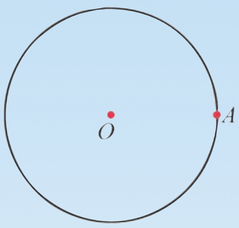
∴　CO_1 平分$\angle DCE$.

于是，点 O_1 到 DC、EC 的距离相等，即弦 AD、弦 BE 的弦心距相等.

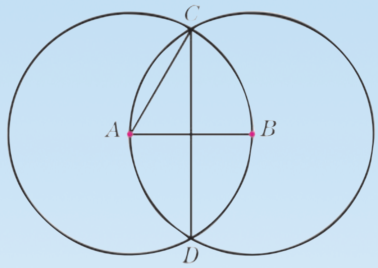
∴　$AD=BE$.

练习 27.5(3)

1. 如图，已知点 A 在半径长为 1.4 厘米的$\odot O$ 上，求作一个半径长为 2 厘米的圆，使它与$\odot O$ 相切于点 A.



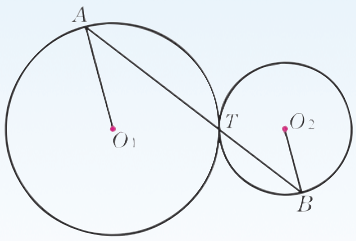
（第 1 题）

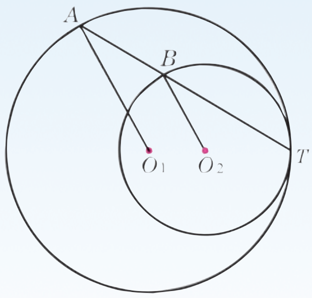


（第 2 题）

2. 如图，已知线段 AB，分别以点 A、B 为圆心并以 AB 为半径的两圆相交于 C、D 两点.
（1）求$\angle ACD$ 的度数；（2）如果 AB 的长为 2，求 CD 的长.

3. 已知：如图，$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 相切于点 T，经过点 T 的直线与$\odot O_1$、$\odot O_2$ 分别相交于另一点 A 和 B.
求证：$O_1A\parallel O_2B$.





（第 3 题）

4. 已知相交两圆的半径长分别为 15 和 20，圆心距为 25，求两圆的公共弦的长.

第三节　正多边形与圆

27.6　正多边形与圆

等边三角形和正方形是特殊的多边形，它们共同的特征是各边相等、各角也相等.

一般地，各边相等、各角也相等的多边形叫做**正多边形**(regular polygon).

等边三角形是正三角形，正方形是正四边形.有 n 条边的正多边形(n 是正整数，且 $n\geqslant 3$)就称作正 n 边形.

问题1

正三角形和正方形是轴对称图形.正 n 边形都是轴对称图形吗？如果是，那么对称轴有几条？这些对称轴的分布有什么特点？

采用操作、观察的方法，可见正多边形都是轴对称图形.

如图 27－42，正三角形、正五边形、正七边形的对称轴的条数分别为 3 条、5 条和 7 条；各边的垂直平分线都是这个图形的对称轴.

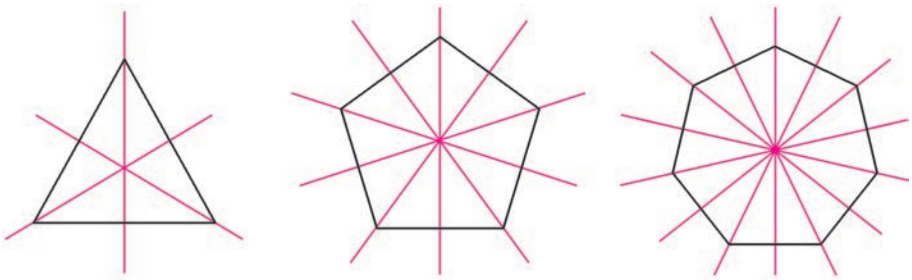


图 27－42

如图 27－43，正方形、正六边形、正八边形的对称轴的条数分别为 4 条、6 条和 8 条；过相对两内角的顶点的直线，或一边的垂直平分线都是这个图形的对称轴.

互相平行的两边的两条垂直平分线重合.

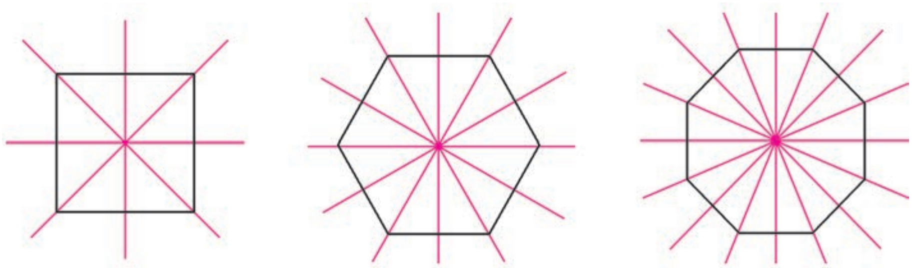


图 27－43

试一试

归纳正 n 边形的对称轴的条数以及这些对称轴分布的特点（分 n 为奇数和偶数进行说明）.

问题2

正三角形不是中心对称图形，正方形是中心对称图形. 当 $n \geqslant 5$ 时，正 n 边形是中心对称图形吗？如果是，那么对称中心在什么位置？

同样采用操作和观察的方法，可见当 n 为奇数时，正 n 边形不是中心对称图形；当 n 为偶数时，正 n 边形是中心对称图形，对称中心是它的两条对称轴的交点.

在一个多边形的内部且与多边形各边相切的圆叫做这个多边形的内切圆.

正 n 边形的 n 条对称轴交于一点. 根据正 n 边形是轴对称图形及其 n 条对称轴的位置特征，可知这个交点到正 n 边形各顶点的距离相等，到正 n 边形各边的距离也相等.

由此可见，任何一个正多边形都有一个外接圆和一个内切圆，外接圆和内切圆的圆心都是这个正多边形的对称轴的交点.

正多边形的外接圆（或内切圆）的圆心叫做**正多边形的中心**. 正多边形的外接圆的半径叫做**正多边形的半径**，正多边形的内切圆的半径长叫做**正多边形的边心距**.

正多边形各边所对的关于外接圆的圆心角都相等. 正多边形一边所对的关于外接圆的圆心角叫做**正多边形的中心角**.

想一想

观察图 27－44，正三角形绕着它的中心每旋转多少度可以与它自身重合？正方形呢？正六边形呢？它们具有怎样的旋转对称性？

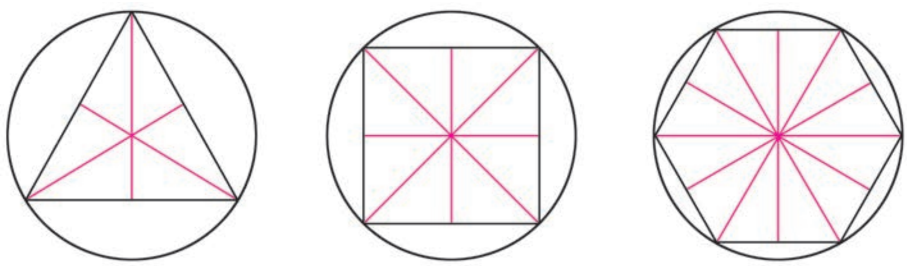


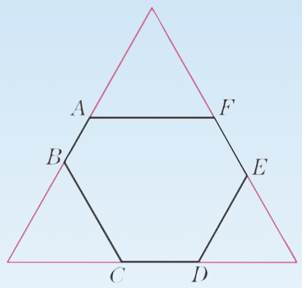
图 27－44

练习 27.6(1)

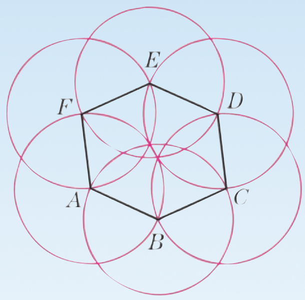
1. 矩形和菱形是正方形吗？为什么？

2. (1) 如图(1)，已知点 A、B、C、D、E、F 分别在正三角形的边上，$AB \parallel DE$，$BC \parallel EF$，$CD \parallel AF$，那么六边形 $ABCDEF$ 的各角相等吗？它是正六边形吗？

(2) 如图(2)，已知 A、B、C、D、E、F 是六个等圆的圆心，每个圆都经过相邻两圆的圆心，那么六边形 $ABCDEF$ 的各边相等吗？它是正六边形吗？



(1)



(2)

(第 2 题)

3. 正三角形的中心角等于________度，正方形的中心角等于________度，正六边形的中心角等于________度.

4. 求证：在正 n 边形中，(1) 中心角等于 $\dfrac{360°}{n}$；(2) 中心角与每个内角互补.

正多边形的中心是这个正多边形的外接圆的圆心，也是内切圆的圆心.

联结中心和正多边形的各顶点，所得线段都是外接圆的半径，相邻两条半径的夹角是中心角.

因此在正 n 边形中，分别经过各顶点的这些半径将这个正 n 边形分成 n 个全等的等腰三角形.每个等腰三角形的腰是正 n 边形的半径，底边是正 n 边形的边，顶角是正 n 边形的中心角；底边上的高是正 n 边形的内切圆的半径，它的长是正 n 边形的边心距.

如图 27－45，点 O 是正 n 边形的中心，AB 是正 n 边形的一边，等腰三角形 OAB 是这个正 n 边形中的一个基本图形.

设正 n 边形的半径长为 R_n、中心角为 α_n、边长为 a_n、边心距为 r_n，则利用等腰三角形 OAB，通过解直角三角形 OAH，可由其中两个量求出其余的两个量.进一步还可以求出这个正 n 边形的周长及面积.

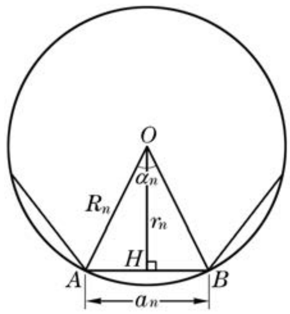


图 27－45

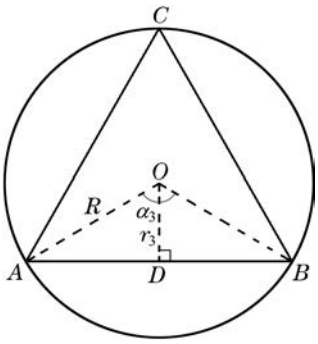


图 27－46

例题1 如图 27－46，已知正三角形 ABC 的半径长为 R，求这个正三角形的中心角 α_3、边长 a_3、边心距 r_3、周长 p_3 和面积 S_3.

解 设正三角形 ABC 的中心是点 O，分别联结 OA、OB；作 $\triangle OAB$ 的高 OD（如图 27－46）.

$\because \quad \alpha_3=\dfrac{360^\circ}{3}=120^\circ$，

$\therefore \quad \angle AOD=\dfrac{1}{2}\alpha_3=60^\circ$.

则 $\quad a_3=2\cdot R\sin\angle AOD=2R\sin 60^\circ=\sqrt{3}R$.

$\therefore \quad p_3=3a_3=3\sqrt{3}R$.

$\because \quad r_3=R\cos\angle AOD=R\cos 60^\circ=\dfrac{R}{2}$，

$\therefore \quad S_3=3\cdot\dfrac{1}{2}a_3r_3=3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}R\cdot\dfrac{1}{2}R=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

正六边形的中心角等于 60°，可知正六边形的边长等于半径长.

例题2 已知⊙O，试用直尺和圆规作⊙O 的内接正六边形.

作法 作法一：如图 27－47，

1. 作⊙O 的直径 AB.

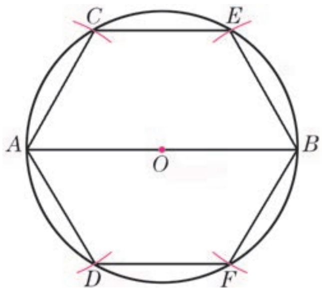


图 27－47

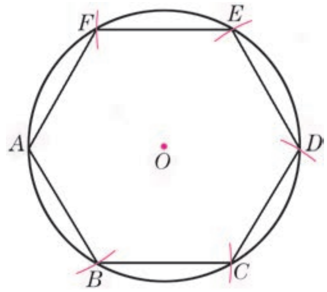


图 27－48

2. 以 A 为圆心、AO 为半径作弧，交⊙O 于 C、D 两点.
3. 以 B 为圆心、BO 为半径作弧，交⊙O 于 E、F 两点.
4. 顺次联结 AD、DF、FB、BE、EC、CA.

六边形 $ADFBEC$ 就是所求作的圆内接正六边形.

作法二：如图 27－48，

1. 在⊙O 上任取一点 A，以 A 为圆心、AO 为半径作弧，在⊙O 上截得一点 B.
2. 以 B 为圆心、AO 为半径作弧，在⊙O 上截得一点 C；再如此从点 C 逐次截得点 D、E、F.
3. 顺次联结 AB、BC、CD、DE、EF、FA.

六边形 $ABCDEF$ 就是所求作的圆内接正六边形.

练习 27.6(2)

1. 已知圆的半径长为 R，求这个圆的内接正方形和内接正六边形的边长、边心距、周长和面积.

2. 已知正方形的边长为 20 厘米，求这个正方形的半径长和边心距.

3. 设正三角形的边长为 a.

(1) 求这个正三角形的边心距、半径长和高；

(2) 求证：边心距∶半径长∶高＝1∶2∶3.

4. 已知圆的半径长为 2 厘米，用圆规和直尺作这个圆的内接正三角形(不写作法).

5. 已知圆的半径长为 2 厘米，用圆规和直尺作这个圆的内接正方形(不写作法).

27

本章小结

本章着重研究圆的一些性质以及圆分别与点、直线、圆的位置关系.圆是由到定点的距离等于定长的点的全体所组成的图形.不在同一直线上的三个点确定一个圆,这是圆的最基本的性质.本章在六年级直观认识圆、弧、圆心角的基础上,引进了弦和弦心距的概念;利用圆的轴对称性质和旋转对称性质,探索了圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系,还归纳并证明了垂径定理;再用运动的观点,研究了点与圆、直线与圆、圆与圆的位置关系;在等边三角形、正方形的知识基础上,引进了正多边形的有关概念,探讨了正多边形的基本性质.

在圆的研究过程中,我们采用了归纳与演绎相结合的方法,还有动与静的结合、形与数的结合,不仅获得了关于圆的基本知识,而且大大丰富了对几何研究的过程与方法的体验.

本章知识结构图如下:

27

阅读材料

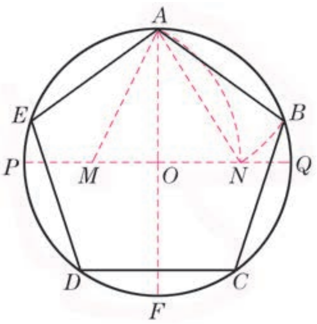
怎样用尺规作正五边形

先介绍一种用尺规作圆内接正五边形的方法.

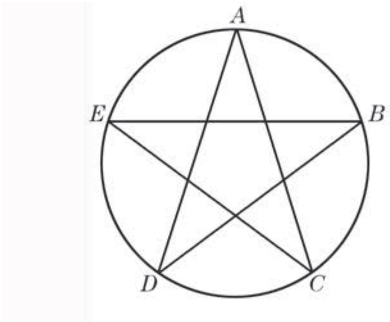
如图 27－49(1),作⊙O 的两条互相垂直的直径 PQ 和 AF;取半径 OP 的中点 M;再以 M 为圆心、MA 为半径作弧,和半径 OQ 相交于点 N,则⊙O 的内接正五边形的边长等于线段 AN 的长.

以点 A 为圆心、AN 为半径作弧,与⊙O 相截,得交点 B.继续以点 B 为圆心、AN 为半径,在⊙O 上再截,如此连续截 3 次,依次得分点 C、D、E.顺次联结 AB、BC、CD、DE、EA,则五边形 $ABCDE$ 是⊙O 的内接正五边形.

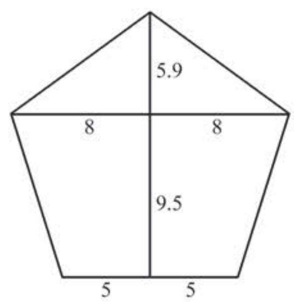
如果顺次联结 AC、CE、EB、BD、DA,那么就得到一个正五角星,如图 27－49(2)所示.



(1)



(2)



(3)

图 27－49

再介绍正五边形的一种近似作法,它是在实践经验的基础上总结出来的.这种近似作法的口诀是:“九五顶五九,八五两边分.”含意如图 27－49(3)所示.

例如,利用“九五顶五九,八五两边分”这个口诀,作边长为 2 厘米的正五边形.

假设边长为 2 厘米的正五边形 $ABCDE$ 已经作出,如图 27－50.作 AB 边的垂直平分线,设垂足为点 F,点 D 必在这条垂直平分线上.联结 EC,交 DF 于点 G.

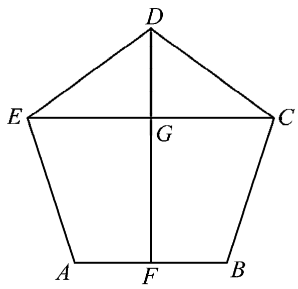


图 27－50

根据口诀,应有 $AF=\frac{1}{2}AB=1$ 厘米,则 $EG=GC=\frac{8}{5}AF=1.6$ 厘米,$FG=\frac{9.5}{5}AF=1.9$ 厘米,$DG=\frac{5.9}{5}AF=1.18$ 厘米.

计算出各条线段的长度后,就可以作出这个正五边形,请自己完成作图.

27

探究活动

生活中的一个覆盖问题

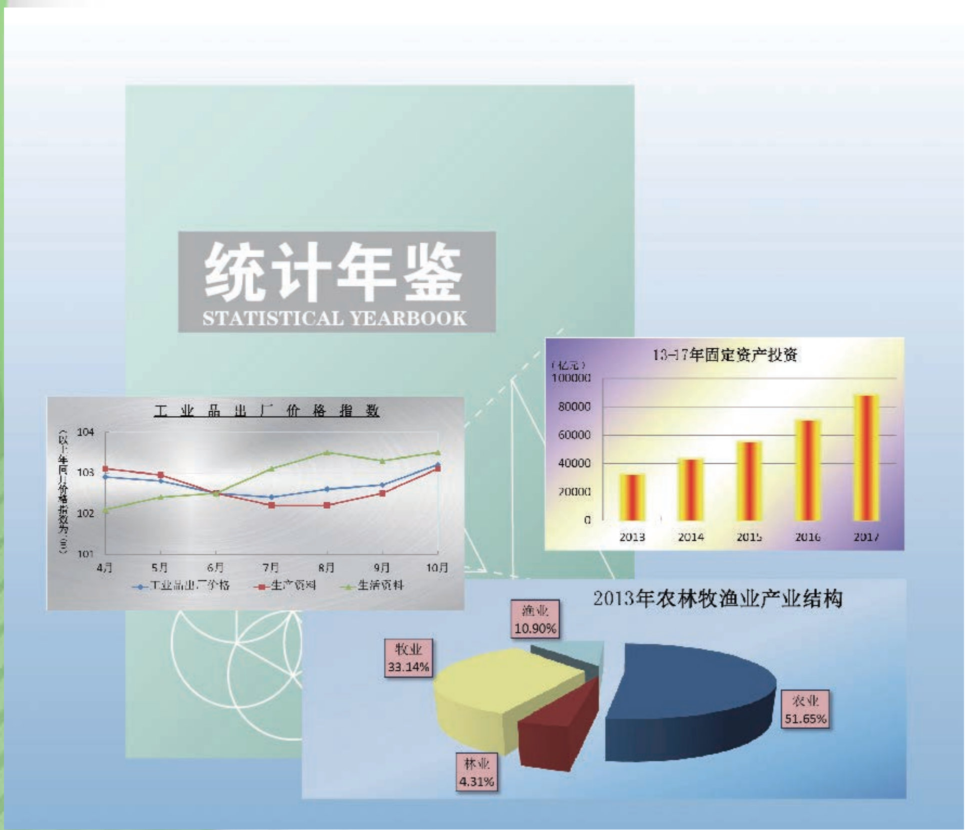
有一块边长为 10 米的正方形草坪，需要安装喷头定时喷水养草.如果一个喷头的喷洒范围是半径长为 3.3 米的圆面，那么至少要安装几个这样的喷头，才能使喷水洒遍整个草坪？

提示 这个问题可转化为用圆面覆盖正方形面的数学问题.

依次分别用一个圆、两个相同的圆、三个相同的圆……的圆面去完全覆盖一个边长为 10 米的正方形面，每次使相应的圆的半径长尽可能小并求出这个值.假设用 k 个相同圆的圆面去完全覆盖这个正方形面，圆的半径长至少为 r 米，则当 $r>3.3$ 时，可知安装 k 个这样的喷头不能使喷水洒遍整个草坪；而第一次出现 $r<3.3$ 时所对应的 k，就是能使喷水洒遍整个草坪的最少的喷头数.

Tongji Chubu

28 第二十八章　统计初步



班级组织学生参加春游，要统计人数；公司制定产品营销计划，要搞市场调查……生活中，有各种各样的“统计”．我们在小学和六年级曾经学过一些统计知识，如数据整理，求平均数，画条形图、折线图、扇形图等，知道“统计”在社会生活和工作中有广泛的应用．

“统计学”是一门科学，我们对它还需要有更多的了解．例如，报刊中经常出现各种统计图表，能否看懂这些图表？我国人口资源的状况，是国家制定发展计划的基础，那么对全国人口的基本情况进行调查，有哪些常用的方法？又如一组数据中所涉及的数往往是大小不一的，那么怎样合理表达这组数据的平均水平和波动程度？能否进一步简明地指出这组数据大致的分布情况？

上述种种问题，我们将在本章中进行讨论．

Tongji De Yiyi

第一节　统计的意义

28.1　数据整理与表示

生活中,我们经常碰到各种数据,如下面问题中的(1)、(2)、(3).这些数据传递了许多信息,有助于我们了解事实、分析情况和作出判断.

问题

下列数据能否用表格或图形的方式表示出来?

(1) 在2000年第五次全国人口普查中,关于我国公民受教育状况的调查结果是:每1 000人中具有初中文化程度的约有340人,具有高中文化程度的约有111人,具有大学文化程度的约有36人.(说明:此统计数据未包括我国的香港特别行政区、澳门特别行政区和台湾省的数据)

(2) 某学生每天进行1 500米跑运动.一个阶段内的七次测试情况是:前三次每次跑完全程各用时7分30秒,第四次用时7分钟,第五次用时6分48秒,第六次用时6分30秒,第七次用时6分18秒.

(3) 据调查,某校九年级有300名学生,其中30%的学生步行上学,50%的学生乘公交车上学,15%的学生骑车上学,其余的学生用其他交通工具上学.

关于数据表示的方法,以前已介绍过条形图、折线图和扇形图.

上述数据都可利用表格、图形来表示.

如问题(1)第五次人口普查中关于公民受教育状况的数据,可用列表的方法表达,如表28.1－1所示;也可画成条形图,如图28－1所示.

文化程度	每1 000人中所占人数
初中	340
高中	111
大学	36

表28.1－1

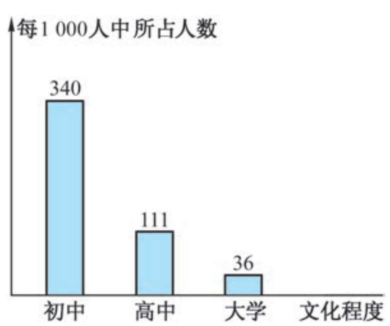


图28－1

这个条形图清楚地显示了具有不同文化程度的人在数量上的差异.

又如问题(2)某学生 1 500 米跑所用的时间,用列表的方法表达,如表 28.1－2 所示;画成折线图,如图 28－2 所示.

测试序号	1	2	3	4	5	6	7
时间(分)	7.5	7.5	7.5	7	6.8	6.5	6.3

表 28.1－2

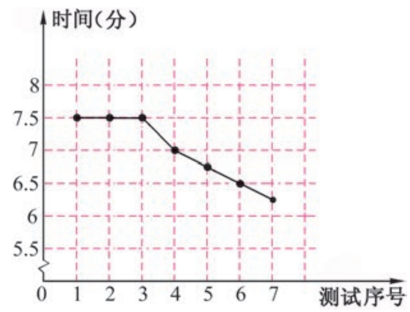


图 28－2

这个折线图形象地描述了这位学生 1 500 米跑所用时间逐渐减少的情况,能“看到”坚持跑步的成效.

再如问题(3)某校九年级学生上学方式的调查情况,可用列表的方法表达,如表 28.1－3 所示.而由步行、乘公交车、骑车上学的百分比,可推算利用其他交通工具上学的学生占 5%,于是也可画成扇形图,如图 28－3 所示.

上学方式	步行	乘公交车	骑车	其他
百分比(%)	30	50	15	5

表 28.1－3

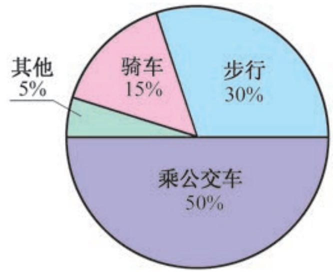


图 28－3

这个扇形图直观地反映了步行或利用不同交通工具上学的学生人数在总人数中所占的百分比.

注意图中扇形圆心角的计算,如“其他”所在扇形的圆心角为 $360°\times5\%=18°$.

条形图、折线图和扇形图是常用的统计图.一般来说,条形图有利于比较数据的差异;折线图可以直观地反映出数据变化的趋势;而扇形图则凸显了由数据所体现出来的部分与整体的关系.

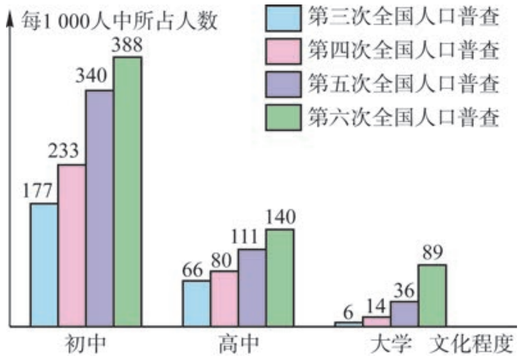
对于调查、收集得来的数据,通常要根据某种要求进行整理,为人们分析研究问题提供方便.列表和画条形图、折线图、扇形图等,都是常用的整理数据的方法,可根据不同要求选择使用.这样的表和图简称为统计图表.

我们在报刊、书籍或互联网上,经常会见到各种图表,要学会

从图表中获取各种信息.

例题1 我国分别在 1982 年、1990 年、2000 年和 2010 年进行了第三、四、五、六次全国人口普查.图 28－4 是四次全国人口普查中关于公民受教育状况的统计图.

> 这个统计图是由单一条形图扩展而成的多重条形图.注意图中数据的对应情况:“ ”“ ”“ ”“ ”依次对应第三次、第四次、第五次、第六次人口普查.



注:图中统计数据未包括我国的香港特别行政区、澳门特别行政区和台湾省的数据.

图 28－4

根据这个条形图,回答下列问题:

(1) 从第三次人口普查到第四次人口普查,每 1 000 人中具有初中文化程度的人数增加多少?

(2) 从第四次人口普查到第五次人口普查,每 1 000 人中具有高中文化程度的人数增加多少?

(3) 从 1982 年到 1990 年,每 1 000 人中具有大学文化程度的人数平均每年增加几人? 从 2000 年到 2010 年呢?

分析 图中初中、高中、大学每个学段都有相应三次人口普查的数据,可根据这些数据回答相应的问题.

解 (1) $233-177=56$(人).

所以从第三次人口普查到第四次人口普查,每 1 000 人中具有初中文化程度的人数增加了 56 人.

(2) $111-80=31$(人).

所以从第四次人口普查到第五次人口普查,每 1 000 人中具有高中文化程度的人数增加了 31 人.

(3) $\frac{14-6}{8}=1$(人).

所以从 1982 年到 1990 年,每 1 000 人中具有大学文化程度的人数平均每年增加 1 人.

$$\frac{89-36}{10}=5.3\text{(人)}.$$

所以从 2000 年到 2010 年,每 1 000 人中具有大学文化程度的人数平均每年增加 5.3 人.

例题2 某企业七月份的产值的分配，画成扇形图和条形图如图 28－5(1)所示.结合扇形图和条形图回答下列问题：

(1) 该企业七月份的产值是多少万元？管理成本是多少万元？

(2) 请将两图中缺少的部分补充完整.

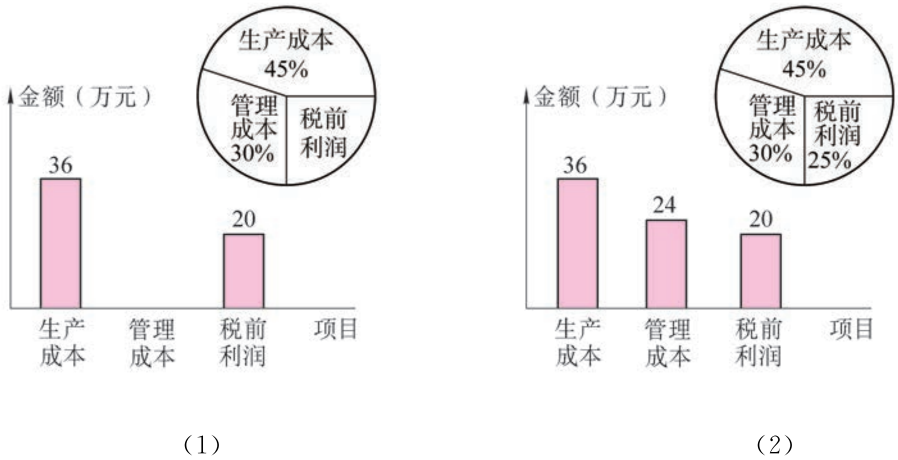


图 28－5

解 (1) 从条形图和扇形图可知，该企业七月份的生产成本为 36 万元，占产值的 45%，所以七月份的产值为

$$36\div45\%=80(\text{万元})；$$

管理成本为

$$80-36-20=24(\text{万元}).$$

(2) 税前利润所占百分比为 $1-45\%-30\%=25\%$.

在条形图中补上“管理成本 24”，在扇形图“税前利润”所对应的扇形内补上“25%”.

完整的统计图如图 28－5(2)所示.

练习 28.1

1. 从 1953 年到 2010 年，我国进行了六次人口普查.下表是历次普查中关于全国人口数量调查的统计表(人口数精确到 0.01 亿)：

普查年份	1953 年	1964 年	1982 年	1990 年	2000 年	2010 年
人口数(亿)	6.02	7.23	10.32	11.60	12.95	13.71

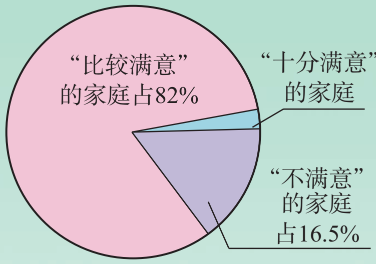
请制作适当的统计图来表示上述数据.

2. 对某小区 400 户家庭进行的小区绿化满意度调查，得到如图所示的扇形图. 根据图中提供的信息，回答下列问题：

(1) 对小区绿化“不满意”的家庭有多少户？

(2) 对小区绿化“比较满意”的家庭有多少户？

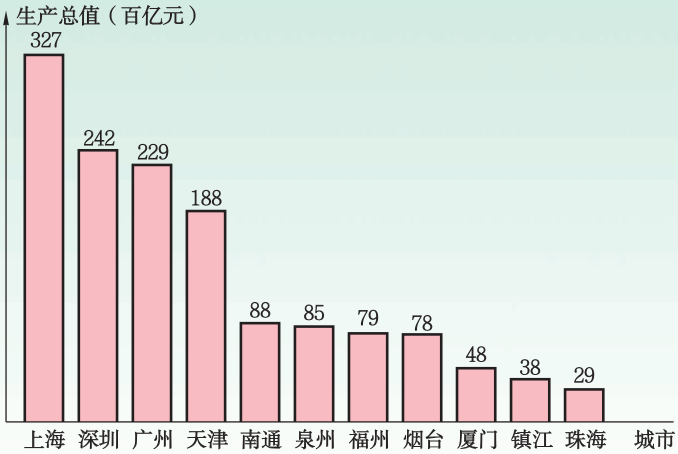
(3) 图中表示对小区绿化“十分满意”的家庭所占比例的扇形的圆心角是多少度？



(第 2 题)

3. 2018 年我国沿海 11 个城市生产总值的条形图如图所示.

根据图中提供的数据，求 2018 年上海生产总值占沿海 11 个城市生产总值的百分比.



(第 3 题)

28.2 统计的意义

在日常生活、生产实践和科学研究中，为了某个特定目标，需要收集有关数据，通过整理分析这些数据，发现问题，找出变化的趋势或规律，为决策提供依据.

如 2003 年在“非典”(指“非典型性肺炎”)流行期间，北方某大城市将新增“非典”患者的人数按时间用折线图表示，如图 28－6 所示.

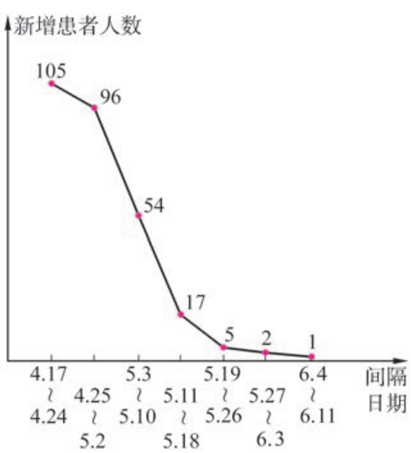


图 28－6

由图可见，从 4 月 17 日到 6 月 11 日这段时间内，随着时间的推移，“非典”在该市的传播被有效控制.

某医院将“非典”患者人数按年龄整理，分别用扇形图、条形图表示，如图 28－7 所示.

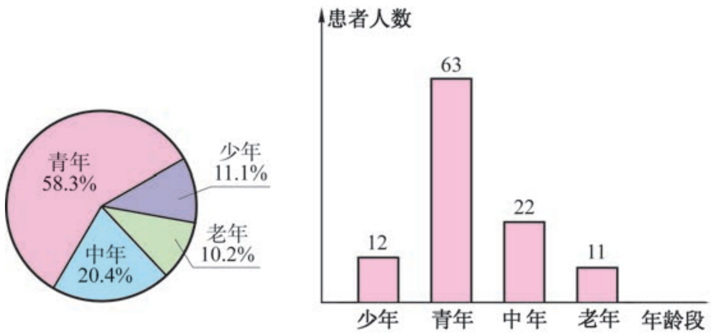


图 28－7

从图中可以看出，“非典”患者人群中，青年人多于老年人.

将上述统计数据进行整理与分析，对战胜“非典”的决策有很大帮助.在数据的整理与分析中，运用了统计学的知识.

统计学(statistics)是研究如何收集、处理、分析数据从而得出结论或找出规律的科学.

为了研究问题，就要通过调查收集数据.

调查时，调查对象的全体叫做**总体**(population)，其中每一个调查对象叫做**个体**(individual).从总体中取出的一部分个体叫做总体的一个**样本**(sample)，样本中个体的数量叫做**样本容量**.

收集数据的方法一般有两种，即普查和抽样调查.

普查是收集数据的一种基本方法，需要对总体中的每个个体都进行调查，所费的人力、物力和时间较多.这一方法的优点是数据准确度较高，调查的结论较可靠.如我国进行了多次全国人口普查，为国家制定发展计划提供了重要的依据.

抽样调查是从总体中抽取样本进行调查，并以此来估计整体的情况.抽样调查与普查相比更省时省力，但要按一定的统计方法收集数据.抽样调查是收集数据最常用的方法，如我国也曾多次进行过以内地总人口 1%的人口为对象的抽样调查.

有些调查是不可能对所有的对象进行的.比如要调查一批日光灯管的寿命，这时往往采取抽样调查的方法，即对其中一部分灯管进行试验，然后根据试验的结果估计其余灯管的寿命.

例题 为了了解某校九年级 400 名学生的体重情况，从中抽取 50 名学生的体重进行分析.在这项调查中，样本是指 ( )

(A) 400 名学生； (B) 被抽取的 50 名学生；

(C) 400 名学生的体重； (D) 被抽取的 50 名学生的体重.

分析 在这项调查中，调查对象是学生的体重．由总体、样本的概念可知，400 名学生的体重是总体，被抽取的 50 名学生的体重是样本．

解 选(D)．

用样本来推断总体，即从局部来推断整体，是重要的统计思想．

问题

如果要估计某自然保护区内黑叶猴的数量，能否通过局部来推断整体呢？

可考虑通过对局部情况的调查分析，来推断整体情况．

比如在保护区内不同的地方，将 20 只黑叶猴背上涂一个色块做标记，再放归野外，一个月后如果在保护区内不同的地方观察到 60 只黑叶猴，发现其中 2 只黑叶猴有记号，那么我们就能粗略估计该自然保护区里黑叶猴的数量．这里假定有记号的黑叶猴在自然保护区里是均匀分布的，观察到的黑叶猴又是随机的，因此 60 只黑叶猴中出现有记号的黑叶猴数与 60 的比，应该与保护区所有黑叶猴中存在 20 只有记号的黑叶猴数与黑叶猴总数的比大致相同．

设保护区里有 x 只黑叶猴，则 $\frac{2}{60}=\frac{20}{x}$，得 $x=600$．所以，估计自然保护区里大约有 600 只黑叶猴．

为了能准确地推断总体，样本的选择要具有代表性，每个个体都应有均等的机会被选中．

具有代表性的样本叫做**随机样本**(random sample)．

例如我国在 2005 年底开展了内地人口抽样调查工作．这项调查以我国内地人口为总体，在各省、自治区、直辖市(港、澳、台地区除外)分层、多阶段地抽取样本．调查的样本容量为 1 705 万，占全国总人口的 1.31%．

某网站曾在 2002 年发布 22 个城市职工的年薪排名，称某市职工平均年薪为 3.3 万元，而该市统计部门说，职工实际平均年薪仅 1.4 万元．网站发布的信息失真的原因是年薪调查在网上进行，被调查对象中具有大专、本科学历的人数占 81%，在薪金较高的企业工作的人数占 44.7%．这样的样本不具有代表性，不是随机样本．

练习 28.2

1. 某市有 6 万名初中毕业生参加升学考试，为了了解 6 万名学生的数学成绩，从中抽取 1 500 名考生的数学成绩进行统计分析.判断下列说法中哪些是正确的：

(1) 6 万名考生是总体；

(2) 6 万名考生中每位考生的数学成绩是个体；

(3) 1 500 名考生是总体的一个样本；

(4) 样本的容量是 1 500.

2. 某出租车公司在国庆节放假期间平均每天的营业额为 5 万元，由此推算 10 月份的总营业额为 $5\times31=155$(万元).根据所学的统计知识，你认为这样推断 10 月份的总营业额合理吗？

3. 为了估计鱼塘里鱼的数量，养殖工人网住 50 条鱼，在每条鱼的尾巴上做个记号后放回鱼塘.等鱼游散后再网住 60 条鱼，发现其中有 2 条鱼尾巴上有记号.该鱼塘里约有多少条鱼？

第二节 基本的统计量

28.3 表示一组数据平均水平的量

1. 平均数与加权平均数

问题 1

我国运动员刘翔在雅典奥运会获得男子 110 米栏项目的金牌. 他在 2006 年及以前参加该项目的重大国际赛事取得的成绩分别是 12.88 秒、13.15 秒和 12.91 秒；古巴运动员罗伯斯在 2006 年及以前的国际赛事中取得的成绩分别是 13.04 秒、13 秒和 13.08 秒；前世界名将内赫米亚赫曾跑出过 13.16 秒、13 秒和 12.93 秒的成绩. 综合他们的三次成绩来看，谁跑得最快？

要从三次成绩来判断谁跑得最快，就要比较这三个运动员的成绩的平均数.

刘翔的成绩的平均数是

$$(12.88+13.15+12.91)\div 3=12.98(\text{秒})；$$

罗伯斯的成绩的平均数是

$$(13.04+13+13.08)\div 3=13.04(\text{秒})；$$

内赫米亚赫的成绩的平均数是

$$(13.16+13+12.93)\div 3=13.03(\text{秒}).$$

从成绩的平均数来看，刘翔跑得最快，内赫米亚赫第二，罗伯斯第三.

一般地，如果一组数据：$x_1, x_2, \cdots, x_n$，它们的平均数记作 $\bar{x}$（读/eks bɑː/），这时

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n). \qquad ①$$

平均数反映了这组数据的平均水平，式①是计算平均数的公式.

由于问题 1 中的数据都在 13 秒附近，所以刘翔的成绩的平均数 $\bar{x}$ 还可以这样计算：

$$\begin{aligned}&(12.88+13.15+12.91)\div3\\=&(13-0.12+13+0.15+13-0.09)\div3\\=&13+(-0.12+0.15-0.09)\div3\\=&13-0.06\div3\\=&12.98(\text{秒}).\end{aligned}$$

如果一组数据所含的 n 个数 x_1、x_2、…、x_n 都在常数 a 附近波动，那么可将它们写成 $x_1=x_1'+a$，$x_2=x_2'+a$，…，$x_n=x_n'+a$.再把 $\frac{1}{n}(x_1'+x_2'+\cdots+x_n')$ 记作 $\bar{x}'$，可得

$$\bar{x}=\bar{x}'+a. \qquad ②$$

对式②也可以这样理解：将一组数据 x_1'、x_2'、…、x_n' 的每个数都加 a，那么新数据 $x_1'+a$、$x_2'+a$、…、$x_n'+a$ 的平均数 $\bar{x}$ 等于原数据的平均数 $\bar{x}'$ 加 a.

我们把样本中所有个体的平均数称为**样本平均数**(sample mean)；把总体中所有个体的平均数称为**总体平均数**(population mean).随机样本的容量越大，样本平均数就越接近于总体平均数.必要时，可以用样本平均数来估计总体平均数.

例题1 为掌握某作物种子的发芽情况，可随机取出 100 粒种子，在适宜的温度下做发芽天数的试验.如果试验的结果如表 28.3－1 所示，你能估计出该作物种子发芽的天数的平均数吗？

天数	1	2	3	4
发芽数	15	45	35	5

表 28.3－1

分析 在一批种子中随机抽取足够多的种子，通过试验就可推断这批种子发芽的天数的平均数.

由表中可见，发芽所需天数为 1 天、2 天、3 天、4 天的种子数分别为 15 粒、45 粒、35 粒、5 粒.将这 100 粒种子发芽天数的总和除以 100，就可以得到这 100 粒种子发芽所需天数的平均数.

有人这样计算发芽的平均天数：$(1+2+3+4)\div4=2.5$(天)，你说对吗？

解 $\frac{1}{100}\times(15\times1+45\times2+35\times3+5\times4)=2.3$(天).

因此，这 100 粒种子发芽的天数的平均数为 2.3 天.

估计该作物种子发芽的天数的平均数是 2.3 天左右.

例题 1 中的算法可用下面的公式表示：

$$\bar{x}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_kx_k}{f_1+f_2+\cdots+f_k}. \qquad ③$$

这里的 x_1、x_2、…、x_k 和 f_1、f_2、…、f_k 在不同的问题中有不同的

意义.在例题 1 中，x_1、x_2、x_3、x_4 分别表示种子发芽的天数；f_1、f_2、f_3、f_4 分别表示数据 x_1、x_2、x_3、x_4 出现的次数；由题意可知 $f_1+f_2+f_3+f_4=100$.

设 $m_1=\dfrac{f_1}{f_1+f_2+\cdots+f_k}$，$m_2=\dfrac{f_2}{f_1+f_2+\cdots+f_k}$，…，$m_k=\dfrac{f_k}{f_1+f_2+\cdots+f_k}$，则公式③可写成

$$\bar{x}=m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_kx_k. \qquad ④$$

其中 m_1、m_2、…、m_k 叫做**权**.它们体现了 x_1、x_2、…、x_k 对平均数 $\bar{x}$ 所产生的影响.

如果有 k 个数据 x_1、x_2、…、x_k，它们相应的权数为 m_1、m_2、…、m_k，那么由公式③或④给出的 $\bar{x}$ 叫做这 k 个数的**加权平均数**(weighted mean).

通常情况下，加权平均数中的权数的和为 1.

当各数据对平均数产生的影响不同时，可用加权平均数.当

$$m_1=m_2=\cdots=m_k=\frac{1}{k}$$

时，公式④就与公式①相同，因此公式①是公式④的特例.

例题2 某市 9 月份 30 天中的空气污染指数统计如表 28.3－2 所示(当 $w\leqslant 50$ 时，空气质量为优；当 $50<w\leqslant 100$ 时，空气质量为良；当 $100<w\leqslant 150$ 时，空气质量为轻微污染)：

(w)污染指数	42	45	61	65	72	86	88	90	91
天数	2	1	3	1	1	2	3	1	2
(w)污染指数	93	100	103	104	109	113	115	117	141
天数	2	1	2	1	2	1	1	3	1

表 28.3－2

试计算 9 月份空气污染指数的平均数；再指出这个市在 9 月份的空气质量属于哪个级别.

操作

我们用计算器来计算这组数据的平均数 $\bar{x}$，常用计算器的操作步骤及按键过程(选取不同型号计算器可参照该型号计算器使用说明书)如下：

序号	步骤	按键	屏幕显示
1	进入统计模式	$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{2}$	屏幕上方出现“SD”
2	清除存储旧内容	$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{CLR}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$	stat clear 0
3	输入 2 个 42	$\boxed{4}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{DT}}$ $\boxed{\text{DT}}$	$n=$ 2
4	输入 45	$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\text{DT}}$	$n=$ 3
5	输入 3 个 61	$\boxed{6}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{;}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{DT}}$	$n=$ 6
	……		
20	输入 141	$\boxed{1}$ $\boxed{4}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\text{DT}}$	$n=$ 30
21	求 $\bar{x}$	$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{S}-\text{VAR}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$	$\bar{x}$ 89.7

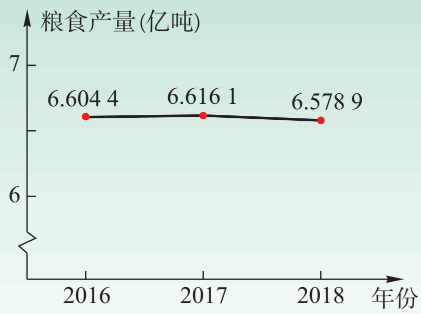
解 利用计算器计算，得 $\bar{x}=89.7$.

所以这个市 9 月份空气污染指数的平均数是 89.7；空气质量为良.

练习 28.3(1)

1. 某大桥连续 7 天的车流量分别为 8.0、8.3、9.1、8.5、8.2、8.4、9.0（单位：千辆/日），这 7 天车流量的平均数为________千辆/日.

2. 我国 2016 年、2017 年、2018 年的粮食产量如图所示（本题中统计数据未包括我国的香港特别行政区、澳门特别行政区和台湾省的数据）. 观察统计图，并回答相应问题：



（第 2 题）

（1）按我国 13.95 亿人口计算，2018 年人均粮食产量为多少千克（精确到 1 千克）？

（2）求三年粮食产量的平均数.

3. 某居委会表彰了社区内 100 户节约用水的家庭，5 月份这 100 户家庭节约用水的情况如下表所示：

每户节水量(单位:吨)	5	6	7.5
节水户户数	52	30	18

5 月份这 100 户家庭节水量的平均数是多少吨？

2. 中位数、众数和截尾平均数

问题2

小张到商场购物，正值商场搞促销活动. 商场规定购物金额满 300 元的顾客可参加一次抽奖，并宣称人人有奖，奖金的平均数达 40 元. 小张购物后参加了抽奖，但只获得 10 元奖金，而且看到大部分人抽得的奖金都只有 10 元或 20 元. 表 28.3－3 是本次活动抽奖情况的记录.

奖金(元)	2 500	50	20	10
人数(个)	1	11	37	61

表 28.3－3

(1) 商场宣称的奖金的平均数与实际相符吗？

(2) 你觉得商场用平均数来表示中奖金额的平均水平合适吗？

算式中，$\frac{1}{110}$、$\frac{11}{110}$、$\frac{37}{110}$、$\frac{61}{110}$ 分别是奖金数 2 500、50、20、10 的权数.

设奖金的平均数为 $\bar{x}$，用加权平均数的方法计算，得

$$\bar{x}=\frac{1\times2\,500+11\times50+37\times20+61\times10}{1+11+37+61}=40.$$

可见奖金的平均数的确是 40 元.

本例中有 98 人抽到的奖金只有 10 元～20 元，仅 12 人抽到的奖金超过 40 元. 平均数失去代表性的原因是 2 500 与其他数据相差太大，对平均数的影响也大，这时用平均数来表示中奖金额的平均水平不合适.

上面的例子表明，当数据中出现极端值时，平均数有时不能很好地反映数据的平均水平.

将各人的中奖金额从小到大排列：

$$\underbrace{10,10,\cdots,10}_{61\text{个}},\ \underbrace{20,20,\cdots,20}_{37\text{个}},\ \underbrace{50,50,\cdots,50}_{11\text{个}},\ \underbrace{2\,500}_{1\text{个}},$$

可以看出，中奖金额共有 110 个数据，第 55、56 两个数据正好居中，它们对应的中奖金额都是 10 元；而中奖金额 10 元出现的次数最多，共 61 次.

一般地，将 n 个数据按大小顺序排列，居中的一个数据（n 为奇数时），或居中的两个数据（n 为偶数时）的平均数，称为这组数据的**中位数**（median）；出现次数最多的数据称为**众数**（mode）.

将一组 n 个数据按大小顺序排列，当 n 为奇数时，第 $\frac{n+1}{2}$ 个数据是中位数；当 n 为偶数时，第 $\frac{n}{2}$ 和第 $\frac{n}{2}+1$ 两个数据的平均数是中位数.

在问题 2 中，总数为 110 个的数据，排列居中的两个数据的平均数是 10 元，即中位数；出现次数最多的数据也是 10 元，即众数. 用中位数 10 元或众数 10 元来表示中奖金额的平均水平是比较合适的.

例题3 某集团公司有 9 个子公司，各个子公司所创年利润的情况如下表所示.

年利润（千万元）	16	4	3	2
子公司个数	1	2	4	2

表 28.3－4

根据表中的信息，回答下列问题：

（1）各子公司所创年利润的平均数是多少万元？

（2）各子公司所创年利润的中位数是多少万元？

（3）各子公司所创年利润的众数是多少万元？

（4）你认为应该使用上述哪一个量来表示各子公司所创年利润的平均水平比较合适？

解 （1）设各子公司所创年利润的平均数为 $\bar{x}$，那么

$$\bar{x}=\frac{1}{9}\times(1\times16+2\times4+4\times3+2\times2)\approx4.44(\text{千万元}).$$

（2）将 9 个子公司所创年利润从大到小排列，第 5 个数据 3 千万元在中间，所以各子公司所创年利润的中位数是 3 千万元.

（3）看这 9 个子公司所创年利润数据出现的次数，3 千万元出现的次数（4 次）最多，所以各子公司所创年利润的众数是 3 千万元.

（4）由于平均数 4.44 千万元比 8 个子公司所创的年利润都高，所以用平均数来表示各子公司所创年利润的平均水平不合适. 而中位数及众数都是 3 千万元，可见用它们来表示各子公司所创年利润的平均水平比较合适.

截尾后，歌手的得分可看作加权平均数，这时算式中 $\frac{2}{5}$、$\frac{3}{5}$ 分别是 8.5、9 的权数.
这种评分规则能削弱打分过程中人为的不公正因素的影响.

在实际生活中，还有一种“截尾平均数”.如在一次演唱比赛中，某歌手演唱结束后，七个评委评定的分数分别是 7.5、8.5、8.5、9、9、9.5、9.组委会规定歌手的得分是“去掉一个最高分，去掉一个最低分，取其余 5 个分数的平均分”.按此规定，去掉 7.5 和 9.5，该歌手的得分是

$$\frac{2\times8.5+3\times9}{2+3}=8.8(\text{分}).$$

这个得分是截尾平均数.

议一议

平均数、中位数和众数有哪些共同点和不同点?

平均数、中位数和众数都反映一组数据的平均水平，它们是表示一组数据平均水平的量.

平均数比较敏感，能反映所有数据的情况，在统计计算中有重要的作用，缺点是易受极端值的影响.

中位数和众数不受极端值的影响，运算简单，但不能反映所有数据的情况.一组数据的中位数是唯一的，而众数有可能不唯一.

例题4 某初级中学提倡篮球运动，将投篮命中率作为考查学生体育成绩的一个项目.为了制订切合本校学生实际的合格标准，从各年级随机抽取 50 名学生进行 10 次投篮命中次数的测试，结果如表 28.3 - 5 所示.

次数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
人数	1	8	10	7	6	6	5	4	1	2	0

表 28.3 - 5

(1) 求测试数据的平均数、中位数和众数;

(2) 你认为哪一个表示平均水平的量作为合格标准较为合适?试简要说明理由.

解 (1) 设 50 名学生 10 次投篮命中次数的平均数为 $\bar{x}$，则

$$\bar{x}=\frac{1}{50}\times(0\times1+1\times8+2\times10+3\times7+4\times6+5\times6+6\times5+7\times4+8\times1+9\times2+10\times0)=3.74(\text{次}).$$

平均数是 3.74 次.

将 50 名学生 10 次投篮命中次数的数据从小到大排列，第 25、

26 这两个在中间的数据都是 3，因此中位数是 3 次.

众数是 2 次.

（2）考虑到超过一半以上的学生 10 次投篮命中次数都在 3 次或 3 次以上，因此以中位数 3 次作为合格标准较为适宜.

练习 28.3(2)

1. 有人说草地上有 6 人在玩，他们的平均年龄为 14 岁，这时你的脑海里会出现什么情景？如果告诉你这是一位 54 岁的大妈领着 5 个 6 岁的小朋友在玩，那么与你的想象大体一致吗？应该用平均数、中位数、众数中的哪一个数来代表他们的平均年龄更为合适？

2. 求下列 10 个数据的平均数、众数和中位数：

$$0,\ -1,\ 2,\ 1,\ 0,\ -2,\ 0,\ 2,\ -1,\ 0.$$

3. 某商店在一周内卖出某种品牌鞋的尺寸记录如下：

$$38,\ 42,\ 38,\ 41,\ 40,\ 36,\ 39,\ 40,\ 35,\ 40,\ 43.$$

商店进货时，应考虑多进的是哪个号码的鞋？这个号码是平均数、中位数、众数中的哪一个数？

28.4 表示一组数据波动程度的量

方差与标准差

问题 1

某食品厂有甲乙两条流水线生产某种 100 克的袋装食品，在试生产时，从这两条流水线分别随机各抽取 5 袋食品，称出各袋食品的重量（克）分别是：

甲：100，101，99，101，99；

乙：102，98，101，98，101.

（1）甲乙两条流水线各自生产的 5 袋食品重量的平均数分别是多少克？

（2）哪一条流水线生产的 5 袋食品的重量波动较小？

将甲乙两条流水线各自生产的 5 袋食品重量的平均数分别记作 $\bar{x}_{甲}$ 和 $\bar{x}_{乙}$，得

$$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{5}\times(0+1-1+1-1)+100=100(克), \quad ①$$

$$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{5}\times(2-2+1-2+1)+100=100(克). \quad ②$$

由于数据在 100 附近，所以用算式 $\bar{x}=\bar{x}'+a$ 计算.

可见两条流水线生产的 5 袋食品重量的平均数都是 100 克.

我们把甲乙两条流水线各 5 袋食品的重量用图 28－8 表示出来.

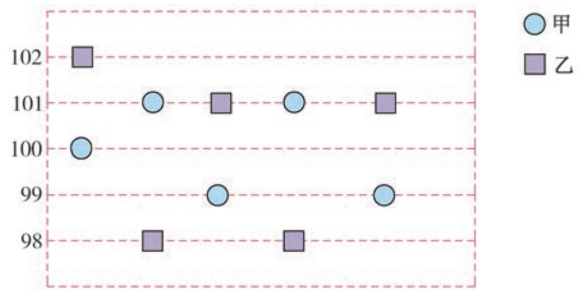


图 28－8

可以看出，两组数据都在 100 附近，但甲的数据波动程度较小，乙的数据波动程度较大.

如果一组数据：$x_1, x_2, \cdots, x_n$，它们的平均数为 $\bar{x}$，那么这 n 个数与平均数 $\bar{x}$ 的差的平方分别为

$$(x_1-\bar{x})^2,\ (x_2-\bar{x})^2, \cdots, (x_n-\bar{x})^2,$$

它们的平均数叫做这 n 个数的**方差**(variance)，记作 s^2.即

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]. \qquad ①$$

式①、式②中的求和是对非负数实施的，可见只有当这些非负数都为 0 时其和才为零.

方差的非负平方根叫做**标准差**(standard deviation)，记作 s.即

$$s=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]}. \qquad ②$$

如未指明要写方差的单位，通常就将它省略.

方差的单位为数据的单位的平方，标准差的单位与数据的单位相同.

方差与标准差反映了一组数据波动的大小，即一组数据偏离平均数的程度.从计算公式可知，一组数据越接近于它们的平均数，方差与标准差就越小，这时平均数就越具有代表性.还可以看到，只有当一组数据中所有的数都相等时，方差与标准差才可能为零.

在问题 1 中，如果用 $s_{甲}^2$ 和 $s_{乙}^2$ 分别表示甲乙两条流水线生产的 5 袋食品重量的方差，那么

$$\begin{aligned} s_{甲}^2 &= \frac{1}{5}\times[(100-100)^2+(101-100)^2+(99-100)^2 \\ &\quad +(101-100)^2+(99-100)^2] \\ &= \frac{1}{5}\times[0^2+1^2+(-1)^2+1^2+(-1)^2] \\ &= 0.8; \end{aligned}$$

$$s_{乙}^2=\frac{1}{5}\times[(102-100)^2+(98-100)^2+(101-100)^2$$
$$+(98-100)^2+(101-100)^2]$$
$$=\frac{1}{5}\times[2^2+(-2)^2+1^2+(-2)^2+1^2]$$
$$=2.8.$$

如果用 $s_{甲}$ 和 $s_{乙}$ 分别表示甲乙两条流水线生产的袋装食品重量的标准差，那么

$$s_{甲}=\sqrt{0.8}\approx0.894(\text{克})；\quad s_{乙}=\sqrt{2.8}\approx1.67(\text{克}).$$

因为 $s_{甲}<s_{乙}$（或 $s_{甲}^2<s_{乙}^2$），所以乙流水线生产的 5 袋食品重量的波动较大，甲流水线生产的 5 袋食品的重量波动较小.

如要推断两条流水线生产的袋装食品的重量波动程度大小，需抽取适量的样本，并用统计学中采用的方法进行推断和误差估计.

例题1 某区要从甲乙两名射击运动员中挑选一人参加全市比赛.在选拔赛中，每人进行了 5 次射击，甲的成绩（环）为：

9.7，10，9.6，9.8，9.9；

乙的成绩的平均数为 9.8 环，方差为 0.032.

（1）甲的射击成绩的平均数和方差分别是多少？

（2）据估计，如果成绩的平均数达到 9.8 环就可能夺得金牌，为了夺得金牌，应选谁参加比赛？

分析 先计算甲运动员的成绩的平均数，再比较两人的成绩的平均数.如果成绩的平均数不同，那么谁的成绩的平均数大选谁是公正的；如果成绩的平均数相同，那么要根据两人成绩的方差，再确定选谁参加比赛.

解 设甲的成绩的平均数为 $\bar{x}_{甲}$，则

$$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{5}\times(-0.3+0-0.4-0.2-0.1)+10$$
$$=-0.2+10=9.8(\text{环}).$$

两名运动员的成绩的平均数都是 9.8 环.

设甲的成绩的方差为 $s_{甲}^2$，则

$$s_{甲}^2=\frac{1}{5}\times[(-0.1)^2+0.2^2+(-0.2)^2+0^2+0.1^2]$$
$$=0.02.$$

因为 $s_{甲}^2=0.02<0.032$，所以甲运动员的成绩较稳定，乙运动员的成绩波动较大.

为了夺得金牌，应选成绩较稳定的甲运动员参加比赛.

例题2 100 克的鱼肉和 100 克的家禽肉中，蛋白质的含量如图 28－9 所示.

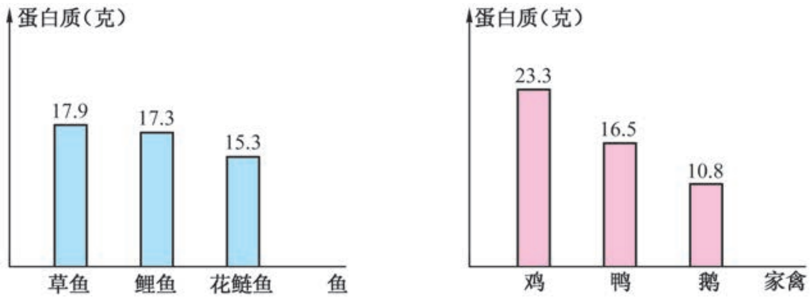


图 28－9

(1) 100 克的鱼肉和 100 克的家禽肉中，蛋白质含量的平均数各是多少克(精确到 0.01 克)？

(2) 100 克的鱼肉和 100 克的家禽肉中，蛋白质含量的平均数中，哪一个更具有代表性？请说说判断的理由.

分析 先分别计算鱼肉和家禽肉中蛋白质含量的平均数，然后计算相应的方差.方差反映一组数据的波动的程度，方差越小，则这组数据的波动就越小，平均数的代表性就越大.

解 (1)用 $\overline{x}$、$\overline{x}'$分别表示 100 克的鱼肉和 100 克的家禽肉中蛋白质含量的平均数，则

$$\overline{x}=(17.9+17.3+15.3)\div 3\approx 16.83(克);$$

$$\overline{x}'=(23.3+16.5+10.8)\div 3\approx 16.87(克).$$

(2) 用 s^2、s'^2 分别表示 100 克的鱼肉和 100 克的家禽肉中蛋白质含量的方差，则

$$s^2=\frac{1}{3}\times[(17.9-16.83)^2+(17.3-16.83)^2+(15.3-16.83)^2]$$
$$\approx 1.24;$$

$$s'^2=\frac{1}{3}\times[(23.3-16.87)^2+(16.5-16.87)^2+(10.8-16.87)^2]$$
$$\approx 26.1.$$

因为 $s'^2>s^2$，所以 100 克的鱼肉中蛋白质含量的平均数更具有代表性.

练习 28.4(1)

1. 甲乙两人在射击比赛中，打靶的次数相同，且所得环数的平均数 $\overline{x}_{甲}=\overline{x}_{乙}$. 如果甲的射击成绩比较稳定，那么方差的大小关系是 $s^2_{甲}$________$s^2_{乙}$.
2. 数据 90、91、92、93 的标准差是 ( )

(A) $\sqrt{2}$； (B) $\frac{5}{4}$； (C) $\frac{\sqrt{5}}{4}$； (D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3. 甲乙两组数据如下：

甲：2，4，6，8，10；

乙：3，5，6，7，9.

用 $s_{甲}^2$ 和 $s_{乙}^2$ 分别表示这两组数据的方差，那么 ( )

(A) $s_{甲}^2>s_{乙}^2$； (B) $s_{甲}^2<s_{乙}^2$；

(C) $s_{甲}^2=s_{乙}^2$； (D) $s_{甲}^2$ 与 $s_{乙}^2$ 大小不定.

问题2

将问题 1 中的每个数据都加 900，得到新数据：

甲：1 000，1 001，999，1 001，999；

乙：1 002，998，1 001，998，1 001.

根据平均数的公式②，可知两组数据的平均数从 100 变为 1 000. 那么甲乙两组数据的方差与原先相比是否会发生变化？

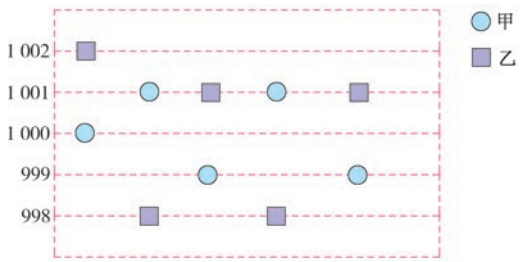


图 28－10

观察图 28－10，可见两组新数据确实在 1 000 上下波动，但与原先(见图 28－8)相比，波动程度却没有变化.

下面以甲组新数据来验证这个结论.

设甲组新数据的方差为 $s_{甲}^2$，则

$$s_{甲}^2=\frac{1}{5}\times[(1\,000-1\,000)^2+(1\,001-1\,000)^2+(999-1\,000)^2+(1\,001-1\,000)^2+(999-1\,000)^2]$$

$$=\frac{1}{5}\times[0^2+1^2+(-1)^2+1^2+(-1)^2]$$

$$=0.8.$$

可见甲组新数据的方差与原数据的方差相同.

一般地，已知一组数据：$x_1, x_2, \cdots, x_n$，它们的方差为 s^2，那么一组新数据：$x_1+a, x_2+a, \cdots, x_n+a$，这组数据的方差仍为 s^2.

方差和标准差的计算往往比较复杂，可用计算器来进行运算.

如一组数据为：$-2,0,0,1,1,1$.用计算器计算这组数据的标准差 s 和方差 s^2，其操作步骤及按键过程(选取不同型号计算器可参照该型号计算器使用说明书)如下：

序号	步骤	按键	屏幕显示
1	进入统计模式	MODE 2	屏幕上方出现“SD”
2	清除存储旧内容	SHIFT CLR 1 =	stat clear 0
3	输入-2	(−) 2 DT	$n=$ 1
4	输入 2 个 0	0 DT DT	$n=$ 3
5	输入 3 个 1	1 SHIFT ; 3 DT	$n=$ 6
6	求 s	SHIFT S−VAR 2 =	$x\delta n$ 1.067187373
7	求 s^2	X^2 =	1.138888889

例题3 甲乙两班举行电脑汉字输入速度比赛，各选 10 名学生参加，各班参赛学生每分钟输入汉字个数的统计如图 28－11 所示.

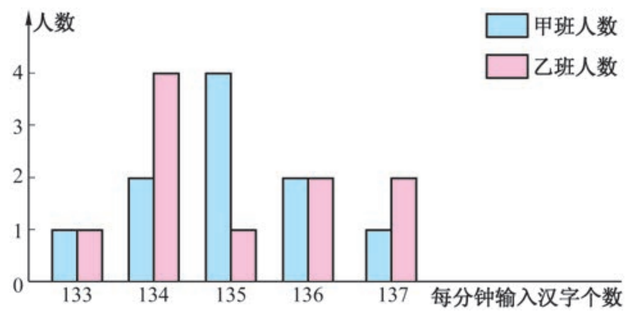


图 28－11

(1) 在下表中填写乙班学生的相关数据；

输入汉字的有关统计量	众数(个)	中位数(个)	平均数 $\bar{x}$(个)	方差 s^2
甲班学生	135	135	135	1.2
乙班学生				

(2) 根据所学的统计知识，评价甲乙两班学生的比赛成绩.

解 (1) 从条形图中可直接看出，乙班学生每分钟输入汉字个数的众数是 134 个，中位数是 $\frac{134+135}{2}=134.5$(个)；

平均数是

$$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{10}\times(1\times133+4\times134+1\times135+2\times136+2\times137)$$
$$=135(个)；$$

方差是

$$s_{乙}^2=\frac{1}{10}\times[(133-135)^2+4\times(134-135)^2+(135-135)^2$$
$$+2\times(136-135)^2+2\times(137-135)^2]$$
$$=1.8.$$

(2) 因为平均数包含了所有参赛学生的信息，所以用平均数比较两班的比赛成绩更为公平.

因为 $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙}=135$(个)，所以甲乙两班参赛学生的水平相同.

比较两班成绩的方差，因为 $s_{甲}^2<s_{乙}^2$，所以乙班参赛学生的成绩波动较大，而甲班参赛学生的成绩较稳定.

练习 28.4(2)

1. (口答)已知两组数据：x_1, x_2, x_3 和 x_1+2, x_2+2, x_3+2.判断下列说法是否正确：

(1) 平均数不相等，方差相等；

(2) 中位数不相等，方差相等；

(3) 平均数相等，方差不相等；

(4) 中位数相等，方差不相等.

2. 某厂对一个班组生产的零件进行调查.该班组在 10 天中每天所出的次品数如下(单位：个)：

0，2，0，2，3，0，2，3，1，2.

求该班组在 10 天中生产出的次品的平均数、中位数、众数和方差.

3. 在一次科技知识竞赛中，两组学生的成绩如下表所示：

分　　数		50	60	70	80	90	100
人数	甲组	2	5	10	13	14	6
	乙组	4	4	16	2	12	12

请根据你所学过的统计知识，对两组学生在这次竞赛中的成绩的平均数及成绩的波动程度进行评判，并说明理由.

28.5 表示一组数据分布的量

1. 频数

图 28－12 是向 200 名游客调查某景点合适的门票价格的条形图.

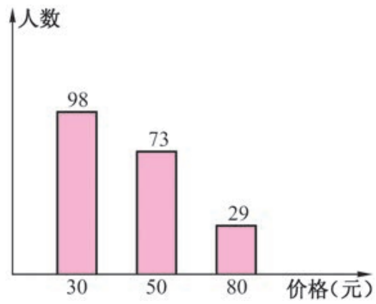


图 28－12

从图中可见,认为合适的价格是 30 元的有 98 人,认为合适的价格是 50 元的有 73 人,认为合适的价格是 80 元的有 29 人.其中“98”“73”“29”就是赞同相应门票价格的人的频数.根据这三个频数,就可以知道赞同这三种价格的人数分布情况.

问题 1

为了了解学生用于阅读课外书籍的时间的情况,某校对九年级(1)班 40 名学生每周阅读课外书籍所用的时间进行统计.调查结果如下(时间单位:时):

1.5, 3.5, 9.0, 5.0, 4.5, 3.0, 6.0, 2.5, 5.5, 5.5,
4.0, 3.0, 2.0, 6.5, 8.0, 2.5, 8.5, 7.0, 6.5, 4.0,
9.5, 0.5, 4.0, 3.5, 7.5, 7.0, 1.0, 6.0, 0.0, 5.0,
2.0, 5.5, 8.5, 6.0, 4.5, 4.0, 7.0, 6.0, 5.5, 9.0.

应怎样整理和表示这些数据,才能反映该班学生每周阅读课外书籍所用时间的分布情况?

在这 40 个学生每周用于阅读课外书籍的时间的数据中,有 0、0.5、1、1.5、…、9、9.5 共 20 个不同的小时数,如果这组数据按 20 个不同的小时数来整理和表示,那么结果就比较散乱,反而不能显示数据的分布情况,因此想到对这些数进行分组.

也可以分成 4 组,组距为 3 小时.

我们先从这 40 个数中找出最大的数和最小的数,得这组数据的最大值 9.5 和最小值 0,两者的差 9.5 小时就是这组数据的波动范围.如果把这 40 个数分成 5 小组,那么小组两端点的距离称为组距.由 $9.5\div5=1.9$(时),可取小组组距为 2 小时.

再列频数分布表.有些数正好在两小组的分界点上,为了使各数既不重复也不遗漏,我们规定每个小组可包括最小值,不包括最大值.于是得到频数分布表,如表 28.5 - 1 所示.

分　　组	次数记录	频　　数
0—2	𤴓	4
2—4	正下	8
4—6	正正丅	12
6—8	正正	10
8—10	正一	6

表 28.5 - 1

一个小组的频数是指落在这个小组内的数据累计出现的次数.

最后根据频数分布表来画统计图.以横轴表示学生每周用于阅读课外书籍的小时数,纵轴表示人数,绘制统计图如图 28 - 13 所示.

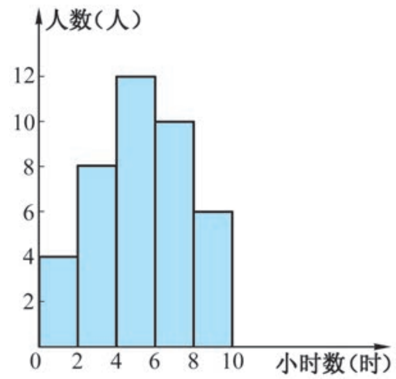


图 28 - 13

我们把反映各小组中相关数据出现的频数的统计图叫做**频数分布直方图**.

从图 28 - 13 中可见,学生每周用于阅读课外书籍的时间 t(时)中,满足 $4\leqslant t<6$ 的最多,达 12 人;其次是满足 $6\leqslant t<8$ 的有 10 人;另外,满足 $2\leqslant t<4$ 的有 8 人,满足 $8\leqslant t<10$ 的有 6 人;而满足 $0\leqslant t<2$ 的最少,只有 4 人.

利用频数分布直方图可以直观地看到学生每周用于阅读课外

书籍时间的分布情况.

通过问题 1 的讨论,归纳频数分布直方图的绘制步骤如下:

(1) 收集原始数据.

在问题 1 中首先是对九年级(1)班全体 40 名学生进行普查,得到学生每周用于阅读课外书籍的时间.

(2) 计算最大值减去最小值的差.

在问题 1 列出的 40 个数据中,最大数是 9.5,最小数是 0,$9.5-0=9.5$,由此得到这组数据波动的范围.

(3) 决定组数与组距.

一般数据越多,分组也越多,当数据在 100 个左右时分成 5—12 小组为宜.在问题 1 中有 40 个数据,可分成 4 或 5 小组,组距相应为 3 或 2 小时.

(4) 列频数分布表.

通常规定各小组包括最小值,不包括最大值.分组后对各个小组作频数累计,得出频数.

(5) 绘制频数分布直方图.

在问题 1 中,以横轴表示学生每周用于阅读课外书籍的时间,纵轴表示相应的人数.

在纵轴表示频数的直方图中,每个小矩形的高表示相应小组的频数.

从频数分布直方图中可以获得很多信息.

例题1 A 班学生参加环保知识竞赛,已知竞赛得分都是整数.把参赛学生的成绩整理后分成 6 小组,画出竞赛成绩的频数分布直方图,如图 28 - 14 所示.根据图中的信息回答下列问题:

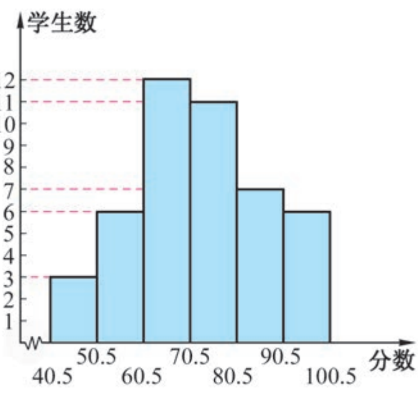


图 28 - 14

(1) A 班共有多少名学生参赛？

(2) 成绩的中位数落在哪个小组数据范围内？

(3) 求成绩高于 60 分的学生占全班参赛人数的百分率.

解 (1) 从频数分布直方图中各小矩形的高可以知道各小组的频数.由此可知 A 班参赛学生的人数是

$$3+6+12+11+7+6=45(\text{人}).$$

(2) 将 45 个成绩从大到小排列，居中的第 23 个成绩是中位数.根据各小组的人数可知，第 23 个成绩在 70.5—80.5 的小组里.

(3) $$\frac{1}{45}\times(12+11+7+6)=80\%,$$

所以，成绩高于 60 分的学生人数占全班参赛学生人数的 80%.

练习 28.5(1)

1. 根据图 28 - 13，试回答下列问题：

(1) 学生每周用于阅读课外书籍的时间的中位数在哪个小组？

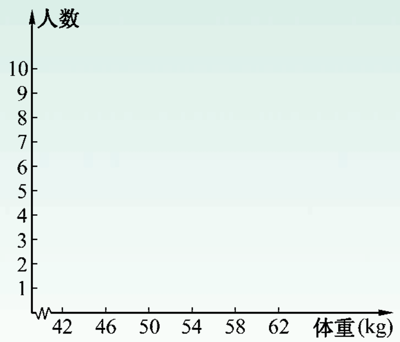
(2) 学生每周用于阅读课外书籍的时间在 4—8(不含 8)小时的人占学生总人数的百分比是多少？

2. 某班 40 名学生体重(kg)记录如下：

44, 46, 43, 51, 51, 52, 48, 46, 45, 59,
57, 49, 42, 50, 54, 43, 44, 49, 51, 53,
52, 54, 49, 61, 54, 56, 48, 47, 59, 53,
59, 58, 48, 51, 43, 48, 60, 54, 57, 55.

若将数据分成 5 小组，试先填表，再画频数分布直方图.

分　　组	次数记录	频　　数
42—46		
46—50		
50—54		
54—58		
58—62		



(第 2 题)

2. 频率

问题2

在例题 1 中，A 班学生参加环保知识竞赛的成绩的频数分布直方图如图 28－14 所示.如果 B 班学生参加同一环保知识竞赛的成绩的频数分布直方图如图 28－15 所示，那么应该如何比较 A、B 两班参赛学生成绩的分布情况？

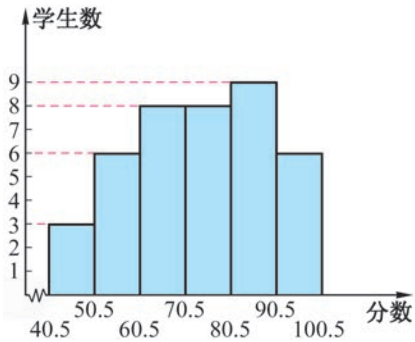


图 28－15

已知 A 班参赛学生有 45 名，而从图 28－15 中可知，B 班参赛学生有 40 名.因此直接从各小组的频数来比较 A、B 两班参赛学生成绩的分布情况就比较困难.

如果将每小组的频数除以全组数据总的个数，就可以得到各小组数据的频数与全组数据总个数的比值，我们把这个比值叫做**组频率**.

$$组频率=\frac{小组中数据的频数}{全组数据的总个数}.$$

由于组频率表示比值大小，因此可以用组频率来比较人数不同的两个班学生成绩的分布情况.

下面以问题 1 为例，说明如何画频率分布直方图.

在问题 1 中，数据总数为 40.将各小组频数除以 40，可得各小组的频率.再将频数分布表扩充就得到频率分布表，如表 28.5－2 所示.

分　组	频　数	频　率
0—2	4	0.1
2—4	8	0.2
4—6	12	0.3
6—8	10	0.25
8—10	6	0.15

表 28.5－2

通常在频率分布直方图中，用每小组对应的小矩形的面积表示该小组的组频率.因此在频率分布直方图中，纵轴表示频率与组距的商，即“$\frac{频率}{组距}$”，横轴的意义与频数分布直方图相同.画出问题1中学生每周用于阅读课外书籍时间的频率分布直方图，如图28－16所示.

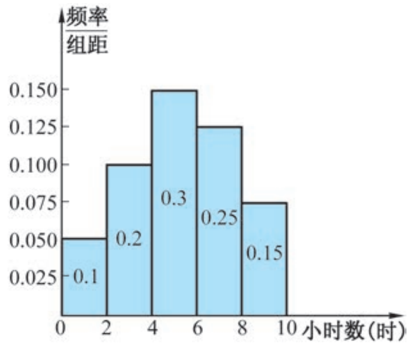


图 28－16

对于人口、身高、体重等问题，我们可以通过大容量的随机样本的分布来推断总体的分布.

例题2 为了了解全区6 000名初中毕业生的体重情况，随机抽测了400名学生的体重.统计结果列表28.5－3如下：

体重(kg)	频　　数	频　　率
40—45	44	
45—50	66	
50—55	84	
55—60	86	
60—65	72	
65—70	48	

表 28.5－3

(1) 计算组频率，并填入表格中；

(2) 画出样本频率分布直方图，图中各小矩形面积的和等于多少？

(3) 估计全区初中毕业生中体重小于60千克且不小于50千克的学生人数.

解 (1) 将各小组频数除以400，依次得各小组频率为

0.11，0.165，0.21，0.215，0.18 和 0.12.

填入表内,如表 28.5-4 所示.

体重(kg)	频　　数	频　　率
40—45	44	0.11
45—50	66	0.165
50—55	84	0.21
55—60	86	0.215
60—65	72	0.18
65—70	48	0.12

表 28.5-4

(2) 画出频率分布直方图,如图 28-17 所示.

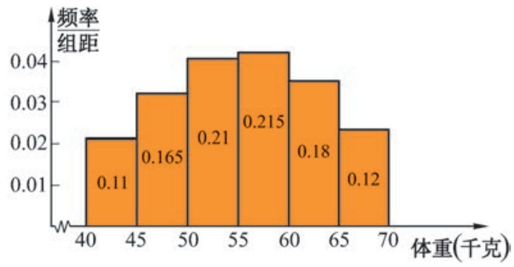


图 28-17

因为组频率的和为 1,所以频率分布直方图中各小矩形的面积和为 1.

(3) 样本中小于 60 千克且不小于 50 千克的频率为 $0.21+0.215=0.425$,估计全区初中毕业生体重在此范围的学生人数约为

$$6\,000\times0.425=2\,550(\text{人}).$$

在频率分布直方图中,各小矩形的宽是组距,面积是相应小组的频率,因此小矩形的高是频率除以组距.如第一小组的小矩形的高为 $0.11\div5=0.022$.

练习 28.5(2)

1. 某中学数学教研组有 25 名教师,将他们按年龄分成三个小组,在 38—45(岁)小组内有 8 名教师,那么这个小组的组频率是__________.

2. 根据本节例题 1 和问题 2 中 A、B 两班学生参加环保知识竞赛的成绩情况,编制频率分布表,画出相应频率分布直方图,并分析两班成绩的特征.

28.6 统计实习

例题1 交警大队为了了解某道路机动车的流量，在周五、周六两天，从 6:00 到 22:00 对过往车辆的数量进行调查.调查结果如表 28.6 - 1 所示.

时间	公交车		载重车		小车	
	周五	周六	周五	周六	周五	周六
6:00～7:00	14	10	42	20	354	249
7:00～8:00	34	28	54	28	535	352
8:00～9:00	32	29	125	40	374	462
9:00～10:00	25	24	134	32	332	330
10:00～11:00	27	20	112	46	340	312
11:00～12:00	28	26	108	38	390	320
12:00～13:00	30	29	124	50	442	438
13:00～14:00	26	22	131	44	454	448
14:00～15:00	27	20	126	45	422	388
15:00～16:00	28	20	120	41	402	330
16:00～17:00	30	23	104	32	362	342
17:00～18:00	35	27	112	32	484	454
18:00～19:00	30	25	82	22	471	470
19:00～20:00	22	22	53	23	364	482
20:00～21:00	18	17	53	24	348	384
21:00～22:00	10	10	68	36	312	344

表 28.6 - 1

(1) 分别求周五、周六 6:00～22:00 时段内公交车每小时流量的平均数和方差，并指出这两天中公交车流量的情况有什么不同；

(2) 在同一张图内，从 6:00 开始，按时间顺序，画出载重车在周五、周六每 2 小时的车流量折线图；

(3) 按时间顺序画出小车在周六从 6:00 开始，每 2 小时的车流量频数分布直方图.

解 (1) 设周五公交车每小时流量的平均数为 $\bar{x}$，方差为 s^2，周六公交车每小时流量的平均数为$\overline{x'}$，方差为 s'^2.那么，

$$\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{1}{16}\times(14+34+32+25+27+28+30+26+27+28\\&\quad+30+35+30+22+18+10)\\&=26,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s^2&=\frac{1}{16}\times[(14-26)^2+(34-26)^2+(32-26)^2\\&\quad+(25-26)^2+(27-26)^2+(28-26)^2\\&\quad+(30-26)^2+(26-26)^2+(27-26)^2\\&\quad+(28-26)^2+(30-26)^2+(35-26)^2\\&\quad+(30-26)^2+(22-26)^2+(18-26)^2\\&\quad+(10-26)^2]\\&=45;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{x'}&=\frac{1}{16}\times(10+28+29+24+20+26+29+22+20+20\\&\quad+23+27+25+22+17+10)\\&=22,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s'^2&=\frac{1}{16}\times[(10-22)^2+(28-22)^2+(29-22)^2\\&\quad+(24-22)^2+(20-22)^2+(26-22)^2\\&\quad+(29-22)^2+(22-22)^2+(20-22)^2\\&\quad+(20-22)^2+(23-22)^2+(27-22)^2\\&\quad+(25-22)^2+(22-22)^2+(17-22)^2\\&\quad+(10-22)^2]\\&=32.125.\end{aligned}$$

由计算结果可知，周五公交车平均每小时比周六多 4 辆；两天中公交车流量的方差的大小关系是 $s^2>s'^2$，说明周五公交车流量的波动程度较大.对比两天中公交车的流量，可以发现，周五公交车流量波动大的原因是上下午高峰时段的公交车流量显著增加.

(2) 将周五、周六从 6:00 到 22:00 按时间顺序，每 2 小时内通过的载重车数量整理成表 28.6 - 2.

根据所整理的数据，画折线图，如图 28 - 18 所示.

时　　间	周五流量	周六流量
6:00～8:00	96	48
8:00～10:00	259	72
10:00～12:00	220	84
12:00～14:00	255	94
14:00～16:00	246	86
16:00～18:00	216	64
18:00～20:00	135	45
20:00～22:00	121	60

表 28.6 - 2

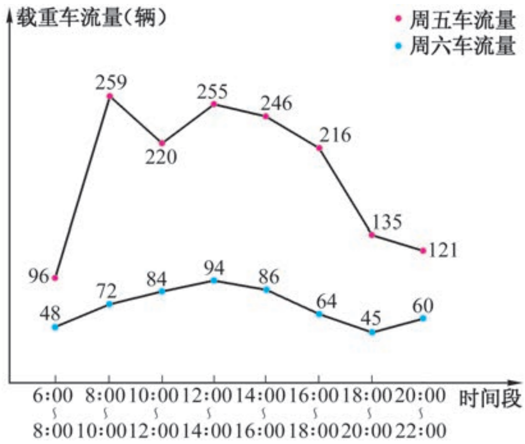


图 28 - 18

(3) 将周六从 6:00 到 22:00 按时间顺序，每 2 小时通过的小车数量整理成表 28.6 - 3.

根据所整理的数据，画频数分布直方图，如图 28 - 19 所示.

时　　间	周六流量
6:00～8:00	601
8:00～10:00	792
10:00～12:00	632
12:00～14:00	886
14:00～16:00	718
16:00～18:00	796
18:00～20:00	952
20:00～22:00	728

表 28.6 - 3

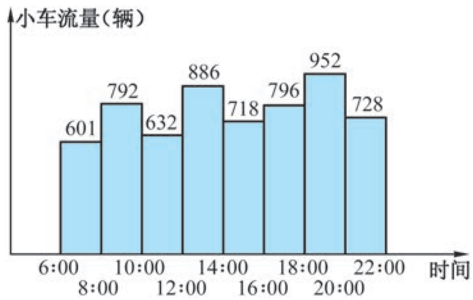


图 28 - 19

例题2 某机构公布的数据表明：1957 年世界人口为 30 亿，1974 年达 40 亿，1987 年达 50 亿，1999 年达 60 亿.预测世界人口 2025 年将达 80 亿，2050 年将超过 90 亿.预计 2050 年亚洲的人口最多，将达到 52.68 亿，北美洲 3.92 亿，欧洲 8.28 亿，拉丁美洲及加勒比地区 8.09 亿，非洲 17.68 亿.

根据上述数据，按要求画图并回答问题：

（1）画出从 1957 年到 2050 年世界人口变化的折线图；

（2）画出 2050 年世界人口分布的扇形图；

（3）2050 年亚洲人口占世界人口的比例约是多少？

解 （1）世界人口变化的折线图如图 28－20 所示.

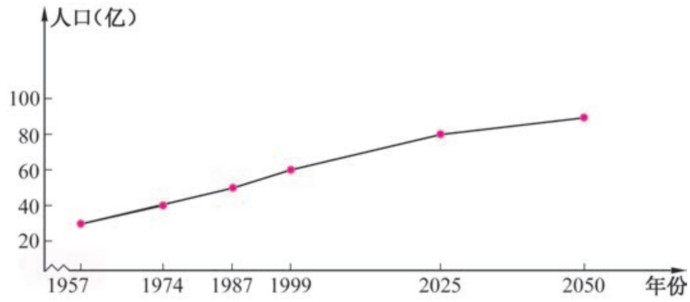


图 28－20

（2）将 2050 年各大洲的人口数相加，得 90.65 亿，人口分布的扇形图如图 28－21 所示.

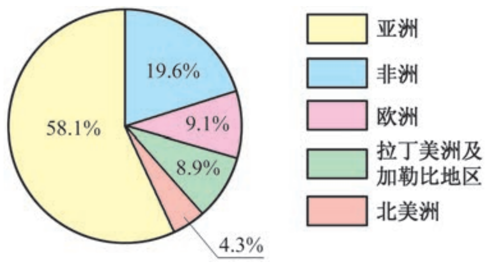


图 28－21

（3）从世界人口分布的扇形图可知，2050 年亚洲人口占世界人口的比例约为 58.1%.

练习 28.6

从本校六至九年级的每个年级的学生中，各随机抽取 20 名男生和 20 名女生的身高、体重作为样本，计算九年级学生的身高、体重的样本的平均数和方差. 分别画出八年级中男女生身高的样本的频数分布直方图；分别画出六、七年级男生身高的样本的频率分布直方图.

本章小结

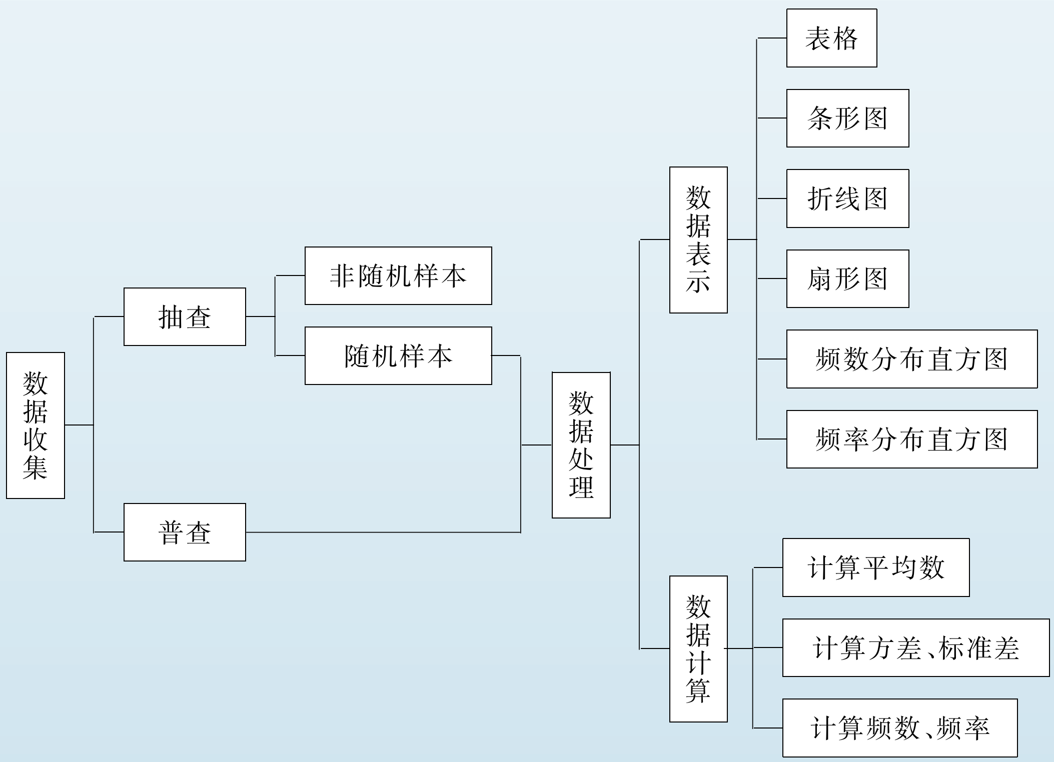
为了研究问题，我们要收集数据，经过整理和计算后，将一组数据用合适的形式表示出来，以供分析研究，达到解决问题或决策的目的，这些就是统计的任务．本章主要学习了统计的意义以及统计量的计算、数据的分布及其初步应用．

平均数是一个重要的统计量，在统计计算中起着重要的作用．当有些数据偏差较大时，有时用中位数或众数来表示一组数据的平均水平．

方差和标准差也是重要的统计量，它们反映出一组数据波动程度的大小．对于数据的分布情况，用频数分布直方图和频率分布直方图加以研究．

通过抽查取得样本，可由样本来推断总体．样本应满足一定的条件，限于初中阶段所学内容，本章只提出了样本的随机性或代表性．本章所学的有关方差、标准差的计算公式，并不适合由样本推断总体的方差和标准差．

本章知识结构图如下：



28

阅读材料

统计图各有奥妙

境外某企业有 5 个股东,100 名工人.年底公布企业经营业绩,如下表所示:

	2001 年	2002 年	2003 年
股东红利总额	5 万美元	7.5 万美元	10 万美元
工资总额	10 万美元	12.5 万美元	15 万美元

董事长和工会组织负责人根据表中的数据,分别绘制了下面的统计图 1 和图 2.

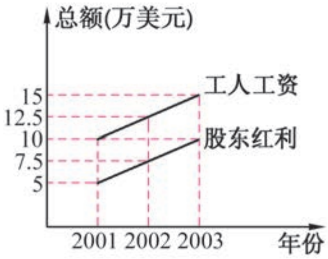


图 1

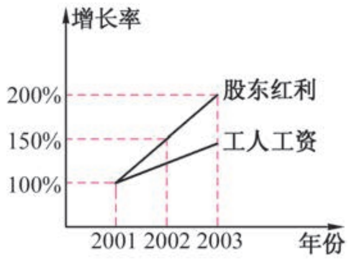


图 2

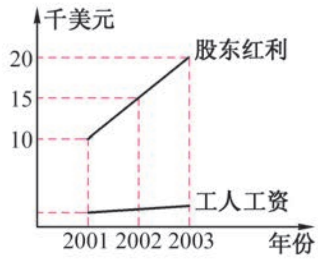


图 3

董事长依据他所画的图 1,指出企业在这三年内股东红利与工人工资是平行增长的.

工会组织负责人依据图 2,指出企业在这三年内股东的红利翻了一番,但工人的工资只增加了 50%,所以工人的工资还应该再提高.

而工人根据表格中的数据绘制出统计图 3,他们认为,企业在这三年内股东的平均红利从 1 万美元增至 2 万美元,而工人的平均工资从 1 000 美元增加到 1 500 美元,工人平均工资的增加部分只占股东红利增加部分的$\frac{1}{20}$,工人的工资增加太少.

根据同样的数据,但是从不同的角度来整理分析这些数据,就可以揭示同一事物的不同侧面.

说　　明

本册教材根据上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会制定的课程方案和《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》编写,供九年义务教育九年级第二学期试用.

本教材由上海师范大学主持编写,经上海市中小学教材审查委员会审查准予试用.

本册教材的编写人员有:

主编:邱万作　　　分册主编:蔡则彪

特约撰稿人(按姓氏笔画为序):陆海兵　蔡则彪

2019年教材修订组成员:叶锦义　邵世开　沈　洁

陆海兵　徐晓燕　顾跃平

本册教材图片提供信息:

壹图网(封面一幅图,目录P1一幅图,P1一幅图,P13一幅图,P27一幅图,P38一幅图)

插图绘制:黄国荣、顾云明、陈芸

责任编辑　缴　麟
章佳维

经上海市中小学教材审查委员会审查准予试用　准用号 Ⅱ-CB-2019062

九年义务教育课本
数　学
九年级第二学期
(试用本)
上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会

上海世纪出版股份有限公司
上　海　教　育　出　版　社 出版
（上海市闵行区号景路159弄C座　邮政编码：201101）
上海新华书店发行　上海四维数字图文有限公司印刷

开本 890×1240　1/16　印张 4.75
2019年12月第1版　2024年12月第6次印刷
ISBN 978-7-5444-9643-8/G·7951

定价：6.40元
价格依据文件：沪价费〔2017〕15号
如发现内容质量问题，请拨打 021-64319241
如发现印、装问题，请拨打 021-64373213，我社负责调换

中国环境标志
CHINA ENVIRONMENTAL LABELLING
绿色印刷产品

ISBN 978-7-5444-9651-3