九　年　义　务　教　育

九年级　第一学期

（试用本）

数学

教学参考资料

上海教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

九年义务教育数学教学参考资料. 九年级. 第一学期:试用本 / 上海市中小学（幼儿园）课程改革委员会编. — 上海:上海教育出版社, 2019.7（2025.6重印）
ISBN 978−7−5444−9343−7

Ⅰ. ①九… Ⅱ. ①上… Ⅲ. ①中学数学课－初中－教学参考资料 Ⅳ. ①G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第147170号

目　录

注 1　标有“*”号的章名均配有原课本的缩小文本.

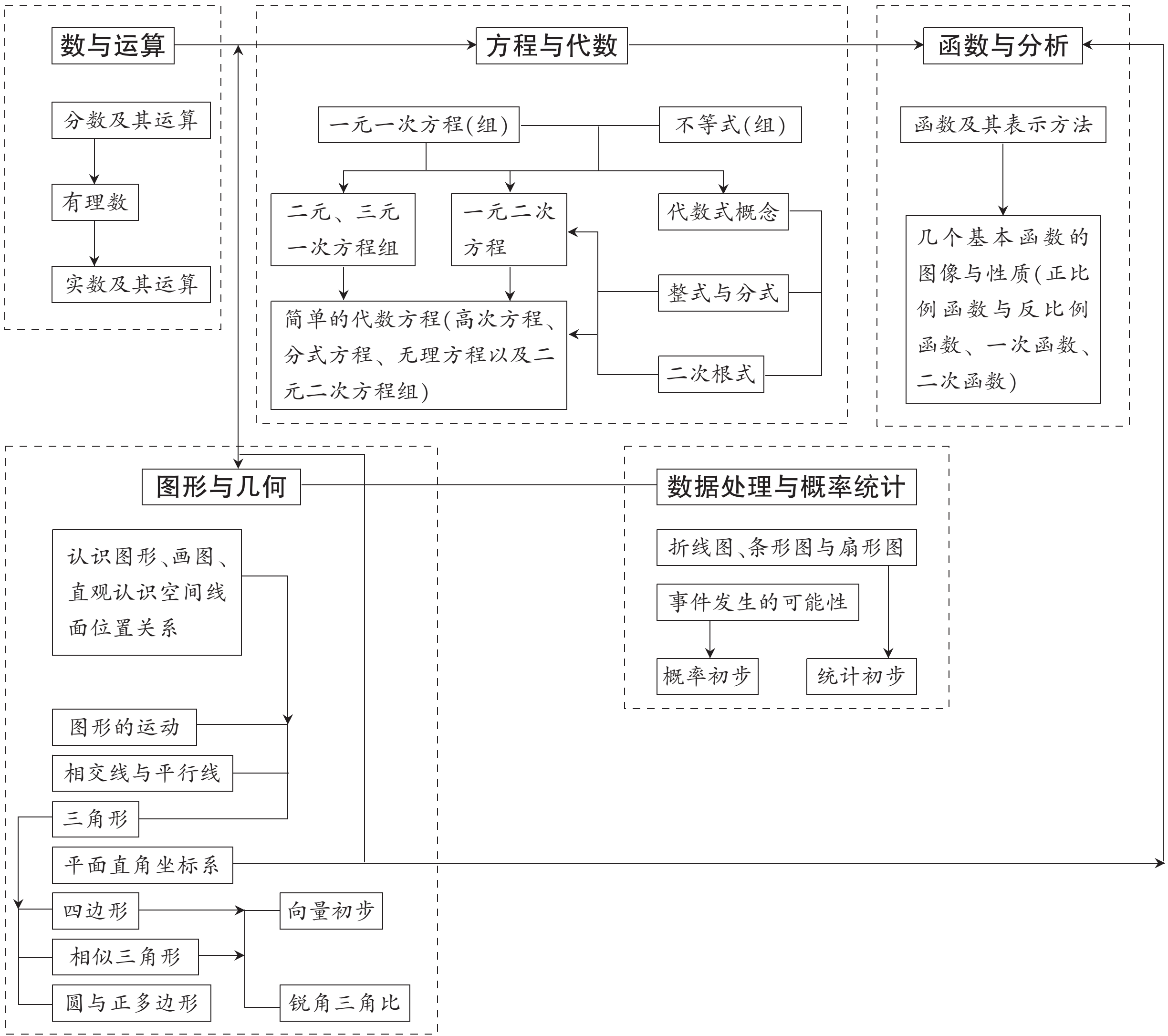
注 2　括号“(　)”内页码为课本相应页码.

课本简介

一、初中数学课本内容框架体系

1. 知识内容框图

《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》中指明,数学课程内容包括“基本内容”“拓展内容”和“专题研究与实践”三类.其中“基本内容”是所有学生必备的、共同的数学基础;这些内容按其所属知识领域,分为“数与运算”“方程与代数”“图形与几何”“函数与分析”“数据处理与概率统计”等五个部分,它们自成体系,又相互联系,构成一个有机的整体.根据数学知识内容“通盘设计、分阶段安排”的原则,初中数学基本内容的框图如下:



2. 内容编排简述

初中数学学习内容的安排,基本格局是“二二分段,九年级分层”.“二二分段”的设计,主要是从初中学生数学认知发展的水平着眼,对不同年级的数学内容采用有差别的处理方式,六、七年级的数学中偏重于直观感知、形象思维的活动,八、九年级的数学中逐步提高理性分析、逻辑思维的要求;“九年级分层”的构

想，主要是考虑到适应学生“个性差异”和引导学生“合理分流”的需要，适当增加课程的选择性. 这一格局，体现了遵循数学学习的规律、重视为全体学生打好共同的数学基础、同时适应不同学生对数学的需要的课程理念.

数学基本内容各部分，设计为若干个学习主题，组成学习序列. 初中数学课本的编写，在把握各部分内容的发展主线和相互联系的基础上，采取“多线有序并进、螺旋上升，内容互相穿插、混合编排”的方式.

九年级数学分为基本内容和拓展Ⅱ内容两部分. 其中，基本内容是所有学生必学的内容；拓展Ⅱ提供希望进入普通高中的学生修习，帮助学生做好初、高中数学的知识衔接.

九年级数学内容分层的具体安排如下：

学习主题	基本内容	拓展Ⅱ内容	相联接的高中内容
一元二次方程	（八年级）一元二次方程的概念和解法.	一元二次方程的根与系数关系.	一元二次方程的根与系数关系的运用.
二次函数	二次函数的概念、图像和直观性质；已知二次函数图像上的三点求函数解析式.	二次函数与一元二次方程之间的联系；二次函数解析式的确定；二次函数的基本性质.	一元二次不等式的解法；函数基本性质的解析研究等.
圆	圆的有关概念；圆心角、弧、弦、弦心距之间关系的定理；垂径定理；直线与圆、圆与圆的位置关系；圆与正多边形.	直线与圆、圆与圆的位置关系的判定定理和性质定理；与圆有关的角；与圆有关的线段；四点共圆.	命题研究；解析几何中的圆；正弦定理等.

3．课本使用要点

（1） 全面把握课程目标.

数学教育在发展和完善人的教育活动中，在形成人类理性思维和促进个人智力发展的过程中，发挥着独特的、不可替代的作用. 要充分认识数学的育人功能，确立正确的数学教育目的观. 数学课程及其教学，不仅要关注学生对数学知识、技能、思想方法的掌握，关注其数学能力的发展，而且要有助于学生理解数学的社会价值，领略数学文化的内涵，体验数学思维方式和方法，形成良好的数学思维品质，促使学生的数学素养全面提高；要让学生学习自主获取数学知识的方法，体会数学思考和创造的过程，增强学习的兴趣和自信心，不断提高自主学习的能力，帮助学生确立终身学习的愿望，奠定终身发展的基础.

数学课程目标体系含有“知识与技能”“过程与方法”“情感态度与价值观”三个维度，分为总目标和学段目标两个层次，它们通过全程的数学教学整体实现. 课程内容主题的学习要求，是课程目标的具体化体现和形成性标志；恰当制订、有效落实各章和每节课的教学目标，是逐步达成课程目标的根本保证.

数学课程目标对数学教学具有定向和引导的意义. 每课教学目标的制订，要全面关注三个维度，针对教学实际，指向明确，定位准确，切实可行.

（2） 精心组织教学内容.

数学课本是课程内容的重要载体，为教学提供了基本素材，具有系统性、通用性；课本内容的安排，显示了对教学材料进行组织的一条基本线索和一种可取形式，有借鉴性也有局限性. 不同班级、不同学生使用同样的课本，必须有区别地对待、有适当的调整. 所以，具体教学中的内容组织，既要尊重课本，更要活用课本，整体把握课本要求，创造性地使用课本素材. 要在研读课本、分析学生的基础上，从达成目标的需要着眼，从学生学习的实际出发，恰当选取和组织每节课教学的素材内容. 要体现内容与目标的一致性以及与学生现有认知水平的适切性；要重视内容的基础性、层次性、结构性和可接受性；要有助于学生对数学的认识和理解，有助于激发学生学习数学的兴趣和信心.

教学内容的组织还要强调应更多地关注教学的主体目标和重点内容，关注数学的基本运用及其与现实生活的联系，注重于打好基础、促进发展；不要在细枝末节上纠缠，不要搞过于繁杂和技巧性过强的统一训练.

(3) 合理安排教学过程.

数学教学是学生在教师指导下主动学习课程的真实过程.在教学过程中,教师、学生、教学内容、教学环境等众多因素共同作用、相互影响,推动教学的实施.教学过程的设计,要确立和尊重学生的学习主体地位,坚持“教”为“学”服务的原则;要强调有效发挥学生在学习活动中的主动、能动作用,发挥教师对学生学习的指导、促进作用,体现教师主导与学生主动相统一,师生互动,共同发展;要切实加强数学基础教学,重视过程教学,遵循学生认识数学的一般规律和数学发展的逻辑顺序,展现有效落实数学基本知识、基本技能、基本能力和基本应用的教学途径,同时把接受性学习与探究性学习、个体学习与合作学习等多种方式适当组合运用于其中,将体验探索、发现过程和经历数学化、再创造过程等目标要求有机整合于其中;要创设良好的认知环境,适切应用现代信息技术,构建民主、平等、和谐的师生关系,提供开放自主的活动空间和丰富多样的学习资源,促进学生积极、自由地思维,生动、活泼地发展.

数学课本的编写力求体现过程模式,展现知识的发生、发展和形成的过程,通过“问题—活动”引导学生探索求知.课本内容的呈现方式,为改善教学过程提供了一定的思考基础和有利条件.教学实施过程的具体安排,与教师、学生、环境等各方面因素有关.要对课本内容进行教学法的加工,要注意课堂生成资源的利用,要注意及时反馈和调节,使教学过程充满活力;要为学生自主活动提供机会和条件,发挥师生的积极性、创造性和营造良好的认知环境,激活课堂.

(4) 切实改进学习评价.

数学学习评价是对学生通过数学学习所取得的成果和达到的水平作出评判,同时对学生改进学习和完善自我进行导向;它又是实施教学反馈、评估和决策的重要环节.学习评价应强化其教育功能和激励作用,更多地肯定进步、鼓励成功、鼓舞信心;评价的结果应更多地用于帮助师生改进数学的教与学,引导师生正确把握目标、能动发展,鼓励学生努力学习、奋发上进.

学习评价活动有期中、期末测试和章节测验,还包括对每节课达成学习目标的情况分析和对学生日常学习表现的考察,这些都是形成性评价活动.初中毕业考试及学业评定,是学段的终结性评价.

形成性评价,其立足点是“形成、改进”,着眼点是“引导、促进”.形成性学习评价的实施,不仅要评价学生通过数学学习所取得的成果和达到的水平,更要重视学生在学习过程中的变化和发展,关注学生在学习活动中所表现出来的主体精神、进取态度、行为习惯、思维品质和学习潜力.由此,学习评价的方式和方法应多种多样,评价结果的报告和解释应重视定性与定量相结合、统一性与灵活性相结合,体现评价的全面性、动态性、综合性和激励性.

长期以来,学习评价活动偏重于书面考试和分数评定,注重于认知发展的水平,因此必须改进和完善学习评价.要端正学习评价的目的,建立起“主体多元、方法多样”的评价体系,加强过程性评价,实施发展性评价.

必须强调,形成性学习评价,应更多地关注学生在学习过程中的变化和发展,注重对学生达成课程目标的启发和引导.应重视对学生课堂学习情况的分析和日常学习表现的观察,加强评价者与被评价者之间的沟通和交流;应加强对测试命题的研究,关于数学基础知识和基本技能的考查,要把握基本要求,突出教学重点,注重理解实质,体现数学思想方法,发挥测试命题对用好数学课本、加强数学基础教学的积极导向作用.

二、本册课本内容编写说明

九年级第一学期数学课本(以下简称本册课本),含“相似三角形”“锐角的三角比”“二次函数”等三章内容,还有配合各章内容的练习部分.

1. 编写思路

本册课本基本内容的确定,其依据是《上海市中小学数学课程标准(试行本)》.课本编写的整体思路是:认真分析和汲取“一期课改”中数学改革的成果,在继承的基础上进行创新;关注数学知识内涵,力求深入浅出、平实有序;改善内容呈现方式,展现学习数学的过程.

(1) 重视继承和创新

“一期”数学课本中含有本册基本内容的各个章节，“一期课改”对这些章节内容所进行的精简和调整，已被实践证明是正确的和可行的.本册课本的编写汲取了已有的改革成果，在具体处理时，基本上保持原来的内容框架，并维持原来的难度要求，同样关注基本的数学思想方法.

与此同时，本册课本也对内容的呈现进行了一些改革和创新.例如在“相似三角形”中，更加突出知识之间的联系，更加强调规范表达，还将“实数与向量相乘”整合其中；在“锐角的三角比”中，通过与相似三角形应用相关的测量分析，展示锐角三角比的形成过程，更加突出理性思维，同时更新解直角三角形的应用举例，增强例题的现实感和时代性；在“二次函数”中，通过分层安排、逐步递进的处理，进一步体现注重理解概念、会画图像、认识图像特征及函数的一些直观性质等基本要求.

(2) 关注过程和方法

本册课本的编写，重视知识的形成和发展过程，重视数学与现实的联系；注意在较高观点的指导下展开内容，注意从数学文化教育的要求来处理内容.例如，在“相似三角形”中，通过提出问题、引导思考，引进有关概念和命题，以“实验—归纳—猜想—论证”为过程形成知识；通过加强运用、揭示联系，促进知识的巩固和发展；同时，重视图形运动、数学推广的思考方法，关注放缩运动中的不变量，还采用了基于出入相补原理的面积法来推导三角形一边的平行线性质定理；关于“实数与向量相乘”，是从整数的乘法引进的，引导学生利用数量运算结构来认识向量运算结构，帮助学生提升数学观念.又如，在“锐角的三角比”中，注意三角比概念与相似三角形的联系，关注直角三角形中的边角关系，重视定量分析以及对立与统一的思考方法；安排了“解直角三角形的应用”，利用有关知识和方法解决来自生活、生产的实际问题.在“二次函数”中，概念的引进有现实的背景，知识的应用有生活的气息；关于二次函数图像的讨论，是从最简单形式的二次函数出发，从具体事例着手，分步推进，逐步完善二次函数图像的画法，体现从特殊到一般以及分解与组合的思考方法；关于二次函数性质的讨论，着重于通过对图形特征的分析来认识函数的直观性质，体现图形运动和变换的思想、数与形结合的思想和从直观到严谨的认识过程.

课本内容的呈现，仍以“问题驱动”为主导方式，促进学生主动学习；同时注意“螺旋上升”的分层设计，形成内容递进层次.课本中保持有“问题”“思考”“操作”“想一想”“议一议”等栏目，通过提出问题、探究和解决问题，引导学生进行探究学习；保持有边款点拨、方框解说等版式，对学生进行学习指导.另外，在“二次函数”中，注意有关基本内容与拓展内容之间的发展性联系和层次性差别，适当地进行处理.

(3) 兼顾基础与发展

本册课本中的基本内容，注重基本概念、基本原理、基本联系以及基本方法和基本应用，重视为学生打好数学的基础.同时，通过有关活动栏目的组织和数学思想方法的导引，把学会学习和思考、提升数学思维品质和创造性活动能力的要求整合其中，为学生奠定进一步发展的基础.

在各章的末尾，配备有“阅读材料”或“探究活动”，重在丰富数学文化、扩大数学视野、加强数学实践活动和引导学生探究学习.

数学练习部分中的习题安排，重视基本训练，也有一些开放性问题、探究性问题、实践性问题等；注意训练要求分层，有统一性也有多样性.“试一试”栏目下的题目，一般有较高的难度，这样的题目不要求所有学生都去做，主要提供给有学习兴趣的学生进行研究和讨论，进一步培养学生的探究意识和钻研精神，满足不同学生的学习需要.

2. 内容提要

本册课本的内容，是对论证几何和代数函数的基础知识进一步充实；同时初步展现定量研究的几何，对“三角学”进行奠基.

第二十四章“相似三角形”，从认识相似形开始，再讨论比例线段和三角形一边的平行线，为学习相似三角形提供知识准备；随后展开相似三角形的讨论，重点研究相似三角形的判定、性质及其基本运用.在学习相似三角形的基础上，引进实数与向量相乘的运算，再总结向量的线性运算(包括向量的加减运算以及实数与向量相乘)，以形成初步的向量代数基础.

第二十五章“锐角的三角比”，先引进正切和余切，再讲正弦和余弦；在利用几何方法探求特殊锐角的三角比值的基础上，进一步介绍利用计算器求锐角的三角比值和由三角比值求角等；然后，讨论解直角三

角形及其应用.

第二十六章“二次函数”,主要是建立二次函数的概念和研究它的图像及直观性质.先通过简明的实例引进二次函数,明确有关概念;再从特殊到一般,对二次函数的图像进行研究;然后利用图像的直观性,观察、分析和归纳图像的基本特征,直观描述二次函数的一些基本性质.

3. 课时安排

各章教学的课时数建议如下:

第二十四章　相似三角形	24 课时
第二十五章　锐角三角比	11 课时
第二十六章　二次函数	11 课时

第二十四章　相似三角形

一、教学目标

1. 经历对形状相同图形从直观感知到数学抽象的过程，通过实物图形的放缩，了解相似形的意义.

2. 知道两条线段的比的意义，理解比例线段及其有关概念，掌握比例的性质；知道黄金分割的意义.

3. 掌握三角形一边的平行线的性质定理和判定定理，掌握平行线分线段成比例定理；知道三角形的重心及其性质.

4. 理解相似三角形的有关概念；经历相似三角形判定定理的推导过程，掌握相似三角形的判定定理；在探究三角形相似所需条件的活动中，体会类比思想.

5. 经历对相似三角形性质的探究过程，掌握相似三角形的性质定理；通过对相似三角形性质的分析，体会图形放缩运动中有关几何量的变与不变的辩证关系.

6. 理解实数与向量相乘的意义，掌握实数与向量相乘的表示方法和画图方法；会根据实数与向量相乘的意义判别两个非零向量平行；知道实数与向量相乘的运算律，知道向量的线性运算的含义，会运用有关运算的法则和运算律进行向量的线性运算或化简算式.

7. 知道平行向量定理，会用向量关系式表示两个平行向量；理解单位向量的意义；知道向量分解的含义，会用画图的方法求一个向量在两个不平行向量方向上的分向量.

8. 在形成相似三角形知识和建立向量线性运算的过程中，体会演绎推理思想、化归思想、分类讨论思想以及从特殊到一般的思维策略，体会知识的迁移和联系.

二、课时安排

本章教学共 24 课时，建议分配如下：

24.1	放缩与相似形	1 课时
24.2	比例线段	2 课时
24.3	三角形一边的平行线	4 课时
24.4	相似三角形的判定	5 课时
24.5	相似三角形的性质	4 课时
24.6	实数与向量相乘	3 课时
24.7	向量的线性运算	2 课时
本章小结		3 课时

三、设计说明

本章主要学习相似三角形的概念、判定和性质. 为了研究相似形，需要有比例线段及其性质、三角形一边的平行线的性质与判定以及平行线分线段成比例定理作铺垫. 有了图形的放缩运动和相似三角形的知识基础后，再引进实数与向量相乘的运算，并讨论向量的线性运算.

相似形的概念是通过对实物图形的放大与缩小的直观认识逐步形成的，先定性地描述，再揭示其本质特征. 由于图形的相似与比例线段密不可分，因此在形成相似形的概念之后，安排学习比例线段，进而讨论三角形一边的平行线的性质与判定以及平行线分线段成比例定理，为研究相似三角形提供了必要的知识准备.

相似三角形的内容，按照从相似三角形的概念到判定、再到性质的顺序逐步展开，形成系统. 由三角形一边的平行线的性质导出相似三角形预备定理，是探究相似三角形判定定理的前奏；由相似三角形的定义

得到“相似三角形的对应角相等，对应边成比例”，是研究相似三角形性质的开端. 通过对“问题”的思考、分析和解决，进一步演绎出相似三角形的判定和性质的定理，展现出论证几何的研究过程和逻辑推理的思想方法.

关于向量内容的展开，是基于对图形放缩运动的认识和对向量代数知识扩展的思考. 在八年级的“四边形”中，引进了向量的概念及其加减运算，现在进一步提出向量的“乘法”是极其自然的. 课本中通过类比“求几个相同加数的和的运算”，引出“正整数与向量相乘”的运算；然后推广到整数、有理数与向量相乘，再给出“实数与向量相乘”的定义. 这样的处理，体现了代数思考的过程，有利于学生进行知识的迁移. 课本中还指出，“实数与向量相乘”其实是向量的“放缩运动”，以此建立起两者的联系，有助于学生理解“实数与向量相乘”的几何意义. 知道了“实数与向量相乘”的运算以后，联想向量的加法和实数的乘法都有它们的运算律，理所当然就要讨论并提出它所具有的运算律；接着，把向量的加、减运算及实数与向量相乘的运算进行整理，引进向量的线性运算，从而完成了向量初步知识的构建. 在此基础上，提出了平行向量定理，为向量的运用打下基础.

本章内容的呈现，体现了“问题驱动”的基本方式，通常是从学生已有的知识背景出发提出问题，引导学生从数学的角度思考问题，通过探究活动和演绎推理，构建数学知识. 例如，由三角形中位线提出关于三角形一边的平行线的问题，通过直线平移，针对平行线与三角形的不同位置关系展开分类讨论，从而得到三角形一边平行线的性质及判定，并进一步推广到一般情况，得到平行线分线段成比例定理. 又如，课本通过类比全等三角形的判定，提出相似三角形的判定问题，运用运动的观点和相似三角形的预备定理，导出相似三角形的判定定理，进而把全等三角形统一到相似三角形中. 对于相似三角形的性质，也是先从相似三角形的概念及几何图形的内在特性提出有关问题，再进行探索和研究. 通过“问题驱动”，展现了数学发现与理论建立的过程，有利于促进学生主动学习、完善学习方式，引导学生学会提出问题、探究及解决问题.

本章安排了“黄金分割”和“出入相补原理”两篇阅读材料，这是数学文化教育的素材；还有“分割三角形”的探究活动，重在加强数学思维训练和引导学生探究学习.

四、教学建议

1. 切实把握教学要求，落实核心知识内容. 本章学习的重点，有相似三角形的概念、判定与性质定理，还有三角形一边的平行线的性质与判定定理，以及向量的线性运算. 比例线段和比例的性质，是学习和研究相似三角形的知识基础，本章涉及的比例线段变形都比较简单，教学时不需要单独针对比例的性质进行复杂的比例式变形训练，只要在学习过程中结合具体问题进行练习. 三角形一边的平行线的性质，既是学习相似三角形的知识基础，又是独立解决问题的依据，是本章教学的另一个重点. 教学中要注意培养学生的空间观念，能从几何图形或实际问题中，分解出基本图形，再根据基本图形的性质解决问题. 但要注意控制问题的难度，避免过分偏重技巧. 相似三角形是本章的核心内容，要重视学生对相似三角形的概念、性质与判定定理的理解及运用，落实基本要求；而在几何证明和计算中，一般运用相似三角形的判定与性质不超过两次.

2. 注意让学生经历提出问题、解决问题的过程. 九年级的学生已具备了一定的数学知识、技能与方法，积累了一定的数学学习经历与经验，初步会从数学的角度思考问题. 因此，本章内容的展开，注意引导学生用数学的眼光观察事物，提出问题、探索问题、解决问题. 如“三角形一边的平行线”一节，课本通过对三角形中位线定理的条件与结论的关系进行变更和推广，形成了问题 1，进而通过平移直线改变图形的位置，形成了问题 2 与问题 3，然后围绕三个问题的探索，开展学习活动. 在本章的教学过程中，要注意通过导言让学生体会数学问题的由来，领略数学地思考问题的过程和方法，要关注教学活动的数学内涵，避免活动流于形式、缺乏思维而浮于表面. 教师要注意把握教材设计的意图，创造性地使用课本、开发课程，引导学生从数学本质属性的角度进行思考、提出质疑，形成数学问题，以满足不同层次学生的学习需求. 例如为导入三角形一边的平行线性质定理的推论，课本中提出思考：如图 24 - 16，如果点 D、E 分别在$\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上，$DE \parallel BC$，那么$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$成立吗？ 这个问题产生的起点其实是：如图 24 - 10 中，DE

是△ABC 的中位线，这时就有 $DE /\!/ BC$，$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{1}{2}$；结合三角形一边的平行线的性质定理，再进一步提出：如果点 D、E 分别在△ABC 的边 AB、AC 上，$DE /\!/ BC$（DE 不一定是中位线），那么$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$仍然成立吗(如图 24－16)？

3. 从实际出发控制向量内容的深度和教学的难度. 本章有关向量的内容，主要涉及实数与向量相乘的意义、运算律以及实施运算的操作方法；还有对向量线性运算的初步整理，对平行向量定理、向量的合成与分解的简要介绍. 内容的编写力求深入浅出、简明直观，不求理论上的完备，不展开用向量方法处理几何问题的讨论.

关于这些内容的教学，要把握课本中所显示的基本要求，注重于对向量运算的直观解释和操作实践，严格控制难度. 例如，对实数与向量相乘的运算律，不要求进行论证，不要求作出几何解释，只要求学生通过操作进行确认、通过练习逐步达到会用. 又如，对向量的合成与分解，不要求进行一般性的讨论，只要求学生结合图形获得具体的认识，在今后学习物理时会进行操作性的运用；对平行向量定理的内容，只要求学生了解其表示形式，不必深究其理论价值. 课本介绍了利用数乘向量证明三角形的中位线定理，这里仅仅是一种学习欣赏，并不要求学生掌握，教学中不要再去寻找利用向量方法解决的其他几何问题.

在高中数学中，将进一步展开向量的基础知识，包括引进向量的内积，完善向量代数的基础；引进向量的基本定理和向量及其运算的坐标表示，初步完成空间结构的代数化；探讨用向量方法解决几何问题，展开向量在几何研究中的运用等. 所以，在初中进行的向量知识教学，要强调"直观性""奠基性"，注重"初步认识"和"具体操作"的要求，在理论探究和几何运用方面一般不进行展开.

4. 关注数学思想方法的领会与运用. 在以前的数学学习过程中，学生对基本数学思想方法有了初步的感受. 本章内容蕴涵了运动变化思想、分类讨论思想、数形结合思想、化归思想、方程思想、类比与归纳的方法等，教学中要让学生在获取知识的过程中，逐步领会数学知识中所隐含的数学思想方法，体会数学思想方法的运用.

五、评价建议

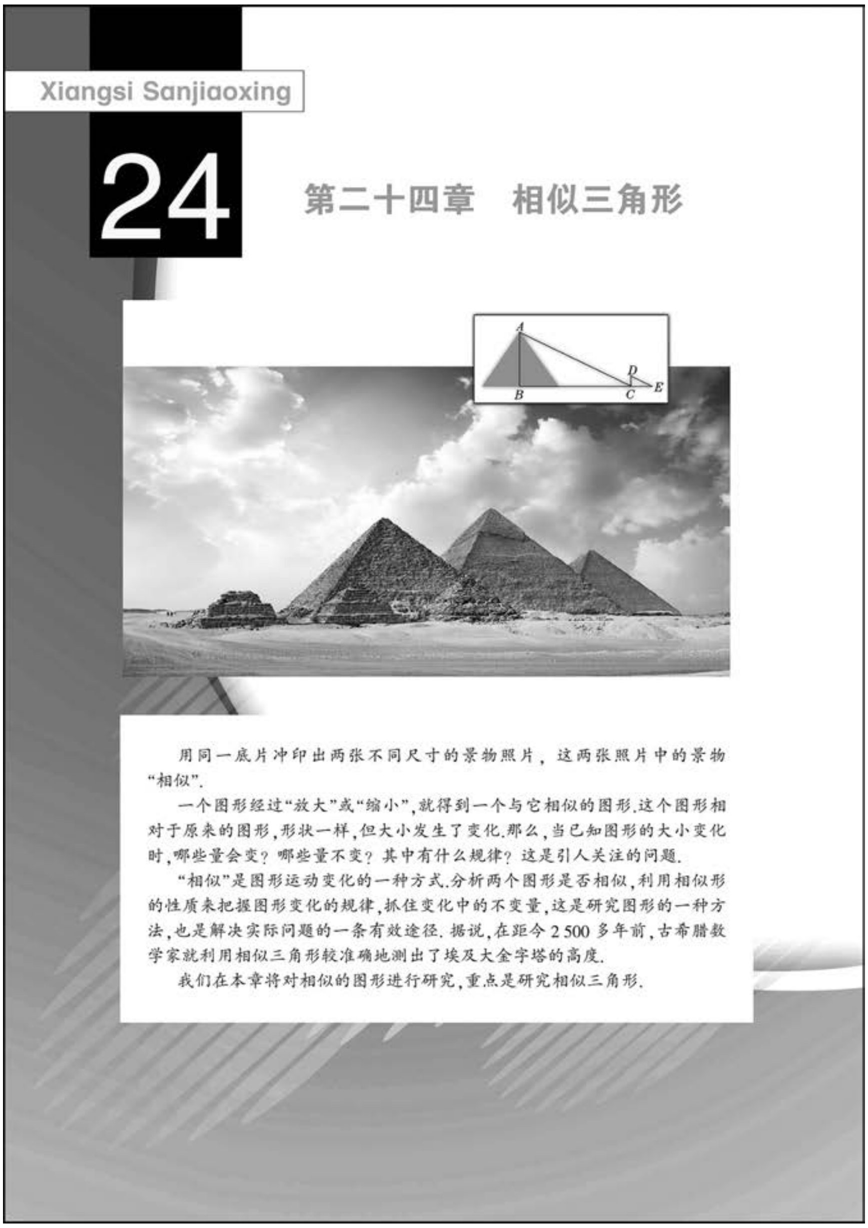
1. 关注数学基础知识的理解与运用. 相似三角形是今后学习锐角的三角比、三角函数和圆的知识基础，例如有关三角比的概念、三角函数的定义、圆的有些性质的证明，都与相似三角形有密切联系. 另外，在物理学、工程设计、测量、绘图等许多方面，都要用到相似三角形的知识. 学好三角形相似既是进一步学习的需要，也是工作实践的需要. 所以在学习评价中，要关注学生对相似三角形的概念、判定与性质定理的理解和应用，以几种基本相似图形的运用为载体进行评价. 关于三角形一边的平行线定理，主要是正确理解与简单应用. 向量的线性运算是向量代数和空间结构代数化的基础内容，是向量在数学和物理研究中发挥工具作用的准备知识. 在学习评价中，要重视学生对向量加、减以及实数与向量相乘运算的意义的理解，着重检测学生是否知道这些运算的法则和运算律，是否知道向量的线性组合表示和向量的分解式，能否按照运算或分解的要求进行画图；要重视知识之间的联系，对于两个非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，检测学生能否根据实数与向量相乘的意义和平行向量定理，进行$\vec{b}=k\vec{a}$（k 是实数）与 $\vec{b} /\!/ \vec{a}$ 之间的相互转化.

2. 关注数学思想方法的体验与运用. 要关注学生对数学知识中所隐含思想方法的领会. 本章从一个图形经过"放大"或"缩小"可以得到一个与它相似的图形的学习导言开始，在比例线段和相似三角形的学习中，始终贯穿着图形运动变化的思想，要关注图形在不同的运动过程中，哪些量将发生变化，哪些量不发生变化，逐步提高运用运动变化的观点来思考、探索问题的能力. 同时，课本从三角形中位线联想到三角形一边的平行线、再到平行线分线段成比例，从全等三角形的判定联想到相似三角形的判定，从数的运算联想到向量的线性运算等，都蕴涵着类比思想和从特殊到一般的探究策略. 要关注学生在学习活动中，对类比、归纳、转化思想的体验与领悟. 另外，在本章一些定理的运用中，常常通过运算进行推理探究或推理后进行代数运算，在学习评价中要关注学生对数形结合思想、方程思想和分类讨论思想的领悟与运用.

3. 关注学生在数学活动中的参与度以及所获得的体验和感悟. 本章许多问题的提出及探究都是通过对已有的知识经验进行反思、质疑而形成的. 要关注学生在数学活动中的参与度以及运用数学知识解决问题的经历、经验和策略的积累. 在学习过程中，要重视通过数学思维活动提高学生学习数学的兴趣；关注学生参与问题形成、问题探究和问题解决等数学活动中的体验与感悟；关注学生提出问题、探究问题的能力及思维品质的提高. 通过评价激发学生的学习兴趣，引导学生大胆提出问题、积极思考问题，逐步养成善于提问、主动探究的学习习惯.

这个章头图是利用相似三角形的原理测量金字塔高度的示意图.

章头语中有两层含义，一是指出现实生活中广泛存在着“相似”的图形；二是从图形的“放大”“缩小”运动提出几个具有实质意义的问题，引起学习思考.



用同一底片冲印出两张不同尺寸的景物照片，这两张照片中的景物“相似”.

一个图形经过“放大”或“缩小”，就得到一个与它相似的图形.这个图形相对于原来的图形，形状一样，但大小发生了变化.那么，当已知图形的大小变化时，哪些量会变？哪些量不变？其中有什么规律？这是引人关注的问题.

“相似”是图形运动变化的一种方式.分析两个图形是否相似，利用相似形的性质来把握图形变化的规律，抓住变化中的不变量，这是研究图形的一种方法，也是解决实际问题的一条有效途径. 据说，在距今 2 500 多年前，古希腊数学家就利用相似三角形较准确地测出了埃及大金字塔的高度.

我们在本章将对相似的图形进行研究，重点是研究相似三角形.

Xiangsixing

第一节　相似形

24.1　放缩与相似形

观察下面两组图片：图 24－1 是三颗五角星，这三颗五角星中一颗大两颗小，但形状相同；图 24－2 中是两个大小不同的圆，它们的大小不同，但形状相同.

图 24－1　　　　图 24－2

日常生活中，可以看到许多像这样形状相同、大小不一定相同的图形.

也可以用放缩运动来说明图 24－1 中任意两个五角星之间的关系.

对于图 24－3 中的三个四边形，通常可以说，缩小四边形 $ABCD$，得到四边形 $A_1B_1C_1D_1$；放大四边形 $ABCD$，得到四边形 $A_2B_2C_2D_2$.

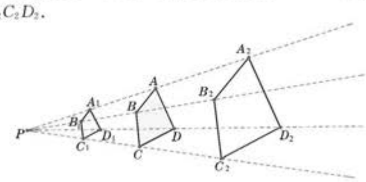


图 24－3

图形的放大或缩小，称为图形的放缩运动. 将一个图形放大或缩小后，就得到与它形状相同的图形. 图 24－3 中，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 和四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 都与四边形 $ABCD$ 形状相同. 我们把形状相同的两个图形说成是**相似的图形**，或者就说是**相似形**.

相似的图形，它们的大小不一定相同. 对于大小不同的两个相似形，可以看作大的图形由小的图形放大而得到，或小的图形由大的图形缩小而得到. 对于大小相同的两个相似形，它们可以重合，这时它们是全等形.

2　第二十四章　相似三角形

图 24－1 与图 24－2 是来自生活中的两组图片，主要是让学生通过观察图片，直观地认识形状相同的图形. 还可让学生自己举例，加深认识.

对于图 24－1，所观察的图形是“五角星”，这三颗五角星的形状相同，但是大小不一定相同.

对于图 24－2 中两个圆的形状相同，学生能直观认同，不需多作解释；学生可由此丰富对图形形状的认识.

图 24－3 中三个四边形之间的放缩关系，是借助于图形的直观进行说明的. 由此引进图形的放缩运动，为直观描述相似形的概念提供认识基础.

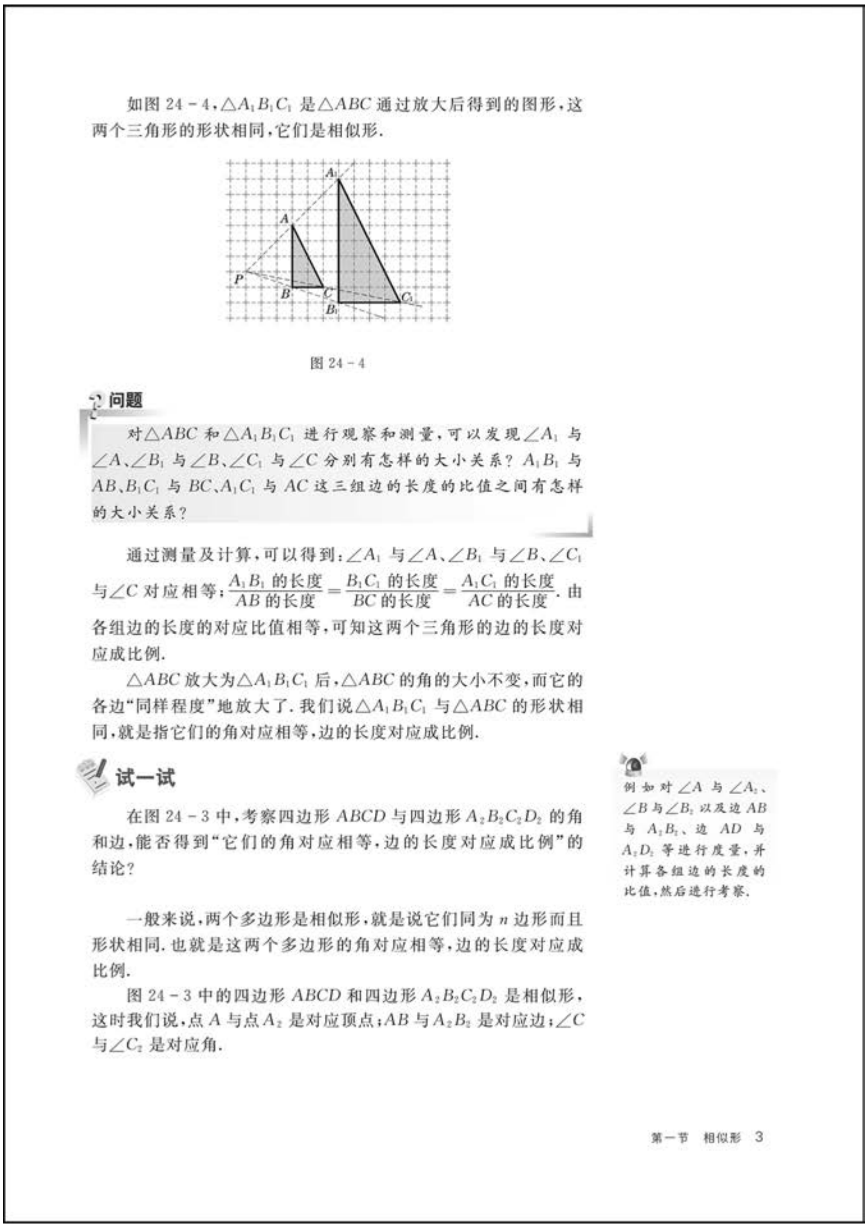
【教学目标】

（1）能用图形放缩运动的观点认识相似形的意义，知道相似形的概念，理解相似多边形的对应角、对应边的含义.

（2）通过对进行放缩运动的图形进行度量分析，认识放缩运动中的不变量，知道相似多边形的特征以及相似形与全等形的关系.

【注意事项】

学生通过全等形的学习，对“形状相同”已经有了一定的认识. 在此基础上，课本利用实物图形，让学生感知现实生活中有很多形状相同、但大小不一定相同的图形；然后通过图形的放缩运动，进一步认识形状相同的图形，形成相似形的概念. 实际上，学生现在对“形状相同的图形”的认识，主要是基于生活经验和直观感知；引进“图形的放缩运动”，有助于建立形状相同的图形之间的联系. 教学中，可利用多媒体技术和图片资料，为学生认识“形状相同的图形”和“图形的放缩运动”，提供丰富多样的直观材料.



如图 24－4，$\triangle A_1B_1C_1$ 是 $\triangle ABC$ 通过放大后得到的图形，这两个三角形的形状相同，它们是相似形.

图 24－4

问题

对 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 进行观察和测量，可以发现 $\angle A_1$ 与 $\angle A$、$\angle B_1$ 与 $\angle B$、$\angle C_1$ 与 $\angle C$ 分别有怎样的大小关系？A_1B_1 与 AB、B_1C_1 与 BC、A_1C_1 与 AC 这三组边的长度的比值之间有怎样的大小关系？

通过测量及计算，可以得到：$\angle A_1$ 与 $\angle A$、$\angle B_1$ 与 $\angle B$、$\angle C_1$ 与 $\angle C$ 对应相等；$\dfrac{A_1B_1\text{ 的长度}}{AB\text{ 的长度}}=\dfrac{B_1C_1\text{ 的长度}}{BC\text{ 的长度}}=\dfrac{A_1C_1\text{ 的长度}}{AC\text{ 的长度}}$. 由各组边的长度的对应比值相等，可知这两个三角形的边的长度对应成比例.

$\triangle ABC$ 放大为 $\triangle A_1B_1C_1$ 后，$\triangle ABC$ 的角的大小不变，而它的各边"同样程度"地放大了. 我们说 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 的形状相同，就是指它们的角对应相等，边的长度对应成比例.

试一试

在图 24－3 中，考察四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 的角和边，能否得到"它们的角对应相等，边的长度对应成比例"的结论？

例如对 $\angle A$ 与 $\angle A_2$、$\angle B$ 与 $\angle B_2$ 以及边 AB 与 A_2B_2、边 AD 与 A_2D_2 等进行度量，并计算各组边的长度的比值，然后进行考察.

一般来说，两个多边形是相似形，就是说它们同为 n 边形而且形状相同. 也就是这两个多边形的角对应相等，边的长度对应成比例.

图 24－3 中的四边形 $ABCD$ 和四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 是相似形，这时我们说，点 A 与点 A_2 是对应顶点；AB 与 A_2B_2 是对应边；$\angle C$ 与 $\angle C_2$ 是对应角.

第一节　相似形　3

问题

引导学生通过观察和测量放缩前后的两个三角形的边与角，感受图形放缩运动中的不变量. 由此知道三角形在放缩运动过程中，各个内角的大小不变，而各边的长度"同样程度"地放大(或缩小).

由于这时还没有给出比例线段的概念，因此在这里将边长的变化表述为"边的长度对应成比例".

试一试

在考察三角形的基础上，尝试考察四边形，以便将结论进一步推广到一般的多边形. 引导学生从中体会相似多边形的对应角、对应边的意义，归纳相似多边形的本质特性.

【注意事项】

现在用数学语言来描述相似形的本质特征是困难的. 课本以三角形、四边形这些简单的图形为研究对象，以观察和测量为研究方法，归纳、发现它们的角的大小、边的长度分别具有的对应关系，进而得到两个多边形相似其实是指它们的内角对应相等、边的长度对应成比例，揭示出相似多边形的本质特性和放缩运动中的不变量. 要让学生经历对相似多边形进行实验研究的过程，但要回避对非多边形的相似形的研究，以免将问题复杂化.

想一想

在这两个四边形中，还有哪些对应顶点、对应边、对应角？

根据多边形相似的含义，得到：

如果两个多边形是相似形，那么这两个多边形的对应角相等，对应边的长度成比例.

当两个相似的多边形是全等形时，它们的对应边的长度的比值都是1.

例题 如图24－5，四边形$ABCD$与四边形$A'B'C'D'$是相似的图形，点A与点A'、点B与点B'、点C与点C'、点D与点D'分别是对应顶点，已知$BC=3$，$CD=2.4$，$A'B'=2.2$，$B'C'=2$，$\angle B=70°$，$\angle C=110°$，$\angle D=90°$，求边AB、$C'D'$的长和$\angle A'$的度数.

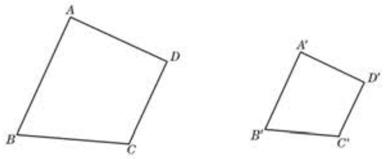


图24－5

解 ∵ 四边形$ABCD$与四边形$A'B'C'D'$是相似的图形，点A与点A'、点B与点B'、点C与点C'、点D与点D'分别是对应顶点，

∴ $\angle A=\angle A'$，$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}$（两个相似多边形的对应角相等，对应边的长度成比例）.

由$BC=3$，$CD=2.4$，$A'B'=2.2$，$B'C'=2$，

得 $$\frac{2.2}{AB}=\frac{2}{3}=\frac{C'D'}{2.4}.$$

解得$AB=3.3$，$C'D'=1.6$.

在四边形$ABCD$中，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$.

由$\angle B=70°$，$\angle C=110°$，$\angle D=90°$，

得 $\angle A=360°-(70°+110°+90°)=90°$.

于是 $\angle A'=90°$.

4 第二十四章 相似三角形

想一想

让学生进一步体会相似多边形的对应角、对应边的含义.

要让学生知道，两个多边形全等是两个多边形相似的特殊情况，注意它们之间的联系.

例题

本题是关于相似多边形的性质及四边形内角和性质运用的几何计算题，帮助学生进一步认识相似多边形的特征和性质.

要指导学生根据对应顶点来确定对应边和对应角.

【注意事项】

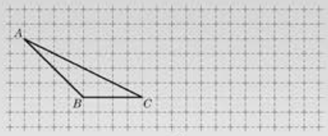
本节是实验几何内容，主要采用观察、操作、分析、类比、归纳等实验方法对图形进行研究.

练习 24.1

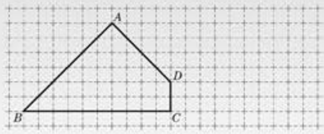
1. 略.
2. 略.
3. $B'C'=12$ 厘米，
   $C'D'=12$ 厘米，
   $D'A'=15$ 厘米.

练习 24.1

1. 举出日常生活中图形放大或缩小的实例.
2. 在下列方格图中，分别画出△ABC 和四边形 $ABCD$ 的一个相似图形.



(1)



(2)

3. 已知四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 是相似的图形，并且点 A 与点 A'、点 B 与点 B'、点 C 与点 C'、点 D 与点 D' 分别是对应顶点，其中 AB、BC、CD、DA 的长分别为 12 厘米、16 厘米、16 厘米、20 厘米，$A'B'$ 的长为 9 厘米，求 $B'C'$、$C'D'$、$D'A'$ 的长.

Bili Xianduan

第二节　比例线段

24.2　比例线段

图形的相似与线段长度的比及比例有密切关联，为了研究相似形，需要先研究比例线段.

一般来说，两个数或两个同类的量 a 与 b 相除，叫做 a 与 b 的比，记作 $a:b\left(\text{或表示为}\dfrac{a}{b}\right)$，其中 $b\neq0$. a 除以 b 所得的商叫做比值. 如果 $a:b$ 的比值等于 k，那么 $a=kb$.

如果 $a:b=c:d\left(\text{或}\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\right)$，那么就说 a、b、c、d 成比例.

两条线段的长度的比叫做两条线段的比.

求两条线段的比时，对这两条线段一定要用同一长度单位来度量. 因为线段的长度是正量，所以两条线段的比值总是正数.

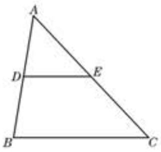


图 24－6

在图 24－6 中，DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线. 线段 DE 与 BC 的比可记作 $\dfrac{DE}{BC}$（或 $DE:BC$），于是得到 $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{1}{2}$.

表述比例线段时，要注意顺序.

对于四条线段 a、b、c、d，如果 $a:b=c:d\left(\text{或表示为}\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\right)$，那么 a、b、c、d 叫做**成比例线段**，简称**比例线段**（proportional segments）. 这时，线段 a、d 是比例外项，线段 b、c 是比例内项.

例如图 24－6 中，根据 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线的条件，可得 $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}$，则线段 DE、BC、AD、AB 是比例线段.

我们知道，比例线段有以下基本性质：

两个外项的积等于两个内项的积. 即

$$\text{如果}\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\text{，那么 } ad=bc.$$

因为线段的长度是正量，所以 a、b、c、d 都不为 0.

还可以得到：

$$\text{如果}\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\text{，那么}\frac{b}{a}=\frac{d}{c},\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d},\ \frac{c}{a}=\frac{d}{b}.$$

思考

比例线段除了具有上述性质以外，还有其他性质吗？

【本课重点】

引进两条线段的比和比例线段；导出比例线段的性质并进行初步的运用.

学生在六年级已经学过比、比例及比例的基本性质. 课本通过回顾比和比例的概念，给出了两条线段的比和比例线段的概念.

比例线段是有特定含义的一种比例，学生在以前学过的有关比例的性质，也是比例线段的性质. 可让学生列出比例线段的基本性质.

思考

引导学生进一步探究比例线段的性质.

【教学目标】

（1）知道两条线段的比的意义，理解比例线段及其有关概念；知道比例线段的性质，能运用比例线段的性质对比例式进行简单的变形；了解黄金分割的意义.

（2）会运用“同高（或等高）的两个三角形的面积的比等于对应底边的比”进行三角形的面积比与线段比的转化；在比例线段性质的证明与运用过程中，体会方程思想的作用.

【注意事项】

本章所涉及的比例线段的变形都比较简单，重点在于比例线段性质的基本运用. 基本要求是能结合具体图形运用比例线段的性质，对比例线段进行简单的变形.

比例的合比性质也可以这样证明：

因为 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，

所以 $\dfrac{a}{b}+1=\dfrac{c}{d}+1$，

即 $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$.

上述证法中，在比例式两边同时“$+1$”需用分析法引出.

课本中运用设元的方法证明比例的合比性质和等比性质，目的是让学生体会比例的意义和字母表示数、等量代换的思想.

例题 1

本题是合比性质的具体运用，也是为学习三角形一边的平行线性质作铺垫.

对证明思路的分析，要把握“$AB=AD+DB$”“$AC=AE+EC$”这两个关系式.

我们先来讨论：如果线段 a、b、c、d 满足 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，那么 $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$ 是否成立？

由已知 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，不妨设比值为 k，即 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$，可得 $a=kb$，$c=kd$. 所以

$$\frac{a+b}{b}=\frac{kb+b}{b}=k+1,\ \frac{c+d}{d}=\frac{kd+d}{d}=k+1.$$

因此，$\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$ 成立.

于是得到：

如果 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，那么 $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$. ①

类似地，可得：

如果 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，那么 $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$. ②

由 $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{kb-b}{b}=k-1$，$\dfrac{c-d}{d}=\dfrac{kd-d}{d}=k-1$，可知②成立.

我们把结论①和②叫做比例的合比性质.

再运用类似的方法，由已知 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$，可得 $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{kb+kd}{b+d}=k$，因此 $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$. 也就是说：

如果 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$，那么 $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$. ③

对于其他的同类量，也有与线段一样的比例性质. 但在实数范围内，要注意式中的分母不能为零. 如 $b+d\neq0$，$b_1+b_2+b_3\neq0$ 等.

结论③叫做比例的等比性质.

等比性质可以推广到任意有限多个相等的比的情形. 例如：

如果 $$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=k,$$

那么 $$\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=k.$$

例题1 已知：如图 24－7 中，$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$.

求证：(1) $\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AC}{EC}$；(2) $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$.

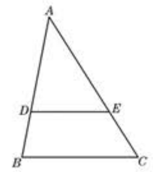


图 24－7

证明 (1) ∵ $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$，

∴ $\dfrac{AD+DB}{DB}=\dfrac{AE+EC}{EC}$（合比性质），

即 $\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AC}{EC}$.

第二节 比例线段 7

【注意事项】

(1) 关于比例的合比性质和等比性质，不需要单独进行复杂的比例式变形训练，只要结合具体图形进行比例式的简单变形.

(2) 要注意让学生体会在合比、等比性质证明过程中展现的数学思想方法.

(2) ∵ $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$,

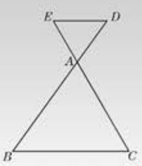
∴ $\dfrac{DB}{AD}=\dfrac{EC}{AE}$.

∴ $\dfrac{DB+AD}{AD}=\dfrac{EC+AE}{AE}$(合比性质),

即 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$.

练习 24.2(1)

1. 已知点 B 在线段 AC 上,$BC=2AB$.求下列各组线段的比值:
   (1) $AB:BC$; (2) $AC:AB$; (3) $BC:AC$.
2. 已知:如图,线段 BD 与 CE 相交于点 A,$\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AE}{CE}$.
   求证:(1) $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$; (2) $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AD}{AE}$.
3. 已知 $x:y=5:2$,求 $(x+y):y$ 的值.
4. 已知 $\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{4}=\dfrac{c}{5}$,$a+b+c=36$,求 a、b、c 的值.



(第 2 题)

例题2 已知:如图 24-8,四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 交于点 O,$S_{\triangle AOD}=S_{\triangle BOC}$.

求证:$\dfrac{DO}{OB}=\dfrac{CO}{OA}$.

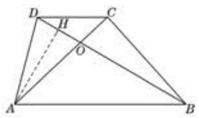


图 24-8

分析 从图 24-8 中可以发现,$\triangle AOD$ 与 $\triangle AOB$ 是分别以 DO、OB 为底边的同高的三角形;$\triangle BOC$ 与 $\triangle AOB$ 是分别以 CO、OA 为底边的同高的三角形.由于同高(或等高)的两个三角形的面积之比等于对应底边的比,因此可以把三角形面积的比转化为对应底边的比.

证明 过点 A 作 $AH\perp BD$,垂足为点 H.

∵ $S_{\triangle AOD}=\dfrac{1}{2}DO\cdot AH$, $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}OB\cdot AH$,

∴ $\dfrac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle AOB}}=\dfrac{\frac{1}{2}DO\cdot AH}{\frac{1}{2}OB\cdot AH}=\dfrac{DO}{OB}$.

同理可得 $\dfrac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOB}}=\dfrac{CO}{OA}$.

8 第二十四章 相似三角形

练习 24.2(1)

1. (1) $\dfrac{1}{2}$;(2) 3;(3) $\dfrac{2}{3}$.
2. 略.
3. $\dfrac{7}{2}$.
4. $a=9$,$b=12$,$c=15$.

【本课重点】

让学生通过例题学习,体验在一定条件下三角形的面积比与线段比相互转化的过程;了解黄金分割的意义.

例题 2

本题主要是让学生理解"同高(或等高)的两个三角形的面积的比等于对应底边的比"的性质,建立面积比与线段比之间的联系,体验两者相互转化的过程,也是为证明三角形一边的平行线的性质与判定定理作铺垫.

【注意事项】

同高(或等高)的两个三角形的面积比,可以转化为相关的线段比,在后面的有关证明中还要用到.注意,这种转化有别于相似三角形的面积比问题;利用面积关系解决问题是我国古代数学的成就之一,可参考本章阅读材料"出入相补原理".

想一想

引导学生对例题 2 进行变式训练，获得“边款”中归纳的结论，为证明三角形一边的平行线性质与判定定理作准备.

例题 3

本题主要是为了引进黄金分割. 在例题解答过程中运用了字母表示数及方程思想.

让学生知道黄金分割的有关概念，并注意一条线段的黄金分割点有两个.

$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$称为“黄金分割数”或简称“黄金数”；它的倒数为$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，称为“黄金比”. 注意“黄金数”与“黄金比”不能混淆.

$\because\ S_{\triangle AOD}=S_{\triangle BOC}$，

$\therefore\ \dfrac{DO}{OB}=\dfrac{CO}{OA}$.

由 $DC \parallel AB$，可知$\triangle DAB$与$\triangle CAB$同底等高，可推出原来的结论正确. 从例题 2 可知，平行线、三角形等积、比例线段这三者之间有内在联系.

想一想

如果将本题已知条件中的“$S_{\triangle AOD}=S_{\triangle BOC}$”换成“$DC \parallel AB$”，其他条件不变，能证明原来的结论正确吗？

例题3 如图 24－9，已知线段 AB 的长度是 l，点 P 是线段 AB 上的一点，$\dfrac{PB}{AP}=\dfrac{AP}{AB}$，求线段 AP 的长.

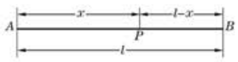


图 24－9

解 设线段 AP 的长为 x，那么线段 PB 的长为 $l-x$.

由$\dfrac{PB}{AP}=\dfrac{AP}{AB}$，得到关于 x 的方程

$$\frac{l-x}{x}=\frac{x}{l},$$

即

$$x^2+lx-l^2=0.$$

本例运用了方程思想，通过设未知数、列方程和解方程来求线段长.

解得 $x=\dfrac{-l\pm\sqrt{5l^2}}{2}=\dfrac{-l\pm\sqrt{5}l}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}l$.

因为 $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}l>0$， $x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}l<0$（舍去），

所以，线段 AP 的长是$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}l$.

由 $AB=l$，$AP=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}l$， 得$\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$.

在比例式$\dfrac{PB}{AP}=\dfrac{AP}{AB}$中，两个内项都是线段 AP，这时线段 AP 称为线段 AB 与 PB 的比例中项.

如果比例的两个内项（或两个外项）相同，那么这个相同的项叫做比例中项. 如 $a:b=b:c$（或 $b:a=c:b$）时，b 叫做 a 和 c 的比例中项. 这时，$b^2=ac$.

如果点 P 把线段 AB 分割成 AP 和 PB（$AP>PB$）两段（如图 24－9），其中 AP 是 AB 和 PB 的比例中项，那么称这种分割为**黄金分割**（golden section），点 P 称为线段 AB 的**黄金分割点**.

一般来说，一条线段的黄金分割点有两个.

AP 与 AB 的比值$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$称为**黄金分割数**（简称**黄金数**）. 黄金分割数是一个无理数，在应用时常取它的近似值 0.618.

【注意事项】

黄金分割是进行数学文化教育的良好素材. 本节结合比例线段的研究，引进了黄金分割，指出它与勾股定理并称为几何学中的“双宝”. 可指导学生看本章“阅读材料一”或查阅其他有关资料，更多地了解黄金分割和欣赏它的美.

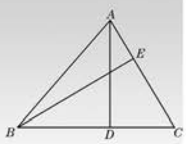
黄金分割和勾股定理，被誉为几何学中的"双宝".

古今中外，人们把黄金分割誉为"天赋的比例法则". 符合这种分割的物体或几何图形，使人感到和谐悦目，被认为是最优美的. 黄金分割被广泛地应用于建筑设计、美术、音乐、艺术及几何作图等方面. 例如古希腊的帕特农神殿(见下图)，是黄金分割应用的杰作，成为人类建筑史中的经典建筑.

练习 24.2(2)

1. 已知线段 $a=4$ 厘米，$c=9$ 厘米，求线段 a 和 c 的比例中项 b.
2. 已知：如图，AD、BE 是 $\triangle ABC$ 的两条高.

   求证：$\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{BE}{AD}$.
3. 已知线段 MN 的长为 2 厘米，点 P 是线段 MN 的黄金分割点，则较长线段 MP 的长是________厘米，较短线段 PN 的长是________厘米.



(第 2 题)

24.3 三角形一边的平行线

三角形的中位线是联结两边中点的线段，中位线所在的直线与第三边所在的直线平行. 如图 24-10，DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，这时 $\dfrac{AD}{DB}=1$，$\dfrac{AE}{EC}=1$，可知 $DE\parallel BC$.

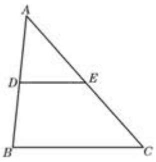


图 24-10

问题 1

在图 24-10 中，如果 $\dfrac{AD}{DB}=1$，$DE\parallel BC$，那么 $\dfrac{AE}{EC}$ 是否等于 1?

在上一节例题 2 中，我们为证明四条线段成比例，利用了"同高(或等高)的两个三角形的面积之比与对应底边的比相等"的性质. 这个性质指出了线段比与面积比之间的联系，于是我们可考虑利用两个三角形面积的比来尝试解决问题.

10 第二十四章 相似三角形

练习 24.2(2)

1. 6 厘米.
2. 略.
3. $\sqrt{5}-1$，$3-\sqrt{5}$.

【本课重点】

引进三角形一边的平行线性质定理，让学生经历这个定理的导出和证明过程，并初步掌握它的运用.

问题 1

这个问题是以中位线定理的逆命题为背景提出来的，引起学生对三角形一边的平行线性质的思考.

【教学目标】

(1) 掌握三角形一边的平行线的性质定理和判定定理以及平行线分线段成比例定理，能运用这些定理进行几何计算与证明；知道三角形的重心及其性质.

(2) 经历由三角形中位线提出三角形一边的平行线问题和针对图形运动的不同位置分别进行探究的过程，体验从特殊到一般的思考策略和类比、归纳的方法的运用，领略运动观点、化归思想和分类讨论思想.

【注意事项】

要展现通过分析三角形中位线的概念与性质，对三角形一边的平行线性质进行探究和推导的过程. 这种在学生已有知识的背景下，通过"反思和质疑引出问题、组织探究活动"的编写方式，在本章多次运用，目的是引导学生进行探究性学习，构建数学知识，同时获得过程体验.

推导问题 1 的结论，是本课的一个难点. 课本中利用学生在上一节证明例题 2 获得的经验，逐步导出结论. 这一方法可称为“面积法”，为讨论问题 2 打下了基础.

“边款”中指出，可用“同一法”推导问题 1 的结论，过程也比较简明. 但在解决问题 2 时，需另考虑方法；而且在本册课本中，对“同一法”不作要求，因此不宜以“同一法”为基本方法.

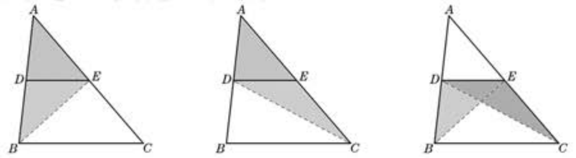
问题 2

问题 2 是问题 1 的推广. 教学中，要用图形运动的观点来提出问题，展现思考的过程，让学生体会从特殊到一般的策略. 按照这样的思路，自然会进一步提出问题 3.

推导问题 2 的结论，其思路和方法与问题 1 一致.

“面积法”与我国古代数学有关，可借此进行数学文化教育.

要把两条线段的比转化为两个三角形的面积比，首先要找到或构造分别以这两条线段为边的两个三角形.



(1)　　(2)　　(3)

图 24－11

如图 24－11(1)，联结 EB，得$\triangle EDB$，它与$\triangle EAD$同高，可知

$$\frac{S_{\triangle EAD}}{S_{\triangle EDB}}=\frac{AD}{DB}=1.$$

同样，如图 24－11(2)，联结 DC，可得

$$\frac{S_{\triangle EAD}}{S_{\triangle EDC}}=\frac{AE}{EC}.$$

比较上面两式可知，如果 $S_{\triangle EDB}=S_{\triangle EDC}$，那么就能得到 $\frac{AE}{EC}=1$. 如图 24－11(3)，因为 BC 平行于 DE，可知$\triangle EDB$ 与$\triangle EDC$ 同底等高，所以$\triangle EDB$ 的面积与$\triangle EDC$ 的面积相等. 于是，得

$$\frac{AE}{EC}=\frac{S_{\triangle EDA}}{S_{\triangle EDC}}=\frac{S_{\triangle EAD}}{S_{\triangle EDB}}=\frac{AD}{DB}=1.$$

对问题 1 结论的推导，也可采用下述方法：取边 AC 的中点 E'，联结 DE'，可知 $DE'\parallel BC$，推出 DE' 与 DE 重合，得 E' 与 E 重合. 因此 $\frac{AE}{EC}=1$.

问题2

如图 24－12，如果将直线 l 保持与 BC 平行而进行移动，l 与边 AB、AC 分别相交于点 D、E，那么$\frac{AE}{EC}$与$\frac{AD}{DB}$相等吗？

我们来探讨问题 2 的结论.

已知$\triangle ABC$，直线 l 与边 AB、AC 分别相交于点 D、E，且 $l\parallel BC$，试证明$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

证明：如图 24－12，分别联结 EB、DC.

设点 E 到 AB 的距离为 h，则

$$S_{\triangle EAD}=\frac{1}{2}AD\cdot h,\quad S_{\triangle EDB}=\frac{1}{2}DB\cdot h,$$

得

$$\frac{S_{\triangle EAD}}{S_{\triangle EDB}}=\frac{AD}{DB}.$$

同理可得

$$\frac{S_{\triangle EAD}}{S_{\triangle EDC}}=\frac{AE}{EC}.$$

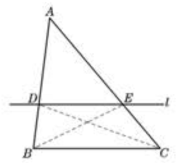


图 24－12

证明过程中运用了面积割补的思想方法，这一思想方法源于我国古代数学中的“出入相补原理”.

第二节　比例线段　11

【注意事项】

为导出三角形一边的平行线性质定理，本课从中位线定理出发，提出一系列问题进行探究. 这些问题由“一条直线保持与 BC 平行而移动”相联系. 设 D、E 分别在$\triangle ABC$ 的边 AB、AC 所在的直线上，且保持 $DE\parallel BC$，当直线 AB 上的点 D 分别是(1)边 AB 的中点、(2)边 AB 上的任意一点、(3)边 AB 的延长线上的任意一点时，$\frac{AE}{EC}$与$\frac{AD}{DB}$是否相等？这样一个逐步推进的问题系列的最终解决，就得到了三角形一边的平行线性质定理. 这样的设计，体现了从特殊到一般的策略和分类讨论思想.

$\because$ $DE \parallel BC$,

$\therefore$ $S_{\triangle EDB} = S_{\triangle EDC}$,

得 $$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}.$$

议一议

根据证明所得的结论，利用比例的性质，还可以得到哪些比例线段？

在图 24－12 中，还可以得到 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，$\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$ 等.

问题3

已知△ABC，直线 l 与边 AB、AC 的延长线分别相交于点 D、E，且 $l \parallel BC$，那么 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ 成立吗？

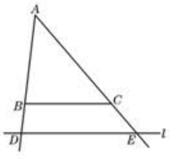
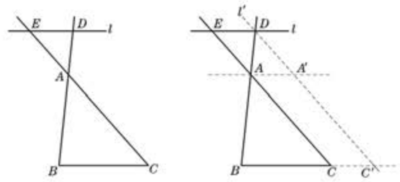


图 24－13

如图 24－13，可以看作△ADE 的两边 AD、AE 被平行于 DE 的直线 BC 所截，由以上证明可知 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ 成立.



（1）　（2）

图 24－14

如图 24－14(1)，直线 l 与边 BA、CA 的延长线分别相交于点 D、E. 这时，如图 24－14(2)，过点 D 作直线 AC 的平行线 l'，设直线 l' 与直线 BC 相交于点 C'；再过点 A 作直线 l 的平行线，交直线 l' 于点 A'，得 $AE=A'D$，$EC=DC'$. 在△DBC' 中，由 $AA' \parallel BC'$，得 $\frac{AD}{DB}=\frac{A'D}{DC'}$，可知 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ 也成立.

通过以上讨论，我们得到：

三角形一边的平行线性质定理　平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线，截得的对应线段成比例.

12 第二十四章　相似三角形

议一议

引导学生利用比例的性质推广问题 2 的结论，得到不同的比例线段，为引出三角形一边的平行线性质定理打下基础.

问题 3

将问题 2 中的直线 l 继续平移，于是导出问题 3. 这个问题化归为“问题 2”来解决，要引导学生体会转化的方法.

通过问题 2 和问题 3 的解决，得到三角形一边的平行线性质定理.

【注意事项】

在图 24－14(1)中推导问题 3 的结论时，也可用下面的方法：

联结 DC，过点 A 作 BC 的平行线 AA'，交 DC 于点 A'. 利用问题 2 的结论，得

$$\frac{AD}{DB}=\frac{A'D}{DC},\frac{AE}{EC}=\frac{A'D}{DC},$$

所以 $$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}.$$

教学中采用上述方法还是课本所示方法，可从学生实际出发进行选取，它们都体现了化归思想的运用.

例题 1

本题是简单的几何计算题. 首先需要弄清三角形一边的平行线性质定理中"对应线段""成比例"等有关概念,然后直接运用定理进行几何计算. 通过解题活动帮助学生理解这一定理.

练习 24.3(1)

1. (1) $CE=\frac{16}{3}$,$AC=\frac{28}{3}$;

(2) $AD=4$.

2. (1) $AC=10$;

(2) $AC=10$.

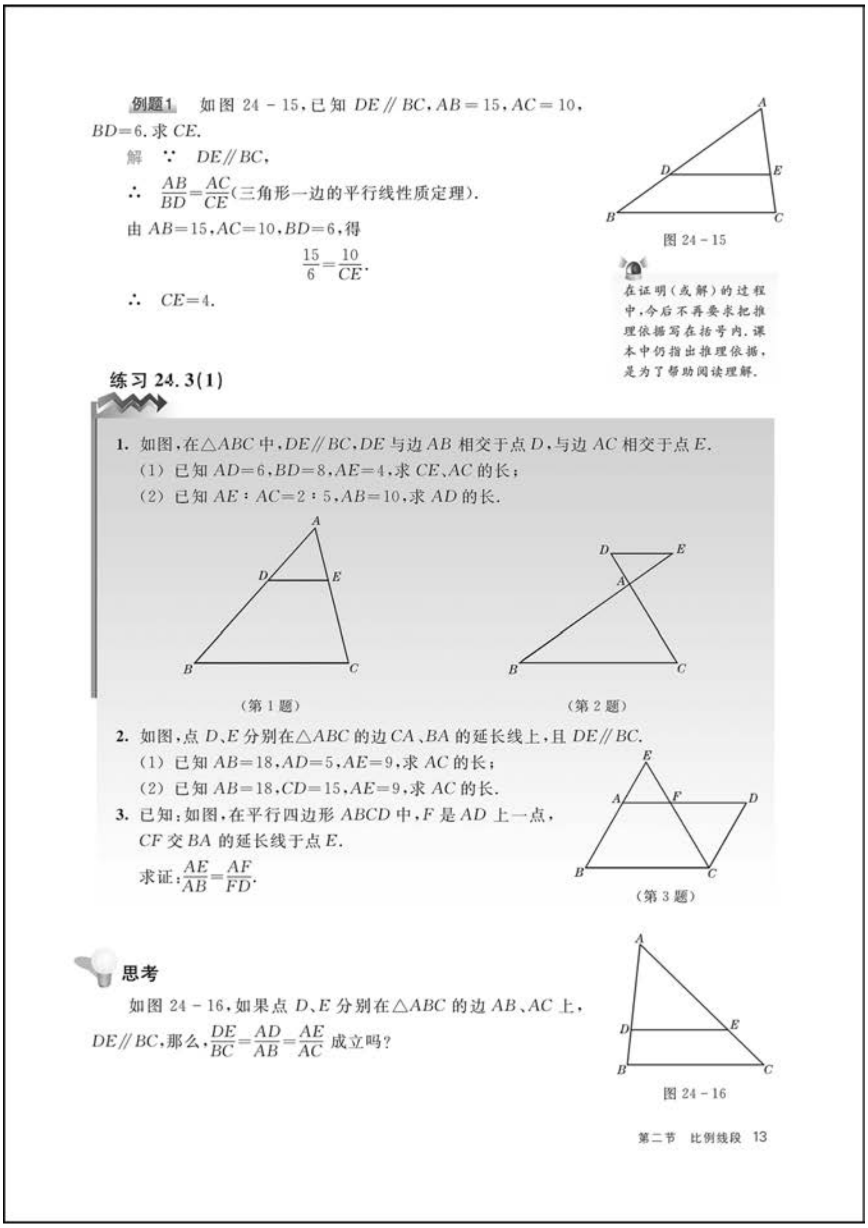
3. 略.

【本课重点】

引进三角形一边的平行线性质定理的推论和三角形的重心及其性质.

思考

引导学生推广三角形一边的平行线性质. 这个问题可从三角形的中位线定理引出.



例题1 如图 24 - 15,已知 $DE /\!/ BC$,$AB=15$,$AC=10$,$BD=6$. 求 CE.

解 ∵ $DE /\!/ BC$,

∴ $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE}$(三角形一边的平行线性质定理).

由 $AB=15$,$AC=10$,$BD=6$,得

$$\frac{15}{6}=\frac{10}{CE}.$$

∴ $CE=4$.

图 24 - 15

在证明(或解)的过程中,今后不再要求把推理依据写在括号内. 课本中仍指出推理依据,是为了帮助阅读理解.

练习 24.3(1)

1. 如图,在△ABC 中,$DE /\!/ BC$,DE 与边 AB 相交于点 D,与边 AC 相交于点 E.
   (1) 已知 $AD=6$,$BD=8$,$AE=4$,求 CE、AC 的长;
   (2) 已知 $AE:AC=2:5$,$AB=10$,求 AD 的长.

(第 1 题) (第 2 题)

2. 如图,点 D、E 分别在△ABC 的边 CA、BA 的延长线上,且 $DE /\!/ BC$.
   (1) 已知 $AB=18$,$AD=5$,$AE=9$,求 AC 的长;
   (2) 已知 $AB=18$,$CD=15$,$AE=9$,求 AC 的长.
3. 已知:如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,F 是 AD 上一点,CF 交 BA 的延长线于点 E.
   求证:$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{FD}$.

(第 3 题)

思考

如图 24 - 16,如果点 D、E 分别在△ABC 的边 AB、AC 上,$DE /\!/ BC$,那么,$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ 成立吗?

图 24 - 16

第二节 比例线段 13

【注意事项】

为推广三角形一边平行线的性质定理而设计的"思考",源于三角形一边平行线的性质定理和三角形中位线定理. 教师可以适当加以引导:如图 24 - 10,DE 是△ABC 的中位线,这时 $DE /\!/ BC$,可知 $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{1}{2}$. 由三角形一边平行线的性质定理启发,提出问题:如图 24 - 16,如果点 D、E 分别在△ABC 的边 AB、AC 上,$DE /\!/ BC$(DE 不一定是中位线),那么,$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ 是否仍然成立? 这样既可以让学生体会到新问题的起源,又可以找到与原有知识的联系.

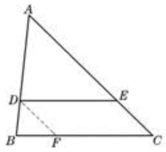


图 24－17

三角形一边的平行线性质定理是判断线段成比例的一个依据. 这个定理的条件中有一条平行于三角形一边的直线，结论中有关的比例线段分别在三角形两边所在的直线上. 因此考虑将 DE 平移到 BC 边上去，然后尝试证明 $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ 成立.

如图 24－17，过点 D 作 $DF \parallel AC$，交边 BC 于点 F.

又∵ $DE \parallel BC$，

∴ 四边形 $DFCE$ 为平行四边形，得 $FC=DE$.

∵ $DF \parallel AC$，

∴ $\frac{FC}{BC}=\frac{AD}{AB}$（三角形一边的平行线性质定理）.

∴ $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}$.

由 $DE \parallel BC$，得 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，

∴ $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$.

于是，我们证明了 $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ 成立.

类似于本节问题 3 的讨论，当点 D、E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 的延长线上时，可证明结论同样成立.

点 D、E 分别在边 AB、AC 的延长线上时，出现的图形如同图 24－13 或 24－14.

由此得到：

三角形一边的平行线性质定理推论　平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线，截得的三角形的三边与原三角形的三边对应成比例.

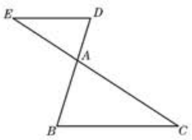


图 24－18

例题2　如图 24－18，线段 BD 与 CE 相交于点 A，$ED \parallel BC$，已知 $2BC=3ED$，$AC=8$，求 AE 的长.

解　∵ $ED \parallel BC$，

∴ $\frac{AE}{AC}=\frac{ED}{BC}$（三角形一边的平行线性质定理的推论）.

由 $2BC=3ED$，得 $\frac{ED}{BC}=\frac{2}{3}$，

∴ $\frac{AE}{AC}=\frac{2}{3}$.

∵ $AC=8$，

∴ $AE=\frac{2}{3}AC=\frac{2}{3}\times 8=\frac{16}{3}$.

14　第二十四章　相似三角形

对“思考”中的问题的结论进行推导时，要联系已有的经验以启发思路，如图 24－17 是一种添辅助线的方法.

也可联想证明三角形中位线定理的过程，通过延长 DE 到 G，使 $DG=BC$，联结 CG，同样可导出结论.

为获得三角形一边的平行线性质定理的推论，需要再说明 D、E 分别在三角形的边 AB、AC 的延长线上的情况.

例题 2

本题是三角形一边的平行线性质定理推论在几何计算中的基本运用.

由已知 $ED \parallel BC$，可知 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的三边对应成比例. 要指导学生把握这两个三角形中三边的对应关系，适当选用比例式.

例题 3

本题是运用三角形一边的平行线性质进行几何证明，也是为引进三角形的重心而设计的.

对解题思路的分析，可从待证结论中的比例线段引起构造三角形的联想.

想一想

让学生联想在画三角形的中线时曾经感知三条中线交于一点，提出问题进行理性思考.

证明三角形的三条中线交于一点，运用了“同一法”，但不必指明，这里只需直接解说.

引进三角形的重心的概念与性质.

练习 24.3(2)

1. (1) 9；

(2) $AD=4, AB=12$；

(3) $\frac{3}{8}$.

例题3　已知：如图 24－19，BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的中线，交于点 G.

求证：$\frac{GE}{GB}=\frac{GF}{GC}=\frac{1}{2}$.

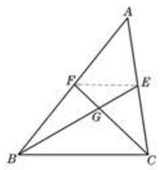


图 24－19

分析　要证明 $\frac{GE}{GB}=\frac{GF}{GC}$，只要证明 $EF /\!/ BC$. 根据已知条件，可知 EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线，由此可推出所要证明的结论.

证明　联结 EF.

由 BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的中线，可知 EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线.

$\therefore$ $EF /\!/ BC$；$EF=\frac{1}{2}BC$，即 $\frac{EF}{BC}=\frac{1}{2}$.

$\because$ $EF /\!/ BC$，

$\therefore$ $\frac{GE}{GB}=\frac{GF}{GC}=\frac{EF}{BC}$（三角形一边的平行线性质定理的推论）.

$\therefore$ $\frac{GE}{GB}=\frac{GF}{GC}=\frac{1}{2}$.

想一想

在图 24－19 中，如果 $\triangle ABC$ 的另一条中线 AD 与 BE 相交于点 G'，如图 24－20 所示，那么这个交点 G' 与交点 G 是否为同一个点？

通过联结 DE，运用例题 3 的证明方法，可得 $\frac{G'E}{G'B}=\frac{G'D}{G'A}=\frac{1}{2}$.

因为点 G' 与点 G 同在中线 BE 上，$\frac{G'E}{G'B}=\frac{1}{2}$，且 $\frac{GE}{GB}=\frac{1}{2}$，所以点 G' 与点 G 是同一点. 这就是说，**三角形的三条中线交于一点.**

三角形三条中线的交点叫做**三角形的重心**（barycenter of a triangle）.

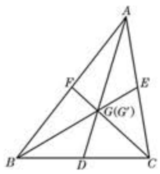


图 24－20

三角形的重心到一个顶点的距离，等于它到这个顶点对边中点的距离的两倍.

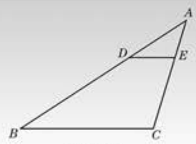
练习 24.3(2)

1. 如图，已知 D、E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上的点，且 $DE /\!/ BC$.

(1) 如果 $DE=2$，$BC=6$，$AD=3$，求 AB 的长；

(2) 如果 $DE=2$，$BC=6$，$BD=8$，求 AD、AB 的长；

(3) 如果 $\frac{AD}{BD}=\frac{3}{5}$，求 $\frac{DE}{BC}$ 的值.



（第 1 题）

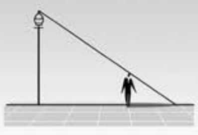
第二节　比例线段　15

【注意事项】

关于三角形重心性质的表述，可以有几种不同的形式. 如在图 24－20 中，G 是 $\triangle ABC$ 的重心，则 $AG=\frac{2}{3}AD$，$DG=\frac{1}{3}AD$，等等. 在性质的运用中，可根据实际需要选用表示方式.

2. 已知 AD、BE 是 $\triangle ABC$ 的中线，AD、BE 相交于点 F，$AD=5$，求 AF、DF 的长.

3. 如图，已知小明的身高是 1.6 米，他在路灯下的影长为 2 米，小明距路灯灯杆的底部 3 米，则路灯灯泡距地面的高度是______米.



（第 3 题）

我们再来探讨三角形一边的平行线性质定理的逆命题是否正确.

如图 24－21，在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别在边 AB、AC 上，如果 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，那么 $DE /\!/ BC$ 吗？

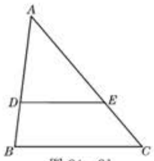


图 24－21

要肯定上述问题的结论正确，只要证明有一个平行四边形的相对两边分别在直线 DE 和 BC 上.

如图 24－22，过点 C 作平行于 AB 的直线 CF，交直线 DE 于点 F，得四边形 $BCFD$.

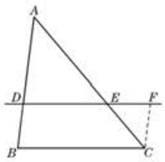


图 24－22

∵ $CF /\!/ AB$，

∴ $\frac{AD}{CF}=\frac{AE}{EC}$（三角形一边平行线性质定理推论）.

又∵ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，

∴ $\frac{AD}{CF}=\frac{AD}{DB}$，得 $CF=DB$.

由 $CF /\!/ DB$，$CF=DB$，可知四边形 $BCFD$ 是平行四边形，

所以 $DF /\!/ BC$，即 $DE /\!/ BC$.

为证明 $DE /\!/ BC$，也可作 $DE' /\!/ BC$（点 E' 在边 AC 上），再证 DE' 与 DE 重合.

根据比例的性质可知，在关系式① $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$、② $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$、③ $\frac{BD}{AB}=\frac{CE}{AC}$ 中，由其中一个可推出其余两个. 因此，以关系式①②③之一为已知条件，都可推出 $DE /\!/ BC$. 这样，就得到以下定理：

三角形一边的平行线判定定理　如果一条直线截三角形的两边所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边.

16 第二十四章　相似三角形

2. $AF=\frac{10}{3}$，$DF=\frac{5}{3}$.

3. 4.

【本课重点】

导出三角形一边的平行线判定定理及其推论，并进行初步运用.

本课从已有的经验出发进行数学的理性分析，提出“三角形一边的平行线性质定理的逆命题是否正确”的问题进行探讨，通过证明得到三角形一边的平行线判定定理. 这一设计体现了论证几何注重演绎和推理的特点.

【注意事项】

（1）关于三角形一边的平行线判定定理，课本中是由三角形一边的平行线性质定理的一个逆命题引出来的. 这个定理也可以通过对三角形中位线定理推广得到.

（2）证明三角形一边的平行线判定定理，还可采用面积法，同时在“边款”中指出也可用“同一法”. 课本选用的证明方法，运用了三角形一边平行线的性质以及平行四边形的判定和性质等知识，证明的过程比较简捷，但添置辅助线可能是教学的一个难点. 可引导学生从所要探究的结论联想平行四边形，再结合已知条件和 DE、BC 的位置考虑构造四边形，形成证明思路.

为了使用的方便，引进了三角形一边的平行线判定定理的推论. 因此，对图 24－23 的情况，指出同样可证明结论正确.

在教学中，关于三角形一边的平行线判定定理推论，可点到为止. 要注意推论中括号内的说明. 如在$\triangle ABC$中，线段AB的延长线与线段CA的延长线视为不在边BC的同侧.

议一议

这个学习活动要让学生尝试，这样有利于学生正确理解判定定理. 要向学生指出，如果$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}$，不能得到$DE\parallel BC$，可举出反例进行说明.

例题 4

本题是三角形一边的平行线性质定理与判定定理的基本运用. 可见定理为我们证明两条直线平行提供了一种新思路，即利用“线段的比例关系”推出“直线的平行关系”.

如图 24－23，如果点 D、E 分别在射线 AB、AC 上或分别在它们的反向延长线上，且具备条件①②③之一，那么也可以用上述同样的方法推出 $DE\parallel BC$.

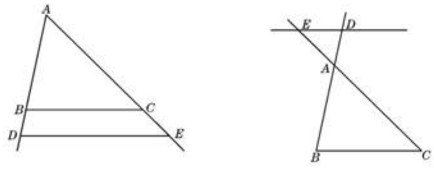


图 24－23

由此又得到：

三角形一边的平行线判定定理推论 如果一条直线截三角形两边的延长线（这两边的延长线在第三边的同侧）所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边.

议一议

如图 24－24，点 D、E 分别在$\triangle ABC$的边 AB、AC 上. 如果$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}$，那么能否得到 $DE\parallel BC$，为什么？

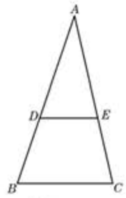


图 24－24

例题4 已知：如图 24－25，点 D、F 在$\triangle ABC$的边 AB 上，点 E 在边 AC 上，且 $DE\parallel BC$，$\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{AD}{AB}$.

求证：$EF\parallel DC$.

分析　要证明 $EF\parallel DC$，只要证明$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AF}{AD}$.

证明　$\because$ $DE\parallel BC$，

$\therefore$ $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$（三角形一边的平行线性质定理）.

$\because$ $\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{AD}{AB}$，

$\therefore$ $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AF}{AD}$.

$\therefore$ $EF\parallel DC$（三角形一边的平行线判定定理）.

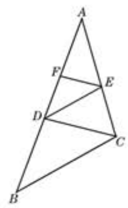
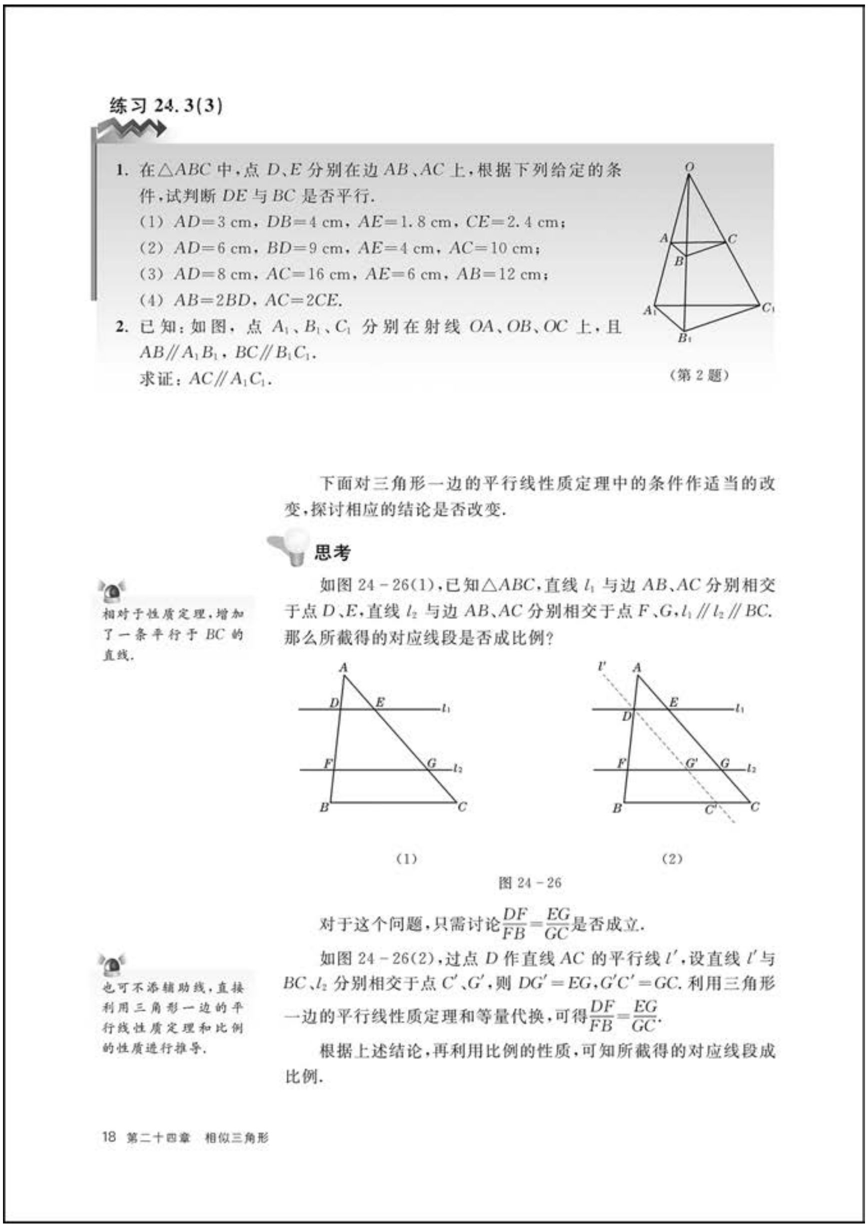


图 24－25

第二节　比例线段　17

【注意事项】

在例题 4 的教学中要让学生体会，可利用三角形一边的平行线判定定理证明两条直线平行. 运用时要注意把握定理的条件，正确分析比例线段. 本题先要证明线段成比例，为此把其中每一个比看成一个整体，分别证明它们与第三个比相等，通过第三个比利用等量代换来过渡，或者说通过“中间比”来过渡. 利用“中间比”是证明线段比例关系的一种重要思路.



练习 24.3(3)

1. 在△ABC 中，点 D、E 分别在边 AB、AC 上，根据下列给定的条件，试判断 DE 与 BC 是否平行.
   (1) $AD=3$ cm，$DB=4$ cm，$AE=1.8$ cm，$CE=2.4$ cm；
   (2) $AD=6$ cm，$BD=9$ cm，$AE=4$ cm，$AC=10$ cm；
   (3) $AD=8$ cm，$AC=16$ cm，$AE=6$ cm，$AB=12$ cm；
   (4) $AB=2BD$，$AC=2CE$.
2. 已知：如图，点 A_1、B_1、C_1 分别在射线 OA、OB、OC 上，且 $AB \parallel A_1B_1$，$BC \parallel B_1C_1$.
   求证：$AC \parallel A_1C_1$.

（第 2 题）

下面对三角形一边的平行线性质定理中的条件作适当的改变，探讨相应的结论是否改变.

思考

相对于性质定理，增加了一条平行于 BC 的直线.

如图 24-26(1)，已知△ABC，直线 l_1 与边 AB、AC 分别相交于点 D、E，直线 l_2 与边 AB、AC 分别相交于点 F、G，$l_1 \parallel l_2 \parallel BC$. 那么所截得的对应线段是否成比例？

(1)　　(2)

图 24-26

对于这个问题，只需讨论$\dfrac{DF}{FB}=\dfrac{EG}{GC}$是否成立.

也可不添辅助线，直接利用三角形一边的平行线性质定理和比例的性质进行推导.

如图 24-26(2)，过点 D 作直线 AC 的平行线 l'，设直线 l' 与 BC、l_2 分别相交于点 C'、G'，则 $DG'=EG$，$G'C'=GC$. 利用三角形一边的平行线性质定理和等量代换，可得$\dfrac{DF}{FB}=\dfrac{EG}{GC}$.

根据上述结论，再利用比例的性质，可知所截得的对应线段成比例.

18 第二十四章 相似三角形

练习 24.3(3)

1. (1) 平行；(2) 平行；(3) 不平行；(4) 平行.
2. 略.

【本课重点】

导出平行线分线段成比例定理，并进行初步运用.

思考

将三角形一边平行线的性质定理条件中的两条平行线改变为三条，对这一定理进行推广.

推导“思考”中的问题的结论时，通过平移直线 AC，将问题转化为三角形一边平行线的问题来解决.

【注意事项】

关于“思考”中的问题的结论，也可以这样推导：如图 24-26(1).

由 $l_1 \parallel l_2$，得$\dfrac{DF}{AF}=\dfrac{EG}{AG}$.　　①

由 $l_2 \parallel BC$，得$\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{AG}{GC}$.　　②

由①×②，得$\dfrac{DF}{FB}=\dfrac{EG}{GC}$.

还可以这样推导：联结 BE(或 CD)，通过“中间比”得到结论.

将“思考”中的问题引向一般化，根据前面的讨论，得到平行线分线段成比例定理.

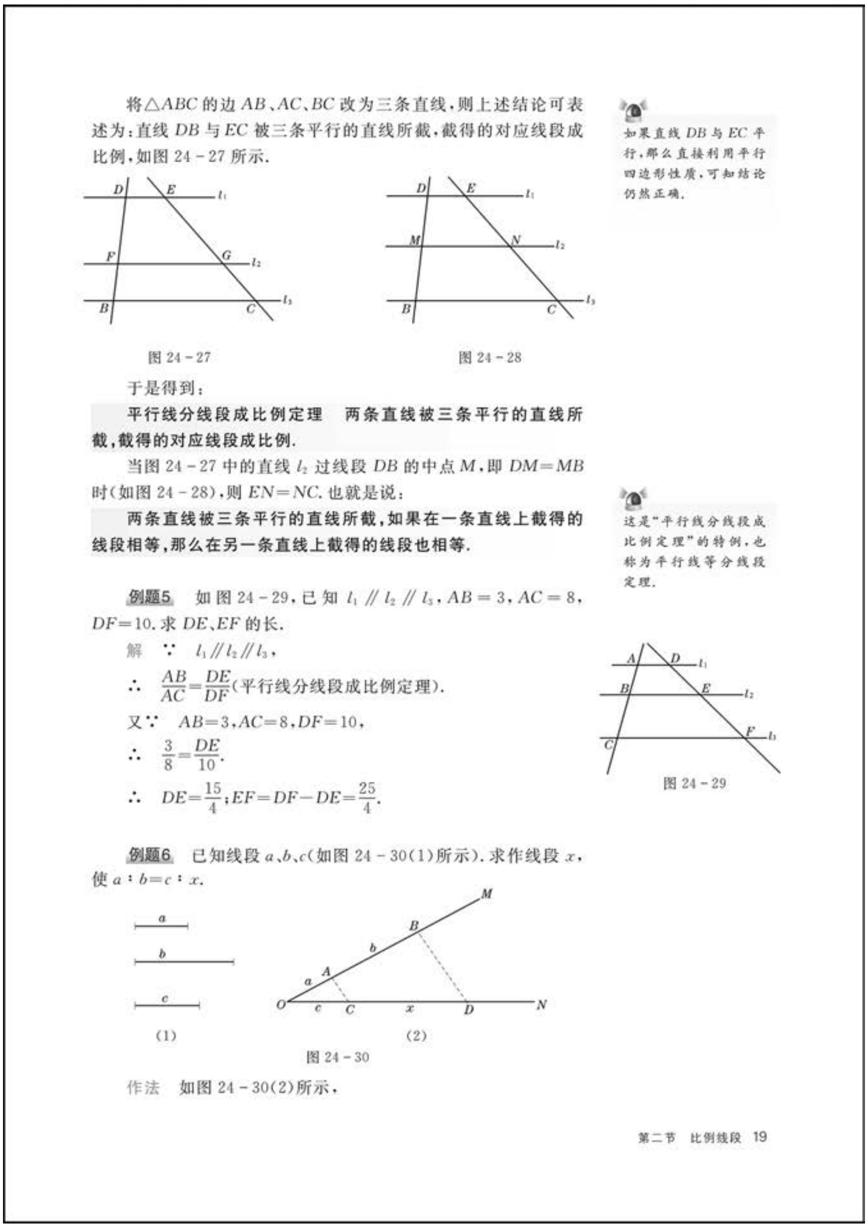
平行线等分线段定理是平行线分线段成比例定理的特殊情况，其实不必特别提出. 这个定理名称出现在“边款”中，可以不讲.

例题 5

本题是平行线分线段成比例定理在几何计算中的运用. 要让学生注意“对应线段”的确定.

例题 6

这是一个基本作图题，是平行线分线段成比例定理的运用，也可以说是三角形一边平行线性质定理的运用.



将△ABC的边AB、AC、BC改为三条直线，则上述结论可表述为：直线DB与EC被三条平行的直线所截，截得的对应线段成比例，如图 24－27 所示.

如果直线DB与EC平行，那么直接利用平行四边形性质，可知结论仍然正确.

图 24－27　　图 24－28

于是得到：

平行线分线段成比例定理　两条直线被三条平行的直线所截，截得的对应线段成比例.

当图 24－27 中的直线l_2过线段DB的中点M，即$DM=MB$时(如图 24－28)，则$EN=NC$. 也就是说：

两条直线被三条平行的直线所截，如果在一条直线上截得的线段相等，那么在另一条直线上截得的线段也相等.

这是“平行线分线段成比例定理”的特例，也称为平行线等分线段定理.

例题5　如图 24－29，已知$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，$AB=3$，$AC=8$，$DF=10$. 求DE、EF的长.

解　$\because$　$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，

$\therefore$　$\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF}$(平行线分线段成比例定理).

又$\because$　$AB=3$，$AC=8$，$DF=10$，

$\therefore$　$\frac{3}{8}=\frac{DE}{10}$.

$\therefore$　$DE=\frac{15}{4}$；$EF=DF-DE=\frac{25}{4}$.

图 24－29

例题6　已知线段a、b、c(如图 24－30(1)所示). 求作线段x，使$a:b=c:x$.

(1)　(2)

图 24－30

作法　如图 24－30(2)所示，

第二节　比例线段　19

【注意事项】

(1) 平行线分线段成比例定理是三角形一边平行线性质定理的推广；三角形一边平行线性质定理可看作是平行线分线段成比例定理的特殊情况. 但要注意，平行线分线段成比例定理的逆命题是假命题，而三角形一边平行线性质定理的逆命题是真命题.

(2) 例题 6 中已知比例线段中的三条，求作第四条线段，其关键是构造含有这些比例线段的图形. 联想三角形一边平行线的性质定理及其基本图形的特征，再分析已知条件，可找出作图的方法. 对作法的分析和归纳，教师要多加指导，通过师生共同讨论来完成.

由于课本中作图题总量较少，因此对例题 6 应予以一定的重视. 在作$BD /\!/ AC$时，可用尺规作图，也可用三角尺“推平行线”画出. 另外，可引导学生进一步认识，在已知比例线段中的三条的情况下，总可以将求作第四条线段的问题化为例题 6 的形式来解决.

作图的依据是平行线分线段成比例定理；利用这一定理可证明所作线段符合要求.

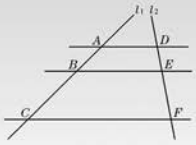
1. 作以点 O 为端点的射线 OM 和 ON.
2. 在 OM 上顺次截取 $OA=a$，$AB=b$.
3. 在 ON 上截取 $OC=c$.
4. 联结 AC，过点 B 作 $BD\parallel AC$，交 ON 于点 D.

线段 CD 就是所求的线段 x.

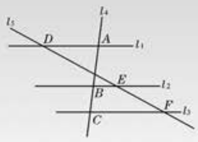
例题 6指明了“已知比例线段中的三条线段，求作另一条未知线段”的方法.

练习 24.3(4)

1. 如图，已知 $AD\parallel BE\parallel CF$，它们依次交直线 l_1、l_2 于点 A、B、C 和点 D、E、F.
   (1) 如果 $AB=6$，$BC=10$，$EF=8$，求 DE 的长；
   (2) 如果 $DE:EF=3:5$，$AC=24$，求 AB、BC 的长.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，直线 l_1、l_2、l_3 分别交直线 l_4 于点 A、B、C，交直线 l_5 于点 D、E、F，且 $l_1\parallel l_2\parallel l_3$. 已知 $AB=3$，$AC=5$，$DF=9$，求 DE、EF 的长.
3. 如图，已知线段 AB，在线段 AB 上求作一点 C，使 $AC:CB=1:2$.

（第 3 题）

20 第二十四章　相似三角形

练习 24.3(4)

1. (1) $DE=4.8$；
(2) $AB=9$，$BC=15$.

2. $DE=\frac{27}{5}$，$EF=\frac{18}{5}$.

3. 略.

Xiangsi Sanjiaoxing

第三节 相似三角形

24.4 相似三角形的判定

如果一个三角形的三个角与另一个三角形的三个角对应相等，且它们各有的三边对应成比例，那么这两个三角形叫做相似三角形(similar triangles).

在两个相似三角形中，对应相等的角及其顶点分别是它们的对应角和对应顶点，以对应顶点为端点的边是它们的对应边.

两个三角形是相似三角形，也可以表述为“两个三角形相似”，或“一个三角形与另一个三角形相似”.

如图 24－31，已知 DE 是$\triangle ABC$ 的中位线，那么在$\triangle ADE$ 与$\triangle ABC$ 中，$\angle A=\angle A$，$\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$；$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}=\frac{1}{2}$. 由相似三角形的定义，可知这两个三角形相似. 用符号来表示，记作$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，其中点 A 与点 A、点 D 与点 B、点 E 与点 C 分别是对应顶点；符号“$\backsim$”读作“相似于”.

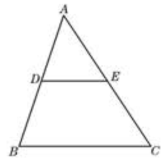


图 24－31

用符号表示两个相似三角形时，通常把对应顶点的字母分别写在三角形记号“△”后相应的位置上.

相似三角形的对应角相等、对应边成比例.

两个相似三角形的对应边的比，叫做这两个三角形的相似比(或相似系数).

图 24－31 中，$\frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}$，因此$\triangle ADE$ 与$\triangle ABC$ 的相似比 $k=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}$，而$\triangle ABC$ 与$\triangle ADE$ 的相似比 $k'=\frac{AB}{AD}=2$.

两个相似三角形的相似比与表述这两个三角形相似的顺序有关.

设$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$的相似比为 k，$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$ 的相似比为 k'，则 $k'=\frac{1}{k}$.

当两个相似三角形的相似比 $k=1$ 时，这两个相似三角形就成为全等三角形. 反过来，两个全等三角形一定是相似三角形，它们的相似比等于 1. 因此，全等三角形是相似三角形的特例.

想一想

如果$\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle ABC$，$\triangle A_2B_2C_2\backsim\triangle ABC$，那么$\triangle A_1B_1C_1$

可根据相似三角形的定义进行分析.

第三节 相似三角形 21

【本课重点】

引进相似三角形的定义及有关概念，导出相似三角形的预备定理和判定定理 1.

在已有相似多边形概念的基础上，直接定义相似三角形，同时指出对应顶点、对应角、对应边以及相似比等概念.

用符号表示两个三角形相似时，通常把表示对应顶点的字母分别写在“△”后的相应位置上. 这样的表示方式只是“通常”使用而不是统一规定.

注意相似比与两个三角形相似的顺序表述有关.

想一想

通过对“想一想”中所提问题的讨论，让学生知道三角形相似具有“传递性”. 在推导相似三角形判定定理的过程中，需要运用三角形相似的传递性.

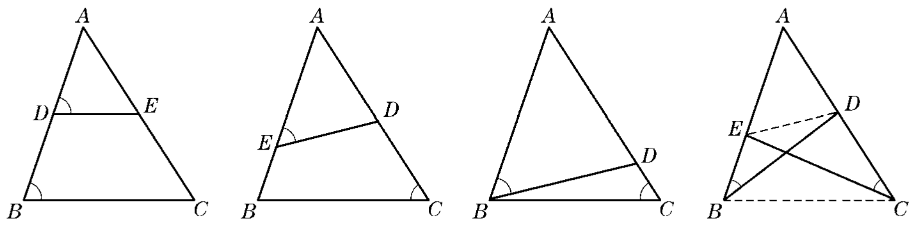
【教学目标】

(1) 理解相似三角形的有关概念，知道全等三角形是相似三角形的特例.

(2) 经历相似三角形判定定理的推导过程，掌握相似三角形的判定定理；在探索相似三角形判定方法的活动中，获得数学地提出问题、思考问题的体验.

【注意事项】

教学中要注意下列四个常见图形中的相似三角形问题.



与$\triangle A_2B_2C_2$相似吗？为什么？

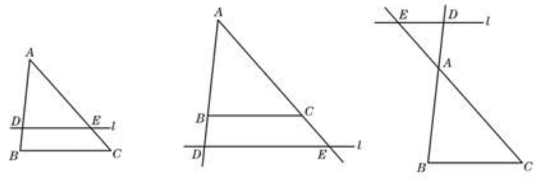
由相似三角形的对应角相等、对应边成比例，可以推出：

如果两个三角形分别与同一个三角形相似，那么这两个三角形也相似.

这个命题也可称为三角形相似的传递性.

思考

由图24－31联想，如果点D、E分别在直线AB和AC上，$DE\parallel BC$，如图24－32所示，那么$\triangle ADE$与$\triangle ABC$相似吗？为什么？



(1)　　(2)　　(3)

图24－32

如图24－32(1)，点D、E分别在$\triangle ABC$的边AB和AC上，这时$\triangle ADE$是$\triangle ABC$被平行于BC的直线DE所截得的三角形.

由$DE\parallel BC$，得$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$；$\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$. 又$\angle DAE=\angle BAC$，因此$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

在如图24－32(2)(3)的情况下，同理可得$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

由此得到：

相似三角形的预备定理　平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线，截得的三角形与原三角形相似.

全等三角形各判定定理中的条件分别是“边角边”“角边角”“角角边”“边边边”.

根据相似三角形的定义来判定两个三角形相似，需要验证它们的角对应相等，同时它们的边对应成比例.

是否可以通过验证其中的几个条件来判定两个三角形相似呢？联想全等三角形的四个判定定理，我们可类似地对判定两个三角形相似所需的条件进行分析.

“角边角”和“角角边”的条件中只涉及一组边，不能构成比例，由此提出问题1.

问题1

在$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$中，已知$\angle A=\angle A_1$、$\angle B=\angle B_1$，能证明$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$相似吗？

22　第二十四章　相似三角形

让学生在讨论和导出三角形相似的传递性的过程中，对相似三角形的概念加深理解.

思考

所提问题是为引进相似三角形的预备定理而设计的.

学生已经知道图24－31中的两个三角形相似，由此提出将三角形中位线平行移动，引导学生探讨一般化的结论.

可让学生先猜测结论，再进行证明，得到相似三角形的预备定理. 这个定理本身是判定三角形相似的基本定理，又是为后面推导相似三角形判定定理作“预备”.

预备定理中的两个相似三角形有特殊的位置关系，利用定义来判定两个三角形相似需验证六个条件；联想全等三角形的判定定理，提出对判定两个三角形相似所需条件进行探讨，引出问题1.

【注意事项】

要引导学生参与分析全等三角形的判定定理、提出相似三角形判定问题的过程，感受类比的思想方法. 三角形相似的4个判定定理与全等三角形的有关判定定理相对应，教学中可对照全等三角形的判定定理，提出相应的相似三角形判定问题. 也可同时把四个问题提出来，然后逐个进行探讨，得到相应的判定定理.

对问题 1 的研究思路进行分析时，要把握预备定理中两个三角形的位置关系特征，在图形运动和化归思想引导下，提出添置辅助线的方法.

判定定理 1 的运用比较容易，课本中没有举例，可通过本课练习题来说明定理的运用；必要时，也可自行安排例题进行讲解.

运用相似三角形判定定理时的书写格式，类似于全等三角形的判定，先要指出“在哪两个三角形中”. 这样表述，可使判定过程中的条件与结论的关系更加明显.

练习 24.4(1)

1. (1) $\triangle ABC \backsim \triangle DFE$；

(2) $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$.

2. $\triangle AFE \backsim \triangle DFC$，

$\triangle AFE \backsim \triangle BCE$，

$\triangle DFC \backsim \triangle BCE$.

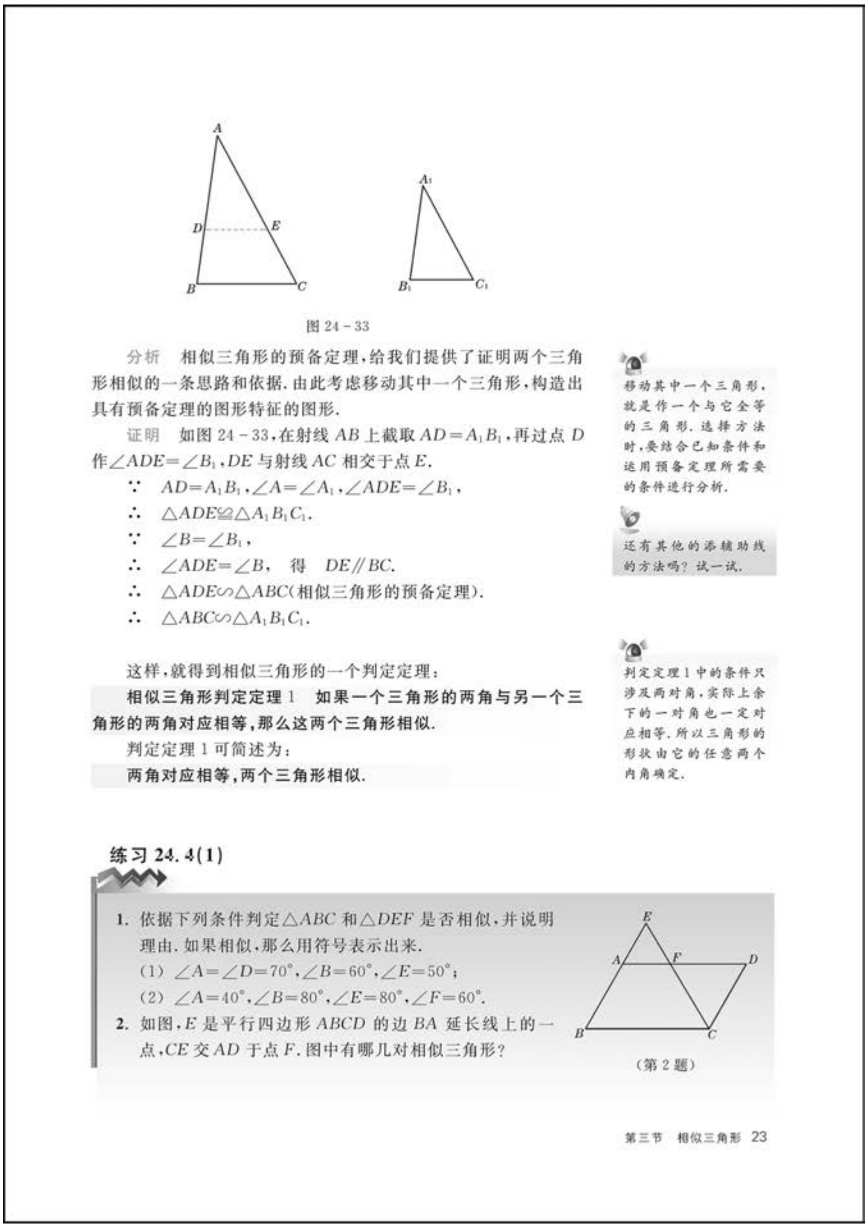


图 24－33

分析　相似三角形的预备定理，给我们提供了证明两个三角形相似的一条思路和依据. 由此考虑移动其中一个三角形，构造出具有预备定理的图形特征的图形.

证明　如图 24－33，在射线 AB 上截取 $AD=A_1B_1$，再过点 D 作 $\angle ADE=\angle B_1$，DE 与射线 AC 相交于点 E.

$\because$ $AD=A_1B_1$，$\angle A=\angle A_1$，$\angle ADE=\angle B_1$，

$\therefore$ $\triangle ADE \cong \triangle A_1B_1C_1$.

$\because$ $\angle B=\angle B_1$，

$\therefore$ $\angle ADE=\angle B$，　得　$DE /\!/ BC$.

$\therefore$ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$（相似三角形的预备定理）.

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

移动其中一个三角形，就是作一个与它全等的三角形. 选择方法时，要结合已知条件和运用预备定理所需要的条件进行分析.

还有其他的添辅助线的方法吗？试一试.

这样，就得到相似三角形的一个判定定理：

相似三角形判定定理 1　如果一个三角形的两角与另一个三角形的两角对应相等，那么这两个三角形相似.

判定定理 1 可简述为：

两角对应相等，两个三角形相似.

判定定理 1 中的条件只涉及两对角，实际上余下的一对角也一定对应相等. 所以三角形的形状由它的任意两个内角确定.

练习 24.4(1)

1. 依据下列条件判定 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是否相似，并说明理由. 如果相似，那么用符号表示出来.

(1) $\angle A=\angle D=70^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\angle E=50^\circ$；

(2) $\angle A=40^\circ$，$\angle B=80^\circ$，$\angle E=80^\circ$，$\angle F=60^\circ$.

2. 如图，E 是平行四边形 $ABCD$ 的边 BA 延长线上的一点，CE 交 AD 于点 F. 图中有哪几对相似三角形？

（第 2 题）

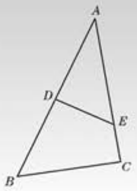
第三节　相似三角形　23

【注意事项】

本节对相似三角形判定定理 1、定理 2、定理 3 进行探究的过程是类似的，证明的基本思路一样. 要帮助学生在解决问题 1 的活动中，获得更多的体验和经验，体会有关数学思想方法的运用，然后可放手让学生解决问题 2 和问题 3.

3. 已知：如图，D、E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上的点，且 $\angle AED=\angle B$.

求证：$AE \cdot AC = AD \cdot AB$.



（第 3 题）

问题2

全等三角形判定定理中的条件，也可以是“边角边”. 类似地，我们提出问题 2 来讨论.

如图 24－34，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，如果 $\angle A=\angle A_1$，$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}$，那么 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 相似吗？为什么？

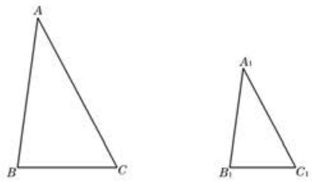


图 24－34

类似证明判定定理 1 的思考和分析，分别在射线 AB、AC 上截取 $AD=A_1B_1$，$AE=A_1C_1$，构造 $\triangle ADE$，则 $\triangle ADE \cong \triangle A_1B_1C_1$. 如果所得图形中有相似三角形预备定理条件中的平行线，那么这个图形就具有预备定理的图形特征.

试一试

这个问题的结论是肯定的，请完成它的证明.

于是，又得到相似三角形的一个判定定理：

相似三角形判定定理 2　如果一个三角形的两边与另一个三角形的两边对应成比例，并且夹角相等，那么这两个三角形相似.

判定定理 2 可简述为：

两边对应成比例且夹角相等，两个三角形相似.

24　第二十四章　相似三角形

3. 略.

【本课重点】

导出相似三角形的判定定理 2，并进行初步运用.

问题 2

通过联想全等三角形的判定定理“边角边”，提出问题 2.

让学生利用已有的经验和方法解决问题，得到判定定理 2.

问题 2 的结论的推导过程，与问题 1 的解决类似. 注意学生对添置辅助线的过程的表述，并要求用数学语言规范地表达.

例题 1

本题是判定定理 2 的基本运用.

在证明过程中,为推出两个三角形的两组边对应成比例,需要先计算边长的比.教学中要引导学生将数与形结合起来分析,适当作“比”从而得到比例式.

议一议

让学生对基本图形加深认识,同时培养良好的学习习惯.

图中还有$\triangle AOB \backsim \triangle DOC$.

例题 2

本题也是判定定理 2 的基本运用.

在证明过程中,需要把已知条件中关于线段的“乘积式”转化为“比例式”.教学中,要让学生注意到乘积式与比例式之间的关系,会将它们进行变形和转化.

例题1 已知:如图 24-35,四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O,$OA=1$,$OB=1.5$,$OC=3$,$OD=2$.

求证:$\triangle OAD$ 与$\triangle OBC$ 是相似三角形.

证明 ∵ $OA=1$,$OB=1.5$,$OC=3$,$OD=2$,

∴ $\frac{OA}{OB}=\frac{1}{1.5}=\frac{2}{3}$,$\frac{OD}{OC}=\frac{2}{3}$.

得 $\frac{OA}{OB}=\frac{OD}{OC}$.

在$\triangle OAD$ 与$\triangle OBC$ 中,

$$\begin{cases}\frac{OA}{OB}=\frac{OD}{OC},\\ \angle AOD=\angle BOC,\end{cases}$$

∴ $\triangle OAD \backsim \triangle OBC$(两边对应成比例且夹角相等,两个三角形相似).

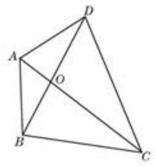


图 24-35

议一议

图 24-35 中还有其他的相似三角形吗?如果有,那么用符号将它们表示出来.

例题2 已知:如图 24-36,点 D 是$\triangle ABC$ 的边 AB 上的一点,且 $AC^2=AD\cdot AB$.

求证:$\triangle ACD \backsim \triangle ABC$.

分析 已知条件 $AC^2=AD\cdot AB$ 是一个乘积式,将它改写成比例式,得 $\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$.观察这个比例式中的四条线段,结合图形可知,可依据相似三角形判定定理 2 推出结论.

证明 ∵ $AC^2=AD\cdot AB$,

∴ $\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$.

在$\triangle ACD$ 与$\triangle ABC$ 中,

$$\begin{cases}\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB},\\ \angle A=\angle A,\end{cases}$$

∴ $\triangle ACD \backsim \triangle ABC$(两边对应成比例且夹角相等,两个三角形相似).

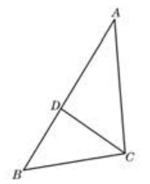


图 24-36

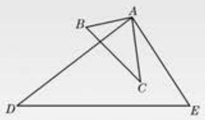
第三节 相似三角形 25

【注意事项】

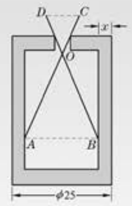
一般地,如果两个三角形相似,那么它们的最短边与最短边对应,最长边与最长边对应.为运用相似三角形的判定定理而构建关于它们的边的比例式时,可通过比较边长,分析两个三角形的边的对应情况后再计算比值.这是解决这类问题的过程中常用的一种策略.

练习 24.4(2)

1. 根据下列条件，判断$\triangle ABC$和$\triangle DEF$是否是相似三角形；如果是，那么用符号表示出来.
   (1) $\angle A=45°$，$AB=12$ cm，$AC=15$ cm，
   $\angle D=45°$，$DE=16$ cm，$DF=20$ cm；
   (2) $\angle A=45°$，$AB=12$ cm，$AC=15$ cm，
   $\angle E=45°$，$ED=20$ cm，$EF=16$ cm；
   (3) $\angle A=45°$，$AB=12$ cm，$AC=15$ cm，
   $\angle D=45°$，$ED=16$ cm，$EF=20$ cm.
2. 已知：如图，在$\triangle ABC$与$\triangle AED$中，$\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}$，$\angle BAD=\angle CAE$.
   求证：$\triangle ABC \backsim \triangle AED$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图是一个零件的剖面图，已知零件的外径为 25 毫米，为求出它的厚度 x，需先求出内孔的直径 AB，但不能直接量出 AB. 现用一个交叉卡钳（AC 和 BD 的长相等）去量，若 $\frac{OC}{OA}=\frac{OD}{OB}=\frac{1}{3}$，且量得 CD 长为 7 毫米，求零件的厚度 x.

问题3

在$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$中，如果$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}$，那么$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$相似吗？为什么？

全等三角形判定定理中的条件，还可以是"边边边"。由此，我们提出问题 3 来讨论.

这个问题的结论也是肯定的，同样可以利用相似三角形预备定理来证明.

证明如下：

如图 24－37，在射线 AB 上截取 $AB_2=A_1B_1$；在射线 AC 上截取 $AC_2=A_1C_1$，联结 B_2C_2.

$\because$ $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$，$AB_2=A_1B_1$，$AC_2=A_1C_1$，

$\therefore$ $\frac{AB}{AB_2}=\frac{AC}{AC_2}$.

得 $B_2C_2 /\!/ BC$（三角形一边的平行线判定定理），

26 第二十四章 相似三角形

练习 24.4(2)

1. (1) $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$；
(2) $\triangle ABC \backsim \triangle EFD$；
(3) 不相似.

2. 略.

3. 2 毫米.

【本课重点】

导出相似三角形的判定定理 3，并进行初步运用.

问题 3

通过联想全等三角形的判定定理"边边边"，提出问题 3.

关于问题 3 的结论的证明，学生容易理解思路，但在推导所构造的三角形与已知三角形全等时可能会有困难，要对学生适当进行指导和帮助.

【注意事项】

在问题 3 的结论的证明思路分析中，可引导学生利用在问题 1、问题 2 的讨论中获得的经验和方法，构造可运用相似三角形预备定理的图形. 根据已知条件，想到如图 24－37 将$\triangle A_1B_1C_1$进行移动. 这时易得 $B_2C_2 /\!/ BC$，关键是证明$\triangle AB_2C_2 \cong \triangle A_1B_1C_1$，对此进行分析可知，只要证明 $B_2C_2=B_1C_1$. 由 $B_2C_2 /\!/ BC$，可知$\frac{BC}{B_2C_2}=\frac{AB}{AB_2}$；结合已知比例式，可推出 $B_2C_2=B_1C_1$. 教师要把握分析过程，让学生明确证明思路.

让学生概括和表述相似三角形判定定理 3.

例题 3

本题是相似三角形判定定理 3 的基本运用.

利用判定定理 3 时，由于需要获得三边对应成比例的条件，常要由有关的边长作“比”并进行计算. 教学中要注意培养学生数形结合的意识.

本题也可利用判定定理 1 进行证明，注意对学生所采用的不同证法进行评价.

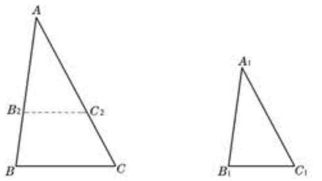


图 24－37

∴ $\frac{BC}{B_2C_2}=\frac{AB}{AB_2}$（平行于三角形一边的直线性质定理推论）.

由 $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$，即 $\frac{AB}{AB_2}=\frac{BC}{B_1C_1}$，得 $\frac{BC}{B_2C_2}=\frac{BC}{B_1C_1}$，

∴ $B_2C_2=B_1C_1$.

∴ $\triangle AB_2C_2\cong\triangle A_1B_1C_1$.

∵ $B_2C_2\parallel BC$，

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle AB_2C_2$（相似三角形预备定理）.

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.

由此得到：

相似三角形判定定理 3　如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应成比例，那么这两个三角形相似.

判定定理 3 可简述为：

三边对应成比例，两个三角形相似.

例题3　已知：如图 24－38，D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 的中点.

求证：$\triangle DEF\backsim\triangle ABC$.

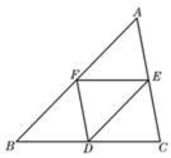


图 24－38

分析　DE、EF、FD 是 $\triangle ABC$ 的中位线，利用中位线的性质，可得 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 的三边对应成比例.

证明　∵　D、E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA 的中点，

∴ DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线.

得 $DE=\frac{1}{2}AB$，即 $\frac{DE}{AB}=\frac{1}{2}$.

同理可得 $\frac{EF}{BC}=\frac{1}{2}$，$\frac{FD}{AC}=\frac{1}{2}$.

∴ $\frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BC}=\frac{FD}{AC}$.

在 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 中，

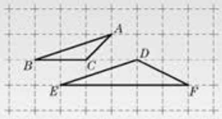
$$\frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BC}=\frac{FD}{CA},$$

∴ $\triangle DEF\backsim\triangle ABC$（三边对应成比例，两个三角形相似）.

第三节　相似三角形　27

练习 24.4(3)

1. 根据下列条件判定$\triangle ABC$和$\triangle DEF$是否相似，如果是，那么用符号表示出来.
   (1) $AB=2$ cm，$BC=3$ cm，$CA=4$ cm，
   $DE=10$ cm，$EF=15$ cm，$FD=20$ cm；
   (2) $AB=1$ cm，$BC=2$ cm，$CA=1.5$ cm，
   $DE=6$ cm，$EF=4$ cm，$FD=8$ cm.
2. 一个三角形框架模型的边长分别为 20 厘米、30 厘米、40 厘米，木工要以一根长 60 厘米的木条为一边，做一个与模型相似的三角形. 木工应该怎样选择其他两条边的长，才能使制作的三角形与模型三角形相似？三角形边长的选取方法可以有哪些？
3. 如图，$\triangle ABC$和$\triangle DEF$在边长为 1 个单位的方格纸中，它们的顶点在小正方形顶点位置，试判定$\triangle ABC$和$\triangle DEF$是否相似，为什么？



(第 3 题)

直角三角形全等，有特殊的判定定理. 同样，我们要探讨判定直角三角形相似的特殊定理.

直角三角形中有一个角是直角，于是，由相似三角形判定定理可知：有一锐角对应相等的两个直角三角形相似；两直角边对应成比例的两个直角三角形相似. 那么，斜边、直角边对应成比例的两个直角三角形一定相似吗？

问题4

如图 24-39，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle A_1B_1C_1$ 中，$\angle C=\angle C_1=90^\circ$，$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$. $\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$相似吗？为什么？

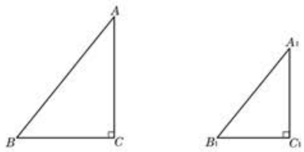


图 24-39

将问题中的已知条件与相似三角形判定定理 3 中的条件比较，可见要推出这两个直角三角形相似，只要 $\dfrac{CA}{C_1A_1}$ 与 $\dfrac{AB}{A_1B_1}$ $\left(\text{或 } \dfrac{BC}{B_1C_1}\right)$ 相等. 我们可以这样来推导：

28 第二十四章 相似三角形

练习 24.4(3)

1. (1) $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$；
   (2) $\triangle ABC\backsim\triangle EFD$.
2. 90 厘米、120 厘米，
   或 40 厘米、80 厘米，
   或 30 厘米、45 厘米.
3. $\triangle ABC\backsim\triangle FED$.

【本课重点】

导出关于直角三角形相似的判定定理，并进行初步运用.

问题 4

关于直角三角形全等的判定，有以斜边和一直角边为条件的定理，类比这一定理提出问题 4 进行讨论.

【注意事项】

相似三角形的判定定理 1、定理 2 和定理 3，都可用于判定两个直角三角形相似. 本课所说的“直角三角形相似的判定定理”，是指只适用于判定两个直角三角形相似的特殊定理.

推导问题 4 的结论的过程中，关键是利用已知比例式和勾股定理，导出这两个直角三角形的三边对应成比例的条件，然后运用判定定理 3 推出结论.

可让学生联系以前证明两个直角三角形全等的判定定理的经验，尝试解决问题.

例题 4

本题主要是直角三角形相似的判定定理的运用，有一定的综合要求.

对证明思路的分析，一方面可考虑将待证结论转化为证明 $\angle BCD=90^\circ$（或证明 $BC\parallel AD$），从而关注有关的角；另一方面可由已知条件考察 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DAC$ 之间的相似关系，由这两个三角形相似获得有关角的相等关系，从而解决问题. 其中，由已知线段的长度建立比例线段关系是一个难点，可引导学生利用图形直观和判断两个直角三角形所需条件进行分析和思考.

设 $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=k$，则 $AB=kA_1B_1$，$BC=kB_1C_1$.

∵ $\angle C=90^\circ$，$\angle C_1=90^\circ$，

∴ $CA^2=AB^2-BC^2$，$C_1A_1^2=A_1B_1^2-B_1C_1^2$，

得 $CA^2=k^2(A_1B_1^2-B_1C_1^2)=k^2C_1A_1^2$.

∴ $CA=kC_1A_1$，即 $\dfrac{CA}{C_1A_1}=k$.

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1},$$

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.

也可由 $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$，得 $\dfrac{AB^2}{A_1B_1^2}=\dfrac{BC^2}{B_1C_1^2}$，再利用比例的性质和勾股定理进行推导.

因此，直角三角形相似的判定，有以下定理：

直角三角形相似的判定定理　如果一个直角三角形的斜边及一条直角边与另一个直角三角形的斜边及一条直角边对应成比例，那么这两个直角三角形相似.

这个定理可简述为：

斜边和直角边对应成比例，两个直角三角形相似.

例题4　已知：如图 24－40，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAC=\angle ADC=90^\circ$，$AD=a$，$BC=b$，$AC=\sqrt{ab}$.

求证：$DC\perp BC$.

证明　∵ $\angle BAC=\angle ADC=90^\circ$，

∴ $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 都是直角三角形.

∵ $AD=a$，$BC=b$，$AC=\sqrt{ab}$，

∴ $AC^2=AD\cdot BC$，

得
$$\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{BC}.$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 与 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{BC},$$

∴ $\text{Rt}\triangle DCA\backsim\text{Rt}\triangle ABC$（斜边和直角边对应成比例，两个直角三角形相似）.

可知 $\angle DCA=\angle B$.

∵ $\angle B+\angle ACB=90^\circ$，

∴ $\angle DCA+\angle ACB=90^\circ$，即 $\angle DCB=90^\circ$.

∴ $DC\perp BC$.

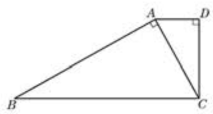
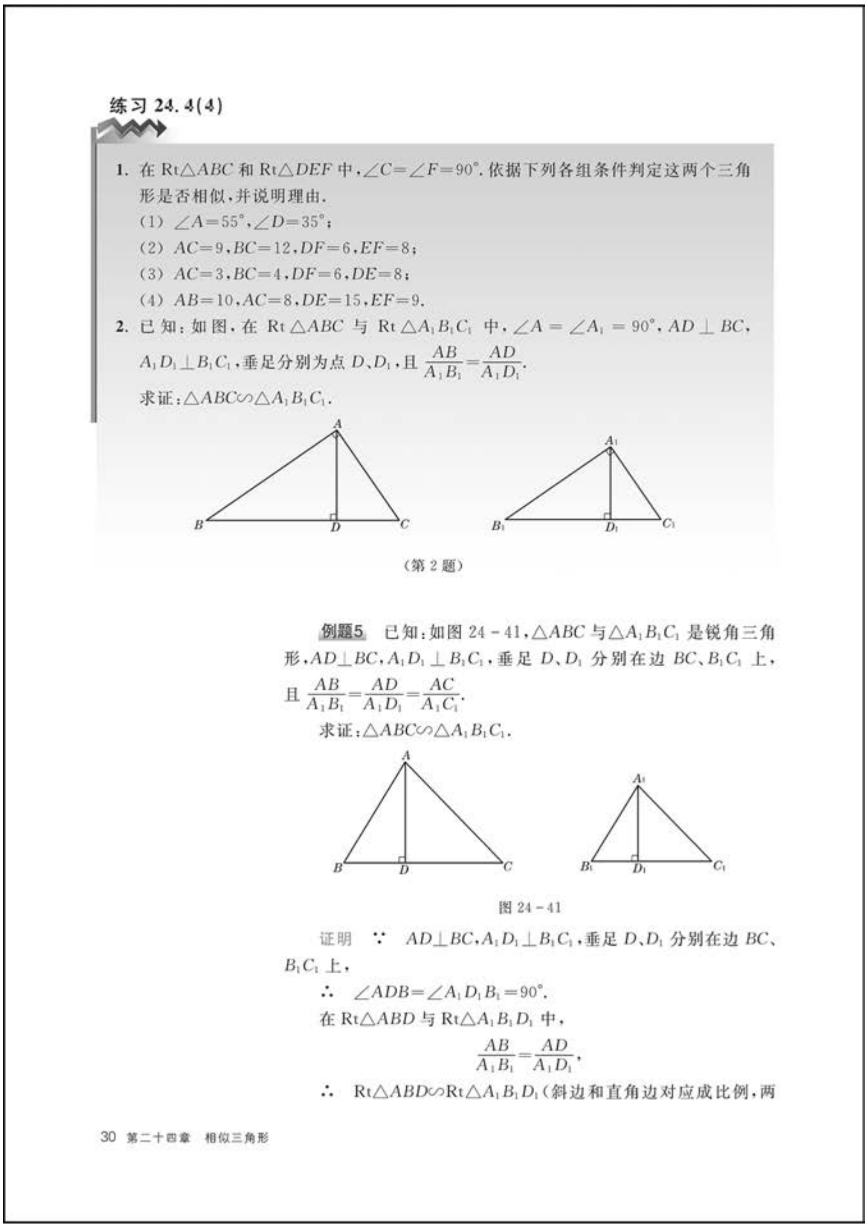


图 24－40

【注意事项】

在例题 4 的教学中，要让学生经历证明思路的分析过程和引导学生反思，熟悉其中的一些转化关系，如垂直与直角、比例式与乘积式、两个三角形的边对应成比例与角对应相等；并在解题活动中积累经验，比如利用图形的直观性分析问题、结合图形的特点构造比例、运用数形结合思想和化归思想等方面的经验.



练习 24.4(4)

1. 在 $Rt\triangle ABC$ 和 $Rt\triangle DEF$ 中，$\angle C=\angle F=90°$. 依据下列各组条件判定这两个三角形是否相似，并说明理由.

(1) $\angle A=55°$，$\angle D=35°$；

(2) $AC=9$，$BC=12$，$DF=6$，$EF=8$；

(3) $AC=3$，$BC=4$，$DF=6$，$DE=8$；

(4) $AB=10$，$AC=8$，$DE=15$，$EF=9$.

2. 已知：如图，在 $Rt\triangle ABC$ 与 $Rt\triangle A_1B_1C_1$ 中，$\angle A=\angle A_1=90°$，$AD\perp BC$，$A_1D_1\perp B_1C_1$，垂足分别为点 D、D_1，且 $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AD}{A_1D_1}$.

求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.

（第 2 题）

例题5 已知：如图 24－41，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 是锐角三角形，$AD\perp BC$，$A_1D_1\perp B_1C_1$，垂足 D、D_1 分别在边 BC、B_1C_1 上，且 $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AD}{A_1D_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}$.

求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.

图 24－41

证明 ∵ $AD\perp BC$，$A_1D_1\perp B_1C_1$，垂足 D、D_1 分别在边 BC、B_1C_1 上，

∴ $\angle ADB=\angle A_1D_1B_1=90°$.

在 $Rt\triangle ABD$ 与 $Rt\triangle A_1B_1D_1$ 中，

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AD}{A_1D_1},$$

∴ $Rt\triangle ABD\backsim Rt\triangle A_1B_1D_1$（斜边和直角边对应成比例，两

30 第二十四章 相似三角形

练习 24.4(4)

1. (1) 相似； (2) 相似；
(3) 不相似；(4) 相似.

2. 略.

【本课重点】

帮助学生掌握相似三角形判定定理的基本运用，同时提高综合运用知识的能力.

例题 5

本题的证明过程中两次运用了相似三角形判定定理，有一定的综合运用要求.

按照课程标准的要求，在一个证明题中，关于相似三角形判定定理的运用一般不超过两次.

【注意事项】

例题 5 是有关相似三角形判定的综合运用问题，也体现了控制相应难度的要求. 由本题可知，“如果一个锐角三角形的两边及第三边上的高与另一个锐角三角形的两边及第三边上的高对应成比例，那么这两个三角形相似”是真命题（或者将“锐角三角形”的条件放宽为“这两个三角形的第三边上的高都在三角形内”）.

对数学基础较薄弱的学生，例题 5 的学习会有一定的困难，那么可考虑将本题分解为“求证：(1) $\triangle ABD\backsim\triangle A_1B_1D_1$；(2) $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$”两个小题，完成证明后再综合起来讲解.

个直角三角形相似).

∴ $\angle B=\angle B_1$.

同理可得 $\angle C=\angle C_1$.

在$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$中,

$$\begin{cases}\angle B=\angle B_1,\\ \angle C=\angle C_1,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$(两角对应相等,两个三角形相似).

例题 6

本题的证明过程中,先利用三角形一边的平行线的性质为运用相似三角形的判定定理创造条件,再运用判定定理推出结论,体现了对相似三角形判定定理进行综合运用的要求.

本题的证明有多种方法,可让学生提出证明的思路和方法,进行交流、评议.

例题6 已知:如图 24-42,点 A_1、B_1、C_1 分别在射线 PM、PN、PT 上,$AB/\!/A_1B_1$,$BC/\!/B_1C_1$.

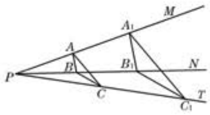


图 24-42

求证:$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.

证明 ∵ $AB/\!/A_1B_1$,

∴ $\dfrac{PB}{PB_1}=\dfrac{AB}{A_1B_1}$(三角形一边的平行线性质定理推论);

且 $\angle ABN=\angle A_1B_1N$.

∵ $BC/\!/B_1C_1$,

∴ $\dfrac{PB}{PB_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$(三角形一边的平行线性质定理推论);

且 $\angle CBN=\angle C_1B_1N$.

于是,得 $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$;

且 $\angle ABN+\angle CBN=\angle A_1B_1N+\angle C_1B_1N$,

即 $\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$.

本例也可以利用相似三角形判定定理1或定理3进行证明.

在$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$中,

$$\begin{cases}\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1},\\ \angle ABC=\angle A_1B_1C_1,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$(两边对应成比例且夹角相等,两个三角形相似).

练习 24.4(5)

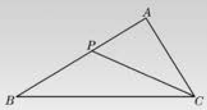
1. (1) $\angle ACP=\angle ABC$;
   (2) $AC^2=AP\cdot AB$ $\left(\text{或}\dfrac{AP}{AC}=\dfrac{AC}{AB}\right)$.

练习 24.4(5)

1. 如图,已知$\triangle ABC$中,$\angle ACB>\angle ABC$,P(与点 B 不重合)是边 AB 上的一点,那么

   (1) 当$\angle ACP$满足什么条件时,$\triangle ABC$与$\triangle ACP$相似?

   (2) 当 AC 与 AP、AB 满足怎样的数量关系时,$\triangle ABC$与$\triangle ACP$相似?



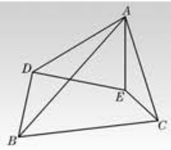
(第1题)

【注意事项】

在例题 5、例题 6 的教学中,要展现对证明思路进行探究、分析的过程.可引导学生将"由条件联想可知"和"从结论探索需知"结合起来进行思考.这两个例题都有一定的综合运用知识的要求,可根据学生的实际情况,适当调整例题的难度.

2. 已知：如图，$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$.

求证：$\triangle ADB \backsim \triangle AEC$.



（第 2 题）

24.5　相似三角形的性质

根据相似三角形的定义，可以直接得到相似三角形的性质：

相似三角形的对应角相等，对应边成比例.

如果两个三角形相似，那么这两个三角形的对应高的比、对应中线的比、对应角平分线的比，分别与相似比有什么关系？

问题 1

如图 24－43，已知 $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$，顶点 A、B、C 分别与 A_1、B_1、C_1 对应，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的相似比为 k，AD、A_1D_1 分别是 $\triangle ABC$、$\triangle A_1B_1C_1$ 的角平分线. 那么 $\frac{AD}{A_1D_1}$ 的值是否也等于 k？为什么？

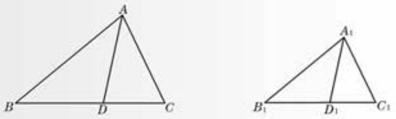


图 24－43

由已知条件可知 $\triangle ABD$、$\triangle A_1B_1D_1$ 有两个角对应相等，于是可推出结论是肯定的. 推导过程如下：

$\because$　$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$，顶点 A、B、C 分别与 A_1、B_1、C_1 对应，

$\therefore$　$\angle B=\angle B_1$，$\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$（相似三角形的对应角相等）.

$\because$　AD、A_1D_1 分别是 $\triangle ABC$、$\triangle A_1B_1C_1$ 的角平分线，

即　$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC$，$\angle B_1A_1D_1=\frac{1}{2}\angle B_1A_1C_1$，

$\therefore$　$\angle BAD=\angle B_1A_1D_1$.

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle A_1B_1D_1$ 中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle B_1,\\ \angle BAD=\angle B_1A_1D_1,\end{cases}$$

32　第二十四章　相似三角形

2. 略.

【本课重点】

导出相似三角形的性质定理 1，并进行初步运用.

问题 1

通过提出问题，引导学生探索相似三角形的对应角平分线的比与相似比之间的关系，进而获得相似三角形性质定理 1.

推导问题 1 的结论，是一个综合运用知识解决问题的过程.

教学中，要让学生参与提出问题和解决问题的过程.

【教学目标】

（1）经历对相似三角形性质进行探索的过程，提高数学思考、分析能力和探究活动能力，体会相似三角形中的变量与不变量.

（2）掌握相似三角形的性质，能运用相似三角形的性质解决简单的几何问题和实际问题，并体会其中蕴涵的数学思想.

【注意事项】

（1）相似三角形的对应角相等，对应边成比例，这是根据相似三角形的定义直接得到的性质；由此联想到它们对应的特殊线段及周长、面积，这样就形成了对于“对应特殊线段的比”“周长比”“面积比”分别与相似比之间的关系进行探究的三个问题. 整个相似三角形性质的学习内容，就是围绕这些问题展开，通过探究，获得结论并进行运用.

（2）“相似比”是揭示相似三角形本质特征与重要性质的一个基本概念，也是有关几何证明与计算中经常运用的一个数值. 在相似三角形性质定理 2 和定理 3 的证明过程中，充分体现了“相似比”的运用，在教学中要引导学生体会.

在获得问题 1 的结论的基础上，让学生猜测关于相似三角形的对应高的比、对应中线的比的结论，再归纳相似三角形性质定理 1.

例题 1

本题是相似三角形判定定理与性质定理 1 的综合运用，有较高的要求.

对于证明思路的分析，可从待证的比例式着眼，这个比例式表示$\triangle ABC$的两条高与$\triangle A_1B_1C_1$的两条高对应成比例. 于是只要证明$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$相似就可推出结论. 再利用已知条件，可得到判定这两个三角形相似所需的条件. 在明确了证明思路的基础上，可让学生先表述证明过程，然后进行讲评，指导学生注意表达的条理性、严密性和规范性.

∴ $\triangle ABD \backsim \triangle A_1B_1D_1$（两角对应相等，两个三角形相似）.

得 $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AD}{A_1D_1}$（相似三角形的对应边成比例），

即 $\dfrac{AD}{A_1D_1}=k$.

用类似的方法可以得到，相似三角形的对应高的比、对应中线的比也等于相似比. 由此归纳得到：

相似三角形性质定理 1　相似三角形对应高的比、对应中线的比和对应角平分线的比都等于相似比.

例题 1　已知：如图 24－44，在$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$中，$\angle C=\angle C_1$，AD、BE是$\triangle ABC$的高，A_1D_1、B_1E_1是$\triangle A_1B_1C_1$的高，点D、E、D_1、E_1分别在边BC、AC、B_1C_1、A_1C_1上，且$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AD}{A_1D_1}$.

求证：$\dfrac{AD}{A_1D_1}=\dfrac{BE}{B_1E_1}$.

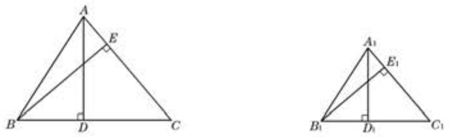


图 24－44

分析　要证明结论正确，只要证明$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

证明　∵ AD、A_1D_1分别是$\triangle ABC$、$\triangle A_1B_1C_1$的高，

∴ $\angle ADB=\angle A_1D_1B_1=90°$.

在$Rt\triangle ABD$与$Rt\triangle A_1B_1D_1$中，

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AD}{A_1D_1},$$

∴ $Rt\triangle ABD \backsim Rt\triangle A_1B_1D_1$（斜边和直角边对应成比例，两个直角三角形相似）.

得 $\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$（相似三角形的对应角相等）.

在$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$中，

$$\begin{cases}\angle C=\angle C_1,\\ \angle ABC=\angle A_1B_1C_1,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$（两角对应相等，两个三角形相似）.

∵ AD、BE是$\triangle ABC$的高，A_1D_1、B_1E_1是$\triangle A_1B_1C_1$的高，

∴ $\dfrac{AD}{A_1D_1}=\dfrac{BE}{B_1E_1}=\dfrac{AB}{A_1B_1}$（相似三角形对应高的比等于相似比）.

第三节　相似三角形 33

【注意事项】

（1）在研究和运用相似三角形的性质时，要注意相似比与表述这两个三角形相似的顺序有关.

（2）关于“相似三角形的对应高的比、对应中线的比都等于相似比”的推导，安排在练习题中，要关注落实的情况.

练习 24.5(1)

1. 已知$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$，顶点 A、B、C 分别与 A_1、B_1、C_1 对应，$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{3}{2}$，$BE$、$B_1E_1$ 分别是它们的对应中线，且 $BE=6$. 求 B_1E_1 的长.
2. 已知$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$，顶点 A、B、C 分别与 A_1、B_1、C_1 对应，$AC=12$，$A_1C_1=9$，$\angle A_1$ 的平分线 A_1D_1 的长为 6，求$\angle A$ 的平分线的长.
3. 求证：相似三角形对应高的比等于相似比.

三角形的周长是三边长之和，面积可用一边及这边上的高来表示. 可见两个相似三角形的周长比、面积比与相似比之间有直接关系.

问题2

如图 24－45，已知$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$，顶点 A、B、C 分别与 A_1、B_1、C_1 对应，$\triangle ABC$ 与$\triangle A_1B_1C_1$ 的相似比为 k，把这两个三角形的周长分别记作 $C_{\triangle ABC}$、$C_{\triangle A_1B_1C_1}$，那么 $\frac{C_{\triangle ABC}}{C_{\triangle A_1B_1C_1}}$ 的值是否等于 k？为什么？

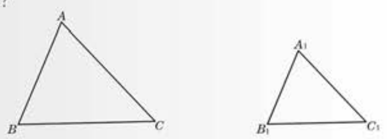


图 24－45

这个结论可直接利用比例的等比性质证明.

可以推出 $\frac{C_{\triangle ABC}}{C_{\triangle A_1B_1C_1}}=k$. 推导过程如下：

$\because$ $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$，顶点 A、B、C 分别与 A_1、B_1、C_1 对应，$\triangle ABC$ 与$\triangle A_1B_1C_1$ 的相似比为 k，

$\therefore$ $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}=k$.

得 $AB=kA_1B_1$，$BC=kB_1C_1$，$CA=kC_1A_1$.

$$\therefore \frac{C_{\triangle ABC}}{C_{\triangle A_1B_1C_1}}=\frac{AB+BC+CA}{A_1B_1+B_1C_1+C_1A_1}=\frac{kA_1B_1+kB_1C_1+kC_1A_1}{A_1B_1+B_1C_1+C_1A_1}=k.$$

性质定理 1 和定理 2 可以概括为：相似三角形中对应线段（高、中线、角平分线）及周长的比都等于相似比.

于是得到：

相似三角形性质定理 2　相似三角形的周长的比等于相似比.

34 第二十四章 相似三角形

练习 24.5(1)

1. 4.

2. 8.

3. 略.

【本课重点】

导出相似三角形的性质定理 2 和性质定理 3，并进行初步运用.

问题 2

通过提出问题，引导学生探索相似三角形的周长比与相似比之间的关系，进而获得相似三角形性质定理 2.

【注意事项】

在推导问题 2 的结论时，课本中采用的方法是前面证明比例的等比性质时所用的方法. 选用这种方法的原因，一是如此利用比值对比例式进行变形比较常用，让学生增强过程体验；二是学生对于等比性质的运用可能不太熟悉.

教学中可直接利用等比性质推导问题 2 的结论，在“边款”中已指明.

问题 3

通过提出问题，引导学生探索相似三角形的面积比与相似比之间的关系，进而获得相似三角形性质定理 3.

为推导问题 3 的结论，从利用三角形的面积公式考虑，需要作出三角形的一条高. 可由此引导学生进行分析，通过添置辅助线，将两个三角形的面积比用线段比表示出来，从而推出结论.

问题3

如图 24－46，已知$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，顶点 A、B、C 分别与 A_1、B_1、C_1 对应，$\triangle ABC$ 与$\triangle A_1B_1C_1$ 的相似比为 k，把这两个三角形的面积分别记作 $S_{\triangle ABC}$ 及 $S_{\triangle A_1B_1C_1}$，那么 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}}$ 的值是否也等于 k？为什么？

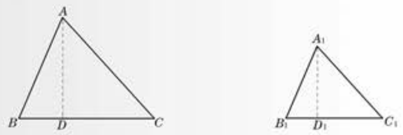


图 24－46

作$\triangle ABC$ 的高 AD，再作$\triangle A_1B_1C_1$ 的高 A_1D_1，则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD,\quad S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}B_1C_1\cdot A_1D_1.$$

由相似三角形对应高的比等于相似比，可知

$$\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AD}{A_1D_1}=k，得 BC=kB_1C_1，AD=kA_1D_1.$$

$$所以\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot AD}{\frac{1}{2}B_1C_1\cdot A_1D_1}=\frac{\frac{1}{2}kB_1C_1\cdot kA_1D_1}{\frac{1}{2}B_1C_1\cdot A_1D_1}=k^2.$$

于是得到：

相似三角形性质定理 3　**相似三角形的面积的比等于相似比的平方.**

例题 2

本题是相似三角形性质定理 2 的初步运用.

在已知条件中，指明了$\triangle ABC$ 与$\triangle A_1B_1C_1$ 相似及其顶点的对应关系，于是这两个三角形的对应边是明确的. 利用相似三角形性质定理 2，可求出边 BC、A_1B_1 的长. 要注意在相似三角形的符号表示中，其顶点之间的对应关系有通常意义下的约定而不是严格的规定，因此在审题时要注意题中对于相似三角形顶点之间对应关系的表述.

例题2　已知$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，顶点 A、B、C 分别与 A_1、B_1、C_1 对应，它们的周长分别为 48 和 60，且 $AB=12$，$B_1C_1=25$. 求 BC、A_1B_1 的长.

解　∵　$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，顶点 A、B、C 分别与 A_1、B_1、C_1 对应，

∴　$\frac{C_{\triangle ABC}}{C_{\triangle A_1B_1C_1}}=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$(相似三角形的周长的比等于相似比).

由 $C_{\triangle ABC}=48$，$C_{\triangle A_1B_1C_1}=60$，$AB=12$，$B_1C_1=25$，得

$$\frac{48}{60}=\frac{12}{A_1B_1}=\frac{BC}{25}.$$

∴　$A_1B_1=15$，$BC=20$.

第三节　相似三角形　35

【注意事项】

在相似三角形性质定理 3 的运用中，由相似比求面积比，学生一般掌握较好；而由面积比求相似比时，学生容易出错，要提醒学生注意.

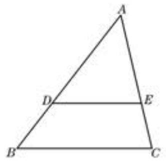


图 24－47

例题3 如图 24－47，已知点 D、E 分别在$\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 上，$DE/\!/BC$，$DE=6$，$BC=9$，$S_{\triangle ADE}=16$. 求 $S_{\triangle ABC}$ 的值.

解 ∵ $DE/\!/BC$，

∴ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$（相似三角形的预备定理）.

得 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{DE}{BC}\right)^2$（相似三角形的面积的比等于相似比的平方）.

由 $DE=6$，$BC=9$，$S_{\triangle ADE}=16$，得

$$\frac{16}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{6}{9}\right)^2.$$

∴ $S_{\triangle ABC}=36$.

练习 24.5(2)

1. 已知两个三角形相似，根据下列数据填表：

相似比	$\frac{1}{2}$	5					
周长的比			$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{30}$			
面积的比					$\frac{9}{4}$	100	0.01

2. (1) 如果把一个三角形的三边的长扩大为原来的 100 倍，那么这个三角形的面积扩大为原来的________倍；
   (2) 如果一个三角形保持形状不变但面积扩大为原来的 100 倍，那么这个三角形的边长扩大为原来的________倍.
3. 已知：D、E、F 分别是$\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 的中点.
   求证：$S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle DEF}$.

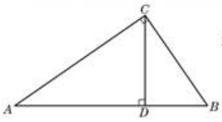


图 24－48

例题4 已知：如图 24－48，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，CD 是边 AB 上的高.

求证：(1) $AC^2=AD \cdot AB$；

(2) $CD^2=AD \cdot BD$.

证明 (1)∵ $\angle ACB=90°$，CD 是$\triangle ABC$ 的边 AB 上的高，

∴ $\angle ADC=\angle ACB=90°$.

在$\triangle ACD$ 与$\triangle ABC$ 中，

$$\begin{cases}\angle A=\angle A,\\ \angle ADC=\angle ACB,\end{cases}$$

36 第二十四章 相似三角形

例题 3

本题是相似三角形性质定理 3 的初步运用.

练习 24.5(2)

1. 略.

2. (1) 10 000； (2) 10.

3. 略.

【本课重点】

运用相似三角形的有关性质定理解决简单的几何证明和计算问题，帮助学生增强综合运用知识的能力和演绎推理能力.

例题 4

本题的背景是以前课本在直角三角形中所说的射影定理. 在证明过程中，运用了相似三角形的判定定理与性质定理.

【注意事项】

(1) 在例题 4 的教学中，证明前应重视“分析”，并指出：“AC 是 AD 与 AB 的比例中项”，其符号语言就是“$AC^2=AD \cdot AB$”；证明乘积式的一般思路就是将乘积式转化为比例式加以证明.

(2) 学生对于相似三角形性质定理的理解和直接运用，一般来说困难不大；但涉及这个性质定理与比例线段性质、平行线分线段成比例定理、相似三角形的判定等知识的综合运用时，容易出现混乱. 要控制教学的难度，加强学习指导.

∴ $\triangle ACD \backsim \triangle ABC$(两角对应相等，两个三角形相似).

得 $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AD}{AC}$(相似三角形的对应边成比例).

∴ $AC^2=AD\cdot AB$.

(2) ∵ $\angle ACB=90°$,

∴ $\angle A+\angle B=90°$.

∵ CD 是边 AB 上的高,

∴ $\angle ADC=90°$，得 $\angle A+\angle ACD=90°$.

∴ $\angle A+\angle B=\angle A+\angle ACD$.

∴ $\angle B=\angle ACD$.

在$\triangle ADC$与$\triangle CDB$中,

$$\begin{cases}\angle ADC=\angle CDB,\\ \angle ACD=\angle B,\end{cases}$$

∴ $\triangle ADC \backsim \triangle CDB$(两角对应相等，两个三角形相似).

得 $\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{AD}{CD}$(相似三角形的对应边成比例).

∴ $CD^2=AD\cdot BD$.

想一想

在图 24－48 中，由 $Rt\triangle ABC$ 的直角边 AC 平方的表达式，猜想直角边 BC 与线段 BD、AB 之间具有怎样的数量关系. 并证明所猜想的结论.

例题5 如图 24－49，已知点 D、E 分别在$\triangle ABC$的边 AB 和 AC 上，$DE /\!/ BC$，$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{1}{3}$，四边形 $DBCE$ 的面积等于 16. 求$\triangle ABC$的面积.

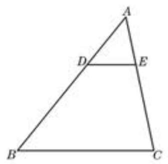


图 24－49

解 ∵ $DE /\!/ BC$,

∴ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$(相似三角形的预备定理).

得 $\dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\dfrac{DE}{BC}\right)^2$(相似三角形的面积的比等于相似比的平方).

∵ $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{1}{3}$,

∴ $\dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{1}{9}$.

设 $S_{\triangle ADE}=x$，则 $S_{\triangle ABC}=9x$.

由 $S_{四边形DBCE}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ADE}$，得 $9x-x=16$，解得 $x=2$.

∴ $S_{\triangle ABC}=18$.

想一想

在图 24－48 中，

$BC^2=BD\cdot AB$.

证明方法与例题 4(1)类似.

例题 5

本题是相似三角形性质定理 3 的基本运用.

在分析时，要抓住性质定理 3 的条件与结论；要注意题中的$\triangle ABC$、$\triangle ADE$、四边形 $DBCE$ 之间的面积关系.

解题过程中，涉及设元、列方程、解方程等代数处理方法；体现了字母表示数、数形结合的思想以及方程思想.

【注意事项】

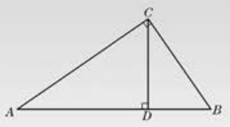
通过例题 4 和“想一想”，让学生知道如图 24－48 的直角三角形中相关线段的数量关系式呈现出一定规律，但不要求将所得结论概括为射影定理；教学中不要求补充射影定理及其运用.

练习 24.5(3)

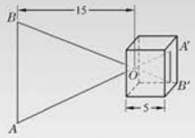
1. 如图，$\triangle ABC$ 中 $\angle C=90°$，CD 是 AB 边上的高.

(1) 已知 $BD=4$ cm，$CD=6$ cm，求 AD 的长；

(2) 已知 $BD=9$ cm，$BC=15$ cm，求 AB 的长.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. （洞孔成像）如图，$AB /\!/ A'B'$，根据图中尺寸，可知物像 $A'B'$ 的长是物 AB 的长的 $\frac{1}{3}$. 你能说出其中的道理吗？

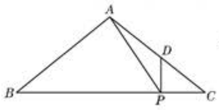


图 24－50

例题6 如图 24－50，已知$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=10$，$BC=16$，点 P、D 分别在边 BC、AC 上，$BP=12$，$\angle APD=\angle B$. 求 CD 的长.

解 ∵ $\angle APC=\angle B+\angle PAB$，$\angle APC=\angle APD+\angle DPC$，

又 $\angle APD=\angle B$，

∴ $\angle PAB=\angle DPC$.

∵ $AB=AC$，

∴ $\angle B=\angle C$.

在$\triangle ABP$ 与$\triangle PCD$ 中，

$$\begin{cases}\angle PAB=\angle DPC,\\ \angle B=\angle C,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABP \backsim \triangle PCD$（两角对应相等，两个三角形相似）.

得 $\frac{BP}{CD}=\frac{AB}{PC}$ （相似三角形的对应边成比例）.

由 $AB=10$，$BP=12$，$BC=16$，$PC=BC-PB$，得

$$\frac{12}{CD}=\frac{10}{16-12}.$$

∴ $CD=4.8$.

例题7 如图 24－51，正方形 $DEFG$ 的边 EF 在$\triangle ABC$ 的边 BC 上，顶点 D、G 分别在边 AB、AC 上. 已知$\triangle ABC$ 的边 BC 长 60 厘米，高 AH 为 40 厘米，求正方形 $DEFG$ 的边长.

分析 由正方形 $DEFG$ 的边 DG 与 BC 平行，可知

38 第二十四章 相似三角形

练习 24.5(3)

1. (1) 9 cm； (2) 25 cm.

2. 略.

【本课重点】

综合运用相似三角形的判定定理、性质定理及其他有关知识解决问题，帮助学生巩固所学的知识.

例题 6

在本题进行几何计算的过程中，关键是推导$\triangle ABP$ 与$\triangle PCD$ 相似. 对解题思路的分析，要重视利用图形的直观性，从线段 CD 联系到$\triangle PCD$，再观察与$\triangle PCD$ 可能相似的三角形，发现并抓住解决问题的关键.

例题 7

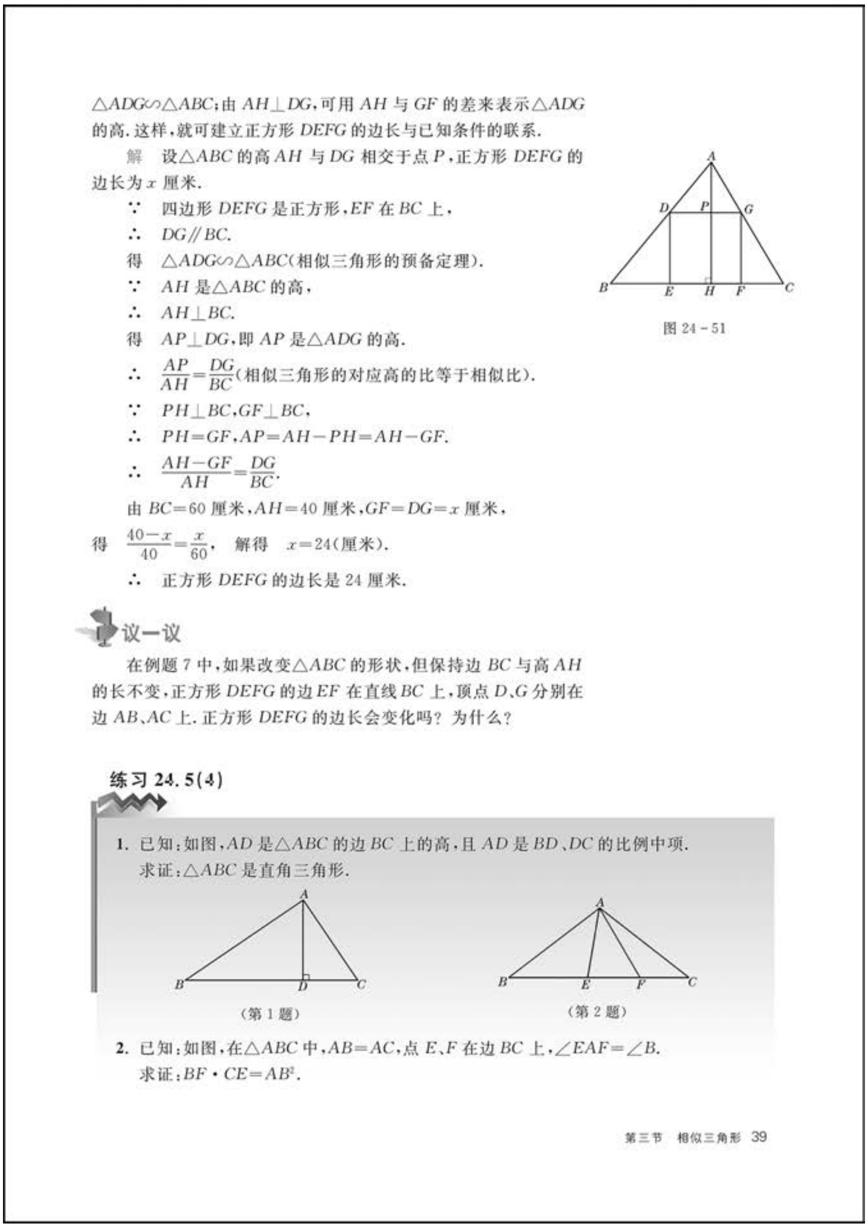
本题在图形的组合方面有典型性，在知识的综合运用方面有较高的要求.

在解题思路的分析中，教师的讲解可适当多一些.

【注意事项】

(1) 在例题 6 的教学反思中，可引导学生将证明$\triangle ABP$ 与$\triangle PCD$ 相似的过程一般化. 把点 P 看作是等腰三角形 ABC 的底边 BC 上的一个动点，保持$\angle APD=\angle B$（其中点 D 在边 AC 上），则点 P 在 BC 上移动的过程中，总有$\triangle ABP$ 与$\triangle PCD$ 相似.

(2) 例题 6、例题 7 主要是对相似三角形判定与性质定理进行运用和巩固，有一定的综合要求，教师可以根据学生的实际情况对例题作适当调整.



$\triangle ADG\backsim\triangle ABC$;由 $AH\perp DG$,可用 AH 与 GF 的差来表示$\triangle ADG$的高.这样,就可建立正方形 $DEFG$ 的边长与已知条件的联系.

解 设$\triangle ABC$的高 AH 与 DG 相交于点 P,正方形 $DEFG$ 的边长为 x 厘米.

∵ 四边形 $DEFG$ 是正方形,EF 在 BC 上,

∴ $DG\parallel BC$.

得 $\triangle ADG\backsim\triangle ABC$(相似三角形的预备定理).

∵ AH 是$\triangle ABC$的高,

∴ $AH\perp BC$.

得 $AP\perp DG$,即 AP 是$\triangle ADG$的高.

∴ $\dfrac{AP}{AH}=\dfrac{DG}{BC}$(相似三角形的对应高的比等于相似比).

∵ $PH\perp BC$,$GF\perp BC$,

∴ $PH=GF$,$AP=AH-PH=AH-GF$.

∴ $\dfrac{AH-GF}{AH}=\dfrac{DG}{BC}$.

由 $BC=60$ 厘米,$AH=40$ 厘米,$GF=DG=x$ 厘米,

得 $\dfrac{40-x}{40}=\dfrac{x}{60}$, 解得 $x=24$(厘米).

∴ 正方形 $DEFG$ 的边长是 24 厘米.

图 24－51

议一议

在例题 7 中,如果改变$\triangle ABC$的形状,但保持边 BC 与高 AH 的长不变,正方形 $DEFG$ 的边 EF 在直线 BC 上,顶点 D、G 分别在边 AB、AC 上.正方形 $DEFG$ 的边长会变化吗?为什么?

练习 24.5(4)

1. 已知:如图,AD 是$\triangle ABC$的边 BC 上的高,且 AD 是 BD、DC 的比例中项.
求证:$\triangle ABC$ 是直角三角形.

(第 1 题)　　(第 2 题)

2. 已知:如图,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,点 E、F 在边 BC 上,$\angle EAF=\angle B$.
求证:$BF\cdot CE=AB^2$.

第三节 相似三角形 39

议一议

改变例题 7 中的已知条件,得到"议一议"的问题,可知正方形 $DEFG$ 的边长与$\triangle ABC$的形状无关,只与$\triangle ABC$的边 BC 和高 EF 的长有关.

练习 24.5(4)

1. 提示:先证明$\triangle ABD\backsim\triangle CAD$.
2. 提示:先证明$\triangle ABF\backsim\triangle ECA$.

【注意事项】

在例题 7 教学后让学生"议一议",是对学生进行解题回顾和小结的引导.要重视培养学生反思学习的习惯和能力.

还可将例题 7 进行一般化.设边 $BC=a$,高 $AH=h$,那么正方形 $DEFG$ 的边长 $x=\dfrac{ah}{a+h}$.

Pingmian Xiangliang
De Xianxingyunsuan

第四节　平面向量的线性运算

24.6　实数与向量相乘

我们知道，几个相同的数连加的运算是乘法，n 个 a 连加就表示为 na（其中 n 为正整数）．

思考

几个相同的向量连加，是否能像几个相同的数连加一样，把它表示为乘法运算的形式？

我们先讨论一个具体事例：

已知非零向量 $\vec{a}$，那么

$$\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}=?$$

$$(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})=?$$

运用向量加法运算的法则，如图 24-52，在平面内取一点 O，作向量 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，则 $\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$．

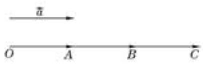


图 24-52

这个向量 $\overrightarrow{OC}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相同；它的长度是 $|\vec{a}|$ 的 3 倍，即 $|\overrightarrow{OC}|=3|\vec{a}|$．

我们就把 $\overrightarrow{OC}$ 表示为 $\overrightarrow{OC}=\vec{a}\cdot 3=3\vec{a}$，即

$$\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}=3\vec{a}.$$

类似地，设 $(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})=\vec{b}$，则 $\vec{b}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相反；它的长度是 $|\vec{a}|$ 的 3 倍，即 $|\vec{b}|=3|\vec{a}|$．于是，得 $\vec{b}=-\overrightarrow{OC}$．这时，就把 $\vec{b}$ 表示为 $\vec{b}=(-\vec{a})\cdot 3=-(3\vec{a})=-3\vec{a}$，即

$$(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})=-3\vec{a}.$$

在图 24-52 中，向量 $\overrightarrow{OB}$ 的方向与 $\overrightarrow{OC}$ 的方向相同；它的长度是 $|\overrightarrow{OC}|$ 的 $\frac{2}{3}$，即 $|\overrightarrow{OB}|=\frac{2}{3}|\overrightarrow{OC}|$．这时，就说 $\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$．

一般地，设 n 为正整数，$\vec{a}$ 为向量，那么我们用 $n\vec{a}$ 表示 n 个 $\vec{a}$ 相加；用 $-n\vec{a}$ 表示 n 个 $-\vec{a}$ 相加．又当 m 为正整数时，$\frac{n}{m}\vec{a}$ 表示与 $\vec{a}$ 同向且长度为 $\frac{n}{m}|\vec{a}|$ 的向量．

设 p 为一个正数，实际上，$p\vec{a}$ 就是将 $\vec{a}$ 的长度进行放缩，而方向保持不变；$-p\vec{a}$ 也是将 $\vec{a}$ 的长度进行放缩，但方向变为反向．

在上面认识的基础上，我们来规定向量的一种新的运算，即实数与向量相乘的运算．

40　第二十四章　相似三角形

【本课重点】

引进实数与向量相乘的运算，使学生掌握实数与向量相乘的表示方法和画图方法．

思考

引导学生类比数的乘法，探讨数与向量相乘的运算．

分别以 3 个 $\vec{a}$ 相加、3 个 $-\vec{a}$ 相加为例，利用图形直观地解释 $3\vec{a}$、$-3\vec{a}$ 的含义，并引出数 $\frac{2}{3}$ 与向量相乘的表示；再分别指出正整数、负整数、正分数与向量相乘的含义．

通过讨论和归纳，为引进实数与向量相乘的运算确立认知基础．

【教学目标】

（1）理解实数与向量相乘的意义，掌握实数与向量相乘的表示方法；对于给定的一个非零实数和一个非零向量，能画出它们相乘所得的向量．

（2）知道实数与向量相乘的运算律，会依据运算律对向量算式进行计算、化简．

（3）知道平行向量定理，会用向量关系式表示两个向量的平行关系；知道单位向量的意义，知道一个非零向量与同方向的单位向量之间的联系．

（4）在从数的运算到向量的运算的认识过程中体会类比的思想；在实数与向量相乘和平行向量定理的学习中体会代数与几何的联系．

【注意事项】

本节的主要内容是实数与向量相乘的定义、运算律及其初步运用．内容的展开，以问题、例题为载体，从特殊到一般、从具体到抽象逐步递进，注重基本知识的归纳和形成．

实数与向量相乘，所得向量的方向与原来的向量同向还是反向，取决于实数是正数还是负数. 因此在定义中要分类规定实数与向量相乘的意义，并指出其中的数为 0 或向量为$\vec{0}$时所得的积为零向量.

要让学生联系前面对整数与向量相乘的具体分析，认识实数与向量相乘的规定的合理性.

要让学生明确“$k\vec{a}\,/\!/\,\vec{a}$”.

例题 1

本题是根据实数与向量相乘的意义画图，让学生通过操作活动，体会实数与向量相乘的几何表示.

通过本题，指出关于实数与向量相乘运算的画图方法. 要让学生学会操作，并知道无理数与向量相乘时，通常对这个无理数取它的近似值.

例题 2

本题是实数与向量相乘的定义在向量关系的表示中的运用.

通过分析图中一个向量与已知向量所具有的平行关系和长度关系，把这个向量表示为一个实数与已知向量相乘的积.

要注意向量有关知识的复习和平行四边形有关知识的综合.

设 k 是一个实数，$\vec{a}$ 是向量，那么 k 与 $\vec{a}$ 相乘所得的积是一个向量，记作 $k\vec{a}$.

如果 $k\neq 0$，且 $\vec{a}\neq\vec{0}$，那么 $k\vec{a}$ 的长度 $|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$；$k\vec{a}$ 的方向：当 $k>0$ 时 $k\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同方向；当 $k<0$ 时 $k\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反方向（图 24－53）.

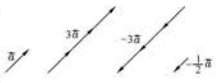


图 24－53

如果 $k=0$ 或 $\vec{a}=\vec{0}$，那么 $k\vec{a}=\vec{0}$.

根据实数与向量相乘的意义，可知 $k\vec{a}\,/\!/\,\vec{a}$.

$k\vec{a}$ 也表示实数 k 与向量 $\vec{a}$ 相乘的运算. 规定点把实数写在向量前面并省略乘号；注意不要将表示向量的箭头写在数字上面.

例题1 已知非零向量 $\vec{a}$，求作 $\frac{5}{2}\vec{a}$，$-\sqrt{3}\vec{a}$.

解 如图 24－54，在平面内任取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$.

在射线 OA 上，取 $OB=\frac{5}{2}OA$，则$\overrightarrow{OB}=\frac{5}{2}\vec{a}$；

在射线 OA 的反向延长线上，取 $OC=\sqrt{3}OA$，则$\overrightarrow{OC}=-\sqrt{3}\vec{a}$.

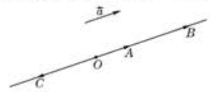


图 24－54

$\sqrt{3}OA$ 可用几何方法（运用勾股定理）准确作出. 一般可通过取$\sqrt{3}$的近似值作接近于$\sqrt{3}OA$的线段.

例题2 如图 24－55，在平行四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别为各边的中点，EG 与 FH 相交于点 O. 设$\overrightarrow{AD}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BA}=\vec{b}$，试用向量 $\vec{a}$ 或 $\vec{b}$ 表示向量$\overrightarrow{OE}$、$\overrightarrow{OF}$，并写出图中与$\overrightarrow{OE}$相等的向量.

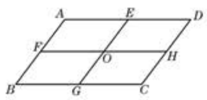


图 24－55

解 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，且 E、F、G、H 分别为各边的中点，由平行四边形的判定与性质可知，EG、AB、DC 互相平行且相等，FH、BC、AD 互相平行且相等；EG 与 FH 互相平分于点 O. 所以

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{FA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\vec{b};$$

$$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{EA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\vec{a}.$$

与$\overrightarrow{OE}$相等的向量有：$\overrightarrow{BF}$、$\overrightarrow{FA}$、$\overrightarrow{GO}$、$\overrightarrow{CH}$、$\overrightarrow{HD}$.

例题3 如图 24－56，已知点 D、E 分别在$\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上，$DE/\!/BC$，$7AD=4AB$，试用向量$\overrightarrow{BC}$表示向量$\overrightarrow{DE}$.

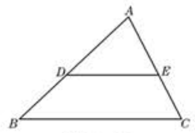


图 24－56

解 $\because$ $DE/\!/BC$，

$\therefore$ $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{4}{7}$（三角形一边的平行线性质定理）.

第四节 平面向量的线性运算 41

【注意事项】

关于实数与向量相乘的运算，课本中是通过代数的思考和分析引进的，而在“边款”中指出了它与向量放缩之间的联系，作为实数与向量相乘的一种几何解释. 也可将向量的放缩运动作为认识实数与向量相乘的起点，通过简单的说明后，给出实数与向量相乘的定义. 这是引进这一运算的另一条思路，教学时可进行尝试.

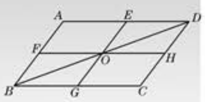
得 $DE=\frac{4}{7}BC$.

∵ $|\overrightarrow{DE}|=DE=\frac{4}{7}BC=\frac{4}{7}|\overrightarrow{BC}|$，$\overrightarrow{DE}$与$\overrightarrow{BC}$同向，

∴ $\overrightarrow{DE}=\frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$.

练习 24.6(1)

1. 已知非零向量$\vec{a}$，求作：(1) $\frac{7}{4}\vec{a}$；(2) $-2\vec{a}$.
2. 以非零向量$\vec{a}$为参照，分别说出向量$4\vec{a}$、$-\frac{5}{3}\vec{a}$、$-2(-\vec{a})$的方向和长度.
3. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别为各边的中点. 设$\overrightarrow{BG}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BF}=\vec{b}$，试用向量$\vec{a}$、$\vec{b}$表示向量$\overrightarrow{FH}$、$\overrightarrow{DC}$和$\overrightarrow{BD}$.



（第 3 题）

图 24－57(1)

图 24－57(2)

例题4 已知非零向量$\vec{a}$，求作：

(1) $2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{a}$；(2) $\frac{3}{2}\vec{a}-2\vec{a}$.

解 (1) 如图 24－57(1)，作向量$\overrightarrow{OA}=2\vec{a}$，再作$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{a}$，则

$$\overrightarrow{OB}=2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{a}.$$

(2) $\frac{3}{2}\vec{a}-2\vec{a}=\frac{3}{2}\vec{a}+(-2\vec{a})$.

如图 24－57(2)，作向量$\overrightarrow{PQ}=\frac{3}{2}\vec{a}$，再作$\overrightarrow{QR}=-2\vec{a}$，则

$$\overrightarrow{PR}=\frac{3}{2}\vec{a}-2\vec{a}.$$

议一议

在例题 4 中，将向量$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{PR}$分别与向量$\vec{a}$比较，它们的方向之间有什么关系？长度之间有什么关系？

42 第二十四章 相似三角形

例题 3

本题是求平行向量的关系式，让学生进一步理解实数与向量相乘的定义并体会它的运用.

练习 24.6(1)

1. 提示：参照例题 1 画图.
2. $4\vec{a}$与$\vec{a}$同向，长度为$4|\vec{a}|$；$-\frac{5}{3}\vec{a}$与$\vec{a}$反向，长度为$\frac{5}{3}|\vec{a}|$；$-2(-\vec{a})$与$\vec{a}$同向，长度为$2|\vec{a}|$.
3. $\overrightarrow{FH}=2\vec{a}$，$\overrightarrow{DC}=-2\vec{b}$，$\overrightarrow{BD}=2\vec{a}+2\vec{b}$.

【本课重点】

引进实数与向量相乘的运算律，并用于化简关于向量的算式.

例题 4

这是为引进实数与向量相乘对于实数加法的分配律而安排的画图活动，同时帮助学生巩固所学的关于实数与向量相乘运算的画图方法.

议一议

让学生利用图形的直观性，对例题 4 中两个关于向量的算式进行化简.

【注意事项】

(1) 例题 2 和例题 3 是实数与向量相乘的初步运用，要引导学生初步认识两个平行向量的代数表示形式. 在例题 3 教学后，可将已知条件中的“$7AD=4AB$”改为如“$AD=\frac{1}{2}DB$”，让学生模仿学习用$\overrightarrow{BC}$表示$\overrightarrow{DE}$；还可进一步提出，这个条件改为 $mAD=nDB$(其中 m、n 为正数)时，试用$\overrightarrow{BC}$表示$\overrightarrow{DE}$.

(2) 例题 4 展示了实数与向量相乘、向量的加减进行混合运算的过程，同时为归纳实数与向量相乘对于实数加法的分配律提供思考基础. 在教学中，要注意画图方法的分析和指导.

思考

引导学生从例题 4(1)、(2)两个算式的化简形式中发现变化规律，联想实数乘法的运算律，对实数与向量相乘的运算律进行探讨.

从特殊到一般，引出实数与向量相乘对于实数加法的分配律.“边款”中指出，对分配律的证明不作教学要求.

例题 5

本题的设计是为了引进实数与向量相乘对于向量加法的分配律.题中安排了两个层次的实验活动，题(1)是给定一个具体的正整数，指出分配律成立并作图验证；题(2)是导出在已知正数的情况下分配律的一般表示形式.

如题(1)，在已知正整数的情况下可用代数方法推导分配律.

在题(1)中，提出再用作图方法验证结论，是为了引出几何证明方法，让学生有所了解.

对题(2)还指明了验证结论的方法，引导学生从具体到一般进行探讨.

观察图 24 - 57，可见$\overrightarrow{OB}$与$\vec{a}$ 同方向，$\overrightarrow{PR}$与$\vec{a}$ 反方向. 而

$OB=OA+AB=2|\vec{a}|+\frac{1}{2}|\vec{a}|=\frac{5}{2}|\vec{a}|$；

$PR=QR-PQ=2|\vec{a}|-\frac{3}{2}|\vec{a}|=\frac{1}{2}|\vec{a}|$.

由此，可以进一步得到：$\overrightarrow{OB}=\frac{5}{2}\vec{a}$；$\overrightarrow{PR}=-\frac{1}{2}\vec{a}$. 即

$$2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{5}{2}\vec{a}；$$

$$\frac{3}{2}\vec{a}-2\vec{a}=-\frac{1}{2}\vec{a}.$$

同向的两个向量相加，和向量的方向取同向，长度取和；反向的两个向量相加，和向量的方向同较长向量，长度取差(正)；相反向量的和向量为零向量.

思考

实数的乘法满足交换律、结合律以及乘法对加法的分配律，实数与向量相乘有类似的运算律吗？

通过以上讨论，可得

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)\vec{a}=2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{a}；$$

$$\left(\frac{3}{2}-2\right)\vec{a}=\frac{3}{2}\vec{a}-2\vec{a}.$$

一般地，如果 m、n 是非零实数，$\vec{a}$ 是非零向量，那么

$$(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}.$$

这个等式是实数与向量相乘对于实数加法的分配律.

证明这个分配律，可通过对 m、n 的符号分类讨论，指出等式左右两边表示的向量同向等长. 这里不作要求.

例题5 已知非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$.

(1) 等式 $3(\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}+3\vec{b}$ 成立吗？试作图验证所得的结论；

(2) 设实数 $k>0$，指出对算式 $k(\vec{a}+\vec{b})$去括号的法则.

解 (1) $3(\vec{a}+\vec{b})$

$=(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}+\vec{b})$ ……… 实数与向量相乘的意义

$=(\vec{a}+\vec{a}+\vec{a})+(\vec{b}+\vec{b}+\vec{b})$ ……… 向量加法的交换律与结合律

$=3\vec{a}+3\vec{b}$. ……………………………… 实数与向量相乘的意义

作图验证：如图 24 - 58，在平面上任取一点 O，作向量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$.

在射线 OA 上取 $OA_1=3OA$；再过点 A_1 作 AB 的平行线 A_1B_1，它与射线 OB 相交于点 B_1.

在$\triangle OA_1B_1$ 中，因为 $AB /\!/ A_1B_1$，所以

$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{OB_1}{OB}=\frac{OA_1}{OA}=3$(三角形一边的平行线性质定理推论).

再由作图可知，

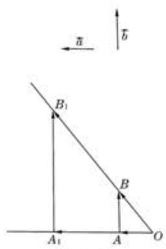


图 24 - 58

第四节 平面向量的线性运算 43

【注意事项】

(1) 关于实数与向量相乘的两个分配律，课本中着重于引导学生探索、发现和归纳结论，教学中对此要注意体现；而对它们的证明有提示但没有展开，并明确不作教学要求.

(2) 例题 5 直接指向实数与向量相乘对于向量加法的分配律，从特殊到一般分层递进. 在作图验证实数与向量相乘对向量加法的分配律成立时，可见这一分配律与相似三角形中有关定理有密切联系. 在验证的过程中，用“三角形一边的平行线性质定理推论”推出的比例关系式也可改用“由 $AB /\!/ A_1B_1$，得$\triangle OA_1B_1 \backsim \triangle OAB$”再推出，即利用相似三角形的判定与性质定理推出. 实际上，这一分配律与相似三角形定理可以相互推出，它们之间的联系非同一般.

(3) 教师知道，实数与向量相乘对向量加法的分配律通常利用相似三角形的判定与性质定理来证明. 由此可知这一分配律是相似三角形定理的代数表示形式；而反过来，相似三角形定理就是这一分配律的几何表示形式. 实际上，例题 5(1)中的作图验证以及题(2)和“想一想”的问题解答，隐含了证明 $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ 的一般思考方法($k>0$ 时如图 24 - 58)，但不要求学生证明这一分配律. 在例题 5 的教学中，教师要以学过的有关概念、运算律为依据，指出结论的正确性，但讲解要浅显，主要是通过画图对这一分配律进行验证和确认.

$$\overrightarrow{OA_1}=3\overrightarrow{OA}=3\vec{a};$$
$$\overrightarrow{A_1B_1}=3\overrightarrow{AB}=3\vec{b};$$
$$\overrightarrow{OB_1}=3\overrightarrow{OB}=3(\vec{a}+\vec{b}).$$

又 $\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}$，所以

$$3(\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}+3\vec{b}.$$

(2) 对于实数 $k>0$，$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$.

任意给定实数 $k>0$，类似于题(1)作图，同样可验证上述结论正确.

这个等式成立，可像例题5(1)那样，只要在射线 OA 的反向延长线上取 OA_1，再作图验证.

想一想

如果实数 $k<0$，那么等式 $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ 仍然成立吗？

一般来说，对任意实数 $k\neq 0$ 和非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，总有

$$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b},$$

这个等式是实数与向量相乘对于向量加法的分配律.

另外，如 $2(3\vec{a})$、$(2\times 3)\vec{a}$、$6\vec{a}$，它们都与向量 $\vec{a}$ 同向；又 $|2(3\vec{a})|=2|3\vec{a}|=2\times 3|\vec{a}|=6|\vec{a}|$，$|(2\times 3)\vec{a}|=6|\vec{a}|$，而 $|6\vec{a}|=6|\vec{a}|$，可知

$$2(3\vec{a})=(2\times 3)\vec{a}=6\vec{a}.$$

$-3\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向；
$-2(-3\vec{a})$ 与 $-3\vec{a}$ 反向.

类似地，通过比较有关向量的方向和长度，可得

$$2(-3\vec{a})=[2\times(-3)]\vec{a}=-6\vec{a};$$
$$-2(-3\vec{a})=[(-2)\times(-3)]\vec{a}=6\vec{a}.$$

证明结合律，可通过对 m、n 的符号分类讨论，指出等式左右两边表示的向量同向等长. 这里不作要求.

对于任意非零实数 m、n 和非零向量 $\vec{a}$，总有

$$m(n\vec{a})=(mn)\vec{a}.$$

这是实数与向量相乘的结合律.

归纳以上讨论的结果，可知实数与向量相乘满足下列运算律：

设 m、n 为实数，则
(1) $m(n\vec{a})=(mn)\vec{a}$；
(2) $(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$；
(3) $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$.

当 m 或 n 为零以及 $\vec{a}$ 或 $\vec{b}$ 为零向量时，可直接验证各等式成立.

例题6 计算：

(1) $3(\vec{a}+5\vec{b})$；

(2) $-\frac{3}{2}\vec{a}+\left(\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}\right)$；

(3) $(\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c})-2(\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c})$.

44 第二十四章 相似三角形

想一想

让学生注意到在已知负数的情况下同样可作图验证分配律成立. 然后，归纳出实数与向量相乘对于向量加法的分配律.

通过对具体算式的分析，引进实数与向量相乘的结合律. 再对实数与向量相乘的运算律进行整理.

例题 6

本题是运用实数与向量相乘的运算律以及向量加法的运算律进行向量的代数计算，即化简算式.

教学时，可让学生说明每次进行算式变形的依据，体会运算律的运用，从而使学生了解向量线性运算的算理，通过与一次多项式的运算类比，建立起新旧知识的联系.

【注意事项】

在引进实数与向量相乘的运算及其运算律的过程中，采用了与实数的乘法类比的方法；同时也可用类比的方法帮助学生理解和记忆. 但是要注意，实数与向量相乘的积是向量；实数与向量相乘的分配律有两种情况；实数与向量相乘的结合律只针对两个实数与一个向量的乘积的情况.

想一想

引导学生将这样的关于向量的计算与一次多项式的运算进行比较，看到它们在形式上是类似的，从而把新旧知识联系起来，促进知识的迁移.

练习 24.6(2)

1. (1) $16\vec{a}-18\vec{b}$；

(2) $3\vec{a}-5\vec{b}-6\vec{c}$；

(3) $\frac{5}{6}\vec{a}+\frac{11}{12}\vec{b}-\frac{11}{12}\vec{c}$.

2. 提示：给定向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$. 先作 $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}$，再作 $-2\vec{m}$. 或由 $-2(\vec{a}+\vec{b})=(-2\vec{a})+(-2\vec{b})$，进行作图. 图略.

3. 提示：将向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{x}$ 满足的关系式看作关于 $\vec{x}$ 的方程，解得 $\vec{x}=\frac{3}{4}\vec{a}+\vec{b}$.

【本课重点】

引进平行向量定理和单位向量，并让学生了解利用向量关系式判断两个向量平行的方法.

在本课引言中，告诉学生可利用实数与向量相乘的意义，研究几何中有关直线平行和线段长度的问题，并以证明三角形中位线定理进行举例说明，以引起学生学习向量知识的兴趣，但不要进一步展开.

解 (1) $3(\vec{a}+5\vec{b})=3\vec{a}+3(5\vec{b})=3\vec{a}+15\vec{b}$.

(2) $-\frac{3}{2}\vec{a}+\left(\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}\right)=\left(-\frac{3}{2}\vec{a}+\vec{a}\right)-\frac{3}{2}\vec{b}$

$=\left(-\frac{3}{2}+1\right)\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$

$=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$.

(3) $(\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c})-2(\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c})$

$=\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}+(-2)\vec{a}+(-2)\cdot 3\vec{b}+(-2)\cdot(-\vec{c})$

$=\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}-2\vec{a}-6\vec{b}+2\vec{c}$

$=(1-2)\vec{a}+(1-6)\vec{b}+(-3+2)\vec{c}$

$=-\vec{a}-5\vec{b}-\vec{c}$.

想一想

对含向量加法、减法、数与向量相乘等运算的算式进行计算，与多项式的运算类似吗？有什么体会？

练习 24.6(2)

1. 计算：

(1) $3(2\vec{a}-\vec{b})+5(2\vec{a}-3\vec{b})$；

(2) $3(2\vec{a}-\vec{b}-2\vec{c})-(3\vec{a}+2\vec{b})$；

(3) $\frac{1}{3}(\vec{a}+2\vec{b}-2\vec{c})+\frac{1}{4}(2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c})-\frac{1}{2}\vec{b}$.

2. 已知不平行的两个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，求作向量 $-2(\vec{a}+\vec{b})$.

3. 如果向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{x}$ 满足关系式 $3\vec{a}+4(\vec{b}-\vec{x})=\vec{0}$，试用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示向量 $\vec{x}$.

如果 $\vec{a}$ 是一个非零向量，$\vec{b}=m\vec{a}(m\neq 0)$，那么根据实数与向量相乘的意义，可知向量 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向或反向，得 $\vec{b}/\!/\vec{a}$.

设 $\overrightarrow{AE}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BF}=\vec{b}$，由 $\vec{b}=m\vec{a}$ 还可以进一步看到，直线 BF 与 AE 平行或重合. 而由 $|\vec{b}|=|m\vec{a}|=|m||\vec{a}|$，可知线段 $BF=|m|AE$.

上述结论可用于研究几何中有关两直线平行及线段长度的问题.

例如，在图 24－59 中，EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线.

由 E、F 分别是边 AB、AC 的中点，得

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

利用“实数与向量相乘”的意义来研究几何中的两直线平行及线段长度问题，这是一种新的思路.

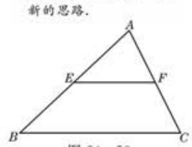


图 24－59

$\because\ \ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$,

$\therefore\ \ \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

根据$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，且点 E 不在直线 BC 上，可知 $EF /\!/ BC$，且 $EF=\frac{1}{2}BC$.

以上是证明三角形中位线定理的一种新思路.

问题

如图 24－60，梯形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，EF 是梯形的中位线，$AD=2$，$BC=3$. 设$\overrightarrow{AD}=\vec{a}$，能将向量$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{FE}$用 $\vec{a}$ 表示出来吗？

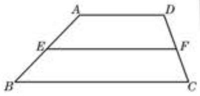


图 24－60

根据已知条件，可知 $AD /\!/ BC /\!/ EF$，得$\overrightarrow{AD} /\!/ \overrightarrow{BC} /\!/ \overrightarrow{FE}$；还可知 $EF=\frac{1}{2}(AD+BC)=\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}$.

结合图形，得到$\overrightarrow{BC}$与 $\vec{a}$ 同向，$\overrightarrow{FE}$与 $\vec{a}$ 反向.

又 $|\vec{a}|=2$，$|\overrightarrow{BC}|=3$，$|\overrightarrow{FE}|=\frac{5}{2}$，

得 $\frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\vec{a}|}=\frac{3}{2}$，$\frac{|\overrightarrow{FE}|}{|\vec{a}|}=\frac{5}{4}$，

所以 $\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{FE}=-\frac{5}{4}\vec{a}$.

议一议

已知 $\vec{a}$ 是非零向量，如果 $\vec{b} /\!/ \vec{a}$，那么 $\vec{b}$ 能用 $\vec{a}$ 表示出来吗？

如果 $\vec{b}$ 是非零向量，那么由 $\vec{b} /\!/ \vec{a}$ 可知 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向或反向. 设 $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}=k$，得 $|\vec{b}|=k|\vec{a}|$. 所以，当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向时，$\vec{b}=k\vec{a}$；当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向时，$\vec{b}=-k\vec{a}$；

如果 $\vec{b}=\vec{0}$，那么 $\vec{b}=0\vec{a}$.

于是，我们得到：

平行向量定理　如果向量 $\vec{b}$ 与非零向量 $\vec{a}$ 平行，那么存在唯一的实数 m，使 $\vec{b}=m\vec{a}$.

定理中，$|m|=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$，关于 m 的符号，由 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向还是反向来确定.

我们再引进一种特殊的向量.

长度为 1 的向量叫做单位向量. 设$\vec{e}$为单位向量，则 $|\vec{e}|=1$.

单位向量有无数个；不同的单位向量，是指它们的方向不同. 对于任意非零向量 $\vec{a}$，与它同方向的单位向量记作$\overrightarrow{a_0}$. 由实数与向

在实数中，0 和 1 是特殊的数；在向量中，$\vec{0}$和 $\vec{e}$ 是特殊的向量.

46　第二十四章　相似三角形

问题

让学生对具体的两个非零的平行向量，将其中一个向量用另一个向量表示，从中获得对于平行向量定理的具体认识.

议一议

在解决上述具体问题的基础上，引导学生讨论一般情况下“用平行向量中的一个表示另一个”的问题.

通过说理，导出平行向量定理.

在平面向量中，已经规定了零向量($\vec{0}$)；可从实数中有 0、1 两个特殊的数，用类比的方法引进单位向量.

要让学生知道，单位向量有无数个；对于任意一个非零向量，都有一个与它同方向的单位向量，且它们可以相互表示.

【注意事项】

(1) “平行向量定理”与“实数与向量相乘的意义”结合起来，就得到“$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b} /\!/ \vec{a} \Leftrightarrow$存在唯一的实数 m，使 $\vec{b}=m\vec{a}$”，它在向量几何中有重要的运用，现在只是给学生打下认识的基础.

(2) 引进平行向量定理和单位向量，是为了完成向量初步知识的构建. 现在进行教学时，主要关注知识的形成，而对它们的运用不要展开.

量的乘积，可知

$$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a_0},\ \vec{a_0}=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}.$$

例题7 如果 $\vec{a}+\vec{b}=2\vec{c}$，$\vec{a}-\vec{b}=3\vec{c}$，其中 $\vec{c}$ 是非零向量，那么 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是平行向量吗？

分析　已知条件是两个向量的关系式，其中有三个向量. 为判断 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是否平行，一种思路是利用已知两个向量的关系式，消去 $\vec{c}$，找出 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 之间的关系式；另一种思路是把这两个向量的关系式看作关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的向量方程，通过解由它们组成的向量方程组，可将这两个向量用 $\vec{c}$ 表示出来.

解　方法一：由 $\vec{a}+\vec{b}=2\vec{c}$，$\vec{a}-\vec{b}=3\vec{c}$，

得 $$3(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}-\vec{b}),$$

即 $$3\vec{a}+3\vec{b}=2\vec{a}-2\vec{b}.$$

所以 $$\vec{a}=-5\vec{b}.$$

根据实数与向量相乘的意义，可知 $\vec{a}/\!/\vec{b}$.

方法二：把已知的向量关系式看作关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的方程，得向量方程组

$$\begin{cases}\vec{a}+\vec{b}=2\vec{c},\\ \vec{a}-\vec{b}=3\vec{c}.\end{cases}$$

解这样的向量方程组的方法，与解二元一次方程组的方法类似.

解得 $\vec{a}=\frac{5}{2}\vec{c}$，$\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{c}$.

根据实数与向量相乘的意义，可知 $\vec{a}/\!/\vec{c}$，$\vec{b}/\!/\vec{c}$.

所以 $\vec{a}/\!/\vec{b}$.

例题 7

本题是帮助学生加深理解实数与向量相乘的意义，学会根据实数与向量相乘的意义判别两个向量是否平行.

练习 24.6(3)

1. 用单位向量 $\vec{e}$ 表示下列向量：
   (1) $\vec{a}$ 与 $\vec{e}$ 的方向相同，且长度为 6；
   (2) $\vec{b}$ 与 $\vec{e}$ 的方向相反，且长度为 3；
   (3) $\vec{c}$ 与 $\vec{e}$ 的方向相反，且长度为 $\frac{1}{2}$.
2. 已知 $2\vec{a}+\vec{b}=3\vec{c}$，$3\vec{a}-\vec{b}=2\vec{c}$，其中 $\vec{c}\neq\vec{0}$，那么向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是否平行？
3. 如图，梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，EF 是梯形的中位线.
   (1) 化简：$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}$，　$\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}$；
   (2) 化简：$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}$；

（第 3 题）

练习 24.6(3)

1. (1) $\vec{a}=6\vec{e}$；
(2) $\vec{b}=-3\vec{e}$；
(3) $\vec{c}=-\frac{1}{2}\vec{e}$.

2. 提示：由已知的向量关系式，可推出 $\vec{a}=\vec{b}$，所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行.

3. (1) $\overrightarrow{EF}$；$\overrightarrow{EF}$；
(2) $2\overrightarrow{EF}$；

【注意事项】

(1) 在例题 7 的解题过程中，涉及向量关系式的变形、解向量方程组的问题，学生可能会感到陌生. 教学时，要指导学生进行知识迁移. 注意到对于向量和数量，它们各自的有关运算有类似的运算律、等式有类似的性质，知道现在遇到的向量关系式的变形、解向量方程组，分别与数量关系式的变形、解一次方程组类似.

(2) 练习 24.6 第 3 题，通过分 5 个小题的设计，展示了用向量工具证明梯形中位线定理的思考方法和实施过程. 完成本题练习以后，可进行一次整理，让学生有所体会.

(3) 试用向量$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BC}$表示$\overrightarrow{EF}$；

(4) 根据$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{BC}$同向，可知$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$的方向及长度与$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BC}$的方向及长度有什么关系？

(5) 根据$\overrightarrow{EF}$与$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BC}$的向量关系式，可得到中位线 EF 与 AD、BC 之间有什么样的位置关系和长度关系？

24.7 向量的线性运算

我们已经学习了向量加法、减法以及实数与向量相乘等运算，并且知道，向量的减法可以转化为加法运算；向量加法以及实数与向量相乘，有类似于实数加法和乘法的运算律. 这些运算还可以组合起来，如果没有括号，那么运算的顺序是先将实数与向量相乘，再进行向量的加减.

例题1 已知两个不平行的向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$.

求作：$3\vec{a}+2\vec{b}$，$\vec{a}-2\vec{b}$.

解 如图 24－61，在平面内任取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$；再作$\overrightarrow{OC}=3\vec{a}$，$\overrightarrow{OD}=2\vec{b}$.

以 OC、OD 为邻边，作平行四边形 $OCED$，则

$$\overrightarrow{OE}=3\vec{a}+2\vec{b}.$$

作向量$\overrightarrow{DA}$，则

$$\overrightarrow{DA}=\vec{a}-2\vec{b}.$$

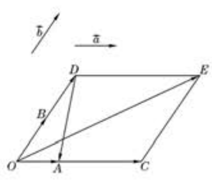


图 24－61

向量加法、减法、实数与向量相乘以及它们的混合运算叫做向量的线性运算. 如 $3\vec{a}+2\vec{b}$、$\vec{a}-2\vec{b}$、$3(\vec{a}+5\vec{b})$、$-\frac{3}{2}\vec{a}+\left(\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}\right)$等，都是向量的线性运算.

先将算式化简，再选择适当的方法画图.

例题2 已知两个不平行的向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$.

求作：$(\vec{a}+\vec{b})-\left(\frac{7}{2}\vec{a}-2\vec{b}\right)$.

解 $(\vec{a}+\vec{b})-\left(\frac{7}{2}\vec{a}-2\vec{b}\right)=\vec{a}+\vec{b}-\frac{7}{2}\vec{a}+2\vec{b}=3\vec{b}-\frac{5}{2}\vec{a}$.

如图 24－62，在平面内取一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\frac{5}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=3\vec{b}$；再作$\overrightarrow{AB}$，则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=3\vec{b}-\frac{5}{2}\vec{a}.$$

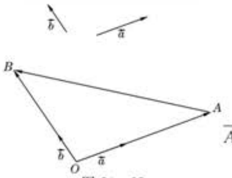


图 24－62

48 第二十四章 相似三角形

(3) $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$；

(4) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BC}$同方向，$|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{BC}|$；

(5) $EF\parallel AD\parallel BC$，

且 $EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$.

【本课重点】

让学生理解向量的线性运算的含义，知道用两个不平行的向量表示平面内一个向量的表达式的特征.

在引言中，对向量的加法、减法以及实数与向量相乘等运算进行了回顾，并指出了在一起进行混合运算的顺序. 要引导学生与实数的运算法则进行类比.

例题 1

帮助学生复习有关向量运算的作图方法，为引进向量的线性运算作铺垫.

例题 2

帮助学生掌握关于向量线性运算的画图方法. 注意“边款”中的提示，先将算式化简.

教学时，要展示解题过程，分步说明依据和做法.

【教学目标】

(1) 知道向量的线性运算的意义，会化简线性运算的算式，会画图表示简单的线性运算结果.

(2) 知道用两个不平行的向量表示平面内一个向量的表达式的特征，会在较熟悉的几何图形中将一个向量用给定的两个不平行向量表示出来.

(3) 知道向量的分解式，能画出平面内一个向量在已知两个不平行向量方向上的分向量.

(4) 在知识形成和运用过程中，体会向量的合成与分解的辩证关系，体会数形结合、化归等数学思想方法.

【注意事项】

本节内容是前面所学向量知识的整理和运用. 通过对向量的加法、减法以及实数与向量相乘等运算的回顾，归纳了向量的线性运算. 然后，利用平面内的一个向量被两个不平行向量表示时所得的表达式，引进了向量分解式的概念，再指出了如何画一个向量在已知两个不平行向量方向上的分向量，为向量知识在物理中的运用进行奠基.

例题 3

本题是关于向量线性运算的基本运用，让学生体会平面内的一个向量可以用给定的两个不平行向量表示出来，并知道其表达式的特征.

题中的两个已知向量由三角形的两边给定，用它们的线性组合表示由这个三角形的第三边上中线给定的向量，所得表达式有对称美和运用价值.

练习 24.7(1)

1. 提示：仿照例题 1 作图.

2. $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{b}$.

3. $\overrightarrow{PQ}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

一般来说，如果 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 是两个不平行的向量，$\vec{c}$ 是平面内的一个向量，那么 $\vec{c}$ 可以用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示，并且通常将其表达式整理成 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ 的形式，其中 x、y 是实数.

例题3 如图 24－63，点 M 是 $\triangle CAB$ 的边 AB 的中点. 设 $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CB}=\vec{b}$，试用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的线性组合表示向量 $\overrightarrow{CM}$.

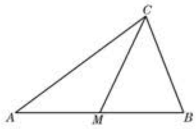


图 24－63

解 ∵ M 是线段 AB 的中点，

∴ $AM=\frac{1}{2}AB$，得 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

∵ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\vec{b}-\vec{a}$，

∴ $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$=\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$

$=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$

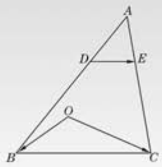
$=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

或由 $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}$，
$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}$，
及 $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$，得
$2\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\vec{a}+\vec{b}$.

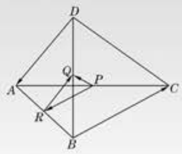
练习 24.7(1)

1. 已知两个不平行的向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，求作：(1) $2\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$；(2) $3\vec{a}-2\vec{b}$.

2. 如图，已知 O 为 $\triangle ABC$ 内一点，点 D、E 分别在边 AB 和 AC 上，且 $\frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}$，$DE\parallel BC$. 设 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，试用 $\vec{b}$、$\vec{c}$ 表示 $\overrightarrow{DE}$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，已知四边形 $ABCD$，点 P、Q、R 分别是对角线 AC、BD 和边 AB 的中点. 设 $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DA}=\vec{b}$，试用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{PQ}$.

第四节 平面向量的线性运算 49

【注意事项】

例题 3 有助于学生掌握向量有关运算的法则. 在教学中，要展示在平面图形中用已知两个不平行向量表示一个向量的分析方法和完整过程，让学生获得经验和体会；同时要强调对算式进行化简，作为结果的表达式应形如 $x\vec{a}+y\vec{b}$（其中 x、y 是实数）.

例题4　如图 24－64，已知平行四边形 $ABCD$，点 E、F 在边 AB 上，$AE=EF=FB$，点 P 是边 AD 的中点；直线 EG、FH 都与 AD 平行，分别交 DC 于点 G、H；直线 PQ 与 AB 平行，分别交 EG、FH、BC 于点 O、M、Q. 设 $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OG}=\vec{b}$，试用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示向量：$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OQ}$.

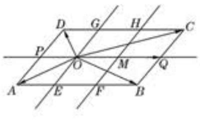


图 24－64

解　根据已知条件和平行线分线段成比例定理，可知

$$OP=OM,\ OE=OG,\ OQ=2OM.$$

得　$\overrightarrow{OP}=-\vec{a}$，$\overrightarrow{OE}=-\vec{b}$，$\overrightarrow{OQ}=2\vec{a}$.

所以　$\overrightarrow{OC}=2\vec{a}+\vec{b}$；　$\overrightarrow{OD}=-\vec{a}+\vec{b}$；

$\overrightarrow{OA}=-\vec{a}-\vec{b}$；　$\overrightarrow{OB}=2\vec{a}-\vec{b}$；

$\overrightarrow{OQ}=2\vec{a}$.

$\overrightarrow{OQ}=2\vec{a}$
$=2\vec{a}+0\vec{b}$.

想一想

在图 24－64 中，任取一点 Z，作向量 $\overrightarrow{OZ}$，能用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OZ}$ 吗？

如果 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 是两个不平行的向量，$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$（$m$、$n$ 是实数），那么向量 $\vec{c}$ 就是向量 $m\vec{a}$ 与 $n\vec{b}$ 的合成；也可以说向量 $\vec{c}$ 分解为 $m\vec{a}$、$n\vec{b}$ 两个向量，这时，向量 $m\vec{a}$ 与 $n\vec{b}$ 是向量 $\vec{c}$ 分别在 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 方向上的分向量，$m\vec{a}+n\vec{b}$ 是向量 $\vec{c}$ 关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的分解式.

如例题 4 中，$\overrightarrow{OB}$ 在 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 方向上的分向量分别是 $2\vec{a}$ 和 $-\vec{b}$；$\overrightarrow{OB}$ 关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的分解式是 $2\vec{a}-\vec{b}$.

问题

给定两个不平行的向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，对于平面内任意一个向量 $\vec{c}$，都可以确定它关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的分解式吗？

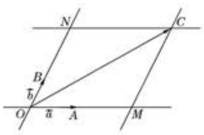


图 24－65

如图 24－65，在平面内取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$；再作直线 OA、OB.

设点 C 不在直线 OA 和 OB 上. 过点 C 分别作直线 OA、OB 的平行线，由于向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 不平行，可知所作两直线分别与直线 OB、OA 有唯一的交点，记为 N、M. 作向量 $\overrightarrow{OM}$、$\overrightarrow{ON}$.

因为 $\overrightarrow{OM}/\!/\vec{a}$，所以存在唯一的实数 x，使 $\overrightarrow{OM}=x\vec{a}$；
因为 $\overrightarrow{ON}/\!/\vec{b}$，所以存在唯一的实数 y，使 $\overrightarrow{ON}=y\vec{b}$.

50　第二十四章　相似三角形

【本课重点】

引进向量的分解式，帮助学生学会画平面内一个向量在已知两个不平行向量方向上的分向量.

例题 4

本题是帮助学生进一步学习如何将平面内一个向量用给定的两个不平行向量表示出来，也是为引进向量的分解式作铺垫.

想一想

将例题 4 中给定的被表示向量变为平面内的任一向量，让学生有所思考，引发下面问题的提出和讨论.

问题

提出问题，引导学生对平面向量的分解进行探讨.

指导学生从画出用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示的向量的过程逆向思考，把问题转化为由 $\vec{c}$ 找出用于表示它的一个关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的表达式，形成通过作图来解决问题的思路.

在分析问题和画图的过程中，教师要多一些讲解，并指出平行向量定理在其中的运用.

【注意事项】

（1）本节学习平面向量的分解，一方面为学生学习有关物理知识提供数学准备，另一方面为高中数学中进行向量的运用和引出向量的坐标表示打基础.

（2）通过“问题”的讨论，可导出平面向量基本定理. 这个定理是在向量几何中具有奠基性意义的定理之一，将在高中数学中进行教学，现在不要补充.

（3）如果学生对“问题”进行探究时有困难，可先提出直角坐标平面内的简单问题让学生讨论. 如：在直角坐标平内，设坐标原点为 O，取点 $E_1(1,0)$、$E_2(0,1)$，作向量 $\overrightarrow{OE_1}$、$\overrightarrow{OE_2}$，分别记为 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$（可知 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ 是其方向分别与坐标系两轴正向相同的单位向量）；再取一点 P（为简单起见，不妨取坐标为 (m,n) 且其中 m、n 都是整数的点），作向量 $\overrightarrow{OP}$，然后要求学生确定向量 $\overrightarrow{OP}$ 关于 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ 的分解式. 得到了 $\overrightarrow{OP}$ 的分解式（$\overrightarrow{OP}=m\vec{e}_1+n\vec{e}_2$）后，再引导学生回顾确定这个分解式的过程，启发学生将解决这个问题所用的方法迁移到探究以及解决课本所述“问题”的活动中.

通过关于平面向量的分解的问题讨论，得到求作一个向量在已知两个不平行向量方向上的分向量的画法. 要引导学生体验画图过程和归纳画图方法.

例题 5

本题是求作一个向量在已知两个不平行向量方向上的分向量的画法训练. 可让学生先进行操作，教师再进行示范；要做好讲评，帮助学生掌握画图方法.

通过作图，可进一步看到平面内任意一个向量都可以作出它分别在两个不平行向量方向上的分向量. 让学生在画图实践中总结和掌握关于向量分解的画图方法.

而四边形 $OMCN$ 是平行四边形，因此

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=x\vec{a}+y\vec{b},$$

即

$$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}.$$

如果点 C 在直线 OA 或 OB 上，那么 $\vec{c}\parallel\vec{a}$，或 $\vec{c}\parallel\vec{b}$. 这时得

$$\vec{c}=x\vec{a}=x\vec{a}+0\vec{b}\quad 或\quad \vec{c}=y\vec{b}=0\vec{a}+y\vec{b}.$$

所以 $\vec{c}$ 关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的分解式总是确定的.

由此可知，平面上任意一个向量都可以在给定的两个不平行向量的方向上分解. 用上面的方法画图，可以作出这个向量在给定的两个不平行向量的方向上的分向量.

例题5 如图 24－66(1)，已知向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 和 $\vec{p}$、$\vec{q}$，求作：

(1) 向量 $\vec{p}$ 分别在 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 方向上的分向量；

(2) 向量 $\vec{q}$ 分别在 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 方向上的分向量.

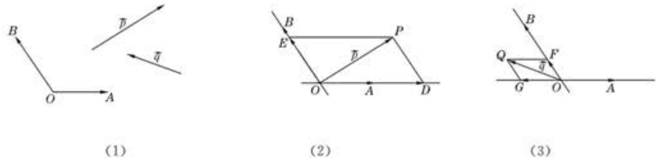


图 24－66

解 (1) 如图 24－66(2)，作向量 $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$；再过点 P 分别作 $PE\parallel OA$，$PD\parallel OB$，E 为直线 PE 与直线 OB 的交点，D 为直线 PD 与直线 OA 的交点.

作向量 $\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OE}$.

则 $\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OE}$ 是向量 $\vec{p}$ 分别在 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 方向上的分向量.

(2) 如图 24－66(3)，作 $\overrightarrow{OQ}=\vec{q}$；再过点 Q 分别作 $QF\parallel OA$，$QG\parallel OB$，F 为直线 QF 与直线 OB 的交点，G 为直线 QG 与直线 OA 的交点.

作向量 $\overrightarrow{OG}$、$\overrightarrow{OF}$.

则 $\overrightarrow{OG}$、$\overrightarrow{OF}$ 是向量 $\vec{q}$ 分别在 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 方向上的分向量.

第四节 平面向量的线性运算 51

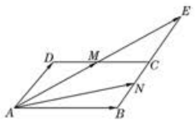


图 24－67

例题6 如图 24－67，已知平行四边形 $ABCD$，点 M、N 分别是边 DC、BC 的中点，射线 AM 与 BC 相交于点 E．设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，分别求向量 $\overrightarrow{AM}$、$\overrightarrow{AN}$、$\overrightarrow{AE}$ 关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的分解式．

解 ∵ 点 M、N 分别是平行四边形 $ABCD$ 的边 DC、BC 的中点，

∴ $DM=MC=\frac{1}{2}DC$，$BN=\frac{1}{2}BC$．

又由 $AD\parallel BC$，得 $AM=ME$．

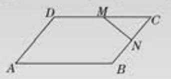
∴ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$；

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$；

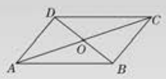
$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AM}=2\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}+2\vec{b}$．

练习 24.7(2)

1. 如图，已知平行四边形 $ABCD$，点 M、N 是边 DC、BC 的中点，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，分别求向量 $\overrightarrow{MN}$、$\overrightarrow{BN}$ 关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的分解式．

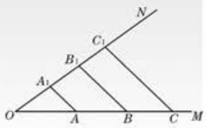


（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，分别求向量 $\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$ 关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的分解式．
3. 如图，已知点 A、B、C 在射线 OM 上，点 A_1、B_1、C_1 在射线 ON 上，$\frac{OB}{OA}=\frac{OB_1}{OA_1}=k_1$，$\frac{OC}{OA}=\frac{OC_1}{OA_1}=k_2$．设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OA_1}=\vec{b}$．
   (1) 分别求向量 $\overrightarrow{AA_1}$、$\overrightarrow{BB_1}$、$\overrightarrow{CC_1}$ 关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的分解式；
   (2) 判断向量 $\overrightarrow{AA_1}$、$\overrightarrow{BB_1}$、$\overrightarrow{CC_1}$ 是否平行，再指出直线 AA_1、BB_1、CC_1 的位置关系．



（第 3 题）

52 第二十四章 相似三角形

例题 6

本题是在一个简单的几何图形中求一个向量关于两个不平行向量的分解式，帮助学生进一步认识向量的分解式的意义，同时让学生知道求向量的分解式与将一个向量表示为两个给定的不平行向量的线性组合是一回事，体会向量的分解与线性组合的辩证关系．

练习 24.7(2)

1. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$，

   $\overrightarrow{BN}=0\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$．
2. $\overrightarrow{OC}=-\vec{a}+0\vec{b}$，
   $\overrightarrow{OD}=0\vec{a}-\vec{b}$，
   $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$，
   $\overrightarrow{BC}=-\vec{a}-\vec{b}$．
3. (1) $\overrightarrow{AA_1}=\vec{b}-\vec{a}$，
   $\overrightarrow{BB_1}=k_1\vec{b}-k_1\vec{a}$，
   $\overrightarrow{CC_1}=k_2\vec{b}-k_2\vec{a}$；
   (2) $\overrightarrow{AA_1}\parallel\overrightarrow{BB_1}\parallel\overrightarrow{CC_1}$，
   $AA_1\parallel BB_1\parallel CC_1$．

【注意事项】

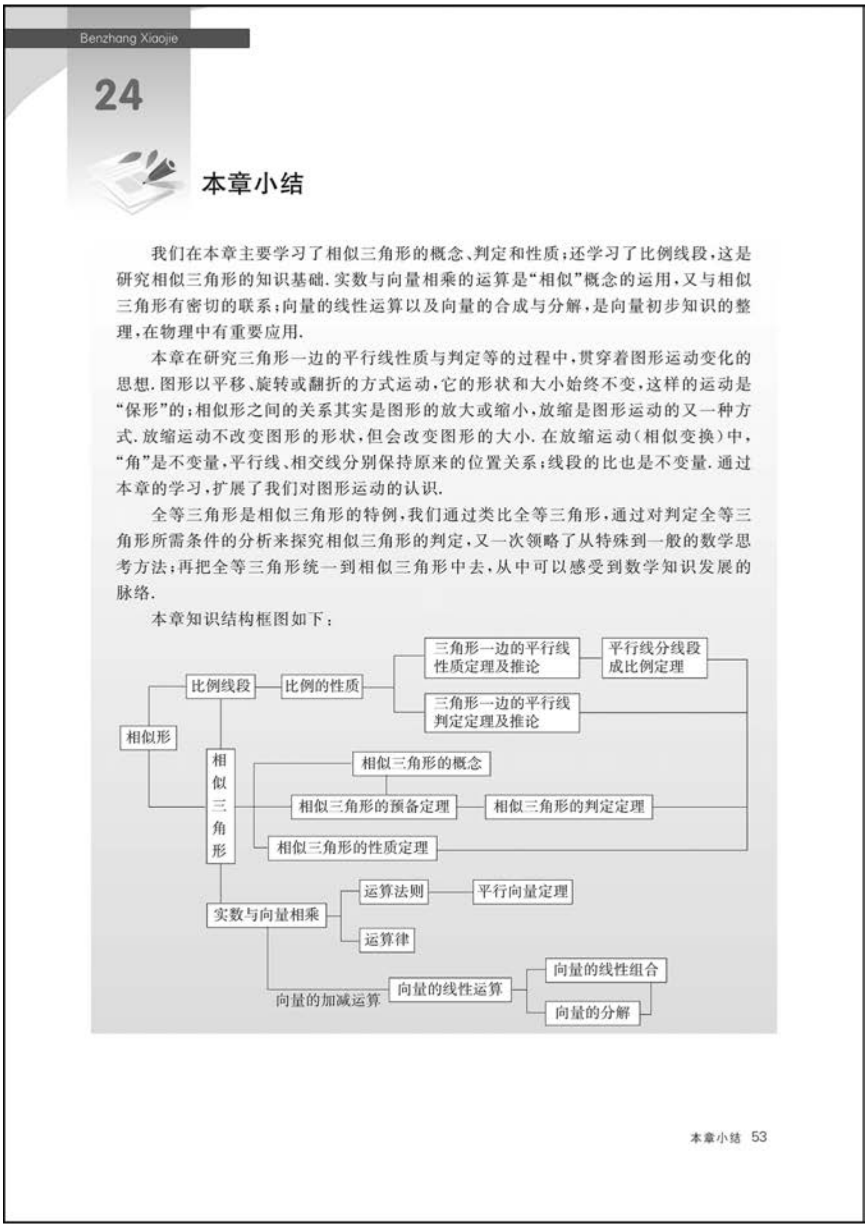
(1) 当关于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的分解式中的实数 x 或 y 为零时，可表示为 $y\vec{b}$ 或 $x\vec{a}$；但是 $\vec{0}$ 的分解式通常表示为 $0\vec{a}+0\vec{b}$．

(2) 练习 24.7(2)中第 3 题提供了用向量方法证明三角形一边的平行线判定定理的一种思路．

本章对于相似三角形的研究，是以图形的放缩运动为背景，从相似形的讨论切入；以比例线段的性质为基础，通过构建三角形一边的平行线知识作铺垫. 重点研究相似三角形的性质和判定；然后引进平面向量的线性运算. 可指导学生以本章知识结构框图为线索，对有关知识内容进行系统整理，把握知识之间的内在联系，形成整体认识.

在整理知识时，要引导学生立足“相似三角形”的高度，重新审视、反思“全等三角形”知识，并将它融入“相似三角形”知识系统，以实现进一步的数学化.

要通过小结，让学生进一步体会几何演绎的思想和逻辑推理的方法，感受图形运动的观点、类比与联系的观点在分析问题过程中的运用，领略变与不变的辩证思想、从特殊到一般以及推广命题的策略思想.



Benzhang Xiaojie

24

本章小结

我们在本章主要学习了相似三角形的概念、判定和性质；还学习了比例线段，这是研究相似三角形的知识基础. 实数与向量相乘的运算是“相似”概念的运用，又与相似三角形有密切的联系；向量的线性运算以及向量的合成与分解，是向量初步知识的整理，在物理中有重要应用.

本章在研究三角形一边的平行线性质与判定等的过程中，贯穿着图形运动变化的思想. 图形以平移、旋转或翻折的方式运动，它的形状和大小始终不变，这样的运动是“保形”的；相似形之间的关系其实是图形的放大或缩小，放缩是图形运动的又一种方式. 放缩运动不改变图形的形状，但会改变图形的大小. 在放缩运动（相似变换）中，“角”是不变量，平行线、相交线分别保持原来的位置关系；线段的比也是不变量. 通过本章的学习，扩展了我们对图形运动的认识.

全等三角形是相似三角形的特例，我们通过类比全等三角形，通过对判定全等三角形所需条件的分析来探究相似三角形的判定，又一次领略了从特殊到一般的数学思考方法；再把全等三角形统一到相似三角形中去，从中可以感受到数学知识发展的脉络.

本章知识结构框图如下：

本章小结 53

YueDu Cailiao

24

阅读材料一

话说“黄金分割”

我们知道，黄金分割是指“将一条线段分为不相等的两部分，使较长部分为原线段和较短部分的比例中项”. 如果点 P 是线段 AB 的一个黄金分割点，且 $AP>PB$，那么 $AP^2=AB\cdot PB$. 这时，$AP=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$，$AP$ 与 AB 的比值 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 称为黄金数.

怎样用尺规把线段 AB 黄金分割呢？下面给出一种方法.

作法：如图 24－68，

1. 过点 B 作 $BC\perp AB$，使 $BC=\frac{1}{2}AB$.
2. 联结 AC，在线段 AC 上截取 $CD=CB$.
3. 在线段 AB 上截取 $AP=AD$.

则 $AP^2=AB\cdot PB$.

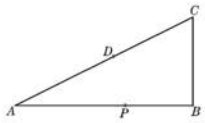


图 24－68

下面我们证明这种作图方法的正确性.

证明：在 Rt$\triangle ABC$ 中，

$$BC=\frac{1}{2}AB,\quad AC=AD+CD=AP+CB=AP+\frac{1}{2}AB.$$

由勾股定理，有 $\quad AC^2=AB^2+BC^2$，

即
$$\left(AP+\frac{1}{2}AB\right)^2=AB^2+\left(\frac{1}{2}AB\right)^2.$$

整理，得 $\quad AP^2+AP\cdot AB=AB^2$.

$$AP^2=AB^2-AP\cdot AB=AB(AB-AP)=AB\cdot PB.$$

所以点 P 是线段 AB 的一个黄金分割点.

黄金数 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$；黄金数的倒数 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 称为黄金比 ϕ，$\phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1.618$. 在上面的黄金分割中，$\frac{AB}{AP}=\phi$，$\frac{AP}{PB}=\phi$.

【设计意图】

黄金分割是数学宝库中的珍品，广泛应用于建筑设计、美术、音乐、艺术及几何作图等方面. 安排阅读本材料，是为了让学生进一步了解黄金分割及其应用，感受黄金分割的奇妙特性，体会数学内部之间、数学与自然之间的奇妙与和谐之美，从而激发学生学习数学和探索自然的热情，提高学生的审美情趣.

【活动建议】

可结合课本中关于黄金分割的教学内容，指导学生自主阅读本材料；可要求学生进一步查找相关资料，更多地了解黄金分割的特性以及应用.

可采用适当的方式组织学生交流学习体会.

本材料对于黄金分割是一条公认的美学规律以及它的应用，只是举例说明；在网上和相关资料中，有大量的有关事例.

黄金分割体现出部分与部分及部分与整体之间的协调一致性，既美又真.

例如，如果一个矩形的短边与长边的比是黄金数，那么这个矩形称为黄金矩形（如图 24－69）. 人们觉得，在矩形中，黄金矩形最为赏心悦目. 顶角为 36°的等腰三角形称为黄金三角形，它的底边与腰的比是黄金比. 在正五角星中就包含了许多黄金三角形，许多线段之间构成了黄金比，因此正五角星得到了古今中外人们的喜爱，在许多艺术品中都能见到它的“身影”（如图 24－70）.

图 24－69

图 24－70

黄金分割的应用很多. 例如在著名的维纳斯女神像以及太阳神阿波罗的塑像中，在达·芬奇、提香等众多著名艺术家的作品中，都隐含着许多黄金比. 在科学实验中，为减少试验步骤而得到最佳结果，常用优选法，其中 0.618 法就是以黄金数为核心. 在日常生活中，人们也喜欢应用黄金分割. 如在拍风景照时，常把主要景物摄在接近于画面的黄金分割点处，使整个画面协调好看；舞台上报幕员总是站在接近于舞台的黄金分割点处，既显得自然大方，又使音响效果较好；芭蕾舞演员踮起脚尖起舞，使腰部成为整个身形的黄金分割点，给观众带来美的享受；在设计长方形工艺品或日用品时，常设计成黄金矩形的形态，这样更具美感.

黄金分割是一条公认的美学规律，在数学、美学、艺术等领域中显示出巨大的魅力.

阅读材料 55

阅读材料二

漫谈“出入相补原理”

我国古代数学的成就之一，就是善于在实践的基础上，抽象概括出解决问题的一般方法和原理. 例如出入相补原理，是我国古代数学家在解决测量问题的过程中，总结提炼出来的简单明白的原理.

出入相补原理指明了这样的几何事实：一个平面图形从一处移置他处，面积不变；如果把图形分割成若干块，那么各部分面积的和等于原来图形的面积，因而图形移置前后诸面积间的和与差有简单的相等关系. 对立体图形的体积，这条事实也成立.

可以这样说，出入相补原理中，“出”意味着面积（或体积）减少，“入”意味着面积（或体积）增加；出入相补，即面积（体积）间的和差关系不变. “出入相补原理”也称割补原理或等积变换原理.

下面举一例，通过用出入相补原理解决有关线段比例的问题，说明古代数学中出入相补原理的应用.

如图 24－71，设 O 是矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 上任意一点，过点 O 分别作一组邻边的平行线 PQ、SR，直线 PQ 分别与边 AD、BC 交于点 P、Q，直线 RS 分别与边 AB、DC 交于点 R、S，那么 $PO\cdot OS=RO\cdot OQ$. 说理如下：

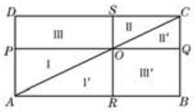


图 24－71

在图 24－71 中，如果把图形看作由 $\triangle ACD$ 移置到 $\triangle ACB$ 处，同时Ⅰ、Ⅱ各移到Ⅰ′、Ⅱ′，那么依据出入相补原理，得

Ⅲ＝Ⅲ′（指面积相等）.

所以　$PO\cdot OS=RO\cdot OQ$.

现在，这个结论通常表示为 $\dfrac{PO}{OQ}=\dfrac{RO}{OS}$.

在我国古代几何中，由出入相补原理得到的结论是解决测量问题的基本依据.

例题1　如图 24－72，为了测量一根旗杆有多高，可用一根标杆 RO 试插在适当的位置，使点 R 在 AD 上，且使标杆 RO 的顶端 O 的影子恰好和旗杆顶端 B 的影子 D 相重合. 设标杆 RO 为 2 米，旗杆的影子 AD 长为 a 米，RO 的影子长 RD 为 b 米，求旗杆 AB 的长.

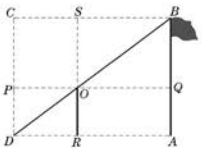


图 24－72

分析　如果把旗杆 AB 和它的影子 AD 当作一个矩形的两边，那么从 B 到 D 的光线就是矩形的对角线 BD. 于是，根据出入相补原理可以得到等量关系.

解　如图 24－72，作辅助矩形 $ABCD$，再过点 O 分别作矩形一组邻边的平行线. 设

【设计意图】

“出入相补原理”是我国古代数学家根据田亩丈量和天文观测，总结提炼而成的解决问题的方法和原理. 本材料一方面是为学生提供一种解决实际问题的重要思想方法，另一方面是让学生感受我国古代数学的悠久历史、丰富内容和重大成就，得到数学文化的教育，增强爱国情感.

【活动建议】

可在学生有了利用面积割补方法证明几何命题的体验以后，指导学生自主阅读本材料.

本材料只介绍了运用“出入相补原理”解决比例线段的问题.

我国古代几何中没有平行线分线段成比例定理，但古代数学家巧妙地运用“出入相补原理”解决比例线段问题，并由此建立了相应的几何体系，成为我国几何学的一个特色.

通过指导学生查找相关资料，让学生更多地了解“出入相补原理”的应用，以进一步了解我国古代几何学的独特风格.

$AB=x$ 米，由 $RO=2$ 米，$AD=a$ 米，$RD=b$ 米，得 $OS=(x-2)$ 米，$PO=b$ 米，$OQ=(a-b)$ 米.

根据出入相补原理，可知 $PO\cdot OS=RO\cdot OQ$，

得 $b(x-2)=2(a-b)$.

所以 $x=\dfrac{2a}{b}$.

答：旗杆 AB 的长为 $\dfrac{2a}{b}$ 米.

例题2 如图 24－73，为了测量一条河的宽 AB，可在河岸边先从点 B 处沿着与 AB 垂直的方向走到点 P 处，测量得 PB 为 18 米；再从点 P 处沿 BP 方向走到点 C 处；又测得 PC 为 6 米. 然后，由点 C 处出发，沿着与 BC 垂直的方向一直走到点 D 处，使 A、P、D 三点在一条直线上，且测出 CD 为 a 米，求河宽 AB.

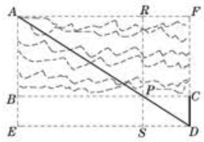


图 24－73

解 作辅助矩形 $AEDF$，则点 P 在矩形 $AEDF$ 的对角线 AD 上.

根据出入相补原理，可知 $BP\cdot PS=PC\cdot PR$.

设 $AB=x$ 米，得 $18a=6x$.

所以 $x=3a$.

答：河宽 AB 为 $3a$ 米.

在我国的古代几何中，出入相补原理除了用于解决线段比例的问题外，还在勾股定理、体积理论、球体体积乃至数的开方等方面，有非常经典的运用.

出入相补原理起源于《算数书》、《九章算术》编纂的时代，是我国劳动人民智慧的结晶. 不过，现传最早的记载在赵爽《周髀算经注》的勾股圆方图说与刘徽《九章算术注》的方田、少广、商功、勾股等章中. 通过把这一原理应用于解决多种多样的问题，我国古代建立了相应的几何体系，形成了几何学的一个特色.

阅读材料 57

TanJiu HuoDong

24

探究活动

分割三角形

下图表示一张蓝色的$\triangle ABC$纸片和一张红色的$\triangle DEF$纸片，其中$\angle A=\angle D=90°$，且$\triangle ABC$与$\triangle DEF$不相似.

是否存在这样的直线分割，能把$\triangle ABC$与$\triangle DEF$分别分割成两个三角形，使分得的每一个蓝色三角形分别与一个红色三角形相似？如果存在，写出你的设计方案，并证明方案的正确性；如果不存在，请简要说明理由.

58 第二十四章　相似三角形

【设计意图】

通过分割三角形的探究活动，为学生提供综合运用数学知识和数学思想方法、进行数学操作实验和理性探究活动的机会；让学生在活动过程中，领略数学地思考、判断、决策的过程和方法，培养探究精神和探究能力.

【活动建议】

这个探究活动有一定的挑战性，可组织对数学学习有兴趣、有余力的学生，采取小组合作的方式进行活动；教师可根据学生的实际情况，适时、恰当地帮助学生对解决问题的过程进行理性的思考和分析.

要注重学生的过程体验，充分肯定学生独立得到的每一种设计方案，鼓励学生通过合作研究获得更多的方案；要引导学生进行实践反思，总结解题思路的探索和形成过程.

【参考答案】

提示：

要用一条直线把一个三角形分割成两个三角形，这样的分割线一定经过原三角形的一个顶点.同时，该直线不可能经过原三角形的两个顶点.

如果分割线过直角三角形的直角顶点，那么原三角形将分割成一个锐角三角形和一个钝角三角形（或两个都是直角三角形）；如果分割线过直角三角形的一个锐角顶点，那么原三角形将分割成一个直角三角形和一个钝角三角形.要使$\triangle ABC$分割得到的两个三角形分别与$\triangle DEF$分割得到的三角形相似，分割这两个三角形的直线必须分别经过直角顶点或分别经过锐角顶点.因此要对分割线经过两个三角形的顶点的情况进行分类讨论：(1) 分割线分别经过直角三角形的直角顶点；(2) 分割线分别经过直角三角形的锐角顶点.

解答：

$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中，因为 $\angle A=\angle D=90°$，$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 不相似. 所以可设 $\angle E>\angle B\geqslant 45°\geqslant \angle C>\angle F$.

(1) 当分割线经过直角三角形的直角顶点时.

① 如图 1，在 $\triangle DEF$ 中截 $\angle FDN=\angle C$，则 $\angle NDE=\angle B$，在 $\triangle ABC$ 中截 $\angle CAM=\angle F$，则 $\angle MAB=\angle E$. 于是 $\triangle CAM\backsim\triangle DFN$，$\triangle BAM\backsim\triangle DEN$.

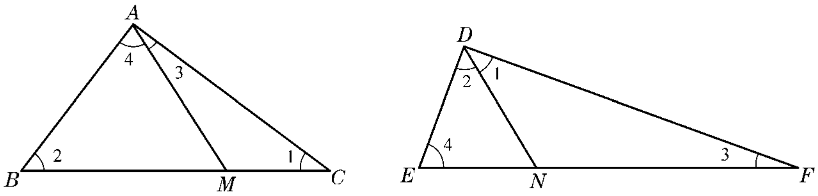


图 1

② 如图 2，在 $\triangle DEF$ 中截 $\angle FDN=\angle B$，则 $\angle NDE=\angle C$，在 $\triangle ABC$ 中截 $\angle CAM=\angle E$，则 $\angle MAB=\angle F$. 于是 $\triangle CAM\backsim\triangle DEN$，$\triangle BAM\backsim\triangle DFN$.

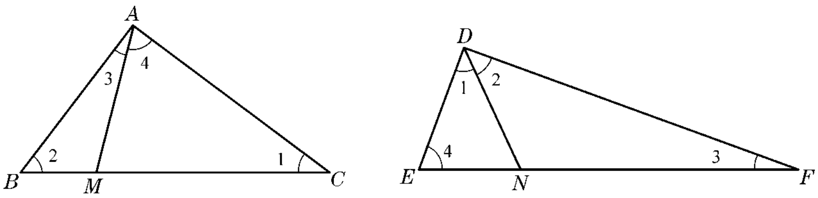


图 2

(2) 当分割线经过直角三角形的锐角的顶点时.

① 设 $\triangle DEF$ 的分割线经过顶点 F，由于 $\angle E>\angle B\geqslant 45°\geqslant \angle C>\angle F$，可知这时不存在符合条件的分割.

② 设 $\triangle DEF$ 的分割线经过顶点 E，$\triangle ABC$ 的分割线经过顶点 B. 如图 3，在 $\triangle DEF$ 中截 $\angle NEF=\angle C$，在 $\triangle ABC$ 中截 $\angle MBC=\angle F$，则 $\angle AMB=\angle DNE$. 于是 $\triangle BCM\backsim\triangle FEN$，$\triangle ABM\backsim\triangle DEN$.

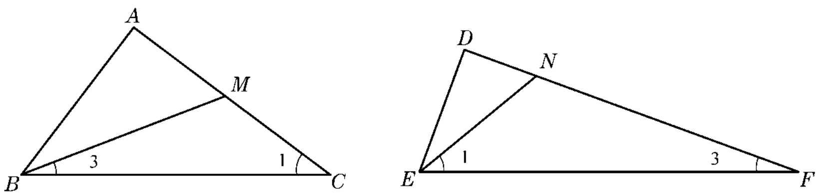


图 3

③ 设 $\triangle DEF$ 的分割线经过顶点 E，$\triangle ABC$ 的分割线经过顶点 C. 如图 4，在 $\triangle DEF$ 中截 $\angle NEF=\angle B$，在 $\triangle ABC$ 中截 $\angle MCB=\angle F$，则 $\angle AMC=\angle DNE$. 于是 $\triangle BCM\backsim\triangle EFN$，$\triangle AMC\backsim\triangle DNE$.

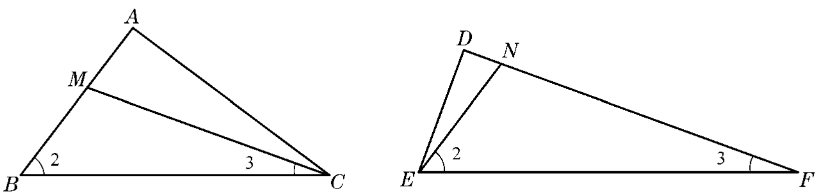


图 4

综上所述，符合条件的分割方案有四种.

第二十五章　锐角的三角比

一、教学目标

1. 经历锐角的三角比概念的形成过程，获得从实际问题中抽象出数学概念的过程体验. 理解锐角的三角比的定义，会利用定义求锐角的三角比的值.

2. 经历用几何方法探求特殊锐角的三角比的值的过程；掌握特殊锐角的三角比的值.

3. 会利用计算器求锐角的三角比的值；能根据锐角的三角比值求锐角的大小.

4. 在对满足什么条件可解直角三角形的问题分析过程中，体会从一般到特殊的思考方法；会解直角三角形. 了解确定一个直角三角形所需条件与解直角三角形所需条件的一致性.

5. 理解仰角、俯角、坡度、坡角等概念；会运用解直角三角形的知识解决简单的实际问题；在解决实际问题的过程中，感受数学与现实的联系，增强学数学、用数学的意识和能力.

二、课时安排

本章教学共 11 课时，建议分配如下：

25.1　锐角的三角比的意义	2 课时
25.2　求锐角的三角比的值	2 课时
25.3　解直角三角形	2 课时
25.4　解直角三角形的应用	4 课时
本章小结	1 课时

三、设计说明

在三角形及相似三角形中，我们主要从定性方面研究三角形（或两个三角形）的特征和性质. 在锐角的三角比这部分中，主要从定量方面研究直角三角形. 直角三角形中的边角之间的数量关系，主要通过三角形内角和定理、勾股定理和锐角的三角比来表述. 有了这些数学工具，我们就能解决生活实际中的许多问题，如测量物体的高、测量两点的距离、有关斜坡的计算、工件设计中的计算等等.

解直角三角形是解任意三角形的基础，锐角的三角比的概念是三角函数概念的准备. 因此，锐角的三角比这一章是后续学习的重要基础.

分析学生的认知准备，从相似三角形到锐角的三角比的概念、从锐角的三角比的定义到特殊锐角的三角比、从勾股定理和锐角的三角比到解直角三角形、从解直角三角形的演练到解决相关生活实际中的问题，可见新知识和原有知识的固着点的“距离”不大，给学生自主参与学习活动，进行探究与交流，提供了一个很好的机会.

根据以上分析，课本中设计了从相似三角形到锐角三角比概念的形成过程，设计了求特殊锐角的三角比的值的活动过程，设计了满足什么条件的直角三角形可以求解的分析过程等，让学生自主地参与学习活动. 关于任意锐角的三角比，通常利用计算器求它的值. 课本中通过举例介绍了利用计算器求锐角三角比的值的方法.

锐角的三角比是三角学的基础. 锐角的三角比的定义和特殊锐角三角比的值需要记忆，且记忆内容较多，学习时容易产生单调乏味的感觉. 因此，内容的讲述注意与图形结合，引导学生关注几何意义，在理解的基础上记忆，训练的形式力求多样化，把单调乏味的感觉降到尽量小的程度. 课本中注意到本章内容的特点和改善学习过程的要求，如在锐角的三角比概念的练习中，设计了已知某个锐角的某种三角比，填写两条边的比；反过来，已知直角三角形中两条边的比，填写某个锐角的某种三角比.

在锐角三角比概念的运用中，设计了在直角坐标平面背景下求锐角的三角比的值的例题，这是为高中学习任意角的三角比的概念作必要的渗透和准备，为用坐标法定义任意角的三角比做一些基础性的工作.

课本中对例题的选用，充分注意例题的典型性、基础性和应用性. 例如，关于锐角的正切和余切的概念，安排了两个例题，一个是已知直角三角形的两条直角边长，求正切的值(例题 1)；另一个是已知直角三角形一条直角边和斜边的长，求余切的值(例题 2)，这是两个典型的基本题. 关于解直角三角形，安排了两个例题，一个是已知一条边和一个锐角，解直角三角形；另一个是已知两条边，解直角三角形，它们代表的就是解直角三角形的两种基本类型. 在解直角三角形的应用中，安排了多方面的联系实际的例子，更加突出数学在生活实际中的广泛应用，有助于学生提高学数学、用数学的意识和能力.

四、教学建议

1. 引导学生经历知识的发生、形成和运用的过程. 要让学生经历锐角的三角比的概念的形成过程，让学生用几何方法探求特殊锐角三角比的值. 要根据学生的实际情况组织教学活动，让学生在学习的过程中获得从实际的数学问题中抽象出数学概念的体验，体会求特殊锐角的三角比的值的几何方法.

由于整章内容的难度不高，建议放手让学生自主活动. 教师应关注教学活动的设计，关注教学活动中的点拨和指导，以及交流、归纳和总结.

相对而言，本章有些内容枯燥乏味. 在训练中，形式要多样化，力求趣味化. 利用计算器求锐角的三角比的值，是学生应掌握的一项基本技能，在教学中要指导学生学会计算器的有关操作方法并熟练使用.

2. 重视基本方法，控制内容难度. 关于求锐角的三角比的值、解直角三角形，要注重基本方法的教学，正确把握基本要求.

在解直角三角形的有关问题中，对不是直角三角形的情形，要求体会化归为直角三角形来解的数学思想. 但不宜把解非直角三角形作为一种基本类型来学习，因为现在的解法不是通法，在高中学习解斜三角形时，将进一步研究.

同角的三角比的关系中，要突出 $\cot A=\dfrac{1}{\tan A}$，其他关系是高中数学的内容. 在使用计算器求锐角的三角比时，由于计算器没有“cot”键，因此求余切值都是通过求正切值的倒数得到. 另外，互为余角的两个角的三角比的关系，只要了解课本中提出的两个式子，对它们的运用不作教学要求.

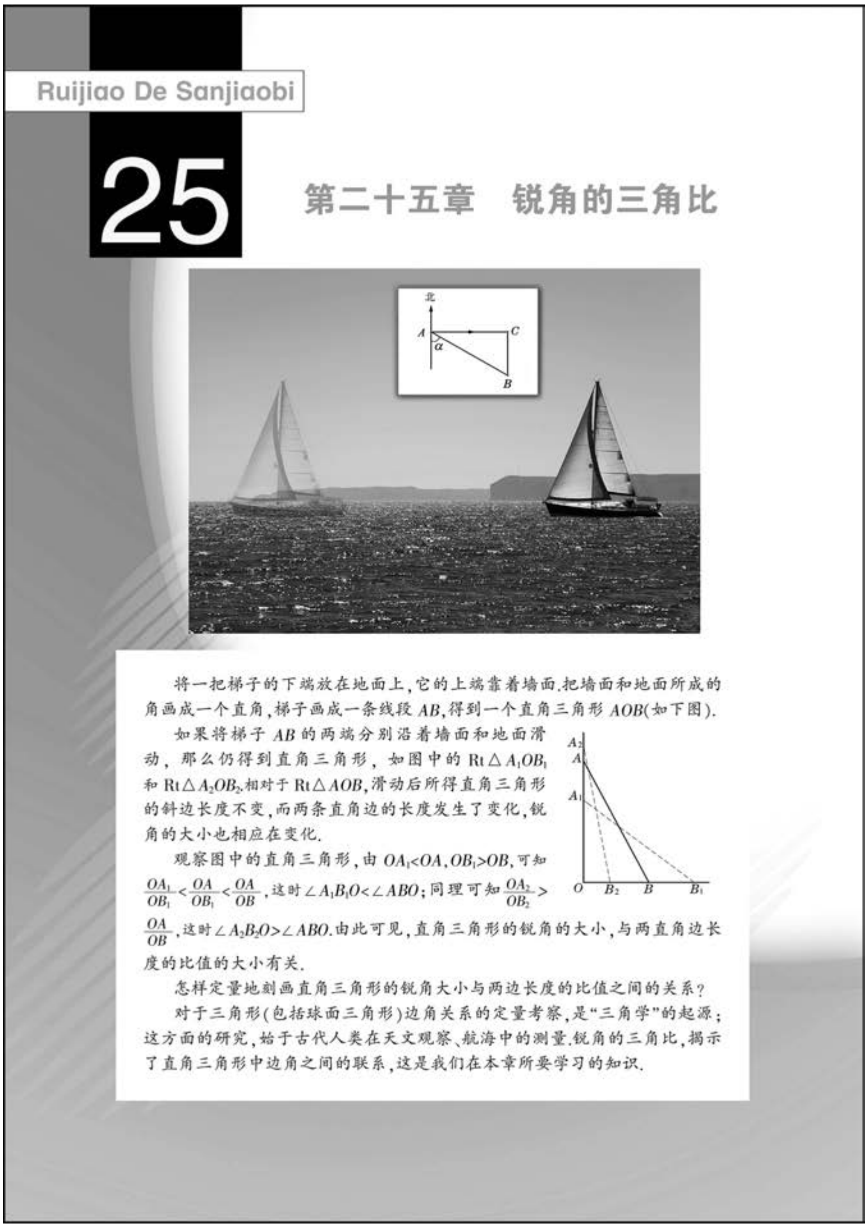
3. 关注实际问题数学化. 在解直角三角形的应用中，要切实关注实际问题数学化这个教学环节. 教学时可以分成两个阶段. 第一阶段，在实际问题中有相关的几何图形，让学生知道一些术语，如仰角、俯角、方位角、坡度、坡角等；第二阶段，根据实际问题中的条件，能正确画出相关的几何图形，然后用解直角三角形的知识求解. 本章的实践活动中，要求学生自己设计测量的方案，然后用本章知识求解. 设计测量方案是拓展课程的要求，课本中的许多例题为学生设计测量方案提供了范例.

五、评价建议

1. 关注学生在学习活动中的表现. 本章内容的教学，要求重视学生的自主活动和探索实践. 在学习评价中，要关注学生在学习活动中所表现的兴趣和参与的程度，关注学生在学习过程中获得的体验、体会以及进行数学交流的发言；要鼓励学生在实践活动中发扬独立自主的精神，锻炼勇于克服困难、团结互助等品质.

2. 关注学生对基本概念和基本方法的掌握. 在本章学习中，要求学生理解锐角三角比的定义以及与解直角三角形应用有关的概念，掌握特殊锐角的三角比的值以及解直角三角形的方法，会使用计算器求锐角的三角比的值. 在学习评价中，要全面检测教学基本要求的落实情况. 解直角三角形这部分的学习评价，可以分成两个层面. 第一个层面是会解直角三角形；第二个层面是知道选择合理的算法. 关于解直角三角形的算法选择，包括会使用计算器计算以及使计算过程比较简单、误差较小等.

3. 关注学生数学应用意识的增强和数学应用能力的发展. 解直角三角形有广泛的应用，在学习评价中，不仅要关注学生会用数学知识解决简单的实际问题，而且要关注学生学数学、用数学的意识和能力的提高.



Ruijiao De Sanjiaobi

25 第二十五章　锐角的三角比

将一把梯子的下端放在地面上，它的上端靠着墙面.把墙面和地面所成的角画成一个直角，梯子画成一条线段 AB，得到一个直角三角形 AOB(如下图).

如果将梯子 AB 的两端分别沿着墙面和地面滑动，那么仍得到直角三角形，如图中的 $\mathrm{Rt}\triangle A_1OB_1$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle A_2OB_2$.相对于 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$，滑动后所得直角三角形的斜边长度不变，而两条直角边的长度发生了变化，锐角的大小也相应在变化.

观察图中的直角三角形，由 $OA_1<OA$，$OB_1>OB$，可知 $\frac{OA_1}{OB_1}<\frac{OA}{OB_1}<\frac{OA}{OB}$，这时 $\angle A_1B_1O<\angle ABO$；同理可知 $\frac{OA_2}{OB_2}>\frac{OA}{OB}$，这时 $\angle A_2B_2O>\angle ABO$.由此可见，直角三角形的锐角的大小，与两直角边长度的比值的大小有关.

怎样定量地刻画直角三角形的锐角大小与两边长度的比值之间的关系？

对于三角形(包括球面三角形)边角关系的定量考察，是“三角学”的起源；这方面的研究，始于古代人类在天文观察、航海中的测量.锐角的三角比，揭示了直角三角形中边角之间的联系，这是我们在本章所要学习的知识.

章头语中，以梯子分别沿着墙面和地面滑动，直观地呈现出直角三角形的边角大小不断改变的形象，让学生直观感知直角三角形中的一个锐角的大小与两条直角边的长度之间存在依赖关系，引起学生进一步探究的兴趣.

借助于对图形的分析，可见直角三角形的锐角的大小与两条直角边长度的比值大小有关.由此提出本章的任务，就是要揭示直角三角形中边角之间的联系.

关于图形的分析，其中隐含着引进正切(余切)概念的认识基础.教学时，也可以分析梯子在地面上的投影的变化情况，当梯子分别在 AB、A_1B_1、A_2B_2 的位置时，它在地面上的投影相应为 OB、OB_1、OB_2，易见梯子在地面上的投影的长度同梯子与地面所成锐角的大小有关，这里隐含的是余弦的概念.

章头图可看作航海测量的一个场景，寓意是“三角学”的起源与航海测量有关，“三角学”在现实生活中有广泛的应用.

【本课重点】

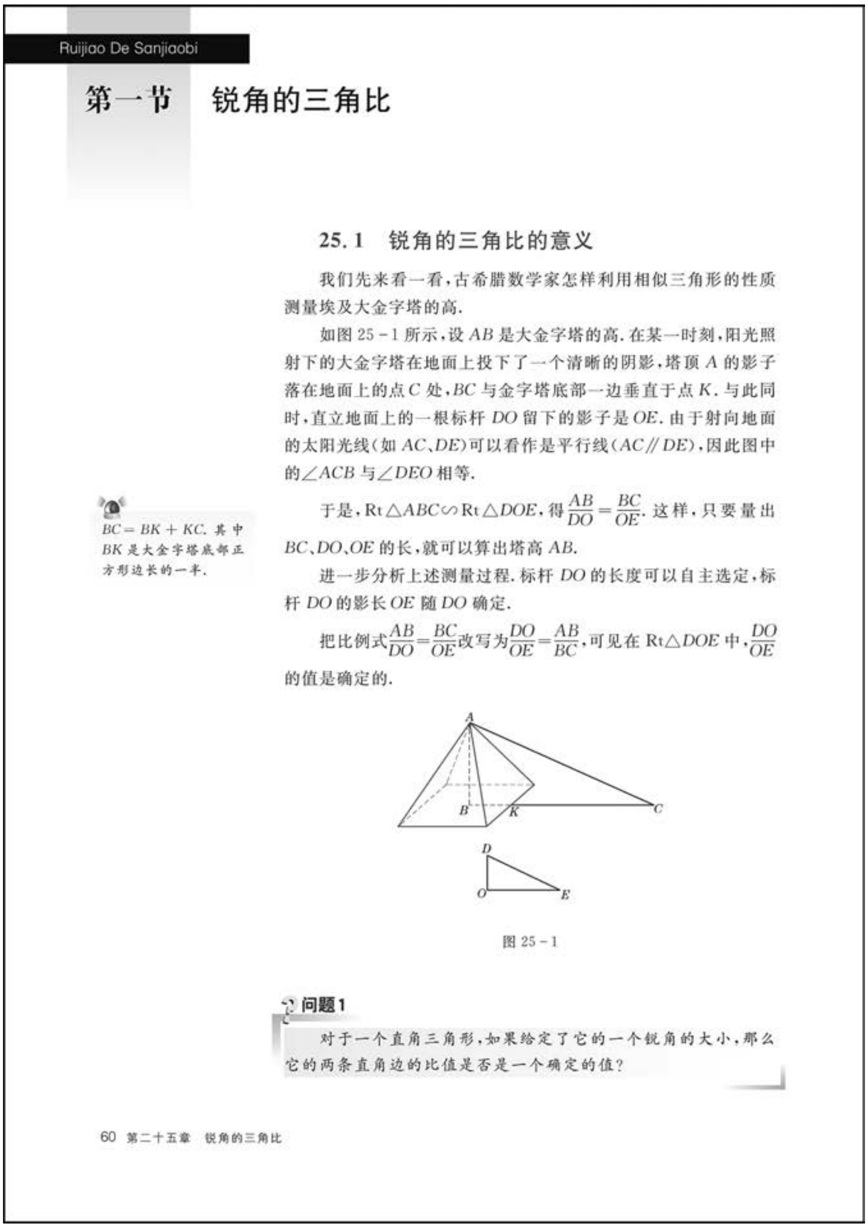
让学生经历锐角的正切概念的形成过程，掌握正切、余切的定义.

古希腊数学家泰勒斯测量埃及大金字塔的故事，在“相似三角形”的章头语中已经提及，现在用作本节的引例，一方面指出了“测量”的方法，另一方面建立了前后知识之间的联系. 图 25－1 是“相似三角形”的章头图的抽象，可利用多媒体或实物模型进行解释.

问题 1

引导学生思考测量埃及大金字塔的方法为什么是可靠的.

在测量过程中，标杆 DO 的长度可任意选定，由此引出问题 1. 对这个问题的探讨，可通过移动 $\triangle DOE$，使得 $\angle DEO$ 与 $\angle ACB$ 重合，构造更加简明的图形，然后归结为对图 25－2 的分析，利用相似三角形的判定和性质，使这个问题得到解决.



Ruijiao De Sanjiaobi

第一节　锐角的三角比

25.1　锐角的三角比的意义

我们先来看一看，古希腊数学家怎样利用相似三角形的性质测量埃及大金字塔的高.

如图 25－1 所示，设 AB 是大金字塔的高. 在某一时刻，阳光照射下的大金字塔在地面上投下了一个清晰的阴影，塔顶 A 的影子落在地面上的点 C 处，BC 与金字塔底部一边垂直于点 K. 与此同时，直立地面上的一根标杆 DO 留下的影子是 OE. 由于射向地面的太阳光线（如 AC、DE）可以看作是平行线（$AC /\!/ DE$），因此图中的 $\angle ACB$ 与 $\angle DEO$ 相等.

$BC = BK + KC$. 其中 BK 是大金字塔底部正方形边长的一半.

于是，$\mathrm{Rt}\triangle ABC \backsim \mathrm{Rt}\triangle DOE$，得 $\dfrac{AB}{DO}=\dfrac{BC}{OE}$. 这样，只要量出 BC、DO、OE 的长，就可以算出塔高 AB.

进一步分析上述测量过程. 标杆 DO 的长度可以自主选定，标杆 DO 的影长 OE 随 DO 确定.

把比例式 $\dfrac{AB}{DO}=\dfrac{BC}{OE}$ 改写为 $\dfrac{DO}{OE}=\dfrac{AB}{BC}$，可见在 $\mathrm{Rt}\triangle DOE$ 中，$\dfrac{DO}{OE}$ 的值是确定的.

图 25－1

问题1

对于一个直角三角形，如果给定了它的一个锐角的大小，那么它的两条直角边的比值是否是一个确定的值？

60　第二十五章　锐角的三角比

【教学目标】

（1）经历锐角的三角比的概念的形成过程，获得从实际的数学问题中抽象出数学概念的体验.

（2）掌握锐角的三角比的定义，会根据直角三角形中两边的长求锐角的三角比的值.

（3）了解锐角的三角比的值的范围.

【注意事项】

学生对图 25－1 的表示形式不熟悉，教学中要帮助学生识图. 图中的红色图形表示金字塔，它是一个正四棱锥，AB 是这个棱锥的高，点 B 在底面正方形的中心位置，点 C 在这个正方形边的中垂线上. 可补上金字塔投在地面上的阴影，再向学生说明有关点、线所表示的意义及其位置特征.

如图 25－2 所示，任意画一个锐角 A，在角 A 的一边上任意取点，例如取 B_1、B_2、B_3 三点，再分别过这三个点向另一边作垂线，垂足依次为点 C_1、C_2、C_3，从而得到三个直角三角形，即 $\triangle AB_1C_1$、$\triangle AB_2C_2$ 和 $\triangle AB_3C_3$.

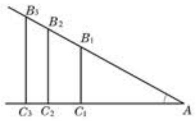


图 25－2

因为这三个直角三角形有公共的锐角 A，所以

$$\triangle AB_1C_1 \backsim \triangle AB_2C_2 \backsim \triangle AB_3C_3.$$

于是得

$$\frac{B_1C_1}{AC_1}=\frac{B_2C_2}{AC_2}=\frac{B_3C_3}{AC_3}.$$

由此可见，如果给定直角三角形的一个锐角，那么这个锐角的对边与邻边的长度的比值就是一个确定的数.

问题2

在图 25－2 中，当直角三角形中一个锐角的大小变化时，这个锐角的对边与邻边的长度的比值随着变化吗？

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，直角边 BC 和 AC 分别叫做 $\angle A$ 的对边和邻边.

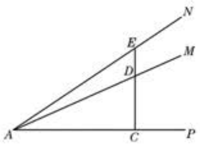


图 25－3

如图 25－3 所示，当锐角 MAP 变化为锐角 NAP 时，在 AP 上任取一点 C，过点 C 作 $CE \perp AP$，垂足为点 C，CE 分别交 AM、AN 于点 D、E，得 Rt$\triangle ACD$ 和 Rt$\triangle ACE$，这时

$$\frac{\angle DAC\text{的对边}}{\angle DAC\text{的邻边}}=\frac{DC}{AC};$$

$$\frac{\angle EAC\text{的对边}}{\angle EAC\text{的邻边}}=\frac{EC}{AC}.$$

显然，$\frac{DC}{AC}$ 与 $\frac{EC}{AC}$ 这两个比值是不同的，说明直角三角形中，一

第一节　锐角的三角比　61

问题 2

让学生认识直角三角形中一个锐角的对边与邻边的长度的比值随着这个锐角大小的变化而变化，进一步体会一个锐角的对边与邻边的长度的比值是由这个锐角的大小唯一确定的；同时渗透函数思想，也为后面学习“已知一个锐角的一个三角比的值求这个锐角的大小”提供依据.

对于问题 2 的讨论，要充分利用图 25－3 的直观性.

【注意事项】

（1）锐角的三角比的概念是以相似三角形为基础建立起来的. 从相似三角形出发，我们可以得到：对于一个直角三角形，如果给定它的一个锐角的大小，那么它的两条直角边（其实是它的任何两条边）的长度的比值是一个确定的数. 由此引出锐角的三角比，可知三角比的定义是合理的.

（2）问题 1 和问题 2 的讨论，是为引进锐角的正切作铺垫. 通过这两个问题的讨论可知，直角三角形中一个锐角的大小与两条直角边的长度的比值之间有明确的联系. 锐角的大小确定，则对边与邻边的比值唯一确定；锐角的大小变化，则对边与邻边的比值随之变化. 因此，对边与邻边的比值反映了锐角的数量特征，我们把这个比值定义为锐角的正切.

个锐角的对边与邻边的长度的比值随着这个锐角的大小的变化而变化.

通过上面的讨论,可以得到:如图 25-4,在 Rt$\triangle ABC$ 中($\angle C=90^\circ$),当锐角 A 的大小确定后,不论 Rt$\triangle ABC$ 的边长怎样变化,$\angle A$ 的对边 BC 与邻边 AC 的比值总是确定的,即

$$\frac{\text{锐角 }A\text{ 的对边}}{\text{锐角 }A\text{ 的邻边}}=\text{一个确定的值}.$$

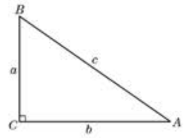


图 25-4

我们把直角三角形中一个锐角的对边与邻边的比叫做这个锐角的**正切**(tangent). 如图 25-4,锐角 A 的正切记作 $\tan A$,这时

$$\tan A=\frac{\text{锐角 }A\text{ 的对边}}{\text{锐角 }A\text{ 的邻边}}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b}.$$

在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边通常分别用 a、b、c 表示.

例题 1

通过这个例题,让学生熟悉正切的定义. 在教学中,要强调“对边”“邻边”是相对于直角三角形中指定的锐角而言,需作具体分析.

例题1 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ$,$AC=3$,$BC=2$,求 $\tan A$ 和 $\tan B$ 的值(如图 25-4).

解 在 Rt$\triangle ABC$ 中,

$\because$ $AC=3$,$BC=2$,

$\therefore$ $\tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{2}{3}$,

$\tan B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{3}{2}$.

锐角的余切是从改变两直角边的比的形式直接引进的,要让学生明确余切与正切的区别和相互关系.

当直角三角形的一个锐角的大小确定时,这个锐角的邻边与对边的比值也是确定的.

我们把直角三角形中一个锐角的邻边与对边的比叫做这个锐角的**余切**(cotangent). 如图 25-4,锐角 A 的余切记作 $\cot A$,这时

$$\cot A=\frac{\text{锐角 }A\text{ 的邻边}}{\text{锐角 }A\text{ 的对边}}=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}.$$

根据正切与余切的意义,可以得到

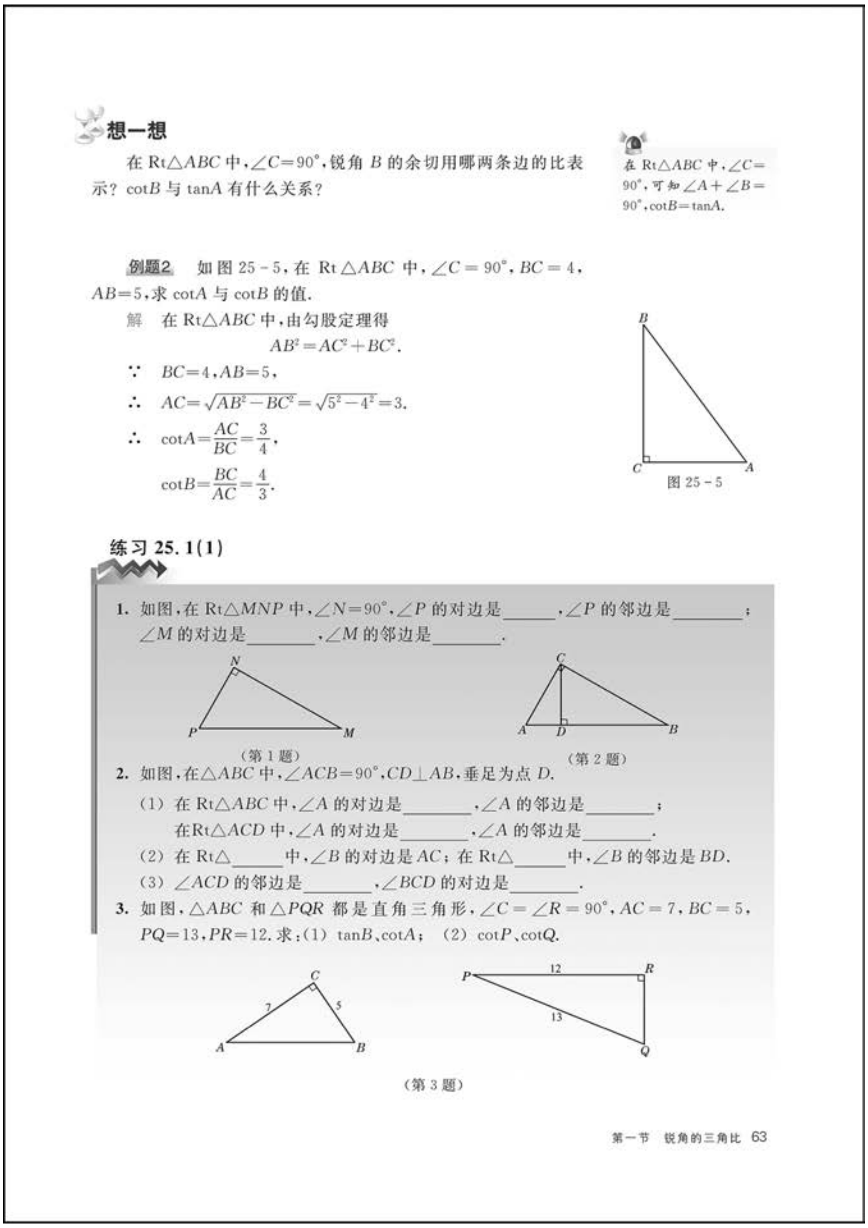
$$\tan A=\frac{1}{\cot A}.$$

62 第二十五章 锐角的三角比

【注意事项】

(1) 正切和余切的符号分别采用“tan”和“cot”,是依据国家标准的规定.

(2) 关系式 $\tan A=\dfrac{1}{\cot A}$ 是利用计算器求余切值的依据,应予关注.



想一想

在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，锐角 B 的余切用哪两条边的比表示？$\cot B$ 与 $\tan A$ 有什么关系？

在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，可知 $\angle A+\angle B=90°$，$\cot B=\tan A$.

例题2 如图 25-5，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$BC=4$，$AB=5$，求 $\cot A$ 与 $\cot B$ 的值.

解 在 Rt△ABC 中，由勾股定理得

$$AB^2=AC^2+BC^2.$$

∵ $BC=4$，$AB=5$，

∴ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

∴ $\cot A=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{3}{4}$，

$\cot B=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{4}{3}$.

图 25-5

练习 25.1(1)

1. 如图，在 Rt△MNP 中，$\angle N=90°$，$\angle P$ 的对边是______，$\angle P$ 的邻边是______；$\angle M$ 的对边是______，$\angle M$ 的邻边是______.

（第 1 题） （第 2 题）

2. 如图，在△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，垂足为点 D.
   (1) 在 Rt△ABC 中，$\angle A$ 的对边是______，$\angle A$ 的邻边是______；
   在Rt△ACD 中，$\angle A$ 的对边是______，$\angle A$ 的邻边是______.
   (2) 在 Rt△______中，$\angle B$ 的对边是 AC；在 Rt△______中，$\angle B$ 的邻边是 BD.
   (3) $\angle ACD$ 的邻边是______，$\angle BCD$ 的对边是______.
3. 如图，△ABC 和△PQR 都是直角三角形，$\angle C=\angle R=90°$，$AC=7$，$BC=5$，$PQ=13$，$PR=12$. 求：(1) $\tan B$、$\cot A$；(2) $\cot P$、$\cot Q$.

（第 3 题）

第一节 锐角的三角比 63

想一想

引导学生发现互余的两个锐角中一个锐角的余切等于另一个锐角的正切. 这是指导学生进行探究学习的素材，所得结论不要求进行运用.

例题 2

本题是帮助学生熟悉余切的定义，并从中看到，在直角三角形中，只要知道它的两条边长，就能求出它的一个锐角的正切值和余切值.

练习 25.1(1)

1. MN，PN；PN，MN.
2. (1) BC，AC；CD，AD；
   (2) ABC，BCD；
   (3) CD，BD.
3. (1) $\tan B=\dfrac{7}{5}$，
   $\cot A=\dfrac{7}{5}$；
   (2) $\cot P=\dfrac{12}{5}$，
   $\cot Q=\dfrac{5}{12}$.
4. $\tan B$ 或 $\cot\angle BCD$，
   $\tan B$ 或 $\cot A$，
   $\tan\angle ACD$ 或 $\cot A$.

【注意事项】

(1) 对于互为余角的锐角的三角比的关系，只要求学生了解，不要求掌握. 这里提到的“在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\cot B$ 与 $\tan A$ 有什么关系?”和后面提出的“$\cos B$ 与 $\sin A$ 有什么关系?”都是这样. 这部分知识在高中数学中还要学习.

(2) 例题 1 和例题 2 体现了数学概念学习的不同层次要求，例题 1 是直接利用定义求值，要求正确记忆概念；例题 2 是创造条件利用定义求值，要求理解概念的含义. 在例题 1 和例题 2 的教学后，还可指导学生观察计算结果，思考“互余的两个锐角中，一个锐角的正切(或余切)与另一个锐角的正切(或余切)之间有什么关系”.

【本课重点】

引进锐角的正弦和余弦，帮助学生掌握正弦和余弦的定义，了解三角比的含义和符号表示.

对直角三角形中的两边之比的讨论，还有一直角边与斜边所成的比的情况，由此引进锐角的正弦和余弦的定义.

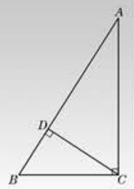
想一想

引导学生发现互余的两个锐角中一个锐角的余弦等于另一个锐角的正弦. 这也是指导学生进行探究学习的素材，所得结论不要求进行运用.

锐角的三角比是正切、余切、正弦、余弦的统称. 在初中阶段，不引进正割和余割.

要让学生明确，求一个锐角的三角比的值，包括求这个锐角的正切、余切、正弦、余弦的值；并注意锐角的三角比的值是正数，其中正弦和余弦的值小于 1，从而对锐角的三角比的取值范围有基本的了解.

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$，垂足为点 D. 则 $\frac{CD}{BD}=$______，$\frac{AC}{BC}=$______，$\frac{AD}{CD}=$______.（用正切或余切表示）



（第 4 题）

在图 25 - 2 中，我们还可以得到下列等式：

$$\frac{B_1C_1}{AB_1}=\frac{B_2C_2}{AB_2}=\frac{B_3C_3}{AB_3};$$

$$\frac{AC_1}{AB_1}=\frac{AC_2}{AB_2}=\frac{AC_3}{AB_3}.$$

这就是说，如果直角三角形的一个锐角是确定的，那么它的对边（或邻边）与斜边的比也是确定的.

我们定义：

直角三角形中一个锐角的对边与斜边的比叫做这个锐角的**正弦**（sine）.

直角三角形中一个锐角的邻边与斜边的比叫做这个锐角的**余弦**（cosine）.

如图 25 - 4，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，锐角 A 的正弦记作 $\sin A$，这时

$$\sin A=\frac{\text{锐角 }A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c};$$

锐角 A 的余弦记作 $\cos A$，这时

$$\cos A=\frac{\text{锐角 }A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}.$$

想一想

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，锐角 B 的余弦用哪两条边的比表示？$\cos B$ 与 $\sin A$ 有什么关系？

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，可知 $\angle A+\angle B=90^\circ$，$\cos B=\sin A$.

一个锐角的正切、余切、正弦、余弦统称为这个锐角的**三角比**（trigonometric ratio）.

任何一个锐角的三角比的值都是正实数，其中正弦和余弦的值小于 1（为什么？）.

锐角 A 的三角比 $\tan A$、$\cot A$、$\sin A$、$\cos A$ 中，

$$\tan A>0，\cot A>0；$$

$$0<\sin A<1，0<\cos A<1.$$

三角比的符号表示中，锐角的标记通常可取它的顶点字母（无歧义情况下），有时也用 $\cot\angle BAC$、$\cos\alpha$ 等表示. 还有，例如 $\tan 30^\circ$，它表示 30° 角的正切.

64 第二十五章 锐角的三角比

【注意事项】

（1）正弦和余弦概念的引入及定义，与正切和余切类似. 要引导学生注意这种特点，在新知学习中缩短认识过程.

（2）关于锐角三角比的取值范围，可通过提问引导学生思考和讨论，培养学生的逻辑推理习惯和能力.

例题3 如图 25 - 6，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=17$，$BC=8$. 求 $\sin A$ 和 $\cos A$ 的值.

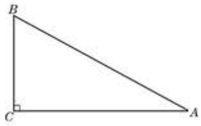


图 25 - 6

解 在 Rt$\triangle ABC$ 中，

$\because$ $AB=17$，$BC=8$，

$\therefore$ $\sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{8}{17}$.

又 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{17^2-8^2}=15$，

$\therefore$ $\cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{15}{17}$.

例题4 如图 25 - 7，在直角坐标平面内有一点 $P(3,4)$. 求 OP 与 x 轴正半轴的夹角 α 的正切、正弦和余弦的值.

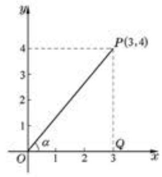


图 25 - 7

解 过点 P 向 x 轴引垂线，垂足为点 Q，则$\angle OQP=90°$.

由点 P 的坐标为$(3,4)$，得 $OQ=3$，$QP=4$.

在 Rt$\triangle OPQ$ 中，$OP=\sqrt{OQ^2+PQ^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

$\therefore$ $\tan\alpha=\dfrac{PQ}{OQ}=\dfrac{4}{3}$，

$\sin\alpha=\dfrac{PQ}{OP}=\dfrac{4}{5}$，

$\cos\alpha=\dfrac{OQ}{OP}=\dfrac{3}{5}$.

例题5 如图 25 - 8，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$BC=6$，$\sin A=\dfrac{3}{4}$. 求：(1) AB 的长；(2) $\sin B$ 的值.

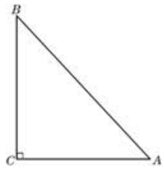


图 25 - 8

解 (1) 在 Rt$\triangle ABC$ 中，

$\because$ $\sin A=\dfrac{BC}{AB}$，

$\therefore$ $AB=\dfrac{BC}{\sin A}$.

又 $BC=6$，$\sin A=\dfrac{3}{4}$，

$\therefore$ $AB=\dfrac{6}{\frac{3}{4}}=8$.

(2) 由勾股定理，得

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}.$$

$\therefore$ $\sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{2\sqrt{7}}{8}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

例题 3

本题是根据正弦、余弦的定义求值的基本问题，其要求与例题 1 类似，可让学生自主完成.

例题 4

本节锐角的三角比是在直角三角形中定义的，本题将锐角放在平面直角坐标系中，探求这个锐角的三角比的值，对概念的理解和运用提出了较高的要求.

对学生解题思路的引导，要从锐角的三角比的定义出发，让学生思考构造一个含这个锐角的直角三角形. 所以先过点 P 作 x 轴的垂线，得到直角三角形，再依据锐角的三角比的定义求值.

要提醒学生注意坐标平面内点的坐标的意义，把握点 P 的坐标和所作直角三角形中两直角边的长度之间的关系.

例题 5

本题是锐角的三角比定义的灵活运用. 题(1)是已知直角三角形中一个锐角的正弦值和锐角对边的长，求斜边长，实际上就是利用被除数、除数、商这三者之间的关系解题.

【注意事项】

(1) 例题 4 有助于学生深入理解锐角三角比的概念，同时渗透了用坐标法定义三角比的思路，对高中引进任意角三角比的概念有铺垫作用. 教学中，要着重于构造直角三角形的思考方法.

(2) 例题 5 是锐角三角比的概念学习的深入，也是为后面学习解直角三角形提供感性经验的支撑. 要引导学生体会锐角的三角比与三角形的边长之间的联系，知道一个三角比的值是直角三角形中相关的两边长相除所得的商，根据这个关系式或者它的变形，由一个三角比的值和相关的两边长这三个元素中的两个，就能求出第三个.

练习 25.1(2)

1. (1) $\sin A=\frac{3}{5}$,

$\cos A=\frac{4}{5}$;

(2) $\sin Q=\frac{12}{13}$,

$\cos Q=\frac{5}{13}$.

2. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$,

$\cos\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,

$\tan\alpha=\frac{1}{3}$, $\cot\alpha=3$.

3. (1) $MP=6$,

$\sin M=\frac{4}{5}$;

(2) $P(\sqrt{3},1)$,

$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

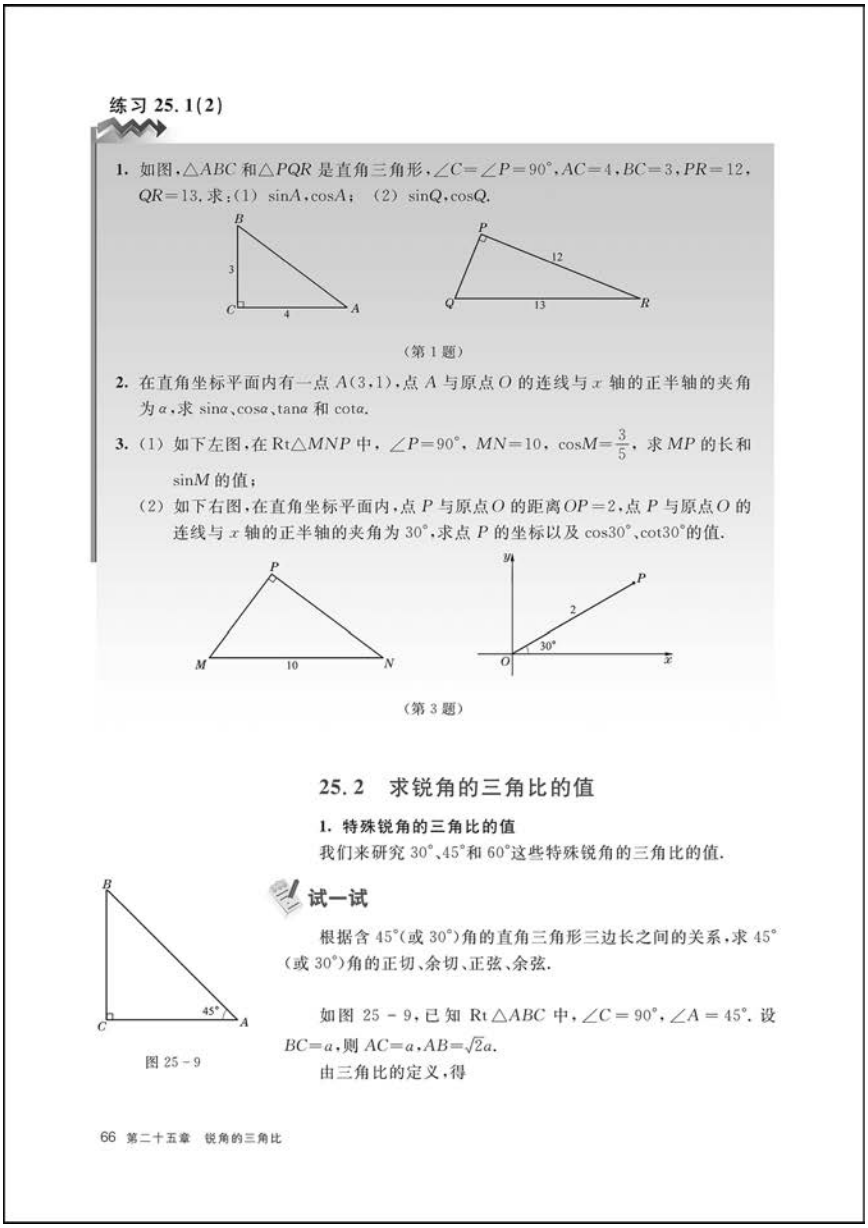
$\cot 30^\circ=\sqrt{3}$.

【本课重点】

让学生经历用几何方法探求特殊锐角的三角比值的过程,掌握特殊锐角的三角比的值.

试一试

让学生尝试求 45° 角、30° 角、60° 角的三角比的值,体验用几何方法求特殊锐角的三角比值的过程.



练习 25.1(2)

1. 如图,$\triangle ABC$ 和 $\triangle PQR$ 是直角三角形,$\angle C=\angle P=90^\circ$,$AC=4$,$BC=3$,$PR=12$,$QR=13$.求:(1) $\sin A$,$\cos A$; (2) $\sin Q$,$\cos Q$.

(第 1 题)

2. 在直角坐标平面内有一点 $A(3,1)$,点 A 与原点 O 的连线与 x 轴的正半轴的夹角为 α,求 $\sin\alpha$,$\cos\alpha$,$\tan\alpha$ 和 $\cot\alpha$.

3. (1) 如下左图,在 Rt$\triangle MNP$ 中,$\angle P=90^\circ$,$MN=10$,$\cos M=\frac{3}{5}$,求 MP 的长和 $\sin M$ 的值;

(2) 如下右图,在直角坐标平面内,点 P 与原点 O 的距离 $OP=2$,点 P 与原点 O 的连线与 x 轴的正半轴的夹角为 30°,求点 P 的坐标以及 $\cos 30^\circ$、$\cot 30^\circ$ 的值.

(第 3 题)

25.2 求锐角的三角比的值

1. 特殊锐角的三角比的值

我们来研究 30°、45° 和 60° 这些特殊锐角的三角比的值.

试一试

根据含 45°(或 30°)角的直角三角形三边长之间的关系,求 45°(或 30°)角的正切、余切、正弦、余弦.

如图 25-9,已知 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ$,$\angle A=45^\circ$.设 $BC=a$,则 $AC=a$,$AB=\sqrt{2}a$.

由三角比的定义,得

图 25-9

66 第二十五章 锐角的三角比

【教学目标】

(1) 经历用几何方法探求特殊锐角的三角比的值的过程,掌握特殊锐角的三角比的值.

(2) 会利用计算器求锐角的三角比的值,也能根据锐角的三角比的值求锐角的大小.

【注意事项】

求特殊锐角的三角比值,可以采用几何方法.这是因为在含特殊锐角的直角三角形中,有关几何定理已经指出它的三边的长度之间所具有的特殊关系.求任意锐角的三角比值,通常不能用几何方法.

$\tan 45^\circ=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{a}=1$；$\cot 45^\circ=\frac{AC}{BC}=\frac{a}{a}=1$；

$\sin 45^\circ=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；$\cos 45^\circ=\frac{AC}{AB}=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

再通过下面的填空，求 30°、60°角的三角比的值.

如图 25－10，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，那么$\angle B$ ＝________.

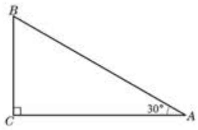


图 25－10

设 $BC=a$，则 $AB=$________ a，$AC=$________ a.

由三角比的定义，得

$\tan 30^\circ=\frac{(\quad)}{(\quad)}=$______；$\cot 30^\circ=\frac{(\quad)}{(\quad)}=$______；

$\sin 30^\circ=\frac{(\quad)}{(\quad)}=$______；$\cos 30^\circ=\frac{(\quad)}{(\quad)}=$______.

同理可得

$\tan 60^\circ=\frac{(\quad)}{(\quad)}=$______；$\cot 60^\circ=\frac{(\quad)}{(\quad)}=$______；

$\sin 60^\circ=\frac{(\quad)}{(\quad)}=$______；$\cos 60^\circ=\frac{(\quad)}{(\quad)}=$______.

求特殊锐角的三角比的值，一般步骤是：(1) 将直角三角形的某边长设为 a，用 a 的代数式表示其他两边的长；(2) 根据三角比的定义求值.

列出特殊锐角的三角比的值，如下表：

α	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
30°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	1	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

想一想

观察表中特殊锐角的三角比的值，两个相等的值相关的三角比名称及角度数各有什么特点？每一列三角比的值有什么特点或规律？

例题1 求下列各式的值：

(1) $\sin 30^\circ\cdot\tan 30^\circ+\cos 60^\circ\cdot\cot 30^\circ$；

(2) $\frac{2\sin^2 60^\circ-\cos 60^\circ}{\tan^2 60^\circ-4\cos 45^\circ}$.

$\sin^2 A$ 表示 $(\sin A)^2$，其余类同.

解 (1) $\sin 30^\circ\cdot\tan 30^\circ+\cos 60^\circ\cdot\cot 30^\circ$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\times\sqrt{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

师生共同完成求 45°角的三角比的值；然后让学生自主探求 30°角、60°角的三角比的值.

想一想

引导学生发现特殊锐角的三角比值之间的关系，获得规律性的认识和记忆比值的方法.

例题 1

本题是让学生熟悉特殊锐角的三角比值，同时复习二次根式的运算.

【注意事项】

通过“想一想”的活动，让学生对特殊锐角的三角比值表获得以下认识：

① 如果两角互余，那么其中一个角的正切值(正弦值)与另一个角的余切值(余弦值)相等；

② 以 30°角、45°角、60°角为序，正切值和正弦值从小到大，余切值和余弦值则从大到小；

③ 正切值和余切值两列中，每列的值构成等式$\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}=1$；

④ 正弦值和余弦值两列中，每列中的值是分别以$\sqrt{1}$(即 1)、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$为分子而以 2 为分母构成的数.

练习 25.2(1)

1. $\frac{\sqrt{3}}{3}$；1；$\frac{\sqrt{3}}{2}$；$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. sin60°或 cos30°；
tan45°或 cot45°；
sin45°或 cos45°；
tan60°或 cot30°.

3. （1）$\frac{3\sqrt{3}}{2}$；
（2）$\sqrt{2}-2$；
（3）1.

4. $\sqrt{2}=2\sin45^\circ=\frac{1}{\sin45^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{\tan60^\circ}$；
$\sqrt{3}=\tan60^\circ=2\cos30^\circ=\frac{1}{\tan30^\circ}$.

【本课重点】

让学生学会利用计算器求锐角的三角比的值以及根据锐角的三角比的值求锐角的大小.

（2）$\frac{2\sin^2 60^\circ-\cos60^\circ}{\tan^2 60^\circ-4\cos45^\circ}$

$$=\frac{2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}}{(\sqrt{3})^2-4\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{3-2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}.$$

练习 25.2(1)

1. 填空：
$\tan30^\circ=$______；$\cot45^\circ=$______；$\sin60^\circ=$______；$\cos45^\circ=$______.

2. 用特殊锐角的三角比填空：
$\frac{\sqrt{3}}{2}=$______$=$______；$1=$______$=$______；
$\frac{\sqrt{2}}{2}=$______$=$______；$\sqrt{3}=$______$=$______.

3. 求下列各式的值：
（1）$3\sin60^\circ-2\cos30^\circ+\tan60^\circ$；
（2）$\frac{\sin45^\circ-\cot45^\circ}{\sin^2 45^\circ}$；
（3）$\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ$.

4. 我们知道，$\frac{1}{2}=\sin30^\circ=\cos60^\circ=\sin^2 45^\circ=\frac{\cos30^\circ}{\cot30^\circ}=\tan45^\circ-\cos60^\circ$.
试一试，用含特殊锐角的三角比的式子填空：
$\sqrt{2}=$______$=$______$=$______.
$\sqrt{3}=$______$=$______$=$______.

2. 使用计算器求锐角的三角比的值

特殊锐角三角比的值，可以通过几何计算求得. 任意锐角的三角比的值，通常利用计算器求得.

只要计算器上有 $\boxed{\sin}$、$\boxed{\cos}$、$\boxed{\tan}$（或 $\boxed{\text{tg}}$）键，就可以用来求锐角三角比的值. 通常，计算器所显示的这个三角比的值是它的近似值.

计算器的型号较多，使用方法不完全相同，具体操作可参阅其使用说明书.

由于我们现在遇到的表示锐角的大小的单位都是“度、分、秒”，因此在使用计算器求锐角三角比的值时，首先必须进入 DEG（角度）模式.

68 第二十五章 锐角的三角比

【注意事项】

由于计算器的型号较多，使用方法与课本所提供的方法可能不全相同，要指导学生参阅其使用说明书学会具体操作.

如:在计算器面板上,按$\boxed{\text{MODE}}$键,屏幕显示:

然后按$\boxed{1}$键,计算器即进入了 DEG 模式.

如果按$\boxed{\text{MODE}}$键一次,屏幕未显出图示的画面,那么反复按$\boxed{\text{MODE}}$键,直到显示出来为止.

"DEG"表示角度的单位制为"度、分、秒".

例题2 求 $\sin 15°$和 $\cos 20°$的值(精确到 0.000 1).

解 在 DEG 模式下,按下面的顺序依次按键:

$\boxed{\sin}$ $\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$

屏幕显示:

$\therefore$ $\sin 15° \approx 0.258\,8$.

再按下面的顺序依次按键:

$\boxed{\cos}$ $\boxed{2}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$

屏幕显示:

$\therefore$ $\cos 20° \approx 0.939\,7$.

一般计算器上没有$\boxed{\cot}$键,我们可以利用

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

来求 $\cot\alpha$ 的值.

例题3 求 $\cot 75°$的值(精确到 0.000 1).

解 按下面的顺序依次按键:

$\boxed{1}$ $\div$ $\boxed{\tan}$ $\boxed{7}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$

屏幕显示:

$\therefore$ $\cot 75° \approx 0.267\,9$.

第一节 锐角的三角比 69

利用计算器求三角比的值时,先要选定"角度模式"(DEG).

例题 2

本题初步介绍了利用计算器求三角比的值的操作方法,这是在不涉及"度,分,秒"转换的简单情况下求值.

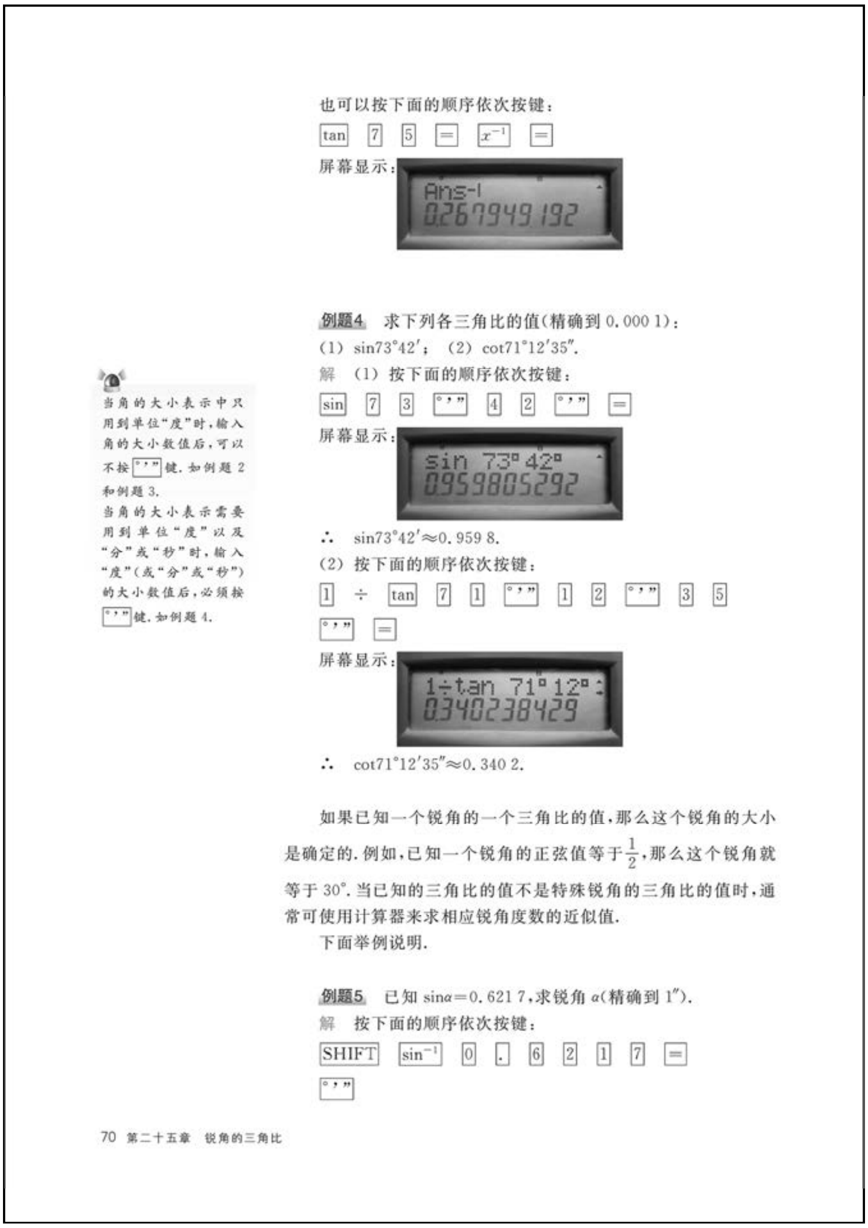
例题 3

本题说明了利用计算器求余切值的方法.

计算器上没有"cot"键,要求余切值,必须先求正切值,再取倒数求得.

【注意事项】

利用计算器求三角比的值时,解题过程中不必说明按键的操作顺序.



也可以按下面的顺序依次按键：

$\boxed{\tan}\ \boxed{7}\ \boxed{5}\ \boxed{=}\ \boxed{x^{-1}}\ \boxed{=}$

屏幕显示：

Ans-1
0.267949192

例题4 求下列各三角比的值(精确到 0.000 1)：

(1) sin73°42′； (2) cot71°12′35″.

解 (1) 按下面的顺序依次按键：

$\boxed{\sin}\ \boxed{7}\ \boxed{3}\ \boxed{{}^{\circ}\,{}'\,{}''}\ \boxed{4}\ \boxed{2}\ \boxed{{}^{\circ}\,{}'\,{}''}\ \boxed{=}$

屏幕显示：

sin 73°42°
0.959805292

∴ sin73°42′≈0.959 8.

(2) 按下面的顺序依次按键：

$\boxed{1}\ \div\ \boxed{\tan}\ \boxed{7}\ \boxed{1}\ \boxed{{}^{\circ}\,{}'\,{}''}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{{}^{\circ}\,{}'\,{}''}\ \boxed{3}\ \boxed{5}$
$\boxed{{}^{\circ}\,{}'\,{}''}\ \boxed{=}$

屏幕显示：

1÷tan 71°12°
0.340238429

∴ cot71°12′35″≈0.340 2.

当角的大小表示中只用到单位“度”时，输入角的大小数值后，可以不按 $\boxed{{}^{\circ}\,{}'\,{}''}$ 键. 如例题 2 和例题 3.
当角的大小表示需要用到单位“度”以及“分”或“秒”时，输入“度”(或“分”或“秒”)的大小数值后，必须按 $\boxed{{}^{\circ}\,{}'\,{}''}$ 键. 如例题 4.

如果已知一个锐角的一个三角比的值，那么这个锐角的大小是确定的. 例如，已知一个锐角的正弦值等于 $\frac{1}{2}$，那么这个锐角就等于 30°. 当已知的三角比的值不是特殊锐角的三角比的值时，通常可使用计算器来求相应锐角度数的近似值.

下面举例说明.

例题5 已知 sinα=0.621 7，求锐角 α(精确到 1″).

解 按下面的顺序依次按键：

$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sin^{-1}}\ \boxed{0}\ \boxed{.}\ \boxed{6}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$
$\boxed{{}^{\circ}\,{}'\,{}''}$

70 第二十五章 锐角的三角比

例题 4

本题进一步介绍了利用计算器求三角比的值的操作方法，其中涉及“度、分、秒”的转换.

例题 5

本题是已知一个锐角的正弦值求锐角的大小.

$\boxed{\sin^{-1}}$ 键表示“反正弦”，不必向学生解释.

【注意事项】

在求 sin27°18″的值时，必须按下面的顺序依次按键：

$\boxed{\sin}\boxed{2}\boxed{7}\boxed{{}^{\circ}\,{}'\,{}''}\boxed{0}\boxed{{}^{\circ}\,{}'\,{}''}\boxed{1}\boxed{8}\boxed{{}^{\circ}\,{}'\,{}''}\boxed{=}$

即当度或分出现零时，要注意转换，如上所述可按求 sin27°0′18″的值键入.

屏幕显示：

∴ $\alpha\approx38^\circ26'25''$.

例题6 已知 $\cot\alpha=1.302\,5$，求锐角 α（精确到 $1''$）.

解 按下面的顺序依次按键：

SHIFT tan⁻¹ (1 ÷ 1 . 3 0 2 5) = °'"

屏幕显示：

∴ $\alpha\approx37^\circ30'55''$.

例题7 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=15$，$BC=9$，求 $\angle A$ 的度数（精确到 $1'$）.

解 ∵ $\angle C=90^\circ$，$AC=15$，$BC=9$，

∴ $\tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{9}{15}=0.6$.

利用计算器，得 $\angle A\approx30^\circ58'$.

练习 25.2(2)

1. 用计算器求下列各三角比的值（精确到 $0.000\,1$）：
   （1）$\sin80^\circ$；（2）$\cos35^\circ$；
   （3）$\tan70^\circ$；（4）$\cot68^\circ$.
2. 用计算器求下列各三角比的值（精确到 $0.000\,1$）：
   （1）$\tan23^\circ21'$；（2）$\sin51^\circ42'20''$；
   （3）$\cos13^\circ12'9''$；（4）$\cot78^\circ45'25''$.
3. 已知锐角 α 的三角比的值，用计算器求锐角 α（精确到 $1''$）：
   （1）$\sin\alpha=0.492\,4$；（2）$\cos\alpha=0.574\,2$；
   （3）$\tan\alpha=0.841\,6$；（4）$\cot\alpha=2.75$.
4. 在△ABC 中，$\angle C=90^\circ$.
   （1）已知 $b=20$，$\angle B=64^\circ29'$，求 c（精确到 0.1）.
   （2）已知 $b=9.6$，$c=12.5$，求 $\angle A$（精确到 $1''$）.

例题 6

本题是已知一个锐角的余切值求锐角的大小. 与例题 3 相仿，应先把余切的值转换成相应的正切值，然后求锐角的大小.

例题 7

本题是锐角的三角比的运用. 由已知直角三角形中两直角边的长求锐角的大小，是解直角三角形内容的渗透，让学生初步感知锐角的三角比是定量研究直角三角形的有用工具.

练习 25.2(2)

1. （1）0.984 8；
（2）0.819 2；
（3）2.747 5；
（4）0.404 0.

2. （1）0.431 7；
（2）0.784 8；
（3）0.973 6；
（4）0.198 8.

3. （1）$\alpha\approx29^\circ29'54''$；
（2）$\alpha\approx54^\circ57'23''$；
（3）$\alpha\approx40^\circ5'2''$；
（4）$\alpha\approx19^\circ58'59''$.

4. （1）$c\approx22.2$；
（2）$\angle A\approx39^\circ49'31''$.

【注意事项】

通过本节的学习，要让学生学会利用计算器求锐角三角比的值的操作方法，并认识到计算器是学习数学的重要工具. 在后面解直角三角形及其应用的教学中，要强调计算器的使用，帮助学生熟练掌握计算器的有关操作，同时增强应用现代科技的意识.

【本课重点】

归纳在直角三角形中，除直角外其余五个元素之间的关系；引进解直角三角形的概念.

思考

引导学生将已经学过的直角三角形有关元素之间关系的知识进行归纳整理.

问题

这个问题是一个一般化的问题，让学生通过分析直角三角形中除直角外其余五个元素的相互联系与制约，获得对于解直角三角形至少需要几个条件的认识.

第 65 页例题 5 和第 71 页例题 7 的学习，为学生讨论这个问题提供了具体认识的素材，可结合这两个例题来讨论回答.

Jie Zhijiao Sanjiaoxing

第二节　解直角三角形

25.3　解直角三角形

我们知道，一个三角形共有三条边、三个角六个元素. 直角三角形中有一个角是直角.

思考

直角三角形的三条边和两个锐角这五个元素之间有哪些关系？

在 Rt△ABC 中，如果∠C＝90°，那么它的三条边和两个锐角这五个元素之间有以下的关系：

（1）三边之间的关系：

$$a^2+b^2=c^2.$$

（2）锐角之间的关系：

$$\angle A+\angle B=90°.$$

（3）边角之间的关系：

$$\tan A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}},\quad \cot A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\angle A\text{ 的对边}},$$

$$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}},\quad \cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}.$$

将上面关系式中的∠A 换成∠B，就是∠B 与边的关系式.

问题

对于一个直角三角形，除直角外的五个元素中，至少需要知道几个元素，才能求出其他的元素？

直角三角形中除直角外的五个元素之间有特定的关系，可利用上面所列的关系式，由已知元素求未知元素.

但是，如果只知道五个元素中的一个，例如一个锐角或一条边，显然不能全部求出其他的元素，因为这样的直角三角形的大小（甚至于形状）是不确定的.

如果知道五个元素中的两个，其中一个元素是一条边，那么这个直角三角形的形状和大小都确定. 也就是说，只要知道一条边和一个锐角，或者知道两条边，就可以求其他元素.

72　第二十五章　锐角的三角比

【教学目标】

（1）掌握在直角三角形中，除直角外其余五个元素之间的关系；了解确定一个直角三角形和解直角三角形所需条件的一致性.

（2）经历对满足什么条件可解直角三角形的问题分析过程，体会从一般到特殊的思考方法.

（3）会解直角三角形；会选择合理的算法（包括使用计算器时，过程比较简单、误差较小等）.

（4）在有关三角形的几何计算中，领会化归数学思想.

【注意事项】

从特殊到一般、从一般到特殊，是人们认识客观世界的思考方法. 由于学生已经具有画直角三角形和对直角三角形中五个元素（直角除外）之间关系的知识，因此可以采用从一般到特殊的思考方法，来讨论解直角三角形需要什么条件的问题.

例题1 在 Rt△ABC 中，已知$\angle C=90°$，$\angle B=38°$，$a=8$，求这个三角形的其他边和角.

解 ∵ $\angle A+\angle B=90°$，

∴ $\angle A=90°-\angle B=90°-38°=52°$.

∵ $\cos B=\dfrac{a}{c}$，

∴ $c=\dfrac{a}{\cos B}=\dfrac{8}{\cos 38°}\approx 10.15$.

∵ $\tan B=\dfrac{b}{a}$，

∴ $b=a\tan B=8\tan 38°\approx 6.250$.

> 求直角三角形的边长和角度时，常会遇到近似计算，如不加说明，则边长保留四个有效数字，角度精确到1′.

通过例题1，我们已经看到，知道直角三角形中除直角外的两个元素（至少有一个元素是边），就可以求出这个直角三角形的其他三个元素.

在直角三角形中，由已知元素求出所有未知元素的过程，叫做**解直角三角形**.

> 解直角三角形所需要的条件，与确定一个直角三角形所需要的条件（即直角三角形全等的有关判定定理的条件）是一致的.

例题2 在 Rt△ABC 中，已知$\angle C=90°$，$c=7.34$，$a=5.28$，解这个直角三角形.

解 在 Rt△ABC 中，

∵ $\angle C=90°$， ∴ $a^2+b^2=c^2$，

得 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{7.34^2-5.28^2}\approx 5.099$.

∵ $\sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{5.28}{7.34}\approx 0.7193$，

∴ $\angle A\approx 46°0'$.

∴ $\angle B=90°-\angle A\approx 90°-46°0'=44°0'$.

> 也可以先求$\angle A$，再利用 $b=c\cos A$ 求边 b 的长.

过去，我们只能解一些特殊的直角三角形（如有一个锐角为30°或45°）. 运用锐角三角比，就可以对任意的直角三角形，在给定的条件下解这个直角三角形. 锐角三角比是从数量方面研究直角三角形的重要工具.

练习 25.3(1)

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，由下列条件解直角三角形：
   (1) $\angle A=60°$，$a=10$（结果保留根号）；
   (2) $\angle B=43°21'$，$c=27.01$.
2. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，由下列条件解直角三角形：
   (1) $b=4.32$，$c=6.18$；
   (2) $a=7.096$，$b=12.16$.

第二节 解直角三角形 73

例题 1

在前面对直角三角形中由已知元素求未知元素所需条件进行理性分析的基础上，本例让学生进行实践和体验.

引进解直角三角形的概念.

解直角三角形的问题有两种类型：(1)已知一条边和一个锐角；(2)已知两条边. 例题 1 属于类型(1).

例题 2

本题属于上述类型(2).

练习 25.3(1)

1. (1) $\angle B=30°$，
$b=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$，$c=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$；

(2) $\angle A=46°39'$，
$a\approx 19.64$，
$b\approx 18.54$.

2. (1) $a\approx 4.419$，
$\angle A\approx 45°39'$，
$\angle B\approx 44°21'$；

(2) $c\approx 14.08$，
$\angle A\approx 30°16'$，
$\angle B\approx 59°44'$.

【注意事项】

(1) 例题 1 中求边 b 的长，可以利用正切，也可以利用勾股定理. 在利用勾股定理求解的过程中，要使用 c 的值，而 c 的值是一个近似值，再由 c 求 b 则误差有所累积. 因此，解直角三角形时，一般应尽量使用题中所给数据，少用中间运算得到的数据，这样误差的累积影响较小.

(2) 通过对解直角三角形的理性分析和例题 1 和例题 2 的解题实践后，可指导学生思考解直角三角形所需的条件与确定一个直角三角形所需的条件是否一致，了解在“边款”所作的说明.

(3) 在解直角三角形的过程中，计算器是常用的工具. 教学时，要让学生在计算器的环境下进行活动，通过对问题的分析和思考，理清解题思路，再利用计算器解决问题. 要注意继续对学生使用计算器进行指导.

例题 3

本题涉及的三角形不是直角三角形，它的求解问题可化归为解直角三角形的问题.

要让学生体会构造直角三角形的思考方法. 利用锐角的三角比进行几何计算，现在必须借助于直角三角形；在等腰三角形中，要注意利用等腰三角形的性质来构造直角三角形.

试一试

让学生尝试运用解例题 3 的思考方法解决新问题.

例题 4

本题已知三角形的两边及其夹角，可知这个三角形是确定的. 题目中求 AC 边上的高是铺垫，主要是探求这个三角形的面积.

解题后可让学生反思，学会由已知三角形两边及其夹角求它的面积.

例题3 在等腰三角形 ABC 中，已知 $AB=AC$，$\angle A=45°$，$BC=6$，求它的腰长和底角.

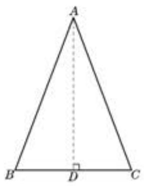


图 25－11

分析　根据三角形内角和定理，可求得底角的大小. 如图 25－11，作底边上的高，由等腰三角形“三线合一”的性质，可知底边被高平分，于是得到两个全等的直角三角形. 因此在其中任意一个直角三角形中，知道了一个锐角、一条直角边，可解这个直角三角形，从而得到等腰三角形的腰长.

解　在$\triangle ABC$中，

$\angle B=\angle C=\frac{1}{2}(180°-\angle A)$

$=\frac{1}{2}(180°-45°)=67.5°=67°30'$.

过点 A 作 $AD\perp BC$，垂足为点 D.

$\because$　$AB=AC$，

$\therefore$　$BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 6=3$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，

$\because$　$\cos B=\frac{BD}{AB}$，

$\therefore$　$AB=\frac{BD}{\cos B}=\frac{3}{\cos 67°30'}\approx 7.839$.

所以，这个等腰三角形的腰长约为 7.839，底角为 $67°30'$.

如果作腰上的高，能解$\triangle ABC$吗？

如果一个三角形不是直角三角形，那么要由已知元素求未知元素时，常常把它化归为解直角三角形的问题.

试一试

在等腰三角形中，已知 $AB=AC=5$，$BC=6$，求它的顶角和底角.

例题4 在$\triangle ABC$中，$AC=9$，$AB=8.5$，$\angle A=38°$. 求 AC 边上的高及$\triangle ABC$的面积.

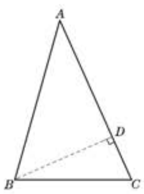


图 25－12

分析　作出 AC 边上的高 BD，得 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$. 通过解直角三角形，可求出 BD 的长，再求$\triangle ABC$的面积.

解　如图 25－12，过点 B 作 $BD\perp AC$，垂足为点 D.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，

$\because$　$\sin A=\frac{BD}{AB}$，

$\therefore$　$BD=AB\cdot\sin A=8.5\times\sin 38°\approx 5.233$.

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times 9\times 5.233\approx 23.55$.

所以，AC 边上的高约为 5.233，$\triangle ABC$的面积约为 23.55.

74 第二十五章　锐角的三角比

【注意事项】

（1）现在对任意三角形中的几何计算，常常把它化归为解直角三角形. 例题 3 和例题 4 主要是让学生领会化归的数学思想，不是学习解斜三角形. 解斜三角形是高中数学的内容，而且现在求解的方法也不是通法.

（2）把非直角三角形中的几何计算问题化归为解直角三角形的问题时，常常要构造直角三角形. 怎样构造直角三角形才是合理的，必须根据问题作具体分析.

练习 25.3(2)

1. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC=10$，$\angle A=80°$，求BC的长及$S_{\triangle ABC}$.
2. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC=15$，$BC=24$，求：
   (1) $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$；　　(2) $S_{\triangle ABC}$.
3. 在$\triangle ABC$中，$AB=5$，$BC=8$，$\angle B=60°$，求$S_{\triangle ABC}$(结果保留根号).

25.4　解直角三角形的应用

在现实生活中，解直角三角形有着广泛的应用，我们通过举例来说明.

在测量过程中，常常会遇到仰角和俯角. 如图 25－13，当我们进行测量时，在视线与水平线所成的角中，视线在水平线上方的角叫做仰角，视线在水平线下方的角叫做俯角.

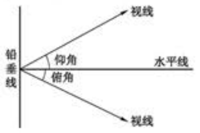


图 25－13

例题1　如图 25－14，在地面上离旗杆BC底部 10 米的A处，用测角仪测得旗杆顶端C的仰角为 52°，已知测角仪AD的高为 1.5 米，求旗杆BC的高（精确到 0.1 米）.

解　从测角仪的D处作$DE /\!/ AB$，交BC于点E.

根据题意，可知

$DE=AB=10$(米)，$BE=AD=1.5$(米)，$\angle CDE=52°$.

在 Rt$\triangle DCE$中，$\tan\angle CDE=\dfrac{CE}{DE}$，得

$CE=DE\cdot\tan\angle CDE=10\cdot\tan 52°\approx 12.80$(米).

$\therefore\ BC=BE+CE$

$\approx 1.5+12.80\approx 14.3$(米).

答：旗杆BC的高约为 14.3 米.

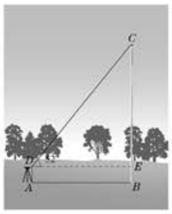


图 25－14

在近似计算中，通常将中间运算的结果比规定的精确度多保留一个有效数字或一位小数.

例题2　如图 25－15，甲乙两幢楼之间的距离CD等于 40 米，现在要测乙楼的高BC($BC\perp CD$)，所选观察点A在甲楼一窗口处，$AD /\!/ BC$. 从A处测得乙楼顶端B的仰角为 32°，底部C的俯角为 25°. 求乙楼的高度(精确到 1 米).

解　从观察点A处作$AE /\!/ CD$，交BC于点E.

第二节　解直角三角形　75

练习 25.3(2)

1. $BC\approx 12.86$，
   $S_{\triangle ABC}\approx 49.24$.
2. (1) $\angle A\approx 106°16'$，
   $\angle B=\angle C\approx 36°52'$；
   (2) $S_{\triangle ABC}=108$.
3. $S_{\triangle ABC}=10\sqrt{3}$.

【本课重点】

引导学生学习运用解直角三角形的知识，解决简单的测高问题，体会不同情景中的不同测量方法.

在有关测量的问题情景中，常用到仰角和俯角，要先让学生明确这两个概念的含义.

例题 1

本题是测量底部可以到达的物体的高度.

注意向学生说明测角仪的高是指它安放在支架上时相对于地面的高度.

例题 2

本题也是测量底部可以到达的物体的高度，但与例题 1 所用的测量方法不同.

【教学目标】

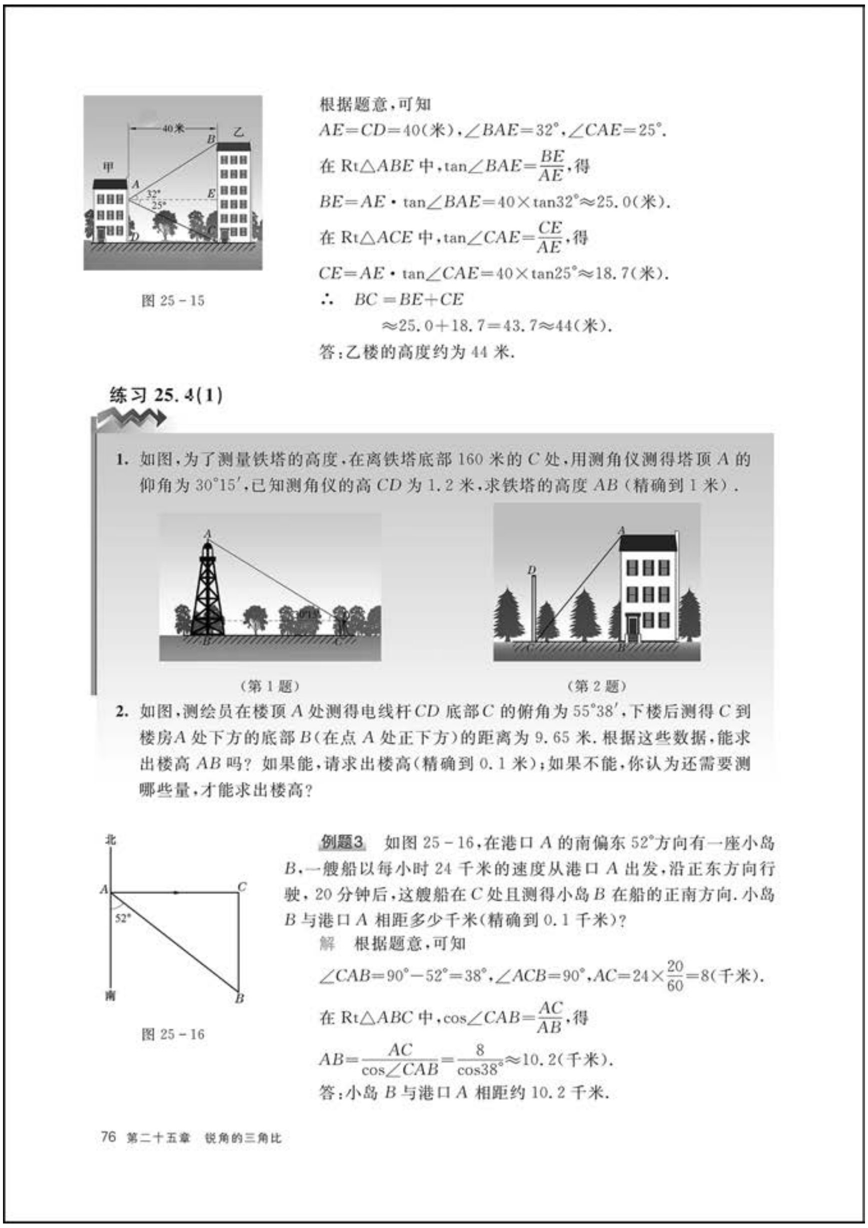
(1) 理解仰角、俯角、坡角、坡度等概念.

(2) 会用解直角三角形的知识解决有关测高、测距、斜坡、工件设计等简单的实际问题.

(3) 在解决实际问题的过程中，感受数学与现实的联系，增强对于数学源于生活、服务于生活的意识以及数学应用的能力.

【注意事项】

例题 1 和例题 2 是生活实际中常见的问题，示意图表明了将实践问题抽象为数学问题的过程. 在例题学习中，学生可以感受到数学与生活的紧密联系以及解直角三角形的知识有用. 另外，还可以体会到不同的情景中所采用的不同测量方法，为进行这章的实践活动作准备.



根据题意，可知

$AE=CD=40$(米)，$\angle BAE=32°$，$\angle CAE=25°$.

在 Rt$\triangle ABE$ 中，$\tan\angle BAE=\dfrac{BE}{AE}$，得

$BE=AE\cdot\tan\angle BAE=40\times\tan32°\approx25.0$(米).

在 Rt$\triangle ACE$ 中，$\tan\angle CAE=\dfrac{CE}{AE}$，得

$CE=AE\cdot\tan\angle CAE=40\times\tan25°\approx18.7$(米).

$\therefore\ BC=BE+CE$

$\approx25.0+18.7=43.7\approx44$(米).

答：乙楼的高度约为 44 米.

图 25－15

练习 25.4(1)

1. 如图，为了测量铁塔的高度，在离铁塔底部 160 米的 C 处，用测角仪测得塔顶 A 的仰角为 $30°15'$，已知测角仪的高 CD 为 1.2 米，求铁塔的高度 AB（精确到 1 米）.

（第 1 题）　　（第 2 题）

2. 如图，测绘员在楼顶 A 处测得电线杆 CD 底部 C 的俯角为 $55°38'$，下楼后测得 C 到楼房 A 处下方的底部 B（在点 A 处正下方）的距离为 9.65 米. 根据这些数据，能求出楼高 AB 吗？如果能，请求出楼高（精确到 0.1 米）；如果不能，你认为还需要测哪些量，才能求出楼高？

例题3　如图 25－16，在港口 A 的南偏东 52°方向有一座小岛 B，一艘船以每小时 24 千米的速度从港口 A 出发，沿正东方向行驶，20 分钟后，这艘船在 C 处且测得小岛 B 在船的正南方向. 小岛 B 与港口 A 相距多少千米（精确到 0.1 千米）？

解　根据题意，可知

$\angle CAB=90°-52°=38°$，$\angle ACB=90°$，$AC=24\times\dfrac{20}{60}=8$(千米).

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\cos\angle CAB=\dfrac{AC}{AB}$，得

$AB=\dfrac{AC}{\cos\angle CAB}=\dfrac{8}{\cos38°}\approx10.2$(千米).

答：小岛 B 与港口 A 相距约 10.2 千米.

图 25－16

76 第二十五章　锐角的三角比

练习 25.4(1)

1. $AB\approx95$ 米.
2. $AB\approx14.1$ 米.

【本课重点】

引导学生学习运用解直角三角形的知识，解决简单的测距问题，体会化归思想和方程思想.

例题 3

本题是测量两地间距离问题. 利用示意图，可通过解直角三角形求出两地间的距离.

【注意事项】

将实际问题抽象为数学问题，是教学中的一个难点. 本节的例题中，直接给出了由实际问题所得数学问题的示意图，在习题中同样也有图示，适当降低了学生学习的难度. 一般来说，现阶段进行有关解直角三角形应用的训练和测试，题中都要给出示意图，以控制难度要求；但在实践活动中，含有学生自主进行画图和计算的要求.

例题4 如图 25－17，为了测量河宽，在河的一边沿岸选取 B、C 两点，对岸岸边有一块石头 A. 在 $\triangle ABC$ 中，测得 $\angle C=62^\circ$，$\angle B=49^\circ$，$BC=33.5$ 米，求河宽（精确到 0.1 米）.

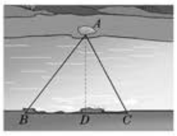


图 25－17

解 过点 A 作 $AD\perp BC$，垂足为点 D，河宽就是 AD 的长.

在 $Rt\triangle ABD$ 中，$\cot B=\dfrac{BD}{AD}$，得

$BD=AD\cdot\cot B=AD\cdot\cot 49^\circ$.

在 $Rt\triangle ACD$ 中，$\cot C=\dfrac{CD}{AD}$，得

$CD=AD\cdot\cot C=AD\cdot\cot 62^\circ$.

$\because$ $BD+CD=BC$，

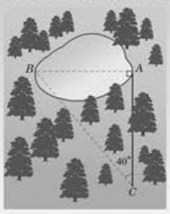
$\therefore$ $AD\cdot\cot 49^\circ+AD\cdot\cot 62^\circ=33.5$.

$\therefore$ $AD=\dfrac{33.5}{\cot 49^\circ+\cot 62^\circ}\approx 23.9$（米）.

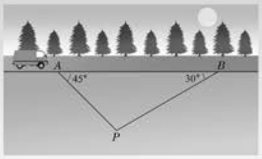
答：河宽约为 23.9 米.

练习 25.4(2)

1. 如图，为了测量池塘边 A、B 两点之间的距离，在与直线 AB 垂直的方向上选取点 C，构成 $Rt\triangle ABC$. 在点 C 处测得 $\angle C$ 为 40°，AC 长为 83.5 米. 求 A、B 之间的距离（精确到 0.1 米）.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 某条道路上通行车辆限速为 60 千米/时，在离道路 50 米的点 P 处建一个监测点，道路的 AB 段为监测区（如图）. 在 $\triangle ABP$ 中，已知 $\angle A=45^\circ$，$\angle B=30^\circ$，车辆通过 AB 段的时间在多少秒以内时，可认定为超速（精确到 0.1 秒）？

在修路、挖河、开渠等设计图纸上，都需要注明斜坡的倾斜程度.

如图 25－18，坡面的铅垂高度 h 和水平宽度 l 的比叫做坡面的坡度（或坡比），记作 i，即 $i=\dfrac{h}{l}$.

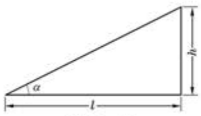


图 25－18

第二节 解直角三角形 77

例题 4

本题是测量小河的宽度，它不能直接通过解直角三角形得到结果，要运用方程思想来解决.

$\triangle ABC$ 中 BC 边上的高就是河宽，画图表示出来时，得两个直角三角形. 但是，解这两个直角三角形的条件都不具备，而把 BC 边上的高看作“已知”，则这两个直角三角形可解. 然后，通过列方程求出 BC 边上的高. 要引导学生体会解题过程中的化归思想和方程思想.

练习 25.4(2)

1. 70.1 米.
2. 8.2 秒.

【本课重点】

引导学生学习运用解直角三角形的知识，解决斜坡中的简单计算问题.

在有关斜坡的问题情景中，常用到坡度和坡角，要先让学生明确这两个概念的含义.

【注意事项】

例题 4 测量河宽的方法，是在河的一边沿岸进行测量所采用的，有可行性；但要注意对岸岸边的标志物是能看清的，这个标志物是什么无关紧要，只是应在岸边.

例题 5

本题是斜坡中的有关计算问题. 一方面让学生熟悉坡度、坡角的概念,一方面让他们了解社会对残疾人的关心,激发与他人相互关爱的情感.

例题 6

本题也是斜坡中的有关计算问题. 其实际背景是铁路路基,抽象为一个等腰梯形.

坡度通常写成 $1:m$ 的形式,如 $i=1:1.5$.

坡面与水平面的夹角叫做坡角,记作 α. 坡度 i 与坡角 α 之间的关系从图 25-18 中可以得出:

$$i=\frac{h}{l}=\tan\alpha.$$

例题5 如图 25-19,一座大楼前的残疾人通道是斜坡,用 AB 表示,沿着通道走 3.2 米可进入楼厅,楼厅比楼外的地面高 0.4米,求残疾人通道的坡度与坡角(角度精确到 $1'$,其他近似数取四个有效数字).

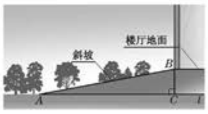


图 25-19

解 过点 A 作水平线 l,再作 $BC\perp l$,垂足为点 C.

根据题意,可知 $AB=3.2$ 米,$BC=0.4$ 米.

在 Rt△ABC 中,

$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{3.2^2-0.4^2}\approx3.1749$(米).

$\therefore\ i=\frac{BC}{AC}=\frac{0.4}{3.1749}\approx1:7.938.$

$\because\ \tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{0.4}{3.1749}\approx0.12599,$

$\therefore\ \angle A\approx7°11'.$

答:残疾人通道的坡度约为 $1:7.938$,坡角约为 $7°11'$.

例题6 如图 25-20(图中单位:米),一段铁路路基的横断面为等腰梯形 $ABCD$,路基顶宽 BC 为 2.8 米,路基高为 1.2 米,斜坡 AB 的坡度 $i=1:1.6$.

(1) 计算路基的下底宽(精确到 0.1 米);

(2) 求坡角(精确到 $1°$).

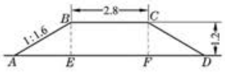


图 25-20

解 分别过点 B、C 作 $BE\perp AD$、$CF\perp AD$,垂足分别为点 E、F. 根据题意,可知

$BE=1.2$(米),$AE=DF$,$EF=BC=2.8$(米).

在 Rt△ABE 中,

$\because\ \frac{BE}{AE}=\frac{1}{1.6},$

$\therefore\ AE=1.6BE=1.6\times1.2=1.92$(米).

(1) $AD=AE+EF+DF=2AE+EF$

$=2\times1.92+2.8=6.64\approx6.6$(米).

(2) 设坡角为 α,则

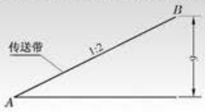
$$i=\tan\alpha=\frac{1}{1.6}=0.625,$$

$\therefore\ \alpha\approx32°.$

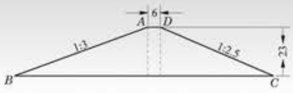
答:路基下底宽约为 6.6 米,坡角约为 $32°$.

练习 25.4(3)

1. 如图，传送带和地面所成斜坡的坡度为 1∶2，它把物体从地面送到离地面 9 米高的地方，求物体所经过的路程（精确到 0.1 米）.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，某水库大坝的横断面是梯形 $ABCD$，坝顶宽 AD 是 6 米，坝高是 23 米，背水坡 AB 的坡度为 1∶3，迎水坡 CD 的坡度为 1∶2.5，求：

（1）背水坡 AB 与坝底 BC 的长度（精确到 0.1 米）；

（2）迎水坡 CD 的坡角 α（精确到 1°）.

例题7 图 25－21 所示的工件叫做燕尾槽，它的横断面是一个等腰梯形，$\angle B$ 叫做燕尾角，AD 叫做外口，BC 叫做里口，AE 叫做燕尾槽深度. 已知 AD 长 180 毫米，BC 长 300 毫米，AE 长 70 毫米，那么燕尾角 B 的大小是多少（精确到 1′）？

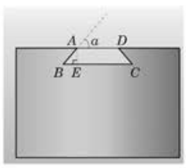


图 25－21

解　根据题意，可知

$BE=\frac{1}{2}(BC-AD)=\frac{1}{2}\times(300-180)=60$（毫米）.

在 Rt△ABE 中，

∵　$\tan B=\frac{AE}{BE}=\frac{70}{60}\approx 1.167$，

∴　$\angle B\approx 49°24'$.

答：燕尾角 B 的大小约为 $49°24'$.

例题8 如图 25－22，一条细绳系着一个小球在平面内摆动. 已知细绳从悬挂点 O 到球心的长度为 50 厘米，小球在左、右两个最高位置时，细绳相应所成的角为 40°. 求小球在最高位置和最低位置时的高度差（精确到 0.1 厘米）.

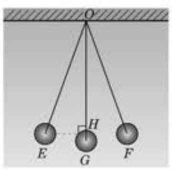


图 25－22

解　过点 E 作 $EH\perp OG$，垂足为点 H. 小球在最高位置和最低位置时的高度差就是 GH 的长. 根据题意，可知

$$\angle EOH=\frac{1}{2}\angle EOF=20°.$$

在 Rt△EOH 中，

∵　$\cos\angle EOH=\frac{OH}{OE}$，

∴　$OH=OE\cdot\cos\angle EOH=50\times\cos 20°\approx 46.98$（厘米）.

第二节　解直角三角形　79

练习 25.4(3)

1. 20.1 米.

2. （1）$AB\approx 72.7$ 米，
$BC=132.5$ 米；

（2）$\alpha\approx 22°$.

【本课重点】

引导学生进一步学习解直角三角形知识的应用，解决工件设计中的简单计算问题以及测量位置高度差和底部不能达到的物体高度的简单实际问题.

例题 7

本题是在金属切削中对燕尾槽工件的有关计算问题. 燕尾槽的横断面呈等腰梯形，梯形的上底在槽的外口位置上，这个问题归结为等腰梯形中的几何计算问题.

例题 8

本题是物理学中一个“摆”在摆动时不同位置的高度差的计算问题. 通过构造直角三角形，归结为解直角三角形的问题.

【注意事项】

在练习 25.4(3)第 2 题中，出现了“背水坡”和“迎水坡”两个专用词. 要向学生进行简要的解释.

例题 9

本题是测量底部不能到达的物体的高度.让学生再次体会在不同情景中,测量物体高度的不同方法,领会方程思想.

∴ $GH=OG-OH=50-46.98=3.02\approx 3.0$(厘米).

答:小球在最高位置和最低位置时的高度差约为 3.0 厘米.

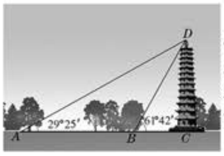


图 25－23

例题9 如图 25－23,小明想测量塔 CD 的高度.塔在围墙内,小明只能在围墙外测量,这时无法测得观察点到塔的底部的距离,于是小明在 A 处仰望塔顶,测得仰角为 $29°25'$,再往塔的方向前进 50 米至 B 处,测得塔顶的仰角为 $61°42'$(点 A、B、C 在一直线上),小明能测得塔的高度吗(小明的身高忽略不计,结果精确到0.1米)?

分析 设 $CD=x$,用 x 的代数式分别表示 BC、AC,然后列出方程求解.

解 设 $CD=x$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中,

∵ $\cot A=\dfrac{AC}{CD}$,

∴ $AC=CD\cdot\cot A=x\cot 29°25'$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BDC$ 中,

∵ $\cot\angle DBC=\dfrac{BC}{CD}$,

∴ $BC=CD\cdot\cot\angle DBC=x\cot 61°42'$.

∵ $AB=AC-BC$,

∴ $x\cot 29°25'-x\cot 61°42'=50$,

$$x=\frac{50}{\cot 29°25'-\cot 61°42'}\approx 40.5(\text{米}).$$

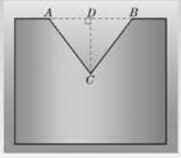
答:塔的高度约为 40.5 米.

练习 25.4(4)

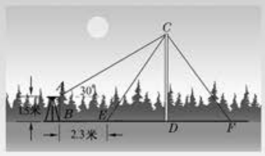
1. $\angle ACB\approx 55°1'$.
2. 6.2 米.

练习 25.4(4)

1. 如图,工件上有一个 V 形槽,测得它的上口宽 $AB=20\text{mm}$,深 $CD=19.2\text{mm}$,$AC=BC$.求 V 形角($\angle ACB$)的大小(精确到 $1'$).



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图,在电线杆上的 C 处引拉线 CE 和 CF 固定电线杆.在离电线杆 6 米的 B 处安置测角仪(点 B、E、D 在一直线上),在 A 处测得电线杆上 C 处的仰角为 $30°$.已知测角仪的高 AB 为 1.5 米,$BE=2.3$ 米,求拉线 CE 的长(精确到 0.1 米).

80 第二十五章 锐角的三角比

【注意事项】

(1) 本节解直角三角形应用的举例,这些问题有生产、生活实际的背景,主要涉及解直角三角形在测高、测距、工件设计中的简单应用.在教学中要注意对实际问题抽象为数学问题的过程进行说明,让学生初步领略数学化思想;要注意在这些数学问题中出现的几何图形,使学生对这些基本图形有充分的认识,并掌握通过解直角三角形对它们进行几何计算的基本方法;要指导学生领会化归思想、方程思想在几何计算中的运用,从中体会数学思想方法对解决问题的重要意义.

(2) 解直角三角形的应用很广泛,在本节例题教学和习题训练的基础上,要鼓励学生关心生产、生活实际中的解直角三角形的应用问题,运用所学的数学知识和方法进行探究、解决,增强数学应用的意识和能力.

Benzhang Xiaojie

25

本章小结

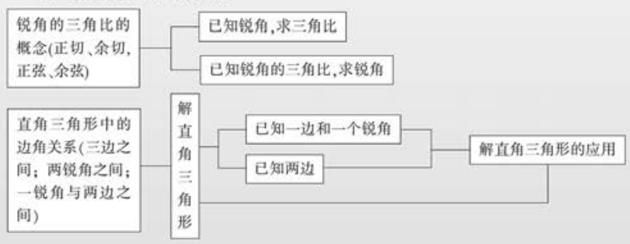
我们在本章学习了锐角的三角比的概念以及解直角三角形. 锐角三角比定量地描述了在直角三角形中边角之间的联系. 在直角三角形中，一个锐角的大小与两条边长的比值相互唯一确定，因此边长与角的大小之间可以相互转化. 利用锐角的三角比以及勾股定理，可以对直角三角形进行定量的分析，这是以前对直角三角形进行定性研究的深入，同时为研究几何图形开辟了新的途径.

知道了直角三角形中锐角大小与边长之间的关系，进一步会联想到：在任意三角形中，内角的大小与边长之间有怎样的联系？这个问题将在高中数学学习中解决.

解直角三角形是解决任意三角形中的计算问题的基础. 解直角三角形所需要的条件，可通过对判定直角三角形全等所需要的条件进行分析得到. 这样的思想方法，今后也可用于对解任意三角形的研究.

通过解决实际问题，我们对解直角三角形的应用已经有了初步了解. 在应用时，找到或适当构造直角三角形是前提，正确分析和把握直角三角形中的边角关系是关键. 在实际生活中，解直角三角形的应用非常广泛.

本章知识的结构框图如下：



本章小结 81

在引入锐角的三角比概念之前，对三角形的研究，主要从定性方面展开，只对特殊的直角三角形，进行了定量的分析，另外还有关于勾股定理的初步运用. 利用锐角的三角比和勾股定理，我们就可以对任何直角三角形进行定量的分析，这是几何研究的新方法.

本章内容是进一步学习三角学的基础，在对本章小结时，不仅要把握整章的知识结构，引导学生进行知识的整理和系统化，也要适当指明解直角三角形是定量分析的几何研究方法，帮助学生认识三角学的基本特点.

【设计意图】

解直角三角形的知识在生产、生活实际中有广泛的应用．安排三角测量的实践活动，就是要让学生经历将解直角三角形知识用于解决实际问题的过程，亲身感受数学源于生活、服务于生活的理念．

在测量过程中，学生要进行分析情景特点、初步确定测量方案、方案可行性分析、不同测量方案的比较、对初步方案的实施、对测量所得数据的处理和计算等基本活动，要使用测量工具、进行团队合作，有利于提升学生实践活动能力、知识应用能力以及团结协作精神．

【活动建议】

可把本项活动作为数学作业进行布置和检查，组织学生进行小组活动．

在学生设计测量方案有困难时，教师要适当提供指导和帮助．要提醒学生，在实际测量时要尽量减小误差．

要组织学生对实践活动报告进行汇报交流以及评价．要关注学生在整个活动过程中的体验．

Shijian Huodong

25

实践活动

测 量 活 动

活动内容

（A）测量学校操场上旗杆的高度；

（B）测量学校附近小河的宽度；

（C）在学校的操场上，测量学校围墙外的高楼（或其他较高物体，如电线杆）的高度．

（可在上述各项中选择一项开展活动）

活动方式

分小组活动．

集体讨论，分工合作，共同完成测量任务．

活动要求

1. 设计测量方案：

（1）画测量草图；

（2）确定需测的几何量；

（3）准备需要的测量仪器（平板仪，水平仪，测角仪，皮尺等）．

2. 实地测量．

3. 计算．

4. 撰写实践活动报告．

5. 组织汇报交流．

82 第二十五章 锐角的三角比

第二十六章　二 次 函 数

一、教学目标

1. 经历从实际问题引入二次函数的过程，理解二次函数的概念.

2. 知道二次函数的图像是抛物线，会用描点法画出用解析法表示的二次函数的大致图像.

3. 知道通过平移二次函数 $y=ax^2$ 的图像得到二次函数 $y=ax^2+c$、$y=a(x+m)^2$ 和 $y=a(x+m)^2+k$ 的图像的规律；会用配方法把二次函数的解析式 $y=ax^2+bx+c$ 化为 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式.

4. 能根据二次函数的解析式指出这个函数图像的开口方向、对称轴、顶点坐标以及最高点或最低点等特征，知道图像上升或下降的情况，认识函数的直观性质.

5. 在已知二次函数的三组对应值（即抛物线上三点的坐标）的条件下，会用待定系数法确定二次函数的解析式；能用二次函数的知识解决简单的实际问题.

6. 经历对二次函数图像的画法以及图像特征的研究过程，从中领略从特殊到一般、分解与组合的策略以及图形运动、数形结合的思想.

二、课时安排

本章教学共 11 课时，建议分配如下：

26.1　二次函数的概念	1 课时
26.2　特殊二次函数的图像	3 课时
26.3　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像	6 课时
本章小结	1 课时

三、设计说明

二次函数是一类常见的函数，它是描述现实世界中两个变量之间的数量关系和变化规律的一种数学模型，具有广泛的应用.

学生在八年级数学中学习了函数的概念和表示方法，研究了一次函数、反比例函数的图像和基本性质，也掌握了研究函数的一些基本方法，具备了进一步学习函数的认知基础.

本章学习的主题是二次函数，按照数学课程标准中在九年级对二次函数内容分层的设计，本章的主要内容是二次函数的概念、图像，以及由图像特征所反映的二次函数有关直观性质. 课本中将内容分三节安排，先引进二次函数的概念，再研究特殊的二次函数的图像和直观性质；然后研究一般的二次函数的图像和直观性质，并用于解决简单的实际问题.

为了帮助学生建立二次函数的概念，在编写中从学生熟悉的正方形面积的研究出发，通过建立函数解析式和归纳解析式特点，给出二次函数的定义；再通过例题的分析和解决，帮助学生理解二次函数的概念. 与一次函数类似，对二次函数也从解析式的角度来定义.

基于初中学生的认知特点和知识水平，初中阶段对于二次函数性质的研究，主要采用直观分析的方法，通过分析和归纳二次函数图像的特征，得到二次函数的一些直观性质. 因此，课本中安排先画二次函数的图像，再讨论图像的特征，并通过对图像特征的直观描述引出二次函数的一些直观性质.

学生已经知道画函数图像的基本方法是描点法，又经历过从正比例函数 $y=kx$ 的图像与性质到一次函数 $y=kx+b$ 的图像与性质的研究过程. 他们从中不仅获得了用描点法画函数图像以及利用图像研究函数性质的初步经验，还体会到从特殊到一般的策略和图形平移运动的思想在函数研究中所起的作用. 本章对于二次函数的图像及其基本性质的研究，也采用在一次函数研究中所用的策略和思想方法，以研究特殊

形式的二次函数 $y=ax^2$、$y=ax^2+c$ 为起点，以研究形如 $y=a(x+m)^2$、$y=a(x+m)^2+k$ 的二次函数为桥梁，过渡到研究一般形式的二次函数 $y=ax^2+bx+c$，从特殊到一般、先分解再组合逐步展开，用图形的平移运动进行联结；主要关注二次函数图像的画法和图像的开口方向、对称轴、顶点坐标、最高点或最低点、上升或下降等特征. 在内容的编排中，基本上采用过程模式，通过提出问题引导探究，在操作实验的基础上导出知识结论，让学生经历从具体感知到抽象概括的过程，体验知识形成的过程；同时，将这些内容按照知识发展的逻辑顺序进行分段处理，对不同表示形式的二次函数的研究，采用相同的方法和类似的编写方式，形式有层次地逐步推进的序列，让学生充分调动已有的知识经验参与学习活动，同时对有关数学思想方法和思维策略的运用不断加深体验.

本章还举例说明了二次函数知识的初步应用，让学生体会二次函数是研究和解决生产、生活实际问题的有用工具，对数学源于生活又服务于生活进一步加深认识.

四、教学建议

1. 重视复习相关内容，帮助学生学好二次函数. 本章对二次函数的研究，是在学生以前学过的函数知识以及图形运动、平面直角坐标系有关知识的基础上进行的. 在教学中需要对这些知识进行有针对性的复习，以帮助学生调动已有的知识和经验进行二次函数的学习.

抛物线 $y=ax^2$ 关于 y 轴对称，抛物线 $y=a(x+m)^2+k$ 关于直线 $x=-m$ 对称，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 可由抛物线 $y=ax^2$ 平移得到，这些内容都涉及对图形运动的分析. 其中，关于图形沿着平行于 x 轴的方向平移（左右平移）的讨论，要注意到以前对这一内容的教学要求较低，学生的认知基础比较薄弱，可多采用教师讲解的方法，同时适当降低学习要求.

对一般形式表示的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 进行研究，关键是用配方法把解析式化为 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式. 配方法曾在解一元二次方程时使用过，学生已经有所了解. 在本章相关内容的学习中，一方面要让学生进一步熟悉配方法，另一方面还要让学生知道配方法在函数研究与解一元二次方程这两种运用中的异同.

2. 重视知识之间的联系，运用从特殊到一般的策略，有层次地推进教学. 关于二次函数的图像和直观性质的讨论，是分阶段进行和逐步递进的，所采用的策略是从特殊到一般、先分解再组合. 这一策略的具体体现，一是从研究特殊形式表示的二次函数到研究一般形式表示的二次函数；二是对表示形式不同的二次函数进行研究时有关解析式中的系数从数字到字母. 最初的研究是以最简单的、具体的二次函数 $y=x^2$ 为对象，利用描点法画出它的图像，从而引出抛物线的有关概念；然后研究形如 $y=ax^2$ 的二次函数. 在此基础上，再对形如 $y=ax^2+c$、$y=a(x+m)^2$ 的二次函数进行研究，运用图形平移的变换思想并利用对 $y=ax^2$ 研究的成果，导出了这两类特殊的二次函数的图像和直观性质. 形如 $y=a(x+m)^2+k$ 的二次函数，可以看作形如 $y=ax^2+c$ 与 $y=a(x+m)^2$ 的两类函数的组合，于是利用图形两次平移的合成，得到了二次函数 $y=a(x+m)^2+k$ 的图像和直观性质. 最后对一般形式表示的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的研究，只要运用配方法将它化为 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式，有关问题随之解决. 在教学中，一方面要展现对二次函数研究的过程，另一方面要重视关于研究策略和方法的指导，使学生在获得知识的同时，学会数学思考，提高探究性学习的能力.

3. 重视创设良好学习环境，提倡学生合作学习，引导学生实践、观察、探索、发现、归纳、总结数学规律. 本章的知识内容中，有许多适合于学生进行探究学习和合作研究的素材. 在教学中，应鼓励学生通过独立思考、积极探究或合作学习，进行数学知识的“再发现”或“再创造”.

例如，列出实际问题中两个变量的函数解析式和分析解析式的特点；画 $y=x^2$、$y=-x^2$、$y=\frac{1}{2}x^2$、$y=-\frac{1}{2}x^2$ 等函数的图像，观察、归纳和直观描述二次函数 $y=ax^2$ 的图像特征；提出和研究形如 $y=ax^2+c$、$y=a(x+m)^2$ 的二次函数的问题；对形如 $y=a(x+m)^2+k$ 的二次函数的图像和直观性质的讨论；将二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的研究化归为已经解决的问题；以及利用二次函数的知识解决简单的实际问题等，要创设问题情境，并提供机会和条件，让学生自主活动或合作研究，进行交流、总结.

4. 重视数学思考的策略和函数研究的方法的教学. 在研究二次函数的图像和直观性质的过程中，充分体现了从特殊到一般、先分解再组合的策略思想，有效运用了图形变换、数形结合的数学思想，具体展示了认识函数并对函数进行直观性分析的基本方法. 让学生体会这些基本的数学思想、策略和方法，不仅是学好本章内容的基础，而且对学生进一步学习数学和分析、处理问题也有积极的作用. 所以，在本章的教学中，要以研究二次函数为载体，加强数学思想方法的教学. 可针对一节课的教学任务，提出研究什么、怎样研究的问题，促进学生思考数学思想方法的运用；针对一个问题的解决，让学生反思所用的数学方法和获得的经验，引导学生体会数学思想方法的作用；进行章节教学小结时，再进一步对有关数学思想、策略和方法及其运用进行讲评，帮助学生加深认识.

本章有关二次函数的性质，是指由函数图像的特征所体现的直观性质，是通过对图像进行观察、分析和归纳得到的；对这些性质的表述，使用了描述性语言，既朴实又简明. 教学中，要指导学生把握数形结合的思想方法，正确观察二次函数图像的形态再归纳图像的特征，同时要让学生认识函数解析式 $y=ax^2+bx+c$ 中系数 a、b、c 的特点与图像的特征之间是相互确定的. 例如 a 的符号确定抛物线的开口方向、相对于 x 轴正方向先降后升还是先升后降、有最低点还是最高点；反过来，由抛物线的上述特征之一就可确定 a 的符号；也要让学生知道 c 同抛物线与 y 轴的交点位置之间的关系，知道 a、b 同抛物线的对称轴的位置之间的关系.

5. 重视信息技术的使用. 利用计算机，可以方便地画出函数的图像. 在本章教学中，可使用某些计算机画图软件（如《几何画板》），画出更多的二次函数图像，让学生进行观察，更好地分析和归纳图像的特征，或者验证所获得的结论. 还可以利用计算机的有关功能，显示二次函数图像上一个动点的坐标变化情况，帮助学生将"形"与"数"结合起来，对二次函数的有关性质进行探索；或显示 $y=ax^2+bx+c$ 的图像随着系数 a、b、c 变化而变化的动态，或在有关图形的分析中展现图形变化的过程等，帮助学生思考问题、探索规律、突破难点.

6. 重视联系实际、关注知识应用.

二次函数是描述现实世界变量之间关系的重要的数学模型. 例如伽利略（Galileo）所发现的、通过比萨斜塔进行实验验证的自由落体运动公式，就是用二次函数刻画物体运动的最好例证；又如本章所涉及的求最大利润、最大面积等问题，是二次函数的实际应用. 二次函数图像，是人们熟悉的抛物线，在现实生活中容易看到它的形象，可见其应用广泛. 在教学中，要重视二次函数与现实的联系，关注知识的实际应用. 既要从实际问题中引进二次函数的概念，又将二次函数的知识用于解决实际问题，让学生体验由感性到理性的认知过程，体会学与用的结合对理解数学的促进作用，感受数学的实际应用价值.

五、评价建议

1. 允许学生走弯路，鼓励学生提问题. 二次函数是初中阶段所研究的较为复杂的函数，而且对思维的深刻性和灵活性有较高要求. 学生在学习过程中，需要进行操作、观察、分析、归纳等活动，需要展开实验探究和理性思考. 我们不仅要提供学生主动学习的时间和空间，而且要尊重学生真实的学习过程，允许走弯路，鼓励提问题，引导和帮助学生克服困难、积极进取. 在学习评价中，不只关注学生的知识成就，更要关注学生的过程体验以及学习方式的完善. 例如画函数 $y=x^2$ 的图像和归纳它的特征，是学生对二次函数图像的初始探讨，如何列表、取点，如何连线，画出的图像是怎样的，图像的特征怎样描述等，要让学生尝试、实践，让学生先说、先议；同时对学生在学习中的表现进行积极评价，而把学生在活动中出现的问题或提出的疑问作为生成的教育资源有效加以利用.

2. 把握内容分层的安排，注重检测教学基本要求的落实情况. 二次函数的学习内容，在初中分为基本内容和拓展内容，要把握基本内容进行教学，同时依据教学基本要求进行检测. 例如，关于画二次函数的图像，学习要求是会用描点法画大致图像，知道通过图形平移运动来确定图像；学生应掌握适当选点、正确描点和连线的技能，而对图像平移前后位置变化规律的认识不能过高要求. 又如关于二次函数解析式的确定，学习要求是在已知函数的三组对应值的条件下会用待定系数法求解析式，根据其他条件求解析式是拓展内容的学习要求. 再如关于二次函数的基本性质，现在提出的学习要求是针对函数图像的开口方向、对

称轴、顶点坐标以及最高点或最低点等特征而言，定位于会直观地描述和初步地运用；在拓展Ⅱ和高中数学中，将进一步学习二次函数的基本性质. 所以，对本章知识内容的教学和评价，要切实关注基础，严格控制难度；尤其是在平面直角指标系中或在实际应用问题中，对二次函数知识的运用要求更要注意分寸.

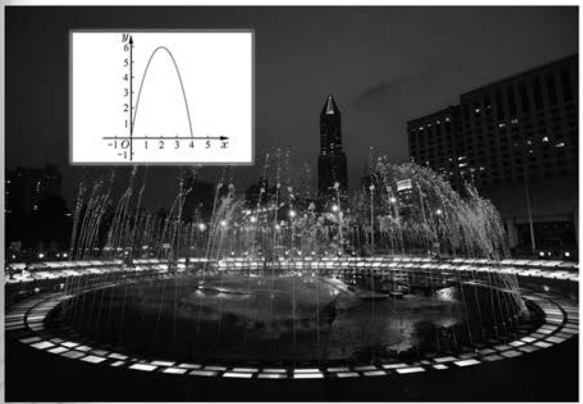
3. 引导学生反思学习和总结经验，关注学生对数学思想方法的体验.

初中阶段的函数内容，是变量数学的奠基性内容；对一次函数、二次函数以及反比例函数的直观研究，为今后对函数进行解析研究提供了思考的基础. 要让学生对学习本章所获得的基本知识和经验、所感悟的数学思想和方法，认真进行反思和总结，同时予以全面的评价，帮助学生做好继续学习和研究函数的准备. 为此，要在本章教学过程中，重视对学生学习活动的指导和评议，加强关于数学思想方法讲评；同时建议在本章小结时，把学生对本章的“学习体会”纳入评价内容的范围，采用小组交流和互评的方式实施评价.

对学生的“学习体会”的评议，主要关注学生在数学思想方法、数学应用方面的认识. 例如，利用函数图像来分析和归纳函数的直观性质，体现了数形结合的思想方法的运用，学生对这种研究函数的方法如何看待？又如，在对二次函数图像进行研究的过程中，运用了从特殊到一般、先分解再组合的策略，学生对这样的思考策略有何感受？还有，关于二次函数知识的实际应用，反映了数学与现实的联系，初步渗透了函数模型思想，学生在用数学解决实际问题的活动中学到些什么？学生对这些数学思想方法、思考策略的正确认识，不仅有助于学生进一步学习数学和研究问题，而且将它们迁移到现实生活中用于分析、处理各种各样问题，也有重要意义.

Erci Hanshu

26 第二十六章　二次函数



广场上的喷水池周边，一个个喷头喷射出一条条水线，生动而优美. 这样的水线与数学中的什么图形相联系呢？

这些水线的形象不是直线，但是呈现一定的规律. 如果把一条水线看作一个函数的图像，那么这个函数肯定不是一次函数.

不过，我们对水线的形象并不陌生，例如推出的铅球、投出的篮球，它们运动的路线与水线类似. 这种形态的曲线，称为抛物线. 如果物体运动的路线是抛物线，那么其运动的规律可用二次函数来表示. 在现实世界和实际生活中，用二次函数来描述事物变化或物体运动规律的事例有很多.

我们在本章将研究二次函数，主要内容是二次函数的概念、图像、直观性质及其简单应用.

章头图是一个广场的情景照片，突出了喷水池中喷出的水线，显示出抛物线的形象，烘托出本章学习的主题.

通过章头语，指出现实生活中有许多形象生动的抛物线，它们是二次函数的直观形态，由此引出本章研究的对象，提出学习的主要内容.

在研究一次函数的基础上，提出进一步研究二次函数，是数学研究的必然发展. 但在章头语中，强调二次函数源于生活，主要用意是引导学生关注数学与现实的联系.

【本课重点】

引进二次函数的概念，并帮助学生理解概念，初步学会用二次函数描述实际问题中两个变量之间的依赖关系.

问题

以学生熟悉的正方形的面积与边长之间的依赖关系为例，通过归纳函数解析式的特征，引进二次函数的概念.

二次函数定义中的“形如”两字表明，依据定义判断一个函数是不是二次函数时，只看解析式的形式特征，两个变量可以用 x、y 或其他两个不同字母分别表示.

例题 1

本题是帮助学生理解二次函数的定义. 题中对 r、h 分别设定一个是常量、另一个是变量；要注意比较二次函数与一次函数两个概念的区别，在判断函数类型时只看表示自变量的字母的次数.

Erci Hanshu De Gainian

第一节　二次函数的概念

26.1　二次函数的概念

如果正方形的边长是 x 厘米，那么它的面积 y 平方厘米是边长 x 厘米的函数，y 关于 x 的函数解析式是 $y=x^2$.

问题

(1) 一个边长为 4 厘米的正方形，若它的边长增加 x 厘米，则面积随之增加 y 平方厘米，那么 y 关于 x 的函数解析式是什么？

(2) 把一根 40 厘米长的铁丝分为两段，再分别把每一段弯折成一个正方形. 设其中一段铁丝长为 x 厘米，两个正方形的面积和为 y 平方厘米，那么 y 关于 x 的函数解析式是什么？

上述问题(1)得到的函数解析式是

$$y=(x+4)^2-4^2,$$

即

$$y=x^2+8x.$$

问题(2)得到的函数解析式是

$$y=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{40-x}{4}\right)^2,$$

即

$$y=\frac{1}{8}x^2-5x+100.$$

在函数解析式 $y=x^2$，$y=x^2+8x$ 和 $y=\frac{1}{8}x^2-5x+100$ 中，用来表示函数的式子都是关于自变量的二次整式.

一般地，解析式形如 $y=ax^2+bx+c$（其中 a、b、c 是常数，且 $a\neq0$）的函数叫做**二次函数**(quadratic function).

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的定义域为一切实数.

关于 x 的二次整式的一般形式是 ax^2+bx+c（其中 a、b、c 是常数，且 $a\neq0$）.

函数的表达中涉及函数解析式和定义域. 在具体问题中，有时只研究函数解析式. 需要研究函数的定义域时，如果未加说明，那么函数的定义域由解析式确定；否则，必须指明函数的定义域.

例题1　圆柱的体积 V 的计算公式是 $V=\pi r^2h$，其中 r 是圆柱底面的半径，h 是圆柱的高.

(1) 当 r 是常量时，V 是 h 的什么函数？

(2) 当 h 是常量时，V 是 r 的什么函数？

解　(1) 当 r 是常量时，πr^2h 是关于 h 的一次整式，所以 V 是 h 的一次函数.

(2) 当 h 是常量时，πr^2h 是关于 r 的二次整式，所以 V 是 r 的二次函数.

84 第二十六章　二次函数

【教学目标】

(1) 理解二次函数的概念；能判断用解析式表示出来的两个变量之间的关系是不是二次函数.

(2) 对简单的实际问题，能根据具体情景中两个变量之间的依赖关系列出二次函数解析式，并确定函数的定义域.

(3) 经历从实际问题引进二次函数概念的过程，体会用函数去描述、研究变量之间的变化规律的意义.

【注意事项】

(1) 为建立二次函数的概念，教师可适当再补充一些简单的实例，帮助学生从中归纳出二次函数的解析式的特征.

(2) 要向学生解说“边款”中对二次函数定义域的说明.

例题2 某厂七月份的产值是100万元，设第三季度每个月产值的增长率相同，都为 $x(x>0)$，九月份的产值为 y 万元，写出 y 关于 x 的函数解析式.

解 七月份产值为100万元，月产值增长率为 x，则

八月份产值为 $100(1+x)$ 万元；

九月份产值为 $100(1+x)^2$ 万元.

所以 y 关于 x 的函数解析式是

$$y=100x^2+200x+100\ (x>0).$$

例题3 用长为20米的篱笆，一面靠墙（墙的长度超过20米），围成一个矩形花圃，如图26-1所示. 设 AB 边的长为 x 米，花圃的面积为 y 平方米，求 y 关于 x 的函数解析式及函数的定义域.

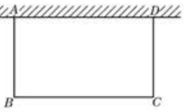


图26-1

解 矩形 $ABCD$ 中，$AB=x$，则 $BC=20-2x$. 所以，面积 y 关于 x 的函数解析式是

$$y=x(20-2x)=-2x^2+20x.$$

由 $x>0$，$20-2x>0$，解得 $0<x<10$.

所以函数的定义域是 $0<x<10$.

在实际应用问题中，要注意函数的定义域. 自变量 x 的取值应符合实际意义.

练习 26.1

1. （口答）下列函数中哪些是二次函数？

（1）$y=\frac{3}{4}x$；（2）$y=-0.5x^2+1$；（3）$y=x(2x-1)$；

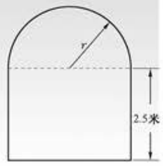
（4）$y=(x+2)^2-3$；（5）$y=(x+4)^2-x^2$.

2. 已知二次函数 $y=2x^2-3x-2$.

（1）当 $x=-\frac{2}{3}$ 时，求函数 y 的值；

（2）当 x 取何值时，函数值为0？

3. 一条隧道的横截面如图所示，它的上部是一个半圆，下部是一个矩形，矩形的一边长为2.5米. 如果隧道下部的宽度大于5米但不超过10米，求隧道横截面积 S（平方米）关于上部半圆半径 r（米）的函数解析式及函数的定义域.



（第3题）

第一节 二次函数的概念 85

例题 2

本题是用二次函数描述与增长率有关的两个变量之间的依赖关系，有一定的典型性. 要让学生体会与增长率有关的这类问题中的基本数量关系式：

$$A=a(1+r)^n,$$

其中 a、r、n、A 的含意可结合实际问题进行解释.

例题 3

本题是生活实际中的一个求函数表达式问题. 利用面积公式，容易得到函数解析式；求函数的定义域是难点，要把握“边长是正数”这个隐含条件.

练习 26.1

1. （2）、（3）、（4）是二次函数.

2. （1）$\frac{8}{9}$；

（2）$x=2$ 或 $-\frac{1}{2}$.

3. $S=\frac{1}{2}\pi r^2+5r$，

$2.5<r\leqslant 5$.

【注意事项】

（1）例题2和例题3都是在实际情景中建立二次函数模型的问题，让学生进一步体会二次函数与现实生活的联系. 用解析法表达一个函数时，一般应指出函数的解析式和定义域；但在初中对函数的表达通常会提出明确要求，如例题2只要求出函数的解析式，如例题3则还要求出函数的定义域.

（2）依据定义判断一个函数是不是二次函数时，解析式中表示函数的这个代数式应是最简的. 在练习26.1第1(5)题中，这个函数的解析式是 $y=8x+16$，它是一次函数.

【本课重点】

研究特殊形式的二次函数 $y=ax^2$ 的图像，并归纳出图像的特征.

操作

让学生尝试用描点法画函数 $y=x^2$ 的图像. 画二次函数的图像比画一次函数图像难，教学时，教师需进行示范指导，并让学生亲自经历画图的过程.

画抛物线 $y=x^2$ 时，要让学生注意观察所列表中的数据特点和描出的点的位置特点；并注意光滑连线，所画曲线没有最高点，可以向上无限延伸.

注意将“函数 $y=x^2$ 的图像称为抛物线 $y=x^2$”的表述方式，后面类似地采用这样的表述.

Erci Hanshu De Tuxiang

第二节　二次函数的图像

26.2　特殊二次函数的图像

对一次函数的研究，是从特殊的一次函数——正比例函数开始，围绕概念、图像、性质展开的.

在一次函数的研究中，我们采用了从特殊到一般的方法，经历了利用图像直观地探索函数基本性质的过程. 在已有经验的基础上，我们来研究二次函数，着重研究它的图像.

1. 二次函数 $y=ax^2$ 的图像

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$（其中 a、b、c 是常数，且 $a\neq0$）图像的研究，就从特殊形式的二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 入手.

操作

在平面直角坐标系 xOy 中，按照下列步骤画二次函数 $y=x^2$ 的图像.

观察表格中的数据，当自变量 x 取互为相反数的两个数时，它们所对应的函数值有什么关系？

（1）列表：取自变量 x 的一些值，计算出相应的函数值 y，如下表所示：

x	…	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	…
$y=x^2$	…	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	…

（2）描点：分别以所取 x 的值和相应的函数值 y 作为点的横坐标和纵坐标，描出这些坐标所对应的各点.

（3）连线：用光滑的曲线把所描出的这些点顺次联结起来，得到函数 $y=x^2$ 的图像，如图 26－2 所示.

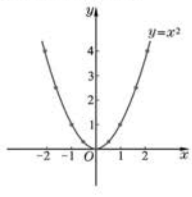


图 26－2

二次函数 $y=x^2$ 的图像是一条曲线，分别向左上方和右上方无限伸展. 它属于一类特殊的曲线，这类曲线称为**抛物线**（parabola）.

二次函数 $y=x^2$ 的图像就称为抛物线 $y=x^2$.

86　第二十六章　二次函数

【教学目标】

（1）知道二次函数 $y=ax^2$ 的图像是抛物线，会用描点法画出图像.

（2）经历观察、分析和归纳抛物线 $y=ax^2$ 的特征的过程，掌握二次函数 $y=ax^2$ 的直观性质.

（3）经历建立二次函数 $y=ax^2+c$、$y=a(x+m)^2$ 的图像与 $y=ax^2$ 的图像之间联系的过程，知道由抛物线 $y=ax^2$ 得到抛物线 $y=ax^2+c$、$y=a(x+m)^2$ 的平移方法；掌握二次函数 $y=ax^2+c$、$y=a(x+m)^2$ 的直观性质，体会图形运动的运用.

（4）在运用图像研究二次函数直观性质的过程中，领会数形结合的思想方法，提高观察、分析、归纳和概括的能力.

观察

抛物线 $y=x^2$（如图 26－2）的形状、位置有哪些特征？

通过观察可以看到，抛物线 $y=x^2$ 经过原点 O 且位于 y 轴的左右两侧，向上无限伸展；抛物线上凡是横坐标互为相反数的两点总有相同的纵坐标，可知联结这样两点的线段被 y 轴垂直平分，因此若以 y 轴为折痕将抛物线 $y=x^2$ 翻折，则左右两部分可以完全重合.

归纳

抛物线 $y=x^2$ 的开口方向向上；它是轴对称图形，对称轴是 y 轴，即直线 $x=0$.

抛物线 $y=x^2$ 与 y 轴的交点是原点 O；除这个交点外，抛物线上的所有点都在 x 轴的上方，这个交点是抛物线的最低点.

抛物线与它的对称轴的交点叫做抛物线的顶点. 抛物线 $y=x^2$ 的顶点是原点 $O(0,0)$.

试一试

用上述方法画出函数 $y=-x^2$ 的图像，再归纳它的图像特征.

分别在 $y=-x^2$ 与 $y=x^2$ 的图像上且横坐标相同的任意两点，它们的纵坐标互为相反数，可知两个图像关于 x 轴对称. 可利用它们的对称性，由其中一个函数的图像画另一个函数的图像.

例题 在同一平面直角坐标系 xOy 中，分别画出二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图像.

解 （1）列表：取自变量 x 的一些值，计算出相应的函数值 y，如下表所示：

x	…	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	2	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…	2	$\frac{9}{8}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{8}$	2	…
$y=-\frac{1}{2}x^2$	…	-2	$-\frac{9}{8}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{8}$	-2	…

（2）描点：分别以所取 x 的值和相应的函数值 y 为点的横坐标和纵坐标，描出这些坐标所对应的各点.

（3）连线：用光滑的曲线把描出的位于 x 轴上方及 x 轴上的点顺次联结起来，得到函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像；用光滑的曲线把描出的位于 x 轴下方及 x 轴上的点顺次联结起来，得到函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图像.

也可以利用 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图像关于 x 轴的对称性，由函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像画出函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图像.

第二节 二次函数的图像 87

观察

让学生观察和分析抛物线 $y=x^2$ 的特征. 要对抛物线 $y=x^2$ 关于 y 轴对称进行说理，不能单凭直觉.

归纳

将观察所得抛物线 $y=x^2$ 的有关特征进行归纳并直观描述出来；然后引进抛物线的顶点.

试一试

画出函数 $y=-x^2$ 的图像，提供与抛物线 $y=x^2$ 进行比较研究.

注意“边款”中的提示，让学生确认 $y=-x^2$、$y=x^2$ 这两个函数的图像关于 x 轴对称，感知可利用图形之间的对称性画图像.

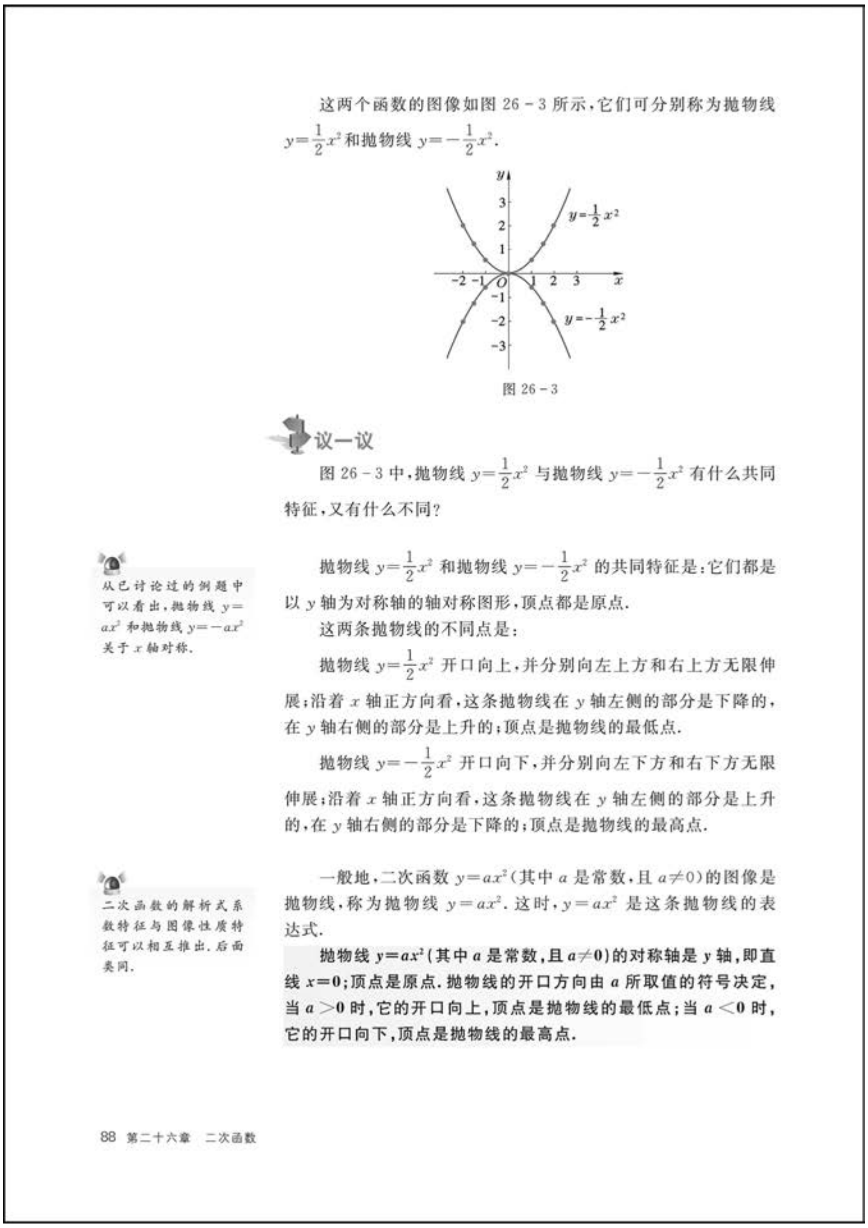
例题

研究 $y=\frac{1}{2}x^2$、$y=-\frac{1}{2}x^2$ 两个函数的图像，为归纳二次函数 $y=ax^2$ 的图像特征充实直观认识的素材.

【注意事项】

（1）为画抛物线 $y=x^2$，先要列表. 由解析式可知 x 可取任意实数，要指导学生适当选取 x 的值，再对照课本所列表格，了解“适当取值”的要点，其中有零，另外各数按互为相反数成对出现.

（2）例题指明在同一直角坐标系中画函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图像，是为了对图像进行比较研究. 这两个函数的图像关于 x 轴对称，可利用所列表格引导学生观察和分析.



这两个函数的图像如图 26－3 所示，它们可分别称为抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$.

图 26－3

议一议

图 26－3 中，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 有什么共同特征，又有什么不同？

从已讨论过的例题中可以看出，抛物线 $y=ax^2$ 和抛物线 $y=-ax^2$ 关于 x 轴对称.

抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的共同特征是：它们都是以 y 轴为对称轴的轴对称图形，顶点都是原点.

这两条抛物线的不同点是：

抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 开口向上，并分别向左上方和右上方无限伸展；沿着 x 轴正方向看，这条抛物线在 y 轴左侧的部分是下降的，在 y 轴右侧的部分是上升的；顶点是抛物线的最低点.

抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 开口向下，并分别向左下方和右下方无限伸展；沿着 x 轴正方向看，这条抛物线在 y 轴左侧的部分是上升的，在 y 轴右侧的部分是下降的；顶点是抛物线的最高点.

二次函数的解析式系数特征与图像性质特征可以相互推出. 后面类同.

一般地，二次函数 $y=ax^2$（其中 a 是常数，且 $a\neq0$）的图像是抛物线，称为抛物线 $y=ax^2$. 这时，$y=ax^2$ 是这条抛物线的表达式.

抛物线 $y=ax^2$（其中 a 是常数，且 $a\neq0$）的对称轴是 y 轴，即直线 $x=0$；顶点是原点. 抛物线的开口方向由 a 所取值的符号决定，当 $a>0$ 时，它的开口向上，顶点是抛物线的最低点；当 $a<0$ 时，它的开口向下，顶点是抛物线的最高点.

88 第二十六章 二次函数

议一议

让学生观察抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$，讨论它们的特征；帮助学生丰富对二次函数 $y=ax^2$ 的直观性质的认识.

关于抛物线 $y=ax^2$ 的特征，主要从对称性、顶点坐标、开口方向等方面进行归纳，同时让学生注意到顶点是抛物线的最高点或最低点.

【注意事项】

（1）要让学生经历和体验归纳二次函数 $y=ax^2$ 的图像特征的过程，体会利用图像研究函数直观性质的方法，并理解所描述的直观性质.

（2）让学生通过对抛物线 $y=\pm x^2$、抛物线 $y=\pm\frac{1}{2}x^2$ 的比较和分析，归纳出系数 a 的符号决定抛物线 $y=ax^2$ 的开口方向；还可结合习题中的有关抛物线，进一步认识 $|a|$ 的大小决定抛物线的开口大小.

（3）抛物线在对称轴左右两侧的部分是上升还是下降，是沿着 x 轴正方向所看到的变化趋势，“上升”“下降”是直观描述的语言，本节只是通过“议一议”让学生有初步认识，后面将列入二次函数的直观性质. 实际上，图像“上升”或“下降”，是函数值 y 随着自变量 x 的值增大而增大或减小的直观描述，是函数单调性的直观表现，学生将在以后再认识.

练习 26.2(1)

1. 在同一平面直角坐标系 xOy 中，画出下列函数的图像：

(1) $y=3x^2$；　　(2) $y=-\frac{1}{3}x^2$.

2. 抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2$ 与抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 有什么共同特征和不同点？这两条抛物线有怎样的对称性？如何用简便的方法画这两个函数的图像？

3. 已知关于 x 的二次函数 $y=(1+2k)x^2$，当 k 为何值时，它的图像开口向上？当 k 为何值时，它的图像开口向下？

2. 二次函数 $y=ax^2+c$ 的图像

函数 $y=ax^2+c$(其中 a、c 是常数，且 $a\neq0$)也是特殊形式的二次函数.

操作

在同一平面直角坐标系 xOy 中，画出二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=\frac{1}{2}x^2+2$的图像.

我们按照列表、描点、连线的步骤来画它们的图像.

取自变量 x 的一些值，计算出相应的函数值 y，列表如下：

x	…	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	2	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…	2	$\frac{9}{8}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{8}$	2	…
$y=\frac{1}{2}x^2+2$	…	4	$\frac{25}{8}$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{8}$	4	…

依据表中第一、二行各组对应值描点，然后画出函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像.

依据表中第一、三行各组对应值描点，再画出函数 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 的图像.

这两个函数的图像都是抛物线，如图 26-4 所示.

第二节　二次函数的图像 89

练习 26.2(1)

1. 略.
2. 略.
3. 当 $k>-\frac{1}{2}$时，图像开口向上；当 $k<-\frac{1}{2}$时，图像开口向下.

【本课重点】

研究特殊形式的二次函数 $y=ax^2+c$ 的图像，并归纳出图像的特征.

操作

用描点法画出 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 这两个函数的图像，既让学生熟悉基本画法，又为分析这两个图像之间的关系做准备.

【注意事项】

用描点法画 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 这两个函数的图像，要逐步展开其过程，让学生一方面进行操作活动，另一方面在列表、描点时获得对这两个图像之间关系的直觉.

思考

引导学生研究这两个图像之间的关系.

在说明这两条抛物线经过平移能够重合时，要指出：点 P 是任意取的，这样研究的结果具有普遍性；根据 P、Q 两点的横坐标相同、点 Q 的纵坐标比点 P 的纵坐标大 2，可知点 P 向上平移 2 个单位就与点 Q 重合；由 P 的任意性，得到抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向上平移 2 个单位后与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 重合.

在讲解时可借助于多媒体向学生演示.

想一想

让学生根据对函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像特征的已有认识和图形平移的规律，归纳函数 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 的图像特征，体现了化归的数学思想.

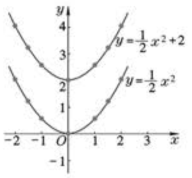


图 26－4

思考

观察在上面操作过程中所列的表格和画出的图像，可以发现分别在函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 的图像上且有相同横坐标的任意两点的纵坐标之间有什么关系？再运用图形运动来分析，这两个函数的图像之间有什么关系？

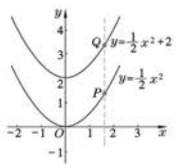


图 26－5

对于函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像上任意一点 P，设它的坐标为 (x_1, y_1)，则 $y_1=\frac{1}{2}x_1^2$. 如图 26－5，过点 P 作垂直于 x 轴的直线，与函数 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 的图像的交点记为 Q，可知点 Q 与点 P 有相同的横坐标，设点 Q 的坐标为 (x_1, y_2)，则 $y_2=\frac{1}{2}x_1^2+2$. 于是，得 $y_2=y_1+2$. 由此可知，点 P 向上平移 2 个单位就与点 Q 重合.

因为 P 是函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像上的任意一点，所以将函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像向上平移 2 个单位，就与函数 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 的图像重合. 也就是说，将函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像向上平移 2 个单位，就得到函数 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 的图像.

想一想

将函数 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 的图像与函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像进行比较，可知函数 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 的图像有哪些特征？

二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 的图像是一条抛物线，这条抛物线的开

【注意事项】

对"思考"和"想一想"栏目中所提出的问题，要提供时间和空间，让学生先想先说，教师再讲再评；要鼓励学生充分发表意见，并指导学生尽可能用数学语言表达所得的结论.

口向上；它是轴对称图形，对称轴是 y 轴；它的顶点坐标是(0，2)；这个顶点是抛物线的最低点.

议一议

函数 $y=-\frac{1}{2}x^2-2$ 的图像与函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图像如图 26-6所示，运用图形运动来分析，这两个图像之间有怎样的关系？函数 $y=-\frac{1}{2}x^2-2$ 的图像有哪些特征？

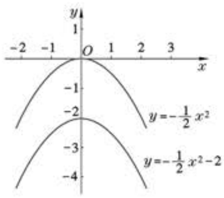


图 26-6

一般地，二次函数 $y=ax^2+c$ 的图像是抛物线，称为抛物线 $y=ax^2+c$，它可以通过将抛物线 $y=ax^2$ 向上（$c>0$ 时）或向下（$c<0$ 时）平移 $|c|$ 个单位得到.

由此可知：

抛物线 $y=ax^2+c$（其中 a、c 是常数，且 $a\neq0$）的对称轴是 y 轴，即直线 $x=0$；顶点坐标是 $(0,c)$. 抛物线的开口方向由 a 所取值的符号决定，当 $a>0$ 时，它的开口向上，顶点是抛物线的最低点；当 $a<0$ 时，它的开口向下，顶点是抛物线的最高点.

用描点法画函数图像是常用的基本方法. 利用平移可由已知抛物线得到新抛物线，这有助于我们认识新抛物线的特征.

练习 26.2(2)

1. 说出下列函数的图像如何由抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2$ 平移得到，再分别指出图像的开口方向、对称轴和顶点坐标.

   (1) $y=\frac{1}{3}x^2+1$；　　(2) $y=\frac{1}{3}x^2-1$.

2. 抛物线 $y=-3x^2+2$ 的开口方向________，对称轴是________，顶点坐标是________.

3. 将抛物线 $y=2x^2$ 向下平移 5 个单位，所得到的抛物线的表达式是什么？

第二节　二次函数的图像　91

议一议

直接给出函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=-\frac{1}{2}x^2-2$ 的图像，让学生类比前面的讨论，分析函数 $y=-\frac{1}{2}x^2-2$ 的图像特征.

在具体研究二次函数 $y=ax^2+c$ 的图像的基础上，归纳二次函数 $y=ax^2+c$ 的直观性质.

练习 26.2(2)

1. (1) 向上平移 1 个单位，其余略；
   (2) 向下平移 1 个单位，其余略.
2. 向下，y 轴，(0，2).
3. $y=2x^2-5$.

【注意事项】

从图形运动的角度研究新的抛物线，有利于学生运用化归的思想方法认识新的抛物线，总结新的抛物线的特征. 要提醒学生，虽然利用平移可由已知抛物线得到新抛物线，但是描点法还是画函数图像的基本方法.

【本课重点】

研究特殊形式的二次函数 $y=a(x+m)^2$ 的图像，并归纳出图像的特征.

思考

引导学生利用前面研究图像关系的经验，探讨 $y=a(x+m)^2$ 与 $y=ax^2$ 这样两个二次函数的图像之间的关系.

从 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 两个具体的函数着手，讨论“思考”栏目中提出的问题.

3. 二次函数 $y=a(x+m)^2$ 的图像

解析式 $y=a(x+m)^2$（其中 a、m 是常数，且 $a\neq0$）所表达的是一个二次函数，就其表达形式而言，也是特殊的二次函数.

思考

二次函数 $y=a(x+m)^2$ 的图像可以通过二次函数 $y=ax^2$ 的图像平移得到吗？

我们通过具体的函数来探讨. 在平面直角坐标系 xOy 中，先给出函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像，再画函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的图像.

为了便于观察和分析，列表如下：

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…	8	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8	…
$y=\frac{1}{2}(x+1)^2$	…	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8	$\frac{25}{2}$	…

依据表中第一、三行各组的对应值，通过描点、连线，画出函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的图像，这个图像是一条抛物线.

函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的图像，即抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$，如图 26－7 所示.

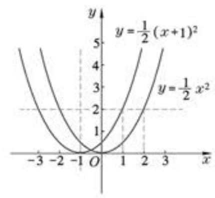


图 26－7

可通过操作实验来验证这两条抛物线重合. 若要严格说理，需由这两条抛物线上对应部分的点有相同纵坐标时推出它们的横坐标之差总是 1，这里不作要求.

观察图 26－7 可见，抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 可以通过将抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向左平移得到，分析表中各列的数值可得，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向左平移 1 个单位，它一定与抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 重合. 也就是说，抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 可通过将抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向左平移 1 个单位得到.

92 第二十六章 二次函数

【注意事项】

（1）抛物线左右平移时，抛物线上的点的坐标的变化情况不容易看清楚，所以会比对抛物线上下平移的讨论困难些. 建议在探讨抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 之间的关系时，先复习在七年级学过的关于点在左右平移时对应两点的坐标之间的关系；然后在图 26－7 中取几对特殊的对应点进行分析，如图中显示的坐标为(2，2)与(1，2)、(－2，2)与(－3，2)的点. 对于基础较好的学生，可以引导他们观察表中的数据，找出当两个函数的 y 值相同时，分别所对应的自变量 x 的值，结合对两条抛物线在各自的对称轴左右两部分进行分析，再猜测结论.

（2）按照“边款”中的说明，可利用多媒体演示将抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向左平移 1 个单位得到抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的动态过程，不要求进行严格的说理.

抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的特征，可通过与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的特征进行比较分析得到.

抛物线	开口方向	对　称　轴	顶点坐标
$y=\frac{1}{2}x^2$	向上	y 轴	(0,0)
$y=\frac{1}{2}(x+1)^2$	向上	过点(−1,0)且平行于 y 轴的直线，即直线 $x=-1$.	(−1,0)

原点(0,0)向左平移 1 个单位，所得点的纵坐标不变、横坐标减 1.

试一试

画出二次函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图像，运用图形运动来分析它与函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图像之间有怎样的关系；通过比较，分析函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图像有哪些特征.

二次函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图像是抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$，它可以通过将抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向右平移 1 个单位得到. 抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的开口向上，对称轴是过点(1,0)且平行于 y 轴的直线，即直线 $x=1$，顶点坐标是(1,0).

一般地，抛物线 $y=a(x+m)^2$（其中 a、m 是常数，且 $a\neq0$）可以通过将抛物线 $y=ax^2$ 向左（$m>0$ 时）或向右（$m<0$ 时）平移 $|m|$ 个单位得到. 由此可知：

抛物线 $y=a(x+m)^2$（其中 a、m 是常数，且 $a\neq0$）的对称轴是过点($-m$,0)且平行（或重合）于 y 轴的直线，即直线 $x=-m$；顶点坐标是($-m$,0). 当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，顶点是抛物线的最低点；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，顶点是抛物线的最高点.

练习 26.2(3)

1. (1) 如何将抛物线 $y=-3x^2$ 平移，可以分别得到抛物线 $y=-3(x+2)^2$ 和抛物线 $y=-3(x-4)^2$？
   (2) 分别说出抛物线 $y=-3(x+2)^2$ 和抛物线 $y=-3(x-4)^2$ 的开口方向、对称轴和顶点坐标.
2. 说出抛物线 $y=a(x-3)^2$（a 是常数，且 $a\neq0$）的开口方向、对称轴和顶点坐标.

第二节　二次函数的图像　93

利用图形平移的性质，可知抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的特征.

试一试

让学生类比前面的讨论，分析函数 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图像特征，为归纳二次函数 $y=a(x+m)^2$ 的图像特征充实认识基础.

师生共同归纳抛物线 $y=a(x+m)^2$ 的特征，得到二次函数 $y=a(x+m)^2$ 的直观性质.

练习 26.2(3)

1. (1) 向左平移 2 个单位，向右平移 4 个单位；
   (2) 抛物线 $y=-3(x+2)^2$ 开口向下，对称轴是直线 $x=-2$，顶点坐标是(−2,0)；其余略.
2. 提示：注意开口方向与 $a>0$ 还是 $a<0$ 有关.

【注意事项】

通过对几类特殊形式的二次函数的研究以后，要引导学生反思研究过程，领略研究方法；同时注意将抛物线 $y=ax^2$ 进行左右或上下平移时，所得抛物线的表达式的特点；并体会抛物线平移前后什么“变”了、什么“不变”. 要认真总结经验，为研究一般形式表示的二次函数做准备，并促进学生提高思维品质和探究能力.

【本课重点】

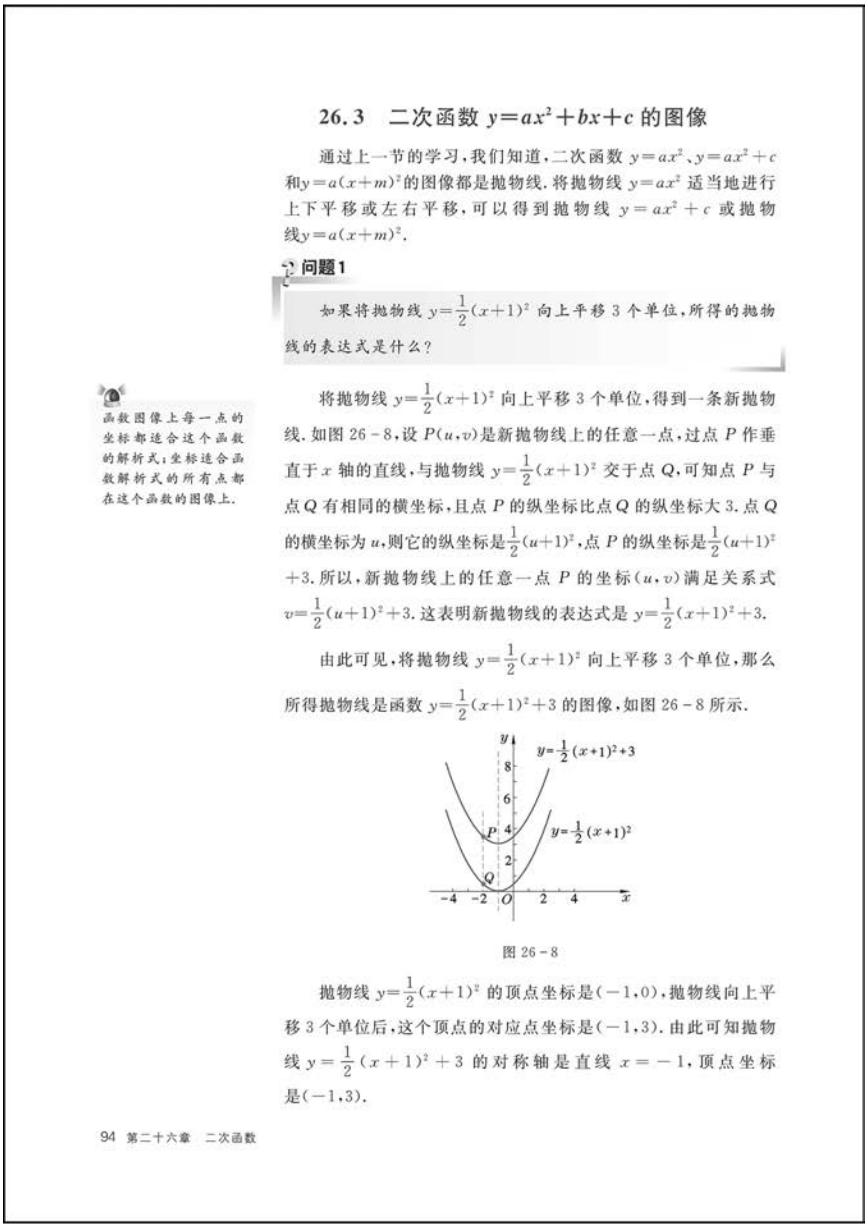
研究形如 $y=a(x+m)^2+k$ 的二次函数的图像，归纳出图像的特征.

问题 1

具体探讨将抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 向上平移后所得抛物线的表达式，引起学生对两次平移合成的思考.

在问题 1 的探讨过程中，要把握“边款”中所指出的“点在函数图像上”的解析特征以及向上平移所得对应点的坐标关系，从而得到新抛物线的表达式. 可结合图 26 - 8 和多媒体演示向学生解说.

引导学生利用图 26 - 8 分析新抛物线的特征以及新抛物线与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 之间的关系.



26.3 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像

通过上一节的学习，我们知道，二次函数 $y=ax^2$、$y=ax^2+c$ 和 $y=a(x+m)^2$ 的图像都是抛物线. 将抛物线 $y=ax^2$ 适当地进行上下平移或左右平移，可以得到抛物线 $y=ax^2+c$ 或抛物线 $y=a(x+m)^2$.

问题1

如果将抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 向上平移 3 个单位，所得的抛物线的表达式是什么？

函数图像上每一点的坐标都适合这个函数的解析式；坐标适合函数解析式的所有点都在这个函数的图像上.

将抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 向上平移 3 个单位，得到一条新抛物线. 如图 26 - 8，设 $P(u,v)$ 是新抛物线上的任意一点，过点 P 作垂直于 x 轴的直线，与抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 交于点 Q，可知点 P 与点 Q 有相同的横坐标，且点 P 的纵坐标比点 Q 的纵坐标大 3. 点 Q 的横坐标为 u，则它的纵坐标是 $\frac{1}{2}(u+1)^2$，点 P 的纵坐标是 $\frac{1}{2}(u+1)^2+3$. 所以，新抛物线上的任意一点 P 的坐标 (u,v) 满足关系式 $v=\frac{1}{2}(u+1)^2+3$. 这表明新抛物线的表达式是 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2+3$.

由此可见，将抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 向上平移 3 个单位，那么所得抛物线是函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2+3$ 的图像，如图 26 - 8 所示.

图 26 - 8

抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的顶点坐标是 $(-1,0)$，抛物线向上平移 3 个单位后，这个顶点的对应点坐标是 $(-1,3)$. 由此可知抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2+3$ 的对称轴是直线 $x=-1$，顶点坐标是 $(-1,3)$.

94 第二十六章 二次函数

【教学目标】

（1）经历探讨形如 $y=a(x+m)^2+k$ 的二次函数的图像特征的过程，知道抛物线 $y=a(x+m)^2+k$ 与抛物线 $y=ax^2$ 之间的平移关系，掌握二次函数 $y=a(x+m)^2+k$ 的图像的直观性质.

（2）会用配方法将二次函数的解析式 $y=ax^2+bx+c$ 化为 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式；掌握二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像的直观性质.

（3）已知二次函数图像上三点的坐标，会用待定系数法求函数解析式；能运用二次函数的知识解决简单的实际问题.

（4）在研究二次函数的图像和直观性质以及解决实际问题的过程中，进一步领会数形结合的数学思想，体会由特殊到一般、分解与组合等探究问题的策略，并增强数学应用的意识.

于是，抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2+3$ 可以通过将抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 进行两次平移得到. 如：

$$\text{抛物线 } y=\frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{\text{向左平移 1 个单位}} \text{抛物线 } y=\frac{1}{2}(x+1)^2$$

$$\xrightarrow{\text{向上平移 3 个单位}} \text{抛物线 } y=\frac{1}{2}(x+1)^2+3$$

将抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 先向上平移 3 个单位，再向左平移 1 个单位，同样得到抛物线 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2+3$.

议一议

怎样将抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 通过左右、上下两次平移，分别得到下列抛物线？

(1) $y=\frac{1}{2}(x-3)^2+2$；　(2) $y=\frac{1}{2}(x-3)^2-2$；

(3) $y=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$.

通过对上面问题的讨论，我们看到二次函数 $y=a(x+m)^2+k$（其中 a、m、k 是常数，且 $a\neq 0$）的图像即抛物线 $y=a(x+m)^2+k$，可以通过将抛物线 $y=ax^2$ 进行两次平移得到. 这两次平移可以是：先向左（$m>0$ 时）或向右（$m<0$ 时）平移 $|m|$ 个单位，再向上（$k>0$ 时）或向下（$k<0$ 时）平移 $|k|$ 个单位.

利用图形平移的性质，可知：

抛物线 $y=a(x+m)^2+k$（其中 a、m、k 是常数，且 $a\neq 0$）的对称轴是过点 $(-m,0)$ 且平行（或重合）于 y 轴的直线，即直线 $x=-m$；顶点坐标是 $(-m,k)$. 当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，顶点是抛物线的最低点；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，顶点是抛物线的最高点.

练习 26.3(1)

1. 下列抛物线可由抛物线 $y=-2x^2$ 分别经过两次平移得到，说出平移的方向和距离：

(1) $y=-2(x+5)^2-\frac{3}{2}$；　(2) $y=-2\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+4$.

2. 指出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标：

(1) $y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1$；　(2) $y=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1$；

(3) $y=(x+3)^2-4$；　(4) $y=-(x-3)^2+4$.

议一议

让学生对抛物线 $y=ax^2$ 通过两次平移得到抛物线 $y=a(x+m)^2+k$ 的过程有更多的了解，为归纳一般规律充实认识基础.

师生共同归纳二次函数 $y=a(x+m)^2+k$ 的图像特征.

练习 26.3(1)

1. (1) 先向左平移 5 个单位，再向下平移 $\frac{3}{2}$ 个单位；

(2) 先向右平移 $\frac{1}{3}$ 个单位，再向上平移 4 个单位.

2. (1) 开口向上，对称轴是直线 $x=\frac{1}{2}$，顶点坐标 $\left(\frac{1}{2},1\right)$；

(2)、(3)、(4)略.

3. (1) $m<-1$；

(2) -1；

(3) $(1,0)$；

(4) 向下.

【注意事项】

(1) 将抛物线 $y=ax^2$ 两次平移后可得到表达式为 $y=a(x+m)^2+k$ 的抛物线；先上下平移再左右平移，还是调换顺序，所得结果一样.

(2) 归纳了抛物线 $y=a(x+m)^2+k$ 的特征以后，可引导学生将有关知识进行串联. 让学生注意到，抛物线 $y=ax^2+k$ 和抛物线 $y=a(x+m)^2$，分别是抛物线 $y=a(x+m)^2+k$ 当 $m=0$ 和当 $k=0$ 时的特殊类型；知道二次函数 $y=a(x+m)^2+k$ 的直观性质，包含了前面所学的特殊形式的二次函数的直观性质.

【本课重点】

帮助学生掌握二次函数 $y=a(x+m)^2+k$ 图像的特征，并学会利用图像的特征画图像.

例题 1

本题是关于抛物线的特征的具体讨论并用于画图，让学生体会在画二次函数图像时要把握图像的特征.

本题告诉学生，确定了抛物线 $y=2(x-1)^2-1$ 的位置特征以后，画这条抛物线的基本方法仍是描点法. 列表时要充分注意抛物线的顶点坐标和对称轴位置；要适当取值，使所描出的点依关于直线 $x=1$ 对称成对出现(除顶点外).

3. 已知 m 是常数.

(1) 如果抛物线 $y=(m+1)x^2$ 的最高点是坐标轴的原点，那么 m 的取值范围是________；

(2) 如果抛物线 $y=x^2+m+1$ 的顶点是坐标轴的原点，那么 m 的值是________；

(3) 如果抛物线 $y=(x+m)^2+m+1$ 的对称轴是 $x=1$，那么它的顶点坐标是________；

(4) 如果抛物线 $y=m(x+1)^2+m+1$ 的顶点坐标是 $(-1,-2)$，那么它的开口方向________.

例题1 已知抛物线 $y=2(x-1)^2-1$.

(1) 指出它的开口方向、对称轴和顶点坐标；

(2) 在平面直角坐标系 xOy 中画出这条抛物线.

解 (1) 在抛物线 $y=2(x-1)^2-1$ 的表达式中，

$$a=2>0,\ m=-1,\ k=-1.$$

所以，这条抛物线的开口向上，对称轴是直线 $x=1$，顶点坐标是 $(1,-1)$.

(2) 列表：

x	…	-1	-0.5	0	1	2	2.5	3	…
$y=2(x-1)^2-1$	…	7	3.5	1	-1	1	3.5	7	…

从例题 1 中的列表可见，对 x 所取的值，要使由 x、y 的各组对应值所确定的点中，有一个是顶点，其余的点两两关于所画对称轴对称.

描点、连线，画出抛物线 $y=2(x-1)^2-1$，如图 26－9 所示.

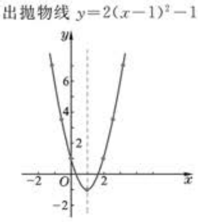


图 26－9

用描点法画抛物线 $y=a(x+m)^2+k$，通常先依据常数 a、m、k 确定这条抛物线的位置特征；画图时先画出对称轴(用虚线表示)，有利于直观地检验所画抛物线的对称性.

例题2 在平面直角坐标系 xOy 中，画出二次函数 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2-3$ 的图像.

96 第二十六章 二次函数

【注意事项】

观察例题 1 所列的表中的数据可以发现，纵坐标相等的两个点，它们的横坐标的平均数是 1，如 $(0,1)$ 与 $(2,1)$、$(-0.5,3.5)$ 与 $(2.5,3.5)$ 等. 一般地，对于二次函数 $y=a(x+m)^2+k$，表中对自变量 x 所取的值应包括 $-m$，所取的其他值则成对出现且每一对值的平均数是 $-m$. 如取了 x_1，就取 $x=-2m-x_1$ 与它配对. 在教学中，只要求学生注意，在列表时，要使所描出的点关于直线 $x=-m$ 对称成对出现(除顶点外). 可通过引导学生观察例题 1 中的列表加强认识，不必讲解对自变量取值的一般方法.

解　函数 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2-3$ 的图像是抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2-3$. 由 $a=-\frac{1}{2}<0, m=-2, k=-3$, 可知抛物线开口向下，对称轴是直线 $x=2$，顶点坐标是 $(2,-3)$.

列表：

x	…	0	1	2	3	4	…
$y=-\frac{1}{2}(x-2)^2-3$	…	-5	$-\frac{7}{2}$	-3	$-\frac{7}{2}$	-5	…

例题 2 表明了画二次函数 $y=a(x+m)^2+k$ 的图像的一般过程.

描点、连线，画出二次函数 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2-3$ 的图像，如图 26－10 所示.

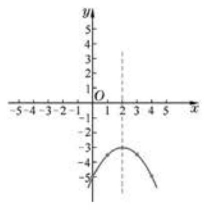


图 26－10

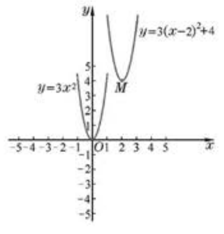


图 26－11

例题3　已知抛物线 $y=3x^2$，将这条抛物线平移，当它的顶点移到点 $M(2,4)$ 的位置时，所得新抛物线的表达式是什么？

解　抛物线 $y=3x^2$ 的顶点是原点 $O(0,0)$，将顶点移到点 $M(2,4)$ 的位置，其过程可以是先向右平移 2 个单位，再向上平移 4 个单位. 抛物线 $y=3x^2$ 经过这样的两次平移，所得的抛物线的表达式是 $y=3(x-2)^2+4$，如图 26－11 所示.

所以新抛物线的表达式是 $y=3(x-2)^2+4$.

练习 26.3(2)

1. 指出抛物线 $y=-2(x+1)^2+3$ 的开口方向、对称轴和顶点坐标，并画出这条抛物线.
2. 画出二次函数 $y=\frac{1}{3}(x-2)^2-1$ 的图像.
3. 将抛物线 $y=-2x^2$ 平移，使顶点移到点 $P(-3,1)$ 的位置，求所得新抛物线的表达式.

第二节　二次函数的图像　97

例题 2

在已经研究和掌握了二次函数 $y=a(x+m)^2+k$ 的图像特征的情况下，以本题为例，具体说明基于图像特征分析用描点法画它的图像的完整过程.

例题 3

本题是为帮助学生掌握二次函数图像平移的规律，学会它的基本运用.

练习 26.3(2)

1. 开口向下，对称轴是直线 $x=-1$，顶点坐标是 $(-1,3)$；图略.
2. 略.
3. $y=-2(x+3)^2+1$.

【注意事项】

(1) 用描点法画二次函数的图像时，对描点的个数多少没有规定. 例题 2 指明通常描点的个数至少 5 个，而且其中含图像的顶点、图像与 y 轴的交点. 在例题 1 中描点的个数是 7 个，一般而言，描点的个数越多越有利于正确画图.

(2) 在例题 3 解题思路的分析中，要向学生讲明，图形上的每一点都进行同一个平移，就是这个图形的一个平移；反过来，图形的一个平移就是图形上的每一点都进行这个平移. 所以由抛物线顶点（或其他一点）所作的平移可知这条抛物线所作的平移；根据已知原抛物线顶点与它经过平移后所对应的点，坐标之间的关系，就可确定平移的过程，从而写出新的抛物线的表达式.

【本课重点】

研究解析式是一般形式 $y=ax^2+bx+c$ 的具体二次函数的图像特征和画图方法.

本课引言中指明，将一般形式的解析式化为 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式，就知道这个二次函数的图像特征，用配方法可实现这一转化.

例题 4

通过本题具体说明用配方法将二次函数的解析式 $y=ax^2+bx+c$ 化为 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式的过程.

已知的解析式中 $a\neq 1$，要让学生注意在配方时对 a 的处理方法.

例题 5

以本题为例，说明对一般形式表示的二次函数的图像特征进行研究的方法.

下面，我们来讨论二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像.

以向左或向右、向上或向下为平移方向，将抛物线 $y=x^2$ 进行两次平移，可以得到表达式形如 $y=(x+m)^2+k$ 的抛物线.

例如，对于二次函数 $y=x^2-4x+5$，因为 $y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$，可知将抛物线 $y=x^2$ 先向右平移 2 个单位，再向上平移 1 个单位，所得抛物线就是二次函数 $y=x^2-4x+5$ 的图像.

> 通过配方，把 x^2-4x+5 化为 $(x-2)^2+1$ 的形式.

任意一个二次函数 $y=ax^2+bx+c$(其中 a、b、c 是常数，且$a\neq 0$)，都可以运用配方法，把它的解析式化为 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式.

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像称为抛物线 $y=ax^2+bx+c$，这个函数的解析式就是这条抛物线的表达式.

例题4 用配方法把下列函数解析式化为 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式：

(1) $y=2x^2+4x+5$；　　(2) $y=-\frac{1}{3}x^2-2x+5$.

解 (1) $y=2x^2+4x+5$

$=2(x^2+2x)+5$

$=2(x^2+2x+1)-2+5$

$=2(x+1)^2+3$.

(2) $y=-\frac{1}{3}x^2-2x+5$

$=-\frac{1}{3}(x^2+6x)+5$

$=-\frac{1}{3}(x^2+6x+9)+3+5$

$=-\frac{1}{3}(x+3)^2+8$.

> 当二次项系数 a 不是 1 时，先把二次项和一次项结合在一起变形为 $a(x^2+px)$，然后配方.要注意正确运算.
> 配方时，利用了等式：
> x^2+px
> $=x^2+2\cdot x\cdot \frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2$
> $=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2$.

例题5 指出下列二次函数图像的开口方向、对称轴和顶点坐标：

(1) $y=x^2-x$；

(2) $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$；

(3) $y=1-x-3x^2$.

解 (1) $y=x^2-x$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$.

其中 $a=1>0$，$m=-\frac{1}{2}$，$k=-\frac{1}{4}$.

因此，二次函数 $y=x^2-x$ 图像的开口向上，对称轴是直线 $x=\frac{1}{2}$，顶点坐标是 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

> 通常先把二次函数的解析式 $y=ax^2+bx+c$ 化为 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式，再讨论它的图像特征.

98 第二十六章　二次函数

【注意事项】

(1) 在例题 4 的教学中，对解析式中 ax^2+bx+c 配方时，如果 $a\neq 1$，那么可按照“边款”中的说明进行处理.要注意它与用配方法解一元二次方程时所进行的配方的区别.用配方法解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 时，如果 $a\neq 1$，那么通常先将方程两边同除以 a，把方程化为 $x^2+px+q=0$ 的形式再配方.

(2) 通过例题 5 的教学，要让学生明确对一般形式表示的二次函数的图像特征进行研究的方法.这一方法在“边款”中已经指明，它体现了化归思想的运用.

(2) $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$

$=\frac{1}{2}(x+3)^2-2.$

其中 $a=\frac{1}{2}>0, m=3, k=-2.$

因此，二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$ 图像的开口向上，对称轴是直线 $x=-3$，顶点坐标是 $(-3,-2)$.

(3) $y=1-x-3x^2$

$=-3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{13}{12}.$

其中 $a=-3<0, m=\frac{1}{6}, k=\frac{13}{12}.$

因此，二次函数 $y=1-x-3x^2$ 图像的开口向下，对称轴是直线 $x=-\frac{1}{6}$，顶点坐标是 $\left(-\frac{1}{6},\frac{13}{12}\right)$.

例题6 指出二次函数 $y=x^2-4x+3$ 图像的开口方向、对称轴和顶点坐标，并画出这个函数的图像.

解 $y=x^2-4x+3$

$=(x^2-4x+4)-4+3$

$=(x-2)^2-1.$

其中 $a=1>0, m=-2, k=-1.$

所以抛物线 $y=x^2-4x+3$ 的开口向上，对称轴是直线 $x=2$，顶点坐标是 $(2,-1)$.

列表：

x	…	0	1	2	3	4	…
$y=x^2-4x+3$	…	3	0	-1	0	3	…

描点、连线，画出抛物线 $y=x^2-4x+3$，如图 26-12 所示.

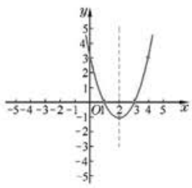


图 26-12

例题 6

在例题 2 中说明了基于特征分析用描点法画二次函数 $y=a(x+m)^2+k$ 图像的过程，通过本题进一步说明基于特征分析用描点法画二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图像的完整过程.

【注意事项】

基于特征分析用描点法画函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像时，一般分为三步：第一步，用配方将把二次函数的解析式 $y=ax^2+bx+c$ 化为 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式；第二步，确定抛物线的对称轴和顶点坐标；第三步，根据抛物线的对称性进行列表、描点、画图.

练习 26.3(3)

1. (1) $y=(x+2)^2-4$，抛物线的开口向上，对称轴是直线 $x=-2$，顶点坐标是 $(-2,-4)$；(2)、(3)、(4)的解析式依次化为 $y=-2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$、$y=-3(x-1)^2-4$、$y=\frac{1}{2}(x-4)^2-3$，其余略.

2. 略.

【本课重点】

对二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像特征进行概括.

问题 2

通过对问题的讨论，导出抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的用 a、b、c 表示的对称轴表达式和顶点坐标；然后概括二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像特征.

例题 7

本题是帮助学生熟悉用 a、b、c 表示的对称轴表达式和顶点坐标；同时为进一步认识二次函数图像特征提供具体图像.

练习 26.3(3)

1. 先用配方法把下列函数的解析式化为 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式，再指出每个函数图像的开口方向、对称轴和顶点坐标：

(1) $y=x^2+4x$； (2) $y=-2x^2-3x$；

(3) $y=-3x^2+6x-7$； (4) $y=\frac{1}{2}x^2-4x+5$.

2. 画函数 $y=-x^2-4x-5$ 的图像.

问题2

已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$，能把这个函数图像的对称轴和顶点坐标用常数 a、b、c 表示出来吗？

对二次整式 ax^2+bx+c 配方，得

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

所以 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$.

将上式与 $y=a(x+m)^2+k$ 作比较，得

$$m=\frac{b}{2a},\quad k=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

由此可知：

抛物线 $y=ax^2+bx+c$（其中 a、b、c 是常数，且 $a\neq0$）的对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. 当 $a>0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口向上，顶点是抛物线的最低点；当 $a<0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口向下，顶点是抛物线的最高点.

例题7 指出二次函数 $y=-2x^2-6x+4$ 图像的开口方向、顶点坐标和对称轴，并画出这个函数的图像.

解 函数 $y=-2x^2-6x+4$ 的解析式中，

$$a=-2<0, b=-6, c=4.$$

$$-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\times(-2)}=-\frac{3}{2},$$

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times(-2)\times4-(-6)^2}{4\times(-2)}=\frac{17}{2}.$$

所以，这个函数的图像是抛物线 $y=-2x^2-6x+4$，它的开口向下，顶点坐标是 $\left(-\frac{3}{2},\frac{17}{2}\right)$，对称轴是直线 $x=-\frac{3}{2}$.

也可以运用配方法，得
$y=-2x^2-6x+4$
$=-2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{2}$，
然后指出结论.

100 第二十六章 二次函数

【注意事项】

要让学生经历用 a、b、c 表示对称轴表达式和顶点坐标的导出过程，知道对二次整式 ax^2+bx+c 配方的实施方法；所得结论可以直接运用，但对此结论应注重理解而不是死记硬背，并注意有时通过配方求顶点坐标反而简便.

列表：

x	…	-3	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	…
$y=-2x^2-6x+4$	…	4	$\frac{13}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{13}{2}$	4	…

画抛物线 $y=-2x^2-6x+4$ 时，可先确定顶点的位置，再画出它的对称轴.
列表时要注意选取一些特殊点，如取 $x=0$，可得抛物线与 y 轴的交点坐标 $(0, 4)$，然后利用轴对称性取它的对称点 $(-3, 4)$.
描出顶点和有关特殊点后，参照对称轴，可画出这条抛物线.

描点、连线，画出抛物线 $y=-2x^2-6x+4$，如图 26－13 所示.

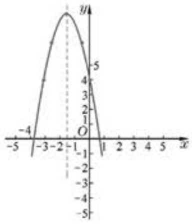


图 26－13

观察图 26－13 中的抛物线 $y=-2x^2-6x+4$，沿着 x 轴正方向看，这条抛物线在对称轴$\left(\text{即直线 } x=-\frac{3}{2}\right)$左侧的部分是上升的，在对称轴右侧的部分是下降的.

一般地，对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$，沿着 x 轴正方向看，可见它的变化情况如下：

当 $a>0$ 时，抛物线在对称轴$\left(\text{即直线 } x=-\frac{b}{2a}\right)$左侧的部分是下降的，在对称轴右侧的部分是上升的；

当 $a<0$ 时，抛物线在对称轴$\left(\text{即直线 } x=-\frac{b}{2a}\right)$左侧的部分是上升的，在对称轴右侧的部分是下降的.

图像上升或下降，是对图像变化情况的直观描述，规定以 x 轴正方向为参照，一般不再说明.

练习 26.3(4)

1. 指出下列二次函数图像的开口方向、对称轴和顶点坐标：
   (1) $y=x^2+6x-3$； (2) $y=2x^2-5x+2$；
   (3) $y=\frac{5}{2}x-2-3x^2$； (4) $y=3x^2+2x$.
2. 指出抛物线 $y=-2x^2-5x+7$ 的开口方向、对称轴和顶点坐标，并画出这条抛物线，试说明这条抛物线的变化情况.

第二节　二次函数的图像 101

联想一次函数和反比例函数的基本性质中含有关于图像上升、下降的性质，引导学生对例题 7 中所画抛物线的上升、下降情况进行观察和分析；再结合图 26－13 和其他抛物线，进而归纳出关于抛物线的上升、下降情况的直观性质.

练习 26.3(4)

1. (1) 抛物线开口向上，对称轴是直线 $x=-3$，顶点坐标是 $(-3, -12)$；(2)、(3)、(4)各题，顶点坐标依次是 $\left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$、$\left(\frac{5}{12}, -\frac{71}{48}\right)$、$\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$，其余略.

2. 抛物线开口向下，对称轴是直线 $x=-\frac{5}{4}$，顶点坐标是 $\left(-\frac{5}{4}, \frac{81}{8}\right)$，图像略；抛物线在直线 $x=-\frac{5}{4}$ 左侧的部分上升、右侧的部分下降.

【注意事项】

对抛物线上升、下降的认定，要注意“沿着 x 轴正方向看”的约定. 关于抛物线上升、下降变化情况的讨论，主要是为今后学习二次函数的增减性作准备要求，现在只是让学生知道抛物线的变化情况，对这一特征有直观的认识. 教学中，可让学生联想一次函数、反比例函数的图像的变化情况，注意到一个一次函数的图像或一个反比例函数在各自象限内的图像，只出现上升、下降这两种情况之一；而一个二次函数的图像变化，同时出现上升、下降这两种情况. 从而使学生对函数图像的变化情况的直观认识更加丰富多样和全面一些.

【本课重点】

通过举例，讨论有关二次函数图像运用的一些基本问题.

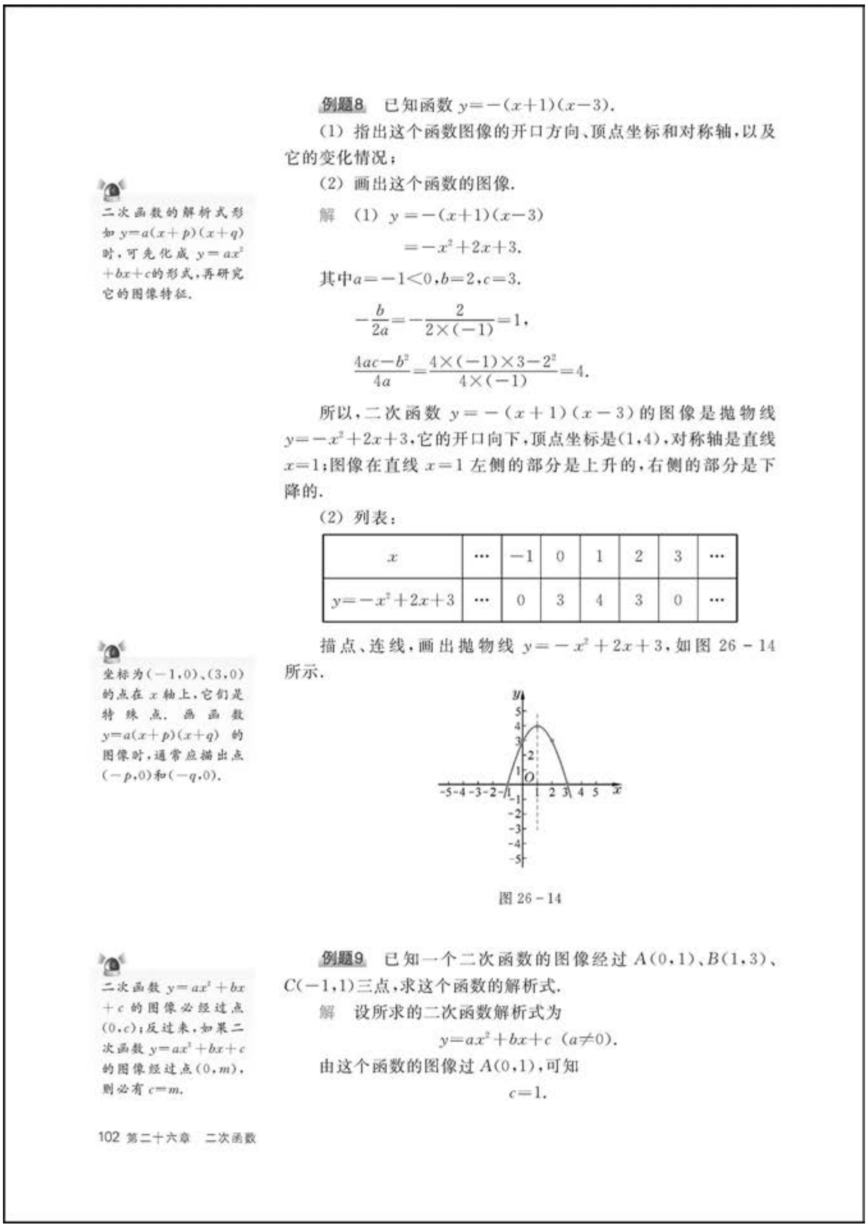
例题 8

以本题为例，指出对解析式形如 $y=a(x+p)(x+q)$ 的二次函数图像特征进行讨论时，通常先将解析式化为 $y=ax^2+bx+c$ 的形式；并通过画图像，让学生注意到坐标分别为$(-p,0)$、$(-q,0)$的两点是图像与 x 轴的交点，它们是需关注的特殊点.

例题 9

以本题为例，指出由已知二次函数图像上三点确定函数解析式的方法.

注意点 $A(0,1)$是函数图像与 y 轴的交点，于是可直接写出解析式中的常数项. 在“边款”中，指出了一般情况下的结论.



例题8 已知函数 $y=-(x+1)(x-3)$.

(1) 指出这个函数图像的开口方向、顶点坐标和对称轴，以及它的变化情况；

(2) 画出这个函数的图像.

二次函数的解析式形如 $y=a(x+p)(x+q)$ 时，可先化成 $y=ax^2+bx+c$的形式，再研究它的图像特征.

解 (1) $y=-(x+1)(x-3)$

$=-x^2+2x+3.$

其中$a=-1<0$，$b=2$，$c=3$.

$$-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\times(-1)}=1,$$

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times(-1)\times3-2^2}{4\times(-1)}=4.$$

所以，二次函数 $y=-(x+1)(x-3)$ 的图像是抛物线 $y=-x^2+2x+3$，它的开口向下，顶点坐标是$(1,4)$，对称轴是直线 $x=1$；图像在直线 $x=1$ 左侧的部分是上升的，右侧的部分是下降的.

(2) 列表：

x	…	-1	0	1	2	3	…
$y=-x^2+2x+3$	…	0	3	4	3	0	…

坐标为$(-1,0)$、$(3,0)$的点在 x 轴上，它们是特殊点. 画函数 $y=a(x+p)(x+q)$ 的图像时，通常点描出点$(-p,0)$和$(-q,0)$.

描点、连线，画出抛物线 $y=-x^2+2x+3$，如图 26－14 所示.

图 26－14

例题9 已知一个二次函数的图像经过 $A(0,1)$、$B(1,3)$、$C(-1,1)$三点，求这个函数的解析式.

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像必经过点$(0,c)$；反过来，如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过点$(0,m)$，则必有 $c=m$.

解 设所求的二次函数解析式为

$$y=ax^2+bx+c\ (a\neq0).$$

由这个函数的图像过 $A(0,1)$，可知

$$c=1.$$

102 第二十六章 二次函数

【注意事项】

(1) 通过例题 8 的教学，可向学生指出，如果一个二次函数的解析式中没有直接显示出图像的顶点坐标，那么对它的图像特征的讨论通常化归到解析式为 $y=ax^2+bx+c$ 的形式再进行.

(2) 通过例题 9 的教学，要让学生领会“边款”中的解说，掌握由已知二次函数图像上三点确定函数解析式的方法. 对于根据其他的给定条件确定二次函数解析式的问题，本章不作教学要求，安排在拓展Ⅱ中讨论.

再由这个函数的图像过点 $B(1,3)$ 和 $C(-1,1)$，得

$$\begin{cases} a\cdot 1^2+b\cdot 1+1=3, \\ a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+1=1. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} a=1, \\ b=1. \end{cases}$$

因此，所求二次函数的解析式为 $y=x^2+x+1$.

求这个函数解析式所采用的方法是待定系数法，其中 a、b、c 是待定系数. 一般可由已知图像上三点的坐标，得到关于 a、b、c 的一个三元一次方程组，通过解方程组，可确定 a、b、c 的值.

练习 26.3(5)

1. 指出下列二次函数图像的开口方向、对称轴和顶点坐标：

   (1) $y=2x^2-12x+13$；　　(2) $y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)$.

2. 已知一个二次函数的图像经过 $(-1,0)$、$(3,0)$、$(1,-5)$ 三点，求这个二次函数的解析式.

例题10 在一块等腰直角三角形铁皮上截一块矩形铁皮. 如图 26－15，已有的铁皮是等腰直角三角形 ABC，它的底边 AB 长 20 厘米. 要截得的矩形 $EFGD$ 的边 FG 在 AB 上，顶点 E、D 分别在边 CA、CB 上. 设 EF 的长为 x 厘米，矩形 $EFGD$ 的面积为 y 平方厘米，试写出 y 关于 x 的函数解析式及定义域，并求当 EF 的长为 4 厘米时所截得的矩形的面积.

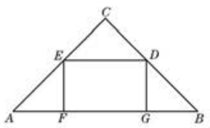


图 26－15

解　因为 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，所以 $\triangle AFE$ 和 $\triangle DGB$ 都是等腰直角三角形，于是

$$AF=EF=x, GB=DG=x,$$
$$FG=AB-AF-GB=20-2x.$$

矩形 $EFGD$ 的面积 $y=(20-2x)x=-2x^2+20x$.

由 $0<FG<AB$，得 $0<20-2x<20$，解得 $0<x<10$.

所以，y 关于 x 的函数解析式是 $y=-2x^2+20x$，定义域是 $0<x<10$.

当 $x=4$ 时，$y=-2\times 4^2+20\times 4=48$.

即当 EF 的长为 4 厘米时，所截得的矩形的面积为 48 平方厘米.

练习 26.3(5)

1. (1)、(2)抛物线的顶点坐标分别是 $(3,-5)$、$\left(\frac{5}{4},-\frac{9}{8}\right)$，其余略.

2. $y=\frac{5}{4}x^2-\frac{5}{2}x-\frac{15}{4}$.

【本课重点】

运用二次函数的知识解决简单的实际问题.

例题 10

本题是探求几何图形中两个变量之间的函数关系，体现了二次函数知识在研究几何问题中的运用.

题中指明要写出函数定义域. 一方面这是描述函数关系的需要，另一方面是让学生注意实际问题中的函数定义域要符合实际意义. 正确写出本题中定义域的关键，是抓住“矩形 $EFGD$ 的边长大于零”和“边 FG 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上”的条件，分析出 $0<FG<AB$.

例题 11

本题以学生熟悉的体育运动项目为背景，初步体现二次函数知识在实际生活中的应用.

题中已经指明铅球运行过程中高度与水平距离这两个变量之间的函数关系，并给出了平面直角坐标系；又已知两个变量的三组对应值，因此可用待定系数法求出函数解析式. 求函数的定义域时，不仅要把握使函数解析式有意义的要求，还要注意分析实际问题的存在性和合理性，确保实际问题有意义.

想一想

引导学生加深对合理建立平面直角坐标系的认识.

例题11 一位运动员推铅球，铅球运行时离地面的高度 y（米）是关于水平距离 x（米）的二次函数. 已知铅球刚出手时离地面的高度为 $\frac{5}{3}$ 米；铅球出手后，运行水平距离 4 米时到达离地面 3 米的高度，运行水平距离 10 米时落到地面. 如图 26－16 建立平面直角坐标系，求这个二次函数的解析式和定义域.

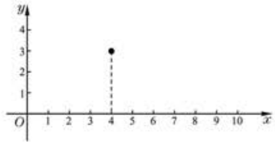


图 26－16

解 根据题意，可设二次函数的解析式为 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，并可知这个函数的图像经过 $\left(0,\frac{5}{3}\right)$，$(4,3)$，$(10,0)$ 三点. 于是，得

$$\begin{cases} a\cdot 4^2+b\cdot 4+c=3, \\ a\cdot 10^2+b\cdot 10+c=0, \\ c=\frac{5}{3}. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} a=-\frac{1}{12}, \\ b=\frac{2}{3}, \\ c=\frac{5}{3}. \end{cases}$$

所以，所求二次函数的解析式为 $y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$.

因为铅球运行的水平距离最大为 10 米，所以这个函数的定义域为 $0\leqslant x\leqslant 10$.

想一想

在例题 11 中，如果建立不同的平面直角坐标系，所求得的二次函数解析式是否一样？你对如图 26－16 这样建立平面直角坐标系的合理性有什么看法？

104 第二十六章 二次函数

【注意事项】

在例题 11 中给定了平面直角坐标系，从而降低了解题难度. 在教学中，对基础较好的学生，可提出由他们自行建立平面直角坐标系，再求出二次函数的解析式.

许多实际问题的解决，常用“数学模型方法”，它的一般过程是“建模—求解—解释”. 由此可见，建立数学模型是解决实际问题的起点. 回顾例题 11，根据实际问题中两个变量的几对数值，确定了这两个变量之间的函数解析式，即建立了一个函数模型；利用这个函数模型，就可以进一步去解决其他的有关问题. 但是，由于题中指明了两个变量之间具有二次函数关系并给出了直角坐标系，所以它没有展现建立函数模型的探索过程，只是初步渗透数学的建模思想方法；又由于题中没有提出需要进一步解决的其他有关问题，所以它未能体现数学模型方法应用的完整过程. 在例题 11 的教学中，主要是引导学生探求二次函数的解析式，同时也要注意适当渗透数学建模思想.

例题12 广场上喷水池中的喷头微露水面，喷出的水线呈一条抛物线，水线上水珠的高度 y(米)关于水珠与喷头的水平距离 x(米)的函数解析式是 $y=-\frac{3}{2}x^2+6x(0\leqslant x\leqslant 4)$.

(1) 当水珠的高度达到最大时，水珠与喷头的水平距离为多少？最大的高度是多少？

(2) 画出 y 关于 x 的函数图像，并利用图像验证(1)所得的结果.

解 (1) 在 y 关于 x 的函数解析式 $y=-\frac{3}{2}x^2+6x(0\leqslant x\leqslant 4)$ 中，二次项系数 $-\frac{3}{2}<0$，所以抛物线 $y=-\frac{3}{2}x^2+6x$ 的开口向下. 抛物线的顶点是它的最高点.

由 $y=-\frac{3}{2}x^2+6x=-\frac{3}{2}(x-2)^2+6$，得抛物线的顶点坐标是 $(2,6)$.

因为 $x=2$ 在函数的定义域内，所以，水珠的高度达到最大时，水珠与喷头的水平距离为2米，此时的最大高度为6米.

(2) 列表：

x	0	1	2	3	4
$y=-\frac{3}{2}x^2+6x$	0	$\frac{9}{2}$	6	$\frac{9}{2}$	0

描点、连线，画出函数 $y=-\frac{3}{2}x^2+6x(0\leqslant x\leqslant 4)$ 的图像，如图26－17所示.

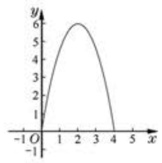


图 26－17

函数 $y=-\frac{3}{2}x^2+6x(0\leqslant x\leqslant 4)$ 的图像是抛物线 $y=-\frac{3}{2}x^2+6x$ 在 x 轴上方及 x 轴上的一段. 抛物线的顶点在这个函数的图像上，这个顶点的纵坐标比图像上其他点的纵坐标都大，可见(1)的结果正确.

例题 12

本题的实际背景可以参考章头图，这是一个与抛物线有关的实际应用问题.

题中把喷出的水线看作是连续不断的水珠在运动，并直接给出了水珠运动中两个变量的函数关系. 解决题(1)的关键是建立“水珠达到最大高度”与“抛物线顶点”之间的联系，能在实际问题中对抛物线顶点及其坐标的意义作出解释.

题(2)的设计，是为了让学生看到，在这个实际问题中，二次函数的定义域是部分实数，相应地它的图像是抛物线的一部分；同时，借助于图像，直观地解释题(1)所得的结果.

【注意事项】

(1) 在例题12的教学中，要提醒学生注意，一条抛物线上的最高点与抛物线一部分上的最高点，两者的含义是有区别的. 抛物线 $y=-\frac{3}{2}x^2+6x$ 的顶点是它的最高点，当这个顶点在给定的这一抛物线部分上时，它当然也是这一抛物线部分的最高点，因此，解题时特别指出了“$x=2$ 在函数的定义域内”，说明抛物线 $y=-\frac{3}{2}x^2+6x$ 的顶点 $(2,6)$ 在给定的这一抛物线部分上.

(2) 通过例题12，让学生直观地认识“一个函数的图像上最高点的纵坐标是这个函数的最大的函数值”，关注形与数之间的联系，关注用所学知识解释和解决实际问题. 但不要讲述函数的最大值或最小值的概念，更不要单纯地讨论函数的最大值或最小值问题.

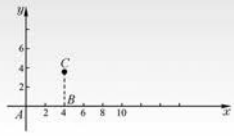
练习 26.3(6)

1. $S=\frac{\sqrt{3}}{36}C^2$.

2. $y=-\frac{1}{32}x^2+\frac{17}{16}x$.

练习 26.3(6)

1. 等边三角形的周长为 C，面积为 S，写出它的面积 S 关于周长 C 的函数解析式.
2. 在足球队进行射门训练时，一球员正对球门，从离球门 32 米的地面 A 处起脚将球吊进球门，球的飞行路线呈现抛物线形. 当球飞越的水平距离 AB 为 4 米时，它离地面的高度 BC 为 3.75 米；当球刚进球门时，它离地面的高度为 2 米. 以 A 为原点，以垂直于球门线的直线为 x 轴，如图建立平面直角坐标系，求此抛物线的表达式.



(第 2 题)

Benzhang Xiaojie

26

本章小结

我们在本章主要学习了二次函数的概念、图像、直观性质及其简单应用，对二次函数有了初步的了解，同时加深了对函数的认识.

经历了从正比例函数、反比例函数到一次函数、二次函数的学习过程，我们可以切实感受到，函数概念是从广泛的现实生活中抽象出来的，函数知识是分析和研究事物运动变化规律的重要工具.

在已学过的函数解析式中，如 $kx+b$，ax^2+bx+c，$\frac{k}{x}$ 等，都是我们熟悉的代数式，只是其中的字母 x 表示“变量”，其他字母表示“常数”. 当 $k\neq0$、$a\neq0$ 时，$kx+b$、ax^2+bx+c 分别是关于 x 的一次整式和二次整式，则相应解析式分别表示一次函数和二次函数；类似地，$y=\frac{k}{x}$（k 是不等于零的常数）表示一个分式函数，这种特殊形式的分式函数称为反比例函数. 把握函数解析式与代数式之间的这种联系，有助于我们理解函数的概念.

我们对二次函数图像的探讨，是从简单的二次函数 $y=ax^2$ 的图像入手，通过平移，得到了一般的二次函数的图像. 在认识 $y=ax^2$ 的图像特征的基础上，还是利用平移，获得了对一般的二次函数图像特征的认识. 这种从特殊到一般以及利用图形运动研究图像的方法，简明而有效，在今后的学习中还将继续运用.

根据图像的特征，可以直观地认识函数的一些性质，其中体现了数形结合的思想方法.

本章的知识结构框图如下：

本章的知识内容，主要是二次函数的概念、图像、直观性质；在研究过程中，采用了从特殊到一般、先分解再组合的策略，运用了图形运动、数形结合以及化归等思想方法.

对本章学习的小结，可把整理二次函数的知识内容作为一条基线，引导学生回顾学习过程，总结关于二次函数研究的经验和方法.

函数是研究事物运动变化规律的重要工具，在现实生活中有广泛的应用. 在高中阶段，函数是数学的重要内容. 学生在初中阶段所学的一次函数、二次函数以及反比例函数，是初等代数函数中的最基本的类型；所获得的知识、经验和方法，是进一步学习和研究函数的基础.

【设计意图】

学生在学习一次函数、二次函数以及反比例函数的过程中，对利用函数图像研究函数已有直接的经验和体会. 本阅读材料，主要是引导学生将用图像的方法研究函数的经验进行总结和概括，加深对“图像的方法”的认识，提高运用的意识和能力；同时注意到“图像的方法”存在缺陷，对改善研究函数的方法引起思考，为今后学习“分析的方法”做铺垫.

【活动建议】

让学生自主阅读.

可向学生提出，要联系以前在函数研究中的过程经历，边读边想；要结合材料中的活动安排，再做再思，促使阅读效果得到提高.

Yuedu Cailiao

26

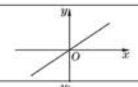
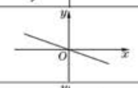
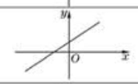
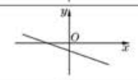
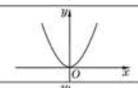
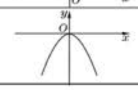
阅读材料

利用函数的图像研究函数

函数是刻画事物运动变化过程和发展规律的数学模型，应用非常广泛. 解析法、列表法、图像法是表示函数的三种常用方法，这几种表示方法各有特点. 我们对函数进行分析和研究，要学会利用它的不同表示方法的优点.

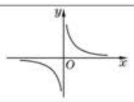
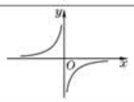
用图像法表示函数，具有直观性. 利用函数的图像研究函数，是一种最基本的初等方法，可以把它称为“图像的方法”. 用图像的方法研究函数，主要是通过观察图像的特征，获得对函数的表象的直观认识. 这是“看图形识函数”，是数形结合的思想方法的有效运用.

对函数 $y=f(x)$ 在平面直角坐标系 xOy 中的图像进行观察，现在主要关注以下问题. 从整体看：图像是否有间断，是否向某一个或几个方向不断伸展，是否与 x 轴、y 轴相交，是否关于某一直线或原点对称，是否有最高点或最低点等；沿着 x 轴的正方向看：图像是否有上升、下降的变化，如有升降还要看哪几段上升、哪几段下降、在哪里转折等. 由此归纳出图像的一些特征，从中得到有关这个函数性质的信息. 我们利用图像的方法，对正比例函数、一次函数、二次函数以及反比例函数有了直观的认识. 例如下表：

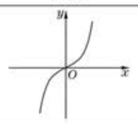
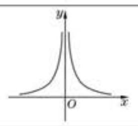
函数 $y=f(x)$	图像		图像特征	函数性质
正比例函数 $y=kx$	$k>0$		直线. 过原点，上升.（关于原点对称）	y 随着 x 增大而增大.
	$k<0$		直线. 过原点，下降.（关于原点对称）	y 随着 x 增大而减小.
一次函数 $y=kx+b$	$k>0$		直线. 上升.	y 随着 x 增大而增大.
	$k<0$		直线. 下降.	y 随着 x 增大而减小.
二次函数 $y=ax^2$	$a>0$		抛物线. 关于 y 轴对称；y 轴之左降、之右升，顶点最低.	在 $x\leqslant 0$ 时，y 随着 x 增大而减小；在 $x>0$ 时，y 随着 x 增大而增大.
	$a<0$		抛物线. 关于 y 轴对称；y 轴之左升、之右降，顶点最高.	在 $x\leqslant 0$ 时，y 随着 x 增大而增大；在 $x>0$ 时，y 随着 x 增大而减小.

108 第二十六章　二次函数

（续表）

函数 $y=f(x)$	图像		图像特征	函数性质
反比例函数 $y=\frac{k}{x}$	$k>0$		双曲线，两支各下降.（关于原点对称）	在 $x<0$ 和 $x>0$ 时，分别有 y 随着 x 增大而减小.
	$k<0$		双曲线，两支各上升.（关于原点对称）	在 $x<0$ 和 $x>0$ 时，分别有 y 随着 x 增大而增大.

不妨再尝试一下，用图像的方法来研究函数 $y=x^3$ 和 $y=\frac{1}{x^2}$：

函数	图像	图像特征	函数性质
$y=x^3$			
$y=\frac{1}{x^2}$			

用图像的方法研究函数，形象直观. 在现实生活，我们就常用图像的方法研究函数. 例如，气温随着时间变化、血压随着时间变化、股票随着时间变化等，就常用图像法把函数关系表示出来，然后利用图像进一步分析它们的变化情况.

用图像的方法研究函数，必要的前提是知道这个函数的图像. 如果已知函数的解析式，那么可用“描点法”大致画出这个函数的图像；还可借助于计算机或图形计算器，快捷地画出图像. 这样，我们利用图像，可以初步了解这个函数的性质，为深入分析函数的性质提供思考的基础. 但是，“描点法”的描点，个数总是有限的，画出来的图像往往不够精确，也不完整；利用机器画出来的图像通常也是局部的. 所以，图像的方法对函数的研究很实用，但有局限性，也不完全可靠.

我国著名数学家华罗庚先生说：“数无形时少直觉，形少数时难入微；数形结合百般好，隔离分家万事休.”可见，有了“数”与“形”的结合，数学才能展翅高飞.

阅读材料 109

在材料中，用表格列举了前面所学函数的图像特征，并从图像特征引出了函数的有关性质，以帮助学生回顾学习过程，同时进一步认识图像特征与函数性质之间的联系；再让学生尝试用“图像的方法”研究两个新的函数，使学生获得新的体验. 这些内容，也可在本章的复习和小结中使用.

练习部分参考答案

第二十四章　相 似 三 角 形

习题 24.1

1. 略.

2. $B'C'=\frac{16}{3}$厘米,$C'A'=\frac{20}{3}$厘米.

3. (1) 不一定,略; (2) 所有的等边三角形一定相似,所有的菱形不一定相似.略.

习题 24.2(1)

1. $\frac{1}{5\ 000}$.

2. 1 厘米.

3. 略.

4. 略.

5. 16 厘米.

习题 24.2(2)

1. (1) $AP=2\sqrt{5}-2, PB=6-2\sqrt{5}$; (2) $PA=2\sqrt{5}-2, AB=2\sqrt{5}+2$.

2. 略.

3. (1) 6 平方厘米; (2) $\frac{DO}{OB}=\frac{2}{3}, \frac{CO}{OA}=\frac{2}{3}$.

习题 24.3(1)

1. (1) $\frac{12}{5}$; (2) 6; (3) 15.

2. 9.

3. $OA=12, DF=8$.

4. 略.

习题 24.3(2)

1. $AC=4, EF=6$.

2. (1) 8; (2) 4.

3. $\frac{AF}{FC}=2, \frac{EF}{BC}=\frac{2}{3}$.

4. 10.2 米.

习题 24.3(3)

1. 平行.

2. 略.

3. 略.

习题 24.3(4)

1. (1) $\frac{15}{2}$; (2) 4.

2. (1) 12; (2) 6.

3. 略.

4. 略.

习题 24.4(1)

1. $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$，$\triangle DOE \backsim \triangle COB$.

2. 提示：画出图形，写出已知、求证，再证明.

3. 略.

4. 略.

习题 24.4(2)

1. (1) $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$； (2) $\triangle ABC \backsim \triangle EFD$； (3) 不一定相似.

2. 两个等腰三角形不一定相似，顶角对应相等的两个等腰三角形一定相似.

3. 略.

4. $\triangle ADB \backsim \triangle ACD$. 提示：根据条件分别计算$\triangle ADB$与$\triangle ACD$的边$AB$、$AD$、$AC$的长，可得$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AD}{AC}$.

习题 24.4(3)

1. 相似，三边对应成比例.

2. $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$. 提示：可以用判定定理 3，也可以用判定定理 2.

3. 提示：先证明$\triangle ABD \backsim \triangle A_1B_1D_1$，得$\angle B=\angle B_1$. 再证$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

习题 24.4(4)

1. 提示：先证明$\triangle ABC \backsim \triangle DAC$.

2. 提示：先证明$\triangle BCD \backsim \triangle B_1C_1D_1$，得$\angle C=\angle C_1$. 再证$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

3. 因为$AD /\!/ BC$，$\angle A=90°$，所以$\angle B=\angle A=90°$.

① 当$\dfrac{AD}{BP}=\dfrac{AP}{BC}$时，$\triangle APD \backsim \triangle BCP$. 即$AP=1$或 6 时，$\triangle APD \backsim \triangle BCP$.

② 当$\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{AP}{BP}$时，$\triangle APD \backsim \triangle BPC$. 即$AP=\dfrac{14}{5}$，$\triangle APD \backsim \triangle BPC$.

因此，当AP的长为 1 或 6 或$\dfrac{14}{5}$时，$\triangle APD$与$\triangle BPC$相似.

习题 24.4(5)

1. 提示：可以从多个角度，用不同的判定定理证明.

2. 提示：先证明$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$，得$\angle B=\angle C$. 再证$\triangle FDB \backsim \triangle FEC$.

3. 当AP的长为 4 厘米或 9 厘米时，$\triangle ADP$与$\triangle ABC$相似.

习题 24.5(1)

1. 10 厘米，15 厘米.

2. 4 厘米.

3. 略.

4. 提示：根据已知条件，求得$\dfrac{BD}{B_1D_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$；再证明$\triangle ABD \backsim \triangle A_1B_1D_1$.

习题 24.5(2)

1. $AC=\dfrac{15}{2}$厘米，$B_1C_1=12$厘米.

2. 18 厘米，27 厘米，36 厘米.

3. $\dfrac{4}{9}$.

4. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\left(或表示为 1：(\sqrt{3}-1)，\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}\right)$.

习题 24.5(3)

1. (1) 100 厘米，40 厘米； (2) 500 平方厘米，80 平方厘米.

2. $AD=12$，$BD=9$，$CD=16$.

3. $\dfrac{a\sqrt{SS_1}}{S}$.

4. $DE=5\sqrt{3}$厘米，$FG=5\sqrt{6}$厘米.

习题 24.5(4)

1. 相似比为 5∶1，面积比为 25∶1.

2. 略.

3. (1) 提示：先证明$\triangle ABE\backsim\triangle ACF$，得$\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{AB}{AC}$，再证$\triangle ABC\backsim\triangle AEF$；

   (2) 提示：在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$\angle A=60°$，可得$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{1}{4}$.

习题 24.6(1)

1. 略.

2. (1) 正确； (2) 不正确，改为：$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DB}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b})$； (3) 正确.

3. 略.

4. $m\vec{a}\parallel n\vec{a}$. 根据实数与向量相乘的意义，可知 $m\vec{a}$、$n\vec{a}$ 都与 $\vec{a}$ 平行，所以 $m\vec{a}$ 与 $n\vec{a}$ 平行.

习题 24.6(2)

1. (1) $\overrightarrow{AD}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{BE}=\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{CF}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$； (2) $\vec{0}$.

2. (1) $-3\vec{a}+4\vec{b}$； (2) $-5\vec{a}+5\vec{b}+\vec{c}$； (3) $5\vec{a}+\dfrac{11}{2}\vec{b}-\dfrac{8}{3}\vec{c}$.

3. 略.

4. $\vec{x}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$.

习题 24.6(3)

1. B.

2. $\vec{a}=-\dfrac{3}{5}\vec{b}$.

3. 由已知，得 $2\vec{a}+\vec{b}=-3\vec{a}+5\vec{b}$，即 $5\vec{a}=4\vec{b}$，所以 $\vec{a}=\dfrac{4}{5}\vec{b}$.

   根据实数与向量相乘的意义，可知 $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

4. 略.

5. (1) $\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$， $\overrightarrow{HG}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$；

   (2) ∵ $\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}$，

   $\overrightarrow{HG}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD})=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}$，

   ∴ $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$.

   可知$\overrightarrow{EF}$与$\overrightarrow{HG}$同向且等长，即 $EF\parallel HG$，$EF=HG$，所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

习题 24.7(1)

1. A.

2. $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\vec{a}$，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}-\vec{a}$，$\overrightarrow{EC}=\dfrac{2}{3}\vec{b}$.

3. $\vec{x}=\dfrac{1}{19}\vec{a}-\dfrac{6}{19}\vec{b}$.

4. 略.

习题 24.7(2)

1. (1) 相反,平行; (2) $-\vec{a}$ 和 $5\vec{b}$.

2. 由$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$,可知$\overrightarrow{MN}$在$\vec{a}$、$\vec{b}$方向上的分向量分别是$\frac{1}{2}\vec{a}$ 和$-\frac{1}{2}\vec{b}$;

   由$\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}$,可知$\overrightarrow{MN}$在$\vec{a}$、$\vec{b}$方向上的分向量分别是$-\vec{a}$ 和$\vec{b}$.

3. $\overrightarrow{GE}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$,$\overrightarrow{CH}=-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$.

4. 略.

复习题

A 组

1. 7 ∶ 5,2 ∶ 7.

2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. 18 厘米.

4. $BC=5$,$FH=6$,$GH=3$.

5. 4.5 米.

6. $\frac{4}{3}$.

7. 略.

8. 略.

9. (1) 0.8 米; (2) $\frac{3}{2}$.

10. 提示:由 $PE/\!/AB$,可得$\frac{BE}{BD}=\frac{AP}{AD}$. 由 $PF/\!/AC$,可得$\frac{CF}{CD}=\frac{AP}{AD}$,得$\frac{BE}{BD}=\frac{CF}{CD}$. 又 $BD=CD$,可证结论.

11. 提示:由已知可得 $GF/\!/AD$,$BF/\!/CD$,可得$\frac{GF}{AD}=\frac{EF}{ED}$,$\frac{BF}{CD}=\frac{EF}{ED}$,得$\frac{GF}{AD}=\frac{BF}{CD}$. 又 $AD=CD$,可证结论.

12. $\triangle ABC\backsim\triangle EFD$. 提示:分别计算对应三边的比.

13. 略.

14. 略.

15. (1) $-\frac{7}{6}\vec{a}-\frac{5}{3}\vec{b}$; (2) $-3\vec{a}-9\vec{c}$.

B 组

1. (1) 8; (2) $S_{\triangle BCE}=\frac{S_2(S_1+S_2)}{S_1}$.

2. D.

3. 90°.

4. 略.

5. 49.

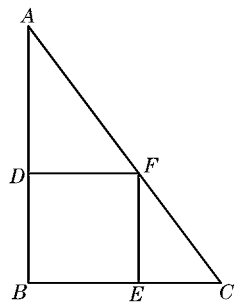
6. (1) $\overrightarrow{GH}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$,$\overrightarrow{GE}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$; (2) 略.

7. 有两种设计方案(如图).

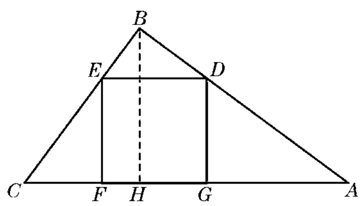
   如图(1)所示的方案 1 中,正方形的边长为$\frac{240}{7}$分米;

   如图(2)所示的方案 2 中,正方形的边长为$\frac{1\,200}{37}$分米.

   因为$\frac{240}{7}=\frac{1\,200}{35}>\frac{1\,200}{37}$,所以方案 1 中正方形区域的面积大.



(1)



(2)

(第 7 题)

第二十五章　锐角的三角比

习题 25.1(1)

1. $\tan M=2,\tan N=\dfrac{1}{2},\cot M=\dfrac{1}{2},\cot N=2$.

2. $\tan P=\dfrac{3}{4},\cot P=\dfrac{4}{3}$.

3. (1) $a\tan\alpha$ 或 $\dfrac{a}{\cot\alpha}$；(2) $\dfrac{a}{\tan\beta}$ 或 $a\cot\beta$.

4. (1) $CD=6$；(2) $\cot A=\dfrac{2}{3},\tan\angle BCD=\dfrac{3}{2}$.

5. 方法一：因为 $\angle ADE=\angle B$，所以 $\tan\angle ADE=\tan B=\dfrac{3}{2}$.

方法二：因为 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，所以 $\dfrac{AE}{DE}=\dfrac{AC}{BC}$，$\tan\angle ADE=\dfrac{AE}{DE}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{3}{2}$.

习题 25.1(2)

1. (1) $SQ=\sqrt{5}$；(2) $\sin S=\dfrac{\sqrt{5}}{5},\cos S=\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\sin Q=\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\cos Q=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

2. $\tan A=\dfrac{3}{2},\cot A=\dfrac{2}{3},\sin A=\dfrac{3\sqrt{13}}{13},\cos A=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$.

3. (1) $AC=t\cos\alpha,BC=t\sin\alpha$；(2) $AC=t\sin\beta,BC=t\cos\beta$.

4. $\tan\alpha=\dfrac{1}{4},\cot\alpha=4,\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{17}}{17},\cos\alpha=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.

5. 方法一：因为 $\angle ACD=\angle B,AB=5$，所以 $\sin\angle ACD=\sin B=\dfrac{4}{5}$.

方法二：由勾股定理和相似三角形可求得 $AB=5,AD=\dfrac{16}{5}$，所以 $\sin\angle ACD=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{\frac{16}{5}}{4}=\dfrac{4}{5}$.

习题 25.2(1)

1. (1) $AB=2,BC=\sqrt{3}$；

$$\tan30^\circ=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},\cot30^\circ=\frac{BC}{AC}=\sqrt{3},\sin30^\circ=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2},\cos30^\circ=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\tan60^\circ=\frac{BC}{AC}=\sqrt{3},\cot60^\circ=\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{3},\sin60^\circ=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2},\cos60^\circ=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}.$$

(2) $BC=1,AB=\sqrt{2}$；$\tan45^\circ=\dfrac{AC}{BC}=1,\cot45^\circ=\dfrac{BC}{AC}=1,\sin45^\circ=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\cos45^\circ=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. (1) $\dfrac{5}{6}$；(2) $\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}$；(3) $\dfrac{19}{6}$；(4) $4\sqrt{3}-4\sqrt{2}$.

3. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}=\dfrac{2}{3}\sin45^\circ=\dfrac{1}{3\cos45^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}\tan45^\circ}{3}$；

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sin60^\circ}{2}=\dfrac{\cos30^\circ}{2}=\dfrac{\tan60^\circ}{4}$；

$\sqrt{3}-\sqrt{2}=\cot30^\circ-2\sin45^\circ=\tan60^\circ-2\cos45^\circ=\dfrac{1}{\cot30^\circ+2\sin45^\circ}$.

习题 25.2(2)

1. (1) 12.996 2；(2) 0.299 1；(3) 0.266 7；(4) 0.404 2.

2. (1) $85^\circ41'2''$；(2) $84^\circ8'51''$；(3) $67^\circ23'1''$；(4) $43^\circ27'52''$.

3. (1) 5.0；(2) 4.3；(3) $53^\circ58'21''$；(4) $33^\circ46'52''$.

习题 25.3(1)

1. (1) $\angle A=45°, b=4, c=4\sqrt{2}$; (2) $\angle B=36°23', a\approx4.025, b\approx2.966$.

2. (1) $c\approx4.113, \angle A\approx47°51', \angle B\approx42°9'$;

(2) $a\approx4.318, \angle A\approx43°26', \angle B\approx46°34'$.

习题 25.3(2)

1. (1) 5.746; (2) 15.22.

2. (1) $\angle A\approx93°40', \angle B\approx43°10'$; (2) 26.16.

3. 12.

4. (1) 7.5; (2) 8.7.

习题 25.4(1)

1. 21.8 米.

2. 4.7 米.

3. 346 米.

习题 25.4(2)

1. $1\,100\sqrt{3}$米.

2. 138 米.

习题 25.4(3)

1. (1) 1∶1.5; (2) $33°41'$.

2. 22.0 米.

习题 25.4(4)

1. 278 毫米.

2. 0.4 米.

3. 60.2 海里.

复习题

A 组

1. (1) $\tan P, \cot Q$; (2) $\sin Q, \cos P$.

2. (1) $BC=m\cot\alpha, BC=\dfrac{m}{\tan\alpha}$; (2) $\dfrac{m}{\sin\alpha}$.

3. (1) $4-\sqrt{2}$; (2) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

4. (1) 0.502 3; (2) 0.553 1; (3) 3.361 6; (4) 0.693 7.

5. (1) $70°56'59''$; (2) $37°1'18''$.

6. (1) $\angle B=60°, a=\sqrt{3}, c=2\sqrt{3}$; (2) $b\approx3.639, \angle A\approx41°43', \angle B=48°17'$.

7. (1) 5; (2) $\dfrac{3}{4}$.

8. (1) 13; (2) $45°14'$.

9. 43.3 米.

10. 货轮继续向东航行,它与小岛 A 的最短距离约为 20.8 海里,所以没有触礁的危险.

B 组

1. $\sin A=\dfrac{4}{5}, \cos B=\dfrac{4}{5}$.

2. (1) $\angle D=15°$; (2) $BC=\sqrt{3}t, BD=2t$; (3) $\tan15°=2-\sqrt{3}$.

3. $2-\sqrt{3}$.

4. (2) 当$\angle\alpha$ 在 0°到 90°(α 不等于 0°或 90°)的范围内增大时,$\tan\alpha$ 的值也增大.

第二十六章　二次函数

习题 26.1

1. （1）$bx+c$，一次；（2）c；常值.

2. ①、④.

3. 当 $x=2$ 时，$y=-2$；当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，$y=-2$.

4. 当 $m^2-1\neq 0$ 时，即 $m\neq\pm 1$ 时，函数是二次函数；当 $\begin{cases} m^2-1=0, \\ m-1\neq 0 \end{cases}$ 时，即 $m=-1$ 时，函数是一次函数.

5. $y=50(1+x)^2$（或表示为 $y=50x^2+100x+50$）.

6. $y=-\dfrac{1}{2}x^2+4x$，函数的定义域是 $0<x<4$.

习题 26.2(1)

1. y 轴，$(0,0)$，向下.

2. 略.

3. （1）$a<0$；（2）高.

4. $a=-\dfrac{1}{4}$；$y=-\dfrac{1}{4}x^2$.

5. 略.

习题 26.2(2)

1. （1）y 轴，$(0,3)$，向下；（2）$b=0$.

2. 第一列：向上、y 轴、$(0,0)$；　　第二列：向上、y 轴、$(0,2)$；
第三列：向上、y 轴、$(0,-2)$；　　第四列：向上、y 轴、$(0,k)$.

3. $\because$ $a=2>0$，$\therefore$ 抛物线 $y=2x^2-3$ 开口向上，对称轴是 y 轴，顶点坐标是 $(0,-3)$；图像略.

4. （1）$y=2x^2-1$；（2）$y=-\dfrac{1}{3}x^2-3$.

5. $y=-2x^2+4$，开口向下、顶点坐标是 $(0,4)$.

6. B.

习题 26.2(3)

1. 直线 $x=1$，$(1,0)$，向下.

2. 第一列：向下、y 轴、$(0,0)$；　　第二列：向下、直线 $x=-2$、$(-2,0)$；
第三列：向下、直线 $x=2$、$(2,0)$；　　第四列：向下、直线 $x=-m$、$(-m,0)$.

3. 图像略，开口向上、对称轴是直线 $x=1$、顶点坐标是 $(1,0)$.

4. （1）$y=2(x-1+4)^2=2(x+3)^2$，开口向上、对称轴是直线 $x=-3$、顶点 $(-3,0)$；
（2）$y=-3(x+2-3)^2=-3(x-1)^2$，开口向下、对称轴是直线 $x=1$、顶点 $(1,0)$.

5. （1）抛物线的对称轴是直线 $x=3$，抛物线的表达式是 $y=\dfrac{1}{2}(x-3)^2$；（2）$A\left(4,\dfrac{1}{2}\right)$.

6. $m=-2$，$a=2$.

习题 26.3(1)

1. （1）开口向上、直线 $x=-3$、顶点 $(-3,-2)$；（2）开口向下、直线 $x=-1$、顶点 $(-1,5)$；
（3）开口向上、直线 $x=2$、顶点 $(2,-7)$；　（4）开口向下、直线 $x=5$、顶点 $(5,6)$.

2. 抛物线 $y=-3x^2$ 的开口向下，对称轴是 y 轴，顶点坐标 $(0,0)$；
抛物线 $y=-3(x+4)^2-2$ 的开口向下，对称轴是直线 $x=-4$，顶点坐标 $(-4,-2)$；
把抛物线 $y=-3x^2$ 向左平移 4 个单位，再向下平移 2 个单位.

3. （1）$y=-\dfrac{1}{4}x^2-5$；　　（2）$y=-\dfrac{1}{4}(x+2)^2$；

(3) $y=-\frac{1}{4}(x-1)^2+1$; (4) $y=-\frac{1}{4}(x-3)^2-2$.

4. $y=-4(x-3)^2$.

5. 答案不唯一,如 $y=(x-2)^2+3$.

6. $a>0, m<0, k<0$.

习题 26.3(2)

1. $y=-3(x-2)^2+4$.

2. 开口向上,对称轴是直线 $x=3$,顶点坐标是$(3,1)$,图像略.

3. (1) 向下,$x=-1$,$(-1,3)$;

(2) 左,1,上,3;

(3) 向下平移 4 个单位再向右平移 4 个单位.

4. 直线 $x=3$,左,右,高,$(3,4)$.

5. 答案不唯一,如 $y=-4(x-2)^2+1$.

习题 26.3(3)

1. 各题写成 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式,分别是:

(1) $y=(x-2)^2-4$; (2) $y=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$; (3) $y=-(x-3)^2+8$;

(4) $y=-2(x+1)^2+3$; (5) $y=-\frac{1}{3}(x-3)^2+6$; (6) $y=-\frac{1}{3}(x+3)^2+\frac{7}{2}$.

其余略.

2. 把抛物线的表达式 $y=2x^2-8x+5$ 化为 $y=2(x-2)^2-3$,可知此抛物线的开口向上,对称轴是直线 $x=2$,顶点坐标是$(2,-3)$;画图略.

3. 由已知抛物线的对称轴为 y 轴,可知 $5-m=0$,得 $m=5$,所以抛物线的顶点坐标是$(0,2)$.

4. 把抛物线的表达式化为 $y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+m-\frac{9}{4}$,可知此抛物线的顶点坐标是$\left(-\frac{1}{2}, m-\frac{9}{4}\right)$. 由已知顶点在第三象限,得 $m-\frac{9}{4}<0$,所以 $m<\frac{9}{4}$.

习题 26.3(4)

1. 第一列:向上、y 轴、$(0,0)$;第二列:向上、直线 $x=-3$、$(-3,-9)$;

第三列:向上、直线 $x=-3$、$(-3,3)$.

2. 图略. 抛物线 $y=x^2+4x+3=(x+2)^2-1$,它的开口向上,对称轴是直线 $x=-2$,顶点坐标是$(-2,-1)$;沿着 x 轴正方向看,在 $x<-2$ 的抛物线部分下降,在 $x>-2$ 的抛物线部分上升.

3. (1) 二; (2) 1; (3) 16.

4. 由已知二次函数的解析式,可知这个函数图像的对称轴是直线

$$x=-\frac{-m}{2(m-2)},\text{即 } x=\frac{m}{2(m-2)}. \quad \text{得} \quad \frac{m}{2(m-2)}=1,\text{解得 } m=4.$$

于是,这个二次函数的解析式为 $y=2x^2-4x$,它的图像的顶点坐标是$(1,-2)$.

5. 满足条件的函数解析式不唯一,如:$y=(x-2)^2-4$.

习题 26.3(5)

1. (1) $y=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{25}{8}$,开口向下,对称轴是直线 $x=\frac{3}{4}$,顶点坐标是$\left(\frac{3}{4},\frac{25}{8}\right)$;

(2) $y=(x+k)^2+1-k^2$,开口向上,对称轴是直线 $x=-k$,顶点坐标是$(-k,1-k^2)$.

2. 抛物线 $y=x^2+mx+m$ 的顶点坐标是$\left(-\frac{m}{2},\frac{4m-m^2}{4}\right)$. 已知顶点在直线 $y=-x$ 上,所以 $\frac{m}{2}=\frac{4m-m^2}{4}$,解得 $m_1=0, m_2=2$.

3. (1) $y=2x^2-6x+4$；　(2) $y=x^2-x+1$；　(3) $y=-x^2+x$.

4. (1) $C(-1,0)$；　(2) $y=-2x^2+x+3$.

习题 26.3(6)

1. 解析式为 $s=x(l-3x)$，即 $s=-3x^2+lx$.

$\because \begin{cases} x>0, \\ l-3x>0, \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x>0, \\ x<\dfrac{l}{3}, \end{cases}$ 得 $0<x<\dfrac{l}{3}$，即函数的定义域为 $0<x<\dfrac{l}{3}$.

2. (1) 铅球从运动员手中推出到落地所经过的路线，是铅球的运动轨迹，令 $-\dfrac{1}{12}x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{5}{3}=0$，解得 $x_1=10$，$x_2=-2$，所以函数的定义域是 $0\leqslant x\leqslant 10$；

(2) 画图略；由 $y=-\dfrac{1}{12}(x-4)^2+3$，且定义域为 $0\leqslant x\leqslant 10$，可知铅球运动过程中的最高点坐标为 $(4,3)$.

(3) 小李推铅球的成绩是 10 米.

3. 由题意，可设 $y=ax^2$，且知 $A(-10,-4)$，$B(10,-4)$. 把 $x=10$，$y=-4$ 代入解析式，得 $a=-\dfrac{1}{25}$，

$\therefore$ $y=-\dfrac{1}{25}x^2$.

4. $s=\dfrac{1}{2}t^2-2t$($0<t\leqslant 12$，且 t 为整数)；当 $t=8$ 时，$s=16$. 答：前 8 个月公司所获得的累积利润是 16 万元.

复习题

A 组

1. 第一行：向下、y 轴、$(0,0)$；　第二行：向上、y 轴、$(0,k)$；
第三行：向下、直线 $x=-m$、$(-m,0)$；　第四行：向上、直线 $x=-m$、$(-m,k)$.

2. $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，$x=-\dfrac{b}{2a}$；下降，上升，低；上升，下降，高.

3. 0，0；0.

4. (1) $(0,-2)$；　(2) $\dfrac{1}{4}$.

5. $y=\dfrac{1}{2}x^2$.

6. (1) 开口向上，直线 $x=\dfrac{1}{3}$，顶点$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$；　(2) 开口向下，直线 $x=3$，顶点$\left(3,\dfrac{13}{2}\right)$.

7. (1) $y=2x^2-4x+1$；　(2) $y=-4x^2-3x+2$.

8. (1) $B(3,0)$、$C(1,2\sqrt{3})$、$D(0,\sqrt{3})$；　(2) $y=-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}x^2+\dfrac{5}{3}\sqrt{3}x+\sqrt{3}$.

9. $y=-\dfrac{1}{2}(x-3)^2+1$.

B 组

1. ①、④.

2. (1) D；　(2) D.

3. $p=-\dfrac{5}{2}$；$y=-(x+1)^2-\dfrac{3}{2}$.

4. (1) $y=-x^2+4x-3$；　(2) $y=x-1$.

5. 矩形的一边 $DE=x$，另一边 $EF=h-\dfrac{h}{a}x$，所求函数的解析式为 $y=-\dfrac{h}{a}x^2+hx$，定义域为 $0<x<a$.

说　　明

本册教材根据上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会制定的课程方案和《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》编写,供九年义务教育九年级第一学期试用.

本教材由上海师范大学主持编写,经上海市中小学教材审查委员会审查准予试用.

本册教材的编写人员有:

主　编:邱万作　　　　　　分册主编:蔡则彪

特约撰稿人:(按姓氏笔画为序)王　华　史荣铨　邵世开　章　健

2019 年教材修订组成员:叶锦义　邵世开　沈　洁

陆海兵　徐晓燕　顾跃平

欢迎广大师生来电来函指出教材的差错和不足,提出宝贵意见.出版社电话:021-64319241.

插图绘制:黄国荣、顾云明

经上海市中小学教材审查委员会审查
准予试用　准用号Ⅱ-CJ-2019004

责任编辑　章佳维

九年义务教育

数学教学参考资料

九年级第一学期

(试用本)

上海市中小学(幼儿园)课程改革委员会

上海世纪出版股份有限公司
上　海　教　育　出　版　社　出版

（上海市闵行区号景路159弄C座　　邮政编码:201101）

上海新华书店发行　　上海华顿书刊印刷有限公司印刷

开本 890×1240　1/16　印张 8.5

2019年7月第1版　　2025年6月第7次印刷

ISBN 978-7-5444-9343-7/G·7704

定价:18.00元

此书如有印、装质量问题,请向本社调换　上海教育出版社电话:021-64373213

绿色印刷产品

ISBN 978-7-5444-9343-7