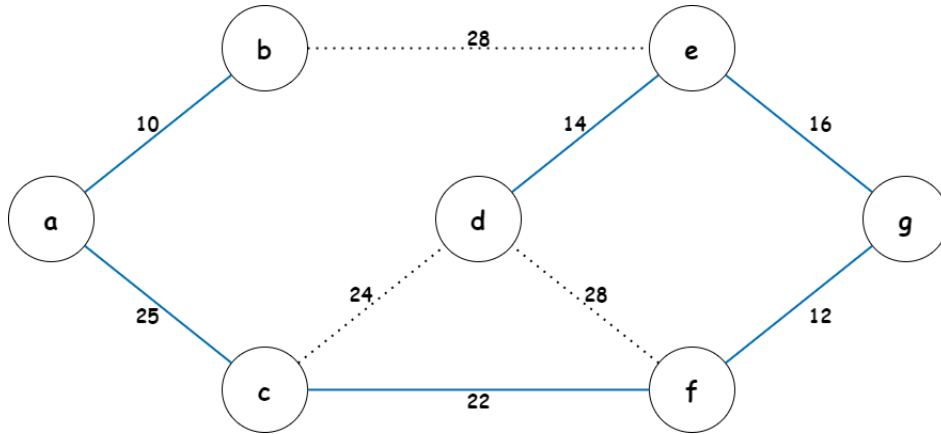


## 1 Exercise 1



프림 알고리즘을 실행할 때에 있어서, a를 root node로 지정하였다. 파란색 간선의 집합이 MST이며, 총 weight는 99 이다.

## 2 Exercise 3

### 2.1

Weight가 같은 간선이 있다면, MST가 유일하지 않을 수 있다. 왜냐하면 weight가 같은 간선 중, 어느 하나를 선택하더라도 그래프의 총 weight는 같기 때문이다. 따라서 강의 노트에서와 같이 'e-c', 'e-f' 간선 둘 다 총 weight는 같으면서, 동시에 MST 조건을 만족하는 경우가 발생할 수 있다.

### 2.2

귀류법을 통해서 증명해 보고자 한다.

주어진 그래프  $G = (V, E)$ 의 서로 다른 MST인  $T_1 = (V, E_1)$ 과  $T_2 = (V, E_2)$ 가 있다고 가정해보자. 이 때, vertex A와 B를 지나는 간선  $e$ 가 그래프  $G$ 에서 가장 낮은 weight를 가졌다고 가정한다. 또한 간선  $e$ 는  $T_1$ 에 포함되어 있지만,  $T_2$ 에는 포함되어 있지 않다고 가정한다. 그러면  $T_2$ 는  $T_1$ 에는 포함되지 않는 간선  $e'$ 를 최소한 한개 이상 가지게 될 것이다.

만약  $e$ 를  $T_2$ 에 포함시킨다면, cycle이 생겨날 것이다. 이 때,  $T_2$ 에서  $e$ 를  $e'$ 와 서로 바꾼다면  $e_1 \cup T_2 - e_2$ 를 얻게 되는데, 이는 spanning tree의 조건은 만족하지만  $T_2$  보다 낮은 weight를 갖게 된다. 같은 그래프  $G$ 로 부터 나온 MST는 같은 weight를 가져야 하지만,  $e_1 \cup T_2 - e_2$ 와  $T_1$ 은 서로 다른 weight를 가진다. 이는 모순으로,  $T_2$ 는 존재할 수 없다. 따라서  $G$ 의 MST는  $T_1$  뿐 만이 유일하다고 할 수 있다.