

最长的沙堡

在海边可以找到各种各样的沙堡，从简单的沙堆到复杂的城堡复制品。随着时间的推移，毫无疑问，雨水和海浪会逐渐侵蚀沙堡。但是，不同类型的沙堡的侵蚀程度是不同的。即使同一海滩上的建筑规模和离水的距离大致相同。因此，我们想知道是否存在一个最优的 3D 几何形状来用作沙堡基础。

在 task 1 中，为了识别出沙堡基础的最佳 3D 几何形状，首先，我们团队选择了 6 种常见的几何形状进行分析。然后，我们引入莫尔-库仑屈服准则来验算沙堡地基的强度，引入霍顿方程来计算海水入渗率，进一步引入 Van Genuchten 模型来获得保水性曲线。在研究含水量的基础上，我们利用内摩擦角来判断沙堡是否稳定。最后，我们算出长方体是最好的，其中持续时间为 50min。更重要的是，通过遍历长方体的长宽比，我们发现水面的宽度越窄，持续时间越长。

在任务 2 中，要考虑砂水的混合比例。由于砂水比关系到沙堡的结构稳定性，通过建立砂水混合比与内摩擦角的函数关系，再进行编程遍历，发现最优解为当水沙比为 15% 时，沙堡持续时间为 64.43min。

在任务 3 中，我们将雨水对沙堡的影响分为冲刷和渗透两部分。我们发现长方体仍然是最优的几何形状，证实了我们模型的可靠性。此外，利用 ANSYS 仿真分析验证了理论结果，结果非常相似。

综上所述，通过查阅大量的数据，我们建立了波蚀、潮浸、雨冲刷、雨浸模型。模型建立有一个逐步优化的过程，雨浸的结果利用 ANSYS 仿真进行分析。与理论计算结果吻合较好，验证了我们模型的正确性。

关键词: Mohr-Coulomb 屈服准则, Horton 方程, Van Genuchten 模型, 内摩擦角, ANSYS 仿真



关注数学模型
获取更多资讯

内容

1.介绍2

1.1 背景2

1.2 我们的工作2

2.假设2

3.符号3.

4.任务 1:确定最好的三维几何形状3.

4.1 在沙塔只考虑海水的力量4

 以下 4.4.1 的波浪理论4

4.1.2 莫里森方程5

 针对摩尔-库仑屈服准则 4.1.36

4.2 考虑在沙塔含水量的变化8

4.2.1 霍顿准备的方程8

4.2.2 Van Genuchten 模型8

4.3 结论9

4.3.1 长方体作为一个例子9

4.3.2 最好的三维几何形状10

4.3.3 灵敏度分析11

5.任务 2:考虑 Sand-to-Water 混合比例12

6.任务 3:考虑降雨的影响13

6.1 降水模型13

6.2 Sartor-Boyd 冲刷模型14

6.3 渗流过程15

6.4 ANSYS 仿真17

7.任务 4:其他策略使沙堡持续时间更长17

8.的优点和缺点18

8.1 优势18

8.2 缺点18

文章19

参考21



关注数学模型
获取更多资讯

有道文档翻译
pdf.youdao.com

1. Introduction

1.1 Background

在海边可以找到各种各样的沙堡，从简单的沙堆到复杂的城堡复制品。在所有这些中，一个典型的形成一个单一的，无特征的湿沙堆的初始基础，然后继续切割和塑造这个基础成为一个可识别的三维几何形状，从而建立更多的城堡定义特征。

随着时间的推移，毫无疑问，雨水和海浪会逐渐侵蚀沙堡。但是，不同类型的沙堡的侵蚀程度是不同的。即使同一海滩上的建筑规模和离水的距离大致相同。

因此，为了达到最高的鲁棒性和最长的持续时间，我们想知道是否存在一种最优的 3D 几何形状，可以用作沙堡的基础。

1.2 Our work

为了进一步展示我们的解决方案，我们将我们的论文安排如下：

- 在任务 1 中，我们使用了六种常见的几何形状进行研究。通过建立潮汐浸没模型和波浪侵蚀模型，我们计算得出长方体是最优几何模型。进一步研究，通过对不同长方体长宽比的研究，我们发现长方体面对水面的宽度越小，模型存在的时间越长。
- 在任务 2 中，不同的沙水混合比例会影响沙堡的强度。通过建立不同沙水混合比与内摩擦角之间的函数关系，我们发现 15% 是最好的。
- 在 task 3 中，我们将雨水对沙堡的影响分为冲刷和渗透两部分。通过 ANSYS 模拟。我们得到了降雨对六个几何图形的影响，与理论非常相似。
- 在任务 4 中，我们考虑了两个方面的，减少海水入渗和减少波浪侵蚀，以延长沙堡的持续时间

2. Assumptions

- 假设模型底部在一个水平面上。
- 假设波在运动而没有振幅衰减。
- 忽略沙堡自身重力的影响。



关注数学模型
获取更多资讯

● 假设海水均匀地渗入沙堡。

3. Symbols

象征	描述
V	沙堡卷
$\frac{1}{2}$	波振幅
$\frac{1}{2}$	波速度
\dot{u}	波加速度
F	波浪总内联力
w	砂土含水量
σ_n	截面上的法向应力
τ_n	截面上的剪应力
ϕ	内摩擦角
$v_{\text{雨}}$	雨滴的平均最终速度

4. Task 1: Identify the Best Three-Dimensional Geometric Shape

在这个问题中，我们根据人们在海滩上建造沙堡的情况，分析了 6 种常见的结构相对稳定的 3D 几何形状，从中选择最佳。假设它们具有相同的体积和高度。

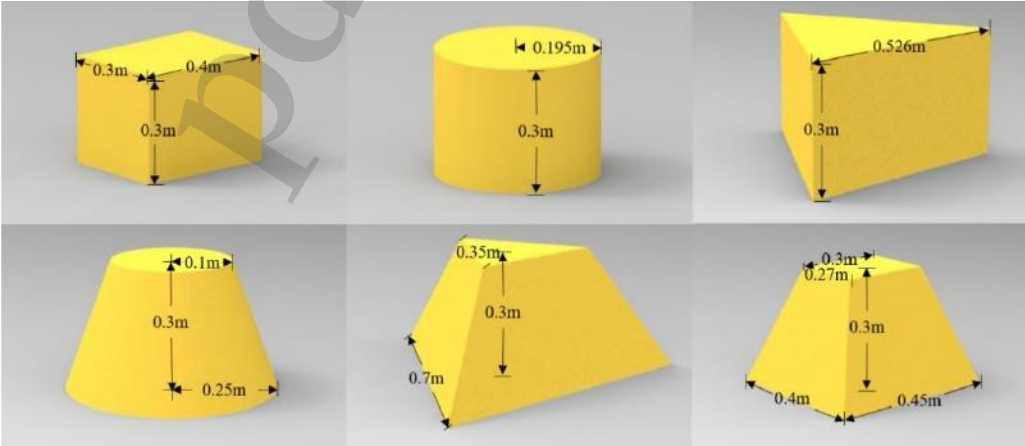


图 1 所示。我们选择的 6 个 3D 几何体

考虑到潮水会摧毁沙堡，而且随着潮水的上涨，潮水会



关注数学模型
获取更多资讯

有道文档翻译
pdf.youdao.com

逐渐淹没沙堡底部，沙堡的含水量会不断上升。当沙堡完全淹没在海水中时，我们就没有必要再去探索了。因此，我们将整个过程分为三个阶段：

- 1)沙堡没有被淹没。在这种情况下，我们主要考虑潮汐对沙堡的作用力。
- 2)海水开始淹没沙堡。在这种情况下，被渗透部分的含水量会发生变化。
- 3)海水会完全淹没沙堡。

以美国桑迪胡克的一个海滩为例，我们查询了海滩的潮汐曲线地点在 2020 年 3 月 6 日^[1]。

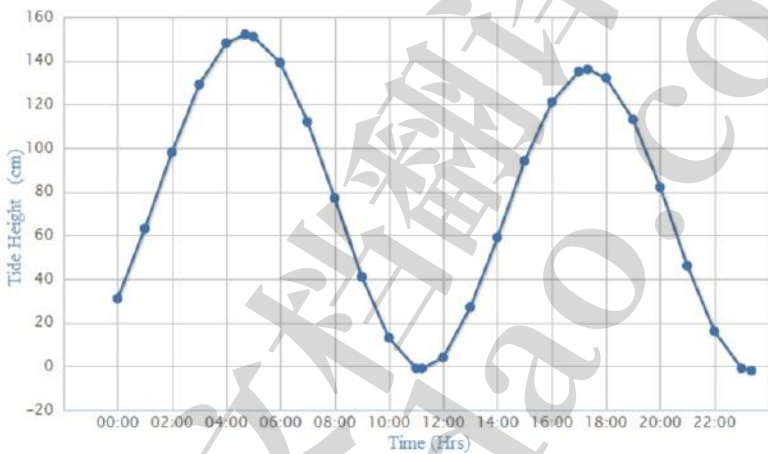


图 2。2020 年 3 月 6 日 Sandy Hook 的潮汐曲线

从上图可以看出，00:00 的潮汐初始高度为 30cm，潮汐高度与时间的关系为：

$$H(t)=1256sin(0.0008776t+3.074)+70.98sin(0.4971t-0.8185)(1)$$

在哪里

T 为时间(h); $H(t)$ 为潮汐相对于潮高基准面的高度。

4.1 Only consider the force of seawater on the sandcastle

4.1.1 Airy wave theory

为了研究波浪对沙堡的作用力，我们需要知道波浪是如何运动的。艾里波理论^[2]经常应用于海洋工程和海岸工程中，用于模拟随机海况。艾里波理论是关于波在势流表面和水平底部上方传播的线性理论。



关注数学模型
获取更多资讯

一个波分量的自由表面高程 $\eta(x,t)$ 是正弦的，作为水平位置 x 和时间 t 的函数。

$$\eta(x,t)=a\cdot\cos(kx-\omega t)$$

(2)

在哪里

A 为波幅，单位为米，这里，我们取 $A = 0.15m$ [3]。 K 是角波数以每米弧度表示，与波长有关为 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ，在这里假设 $\lambda = 8.5m$ 。 ω 是角频率，单位是弧度/秒，与周期有关 T 和频率 f by $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ，这里，我们假设 $T =$

然后，我们可以得到速度(m/s)和加速度(m/s)²的波。

$$u=\frac{\partial \eta}{\partial t}=a\omega\sin(kx-\omega t)$$

(3)

$$\dot{u}=\frac{\partial u}{\partial t}=-a\omega^2\cos(kx-\omega t)$$

(4)

4.1.2 The Morison Equation

在了解了波浪的运动方程后，我们进一步探索了波浪上的总内线力。莫里森方程 [4] 是两个力分量的总和:与局部流动加速度相对应的惯性力和与瞬时流动速度平方成比例的拖曳力。

$$F=\rho C_mV\dot{u}+\frac{1}{2}\rho C_dAu|u|$$

(5)

在哪里

F 为波上的总内线力; C_m 是惯性系数，这里，我们取 $C_m = 1.5$; V 是沙堡的体积; ρ 是海水的密度， $\rho = 1.03g/cm^3$; C_d 为阻力系数，与材料的形状有关。 A 是面对海水的表面积。



关注数学模型
获取更多资讯

有道文档翻译
pdf.youdao.com

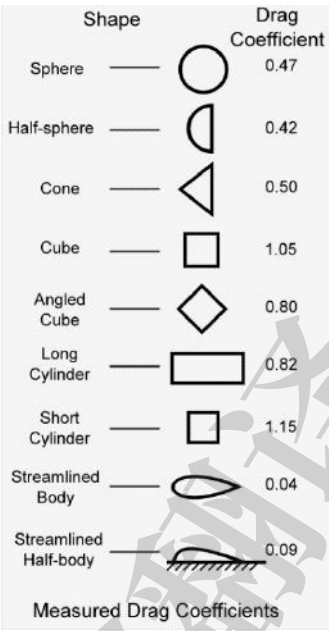


图 3。不同形状的阻力系数

4.1.3 Mohr-Coulomb Yielding Criteria

为了探讨波浪对沙堡结构的影响，我们查阅了相关资料，选择沙堡内摩擦角作为研究对象。

莫尔-库仑屈服准则^[6]是 C-M 准则的简称。C-M 准则是一种考虑作用在正应力或平均应力上的最大或单剪应力的屈服理论，即当剪切面上的剪应力与正应力之比达到最大值时，材料屈服破坏。其表达式为：

$$\tau_n = C + \sigma_n \tan \phi$$
 (6)

$$\sigma_n = \frac{F}{S}$$
 (7)

$$\tau_n = \frac{F}{A}$$
 (8)

在哪里

C 为沙子的粘聚力; ϕ 为砂土内摩擦角; σ_n 为截面上的法向应力; τ_n 为截面上的剪应力; A 为剪切面面积; S 为力接触面面积。

对于沙子, $C = 0$ ^[7],因此:



关注数学模型
获取更多资讯

$$\tau_n = \sigma_n \tan \phi \tag{9}$$

$$\phi = \tan^{-1}(\frac{\tau_n}{\sigma_n}) \tag{10}$$

实验表明，含水率对内摩擦角有一定的影响，不同含水率对应不同的内摩擦角。根据相关数据发现 [8] [9]，我们找到了砂土内摩擦角与含水量的关系，公式如下：

$$g(w) = -140w^2 + 56w + 28.5 \tag{11}$$

式中，w 为砂子中的含水量。

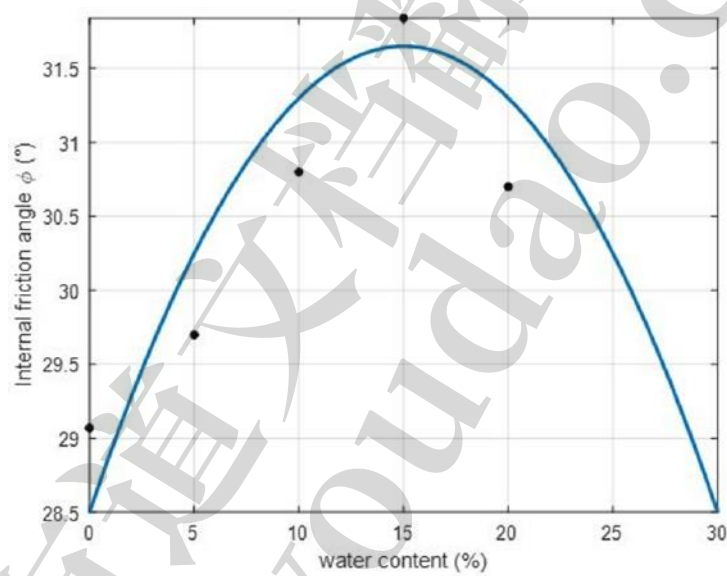


图 4。内摩擦角与含水率曲线

从图中可以看出，随着含水量的增加，内摩擦角先增大后减小。主要原因是，在一定的含水量下，砂粒表现出黏性。要使砂粒相对于彼此滑动，不仅要克服砂粒之间的摩擦，还要克服砂粒之间的粘聚力。超过一定的含水量后，所有的砂粒都渗透在水中，水的润滑作用降低了颗粒间的摩擦。

因此，我们假设，当 $g(w) \geq 0$ ，即作用在沙堡上的外力的内摩擦角大于可以稳定在沙的含水量上的最大内摩擦角的值时，沙堡就会坍塌;当 $g(w) < 0$ 时，沙堡就不会倒塌。



关注数学模型
获取更多资讯

4.2 Consider changes of water content in Sandcastle

4.2.1 Horton’ s equation

当海水开始淹没沙堡时，要了解沙堡的含水量如何变化，首先要知道海浪的入渗率。

霍顿方程是计算入渗曲线的经验公式，其表达式为 [10]：

$$f(t)=f_c+(f_0-f_c)e^{-Kt}$$

(12)

在哪里

$F(t)$ 为时刻 t 的渗透速率; F_0 为初始入渗速率，取 $F_0=0$; f_c 是 soil 饱和后的恒定渗透率还是最小渗透率，这里，我们假设 $f_c=1$ 毫米/分钟; K 是特定于沙子的衰变常数，取 $K=2$ [12]。

4.2.2 Van Genuchten Model

我们已经知道了 t 时刻的入渗率， $f(t)$ 和沙堡的含水量有什么关系?在这里，我们使用的是 Van Genuchten 模型。

保水性曲线的形状可以用几个模型来表征，其中一个就是 Van Genuchten 模型 [12] [13]。

$$\theta(\psi)=\theta_r+\frac{\theta_s-\theta_r}{\left[1+(\alpha|\psi|^n)\right]^{\frac{1}{n}}}$$

(13)

在哪里

$\theta(\psi)$ 为保水性曲线; ψ 是 cm 的水; θ_s 是饱和含水量，拿 $\theta_s=0.3$ [14]; θ_r 是残留含水量，拿 $\theta_r=0.05$ [14]; α 与逆吸气有关， $\alpha \geq 0$ ，取 $\alpha=0.01\text{cm}^{-1}$ [14]; N 是衡量孔径分布的指标， $N \geq 1$ ，取 $N=3$ 。

注意 θ 和 $f(t)$ 具有相同的物理意义，因此我们将式(12)代入式(13)得到保水性曲线。



关注数学模型
获取更多资讯

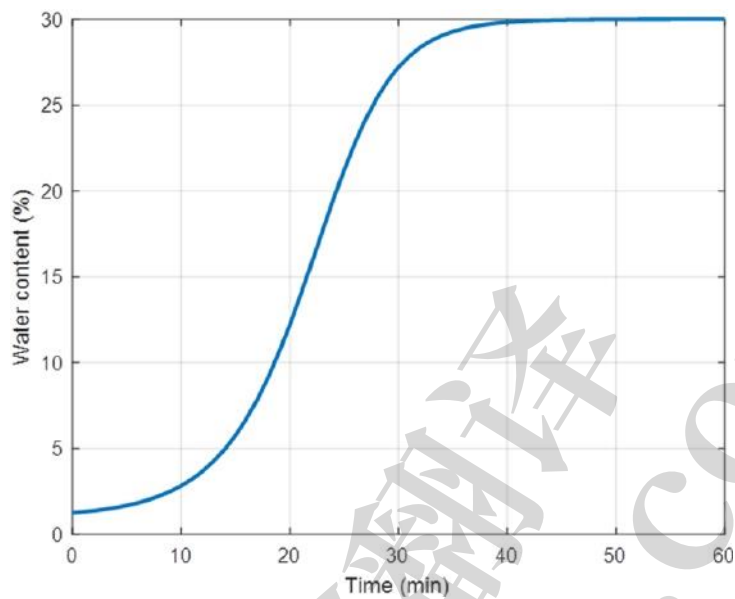


图 5。保水性曲线

然后利用公式(11)计算被淹没部分的内摩擦角
并与 ϕ 进行比较。

4.3 Conclusion

4.3.1 Take the cuboid as an example

假设长方体的尺寸为 $0.4m \times 0.3m \times 0.3m$ ，其中高度为 $0.3m$ 。考虑到面积越大，受力越大，所以我们选择尺寸为 $0.3m \times 0.3m$ 的表面作为水侧面。那么，剪切面面积 $A=0.4m \times 0.3m$ ，力接触面面积 $S=0.3m \times 0.3m$ 。

根据图 2，潮水初始高度为 $30cm$ ， $a = 0.15m$ (公式(2))，我们将沙堡放置在相对潮高基准面 $45cm$ 处，即潮水的最大高度。

那么，由图 2 可以得到，从初始值到沙堡所在位置，潮水上升所需时间为 40 分钟，这是我们模型中的第一阶段。从潮水持续上升到刚好完全淹没沙堡需要 50 分钟，这是第二阶段。

假设沙堡的初始含水率为 20% 。在此含水量下沙堡的内摩擦角 $g(w)$ 可由

图 4。



关注数学模型
获取更多资讯

在第一阶段，通过计算得出波浪产生的内摩擦角小于 $\phi(w)$ ，即长方体模型可以在第一阶段稳定存在。

在第二阶段，随着海水开始淹没沙堡，沙堡的含水量随时间逐渐增加。从图 4 可以看出，内摩擦角不断减小。当减小到小于波浪产生的内摩擦角时，沙堡就会坍塌。具体变化过程如下图所示。

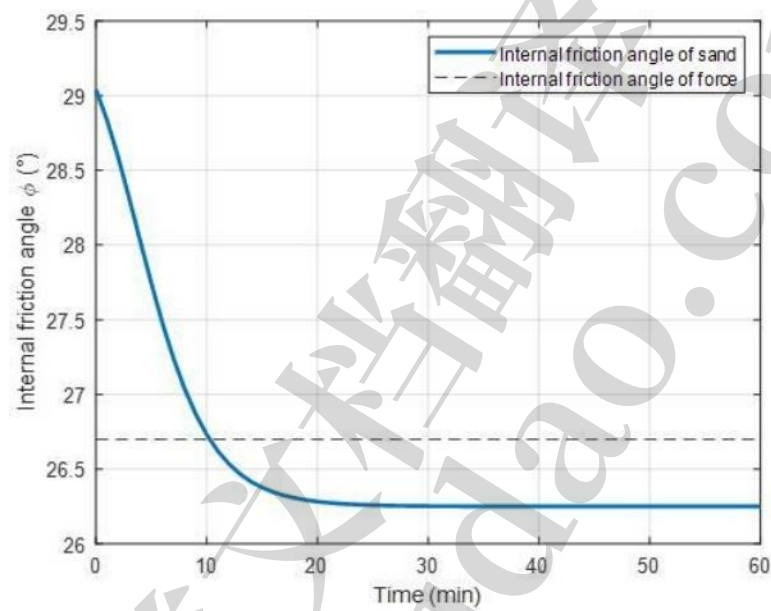


图 6. 内摩擦角随时间变化曲线

从上图可以看出，长方体沙堡在第二阶段的持续时间为 10 分钟，即总持续时间约为 50 分钟。

在分析其他 5 个几何体的稳定性时，方法类似。限于篇幅，不再赘述。

4.3.2 Best Three-dimensional geometric shape

我们获得了六个具有相同体积和高度的几何体的持续时间，以及第一波作用的有效高度。具体结果见下表。



关注数学模型
获取更多资讯

表 1。六种几何形态第一阶段的持续时间和有效波高

几何形状	持续时间(分钟)	第一阶段有效波高(m)
长方体	约 50min 不到	> 0.2
缸	40min 不到	< 0.18
等边三角形圆柱体锥台	40min	< 0.13
金字塔的三棱座	40 分钟以内短时间	< 0.10
金字塔的四trustum	内崩溃	< 0.17
	小于 40min	< 0.14

从表中可以看出，除了长方体，其他五个几何体都在第一阶段坍塌。我们知道，波浪越高，冲击力越大，所以波浪的有效高度值越大，说明几何越稳定。综上所述，长方体是最优的三维几何形状。

4.3.3 Sensitivity analysis

由式(7)和式(8)可知，A 和 S 的面积越大，对沙堡的破坏就越小。所以接下来我们改变长方体的长度和宽度，进一步分析尺寸对沙堡稳定性的影响。

利用公式(10)计算内摩擦角随长宽比的变化，并画出图形。

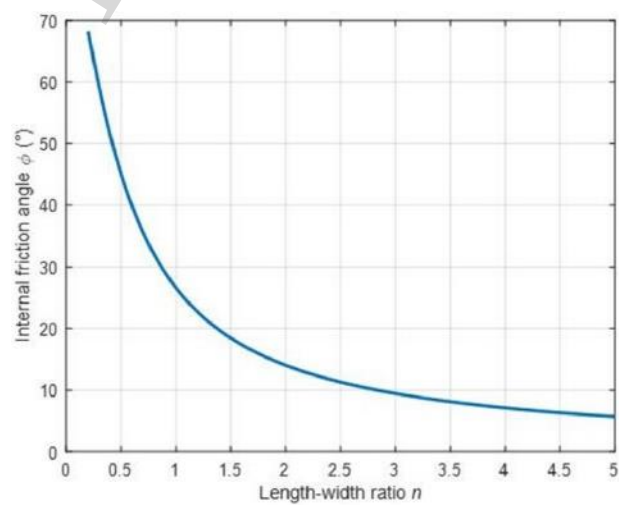


图 7. 内摩擦角随长宽比变化曲线



关注数学模型
获取更多资讯

有道文档翻译
pdf.youdao.com

由上图可知，长宽比越大，外力产生的内摩擦角越小，沙堡越稳定。
这与实际情况相吻合。

5. Task 2: Take Sand-to-Water Mixture Proportion into Consideration

在任务 1 中，我们将初始含水量设置为 20%，利用内摩擦角来判断沙堡结构是否稳定。内摩擦角与含水量有关，因此需要找到最优的沙水比，使沙堡的持续时间更长。

首先，通过改变初始含水量，再改变内摩擦角，使沙堡满足 $g(w) \geq 1$ ，以及保持的沙水混合比范围

第一阶段沙堡完好程度为 5% -25%。然后，在第二阶段绘制沙堡崩塌时间随沙中初始含水量变化的曲线。

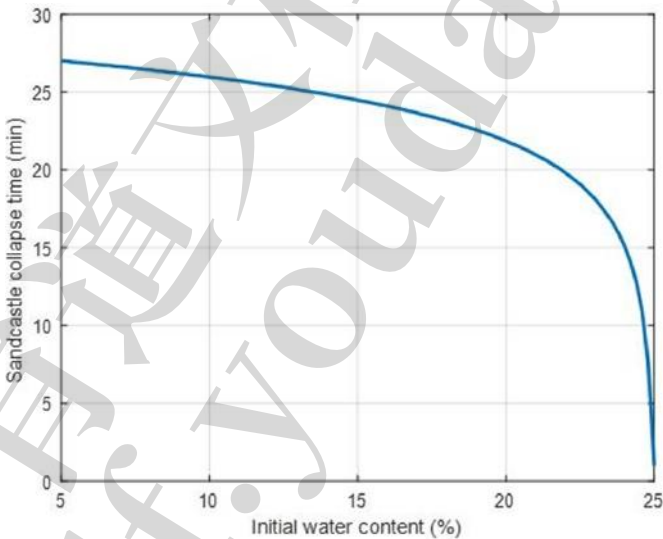


图 8。沙堡崩塌时间随初始含水量变化曲线

我们可以看到，随着沙中初始含水量的增加，沙堡的持续时间逐渐减少。初始含水量为 5% 时，沙堡的总持续时间最长，为 67 min。

而在图 4 中，当含水量 $w = 15\%$ 时，沙堡的内摩擦角最大，稳定性最好。由上图可知，此条件下沙堡的总持续时间为 64.43min。

事实上，两者之间并不存在矛盾。因为当最初的水



关注数学模型
获取更多资讯

$$V_m = \begin{cases} \sqrt{\left(1.544 \frac{v}{i^{0.23}}\right)^2 + 6.048 g i^{0.23}} - 1.544 \frac{v}{i^{0.23}} & i \leq 2.13 \\ \frac{i^{0.23}}{0.0448 + 0.0845 i^{0.23}} & i > 2.13 \end{cases}$$

(16)

2.13 我们 43.46

通过计算，我们得到降水与雨滴速度、能量和动量的关系，如下图所示：

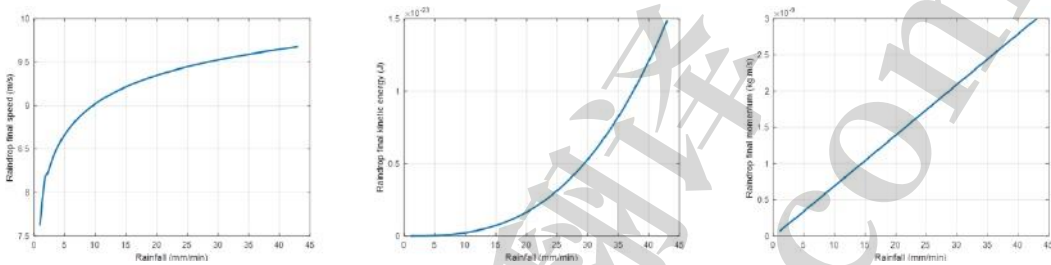


图 9. 降水与雨滴速度、能量、动量的关系

6.2 Sartor-Boyd scour model

在了解了雨滴的相关运动参数后，我们还需要分析雨滴对沙堡的影响。

萨托-博伊德(Sartor-Boyd)冲刷模型^[17]主要适用于具有初始冲刷效应的降雨过程，如式(17)所示：

$$\frac{dP}{dt} = K_2 Pr$$

(17)

K_2 是侵蚀系数(经验值)， mm^{-1} ; P 为沙堡开始时的体积， m^3 ; R 为单位时间单位面积的雨水径流，即降雨强度， mm / min ; T 为时间， min 。

在我们的模型中， K_2 取 0.201^[17] 得到随降水冲刷的砂粒体积的变化，如下图所示：



关注数学模型
获取更多资讯

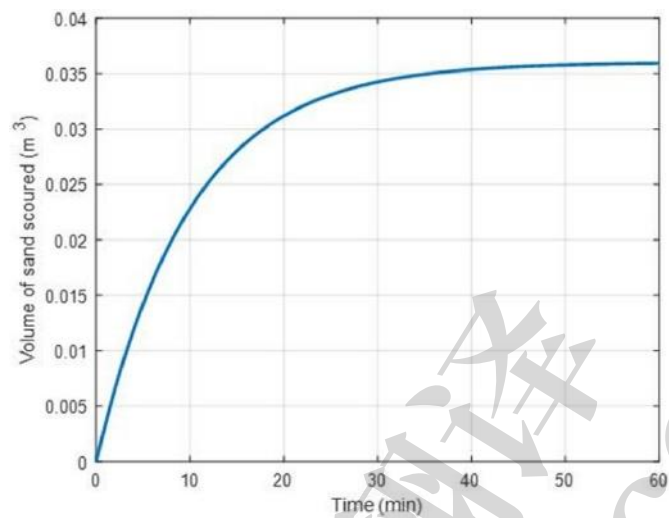


图 10。随着降水被冲刷掉的沙子体积的变化

6.3 Seepage process

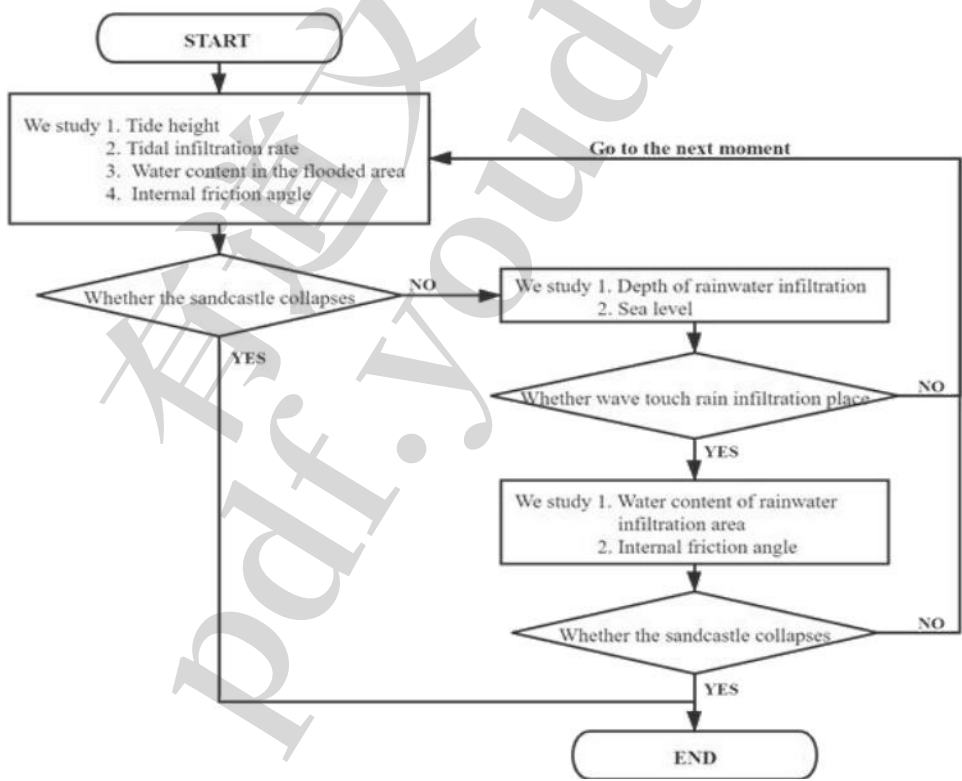


图 11。渗流过程流程图

当沙堡受到降雨影响时，利用 Matlab 拟合沙堡内摩擦角与含水量的关系，如下[18]:



关注数学模型
获取更多资讯

有道文档翻译
pdf.youdao.com

$$\phi = 0.8462w + 5.256$$

(18)

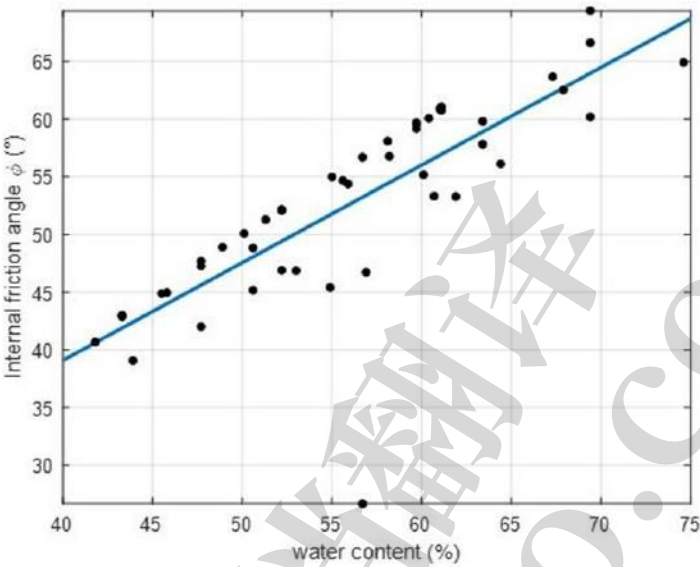


图 12。沙堡受雨水影响时内摩擦角与含水量的关系

在降水模型中，我们得到了计算雨滴最终速度的公式。然后，将其带入式(13)中，得到沙堡的含水量。根据式(18)，可以得到下雨时沙堡的内摩擦角。最后，比较 ϕ 与 $g(w)$ 的关系，并画出结论。

表 2。下雨时六种几何图形的有效高度

几何图形的有效高度	
长方体	0.20 米
圆柱体 0.15m 等边三角形	
缸	0.11
视锥—锥体 0.08m 三锥体一	
米的金字塔	0.15
四 trustum of a	
米的金字塔	0.15

结果表明，雨水对沙堡的结构稳定性有一定的影响。对比六种几何形态的有效高度，我们发现长方体仍然是最优几何形态，证实了我们模型的可靠性。



关注数学模型
获取更多资讯

有道文档翻译
pdf.youdao.com

6.4 ANSYS simulation

经过理论计算，利用 ANSYS 仿真分析对理论结果进行验证。通过对降雨冲刷模型的仿真分析，得到了模型的压力、张力和变形图。通过与理论结果进行对比，结果非常相似。下图为 6 种模型的仿真分析：

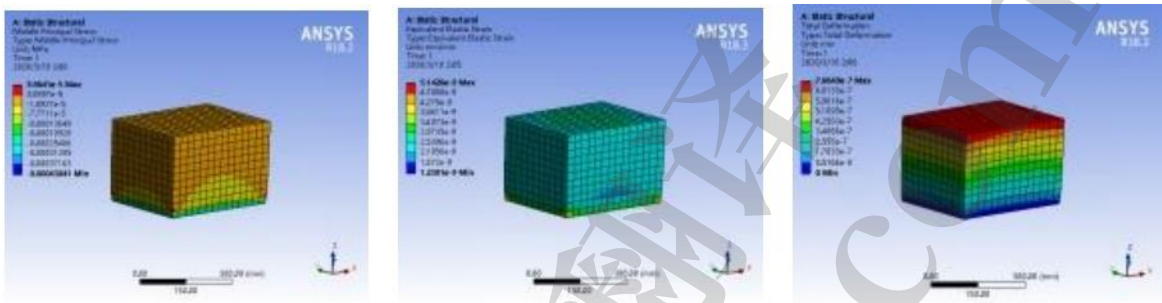


图 13. 长方体的压力、张力和变形云

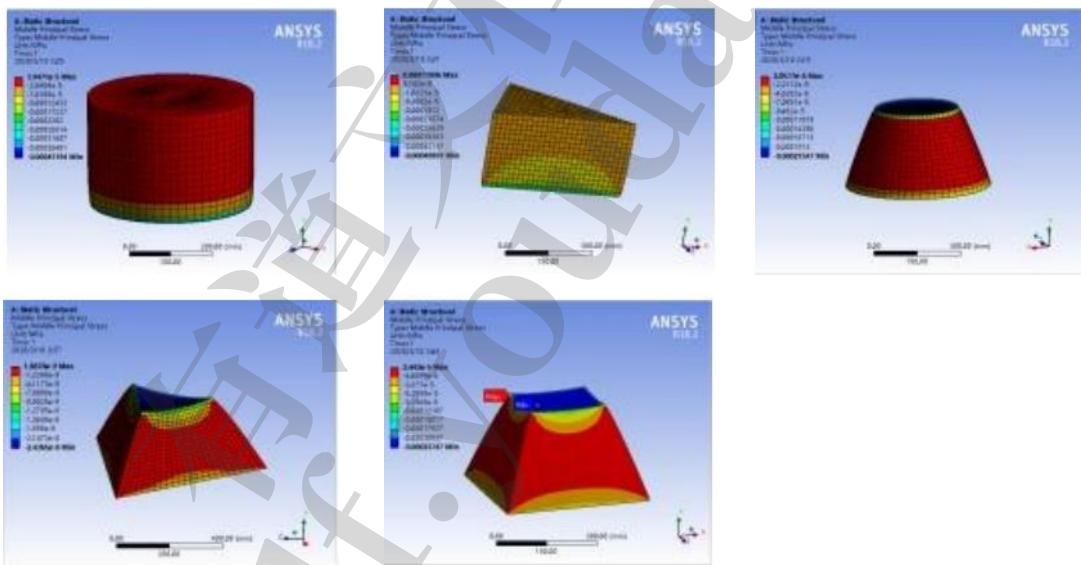


图 14. 其他五种型号的压力分布

7. Task 4: Other Strategies to Make Sandcastles Last Longer

从前三个问题的分析来看，要延长沙堡的持续时间，可以考虑两个方面:减少海水入渗，减少海浪侵蚀。

一方面，我们可以覆盖沙堡，比如在前面放置盾牌



关注数学模型
获取更多资讯

来减少海浪对沙堡的影响。另一个例子是用塑料袋包裹沙堡。这样可以消除雨水和海水的渗入，也避免与海浪接触，从而减少海浪的侵蚀。

另一方面，我们也可以在沙堡中放置一些石头或木制的支撑物，这样可以提高沙堡抵御海浪的能力。或者，我们也可以在沙堡中加入一些黏土。因为粘土吸水比沙子少，而且它的内摩擦角比沙子大。因此，在沙堡中加入其他材料，可以提高抵抗海浪的能力，减少渗透

波。

8. Strengths and Weaknesses

8.1 Strengths

- 我们选取了六种三维几何形状进行分析比较，通过计算沙堡的持续时间和波浪作用的有效高度，最终确定长方体为最优模型，具有一定的合理性。
- 在分析波浪对沙堡的影响时，我们建立了波浪力方程，并利用 Mohr-Coulomb 屈服准则进行了强验算
- 通过查阅数据，利用霍顿方程测量入渗率，利用 Van Genuchten 模型建立入渗率与沙土含水量之间的关系。
- 整个模型的结构严谨合理。适用于问题条件，可适用于任何区域的海滩。它具有良好的普遍性。

8.2 Weaknesses

- 在考虑波的运动时，艾里波理论简单地认为波是正弦形式，但实际上，波在向前运动时的振幅并不是恒定的。
- 渗水并不是一个均匀的过程。物体表面的含水量应该大于物体内部的含水量，但为了计算起见，我们认为这是一个均匀的过程。
- 雨滴在下落时是不均匀的，而且随着倾斜角的变化，很难用公式推导出它对沙堡的影响。



关注数学模型
获取更多资讯

Article

最长的沙堡

大海对人们有着无限的吸引力。当你在海边玩耍的时候，你有没有注意到沙滩上无数大小形状各异的沙堡？有的被海浪冲毁，有的却完好无损。的确，它们可能没有及时建成，但你有没有想过造成这个结果的其他因素，以及这将如何指导我们建造沙堡？

为了回答这个问题，我们以美国的桑迪胡克为例，构建了一个在海浪和潮汐影响下的沙堡模型。基于这个模型，我们研究了六种体积相同的基本几何形状的沙堡——长方体、圆柱体、三角形棱柱、三角形金字塔、四边形金字塔和圆形金字塔。

我们可以看到，长方体沙堡可以存在的时间最长。同时，要在保持沙堡一定截面的同时，保持水锋宽度尽可能小。这样可以使沙堡存在的时间更长。

此外，我们还考虑到，随着潮水的上涨，海水会逐渐淹没沙堡，导致沙堡的含水量发生变化，从而影响沙堡的年代。因此，我们研究了沙堡中的含水量与其年代的关系。我们得出结论，沙堡的最佳含水率应为 15%。含水量过大时，沙堡在海浪的冲击下会倒塌。其实我们在建造沙堡的过程中，是不会测量沙子含水率的具体数值的。因此，我们可以在沙滩上做一个小实验。我们在沙滩上逐渐加水，然后看看它们的紧致程度。当我们觉得沙子最结实的时候，就停止加水，用这个作为建造沙堡的材料。

最后，我们研究了雨水对沙堡的影响。一方面，雨水的渗入会增加沙堡的含水量。另一方面，雨水对沙堡会有很强的影响。这些会加速沙堡的倒塌，所以雨水对沙堡不利。

总之，为了让沙堡有最长的持久性，我们应该选择在少雨的天气使用密合度较高的沙子，建造一个长方体作为沙堡的地基，并使水前沿的宽度尽可能窄，这样我们就可以建造一个“完美”的沙堡。当然，可能有人会说，我们可以用塑料布包裹沙堡，或者在沙上加石子和泥土。



关注数学模型
获取更多资讯

这些也可以让沙堡存在得更久。但是，我们不建议这样做。人走后，如果这些材料不及时带走，就会变成

垃圾和污染海洋。同时，沙滩上的石头会给不注意的人留下危险。当我们在海滩享受生活的时候，我们一定要记得保护环境和他人。

有道文档翻译
pdf.youdao.com



关注数学模型
获取更多资讯

[1] <https://www.cnss.com.cn/tide/>

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Airy_wave_theory

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Wind_wave

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Morison_equatio

[5]张伯平、王力、袁海志。含水量对黄土结构强度影响的定量分析[J]。西北农业大学学报, 1994(01):54-60。[6]

https://en.wikipedia.org/wiki/Mohr%E2%80%93Coulomb_theory?Wprov=sfla1 [7]

<https://wenku.baidu.com/view/4eb7356cbcd5b9f3f80f1c1c.html>

[8]陈磊, 赵健。水分含量对排土场粘土抗剪强度参数的影响[J]。煤炭技术, 2016,35(12):170-172。

范志杰, 曲建军, 周欢。沙土摩擦角与粒径、含水量及天然坡角的关系[J]。中国沙漠, 2015,35(02):301-305。

[10] [https://en.wikipedia.org/wiki/Infiltration_\(水文\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Infiltration_(水文))

[11] <http://www.soilmanagementindia.com/soil/permeability-of-土壤/permeability-of-soil-definition-darcys-law-and-tests-soil-engineering/16472>

宋英淑、金敬秀、郑秀媛、李春娥。釜山 imgi 矿山废堆获得的尾矿非饱和特征曲线估算。Journal of the Korean Geotechnical Society, 30:47 - 58,03 2014。

[12] https://en.wikipedia.org/wiki/Water_retention_curve

[13]

Stingaciu, L. R., 等。“用核磁共振松弛测量法测定孔隙大小分布和水力特性:实验室方法的比较研究。”《水资源研究》46.11(2010)。

[14]

张军红, 史旭超, 张新娟。黄土含水量对结构影响的试验研究[J]。河南科学, 2010,28(12):1575-1578。

[15]

姚文义, 陈国祥。雨滴速度与终速公式[J]。河海大学学报, 1993(03):21-27。

[16] 赵晓佳, 王少坡, 于和, 邱春生, 孙丽萍, 王晨晨, 赵乐军, 宋显才。天津市中心典型下垫面降雨径流侵蚀及污染侵蚀特征[J]。环境工程, 2019,37(07):34-38 + 87。

[17]



关注数学模型
获取更多资讯

有道文档翻译
pdf.youdao.com

[18] Estela Nadal-Romero、Teodoro Lasanta、David Regües、N. Lana- Renault、Artemi Cerdà。水文响应和泥沙生产 unde

R 地中海山地环境下撂荒农田的不同土地覆盖。Boletín de la Asociación de Geógrafos Españoles, 55:303- 323,01 2011。

有道文档翻译
pdf.youdao.com



关注数学模型
获取更多资讯