

侵蚀下的最优 3D 沙堡形状

总结

海浪、潮汐和降雨会侵蚀沙堡的地基。利用流固耦合理论，考虑沙子的特性，建立了沙堡-侵蚀模型和沙堡-雨蚀模型，并基于遗传算法进行多步设计、迭代计算、数据分析和优化求解，最终确定了不同影响因素下沙堡抗侵蚀的最优三维几何形状。

将海水对沙堡的影响分为波浪和潮汐两种模式。本文研究了流固相互作用的简化模型。沙基被海浪一层一层的撞击切断，而潮水缓慢上升，淹没沙堡。当沙子层被水饱和时，会减少沙粒之间的粘结力，从而从沙堡中脱落。

至于问题 1，指的是当水面光滑时，抗侵蚀能力达到最大。因此，我们以圆锥体(包括圆柱体，但不包括圆锥体，因为城堡将建在它上面)作为初始研究对象，考察在初始体积 V_0 时，在相同的时间内，底部半径 r_b 、顶部半径 r_t 和高度 h 对地基最大剩余比例 ρ 的值 $\rho = 0.2 \sim 0.3$ 。利用偏导数和遗传算法，得到 $\rho = \rho_0$ 时的最大剩余比例 ρ_0 ，为 62.4%。 $\rho_0 = 0.2$ 时， $\rho_0 = 0.3$ 时， $\rho_0 = 0.25$ 时， $\rho_0 = 0.2$ 时， $\rho_0 = 0.3$ 时。对于任何固定体积的沙子，抵抗海水侵蚀的最佳形状是保持上述 ρ_b 、 ρ_t 和 ρ_h 值的比例的圆锥体。由于水面的速度和通量更大，在水面上施加的力也更多，因此几何形状被优化为椭球锥体的截锥体，以最大限度地发挥其抗侵蚀的有效性。

对于问题 2，建立了水砂比 ρ_w 与波浪切割砂层厚度之间的关系。首先假设沙堡的形状由问题 1 给出，将 ρ_w 作为变量，在 ρ_w 达到最大值时求解 ρ 的值。目前当 $\rho_w = 65.0\%$ ， $\rho = 22\%$ 。接下来，由于 ρ 与最优几何形状相关，基于问题 1 和侵蚀下切割长度与吸水饱和率的关系，求解 ρ 达到最大值时 ρ_b ， ρ_t ， ρ_h ， ρ 的值。结果是 $\rho_b = 0.58 \sim 0.6$ ， $\rho_t = 0.23 \sim 0.25$ ， $\rho_h = 0.37 \sim 0.4$ ， $\rho = 24\%$ 时 ρ 达到最大 $\rho_w = 68.6\%$ 。因此，最优水沙比为 24%。

问题 3 分两种情况讨论:沙堡同时受到海水和降雨的影响，沙堡只受到降雨的影响。在第一种情况下，问题 1 中的最优几何在侵蚀后仍然 $\rho = 55.7\%$ ，与不受降雨影响相比减少了 6.7%的体积。的几何模型是提高 $\rho_b = 0.52 \sim 0.55$ ， $\rho_t = 0.16 \sim 0.18$ ， $\rho_h = 0.50 \sim 0.52$ ，当 ρ 达到最大 $\rho_w = 59.2\%$ 。第二种情况下，问题 1 中的最优几何在侵蚀后仍然是 $\rho = 92.6\%$ 。随着 ρ 的增大， ρ 也随之增大。因此，在这两种情况下，问题 1 中的最优几何在问题 3 中并不是最优的。

问题 4 给出了四点建议:增加初始体积;建远离大海的沙堡;在沙水混合物中加入粘合剂;在沙堡周围建造沙墙。

最后，长度切割系数的敏感性分析 ρ ，饱和吸水系数 ρ_w ，初始体积 V_0 是给定的。

关键词:三维沙堡模型;固耦合;优化模型;

内 容

1 介绍	1
1.1 背景	1
1.2 问题的重述	1
2 问题的分析	1
2.1 文献综述	1
2.2 问题分析	2
3 假设和理由	3
4 符号	4
5 模型和解决方案	5
5.1 Sandcastle-Erosion 模型	5
5.2 解决方案最优 Water-to-Sand 混合比例	12
5.3 Sandcastle-Rain-Erosion 模型	14
6 建议建立一个沙塔	17
7 敏感性分析	18
8 的优缺点	20
8.1 优势	20
8.2 缺点	20
文章在阳光下玩	21
引用	23
附录	24

1 介绍

1.1 背景

海滩是孩子们的天堂，沙堡是其中不可缺少的一部分。各式各样的沙堡被建造出来，用屋顶、塔楼、窗户和台阶来装饰。每一个在沙滩上玩耍的孩子都知道，干燥的沙子只能像滑稽的东西一样松散地堆起来，混在水里太多就会坍塌。那么，能让沙堡屹立不倒的沙子和水的黄金比例是多少呢?自然，问题就来了，如何让沙堡在海浪和潮汐的侵蚀下存活得更久。本文旨在综合考虑海浪、潮汐、降雨等因素，探讨“完美沙堡”。

1.2 重述问题

考虑问题陈述中确定的背景信息和限制条件，以解决以下问题:

- 问题 1。在保证使用相同材质、相同水砂比例、砂质相似的沙子的前提下，建立数学模型，确定在波浪和潮汐影响下，最久保持完整的几何形状。
- 问题二。用问题 1 中相同的模型，解决最合适的水砂比例，使地基保持更长时间。
- 问题 3。改变第一个问题的数学模型，以确定在考虑降雨条件时，上述解决的几何是否仍然是最优的。
- 问题 4。建议如何让沙堡更持久。

2.分析问题

2.1 文献综述

沙堡建造时间最长的问题本质上是湿颗粒材料的问题。Torsten, G和 David, M.通过使用粘性离散元法(CDEM)[1]对湿颗粒材料中的黏聚性进行建模和测量。Nowak, S, Samadani, a 和 Kudrolli, a .采用了一种称为无摩擦液桥模型的模型来观察稳定角对系统的一些参数的依赖关系，如系统大小

和表面张力[2]。

对于颗粒介质与润湿液体混合的物理性质，Hornbaker, D., Albert, R., Albert, I.等研究发现，在毫米级颗粒上的纳米级液体层可以急剧改变颗粒介质的性质，甚至可以引起干燥材料[3]中没有的新的物理现象。原料配比在工业生产中很重要，因为原料配比将决定产品的物理性质。Emiroğlu, M., Yalama, A., & Erdoğan, Y.通过实验证明，在不同粘土/砂比例[4]中生产的预拌粘土石膏的物理性能存在较大差异。

对于砂粒与水在一定比例下的黏结性，Kudrolli, a.认为继承黏结性与体积分数[5]高度相关，这可以解释水砂比在建造沙堡过程中的重要性。对于导致沙堡坍塌的原因，Thomas C. Halsey 和 Alex J. Levine 认为，失效点发生在沙堆的大部分而不是表面[6]，主要指向干沙堆。最后，Pakpour, M., Habibi, M., Møller, P., Bonn, D.给出了研究湿沙柱最大高度的模型，同时考虑了沙堡[7]的稳定性。

2.2 问题分析

流固相互作用是研究流体与固体相互作用的力学理论分支。我们简化了这一理论中涉及的模型，只研究流动到固体的单向相互作用。

问题 1:问题 1 的目标是建立在波浪和潮汐侵蚀作用下持续时间最长的沙堡几何形状，约束条件是沙堡具有 1)大致相同的体积，2)相同的原料，3)相同的沙水比和 4)大致相同的距离水源(即与侵蚀源的距离)。为了简化和解决问题 1，建立了以几何参数为自变量的沙堡-侵蚀模型，以找到最具防御能力的几何形状。

问题 2:问题 2 的目标是研究最优的沙-水混合比例，使沙堡最具防御能力。问题 2 除了问题 1 的约束外，且不考虑沙堡几何形状变化的影响，要求沙堡的原材料只能是沙和水。为了解决问题 2，改变了基于问题 1 的沙堡-侵蚀模型，以沙与水的混合比例为自变量。利用求解优化模型的算法，求解沙水混合比例的最优值。

第 3 题:第 3 题的目的是研究在波浪和潮汐的侵蚀下, 以及在降雨的影响下, 能够保持最长时间的沙堡的几何形状。问题 3 的解决方案是在问题 1 的沙堡-雨蚀模型的基础上建立沙堡-雨蚀模型, 在波浪和潮汐的影响之外加入降雨因素。问题 3 可以用问题 1 中的相同算法来解决。

问题 4:问题 4 要求建议增加沙堡的生存时间。解决方法是讨论问题 1-3 的模型结果, 以获得有用的建议。此外, 本文还将进行基于文献、沙堡结构和常识的理论分析。

3 假设与论证

•在侵蚀过程开始之前, 沙堡的初始体积足够大, 我们调查的所有不同形状的沙堡在观察期结束时都有正体积。如果在侵蚀过程后存在体积为零的沙堡(即沙堡被完全破坏), 或者在侵蚀过程后所有沙堡的体积都为零, 则无法在建模过程中比较形状和几何参数对沙堡稳定性的影响。

•沙子从沙堡中脱落, 仅仅是因为沙子被水浸透了, 在沙子上施加了微小的外力。当沙粒之间没有液体时, 粘结力可以忽略不计, 这就解释了为什么干燥的沙子不能建造沙堡。在体积分数较小的情况下, 会形成导致颗粒间凝聚的液体桥。在较高体积分数时, 会形成大的连续的湿团簇。然而, 当体积分数超过阈值时, 粘结力再次变得可以忽略不计[5], 这是导致沙子脱落的主要原因。

•海浪的撞击导致沙子吸收水的速度比单纯浸泡在海水中要快。由于海浪撞击沙堡外表面时初始速度不为零, 而海浪携带的部分水会渗透到沙堡中, 所以撞击过程可以看作是水渗透到沙堡中的速度加快。

•海水侵蚀沙堡的有效性与时间无关。即海浪引起的水渗入沙堡的部分造成的体积减少被忽略。与沙堡相比, 海水的体积是极其巨大的, 因此每次海浪撞击造成的水分损失都可以忽略不计, 这就解释了海水的有效性

沙堡的侵蚀不受时间的影响。

- 忽略潮汐对沙堡造成的撞击效果。**根据世界各地不同海域的潮汐情况，不同海域的[8]海面以相对稳定和缓慢的速度上升和下降。只考虑潮汐对沙堡造成的穿透影响。
- 忽略沙子中水分的蒸发。**由于沙与水的混合比例在很多情况下起着重要的作用，不考虑蒸发可以通过排除干扰更直接地实现目标。
- 沙堡竖立在水平的海滩上。**如果沙堡站在一个斜坡上，计算水正面和顶面的饱和时间会变得过于复杂，在解决我们的核心问题时造成不必要的麻烦。

4 符号

定义	描述
	沙堡的剩余比例
	水与沙的混合比例
	长度切割系数
	饱和吸水系数
	涨落速度
	最大潮高
	潮高
	不同条件下的截长
	海平面第一次达到峰值的时间
	海平面第一次到达沙堡顶部的时间
	沙粒间的凝聚力
	沙堡高度
	水位面底部饱和吸水率
	水位面底部饱和吸水量
	顶面饱和吸水
	沙堡的初始体积
	圆台形沙堡的顶面半径
<div>1, 2, 3</div>	圆台形沙堡的底面半径

5 模型与解决方案

5.1 沙堡侵蚀模型

指水面光滑[4]时抗侵蚀能力最大。也就是说，具有棱角的形状比柱面更容易被侵蚀。因此，我们以圆锥体(包括圆柱体但不包括圆锥体，因为城堡将被建造)的 frustum 作为初始研究对象。在本节中，详细讨论了沙堡-侵蚀模型，并提出了评估沙堡稳定性的具体计算方法，以获得问题 1 所需的最佳几何形状。

为了更简洁、准确地量化侵蚀对沙堡的影响，定义了以下沙堡二维曲面:

正水面:沙堡面朝大海的表面，即从大海方向可以看到的沙堡曲面。

正水面:面向大海方向可见的沙堡的最大截面。

水负面:沙堡背向大海的表面，即从大海方向看不见的沙堡曲面。

顶面:与底面平行的表面。

全面:包括水正面、水负面和顶面在内的表面。

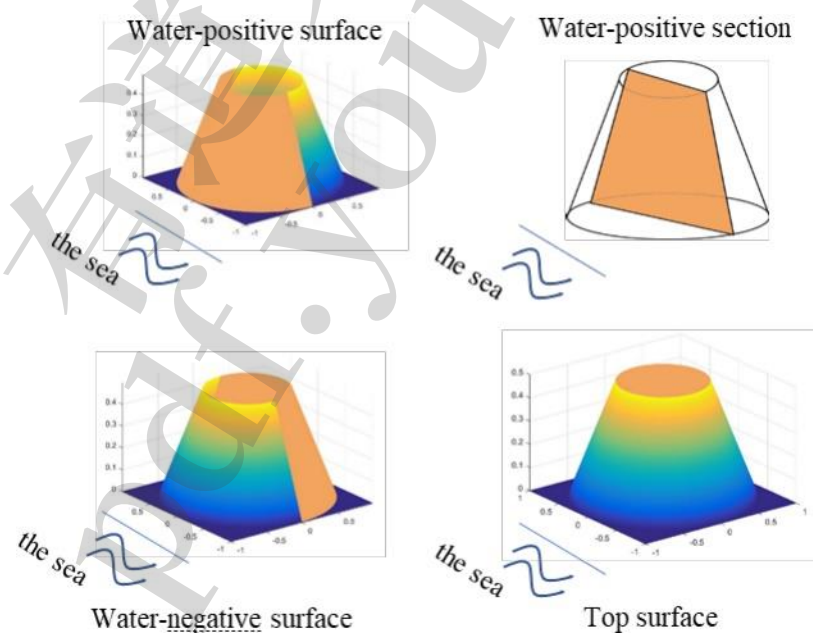


图 1 各位置示意图(黄色部分)

根据世界各地[8]的潮汐资料，24 小时内潮汐高度变化较为明显。为了研究潮汐变化对沙堡的影响，下面的模型以中国丹东 2020 年 3 月 6 日的潮汐资料为例进行分析。同时，为了避免潮汐对大部分观测时间浸泡在海水中的沙堡造成过度冲击，模型选择在 200cm 的高度建造沙堡，并要求沙堡的最大高度小于 1m，以体现潮汐和海浪的双重侵蚀作用。

问题 1 的目标是寻找在海浪和潮汐侵蚀下持续时间最长的沙堡。持续时间被定义为沙堡的体积减少(表面沙子从主体上脱落)到一定值所需要的时间，这相当于沙堡在海浪和潮汐的同样侵蚀下所保留的最大体积。

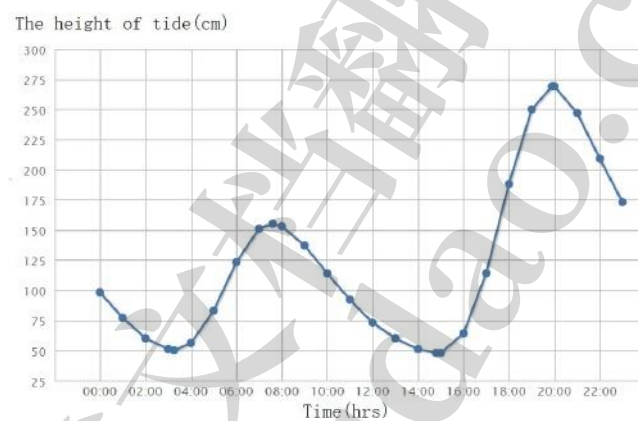


图 2 2020 年 3 月 6 日中国丹东潮汐数据

假设海浪高度足够小，那么当海平面低于 200 厘米时，可以认为沙堡不受潮汐和海浪的影响，因为沙堡是在 200 厘米的高度上建造的。根据潮汐表，沙堡的侵蚀情况只研究了 4 个小时，从 18:00 到 24:00。它还假定了初始的容积 V_0 的体积足够大，所有的沙堡在经过四个小时的侵蚀后都能保持正体积，而沙堡的大致形状在侵蚀后基本保持不变。

由于涨潮速度缓慢(约 50 cm/h)，忽略了涨潮对沙堡的撞击作用，只考虑涨潮对沙堡的浸没作用。与潮汐的冲击期较长相比，海浪的冲击速度相当快(约 10 m/s)，被认为是对沙堡的持续冲击。由于海浪高度被认为相对于沙堡的高度较小，而

海浪不断地冲击沙堡，海水以恒定的速度上升，水位表面的每一部分受到冲击的时间长度保持不变。

假设 Δt_0 表示当海面以恒定速度上升时，在每个点上具有相同高度的海浪在水面上的碰撞时间长度。在固定的时间间隔 Δt_0 ，海浪从水正沙面上切割的长度代表 Δl_1 ，而 Δl_1 与水正面面积的比例 Δl_1 和水正的面积

节 $\Delta l_1'$ ，即

其中,

$$l_1 = \lambda_c \times \frac{S_1'}{S_1}$$

(1)

表示长度切割系数，与水砂混合比例相关，在问题 1 中被认为是常数。

为了简化计算，假设在水位面上的沙子被压碎后，部分沙子应该已经脱落，但仍然保持略微饱和，附着在大部分沙堡上。

下面的讨论是以 200 厘米的初始高度为基础，而初始时间是以海平面达到初始高度的瞬间为基础。当潮汐涨落恒定时

速度,潮位 h 满足:

$$h_{tide} = \begin{cases} v_t \times t & t \leq t_e \\ h_e - v_t \times (t - t_e) & t > t_e \end{cases}$$

(2)

其中,

代表潮水涨落的速度， h_e 表示潮汐的最大高度， t_e 表示海平面达到峰值的时间。

单位时间内，海水浸没导致海水从整个沙地表面垂直穿透的长度代表 Δl_2 ，即：

$$l_2 = \lambda_s \times t$$

(3)

其中,

表示饱和吸水系数，与水-砂混合比例相关，在问题 1 中为常数。 $\lambda_s = 9.8 \times 10^{-2}$
 $\lambda_s = 7.0 \times 10^{-6}$ is assumed[7]. 下图是沙堡的还原示意图：

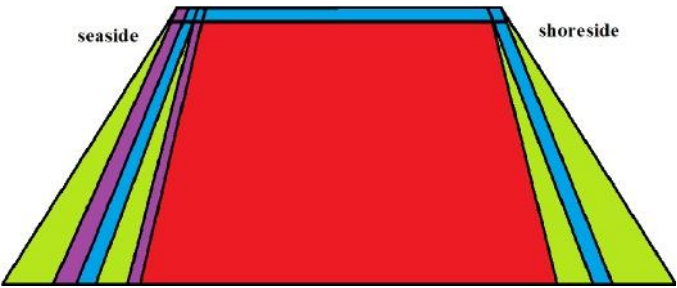


图 3 沙堡缩小示意图

最外面的绿色部分是随着潮高增加而饱和的部分。由于不同部分的吸水性以相同的速率达到饱和，所以下部与海水接触的时间间隔比较长，吸收较多，而上部吸收较少。

紫色部分为水正表面被波浪切割的沙层。由于假定海浪不断地对沙堡产生影响，而且波高相当小，而海水以恒定的速度缓慢上升，因此被海浪切割的上下部分的长度大致保持不变。

考虑到相同体积形成的沙堆具有不同的高度和涨潮的最大高度 h 是固定的，因此，如果不同形状的沙堆位于同一位置，高度较小的沙堡就会被淹没。蓝色的部分代表吸水饱和的长度。由于整个沙堡都浸泡在海水中，所以沙堡各个表面的吸水长度是相同的。

内部的绿色部分是沙堡落潮时的饱和吸水长度，而内部的紫色部分是落潮时被海浪切割的沙堡长度。

红色部分为经过一整个涨潮和落潮后剩下的沙堡。

分割过程如下图所示

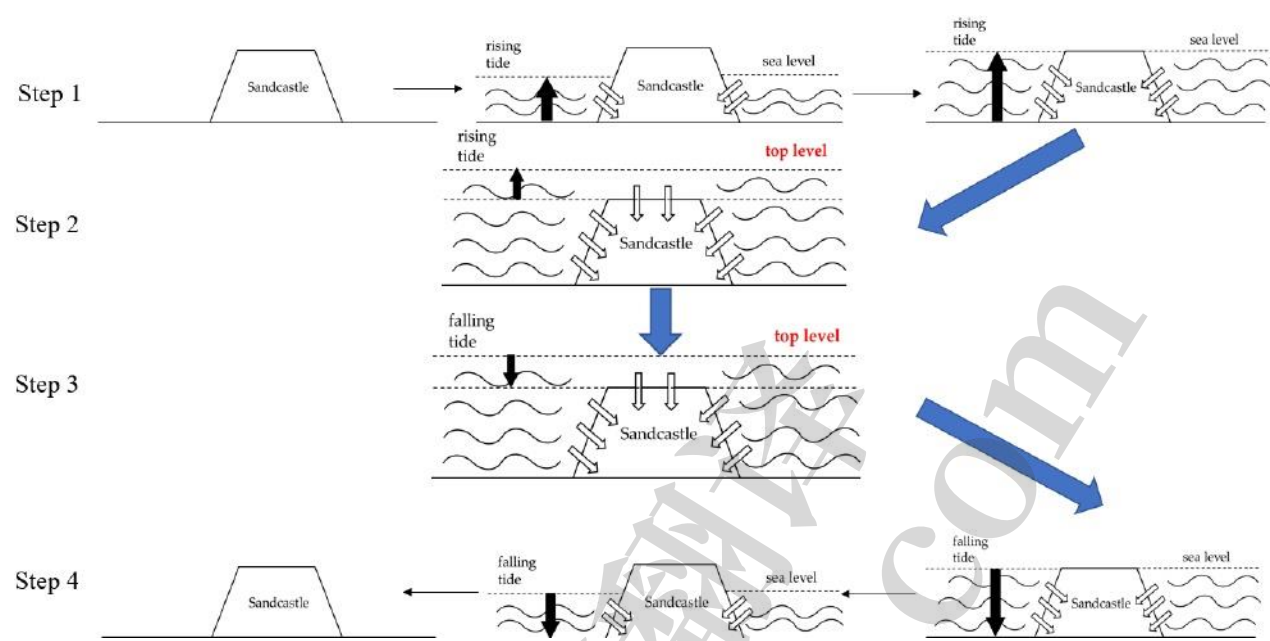


图 4 分词过程

假设□□ 代表海平面刚好上升到沙堡上方的时间(高度上升等于□□，其中□□代表沙堡的高度)。

步骤一:从时间 = 0 到 = ，当海平面从正好触碰到沙堡底部上升到刚好到达沙堡顶部时，被波浪切割的水正面长度加上最低水位吸收水达到饱和的长度，可以描述为

$$l_1 + l_2(t_f) \tag{4}$$

第二步(完全浸入):从时间 = 到 = ，当海平面从沙堡顶部上升到水面顶部时，长度即最底层

水位表面吸收水分达到饱和的可以形容为

$$l_2(t_e - t_f) \tag{5}$$

步骤 3(完全浸入):从时间 = 到 = + (-)，当海平面从最高水位下降到沙堡顶部时，长度即最低水位

水位表面吸收水分达到饱和的过程可以描述为

$$l_2(t_e - t_f) \tag{6}$$

步骤 4:从时间 = + (-) 到 = 2 ，当海平面从沙堡顶部下降到与沙堡完全没有接触时，被波浪切割的水正表面的长度加上最低水位吸收水达到饱和的长度可以描述为

$$l_1 + l_2(t_f) \tag{7}$$

有道文档翻译
pdf.youdao.com

整个过程中，饱和吸水长度 L_p 底部吸水正数
面为式(4)~式(7)的和，即：

$$L_p = 2 \times l_1 + 2 \times l_2(t_e) \tag{8}$$

同理，饱和吸水长度 L_n 在水负表面底部的描述为：

$$L_n = 2 \times l_2(t_e) \tag{9}$$

上表面的饱和吸水长度 L_t 用侵蚀后沙堡 $L_t = 2 \times l_2(t_e - t_f)$ 描述 (10)

$$R' = \frac{2R - L_p - L_n}{2} \tag{11}$$

The radius r' of the top of the sandcastle after erosion is

$$r' \approx \frac{2r - [2 \times l_1 + 2 \times l_2(t_e - t_f)]}{2} = r - [l_1 + l_2(t_e - t_f)] \tag{12}$$

沙堡侵蚀后的高度 H' 为

$$H' = H - L_t \tag{13}$$

$$V_0 = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + R \times r) \tag{14}$$

由于沙堡的初始体积 $V_0 = 0.2 \times 10^{-3}$ 是常数，要最大化剩余比例

α ，即：

$$\begin{aligned} \max \alpha &= \frac{\frac{1}{3} \pi \times H' \times (R'^2 + r'^2 + R' \times r')}{V_0} \times 100\% \\ s.t. \quad V_0 &= \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + R \times r) \\ 0 &< H < 0.75 \\ 0 &\leq r \leq R \end{aligned} \tag{15}$$

利用 MATLAB 中的遗传算法工具箱和偏导数法进行求解。结果如下：

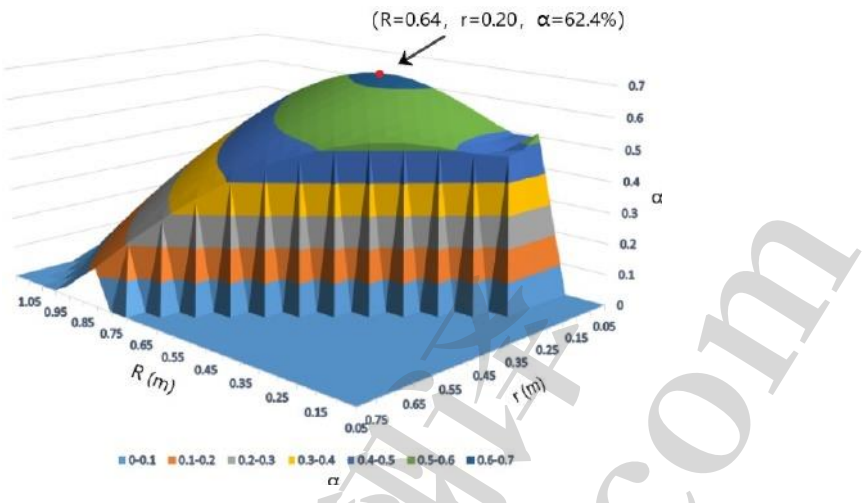


图 5 sandcastle-erosion 模型的结果, 价值的 $\alpha = 0.2$, $R = 0.64$, $r = 0.20$, $\alpha = 0.33$, 剩余比例 α 需要最大值 $\alpha = 62.4\%$ 。最优 3D 形状的形状和比例如图 6 所示。

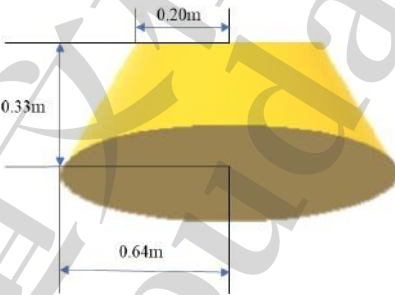


图 6 最优三维模型

因为水正表面的速度和通量较大，所以对水正表面施加更多的力。同样，施加在几何图形的水负表面和侧面的力也更少。在这方面，模型可以进一步优化为椭球锥体集，使水负侧更加稳定。优化后的几何模型从四个方向按比例侵蚀，以最大化几何的阻力。优化后的三维几何模型如下(蓝色的那个):



图 7 优化后的三维几何模型

5.2 最佳水砂混合比例的求解

正如在问题分析中所讨论的，问题 2 的目标是研究使沙堡最易防御的最佳沙水混合比例。水沙比例 β 被定义为水的体积除以沙堡的体积(基于沙堡吸水时体积不会增加的假设)。

当 β 量级较小时，沙粒间的黏性变弱，而黏性则随着 β 的增大而急剧增加。当沙子被水饱和时，认为沙子的凝聚力会迅速消失。

假设 F 和 β 有关系

$$F=k_1\times\beta^2$$

(16)

在某些领域。其中， k_1 是常量。

凝聚力 F 需要有一个下限，以确保沙堡在没有水的影响下不会倒塌。相应的， β 要求有一个下界 β_{min}

10%。因此， β 的范围应该是(17)

$$\beta\in(\beta_{min},\beta_{max})$$

其中， β_{max} 表示整个沙堡被水饱和时的水沙混合比例。所提到的 $\beta_{max}\approx30\%$ 。[2]假设 β_0 表示海浪在海平面以恒定速度上升的水正面各点上的冲击时间。在固定的持续时间内，被海浪切割的厚度 l_1 与凝聚力 F 呈反比关系 β_0 ，即，

$$T=\frac{k_2}{F}$$

(18)

其中， k_2 是常量。于是，长度切割系数 λ_s 和 β 有关系的

$$\lambda_s=T$$

(19)

根据公式(1)、(16)~(19)，得出长度 l_1 其中垂直切割的水正面与水沙混合比例 β 有什么关系

$$l_1=\frac{k_2}{k_1\times\beta^2}\times\frac{S_1'}{S_1}$$

(20)

其中， S_1 表示水正面面积， S_1' 表示的面积

做到节约部分。

砂土处于吸水状态时， λ_s 与达到饱和时间呈幂函数关系，指数为 1/2。由此，饱和水的系数吸收率 λ_s 与水沙比 β 的关系为(21)

$$\lambda_s=k_3\times\beta^2$$

其中， k_3 是常数。根据式(3)和式(21)，可以得出(22)

$$l_2=k_3\times\beta^2\times t$$

它被称为 $\lambda_s/\lambda_1=1\times10^{-2}$, $k_3=7\times10^{-4}$ 。[3]方程(22)表明，在同一时间内，水沙比越大，沙层达到饱和的时间越长。

为简化计算，我们首先根据问题 1 的几何关系计算水砂混合比例。
结果如下：

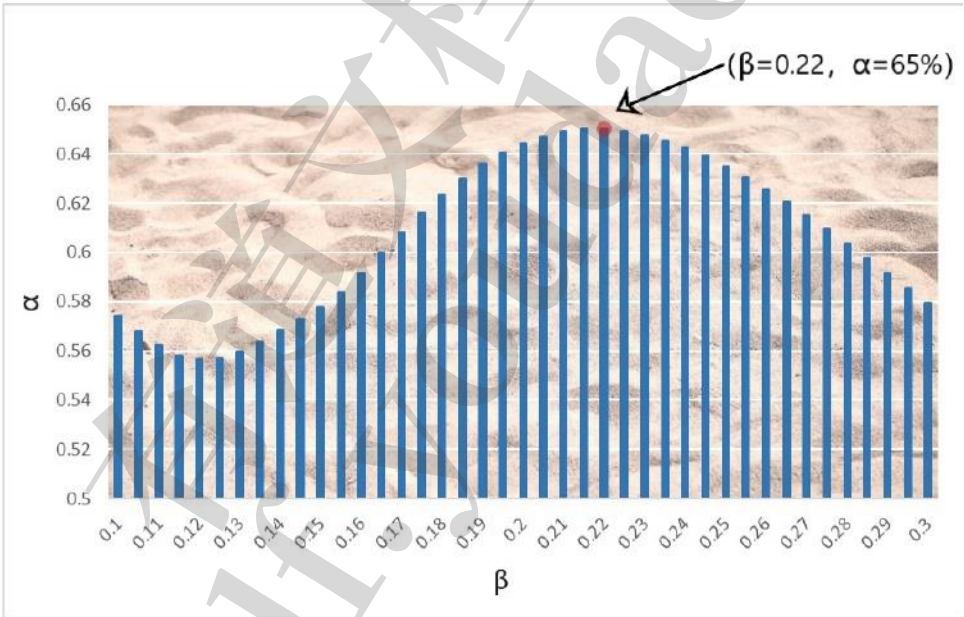


图 8 问题 1 中最优形状的最佳 β

在(17)的限定范围内，当 β 取 $\beta_1=22\%$ 的值时，沙堡的剩余比例可以取其最大值，约为 65.0%。根据问题 1 的几何形状，最佳的水沙比例为 22%。也就是说，每 100 卷沙堆(沙中有缝隙)，大约要加 22 卷水来制作沙堡。

由于地基的最佳结构与水沙混合比例有关，在下面的计算中 β 被认为是比例 β 的自变量，来计算
在(17)的限制条件下 α 的值。

同样，用 MATLAB 的遗传算法工具箱和偏导数法求解问题。由于涉及到三变量函数 $f(x,y,z)$ ，函数的图形不方便显示。只给出了数值结果，如下：

表 1 最佳水砂混合比例结果

0.58	0.23	24%	68.6%
------	------	-----	-------

因此，在综合考虑锥体锥体的各种形状的基础上，最优的水砂比例为 $x=1.5\%$ 。每 100 卷沙堆(沙中有缝隙)，大约需要添加 24 卷水来制作沙堡。制作沙堡地基时，水与沙体积的比例约为 1:5。

5.3 沙堡-雨蚀模型

当考虑降雨时，为了建立沙堡-雨蚀模型，分两种情况讨论问题 3:一种是沙堡同时受到海水和降雨的侵蚀;另一种是沙堡仅受降雨侵蚀。

情形 1 中，降雨的影响与海水的影响直接叠加，即降雨直接影响被海水侵蚀的沙堡。假设雨滴是有质量、垂直撞击在沙堡上的粒子，与波浪相比具有相同的作用力。沙堡的每个部分被雨滴击中的时间是相同的，表示为 t_1 。

假设雨滴从沙堡表面垂直切割的长度为 l_4 在一段时间 t_1 ，这与 S_2' 和 S_2 的比例成正比。

$$l_{4i}=a_1\times\frac{S_{2i}'}{S_{2i}}$$

(23)

其中，

a_1 表示长度切割系数，

S_2' 表示顶面或侧面的垂直投影面积， S_2 表示顶面或侧面的面积， $i=1,2,3$ 表示顶面、水正面或水负面的情况。

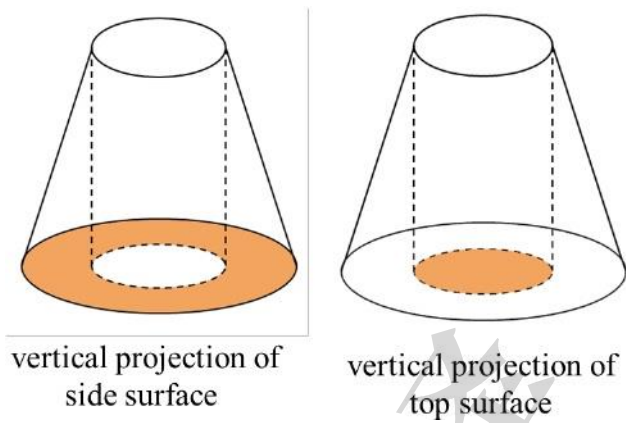


图 9 各面垂直投影示意图

为了简化后续的处理步骤，同样假设表面的沙子被雨水侵蚀后，部分沙子应该已经脱落，但仍然保持略微饱和附着在大部分沙堡上。下面是沙堡的另一个减少示意图。



图 10 沙堡还原的另一幅示意图

根据问题 1 的示意图，黄色部分是被雨水饱和的部分，经过雨水侵蚀后，沙堡的倾斜角保持不变。沙堡的剩余高度□□1 & quot;与雨水侵蚀叠加为

$$H_1'' = H' - l_{41} \tag{24}$$

叠加雨蚀的沙堡顶面半径□□1'' 为

$$r_1'' = \frac{2r' - l_{42} - l_{43}}{2} \tag{25}$$

沙堡□□1'' 叠加雨蚀的底面半径为

$$R_1'' = \frac{2R' - l_{42} - l_{43}}{2} \tag{26}$$

时剩余比例□□1'' 为

$$\max \alpha_1'' = \frac{\frac{1}{3} \pi \times H_1'' \times (R_1''^2 + r_1''^2 + R_1'' \times r_1'')}{V_0} \times 100\%$$
$$s.t. \ V_0 = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + R \times r)$$
$$0 < H < 0.75$$
$$0 \leq r \leq R$$

(27)

55.7%。使用根据算法对问题 1 中问题相似的数据进行处理，结果 1(α=分别为 0.64α，α如下。= 0.20α，得出α1 "

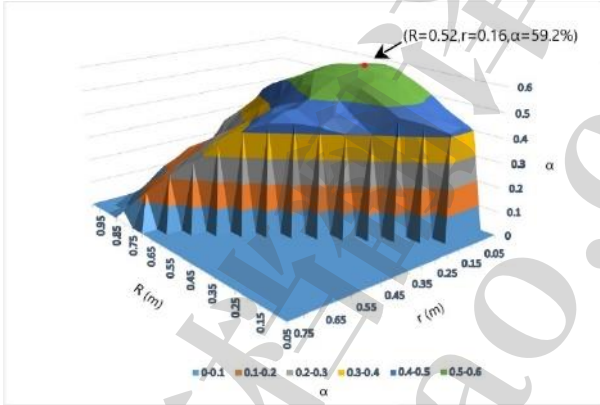


图 11 情况 1“Tha 1” 取的沙堡-雨蚀模型结果为，在 α 0 的最大值= 0.2ααα1ααααα” 3 时，αα= = 62.4%。0.52α，当 αα=αα0.16α，1” 达到 αα=αα0.50α，1ααααα” 时，后者三维几何模型的剩余比例体积比问题 1 中建立的几何模型增加了约 4%。由此可见，在问题 3 的情况 1 下，问题 1 中的三维几何并不是最优的。

在情况 2 中，只考虑了降雨的影响。沙堡减量示意图如下:



图 12 沙堡的还原示意图

同样，黄色的部分是被雨水浸透的部分，经过雨水的侵蚀，沙堡的倾斜角度保持不变。

剩余高度的沙堡 α_2 “只有用雨水侵蚀才是。

$$H_2'' = H - l_{41} \tag{28}$$

沙堡的顶面半径 α_2 “只有用雨水侵蚀是沙堡的顶面半径 α_2 ” 只有用雨水侵蚀是

$$r_2'' = \frac{2r - l_{42} - l_{43}}{2} \tag{29}$$

$$R_2'' = \frac{2R - l_{42} - l_{43}}{2} \tag{30}$$

当剩余比例 α_2 为

$$\begin{aligned} \max \alpha_2'' &= \frac{\frac{1}{3}\pi \times H_2'' \times (R_2''^2 + r_2''^2 + R_2'' \times r_2'')}{V_0} \times 100\% \\ s.t. \quad V_0 &= \frac{1}{3}\pi H (R^2 + r^2 + R \times r) \\ 0 &< H < 0.75 \\ 0 &\leq r \leq R \end{aligned} \tag{31}$$

结果如下。

根据问题 1 中处理的数据($\alpha_1 = 0.64\%$, $\alpha_2 = 0.20\%$), 得出 α_2 稳定性 92.6%。它的是观察到的沙堡, $h \rightarrow +\infty \lim$ 不是 α_2 considered 2” = 100%。在 As 模型中, α_2 之间的关系是无法解决的。然而, 问题 1 中的三维几何在这种情况下并不是最佳的。

6 关于建造沙堡的建议

建议一:增加沙堡的初始体积。

当沙堡极小的时候, 就很难抵挡海浪和潮汐的冲击。沙堡-侵蚀模型的结果也显示, 增加初始体积 α_0 在一定范围内, 可以增加波浪侵蚀后残存沙堡的比例。

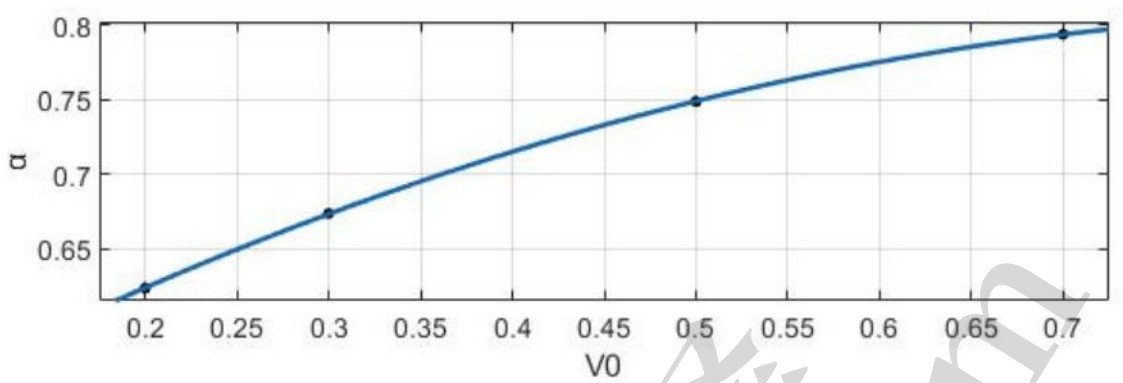


图 13之间的关系和

- 建议二:在远离大海的海滩上建造沙堡。
- 现实中的沙滩是向大海倾斜的。沙堡离大海越远，沙堡越高，沙堡受海浪影响越小。当距离足够远的时候，海水的侵蚀就可以完全消除。
- 建议三:在沙水混合物中加入一些粘合剂。
- 胶粘剂能增强砂粒间的粘结力，有助于表面砂粒与沙堡主体的粘附。同时，胶粘剂可以减少表面砂在海水中的间隙暴露，在一定程度上降低砂的饱和率。使用粘合剂还可以减少沙堡在同一时期内损失的体积。
- 建议四:在沙堡周围筑一道沙墙。
- 孩子们在堆沙堡的时候，沙堡周围经常会建护城河。一方面，沙墙可以吸收海浪撞击产生的力量;另一方面，沙墙可以延迟沙堡接触潮汐的时间。

7 敏感性分析

As 长度切割系数以及饱和吸水系数和初始体积对最优有重要影响，进行了灵敏度分析。为三个系数, 和, 变化±5%。观察了对最优底面半径、顶面半径、沙堡高度和沙堡剩余比例的相对影响。

表 2□□.的敏感性分析

结果 □□□□+5% +4%	0.73%□□	1.24%□□	1.92%□□	1.96%□□
	0.59%	1.00%	1.55%	1.57%
+ 3%	0.44%	0.75%	1.18%	1.18%
+ 2%	0.29%	0.50%	0.78%	0.78%
+ 1%	0.15%	0.25%	0.40%	0.39%
-1%	0.15%	0.25%	0.40%	0.34%
-2%	0.29%	0.51%	0.81%	0.81%
-3%	0.44%	0.77%	1.21%	1.20%
-4%	0.58%	1.03%	1.61%	1.72%
-5%	0.73%	1.29%	1.74%	2.01%

表 3□□□□.的敏感性分析

结果 □□□□+5% +4%	0.50%□□	1.05%□□	1.54%□□	3.50%□□
	0.42%	0.83%	1.31%	2.60%
+ 3%	0.31%	0.63%	0.96%	1.93%
+ 2%	0.21%	0.44%	0.65%	1.30%
+ 1%	0.11%	0.22%	0.31%	0.64%
-1%	0.11%	0.21%	0.30%	0.58%
-2%	0.25%	0.44%	0.65%	1.30%
-3%	0.35%	0.69%	1.04%	2.00%
-4%	0.48%	0.92%	1.32%	2.73%
-5%	0.55%	1.11%	1.60%	3.44%

表 4 V .0

结果□□0 +5% +4%	1.60%□□	1.58%□□	1.76%□□	1.83%□□
	1.27%	1.27%	1.45%	1.52%
+ 3%	0.94%	0.93%	1.09%	1.15%
+	0.63%	0.62%	0.74%	0.78%

2%				
+1%	0.32%	0.31%	0.37%	0.39%
-1%	0.32%	0.30%	0.38%	0.38%
-2%	0.65%	0.63%	0.74%	0.81%
-3%	0.94%	0.93%	1.10%	1.19%
-4%	1.30%	1.31%	1.48%	1.61%
-5%	1.62%	1.61%	1.79%	2.02%

结果表明，系数 α_1 , α_2 和初始卷 α_0 具有较高的稳定性。因此，最终结果的误差在可接受范围内。包括最优的结果

基于沙堡-雨蚀模型的海水影响下的沙堡形状，基于沙堡-雨蚀模型的最优水沙比和降雨、海水影响下的最优沙堡形状是可靠的。

8 优点和缺点

8.1 优势

本文基于流固相互作用的相关原理，分析了波浪、潮汐和降雨对沙粒的侵蚀作用。将海水对沙堡的作用简化为海浪撞击切割沙层和潮汐浸没使沙变得饱和水，濒临脱落的边缘。更多地关注了固液相互作用的主要方面，避免了繁琐的微观分析。

沙堡-侵蚀模型模拟了一个普通家庭在海滩上建造沙堡的场景，基于沙量适宜的假设，让人们可以直接用这个模型的结果在现实生活中建造沙堡的基础。

结合偏导数和 MATLAB 遗传算法工具箱求解的结果大大减少了计算时间，同时保证了结果的准确性。

8.2 缺点

为了便于计算和现实构造，只考虑了相对规则的三维几何形体，而忽略的椭圆锥视锥、偏心锥视锥等几何形体可能具有更好的抗侵蚀能力。

假设波浪对沙堡的水正面各点具有相同的冲击效果。但是，前方被波浪撞击的沙层厚度要大于两侧的厚度。

不同沙子的饱和吸水率不同，使沙堡稳定的最小水沙比也不同。由于沙的种类繁多，本文的估算可能会造成很大的差异。

文章在阳光下取乐

如何建造一个完美的沙堡?

你有没有尝试过在沙滩上搭一个沙堡?当然，我试过。然而，我建造的“沙堡”不过是一个用贝壳和其他东西装饰的没有形状的沙堆。我相信有很多人都在关注如何建造一个完美的沙堡。如果涨潮了，你有没有想过，为了更能抵抗海水的侵蚀，它会是什么样的形状?

有些人可能会认为建造沙堡和建造房子一样，只是一种机械的建筑游戏，也有人可能会认为它是一种识别不同形状组合的游戏。然而，建造沙堡的游戏看似简单，实际上涉及到流体与固体相互作用的机制。对这一领域知识的专门研究，可以用于桥梁、航海和航空工业的建设。下面我们就来谈谈如何用知识建造完美的沙堡吧!

首先，在解释建造完美沙堡的最佳方法之前，我们需要先了解为什么沙堡能够站得住脚。在沙滩上玩耍过的孩子们都知道，干燥的沙子创造不出任何有用的东西。只有与水混合，沙子才会变得粘稠。这是因为水会分散成小滴，填满沙粒之间的空隙。水滴在沙粒之间架起桥梁，在相连的沙粒之间产生一种叫做“表面张力”的吸引力，正是这种吸引力使得沙粒难以分离。(如果你不知道表面张力，可以在杯子里装满一杯水，杯子顶部的圆形凸起就是水滴之间表面张力吸引的结果)

现在你已经知道了沙堡屹立不倒背后的原因。建造过沙堡的人都知道，建造沙堡的第一步是要建立一个大的地基，在此基础上再建造一个更精致的沙堡。地基总是非常重要的，因为你永远不知道什么时候海浪会翻腾起来，把辛苦搭建的沙堡摧毁。那么，我们如何建造一个形状合适的沙堡地基，才能在很大程度上抵御其他影响呢?别担心，我们的团队通过建立数学模型为你提供答案。

为了找到最适合建造沙堡地基的形状，综合考虑了海浪频繁快速、潮汐逐渐上升等威胁沙堡的因素，我们建立了沙堡-侵蚀模型。为了保证模型结果的准确性，我们使用了相同种类的沙子，并以相同的比例与水混合。

通过模拟相同体积下不同形状的沙堡在不同侵蚀条件下的残留状态并进行对比，最终得到沙堡地基的最佳几何形状。它是一个圆形平台，高度约为 30 厘米，底部半径约为 64 厘米。顶部要稍微窄一点，顶部半径 20 厘米左右。在做地基的时候，可以把面向海浪的一面做得更陡一些，增强地基的稳定性。

由于沙与水的比例对沙堡的成功至关重要，所以沙与水的黄金比例也是沙堡建造者所关心的问题。为了找到这个最佳比例，我们还利用沙堡-侵蚀模型来确定可以使沙堡最稳定的原材料比例，这个比例约为 22%。也就是说，在建造过程中，大约 5 份沙子配 1 份水的沙堡地基是最稳定的。

人们通常会选择在阳光明媚的日子在海滩边玩耍。然而，由于天气变幻莫测，经常会突然下雨。考虑到降雨的因素，为了找到雨天沙堡最稳定的几何形状，我们将之前的沙堡-侵蚀模型改进为沙堡-雨蚀模型。在这个模型中，我们发现在晴天最抗侵蚀的沙堡在雨天并没有表现出同样的强度，但基本形状相差不大。最终的结果也是一个圆形平台，底部半径约 52 厘米，顶部半径约 16 厘米，高度约 50 厘米。我们的模型还显示，沙堡在雨天破坏得更快。

这是怎么回事?看了我们模型的结果，相信大家也可以建造一个完美的沙堡。下次和你的朋友家人一起试试吧!

参考文献

陈志强, 陈志强, 陈志强(2003)。湿颗粒材料内聚力的建模和测量。粉体技术, 133(1-3), 203-215。

[2] Nowak, S., Samadani, A., & Kudrolli, A.(2005)。湿颗粒堆的最大稳定角。自然物理, 1(1), 50-52。

[3]霍恩贝克, D. J., 阿尔伯特, R., 阿尔伯特, I., Barabási, A.-L. , & Schiffer, P.(1997)。是什么让沙堡屹立不倒?Nature, 387(6635), 765-765。

[4] Emiroğlu, M, Yalama, A. ,& Erdoğan, Y(2015)。用不同粘土/沙子比例生产的预拌泥膏药的性能。应用粘土科学, 115,221-229。

[5] Kudrolli, A.(2008)。粘砂。自然材料, 7(3), 174-175。

[6] Halsey, t.c., & Levine, A. J.(1998)。《沙堡如何倒塌》。物理评论快报, 80(14), 3141 - 3144。

[7] Pakpour, M,哈比比,M, Mørup, P, & d·波恩(2012)。如何建造完美的沙堡。科学报告, 2(1)。

[8]国家海洋数据信息中心。[DB / OL]。https://www.cnss.com.cn/tide/2020。

附录

1.问题 1 的偏导数

```
clear;clc
v=0.2;
a1=0.1;
a2=2*10^(-5.5);
b=1/6000;
te=7200;
syms R r;
h=3*v/(pi*(R^2+r^2+R*r));
tf=3*v/(b*pi*(R^2+r^2+R*r));
hfinal=h-2*a2*(te-tf);
s21=2*h/(pi*sqrt((R-r)^2+h^2));
l1=a1*s21;
L1=2*l1+2*a2*te;
L2=2*a2*te;
Rfinal=(2*R-L1-L2)/2;
rfinal=r-(l1+a2*(te-tf));
a=pi*hfinal*(Rfinal^2+rfinal^2+Rfinal*rfinal)/(3*v);
f1=diff(a,R);
f2=diff(a,r);
[R,r]=solve(f1==0,f2==0,R,r)
```

2.第二题的偏导数

```
clear;clc
v=0.2;
b=1/6000;
te=7200;
R=0.65;
r=0.2;
dc=2*10^(-2);
e=2*10^(-4);
syms beita;
a1=dc*beita^(-2);
a2=e*beita^2;
h=3*v/(pi*(R^2+r^2+R*r));
tf=3*v/(b*pi*(R^2+r^2+R*r));
hfinal=h-2*a2*(te-tf);
s21=2*v/(pi*sqrt((R-r)^2*(R^2+r^2+R*r)^2+v^2));
l1=a1*s21;
L1=2*l1+2*a2*te;
L2=2*a2*te;
Rfinal=(2*R-L1-L2)/2;
rfinal=r-(l1+a2*(te-tf));
a=pi*hfinal*(Rfinal^2+rfinal^2+Rfinal*rfinal)/(3*v);
f=diff(a,beita);
solve(f==0,beita)
```

3.第三题的偏导数

```
clear;clc
v=0.2;
a1=0.1;
a2=2*10^(-5.5);
b=1/6000;
te=7200;
syms R r;
h=3*v/(pi*(R^2+r^2+R*r));
tf=3*v/(b*pi*(R^2+r^2+R*r));
s21=2*h/(pi*sqrt((R-r)^2+h^2));
l1=a1*s21;
L1=2*l1+2*a2*te;
L2=2*a2*te;
l41=a1;
l42=(R-r)/sqrt((R-r)^2+h^2);
l43=(R-r)/sqrt((R-r)^2+h^2);
hfinal_1=h-2*a2*(te-tf)-l41;
Rfinal_1=(2*R-L1-L2-l42-l43)/2;
rfinal_1=(2*r-2*(l1+a2*(te-tf))-l42-l43)/2;
a=pi*hfinal_1*(Rfinal_1^2+rfinal_1^2+Rfinal_1*rfinal_1)/(3*v);
f1=diff(a,R);
f2=diff(a,r);
[R,r]=vpasolve(f1==0,f2==0,R,r)
```