

跟上迁徙的鱼群

海洋温度的逐渐上升导致鲱鱼和鲭鱼的分布发生了显著的变化。这种情况可能会给苏格兰的小型渔业公司带来灾难，因为他们可能无法在目前的位置捕获足够的鱼。我们的团队被要求确定未来 50 年鲱鱼和鲭鱼最有可能的分布，并根据我们的研究结果给苏格兰渔民提供实用的建议。

对于问题 1，我们首先分析过去 39 年的海面温度数据，并使用适当的正交分解将原始数据集分解为两部分：空间项 POD 模式和时间项时间系数。在保留了 3 个最重要的 POD 模式后，我们假设 POD 模式是随时间稳定的，并通过预测它们对应的时间系数来实现我们的海表温度预测。我们继续根据鲱鱼和鲭鱼的栖息地温度来估计未来 50 年的位置。我们的结论是，在大西洋西北方向的苏格兰，鲱鱼和鲭鱼将在未来 50 年从不列颠群岛向北移动。而在北海，鲱鱼将逐渐向东移动。

对于问题 2，我们首先开发一个营养损失模型来预测新鲜度随时间的变化。给定营养素损失的最大可接受水平和储存温度，我们能够确定渔获物的预期储存时间。然后，我们计算鲱鱼和鲭鱼捕捞的最大旅行距离分别为 300 公里和 500 公里。根据未来 50 年鱼类的移动情况，我们得出鲱鱼和鲭鱼最早离开捕捞范围的时间是 2027 年和 2033 年，最有可能的年份是 2045 年和 2043 年。鲭鱼离开捕捞范围的最坏情况没有关键年份，2066 年是青鱼离开小型渔船捕捞范围的最晚时间。

对于问题 3，我们为小型渔业公司提出了三种可能的策略，以帮助他们适应不断变化的情况。第一个策略是重新安置渔业公司。我们估计，如果把苏格兰所有的渔业公司都迁走，考虑到整个渔业，每年的净收益将达到 6500 万英镑。第二种策略是改变捕捞模式。在一种新的捕鱼模式中，一部分船作为渔船，另一部分船作为船，并配备船上冷藏系统。我们还开发了不同年份所需的船上储存温度模型，为 2045 年需要改变捕捞模式的小型鱼类公司提供了建议。第三个策略是在设得兰岛等公海岛屿上建立仓库，保存小渔船捕捞的鱼，这也会扩大小渔船的捕捞范围。

对于问题 4，考虑到领海捕鱼限制，我们修改了我们的建议。根据问题 1 和问题 2 中的模型，2035 年所有鲱鱼将进入丹麦领土。在新的限制下，转变为新的捕捞模式的时间应该发生在 2036 年，而不是 2045 年，导致小公司亏损。

最后，我们分析了我们的模型的精度和敏感度，证明了我们的模型对于不同的参数都是准确和稳定的。

关键词:适当的正交分解，鱼类洄游，微分方程，捕鱼策略



关注数学模型
获取更多资讯

内 容

1 介绍	3
2 模型假设和符号	3
2.1 假设和理由	
2.2 符号	3
3 问题 1 的解决方案	4
3.1 海表温度预测	4
3.1.1 应用 POD 数据集	5
3.1.2 预测未来海表温度	7
3.2 预测鲱鱼和鲭鱼未来的位置	8
4 问题 2 的解决方案	9
4.1 质量劣化预测	10
以下 4.4.1 生化机制	10
4.1.2 养分损失模型	10
4.1.3 结果和分析	13
4.2 估计的捕鱼范围	13
4.2.1 定义准备有用的术语	13
4.2.2 结果 3 例	14
5 问题 3 的解决方案	16
5.1 迁移渔业公司	16
5.2 改变渔业模式	17
5.3 建立公交站	19
6 解决问题 4	19
敏感性分析	20
8 优点和缺点	21
9 条钩线和下沉球	



关注数学模型
获取更多资讯

有道文档翻译
pdf.youdao.com

1 介绍

苏格兰是英国最大的海洋捕鱼国。然而，由于海洋温度上升，许多海洋生物物种，包括苏格兰鲱鱼和鲭鱼，正在迁移到北部寻找新的栖息地。这些物种的迁移对小型渔业公司构成了严重威胁，这些公司的生计严重依赖于当地鱼类物种的稳定。因此，评估这种地理上的人口迁移对当地渔业的影响至关重要。

本文旨在帮助苏格兰渔业管理联盟制定有利的渔业战略。为了让政府更好地了解迁移问题，我们构建了一系列数学模型，以预测两种鱼类随时间的分布，并量化其对渔业公司的影响。

我们的具体任务包括以下几点：

- 确定未来 50 年苏格兰鲱鱼和鲭鱼的地理分布。
- 确定人口迁移到当前捕鱼范围之外的时间点。也就是说，直到种群距离小渔船无法捕捞到为止所经过的时间。
- 评估两种不同的捕鱼策略，包括从效益和经济可行性方面重新安置捕鱼公司和更新渔船。
- 分析领土问题可能如何影响捕鱼战略。

2. 模型假设和符号

2.1 假设与论证

- 我们假设鲱鱼和鲭鱼的栖息地温度与海洋表面温度一致。事实上，大多数鲱鱼和鲭鱼生活在海平面以下 200 米以下的区域，浅水区的温度基本平衡。因此，我们可以忽略海洋温度的垂直差异。
- 我们假设渔船可以行驶的最大距离完全由渔获物的预期储存时间决定。小渔船不具备长途航行的能力，主要是因为它们必须保证渔获物的新鲜度。因此，我们认为储存时间是限制运输距离的首要因素。
- 我们假设容器上的温度，或容器的储存温度
在每次航行中，Catch 是恒定的。



关注数学模型
获取更多资讯

2.2 符号

表 1 列出了本文使用的符号和符号。注意，只使用一次的符号不包括在内，稍后再定义。

表 1:符号和符号

象征	定义
D	NOAA DOISST 数据集
T	海面温度快照
t	TVB-N 或 K 值的水平
T	绝对温度(K)
t	预计储存时间

3 解决问题 1

3.1 海洋表面温度的预测

我们继续通过分析 NOAA 每日最佳插值 SST 数据集(DOISST) (Esrl.noaa.gov, 2020)来预测未来 50 年的海面温度变化(SST)。在空间方面，我们的数据集覆盖了大西洋东北部、挪威海南部和北海的整个区域。纬度和经度范围分别从 26.5° W 到 12.5° E 和从 51.5° N 到 67.5° N。每两个数据点间隔 1 度。至于时间维度，我们的数据集包含了从 1981 年 12 月到 2020 年 1 月近 40 年的月度海面温度数据。

对于这些时空数据，最简单的预测方法是分析每个数据点的历史变化，并预测这些点在未来某一时刻的可能值，然后用这些离散的结果来代表整个海域的温度变化。然而，这种尝试存在着明显的问题。局部的温度变化很容易受到异常现象的干扰(例如，战争或其他影响某一地区生态环境的人类活动)。单独预测数据点的方式未能排除这些异常值，从而导致预测不准确。另一方面，海洋表面温度变化，以及全球变暖，是一个整体的过程。这可以用一个事实来解释，即人类活动往往具有内在的相关性。因此，某一区域的温度变化可能与其附近区域存在内在联系。所有这些因素都表明，我们应该把这个问题作为一个整体来解决。

虽然我们尽量避免单独预测数据，但我们仍然需要考虑上面提到的异常值。为了消除这些异常值，我们需要找到一种方法，从海面温度变化中提取规律模式，并丢弃随机事件造成的影响。这就引入了我们提出的方法:适当的正交分解(POD)。(Noori 等人，2017)

POD 方法能够从具有最大波动动力学的原始数据集中提取一系列确定性函数(通常称为 POD 模式)



关注数学模型
获取更多资讯

流体动力学中的能量。它还能够将原始数据集分解为两部分:一部分只与时间有关, 另一部分只与空间有关。通过对时间相关部分的预测, 实现对海表温度的整体预测。

3.1.1 将 POD 应用于数据集

对于与某个时间记录相对应的所有数据点, 我们称这些数据点为快照。快照包含了当时所有数据点的经纬度数据以及海表温度。我们可以这样表达快照:

$$\vec{S}_i = [d_1, d_2, d_3, \dots, d_n] = SST(\vec{x}, t)$$
$$D = [\vec{S}_1, \vec{S}_2, \dots, \vec{S}_m]^T$$

哪里每个向量 \vec{S}_i 是一个包含 n 个数据点的快照(在本例中 $n=17 \times 40=680$)。它可以表示为一个与位置 \vec{x} 和时间都相关的术语。整个数据集是一个由 m (这里 $m=468$)行向量(快照)组成的矩阵。

POD 的目标是将每个快照分解为以下形式:

$$\vec{S}_i = SST(\vec{x}, t) = \sum_{k=1}^m a_k(t) \Phi_k(\vec{x})$$

其中每个 $\Phi_k(\vec{x})$ 是一个 POD 模式, 代表某一种海面温度分布。它只与位置向量 \vec{x} 有关。函数 $a_k(t)$ 是对应的时间系数, 只与时间 t 有关。

POD 求解流程遵循共同的主成分分析(PCA)过程:

1.我们首先从每个快照中减去平均 sst 来获得一个新的快照矩阵 D' :

$$D' = \begin{bmatrix} \vec{S}_1 - \bar{S} \\ \vec{S}_2 - \bar{S} \\ \dots \\ \vec{S}_m - \bar{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d'_{11} & d'_{12} & \dots & d'_{1n} \\ d'_{21} & d'_{22} & \dots & d'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d'_{m1} & d'_{m2} & \dots & d'_{mn} \end{bmatrix}$$

2.然后我们计算数据协方差矩阵 $C = m^{-1} D'^T D'$ ($C \in \mathbb{R}^{n \times n}$), 并计算其所有的特征值和相应的特征向量。我们将所有 n 个特征值按下降顺序排序, 并得到一个 $n \times n$ 矩阵 Φ , 其中包含 n 个特征向量作为列

向量。

$$\Phi = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} & \dots & \phi_{n1} \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \dots & \phi_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1n} & \phi_{2n} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$



关注数学模型
获取更多资讯

这 n 个特征向量(Φ 的 n 列), 根据它们对应的特征值的值从左到右排序, 就是数据集的 POD 模式。特征值越大, 说明其对应的 POD 模态(特征向量)动能越大。在这种情况下, 前 5 个特征值列在表 2 中:

表 2:前 5 个最大的特征值

特征值	所有特征值之和的比例
4645.04	93.96%
115.16	2.33%
52.76	1.07%
36.62	0.74%
21.79	0.44%

我们可以发现, 前 3 个特征值占有所有特征值之和的 97%。因此, 在接下来的模态分解过程中, 我们可以舍弃其他特征值较小的模态, 只保留前 3 个最重要的模态。

3.通过将原始矩阵 D' 投影到 Φ 上, 我们得到了一个投影矩阵 $a = D' \Phi$ 。要从 A 解码原始矩阵, 我们可以计算 $D' = A \Phi^T$ 。

$$D' = A\Phi^T = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} [\phi_{11} \cdots \phi_{1n}] + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} [\phi_{n1} \cdots \phi_{nn}]$$

由于我们只保留了前三种最导入的模式, 我们可以用近似表示法来表示原始矩阵 D' :

$$\hat{D} = \sum_{k=1}^3 \vec{a}_k \vec{v}_k^T = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} [\phi_{11} \cdots \phi_{1n}] + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} [\phi_{21} \cdots \phi_{2n}] + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{bmatrix} [\phi_{31} \cdots \phi_{3n}] \approx D'$$

我们可以得到每一个特征向量 v_k 空间 POD 模式和每个时间向量 a_k 为其对应的时间系数。这表明我们已经完成了对原始数据集 D' 的分解。三种模式及其对应的时间系数如图 1 所示。

为了验证我们提出的预测方法的准确性, 我们将原始数据集划分为训练集(前 446 个快照)和测试集(后 12 个快照)。我们使用训练集重新训练一个新模型, 该模型用于预测接下来的 12 个快照。通过比较最近 12 个快照的真实值和预测值, 我们推导出模型的相对误差。部分结果如表 3 所示。



关注数学模型
获取更多资讯

有道文档翻译
pdf.youdao.com

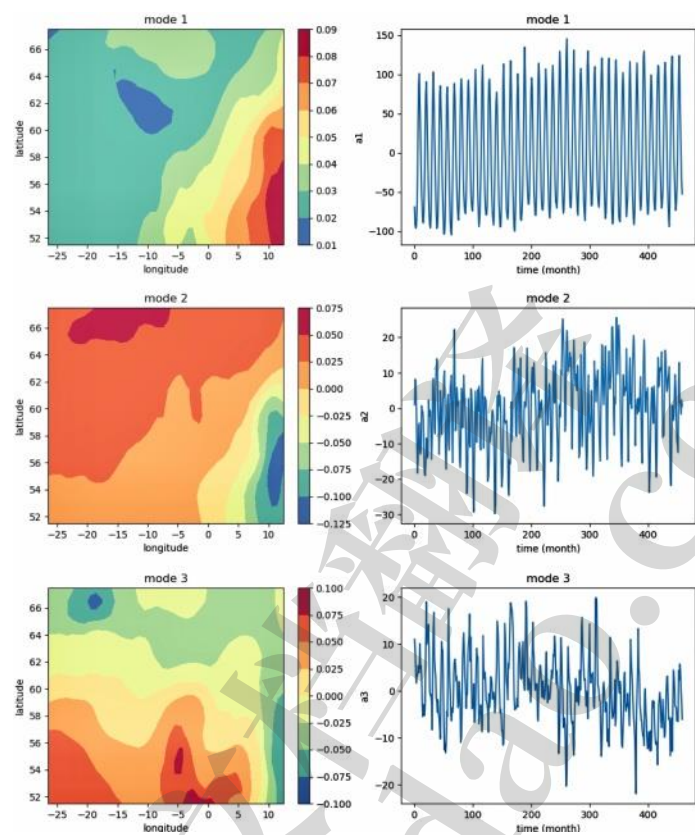


图 1:POD 模式及其对应的系数

表 3:模型的相对误差

快照没有。	日期	相对误差
447	2019.2	7.53%
448	2019.3	16.35%
449	2019.4	18.49%
450	2019.5	14.05%

我们可以发现真实值和预测值的平均相对误差为 13.69%，这表明我们的模型具有相对较好的准确性。

3.1.2 预测未来海表温度

由于 POD 模式只与地理特征有关，我们可以假设这些特征在未来 50 年不会发生显著变化，即特征向量 v_k 不发生变化。因此，通过预测每个时间向量 a 的后续变化，就可以实现对海表温度的整体预测 k_0 。我们通过使用线性回归来获得整体趋势和傅里叶变换来近似时间系数的周期性特征来进行我们的预测。预测结果如图 2 所示：



关注数学模型
获取更多资讯

有道文档翻译
pdf.youdao.com

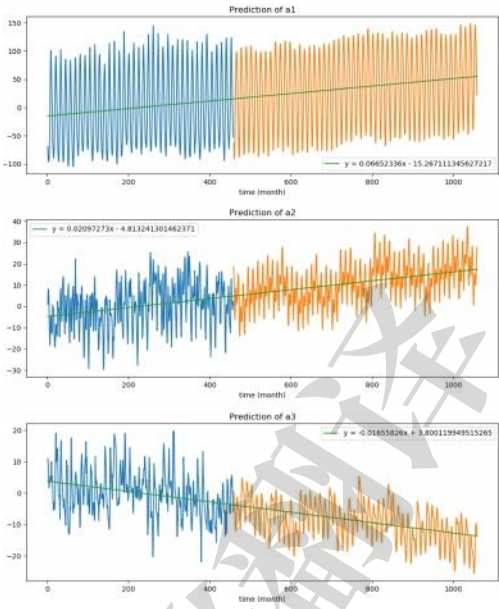


图 2:三个时间系数的预测

因此，通过将这些时间系数与它们对应的特征向量相乘，我们就得到了未来 50 年海面温度的预测。示例预测结果如图 3 所示。

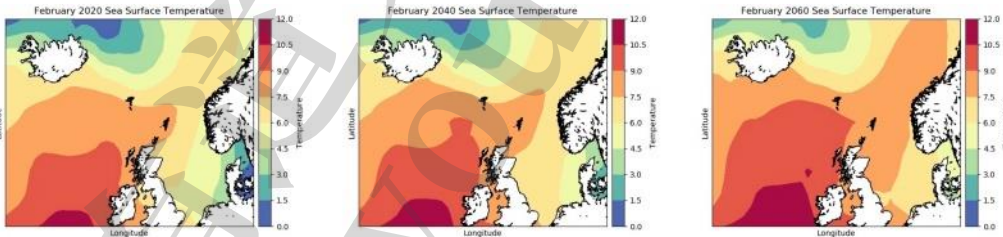


图 3:SST 变化趋势

3.2 鲱鱼和鲭鱼未来位置的预测

我们现在开始估计鲱鱼和鲭鱼在未来 50 年的位置变化。鲱鱼和鲭鱼都是高度洄游的鱼类，它们对水温非常敏感。温度偏好的一种测量方法是渔获物的平均温度 (MTC)，这可以从生物地理信息中得到。根据 NOAA 报告提供的 MTC 数据，鲱鱼更喜欢水温在 5° 和 7° 之间，而鲭鱼更喜欢 10° 和 14° 。（里德,1999）

根据经验，一年中捕捞鲱鱼和鲭鱼的最佳时间分别是 3 月和 8 月。因此，我们模拟了 2020 - 2070 年每年 3 月和 8 月鲱鱼和鲭鱼各自的迁徙路径。（图 4 和图 5）。等高线代表了这两种鱼类的可能位置。



关注数学模型
获取更多资讯

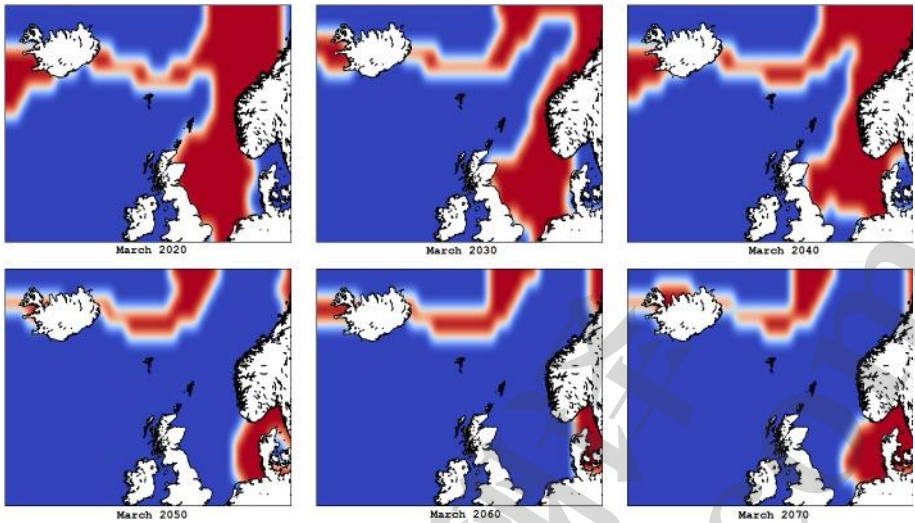


图 4:2020-2070 年 3 月鲱鱼可能的位置

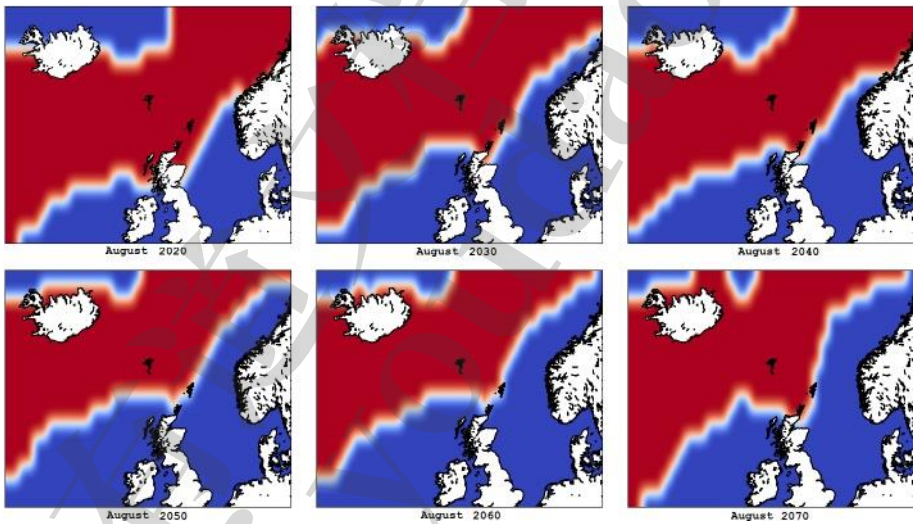


图 5:8 月鲱鱼可能捕捞点(2020-2070 年)

一般来说，未来 50 年海表温度将上升，导致人口向远北和东湾区等较冷的地区转移。但是，我们也观察到在一定时间段内温度略有下降，说明海表温度的变化并不单调。例如，2040 年 3 月的海表温度低于 2030 年 3 月的海表温度，导致鲱鱼宜居面积暂时增大。

4 解决问题 2

对于小型渔业公司来说，渔获的新鲜度一直是首要考虑的问题，因为渔船没有配备任何船上冷藏设备。小渔船的重量通常在 100t 或以下，长度可达 20m。考虑到尺寸的限制，很难在船上安装压缩机制冰机等冰箱。



关注数学模型
获取更多资讯

由于担心捕捞到的鱼可能会腐烂到一半，小渔船不具备长途航行的能力。

4.1 质量劣化预测

为了确定渔获物的预期储存时间，我们构建了一个营养损失模型(LABUZA et.al, 1978)来预测质量如何(即质量如何)。即新鲜度会随着时间的推移而恶化。营养损失模型在食品控制的文献中被广泛使用。其基本思想是利用营养损失指标来衡量“新鲜度”，比如蛋白质分解、脂肪腐败等。

4.1.1 生化机理

在介绍数学模型之前，我们首先要解释食物如何变质的生化原理。水产食品变质主要是由化学和微生物的变化引起的。这些生化反应通常涉及显著的营养损失，如蛋白质分解和脂肪腐败。

学者们已经制定了一系列指标来衡量营养流失。本文选取总挥发性氮(TVB-N)和 k 值(ATP 降解指数)两个指标来反映食物的新鲜度:

TVB-N TVB-N 是与蛋白质分解相关的生化反应的产物。因此，TVB-N 的高含量表明蛋白质的大量损失，我们反过来将其解释为质量恶化。

K 值 K 值是 ATP 降解的指标。ATP 是维持生命活动不可或缺的物质。因此，高水平的 ATP 降解表明低新鲜度和质量恶化。

4.1.2 营养物质流失模型

首先，我们构建一个模型来预测质量如何(即。即新鲜度)会随着时间的推移而恶化。请注意，品质的恶化可以通过 TVB-N 或 K 值反映(Zhang et al., 2011)。事实上，基于这两个指标的模型是完全一样的。为了避免冗余，除非有必要，我们在模型构建部分不区分这两个指标。为了说明，下标 T 表示 TVB-N;K 表示 K 值;下标 A 表示 TVB-N 或 k 值。

按照生化反应的规律，可以得到如下公式：

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = k_A \cdot A \\ A(0) = A_0 \end{cases}$$

(1)

在哪
里

•A 为TVB-N 水平(mg · 100g⁻¹)或 K 值(%)



关注数学模型
获取更多资讯

- $\frac{dA}{dt}$ 每天积累(或营养损失)吗
- k_A 为速率常数。(后面我们会看到，这个参数可以在给定的温度下用公式 3 计算出来。)
- 一个 A_0 是 A 的初始值($A_{T0} = 10.01 \text{ mg} \cdot 100\text{g}^{-1}$, $A_{K0} = 8.257\%$)

综合上述方程得到方程 2，它反映了 A(或相应营养物质的损失)随时间的积累。

$$A = A_0 \cdot e^{k_A \cdot t}$$

(2)

然后我们考虑生化反应速率 k_A 。应用阿累尼乌斯方程得到:

$$k_A = k_0 \cdot e^{-\frac{E_a}{RT}}$$

(3)

在哪里

- k_0 为频率因子
- E_a 为活化能(J mol^{-1})
- R 为气体常数($8.3144 \text{ J (mol K)}^{-1}$)
- T 为绝对温度(K)

式 3 可以推导为:

$$\ln k_A = \ln k_0 - \frac{E_a}{RT}$$

(4)

揭示 LNK 之间的线性关系 A 和 $1/T$ 。我们用线性回归估计 E_a 和 k_0 基于一组实验数据。

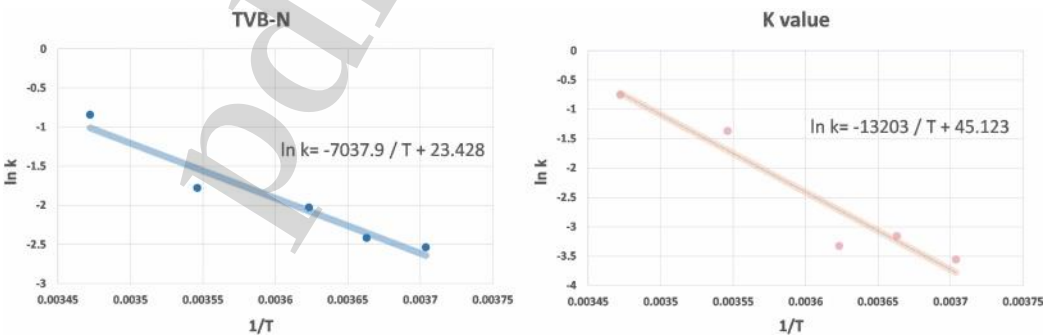


图 6:线性回归结果

如图所示， k_A 和 T 为:

$$\ln k_T = -7038/T + 23.428$$

$$\ln k_K = -13203/T + 45.123$$



关注数学模型
获取更多资讯

有道文档翻译
pdf.youdao.com

然后，我们计算速率常数 k_0 以及活化能 E_a 分别为 TVB-N 和 K 值。结果见表 4。

	TVB-N	增殖系数 粘度值
k_0	1.5×10^{-10}	3.95×10^{-19}
E_a	58501.84	109748.6

表 4:参数拟合值

给定参数拟合值，式 3 可表示为：

$$k_T = 1.5 \times 10^{10} e^{-\frac{7038}{T}}$$

(5)

$$k_K = 3.95 \times 10^{19} e^{-\frac{13203}{T}}$$

(6)

到目前为止，我们已经讨论了新鲜度指标是如何随时间变化的(公式 2)，以及营养物质的损失率是如何受温度影响的(公式 5 和 6)，结合这两组方程，我们可以推导出不同温度下新鲜度指标水平是如何随时间变化的。(图)

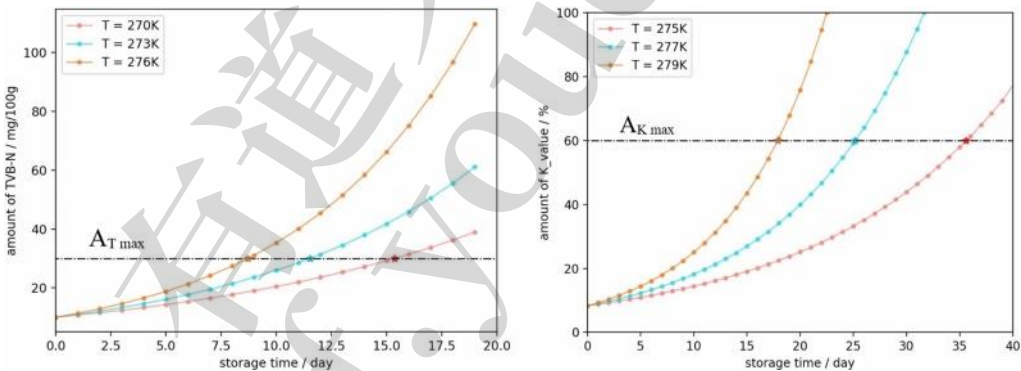


图 7:不同温度下 TVB-N 和 K 值的积累， A_{max} 新鲜度指标的最大可接受水平是多少

这允许我们计算给定存储温度下的期望存储时间：

$$t_T = \frac{(\ln A_{T \max} - \ln A_{T0})}{1.5 \times 10^{10} e^{-\frac{7038}{T}}}$$

(7)

$$t_K = \frac{(\ln A_{K \max} - \ln A_{K0})}{3.95 \times 10^{19} e^{-\frac{13203}{T}}}$$

(8)

式中 t 为期望贮存时间;一个 $_0$ 为新鲜度指标的初始水平;一个 $_{max}$ 为新鲜度指标的最大可接受水平， T 为温度(K)。下标 T 和 K 分别代表 TVB-N 和 K 值。

显然，预期的存储时间 t_{rot} 应该是 t 的下半部分 $_T$ 和 t_K ：

$$t_{rot} = \min \{t_T, t_K\}$$



关注数学模型
获取更多资讯

有道文档翻译
pdf.youdao.com

4.1.3 结果与分析

要确定捕手腐烂的点，我们必须确定两个指标($A_{T\max}$ 和一个 K_{\max})。根据国家食品安全标准，水产品中 TVB-N 含量不应大于 30mg/100g，而 K 值上限为 60%。由此，我们设定了 $A_{T\max}=30\text{ mg/100g}$, $AK_{\max}=60\%$ 。

应用公式 7 和 8，我们计算出不同温度下的预期储存时间。结果如表 5 所示。

表 5:不同温度下的预期储存时间

预计存放时间(天)			
温度	tT	tK	t_{\min}
280 k	6.05	15.11	6.05
285 k	3.89	6.61	3.89
290 k	2.54	2.97	2.54
295 k	1.69	1.37	1.37
300 k	1.13	0.65	0.65

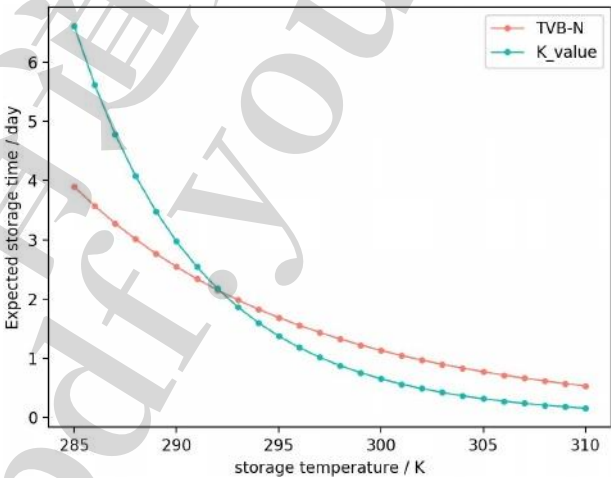


图 8:期望贮存时间与温度的关系

如图 8 所示，随着贮藏温度的升高，期望贮藏时间急剧下降。280k 下的预期储存时间为 6 天左右，300K 下的预期储存时间仅为 0.65 天左右。

4.2 渔场估算

4.2.1 有用术语的定义

最大行驶距离:正如我们在本节开始时提到的，渔船的最大行驶距离受到其冷藏装置的限制



关注数学模型
获取更多资讯

有道文档翻译
pdf.youdao.com

能力。小渔船不具备长途航行的能力，因为它们必须保证所捕获的鱼的新鲜度。我们假设最大旅行距离完全由渔获物的预期储存时间决定。

事实上，船只可以行驶的最大距离取决于捕鱼季节，因为不同的季节意味着不同的储存温度。根据经验，捕捞鲱鱼和鲭鱼的最佳时间分别是 3 月和 8 月。考虑到这两个渔季的贮藏温度不同，鲱鱼和马鲛鱼的预期贮藏时间也不同。

在 3 月份和 8 月份分别设置 9°C (282.15K)和 15°C (288.15K)的存储温度，我们可以从方程 7 和 8 中得到预期的存储时间。然后，我们就可以计算出最大行驶距离 (D_{max})，假设一艘船每天可以行驶 100 公里： $D_{max}=5\text{ day}\times 100\text{km/天}=500$ 公里的鲱鱼捕获量， $D_{max}=3\text{ day}\times 100\text{km/天}=300$ 公里鲭鱼捕获量

捕鱼范围 :我们将捕鱼范围定义为以渔港为中心的圆 (目前的经营位置， 57.69° N ， -1.83° E)，半径为 300 公里或 500 公里 (分别捕捞鲭鱼和鲱鱼的最大旅行距离)。捕鱼范围涵盖了所有可能进行捕鱼活动的地点。如果渔船超出了这个范围，渔获物在返港前就会腐烂一半。

关键年份 随着海洋温度的上升，鲱鱼和鲭鱼的种群将从目前的栖息地迁移出去。我们将关键年定义为这两个种群距离太远，小渔业公司无法收获的时间点。也就是说，鲱鱼和鲭鱼的预测位置与渔场圈“相切”的时间。

4.2.2 三种情况的结果

在第 3 节中，我们根据鲭鱼和鲱鱼的温度偏好(MTC)预测它们可能的位置。然而，MTC 并不是一个确定的值。根据海洋科学家的研究，鲱鱼的温度偏好服从平均 6°C 的正态分布，而鲭鱼的温度偏好服从平均 12°C 的正态分布。

考虑到温度偏好的不确定性，鲱鱼和鲭鱼的最终位置也不确定。我们考虑了三种不同的关于物种迁移的情况，即最好的情况、最坏的情况和最可能的情况。对于每一种情况，我们模拟了两种物种的迁移路径，并确定了相应的关键年份。结果如表 6 和图 9、10 所示。

首先，我们考察关于鲭鱼洄游的最佳案例。在这种情况下，鲭鱼更喜欢 7°C 左右的水温。因此，它们不会迁移太远，因为它们对上升的温度不敏感。如图 9 a 所示，到 2070 年，鲭鱼 (红色)的预测位置仍然在当前的捕捞范围内 (绿色)。可行的捕鱼区域将是重叠部分。因此，在最好的情况下，渔民仍然可以在当前位置捕捞鲭鱼。

然后，我们考虑最可能的情况。即马鲛鱼更喜欢 6°C 左右的水温，这是最高概率密度对应的正态分布的平均值。在这种情况下，估计的关键年份就在附近



关注数学模型
获取更多资讯

2045.到 2045 年鲭鱼种群分布如图 9 b 所示。

然而，也有可能青鱼只有在 5° C 左右的温度下才能存活，对应最坏的情况。它们可能对温度变化非常敏感，因此更有可能迁移到遥远的地区。对于这种情况，我们估计关键年是 2027 年左右。2027 年的鲭鱼种群分布如图 9 c 所示。

同样，我们可以推导出青鱼的关键年份。结果如表 6 和图 9 所示。

表 6:鲭鱼和鲱鱼的关键年份

物种	最好的情况	最有可能的情况	坏的情况下
鲭鱼	没有关键年份	2045	2027
鲱鱼	2066	2043	2033

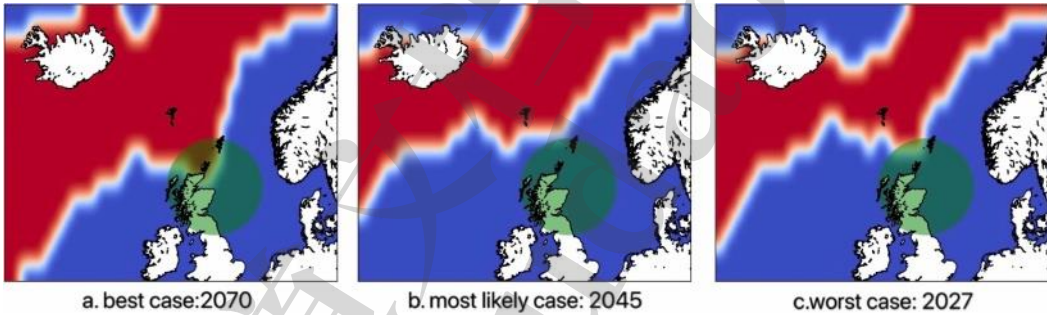


图 9:关键年份(红色)和当前捕捞范围(绿色)的鲭鱼分布

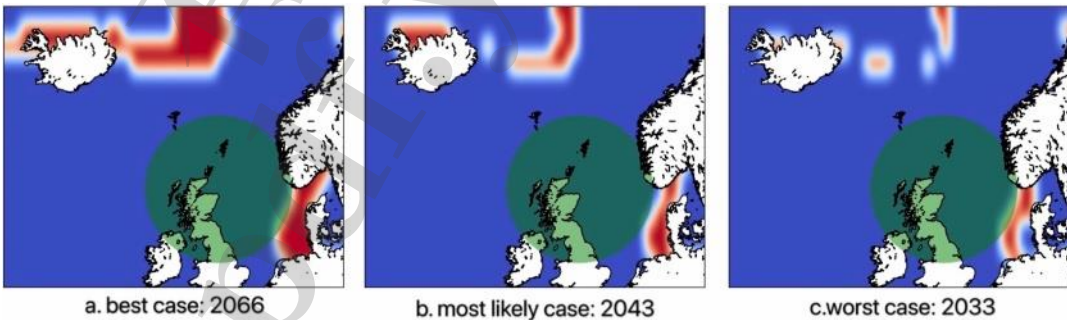


图 10:关键年份鲱鱼分布(红色)和当前渔场分布(绿色)



关注数学模型
获取更多资讯

5 解决问题 3

根据第 4.2.2 节的结果，小型渔业公司如继续在现有地点作业，在 2045 年将无法捕捞鲭鱼及 2043 年无法捕捞鲱鱼。因此，小公司在 2043 年和 2045 年需要做出一些改变，才能继续捕捞这两种鱼。

在本节中，我们将评估应对经济挑战的可能策略。通过成本效益分析，我们寻求确定能够改善当地渔民未来商业前景的最优策略。

5.1 搬迁渔业公司

一个“跟上”人口流动的可行策略是重新安置渔港。目前，我们在苏格兰南部设置渔港(57.69° N, - 1.83° E)。根据表 6，如果渔业公司继续在这个位置经营，到 2045 年左右，他们将失去鲭鱼的所有收入。现在我们将渔港迁移到设得兰岛(60.34° N, - 1.48° E)，这更接近鲭鱼的预测位置。使用第 4.2.2 节中的方法，我们估计关键年在 2058 年左右。(图 11a)。这意味着新端口带来了 13 年收入的额外收益。然而，新港口也带来了巨大的建设成本，我们需要权衡收益与此类成本。

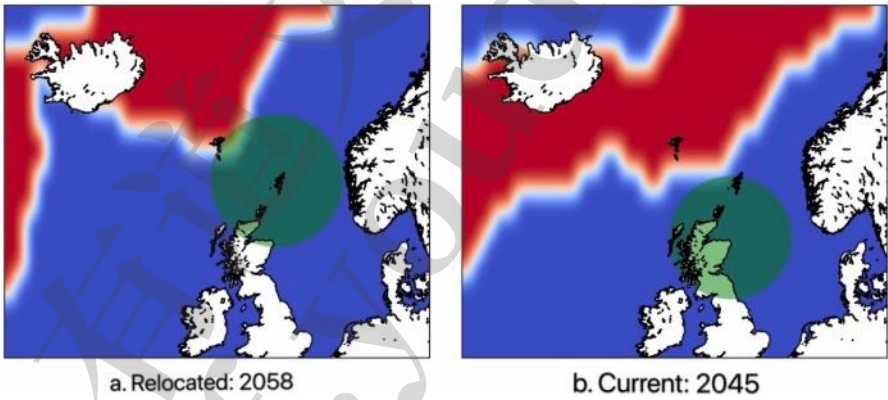


图 11:相应关键年份的搬迁和当前港口的位置和鲭鱼的分布

为了评估这一战略的经济可行性，我们计算了搬迁项目的净现值(NPV)。NPV 被定义为现金流入的现值与投入的资本之差。考虑到项目的时间跨度(13 年)，我们认为 NPV 是最有效的评价指标，因为它考虑了货币的时间价值。一般来说，如果 NPV 为负数，项目就会被拒绝。



关注数学模型
获取更多资讯

应用 NPV 公式，可以得到如下公式：

$$NPV = \sum_{i=1}^{13} \frac{CF_i}{(1+r)^i} - C_0$$

在哪
里

I 是年份

- CF_i*在这种情况下，第一年的净现金流入是 *CF* 吗 *i* 是每年销售鲑鱼产生的收入。
- r* 是可选投资的回报率(假设为8%)。
- C₀*是项目的初期投资。在这种情况下，*C₀*是建设成本
 设得兰岛的新渔港。

首先，我们计算项目的 NPV 来重新安置所有的渔业公司。根据苏格兰议会发布的一份报告，2018 年鲑鱼项目产生的总收入为 1.69 亿英镑。假设这个收入数字在未来不会发生变化，现金流入的现值总计为 1.35 亿英镑。我们还从世界银行获得了渔港建设的成本。这里，我们取每个渔港的平均建设成本为 4500 万英镑。苏格兰总共有 11 个主要的渔港，因此搬迁所有渔业公司的总成本约为 4.95 亿英镑。因此，这个项目的 NPV 总计约为 8.4 亿英镑，每年约为 6400 万英镑，说明收益远远大于成本。

同样，如果只对一小部分渔业公司进行搬迁，我们也可以分析该项目的 NPV。在这种情况下，收益和成本会按比例降低，因此 NPV 仍然是正的。

综上所述，从经济角度来看，搬迁策略是可行的。然而，我们也应该考虑到社会影响。例如，如果公司搬迁，当地渔民可能会失去工作。这种影响无法量化，但对政策制定非常重要。

5.2 改变捕捞模式

除了改变港口的位置，小公司可以改变目前的捕鱼模式，以增加捕鱼范围。目前，所有的渔船捕鱼，并将捕捞到的鱼运回陆地。我们会提出一种新的捕捞模式:一定比例的渔船在渔区捕鱼，我们称之为渔船;其他船只负责将渔船捕捞的鱼运回陆地，;我们称它们为船运船。渔船不需要陆基支援，但运输船会给他们带来补给，把他们的鱼带回港口。需要采用一些冷藏的方式，比如把冰运上船。这样可以降低储存温度，扩大捕捞范围。每年鱼的位置不同，捕捞范围也不同，这就导致了每年所需的储存温度不同。

根据问题 2 中存储温度与存储时间的关系模型，以及渔船每天航行距离为 100 公里的假设，



关注数学模型
获取更多资讯

可以展开储存时间与捕鱼距离的关系，由此可以得出储存温度与捕鱼距离的关系，即特定距离所需的必要储存温度。公式如下：

$$T_T = \frac{E_{Ta}}{R [\ln (\ln A_T - \ln A_{T0}) - \ln (k_{T0}S)]}$$

$$T_K = \frac{E_{Ka}}{R [\ln (\ln A_K - \ln A_{K0}) - \ln (k_{K0}S)]}$$

$$T_{necessary} = \min \{T_T, T_K\}$$

由于 2043 年鲱鱼将离开目前的捕捞区域，因此需要从 2044 年开始发展新的捕捞模式，以增加捕捞范围。为了最大化经济效益，我们讨论了最远的捕鱼距离，也就是最远的鱼和港口之间的距离。根据问题 1 建立的模型，我们得到 2043 年以后每年的捕鱼距离。部分结果如下表所示。

一 年	距 离
2044	1047.956
2045	969.3691
2046	1027.283
2047	969.3691

表 7:每年的捕鱼距离

根据捕捞距离，我们得到了每年所需的储存温度。对于鲭鱼也是如此，2046 年以后就需要新的捕捞模式和运输船只。年所需的贮藏温度如图 12 所示。

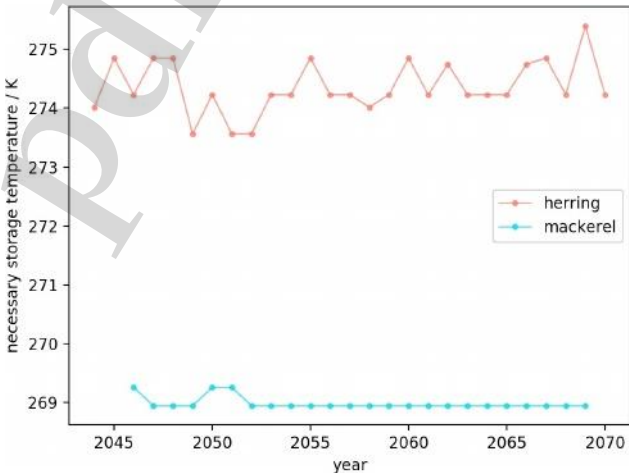


图 12:按年要求的必要贮存温度



关注数学模型
获取更多资讯

有道文档翻译
pdf.youdao.com

5.3 建立中转站

除了上面提到的选项，另一个可行的解决方案是建立中转站，以解决鱼类的保存问题。虽然小公司现有的渔船往往不能满足长途运输的保存条件，但我们可以在靠近远海的区域，如设得兰群岛，设立中转仓库，先将远海捕捞的鱼存放在仓库中。接下来，通过租赁定期的货运服务，将中转站的鱼运回苏格兰群岛。这种方式可以大幅增加公司的捕捞范围，而不需要移动公司的位置，也不需要渔船进行全面升级。

以问题 2 中公司的位置(57.69° N, - 1.83° 3E)为例。该公司应该只在 2045 年之前捕获鲑鱼(最有可能的情况)。通过应用这一解决方案，该公司不仅可以继续在北海捕捞鲑鱼，还可以继续在北大西洋的远海捕捞鲑鱼，直到 2068 年。

6 解决问题 4

在第三个问题中，我们假设渔民在海洋中捕鱼的程度没有限制。如果我们考虑到各国领海捕鱼范围的限制，我们的建议也相应改变了。

对于像移动公司选址或建造中转仓库这样的提案，由于与设得兰岛相邻的法罗群岛属于丹麦领土，其周围存在丹麦领海会限制苏格兰渔民的捕鱼范围。预计渔民每年捕到的鱼会减少，不能再捕到鲑鱼的日期也会提前。在这种情况下，预计渔民将遭受巨大损失。

对于改变捕鱼模式、为船只增加船上冷藏方法等提案，由于苏格兰的船只不能在丹麦境内捕鱼，转向新模式的时间需要重新考虑。根据我们在问题 1 和问题 2 中的模型，2035 年所有的鲑鱼将进入丹麦领土。因此，转变为新捕鱼模式的时间需要发生在 2036 年，而不是 2045 年。捕鱼区域也需要从苏格兰东部改为苏格兰北部，从而导致捕鱼距离和所需储存温度的变化。



图 13:来源 :<https://www.fis.com>



关注数学模型
获取更多资讯

7 敏感性分析

由于在问题 2 中使用微分方程来建立我们的存储模型，解决存储温度和存储时间之间的关系，因此需要对这个模型进行灵敏度分析。我们在 0.2%，2%，或 10% 的范围内扰动方程的初始值，以观察结果是否会发生剧烈变化。通过求解 6 组微分方程，我们将模型与原始模型进行比较，观察初始值的变化对结果的影响。

通过分析发现，当初始值增加或减少 0.2% 时，在 250K ~ 300K 范围内，结果与原始模型的结果几乎一致，没有明显差异，相对误差在 0% 左右。结果表明，对初始值的最小扰动不会影响模型。当初始值增加或减少 2% 时，250K 和 280K 之间有轻微的差异，而 280K 和 300K 之间没有显著差异。250K 和 292K 之间的相对误差约为 2%，当存储温度上升到 292K 到 300K 时，相对误差减小到 1%。结果表明，对初始值的小范围扰动对模型的影响很小，甚至没有显著影响。当初始值增加或减少 10% 时，存储温度在 250K ~ 280K 之间与原始模型有一定差异，而存储温度在 280K ~ 300K 之间与原始模型没有显著差异。在前一种情况下，初始值增加 10% 与降低 10% 之间的相对误差分别为 8.7% 和 9.5%。从 290K 到 292K，相对误差分别从 8.7% 和 9.5% 下降到 4.8% 和 5.3%，并保持相对误差到 300K。结果表明，对初始值进行一定程度的扰动，并不会导致模型出现较大偏差。相反，相对误差可以控制在一个较小的范围内，相对误差随着温度的升高而减小。

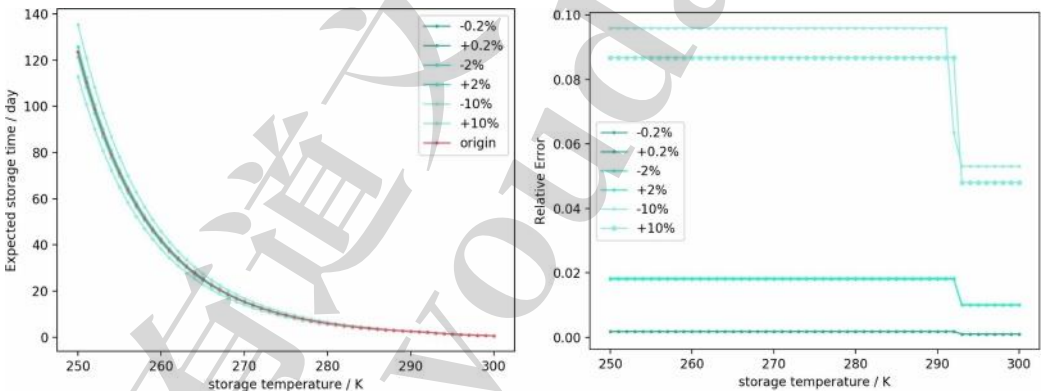


图 14:灵敏度分析结果

分析表明，我们的模型具有相当的鲁棒性，不会因为初值的扰动而发生较大的变化。敏感性分析的结果具有实际意义。微分方程的初始值代表了鱼体中 TVB-N 的初始含量和 k 值，即鱼体的自然状态。由于问题 2 中模型选择的初始值是从某篇文章中获得的，研究人员测量的是某条鱼。虽然文章中测量的鱼可以反映



关注数学模型
获取更多资讯

这个物种的一般价值，由于体型、饮食、生活环境等因素，物种内部的个体之间仍然存在个体差异。但敏感性分析表明，应用于 TVB-N 和 K-value 含量不同的鱼类时，存储模型基本相同，这意味着我们可以忽略这两种物质在鱼类体内含量差异的影响。该模型对某些物种中的所有鱼类都具有普适性，假设两种物质在鱼类的自然状态下是相同的是合理的。

8 优点和缺点

的优势

- 我们从整体角度预测海洋表面温度，有效排除异常值的影响，合理预测海洋表面温度变化。
- 通过 POD 方法降低了原始数据的条理性，简化了模型的复杂性，同时保留了大部分的有效信息。
- 我们使用 NPV 来评估不同策略的经济可行性。我们认为这是一个非常有效的指标，因为它将货币的时间价值考虑在内。

弱点

- 由于我们的数据不够充分，长期预测可能会有一些误差海洋表面温度。
- 在评价鱼的新鲜度时，我们只考虑两个指标(TVB-N 水平和 K 值)。实际上，衡量营养损失的指标有很多。其他指标可能会给出不同的储存时间。



关注数学模型
获取更多资讯

9 文章为钩线和下沉

全球变暖可能意味着苏格兰渔民 的鱼会减少

人类活动对地球气候的影响正在加剧。大量化石燃料的燃烧产生的温室气体将地球包裹在热地幔中，使地球表面逐渐变暖。在过去的几十年里，我们已经看到了全球变暖对环境的影响:全球降雨量的重新分配、冰川和永久冻土的融化、海平面的上升，等等。这些变化危害了自然生态系统的平衡，改变了动物的栖息地。

据海洋科学家称，由于海洋温度上升，原本生活在美国缅因州的龙虾正在缓慢地向北迁移到加拿大。这一现象引起了我们的注意。我们意识到，这种地理上的人口转移可能会对渔业公司，特别是中小渔业公司产生巨大影响。渔业公司可能会被迫走到更远的地方，以跟上迁徙人口的步伐，这将需要更大的劳动力和资本投资。因此，捕鱼业将面临严峻的经济挑战。

为了深入了解这一问题，我们使用降阶模型来预测海水温度的变化。根据我们的预测，未来 50 年苏格兰附近海水的平均温度将上升 3 摄氏度。海洋温度的上升可能会导致鲱鱼和鲭鱼的数量发生重大变化。具体来说，在大西洋西北到苏格兰，鱼类将从不列颠群岛向北移动。而在北海，这些鱼种会逐渐东移，沿着北海东海岸进入其他国家的领海，这就使得苏格兰渔民无法获得这些鱼种。这对苏格兰渔民来说可不是什么好消息:他们将不得不深入海洋捕捞鲱鱼和鲭鱼，这意味着成本的增加和收入的减少。

好消息是，根据我们的调查结果，鲱鱼和鲭鱼的分布在未来 5 到 10 年不会有太大的变化。这使得苏格兰渔民可以提前计划，为未来的变化做好准备。我们评估了几种可能有助于改善未来商业前景的捕鱼策略。根据我们的结果，我们建议小型渔业公司将渔港迁移到更接近鲱鱼和鲭鱼预测位置的地方(例如设得兰岛)。我们还建议这些公司升级渔船或安装船上冷藏系统，这将使他们能够在更大的范围内捕鱼。最后但并非最不重要的是，渔业公司可以考虑在设得兰群岛等公海建立仓库，以获得更多的渔获。



关注数学模型
获取更多资讯

参考文献

[1] Reid, R.(1999)。基本鱼类栖息地来源文件。伍兹霍尔，马萨诸塞州。:美国商务部、国家海洋和大气管理局、国家海洋渔业服务、东北地区、东北渔业科学中心。

[2] Noori, R., Abbasi, M., Adamowski, J.和 Dehghani, M.(2017)。一个预测西北印度洋海面温度的简单数学模型。河口、海岸和陆架科学, 197,pp.236-243。

[3] LABUZA, T., SHAPER0, M.和 KAMMAN, J.(1978)。养分流失的预测。《食品加工与保鲜》, 2(2), pp.91-99。

L。[4]张,李,X。.,W,沈,h • 罗和 y(2011)。不同贮藏温度下草鱼(Ctenopharyngodon idellus)品质预测模型。食品控制, 22(8), pp.1197-1202。

[5] 世界银行。(2020)。渔港工程。[在线下载]网址 :<https://projects.worldbank.org/en/projects-operations/project-详情/P007801>[2020年 2 月 17 日 登 陆]。 <https://sp-bpr-en-prod-cdnep.azureedge.net/published/2018/4/25/mackere1/sb%2018 - 30. - pdf>

[6] Esrl.noaa.gov。(2020)。ESRL: PSD: NOAA 最优插值(OI)海面温度(SST) V2。[在线下 载] 地 址 :<https://www.esrl.noaa.gov/psd/data/gridded/data.noaa.oisst.v2.html>[2020 年 2 月 17 日 登 陆]。

[7] Davies, D.(2020)。鲭鱼。[在线下载]网址 :<https://sp-bpr-en-prod-cdnep.azureedge.net/published/2018/4/25/Mackere1/SB%2018-30.pdf>[2020 年 2 月 17 日 登 陆]。



关注数学模型
获取更多资讯

附录

快照没有。	日期	相对误差
447	2019.2	7.53%
448	2019.3	16.35%
449	2019.4	18.49%
450	2019.5	14.05%
451	2019.6	11.44%
452	2019.7	10.12%
453	2019.8	8.35%
454	2019.9	4.85%
455	2019.10	12.33%
456	2019.11	20.58%
457	2019.12	23.21%
458	2020.1	17.04%
平均相对误差		13.69%

表:12 个测试快照的相对误差

有道文档翻译
pdf.youdao.com



关注数学模型
获取更多资讯