算法大纲梳理

由于原论文中公式指引过于杂乱，有必要重新梳理一下算法

在算法之前，先给出process function(f)和observation function的定义如下：

$$\mathbf{x}_t = f(\mathbf{x}_{t-1}) = \mathrm{Exp}_{\mathbf{x}_{t-1}}\left(\mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \gamma_{\mathrm{state}}^2 \mathbf{I}\right)\right).$$

$$\mathbf{y}_t \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{x}_t, \gamma_{\mathrm{obs}}^2 \mathbf{I}\right).$$

注意xt经过了exp，因此是在流形上的东西，yt是RN上的东西。当流形是球时，exp的定义如下：

Example 10.21. *On the sphere* S^{n-1}, *the exponential map is (Example 5.37)*

$$v \mapsto \mathrm{Exp}_x(v) = \cos(\|v\|)x + \frac{\sin(\|v\|)}{\|v\|}v.$$

对应的LOG为：

$$y \mapsto \mathrm{Exp}_x^{-1}(y) = \arccos(x^\top y)\frac{u}{\|u\|},$$

注意到该算法是一个迭代形的算法，对于输入的x的均值和方差，输出下一轮的均值和方差即可

1. Use the Riemannian generalisation of the unscented transform to estimate the predicted state mean, $\hat{\mathbf{x}}_t = \mathrm{E}[f(\mathbf{x}_{t-1})]$, and covariance $\hat{\mathbf{P}}_t = \mathrm{cov}[f(\mathbf{x}_{t-1})]$.

、首先要根据输入的均值和方差，利用process function，计算自然运动后的均值和方差估计值，这两个公式分别为：

$$\hat{\mathbf{x}}_t \approx \sum_{m=0}^{2M} w_m f\left(\sigma^{(m)}\right),$$

$$\hat{\mathbf{P}}_t \approx \sum_{m=0}^{2M} w_m \left(f\left(\sigma^{(m)}\right) - \hat{\mathbf{x}}_t\right)\left(f\left(\sigma^{(m)}\right) - \hat{\mathbf{x}}_t\right)^T.$$

我在代码中部署的也是这个。但这个存在严重的问题！具体来讲，f是流形到流形的，因此这样做完x都不一定在流形上了，因此要换成流形版本（TODO)：

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[f(\mathbf{x})\right] &\approx \mu_{\mathcal{M}_2} \\ &= \arg\min_{\mathbf{q}\in\mathcal{M}_2} \sum_{m=0}^{2M} w_m d^2\left(f\left(\sigma_{\mathcal{M}_1}^{(m)}\right), \mathbf{q}\right), \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &\operatorname{cov}\left[f(\mathbf{x})\right] \\ &\approx \sum_{m=0}^{2M} w_m \operatorname{Log}_{\mu_{\mathcal{M}_2}}\left(f\left(\sigma_{\mathcal{M}_1}^{(m)}\right)\right) \operatorname{Log}_{\mu_{\mathcal{M}_2}}\left(f\left(\sigma_{\mathcal{M}_1}^{(m)}\right)\right)^T. \end{aligned}$$

(TODO)注意其中带下标的不是原本sigma point,而是**变化到流形空间过后**的，一定要密切注意在正切空间还是流形空间，因此unsenet函数写多个版本才是合理的;

$$\sigma_{\mathcal{M}}^{(m)} = \operatorname{Exp}_{\bar{\mathbf{x}}}\left(\sigma^{(m)}\right), \quad m = 0, \ldots, 2M$$

cov的计算是自然的（前提LOG要算对），但是E需要推导，这个可以直接求助gpt，让他生成一个函数，计算一堆单位球面上点的球面上均值，自然是可以完成的。目前代码没有实现这个问题

其中权重和sigma点的计算公式为（TODO，没检查过，要检查）：

$$\sigma^{(0)} = \bar{\mathbf{x}} \tag{11}$$

$$\sigma^{(m)} = \bar{\mathbf{x}} \pm \left(\sqrt{(M+\lambda)\mathbf{P}}\right)_m, \quad m = 1, \ldots, 2M, \tag{12}$$

where $(\sqrt{\cdot})_m$ denotes the mth column of the Cholesky decomposition and λ is a parameter for controlling the distance

$$w_0 = \frac{\lambda}{\lambda + M},$$

$$w_m = \frac{1}{2(\lambda + M)}, \quad m = 1, \ldots, 2M.$$

2. Compute the Riemannian generalisation of the unscented transform of $\hat{\mathbf{P}}_t$ to estimate $\hat{\mathbf{y}}_t$, $\mathbf{P}_{\mathbf{yy}}$ and $\mathbf{P}_{\mathbf{xy}}$. Here, $\hat{\mathbf{y}}_t \in \mathcal{M}_{\text{obs}}$, $\mathbf{P}_{\mathbf{yy}}$ describes covariance in $T_{\hat{\mathbf{y}}_t}\mathcal{M}_{\text{obs}}$ and $\mathbf{P}_{\mathbf{xy}}$ describes the cross-covariance between the sigma points in $T_{\hat{\mathbf{x}}_t}\mathcal{M}$ and $T_{\hat{\mathbf{y}}_t}\mathcal{M}_{\text{obs}}$.

这就是要计算yt_hat, Pyy, Pxy，注意着依然没有涉及到新的观测信息yt，只是利用观测方程做一些预估而已.他们的计算公式分别为：

（该问题下观测方程在Rn上，只看简化版本即可）

$$\hat{\mathbf{y}}_t \approx \sum_{m=0}^{2M} w_m h\left(\sigma^{(m)}\right).$$

（因为观测方程在Rn上，不是球面上加噪，所以我可以这么写，不过一定要记住观测值和状态值不在同一个流形空间中）

$$\mathbf{P}_{\mathbf{yy}} \approx \sum_{m=0}^{2M} w_m \left(h\left(\sigma_{\mathcal{M}}^{(m)}\right) - \hat{\mathbf{y}}_t\right)\left(h\left(\sigma_{\mathcal{M}}^{(m)}\right) - \hat{\mathbf{y}}_t\right)^T,$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{xy}} \approx \sum_{m=0}^{2M} w_m \sigma^{(m)} \left(h\left(\sigma_{\mathcal{M}}^{(m)}\right) - \hat{\mathbf{y}}_t\right)^T.$$

（TODO)Pyy就是简单的Rn方差但是带下标，Pxy有的有下标有的没有，这意味着我目前代码还是有问题，需要改这个下标的问题

经验教训：理论文章绝不能有任何地方是觉得难以定义无法理解的

3. Compute state updates $\bar{\mathbf{x}}_t$ and $\mathbf{P}_t$ according to Eqs. (24) and (28). These will be expressed in $T_{\hat{\mathbf{x}}_t}\mathcal{M}$.

注意它后边又不说是24了，所以完整公式如下：

卡尔曼增益：

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}_{\mathbf{xy}} \mathbf{P}_{\mathbf{yy}}^{-1}, \tag{26}$$

方差更新：

$$\mathbf{P}_t = \hat{\mathbf{P}}_t - \mathbf{K} \mathbf{P}_{\mathbf{yy}} \mathbf{K}^T, \tag{28}$$

均值

$$\bar{\mathbf{x}}_t = \hat{\mathbf{x}}_t + \mathbf{K} \operatorname{Log}_{\hat{\mathbf{y}}_t}(\mathbf{y}_t). \tag{38}$$

显然这东西（Pt)和xt都是正切空间上的，xt需要换回到流形上（其实就是把向量看作相对于某一点切向量，然后投影回去，当然实际是用速度和测地线描述的），但问题在于，根据前边定义，方差本就是用正切空间中表示的，似乎不需要投影回去？

4. Move $\bar{\mathbf{x}}_t$ to the manifold as $\operatorname{Exp}_{\hat{\mathbf{x}}_t}(\bar{\mathbf{x}}_t)$ and parallel transport $\mathbf{P}_t$ to the tangent space at this point according to Proposition 1.

第四步有点迷惑，xt没什么好说的，似乎Pt是要从一个点的正切空间中切换到另一个点的正切空间中。这是因为流形中方差的定义居然是和选取点有关的，很不像传统方差，因此需要转换

TODO：完成这个平行传递，gpt的大概率不靠谱，文章中虽然讲了，但大概率不靠谱

综上，主要的问题有：E[f(x)]均值计算错误，sigma下标理解错误，平行传递缺失

次要问题有：检查代码正确性