

多传感器融合定位

第10讲 基于优化的定位方法

主讲人 任 乾

北京理工大学本硕
自动驾驶从业者





目录



1. 基于图优化的定位简介



2. 边缘化原理及应用



3. 基于kitti的实现原理



4. lio-mapping 介绍



目录



1. 基于图优化的定位简介



2. 边缘化原理及应用



3. 基于kitti的实现原理



4. lio-mapping介绍

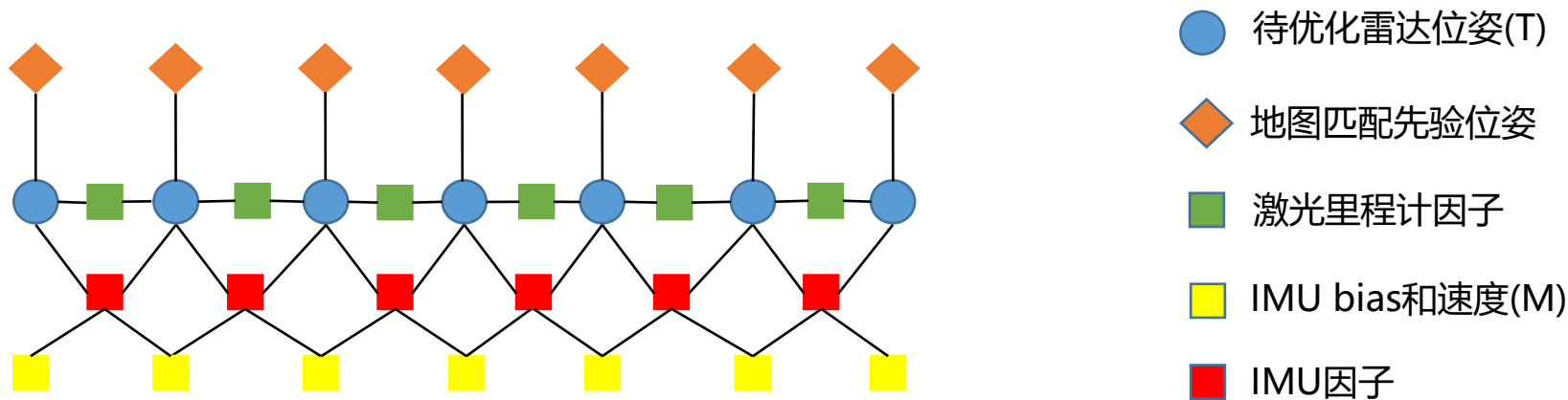


基于图优化的定位流程

1. 核心思路

核心思路是把融合方法从滤波换成图优化，其元素不再是简单的惯性解算，而是预积分。

一个暴力的模型可以设计为：



缺陷：随着时间的进行，图模型会越来越大，导致无法达到实时性。

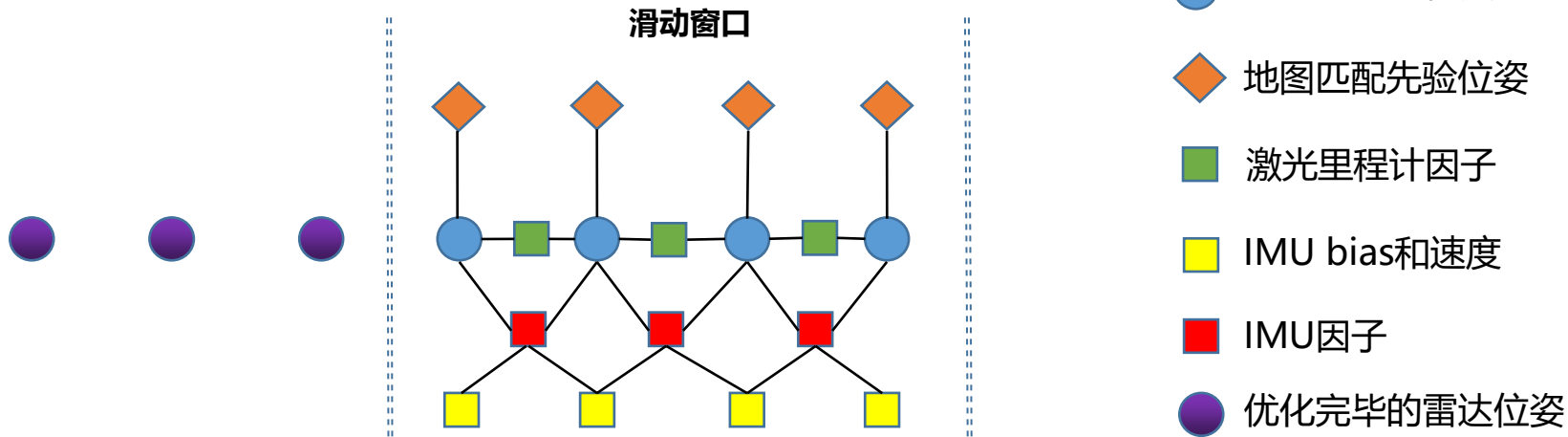


基于图优化的定位流程

1. 核心思路

解决方法：不断删除旧的帧，只优化最新的几帧，即维持一个滑动窗口。

模型如下：



问题：直接从模型中删除，等于损失了信息。

解法：通过模型把旧帧的约束传递下来，即边缘化(后面讲具体细节)。



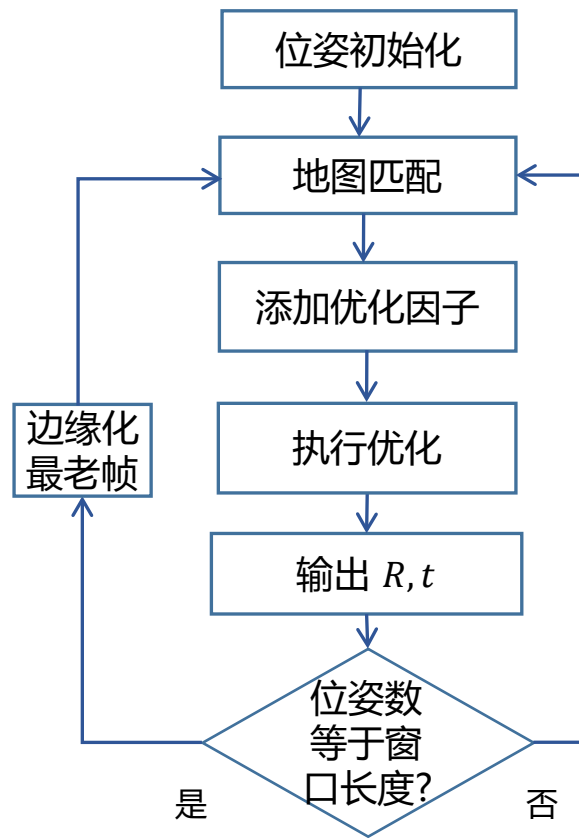
基于图优化的定位流程

2. 定位流程

整个流程：不断往滑窗里添加新信息，并边缘化旧信息。

需要注意的是：

- 1) 正常行驶时，不必像建图那样，提取稀疏的关键帧；
- 2) 停车时，需要按一定策略提取关键帧，但删除的是次新帧，因此不需要边缘化。



基于图优化的定位流程图



目录



1. 基于图优化的定位简介



2. 边缘化原理及应用



3. 基于kitti的实现原理



4. lio-mapping介绍



边缘化原理及应用

1. 边缘化原理

优化问题具有如下通用形式：

$$HX = b$$

并可拆解成如下形式：

$$\begin{bmatrix} H_{mm} & H_{mr} \\ H_{rm} & H_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_m \\ X_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_m \\ b_r \end{bmatrix}$$

拆解的目的是通过一系列操作，把 X_m 从状态量里删除掉，并保留它的约束保留下来。

在滑窗模式里，这个 X_m 即为要边缘化掉的量。

回顾舒尔补：

给定矩阵

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

它可以通过如下变换，变成上三角矩阵，即

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \Delta A \end{bmatrix}$$

其中， $\Delta A = D - CA^{-1}B$ 称为A关于M的舒尔补。



1. 边缘化原理

拆解后的优化问题，可通过舒尔补对矩阵三角化，
即

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} I & 0 \\ -H_{rm}H_{mm}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{mm} & H_{mr} \\ H_{rm} & H_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_m \\ X_r \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -H_{rm}H_{mm}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_m \\ b_r \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

进一步化简得，

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} H_{mm} & H_{mr} \\ 0 & H_{rr} - H_{rm}H_{mm}^{-1}H_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_m \\ X_r \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b_m \\ b_r - H_{rm}H_{mm}^{-1}b_m \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

此时，可以利用等式第2行直接得到：

$$(H_{rr} - H_{rm}H_{mm}^{-1}H_{mr})X_r = b_r - H_{rm}H_{mm}^{-1}b_m$$

其含义为：此时可以不依赖 X_m 求解出 X_r ，
若我们只关心 X_r 的值，则可以把 X_m 从模型里
删除。



2. 从滤波角度理解边缘化

kalman滤波是此前已经熟悉的，从边缘化的角度重新看一遍滤波器的推导，更有利于深入理解。

运动模型与观测模型分别为：

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}_k + \mathbf{w}_k$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k$$

其中 $k = 1 \dots K$

状态量的求解，可以等效为如下模型

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} J(\mathbf{x})$$

其中

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^K (J_{v,k}(\mathbf{x}) + J_{y,k}(\mathbf{x}))$$
$$J_{v,k}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{x}_0 - \check{\mathbf{x}}_0)^T \check{\mathbf{P}}_0^{-1}(\mathbf{x}_0 - \check{\mathbf{x}}_0), k=0 \\ \frac{1}{2}(\mathbf{x}_k - \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{v}_k)^T \\ \times \mathbf{Q}_k^{-1}(\mathbf{x}_k - \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{v}_k), k=1 \dots K \end{cases}$$

$$J_{y,k}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k)^T \mathbf{R}_k^{-1}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k), \quad k=0 \dots K$$

注：此处直接给出结果，具体化简过程可参考《机器人中的状态估计》3.1.2节。



边缘化原理及应用

2. 从滤波角度理解边缘化

将上述模型整理为更简洁的形式，令

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_K \\ \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_K \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & & & & & \\ -\mathbf{A}_0 & \mathbf{1} & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & & -\mathbf{A}_{K-1} & \mathbf{1} & \\ \hline \mathbf{C}_0 & & & & & \\ & \mathbf{C}_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & \mathbf{C}_K & \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{P}}_0 & & & & & \\ & \mathbf{Q}_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \mathbf{Q}_K & & \\ \hline & & & & \mathbf{R}_0 & \\ & & & & & \mathbf{R}_1 \\ & & & & & & \mathbf{R}_K \end{bmatrix}$$



边缘化原理及应用

2. 从滤波角度理解边缘化

此时，目标函数可以重新表示为

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})$$

求解其最小值，即令其一阶导为零

$$\left. \frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \right|_{\hat{\mathbf{x}}} = -\mathbf{H}^T \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$$

即

$$(\mathbf{H}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{H}) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{z}$$

然而，这是批量求解模型，当只关心当前时刻(k时刻)状态时，应改为滤波模型。

假设上一时刻后验为

$$\{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \hat{\mathbf{P}}_{k-1}\}$$

目标是得到当前时刻后验

$$\{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \hat{\mathbf{P}}_{k-1}, \mathbf{v}_k, \mathbf{y}_k\} \mapsto \{\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{P}}_k\}$$



边缘化原理及应用

2. 从滤波角度理解边缘化

由于马尔可夫性，仅与前一时刻有关，因此令

$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \mathbf{v}_k \\ \mathbf{y}_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & & \\ -\mathbf{A}_{k-1} & \mathbf{1} & \\ & & \mathbf{C}_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_k = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{k-1} & & \\ & \mathbf{Q}_k & \\ & & \mathbf{R}_k \end{bmatrix}$$

则模型的解为

$$(\mathbf{H}_k^T \mathbf{W}_k^{-1} \mathbf{H}_k) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}_k^T \mathbf{W}_k^{-1} \mathbf{z}_k$$

其中

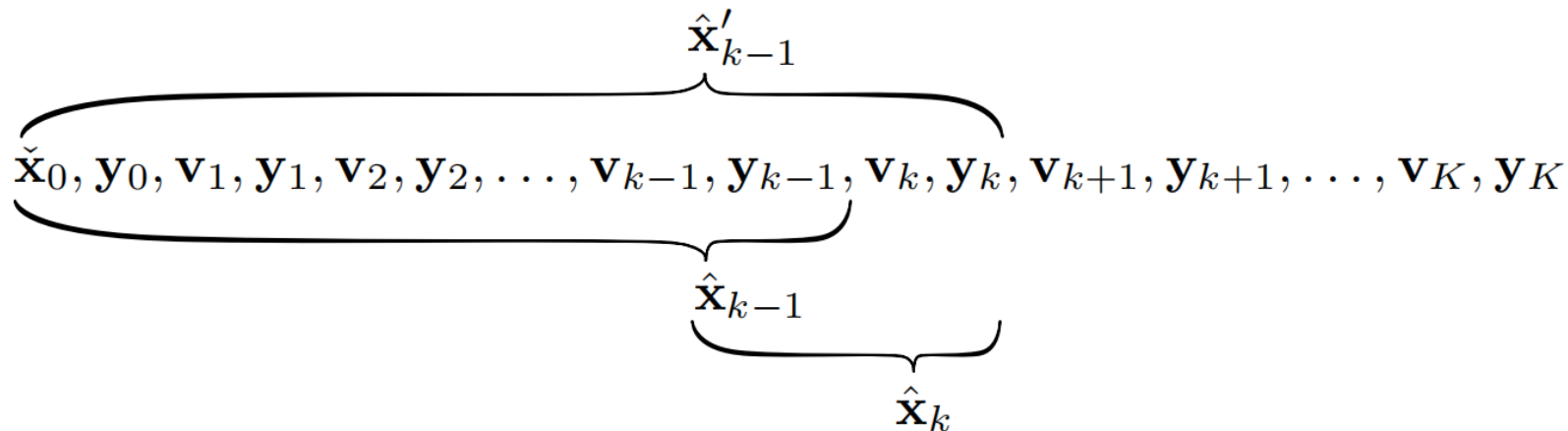
$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}'_{k-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k \end{bmatrix}$$



边缘化原理及应用

2. 从滤波角度理解边缘化

$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ 和 $\hat{\mathbf{x}}'_{k-1}$ 有本质区别，下图可以明确展示





边缘化原理及应用

2. 从滤波角度理解边缘化

在此基础上，求解模型可以展开为

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{k-1}^{-1} + \mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A}_{k-1} & -\mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \\ -\mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A}_{k-1} & \mathbf{Q}_k^{-1} + \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}'_{k-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{v}_k \\ \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{v}_k + \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{y}_k \end{bmatrix}$$

利用舒尔补，等式两边左乘如下矩阵，便可以直接求解出 $\hat{\mathbf{x}}_k$ ，且不需求解 $\hat{\mathbf{x}}'_{k-1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A}_{k-1} \left(\hat{\mathbf{P}}_{k-1}^{-1} + \mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{A}_{k-1} \right)^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$



边缘化原理及应用

2. 从滤波角度理解边缘化

可得：

$$\hat{\mathbf{P}}_k^{-1} \hat{\mathbf{x}}_k = \check{\mathbf{P}}_k^{-1} (\mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{v}_k) + \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{y}_k$$

其中

$$\check{\mathbf{P}}_k = \mathbf{Q}_k + \mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{P}}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1}^T$$

$$\hat{\mathbf{P}}_k = (\check{\mathbf{P}}_k^{-1} + \mathbf{C}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{C}_k)^{-1}$$

注：此处直接给出结果，具体化简过程可参考《机器人中的状态估计》3.3.2节。



边缘化原理及应用

2. 从滤波角度理解边缘化

以上过程，核心即为边缘化，因此滤波(IEKF)可以看做长度为1的滑动窗口。

Gauss-Newton iterates over the entire trajectory, but runs offline and not in constant time

$\mathbf{x}_0 \quad \mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_{k-2} \quad \mathbf{x}_{k-1} \quad \mathbf{x}_k \quad \mathbf{x}_{k+1} \quad \mathbf{x}_{k+2} \quad \cdots \quad \mathbf{x}_K$



Sliding-window filters iterate over several timesteps at once, run online and in constant time

$\mathbf{x}_0 \quad \mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_{k-2} \quad \mathbf{x}_{k-1} \quad \mathbf{x}_k \quad \mathbf{x}_{k+1} \quad \mathbf{x}_{k+2} \quad \cdots \quad \mathbf{x}_K$



IEKF iterates at only one timestep at a time, but runs online and in constant time

$\mathbf{x}_0 \quad \mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_{k-2} \quad \mathbf{x}_{k-1} \quad \mathbf{x}_k \quad \mathbf{x}_{k+1} \quad \mathbf{x}_{k+2} \quad \cdots \quad \mathbf{x}_K$





目录



1. 基于图优化的定位简介



2. 边缘化原理及应用



3. 基于kitti的实现原理



4. lio-mapping介绍



基于kitti的实现原理

1. 基于地图定位的滑动窗口模型

1) 窗口优化模型构成

在图优化模型中，优化模型也可写成如下形式：

$$\mathbf{J}^\top \Sigma \mathbf{J} \delta \mathbf{x} = -\mathbf{J}^\top \Sigma \mathbf{r}$$

其中

\mathbf{r} 是残差；

\mathbf{J} 是残差关于状态量的雅可比；

Σ 是信息矩阵。

在kitti工程中，基于地图定位的滑动窗口，其残差包括：

- 地图匹配位姿和优化变量的残差
- 激光里程计相对位姿和优化变量的残差
- IMU预积分和优化变量的残差
- 边缘化形成的先验因子对应的残差

此处先介绍前3项，第4项待边缘化后介绍。



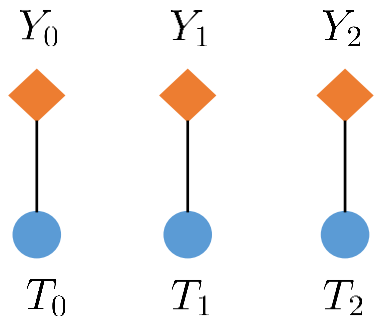
基于kitti的实现原理

1. 基于地图定位的滑动窗口模型

2) 地图匹配位姿和优化变量的残差

该残差对应的因子为地图先验因子。

一个因子仅约束一个位姿，其模型如下：



残差关于优化变量的雅可比，可视化如下：

	T_0	M_0	T_1	M_1	T_2	M_2
r_{Y0}						
r_{Y1}						
r_{Y2}						

因此，对应的Hessian矩阵的可视化：

	T_0	M_0	T_1	M_1	T_2	M_2
T_0						
M_0						
T_1						
M_1						
T_2						
M_2						



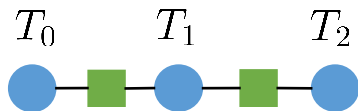
基于kitti的实现原理

1. 基于地图定位的滑动窗口模型

3) 激光里程计相对位姿和优化变量的残差

该残差对应的因子为激光里程计因子。

一个因子约束两个位姿，其模型如下：



残差关于优化变量的雅可比，可视化如下：

	T_0	M_0	T_1	M_1	T_2	M_2
r_{L0}						
r_{L1}						

因此，对应的Hessian矩阵可视化为：

	T_0	M_0	T_1	M_1	T_2	M_2
T_0						
M_0						
T_1						
M_1						
T_2						
M_2						



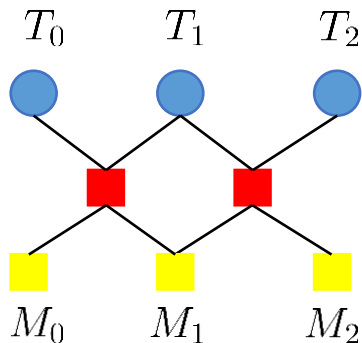
基于kitti的实现原理

1. 基于地图定位的滑动窗口模型

4) IMU预积分和优化变量的残差

该残差对应的因子为IMU因子。

一个因子约束两个位姿，并约束两个时刻 IMU 的速度与 bias。



残差关于优化变量的雅可比，可视化如下：

	T_0	M_0	T_1	M_1	T_2	M_2
r_{M0}						
r_{M1}						

因此，对应的Hessian矩阵可视化为：

	T_0	M_0	T_1	M_1	T_2	M_2
T_0						
M_0						
T_1						
M_1						
T_2						
M_2						

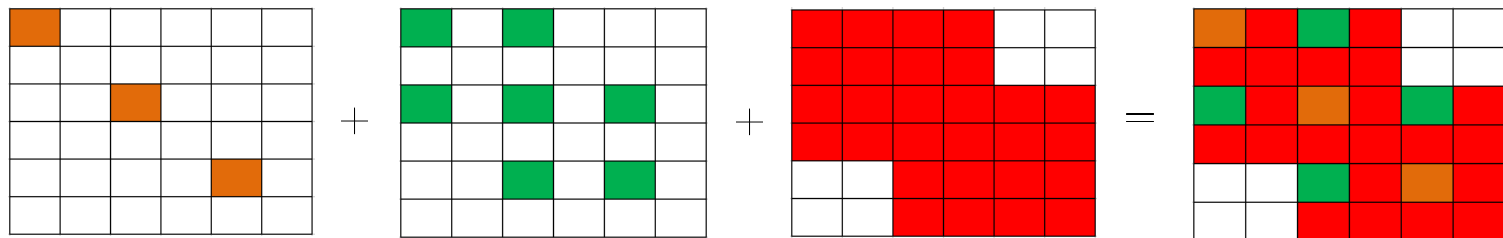


基于kitti的实现原理

1. 基于地图定位的滑动窗口模型

5) 完整模型

完整Hessian矩阵，即为以上各因子对应矩阵的累加。





基于kitti的实现原理

1. 基于地图定位的滑动窗口模型

5) 完整模型

上述过程用公式可表示为：

$$\underbrace{\mathbf{J}^\top \Sigma \mathbf{J}}_{\mathbf{H}} \delta \mathbf{x} = - \underbrace{\mathbf{J}^\top \Sigma \mathbf{r}}_{\mathbf{b}}$$

其中

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{Y0} \\ \mathbf{r}_{Y1} \\ \mathbf{r}_{Y2} \\ \mathbf{r}_{L0} \\ \mathbf{r}_{L1} \\ \mathbf{r}_{M0} \\ \mathbf{r}_{M1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \delta \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_{Y0}}{\partial \delta \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{Y1}}{\partial \delta \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{Y2}}{\partial \delta \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{L0}}{\partial \delta \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{L1}}{\partial \delta \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{M0}}{\partial \delta \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{M1}}{\partial \delta \mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}_3 \\ \mathbf{J}_4 \\ \mathbf{J}_5 \\ \mathbf{J}_6 \\ \mathbf{J}_7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}^\top = [\mathbf{J}_1^\top \quad \mathbf{J}_2^\top \quad \mathbf{J}_3^\top \quad \mathbf{J}_4^\top \quad \mathbf{J}_5^\top \quad \mathbf{J}_6^\top \quad \mathbf{J}_7^\top]$$

矩阵乘法写成累加形式为：

$$\sum_{i=1}^7 \mathbf{J}_i^\top \Sigma_i \mathbf{J}_i \delta \mathbf{x} = - \sum_{i=1}^7 \mathbf{J}_i^\top \Sigma_i \mathbf{r}_i$$

此累加过程，即对应前面可视化时各矩阵叠加。

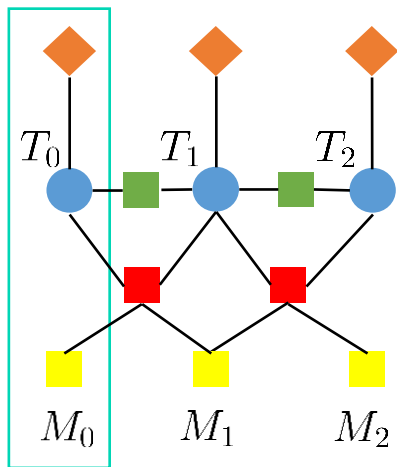


基于kitti的实现原理

2. 边缘化过程

1) 移除老的帧

假设窗口长度为3，在加入新的帧之前，需要先边缘化掉老的帧，即下图方框中的变量。



用前述公式，可以表示为

$$(H_{rr} - H_{rm}H_{mm}^{-1}H_{mr})\delta x_r = b_r - H_{rm}H_{mm}^{-1}b_m$$

但是在实际代码中，会把它拆成两步实现。



基于kitti的实现原理

2. 边缘化过程

1) 移除老的帧

第一步：使用和要边缘化掉的量无关的因子，构建剩余变量对应的Hessian矩阵。

$$H_{rr}^a$$

	T_1	M_1	T_2	M_2
T_1	orange	red	green	red
M_1	red	red	red	red
T_2	green	red	orange	red
M_2	red	red	red	red

上标 a 代表是第一步中的变量，包含Hessian矩阵的完整表达式为

$$H_{rr}^a \delta x_r = b_r^a$$

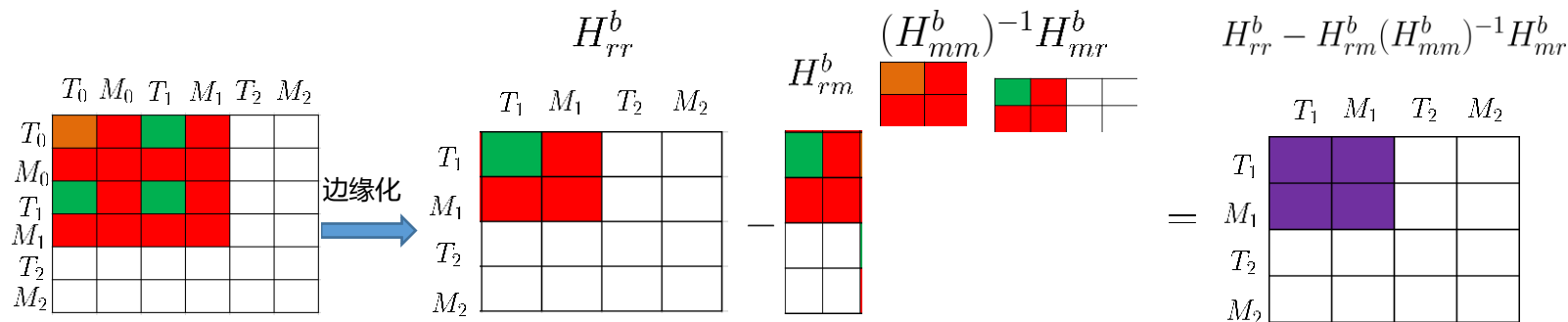


基于kitti的实现原理

2. 边缘化过程

1) 移除老的帧

第二步：挑出和要边缘化掉的量相关的因子，构建待边缘化的Hessian矩阵，并使用舒尔补做边缘化。



上标 b 代表是第二步中的变量，包含Hessian矩阵的完整表达式为

$$\left[H_{rr}^b - H_{rm}^b (H_{mm}^b)^{-1} H_{mr}^b \right] \delta x_r = b_r^b - H_{rm}^b (H_{mm}^b)^{-1} b_m^b$$

这一步形成的约束(上式)就叫先验因子，它包含了边缘化掉的量对剩余变量的约束关系。



基于kitti的实现原理

2. 边缘化过程

1) 移除老的帧

最终使用的是两步的叠加，Hessian矩阵叠加的可视化如下

$$H_{rr}^a + H_{rr}^b - H_{rm}^b (H_{mm}^b)^{-1} H_{mr}^b$$

	T_1	M_1	T_2	M_2
T_1				
M_1				
T_2				
M_2				

+

	T_1	M_1	T_2	M_2
T_1				
M_1				
T_2				
M_2				

=

	T_1	M_1	T_2	M_2
T_1				
M_1				
T_2				
M_2				

对应的完整公式为

$$H_{rr} \delta x_r = b_r$$

其中

$$H_{rr} = H_{rr}^a + H_{rr}^b - H_{rm}^b (H_{mm}^b)^{-1} H_{mr}^b$$

$$b_r = b_r^a + b_r^b - H_{rm}^b (H_{mm}^b)^{-1} b_m^b$$

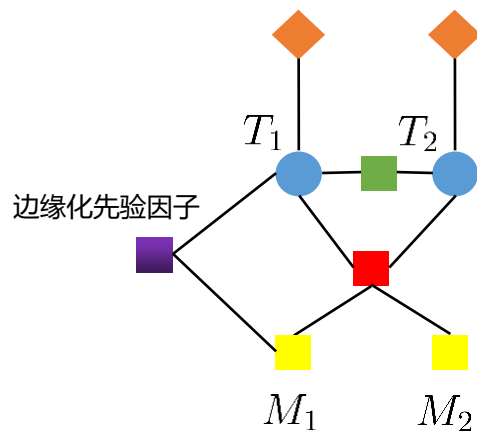


基于kitti的实现原理

2. 边缘化过程

1) 移除老的帧

边缘化之后，模型如下：



注意：边缘化先验因子只有在第一次边缘化之前是不存在的，完成第一次边缘化之后就一直存在，并且随着后续新的边缘化进行，其内容不断更新。

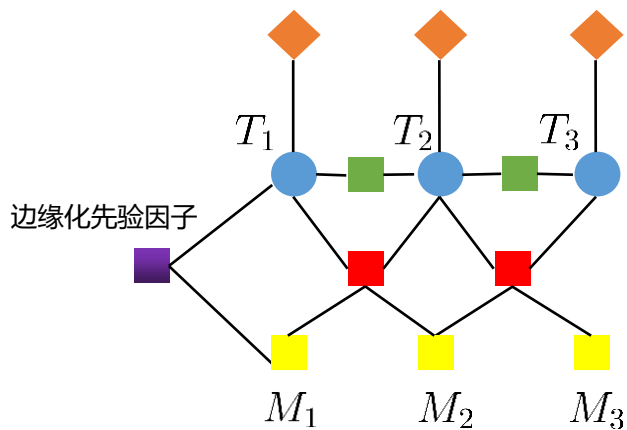


基于kitti的实现原理

2. 边缘化过程

2) 添加新的帧

添加新的帧之后，模型如下：



此处直接给出新的Hessian矩阵可视化结果：

	T_1	M_1	T_2	M_2	T_3	M_3
T_1						
M_1						
T_2						
M_2						
T_3						
M_3						

此后，随着定位过程的进行，便不断循环“边缘化老帧->添加新帧”的过程，从而维持窗口长度不变。

该过程的代码实现可参考后面lio-mapping的实现，理解后者便很容易实现前者。



目录



1. 基于图优化的定位简介



2. 边缘化原理及应用



3. 基于kitti的实现原理

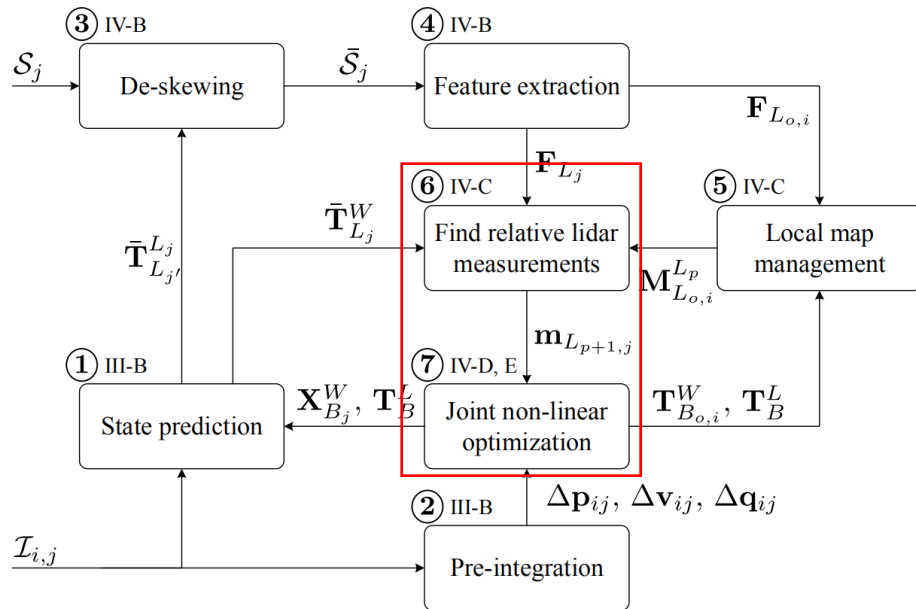


4. lio-mapping介绍



lio-mapping 介绍

1. 核心思想



基于滑动窗口方法，把雷达线/面特征、IMU预积分等的约束放在一起进行优化。



lio-mapping 介绍

1. 核心思想

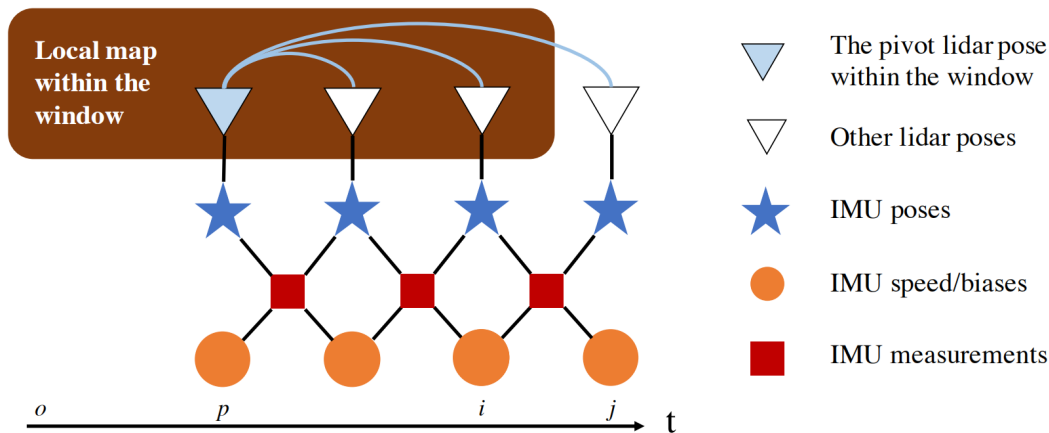
1) o 到 i 是滑窗;

2) 只有 p 到 i 的位姿在滑窗中优化;

3) o 到 p 是为了构建局部地图, 防止地图过于稀疏;

4) 局部地图都投影到 p 的位姿处;

5) 滑窗中点云约束是当前优化帧和局部地图特征匹配, 因此特征对应的因子约束的是 p 帧和 k 帧($p < k \leq j$).





lio-mapping 介绍

1. 核心思想

其优化模型为

$$\min_{\mathbf{X}} \frac{1}{2} \left\{ \|\mathbf{r}_{\mathcal{P}}(\mathbf{X})\|^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbf{m}_{L_\alpha} \\ \alpha \in \{p+1, \dots, j\}}} \|\mathbf{r}_{\mathcal{L}}(m, \mathbf{X})\|_{\mathbf{C}_{L_\alpha}^m}^2 + \sum_{\beta \in \{p, \dots, j-1\}} \left\| \mathbf{r}_{\mathcal{B}}(z_{\beta+1}^\beta, \mathbf{X}) \right\|_{\mathbf{C}_{B_{\beta+1}}^{B_\beta}}^2 \right\}$$

其中

$\mathbf{r}_{\mathcal{P}}(\mathbf{X})$ 是边缘化产生的先验因子对应的残差；

$\mathbf{r}_{\mathcal{L}}(m, \mathbf{X})$ 是点云特征匹配对应的残差；

$\mathbf{r}_{\mathcal{B}}(z_{\beta+1}^\beta, \mathbf{X})$ 是IMU约束对应的残差。



lio-mapping 介绍

2. 具体流程

流程讲解思路：

- 以前述kitti中实现原理为基础，此处只是多了点云特征的约束；
- 只介绍可借鉴的内容，因此不介绍bias、外参初始化和外参优化等内容。



lio-mapping 介绍

2. 具体流程

2.1 各类因子

1) 定义IMU 因子

- 1) 残差为 15 维, 分别是 $P(3)$ 、 $Q(3)$ 、 $V(3)$ 、 $Ba(3)$ 、 $Bg(3)$
- 2) 第一个参数块 7 维, 包含 k 时刻 P 、 Q
- 3) 第二个参数块 9 维, 包含 k 时刻 V 、 Ba 、 Bg
- 4) 第三个参数块 7 维, 包含 $k+1$ 时刻 P 、 Q
- 5) 第四个参数块 9 维, 包含 $k+1$ 时刻 V 、 Ba 、 Bg

```
class ImuFactor : public ceres::SizedCostFunction<15, 7, 9, 7, 9> {  
  
public:  
    ImuFactor() = delete;  
    ImuFactor(std::shared_ptr<IntegrationBase> pre_integration) : pre_integration_{  
        pre_integration} {  
        // NOTE: g_vec_ is the gravity in laser's original frame  
        g_vec_ = pre_integration->g_vec_;  
    }  
    virtual bool Evaluate(double const *const *parameters, double *residuals, double **jacobians) const { ...  
  
    std::shared_ptr<IntegrationBase> pre_integration_  
    Eigen::Vector3d g_vec_  
  
    const double eps_ = 10e-8;  
  
};
```

Evaluate函数内部为计算残差和雅可比, 与之前预积分公式推导一致, 不再展开讲解。



lio-mapping 介绍

2. 具体流程

2) 添加imu因子

```
if (estimator_config.imu_factor) {  
    for (int i = 0; i < estimator_config.opt_window_size; ++i) {  
        int j = i + 1;  
        int opt_i = int(estimator_config.window_size -  
            | | | | | estimator_config.opt_window_size + i);  
        int opt_j = opt_i + 1;  
        if (pre_integrations_[opt_j]->sum_dt_ > 10.0) {  
            continue;  
        }  
  
        auto *f = new ImuFactor(pre_integrations_[opt_j]);  
  
        // TODO: is it better to use g_vec_ as global parameter?  
        ceres::internal::ResidualBlock *res_id = problem.AddResidualBlock(  
            f, nullptr, para_pose_[i], para_speed_bias_[i], para_pose_[j],  
            para_speed_bias_[j]);  
        res_ids_pim.push_back(res_id);  
    }  
}
```

从p帧处开始取，o和p之间的不优化

约束相邻两时刻各自的P、Q、V、Ba、Bg



lio-mapping 介绍

2. 具体流程

3) 定义点云面特征因子

- 1) 残差为 1 维，即点到面的距离
- 2) 第一个参数块 7 维，包含 p 时刻 P、Q
- 3) 第二个参数块 7 维，包含 k 时刻 P、Q
- 4) 第三个参数块 7 维，为外参的 P、Q

```
class PivotPointPlaneFactor : public ceres::SizedCostFunction<1, 7, 7, 7> {  
  
public:  
    PivotPointPlaneFactor(const Eigen::Vector3d &point,  
                           const Eigen::Vector4d &coeff);  
    virtual bool Evaluate(double const *const *parameters, double *residuals, double **jacobians) const;  
    void Check(double **parameters);  
  
    Eigen::Vector3d point_;  
    Eigen::Vector4d coeff_;  
  
    // TODO: necessary?  
    // static Eigen::Matrix3d sqrt_info;  
    static double sum_t;  
  
    EIGEN_MAKE_ALIGNED_OPERATOR_NEW  
  
};
```

Evaluate函数内部为计算残差和雅可比，残差与第三讲一致，雅可比采用李代数推导。



lio-mapping 介绍

2. 具体流程

4) 添加点云面特征

```
for (auto &feature : features) {  
    PointPlaneFeature feature_j;  
    feature->GetFeature(&feature_j);  
  
    const double &s = feature_j.score;  
  
    const Eigen::Vector3d &p_eigen = feature_j.point;  
    const Eigen::Vector4d &coeff_eigen = feature_j.coeffs;  
    // 第一个, 也就是p帧  
    if (i == 0) {  
    } else {  
        auto *f = new PivotPointPlaneFactor(p_eigen, coeff_eigen);  
        ceres::internal::ResidualBlock *res_id = problem.AddResidualBlock(  
            f, loss_function,  
            // NULL,  
            para_pose_[0], para_pose_[i], para_ex_pose_);  
        res_ids_proj.push_back(res_id);  
    }  
}
```

每个特征对应一个因子

两个时刻的位姿以及外参



lio-mapping 介绍

2. 具体流程

5) 定义边缘化先验因子

```
class MarginalizationFactor : public ceres::CostFunction {
public:
    MarginalizationFactor(MarginalizationInfo* _marginalization_info);
    virtual bool Evaluate(double const* const* parameters, double* residuals, double** jacobians) const;

    MarginalizationInfo* marginalization_info;
};
```

由于不确定边缘化后会和哪些量产生关联，因此没有固定size。

其详细内容待讲解边缘化实现时再展开。



lio-mapping 介绍

2. 具体流程

6) 添加边缘化先验因子

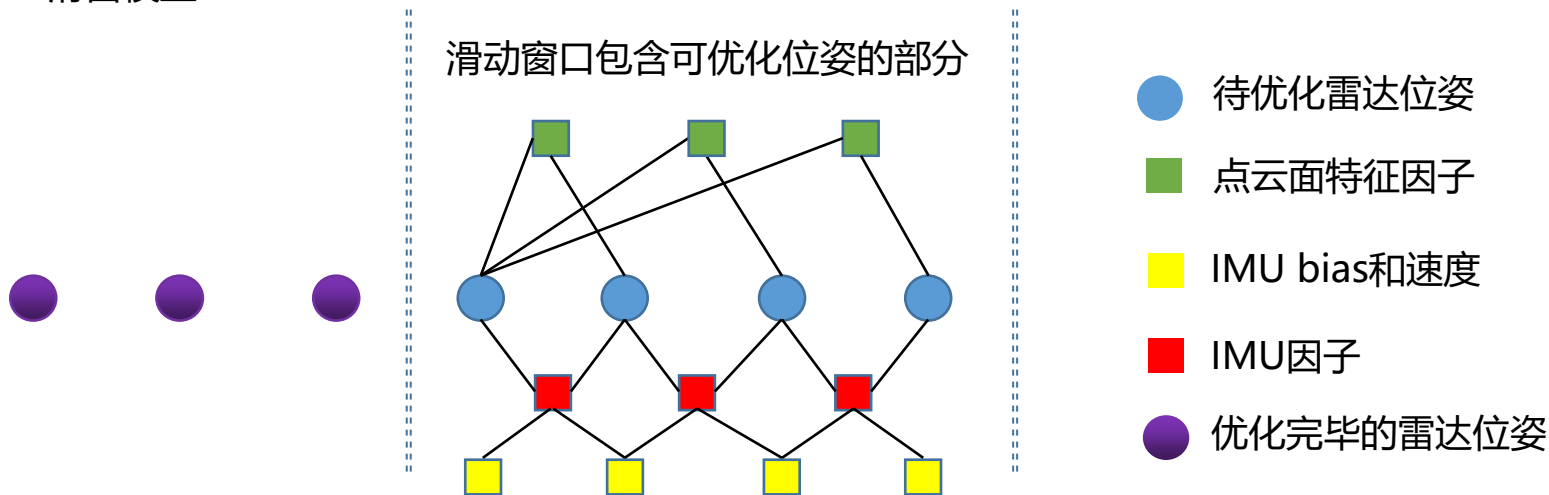
```
// region 边缘化
if (estimator_config.marginalization_factor) {
    if (last_marginalization_info) {
        // construct new marginalization_factor
        auto *marginalization_factor =
            new MarginalizationFactor(last_marginalization_info);
        //向问题中添加误差项
        res_id_marg =
            problem.AddResidualBlock(marginalization_factor, nullptr,
                                     last_marginalization_parameter_blocks);
        res_ids_marg.push_back(res_id_marg);
    }
}
```



lio-mapping 介绍

2. 具体流程

2.2. 滑窗模型



- 帧与帧之间通过特征约束，因此没有了激光里程计因子。
- 当前模型中没有使用点云的线特征。



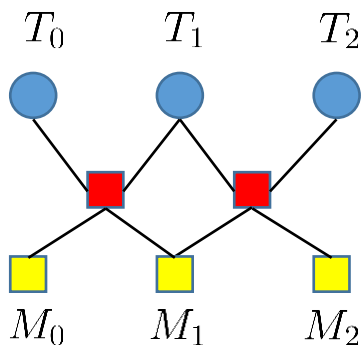
lio-mapping 介绍

2. 具体流程

2.2. 滑窗模型

1) IMU预积分和优化变量的残差

一个因子约束两个位姿，并约束两个时刻 IMU 的速度与 bias



残差关于优化变量的雅可比可视化如下

	T_0	M_0	T_1	M_1	T_2	M_2
r_{M0}						
r_{M1}						

因此对应的Hessian矩阵的可视化

	T_0	M_0	T_1	M_1	T_2	M_2
T_0						
M_0						
T_1						
M_1						
T_2						
M_2						



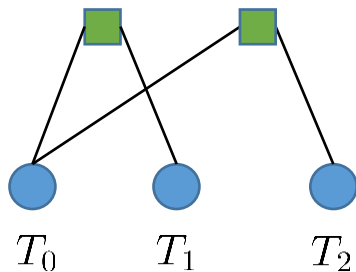
lio-mapping 介绍

2. 具体流程

2.2. 滑窗模型

2) 点云面特征对应的残差

一个因子约束两个位姿



残差关于优化变量的雅可比可视化如下

	T_0	M_0	T_1	M_1	T_2	M_2
r_{F0}						
r_{F1}						

因此对应的Hessian矩阵的可视化

	T_0	M_0	T_1	M_1	T_2	M_2
T_0						
M_0						
T_1						
M_1						
T_2						
M_2						

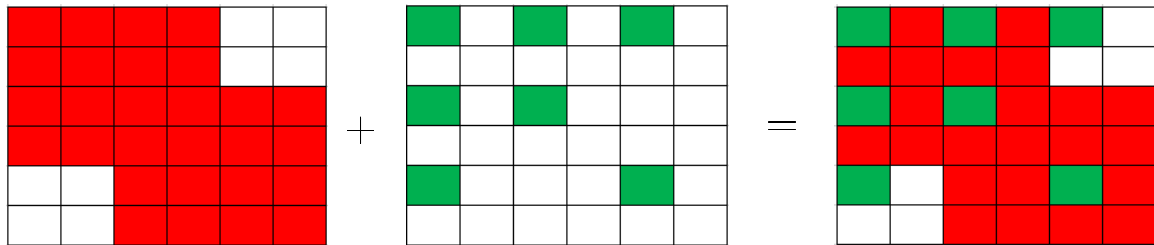


lio-mapping 介绍

2. 具体流程

2.2. 滑窗模型

4) 完整模型



以上工程，就是前述代码中添加各类因子到模型的过程。

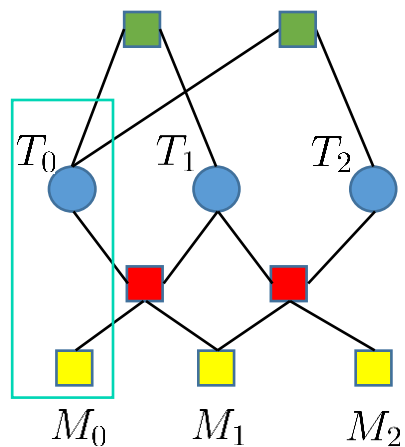


lio-mapping 介绍

2. 具体流程

2.3. 边缘化

1) 边缘化模型



需要边缘化掉的为方框中的变量



lio-mapping 介绍

2. 具体流程

2.3. 边缘化

2) 边缘化可视化

第一步：使用和要边缘化掉的量无关的因子，构建剩余变量对应的Hessian矩阵。

$$H_{rr}^a$$

	T_1	M_1	T_2	M_2
T_1				
M_1				
T_2				
M_2				



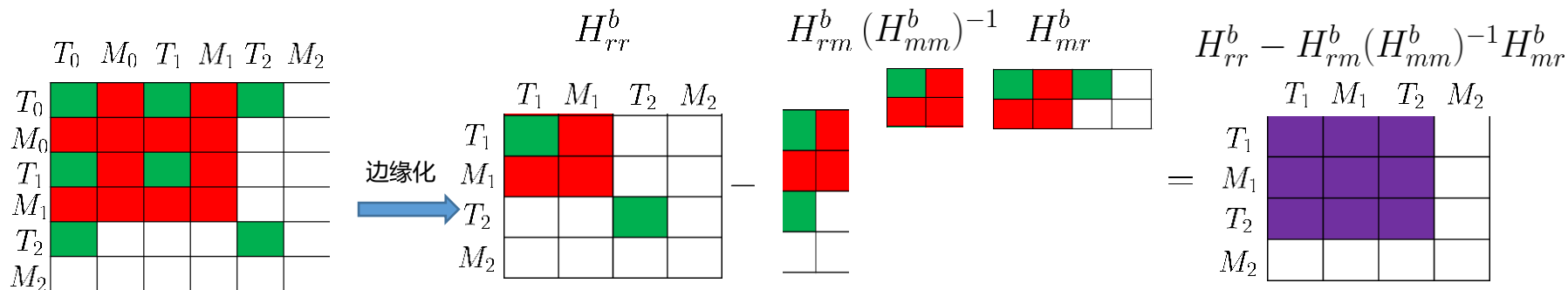
lio-mapping 介绍

2. 具体流程

2.3. 边缘化

2) 边缘化可视化

第二步：挑出和要边缘化掉的量相关的因子，构建待边缘化的Hessian矩阵，并使用舒尔补做边缘化。





2. 具体流程

2.3. 边缘化

2) 边缘化可视化

对应的完整Hessian矩阵就是他们合在一起的结果。

$$\begin{array}{c} H_{rr}^a \\ T_1 \quad M_1 \quad T_2 \quad M_2 \end{array}
\quad
\begin{array}{c} H_{rr}^b - H_{rm}^b (H_{mm}^b)^{-1} H_{mr}^b \\ T_1 \quad M_1 \quad T_2 \quad M_2 \end{array}
\quad
= \quad
\begin{array}{c} H_{rr}^a + H_{rr}^b - H_{rm}^b (H_{mm}^b)^{-1} H_{mr}^b \\ T_1 \quad M_1 \quad T_2 \quad M_2 \end{array}$$



lio-mapping 介绍

2. 具体流程

2.3. 边缘化

3) 边缘化实现

核心思路是把要边缘化掉的变量，以及跟这些变量被同一个因子约束的变量，汇总在一起。

三个函数：

- void addResidualBlockInfo()
- void preMarginalize()
- void marginalize()

五个变量：

- parameter_block_size: 每个变量的维度
- parameter_block_data: 每个变量的数据
- parameter_block_idx: 每个变量在H矩阵中的索引
- m: 需要marg掉的变量的总维度
- n: 需要保留的变量的总维度

```
class MarginalizationInfo {
public:
    ~MarginalizationInfo();
    int LocalSize(int size) const;
    int GlobalSize(int size) const;
    void AddResidualBlockInfo(ResidualBlockInfo *residual_block_info);
    void PreMarginalize();
    void Marginalize();
    std::vector<double *> GetParameterBlocks(std::unordered_map<long, double *> &addr_shift);

    std::vector<ResidualBlockInfo *> factors;
    int m, n;
    std::unordered_map<long, int> parameter_block_size; //global size
    int sum_block_size;
    std::unordered_map<long, int> parameter_block_idx; //local size
    std::unordered_map<long, double *> parameter_block_data;

    std::vector<int> keep_block_size; //global size
    std::vector<int> keep_block_idx; //local size
    std::vector<double *> keep_block_data;

    Eigen::MatrixXd linearized_jacobians;
    Eigen::VectorXd linearized_residuals;
    const double eps = 1e-8;
};
```



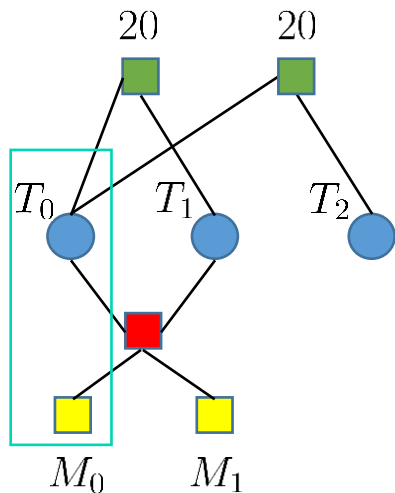
lio-mapping 介绍

2. 具体流程

2.3. 边缘化

3) 边缘化实现

在该例中，把和模型无关的量去除，剩余部分如下(设每帧有20个面特征)



因此，放入MarginalizationInfo中的信息包括：

5个变量： T_0 M_0 T_1 M_1 T_2

41个因子：40个面特征因子、1个IMU因子

(此处假设的是第一次进行边缘化，若不是第一次，因子中还应该有边缘化先验因子)



lio-mapping 介绍

2. 具体流程

2.3. 边缘化

3) 边缘化实现

找出所有变量后，需要知道哪些是应该边缘化的，哪些是应该保留的。

右图代码中，形参里_parameter_blocks包含所有相关参数，而_drop_set即为这些参数中要边缘化掉的参数的id。

```
struct ResidualBlockInfo {
    ResidualBlockInfo(ceres::CostFunction *_cost_function,
                     ceres::LossFunction *_loss_function,
                     std::vector<double *> _parameter_blocks,
                     std::vector<int> _drop_set)
        : cost_function(_cost_function),
          loss_function(_loss_function),
          parameter_blocks(_parameter_blocks),
          drop_set(_drop_set) {}

    void Evaluate();

    ceres::CostFunction *_cost_function;
    ceres::LossFunction *_loss_function;
    std::vector<double *> parameter_blocks;
    std::vector<int> drop_set;

    double **raw_jacobians;
    std::vector<Eigen::Matrix<double, Eigen::Dynamic, Eigen::Dynamic, Eigen::RowMajor>> jacobians;
    Eigen::VectorXd residuals;

    int localSize(int size) {
        return size == 7 ? 6 : size;
    }
};
```



lio-mapping 介绍

2. 具体流程

2.3. 边缘化

3) 边缘化实现

添加和IMU因子相关的ResidualBlockInfo

```
if (estimator_config.imu_factor) {  
    int pivot_idx =  
        estimator_config.window_size - estimator_config.opt_window_size;  
    if (pre_integrations_[pivot_idx + 1]->sum_dt_ < 10.0) {  
        auto *imu_factor = new ImuFactor(pre_integrations_[pivot_idx + 1]);  
        auto *residual_block_info = new ResidualBlockInfo(  
            imu_factor, NULL,  
            vector<double*>{para_pose[0], para_speed_bias[0], para_pose[1],  
                           para_speed_bias[1]},  
            vector<int>{0, 1});  
        marginalization_info->AddResidualBlockInfo(residual_block_info);  
    }  
}
```

drop_set取0和1, 就代表要边缘化掉 T_0 和 M_0



lio-mapping 介绍

2. 具体流程

2.3. 边缘化

3) 边缘化实现 添加和面特征因子相关的ResidualBlockInfo

```
for (auto &feature : features) {  
    PointPlaneFeature feature_j;  
    feature->GetFeature(&feature_j);  
  
    const double &s = feature_j.score;  
  
    const Eigen::Vector3d &p_eigen = feature_j.point;  
    const Eigen::Vector4d &coeff_eigen = feature_j.coeffs;  
  
    auto *pivot_point_plane_factor =  
        new PivotPointPlaneFactor(p_eigen, coeff_eigen);  
  
    auto *residual_block_info = new ResidualBlockInfo(  
        pivot_point_plane_factor, loss_function,  
        vector<double *>{para_pose[0], para_pose[i], para_ex_pose_},  
        vector<int>{0});  
    marginalization_info->AddResidualBlockInfo(residual_block_info);  
}
```

drop_set取0, 代表只边缘化第p帧



lio-mapping 介绍

2. 具体流程

2.3. 边缘化

3) 边缘化实现

在添加以上ResidualBlockInfo的同时，核心变量parameter_block_size 就被赋值。

```
void MarginalizationInfo::AddResidualBlockInfo(ResidualBlockInfo *residual_block_info) {
    factors.emplace_back(residual_block_info);

    std::vector<double *> &parameter_blocks = residual_block_info->parameter_blocks;
    std::vector<int> parameter_block_sizes = residual_block_info->cost_function->parameter_block_sizes();

    for (int i = 0; i < static_cast<int>(residual_block_info->parameter_blocks.size()); i++) {
        double *addr = parameter_blocks[i];
        int size = parameter_block_sizes[i];
        parameter_block_size[reinterpret_cast<long>(addr)] = size;
    }

    for (int i = 0; i < static_cast<int>(residual_block_info->drop_set.size()); i++) {
        double *addr = parameter_blocks[residual_block_info->drop_set[i]];
        parameter_block_idx[reinterpret_cast<long>(addr)] = 0;
    }
}
```



lio-mapping 介绍

2. 具体流程

2.3. 边缘化

3) 边缘化实现

第二个核心函数的作用是计算每个因子对应的变量(parameter_blocks)、误差项(residuals)、雅可比矩阵(jacobians), 并把变量数值放到parameter_block_data中。

```
void MarginalizationInfo::PreMarginalize() {
    for (auto it : factors) {
        it->Evaluate();

        std::vector<int> block_sizes = it->cost_function->parameter_block_sizes();
        for (int i = 0; i < static_cast<int>(block_sizes.size()); i++) {
            long addr = reinterpret_cast<long>(it->parameter_blocks[i]);
            int size = block_sizes[i];
            if (parameter_block_data.find(addr) == parameter_block_data.end()) {
                double *data = new double[size];
                memcpy(data, it->parameter_blocks[i], sizeof(double) * size);
                parameter_block_data[addr] = data;
            }
        }
    }
}
```




lio-mapping 介绍

2. 具体流程

2.3. 边缘化

3) 边缘化实现

第三个核心函数的作用构建Hessian矩阵，Schur掉需要marg的变量，得到对剩余变量的约束，即为边缘化约束（先验约束）。

函数的前半部分，对m、n和
parameter_block_idx 这三个核心变量
进行了赋值。

```
void MarginalizationInfo::Marginalize() {  
    int pos = 0;  
    for (auto &it : parameter_block_idx) {  
        it.second = pos;  
        pos += LocalSize(parameter_block_size[it.first]);  
    }  
  
    m = pos;  
  
    for (const auto &it : parameter_block_size) {  
        if (parameter_block_idx.find(it.first) == parameter_block_idx.end()) {  
            parameter_block_idx[it.first] = pos;  
            pos += LocalSize(it.second);  
        }  
    }  
  
    n = pos - m;  
}
```



lio-mapping 介绍

2. 具体流程

2.3. 边缘化

3) 边缘化实现

函数的中间部分开始构建Hessian 矩阵,
由于使用多线程, 因此要给不同的线程
平均分配因子。

```
//multi thread
TicToc t_thread_summing;
pthread_t tids[NUM_THREADS];
ThreadsStruct threadsstruct[NUM_THREADS];
int i = 0;
for (auto it : factors) {
    threadsstruct[i].sub_factors.push_back(it);
    i++;
    i = i % NUM_THREADS;
}
for (int i = 0; i < NUM_THREADS; i++) {
    TicToc zero_matrix;
    threadsstruct[i].A = Eigen::MatrixXd::Zero(pos, pos);
    threadsstruct[i].b = Eigen::VectorXd::Zero(pos);
    threadsstruct[i].parameter_block_size = parameter_block_size;
    threadsstruct[i].parameter_block_idx = parameter_block_idx;
    int ret = pthread_create(&tids[i], NULL, ThreadsConstructA, (void *) &(threadsstruct[i]));
    if (ret != 0) {
        ROS_DEBUG("pthread_create error");
        ROS_BREAK();
    }
}
for (int i = NUM_THREADS - 1; i >= 0; i--) {
    pthread_join(tids[i], NULL);
    A += threadsstruct[i].A;
    b += threadsstruct[i].b;
}
```



lio-mapping 介绍

2. 具体流程

2.3. 边缘化

3) 边缘化实现

函数的最后便是执行边缘化，
得到边缘化先验因子。

```
//TODO
Eigen::MatrixXd Amm = 0.5 * (A.block(0, 0, m, m) + A.block(0, 0, m, m).transpose());
Eigen::SelfAdjointEigenSolver<Eigen::MatrixXd> saes(Amm);

//ROS_ASSERT_MSG(saes.eigenvalues().minCoeff() >= -1e-4, "min eigenvalue %f", saes.eigenvalues().minCoeff());

Eigen::MatrixXd Amm_inv = saes.eigenvectors()
    * Eigen::VectorXd((saes.eigenvalues().array() > eps).select(saes.eigenvalues().array().inverse(), 0)).asDiagonal()
    * saes.eigenvectors().transpose();
//printf("error1: %f\n", (Amm * Amm_inv - Eigen::MatrixXd::Identity(m, m)).sum());

Eigen::VectorXd bmm = b.segment(0, m);
Eigen::MatrixXd Amr = A.block(0, m, m, n);
Eigen::MatrixXd Arm = A.block(m, 0, n, m);
Eigen::MatrixXd Arr = A.block(m, m, n, n);
Eigen::VectorXd brr = b.segment(m, n);
A = Arr - Arm * Amm_inv * Amr;
b = brr - Arm * Amm_inv * bmm;

Eigen::SelfAdjointEigenSolver<Eigen::MatrixXd> saes2(A);
Eigen::VectorXd S = Eigen::VectorXd((saes2.eigenvalues().array() > eps).select(saes2.eigenvalues().array(), 0));
Eigen::VectorXd
    S_inv = Eigen::VectorXd((saes2.eigenvalues().array() > eps).select(saes2.eigenvalues().array().inverse(), 0));

Eigen::VectorXd S_sqrt = S.cwiseSqrt();
Eigen::VectorXd S_inv_sqrt = S_inv.cwiseSqrt();

linearized_jacobians = S_sqrt.asDiagonal() * saes2.eigenvectors().transpose();
linearized_residuals = S_inv_sqrt.asDiagonal() * saes2.eigenvectors().transpose() * b;
```



lio-mapping 介绍

2. 具体流程

2.3. 边缘化

3) 边缘化实现

上述过程是假设第一次执行边缘化，当不是第一次时，步骤上只是多了在AddResidualBlockInfo时把边缘化先验因子也加入进来，剩余过程不变。

```
if (last_marginalization_info) {
    vector<int> drop_set;
    for (int i = 0;
         i < static_cast<int>(last_marginalization_parameter_blocks.size());
         i++) {
        if (last_marginalization_parameter_blocks[i] == para_pose_[0] ||
            last_marginalization_parameter_blocks[i] == para_speed_bias_[0])
            drop_set.push_back(i);
    }
    // construct new marginalization_factor
    auto *marginalization_factor =
        new MarginalizationFactor(last_marginalization_info);
    auto *residual_block_info = new ResidualBlockInfo(
        marginalization_factor, NULL, last_marginalization_parameter_blocks,
        drop_set);

    marginalization_info->AddResidualBlockInfo(residual_block_info);
}
```

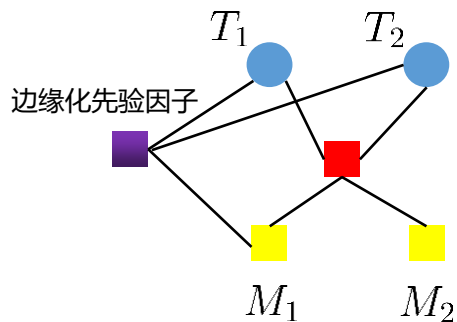


lio-mapping 介绍

2. 具体流程

2.4. 添加新帧

边缘化之后，模型如下



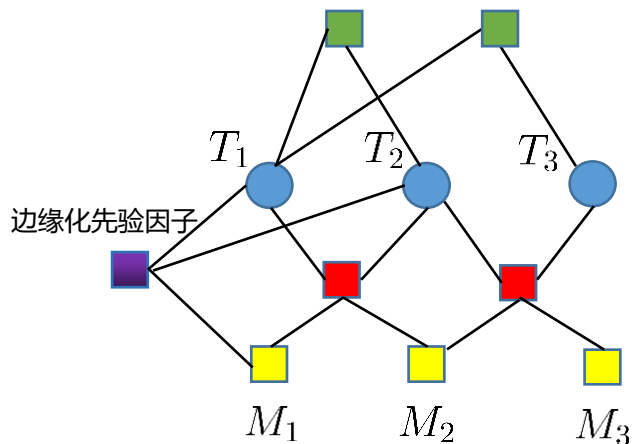
注意：由于面特征因子都是和第一帧(T_0)关联，当它边缘化掉之后，该因子便不存在，因此在加入新的帧的同时，还需要构建所有帧和当前第一帧(T_1)的面特征关联。



lio-mapping 介绍

2. 具体流程

添加新的帧以后，模型如下



Hessian矩阵可视化如下

	T_1	M_1	T_2	M_2	T_3	M_3
T_1	Green	Purple	Green	Red	Green	White
M_1	Purple	Purple	Purple	Red	White	White
T_2	Green	Purple	Green	Red	Red	Red
M_2	Red	Red	Red	Red	Red	Red
T_3	Green	White	Red	Red	Green	Red
M_3	White	White	Red	Red	Red	Red

此后不断循环该过程，便可以实现lio功能。



作业

按照课程讲述的模型，在提供的工程框架中，补全基于滑动窗口的融合定位方法的实现(整体思路本章第三小节已给出，代码实现可借鉴lio-mapping)，并分别与不加融合、EKF融合的效果做对比。

评价标准：

及格：补全代码，且功能正常。

良好：实现功能的基础上，性能在部分路段比EKF有改善。

优秀：由于基于滑窗的方法中，窗口长度对最终的性能有很大影响，请在良好的基础上，提供不同窗口长度下的融合结果，并对效果及原因做对比分析。



作业

附加题(不参与考核):

基于地图定位时，滑窗中是否要加入帧间里程计相对位姿约束，这是一个有争议的话题。若各位愿意，可在工程基础上对比两种方案的不同，并分析造成差异的原因。

感谢聆听 !

Thanks for Listening

