



多传感器融合定位

第7讲 基于滤波的融合方法

主讲人 任 乾

北京理工大学本硕
自动驾驶从业者





目录



1. 滤波器作用



2. 概率基础知识



3. 滤波器基本原理



4. 基于滤波器的融合



目录



1. 滤波器作用



2. 概率基础知识



3. 滤波器基本原理



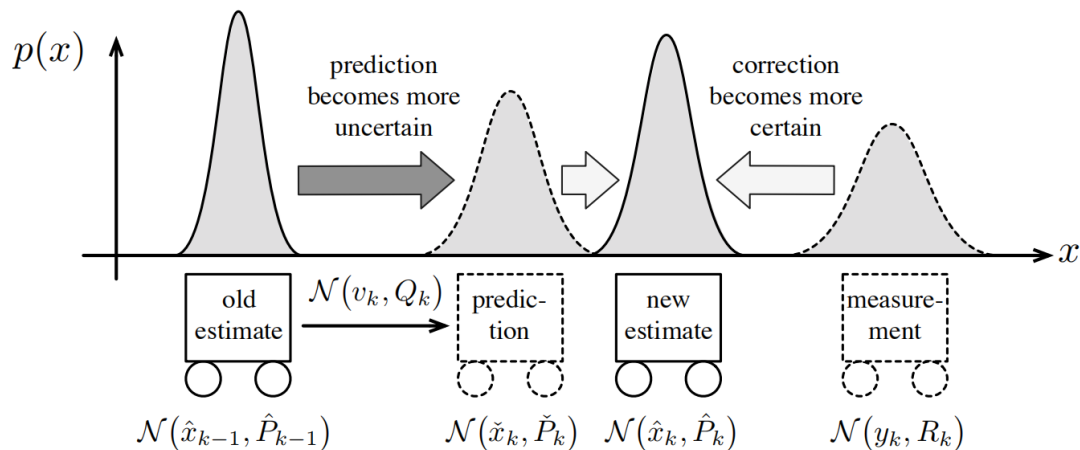
4. 基于滤波器的融合



滤波器作用

滤波器的本质：结合预测与观测，得到最“精确”的后验值。

实际中，预测与观测均从传感器而来，因此滤波器的作用便是结合各传感器得到一个最好的融合结果。



- 1) 实际中预测往往从IMU、编码器等传感器递推而来；
- 2) 观测往往从GPS、雷达、相机等传感器而来；
- 3) 后验为融合后的结果，即定位模块的输出。



目录



1. 滤波器作用



2. 概率基础知识



3. 滤波器基本原理

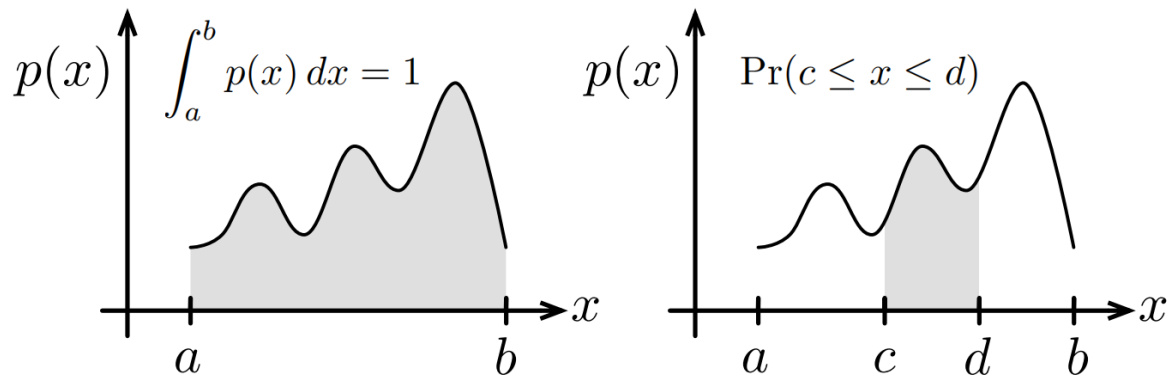


4. 基于滤波器的融合



概率基础知识

1. 概率、概率密度



上图中, $p(x)$ 为 x 在区间 $[a,b]$ 上的**概率密度**, 它表示的是随机变量在区间的分布情况。

\Pr 代表的是 x 在区间 $[c,d]$ 上的**概率**, 它是概率密度的积分,

$$\Pr(c \leq x \leq d) = \int_c^d p(x) dx$$

我们平时所说“高斯分布”、“非高斯分布”均是指它的概率密度。



概率基础知识

2. 联合概率密度

$x \in [a, b]$ 和 $y \in [r, s]$ 的联合概率密度函数可以表示为 $p(x, y)$ ，其积分表示 x 和 y 同时处在某个区间的概率，满足下式：

$$\int_a^b \int_r^s p(x, y) dy dx = 1$$

特别地，当 x 和 y 统计独立的时候，有

$$p(x, y) = p(x)p(y)$$

3. 条件概率密度

x 关于 y 的条件概率密度函数可以表示为

$$p(x | y)$$

其含义是，在 $y \in [r, s]$ 的前提下， $x \in [a, b]$ 的概率分布，并且满足下式：

$$p(x) = \int_r^s p(x | y) p(y) dy$$

特别地，当 x 和 y 统计独立的时候，有

$$p(x | y) = p(x)$$



概率基础知识

4. 贝叶斯公式

联合概率密度分解成条件概率密度和边缘概率密度的乘积，即

$$p(x, y) = p(x | y)p(y) = p(y | x)p(x)$$

重新整理，即可得贝叶斯公式：

$$p(x | y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)}$$

5. 贝叶斯推断

贝叶斯推断可以理解为贝叶斯公式的运用，它是指，如果已知**先验**概率密度函数 $p(x)$ ，以及**传感器模型** $p(y | x)$ ，那么就可以根据贝叶斯公式**推断**出后验概率密度。

$$p(x | y) = \frac{p(y|x)p(x)}{\int p(y|x)p(x)dx}$$

实际中，贝叶斯推断有时也称为贝叶斯估计。



概率基础知识

6. 高斯概率密度函数

一维情况下，高斯概率密度函数表示为：

$$p(x | \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

其中 μ 为均值, σ^2 为方差。

多维情况下，高斯概率密度函数表示为

$$p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \boldsymbol{\Sigma}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

其中均值为 $\boldsymbol{\mu}$ ，方差为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 。

一般把高斯分布写成 $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 。



概率基础知识

7. 联合高斯概率密度函数

若有高斯分布

$$p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\Sigma}_{xx})$$

$$p(\mathbf{y}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_y, \boldsymbol{\Sigma}_{yy})$$

则它们的联合概率密度函数可以表示为

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_x \\ \boldsymbol{\mu}_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{yx} & \boldsymbol{\Sigma}_{yy} \end{bmatrix}\right)$$

由于联合概率密度满足下式

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(\mathbf{x} | \mathbf{y})p(\mathbf{y})$$

该式在高斯分布的前提下可以重新分解。

由于高斯分布中指数项包含方差的求逆，而此处联合概率的方差是一个高维矩阵，对它求逆的简洁办法是运用舒尔补。

舒尔补的主要目的是把矩阵分解成上三角矩阵、对角阵、下三角矩阵乘积的形式，方便运算，即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

其中 $\Delta\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$ 称为矩阵D关于原矩阵的舒尔补。

此时有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{D}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$



概率基础知识

7. 联合高斯概率密度函数

利用舒尔补，联合分布的方差矩阵可以写为

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

它的逆矩阵为

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{yy}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$



概率基础知识

7. 联合高斯概率密度函数

联合分布 $p(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 仍为高斯分布,

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_x \\ \boldsymbol{\mu}_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix} \right)$$

它的指数部分的二次项包含如下内容

$$\begin{aligned} & \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_x \\ \boldsymbol{\mu}_y \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_x \\ \boldsymbol{\mu}_y \end{bmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_x \\ \boldsymbol{\mu}_y \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{yy}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_x \\ \boldsymbol{\mu}_y \end{bmatrix} \right) \\ &= (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y))^T (\Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx})^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)) \\ & \quad + (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)^T \Sigma_{yy}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y) \end{aligned}$$

最后得到两个二次项的和, 由于同底数幂相乘后, 底数不变, 指数相加, 且 $p(\mathbf{y}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_y, \Sigma_{yy})$

因此有 $p(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_x + \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y), \Sigma_{xx} - \Sigma_{xy}\Sigma_{yy}^{-1}\Sigma_{yx})$



概率基础知识

8. 高斯随机变量的线性分布

在上面的例子中，若已知 x 和 y 之间有如下关系

$$y = Gx + n$$

其中 G 是一个常量矩阵， $n = \mathcal{N}(0, R)$ 为零均值白噪声，在实际中指的是观测噪声。则 x 和 y 的均值和方差之间必然存在联系，其联系可通过以下推导获得。

均值

$$\begin{aligned}
\mu_y &= E[y] \\
&= E[Gx + n] \\
&= GE[x] + E[n] \\
&= G\mu_x
\end{aligned}$$

方差

$$\begin{aligned}
\Sigma_{yy} &= \Sigma(Gx) + \Sigma(n) \\
&= E \left[(Gx - \mu_y) (Gx - \mu_y)^T \right] + R \\
&= GE \left[(x - \mu_x) (x - \mu_x)^T \right] G^T + R \\
&= G\Sigma_{xx}G^T + R
\end{aligned}$$

方差的交叉项

$$\begin{aligned}
\Sigma_{xy} &= E \left[(x - \mu_x) (y - \mu_y)^T \right] \\
&= E \left[(x - \mu_x) (Gx - G\mu_x + n)^T \right] \\
&= E \left[(x - \mu_x) (Gx - G\mu_x)^T + (x - \mu_x) n^T \right] \\
&= \Sigma_{xx}G^T + E \left[(x - \mu_x) n^T \right] \\
&= \Sigma_{xx}G^T
\end{aligned}$$

同理可得 $\Sigma_{yx} = \Sigma_{xy}^T = G\Sigma_{xx}$



目录



1. 滤波器作用



2. 概率基础知识



3. 滤波器基本原理



4. 基于滤波器的融合



滤波器基本原理

1. 状态估计模型

实际状态估计任务中，待估计的后验概率密度可以表示为：

$$p(\mathbf{x}_k \mid \tilde{\mathbf{x}}_0, \mathbf{v}_{1:k}, \mathbf{y}_{0:k})$$

其中

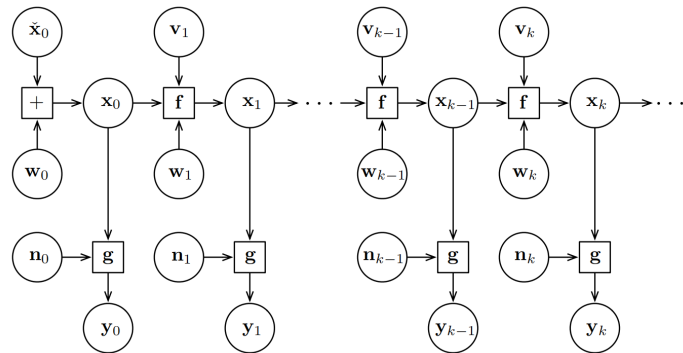
$\tilde{\mathbf{x}}_0$ 表示的是状态初始值

$\mathbf{v}_{1:k}$ 表示从1到k时刻的输入

$\mathbf{y}_{0:k}$ 表示从0到k时刻的观测

因此，滤波问题可以直观表示为，根据所有历史数据(输入、观测、初始状态)得出最终的融合结果。

历史数据之间的关系，可以用下面的图模型表示，



图模型中体现了马尔可夫性，即当前状态只跟前一时刻状态相关，和其他历史时刻状态无关。
该性质的数学表达：

$$\text{运动方程: } \mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k)$$

$$\text{观测方程: } \mathbf{y}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k, \mathbf{n}_k)$$



滤波器基本原理

2. 贝叶斯滤波

根据贝叶斯公式, k 时刻后验概率密度可以表示为

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{x}_k \mid \check{\mathbf{x}}_0, \mathbf{v}_{1:k}, \mathbf{y}_{0:k}) &= \frac{p(\mathbf{y}_k \mid \mathbf{x}_k, \check{\mathbf{x}}_0, \mathbf{v}_{1:k}, \mathbf{y}_{0:k-1}) p(\mathbf{x}_k \mid \check{\mathbf{x}}_0, \mathbf{v}_{1:k}, \mathbf{y}_{0:k-1})}{p(\mathbf{y}_k \mid \check{\mathbf{x}}_0, \mathbf{v}_{1:k}, \mathbf{y}_{0:k-1})} \\
 &= \eta p(\mathbf{y}_k \mid \mathbf{x}_k, \check{\mathbf{x}}_0, \mathbf{v}_{1:k}, \mathbf{y}_{0:k-1}) p(\mathbf{x}_k \mid \check{\mathbf{x}}_0, \mathbf{v}_{1:k}, \mathbf{y}_{0:k-1})
 \end{aligned}$$

根据观测方程, \mathbf{y}_k 只和 \mathbf{x}_k 相关, 因此上式可以简写为

$$p(\mathbf{x}_k \mid \check{\mathbf{x}}_0, \mathbf{v}_{1:k}, \mathbf{y}_{0:k}) = \eta p(\mathbf{y}_k \mid \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k \mid \check{\mathbf{x}}_0, \mathbf{v}_{1:k}, \mathbf{y}_{0:k-1})$$

利用条件分布的性质, 可得

$$\begin{aligned}
 &p(\mathbf{x}_k \mid \check{\mathbf{x}}_0, \mathbf{v}_{1:k}, \mathbf{y}_{0:k-1}) \\
 &= \int p(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_{k-1}, \check{\mathbf{x}}_0, \mathbf{v}_{1:k}, \mathbf{y}_{0:k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} \mid \check{\mathbf{x}}_0, \mathbf{v}_{1:k}, \mathbf{y}_{0:k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}
 \end{aligned}$$

再利用马尔可夫性, 可得

$$\begin{aligned}
 &p(\mathbf{x}_k \mid \check{\mathbf{x}}_0, \mathbf{v}_{1:k}, \mathbf{y}_{0:k-1}) \\
 &= \int p(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}_k) p(\mathbf{x}_{k-1} \mid \check{\mathbf{x}}_0, \mathbf{v}_{1:k}, \mathbf{y}_{0:k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}
 \end{aligned}$$



滤波器基本原理

2. 贝叶斯滤波

经过以上化简，最终后验概率可以写为

$$\underbrace{p(\mathbf{x}_k \mid \check{\mathbf{x}}_0, \mathbf{v}_{1:k}, \mathbf{y}_{0:k})}_{\text{estimate}} \\ = \eta \underbrace{p(\mathbf{y}_k \mid \mathbf{x}_k)}_{g(\cdot)} \int \underbrace{p(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}_k)}_{f(\cdot)} \underbrace{p(\mathbf{x}_{k-1} \mid \check{\mathbf{x}}_0, \mathbf{v}_{1:k-1}, \mathbf{y}_{0:k-1})}_{\text{last estimate}} d\mathbf{x}_{k-1}$$

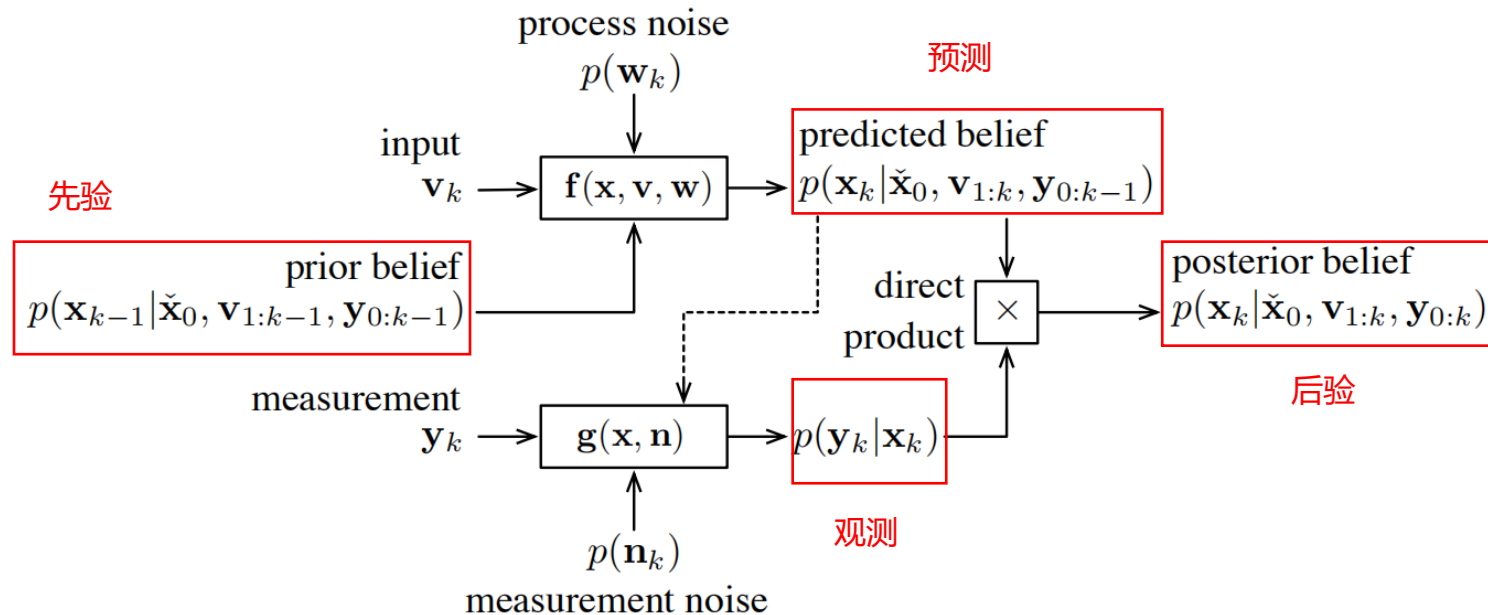
观测 预测 先验



滤波器基本原理

2. 贝叶斯滤波

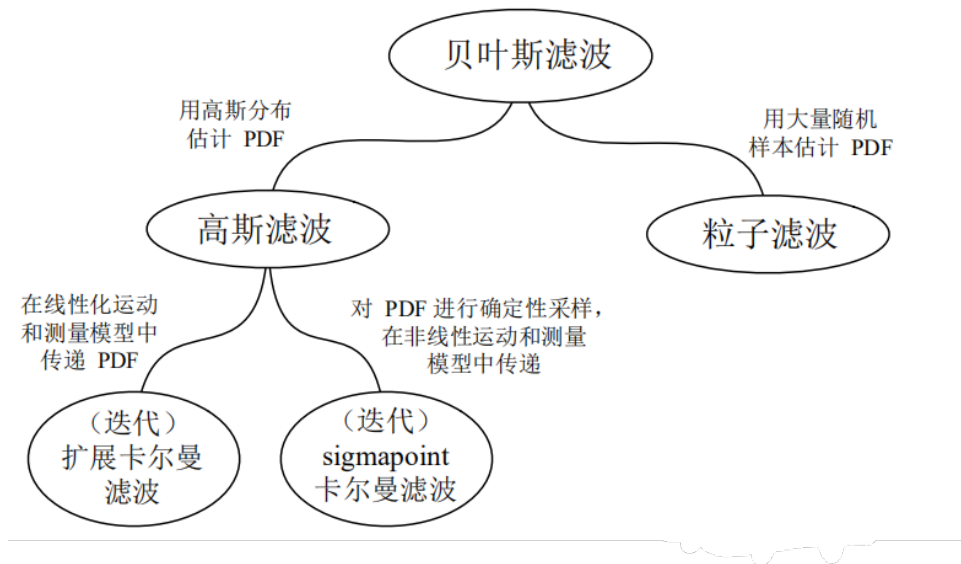
根据以上结果，可以画出贝叶斯滤波的信息流图如下





滤波器基本原理

2. 贝叶斯滤波



1) 在高斯假设前提下，用贝叶斯滤波的原始形式推导比较复杂，可以利用高斯的特征得到简化形式，即广义高斯滤波。后面KF、EKF、IEKF的推导均采用这种形式。

2) 实际中，UKF 和 PF 多应用再扫地机器人等2D小场景，与本课程目标场景不符，因此不做讲解。



滤波器基本原理

3. 卡尔曼滤波(KF)推导

在线性高斯假设下，上式可以重新写为下面的形式(为了和后面符号对应)

$$\text{运动方程: } \mathbf{x}_k = \mathbf{F}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}_k) + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{w}_k$$

$$\text{观测方程: } \mathbf{y}_k = \mathbf{G}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{C}_k\mathbf{n}_k$$

把上一时刻的后验状态写为

$$p(\mathbf{x}_{k-1} \mid \check{\mathbf{x}}_0, \mathbf{v}_{1:k-1}, \mathbf{y}_{0:k-1}) = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \hat{\mathbf{P}}_{k-1})$$

则当前时刻的预测值为

$$\check{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{v}_k)$$

根据高斯分布的线性变化，它的方差为(可仿照第2节8)中的推导过程自行推导)

$$\check{\mathbf{P}}_k = \mathbf{F}_{k-1}\hat{\mathbf{P}}_{k-1}\mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{Q}_k\mathbf{B}_{k-1}^T$$

其中 \mathbf{Q}_k 为当前输入噪声的方差。



滤波器基本原理

3. 卡尔曼滤波(KF)推导

若把 k 时刻状态和观测的联合高斯分布写为

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k \mid \check{\mathbf{x}}_0, \mathbf{v}_{1:k}, \mathbf{y}_{0:k-1}) = \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_{x,k} \\ \boldsymbol{\mu}_{y,k} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx,k} & \boldsymbol{\Sigma}_{xy,k} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{yx,k} & \boldsymbol{\Sigma}_{yy,k} \end{bmatrix} \right)$$

根据第2节7)中的推导结果, k 时刻的后验概率可以写为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k \mid \check{\mathbf{x}}_0, \mathbf{v}_{1:k}, \mathbf{y}_{0:k}) \\ = \mathcal{N}(\underbrace{\boldsymbol{\mu}_{x,k} + \boldsymbol{\Sigma}_{xy,k} \boldsymbol{\Sigma}_{yy,k}^{-1} (\mathbf{y}_k - \boldsymbol{\mu}_{y,k})}_{\hat{\mathbf{x}}_k}, \underbrace{\boldsymbol{\Sigma}_{xx,k} - \boldsymbol{\Sigma}_{xy,k} \boldsymbol{\Sigma}_{yy,k}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{yx,k}}_{\hat{\mathbf{P}}_k}) \end{aligned}$$

其中 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 和 $\hat{\mathbf{P}}_k$ 分别为后验均值和方差。若定义

$$\mathbf{K}_k = \boldsymbol{\Sigma}_{xy,k} \boldsymbol{\Sigma}_{yy,k}^{-1}$$

则有

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_k &= \check{\mathbf{P}}_k - \mathbf{K}_k \boldsymbol{\Sigma}_{xy,k}^T \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \check{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \boldsymbol{\mu}_{y,k}) \end{aligned}$$



滤波器基本原理

3. 卡尔曼滤波(KF)推导

把第2节8)中的推导得出的线性变换后的均值、方差及交叉项带入上面的式子，可以得到：

$$\mathbf{K}_k = \check{\mathbf{P}}_k \mathbf{G}_k^T (\mathbf{G}_k \check{\mathbf{P}}_k \mathbf{G}_k^T + \mathbf{C}_k \mathbf{R}_k \mathbf{C}_k^T)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{G}_k) \check{\mathbf{P}}_k$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \check{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{G}(\check{\mathbf{x}}_k))$$

上面方程与之前所述预测方程(如下)，就构成了卡尔曼经典五个方程。

$$\check{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{v}_k)$$

$$\check{\mathbf{P}}_k = \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{P}}_{k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{Q}_k \mathbf{B}_{k-1}^T$$

需要说明的是，若不把第2节8)中的结果带入，而保留上页的原始形式，则对应的五个方程被称为广义高斯滤波。



滤波器基本原理

4. 扩展卡尔曼滤波(EKF)推导

当运动方程或观测方程为非线性的时候，无法再利用之前所述的线性变化关系进行推导，常用的解决方法是进行线性化，把非线性方程一阶泰勒展开成线性。即

$$\text{运动方程: } \mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k) \approx \check{\mathbf{x}}_k + \mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{w}_k$$

$$\text{观测方程: } \mathbf{y}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k, \mathbf{n}_k) \approx \check{\mathbf{y}}_k + \mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k - \check{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{C}_k\mathbf{n}_k$$

其中

$$\check{\mathbf{x}}_k = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{v}_k, \mathbf{0})$$

$$\check{\mathbf{y}}_k = \mathbf{g}(\check{\mathbf{x}}_k, \mathbf{0})$$

$$\mathbf{F}_{k-1} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k)}{\partial \mathbf{x}_{k-1}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{v}_k, \mathbf{0}}$$

$$\mathbf{G}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}_k, \mathbf{n}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\check{\mathbf{x}}_k, \mathbf{0}}$$

$$\mathbf{B}_{k-1} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k)}{\partial \mathbf{w}_k} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{v}_k, \mathbf{0}}$$

$$\mathbf{C}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}_k, \mathbf{n}_k)}{\partial \mathbf{n}_k} \right|_{\check{\mathbf{x}}_k, \mathbf{0}}$$



滤波器基本原理

4. 扩展卡尔曼滤波(EKF)推导

根据该线性化展开结果，可以得到**预测状态**的统计学特征为

$$E[\mathbf{x}_k] \approx \check{\mathbf{x}}_k + \mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \underbrace{E[\mathbf{B}_{k-1}\mathbf{w}_k]}_0$$

$$E[(\mathbf{x}_k - E[\mathbf{x}_k])(\mathbf{x}_k - E[\mathbf{x}_k])^T] \approx \underbrace{E[\mathbf{B}_{k-1}\mathbf{w}_k\mathbf{w}_k^T\mathbf{B}_{k-1}^T]}_{\mathbf{B}_{k-1}\mathbf{Q}_k\mathbf{B}_{k-1}^T}$$

即 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}_k) \approx \mathcal{N}(\check{\mathbf{x}}_k + \mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}), \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{Q}_k\mathbf{B}_{k-1}^T)$

同理，可得到**观测**的统计学特征为

$$E[\mathbf{y}_k] \approx \check{\mathbf{y}}_k + \mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k - \check{\mathbf{x}}_k) + \underbrace{E[\mathbf{C}_k\mathbf{n}_k]}_0$$

$$E[(\mathbf{y}_k - E[\mathbf{y}_k])(\mathbf{y}_k - E[\mathbf{y}_k])^T] \approx \underbrace{E[\mathbf{C}_k\mathbf{n}_k\mathbf{n}_k^T\mathbf{C}_k^T]}_{\mathbf{C}_k\mathbf{R}_k\mathbf{C}_k^T}$$

即 $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) \approx \mathcal{N}(\check{\mathbf{y}}_k + \mathbf{G}_k(\mathbf{x}_k - \check{\mathbf{x}}_k), \mathbf{C}_k\mathbf{R}_k\mathbf{C}_k^T)$



滤波器基本原理

4. 扩展卡尔曼滤波(EKF)推导

把均值和方差的具体形式，带入广义高斯滤波的公式，最终得到EKF下得经典五个公式。

$$\check{P}_k = F_{k-1} \hat{P}_{k-1} F_{k-1}^T + B_{k-1} Q_k B_{k-1}^T$$

$$\check{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}, v_k, 0)$$

$$K_k = \check{P}_k G_k^T (G_k \check{P}_k G_k^T + C_k R_k C_k^T)^{-1}$$

$$\hat{P}_k = (I - K_k G_k) \check{P}_k$$

$$\hat{x}_k = \check{x}_k + K_k (y_k - g(\check{x}_k, 0))$$



滤波器基本原理

5. 迭代扩展卡尔曼滤波(IEKF)推导

由于非线性模型中做了线性化近似，当非线性程度越强时，误差就会较大。但是，由于线性化的工作点离真值越近，线性化的误差就越小，因此解决该问题的一个方法是，通过迭代逐渐找到准确的线性化点，从而提高精度。

在EKF的推导中，其他保持不变，仅改变观测的线性化工作点，则有

$$g(x_k, n_k) \approx y_{\text{op},k} + G_k(x_k - x_{\text{op},k}) + C_k n_k$$

其中

$$y_{\text{op},k} = g(x_{\text{op},k}, 0)$$

$$G_k = \left. \frac{\partial g(x_k, n_k)}{\partial x_k} \right|_{x_{\text{op},k}, 0}$$

$$C_k = \left. \frac{\partial g(x_k, n_k)}{\partial n_k} \right|_{x_{\text{op},k}, 0}$$



滤波器基本原理

5. 迭代扩展卡尔曼滤波(IEKF)推导

按照与之前同样的方式进行推导，可得到滤波的校正过程为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \check{\mathbf{P}}_k \mathbf{G}_k^T (\mathbf{G}_k \check{\mathbf{P}}_k \mathbf{G}_k^T + \mathbf{C}_k \mathbf{R}_k \mathbf{C}_k^T)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \check{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{\text{op},k} - \mathbf{G}_k (\check{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_{\text{op},k})) \end{aligned}$$

可见唯一的区别是后验均值 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 更新的公式与之前有所不同。

滤波过程中，反复执行这2个公式，以上次的后验均值作为本次的线性化工作点，即可达到减小非线性误差的目的。

需要注意的是，在这种滤波模式下，后验方差应放在最后一步进行。

$$\hat{\mathbf{P}}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{G}_k) \check{\mathbf{P}}_k$$



目录



1. 滤波器作用



2. 概率基础知识



3. 滤波器基本原理



4. 基于滤波器的融合

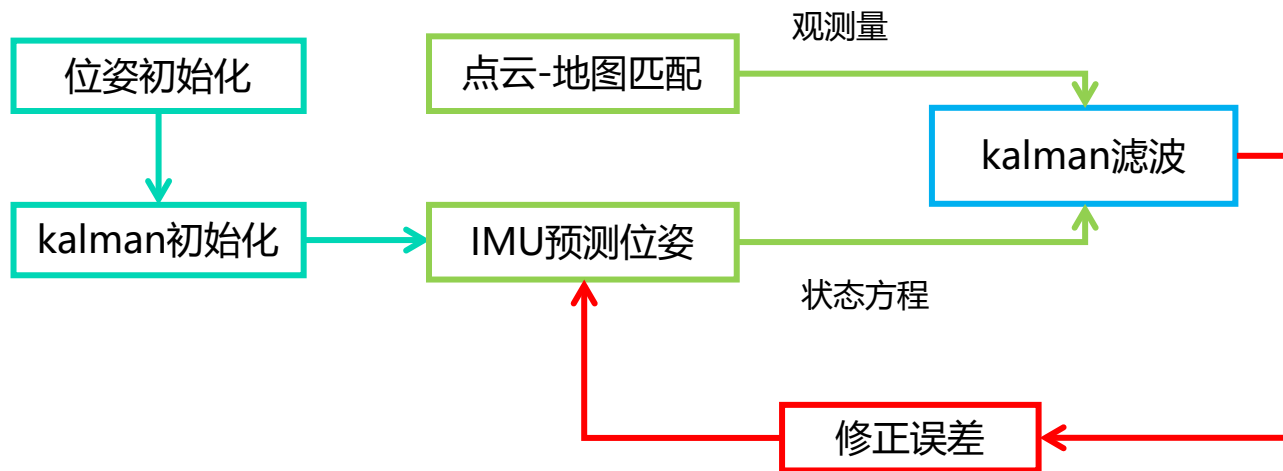


基于滤波器的融合

通过以上推导，滤波问题可以简单理解为“预测 + 观测 = 融合结果”。

结合实际点云地图中定位的例子，预测由IMU给出，观测即为激光雷达点云和地图匹配得到的姿态和位置。

融合流程用框图可以表示如下：





基于滤波器的融合

1. 状态方程

状态方程由误差方程得来，第6讲已经完成误差方程的推导：

$$\delta \dot{\mathbf{p}} = \delta \mathbf{v}$$

$$\delta \dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{R}_t[\mathbf{a}_t - \mathbf{b}_{a_t}]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta} + \mathbf{R}_t(\mathbf{n}_a - \delta \mathbf{b}_a)$$

$$\delta \dot{\boldsymbol{\theta}} = -[\boldsymbol{\omega}_t - \mathbf{b}_{\omega_t}]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta} + \mathbf{n}_{\omega} - \delta \mathbf{b}_{\omega}$$

$$\delta \dot{\mathbf{b}}_a = \mathbf{n}_{b_a} \quad \delta \dot{\mathbf{b}}_a = 0$$

或

$$\delta \dot{\mathbf{b}}_{\omega} = \mathbf{n}_{b_{\omega}} \quad \delta \dot{\mathbf{b}}_{\omega} = 0$$

$$\text{令 } \delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p} \\ \delta \mathbf{v} \\ \delta \boldsymbol{\theta} \\ \delta \mathbf{b}_a \\ \delta \mathbf{b}_{\omega} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_a \\ \mathbf{n}_{\omega} \\ \mathbf{n}_{b_a} \\ \mathbf{n}_{b_{\omega}} \end{bmatrix}$$

则误差方程可以写成状态方程的通用形式：

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_t \delta \mathbf{x} + \mathbf{B}_t \mathbf{w}$$

其中

$$\mathbf{F}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{R}_t[\bar{\mathbf{a}}_t]_{\times} & -\mathbf{R}_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -[\bar{\boldsymbol{\omega}}_t]_{\times} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}_t &= \mathbf{a}_t - \mathbf{b}_{a_t} \\ \bar{\boldsymbol{\omega}}_t &= \boldsymbol{\omega}_t - \mathbf{b}_{\omega_t} \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$$

注：当选择 $\delta \dot{\mathbf{b}}_a = 0$, $\delta \dot{\mathbf{b}}_{\omega} = 0$ 时，矩阵形式不一样，请各位自行推导。



基于滤波器的融合

2. 观测方程

在滤波器中，观测方程一般写为

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}_t \delta \mathbf{x} + \mathbf{C}_t \mathbf{n}$$

此例中观测量有位置、失准角，则

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \delta \bar{\mathbf{p}} \\ \delta \bar{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}$$

因此有

$$\mathbf{G}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$$

而此处 \mathbf{n} 为观测噪声，

$$\mathbf{n} = [n_{\delta \bar{p}_x} \quad n_{\delta \bar{p}_y} \quad n_{\delta \bar{p}_z} \quad n_{\delta \bar{\theta}_x} \quad n_{\delta \bar{\theta}_y} \quad n_{\delta \bar{\theta}_z}]^T$$

观测量中， $\delta \mathbf{p}$ 的计算过程为：

$$\delta \bar{\mathbf{p}} = \check{\mathbf{p}} - \mathbf{p}$$

其中 $\check{\mathbf{p}}$ 为 IMU 解算的位置，即预测值。 \mathbf{p} 为雷达与地图匹配得到的位置，即观测值。

$\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}$ 的计算过程稍微复杂，需要先计算误差矩阵，

$$\delta \bar{\mathbf{R}}_t = \mathbf{R}_t^T \check{\mathbf{R}}_t$$

其中 $\check{\mathbf{R}}_t$ 为 IMU 解算的旋转矩阵，即预测值。 \mathbf{R}_t 为雷达与地图匹配得到的旋转矩阵，即观测值。

由于预测值与观测值之间的关系为

$$\check{\mathbf{R}}_t \approx \mathbf{R}_t (\mathbf{I} + [\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}]_{\times})$$

因此

$$\delta \bar{\boldsymbol{\theta}} = (\delta \bar{\mathbf{R}}_t - \mathbf{I})^{\vee}$$



基于滤波器的融合

3. 构建滤波器

构建滤波器，即把融合系统的状态方程和观测方程应用到 Kalman 滤波的五个公式中。

前面推导的方程是连续时间的，要应用于离散时间，需要按照采样时间对其进行离散化。

状态方程离散化，可以写为

$$\delta \mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1} \delta \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{w}_k$$

其中

$$\mathbf{F}_{k-1} = \mathbf{I}_{15} + \mathbf{F}_t T$$

$$\mathbf{B}_{k-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{R}_{k-1} T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_3 T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_3 \sqrt{T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_3 \sqrt{T} \end{bmatrix}$$

其中， T 为 Kalman 的滤波周期。

注：关于 \mathbf{B}_{k-1} 的离散化形式，不同资料有差异，但对实际调试影响不大。

对于观测方程，不需要乘以滤波周期，可以直接写出

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{G}_k \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{C}_k \mathbf{n}_k$$

将以上各变量，带入kalman滤波的五个方程，即可构建完整的滤波器更新流程。

$$\delta \check{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}_{k-1} \delta \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{w}_k$$

$$\check{\mathbf{P}}_k = \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{P}}_{k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{Q}_k \mathbf{B}_{k-1}^T$$

$$\mathbf{K}_k = \check{\mathbf{P}}_k \mathbf{G}_k^T (\mathbf{G}_k \check{\mathbf{P}}_k \mathbf{G}_k^T + \mathbf{C}_k \mathbf{R}_k \mathbf{C}_k^T)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{G}_k) \check{\mathbf{P}}_k$$

$$\delta \hat{\mathbf{x}}_k = \delta \check{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{G}_k \delta \check{\mathbf{x}}_k)$$



基于滤波器的融合

4. Kalman 滤波实际使用流程

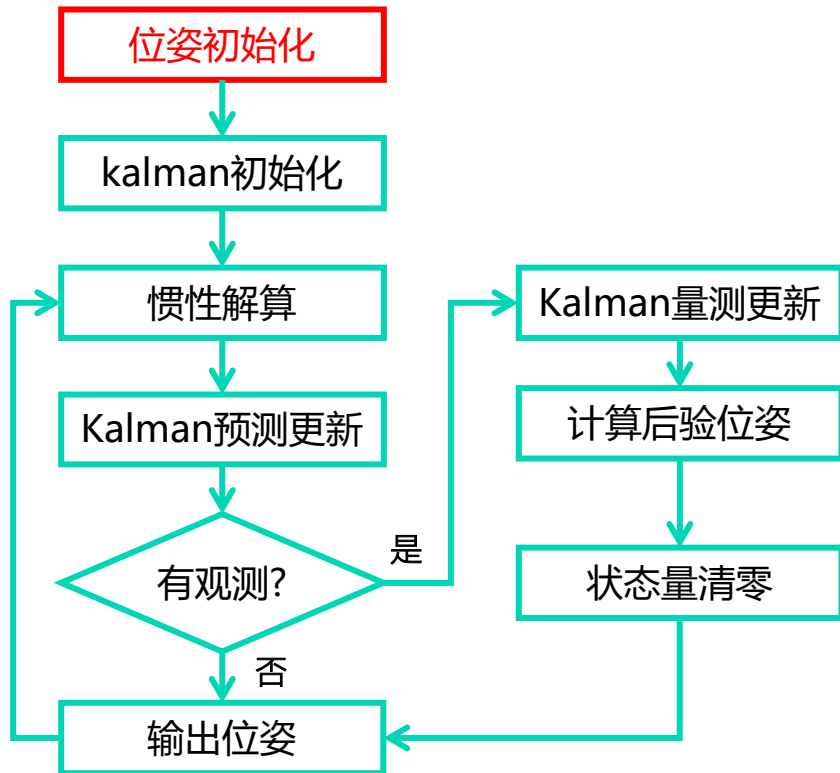
1) 位姿初始化

在点云地图中实现初始定位，并给以下变量赋值，

\hat{p}_0 : 初始时刻位置

\hat{v}_0 : 初始时刻速度(可以从组合导航获得)

\hat{R}_0 : 初始时刻姿态(也可用四元数, 后面不再强调)





基于滤波器的融合

4. Kalman 滤波实际使用流程

2) Kalman 初始化

a. 状态量 $\delta \hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$

b. 方差

$$\hat{P}_0 = \begin{bmatrix} P_{\delta p} & & & & \\ & P_{\delta v} & & & \\ & & P_{\delta \theta} & & \\ & & & P_{\delta b_a} & \\ & & & & P_{\delta b_\omega} \end{bmatrix}$$

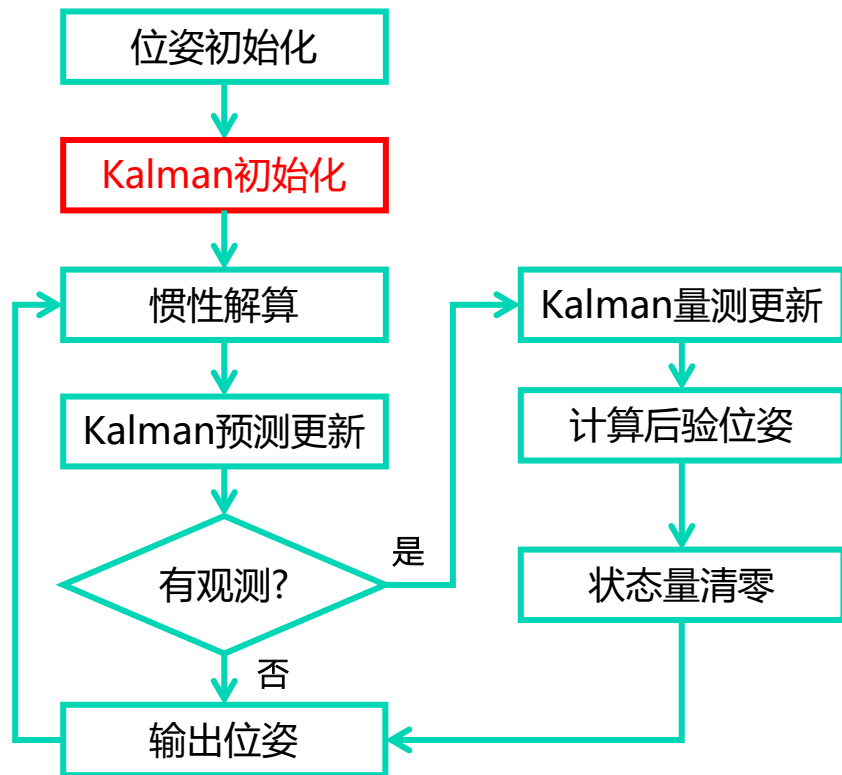
初始方差理论上可设置为各变量噪声的平方，实际中一般故意设置大一些，这样可加快收敛速度。

c. 过程噪声与观测噪声

$$Q = \begin{bmatrix} Q_a & & & \\ & Q_\omega & & \\ & & Q_{b_a} & \\ & & & Q_{b_\omega} \end{bmatrix}$$

$$R_0 = \begin{bmatrix} R_{\delta p} & \\ & R_{\delta \theta} \end{bmatrix}$$

过程噪声与观测噪声一般在 kalman 迭代过程中保持不变。





基于滤波器的融合

4. Kalman 滤波实际使用流程

3) 惯性解算

按照之前讲解的惯性解算方法，进行位姿更新，该位姿属于先验位姿。

a. 姿态解算

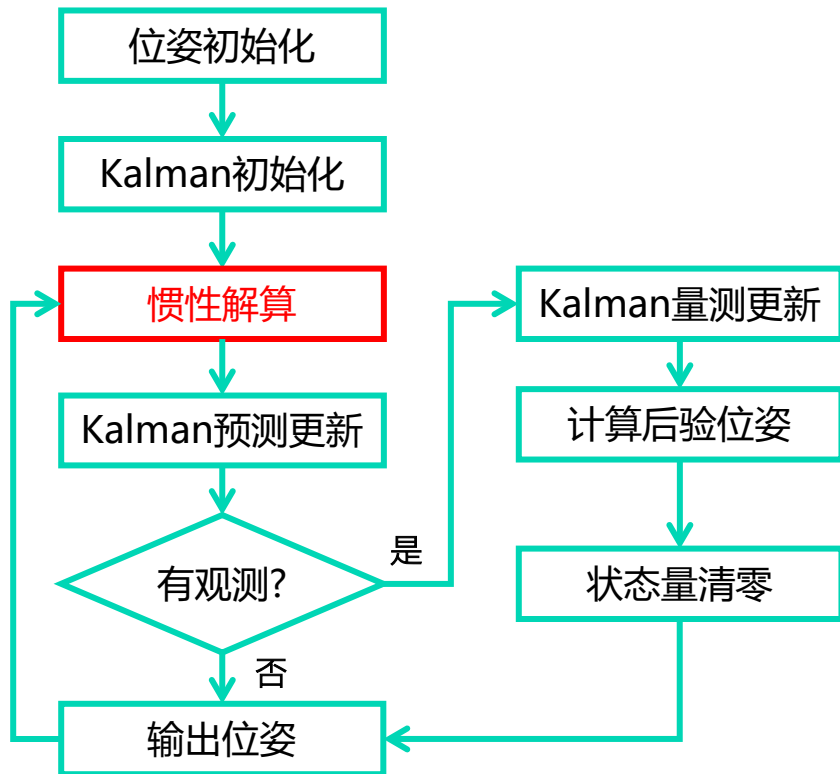
$$\check{\mathbf{R}}_k = \hat{\mathbf{R}}_{k-1} \left(\mathbf{I} + \frac{\sin \phi}{\phi} (\boldsymbol{\phi} \times) + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} (\boldsymbol{\phi} \times)^2 \right)$$

其中

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{\bar{\boldsymbol{\omega}}_{k-1} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_k}{2} (t_k - t_{k-1})$$

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_k = \boldsymbol{\omega}_k - \mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega}_k}$$

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_{k-1} = \boldsymbol{\omega}_{k-1} - \mathbf{b}_{\boldsymbol{\omega}_{k-1}}$$





基于滤波器的融合

4. Kalman 滤波实际使用流程

3) 惯性解算

按照之前讲解的惯性解算方法，进行位姿更新，该位姿属于先验位姿。

b. 速度解算

$$\check{\mathbf{v}}_k = \hat{\mathbf{v}}_{k-1} + \left(\frac{\check{\mathbf{R}}_k \bar{\mathbf{a}}_k + \hat{\mathbf{R}}_{k-1} \bar{\mathbf{a}}_{k-1}}{2} - \mathbf{g} \right) (t_k - t_{k-1})$$

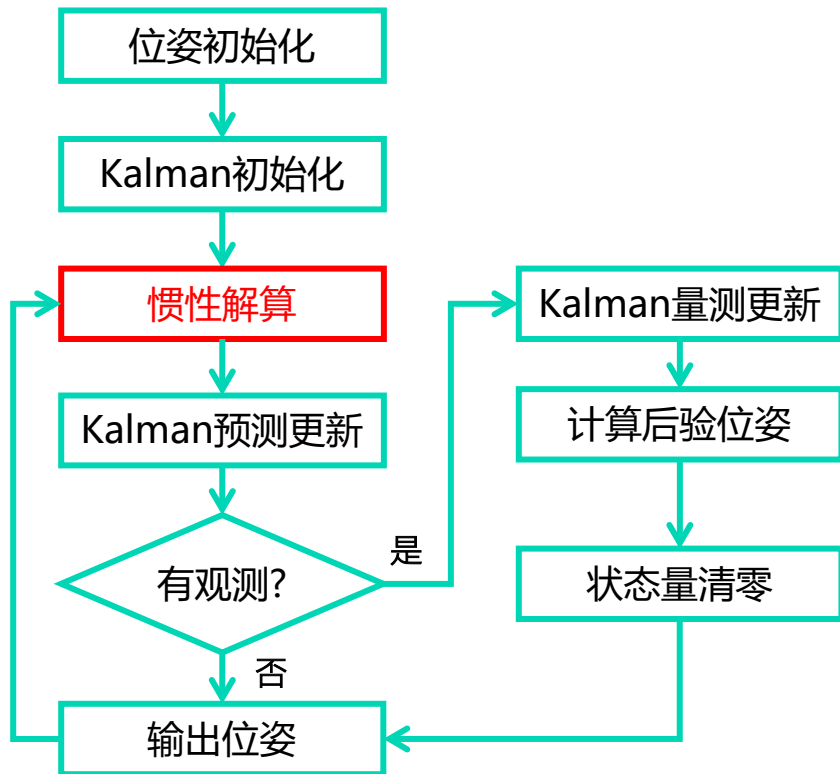
其中

$$\bar{\mathbf{a}}_k = \mathbf{a}_k - \mathbf{b}_{a_k}$$

$$\bar{\mathbf{a}}_{k-1} = \mathbf{a}_{k-1} - \mathbf{b}_{a_{k-1}}$$

c. 位置解算

$$\hat{\mathbf{p}}_k = \check{\mathbf{p}}_{k-1} + \frac{\check{\mathbf{v}}_k + \hat{\mathbf{v}}_{k-1}}{2} (t_k - t_{k-1})$$





基于滤波器的融合

4. Kalman 滤波实际使用流程

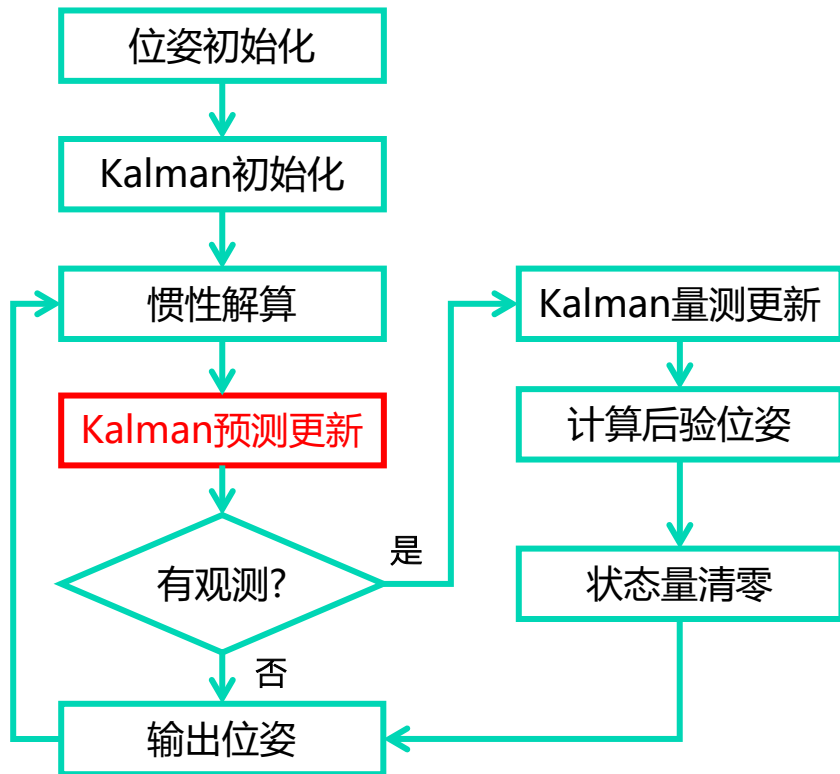
4) Kalman 预测更新

执行kalman五个步骤中的前两步，即

$$\delta \check{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}_{k-1} \delta \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{w}_k$$

$$\check{\mathbf{P}}_k = \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{P}}_{k-1} \mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{Q}_k \mathbf{B}_{k-1}^T$$

当然，这需要先根据公式计算 \mathbf{F}_{k-1} 和 \mathbf{B}_{k-1} 。





基于滤波器的融合

4. Kalman 滤波实际使用流程

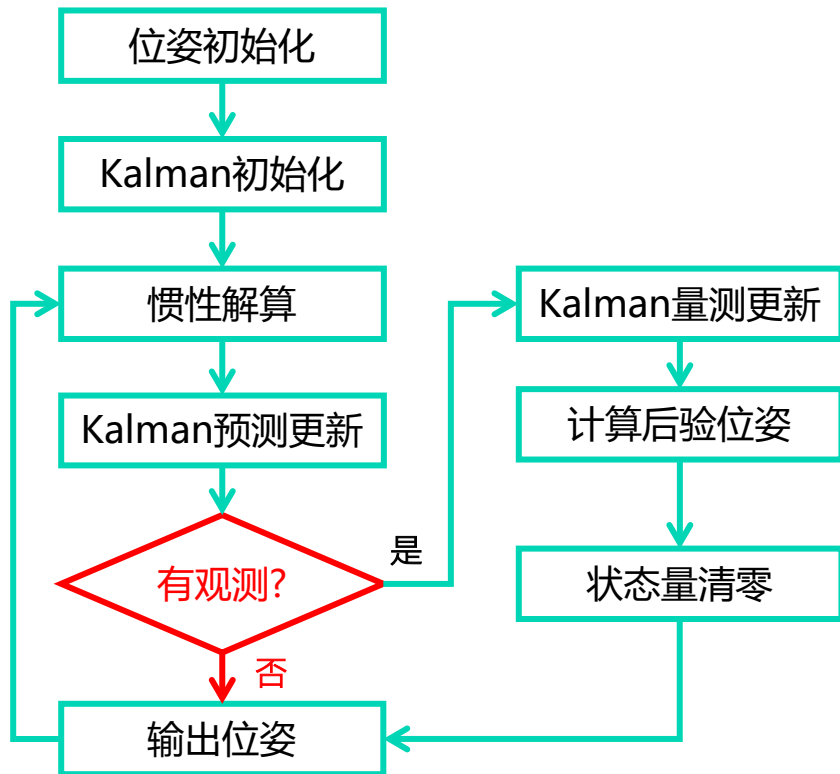
5) 无观测时后验更新

无观测时，不需要执行kalman剩下的三个步骤，后验等于先验，即

$$\delta \hat{\mathbf{x}}_k = \delta \check{\mathbf{x}}_k$$

$$\hat{\mathbf{P}}_k = \check{\mathbf{P}}_k$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \check{\mathbf{x}}_k$$





基于滤波器的融合

4. Kalman 滤波实际使用流程

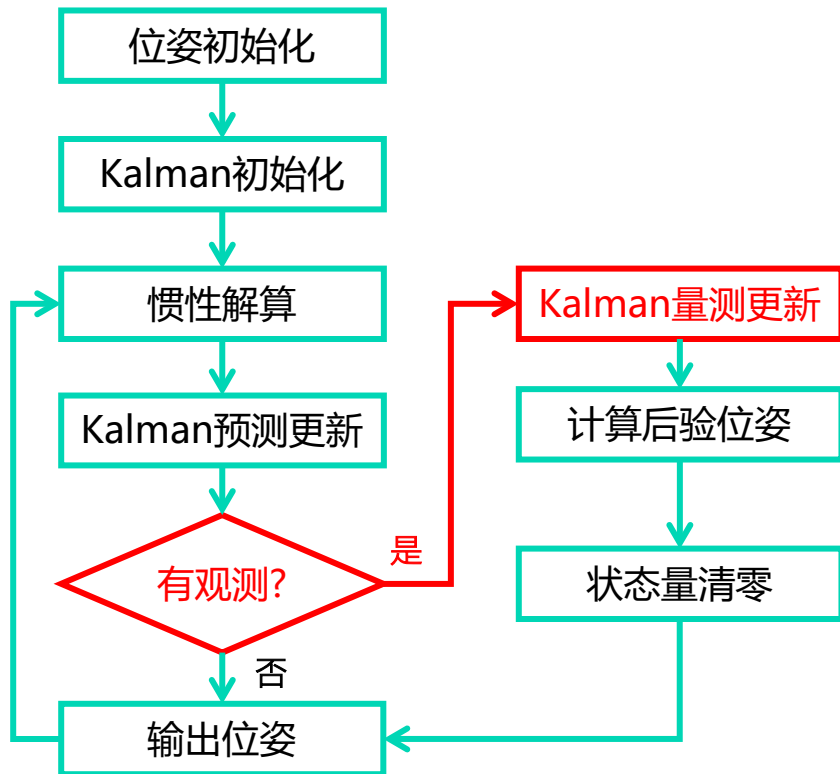
6) 有观测时的量测更新

执行kalman滤波后面的三个步骤，得到后验状态量。

$$\mathbf{K}_k = \check{\mathbf{P}}_k \mathbf{G}_k^T (\mathbf{G}_k \check{\mathbf{P}}_k \mathbf{G}_k^T + \mathbf{C}_k \mathbf{R}_k \mathbf{C}_k^T)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{G}_k) \check{\mathbf{P}}_k$$

$$\delta \hat{\mathbf{x}}_k = \delta \check{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{G}_k \delta \check{\mathbf{x}}_k)$$





基于滤波器的融合

4. Kalman 滤波实际使用流程

7) 有观测时计算后验位姿

根据后验状态量，更新后验位姿。

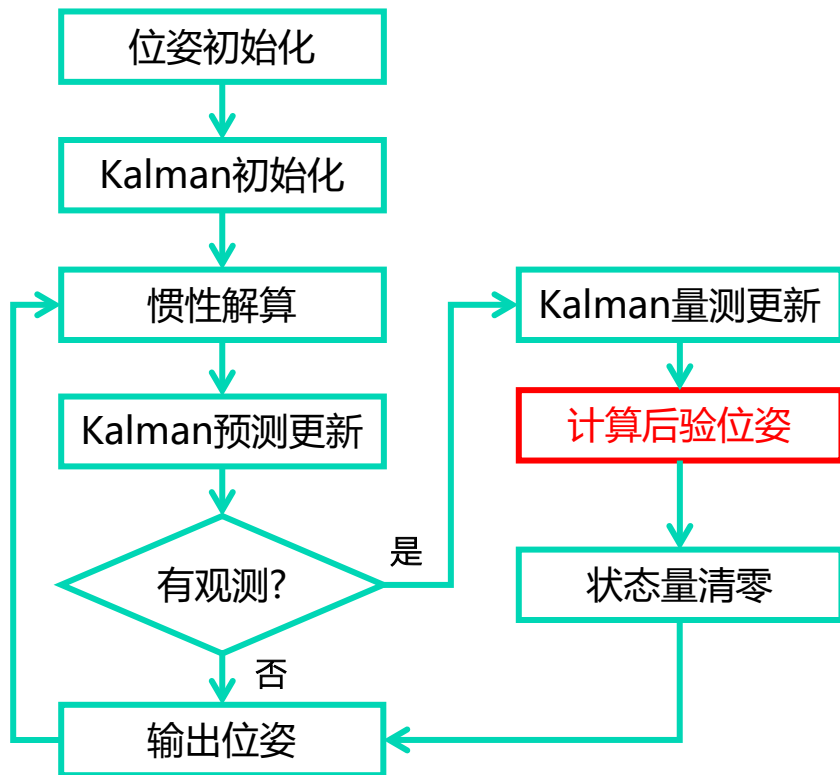
$$\hat{\mathbf{p}}_k = \check{\mathbf{p}}_k - \delta \hat{\mathbf{p}}_k$$

$$\hat{\mathbf{v}}_k = \check{\mathbf{v}}_k - \delta \hat{\mathbf{v}}_k$$

$$\hat{\mathbf{R}}_k = \check{\mathbf{R}}_k (\mathbf{I} - [\delta \hat{\boldsymbol{\theta}}_k]_{\times})$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{a_k} = \check{\mathbf{b}}_{a_k} - \delta \hat{\mathbf{b}}_{a_k}$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{\omega_k} = \check{\mathbf{b}}_{\omega_k} - \delta \hat{\mathbf{b}}_{\omega_k}$$





基于滤波器的融合

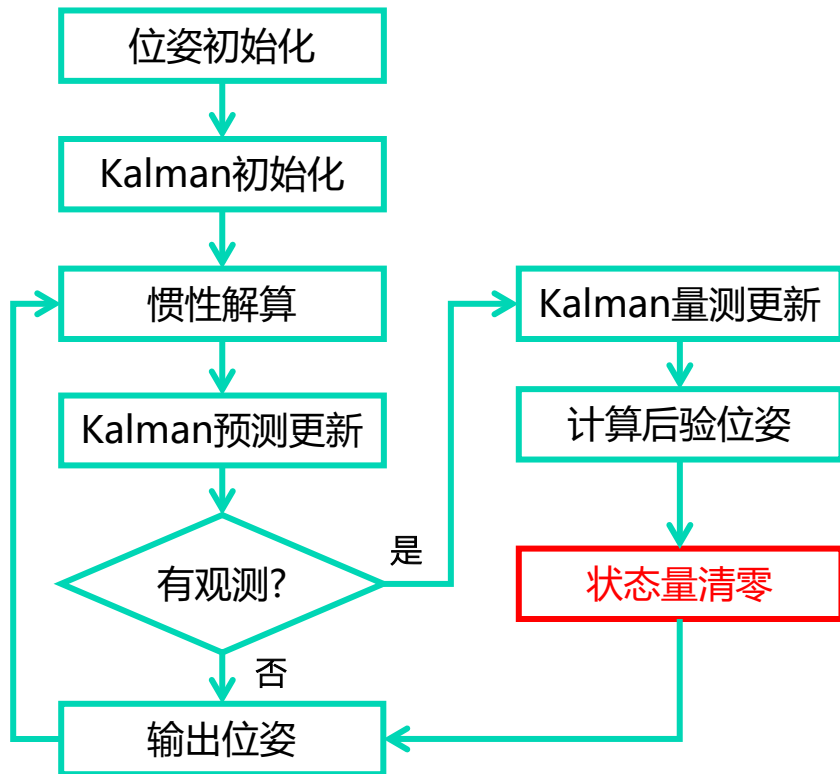
4. Kalman 滤波实际使用流程

8) 有观测时状态量清零

状态量已经用来补偿，因此需要清零。

$$\delta \hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{0}$$

后验方差保持不变。



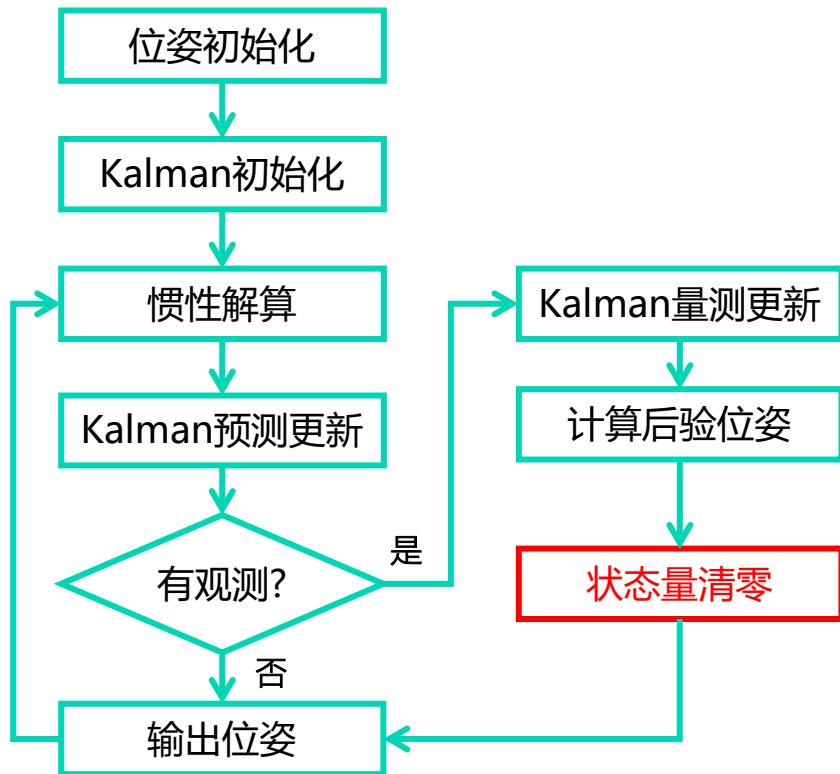


基于滤波器的融合

4. Kalman 滤波实际使用流程

9) 输出位姿

把后验位姿输出给其他模块使用，
即输出 \hat{p}_k , \hat{v}_k , \hat{R}_k (或 \hat{q}_k)。





作业

在提供的工程框架中，补全代码，实现基于地图的融合定位，并与不加滤波时的定位结果做比较。

(注：由于kitti数据有部分问题，虽然课程提供了修复后的数据，但是仍会对结果有影响，因此在某些路段滤波效果会较差，可以忽略这部分路段。)

评价标准：

1)及格：补全代码，且滤波功能正常。

2)良好：补全代码，功能正常，且经过调试参数，滤波后性能比滤波前好。(这个没有定量标准，各位把详细的误差对比结果提供在作业中，供助教有足够依据评阅)

3)优秀：在前面的模型推导中，考虑了器件误差中的随机游走，请给出不考虑随机游走模型(即 $\delta \dot{\mathbf{b}}_a = 0$, $\delta \dot{\mathbf{b}}_\omega = 0$)时的推导过程，并在工程框架中实现。对比这两种方法的性能差异(最好给出原因分析)。另外，kalman滤波的性能对噪声的设置较为敏感，请在提供结果的同时，给出不同噪声设置情况下的结果对比(至少5组参数)。



作业

附加题(不参与考核):

在滤波模型中,除了基于误差状态(error state)的模型以外,还有基于名义状态(nominal state)的滤波模型,此时参与 kalman 滤波更新的不是前面讲的 δx ,而是 $x = [p^T \ v^T \ q^T \ b_a^T \ b_\omega^T]^T$,对应的观测量变为 $y = [p^T \ v^T \ q^T]^T$,此时 kalman 更新过程为

$$\check{x}_k = F_{k-1} \hat{x}_{k-1} + B_{k-1} w_k$$

$$\check{P}_k = F_{k-1} \hat{P}_{k-1} F_{k-1}^T + B_{k-1} Q_k B_{k-1}^T$$

$$K_k = \check{P}_k G_k^T (G_k \check{P}_k G_k^T + C_k R_k C_k^T)^{-1}$$

$$\hat{P}_k = (I - K_k G_k) \check{P}_k$$

$$\hat{x}_k = \check{x}_k + K_k (y_k - G_k \check{x}_k)$$

它对应的状态方程、观测方程等模型,本课程没有展开讲,请各位参考下方资料,理解其模型推导,并在课程提供的工程代码中实现。对比两种方法在精度或其他方面是否有差异,并分析原因。

参考资料: Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter

感谢聆听 !
Thanks for Listening

