Revisão

- Espaços vetoriais reais
- Subespaços vetoriais
  - Subespaços gerados
  - combinação linear EX1.
- Independência linear EX2
- Coordenadas e bases. EX3.
- Dimensão EX4
- Mudança de bases EX5.
- Transformações matriciais EX6
- Autovalores e autovetores

1) Escreva o vetor $w=(5,4)$ como combinação linear dos vetores $v_1=(1,3)$ e $v_2=(2,-3)$ em R^2.

$$w = a v_1 + b v_2$$
$$(5,4) = a(1,3) + b(2,-3)$$
$$(5,4) = (a, 3a) + (2b, -3b)$$
$$(5,4) = (a+2b, 3a-3b)$$

ou

$$\begin{cases} a+2b = 5 \\ 3a-3b = 4 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -3 & 4 \end{array}\right] = -3L_1+L_2 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -9 & -11 \end{array}\right] = -\frac{1}{9}L_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right] = -2L_2+L_1 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 23/9 \\ 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} a = 23/9 \\ b = 11/9 \end{cases}$$

Logo; $w = \frac{23}{9} v_1 + \frac{11}{9} v_2$

2) Determine se o conjunto de vetores $S=\{v_1, v_2, v_3\}$, são linearmente independentes (LI) ou linearmente dependentes (LD). Onde $v_1=(2,0,1)$, $v_2=(-1,0,4)$ e $v_3=(0,3,-1)$.

S é LI se a única solução do sistema linear $av_1+bv_2+cv_3=0$ é a solução trivial.

$$av_1+bv_2+cv_3=0$$
$$a(2,0,1)+b(-1,0,4)+c(0,3,-1) = (0,0,0)$$
$$(2a,0,a)+(-b,0,4b)+(0,3c,-c) = (0,0,0)$$
$$(2a-b, 3c, a+4b-c) = (0,0,0)$$

ou

$$\begin{cases} 2a-b = 0 \\ 3c = 0 \\ a+4b-c = 0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] = -2L_1+L_2$$

tilibra

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow 3c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$-9b + 2\cancel{c}^{0} = 0 \Rightarrow -9b = 0 \Rightarrow b = 0$

$a + 4\cancel{b}^{0} - \cancel{c}^{0} = 0 \Rightarrow a = 0$

Logo, os vetores v_1, v_2 e v_3 são LI.

3) Determine as coordenadas do vetor $(5,6)$ em relação a base $B = \{v_1, v_2\}$ do R^2. Onde $v_1 = (2,1)$ e $v_2 = (-1,-1)$.

Sejam (a,b) as coordenadas do vetor $(5,6)$ em relação a base B, temos:

$(5,6) = av_1 + bv_2$

$(5,6) = a(2,1) + b(-1,-1)$

$(5,6) = (2a, a) + (-b, -b)$

$(5,6) = (2a - b, a - b)$

$$\begin{cases} 2a - b = 5 \\ a - b = 6 \end{cases} \Rightarrow b = a - 6$$

- $2a - (a-6) = 5 \Rightarrow 2a - a + 6 = 5 \Rightarrow a = 5 - 6 \Rightarrow a = -1$
- $b = a - 6 \Rightarrow b = -1 - 6 \Rightarrow b = -7$

Logo, as coordenadas de $(5,6)$ na base B são $(a,b) = (-1,-7)$.

④ Determine uma base e a dimensão do espaço solução do sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] = -5L_1 + L_2 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -9 & 6 & 0 \end{array}\right] = -\frac{1}{7}L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & \frac{6}{7} & 0 \end{array}\right] = -L_2 + L_1 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5/7 & -\frac{13}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 9/7 & 6/7 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{5}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4 = 0 \\ x_2 + \frac{9}{7}x_3 + \frac{6}{7}x_4 = 0 \end{cases}$$

Isolando as variáveis dos pivôs, temos:

$$x_1 = -\frac{5}{7}x_3 + \frac{13}{7}x_4$$

$$x_2 = -\frac{9}{7}x_3 - \frac{6}{7}x_4$$

Substituindo $x_3 = s$ e $x_4 = t$, o conjunto solução do sistema fica dado por:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \left(-\frac{5}{7}s + \frac{13}{7}t, -\frac{9}{7}s - \frac{6}{7}t, s, t\right) \\ &= \left(-\frac{5}{7}s, -\frac{9}{7}s, s, 0\right) + \left(\frac{13}{7}t, -\frac{6}{7}t, 0, t\right) \\ &= s\left(-\frac{5}{7}, -\frac{9}{7}, 1, 0\right) + t\left(\frac{13}{7}, -\frac{6}{7}, 0, 1\right), \ s \text{ e } t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Logo, uma base do conjunto solução é $B = \left\{\left(-\frac{5}{7}, -\frac{9}{7}, 1, 0\right), \left(\frac{13}{7}, -\frac{6}{7}, 0, 1\right)\right\}$, cuja dimensão é 2.

⑤ Sejam as bases $B=\{u_1, u_2\}$ e $B'=\{u'_1, u'_2\}$ em $\mathbb{R}^2$, onde:

$u_1=(2,2)$ $\quad$ $u'_1=(1,3)$

$u_2=(4,-1)$ $\quad$ $u'_2=(-1,1)$

Encontre a matriz de transição $P_{B\to B'}$ de B para B'.

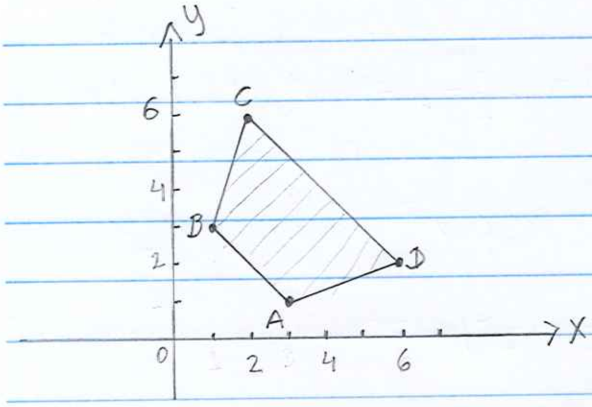
$$[B' \mid B] \to [I \mid P_{B\to B'}]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] = -3L_1+L_2 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & -13 \end{array}\right] = \frac{1}{4}L_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{13}{4} \end{array}\right] = L_2+L_1 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 1 & -1 & -13/4 \end{array}\right]$$

Logo, $P_{B\to B'} = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 \\ -1 & -13/4 \end{bmatrix}$ e $[V]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 \\ -1 & -13/4 \end{bmatrix} [V]_B$.

⑥ Seja a figura abaixo:



a) Determine a função de transformação que faz uma reflexão em relação ao eixo y.

$T(x,y) = (-x, y)$

b) Determine a matriz da transformação.

$T(1,0) = (-1,0)$
$T(0,1) = (0,1)$ $\Rightarrow$ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) Calcule a reflexão da figura dada.

$A=(3,1)$, $B=(1,3)$, $C=(2,6)$, $D=(6,2)$

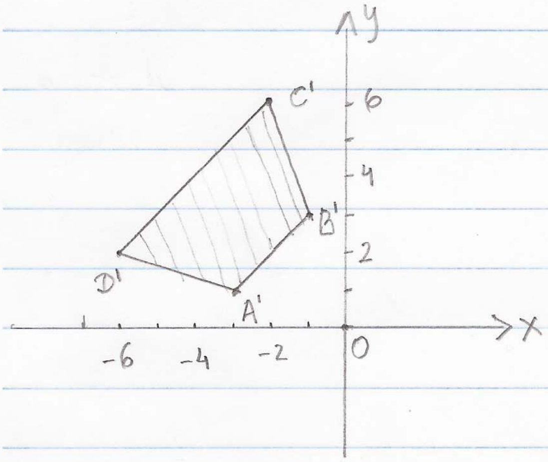
• Cálculo das transformações:

$A' = O + T(\vec{OA}) = (0,0) + T(3,1) = (0,0) + (-3,1) = (-3,1)$

$B' = O + T(\vec{OB}) = (0,0) + T(1,3) = (0,0) + (-1,3) = (-1,3)$

$C' = O + T(\vec{OC}) = (0,0) + T(2,6) = (0,0) + (-2,6) = (-2,6)$

$D' = O + T(\vec{OC}) = (0,0) + T(6,2) = (0,0) + (-6,2) = (-6,2)$



d) Calcule a reflexão da figura, tendo como ponto de referência o ponto A.

$\vec{AB} = B - A = (1-3, 3-1) = (-2,2)$

$\vec{AC} = C - A = (2-3, 6-1) = (-1,5)$

$\vec{AD} = D - A = (6-3, 2-1) = (3,1)$

$A' = A$

$B' = A + T(\vec{AB}) = (3,1) + (2,2) = (5,3)$

$C' = A + T(\vec{AC}) = (3,1) + (1,5) = (4,6)$

$D' = A + T(\vec{AD}) = (3,1) + (-3,1) = (0,2)$