4.6 – Mudança de bases   pag 217 - 222

Problema da mudança de base: Se $[v]_B$ for um vetor em relação à uma base B, num espaço vetorial V, e $[v]_{B'}$ for um vetor em relação à uma base B', qual é a relação entre os vetores $[v]_B$ e $[v]_{B'}$?

$$\boxed{\begin{array}{c} B=\{u_1, u_2\} \\ [v]_B \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} B'=\{u'_1, u'_2\} \\ [v]_{B'} \end{array}}$$

Para simplificar, vamos resolver esse problema em R^2. A solução para R^n é análoga.

Seja um vetor $[v]_B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ em relação a base B. Isto é:

$$[v]_B = k_1 u_1 + k_2 u_2 \qquad \text{(I)}$$

Escrevendo $[u_1]_{B'} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ e $[u_2]_{B'} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ em relação à base B', temos:

$$\begin{aligned} u_1 &= a u'_1 + b u'_2 \\ u_2 &= c u'_1 + d u'_2 \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo II em I, temos:

$$\begin{aligned} [v]_{B'} &= k_1(a u'_1 + b u'_2) + k_2(c u'_1 + d u'_2) \\ &= a k_1 u'_1 + b k_1 u'_2 + c k_2 u'_1 + d k_2 u'_2 \\ &= (a k_1 + c k_2) u'_1 + (b k_1 + d k_2) u'_2 \end{aligned}$$

Ou seja: $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} a k_1 + c k_2 \\ b k_1 + d k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} [u_1]_{B'} & [u_2]_{B'} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \end{array} \cdot [v]_B$

Ou ainda:

$$[v]_{B'} = P_{B \to B'} [v]_B$$

onde: $P_{B \to B'} = \left[[u_1]_{B'} \middle| [u_2]_{B'} \right]$

Ex: Sejam as bases $B = \{u_1, u_2\}$ e $B' = \{u'_1, u'_2\}$ em R^2, onde:

$u_1 = (1,0)$, $u_2 = (0,1)$, $u'_1 = (1,1)$, $u'_2 = (2,1)$.

Encontre a matriz de transição $P_{B \to B'}$ de B para B'.

$$[v]_{B'} = P_{B \to B'} [v]_B$$

Escrevendo os vetores da base velha B em relação a nova base B'.

- $u_1 = a u'_1 + b u'_2$

$(1,0) = a(1,1) + b(2,1)$

$(1,0) = (a,a) + (2b,b)$

$(1,0) = (a+2b, a+b)$

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ a + b = \underbrace{0}_{u_1} \end{cases}$$

- $u_2 = a u'_1 + b u'_2$

$(0,1) = a(1,1) + b(2,1)$

$(0,1) = (a,a) + (2b,b)$

$(0,1) = (a+2b, a+b)$

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ a + b = \underbrace{1}_{u_2} \end{cases}$$

Podemos resolver ambos sistemas de uma só vez:

$$\begin{array}{cc} u'_1 & u'_2 \\ \end{array} \; \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array}$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{B' \;\;|\;\; B} = -L_1 + L_2 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] = -L_2 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] = \begin{array}{l} -2L_2 \\ +L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{}_{[u_1]_{B'}} \quad \underbrace{}_{[u_2]_{B'}}$$

Logo:

$$[v]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{P_{B \to B'}} . [v]_B$$

Teorema: Se P for a matriz de transição de uma base B para uma base B' de um espaço vetorial V de dimensão finita. Então P é invertível e P^{-1} é a matriz de transição de B' para B.

Um procedimento para calcular $P_{B \to B'}$

Passo 1: Montamos a matriz $[B' | B]$

Passo 2: Transformamos a matriz $[B' | B]$ na matriz $[I | P_{B \to B'}]$ por escalonamento.

Ou seja:

$$\left[\underset{\substack{\downarrow \\ \text{base} \\ \text{nova}}}{B'} \;\middle|\; \underset{\substack{\downarrow \\ \text{base} \\ \text{velha}}}{B}\right] \xrightarrow[\text{elementares}]{\text{operações}} [\, I \mid P_{B \to B'} \,]$$

Exercício 8 (pág 223): Considere as bases $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $B' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, em que:

$u_1 = (-3, 0, -3)$, $u_2 = (-3, 2, -1)$, $u_3 = (1, 6, -1)$

$u'_1 = (-6, -6, 0)$, $u'_2 = (-2, -6, 4)$, $u'_3 = (-2, -3, 7)$

a) Encontre a matriz de transição de B para B'.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad\quad B' & \quad\quad\quad\quad B \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} -6 & -2 & -2 & -3 & -3 & 1 \\ -6 & -6 & -3 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 7 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right] \end{array} = -\frac{1}{6}L_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/2 & 1/2 & -1/6 \\ -6 & -6 & -3 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 7 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right] = 6L_1 + L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/2 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & -4 & -1 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right] = -\frac{1}{4}L_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/2 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1 & 1/4 & -3/4 & -5/4 & -5/4 \\ 0 & 4 & 7 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right] = -4L_2 + L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/2 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1 & 1/4 & -3/4 & -5/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] = \frac{1}{6}L_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/2 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1 & 1/4 & -3/4 & -5/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 & 2/3 \end{array}\right] \begin{array}{l} = -\frac{1}{3}L_3 + L_1 \\ = -\frac{1}{4}L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/3 & 0 & 1/2 & 5/18 & -7/18 \\ 0 & 1 & 0 & -3/4 & -17/12 & -17/12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 & 2/3 \end{array}\right] = -\frac{1}{3}L_2 + L_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & 3/4 & 1/12 \\ 0 & 1 & 0 & -3/4 & -17/12 & -17/12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 & 2/3 \end{array}\right]$$

$P_{B \to B'}$

b) Calcule o vetor de coordenadas $[W]_{B'}$ associado ao vetor $[W]_B = (-5, 8, -5)$.

$$[W]_{B'} = P_{B \to B'} [W]_B$$

$$[W]_{B'} = \begin{bmatrix} 3/4 & 3/4 & 1/12 \\ -3/4 & -17/12 & -17/12 \\ 0 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/6 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad //$$