4 - Espaços Vetoriais Arbitrários

4.1 - Espaços vetoriais reais

Em espaços vetoriais euclidianos, difinimos dois tipos de operações: adição e multiplicação por escalar. Por exemplo, no R^2, dados dois elementos $u=(u_1,u_2)$ e $V=(V_1,V_2) \in R^2$ e escalar $a \in R$, definimos as operações.

- Adição:

1) $u+v = (u_1,u_2)+(v_1,v_2) = (u_1+v_1, u_2+v_2) \in R^2$

- Multiplicação por escalar:

2) $au = a(u_1,u_2) = (au_1, au_2) \in R^2$

E verificamos que dado u, v e $w \in R^2$ e escalares a e $b \in R$, então as seguintes propriedades são válidas:

- Em relação à adição:

3) $u+v = v+u$ (comutativa da adição)
4) $u+(v+w) = (u+v)+w$ (associatividade da adição)
5) Existe um vetor nulo 0, tal que
$u+0=u$ (elemento neutro)
6) Existe um vetor simétrico $-u$, talque
$u+(-u)=0$ (elemento simétrico)

- Em relação a multiplicação por escalar:

7) $a(u+v) = au+av$
8) $(a+b)u = au+bu$
9) $a(bu) = (ab)u$
10) $1u = u$

O espaço R^2 com essas duas operações e propriedades é um espaço vetorial real.

Dizemos que um conjunto não vazio V é um espaço vetorial real se V satisfaz a seguinte definição.

Definição: Seja um conjunto V, não vazio, sobre o qual estão definidas as operações adição e multiplicação por escalar, isto é:

- $\forall u, v \in V, \; u+v \in V$
- $\forall a \in R, \forall u \in V, \; au \in V$

O conjunto V com essas duas operações é chamado espaço vetorial real se as seguintes propriedades (ou axiomas) forem válidas:

- Adição:

A_1) $u+v = v+u \quad , \forall u, v \in V$

A_2) $u+(v+w) = (u+v)+w \quad , \forall u, v \text{ e } w \in V$

A_3) $\exists 0 \in V, \forall u \in V$

$u+0 = u$

A_4) $\forall u \in V, \exists (-u) \in V,$

$u+(-u) = 0$

- Multiplicação por escalar:

M_1) $a(u+v) = au+av \quad , \forall u \in V \text{ e } a \in R$

M_2) $(a+b)u = au+bu \quad , \forall u \in V \text{ e } a, b \in R$

M_3) $a(bu) = (ab)u \quad , \forall u \in V \text{ e } a, b \in R$

M_4) $1u = u \quad , \forall u \in V$

Obs: os elementos do espaço vetorial V são chamados de vetores.

Ex 1: Mostre que o conjunto V de todas as matrizes 2x2, com as operações matriciais de adição e multiplicação por escalar.

$$u+v=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix}$$

e

$$au=a\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} au_{11} & au_{12} \\ au_{21} & au_{22} \end{bmatrix}$$

é um espaço vetorial.

Demonstração:

$A_1)$

$$u+v=\begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{11}+u_{11} & v_{12}+u_{12} \\ v_{21}+u_{21} & v_{22}+u_{22} \end{bmatrix}=v+u$$

$A_2)$ $$u+(v+w)=\begin{bmatrix} u_{11}+(v_{11}+w_{11}) & u_{12}+(v_{12}+w_{12}) \\ u_{21}+(v_{21}+w_{21}) & u_{22}+(v_{22}+w_{22}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (u_{11}+v_{11})+w_{11} & (u_{12}+v_{12})+w_{12} \\ (u_{21}+v_{21})+w_{21} & (u_{22}+v_{22})+w_{22} \end{bmatrix}$$

$$=(u+v)+w$$

$A_3)$ $\exists\ 0=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $u+0=u$

$$u+0=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=u$$

$A_4)$ $\exists\ -u=\begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}$, $u+(-u)=0$

$$u+(-u)=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=0$$

M1) $a(u+v) = \begin{bmatrix} a(u_{11}+v_{11}) & a(u_{12}+v_{12}) \\ a(u_{21}+v_{21}) & a(u_{22}+v_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au_{11}+av_{11} & au_{12}+av_{12} \\ au_{21}+av_{21} & au_{22}+av_{22} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} au_{11} & au_{12} \\ au_{21} & au_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} av_{11} & av_{12} \\ av_{21} & av_{22} \end{bmatrix} = au + av$

M2) $(a+b)u = \begin{bmatrix} (a+b)u_{11} & (a+b)u_{12} \\ (a+b)u_{21} & (a+b)u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au_{11}+bu_{11} & au_{12}+bu_{12} \\ au_{21}+bu_{21} & au_{22}+bu_{22} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} au_{11} & au_{12} \\ au_{21} & au_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bu_{11} & bu_{12} \\ bu_{21} & bu_{22} \end{bmatrix} = au + bu$

M3) $a(bu) = a\begin{bmatrix} bu_{11} & bu_{12} \\ bu_{21} & bu_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ab)u_{11} & (ab)u_{12} \\ (ab)u_{21} & (ab)u_{22} \end{bmatrix} = (ab)\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$

$= (ab)u$

M4) $1u = 1\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1u_{11} & 1u_{12} \\ 1u_{21} & 1u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = u$

Logo V é um espaço vetorial ▨

Ex2: Seja $V = R^2$, $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2) \in R^2$ com as seguintes operações de adição e multiplicação por escalar

$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, e

$au = (au_1, 0)$, $a \in R$.

Mostre que V não é um espaço vetorial.

Demonstração:

Basta mostrar que o axioma M4 não é válido $\forall$ $u = (u_1, u_2)$, onde $u_2 \neq 0$.

M4) $1u = 1(u_1, u_2) = (1u_1, 0) = (u_1, 0) \neq u$

Logo V não é um espaço vetorial.

4.2 - Subespaços vetoriais

É possível um espaço vetorial estar contido em outro espaço vetorial.

Definição: Um subconjunto W de um espaço vetorial V é denominado subespaço de V, se W for um espaço vetorial por si só com as operações de adição e multiplicação por escalar definidos em V.

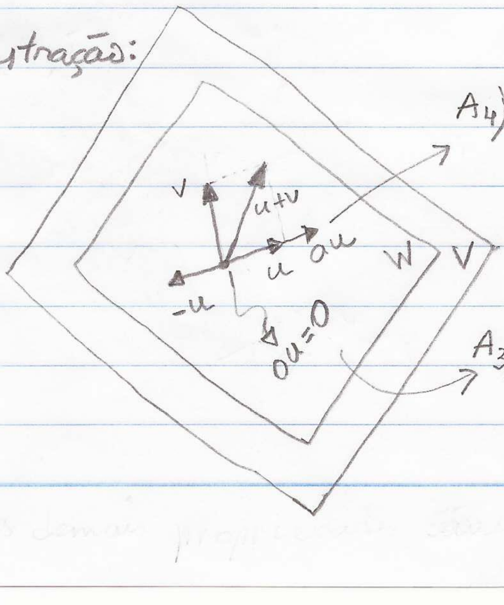
Deveríamos verificar todas as propriedades de espaço vetorial para mostrar se um subconjunto W forma um espaço vetorial. Entretanto, verificar apenas as condições do teorema a seguir são suficientes.

Teorema: Se W for um conjunto de um ou mais vetores num espaço vetorial V, então W é um subespaço de V se, e só se, as condições seguintes forem válidas.

a) $\forall\ u$ e $v \in W$, $u+v \in W$.

b) $\forall\ u \in W$ e $a \in \mathbb{R}$, $au \in W$.

Demonstrações:



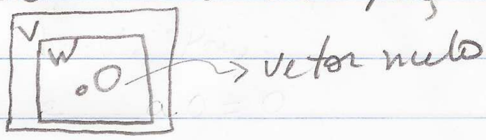
A_4) O vetor $(-u)$ é obtido multiplicando um vetor u por $a=-1$ em au.

A_3) O vetor nulo é obtido multiplicando um vetor u por $a=0$. em au.

As propriedades A_1, A_2 e $M_1 - M_4$ também são válidas para W, pois elas são válidas para todos os vetores de V, inclusive os de W.

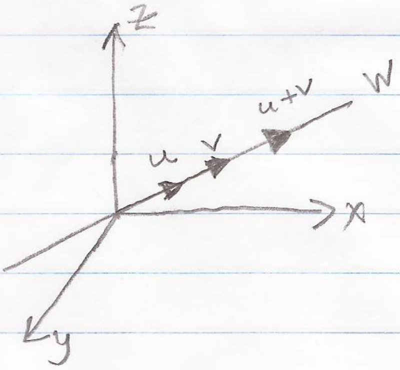
Ex1: O subespaço zero

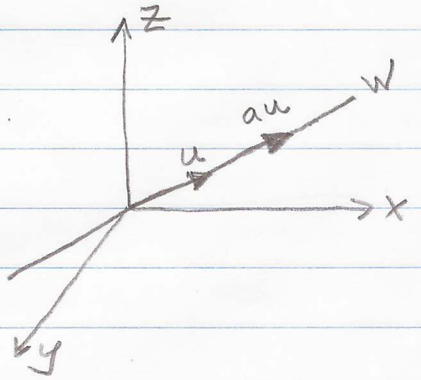
Se V for um espaço vetorial qualquer e se $W = \{0\}$ for o subespaço de V que consiste somente no vetor nulo, então dizemos que W é o subespaço zero ou nulo de V.



Ex2: Retas pela origem são subespaços em R^2 e R^3

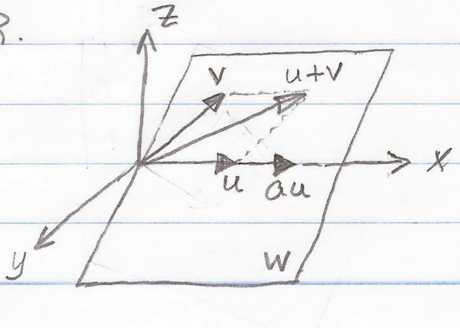
Se W for uma reta pela origem em R^2 ou R^3, então a soma de dois vetores na reta W ou a multiplicação de um vetor na reta W por um escalar produz um vetor também na reta W. Logo, W é um subespaço vetorial.



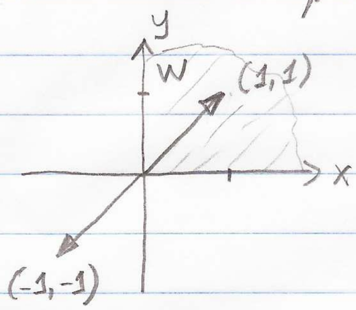


Ex3: Planos pela origem são subespaços de R^3.

Se u e v forem vetores num plano W pela origem de R^3, então u+v e au também estão nesse mesmo plano W, para quaisquer $a \in R$.



Ex4: Um subconjunto do R^2 que não é subespaço.
Seja W o conjunto de todos os pontos (x,y) em R^2 tais que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Esse conjunto não é um subespaço de R^2, pois ele não é fechado na multiplicação por escalar. Por exemplo, para $v = (1, 1) \in W$, $(-1)v = (-1,-1) \notin W$.



- Subespaços gerados

Um subespaço pode ser gerado por um conjunto finito de vetores.

Definição 1: Dizemos que um vetor w num espaço vetorial V é uma <u>combinação linear</u> dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_r$ em V, se w puder ser expresso na forma

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r$$

em que $a_1, a_2, \dots, a_r$ são escalares, denominados coeficientes da combinação linear.

Ex1: Sejam dois vetores $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (3,1)$ em R^2. Determine a combinação linear $w = a_1 v_1 + a_2 v_2$ quando:

a) $a_1 = 2$ e $a_2 = 1$

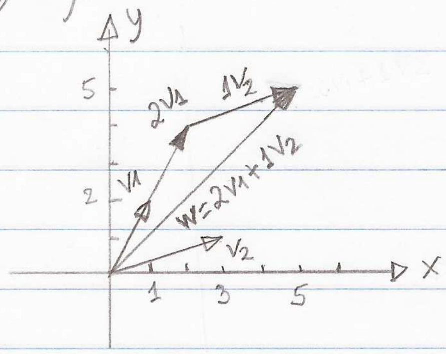
$w = 2(1,2) + 1(3,1)$

$w = (2,4) + (3,1)$

$w = (2+3, 4+1)$

$w = (5,5)$

graficamente:



b) $a_1 = -2$ e $a_2 = \frac{1}{2}$

$w = -2(1,2) + \frac{1}{2}(3,1)$

$w = (-2,-4) + \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$w = \left(-2 + \frac{3}{2}, -4 + \frac{1}{2}\right)$

$w = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right)$

Ex2: Sejam os vetores $u = (1,2,-1)$ e $v = (6,4,2)$ em R^3.

a) Mostre que $w = (9,2,7)$ é uma combinação linear de u e v.

Devemos encontrar escalares a_1 e $a_2 \in R$, tais que:

$w = a_1 v + a_2 u$

$(9,2,7) = a_1(1,2,-1) + a_2(6,4,2)$

$(9,2,7) = (a_1, 2a_1, -a_1) + (6a_2, 4a_2, 2a_2)$

$(9,2,7) = (a_1+6a_2,\ 2a_1+4a_2,\ -a_1+2a_2)$

ou

$$\begin{cases} a_1 + 6a_2 = 9 \\ 2a_1 + 4a_2 = 2 \\ -a_1 + 2a_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ = -2L_1 + L_2 \\ = L_1 + L_3 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & 8 & 16 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ = -\frac{1}{8}L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 16 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ = -8L_2 + L_3 \end{array} \quad \begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 6a_2 = 9 \\ a_2 = 2 \end{cases}$$

• $a_1 = 9 - 6a_2 \Rightarrow a_1 = 9 - 6(2) \Rightarrow a_1 = 9 - 12 \Rightarrow a_1 = -3$

Logo, $w = -3u + 2v$

b) Mostre que $w' = (4,-1,8)$ não é uma combinação linear de u e v.

Devemos mostrar que não existem escalares a_1 e a_2, tais que:

$w' = a_1 u + a_2 v$

$(4,-1,8) = a_1(1,2,-1) + a_2(6,4,2)$

$(4,-1,8) = (a_1+6a_2,\ 2a_1+4a_2,\ -a_1+2a_2)$

ou

$$\begin{cases} a_1 + 6a_2 = 4 \\ 2a_1 + 4a_2 = -1 \\ -a_1 + 2a_2 = 8 \end{cases} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ = -2L_1 + L_2 \\ = L_1 + L_3 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 8 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ = -\frac{1}{8}L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 9/8 \\ 0 & 8 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ = -8L_2 + L_3 \end{array} \quad \begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 9/8 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 6a_2 = 4 \\ a_2 = 9/8 \\ 0 = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

Sistema sem solução

Logo, w' não é combinação linear de u e v.

Definição 2: Seja V um espaço vetorial e W um subespaço de V. Se W é formado por todas as combinações lineares de um conjunto de vetores $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \subset V$, então dizemos que W é gerado pelos vetores de S, e que S é um conjunto gerador de W.

Ex: O conjunto de vetores canônicos $S = \{i, j, k\}$ é o conjunto gerador do R^3. Pois todo vetor $(a, b, c) \in R^3$ pode ser escrito como combinação linear desses vetores. Isto é:

$$\begin{aligned}(a,b,c) &= (a,0,0) + (0,b,0) + (0,0,c) \\ &= a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) \\ &= ai + bj + ck \;//\end{aligned}$$

4.3 - Independência linear

Em independência linear, dado um conjunto S de r vetores de um espaço vetorial V, queremos saber se pelo menos um desses vetores pode ser escrito como combinação linear dos demais. Se pelo menos um puder, então o conjunto S é linearmente dependente. Caso contrário, S é linearmente independente. Ou de outra forma.

Definição: Se $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ for um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial V, então a equação vetorial

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_r v_r = 0$$

tem pelo menos a solução trivial

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_r = 0.$$

como solução. Se essa for a única solução, dizemos que S é um <u>conjunto linearmente independente</u>(LI). Caso contrário, dizemos que S é um <u>conjunto linearmente dependente</u> (LD).

EX1: Independência linear dos vetores canônicos em R^3.

O conjunto LI mais básico em R^3 é o conjunto de vetores unitários canônicos i, j, k.

Demonstração:

$k_1 i + k_2 j + k_3 k = 0$

$k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = (0,0,0)$

$(k_1,0,0) + (0,k_2,0) + (0,0,k_3) = (0,0,0)$

$(k_1,k_2,k_3) = (0,0,0)$

Isto é: $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ e $k_3 = 0$. Logo $\{i,j,k\}$ é LI.

EX2: Independência linear em R^3.

Determine se os vetores $v_1=(1,-2,3)$, $v_2=(5,6,-1)$ e $v_3=(3,2,1)$ são LI ou LD em R^3.

$k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0$

$k_1(1,-2,3)+k_2(5,6,-1)+k_3(3,2,1)=(0,0,0)$

$(k_1,-2k_1,3k_1)+(5k_2,6k_2,-k_2)+(3k_3,2k_3,k_3)=(0,0,0)$

$(k_1+5k_2+3k_3,-2k_1+6k_2+2k_3,3k_1-k_2+k_3)=(0,0,0)$

ou

$$\begin{cases} k_1+5k_2+3k_3=0 \\ -2k_1+6k_2+2k_3=0 \\ 3k_1-k_2+k_3=0 \end{cases} \Rightarrow \overset{A}{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]} \begin{array}{l} \\ =2L_1+L_2 \\ =-3L_1+L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 0 \\ 0 & -16 & -8 & 0 \end{array}\right] = \frac{1}{16}L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -16 & -8 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ =16L_2+L_3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} k_1 & k_2 & k_3 \end{array} \\ \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{\det(A)=0} \end{array} =-5L_2+L_1 \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} k_1+5k_2+3k_3=0 \\ k_2+\frac{1}{2}k_3=0 \end{cases}}$$

Um sistema homogêneo alongado na horizontal (mais variáveis que equações) tem múltiplas soluções.

Continuando a resolução:

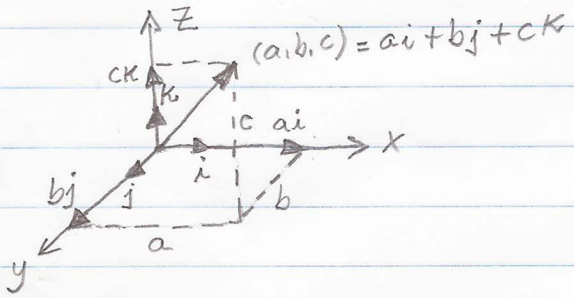
$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} k_1 & k_2 & k_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow \begin{cases} k_1 \quad +\frac{1}{2}k_3=0 \Rightarrow k_1=-\frac{1}{2}k_3 \\ k_2+\frac{1}{2}k_3=0 \Rightarrow k_2=-\frac{1}{2}k_3 \end{cases}$$

Logo, o sistema tem múltiplas soluções e os vetores $\{v_1,v_2,v_3\}$ são LD.

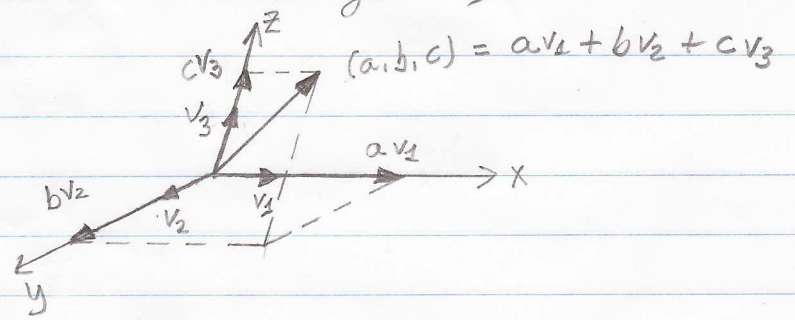
Teorema: Seja $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_r\}$ um conjunto de vetores em R^n. Se $r>n$, então S é linearmente dependente.

4.4 – Coordenadas e bases

No R^3, vimos que o conjunto de vetores canônicos $S=\{i,j,k\}$ é linearmente independente, e S gera o espaço vetorial R^3. Isto é, qualquer vetor com coordenadas (a,b,c) pode ser escrito como uma combinação linear $(a,b,c)=ai+bj+ck$ dos vetores i, j e k, formando um sistema de coordenadas retangulares.



Dizemos que $\{i,j,k\}$ é uma base (ou vetores de base) do R^3, e que os coeficientes (a,b,c), da combinação linear, são as coordenadas em relação a base canônica. Entretanto outros conjuntos $S=\{v_1,v_2,v_3\}$ de vetores não ortogonais e LI podem gerar o R^3, formando sistemas de coordenadas não retangulares.



Definição 1: Se V for um espaço vetorial qualquer e $S=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ for um conjunto finito de vetores em V, dizemos que S é uma base de V se valerem as duas condições a seguir:

a) S é linearmente independente
b) S gera V.

EX: Mostre que os vetores $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (2,9,0)$ e $v_3 = (3,3,4)$ formam uma base do $\mathbb{R}^3$.

Devemos mostrar que os vetores são LI e geram o $\mathbb{R}^3$.

I) Demonstrando que os vetores são LI. Ou seja:

$a v_1 + b v_2 + c v_3 = 0$

$a(1,2,1) + b(2,9,0) + c(3,3,4) = (0,0,0)$

$(a,2a,a) + (2b,9b,0) + (3c,3c,4c) = (0,0,0)$

$(a+2b+3c,\ 2a+9b+3c,\ a+4c) = (0,0,0)$

ou

$$\begin{cases} a+2b+3c=0 \\ 2a+9b+3c=0 \\ a \qquad +4c=0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b}$$

cuja solução é $x = A^{-1}b$.

Se calcularmos A^{-1} por escalonamento, obtemos:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -36 & 8 & 21 \\ 5 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 & 8 & 21 \\ 5 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36(0)+8(0)+21(0) \\ 5(0)-1(0)-3(0) \\ 9(0)-2(0)-5(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, v_1, v_2 e v_3 são LI.

II) Demonstrando que os vetores geram o $\mathbb{R}^3$. Ou seja, qualquer vetor (b_1, b_2, b_3) pode ser escrito como combinação linear de v_1, v_2 e v_3.

$$(b_1, b_2, b_3) = a v_1 + b v_2 + c v_3$$
$$(b_1, b_2, b_3) = a(1,2,1) + b(2,9,0) + c(3,3,4)$$

ou

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = b_1 \\ 2a + 9b + 3c = b_2 \\ a \quad\;\; + 4c = b_3 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{b}$$

onde:

$$x = A^{-1} b$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -36 & 8 & 21 \\ 5 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Ou seja, como A tem inversa, o sistema acima tem solução única (a, b, c) para qualquer vetor $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. Logo v_1, v_2 e v_3 geram o $\mathbb{R}^3$. ▨

Definição 2: Se $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ for uma base de um espaço vetorial V, e se

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$$

é um vetor v em termos da base S, então os escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são denominados coordenadas de v em relação à base S.

Ex: Encontre as coordenadas (a, b, c) do vetor $v = (5, -1, 9)$ em relação a base $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ do exemplo anterior.

$$(5,-1,9) = a v_1 + b v_2 + c v_3$$

$$(5,-1,9) = a(1,2,1) + b(2,9,0) + c(3,3,4)$$

ou

$$\begin{array}{ccc} A & x & = & b \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

onde:

$$\begin{array}{ccccc} x & = & A^{-1} & \cdot & b \\ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -36 & 8 & 21 \\ 5 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} -36(5) + 8(-1) + 21(9) \\ 5(5) - 1(-1) - 3(9) \\ 9(5) - 2(-1) - 5(9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Logo: $(a, b, c) = (1, -1, 2)$ e $v = 1v_1 - 1v_2 + 2v_3$ //

tilibra

4.5 Dimensão

pág. 209-213

Teorema 1: Todos as bases de um espaço vetorial de dimensão finita têm o mesmo número de vetores.

Teorema 2: Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base qualquer de V.

a) Um conjunto com mais de n vetores é linearmente dependente.

b) Um conjunto com menos de n vetores não gera V.

Logo, temos:

Definição: A dimensão de um espaço vetorial V, de dimensão finita, é denotada por dim(V) e é definida pelo número de vetores numa base de V. Também definimos o espaço vetorial nulo como tendo dimensão zero.

EX: Uma base do R^2 tem dois vetores, e uma base do R^3 tem três vetores. Logo, esses espaços tem dimensões 2 e 3, respectivamente.

Teorema 3: Se W for um subespaço de um espaço vetorial V de dimensão finita, então:

a) $\dim(W) \leq \dim(V)$

b) $W = V$ se, e somente se, $\dim(W) = \dim(V)$.

Pág 216

Exerc 2: Encontre uma base e a dimensão do espaço solução do sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Solução: Resolvendo o sistema por escalonamento, temos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] = \frac{1}{3}L_1 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] = -5L_1 + L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -8/3 & -2/3 & -8/3 & 0 \end{array}\right] = -\frac{3}{8}L_2 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1 & 0 \end{array}\right] = -\frac{1}{3}L_2 + L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{1}{4}x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{4}x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Isolando os pivôs temos:

$x_1 = -\frac{1}{4}x_3$

$x_2 = -\frac{1}{4}x_3 - x_4$

Chamando as variáveis livres de $x_3 = s$ e $x_4 = t$, temos:

$x_1 = -\frac{1}{4}s$

$x_2 = -\frac{1}{4}s - t$

Cujo espaço solução é dado por:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \left(-\frac{1}{4}s, -\frac{1}{4}s - t, s, t\right) \\ &= \left(-\frac{1}{4}s, -\frac{1}{4}s, s, 0\right) + (0, -t, 0, t) \\ &= s\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0\right) + t(0, -1, 0, 1)\end{aligned}$$

Logo, os vetores $S = \left\{\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0\right), (0, -1, 0, 1)\right\}$ formam uma base do espaço solução, cuja dimensão é 2.