1.3) Matrizes e operações matriciais

Definição: Uma matriz é um agrupamento retangular de números. Dizemos que os números nesse agrupamento são as entradas da matriz.

Exemplo: $A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ matriz 3 linhas por duas colunas

$B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 1/2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matriz 2 linhas por 3 colunas

$c_{1\times 4} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ matriz 1 linha por 4 colunas, ou <u>vetor linha</u>.

$d_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ matriz 3 linhas por 1 coluna, ou <u>vetor coluna</u>.

$E_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ matriz m linhas por n colunas.

$F_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ matriz quadrada $n\times n$

↳ diagonal principal

Notação compacta: $[e_{ij}]_{m\times n}$ ou $[e_{ij}]$

$[f_{ij}]_{n\times n}$ ou $[f_{ij}]$

Referência a elementos: e_{ij} indica o elemento que está na linha i e coluna j da matriz E.

Igualdade de matrizes

Definição: Duas matrizes são iguais se tiverem o mesmo tamanho e suas entradas são iguais.

Ex: Determine os valores de x e y, para que as matrizes A e B sejam iguais.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & x+1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & y-2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$x+1 = 2 \Rightarrow x = 2-1 \Rightarrow x = 1$ //

$y-2 = 0 \Rightarrow y = 2$ //

Soma e Subtração de matrizes

Definição: Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são matrizes $m \times n$, então a soma de A e B é uma matriz $C = [c_{ij}]$, $m \times n$, tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$$

e a diferença $A - B$ é uma matriz $D = [d_{ij}]$, $m \times n$, tal que:

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad (1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n).$$

Ex: Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

$$A+B = \begin{bmatrix} 2+3 & 1+2 & 0+0 \\ 3+0 & -1+1 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 2-3 & 1-2 & 0-0 \\ 3-0 & -1-1 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicação por escalar

Definição: Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $m \times n$ e c é um número real, então a multiplicação de A pelo escalar c, cA, é uma matriz $B = [b_{ij}]$, $m \times n$, tal que:

$$b_{ij} = c\,a_{ij} \quad (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n).$$

Ex1: Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $c = 2$. Então:

$$2A = \begin{bmatrix} 2.2 & 2.1 & 2.0 \\ 2.3 & 2(-1) & 2(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A - B = A + (-1)B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Ex2: O vetor $p = [30\ \ 15.5\ \ 9.2]$ representa os preços atuais de três produtos de uma loja. O gerente quer saber qual é o vetor de desconto d, se todos os produtos forem vendidos com 20% de desconto.

$$d = \frac{20}{100} \cdot p = 0.2\,[30\ \ 15.5\ \ 9.2] = [6\ \ 3.1\ \ 1.84]$$

Qual é o vetor de preços q com os descontos embutidos?

$$q = p - d = [30\ \ 15.5\ \ 9.2] - [6\ \ 3.1\ \ 1.84]$$

$$q = [30-6\ \ \ 15.5-3.1\ \ \ 9.2-1.84] = [24\ \ 12.4\ \ 7.36]$$

Combinação linear de matrizes

Definição: Se $A_1, A_2, \ldots, A_r$ e B são matrizes de mesmo tamanho, e se $c_1, c_2, \ldots, c_r$ são escalares, então uma expressão da forma

$$B = c_1 A_1 + c_2 A_2 + \ldots + c_r A_r$$

é denominada combinação linear de $A_1, A_2, \ldots, A_r$, com coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_r$.

Ex: Sejam $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, e $c_1 = 2$, $c_2 = 3$. Então a combinação linear $B = c_1 A_1 + c_2 A_2$, é dada por:

$$B = 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2 & 2.3 \\ 2.1 & 2.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.0 & 3.1 \\ 3.2 & 3.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Exercício: Calcule a combinação linear $B = A_1 - 2A_2$.
(A cargo do aluno)

Multiplicação de matrizes

Definição: Se A for uma matriz $m \times r$ e B uma matriz $r \times n$, então o produto AB é uma matriz $C_{m \times n}$, cuja entrada c_{ij} é obtida multiplicando-se cada elemento do vetor linha i de A pelo elemento correspondente no vetor coluna j de B. Isto é:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj} \qquad (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$$

ou

$$c_{ij} = \text{linha}_i(A) \cdot \text{coluna}_j(B) \qquad (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$$

Ex 1: Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Calcule $C = A.B$.

$$\underbrace{A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 3}}_{=} = C_{2\times 3} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = \overbrace{L_1(A) \cdot C_1(B)}^{\text{linha . coluna}} = [1 \ \ 2 \ \ 4][4 \ \ 0 \ \ 2] = 4 + 0 + 8 = 12$$

$$c_{12} = L_1(A) \cdot C_2(B) = [1 \ \ 2 \ \ 4][1 \ \ -1 \ \ 7] = 1 - 2 + 28 = 27$$

$$c_{13} = L_1(A) \cdot C_3(B) = [1 \ \ 2 \ \ 4][4 \ \ 3 \ \ 5] = 4 + 6 + 20 = 30$$

$$c_{21} = L_2(A) \cdot C_1(B) = [2 \ \ 6 \ \ 0][4 \ \ 0 \ \ 2] = 8 + 0 + 0 = 8$$

$$c_{22} = L_2(A) \cdot C_2(B) = [2 \ \ 6 \ \ 0][1 \ \ -1 \ \ 7] = 2 - 6 + 0 = -4$$

$$c_{23} = L_2(A) \cdot C_3(B) = [2 \ \ 6 \ \ 0][4 \ \ 3 \ \ 5] = 8 + 18 + 0 = 26$$

Logo: $C = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 \\ 8 & -4 & 26 \end{bmatrix}$

b) Calcule $D = B.A$.

$$\underbrace{B_{3\times 3} \cdot A_{2\times 3}}_{\neq} = D \rightarrow D \text{ não está definida}$$

Ex2: Sejam $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ e $x=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$. Calcule o produto $b=Ax$.

$$\underbrace{A_{2\times 3} \cdot x_{3\times 1}}_{=} = b_{2\times 1} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = L_1(A) \cdot C_1(x) = [1\ 2\ 4][1\ -1\ 7] = 1-2+28 = 27$$
$$b_{21} = L_2(A) \cdot C_1(x) = [2\ 6\ 0][1\ -1\ 7] = 2-6+0 = -4$$

logo: $b = \begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}$

Ex 3: Sejam $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ e $b_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, determine o vetor $x_{3\times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, tal que $Ax=b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 6x_2 + 0x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{2\times 3 \quad \underbrace{\quad}_{=} \quad 3\times 1} \qquad 2\times 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 + 0x_3 = 2 \end{cases}$$

Resolução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 0 & 2 \end{array}\right] = -2L_1 + L_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -8 & -4 \end{array}\right] = \frac{1}{2} L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \end{array}\right] = -2L_2 + L_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 12 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad +12x_3 = 7 \\ \qquad x_2 \; -4x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 - 12x_3 \\ x_2 = -2 + 4x_3 \end{cases}$$

$\rightarrow$ var. livre (x_3)

se $x_3 = 0$, então:

$x_1 = 7$ e $x_2 = -2$

logo:

$x = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ é um vetor que satisfaz $Ax = b$.

Ex 4: Do exemplo 3, temos que o sistema linear

$$\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 + 0x_3 = 2 \end{cases}$$

pode ser escrito nas formas matriciais:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 6x_2 + 0x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 6x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4x_3 \\ 0x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\text{sistema escrito como combinação linear dos vetores colunas da matriz A.}}$$

Forma matricial de um sistema linear

Considere um sistema linear de m equações e n variáveis.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sua forma matricial é dada por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A_{m\times n}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \iff \boxed{Ax = b}$$

$A_{m\times n}$ ↳ matriz de coeficientes

$x_{n\times 1}$ ↳ vetor de variáveis

$b_{m\times 1}$ → vetor de termos constantes

Transposta de uma matriz

Definição: Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ uma matriz $m \times n$.

Sua transposta é uma matriz A^T, $n \times m$, dada por:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Isto é, as linhas de A se transformam nas colunas de A^T.

Ex: Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, sua transposta é dada

por:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$