Sistemas lineares homogêneos

Um sistema linear é dito homogêneo se os termos constantes são todos zero. Isto é:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Observação:

1) Todo sistema homogêneo têm uma solução trivial $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$.
2) Quaisquer outras soluções, se houver, são ditas não-triviais.
3) Como um sistema homogêneo sempre tem a solução trivial, só há duas possibilidades:
   - O sistema tem somente a solução trivial.
   - O sistema tem múltiplas soluções, incluindo a solução trivial.
4) Nenhuma operação elementar altera a coluna de zeros associada aos termos constantes $(b_1, b_2, \ldots, b_m) = (0, 0, \ldots, 0)$. Logo, a forma escalonada reduzida de um sistema homogêneo também é um sistema homogêneo.

Teorema 1: Teorema das variáveis livres de sistemas homogêneos.

Se um sistema linear homogêneo tiver n variáveis e se a forma escalonada reduzida de sua matriz aumentada tiver r linhas não-nulas, então o sistema tem $n-r$ variáveis livres.

Ex: O sistema na forma escalonada reduzida tem o seguinte formato:

$$\left\{\begin{array}{llll} x_{k_1} & & + \underbrace{\Sigma(\ )}_{\text{soma envolvendo variáveis livres}} & = 0 \\ & x_{k_2} & + \Sigma(\ ) & = 0 \\ & \ddots & \vdots & \\ & \quad x_{k_r} & + \Sigma(\ ) & = 0 \end{array}\right\} r \text{ linhas não-nulas}$$

r pivôs, cada um associado à uma variável dependente (ou líder)

Teorema 2: Um sistema linear homogêneo com mais variáveis que equações ($n > m$) tem uma infinidade de soluções.

Retro-substituição ou substituição inversa

Para reduzir cálculos, podemos evitar o uso do método de Gauss-Jordan, aplicando a eliminação Gaussiana para obter a matriz escalonada e resolver o sistema resultante por retro-substituição.

Exemplo: Após aplicar a eliminação gaussiana em um dado sistema, obtemos a seguinte matriz escalonada.

$$
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

os pivôs estão destacados com círculos

cujo sistema associado é:

$$
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\
x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 1 \\
x_6 = 1/3
\end{cases}
$$

Usando o método da retro-substituição, temos:

Passo 1: Isolar as variáveis associadas aos pivôs:

$$x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 2x_5$$
$$x_3 = 1 - 2x_4 - 3x_6$$
$$x_6 = 1/3$$

Passo 2: começando de baixo para cima, substituimos cada equação em todas as equações acima dela.

- Substituindo $x_6 = 1/3$ na segunda equação, temos:
  $x_3 = 1 - 2x_4 - 3(1/3) \Rightarrow x_3 = -2x_4$

- Substituindo $x_3 = -2x_4$ na primeira equação, temos:
  $x_1 = -3x_2 + 2(-2x_4) - 2x_5 \Rightarrow x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$

O que resulta na seguinte solução:

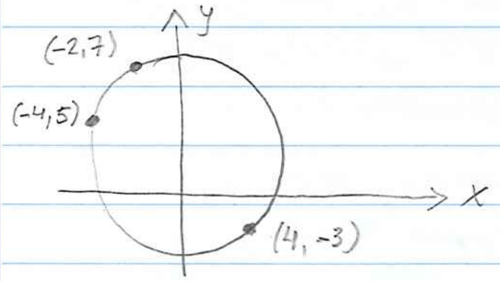
$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ x_3 = -2x_4 \\ x_6 = 1/3 \end{cases}$$

Se aplicassemos Gauss-Jordan, chegaríamos no mesmo resultado.

—— // —— // ——

Livro Anton, pág 24

Exerc 38: Encontre os coeficientes a, b, c e d, tais que a curva mostrada na figura abaixo seja dada pela equação $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$.



Resolução: Se os pontos dados pertencem a curva, então eles devem satisfazer a equação dada. Logo:

- Ponto $(-2,7)$

$a(-2)^2 + a(7)^2 + b(-2) + c(7) + d = 0$

$4a + 49a - 2b + 7c + d = 0$

$53a - 2b + 7c + d = 0$ //

- Ponto $(-4,5)$

$a(-4)^2 + a(5)^2 + b(-4) + c(5) + d = 0$

$16a + 25a - 4b + 5c + d = 0$

$41a - 4b + 5c + d = 0$ //

- Ponto $(4,-3)$

$$a(4)^2 + a(-3)^2 + b(4) + c(-3) + d = 0$$
$$16a + 9a + 4b - 3c + d = 0$$
$$25a + 4b - 3c + d = 0 \;//$$

O que resulta no seguinte sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} 53a - 2b + 7c + d = 0 \\ 41a - 4b + 5c + d = 0 \\ 25a + 4b - 3c + d = 0 \end{cases}$$

$m > n$, logo pelo teorema 2, o sistema admite múltiplas soluções.

Aplicando a eliminação gaussiana, temos:

pivô 1

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 53 & -2 & 7 & 1 & 0 \\ 41 & -4 & 5 & 1 & 0 \\ 25 & 4 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] = \frac{1}{53}L_1 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2/53 & 7/53 & 1/53 & 0 \\ 41 & -4 & 5 & 1 & 0 \\ 25 & 4 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ = -41L_1 + L_2 \\ = -25L_1 + L_3 \end{array}$$

zerar aqui

pivô 2

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2/53 & 7/53 & 1/53 & 0 \\ 0 & -130/53 & -22/53 & 12/53 & 0 \\ 0 & 262/53 & -334/53 & 28/53 & 0 \end{array}\right] = -\frac{53}{130}L_2 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2/53 & 7/53 & 1/53 & 0 \\ 0 & 1 & 11/65 & -6/65 & 0 \\ 0 & 262/53 & -\frac{334}{53} & 28/53 & 0 \end{array}\right] = -\frac{262}{53}L_2 + L_3$$

zerar aqui

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2/53 & 7/53 & 1/53 & 0 \\ 0 & 1 & 11/65 & -6/65 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{464}{65} & 64/65 & 0 \end{array}\right] = -\frac{65}{464}L_3 \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2/53 & 7/53 & 1/53 & 0 \\ 0 & 1 & 11/65 & -6/65 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4/29 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

pivô 3

matriz escalonada

Que resulta em:

$$\begin{cases} a - \frac{2}{53}b + \frac{7}{53}c + \frac{1}{53}d = 0 \\ b + \frac{11}{65}c - \frac{6}{65}d = 0 \\ c - \frac{4}{29}d = 0 \end{cases}$$

Resolvendo por retro-substituição, temos:

1) Isolamos as variáveis dos pivôs.

$$a = \frac{2}{53} b - \frac{7}{53} c - \frac{1}{53} d$$

$$b = -\frac{11}{65} c + \frac{6}{65} d$$

$$c = \frac{4}{29} d$$

2) substituição de baixo para cima

- Substituindo $c = \frac{4}{29} d$ na segunda equação, temos:

$$b = -\frac{11}{65}\left(\frac{4}{29} d\right) + \frac{6}{65} d \Rightarrow b = \frac{2}{29} d$$

//

- Substituindo $c = \frac{4}{29} d$ e $b = \frac{2}{29} d$ na primeira equação, temos:

$$a = \frac{2}{53}\left(\frac{2}{29} d\right) - \frac{7}{53}\left(\frac{4}{29} d\right) - \frac{1}{53} d \Rightarrow a = -\frac{1}{29} d$$

//

O que resulta em:

$$\left.\begin{cases} a = -\frac{1}{29} d \\ b = \frac{2}{29} d \\ c = \frac{4}{29} d \end{cases}\right\}$$ onde a, b e c são determinados em função da variável livre d.