4 - Espaços Vetoriais Arbitrários

4.1 - Espaços vetoriais reais

Em espaços vetoriais euclidianos, difinimos dois tipos de operações: adição e multiplicação por escalar. Por exemplo, no R^2, dados dois elementos $u=(u_1, u_2)$ e $V=(v_1, v_2) \in R^2$ e escalar $a \in R$, definimos as operações.

• Adição:

1) $u+v = (u_1, u_2)+(v_1, v_2) = (u_1+v_1, u_2+v_2) \in R^2$

• Multiplicação por escalar:

2) $au = a(u_1, u_2) = (au_1, au_2) \in R^2$

E verificamos que dado u, v e $w \in R^2$ e escalares a e $b \in R$, então as seguintes propriedades são válidas:

• Em relação à adição:

3) $u+v = v+u$ (comutativa da adição)

4) $u+(v+w) = (u+v)+w$ (associatividade da adição)

5) Existe um vetor nulo 0, tal que
$u+0 = u$ (elemento neutro)

6) Existe um vetor simétrico $-u$, tal que
$u+(-u) = 0$ (elemento simétrico)

• Em relação a multiplicação por escalar:

7) $a(u+v) = au+av$

8) $(a+b)u = au+bu$

9) $a(bu) = (ab)u$

10) $1u = u$

O espaço R^2 com essas duas operações e propriedades é um espaço vetorial real.

Dizemos que um conjunto não vázio V é um espaço vetorial real se V satisfaz a seguinte definição.

Definição: Seja um conjunto V, não vazio, sobre o qual estão definidas as operações adição e multiplicação por escalar, isto é:

- $\forall u, v \in V, \ u+v \in V$
- $\forall a \in R, \forall u \in V, \ au \in V$

O conjunto V com essas duas operações é chamado espaço vetorial real se os seguintes propriedades (ou axiomas) forem válidas:

- Adição:

$A_1)$ $u+v = v+u \qquad , \ \forall u, v \in V$

$A_2)$ $u+(v+w) = (u+v)+w \qquad , \ \forall u, v \text{ e } w \in V$

$A_3)$ $\exists\, 0 \in V, \ \forall u \in V$

$u+0 = u$

$A_4)$ $\forall u \in V, \ \exists (-u) \in V,$

$u+(-u) = 0$

- Multiplicação por escalar:

$M_1)$ $a(u+v) = au+av \qquad , \ \forall u \in V \text{ e } a \in R$

$M_2)$ $(a+b)u = au+bu \qquad , \ \forall u \in V \text{ e } a, b \in R$

$M_3)$ $a(bu) = (ab)u \qquad , \ \forall u \in V \text{ e } a, b \in R$

$M_4)$ $1u = u \qquad , \ \forall u \in V$

Obs: os elementos do espaço vetorial V são chamados de vetores.

Ex 1: Mostre que o conjunto V de todas as matrizes 2x2, com as operações matriciais de adição e multiplicação por escalar.

$$u+v=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix}$$

e

$$au=a\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} au_{11} & au_{12} \\ au_{21} & au_{22} \end{bmatrix}$$

é um espaço vetorial.

Demonstração:

A_1)

$$u+v=\begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{11}+u_{11} & v_{12}+u_{12} \\ v_{21}+u_{21} & v_{22}+u_{22} \end{bmatrix}=v+u$$

A_2) $$u+(v+w)=\begin{bmatrix} u_{11}+(v_{11}+w_{11}) & u_{12}+(v_{12}+w_{12}) \\ u_{21}+(v_{21}+w_{21}) & u_{22}+(v_{22}+w_{22}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (u_{11}+v_{11})+w_{11} & (u_{12}+v_{12})+w_{12} \\ (u_{21}+v_{21})+w_{21} & (u_{22}+v_{22})+w_{22} \end{bmatrix}$$

$$=(u+v)+w$$

A_3) $\exists\ 0=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $u+0=u$

$$u+0=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=u$$

A_4) $\exists\ -u=\begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}$, $u+(-u)=0$

$$u+(-u)=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=0$$

$$M1)\ a(u+v) = \begin{bmatrix} a(u_{11}+v_{11}) & a(u_{12}+v_{12}) \\ a(u_{21}+v_{21}) & a(u_{22}+v_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au_{11}+av_{11} & au_{12}+av_{12} \\ au_{21}+av_{21} & au_{22}+av_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} au_{11} & au_{12} \\ au_{21} & au_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} av_{11} & av_{12} \\ av_{21} & av_{22} \end{bmatrix} = au + av$$

$$M2)\ (a+b)u = \begin{bmatrix} (a+b)u_{11} & (a+b)u_{12} \\ (a+b)u_{21} & (a+b)u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au_{11}+bu_{11} & au_{12}+bu_{12} \\ au_{21}+bu_{21} & au_{22}+bu_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} au_{11} & au_{12} \\ au_{21} & au_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bu_{11} & bu_{12} \\ bu_{21} & bu_{22} \end{bmatrix} = au + bu$$

$$M3)\ a(bu) = a\begin{bmatrix} bu_{11} & bu_{12} \\ bu_{21} & bu_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ab)u_{11} & (ab)u_{12} \\ (ab)u_{21} & (ab)u_{22} \end{bmatrix} = (ab)\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$= (ab)u$$

$$M4)\ 1u = 1\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1u_{11} & 1u_{12} \\ 1u_{21} & 1u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = u$$

Logo V é um espaço vetorial ▨

Ex2: Seja $V = R^2$, $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2) \in R^2$ com as seguintes operações de adição e multiplicação por escalar

$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, e

$au = (au_1, 0)$, $a \in R$.

Mostre que V não é um espaço vetorial.

Demonstração:

Basta mostrar que o axioma $M4$ não é válido $\forall\ u = (u_1, u_2)$, onde $u_2 \neq 0$.

M4) $1u = 1(u_1, u_2) = (1u_1, 0) = (u_1, 0) \neq u$

Logo V não é um espaço vetorial.

4.2 - Subespaços vetoriais

É possível um espaço vetorial estar contido em outro espaço vetorial.

Definição: Um subconjunto W de um espaço vetorial V é denominado subespaço de V, se W for um espaço vetorial por si só com as operações de adição e multiplicação por escalar definidos em V.

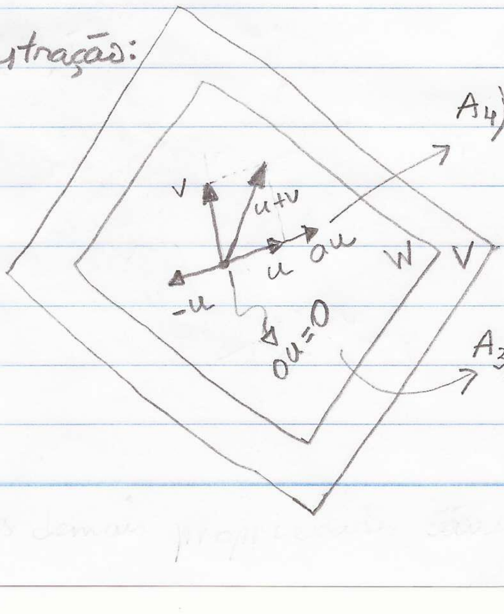
Deveríamos verificar todas as propriedades de espaço vetorial para mostrar se um subconjunto W forma um espaço vetorial. Entretanto, verificar apenas as condições do teorema a seguir são suficientes.

Teorema: Se W for um conjunto de um ou mais vetores num espaço vetorial V, então W é um subespaço de V se, e só se, as condições seguintes forem válidas.

a) $\forall\ u$ e $v \in W$, $u+v \in W$.

b) $\forall\ u \in W$ e $a \in \mathbb{R}$, $au \in W$.

Demonstração:



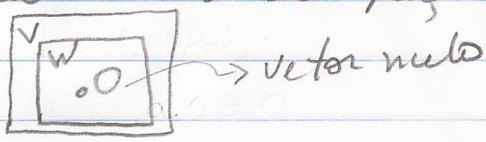
A_4) O vetor $(-u)$ é obtido multiplicando um vetor u por $a=-1$ em au.

A_3) O vetor nulo é obtido multiplicando um vetor u por $a=0$ em au.

As propriedades A_1, A_2 e $M_1 - M_4$ também são válidas para W, pois elas são válidas para todos os vetores de V, inclusive os de W.

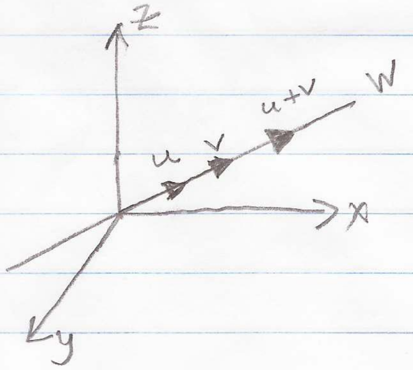
Ex1: O subespaço zero

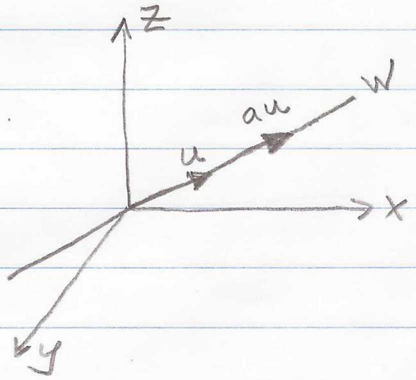
Se V for um espaço vetorial qualquer e se $W = \{0\}$ for o subespaço de V que consiste somente no vetor nulo, então dizemos que W é o subespaço zero ou nulo de V.



Ex2: Retas pela origem são subespaços em R^2 e R^3

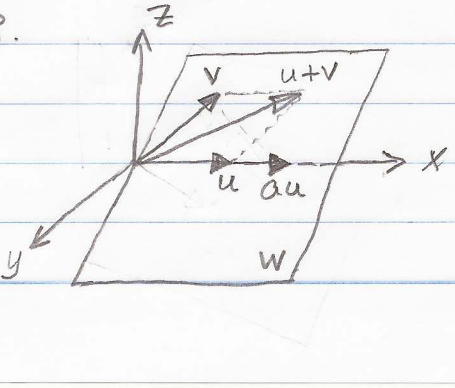
Se W for uma reta pela origem em R^2 ou R^3, então a soma de dois vetores na reta W ou a multiplicação de um vetor na reta W por um escalar produz um vetor também na reta W. Logo, W é um subespaço vetorial.





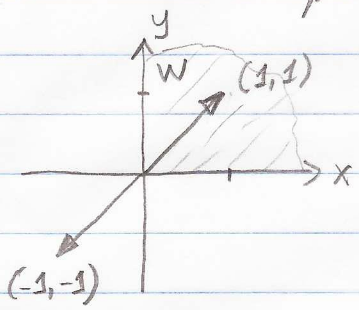
Ex3: Planos pela origem são subespaços de R^3.

Se u e v forem vetores num plano W pela origem de R^3, então u+v e au também estão nesse mesmo plano W, para quaisquer $a \in R$.



Ex4: Um subconjunto do R^2 que não é subespaço.

Seja W o conjunto de todos os pontos (x,y) em R^2 tais que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Esse conjunto não é um subespaço de R^2, pois ele não é fechado na multiplicação por escalar. Por exemplo, para $v = (1,1) \in W$, $(-1)v = (-1,-1) \notin W$.



• Subespaços gerados

Um subespaço pode ser gerado por um conjunto finito de vetores.

Definição 1: Dizemos que um vetor w num espaço vetorial V é uma <u>combinação linear</u> dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_r$ em V, se w puder ser expresso na forma

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_r v_r$$

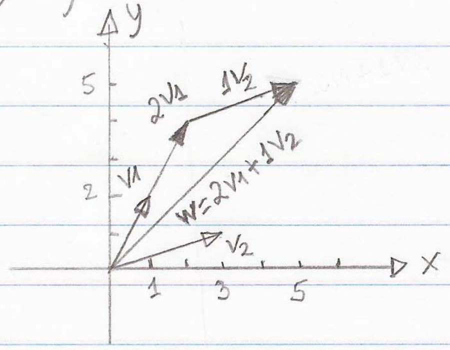
em que $a_1, a_2, \ldots, a_r$ são escalares, denominados coeficientes da combinação linear.

Ex 1: Sejam dois vetores $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (3,1)$ em R^2. Determine a combinação linear $w = a_1 v_1 + a_2 v_2$ quando:

a) $a_1 = 2$ e $a_2 = 1$

$$w = 2(1,2) + 1(3,1)$$
$$w = (2,4) + (3,1)$$
$$w = (2+3, 4+1)$$
$$w = (5,5)$$

graficamente:



b) $a_1 = -2$ e $a_2 = \frac{1}{2}$

$$w = -2(1,2) + \frac{1}{2}(3,1)$$
$$w = (-2,-4) + \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$
$$w = \left(-2 + \frac{3}{2}, -4 + \frac{1}{2}\right)$$
$$w = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right)$$

Ex 2: Sejam os vetores $u = (1,2,-1)$ e $v = (6,4,2)$ em R^3.

a) Mostre que $w = (9,2,7)$ é uma combinação linear de u e v.

Devemos encontrar escalares a_1 e $a_2 \in R$, tais que:

$$w = a_1 v + a_2 u$$

$(9,2,7) = a_1(1,2,-1) + a_2(6,4,2)$

$(9,2,7) = (a_1, 2a_1, -a_1) + (6a_2, 4a_2, 2a_2)$

$(9,2,7) = (a_1 + 6a_2,\ 2a_1 + 4a_2,\ -a_1 + 2a_2)$

ou

$$\begin{cases} a_1 + 6a_2 = 9 \\ 2a_1 + 4a_2 = 2 \\ -a_1 + 2a_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ = -2L_1 + L_2 \\ = L_1 + L_3 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & 8 & 16 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ = -\frac{1}{8}L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 16 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ = -8L_2 + L_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 6a_2 = 9 \\ a_2 = 2 // \end{cases}$$

$\circ\ a_1 = 9 - 6a_2 \Rightarrow a_1 = 9 - 6(2) \Rightarrow a_1 = 9 - 12 \Rightarrow a_1 = -3 //$

Logo, $w = -3u + 2v //$

b) Mostre que $w' = (4,-1,8)$ não é uma combinação linear de u e v.

Devemos mostrar que não existem escalares a_1 e a_2, tais que:

$w' = a_1 u + a_2 v$

$(4,-1,8) = a_1(1,2,-1) + a_2(6,4,2)$

$(4,-1,8) = (a_1 + 6a_2,\ 2a_1 + 4a_2,\ -a_1 + 2a_2)$

ou

$$\begin{cases} a_1 + 6a_2 = 4 \\ 2a_1 + 4a_2 = -1 \\ -a_1 + 2a_2 = 8 \end{cases} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ = -2L_1 + L_2 \\ = L_1 + L_3 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 8 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ = -\frac{1}{8}L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 9/8 \\ 0 & 8 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ = -8L_2 + L_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 9/8 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 6a_2 = 4 \\ a_2 = 9/8 \\ 0 = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

Sistema sem solução $\boxtimes$

Logo, w' não é combinação linear de u e v.

Definição 2: Seja V um espaço vetorial e W um subespaço de V. Se W é formado por todas as combinações lineares de um conjunto de vetores $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \subset V$, então dizemos que W é gerado pelos vetores de S, e que S é um conjunto gerador de W.

Ex: O conjunto de vetores canônicos $S = \{i, j, k\}$ é o conjunto gerador do $\mathbb{R}^3$. Pois todo vetor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear desses vetores. Isto é:

$$
\begin{aligned}
(a,b,c) &= (a,0,0) + (0,b,0) + (0,0,c) \\
&= a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) \\
&= ai + bj + ck \ //
\end{aligned}
$$