/ /

Livro do ANTON - Pág 23

(7) Resolva o sistema linear por eliminação de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} x - y + 2z - w = -1 \\ 2x + y - 2z - 2w = -2 \\ -x + 2y - 4z + w = 1 \\ 3x \qquad\qquad - 3w = -3 \end{cases}$$

Lembre-se que:

- Eliminação Gaussiana: Aplica-se o escalonamento até obter a matriz escalonada.
- Gauss-Jordan: Aplica-se o escalonamento até obter a matriz escalonada reduzida.

Nota: Esses métodos se resumem em apenas dois passos:

1) Introduzir um pivô na posição a_{11}
2) Zerar os elementos abaixo (ou acima) do pivô.

Passo 1: Introduzir um pivô na posição a_{11} e zerar os elementos abaixo dele.

→ pivô 1 (transformar em 1)

$$\left[\begin{array}{c|ccc|c} \boxed{*} & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{array}\right]$$

submatriz resultante 1

↳ Zerar esses elementos

Passo 2: Aplique o passo 1, novamente, na submatriz resultante 1. Isto é, introduzir um pivô na posição a_{11} da submatriz (elemento a_{22} na matriz original) e zerar os elementos abaixo dele.

pivô 1 — pivô 2 (transformar em 1)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & * & * & * & * \\ 0 & \boxed{*} & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{array}\right]$$

submatriz 2

zerar esses elementos

obs: Pode ser que ao tentar introduzir o pivô na posição a_{11} de uma submatriz, o elemento esteja zerado. Nesse caso, procura-se um elemento não-nulo abaixo da posição a_{11} da submatriz e faz-se a troca de linhas.

Passo 3: Aplica-se os passos anteriores novamente. Transforma-se o pivô em 1 e zera-se os elementos abaixo dele.

pivô 1 — pivô 2

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & * & * & * & * \\ 0 & \boxed{1} & * & * & * \\ 0 & 0 & \boxed{*} & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{array}\right]$$

tentativa de um novo pivô.

submatriz 3

todos esses elementos estão zerados

obs: Supondo que ao tentar introduzir o pivô no elemento a_{11} de uma submatriz, ele e todos os demais elementos abaixo dele estão zerados. Nesse caso, desconsidera-se a coluna 1 da submatriz e considera-se uma nova submatriz, como abaixo.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & * & * & * & * \\ 0 & \boxed{1} & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{*} & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{array}\right]$$

pivô 3

submatriz 4

Passo 4: Aplicar os dois passos básicos: transformar o pivô em 1 e zerar os elementos abaixo dele.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc|c}
\boxed{1} & * & * & * & * \\
0 & \boxed{1} & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & *
\end{array}\right]
\end{array}
$$

pivô 1

pivô 2

pivô 3

Passo 5: Agora, aplique as operações elementares no sentido contrário para zerar os elementos acima de cada pivô. Primeiro, zera-se os elementos acima do pivô 3, depois acima do pivô 2, até chegar no pivô 1. Note que nessa fase não há necessidade de transformar os elementos pivô em 1, pois todos os pivôs já estão definidos. Basta apenas aplicar as operações para zerar os elementos acima de cada um.

Voltando ao exercício 7: Sua matriz aumentada é:

pivô 1

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc|c}
\boxed{1} & -1 & 2 & -1 & -1 \\
2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\
-1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\
3 & 0 & 0 & -3 & -3
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\
= -2L_1 + L_2 \\
= L_1 + L_3 \\
= -3L_1 + L_4
\end{array}
$$

Introduzimos o pivô no elemento a_{11}. Como ele já está com valor 1, não precisamos multiplicar a L_1 por nenhum valor. O segundo passo é zerar os elementos abaixo dele. Então multiplicamos a linha do pivô por algum valor que somado à linha 2, zera o elemento abaixo do pivô na linha 2. Aplicamos essa operação para as demais linhas e prosseguimos.

pivô 1   pivô 2

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{3} & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad = \frac{1}{3} L_2$$

Devemos transformar o pivô 2 em 1. Para isso, usamos a operação (multiplicar uma linha por uma constante não-nula). Obs: para transformar o pivô em 1, sempre usamos esta operação.

pivô 1   pivô 2

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ \\ = -L_2 + L_3 \\ = -3L_2 + L_4 \end{array}$$

Agora, precisamos zerar os elementos abaixo do pivô 2. Para isso, usamos a operação (multiplicar a linha do pivô por uma constante não-nula e somar com a linha do elemento que estamos zerando). Sempre usamos esse tipo de operação para zerar elementos.

pivô 1   pivô 2

$$\begin{array}{ccccc} x & y & z & w & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \quad \Big\} \text{ matriz escalonada}$$

Podemos eliminar essas linhas, pois qualquer solução (x, y, z, w) satisfaz a equação $0x + 0y + 0z + 0w = 0$.

Agora, todas as linhas que não foram eliminadas possuem um pivô. Logo, a primeira fase do método acabou, devemos executar a segunda fase.

Como todos os pivôs já estão determinados, então precisamos apenas zerar os elementos acima deles. Começamos pelo último pivô (pivô 2).

pivô 1   pivô 2

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad = 1L_2 + L_1$$

Note que sempre usamos a linha do pivô para zerar os elementos acima ou abaixo dele.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & w & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Bigg\} \text{matriz escalonada reduzida}$$

Como não há elementos acima do pivô 1 para serem zerados, então o método finaliza.

Reescrevendo o sistema associado a matriz escalonada reduzida, temos:

$$\begin{cases} x \qquad\quad - w = -1 \\ \quad y - 2z \qquad = 0 \end{cases}$$

Note que temos apenas dois pivôs, se isolarmos as variáveis correspondentes, teremos duas variáveis dependentes e duas variáveis livres. Isto é:

$$\begin{cases} x = w - 1 \\ y = 2z \end{cases}$$

Como w e z estão livres, podemos obter diferentes valores de x e y, escolhendo qualquer valores para z e w. O que resulta em um sistema com múltiplas soluções.