1.7 Matrizes diagonais, triangulares e simétricas.

matrizes diagonais

Uma matriz quadrada em que todas as entradas fora da diagonal principal são zero, é denominada matriz diagonal.

Ex: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matrizes triangulares superiores e inferiores

Uma matriz quadrada com todas as entradas abaixo da diagonal principal nulas é denominada triangular superior.

Ex: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$

Uma matriz quadrada com todas as entradas acima da diagonal principal nulas é denominada triangular inferior.

Ex: $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Matrizes simétricas

Uma matriz quadrada A é dita simétrica se $A = A^T$.

Ex: $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ou ainda, uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é simétrica se, e somente se,

$$\boxed{a_{ij} = a_{ji}}$$

2. Determinantes

Determinantes são funções que associam um número real $f(A)$ a uma variável matricial A.

2.1 Determinantes por expansão em cofatores

Definição: Se A for uma matriz quadrada, então o menor da entrada a_{ij} é denotado por M_{ij} e definido como o determinante da submatriz que sobra quando suprimimos a i-ésima linha e j-ésima coluna de A. O número $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ é denominado cofator da entrada a_{ij}.

Ex1: Encontrando menores e cofatores

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

O menor da entrada a_{11} é:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

O cofator de a_{11} é:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 16$$

Observação: Para calcular o determinante de uma matriz, expandimos os cofatores por qualquer linha ou coluna.

EX2: Expandindo os cofatores pela coluna 1.

Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, então:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

- $C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = (1)[5.8 - 4.6] = 16$

- $C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = (-1)[1.8 - 4.(-4)] = -24$

- $C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (1)[1.6 - 5.(-4)] = 26$

Logo:

$$\det(A) = 3(16) + 2(-24) + 1(26) = 26 \,//$$

EX3: Expandindo os cofatores pela linha 2:

Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, então: $\det(A) = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -2[8-(-16)] + 5[24-(-4)] - 6[12-1]$$

$$= -2(24) + 5(28) - 6(11) = 26$$

Teorema 1: Se A for uma matriz triangular $n \times n$, então $\det(A)$ é o produto das entradas na diagonal principal de A. Isto é,

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}.$$

EX: Seja a matriz triangular superior

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix},$$ calcular $\det(A)$.

Expandindo os cofatores pela linha 3, temos:

$$\det(A) = a_{31} C_{31} + a_{32} C_{32} + a_{33} \cdot C_{33} = 0 \cdot C_{31} + 0\, C_{32} + a_{33} C_{33}$$
$$= a_{33} C_{33}$$

$$= a_{33} (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{33} \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - 0) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

Teorema 2: Seja A uma matriz quadrada. Se A tem uma linha ou uma coluna de zeros, então $\det(A) = 0$.

EX: Seja uma matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ com

Uma linha de zeros, calcular det(A).

Expandindo os cofatores pela linha 3, temos:

$$\det(A) = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}$$
$$= 0 \cdot C_{31} + 0 \cdot C_{32} + 0 \cdot C_{33}$$
$$= 0$$

//

Uma regra prática para calcular determinantes de matrizes 2x2 e 3x3.

Ex: Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3.5 - 2.1 = 15 - 2 = 13$$ //

repete-se as colunas 1 e 2.

$$\det(B) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 1 & 4 \end{array}\right| = (3.5.8) + (1.6.1) + (-4.2.4) - [1.5.(-4) + 4.6.3 + 8.2.1]$$

$$= 120 + 6 - 32 - [-20 + 72 + 16]$$
$$= 94 - 68$$
$$= 26$$ //

2.2. Calculando determinantes por escalonamento.

Quando aplicamos o método de escalonamento para reduzir uma matriz quadrada A a sua forma escalonada, o determinante de A é alterado pelas operações elementares da seguinte forma.

Teorema 3: Seja A uma matriz n×n, e B a matriz resultante após aplicar uma operação elementar em A.

a) Se B foi obtida ao multiplicar uma linha ou coluna de A por um escalar k, então:

$$\boxed{\det(A) = \frac{1}{k} \cdot \det(B)}$$

b) se B foi obtida permutando-se duas linhas ou colunas de A, então:

$$\boxed{\det(A) = -\det(B)}$$

c) Se B foi obtida somando-se um múltiplo de uma linha a outra linha, ou um múltiplo de uma coluna a outra coluna, então:

$$\det(A) = \det(B)$$

EX 1: Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$. Calcular $\det(A)$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{3} L_1$$

$$= -(3) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -2L_1 + L_3 \qquad = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} = -10L_2 + L_3$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} = -\frac{1}{55} L_3 \qquad = -3(-55) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{pelo teorema 1, esse determinante é 1.}}$$

Logo, $\det(A) = -3(-55)(1) = 165$ //

Exercício resolvido

Livro do ANTON, pág 105

(15) Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ = -2L_1 + L_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ = -2L_2 + L_3 \\ = -L_2 + L_4 \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ = (-1)L_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$= -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ = -L_3 + L_4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ = \frac{1}{6}L_4 \end{matrix}$$

$$= 6\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6(1) = 6 \quad //$$