# Revisão

- Inversão de matrizes por escalonamento — Ex1
- Determinantes por escalonamento — Ex2
- Operações com vetores
  - adição
  - subtração
  - multiplicação por escalar

  } Ex3
- Vetor definido por dois pontos
- Distância entre dois pontos
- Norma de um vetor.

  } Ex4
- Produto escalar e ângulos entre vetores — Ex5
- Equação ponto-normal (reta e plano)
- Equação paramétrica (reta e plano)

  } Ex6
- Produto vetorial — Ex7

— // —

**Lembrete:**

Uma fração do tipo $1 \lrcorner 2 \lrcorner 3$ na calculadora significa $1 + \frac{2}{3}$. Para transformá-la numa fração do tipo $\frac{a}{b}$, aperte as seguintes teclas:

$\boxed{\text{Shift}}$ $\boxed{a\,b/c}$

Neste exemplo, $1 \lrcorner 2 \lrcorner 3 = 5 \lrcorner 3$

1 a) Seja a matriz $A=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 0\\ 4 & -2 & 2\\ 0 & 5 & 1\end{bmatrix}$. Calcule sua inversa $A^{-1}$ pelo método de escalonamento.

$$\begin{array}{c}\quad A \qquad\qquad I\\ \left[\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 4 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\end{array} = -L_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 4 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] = -4L_1+L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 14 & 2 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] = \frac{1}{14}L_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1/7 & 2/7 & 1/14 & 0\\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] = -5L_2+L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1/7 & 2/7 & 1/14 & 0\\ 0 & 0 & 2/7 & -10/7 & -5/14 & 1\end{array}\right] = \frac{7}{2}L_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1/7 & 2/7 & 1/14 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -5 & -5/4 & 7/2\end{array}\right] = -\frac{1}{7}L_3+L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2\\ 0 & 0 & 1 & -5 & -5/4 & 7/2\end{array}\right] = 4L_2+L_1 \quad \begin{array}{c}\quad I \qquad\qquad A^{-1}\\ \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2\\ 0 & 0 & 1 & -5 & -5/4 & 7/2\end{array}\right]\end{array}$$

b) Calcule a inversa de $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & 5 & 1\end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{c}\quad A \qquad\qquad I\\ \left[\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\end{array} = -L_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] = -\frac{1}{2}L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1/2 & 0\\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] = -5L_2+L_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0 & 5/2 & 1\end{array}\right] = -\frac{1}{4}L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{8} & -\frac{1}{4} \end{array}\right] = -L_3 + L_2 \quad \begin{array}{cc} I & A^{-1} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{8} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

2) Calcule o determinante de $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ por escalonamento.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -2L_1 + L_3 \Rightarrow -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}L_2$$

$$-(3)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -9L_2 + L_3 \Rightarrow -3\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}}_{} = -3(-5) = 15 \,//$$

o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto da diagonal principal

3) Sejam os vetores $u = (1, -2, 5)$, $v = (3, 2, -1)$ e o escalar $k = 2$ e calcule:

a) $u + v$
b) $u - v$
c) $kv$

- $u + v = (1, -2, 5) + (3, 2, -1) = (1+3, -2+2, 5-1) = (4, 0, 4)$ //

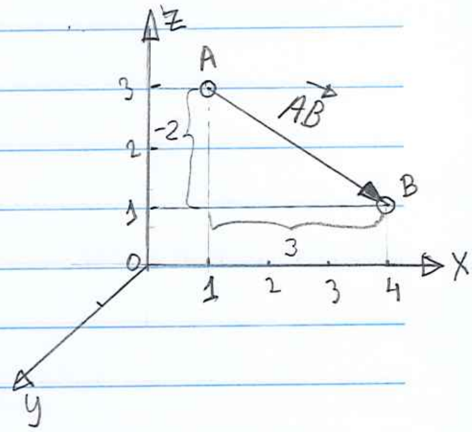
- $u - v = (1, -2, 5) - (3, 2, -1) = (1-3, -2-2, 5-(-1)) = (-2, -4, 6)$ //

- $kv = 2(3, 2, -1) = (6, 4, -2)$ //

④ Seja os pontos $A=(1,0,3)$ e $B=(4,0,1)$. Calcule:

a) o vetor $\vec{AB}$

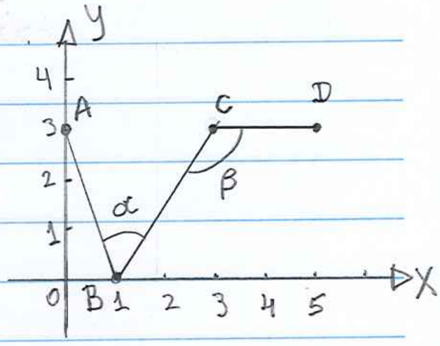
b) distância entre A e B.




• $\vec{AB} = B-A = (4,0,1)-(1,0,3)$
$= (4-1, 0-0, 1-3)$
$= (3,0,-2)$

• $dist(A,B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{3^2+0^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \cong 3{,}6$ //

⑤ Calcule os ângulos $\alpha$ e $\beta$ conforme mostrado na Figura abaixo.




$A=(0,3)$, $B=(1,0)$, $C=(3,3)$ e $D=(5,3)$

$\vec{BA} = A-B = (0,3)-(1,0) = (-1,3)$

$\vec{BC} = C-B = (3,3)-(1,0) = (2,3)$

$\vec{CB} = -\vec{BC} = -(2,3) = (-2,-3)$

$\vec{CD} = D-C = (5,3)-(3,3) = (2,0)$

• ângulo $\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{\|\vec{BA}\|.\|\vec{BC}\|} = \frac{(-1,3).(2,3)}{\sqrt{(-1)^2+3^2}\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{(-1).2+3.3}{\sqrt{10}\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{10.13}} = \frac{7}{\sqrt{130}}$$ //

$$\alpha = \arccos\left(\frac{7}{\sqrt{130}}\right) \cong 52^\circ$$

Na calculadora:
$\alpha = \cos^{-1}(7 \div \sqrt{130})$

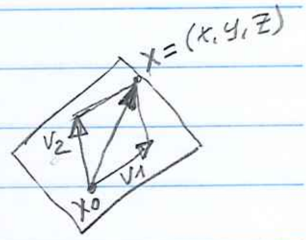
• ângulo $\beta$

$$\cos\beta = \frac{\vec{CB}\cdot\vec{CD}}{\|\vec{CB}\|.\|\vec{CD}\|} = \frac{(-2,-3).(2,0)}{\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}.\sqrt{2^2+0^2}} = \frac{(-2).2+(-3).0}{\sqrt{4+9}\sqrt{4+0}} =$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{13}\sqrt{4}} = -\frac{4}{\sqrt{13.4}} = -\frac{4}{\sqrt{52}}$$ //

$\beta = \arccos\left(-\frac{4}{\sqrt{52}}\right) \cong 123^\circ$ $\left\{\begin{array}{l}\text{Na calculadora:} \\ \beta = \cos^{-1}(-4 \lrcorner \sqrt{52})\end{array}\right.$

(6) Determine as equações ponto-normal e paramétrica do plano que passa pelo ponto $x_0 = (2,1,-2)$ e é paralelo aos vetores $v_1 = (3,0,1)$ e $v_2 = (0,3,2)$.




$x = x_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2$

• Equação paramétrica

$x = x_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2$

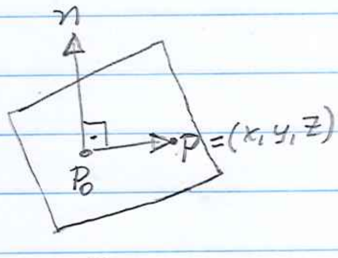
$(x,y,z) = (2,1,-2) + t_1(3,0,1) + t_2(0,3,2)$

$(x,y,z) = (2,1,-2) + (3t_1, 0, t_1) + (0, 3t_2, 2t_2)$

$(x,y,z) = (2+3t_1, 1+3t_2, -2+t_1+2t_2)$

ou

$$\begin{cases} x = 2+3t_1 \\ y = 1+3t_2 \\ z = -2+t_1+2t_2 \end{cases} //$$




$n \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

• Equação ponto-normal

Para determiná-la, precisamos de um vetor $n$ ortogonal ao plano. Podemos determiná-lo com o produto vetorial.

$$n = v_1 \times v_2 = \left|\begin{array}{ccc|cc} i & j & k & i & j \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right| = 9k - 3i - 6j = -3i - 6j + 9k$$
$$= (-3,-6,9) //$$

Portanto, temos:

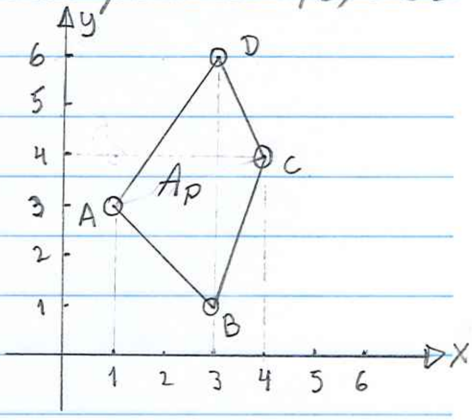
$n \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \Rightarrow (-3,-6,9)\cdot[(x,y,z)-(2,1,-2)] = 0$

$\Rightarrow (-3,-6,9)\cdot(x-2, y-1, z+2) = 0 \Rightarrow -3(x-2) - 6(y-1) + 9(z+2) = 0$

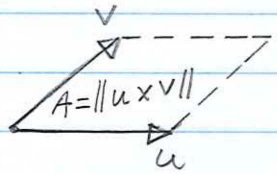
$\Rightarrow -3x + 6 - 6y + 6 + 9z + 18 = 0 \Rightarrow -3x - 6y + 9z + 30 = 0$

//

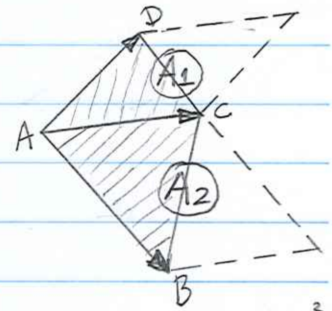
7) Calcule a área delimitada pelos pontos A, B, C e D da Figura abaixo.




Lembrando que a área do paralelogramo definido por dois vetores u e v é dada por:




Logo, a área $A_p$ do polígono ABCD pode ser calculada por:




$$A_p = \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{2} A_2$$

$$= \frac{1}{2} \|\vec{AD} \times \vec{AC}\| + \frac{1}{2} \|\vec{AC} \times \vec{AB}\|$$

Como o produto vetorial só pode ser aplicado ao $R^3$, reescrevemos A, B, C e D como pontos em $R^3$.

$A=(1,3,0)$, $B=(3,1,0)$, $C=(4,4,0)$ e $D=(3,6,0)$

$\vec{AD} = D - A = (3,6,0)-(1,3,0) = (2,3,0)$
$\vec{AC} = C - A = (4,4,0)-(1,3,0) = (3,1,0)$
$\vec{AB} = B - A = (3,1,0)-(1,3,0) = (2,-2,0)$

• $\vec{AD} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{matrix} = 2k - 9k = 0i + 0j - 7k = (0,0,-7)$

• $\vec{AC} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{matrix} = -6k - 2k = 0i + 0j - 8k = (0,0,-8)$

Portanto:

$$A_p = \frac{1}{2}\|\vec{AD} \times \vec{AC}\| + \frac{1}{2}\|\vec{AC} \times \vec{AB}\|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{0^2+0^2+(-7)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{0^2+0^2+(-8)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{49} + \frac{1}{2}\sqrt{64}$$

$$= \frac{1}{2}.7 + \frac{1}{2}8 = \frac{7}{2} + \frac{8}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5 \,//$$