~~Ex~~

LIVRO DO KOLMAN, Pag 7

7) $\begin{cases} x + 4y - z = 12 \\ 3x + 8y - 2z = 4 \end{cases}$

A matriz aumentada é:

pivô 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 12 \\ 3 & 8 & -2 & 4 \end{array}\right] = -3L_1 + L_2$$

O elemento a_{11} já possui valor 1, então zera-se a coluna abaixo dele.

pivô 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 12 \\ 0 & -4 & 1 & -32 \end{array}\right] = -\frac{1}{4}L_2$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 12 \\ 0 & 1 & -1/4 & 8 \end{array}\right]}_{\text{matriz escalonada}} = -4L_2 + L_1$$

Aplicando a segunda fase, zera-se os elementos acima dos pivôs:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & -1/4 & 8 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x = -20 \\ y - \frac{1}{4}z = 8 \end{cases}$$

Note que existem somente dois pivôs, então uma variável vai ficar livre. Isolando-se as variáveis associadas aos pivôs, temos:

$$\begin{cases} x = -20 \\ y = 8 + \frac{1}{4}z \end{cases}$$

Ou seja, o sistema tem multiplas soluções que dependem de valores para z, que é livre.

Resolva o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -4 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_4 = -10 \end{cases}$$

A matriz aumentada é:

pivô 1

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & -10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ = 2L_1 + L_3 \\ = -4L_1 + L_4 \end{array}$$

↳ zerar aqui

pivô 2 (transformar em 1)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & 6 \end{array}\right] = -L_2 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ = -3L_2 + L_3 \\ = 5L_2 + L_4 \end{array}$$

↳ zerar aqui

pivô 3 (transformar em 1)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 6 \end{array}\right] = \frac{1}{5}L_3 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ = L_3 + L_4 \end{array}$$

↳ zerar aqui

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 29/5 & 29/5 \end{array}\right] = \frac{5}{29}L_4 \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]}_{\text{matriz escalonada}}$$

↳ pivô 4

Agora aplicamos a segunda fase, que é zerar os elementos acima de cada pivô, começando do último pivô até chegar no primeiro.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{-1/5} & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ = -L_4 + L_2 \\ = \frac{1}{5} L_4 + L_3 \\ \\ \end{array} \quad \text{zerar aqui}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} = L_3 + L_1 \\ = L_3 + L_2 \\ \\ \\ \end{array} \quad \text{zerar aqui}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} = -2L_2 + L_1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \text{zerar aqui}$$

$$\underbrace{\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]}_{\text{matriz escalonada reduzida}}$$

Note que temos 4 pivôs e as variáveis correspondentes possuem valores fixos, ou seja, não existem variáveis livres. Portanto o sistema tem solução única.

Reescrevendo o sistema associado a matriz escalonada reduzida, temos:

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$