1.4 - Propriedades algébricas das matrizes

Teorema 1: Supondo que os tamanhos das matrizes sejam tais que as operações indicadas possam ser efetuadas, valem as seguintes regras da aritmética matricial.

a) $A + B = B + A$ (comutativa da adição)
b) $A + (B+C) = (A+B) + C$ (associativa da adição)
c) $A(BC) = (AB)C$ (associativa da multiplicação)
d) $A(B+C) = AB + AC$ (distributiva à esquerda)
e) $(A+B)C = AC + BC$ (distributiva à direita)
f) $A(B-C) = AB - AC$
g) $(B-C)A = BA - CA$
h) $a(B+C) = aB + aC$ (multiplicação pelo escalar a)
i) $a(B-C) = aB - aC$
j) $(a+b)C = aC + bC$ (multiplicação pela soma dos escalares a e b)
k) $(a-b)C = aC - bC$
l) $a(bC) = (ab)C$
m) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

EX 1: A ordem é importante na multiplicação matricial.
Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $AB \neq BA$.

Verificando:

$$AB = \underset{A}{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}} \cdot \underset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \underset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow AB \neq BA$

Matriz zero ou matriz nula.

Definição: uma matriz zero (ou nula) é uma matriz cujas entradas são todas nulas.

Ex: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Denotamos uma matriz nula por $0_{m \times n}$ ou simplesmente 0.

Propriedades de matrizes zero

se c for um escalar e se os tamanhos das matrizes forem tais que as operações possam ser efetuadas, então:

a) $A + 0 = 0 + A = A$

b) $A - 0 = A$

c) $A - A = A + (-A) = 0$

d) $0A = 0$

e) se $cA = 0$, então $c = 0$ ou $A = 0$.

Ex: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, então:

$$0A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + 0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ex2: A lei do cancelamento não vale:

Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, então:

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Más cancelar A em ambos os lados de $AB = AC$, leva a conclusão incorreta de que $B = C$.

Matriz identidade

Definição: uma matriz quadrada com entradas 1 na diagonal principal e demais entradas nulas é denominada identidade. Denotada por I_n.

Ex: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Propriedade: $AI = IA = A$

Ex: Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$, então

$$AI_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Inversa de uma matriz

Definição: Se A for uma matriz quadrada e se pudermos encontrar uma matriz B de mesmo tamanho tal que $AB = BA = I$, então diremos que A é invertível (ou não singular) e que B é a inversa de A. Se não puder ser encontrada uma tal matriz B, diremos que A é não invertível ou singular.

Ex: Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, então

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Logo, A e B são invertíveis e uma é inversa da outra.

tilibra