5- Autovalores e Autovetores

Definição: Se A for uma matriz $n \times n$, então um vetor não nulo $x \in R^n$ é denominado autovetor de A se Ax for um múltiplo escalar de x, isto é:

$$Ax = \lambda x \qquad (1)$$

com algum escalar λ. O escalar λ é denominado autovalor de A, e dizemos que x é um autovetor associado a λ.

— // — // —

Ex1: O vetor $x = (1, 2)$ é um autovetor de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

associado ao autovalor $\lambda = 3$, pois

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3x$$

$\hookrightarrow \lambda = 3$

— // — // —

Reescrevendo a equação (1), temos:

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax = \lambda I x \Leftrightarrow \lambda I x - Ax = 0 \Leftrightarrow$$
$$(\lambda I - A) x = 0$$

Teorema: Se A for uma matriz $n \times n$, então λ é um autovalor de A se, e somente se, λ satisfaz a equação

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Essa equação é a equação característica de A.

Ex2: Encontre os autovalores e autovetores de $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix}$

Devemos ter: $\det(\lambda I - A) = 0$. Isto é:

$$\det\left(\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix}\right) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix}\lambda-3 & 0\\ -8 & \lambda+1\end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-3)(\lambda+1) = 0 \iff \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = -1$$

Logo, os autovalores são $\lambda = 3$ e $\lambda = -1$.

• Para $\lambda = 3$, temos os seguintes autovetores x, associados:

$$(\lambda I - A)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix}3-3 & 0\\ -8 & 3+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}0 & 0\\ -8 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$-8x_1 + 4x_2 = 0 \Rightarrow -8x_1 = -4x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2$$

Chamando $x_2 = t$, o conjunto solução desse sistema é:

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}t, t\right) = t\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Logo, todos os vetores múltiplos de $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda = 3$.

• Para $\lambda = -1$, temos os seguintes autovetores x, associados:

$$(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1-3 & 0 \\ -8 & -1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \end{array}\right] = -\frac{1}{4}L_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \end{array}\right] = 8L_1 + L_2 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 \text{ é livre, pode assumir qualquer valor.} \end{cases}$$

Chamando $x_2 = t$, o conjunto solução deste sistema é:

$$(x_1, x_2) = (0, t) = t(0, 1)$$

Logo, todos os vetores múltiplos de $(0, 1)$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda = -1$.