1.5 Um método para encontrar A^{-1}

Algoritmo da inversão: Para encontrar a inversa de uma matriz invertível A, encontre uma sequência de operações elementares que reduza A à matriz identidade e depois efetue essa mesma sequência de operações em I_n para obter A^{-1}.

$$[A \mid I] \xrightarrow[\text{elementares}]{\text{operações}} [I \mid A^{-1}]$$

Ex 1: Encontre a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{c} \quad A \qquad\qquad I \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ = -2L_1 + L_2 \\ = -L_1 + L_3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ = 2L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ = -L_3 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} = -3L_3 + L_1 \\ = 3L_3 + L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} = -2L_2 + L_1 \\ \\ \\ \end{array} \qquad \begin{array}{c} \quad I \qquad\qquad A^{-1} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \end{array}$$

Logo $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Verificando:

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

EX2: Se A não for invertível, então será impossível reduzir A a I_n por operações elementares. Isto é, em algum ponto do algoritmo de inversão, aparecerá um linha de zeros no lado esquerdo de $[A \mid I]$.

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Aplicando o algoritmo, temos:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & I \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ = -2L_1 + L_2 \\ = L_1 + L_2 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = -\frac{1}{8} L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9/8 & 1/4 & -1/8 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = -8L_2 + L_3 \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9/8 & 1/4 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

↳ linha de zeros

Logo, A não é invertível.

Analisando sistemas homogêneos (SH)

Seja um sistema homogêneo $Ax = 0$. Então:

$$Ax = 0 \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I}x = \underbrace{A^{-1}0}_{0} \Rightarrow Ix = 0 \Rightarrow x = 0$$

Ou seja, um SH tem somente a solução trivial, se e somente se, A for invertível.

EX: Determinar se os sistemas homogêneos têm soluções não triviais.

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 8x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Pelo EX1, A possui inversa, logo o sistema possui somente a solução trivial.

b) $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Pelo EX2, A não possui inversa, logo o sistema possui soluções não triviais.