4.9 - Transformações matriciais de R^n em R^m

Transformações matriciais são funções que transformam vetores de um espaço vetorial V em vetores de um espaço vetorial W.

Definição 1: Se V e W forem espaços vetoriais e se f for uma função de domínio V e contradomínio W, dizemos que f é uma transformação (ou aplicação) de V em W, que denotamos por

$$f: V \to W$$

No caso especial em que $V = W$, dizemos que a transformação é um operador de V.

Transformações de R^n em R^m podem surgir da seguinte forma. Suponha que $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sejam funções reais de n variáveis.

$$\begin{aligned} w_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ w_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ w_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \qquad (1)$$

Essas m equações associam pontos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em R^n a pontos $(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ em R^m, definindo assim, transformações $T: R^n \to R^m$.

$$(w_1, w_2, \ldots, w_m) = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

No caso em que as equações em (1) forem lineares, elas poderão ser expressas na forma:

$$w_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$$
$$w_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$$
$$\vdots$$
$$w_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n$$

Ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Ou ainda:

$$w = Ax \quad \text{ou} \quad w = T_A(x)$$

↳ matriz canônica da transformação T.

EX1: A transformação matricial $T: R^4 \to R^3$ definida por:

$$w_1 = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4$$
$$w_2 = 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4$$
$$w_3 = 5x_1 - x_2 + 4x_3$$

pode ser expressa na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

onde a matriz canônica de T é:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

A imagem de um ponto (x_1, x_2, x_3, x_4) é obtida por (2). Por exemplo, seja o ponto $(1, -3, 0, 2) \in R^4$, sua imagem é dada por:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1)-3(-3)+1(0)-5(2) \\ 4(1)+1(-3)-2(0)+1(2) \\ 5(1)-1(-3)+4(0)+0(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$ //

Teorema: Dada qualquer matriz A, a transformação matricial $T_A: R^n \to R^m$ tem as seguintes propriedades com quaisquer vetores u e $v \in R^n$ e escalar $K \in R$.

a) $T_A(0) = 0$

b) $T_A(Kv) = K\,T_A(v)$

c) $T_A(u+v) = T_A(u) + T_A(v)$

Um procedimento para encontrar matrizes canônicas de uma transformação

Seja $w = T_A(x)$ uma transformação matricial de R^n em R^m, e os vetores canônicos de R^n.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

A imagem de e_1 é:

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 0 \qquad x_n = 0$$

$$T_A(e_1) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \underbrace{a_{m1}x_1}+a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ \underbrace{a_{m1}} \end{bmatrix}$$

$T_A(e_1)$ é a coluna 1 de A

De maneira análoga, se calcularmos $T_A(e_2), \dots, T_A(e_n)$, obteremos:

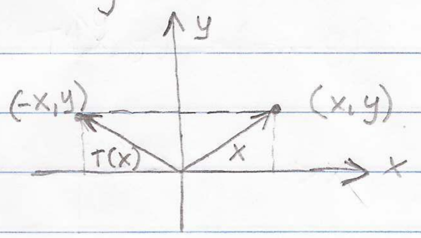
$$T_A(e_2) = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}}_{\text{coluna 2 de } A}, \quad \dots \quad, T_A(e_n) = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{coluna } n \text{ de } A}.$$

Portanto:

$$A = [\underbrace{T_A(e_1) \mid T_A(e_2) \mid \cdots \mid T_A(e_n)}_{\text{as colunas de } A \text{ são as imagens dos vetores canônicos de } \mathbb{R}^n}]$$

- Operadores de reflexão

- Reflexão no eixo y



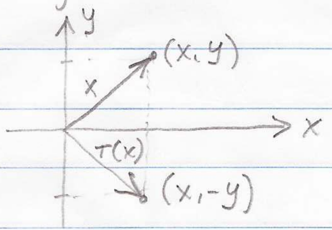
$T(x,y) = (-x, y)$

$T(e_1) = T(1,0) = (-1, 0)$

$T(e_2) = T(0,1) = (0, 1)$

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Reflexão no eixo x



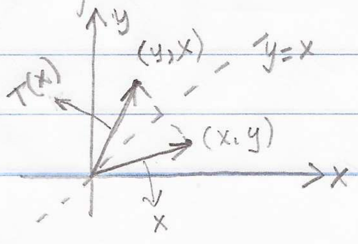
$T(x,y) = (x, -y)$

$T(e_1) = T(1,0) = (1,0)$

$T(e_2) = T(0,1) = (0,-1)$

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Reflexão na reta $y = x$



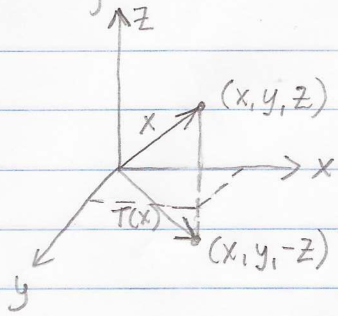
$T(x,y) = (y, x)$

$T(1,0) = (0, 1)$

$T(0,1) = (1,0)$

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Reflexão no plano xy



$T(x,y,z) = (x,y,-z)$

$T(e_1) = T(1,0,0) = (1,0,0)$

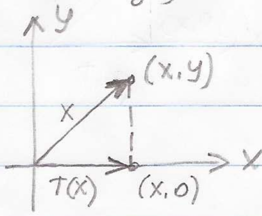
$T(e_2) = T(0,1,0) = (0,1,0)$

$T(e_3) = T(0,0,1) = (0,0,-1)$

$$T(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- Operadores de projeção

- Projeção sobre o eixo x



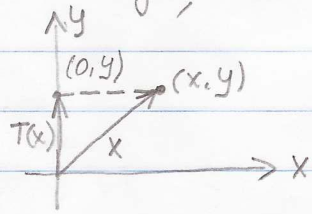
$T(x,y) = (x,0)$

$T(e_1) = T(1,0) = (1,0)$

$T(e_2) = T(0,1) = (0,0)$

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Projeção sobre o eixo y



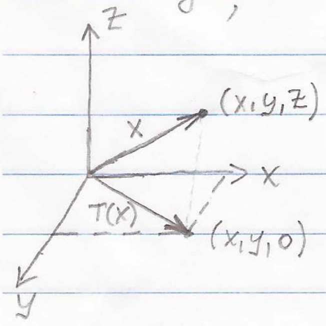
$T(x,y) = (0,y)$

$T(1,0) = (0,0)$

$T(0,1) = (0,1)$

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Projeção sobre o plano xy



$T(x,y,z) = (x,y,0)$

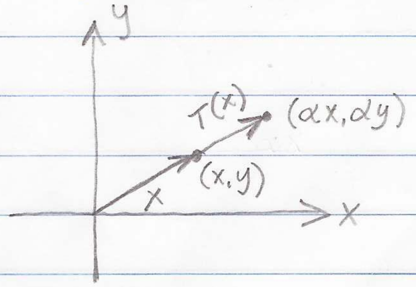
$T(e_1) = T(1,0,0) = (1,0,0)$

$T(e_2) = T(0,1,0) = (0,1,0)$

$T(e_3) = T(0,0,1) = (0,0,0)$

$$T(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

• Operadores de dilatação e contração



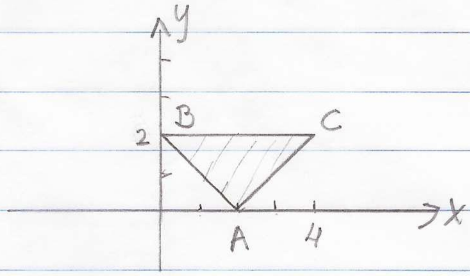
$T(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$T(e_1) = T(1,0) = (\alpha, 0)$

$T(e_2) = T(0,1) = (0, \alpha)$

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Ex: Aplique um fator de escala $\alpha = 2$ no triângulo da figura a seguir, tendo como referência o ponto A.



A matriz de dilatação é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Agora dilatamos os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$.

$A = (2,0)$, $B = (0,2)$, $C = (4,2)$

$\vec{AB} = B - A = (-2, 2)$

$\vec{AC} = C - A = (2,2)$

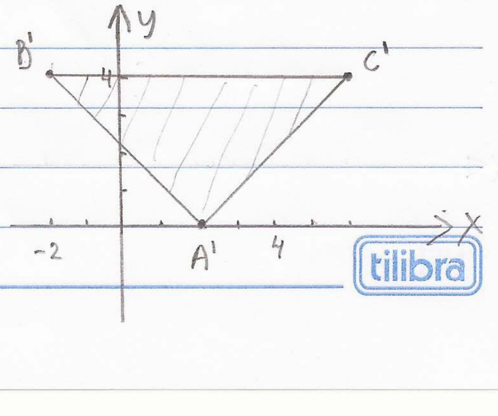
$$T(\vec{AB}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{AC}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$A' = A$

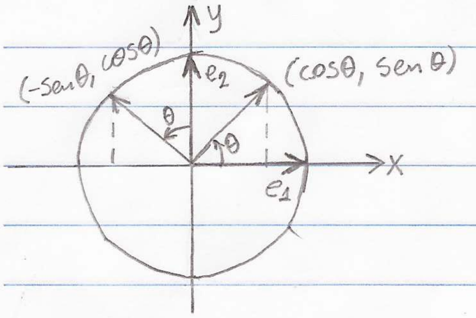
$B' = A + T(\vec{AB}) = (2,0) + (-4,4) = (-2,4)$

$C' = A + T(\vec{AC}) = (2,0) + (4,4) = (6,4)$



• Operadores de rotação

• Rotação em torno da origem por um ângulo θ.

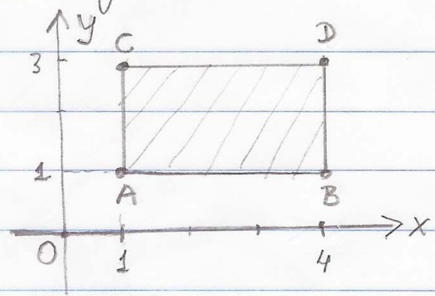


$T(e_1) = (1,0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

$T(e_2) = (0,1) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

$$T(x,y) = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\text{matriz de rotação}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Ex: Seja a caixa da figura abaixo:



a) Determine a matriz de rotação para $\theta = 30°$.

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos 30° & -\operatorname{sen} 30° \\ \operatorname{sen} 30° & \cos 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0.866 \end{bmatrix}$$

b) Rotacione a caixa em torno do ponto A por $\theta = 30°$.

Para isso, consideramos que o ponto A fosse a origem, rotacionamos os vetores AB, AC e AD, e depois somamos eles a partir do ponto A para obter os pontos B', C' e D' após a rotação.

$A = (1,1)$, $B = (4,1)$, $C = (1,3)$, $D = (4,3)$

$\vec{AB} = B - A = (4-1, 1-1) = (3,0)$

$\vec{AC} = C - A = (1-1, 3-1) = (0,2)$

$\vec{AD} = D - A = (4-1, 3-1) = (3,2)$

$$T(\vec{AB}) = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,5 \\ 0,5 & 0,866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{AC}) = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,5 \\ 0,5 & 0,866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1,73 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{AD}) = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,5 \\ 0,5 & 0,866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,6 \\ 3,23 \end{bmatrix}$$

Calculando a nova posição dos pontos, temos:

$A' = A$

$B' = A + T(\vec{AB}) = (1,1) + (2.6, 1.5) = (3.6, 2.5)$

$C' = A + T(\vec{AC}) = (1,1) + (-1, 1.73) = (0, 2.73)$

$D' = A + T(\vec{AD}) = (1,1) + (1.6, 3.23) = (2.6, 4.23)$