Disciplina: Algebra Linear e Geometria Analítica
Professor: Landir Saviniec
Data: 26/02/2018

1 Equações Lineares e Matrizes

1.1) Sistemas lineares

Problema 1: Um fabricante de plásticos produz dois tipos de plásticos: normal e especial. Cada tonelada de plástico normal precisa de 2 horas no setor A e 5 horas no setor B; cada tonelada de plástico especial precisa de 2 horas no setor A e 3 horas no setor B. Se o setor A está disponível 8 horas por dia e o setor B está disponível 15 horas por dia, quantas toneladas de cada tipo de plástico podem ser produzidas diariamente de modo que os setores não fiquem ociosos?

• Variáveis

N: quantidade de toneladas de plástico tipo normal

E: quantidade de toneladas de plástico tipo especial.

• Dados do problema

	setor A	setor B
N	2	5
E	2	3
Disp	8	15

• capacidade do setor A

$2N + 2E = 8$

• capacidade do setor B

$5N + 3E = 15$

• Resolução

$$\begin{cases} 2N + 2E = 8 & (1/2) \\ 5N + 3E = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N + E = 4 \\ 5N + 3E = 15 & L_1(-5) + L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N + E = 4 \\ -2E = -5 & (-1/2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N + E = 4 \\ \boxed{E = 5/2} \end{cases}$$

$\Rightarrow N + 5/2 = 4 \Rightarrow N = 4 - \frac{5}{2} = \frac{8-5}{2} \Rightarrow \boxed{N = 3/2}$

Resposta: Devem ser produzidas $\frac{3}{2}$ toneladas de plástico do tipo normal e $\frac{5}{2}$ toneladas de plástico do tipo especial.

Verificando:

$$\begin{cases} 2N + 2E = 8 \\ 5N + 3E = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{2}\left(\frac{3}{\cancel{2}}\right) + \cancel{2}\left(\frac{5}{\cancel{2}}\right) = 8 \Rightarrow 8 = 8 \\ 5\left(\frac{3}{2}\right) + 3\left(\frac{5}{2}\right) = 15 \Rightarrow \frac{15}{2} + \frac{15}{2} = \frac{30}{2} = 15 \end{cases}$$

Problema 2: Problema da preparação de uma refeição animal. (ver mt1.pdf)

- Variáveis

A: quantidade em gramas da ração tipo A.
B: " " " " B.

- Dados do problema

	Ferro	cálcio
A	6	2
B	1	4
requisito	30	40

- Requisito de ferro

$6A + B = 30$

- Requisito de cálcio

$2A + 4B = 40$

- Resolução

$$\begin{cases} 6A + B = 30 & (1/6) \\ 2A + 4B = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + \frac{1}{6}B = 5 \\ 2A + 4B = 40 \end{cases} \quad L_1(-2) + L_2$$

$$\begin{cases} A + \frac{1}{6}B = 5 \\ \frac{11}{3}B = 30 \quad (3/11) \end{cases} \quad \frac{1}{6}(-2) + 4 \quad -\frac{1}{3} + 4 = \frac{11}{3}$$

$$\begin{cases} A + \frac{1}{6}B = 5 \\ \boxed{B = \frac{90}{11}} \cong 8,18 \end{cases}$$

$\rightarrow A + \frac{1}{6}\left(\frac{90}{11}\right) = 5$

$A + \frac{15}{11} = 5$

$A = 5 - \frac{15}{11}$

$A = \frac{55 - 15}{11} \Rightarrow \boxed{A = \frac{40}{11}} \cong 3,63$

Resposta: Devem ser utilizadas $\frac{40}{11}$ gramas da ração A e $\frac{90}{11}$ gramas da ração B.

Verificando:

$$\begin{cases} 6A + B = 30 \\ 2A + 4B = 40 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6\left(\frac{40}{11}\right) + \frac{90}{11} = \frac{240}{11} + \frac{90}{11} = \frac{330}{11} = 30$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{40}{11}\right) + 4\left(\frac{90}{11}\right) = \frac{80}{11} + \frac{360}{11} = \frac{440}{11} = 40$$

— // —

Equações lineares

Uma equação linear tem o seguinte formato:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

Onde:

- $a_1, a_2, \dots, a_n$ e b são constantes.
- $x_1, x_2, \dots, x_n$ são variáveis.

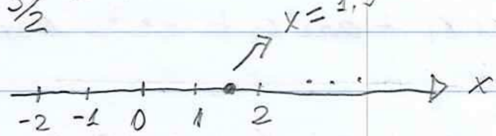
- Caso com uma variável x:

$$ax = b$$

Ponto

Exemplo: $2x = 3 \Rightarrow x = 3/2 = 1{,}5$

Representação geométrica:



- Caso com duas variáveis x_1 e x_2:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$

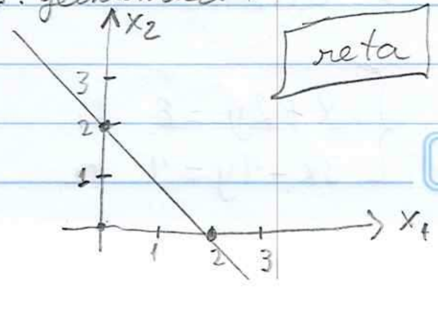
Exemplo: $2x_1 + 2x_2 = 4$

Se $x_1 = 0$, $2x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 2$

Se $x_2 = 0$, $2x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 2$

Repres. geométrica:

reta



- caso com 3 variáveis x_1, x_2 e x_3:

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$

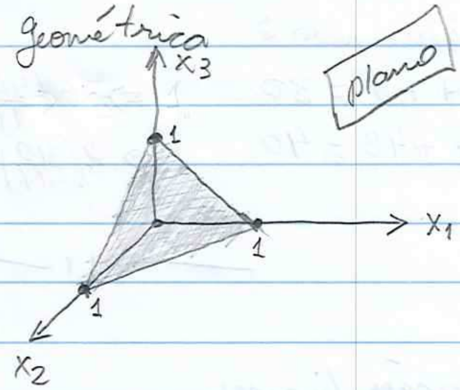
Exemplo: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

Se $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$, $x_1 = 1$

Se $x_1 = 0$ e $x_3 = 0$, $x_2 = 1$

Se $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

Rep. geométrica



- caso com $n > 3$ variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$

Rep. geométrica

obs: impossível visualizar e dizemos que é um hiperplano.

Sistema de m equações lineares com n variáveis

Um sistema linear tem o seguinte formato:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots \quad a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots \quad a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

CASO 1: Sistema com solução única

$$\begin{cases} x + 2y = 8 & L_1 \\ 3x - 4y = 4 & L_2 \end{cases}$$

$\circ L_1$

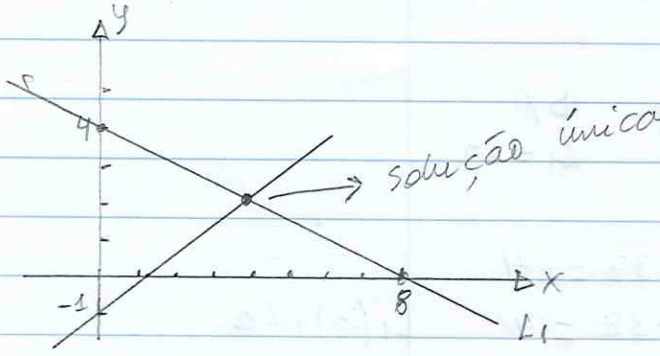
$x = 0$, $2y = 8 \Rightarrow y = 4$ $(0,4)$

$y = 0$, $x = 8$ $(8,0)$

- L_2

$x=0, \ -4y=4 \Rightarrow y=-1 \quad (0,-1)$

$y=0, \ 3x=4 \Rightarrow x=4/3 \quad (1{,}33, 0)$



CASO 2: O sistema não tem soluções

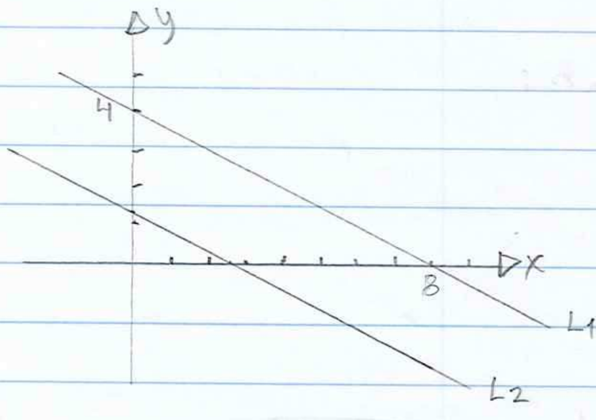
$$\begin{cases} x+2y=8 \\ 2x+4y=5 \end{cases} \quad L_1(-2)+L_2$$

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ 0x+0y=-11 \end{cases}$$

- L_2

$x=0, \ y=\frac{5}{4} \cong 1{,}25 \quad (0, 1{,}25)$

$y=0, \ x=\frac{5}{2} \quad (\frac{5}{2}, 0)$

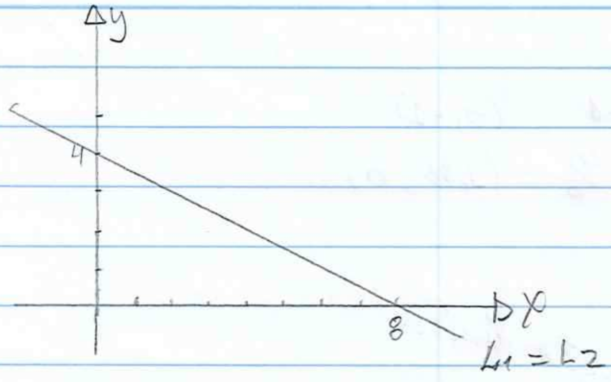


CASO 3: O sistema tem infinitas soluções.

- Exemplo 1: $\begin{cases} x+2y=8 \\ 3x+6y=24 \end{cases} \quad L_1(-3)+L_2$

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ 0x+0y=0 \end{cases} \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+4$$

//



Exemplo 2: $\begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ 2x + y - 3z = 4 \end{cases}$ $L_1(-2) + L_2$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ \quad -3y + 3z = 12 \quad (-1/3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ \quad y - z = -4 \end{cases}$$

Isolando y em L_2, temos

$\boxed{y = -4 + z}$

substituindo y em L_1, temos:

$x + 2(-4 + z) - 3z = -4$

$x - 8 + 2z - 3z = -4$

$x - z = -4 + 8$

$\boxed{x = 4 + z}$

—— // —— // ——

Lista de exercícios

- Ver material complementar