

4 - Espaços Vetoriais Arbitrários

4.1 - Espaços Vetoriais reais

Em espaços vetoriais euclidianos, definimos dois tipos de operações: adição e multiplicação por escalar. Por exemplo, no \mathbb{R}^2 , dados dois elementos $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ e escalar $a \in \mathbb{R}$, definimos as operações.

- Adição:

$$1) u + v = (\overset{\curvearrowright}{u_1}, \overset{\curvearrowright}{u_2}) + (\overset{\curvearrowright}{v_1}, \overset{\curvearrowright}{v_2}) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Multiplicação por escalar:

$$2) au = a(\overset{\curvearrowright}{u_1}, \overset{\curvearrowright}{u_2}) = (au_1, au_2) \in \mathbb{R}^2$$

E verificamos que dado $u, v \in \mathbb{R}^2$ e escalares $a, b \in \mathbb{R}$, então as seguintes propriedades são válidas:

- Em relação à adição:

$$3) u + v = v + u \quad (\text{comutatividade da adição})$$

$$4) u + (v + w) = (u + v) + w \quad (\text{associatividade da adição})$$

5) Existe um vetor nulo 0 , tal que

$$u + 0 = u \quad (\text{elemento neutro})$$

6) Existe um vetor simétrico $-u$, tal que

$$u + (-u) = 0 \quad (\text{elemento simétrico})$$

- Em relação à multiplicação por escalar:

$$7) a(\overset{\curvearrowright}{u+v}) = au + av \quad | \quad 9) a(bu) = (ab)u$$

$$8) (a+b)u = au + bu \quad | \quad 10) 1u = u$$

O espaço \mathbb{R}^2 com essas duas operações e propriedades é um espaço vetorial real.

Dizemos que um conjunto não vazio V é um espaço vetorial real se V satisfaz a seguinte definição:

Definição: Seja um conjunto V , não vazio, sobre o qual estão definidas as operações adição e multiplicação por escalar, isto é:

- $\forall u, v \in V, u + v \in V$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall u \in V, au \in V$

O conjunto V com essas duas operações é chamado espaço vetorial real se os seguintes propriedades (ou axiomas) forem válidas:

• Adição:

$$A_1) u + v = v + u, \quad \forall u, v \in V$$

$$A_2) u + (v + w) = (u + v) + w, \quad \forall u, v, w \in V$$

$$A_3) \exists 0 \in V, \quad \forall u \in V$$

$$u + 0 = u$$

$$A_4) \forall u \in V, \exists (-u) \in V,$$

$$u + (-u) = 0$$

• Multiplicação por escalar:

$$M_1) \overbrace{a(u+v)}^{\substack{\text{def. mult. escalar} \\ \text{propriedade}}} = au + av, \quad \forall u \in V \text{ e } a \in \mathbb{R}$$

$$M_2) (\overbrace{a+b}^{\substack{\text{def. adição} \\ \text{propriedade}}})u = au + bu, \quad \forall u \in V \text{ e } a, b \in \mathbb{R}$$

$$M_3) a(bu) = (ab)u, \quad \forall u \in V \text{ e } a, b \in \mathbb{R}$$

$$M_4) 1u = u, \quad \forall u \in V$$

Obs: os elementos do espaço vetorial V são chamados de vetores.

EX 1: Mostre que o conjunto V de todas as matrizes 2×2 , com as operações matriciais de adição e multiplicação por escalar.

$$u + v = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix}$$

e

$$a.u = a \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au_{11} & au_{12} \\ au_{21} & au_{22} \end{bmatrix}$$

é um espaço vetorial.

Demonstração:

A1)

$$u + v = \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} + u_{11} & v_{12} + u_{12} \\ v_{21} + u_{21} & v_{22} + u_{22} \end{bmatrix} = v + u$$

$$\begin{aligned} A_2) u + (v + w) &= \begin{bmatrix} u_{11} + (v_{11} + w_{11}) & u_{12} + (v_{12} + w_{12}) \\ u_{21} + (v_{21} + w_{21}) & u_{22} + (v_{22} + w_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_{11} + v_{11}) + w_{11} & (u_{12} + v_{12}) + w_{12} \\ (u_{21} + v_{21}) + w_{21} & (u_{22} + v_{22}) + w_{22} \end{bmatrix} \\ &= (u + v) + w \end{aligned}$$

$$A_3) \exists O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad u + O = u$$

$$u + O = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = u$$

$$A_4) \exists -u = \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}, \quad u + (-u) = O$$

$$u + (-u) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

$$M_1) a(u+v) = \begin{bmatrix} a(u_{11}+v_{11}) & a(u_{12}+v_{12}) \\ a(u_{21}+v_{21}) & a(u_{22}+v_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au_{11}+av_{11} & au_{12}+av_{12} \\ au_{21}+av_{21} & au_{22}+av_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} au_{11} & au_{12} \\ au_{21} & au_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} av_{11} & av_{12} \\ av_{21} & av_{22} \end{bmatrix} = au + av$$

$$M_2) (a+b)u = \begin{bmatrix} (a+b)u_{11} & (a+b)u_{12} \\ (a+b)u_{21} & (a+b)u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au_{11}+bu_{11} & au_{12}+bu_{12} \\ au_{21}+bu_{21} & au_{22}+bu_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} au_{11} & au_{12} \\ au_{21} & au_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bu_{11} & bu_{12} \\ bu_{21} & bu_{22} \end{bmatrix} = au + bu$$

$$M_3) a(bu) = a \begin{bmatrix} bu_{11} & bu_{12} \\ bu_{21} & bu_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ab)u_{11} & (ab)u_{12} \\ (ab)u_{21} & (ab)u_{22} \end{bmatrix} = (ab) \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = (ab)u$$

$$M_4) 1u = 1 \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1u_{11} & 1u_{12} \\ 1u_{21} & 1u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = u$$

Logo V é um espaço vetorial □

EX2: Seja $V = \mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ com as seguintes operações de adição e multiplicação por escalar:
 $u+v = (u_1+v_1, u_2+v_2)$, e
 $au = (au_1, 0)$, $a \in \mathbb{R}$.

Mostre que V não é um espaço vetorial.

Demonstrações:

Basta mostrar que o axioma M₄ não é válido $\nabla u = (u_1, u_2)$, onde $u_2 \neq 0$.

$$M_4) \quad 1u = 1(u_1, u_2) = (1u_1, 0) = (u_1, 0) \neq u$$

Logo V não é um espaço vetorial.

4.2 - Subespaços vetoriais

É possível um espaço vetorial estar contido em outro espaço vetorial.

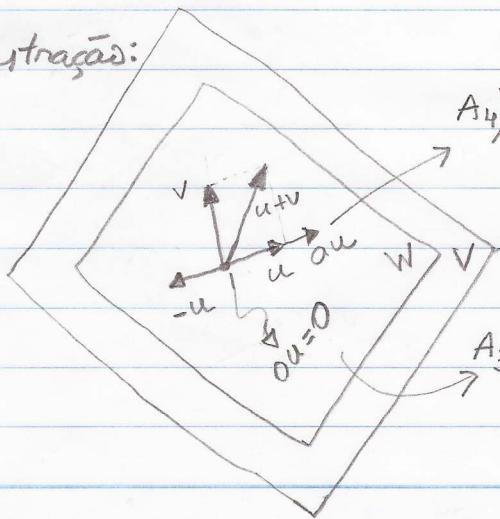
Definição: Um subconjunto W de um espaço vetorial V é denominado subespaço de V , se W for um espaço vetorial por si só com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V .

Deveríamos verificar todos as propriedades de espaço vetorial para mostrar se um subconjunto W forma um espaço vetorial. Entretanto, verificar apenas as condições do teorema a seguir são suficientes.

Teorema: Se W for um conjunto de um ou mais vetores num espaço vetorial V , então W é um subespaço de V se, e só se, as condições seguintes forem válidas.

- $\forall u, v \in W, u+v \in W$.
- $\forall u \in W \text{ e } a \in \mathbb{R}, au \in W$.

Demonstração:



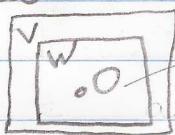
A₄) O vetor $(-u)$ é obtido multiplicando um vetor u por $a = -1$ em au .

A₃) O vetor nulo é obtido multiplicando um vetor u por $a = 0$ em au .

As propriedades A_1 , A_2 e $M_1 - M_4$ também são válidas para W , pois elas são válidas para todos os vetores de V , incluindo os de W .

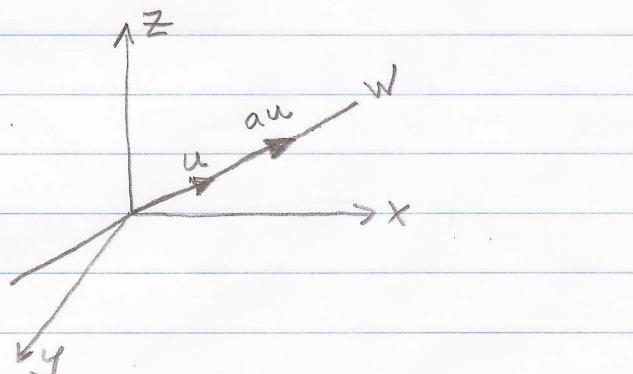
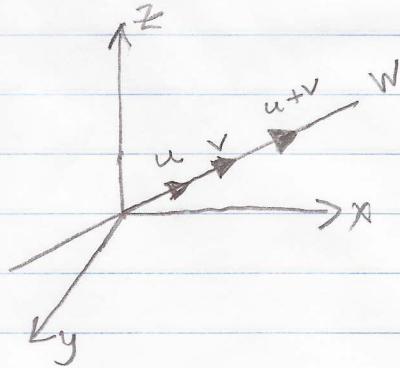
Ex1: O subespaço zero

Se V for um espaço vetorial qualquer e se $W = \{0\}$ for o subespaço de V que consiste somente no vetor nulo, então dizemos que W é o subespaço zero ou nulo de V .



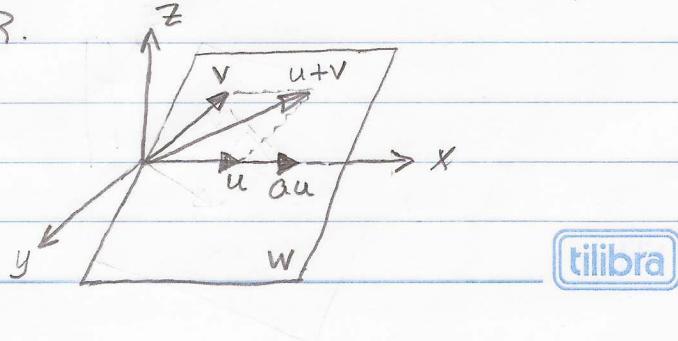
Ex2: Retas pela origem são subespaços em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3

Se W for uma reta pela origem em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , então a soma de dois vetores na reta W ou a multiplicação de um vetor na reta W por um escalar produz um vetor também na reta W . Logo, W é um subespaço vetorial.



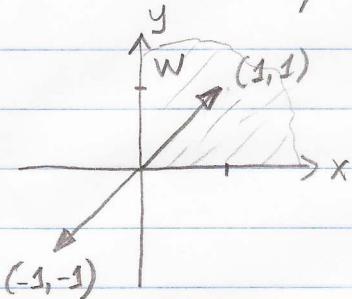
Ex3: Planos pela origem são subespaços de \mathbb{R}^3

Se u e v forem vetores num plano W pela origem de \mathbb{R}^3 , então $u+v$ e au também estão nesse mesmo plano W , para quaisquer $a \in \mathbb{R}$.



Ex4: Um subconjunto do \mathbb{R}^2 que não é subespaço.

Seja W o conjunto de todos os pontos (x, y) em \mathbb{R}^2 tais que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Esse conjunto não é um subespaço de \mathbb{R}^2 , pois ele não é fechado na multiplicação por escalar. Por exemplo, para $v = (1, 1) \in W$, $(-1)v = (-1, -1) \notin W$.



o Subespaços gerados

Um subespaço pode ser gerado por um conjunto finito de vetores.

Definição 1: Dizemos que um vetor w num espaço vetorial V é uma combinacão linear dos vetores

v_1, v_2, \dots, v_r em V , se w puder ser expresso na forma

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r$$

em que a_1, a_2, \dots, a_r são escalares, denominados coeficientes da combinação linear.

Ex: Seja $v_1 = (1, 2, -1)$ e $v_2 = (2, 1, 3)$.

Seja $w = (3, 2, 1)$. Verifique se w é uma combinação linear de v_1 e v_2 .

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 \Rightarrow (3, 2, 1) = a_1(1, 2, -1) + a_2(2, 1, 3)$$

Então, temos o sistema de equações: $\begin{cases} 3 = a_1 + 2a_2 \\ 2 = 2a_1 + a_2 \\ 1 = -a_1 + 3a_2 \end{cases}$

Resolvendo esse sistema, obtemos $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$, fato que indica que w é uma combinação linear de v_1 e v_2 .

EX1º: Sejam dois vetores $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (3, 1)$ em \mathbb{R}^2 . Determine a combinação linear $w = a_1 v_1 + a_2 v_2$ quando:

a) $a_1 = 2$ e $a_2 = 1$

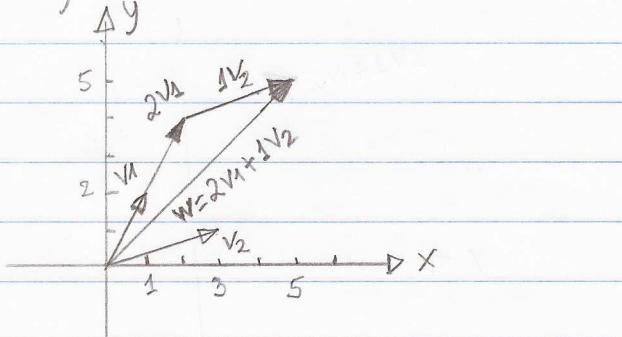
$$w = 2 \overrightarrow{(1, 2)} + 1 \overrightarrow{(3, 1)}$$

$$w = (2, 4) + (3, 1)$$

$$w = (2+3, 4+1)$$

$$w = (5, 5)$$

graficamente:



b) $a_1 = -2$ e $a_2 = \frac{1}{2}$

$$w = -2 \overrightarrow{(1, 2)} + \frac{1}{2} \overrightarrow{(3, 1)}$$

$$w = (-2, -4) + \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$w = \left(-2 + \frac{3}{2}, -4 + \frac{1}{2}\right)$$

$$w = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right)$$

EX2: Sejam os vetores $u = (1, 2, -1)$ e $v = (6, 4, 2)$ em \mathbb{R}^3 .

a) Mostre que $w = (9, 2, 7)$ é uma combinação linear de u e v .

Daremos encontrar escalares a_1 e $a_2 \in \mathbb{R}$, tais que:

$$w = a_1 v + a_2 u$$

$$(9, 2, 7) = \alpha_1(1, 2, -1) + \alpha_2(6, 4, 2)$$

$$(9, 2, 7) = (\alpha_1, 2\alpha_1, -\alpha_1) + (6\alpha_2, 4\alpha_2, 2\alpha_2)$$

$$(9, 2, 7) = (\alpha_1 + 6\alpha_2, 2\alpha_1 + 4\alpha_2, -\alpha_1 + 2\alpha_2)$$

ou

$$\begin{cases} \alpha_1 + 6\alpha_2 = 9 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 2 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} & a_1 & a_2 & \\ \textcircled{1} & 6 & 9 & \\ 2 & 4 & 2 & \\ -1 & 2 & 7 & \end{array} \right] = -2L_1 + L_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 9 & \\ 0 & -8 & -16 & \\ 0 & 8 & 16 & \end{array} \right] = -\frac{1}{8}L_2$$

$$= L_1 + L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 9 & \\ 0 & 1 & 2 & \\ 0 & 8 & 16 & \end{array} \right] = -8L_2 + L_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 9 & \\ 0 & 1 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 6\alpha_2 = 9 \\ \alpha_2 = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \alpha_1 = 9 - 6\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = 9 - 6(2) \Rightarrow \alpha_1 = 9 - 12 \Rightarrow \alpha_1 = -3$$

$$\text{Logo, } w = -3u + 2v //$$

b) Mostre que $w' = (4, -1, 8)$ não é uma combinação linear de u e v .

Devemos mostrar que não existem escalares α_1 e α_2 , tais que:

$$w' = \alpha_1 u + \alpha_2 v$$

$$(4, -1, 8) = \alpha_1(1, 2, -1) + \alpha_2(6, 4, 2)$$

$$(4, -1, 8) = (\alpha_1 + 6\alpha_2, 2\alpha_1 + 4\alpha_2, -\alpha_1 + 2\alpha_2)$$

ou

$$\begin{cases} \alpha_1 + 6\alpha_2 = 4 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = -1 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & \\ 2 & 4 & -1 & \\ -1 & 2 & 8 & \end{array} \right] = -2L_1 + L_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & \\ 0 & -8 & -9 & \\ 0 & 8 & 12 & \end{array} \right] = -\frac{1}{8}L_3$$

$$= L_1 + L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & \\ 0 & 1 & \frac{9}{8} & \\ 0 & 8 & 12 & \end{array} \right] = -8L_2 + L_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & \\ 0 & 1 & \frac{9}{8} & \\ 0 & 0 & 3 & \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 6\alpha_2 = 4 \\ \alpha_2 = \frac{9}{8} \\ 0 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Sistema} \\ \text{sem soluções} \end{matrix}$$

Logo, w' não é combinação linear de u e v .

Definição 2: Seja V um espaço vetorial e W um subespaço de V . Se W é formado por todas as combinações lineares de um conjunto de vetores $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\} \subset V$, então dizemos que W é gerado pelos vetores de S , e que S é um conjunto gerador de W .

Ex: O conjunto de vetores canônicos $S = \{i, j, k\}$ é o conjunto gerador do \mathbb{R}^3 . Pois todo vetor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear destes vetores.

Isto é:

$$\begin{aligned}(a, b, c) &= (a, 0, 0) + (0, b, 0) + (0, 0, c) \\ &= a(i, 0, 0) + b(0, j, 0) + c(0, 0, k) \\ &= ai + bj + ck //\end{aligned}$$

4.3 - Independência linear

Em independência linear, dado um conjunto S de r vetores de um espaço vetorial V , queremos saber se pelo menos um desses vetores pode ser escrito como combinação linear dos demais. Se pelo menos um puder, então o conjunto S é linearmente dependente. Caso contrário, S é linearmente independente. Ou de outra forma.

Definição: Se $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ for um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial V , então a equação vetorial

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r = 0$$

tem pelo menos a solução trivial

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_r = 0.$$

com a solução. Se essa for a única solução, dizemos que S é um conjunto linearmente independente (LI). Caso contrário, dizemos que S é um conjunto linearmente dependente (LD).

EX1: Independência linear dos vetores canônicos em \mathbb{R}^3 .

O conjunto LI mais básico em \mathbb{R}^3 é o conjunto de vetores unitários canônicos i, j, k .

Demonstração:

$$k_1 i + k_2 j + k_3 k = 0$$

$$k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$(k_1, 0, 0) + (0, k_2, 0) + (0, 0, k_3) = (0, 0, 0)$$

$$(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$$

Isto é: $k_1 = 0, k_2 = 0$ e $k_3 = 0$. logo $\{i, j, k\}$ é LI.

EX2: Independência linear em \mathbb{R}^3 :

Determine se os vetores $v_1 = (1, -2, 3)$, $v_2 = (5, 6, -1)$ e $v_3 = (3, 2, 1)$ são LI ou LD em \mathbb{R}^3 .

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = 0$$

$$k_1(1, -2, 3) + k_2(5, 6, -1) + k_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

$$(k_1, -2k_1, 3k_1) + (5k_2, 6k_2, -k_2) + (3k_3, 2k_3, k_3) = (0, 0, 0)$$

$$(k_1 + 5k_2 + 3k_3, -2k_1 + 6k_2 + 2k_3, 3k_1 - k_2 + k_3) = (0, 0, 0)$$

ou

$$\begin{cases} k_1 + 5k_2 + 3k_3 = 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 = 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc|c} & k_1 & k_2 & k_3 \\ \hline 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -16 & -8 & 0 \end{array} = 16L_2 + L_3 \quad \begin{array}{c|cc|c} & 1 & 5 & 3 \\ \hline 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 0 \\ 0 & -16 & -8 & 0 \end{array} = \frac{1}{16}L_2$$

$$= -5L_2 + L_1$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & k_1 & k_2 & k_3 \\ \hline 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} k_1 + 5k_2 + 3k_3 = 0 \\ k_2 + \frac{1}{2}k_3 = 0 \end{cases}$$

$$\det(A) = 0$$

Um sistema homogêneo alongado na horizontal (mais variáveis que equações) tem múltiplas soluções.

Continuando a resolução:

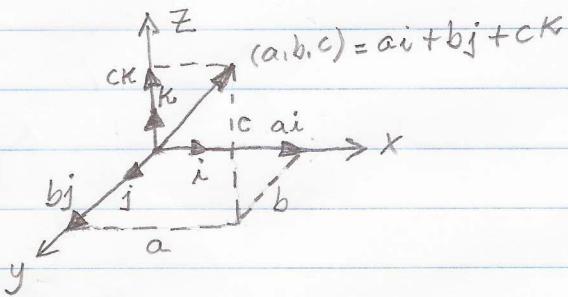
$$\begin{array}{c|cc|c} & k_1 & k_2 & k_3 \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} k_1 + \frac{1}{2}k_3 = 0 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{2}k_3 \\ k_2 + \frac{1}{2}k_3 = 0 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{2}k_3 \end{cases}$$

Logo, o sistema tem múltiplas soluções e os vetores $\{v_1, v_2, v_3\}$ são LD.

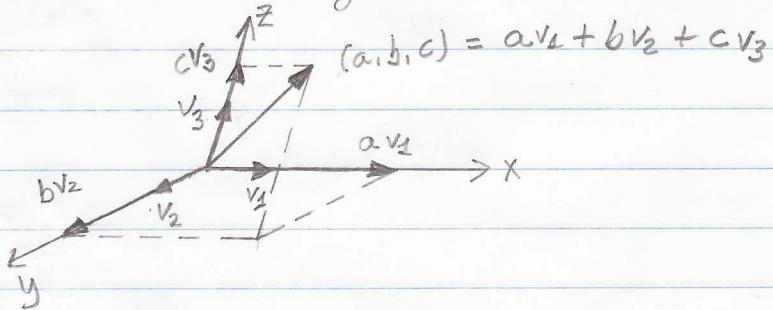
Teorema: Seja $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ um conjunto de vetores em \mathbb{R}^n . Se $r > n$, então S é linearmente dependente.

4.4 - Coordenadas e bases

No \mathbb{R}^3 , vimos que o conjunto de vetores canônicos $S = \{i, j, k\}$ é linearmente independente, e S gera o espaço vetorial \mathbb{R}^3 . Isto é, qualquer vetor com coordenadas (a, b, c) pode ser escrito como uma combinação linear $(a, b, c) = ai + bj + ck$ dos vetores i, j e k , formando um sistema de coordenadas retangulares.



Dizemos que $\{i, j, k\}$ é uma base (ou vetores de base) do \mathbb{R}^3 , e que os coeficientes (a, b, c) , da combinação linear, são as coordenadas em relação a base canônica. Entre tanto outros conjuntos $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ de vetores não ortogonais e L.I podem gerar o \mathbb{R}^3 , formando sistemas de coordenadas na retangulares.



Definição: Se V for um espaço vetorial qualquer e $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ for um conjunto finito de vetores em V , dizemos que S é uma base de V se valerem as duas condições a seguir:

- a) S é linearmente independente
 b) S gera V.

EX: Mostre que os vetores $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 9, 0)$ e $v_3 = (3, 3, 4)$ formam uma base do \mathbb{R}^3 .

Devemos mostrar que os vetores são LI e geram o \mathbb{R}^3 .

I) Demonstrando que os vetores são LI. Ou seja:

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$$

$$a(1, 2, 1) + b(2, 9, 0) + c(3, 3, 4) = (0, 0, 0)$$

$$(a, 2a, a) + (2b, 9b, 0) + (3c, 3c, 4c) = (0, 0, 0)$$

$$(a+2b+3c, 2a+9b+3c, a+4c) = (0, 0, 0)$$

ou

$$\begin{cases} a+2b+3c=0 \\ 2a+9b+3c=0 \\ a+4c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução é $x = A^{-1}b$.

Se calcularmos A^{-1} por escalonamento, obtemos:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -36 & 8 & 21 \\ 5 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Logo, } \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 & 8 & 21 \\ 5 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36(0)+8(0)+21(0) \\ 5(0)-1(0)-3(0) \\ 9(0)-2(0)-5(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, v_1, v_2 e v_3 não LI.

II) Demonstrando que os vetores geram o \mathbb{R}^3 . Ou seja, qualquer vetor (b_1, b_2, b_3) pode ser escrito como combinação linear de v_1, v_2 e v_3 .

$$(b_1, b_2, b_3) = a v_1 + b v_2 + c v_3$$

$$(b_1, b_2, b_3) = a(1, 2, 1) + b(2, 9, 0) + c(3, 3, 4)$$

ou

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = b_1 \\ 2a + 9b + 3c = b_2 \\ a + 4c = b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

onde:

$$x = A^{-1}b$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 & 8 & 21 \\ 5 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Ou seja, como A tem inversa, o sistema acima tem solução única (a, b, c) para qualquer vetor $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. Logo v_1, v_2 e v_3 geram o \mathbb{R}^3 . \square

Definição 2: Se $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ for uma base de um espaço vetorial V , e se

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

é um vetor v em termos da base S , então os escalarres c_1, c_2, \dots, c_n são denominados coordenadas de v em relação à base S .

Ex: Encontre as coordenadas (a, b, c) do vetor $v = (5, -1, 9)$ em relação a base $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ do exemplo anterior.

$$(5, -1, 9) = a v_1 + b v_2 + c v_3$$

$$(5, -1, 9) = a(1, 2, 1) + b(2, 9, 0) + c(3, 3, 4)$$

ou

$$\begin{array}{|c c c|} \hline A & x & = b \\ \hline 1 & 2 & 3 & | & a & | & 5 \\ 2 & 9 & 3 & | & b & | & -1 \\ 1 & 0 & 4 & | & c & | & 9 \\ \hline \end{array}$$

onde: $x = A^{-1} \cdot b$

$$\begin{array}{l} a = \begin{bmatrix} -36 & 8 & 21 \\ 5 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36(5) + 8(-1) + 21(9) \\ 5(5) - 1(-1) - 3(9) \\ 9(5) - 2(-1) - 5(9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ b = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

Logo: $(a, b, c) = (1, -1, 2)$ e $v = 1v_1 - 1v_2 + 2v_3$