Matriz aumentada

Dado um sistema linear de m equações com n variáveis:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

sua matriz aumentada é dada por:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \end{array}$$

Exemplo 1: Dado o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

sua matriz aumentada é dada por:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Operações elementares sobre linhas

As seguintes operações, quando aplicadas a um sistema linear, geram um novo sistema equivalente:

1) Multiplicar uma equação inteira por uma constante não-nula.
2) Trocar duas equações entre si.
3) Somar um múltiplo de uma equação a uma outra equação.

—— || —— || ——

Exemplo 2: Resolver o sistema

elemento pivô

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 = L_2 + L_1(-2) \\ L_3 = L_3 + L_1(-3) \end{array}$$

pivô

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_2 - 7x_3 = -17 \\ 3x_2 - 11x_3 = -27 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 = L_2(1/2) \\ \\ \end{array}$$

pivô

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_2 - 7/2\, x_3 = -17/2 \\ 3x_2 - 11x_3 = -27 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 = L_3 + L_2(-3) \end{array}$$

pivô

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_2 - 7/2\, x_3 = -17/2 \\ -1/2\, x_3 = -3/2 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 = L_3(-2) \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_2 - 7/2\, x_3 = -17/2 \\ x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]}_{\text{matriz escalonada}} \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 = L_3(-2) + L_1 \\ L_2 = L_3(7/2) + L_2 \\ \\ \end{array}$$

pivô

• Note que, para chegar nesse sistema, cuja solução é trivial, devemos transformar os coeficientes dos pivôs em valor "1" e zerar os elementos acima e abaixo dos pivôs.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad L_1 = L_2(-1) + L_1$$

→ pivô

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \end{array} \text{ matriz escalonada reduzida}$$

↳ pivôs

Logo, o sistema tem solução única $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$.

• Obs: Quando uma matriz aumentada for transformada em uma matriz escalonada reduzida, então o conjunto solução do sistema está visível.

Exemplo 3: Supondo que a matriz aumentada de um sistema linear nas incógnitas x, y e z foi reduzida por operações elementares à forma escalonada reduzida. Analise o conjunto solução do sistema.

a) $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \rightarrow 0x + 0y + 0z = 1$ está equação não pode ser satisfeita por valor algum de x, y e z.

b) $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \rightarrow 0x + 0y + 0z = 0$ está equação pode ser omitida, logo o sistema resultante é:

$$\begin{cases} x + 3z = -1 \\ y - 4z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 3z \\ y = 2 + 4z \end{cases}$$

→ este sistema tem infinitas soluções.

variáveis livres

Método de eliminação Gaussiana

Usado para reduzir qualquer matriz aumentada à forma escalonada reduzida.

Exemplo: Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} -2x_3 + 7x_5 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 6x_4 + 12x_5 = 28 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 5x_5 = -1 \end{cases}$$

cuja matriz aumentada é dada por:

→ não pode pode ser pivô

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right]$$

permutar essas linhas para obter um pivô no elemento a_{11} da matriz

Passo 1: Permutar duas linhas para que o pivô a_{11} deixe de ser nulo.

→ pivô

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right] \rightarrow L_1 = L_1\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

→ inverso do elemento a_{11}

Passo 2: multiplicamos a L_1 por $\left(\frac{1}{a_{11}}\right)$ para que o pivô se transforme em 1.

→ pivô

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right] \quad L_3 = L_1(-2) + L_2$$

Passo 3: Devemos zerar os elementos abaixo do pivô a_{11}.

$\to$ pivô

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array}\right]$$

} submatriz abaixo do pivô

Passo 4: Ignorar a linha do pivô e aplicar os passos anteriores a submatriz resultante. Continuamos deste modo até obter a matriz escalonada.

$\to$ próximo pivô

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array}\right] \quad L_2 = L_2(-1/2)$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array}\right] \quad L_3 = L_2(-5) + L_3$$

$\to$ pivô

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{array}\right] \quad L_3 = L_3(2)$$

$$\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array}}_{\text{matriz escalonada}}$$

} obs: a partir daqui, o sistema já pode ser resolvido por substituição, com facilidade.

Passo 5: Aplicamos os passos anteriores na parte superior da matriz anterior para obter a matriz escalonada reduzida.

-> Zeramos esse elemento

-> Zeramos esses elementos

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_1 = L_3(-6) + L_1 \\ L_2 = L_3(7/2) + L_2 \end{array}$$

-> pivô

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad L_1 = L_2(5) + L_1$$

-> pivô

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array} \Bigg\} \text{ matriz escalonada reduzida}$$

O sistema equivalente é:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 7 \\ x_3 = 1 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

- Note que a variável desse pivô não possui valor fixo na solução, se a isolarmos, ela depende de x_2 e x_4, que podem assumir qualquer valor.
- Note que, para esses pivôs, as variáveis correspondentes têm valor fixo na solução.

Isolando x_1 na linha 1, temos:

$$x_1 = 7 - 2x_2 - 3x_4$$

Logo, o conjunto solução é composto por qualquer ponto $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tal que:

- x_2 e x_4 são livres
- $x_1 = 7 - 2x_2 - 3x_4$
- $x_3 = 1$
- $x_5 = 2$

obs: Note que, como x_2 e x_4 são livres, se escolhermos diferentes valores para essas variáveis, encontraremos diferentes pontos $(x_1, x_2, 1, x_4, 2)$ que são soluções do sistema.

Nota: Nos livros didáticos, os autores geralmente consideram os procedimentos anteriores como:

- **Eliminação Gaussiana**: procedimento aplicado até obter a matriz escalonada.

$$\boxed{\text{matriz aumentada}} \xrightarrow{\text{Eliminação Gaussiana}} \boxed{\text{matriz escalonada}}$$

- **Método de Gauss-Jordan**: procedimento aplicado até obter a matriz escalonada reduzida.

$$\boxed{\text{matriz aumentada}} \xrightarrow{\text{Método de Gauss-Jordan}} \boxed{\text{matriz escalonada reduzida}}$$