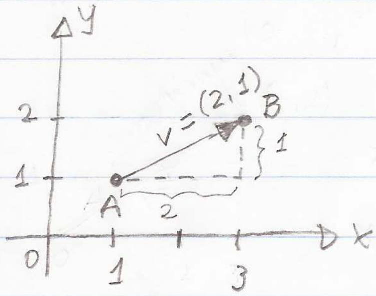
3. Espaços vetoriais Euclidianos

Motivação: visualização geométrica de vetores.

3.1. Vetores bi, tri e n-dimensionais

Geometricamente, um vetor possui direção, sentido e comprimento.

Ex: Sejam os pontos $A = (1,1)$, $B = (3,2)$ e o vetor $v = \vec{AB} = (2,1)$. Temos:



- o vetor possui a direção da reta que passa pelos pontos A e B.
- o sentido é dado pela seta.
- o comprimento é a distância entre os pontos A e B.
- A é o ponto inicial do vetor
- B é o ponto final do vetor.

- Vetores equivalentes

Vetores com o mesmo comprimento, direção e sentido são ditos equivalentes, embora possam estar em posições diferentes. Também dizemos que dois vetores v e w equivalentes são iguais. Isto é:

$$\boxed{v = w}$$

- Vetor zero ou nulo

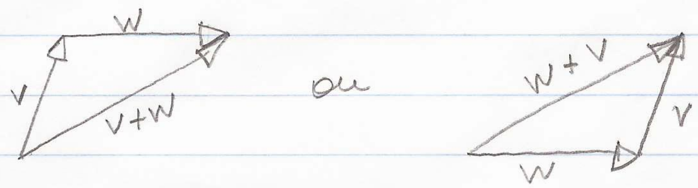
O vetor cujos pontos inicial e final coincidem, tem comprimento zero, sendo denominado por vetor zero ou vetor nulo, e denotado por 0.

- Adição de vetores

Se v e w forem vetores no espaço bidimensional (R^2) ou tridimensional (R^3). Então:

$$\boxed{v + w = w + v}$$

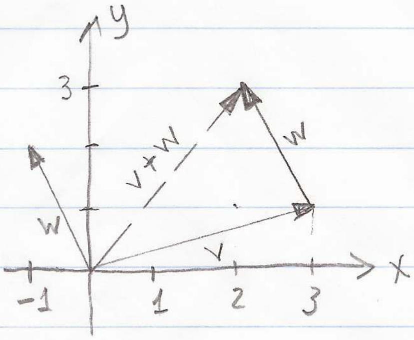
Geometricamente:



EX: Sejam $v = (3,1)$ e $w = (-1,2)$, então:

$$v + w = (3,1) + (-1,2) = (3-1,\ 1+2) = (2,3)$$

Isto é:

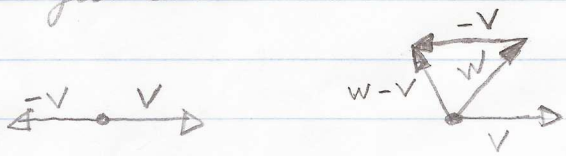


- Subtração de vetores

O negativo de um vetor v, denotado por $-v$, é o vetor que tem o mesmo comprimento e direção de v, mas tem sentido oposto. Logo:

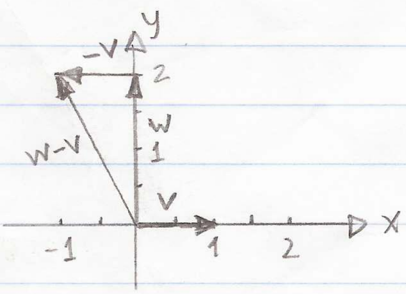
$$w - v = w + (-v)$$

Geometricamente:



Ex: Sejam $w = (0, 2)$ e $v = (1, 0)$, então
$w - v = w + (-v) = (0,2) + (-1,0) = (-1,2)$.

Isto é:



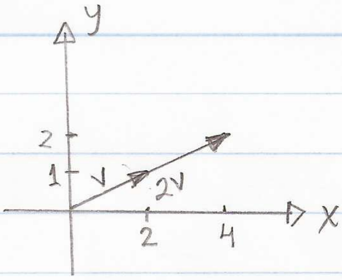
- Multiplicação por escalar

Se v for um vetor não nulo e k um escalar não nulo, então o vetor kv tem a mesma direção de v, com comprimento $|k|$ vezes o comprimento de v, mesmo sentido de v se $k>0$, e sentido oposto ao de v se $k<0$. Se $k=0$ ou $v=0$, então $kv = 0$.

Ex: Seja o vetor $v = (2, 1)$, calcule kv para:

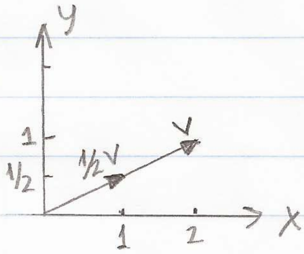
a) $k = 2$

$kv = 2(2,1) = (4,2)$



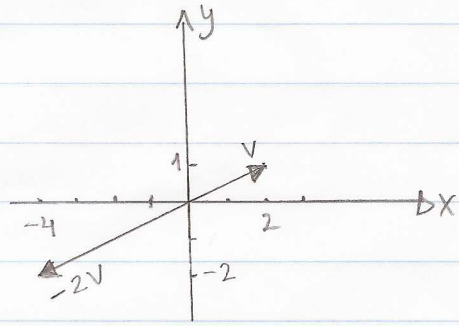
b) $k = \frac{1}{2}$

$kv = \frac{1}{2}(2,1) = (1, \frac{1}{2})$



c) $k = -2$

$kv = -2(2,1) = (-4,-2)$



• Vetores colineares

Dois vetores v e w, em R^2 ou R^3, partindo de um mesmo ponto inicial são ditos <u>colineares</u> se um é múltiplo escalar do outro.

• Vetores paralelos

Dois vetores v e w são paralelos se um é múltiplo escalar do outro.

- Vetor definido por dois pontos

Se $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ são pontos no R^2, então o vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ é dado por:

$$\boxed{\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)}$$

De modo semelhante, se $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ são pontos no R^3, então:

$$\boxed{\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)}$$

EX: Encontre o vetor $v = \overrightarrow{P_1P_2}$ de ponto inicial $P_1 = (2, -1, 4)$ e ponto final $P_2 = (7, 5, -8)$.

$$v = (7-2, 5-(-1), -8-4) = (5, 6, -12).$$

- Espaço de dimensão n

Definição 1: Se n for um inteiro positivo, então uma ênupla ordenada é uma sequência de n números reais $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. O conjunto de todas as ênuplas ordenadas é denominado de espaço de dimensão n e é denotado por R^n.

• Igualdade de vetores

Definição 2: Dois vetores $v=(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $w=(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ de R^n são ditos iguais se

$$v_1 = w_1, \quad v_2 = w_2, \quad \ldots, \quad v_n = w_n.$$

e escrevemos $v = w$.

Ex: $(a, b, c, d) = (1, -4, 2, 7)$ se, e somente se, $a=1$, $b=-4$, $c=2$, e $d=7$.

• Operações algébricas

Definição 3: Se $v=(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $w=(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ são vetores em R^n, e se k é um escalar, definimos

a) $v+w = (v_1+w_1, v_2+w_2, \ldots, v_n+w_n)$

b) $kv = (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n)$

c) $-v = (-v_1, -v_2, \ldots, -v_n)$

d) $w-v = w+(-v) = (w_1-v_1, w_2-v_2, \ldots, w_n-v_n)$

Teorema 1: Se u, v e w são vetores em R^n e se k e m são escalares, então:

a) $u+v = v+u$

b) $(u+v)+w = u+(v+w)$

c) $u+0 = 0+u = u$

d) $u+(-u) = 0$

e) $k(v+w) = kv+kw$

f) $(k+m)v = kv+mv$

g) $k(mu) = (km)u$

h) $1u = u$

i) $0v = \underbrace{0}_{\text{vetor nulo}}$

j) $k0 = 0$ → vetor nulo

k) $(-1)v = -v$

Ex: Sejam os vetores $u=(1,2)$, $v=(3,2)$, $w=(4,2)$ e escalares $k=2$ e $m=3$, então:

a) $u+v = (1,2)+(3,2) = (4,4)$
$v+u = (3,2)+(1,2) = (4,4)$ $=$

b) $(u+v)+w = [(1,2)+(3,2)]+(4,2) = (4,4)+(4,2) = (8,6)$
$u+(v+w) = (1,2)+[(3,2)+(4,2)] = (1,2)+(7,4) = (8,6)$ $=$

c) $u+0 = (1,2)+(0,0) = (1,2)$
$0+u = (0,0)+(1,2) = (1,2)$ $= u$

d) $u+(-u) = (1,2)+(-1,-2) = (0,0) = \underset{\sim}{0}$ → vetor nulo

e) $k(v+w) = 2[(3,2)+(4,2)] = 2(7,4) = (14,8)$
$kv+kw = 2(3,2)+2(4,2) = (6,4)+(8,4) = (14,8)$ $=$

f) $(k+m)v = (2+3)(3,2) = 5(3,2) = (15,10)$
$kv+mv = 2(3,2)+3(3,2) = (6,4)+(9,6) = (15,10)$ $=$

g) $k(mu) = 2[3(1,2)] = 2(3,6) = (6,12)$
$(km)u = (2.3)(1,2) = 6(1,2) = (6,12)$ $=$

h) $1u = 1(1,2) = (1,2) = u$

i) $0v = 0.(3,2) = (0,0) = \underset{\sim}{0}$ → vetor nulo

j) $k.0 = 2(0,0) = (0,0) = \underset{\sim}{0}$ → vetor nulo

k) $(-1)v = -1(3,2) = (-3,-2) = -v$

- Combinação linear de vetores

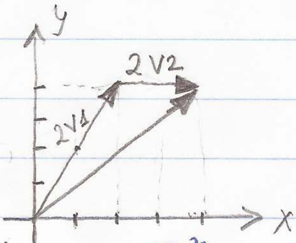
<u>Definição 4:</u> Dizemos que um vetor w em R^n é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_r$ em R^n se w puder ser expresso na forma

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_r v_r$$

em que $k_1, k_2, \ldots, k_r$ são escalares.

Ex: Sejam os vetores $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (1,0)$. Calcular a combinação linear $u = 2v_1 + 2v_2$.

$$u = 2(1,2) + 2(1,0) = (2,4) + (2,0)$$
$$= (4,4)$$



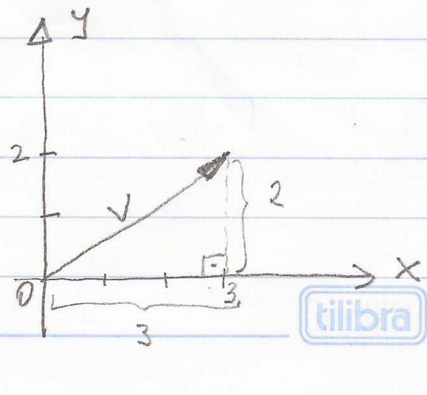
3.2 Norma, produto escalar e distância em R^n.

Definição: Se $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ for um vetor em R^n, então a norma de v (também denominada comprimento ou magnitude) é denotada por $\|v\|$ e definida por

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

Ex: Calcular o comprimento do vetor $v = (3,2)$.

$$\|v\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$



• vetor unitário

Um vetor unitário tem comprimento 1. O vetor unitário u que tem a mesma direção e sentido de um vetor v é dado por:

$$\boxed{u = \frac{1}{\|v\|} v}$$

EX: Encontre o vetor unitário u que tem a mesma direção e sentido de $v = (2, 2, -1)$.

$$\|v\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

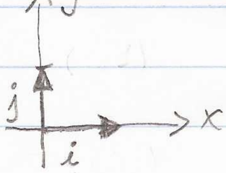
Logo:

$$u = \frac{1}{3}(2, 2, -1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

• Vetores unitários canônicos

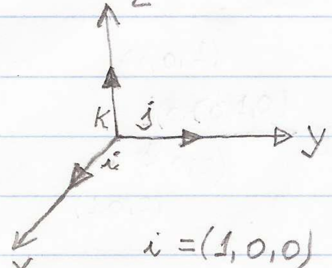
Chamamos os vetores unitários nas direções positivas dos eixos coordenados, de vetores unitários canônicos.

EX: No R^2



$i = (1, 0)$
$j = (0, 1)$

No R^3



$i = (1, 0, 0)$
$j = (0, 1, 0)$
$k = (0, 0, 1)$

EX2: Escreva um vetor $v=(v_1, v_2)$ como combinação linear dos vetores canônicos $i=(1,0)$ e $j=(0,1)$.

$$v=(v_1,v_2)=(v_1,0)+(0,v_2)=v_1(1,0)+v_2(0,1)$$
$$=v_1 i+v_2 j$$

• Distâncias entre dois pontos

Se $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ e $v=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ são pontos em R^n, então a distância entre u e v é dada por:

$$d(u,v)=\|u-v\|=\sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+\dots+(u_n-v_n)^2}$$

Ex1: Calcular a distância entre os pontos $u=(1,3)$ e $v=(4,1)$ no R^2.

$$d(u,v)=\sqrt{(1-4)^2+(3-1)^2}=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

EX2: Calcular a distância entre os pontos $u=(1,3,-2,7)$ e $v=(0,7,2,2)$ no R^4.

$$d(u,v)=\sqrt{(1-0)^2+(3-7)^2+(-2-2)^2+(7-2)^2}$$
$$=\sqrt{1^2+(-4)^2+(-4)^2+5^2}$$
$$=\sqrt{1+16+16+25}$$
$$=\sqrt{58}$$

• Produto escalar ou produto interno euclidiano

Definição: Se $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ forem vetores em R^n, então o produto escalar de u e v é dado por:

$$\boxed{u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n}$$

Ex: Calcular o produto escalar dos vetores $u = (-1, 3, 5, 7)$ e $v = (-3, -4, 1, 0)$.

$$u \cdot v = (-1)(-3) + 3 \cdot (-4) + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 0$$
$$= 3 - 12 + 5 + 0$$
$$= -4 \,//$$

• Propriedades do produto escalar

Teorema: Se u, v e w forem vetores em R^n e se a for um escalar, então:

a) $u \cdot v = v \cdot u$

b) $u \cdot (v + w) = uv + uw$

c) $a(u \cdot v) = (au) \cdot v$

d) $v \cdot v \geq 0$, sendo $v \cdot v = 0$, se e somente se, $v = 0$.

e) $0 \cdot v = v \cdot 0 = 0$

f) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

g) $a(u \cdot v) = u \cdot (av)$

Ex1: Calcule o produto escalar $(u - 2v) \cdot (3u + 4v)$.

$$(u - 2v) \cdot (3u + 4v) = 3(u \cdot u) + 4(u \cdot v) - 6(v \cdot u) - 8(v \cdot v)$$
$$= 3\|u\|^2 - 2(u \cdot v) - 8\|v\|^2$$

EX2: Seja $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, mostre que $v \cdot v = \|v\|^2$.

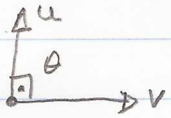
$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots v_n^2} \Leftrightarrow \|v\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2$$

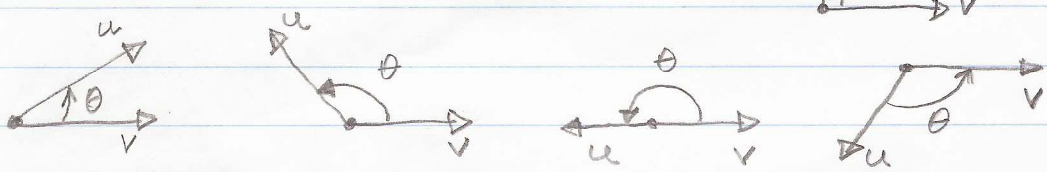
$$\Leftrightarrow \|v\|^2 = v_1 \cdot v_1 + v_2 \cdot v_2 + \cdots + v_n \cdot v_n$$

$$\Leftrightarrow \|v\|^2 = v \cdot v \qquad \blacksquare$$

- Ângulo entre dois vetores

Definimos o ângulo entre dois vetores u e v, como o ângulo $0 \leq \theta \leq \pi$.





Definição: se u e v forem vetores não nulos em $\mathbb{R}^n$, e θ for o ângulo entre u e v, então:

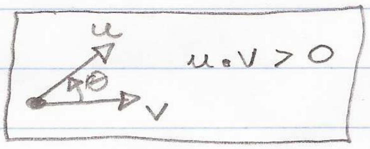
$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \quad \text{e} \quad \theta = \arccos\left(\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}\right)$$

EX: Calcular o ângulo formado pelos vetores:

a) $u = (1,1)$ e $v = (1,0)$

$$\cos\theta = \frac{(1,1) \cdot (1,0)}{\sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+0^2}} = \frac{1+0}{\sqrt{2}\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

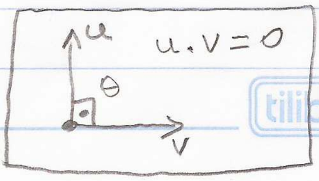
$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45°$$



b) $u = (0,1)$ e $v = (1,0)$

$$\cos\theta = \frac{(0,1) \cdot (1,0)}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{1}} = \frac{0+0}{\sqrt{1}} = \frac{0}{\sqrt{1}} = 0$$

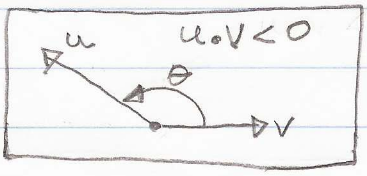
$$\theta = \arccos(0) = 90°$$



c) $u = (-1, 1)$ e $v = (1, 0)$

$$\cos\theta = \frac{(-1,1)(1,0)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}\sqrt{1}} = \frac{(-1)+0}{\sqrt{2}\sqrt{1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}.\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 135^\circ$$



3.3 Ortogonalidade

- Vetores ortogonais ou perpendiculares

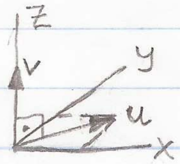
Definição 1: Dois vetores não nulos u e v em R^n são ortogonais (ou perpendiculares) se $u \cdot v = 0$. Também convencionamos que o vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor.

Definição 2: Um conjunto não vazio de vetores em R^n é denominado ortogonal se dois quaisquer de seus vetores forem ortogonais.

Definição 3: Um conjunto ortogonal de vetores unitários é dito ortonormal.

Ex 1: Mostre que qualquer vetor $u = (x, y, 0)$ no plano R^2 é perpendicular ao vetor $v = (0, 0, 1)$.

$$u \cdot v = (x, y, 0) \cdot (0, 0, 1)$$
$$= 0$$

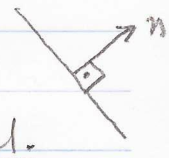


$\square$

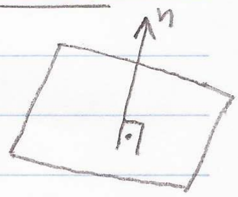
EX2: Mostre que o conjunto de vetores canônicos $S=\{i, j, k\}$ é um conjunto ortogonal em R^3.

— " —

· Retas e planos determinados por pontos e normais

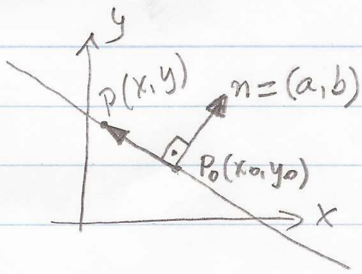


Def: Um vetor n, não nulo, que seja ortogonal a uma reta ou plano é denominado normal.



· Equação ponto-normal da reta no R^2

Uma reta que passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0)$, cujo vetor normal é $n=(a,b)$, é dada por:



$$n \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$
$$(a,b)\cdot(x-x_0,\ y-y_0) = 0$$
$$a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$$
$$ax - ax_0 + by - by_0 = 0$$
$$ax + by \underbrace{-ax_0 - by_0}_{c} = 0$$

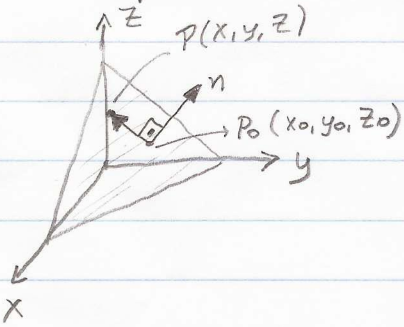
$$\boxed{ax + by + c = 0} \quad \text{onde} \quad c = -ax_0 - by_0$$

EX: Determine a equação ponto-normal da reta que passa pelo ponto $P_0(1,1)$, e tem vetor normal $n=(1,1)$.

$$n \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \Rightarrow (1,1)(x-1,\ y-1) = 0 \Rightarrow x-1+y-1 = 0$$
$$\Rightarrow x + y = 2 \ //$$

- Equação ponto-normal do plano no R^3.

Um plano que passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, cujo vetor normal é $n=(a,b,c)$, é dado por:



$$n \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$
$$(a,b,c)\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$$
$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$ax-ax_0+by-by_0+cz-cz_0=0$$
$$ax+by+cz\underbrace{-ax_0-by_0-cz_0}_{d}=0$$

$\boxed{ax+by+cz+d=0}$ onde $d=-ax_0-by_0-cz_0$

EX1: Determine a equação ponto-normal do plano que passa pelo ponto $P_0(1,1,0)$, e tem vetor normal $n=(2,1,3)$.

$$n\cdot\overrightarrow{P_0P}=0 \Rightarrow (2,1,3)(x-1, y-1, z-0)=0$$
$$\Rightarrow 2(x-1)+y-1+3z=0$$
$$\Rightarrow 2x-2+y-1+3z=0$$
$$\Rightarrow 2x+y+3z-3=0 \quad //$$

EX2: Dada a equação do plano $3x+2y-2z+4=0$. Determine um vetor normal ao plano dado.

$n=(3,2,-2)$ ou $n=k(3,2,-2)$ para $k\in R$.