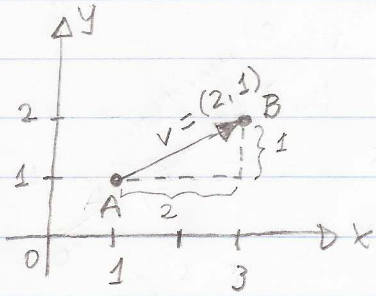
3. Espaços vetoriais Euclidianos

Motivação: visualização geométrica de vetores.

3.1. Vetores bi, tri e n-dimensionais

Geometricamente, um vetor possui direção, sentido e comprimento.

Ex: Sejam os pontos $A = (1,1)$, $B = (3,2)$ e o vetor $v = \vec{AB} = (2,1)$. Temos:



- o vetor possui a direção da reta que passa pelos pontos A e B.
- o sentido é dado pela seta.
- o comprimento é a distância entre os pontos A e B.
- A é o ponto inicial do vetor
- B é o ponto final do vetor.

- **Vetores equivalentes**

Vetores com o mesmo comprimento, direção e sentido são ditos equivalentes, embora possam estar em posições diferentes. Também dizemos que dois vetores v e w equivalentes são iguais. Isto é:

$$\boxed{v = w}$$

- Vetor zero ou nulo

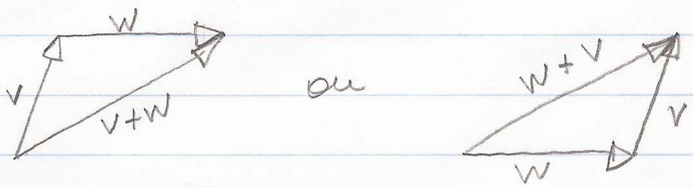
O vetor cujos pontos inicial e final coincidem, tem comprimento zero, sendo denominado por vetor zero ou vetor nulo, e denotado por 0.

- Adição de vetores

Se v e w forem vetores no espaço bidimensional (R^2) ou tridimensional (R^3). Então:

$$\boxed{v + w = w + v}$$

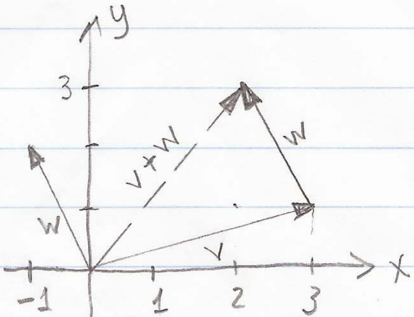
Geometricamente:



EX: Sejam $v = (3,1)$ e $w = (-1,2)$, então:

$$v + w = (3,1) + (-1,2) = (3-1,\ 1+2) = (2,3)$$

Isto é:

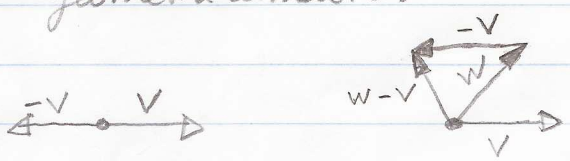


- Subtração de vetores

O negativo de um vetor v, denotado por $-v$, é o vetor que tem o mesmo comprimento e direção de v, mas tem sentido oposto. Logo:

$$w - v = w + (-v)$$

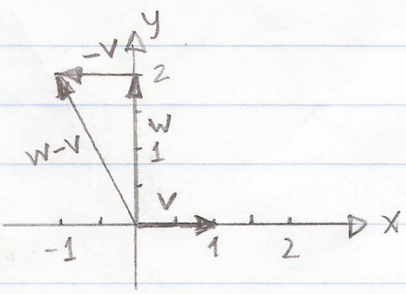
Geometricamente:



Ex: Sejam $w = (0,2)$ e $v = (1,0)$, então

$$w - v = w + (-v) = (0,2) + (-1,0) = (-1,2).$$

Isto é:



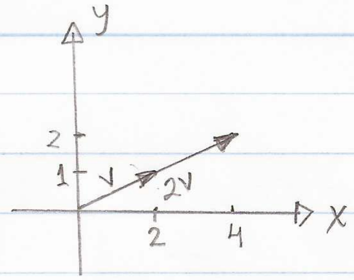
- Multiplicação por escalar

Se v for um vetor não nulo e k um escalar não nulo, então o vetor kv tem a mesma direção de v, com comprimento $|k|$ vezes o comprimento de v, mesmo sentido de v se $k > 0$, e sentido oposto ao de v se $k < 0$. Se $k = 0$ ou $v = 0$, então $kv = 0$.

Ex: Seja o vetor $v = (2,1)$, calcule kv para:

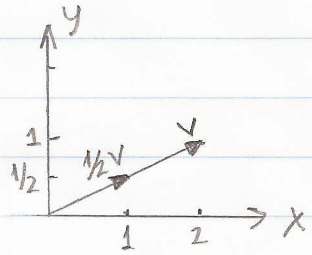
a) $k = 2$

$Kv = 2(2,1) = (4,2)$



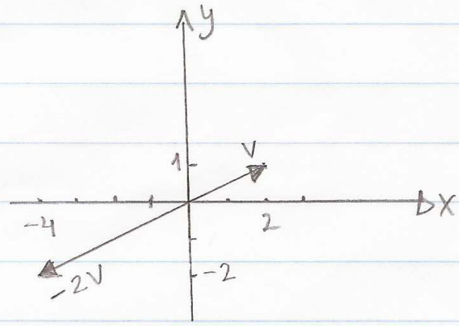
b) $K = \frac{1}{2}$

$Kv = \frac{1}{2}(2,1) = (1, \frac{1}{2})$



c) $K = -2$

$Kv = -2(2,1) = (-4,-2)$



- Vetores colineares

Dois vetores v e w, em R^2 ou R^3, partindo de um mesmo ponto inicial são ditos <u>colineares</u> se um é múltiplo escalar do outro.

- Vetores paralelos

Dois vetores v e w são paralelos se um é múltiplo escalar do outro.

- Vetor definido por dois pontos

Se $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ são pontos no R^2, então o vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ é dado por:

$$\boxed{\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)}$$

De modo semelhante, se $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ são pontos no R^3, então:

$$\boxed{\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)}$$

EX: Encontre o vetor $v = \overrightarrow{P_1P_2}$ de ponto inicial $P_1 = (2, -1, 4)$ e ponto final $P_2 = (7, 5, -8)$.

$$v = (7-2, 5-(-1), -8-4) = (5, 6, -12).$$

- Espaço de dimensão n

Definição 1: Se n for um inteiro positivo, então uma ênupla ordenada é uma sequência de n números reais $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. O conjunto de todas as ênuplas ordenadas é denominado de espaço de dimensão n e é denotado por R^n.

• Igualdade de vetores

Definição 2: Dois vetores $v=(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $w=(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ de R^n são ditos iguais se

$$v_1 = w_1, \quad v_2 = w_2, \ldots, v_n = w_n.$$

e escrevemos $v = w$.

Ex: $(a, b, c, d) = (1, -4, 2, 7)$ se, e somente se, $a=1$, $b=-4$, $c=2$, e $d=7$.

• Operações algébricas

Definição 3: Se $v=(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $w=(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ são vetores em R^n, e se k é um escalar, definimos

a) $v+w = (v_1+w_1, v_2+w_2, \ldots, v_n+w_n)$

b) $kv = (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n)$

c) $-v = (-v_1, -v_2, \ldots, -v_n)$

d) $w-v = w+(-v) = (w_1-v_1, w_2-v_2, \ldots, w_n-v_n)$

Teorema 1: Se u, v e w são vetores em R^n e se k e m são escalares, então:

a) $u+v = v+u$

b) $(u+v)+w = u+(v+w)$

c) $u+0 = 0+u = u$

d) $u+(-u) = 0$

e) $k(v+w) = kv+kw$

f) $(k+m)v = kv+mv$

g) $k(mu) = (km)u$

h) $1u = u$

i) $0v = \underbrace{0}_{\text{vetor nulo}}$

j) $k0 = \underbrace{0}_{}$ → vetor nulo

k) $(-1)v = -v$

Ex: Sejam os vetores $u=(1,2)$, $v=(3,2)$, $w=(4,2)$ e escalares $k=2$ e $m=3$, então:

a) $u+v = (1,2)+(3,2) = (4,4)$
$v+u = (3,2)+(1,2) = (4,4)$ =

b) $(u+v)+w = [(1,2)+(3,2)]+(4,2) = (4,4)+(4,2) = (8,6)$
$u+(v+w) = (1,2)+[(3,2)+(4,2)] = (1,2)+(7,4) = (8,6)$ =

c) $u+0 = (1,2)+(0,0) = (1,2)$
$0+u = (0,0)+(1,2) = (1,2)$ $= u$

d) $u+(-u) = (1,2)+(-1,-2) = (0,0) = \underset{\sim}{0}$ → vetor nulo

e) $k(v+w) = 2[(3,2)+(4,2)] = 2(7,4) = (14,8)$
$kv+kw = 2(3,2)+2(4,2) = (6,4)+(8,4) = (14,8)$ =

f) $(k+m)v = (2+3)(3,2) = 5(3,2) = (15,10)$
$kv+mv = 2(3,2)+3(3,2) = (6,4)+(9,6) = (15,10)$ =

g) $k(mu) = 2[3(1,2)] = 2(3,6) = (6,12)$
$(km)u = (2.3)(1,2) = 6(1,2) = (6,12)$ =

h) $1u = 1(1,2) = (1,2) = u$

i) $0v = 0.(3,2) = (0,0) = \underset{\sim}{0}$ → vetor nulo

j) $k.0 = 2(0,0) = (0,0) = \underset{\sim}{0}$ → vetor nulo

k) $(-1)v = -1(3,2) = (-3,-2) = -v$

- Combinação linear de vetores

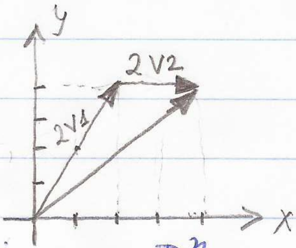
Definição 4: Dizemos que um vetor w em R^n é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_r$ em R^n se w puder ser expresso na forma

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_r v_r$$

em que $k_1, k_2, \ldots, k_r$ são escalares.

Ex: Sejam os vetores $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (1,0)$. Calcular a combinação linear $u = 2v_1 + 2v_2$.

$$u = 2(1,2) + 2(1,0) = (2,4) + (2,0)$$
$$= (4,4)$$



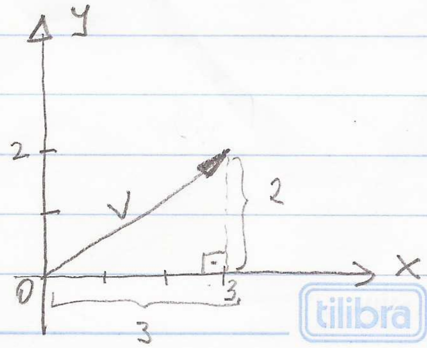
3.2 Norma, produto escalar e distância em R^n.

Definição: Se $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ for um vetor em R^n, então a norma de v (também denominada comprimento ou magnitude) é denotada por $\|v\|$ e definida por

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

Ex: Calcular o comprimento do vetor $v = (3,2)$.

$$\|v\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$



• vetor unitário

Um vetor unitário tem comprimento 1. O vetor unitário u que tem a mesma direção e sentido de um vetor v é dado por:

$$\boxed{u = \frac{1}{\|v\|} v}$$

EX: Encontre o vetor unitário u que tem a mesma direção e sentido de $v = (2, 2, -1)$.

$$\|v\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

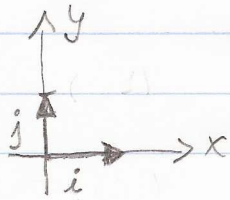
Logo:

$$u = \frac{1}{3}(2, 2, -1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

• Vetores unitários canônicos

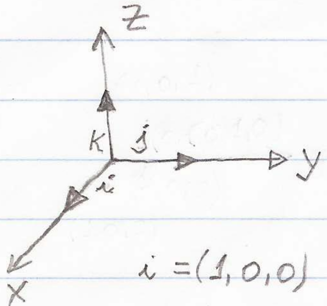
Chamamos os vetores unitários nas direções positivas dos eixos coordenados, de vetores unitários canônicos.

EX: No R^2



$i = (1, 0)$
$j = (0, 1)$

No R^3



$i = (1, 0, 0)$
$j = (0, 1, 0)$
$K = (0, 0, 1)$

EX2: Escreva um vetor $v=(v_1,v_2)$ como combinação linear dos vetores canônicos $i=(1,0)$ e $j=(0,1)$.

$$v=(v_1,v_2)=(v_1,0)+(0,v_2)=v_1(1,0)+v_2(0,1)$$
$$=v_1 i+v_2 j$$

• Distâncias entre dois pontos

Se $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ e $v=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ são pontos em R^n, então a distância entre u e v é dada por:

$$d(u,v)=\|u-v\|=\sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+\dots+(u_n-v_n)^2}$$

Ex1: Calcular a distância entre os pontos $u=(1,3)$ e $v=(4,1)$ no R^2.

$$d(u,v)=\sqrt{(1-4)^2+(3-1)^2}=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

EX2: Calcular a distância entre os pontos $u=(1,3,-2,7)$ e $v=(0,7,2,2)$ no R^4.

$$d(u,v)=\sqrt{(1-0)^2+(3-7)^2+(-2-2)^2+(7-2)^2}$$
$$=\sqrt{1^2+(-4)^2+(-4)^2+5^2}$$
$$=\sqrt{1+16+16+25}$$
$$=\sqrt{58}$$

• Produto escalar ou produto interno euclidiano

Definição: Se $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ forem vetores em $\mathbb{R}^n$, então o produto escalar de u e v é dado por:

$$\boxed{u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n}$$

Ex: Calcular o produto escalar dos vetores $u = (-1, 3, 5, 7)$ e $v = (-3, -4, 1, 0)$.

$$\begin{aligned} u \cdot v &= (-1)(-3) + 3\cdot(-4) + 5\cdot 1 + 7\cdot 0 \\ &= 3 - 12 + 5 + 0 \\ &= -4 \ // \end{aligned}$$

• Propriedades do produto escalar

Teorema: Se u, v e w forem vetores em $\mathbb{R}^n$ e se a for um escalar, então:

a) $u \cdot v = v \cdot u$

b) $u \cdot (v + w) = uv + uw$

c) $a(u \cdot v) = (au) \cdot v$

d) $v \cdot v \geq 0$, sendo $v \cdot v = 0$, se e somente se, $v = 0$.

e) $0 \cdot v = v \cdot 0 = 0$

f) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

g) $a(u \cdot v) = u \cdot (av)$

Ex1: Calcule o produto escalar $(u - 2v) \cdot (3u + 4v)$.

$$\begin{aligned} (u - 2v) \cdot (3u + 4v) &= 3(u \cdot u) + 4(u \cdot v) - 6(v \cdot u) - 8(v \cdot v) \\ &= 3\|u\|^2 - 2(u \cdot v) - 8\|v\|^2 \end{aligned}$$

EX2: Seja $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, mostre que $v \cdot v = \|v\|^2$.

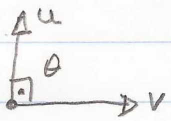
$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots v_n^2} \iff \|v\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2$$

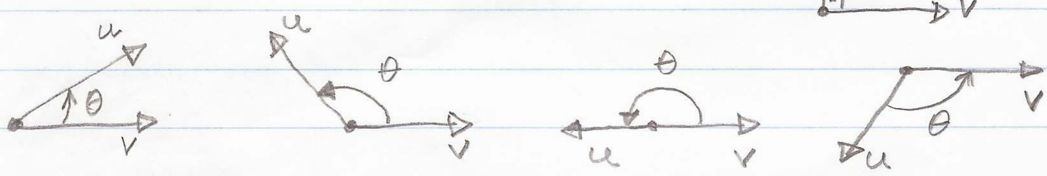
$$\iff \|v\|^2 = v_1 \cdot v_1 + v_2 \cdot v_2 + \cdots + v_n \cdot v_n$$

$$\iff \|v\|^2 = v \cdot v$$ ▨

- Ângulo entre dois vetores

Definimos o ângulo entre dois vetores u e v, como o ângulo $0 \leq \theta \leq \pi$.





Definição: se u e v forem vetores não nulos em $\mathbb{R}^n$, e θ for o ângulo entre u e v, então:

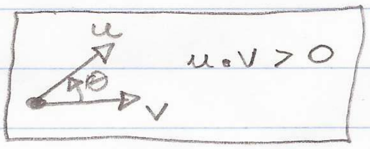
$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \quad \text{e} \quad \theta = \arccos\left(\frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}\right)$$

EX: Calcular o ângulo formado pelos vetores:

a) $u = (1,1)$ e $v = (1,0)$

$$\cos\theta = \frac{(1,1)\cdot(1,0)}{\sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+0^2}} = \frac{1+0}{\sqrt{2}\,\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

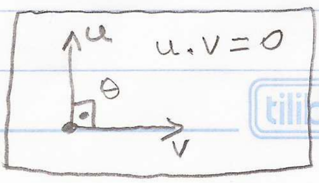
$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45°$$



b) $u = (0,1)$ e $v = (1,0)$

$$\cos\theta = \frac{(0,1)\cdot(1,0)}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1}} = \frac{0+0}{\sqrt{1}} = \frac{0}{\sqrt{1}} = 0$$

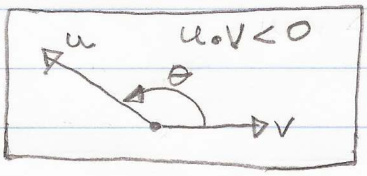
$$\theta = \arccos(0) = 90°$$



c) $u = (-1, 1)$ e $v = (1, 0)$

$$\cos\theta = \frac{(-1,1)(1,0)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}\,\sqrt{1}} = \frac{(-1)+0}{\sqrt{2}\,\sqrt{1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 135^\circ$$



3.3 Ortogonalidade

• Vetores ortogonais ou perpendiculares

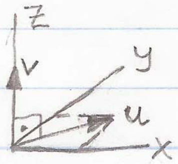
Definição 1: Dois vetores não nulos u e v em R^n são ortogonais (ou perpendiculares) se $u \cdot v = 0$. Também convencionamos que o vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor.

Definição 2: Um conjunto não vazio de vetores em R^n é denominado ortogonal se dois quaisquer de seus vetores forem ortogonais.

Definição 3: Um conjunto ortogonal de vetores unitários é dito ortonormal.

Ex 1: Mostre que qualquer vetor $u = (x, y, 0)$ no plano R^2 é perpendicular ao vetor $v = (0, 0, 1)$.

$u \cdot v = (x, y, 0) \cdot (0, 0, 1)$
$= 0$

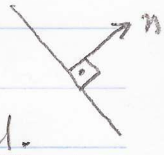


$\boxtimes$

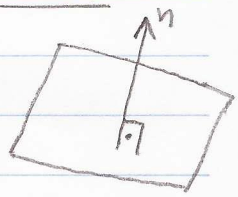
EX2: Mostre que o conjunto de vetores canônicos $S = \{i, j, k\}$ é um conjunto ortogonal em R^3.

— " —

• Retas e planos determinados por pontos e normais



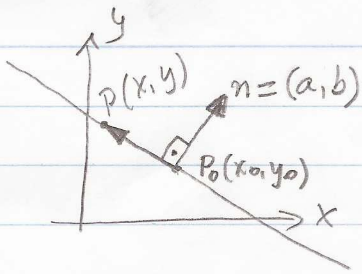
Def: Um vetor n, não nulo, que seja ortogonal a uma reta ou plano é denominado <u>normal</u>.



• Equação ponto-normal da reta no R^2

Uma reta que passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0)$, cujo vetor normal é $n = (a, b)$, é dada por:

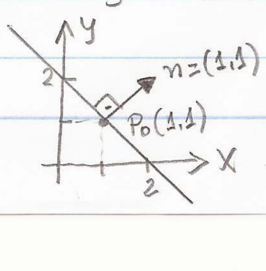
$$n \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$
$$(a, b) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$
$$ax - ax_0 + by - by_0 = 0$$
$$ax + by \underbrace{- ax_0 - by_0}_{c} = 0$$



$$\boxed{ax + by + c = 0} \quad \text{onde} \quad c = -ax_0 - by_0$$

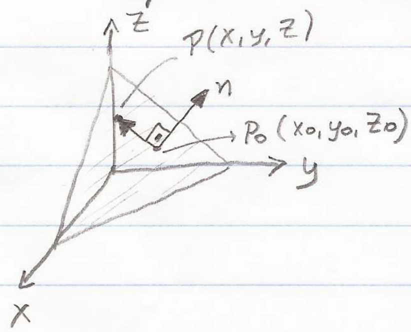
EX: Determine a equação ponto-normal da reta que passa pelo ponto $P_0(1, 1)$, e tem vetor normal $n = (1, 1)$.

$$n \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \Rightarrow (1, 1)(x - 1, y - 1) = 0 \Rightarrow x - 1 + y - 1 = 0$$
$$\Rightarrow x + y = 2 \;//$$



• Equação ponto-normal do plano no R^3.

Um plano que passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, cujo vetor normal é $n = (a, b, c)$, é dado por:



$$n \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$
$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$
$$ax + by + cz \underbrace{- ax_0 - by_0 - cz_0}_{d} = 0$$

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0} \quad \text{onde} \quad d = -ax_0 - by_0 - cz_0$$

EX1: Determine a equação ponto-normal do plano que passa pelo ponto $P_0(1, 1, 0)$, e tem vetor normal $n = (2, 1, 3)$.

$$n \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \Rightarrow (2, 1, 3)(x - 1, y - 1, z - 0) = 0$$
$$\Rightarrow 2(x - 1) + y - 1 + 3z = 0$$
$$\Rightarrow 2x - 2 + y - 1 + 3z = 0$$
$$\Rightarrow 2x + y + 3z - 3 = 0 \quad //$$

EX2: Dada a equação do plano $3x + 2y - 2z + 4 = 0$. Determine um vetor normal ao plano dado.

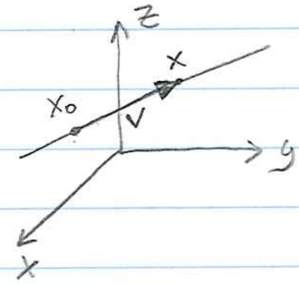
$n = (3, 2, -2)$ ou $n = k(3, 2, -2)$ para $k \in R$.

3.4 A geometria de sistemas lineares

• Equações paramétricas da retas em R^2 ou R^3.

Uma reta que passa por um ponto x_0, e é paralela a um vetor não nulo v, é dada por:

$\boxed{x = x_0 + tv}$, $t \in \mathbb{R}$



Se $x_0 = 0$ (origem), então:

$\boxed{x = tv}$, $t \in \mathbb{R}$

Ex: Encontre a equação paramétrica da reta que passa pelo ponto x_0 e é paralela ao vetor v, sendo:

a) $x_0 = (0,0)$ e $v = (-2,3)$ no R^2

$(x,y) = (0,0) + t(-2,3) \Rightarrow (x,y) = t(-2,3)$ //

ou

$(x,y) = (-2t, 3t) \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = 3t \end{cases}$ //

b) $x_0 = (1,2,-3)$ e $v = (4,-5,1)$ no R^3

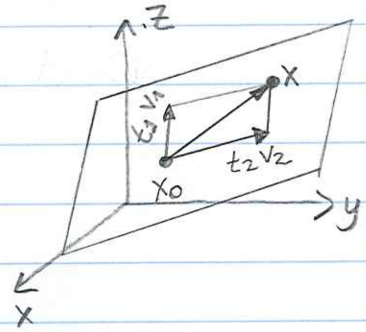
$(x,y,z) = (1,2,-3) + t(4,-5,1)$ // ou

$(x,y,z) = (1+4t, 2-5t, -3+t) \Rightarrow \begin{cases} x = 1+4t \\ y = 2-5t \\ z = -3+t \end{cases}$ //

• Equações paramétricas de planos em $\mathbb{R}^3$.

Um plano que passa por um ponto x_0, e é paralelo a dois vetores não nulos v_1 e v_2, é dado por:

$$\boxed{x = x_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2} \quad , \ t_1 \text{ e } t_2 \in \mathbb{R}$$



Se $x_0 = 0$ (origem), então:

$$\boxed{x = t_1 v_1 + t_2 v_2} \quad , \ t_1 \text{ e } t_2 \in \mathbb{R}$$

EX1: Encontre a equação paramétrica do plano que passa pelo ponto $x_0 = (1, 2, 1)$ e é paralelo aos vetores $v_1 = (2, 0, 1)$ e $v_2 = (0, 2, 2)$.

$(x, y, z) = (1, 2, 1) + t_1(2, 0, 1) + t_2(0, 2, 2)$ // ou

$(x, y, z) = (1, 2, 1) + (2t_1, 0, t_1) + (0, 2t_2, 2t_2)$

$(x, y, z) = (1 + 2t_1, 2 + 2t_2, 1 + t_1 + 2t_2)$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t_1 \\ y = 2 + 2t_2 \\ z = 1 + t_1 + 2t_2 \end{cases} //$$

EX2: Encontre a equação paramétrica do plano $x - y + 2z = 5$.

• Isolando x e fazendo $y = t_1$ e $z = t_2$, temos:

$x = 5 + y - 2z \Rightarrow x = 5 + t_1 - 2t_2$

Logo:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (5 + t_1 - 2t_2, t_1, t_2) = (5, 0, 0) + (t_1 - 2t_2, t_1, t_2) \\ &= (5, 0, 0) + (t_1, t_1, 0) + (-2t_2, 0, t_2) \\ &= (5, 0, 0) + t_1(1, 1, 0) + t_2(-2, 0, 1) \quad // \end{aligned}$$

3.5 Produto vetorial

Definição: Se $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ forem vetores no espaço tridimensional, então o produto vetorial $u \times v$ é o vetor definido por:

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

Ex1: Sejam $u = (1, 2, -2)$ e $v = (3, 0, 1)$. Calcule o produto vetorial $u \times v$.

$$u \times v = \left(\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=2}, -\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}_{=7}, \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}_{=-6} \right) = (2, -7, -6)$$

Uma regra prática para calcular o produto vetorial

Podemos calcular $u \times v$ em formato de determinante.

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k$$

Ex2: Calcular o produto vetorial dos vetores $u = (1, 2, -2)$ e $v = (3, 0, 1)$.

$$u \times v = \left| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} i & j \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{matrix} = 2i - 6j - 6k - j = 2i - 7j - 6k$$ //

Teorema 1: Se u e v forem vetores em R^3, então

a) $u \cdot (u \times v) = 0$ ($u \times v$ é ortogonal a u)

b) $v \cdot (u \times v) = 0$ ($u \times v$ é ortogonal a v).

EX3: Sejam os vetores $u = (1, 2, -2)$ e $v = (3, 0, 1)$. Mostre que $u \times v$ é ortogonal a u e v.

Do exemplo 1, $u \times v = (2, -7, -6)$.

- $u \times v$ é ortogonal a u:

$$u \cdot (u \times v) = (1, 2, -2) \cdot (2, -7, -6) = 1 \cdot 2 + 2(-7) + (-2)(-6)$$
$$= 2 - 14 + 12$$
$$= 0 \quad \boxtimes$$

- $u \times v$ é ortogonal a v:

$$v \cdot (u \times v) = (3, 0, 1) \cdot (2, -7, -6) = 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-7) + 1 \cdot (-6)$$
$$= 6 + 0 - 6$$
$$= 0 \quad \boxtimes$$

Logo, $u \times v$ é ortogonal a u e v.

Propriedades do produto vetorial

Se u, v e w forem vetores do R^3 e k um escalar, então:

a) $u \times v = -(v \times u)$

b) $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$

c) $(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$

d) $k(u \times v) = (ku) \times v = u \times (kv)$

e) $u \times 0 = 0 \times u = \underset{\sim}{0}$

f) $u \times u = 0$ ↳ vetor nulo

(2, 1, -1

Ex4: Dados os vetores $u=(1,2,-2)$, $v=(3,0,1)$, $w=(2,1,-1)$ e $k=2$, mostre que às propriedades do produto vetorial são válidas.

a) $u \times v = -(v \times u)$

- Pelo exemplo 1, $u \times v = (2,-7,-6)$

$$-(v\times u) = -\left|\begin{array}{ccc|cc} i & j & k & i & j \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right| = -(j+6k-2i+6j)$$

$$= -(-2i+7j+6k)$$

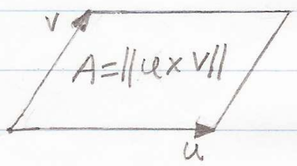
$$= 2i-7j-6k \qquad \boxtimes$$

(=)

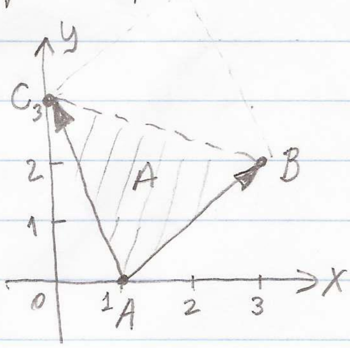
► As demais ficam a cargo do aluno.

Teorema 2: Área de um paralelogramo

Se u e v forem vetores no R^3, então $\|u \times v\|$ é igual a área A do paralelogramo determinado por u e v.



Ex5: Calcule a área do triângulo determinado pelos pontos $A=(1,0)$, $B=(3,2)$ e $C=(0,3)$ no R^2.



Reescrevemos os pontos A, B e C como pontos do R^3.

$A=(1,0,0)$, $B=(3,2,0)$ e $C=(0,3,0)$

$\vec{AB} = (3,2,0)-(1,0,0) = (2,2,0)$

$\vec{AC} = (0,3,0)-(1,0,0) = (-1,3,0)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{matrix} = 6k + 2k = 0i + 0j + 8k$$

$$= (0, 0, 8)$$

$$A = \frac{1}{2} \| \vec{AB} \times \vec{AC} \| = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 0^2 + 8^2} = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$$

- Produto misto

Definição: Se u, v e w forem vetores do R^3, dizemos que

$$\boxed{u \circ (v \times w)}$$

é o produto misto de u, v e w.

Uma regra prática para calcular o produto misto.

Sendo $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, então:

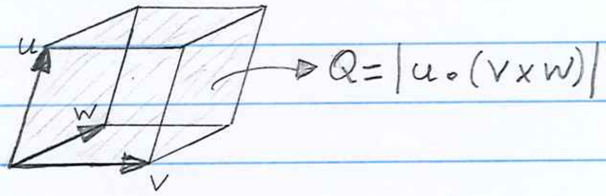
$$u \circ (v \times w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Ex: Calcule o produto misto $u \circ (v \times w)$ dos vetores $u = 3i - 2j - 5k$, $v = i + 4j - 4k$ e $w = 3j + 2k$.

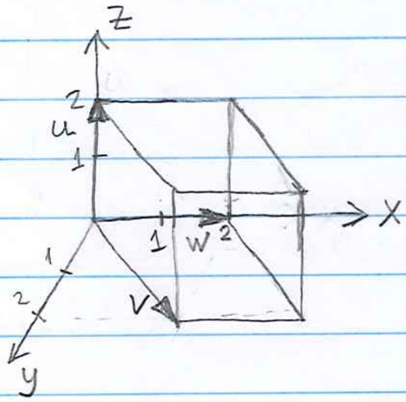
$$u \circ (v \times w) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{matrix} = 24 - 15 + 36 + 4 = 49$$

Teorema 3: volume de um paralelepípedo

Se u, v e w forem vetores no R^3, então $|u \cdot (v \times w)|$ é igual ao volume Q do paralelepípedo determinado por u, v e w.



Ex: Calcular o volume Q do paralelepípedo determinado pelo vetores $u=(0,0,2)$, $v=(2,2,0)$ e $w=(2,0,0)$.



$$u \cdot (v \times w) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right|$$

$$= 0 - 8$$

$$= -8$$

$$Q = |u \cdot (v \times w)| = |-8| = 8 \quad //$$