1.4 - Propriedades algébricas das matrizes

Teorema 1: Supondo que os tamanhos das matrizes sejam tais que as operações indicadas possam ser efetuadas, valem as seguintes regras da aritmética matricial.

a) $A+B=B+A$ (comutativa da adição)
b) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (associativa da adição)
c) $A(BC)=(AB)C$ (associativa da multiplicação)
d) $A(B+C)=AB+AC$ (distributiva à esquerda)
e) $(A+B)C=AC+BC$ (distributiva à direita)
f) $A(B-C)=AB-AC$
g) $(B-C)A=BA-CA$
h) $a(B+C)=aB+aC$ (multiplicação pelo escalar a)
i) $a(B-C)=aB-aC$
j) $(a+b)C=aC+bC$ (multiplicação pela soma dos escalares a e b)
k) $(a-b)C=aC-bC$
l) $a(bC)=(ab)C$
m) $a(BC)=(aB)C=B(aC)$

EX 1: A ordem é importante na multiplicação matricial. Sejam $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$, $AB\neq BA$.

Verificando:

$$AB=\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}}_{B}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 11 & 4\end{bmatrix}$$

$$BA=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}}_{B}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}}_{A}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ -3 & 0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow AB\neq BA$

Matriz zero ou matriz nula.

Definição: uma matriz zero (ou nula) é uma matriz cujas entradas são todas nulas.

Ex: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Denotamos uma matriz nula por $0_{m \times n}$ ou simplesmente 0.

Propriedades de matrizes zero

Se c for um escalar e se os tamanhos das matrizes forem tais que as operações possam ser efetuadas, então:

a) $A + 0 = 0 + A = A$

b) $A - 0 = A$

c) $A - A = A + (-A) = 0$

d) $0A = 0$

e) se $cA = 0$, então $c = 0$ ou $A = 0$.

Ex: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, então:

$$0A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + 0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ex2: A lei do cancelamento não vale:

Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, então:

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Más cancelar A em ambos os lados de $AB = AC$, leva a conclusão incorreta de que $B = C$.

Matriz identidade

Definição: uma matriz quadrada com entradas 1 na diagonal principal e demais entradas nulas é denominada identidade. Denotada por I_n.

Ex: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Propriedade: $AI = IA = A$

Ex: Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$, então

$$AI_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Inversa de uma matriz

Definição: Se A for uma matriz quadrada e se pudermos encontrar uma matriz B de mesmo tamanho tal que $AB = BA = I$, então diremos que A é invertível (ou não singular) e que B é a inversa de A. Se não puder ser encontrada uma tal matriz B, diremos que A é não invertível ou singular.

Ex: Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, então

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Logo, A e B são invertíveis e uma é inversa da outra.

Ex: Matrizes não-invertíveis

Uma matriz quadrada A com uma linha ou coluna de zeros é não-invertível. Isto é, não existe uma matriz B, tal que $AB = BA = I$.

Seja $A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \end{array}$ e $B = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} & \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array} \end{array}$

Podemos escrever a matriz A em função dos seus vetores colunas $A = [c_1\ c_2\ c_3]$ e B em função de seus vetores linhas $B = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$. Logo, o produto

$$BA = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1c_1 & l_1c_2 & l_1c_3 \\ l_2c_1 & l_2c_2 & l_2c_3 \\ l_3c_1 & l_3c_2 & l_3c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1c_1 & l_1c_2 & 0 \\ l_2c_1 & l_2c_2 & 0 \\ l_3c_1 & l_3c_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} l_1c_3 = [a \; b \; c][0 \; 0 \; 0] = 0+0+0 = 0 \\ l_2 . c_3 = [d \; e \; f][0 \; 0 \; 0] = 0+0+0 = 0 \\ l_3 . c_3 = [g \; h \; i][0 \; 0 \; 0] = 0+0+0 = 0 \end{cases}$$

Ou seja, $BA \neq I$.

— II —

Teorema 2: Uma matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é invertível, se e somente se, $\det(A) = ad - bc \neq 0$, e sua inversa é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} . \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Ex: Determine a inversa das matrizes $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$.

- $\det(A) = 6.2 - 5.1 = 7$. Logo A^{-1} é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{7} . \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{5}{7} & 6/7 \end{bmatrix}$$

- $\det(B) = (-1).(-6) - 3.2 = 0$. Logo B não é invertível, pois $\det(B) = 0$.

Solução de um sistema linear por inversão matricial

Seja o sistema: $A \cdot x = b$

$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases} \iff \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Podemos reescrevê-lo na forma matricial $Ax = b$.

Multiplicando ambos os lados por A^{-1}, temos:

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I} x = A^{-1} b \Rightarrow Ix = A^{-1} b \Rightarrow \boxed{x = A^{-1} b}$$

Ex: Calcule a solução do sistema $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ por inversão matricial.

$$\det(A) = 4.3 - 5.1 = 7$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/7 & -\frac{1}{7} \\ -5/7 & 4/7 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1}.b = \begin{bmatrix} 3/7 & -1/7 \\ -5/7 & 4/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 2/7 \end{bmatrix}$$

Potência de matrizes

Se A e B forem matrizes quadradas, então:

a) $A^0 = I$

b) $A^n = \underbrace{A.A \ldots A}_{n \text{ fatores}}$

c) $A^{-n} = \underbrace{A^{-1}.A^{-1} \ldots A^{-1}}_{n \text{ fatores}}$

d) $A^r A^s = A^{(r+s)}$

e) $(A+B)^2 = A^2 + \underbrace{AB + BA}_{2AB?} + B^2$

2AB? cuidado, a comutativa não vale.

Propriedades da inversa

Se A e B forem invertíveis e n é um número inteiro não-negativo, então:

a) $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $(A^n)^{-1} = A^{-n} = (A^{-1})^n$

c) $(kA)^{-1} = k^{-1} A^{-1}$, para qualquer $k \neq 0$.

d) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

e) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Propriedades da transposta

a) $(A^T)^T = A$

b) $(A+B)^T = A^T + B^T$

c) $(kA)^T = kA^T$

d) $(AB)^T = B^T A^T$