Universidade Federal do Paraná
Campus Avançado de Jandaia do Sul
Estatística

Teste de Hipótese

Dr. Landir Saviniec

E-mail: landir.saviniec@gmail.com
Homepage: github.com/lansaviniec

Outubro de 2018

Visão geral

Na Seção 7, vimos como criar intervalos de confiança para estimar os parâmetros média e variância de uma população a partir de uma amostra. Agora, veremos como **testar uma afirmativa (hipótese) sobre um parâmetro populacional** (média ou variância).

Teste de Hipótese

Hipótese: é uma afirmativa sobre uma propriedade de um população.

Teste de Hipótese (ou Significância): é um procedimento para se testar uma afirmativa sobre uma propriedade de uma população.

Regra do evento raro

Se, **sob uma dada hipótese**, a **probabilidade de um evento observado é extremamente pequena**, então **concluímos que a hipótese provavelmente não é correta**.

Hipótese nula e hipótese alternativa

Hipótese nula (H_0): é uma afirmativa de que um parâmetro populacional (ex: média ou desvio padrão) é igual a algum valor específico.

Exemplo:

$$H_0: \ \mu = 100$$

Hipótese alternativa (H_1): é a afirmativa de que o parâmetro populacional tem um valor que difere da hipótese nula.

Exemplo:

$$H_1: \ \mu < 100 \qquad H_1: \ \mu > 100 \qquad H_1: \ \mu \neq 100$$

Estatísticas de teste

Para testar uma hipótese nula. Convertemos dados amostrais em uma das seguintes estatísticas de teste:

Estatística de teste para a média populacional com desvio padrão conhecido:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Estatística de teste para a média populacional com desvio padrão desconhecido:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Estatística de teste para a variância populacional:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

Conceitos

Região crítica (ou região de rejeição): é o conjunto de todos os valores da estatística de teste que nos fazem rejeitar a hipótese nula. Se o valor amostrado quando convertido na estatística de teste cair nesta região, rejeitamos a hipótese nula.

Nível de significância (α): é a probabilidade de a estatística de teste cair na região crítica quando a hipótese nula for verdadeira. Ou seja, é a probabilidade (erro) de rejeitarmos a hipótese nula, quando ela é verdadeira.

Valores críticos: são os valores que separam a região crítica (valores que levam a rejeição da hipótese nula) da região não crítica (valores que não levam a rejeição da hipótese nula).

Valor P: probabilidade de se obter um valor da estatística de teste que seja tão extremo quanto o valor que representa os dados amostrais, supondo que a hipótese nula é verdadeira.

Teste de hipótese para a Média Populacional: com desvio padrão conhecido

Objetivo

Testar uma afirmativa sobre uma média populacional, supondo que o desvio-padrão populacional seja um valor **conhecido**.

Notação

n: *tamanho amostral*

$\bar{x}$: *média amostral*

$\mu_{\bar{x}}$: *média populacional de todas as médias amostrais de tamanho* n

σ: *valor conhecido do desvio padrão populacional*

Requisitos

1) A amostra é uma amostra aleatória simples.
2) O valor do desvio padrão populacional é **conhecido**.
3) A população é normal ou n>30.

Estatística de teste utilizada

Utilizamos a **estatística de teste z** baseada na **distribuição normal padrão**:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Exemplo 1

Uma **máquina de empacotar cimento** opera **regulada** para **empacotar sacos de 50 kg**, com um **desvio padrão de 0.3 kg**. Após passar por manutenção, foi coletada uma amostra de 40 sacos de cimento embalados pela máquina e obteve-se uma média amostral de 49.1 kg. Teste a hipótese de que a máquina está desregulada com nível de significância de 5%.

$n=40 \qquad \bar{x}=49.1 \qquad \alpha=0.05 \qquad \sigma=0.3$

Passo 1: Formulamos as hipóteses nula e alternativa:

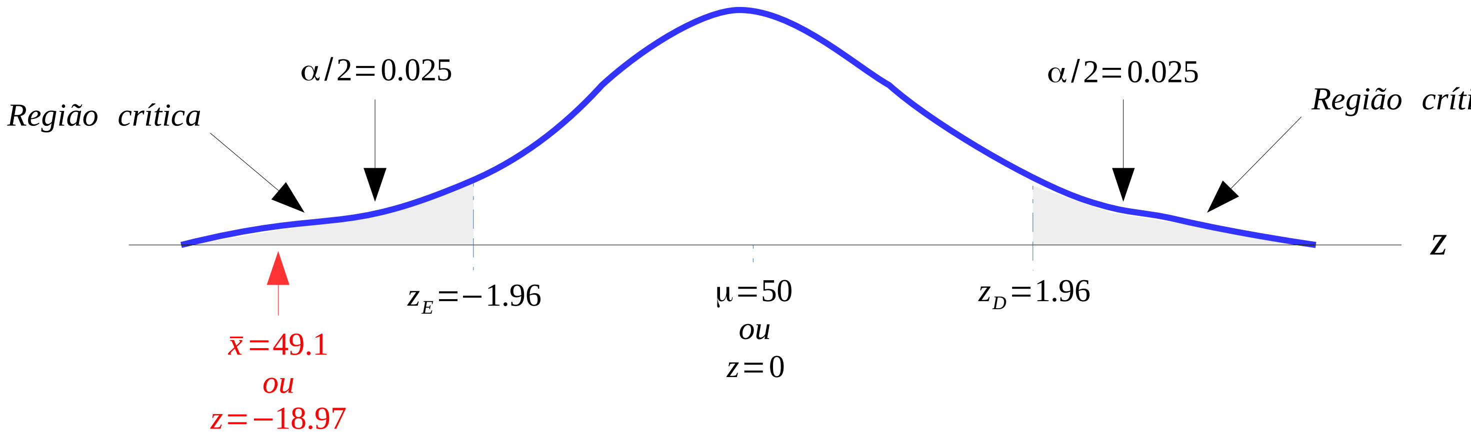
$$H_0:\ \mu=50 \quad (a\,máquina\,continua\,regulada)$$
$$H_1:\ \mu\neq 50 \quad (a\,máquina\,está\,desregulada)$$

Passo 2: Calculamos a estatística de teste para os dados amostrais:

$$z=\frac{\bar{x}-\mu_{\bar{x}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{49.1-50}{\frac{0.3}{\sqrt{40}}}=-18.97$$

Exemplo 1: Análise pelos valores críticos

Passo 3: Calculamos os valores críticos na distribuição normal padrão:



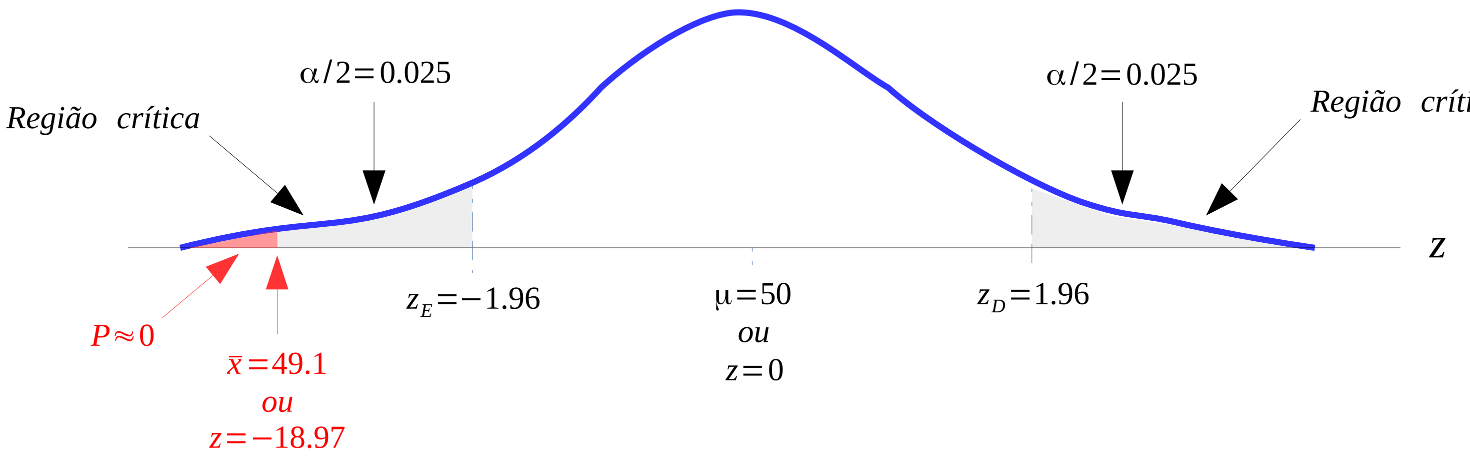
Passo 4: Decidimos se aceitamos ou rejeitamos a hipótese nula:

Como a estatística de teste da amostra z = -18.97 caiu na região de rejeição, decidimos por rejeitar a hipótese nula (de que a máquina continua regulada). Isto é, se a máquina estivesse regulada, dificilmente obteriamos uma amostra com média tão extrema, como esta amostra de média 49.1.

Exemplo 1: Análise pelo valor P

Passo 3: Calculamos o valor de P:

$$P = P(z \leq -18.97) \approx 0 \qquad (\text{Área à esquerda de } z = -18.97)$$



Passo 4: Decidimos se aceitamos ou rejeitamos a hipótese nula:

Como P <= 0.025, decidimos por rejeitar a hipótese nula (de que a máquina continua regulada). Isto é, se a máquina estivesse regulada, dificilmente obteriamos uma amostra com média de 49.1, pois a probabilidade disso acontecer é quase zero ($P \approx 0$).

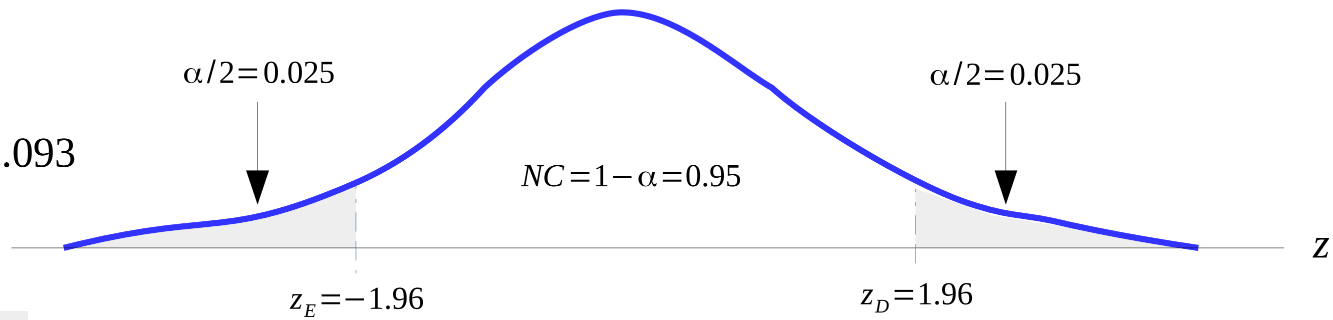
Exemplo 1: Análise pelo intervalo de confiança

Passo 3: Calculamos o intervalo de confiança com NC = 95%:

$n=40 \qquad \bar{x}=49.1 \qquad \alpha=0.05 \qquad \sigma=0.3$

$$E \;=\; z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$E \;=\; 1.96\cdot\frac{0.3}{\sqrt{40}}=0.093$$



$$\bar{x}-E \;\leq\; \mu \;\leq\; \bar{x}+E$$

$$49.1-0.093 \;\leq\; \mu \;\leq\; 49.1+0.093 \quad\Rightarrow\quad 49.01 \;\leq\; \mu \;\leq\; 49.19$$

Passo 4: Decidimos se aceitamos ou rejeitamos a hipótese nula:

Como o intervalo de confiança não contém o valor 50, decidimos por rejeitar a hipótese nula (de que a máquina continua regulada com média $\mu=50$). Isto é, se a máquina estivesse regulada, então o intervalo (49.01, 49.19) deveria conter o valor 50.

Exemplo 2

Uma **máquina tritura grãos e empacota a farinha resultante**. Esta máquina **opera regulada para empacotar pacotes de 15 kg**, com um **desvio padrão de 0.4 kg**. Sabe-se que está máquina **desregula de tempo em tempo**, devido ao desgaste de certas peneiras, **fazendo a máquina empacotar mais farinha do que a média**. Uma amostra de 35 pacotes apresentou uma média de 15.1 kg. **Teste a hipótese de que a máquina está empacotando mais farinha do que a média de 15 kg**. Use nível de significância de 5%.

$$n = 35 \qquad \bar{x} = 15.1 \qquad \alpha = 0.05 \qquad \sigma = 0.4$$

Passo 1: Formulamos as hipóteses nula e alternativa:

$$H_0: \ \mu = 15 \quad (a\ máquina\ continua\ regulada)$$
$$H_1: \ \mu > 15 \quad (a\ máquina\ está\ desregulada)$$

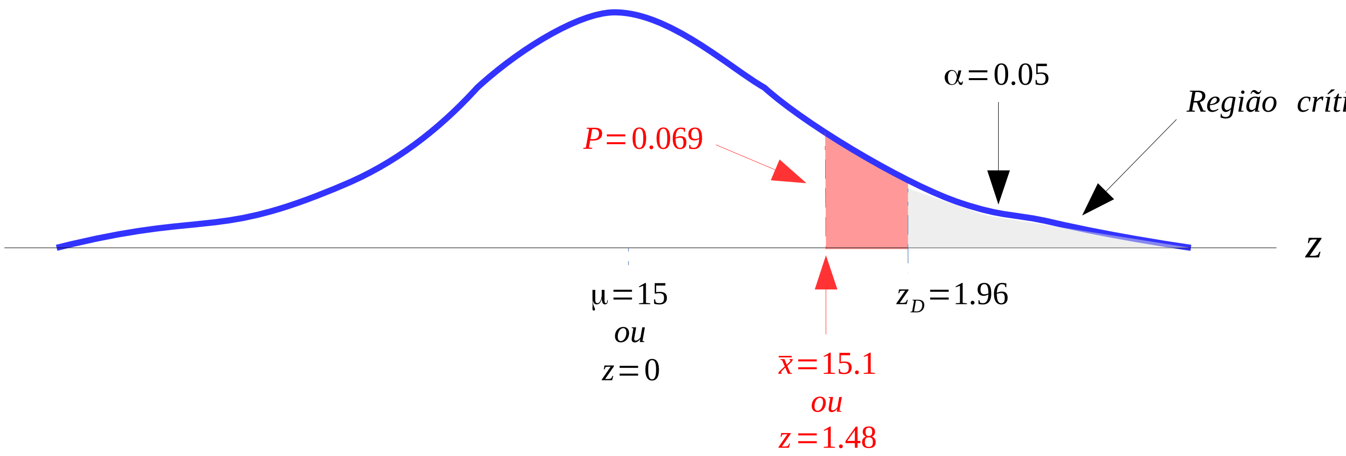
Passo 2: Calculamos a estatística de teste para os dados amostrais:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{15.1 - 15}{\frac{0.4}{\sqrt{35}}} = 1.48$$

Exemplo 2: Análise pelo valor P

Passo 3: Calculamos o valor de P:

$$P \;=\; P(z \geq 1.48) = 1 - 0.931 = 0.069 \qquad (\textit{Área à direita de } z = 1.48)$$



Passo 4: Decidimos se aceitamos ou rejeitamos a hipótese nula:

Como P >= 0.05, decidimos por não rejeitar a hipótese nula (de que a máquina continua regulada). Isto é, se a máquina estiver regulada, obter uma amostra com média de 15.1 não é tão raro e pode acontecer com frequência. Logo, preferimos não rejeitar a hipótese de que a máquina continua regulada.

Teste de hipótese para a Média Populacional: com desvio padrão desconhecido

Objetivo

Testar uma afirmativa sobre uma média populacional, supondo que o desvio-padrão populacional seja um valor **desconhecido**.

Notação

$n:\quad \textit{tamanho amostral}$

$\bar{x}:\quad \textit{média amostral}$

$s:\quad \textit{desvio padrão amostral}$

$\mu_{\bar{x}}:\quad \textit{média populacional de todas as médias amostrais de tamanho } n$

Requisitos

1) A amostra é uma amostra aleatória simples.
2) O valor do desvio padrão populacional é **desconhecido**.
3) A população é normal ou n>30.

Estatística de teste utilizada

Utilizamos a **estatística de teste t** baseada na **distribuição de Student**:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$$

Exemplo 3

Um **fabricante de bebidas** afirma que sua marca de **cerveja Z possui um teor alcoólico de 5.8% de alcool**. Uma **amostra de 40 latas** dessa cerveja apresentou uma **média de 5.2%**, com **desvio padrão de 0.4%**. Usando um teste de hipótese com nível de significância de 5%, verifique se há evidências de que a informação do fabricante é correta?

$n = 40 \qquad \bar{x} = 5.2 \qquad s = 0.4 \qquad \alpha = 0.05$

A amostra nos sugere que o teor alcoólico real possa ser menor que 5.8%. Vamos usar esta suposição como hipótese alternativa.

Passo 1: Formulamos as hipóteses nula e alternativa:

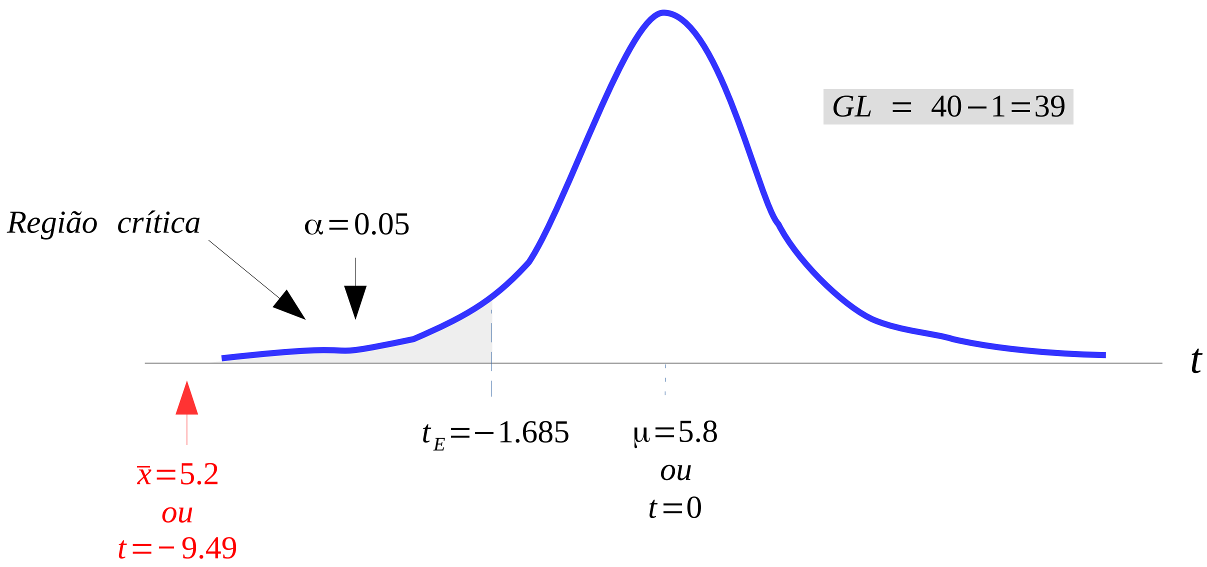
$$H_0: \quad \mu = 5.8 \quad (a\ informação\ é\ correta)$$
$$H_1: \quad \mu < 5.8 \quad (a\ informação\ é\ incorreta)$$

Passo 2: Calculamos a estatística de teste para os dados amostrais:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{5.2 - 5.8}{\frac{0.4}{\sqrt{40}}} = -9.49$$

Exemplo 3: Análise pelos valores críticos

Passo 3: Calculamos os valores críticos na distribuição t de Student:



Passo 4: Decidimos se aceitamos ou rejeitamos a hipótese nula:

Como a estatística de teste da amostra t = -9.49 caiu na região de rejeição, decidimos por rejeitar a hipótese nula (de que a informação do fabricante é correta). Isto é, se a informação do fabricante estivesse correta, dificilmente obteriamos uma amostra com média tão extrema, como esta amostra de média 5.2.

Teste de hipótese para a Variância e Desvio Padrão Populacional

Objetivo

Testar uma afirmativa sobre uma variância ou desvio padrão populacional.

Notação

n : *tamanho amostral*

s : *desvio padrão amostral*

s^2 : *variância amostral*

σ : *desvio padrão populacional*

σ^2 : *variância populacional*

Requisitos

1) A amostra é uma amostra aleatória simples.
2) A população é normal.

Estatística de teste utilizada

Utilizamos a **estatística de teste** χ^2 baseada na **distribuição Qui-Quadrado**:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

Exemplo 4

As **chapas de aço produzidas por uma indústria de aço** possuem uma especificação cuja espessura não deve ter uma variância maior que 0.0025 mm^2. Uma **amostra de 11 chapas** apresentou as seguintes espessuras:

Amostra: {2.52, 2.49, 2.46, 2.52, 2.55, 2.51, 2.45, 2.44, 2.57, 2.55, 2.47}

Com nível de significância de 5%, teste a hipótese de que a variância está dentro da especificação desejada.

$$n = 11 \qquad s^2 = 0.0019 \qquad \sigma^2 = 0.0025 \qquad \alpha = 0.05$$

Passo 1: Formulamos as hipóteses nula e alternativa:

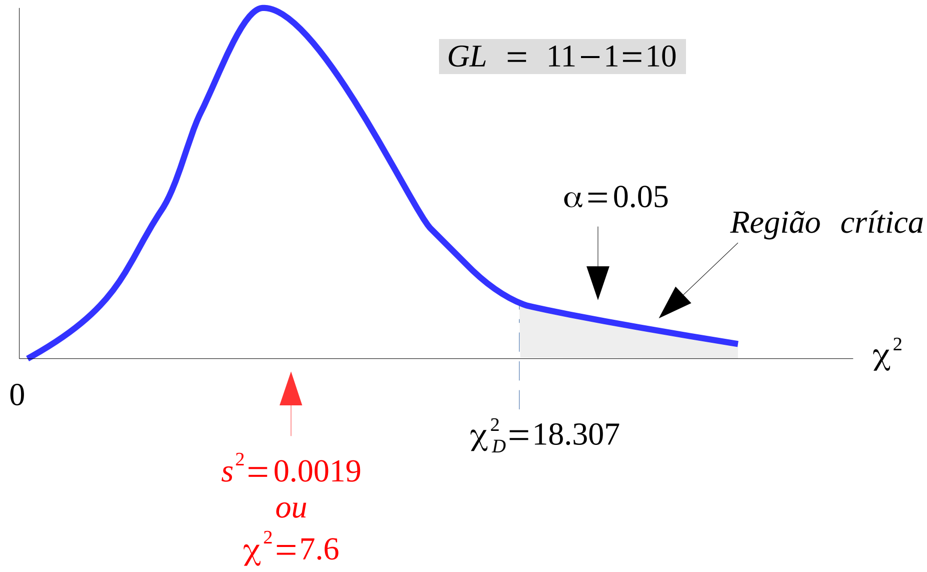
$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \sigma^2 = 0.0025 \quad \left(\textit{dentro da especificação}\right) \\ H_1 &: \quad \sigma^2 > 0.0025 \quad \left(\textit{fora da especificação}\right) \end{aligned}$$

Passo 2: Calculamos a estatística de teste para os dados amostrais:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(11-1)\,0.0019}{0.0025} = 7.6$$

Exemplo 4: Análise pelos valores críticos

Passo 3: Calculamos os valores críticos na distribuição Qui-Quadrado:



Passo 4: Decidimos se aceitamos ou rejeitamos a hipótese nula:

Como a estatística de teste da amostra $\chi^2=7.6$ caiu fora da região de rejeição, não rejeitamos a hipótese nula. Logo, a variância está dentro da especificação desejada.

Exemplo 5

Moedas de centavos devem ser produzidas com uma especificação de peso de 2.5 g e desvio padrão de 0.023 g. Uma **amostra de 37 moedas** apresentou peso médio de 2,499 g e desvio padrão de 0,016 g. Com nível de significância de 5%, teste a hipótese de que o desvio padrão é menor que a especificação desejada.

$$n = 37 \qquad s = 0.016 \qquad \sigma = 0.023 \qquad \alpha = 0.05$$

Passo 1: Formulamos as hipóteses nula e alternativa:

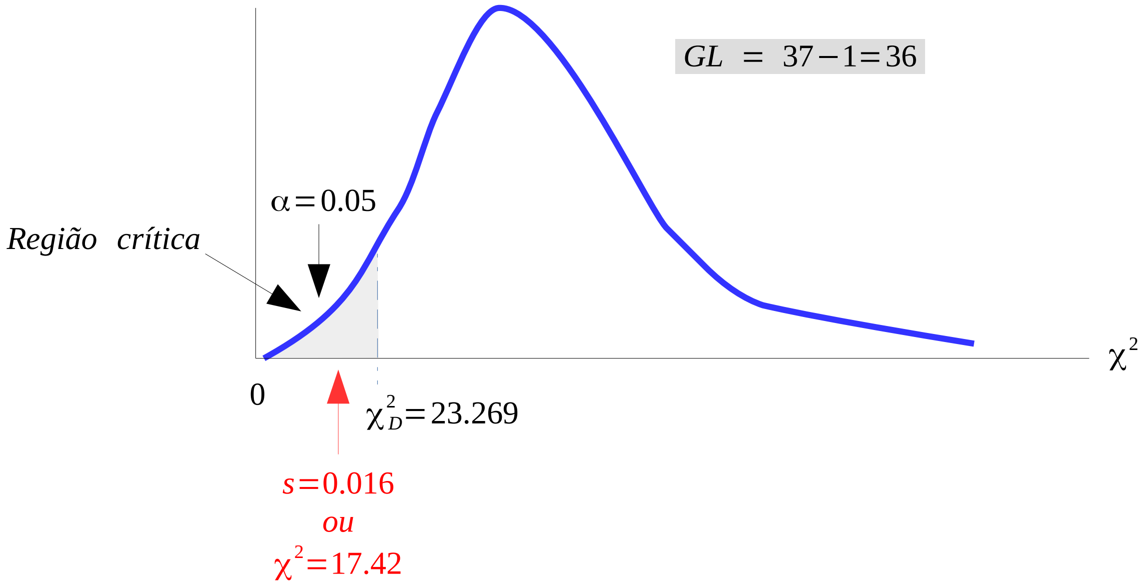
$$H_0: \quad \sigma = 0.023 \qquad \left(\textit{dentro da especificação}\right)$$
$$H_1: \quad \sigma < 0.023 \quad \left(\textit{menor que a especificação}\right)$$

Passo 2: Calculamos a estatística de teste para os dados amostrais:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(37-1)0.016^2}{0.023^2} = 17.42$$

Exemplo 5: Análise pelos valores críticos

Passo 3: Calculamos os valores críticos na distribuição Qui-Quadrado:



Passo 4: Decidimos se aceitamos ou rejeitamos a hipótese nula:

Como a estatística de teste da amostra $\chi^2=17.42$ caiu na região de rejeição, rejeitamos a hipótese nula. Logo, há evidência suficiente para afirmar que o desvio padrão dos pesos das moedas é menor que a especificação desejada.