XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

信号与系统
Signals & Systems

教师：徐静
学生：计算机21 22 23班
办公地点：西一楼327
jing.xu@mail.xjtu.edu.cn
2014-2015学年 第1学期

第4章
离散时间傅里叶分析

离散时间信号与系统
频域分析方法

基 本 内 容

1. 离散时间傅立叶级数（周期信号）；
2. 离散时间傅立叶变换（非周期信号）；
3. 离散周期信号的傅立叶变换；
4. 离散时间傅里叶级数和傅立叶变换的性质；
5. 离散时间系统的频率响应与频域分析；

学 习 方 法

- 本章将采用与讨论CFS（CTFT）完全相同的思想方法，来研究离散时间（非）周期信号的频域分解问题。
- DFS与CFS之间既有许多类似之处，也有一些重大差别：主要是DFS是一个有限项级数，a_k 具有周期性。

学 习 方 法

- 在采用相同方法研究如何从DFS引出离散时间非周期信号频域描述时，相应的DTFT与CTFT既有许多相类似的地方，也同时存在一些重要区别。（分析思路）

- 抓住它们之间的相似之处与掌握其差别,将对掌握和加深对频域分析方法的理解具有重要意义。（对比理解）

- 英文缩写：

- CFS (the continuous Fourier series)：
  连续时间傅立叶级数
- DFS (the discrete Fourier series)：
  离散时间傅立叶级数
- CTFT (the continuous time Fourier transforms):
  连续时间傅立叶变换
- DTFT (the discrete time Fourier transforms)：
  离散时间傅立叶变换

信号与系统究竟是何物？

- 工程数学？
- 傅里叶变换、傅里叶分析？
- 一种方法、一种思想？

LTI系统的特性

$$e^{j\omega t} \xrightarrow{s=jw} H(j\omega)e^{j\omega t}$$

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j\omega\tau}d\tau$$

连续时间傅里叶级数和傅里叶变换

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(2\pi/T)t}dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\frac{2\pi}{T})e^{jk(2\pi/T)t}$$

$$H(jk\frac{2\pi}{T}) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-jk(2\pi/T)\tau}d\tau$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$e^{j\omega n} \xrightarrow{z=e^{j\omega}} H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

离散时间傅里叶级数和傅里叶变换

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$y[n]=\sum_{k=<N>} a_k H(e^{jk\frac{2\pi}{N}})e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$H(e^{jk\frac{2\pi}{N}})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$y[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

连续时间傅里叶变换的定义

$$\lim_{T_0\to\infty} T_0 a_k = \lim_{T_0\to\infty,\, f_0\to 0} \frac{a_k}{f_0}$$

$$\triangleq X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} X(jk\omega_0)$$

周期信号

傅里叶级数

非周期信号

傅立叶变换

$$e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

周期信号

傅里叶变换

离散时间傅里叶变换的定义

$$\lim_{N\to\infty} Na_k \triangleq X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} X\left(e^{jk\omega_0}\right)$$

周期信号
傅里叶级数

非周期信号
傅立叶变换

$$e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{F} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-\omega_0-2k\pi)$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - k\omega_0\right)$$

周期信号
傅里叶变换

离散时间傅里叶分析

- 周期信号的傅里叶级数表示
  离散时间傅里叶变换
  傅里叶级数与傅里叶变换的关系

- 离散时间傅里叶变换的收敛条件
- 周期信号的傅里叶变换

- 常用周期信号的傅里叶级数
- 常用信号的傅里叶变换

- 傅里叶级数、傅里叶变换的性质
- 离散时间系统的频域分析

第1讲

从离散时间周期信号的傅里叶级数表示到离散时间傅里叶变换

从离散时间周期信号的傅里叶级数表示到离散时间傅里叶变换

- 离散时间周期信号的傅里叶级数表示
- 离散时间傅里叶变换
- 离散时间傅里叶变换的收敛问题
- 周期信号的傅里叶变换

从离散时间周期信号的傅里叶级数表示到离散时间傅里叶变换

- 离散时间周期信号的傅里叶级数表示
- 离散时间傅里叶变换
- 离散时间傅里叶变换的收敛问题
- 周期信号的傅里叶变换

特征函数的概念

- 考查LTI系统对复指数信号 e^{st} 的响应

$$e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$ 由时域分析方法有

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)}h(\tau)d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = H(s)e^{st}$$

$$e^{j\omega t} \xrightarrow{s=jw} H(j\omega)e^{j\omega t} \qquad H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j\omega\tau}d\tau$$

- 考查LTI系统对复指数信号 z^n 的响应

$$z^n \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$ 由时域分析方法有

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = z^n\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = z^n H(z)$$

$$e^{j\omega n} \xrightarrow{z=e^{j\omega}} H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \quad H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

复习--复指数信号

信号与系统

连续时间	离散时间
$x(t)=ce^{at}\quad c=\lvert c\rvert e^{j\theta}\quad a=r+j\omega_0$	$x[n]=ce^{\beta n}\xrightarrow{e^{\beta}=\alpha}c\alpha^n\quad c=\lvert c\rvert e^{j\theta}\quad \alpha=\lvert\alpha\rvert e^{j\omega_0}$
$x(t)=e^{j\omega_0 t}\quad c=1\quad r=0$ 周期 $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$	$x[n]=e^{jn\omega_0}\quad c=1\quad \lvert\alpha\rvert=1$ 当且仅当 $\omega_0=\frac{2\pi}{N}m$ 周期 $N_0=\frac{N}{\gcd(N,m)}$
$x(t)=\phi_k(t)=e^{jk\omega_0 t}\quad k=0,\pm1,\cdots$ 基波周期 $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$ 无穷多个信号 基波频率 ω_0	$x[n]=\phi_k[n]=e^{jk\omega_0 n}\quad \omega_0=\frac{2\pi}{N}$ $\phi_{k+N}[n]=\phi_k[n]\quad k=0,1,\cdots,N-1$ 基波周期:N(最长的最小正周期)
$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)$ ω_0 越大 频率越高 三要素 $\begin{cases}A\\ \omega_0 & \omega_0=2\pi f_0,\ \text{弧度/秒}\\ \theta & \text{弧度}\end{cases}$	$x[n]=A\cos[\omega_0 n+\theta]$ 0 低频 π 高频 三要素 $\begin{cases}A\\ \omega_0 & \omega_0=2\pi f_0,\ \text{弧度}\\ \theta & \text{弧度}\end{cases}$

什么是离散时间傅里叶级数（DFS）
Discrete-Time Fourier Series

成谐波关系的复指数信号集：$\Phi_k(n)=\{e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\}$

该信号集中每一个信号都以 N 为周期，且该集合中只有 N 个信号是彼此独立的。

将这 N 个独立的信号线性组合起来，一定能表示一个以 N 为周期的序列。即：

$$\boxed{x(n)=\sum_{k=<N>}a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

其中 k 为 N 个相连的整数

这个级数就称为离散时间傅里叶级数（**DFS**），

其中 a_k 也称为周期信号 $x(n)$ 的频谱。

傅里叶级数系数的确定

给 $x(n)=\sum_{k=<N>} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ 两边同乘以 $e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$，得：

$$x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}=\sum_{k=<N>} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$

显然 $x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$ 仍是以 N为周期的，对两边求和

$$\sum_{n=<N>} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}=\sum_{n=<N>}\sum_{k=<N>} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}=\sum_{k=<N>} a_k \sum_{n=<N>} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$

而 $\sum_{n=<N>} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}=\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}=\dfrac{1-e^{j(k-r)\cdot 2\pi}}{1-e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}}}=\begin{cases}0, & k\neq r\\ N, & k=r\end{cases}$

$\therefore \sum_{n=<N>} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}=Na_r$ 即 $a_r=\dfrac{1}{N}\sum_{n=<N>} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$

$$\boxed{a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

显然上式满足 $a_{k+N} = a_k$，即 a_k 也是以 N 为周期的，或者说 a_k 中只有 N 个是独立的。

周期序列的频谱也具有离散性、周期性、谐波性

对实信号同样有： $a_k^* = a_{-k}$

$$|a_k| = |a_{-k}| \qquad \measuredangle a_k = -\measuredangle a_{-k}$$

$$\mathrm{Re}[a_k] = \mathrm{Re}[a_{-k}] \qquad \mathrm{Im}[a_k] = -\mathrm{Im}[a_{-k}]$$

助学例题1

考虑信号 $x[n] = \sin \omega_0 n$

其中 $\omega_0 = \dfrac{2\pi m}{N}$，$\dfrac{m}{N}$ 为既约分数

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j\left(\frac{2\pi m}{N}\right)n} - \frac{1}{2j} e^{-j\left(\frac{2\pi m}{N}\right)n}$$

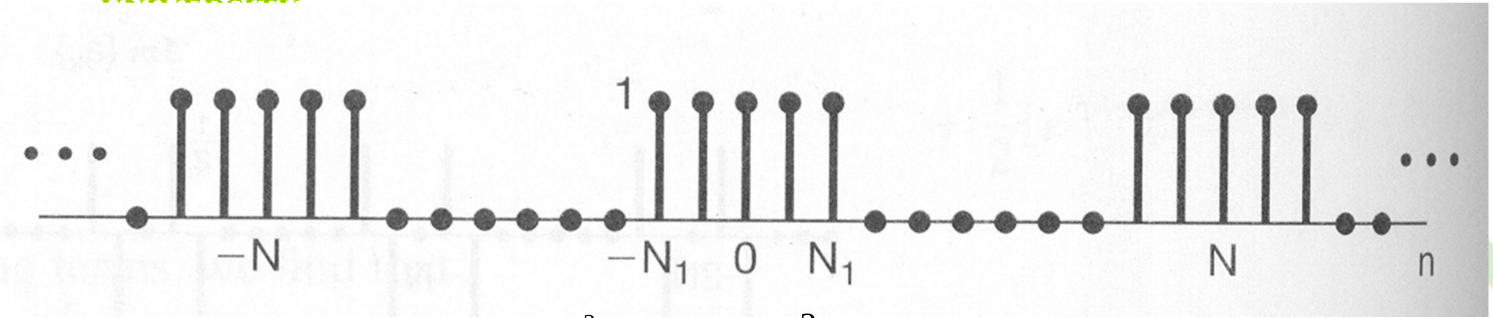
$$a_m = \frac{1}{2j} \qquad a_{-m} = -\frac{1}{2j}$$

$$N_0 = \frac{N}{\gcd(N, m)}$$

周期为 N

基波频率为 $\dfrac{2\pi}{N}$

例2—周期性方波序列的频谱（1/2）



$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1}e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{1}{N}\,\frac{e^{j\frac{2\pi}{N}kN_1}-e^{-j\frac{2\pi}{N}(N_1+1)k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$k\neq 0,\pm N,\pm 2N,\cdots$

请不要忽略

$$=\frac{1}{N}\,\frac{e^{-j\frac{\pi}{N}k}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}k(N_1+\frac{1}{2})}-e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N_1+\frac{1}{2})}\right]}{e^{-j\frac{\pi}{N}k}\left[e^{j\frac{\pi}{N}k}-e^{-j\frac{\pi}{N}k}\right]}=\frac{1}{N}\,\frac{\sin\frac{\pi}{N}k(2N_1+1)}{\sin\frac{\pi}{N}k}$$

$$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\qquad q\neq 1$$

$k=rN$ 时 $a_k=\dfrac{2N_1+1}{N}$

显然 a_k 的包络具有 $\dfrac{\sin\beta x}{\sin x}$ 的形状

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

信号与系统

周期性方波序列的频谱(2/2)

$$a_k = \frac{1}{N}\frac{\sin\frac{\pi}{N}k(2N_1+1)}{\sin\frac{\pi}{N}k} \qquad a_N = \frac{2N_1+1}{N}$$

$N_1 = 2$

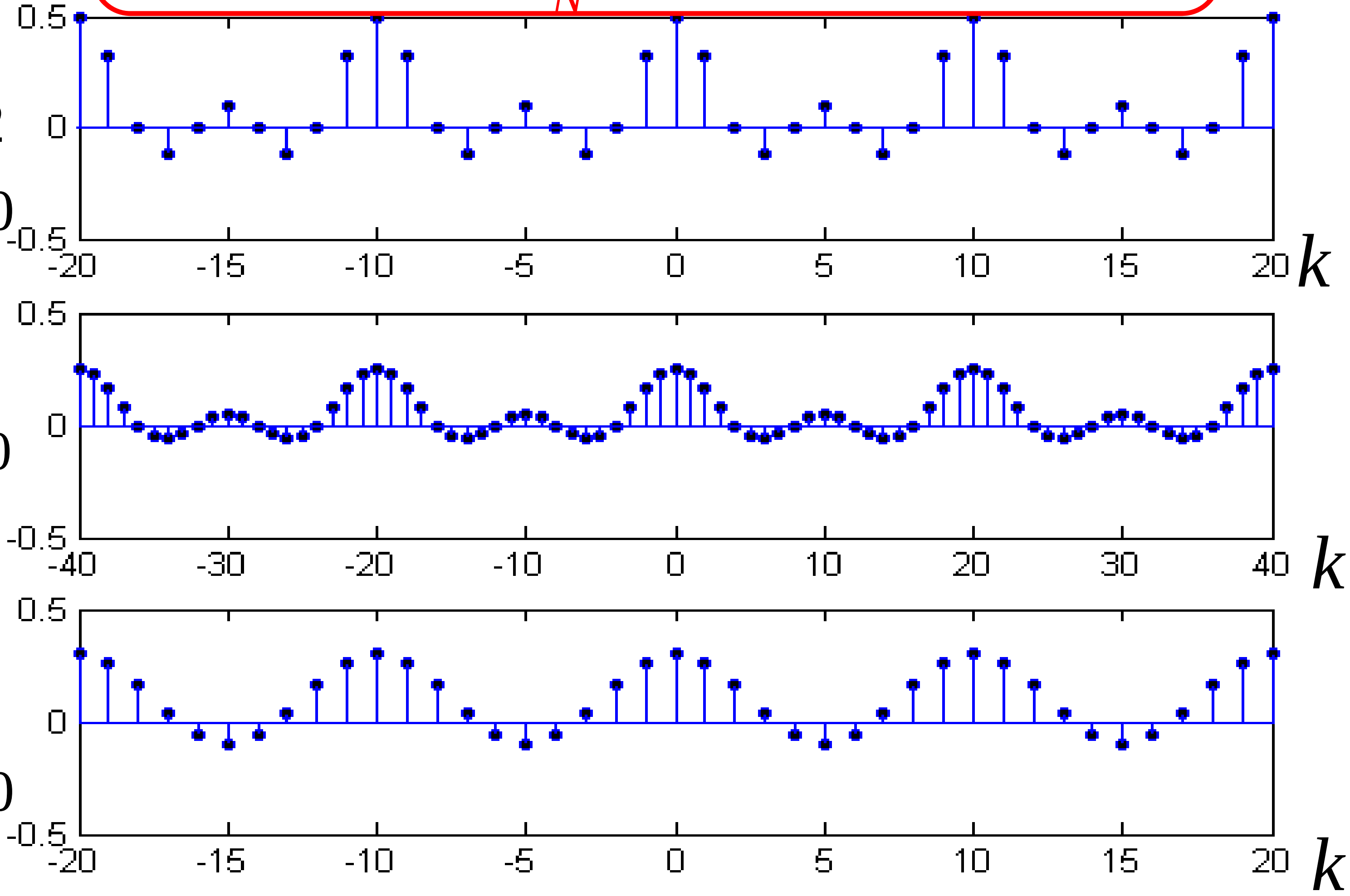
$N = 10$

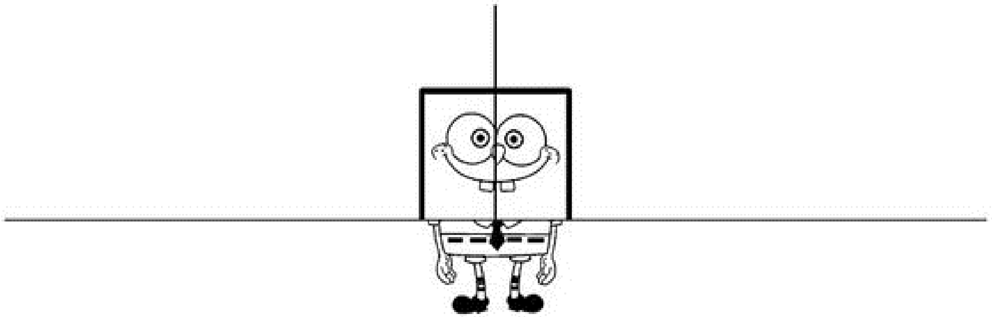
$N_1 = 2$

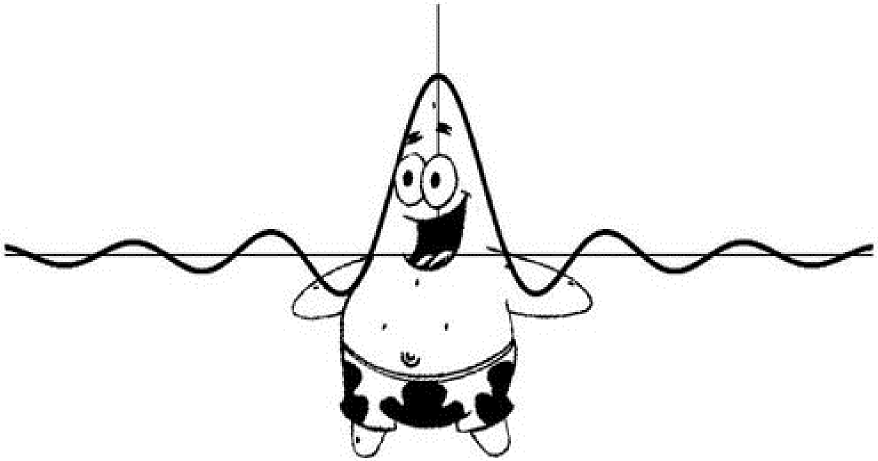
$N = 20$

$N_1 = 1$

$N = 10$







$$a_k = \frac{1}{N}\frac{\sin\frac{\pi}{N}k(2N_1+1)}{\sin\frac{\pi}{N}k} \qquad a_N = \frac{2N_1+1}{N}$$

◆当 N_1 改变、N 不变时，由于 a_k 的包络具有 $\dfrac{\sin\beta x}{\sin x}$ 的形状，而 $\beta=2N_1+1$ ，可知其包络形状一定发生变化。当 $N_1\downarrow$ 时，包络的第一个零点会远离原点从而使频谱主瓣变宽。这一点也与连续时间周期矩形脉冲的情况类似。

◆当 N_1 不变、$N\uparrow$ 时，频谱的包络形状不变，只是幅度减小，谱线间隔变小。

周期序列的频谱也具有离散性、谐波性，当在区间 $-\pi \sim \pi$ 考查时，也具有收敛性。不同的是，离散时间周期信号的频谱具有周期性。

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

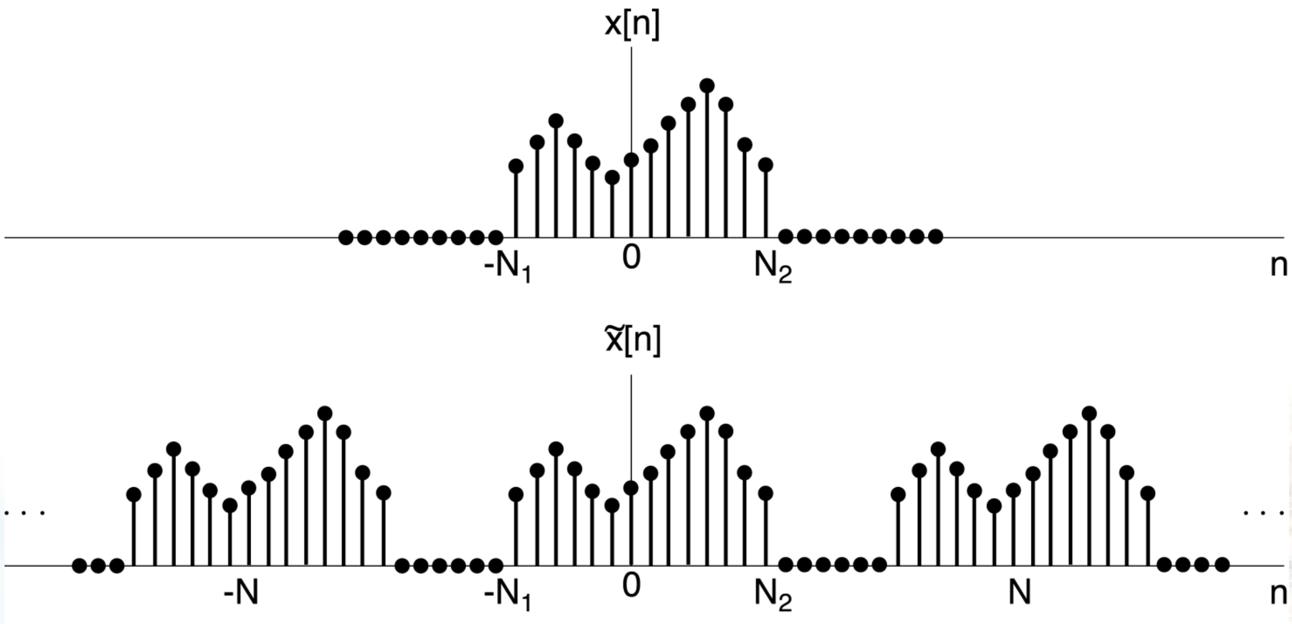
$$a_k = a_{k+N}$$

离散时间傅里叶级数

离散时间傅里叶变换

非周期信号的表示:DTFT

从DFS到DTFT



在讨论离散时间周期性矩形脉冲信号的频谱时，我们看到：当信号周期N增大时，频谱的包络形状不变，幅度减小，而频谱的谱线变密.

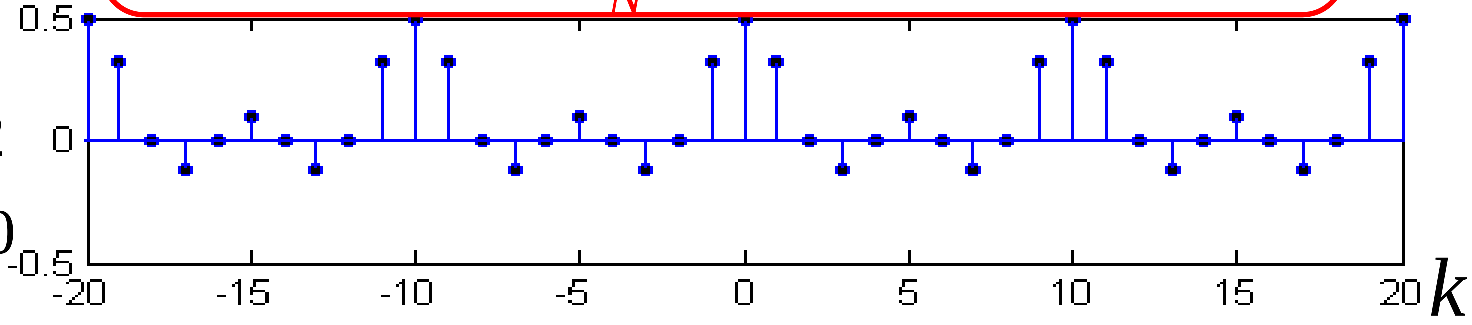
当$N\to\infty$时，有$\omega_0=(2\pi/N)\to 0$，而从时域看，当周期信号的周期$N\to\infty$时，就变成了一个非周期的有限长序列. 可以预见，对一个非周期的有限长序列，它的频谱应该是一个连续的频谱.

周期性方波序列的频谱(2/2)

$$a_k = \frac{1}{N}\frac{\sin\frac{\pi}{N}k(2N_1+1)}{\sin\frac{\pi}{N}k} \qquad a_N = \frac{2N_1+1}{N}$$

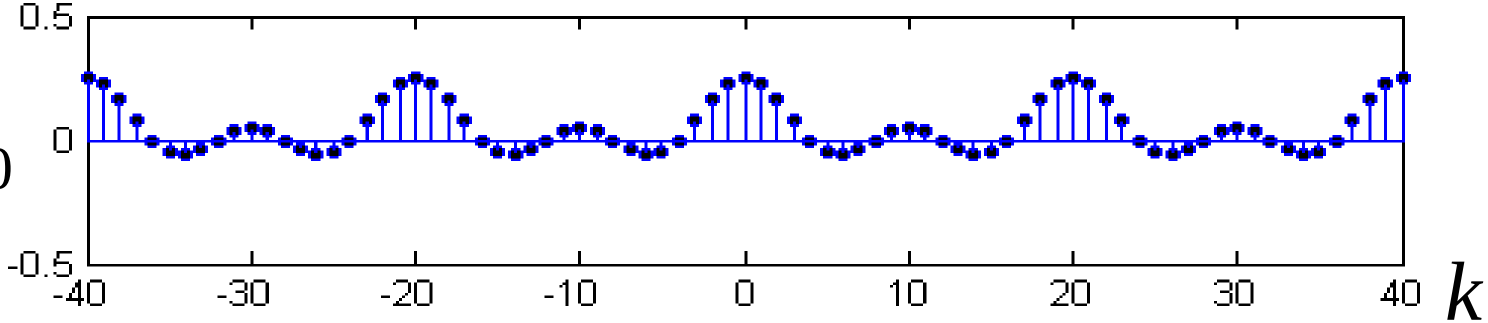
$N_1 = 2$

$N = 10$



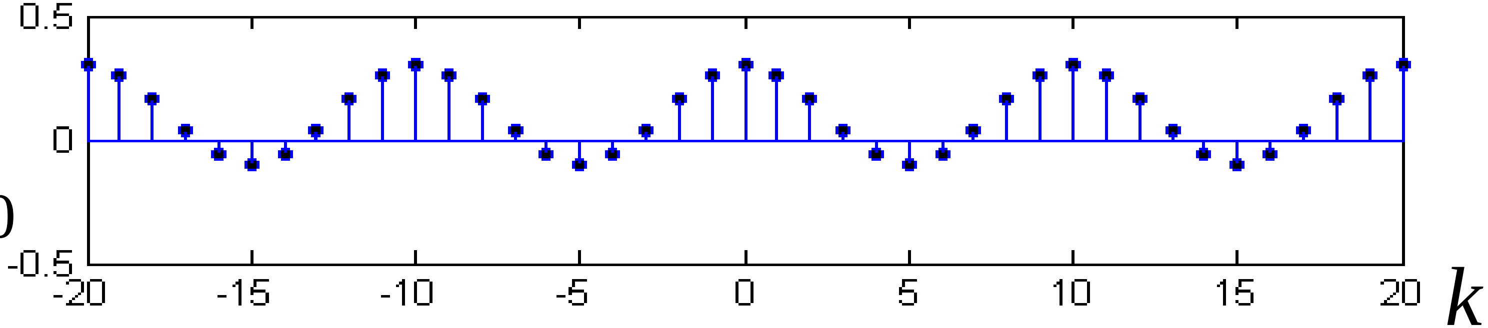
$N_1 = 2$

$N = 20$



$N_1 = 1$

$N = 10$



非周期信号的DTFT

对周期信号 $\tilde{x}(n)$ 由DFS有

$$\tilde{x}(n)=\sum_{k=<N>} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

即 $a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=-N/2}^{N/2}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

当$N\to\infty$ 时 ,$\frac{2\pi}{N}k\to\omega$, 令 $\lim_{N\to\infty} Na_k \stackrel{\Delta}{=} X(e^{j\omega})$

有 $\boxed{X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n} \text{——} DTFT}$

说明:显然 $X(e^{j\omega})$ 对 ω 是以 2π 为周期的.

比较

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

非周期信号的傅里叶反变换

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_0}) \cdot e^{jk\omega_0 n}, \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_0}) \cdot e^{jk\omega_0 n} \cdot \omega_0$$

当 $N \to \infty$ 时，$\tilde{x}(n) \to x(n), k\omega_0 \to \omega, \omega_0 \to d\omega, \sum \to \int$,

当 k 在一个周期范围内变化时，$k\omega_0$ 在 2π 范围变化，

所以积分区间是 2π

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

离散时间序列可以分解为频率在2π区间上分布的、幅度为$\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})d\omega$的复指数分量的线性组合

傅立叶变换

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

傅立叶反变换

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

离散时间傅里叶级数

综合公式： $$x[n] = \sum_{k=(N)} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

分析公式： $$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=(N)} x(n) e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

从DFS到DTFT

分析公式： $a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x(n)e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$

$N \to \infty$

$\frac{1}{N} \to 0$

$$\lim_{N\to\infty} Na_k \stackrel{\Delta}{=} X(e^{j\omega})$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

综合公式： $x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$

$N \to \infty, \frac{2\pi}{N} \to d\omega$

$k\omega_0 \to \omega, \sum \to \int$

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

离散时间傅里叶变换

$$X\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)$$

离散时间傅里叶变换

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

离散时间傅里叶反变换

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

常用信号的离散时间傅里叶变换

助学例题3（1）

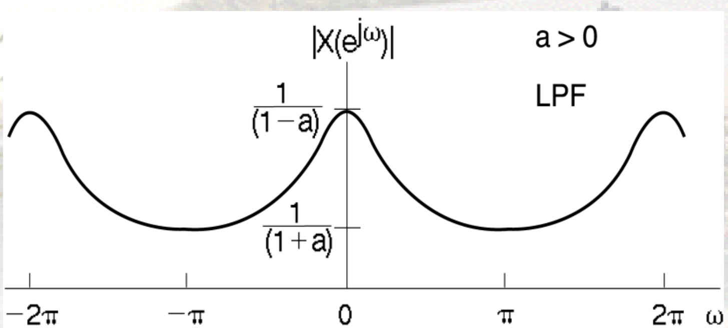
$$x[n]=\alpha^n u[n] \qquad |\alpha|<1$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha^n u[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha e^{-j\omega})^n=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

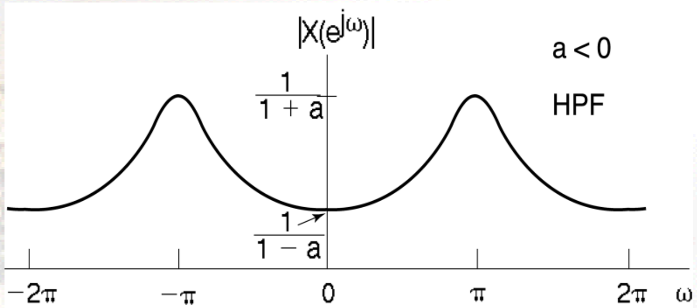
$$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad q\neq 1$$

通常 $X(e^{j\omega})$是复函数，它的模和相位为：

$$|X(e^{j\omega})|=\frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}},\angle X(e^{j\omega})=-tg^{-1}\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}$$



低通特性



高通特性

助学例题3（2）

$$\mathrm{sgn}(n)=\begin{cases}1 & n>0\\ 0 & n=0\\ -1 & n<0\end{cases}$$ 实、奇

$$\mathrm{sgn}[n]=\lim_{a\to 1} a^n u[n]-a^{-n}u[-n] \quad 0<a<1$$

$$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}-\frac{1}{1-ae^{j\omega}}=\frac{-j2a\sin\omega}{(1+a^2)-2a\cos\omega}$$

$$X(e^{j\omega})=\frac{-j\sin\omega}{1-\cos\omega}$$ 纯虚、奇

结论:　实奇信号 ⟷ 虚奇函数

助学例题4

$$x[n]=\alpha^{|n|} \qquad |\alpha|<1$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha^{|n|}e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^{n}e^{-j\omega n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\alpha^{-n}e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^{n}e^{-j\omega n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha^{n}e^{j\omega n}$$

$$=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}+\frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}}$$

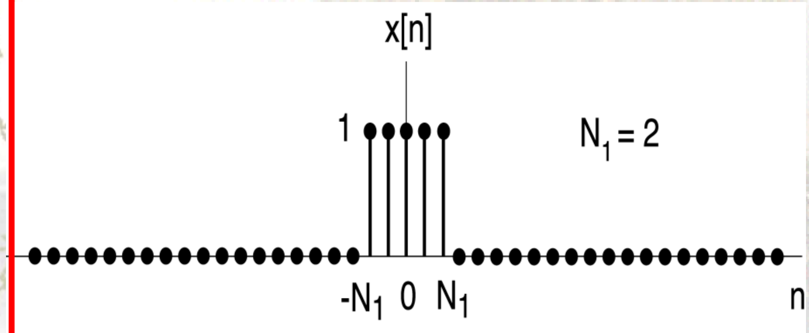
$$=\frac{1-a^{2}}{1+a^{2}-2a\cos\omega}$$

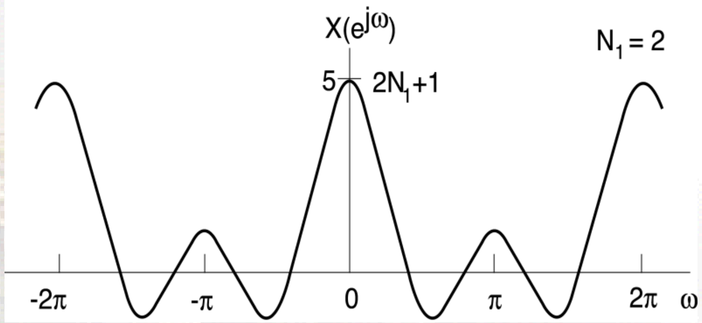
$$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \qquad q\neq 1$$

助学例题5

矩形脉冲: $x[n]=\begin{cases}1, & |n|\le N_1\\ 0, & |n|>N_1\end{cases}$

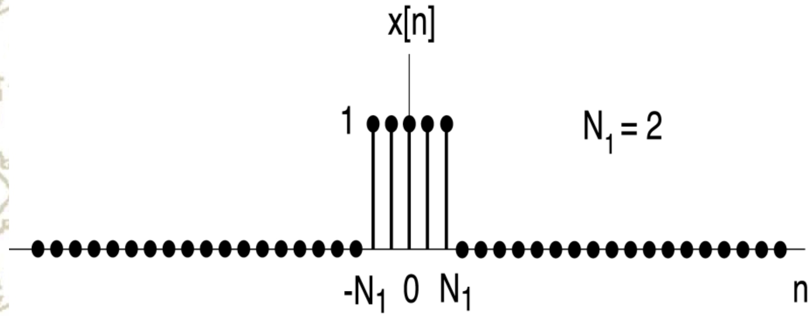
$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-N_1}^{N_1}e^{-j\omega n}=\frac{\sin(2N_1+1)\dfrac{\omega}{2}}{\sin\dfrac{\omega}{2}}$$





有同样的结论:实偶信号 ⟷ 实偶函数

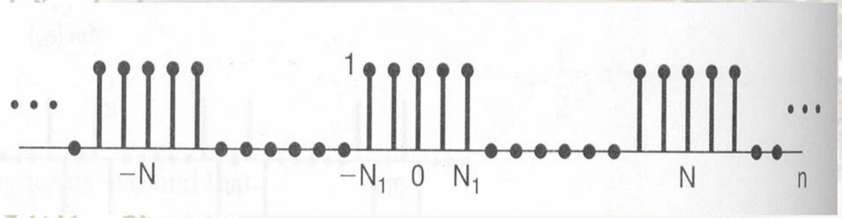
助学例题5-2对比



$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\sin\left(2N_1+1\right)\dfrac{\omega}{2}}{\sin\left(\omega/2\right)}$$

$$a_k=\left.\frac{X\left(e^{j\omega}\right)}{N}\right|_{\omega=k\frac{2\pi}{N}}$$

$$\lim_{N\to\infty}Na_k\overset{\Delta}{=}X\left(e^{j\omega}\right)$$



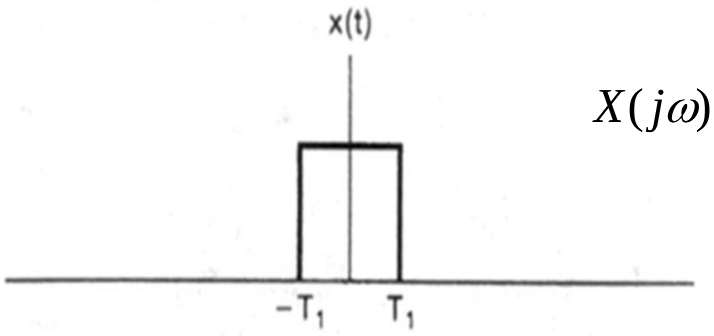
$k\neq 0,\pm N,\pm 2N,\cdots$

$$a_k=\frac{1}{N}\frac{\sin\left[\left(2N_1+1\right)k\pi/N\right]}{\sin\left(k\pi/N\right)}$$

$k=0,\pm N,\pm 2N,\cdots \quad a_k=\dfrac{2N_1+1}{N}$

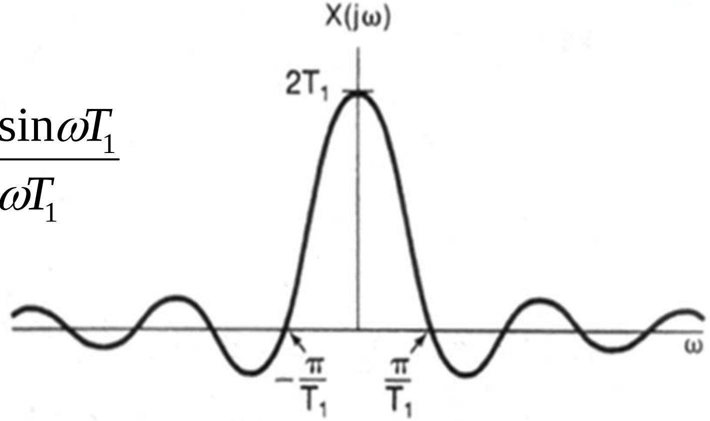
时域周期化 ⟷ 频域离散化

DTFT与对应的CTFT比较



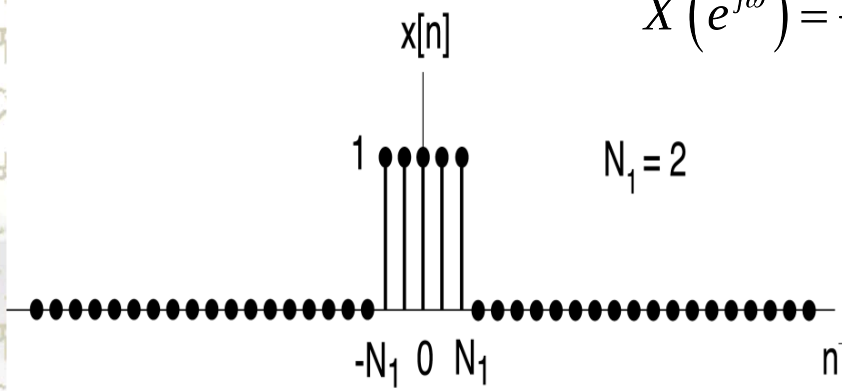
(a)

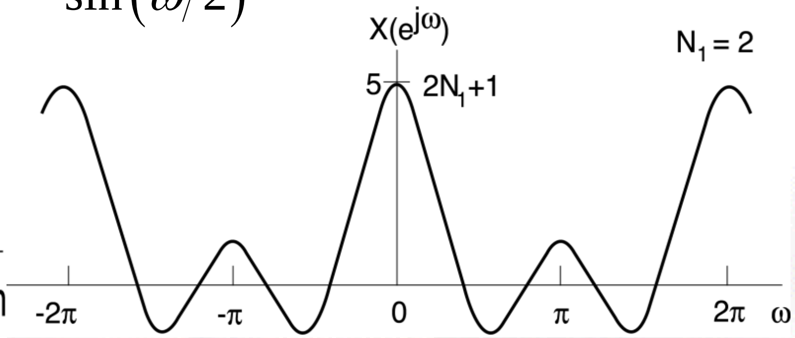
$$X(j\omega)=\frac{2T_1\sin\omega T_1}{\omega T_1}$$



(b)

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\sin\left(2N_1+1\right)\frac{\omega}{2}}{\sin\left(\omega/2\right)}$$





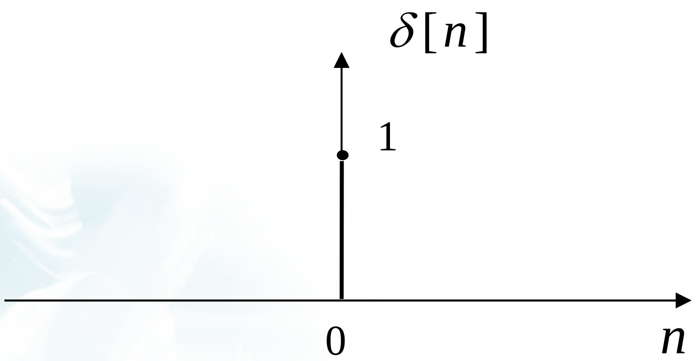
时域离散化 ⟷ 频域周期化

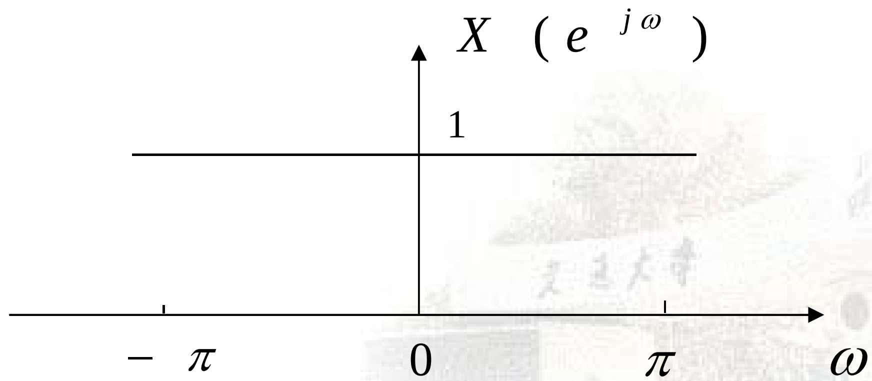
常用离散时间傅里叶变换对

$$x[n] = \delta[n]$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = 1$$

如图所示：

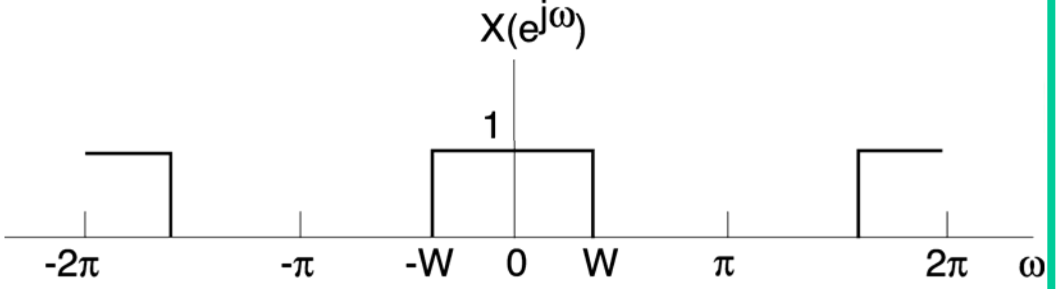




常用离散时间傅里叶变换对

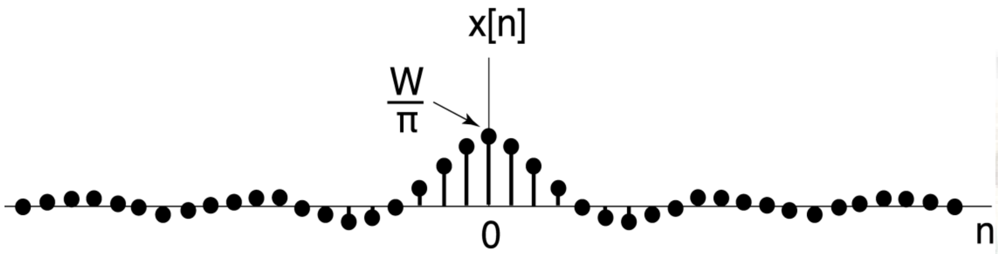
理想低通滤波器

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & W < |\omega| < \pi \end{cases}$$



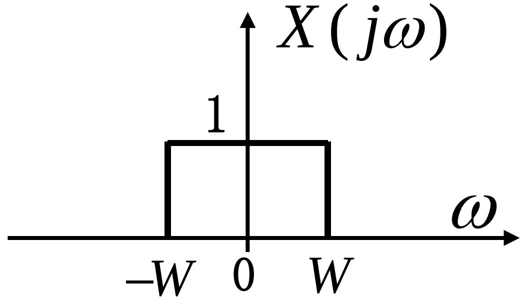
$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega$$

$$\Rightarrow x[n] = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$

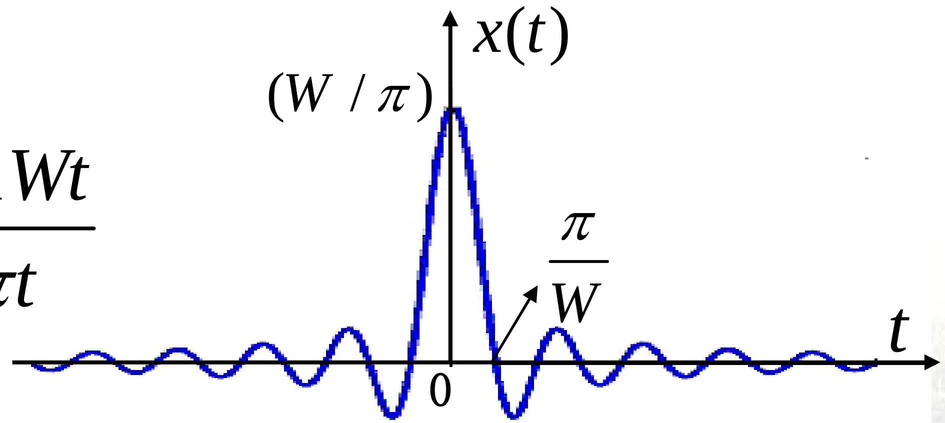


连续时间信号的理想低通滤波器

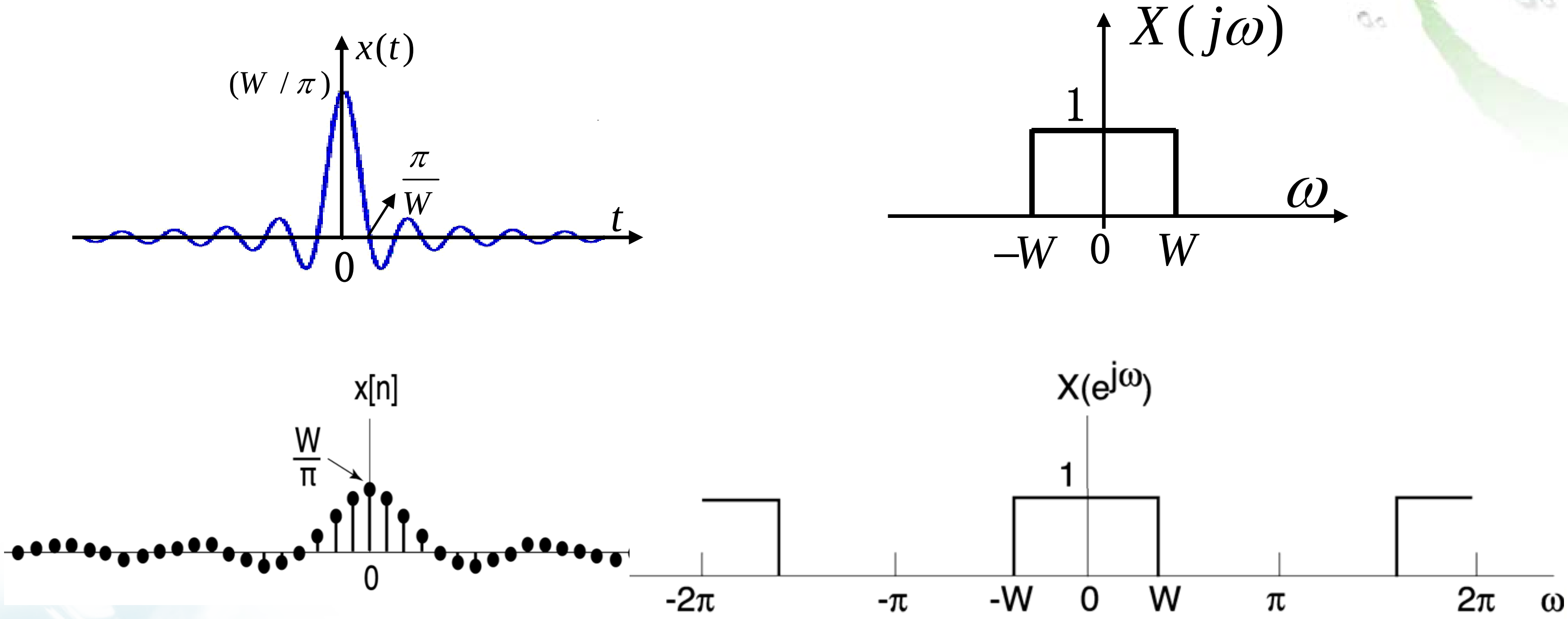
$$X(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<W \\ 0, & |\omega|>W\end{cases}$$



$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W}e^{j\omega t}d\omega=\frac{\sin Wt}{\pi t}$$



DTFT与对应的CTFT比较



时域离散化 ⟷ 频域周期化

离散时间傅里叶级数不存在收敛问题

离散时间傅里叶变换的收敛问题

$$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x(n)e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

DFS的收敛

DFS 是一个有限项的级数，确定 a_k 的关系式也是有限项的和式，因而不存在收敛问题，也不会产生**Gibbs** 现象。

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

信号与系统

DTFT的收敛问题

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

当序列是无限长序列时，由于 $X(e^{j\omega})$ 表达式是无穷项级数，当然会存在收敛问题.

?? $x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$ $x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$

收敛条件有两组：

1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|<\infty$，则级数以均方误差最小准则收敛于 $X(e^{j\omega})$

2. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2<\infty$，则 $X(e^{j\omega})$存在，且级数一致收敛于 $X(e^{j\omega})$

离散时间傅里叶变换

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}\Rightarrow\begin{cases}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x[n]\right|<\infty\\\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x[n]\right|^{2}<\infty\end{cases}$$

存在吉伯斯现象

不存在吉伯斯现象

离散时间傅里叶级数　离散时间傅里叶综合公式

$$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}x(n)e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

离散时间周期信号的傅里叶变换

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

信号与系统

周期信号的DTFT

对连续时间信号，有 $2\pi\delta(\omega-\omega_0)\xrightarrow{F^{-1}}e^{j\omega_0 t}$，由此推断对离散时间信号或许有相似的情况. 但由于DTFT一定是以 2π 为周期的，因此，频域的冲激应该是周期性的冲激串：$\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)$

对其作反变换有

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\int_{-\pi}^{\pi}\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega n}d\omega=e^{j\omega_0 n}$$

$$e^{j\omega_0 n}\leftrightarrow\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)$$

离散时间周期信号的傅里叶变换

$$\tilde{x}[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\omega_0 n},\omega_0=\frac{2\pi}{N}\qquad e^{j\omega_0 n}\leftrightarrow\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)$$

$$\tilde{x}(n)\leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$=\sum_{k=<N>}a_k\sum_{l=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-k\omega_0-2\pi l)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{k=<N>}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0-2\pi l)$$

$$=\cdots+\sum_{k=<N>}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)+\sum_{k=<N>}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0-2\pi)+\sum_{k=<N>}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0-4\pi)+\cdots$$

$$=\cdots+\sum_{k=0}^{N-1}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)+\sum_{k=0}^{N-1}2\pi a_k\delta[\omega-\omega_0(k+N)]+\sum_{k=0}^{N-1}2\pi a_k\delta[\omega-k\omega_0(k+2N)]+\cdots$$

$$=\cdots+\sum_{k=0}^{N-1}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)+\sum_{k=N}^{2N-1}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)+\sum_{k=2N}^{3N-1}2\pi a_k\delta(\omega-k\omega_0)+\cdots$$

$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(\omega-k\omega_0)$$

$$\boxed{X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\delta\left(\omega-k\omega_0\right)}$$

与连续时间傅立叶变换中的形式是完全一致的

周期信号的傅里叶变换

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

??? $e^{j\omega_0 n} \xleftarrow{F^{-1}} 2\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right)$ ×

$$X\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)$$

$$\boxed{e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\omega_0+2k\pi\right)}$$

$$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}, \quad \omega_0=\frac{2\pi}{N}$$

时域离散化 ⟷ 频域周期化

周期信号的傅里叶变换

$$e^{j\omega_0 n} \xrightarrow{F} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2k\pi)$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_1 \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N} - 2\pi l_1\right) + \cdots$$

$$+ \sum_{l_N=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_N \delta\left(\omega - N\frac{2\pi}{N} - 2\pi l_N\right)$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

常用离散时间傅里叶变换对

$$x(n)=\cos\omega_0 n=\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}\right),$$

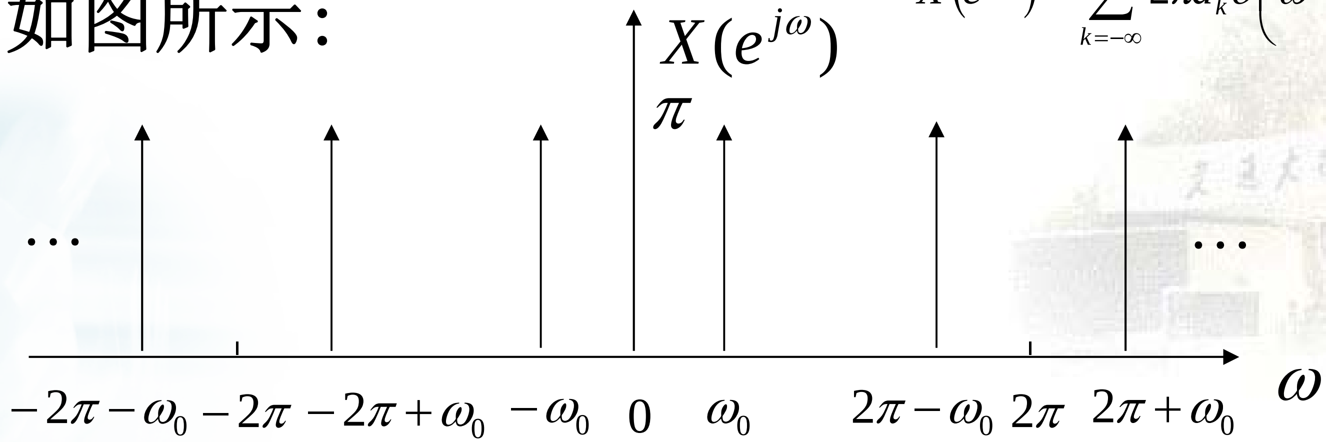
不一定是周期的, 当$\omega_0=\dfrac{2\pi}{N}k$时是周期的

$$X(e^{j\omega})=\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)+\delta(\omega+\omega_0-2\pi k)\right]$$

$$e^{j\omega_0 n}\xrightarrow{F}2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\omega_0-2k\pi\right)$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$$

如图所示:



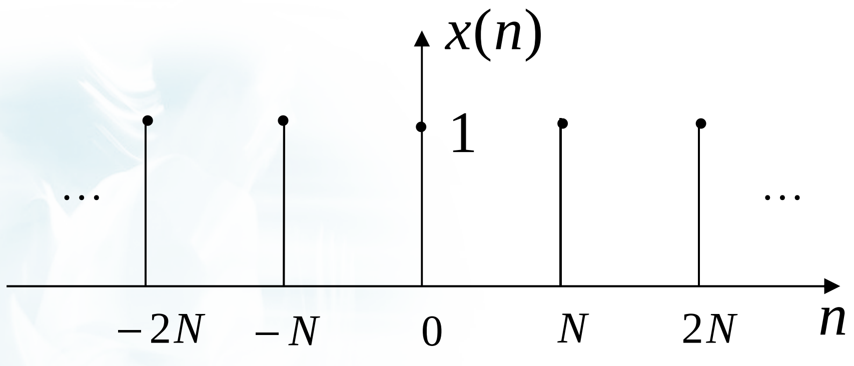
常用离散时间傅里叶变换对

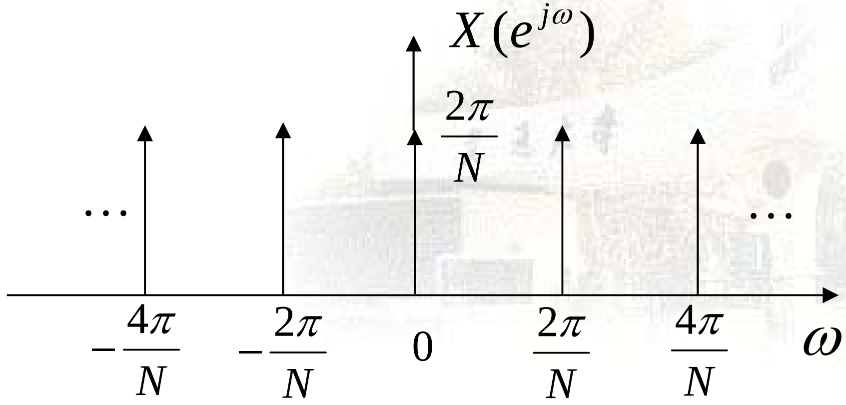
$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kN)---\quad \text{均匀脉冲串}$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x(n)e^{-jk\omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\delta(n)e^{-jk\omega_0 n}=\frac{1}{N}$$

$$X(e^{j\omega})=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

比较:与连续时间情况下对应的一致.





常用离散时间傅里叶变换对

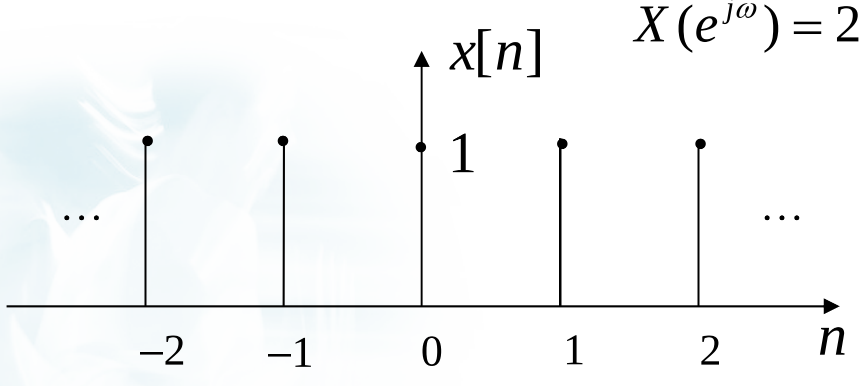
$$x[n]=1$$ 特殊的脉冲串

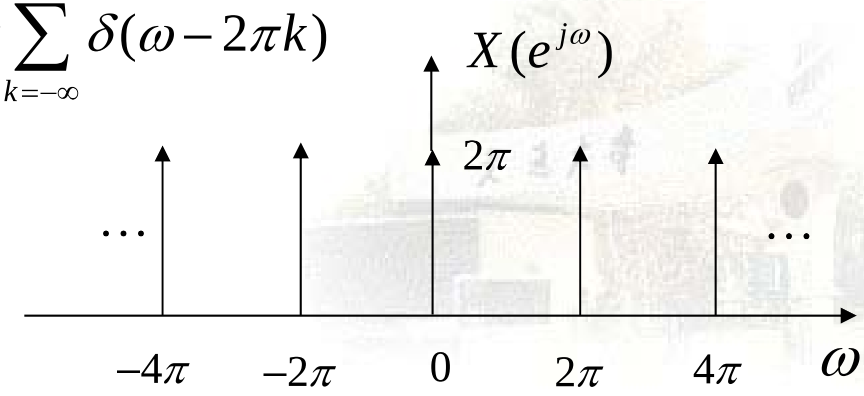
$$X(e^{j\omega})=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

when $N=1,\quad a_k=1,\qquad X(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$

$$x[n]=\delta[n]\xrightarrow{F}X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}=1$$

$$X(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$





单位阶跃信号的频谱

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$u[n] = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{sgn}[n] + \delta[n]) \longleftrightarrow$$

$$U(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k) + \frac{-j\sin\omega}{1-\cos\omega} + 1]$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \frac{-j\sin\omega}{1-\cos\omega}) + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1-e^{j\omega}}{1-\cos\omega}) + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

单位阶跃信号的频谱

$$u(t) \leftrightarrow U(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$u(n) \leftrightarrow U(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

时域离散化 ⟷ 频域周期化

说明：可以看出DTFT中$(1-e^{-j\omega})$相当于CTFT中的 $j\omega$

离散时间傅里叶变换的定义

$$\lim_{N\to\infty} Na_k \triangleq X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$a_k=\frac{1}{N}X\left(e^{jk\omega_0}\right)$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$ 周期信号

$$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$ 傅里叶级数

非周期信号 $X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$

傅立叶变换 $x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$

$$e^{j\omega_0 n}\xrightarrow{F}2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0-2k\pi)$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\delta\left(\omega-k\omega_0\right)$$

周期信号

傅里叶变换

离散时间傅里叶分析

- 周期信号的傅里叶级数表示
  离散时间傅里叶变换
  傅里叶级数与傅里叶变换的关系

- 离散时间傅里叶变换的收敛条件
- 周期信号的傅里叶变换
- 常用周期信号的傅里叶级数
- 常用信号的傅里叶变换

- 傅里叶级数、傅里叶变换的性质
- 离散时间系统的频域分析

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

离散时间傅里叶级数的性质

P146 表4.1

DFS的性质

Properties of Discrete-Time Fourier Series

DFS 有许多性质，这里只选几个加以讨论。

1. 相乘 $x(n) \xleftrightarrow{DFS} a_k \qquad y(n) \xleftrightarrow{DFS} b_k$

$$x(n)y(n) \xleftrightarrow{DFS} c_k = \sum_{l=<N>} a_l b_{k-l}$$ 周期卷积

2. 差分 $x(n) \xleftrightarrow{DFS} a_k$

$$x(n) - x(n-n_0) \xleftrightarrow{DFS} (1-e^{-jk\omega_0 n_0})a_k$$

3. 时域内插（时域尺度变换）

$$x_m(n)=\begin{cases} x(n/m) & n=rm \\ 0 & n\neq rm \end{cases}$$

若$x(n)$ 以N为周期，

$x_m(n)$ 以mN为周期　　令 $x_m(n) \xleftrightarrow{F} h_k$

$$h_k=\frac{1}{mN}\sum_{n=<mN>} x_m(n)e^{-j\frac{2\pi}{mN}kn}$$

令 $n=rm$ ，则有

$n\in 0\sim mN$ 时 $r\in 0\sim N$

$$h_k=\frac{1}{mN}\sum_{r=<N>} x(r)e^{-j\frac{2\pi}{mN}krm}=\frac{1}{mN}\sum_{r=<N>} x(r)e^{-j\frac{2\pi}{N}kr}=\frac{1}{m}a_k$$

4. Paseval 定理

$$x(n) \xleftrightarrow{DFS} a_k$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}|x(n)|^2 = \sum_{k=<N>}|a_k|^2$$

等式左边是信号在一个周期内的平均功率，右边是信号的各次谐波的总功率。

这表明：一个周期信号的平均功率等于它的所有谐波分量的功率之和。也表明：周期信号的功率既可以由时域求得，也可以由频域求得。

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

离散时间傅里叶变换的性质

P162 表4.2

离散时间傅立叶变换的性质

DTFT也有很多与CTFT类似的性质,当然也有某些明显的差别.

通过对DTFT性质的讨论,目的在于揭示信号时域和频域特性之间的关系.

一、周期性(periodic):

若 $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, 则 $X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$

比较:这是与CTFT不同的.

二、线性(linearity):

$$ax_1(n)+bx_2(n) \leftrightarrow aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega})$$

三、时移与频移(shifiting):

若 $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$,

则 $x(n-n_0) \leftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$ $x(n)e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

四、时间反转(reflaction):

若 $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, 则 $x(-n) \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$

五、共轭对称性(symmetry properties):

若 $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, 则 $x^*(n) \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$

由此可进一步得到实信号的共轭对称性:

1 若 $x(n)$ 是实信号, 则 $x^*(n)=x(n)$

$\therefore X^*(e^{-j\omega})=X(e^{j\omega})$, 即 $X^*(e^{j\omega})=X(e^{-j\omega})$

因此: $\begin{cases}\left|X(e^{j\omega})\right|=\left|X(e^{-j\omega})\right| \\ \angle X(e^{j\omega})=-\angle X(e^{-j\omega})\end{cases}$ $\begin{cases}\mathrm{Re}\left[X(e^{j\omega})\right]=\mathrm{Re}\left[X(e^{-j\omega})\right] \\ \mathrm{Im}\left[X(e^{j\omega})\right]=-\mathrm{Im}\left[X(e^{-j\omega})\right]\end{cases}$

2 若 $x(n)$ 是实偶信号, 则 $x(n)=x(-n)$,

$x^*(n)=x(n)$ $x(-n)\leftrightarrow X(e^{j\omega})$

于是有: $X^*(e^{j\omega})=X(e^{-j\omega})=X(e^{j\omega})$

即 $X(e^{j\omega})$ 是实偶函数.

3、若 $x(n)$ 是实奇信号，则 $x(n)=-x(-n), x^*(n)=x(n)$

于是有： $X^*(e^{j\omega})=X(e^{-j\omega})=-X(e^{j\omega})$

表明 $X(e^{j\omega})$ 是虚奇函数.

4、若 $x(n)=x_e(n)+x_o(n)$，则

$x_e(n)\leftrightarrow \mathrm{Re}\left[X(e^{j\omega})\right]$　　　$x_o(n)\leftrightarrow j\,\mathrm{Im}\left[X(e^{j\omega})\right]$

说明：这些结论与连续时间情况下完全一致.

六、差分与求和(differencing and summation)：

$$x(n)-x(n-1)\leftrightarrow(1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)\leftrightarrow\frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega})+\pi X(e^{j0})\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

说明:可以看出DTFT中$(1-e^{-j\omega})$相当于CTFT中的 $j\omega$

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt}\leftrightarrow j\omega X(j\omega)\quad \int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\leftrightarrow\frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)}$$

例： $u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)$ $\delta(n)\leftrightarrow 1$

$$u(n)\leftrightarrow\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

七、 时域内插/扩展(interplation):

定义 $$x_k(n)=\begin{cases} x(n/k), & n\text{ 为 }k\text{ 的整数倍} \\ 0, & \text{其它 } n \end{cases}$$

$$X_{(k)}(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_k(n)e^{-j\omega n}=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x_k(rk)e^{-j\omega rk}$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(r)e^{-j\omega rk}=X(e^{jk\omega})$$

$$\therefore x_k(n)\leftrightarrow X(e^{jk\omega})$$

表明:信号的时域与频域存在一种相反的关系

例：求 $x(n)=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n\delta(n-2k)$ 的 $X(e^{j\omega})$

$$\delta(n)\leftrightarrow 1\Rightarrow \delta(n-2k)\leftrightarrow e^{-j2k\omega}$$

$$x(n)=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^{2k}\delta(n-2k)$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^{2k}e^{-j2k\omega}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}$$

利用时域内插性质计算

$$x[n]=z_2[n]$$

$$z_2[n]=\begin{cases} z\left[\frac{n}{2}\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^{2\tilde{k}}u[\tilde{k}], n=2\tilde{k} \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$$

$$z[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$X(e^{j\omega})=Z(e^{j2\omega})=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}$$

八、频域微分(differention in frequency):

$$nx(n) \leftrightarrow j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

九、Parseval定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega$$

$\left|X(e^{j\omega})\right|^2$ 称为 $x(n)$ 的能量谱密度函数

比较:在DFS中,有 $\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}|x(n)|^2=\sum_{k=<N>}|a_k|^2$

$|a_k|^2$ 称为周期信号的功率谱.

卷积性质(convolution)

若 $$y(n)=x(n)*h(n),$$

则 $$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}),$$

$H(e^{j\omega})$ 即是系统的频率特性.

说明:该特性提供了对LTI系统进行频域分析的理论基础. **离散时间LTI系统的频域分析法**

利用卷积性质很容易证明时域求和特性

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = x(n) * u(n)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \cdot U(e^{j\omega})$$

$$= X(e^{j\omega}) \cdot \left[\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \right]$$

$$= \frac{X(e^{j\omega})}{1-e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

相乘性质

若 $y(n)=x_1(n)\cdot x_2(n)$

则 $Y(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

$$=\frac{1}{2\pi}X_1(e^{j\omega})\otimes X_2(e^{j\omega})$$

上述卷积称为**周期卷积**.

$X_1(e^{j\omega})$ 和 $X_2(e^{j\omega})$ 都是以 2π 为周期的

利用相乘性质证明频移性质

例：$c(n)=(-1)^n$，

$$x(n)\longrightarrow \bigotimes \longrightarrow y(n)=x(n)\cdot c(n)$$

$$\uparrow c(n)$$

$$c(n)=(-1)^n=e^{j\pi n}\leftrightarrow C(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\pi-2k\pi)$$

$$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})\otimes C(e^{j\omega})$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\theta})C(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}X(e^{j\theta})\delta(\omega-\theta-\pi)d\theta=X(e^{j(\omega-\pi)})$$

（duality）

DFS与DTFT
涉及到的对偶性

DFS的对偶

离散DTFT与CFS间的对偶

一、DFS的对偶

$$x(n)=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n},\qquad a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

由于 a_k 本身也是以N 周期的序列，当然也可以将其展开成DFS形式

即：$a_k=\sum_{n=<N>}\frac{1}{N}x(-n)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ 或 $a_n=\sum_{k=<N>}\frac{1}{N}x(-k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

这表明 a_n 序列的DFS系数就是 $\frac{1}{N}x(-k)$,

即：

$$\boxed{\begin{aligned} x(n) &\xleftrightarrow{DFS} a_k \\ a_n &\xleftrightarrow{DFS} \frac{1}{N}x(-k)\end{aligned}}$$

DFS对偶性->

从时移到频移

$$x(n) \leftrightarrow a_k \qquad a_n \leftrightarrow \frac{1}{N} x(-k)$$

利用时移性质有： $$a_{n-n_0} \leftrightarrow \frac{1}{N} x(-k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}$$

由对偶性有：$$\frac{1}{N} x(-n) e^{-j\frac{2\pi}{N}Mn} \leftrightarrow \frac{1}{N} a_{-k-M}$$

$$\therefore x(-n) e^{-j\frac{2\pi}{N}Mn} \leftrightarrow a_{-k-M}$$

$$\because x(-n) \leftrightarrow a_{-k}$$

$$\therefore x(n) e^{j\frac{2\pi}{N}Mn} \leftrightarrow a_{k-M}$$ 即是频移特性

DFS对偶性->

$$x(n) \overset{DFS}{\longleftrightarrow} a_k$$

$$a_n \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N} x(-k)$$

由时域周期卷积特性到相乘特性

$$x_1(n) \otimes x_2(n) \leftrightarrow a_k \cdot b_k \cdot N$$

$$a_n \leftrightarrow \frac{1}{N} x_1(-k) \qquad b_n \leftrightarrow \frac{1}{N} x_2(-k)$$

由时域周期卷积性质：

$$a_n \otimes b_n \leftrightarrow \frac{1}{N} x_1(-k) \cdot \frac{1}{N} x_2(-k) \cdot N = \frac{1}{N} x_1(-k) \cdot x_2(-k)$$

由对偶性：

$$\frac{1}{N} x_1(-n) x_2(-n) \leftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{m=<N>} a_m b_{-k-m}$$

$$\therefore x_1(n) \cdot x_2(n) \leftrightarrow \sum_{m=<N>} a_m b_{k-m} = a_k \otimes b_k$$ 时域相乘性质

二、DTFT与CFS间的对偶

$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$ 知 $X(e^{j\omega})$是以2π为周期的连续函数

若在时域构造一个以 2π 为周期的连续时间信号$X(e^{jt})$

$$X(e^{jt})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jkt},\qquad a_k=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{jt})e^{-jkt}dt$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

比较 $x(n)$ 和 a_k 的表达式可以看出 $a_k=x(-n)$

$$\boxed{\begin{array}{c} x(n)\xleftrightarrow{DTFT}X(e^{j\omega}) \\ X(e^{jt})\xleftrightarrow{CFS}x(-k) \end{array}}$$

利用该对偶关系,可将DTFT的若干特性对偶到CFS中去;反之亦然.

从CFS的时域微分到DTFT的频域微分

$$x(n) \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$$
$$X(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x(-k)$$

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{CFS} j\frac{2\pi}{T}ka_k$$ ---CFS的时域微分特性

$\because$ 若 $x(n) \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$, 则 $X(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x(-k)$

$$\therefore \frac{d}{dt}X(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} j\frac{2\pi}{T}kx(-k) = jkx(-k), \quad (T = 2\pi)$$

$$-jnx(n) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$$ ---DTFT的频域微分特性

$$x(n) \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$$
$$X(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x(-k)$$

从CFS的卷积特性到DTFT的相乘特性

$$x_1(n) \xleftrightarrow{DTFT} X_1(e^{j\omega}) \qquad x_2(n) \xleftrightarrow{DTFT} X_2(e^{j\omega})$$

$$X_1(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x_1(-k) \qquad X_2(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x_2(-k)$$

由CFS的卷积特性 $x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow Ta_k b_k$

$$X_1(e^{jt}) \otimes X_2(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} 2\pi x_1(-k) x_2(-k), (T = 2\pi)$$

由对偶性

$$2\pi x_1(n) x_2(n) \xleftrightarrow{DTFT} X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega})$$

$$x_1(n) x_2(n) \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega})$$ DTFT的相乘特性

对偶性总结

运算的相似性

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(2\pi/T)t}dt$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

CTFT的对偶性

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$X(jt) \xleftrightarrow{F} 2\pi x(-\omega)$$

傅里叶变换 $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

傅里叶反变换 $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

DFS的对偶性

$$x(n) \xleftrightarrow{DFS} a_k$$

$$a_n \xleftrightarrow{DFS} \frac{1}{N} x(-k)$$

傅里叶级数系数 $$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

傅里叶级数 $$x(n) = \sum_{k=<N>} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

DTFT与CFS间的对偶

$$x(n) \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x(-k)$$

$$X(e^{jt})\big|_{T=2\pi}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(2\pi/T)t}dt$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Parseval定理总结

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 \qquad \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |x(n)|^2 = \sum_{k=\langle N\rangle} |a_k|^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

离散时间LTI系统的频域分析

$$e^{j\omega n} \xrightarrow{z=e^{j\omega}} H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]e^{-j\omega n}$$

频率响应

离散时间LTI系统的频域分析

周期序列

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

输入

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

系统

$$\boxed{H(e^{jk\frac{2\pi}{N}})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}}$$

输出

$$y[n]=\sum_{k=<N>}a_k H(e^{jk\frac{2\pi}{N}})e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

非周期序列

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

输入

$$\boxed{H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]e^{-j\omega n}}$$

系统

$$y[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

输出

LTI系统的本质特性是什么？

LTI系统的作用是对信号的各个谐波分量进行相应的加权处理，本身并不增加谐波分量。

例：某离散时间LTI系统，$h(n)=\alpha^n u(n),\quad -1<\alpha<1$

输入为 $x(n)=\cos(\frac{2\pi}{N}n)$**，求输出** $y(n)$。

$$x(n)=\frac{1}{2}[e^{j\frac{2\pi}{N}n}+e^{-j\frac{2\pi}{N}n}]$$

即：$a_1=a_{-1}=\frac{1}{2}$

$$H(e^{j\frac{2\pi}{N}k})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$\therefore\quad H(e^{j\frac{2\pi}{N}})=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}}}\qquad H(e^{-j\frac{2\pi}{N}})=\frac{1}{1-\alpha e^{j\frac{2\pi}{N}}}$$

$$b_k=a_k H(e^{j\frac{2\pi}{N}k})\qquad b_1=\frac{1/2}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}}}\qquad b_{-1}=\frac{1/2}{1-\alpha e^{j\frac{2\pi}{N}}}$$

$$\therefore\quad y(n)=\sum_{k=\pm1}b_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

求LCCDE表征的系统的频域响应

相当广泛而有用的一类离散时间LTI系统可以由一个线性常系数差分方程LCCDE来表征:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k)$$

对LCCDE描述的系统: $H\left(e^{j\omega}\right)$?

方法一:可以从求解$x(n)=\delta(n)$时的差分方程得到$h(n)$,进而将 $h(n)$ 变换而求得 $H(e^{j\omega})$

方法二:可以通过求出 $x(n)=e^{j\omega n}$ 时方程的解而得到 $H(e^{j\omega})$,因为 $e^{j\omega n}$是LTI系统的特征函数,此时的 $y(n)=H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$.

求LCCDE表征的系统的频域响应

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k)$$

方法三:对方程两边进行DTFT变换,可得到:

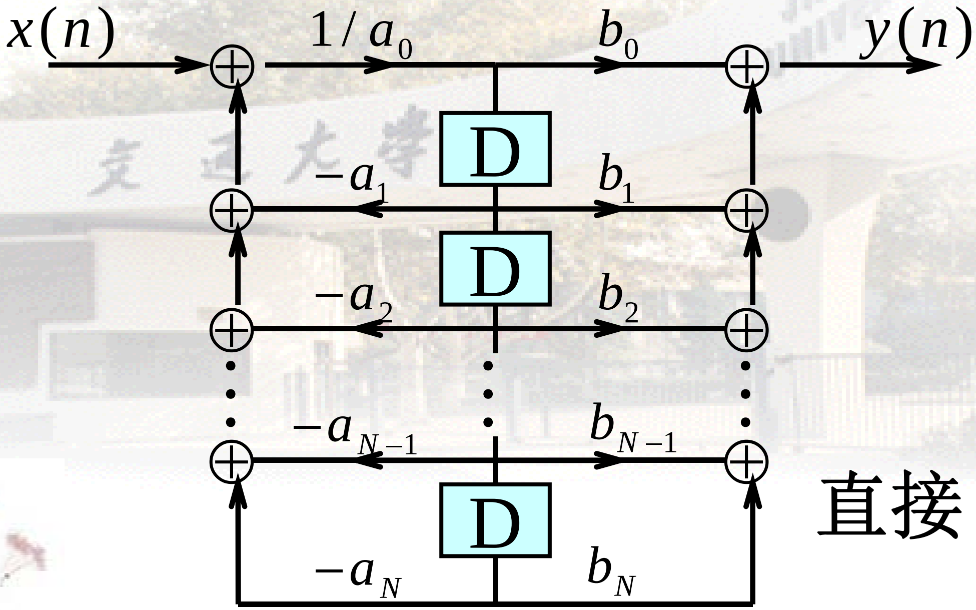
$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$$

$H(e^{j\omega})$是一个有理函数.需要得到$h(n)$时往往是从方程得到 $H(e^{j\omega})$进而通过反变换得$h(n)$

线性常系数差分方程(LCCDE)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

将其级联起来，就成为LCCDE描述的系统，它具有与差分方程完全相同的运算功能．显然，它可以看成是两个级联的系统．可以调换其级联的次序，并将移位单元合并，得到：



直接II型

＊ 系统的频域响应

$H(e^{j\omega})$刻画了LTI系统的频域表征，它是系统单位冲激响应的傅立叶变换。

但所有的 LTI系统并不一定都存在频域响应。这里我们一般有一个先决条件，即 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|h[k]|<\infty$

这说明了只要是稳定系统，就能求其频率响应。

＊ $H(e^{j\omega})$所表征的系统一般是一个稳定系统。

频域分析离散LTI系统的思路

离散时间傅里叶分析
（序列的傅里叶分析）

离散时间LTI系统输入端的分析

$$e^{j\omega n} \xrightarrow{z=e^{j\omega}} H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

计算傅里叶级数

傅里叶级数的分析公式

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

傅里叶变换

傅里叶变换的分析公式

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

求解离散时间LTI系统的特征值

$$e^{j\omega n} \xrightarrow{z=e^{j\omega}} H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

傅里叶级数表示时
LTI系统的特征值

$$H(e^{jk\frac{2\pi}{N}})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

傅里叶变换
LTI系统的特征值

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

利用复指数信号

表示离散时间LTI系统的响应

$$e^{j\omega n} \xrightarrow{z=e^{j\omega}} H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

傅里叶级数 $\Rightarrow$ $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(e^{jk\frac{2\pi}{N}})e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

傅里叶变换 $\Rightarrow$ $y[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$

$$e^{j\omega n} \xrightarrow{z=e^{j\omega}} H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]e^{-j\omega n}$$ 频率响应

离散时间LTI系统的频域分析

	周期序列	非周期序列	
输入	$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ $x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$	$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$ $x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$	输入
系统	$\boxed{H(e^{jk\frac{2\pi}{N}})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}}$	$\boxed{H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]e^{-j\omega n}}$	系统
输出	$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k H(e^{jk\frac{2\pi}{N}})e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$	$y[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$	输出

学而不思则惘

思而不学则怠

离散时间傅里叶变换的定义

$$\lim_{N\to\infty} Na_k \triangleq X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$a_k=\frac{1}{N}X\left(e^{jk\omega_0}\right)$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$ 周期信号

$$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$ 傅里叶级数

非周期信号 $$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

傅立叶变换 $$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$e^{j\omega_0 n}\xrightarrow{F}2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0-2k\pi)$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi a_k\delta\left(\omega-k\omega_0\right)$$

周期信号

傅里叶变换

$$e^{j\omega n} \xrightarrow{z=e^{j\omega}} H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$ 频率响应

离散时间LTI系统的频域分析

	周期序列	非周期序列	
输入	$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ $x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$	$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$ $x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$	输入
系统	$\boxed{H(e^{jk\frac{2\pi}{N}})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}}$	$\boxed{H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}}$	系统
输出	$y[n]=\sum_{k=<N>} a_k H(e^{jk\frac{2\pi}{N}})e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$	$y[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$	输出

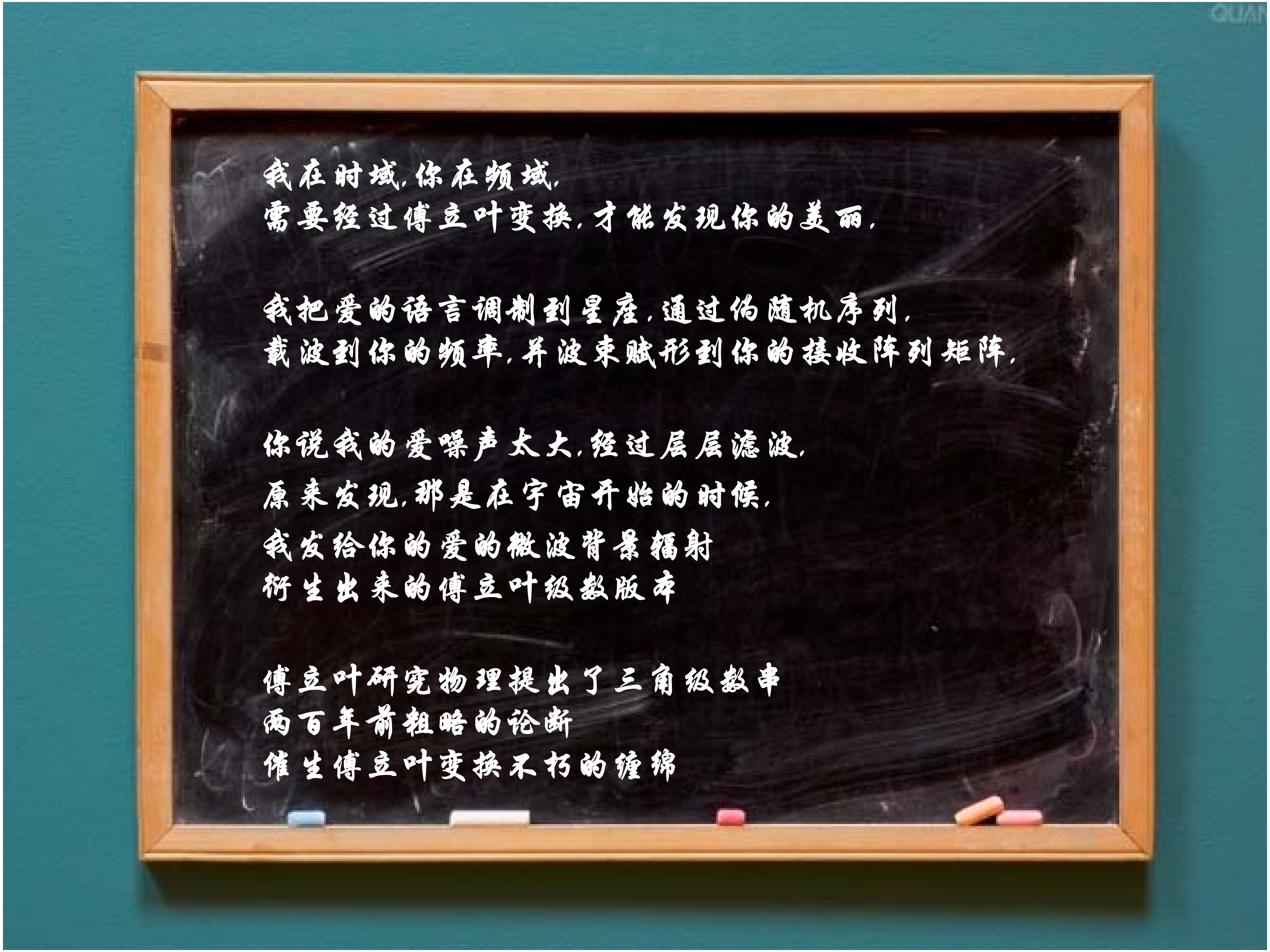
傅里叶分析法-> 信号的时频域特点

	连续时间	离散时间
级数	$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(2\pi/T)t}dt$	$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$
	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$	$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

连续 ⟷ 非周期　　离散 ⟷ 周期化

非周期 ⟷ 连续　　周期化 ⟷ 离散

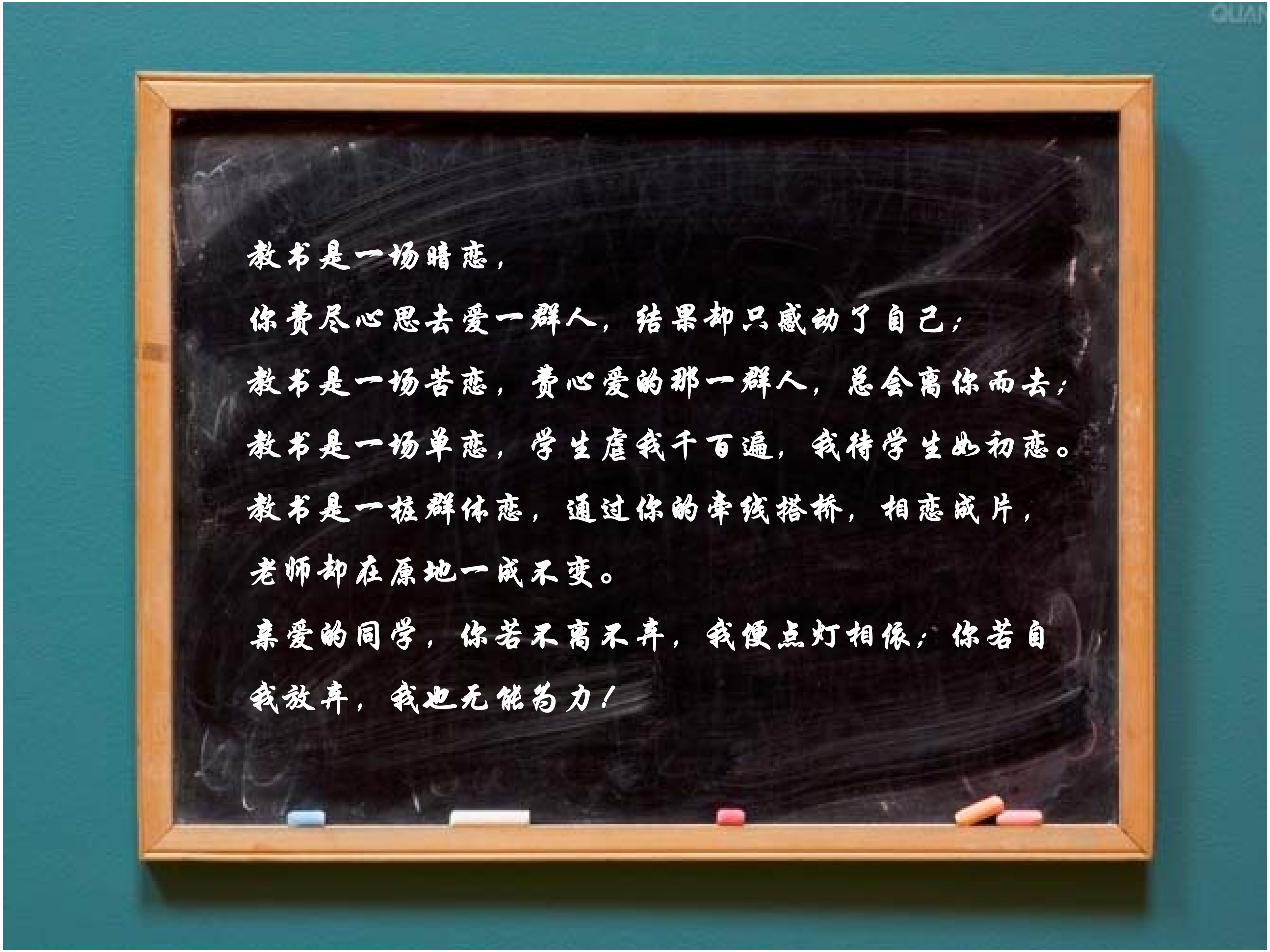
	连续时间	离散时间
变换	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$
	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$	$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$


我在时域,你在频域,
需要经过傅立叶变换,才能发现你的美丽,
我把爱的语言调制到星座,通过伪随机序列,
载波到你的频率,并波束赋形到你的接收阵列矩阵,
你说我的爱噪声太大,经过层层滤波,
原来发现,那是在宇宙开始的时候,
我发给你的爱的微波背景辐射
衍生出来的傅立叶级数版本
傅立叶研究物理提出了三角级数串
两百年前粗略的论断
催生傅立叶变换不朽的缠绵

第4章 作业

4.1 a, c, e	4.4 a, c	4.6 b, g, i
4.7 a, e	4.9	4.10
4.14 a, b, d	4.22	

业精于勤，荒于嬉


教书是一场暗恋，
你费尽心思去爱一群人，结果却只感动了自己；
教书是一场苦恋，费心爱的那一群人，总会离你而去；
教书是一场单恋，学生虐我千百遍，我待学生如初恋。
教书是一桩群体恋，通过你的牵线搭桥，相恋成片，
老师却在原地一成不变。
亲爱的同学，你若不离不弃，我便点灯相依；你若自
我放弃，我也无能为力！