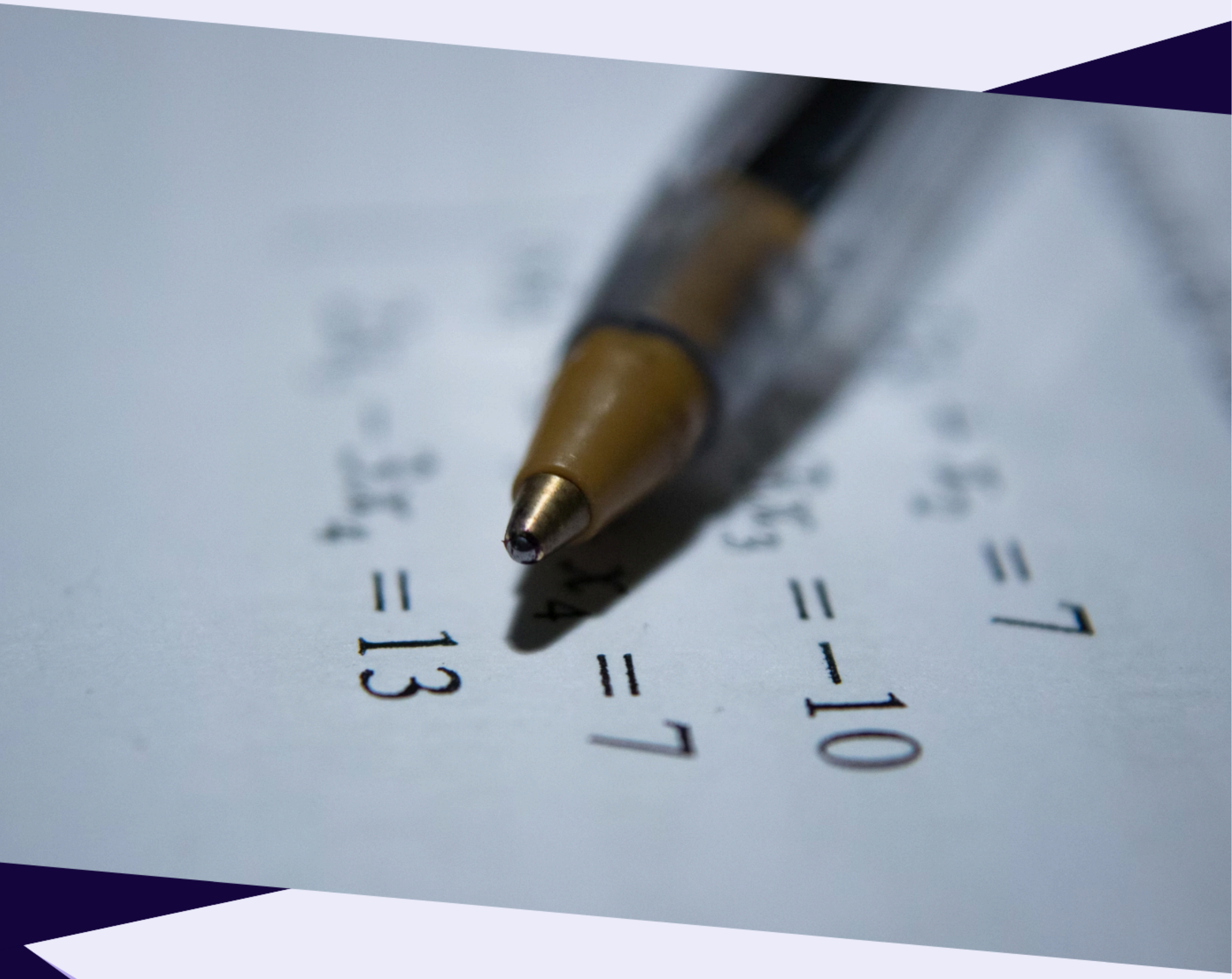
HIMPUNAN MAHASISWA TEKNIK INFORMATIKA
BINUS UNIVERSITY

BINUS UNIVERSITY

HIMTI KIT
LINEAR ALGEBRA



2024

Linear Algebra

Outline :

- Gauss Jordan Elimination
- Sistem Persamaan Linear
- Matriks
- Dot Product
- Orthogonal Projection
- Cross Product
- Plane Equation
- Eigenvalue dan Eigenvector

Gauss Jordan Elimination

Apa itu Gauss Jordan Elimination? 💻

Gauss-Jordan Elimination adalah metode yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Metode ini bekerja dengan mengubah matriks koefisien dari sistem persamaan tersebut menjadi bentuk matriks eselon baris tereduksi. Proses ini bertujuan untuk mempermudah pencarian solusi dari sistem persamaan linear dengan cara membuat matriks tersebut lebih sederhana dan terstruktur.

Secara umum, matriks eselon baris tereduksi memiliki beberapa karakteristik khusus yang mempermudah identifikasi solusi. Pertama, jika suatu baris dalam matriks memiliki elemen yang tidak nol, maka elemen pertama dari baris tersebut haruslah 1. Elemen 1 ini sering disebut sebagai elemen utama atau elemen pivot. Elemen pivot ini memainkan peran penting dalam penstrukturan matriks karena membantu dalam menentukan posisi elemen-elemen lainnya dalam baris tersebut.

Kedua, jika terdapat suatu baris yang semua elemennya nol, maka baris tersebut harus ditempatkan di bagian bawah matriks. Ini dilakukan untuk memastikan bahwa baris-baris yang lebih signifikan, yaitu baris-baris yang memiliki elemen pivot, berada di bagian atas matriks. Penempatan ini juga mempermudah proses eliminasi selanjutnya dan penentuan solusi.

Ketiga, jika terdapat beberapa baris dalam matriks yang memiliki elemen pivot, maka posisi elemen pivot pada baris-baris di bawahnya harus lebih ke kanan dibandingkan dengan elemen pivot pada baris-baris di atasnya. Dengan kata lain, setiap elemen pivot dalam suatu baris harus berada di kolom yang lebih tinggi dibandingkan dengan elemen pivot dalam baris sebelumnya. Sifat ini memastikan bahwa matriks memiliki struktur yang teratur dan sistematis, yang pada gilirannya mempermudah proses eliminasi dan penyelesaian sistem persamaan linear.

Berikut adalah langkah-langkah dalam penerapan Gauss-Jordan Elimination:

1. Menyusun Matriks Awal: Langkah pertama adalah menyusun matriks koefisien dari sistem persamaan linear yang diberikan.
2. Melakukan Eliminasi Gauss: Melalui operasi baris elementer, baris-baris dalam matriks diubah sedemikian rupa sehingga elemen pivot (1) muncul di setiap baris, dimulai dari baris atas hingga baris bawah.
3. Mengubah ke Bentuk Eselon Tereduksi: Setelah matriks dalam bentuk eselon, langkah selanjutnya adalah melakukan operasi baris lebih lanjut untuk memastikan bahwa elemen pivot berada pada posisi yang benar sesuai dengan sifat-sifat yang telah disebutkan sebelumnya.
4. Menentukan Solusi: Setelah matriks mencapai bentuk eselon baris tereduksi, solusi dari sistem persamaan linear dapat ditentukan dengan mudah. Matriks ini memungkinkan kita untuk melihat solusi yang unik atau mendeteksi adanya solusi tak terbatas atau bahkan tidak adanya solusi.

Sebagai ilustrasi, misalkan kita memiliki sistem persamaan linear yang diwakili oleh matriks:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Melalui proses Gauss-Jordan Elimination, kita akan mengubah matriks ini menjadi bentuk eselon baris tereduksi, yang mungkin terlihat seperti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dalam bentuk ini, kita dapat langsung membaca solusi dari sistem persamaan tersebut: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, dan $x_3 = -1$.

Dengan memahami dan menerapkan Gauss-Jordan Elimination, kita dapat dengan lebih efektif dan efisien menyelesaikan berbagai permasalahan sistem persamaan linear yang kompleks.

Berikut contoh pengerjaan gauss jordan elimination :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris 3 - baris 1

1 – 1 = 0

-1 – 1 = -2

-1 – 1 = -2

0 – 6 = -6

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$ Hasil dari pengurangi baris 3 – baris 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

3Baris 3 - 2Baris 2

0 – 0 = 0

3(-2) – (2(-3)) = 0

3(-2) – (2(-1)) = -8

3(-6) – 2(-9) = 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$ hasil pengurangan 3Baris 3 - 2Baris 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris 1 + baris 2

1 + 0 = 1

1 + (-3) = -2

1 + (-1) = 0

6 + - 9 = -3

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$ hasil penjumlahan dari Baris 1 + baris 2

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

8 baris 2 – baris 3

0 – 0 = 0

8(-3) – 0 = -24

8(-1) – (-8) = 0

8(-9) – 0 = -72

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -24 & 0 & -72 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$ hasil pengurangan 8baris 2 – baris 3

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -24 & 0 & -72 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

12 baris 1 – baris 2

12 – 0 = 12

12(-2) – (-24) = 0

12(0) – 0 = 0

12(-3) – (-72) = 36

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & -24 & 0 & -72 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$ hasil pengurangan 12 baris 1 – baris 2

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & -24 & 0 & -72 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris 1 dibagi 8

Baris 2 dibagi -24

Baris 3 dibagi 12

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ Hasil Akhir

Hasil akhir dari gauss jordan ini adalah X = 3

Y = 3

Z = 0

Sistem Persamaan Linear

Sistem Persamaan Linear adalah sekumpulan persamaan linear yang saling berhubungan dan bersama-sama membentuk sebuah sistem. Setiap persamaan dalam sistem tersebut memiliki bentuk umum $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, di mana a_i adalah koefisien, x_i adalah variabel, dan b adalah konstanta. Sistem ini digunakan untuk mencari nilai variabel-variabel yang memenuhi semua persamaan secara simultan. Sistem persamaan linear sering muncul dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan, seperti matematika, fisika, ekonomi, dan teknik.

Metode Penyelesaian SPLDV

Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV) dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu:

1. Grafik:

Metode grafik melibatkan penggambaran kedua persamaan pada bidang koordinat. Titik potong antara dua garis yang mewakili persamaan tersebut merupakan solusi dari sistem. Setiap garis pada grafik adalah representasi visual dari suatu persamaan, dan titik potong menggambarkan nilai-nilai variabel yang memenuhi kedua persamaan.

2. Eliminasi:

Metode eliminasi dilakukan dengan mengeliminasi salah satu variabel dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan kedua persamaan, sehingga hanya tersisa satu variabel. Langkah-langkah dalam metode ini adalah:

1. Menyusun persamaan sedemikian rupa sehingga salah satu variabel memiliki koefisien yang sama atau kebalikannya.
2. Mengurangkan atau menjumlahkan kedua persamaan untuk menghilangkan variabel tersebut.
3. Menyelesaikan persamaan yang tersisa untuk menemukan nilai dari satu variabel.
4. Menggunakan nilai variabel tersebut dalam salah satu persamaan awal untuk menemukan nilai variabel lainnya.

3. Substitusi:

Metode substitusi melibatkan penyelesaian salah satu persamaan untuk satu variabel, kemudian substitusi nilai tersebut ke dalam persamaan lainnya. Langkah-langkah dalam metode ini adalah:

- Menyelesaikan salah satu persamaan untuk satu variabel.
- Mensubstitusi hasil tersebut ke dalam persamaan lainnya.
- Menyelesaikan persamaan yang baru untuk menemukan nilai dari variabel lainnya.
- Menggunakan nilai variabel yang ditemukan untuk menentukan nilai variabel yang lain.

Metode Penyelesaian SPLTV

Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV) dapat diselesaikan dengan dua metode utama, yaitu:

1. Eliminasi:

Sama seperti pada SPLDV, metode eliminasi pada SPLTV melibatkan penghilangan satu variabel dari dua persamaan untuk mengurangi sistem menjadi dua persamaan dengan dua variabel. Langkah-langkah dalam metode ini adalah:

- Memilih dua persamaan dari tiga persamaan yang ada.
- Mengeliminasi satu variabel dari kedua persamaan tersebut, menghasilkan sistem persamaan dua variabel (SPLDV).
- Menyelesaikan SPLDV yang dihasilkan untuk menemukan nilai dua variabel.
- Menggunakan nilai-nilai variabel yang ditemukan untuk menyelesaikan persamaan ketiga dan menemukan nilai variabel yang tersisa.

2. Substitusi:

Metode substitusi pada SPLTV melibatkan penyelesaian salah satu persamaan untuk satu variabel dan kemudian substitusi nilai tersebut ke dalam dua persamaan lainnya. Langkah-langkah dalam metode ini adalah:

- Menyelesaikan salah satu persamaan untuk satu variabel.
- Mensubstitusi hasil tersebut ke dalam dua persamaan lainnya untuk menghasilkan dua persamaan dua variabel.
- Menyelesaikan SPLDV yang dihasilkan untuk menemukan nilai dua variabel.
- Menggunakan nilai-nilai variabel yang ditemukan untuk menentukan nilai variabel yang tersisa dari persamaan pertama.

Kedua metode ini, baik eliminasi maupun substitusi, dapat diadaptasi dan digunakan sesuai dengan kebutuhan dan kompleksitas dari sistem persamaan linear yang dihadapi. Pemilihan metode biasanya tergantung pada kemudahan perhitungan dan preferensi individu dalam menyelesaikan masalah matematis.

Contoh Soal :

Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

$$2x - y = 6$$

$$x + y = 3$$

Jawaban :

$$2x - y = 6$$

$$x + y = 3$$

---------------- +

$$3x = 9$$

$$x = \frac{9}{3} = 3$$

Subtitusi :

$$2(3) - y = 6$$

$$y = 0$$

Soal

$x + 3y + 2z = 16 : persamaan\ 1$

$2x + 4y - 2z = 12 : persamaan\ 2$

$x + y + 4z = 20 : persamaan\ 3$

Jawaban

buat persamaan 1 menjadi x = menjadi

x = -3y – 2z + 16

Subtitusi x ke persamaan 2 dan 3

Persamaan 2

$2(-3y - 2z + 16) + 4y - 2z = 12$

$-6y - 4z + 32 + 4y - 2z = 12$

$-2y - 6z = -20$

Dibagi -2

$y + 3z = 10: persamaan\ 4$

Persamaan 3

$$(-3y - 2z + 16) + \ y + \ 4z \ = \ 20$$

$$-2y + 2z = 4$$

Dibagi 2

$$-y + z = 2 : persamaan \ 5$$

Buat persamaan 4 menjadi y = menjadi

y = 10 – 3z

Subtitusi ke persamaan 5

$$-(10 - 3z) \ + \ z \ = \ 2$$

$$-10 + 3z + z \ = \ 2$$

$$4z \ = \ 12$$

$$z \ = \ 3$$

Subtitusi ke persamaan 4

$y + 3(3) = 10$

$y = 10 - 9$

$y = 1$

Subtitusi z dan y yang sudah ditemukan ke persamaan1

x + 3(1) +2(3) = 16

x = 16 – 9

x = 7

Matriks

Matriks adalah sekumpulan bilangan yang diatur dalam bentuk baris dan kolom, seringkali disertai dengan tanda kurung siku [ ] atau kurung biasa ( ). Dalam konteks ini, baris mengacu pada urutan elemen secara horizontal, sedangkan kolom mengacu pada urutan elemen secara vertikal. Matriks banyak digunakan dalam matematika dan berbagai bidang sains serta teknik untuk mempermudah pengelolaan dan manipulasi data, serta untuk menyelesaikan sistem persamaan linear yang kompleks. Matriks dapat diklasifikasikan ke dalam berbagai jenis berdasarkan susunan dan sifat-sifatnya, yaitu matriks baris, matriks kolom, matriks persegi, matriks diagonal, matriks identitas, dan matriks nol. Berikut adalah penjelasan lebih rinci tentang masing-masing jenis matriks dan bagaimana mereka berfungsi dalam konteks sistem persamaan linear.

Ada beberapa operasi hitung dalam matriks yaitu Transpose, Addition, Subtraction, Scalar Multiplication, And Multiplication.

Contoh dari masing masing operasi hitung : Matriks Transpose :

Soal :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^T \text{ Menjadi } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriks Addition :

Soal

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+1 \\ 2+2 & 4+2 \\ 3+4 & 6+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriks Subtraction :

Soal

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 6 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & 2-4 \\ 3-6 & 4-6 \\ 5-10 & 6-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -2 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$$

Matrix Scalar Multiplication :

Soal

$$2\ x \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x1 & 2x2 \\ 2x3 & 2x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Matriks Multiplication :

Soal

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x2+4x2 & 2x3+4x1 \\ 3x2+4x2 & 3x3+4x1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 10 \\ 14 & 13 \end{bmatrix}$$

Ada juga matriks Invers dan juga matriks Determinan :

Matriks Determinan :

Matriks 2x2

Rumus

$$|A| = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Soal

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 2x3 - 4x1 \ = \ 6 - 4 \ = 2$$

Matriks 3x3

Rumus

A

$$|A| \ = \begin{bmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{bmatrix} = aef + bfg + cdh$$

B

$$|A| \ = \begin{bmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{bmatrix} = ceg + afh + bdi$$

Hasil akhir = A-B

Soal

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = (64+18+10) - (60+16+12) = 92 - 88 = 4$$

Matriks Invers

Rumus

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot AdjA$$

Contoh :

Soal :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 4$$

$$Kof\ A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4x4 - 2x2 & -(1x4 - 3x2) & 1x2 - 3x4 \\ -(3x4 - 5x2) & 4x4 - 3x5 & -(4x2 - 3x3) \\ 3x2 - 4x5 & -(4x2 - 5x1) & 4x4 - 3x1 \end{bmatrix}$$

$$Kof\ A = \begin{bmatrix} 12 & 2 & -10 \\ -2 & 1 & 1 \\ -14 & -3 & 13 \end{bmatrix}$$

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} 12 & -2 & -14 \\ 2 & 1 & -3 \\ -10 & 1 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 12 & -2 & -14 \\ 2 & 1 & -3 \\ -10 & 1 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{4} & \frac{13}{4} \end{bmatrix}$$

Linear dependence dan Linear Independence of Vectors

linear independent adalah sebuah vektor yang tidak bisa ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor lain sedangkan linear dependence adalah sebuah vektor yang dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor lain

$v1 = [1 \quad 0 \quad 0]$

$v1 = [0 \quad 1 \quad 0]$

$v1 = [0 \quad 0 \quad 1]$

Apakah ini Linear Independence ?

Jawab :

Pertama kita harus buat menjadi persamaan seperti dibawah ini :

$c1v1 + c2v2 + c3v3 = 0$

$c1\ [1\ ,0\ ,0\ ] + c2[0,1,0] + c3[0,0,1]$

$[c1\ ,0\ ,0\ ] + [0,c2,0] + [0,0,c3]$

Hasil akhir c1 c2 c3 = 0

Menandakan bahwa pada soal ini benar linear independence

Contoh Linear Independence :

Contoh Linear Dependency :

Soal

$$\begin{bmatrix}8\\-4\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-2\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-13\\6\\3\end{bmatrix} = V$$

Apakah ini linear independent ?

Pertama kita harus buat menjadi persamaan seperti dibawah ini

$c1v1 + c2v2 + c3v3 = 0$

Kalau dijadikan matrisk menjadi

$$\begin{bmatrix}8 & 3 & -13 & 0\\-4 & -2 & 6 & 0\\1 & 5 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

Setelah menjadi matriks seperti diatas langsung saja melakukan bisa melakukan gauss jordan

Hasil akhir dari Gauss jordan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Kita lihat pada baris ketiga terdapat variabel bebas hal ini bisa membuktikan bahwa vektor ini adalah linear depedancy

Dot Product

Rumus :
u . v = u1v1 + u2v2 + u3v3 u . v = |u|.|v|cos

Contoh :

$$u = \begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix}$$

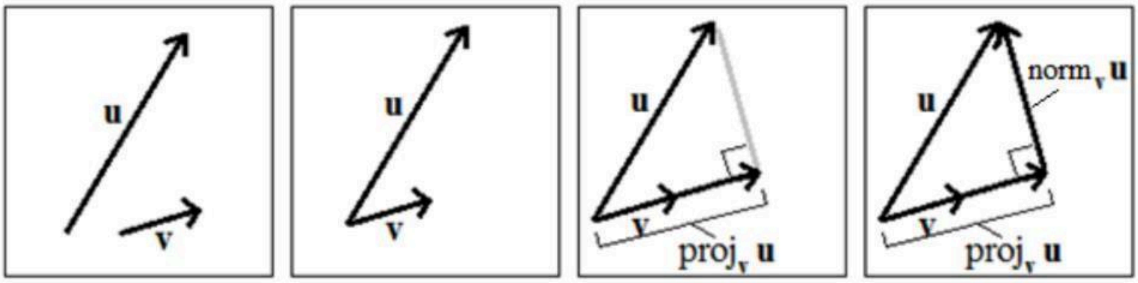
$$u \cdot v = 15 + 8 + 1 = 24$$

Orthogonal Projection

$$Projv\ U = \left(\frac{v \cdot u}{v \cdot v}\right)\ v$$

$$Projv\ u + normv\ u = u$$

Berikut Gambaran buat projection



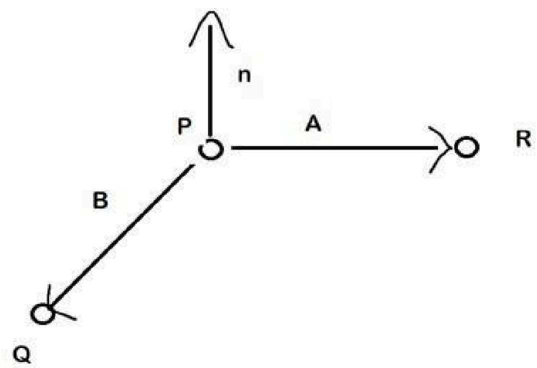
Cross Product

$$u = \begin{bmatrix}5\\3\\9\end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix}$$

$$u\ x\ v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 5 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix}3 & 9\\5 & 2\end{bmatrix} - j\begin{bmatrix}5 & 9\\1 & 2\end{bmatrix} + k\begin{bmatrix}5 & 3\\1 & 5\end{bmatrix} = (-39, 1, 22)$$

Plane Equation

Cari Equation of the plane yang melewati point P(2,1,4), Q(4,-2,7) dan R(5, 3, -2)



Rumus :

$$A\ x\ B\ = n$$

Pertama cari A yaitu vektor PR

$$b =\ PR = (5-2, 3-1, -2-4) = (3, 2, -6)$$

$$a = PQ = (4-2, -2-1, 7-4) = (2, -3, 3)$$

$$n = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$i\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} - j\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$n = 12i + 21j + 13k$$

Lalu masukan ke dalam persamaan

$$a(x - x0) + b(y - y0) + c(z - z0) = 0$$

$$a\ b\ c\ diambil\ dari\ n\ sedangkan\ x0\ y0\ dan\ juga\ z\ 0\ diambil\ dari\ P$$

$$12(x - 2) + 21(y - 1) + 13(z - 4) = 0$$

$$12x - 24 + 21y - 21 + 13z - 52 = 0$$

$$12x + 21y + 13z = 97$$

Eigenvalue dan Eigenvector

Eigenvector adalah sebuah vektor karakteristik dalam sebuah matriks berukuran n x n adalah vektor tak nol yang akan mengalami perubahan panjang ketika dikali dengan matriks tersebut. Sedangkan eigenvalue adalah yang berhubungan dengan vektor tersebut yang biasanya di lambangkan dengan lamda.

Rumus :

EigenValue

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

EigenVector

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Contoh soal :

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

Mencari EigenValue dan EigenVector

$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3 - \lambda \end{bmatrix} = (3\lambda + \lambda^2) + 2$

$\lambda^2 + 3\lambda + 2$

$\lambda 1 = -1 \;\; dan\, \lambda 2 = -2$

EigenVector

$\lambda = -1$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x1 & x2 \\ -2x1 & -2x2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x1 & x2 \\ -2x1 & -2x2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x1 & x2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x1 & x2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x1 + x2 = 0$

$x1 = -x2$

$let\; x1 = 1$

$x2 = -1$

$v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\lambda = -2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x1 & x2 \\ -2x1 & -x2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x1 & x2 \\ -2x1 & -x2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x1 & x2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x1 & x2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2x1 + x2 = 0$$

$$2x1 = -x2$$

$$let\ x1 = 1$$

$$x2 = -\frac{1}{2}$$

$$v = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Referensi

Anton, H., & Rorres, C. (2019). Elementary linear algebra: Applications version (12th ed.). Wiley.

Brown, J. E. (2018). Mathematics of investment and credit (7th ed.). Actex Publications.

Golub, G. H., & Van Loan, C. F. (2012). Matrix computations (4th ed.). Johns Hopkins University Press.

Lay, D. C., Lay, S. R., & McDonald, J. J. (2018). Linear algebra and its applications (5th ed.). Pearson.

Poole, D. (2016). Linear algebra: A modern introduction (4th ed.). Brooks/Cole Cengage Learning.

Strang, G. (2006). Introduction to linear algebra (5th ed.). Wellesley-Cambridge Press.

Stewart, J. (2016). Calculus: Early transcendentals (8th ed.). Cengage Learning.

Weisstein, E. W. (n.d.). Wolfram MathWorld. Retrieved from http://mathworld.wolfram.com/

Zill, D. G., & Wright, W. S. (2018). A first course in differential equations with modeling applications (11th ed.). Cengage Learning.

Zeid, I. (2010). Mastering CAD/CAM (2nd ed.). Pearson Education.

Bronson, R. (2012). Schaum's outline of theory and problems of matrix operations. McGraw-Hill Education.

Kuttler, K. (2018). Elementary linear algebra. Freely available textbook at http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra.