

## 高数4-4习题解析

---

### 第1题

$$\int \frac{x^3}{x+3} dx$$

解：

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x+3} dx &= \int \left( x^2 - 3x + 9 - \frac{27}{x+3} \right) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27 \ln|x+3| + C\end{aligned}$$

---

### 第2题

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10} dx$$

解：

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10} dx &= \int \frac{d(x^2+3x-10)}{x^2+3x-10} \\ &= \ln|x^2+3x-10| + C\end{aligned}$$

---

### 第3题

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x+5} dx$$

解：

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2-2x+5} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5} dx + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2+4} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+5) + \arctan \frac{x-1}{2} + C\end{aligned}$$


---

#### 第4题

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$$

解：

设

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

解得  $A=1$ ,  $B=-1$ ,  $C=0$ 。

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x^2+1)} &= \int \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C\end{aligned}$$


---

#### 第5题

$$\int \frac{3}{x^3+1} dx$$

解：

因式分解： $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ 。

设

$$\frac{3}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

解得  $A = 1, B = -1, C = 2$ 。

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{x^3 + 1} dx &= \int \left( \frac{1}{x + 1} + \frac{-x + 2}{x^2 - x + 1} \right) dx \\ &= \ln |x + 1| - \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \sqrt{3} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C\end{aligned}$$

---

### 第6题

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2(x - 1)} dx$$

解：

设

$$\frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2(x - 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$$

解得  $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = 1$ 。

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2(x - 1)} dx &= \frac{1}{2} \ln |x - 1| + \frac{1}{2} \ln |x + 1| - \frac{1}{x + 1} + C \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| - \frac{1}{x + 1} + C\end{aligned}$$

---

### 第7题

$$\int \frac{xdx}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}$$

解：

设

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

解得  $A = -\frac{1}{2}$ ,  $B = 2$ ,  $C = -\frac{3}{2}$ 。

于是

$$\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = -\frac{1}{2} \ln|x+1| + 2 \ln|x+2| - \frac{3}{2} \ln|x+3| + C$$


---

## 第8题

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - x} dx$$

解：

多项式除法得：

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - x} = x^2 + x + 1 + \frac{x^2 + x - 8}{x(x-1)(x+1)}$$

对分式分解：

$$\frac{x^2 + x - 8}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

解得  $A = 8$ ,  $B = -3$ ,  $C = -4$ 。

于是

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - x} dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 8 \ln|x| - 3 \ln|x-1| - 4 \ln|x+1| + C$$


---

## 第9题

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$$

解：

设

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

解得  $A = 1$ ,  $B = -\frac{1}{2}$ ,  $C = -\frac{1}{2}$ ,  $D = -\frac{1}{2}$ 。

于是

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\arctan x + C$$

---

### 第10题

$$\int \frac{1}{x^4-1} dx$$

解：

因式分解： $x^4-1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ 。

设

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

解得  $A = \frac{1}{4}$ ,  $B = -\frac{1}{4}$ ,  $C = 0$ ,  $D = -\frac{1}{2}$ 。

于是

$$\int \frac{1}{x^4-1} dx = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\arctan x + C$$

---

### 第11题

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$$

解：

设

$$\frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}$$

解得  $A = 0$ ,  $B = 1$ ,  $C = 0$ ,  $D = -1$ 。

于是

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} = \arctan x - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C$$


---

## 第12题

$$\int \frac{(x + 1)^2}{(x^2 + 1)^2} dx$$

解：

拆项：

$$\frac{(x + 1)^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

于是

$$\int \frac{(x + 1)^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \arctan x - \frac{1}{x^2 + 1} + C$$


---

## 第13题

$$\int \frac{-x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2} dx$$

解：

分子拆为： $-x^2 - 2 = -(x^2 + x + 1) - (x + 1)$ 。

于是

$$\frac{-x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2} = -\frac{1}{x^2 + x + 1} - \frac{x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

积分得：

$$\int \frac{-x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2} dx = -\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{x}{x^2 + x + 1} + C$$

---

### 第14题

$$\int \frac{dx}{3 + \sin^2 x}$$

解：

用恒等式  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ ，则

$$3 + \sin^2 x = \frac{7 - \cos 2x}{2}$$

于是原积分  $= 2 \int \frac{dx}{7 - \cos 2x}$ 。

令  $u = 2x$ ，再令  $t = \tan \frac{u}{2}$ ，可得：

$$\int \frac{dx}{3 + \sin^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \tan x}{\sqrt{3}} + C$$

---

### 第15题

$$\int \frac{dx}{3 + \cos x}$$

解：

令  $t = \tan \frac{x}{2}$ ，则

$$\int \frac{dx}{3 + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C$$

---

### 第16题

$$\int \frac{dx}{2 + \sin x}$$

解：

令  $t = \tan \frac{x}{2}$ ，则

$$\int \frac{dx}{2 + \sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + C$$

---

### 第17题

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$$

解：

令  $t = \tan \frac{x}{2}$ ，则

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \ln \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

---

### 第18题

$$\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$$

解：

令  $t = \tan \frac{x}{2}$ ，则

$$\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3 \tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C$$

---

### 第19题

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$$



解：

令  $t = \sqrt[3]{x+1}$ , 则  $x = t^3 - 1$ ,  $dx = 3t^2 dt$ 。

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}} &= \int \frac{3t^2}{1+t} dt = 3 \int \left( t - 1 + \frac{1}{1+t} \right) dt \\&= \frac{3}{2}t^2 - 3t + 3 \ln |1+t| + C \\&= \frac{3}{2}(x+1)^{2/3} - 3(x+1)^{1/3} + 3 \ln |1 + \sqrt[3]{x+1}| + C\end{aligned}$$

---

## 第20题

$$\int \frac{(\sqrt{x})^3 - 1}{\sqrt{x} + 1} dx$$

解：

令  $t = \sqrt{x}$ , 则  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ 。

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{t^3 - 1}{t + 1} \cdot 2t dt &= 2 \int \frac{t^4 - t}{t + 1} dt = 2 \int \left( t^3 - t^2 + t - 2 + \frac{2}{t + 1} \right) dt \\&= 2 \left( \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 2t + 2 \ln |t + 1| \right) + C \\&= \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^{3/2} + x - 4\sqrt{x} + 4 \ln(\sqrt{x} + 1) + C\end{aligned}$$

---

## 第21题

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1} dx$$

解：

令  $t = \sqrt{x+1}$ , 则  $x = t^2 - 1$ ,  $dx = 2t dt$ 。

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{t-1}{t+1} \cdot 2t dt &= 2 \int \frac{t^2-t}{t+1} dt = 2 \int \left( t-2 + \frac{2}{t+1} \right) dt \\&= 2 \left( \frac{1}{2}t^2 - 2t + 2 \ln |t+1| \right) + C \\&= t^2 - 4t + 4 \ln |t+1| + C \\&= x - 4\sqrt{x+1} + 4 \ln(\sqrt{x+1} + 1) + C\end{aligned}$$

---

## 第22题

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$$

解：

令  $t = \sqrt[4]{x}$ , 则  $x = t^4$ ,  $dx = 4t^3 dt$ 。

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{4t^3}{t^2+t} dt &= 4 \int \frac{t^2}{t+1} dt = 4 \int \left( t-1 + \frac{1}{t+1} \right) dt \\&= 4 \left( \frac{1}{2}t^2 - t + \ln |t+1| \right) + C \\&= 2t^2 - 4t + 4 \ln |t+1| + C \\&= 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4 \ln(\sqrt[4]{x} + 1) + C\end{aligned}$$

---

## 第23题

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$$

**解：** 令  $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Rightarrow t^2 = \frac{1-x}{1+x}$ , 解得  $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt$ .

被积函数化为

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{x} dx = t \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt = \frac{-4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)} dt.$$

$$I = - \int \left( \frac{2}{1-t^2} - \frac{2}{1+t^2} \right) dt = 2 \int \frac{dt}{1+t^2} - 2 \int \frac{dt}{1-t^2}.$$

故

$$I = 2 \arctan t - \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C.$$

回代，得

$$2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1 - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \right| + C.$$

## 第24题

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$$

解：

被积函数为  $(x-1)^{-4/3}(x+1)^{-2/3}$ 。

令  $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ ，则  $t^3 = \frac{x+1}{x-1}$ ，得  $x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$ ， $dx = -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2} dt$ 。

同时

$$(x-1)^{-4/3}(x+1)^{-2/3} = \frac{(t^3-1)^2}{4t^2}$$

于是

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} &= \int \frac{(t^3-1)^2}{4t^2} \cdot \left( -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2} \right) dt \\ &= -\frac{3}{2} \int dt = -\frac{3}{2}t + C \end{aligned}$$

$$= -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C$$


---