【CNN】很详细的讲解什么以及为什么是卷积（Convolution）！

机器学习算法那些事 2019-12-07

编辑：深度学习自然语言处理

1、对卷积的困惑

卷积这个概念，很早以前就学过，但是一直没有搞懂。教科书上通常会给出定义，给出很多性质，也会用实例和图形进行解释，但究竟为什么要这么设计，这么计算，背后的意义是什么，往往语焉不详。作为一个学物理出身的人，一个公式倘若倘若给不出结合实际的直观的通俗的解释（也就是背后的“物理”意义），就觉得少了点什么，觉得不是真的懂了。

教科书上一般定义函数 *f, g* 的卷积 *f * g(n)* 如下：

连续形式：

$$(f*g)(n)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(n-\tau)d\tau$$

离散形式：

$$(f*g)(n)=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}f(\tau)g(n-\tau)$$

并且也解释了，先对g函数进行翻转，相当于在数轴上把g函数从右边褶到左边去，也就是卷积的“卷”的由来。

然后再把g函数平移到n，在这个位置对两个函数的对应点相乘，然后相加，这个过程是卷积的“积”的过程。

这个只是从计算的方式上对公式进行了解释，从数学上讲无可挑剔，但进一步追问，为什么要先翻转再平移，这么设计有何用意？还是有点费解。

在知乎，已经很多的热心网友对卷积举了很多形象的例子进行了解释，如卷地毯、丢骰子、打耳光、存钱等等。读完觉得非常生动有趣，但过细想想，还是感觉有些地方还是没解释清楚，甚至可能还有瑕疵，或者还可以改进（这些后面我会做一些分析）。

带着问题想了两个晚上，终于觉得有些问题想通了，所以就写出来跟网友分享，共同学习提高。不对的地方欢迎评论拍砖。。。

明确一下，这篇文章主要想解释两个问题：

1. 卷积这个名词是怎么解释？“卷”是什么意思？“积”又是什么意思？

2. 卷积背后的意义是什么，该如何解释？

2、考虑的应用场景

为了更好地理解这些问题，我们先给出两个典型的应用场景：

1. 信号分析

一个输入信号$f(t)$，经过一个线性系统（其特征可以用单位冲击响应函数$g(t)$描述）以后，输出信号应该是什么？实际上通过卷积运算就可以得到输出信号。

2. 图像处理

输入一幅图像$f(x,y)$，经过特定设计的卷积核$g(x,y)$进行卷积处理以后，输出图像将会得到模糊，边缘强化等各种效果。

3、对卷积的理解

对卷积这个名词的理解：所谓两个函数的卷积，本质上就是先将一个函数翻转，然后进行滑动叠加。

在连续情况下，叠加指的是对两个函数的乘积求积分，在离散情况下就是加权求和，为简单起见就统一称为叠加。

整体看来是这么个过程：

翻转——>滑动——>叠加——>滑动——>叠加——>滑动——>叠加.....

多次滑动得到的一系列叠加值，构成了卷积函数。

卷积的“卷”，指的的函数的翻转，从 $g(t)$ 变成 $g(-t)$ 的这个过程；同时，“卷”还有滑动的意味在里面（吸取了网友李文清的建议）。如果把卷积翻译为“褶积”，那么这个“褶”字就只有翻转的含义了。

卷积的“积”，指的是积分/加权求和。

有些文章只强调滑动叠加求和，而没有说函数的翻转，我觉得是不全面的；有的文章对“卷”的理解其实是“积”，我觉得是张冠李戴。

对卷积的意义的理解：

1. 从“积”的过程可以看到，我们得到的叠加值，是个全局的概念。以信号分析为例，卷积的结果是不仅跟当前时刻输入信号的响应值有关，也跟过去所有时刻输入信号的响应都有关系，考虑了对过去的所有输入的效果的累积。在图像处理的中，卷积处理的结果，其实就是把每个像素周边的，甚至是整个图像的像素都考虑进来，对当前像素进行某种加权处理。所以说，“积”是全局概念，或者说是一种“混合”，把两个函数在时间或者空间上进行混合。

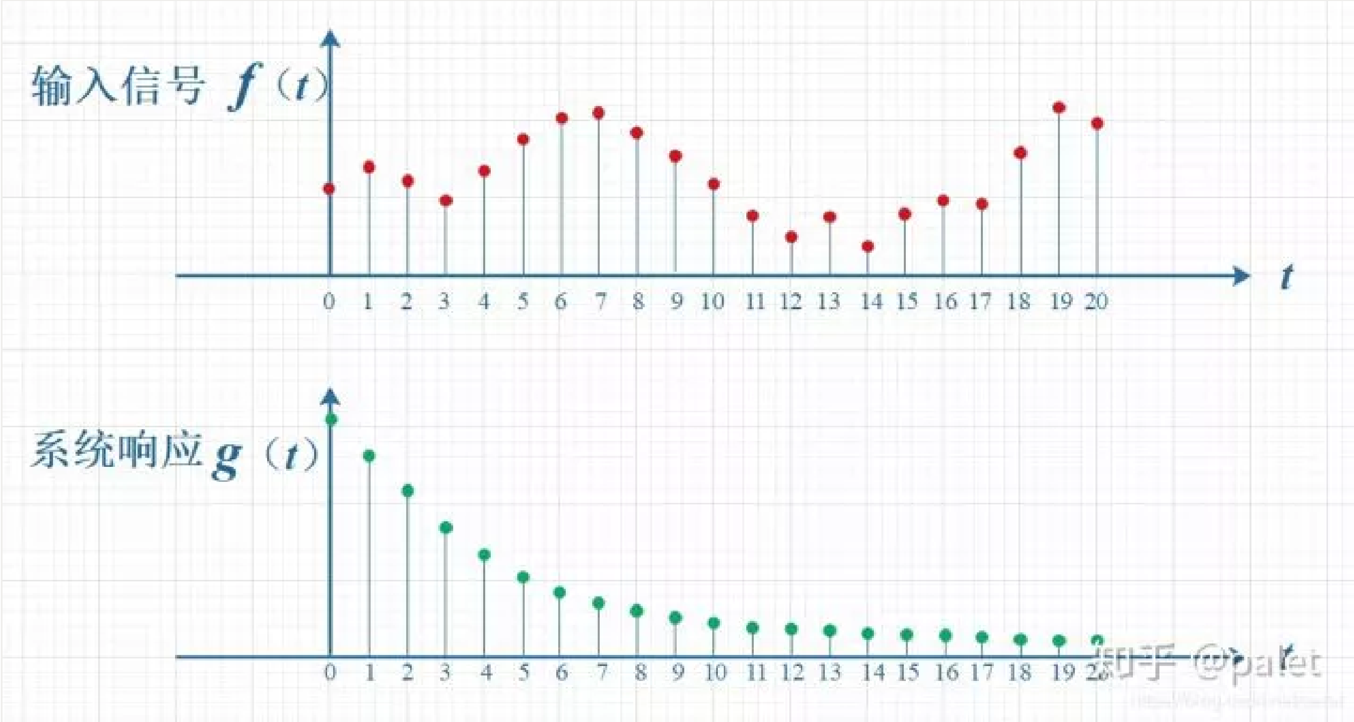
2. 那为什么要进行“卷”？直接相乘不好吗？我的理解，进行“卷”（翻转）的目的其实是施加一种约束，它指定了在“积”的时候以什么为参照。在信号分析的场景，它指定了在哪个特定时间点的前后进行“积”，在空间分析的场景，它指定了在哪个位置的周边进行累积处理。

4、举例说明

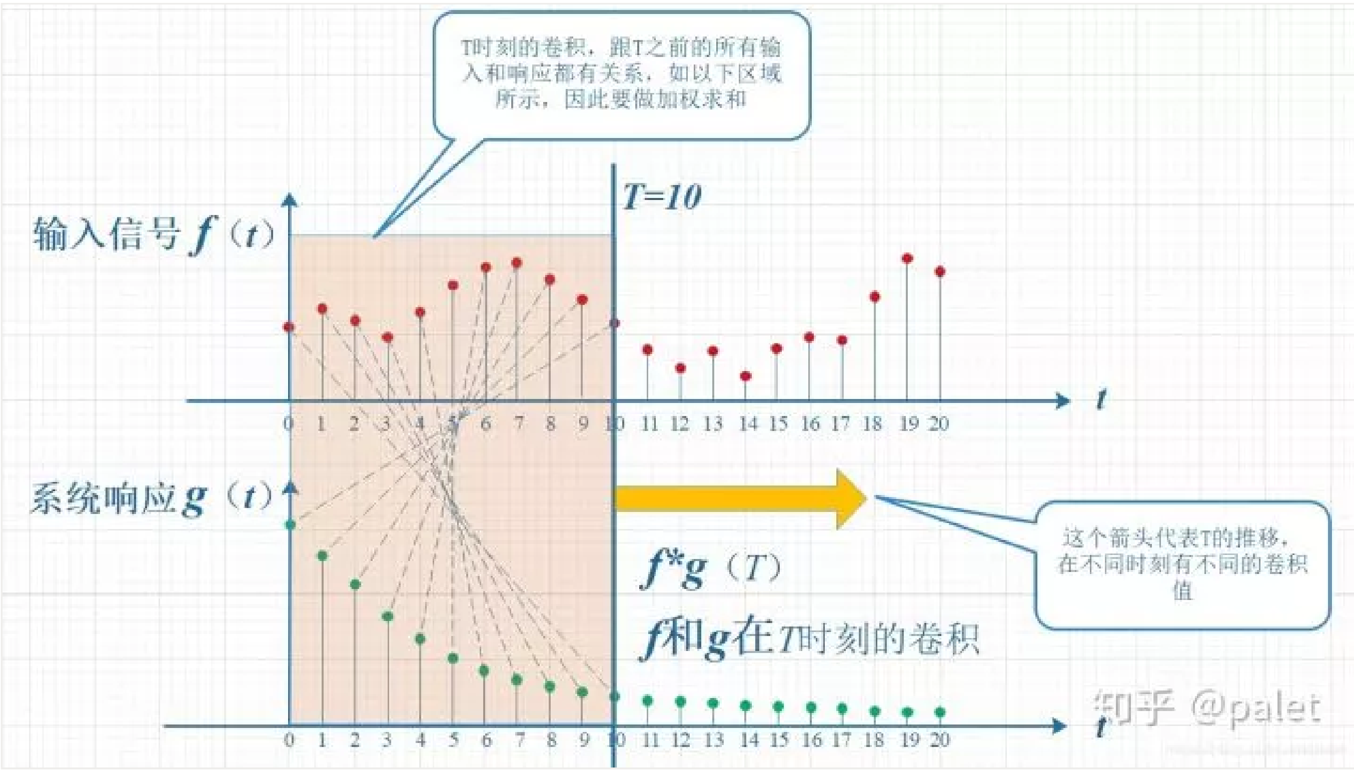
下面举几个例子说明为什么要翻转，以及叠加求和的意义。

例1：信号分析

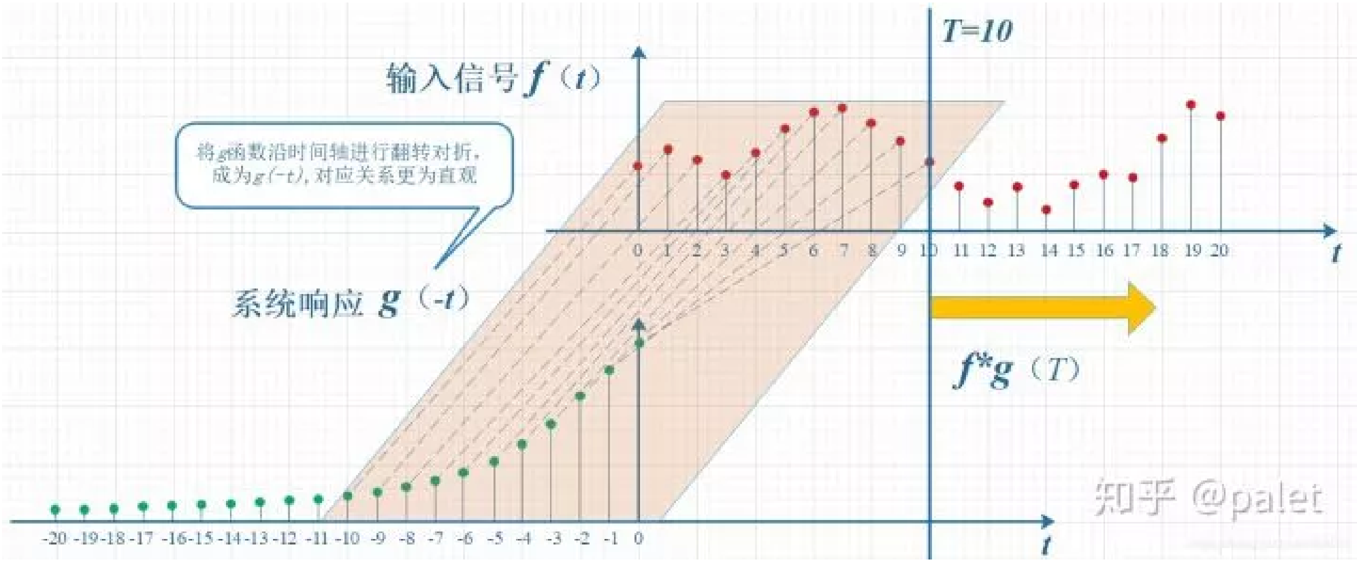
如下图所示，输入信号是 $f(t)$ ，是随时间变化的。系统响应函数是 $g(t)$ ，图中的响应函数是随时间指数下降的，它的物理意义是说：如果在 $t=0$ 的时刻有一个输入，那么随着时间的流逝，这个输入将不断衰减。换言之，到了 $t=T$时刻，原来在 $t=0$ 时刻的输入$f(0)$的值将衰减为$f(0)g(T)$。



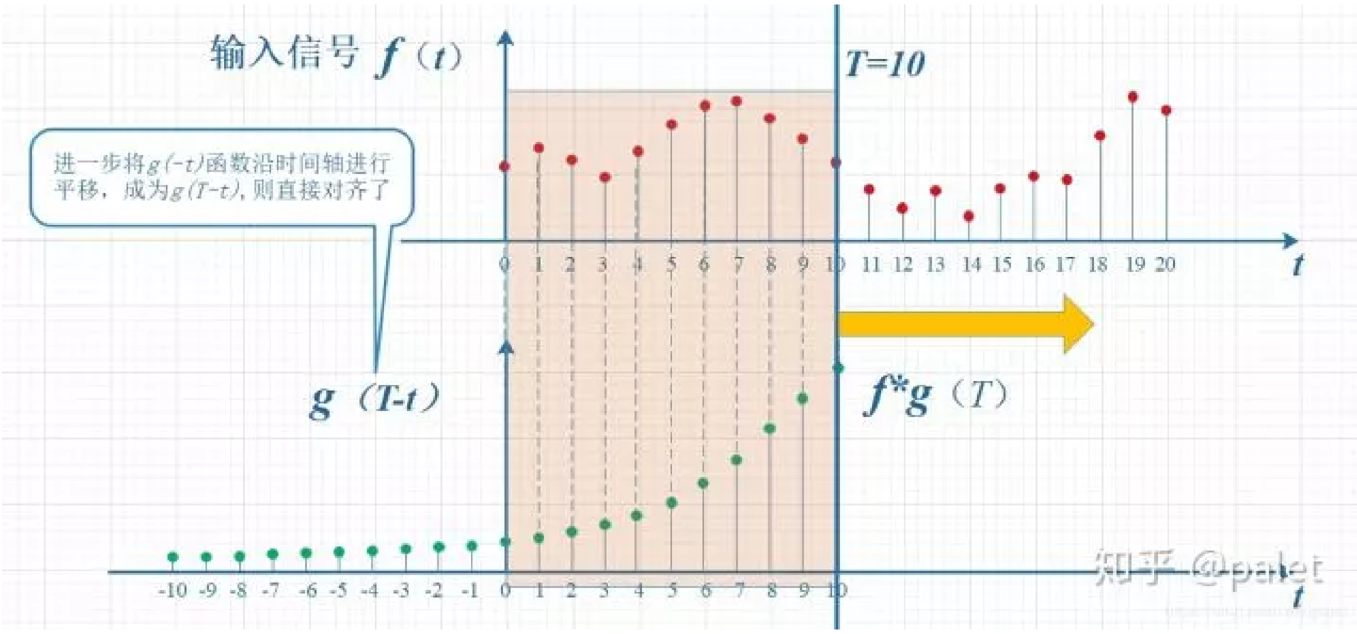
考虑到信号是连续输入的，也就是说，每个时刻都有新的信号进来，所以，最终输出的是所有之前输入信号的累积效果。如下图所示，在T=10时刻，输出结果跟图中带标记的区域整体有关。其中，f(10)因为是刚输入的，所以其输出结果应该是f(10)g(0)，而时刻t=9的输入f(9)，只经过了1个时间单位的衰减，所以产生的输出应该是 f(9)g(1)，如此类推，即图中虚线所描述的关系。这些对应点相乘然后累加，就是T=10时刻的输出信号值，这个结果也是f和g两个函数在T=10时刻的卷积值。



显然，上面的对应关系看上去比较难看，是拧着的，所以，我们把g函数对折一下，变成了g(-t)，这样就好看一些了。看到了吗？这就是为什么卷积要“卷”，要翻转的原因，这是从它的物理意义中给出的。



上图虽然没有拧着，已经顺过来了，但看上去还有点错位，所以再进一步平移T个单位，就是下图。它就是本文开始给出的卷积定义的一种图形的表述：



所以，在以上计算T时刻的卷积时，要维持的约束就是：$t+(T-t)=T$ 。这种约束的意义，大家可以自己体会。

例2：丢骰子

在本问题 如何通俗易懂地解释卷积？中排名第一的马同学在中举了一个很好的例子（下面的一些图摘自马同学的文章，在此表示感谢），用丢骰子说明了卷积的应用。

要解决的问题是：有两枚骰子，把它们都抛出去，两枚骰子点数加起来为4的概率是多少？

分析一下，两枚骰子点数加起来为4的情况有三种情况：1+3=4， 2+2=4, 3+1=4

因此，两枚骰子点数加起来为4的概率为：

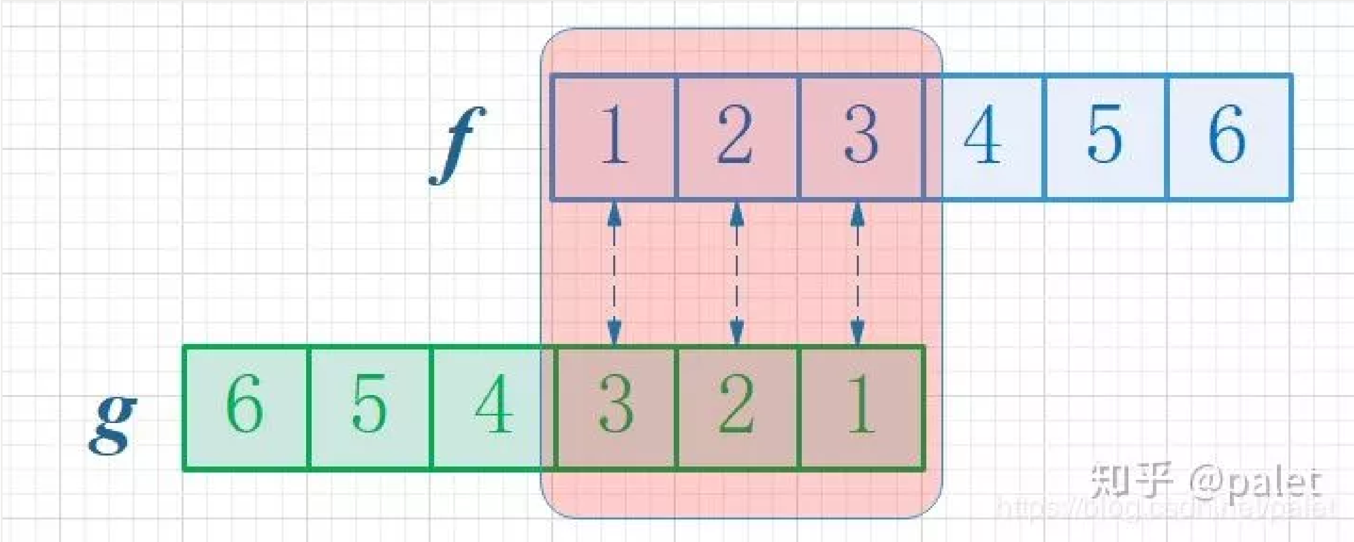
$$f(1)g(3)+f(2)g(2)+f(3)g(1)$$

写成卷积的方式就是：

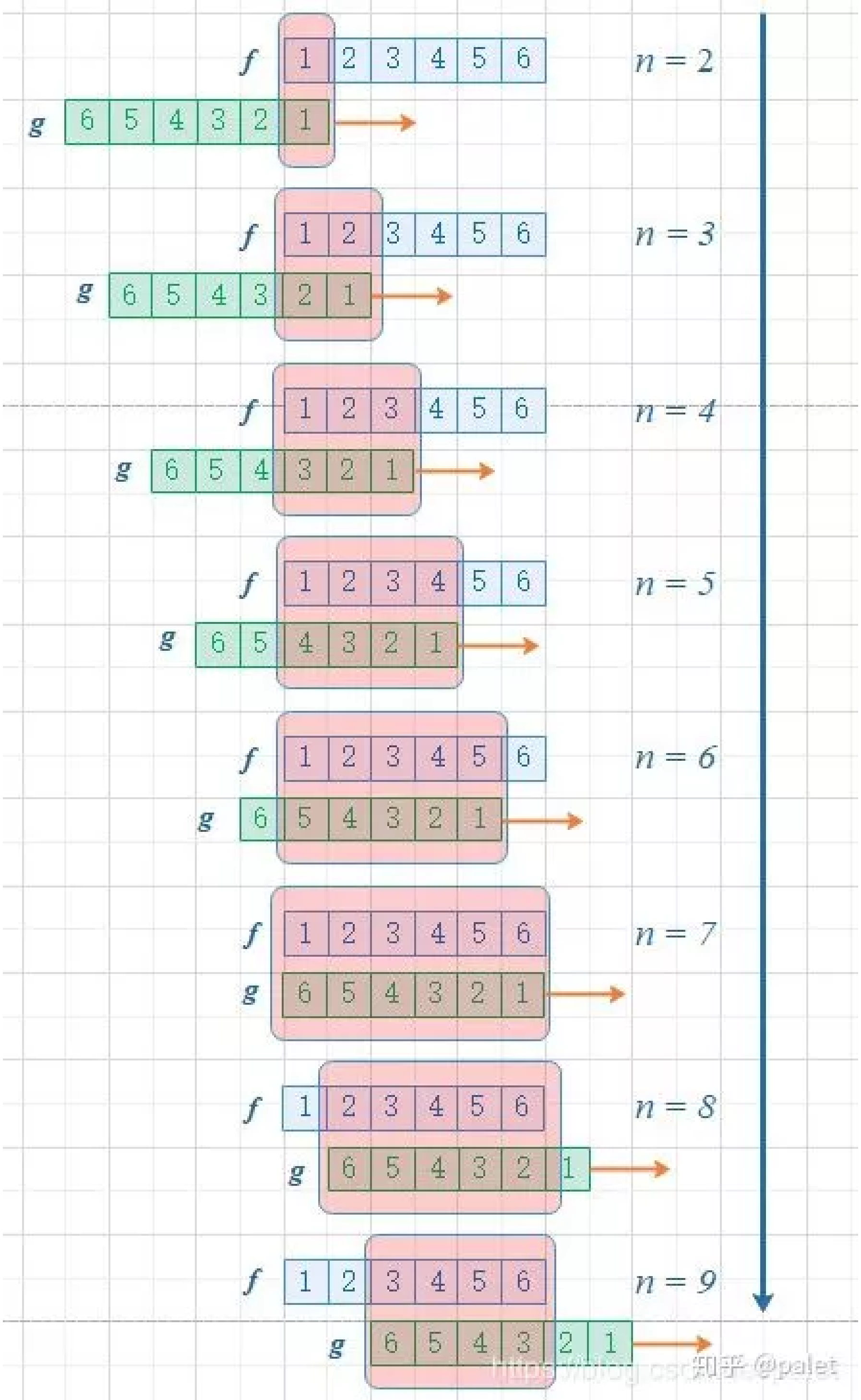
$$(f*g)(4)=\sum_{m=1}^{3} f(4-m)g(m)$$

在这里我想进一步用上面的翻转滑动叠加的逻辑进行解释。

首先，因为两个骰子的点数和是4，为了满足这个约束条件，我们还是把函数 g 翻转一下，然后阴影区域上下对应的数相乘，然后累加，相当于求自变量为4的卷积值，如下图所示：



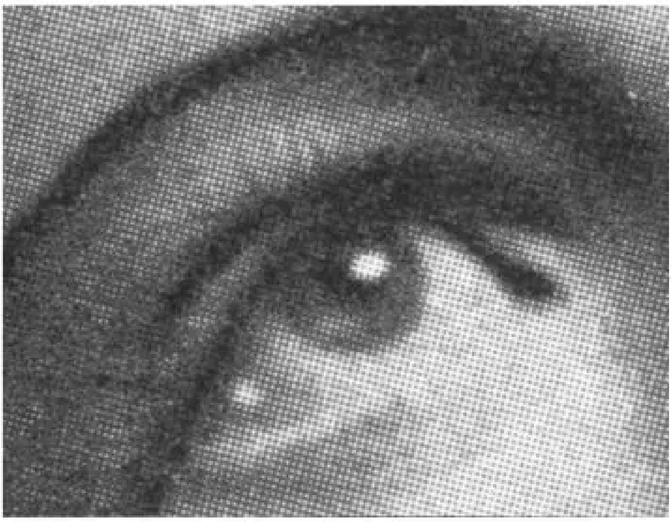
进一步，如此翻转以后，可以方便地进行推广去求两个骰子点数和为 n 时的概率，为f 和 g的卷积 f*g(n)，如下图所示：



由上图可以看到，函数 g 的滑动，带来的是点数和的增大。这个例子中对f和g的约束条件就是点数和，它也是卷积函数的自变量。有兴趣还可以算算，如果骰子的每个点数出现的概率是均等的，那么两个骰子的点数和n=7的时候，概率最大。

例3：图像处理

还是引用知乎问题 如何通俗易懂地解释卷积？中马同学的例子。图像可以表示为矩阵形式（下图摘自马同学的文章）：



$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \cdots & a_{0,n} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,0} & a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

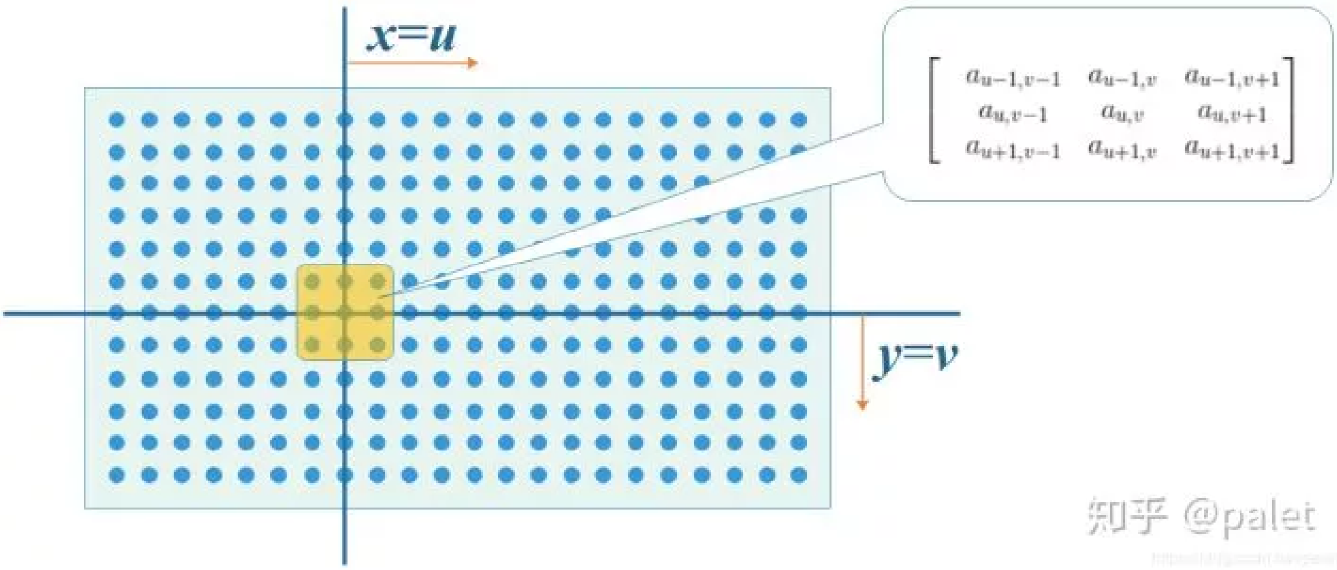
对图像的处理函数（如平滑，或者边缘提取），也可以用一个g矩阵来表示，如：

$$g = \begin{bmatrix} b_{-1,-1} & b_{-1,0} & b_{-1,1} \\ b_{0,-1} & b_{0,0} & b_{0,1} \\ b_{1,-1} & b_{1,0} & b_{1,1} \end{bmatrix}$$

注意，我们在处理平面空间的问题，已经是二维函数了，相当于：

$$f(x,y) = a_{x,y} \quad g(x,y) = b_{x,y}$$

那么函数f和g的在（u，v）处的卷积该如何计算呢？



首先我们在原始图像矩阵中取出（u,v）处的矩阵：

$$f=\begin{bmatrix} a_{u-1,v-1} & a_{u-1,v} & a_{u-1,v+1} \\ a_{u,v-1} & a_{u,v} & a_{u,v+1} \\ a_{u+1,v-1} & a_{u+1,v} & a_{u+1,v+1} \end{bmatrix}$$

然后将图像处理矩阵翻转（这个翻转有点意思，不是延x轴和y轴两个方向翻转，而是沿右上到左下的对角线翻转，这是为了凑后面的内积公式。），如下：

$$g^{'}=\begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{0,1} & b_{-1,1} \\ b_{1,0} & b_{0,0} & b_{-1,0} \\ b_{1,-1} & b_{0,-1} & b_{-1,-1} \end{bmatrix}$$

可对比下图：

$$g=\begin{bmatrix} b_{-1,-1} & b_{-1,0} & b_{-1,1} \\ b_{0,-1} & b_{0,0} & b_{0,1} \\ b_{1,-1} & b_{1,0} & b_{1,1} \end{bmatrix}$$

计算卷积时，就可以用和的内积：

$$f*g(u,v)=a_{u-1,v-1}\times b_{1,1}+a_{u-1,v}\times b_{1,0}+a_{u-1,v+1}\times b_{1,-1}$$

$$+a_{u,v-1}\times b_{0,1}+a_{u,v}\times b_{0,0}+a_{u,v+1}\times b_{0,-1}$$

$$+a_{u+1,v-1}\times b_{-1,1}+a_{u+1,v}\times b_{-1,0}+a_{u+1,v+1}\times b_{-1,-1}$$

请注意，以上公式有一个特点，做乘法的两个对应变量a,b的下标之和都是（u,v），其目的是对这种加权求和进行一种约束。这也是为什么要将矩阵g进行翻转的原因。以上矩阵下标之所以那么写，并且进行了翻转，是为了让大家更清楚地看到跟卷积的关系。这样做的好处是便于推广，也便于理解其物理意义。实际在计算的时候，都是用翻转以后的矩阵，直接求矩阵内积就可以了。

以上计算的是（u,v）处的卷积，延x轴或者y轴滑动，就可以求出图像中各个位置的卷积，其输出结果是处理以后的图像（即经过平滑、边缘提取等各种处理的图像）。

再深入思考一下，在算图像卷积的时候，我们是直接在原始图像矩阵中取了（u,v）处的矩阵，为什么要取这个位置的矩阵，本质上其实是为了满足以上的约束。因为我们要算（u，v）处的卷积，而g矩阵是3x3的矩阵，要满足下标跟这个3x3矩阵的和是（u,v），只能是取原始图像中以（u，v）为中心的这个3x3矩阵，即图中的阴影区域的矩阵。

推而广之，如果如果g矩阵不是3x3，而是6x6，那我们就要在原始图像中取以（u，v）为中心的6x6矩阵进行计算。由此可见，这种卷积就是把原始图像中的相邻像素都考虑进来，进行混合。相邻的区域范围取决于g矩阵的维度，维度越大，涉及的周边像素越多。而矩阵的设计，则决定了这种混合输出的图像跟原始图像比，究竟是模糊了，还是更锐利了。

比如说，如下图像处理矩阵将使得图像变得更为平滑，显得更模糊，因为它联合周边像素进行了平均处理：

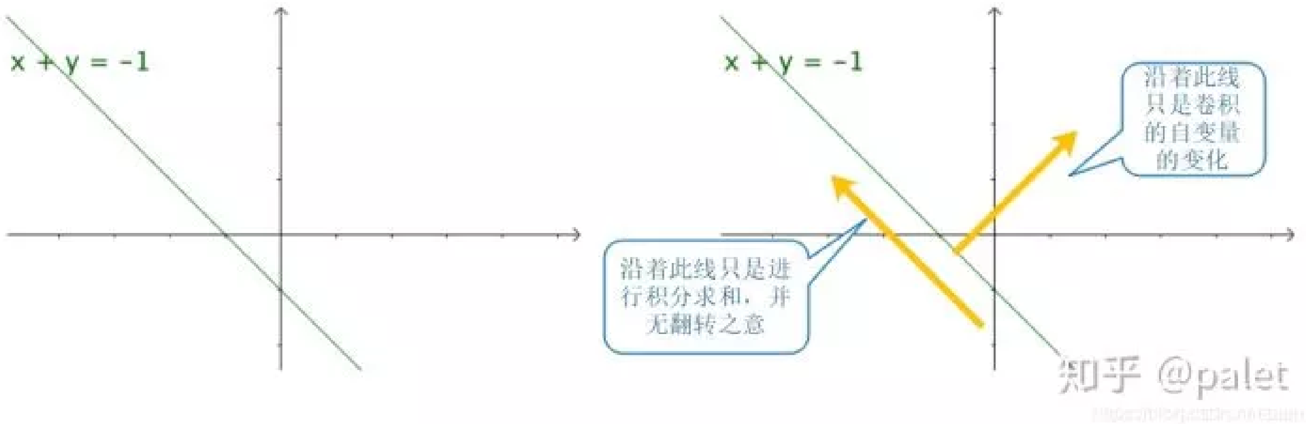
$$g=\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

而如下图像处理矩阵将使得像素值变化明显的地方更为明显，强化边缘，而变化平缓的地方没有影响，达到提取边缘的目的：

$$g=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

5、对一些解释的不同意见

上面一些对卷积的形象解释，如知乎问题 卷积为什么叫「卷」积？中荆哲以及问题 如何通俗易懂地解释卷积？中马同学等人提出的如下比喻：



其实图中“卷”的方向，是沿该方向进行积分求和的方向，并无翻转之意。因此，这种解释，并没有完整描述卷积的含义，对“卷”的理解值得商榷。

6、一些参考资料

《数字信号处理（第二版）》程乾生，北京大学出版社
《信号与系统引论》 郑君里，应启珩，杨为理，高等教育出版社

想要了解更多资讯，请扫描下方二维码，关注机器学习算法那些事