一起学习支持向量机（一）：支持向量机的分类思想

原创 石头 机器学习算法那些事 2018-11-16

前言

支持向量机是一种经典的机器学习算法，在小样本数据集的情况下有非常广的应用，我觉得，不懂支持向量机不算是入门机器学习🤔。本篇循序渐进的讲解了支持向量机的分类思想，希望对您有帮助。

目录

1. 函数间隔和几何间隔

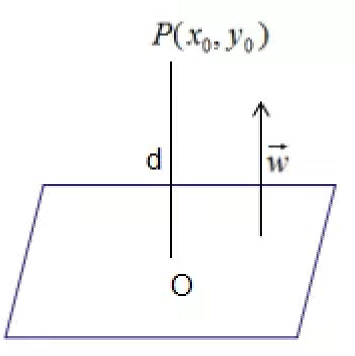
为了能够更好的阐述支持向量机的分类思想，需要理解函数间隔和几何间隔的定义。

1. 点到超平面的距离

假设超平面方程：

$$\vec{w}^T\vec{x}+b=0$$

点$P(\vec{x_0}, y_0)$到平面的距离：



$$d=\frac{|\vec{w}^T\vec{x_0}+b|}{\|w\|}, \qquad (1.1)$$

由上式可得：$d \geq 0$，没有分类信息，而函数间隔和几何间隔不仅包含了距离信息，还包含了分类信息。

2. 函数间隔和几何间隔

对于给定的训练数据集T，正样本和负样本分别为+1和-1，我们对式（1.1）稍微进行了修改：

(1). 点到平面的距离不作规范化处理，得:

$$d1 = |\vec{w}^T \vec{x}_0 + b|, \qquad (1.2)$$

(2). 去掉绝对值符号，并乘以标记结果y0，得:

$$d2 = (\vec{w}^T \vec{x}_0 + b) \cdot y_0, \quad (1.3)$$

d2表达式就是函数间隔的定义，有两层含义：大小表示点P0到超平面的距离，正负表示点P0是否正确分类，若d<0，分类错误；反之，则分类正确。

因此，我们定义点到超平面的函数间隔为:

$$\hat{\gamma} = y(w \cdot x + b) \qquad (1.4)$$

接着定义训练数据集T的函数间隔是所有样本点(xi,yi)的函数间隔的最小值，即:

$$\hat{\gamma} = \min \hat{\gamma}_i \qquad (1.5)$$

其中，

$$\hat{\gamma}_i = y_i(w \cdot x_i + b), i = 1,2,\ldots,N \qquad (1.6)$$

但是，若成比例的增加超平面参数w和b，超平面没有改变，但是函数间隔却成比例的增加了，这是不符合理论的，因此，需要对函数间隔进行规范化，得:

$$\tilde{\gamma}_i = \frac{\hat{\gamma}}{\|w\|} \qquad (1.7)$$

(1.7)式就是几何间隔的定义，几何间隔的值是确定的。

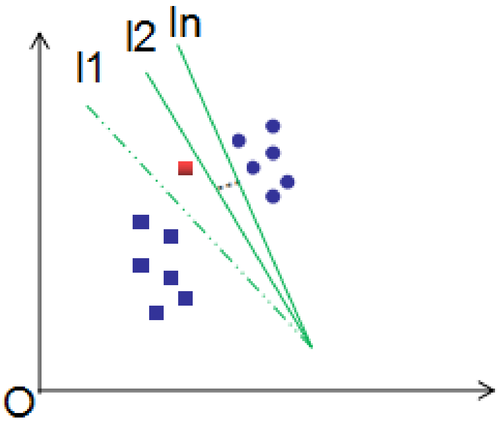
2. 支持向量机的分类思想

1. 感知机和logistic回归的分类思想

感知机的损失函数为所有误分类点到超平面的距离之和:

$$L(w, b) = -\sum_{x_i \in M} y_i(w \cdot x_i + b) \qquad (2.1)$$

无误分类点时，损失函数为0，满足模型分类条件的超平面有无数个，如下图:



初始超平面为l1，误分类点为红色框，最小化式（2.1）有无穷多个满足损失函数为0的超平面，如上图的l2~ln，然而，最佳分类超平面只有一个，即支持向量机所对应的超平面。

假设logistic回归的模型是$h_\theta(x)$，logistic回归的损失函数：

$$L(\theta)=-\sum_{i=1}^{N}(y_i\log(h_\theta(x_i))+(1-y_i)\log(1-h_\theta(x_i))) \qquad (2.2)$$

简单分析（2.2）式的分类思想：

(1). 当yi=1时，损失函数简化为：

$$L(\theta)=-\sum_{i=1}^{N}\log(h_\theta(x_i)) \qquad (2.3)$$

若要使损失函数$L(\theta)$越小越好，则xi的值越大越好，如下图：

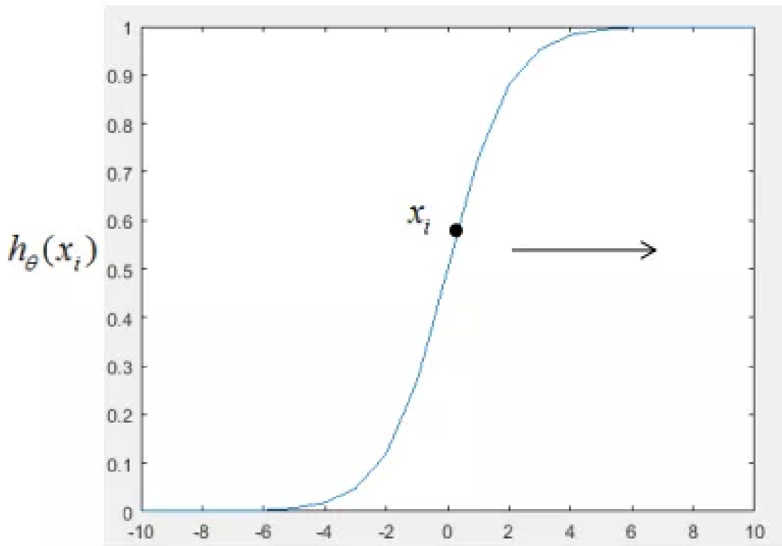


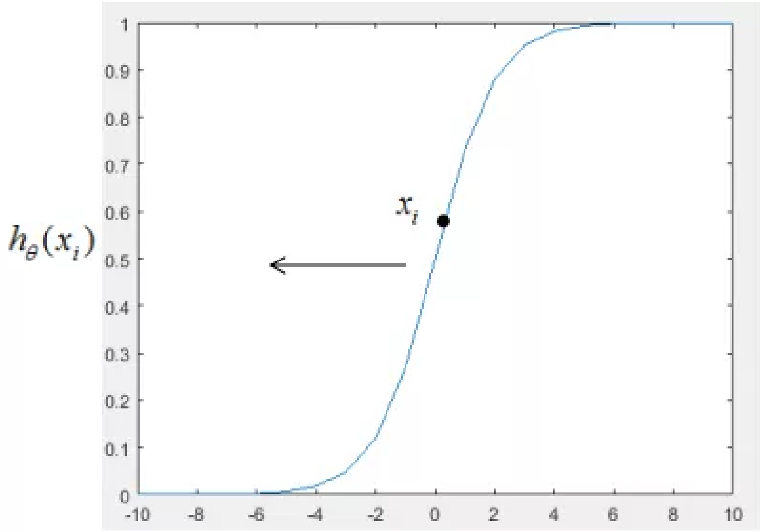
图2.1

当x_i往箭头方向移动时，损失函数$L(\theta)$逐渐变小。

(2). 当yi=0时，损失函数简化为：

$$L(\theta)=-\sum_{i=1}^{N}\log(1-h_\theta(x_i))$$

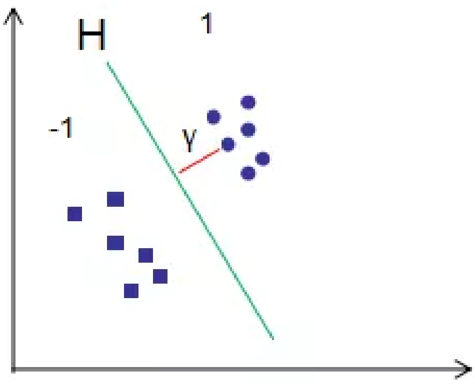
若要使损失函数 $L(\theta)$ 越小越好，则xi的值越小越好，如下图：



当 x_i 往箭头方向移动时，损失函数 $L(\theta)$ 逐渐变小。

2. 支持向量机的分类思想

支持向量机结合了感知机和logistic回归分类思想，假设训练样本点(xi,yi)到超平面H的几何间隔为γ(γ>0)，由上节定义可知，几何间隔是点到超平面最短的距离，如下图的红色直线：



用logisitic回归模型分析几何间隔：

$$h(\gamma)=\frac{1}{1+e^{-\gamma}}=P(1|\gamma)$$

因此，当γ越大时，损失函数越小，结果为正样本的概率也越大。

因此，感知机的分类思想是最大化点到超平面的几何间隔，这个问题可以表示为下面的约束最优化问题：

$$\max_{w,b} \quad \gamma \qquad (2.4)$$

$$s.t. \quad y_i\left(\frac{w \cdot x + b}{\|w\|}\right) \geq \gamma, \quad i = 1,2,\dots,N \qquad (2.5)$$

根据几何间隔和函数间隔的关系，得几何间隔的约束最优化问题：

$$\max_{w,b} \frac{\hat{\gamma}}{\|w\|} \qquad (2.6)$$

$$s.t. \quad y_i(w \cdot x_i + b) \geq \hat{\gamma}, \quad i = 1,2,\dots,N \qquad (2.7)$$

函数间隔是样本点到超平面的最短距离，因此，令函数间隔为常数1，那么其他样本点到超平面的距离都大于1，且最大化 $\frac{1}{\|w\|}$ 和最小化 $\frac{1}{2}\|w\|^2$ 是等价的。于是就得到下面的最优化问题：

$$\min_{w,b} \quad \frac{1}{2}\|w\|^2 \qquad (2.8)$$

$$s.t. \quad y_i(w \cdot x_i + b) - 1 \geq 0, \quad i = 1,2,\dots,N \qquad (2.9)$$

由(2.8)式和(2.9)式，解得最优解w*,b*，易知最优超平面到正负样本的几何间隔相等（请理解几何间隔的含义，然后仔细回想整个分类过程，就会得到这个结论）。

3. 总结

本文结合了感知机和logistic回归的分类思想来推导支持向量机的最优化问题，即最大间隔分离超平面。

参考

李航 《统计学习方法》

推荐阅读文章

线性分类模型（一）：线性判别模型分析

线性分类模型（二）：logistic回归模型分析

浅析感知机学习算法