2021年3月汇报

山东大学数学与交叉科学研究中心

兰宇恒

目录

1 课程汇报

1.1 现代微分几何

1.1.1 2021.3.02-1 节，2.1 节，2.2 节

- 本次课程首先介绍了引进黎曼流形的必要性，从拓扑空间出发，拓扑空间能不依赖距离定义连续与极限，但是缺乏足够的光滑结构来进行求导，再推广到度量空间，度量空间具有可谓的概念，但是更高阶可微没有良定义，再推广到微分流形，微分流形局部微分同胚于欧氏空间，即允许微分与积分，但是没有正规 laplace 算子并且微分等式理论有限，最后推广到黎曼流形，黎曼流形是微分流形加上黎曼度量，这种结合有多种优良性质

- 然后本次课程还介绍了几何研究的核心——求切向量：因为曲线长度可以由切向量拟合近似再求和，曲线面积或者所围的体积可以由曲线长度累和得到，曲线的夹角可以由切向量夹角得到，曲率可以由切向量推得

- 其次本次课程还介绍了 taylor 展开的一般形式

$$f(x)=\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!}\sum_{j_1,\dots,j_l}\partial_{j_1,\dots,j_l}f(x_0)(x-x_0)_{j_1}...(x-x_0)_{j_l}+R_k(x;x_0)$$

以及 taylor 展开的多重指标形式

$$f(x)=\sum_{|\alpha|\leq k}\frac{1}{\alpha!}\partial^{\alpha}f(x_0)(x-x_0)+R_k(x;x_0)$$

其中 $R_k(x;x_0)\leq\eta(s)(x-x_0)^k$, 当 $s\to 0$ 时，$\eta(s)\to 0$ 并对上述两种形式给予了证明

- 最后本次课程的最后还给出了张量场的定义以及举了一些特殊张量场的例子，再给出了多元线性映射与张量的关联

1.1.2 2021.3.10-2.3 节第一与第二部分

- 本节主要介绍了向量场和微分形式，首先从向量场出发介绍了向量场上的常见算子，梯度，散度以及二维和三维散度，并从

$$R^2: C^{\infty}(U)\xrightarrow{grad}C^{\infty}(U,R^2)\xrightarrow{curl}C^{\infty}(U)$$

以及

$$R^3: C^{\infty}(U)\xrightarrow{grad}C^{\infty}(U,R^3)\xrightarrow{curl}C^{\infty}(U,R^3)\xrightarrow{div}C^{\infty}(U)$$

中，后一算子符合前一算子为 0 的现象出发逐步引入了微分形式以及外微分的概念，并最终证明了 $d\circ d=0$，并由此统一了上述现象并将其推广至 n 维

- 本节最后还引入了 *Alternating tensor field*, 并给出了 Alternating k-tensor field 与微分 k 形式的关联

1.1.3 2021.3.15-2.3 节第三部分与 2.4 节

- 本节首先通过观察 $u = d\alpha$ 对某一个 $\alpha \in \Omega^{k-1}(U) \to du = 0$ 得到 $Im(d|\Omega^{k-1}(U))$ 是 $ker(d|\Omega^{k}(U))$ 线性子空间

- 并给出了 closed 的定义

$$du = 0$$

  以及 exact 的定义

$$u = du$$

  通过讨论上述观察的另一边推导成立的条件，引出了 de rham cohomology（上同调），最后给出了 poincaré 引理，并补充了一些上同调群的性质

- 最后简单介绍了 Riemann 度量的定义，简短来说即二阶张量加上对任意的 x 有 $g_{jk}\square x\square$ 满足对称正定，并给出了此度量下的内积，切向量以及夹角

1.1.4 2021.3.23-2.5 节

- 本次课程首先定义了正则曲线以及曲线的长度，然后给出了一个重要定理，长度极小曲线是测地线，即满足测地线方程（定理 2.26），但未证明

- 然后给出了两个引理，首先是曲线的变分其满足的性质（引理 2.28），然后是第一变分公式（引理 2.29）

- 最后通过上述两个引理，证明了定理 2.26，并通过这个定理，证明了 R^2 上测地线即为两点之间的线段，最后还补充了 critical ponits，minimizers 以及 stationary points 的定义，并证明了 L 的 critical points 就是测地线方程（定理 2.31）

1.2 pde 经典解

1.2.1 2021.3.09-第一章，第二章，第三章

第一章简单介绍了 pde 的基础概念，第二与第三章则介绍了一些基本方程的解法

- 1.1 节回顾了基本记号

- 1.2 节介绍了 pde 的一般形式与常见的分类，方法一: 线性，半线性，拟线性，全非线性；方法二：散度形式与非散度形式；方法三：椭圆方程，抛物线方程，双曲线方程

- 1.2 节还介绍了三个定理，gauss-green 公式，div 定理，green 定理，并证明了三者可以互推

- 第二章主要介绍了一阶方程的解法，2.1 节介绍了常系数方程的解法，2.2 节介绍了非定常系数的解法

- 第三章主要以传输方程为例讲了通过特征线方法求解齐次方程以及非齐次方程

1.2.2 2021.3.16-第四章 4.1 节，4.2 节，4.3 节，4.4 节

第四章则开始逐步介绍 Laplace 方程

- 首先介绍了调和函数的定义，4.1 节主要介绍了基本解，并通过极坐标求得基本解
- 4.2 节则主要介绍了 poisson 方程，并证明了 poisson 方程的解由基本解卷积 f 得到
- 4.3 节则介绍了卷积与磨光核的一些性质
- 4.4 节则介绍了平均值性质

1.2.3 2021.3.24-第四章 4.5 节

- 4.5 节继续介绍调和函数的性质，通过平均值性质，推导出了以下性质，极大值以及极小值原理，dirichlet 问题的唯一性，光滑性，导数估计性质

1.2.4 2021.3.30-第四章 4.5 节，4.6 节

- 本节继续介绍调和函数的性质，首先通过导数的估计性质得到了 liouville 定理，再通过 liouville 定理得到了 possion 方程的唯一性
- 然后给出了 harnack 不等式及其一般形式，最后由 harnack 不等式得到了强最大值原理
- 4.6 节则开始介绍 Green 函数，通过求解 possion 方程，找到了 G，并给出了 Green 函数的定义

1.3 sobolev 空间

1.3.1 2021.3.08-第一章

本章主要介绍了 sobolev 空间引入的两种方法

- 从解 dirichlet 问题出发引入 sobolev 空间不等式，运用变分的直接方法极小 Dirichlet 能量
- 从考虑非光滑微积分出发，逐步扩展函数类，得到 $W^{k,p}$ 空间

1.3.2 2021.3.11-第二章

第二章则重点回顾了是分析以及函数类基础

- 首先是测度与积分，回顾了微积分基本定理，cavalier 原则，fubini 定理，极坐标公式，lebesgue 积分下的三个收敛定理，单调收敛，fatou 引理，控制收敛定理
- 然后回顾了 L^P 空间上的定理，hoilder 不等式，minkoski 不等式以及推广的 minkoski 不等式，L^P 空间是完备空间，lebesgue 积分的绝对收敛性

- 最后回顾了卷积与磨光核，给出了磨光核以及 f 的磨光的定义，并给出了基本性质，并通过这些工具证明了 C_0^∞ 在 L^P 空间中稠密

1.3.3 2021.3.19-第三章 3.1 节，3.2 节

- 3.1 节开始介绍弱导数，首先通过研究一般区域上的连续函数得到形式上弱导数，然后引入弱导数定义，并由磨光核的性质给出了变分法基本引理的推广
- 3.2 节则通过弱导数定义了 sobolev 空间，然后给出了 sobolev 空间的一些性质，最后证明了如此定义的 sobolev 空间是 Banach 空间

1.3.4 2021.3.27-第三章 3.3 节，3.4 节

- 3.3 节则重点讲了如何运用光滑函数逼近 sobolev 空间，首先通过引理 2.7 与引理 3.12 得到 R^n 上 sobolev 空间上光滑函数的稠密性，然后通过单位分解函数这个工具，证明了一般区域上稠密性也成立
- 3.4 节则分别讲了两个概念，$H_{loc}^{k,p}$ 与 $W_0^{k,p}$，并分别证明了对于非无穷维数，其分别与 $W_{loc}^{k,p}$ 与 $W^{k,p}$ 相等

1.4 随机过程

1.4.1 2021.3.07-第一章，第二章 2.1 节，2.2 节

- 第一章主要介绍了随机微分方程在不同领域的实例
- 2.1 节简单回顾了概率测度，随机变量并介绍了随机过程的概念，并阐述了随机过程的几种看法，最后给出了有限维乘积测度与随机过程的等价性
- 2.2 节主要介绍了布朗运动，首先给出了布朗运动的定义，然后给出了布朗运动的三条性质，高斯过程，有独立增量，以及有连续的等价类，上课老师还给出了布朗运动的另外一种定义，平稳独立增量的连续过程，并证明了这种定义与前一种定义等价

2 自学课程

2.1 变分法讲义

2.1.1 2021.3.20-第一讲

第一讲简单介绍了变分学的一些入门

- 1.1 节介绍了变分学的研究内容，本书的特点以及本书的结构
- 1.2 节介绍了泛函以及变分学中研究的主要形式
- 1.3 节以及 1.4 节介绍了一些典型的例子

2.1.2 2021.3.30-第二讲，

第二讲着重介绍了 Euler-lagrange 方程

- 2.1 节介绍了函数极值必要条件的推导
- 2.2 节则类比函数极值的必要条件推导 Euler-lagrange 方程，最后还介绍了变分导数的定义
- 2.3 节则给出了无边值条件下的泛函极值问题
- 2.4 节则给出了求解 Euler-lagrange 方程的例子，情形一：L 不含 u；情形二：自守系统，L 不含 t；情形三：L 不含 p
- 2.4 节最后介绍并证明了 E-L 方程在变量替换的意义下不变

2.2 雅思备考

雅思背考，每天晚上抽出一个小时强化听力与口语

3 科研

3.1 课题

3.1.1 2021.3.26-老师第一次答疑

本次答疑解决了大部分细节问题以及概念问题，并且给出了下一次讨论的目标以及要求

- 解决以下问题：如果 f 满足 $diamf(B) \leq g(diamB)$ 此处 $g : R \to [0, \infty)$ 是一个非负函数，此处 B 是一个开球，请找出 g 所满足的最弱条件
- 对于论文中给出的两个小证明自己给出推导过程
- 从大局上看文章脉络整体思路，下一次谈论的时候给出具体的想法

4 不足与展望

4.1 不足

本学期课程比较重，有现代微分几何，sobolev 空间，以及 pde 经典解三门基础数学的课，再加上现代随机过程一门金融数学的课，另外还有测度论讨论班，几何函数论-分析类问题的课题项目，并且这个学期开始准备把变分法讲义这本书一点点看完，然后这个学期被选为入党积极分子，需要坚持上党课，写思想汇报，最后本年度打算最迟暑假八月份考一次雅思，所以晚上会抽出一个小时时间备考雅思。本月是开学的第一个月，还有点寒假的劲头没有过，还是容易晚上熬夜太晚早上八点才起，并且有的时候事情来得太突然容易打乱整体的学习进度。下个月要保持合理作息，坚持当天学习的内容当天消化，并且每周末要养成整理本周所学的习惯

4.2 下个月计划

- 首要的事还是把专业课的事情放在首位
- 其次要有序的推进科研项目的进度，到下一次答疑的时候能达到老师的要求
- 争取下一个月能把变分学讲义的第三，四，五讲看完
- 雅思听力 voa 听力听完二十篇
- 最后系统整理本科所学的课程导入 ipad