2021 年 8 月汇报

山东大学数学与交叉科学研究中心

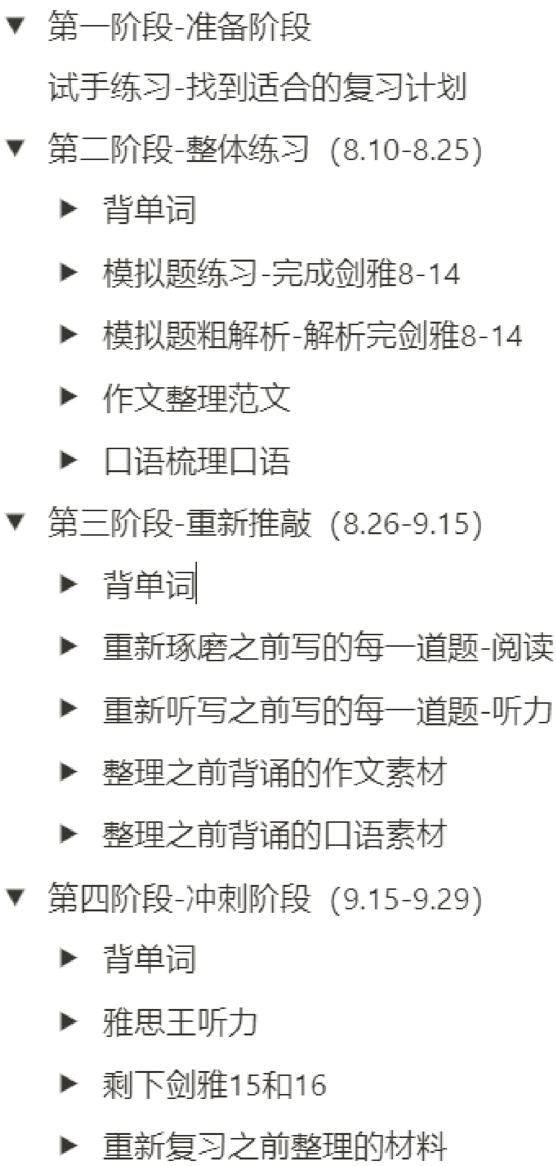
兰宇恒

目录

1 雅思备考

1.1 雅思复习计划

雅思经过暑假的学习对考试已经有初步的印象，到九月份继续把剩下的剑桥雅思练习做完，争取雅思首考取得好成绩。



- ▼ 第一阶段-准备阶段
  试手练习-找到适合的复习计划
- ▼ 第二阶段-整体练习（8.10-8.25）
  - ▶ 背单词
  - ▶ 模拟题练习-完成剑雅8-14
  - ▶ 模拟题粗解析-解析完剑雅8-14
  - ▶ 作文整理范文
  - ▶ 口语梳理口语
- ▼ 第三阶段-重新推敲（8.26-9.15）
  - ▶ 背单词
  - ▶ 重新琢磨之前写的每一道题-阅读
  - ▶ 重新听写之前写的每一道题-听力
  - ▶ 整理之前背诵的作文素材
  - ▶ 整理之前背诵的口语素材
- ▼ 第四阶段-冲刺阶段（9.15-9.29）
  - ▶ 背单词
  - ▶ 雅思王听力
  - ▶ 剩下剑雅15和16
  - ▶ 重新复习之前整理的材料

图 1: 备考计划

1.2 雅思模考成绩

暑假练习的雅思真题模考成绩

分数

模考	text1	text2	text3	text4
剑雅7	6.0	5.5	6.5	5.5
剑雅8	6.0	8.0	6.0	6.5
剑雅9	7.5	6.5	7.0	7.0
剑雅10	6.0	7.0	6.5	7.0
剑雅11	7.0	6.5		

图 2: 剑桥雅思模考成绩

2 变分学讲义

暑假期间把变分学讲义继续往后看了两讲

2.1 第五讲 Hamilton-Jacobi 理论

这一讲首先给出了通过构造 Mayer 场上一个单值函数得到程函的定义

$$g(t,u)-g\left(t_0,u_0\right)=\int_\gamma \omega$$

其中 γ 是连接 (t_0,u_0) 与 (t,u) 的任意一条曲线。然后由极值场上的程函得到 Cartheodory 方程

$$\begin{cases} \nabla_u g(t,u)=L_p(t,u,\psi(t,u)) \\ \partial_t g(t,u)=L(t,u,\psi(t,u))-\langle\psi(t,u),L_p(t,u,\psi(t,u))\rangle \end{cases}$$

紧接着介绍了 Legendre 变换的相关概念，首先介绍了 Legendre 变换的定义：
设 $f\in C^2\left(\mathbb{R}^1,\mathbb{R}^1\right)$ 的导数 f' 有反函数 ψ. 记 $x=\psi(\xi)$. 称

$$f^*(\xi)=\xi x-f(x)=\xi\psi(\xi)-f\circ\psi(\xi)$$

为 f 的 Legendre 变换. 并介绍了 Legendre 变换的两条性质：
(1) 若 $f\in C^s, s\geqslant 2$, 则 $f^*\in C^s$. (2) $f^{**}=f$. 即, Legendre 变换是自反的. 然后介绍了 Hamilton 方程的相关概念，首先给出了 Hamilton 函数的概念：

$$H(t,u,\xi):=L^*(t,u,\xi)=\sum_{i=1}^N \xi_i p_i-\left.L(t,u,p)\right|_{p=\varphi(t,u,\xi)}$$

我们把 H 称为 Hamilton 函数. 然后通过 Legendre 变换的自反性得到 Hamilton 方程组

$$\dot{\xi}(t)=-H_u(t,u(t),\xi(t)),\quad \dot{u}(t)=H_\xi(t,u(t),\xi(t))$$

。并给出了以下定理的一个证明

Theorem 2.1. *Hamilton* 方程组的解曲线 $\{(t,u(t),\xi(t))\mid\forall t\}$ 保持在同一个等值面上.

最后本讲介绍了 Hamilton-Jacobi 方程的定义

$$\partial_t S(t,u)+H\left(t,u,\nabla_u S(t,u)\right)=0$$

2.2 第六讲含多重积分的变分问题

本节首先介绍并证明了以下定理

Theorem 2.2. 设 $L \in C^2, u_0 \in C^2$, 并且 u_0 是 I 在 M 上的一个极小点, 则它满足下列 E-L 方程:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial L_{p_\alpha^i}\left(x, u_0(x), \nabla u_0(x)\right)}{\partial x_\alpha} - L_{u^i}\left(x, u_0(x), \nabla u_0(x)\right) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant N$$

并推导出以下 Euler-Lagrange 算子

$$v_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial L_{p_\alpha^i}(x, u(x), \nabla u(x))}{\partial x_\alpha} - L_{u^i}(x, u(x), \nabla u(x)), \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

再给出了多元情况下的边值条件以及对应的二阶变分以及 Legendre-Hadamard 条件

$$\sum_{j,k=1}^{N} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} L_{p_\alpha^j p_\beta^k}\left(x, u_0(x), \nabla u_0(x)\right) \xi^j \xi^k \eta_\alpha \eta_\beta \geqslant 0, \forall (x, \xi, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n$$

最后给出了多元情况下的 Jacobi 场的概念:
设 $L \in C^3$, 又设 u_0 是弱极小点, 则

$$\delta^2 I\left(u_0, \varphi\right) \geqslant 0, \quad \forall \varphi \in C_0^1\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$$

即 $Q_{u_0}(\varphi) \geqslant 0$. 泛函 Q_{u_0} 的 E-L 方程是一个齐次二阶偏微分方程组:

$$\sum_{k=1}^{N} \left[\sum_{\alpha=1}^{n} \partial_\alpha \left(\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}^{jk} \partial_\beta \varphi^k + b_\alpha^{jk} \varphi^k\right) - \left(\sum_{\beta=1}^{n} b_\beta^{jk} \partial_\beta \varphi^k + c^{jk} \varphi^k\right)\right] = 0$$
$$j = 1, 2, \cdots, N$$

再在这基础上介绍了严格 Legendre-Hadamard 条件

Theorem 2.3. 设 $\left(a_{\alpha\beta}^{jk}(x)\right)$ 是 $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ 上的一致连续函数, 又设存在 $\sigma > 0$ 使得

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \sum_{j,k=1}^{N} a_{\alpha\beta}^{jk}(x) \xi^j \xi^k \eta_\alpha \eta_\beta \geqslant \sigma |\xi|^2 |\eta|^2, \quad \forall x \in \Omega$$

则存在 $\alpha > 0$ 及 $C_0 > 0$ 使得

$$\int_\Omega \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \sum_{j,k=1}^{N} a_{\alpha\beta}^{jk}(x) \partial_\alpha \varphi^j \partial_\beta \varphi^k dx \geqslant \alpha \int_\Omega |\nabla \varphi(x)|^2 dx - C_0 \int_\Omega |\varphi(x)|^2 dx$$
$$\forall \varphi \in C_0^1\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$$

Theorem 2.4. 设 $L \in C^2$ 满足严格 *Legendre-Hadamard* 条件, 即 $\exists \sigma > 0$, 使得

$$L_{p_\alpha^i p_\beta^j}(x,u,p)\xi^i\xi^j\eta_\alpha\eta_\beta \geqslant \sigma|\xi|^2|\eta|^2, \quad \forall (x,u,p) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$$

又设存在 $\mu > 0$, 使得

$$Q_{u_0}(\varphi) \geqslant \mu \int_\Omega |\varphi|^2 dx, \quad \forall \varphi \in C_0^1\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$$

则存在 $\lambda > 0$ 使得

$$Q_{u_0}(\varphi) \geqslant \lambda \int_\Omega \left(|\nabla\varphi|^2 + |\varphi|^2\right) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^1\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$$

从而 u_0 是 I 的一个严格弱极小点.

3 暑期学校

北大国际数学中心，暑期学校由 8.2 日开至 8.13 日，期间课程包括 PDE，复几何和黎曼几何，期间我将 PDE 课程的内容整理如下

3.1 学习的内容

本次暑期内容包含以下几个内容

- 从调和函数出发，介绍了平均值性质，极大值原理，Harnack 不等式以及调和函数的 Green 表示
- 在 Holder 空间下的 Newton potential estimates，包括调和函数的内部估计和外部估计的相关引理
- 在 L^p 空间下的 Newton potential estimates，本节主要证明了以下定理:
  Let $f \in C_0^2(\Omega)$ with Ω being a bounded domain. Let

  $$w(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y) f(y) \mathrm{d}y$$

  Then we have 1. $\|D^2 w\|_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)}$, 2. $|\{|D^2 w| > t\} \cap \Omega| \le \frac{C(n)}{t} \|f\|_{L^1(\Omega)}$, 3. $\|D^2 w\|_{L^p(\Omega)} \le C(n,p) \|f\|_{L^p(\Omega)}$ for any $1 < p < \infty$.
- 连续方法以及 Fredholm 变换，本节简单介绍了三个相关定理
- 介绍一般的线性椭圆方程，并介绍一般椭圆方程所有的极大值原理，Schauder 估计以及存在性问题
- 最后介绍了 L^p-Schauder 估计