2022 年 6 月总结

兰宇恒

目录

Part I
毕业设计进展

1 文献综述

以下内容为听讨论班，所做的文献的简单叙述

- [1] Duffie-1992 这篇文章把递归效用推广到了连续时间框架下。
- [3] Elkaroui-1997 这篇文章提出了非线性的倒向随机微分方程的概念; 研究了非线性财富方程的递归效用优化问题，由于次文章中用的是最大值原理刻画最优解，所以这篇文章中的财富方程系数和递归效用过程系数都是假设连续可微的，但有一些重要的财富方程的系数并不满足可微性假设，比如借入借出利率不相等的情形，再比如大户投资者——价格压力情形，以及 K-未知情形，也不满足可微性条件。
- [5] Zengjing Chen-2002 这篇文章提出了著名的 K-未知情形；研究了带有漂移项不确定性的随机递归效用理论。
- [4] Elkaroui-2001 这篇文章研究了当 BSDE 的生成元是光滑函数时的递归效用最大化问题，用最大值原理刻画了最优解，并且证明了最优解的存在性。

2 遇到的问题与解决

问题 1——学习中

带消费问题的 BSDE 问题的存在唯一性证明

如下形式的 BSDE 的存在唯一性的证明

$$Y(t) = u(X(T)) + \int_t^T (u(C(s)) + f(s, Y(s), Z(s)))ds - \int_t^T Z(s)dW(s) \tag{A2}$$

问题 2——学习中

如下形式的随机微分方程的变分形式

这种形式的 BSDE 如何应用 Elkaroui(1997)[3] 中的方法写出其的变分形式

$$-dX(t) = -\big[X_t\big(r + q(t)\sigma(t)^{-1}(\phi\hat{M}_t + (1-\phi)\hat{\mu}_t - r)\big) - C_t\big]dt - X_t q(t)dW_t$$

问题 3——学习中

如下形式的随机微分方程的变分形式

此问题同问题 2

$$\begin{aligned}dX_t = &\left[X_t\left(\pi_t\left(\mu_s+\phi M_t-r-\sigma_s\sigma_P\rho\right)+r-\mu_P+\sigma_P^2\right)-C_t\right]dt\\&+X_t\pi_t\sigma_s dW_1-X_t\sigma_P dW_2.\end{aligned}$$

问题 4——未解决

考虑非完全信息的可行性

非完全信息中的新息过程是否可以用于动量效应这种自身带有 S_t 形式的 BSDE

3 研究安排

- 暑假期间争取把解析方法这部分解决并弄明白

Part II 毕业设计草稿

1 引言

1.1 文章背景

(待补充)

1.2 文章结构

解决投资组合最优化问题分为两部分，解析方法和数值方法。

解析方法：从引入动量效应出发，先计算基于递归效用的投资组合最优化理论，然后进一步将递归效用替换为 BSDE，计算最大化问题；再引入通货膨胀，先计算基于递归效用的投资组合最优化理论，然后进一步将递归效用替换为 BSDE，计算最大化问题。

数值方法：应用数值方法计算投资组合最优化问题，粒子群算法，首先将粒子群算法运用于期望效用的投资组合问题求解出来，然后首先计算基于动量效应的递归效用投资组合最优化理论，然后进一步计算动量效应的 BSDE 投资者最优化理论；再引入通货膨胀，先计算基于递归效用的投资组合最大化问题，然后进一步计算 BSDE 的投资组合最大化理论。

解析方法与数值方法交叉分析：一、用数值方法分析解析方法中得到的解关于参数的变化，并给予经济解释，1. 基于动量效应的递归效用中鞍点的参数影响；2. 基于动量效应的 BSDE 中鞍点的参数影响；3. 再引入通货膨胀的递归效用中鞍点的参数影响；4. 再引入通货膨胀的 BSDE 中鞍点的参数影响；二、比较基于递归效用的解析方法与数值方法的差异，1. 基于动量效应的递归效用与数值方法的比较；2. 基于动量效应的 BSDE 与数值方法的不叫；3. 再引入通货膨胀的递归效用与数值方法的比较；4. 再引入通货膨胀的递归效用与数值方法的比较。

总结与展望：在解析方法方面，横向扩展，可以将此非线性分析方法应用到带其他因子的问题中；纵向扩展，可以考虑更一般的财富方程非线性的情况；更进一步还可以考虑另外一种投资组合最优化方法均值-方差方法。在数值方法方面，可以考虑其他的算法，路径坐标优化算法，深度学习算法，对抗神经网络算法，并比较算法的优劣。

2 预备知识

- 预备金融知识
  - 投资组合理论
  - 财富方程
  - 动量效应
  - 通货膨胀
- 预备数学知识
  - 连续时间下的投资组合选择问题
  - 鞅方法
  - 变分形式
  - 凸对偶原理
  - 递归效用函数
  - BSDE 解的存在唯一性
  - 可微系数的期望效用最大化方法 (HJB 方程)
  - 可微系数的递归效用最大值方法 (最大值原理)

3 第一部分 考虑动量效应

3.1 基本模型

3.1.1 基本假设

针对基于动量效应的投资组合最优化问题，我们的模型考虑以下假设

- 投资者可以进行连续交易，即两次交易的时间可以任意的小。
- 金融市场中有两种资产，即无风险资产和风险债券。
- 投资者均为小规模投资者，也就是那些不会影响市场价格的投资者。

结合以上假设，我们考虑有 1 个无风险资产和 d 个风险资产, 令 $B=\{B(t)\mid \mathrm{t}\in[0,\infty)\}$ 表示 t 时刻无风险资产的价格过程, 则无风险资产价格过程满足

$$dB_t=\mathrm{r}B_tdt.$$

其中 r 是常数, 代表无风险利率。

3.1.2 引入动量效应

为了引入动量效应，Koijen(2009)[8] 建立了反应股票过去表现的状态变量 M_t 其形式如下:

$$M_t=\int_0^t e^{-w(t-u)}\frac{dS_u}{S_u}.$$

其中 S_t 为风险资产所满足的价格过程。$e^{-w(t-u)}$ 称为加权方式。$w>0$, 这里为了对模型进行简化, 我们假定 $w=1$ 。将上式等式两边对时间 t 进行微分, 我们可以得到:

$$dM_t=\frac{dS_t}{S_t}-M_tdt.$$

然后参照 Koijen(2009)[8] 中对价格过程的刻画，则 d 个风险资产价格过程满足如下的随机微分方程组：

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)}=\big(\phi_iM_i(t)+(1-\phi_i)\mu_i(t)\big)dt+\sum_{j=1}^d\sigma_{ij}(t)dW_j(t),i=1,\ldots,d$$

其中 $W=(W_1,\ldots,W_d)'$ 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0},P)$ 上的 d-维标准布朗运动。$\mathcal{F}_t$ 适应过程 $\{\mu'=(\mu_1(t),\ldots,\mu_d(t)),t\in[0,T]\}$ 为股票的预期收益率且 $\mu>r$。矩阵 σ_{ij} 是股票的波动率。$0<\phi_i<1$, 表示动量效应的强弱。

不失一般性，我们取 $d=1$，则模型简化为

$$\frac{dS_t}{S_t}=\big(\phi M_t+(1-\phi)\mu_t\big)dt+\sigma_tdW_t \tag{1}$$

再将上式代入状态变量的方程，我们得到了

$$dM_t=\big((1-\phi)(\mu_t-M_t)\big)dt+\sigma_tdW_t. \tag{2}$$

3.1.3 推导财富过程

接下来我们推导财富过程，首先定义消费 C 是 $\mathcal{F}$ 可测的、非负的实值过程, 因此对于任意时间 t 都有 $\int_0^t|C_s|\,ds<\infty$ 。C_s 表示的是投资者在时间 $s\in[0,\infty)$ 所选择的消费。

一个自融资的投资者以初始财富 $x>0$ 在假设的金融市场上进行投资, 他的财富过程 $X(\cdot)$ 满足如下随机微分方程:

$$dX_t=\pi_tX_t\frac{dS_t}{S_t}+(1-\pi_t)X_t\frac{dB_t}{B_t}-C_tdt$$

再将 (1) 式代入上式，我们得到了如下基于动量效应的财富过程的随机微分方程

$$dX_t = \big[X_t\big(r + \pi_t(\phi M_t + (1-\phi)\mu_t - r)\big) - C_t\big]dt + X_t\pi_t\sigma_t dW_t \tag{A1}$$

其中 M_t 满足 (2) 式。

3.1.4 引入带消费的递归效用函数

接下来我们定义如下形式的关于消费的递归效用

$$Y(t) = u(X(T)) + \int_t^T (u(C(s)) + f(s, Y(s), Z(s)))ds - \int_t^T Z(s)dW(s) \tag{A2}$$

我们对 f 和 u 有如下几条假设：

- (假设 1)
  - $f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是 $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$-适应过程, $\forall (y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ 。
  - f 对参数满足一致 Lipschitz 性，即存在一个常数 $L \geq 0$ 使得

$$\begin{gathered} |f(t,y_1,z_1) - f(t,y_2,z_2)| \leq L(\|y_1 - y_2\| + \|z_1 - z_2\|) \\ \forall (t,\omega,y_1,y_2,z_1,z_2) \in \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \end{gathered}$$

  - $f(t,\cdot,\cdot)$ 关于 t 连续并且 $E\int_0^T f^2(t,0,0)dt < +\infty$。
- (假设 2)
  - $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 连续可微并且满足线性增长条件。

结合 (A1)(A2) 两式，如果我们假设生成函数 f 满足假设 (假设 1)，效用函数 u 满足假设 (假设 2), 并且不允许破产，则我们的递归效用优化问题可以表示为:

$$\text{最大化} Y^{x,\pi}(0), \text{ s.t. } \begin{cases} X(t) \geq 0, \quad t \in [0,T], \text{ a.s.,} \\ \pi(\cdot) \in M^2_{\mathbf{G}}, \\ (X(\cdot),\pi(\cdot)) \quad \text{满足式}(A1), \\ (Y(\cdot),Z(\cdot)) \quad \text{满足式}(A2), \end{cases} \tag{Q1}$$

其中 $M^2_{\mathbf{G}}$ 是假设投资组合过程满足平方可积性的集合

3.2 凸对偶方法求解最优化问题

3.2.1 问题的倒向形式

然后我们同样参考 Elkaroui(1997)[3] 这篇文章中求解非线性 BSDE 的办法，首先令 $q(\cdot) := \sigma(\cdot)\pi(\cdot)$ 这样财富方程和递归效用过程可以写成:

$$\begin{cases} -dX(t) = -\big[X_t\big(r + q(t)\sigma(t)^{-1}(\phi\hat{M}_t + (1-\phi)\hat{\mu}_t - r)\big) - C_t\big]dt - X_t q(t)dW_t, \\ X(T) = \xi \\ -dY(t) = \big[u(C(t)) + f(t, Y(t), Z(t))\big]dt - Z(t)d\widehat{W}(t) \\ Y(T) = u(\xi) \end{cases} \tag{A5}$$

其中“控制变量”终端财富 ξ 是从下面这个集合中选出来的

$$U := \left\{\xi \mid \xi \in L^2, \xi \geq 0\right\}.$$

有了上述约束后我们把 $A3$ 的解记成 $\left(X^\xi(\cdot), q^\xi(\cdot), Y^\xi(\cdot), Z^\xi(\cdot)\right)$。从而，我们的问题转化成下面的优化问题:

$$\text{最大化} J(\xi) := Y_0^\xi, \text{ s.t.} \begin{cases} \xi \in U, \\ X_0^\xi = x, \\ \left(X^\xi(\cdot), q^\xi(\cdot)\right), \left(Y^\xi(\cdot), Z^\xi(\cdot)\right) \text{ 满足式}(A3). \end{cases} \tag{Q2}$$

其中 X_0^ξ, Y_0^ξ 分别表示 $X^\xi(0), X^\xi(0)$。

注 3.1. 两者问题的等价性说明

注 3.2. 转化优势从状态约束变成控制约束

3.2.2 问题的变分形式

由于没有 f 的可微性，则上面的优化问题没办法使用最大值原理，但我们可以将可微条件放宽，假设 f 的凹性，然后应用凸对偶的方法进行求解。

- (假设 3)
  - 函数 $(y, z) \mapsto f(\omega, t, y, z)$ 对任意 $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$ 都是凹函数。
- (假设 4)
  - $u : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ 严格单调递增, 严格凹, 连续可微并且满足

$$u'(0+) := \lim_{x\to 0} u'(x) = \infty, \quad u'(\infty) := \lim_{x\to\infty} u'(x) = 0.$$

再应用 Elkaroui, Peng and Quenez(2001)[4] 中性质 3.4 的办法，给出 (Q2) 问题的变分形式

$$\text{最大化} J(\xi) = \inf_{(\beta,\gamma)\in\mathcal{B}} E\left[\int_0^T \Gamma_{0,s}^{\beta,\gamma} F(s, \beta(s), \gamma(s))ds + \Gamma_{0,T}^{\beta,\gamma} u(\xi)\right] \tag{Q3}$$

证明上述变分形式与倒向形式等价需要如下的命题:

命题 3.3. *f+u* 的 *Fenchel-legendre* 变换

命题 3.4. 参考域 B 是一个凸集

引理 3.5. 证明问题 *(Q2)* 等价于问题 *(Q3)*

其中函数 F 是 $u+f$ 的凸对偶函数并且

$$\begin{aligned} N_{t,s}^{\mu,\nu} &= e^{-\int_t^s\left(\mu(r)+\frac{1}{2}\|\nu(r)\|^2\right)dr-\int_t^s\nu'(r)dW(r)}, \\ \Gamma_{t,s}^{\beta,\gamma} &= e^{\int_t^s\left(\beta(r)-\frac{1}{2}\|\gamma(r)\|^2\right)dr+\int_t^s\gamma'(r)dW(r)} \end{aligned}$$

3.3 凸对偶方法求解

(学习中)

- 应用 min-max V 下被 V 上控制住，则如果能够找到 V 下 =V 上，则最优解找到
- 函数 u+f 的凸对偶

引理 3.6. 鞍点的条件

引理 3.7. 证明没有对偶间隙

引理 3.8. 四元组的存在性

定理 3.9. 证明最优财富终端值的存在性并求解

3.4 鞅方法求解最优投资组合

定理 3.10. 在得到最优终端财富后，通过求解财富过程方程来得到最优投资组合

解释最优投资组合背后的现实意义

4 第二部分 引入通货膨胀

4.1 基本模型

4.1.1 基本假设

类比基于动量效应的投资组合最优化问题，我们的模型仍然考虑以下假设

- 投资者可以进行连续交易，即两次交易的时间可以任意的小。
- 金融市场中有两种资产，即无风险资产和风险债券。
- 投资者均为小规模投资者，也就是那些不会影响市场价格的投资者。

结合以上假设，我们考虑有 1 个无风险资产和 d 个风险资产, 令 $B=\{B(t) \mid \mathrm{t} \in[0, \infty)\}$ 表示 t 时刻无风险资产的价格过程, 则无风险资产价格过程满足

$$dB_t=\mathrm{r} B_t dt.$$

其中 r 是常数, 代表无风险利率。

4.1.2 引入通货膨胀并推导财富过程

为了考虑通货膨胀的影响，我们参照 Yongqiang Liu(2020)[7] 的方法，引入价格因子，将名义财富过程进行折现得到实际财富过程。并建立消费篮子价格的动力学方程。

首先定义名义财富过程 $X^N=\left(X_t^N\right)_{t \geq 0}$, 则名义财富过程满足以下的随机微分方程:

$$dX_t^N=\pi_t X_t^N \frac{dS_t^N}{S_t^N}+\left(1-\pi_\imath\right) X_t^N \frac{dB_t^N}{B_t^N}-C_t^N dt.$$

然后将动量效应满足的方程代入上式, 我们可以得到名义财富过程满足以下随机微分方程:

$$dX_t^N=\left[X_t^N\left(r+\pi_t\left(\mu_s+\phi M_t-r\right)\right)-C_t^N\right] dt+X_t^N \pi_t \sigma_s dW_1.$$

由于考虑通货膨胀的影响, 我们要得到实际财富过程, 需要引进价格因子, 将名义财富过程进行折现得到实际财富过程。引入消费篮子价格的动力学方程:

$$\frac{dP(t)}{P(t)}=\mu_p dt+\sigma_p dZ_2.$$

其中 μ_p 是预期通胀率, $\sigma_P>0$ 是通胀波动率。我们假设布朗运动 W_1 和 W_2 是线性相关的, 相关系数为 ρ, 即 $dW_1 dW_2=\rho dt$ 。

前面得到的财富过程表示的是名义财富过程的动力学方程, 为了得到实际财富过程, 我们需要进行折现, 即:

$$X_t=\frac{X_t^N}{P(t)}$$

其中 X_t 为实际财富, 根据伊藤公式, 我们可以得:

$$\begin{aligned}
d \frac{1}{P(t)} & =-\frac{1}{P^2(t)} dP(t)+\frac{1}{P^3(t)} dP(t) dP(t) \\
& =-\frac{1}{P(t)}\left[\left(\mu_P-\sigma_P^2\right) dt+\sigma_P dW_2\right].
\end{aligned}$$

因此我们可以得到实际财富过程的动力学方程为:

$$
\begin{aligned}
dX_t &= d\frac{X_t^N}{P(t)} = \frac{1}{P(t)}dX_t^N + X_t^N d\frac{1}{P(t)} + dX_t^N d\frac{1}{P(t)} \\
&= \left[X_t\left(\pi_t\left(\mu_s + \phi M_t - r - \sigma_s\sigma_P\rho\right) + r - \mu_P + \sigma_P^2\right) - C_t\right]dt \\
&+ X_t\pi_t\sigma_s dW_1 - X_t\sigma_P dW_2.
\end{aligned} \tag{A4}
$$

4.1.3 引入带消费的递归效用函数

接下来我们定义如下形式的关于消费的递归效用

$$
Y(t) = u(X(T)) + \int_t^T (u(C(s)) + f(s, Y(s), Z(s)))ds - \int_t^T Z(s)dW(s) \tag{A5}
$$

我们对 f 和 u 的假设同前一部分：

- (假设 1)
  - $f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是 $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$-适应过程, $\forall (y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ 。
  - f 对参数满足一致 Lipschitz 性，即存在一个常数 $L \geq 0$ 使得

$$
\begin{gathered}
\left|f\left(t, y_1, z_1\right) - f\left(t, y_2, z_2\right)\right| \leq L\left(\left\|y_1 - y_2\right\| + \left\|z_1 - z_2\right\|\right) \\
\forall\left(t, \omega, y_1, y_2, z_1, z_2\right) \in \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d
\end{gathered}
$$

  - $f(t,\cdot,\cdot)$ 关于 t 连续并且 $E\int_0^T f^2(t,0,0)dt < +\infty$。
- (假设 2)
  - $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 连续可微并且满足线性增长条件。

结合 (A4)(A5) 两式，如果我们假设生成函数 f 满足假设 (假设 1)，效用函数 u 满足假设 (假设 2), 并且不允许破产，则我们的递归效用优化问题可以表示为:

$$
\text{最大化} Y^{x,\pi}(0),\ \text{s.t.} \begin{cases}
X(t) \geq 0, \quad t \in [0,T],\ \text{a.s.}, \\
\pi(\cdot) \in M_{\mathbf{G}}^2, \\
(X(\cdot), \pi(\cdot)) \quad \text{满足式}(A4), \\
(Y(\cdot), Z(\cdot)) \quad \text{满足式}(A5),
\end{cases} \tag{Q4}
$$

其中 $M_{\mathbf{G}}^2$ 是假设投资组合过程满足平方可积性的集合

4.2 凸对偶方法求解最优化问题

4.2.1 问题的倒向形式

为了求解上述递归效用优化问题，我们参考 Elkaroui(1997)[3] 这篇文章中求解非线性 BSDE 的办法，首先令 $q(\cdot) := \sigma(\cdot)\pi(\cdot)$ 这样财富方程和递归效用过程可以写成:

$$\begin{cases} -dX(t) = \left[X_t\left(\pi_t\left(\mu_s + \phi M_t - r - \sigma_s\sigma_P\rho\right) + r - \mu_P + \sigma_P^2\right) - C_t\right]dt \\ \qquad\qquad +X_t\pi_t\sigma_s dW_1 - X_t\sigma_P dW_2. \\ X(T) = \xi \\ -dY(t) = \big[u(C(t)) + f(t, Y(t), Z(t))\big]dt - Z(t)d\widehat{W}(t) \\ Y(T) = u(\xi) \end{cases} \tag{A6}$$

其中“控制变量”终端财富 ξ 是从下面这个集合中选出来的

$$U := \left\{\xi \mid \xi \in L^2, \xi \geq 0\right\}.$$

有了上述约束后我们把 $(A6)$ 的解记成 $\left(X^\xi(\cdot), q^\xi(\cdot), Y^\xi(\cdot), Z^\xi(\cdot)\right)$。从而，我们的问题转化成下面的优化问题:

$$\text{最大化} J(\xi) := Y_0^\xi, \text{ s.t. } \begin{cases} \xi \in U, \\ X_0^\xi = x, \\ \left(X^\xi(\cdot), q^\xi(\cdot)\right), \left(Y^\xi(\cdot), Z^\xi(\cdot)\right) \text{ 满足式}(A6). \end{cases} \tag{Q5}$$

其中 X_0^ξ, Y_0^ξ 分别表示 $X^\xi(0), X^\xi(0)$。

4.2.2 问题的变分形式

在这里我们继续假设 f 的凹性，然后应用凸对偶的方法进行求解。

- (假设 3)
  - 函数 $(y, z) \mapsto f(\omega, t, y, z)$ 对任意 $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$ 都是凹函数。
- (假设 4)
  - $u : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ 严格单调递增, 严格凹, 连续可微并且满足

$$u'(0+) := \lim_{x\to 0} u'(x) = \infty, \quad u'(\infty) := \lim_{x\to\infty} u'(x) = 0.$$

给出 (Q5) 问题的变分形式

$$\text{最大化} J(\xi) = \inf_{(\beta,\gamma)\in\mathcal{B}} E\left[\int_0^T \Gamma_{0,s}^{\beta,\gamma} F(s, \beta(s), \gamma(s))ds + \Gamma_{0,T}^{\beta,\gamma} u(\xi)\right] \tag{Q6}$$

其中函数 F 是 $u+f$ 的凸对偶函数并且

$$N_{t,s}^{\mu,\nu} = e^{-\int_t^s \left(\mu(r)+\frac{1}{2}\|\nu(r)\|^2\right)dr - \int_t^s \nu'(r)dW(r)},$$
$$\Gamma_{t,s}^{\beta,\gamma} = e^{\int_t^s \left(\beta(r)-\frac{1}{2}\|\gamma(r)\|^2\right)dr + \int_t^s \gamma'(r)dW(r)}$$

4.3 运用凸对偶方法求解上述变分形式

(学习中)

- 应用 min-max V 下被 V 上控制住，则如果能够找到 V 下 =V 上，则最优解找到
- 函数 u+f 的凸对偶

引理 4.1. 鞍点的条件

引理 4.2. 证明没有对偶间隙

引理 4.3. 四元组的存在性

定理 4.4. 证明最优财富终端值的存在性并求解

4.4 鞅方法求解最优投资组合

定理 4.5. 在得到最优终端财富后，通过求解财富过程方程来得到最优投资组合

解释最优投资组合背后的现实意义

5 第三部分 数值方法

(待暑假把解析方法全部弄明白，争取九月份开始数值方法的研究)

6 第四部分 解析方法与数值方法进行比较

6.1 数值分析

- 一、用数值方法分析解析方法中得到的解关于参数的变化，并给予经济解释
  - 1. 使用 MATLAB 分析模糊系数和 u 系数变化时对最优策略组合的影响的对比
  - 2. 使用 MATLAB 分析固定模糊系数，变化 u，观察 x 轴为动量效应初始值和 y 轴最优投资组合的曲线图；使用 MATLAB 分析固定 u 系数，变化模糊系数，观察 x 轴为动量效应初始值和 y 轴最优投资组合的曲线图
  - 3. 再引入通货膨胀分析模糊系数和 u 系数变化时对最优策略组合的影响的对比；
  - 4. 再引入通货膨胀分析固定模糊系数，变化 u，观察 x 轴为通货膨胀系数和 y 轴最优投资组合的曲线图；分析固定 u 系数，变化模糊系数，观察 x 轴为通货膨胀系数和 y 轴最优投资组合的曲线图

- 二、比较基于递归效用的解析方法与数值方法的差异
  - 1. 基于动量效应的递归效用与数值方法的比较;
  - 2. 基于动量效应的 BSDE 与数值方法的不同;
  - 3. 再引入通货膨胀的递归效用与数值方法的比较;
  - 4. 再引入通货膨胀的递归效用与数值方法的比较。

7 总结与展望

(待补充)

Part III

参考文献

References

[1] Duffie, D., Epstein, L.G. *Stochastic differential utility*. Econometrica 60, 353–394 (1992).

[2] Etienne Pardoux and Shige Peng.*Adapted solution of a backward stochastic differential equation*. Systems and Control Letters, 14(1): 55-61, 1990.

[3] El Karoui N, Shige Peng, Quenez M C. *Backward stochastic differential equations in finance[J]*. Mathematical finance, 1997, 7(1): 1-71.

[4] N. El Karoui, Shige Peng, M.C. Quenez.*A Dynamic Maximum Principle for the Optimization of Recursive Utilities Under Constraints*.The Annals of Applied Probability 2001, Vol. 11, No. 3, 664–693

[5] Zengjing Chen, L Epstein. *Ambiguity, risk, and asset returns in continuous time*. Econometrica, 2002.

[6] Xiaoming Shi.*Portfolio Optimization with Nonsmooth Coefficients[D]*.Shandong University, 2017.

[7] Yongqiang Liu. *Momentum and Inflation in Optimal Consumption Investment Strategy Based on Recursive Utility[D]*. Southwestern University of Finance and Economics,2020.

[8] Ralph S.J. Koijen *Momentum and Mean-Reversion in Strategic Asset Allocation*. Management science, 2009, 55(7): 1199-1213.

[9] Kallianpur G. *Stochastic filtering theory[M]*. Springer Science and Business Media, 2013.

[10] Pham H. *Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications[M]*. Springer Science and Business Media, 2009.、

[11] 张恭庆, 函数论. 变分学讲义 *[M]*. 高等教育出版社, 2011.