2020年12月汇报

山东大学数学与交叉科学研究中心

兰宇恒

目录

1 本学期课程总结

1.1 函数论

本门课题目为平面上的拟共形映射，主要目的是为了证明可测的 Riemann 映射定理，所学内容共分为六个部分

第一部分，主要介绍了，一些基本的概念 包括黎曼映射定理的叙述/可测黎曼映射定理的叙述，共形映射的定义/拟共形映射的定义，同胚映射是共形映射的充分必要条件，复扩张的定义，格罗蒋茨问题及其证明，径向拉伸的例子。

第二部分，主要介绍了 sobolev 空间以及相关的一些概念和性质 Lp 空间的性质，Lp 空间上的 holder 不等式与 minkowski 不等式，证明了 Lp 空间按 P 范数是一个 banach 空间/Wk，p 空间按 k，p，Ω 范数为 banach 空间，介绍了磨光核的概念及其性质/被磨光核作用后函数的性质，证明了变分法基本引理，介绍弱导数并引出了 sobolev 空间，单位分解定理，光滑函数局部逼近定理，直线上绝对连续（ACL）的定义以及相关的定理证明。

第三部分，正在逐步介绍拟共形映射的基本性质 微分性质，主要证明了 W1，1（loc）空间上连续开映射是几乎处处可微的，变量替换性质，主要证明了 W1，2（loc）空间上连续开映射，把零测集映到零测集，Whitney 分解的基本概念以及有关性质

第四部分，拟对称映射的相关理论 弱拟对称映射的定义以及性质，拟对称则一定是拟共形映射，拟共形映射则是局部拟对称的，拟共形映射的度量概念以及解析概念，拟共形映射的紧性

第五部分，cauchy 算子以及 bearling 算子 green 公式，一般化的 cauchy 公式，cauchy 算子，修改后的 cauchy 算子，bearling 算子，cauchy 算子与 bearling 算子的求微分性质，以及两者之间的关联，bearling 算子的延拓性质

第六部分，可测的 Riemann 定理的证明 beltrami 方程，normalized 的函数，局部的情况，Newman 定理，黎曼映照定理的叙述以及证明，可测的黎曼映照定理的叙述以及证明

1.2 泛函分析教程

本学期这门课所学内容共分为四个部分

第一部分，Hilbert 空间上的空间理论 度量空间的定义，完备性与完备化，度量空间的拓扑，稠密与无处稠密，完备度量空间的性质，赋范线性空间的定义及性质，cauchy-schwart 不等式，Hilbert 空间，正交投影，投影算子，线性泛函以及 H 上线性泛函的性质，riez 表示定理，泛函的范数，将基的概念从有限维推广到无限维，正交基的概念，空间直和。

第二部分，Hilbert 空间上的算子理论 Hilbert 空间上的线性算子，算子的范数，线性算子构成的空间，伴随算子，正规算子，投影算子与幂等算子，不变子空间与约化子空间，紧算子，有限秩算子, 紧算子以及 H 上线性算子的关联，对角算子，谱算子，下有界与值域和核

第三部分，banach 空间上的理论 banach 空间上的线性算子, 有限维赋范线性空间的特殊性，商空间以及空间的积，banach 上的线性泛函，hahn-banach 定理，商空间与子空间的对偶，自反空间，开映射定理，逆算子定理，闭图像定理，一致有界原理，强收敛，弱收敛，弱 * 收敛

第四部分，banach 代数与 banach 空间上的谱理论 代数的理想与商，谱理论，函数演算，线性算子的谱，可交换的 banach 代数

1.3 测度与概率

本门课主要以测度论为基础，逐步介绍现代概率论中的相关概念，所学内容共分为七个部分

第一部分，集合，映射与函数，距离空间 集合及其运算，映射与势，可数集与不可数集，距离空间定义以及例子，开集闭集，完备性，可分性，列紧性与紧性，距离空间上的映射与函数，连续函数的几个等价条件

第二部分，测度空间与概率空间 半集代数，集代数，σ 代数，λ 系，Π 系，单调类，以及这几种代数系之间的关联，单调函数与测度的构造，单调函数的性质，外侧度以及由外侧度引出的可测集，测度扩张定理的叙述与证明，borel 测度，测度空间的一些性质，测度的完全化以及测度的逼近，hausdorff 维数及测度介绍

第三部分，可测函数与随机变量 介绍更一般的可测函数的定义，随机变量与概率分布测度与分布函数之间的对应关系，可测函数的构造性质（简单函数-初等函数-可测函数)，函数形式的单调类定理

第四部分，积分与数学期望 积分的定义（非负简单函数-非负可测函数-实可测函数-复可测函数)，积分的性质（线性，保号性，可积性)，Schwarz 不等式，期望的定义，期望的独立，方差的定义，随机变量的函数的概率分布，L-S 积分的表示，独立事件类的扩张定理，积分收敛定理（单调收敛定理，fatou 引理，控制收敛定理)，离散参数换成连续参数的定理推广

第五部分，乘积测度 乘积测度与转移测度，乘积半集代数，集代数，σ 代数，截集与截函数，截集，截函数，对截函数的积分可测，fubini 定理以及应用，无穷维乘积概率（Tulcea 定理）

第六部分，不定积分与条件期望 符号测度，全变差，有界变差函数及其性质，hahn 分解定理，lebesgue 分解定理与 radon-nikodym 定理，条件概率的概念及性质，条件期望的积分性质与平滑性质

第七部分，收敛概念 几乎处处收敛，依测度收敛，Lr 收敛，凸函数的性质，jessen 不等式，一致可积概念，条件期望在最佳均方逼近上的应用，淡收敛与弱收敛，几种收敛之间的关联及反例。

2 课题

2.1 分析类问题-几何函数论

问题 $(GOOD)$ 给定度量空间 X，Y，以及 X 中的区域 Ω。考察映射 $f\square\Omega \to Y$。需要给定 Ω 什么样的几何假设，以及 f 什么样的解析假设，我们能够定义映射 f 在 Ω 的边界点 $\omega \in \partial\Omega$ 沿（特殊）曲线的极限？更具体而言，考察 Ω 中的曲线 γ 连接某固定点 x_0 到 ω，γ：[0，1）$\to \Omega$ 满足 γ（0）=$x_0 \in$，$\lim_{t\to 1}\gamma(t) = \omega \in \partial$。极限

$$\lim_{t\to 1} f(\gamma(t))$$

是否存在？进一步，如果我们沿着两条不同的曲线连接 x_0 到 ω，那么上述极限是否唯一？

阐述 上述问题是单复变函数论中研究共性映射边界对应的自然推广。经典复分析中，我们研究给定一个复平面区域之间的一个共形/解析映射 $f : \Omega \to \Omega'$，特别是 Ω=$\mathcal{D}$ 是单位圆盘，我们希望知道对于给定的 $\omega \in \mathcal{S} = \partial D$ 时，f 沿圆心 o 到 ω 的径向线段的极限是否存在。在现代几何函数论中，主要考察高维区域之间的拟正则映射 $f : \Omega \to \mathcal{R}^n$。特别的，在所给文献中，作者证明了对于 $\mathcal{R}^n$ 中的 John 区域，$\lim_{t\to 1} f(\gamma(t))$ 中的极限不存在的点集在 $\partial\Omega$ 中是非常小的，共形 capacity 为 0（特别的，其（n–1）维的 lebesgue 测度为零)。但 Ω 进一步是一致区域，那么上述极限唯一。

目的 此课题的目的是将 $\lim_{t\to 1} f(\gamma(t))$ 的相应结果推广到更一般的度量空间中。

课题进度

1. 理解基本概念
2. 通读文章
3. 课题组讨论，总结问题，收集文献及资料
4. 再次通读文章
5. 和郭老师定下答疑时间

3 问题与解决

3.1 泛函分析教程中的问题（《A Course in Functional Analysis》，john B.conway）

- P64，拓扑结构？
- P70，M 在此范数下完备？
- P70，如果 M 不是闭子集，则（4.1）式得到一个新的范数？
- P74，M 的闭包等于 M 或者等于全集？
- P74，如果每一个 en 属于 kerf，则 kerf 在 X 中稠密？
- P74，kerf=kerg
- P78，（d）是（c）的简单应用？
- P79，不等式另一边如何得到？
- P79，如何得到 x 范数有界？
- P79，f（x）=0 是为什么？