2021 年 10 月汇报

兰宇恒

目录

1 课内课程

1.1 倒向随机微分方程

本月接着上个月学习的，接着学习了以下内容

10 月 5 日

本节课开始介绍 BSDE（Backward Stochastic Differential Equations）的相关内容，包括 BSDE 的定义，假设 standard 的定义，在 standard 假设下方程的对应解，再证明了 BSDE 的存在唯一性，最后给出了线性 BSDE 的定义以及求解方法。

10 月 12 日

本节课首先回顾上节课的内容，然后给出了 BSDE 的比较定理以及比较定理的证明，并给出了在 BSDE 中比较定理的推广，最后介绍了 BSDE 的比较定理在金融中的应用并加以证明；讲完比较定理，老师开始介绍 BSDE 独立性的相关内容，X 的修正的概念，有界循序可测的概念以及 Girsanov 定理

10 月 19 日

本节课老师接着上节课的内容，首先介绍了 BSDE 中 flow 的概念，以及对于 flow 概念 BSDE 中的性质；介绍完 BSDE 中的稳定性，老师接着介绍凹的 BSDE 的概念，这一概念与金融中的效用相对应，然后老师给出了 BSDE 中 minorize 的概念以及相关性质，并用 minorize 介绍凹 BSDE 的相关概念：infimum，本质上下确界等。最后还介绍了 knightion 不确定性。

10 月 26 日

本节课开始介绍马尔科夫在 BSDE 中的对应，首先给出了马尔科夫过程的相关性质，然后给出了粘性解上解，粘性下解以及粘性解的概念，最后给出了 BSDE 的粘性解。

2 张老师讨论班

本月参加了张老师的讨论班，重点听了秦俭师兄对于 Thomas Bartsch 的《Normalized solution for a system of coupled cubic $Schrödinger$ equations on $\mathbb{R}^n$》的报告

2.1 文章摘要

文章考虑耦合的椭圆方程

$$\begin{cases} -\Delta u-\lambda_1 u=\mu_1 u^3+\beta u v^2 \\ -\Delta v-\lambda_2 v=\mu_2 v^3+\beta u^2 v \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

并研究了满足如下正规化条件的正解的存在性问题

$$\int_{\mathbb{R}^3} u^2=a_1^2 \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}^3} v^2=a_2^2$$

文中假设 a_1, a_2, μ_1, μ_2 都是正的固定的常数, 并证明了在不同范围的耦合参数 β 下，方程解的存在性。最后还讨论了把结论扩展到任意多参数下以及轨道稳定性的问题。

2.2 文章主要结论

本文关于存在性主要证明了以下两个定理

Theorem 1. *Let $a_1, a_2, \mu_1, \mu_2>0$ be fixed, and let $\beta_1>0$ be defined by*

$$\max \left\{\frac{1}{a_1^2 \mu_1^2}, \frac{1}{a_2^2 \mu_2^2}\right\}=\frac{1}{a_1^2\left(\mu_1+\beta_1\right)^2}+\frac{1}{a_2^2\left(\mu_2+\beta_1\right)^2}$$

If $0<\beta<\beta_1$, then $(1.1)-(1.2)$ has a solution $\left(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{u}, \tilde{v}\right)$ such that $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2<0$, and $\tilde{u}$ and $\tilde{v}$ are both positive and radial.

对于下一个结论文章介绍了 Pohozaev-type 限制:

$$V:=\left\{(u, v) \in T_{a_1} \times T_{a_2}: G(u, v)=0\right\}$$

其中

$$G(u, v)=\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\right)-\frac{3}{4} \int_{\mathbb{R}^3}\left(\mu_1 u^4+2 \beta u^2 v^2+\mu_2 v^4\right)$$

文章还定义了 Rayleigh-type 商:

$$\mathcal{R}(u, v):=\frac{8\left(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\right)^3}{27\left(\int_{\mathbb{R}^3} \mu_1 u^4+2 \beta u^2 v^2+\mu_2 v^4\right)^2}$$

Theorem 2. *Let $a_1, a_2, \mu_1, \mu_2 > 0$ be fixed, and let $\beta_2 > 0$ be defined by*

$$\frac{\left(a_1^2+a_2^2\right)^3}{\left(\mu_1 a_1^4+\mu_2 a_2^4+2\beta_2 a_1^2 a_2^2\right)^2}=\min\left\{\frac{1}{a_1^2 \mu_1^2}, \frac{1}{a_2^2 \mu_2^2}\right\}$$

If $\beta > \beta_2$, then equation has a solution $\left(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{u}, \bar{v}\right)$ such that $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2 < 0$, and $\bar{u}$ and $\bar{v}$ are both positive and radial. Moreover, $\left(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{u}, \bar{v}\right)$ is a ground state solution in the sense that

$$\begin{aligned} J(\bar{u}, \bar{v}) &= \inf\{J(u, v):(u, v) \in V\}=\inf_{(u, v) \in T_{a_1} \times T_{a_2}} \mathcal{R}(u, v) \\ &= \inf\left\{J(u, v):(u, v) \text{ is a solution of equation for some } \lambda_1, \lambda_2\right\} \end{aligned}$$

holds.

2.3 文章进一步可以做的问题

基于这篇文章，接下来可以考虑

- 非对称情况下正规化解的存在性
- Remark1.3 中所说的是否可以提高

2.4 接下来的计划

- 文章的证明细节没有仔细看，接下来会把这篇文章的每一步都自己详细的推一遍
- 文章关于任意多参数下以及轨道稳定性的问题这部分不是特别了解，会把这部分欠缺的知识补上
- 接着阅读
  - Gou, Tianxiang, and Zhitao Zhang. ”Concentration Phenomenon of Semiclassical States to Reaction-Diffusion System.”
  - Gou, Tianxiang, and Zhitao Zhang. ”Normalized solutions to the Chern-Simons-Schrödinger system.”

  这两篇文章，思考非对称的情况

3 郭老师讨论班（测度论）讲解

本月我负责郭老师讨论班以下内容的讲解，讲解的书籍为 Bogachev 的《Measure Theory》

3.1 Infinite products of measure

本节主要介绍了无穷乘积空间上的测度，首先考虑可数乘积空间上的测度，然后应用有限乘积的可数可加性得到了有限可加性；然后证明了定理 3.5.1，定理 3.5.1 说明了定义的可数乘积空间上的测度的可数可加性；然后应用引理 3.5.2 将可数乘积空间上的测度推广到任意无穷乘积上的测度；最后介绍了紧性逼近的相关内容，分别是引理 3.5.3 与推论 3.5.4

3.2 Images of measures under mappings

本节主要介绍了在映射下测度的像，首先给出了映射下测度的像的定义，然后主要证明了定理 3.6.1，给出了测度的像的等式；然后介绍了引理 3.6.3，证明了对于 Lipschitz 函数，集合的像的可测性，并给出了推论 3.6.4，证明了线性映射的可测性；然后介绍了性质 3.6.5 以及例子 3.6.6，证明了以上的像的可测性不能推广到任意的连续函数上；进一步介绍了拉登尼古丁条件（定义 3.6.8），即像集的可测性与零测集的可测性有关，并证明了这一结论（定理 3.6.9）。其中本节还介绍了分布函数的定义以及一个与分布函数有关的例子 3.6.2,。

3.3 Change of variable in R^n

本节接着上节的内容，介绍了 R^n 上的变量替换，并加以证明，即定理 3.7.1

3.4 The Fourier transform

本节开始介绍傅里叶变换，首先给出 Fourier 变换的定义，然后给出了在某些特殊情况下可以计算傅里叶变换（例子 3.8.2）；再接着给出了函数正定的概念（定义 3.8.3），并用正定的概念联系了概率论中的高斯测度以及多维正态分布；再给出了性质 3.8.4，证明了傅里叶变换的一致连续性；接着介绍了性质 3.8.5，给出了傅里叶变换的偏导性质，并给了一个傅里叶变换计算偏导数的公式；接着介绍了性质 3.8.6，傅里叶变换相等时，可积函数几乎处处相等与有界测度相等性，并给出了推论 3.8.7，说明在实值情况下，函数的不变性与对称性。

3.5 接下来的内容

接下来会继续介绍傅里叶变换没有讲完的部分并开始介绍卷积。

4 课题项目

4.1 问题

$(GOOD)$ 给定度量空间 X，Y，以及 X 中的区域 Ω。考察映射 $f:\Omega\to Y$。需要给定 Ω 什么样的几何假设，以及 f 什么样的解析假设，我们能够定义映射 f 在 Ω 的边界点 $\omega\in\partial\Omega$ 沿（特殊）曲线的极限？更具体而言，考察 Ω 中的曲线 γ 连接某固定点 x_0 到 ω，γ：[0，1）→ Ω 满足 γ（0）$=x_0\in\Omega$，$\lim_{t\to1}\gamma(t)=\omega\in\partial\Omega$。极限

$$\lim_{t\to 1} f(\gamma(t))$$

是否存在？进一步，如果我们沿着两条不同的曲线连接 x_0 到 ω，那么上述极限是否唯一？

4.2 主要结论

Theorem 3. *Assume that $f:\Omega\to(X_2,d_2)$ is a mapping of finite distortion. Let E_f be the set of points $\omega\in\partial\Omega$ for which there exists a curve $\gamma\in I(\omega,x_0)$ so that f does not have a limit along γ. Then we have the following:*

1. *If $f\in\mathcal{A}_1$ and h is a doubling gauge function satisfying*

$$\int_0 h(t)^{\frac{1}{q-1}}\frac{dt}{t}<\infty$$

   then $\mathcal{H}^h(E_f)=0$.

2. *If $f\in\mathcal{A}_2$ and h is a doubling gauge function satisfying*

$$\int_0 (h(t)\log(\frac{1}{t}))^{\frac{1}{q-1}}\frac{dt}{t}<\infty$$

   then $\mathcal{H}^h(E_f)=0$.

Where Ω is a φ_0-dist John curve domain with center x_0 given in Definition 2.1 and $q\sim$ regular.

Theorem 4. *Let $\Omega\subset(X_1,d_1)$ be a φ-dist uniform domain with center $x_0, f\in\mathcal{F}_{\lambda,\mathcal{K}}(\Omega)$ and h a doubling gauge function satisfying $f\in\mathcal{A}_2$. Then f has a unique limit along curves $\gamma\in I\left(w,x_0\right)$ for $\mathcal{H}^h-$ a.e. $\xi\in\partial\Omega$, i.e., if $\gamma,\eta\in I\left(\xi,x_0\right)$ so that*

$$\lim_{t\to 0^+} f(\gamma(t))=a \text{ and } \lim_{t\to 0^+} f(\eta(t))=b$$

Then $a=b$.

4.3 改进

下图中蓝色标出的地方是针对上一步推论改进的地方

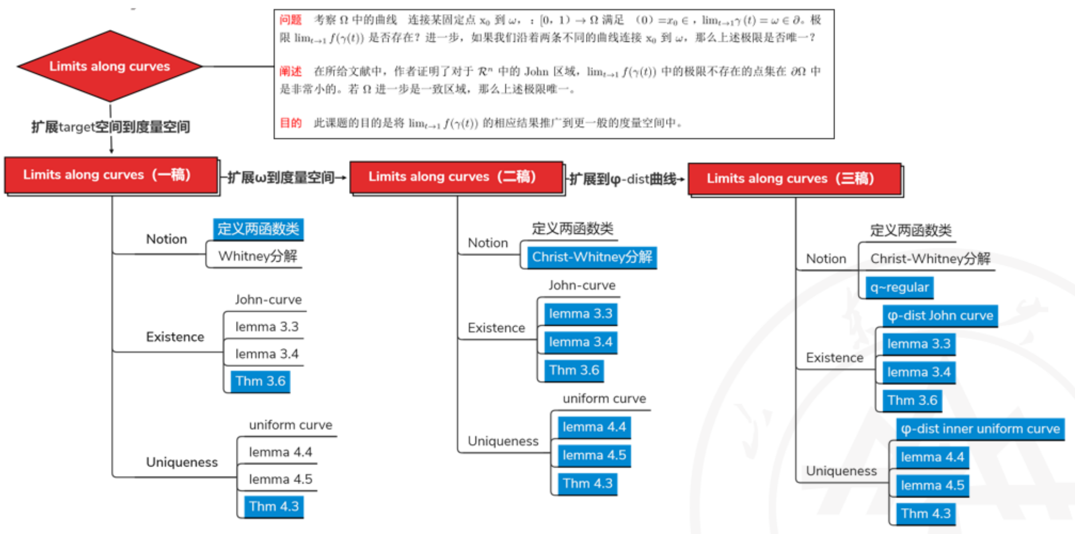

图 1: 文章结构以及改进

4.4 文章简单介绍

In this paper, we consider mappings of finite distortion, and the diam of mappings have upper bound. We show that such mappings can be extended to the boundary along φ-dist John curves on φ-dist John domains. Moreover, the extension is unique if the domain is φ-dist inner uniform John domains. This extends previous results of Poggi-Corradini and Rajala (J Lond Math Soc (2) 76(2):531−544, 2007) and Äkkinen and Rajala on mappings of bounded and finite distortion, Äkkinen, Tuomo and Guo, Chang-Yu on John curves and uniform domains. And we show that the conclusion is also hold if the valued field space and the definition field space are metric space. This extends previous results of Äkkinen and Rajala on both of spaces are $\mathbb{R}^n$.

4.5 现在的问题

- 文章中 Whitney 分解部分找到的度量空间的 Whitney 分解带有稠密性，需要想办法解决这个稠密性或者再寻找可行的 Whitney 分解。
- 文章中的定理 1，最后一步级数的收敛性需要再思考。
- 关于在度量空间中到边界的极限需要再证明。

4.6 接下来的计划

把上述问题解决后，重新整理文章，再修改至最后 11 月份定稿。

5 论文总结

在研读张老师之前发的四篇文章之后，我对 Kim, Seunghyeok, Monica Musso, and Juncheng Wei. ”A compactness theorem for the fractional Yamabe problem, Part I: The nonumbilic conformal infinity.” 这篇文章兴趣比较浓厚，接下来会把这篇文章仔细研读，并补充相关欠缺的知识。

6 看的书籍

6.1 变分学讲义——张恭庆

到十月份，我在 b 站上找了张恭庆老师讲《变分学讲义》的网课，并按照网课的进度把这本书看完了一遍，但是文中还有大部分内容理解的不是很好，并且课后习题都没有做。接下来会继续在之前看的基础上，重新把这本书看一遍，并争取把课后习题都尝试一下。

6.2 PDE ——Evans

本月买了 Evans 的《partial differential equation》这本书，觉得这本书在 pde 方面讲得很全面深入，想研究生期间把这本书看完，计划接下来的日子安排读这本书并做课后总结。