2020年11月汇报

兰宇恒

2020 年 11 月 30 日

目录

1 课程以及看书总结

1.1 高等概率论

本月主要学习了以下几个方面

测度空间与概率空间 单调函数与测度的构造，测度扩张定理，n维lebesgue可测集，n维lebesgue测度，n维Borel-lebesgue测度（borel测度），测度的运算性质，测度的完全化，测度的逼近，hausdorff维数及测度介绍

可测函数与随机变量 可测函数与分布函数，可测函数的构造性质，简单函数，初等函数，函数形式的单调类定理

积分与数学期望 可测函数积分的的定义，数学期望的定义，单调收敛定理，几乎处处与几乎必然，积分的性质（线性性质，序性质，可积性质，schwarz不等式），期望的性质（随机变量独立，独立事件类的扩张定理，方差的性质，特征函数，概率分布，lebesgue积分与riemann积分间的关系），积分收敛定理（单调收敛定理，fatou引理，控制收敛定理）

乘积测度与无穷乘积概率空间 乘积测度，截集，截函数，乘积测度，转移测度与转移概率，Fubini定理

1.2 泛函分析教程

空间理论 Banach空间，商空间，hahn-banach定理，hahn-banach定理应用（分离点，分离空间），商空间的对偶以及零化子，开映射定理，逆映射定理，闭图像定理，banach空间上的直和分解，一致有界原理，强收敛，弱收敛，弱*收敛

谱理论 banach代数，交换banach代数，酉banach代数，可逆元组成空间的性质，banach代数上的谱，banach代数上元谱非空，谱半径

1.3 常微分方程

本月主要复习了以下几个方面

定性理论与分支理论初步 动力系统，相空间与轨线，解的稳定性，判断解的稳定性，李雅普诺夫第二方法，稳定性，一致稳定性，吸引性，一致吸引性，渐进稳定性，一致渐近稳定，laselle不变原理，不稳定性定理

比较定理 第一比较定理，第二比较定理

幂级数解法 柯西定理

2 课题

2.1 分析类问题-几何函数论

问题 $(GOOD)$ 给定度量空间X，Y，以及X中的区域Ω。考察映射fæ$\Omega \to Y$。需要给定Ω什么样的几何假设，以及f什么样的解析假设，我们能够定义映射f在Ω的边界点$\omega \in \partial\Omega$沿（特殊）曲线的极限？更具体而言，考察Ω中的曲线γ连接某固定点x_0到ω，γ：[0，1）→ Ω满足γ（0）=$x_0 \in$，$\lim_{t\to 1}\gamma(t) = \omega \in \partial$。极限

$$\lim_{t\to 1} f(\gamma(t))$$

是否存在？进一步，如果我们沿着两条不同的曲线连接x_0到ω，那么上述极限是否唯一？

阐述 上述问题是单复变函数论中研究共性映射边界对应的自然推广。经典复分析中，我们研究给定一个复平面区域之间的一个共形/解析映射$f : \Omega \to \Omega'$，特别是Ω=$\mathcal{D}$是单位圆盘，我们希望知道对于给定的$\omega \in \mathcal{S} = \partial D$时，f沿圆心o到ω的径向线段的极限是否存在。在现代几何函数论中，主要考察高维区域之间的拟正则映射$f : \Omega \to \mathcal{R}^n$。特别的，在所给文献中，作者证明了对于$\mathcal{R}^n$中的John区域，$\lim_{t\to 1} f(\gamma(t))$中的极限不存在的点集在$\partial\Omega$中是非常小的，共形capacity为0（特别的，其（n–1）维的lebesgue测度为零）。但Ω进一步是一致区域，那么上述极限唯一。

目的 此课题的目的是将$\lim_{t\to 1} f(\gamma(t))$的相应结果推广到更一般的度量空间中。

参考文献 Akkinen, Tuomo, Guo C Y . Mappings of finite distortion: boundary extensions in uniform domains[J]. ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA, 2017, 196(1):65-83.

已经完成任务

1. 理解基本概念：曲线的trace，拟双曲线度量，可求长曲线，拟双曲线测地线，whitney分解以及分解的性质，径向极限，在直线上绝对连续，弧长长度，Borel测度，，hausdoff测度与hausdoff维度，曲线的离散长度，有限扰动，拟正则，指数积分分布，两倍估计函数，Frostman's lemma，一致区域，c-john曲线与c-john区域
2. 通读文章一遍，理解引理3.2，引理3.3，引理3.4，引理3.11，引理3.12与定理3.5，定理3.10之间的关联

需要完成任务

1. 理解引理3.2与引理3.3（每一步可以自己写清楚）
2. 理解定理3.5与定理3.10（每一步可以自己写清楚）

3 问题与解决

3.1 泛函分析教程中的问题

（《A Course in Functional Analysis》，john B.conway）

- P10，$A^{\perp}$是闭线性子空间
- P10，唯一向量？
- P10，ranp=M？
- P12，$L^{-1}(\alpha \in \mathcal{F} : |a| < 1)$内为什么$|a| < 1$？
- P13，on the other hand是为什么？
- P12，the main result of this section provides a converse to these observations？
- P12，这两个范数相等的逻辑
- P13，最后那段话什么意思？
- P16，well-defined element？
- P16，网收敛？以及cauchy网？
- P17，为什么这个集合可数？
- P17，为什么选择半径为$\frac{1}{\sqrt{2}}$
- P20，如何通过parseval等式得到这个的？
- P21，次代数？
- P23，coordinatewise协调？
- P28，为什么0在里面，测度为正无穷？
- P29，任何灯具变换在1范数下都是有界算子？
- P31，如何使用唯一性证明线性？
- P35，A满射是为什么？
- P37，为什么这个内积为实数？
- P38，幂等元有这两个等式？
- P38，由于两个子空间和为闭，则直和为和？

- P41，紧算子将球映成完全有界集？
- P42，没有P范数小于1是如何得到这个等式的？
- P42，T紧可以推出T的对偶也是紧的？
- P43，如何得到K是有限秩算子？
- P44，将紧算子与有限维空间上算子类比？