2022 年 3 月总结

兰宇恒

目录

1 二阶椭圆方程正则性

本学期开始讲二阶椭圆方程正则性，课程安排如下

- Review of Sobolev space
  - Lp 空间
  - 研究 Sobolev 空间的两条路
  - 比较数分中的推广
  - Sobolev 空间的一些基本性质
- De Giorgi's theory
  - De Giorgi's theory
  - Nash-Morse-De Giorgi iteration
  - Application in Yamabe flow
- Harmous map and H-system
- Techniques from harmonic analysis and Gaugle theory
  - Techniques from harmonic analysis and Gaugle theory
  - Caderm-zygmmd theory
- Regularity of harmonic maps
- CZ theory or LP estimate

3 月 1 号 本节课主要介绍了 Lp 空间的定义和范数；研究 Sobolev 空间的两条路，从变分的直接方法出发，从非光滑微积分出发；比较数分中的推广，求能量极值的变分法原理上比较数分中的求极值，微积分基本定理的推广，分部积分的推广。

3 月 8 号 本节课继续介绍了 Sobolev 空间的一些基本性质，一些常见的定理，比如，微积分基本定理，富比尼定理，极坐标定理，单调收敛定理，法都引理，控制收敛定理，Lp 空间中的不等式；卷积与磨光核的定义；弱导数定义，变分学基本引理；通过弱导数定义 Sobolev 空间；通过范数的完备化定义 Sobolev 空间；Sobolev 不等式。

3 月 15 号 本节课首先了一些基本模型，并介绍了 Coerciveness、quadratic growth、Uniform convexity/ellipticity 的定义，然后证明了如下定理

Theorem 1. *Given u_0 as above, there exists a unique $u \in H^1(\Omega)$ satisfying $u = u_0 \quad$ on ∂S in the sense that $u - u_0 \in H_0^1(\Omega)$ and such that*

$$E(u) = \inf_{v \in M} E(v)$$

Moreover, u weakly solves the Euler-Lagrange equation

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_{p_i}(\nabla u)\right)=0 \quad \text{in } \Omega$$

associated with

$$E(u):=\int_\Omega f(\nabla u(x))dx=\inf_{v\in\mathcal{M}}E(v)_1$$

where $\mathcal{M}=u_0+H_0^1(\Omega)$. If we write it in divergence form, above is the same as

$$-\operatorname{div}(\nabla f(\nabla u(x)))=0.$$

3 月 22 号 首先本节课介绍了函数 extremal 的定义，然后介绍了如下定理

Theorem 2. *Let $u\in H^1(\Omega)$ be a weak solution of (1.8) with uniformly elliptic coefficients $a_{ij}=a_{ji}\in L^\infty(\Omega)$. Then $u\in C^\alpha_{loc}(\Omega)$ for some $\alpha\in(0,1]$.*

然后继续介绍了 Moser 定理并给出了证明

Theorem 3. *Let $u\in H^1\left(B_{2r}(0)\right)$ be a weak solution of (1.8) with (2.1). Then $u\in L^\infty\left(B_r(0)\right)$ and*

$$\sup_{|x|<r}|u(x)|^2\le Cr^{-n}\int_{B_{2r}(0)}|u(x)|^2dx$$

3 月 29 号 本节课接着上节课的 Morse 定理的证明，然后给出了如下定理的证明

Theorem 4. *Let $0\le u\in H^1\left(B_{4r}(0)\right)$ be a weak solution of (1.8) with (2.1) and let $q>0$. Then with $C=C(q,\lambda,\Lambda,n)>0$ there holds*

$$\sup_{|x|<r}u(x)\le C\left(r^{-n}\int_{B_{4r}(0)}u^qdx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

接下来的课程会接着介绍 Moser's weak Harnack inequality 的相关内容

2 微分几何讨论班

本学期我负责介绍了微分几何的以下内容

光滑张量场 首先介绍了 (r,s) 型张量丛的概念，并证明了张量丛的光滑结构；然后介绍了光滑的 (r,s) 型张量场的概念；再说明了 r 阶协变张量场的概念，并证明了在满足第二可数公理的 n 维光滑流形 M 上黎曼度量的存在性；接着介绍了 r 重线性映射与 r 阶协变张量场的等价性；再介绍了 r 阶协变张量场的李导数的概念，以及从单参数变换群推到李导数的过程，并介绍了两个计算李导数的例子；最后介绍了 r 次外微分式的概念，以及 r 次外微分式与反对称的 r 重线性映射的等价关系，然后给出了一个 2 次外微分式的概念。

外微分式的外微分 本部分首先介绍了 M 上外微分式的外微分运算的存在唯一性定理；然后证明了存在唯一性定理的唯一性；再证明了存在唯一性定理的存在性；然后给出了外微分的计算式，即作用在向量场的值；最后拓展了诱导映射推广成了拉回映射。