2021 年 11 月汇报

兰宇恒

目录

1 论文总结

本月主要在看 Yamabe 问题方面的论文，在阅读“A compactness theorem for the fractional Yamabe problem, Part I: The nonumbilic conformal infinity ”-（Seunghyeok Kim ·Monica Musso · Juncheng Wei）-（J. Eur. Math. Soc）的 Introduction 后，我感觉自己在以下几个方面欠缺很多知识

1.1 主要问题

1. Yamabe 问题的背景
2. 微分几何中联络有关的知识
3. 分数阶 Yamabe 问题有关的知识

1.2 解决办法

所以我针对这几个问题采取了以下几个办法

1. 看“The Yamabe Problem”-（John M. Lee and Thomas H. Parker）-（Bulletin (New Series) of The AMS）这篇文章了解 Yamabe 问题
2. 看陈维桓老师编著的《微分几何引论》第六章关于联络的知识，特别是 Ricci 曲率，Bianchi 恒等式和标量曲率相关概念
3. 看“On A Fractional Yamabe Problem”-（Yannick Sire）这篇 notes 了解分数阶 Yamabe 问题的背景以及进展

1.3 文章总结

在下个月我把“The Yamabe Problem”-（John M. Lee and Thomas H. Parker）-（Bulletin (New Series) of The AMS）这篇文章看完后会把文章的总结发给老师。

2 课内课程

2.1 倒向随机微分方程

11 月 2 日 本节课开始介绍 g-期望：首先介绍了条件期望的基本概念，给出了条件期望的六条性质；然后给出了 g-期望的定义，并证明了 g-期望的存在性和六条基本性质；再给出了 g-上鞅和 g-下鞅的概念并给出了 g-上鞅和 g-下鞅的相关性质。

11 月 9 日 本节开始介绍离散时间鞅：首先给出离散时间鞅的定义，并给出了鞅的可加性质和函数性质；然后给出了停时的概念，介绍了四条停时的性质并给出了两个定理，来说明停时条件下，随机变量和期望的性质；再证明了两个与鞅有关的不等式；最后给出了 Doob 收敛定理和 Doob 分解定理。

11 月 19 日 本节继续深入 g-上鞅的概念：首先 g-鞅和上穿不等式的概念，并给出了在 g-鞅的条件下，期望 $\epsilon^{-\mu}$ 与 ϵ^{μ} 之间的不等式关系；然后在下鞅和完备右连续的条件下，X_t 有右连续修正；最后证明了 BSDE 中的逆比较定理

11 月 23 日 本节首先给出了鞅分解定理，即上鞅可以分解为鞅减去一个增过程；然后给出了 BSDE 方程解的形式并加以证明；最后给出了上解的概念，并证明几个与上解有关的逼近定理。

11 月 30 日 本节先回顾上节课介绍的上解的概念，然后开始介绍非线性 Doob-Meyer 分解，首先给出了 g-上鞅 in strong sense 和 in weak sense；然后给出了在强意义下，y_t 的分解和 y_t^i 与 Y_t 之间的大小逼近关系，还证明了一列右连左极的 g-上鞅在满足平方上确界的期望有限的情况下收敛于右连左极的 g-上鞅；最后开始介绍带控制（限制）的 BSDE，即在控制条件下，能找到最小的 g-上鞅。

3 讨论班

3.1 张老师讨论班

本月讨论主要听了邓崇昊师兄讲”Normalized solutions of mass supercritical Schrödinger equations with potential”-(Thomas Bartsch)-(Communications in PDE), 在讨论班上主要听了师兄的证明思路，证明细节我自己没有仔细推导。

文章摘要

This paper is concerned with the existence of normalized solutions of the nonlinear Schrödinger equation

$$-\Delta u+V(x)u+\lambda u=|u|^{p-2}u \quad \text{in } \mathbb{R}^N$$

in the mass supercritical and Sobolev subcritical case $2+\frac{4}{N}<p<2^*$. We prove the existence of a solution $(u,\lambda)\in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\times\mathbb{R}^+$with prescribed L^2-norm $\|u\|_2=\rho$ under various conditions on the potential $V:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$, positive and vanishing at infinity, including potentials with singularities. The proof is based on a new min-max argument.

文章主要定理

Theorem 1. *Let $2+\frac{4}{N}<p<2^*$ and $\rho>0$. If V satisfies (V_1) or (V_2) then (1.1) has a solution $(u,\lambda)\in H^1\left(\mathbb{R}^N\right)\times\mathbb{R}^+$.*

其中 (1.1) 和假设如下所示

(1.1)

$$\begin{cases} -\Delta u+V(x)u+\lambda u=|u|^{p-2}u & \text{in } \mathbb{R}^N \\ u\geq 0, \int_{\mathbb{R}^N}u^2dx=\rho^2 \end{cases}$$

where V is a fixed potential and $2+\frac{4}{N}<p<2^*=\frac{2N}{(N-2)^+}$

假设 (V_1) $\quad N\geq 1, V$ and the map $W:x\mapsto V(x)|x|$ are in $L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right), V\geq 0, \lim_{|x|\to\infty}V(x)=0$

$$0<\|V\|_\infty<2\min\left(1,\frac{2}{N}\right)\frac{m_\rho}{\rho^2}$$

and

$$\|W\|_\infty\leq\frac{m_\rho^{\frac{1}{2}}(2N-p(N-2))}{\rho}\left(\frac{N(p-2)-4}{2(p-2)(N(2p-1)(p-2)+2(p(2-N)+2N))}\right)^{\frac{1}{2}}$$

假设 (V_2)

$$N\geq 3, V\in L^{\frac{N}{2}}\left(\mathbb{R}^N\right),\quad W\in L^N\left(\mathbb{R}^N\right),\quad V\geq 0$$

$$\|V\|_{\frac{N}{2}}<\frac{2N(p-2)}{N(p-2)-4}\left(\left(1+\frac{2}{N}\right)^{\frac{N(p-2)-4}{N(p-2)}}-1\right)\frac{m_{\rho_0}}{\|Z_{\rho_0}\|_{2^*}^2}$$

and

$$2NA^2\left[1+\frac{N(p-2)}{2}\right]\|V\|_{\frac{N}{2}}+4A\left[1+\frac{N(p-2)^2}{2N-p(N-2)}\right]\|W\|_N\le N(p-2)-4$$

where $A=\frac{1}{\sqrt{\pi N(N-2)}}\left(\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(N/2)}\right)^{\frac{1}{N}}$.

3.2 郭老师讨论班

在上月结束测度论讨论班之后，本月开始上陈维桓老师编著的《微分几何引论》，我将负责本书的第四章“光滑张量场和外微分形式”，包括光滑张量场，外微分式的外微分，外微分式的积分和 Stokes 定理四个部分。本月听同学讲解本书的第一章“张量和外形式”。

11 月 11 日 本节讨论班主要复习了向量空间的基本知识，包括 n 维向量空间，对偶向量空间，Einstein 和氏约定，向量空间及其对偶向量空间的基底变换和向量空间及其对偶向量空间中元素的分量的变换公式

11 月 18 日 本节讨论班从上节介绍的变换出发，介绍协变张量的概念，然后推广到了 1 阶反变、r 阶协变张量，r 阶反变、s 阶协变张量；并介绍了张量的缩并概念；最后将张量与欧式向量空间相结合，说明欧式内积即为一个 2 阶协变张量

11 月 25 日 本节讨论班则介绍了外形式的概念，首先介绍 r 次外形式以及广义 Kronecker 记号；然后给出了外形式的反对称化运算并给出了外积的概念；并介绍了 r 次外形式空间的基底和外多项式；最后介绍了线性映射的诱导映射的定义和性质。

4 课题项目

4.1 问题

给定度量空间 X，Y，以及 X 中的区域 Ω。考察映射 $f:\Omega\to Y$。需要给定 Ω 什么样的几何假设，以及 f 什么样的解析假设，我们能够定义映射 f 在 Ω 的边界点 $\omega\in\partial\Omega$ 沿（特殊）曲线的极限？更具体而言，考察 Ω 中的曲线 γ 连接某固定点 x_0 到 ω，γ：[0，1）→ Ω 满足 γ（0）=$x_0\in\Omega$，$\lim_{t\to 1}\gamma(t)=\omega\in\partial\Omega$。极限

$$\lim_{t\to 1} f(\gamma(t))$$

是否存在？进一步，如果我们沿着两条不同的曲线连接 x_0 到 ω，那么上述极限是否唯一？

4.2 主要结论

Definition 4.1. *Let $f:\Omega\to X_2$ and Ω is Ahlfors q regular,*

1. *We say f belongs to class $\mathcal{A}_1$, if there exist $\alpha\in L^1(\Omega)$, $C\geqslant 1, \sigma\geq 1$,such that*

$$diam f(B)\leq C\left(\int_{\sigma B}\alpha(y)d\nu_1(y)\right)^{\frac{1}{q}}$$

   for every $B=B(x,r)$ for which $\sigma B\subset\subset\Omega$.

2. *We say f belongs to class $\mathcal{A}_2$, if there exist $\alpha\in L^1(\Omega)$, $C\geqslant 1, \sigma\geq 1$,such that*

$$diam f(B)\leq C\left(\int_{\sigma B}\alpha(x)d\nu_1(y)\right)^{\frac{1}{q}}\log(\frac{1}{diam B})^{\frac{1}{q}}$$

   for every $B=B(x,r)$ for which $\sigma B\subset\subset\Omega$.

本文主要证明了以下两个定理，在新构造的函数类 $\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_1$ 下，第一个定理给出了沿曲线到边界极限存在的解析假设：φ-dist John domain；第二个定理给出了沿曲线到边界极限唯一性的解析假设：uniform domain。

Theorem 2. *Assume that $f:\Omega\to X_2$ is a mapping, where Ω is a φ-length John curve domain with center x_0 and Ω is Ahlfors q-regular. Let E_f be the set of points $\omega\in\partial\Omega$ for which there exists a curve $\gamma\in I^{(\varphi,c)}(\omega,x_0)$ so that f does not have a limit along γ. Then we have the following:*

1. *Let h be a doubling gauge function, and let $g(t)=\frac{\varphi(t)h(t)^{\frac{1}{q-1}}}{t}$ be a continuous monotonic function, such that*

$$\int_0^1\frac{g(t)}{t}dt<\infty$$

   If $f\in\mathcal{A}_1$, then $\mathcal{H}^h(E_f)=0$.

2. *Let h be a doubling gauge function, and let* $g(t) = \frac{\varphi(t)h(t)^{\frac{1}{q-1}}}{t}\left[\log\frac{1}{t}\right]^{\frac{1}{q-1}}$ *be a continuous monotonic function, such that*

$$\int_0^1 \frac{g(t)}{t}dt < \infty$$

If $f \in \mathcal{A}_2$*, then* $\mathcal{H}^h(E_f) = 0$.

Theorem 3. *Let* $\Omega \subset X_1$ *be a uniform domain with center* x_0*, and h a doubling gauge function. If* $f \in \mathcal{A}_2$ *then f has a unique limit along curves* $\gamma \in I(w, x_0)$ *for* $\mathcal{H}^h-$ *a.e.* $\xi \in \partial\Omega$*, i.e., if* $\gamma, \eta \in I^c(\xi, x_0)$ *so that*

$$\lim_{t\to 0^+} f(\gamma(t)) = a \text{ and } \lim_{t\to 0^+} f(\eta(t)) = b$$

Then $a = b$.

4.3 现在的问题

- 本来计划文章的第二部分的唯一性想要推广到更一般的 φ-dist inner uniform domain，但是在这个唯一性的推导过程中，引理 3.10 在更一般的情况下并不能成立，所以退一步，把第二部分改成一般的度量空间上的 uniform domain。

4.4 接下来的计划

把上述问题解决后，重新整理文章，文章中的大问题已经基本解决，接下来会仔细修改文章中的表述，结构等问题；争取在圣诞节前投稿出去。