2022 年 7 月总结

兰宇恒

目录

Part I

毕业设计进展

1 文献综述

本月看了以下四篇文章，现将文献的主要内容以及通过这些文章求解的问题阐释如下。

1.1 Backward Stochastic Differential Equations in Finance[3]

这篇文章第一节介绍了 BSDE 在金融中的一些典型例子；第二节介绍了 BSDE 的一些重要的性质；第三节介绍了凸 BSDE 关于随机控制的一些性质；第四节介绍了前向 SDE 与 BSDE 的一些区别性质；第五节则给出了 BSDE 的一些其他性质。

我重点看了文章的第二节与第三节两个部分：

第二节： 本节给出了 BSDE 的一些重要性质

- 第一小节首先给出了 BSDE 的一个先验估计，然后运用这个先验估计给出了 BSDE 的存在唯一性定理，再将这个定理运用到线性 BSDE 上，给出了线性 BSDE 的特例情况。
- 第二小节则使用 BSDE 的先验估计求得 BSDE 的比较定理。
- 第三小节开始介绍超解的情况，相比标准解，区别在于在方程中引入了消费项，并在这一节证明了两个超解的下确界仍然为超解。
- 第四小节则介绍了 BSDE 关于参数的连续依赖性和可微性，并分别加以证明。

第三节： 本节给出了凸 BSDE 的性质以及其与控制相关的结论

- 第一小节首先给出并证明了，当生成元和终端值为下确界时，对应的 BSDE 的解也为下确界，然后将此性质运用到了随机控制问题上（这部分没看懂），再介绍了凸 BSDE 的一些性质。
- 第二小节则将上述性质运用到递归效用问题上，给出了以 BSDE 解为递归效用的方程满足递归效用的基本性质并加以证明，然后给出了递归效用的变分形式，最后将凸 BSDE 的性质运用到欧式期权定价上。

求解的问题：

- 明白了如何求解到消费的递归效用的变分形式
- 明白了凸 BSDE 的基本假设以及背后的实际意义

1.2 Momentum and Mean-Reversion in Strategic Asset Allocation[8]

这篇文章我重点看了第二节含有动量效应时的金融市场的模型的构建，文中求解这种模型的办法是动态规划原理得到 HJB 方程

求解的问题：

- 明白了含动量效应时的金融市场的构建
- 动量效应背后对应的实际意义

1.3 带非光滑系数的投资组合最优化问题 [6]

这篇文章是山东大学的一篇博士论文，这篇文章是课题的主要的启发，但是文中所给的模型都是不带消费的模型，实际生活中不带消费的投资组合问题受限很多，所以相比这篇文章，引入消费过程，再尝试使用文中的凸对偶方法求解非线性财富方程问题。

我重点看了文章的前两章，第一章给出了部分信息下的递归效用优化问题，第二章给出了凹系数下的递归效用优化问题。

第一章： 部分信息下的递归效用优化

- 首先给出了部分信息下的基本模型
- 然后运用控制中的新息过程，将部分信息转化为完全信息
- 最后运用凸对偶方法求解上述优化问题

第二章： 凹系数下的递归效用优化

- 首先得到基本模型，然后依次从经典形式推到倒向形式最后推到变分形式
- 然后运用凸对偶方法求解上述问题
- 最后给出了几个可以求出显示解的例子

求解的问题：

- 通过这篇文章我了解凸对偶方法的基本过程以及思路

1.4 基于递归效用的动量效应和通货膨胀下的最优消费投资策略研究 [7]

这篇文章是西南财经大学一篇硕士论文，这篇文章是课题的另外一个启发，但是文中所给的递归效用还停留在 Duffie 和 Epstein 于 1992 年所给出的形式，相比这篇文章我主要考虑将递归效用推广到 Elkaroui 于 1997 所给出的 BSDE 的解的形式；另一方面，文中求解 Duffie 所给形式的递归效用时使用的办法是动态规划原理求解 HJB 方程，相比这篇文章我主要考虑使用凸对偶方法求解递归效用最优化问题。

求解的问题：

- 通过这篇文章我主要了解到了含动量效应的金融市场的构建以及再引入通货膨胀影响下的金融市场的构建。
- 作者在求解单位跨期替代弹性最优消费投资策略时，使用的是动态最优化问题的 HJB 方程，而求解一般跨期替代弹性最优消费投资策略时，使用的是运用泰勒展开的方式得到 HJB 方程的近似解。

2 研究安排

计划八月份看完下面四篇文章：

- Continuous-time security pricing(Duffie 1994)
- A Dynamic Maximum Principle for the Optimization of Recursive Utilities Under Constraints(Elkaroui 1997)
- Understanding and Exploiting Momentum in Stock Returns(Juan Carlos Rodriguez 2005)
- Stochastic Differential Unility(Duffie 1992)

解决以下问题：

- 把一般带消费的一般方程的凸对偶方法补全
- 用上述凸对偶方法求解模型一和模型二

Part II

毕业设计草稿

1 引言

1.1 文章背景

最早研究连续时间下投资组合选择问题的是 Robert Merton，借助于 Ito 积分的概念，他在上世纪 60 年代研究了以下最优消费-投资问题

$$\max_{c,\pi} E\left[\int_0^T U_1\left(c_1,t\right)dt+U_2\left(X_T,T\right)\right],$$
$$\text{s.t. } dX=\left(rX+\pi'(\mu-r)\right)dt+\pi'\sigma dW-cdt,$$

其中 c 是消费过程, π 是投资组合过程, U_1 和 U_2 分别是消费和终端财富的效用函数, X 是财富过程, r 是无风险利率, μ 和 σ 分别是股票的平均收益率和波动率, W 是标准布朗运动。该问题

中效用函数的引入应该是受到期望效用理论的影响。根据期望效用公理体系, 对于理性的投资者来说, 效用函数应该是单调递增函数, 表示消费的越多, 效用越大, 同时也应该是凹函数, 表示边际效用递减。Merton 在模型中假设所有的市场参数 r, μ, σ 都是马尔可夫过程，然后运用随机控制理论中的动态规划原理推导出 HJB 方程，得到了最优解的一些性质。

但是上述 Merton 问题中的马尔可夫假设太严格了，因为通常来说，市场参数 r, μ, σ 都是从股票的历史价格中估计出来的，所以事先很难确定它们是某一随机过程的确定性函数。经过金融数学的发展，在得到了资产定价第一基本定理（满足无套利假设的市场中一定会存在等价鞅测度）和资产第二基本定理（金融市场是完备的等价于等价鞅测度存在唯一）以及在完备市场中投资时可以达到终端财富值的鞅刻画后。为了解决非马尔可夫情形下的 Merton 问题，Cox 和 Huang 和 Karatzas 提出了鞅方法。

鞅方法通过两步解决了原来的最优消费-投资问题。第一步用凸优化理论把最优的消费过程和最优终端财富值找到，第二步是找到复制最优消费过程和最优终端财富的投资组合，这实际上是一个鞅表示问题。这样完备市场下的期望效用最大化问题得以彻底解决。

但是在不完备市场中，等价鞅测度不唯一，导致投资者能够达到的终端财富值不是很清楚，从而使得不完备市场下的期望效用最大化问题变得异常困难。为了解决这个问题，Xu 在他的博士论文中提出了凸对偶的办法。

凸对偶的想法是把原期望效用最大化问题转化成其对偶问题，相应地，控制变量从终端财富编程等价鞅测度。然后解对偶问题并得到合适的等价鞅测度，用此等价鞅测度去构造原问题的最优终端财富。

凸对偶方法在期望效用最大化问题中行之有效的关键是能够证明原问题和对偶问题之间没有间隙。

由此可以看出期望效用最大化理论是当代投资组合选择理论最重要的理论之一。但是期望效用最大化问题基于偏好体系-期望效用公理体系遭受了诸如 Allais 悖论，Ellesberg 悖论的冲击。

在期望效用函数理论中, 风险厌恶和跨期替代率互为倒数, 使得刻画投资者行为的这两种指标无法彻底分开, 为了解决这一问题, Eptein 和 Zin 提出了离散时间的递归效用的概念, 后来 Duffie 和 Epstein 把递归效用推广到了连续时间框架下。与此同时 Pardoux 和 Peng 提出了非线性的倒向随机微分方程概念, 中定义的连续时间下的递归效用实际上是一类特殊的倒向随机微分方程 (生成元不含 Z)。我们研究的递归效用是用以下形式的倒向随机微分方程的初值 $Y(0)$ 来定义的,

$$Y(t) = u(X(T)) + \int_t^T f(s, Y(s), Z(s))ds - \int_t^T Z(s)dW(s).$$

El Karoui 等人研究了当 BSDE 的生成元 f 是光滑函数时的递归效用最大化问题, 他们用最大值原理刻画了最优解, 并且证明了最优解的存在性。但是最大值原理必须要求 BSDE 的生成元 f 连续可微, 这使得无法包含 Chen 和 Epstcin 提出的著名的 K-末知情形。Xing 研究了 BSDE 生成元是 Epstein-Zin 形式的递归效用优化问题, 这种生成元是非 Lipschitz 并且不含变量 Z 。

1.2 文章结构

解决投资组合最优化问题分为两部分，理论方法和数值方法。

理论方法：从引入动量效应出发，先计算基于递归效用的投资组合最优化理论，然后进一步将递归效用替换为 BSDE，计算最大化问题；再引入通货膨胀，先计算基于递归效用的投资组合最优化理论，然后进一步将递归效用替换为 BSDE，计算最大化问题。

数值方法：应用数值方法计算投资组合最优化问题，粒子群算法，首先将粒子群算法运用于期望效用的投资组合问题求解出来，然后首先计算基于动量效应的递归效用投资组合最优化理论，然后进一步计算动量效应的 BSDE 投资者最优化理论；再引入通货膨胀，先计算基于递归效用的投资组合最大化问题，然后进一步计算 BSDE 的投资组合最大化理论。

理论方法与数值方法交叉分析：一、用数值方法分析解析方法中得到的解关于参数的变化，并给予经济解释，1. 基于动量效应的递归效用中鞍点的参数影响；2. 基于动量效应的 BSDE 中鞍点的参数影响；3. 再引入通货膨胀的递归效用中鞍点的参数影响；4. 再引入通货膨胀的 BSDE 中鞍点的参数影响；二、比较基于递归效用的解析方法与数值方法的差异，1. 基于动量效应的递归效用与数值方法的比较；2. 基于动量效应的 BSDE 与数值方法的不叫；3. 再引入通货膨胀的递归效用与数值方法的比较；4. 再引入通货膨胀的递归效用与数值方法的比较。

总结与展望：在理论方法方面，横向扩展，可以将此非线性分析方法应用到带其他因子的问题中；纵向扩展，可以考虑更一般的财富方程非线性的情况；更进一步还可以考虑另外一种投资组合最优化方法均值-方差方法。在数值方法方面，可以考虑其他的算法，路径坐标优化算法，深度学习算法，对抗神经网络算法，并比较算法的优劣。

2 预备知识

- 预备金融知识
  - 投资组合理论
  - 财富方程
  - 动量效应
  - 通货膨胀
- 预备数学知识
  - 连续时间下的投资组合选择问题
  - 鞅方法
  - 变分形式
  - 凸对偶原理
  - 递归效用函数
  - BSDE 解的存在唯一性
  - 可微系数的期望效用最大化方法 (HJB 方程)
  - 可微系数的递归效用最大值方法 (最大值原理)

3 第一部分 模型的建立

3.1 基本假设

针对投资组合最优化问题，我们的模型考虑以下假设

- 投资者可以进行连续交易，即两次交易的时间可以任意的小。
- 金融市场中有两种资产，即无风险资产和风险债券。
- 投资者均为小规模投资者，也就是那些不会影响市场价格的投资者。

结合以上假设，我们考虑有 1 个无风险资产和 d 个风险资产, 令 $B = \{B(t) \mid \mathrm{t} \in [0, \infty)\}$ 表示 t 时刻无风险资产的价格过程, 则无风险资产价格过程满足

$$dB_t = \mathrm{r} B_t dt.$$

其中 r 是常数, 代表无风险利率。

3.2 模型一：考虑动量效应

3.2.1 引入动量效应

为了引入动量效应，Koijen(2009)[8] 建立了反应股票过去表现的状态变量 M_t 其形式如下:

$$M_t = \int_0^t e^{-w(t-u)} \frac{dS_u}{S_u}.$$

其中 S_t 为风险资产所满足的价格过程。$e^{-w(t-u)}$ 称为加权方式。$w > 0$, 这里为了对模型进行简化, 我们假定 $w = 1$ 。将上式等式两边对时间 t 进行微分, 我们可以得到:

$$dM_t = \frac{dS_t}{S_t} - M_t dt.$$

然后参照 Koijen(2009)[8] 中对价格过程的刻画，则 d 个风险资产价格过程满足如下的随机微分方程组：

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = \big(\phi_i M_i(t) + (1-\phi_i)\mu_i(t)\big)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t) dW_j(t), i = 1, \ldots, d$$

其中 $W = (W_1, \ldots, W_d)'$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$ 上的 d-维标准布朗运动。$\mathcal{F}_t$ 适应过程 $\{\mu' = (\mu_1(t), \ldots, \mu_d(t)), t \in [0, T]\}$ 为股票的预期收益率且 $\mu > r$。矩阵 σ_{ij} 是股票的波动率。$0 < \phi_i < 1$, 表示动量效应的强弱。

不失一般性，我们取 $d = 1$，则模型简化为

$$\frac{dS_t}{S_t} = \big(\phi M_t + (1-\phi)\mu_t\big)dt + \sigma_t dW_t \tag{1}$$

再将上式代入状态变量的方程，我们得到了

$$dM_t = \big((1-\phi)(\mu_t - M_t)\big)dt + \sigma_t dW_t. \tag{2}$$

3.2.2 推导财富过程

接下来我们推导财富过程，首先定义消费 C 是 $\mathcal{F}$ 可测的、非负的实值过程, 因此对于任意时间 t 都有 $\int_0^t |C_s|\, ds < \infty$ 。C_s 表示的是投资者在时间 $s \in [0,\infty)$ 所选择的消费。

一个自融资的投资者以初始财富 $x > 0$ 在假设的金融市场上进行投资, 他的财富过程 $X(\cdot)$ 满足如下随机微分方程:

$$dX_t = \pi_t \frac{dS_t}{S_t} + (X_t - \pi_t)\frac{dB_t}{B_t} - C_t dt$$

再将 (1) 式代入上式，我们得到了如下基于动量效应的财富过程的随机微分方程

$$dX_t = \big[rX_t + \pi_t(\phi(M_t - \mu_t) + \mu_t - r) - C_t\big]dt + \pi_t \sigma_t dW_t \tag{A1}$$

其中 M_t 满足 (2) 式。

3.2.3 引入带消费的递归效用函数

接下来我们定义如下形式的关于消费的递归效用

$$Y(t) = u(X(T)) + \int_t^T (u(C(s)) + f(s, Y(s), Z(s)))ds - \int_t^T Z(s)dW(s) \tag{A2}$$

我们对 f 和 u 有如下几条假设：

- (假设 1)
  - $f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是 $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$-适应过程, $\forall (y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ 。
  - f 对参数满足一致 Lipschitz 性，即存在一个常数 $L \geq 0$ 使得

$$\begin{gathered}|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)| \leq L(\|y_1 - y_2\| + \|z_1 - z_2\|) \\ \forall (t, \omega, y_1, y_2, z_1, z_2) \in \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d\end{gathered}$$

  - $f(t,\cdot,\cdot)$ 关于 t 连续并且 $E\int_0^T f^2(t,0,0)dt < +\infty$。
- (假设 2)
  - $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 连续可微并且满足线性增长条件。

结合 (A1)(A2) 两式，如果我们假设生成函数 f 满足假设 (假设 1)，效用函数 u 满足假设

(假设 2), 并且不允许破产，则我们的递归效用优化问题可以表示为:

$$
\text{最大化} Y^{x,\pi}(0),\ \text{s.t.} \begin{cases} X(t) \geq 0, \quad t \in [0,T],\ \text{a.s.}, \\ \pi(\cdot) \in M_{\mathbf{G}}^2, \\ (X(\cdot),\pi(\cdot)) \quad \text{满足式}(A1), \\ (Y(\cdot),Z(\cdot)) \quad \text{满足式}(A2), \end{cases} \tag{Q1}
$$

其中 $M_{\mathbf{G}}^2$ 是假设投资组合过程满足平方可积性的集合

3.3 模型二：引入通货膨胀

3.3.1 引入通货膨胀并推导财富过程

为了考虑通货膨胀的影响，我们参照 Yongqiang Liu(2020)[7] 的方法，引入价格因子，将名义财富过程进行折现得到实际财富过程。并建立消费篮子价格的动力学方程。

首先定义名义财富过程 $X^N = \left(X_t^N\right)_{t\geq 0}$, 则名义财富过程满足以下的随机微分方程:

$$
dX_t^N = \pi_t \frac{dS_t^N}{S_t^N} + \left(X_t^N - \pi_t\right) \frac{dB_t^N}{B_t^N} - C_t^N dt.
$$

然后将动量效应满足的方程代入上式, 我们可以得到名义财富过程满足以下随机微分方程:

$$
dX_t^N = \left[rX_t^N + \pi_t(\phi(M_t - \mu_t) + \mu_t - r) - C_t^N\right] dt + \pi_t \sigma_s dW_1.
$$

由于考虑通货膨胀的影响, 我们要得到实际财富过程, 需要引进价格因子, 将名义财富过程进行折现得到实际财富过程。引入消费篮子价格的动力学方程:

$$
\frac{dP(t)}{P(t)} = \mu_p dt + \sigma_p dZ_2.
$$

其中 μ_p 是预期通胀率, $\sigma_P > 0$ 是通胀波动率。我们假设布朗运动 W_1 和 W_2 是线性相关的, 相关系数为 ρ, 即 $dW_1 dW_2 = \rho dt$ 。

前面得到的财富过程表示的是名义财富过程的动力学方程, 为了得到实际财富过程, 我们需要进行折现, 即:

$$
X_t = \frac{X_t^N}{P(t)}
$$

其中 X_t 为实际财富, 根据伊藤公式, 我们可以得:

$$
\begin{aligned}
d\frac{1}{P(t)} &= -\frac{1}{P^2(t)} dP(t) + \frac{1}{P^3(t)} dP(t) dP(t) \\
&= -\frac{1}{P(t)} \left[\left(\mu_P - \sigma_P^2\right) dt + \sigma_P dW_2\right].
\end{aligned}
$$

因此我们可以得到实际财富过程的动力学方程为:

$$
\begin{aligned}
dX_t &= d\frac{X_t^N}{P(t)} = \frac{1}{P(t)}dX_t^N + X_t^N d\frac{1}{P(t)} + dX_t^N d\frac{1}{P(t)} \\
&= \left[X_t\left(r-\mu_P+\sigma_P^2\right)+\pi_t\left(\mu_s+\phi(M_t-\mu_t)-r-\sigma_s\sigma_P\rho\right)-C_t\right]dt \\
&+ X_t\pi_t\sigma_s dW_1 - X_t\sigma_P dW_2.
\end{aligned} \tag{A3}
$$

3.3.2 引入带消费的递归效用函数

接下来我们定义如下形式的关于消费的递归效用

$$
Y(t)=u(X(T))+\int_t^T (u(C(s))+f(s,Y(s),Z(s)))ds-\int_t^T Z(s)dW(s) \tag{A4}
$$

我们对 f 和 u 的假设同前一部分:

- (假设 1)
  - $f:\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 是 $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$-适应过程, $\forall(y,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ 。
  - f 对参数满足一致 Lipschitz 性，即存在一个常数 $L\geq 0$ 使得

$$
\begin{gathered}
\left|f\left(t,y_1,z_1\right)-f\left(t,y_2,z_2\right)\right|\leq L\left(\left\|y_1-y_2\right\|+\left\|z_1-z_2\right\|\right) \\
\forall\left(t,\omega,y_1,y_2,z_1,z_2\right)\in\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d
\end{gathered}
$$

  - $f(t,\cdot,\cdot)$ 关于 t 连续并且 $E\int_0^T f^2(t,0,0)dt<+\infty$。
- (假设 2)
  - $u:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 连续可微并且满足线性增长条件。

结合 (A3)(A4) 两式，如果我们假设生成函数 f 满足假设 (假设 1)，效用函数 u 满足假设 (假设 2), 并且不允许破产，则我们的递归效用优化问题可以表示为:

$$
\text{最大化} Y^{x,\pi}(0),\ \text{s.t.}\ \begin{cases}
X(t)\geq 0, \quad t\in[0,T],\ \text{a.s.}, \\
\pi(\cdot)\in M_{\mathbf{G}}^2, \\
(X(\cdot),\pi(\cdot)) \quad \text{满足式}(A3), \\
(Y(\cdot),Z(\cdot)) \quad \text{满足式}(A4),
\end{cases} \tag{Q2}
$$

其中 $M_{\mathbf{G}}^2$ 是假设投资组合过程满足平方可积性的集合

4 第二部分 理论方法

4.1 带消费的凹系数非线性财富方程的递归效用优化

4.1.1 基本模型

为了更一般化我们的模型，我们考虑以下假设

- 投资者可以进行连续交易，即两次交易的时间可以任意的小。
- 金融市场中有两种资产，即无风险资产和风险债券。
- 投资者均为小规模投资者，也就是那些不会影响市场价格的投资者。

结合以上假设，我们考虑有 1 个无风险资产和 d 个风险资产, 令 $B=\{B(t) \mid \mathrm{t} \in[0, \infty)\}$ 表示 t 时刻无风险资产的价格过程, 则无风险资产价格过程满足

$$dB_t=\mathrm{r} B_t dt.$$

其中 r 是常数, 代表无风险利率。

则非线性系数的财富过程满足以下的随机微分方程

$$dX_t=b(t, c_t, X_t, \sigma_t \pi_t) dt+\pi_t \sigma_s dW_1. \tag{A5}$$

其中 b 是一个给定的随机函数。

下面给出几个例子说明上述财富方程的一般性：

标准线性方程：

$$dX_t=(r_t X_t+\pi_t \sigma_t \theta_t-c_t) dt+\pi_t \sigma_s dW_1.$$

此时 $b(t, c_t, X_t, \sigma_t \pi_t)=r_t X_t+\pi_t \sigma_t \theta_t-c_t$

模型一 引入动量效应：

$$dX_t=\left[r X_t+\pi_t(\phi(M_t-\mu_t)+\sigma_t \theta_t)-C_t\right] dt+\pi_t \sigma_t dW_t$$

此时 $b(t, c_t, X_t, \sigma_t \pi_t)=r X_t+\pi_t(\phi(M_t-\mu_t)+\sigma_t \theta_t)-c_t$

模型二 再引入通货膨胀：

$$\begin{aligned} dX_t= & \left[X_t\left(r-\mu_P+\sigma_P^2\right)+\pi_t\left(\mu_s+\phi(M_t-\mu_t)-r-\sigma_s \sigma_P \rho\right)-C_t\right] dt \\ & +X_t \pi_t \sigma_s dW_1-X_t \sigma_P dW_2. \end{aligned}$$

此时 $b(t, c_t, X_t, \sigma_t \pi_t)=X_t\left(r-\mu_P+\sigma_P^2\right)+\pi_t\left(\mu_s+\phi(M_t-\mu_t)-r-\sigma_s \sigma_P \rho\right)-c_t$

4.1.2 引入带消费的递归效用函数

接下来我们定义如下形式的关于消费的递归效用

$$Y(t)=u(X(T))+\int_t^T(u(C(s))+f(s, Y(s), Z(s))) ds-\int_t^T Z(s) dW(s) \tag{A6}$$

我们对 f 和 u 的假设同前一部分的假设一和假设二。

结合 (A5)(A6) 两式，如果我们假设生成函数 f 满足假设 (假设 1)，效用函数 u 满足假设 (假设 2), 并且不允许破产，则我们的递归效用优化问题可以表示为:

$$\text{最大化} Y^{x,\pi}(0), \text{ s.t. } \begin{cases} X(t) \geq 0, \quad t \in [0,T], \text{ a.s.}, \\ \pi(\cdot) \in M^2_{\mathbf{G}}, \\ (X(\cdot), \pi(\cdot)) \quad \text{满足式}(A5), \\ (Y(\cdot), Z(\cdot)) \quad \text{满足式}(A6), \end{cases} \tag{Q3}$$

其中 $M^2_{\mathbf{G}}$ 是假设投资组合过程满足平方可积性的集合

4.1.3 问题的倒向形式

然后我们同样参考 Elkaroui(1997)[3] 这篇文章中求解非线性 BSDE 的办法，首先令 $q(\cdot) := \sigma(\cdot)\pi(\cdot)$ 这样财富方程和递归效用过程可以写成:

$$\begin{cases} dX_t = b(t, c_t, X_t, q(t))dt + q(t)dW_t, \\ X(T) = \xi \\ -dY(t) = \big[u(C(t)) + f(t, Y(t), Z(t))\big]dt - Z(t)d\widehat{W}(t) \\ Y(T) = u(\xi) \end{cases} \tag{A7}$$

其中“控制变量”终端财富 ξ 是从下面这个集合中选出来的

$$U := \left\{\xi \mid \xi \in L^2, \xi \geq 0\right\}.$$

有了上述约束后我们把 $A5$ 的解记成 $\left(X^\xi(\cdot), q^\xi(\cdot), Y^\xi(\cdot), Z^\xi(\cdot)\right)$。从而，我们的问题转化成下面的优化问题:

$$\text{最大化} J(\xi) := Y_0^\xi, \text{ s.t. } \begin{cases} \xi \in U, \\ X_0^\xi = x, \\ \left(X^\xi(\cdot), q^\xi(\cdot)\right), \left(Y^\xi(\cdot), Z^\xi(\cdot)\right) \text{ 满足式}(A5). \end{cases} \tag{Q4}$$

其中 X_0^ξ, Y_0^ξ 分别表示 $X^\xi(0), X^\xi(0)$。

注 4.1. 两者问题的等价性说明

注 4.2. 转化优势从状态约束变成控制约束

4.1.4 问题的变分形式

由于没有 f 的可微性，则上面的优化问题没办法使用最大值原理，但我们可以将可微条件放宽，假设 f 的凹性，然后应用凸对偶的方法进行求解。

- (假设 3)
  - 函数 $(y, z) \mapsto f(\omega, t, y, z)$ 对任意 $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$ 都是凹函数。

- (假设 4)
  - $u:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 严格单调递增, 严格凹, 连续可微并且满足

$$u'(0+) := \lim_{x\to 0} u'(x) = \infty, \quad u'(\infty) := \lim_{x\to\infty} u'(x) = 0.$$

再应用 Elkaroui, Peng and Quenez(2001)[4] 中性质 3.4 的办法，给出 (Q) 问题的变分形式

$$\text{最大化} J(\xi) = \inf_{(\beta,\gamma)\in\mathcal{B}} E\left[\int_0^T \Gamma_{0,s}^{\beta,\gamma} F(s,c_s,\beta(s),\gamma(s))ds + \Gamma_{0,T}^{\beta,\gamma} u(\xi)\right] \tag{Q5}$$

其中函数 F 是 $u+f$ 的凸对偶函数并且

$$\begin{aligned} N_{t,s}^{\mu,\nu} &= e^{-\int_t^s \left(\mu(r)+\frac{1}{2}\|\nu(r)\|^2\right)dr - \int_t^s \nu'(r)dW(r)}, \\ \Gamma_{t,s}^{\beta,\gamma} &= e^{\int_t^s \left(\beta(r)-\frac{1}{2}\|\gamma(r)\|^2\right)dr + \int_t^s \gamma'(r)dW(r)} \end{aligned}$$

证明上述变分形式与倒向形式等价需要如下的命题:

命题 4.3. *f+u* 的 *Fenchel-legendre* 变换

命题 4.4. 参考域 *B* 是一个凸集

引理 4.5. 证明问题 *(Q4)* 等价于问题 *(Q5)*

4.1.5 凸对偶方法求解

- 应用 min-max V 下被 V 上控制住，则如果能够找到 V 下 =V 上，则最优解找到
- 函数 u+f 的凸对偶

引理 4.6. 鞍点的条件

引理 4.7. 证明没有对偶间隙

引理 4.8. 四元组的存在性

定理 4.9. 证明最优财富终端值的存在性并求解

4.1.6 鞅方法求解最优投资组合

定理 4.10. 在得到最优终端财富后，通过求解财富过程方程来得到最优投资组合

解释最优投资组合背后的现实意义

4.2 求解模型一

4.2.1 问题的倒向形式

参考 Elkaroui(1997)[3] 这篇文章中求解非线性 BSDE 的办法，首先令 $q(\cdot) := \sigma(\cdot)\pi(\cdot)$ 这样财富方程和递归效用过程可以写成:

$$\begin{cases} -dX(t) = -\big[X_t\big(r + q(t)\sigma(t)^{-1}(\phi\hat{M}_t + (1-\phi)\hat{\mu}_t - r)\big) - C_t\big]dt - X_t q(t)dW_t, \\ X(T) = \xi \\ -dY(t) = \big[u(C(t)) + f(t, Y(t), Z(t))\big]dt - Z(t)d\widehat{W}(t) \\ Y(T) = u(\xi) \end{cases} \tag{A5}$$

其中“控制变量”终端财富 ξ 是从下面这个集合中选出来的

$$U := \left\{\xi \mid \xi \in L^2, \xi \geq 0\right\}.$$

有了上述约束后我们把 $A3$ 的解记成 $\left(X^\xi(\cdot), q^\xi(\cdot), Y^\xi(\cdot), Z^\xi(\cdot)\right)$。从而，我们的问题转化成下面的优化问题:

$$\text{最大化} J(\xi) := Y_0^\xi, \text{ s.t. } \begin{cases} \xi \in U, \\ X_0^\xi = x, \\ \left(X^\xi(\cdot), q^\xi(\cdot)\right), \left(Y^\xi(\cdot), Z^\xi(\cdot)\right) \text{ 满足式}(A3). \end{cases} \tag{Q2}$$

其中 X_0^ξ, Y_0^ξ 分别表示 $X^\xi(0), X^\xi(0)$。

注 4.11. 两者问题的等价性说明

注 4.12. 转化优势从状态约束变成控制约束

4.2.2 问题的变分形式

由于没有 f 的可微性，则上面的优化问题没办法使用最大值原理，但我们可以将可微条件放宽，假设 f 的凹性，然后应用凸对偶的方法进行求解。

- (假设 3)
  - 函数 $(y, z) \mapsto f(\omega, t, y, z)$ 对任意 $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$ 都是凹函数。
- (假设 4)
  - $u : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ 严格单调递增, 严格凹, 连续可微并且满足

$$u'(0+) := \lim_{x \to 0} u'(x) = \infty, \quad u'(\infty) := \lim_{x \to \infty} u'(x) = 0.$$

再应用 Elkaroui, Peng and Quenez(2001)[4] 中性质 3.4 的办法，给出 (Q2) 问题的变分形式

$$\text{最大化} J(\xi) = \inf_{(\beta,\gamma) \in \mathcal{B}} E\left[\int_0^T \Gamma_{0,s}^{\beta,\gamma} F(s, \beta(s), \gamma(s))ds + \Gamma_{0,T}^{\beta,\gamma} u(\xi)\right] \tag{Q3}$$

证明上述变分形式与倒向形式等价需要如下的命题：

命题 4.13. *f+u* 的 *Fenchel-legendre* 变换

命题 4.14. 参考域 B 是一个凸集

引理 4.15. 证明问题 *(Q2)* 等价于问题 *(Q3)*

其中函数 F 是 $u+f$ 的凸对偶函数并且

$$N_{t,s}^{\mu,\nu} = e^{-\int_t^s \left(\mu(r)+\frac{1}{2}\|\nu(r)\|^2\right)dr - \int_t^s \nu'(r)dW(r)},$$
$$\Gamma_{t,s}^{\beta,\gamma} = e^{\int_t^s \left(\beta(r)-\frac{1}{2}\|\gamma(r)\|^2\right)dr + \int_t^s \gamma'(r)dW(r)}$$

4.3 求解模型二

4.3.1 问题的倒向形式

我们同样参考 Elkaroui(1997)[3] 这篇文章中求解非线性 BSDE 的办法，首先令 $q(\cdot) := \sigma(\cdot)\pi(\cdot)$ 这样财富方程和递归效用过程可以写成:

$$\begin{cases} -dX(t) = \left[X_t\left(\pi_t\left(\mu_s+\phi M_t - r - \sigma_s\sigma_P\rho\right) + r - \mu_P + \sigma_P^2\right) - C_t\right]dt \\ \qquad\qquad +X_t\pi_t\sigma_s dW_1 - X_t\sigma_P dW_2. \\ X(T) = \xi \\ -dY(t) = \left[u(C(t)) + f(t, Y(t), Z(t))\right]dt - Z(t)d\widehat{W}(t) \\ Y(T) = u(\xi) \end{cases} \tag{A6}$$

其中“控制变量”终端财富 ξ 是从下面这个集合中选出来的

$$U := \left\{\xi \mid \xi \in L^2, \xi \geq 0\right\}.$$

有了上述约束后我们把 $(A6)$ 的解记成 $\left(X^\xi(\cdot), q^\xi(\cdot), Y^\xi(\cdot), Z^\xi(\cdot)\right)$ 。从而，我们的问题转化成下面的优化问题:

$$\text{最大化} J(\xi) := Y_0^\xi, \text{ s.t.} \begin{cases} \xi \in U, \\ X_0^\xi = x, \\ \left(X^\xi(\cdot), q^\xi(\cdot)\right), \left(Y^\xi(\cdot), Z^\xi(\cdot)\right) \text{ 满足式}(A6). \end{cases} \tag{Q5}$$

其中 X_0^ξ, Y_0^ξ 分别表示 $X^\xi(0), X^\xi(0)$。

4.3.2 问题的变分形式

在这里我们继续假设 f 的凹性，然后应用凸对偶的方法进行求解。

- (假设 3)
  - 函数 $(y,z) \mapsto f(\omega,t,y,z)$ 对任意 $(\omega,t) \in \Omega \times [0,T]$ 都是凹函数。

- (假设 4)
  - $u:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 严格单调递增, 严格凹, 连续可微并且满足

$$u'(0+):=\lim_{x\to 0}u'(x)=\infty,\quad u'(\infty):=\lim_{x\to\infty}u'(x)=0.$$

给出 (Q5) 问题的变分形式

$$\text{最大化} J(\xi)=\inf_{(\beta,\gamma)\in\mathcal{B}}E\left[\int_0^T\Gamma_{0,s}^{\beta,\gamma}F(s,\beta(s),\gamma(s))ds+\Gamma_{0,T}^{\beta,\gamma}u(\xi)\right] \tag{Q6}$$

其中函数 F 是 $u+f$ 的凸对偶函数并且

$$N_{t,s}^{\mu,\nu}=e^{-\int_t^s\left(\mu(r)+\frac{1}{2}\|\nu(r)\|^2\right)dr-\int_t^s\nu'(r)dW(r)},$$
$$\Gamma_{t,s}^{\beta,\gamma}=e^{\int_t^s\left(\beta(r)-\frac{1}{2}\|\gamma(r)\|^2\right)dr+\int_t^s\gamma'(r)dW(r)}$$

5 第三部分 数值方法

6 第四部分 理论方法与数值方法进行比较

6.1 数值分析

- 一、用数值方法分析解析方法中得到的解关于参数的变化，并给予经济解释
  - 1. 使用 MATLAB 分析模糊系数和 u 系数变化时对最优策略组合的影响的对比
  - 2. 使用 MATLAB 分析固定模糊系数，变化 u，观察 x 轴为动量效应初始值和 y 轴最优投资组合的曲线图；使用 MATLAB 分析固定 u 系数，变化模糊系数，观察 x 轴为动量效应初始值和 y 轴最优投资组合的曲线图
  - 3. 再引入通货膨胀分析模糊系数和 u 系数变化时对最优策略组合的影响的对比；
  - 4. 再引入通货膨胀分析固定模糊系数，变化 u，观察 x 轴为通货膨胀系数和 y 轴最优投资组合的曲线图；分析固定 u 系数，变化模糊系数，观察 x 轴为通货膨胀系数和 y 轴最优投资组合的曲线图
- 二、比较基于递归效用的解析方法与数值方法的差异
  - 1. 基于动量效应的递归效用与数值方法的比较；
  - 2. 基于动量效应的 BSDE 与数值方法的不同；
  - 3. 再引入通货膨胀的递归效用与数值方法的比较；
  - 4. 再引入通货膨胀的递归效用与数值方法的比较。

7 总结与展望

(待补充)

Part III

参考文献

References

[1] Duffie, D., Epstein, L.G. *Stochastic differential utility*. Econometrica 60, 353–394 (1992).

[2] Etienne Pardoux and Shige Peng.*Adapted solution of a backward stochastic differential equation*. Systems and Control Letters, 14(1): 55-61, 1990.

[3] El Karoui N, Shige Peng, Quenez M C. *Backward stochastic differential equations in finance[J]*. Mathematical finance, 1997, 7(1): 1-71.

[4] N. El Karoui, Shige Peng, M.C. Quenez.*A Dynamic Maximum Principle for the Optimization of Recursive Utilities Under Constraints*.The Annals of Applied Probability 2001, Vol. 11, No. 3, 664–693

[5] Zengjing Chen, L Epstein. *Ambiguity, risk, and asset returns in continuous time*. Econometrica, 2002.

[6] Xiaoming Shi.*Portfolio Optimization with Nonsmooth Coefficients[D]*.Shandong University, 2017.

[7] Yongqiang Liu. *Momentum and Inflation in Optimal Consumption Investment Strategy Based on Recursive Utility[D]*. Southwestern University of Finance and Economics,2020.

[8] Ralph S.J. Koijen *Momentum and Mean-Reversion in Strategic Asset Allocation*. Management science, 2009, 55(7): 1199-1213.

[9] Kallianpur G. *Stochastic filtering theory[M]*. Springer Science and Business Media, 2013.

[10] Pham H. *Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications[M]*. Springer Science and Business Media, 2009.、

[11] 张恭庆, 函数论. 变分学讲义 *[M]*. 高等教育出版社, 2011.