



2021 年 1 月汇报

山东大学数学与交叉科学研究中心

兰宇恒

目录

1	专业课复习	2
1.1	函数论	2
1.2	泛函分析教程	2
1.3	测度与概率	3
2	英语	4
2.1	背单词	4
2.2	听听力	4
3	复习分析课程	5
3.1	实变函数	5
3.2	复变函数	5
3.3	泛函分析	5

1 专业课复习

一月份在家把第一学期所学的专业课重新整理了一遍，并把之前的疑问点重新思考了一遍。

1.1 函数论

第一部分，主要介绍了，一些基本的概念 包括黎曼映射定理的叙述/可测黎曼映射定理的叙述，共形映射的定义/拟共形映射的定义，同胚映射是共形映射的充分必要条件，复扩张的定义，格罗蒋茨问题及其证明，径向拉伸的例子。

第二部分，主要介绍了 sobolev 空间以及相关的一些概念和性质 L_p 空间的性质， L_p 空间上的 holder 不等式与 minkowski 不等式，证明了 L_p 空间按 p 范数是一个 banach 空间/ $W^{k,p}$ 空间按 k, p, Ω 范数为 banach 空间，介绍了磨光核的概念及其性质/被磨光核作用后函数的性质，证明了变分法基本引理，介绍弱导数并引出了 sobolev 空间，单位分解定理，光滑函数局部逼近定理，直线上绝对连续 (ACL) 的定义以及相关的定理证明。

第三部分，正在逐步介绍拟共形映射的基本性质 微分性质，主要证明了 $W^{1,1}_{loc}$ 空间上连续开映射是几乎处处可微的，变量替换性质，主要证明了 $W^{1,2}_{loc}$ 空间上连续开映射，把零测集映到零测集，Whitney 分解的基本概念以及有关性质

第四部分，拟对称映射的相关理论 弱拟对称映射的定义以及性质，拟对称则一定是拟共形映射，拟共形映射则是局部拟对称的，拟共形映射的度量概念以及解析概念，拟共形映射的紧性

第五部分，cauchy 算子以及 bearling 算子 green 公式，一般化的 cauchy 公式，cauchy 算子，修改后的 cauchy 算子，bearling 算子，cauchy 算子与 bearling 算子的求微分性质，以及两者之间的关联，bearling 算子的延拓性质

第六部分，可测的 Riemann 定理的证明 beltrami 方程，normalized 的函数，局部的情况，Newman 定理，黎曼映照定理的叙述以及证明，可测的黎曼映照定理的叙述以及证明

1.2 泛函分析教程

第一部分，Hilbert 空间上的空间理论 度量空间的定义，完备性与完备化，度量空间的拓扑，稠密与无处稠密，完备度量空间的性质，赋范线性空间的定义及性质，cauchy-schwarz 不等式，Hilbert 空间，正交投影，投影算子，线性泛函以及 H 上线性泛函的性质，riez 表示定理，泛函的范数，将基的概念从有限维推广到无限维，正交基的概念，空间直和。

第二部分，Hilbert 空间上的算子理论 Hilbert 空间上的线性算子，算子的范数，线性算子构成的空间，伴随算子，正规算子，投影算子与幂等算子，不变子空间与约化子空间，紧算子，有限秩算子，紧算子以及 H 上线性算子的关联，对角算子，谱算子，下有界与值域和核

第三部分, banach 空间上的理论 banach 空间上的线性算子, 有限维赋范线性空间的特殊性, 商空间以及空间的积, banach 上的线性泛函, hahn-banach 定理, 商空间与子空间的对偶, 自反空间, 开映射定理, 逆算子定理, 闭图像定理, 一致有界原理, 强收敛, 弱收敛, 弱 * 收敛

第四部分, banach 代数与 banach 空间上的谱理论 代数的理想与商, 谱理论, 函数演算, 线性算子的谱, 可交换的 banach 代数

1.3 测度与概率

第一部分, 集合, 映射与函数, 距离空间 集合及其运算, 映射与势, 可数集与不可数集, 距离空间定义以及例子, 开集闭集, 完备性, 可分性, 列紧性与紧性, 距离空间上的映射与函数, 连续函数的几个等价条件

第二部分, 测度空间与概率空间 半集代数, 集代数, σ 代数, λ 系, Π 系, 单调类, 以及这几种代数系之间的关联, 单调函数与测度的构造, 单调函数的性质, 外侧度以及由外侧度引出的可测集, 测度扩张定理的叙述与证明, borel 测度, 测度空间的一些性质, 测度的完全化以及测度的逼近, hausdorff 维数及测度介绍

第三部分, 可测函数与随机变量 介绍更一般的可测函数的定义, 随机变量与概率分布测度与分布函数之间的对应关系, 可测函数的构造性质 (简单函数-初等函数-可测函数), 函数形式的单调类定理

第四部分, 积分与数学期望 积分的定义 (非负简单函数-非负可测函数-实可测函数-复可测函数), 积分的性质 (线性, 保号性, 可积性), Schwarz 不等式, 期望的定义, 期望的独立, 方差的定义, 随机变量的函数的概率分布, L-S 积分的表示, 独立事件类的扩张定理, 积分收敛定理 (单调收敛定理, fatou 引理, 控制收敛定理), 离散参数换成连续参数的定理推广

第五部分, 乘积测度 乘积测度与转移测度, 乘积半集代数, 集代数, σ 代数, 截集与截函数, 截集, 截函数, 对截函数的积分可测, fubini 定理以及应用, 无穷维乘积概率 (Tulcea 定理)

第六部分, 不定积分与条件期望 符号测度, 全变差, 有界变差函数及其性质, hahn 分解定理, lebesgue 分解定理与 radon-nikodym 定理, 条件概率的概念及性质, 条件期望的积分性质与平滑性质

第七部分, 收敛概念 几乎处处收敛, 依测度收敛, L_r 收敛, 凸函数的性质, jessen 不等式, 一致可积概念, 条件期望在最佳均方逼近上的应用, 强收敛与弱收敛, 几种收敛之间的关联及反例。

2 英语

准备备考雅思，计划 2021 年寒假雅思达标

2.1 背单词

寒假在背新东方雅思词汇乱序版，每天一单元

2.2 听听力

《listen to english》三册，每天听一小节

3 复习分析课程

打算借寒假的时间把本科的分析课程按脉络重新整理一遍

3.1 实变函数

第一章，集合与子集 集合与子集合，集合的运算，映射与基数，欧氏空间中点与点之间的距离，闭集，开集，Borel 集，cantor 集，点集之间的距离

3.2 复变函数

第一章，复数与复变函数 复数，复平面，复平面上的点集，复变函数，坐标表示

3.3 泛函分析

第一章，距离线性空间 选择公理，良序定理，zorn 引理，线性空间，hamle 基，距离空间，距离线性空间，距离空间中的拓扑，可分空间，完备的距离空间，列紧性，赋范线性空间，压缩映像原理，frechet 导数