2022 年 5 月总结

兰宇恒

目录

1 毕业设计

毕业设计的课题先是暂定为考虑动量效应和通货膨胀下的投资组合最优化问题。

2 研究背景

2.1 研究背景-部分信息的投资组合最优化理论

- 金融数学包括三个分支：投资组合理论；资产定价理论；风险度量理论。

连续时间下投资组合选择问题

- Merton 模型是最早研究连续时间下投资组合的模型。该模型中效用函数的引入受到期望效用理论的影响。Merton 在模型中假设所有的市场参数都是马尔可夫过程。

非马尔可夫情形下 Merton 问题

- 但是 Merton 假设中的马尔可夫太严格了。Cox 和 Huang 和 Karatzas 提出了鞅方法在完备市场中解决了非马尔可夫情形下的 Merton 问题。

不完备市场下期望效用最大化问题

- 但是在不完备市场中，等价鞅测度不唯一，为了解决这个问题，Chen[5] 提出了凸对偶的办法。

- 由上看出期望效用最大化理论是当代投资组合选择理论最重要的理论之一。

递归效用

- 但是由于期望效用理论的不足，Duffie 和 Epstein [1] 提出了连续时间框架下的递归效用。与此同时 Pardoux 和 Peng [2] 提出了非线性的倒向随机微分方程概念, [1] 中定义的连续时间下的递归效用实际上是一类特殊的倒向随机微分方程 (生成元不含 Z)。

生成元 f 可微时的递归效用最大化问题

- El Karoui 等人 [4] 研究了当 BSDE 的生成元 f 是光滑函数时的递归效用最大化问题, 他们用最大值原理刻画了最优解, 并且证明了最优解的存在性。但是最大值原理必须要求 BSDE 的生成元 f 连续可微, 这使得 [4] 无法包含 Chen 和 Epstcin[5] 提出的著名的 K-末知情形。

部分信息下的投资组合最优化问题

- 以上所有研究递归效用优化问题的文献都假设投资者能观测到金融市场上的所有信息，这显然是不符合实际的。为了解决这一问题，Shi[6] 采用滤波技术，把部分信息下的投资组合选择问题转化到完全信息下，股票平均收益率用其滤波估计来代替，布朗运动用新息过程来代替。然后采用鞅方法来刻画最优解。
- 并且我们发现通过这种方法，我们不需要 f 的可微性，只需要f 的凹性即可。

2.2 研究背景-引入动量效应和通货膨胀

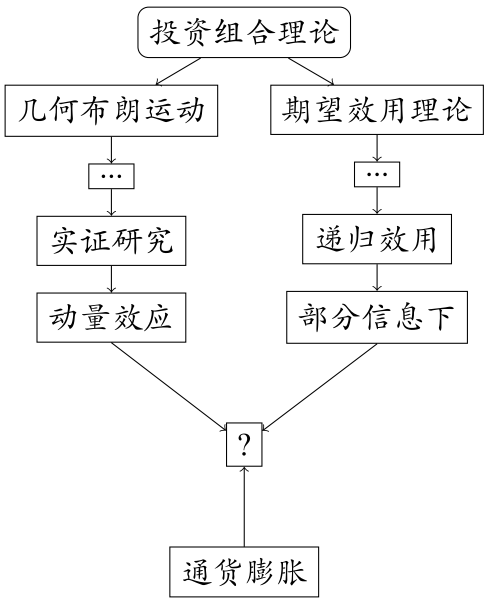
引入动量效应

- 自 Merton 提出连续时间下最优投资问题后，学者们从开始认为股票收益是不可预测的，服从几何布朗运动，到越来越多的研究表明股票收益是可预测的，比如一些实证研究发现，股票价格过去的收益和表现能在一定程度上预测股票未来的走势，即股票运行会表现出动量效应。

引入通货膨胀

- 并且对于投资者而言，通货膨胀的出现增加了市场的不确定性和风险的不可预测性，影响投资者的投资决策。因此通货膨胀对投资组合最优的影响不容忽视。

3 研究目的



- 本次研究的目的是为了考虑在动量效应和通货膨胀这两个实际因子的情况下
- 使用部分信息对应的非光滑系数投资组合最优化问题的方法是否仍然可以找到最优终端财富值？

4 研究流程

- 第一部分：考虑动量效应下部分信息递归效用优化问题
  1. 基本模型
     - 计算动量效应影响下的金融市场
     - 推导对应的财富过程
     - 给出问题的部分信息形式
  2. 转换部分信息
     - 通过新息过程把部分信息转换到完全信息下
     - 给出问题的完全信息形式
  3. 鞅方法求解
     - 给出问题的倒向形式和变分形式
     - 在假设生成元 f 的凹性情况下运用凸对偶方法计算鞍点
  4. 数值模拟
     - 在给定特殊生成元 f 的情况下，对计算出来的解析式，用数值模拟的方法探究动量效应参数对投资组合最优化的影响
- 第二部分：再将通货膨胀效应引入模型，同时考虑动量效应和通货膨胀，重复上述过程。

5 研究思路

结合上面的研究流程大纲，我在此将研究思路简单写一遍。

5.1 基本模型-引入动量效应

- 在金融市场中我们考虑有 1 个无风险资产和 d 个风险债券 (股票), 令 $B = \{B(t) \mid \mathrm{t} \in [0, \infty)\}$ 表示 t 时刻无风险资产的价格过程, 则无风险资产价格满足

$$dB_t = \mathrm{r} B_t dt.$$

  其中 r 是常数, 代表无风险利率。

- 为了引入动量效应，Rodriguez and Sbuelz[8] 建立了反应股票过去表现的状态变量 M_t, 其形式如下:

$$M_t = \int_0^t e^{-w(t-u)} \frac{dS_u}{S_u}.$$

  其中, $e^{-w(t-u)}$ 称为加权方式。$w > 0$, 这里为了对模型进行简化, 我们假定 $w = 1$ 。

- 将上式等式两边对时间 t 进行微分, 我们可以得到:

$$dM_t = \frac{dS_t}{S_t} - M_t dt.$$

- 假设 S_t 为时间 t 时股票资产的价格, 然后参考 Rodriguez 和 Sbuelz[8] 中对股价过程的刻画, 则股票价格的动力学方程为:

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = \big(\phi_i M_i(t) + (1-\phi_i)\mu_i(t)\big)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)dW_j(t), i = 1, \dots, d$$

- 不失一般性，我们取 d=1，则模型上式简化为

$$\frac{dS_t}{S_t} = \big(\phi M_t + (1-\phi)\mu_t\big)dt + \sigma_t dW_t$$

其中, σ 为股票价格波动率, μ 为股票价格的预期收益率且 $\mu > r, W_t$ 为定义在概率空间上的标准布朗运动。$0 < \phi < 1$, 表示动量效应的强弱。

- 再将上式代入状态变量的方程，我们有

$$dM_t = \big((1-\phi)(\mu_t - M_t)\big)dt + \sigma_t dW_t.$$

5.2 基本模型-推导财富方程

- 我们定义消费 C 是 $\mathcal{F}$ 可测的、非负的实值过程, 因此对于任意时间 t 都有 $\int_0^t |C_s|\, ds < \infty$ 。C_s 表示的是投资者在时间 $s \in [0, \infty)$ 所选择的消费。

- 一个自融资的投资者以初始财富 $x > 0$ 在这样的金融市场上进行投资, 他的财富过程 $X(\cdot)$ 满足如下随机微分方程:

$$\begin{aligned} dX_t &= \pi_t X_t \frac{dS_t}{S_t} + (1-\pi_t) X_t \frac{dB_t}{B_t} - C_t dt \\ &= \big[X_t\big(r + \pi_t(\phi M_t + (1-\phi)\mu_t - r)\big) - C_t\big]dt + X_t \pi_t \sigma_t dW_t \end{aligned} \tag{A1}$$

- 其中 M_t 满足

$$dM_t = \big((1-\phi)(\mu_t - M_t)\big)dt + \sigma_t dW_t.$$

5.3 基本模型-给出部分信息下的假设

- 首先我们假设投资者观测不到股票的平均收益率 μ 和驱动股票价格的布朗运动 W, 而只能观测到股票价格 S 。从而, 投资者必须基于股票价格选择投资策略来达到递归效用最大化, 也就是说他的投资组合 $\pi(t)$ 必须是 $\mathcal{G}_t = \sigma(S(u), u \le t)$ 适应的。由于投资者无法观测到布朗运动 W, 他的递归效用过程也就无法用 W 来驱动。

- 为了定义基于信息流 $\{\mathcal{G}_t\}_{t\ge 0}$ 的效用过程, 我们引入新息过程

$$\widehat{W}(t) := W(t) + \int_0^t \big(\sigma^{-1}(s)\mu(s) - \sigma^{-1}(s)\hat{\mu}(s)\big)\, ds, t \ge 0$$

其中 $\hat{\mu}:\hat{\mu}(t)=E\left[\mu(t)\mid\mathcal{G}_t\right]$，$\widehat{W}$ 是概率 P 下的布朗运动, 并且 $\sigma(\widehat{W}(s),s\le t)\subseteq\mathcal{G}_t$。

- 从而我们可以定义如下形式的关于消费的递归效用

$$Y(t)=u(X(T))+\int_t^T(u(C(s))+f(s,Y(s),Z(s)))ds-\int_t^T Z(s)d\widehat{W}(s)\tag{A2}$$

- 其中 f 和 u 是满足下面这几条假设的函数。
  - (假设 1)

    (1) $f:\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 是 $\{\mathcal{G}_t\}_{t\ge0}$-适应过程, $\forall(y,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$。

    (2) 存在一个常数 $C\ge0$ 使得

$$\begin{gathered}\left|f\left(t,y_1,z_1\right)-f\left(t,y_2,z_2\right)\right|\le C\left(\left\|y_1-y_2\right\|+\left\|z_1-z_2\right\|\right)\\ \forall\left(t,\omega,y_1,y_2,z_1,z_2\right)\in\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\end{gathered}$$

    (3) $f(t,\cdot,\cdot)$ 关于 t 连续并且 $E\int_0^T f^2(t,0,0)dt<+\infty$.
  - (假设 2) $u:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 连续可微并且满足线性增长条件。

5.4 基本模型-给出问题的部分信息形式

- 如果我们假设效用函数 u 满足假设 (假设 2), 并且不允许破产, 则我们的递归效用优化问题可以表示为:

$$\text{最大化}Y^{x,\pi}(0),\ \text{s.t.}\begin{cases}X(t)\ge0,\quad t\in[0,T],\ \text{a.s.},\\ \pi(\cdot)\in M_{\mathbf{G}}^2,\\ (X(\cdot),\pi(\cdot))\quad\text{满足式}(A1),\\ (Y(\cdot),Z(\cdot))\quad\text{满足式}(A2),\end{cases}\tag{Q1}$$

- 其中 $M_{\mathbf{G}}^2$ 是假设投资组合过程满足平方可积性的集合

$$\begin{aligned}dX_t&=\pi_tX_t\frac{dS_t}{S_t}+(1-\pi_t)X_t\frac{dB_t}{B_t}-C_tdt\\&=\big[X_t\big(r+\pi_t(\phi M_t+(1-\phi)\mu_t-r)\big)-C_t\big]dt+X_t\pi_t\sigma_tdW_t\end{aligned}\tag{A1}$$

$$Y(t)=u(X(T))+\int_t^T(u(C(s))+f(s,Y(s),Z(s)))ds-\int_t^T Z(s)d\widehat{W}(s)\tag{A2}$$

5.5 将部分信息转化到完全信息下

- 我们前文定义的 $\{\widehat{W}(t),t\ge0\}$ 通常被称作新息过程。由 Kallianpur[9] 中的定理 8.1.3 和注 8.1.1，我们知道 $\{\widehat{W}(t),t\ge0\}$ 是一个 $(\mathbb{G},P)$ 布朗运动。这样, 我们就可以在完全信

息下把股票价格过程和财富方程写成:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \big(\phi \hat{M}_t + (1-\phi)\hat{\mu}_t\big)dt + \sigma_t d\hat{W}_t$$

$$\begin{aligned} dX_t &= \pi_t X_t \frac{dS_t}{S_t} + (1-\pi_t)X_t \frac{dB_t}{B_t} - C_t dt \\ &= \big[X_t\big(r + \pi_t(\phi\hat{M}_t + (1-\phi)\hat{\mu}_t - r)\big) - C_t\big]dt + X_t\pi_t\sigma_t d\hat{W}_t \quad (A'1) \end{aligned}$$

现在, 我们模型中的所有系数都是可以被观测到的。所以我们的原问题可以写成如下完全观测下的形式:

$$\text{最大化} Y^{x,\pi}(0),\ \text{s.t.} \begin{cases} X(t) \geq 0, t \in [0,T],\ \text{a.s.}, \\ \pi(\cdot) \in M^2_{\mathbf{G}}, \\ (X(\cdot),\pi(\cdot)) \quad \text{满足式}(A'1), \\ (Y(\cdot),Z(\cdot)) \quad \text{满足式}(A2). \end{cases} \tag{Q2}$$

5.6 鞅方法-给出问题的倒向形式

然后我们令 $q(\cdot) := \sigma(\cdot)\pi(\cdot)$ 。由于 $\sigma(\cdot)$ 是可逆的, 我们可以把 $q(\cdot)$ 看成控制变量。由引理 BSDE 解的存在唯一性我们有选择 $q(\cdot)$ 等价于选择终端财富 $X(T)$ 。所以我们也可以把终端财富 $X(T)$ 看成控制变量, 这样财富方程和递归效用过程可以写成:

$$\begin{cases} -dX(t) = -\big[X_t\big(r + q(t)\sigma(t)^{-1}(\phi\hat{M}_t + (1-\phi)\hat{\mu}_t - r)\big) - C_t\big]dt - X_t q(t) d\hat{W}_t, \\ X(T) = \xi \\ -dY(t) = \big[u(C(t)) + f(t,Y(t),Z(t))\big]dt - Z(t)d\widehat{W}(t) \\ Y(T) = u(\xi) \end{cases} \tag{A3}$$

其中“控制变量”终端财富 ξ 是从下面这个集合中选出来的

$$U := \left\{\xi \mid \xi \in L^2_{\mathcal{G}_T}, \xi \geq 0\right\}.$$

- 有了上述约束后我们把 $A3$ 的解记成 $\big(X^\xi(\cdot), q^\xi(\cdot), Y^\xi(\cdot), Z^\xi(\cdot)\big)$ 。
- 从而，我们的问题转化成下面的优化问题:

$$\text{最大化} J(\xi) := Y_0^\xi,\ \text{s.t.} \begin{cases} \xi \in U, \\ X_0^\xi = x, \\ \big(X^\xi(\cdot), q^\xi(\cdot)\big), \big(Y^\xi(\cdot), Z^\xi(\cdot)\big) \ \text{满足式}(A3). \end{cases} \tag{Q3}$$

其中 X_0^ξ, Y_0^ξ 分别表示 $X^\xi(0), X^\xi(0)$。

由于没有 f 的可微性，则上面的优化问题没办法使用最大值原理，但我们可以将可微条件放宽，假设 f 的凹性，然后应用凸对偶的方法进行求解。

- (假设 3) 函数 $(y,z)\mapsto f(\omega,t,y,z)$ 对任意 $(\omega,t)\in\Omega\times[0,T]$ 都是凹函数。
- (假设 4) $u:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ 严格单调递增, 严格凹, 连续可微并且满足

$$u'(0+):=\lim_{x\to 0}u'(x)=\infty,\quad u'(\infty):=\lim_{x\to\infty}u'(x)=0.$$

再应用 Elkaroui, Peng and Quenez[4] 中性质 3.4 的办法，给出 (Q3) 问题的变分形式

$$\text{最大化} J(\xi)=\inf_{(\beta,\gamma)\in\mathcal{B}}E\left[\int_0^T\Gamma_{0,s}^{\beta,\gamma}F(s,\beta(s),\gamma(s))ds+\Gamma_{0,T}^{\beta,\gamma}u(\xi)\right] \tag{Q4}$$

其中函数 F 是 $u+f$ 的凸对偶函数并且

$$N_{t,s}^{\mu,\nu}=e^{-\int_t^s\left(\mu(r)+\frac{1}{2}\|\nu(r)\|^2\right)dr-\int_t^s\nu'(r)dW(r)},$$
$$\Gamma_{t,s}^{\beta,\gamma}=e^{\int_t^s\left(\beta(r)-\frac{1}{2}\|\gamma(r)\|^2\right)dr+\int_t^s\gamma'(r)dW(r)}$$

5.7 鞅方法-凸对偶

Theorem 1. 若 *(假设 1), (假设 3), (假设 4)* 成立。令 $(\hat\zeta,\hat\mu,\hat\nu,\hat\beta,\hat\gamma)$ 满足一些额外假设，定义

$$\hat\xi=I\left(\hat\zeta\frac{N_{0,T}^{\hat\mu,\hat\nu}}{\Gamma_{0,T}^{\hat\beta,\hat\gamma}}\right),a.s.,$$

则我们有 $\forall\xi\in\mathcal{A}(x),\forall(\beta,\gamma)\in\mathcal{B}$, $(\hat\xi,\hat\beta,\hat\gamma)$ 是问题 $(Q4)$ 的鞍点。

- 得到变分形式后，使用凸对偶的想法得到主要定理
- 凸对偶的想法是把递归效用最大化问题转化成其对偶问题，相应地，控制变量从终端财富变成等价鞅测度。然后解对偶问题并得到合适的等价鞅测度，用此等价鞅测度去构造原问题的最优终端财富。

5.8 数值模拟

- 取定生成元为 [5] 中的 K-未知形式，对不同类型的效用函数 u 使用上述结论得到显式鞍点，然后通过 MATLAB 分析来研究最优投资组合如何随着金融市场产生的参数而变化。
- 为了更好的进行比较静态分析，我们可以参考已有的交易数据（比如从 2006 年到 2011 年的沪深 300 指数月度交易数据）进行模型假设。

5.9 引入通货膨胀

- Liu[7] 为了考虑通货膨胀的影响，得到实际财富过程，引入价格因子，将名义财富过程进行折现得到实际财富过程。并建立消费篮子价格的动力学方程。

- 定义名义财富过程 $X^N=\left(X_t^N\right)_{t\geq 0}$, 则名义财富过程满足以下的随机微分方程:

$$dX_t^N=\pi_t X_t^N \frac{dS_t^N}{S_t^N}+\left(1-\pi_\imath\right) X_t^N \frac{dB_t^N}{B_t^N}-C_t^N dt.$$

- 将动量效应满足的方程代入上式, 我们可以得到名义财富过程满足以下随机微分方程:

$$dX_t^N=\left[X_t^N\left(r+\pi_t\left(\mu_s+\phi M_t-r\right)\right)-C_t^N\right] dt+X_t^N \pi_t \sigma_s dW_1.$$

- 由于考虑通货膨胀的影响, 我们要得到实际财富过程, 需要引进价格因子, 将名义财富过程进行折现得到实际财富过程。引入消费篮子价格的动力学方程:

$$\frac{dP(t)}{P(t)}=\mu_p dt+\sigma_p dZ_2.$$

其中 μ_p 是预期通胀率, $\sigma_P>0$ 是通胀波动率。我们假设布朗运动 W_1 和 W_2 是线性相关的, 相关系数为 ρ, 即 $dW_1 dW_2=\rho dt$ 。

- 前面得到的财富过程表示的是名义财富过程的动力学方程, 为了得到实际财富过程, 我们需要进行折现, 即:

$$X_t=\frac{X_t^N}{P(t)}$$

其中 X_t 为实际财富, 根据伊藤公式, 我们可以得:

$$\begin{aligned}
d\frac{1}{P(t)} &= -\frac{1}{P^2(t)} dP(t)+\frac{1}{P^3(t)} dP(t) dP(t) \\
&= -\frac{1}{P(t)}\left[\left(\mu_P-\sigma_P^2\right) dt+\sigma_P dW_2\right].
\end{aligned}$$

- 因此我们可以得到实际财富过程的动力学方程为:

$$\begin{aligned}
dX_t=d\frac{X_t^N}{P(t)} &= \frac{1}{P(t)} dX_t^N+X_t^N d\frac{1}{P(t)}+dX_t^N d\frac{1}{P(t)} \\
&= \left[X_t\left(\pi_t\left(\mu_s+\phi M_t-r-\sigma_s \sigma_P \rho\right)+r-\mu_P+\sigma_P^2\right)-C_t\right] dt \\
&+ X_t \pi_t \sigma_s dW_1-X_t \sigma_P dW_2.
\end{aligned}$$

- 得到财富方程后再重复第一部分的过程，得到定理 2，再利用 MATLAB 分析动量效应系数和通货膨胀系数对终端财富值的影响。

6 研究安排

首先是整体毕业设计的安排

- 2022.05-2022.06 相关文献收集、阅读、分析归纳已有研究成果。
- 2022.07-2022.08 学习鞅方法，凸对偶方法，动量效应和通货膨胀因子的引入
- 2022.09-2022.10 证明推广，方法的应用
- 2022.11-2022.12 数值模拟
- 2023.01-2023.02 撰写论文初稿

然后是具体的文献

- 看 Koijen[8] 这篇文章，弄明白动量效应中状态变量和财富方程的具体构造过程
- 看 Duffie[1] 这篇文章，弄明白连续时间的递归效用的构造
- 看 Elkaroui[3] 这篇文章，弄明白连续时间的递归效用与倒向随机微分方程之间的关联
- 看 Kallianpur[9] 这本书的第八章，弄明白新息过程以及如何应用新息过程
- 看 Elkaroui[4] 这篇文章了解如何求解问题的变分形式
- 看 Pham[10] 这本书的第六章，弄明白在使用新息过程后得到的非标准 BSDE 如何证明存在唯一性
- 看 Zhang[11] 这本书的第十四讲，弄明白凸对偶的数学原理
- 看 Shi[6] 文章中的第二节，弄明白如何一步一步得到鞍点

7 参考文献

References

[1] Duffie, D., Epstein, L.G. *Stochastic differential utility*. Econometrica 60, 353–394 (1992).

[2] Etienne Pardoux and Shige Peng.*Adapted solution of a backward stochastic differential equation*. Systems and Control Letters，14(1)：55-61，1990.

[3] El Karoui N, Peng S, Quenez M C. *Backward stochastic differential equations in finance[J]*. Mathematical finance, 1997, 7(1): 1-71.

[4] N. El Karoui, S. Peng, M.C. Quenez.*A Dynamic Maximum Principle for the Optimization of Recursive Utilities Under Constraints*.The Annals of Applied Probability 2001, Vol. 11, No. 3, 664–693

[5] Z. Chen, L Epstein. *Ambiguity, risk, and asset returns in continuous time*. Econometrica, 2002.

[6] X. Shi.*Portfolio Optimization with Nonsmooth Coefficients[D]*.Shandong University, 2017.

[7] Y. Liu. *Momentum and Inflation in Optimal Consumption Investment Strategy Based on Recursive Utility[D]*. Southwestern University of Finance and Economics,2020.

[8] Ralph S.J. Koijen *Momentum and Mean-Reversion in Strategic Asset Allocation*. Management science, 2009, 55(7): 1199-1213.

[9] Kallianpur G. *Stochastic filtering theory[M].* Springer Science and Business Media, 2013.

[10] Pham H. *Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications[M]*. Springer Science and Business Media, 2009.、

[11] 张恭庆, 函数论. 变分学讲义 *[M]*. 高等教育出版社, 2011.

A 遇到的问题与解决

问题 1——已解决

Shi[6] 文章中的财富过程是否缺少了一个 X(t)?

Shi[6] 文章中的 π 财富过程代表的是实际总数，后两者的 π 代表的是比例，

- 这是 Shi[6] 文章中的财富过程

一个自融资的投资者以初始财富 $x > 0$ 在这样的金融市场上进行投资，他的财富过程 $X(\cdot) \equiv X^{x,\pi}(\cdot)$ 满足如下随机微分方程：

$$
\begin{aligned}
dX(t) &= \sum_{i=1}^{d} \pi_i(t) \frac{dS_i(t)}{S_i(t)} \\
&= \pi'(t)\mu(t)dt + \pi'(t)\sigma(t)dW(t). \qquad (1.2.2)
\end{aligned}
$$

- 这是 Liu[7] 文章中的财富过程

$$
dW_t = \pi_t W_t \frac{dS_t}{S_t} + (1-\pi_t)W_t \frac{dB_t}{B_t} - C_t\, dt.
$$

- 这是 Koijen[8] 文章中的财富过程

$$
\frac{\mathrm{d}W_t}{W_t} = \left(\pi_t\left(\mu_t + \phi\left(M_t - \mu_t\right) - r\right) + r\right)\mathrm{d}t + \pi_t \sigma_S' \mathrm{d}Z_t,
$$

问题 2——待解决

对于动量效应如何从部分信息转化到完全信息下?

待参考文献学习新息过程

反应股票过去表现的状态变量 M_t 由对从 0 到 t 的价格过程积分得到，即

$$
M_t = \int_0^t e^{-w(t-u)} \frac{dS_u}{S_u}.
$$

而价格过程满足如下的动力学方程

$$
\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = \big(\phi_i M_i(t) + (1-\phi_i)\mu_i(t)\big)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t) dW_j(t), i = 1, \ldots, d
$$

则新息过程对应的价格过程是

$$\frac{dS_t}{S_t} = \big(\phi \hat{M}_t + (1-\phi)\hat{\mu}_t\big)dt + \sigma_t d\hat{W}_t$$

还是

$$\frac{dS_t}{S_t} = \big(\phi M_t + (1-\phi)\hat{\mu}_t\big)dt + \sigma_t d\hat{W}_t$$

新息过程的方法，是否可将如上形式的股票价格过程从部分信息转换到完全信息下。此处状态变量由价格过程积分得到，价格过程满足的动力学方程系数带状态变量

原文中的新息过程如下

定义风险溢价过程 $\eta(t) = \sigma^{-1}(t)\mu(t)$。因为我们已经假设了过程 $\mu(\cdot)$ 和 $\sigma(\cdot)$ 是一致有界的，所以如下过程

$$L(t) := \exp\Big(-\int_0^t \eta'(s)\mathrm{d}W(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \| \eta(s) \|^2 ds\Big)$$

是一个 $(P, \mathcal{F}_T)$ 鞅。因此我们可以定义一个 $\mathcal{F}_T$ 上新的概率测度 $\widetilde{P}$

$$\widetilde{P}(A) = E[L(T)I_A],\ \forall A \in \mathcal{F}_T,\ \text{其中}\ \frac{\mathrm{d}\widetilde{P}}{\mathrm{d}P} = L(T).$$

在金融市场中，通常称 $\widetilde{P}$ 为风险中性概率。由 Girsanov 定理，过程

$$\widetilde{W}(t) := W(t) + \int_0^t \eta(s)\mathrm{d}s,\ 0 \le t \le T$$

是 $\widetilde{P}$ 下一个布朗运动。

这样我们可以把股票价格过程 (1.2.1) 写成由 $\widetilde{W}(t)$ 驱动的：

$$dS_i(t) = S_i(t)\Big(\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t)d\widetilde{W}_j(t)\Big),\ i = 1, ..., d.$$

注意到我们已经假设了 $\sigma(t)$ 是有界的，可逆的并且是 $\mathcal{G}_t$-适应的。根据 [97] 中的定理 V.3.7，我们知道域流 $\{\mathcal{G}_t\}_{t\ge 0}$ 和扩充后的 $\widetilde{W}$ 的自然域流是一样的。

令 $\hat{\eta}(t) := E[\eta(t)|\mathcal{G}_t]$ 是风险溢价 η 关于域流 $\{\mathcal{G}_t\}_{t\ge 0}$ 的条件期望。令 $\hat{\mu}$: $\hat{\mu}(t) = E[\mu(t)|\mathcal{G}_t]$，由于 σ 是 $\{\mathcal{G}_t\}_{t\ge 0}$ 适应的，于是 $\hat{\mu}(t) = \sigma(t)\hat{\eta}(t)$。

我们引入下面的过程

$$\widehat{W}(t) := \widetilde{W}(t) - \int_0^t \hat{\eta}(s)ds = W(t) + \int_0^t (\eta(s) - \hat{\eta}(s))ds,\ t \ge 0. \qquad (1.2.5)$$

$\{\widehat{W}(t), t \ge 0\}$ 通常被称作新息过程。由 Kallianpur [59] 中的定理 8.1.3 和注 8.1.1，我们知道 $\{\widehat{W}(t),\ t \ge 0\}$ 是一个 $(\mathbb{G}, P)$ 布朗运动。这样，我们就可以在完全信息下把股票价格过程和财富方程写成：

$$dS_i(t) = S_i(t)\Big(\hat{\mu}_i(t)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t)d\widehat{W}_j(t)\Big),\ i = 1, ..., d,$$

$$dX(t) = \pi'(t)\hat{\mu}(t)dt + \pi'(t)\sigma(t)d\widehat{W}(t). \qquad (1.2.6)$$

问题 3 ——待解决

对于动量效应形式的方程是否可以使用凸对偶的方法进行求解？

待参考文献学习凸对偶方法

如何处理动量效应这种形式的方程，原文中这种形式的方程求其变分形式

$$\begin{cases} -dX(t) = -q'(t)\sigma^{-1}(t)\hat{\mu}(t)dt - q'(t)d\widehat{W}(t), \\ X(T) = \xi, \\ -dY(t) = f(t, Y(t), Z(t))dt - Z'(t)d\widehat{W}(t), \\ Y(T) = u(\xi), \end{cases}$$

而引入动量效应后，方程变为

$$\begin{cases} -dX(t) = -\big[X_t\big(r + q(t)\sigma(t)^{-1}(\phi\hat{M}_t + (1-\phi)\hat{\mu}_t - r)\big) - C_t\big]dt - X_t q(t) d\hat{W}_t, \\ X(T) = \xi \\ -dY(t) = \big[u(C(t)) + f(t, Y(t), Z(t))\big]dt - Z(t)d\widehat{W}(t) \\ Y(T) = u(\xi) \end{cases} \tag{1}$$

问题 4——已解决

对于通货膨胀这种类型的方程如何处理?

可把后两个布朗运动统一成一个向量的两个分量处理。

引入通货膨胀后，财富过程带两个布朗运动可否使用新息过程以及变分形式?

$$\begin{aligned} dX_t = d\frac{X_t^N}{P(t)} &= \frac{1}{P(t)}dX_t^N + X_t^N d\frac{1}{P(t)} + dX_t^N d\frac{1}{P(t)} \\ &= \big[X_t\left(\pi_t\left(\mu_s + \phi M_t - r - \sigma_s\sigma_P\rho\right) + r - \mu_P + \sigma_P^2\right) - C_t\big]\,dt \\ &+ X_t\pi_t\sigma_s dW_1 - X_t\sigma_P dW_2. \end{aligned}$$

问题 5——已解决

针对上一次讨论想法四的补充

前者想法没问题，后者想法可以先看理论上是否过得去再考虑具体的形式。

- 对注 1.4 中的式子复现非光滑系数的投资组合最优化问题

注 1.4. 对于如下形式的关于消费的递归效用

$$Y(t) = u(X(T)) + \int_t^T \big(u(c(s)) + f(s, Y(s), Z(s))\big)ds - \int_t^T Z(s)d\widehat{W}(s), \qquad (1.4.11)$$

其中 u 和 f 分别满足假设 (H1.4) 和假设 (H1.1)，(H1.3)，我们的方法同样有效。

- 对比原文，文中假设了 u 有凹性，所以 $u+f$ 仍然是一个凹函数，在原文中只需将 f 换成 $u+f$ 则不影响证明
- 对 K-未知模型复现带非光滑系数的投资组合最优化问题

从而，我们的问题 (1.4.2) 等价于：

$$\text{最大化 } J(\xi) = \inf_{\gamma\in B} E_\gamma u(\xi) \tag{1.4.3}$$
$$s.t.\ \xi \in \mathcal{A}(x).$$

辅助的对偶问题 (1.3.15) 变成了

$$\tilde{V}(\zeta) \equiv \tilde{V}(\zeta; x) := \inf_{\gamma\in B} E_\gamma \tilde{u}(\zeta Z_\gamma(T)),\ 0<\zeta<\infty, \tag{1.4.4}$$

其中 $Z_\gamma(t) := \frac{\hat{L}(t)}{\Gamma_{0,t}^{0,\gamma}},\ t\in[0,T],\ a.s.$ 并且

$$V_*(x) := \inf_{\zeta>0,\gamma\in B} [E_\gamma \tilde{u}(\zeta Z_\gamma(T)) + \zeta x] = \inf_{\zeta>0} [\tilde{V}(\zeta) + \zeta x]. \tag{1.4.5}$$

用与上一节相同的步骤，我们可以找到问题 (1.4.3) 的鞍点。所以我们只是不加证明的列出主要结果。但是对于接下来的引理 1.9，我们给出了一个更直接的证明。

- 思考是否需要最开始就将 f 假设成 K-未知形式，这样可以方便讨论和证明？

问题 6 ——待解决

带消费的递归效用函数

学习最开始构造递归效用那篇文献。

如下形式的带消费的递归效用函数的来源以及构造过程

$$Y(t) = u(X(T)) + \int_t^T (u(C(s)) + f(s, Y(s), Z(s)))ds - \int_t^T Z(s)d\widehat{W}(s) \tag{2}$$

问题 7 ——已解决

股票波动率通过股票价格的二次变差得到是为什么

由伊藤公式可以得到。

我们假设在这个金融市场中，投资者能够连续地观测到股票价格，也就是说投资者能够利用的信息流 $\mathbb{G} = \{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ 是由股票价格过程生成的信息流 $\sigma(S(u); 0\leq u\leq t)$。我们假设股票波动率过程 $\sigma(t)$ 是几乎处处可逆，一致有界，并且

$$\exists \varepsilon > 0,\ \rho'\sigma(t)\sigma'(t)\rho \geq \varepsilon||\rho||^2,\ \forall \rho\in\mathbb{R}^d,\ t\in[0,T],\ a.s.$$

在实际中，股票的波动率过程可以通过股票价格的二次变差得到，所以不失一般性，我们假设 $\sigma(t)$ 是 $\mathcal{G}_t$-适应的。但是投资者观测不到股票的增值率 $\mu'(t) := (\mu_1(t), ..., \mu_d(t))$。

问题 8 ——已解决

得到最优终端财富后如何求解最优投资组合？

利用 Feynman-Kac 公式进行求解。

如果可行控制 ξ^* 达到了 $J(\xi)$ 的最大值，则 ξ^* 是问题 (1.2.9) 的最优解。一旦最优终端财富 ξ^* 确定下来后，我们可以通过解 (1.2.8) 中的第一个方程来得到最优的投资组合。这种方法称为鞅方法。

对于引入动量效应后的如下方程组如何求解第一个方程

$$
\begin{cases}
-dX(t) = -\big[X_t\big(r + q(t)\sigma(t)^{-1}(\phi\hat{M}_t + (1-\phi)\hat{\mu}_t - r)\big) - C_t\big]dt - X_t q(t) d\hat{W}_t, \\
X(T) = \xi \\
-dY(t) = \big[u(C(t)) + f(t, Y(t), Z(t))\big]dt - Z(t)d\widehat{W}(t) \\
Y(T) = u(\xi)
\end{cases}
\tag{3}
$$