2021 年 4 月汇报

山东大学数学与交叉科学研究中心

兰宇恒

总结

本月的学习汇报主要分为四个部分进行展开：

第一部分课程汇报，本月学习的专业课有现代微分几何，pde-经典解，sobolev 空间理论，现代随机过程。

现代微分几何课程紧接上个月讲的微分形式，向量场，黎曼度量以及曲线的变分，开始介绍黎曼空间上的内积以及积分的定义，通过探讨黎曼度量的两种调和刻画得到黎曼空间上的 Laplace 算子。然后开始逐步介绍黎曼流形的概念，通过光滑流形，光滑映射，切丛，余切丛的概念扩展向量场，1 阶微分形式，张量场，k 阶微分形式的定义；再通过 pushforward 映射与 pullback 映射扩展外微分，单位分解，流形上的积分等概念到流形上；并通过定向的概念推导出了最一般的 stokes 定理；最后则介绍了流形上的 Riemann 度量。

PDE-经典解课程则运用上个月所定义的 green 函数，开始探寻半平面以及球面上 green 函数，并由此得到半平面以及球面上 Laplace 方程的解；再给出变分方法，并通过变分方法求解特征值方程问题。到第五章开始介绍热方程，与求解 Laplace 方程相同的思路，首先通过自相似变换得到基本解，然后求解 cauchy 问题以及非齐次 cauchy 问题，最后讲到了弱极大值原理，平均值性质以及强极大值原理。

sobolev 空间课程则继续介绍 sobolev 空间的性质，首先引出了直线上的绝对连续函数，并将起推广得到了 ACL_p 空间，最后得到了 $W^{1,P}(\Omega) = ACL_p(\Omega)$, 并给出了相应的解释。从第四章开始介绍基于上梯度的 sobolev 空间，首先介绍了可求长曲线的各种定义和性质，然后介绍了曲线族的模的定义和性质；再给出了 ACC_p 空间，并得到了 $W^{1,P}(\Omega) = ACC_p(\Omega)$；接着介绍了上梯度的定义，从上梯度出发给出了 $u \in L^p(\Omega)$ 有 $W^{1,P}(\Omega)$ 代表的充要条件；最后介绍了通过差商定义弱导数刻画 sobolev 空间的性质，并给出了差商范数和梯度范数可比的定理。到了第五章则开始介绍 sobolev 嵌入与 poincaré 不等式，逐步介绍了等周不等式，sobolev 不等式，poincaré 不等式，并讨论了 p 范围不同时，对应的不同 q 值。

随机过程课程则开始介绍 Itô 积分，从简单函数到有界连续函数再到有界函数最后到一般函数逐步扩展 Itô 积分的定义，并得到了相应的 Itô 等距定理，Itô 公式和 Itô 过程，最后还定义了鞅并给出了鞅不等式。

第二部分课题任务，课题任务继续上月的学习，把文章整体框架重新梳理了一遍，并解决了老师给出的第二个问题，这个五一结束后，重新和同学讨论一次并找老师第二次答疑。第三部分其他学习，除了上述学习之外，我继续看张恭庆老师的《变分学讲义》，问题越来越多，进度越来越慢，接下来不求快只求看仔细。然后还有郭常予老师的测度论讨论班，讨论班进度刚刚结束有限测度上的性质，接下来讲无限以及 σ 测度和 lebesgue 测度。第四部分介绍其他事备考雅思，入党积极分子课程以及申请家教。

目录

1 课程汇报

1.1 现代微分几何

1.1.1 黎曼空间上积分以及内积

这一节主要内容通过类比欧氏空间上的积分概念得出相应的黎曼空间上的积分概念

Definition 1.1.1. *(Riemannian volume and integration) Let $U \subset \mathbb{R}^n$ be open,and let g be a Riemannian metric on U.If $f \in C_c(U)$,we define the integral of f on U by*

$$\int_U f dVol_g(x) := \int_U f(x)|g(x)|^{1/2}dx$$

The Riemannian volume of measurable set $E \subset U$is

$$Vol_g(x)(E) := \int_U |g(x)|^{1/2}dx$$

进一步得到相应的内积

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta)_{L^2} &:= \int_U \langle\alpha(x),\beta(x)\rangle dV_g(x)\\ &= \int_U g^{jk}(x)\alpha_j(x)\beta_k(x)|g(x)|^{1/2}dx\end{aligned}$$

再考虑之前张量与微分 k 形式之间的关系，推广上述结论得到了两个张量以及两个微分 k 形式之间的内积。

最后则通过微分 k 形式到微分 k-1 形式的唯一的线性映射得到了协变导数的概念

Definition 1.1.2. *(Codifferential) Let $U \subset \mathbb{R}^n$ be open and let g be a Riemannian metric on U.For each k with $0 \le k \le n$,there is a unique linear operator*

$$\delta : \Omega^k(U) \to \Omega^{k-1}(U)$$

having the property

$$(d\alpha,\beta)_{L^2} = (\alpha,\delta\beta)_{L^2}, \alpha \in \Omega_c^{k-1}(U), \beta \in \Omega^k(U).$$

The operator δ satisfies $\delta \circ \delta = 0$ and $\delta|_{\Omega^0 U} = 0$.It is a linear first order differential operator acting on component functions.

并且有定理可以给出其在微分 1 形式上的表达式。

1.1.2 黎曼空间上 Laplace 算子

本节老师首先讲了 Riemann 度量上的两种调和刻画

$$\begin{cases} E(v) = \frac{1}{2}\int_U |dV|_g^2 dV_g, & \text{Dirichlet 能量} \\ u(x) = ⨍_{B(x,r)} u(y)dV_g(g), & \text{MVP(均值性质)} \end{cases}$$

而本节从 Dirichlet 能量出发由协变导数诱导最简形式的 Laplace 算子

Definition 1.1.3. *The Laplace-Beltrami operator on (U,g) is defined by*

$$\Delta_g u := -\delta du$$

并有相应的 PDE 方程

$$\begin{aligned}&\Delta_g = 0\\&\partial_t - \Delta_g u = 0\\&\partial_t^2 u - \Delta_g = 0\\&i\partial_t u + \Delta_g = 0\end{aligned}$$

1.1.3 切丛，余切丛扩展张量场，k 阶微分形式

本节首先给出了光滑流形的定义

Definition 1.1.4. *(Smooth manifold) A smooth n-dimensional manifold is a topological space M,assumed to be Hausdorff and second countable,together with an open cover* $\{U_\alpha\}$*and homeomorphisms* $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \widetilde{U_\alpha}$ *such that each* $\widetilde{U_\alpha}$ *is an open set in* $\mathbb{R}^n$*,and* $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ *is a smooth map whenever* $U_\alpha \cap U_\beta$ *is nonempty.*

并基于切丛扩展了向量场的定义

Definition 1.1.5. *(Vector field) A vector field on M is a smooth map X:M→ TM such that X(p)∈* T_pM *for each p∈ M*

并基于余切丛扩展了微分 1-形式的定义

Definition 1.1.6. *(Differential 1-form) A 1-form on M is a smooth map* $\alpha : M \to T^*M$ *such that* $\alpha(p) \in T_p^*$ *for each* $p \in T_p^*$ *M for each* $p \in M$

并基于张量丛扩展了张量场的定义

Definition 1.1.7. *(Tensor field) A k-tensor field on M is a smooth map* $u : M \to T^kM$ *such that* $u(p) \in T^k(T_pM)$ *for each* $p \in M$

并基于外指数扩展了微分 k-形式

Definition 1.1.8. （*Differential k-form*） *A k-form on M is a smooth map* $\omega : M \to \Lambda^k$ *M such that* $\omega(p) \in \Lambda^k(T_pM)$ *for each* $p \in M$

1.1.4 pushforward 与 pullback

本节则介绍 push-forward 与 pullback 的定义

Definition 1.1.9. *(push-forward) Let $F : M \to N$ be a smooth map.The push-forward by F is the map acting on T_pM for any $p \in M$ by*

$$F_* : T_pM \to T_{F_p}N, F_*v(f) = v(f \circ F) for f \in C^\infty(N)$$

The map F_* is also called the derivative or tangent map of F,and we derivative or tangent map of F,and we sometimes denote it by DF.

(pullback)

Definition 1.1.10. *Let $F : M \to N$ be a smooth map.The pullback by F acting on k-tensor fields is the map $F^* : C^\infty(N, T^kN) \to C^\infty(M, T^kM)$ given by*

$$(F^*u)_p(v_1, ..., v_k) = u_{F(p)}(F_*v_1, .., F_*v_k) \quad for \quad v_1, ..., v_k \in T_pN$$

再通过 pushforward 与 pullback 扩展外导数，单位分解与流形上的积分

1.1.5 流形的定向与 stokes 定理

主要介绍了流形定向的定义

Definition 1.1.11. *(Orientation) If M admits a smooth nonvanishing n-form,we say that M is orientable.An oriented manifold is a manifold together with a given nonvanishing n-form.*

并由此给出了统一的 stokes theorem

Theorem 1.1.1. *(stokes theorem) If M is an oriented manifold with boundary and if ω is a compactly supported (n-1)-form on M,then*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*\omega$$

where $i : \partial M \to M$ is the natural inclusion.

1.1.6 流形上的黎曼度量与黎曼流形

本节则介绍了流形上的黎曼度量

Definition 1.1.12. *(Riemannian metric) A Riemannian metric on manifold M is a symmetric positive definite 2-tensor field g on M.The pair(M,g) is called a Riemannian manifold.*

1.2 PDE-经典解

1.2.1 半平面和球面上 green 函数与 Laplace 方程的解

半平面上的 green 函数是通过反射变换构造出来，最终得到解为

$$u(x) = -\int_{\partial R^n_+} \frac{\partial G(x, y)}{\partial v} g(y)dy$$

球面上的 green 函数是通过反演变换构造出来，最终得到的解为

$$u(x)=\frac{1-|x|^2}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(0,1)}\frac{g(y)}{|y-x|^n}dS(y)$$

对于一般球面上的球面可以通过坐标变换得到

1.2.2 变分方法及特征值方程问题

由 Dirichlet 能量出发构造如下的能量积分，并由能量积分证明了变分原则

Definition 1.2.1. *(Energy/variational integral)*

$$I(\omega)=\int_\Omega \frac{1}{2}|D\omega|^2-f\omega dx$$

where $\omega\in\mathcal{A}=\{\omega\in C^2(\overline{\Omega}):\omega$*=g on* $\partial\Omega\}$

Theorem 1.2.1. *A function u* $\in C^2(\overline{\Omega})$ *solves the Dirichlet problem*

$$\begin{cases}-\Delta u=f & \Omega\\ u=g & \partial\Omega\end{cases}$$

if and only if

$$I(u)=\min_{\omega\in\mathcal{A}}I(\omega)$$

即能量积分最小等价于 u 满足对应的 Dirichlet 问题。

最后用变分方法解决了如下的特征值方程的一些问题。

Definition 1.2.2. *If*

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda u & \Omega\\ u=0 & \partial\Omega\end{cases}$$

with $\lambda>0$ *has a nontrivial solution i.e.* $u\neq 0$*,then eigenvalue of* $\Delta in\Omega$*.The corresponding u is an eigenfunction.*

1.2.3 热方程基本解

热方程基本解从伸缩变换出发，逐步化简得到调和方程形式，然后将调和函数基本解结论代入化简得到热方程基本解

Definition 1.2.3. *(Fundamental solution to heat equation*

$$\Phi(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,T)\\ 0 & t\leq 0\end{cases}$$

1.2.4 热方程齐次与非齐次 cauchy 问题

本节主要有两个重要定理，首先是其次 cauchy 问题

Theorem 1.2.2. *(Cauchy problem for heat eq) Let* $g \in C(\mathbb{R}^n)$ *be a bounded function and*

$$u(x,t) = (\Phi * g)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y)dy = (4\pi t)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} g(y)dy$$

t>0.Then

- $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$
- $u_t - \Delta u = 0$ *in* $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$
- $\lim_{(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \ni (x,t) \to (x_0,0)} u(x,t) = g(x_0)$

对于非齐次 cauchy 问题，有如下定理

Theorem 1.2.3. *Let f has a compact support,*$f, D_x f, D_x^2 f, f_t$ *continuous.Then for the above u it holds that*

- $u, D_x u, D_x^2 u, u_t$ *are continuous in* $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$
- $u_t - \Delta u = f$ *in* $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$
- $\lim_{(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \ni (x,t) \to (x_0,0)} u(x,t) = 0$

1.3 sobolev 空间理论

1.3.1 通过 $ACL_p(\Omega)$ 刻画 $W^{1,P}(\Omega)$

本节首先介绍了直线上绝对连续

Definition 1.3.1. *A function* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *is said to be absolutely continuous on lines(ACL) if u is absolutely continuous on almost every line segment parallel to the coordinate axes.*

然后给出了 ACL_p 的概念

Definition 1.3.2. *Let* $1 \leq p < \infty$*.A real-valued function* $u \in L^p(\Omega)$ *is said to be of class* $ACL_p(\Omega)$ *if it is absolutely continuous on lines with* $\nabla u \in L_p(\Omega)$

并证明了以下定理

Theorem 1.3.1. *For* $1 \leq p < \infty$*,*$W^{1,p}(\Omega) = ACL_p(\Omega)$*.*

1.3.2 通过 $ACC_p(\Omega)$ 刻画 $W^{1,P}(\Omega)$

本节首先给出了曲线上绝对连续的概念

Definition 1.3.3. *A function $u : \Omega \to \mathbb{R}$ is absolutely continuous on a curve $\wp in \Omega$ if $\wp : [0, length(\wp)] \to \Omega$ is rectifable and arc-length parametized and $u \circ \wp : [0, length(\wp)] \to \mathbb{R}$ is AC*

以及 ACC_p 的概念

Definition 1.3.4. *$ACC_p(\Omega)$={$u \in L^p(\Omega)$:u is ACC on p-almost every curve and $|\nabla u| \in L^p$}*

并给出了以下定理

Theorem 1.3.2. *For $1 \leq p < \infty$,$W^{1,p}(\Omega) = ACC_p(\Omega)$.*

1.3.3 通过上梯度刻画 $W^{1,P}(\Omega)$

本节首先给出了上梯度的概念

Definition 1.3.5. *A Borel function $\rho : \Omega \to [0, \infty]$ is said to be an upper gradient of a function $u : \Omega \to \mathbb{R}$ if*

$$|u(\gamma(a)) - u(\gamma(b))| \leq \int_\gamma \rho ds$$

for every rectifiable curve $\gamma : [a, b] \to \Omega$.We say that ρ is a p-weak upper gradient of u if it holds for p-almost every compact curve in Ω.

并给出了下一定理用来刻画 $L^p(\Omega)$ 与 $W^{1,p}(\Omega)$ 之间的关联

Definition 1.3.6. *A function $u \in L^p(\Omega)$ has a representative in $W^{1,p}(\Omega)$ if and only if there exists a Borel function $\rho \in L^p(\Omega)$ such that the upper gradient inequality holds for the representative,for p-almost every rectifiable curve $\gamma : [a, b] \to \Omega$*

1.3.4 通过差商刻画 $W^{1,P}(\Omega)$

本节首先给出差商的定义

Definition 1.3.7. *The i-th difference quotient of size h is*

$$\partial_i^h u(x) = \frac{u(x + he_i - u(x)}{h} \quad (i = 1, ..., n)$$

for $x \in V$ and $0 < |h| < d(V, \partial\Omega)$.We write $\nabla^h u; = (\partial_1^h u, ..., u_n^h)$for the difference quotient of u.

然后证明以下定理证明，给出差商范数与梯度范数可比的条件。

Theorem 1.3.3. *Suppose $1 \leq p < \infty$ and $u \in W^{1,p}(\Omega)$.Then for each $V \subset\subset \Omega$,*

$$\|\nabla^h u\|_{L^p(V)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

for some constant C=C(n,p) and all $0 < |h| < \frac{1}{2}d(V,\partial\Omega)$*.Conversely,for* $1 < p < \infty$ *and* $u \in L^p(V)$*,if there is a constant C>0 such that*

$$\|\nabla^h u\|_{L^p(V)} \leq C < \infty$$

for all $0 < |h| < \frac{1}{2}d(V,\partial\Omega)$ *.Then* $u \in W^{1,p}(V)$ *and* $\|\nabla u\|_{L^p(V)} \leq C$*.*

1.3.5 等周不等式，sobolev 不等式，poincaré 不等式与 sobolev 嵌入

本节主要证明了以下几个不等式, 首先是等周不等式的等价刻画

Lemma 1.3.4. *Let* $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$*,be a domain.Then*

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \|\nabla u\|_1$$

for all $u \in C_0^1(\Omega)$

以及 sobolev 不等式

Lemma 1.3.5. *Let* $1 \leq p < n$ *and* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$*.Then*

$$\|u\|_{p^*} \leq C(n,p)\|\nabla u\|_p$$

最后是 poincaré 不等式

Lemma 1.3.6. *Let* $p \geq 1$ *and* $u \in C^1(B(x_0,r))$*.Then*

$$\int_{B(x_0,r)} |u - u_{B(x_0,r)}|^p dx \leq C(n,p)r^p \int_{B(x_0,r)} |\nabla u|^p dx$$

where $u_{B(x_0,r)} = \fint_{B(x_0,r)} udx$*.*

依据这些不等式证明了如下结论

Corollary 1.3.7. *Let* $1 \leq p < \infty$ *and* $u \in W^{1,p}(\Omega)$*.Then* $u \in L^q_{loc}(\Omega)$*,where* $q = \frac{np}{n-p}$ *when* $p < n, q = \infty$ *when q>n,and q can be any finite number when q=n.*

1.4 随机过程

1.4.1 Itô 积分

本节从简单函数出发，按以下步骤构造得到一般函数

- 有界，固定 ω 对 t 连续函数
- 有界函数
- 一般函数

并最终得到如下 Itô 积分

Definition 1.4.1. *Let $f \in \mathcal{V}(S,T)$.Then the Itôintegral of f (from S to T) is defined by*

$$\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega) = lim_{n\to\infty} \int_S^T \phi_n(t,\omega)dB_t(\omega)$$

limit in $L^2(P)$,where $\phi_n$is a sequence of elementary functions such that

$$E[\int_S^T (f(t,\omega) - \phi_n(t,\omega))^2 dt] \to 0$$

as $n \to \infty$

1.4.2 随机积分，Itô 公式

本节从 Itô 积分的不足出发扩展 Itô 积分到随机积分

Definition 1.4.2. *Let B_t be 1-dimensional Brownian motion on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.A(1-dimensional) It process(or stochastic integral) is a stochastic process X_t on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ of the form*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)dB_s$$

where $v \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$,so that

$$P[\int_0^t v(s,\omega)^2 ds < \infty \textit{ for all } t \geq 0] = 1$$

并证明了 1 维的 Itô 公式

Theorem 1.4.1. *Let X_t be an Itô process given by*

$$dX_t = udt + vdB_t$$

Lst $g(t,x) \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$.Then

$$Y_t = g(t, X_t)$$

is again an Itô process,and

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X_t) \cdot (dX_t)^2$$

2 科研任务

2.1 课题题目

$(GOOD)$ 给定度量空间 X，Y，以及 X 中的区域 Ω。考察映射 $f:\Omega\to Y$。需要给定 Ω 什么样的几何假设，以及 f 什么样的解析假设，我们能够定义映射 f 在 Ω 的边界点 $\omega\in\partial\Omega$ 沿（特殊）曲线的极限？更具体而言，考察 Ω 中的曲线 γ 连接某固定点 x_0 到 ω，γ：[0，1）→ Ω 满足 γ（0）$=x_0\in\Omega$，$\lim_{t\to1}\gamma(t)=\omega\in\partial\Omega$。极限

$$\lim_{t\to1}f(\gamma(t))$$

是否存在？进一步，如果我们沿着两条不同的曲线连接 x_0 到 ω，那么上述极限是否唯一？

2.2 答疑任务

老师上次答疑之后布置的两个任务分别是：

- if f satisfied diam f（B）$\leq$ g（diam B），where $g:R\to[0,\infty)$ is a non-negative function satisfies some decay property.B is a ball.

  please find the best condition of g.

- 写出全文思路以及想法

3 其他学习

3.1 《变分学讲义》

《变分学讲义》这本书，越到后面越难，觉得很多地方书中写的过于简略，步骤我需要多思考一会儿。下个月就不求速度，继续看，但这次看仔细，不求快，争取把第三章第四章看完。不懂的地方及时问老师，确保能所有看到的地方都懂。

3.2 测度论讨论班

本学期测度论讨论班用的是 Vladimir I.Bogachev 的《Measure Theory》，现在课程学生自讲讲到 1.6 节-Ifinite and σ-finite measures。由于我上个学期学习测度与概率的时候大部分测度论的基础已经有所了解，这个学期的这门课就主要用来查缺补漏，继续跟进。

4 其他任务

4.1 备考雅思

备考雅思继续执行，在阅读方面这个月看了三本英文书，并把不会的单词都积累起来；听力方面继续每天晚上做一小节雅思真题，琢磨出题者意图。

4.2 入党积极分子学习

上个月入选入党积极分子，这个月每周末晚上都有党课，并且线上的课程也在继续安排，线上课程基本完成。再线下课程就结束了入党积极分子的教学阶段。

4.3 申请家教

这个月末有同学托人找家教，给初二学生讲数学，尽可能去争取，也借此机会锻炼自己。

5 不足展望

本月的不足展望主要分为以下几点

- 在学习方面，学习上有所松散，有些课程当天学完没有当天消化，往往隔了几天才重新整理，不利于把课上老师讲的课程全部吸收。下个月要当天学的东西当天整理完，并且把不会的都收集好，下次上课的时候再及时询问同学或者老师。
- 在运动方面，这个月各种杂事太多，总有各种理由不跑步，下个月要排除万难坚持每周跑步。
- 在作息方面，这个月早起频率可以，但是到了节假日容易松懈，一下睡到九点才起床，下个月要杜绝这种情况。