2021 年总结

兰宇恒

目录

1 课内学习数学课程

本部分我会把我截止到 2021 年底所学的课程进行总结

1.1 2020-09~12 高等概率论

本门课主要以测度论为基础，逐步介绍现代概率论中的相关概念，所学内容共分为七个部分。

第一部分，集合，映射与函数，距离空间 集合及其运算，映射与势，可数集与不可数集，距离空间定义以及例子，开集闭集，完备性，可分性，列紧性与紧性，距离空间上的映射与函数，连续函数的几个等价条件

第二部分，测度空间与概率空间 半集代数，集代数，σ 代数，λ 系，Π 系，单调类，以及这几种代数系之间的关联，单调函数与测度的构造，单调函数的性质，外侧度以及由外侧度引出的可测集，测度扩张定理的叙述与证明，borel 测度，测度空间的一些性质，测度的完全化以及测度的逼近，hausdorff 维数及测度介绍

第三部分，可测函数与随机变量 介绍更一般的可测函数的定义，随机变量与概率分布测度与分布函数之间的对应关系，可测函数的构造性质（简单函数-初等函数-可测函数），函数形式的单调类定理

第四部分，积分与数学期望 积分的定义（非负简单函数-非负可测函数-实可测函数-复可测函数），积分的性质（线性，保号性，可积性），Schwarz 不等式，期望的定义，期望的独立，方差的定义，随机变量的函数的概率分布，L-S 积分的表示，独立事件类的扩张定理，积分收敛定理（单调收敛定理，fatou 引理，控制收敛定理），离散参数换成连续参数的定理推广

第五部分，乘积测度 乘积测度与转移测度，乘积半集代数，集代数，σ 代数，截集与截函数，截集，截函数，对截函数的积分可测，fubini 定理以及应用，无穷维乘积概率（Tulcea 定理）

第六部分，不定积分与条件期望 符号测度，全变差，有界变差函数及其性质，hahn 分解定理，lebesgue 分解定理与 radon-nikodym 定理，条件概率的概念及性质，条件期望的积分性质与平滑性质

第七部分，收敛概念 几乎处处收敛，依测度收敛，Lr 收敛，凸函数的性质，jessen 不等式，一致可积概念，条件期望在最佳均方逼近上的应用，淡收敛与弱收敛，几种收敛之间的关联及反例。

1.2 2020-09~12 函数论

本门课主要介绍了平面上的拟共形映射，主要目的是为了证明可测的 Riemann 映射定理，所学内容共分为六个部分。

第一部分，主要介绍了，一些基本的概念 包括黎曼映射定理的叙述/可测黎曼映射定理的叙述，共形映射的定义/拟共形映射的定义，同胚映射是共形映射的充分必要条件，复扩张的定义，格罗蒋茨问题及其证明，径向拉伸的例子。

第二部分，主要介绍了 sobolev 空间以及相关的一些概念和性质 Lp 空间的性质，Lp 空间上的 holder 不等式与 minkowski 不等式，证明了 Lp 空间按 P 范数是一个 banach 空间/Wk，p 空间按 k，p，Ω 范数为 banach 空间，介绍了磨光核的概念及其性质/被磨光核作用后函数的性质，证明了变分法基本引理，介绍弱导数并引出了 sobolev 空间，单位分解定理，光滑函数局部逼近定理，直线上绝对连续（ACL）的定义以及相关的定理证明。

第三部分，正在逐步介绍拟共形映射的基本性质 微分性质，主要证明了 W1，1（loc）空间上连续开映射是几乎处处可微的，变量替换性质，主要证明了 W1，2（loc）空间上连续开映射，把零测集映到零测集，Whitney 分解的基本概念以及有关性质

第四部分，拟对称映射的相关理论 弱拟对称映射的定义以及性质，拟对称则一定是拟共形映射，拟共形映射则是局部拟对称的，拟共形映射的度量概念以及解析概念，拟共形映射的紧性

第五部分，cauchy 算子以及 bearling 算子 green 公式，一般化的 cauchy 公式，cauchy 算子，修改后的 cauchy 算子，bearling 算子，cauchy 算子与 bearling 算子的求微分性质，以及两者之间的关联，bearling 算子的延拓性质

第六部分，可测的 Riemann 定理的证明 beltrami 方程，normalized 的函数，局部的情况，Newman 定理，黎曼映照定理的叙述以及证明，可测的黎曼映照定理的叙述以及证明

1.3 2020-09~12 现代泛函分析

本门课所学内容共分为四个部分。

第一部分，Hilbert 空间上的空间理论 度量空间的定义，完备性与完备化，度量空间的拓扑，稠密与无处稠密，完备度量空间的性质，赋范线性空间的定义及性质，cauchy-schwart 不等式，Hilbert 空间，正交投影，投影算子，线性泛函以及 H 上线性泛函的性质，riez 表示定理，泛函的范数，将基的概念从有限维推广到无限维，正交基的概念，空间直和。

第二部分，Hilbert 空间上的算子理论 Hilbert 空间上的线性算子，算子的范数，线性算子构成的空间，伴随算子，正规算子，投影算子与幂等算子，不变子空间与约化子空间，紧算子，有限秩算子, 紧算子以及 H 上线性算子的关联，对角算子，谱算子，下有界与值域和核

第三部分，banach 空间上的理论 banach 空间上的线性算子，有限维赋范线性空间的特殊性，商空间以及空间的积，banach 上的线性泛函，hahn-banach 定理，商空间与子空间的对偶，自反空间，开映射定理，逆算子定理，闭图像定理，一致有界原理，强收敛，弱收敛，弱 * 收敛

第四部分，banach 代数与 banach 空间上的谱理论 代数的理想与商，谱理论，函数演算，线性算子的谱，可交换的 banach 代数

1.4 2021-03~06 随机过程

本门课主要介绍从布朗运动出发，逐步介绍随机过程中的相关内容，所学内容分为五个部分。

第一部分，随机过程，布朗运动 介绍了基本概念，包括了概率空间，由 u 生成的 σ 代数，随机变量，随机变量的期望，Lp 空间和独立性的概念。然后介绍了随机过程的概念，并由此导出了布朗运动，给出了布朗运动的两种定义方式，以及布朗运动的三条基本性质，高斯过程，独立增量和可以找到连续的代表。

第二部分，Itô 积分 首先给出了信息流和 Ito 积分的被积函数类，然后介绍了 Ito 等距公式，再由 Ito 等距公式推导 Ito 积分的定义，逐步从简单阶梯函数，有界连续函数，有界函数最后到无界函数，给出了最一般的 Ito 积分的定义，还介绍了 Ito 积分的三条性质，线性性质，期望为 0 和关于 FT 是可测的；最后由 Ito 积分给出了鞅的定义，并证明了布朗运动和伊藤积分都是鞅，并证明了 Doob 鞅不等式。

第三部分，伊藤公式 本部分给出了伊藤公式的积分形式和微分形式，并证明了分部积分公式和鞅表示定理。

第四部分，随机微分方程 介绍了随机微分方程，首先说明了随机微分方程的存在唯一性，然后给出了常用 SDE 的求解。

第五部分，Ito 扩散 首先给出了 Ito 扩散的定义和基本性质，然后介绍了时停和生成元的概念，最后通过 Ito 扩散推导 kolmogorov 倒向方程和 Feyman-kac 公式，由此联系 SDE 与 PDE。

1.5 2021-03~06 PDE

本门课主要从 PDE 的基本概念出发，开始介绍 Laplace 方程的基本性质，最后简单介绍了一点抛物线方程的相关概念，所学内容分为以下五个部分。

第一部分，基本概念 1.1 节回顾了基本记号；1.2 节介绍了 pde 的一般形式与常见的分类，方法一: 线性，半线性，拟线性，全非线性；方法二：散度形式与非散度形式；方法三：椭圆方程，抛物线方程，双曲线方程；1.2 节还介绍了三个定理，gauss-green 公式，div 定理，green 定理，并证明了三者可以互推。

第二部分，一阶方程的解法 2.1 节介绍了常系数方程的解法，2.2 节介绍了非定常系数的解法。

第三部分，特征线法 以传输方程为例讲了通过特征线方法求解齐次方程以及非齐次方程。

第四部分，Laplace 方程 首先介绍了调和函数的定义，4.1 节主要介绍了基本解，并通过极坐标求得基本解；4.2 节则主要介绍了 poisson 方程，并证明了 poisson 方程的解由基本解卷积 f 得到；4.3 节则介绍了卷积与磨光核的一些性质；4.4 节则介绍了平均值性质；4.5 节继续介绍调和函数的性质，通过平均值性质，推导出了以下性质，极大值以及极小值原理，dirichlet 问题的唯一性，光滑性，导数估计性质，通过导数的估计性质得到了 liouville 定理，再通过 liouville 定理得到了 possion 方程的唯一性，然后给出了 harnack 不等式及其一般形式，最后由 harnack 不等式得到了强最大值原理；4.6 节则开始介绍 Green 函数，通过求解 possion 方程，找到了 G，并给出了 Green 函数的定义，运用所定义的 green 函数，开始探寻半平面以及球面上 green 函数，并由此得到半平面以及球面上 Laplace 方程的解，再给出变分方法，并通过变分方法求解特征值方程问题。

第五部分，热方程 第一部分与求解 Laplace 方程相同的思路，首先通过自相似变换得到基本解，然后求解 cauchy 问题以及非齐次 cauchy 问题，最后讲到了弱极大值原理，平均值性质以及强极大值原理。然后给出了有界集上抛物方程解的唯一性，接着证明了 cauchy 问题的最大值原理，最后用极大值原理证明了 cauchy 问题的唯一性；第二部分讲了能量方法，并用能量积分证明了解的唯一性，再证明了抛物线方程的倒向唯一性；第三部分则简单介绍了热方程解的自提高性，并证明了积分正则性结果。

1.6 2021-03~05 微分几何

微分几何课程主要分为以下五个部分

第一部分，张量场 首先介绍了引进黎曼流形的必要性，从拓扑空间出发，拓扑空间能不依赖距离定义连续与极限，但是缺乏足够的光滑结构来进行求导，再推广到度量空间，度量空间具有可谓的概念，但是更高阶可微没有良定义，再推广到微分流形，微分流形局部微分同胚于欧氏空间，即允许微分与积分，但是没有正规 laplace 算子并且微分等式理论有限，最后推广到黎曼流形，黎曼流形是微分流形加上黎曼度量，这种结合有多种优良性质, 然后还介绍了几何研究的核心——求切向量：因为曲线长度可以由切向量拟合近似再求和，曲线面积或者所围的体积可以由曲线长度累和得到，曲线的夹角可以由切向量夹角得到，曲率可以由切向量推得, 其次还介绍了 taylor 展开的一般形式

$$f(x)=\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!}\sum_{j_1,\dots,j_l}\partial_{j_1,\dots,j_l}f(x_0)(x-x_0)_{j_1}...(x-x_0)_{j_l}+R_k(x;x_0)$$

以及 taylor 展开的多重指标形式

$$f(x)=\sum_{|\alpha|\le k}\frac{1}{\alpha!}\partial^{\alpha}f(x_0)(x-x_0)+R_k(x;x_0)$$

其中 $R_k(x;x_0)\le\eta(s)(x-x_0)^k$, 当 $s\to 0$ 时，$\eta(s)\to 0$ 并对上述两种形式给予了证明, 最后的最后还给出了张量场的定义以及举了一些特殊张量场的例子，再给出了多元线性映射与张量的关联

第二部分，向量场和微分形式 首先从向量场出发介绍了向量场上的常见算子，梯度，散度以及二维和三维散度，并从

$$R^2 : C^\infty(U) \xrightarrow{grad} C^\infty(U, R^2) \xrightarrow{curl} C^\infty(U)$$

以及

$$R^3 : C^\infty(U) \xrightarrow{grad} C^\infty(U, R^3) \xrightarrow{curl} C^\infty(U, R^3) \xrightarrow{div} C^\infty(U)$$

中，后一算子符合前一算子为 0 的现象出发逐步引入了微分形式以及外微分的概念，并最终证明了 $d \circ d = 0$，并由此统一了上述现象并将其推广至 n 维最后还引入了 *Alternating tensor field*, 并给出了 Alternating k-tensor field 与微分 k 形式的关联

第三部分，上同调 首先通过观察 $u = d\alpha$ 对某一个 $\alpha \in \Omega^{k-1}(U) \Rightarrow du = 0$ 得到 $Im(d|\Omega^{k-1}(U))$ 是 $ker(d|\Omega^k(U))$ 线性子空间，并给出了 closed 的定义

$$du = 0$$

以及 exact 的定义

$$u = du$$

通过讨论上述观察的另一边推导成立的条件，引出了 de rham cohomology（上同调），最后给出了 poincaré 引理，并补充了一些上同调群的性质

第四部分，Riemann 度量 本部分简单介绍了 Riemann 度量的定义，简短来说即二阶张量加上对任意的 x 有 $g_{jk}(x)$ 满足对称正定，并给出了此度量下的内积，切向量以及夹角，还定义了正则曲线以及曲线的长度，并给出了一个重要定理，长度极小曲线是测地线，即满足测地线方程（定理 2.26），但未证明；然后给出了两个引理，首先是曲线的变分其满足的性质（引理 2.28），然后是第一变分公式（引理 2.29），并通过上述两个引理，证明了定理 2.26，并通过这个定理，证明了 R^2 上测地线即为两点之间的线段；然后还补充了 critical ponits，minimizers 以及 stationary points 的定义，并证明了 L 的 critical points 就是测地线方程（定理 2.31）。最后紧接上个月讲的微分形式，向量场，黎曼度量以及曲线的变分，开始介绍黎曼空间上的内积以及积分的定义，通过探讨黎曼度量的两种调和刻画得到黎曼空间上的 Laplace 算子。

第五部分，黎曼流形 本部分开始逐步介绍黎曼流形的概念，通过光滑流形，光滑映射，切丛，余切丛的概念扩展向量场，1 阶微分形式，张量场，k 阶微分形式的定义；再通过 pushforward 映射与 pullback 映射扩展外微分，单位分解，流形上的积分等概念到流形上；并通过定向的概念推导出了最一般的 stokes 定理；最后则介绍了流形上的 Riemann 度量。

1.7 2021-05~06 几何变分问题

本部分是郭老师上课补充的一些关于几何变分问题的内容，第一次上课，介绍了曲面上的常平均曲率，然后给出了调和映射的一般性质，最后介绍了二维空间上的几何变分问题；第二次上课，介绍了 wente 引理，Hodge 分解以及 helein 引理；第三次上课则紧接第二次上课内

容，首先给出了例子，然后给出了一个引理，并通过这个引理证明了 Lp 估计，最后介绍了映射到单位球的调和映照。

1.8 2021-03~06 Sobolev 空间

Sobolev 空间主要包括以下八部分内容

第一部分，sobolev 空间引入的两种方法 方法一，从解 dirichlet 问题出发引入 sobolev 空间不等式，运用变分的直接方法极小 Dirichlet 能量；方法二，从考虑非光滑微积分出发，逐步扩展函数类，得到 $W^{k,p}$ 空间

第二部分，回顾了实分析以及函数类基础 首先是测度与积分，回顾了微积分基本定理，cavalier 原则，fubini 定理，极坐标公式，lebesgue 积分下的三个收敛定理，单调收敛，fatou 引理，控制收敛定理，然后回顾了 L^P 空间上的定理，hoilder 不等式，minkoski 不等式以及推广的 minkoski 不等式，L^P 空间是完备空间，lebesgue 积分的绝对收敛性，最后回顾了卷积与磨光核，给出了磨光核以及 f 的磨光的定义，并给出了基本性质，并通过这些工具证明了 C_0^∞ 在 L^P 空间中稠密。

第三部分，弱导数 3.1 节开始介绍弱导数，首先通过研究一般区域上的连续函数得到形式上弱导数，然后引入弱导数定义，并由磨光核的性质给出了变分法基本引理的推广；3.2 节则通过弱导数定义了 sobolev 空间，然后给出了 sobolev 空间的一些性质，最后证明了如此定义的 sobolev 空间是 Banach 空间；3.3 节则重点讲了如何运用光滑函数逼近 sobolev 空间，首先通过引理 2.7 与引理 3.12 得到 R^n 上 sobolev 空间上光滑函数的稠密性，然后通过单位分解函数这个工具，证明了一般区域上稠密性也成立；3.4 节则分别讲了两个概念，$H_{loc}^{k,p}$ 与 $W_0^{k,p}$，并分别证明了对于非无穷维数，其分别与 $W_{loc}^{k,p}$ 与 $W^{k,p}$ 相等；最后引出了直线上的绝对连续函数，并将起推广得到了 ACL_p 空间，得到了 $W^{1,P}(\Omega) = ACL_p(\Omega)$, 并给出了相应的解释

第四部分，基于上梯度的 sobolev 空间 首先介绍了可求长曲线的各种定义和性质，然后介绍了曲线族的模的定义和性质；再给出了 ACC_p 空间，并得到了 $W^{1,P}(\Omega) = ACC_p(\Omega)$；接着介绍了上梯度的定义，从上梯度出发给出了 $u \in L^p(\Omega)$ 有 $W^{1,P}(\Omega)$ 代表的充要条件；最后介绍了通过差商定义弱导数刻画 sobolev 空间的性质，并给出了差商范数和梯度范数可比的定理。

第五部分，sobolev 嵌入与 poincaré 不等式 首先介绍了 sobolev 嵌入与 poincaré 不等式，并逐步介绍了等周不等式，sobolev 不等式，poincaré 不等式，并讨论了 p 范围不同时，对应的不同 q 值。

第六部分，sobolev 空间上微积分的各种性质 包括乘积法则，v 是 u 的弱导数的充分必要条件，链式法则并给了两种特殊形式的弱导数。

第七部分，sobolev 空间的弱紧性定理以及 r-k 紧性定理 首先介绍了弱收敛的概念，并介绍了几个与弱收敛有关的引理和几个证明弱紧性相关的引理和定理，最后证明了弱紧性定理，还补充了 Mazur 引理，并通过此引理证明了弱收敛与强收敛极限相同

第八部分，sobolev 函数的可微性 首先通过 lipschitz 函数说明 sobolev 空间函数的几乎处处可微性，介绍了 lipschitz 函数的定义，最后介绍了 lipschitz 函数的性质。

1.9 2021-09~12 倒向随机微分方程

倒向随机微分方程这门课，主要介绍了以下

第一部分，首先复习随机过程的相关知识 包括：B-布朗运动，X-循序可测，X-适应的；$It\hat{o}$ 积分的概念，$It\hat{o}$ 积分的唯一性；$It\hat{o}$ 公式，$It\hat{o}$ 过程；Gronwall 不等式，BDG 不等式，Girsanov 变换；SDE 的定义与解法，以及 SDE 的存在唯一性定理；SDE 的比较定理；SDE 的存在唯一性定理的第二种证明；证明了 SDE 关于参数的连续依赖性。

第二部分，倒向随机微分方程的模型 包括：一些倒向随机微分方程的模型；然后介绍了一些定义包括，自融资，投资组合，累积消费，欧式期权，对冲策略，公平价格，自融资无套利机会，由鞅表示定理，借款利率。然后证明了对冲策略是倒向随机微分方程的解。

第三部分，BSDE（Backward Stochastic Differential Equations）的相关内容 包括 BSDE 的定义，假设 standard 的定义，在 standard 假设下方程的对应解，再证明了 BSDE 的存在唯一性，最后给出了线性 BSDE 的定义以及求解方法。给出了 BSDE 的比较定理以及比较定理的证明，并给出了在 BSDE 中比较定理的推广，最后介绍了 BSDE 的比较定理在金融中的应用并加以证明；讲完比较定理，老师开始介绍 BSDE 独立性的相关内容，X 的修正的概念，有界循序可测的概念以及 Girsanov 定理；再介绍了 BSDE 中 flow 的概念，以及对于 flow 概念 BSDE 中的性质；介绍完 BSDE 中的稳定性，老师接着介绍凹的 BSDE 的概念，这一概念与金融中的效用相对应，然后老师给出了 BSDE 中 minorize 的概念以及相关性质，并用 minorize 介绍凹 BSDE 的相关概念：infimum，本质上下确界等。最后还介绍了 knightion 不确定性。并介绍马尔科夫在 BSDE 中的对应，首先给出了马尔科夫过程的相关性质，然后给出了粘性解上解，粘性下解以及粘性解的概念，最后给出了 BSDE 的粘性解。

第四部分，g-期望 首先介绍了条件期望的基本概念，给出了条件期望的六条性质；然后给出了 g-期望的定义，并证明了 g-期望的存在性和六条基本性质；再给出了 g-上鞅和 g-下鞅的概念并给出了 g-上鞅和 g-下鞅的相关性质。然后开始介绍离散时间鞅：首先给出离散时间鞅的定义，并给出了鞅的可加性质和函数性质；然后给出了停时的概念，介绍了四条停时的性质并给出了两个定理，来说明停时条件下，随机变量和期望的性质；再证明了两个与鞅有关的不等式；最后给出了 Doob 收敛定理和 Doob 分解定理。基于以上继续深入 g-上鞅的概念：首先 g-鞅和上穿不等式的概念，并给出了在 g-鞅的条件下，期望 $\epsilon^{-\mu}$ 与 ϵ^{μ} 之间的不等式关系；然后在下鞅和完备右连续的条件下，X_t 有右连续修正；最后证明了 BSDE 中的逆比较定理

第五部分，上鞅分解 给出了鞅分解定理，即上鞅可以分解为鞅减去一个增过程；然后给出了 BSDE 方程解的形式并加以证明；最后给出了上解的概念，并证明几个与上解有关的逼近定理。然后开始介绍非线性 Doob-Meyer 分解，首先给出了 g-上鞅 in strong sense 和 in weak sense；然后给出了在强意义下，y_t 的分解和 y_t^i 与 Y_t 之间的大小逼近关系，还证明了一列右连左极的 g-上鞅在满足平方上确界的期望有限的情况下收敛于右连左极的 g-上鞅；最后开始介绍带控制（限制）的 BSDE，即在控制条件下，能找到最小的 g-上鞅。

2 看完的数学书

2.1 2020-09~12 泛函分析教程

看完了 John.B conway 的《A coures in Functional analysis》的以下内容

空间理论 度量空间的定义，完备性与完备化，度量空间的拓扑，稠密与无处稠密，完备度量空间的性质，赋范线性空间的定义及性质，cauchy-schwart 不等式，Hilbert 空间，正交投影，投影算子，线性泛函以及 H 上线性泛函的性质，riez 表示定理，泛函的范数，将基的概念从有限维推广到无限维，正交基的概念，空间直和。

算子理论 Hilbert 空间上的线性算子，算子的范数，线性算子构成的空间，伴随算子，正规算子，投影算子与幂等算子，不变子空间与约化子空间，紧算子，有限秩算子, 紧算子以及 H 上线性算子的关联，对角算子，谱算子，下有界与值域和核

2.2 2021-05~10 变分学讲义

看完了张恭庆老师的变分学讲义的以下部分，其他的部分在 B 站上找的张恭庆老师的网课看的

第一讲变分学与变分问题 本部分，书中首先介绍了变分学研究的内容，本书的特点以及本书的整体结构。然后介绍了泛函的定义以及变分学中研究主要形式，最后介绍了一些典型的例子，比如，最速降线问题，极小曲线，产品再投资（最优控制问题）以及图像分割。

第二讲 Euler-Lagrange 方程 第二讲，书中首先介绍了变分法的一个重要引理-du Bols-Reymond。然后介绍了 Euler-Lagrange 方程的推导过程，并给出了适应更广的微分形式。再说明了 Euler-Lagrange 方程对逐段光滑函数成立的原因。最后给出了 Euler-Lagrange 方程的求解，首先是不依赖于 u 形式，然后是不依赖于 p 的形式，最后介绍了不依赖于 t 的自守形式。

第三讲泛函极值的必要条件与充分条件 第三讲，书中首先通过函数极值的必要条件与充分条件类推泛函的必要条件与充分条件，然后通过引入特殊的试验函数得到 Legendre 条件，然后通过引入 Jacobi 场和共轭点的概念进一步得到充分条件。

第四讲强极小与临界场 第四讲，重点介绍了强极小。首先介绍了强极小的概念，然后介绍了一个例子说明存在是弱极小但不是强极小的例子。然后探讨了强极小的必要条件，首先引入了 bump 函数，然后通过极小的定义得到了 weierstrass 过度函数。

3 上过讨论班

3.1 2020-09~12 plateau 问题

欧氏空间上的 plateau 问题

参数化的 plateau 问题 对于度量空间上一个 jordan 曲线 Γ，是否存在一个单位圆盘类型曲面使得其在所有以 Γ 曲线为边界的表面中面积最小？

一般化的 plateau 问题 寻找带有给定边界的极小曲面

plateau 问题的数学格式 是否存在 Λ（Γ）内的一个映射 u，使得其满足以下等式

$$Area(u) = inf\{Area(v) : v \in \Lambda(\Gamma)\} =: m$$

处理这类问题的两种方法 变分法中的直接步骤（十月份）与 sobolev 空间上映射的能量（十一月份）

变分法中的直接方法步骤

1. 选择 Λ（Γ）中的一个极小曲面，比如 $\phi_k \in \Lambda(\Gamma)$ 满足

$$Area(\phi_k) \to m$$

2. 在 φ 中寻找一个子列收敛到某个
3. 证明 $\phi \in \Lambda(\Gamma)$ 并且使用面积的低半连续性

变分法中的直接方法两个主要问题

1. 在单位圆盘闭包的重新参数化下面积是不变的并且 $\Lambda(\Gamma)$ 上的面积函数没有紧性
2. 我们可以达到任意小的面积使得这里不可能存在收敛子列

3.2 2021-03~06、09~10 测度论

测度论讨论班用的是 Vladimir I.Bogachev 的《Measure Theory》，主要介绍了以下三个部分

第一部分，测度的构造和扩张 主要包括以下内容，代数和 σ-代数，测度的可加性和可数可加性，紧集类以及可数可加性，外测度和 lebesgue 扩张，无限测度，lebesgue 测度，lebesgue-stieltjes 测度，单调和 σ-可加集类。

第二部分，Lebesgue 积分 可测函数，几乎处处收敛和收敛，简单函数的积分，lebesgue 积分的一般定义，积分的基本性质，无限测度有关积分，L^1 空间的完备性，收敛定理，可积性准则，与 riemann 积分的关联，hölder 和 minkowski 不等式。

第三部分，在测度和函数上的算子 符号测度的分解，radon-Nikodym 定理，测度空间的乘积，Fubini 定理，测度的无限乘积，测度在映射下的像，积分变换，傅里叶变换，卷积

3.3 2021-10~? 微分几何

微分几何讨论班用的是《微分几何引论》这本书，包括以下内容

第一部分，张量和外形式 本部分主要介绍了向量空间和对偶空间，n 维向量空间，对偶空间，爱因斯坦和式约定，向量空间及其对偶空间的基底变换，向量空间及其对偶空间中元素的变换公式；张量，协变张量，张量的锁并，欧式向量空间；外形式，r 次外形式，广义 Kronecker 记号，反对称运算，外积，外多项式，线性映射的诱导映射。

第二部分，微分流形 拓扑流形，拓扑结构，拓扑基，连续函数和连续映射，几个拓扑性质，n 维拓扑流形，光滑流形，坐标覆盖，光滑函数和光滑映射，单位分解定理，截断函数，局部定义的光滑函数扩充成为大范围定义的光滑函数，若干拓扑概念和引理，单位分解定理

第三部分，切向量场 本部分只开了头，介绍了切向量，切空间的概念，下学期接着讲。

3.4 2021-09~? 张老师讨论班

张老师讨论班为各个师兄师姐介绍自己学习的论文内容，现阶段对各个相关方向只是略有了解，等有机会会继续深入了解各个师兄师姐学习的方向的差别与联系，并了解师兄师姐们的主要工作。

4 参加的课题项目

4.1 2020-10~2021-12 几何分析问题

文章主要目的 This paper shows that some classes of mappings can be extended along φ-length John curves to the boundary on φ-length John domains. Moreover, the extension is unique if the domain is uniform. We extend previous results on mappings of bounded and finite distortion. Furthermore, we show that the conclusion also holds if the valued field space and the definition field space are metric spaces.

文章主要定理

Theorem 1. *Assume that $f : \Omega \to X_2$ is a mapping, where Ω is a φ-length John domain with center x_0 and Ahlfors q-regular. Let E_f be the set of points $\omega \in \partial\Omega$ for which there exists a curve $\gamma \in I^{(\varphi,c)}(\omega, x_0)$ so that f does not have a limit along γ. Then we have the following:*

1. *Let h be a doubling gauge function and $g(t) = \frac{\varphi(t)h(t)^{\frac{1}{q-1}}}{t}$ be a continuous monotonic increasing (or monotonic decreasing) function, such that*

$$\int_0^1 \frac{g(t)}{t} dt < \infty.$$

   If $f \in \mathcal{A}_1$, then $\mathcal{H}^h(E_f) = 0$.

2. *Let h be a doubling gauge function and $g(t) = \frac{\varphi(t)h(t)^{\frac{1}{q-1}}}{t} \left[\log \frac{1}{t}\right]^{\frac{1}{q-1}}$ be a continuous monotonic increasing (or monotonic decreasing) function, such that*

$$\int_0^1 \frac{g(t)}{t} dt < \infty.$$

   If $f \in \mathcal{A}_2$, then $\mathcal{H}^h(E_f) = 0$.

Moreover, we have the following theorem to prove the uniqueness of limits.

Theorem 2. *Let $\Omega \subset X_1$ be a c-uniform domain with center x_0 and h be a doubling gauge function satisfying the condition (2) of Theorem 1. If $f \in \mathcal{A}_2$, then f has a unique limit along curves $\gamma \in I^c(w, x_0)$ for $\mathcal{H}^h-$ almost every $\omega \in \partial\Omega$, i.e. if $\gamma, \eta \in I^c(\omega, x_0)$ so that*

$$\lim_{t \to 0^+} f(\gamma(t)) = a \text{ and } \lim_{t \to 0^+} f(\eta(t)) = b.$$

Then $a = b$.

文章主要结构 This paper is organized as follows. In Section 3.1, we will show that f can be extended to the boundary of a φ-length John domain along φ-length John curves with a small exceptional set with respect to Hausdorff gauges. In Section 3.2, we will prepare the main ingredients of the proof of Theorem 1 that the extension along John curves is also unique if the domain is uniform.

4.2 2021-10~? Yamabe 问题

主要参考文章

- “A compactness theorem for the fractional Yamabe problem, Part I: The nonumbilic conformal infinity ” -（Seunghyeok Kim ・Monica Musso ・Juncheng Wei）-（J. Eur. Math. Soc）
- “The Yamabe Problem” -（John M. Lee and Thomas H. Parker）-（Bulletin (New Series) of The AMS）

- “On A Fractional Yamabe Problem” -（Yannick Sire）
- 陈维桓老师编著的《微分几何引论》

但由于郭老师和我通知学校盲审需要我毕业设计做和金融数学有关的毕业设计，所以 Yamabe 问题我不清楚我是否有时间继续学习下去，虽然 Yamabe 问题很适合我学习的前置知识，用到的正好是微分几何和 Sobolev 空间的相关内容。

5 参加的会议与短期课程

5.1 参加的会议

- 非线性分析与偏微分方程及其应用国际研讨会
- 2021 椭圆方程与抛物方程学术研讨会
- 江苏大学名师大讲堂
  1. New sharp inequalities in Analysis and geometry 杜长峰教授
  2. geodesics and isometric lmmersions in kirigami 韩青教授
  3. separable Hamiltonian pdes and turning point principle for stability of gaseous stars 曾崇纯教授
  4. regular solutions of the stationary navier-stokes equations on high dimensional Euclidean space 李岩岩教授
  5. singularity formations in some geometric flows 魏军城教授
- 山东大学基础数学系列报告会
  1. 第一期-some results on geometric function theory in SCY 刘太顺教授
  2. 第二期-complete noncompact kaehler manifolds withpositive curvature 朱熹平教授
  3. 第三期 liouville theorem for a class semilinear elliptic equation on Heisenberg group 麻希南教授
  4. 第四期 symplectic critical surfaces and its related evolutions 李嘉禹教授
  5. 第五期二维不可压缩欧拉方程及相关问题的一些结果曹道民教授

5.2 参加的短期课程

- 北师大短期课程-最优传输问题与 Monge-ampere 方程
- 北大国际数学中心-微分几何暑期课程