



2020 年 10 月汇报

山东大学数学与交叉科学研究中心

兰宇恒

目录

1	课程以及看书总结	2
1.1	泛函分析教程	2
1.2	非线性泛函分析	2
1.3	函数论	2
1.4	高等概率论	3
1.5	常微分方程	3
2	讨论班	4
2.1	plateau 问题讨论班 (郭常予)	4
3	问题与解决	5
3.1	实变函数中的问题 (《实变函数论, 周民强》)	5
3.2	泛函分析中的问题 (《泛函分析, 第二版, 江泽坚》)	6
3.3	函数论	6
3.4	非线性泛函分析中的问题 (《非线性泛函分析, 郭大钧》)	11
3.5	plateau 问题讨论班中的问题 (郭常予讨论班)	11

1 课程以及看书总结

1.1 泛函分析教程

本月主要学习的内容有以下两个方面

空间理论 度量空间的定义，完备性与完备化，度量空间的拓扑，稠密与无处稠密，完备度量空间的性质，赋范线性空间的定义及性质，cauchy-schwarz 不等式，Hilbert 空间，正交投影，投影算子，线性泛函以及 H 上线性泛函的性质，riez 表示定理，泛函的范数，将基的概念从有限维推广到无限维，正交基的概念，空间直和。

算子理论 Hilbert 空间上的线性算子，算子的范数，线性算子构成的空间，伴随算子，正规算子，投影算子与幂等算子，不变子空间与约化子空间，紧算子，有限秩算子，紧算子以及 H 上线性算子的关联，对角算子，谱算子，下有界与值域和核

1.2 非线性泛函分析

本月主要学习的内容包括以下两个方面

看书方面 非线性算子的例子，Caratheodory 条件，以及满足 caratheodory 算子的充分必要条件

视频方面 山路定理，P.S 条件（对 Banach 流形上泛函的紧性要求）

1.3 函数论

本门课程为平面上的拟共形映射，主要目的是为了证明 Riemann 映射定理，现在所学总共分为三个部分

第一部分，主要介绍了，一些基本的概念 包括黎曼映射定理的叙述/可测黎曼映射定理的叙述，共形映射的定义/拟共形映射的定义，同胚映射是共形映射的充分必要条件，复扩张的定义，格罗蒋茨问题及其证明，径向拉伸的例子。

第二部分，主要介绍了 sobolev 空间以及相关的一些概念和性质 L_p 空间的性质， L_p 空间上的 holder 不等式与 minkowski 不等式，证明了 L_p 空间按 p 范数是一个 banach 空间/ $W^{k,p}$ 空间按 k, p, Ω 范数为 banach 空间，介绍了磨光核的概念及其性质/被磨光核作用后函数的性质，证明了变分法基本引理，介绍弱导数并引出了 sobolev 空间，单位分解定理，光滑函数局部逼近定理，直线上绝对连续 (ACL) 的定义以及相关的定理证明。

第三部分, 正在逐步介绍拟共形映射的基本性质 微分性质, 主要证明了 $W^{1,1}_{loc}$ 空间上连续开映射是几乎处处可微的, 变量替换性质, 主要证明了 $W^{1,2}_{loc}$ 空间上连续开映射, 把零测集映到零测集, 弱拟对称映射的定义以及性质, 拟对称则一定是拟共形映射, 拟共形映射则是局部拟对称的。

1.4 高等概率论

本月主要学习了以下几个概念, 集合及其运算, 映射与势, 可数集与不可数集, 距离空间定义以及例子, 开集闭集, 完备性, 可分性, 列紧性与紧性, 距离空间上的映射与函数, 连续函数的几个等价条件, 半集代数, 集代数, σ 代数, λ 系, Π 系, 单调类, 以及这几种代数系之间的关联。

1.5 常微分方程

本月主要复习了以下几个方面

初等积分法 变量分离的方程, 一阶线性方程, 初等变换法, 积分因子法

存在和唯一性定理 皮卡存在和唯一性定理, 皮亚诺存在定理, 解的延拓, 比较定理及应用

高阶微分方程 解对初值和参数的连续依赖性

线性微分方程组 齐次线性微分方程组, 非齐次线性微分方程组, 矩阵指数函数的定义和性质, 基解矩阵

2 讨论班

2.1 plateau 问题讨论班 (郭常予)

本月讨论班主要介绍了以下内容

欧氏空间上的 plateau 问题

参数化的 plateau 问题 对于度量空间上一个 jordan 曲线 Γ , 是否存一个单位圆盘类型曲面使得其在所有以 Γ 曲线为边界的表面中面积最小?

一般化的 plateau 问题 寻找带有给定边界的极小曲面

plateau 问题的数学格式 是否存在 $\Lambda(\Gamma)$ 内的一个映射 u , 使得其满足以下等式

$$Area(u) = \inf\{Area(v) : v \in \Lambda(\Gamma)\} =: m$$

处理这类问题的两种方法 变分法中的直接步骤 (十月份讲) 与 sobolev 空间上映射的能量 (十一月份讲)

变分法中的直接方法步骤

1. 选择 $\Lambda(\Gamma)$ 中的一个极小曲面, 比如 $\phi_k \in \Lambda(\Gamma)$ 满足

$$Area(\phi_k) \rightarrow m$$

2. 在 ϕ 中寻找一个子列收敛到某个
3. 证明 $\phi \in \Lambda(\Gamma)$ 并且使用面积的低半连续性

变分法中的直接方法两个主要问题

1. 在单位圆盘闭包的重新参数化下面积是不变的并且 $\Lambda(\Gamma)$ 上的面积函数没有紧性
2. 我们可以达到任意小的面积使得这里不可能存在收敛子列

3 问题与解决

3.1 实变函数中的问题 (《实变函数论, 周民强》)

- 前言 P3 有界收敛定理的证明? (在数学分析中没有找到相关证明)
- P8 上面充分性的打问号的集合等式推导, 是否是结论证结论
- P21 例 13, " \mathbb{R} 中任一点都是 E 中某两个点的差? 这是不可能的", 详细证明
- P31 例 4, 证明完全没看懂? 为什么它们前 m 个小数相同? 为什么存在 Z 使得满足不等式?
- P31 例 5, 为什么易知, 对任意 t 以及的他存在 a , 取 t 等于 $1/2$, 的他等于 $1/4$ 怎么会存在?
- P32 下列简单事实, 右侧包含关系可否取 $E_k=(0,1/K)$
- P40-45, borel 集这一部分完全没看懂
- P72, 下方小字, 为什么倒数第三步到倒数第二步成立, 不应该是等号吗?
- P73, 外侧度为零的点集称为零测集的下方的的小字中的话, 零测集的任意子集是零测集, 由此再注意到 cantor 集是零测集这一事实, 难道说 cantor 集是有理数集的子集? 如果为子集, 那有理数的基数为可数的, 而 cantor 集为连续基数? cantor 集为零测集在 P68 中有说明是通过外侧度的次可加性直接计算区间长度得到的。
- P73, 同上一样的地方的小字, 不难推断可测集的基数大于或等于 2 的连续基数次幂, 但其基数又不会超过 2 的连续基数次幂, 所以其基数为 2 的连续基数次幂?
- P79, 引理 2.10, 略长
- P89-93, 连续变换部分, 超出研究范围
- P88, 思考题 2, 次可加性不等号不成立的例子
- P113, 注中, 测度不有限下的反例, 为什么均不一致收敛于 $f(x)$ (这一条解决后加入非平凡例子中)
- P116, 定理 3.14 中的证明, 如何从并的极限推到下面的等式, 或者说如何从累和的极限推到等式
- 13, 15 定理证明略长, 未完全理清思路
- P173, 注中为什么对 $f(x+y)$ 求导得到的却只是对 $f(y)$ 求导

3.2 泛函分析中的问题 (《泛函分析, 第二版, 江泽坚》)

- 线性流形? = 子空间
- P8, 本质有界可测函数?
- P12, 连续的定义, 值域中某点邻域存在定义域中某点邻域, 使得当 x 属于 x_0 邻域时有 $f(x)$ 属于 y_0 的邻域, 此处与将开集映成开集有什么区别
- P14, m 空间不可分, c 空间可分, L_p 空间可分?
- P16, 证明 L_p 空间为完备空间?
- P20, 证明紧性与自列紧性等价
- P21, 证明紧性的常用方法, 对角线方法
- P23, 等度连续这部分与主线有偏离, 暂时不看
- P26, 赋范线性空间中, L_p 与 l_p 之间的关联, $\Omega=1, 2, 3, \dots, n, \dots$?
- P31, Riesz 引理中, 不等式的倒数第三步 $\geq d$ 是如何推出来的?
- P25, 内积空间, 赋范线性空间, 距离空间, 距离线性空间, 拓扑空间是否有如 P25 所显示的关系?
- P48, 定理 1.1 中, 左边书页中写的第一个内积是如何拆开成那个累和的?
- P50, X 能赋以内积的充要条件是 X 中的范数满足平行四边形法则?
- 涉及复变的一些例子, P51-P52, 例子 4,5, P26, 例子 4,5

3.3 函数论

- P1, 定理 1.1 没有证?
- P1, 三个 by 什么意思?
- P2, 为什么使用 \sup ,
- P2, 此处如何说明是共形映射
- P2, 度量拟共形映射, 为什么要取这个名字? 这一小节没有有关这个的定义?
- P2, 如果 $H_f=3$, 则可任意称为 4, 5, 6, 7... -拟共形映射
- P2, 如何得到的 $L(Z)$, 为啥这就是 $L(z)$
- P2, S^1 空间是哪一个空间
- P2, 线性映射的行列式

- P2, 最后一句话的翻译
- P3, 可否理解为最大拉伸/最小拉伸
- P3, 如何推定的? 复线性等价于 $b=0$
- P3, 微分同胚什么意思, 有何等价条件?
- P3, 为什么可以写成这种形式
- P3, 为什么共形等价于后者等于零
- P3, 为何 Hf 可以表示成如上形式?
- P3, 打印错误
- P4, 全纯函数-解析函数?
- P4, 将 h 换成 s 有何区别
- P4, quantity 量? 还是自变量?
- P4, 最后那个推导, 怎么从拟共形映射推到那个等式的?
- P4, 最后那个 as 什么意思? 如何翻译?
- P4, 映射的无穷范数?
- P5, 定理 1.9 没有证?
- P5, 这个问题的翻译是什么意思?
- P5, 问题 1.10 证明里的 $l(f(I_y))$ 是什么? 以及此不等式是如何推出来的?
- P5, 左侧与范数有关不等式, 不是只有微分同胚才有此性质吗
- P5, 小于等于号的 (a_2, b_2) 怎么来的?
- P5, conclude that? 是怎么推导出来的?
- P5, Jacobi 矩阵打印错误?
- P6, 打印错误? μ 与 u
- P6, 为什么要分 α 小于等于 1 的情况?
- P6, 更一般的情况是什么情况? 为 $|z|$ 的函数?
- P6, strictly, 打印错误
- P7, for each l 属于 N ? 如何对每一个 l 取子列

- P7, dominated convergence theorem 是控制收敛定理? (是滴)
- P7, 如何得到那两项?
- P7, 最后推导步骤中那个极限为什么会等于 f ?
- P7, 那个推论为什么放宽子列的收敛范围, 变为几乎处处?
- P7, lebesgue 积分的绝对连续性那个提示, 密度还是稠密性?
- P7, 如何用稠密性证明?
- P8, 最上面那句话, 为什么存在 C_0 无穷内一组函数逼近?
- P8, 为什么当 f 是 L^1 时, 磨光核是那个? (那个单词不是磨光核而是改变)
- P8, L_{loc} 空间是什么空间? (局部可积函数的全体?) (在紧集上可积与在某个开集中局部可积?)
- P8, 不等式放缩是怎么得到的?
- P8, 同上一个问题, z 积分区域为, z /伊普西隆积分区域为 $B(0, 1)$
- P8, 函数等价? 为啥, 证明?
- P8, N_2 空间是啥?
- P9, h 远小于 1? 还是 h 被 1 控制?
- P9, 两个包含号连在一起什么意思
- P9, 后一个等式是如何推导的? (\square) 多了一个伊普西隆?
- P9, 打印右侧缺少一个 $*$ 号
- P9, V 区域是什么? 这个控制是怎么得到的?
- P9, 如何使用控制收敛定理, 没有序列, 有界就可收敛?
- P9, x, y 地位等价?
- P9, 积分均值是怎么得到的? 为什么把伊普西隆消除了?
- P10, (3) 前是否是要证?
- P10, 不等式放缩, 为什么有那个不等式
- P10, 为什么在 Ω 上存在连续 g ? 为什么要取闭包?
- P10, remark2.7 中 we call 那句话如何翻译?
- P10, 证明中如何说明其属于 L_p 空间的?

- P10, 打印错误
- P11, $C1$ 空间和 $C01$ 空间哪一个更大, $C1$ 空间相比 $C01$ 是不是只是少了紧支集这个条件
- P11, 为啥 $C01$ 空间内一个函数与 $C1$ 空间一个函数复合, 得到的函数属于 $C01$ 空间?
- P11, 为何复合函数的支集在定义域函数的支集内
- P11, 为何积分等于零? 与分布积分公式的异同?
- P11, remark2.9, (1) 想说明什么
- P11, remark2.9, (2) 如何证明? (证明见 P12, 使用变分法基本引理)
- P11, 引理 2.10, 只需要证明是为什么?
- P12, 打印错误
- P12, full measure 全测度什么意思?
- P12, 如何把那两项消除为零?
- P13, 如何消去常数项的?
- P13, $\Omega(1/2)$ 空间是什么?
- P13, 推出来 $0=-1$ 所以矛盾?
- P13, 这样推导, 极限和积分可以换序吗?
- P13, 为什么不直接写 C_k 属于 $W_{k,p}$
- P13, L_p 空间属于 L_q 空间? 当 q 小于 p 的时候?
- P13, question2.14?
- P14, 几个推导过程的理由是否合理
- P14, 与 P9 推导过程之间的异同?
- P14, 打印错误?
- P15, 不是 f_i 属于这个函数类吗? 累和为 1 是什么意思?
- P15, 引理 2.17 的证明?
- P15, 为什么要 $k+1, k-1$
- P15, 为什么后一个要闭包
- P15, 函数空间复合后的函数所属空间的原因?

- P15, 为什么存在伊普西隆 k
- P15, 为什么卷积后支集属于 V_k
- P15. 磨光核变小还是变大? 再结合老师说的扩大范围?
- P15, 引理 2.6 的应用?
- P15, 为什么 f 伊普西隆属于 C 无穷
- P15, remark 是什么意思?
- P15, Ω 属于 R , 一维?
- P15, up to another 这句话如何翻译?
- P16, 其函数列逼近有导数列逼近是为什么?
- P16, 为何映射 g 是绝对连续的?
- P16, 与 $u(x)$ 一致什么意思?
- P16, 光滑函数?
- P16, 直线上绝对连续是对区间考虑而不是逐点考虑?
- P16, by fubini 定理? 是怎么推出偏导数几乎处处存在的?
- P16, n -测度什么意思?
- P16, 几乎处处 well defined? 几乎处处是良定义 (合理的)?
- P17, 不等式推论 1, 如何推出的? 2, 与 fatou 引理矛盾?
- P17, 验证函数 g 满足要求的性质?
- P18, 定理 2.26 是如何被证明的?
- P18.c 无穷与 1 无穷?
- P19, 为什么行列式可以如此表示?
- P19, 3.1 中定理以及推论未证明?

3.4 非线性泛函分析中的问题 (《非线性泛函分析, 郭大钧》)

- P2, 易知, $f(x(n))$ 趋于 $f(x)$? 哪里易知了? (详细证明见书侧) - (利用 holder 不等式)
- P2, 那个算子如何读?
- P3, 显然是有界闭集? 为啥显然? 因为 F_n 是有界闭集?
- P3, 为啥二元连续函数的定义写成如上形式?
- P3, 为啥测度用的是次可加性而不是可数可加性
- P4, 为何上面要 u_2 小于等于 n_0
- P4, 有理数的稠密行还可以这样用?

3.5 plateau 问题讨论班中的问题 (郭常予讨论班)

- P1, 弱共形映射是什么?
- P2, moreover 后面那句话是什么意思?
- P2, 三条 remark 是什么意思?
- P2, dougles, 改变条件解决更强?
- P2, to overcome difficulty? 克服了什么困难?
- P3, $\text{area}(f)$ 是什么?
- P3, 符号是什么意思, 这个积分表示的是什么?
- P3, 自然办法? (直接办法), 这是为了什么?
- P3, 为什么要加上面积小于等于 $A\Gamma$
- P3, 弱紧性是什么?
- P3, enters naturally?
- P4, 区域的变化是怎么得到的
- P4, example 讲的是什么?
- P4, 不完备和不连续?