Markov 链

September 29, 2017

1 Markov 过程及其概率分布

由时刻 t_0 系统或过程所处的状态，可以决定系统或过程在时刻 $t > t_0$ 所处的状态，而无需借助于 t_0 以前系统或过程所处状态的历史资料。

马尔可夫性或无后效性：过程 (或系统) 在时刻 t_0 所处的状态为已知的条件下，过程在时刻 $t > t_0$ 所处状态的条件分布与过程在时刻 t_0 之前所处的状态无关。

设随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的状态空间为 I。若对时间 t 的任意 n 个数值 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n, n \geqslant 3, t_i \in T$，在条件 $X(t_i) = x_i, x_i \in I, i = 1, 2, \cdots, n-1$ 下，$X(t_n)$ 的条件分布函数恰等于在条件 $X(t_{n-1}) = x_{n-1}$ 下 $X(t_n)$ 的条件分布函数，即

$$\begin{aligned} &P\{X(t_n) \leqslant x_n | X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \cdots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \\ &= P\{X(t_n) \leqslant x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}, x_n \in \boldsymbol{R}, \end{aligned} \tag{1}$$

或

$$F_{t_n|t_1\cdots t_{n-1}}(x_n, t_n | x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}; t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}) = F_{t_n|t_{n-1}}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$$

称过程 $\{X(t), t \in T\}$ 具有马尔可夫性或无后效性，并称此过程为马尔可夫过程。

时间和状态都是离散的马尔可夫过程称为马尔可夫链，简称马氏链，记为 $\{X_n = X(n), n = 0, 1, 2, \cdots\}$，它可以看作在时间集 $T_1 = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 上对离散状态的马氏过程相继观察的结果。记链的状态空间为 $I = \{a_1, a_2, \cdots\}, a_i \in \boldsymbol{R}$。在链的情况下，马尔可夫性用条件分布律表示，即对任意的正整数 n, r 和 $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_r < m; t_i, m, n+m \in T_1$，有

$$P\{X_{m+n} = a_j | X_{t_1} = a_{i_1}, X_{t_2} = a_{i_2}, \cdots, X_{t_r} = a_{i_r}, X_m = a_i\} \tag{2}$$

$$= P\{X_{m+n} = a_j | X_m = a_i\} = P_{ij}(m, m+n) \ , \tag{3}$$

其中 $a_i \in I$。称条件概率

$$P_{ij}(m, m+n) = P\{X_{m+n} = a_j | X_m = a_i\} \ ,$$

为马氏链在时刻 m 处于状态 a_i 条件下，在时刻 $m+n$ 转移到状态 a_j 的转移概率。

由于链在时刻 m 从任何一个状态 a_i 出发，到另一时刻 $m+n$，必然转移到 $a_1, a_2, \cdots$ 诸状态中的某一个，

$$\sum_{j=1}^{+\infty} = P_{ij}(m, m+n) = 1, \quad i = 1, 2, \cdots \ . \tag{4}$$

由转移概率组成的矩阵 $\boldsymbol{P}(m, m+n) = (P_{ij}(m, m+n))$ 称为马氏链的转移概率矩阵。此矩阵的每一行元之和等于 1。

当转移概率 $P_{ij}(m, m+n)$ 只与 i, j 以及时间间距 n 有关时，记为 $P_{ij}(n)$，即

$$P_{ij}(m, m+n) = P_{ij}(n) \ , \tag{5}$$

称此转移概率具有平稳性。也称此链是齐次的，或时齐的。

在齐次马氏链情况下，转移概率

$$P_{ij}(n) = P\{X_{m+n} = a_j | X_m = a_i\} \ , \tag{6}$$

称为马氏链的 n 步转移概率，$\boldsymbol{P}(n) = (P_{ij}(n))$ 为 n 步转移概率矩阵。

一步转移概率

$$P_{ij} = P_{ij}(1) = P\{X_{m+1} = a_j | X_m = a_i\} \ , \tag{7}$$

一步转移概率矩阵

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}(1) = \boldsymbol{P} \ .$$

齐次马氏链的有限维分布：记

$$p_j(0) = P\{X_0 = a_j\} \ , \quad a_j \in I, \ j = 1, 2, \cdots \ ,$$

称它为马氏链的初始分布。马氏链在任一时刻 $n \in T_1$ 的一维分布：

$$p_j(n) = P\{X_n = a_j\} \ , \quad a_j \in I, \ j = 1, 2, \cdots \ .$$

写成行向量

$$\boldsymbol{p}(n) = (p_1(n), p_2(n), \cdots, p_j(n), \cdots) \tag{8}$$

$$\boldsymbol{p}(n) = \boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}(n) \ . \tag{9}$$

马氏链在任一时刻 $n \in T_1$ 时的一维分布由初始分布 $\boldsymbol{p}(0)$ 和 n 步转移概率矩阵所确定。

马氏链的有限维分布同样完全由初始分布和转移概率所确定。

转移概率决定了马氏链运动的统计规律。

2 多步转移概率的确定

设 $\{X(n), n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 是一齐次马氏链，则对任意的 $u, v \in T$，有

$$P_{ij}(u+v) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_{ik}(u) P_{kj}(v) \ , \quad i, j = 1, 2, \cdots \tag{10}$$

此为 Chapman-Kolmogorov 方程，简称 C-K 方程。C-K 方程基于下述事实，即 “从时刻 s 所处的状态 a_i，即 $X(s) = a_i$ 出发，经时段 $u+v$ 转移到状态 a_j，即 $X(s+u+v) = a_j$” 这一事件可分解为 “从 $X(s) = a_i$ 出发，先经时段 u 转移到中间状态 $a_k (k = 1, 2, \cdots)$，再从 a_k 经时段 v 转移到状态 a_j” 这样一些事件的和事件。

C-K 方程也可以写成矩阵形式：

$$\boldsymbol{P}(u+v) = \boldsymbol{P}(u) \boldsymbol{P}(v) \ . \tag{11}$$

令 $u = 1, v = n-1$，

$$\boldsymbol{P}(n) = \boldsymbol{P}(1) \boldsymbol{P}(n-1) = \boldsymbol{P} \boldsymbol{P}(n-1) = \cdots = \boldsymbol{P}^n \ . \tag{12}$$

对于齐次马氏链，n 步转移概率矩阵是一步转移概率矩阵的 n 次方。

3 遍历性

一般，设齐次马氏链的状态空间为 I，若对于所有 $a_i, a_j \in I$，转移概率 $P_{ij}(n)$ 存在极限

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \pi_j \quad (\text{不依赖于 } i)$$

或

$$\boldsymbol{P}(n) = \boldsymbol{P}^n \xrightarrow{(n\to+\infty)} \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

则称此链具有遍历性。又若 $\sum_j \pi_j = 1$，则同时称 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \cdots)$ 为链的极限分布。

有限链的遍历性的一个充分条件

定理

设齐次马氏链 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 的状态空间为 $I = \{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$，$\boldsymbol{P}$ 是它的一步转移概率矩阵，若存在正整数 m，使对任意的 $a_i, a_j \in I$，都有

$$P_{ij}(m) > 0 \ , \quad i, j = 1, 2, \cdots, N \ , \tag{13}$$

则此链具有遍历性，且有极限分布 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_N)$，它是方程组

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi P} \ \text{ 或即 } \ \pi_j = \sum_{i=1}^{N} \pi_i p_{ij} \ , \quad j = 1, 2, \cdots, N \tag{14}$$

的满足条件

$$\pi_j > 0 \ , \sum_{j=1}^{N} = 1 \tag{15}$$

的唯一解。