密度扰动的线性演化

August 20, 2016

$10 < z < 1000$：黑暗时代 (Dark Ages)

1 球对称塌缩模型

2 Press-Schechter 质量函数

3 Zel'dovich 近似

对于一个三轴椭球状的扰动，坍缩过程不会终结到一个点，而是终结到一个准二维的平展结构，通常称为“薄饼”模型。假设压力可以忽略，流体可以看成是由大量尘埃质点组成的，并假设在焦散线 (caustics) 处，密度可以达到无穷大，但这些区域引起的引力加速度保持为有限。在这些近似下，粒子的位置坐标为

$$\boldsymbol{r}(t, \boldsymbol{q}) = a(t)[\boldsymbol{q} - b(t) f(\boldsymbol{q})] \tag{1}$$

$\boldsymbol{r}$：Eular 位置坐标，即固有坐标；$a(t)$：宇宙尺度因子，$a(t) \propto t^{2/3}$；$\boldsymbol{q}$：Lagrange 位置坐标，相当于无扰动时粒子的初始共动坐标；在有扰动情况下粒子的共动坐标：

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{q}-b(t)f(\boldsymbol{q})$，$f(\boldsymbol{q})$：扰动产生的与时间无关的位移场的函数，$b(t)$：位移的线性演化，且在扰动开始时刻 t_i，$b(t_i)=0$，并满足演化方程

$$\ddot{b}-2\frac{\dot{a}}{a}\dot{b}-4\pi G\rho b=0 \tag{2}$$

$b(t)$ 随时间增长的规律是 $b(t)\propto t^{2/3}$；再设扰动位移场是无旋的，可以把它写成某个势函数 (速度势函数) 的梯度：

$$f(\boldsymbol{q})=\nabla_q\Psi(\boldsymbol{q}) \tag{3}$$

在共动坐标下，粒子的本动速度

$$\boldsymbol{u}\equiv\dot{\boldsymbol{x}}=\frac{1}{a}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}-H\boldsymbol{r}\right)=-\dot{b}f(\boldsymbol{q}) \tag{4}$$

速度场也是无旋的；

在扰动位移为线性时，通过 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 之间坐标变换的 Jacobi 行列式 $|J(\boldsymbol{r},t)|=|\partial\boldsymbol{r}/\partial\boldsymbol{q}|$，扰动密度和平均背景密度之间的守恒关系 $\rho(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}=\bar{\rho}(t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{q}$ 可表示为

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=\frac{\bar{\rho}(t)}{|J(\boldsymbol{r},t)|} \tag{5}$$

或

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}}=\frac{1}{[1+b(t)\alpha_1][1+b(t)\alpha_2][1+b(t)\alpha_3]} \tag{6}$$

$1+b(t)\alpha_i$：矩阵 J 的本征值，α_i：应变张量 (形变张量)$\partial f_i/\partial q_j$ 的本征值；

Zel'dovich 近似是对粒子的位移取一阶线性近似，而不是直接对密度扰动取线性近似；位移被认为是线性变化的，而密度的变化可能是线性的，也可能是非线性的；当 $|b(t)\alpha_i|\ll 1$ 时，密度扰动为

$$\delta\approx-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)b(t)=b\nabla\cdot f=b\nabla_{\boldsymbol{q}}^2\Psi \tag{7}$$

若 α_i 为负值，则当扰动增大到使得 $b(t)=-\frac{1}{\alpha_i}$ 时，上式密度为无穷大，即形成奇点，称为壳层交叉(shell crossing)；意味着 Lagrange 坐标不同的两个粒子 (或多个粒子) 碰

到一起了，具有相同的 Eular 坐标，粒子的轨道交叉了，坐标变换不是一对一的了；发生壳层交叉的地方称为焦散线(焦散面)；发生坍缩的地方，至少有一个 α_i 为负值，若不止一个 α_i 为负，则坍缩首先发生在最负的 α_i 相应的轴方向，从而形成"薄饼"结构；在很少的情况下，当两个或三个 α_i 相同时，也可能在两个或三个方向同时坍缩，从而形成"纤维"状或"点"状结构。Zel'dovich 近似的结果是，薄饼状结构是引力坍缩的最一般形式。