不定积分

February 20, 2017

1 原函数（不定积分）的概念

若在给定的整个区间上，$f(x)$ 是函数 $F(x)$ 的导数，或 $f(x)\mathrm{d}x$ 是 $F(x)$ 的微分

$$F'(x) = f(x),\ \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

那么，在所给定的区间上，函数 $F(x)$ 叫做 $f(x)$ 的原函数或 $f(x)$ 的积分。

2 有理式的积分

2.1 某些含有根式的函数的积分

寻求替换 $t = \omega(x)$(其中 ω 本身能用初等函数表示出来)，这替换会把被积表达式化成有理函数的形状，这个方法叫做有理化被积表达式法。

2.1.1 形状为 $R\left(x, \sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$ 的积分

考虑形如

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) \tag{2}$$

的积分，其中 R 表示两个自变量的有理函数，m 是自然数，而 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 是常数。

令

$$t=\omega(x)=\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},\ t^m=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\ x=\varphi(t)=\frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m} \tag{3}$$

则积分变成

$$\int R(\varphi(t),t)\varphi'(t)\mathrm{d}t \tag{4}$$

形如

$$\int R\left(x,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^r,\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^s,\cdots\right)\mathrm{d}x \tag{5}$$

其中指数 $r,s,\cdots$ 都是有理数。

2.1.2 二项式微分的积分

形如

$$x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x \tag{6}$$

的微分式叫做二项式微分，其中 a,b 是任何常数，而指数 m,n,p 是有理数。

若用 λ 表示分数 m 及 n 的分母的最小公倍数，就有形如 $R(\sqrt[\lambda]{x})\mathrm{d}x$ 的表达式。作替换 $t=\sqrt[\lambda]{x}$；

令 $z=x^n$，

$$x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x=\frac{1}{n}(a+bz)^p z^{\frac{m+1}{n}-1}\mathrm{d}z, \tag{7}$$

令

$$\frac{m+1}{n}-1=q, \tag{8}$$

即有

$$\int x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int(a+bz)^p z^q\mathrm{d}z, \tag{9}$$

$$t = \sqrt[\nu]{\frac{a+bz}{z}} \tag{10}$$

若 $p, q, p+q$ 中有一个是整数，或者 $p, (m+1)/n, (m+1)/n+p$ 中有一个是整数，等式 (9) 的两个积分都可按有限形状表示出来。

在有限形状中二项微分没有其他可积的情形。