傅里叶级数和傅里叶积分

July 9, 2016

周期现象

周期函数

与所考虑的周期线性有关的各种量，在经历周期 T 后，重新取得它们的原值

$$\varphi(t+T)=\varphi(t) \tag{1}$$

周期函数的图解可以由一系列正弦型量的图解得来；

$$\varphi(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\alpha_n) \tag{2}$$

其中

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \tag{3}$$

由函数 $\varphi(t)$ 表示的复杂振动可以分解成各别的调和振动；

函数 $\varphi(t)$ 的调和成分或调和素：组成展开式 (2) 的各个正弦型量；

调和分析：将周期函数分解成调和素的手续；

1 傅里叶级数

假定函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上按常义或者非常义可积分，对后一情形，假定函数绝对可积；设展开式

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{4}$$

成立；

欧拉—傅里叶公式

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x \tag{5}$$

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\mathrm{d}x \quad (m=1,2,3,\cdots) \tag{6}$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx\mathrm{d}x \quad (m=1,2,3,\cdots) \tag{7}$$

如果周期是 2π 的函数 $f(x)$ 可以展开成一致收敛的三角级数，则这级数一定是 $f(x)$ 的傅里叶级数；

两个函数在这区间上正交：如果在区间 $[a,b]$ 上所定义的两函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的乘积，其积分为 0，

$$\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x=0 \tag{8}$$

正交函数系：考虑定义在区间 $[a,b]$ 上的函数系 $\{\varphi_n(x)\}$。设系中各函数与它们的平方在 $[a,b]$ 上皆可积分，则它们的两两乘积在同一区间上也可积分。如果系中各函数两两正交，即

$$\int_a^b\varphi_n(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x=0 \quad (n,m=0,1,2,3,\cdots;n\neq m) \tag{9}$$

假定

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\mathrm{d}x = \lambda_n > 0 \tag{10}$$

若 $\lambda_n = 1\ \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$，函数系是规范的；

加权 $p(x)$ 的正交性：

$$\int_a^b p(x)\varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{11}$$

如：函数系 $\{J_0(\xi_n x)\}$ 是加权 x 正交的；

已给函数对于函数系 $\{\varphi_n(x)\}$ 的(广义) 傅里叶级数

设在区间 $[a, b]$ 上已给任一正交系 $\{\varphi_n(x)\}$。将定义在 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$ 展开成函数 φ 的级数，

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + \cdots \tag{12}$$

其中

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m}\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x \ \ (m = 0, 1, 2, \cdots) \tag{13}$$

三角插值法

用三角多项式

$$\sigma_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \tag{14}$$

作为函数 $f(x)$ 的近似式，使三角多项式与函数在许多点上有相同的值。

选取 n 阶三角多项式 (14) 的 $2n+1$ 个系数：$\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_n, \beta_n$，使得在区间 $(-\pi, \pi)$ 内预先指定的 $2n+1$ 个点处，如

$$\xi_i = i\lambda \ \ (i = -n, -n+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, n-1, n) \tag{15}$$

各点处，

$$\lambda = \frac{2\pi}{2n+1}, \tag{16}$$

三角多项式的值与函数 $f(x)$ 的值相等。

$$\alpha_0+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos k\xi_i+\beta_k\sin k\xi_i)=f(\xi_i)\quad(i=-n,-n+1,\cdots,n) \tag{17}$$

1.1 函数的傅里叶级数展开式

1.2 非周期函数

1.3 只含余弦或正弦

1.4 傅里叶级数的收敛性

1.5 傅里叶级数的逐项积分法

假定函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积，设它的傅里叶级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{18}$$

任意区间 $[x',x'']$（其中 $-\pi\le x'<x''\le\pi$）

$$\int_{x'}^{x''}f(x)\mathrm{d}x=\int_{x'}^{x''}\frac{a_0}{2}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x'}^{x''}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]\mathrm{d}x \tag{19}$$

函数 $f(x)$ 的积分可将与它相应的傅里叶级数逐项积分而求得。即令不假定傅里叶级数 (18) 本身收敛于函数 $f(x)$，还恒可将它逐项积分

1.6 傅里叶级数的逐项微分法

2 傅里叶积分

设函数 $f(x)$ 在点 x 处连续，如果不连续，则设

$$f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \tag{20}$$

成立。

在主值意义下一定存在，且

$$\mathrm{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin z(u-x)\mathrm{d}u=0 \tag{21}$$

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{izu}\mathrm{d}u \tag{22}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(z)e^{-ixz}\mathrm{d}z \tag{23}$$