密度扰动的线性演化

June 9, 2018

1

线性转移函数

2 密度扰动功率谱

把整个宇宙分割成许多个立方体，立方体之间满足周期性边界条件

密度涨落定义为

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \left[\rho(\boldsymbol{x}) - \langle\rho\rangle\right] / \langle\rho\rangle \tag{1}$$

$\langle\rho\rangle$: 体积 V 内的平均密度;

把 $\delta(\boldsymbol{x})$ 进行平面波展开

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \sum_k \delta_k \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) = \sum_k \delta_k^* \exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

周期性边界条件要求

$$k_x = n_x \frac{2\pi}{L},\ k_y = n_y \frac{2\pi}{L},\ k_z = n_z \frac{2\pi}{L}, \tag{3}$$

n_x, n_y, n_z 为整数;

$$\delta_k = \frac{1}{V}\int_V \delta(\boldsymbol{x})\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{4}$$

假设取另一个体积 V，把该体积内的扰动同样展开成以上形式，则展开式的系数 δ_k 可能会不同；若取大量数目的体积 V，无论是 δ_k 的振幅还是相位，都可能会各处不同；如果相位是随机的，此时的密度扰动场具有 Gauss 分布的统计特征，它的全空间平均值，即

$$\langle\delta(\boldsymbol{x})\rangle \equiv \bar{\delta}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{5}$$

但方差

$$\sigma^2 \equiv \left\langle\delta^2(\boldsymbol{x})\right\rangle = \sum_k \left\langle|\delta_k|^2\right\rangle = \frac{1}{V}\sum_k \delta_k^2 \neq 0 \tag{6}$$

当 $V\to\infty$，

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \frac{V}{(2\pi)^3}\int \delta_k \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{k} \tag{7}$$

$$\sigma^2 \equiv \left\langle\delta^2(\boldsymbol{x})\right\rangle = \frac{1}{V}\int \delta^2(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{V}{(2\pi)^3}\int \delta_k^2 \mathrm{d}\boldsymbol{k} \tag{8}$$

若密度扰动场在统计上是均匀各项同性的，统计性质与方向无关，因此

$$\sigma^2 = \frac{V}{2\pi^2}\int_0^\infty \delta_k^2 k^2 \mathrm{d}k = \frac{V}{2\pi^2}\int_0^\infty \delta_k^2 k^3 \mathrm{d}\ln k = \frac{V}{2\pi^2}\int_0^\infty P(k)k^3 \mathrm{d}\ln k \tag{9}$$

密度扰动的功率谱

$$P(k) = \delta_k^2 \tag{10}$$

与空间位置无关，只是时间的函数 $\delta_k^2 k^3$ 或者 $P(k)k^3$：在 k 尺度上，单位对数间隔内密度扰动的功率大小，即在该尺度上成团强度的大小。对于 CDM 宇宙，演化的结果是小尺度上有较大的扰动功率，即成团先从小的质量开始，然后通过引力作用逐渐形成越来越大的结构，hierarchical、bottom-up 成团模式；对于 HDM 宇宙，大尺度将产生较大

的扰动功率，使大尺度上优先成团，再通过分裂过程产生较小尺度的结构，top-down 模式。

线性演化阶段结束时的功率谱与初始功率谱的关系

$$P(k,t_f) \equiv \delta_k^2(t_f) = T^2(k)\delta_k^2(t_i)D^2(t_i,t_f) = T^2(k)P(k,t_i)D^2(t_i,t_f) \tag{11}$$

一个半径为 R 的球体积内的平均质量

$$\langle M\rangle = \langle\rho\rangle V = \frac{4\pi}{3}\langle\rho\rangle R^3 \tag{12}$$

质量涨落方差

$$\sigma_M^2 = \left\langle \frac{[M-\langle M\rangle]^2}{\langle M\rangle^2} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 (R) \right\rangle \tag{13}$$

表示在全空间任意选取的、半径为 R 的球体积 $V = 4\pi R^3/3$ 内质量涨落的方均值。

由 Fourier 级数展开，

$$\begin{aligned}
\sigma_M^2 &= \left\langle \frac{\int \delta(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{V} \frac{\int \delta(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}\boldsymbol{x}'}{V} \right\rangle \\
&= \frac{1}{V^2}\left\langle \int_V \int_V \sum_k \delta_k \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \sum_{k'} \delta_{k'}^* \exp(-i\boldsymbol{k'}\cdot\boldsymbol{x'})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \right\rangle \\
&= \frac{1}{V^2}\left\langle \sum_{k,k'} \delta_k\delta_{k'}^* \int_V \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \int_V \exp(-i\boldsymbol{k'}\cdot\boldsymbol{x'})\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \right\rangle \\
&= \frac{1}{V^2}\int_V \mathrm{d}\boldsymbol{x}_0 \left[\sum_{k,k'} \delta_k\delta_{k'}^* \int_V \exp[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x})]\mathrm{d}\boldsymbol{x} \int_V \exp[-i\boldsymbol{k'}\cdot(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x'})]\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \right] \\
&= \frac{1}{V^2}\int_V \mathrm{d}\boldsymbol{x}_0 \exp[i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})\cdot\boldsymbol{x}_0] \left[\sum_{k,k'} \delta_k\delta_{k'}^* \int_V \exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}]\mathrm{d}\boldsymbol{x} \int_V \exp[-i\boldsymbol{k'}\cdot\boldsymbol{x'}]\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \right]
\end{aligned}$$

由于

$$\int_V \mathrm{d}\boldsymbol{x}_0 \exp[i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'})\cdot\boldsymbol{x}_0] = \delta_{k,k'} \tag{14}$$

上式化为

$$\sigma_M^2 = \sum_k \delta_k^2 \left[\frac{1}{V}\int_V \exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right]^2 \tag{15}$$

$$\frac{1}{V}\int_V \exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}]\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{3}{(kR)^3}[\sin(kR) - kR\cos(kR)] \equiv W(kR) \tag{16}$$

$$\sigma_M^2 = \sum_k \delta_k^2 W^2(kR) = \frac{V}{2\pi^2}\int_0^\infty \delta_k^2 W^2(kR)k^2\mathrm{d}k = \frac{V}{2\pi^2}\int_0^\infty P(k)W^2(kR)k^3\mathrm{d}\ln k \tag{17}$$

3 ANGULAR CORRELATIONS

?