# 曲线积分

June 25, 2017

## 1 第一型曲线积分

**定义**

设 $D \subset \mathbf{R}^3$ 是一个区域，函数 $f : D \to \mathbf{R}$。可求长曲线 $\Gamma \subset D$，其两个端点分别记为 $A$ 和 $B$。在 $\Gamma$ 上依次取一列点 $\{p_i : i = 0, 1, \cdots, n\}$，使得 $p_0 = A$，$p_n = B$。称 $\widehat{p_{i-1}p_i}$ 为 $\Gamma$ 的第 $i$ 段曲线，令 $\Delta s_i = s(\widehat{p_{i-1}p_i})$，即 $\Gamma$ 的第 $i$ 段曲线的弧长。在 $\widehat{p_{i-1}p_i}$ 上任取一点 $\xi_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，若极限

$$\lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta s_i \ , \tag{1}$$

为一个有限数，且其值不依赖于点 $\xi_i$ 在 $\widehat{p_{i-1}p_i}$ 上的选择，该极限值记为

$$\int_\Gamma f(p) \mathrm{d}s \text{ 或者 } \int_\Gamma f(x, y, z) \mathrm{d}s$$

称为函数 $f$ 在 $\Gamma$ 上的第一型曲线积分。

若 $f(p) = 1$ 对 $p \in \Gamma$ 成立，

$$\int_\Gamma \mathrm{d}s = s(\Gamma) \ ,$$

即曲线 $\Gamma$ 的弧长。

**定理**

设区域 $D \subset \mathbf{R}^3$，光滑曲线 $\Gamma \subset D$，函数 $f: D \to \mathbf{R}$ 连续。设 $\Gamma$ 有向量参数表示 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), t \in [\alpha, \beta]$，

$$\int_\Gamma f \mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f \circ \boldsymbol{r}(t) ||\boldsymbol{r}'(t)|| \mathrm{d}t \ . \tag{2}$$

**推论**

设平面曲线 $\Gamma$ 有显式表达 $y = \varphi(x), x \in [a, b]$，其中 $\varphi$ 在 $[a, b]$ 上连续，那么

$$\int_\Gamma f \mathrm{d}s = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} \mathrm{d}x \ . \tag{3}$$

1. 求出 $\Gamma$ 的一个向量参数方程 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$，
2. 计算弧元 $\mathrm{d}s = ||\boldsymbol{r}'(t)|| \mathrm{d}t$，
3. 计算定积分 $\int_\alpha^\beta f \circ \boldsymbol{r}(t) ||\boldsymbol{r}'(t)|| \mathrm{d}t$。

# 2 第二型曲线积分

设区域 $D \subset \mathbf{R}^3$，在 $D$ 上定义了一个向量值函数 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{p} \in D$。$\boldsymbol{F}$ 是在 $D$ 上定义的一个向量场。

定义

设 $D \subset \mathbf{R}^3$ 是一个区域，映射 $\boldsymbol{F}: D \to \mathbf{R}^3$。可求长的有向曲线 $\Gamma \subset D$，其起点记为 $A$，终点记为 $B$。在 $\Gamma$ 上依从 $A$ 到 $B$ 的方向顺次取一列点 $\{\boldsymbol{p}_i : i = 0, 1, \cdots, n\}$，使得 $\boldsymbol{p}_0 = A$，$\boldsymbol{p}_n = B$。置 $\Delta \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_{i-1}, (i = 1, 2, \cdots, n)$。若对于在 $\Gamma$ 的弧段 $\overset{\frown}{\boldsymbol{p}_{i-1}\boldsymbol{p}_i}$ 上任取的点 $\boldsymbol{\xi}_i$，极限

$$\lim_{\max||\Delta p_i|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_i) \cdot \Delta \boldsymbol{p}_i \ , \tag{4}$$

为一确定的有限数，记为

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} \ ,$$

称它是向量函数 $\boldsymbol{F}$ 沿有向曲线 $\Gamma$ 上的第二型曲线积分。

定理

设区域 $D \subset \mathbf{R}^3$，连续映射 $\boldsymbol{F}: D \to \mathbf{R}^3$。设 $\Gamma \subset D$ 是一条有向光滑曲线，它具有参数向量方程 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$，且参数 $t$ 的增加对应着 $\Gamma$ 的定向，则

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \int_{\alpha}^{\beta} \boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{r}'(t) \mathrm{d}t \ .$$

# 3 曲线积分与道路无关的条件

# 4 有界变差函数