# 排列组合

October 5, 2016

## 1 计数基本法则[1]

有两个试验，其中试验 1 有 $m$ 种可能发生的结果，对应于试验 1 的每一个结果，试验 2 有 $n$ 种可能发生的结果，则对这两个试验，一共有 $mn$ 种可能结果。

推广：

一共有 $r$ 个试验，第一个试验有 $n_1$ 种可能结果；对于第一个试验的每一种试验结果，第二个试验有 $n_2$ 种可能结果；对应于头两个试验的每一种试验结果，第三个试验有 $n_3$ 种可能结果；$\ldots$ 那么，这 $r$ 个试验一共有 $n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$ 种可能结果。

乘法法则：

假设必须依次完成 $k$ 个动作。若完成第一个动作有 $n_1$ 种方法，完成第二个动作有 $n_2$ 种方法，完成第三个动作有 $n_3$ 种方法，以此类推，完成第 $k$ 个动作有 $n_k$ 种方法，那么一起完成全部 $k$ 个动作有 $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \cdots \cdot n_k$ 种方法。

[1]参考自 [1]

## 2 排列

permutation

假设有 $n$ 个元素，一共有 $n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ 种不同的排列方式。

$n$ 个元素，若其中 $n_1$ 个元素彼此相同，另 $n_2$ 个彼此相同，$\cdots$，$n_r$ 个也彼此相同，那么一共有

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!} \tag{1}$$

种排列方式。

有序集：

来自于 $n$ 个元素的一个集合称为有序的，若这个集合的每一个元素与从 1 到 $n$ 的某个数 (元素的号码) 相对应，且不同的元素对应着不同的数。有序集被认为是不同的，若它们的元素，或者元素的次序有差别。

给定集合的排列：

从同一个集合可以得到仅区别于元素次序不同的有序集。这些有序集称为这个集合的排列。$n$ 个元素的集合，其排列个数等于

$$P_n = n! \tag{2}$$

从 $n$ 个元素取 $k$ 个元素的排列：

$n$ 个元素的集合中的 $k$ 个元素的有序子集称为从 $n$ 个元素取 $k$ 个元素的排列。从 $n$ 个元素中取 $k$ 个元素，排列的个数等于

$$A_n^k = k!\cdot C_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1). \tag{3}$$

# 3 组合

从 $n$ 个元素中取 $r$ 个，一共有多少种取法？

若考虑顺序，从 $n$ 个元素中选择 $r$ 个组成一组一共有 $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 种方式，而每个含 $r$ 个元素的小组都被重复计算了共 $r!$ 次，所以能组成不同的组的数目为

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \tag{4}$$

对 $r \leqslant n$，定义

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \tag{5}$$

表示从 $n$ 个元素中一次取 $r$ 个的可能组合数；从 $n$ 个元素中一次取 $r$ 个元素的可能取法的数目，如果不考虑抽取顺序的话。

$0!$ 定义为 1，因此，

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \tag{6}$$

当 $i < 0$ 或 $i > n$ 时，也认为

$$\binom{n}{i} = 0. \tag{7}$$

从 $n$ 个元素取 $k$ 个元素的组合：

假设集合 $A$ 有 $n$ 个元素，那么含有 $k$ 个元素的 $A$ 的子集的个数为

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{8}$$

集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的 $k$ 个元素的子集称为从 $n$ 个元素 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 中取 $k$ 个元素的组合。

## 4 二项式定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{9}$$

$$\binom{n}{k} \tag{10}$$

称为二项式系数。

恒等式：

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}, \quad 1 \leqslant r \leqslant n \tag{11}$$

## 5 多项式定理

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1,\cdots,n_r): \\ n_1+\cdots+n_r=n}} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} \tag{12}$$

求和号对一切满足 $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ 的所有非负整向量 $(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ 求和。

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} \tag{13}$$

称为多项式系数。

有 $n$ 个不同的元素，分成 $r$ 组，每组分别有 $n_1, n_2, \cdots, n_r$ 个元素，其中

$$\sum_{i=1}^{r} n_i = n, \tag{14}$$

一共有多少种分法？

$$
\begin{aligned}
& \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r} \\
= & \frac{n!}{(n-n_1)!n_1!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!}\cdots\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1})!}{0!n_r!} \\
= & \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}
\end{aligned} \tag{15}
$$

若 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$，定义

$$
\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!} \tag{16}
$$

表示 $n$ 个不同的元素分成大小分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_r$ 的 $r$ 组的方法数。

$n$ 个元素的集合划分为 $m$ 组的方法个数：

设 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 是非负整数，且 $k_1+k_2+\cdots+k_m=n$。使得 $n$ 各元素的集合 $A$ 成为分别含有 $k_1,\cdots,k_m$ 个元素的集合 $B_1,\cdots,B_m$ 的并的方法个数等于

$$
C_n(k_1,k_2,\cdots,k_m)=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}. \tag{17}
$$

重复排列：

若 $n$ 个元素共有 $k$ 种类型，第一种类型有 $k_1$ 个元素，第二种类型有 $k_2$ 个元素，$\cdots$，第 $m$ 种类型有 $k_m$ 个元素。则 $n$ 个元素的各种不同排列的个数等于

$$
C_n(k_1,k_2,\cdots,k_m)=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}. \tag{18}
$$

集合的直积：

设有 $k$ 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_k$。所有形如 $(a_1,a_2,\cdots,a_k)$, 其中 $a_1\in A_1,a_2\in A_2,\cdots,a_k\in A_k$ 的元素构成的集合叫做集合 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 的直积，并记成 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_k$。

集合直积的元素的个数：

设 $N(A)$ 表示集合 $A$ 的元素个数, 那么 $N(A_1\times A_2\times\cdots\times A_k)=N(A_1)\cdot N(A_2)\cdots N(A_k)$。

## 6 方程的整数解个数

## References

[1] Sheldon M. Ross. *A First course in probability*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 6. ed edition, 2002.