狭义相对论——运动学

January 21, 2017

1 Michelson-Morley 实验

$$c(\frac{d}{c-v}+\frac{d}{c+v}) = 2d\frac{c^2}{c^2-v^2} \approx 2d\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) \tag{1}$$

$$\frac{2d}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx 2d\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right) \tag{2}$$

两条路径的光程差为

$$\frac{dv^2}{c^2} \tag{3}$$

若把整个仪器在水平面内旋转 90°，差值将变号，则转动过程中干涉条纹的位移正比于

$$\frac{2dv^2}{c^2} \tag{4}$$

利用多次反射，$d \approx 11\text{m}$，或 2×10^7 个黄光波长。地球公转速率 $v \approx 3 \times 10^4\text{m/s}$，则

$$\frac{2dv^2}{c^2} = 2d \times 10^{-8} = 0.4 \text{ 个黄光波长} \tag{5}$$

故预期位移是干涉条纹间距的 0.4 倍。实际观测到的位移比此预期值的 1/20 还小。

2 stellar aberration

3 牛顿力学回顾

伽利略相对性原理：

力学定律的表述在所有惯性参考系都相同。

伽利略变换

$$\begin{cases} x' = & x - vt \\ y' = & y \\ z' = & z \\ t' = & t \end{cases} \tag{6}$$

4 相对性原理

参考系：一个坐标系和固定在这个坐标系里的钟；

惯性系：在其中，一个自由运动物体，即一个无外力作用于其上的运动物体，是以恒定速度行进的；

5 基本假设

爱因斯坦相对性原理：

自然定律的表述在所有惯性参考系都相同；

光速不变性原理：

真空中的光速与测量它的参考系无关，在两个作相对运动的惯性参考系中测到的光速相

同；

光速在所有惯性参考系中都相同；

c 是能量传递的最大速率。

6　时间的相对性

异地对钟

用不同的方法异地对钟，结果都一致；

同时的相对性

在一个参考系中校准同步的两个钟，在另一个相对它运动的参考系中看两个钟是否同步：

设有两个观测者，S 站在站台上，S' 在相对站台高速运动的列车上。S' 可用列车中部的灯来校准车头和车尾的钟。开灯后，灯光同时到达车头和车尾。

在站台上的 S 看来，灯光向前向后的速率都是 c，但列车以速度 v 向前运动，传到车尾的灯光比传到车头的灯光少走了一段路，因而灯光先到车尾。S' 校准了的两个钟，S 看并没有校准。换句话说，从 S' 看是同时的两件事，S 看一先一后，发生于不同时刻。

同时的概念是相对的，与观测者的运动有关；

爱因斯坦膨胀 运动参考系中时间的膨胀

爱因斯坦光子钟

设 S' 的钟放在列车地板上，它发出一束垂直向上的光，被车顶的镜子反射回来。测得车高是 h，用光速刻度钟的这段走时 T_0

$$2h = cT_0 \tag{7}$$

从静止观测者 S 看，由于列车向前运动，光沿一等腰三角形的两腰传播，

$$2l = cT \tag{8}$$

T：S 测得的光束传播时间；S 测得的时间 T 比 S' 的 T_0 要长；S 发现 S' 的钟变慢了。

$$l^2 = \left(\frac{1}{2}cT\right)^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}vT\right)^2 \tag{9}$$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{10}$$

T_0：与钟相对静止的观测者读的时间，钟的固有时、原时；

从静止观测者看，运动的时钟变慢了；运动参考系中的时间膨胀了；时钟变慢的因子是

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{11}$$

从 S' 看来，由于 S 相对于他运动，所以 S 的钟变慢了，因子也是

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{12}$$

7 长度的相对性

S 和 S' 测量列车的长度，

S' 测量到的长度 L_0，为列车的固有长度；是与它相对静止的观测者量到的；

静止观测者 S，在某一时刻记下车头、车尾经过站台的位置 A 和 B，量出这两点之间的距离 L，就是他量得的列车长度；

同时是相对的，从 S 来看，A 和 A'、B 和 B' 同时对齐，所以 AB 就是车长；但从 S' 来看，A、B 两处的钟并没有对齐，站台向后掠过，B 的钟比 A 的钟慢了些，A 和 A' 先对齐，B 和 B' 后对齐，列车要比 AB 长；

静止观测者看到的运动物体缩短了；

洛伦兹收缩

S' 从车尾向车头发射一束光，到达车头后再反射回来。测出光从发出到返回所用时间 T_0，

$$2L_0 = cT_0 \tag{13}$$

从 S 来看，光从车尾传到车头的时间 T'，与从车头返回车尾的时间 T''，满足，

$$\begin{cases} cT' = & L + vT' \\ cT'' = & L - vT'' \end{cases} \tag{14}$$

总的时间

$$T = T' + T'' = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2} \tag{15}$$

即 S 测量车尾的钟走过的时间；

$$\frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2} \tag{16}$$

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{17}$$

从静止观测者看，运动的尺子缩短了；缩短的因子是

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{18}$$

与它沿尺长方向的速率 v 有关；

为了测量车高 $A'D'$，地面观测者 S 用竖立的杆，在车头经过时，同时记下 A'、D' 在杆上的位置 A、D。量出这两点的距离，就是量得的车高。

放在 A、D 处的两个钟，若被 S 校准了，在 S' 看也是同步的。在与运动速度垂直的方向上，不同地点发生的两件事，若在 S 系是同时的，在 S' 系也是同时的。他们都看到 A' 与 A、D' 与 D 同时对齐；$A'D' = AD$；

垂直于运动方向的尺子长度不变，洛伦兹收缩只发生于沿着运动的方向；

事件：

8 四维时空间隔

两个事件 $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ 和 $P_1(x_2, y_2, z_2, t_2)$ 之间的四维时空间隔 s

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \tag{19}$$

通过洛伦兹变换可以验证，它与参考系无关的不变量；

时间和长度不变的观念，只是时空间隔不变性在一固定参考系中的表现；

由于间隔是不变量，与参考系无关，所以 s^2 是大于、等于或小于 0，也与参考系无关；

类空间隔

$$s^2 > 0 \tag{20}$$

总可以找到一个参考系，在其中两个事件同时发生于空间两点；在这个参考系中，间隔就等于两个事件间的空间距离；

类时间隔

$$s^2 < 0 \tag{21}$$

总可以找到一个参考系，在其中两个事件发生于空间同一个点的两个不同时刻；在这个参考系中，间隔就正比于两个事件的时间间隔；

类光间隔

$$s^2 = 0 \tag{22}$$

在任何参考系中，两个事件之间是通过光信号连系的；

固有时、原时

可以把类时间隔写成

$$s^2 = -c^2\tau^2 \tag{23}$$

τ：在两个事件发生于空间同一点的参考系中这两个事件的时间间隔，也就是放在那一点的钟走过的固有时或原时。

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2dt^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{24}$$

因果性条件

由类空间隔联系的两个事件，可由适当的参考系变换，把它们发生的时间先后次序颠倒过来；它们之间不可能存在任何因果联系；

由类时和类光间隔联系的两个事件，不可能用参考系变换，把它们发生的时间先后次序颠倒过来；它们之间允许存在因果联系；

两个事件之间存在因果联系的一个必要条件：它们之间的四维时空间隔是类时或类光的，即

$$s^2 = -c^2\tau^2 = (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \leq 0 \tag{25}$$

满足这个因果性条件的两个事件，它们之间的空间距离 Δr 和时间间隔 Δt 满足

$$\Delta r/\Delta t \leq c \tag{26}$$

亦即可以用不大于光速的信号把它们联系起来。

9 闵可夫斯基空间

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \tag{27}$$

引入

$$\omega = ict \tag{28}$$

代替时间坐标 t，四维时空间隔不变性

$$s^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + \omega'^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \omega^2 \tag{29}$$

一个事件 $P(x, y, z, t)$ 相应于闵可夫斯基空间中的一个点，称为时空点或世界点；

一个物理事件的间隔

$$s = (x^2 + y^2 + z^2 + \omega^2)^{1/2} \tag{30}$$

是它到原点的四维距离。

两个物理事件 $P_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ 和 $P_1(x_2, y_2, z_2, t_2)$ 之间的间隔 s

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (\omega_2 - \omega_1)^2 \tag{31}$$

是它们之间的世界距离。

世界线：一个运动物体的四维时空坐标变化在闵可夫斯基空间中划出的曲线

四维距离有实数、虚数和 0 三种情形；

根据与原点的思维距离，可以把闵可夫斯基空间分成三个区域：

类空区域

与原点的四维距离为实数；

类时区域

与原点的四维距离为虚数；

类光区域

与原点的四维距离为 0；

类光区域是一个以坐标原点为顶点，以时间轴 ω 为轴线的三维圆锥面；

锥面是由从坐标原点发出的光的世界线构成的，称为光锥；在光锥上的任何一个世界点与原点的间隔都是类光的，它们通过光信号联系；

在光锥里的区域是类时区域，任何一个世界点与原点的间隔都是类时的；它们与原点之间有因果联系；

在光锥外面的区域是类空区域，任何一个世界点与原点的间隔都是类空的；它们与原点之间没有因果联系。

世界几何学：闵可夫斯基空间的几何学

世界空间：

包含时间轴的四维空间；

洛伦兹变换应是闵可夫斯基四维空间内的正交变换；

10 洛伦兹变换、坐标变换

考虑两个惯性系，即静止坐标系 S 与运动坐标系 S'。设它们在初始时刻重合，S' 沿 x 轴匀速运动，速度为 v。若有一事件 P，它在 S 系的时空坐标为 (x, y, z, t)，在 S' 系的时空坐标为 (x', y', z', t')。

$$\begin{cases} x' = & \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = & y \\ z' = & z \\ t' = & \dfrac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \quad \text{或者} \quad \begin{cases} {x'}_1 = & \gamma(x_1 - \beta x_0) \\ {x'}_2 = & x_2 \\ {x'}_3 = & x_3 \\ {x'}_0 = & \gamma(x_0 - \beta x_1) \end{cases} \tag{32}$$

这里 $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{33}$$

速度 $\boldsymbol{v}$ 为任意的一般情况

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = & \boldsymbol{x} + \dfrac{(\gamma - 1)}{\beta^2}(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{\beta}x_0 \\ x'_0 = & \gamma(x_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{x}) \end{cases} \tag{34}$$

逆变换为

$$\begin{cases} x = & \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y = & y' \\ z = & z' \\ t = & \dfrac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \quad \text{或者} \quad \begin{cases} x_1 = & \gamma(x'_1 + \beta x'_0) \\ x_2 = & x'_2 \\ x_3 = & x'_3 \\ x_0 = & \gamma(x'_0 + \beta x'_1) \end{cases} \tag{35}$$

写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

以及

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

定义

$$\begin{aligned} X &= x_\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, it) \\ \mu &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \tag{36}$$

x_μ 构成闵可夫斯基空间的四矢量，即

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu \tag{37}$$

$$(a_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$(a_{\mu\nu})$ 是一个幺正矩阵，满足幺正性条件

$$\begin{cases} a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} = & \delta_{\nu\lambda} \\ a_{\mu\lambda} a_{\nu\lambda} = & \delta_{\nu\lambda} \end{cases} \tag{38}$$

若任何一组量 A_1, A_2, A_3, A_4，在洛伦兹变换下的性质和 x_μ 相同，则这四个量就构成一个四矢量 $A_\mu = (\boldsymbol{A}, A_4) = (\boldsymbol{A}, iA_0)$，其中 $\boldsymbol{A}$ 是空间分量，第四分量 A_4 是纯虚的，A_0 是实的。

可以证明，两个四矢量 A_μ 和 B_μ 的标量积

$$A_\mu B_\mu = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4 = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} - A_0B_0 \tag{39}$$

在洛伦兹变换下是不变的，称为洛伦兹不变量或洛伦兹标量

11 速度变换

对洛伦兹变换作微分

$$\begin{cases} \mathrm{d}x' = \dfrac{\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}t' = \dfrac{\mathrm{d}t - v\mathrm{d}x/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases} \tag{40}$$

$$\begin{cases} {u'}_x = \dfrac{u_x - v}{1-u_xv/c^2} \\ {u'}_y = \dfrac{u_y}{\gamma(1-u_xv/c^2)} \\ {u'}_z = \dfrac{u_z}{\gamma(1-u_xv/c^2)} \end{cases} \quad \text{逆变换为，} \quad \begin{cases} u_x = \dfrac{{u'}_x + v}{1+{u'}_xv/c^2} \\ u_y = \dfrac{{u'}_y}{\gamma(1+{u'}_xv/c^2)} \\ u_z = \dfrac{{u'}_z}{\gamma(1+{u'}_xv/c^2)} \end{cases} \tag{41}$$

速度 $\boldsymbol{v}$ 为任意的一般情况

$$\begin{cases} u_{||} = \dfrac{u'_{||} + v}{1+\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v}/c^2} \\ \boldsymbol{u}_\perp = \dfrac{\boldsymbol{u}'_\perp}{\gamma(1+\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v}/c^2)} \end{cases} \tag{42}$$

12　加速度变换

在相对论中，加速度不是不变量。

13　多普勒效应

由于波源或者观察者（或两者）相对介质运动而造成的观察者接收频率发生改变的现象。

13.1　非相对论情况

设波源 S 或者观察者 R 的运动都在波源和观察者的连线上；

v_R：观察者相对介质的速度；以趋近波源为正；

v_S：波源相对介质的速度；以趋近观察者为正；

u：介质中的波速；

ν：波源发射频率；

13.1.1　波源静止，观察者运动

$v_S = 0$，$v_R \neq 0$

观察者的接收频率：单位时间内通过观察者的完整的波长数；

波在 $1s$ 内相对介质行进了距离 u，当观察者不动时，波在 $1s$ 内相对观察者也行进了距离 u，观察者接收到的频率为 $\nu = u/\lambda$。由于观察者运动，$1s$ 内波相对观察者行进 $u + v_R$，故观察者接收到的频率为

$$\nu' = \frac{u + v_R}{\lambda} = \left(1 + \frac{v_R}{u}\right)\frac{u}{\lambda} = \left(1 + \frac{v_R}{u}\right)\nu \tag{43}$$

$v_R > 0$，$\nu' > \nu$；

$v_R < 0,\ \ \nu' < \nu$；

13.1.2 波源运动，观察者静止

$v_S \neq 0,\ \ v_R = 0$

波在 $1s$ 内相对观察者行进的距离仍为 u，但由于波源的运动，使波长缩短。当波源静止时，相邻两个相位相等的等相面之间的距离为 λ。当波源运动时，当第一个等相面自波源发出后，该面即以速度 u 向前行进，在第二个同相位的等相面发出时，波源已向前移动了 uT 的距离，而这时第一个等相面已向前行进 $uT = \lambda$ 的距离，结果两同相位等相面之间的距离变为 $\lambda - v_S T$，即为现在的波长 λ'

$$\lambda' = \lambda - v_S T \tag{44}$$

观察者接收到的频率为

$$\nu' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{\lambda - v_S T} = \frac{u}{\lambda(1 - v_S/u)} = \frac{1}{1 - v_S/u}\nu \tag{45}$$

$v_S > 0,\ \ \nu' > \nu$；

$v_S < 0,\ \ \nu' < \nu$；

13.1.3 波源、观察者均运动

$v_S \neq 0,\ \ v_R \neq 0$

$$\nu' = \frac{u + v_R}{\lambda(1 - v_S/u)} = \frac{u(1 + v_R/u)}{\lambda(1 - v_S/u)} = \frac{1 + v_R/u}{1 - v_S/u}\nu \tag{46}$$

13.2 相对论情况

考虑一个运动辐射源，相对于观测者的速度为 v，辐射频率为 ν，波长为 λ。设观测方向与其运动方向成 θ 角。

纵向多普勒效应

若地面观测者 O 在光源正前方，$\theta = 0$。光源以速度 v 朝 O 飞来，O 观测到的波长为

$$\lambda' = (c - v)T' = \frac{(c - v)T}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{47}$$

T'：地面观测者测到的周期；T：光源的固有周期；

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{48}$$

地面观测者测到的频率为

$$\nu' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}{(c - v)T} = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}\nu \tag{49}$$

若地面观测者 O 在光源正后方，$\theta = \pi$，v 应换成 $-v$，

$$\nu' = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}\nu \tag{50}$$

在运动光源正前方的观测者测得的频率增加，$\nu' > \nu$；

在运动光源正后方的观测者测得的频率减少，$\nu' < \nu$；

起作用的只是光源与观测者的相对速度，而不必区分是光源还是观测者在运动；由于光的传播不依赖与任何媒质，在两个相对运动的参考系中光速相同。

横向多普勒效应

静止观测者在与光源运动方向垂直的方向上；

$\theta = \pi/2$；

$$\nu' = \nu\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{51}$$

在运动光源横向观测到的频率比其固有频率小，$\nu' < \nu$；

地面观测者在与光源速度成 θ 角的方向上观测到频率为

$$\nu' = \nu\frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v\cos\theta/c} \tag{52}$$

光波的相位不变性

14 四维矢量

The four-vector spacetime coordinate is $x^\mu = (ct, \boldsymbol{x}) = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. A four vector is defined as a set of four quantities that transform according to

$$\begin{aligned} x'^0 &= \Gamma(x^0 - \beta x^1) \ , \\ x'^1 &= \Gamma(x^1 - \beta x^0) \ , \\ x'^2 &= x^2 \ , \\ x'^3 &= x^3 \ . \end{aligned}$$

The four-vector momentum

$$p^\mu = -mc\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} = mc\gamma(1, \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{par}}) = mc(\gamma, \boldsymbol{p}_{\mathrm{par}}) \tag{53}$$

where $\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{par}} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t$ and $\boldsymbol{p}_{\mathrm{par}} = \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{par}}\gamma$. $\mathrm{d}s = -c\mathrm{d}t' = -c\mathrm{d}t/\gamma$. The quantity m is the invariant particle rest mass.

$$\begin{aligned} \gamma' &= \Gamma(\gamma - \beta p_x) = \Gamma\gamma(1 - \beta\beta_{\mathrm{par,x}}) \ , \\ p'_x &= \Gamma(p_x - \beta\gamma) \text{ or } \gamma'\beta'_{\mathrm{par,x}} = \gamma\Gamma(\beta_{\mathrm{par,x}} - \beta) \ , \\ p'_y &= p_y \ , \\ p'_z &= p_z \ . \end{aligned}$$

for the particle Lorentz factor and dimensionless momentum, with the reverse transformation obtained by letting $\beta \to -\beta$ and switching primed and unprimed quantities.

$$-(mc)^2 = -\left(\frac{E}{c}\right)^2 + (mcp_{\mathrm{par}})^2 = -(mc)^2(\gamma^2 - \beta_{\mathrm{par}}^2\gamma^2)$$

The x-component of dimensionless momentum can be written as $p_x = \gamma\beta_{\rm par,x} = \gamma\beta_{\rm par}\mu$, where $\theta = \arccos\mu$ is the angle between the direction of particle momentum and the x-axis,

$$\gamma' = \Gamma\gamma(1 - \beta\beta_{\rm par}\mu) \ ,$$

$$\beta'_{\rm par}\gamma'\mu' = \Gamma\gamma(\beta_{\rm par}\mu - \beta)$$

$$\beta'_{\rm par}\mu' = \frac{\beta_{\rm par}\mu - \beta}{1 - \beta\beta_{\rm par}\mu}$$

For massless photons or highly relativistic particles with $\beta_{\rm par} \to 1$ and $\gamma \gg 1$, let $\gamma \to \epsilon$.

$$\epsilon' = \Gamma\epsilon(1 - \beta\mu) \ , \tag{54}$$

$$\mu' = \frac{\mu - \beta}{1 - \beta\mu} \ , \tag{55}$$

$$\phi' = \phi \ , \tag{56}$$

writing the energy in terms of cosine angle μ and azimuth angle ϕ. The reverse transformation equations for photons and relativistic particles are

$$\epsilon = \Gamma\epsilon'(1 + \beta\mu') \ , \tag{57}$$

$$\mu = \frac{\mu' + \beta}{1 + \beta\mu'} \ , \tag{58}$$

$$\phi = \phi' \ , \tag{59}$$

It can be derived for photons by considering the photon four-vector momentum $k^\mu = (\hbar/m_{\rm e}c^2)(\omega, c\boldsymbol{k})$. In dimensionless form, the four-vector momentum of a photon is $p^\mu = \epsilon(1, \hat{k}/k)$.

If a photon in the bulk comoving frame is emitted at right angles to the direction of motion, then $\theta' = \pi/2$ and $\mu' = 0$. The cosine angle of the photon in frame K is $\mu = \beta$.

For highly relativistic bulk speeds, $\Gamma \gg 1$ and $\beta = \mu \approx 1 - (1/2\Gamma^2) \approx 1 - (\theta^2/2)$, so that $\theta \approx 1/\Gamma$. All photons emitted in the forward direction in K are therefore beamed into a narrow range of angles $\theta \lesssim 1/\Gamma$ in K. This illustrates the phenomenon of relativistic beaming.

14.1 Relativistic Doppler Factor

The photon energy in frame K is related to the photon energy in frame K' according to the relation

$$\frac{\epsilon}{\epsilon'} = \delta_{\rm D} \equiv [\Gamma(1-\beta\mu)]^{-1} \tag{60}$$

where $\delta_{\rm D}$ is the Doppler factor. In the limit of large bulk Lorentz factors and small observing angles along the line of sight,

$$\delta_{\rm D} \longrightarrow \frac{2\Gamma}{1+\Gamma^2\theta^2} \ . \tag{61}$$

It is useful to derive the Doppler factor by considering an observer receiving photons emitted at an angle θ with respect to the direction of motion of frame K' in the stationary frame K. During time $\Delta t_\star$, as measured in stationary frame K, the bulk system moves a distance

$$\Delta x = \beta c \Delta t_\star = \beta \Gamma c \Delta t'$$

where the last expression relates the change in distance to the comoving time element using the time dilation formula. A light pulse emitted at stationary frame time $t_\star$ and location x is received at observer time

$$t = t_\star + \frac{d}{c} - \frac{x\cos\theta}{c} \ , \tag{62}$$

where d is the distance of the observer from the origin of stationary frame K. At a later time $t_\star + \Delta t_\star$, a second pulse of light is emitted, which is received by the observer at time

$$t + \Delta t = t_\star + \Delta t_\star + \frac{d}{c} - \frac{(x + \Delta x)\cos\theta}{c} \tag{63}$$

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\beta c}(1 - \beta\cos\theta) = \Gamma \mathrm{d}t'(1 - \beta\mu) = \frac{\mathrm{d}t'}{\delta_\mathrm{D}} \ . \tag{64}$$

$\epsilon = h\nu/m_\mathrm{e}c^2$ and $\nu \propto 1/\Delta t$,

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t_\star} = \frac{\epsilon}{\epsilon'} \ , \tag{65}$$

and $\epsilon' = \epsilon/\delta_\mathrm{D}$.

15 习题

1. 在实验室中有一弯曲水管，管中水流速度为 v，管壁上 G_1 和 G_2 两处是两块玻璃，以便从两个单色光源 S_1 和 S_2 来的光可以通过它们进入水中。已知水的折射率为 n，静止水中的光速为 c/n。1.) 在实验室中观测，光在 A 和 B 两段流水中的速度各是多少？2.) 在 $v \ll c$ 时，求上述速度的近似值。

解：在实验室中观测，光在 A 段水中的速度

$$V_A = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{c}{n} \times \frac{v}{c^2}} = \frac{c(c + vn)}{nc + v}$$

光在 B 段水中的速度

$$V_A = \frac{\frac{c}{n} - v}{1 + \frac{c}{n} \times \frac{-v}{c^2}} = \frac{c(c - vn)}{nc - v}$$

当 $v \ll c$ 时，

$$\frac{1}{1 + \frac{v}{cn}} \simeq 1 - \frac{v}{cn}, \quad \frac{1}{1 - \frac{v}{cn}} \simeq 1 + \frac{v}{cn}$$

因此

$$\begin{aligned} V_A &= \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v \ , \\ V_B &= \frac{c}{n} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v \end{aligned}$$

2. 设 $\Sigma'(x', y', z')$ 系以匀速 $\boldsymbol{v} = (v, 0, 0)$ 相对于惯性系 $\Sigma(x, y, z)$ 系运动，在 $\Sigma(x, y, z)$ 系中某点发出一束光，构成的立体角元为 $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$。试求在 Σ' 系中这束光构成的立体角元 $\mathrm{d}\Omega'$。

解：在 Σ 系，S 点发出的光束构成立体角元

$$\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$$

由于 $\boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta$ 垂直于 x 轴，即垂直于运动方向，不受运动影响，

$$\mathrm{d}\phi' = \mathrm{d}\phi$$

由四维波矢量 $(\boldsymbol{k}, \frac{i}{c}\omega)$ 的变换式第一分量

$$\begin{aligned} k_1' &= k' \cos\theta' = \frac{\omega'}{c} \cos\theta' = a_{11} k_1 + a_{14} k_4 \ , \\ &= \gamma k \cos\theta + i\gamma \frac{v}{c} k_4 \ , \\ &= \gamma \frac{\omega}{c} \cos\theta - \gamma \frac{v}{c^2} \omega \end{aligned}$$

$$\omega' \cos\theta' = \gamma\omega \left(\cos\theta - \frac{v}{c}\right)$$

第四分量

$$\begin{aligned} k_4' &= i\frac{\omega'}{c} = a_{41} k_1 + a_{44} k_4 = -i\gamma \frac{v}{c} k_1 + \gamma k_4 \ , \\ &= -i\gamma \frac{v}{c^2} \omega \cos\theta + i\gamma \frac{\omega}{c} \end{aligned}$$

$$\omega' = \gamma\omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos\theta\right)$$

比较可得

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}$$

对 θ' 求导得

$$\begin{aligned}
-\sin\theta'\mathrm{d}\theta' &= \frac{1}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^2}\left[\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)(-\sin\theta\mathrm{d}\theta) - \left(\cos\theta - \frac{v}{c}\right)\frac{v}{c}\sin\theta\mathrm{d}\theta\right] , \\
&= -\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^2}
\end{aligned}$$

所求立体角元为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Omega' &= \sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi' = \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^2}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi , \\
&= \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^2}\mathrm{d}\Omega
\end{aligned}$$

3. 频率为 Ω 的点光源向外发光，证明：$\omega^2\mathrm{d}\Omega$ 是洛伦兹不变量，$\mathrm{d}\Omega$ 是以光源为顶点的立体角元。

解：

4. 1728 年，英国天文学家布拉德雷发现，由于地球绕太阳公转，星光的视方向与它的真方向略有不同，称为光行差。设某恒星同地球的连线与地球速度 v 的方向垂直试求该星的视方向与真方向之间的夹角 α。

解：

5. 在地球上看，某颗恒星发出波长为 $\lambda = 640$ nm 的红光。一宇宙飞船正向该星飞去。飞船中的宇航员观测到该星发出的是波长为 $\lambda' = 480$ nm 的蓝光。设该星相对于地球的速度远小于 c(真空中光速)，试求这飞船相对于地球的速度 v 的值。

解：以地球为 Σ 系，飞船为 Σ' 系，沿飞船到该星方向取 x 轴，在 Σ 系中，飞船的速度为 v。根据四维波矢量 $(\boldsymbol{k}, \frac{i}{c}\omega)$ 的变换关系，

$$\omega' = \gamma\omega\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)$$

狭义相对论的多普勒效应公式，θ 是光波矢量 $\boldsymbol{k}$ 与 x 轴的夹角。$\theta = \pi$，

$$\omega' = \gamma\omega\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda}\gamma\left(1 + \frac{v}{c}\right) = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

解得

$$\begin{aligned} v &= c\frac{\lambda^2 - \lambda'^2}{\lambda^2 + \lambda'^2} = 3 \times 10^8 \times \frac{640^2 - 480^2}{640^2 + 480^2} \\ &= 0.84 \times 10^8 \ \ \mathrm{m/s} \end{aligned}$$

6. 一原子静止时发光的波长为 λ_0，当它以速度 $\boldsymbol{v}$ 相对于 Σ 系运动时，试求在 $\boldsymbol{v}$ 方向上，Σ 系中静止观察者所观测到的波长 λ。

解：以相对于原子静止的参考系为 Σ'，则由 Σ 到 Σ' 系，光的频率变换式为

$$\omega' = \omega\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)$$

θ 为光的波矢量 $\boldsymbol{k}$ 与速度 $\boldsymbol{v}$ 之间的夹角。

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)}$$

因 Σ' 系相对于光源静止，$\lambda' = \lambda_0$，在 Σ 系观测到的波长为

$$\lambda = \lambda_0\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)$$

在 v 的方向上，$\theta = 0$，所求的波长为

$$\lambda = \lambda_0 \gamma \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 - \dfrac{v}{c}}{1 + \dfrac{v}{c}}} < \lambda_0$$

在 v 的逆方向上，$\theta = \pi$,

$$\lambda = \lambda_0 \gamma \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \dfrac{v}{c}}{1 - \dfrac{v}{c}}} > \lambda_0$$