解析函数

December 3, 2016

1. 设 E 为平面点集。若对于 E 内每一个复数 z，按一定规律，有一个复数 ω 与之对应，则称 ω 为 z 的函数 (单值函数)，记作 $\omega = f(z)$，点集 E 称为这个函数的自变量 z 的定义域，ω 称为因变量。

若对于自变量 $z \in E$，对应着几个或无穷多个值 ω，则称在 E 上确定了一个多值函数 $\omega = f(z)$。

若 P 中每一个点 ω，通过关系式 $\omega = f(z)$ 只有一个点 $z \in E$ 与之对应，则在 P 上也确定了一个单值函数，记作 $z = g(\omega)$，称为函数 $\omega = f(z)$ 的反函数或称变换 $f(z)$ 的逆变换。

若 P 中存在点 ω，通过关系式 $\omega = f(z)$ 在 E 中至少有两个点与之相对应，则在 P 上就确定了一个多值函数，记作 $z = g(\omega)$，称为变换 $f(z)$ 的逆变换。

1　极限与连续

1.1　极限

设 E 是复平面上的点集，z_0 是 E 的一个凝聚点，而函数 $\omega = f(z)$ 定义在 E 上。若存在复数 l，使得对于任意给定的实数 $s > 0$，都存在实数 $\delta > 0$，使当 $z \in E$ 及 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时，都满足

$$|f(z) - l| < s \ , \tag{1}$$

则称函数 $f(z)$ 当 z 在 E 中趋向于 z_0 时有极限l，记作

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ (z \in E)}} f(z) = l \ . \tag{2}$$

若 E 包含有 z_0 的邻域 $S(z_0)$ 或包含有 z_0 的邻域除去 z_0 的点集，则以上极限关系简写为

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \ . \tag{3}$$

几何意义：以复数 l 为中心，半径 $\epsilon > 0$ 作一个圆 $S_\epsilon(l)$，则可以找到 z_0 的一个充分小的邻域——它可以是半径为 δ、中心为 z_0 的圆 $S_\delta(z_0)$，当 $z \in E$，$z \neq z_0$ 进入这个邻域中时，对应的值 $\omega = f(z)$ 就位于圆 $S_\epsilon(l)$ 中。

1.2　连续

设 E 是复平面上的点集，z_0 是 E 的一个凝聚点，$z_0 \in E$，而函数 $\omega = f(z)$ 定义在 E 上。若

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ (z \in E)}} f(z) = f(z_0) \ . \tag{4}$$

即任给 $\epsilon > 0$，存在数 $\delta > 0$，使得当 $z \in E$，且满足 $|z - z_0| < \delta$ 时，总有

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \tag{5}$$

则称函数 $\omega = f(z)$ 沿着集合 E 在点 $z = z_0$ 处连续。

若复平面的集合 E 上的每一点都是 E 的凝聚点，且函数 $\omega = f(z)$ 在 E 上每一点都连续，则称函数 $f(z)$ 在 E 上连续。

2 复变函数的导数

设函数 $\omega = f(z)$ 在 $z = z_0$ 的邻域 $S(z_0)$ 上有定义，比值

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{6}$$

若 z 不论以什么方式趋向于 z_0 时，上式都存在极限，则称这个极限值为函数 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 处的导数，记作 $f'(z_0)$，并说函数 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 处可导，即

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \quad \text{或} \quad [f(z_0)]' \tag{7}$$

2.1 柯西-黎曼方程

设函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 内有定义，则它在 D 内解析的充分必要条件是：

1. $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在 D 内处处可微；

2. $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在 D 内处处满足一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{9}$$