极限

February 20, 2017

1 数列

数列最一般的表示

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \tag{1}$$

a_n 是数列的第 n 项，称为数列的通项。数列常记为 $\{a_n\}$。

收敛数列：当 n 变得越来越大时，项 a_n 就越来越接近某一个常数 a。

设 $\{a_n\}$ 是一个数列，a 是一个实数。若对于任意给定的 $\epsilon > 0$，存在一个 $N \in \mathcal{N}^*$，使得凡是 $n > N$ 时，都有

$$|a_n - a| < \epsilon \tag{2}$$

就说数列 $\{a_n\}$ 当 n 趋向无穷大时，以 a 为极限，记成

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ , \tag{3}$$

简记为 $a_n \to a(n \to \infty)$。数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a。存在极限的数列称为收敛数列。不收敛的数列称为发散数列。

2 收敛数列的性质

关于 a 对称的开区间 $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ 为 a 的$\epsilon-$ 领域。

数列 $\{a_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时收敛于实数 a指：对任意的 $\epsilon > 0$，总存在 $N \in \mathcal{N}^*$，使得数列中除有限多项 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ 可能是例外，其他的项均落在 a 的 $\epsilon-$ 领域中。

Theorem 2.1

若数列 a_n 收敛，则它只有一个极限。即收敛数列的极限是唯一的。

设 $\{a_n\}$ 是一个数列。若存在一个实数 A，使得 $a_n \leqslant A$ 对一切 $n \in \mathcal{N}^*$ 成立，则称 $\{a_n\}$ 是有上界的，A 是这数列的一个上界。

有下界的数列

若数列 $\{a_n\}$ 既有上界，又有下界，则称它是一个有界数列。

Theorem 2.2

收敛数列必是有界的。

设 $\{a_n\}$ 是一个数列，$k_i \in \mathcal{N}^*(i = 1, 2, 3\cdots)$ 且满足 $k_1 < k_2 < k_3 \cdots$，那么数列 $\{a_{k_n}\}$ 叫做 $\{a_n\}$ 的一个子列。

Theorem 2.3

设收敛数列 $\{a_n\}$ 的极限是 a，那么 $\{a_n\}$ 的任何子列都收敛到 a。

Theorem 2.4: 极限的四则运算

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是收敛数列，则 $\{a_n \pm b_n\}$，$\{a_n b_n\}$ 也是收敛数列。若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$，则 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 也收敛，且

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

特别若 c 是常数，则 $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ (其中 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$)。

若收敛数列 $\{a_n\}$ 的极限等于 0，则这个数列称为无穷小数列，简称无穷小。

Theorem 2.5

1. $\{a_n\}$ 为无穷小的充分必要条件是 $\{|a_n|\}$ 是无穷小 ;

2. 两个无穷小之和 (或差) 仍是无穷小 ;

3. 设 $\{a_n\}$ 为无穷小，$\{c_n\}$ 为有界数列，那么 $\{c_n a_n\}$ 也是无穷小 ;

4. 设 $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$，$n \in \mathcal{N}^*$，若 $\{b_n\}$ 为无穷小，那么 $\{a_n\}$ 也是无穷小 ;

5. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的充分必要条件是 $|a_n - a|$ 是无穷小。

Theorem 2.6: 夹逼原理

设 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, $n \in \mathcal{N}^*$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$。

Theorem 2.7

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\alpha, \beta$ 满足 $\alpha < a < \beta$，当 n 充分大时有 $a_n > \alpha$; 同样，当 n 充分大时有 $a_n < \beta$;

2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，且 $a < b$，当 n 充分大时一定有 $a_n < b_n$;

3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，且当 n 充分大时 $a_n \leqslant b_n$，有 $a \leqslant b$。

3　数列极限概念的推广

若数列 $\{a_n\}$ 适合条件：对任何正数 A，都存在 $N \in \mathcal{N}^*$，使得凡是 $n > N$ 时，都有 $a_n > A$，称数列 $\{a_n\}$ 趋向于 $+\infty$。记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \tag{4}$$

若对于任何正数 A，都存在 $N \in \mathcal{N}^*$ 使得凡是 $n > N$ 时有 $a_n < -A$，称数列 $\{a_n\}$ 趋向于 $-\infty$，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \tag{5}$$

4 单调数列

5 自然对数底e

6 基本列和收敛定理

7 上确界和下确界

8 有限覆盖定理

9 上极限和下极限

10 Stolz 定理

11 数列极限的应用