微振动

October 15, 2017

1 一维自由振动

[1] 在稳定平衡位置附近的运动称为微振动。稳定平衡位置是指势能 $U(q)$ 取极小值的位置，偏离该位置会导致产生力 $-\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}q}$，它力图使系统返回平衡位置。用 q_0 表示广义坐标 q 在平衡位置的值。在偏离平衡位置很小的情况下，在 $U(q)-U(q_0)$ 按 $q-q_0$ 的幂次展开，

$$U(q)-U(q_0)\approx\frac{k}{2}(q-q_0)^2\ ,$$

k 是二阶导数 $U''(q)$ 在 $q=q_0$ 处的值，是正数。

2 强迫振动

[1] 可变外力场作用下系统的振动，称为强迫振动。

强迫力是频率为 γ 的简单时间周期函数，即

$$F(t)=f\cos(\gamma t+\beta)\ . \tag{1}$$

$$x=a\cos(\omega t+\alpha)+\frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}\cos(\gamma t+\beta)\ . \tag{2}$$

任意积分常数 a 和 α 由初始条件确定。在周期性强迫力作用下，系统的运动是两个振动的合成，两个振动的频率分别为系统的固有频率 ω 和强迫力的频率 γ。以上不适用于共振情况，即强迫力的频率 γ 与固有频率 ω 相等。

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}[\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)] \ . \tag{3}$$

当 $\gamma \to \omega$，可得

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega} t \sin(\omega t + \beta) \ . \tag{4}$$

在共振情况下，振动的振幅随时间线性增长。

3 多自由度系统振动

[1]

4 分子振动

[1]

5 阻尼振动

[1]

若速度足够小，可以将摩擦力按速度的幂次展开。作用在广义坐标为 x 的一维微振动系统的广义摩擦力 f_{fr} 写成

$$f_{\text{fr}} = -\alpha\dot{x} \ , \tag{5}$$

α 为正的系数，

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} \ , \tag{6}$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \ , \frac{\alpha}{m} = 2\lambda \ . \tag{7}$$

ω_0 是没有摩擦力时系统自由振动的频率。λ 称为阻尼系数，或阻尼衰减率。$\lambda T(T = 2\pi/\omega$ 是周期) 称为对数阻尼衰减率。

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ . \tag{8}$$

假设 $x = e^{rt}$ 可得关于 r 的特征方程

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \ .$$

通解为

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \ ,$$

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \ .$$

6 有摩擦的强迫振动

[1]

7 参变振动

[1]

8 非简谐振动

[1]

9 非线性振动中的共振

[1]

10 快速振动场中的运动

[1]

References

[1] 理论物理学教程/第一卷/力学:. 高等教育出版社, 2007.