z 变换

November 6, 2016

z 变换在离散系统中的地位与作用，类似于连续系统中的拉普拉斯变换。

z 变换的定义可以借助抽样信号的拉氏变换引出，也可直接对离散时间信号给予 z 变换的定义。

抽样信号的拉氏变换：

若连续因果信号 $x(t)$ 经均匀冲激抽样，则抽样信号 $x_S(t)$ 的表示式

$$\begin{aligned} x_S(t) &= x(t) \cdot \delta_T(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) \end{aligned}$$

T 为抽样间隔。对上式进行拉氏变换，

$$\begin{aligned} X_S(s) &= \int_0^{\infty} x_S(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)\right] \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\mathrm{e}^{-snT} \end{aligned} \tag{1}$$

引入复变量 z，令

$$z = \mathrm{e}^{sT}$$

或者

$$s = \frac{1}{T}\ln z$$

则式 (1) 变成复变量 z 的函数式 $X(z)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)z^{-n} \tag{2}$$

令 $T=1$，则

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n} \\ z &= \mathrm{e}^{s} \end{aligned}$$

1 z 变换定义

与拉氏变换定义类似，z 变换也有单边和双边之分。序列 $x(n)$ 的单边 z 变换定义为

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathscr{Z}[x(n)] \\ &= x(0)+\frac{x(1)}{z}+\frac{x(2)}{z^2}+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n} \end{aligned} \tag{3}$$

$\mathscr{Z}$ 表示取 z 变换，z 是复变量。对一切 n 值都有定义的双边序列 $x(n)$，定义双边 z 变换为

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathscr{Z}[x(n)] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \end{aligned} \tag{4}$$

若 $x(n)$ 是因果序列，则双边 z 变换和单边 z 变换是等同的。

2 典型序列的 z 变换

2.1 单位样值函数

$\delta(n)$ 定义为

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & (n=0)\\ \\ 0 & (n\neq 0)\end{cases} \tag{5}$$

其 z 变换为

$$\mathscr{Z}[\delta(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1$$

单位样值函数 $\delta(n)$ 的 z 变换等于 1。

2.2 单位阶跃序列

$u(n)$ 定义

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & (n\geqslant 0)\\ \\ 0 & (n<0)\end{cases} \tag{6}$$

其 z 变换为

$$\mathscr{Z}[u(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}$$

若 $|z|>1$，该几何级数收敛，等于

$$\mathscr{Z}[u(n)]=\frac{z}{z-1}=\frac{1}{1-z^{-1}} \tag{7}$$

2.3 斜变序列

$$x(n)=nu(x) \tag{8}$$

其 z 变换为

$$\mathscr{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} \tag{9}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad (|z| > 1)$$

的两边分别对 z^{-1} 求导,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n (z^{-1})^{n-1} = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}.$$

两边各乘 z^{-1}，得到

$$\mathscr{Z}[nx(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (|z| > 1) \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{Z}[n^2 x(n)] &= \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \\ \mathscr{Z}[n^3 x(n)] &= \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4} \end{aligned}$$

2.4 指数序列

单边指数序列

$$x(n) = a^n u(n) \tag{11}$$

其 z 变换为

$$\begin{aligned} \mathscr{Z}[a^n u(n)] &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a z^{-1})^n \end{aligned}$$

若满足 $|z| > |a|$，则可收敛为

$$\mathscr{Z}[a^n u(n)] = \frac{1}{1-(az^{-1})} = \frac{z}{z-a} \quad (|z| > |a|) \tag{12}$$

若令 $a=\mathrm{e}^b$，当 $|z|>|\mathrm{e}^b|$，则

$$\mathscr{Z}[\mathrm{e}^{bn}u(n)]=\frac{z}{z-\mathrm{e}^b}$$

2.5　正弦与余弦序列

因

$$\mathscr{Z}[\mathrm{e}^{bn}u(n)]=\frac{z}{z-\mathrm{e}^b}\quad(|z|>|\mathrm{e}^b|)$$

令 $b=i\omega_0$，则当 $|z|>|\mathrm{e}^{i\omega}|=1$ 时，得到

$$\mathscr{Z}[\mathrm{e}^{i\omega_0 n}u(n)]=\frac{z}{z-\mathrm{e}^{i\omega_0}}$$

令 $b=-i\omega_0$，则得到

$$\mathscr{Z}[\mathrm{e}^{-i\omega_0 n}u(n)]=\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-i\omega_0}}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}[\cos(\omega_0 n)u(n)] &= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-\mathrm{e}^{i\omega_0}}+\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-i\omega_0}}\right)\\ &= \frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}[\sin(\omega_0 n)u(n)] &= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-\mathrm{e}^{i\omega_0}}-\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-i\omega_0}}\right)\\ &= \frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}\end{aligned}$$

3　逆 z 变换

若序列 $x(n)$ 的 z 变换为

$$X(z)=\mathscr{Z}[x(n)]$$

则 $X(z)$ 的逆变换记作 $\mathscr{Z}^{-1}[X(z)]$，并由围道积分给出

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \mathscr{Z}^{-1}[X(z)] \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_C X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

C 是包围 $X(z)z^{n-1}$ 所有极点之逆时针闭合积分路线，通常选择 z 平面收敛域内以原点为中心的圆。

3.1 计算逆 z 变换的方法

3.1.1 围道积分法

3.1.2 幂级数展开法（长除法）

3.1.3 部分分式展开法

一般情况下，$X(z)$ 表达式为

$$
X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z + \cdots + b_{r-1}z^{r-1} + b_r z^r}{a_0 + a_1 z + \cdots + a_{k-1}z^{k-1} + b_k z^k} \tag{13}
$$