Lagrange 力学

September 28, 2017

系统的自由度

唯一确定系统位置所需独立变量的数目；对完整系统；

对非完整系统的自由度不能这样定义

质点在空间的位置由径矢 $\overrightarrow{r}$ 确定；

质点的速度，

$$\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

质点的加速度，

$$\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{2}$$

任意 s 个可以完全刻画系统（s 个自由度）位置的变量 $q_1, q_2, \cdots, q_s$，称为该系统的广义坐标，

其导数称为广义速度。

加速度与坐标、速度的关系式，运动方程

最小作用量原理（Hamilton 原理）

描述每一个力学系统都可以用一个相应的函数 $\mathscr{L}(q_1, q_2, \cdots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s; t)$ 或者 $\mathscr{L}(q, \dot{q}, t)$；

在时刻 $t = t_1$ 和 $t = t_2$ 系统的位置由两个坐标和确定。系统在这两个位置之间的运动使得积分

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(q, \dot{q}, t)\mathrm{d}t \tag{3}$$

取最小值。

$\mathscr{L}$：给定系统的拉格朗日 (Lagrange) 函数；

$\mathcal{S}$：作用量。

Lagrange 函数 $\mathscr{L}$ 可以附加任意一个关于时间和坐标的函数的全导数。

Eular-Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i}=0, \quad (i=1,2,3,\cdots) \tag{4}$$

约束

1 Generalized Coordinates

2 D'Alembert Principle

A virtual displacement $\delta \boldsymbol{r}$ is an infinitesimal displacement of the system that is compatible with the constraints. Contrary to the case of a real infinitesimal displacement $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, in a virtual displacement the forces and constraints acting on the system do not change. A virtual displacement will be characterized by the symbol δ, a real displacement by d. Mathematically we operate with the element δ just as with a differential.

called the principle of virtual work.

d'Alembert principle

3 Lagrange Equations

Eular-Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i}=0, \quad (i=1,2,3,\cdots) \tag{5}$$

3.1 Lagrange Equation for Nonholonomic Constraints

For systems with holonomic constraints, the dependent coordinates can be eliminated by introducing generalized coordinates.

4 Special Problems

4.1 Velocity-DependentPotentials

4.2 Nonconservative Forces and Dissipation Function (Friction Function)

4.3 Nonholonomic Systems and Lagrange Multipliers