随机变量的数字特征

July 16, 2016

1 数学期望

又称期望，均值

设离散型随机变量 X 的分布律

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \cdots \tag{1}$$

若级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \tag{2}$$

绝对收敛，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 的和为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$，

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k. \tag{3}$$

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，若积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x \tag{4}$$

绝对收敛，则称积分 $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x$ 的值为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$，

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x. \tag{5}$$

设 Y 是随机变量 X 的函数:

$$Y = g(X), \tag{6}$$

(g 是连续函数)。

i) X 是离散型随机变量，它的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \cdots \tag{7}$$

若

$$\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k \tag{8}$$

绝对收敛，则有

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k \tag{9}$$

ii) X 是连续型随机变量，它的概率密度为 $f(x)$。若

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) \mathrm{d}x \tag{10}$$

绝对收敛，则有

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) \mathrm{d}x \tag{11}$$

数学性质

设随机变量的数学期望存在，

1) 设 C 是常数，则有

$$E(C) = C \tag{12}$$

2) 设 X 是一随机变量，C 是常数，则有

$$E(CX) = CE(X) \tag{13}$$

3) 设 X，Y 是两个随机变量，则有

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \tag{14}$$

4) 设 X，Y 是相互独立的随机变量，则有

$$E(XY) = E(X)E(Y) \tag{15}$$

2 方差

设 X 是一个随机变量，若 $E\{[X - E(X)]^2\}$ 存在，则称

$$E\{[X - E(X)]^2\}$$

为 X 的方差，记为 $D(X)$，或 $\mathrm{Var}(X)$

$$D(X) = \mathrm{Var}(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{16}$$

标准差、均方差

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \tag{17}$$

数学性质

1) 设 C 是常数，则有

$$D(C) = 0, \tag{18}$$

2) 设 X 是随机变量，C 是常数，则有

$$D(CX) = C^2 D(X), \tag{19}$$

3) 设 X，Y 是两个随机变量，则有

$$\begin{aligned} D(X+Y) &= D(X) + D(Y) + 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} \\ &= D(X) + D(Y) + 2\{E(XY) - E(X)E(Y)\}, \\ &= D(X) + D(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) \end{aligned} \tag{20}$$

若 X，Y 相互独立，则有

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y), \tag{21}$$

4) $D(X)=0$ 的充要条件是 X 以概率 1 取常数 C，即

$$P\{X=C\}=1 \tag{22}$$

若 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i=1,2,\cdots,n$，且它们相互独立，则它们的线性组合：

$$C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n, \tag{23}$$

$(C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是不全为 0 的常数)，仍然服从正态分布，

$$C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} C_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} C_i^2\sigma_i^2\right) \tag{24}$$

切比雪夫不等式

设随机变量 X 具有数学期望

$$E(X) = \mu, \tag{25}$$

方差

$$D(X) = \sigma^2, \tag{26}$$

则对于任意正数 ε，不等式

$$P\{|X-\mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \tag{27}$$

成立。

3 协方差、相关系数

协方差

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\} \tag{28}$$

相关系数

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} \tag{29}$$

X 和 Y不相关：

$$\rho_{XY} = 0 \tag{30}$$

4 矩、协方差矩阵

设 X，Y 是两个随机变量，

若

$$E(X^k), k = 1, 2, \cdots \tag{31}$$

存在，称它为 X 的k 阶原点矩，简称k 阶矩；

若

$$E\{[X - E(X)]^k\}, k = 1, 2, 3, \cdots \tag{32}$$

存在，称它为 X 的k 阶中心矩；

若

$$E(X^kY^l), k, l = 1, 2, \cdots \tag{33}$$

存在，称它为 X 和 Y 的$k + l$ 阶混合矩；

若

$$E\{[X - E(X)]^k[Y - E(Y)]^l\}, k = 1, 2, 3, \cdots \tag{34}$$

存在，称它为 X 和 Y 的$k + l$ 阶混合中心矩；

设 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的二阶混合中心矩

$$c_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\}, i, j = 1, 2, \cdots, n \tag{35}$$

都存在，则称矩阵

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{36}$$

为 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的协方差矩阵；对称矩阵：$c_{ij} = c_{ji}$