平稳随机过程

June 20, 2018

1 平稳随机过程的概念

若对于任意的 $n(=1,2,\cdots)$, $t_1,t_2,\cdots,t_n \in T$ 和任意实数 h, 当 $t_1+h,t_2+h,\cdots,t_n+h \in T$ 时，n 维随机变量

$$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)\ ) \tag{1}$$

和

$$(X(t_1+h),X(t_2+h),\cdots,X(t_n+h)\ ) \tag{2}$$

具有相同的分布函数，则称随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 具有平稳性，称此过程为平稳随机过程、平稳过程；严平稳过程、狭义平稳过程；

过程的统计特征性不随时间的推移而变化；

若前后的环境和主要条件都不随时间的推移而变化，一般就认为是平稳的；

当定义在离散参数集上时，也称为平稳随机序列、平稳时间序列；

非平稳过程：一般，随机过程处于过渡阶段时总是非平稳的；

设平稳过程 $X(t)$ 的均值函数 $E[X(t)]$ 存在，则均值函数 μ_X、均方值函数 Ψ_X^2 和方差函数 σ_X^2 均为常数；

若自相关函数 $R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)\cdot X(t_2)]$ 存在，二维随机变量 $(X(t_1),X(t_2))$ 与 $(X(0),X(t_2-t_1))$ 同分布，

$$E[X(t_1)X(t_2)]=E[X(0)X(t_2-t_1)] \tag{3}$$

$R_X(t_1,t_2)=R_X(t_2-t_1)$，或者 $R_X(t,t+\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]=R_X(\tau)$

平稳过程的自相关函数仅是时间差 $\tau=t_2-t_1$ 的单变量函数；

协方差函数

$$C_X(\tau)=E\{[X(t)-\mu_X][X(t+\tau)-\mu_X]\}=R_X(\tau)-\mu_X^2 \tag{4}$$

令 $\tau=0$，则

$$\sigma_X^2=C_X(0)=R_X(0)-\mu_X^2 \tag{5}$$

给定二阶矩过程 $\{X(t),t\in T\}$，若对任意 $t,t+\tau\in T$，

$$\begin{aligned} E[X(t)]&=\mu_X(\text{常数}),\\ E[X(t)X(t+\tau)]&=R_X(\tau), \end{aligned} \tag{6}$$

称 $\{X(t),t\in T\}$ 为宽平稳过程、广义平稳过程；

正态过程的概率密度由均值函数和自相关函数完全确定，若均值函数和自相关函数不随时间变化，则概率密度不随时间变化，宽平稳正态过程也必定是严平稳的；

考虑两个平稳过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$，若它们的互相关函数也只是时间差的单变量函数，$R_{XY}(\tau)$，即

$$R_{XY}(t,t+\tau)=E[X(t)Y(t+\tau)]=R_{XY}(\tau) \tag{7}$$

称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是平稳相关的，或这两个过程是联合 (宽) 平稳的；

2　各态历经性

根据实验记录确定平稳过程的均值和自相关函数的理论依据、方法

给定二阶矩过程 $\{X(t), t \in T\}$，若它的每一个样本函数在 $[a,b] \subset T$ 上的积分都存在，就说随机过程 $X(t)$ 在 $[a,b]$ 上的积分存在，记为

$$Y = \int_a^b X(t)\mathrm{d}t \tag{8}$$

在某些情况下，对于随机过程的所有样本函数，在 $[a,b]$ 上的积分未必全都存在；引入均方意义下的积分，即考虑 $[a,b]$ 内的一组分点：

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b, \tag{9}$$

且记

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1},\ t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i,\ i = 1, 2, \cdots, n \tag{10}$$

若有满足

$$\lim_{\max \Delta t_i \to 0} E\{[Y - \sum_{i=1}^{n} X(\tau_i)\Delta t_i]^2\} = 0 \tag{11}$$

的随机变量 Y 存在，就称 Y 为 $X(t)$ 在 $[a,b]$ 上的均方积分；

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是一随机变量序列，若存在随机变量 X_0，使

$$\lim_{n \to \infty} E\{[X_n - X_0]^2\} = 0 \tag{12}$$

则称 X_0 是 X_n 的均方极限，记为 $\mathrm{l.i.m.} X_n = X_0$

二阶矩过程 $X(t)$ 在 $[a,b]$ 上均方积分存在的充分条件是自相关函数的二重积分，即

$$\int_a^b \int_a^b R_X(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{13}$$

存在，且此时还成立有

$$E[Y] = \int_a^b E[X(t)]\mathrm{d}t \tag{14}$$

过程 $X(t)$ 的积分均值等于过程的均值函数的积分；

时间均值函数

$$\langle X(t) \rangle = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)\mathrm{d}t \tag{15}$$

时间相关函数

$$\langle X(t)X(t+\tau) \rangle = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)X(t+\tau)\mathrm{d}t \tag{16}$$

设 $X(t)$ 是一平稳过程，1. 若

$$\langle X(t) \rangle = E[X(t)] = \mu_X \tag{17}$$

以概率 1 成立，则称过程 $X(t)$ 的均值具有各态历经性。2. 若对任意实数 τ，

$$\langle X(t)X(t+\tau) \rangle = E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau) \tag{18}$$

以概率 1 成立，则称过程 $X(t)$ 的自相关函数具有各态历经性。当 $\tau = 0$ 时，称均方值具有各态历经性。3. 若 $X(t)$ 的均值和自相关函数都具有各态历经性，则称 $X(t)$ 是 (宽)各态历经过程，或者是各态历经的；

“以概率 1 成立”，对 $X(t)$ 的所有样本函数；

遍历性，ergodicity

均值各态历经定理

平稳过程 $X(t)$ 的均值具有各态历经性的充要条件是

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) [R_X(\tau) - \mu_X^2]\mathrm{d}\tau = 0\ . \tag{19}$$

推论

在 $\lim\limits_{\tau\to+\infty} R_X(\tau)$ 存在条件下，若 $\lim\limits_{\tau\to+\infty} R_X(\tau)=\mu_X^2$，则 (21) 成立，均值具有各态历经性；若 $\lim\limits_{\tau\to+\infty} R_X(\tau)\neq\mu_X^2$，则 (21) 不成立，均值不具有各态历经性。

自相关函数各态历经定理

平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$ 具有各态历经性的充要条件是

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau_1}{T}\right)[B(\tau_1)-R_X^2(\tau)]\mathrm{d}\tau_1=0\ , \tag{20}$$

其中 $B(\tau_1)=E[X(t)X(t+\tau)X(t+\tau_1)X(t+\tau+\tau_1)]$.

定理三

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{T}X(t)\mathrm{d}t=E[X(t)]=\mu_X\ ,$$

以概率 1 成立的充要条件是

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{T}\left(1-\frac{\tau}{T}\right)[R_X(\tau)-\mu_X^2]\mathrm{d}\tau=0\ . \tag{21}$$

定理四

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{T}X(t)X(t+\tau)\mathrm{d}t=E[X(t)X(t+\tau)]=R_X(\tau)\ ,$$

以概率 1 成立的充要条件是

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^{T}\left(1-\frac{\tau_1}{T}\right)[B(\tau_1)-R_X^2(\tau)]\mathrm{d}\tau_1=0\ . \tag{22}$$

各态历经定理从理论上给出了如下保证：一个平稳过程 $X(t)$，若 $0<t<+\infty$，只要它满足条件 (21) 和 (22)，便可以根据“以概率 1 成立”的含义，从一次试验所得到的样

本数 $x(t)$ 来确定出该过程的均值和自相关函数，即

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t=\mu_X\ , \tag{23}$$

和

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t=R_X(\tau)\ . \tag{24}$$

若试验记录 $x(t)$ 只在时间区间 $[0,T]$ 上给出，则相应于 () 和 () 式有以下无偏估计式：

$$\mu_X\approx\hat{\mu}_X=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t\ , \tag{25}$$

$$R_X(\tau)\approx\hat{R}_X(\tau)=\frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t=\frac{1}{T-\tau}\int_\tau^T x(t)x(t-\tau)\mathrm{d}t\ ,\quad 0\leqslant\tau<T\ . \tag{26}$$

各态历经定理的条件是比较宽的，工程中碰到的大多数平稳过程都能够满足。不过，要验证它们是否成立却是十分困难的。实践中，通常先假定所研究的平稳过程具有各态历经性，并从这个假定出发，对由此而产生的各种资料进行分析处理，看所得的结论是否与实际相符。若不符，则要修改假设。

3　相关函数的性质

4　平稳随机过程的功率谱密度

利用傅里叶变换确立平稳过程的频率结构-功率谱密度；

设有时间函数 $x(t),-\infty<t<+\infty$，假如 $x(t)$ 满足狄利克雷 (Dirichlet) 条件，且绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|\mathrm{d}t<+\infty, \tag{27}$$

那么 $x(t)$ 的傅里叶变换存在，或者说具有频谱

$$F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \tag{28}$$

其逆变换

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_x(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{29}$$

$F_x(-\omega)$ 一般是复数量，其共轭函数

$$F_x^*(\omega) = F_x(-\omega)\ . \tag{30}$$

Parseval 等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F_x(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \tag{31}$$

左边：$x(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的总能量；

右边：$|F_x(\omega)|^2$，$x(t)$ 的能谱密度；

Parseval 等式可以理解为总能量的谱表示式。

假定 $x(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的平均功率，即

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} x^2(t)\mathrm{d}t \tag{32}$$

是存在的；

由给定的 $x(t)$ 构造一个截尾函数

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & |t| \leqslant T, \\ 0, & |t| > T. \end{cases} \tag{33}$$

$x_T(t)$ 的傅里叶变换

$$F_x(\omega, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-T}^{T} x(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t\ , \tag{34}$$

它的 Parseval 等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_T^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F_x(\omega,T)|^2\mathrm{d}\omega\ . \tag{35}$$

两边除以 $2T$，

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} x^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi T}\int_{-\infty}^{+\infty} |F_x(\omega,T)|^2\mathrm{d}\omega \tag{36}$$

令 $T\to+\infty$，$x(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的平均功率即可表示为

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}|F_x(\omega,T)|^2\mathrm{d}\omega \tag{37}$$

相应于能谱密度，右端被积式称作函数 $x(t)$ 的平均功率谱密度、功率谱密度，记为

$$S_x(\omega) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}|F_x(\omega,T)|^2 \tag{38}$$

(37) 式的右端就是平均功率的谱表示式。

4.1 平稳过程

$X(t), -\infty < t < +\infty$

$$F_X(\omega,T) = \int_{-T}^{T} X(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t\ , \tag{39}$$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} X^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi T}\int_{-\infty}^{+\infty} |F_X(\omega,T)|^2\mathrm{d}\omega\ . \tag{40}$$

两式的积分都是随机的。上式左端的均值的极限，即

$$\lim_{T\to+\infty} E\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} X^2(t)\mathrm{d}t\right\} \tag{41}$$

定义为平稳过程 $X(t)$ 的平均功率；

交换积分与均值的顺序，且平稳过程的均方值是常数；

$$\Psi_X^2 = \lim_{T\to+\infty} E\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X^2(t)\mathrm{d}t\right\} = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E[X^2(t)]\mathrm{d}t \tag{42}$$

平稳过程的平均功率 = 该过程的均方值或 $R_X(0)$。交换运算顺序后，

$$\Psi_X^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}E\{|F_x(\omega,T)|^2\}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega)\mathrm{d}\omega \ . \tag{43}$$

此为平稳过程 $X(t)$ 的平均功率的谱表示式，$X(t)$ 的平均功率关于频率的分布。平稳过程的功率谱密度

$$S_X(\omega) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}E\{|F_x(\omega,T)|^2\} \ , \tag{44}$$

也称自谱密度、谱密度[1]，他是从频率这个角度描述 $X(t)$ 的统计规律的最主要的数字特征。

若已知平稳过程 $X(t)$ 的谱密度，在任何特定频率范围 (ω_1,ω_2) 内的谱密度对平均功率的贡献为

$$_{(\omega_1\cdot\omega_2)}\Psi_X^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} S_X(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{45}$$

也称双边谱密度；

在 $[0,+\infty)$ 上的平稳过程 $X(t)$，定义单边谱密度

$$G_X(\omega) = \begin{cases} 2\lim\limits_{T\to+\infty}\dfrac{1}{T}E\{|F_x(\omega,T)|^2\}, & \omega\geq 0 \\ 0, & \omega<0 \end{cases} \tag{46}$$

单边谱密度和双边谱密度的关系

$$G_X(\omega) = \begin{cases} 2S_X(\omega), & \omega\geq 0 \\ 0, & \omega<0 \end{cases} \tag{47}$$

$S_X(\omega)$ 是 ω 的实的、非负的偶函数；

维纳-辛钦 (Wiener-Khinchin) 公式：$S_X(\omega)$ 和自相关函数 $R_X(\tau)$ 是一傅里叶变换对，即

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau \\ R_X(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega)e^{i\omega\tau}\mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{48}$$

[1]平稳过程的总能量为无限，能谱密度也不存在。

平稳过程在自相关函数绝对可积的条件下，谱密度 $S_X(\omega)$和自相关函数 $R_X(\tau)$是傅里叶变换对。

令 $\tau=0$，

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{49}$$

有理谱密度的一般形式

$$S_X(\omega)=S_0\frac{\omega^{2n}+a_{2n-2}\omega^{2n-2}+\cdots+a_0}{\omega^{2m}+b_{2m-2}\omega^{2m-2}+\cdots+b_0}\ , \tag{50}$$

式中 $S_0>0$，要求均方值有限，$m>n$，且分母应无实数根。

当自相关函数 $R_X(\tau)=1$ 时，谱密度 $S_X(\omega)=2\pi\delta(\omega)$。正弦函数的自相关函数 $R_X(\tau)=a\cos\omega_0\tau$ 的谱密度为

$$S_X(\omega)=a\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]\ . \tag{51}$$

4.2 白噪声

均值为零而谱密度为正常数，即

$$S_X(\omega)=S_0,\quad -\infty<\omega<+\infty(S_0>0)$$

的平稳过程 $X(t)$，称为白噪声过程，简称白噪声。白噪声的自相关函数为

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)\mathrm{e}^{i\omega\tau}\mathrm{d}\omega=\frac{S_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i\omega\tau}\mathrm{d}\omega=S_0\delta(\tau)\ .$$

白噪声也可以定义为均值为零、自相关函数为 δ 函数的随机过程，且这个过程在 $t_1\neq t_2$ 时，$X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 是不相关的。

带限白噪声，其谱密度仅在某些有限频率范围内取异于零的常数。低通白噪声，

$$S_X(\omega)=\begin{cases}S_0, & |\omega|\leqslant\omega_1,\\ 0, & |\omega|>\omega_1,\end{cases}$$

相应的自相关函数为

$$
\begin{aligned}
R_X(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)\mathrm{e}^{i\omega\tau}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_1}^{\omega_1} S_0\mathrm{e}^{i\omega\tau}\mathrm{d}\omega \\
&= \begin{cases} \dfrac{S_0\omega_1}{\pi}, & \tau = 0, \\ \dfrac{S_0}{2\pi}\dfrac{\mathrm{e}^{i\omega\tau}}{i\tau}\Bigg|_{-\omega_1}^{\omega_1} = \dfrac{S_0\omega_1}{\pi}\left[\dfrac{\sin(\omega_1\tau)}{\omega_1\tau}\right], & \tau \neq 0, \end{cases}
\end{aligned}
$$

当 $\tau = \dfrac{k\pi}{\omega_1}, k = \pm 1, \pm 2, \cdots, \cdots$ 时，$R_X(\tau) = 0$。低通白噪声 $X(t)$ 在 $t_2 - t_1 = \dfrac{k\pi}{\omega_1}$ 时，$X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 是不相关的。

4.3 互谱密度及其性质

设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个平稳相关的随机过程，定义

$$
S_{XY}(\omega) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}E\{F_X(-\omega,T)F_Y(\omega,T)\}\ , \tag{52}
$$

为平稳过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互谱密度。互谱密度不再是 ω 的实的、正的偶函数，

1. $S_{XY}(\omega) = S_{YX}^*(\omega)$，即 $S_{XY}(\omega)$ 和 $S_{YX}(\omega)$ 互为共轭函数。

2. 在互相关函数 $R_{XY}(\tau)$ 绝对可积的条件下，维纳-辛钦公式

$$
S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)\mathrm{e}^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau\ , \tag{53}
$$

$$
R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega)\mathrm{e}^{i\omega\tau}\mathrm{d}\omega\ . \tag{54}
$$

3. $\mathrm{Re}[S_{XY}(\omega)]$ 和 $\mathrm{Re}[S_{YX}(\omega)]$ 是 ω 的偶函数，$\mathrm{Im}[S_{XY}(\omega)]$ 和 $\mathrm{Im}[S_{YX}(\omega)]$ 是 ω 的奇函数。

4. 互谱密度和自谱密度之间有不等式

$$
|S_{XY}(\omega)|^2 \leqslant S_X(\omega)S_Y(\omega)\ .
$$