线性代数

June 17, 2017

1 矩阵及其运算

1.1 矩阵

由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 排成的 m 行 n 列的数表 称为 m 行

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn}
\end{matrix}
$$

n 列矩阵，简称 $m \times n$ 矩阵，记作

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix} \tag{1}
$$

$m \times n$ 个数称为矩阵 A 的元素，简称元，数 a_{ij} 位于矩阵 A 的第 i 行第 j 列，称为矩阵 A 的 (i, j) 元。以数 a_{ij} 为 (i, j) 元的矩阵简记为 (a_{ij}) 或 $(a_{ij})_{m\times n}$。$m \times n$ 矩阵 A 也

记为 $A_{m\times n}$。行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵。n 阶矩阵 A 也记作 A_n。

对角矩阵 (对角阵)，记作 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$。

元素都是 0 的矩阵称为零矩阵，记作 $\mathbf{0}$。

1.2 矩阵的运算

1.2.1 矩阵的加法

有两个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$，矩阵 A 与 B 的和记作 $A + B$，

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{11}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m1}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}++b_{mn} \end{pmatrix}$$

当两个矩阵是同型矩阵时，这两个矩阵才能进行加法运算。设 A, B, C 都是 $m \times n$ 矩阵

$$A + B = B + A \,;$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \,.$$

1.2.2 数与矩阵相乘

数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$，

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.2.3 矩阵与矩阵相乘

1.2.4 矩阵的转置

把矩阵 A 的行换成同序数的列得到的矩阵，叫做 A 的转置矩阵，记作 A^T。

设 A 为 n 阶方阵，若满足 $A^T = A$，即

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n) \ ,$$

A 称为对称矩阵，简称对称阵，其元素以对角线为对称轴对应相等。

1.2.5 方阵的行列式

由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式 (各元素的位置不变)，称为方阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$。

行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & a_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & a_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的伴随矩阵，简称伴随阵。

1.2.6 共轭矩阵

当 $A = (a_{ij})$ 为复矩阵时，$\bar{a}_{ij}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数，记为

$$\bar{A} = (\bar{a}_{ij}) \ ,$$

$\bar{A}$ 称为 A 的共轭矩阵。设 A, B 为复矩阵，λ 为复数，

$$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}\ ,$$

$$\overline{\lambda A} = \overline{\lambda}\ \overline{A}\ ,$$

$$\overline{AB} = \overline{A}\ \overline{B}$$

1.3　逆矩阵

定义

对于 n 阶矩阵 A，若有一个 n 阶矩阵 B，使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，简称逆阵。

定理

若矩阵 A 可逆，则 $|A| \neq 0$。

定理

若 $|A| \neq 0$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|A|}\boldsymbol{A}^*\ , \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵。