解析开拓

July 29, 2017

1 解析开拓的概念与方法

1.1 解析开拓的概念

定义

设函数 $f(z)$ 在集合 E 上有定义。若存在区域 $D \supset E$ 及区域 D 上的解析函数 $F(z)$，使得在集合 E 上有 $F(z) = f(z)$，则称函数 $F(z)$ 是 $f(z)$ 从 E 开拓到 D 的解析函数，简称 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的解析开拓。

Theorem

设平面上的区域 D_1 与 D_2 有一个公共部分 d，函数 $f_1(z)$ 在 D_1 解析；函数 $f_2(z)$ 在 D_2 解析，且在 $d = D_1 \cap D_2$ 上 $f_1 = f_2$，则函数

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z)\ , & z \in D_1 \setminus d\ , \\ f_2(z)\ , & z \in D_2 \setminus d\ , \\ f_1(z) = f_2(z)\ , & z \in d \end{cases} \tag{1}$$

是区域 $D = D_1 + D_2$ 上的单值解析函数。

Theorem

设区域 D_1 与 D_2 有公共边界 Γ_{12}，它是一条逐段光滑曲线。设函数 $f_1(z)$ 在 D_1 解析，在 $D_1+\Gamma_{12}$ 上连续；函数 $f_2(z)$ 在 D_2 内解析，在 $D_2+\Gamma_{12}$ 上连续，且满足 $f_1(z)=f_2(z), z\in\Gamma_{12}$，则函数

$$F(z)=\begin{cases} f_1(z)\ , & z\in D_1\ , \\ f_1(z)=f_2(z)\ , & z\in\Gamma_{12}\ , \\ f_2(z)\ , & z\in D_2 \end{cases} \tag{2}$$

是区域 $D=D_1+\Gamma_{12}+D_2$ 上的单值解析函数。

1.2 解析开拓的具体方法

黎曼-施瓦茨对称定理

设区域 D_1 在上半平面上，它有一段边界 Γ_1 在实轴上，函数 $f_1(z)$ 在 D_1 内解析，在 $D_1+\Gamma_1$ 上连续，且在 Γ_1 取实数值，则可以构成一个区域 D_2，它与 D_1 关于实轴对称，函数 $f_2(z)$:

$$f_2(z)=\overline{f_1(\bar{z})}\ ,\quad z\in D_2+\Gamma_1\ , \tag{3}$$

在 D_2 解析，在 $D_2+\Gamma_1$ 上连续，$f_2(z)=f_1(z), z\in\Gamma_1$，且函数

$$F(z)=\begin{cases} f_1(z)\ , & z\in D_1\ , \\ f_1(z)=f_2(z)\ , & z\in\Gamma_1\ , \\ f_2(z)\ , & z\in D_2 \end{cases} \tag{4}$$

就是区域 $D=D_1+\Gamma_1+D_2$ 上的单值解析函数。

幂级数开拓法：设函数 $f_1(z)$ 在区域 D_1 解析，$z_0 \in D$，z_0 到 D 的边界 ∂D 的距离为

$$\rho(z_0) = \min_{z\in\partial D}|z-z_0| \ ,$$

定义

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析。对于区域 D 的边界 ∂D 上的任意点 z_0。若存在一个在 $z=z_0$ 的领域 $|z-z_0|<\rho$ 上的解析函数 $\varphi_{z_0}(z)$，它在区域 $(|z-z_0|<\rho)\cap D$ 上取值等于 $f(z)$，则称 z_0 是函数 $f(z)$ 的正则点；若这样的解析函数 $\varphi_{z_0}(z)$ 保存在，则称 z_0 是函数 $f(z)$ 的奇点。

对于区域内点，若函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 解析，则称 z_0 是它的正则点。若 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则当 z_0 是可去奇点时，它就可以看做是正则点；若 z_0 是极点或本性奇点时，则 z_0 是奇点。

对于在圆内的解析函数，有幂级数开拓的定理

定义

设函数 $f(z)$ 在圆 $|z-z_0|<\rho$，$z_1\in|z-z_0|<\rho$，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_1)}{n!}(z-z_1)^n \ . \tag{5}$$

要使该幂级数的收敛半径 $R>\rho-|z_1-z_0|$ 的充要条件是点 $z_2=z_0+\rho e^{i\arg(z_1-z_0)}$ 是正则点。

推论

要使点 $z_2=z_0+\rho e^{i\arg(z_1-z_0)}$ 是奇点的充要条件是

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{|f^{(n)}(z_1)|}{n!}}} = \rho-|z_1-z_0| \ . \tag{6}$$

定理

设幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = f(z)\ ,\quad |z-z_0|<\rho \tag{7}$$

的收敛半径是 ρ，则函数 $f(z)$ 在收敛圆 $|z-z_0|=\rho$ 上必有奇点。