概率论概念

September 12, 2017

随机现象

1 随机试验

E 的样本空间：随机试验 E 的所有可能结果组成的集合，记为 S；

样本点：样本空间的元素，即 E 的每一个结果；

E 的随机事件：试验 E 的样本空间 S 的子集，简称事件；事件是指 S 中满足某些条件的子集；当 S 是由有限个元素或由可列无限个元素组成时，每个子集都是一个事件；若 S 是由不可列无限个元素组成时，某些子集必须排除在外；

在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生；

基本事件，由一个样本点组成的单点集；

样本空间 S 包好所有的样本点，它是 S 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称为必然事件；

空集 $\emptyset$ 不包含任何样本点，不可能事件；

1.1 事件间的关系

设试验 E 的样本空间为 S，而 A，B，$A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集，

1. 若 $A\subset B$，则称事件 B包含事件 A，事件 A 的发生必然导致事件 B 发生；若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A=B$，事件 A 和事件 B相等；

2. 和事件：事件 $A\bigcup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$；当且仅当 A，B 中至少有一个发生时，事件 $A\bigcup B$ 发生；

3. 积事件：事件 $A\bigcap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$；当且仅当 A，B 同时发生时，事件 $A\bigcap B$ 发生；也记作 AB；

4. 差事件：事件 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$；当且仅当 A 发生，B 不发生时，事件 $A-B$ 发生；

5. 互不相容的，互斥的：事件 $A\bigcap B=\emptyset$；事件 A 和事件 B 不能同时发生；

6. 互为逆事件：若事件 $A\bigcup B=S$ 且 $A\bigcap B=\emptyset$；事件 A 和事件 B 互为对立事件；对每次试验，事件 A 和事件 B 必有一个发生，且仅有一个发生；事件 A 的对立事件记为 $\bar{A}=S-A$；

1.2 事件的运算

设 A，B，C 为事件，

交换律：$A\bigcup B=B\bigcup A$；$A\bigcap B=B\bigcap A$；

结合律：$A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C$；$A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C$；

分配律：$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$；$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$；

德摩根律：$\overline{(A\bigcup B)}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$；$\overline{(A\bigcap B)}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$

2 概率

在相同条件下，进行了 n 次试验，其中事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数；比值 n_A/n 为事件 A 发生的频率，记成$f_n(A)$；

基本性质：

1. $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

2. $f_n(S) = 1$;

3. 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k) \tag{1}$$

设 E 是随机试验，S 是它的样本空间。对于 E 的每一事件 A 赋于一个实数，记为$P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

1. 非负性：对于每一个事件，有 $P(A) \geqslant 0$;

2. 规范性：对于必然事件，有 $P(S) = 1$;

3. 可列可加性：设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i \neq j, A_iA_j = \varnothing, i, j = 1, 2, \cdots$，则有

$$P(A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots \tag{2}$$

第五章将证明，当 $n \to \infty$，频率 $f_n(A)$ 在一定意义下接近于概率 $P(A)$。

2.1 概率的性质

1. $P(\varnothing) = 0$;

2. 有限可加性：若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \tag{3}$$

3. 设 A,B 是两个事件，若 $A\subset B$，则有

$$\begin{aligned} P(B-A) &= P(B)-P(A); \qquad (4)\\ P(B) &\geqslant P(A); \qquad (5)\end{aligned}$$

4. 对于任一事件 A,

$$P(A)\leqslant 1; \qquad (6)$$

5. 逆事件的概率：对于任一事件 A,

$$P(\bar{A})=1-P(A); \qquad (7)$$

6. 加法公式：对于任意两事件 A,B,

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B); \qquad (8)$$

$$\begin{aligned} P(A_1\bigcup A_2\bigcup A_3) &= P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)\\ &\quad -P(A_2A_3)-P(A_1A_3)+P(A_1A_2A_3) \qquad (9)\end{aligned}$$

推广到多个事件的情况，对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,

$$\begin{aligned} P(A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_n) &= \sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)\\ &\quad +\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots\\ &\quad +(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n) \qquad (10)\end{aligned}$$

3 等可能概型 (古典概型)

1. 试验的样本空间只包含有限个元素；

2. 试验中每个基本事件发生的可能性相同；

设试验的样本空间为 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$。由于试验中每个基本事件发生的可能性相同，

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\}); \tag{11}$$

又由于基本事件两两互不相容，

$$\begin{aligned} 1=P(S) &= P(\{e_1\}\bigcup\{e_2\}\bigcup\cdots\bigcup\{e_n\}) \\ &= P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+\cdots+P(\{e_n\}) \\ &= nP(\{e_i\}), \end{aligned}$$

$$P(\{e_i\})=\frac{1}{n},i=1,2,\cdots,n$$

若事件 A 包含 k 个基本事件，即 $A=\{e_{i_1}\}\bigcup\{e_{i_2}\}\bigcup\cdots\bigcup\{e_{i_k}\},i_1,i_2,\cdots,i_k$ 是 $1,2,\cdots,n$ 中某 k 个不同的数，则有

$$P(A)=\sum_{j=1}^{k}P(\{e_{i_j}\})=\frac{k}{n}=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{S\text{中基本事件的总数}} \tag{12}$$

放回抽样、不放回抽样

4 条件概率

事件 A 已经发生的条件下，事件 B 发生的概率 $P(B|A)$

设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{13}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率；

条件概率 $P(\cdot|A)$ 符合概率定义的三个条件：

1. 非负性：对于每一事件 B，$P(B|A) \geqslant 0$;

2. 规范性：对于必然事件 S，$P(S|A) = 1$;

3. 可列可加性：设 $B_1, B_2, \cdots$ 是两两互不相容事件，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i|A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A) \tag{14}$$

4.1 乘法定理

设 $P(A) > 0$，则

$$P(AB) = P(B|A)P(A) \tag{15}$$

$$P(ABC) = P(C|AB)P(B|A)P(A) \tag{16}$$

推广到多个事件，设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件，$n \geqslant 2$，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) \geqslant 0$，则

$$\begin{aligned} P(A_1A_2\cdots A_n) &= P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})\cdots \\ &\quad P(A_2|A_1)P(A_1) \end{aligned} \tag{17}$$

4.2 全概率公式

设 S 为试验 E 的样本空间，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 E 的一组事件，若

1. $B_iB_j = \varnothing, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n$;

2. $B_1 \bigcup B_2 \bigcup \cdots \bigcup B_n = S$;

则称 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间 S 的一个划分；

若 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间的一个划分，则对每次试验，事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 中必有一个且仅有一个发生；

全概率公式

设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，则

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n) \tag{18}$$

4.3 贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(A) > 0, P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，则

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)},\ i = 1, 2, \cdots, n \tag{19}$$

先验概率：由以往的数据分析得到的；

后验概率：在得到信息后再重新加以修正的概率；

5 独立性

设 A, B 是两事件，若满足等式

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{20}$$

称事件 A, B相互独立，简称 A, B独立。

两事件相互独立的含义是它们中一个已发生，不影响另一个发生的概率。

若 $P(A) > 0, P(B) > 0$，则 A, B 相互独立与 A, B 互不相容不能同时成立。

定理一：

设 A, B 是两事件，且 $P(A) > 0$。若 A, B 相互独立，则 $P(B|A) = P(B)$。反之亦然。

定理二：

若事件 A 与 B 相互独立，则下列各对事件也相互独立：A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$

推广到三个事件：

设 A,B,C 是三个事件，若满足等式

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \\ P(AC) &= P(A)P(C) \\ P(ABC) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned} \tag{21}$$

称事件 A,B,C 相互独立。

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 个事件，若对于其中任意 2 个，任意 3 个，$\cdots$，任意 n 个事件的积事件的概率，都等于各事件概率之积，称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立。

推论：

1. 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 相互独立，则其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个事件也是相互独立的。

2. 若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 相互独立，则将 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意多个事件换成它们的对立事件，所得的 n 个事件仍相互独立。