密度扰动场

August 9, 2016

宇宙学的密度扰动通常假设为 Gauss 随机场；非线性结构形成于该场中的局域极大处；

1 Gauss 随机场

宇宙密度涨落

$$\delta(\boldsymbol{x},t) \equiv \frac{\rho(\boldsymbol{x},t)-\langle\rho\rangle}{\langle\rho\rangle} \tag{1}$$

原初密度涨落 $\delta(\boldsymbol{x},t_i)$ 的空间分布定义了一个三维随机场，t_i 相应于暴涨结束的时刻；

根据宇宙学原理，这个随机场应当是均匀各项同性的；

由中心极限定理，大量独立的随机变量（事件）相加的结果趋于正态分布或 Gauss 分布；故密度扰动场应当是 Gauss 场，其平均值为 0。

一个 Gauss 随机场的统计性质可以用功率谱 $P(k)$来表征，或功率谱的 Fourier 变换，自相关函数 $\xi(x)$

一个 Gauss 随机场若进行空间 Fourier 分解，则它的各谐频分量 δ_k 的位相是相互独立的，即不同分量的位相在 0 到 2π 之间随机分布；

设 Gauss 随机场 $F(\boldsymbol{x})$，它是三维空间位置坐标 $\boldsymbol{x}$ 的函数，若该场在尺度为 L 的方盒

子内是周期函数，则利用 Fourier 分析，可以把它展开为一系列平面波的迭加

$$F(\boldsymbol{x}) = \sum F_k e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{2}$$

其中波数满足谐和边界条件

$$k_x = n\frac{2\pi}{L}, n = 1, 2, \cdots \tag{3}$$

当盒子的大小变为无穷大，即 $L \to \infty$，

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}) &= \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int F_k(\boldsymbol{k}) \exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \mathrm{d}^3 k, \\ F_k(\boldsymbol{k}) &= \frac{1}{L^3}\int F(\boldsymbol{x}) \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \mathrm{d}^3 x, \end{aligned} \tag{4}$$

一个 n 维随机场 $F(\boldsymbol{x})$ 是一组随机变量的集合，其中每个变量都是 n 维空间位置矢量的 $\boldsymbol{x}$ 的函数。设有 m 个随机变量 y_i，它们的联合 Gauss 几率分布是 (BBKS)

$$P(y_1, y_2, \cdots, y_m) \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_m = \frac{e^{-Q}}{[(2\pi)^m |M|]^{1/2}} \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_m \tag{5}$$

$$Q \equiv \frac{1}{2}\sum \Delta y_i (M^{-1})_{ij} \Delta y_j, \tag{6}$$

$$M_{ij} = \langle \Delta y_i \Delta y_j \rangle, \ \Delta y_i \equiv y_i - \langle y_i \rangle \tag{7}$$

其中 $i, j = 1, \cdots, m$，且 $|M|$：协方差矩阵 M_{ij} 的行列式，

根据 Gauss 场的统计性质，若 $F(\boldsymbol{x})$ 是一个 Gauss 场，则由该场及其导数、积分以及线性函数构成的联合分布也是 Gauss 的

2 傅里叶变换的性质

2.1 δ 函数的 Fourier 变换

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int \mathrm{d}^3 k e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{8}$$

2.2 Parseval 定理

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^3x|F(\boldsymbol{x})|^2 &= \frac{1}{(2\pi)^6}\int \mathrm{d}^3x \int \mathrm{d}^3k F_k(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \int \mathrm{d}^3k' F_k^*(\boldsymbol{k}')e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}}, \\
&= \frac{1}{(2\pi)^6}\int \mathrm{d}^3k \int \mathrm{d}^3k' F_k(\boldsymbol{k})F_k^*(\boldsymbol{k}') \int \mathrm{d}^3x e^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}}, \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k \int \mathrm{d}^3k' F_k(\boldsymbol{k})F_k^*(\boldsymbol{k}')\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'), \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k|F_k(\boldsymbol{k})|^2
\end{aligned} \tag{9}
$$

$\int \mathrm{d}^3x|F(\boldsymbol{x})|^2$：场 $F(\boldsymbol{x})$ 的总功率，

$|F_k(\boldsymbol{k})|^2$：相应的功率谱，

各项同性的功率谱，$|F_k(\boldsymbol{k})|^2 = |F_k(k)|^2 \equiv P(k)$

2.3 卷积定理

两个连续函数 $f(\boldsymbol{x})$、$g(\boldsymbol{x})$ 的卷积

$$
c(\boldsymbol{x}) = \int \mathrm{d}^3x' f(\boldsymbol{x}')g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{10}
$$

它的 Fourier 变换

$$
\begin{aligned}
c_k(\boldsymbol{k}) &= \int \mathrm{d}^3x c(\boldsymbol{x})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, \\
&= \int \mathrm{d}^3x \int \mathrm{d}^3x' f(\boldsymbol{x}')g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, \\
&= \int \mathrm{d}^3x \int \mathrm{d}^3x' \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k' \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k'' f_k(\boldsymbol{k}')g_k(\boldsymbol{k}'')e^{i[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{k}''\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')]}, \\
&= \int \mathrm{d}^3k' \int \mathrm{d}^3k'' f_k(\boldsymbol{k}')g_k(\boldsymbol{k}'')\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'')\delta(\boldsymbol{k}''-\boldsymbol{k}'), \\
&= f_k(\boldsymbol{k})g_k(\boldsymbol{k})
\end{aligned} \tag{11}
$$

两个函数卷积的 Fourier 变换等于两函数各自 Fourier 变换的乘积

2.4 相关函数和功率谱（Wiener-Khinchin 定理）

函数 $F(\boldsymbol{x})$ 的自相关函数，简称相关函数，定义为

$$\xi(\boldsymbol{r}) = \langle F(\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\rangle \tag{12}$$

$\langle\cdot\rangle$：对函数 $F(\boldsymbol{x})$ 的定义空间进行平均，即

$$\begin{aligned}
\xi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{L^3}\int \mathrm{d}^3x F(\boldsymbol{x})F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}), \\
&= \frac{1}{L^3}\int \mathrm{d}^3x \int \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \mathrm{d}^3k F_k(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \int \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \mathrm{d}k' F_k(\boldsymbol{k}')e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})}, \\
&= \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int \mathrm{d}^3k \int \mathrm{d}^3k' \frac{1}{(2\pi)^3} F_k(\boldsymbol{k})F_k(\boldsymbol{k}')e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}} \int \mathrm{d}^3x e^{-i(\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}}, \\
&= \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int \mathrm{d}^3k F_k(-\boldsymbol{k})F_k(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}}, \\
&= \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int \mathrm{d}^3k |F_k(\boldsymbol{k})|^2 e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}}
\end{aligned} \tag{13}$$

相关函数和功率谱是 Fourier 变换对。

在场为各项同性时，$|F_k(\boldsymbol{k})|^2 = P(k)$，且 ξ 具有转动不变性，

$$\begin{aligned}
\xi(r) &= \frac{L^3}{(2\pi)^3}\int P(k)\cos(kr\cos\theta)2\pi k^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}k, \\
&= \frac{L^3}{2\pi^2}\int P(k)\frac{\sin kr}{kr}k^2 \mathrm{d}k
\end{aligned} \tag{14}$$

2.5 导数和积分的 Fourier 变换

2.6 Fourier 延迟定理

2.7 Fourier 位移定理