狭义相对论——动力学

November 16, 2016

1 相对论能动量

粒子的动量

$$\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{u} = \frac{m\boldsymbol{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{1}$$

粒子的能量

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{2}$$

粒子的静能

$$E = mc^2 \tag{3}$$

粒子的动能

$$T = E - mc^2 \tag{4}$$

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{5}$$

从任何小于 c 的有限速率增加到或者超过光速是不可能的；若粒子生来就具有大于光速的速率，并不破坏这一说法；

一个自由粒子的能量、动量与速度的关系：

$$\boldsymbol{u} = \frac{c^2\boldsymbol{p}}{E} \tag{6}$$

2　能动量四维矢量的洛伦兹变换

the Lorentz transformation for momentum and energy

$$
\begin{aligned}
p'_x &= \gamma(p_x - vE/c^2)\ , \\
p'_y &= p_y\ , \\
p'_z &= p_z\ , \\
E' &= \gamma(E - vp_x)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

the inverse transformation is

$$
\begin{aligned}
p_x &= \gamma(p'_x + vE'/c^2)\ , \\
p_y &= p'_y\ , \\
p_z &= p'_z\ , \\
E &= \gamma(E' + vp'_x)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

洛伦兹不变式

$$E^2 - \boldsymbol{p}^2c^2 = E'^2 - \boldsymbol{p}^2c^2 = \text{Const.} \tag{9}$$

若系统为单一粒子，其静质量为 m_0，将 x', y', z' 系统固定在 m_0 上，即 m_0 粒子在 x', y', z' 系内是静止的，其动量 $\boldsymbol{p}' = 0$，则不变式的常量为 m_0^2

$$E^2 - \boldsymbol{p}^2c^2 = E'^2 = m_0^2 \tag{10}$$

对于多粒子系统，其总能量和总动量组成四矢量，在彼此间无相互作用时，洛伦兹不变式为

$$\left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i \boldsymbol{p}_i\right)^2 = \text{Const.} \tag{11}$$

在质心系统中，$\sum_i \boldsymbol{p}_i^* = 0$，此常量等于 $E_{\text{cm}}^2 = E^{*2} = S$。在一般情况下，此常量并不等于系统的总质量 M_0。但若这个多粒子系统是由单一母粒子 M_0 衰变产生的，则这一常量等于母粒子总静止能量的平方 M_0^2，M_0 称为这个多粒子系统的不变质量。

3 分布函数的变换

4 碰撞的相对论运动学

把质心系适当地推广为洛伦兹参照系，在该参照系内，所有粒子的总的空间线动量对于 0；这样一个洛伦兹参照系总是能够找到的，因为一个质点系的总四维动量矢量是类时的；

总的四维动量

$$P_\mu = \sum_r p_{r\mu} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} P_\mu P_\mu = \sum_{r,s} p_{r\mu} p_{s\mu} &= -\sum_r m_r^2 c^2 + \sum_{r \neq s} p_{r\mu} p_{s\mu} \ , \\ &= -\sum_r m_r^2 c^2 + \sum_{r \neq s} m_r m_s \gamma_r \gamma_s (c^2 - \boldsymbol{v}_r \cdot \boldsymbol{v}_s) \end{aligned} \tag{13}$$

由于实物粒子的速度始终小于 c，所以 P_μ 的平方始终是负值；一定会有某种洛伦兹坐标系，它保证被变换矢量 P_μ 的空间分量全部为 0，这种坐标系称为动量中心系，或者不太严格地称为质心系，“C-O-M”系；

碰撞前后总的四维动量矢量守恒；意味着空间线动量的守恒和总能量 (包括静止质能) 的守恒；变换到动量中心系和起始于动量中心系的洛伦兹变换；同时构成一些在所有洛伦兹系统内都有相同数值的洛伦兹不变量 (世量标量)；

考虑由两个粒子引起的反应，它产生出另一组质量为 $m_r (r = 3, 4, 5, \cdots)$ 的粒子，在“C-O-M”系内，变换后的总动量 P'_μ 具有零值空间分量以及一个第四分量 iT'/c。把“C-O-M”系看作是质量为 $M = T'/c^2$ 的复合粒子的固有系统或静止系统；P_μ 量值的平方在所有洛伦兹系统内必定是不变量 (并在反应中守恒)。因此

$$P_\mu P_\mu = P'_\mu P'_\mu = -\frac{E'^2}{c^2} = -M^2 c^2 \tag{14}$$

对原有粒子,

$$P_\mu P_\mu = -(m_1^2 + m_2^2) c^2 + 2 p_{1\mu} p_{2\mu} \tag{15}$$

在“C-O-M”系内的能量或等效质量 M，可依据入射粒子表达成

$$E'^2 \equiv M^2c^4 = (m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2(E_1E_2 - c^2\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2) \tag{16}$$

假设有一个粒子，如粒子 2，在实验室系下是静止的，则 $\boldsymbol{p}_2 = 0$ 和 $T_2 = m_2c^2$，C-O-M 能量为

$$E'^2 \equiv M^2c^4 = (m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2m_2c^2E_1 = (m_1^2 + m_2^2)^2c^4 + 2m_2c^2T_1 \tag{17}$$

C-O-M 系内的有效能量仅随入射动能缓慢增加，甚至在运动动能远大于静止质能的“超相对论”区域内，E' 也仅按 T_1 的平方根增加；

在 C-O-M 系中适用的小数量入射能量按比例增加的效应，是用阈能表示的；有可能引起反应 (除了弹性散射) 的最低能量是反应物静止在 C-O-M 系内时的能量。任何有限动能都要求一个较高的 E'，或者说要求一个较高的入射能量；反应后，C-O-M 系内的总的四维动量 P''_μ，它在阈值处的量值决定于

$$P''_\mu P''_\mu = -c^4\left(\sum_r m_r\right)^2 \tag{18}$$

对于静止靶，阈值处入射运动能量决定于

$$\frac{T_1}{m_1c^2} = \frac{\left(\sum\limits_r m_r\right)^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_1m_2} \tag{19}$$

若反应的 Q 定义为

$$Q = \sum_r m_r - (m_1 + m_2) \tag{20}$$

则

$$\frac{T_1}{m_1c^2} = \frac{Q^2 + 2Q(m_1 + m_2)}{2m_1m_2} \tag{21}$$

实验室系内反应产物在阈值处的能量；C-O-M 系是质量 M 的静止系统，它的 $P'_4 = iMc$，在任何其它系统中，四维矢量的第四分量是 $P_4 = iMc\gamma$，但在实验室系内则为

$$P_4 = \frac{i}{c}(E_1 + E_2) = \frac{i}{c}(E_1 + m_2c^2) \tag{22}$$

后一式只对静止靶粒子成立；因此，C-O-M 系统相对于实验室系的运动应使

$$\gamma = \frac{E_1 + m_2 c^2}{M c^2} \tag{23}$$

但在阈值处，所有的反应产物在 C-O-M 系内都是静止的，因此 $M = \sum_r m_r$，这时有

$$\gamma = \frac{T_1 + (m_1 + M_2) c^2}{\sum_r m_r c^2} \qquad \text{阈值} \tag{24}$$

在实验室系内，第 s 个反应产物的动能是

$$T_s = m_s c^2 (\gamma - 1) \tag{25}$$

5 粒子间的弹性碰撞