级数展开

August 13, 2017

1 序列与极限

1.1 序列的极限

定义

设 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ 是复数序列，记作 $\{z_n\}$。若任给正数 $\varepsilon > 0$，存在自然数 N，使当 $n > N$ 时，总有

$$|z_n - z_0| < \varepsilon\ , \tag{1}$$

成立。则称复数序列 $\{z_n\}$ 收敛于复数 z_0，或称 $\{z_n\}$ 以 z_0 为极限，

$$\lim_{n\to+\infty} z_n - z_0 \text{ 或 } z_n \to z_0.$$

定理

序列 $\{z_n\}$ 以 z_0 为极限的充要条件是

$$1)\ \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \text{ 及 } \lim_{n\to+\infty} y_n = y_0 \tag{2}$$

其中 $z_n = x_n + iy_n(n = 1, 2, \cdots), z_0 = x_0 + iy_0$，或

2) 当 $z_0 \neq 0$ 时，

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n| = |z_0| \text{ 及 } \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Arg} z_n = \mathrm{Arg} z_0$$

定理

设序列 $\{z_n\}$ 与序列 $\{z'_n\}$ 分别有极限为 z_0 及 z'_0，即

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0 \ , \lim_{n\to+\infty} z'_n = z'_0 \ ,$$

则

$$1) \lim_{n\to+\infty} (z_n \pm z'_n) = z_0 + z'_0 \ ,$$

$$2) \lim_{n\to+\infty} z_n z'_n = z_0 z'_0 \ ,$$

$$3) \lim_{n\to+\infty} \frac{z_n}{z'_n} = \frac{z_0}{z'_0} \ , z' \neq 0 \ .$$

定义

对于一个复数序列 $\{z_n\}$，若存在一个正数 M，使 $|z_n| \leqslant M(n = 1, 2, \cdots)$，就称 $\{z_n\}$ 是有界的；否则，就称 $\{z_n\}$ 是无界的。

定义

对于一个复数序列 $\{z_n\}$，若存在一个正数 M，使 $|z_n| \leqslant M(n = 1, 2, \cdots)$，就称 $\{z_n\}$ 是有界的；否则，就称 $\{z_n\}$ 是无界的。

定义

对于一个复数序列 $\{z_n\}$，若任给 $M > 0$，可以找到自然数 N，使当 $n > N$ 时，有

$$|z_n| > M \ ,$$

就称 $\{z_n\}$ 趋向于 ∞，记作 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \infty$。

复数序列 $\{z_n\}$ 收敛的柯西 (Cauchy) 判别法：

定理

复数序列 $\{z_n\}$ 有极限的充要条件是：任给 $\varepsilon > 0$，可以找到 N，使当 $n > N$ 时，对于任何自然数 m，有

$$|z_{n+m} - z_n| < \varepsilon \ .$$

1.2 矩形套定理 列紧性定理 覆盖定理

矩形套定理

设有一串矩形 $R_n = \{a_n \leqslant x \leqslant b_n, c_n \leqslant y \leqslant d_n\}(n = 1, 2, \cdots)$，且足标较大的矩形包含在足标较小的矩形中，即 $R_1 \supset R_2 \supset \cdots \supset R_n \supset \cdots$。又设矩形 R_n 的对角线 $D_n \to 0$，则有且仅有一个点属于所有的矩形 $R_n(n = 1, 2, \cdots)$。

列紧性定理

设复数序列 $\{z_n\}$ 是有界的，则必存在一个收敛的子序列 $\{z_{n_i}\}$。

覆盖定理

设 F 是有界闭集，K 是一些圆的集合 (实际只要开集即可)，且 K 覆盖 F，这表示对于 F 中的任一点 z，在 K 中一定可以找到一个圆，使点 z 属于这个圆，则在 K 中一定可以找到有限个圆，也覆盖闭集 F。

1.3　复数项级数

定义

考虑复数项级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{3}$$

构成部分和

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \ , \tag{4}$$

得到序列 $\{s_n\}$，若序列 $\{s_n\}$ 有极限为 s：

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s \ ,$$

则称级数收敛，其和为 s，记作 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = s$。若序列 $\{s_n\}$ 没有极限，则称级数发散。

定理

设级数 (3) 收敛，则

$$\underset{n\to+\infty}{u}_n = 0 \ . \tag{5}$$

定理

级数 (3) 收敛的充要条件是：任给 $\varepsilon > 0$，存在自然数 N，使当 $n > N$ 时，对任意自然数 m，总有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m}| < \varepsilon \ . \tag{6}$$

定义

若级数 (3) 中每一项取模后得到级数

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots \tag{7}$$

收敛，则称级数 (3)绝对收敛。

绝对收敛级数一定是收敛的。

定理

若级数 (3) 中的每一项 u_n 对充分大的 n，满足

$$|u_n| \leqslant M_n \ , \tag{8}$$

且级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} M_n$ 收敛，则级数 (3)绝对收敛。

设有两个级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n \cdots \ , \tag{9}$$

$$u'_1 + u'_2 + \cdots + u'_n \cdots \ , \tag{10}$$

由它们构造另外两个级数

$$(u_1 \pm u'_1) + (u_2 \pm u'_2) + \cdots + (u_n \pm u'_n) + \cdots \ , \tag{11}$$

$$\begin{aligned} & u_1u'_1 + (u_1u'_2 + u_2u'_1) + (u_1u'_3 + u_2u'_2 + u_3u'_1) + \cdots \\ & + (u_1u'_n + u_2u'_{n-1} + \cdots + u_{n-1}u'_2 + u_nu'_1) + \cdots \ , \end{aligned} \tag{12}$$

定理

设级数 (3) 与级数 (10) 都绝对收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s, \quad \sum_{n=1}^{\infty} u'_n = s' \ . \tag{13}$$

则级数 (11) 及级数 (12) 也绝对收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm u'_n) = s \pm s', \tag{14}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_1u'_n + u_2u'_{n-1} + \cdots + u_{n-1}u'_2 + u_nu'_1) = ss', \tag{15}$$