函数与导数

若函数 $f(x)$ 可导, 则由 $f(-x)=-f(x)$ 两边对 x 求导, 得 $-f'(-x)=-f'(x)$, 即 $f'(-x)=f'(x)$; 由 $f(-x)=f(x)$ 两边 对 x 求导, 得 $-f'(-x)=f'(x)$, 即 $f'(-x)=-f'(x)$ 可得奇、偶函数的导数的性质:

(1) 可导奇函数的导数是偶函数;

(2) 可导偶函数的导数是奇函数. 这一特征性质实现了函数奇偶性的相 互转化, 在解题中可灵活应用.

例 1 若 $f(x)=a\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+b\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)(ab\neq 0)$ 是偶函敉, 则有序实数对 (a,b) 可以是 (写出你认为正确的一组数对即可).

解析 求导得 $f'(x)=a\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-b\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$, 由可导偶函数的导数特征性质得: $f'(x)$ 是 R 上的奇函数, 所以 $f'(0)=0$, 即 $f'(0)=a\cos\frac{\pi}{3}-b\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=0$, 所以 $a+\sqrt{3}b=0$, 故只要填写满趺 $a+\sqrt{3}b=0$ 且 $ab\neq 0$ 的任意一组数对即可, 如 $(\sqrt{3},-1)$.

评注

本题一般解题思路就是利用偶函数的定义, 显然较为繁杂, 而妙用导数处理此类问题, 简洁、高效、快捷!

变式 1 若 $f(x)=a\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+b\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)(ab\neq 0)$ 是偶函数, 则 $2^{a+b}=$

设函数 $f(x)=a\sin x+b\cos x(ab\neq 0)$, 则可化为 $f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$, 其中 $\tan\varphi=\frac{b}{a}$. 于是,结合函数 $f(x)$ 的图像易知:若 $x=x_0$ 时函数 $f(x)$ 取得最值, 即函数 $f(x)$

例 2 $(2013$ 新课标卷 $I)$ 设当 $x=\theta$ 时, 函数 $f(x)=\sin x-2\cos x$ 取得最大值, 则 $\cos\theta=$

解析 由趒设可知 $f'(\theta)=0$, 又 $f'(x)=\cos x+2\sin x$, 所以 $\cos\theta+2\sin\theta=0$, 即 $\tan\theta=-\frac{1}{2},\cos\theta=-2\sin\theta\cdot$ 于是，结合 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, 解得 $\begin{cases}\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}\\ \cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{cases}$

或 $\begin{cases}\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}\\ \cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{cases}$ 故所求 $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

1. 已知函数 $f(x)=\ln x+\ln(a-x)$ 的图象 关于直线 $x=1$ 对称, 则函数 $f(x)$ 的单调 递增区间为 ()

   A. $(0,2)$ B. $[0,1)$ C. $(-\infty,1]$ D. $(0,1]$

   【解析】$\because$ 函数 $f(x)=\ln x+\ln(a-x)$ 的图 象关于直线 $x=1$ 对称, $\therefore f(2-x)=f(x)$, 即

   $\ln(2-x)+\ln^{a-(2-x)}=\ln x+\ln(a-x)$

   $\ln(x+a-2)+\ln(2-x)=\ln x+\ln(a-x)$

   即 $\therefore a=2$

   $\therefore f(x)=\ln x+\ln(2-x)=\ln x(2-x) \qquad 0<x<2$

   由于 $y=x(2-x)=-(x-1)^2+1$ 为开口向下

   的抛物线, 其对称轴为 $x=1$, 定义域为 $(0,2)$,

   $\therefore$ 它的递增区间为 $(0,1]$,

已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x-\dfrac{b\ln x}{x}$, 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=(\mathrm{e}-1)x+1$.

(1)求 a,b;

(2) 证明:$ f(x)>1$.

解：（1） $f'(1)=ae-b=e-1, f(1)=ae=e \therefore a=1, b=1$

（2）要证$e^{x}-\dfrac{lnx}{x}>0$令$g(x)=e^{x}-(x+1), x>0$

$g'(x)=e^{x}-1>0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$递增

$ \begin{aligned}
&\therefore g(x)>g(0)=0\\
即e^{x}>x+1(x=0 \text {. }\\
&\therefore x e^{x}>x^{2}+x
\end{aligned}$

令&$h(x)=x^{2}+x-(\ln x+x)=x^{2}-\ln x$

$h'(x)=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^{2}-1}{x}$

由$h'(x)>0$得$x>\frac{\sqrt{2}}{2}$

由$h'(x)<0$得$0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$h'(x)>0$得$x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

所以$h(x)$在$(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$递减，在$(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$

$\therefore h(x) \geqslant h\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\ln 2>0$

$\therefore x^{2}+x>\ln x+x$

$\therefore xe^{x}>lnx+x$

原不等式成立.

令$f(x)=e^{x}-x-1, \quad x>0$

$\therefore f'(x)=e^{x}-1>0 \neq(0,+\infty) \mid 3x'z$

$\therefore f(x)>f(0)=0$在$(0,+\infty)$恒成立

$\therefore e^{x}>x+1$

令$g'(x)=\dfrac{\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}}{\ln^{2}(x+1)}, x>0$

令 $h(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$.

$h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^{2}}=\dfrac{x}{(x+1)^{2}}>0$ 在 $(0,+\infty) \mid$

$\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$上递增

$\therefore h(x)>h(0)=0$在$(0,+\infty)$恒成立

$\therefore g'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立

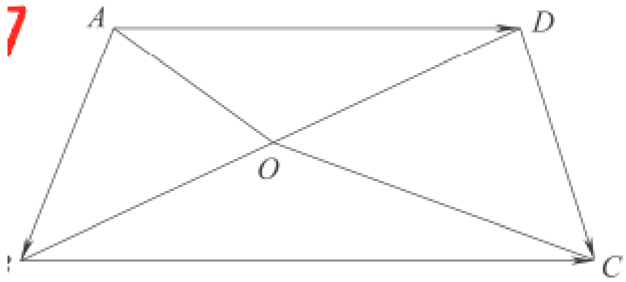
$\because x>0$时. $e^{x}-1>x>0$d

$\therefore g\left(e^{x}-1\right)>g(x)$. 即 $\dfrac{e^{x}-1}{\ln e^{x}}>\dfrac{x}{\ln(x+1)}$,即$ \dfrac{e^{x}-1}{x}>\dfrac{x}{\ln (x+1)}$

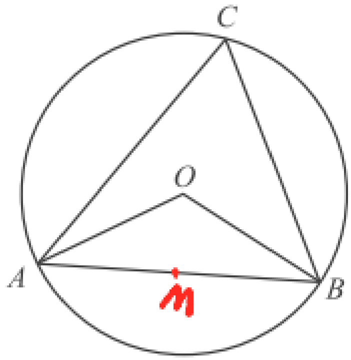
向量 5

1.如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, O 为 dBD 的中点, 且 $OA=3, OC=5$, 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-7$, 则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}$ 的值是

7



2.在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^{\circ}$, $|AB|=6$, 点 P 满足 $|CP|=2$, 则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最大值为(
A. 9 B. 16 C. 18 D. 25



3.若 $\triangle ABC$ 的外接圆是半径为 1 的圆 O, 且 $\angle AOB=120^{\circ}$, 则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$ 的取值范围是

4.已知 A, B 是单位圆上的两点, o 为圆心, 且 $\angle AOB=120^{\circ}$, MN 是圆 O 的一条直径, 点 C 在圆内, 且满足 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}(0<\lambda<1)$, 则 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}$ 的取值范围是 ()

A. $\left[-\frac{1}{2}, 1\right)$ B. $[-1,1)$ C. $\left[-\frac{4}{3}, 0\right)$ D. $[-1,0)$

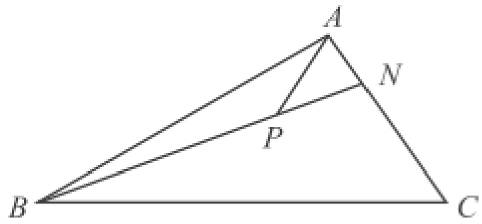
5.在面积为 2 的 $\triangle ABC$ 中, E, F 分别是 AB, AC 的中点, 点 P 在直线 EF 上, 则 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}^{2}$ 的最小值是

6. 已知非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角, $|\boldsymbol{b}|=2$, 当 $t=\frac{1}{2}$ 时, $|\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}|$ 取最小值为 $\sqrt{3}$, 则 $|\boldsymbol{a}|=$

7.设向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 满足 $|a|=|\boldsymbol{b}|=2, \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2, \langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=60^{\circ}$, 则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值等于 (A)
A. 4 B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. 1

8.已知 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}$ 是平面向量, e 是单位向量. 若非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 向量 $\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{b}^{2}-4\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{b}+3=0$, 则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最小值是 $(\boldsymbol{A})$
A. $\sqrt{3}-1$ B. $\sqrt{3}+1$ C. 2 D. $2-\sqrt{3}$

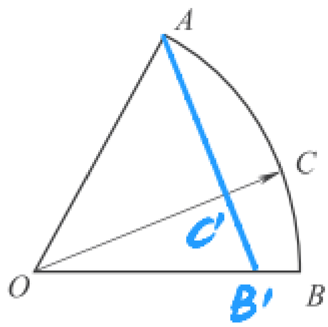
9.如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{NC}$, P 是 BN 上的一点, 若 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}$, 则实数 m 的值为 (C)
A. 1 B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{9}$ D. 3



10.给定两个长度为 1 的平面向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$, 它们的夹角为 120°, 如图, 点 C 在以 0 为圆心的 圆弧 AB 上变动. 若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$, 其中 $x, y \in \mathbf{R}$, 则 $x+y$ 的最大值为　2.

11.如图, 在扇形 OAB 中, $\angle AOB=60^{\circ}, C$ 为弧 AB 上且与 A, B 不重合的一个动点, $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$, 若 $u=x+\lambda y(\lambda>0)$ 存在最大值, 则 λ 的取值范围为 (C)

A. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$　B. $(1,3)$　C. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$　D. $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$



12.如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB=4, \angle BAD=60^{\circ}, \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}, E$ 为 CD 的中点, M 是梯形 $ABCD$ 所在平面内一点, 则 $\overrightarrow{ME}\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$ 的最小值为 【答案】 $-\frac{3}{2}$

取 AB 中点 F, 则 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MF}$

设 EF 中点为 O,

所以 $\overrightarrow{ME}\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})=2\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=2\left(MO^{2}-EO^{2}\right)=2MO^{2}-\frac{EF^{2}}{2}\geq-\frac{EF^{2}}{2}$ M 与 O 重合时, 等号成立

又 $AB=4, CD=2$, 故 $EF=\frac{(AB-CD)}{2}\cdot\tan 60^{\circ}=\sqrt{3}$ 所以 $\overrightarrow{ME}\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$ 的最小值为 $-\frac{3}{2}$

故答案为: $-\frac{3}{2}$.