微专题三 含参方程根的个数问题

难度指数: $\star\star\star\star\surd$

C 解题技巧

含参方程根的个数问题一般采用数形结合的方法来解决, 通过分离常数, 转化为函数图 象交点问题来进行研究, 通常有下面两种做法:

(1) 全分离: 将方程等价变形成 $a=f(x)$ 的形式, 研究水平直线 $y=a$ 与函数 $f(x)$ 图象交 点的个数;

(2) 半分离: 将方程等价变形成 $f(x)=g(x)$ 的形式, 研究两个函数图象交点个数, 这种解 法中切线和端点的位置往往是临界状态, 需要重点关注.

c 典型例题

【例 1】方程 $\ln x=ax$ 有两个实数解, 则实数 a 的取值范围为

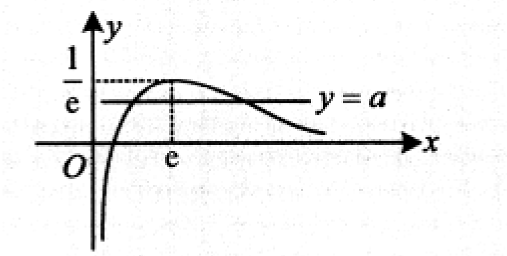
- 解析

  [答案] $\left(0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

  [解析]解法 1: (全分离)方程 $\ln x=ax$ 等价于 $a=\frac{\ln x}{x}$, 令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$,

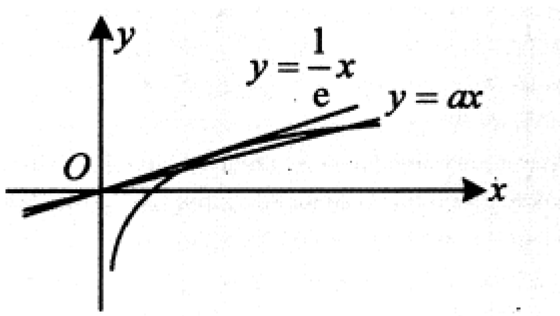
  则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,

  令 $f'(x)>0$, 得 $0<x<\mathrm{e}$; 令 $f'(x)<0$, 得 $x>\mathrm{e}$, 故 $f(x)$ 在 $(0, \mathrm{e})$ 上递减, 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上递增, $\lim_{x \rightarrow 0^{+}} f(x)=-\infty, \lim_{x \rightarrow+\infty} f(x)=0, f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$, 据此可作出函数草图如下:



故 $a \in\left(0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 时, 直线 $y=a$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有 2 个交点, 故答案为 $\left(0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

解法 2: (半分离) 在同一坐标系下画出函数 $y=\ln x$ 和 $y=ax$ 的图象如下:



过原点的直线和曲线 $y=\ln x$ 相切的情形为临界状态, 设切点的坐标为 $P\left(x_0, \ln x_0\right)$,

$y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$

故 P 点处的切线方程为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}\left(x-x_0\right)$, 将原点代入解得 $x_0=\mathrm{e}$, 故切线 方程为 $y=\frac{1}{\mathrm{e}} x$.

由图可知当 $0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时, $y=ax$ 和 $y=\ln x$ 的图象有 2 个交点,故答案为 $\left(0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

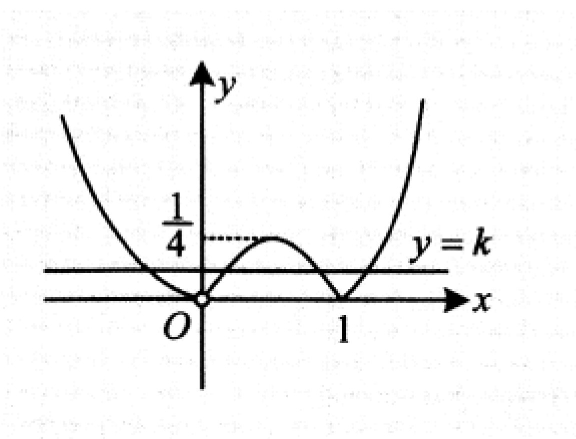
【例 2】若函数 $f(x)=\begin{cases}-x^3+x^2, x<1, \\ \mathrm{e}^x-\mathrm{e}, x \geqslant 1,\end{cases}$ 关于 x 的方程 $f(x)=k|x|$ 有 5 个不相等的实 根, 则实数 k 的取值范围为

- 解析

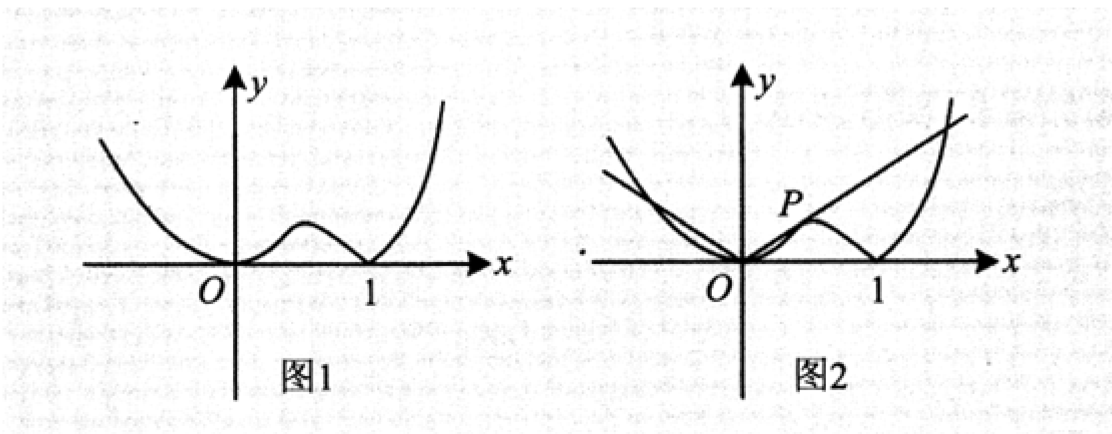
  [答案] $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

  [解析]解法 1: (全分离) 显然 $x=0$ 是原方程的根, 故 $x \neq 0$ 时原方程应还有 4 个根.

当 $x \neq 0$ 时, 原方程等价于 $k=\frac{f(x)}{|x|}=\begin{cases}\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}}{x}, x \geqslant 1, \\ -x^{2}+x, 0<x<1, \\ x^{2}-x, x<0,\end{cases}$ 作出函数 $y=$ $\begin{cases}\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}}{x}, x \geqslant 1, \\ -x^{2}+x, 0<x<1, \\ x^{2}-x, x<0,\end{cases}$ 的图象如下:



由图易知当且仅当 $k \in\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 时, 直线 $y=k$ 才与该函数图象有四个交点, 故答 案为 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.
注: 其中 $x \geqslant 1$ 时的函数图象需求导研究单调性后作草图, 具体做法如下:当 $x \geqslant 1$ 时, $y^{\prime}=\frac{x \mathrm{e}^{x}-\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}\right)}{x^{2}}=\frac{(x-1) \mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}}{x^{2}}>0$, 故 $y=\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调 递增.
解法 2: (半分离) 直接将方程 $f(x)=k|x|$ 看成函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=k|x|$ 的图象有 5 个交点.
当 $x<1$ 时, 函数 $f(x)=-x^{3}+x^{2}=-x^{2}(x-1)$ 的图象可通过求导数研究单调 性后画出, 其图象如图 1 .
而对于函数 $y=k|x|$, 则可以看成是 $y=|x|$ 在纵向上进行伸缩, 我们把它与函 数 $y=f(x)$ 的图象画在一个坐标系下, 如图 2 所示, 可以看到临界状态就是图 2 中直线与 $y=f(x)$ 图象相切于第一象限的点 P 处.
当 $x<1$ 时, $f^{\prime}(x)=-3 x^{2}+2 x$, 设 $P\left(x_{0},-x_{0}^{3}+x_{0}^{2}\right)$, 则该切线方程为 $y=\left(-3 x_{0}^{2}\right.$ $\left.+2 x_{0}\right) x+2 x_{0}^{3}-x_{0}^{2}$



将点 $(0,0)$ 代入得 $x_{0}=\frac{1}{2}$, 故 $f^{\prime}\left(x_{0}\right)=\frac{1}{4}$, 即临界状态下的 k 为 $\frac{1}{4}$.
容易分析出, 当 $0<k<\frac{1}{4}$ 时, 两图象有五个交点, 故答案为 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

专题练习

1. (2018 新课标 I 卷) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x}, x \leqslant 0, \\ \ln x, x>0,\end{cases}$ $g(x)=f(x)+x+a$, 若 $g(x)$ 存在 2 个零点, 则 a 的取值范围为

A. $[-1,0)$
B. $(0,+\infty)$
C. $[-1,+\infty)$
D. $[1,+\infty)$

2. (2019 重庆二诊) 已知函数 $f(x)=\left(x-\frac{a}{x}\right)\mathrm{e}^{x}$ 在 $(0,1)$ 内存在极值点, 则实数 a 的取值 范围为
   A. $(-\infty,0)$
   B. $(0,+\infty)$
   C. $(-\infty,-1]$
   D. $[-1,0)$
3. (2017 新课标 III 卷) 已知函数 $f(x)=x^{2}-2x+a\left(\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-x+1}\right)$ 有唯一的零点, 则 $a=$
   A. $-\frac{1}{2}$
   B. $\frac{1}{3}$
   C. $\frac{1}{2}$
   D. 1
4. (2015 天津) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-|x|, x\leqslant 2,\\(x-2)^{2}, x>2,\end{cases}$ $g(x)=b-f(2-x)$, 其中 $b\in\mathbf{R}$, 若 函数 $y=f(x)-g(x)$ 恰有 4 个零点, 则 b 的取值范围是
   A. $\left(\frac{7}{4},+\infty\right)$
   B. $\left(-\infty,\frac{7}{4}\right)$
   C. $\left(0,\frac{7}{4}\right)$
   D. $\left(\frac{7}{4},2\right)$
5. (2014 新课标[卷) 已知函数 $f(x)=ax^{3}-3x^{2}+1$, 若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_{0}, 且 $x_{0}>0$, 则实数 a 的取值范围为
   A. $(2,+\infty)$
   B. $(1,+\infty)$
   C. $(-\infty,-2)$
   D. $(-\infty,-1)$
6. 已知函数 $f(x)=x^{2}+\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{2}(x<0)$ 与 $g(x)=x^{2}+\ln(x+a)$ 的图象存在关于 y 轴 对称的点, 则实数 a 的取值范围是
   A. $\left(-\infty,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$
   B. $(-\infty,\sqrt{\mathrm{e}})$
   C. $\left(-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},\sqrt{\mathrm{e}}\right)$
   D. $\left(-\sqrt{\mathrm{e}},\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$
7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^{2}-2x+1,-2\leqslant x<0,\\\mathrm{e}^{x}, x\geqslant 0,\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-ax+a$ 存在零 点, 则实数 a 的取值范围为
   A. $\left[-\frac{1}{3},\mathrm{e}^{2}\right]$
   B. $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\mathrm{e}^{2},+\infty\right)$
   C. $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$
   D. $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]\cup[\mathrm{e},+\infty)$
8. (2019 天津) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, 0\leqslant x\leqslant 1,\\\frac{1}{x}, x>1,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=-\frac{1}{4}x+a$ 恰

有两个互异的实数解, 则 a 的取值范围为
A. $\left[\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right]$
B. $\left(\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right]$
C. $\left(\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right]\cup\{1\}$
D. $\left[\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right]\cup\{1\}$

9. 设 $[x]$ 表示不大于实数 x 的最大整数, 函数 $f(x)=\begin{cases}\ln^2 x-[\ln x]-1, x>0,\\ \mathrm{e}^x(ax+1), x\leqslant 0,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=1$ 有且仅有 5 个解, 则实数 a 的取值范围为
A. $(-\infty,-1)$
B. $(-\infty,-\mathrm{e})$
C. $(-\infty,-1]$
D. $(-\infty,-\mathrm{e}]$
10. 关于 x 的方程 $\frac{a|x|}{x+2}=x^2$ 有四个实数根, 则 a 的取值范围为
11. (2015 江 蕌) 设 $f(x)=|\ln x|, g(x)=\begin{cases}0, 0<x\leqslant 1,\\ \left|x^2-4\right|-2, x>1,\end{cases}$ 则 方 程 $|f(x)+g(x)|=1$ 根的个数为
12. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\left(x-a\mathrm{e}^x\right)$ 恰有两个极值点 $x_1, x_2\left(x_1<x_2\right)$, 则 a 的取值范围为
13. (2014 天溓) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\left|x^2+5x+4\right|, x\leqslant 0,\\ 2|x-2|, x>0,\end{cases}$ 若函数 $y=f(x)-a|x|$ 恰有 4 个零点, 则实数 a 的取值范围为
14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x+2}-3, x\leqslant 0,\\ x^3-ax+2, x>0\end{cases}$ 有 3 个不同的零点, 则实数 a 的取值范围为
15. 已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2-b(a, b\in\mathbf{R})$, 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2, 且 $\frac{x_2}{x_1}\geqslant 2$, 则实数 a 的取值范围为
16. (2018 天津) 已知 $a>0$, 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2ax+a, x\leqslant 0,\\ -x^2+2ax-2a, x>0,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=ax$ 恰有 2 个互异的实数解, 则 a 的取值范围是

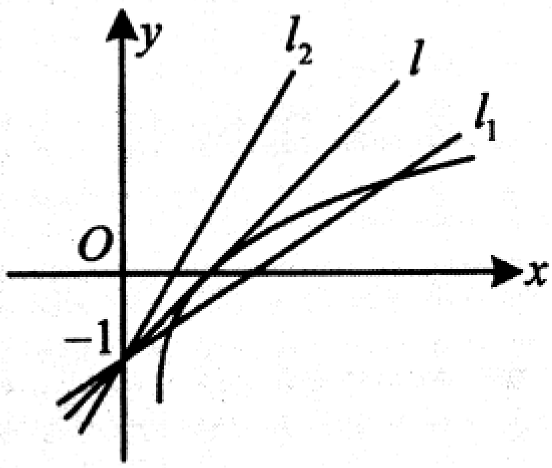
微专题四 含参不等式恒成立问题

难度指数:
C 解题技巧
含参不等式问题主要采用分离常数法求解, 具体来说主要有全分离和半分离两种方法.
(1) 全分离: 通过不等式的等价变形将原含参不等式等价转化成 $a\leqslant f(x)$ 或 $a\geqslant f(x)$
的形式, 进而转化为求函数 $f(x)$ 的最值问题. 这种方法需参变分离之后的函数 $f(x)$ 不 太复杂, 容易求出最值.
(2) 半分离: 通过变形将原含参不等式转化成形如 $f(x)\leqslant g(a, x)$ 类型的不等式, 进而用 数形结合的模型来分析参数 a 如何取值才能满足函数 $y=f(x)$ 的图象始终在 $y=g(a,$,
x) 图象的下方, 找到临界状态, 进而求出参数 a 的范围. 这种方法往往需要关注切线、端 点等临界状态.
c 典型例题

【例 1】不等式 $\ln x\leqslant ax-1$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为

- 解析
[答案] $[1,+\infty)$
[解析]解法 1 : (全分离) 不等式 $\ln x\leqslant ax-1$ 等价于 $a\geqslant\frac{1+\ln x}{x}(x>0)$, 令
$f(x)=\frac{1+\ln x}{x}(x>0)$, 则 $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$, 故当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)>0, f(x)$ 单调递增; 当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f'(x)<0, f(x)$ 单调递减.
所以 $f(x)_{\max}=f(1)=1$, 因为 $a\geqslant f(x)$ 恒成立, 所以 $a\geqslant 1$, 故答案为 $[1,+\infty)$.
解法 2: (半分离) 将不等式 $\ln x\leqslant ax-1$ 看成直线 $y=ax-1$ 位于 $y=\ln x$ 图象
的上方. 显然 $y=ax-1$ 表示过定点 $(0,-1)$, 且斜率为 a 的直线,如图,临界状态 为图中的直线 l,
此时恰好为过点 $(0,-1)$, 且与函数 $y=\ln x$ 图象相切的直线.
下面先将这条直线的方程求出来. 设切点为 $P\left(x_0, \ln x_0\right)$,

由于 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, 所以 P 点处的切线方程为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}\left(x-x_0\right)$, 将 $(0,-1)$ 代入可求得 $x_0=1$,
故切线的方程为 $y=x-1$, 此时的 $a=1$, 从图中可以看出 l_2 满足题意, l_1 不合 题意,
所以 a 的取值范围为 $a\geqslant 1$, 故答案为 $[1,+\infty)$.



【例 2】已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x, x\leqslant 0,\\ \ln(x+1), x>0,\end{cases}$ 若 $|f(x)|\geqslant ax$, 则 a 的取值范围是（ ）

A. $(-\infty, 0]$
B. $(-\infty, 1]$
C. $[-2, 1]$
D. $[-2, 0]$

- 解扮
  [答案] D
  [解析]作出函数 $y=|f(x)|$ 的图象如图 1 所示, 不等式 $|f(x)|\geqslant ax$ 可以看成 函数 $y=|f(x)|$ 的图象始终在过原点的直线 $y=ax$ 的上方, 显然 $a>0$ 不合题 意, 否则在 y 轴右侧函数 $y=|f(x)|$ 的图象不可能始终在直线 $y=ax$ 的上方, 所以 $a\leqslant 0$. 再考虑 y 轴左侧部分, 易求得函数 $y=|f(x)|$ 在 y 轴左侧的图象在 $x=0$ 处的切线斜率为 -2, 如图 2 所示, 当 $a\geqslant -2$ 时, 符合题意, 即 a 的取值范围 为 $[-2, 0]$, 故选 D.

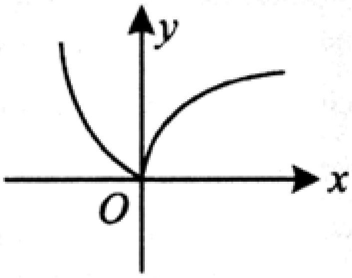


图1

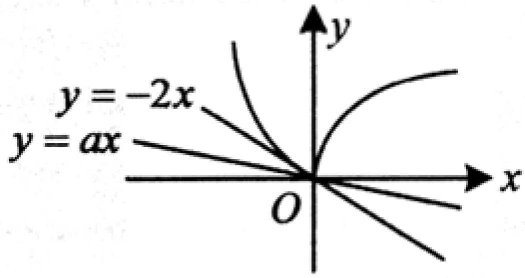


图2

专题练习

1. (2019 天津) 已知 $a\in\mathbf{R}$, 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+2a, x\leqslant 1,\\ x-a\ln x, x>1,\end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则 a 的取值范围为
   A. $[0, 1]$
   B. $[0, 2]$
   C. $[0, \mathrm{e}]$
   D. $[1, \mathrm{e}]$
2. (2014 新课标 II 卷) 若函数 $f(x)=kx-\ln x$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增, 则 k 的取值 范围是
3. 若不等式 $\mathrm{e}^x\geqslant ax+1$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立, 则实数 a 的取值集合为
4. 函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\sin x$, 若 $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)\geqslant ax$, 则 a 的取值范围为

5. 若不等式 $2x\ln x \geqslant -x^2+ax-3$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 6. (2018 天津) 已知 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+a-2, x\leqslant 0,\\ -x^2+2x-2a, x>0,\end{cases}$ 若对任意的 $x\in[-3,$, $+\infty)$, $f(x)\leqslant|x|$ 恒成立, 则 a 的取值范围是
6. (2014 山东) 已知函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$. 对函数 $y=g(x)(x\in I)$, 定义 $g(x)$ 关于 $f(x)$ 的"对称函数" 为 $y=h(x)(x\in I)$, $y=h(x)$ 满足: 对任意 $x\in I$, 两个点 $(x,h(x))$, $(x,g(x))$ 关于点 $(x,f(x))$ 对称. 若 $h(x)$ 是 $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ 关于 $f(x)=3x+b$ 的 "对称函数", 且 $h(x)>g(x)$ 恒成立, 则实数 b 的取值范围是
7. 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数和偶函数, 且 $f(x)+g(x)=2^x$, 若对 任意的 $x\in[1,2]$, 不等式 $af(x)+g(2x)\geqslant 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为

微专题五 含参函数求单调区间、极值、最值的几类常考题型

难度指数: ⋆⋆⋆⋆⋆

C 解题技巧

求单调区间、极值、最值是高考的重点题型, 考查用导数研究函数的基本方法. 当函数含 有参数时, 往往需要对参数进行分类讨论, 这类题通常出现在高考函数解答题第 1 小问, 本专题将归纳几类常见的题型.

C 典型例题

题型 1: 导数为含参一次函数、二次函数型

题型 1 : 导数为含参一次函数、二次函数型

讨论依据: 一次函数、二次函数的零点是否在定义域范围内、零点之间的大小关系.

例 1 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+b(a,b\in\mathbf{R})$, 求 $f(x)$ 的单调区间.

- 解析

  [解析] $f'(x)=3x^2+2ax=3x\left(x+\frac{2a}{3}\right)$, 令 $f'(x)=0$, 得 $x=0$ 或 $-\frac{2a}{3}$.
  当 $a<0$ 时, $-\frac{2a}{3}>0$, 由 $f'(x)>0$ 得 $x<0$ 或 $x>-\frac{2a}{3}$, 由 $f'(x)<0$ 得 $0<a<-\frac{2a}{3}$
  故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$, $\left(-\frac{2a}{3},+\infty\right)$, 单调递减区间为 $\left(0,-\frac{2a}{3}\right)$.
  当 $a=0$ 时, $f'(x)=3x^2\geqslant 0$, 故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\mathbf{R}$.

当 $a>0$ 时, $-\frac{2a}{3}<0$, 由 $f'(x)>0$ 得 $x<-\frac{2a}{3}$ 或 $x>0$, 由 $f'(x)<0$ 得 $-\frac{2a}{3}<x<0$,
故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\infty,-\frac{2a}{3}\right)$, $(0,+\infty)$, 单调递减区间为 $\left(-\frac{2a}{3},0\right)$
注: 本题中 $f'(x)=3x\left(x+\frac{2a}{3}\right)$, 只需讨论两根的大小关系, 即可求出函数 $f(x)$ 的单调区间.

例 2 已知 $f(x)=a(x-\ln x)+\frac{2x-1}{x^2}$, $a\in\mathbf{R}$. 讨论 $f(x)$ 的单调性.

- 解栃

  [解析] $f'(x)=\frac{(x-1)(ax^2-2)}{x^3}$, $x>0$.
  当 $a\leqslant 0$ 时, $ax^2-2<0$ 恒成立, 所以由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<1$, 由 $f'(x)<0$ 得 $x>1$, 故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增, 在 $(1,+\infty)$ 上递减.
  当 $0<a<2$ 时, $\sqrt{\frac{2}{a}}>1$, 由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<1$ 或 $x>\sqrt{\frac{2}{a}}$, 由 $f'(x)<0$ 得 $1<x<\sqrt{\frac{2}{a}}$,
  故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增, 在 $\left(1,\sqrt{\frac{2}{a}}\right)$ 上递减, 在 $\left(\sqrt{\frac{2}{a}},+\infty\right)$ 上递增.
  当 $a=2$ 时, $f'(x)=\frac{2(x+1)(x-1)^2}{x^3}\geqslant 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增.
  当 $a>2$ 时,由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<\sqrt{\frac{2}{a}}$ 或 $x>1$, 由 $f'(x)<0$ 得
  $\sqrt{\frac{2}{a}}<x<1$.

例 2 已知 $f(x)=a(x-\ln x)+\frac{2x-1}{x^2}$, $a\in\mathbf{R}$. 讨论 $f(x)$ 的单调性.

- 解椟

  [解析] $f'(x)=\frac{(x-1)(ax^2-2)}{x^3}, x>0$.

  当 $a\leqslant 0$ 时, $ax^2-2<0$ 恒成立, 所以由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<1$, 由 $f'(x)<0$ 得 $x>1$, 故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增, 在 $(1,+\infty)$ 上递减.

  当 $0<a<2$ 时, $\sqrt{\frac{2}{a}}>1$, 由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<1$ 或 $x>\sqrt{\frac{2}{a}}$, 由 $f'(x)<0$ 得 $1<x<\sqrt{\frac{2}{a}}$,

  故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增, 在 $\left(1,\sqrt{\frac{2}{a}}\right)$ 上递减, 在 $\left(\sqrt{\frac{2}{a}},+\infty\right)$ 上递增.

  当 $a=2$ 时, $f'(x)=\frac{2(x+1)(x-1)^2}{x^3}\geqslant 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增.

  当 $a>2$ 时,由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<\sqrt{\frac{2}{a}}$ 或 $x>1$, 由 $f'(x)<0$ 得 $\sqrt{\frac{2}{a}}<x$ <1.

题型 2: 含参指、对与多项式混合型导函数

讨论依据: 考虑的范围内是否有零点、零点之间的大小关系.

例 3 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2-bx-1$, 其中 $a,b\in\mathbf{R}$, e 为自然对数的 底数, 设 $g(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数, 求函数 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值.

- 解析

  [解析]由题意, 知 $g(x)=f'(x)=\mathrm{e}^x-2ax-b$, 所以 $g'(x)=\mathrm{e}^x-2a$. 当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时, $g'(x)\geqslant 0$ 在 $[0,1]$ 上恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增, $g(x)_{\min}=g(0)=1-b$.

当 $a\geqslant\frac{\mathrm{e}}{2}$ 时, $g'(x)\leqslant 0$ 在 $[0,1]$ 上恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减, $g(x)_{\min}=g(1)=\mathrm{e}-2a-b$

当 $\frac{1}{2}<a<\frac{\mathrm{e}}{2}$ 时, 令 $g'(x)=0$, 得 $x=\ln(2a)$, 当 $x\in[0,\ln(2a))$ 时, $g'(x)<0$, 当 $x\in(\ln(2a),1]$ 时, $g'(x)>0$,

所以 $g(x)$ 在 $[0,\ln(2a))$ 上单调递减, 在 $(\ln(2a),1]$ 上单调递增, $g(x)_{\min}=g(\ln(2a))=2a-2a\ln(2a)-b$.

当 $a\geqslant\frac{\mathrm{e}}{2}$ 时, $g'(x)\leqslant 0$ 在 $[0,1]$ 上恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减, $g(x)_{\min}=g(1)=\mathrm{e}-2a-b$

当 $\frac{1}{2}<a<\frac{\mathrm{e}}{2}$ 时, 令 $g'(x)=0$, 得 $x=\ln(2a)$, 当 $x\in[0,\ln(2a))$ 时, $g'(x)<0$, 当 $x\in(\ln(2a),1]$ 时, $g'(x)>0$,

所以 $g(x)$ 在 $[0,\ln(2a))$ 上单调递减, 在 $(\ln(2a),1]$ 上单调递增, $g(x)_{\min}=g(\ln(2a))=2a-2a\ln(2a)-b$.

题型 3: 二次求导型

解题要点: 当 $f'(x)$ 不易直接判断符号时, 可二次求导 (本书用 $f''(x)$ 表示 $f'(x)$ 的导函 数), 用 $f''(x)$ 的符号来研究 $f'(x)$ 的单调性, 再判断 $f'(x)$ 的符号,求出 $f(x)$ 的单调 区间.

例 4 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{mx}+x^2-mx$. 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单 调递减, 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

- 解析

  [证明]由题意知 $f'(x)=m\mathrm{e}^{mx}+2x-m$, $f''(x)=m^2\mathrm{e}^{mx}+2>0$, 故 $f'(x)$ 递增.

  又 $f'(0)=0$, 所以当 $x<0$ 时, $f'(x)<0$, 当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$,

  即 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减, 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

专题练习

1. (2014 湖南jiexuan) 已知常数 $a>0$, 函数 $f(x)=\ln(1+ax)-\frac{2x}{x+2}$. 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调性.
2. 设函数 $f(x)=ax^2-a-\ln x$, 其中 $a\in\mathbf{R}$. 讨论 $f(x)$ 的单调性.
3. (2018 新课标 I 卷节选) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$. 讨论 $f(x)$ 的单调性.
4. 已知函数 $f(x)=x\ln x-(a+1)x, x\in[1,\mathrm{e}]$, 其中 e 为自然对数的底数, 求 $f(x)$ 的 最小值.
5. (2016 新课标 I 类节诛) 已知函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+a(x-1)^2$. 讨论 $f(x)$ 的单调性.

6. (2017 年新课标 I 卷节选) 已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^{x}-x$. 讨论 $f(x)$ 的单调性.
7. (2013 新课标 II 卷节洗) 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-\ln(x+m)$. 设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 m 并讨论 $f(x)$ 的单调性.