前 言

“六脉神剑”是金庸武侠小说《天龙八部》中的武功，堪称大理段氏乃至金庸武学世界中最具杀伤力之无上神功，由大理开国皇帝段思平所创。

“六脉神剑”，并非真剑，是以浑厚内力为基础，将六种内力由指尖隔空激发出去，有质无形，是一套将剑意转化为剑气的高深武学。出剑时剑气急如电闪，迅猛绝伦；以气走剑杀人于无形，堪称剑中无敌。

数学中的“六脉神剑”，是我们高中教材中没有的内容，但可以用高中知识推导并使用。学好它，不仅能解决高中的数学中难度较大的问题，而且能快速解答有关高考试题，让你在高考的千军万马中过关斩将，脱颖而出，金榜题名。

剑法名称　【少商剑】剑路雄劲，颇有石破天惊之势

【商阳剑】巧妙灵活，难以捉摸

【中冲剑】大开大阖，气势雄迈

【关冲剑】以拙滞古朴取胜

【少冲剑】轻灵迅速

【少泽剑】忽来忽去，变化精微

【六脉神剑】之一 “关冲剑” 平面法向量的计算方法

平面法向量的计算，传统的方法由于步骤多，花时间又容易出错，所以我们从另一个角度去探讨平面法向量的求法，使计算更简洁、快速.

在平面法向量的计算中，普遍采用的算法是设法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，利用法向量和平面内不共线的两个向量垂直，数量积为 0，建立关于的x,y,z的方程组，再对其中一个变量（如x）取特殊值（不能取 0），计算出其他两个量，从而得到平面的法向量.

事实上还有另一个算法，我们先看一个引理：

若平面 ABC 与空间直角坐标系x轴，y轴，z轴的交点分别为 $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$（其中$a,b,c\neq 0$），则平面 ABC 的法向量$\vec{n}=\lambda\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$，其中$\lambda\neq 0$. λ的值可以根据实际需要取值.

证明：$\overrightarrow{AB}=(-a,b,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-a,0,c)$，所以$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$且$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，取$z=\frac{\lambda}{c}$，

得$\vec{n}=\lambda\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$

这种方法虽然简单，但是要注意以下几个问题：

①若平面和某条坐标轴平行，则可看做是平面和该坐标轴交点的坐标为∞，法向量对应于该轴的坐标为 0.如平面和x轴平行，则和x轴的交点坐标为$(\infty,0,0)$，所以平面的法向量为

$\vec{n}=\lambda\left(0,\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$，若平面同时和$x,y$轴都平行，则平面的法向量为$\vec{n}=\lambda\left(0,0,\frac{1}{c}\right)$

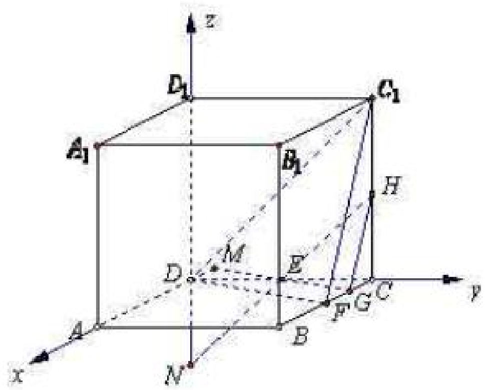
②若平面过坐标原点，则可适当平移平面.

例 1 如图，以正方体顶点 D 为坐标原点，分别以$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{DD_1}$为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系，正方体棱长为 1，E、F 分别为 CD、BC 的中点

（1）求平面AED_1的法向量

（2）求平面A_1AE的法向量

（3）求平面C_1DF的法向量



解：（1）平面 AED_1 与 x 轴、y 轴、z 轴的交点分别为 $(1,0,0)$，$\left(0,\frac{1}{2},0\right)$，$(0,0,1)$，所以其法向量为 $\vec{n}=\lambda(1,2,1)$，取 $\lambda=1$，则 $\vec{n}=(1,2,1)$

（2）平面 A_1AE 与 x 轴、y 轴的交点分别为 $(1,0,0)$，$\left(0,\frac{1}{2},0\right)$，与 z 轴无交点，说明平面与 z 轴平行，所以其法向量为 $\vec{n}=\lambda(1,2,0)$，取 $\lambda=1$，则 $\vec{n}=(1,2,0)$.

（3）因为平面 C_1DF 过坐标原点，因而不能直接用定理，可先平移平面 C_1DF，即找一个平面与平面 C_1DF 平行，取 FC 的中点 G，CC_1 的中点 H，易得平面 EGH // 平面 C_1DF .因为平面 EGH 与 x 轴、y 轴、z 轴的交点分别为 $\left(-\frac{1}{4},0,0\right)$，$\left(0,\frac{1}{2},0\right)$，$\left(0,0,-\frac{1}{2}\right)$，所以其法向量为 $\vec{n}=\lambda(-4,2,-2)$，取 $\lambda=-\frac{1}{2}$，则 $\vec{n}=(2,-1,1)$.

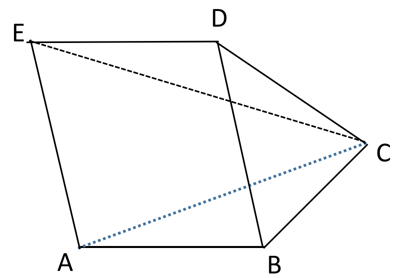
如果平面与轴的交点不方便求，还有不有更通用的呢？这里再给同学们一个公式，设平面内有两条不平行的直线的方向向量分别为 $\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1,z_1)$ 和 $\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2,z_2)$

则平面的法向量 $\vec{n}=\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)=(y_1\cdot z_2-y_2\cdot z_1,-x_1\cdot z_2+x_2\cdot z_1,\ x_1\cdot y_2-x_2\cdot y_1)$

（证明从略）

例 2.　如图，多面体 $ABCDE$ 中，四边形 $ABDE$ 是平行四边 $AB=BC=BD=2$，$AD=DC=\sqrt{6}$.

$\angle CAB=30^0$



（1）证明：平面 $ACD\perp$ 平面 ABC

（2）求 CE 与平面 ABD 所成角的正弦值

解析：（1）取 AC 的中点 O，由 $AB=BC=BD=2$，

$AD=DC=\sqrt{6}$ 得 $OB\perp AC,OD\perp AC$.

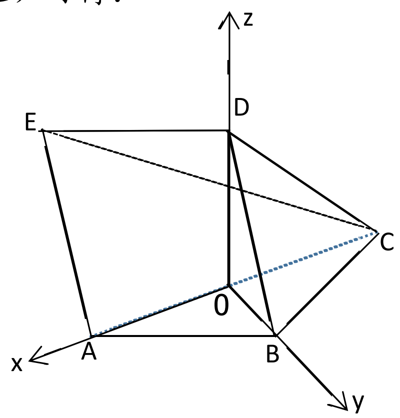
又 $\angle CAB=30^0$，所以 $OB=1,OA=OC=\sqrt{3}$，从而 $OD=\sqrt{3}$.

在 ΔDOB 中，有 $OD^2+OB^2=BD^2$，所以 $OD\perp OB$.

又 $AC,OB\subset$ 面 ABC，且 $AC\cap OB=O$，所以 $OD\perp$ 面 ABC .

又 $OD \subset$ 面 ADC，所以平面 $ACD \perp$ 平面 ABC．

（2）由（1）可建立如图所示的空间直角坐标系，由已知可得：



$C\left(-\sqrt{3},0,0\right)$，$A\left(\sqrt{3},0,0\right)$，$B(0,1,0)$，$D\left(0,0,\sqrt{3}\right)$

则 $\overrightarrow{CD}=\left(\sqrt{3},0,\sqrt{3}\right),\overrightarrow{BA}=\left(\sqrt{3},-1,0\right),\overrightarrow{BD}=\left(0,-1,\sqrt{3}\right)$

因为 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BA}=\left(\sqrt{3},-1,0\right)$ **(九阳神功之【移影换位】)**

所以 $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\left(2\sqrt{3},-1,\sqrt{3}\right)$

设平面 ABD 的法向量为

$$\vec{n}=\lambda\left(\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & \sqrt{3}\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix}\right)=\lambda\left(-\sqrt{3},3,-\sqrt{3}\right)$$

取 $\lambda=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 得 $\vec{n}=\left(1,-\sqrt{3},1\right)$ **（偷天换日）**

设直线 CE 与平面 ABD 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CE}\right|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{4\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{10}$.

所以直线 CE 与平面 ABD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$.