老九课堂 练成高手 超越学霸

**前 言**

“六脉神剑”是金庸武侠小说《天龙八部》中的武功，堪称大理段氏乃至金庸武学世界中最具杀伤力之无上神功，由大理开国皇帝段思平所创。

“六脉神剑”，并非真剑，是以浑厚内力为基础，将六种内力由指尖隔空激发出去，有质无形，是一套将剑意转化为剑气的高深武学。出剑时剑气急如电闪，迅猛绝伦；以气走剑杀人于无形，堪称剑中无敌。

数学中的“六脉神剑”，是我们高中教材中没有的内容，但可以用高中知识推导并使用。学好它，不仅能解决高中的数学中难度较大的问题，而且能快速解答有关高考试题，让你在高考的千军万马中过关斩将，脱颖而出，金榜题名。

**剑法名称**

【少商剑】剑路雄劲，颇有石破天惊之势

【商阳剑】巧妙灵活，难以捉摸【中冲剑】大开大阖，气势雄迈【关冲剑】以拙滞古朴取胜

【少冲剑】轻灵迅速

【少泽剑】忽来忽去，变化精微

老九课堂 练成高手 超越学霸

**【六脉神剑】之一 “关冲剑” 平面法向量的计算方法**

**平面法向量的计算，传统的方法由于步骤多，花时间又容易出错，所以我们从另一个角**

**度去探讨平面法向量的求法，使计算更简洁、快速.**

在平面法向量的计算中，普遍采用的算法是设法向量为*n*  *x*, *y*, *z*，利用法向量和平面内不

共线的两个向量垂直，数量积为 0，建立关于的 *x*, *y*, *z* 的方程组，再对其中一个变量（如 *x* ）

取特殊值（不能取 0），计算出其他两个量，从而得到平面的法向量.

事实上还有另一个算法，我们先看一个引理：

若平面 ABC 与空间直角坐标系 *x* 轴，*y* 轴，*z* 轴的交点分别为 A*a*,0,0,B0,*b*,0,C0,0, *c*（其

中

*a*,*b*, *c* 

0

），则平面 ABC 的法向量

*n*





 

1

*a*

,

1

*b*

,

1

*c*





，其中 0 .的值可以根据实际需要取

值.

证明：

*AB*  

*a*,*b*,0，

*AC*





*a*,0,

*c*

，所以

*n*

 *AB*



0

且

*n*

 *AC*



0

，取

*z*



 ，

*c*

得

*n*





 

1

*a*

,

1

*b*

,

1

*c*





这种方法虽然简单，但是要注意以下几个问题：

①若平面和某条坐标轴平行，则可看做是平面和该坐标轴交点的坐标为 ，法向量对应于该轴的坐标为 0.如平面和 *x* 轴平行，则和 *x* 轴的交点坐标为，0,0，所以平面的法向量为

*n*





 

0,

1

*b*

,

1

*c*





，若平面同时和 *x*, *y* 轴都平行，则平面的法向量为

*n*





 

0,0,

1

*c*





②若平面过坐标原点，则可适当平移平面.

例 1 如图，以正方体顶点 D 为坐标原点，分别以

*DA DC*、*DD*

1

为

*x*、*y*、*z* 轴建立空间直角坐标系，正方

体棱长为 1，E、F 分别为 CD、BC 的中点

（1）求平面

*AED* 的法向量

1

（2）求平面 *A*1 *AE* 的法向量

（3）求平面*C*1*DF* 的法向量

1

老九课堂 练成高手 超越学霸

解：（1）平面

1





1 

0 2，0

，0,0,1，所以其法向

量为*n*  1,2,1，取 1 ，则*n*  1,2,1

*A*1 与 *x* 轴、*y* 轴的交点分别为1,0,0，

（2）平面 *AE* 

1 

0 2，0

，与 *z* 轴无交点，说明平面与 *z* 轴

平行，所以其法向量为*n*  1,2,0，取 1 ，则*n*  1,2,0 .

（3）因为平面*C*1*DF* 过坐标原点，因而不能直接用定理，可先平移平面 *DF* ，即找一个平

面与平面*C*1*DF* 平行，取 *FC* 的中点*G* ，*CC*1 的中点 *H* ，易得平面 *EGH* // 平面*C*1*DF* .因为平

面 *EGH* 与 *x* 轴、 *y* 轴、*z* 轴的交点分别为

  1 ,0,0

 4 

，





1 

0 2，0

，





1

0,0, 2





，所以其法向量为

*n*

 

4,2,2

，取



1

2

，则*n*  2,1,1.

**如果平面与轴的交点不方便求，还有不有更通用的呢？这里再给同学们一个公式，设平面内**

**有两条不平行的直线的方向向量分别为** *AB*  *x*1, *y*1, *z*1 **和** *AC*  *x*2 , *y*2 , *z*2 

**则平面的法向量**

*n*









*y*

1

*y*

2

*z*

1

*z*

2

,

*x*

1

*x*

2

*z*

1

*z*

2

,

*x*

1

*x*

2

*y*

1

*y*

2









*y*1



*z*2



*y*2



*z* ，

1

*x*

1



*z*2



*x*

2



*z* ，*x*

1 1



*y*2



*x*

2



*y*

1



**（证明从略）**

E D

例 2. 如图，多面体 *ABCDE* 中，四边形 *ABDE* 是

平行四边 *AB*  *BC*  *BD*  2 , *AD*  *DC*  6 . C

*CAB*  300

（1）证明：平面

*ACD*  平面 *ABC*

A

B

（2）求*CE* 与平面 *ABD* 所成角的正弦值

解析：（1）取 *AC* 的中点*O* ，由 *AB*  *BC*  *BD*  2 ,

*AD*  *DC*  6 得*OB*  *AC*,*OD*  *AC* .

又*CAB*  300 ，所以*OB*  1,*OA*  *OC*  3 ,从而*OD*  3 .

在*DOB* 中，有*OD*2  *OB*2  *BD*2 ,所以*OD*  *OB* .

又 *AC*,*OB*  面 *ABC* ,且 *AC* *OB*  *O* ,所以*OD*  面 *ABC* .

2

老九课堂 练成高手 超越学霸

又*OD*  面 *ADC* ,所以平面 *ACD*  平面 *ABC* .

（2）由（1）可建立如图所示的空间直角坐标系，由已知可得：

*C* 3,0,0， *A* 3,0,0, *B*0,1,0, *D*0,0, 3  z

则*CD*   3,0, 3 , *BA*   3,1,0, *BD*  0,1, 3  E D

因为 *DE*  *BA*   3,1,0**(九阳神功之**【**移影换位**】**）** C

所以*CE*  *CD*  *DE*  2 3,1, 3  O

设平面 *ABD* 的法向量为 x A B

*n*





 



1

1

0

3

,

3

0

0

3

,

3

0

1

1







 

3,3,

3



y

取



1

3

得*n*  1,

3,1**（偷天换日）**

设直线*CE* 与平面 *ABD* 所成的角为，则

sin

*n*

*n*





*CE*

*CE*



2

4 

3

5



15

10

.

所以直线*CE* 与平面 *ABD* 所成角的正弦值为

15 .

10

3