MODELO LINEAL DE OPTIMIZACIÓN DE LA GANANCIA EN UNA FÁBRICA DE BICICLETAS

Matías González Virgili - matiagonzalez@itba.edu.ar
Paula González - paulgonzalez@itba.edu.ar

Instituto Tecnológico de Buenos Aires

Resumen

El presente estudio aborda un análisis enfocado en el aumento del market share de la empresa Argen Bike mediante la aplicación de técnicas de programación lineal. El objetivo radica en evaluar la producción de los dos modelos de bicicletas de la compañía, considerando diversas estrategias de precio y procesos de manufactura. Dicho análisis se ejecutó empleando la herramienta Solver de Microsoft Excel. El proceso culminó en la construcción de un modelo matemático respaldado por el algoritmo Simplex LP, donde suposiciones estratégicas facilitaron la interpretación, simplificación y modelado de la realidad. Como resultado, se logró una solución óptima al maximizar la función objetivo que detalla las ganancias totales de la empresa, mientras se mantienen ciertas restricciones.

Palabras clave

Programación Lineal, Método Simplex, Modelo Matemático, Optimización, Maximización, Ganancias.

Abstract

The present study addresses an analysis focused on increasing the market share of Argen Bike company through the application of linear programming techniques. The objective lies in evaluating the production of the company's two bicycle models, considering various pricing strategies and manufacturing processes. This analysis was carried out utilizing the Microsoft Excel Solver tool. The process culminated in the construction of a mathematical model supported by the Simplex LP algorithm, where strategic assumptions facilitated the interpretation, simplification, and modeling of reality. As a result, an optimal solution was achieved by maximizing the objective function detailing the total profits of the company, while certain constraints are maintained.

Key words

Linear Programming, Simplex Method, Mathematical Model, Optimization, Maximization, Profits.

1. Introducción

Con el ingreso de la nueva línea de bicicletas de montaña de Argen Bike, en este trabajo se busca el mix de producción entre las bicicletas de montaña y sus clásicas bicicletas de ruta que maximice las ganancias de la empresa, teniendo en cuenta su relación costo-ganancias, la cantidad de horas hombre de pintado y ensamblado que conlleva hacer cada bicicleta, la cantidad de pintura utilizada y la demanda limitada de las bicicletas de montaña. Se plantean diferentes escenarios posibles y se otorga una respuesta concisa de cómo responder ante estas situaciones de la forma más efectiva. Para realizar este trabajo, se modeliza este caso utilizando programación lineal simple, con la utilización de Excel Solver.

En la siguiente *Figura 1.1*, se observa el diagrama de proceso de la fabricación de bicicletas.

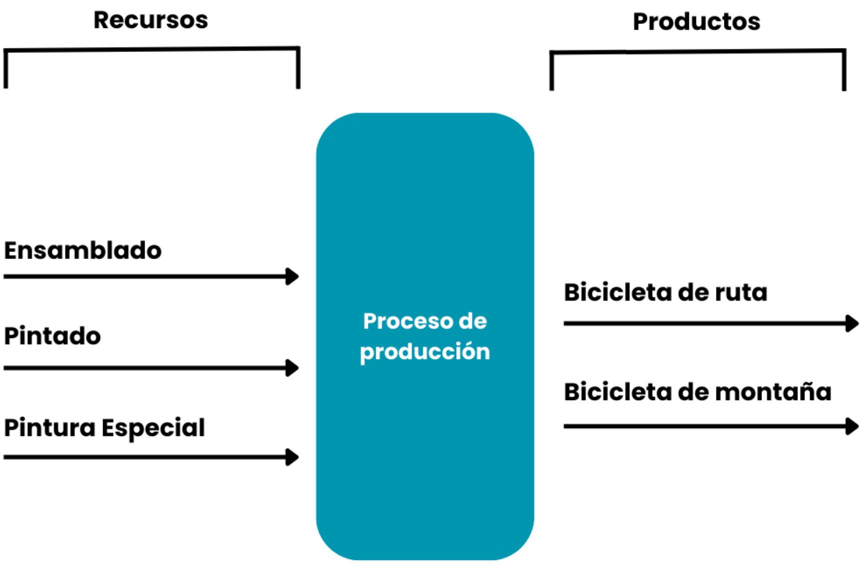

Figura 1.1: Diagrama de proceso de fabricación de bicicletas

2. Desarrollo del caso de estudio

Tal como se ha indicado previamente, la búsqueda del equilibrio de producción óptimo para maximizar los ingresos, en línea con las suposiciones efectuadas, dio lugar al desarrollo de un enfoque basado en un modelo matemático. Este enfoque se fundamenta en funciones lineales, lo que facilita la implementación de algoritmos de solución. A continuación, se exponen los aspectos esenciales del modelo primario asociado a un escenario típico.

2.1. Variables de decisión y datos

Las variables del modelo abarcan la cantidad de bicicletas de ruta y montaña a producir.

x_1 : Cantidad de bicicletas de ruta producidas por ArgenBike (unidades)
x_2 : Cantidad de bicicletas de montaña producidas ArgenBike (unidades)

Para cada modelo, se cuenta con información detallada acerca del precio de venta y la utilización de recursos, tal como se describe a continuación en la *Tabla 2.1.1*.

Producto	Ganancia ($/u)	Tiempo de ensamblado por unidad (horas)	Tiempo de pintado por unidad (horas)	Pintura por unidad (litros)
Bicicletas de ruta	31500	2.5	1.5	1/10
Bicicletas de montaña	50400	4.5	2.5	1/12

Tabla 2.1.1: El precio de las bicicletas y la utilización de los recursos

2.2. Restricciones

Se definieron seis restricciones principales que se detallan a continuación.

a. El sector de ensamblado tiene una capacidad de 18500 horas de mano de obra al mes y se representa de la siguiente forma:

$$2.5x_1 + 4.5x_2 \leq 18500$$

b. El sector de pintado, en cambio, tiene una capacidad de 12,000 horas al mes y se representa de la siguiente forma:

$$1.5x_1 + 1.5x_2 \leq 12000$$

c. Ingresan 450 litros de pintura especial de un proveedor canadiense, necesitando 1 litro de pintura cada 10 bicicletas de ruta y 1 litro cada 12 bicicletas de montaña y esto se representa de la siguiente forma:

$$\frac{1}{10}x_1 + \frac{1}{12}x_2 \leq 450$$

d. Para las bicicletas de montaña, se espera que la demanda mensual esté limitada a 4200 unidades y se representa de la siguiente manera:

$$x_2 \leq 4200$$

e. La cantidad de bicicletas producidas tiene que ser un número positivo y para eso aplicamos las siguientes restricciones.

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

2.3. Función objetivo

El objetivo consiste en maximizar la función objetivo que representa las ganancias totales de la empresa, denotada como "Z". Esta magnitud se calcula mediante el siguiente procedimiento.

$$Z = 31500x_1 + 50400x_2$$

3. Resultados

En esta sección, se presentarán los resultados derivados de los problemas de maximización de ganancias, considerando las condiciones específicas de cada caso en particular.

3.1. Escenario 1

En este escenario 1, se persigue encontrar la combinación de producción óptima para ambos modelos de bicicletas, con el propósito de maximizar las ganancias, teniendo en cuenta las restricciones delineadas en la sección previa.

x_1	x_2	Z
2000	3000	$214.200.000

Tabla 3.1.1: Resultados para el escenario típico, sujeto a las condiciones mencionadas en la sección 2.

Analizando los resultados obtenidos en la *Tabla 3.1.1*, se puede decir que para maximizar las ganancias, hay que producir 2000 bicicletas de ruta y 3000 de montaña, lo cual resulta en una ganancia de $214.200.000.

3.2. Escenario 2

En este apartado, se plantea la posibilidad de la implementación de una campaña publicitaria, la cual costaría $40.000.000, pero incrementa la demanda de las bicicletas de montaña en un 15%. Esto implica una modificación al modelo original, en donde se debe modificar la restricción de demanda y la función objetivo.

La nueva función objetivo resultaría ser:

$$Z = 31500x_1 + 50400x_2 - 40000000$$

La nueva restricción de demanda resultaría ser modificada en:

$$x_2 \leq 4200 * (1.15)$$

Dados estos cambios, se ejecutó nuevamente el Solver y se obtuvieron los siguiente resultados visualizados en la *Tabla 3.2.1*.

x_1	x_2	Z
2000	3000	$174.200.000

Tabla 3.2.1: Resultados del modelo si se implementa campaña publicitaria.

A partir de estos hallazgos, se infiere que, a pesar de la implementación de la campaña publicitaria, el balance de producción permanece inalterado y, de manera notable, las ganancias totales experimentan una reducción de $40.000.000 en comparación con el modelo original. Esto conduce a la conclusión de que la ejecución de esta campaña publicitaria no se considera ventajosa.

3.3. Escenario 3

En esta sección se plantea la cuestión de determinar la inversión financiera óptima para aumentar la capacidad de horas-hombre en ensamblaje y pintura en un 25%. Esta acción implica la modificación de ciertas restricciones en comparación con el modelo original.

La nueva restricción del ensamblado quedaría de la siguiente manera:

$$2.5x_1 + 4.5x_2 \leq 18500 * (1.25)$$

La nueva restricción del pintado quedaría de la siguiente manera:

$$1.5x_1 + 2.5x_2 \leq 12000 * (1.25)$$

Dados estos cambios, se ejecutó nuevamente el Solver y se obtuvieron los siguiente resultados visualizados en la *Tabla 3.3.1*.

x_1	x_2	Z
1000	4200	$243180000

Tabla 3.3.1: Resultados del modelo si se incrementa el límite de horas hombre en ensamblado y pintura.

Considerando estos resultados junto con los obtenidos a partir del modelo original, la disparidad en las ganancias totales Z refleja el margen financiero máximo viable para aumentar el tiempo dedicado a la mano de obra. Esta divergencia se establece en $28.980.000.

3.4. Escenario 4

Se procede a reconsiderar la viabilidad de implementar la campaña publicitaria presentada en la sección 3.2, en conjunción con la ampliación de la capacidad de horas-hombre de la sección 3.3. El propósito consiste en determinar si es prudente proceder con esta iniciativa, para lo cual es esencial combinar las modificaciones delineadas previamente y evaluar si las ganancias resultantes superan o disminuyen en comparación con el modelo original.

La nueva función objetivo resultaría ser:

$$Z = 31500x_1 + 50400x_2 - 40000000$$

La nueva restricción de demanda resultaría ser modificada en:

$$x_2 <= 4200 * (1.15)$$

La nueva restricción del ensamblado quedaría de la siguiente manera:

$$2.5x_1 + 4.5x_2 \leq 18500 * (1.25)$$

La nueva restricción del pintado quedaría de la siguiente manera:

$$3x_1 + 5x_2 \leq 12000 * (1.25)$$

Dados estos cambios, se ejecutó nuevamente el Solver y se obtuvieron los siguiente resultados visualizados en la *Tabla 3.4.1*.

x_1	x_2	Z
475	4830	$218394500

Tabla 3.4.1: Resultados del modelo si se incrementa el límite de horas hombre en ensamblado y pintura mientras que se incrementa la campaña publicitaria.

Al analizar los resultados de la *Tabla 5*, se observa un aumento de $4.194.500 en las ganancias de este modelo en comparación con el original. Por ende, en esta suposición hipotética, resulta aconsejable proceder con la ejecución de la campaña publicitaria.

3.5. Escenario 5

La siguiente cuestión a abordar radica en la optimización de las ganancias en escenarios de posibles huelgas, lo que conlleva a que todos los procesos de manufactura requieren el doble del tiempo habitual.

La nueva restricción del ensamblado quedaría de la siguiente manera:

$$5x_1 + 9x_2 \leq 18500$$

La nueva restricción del pintado quedaría de la siguiente manera:

$$3x_1 + 5x_2 \leq 12000$$

Dados estos cambios, se ejecutó nuevamente el Solver y se obtuvieron los siguiente resultados visualizados en la *Tabla 3.5.1*.

x_1	x_2	Z
3700	0	$116550000

Tabla 3.5.1: Resultados del modelo al incrementar el tiempo de trabajo que conlleva cada bicicleta

A partir de la Tabla 3.5.1, se desprende que en el hipotético caso de una huelga, las ganancias disminuirían en $126.630.000, lo que equivale a una reducción del 52.07%. A continuación, surge la cuestión de si resulta beneficioso contratar personal adicional y, en caso afirmativo, cuál sería el costo por hora. Para abordar este interrogante, es esencial explorar el análisis de sensibilidad del modelo (véase Figura 7.6). En esta representación, se destaca que el precio sombra de las horas de pintura es nulo, indicando que, sin importar la cantidad de pintores contratados, los ingresos generados no se alterarían, lo cual sugiere que no sería conveniente contratar en esta área.

Por contraste, el precio sombra asignado a las horas de ensamblaje es de 6300. Esto implica que cada hora dedicada al ensamblaje aporta un incremento de $6300 a las ganancias de la empresa. En consecuencia, se establece la posibilidad de contratar trabajadores para el ensamblaje por un costo de hasta $6300 por hora.

3.6. Escenario 6

En este contexto, se persigue potenciar la presencia de ArgenBike en el segmento de mercado de las bicicletas de montaña, con el objetivo de abarcar, como mínimo, el 80% de la demanda en esta categoría. No obstante, esta determinación se ejecuta únicamente si no da como resultado una pérdida superior a $2.000.000 en comparación con el modelo original.

La nueva restricción de demanda resultaría ser modificada en:

$$4200 * 0.8 \leq x_2 \leq 4200$$

Dados estos cambios, se ejecutó nuevamente el Solver y se obtuvieron los siguiente resultados visualizados en la *Tabla 3.6.1*.

x_1	x_2	Z
1352	3360	$211932000

Tabla 3.6.1: Resultados del modelo al incrementar el tiempo de trabajo que conlleva cada bicicleta

Al comparar los beneficios de este modelo y el original, la diferencia es de $2.268.000, la cual al ser mayor que 2 millones, se concluye no cubrir una demanda mínima para las bicicletas de montaña.

4. Reflexiones acerca del cumplimiento de los supuestos de la programación lineal

Previo a abordar la adaptación del escenario propuesto para concordar con los supuestos de la programación lineal, es esencial brindar una concisa explicación y enumeración de dichos supuestos.

1. Proporcionalidad: Este supuesto rige tanto para las restricciones funcionales como para la función objetivo. Su finalidad es garantizar que la aportación de cada actividad sea proporcional al grado de implicación de dicha actividad. Se traduce en la exclusión de cualquier exponente que no sea 1 en las variables en los términos de las funciones.
2. Aditividad. Este supuesto se encarga de eliminar los productos cruzados ya que “cada función de un modelo de programación lineal (ya sea la función objetivo o el lado izquierdo de las restricciones funcionales) es la suma de las contribuciones

individuales de las actividades respectivas.” (Introducción a la Investigación de Operaciones, Hieller & Lieberman, 2010, p 35)

3. Divisibilidad: “En un modelo de programación lineal, las variables de decisión pueden tomar cualquier valor, incluso valores no enteros, que satisfagan las restricciones funcionales y de no negatividad. En consecuencia, estas variables no están restringidas a sólo valores enteros. Como cada variable de decisión representa el nivel de alguna actividad, se supondrá que las actividades se pueden realizar a niveles fraccionales.” (Introducción a la Investigación de Operaciones, Hieller & Lieberman, 2010, p 37)
4. Certidumbre: “Se supone que los valores asignados a cada parámetro de un modelo de programación lineal son constantes conocidas.” (Introducción a la Investigación de Operaciones, Hieller & Lieberman, 2010, p 37)

Abordando el estudio de caso, es evidente que el supuesto de proporcionalidad halla cumplimiento, ya que la actividad de producción de bicicletas y las ganancias están directamente relacionadas con la cantidad de bicicletas manufacturadas. En cuanto al segundo supuesto, el de aditividad, también se satisface. Esto se manifiesta tanto en la función objetivo, donde las ganancias totales se construyen por la suma de las ganancias de las bicicletas de ruta y montaña, como en las restricciones que se conforman a partir de la suma de los recursos empleados. Por otro lado, el tercer supuesto, el de divisibilidad, también se verifica al no imponer restricciones de que las variables sean enteras, mientras que éstas siguen respetando las limitaciones funcionales y de no negatividad. Por último, cada valor asignado a los parámetros dentro del modelo de programación lineal se erige como constante conocida y precisa, gracias a la comprensión detallada de las características inherentes al problema.

En el contexto del modelo de programación lineal diseñado para abordar el problema de maximización, es importante reconocer que este enfoque tiende a simplificar ciertos aspectos fundamentales de la realidad para proporcionar una solución eficiente. Principalmente, se simplifica la naturaleza continua de las variables, lo que implica que las cantidades fraccionarias pueden representar cantidades discretas en la realidad. Además, el modelo asume relaciones lineales entre las variables y los resultados, lo que podría no capturar completamente algunas interacciones no lineales que podrían presentarse en situaciones más complejas.

En resumen, al optar por un modelo de programación lineal, se sacrifica cierto nivel de detalle y complejidad en aras de obtener una solución rápida y óptima, lo que puede limitar la capacidad del modelo para abordar completamente las sutilezas de la realidad.

5. Conclusiones

Repasando el conjunto de las secciones expuestas, a partir del modelo original, la estrategia óptima para maximizar las ganancias implica la producción de 2000 bicicletas de ruta y 3000 bicicletas de montaña, logrando un beneficio de $214.200.000.

A su vez, se revela que la implementación de una campaña publicitaria no resulta conveniente, ya que su ejecución conlleva una pérdida de $40.000.000 en comparación con el modelo que prescinde de dicha campaña. No obstante, esta situación puede cambiar si se acompaña de un aumento del 25% en la capacidad de horas-hombre, lo que resultaría en un incremento de ganancias de $4.194.500.

En el contexto de la contingencia de una huelga, se proyecta una pérdida estimada de $126.630.000, a menos que se opte por la contratación de mano de obra específica para el ensamblaje, con un límite de inversión de hasta $6300 por hora de trabajo.

Por último, se plantea la meta de abarcar, como mínimo, el 80% de la demanda en el segmento de bicicletas de montaña. No obstante, esta estrategia solo se implementará si la pérdida asociada no supera los $2.000.000. Sin embargo, el resultado óptimo del modelo para esta condición se cifra en $2.268.000, por lo que se decide mantener la estructura del modelo original.

6. Bibliografía

Hieller, F. S. & Lieberman, G. J. (2010). Introducción a la programación lineal. Introducción a la Investigación de Operaciones. México: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V

7. Anexo

Datos del Problema					
Bicicletas	Cantidad	Ganancia	Ensamblado c/u (hrs)	Pintado c/u (hrs)	Pintura (litros)
De ruta	2000	31500	2.5	1.5	0.1
De montaña	3000	50400	4.5	2.5	0.0833333333333

Proceso	Capacidad
Ensamblado (hrs)	18500
Pintado (hrs)	12000
Pintura (litros)	450
Demanda bici montaña	4200

Variables
R = Cantidad de bicicletas de ruta producidas
M = Cantidad de bicicletas de montaña producidas

Restricciones			
2.5R + 4.5M	18500	<=	18500
1.5R + 2.5M	10500	<=	12000
0.1R + 0.083M	450	<=	450
M	3000	<=	4200
R	2000	>=	0
M	3000	>=	0

Funcion Funcional	
Maximizar ganancias	
Z = ganancias	
Z = 31500R + 50400M	214200000

Figura 7.1: Hoja de cálculo utilizada para ejecutar el Solver para el Escenario 1

Datos del Problema

Bicicletas	Cantidad	Ganancia	Ensamblado c/u (hrs)	Pintado c/u (hrs)	Pintura (litros)
De ruta	2000	31500	2.5	1.5	0.1
De montaña	3000	50400	4.5	2.5	0.0833333333333

Proceso	Capacidad
Ensamblado (hrs)	18500
Pintado (hrs)	12000
Pintura (litros)	450

Demanda bici montaña	4830

Variables

R = Cantidad de bicicletas de ruta producidas

M = Cantidad de bicicletas de montaña producidas

Restricciones

2.5R + 4.5M	18500	<=	18500
1.5R + 2.5M	10500	<=	12000
0.1R + 0.083M	450	<=	450
M	3000	<=	4830
R	2000	>=	0
M	3000	>=	0

Funcion Funcional

Maximizar ganancias

Z = ganancias

Z = 31500R + 50400M - 40000000	174200000

Figura 7.2: Hoja de cálculo utilizada para ejecutar el Solver para el Escenario 2

Datos del Problema					
Bicicletas	Cantidad	Ganancia	Ensamblado c/u (hrs)	Pintado c/u (hrs)	Pintura (litros)
De ruta	1000	31500	2.5	1.5	0.1
De montaña	4200	50400	4.5	2.5	0.0833333333333

Proceso	Capacidad
Ensamblado (hrs)	23125
Pintado (hrs)	15000
Pintura (litros)	450
Demanda bici montaña	4200

Variables
R = Cantidad de bicicletas de ruta producidas
M = Cantidad de bicicletas de montaña producidas

Restricciones			
2.5R + 4.5M	21400	<=	23125
1.5R + 2.5M	12000	<=	15000
0.1R + 0.083M	450	<=	450
M	4200	<=	4200
R	1000	>=	0
M	4200	>=	0

Funcion Funcional	
Maximizar ganancias	
Z = ganancias	
Z = 31500R + 50400M	243180000

Cuanto estoy dispuesto a pagar, como maximo, por el incremento del 25% de mano de obra?	28980000

Figura 7.3: Hoja de cálculo utilizada para ejecutar el Solver para el Escenario 3

Datos del Problema

Bicicletas	Cantidad	Ganancia	Ensamblado c/u (hrs)	Pintado c/u (hrs)	Pintura (litros)
De ruta	475	31500	2.5	1.5	0.1
De montaña	4830	50400	4.5	2.5	0.0833333333333

Proceso	Capacidad
Ensamblado (hrs)	23125
Pintado (hrs)	15000
Pintura (litros)	450

Demanda bici montaña	4830

Variables

R = Cantidad de bicicletas de ruta producidas

M = Cantidad de bicicletas de montaña producidas

Restricciones

2.5R + 4.5M	22922.5	<=	23125
1.5R + 2.5M	12787.5	<=	15000
0.1R + 0.083M	450	<=	450
M	4830	<=	4830
R	475	>=	0
M	4830	>=	0

Funcion Funcional

Maximizar ganancias

Z = ganancias

Z = 31500R + 50400M-40000000	218394500

4194500 Es conveniente hace la campaña en esta situacion.

Figura 7.4: Hoja de cálculo utilizada para ejecutar el Solver para el Escenario 4

Datos del Problema

Bicicletas	Cantidad	Ganancia	Ensamblado c/u (hrs)	Pintado c/u (hrs)	Pintura (litros)
De ruta	3700	31500	5	3	0.1
De montaña	0	50400	9	5	0.0833333333333

Proceso	Capacidad
Ensamblado (hrs)	18500
Pintado (hrs)	12000
Pintura (litros)	450

Demanda bici montaña	4200

Variables

R = Cantidad de bicicletas de ruta producidas

M = Cantidad de bicicletas de montaña producidas

Restricciones

5R + 9M	18500	<=	18500
3R + 5M	11100	<=	12000
0.1R + 0.083M	370	<=	450
M	0	<=	4200
R	3700	>=	0
M	0	>=	0

Funcion Funcional

Maximizar ganancias

Z = ganancias

Z = 31500R + 50400M	116550000

Cual es el impacto de las ausencias en los resultados?	-97650000	Bajan las ganancias
Convendrá contratar empleados eventuales fuera del convenio?	Observando los resultados del reporte de sensibilidad, se puede decir que solo se necesitan mas empleados para el proceso de ensamblado.	
	Al ser 6300 el precio sombra del ensamblado, se debería pagar 6300 la hora de ensamblado.	

Figura 7.5: Hoja de cálculo utilizada para ejecutar el Solver para el Escenario 5

Microsoft Excel 16.0 Sensitivity Report
Worksheet: [Caso 1.xlsx]f)
Report Created: 8/25/2023 10:48:31 AM

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
B4	De ruta Cantidad	3700	0	31500	1E+30	3500
B5	De montaña Cantidad	0	0	50400	6300	1E+30

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
B19	2.5R + 4.5M Capacidad	18500	6300	18500	1500	18500
B20	1.5R + 2.5M Capacidad	11100	0	12000	1E+30	900
B21	0.1R + 0.083M Capacidad	370	0	450	1E+30	80
B22	M Capacidad	0	0	4200	1E+30	4200
B23	R Capacidad	3700	0	0	3700	1E+30
B24	M Capacidad	0	-6300	0	2055.555556	0

Figura 7.6: Análisis de sensibilidad realizado para obtener más detalles del Escenario 5

Datos del Problema

Bicicletas	Cantidad	Ganancia	Ensamblado c/u (hrs)	Pintado c/u (hrs)	Pintura (litros)
De ruta	1352	31500	2.5	1.5	0.1
De montaña	3360	50400	4.5	2.5	0.0833333333333

Proceso	Capacidad
Ensamblado (hrs)	18500
Pintado (hrs)	12000
Pintura (litros)	450
Demanda bici montaña	4200

Variables

R = Cantidad de bicicletas de ruta producidas

M = Cantidad de bicicletas de montaña producidas

Restricciones

2.5R + 4.5M	18500	<=	18500
1.5R + 2.5M	10428	<=	12000
0.1R + 0.083M	415.2	<=	450
M	3360	<=	4200
R	1352	>=	0
M	3360	>=	0
M	3360	>=	3360

Funcion Funcional

Maximizar ganancias

Z = ganancias

Z = 31500R + 50400M 211932000

Conviene hacer la inversión? 2268000

No conviene realizar la inversión ya que agregando la nueva rest5riccion se pierde 2268000 lo cual es mas que los 2 millones que estan de tope como perdida permitida.

Figura 7.7: Hoja de cálculo utilizada para ejecutar el Solver para el Escenario 6