PROGRAMACIÓN LINEAL Y REDES PARA EL CASO DE RESCATANDO A UCRANIA

Santiago Trezza- strezza@itba.edu.ar
Paula González - paulgonzalez@itba.edu.ar

Instituto Tecnológico de Buenos Aires

Resumen

En este paper, se abordan los desafíos logísticos y estratégicos que enfrenta el presidente de los Estados Unidos, Joe Biden, en respuesta a una crisis en la República Popular Ucraniana, donde el comandante Vladimir Putin lidera una revolución comunista. La narrativa se centra en la optimización de rutas y recursos para transportar tropas y suministros desde Estados Unidos a Ucrania, mientras se consideran restricciones políticas y legislativas. A través de modelos matemáticos y técnicas de optimización, se busca ofrecer soluciones a estos desafíos logísticos y políticos, contribuyendo así a una mejor comprensión de la toma de decisiones en situaciones de crisis geopolítica.

Palabras clave

Programación Lineal, Modelo Matemático, Optimización, Minimización, Redes, Transporte, Variables Binarias, LINGO.

Abstract

This paper addresses fictitious logistical and strategic challenges faced by the President of the United States, Joe Biden, in response to a hypothetical crisis in the People's Republic of Ukraine, where Commander Vladimir Putin leads a communist revolution. The narrative focuses on optimizing routes and resources to transport troops and supplies from the United States to Ukraine, while considering political and legislative constraints. Through mathematical models and optimization techniques, solutions to these logistical and political challenges are sought, thereby contributing to a better understanding of decision-making in geopolitical crisis situations.

Key words

Linear Programming, Mathematical Model, Optimization, Minimization, Networks, Transportation, Binary Variables, LINGO.

1. Introducción

En el contexto del conflicto bélico entre Rusia y la República Popular Ucraniana, se observa una situación en la que las fuerzas militares bajo el mando del Presidente ruso, Vladimir Putin, han logrado la ocupación de siete ciudades de importancia estratégica. Estas ciudades incluyen Donetsk, Sumi, Lugansk, Mariúpol, Jersón, Járkov y Mikolaiv, consolidando así una presencia significativa en la región.

No obstante, se evidencia la intención de Putin de expandir su control sobre el territorio ucraniano, y en tal sentido, se ha trazado como objetivo la conquista de dos urbes adicionales de considerable relevancia, a saber, Lutsk, Kiev y Odesa, lo que implicaría un agravamiento del conflicto y un posible cambio en el equilibrio de poder en la región.

En paralelo, del otro lado del Océano Pacífico, el Presidente de los Estados Unidos, Joe Biden, ha emitido una respuesta diligente ante la escalada del conflicto en Europa del Este. La administración estadounidense se encuentra comprometida en brindar asistencia militar y humanitaria a las ciudades ucranianas que aún no han sido sometidas bajo el control ruso. Con celeridad, se ha planteado la necesidad de coordinar el envío de tropas y suministros a las áreas afectadas.

Para llevar a cabo este proceso de despliegue y asistencia en una escala transatlántica, resulta imprescindible considerar la implementación de una logística efectiva y eficiente. A tal efecto, se requieren 3 categorías de transportes que presentan características específicas, con el propósito de garantizar un aprovisionamiento adecuado y la seguridad de las operaciones militares y humanitarias en curso. Estas categorías de transporte se detallan a continuación en la *Figura 2.1*.

Tipo de Transporte	Capacidad	Velocidad
Avión	150 ton	650 Km/hora
Barco	240 ton	55 Km/hora
Camión	16,000 Kg	95 Km/hora

Figura 2.1

Para llevar los suministros y las tropas a las ciudades de Lutsk, Kiev y Odesa, es necesario utilizar aeródromos y puertos específicos de la OTAN. Estos puntos están claramente marcados en la *Figura 2.2*.

Puertos	Aeropuertos
Nápoles	Londres
Hamburgo	Berlín
Rotterdam	Estambul

Figura 2.2

En la operación, los barcos descargan suministros y tropas en puertos designados. Luego, camiones transportan estos recursos a las ciudades de Lutsk, Kiev y Odesa. Por otro lado, los aviones aterrizan en aeródromos para recargar combustible antes de continuar su viaje hacia las mismas ciudades. Esta estrategia garantiza un flujo eficiente de recursos y personal militar a los destinos deseados.

2. Planteo de la red de rutas

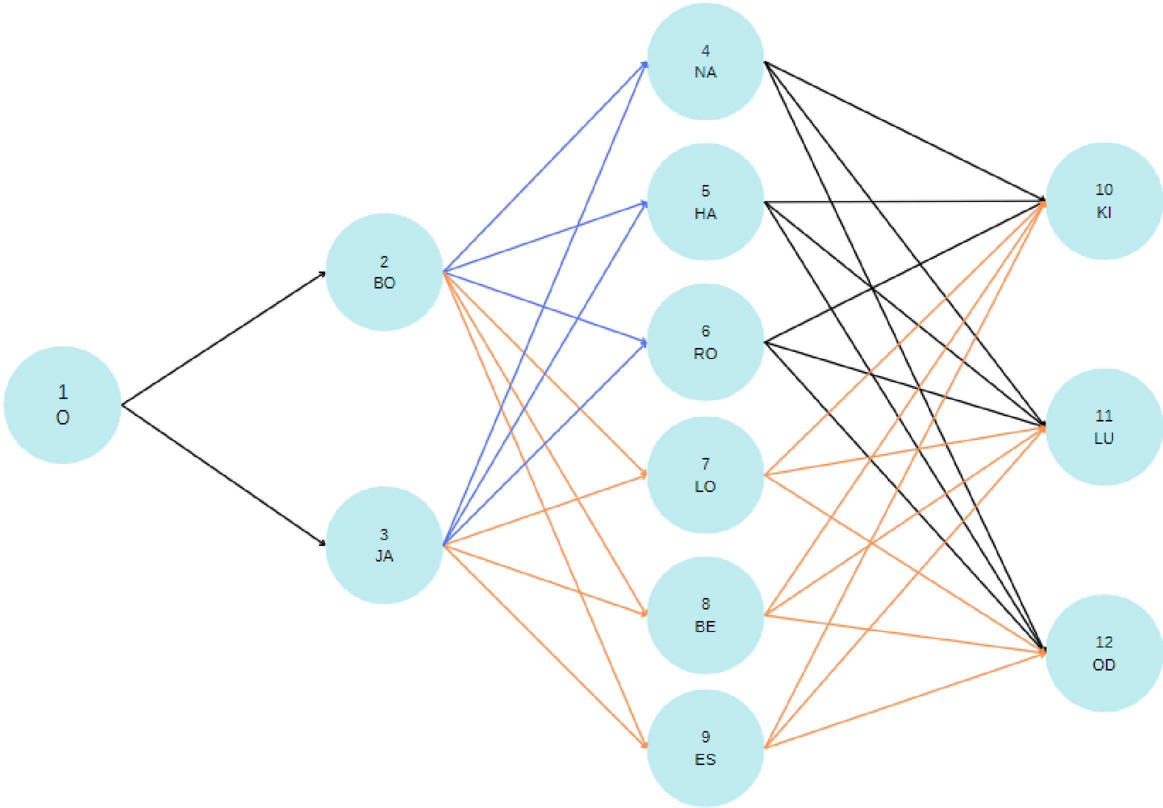

Figura 2.3

La red de la *Figura 2.3* ilustra las rutas potenciales utilizadas para transportar tropas y suministros desde los Estados Unidos a las ciudades objetivo en Ucrania. Los nodos celestes identifican las ciudades involucradas en el proceso, incluyendo ciudades de salida como Boston y Jacksonville, ciudades de tránsito (Nápoles siendo NA, Hamburgo siendo HA, Rotterdam siendo RO, Londres siendo LO, Berlín siendo BE y Estambul siendo ES) y ciudades de destino (Kiev, Lutsk y Odesa). Todos estos nodos fueron designados con un número para poder identificarlos más tarde en el planteo matemático.

En cuanto a los arcos, estos se presentan de diferentes colores que representan los diferentes medios de transporte utilizados. Los arcos azules indican rutas marítimas utilizadas por barcos que atracan en puertos designados por la OTAN como puntos de descarga en Europa. Después de llegar a esos puertos, el transporte se realiza mediante camiones con sistema de carga paletizada, representados por arcos negros, para llevar la carga a las ciudades ucranianas. Por último, los arcos naranjas representan vuelos de aviones hacia aeropuertos de la OTAN para recargar combustible antes de continuar hacia las ciudades objetivo en la República Popular Ucraniana.

Se agregará un nodo de origen único al modelo para tener un único nodo del cual el flujo surja. Este estará conectado a Boston y Jacksonville pero con la capacidad del arco en cero, pues es solo para necesidades prácticas del modelo y no influye en la optimización.

3. Planteo del modelo matemático

El líder de los Estados Unidos ha comunicado su compromiso absoluto en la ejecución de esta operación, enfatizando que los costos no serán un obstáculo y que se emplearán todos los recursos disponibles, incluyendo aviones, barcos y camiones, en la magnitud que sea requerida para llevar a cabo la transferencia de tropas y suministros. Además, ha enfatizado que no existen limitaciones cuantitativas en cuanto a la cantidad de tropas y carga que pueden ser desplazadas entre las ciudades objetivo.

Dada las distancias en kilómetros y las velocidades proporcionadas, con el fin de calcular de manera precisa los tiempos de tránsito entre los segmentos de la operación, se manifiesta el interés en minimizar el tiempo de transporte hacia las ciudades ucranianas. Esto se logrará mediante la elección de rutas óptimas que permitan alcanzar las ciudades de Lutsk, Kiev y Odesa en el menor tiempo posible.

En primer lugar, previo a la definición del problema de optimización, se decidió calcular el tiempo que se tarda en cada uno de los tramos desde las ciudades de Estados Unidos (Boston y Jacksonville) hasta los nodos intermedios (NA, HA, RO, LO, BE y ES), y desde éstos hasta las 3 ciudades ucranianas. Para ello, se dividió la distancia por la velocidad del transporte del tramo en cuestión para conseguir el tiempo que lleva cada tramo. Esto se observa en la *Figura 3.1*.

Desde	Hasta	Distancia (km)	Vehiculo	Velocidad (km/h)	Tiempo (hrs)
Boston	Berlin	7000	Avion	650	10.77
Boston	Hamburgo	8250	Barco	55	150.00
Boston	Estambul	750	Avion	650	1.15
Boston	Londres	8300	Avion	650	12.77
Boston	Rotterdam	6900	Barco	55	125.45
Boston	Napoles	7950	Barco	55	144.55
Jacksonville	Berlin	10100	Avion	650	15.54
Jacksonville	Hamburgo	9800	Barco	55	178.18
Jacksonville	Estambul	9200	Avion	650	14.15
Jacksonville	Londres	7900	Avion	650	12.15
Jacksonville	Rotterdam	8900	Barco	55	161.82
Jacksonville	Napoles	9400	Barco	55	170.91
Berlin	Lutsk	1280	Avion	650	1.97
Hamburgo	Lutsk	1880	Camion	95	19.79
Estambul	Lutsk	1600	Avion	650	2.46
Londres	Lutsk	1980	Avion	650	3.05
Rotterdam	Lutsk	2200	Camion	95	23.16
Napoles	Lutsk	2970	Camion	95	31.26
Berlin	Kiev	2040	Avion	650	3.14
Hamburgo	Kiev	2120	Camion	95	22.32
Estambul	Kiev	1730	Avion	650	2.66
Londres	Kiev	2300	Avion	650	3.54
Rotterdam	Kiev	2450	Camion	95	25.79
Napoles	Kiev	2890	Camion	95	30.42
Berlin	Odesa	1700	Avion	650	2.62
Hamburgo	Odesa	2470	Camion	95	26.00
Estambul	Odesa	990	Avion	650	1.52
Londres	Odesa	2860	Avion	650	4.40
Rotterdam	Odesa	2760	Camion	95	29.05
Napoles	Odesa	2800	Camion	95	29.47

Figura 3.1

3.1. Variables

Para el planteo matemático del problema en cuestión, que intenta calcular el tiempo mínimo de ruta utilizado para llegar de Estados Unidos hasta las ciudades de Ucrania, se definen variables que van a ser utilizadas para el planteo de la función objetivo y de las restricciones.

En primer lugar, se define una variable binaria que nos sirve para representar las rutas que son elegidas efectivamente para que se minimice el tiempo de llegada a las ciudades de Ucrania. Esta variable "alfa" es 0 cuando la ruta que va desde i hasta j no es utilizada y es 1 cuando sí es utilizada. Se plantea a continuación:

$$\alpha ij,\ i\ \in [1;12],\ j\ \in [1;12]$$

A cada variable αij se le debe multiplicar un parámetro de tiempo de viaje de dicha ruta que lo definimos de esta manera:

$$Tij,\ i\ \in [1;12],\ j\ \in [1;12]$$

Para aquellas rutas que no son posibles realizar, como es el caso de conectar directamente las ciudades de salida de Estados Unidos con las ciudades en Ucrania, se establecen valores del parámetro elevados para que en la resolución del modelo no se considere dicha posibilidad de ruta. Estos valores de los parámetros de Tij se pueden visualizar a continuación en la *Figura 3.1.1*.

		Nodo Llegada											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nodo Salida	1	99999	0	0	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999
	2	99999	99999	99999	10.77	150.00	11.15	12.77	125.45	144.55	99999	99999	99999
	3	99999	99999	99999	15.54	178.18	14.15	12.15	161.82	170.91	99999	99999	99999
	4	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	3.14	1.97	2.62
	5	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	22.32	19.79	26.00
	6	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	2.66	2.46	1.52
	7	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	3.54	3.05	4.40
	8	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	25.79	23.16	29.05
	9	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	30.42	31.26	29.47
	10	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999
	11	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999
	12	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999

Figura 3.1.1

Por un lado, los tiempos de llegada desde el origen hasta las ciudades estadounidenses es de 0 porque es un origen ficticio que el enunciado no menciona. Por otro lado, la diagonal de la matriz son todos valores elevados porque no tendría sentido salir de un nodo y llegar al mismo, y también, como los arcos van en una sola dirección (hacia las ciudades ucranianas y no hacia las ciudades estadounidenses) entonces la subdiagonal son todos valores elevados para que el modelo nunca elija ir por esos caminos.

3.2. Función objetivo

La función objetivo se basa en la minimización del tiempo de llegada de los transportes desde Estados Unidos hasta Ucrania, por eso Z es la suma de los tiempos de las rutas elegidas que optimiza la solución.

$$Z = \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} Tij * \alpha ij$$

3.3. Restricciones de la red

Se establecen restricciones para determinar de dónde deben salir los suministros, limitando la salida a una de las dos ciudades estadounidenses, Boston o Jacksonville. Para reflejar esto, asignamos un valor de 1, ya que no es posible que los suministros salgan de ambas ciudades al mismo tiempo. Además, en el nodo de origen, el flujo debe ser igual a 1, ya que los suministros salen de allí y no hay entrada de suministros en ese punto.

$$\sum_j \alpha 1j = 1\ con\ j \in [2; 3]$$

Para determinar cómo fluyen los recursos en las ciudades de Boston y Jacksonville, establecemos que la cantidad que entra en estas ciudades debe ser igual a la cantidad que sale. En otras palabras, todo lo que entra debe salir. En la siguiente ecuación, "k" representa el nodo que estamos considerando para analizar su flujo.

$$\sum_j xkj - x1k = 0\ \ con\ \ k \in [2; 3],\ j \in [4; 9]$$

También aplicamos la misma regla para los flujos en los puertos y aeropuertos: la suma de lo que entra y lo que sale debe ser igual a cero.

$$\sum_j xkj - \sum_j xjk = 0\ \ con\ k \in [4; 9]\ ,\ j \in [2; 3] \cup [10; 12]$$

Aplicamos una restricción a las ciudades de destino debido a nuestra búsqueda de la ruta más rápida. Dado que tenemos tres opciones para ingresar a cada ciudad, debemos seleccionar solo una. Por lo tanto, establecemos la siguiente restricción.

$$\sum_i \alpha ij = 1\ \ con\ i \in [4; 9]\ ,\ j \in [10; 12]$$

3. 4. Resultados

Utilizamos LINGO para encontrar la solución óptima y determinar la forma más rápida de desplazar tropas desde los Estados Unidos a las tres ciudades estratégicas en Ucrania.

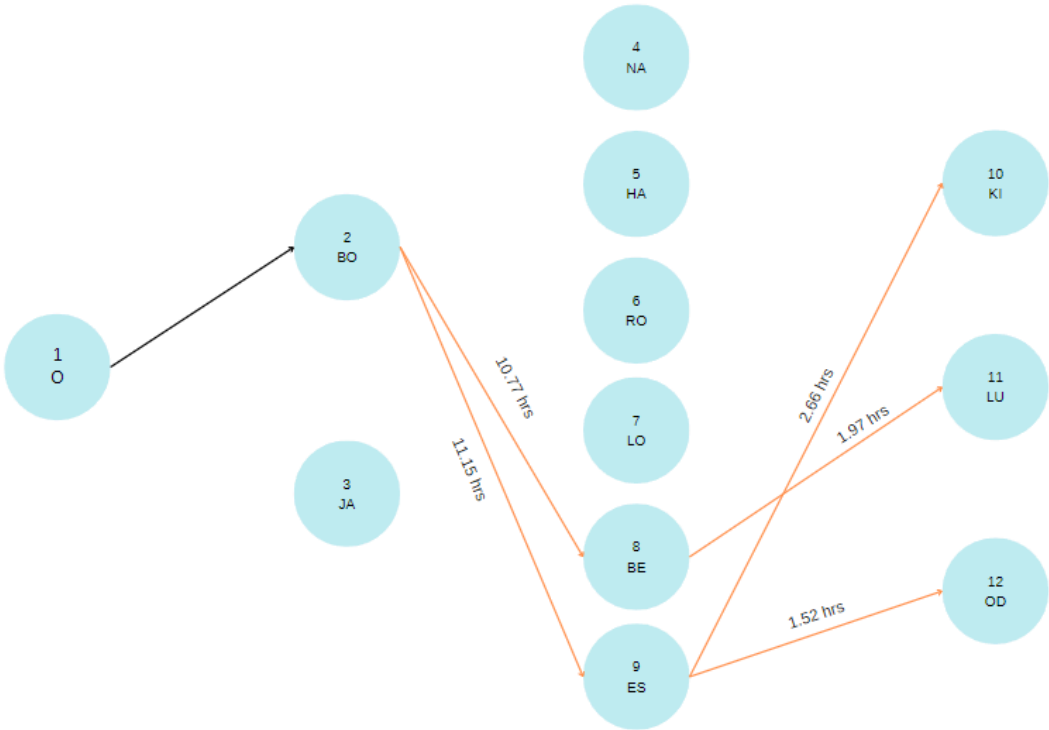

Figura 3.4.1

En la *Figura 3.4.1*, se muestran las rutas más eficientes para llegar a ciudades en Ucrania en el menor tiempo posible. El modelo indica que no es recomendable utilizar barcos para el transporte de tropas y suministros ni partir desde Jacksonville. Además, el sistema sugiere que para llegar a Miev en el menor tiempo (13.81 horas), la mejor opción es volar desde Boston a Estambul. Para llegar a Lutsk rápidamente (12.74 horas), es conveniente salir de Boston en avión y hacer una escala en Berlín. Finalmente, para llegar a Odesa en el menor tiempo (12.67 horas), se sugiere partir desde Boston y hacer una escala en Estambul.

4. Obtención de autorización del Congreso

El presidente necesita convencer al Congreso para llevar a cabo el plan de enviar tropas y suministros a Ucrania. Su objetivo es hacerlo de la manera más económica posible. Se ha identificado la cantidad mínima necesaria de refuerzos para cada ciudad ucraniana, como se muestra en la *Figura 4.1*.

Ciudad	Requerimientos
Lutsk	440,000 Ton
Kiev	320,000 Ton
Odesa	240,000 Ton

Figura 4.1

También tenemos información sobre la disponibilidad de 500,000 toneladas de carga en las ciudades de origen en Estados Unidos. Además, se nos proporcionó una tabla que muestra los costos de transporte desde las ciudades de origen hasta los puntos de transbordo de los barcos o los lugares de carga de los aviones, y desde esos puntos hasta las ciudades objetivo. Estos costos se detallan en la *Figura 4.2*.

Desde	Hasta	Costo
Boston	Berlín	$45,000 por Avión
Boston	Hamburgo	$30,000 por Barco
Boston	Estambul	$50,000 por Avión
Boston	Londres	$55,000 por Avión
Boston	Rotterdam	$32,000 por Barco
Boston	Nápoles	$30,000 por Barco
Jacksonville	Berlín	$61,000 por Avión
Jacksonville	Hamburgo	$48,000 por Barco
Jacksonville	Estambul	$57,000 por Avión
Jacksonville	Londres	$49,000 por Avión
Jacksonville	Rotterdam	$44,000 por Barco
Jacksonville	Nápoles	$56,000 por Barco
Berlín	Lutsk	$24,000 por Avión
Hamburgo	Lutsk	$3,000 por Camión
Estambul	Lutsk	$22,000 por Avión
Londres	Lutsk	$22,000 por Avión
Rotterdam	Lutsk	$3,000 por Camión
Nápoles	Lutsk	$5,000 por Camión
Berlín	Kiev	$28,000 por Avión
Hamburgo	Kiev	$4,000 por Camión
Estambul	Kiev	$23,000 por Avión
Londres	Kiev	$19,000 por Avión
Rotterdam	Kiev	$5,000 por Camión
Nápoles	Kiev	$5,000 por Camión
Berlín	Odesa	$25,000 por Avión
Hamburgo	Odesa	$7,000 por Camión
Estambul	Odesa	$2,000 por Avión
Londres	Odesa	$4,000 por Avión
Rotterdam	Odesa	$8,000 por Camión
Nápoles	Odesa	$9,000 por Camión

Figura 4.2

También, debido a condiciones climáticas, es necesario abastecer a Kiev exclusivamente por vía aérea. En cuanto a Odesa, dado que las rutas disponibles son limitadas, cada puerto puede enviar un máximo de 2,500 camiones a esa ciudad. Además, se ha establecido una restricción que permite un máximo de 200 vuelos desde Berlín a Odesa y otros 200 vuelos desde Londres a Odesa.

Como en este caso, a diferencia del inciso anterior, se intenta encontrar las rutas con el menor costo posible, el planteamiento matemático va a cambiar. Para este caso, se decidió plantear los costos por tonelada por transporte en cada uno de los tramos. Este cálculo se puede visualizar en la siguiente *Figura 4.3*.

Desde	Hasta	Distancia (km)	Vehiculo	Velocidad (km/h)	Tiempo (hrs)	Costo	Costo por tonelada ($/Tn)
Boston	Berlin	7000	Avion	650	10,77	$ 45.000,00	$ 300,00
Boston	Hamburgo	8250	Barco	55	150,00	$ 30.000,00	$ 125,00
Boston	Estambul	7250	Avion	650	11,15	$ 50.000,00	$ 333,33
Boston	Londres	8300	Avion	650	12,77	$ 55.000,00	$ 366,67
Boston	Rotterdam	6900	Barco	55	125,45	$ 32.000,00	$ 133,33
Boston	Napoles	7950	Barco	55	144,55	$ 30.000,00	$ 125,00
Jacksonville	Berlin	10100	Avion	650	15,54	$ 61.000,00	$ 406,67
Jacksonville	Hamburgo	9800	Barco	55	178,18	$ 48.000,00	$ 200,00
Jacksonville	Estambul	9200	Avion	650	14,15	$ 57.000,00	$ 380,00
Jacksonville	Londres	7900	Avion	650	12,15	$ 49.000,00	$ 326,67
Jacksonville	Rotterdam	8900	Barco	55	161,82	$ 44.000,00	$ 183,33
Jacksonville	Napoles	9400	Barco	55	170,91	$ 56.000,00	$ 233,33
Berlin	Lutsk	1280	Avion	650	1,97	$ 24.000,00	$ 160,00
Hamburgo	Lutsk	1880	Camion	95	19,79	$ 3.000,00	$ 187,50
Estambul	Lutsk	1600	Avion	650	2,46	$ 22.000,00	$ 146,67
Londres	Lutsk	1980	Avion	650	3,05	$ 22.000,00	$ 146,67
Rotterdam	Lutsk	2200	Camion	95	23,16	$ 3.000,00	$ 187,50
Napoles	Lutsk	2970	Camion	95	31,26	$ 5.000,00	$ 312,50
Berlin	Kiev	2040	Avion	650	3,14	$ 28.000,00	$ 186,67
Hamburgo	Kiev	2120	Camion	95	22,32	$ 4.000,00	$ 250,00
Estambul	Kiev	1730	Avion	650	2,66	$ 23.000,00	$ 153,33
Londres	Kiev	2300	Avion	650	3,54	$ 19.000,00	$ 126,67
Rotterdam	Kiev	2450	Camion	95	25,79	$ 5.000,00	$ 312,50
Napoles	Kiev	2890	Camion	95	30,42	$ 5.000,00	$ 312,50
Berlin	Odesa	1700	Avion	650	2,62	$ 25.000,00	$ 166,67
Hamburgo	Odesa	2470	Camion	95	26,00	$ 7.000,00	$ 437,50
Estambul	Odesa	990	Avion	650	1,52	$ 2.000,00	$ 13,33
Londres	Odesa	2860	Avion	650	4,40	$ 4.000,00	$ 26,67
Rotterdam	Odesa	2760	Camion	95	29,05	$ 8.000,00	$ 500,00
Napoles	Odesa	2800	Camion	95	29,47	$ 9.000,00	$ 562,50

Figura 4.3

4.1. Variables

Para el planteo matemático del nuevo caso en cuestión, que intenta calcular el costo mínimo de ruta elegida para llegar de Estados Unidos hasta las ciudades de Ucrania, se definen nuevas variables que van a ser utilizadas para el planteo de la función objetivo y de las restricciones.

En primer lugar, se define xij como la cantidad de toneladas de refuerzos transportados en la ruta que va desde i hasta j.

$$xij,\ i\ \in [1;12],\ j\ \in [1;12]$$

A cada variable xij se le debe multiplicar un parámetro de costo por tonelada de cada ruta que lo definimos de esta manera:

$$Cij,\ i\ \in [1;12],\ j\ \in [1;12]$$

Como se realizó en el caso de los tiempos de cada ruta del inciso 3, para aquellas rutas que no son posibles realizar, como es el caso de conectar directamente las ciudades de salida de Estados Unidos con las ciudades en Ucrania, se establecen valores del parámetro elevados para que en la resolución del modelo no se considere dicha posibilidad de ruta. Estos valores de los parámetros de Cij se pueden visualizar a continuación en la *Figura 4.1.1*.

		Nodo llegada											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nodo Salida	1	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999
	2	999999	999999	999999	125.00	125.00	133.33	366.67	300.00	333.33	999999	999999	999999
	3	999999	999999	999999	233.33	200.00	183.33	326.67	406.67	380.00	999999	999999	999999
	4	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	312.50	312.50	562.50
	5	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	250.00	187.50	437.50
	6	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	187.50	187.50	500.00
	7	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	126.67	146.67	26.67
	8	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	186.67	160.00	166.67
	9	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	153.33	146.67	13.33
	10	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999
	11	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999
	12	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999	999999

Figura 4.1.1

4.2. Función objetivo

La función objetivo se basa en la minimización de los costos de llegada de los transportes desde Estados Unidos hasta Ucrania, por eso Z es la suma de los costos de las rutas elegidas que optimiza la solución.

$$Z = \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} Cij * xij$$

4.3. Restricciones

Comencemos con las restricciones que se derivan de la estructura de la red de nodos. En primer lugar, se establece que la cantidad de toneladas que salen de los nodos de origen en Boston y Jacksonville debe ser un número positivo.

$$\sum_{j} x1j > 0 \ con\ j \in [2; 3]$$

Para determinar cómo fluyen los recursos en las ciudades de Boston y Jacksonville, establecemos que la cantidad de toneladas que entran en estas ciudades debe ser igual a la cantidad que sale. En otras palabras, todo lo que entra debe salir. En la siguiente ecuación, "k" representa el nodo que estamos considerando para analizar su flujo.

$$\sum_{j} xkj - x1k = 0 \ con\ k \in [2; 3],\ j \in [4; 9]$$

También aplicamos la misma regla para los flujos en los puertos y aeropuertos: la suma de lo que entra y lo que sale debe ser igual a cero.

$$\sum_{j} xkj - \sum_{j} xjk = 0 \ con\ k \in [4; 9]\ ,\ j \in [2; 3] \cup [10; 12]$$

Además, hay que determinar que la cantidad de toneladas de suministros y tropas que llegan en las ciudades de ucrania son positivas. En el modelo matemático se consideran negativas porque son nodos de destino.

$$\sum_{i} xij < 0 \ con\ i \in [4; 9]\ ,\ j \in [10; 12]$$

También, aseguramos que las toneladas de recursos que salen del origen tienen que ser iguales a la suma de los recursos que llegan a Kiev, Odesa y Lutsk definiendo la siguiente restricción.

$$\sum_{p} x1p - \sum_{i}\sum_{j} xij = 0 \; con \; p \in [2; 3], \;\; i \in [4; 9], \; j \in [10; 12]$$

Además de esta restricción, es importante destacar que en las ciudades de Boston y Jacksonville tenemos un total de 500,000 toneladas de carga necesaria.

$$\sum_{j=1}^{12} x2j \leq 500000$$

$$\sum_{j=1}^{12} x3j \leq 500000$$

También, se establece que a Kiev se abastece de sólo por vía aérea y eso se demuestra con la siguiente restricción.

$$x5,\ 11 + x8, 11 + x9, 11 = 0$$

Dado que sabemos que la ruta desde los puertos hacia Odesa tiene limitaciones significativas, con un máximo de 2,500 camiones por puerto, podemos deducir, según la *Figura 2.1*, que cada camión tiene una capacidad de 16,000 kg. Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que la capacidad máxima de transporte por puerto es de 40,000 toneladas. En base a esta información, establecemos las siguientes restricciones.

$$x5, 12 \leq 40000$$
$$x8, 12 \leq 40000$$
$$x9, 12 \leq 40000$$

Dado que se ha impuesto una restricción que limita a 200 vuelos desde Berlín a Odesa y otros 200 vuelos desde Londres a Odesa, esta restricción combinada con la capacidad de carga de los aviones (como se muestra en la *Figura 2.1*) nos da un límite máximo de 30,000 toneladas que pueden ser transportadas por avión. Con esta información en mente, hemos formulado las siguientes restricciones.

$$x4, 12 \leq 30000$$
$$x7, 12 \leq 30000$$

Finalmente, se han aplicado restricciones en relación a la cantidad de toneladas de refuerzos requeridas en cada ciudad de Ucrania (véase *Figura 4.1*): Lutsk necesita 440,000 toneladas, Kiev 320,000 toneladas y Odesa 240,000 toneladas.

$$\sum_{i=1}^{12} xi10 \geq 440000$$

$$\sum_{i=1}^{12} xi11 \geq 320000$$

$$\sum_{i=1}^{12} xi12 \geq 240000$$

4.4. Resultados

Luego de realizar los cálculos con LINGO, obtuvimos las rutas óptimas que minimizan los costos en el transporte de suministros y tropas hacia las ciudades ucranianas. Estas rutas seleccionadas se representan visualmente en la *Figura 4.4.1*, que muestra la cantidad de toneladas transportadas de un nodo a otro.

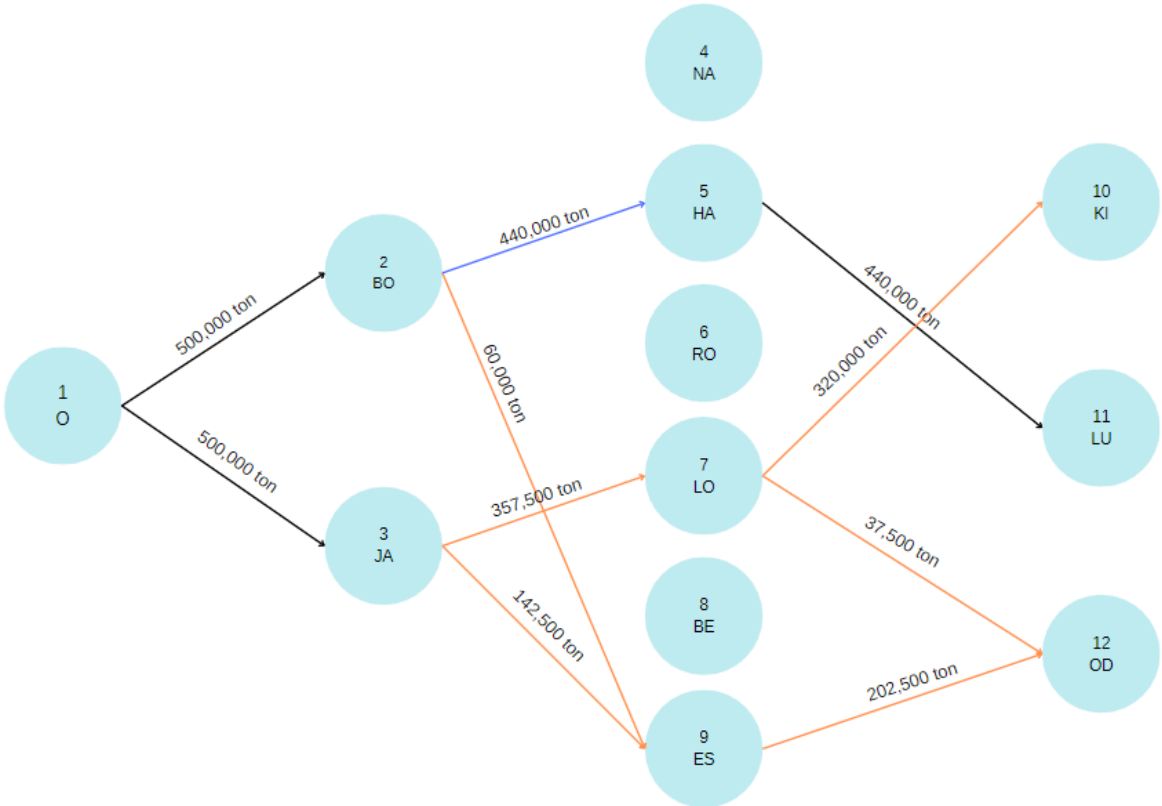

Figura 4.4.1

Como se muestra en la *Figura 4.4.1*, desde el punto de origen hasta las bases de Boston y Jacksonville, se utiliza completamente la capacidad máxima de estas instalaciones estadounidenses, acumulando un total de 500,000 toneladas de suministros y tropas en cada una. Luego, se observa que desde Boston parten 440,000 toneladas con destino al puerto de Hamburgo por vía marítima (indicado por la flecha azul), mientras que 60,000 toneladas se dirigen al aeropuerto de Estambul por vía aérea (indicado por la flecha naranja). Por otro lado, desde Jacksonville se envían 357,500 toneladas al aeropuerto de Londres y 142,500 toneladas al aeropuerto de Estambul.

Una vez que los suministros llegan a estos nodos intermedios, se distribuyen hacia los destinos en Ucrania. Desde Hamburgo, las 440,000 toneladas son transportadas en camiones hacia Lutsk, proporcionando el equipo militar necesario para la ciudad. Posteriormente, desde Londres se envían las 320,000 toneladas requeridas para Kiev, y finalmente, Odesa recibe las 240,000 toneladas necesarias, provenientes de las ciudades de Londres y Estambul.

Al cumplirse estas rutas óptimas, se logra el costo mínimo de los transportes que es de $372,666,700.

5. Restringiendo la cantidad máxima de aviones y camiones

Debido a la congestión del aeródromo y los horarios de vuelo inalterables, se puede enviar un número limitado de aviones entre dos ciudades. Por este motivo se agregan nuevas restricciones que limitan la capacidad de aviones disponibles en cada tramo que se puede visualizar en la *Figura 5.1*.

Desde	Hasta	Máximo
Boston	Berlín	300 Aviones
Boston	Estambul	600 Aviones
Boston	Londres	400 Aviones
Jacksonville	Berlín	500 Aviones
Jacksonville	Estambul	700 Aviones
Jacksonville	Londres	500 Aviones
Berlín	Lutsk	500 Aviones
Estambul	Lutsk	0 Aviones
Londres	Lutsk	1,000 Aviones
Berlín	Kiev	300 Aviones
Estambul	Kiev	100 Aviones
Londres	Kiev	200 Aviones
Berlín	Odesa	0 Aviones
Estambul	Odesa	900 Aviones
Londres	Odesa	150 Aviones

Figura 5.1

Sumado a esta medida, debido a que algunos países temen que los ciudadanos se alarmen si demasiados camiones militares recorren las carreteras públicas, se oponen a que un gran número de camiones transiten por sus países. Es por esto que se agregan restricciones, véase *Figura 5.2*, que limitan la cantidad de camiones que podrán ser enviados desde el desembarco en los puertos hacia las ciudades ucranianas.

Desde	Hasta	Máximo
Rotterdam	Lutsk	700 Camiones
Rotterdam	Odesa	750 Camiones
Hamburgo	Lutsk	650 Camiones
Hamburgo	Odesa	500 Camiones
Nápoles	Lutsk	1,500 Camiones
Nápoles	Odesa	1,200 Camiones

Figura 5.2

Por lo tanto, el presidente en esta ocasión decide ignorar el problema del costo y, en cambio, maximizar la cantidad total de carga que puede llegar a las ciudades ucranianas.

5.1. Variables

En este caso, se mantiene el uso de la variable declarada en el inciso anterior, xij, que representa la cantidad de toneladas de refuerzos transportados en la ruta que va desde i hasta j .

$$xij,\ i\ \in [1; 12],\ j\ \in [1; 12]$$

Por otra parte, se define unos nuevos parámetros para poder representar las nuevas restricciones que deben ser aplicadas por cada transporte que toma cada ruta (vistas en las *Figura 5.1 y Figura 5.2*). Por lo tanto, Kij representa la capacidad máxima de toneladas que se pueden transportar en cada ruta que va desde i hasta j.

$$Kij,\ i\ \in [1; 12],\ j\ \in [1; 12]$$

Estos valores de los parámetros de Kij se pueden visualizar en la siguiente *Figura 5.1.1*.

		Nodo llegada											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nodo Salida	1	0	500000	500000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	999999	999999	999999	60000	45000	90000	0	0	0
	3	0	0	0	999999	999999	999999	75000	75000	105000	0	0	0
	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24000	19200
	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10400	8000
	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11200	12000
	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	30000	150000	22500
	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	45000	75000	0
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15000	0	135000
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 5.1.1

5.2. Función objetivo

Como se mencionó previamente, el objetivo de este punto es maximizar la cantidad total de carga total que se transporta a Kiev, Odesa y Lutsk sumados. Por este motivo, se define la siguiente función objetivo.

$$Z\ =\ \sum_{i=1}^{12}\sum_{j=1}^{12} xij \text{ con } i \in [4; 9],\ j \in [10; 12]$$

5.3. Restricciones

Definimos de vuelta las capacidades máximas de las toneladas que pueden pasarse a las bases de Boston y Jacksonville, siendo éstas 500,000 toneladas por base.

$$\sum_{j=1}^{12} x2j\ \leq\ 500000$$

$$\sum_{j=1}^{12} x3j\ \leq\ 500000$$

Para este caso, se volvió a definir las restricciones de flujo que determinan que las toneladas que ingresan a las ciudades de salida e intermediarias tienen que ser iguales a las toneladas de que salen de ellas.

$$\sum_{j} xkj \ - x1k \ = \ 0 \ \ con \ \ k \in [2; 3], \ j \in [4; 9]$$

$$\sum_{j} xkj \ - \sum_{j} xjk \ = \ 0 \ \ \ con\, k \in [4; 9] \ , \ j \in [2; 3] \cup [10; 12]$$

Para garantizar una lógica coherente en la red, se establece que la cantidad de suministros y tropas que llegan a las ciudades de Ucrania debe ser un valor positivo.

$$\sum_{i} xij \ < \ 0 \ \ \ con\, i \in [4; 9] \ , \ j \in [10; 12]$$

Del mismo modo, se requiere que la cantidad de toneladas que salen desde el nodo de origen hacia Boston y Jacksonville también sea un número positivo. En el modelo matemático se consideran negativas porque son nodos de destino.

$$\sum_{j} x1j \ > \ \ 0 \ con\, j \in [2; 3]$$

Luego, se definieron las restricciones para restringir la capacidad de toneladas que se pueden transportar en cada ruta.

$$xij \ \le \ Kij \text{ con } i \ \in \ [1; 12], \ j \ \in \ [1; 12]$$

Por último, se decidió mantener la restricción de que a Kiev no se puede llegar en camión porque no aparece en la nueva tabla de restricciones acerca de los camiones.

$$x5, \ 11 \ \ + \ \ x8, 11 \ + \ x9, 11 \ \ = \ \ 0$$

5.4. Resultados

Los resultados del modelo calculado en LINGO indican que, teniendo en cuenta todas las restricciones, la cantidad máxima de toneladas que se pueden transportar a las ciudades de Kiev, Odesa y Lutsk en total es de 489,800 toneladas. La *Figura 5.4.1* ilustra las rutas seleccionadas para el transporte de equipo militar.

Desde el punto de origen, se envían 256,600 toneladas a Boston y 233,200 toneladas a Jacksonville. Luego, desde Boston, estas cantidades se distribuyen a cinco nodos intermedios: 43,200 toneladas a Nápoles, 18,400 toneladas a Hamburgo, 45,000 toneladas a Berlín, 65,000 toneladas a Londres y 90,000 toneladas a Estambul. Por otro lado, las toneladas recibidas desde Jacksonville se distribuyen a cuatro ciudades intermedias: 23,200 toneladas a Rotterdam, 75,000 toneladas a Berlín, 75,000 toneladas a Londres y 60,000 toneladas a Estambul.

Finalmente, desde Berlín se envían 45,000 toneladas a Kiev y 75,000 toneladas a Lutsk. Desde Nápoles, se envían 24,000 toneladas a Lutsk y 19,200 toneladas a Odesa. Hamburgo envía 10,400 toneladas a Lutsk y 8,000 toneladas a Odesa, Rotterdam envía 11,200 toneladas a Lutsk y 12,000 toneladas a Odesa, Londres envía 135,000 toneladas a Lutsk, y Estambul envía 150,000 toneladas a Kiev y 13,500 toneladas a Odesa.

Es importante destacar que la distribución de toneladas de suministros y tropas se divide entre múltiples destinos debido a la presencia de diversas restricciones que se mencionan en este contexto.

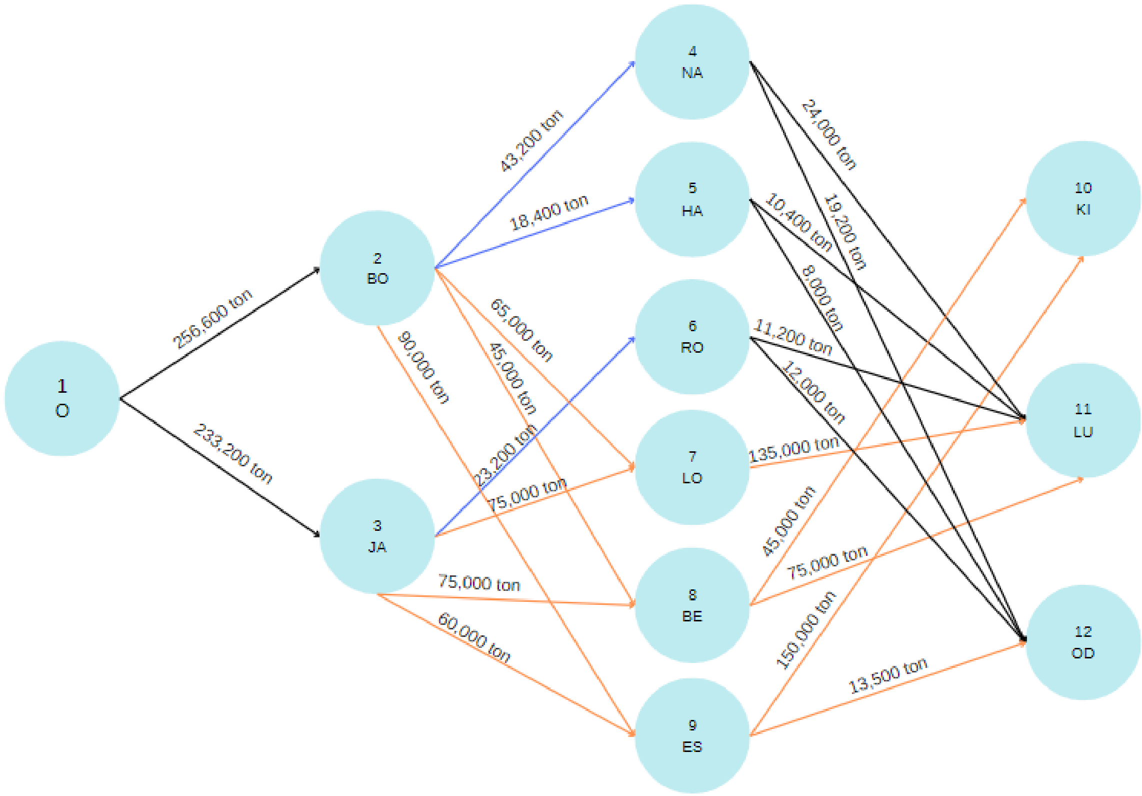

Figura 5.4.1

6. Victoria en la Guerra y Restablecimiento de las Comunicaciones entre Ciudades Ucranianas

Gracias a la valentía de los combatientes estadounidenses que se unieron para defender Kiev, Lutsk y Odesa, logramos repeler el ataque de las tropas rusas y liberar estas ciudades. Como resultado, el comandante Vladimir Putin fue arrestado, y nuestro siguiente paso es la reconstrucción de las siete ciudades que sufrieron devastación bajo su ocupación.

Ahora, nuestro objetivo es restablecer las comunicaciones entre las siete ciudades ucranianas recapturadas y las capitales, Kiev, Lutsk y Odesa, minimizando los costos involucrados. Los precios de las instalaciones de las líneas de comunicación se detallan en la *Figura 6.1*. Es importante tener en cuenta que Lutsk y Odesa ya están conectadas con Kiev, y según la lógica de redes, una ciudad puede comunicarse con todas las demás si está conectada de manera indirecta con todas. Por lo tanto, si una de las siete ciudades se conecta a Lutsk u Odesa, estará indirectamente conectada con Kiev.

Entre	Costo de reestablecer comunicación
Lutsk y Donetsk	$210,000
Lutsk y Sumi	$185,000
Lutsk y Mariúpol	$225,000
Kiev y Mariúpol	$310,000
Kiev y Jersón	$195,000
Kiev y Mikolaiv	$440,000
Kiev y Járkov	$140,000
Odesa y Járkov	$200,000
Odesa y Mikolaiv	$120,000
Donetsk y Sumi	$150,000
Donetsk y Mariúpol	$105,000
Donetsk y Jersón	$95,000
Sumi y Yukaterinburgo	$85,000
Sumi y Mariúpol	$125,000
Yekaterinburgo y Mariúpol	$125,000
Mariúpol y Jersón	$100,000
Mariúpol y Mikolaiv	$75,000
Járkov y Jersón	$100,000
Járkov y Mikolaiv	$95,000

Figura 6.1

Para resolver este problema, es necesario reconsiderar el enfoque matemático utilizado en los incisos anteriores. Mientras que en casos previos la red ya estaba definida, incluyendo la cantidad de nodos y las direcciones de los enlaces, aquí nuestro objetivo principal es encontrar la disposición óptima de los enlaces dentro de la red para minimizar los costos asociados. Para abordar este desafío, utilizaremos un árbol de expansión mínima, el cual conecta todos los nodos de la red minimizando la suma de los costos de las conexiones. En este contexto, las aristas del árbol representan las comunicaciones entre los nodos, y los pesos asignados a estas aristas corresponden a los costos de dichas conexiones.

La resolución del problema del árbol de expansión mínima se resolvió utilizando el método gráfico. Para ello, se tuvo que seguir los siguientes pasos.

1. Se selecciona, de manera arbitraria, cualquier nodo y se conecta, es decir, se agrega una ligadura al nodo distinto más cercano.
2. Se identifica el nodo no conectado más cercano a un nodo conectado y se conectan esos dos nodos, esto es, se agrega una ligadura entre ellos. Este paso se repite hasta que todos los nodos están conectados.
3. Rompimiento de empates: los empates del nodo más cercano distinto (paso 1) o del nodo no conectado más cercano (paso 2), se pueden romper en forma arbitraria, pero el algoritmo debe llegar a una solución óptima. No obstante, estos empates son señal de que pueden existir (pero no necesariamente) soluciones óptimas múltiples. Todas esas soluciones se pueden identificar si se trabaja con las demás formas de romper los empates al final.

6.1. Variables

Previo a mostrar la resolución del árbol, se deben definir una nuevas variables. En primer lugar, binaria βij que representa las comunicaciones que se restablecen entre la ciudad i y la ciudad j. Donde i, j = [1 = Kiev, 2 = Lutsk, 3 = Odesa, 4 = Donetsk, 5 = Sumi, 6 = Mariúpol, 7 = Jersón, 8 = Mikolaiv, 9 = Járkov, 10 = Yukateringbutgo]

$$\beta ij,\ i\ \in\ [1;10],\ j\ \in\ [1;10]$$

Cuando βij es igual a 1, esto indica que se establece la conexión entre la ciudad i (que es la ciudad de origen del cable) y la ciudad j (que es la ciudad receptora del cable). Por otro lado, cuando βij es igual a 0, significa que no se establece la conexión de comunicación entre esas dos ciudades.

Cada conexión en la red tiene un costo específico asignado, como se muestra en la *Figura 6.1*. Para representar estos costos, hemos creado el parámetro Gij.

$$Gij,\ i\ \in\ [1;10],\ j\ \in\ [1;10]$$

En la *Figura 6.1.1* se presentan los parámetros que hemos asignado a cada costo. Hemos asignado costos muy elevados a las conexiones entre ciudades que no son posibles (ya que no están listadas en la tabla superior). Además, hemos asignado un costo de 0 a las conexiones entre Kiev y Odesa, así como entre Kiev y Lutsk, dado que estas conexiones ya existen y no implican costos adicionales, ya que están preestablecidas.

		Nodo llegada									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nodo Salida	1	999999	0	0	999999	999999	310000	195000	440000	140000	999999
	2	0	999999	999999	210000	185000	225000	999999	999999	999999	999999
	3	0	999999	999999	999999	999999	999999	999999	120000	200000	999999
	4	999999	210000	999999	999999	150000	105000	95000	999999	999999	999999
	5	999999	185000	999999	150000	999999	125000	999999	999999	999999	85000
	6	310000	225000	999999	105000	125000	999999	100000	75000	999999	125000
	7	195000	999999	999999	95000	999999	100000	999999	999999	100000	999999
	8	440000	999999	120000	999999	999999	75000	999999	999999	95000	999999
	9	140000	999999	200000	999999	999999	999999	100000	95000	999999	999999
	10	999999	999999	999999	999999	85000	125000	999999	999999	999999	999999

Figura 6.1.1

También, en la *Figura 6.1.1*, se nota una diferencia con respecto a los parámetros establecidos en incisos anteriores. En estos casos previos, los parámetros presentaban valores elevados en toda su subdiagonal debido a que las conexiones tenían una dirección unidireccional. Sin embargo, en este caso, estamos trabajando con enlaces bidireccionales, lo que implica que las conexiones pueden establecerse en ambos sentidos, lo cual se refleja en la estructura de los parámetros.

Por último, se define una variable de nivel que se emplea principalmente para garantizar que el árbol resultante cumpla con ciertas propiedades o restricciones específicas.

$$Ni,\ i\ \in\ [1;10]$$

6.2. Función objetivo

El objetivo de este planteo matemático es determinar dónde deben instalarse las líneas de comunicación para minimizar el costo total de restablecer las comunicaciones entre Kiev y las ciudades ucranianas. A continuación se define la función objetivo.

$$Z = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} Gij * \beta ij$$

6.3. Restricciones

Se establece una restricción en la que se busca que cada uno de los diez nodos tenga al menos una conexión de salida. La idea es asegurarse de que cada nodo al menos salga una conexión, aunque puede haber más de una conexión saliendo de un nodo.

$$\sum_{j=1}^{10} \beta ij = 1, \; con \; i \in [2; 10]$$

De entrada, establecemos un nodo de llegada, que va a ser Kiev, en donde ningún arco va a salir en él pero sí entran..

$$\sum_{j=1}^{10} \beta 1j = 0$$

En este caso, como estamos queriendo plantear un árbol de expansión mínima, se tiene que definir el concepto de los niveles. Los niveles son las diferentes capas o niveles de profundidad que tiene un árbol jerárquico. Saber los niveles de un árbol permite entender mejor la estructura del árbol y cómo se relacionan los nodos entre sí. En nuestro caso, tenemos que definir que cada nodo se vincula con otro esté en distinto nivel.

$$Ni \geq Nj + \beta ij - 10000(1 - \beta ij)$$

La última restricción de nivel es que para el nodo de llegada, que en este caso es Kiev, se define el menor nivel posible.

$$N1 = 0$$

6.4. Resultados

Para resolver este último caso, se optó por visualizar el árbol de expansión mínima y luego validar los resultados utilizando LINGO. La *Figura 6.4.1* muestra cómo se representan gráficamente las diversas ciudades, con conexiones potenciales en verde y en rojo aquellas que deben establecerse. El enfoque principal en la construcción del árbol consistió en buscar siempre las rutas más económicas para conectar las ciudades que aún no estaban interconectadas.

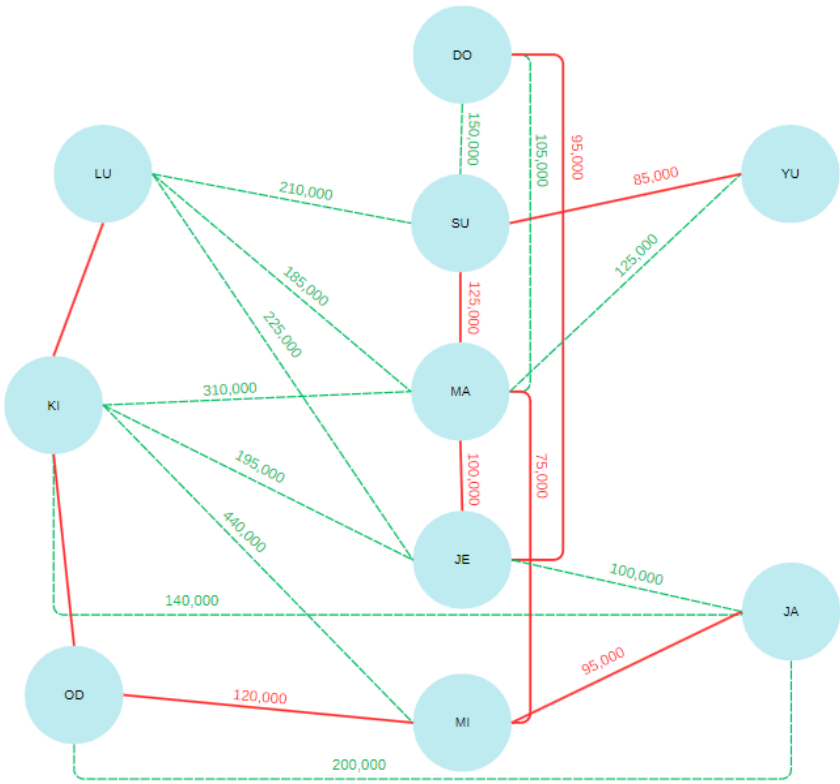

Figura 6.4.1

Una vez seleccionadas las rutas óptimas, graficamos el árbol de expansión mínimo para poder visualizar mejor los caminos y niveles. Esto se puede ver en la *Figura 6.4.2*.

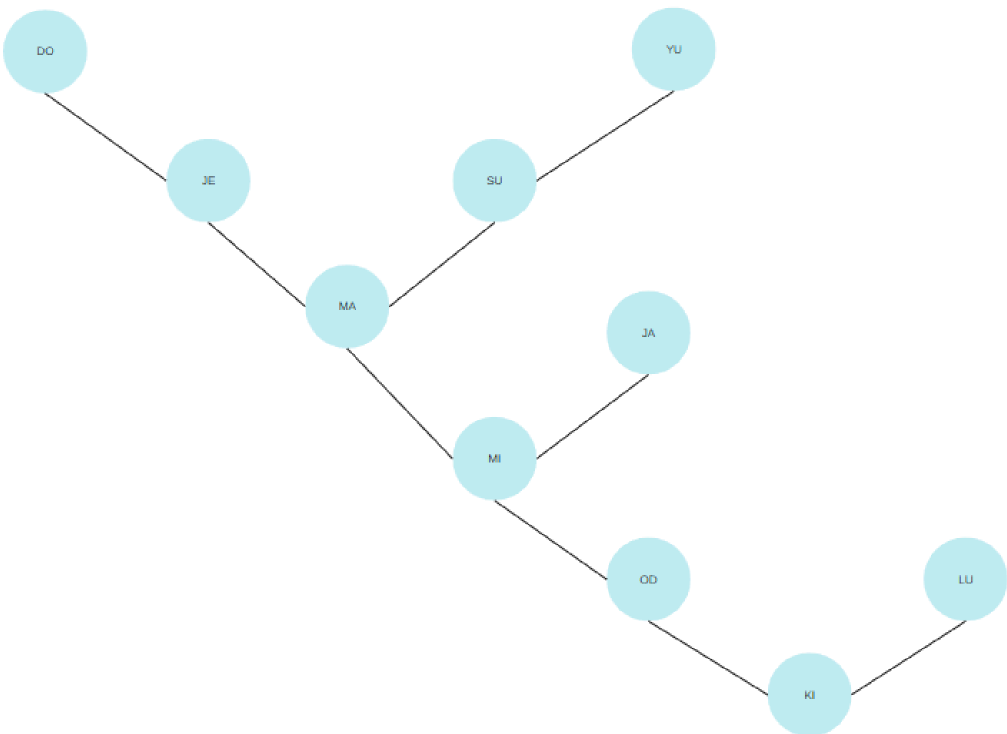

Figura 6.4.2

La *Figura 6.4.2* ilustra las conexiones necesarias para reducir el costo de la red de manera efectiva. Kiev se representa en la parte inferior del árbol, ya que la idea es que reciba conexiones (representadas como "ligaduras") pero no emita ninguna conexión hacia otros nodos.

Los resultados fueron corroborados por LINGO, y como resultado, hemos establecido la jerarquía de ciudades en el árbol. En este esquema, Kiev es la única ciudad en el nivel 0, seguida por las ciudades de nivel 1, que son Odesa y Lutsk. A continuación, en el nivel 2, encontramos Mikolaiv, seguida de las ciudades de nivel 3, que son Mariúpol y Járkov. Las ciudades de nivel 4 incluyen Sumi y Jersón, mientras que en el nivel 5 se sitúan Donetsk y Yukateringbutgo.

Teniendo esto en cuenta, el costo total mínimo para reestablecer las comunicaciones entre Kiev y las 9 ciudades es de $695,000.

7. Conclusiones

En resumen, en este trabajo práctico se abordaron varios aspectos relacionados con la logística y la optimización de operaciones militares y humanitarias en el contexto del conflicto bélico entre Rusia y la República Popular Ucraniana. Se desarrollaron modelos matemáticos para optimizar el tiempo y el costo de transporte de tropas y suministros desde los Estados Unidos a las ciudades ucranianas estratégicas. Luego, se diseñó un árbol de expansión mínima para restablecer las comunicaciones entre las ciudades liberadas y las capitales.

Estos modelos matemáticos y enfoques de optimización se presentaron como herramientas valiosas para la toma de decisiones en situaciones complejas y dinámicas. A través de la aplicación de estos métodos, se pudo encontrar soluciones efectivas para el despliegue de recursos, la distribución de suministros y la reconexión de ciudades, lo que contribuyó al éxito en el conflicto y al restablecimiento de la comunicación entre las ciudades ucranianas.

Este trabajo práctico destaca la importancia de la planificación logística y la optimización en contextos críticos y ofrece una visión de cómo estas herramientas pueden utilizarse para abordar desafíos complejos en situaciones de crisis.

8. Bibliografía

Hieller, F. S. & Lieberman, G. J. (2010). Introducción a la programación lineal. Introducción a la Investigación de Operaciones. México: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V

Ivorra, C. (s.f.). LINGO, un manual de usuario. Recuperado de https://www.uv.es/~ivorra/docencia/LINGOav.pdf

9. Anexo

a) Código de LINGO para el inciso 3

```
SETS:
```

```
CIUDADES / O, BO, JA, NA, HA, RO, LO, BE, ES, KI, LU, OD/:;
RUTAS(CIUDADES,CIUDADES):UTILIZACION, TIEMPO;
ENDSETS
DATA:
TIEMPO = 99999     0     0     99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999
99999  99999
99999  99999  99999  144.55 150.00 125.45 12.77  10.77  11.15  99999  99999  99999
99999  99999  99999  170.91 178.18 161.82 12.15  15.54  14.15  99999  99999  99999
99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  30.42  31.26  29.47
99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  22.32  19.79  26.00
99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  25.79  23.16  29.05
99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  3.54   3.05   4.40
99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  3.14   1.97   2.62
99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  2.66   2.46   1.52
0      99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999
0      99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999
0      99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999  99999;
ENDDATA
!Funcion objetivo;
[TIEMPO_DESPLIEGUE]MIN = @SUM(RUTAS(i,j):UTILIZACION(i,j)*TIEMPO(i,j));
!Restriccion salida;
[FLUJO_S]@SUM(RUTAS(i,j)| i#EQ#1: UTILIZACION(i,j)) = 1;
!Restriccion de flujo;
@FOR(CIUDADES(k)|k#GT#1 #AND# k#LT#10:[FLUJO_I]@SUM(CIUDADES(i):
UTILIZACION(i,k)) - @SUM(CIUDADES(j): UTILIZACION(k,j)) = 0);
!Restriccion de destino;
[DESTINO]@SUM(CIUDADES(i)| i#LT#10: UTILIZACION(i,10)) = 1;
```

b) Código de LINGO para el inciso 4

```
SETS:
CIUDADES / O, BO, JA, NA, HA, RO, LO, BE, ES, KI, LU, OD/:REQUERIMIENTOS;
RUTAS(CIUDADES,CIUDADES):TONELADAS, COSTOSxTON;
ENDSETS
DATA:
REQUERIMIENTOS = 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 320000, 440000, 240000;
COSTOSxTON = 999999     0     0     999999     999999     999999
999999     999999     999999     999999     999999     999999
999999     999999     999999     125     125     133.333333 366.6666667 300
     333.33333 999999     999999     999999
999999     999999     999999     233.3333333 200     183.333333 326.6666667
406.6666667 380     999999     999999     999999
999999     999999     999999     999999     999999     999999
999999     999999     999999     312.5   312.5   562.5
999999     999999     999999     999999     999999     999999
999999     999999     999999     250     187.5   437.5
999999     999999     999999     999999     999999     999999
999999     999999     999999     187.5   187.5   500
999999     999999     999999     999999     999999     999999
999999     999999     999999     126.6666667   146.6666667   26.6666667
```

```
999999          999999          999999          999999          999999          999999
999999          999999          999999          186.6666667   160     166.6666667
999999          999999          999999          999999          999999          999999
999999          999999          999999          153.3333333   146.6666667  13.3333333
999999          999999          999999          999999          999999          999999
999999          999999          999999          999999          999999          999999
999999          999999          999999          999999          999999          999999
999999          999999          999999          999999          999999          999999
999999          999999          999999          999999          999999          999999
999999          999999          999999          999999          999999          999999;
ENDDATA
!Funcion objetivo;
[COSTO_DESPLIEGUE]MIN =
@SUM(RUTAS(i,j):TONELADAS(i,j)*COSTOSxTON(i,j));
!Restriccion disponibilidad carga en Boston y Jacksonville;
@FOR(CIUDADES(i)|i#GT#1 #AND# i#LE#3:@SUM(CIUDADES(j)| j#GT#3 #AND#
J#LT#10: TONELADAS(i,j)) <= 500000);
!Restriccion de flujo;
@FOR(CIUDADES(k)|k#GT#1 #AND# k#LT#10:[FLUJO_I]@SUM(CIUDADES(i):
TONELADAS(i,k)) - @SUM(CIUDADES(j): TONELADAS(k,j)) = 0);
!Restriccion requerimientos;
@FOR(CIUDADES(j)|j#GE#10:@SUM(CIUDADES(s)|s#GE#4 #AND#
s#LT#10:TONELADAS(s,j)) >= REQUERIMIENTOS(j));
!Restriccion de barcos a Kiev;
@SUM(CIUDADES(s)| s#GE#4 #AND# s#LE#6: TONELADAS(s,10)) = 0;
!Restriccion de camiones a Odeza;
@FOR(CIUDADES(s)| s#GE#4 #AND# s#LE#6: TONELADAS(s,12) <= 2500*16);
!Restriccion vuelos a Odeza desde Londres;
@SUM(CIUDADES(s)| s#EQ#7: TONELADAS(s,12))<=250*150;
!Restriccion vuelos a Odeza desde Berlin;
@SUM(CIUDADES(s)| s#EQ#8: TONELADAS(s,12))<=250*150;
```

c) Código de LINGO para el inciso 5

```
SETS:
CIUDADES / O, BO, JA, NA, HA, RO, LO, BE, ES, KI, LU, OD/:;
RUTAS(CIUDADES,CIUDADES):TONELADAS, CAPACIDADMAX;
ENDSETS
DATA:
CAPACIDADMAX = 0        500000          500000          0       0       0       0       0
        0       0       0       0
0       0       0       999999          999999          999999          60000  45000  90000  0
        0       0
0       0       0       999999          999999          999999          75000  75000  105000
        0       0       0
0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       24000  19200
0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       10400  8000
0       0       0       0       0       0       0       0       0       0       11200  12000
```

```
0	0	0	0	0	0	0	0	0	30000	150000
22500
0	0	0	0	0	0	0	0	0	45000	75000	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	15000	0	135000
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0;
ENDDATA
!Funcion objetivo;
MAX = @SUM(RUTAS(i,j)| i#GE#4 #AND# i#LE#9 #AND# j#GE#10:TONELADAS(i,j));
!Restriccion disponibilidad carga en Boston y Jacksonville;
@FOR(CIUDADES(i)|i#GT#1 #AND# i#LE#3:@SUM(CIUDADES(j)| j#GT#3 #AND#
J#LT#10: TONELADAS(i,j)) <= 500000);
!Restriccion de flujo;
@FOR(CIUDADES(k)|k#GT#1 #AND# k#LT#10:[FLUJO_I]@SUM(CIUDADES(i):
TONELADAS(i,k)) - @SUM(CIUDADES(j): TONELADAS(k,j)) = 0);
!Restricciones de vuelos y barcos;
@FOR(RUTAS(i,j): TONELADAS(i,j) <= CAPACIDADMAX(i,j));
!Restriccion de camiones a Kiev;
@SUM(CIUDADES(s)| s#GE#4 #AND# s#LE#6: TONELADAS(s,10)) = 0;
```

d) Código de LINGO para el inciso 6

```
SETS:
CIUDADES/ KI, LU, OD, DO, SU, MA, JE, MI, JA, YU/: NIVEL;
COMUNICACIONES(CIUDADES,CIUDADES): UTILIZACION, COSTO;
ENDSETS
DATA:
COSTO =999999	0	0	999999	999999	310000	195000
	440000	140000	999999
0	999999	999999	210000	185000	225000	999999
	999999	999999	999999
0	999999	999999	999999	999999	999999	999999
	120000	200000	999999
999999	210000	999999	999999	150000	105000
95000	999999	999999	999999
999999	185000	999999	150000	999999	125000
999999	999999	999999	85000
310000	225000	999999	105000	125000	999999
100000	75000	999999	125000
195000	999999	999999	95000	999999	100000	999999
	999999	100000	999999
440000	999999	120000	999999	999999	75000	999999
	999999	95000	999999
140000	999999	200000	999999	999999	999999
100000	95000	999999	999999
999999	999999	999999	999999	85000	125000	999999
	999999	999999	999999;
```

```
ENDDATA
!Funcion objetivo;
MIN = @SUM(COMUNICACIONES(i,j):UTILIZACION(i,j)*COSTO(i,j));
!Restriccion de nodos salida;
@FOR(CIUDADES(i)| i#GT#1: @SUM(CIUDADES(j): UTILIZACION(i,j)) = 1);
@SUM(CIUDADES(j): UTILIZACION(1,j)) = 0;
!Restriccion de niveles;
@FOR(COMUNICACIONES(i,j)| i#GT#1: NIVEL(i) >= NIVEL(j) + UTILIZACION(i,j) -
10000*(1 - UTILIZACION(i,j)));
@FOR(CIUDADES(i)| i#EQ#1 :NIVEL(i) = 0);
!Definicion de variables;
@FOR(COMUNICACIONES(i,j): @BIN(UTILIZACION(i,j)));
@FOR(CIUDADES(i): @GIN(NIVEL(i)));
```