Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
PPGER – PPGCC

Aula 6: Filtragem no domínio da frequência
Transformadas de Fourier

Processamento Digital de Imagens
Prof. Dr. Pedro Pedrosa

pedrosarf@ifce.edu.br

pedropedrosa.maracanau.ifce.edu.br

Exemplificação da transformada de Fourrier

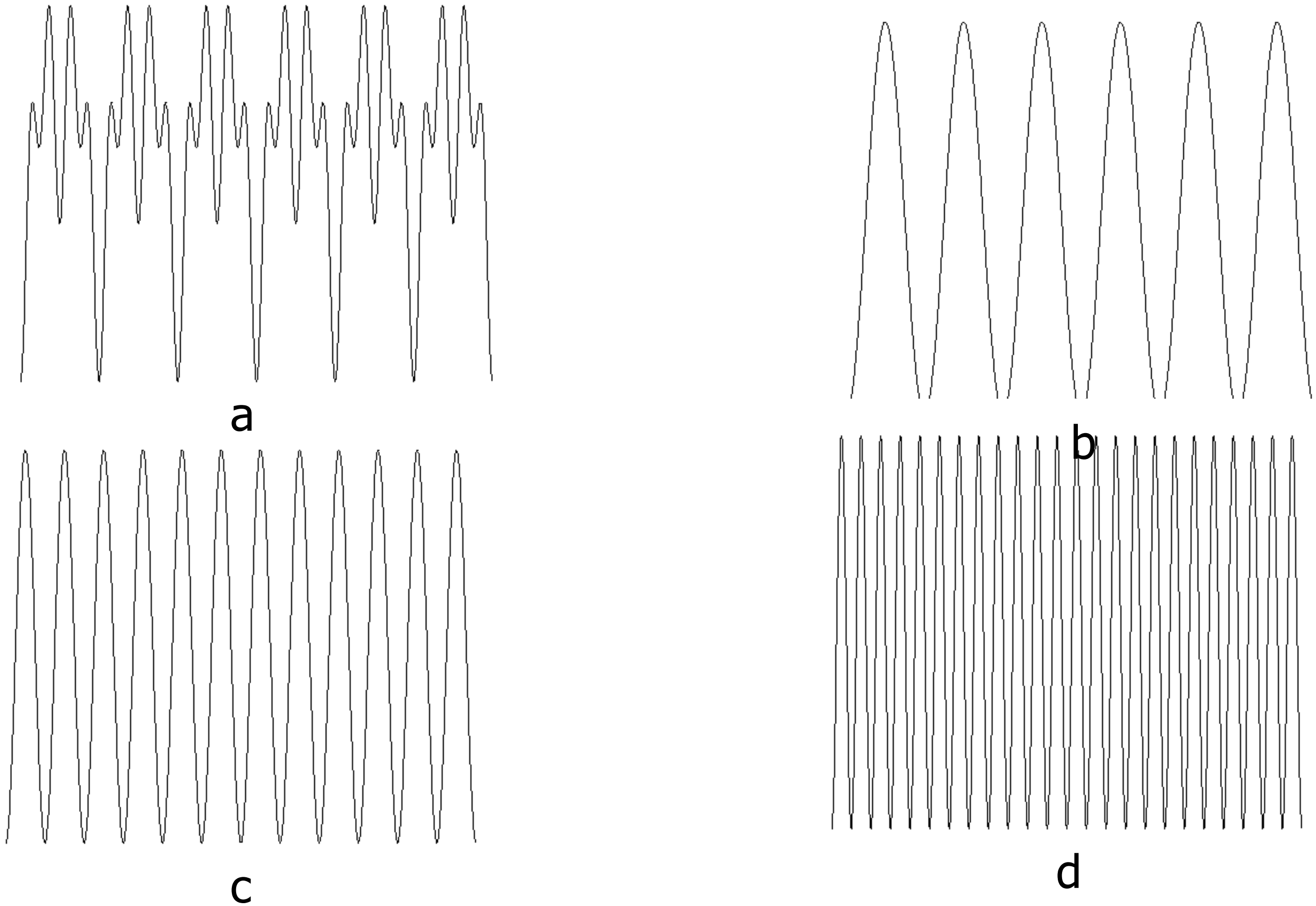


Figura 1. a) Sinal Ruidoso (b) 1ª (c) 2ª (d) 3ª harmônica

Transformada de Fourier Discreta

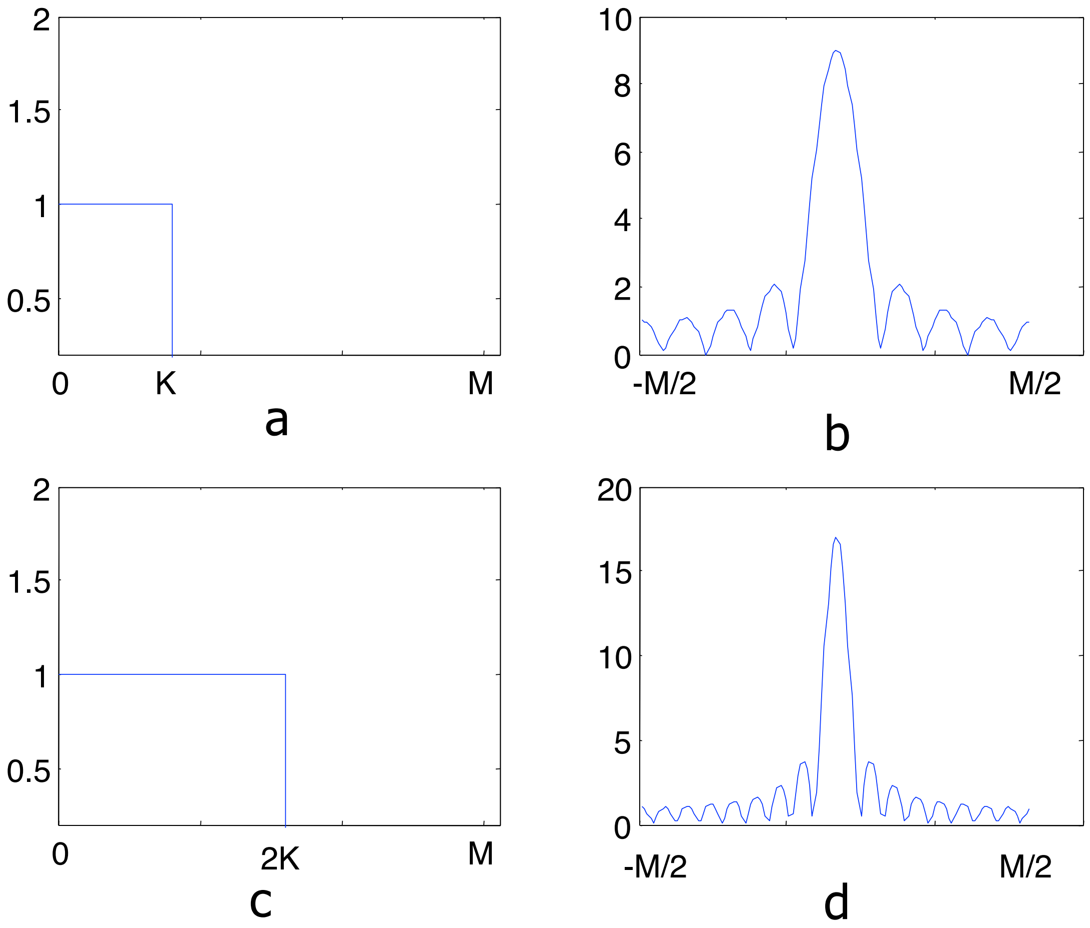


Figura 2. a) Função discreta de M pontos, b) Espectro de Fourier (c) função discreta com o dobro de pontos não nulos e d) seu espectro de Fourier

Espectro de Fourrier 2D

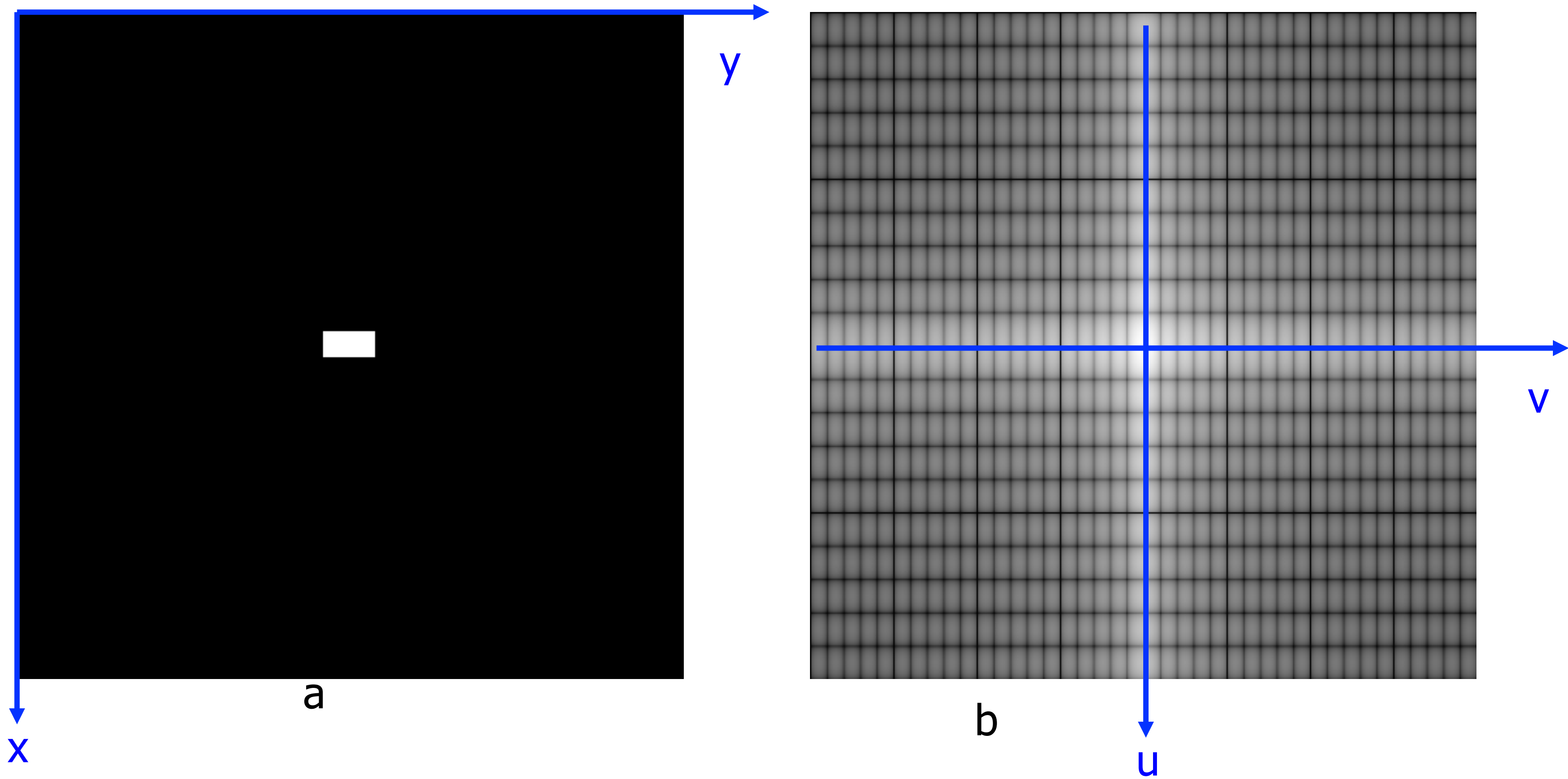


Figura 3. a) imagem (512 x 512) com um retângulo quadrado de 20 x 40
b) Espectro de Fourier centrado após aplicação da transformação logarítimica

Características importantes no Espectro

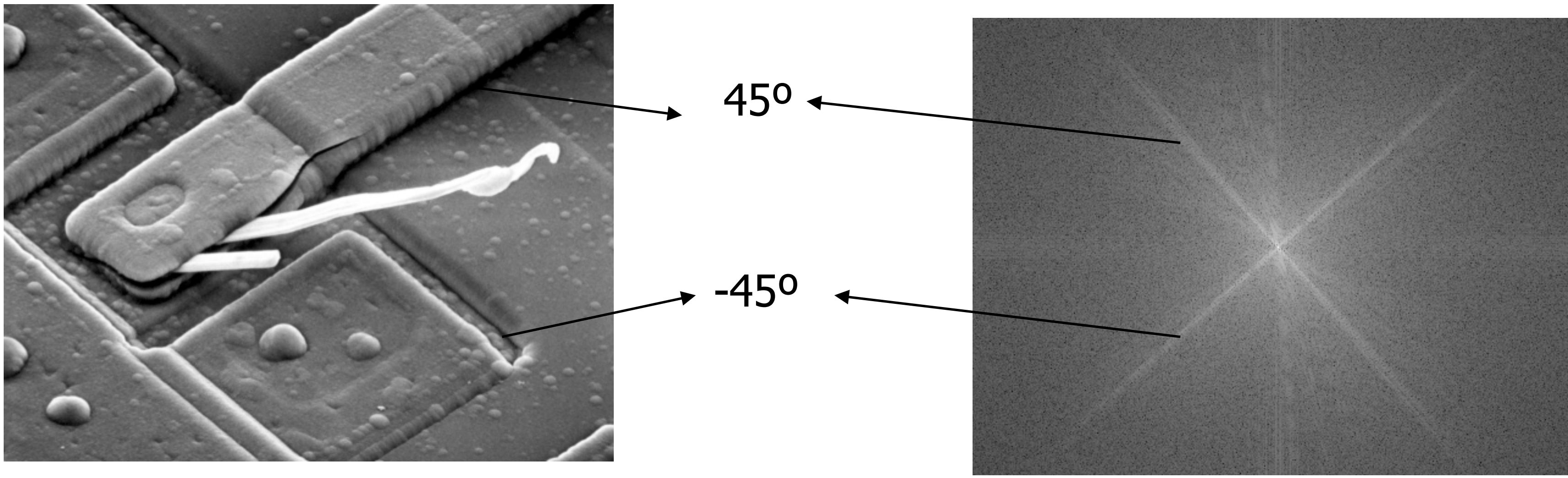


Figura 4. a) imagem MEV de um circuito integrado com defeito
b) Seu espectro de Fourier

Filtragem no domínio da frequência

1. Multiplicar a imagem de entrada por $(-1)^{x+y}$ para centrar a transformada
2. Calcular F(u,v), DFT da imagem (1)
3. Multiplicar F(u,v) por uma filtro de função H(u,v)
4. Computar a IDFT de (3)
5. Obter a parte real de (4)
6. Multiplicar o resultado de (5) por $(-1)^{x+y}$

Diagrama esquemático da filtragem

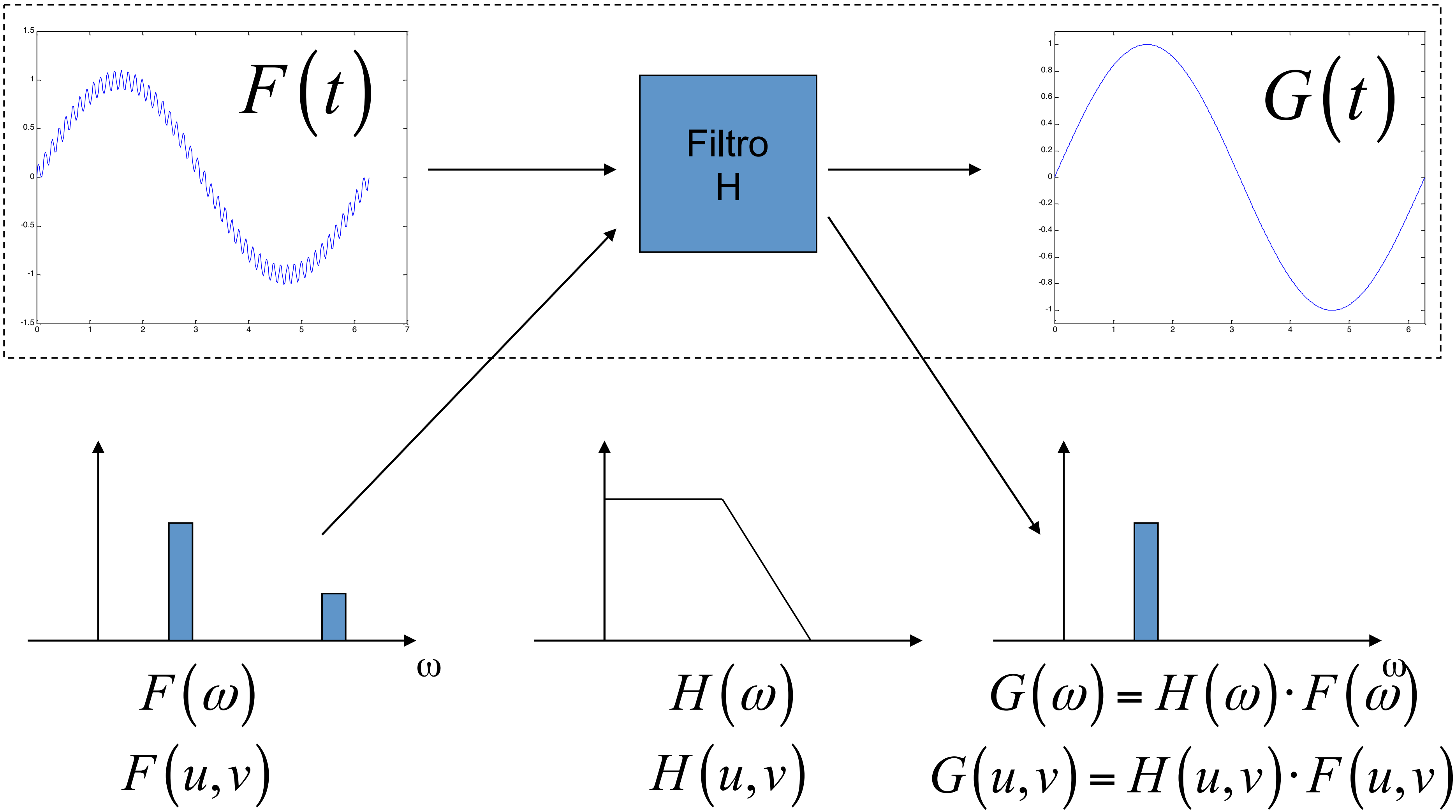
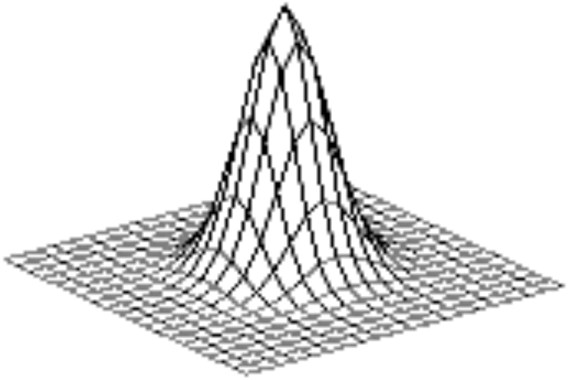


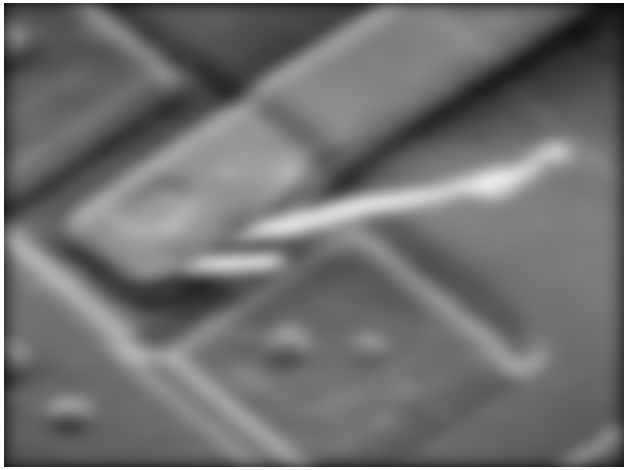
Figura 5. Filtragem no domínio da freqüência

Exemplo

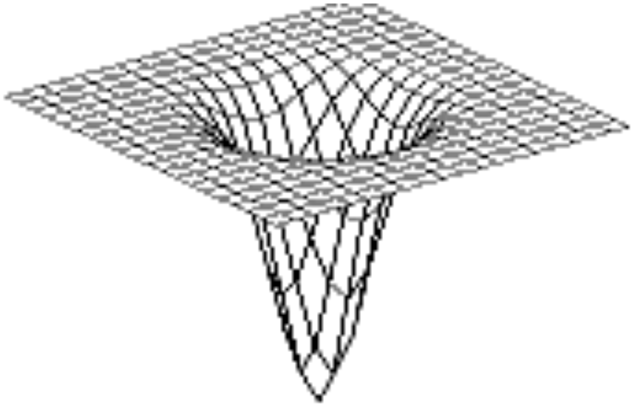
$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{se}\,(u,v) = M/2, N/2 \\ 1 & \text{se}\,(u,v) \neq M/2, N/2 \end{cases}$$



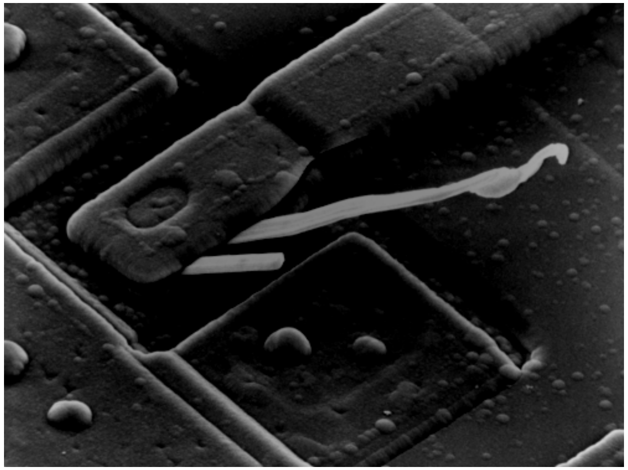
a



b



c



d

Figura 6. a) Filtro passa baixa b) resultado da filtragem (c) passa alta (d) resultado

Filtros Passa Baixa no Domínio da Freqüência

- Filtro Ideal

$$H(u,v)=\begin{cases}1 & \mathrm{se}\,(\mathrm{u,v})\leq D_0\\ 0 & \mathrm{se}\,(\mathrm{u,v})> D_0\end{cases}$$

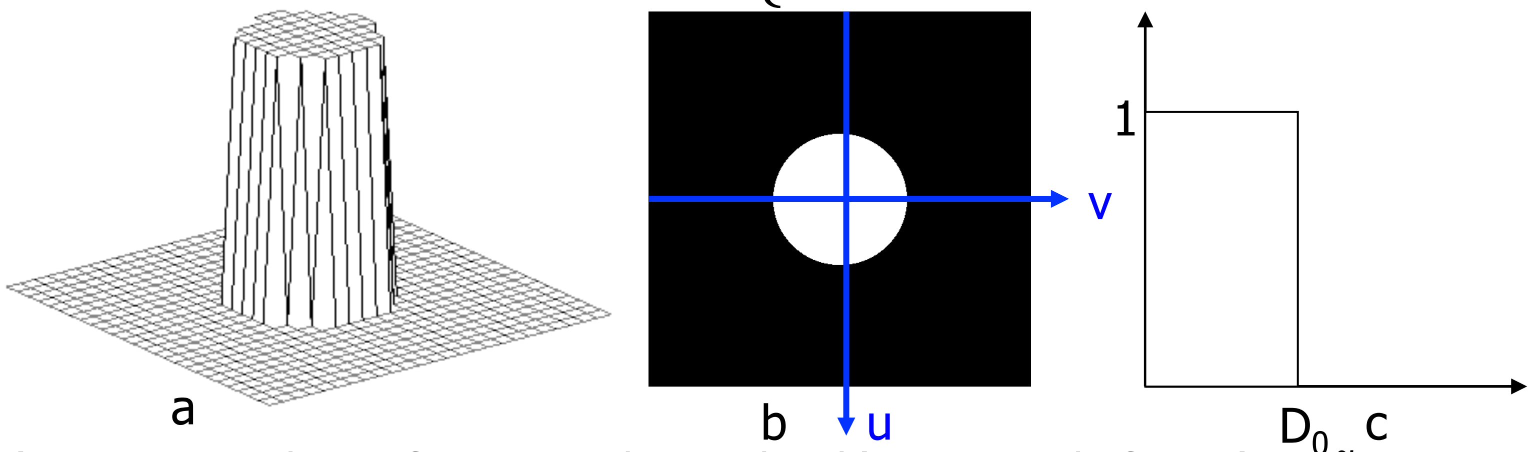
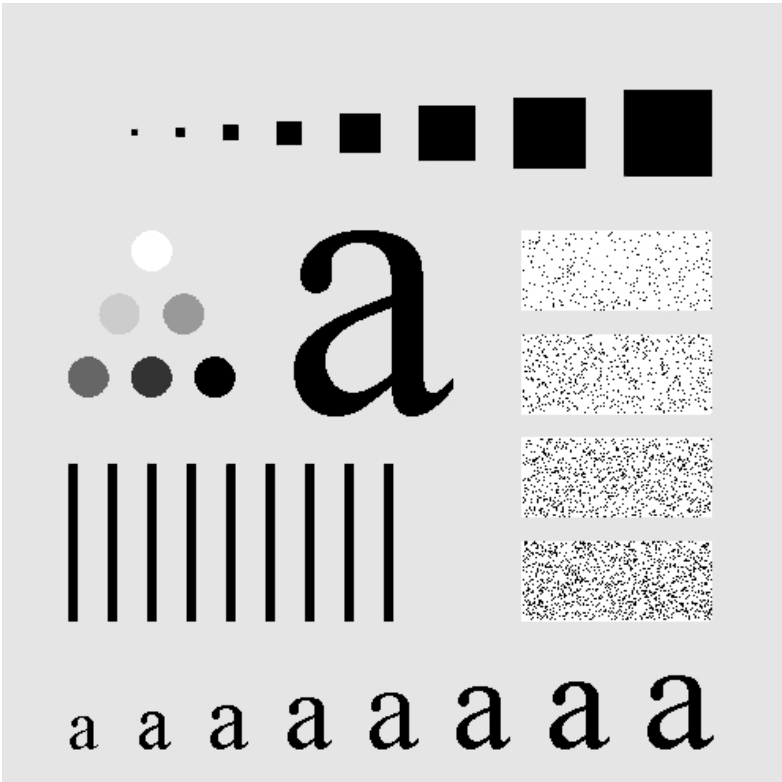


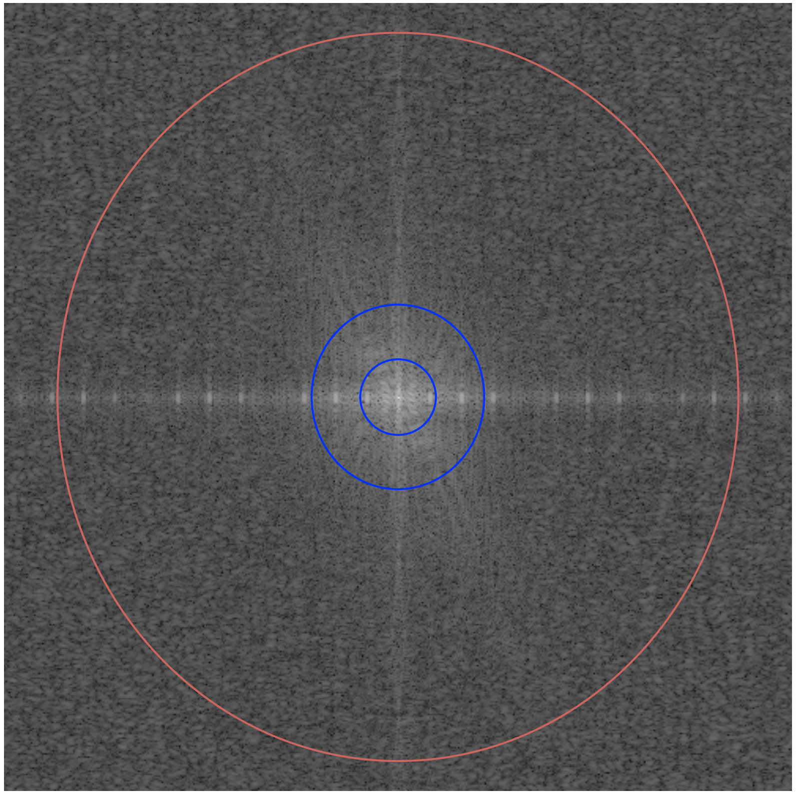
Figura 7. a) Perspectiva de um filtro passa baixa ideal b) Imagem do filtro c) Seção Transversal

- Transição Brusca impede a realização em filtros reais, mas não impede que seja usado em imagens
- Tamanho da janela do filtro (D_0) pode ser calculado para preservar uma parte da energia (α) contida no sinal (imagem)

Exemplo de filtragem passa baixa



a



b

Figura 8. a) Imagem sintética e b) espectro de Fourier de (a). Os círculos superpostos possuem raio iguais a 30, 80, 230 correspondendo a (96.4, 98.0 e 99.5) % da potência da imagem

Exemplo

- Os detalhes finos da imagem + ruídos representam 8% da energia;
- A filtragem é um compromisso entre:
  - Energia preservada, Borramento e Remoção de ruído

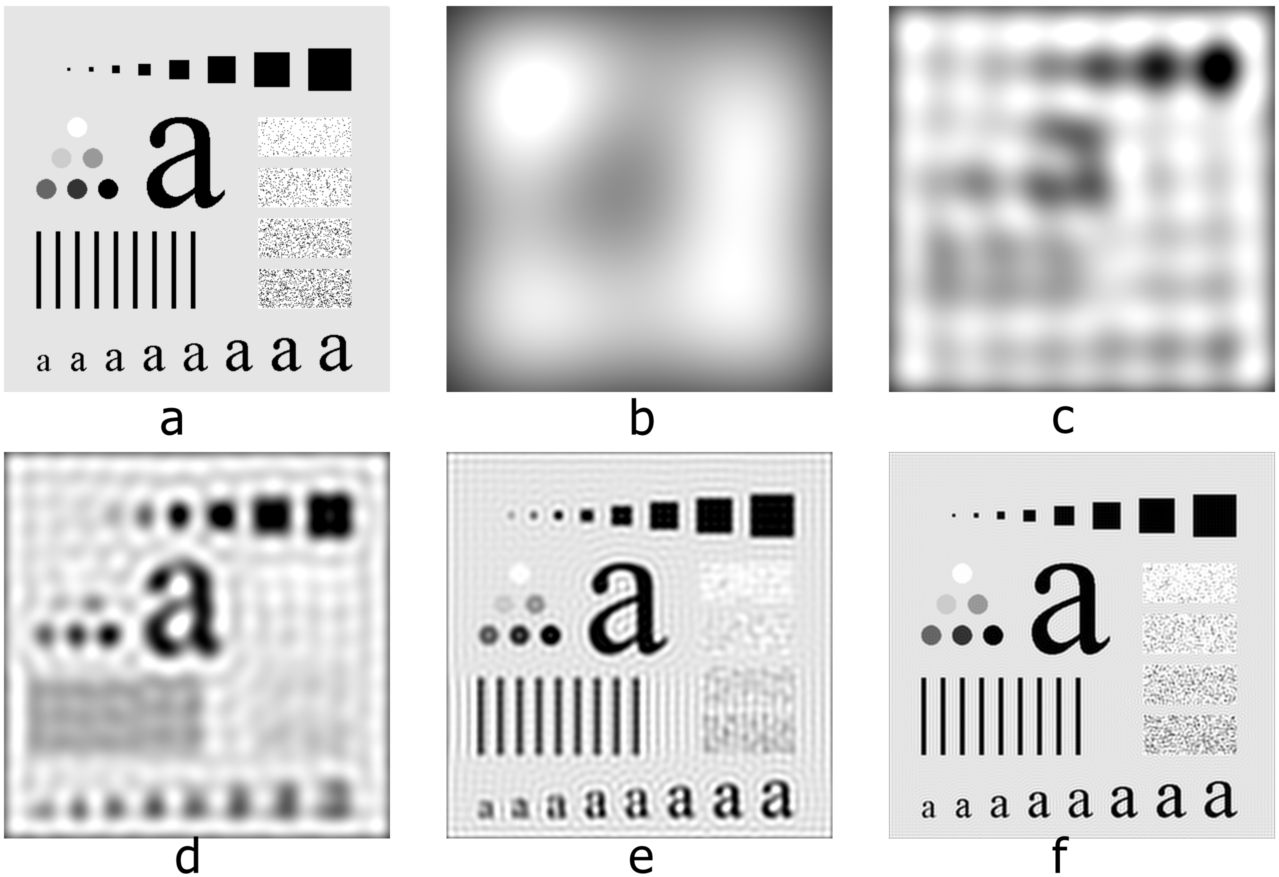
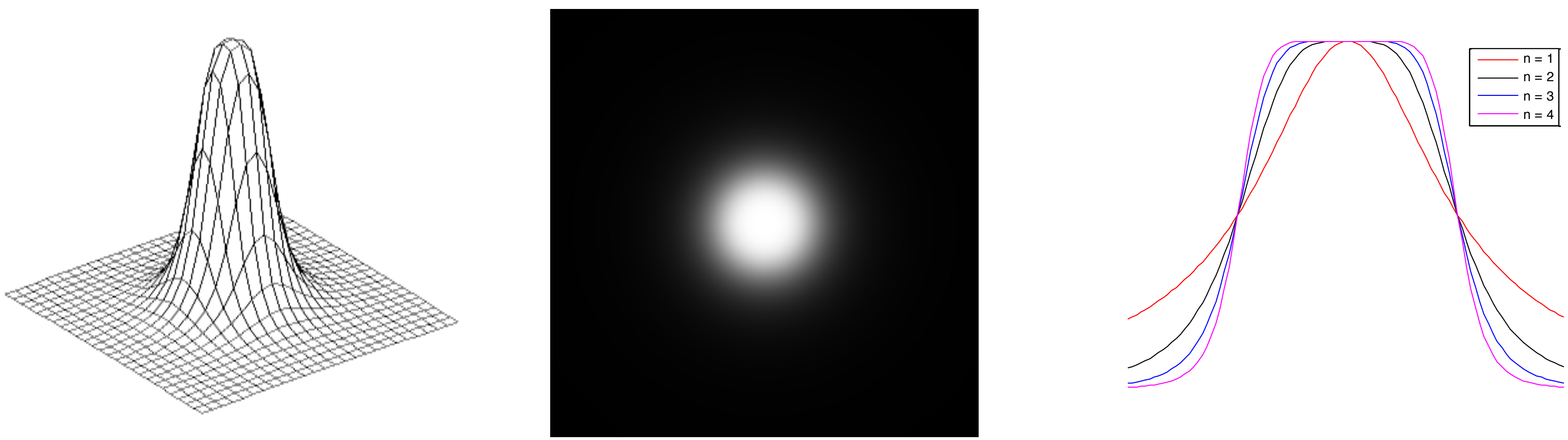


Figura 9. a) imagem original b) – f) resultado do passa baixa ideal (92, 94.6, 95.4, 98 e 99.5)%x

Filtro de Butterworth

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D_0 / D(u,v)]^{2n}}$$

- Não há a descontinuidade. Transições mais suaves
- A freqüência de corte é definida onde o ganho do filtro é 0.5
- Filtro de ordem 1 não há oscilasções, aumentando com o aumento da ordem do filtro



a b c

Figura 10. a) Perspectiva de um filtro passa baixa btw b) Imagem do filtro c) Seção Transversal

Exemplo

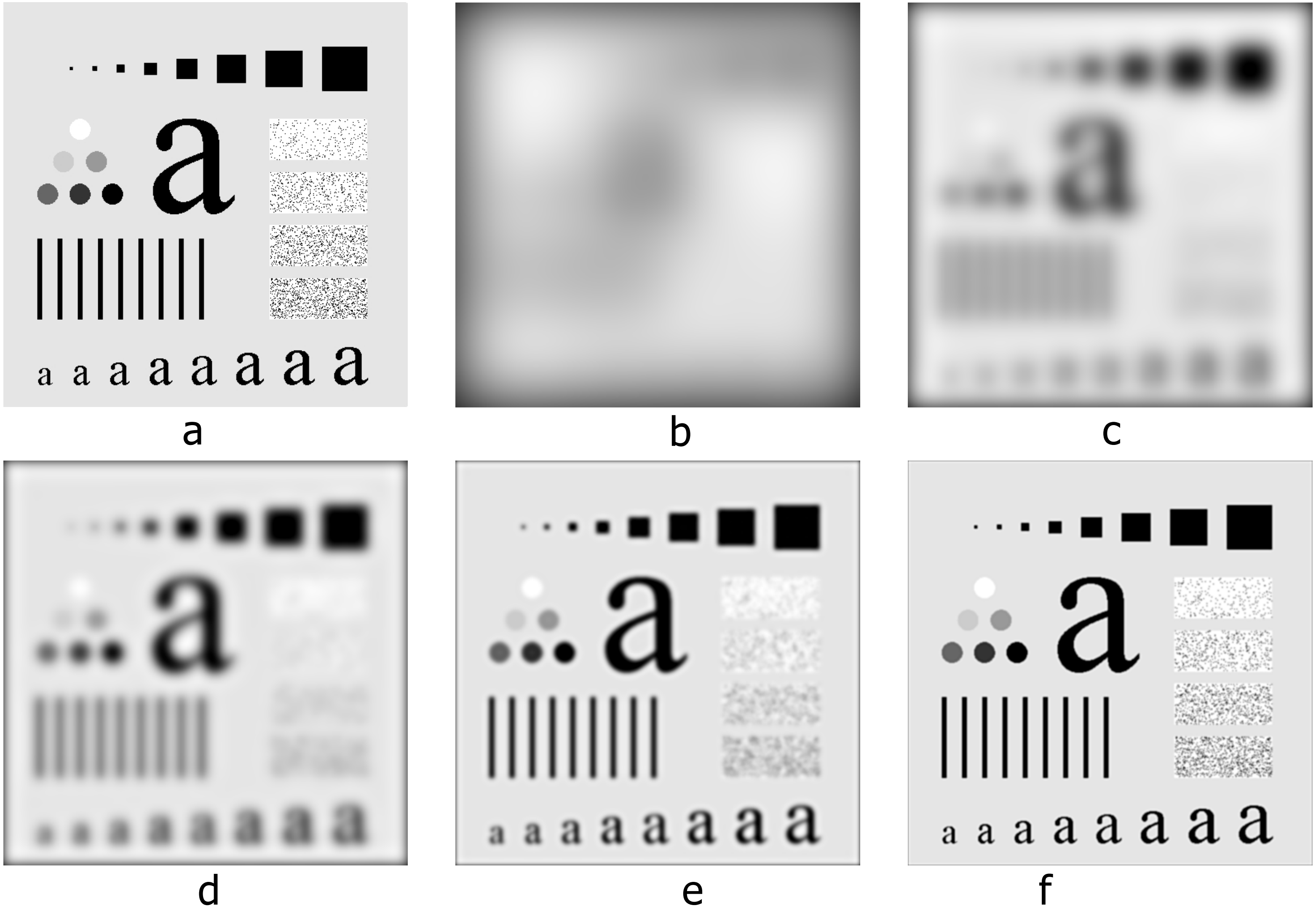


Figura 11. a) imagem original b) – f) resultado do passa baixa btw

Filtro de Butterworth

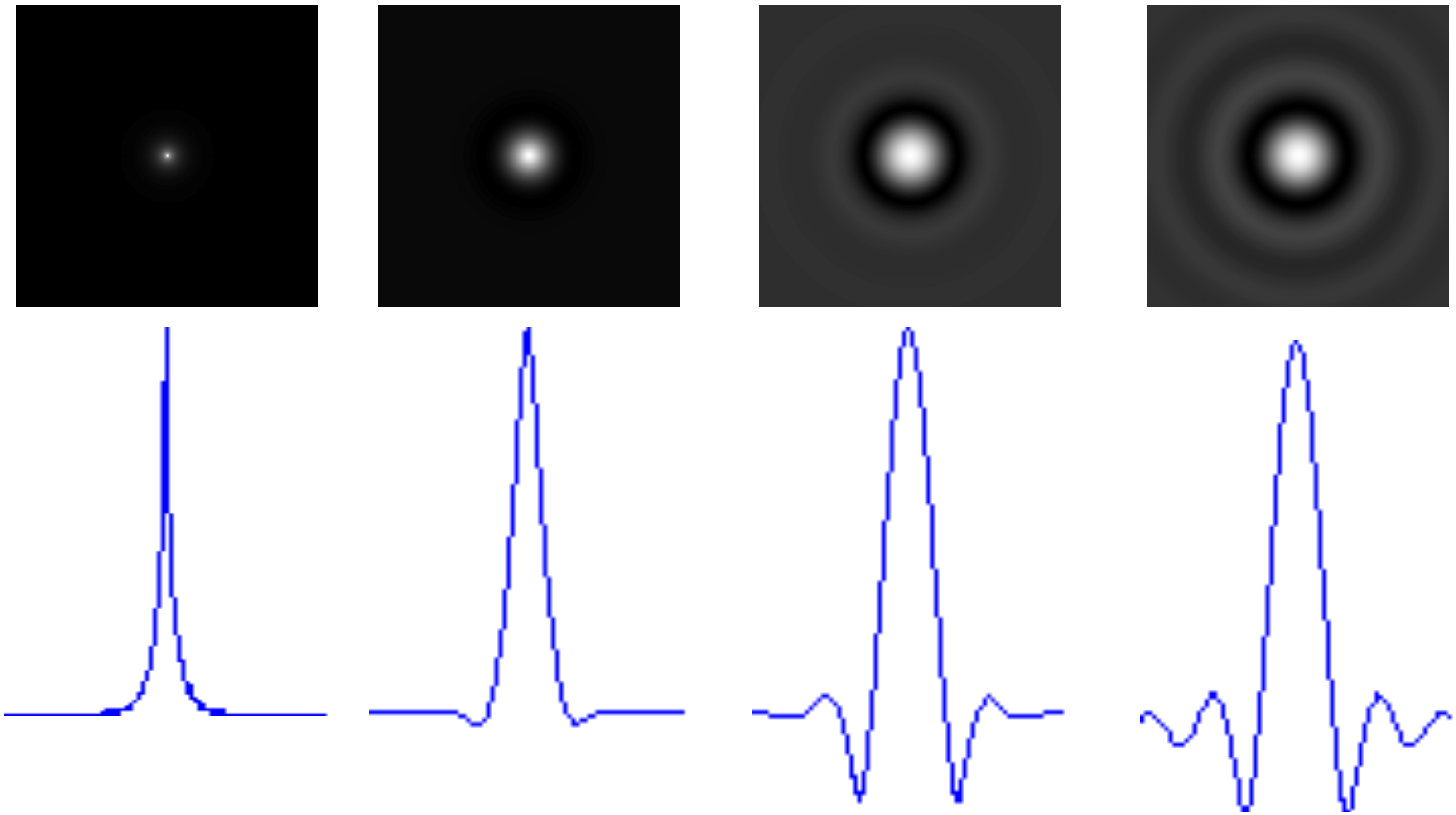
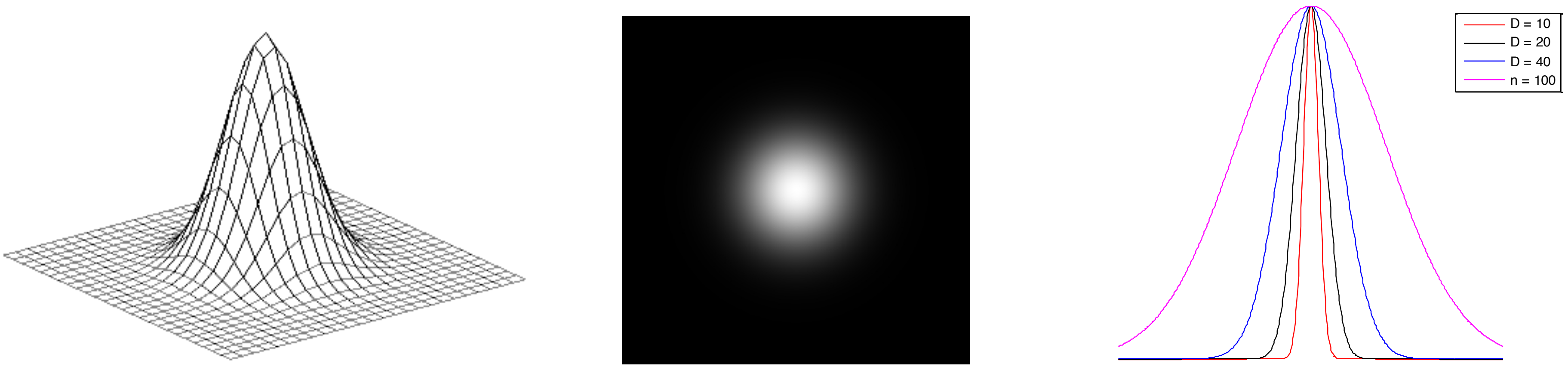


Figura 14. representação de filtros Butterworth de ordem a)1 b) 2 c) 5 e d) 20.

Filtro Gaussiano

$$H(u,v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2\sigma^2}$$

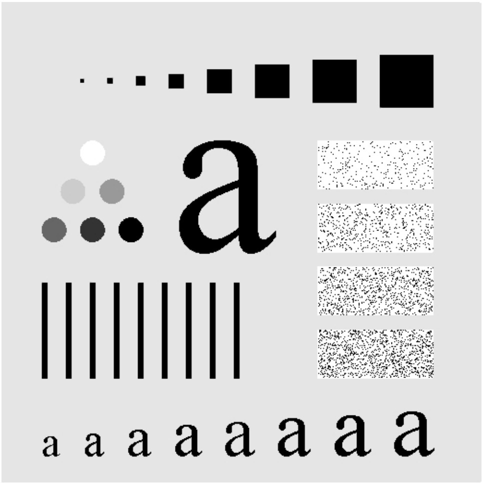
- A freqüência de corte é definida onde o ganho do filtro é 0.607
- A inversa não há oscilações



a b c

Figura 13. a) Perspectiva de um filtro passa baixa btw b) Imagem do filtro c) Seção Transversal

Filtragem Gaussiana



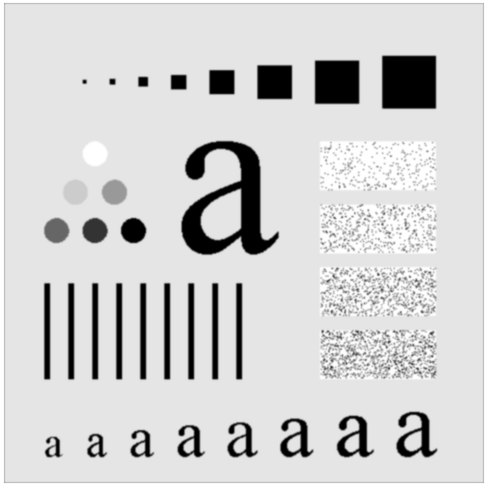
a

b

c

d

e



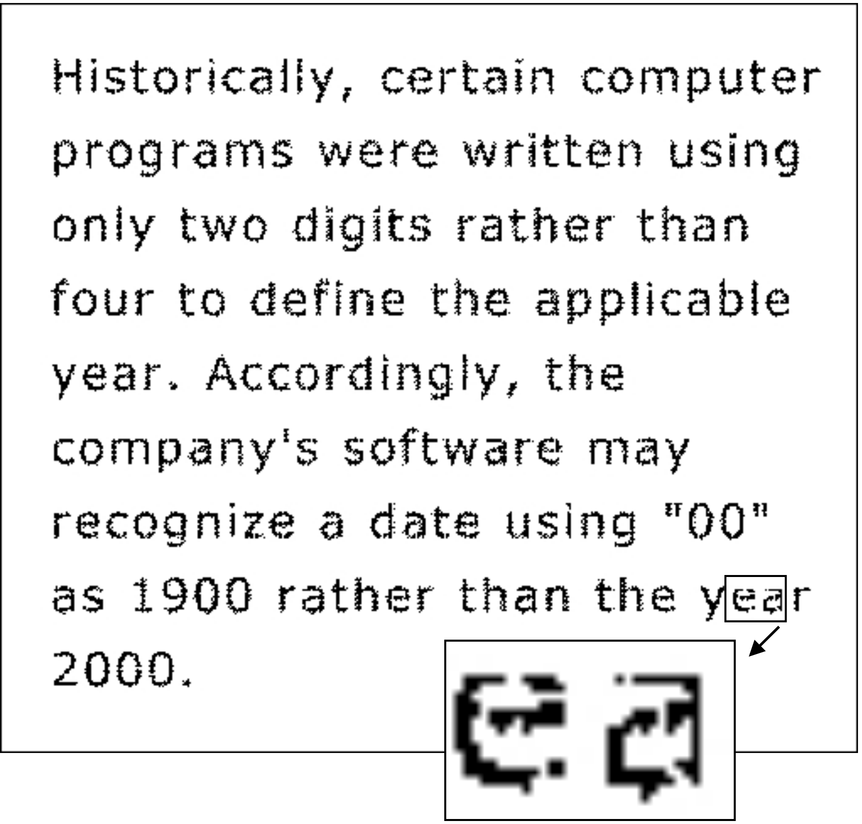
f

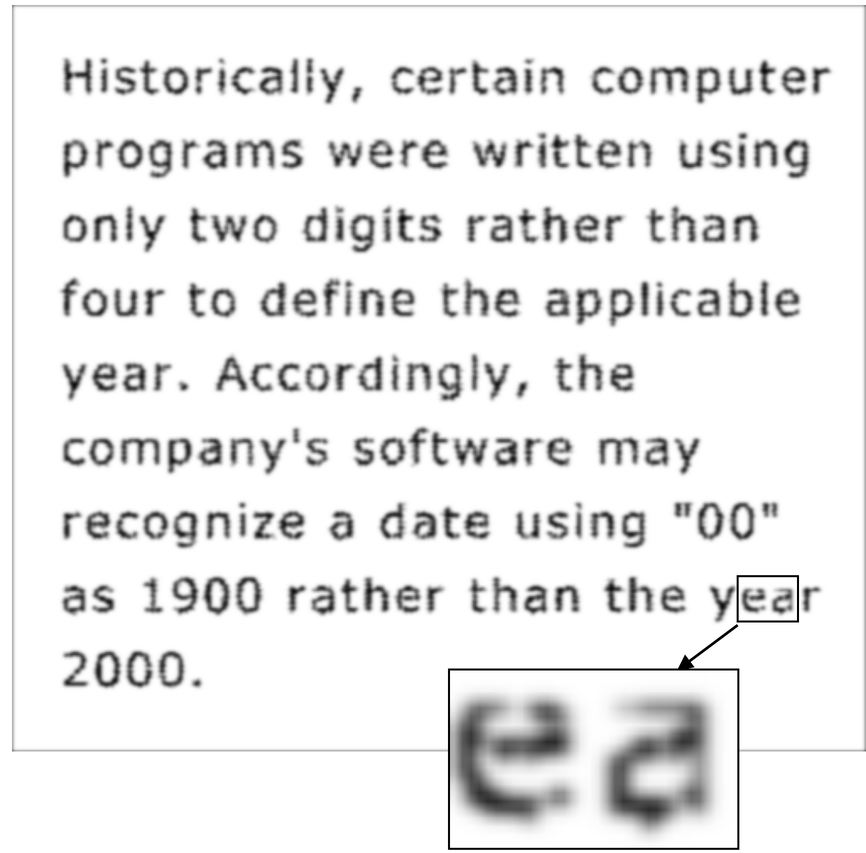
Figura 14. a) imagem original b) – f) resultado do passa baixa gaussiano

Aplicações

- Reconhecimento de caracteres, o borramento faz com que os caracteres fique melhor definidos
- Impressão: tornando a pele mais suave
- Sensoriamento remoto: realçar objetos através do borramento

Exemplo de aplicação do filtro gaussiano





Exemplo de aplicação do filtro gaussiano

Exemplo de aplicação do filtro gaussiano

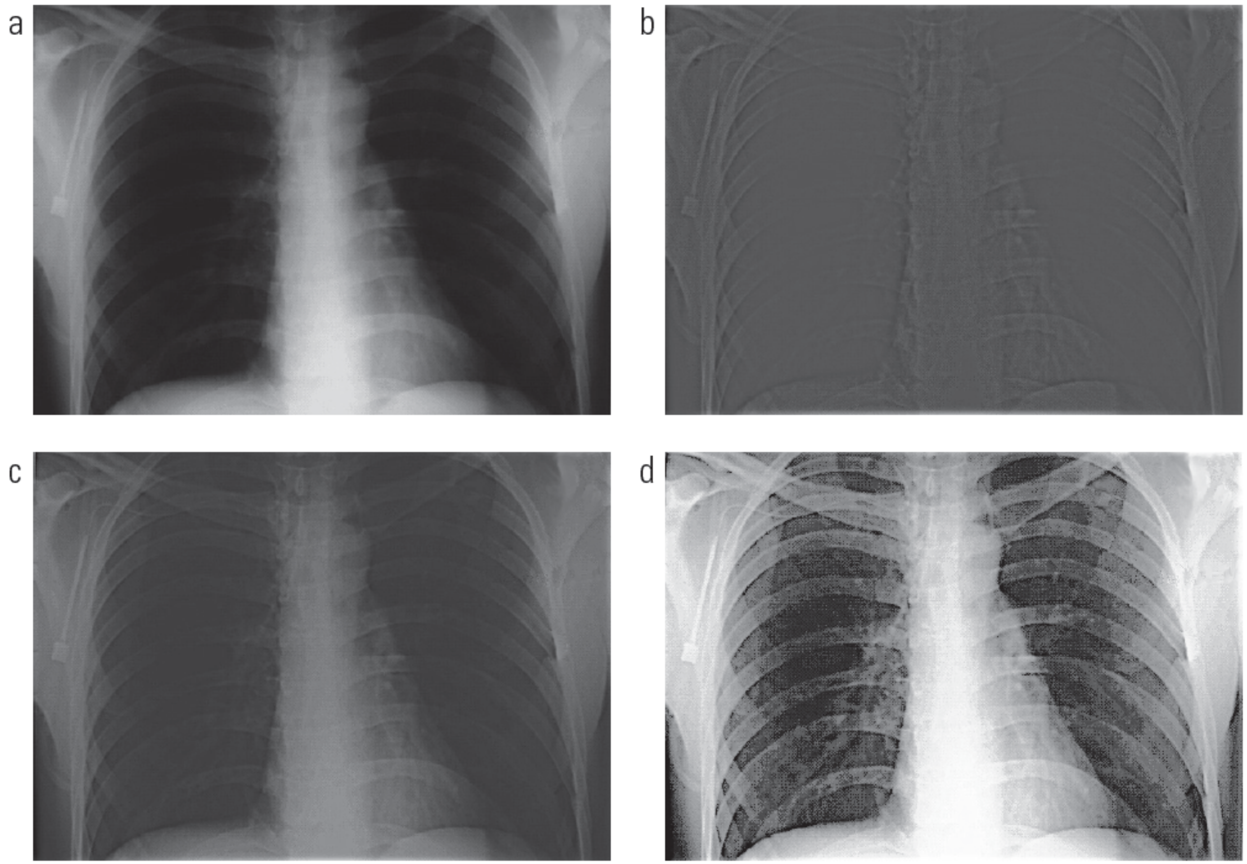
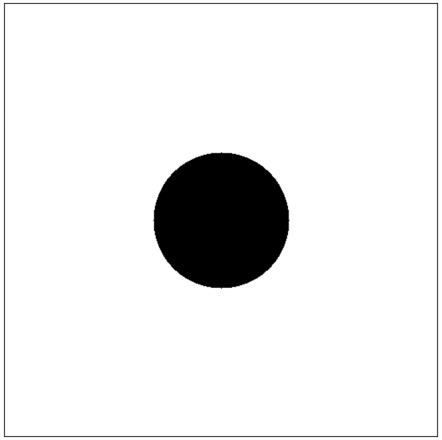
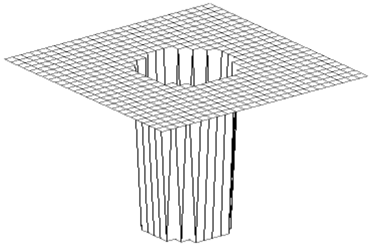
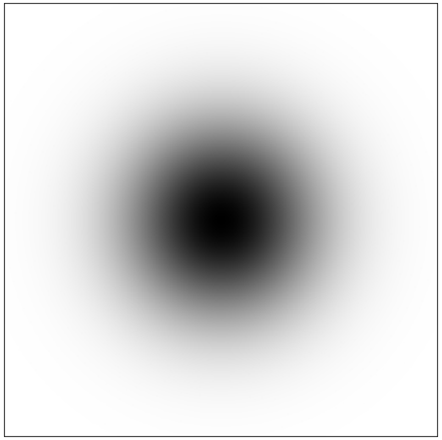
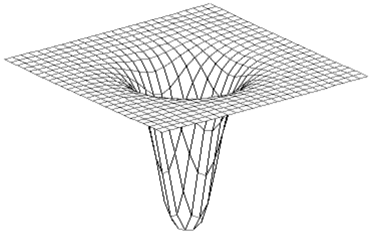
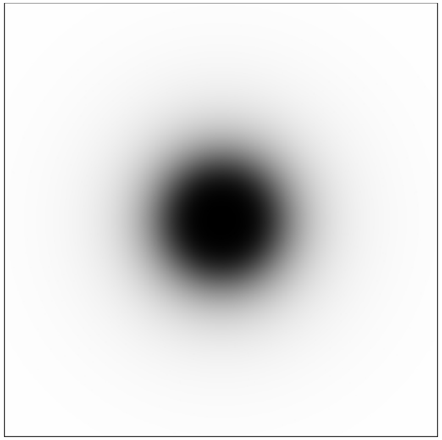
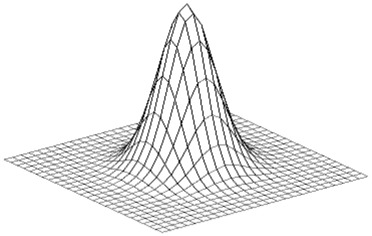
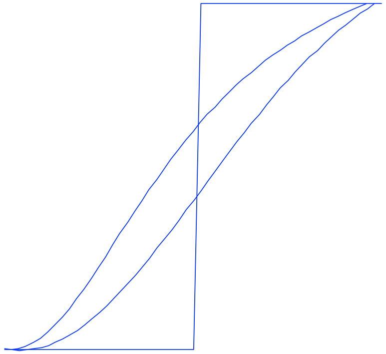
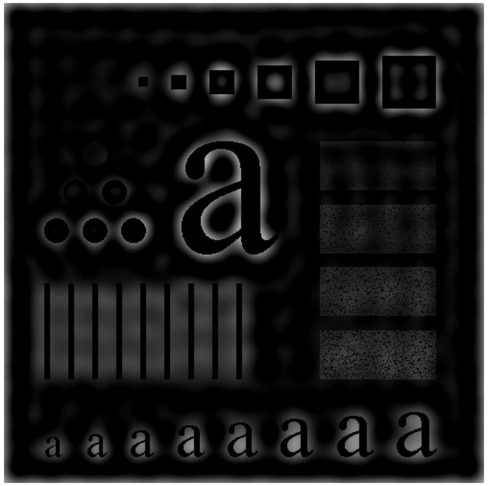


Figura 4.59 (a) Uma imagem radiográfica de tórax. (b) Resultado da filtragem passa-alta com filtro gaussiano. (c) Resultado da filtragem de ênfase de alta frequência utilizando o mesmo filtro. (d) Resultado da equalização de histograma em (c). (Imagem original: cortesia do Dr. Thomas R. Gest, Divisão de Ciências Anatômicas, Faculdade de Medicina da Universidade de Michigan.)

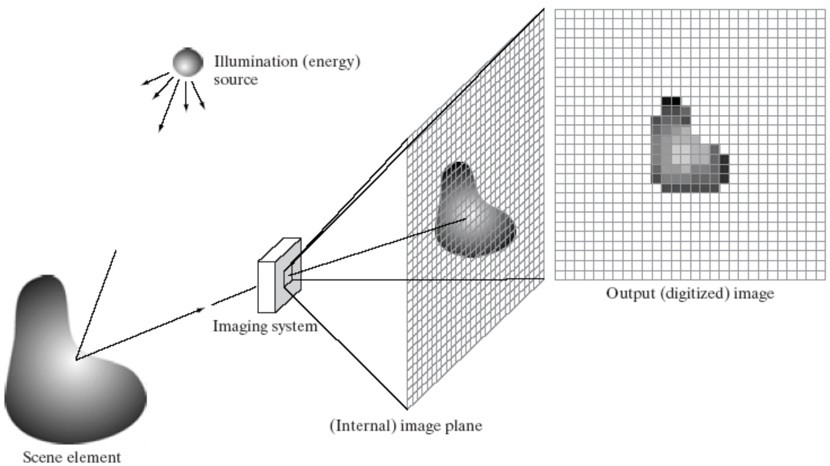
Filtros Passa Alta

Filtro Ideal

Filtragem Homomorfica



- Objetivo
  - Realizar o realce a partir da separação entre as informações de luminosidade e refletância
  - Realiza a compreensão da escala dos níveis de cinza e também melhora o contraste

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y).$$

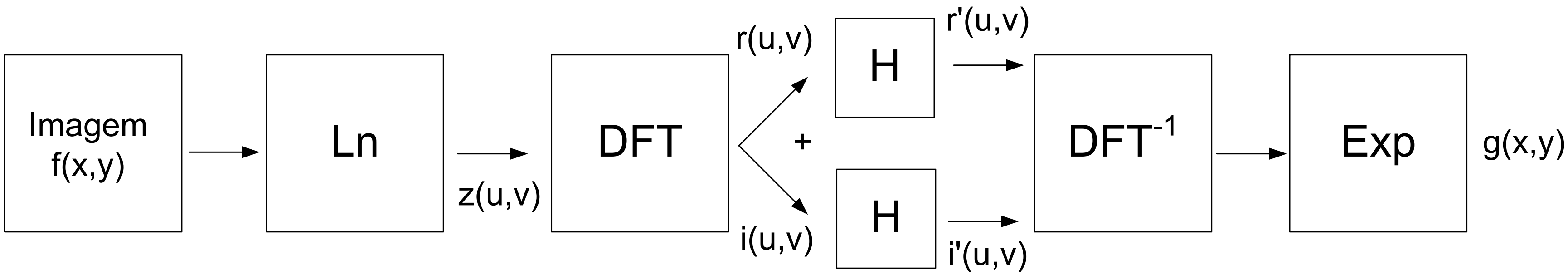
$$\Im\{f(x,y)\} = \Im\{i(x,y)r(x,y)\} = i(x,y) * r(x,y)$$

$$\Im\{f(x,y)\} \neq \Im\{i(x,y)\}\Im\{r(x,y)\}$$

contudo,

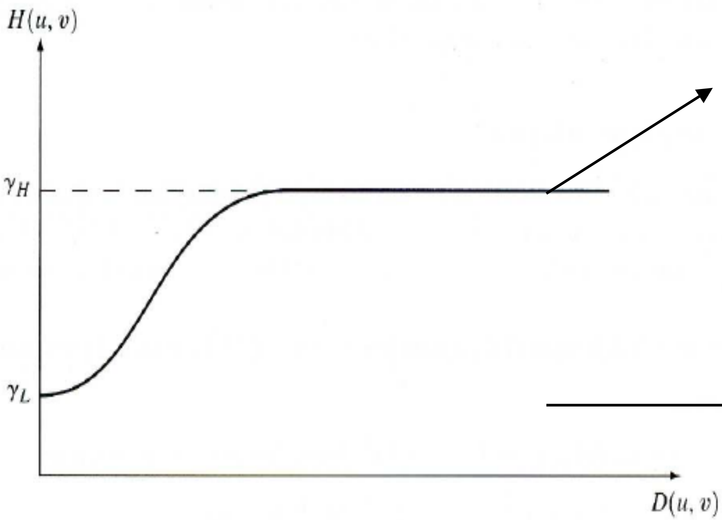
$$\Im\{\ln f(x,y)\} = \Im\{\ln i(x,y)\} + \Im\{\ln r(x,y)\} \Rightarrow Z(u,v) = F_i(u,v) + F_r(u,v)$$

Filtragem Homomorfica



- O filtro atua separadamente nas componentes de iluminação e refletância;
- A componente de iluminação é caracterizada por pequenas variações espaciais (baixas freqüências);
- A de refletância varia abruptamente, principalmente através dos objetos dissimilares (altas);
- Esse detalhe pode ser abordado para realçar a imagem.
  - Atenuar Baixas Freqüências;
  - Amplificar Altas Freqüências.

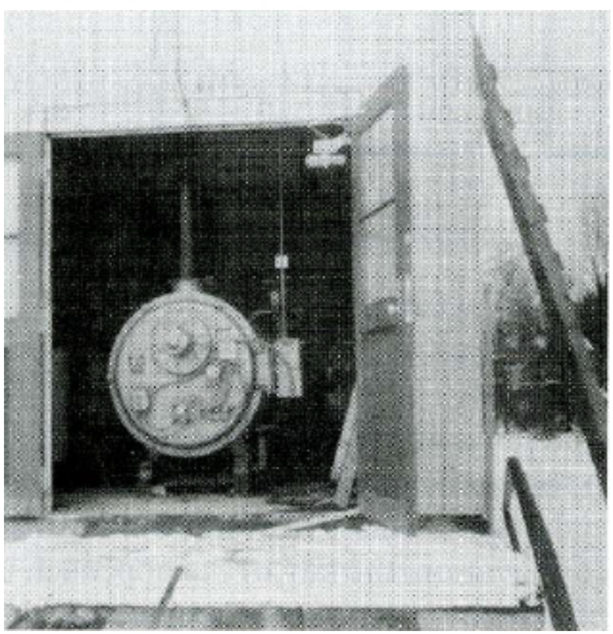
Filtragem Homomorfica

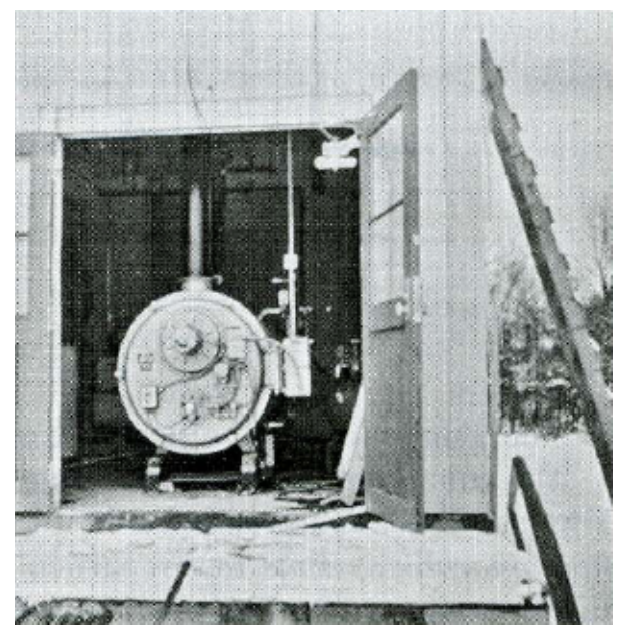


Amplificar
$\gamma_l > 1$

Atenuar
$\gamma_l < 1$

$$H(u,v) = (\gamma_H - \gamma_L)\left[1 - e^{-c\left(D^2(u,v)/D_0^2\right)}\right] + \gamma_L$$





Propriedades da Transformada de Fourier

- Translação

$$f(x,y)\exp[j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)] \Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$$

$$f(x-x_0,y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)\exp[-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)]$$

  – A multiplicação da imagem f(x,y) por uma exponencial apenas dá um deslocamento da origem da freqüência para a o ponto (u_0, v_0).
  – Da mesma forma, multiplicar o espectro de Fourier por uma exponencial faz um deslocamento da origem (0,0) da imagem para (x_0, y_0)
  – A translação não altera valores de magnitude do espectro de Fourier.

Propriedades da Transformada de Fourier

- Distributividade: Apenas para adição

$$\Im\{f_1(x,y) + f_2(x,y)\} = \Im\{f_1(x,y)\} + \Im\{f_2(x,y)\}$$

$$\Im\{f_1(x,y) \cdot f_2(x,y)\} \neq \Im\{f_1(x,y)\} \cdot \Im\{f_2(x,y)\}$$

- Multiplicação por uma constante:

$$af(x,y) \Leftrightarrow aF(u,v)$$

$$f(ax,by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F(u/a, v/b)$$

Propriedades da Transformada de Fourier

- Rotação:

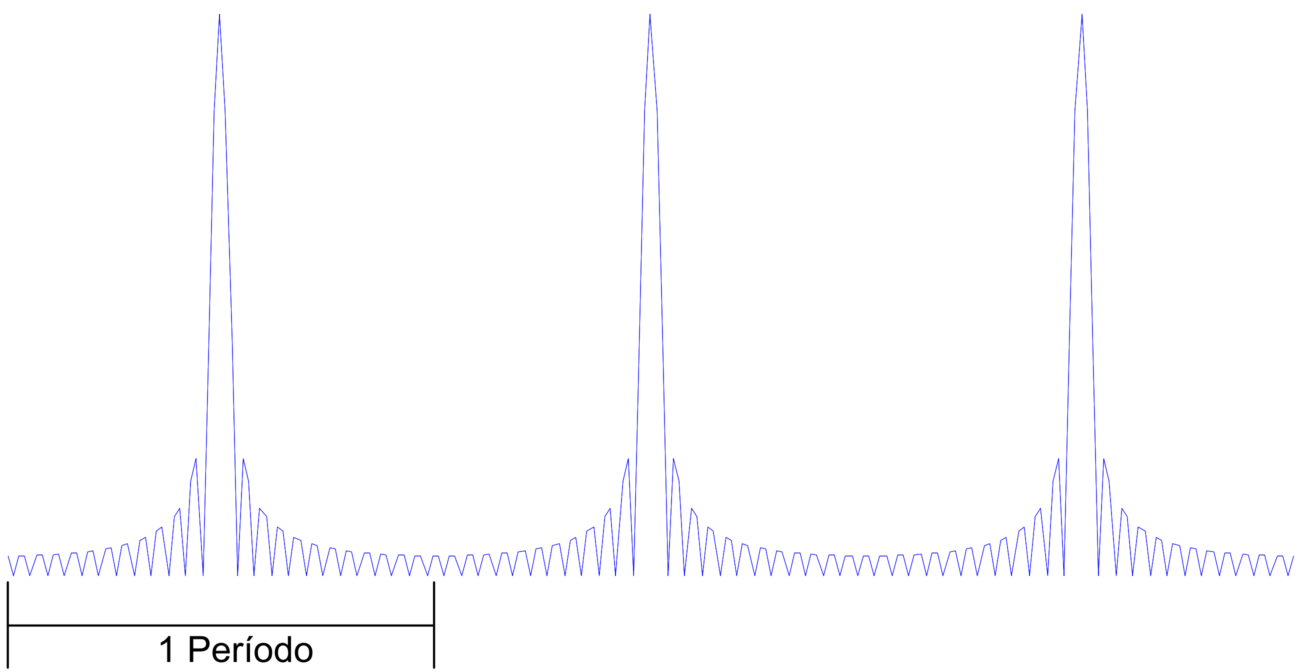
$$f(x,y), F(u,v) \equiv f(r,\theta), F(\omega,\varphi)$$

$$f(r,\theta+\theta_0) \Leftrightarrow F(\omega,\varphi+\theta_0)$$

  - Rotacionar a imagem com um ângulo (ϕ) apenas rotaciona o espectro de Fourier com o mesmo angulo.

Propriedades da Transformada de Fourier

- Periodicidade:
  - Um sinal discreto de comprimento N possui N/2 frequencias, desta forma a transformada de Fourier se repete infinitamente com período de N. Da mesma forma acontece quando é uma imagem



Propriedades da Transformada de Fourier

- Convolução
  - Contínua

$$f(x)*g(x) \Leftrightarrow F(u)G(u)$$

$$f(x)g(x) \Leftrightarrow F(u)*G(u)$$

  - Discreta

$$f_e(x)*g_e(x) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} f_e(m)g_e(x-m)$$

  - Muito usada em filtragem

Propriedades da Transformada de Fourier

- Convolução
  - Contínua

$$f(x,y) \circ g(x,y) \Leftrightarrow F^*(u,v)G(u,v)$$

$$f^*(x,y)g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) \circ G(u,v)$$

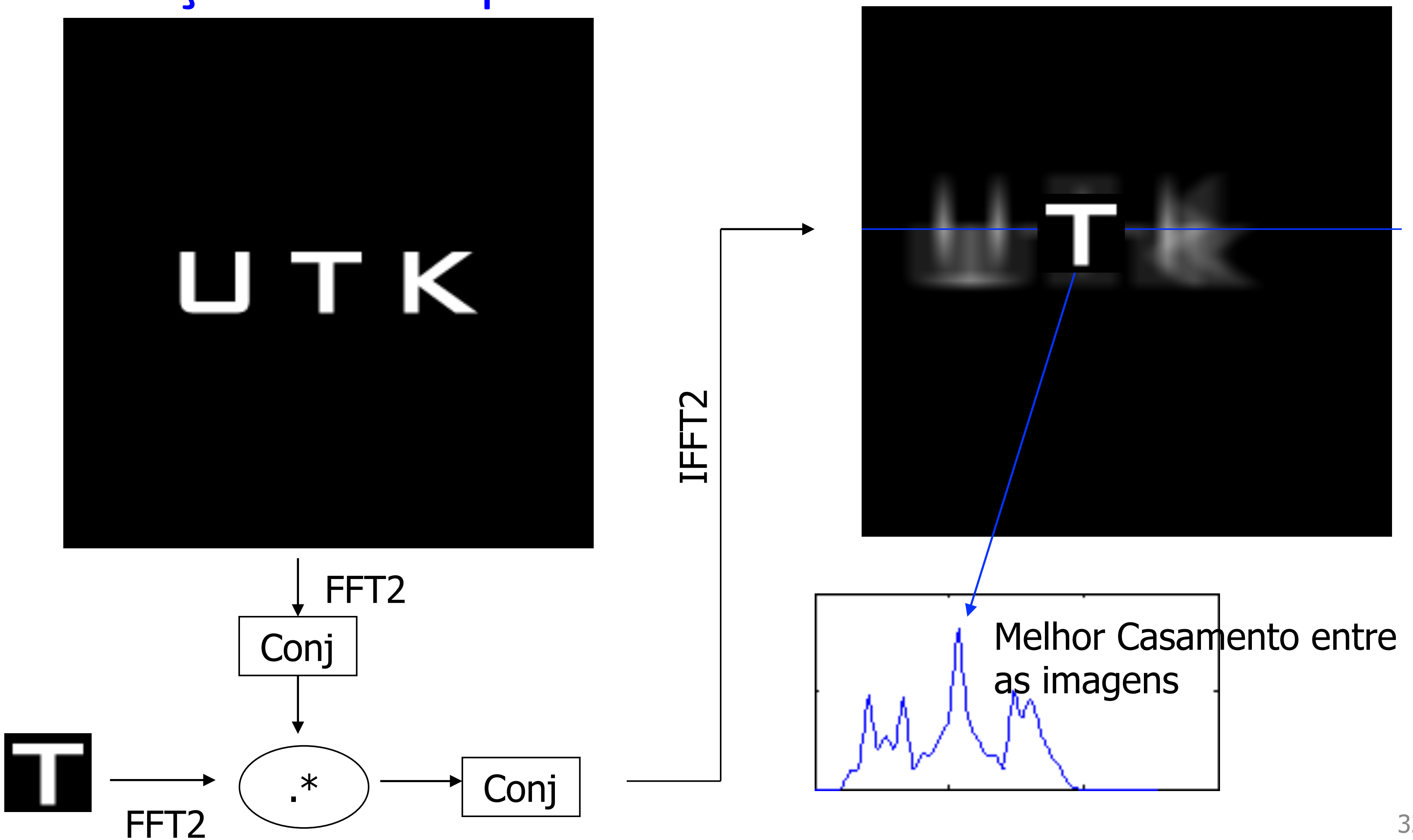
  - Discreta

$$f_e(x) \circ g_e(x) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} f_e^*(m) g_e(x+m)$$

  - Muito usada em localização de modelos.

Propriedades da Transformada de Fourier

Correlação – Exemplo:



Propriedades da Transformada de Fourier

- Convolução
  - Contínua

$$f(x)*g(x) \Leftrightarrow F(u)G(u)$$
$$f(x)g(x) \Leftrightarrow F(u)*G(u)$$

  - Discreta

$$f_e(x)*g_e(x) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} f_e(m)g_e(x-m)$$

  - Muito usada em filtragem

Exemplos de implementação

- Utilizando Matlab
  - Link:
    https://www.dropbox.com/s/wviqgwm5hzkt3ov/PDI%20-%20Aula%206%20-%20MatLab%20-%20Material%20Extra.pdf?dl=0
- Utilizando OpenCv com linguagem C
  - Link
    https://www.dropbox.com/sh/9mvedtbejgxcgl5/AADpE56N2W0ONeICjxoiUvG9a?dl=0

Encaminhamentos

- Dúvidas?
- Próximo assunto
  - Tranformada Wavelet