Содержание

Литература:

1. Виноградов О.Л. Математический анализ.
2. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа.
3. Зорич В.А. Математический анализ (Том 1).

1 Продолжение главы “Производные и исследование функций”

1.1 Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $f: \mathbb{R} \supset (a,b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема на интервале (a,b). Тогда на этом интервале возникает функция $f': (a,b) \to \mathbb{R}$. Если при этом f' тоже дифференцируема, то можно рассматривать её производную $(f')'$, которую принято называть второй производной (или производной второго порядка) функции f и обозначать f''.

Определение 1.1.1 *По индукции, если определена и дифференцируема производная $f^{(n-1)}(x)$ порядка $n-1$, то производная порядка n определяется равенством*

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Аналогично, если определен дифференциал $d^{n-1}f(x)$ порядка $n-1$, то

$$d^n f(x, \Delta x) = d(d^{n-1} f(x, \Delta x))(x, \Delta x),$$

при этом внутренний дифференциал (порядка $n-1$) считается функцией x, и приращение берётся одинаковое для обоих дифференциалов равное Δx.

По определению полагают $f^{(0)} = f$, $d^1 f = df$.

Замечание 1.1.1 *Если f определена на отрезке $[a,b]$, то в крайних точках a и b можно определить производную n-го порядка аналогичным образом, под которой будет пониматься соответствующая односторонняя производная. Во внутренних точках тоже можно рассматривать односторонние производные n-го порядка.*

Замечание 1.1.2 (Инвариантность формы df) *Известно, что $df = f(x)dx$ в случае, когда x – независимая переменная. Пусть $x = x(t)$ – некоторая дифференцируемая функция от независимой переменной t. Тогда*

$$df(x(t)) = (f(x(t)))'\, dt = f'(x(t))x'(t)dt = f'(x(t))dx(t) = f'(x)dx.$$

Это свойство называют инвариантностью первого дифференциала.

Замечание 1.1.3 (Неинвариантность формы $d^n f$) *Отметим, что у дифференциалов высших порядков форма, вообще говоря, не сохраняется при переходе к композиции функций. Действительно,*

$$d^2 f(x(t)) = d(f'(x(t))dx(t)) = f''(x(t))(d(x(t)))^2 + f'(x(t))d^2(x(t))$$

и второе слагаемое равно нулю только в случае, когда $x(t)$ – линейная функция.

Будем говорить, что функция f n раз дифференцируема, если существует $f^{(n)}$.

Лемма 1.1.1 (Линейность производной любого порядка) *Пусть f, g n раз дифференцируемы, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))^{(n)} = \alpha f^{(n)}(x) + \beta g^{(n)}(x).$$

$\triangleright$ Доказательство проводится по индукции и опирается на линейность первой производной. $\blacktriangleleft$

Теорема 1.1.1 (Правило Лейбница) *Пусть функции $f, g : E \to \mathbb{R}$ имеют n производных в точке x_0, тогда*

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$

$\triangleright$ Доказательство проводится по индукции аналогично доказательству бинома Ньютона. $\blacktriangleleft$

1.2 Формула Тейлора

Основная идея этого пункта – приблизить функцию многочленом в окрестности точки x_0.

Везде в этом пункте будем считать, что f n раз дифференцируема в точке x_0.

Определение 1.2.1 *Многочлен*

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \\ = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

называется многочленом Тейлора порядка n функции f с центром в точке x_0.

В случае $x_0 = 0$ многочлен Тейлора часто называют многочленом Маклорена. Он имеет вид

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Оказывается, многочлен Тейлора приближает функцию в следующем смысле. Его производные до n-го порядка включительно в точке x_0 совпадают с соответствующими производными функции f.

Лемма 1.2.1 (Характеристическое свойство многочлена Тейлора) *Пусть $T_n(x)$ – многочлен Тейлора порядка n функции f в точке x_0. Тогда*

$$(T_n(x))^{(k)} = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0 \ldots n.$$

$\triangleright$ Проверка осуществляется прямым дифференцированием и остается в качестве упражнения. $\blacktriangleleft$

Замечание 1.2.1 *При $n = 0$ многочлен Тейлора превращается в $T_0(x) = f(x_0)$, а при $n = 1$ в $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, что является уравнением касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.*

Замечание 1.2.2 *Если функция f сама является многочленом степени m, то её многочлен Тейлора степени $n \geqslant m$ будет в точности совпадать с ней (при $x_0 \neq 0$ это будет видно после раскрытия скобок и приведения подобных членов).*

Определение 1.2.2 (Формула Тейлора) *Пусть $T_n(x)$ – многочлен Тейлора функции f с центром x_0. Формула*

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

называется формулой Тейлора порядка n с центром x_0 для функции f. Функция $R_n(x)$ называется остатком формулы Тейлора.

Заметим, что остаток определяется равенством

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

и характеризует отличие между многочленом Тейлора от функции. Далее нас будут интересовать способы оценки или описания остатка.

Теорема 1.2.1 (О единственности многочлена Тейлора) *Если существует многочлен*

$$Q_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n,$$

удовлетворяющий условию

$$f(x) = Q_n(x) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

то он является многочленом Тейлора, то есть $a_k = f^{(k)}(x_0)/k!$.

▷ Последовательно можно найти

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (Q_n(x,x_0) + o((x-x_0)^n)) = a_0,$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-a_0}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left(a_1 + a_2(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^{n-1} + o((x-x_0)^{n-1})\right) = a_1,$$

$$\ldots$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-(a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_{n-1}(x-x_0)^{n-1})}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0}(a_n+o(1)) = a_n.$$

◀

В теореме ниже рассматривается отрезок с концами x и x_0, то есть $[x,x_0]$ или $[x_0,x]$. Для удобства будем его обозначать $[x,x_0]$ подразумевая оба возможных варианта. Аналогично для интервала.

Теорема 1.2.2 (Остаток в форме Лагранжа) *Пусть функция f имеет непрерывную производную n-го порядка $f^{(n)}$ на $[x,x_0]$, и на (x,x_0) имеет производную порядка $(n+1)$. Тогда найдется точка $\xi \in (x,x_0)$ такая, что остаток в формуле Тейлора имеет вид*

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}.$$

▷ Заметим, что по Лемме о характеристическом свойстве многочлена Тейлора верно

$$R_n^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{при } k = 0,1,2,...,n.$$

Рассмотрим отношение $\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$ и применим к нему теорему Коши. Тогда найдется точка $\xi_1 \in (x,x_0)$, для которой верно равенство

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-(x_0-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} =$$

продолжим аналогично на отрезке $[\xi_1, x_0]$:

$$= \frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)((\xi_1-x_0)^n-(x_0-x_0)^n} = \frac{R_n''(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}} = \ldots$$

где $\xi_2 \in (\xi_1, x_0)$. Продолжая так n раз, получим

$$\ldots = \frac{R_n^{(n)}(\xi_n)-R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)!((\xi_n-x_0)-(x_0-x_0)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

где $\xi \in (x,x_0)$. ◀

Рассмотрим ещё одну форму остатка в асимптотическом виде.

Теорема 1.2.3 (Остаток в форме Пеано) *Пусть функция $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ в точке x_0 имеет производные до порядка n включительно, тогда*

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n), \quad \text{при } x \to x_0.$$

$\triangleright$ Аналогично доказательству предыдущей теоремы, получим

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{R_n^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - R_n^{(n-1)}(x_0)}{n!((\xi_{n-1} - x_0)},$$

где $\xi_{n-1} \in (x, x_0)$. Устремим $x \to x_0$, тогда $\xi_{n-1} \to x_0$ и по определению производной

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} \xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{R_n^n(x_0)}{n!} = 0,$$

что и означает $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$. $\blacktriangleleft$

Замечание 1.2.3 (Остаток как О-большое) *Заметим, что верно равенство*

$$(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) = O((x - x_0)^n), \quad x \to 0$$

используя которое можно записать остаток в формулах Маклорена через О-большое. А именно, для $n + 1$ раз дифференцируемой функции,

$$R_n(x) = O((x - x_0)^{n+1}).$$

1.3 Формулы Маклорена для основных элементарных функций

Ниже приведены разложения основных элементарных функций по формуле Маклорена с остатком в форме Пеано. Везде $x_0 = 0$.
1. $y = e^x$, $y^{(n)} = e^x$, $y^{(n)}(0) = 1$, тогда

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

2. $y = a^x$, $y^{(n)} = a^x \ln^n a$, $y^{(n)}(0) = \ln^n a$, тогда

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + o(x^n).$$

3. $y = \sin x$, $y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$, $\sin^{(2n)}(0) = 0$, $\sin^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}$, тогда

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}).$$

4. $y = \cos x$, $y^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi n}{2})$, $\cos^{(2n+1)}(0) = 0$, $\cos^{(2n)}(0) = (-1)^n$, тогда

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

5. $y = \ln(1+x)$, $y^{(0)}(0) = 0$, $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$, $y^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, тогда

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n).$$

6. $y = (1+x)^\alpha$, $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \ldots \cdot (\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$, $y^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))$, тогда

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-(n-1))x^n}{n!} + o(x^n).$$

7. $y = \operatorname{arctg} x$. В силу предыдущего примера легко заметить, что

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n),$$

тогда для функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

и

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}).$$

Тогда в силу единственности многочлена Тейлора, получаем

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

Замечание 1.3.1 *В формулах Маклорена для* $\sin$ *и* $\cos$ *можно улучшить остаток, добавив в многочлен Маклорена следующих член, равный нулю. Тогда получим при* $x \to 0$*:*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

Пример 1.3.1 *Вычислить предел* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-\sqrt{1+x^2}-x\cos x}{\ln^3(1-x)}$.

Используя разложения, полученные выше,

$$e^{\sin x}=e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}=1+\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+$$
$$+\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2}{2}+\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3}{6}+o\left(\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3}{6}\right)=$$
$$=1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3).$$

Далее,

$$\sqrt{1+x^2}=\left(1+x^2\right)^{1/2}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)x^4}{2}+o\left(\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)x^4}{2}\right)=1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

и

$$x\cdot\cos x=x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=x-\frac{x^3}{2}+o(x^3).$$

Окончательно, воспользовавшись тем, что $\ln^3(1-x)\sim -x^3$, *получаем*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-\sqrt{1+x^2}-x\cos x}{\ln^3(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{-x^3}=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)=-\frac{1}{2}.$$

Пример 1.3.2 *Вычислим предел*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x+x^2)+\ln(1-3x+x^2)}{x^2}.$$

Согласно выведенным соотношениям,

$$\ln(1+3x+x^2)=3x+x^2-\frac{(3x+x^2)^2}{2}+o((3x+x^2)^2)=3x-\frac{7}{2}x^2+o(x^2),$$

$$\ln(1+3x+x^2)=-3x+x^2-\frac{(-3x+x^2)^2}{2}+o((-3x+x^2)^2)=-3x-\frac{7}{2}x^2+o(x^2).$$

Значит,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x+x^2)+\ln(1-3x+x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-7x^2+o(x^2)}{x^2}=-7.$$

Заметим, что если (ошибочно) заменить оба логарифма на эквиваленты (равные $3x+x^2$ *и* $-3x+x^2$*), то ответ будет другой (и неверный).*

1.4 Монотонность и экстремумы

В этом пункте многие факты уже были получены ранее. Напомним их.

Теорема Ферма утверждала, что если функция f определена в окрестности точки x_0, имеет экстремум в точке x_0 (внутренний экстремум) и дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$. Отсюда мгновенно получается необходимое условие экстремума.

Теорема 1.4.1 (Необходимое условие экстремума) *Пусть f определена в окрестности точки x_0 и имеет в точке x_0 экстремум. Тогда либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует в $\mathbb{R}$.*

$\triangleright$ Если f дифференцируема в точке x_0, то применим теорему Ферма. Если не дифференцируема, то $f'(x_0)$ не существует. $\blacktriangleleft$

Замечание 1.4.1 *Это условие не является достаточным, что показывает, например, функция $f(x) = x^3$, производная которой равна нулю в точке $x = 0$, но которая не имеет экстремума в этой точке.*

Напомним, что ранее (как следствие из теоремы Лагранжа) был получен критерий монотонности функции. Приведем это как теорему.

Теорема 1.4.2 (Критерий монотонности функции) *Пусть функция $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Тогда справедливы соотношения:*

1. $f'(x) > 0$ *на* (a, b) $\Rightarrow$ $f(x)$ *строго возрастает на* $[a, b]$ $\Rightarrow$ $f'(x) \geqslant 0$ *на* (a, b).
2. $f'(x) \geqslant 0$ *на* $(a, b) \Rightarrow f(x)$ *возрастает на* $[a, b] \Rightarrow f'(x) \geqslant 0$ *на* (a, b).
3. $f'(x) < 0$ *на* (a, b) $\Rightarrow$ $f(x)$ *строго убывает на* $[a, b]$ $\Rightarrow$ $f'(x) \leqslant 0$ *на* (a, b).
4. $f'(x) \leqslant 0$ *на* $(a, b) \Rightarrow f(x)$ *убывает на* $[a, b] \Rightarrow f'(x) \leqslant 0$ *на* (a, b).

Ниже приведено удобное для практического применения достаточное условие экстремума.

Теорема 1.4.3 (Первое достаточное условие экстремума) *Пусть $f(x) : U(x_0) \to \mathbb{R}$, непрерывна в точке x_0 и дифференцируема на множествах $U_- = \{x \in U(x_0) : x < x_0\}$ и $U_+ = \{x \in U(x_0) : x > x_0\}$. Тогда:*

1. *Если $f'(x) > 0$ при $x \in U_-$ и $f'(x) < 0$ при $x \in U_+$, то x_0 является точкой строгого локального максимума функции $f(x)$.*

2. *Если $f'(x) < 0$ при $x \in U_-$ и $f'(x) > 0$ при $x \in U_+$, то x_0 является точкой строгого локального минимума функции $f(x)$.*

3. *Если $f'(x) > 0$ при $x \in U_-$ и $f'(x) > 0$ при $x \in U_+$, то x_0 не является точкой экстремума функции $f(x)$.*

4. *Если $f'(x) < 0$ при $x \in U_-$ и $f'(x) < 0$ при $x \in U_+$, то x_0 не является точкой экстремума функции $f(x)$.*

Коротко можно сказать так. Если производная меняет знак при переходе через точку x_0, то экстремум в x_0 есть. Если не меняет, то экстремума нет.
$\triangleright$ Первое утверждение. Так как $f'(x) > 0$ при $x \in U_- = (x_0-\varepsilon, x_0)$ и функция непрерывна в точке x_0, то согласно теореме 1.4.2 функция $f(x)$ возрастает на $(x_0 - \varepsilon, x_0]$. Значит, $f(x_0) < f(x)$ при $x \in U_-$. Аналогично, так как $f'(x) < 0$ при $x \in U_+ = (x_0, x_0 + \varepsilon)$ и функция непрерывна в точке x_0, то функция $f(x)$ возрастает на $[x_0, x_0 + \varepsilon)$. Тем самым проверено, что точка x_0 – точка строгого локального максимума.
Доказательство остальных пунктов проводится аналогично и остается в качестве упражнения. $\blacktriangleleft$

Пример 1.4.1 *Функция $f(x) = |x|$ имеет строгий локальный минимум в точке $x = 0$, так как она непрерывна в точке $x = 0$ и, кроме того, $f'(x) = -1$ при $x < 0$, и $f'(x) = 1$ при $x > 0$.*

Пример 1.4.2 *Важно отметить, что отказаться от непрерывности функции в точке x_0 в вышеизложенной теореме нельзя. Например, для функции*

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ -x+1, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

при $x < 0$ выполняется $f'(x) = 1$, а при $x > 0$ выполняется $f'(x) = -1$, но экстремума в точке $x = 0$ нет.

Замечание 1.4.2 *Важно отметить, что вышеизложенное достаточное условие не является необходимым. Пусть*

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Эта функция имеет строгий локальный минимум в точке $x = 0$, однако ее производная

$$f'(x) = 4x + 2x \sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}$$

не сохраняет знак ни в какой проколотой окрестности нуля.

Определение 1.4.1 *Если в точке экстремума функция дифференцируема, то экстремум называется гладким. Иначе экстремум называется острым или угловым.*

Пример 1.4.3 *Исследовать на экстремумы функцию*

$$y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}.$$

Легко заметить, что данная функция непрерывна на $\mathbb{R}$. *Ее производная равна (рекомендуется упрощать и преобразовывать производную до разложения на множители):*

$$y'(x) = \frac{(4-3x)}{3(1-x)^{2/3}(x-2)^{1/3}}.$$

Методом интервалов легко определить, что производная отрицательна при $x > 2$ *и* $x < \frac{4}{3}$ *и положительна при* $\frac{4}{3} < x < 2$.

Так как функция дифференцируема в точке $\frac{4}{3}$ *и слева от этой точки производная отрицательна, а справа положительна, то* $x = \frac{4}{3}$ *– точка гладкого строгого локального минимума.*

Так как $f'(2-0) = +\infty$, $f'(2+0) = -\infty$ *и слева от точки* 2 *производная положительна, а справа отрицательна, то точка* $x = 2$ *– точка острого строгого локального максимума, причем* $f'(2) = \infty$.

Можно заметить, что в точке $x = 1$ *знак производной не меняется, а сама производная обращается в бесконечность. Значит, в точке* $x = 1$ *касательная к графику функции вертикальна. График функции изображен на рисунке 1.*

Теорема 1.4.4 (Второе достаточное условие экстремума) *Пусть функция* f *имеет производные в точке* x_0 *до порядка* n *включительно, причем* $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, *а* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. *Тогда если* n *нечетно, то в точке* x_0 *экстремума нет, а если четно, то в точке* x_0 *локальный минимум, если* $f^{(n)}(x_0) > 0$ *и локальный максимум, если* $f^{(n)}(x_0) < 0$.

$\triangleright$ Используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, получаем

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

При достаточной близости x к x_0 знак разности $f(x) - f(x_0)$ определяется лишь знаком $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

Если n нечетно, то при $x > x_0$ знак разности совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$, а при $x < x_0$ противоположен знаку $f^{(n)}(x_0)$, значит экстремума нет.

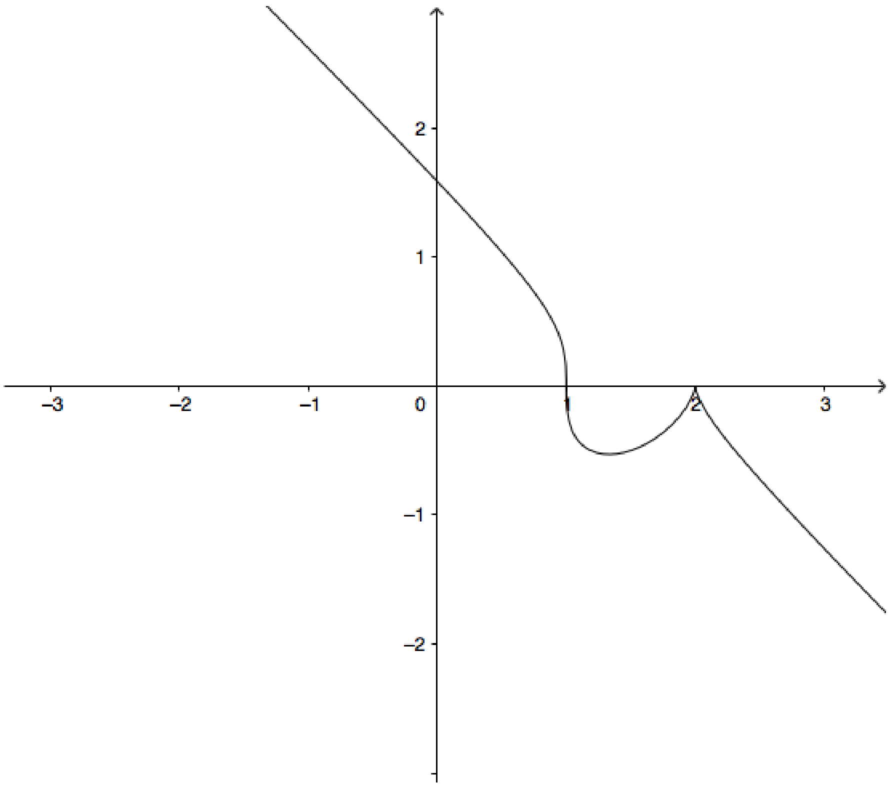

Рис. 1: График функции $y = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$.

Если n четно, то как при $x > x_0$, так и при $x < x_0$ знак разности совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$. Тогда, если разность положительна, то в точке x_0 локальный минимум, если отрицательна, то локальный максимум. ◄

1.5 Выпуклость

Определение 1.5.1 *Функция $f \in C\langle a, b\rangle$ называется выпуклой вверх на $\langle a, b\rangle$, если $\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ выполняется условие*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Функция $f \in C\langle a, b\rangle$ называется выпуклой вниз на $\langle a, b\rangle$, если $\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ выполняется условие

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Если выполняется строгое неравенство при любых $x_1 \neq x_2$, то функция называется строго выпуклой вверх (вниз) на $\langle a, b\rangle$.

Замечание 1.5.1 *Геометрически выпуклость вверх означает, что какую бы хорду графика функции, проходящую через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ ни провести, середина хорды лежит не выше графика функции.*

Теорема 1.5.1 (Достаточное условие выпуклости) *Пусть для функции f существуют (в $\mathbb{R}$) f' на отрезке $[a,b]$ и f'' на интервале (a,b). Тогда*

1. *если $f'' \geqslant 0$ на (a,b), то f выпукла вниз;*
2. *если $f'' \leqslant 0$ на (a,b), то f выпукла вверх;*
3. *если $f'' > 0$ на (a,b), то f строго выпукла вниз;*
4. *если $f'' < 0$ на (a,b), то f строго выпукла вверх.*

$\triangleright$ Пусть $f'' \geqslant 0$ и $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$. Обозначим $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$, $x_2 - x_1 = 2h$. Тогда $x_1 = x_0 - h$, $x_2 = x_0 + h$. Применим формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа к функции f с центром x_0 и приращением $\pm h$:

$$f(x_1) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(\xi_1)}{2}h^2, \quad \xi_1 \in (x_1, x_0);$$

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\xi_2)}{2}h^2, \quad \xi_2 \in (x_0, x_2).$$

Складывая, получим

$$f(x_1) + f(x_2) = 2f(x_0) + \frac{h^2}{2}\Big(f''(\xi_1) + f''(\xi_2)\Big) \geqslant 2f(x_0),$$

где последнее неравенство следует из $f''(\xi_{1,2}) \geqslant 0$. Полученное неравенство и влечёт выпуклость функции вверх. Для строгой выпуклости и вниз доказательство аналогично. ◀

Замечание 1.5.2 *Можно доказать, что для дифференцируемой функции выпуклость вверх (вниз) равносильна тому, что касательная, проведенная в каждой точке к графику функции, лежит не ниже (не выше) самого графика.*

Определение 1.5.2 *Пусть функция $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ имеет в точке x_0 производную. Если при переходе через точку x_0 функция меняет характер выпуклости, то точка x_0 называется точкой перегиба.*

Замечание 1.5.3 *Точки перегиба дважды дифференцируемой функции нужно искать там, где существует первая производная, а вторая производная либо равна нулю, либо не существует. При этом достаточным условием точки перегиба будет изменение знака второй производной при переходе через точку.*

Пример 1.5.1 *Исследовать на выпуклость функцию*

$$y = \frac{1}{1-x^2}.$$

Первая производная данной функции имеет вид $y' = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$, *а вторая* $y'' = -\frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$. *Методом интервалов легко установить, что вторая производная отрицательна на промежутках* $(-\infty,-1);(1,+\infty)$, *а значит на этих промежутках функция выпукла вверх, и положительна на промежутке* $(-1,1)$, *а значит на этом промежутке функция выпукла вниз. Точек перегиба у данной функции нет.*

1.6 Асимптоты

Определение 1.6.1 *Пусть функция* f *определена в окрестности точки* x_0. *Прямая* $x = x_0$ *называется вертикальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$, *если*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty.$$

Если бесконечен только один из односторонних пределов, то говорят об односторонней вертикальной асимптоте (при $x \to x_0 - 0$ или $x \to x_0 + 0$).

Пример 1.6.1 *График функции* $y = 1/x$ *имеет вертикальную асимптоту* $x = 0$. *График функции* $y = e^{1/x}$ *имеет одностороннюю асимптоту* $x = 0$ *при* $x \to 0+$.

Определение 1.6.2 *Пусть функция* f *определена в окрестности бесконечности. Прямая* $y = kx + b$ *называется наклонной асимптотой графика функции* $y = f(x)$, *если*

$$f(x) = kx + b + o(1), \quad \text{при } x \to \infty.$$

Если утверждение определения выполнено только при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, то говорят об односторонней наклонной асимптоте (на плюс или минус бесконечности, соответственно).

Коэффициенты k и b наклонной асимптоты $y = kx + b$ определяются с помощью следующей теоремы.

Теорема 1.6.1 (О наклонной асимптоте) *Для того чтобы прямая* $y = kx + b$ *была асимптотой графика функции* $y = f(x)$ *при* $x \to \pm\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали два конечных предела*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b.$$

$\triangleright$ Необходимость. Пусть $y = kx + b$ – асимптота графика функции $y = f(x)$. Тогда запишем при $x \to \infty$

$$f(x) = kx + b + o(1) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{x} = k + \frac{b + o(1)}{x}.$$

Переходя к пределу, получаем конечный предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$. Для нахождения b запишем $b = f(x) - kx + o(1)$ и перейдем к пределу при $x \to \infty$.

Достаточность. Пусть существуют в $\mathbb{R}$ оба предела $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$. Тогда из второго равенства следует при $x \to \infty$:

$$b = f(x) - kx + o(1),$$

что и означает, что $y = kx + b$ – асимптота. $\blacktriangleleft$

Замечание 1.6.1 *В случае $k = 0$ асимптота называется горизонтальной и описывается уравнением $y = b$. Необходимое и достаточное условие горизонтальной асимптоты: существование конечного предела $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.*

Пример 1.6.2 *График функции $y = e^{-x}$ имеет только правую асимптоту $y = 0$, действительно*

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{xe^x} = 0,$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x} = -\infty.$$

Так как при $x \to -\infty$ $k_1 = -\infty$, то левой асимптоты не существует. Для правой асимптоты

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{-x} - 0 \cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{-x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{e^x}\right) = 0.$$

Таким образом $k = 0$ и $b = 0$, а следовательно асимптота имеет уравнение $y = 0$.

Пример 1.6.3 *Найти асимптоты графика функции $y = x + \operatorname{arctg} x$. Данная функция непрерывна на всем множестве действительных чисел, поэтому у нее нет вертикальных асимптот.*

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x + \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1 + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1,$$

так как функция $\operatorname{arctg} x$ *ограничена, то последний предел при* $x \to \pm\infty$ *равен* 0. *Коэффициент* b *вычисляется отдельно при* $x \to +\infty$ *и при* $x \to -\infty$.

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty}(x + \operatorname{arctg} x - 1\cdot x) = \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2},$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, график функции имеет две наклонные асимптоты

$$y_1 = x + \frac{\pi}{2},\ y_2 = x - \frac{\pi}{2}.$$

Замечание 1.6.2 *Можно доказать, что если график функции имеет наклонную асимптоту при* $x \to \pm\infty$ *и является выпуклым вверх (вниз) на соответствующем луче, то он расположен ниже (выше) асимптоты. Обратное неверно.*

1.7 Исследование функции и построение графика

Для построения и изучения функции целесообразно придерживаться следующей последовательности действий:

1. Найти область определения функции и ее точки разрыва. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
2. Отметить такие свойства, как четность, нечетность, периодичность.
3. Найти первую производную и промежутки возрастания и убывания функции, а также экстремумы.
4. Найти вторую производную и промежутки выпуклости, а также точки перегиба.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Построить график.

Ясно, что при решении конкретной задачи некоторые пункты могут быть расширены, а некоторые могут быть излишними или вовсе невыполнимыми.

Пример 1.7.1 *Построить график функции*

$$y = \frac{x^5}{x^4 - 1}.$$

1. В область определения функции не входят те точки, которые удовлетворяют уравнению $x^4 - 1 = 0$*, то есть* $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$*. Кроме того, если* $y = 0$*, то* $x = 0$*, и наоборот, так что* $(0, 0)$ *– единственная точка пересечения графика функции с осями координат.*
2. Функция является нечетной, так как

$$y(-x) = \frac{(-x)^5}{(-x)^4 - 1} = -\frac{x^5}{x^4 - 1} = -y(x).$$

3. Первая производная функции: $y'(x) = \frac{x^4(x^4-5)}{(x^4-1)^2}$.

Методом интервалов легко получить, что функция возрастает при $x \in (-\infty, -\sqrt[4]{5}]; [\sqrt[4]{5}, +\infty)$ *и убывает при* $x \in [-\sqrt[4]{5}, -1); (-1, 1); (1, \sqrt[4]{5}]$*. В точке* $x = -\sqrt[4]{5}$ *функция имеет строгий локальный максимум, причем* $y(-\sqrt[4]{5}) = -\frac{5\sqrt[4]{5}}{4}$*, а в точке* $x = \sqrt[4]{5}$ *строгий локальный минимум, причем* $y(\sqrt[4]{5}) = \frac{5\sqrt[4]{5}}{4}$.
4. Вторая производная функции: $y'' = \frac{x^3(12x^4+20)}{(x^4-1)^3}$.

Методом интервалов легко получить, что функция выпукла вниз при $x \in (-1, 0]; [1, +\infty)$ *и выпукла вверх при* $x \in (-\infty, -1); [0, 1)$*. Кроме того, точка* $x = 0$ *является точкой перегиба, причем* $y(0) = 0$.

5. Функция непрерывна на множестве $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$*. Так как*

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{x^5}{x^4 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to -1+0} \frac{x^5}{x^4 - 1} = +\infty$$

и

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^5}{x^4 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to 1+0} \frac{x^5}{x^4 - 1} = +\infty,$$

то можно заключить, что $x = 1$ *и* $x = -1$ *– вертикальные асимптоты. Кроме того, так как*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^4}{x^4 - 1} = 1$$

и

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^5}{x^4 - 1} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x}{x^4 - 1} \right) = 0,$$

то прямая $y = x$ *является асимптотой графика функции как на* $-\infty$*, так и на* $+\infty$.
6. Вся полученная информация теперь используется для построения графика функции.

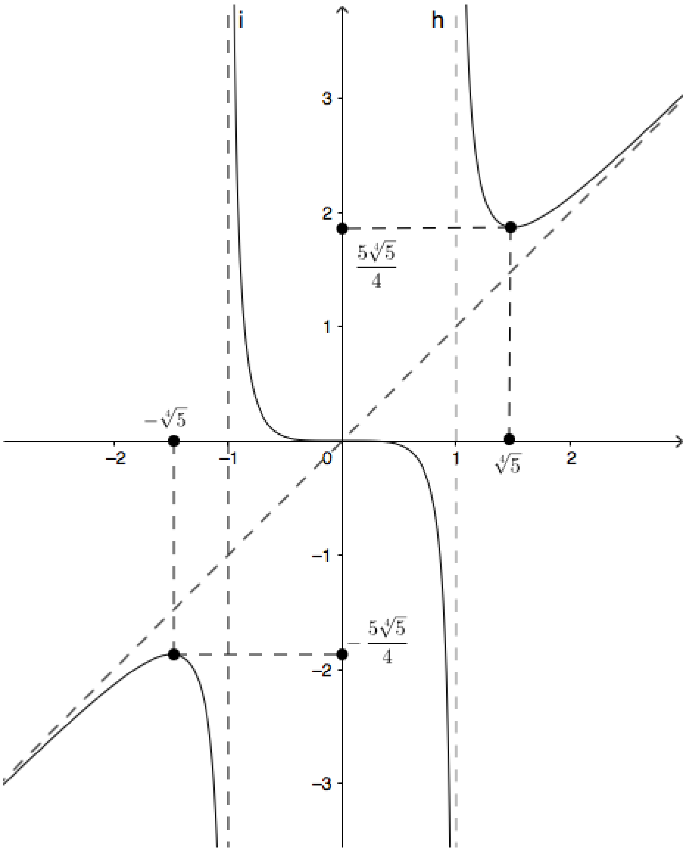

Рис. 2: График функции $y = \frac{x^5}{x^4-1}$.

2 Многомерное дифференциальное исчисление