Алгебра. ИИИ. Осенний семестр

0. На пути к алгебре

1. Докажите, что упорядоченные пары (a, b) и (c, d) совпадают тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

2. Согласно каким аксиомам ZFC декартово произведение множеств и фактормножество являются множествами?

   Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$. Говорят, что a *делится* на b или b является *делителем* a ($a \vdots b$, $b \mid a$), если существует такое $q \in \mathbb{Z}$, что $a = bq$. Числа a и b называются *взаимно простыми*, если они не имеют общих делителей кроме ± 1. Mutatis mutandis определяется делимость в $\mathbb{N}$.

3. Докажите что множество $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ с отношением делимости есть частично упорядоченное множество (отношение рефлексивно, транзитивно и антисимметрично). Найдите его минимальные элементы.

4. Дано шестизначное число $\overline{abcdef}$, причем $\overline{abc} + \overline{def}$ делится на 37. Докажите, что и само число $\overline{abcdef}$ делится на 37.

5. Докажите, что число $\overline{ababab}$ делится на 7, 13, 37.

6. Докажите *теорему о делении целых чисел с остатком*: для любых $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, существуют такие $q, r \in \mathbb{Z}$, что $a = bq + r$, $|r| < |b|$. Число q называется *неполным частным*, r — *остатком*.

7. Разделите с остатком (найдите <u>все</u> варианты неполных частных и остатков):

   а) 161 на 17; б) -161 на 17; в) 161 на -17; г) -161 на -17;

   д) 17 на 161; е) -17 на 161; ж) 17 на -161; з) -17 на -161.

8. Докажите, что если из множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ выбрать любые $n + 1$ чисел, то среди них найдутся два взаимно простых.

9. Дано 17 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых делится на 16.

10. Может ли дискриминант квадратного трёхчлена с целыми коэффициентами равняться 23?

    Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$. Целое число d называется *наибольшим общим делителем* a и b, если d — общий делитель a и b, и d делится на любой другой общий делитель a и b. Обозначение: НОД(a, b). Легко заметить, что НОД$(a, 0) = \pm a$, в частности, НОД$(0, 0) = 0$.

11. а) Докажите, что НОД$(a, b) =$ НОД$(a - b, b)$;

    б) Докажите, что существуют такие целые числа x и y, что НОД$(a, b) = ax + by$ (*линейное представление* НОДа);

    в) Докажите, что a и b взаимно просты тогда и только тогда, когда существует такие целые x и y, что $ax + by = 1$;

    г) Докажите, что числа $1\,111\,111$ и $1\,111$ взаимно просты.

12. Автомат на каждом шаге преобразует пару целых чисел $(m,\ n)$ в одну из трёх: $(n,\ m)$, $(m - n,\ n)$, $(m,\ m + n)$. Можно ли за конечное число шагов из пары $(18, 31)$ получить пару $(21, 12)$?

13. В алфавите языка одного племени всего две буквы: А и У. В результате следующих замен сочетаний букв смысл любого слова не изменяется: УАУ $\leftrightarrow$ АА, УАА $\leftrightarrow$ АУ, ААУ $\leftrightarrow$ УА, ААА $\leftrightarrow$ УУ (замену можно делать в любом месте слова). Являются ли в этом языке синонимами слова УАА и АУУ?

14. Можно ли доску 10×10 разрезать на прямоугольники 4×1?

15. Решите в целых числах уравнения:

    а) $x^2 = 11 + y^2$;

    б) $1 + xy = x + y$;

    в) $2ab + 3a + b = 0$;

    г) $3^n + 8 = m^2$;

    д) $1! + 2! + 3! + \ldots + x! = y^2$, $x \in \mathbb{N}$.

16. $m, n, k \in \mathbb{N}$. Докажите, что если $m + k = n + k$, то $m = n$.

17. Докажите, что при любом натуральном n

    а) $5^n - 3^n + 2n$ делится на 4;

    б) $4^n + 15n - 1$ делится на 9;

    в) $3^{2n+2} + 8n - 9$ делится на 16.

18. Рассмотрим всевозможные обыкновенные дроби с числителем 1 и любым натуральным знаменателем, большим 1: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\ldots$ Докажите, что для любого $n \geqslant 3$ можно представить единицу в виде суммы n различных дробей такого вида.

19. В таблице 10×10 по порядку расставлены числа от 0 до 99 (в первой строке от 0 до 9, во второй строке от 10 до 19, $\ldots$, в десятой от 90 до 99). Буратино выбрал десять чисел, таких, что никакие два из них не стоят в одной строке и

никакие два из них не стоят в одном столбце, и сложил их. Какую сумму он мог получить? Найдите все возможные варианты.

Геометрические векторы E^3 — отображения $a\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$(x_1,\, x_2,\, x_3) \mapsto (x_1 + a_1,\, x_2 + a_2,\, x_3 + a_3).$$

Сложение $a + b$ геометрических векторов — композиция отображений a и b.

Умножение $\lambda \cdot a$ геометрического вектора a на число $\lambda \in \mathbb{R}$ — отображение λa:

$$(x_1,\, x_2,\, x_3) \mapsto (x_1 + \lambda a_1,\, x_2 + \lambda a_2,\, x_3 + \lambda a_3).$$

Можно определить *вычитание* $a - b$ как $a + (-1)b$.

20. Докажите, что операции в E^3 обладают свойствами:

а) $(a + b) + c = a + (b + c)$ — ассоциативность;

б) $\exists 0\ \forall a\ a + 0 = 0 + a = a$ — существование нуля (нейтрального по сложению);

в) $\forall a\ \exists -a\ a + (-a) = (-a) + a = 0$ — существование противоположного (симметричного по сложению);

г) $a + b = b + a$ — коммутативность;

д) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ — дистрибутивность с одной стороны;

е) $a(\lambda + \mu) = a\lambda + a\mu$ — дистрибутивность с другой стороны;

ж) $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ — внешняя ассоциативность;

з) $1a = a$.

Стандартный базис $(i,\, j,\, k)$ пространства геометрических векторов E^3:

$$i\colon (x_1,\, x_2,\, x_3) \mapsto (x_1 + 1,\, x_2,\, x_3), \quad j\colon (x_1,\, x_2,\, x_3) \mapsto (x_1,\, x_2 + 1,\, x_3),$$

$$k\colon (x_1,\, x_2,\, x_3) \mapsto (x_1,\, x_2,\, x_3 + 1).$$

21. Докажите, что любой геометрический вектор a представим в виде $ia_1 + ja_2 + ka_3$, где $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, причём единственным образом. Эти числа называются *координатами* вектора a в стандартном базисе. Будем записывать координаты в столбец $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

Векторное умножение $[\_\,,\_]\colon E^3 \times E^3 \to E^3$ задаётся таблицей умножения

$[\_\,,\_]$	i	j	k
i	0	k	$-j$
j	$-k$	0	i
k	j	$-i$	0

и удовлетворяет условиям $[a, b + c] = [a, b] + [a, c]$ и $[a + b, c] = [a, c] + [b, c]$, $[\lambda a, b] = \lambda[a, b]$, $[a, \lambda b] = \lambda[a, b]$.

22. Получите выражение для векторного умножения $[a, b]$ геометрических векторов $a = ia_1 + ja_2 + ka_3$ и $b = ib_1 + jb_2 + kb_3$. Коммутативно ли оно? Ассоциативно ли?

23. Докажите, что

    а) $[a, a] = 0$;

    б) $[a, b] = -[b, a]$;

    в) $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$ — *тождество Якоби*;

24. В прямоугольнике 3×4 расположено 6 точек. Докажите, что среди них найдутся две точки, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{5}$.

25.* На отрезке $[0; 1000]$ случайно выбрано 11 вещественных чисел. Докажите, что среди них найдутся два числа, удовлетворяющие неравенству $|x-y| \leqslant 1+3\sqrt[3]{xy}$.

26.* Докажите, что из любых 13 вещественных чисел можно выбрать два числа x и y таких, что
$$0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} \leqslant 2-\sqrt{3}.$$

27.* На доске написаны числа 1, 2 и 4. Разрешается стереть с доски два числа a и b, а вместо них записать $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$, $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Можно ли с помощью таких операций получить на доске числа $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ и 3?

28. Какие из отображений $\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto x^2} \mathbb{R}$; $\mathbb{N} \xrightarrow{x \mapsto x^2} \mathbb{N}$; $\mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto 5x} \mathbb{Z}$; $\mathbb{Q} \xrightarrow{x \mapsto 5x} \mathbb{Q}$ являются инъекциями, сюръекциями, биекциями?

29. Пусть $|X| = m$, $|Y| = n$. Найдите число:

    а) отображений из X в Y;

    б) инъективных отображений из X в Y;

    в) биективных отображений из X в Y.

30. Верно ли, что

    а) $\mathrm{Map}(X, Y \times Z) = \mathrm{Map}(X, Y) \times \mathrm{Map}(X, Z)$;

    б) $\mathrm{Inj}(X, Y \times Z) = \mathrm{Inj}(X, Y) \times \mathrm{Inj}(X, Z)$;

    в) $\mathrm{Sur}(X, Y \times Z) = \mathrm{Sur}(X, Y) \times \mathrm{Sur}(X, Z)$?