Алгебра. ИИИ. Осенний семестр

I. Алгебраические системы и алгебраические операции. Группы

1. Сколькими способами можно ввести бинарную операцию на конечном множестве X?

2. Являются ли алгебраическими системами следующие объекты:

   а) $\langle \mathbb{Q}_{>0}, \sqrt{\ } \rangle$; б) $\langle \mathbb{R}_{>0}, \sqrt{\ } \rangle$; в) $\langle \mathbb{N}, - \rangle$; г) $\langle \mathbb{Z}, : \rangle$; д) $\langle \mathbb{Q}, : \rangle$; е) $\langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}, : \rangle$?

3. Относительно каких операций, заданных на множестве $\mathbb{Z}$, замкнуты множества $2\mathbb{Z}$ и $2\mathbb{Z}+1$? Рассмотрите бинарные операции: сложение, умножение, взятие НОДа; а также унарные операции: взятие противоположного элемента, удвоение, утроение.

4. Найдите все конечные подсистемы алгебраических систем:

   а) $\langle \mathbb{Z}, f \rangle$, где f — унарная операция удвоения;

   б) $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$;

   в) $\langle X, f \rangle$, где X — множество точек плоскости, f — тернарная операция, сопоставляющая трём точкам A, B, C точку пересечения медиан треугольника ABC (возможно, вырожденного).

5. Ассоциативна ли операция $*$ на множестве M, если:

   а) $M = \mathbb{N}$, $x * y = x^y$;

   б) $M = \mathbb{N}$, $x * y = \text{НОД}(x, y)$;

   в) $M = \mathbb{Z}$, $x * y = x^2 + y^2$;

   г) $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x * y = x \cdot y^{\frac{x}{|x|}}$;

   д) $M = \mathbb{R}$, $x * y = x + y + xy$?

6. Составьте таблицу Кэли для операции $*$ на множестве $M = \{1, 2, 3, 4\}$:

   а) $a * b = \min\{2a, b\}$; б) $a * b = a + b - \max\{a, b\}$.

   Являются ли операции коммутативными? Имеют ли они нейтральный элемент? Есть ли в M идемпотенты, инволюции?

7. Докажите, что моноиды $\langle \mathscr{P}(M), \cap, M \rangle$ и $\langle \mathscr{P}(M), \cup, \varnothing \rangle$ изоморфны.

8.* $\mathscr{A}_{a,b} = \langle \mathbb{R}, f \rangle$, где f — унарная операция, действующая по правилу $f(x) = ax+b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Сколько попарно неизоморфных алгебраических систем в множестве $\{\mathscr{A}_{a,b} \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$?

9.* Докажите, что во всякой конечной полугруппе найдётся идемпотент.

10.* Каждой паре вещественных чисел x и y поставлено в соответствие некоторое число $x * y$. Найдите все варианты $2025 * 2026$, если известно, что для любых трёх чисел x, y и z выполнены тождества: $x * x = 0$ и $x * (y * z) = (x * y) + z$.

11.* На доске написано 2025 чисел: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2025}$. За один ход требуется стереть любые два числа a и b и вместо них написать число $a + b + ab$. Сделано 2024 хода и на доске осталось одно число. Какое это число может быть? Укажите все варианты.

12. Составьте таблицы Кэли для групп: а) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$; б) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Найдите порядки всех элементов этих групп.

13. Какие из указанных структур являются группами:

    а) $\langle \{-1, 1\}, \cdot \rangle$;

    б) $\langle \mathbb{Z}_{2025}, \cdot \rangle$;

    в) множество степеней данного ненулевого вещественного числа с натуральными показателями относительно умножения;

    г) множество всех непрерывных монотонно возрастающих функций из $[0, 1]$ в $[0, 1]$, для которых $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, относительно композиции;

    д) функции x, $-x$, $\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{x}$ на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ относительно композиции;

    е) функции вида $kx + b$ $(k \neq 0)$ на $\mathbb{R}$ относительно композиции;

    ж) множество $\mathscr{P}(M)$ относительно симметрической разности?

    Какие из групп являются абелевыми?

14. Составьте таблицу Кэли для:

    а) группы симметрий правильного треугольника;

    б) множества функций x, $\frac{x-1}{x}$, $\frac{1}{1-x}$, $1 - x$, $\frac{1}{x}$, $\frac{x}{x-1}$ на $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ с операцией композиции. Убедитесь, что эта структура является группой.

    Абелевы ли эти группы? Сравните их таблицы Кэли.

15. Докажите, что если в группе выполнено тождество $x^2 = e$, то эта группа абелева.

16. Докажите, что любая группа третьего порядка абелева.