

## Темы коллоквиума «Векторные пространства»

Лектор Р. А. Попков

1. Векторные пространства: определение и примеры. Внешняя прямая сумма пространств. Подпространства. Факторпространство.
2. Гомоморфизмы векторных пространств: определение и примеры. Образ и ядро гомоморфизма. Теорема о полном прообразе гомоморфизма и следствие из неё для СЛАУ. Основная теорема о гомоморфизме векторных пространств. Теорема фон Дика.
3. Линейные комбинации и оболочки. Линейная (не)зависимость системы векторов. Свойства линейной (не)зависимости. Порождающая система векторов. Основная лемма о линейной зависимости. Связь между линейной (не)зависимостью системы строк/столбцов квадратной матрицы и её (не)вырожденностью.
4. Базис и размерность векторного пространства. Существование базиса в любом конечномерном пространстве. Теоремы о дополнении линейно независимой системы до базиса и о монотонности размерности.
5. Переход к новому базису. Матрица перехода и её свойства. Изменение координат вектора при изменении базиса.
6. Теоремы о размерностях внешней прямой суммы и факторпространства. Теорема о размерности ядра и образа.
7. Матрица гомоморфизма. Её преобразование при изменении базиса. Векторное пространство гомоморфизмов/прямоугольных матриц. Алгебра эндоморфизмов/квадратных матриц.
8. Сумма и пересечение подпространств. Нахождение базиса суммы и пересечения подпространств. Теорема Нётер об изоморфизме. Формула Грассмана.
9. Линейно независимые подпространства. Эквивалентные условия линейной независимости подпространств. Внутренняя прямая сумма и проекция на прямое слагаемое. Канонический изоморфизм внешней и внутренней прямых сумм.
10. Сопряжённое (двойственное) к  $V$  пространство  $V^*$ . Сопряжённый базис, смысл его элементов. Канонический изоморфизм между  $V$  и  $V^{**}$ .
11. Аннулятор подпространства. Теоремы о размерности аннулятора и о втором аннуляторе. Теорема о соответствии  $U \leftrightarrow U^0$ . Критерий базисности системы линейных функций.
12. Сопряжённый гомоморфизм и его свойства. Смысл транспонирования матрицы. Связь между ядрами и образами сопряжённых гомоморфизмов. Ранг матрицы и его свойства. Теорема Кронекера-Капелли.
13. Точная последовательность гомоморфизмов векторных пространств: определение и примеры. Теорема о сохранении точности при переходе к сопряжённым объектам.
14. Аффинные пространства: определение и примеры. Аффинные плоскости. Аффинизация векторного пространства и векторизация аффинного. Взаимное расположение аффинных плоскостей: пересечение, скрещивание, параллельность. Репер в аффинном пространстве, координаты точки. Изменение координат точки при замене репера.
15. Барицентрическая комбинация точек. Материальные точки, их центр масс и материальный центр. Теорема о группировании масс.
16. Нормальные подгруппы: определение и примеры. Сопряжённость элементов в группе. Описание сопряжённости в группе перестановок  $S_n$ . Критерий нормальности подгруппы. Образ и ядро гомоморфизма групп. Факторгруппы. Основная теорема о гомоморфизме групп.