

II. Группы. Группа перестановок

1. Найдите порядок группы:
  - а) вращений правильного тетраэдра;
  - б) симметрий правильного тетраэдра;
  - в) вращений куба.
2. Найдите порядки всех элементов групп  $S_2$ ,  $D_3$ ,  $V_4$ ,  $\mathbb{Z}_6$ ,  $\mathbb{Z}$ .
3. Докажите, что в любой группе чётного порядка имеется элемент порядка 2.
4. Найдите все элементы конечного порядка в группе монотонно возрастающих функций из  $[0, 1]$  в  $[0, 1]$ , для которых  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  (групповая операция — композиция).
5. Приведите пример двух элементов конечного порядка, произведение которых имеет бесконечный порядок.
6. Приведите пример бесконечной группы, в которой все элементы имеют конечный порядок.
7. Докажите, что если  $g^n = e$ , то  $o(g) \mid n$ .
- 8\*. В алфавите одного языка есть лишь три буквы:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Два разных слова являются синонимами, если одно из них может быть получено из другого с помощью следующих операций: а) в любом месте слова можно заменять друг на друг следующие комбинации букв:  $aba$  на  $bab$ ,  $aca$  на  $sac$ ,  $bcb$  на  $cbs$ ; б) из любого места можно выкидывать две одинаковые буквы, идущие подряд, а также в любое место можно вставлять две одинаковые буквы. Конечное или бесконечное количество понятий можно выразить с помощью этого языка?
9. Найдите порядки элементов группы  $S_n$ :
  - а)  $n = 5$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ ;
  - б)  $n = 6$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ ;
  - в)  $n = 10$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 & 8 & 10 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ ;
  - г)  $n = 12$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 11 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 & 9 & 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}$ .

10.  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$

а) Найдите  $\pi\sigma$  и  $\sigma\pi$ ;

б) Найдите  $\pi^{2025}$  и  $\sigma^{2025}$ ;

в) Найдите  $\pi^{-1}$  и  $\sigma^{-1}$ .

11. Решите уравнения в группе  $S_n$ :

а)  $n = 8, x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 2 & 5 & 6 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 4 & 6 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix};$

б)  $n = 9, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 6 & 4 & 9 & 2 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 4 & 6 & 3 & 2 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix};$

в)  $n = 6, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$

12. Разложите перестановки в произведение независимых циклов и найдите их декременты:

а)  $(1753)(162)(46)(3574)$ ; б)  $(135)(2467)(147)(2356)$ ; в)  $(184)(253)(67)(142635)(78)$ .

13. Определите чётность перестановки:

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix};$

б)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 6 & 1 & 8 & 3 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix};$

в)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

14\* Можно ли в игре «Пятнашки» из позиции слева получить позицию справа?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

15\* В группе  $S_5$  решите уравнение  $\sigma^2 = (345)$ .

16\* В группе  $S_n$  решите уравнение  $\sigma^3 = (123)$ .

17\* Элементов какого порядка в  $S_n$  больше: чётного или нечётного?

18\* Найдите максимально возможный порядок элемента группы  $S_7$ .