Алгебра. ИИИ. Осенний семестр

III. Группы. Изоморфизм групп

1. Найдите все подгруппы групп D_3, V_4, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_9^*$, $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$.

2. G и H — группы. Верно ли, что любую подгруппу в $G \times H$ можно представить в виде $A \times B$, где $A \leqslant G$, $B \leqslant H$?

3. G — группа вещественных преобразований $f_{a,b}(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) относительно композиции. Какие из подмножеств H_i являются её подгруппами: $H_1 = \{f_{1,b}\}$, $H_2 = \{f_{a,a}\}$, $H_2 = \{f_{a,0}\}$?

4. Постройте левое и правое разложения группы D_4 по подгруппе:

   а) отражений относительно центра;

   б) отражений относительно диагонали.

5. $H \leqslant G$. Докажите, что если $G \setminus H$ конечно, то либо G конечна, либо $H = G$.

6. $H_1, H_2 \leqslant G$. Докажите, что $H_1 \cap H_2 \leqslant G$. Что можно сказать о порядке группы $H_1 \cap H_2$, если $|H_1| = 120$, а $|H_2| = 78$?

7. Является ли группа $\mathbb{Z}_9^*$ циклической? А $\mathbb{Z}_{15}^*$? Если да, то каким известным циклическим группам они изоморфны?

8. Приведите примеры плоских фигур, группы симметрий которых изоморфны:

   а) $\mathbb{Z}_2$; б) $\mathbb{Z}_3$; в) S_3; г) V_4.

9. $\varphi\colon G \to H$ — гомоморфизм групп. Докажите, что если уравнение $x^n = g$ имеет решение в G, то уравнение $x^n = \varphi(g)$ имеет решение в H. Докажите, что если φ — изоморфизм, то и число решений совпадает.

10. Изоморфны ли группы:

    а) $\mathbb{Z}_4$ и D_4; б) $\mathbb{Z}_4$ и V_4; в) $\mathbb{Z}_4$ и R_4;

    г) $\mathbb{Z}_{24}$ и S_4; д) $3\mathbb{Z}$ и $5\mathbb{Z}$; е) $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^*$;

    ж) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ и V_4; з) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ и $\mathbb{Z}_6$; и) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_8$?

11. Докажите, что $\mathbb{Z}_{mn} \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ тогда и только тогда, когда m и n взаимно простые.

12. Докажите, что множество пар $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ относительно операции $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$ образует группу. Какой из уже встречавшихся групп она изоморфна?

13.* Граф — пара $\langle V, R\rangle$, где V — некоторое конечное множество (множество *вершин*), а R — некоторое множество неупорядоченных пар элементов V (множество *рёбер*). Если R содержит ребро AB, то вершины A и B называют *смежными*. *Автоморфизм графа* $\langle V, R\rangle$ — любая биекция V на себя, которая переводит смежные вершины в смежные, несмежные — в несмежные. Все автоморфизмы графа $\mathscr{G}$ образуют группу $\operatorname{Aut}\mathscr{G}$ относительно композиции. Найдите $\operatorname{Aut}\mathscr{G}$ (определите, какой из встречавшихся групп она изоморфна), если:

а) $\mathscr{G} = \langle\{A, B, C, D\}, \{AB, BC, CD\}\rangle$;

б) $\mathscr{G} = \langle\{A, B, C, D\}, \{AB, AC, AD\}\rangle$;

в) $\mathscr{G} = \langle\{A, B, C, D\}, \{AB\}\rangle$;

г) $\mathscr{G} = \langle\{A, B, C, D\}, \{AB, CD\}\rangle$.

14.* Придумайте пример графа, группа автоморфизмов которого изоморфна:

а) S_n; б) D_n; в) $\{1\}$; г) $\mathbb{Z}_3$.

15.* G — конечная абелева группа нечётного порядка. Докажите, что отображение $\varphi\colon G \to G$, $g \mapsto g^2$ является автоморфизмом.