

Cálculo Numérico - CO3211 - Proyecto 1

Instrucciones sobre los proyectos

- Debe entregar por escrito los resultados numéricos de los distintos problemas planteados, las respuestas a las interrogantes y sus conclusiones.
- Debe enviar el código fuente utilizado como un único archivo comprimido al correo electrónico del profesor.
- No se reciben entregas extemporáneas sin su debida justificación.
- Estos trabajos son individuales salvo cuando el profesor indique lo contrario. Cualquier similitud extrema o falta de probidad demostrada en la realización de esta evaluación (código y resultados), será penalizada con la anulación de la actividad y la sanción administrativa correspondiente.

Proyecto

Cualquier paquete de software moderno para resolver sistemas lineales debe incluir un estimador eficiente y confiable del número de condición de la matriz de coeficientes. Este valor es de fundamental importancia para que el usuario determine el grado de confianza que le puede asignar a la solución ofrecida por el paquete.

En este proyecto, Ud. construirá algunos estimadores simples basados en heurísticas que describiremos a continuación.

Recordemos que, en cualquier norma inducida o subordinada, el número de condición de una matriz cuadrada no-singular se define como:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

El cálculo exacto de $\|A\|$ es fácil al usar la norma 1 y la norma infinito (use ambos tanto como sea posible y compare). El reto principal radica en como estimar $\|A^{-1}\|$ a un bajo costo, sin tener que calcular explícitamente la inversa de A .

Usando las propiedades de norma inducida, si z resuelve el sistema $Az = y$, entonces

$$\frac{\|z\|}{\|y\|} \leq \|A^{-1}\|, \quad (\text{demostrarlo})$$

y la cota se alcanza para algún vector y óptimo, que de nuevo se obtiene a un costo prohibido!

1. Como primera idea práctica, genere vectores $y \neq 0$ en forma aleatoria, resuelva $Az = y$ y consiga la mejor cota inferior posible de $\|A^{-1}\|$, y por ende de $\text{cond}(A)$. Compare con la $\text{cond}(A)$ exacta que ofrece MATLAB en norma 1 y norma infinito. Por favor, tome ventaja de la factorización LU de A ya obtenida al resolver el sistema original, en esto radica la eficiencia.

2. Luego, como segunda idea, concentre su atención en vectores y cuyas componentes sean 1 o -1 escogidos en forma aleatoria de nuevo, y obtenga cotas inferiores para la $\text{cond}(A)$.
3. Por último considere la siguiente idea: resolver primero el sistema $Ax = b$ donde $b_i = 1/n$ para todo i ; luego resolver $A^t z = y$ donde $y_i = 1$ si $x_i \geq 0$, y $y_i = -1$ si $x_i < 0$; asignar al índice $k = \arg \max\{|z_i|, 1 \leq i \leq n\}$, y resolver de nuevo $Ax = b$ donde ahora b tiene ceros en todas las posiciones menos en la k donde tiene un 1.

Calcule $\|x\|_1$ y úselo como cota inferior de $\|A^{-1}\|_1$ (justifique por qué sólo $\|x\|_1$ para el cálculo de la cota inferior de $\|A^{-1}\|_1$). Compare con los resultados aleatorios. Comente los resultados observados y trate de explicar el por qué de lo observado.

Programe los 3 procedimientos mencionados arriba. Las funciones para calcular la factorización LU de A así como los métodos de sustitución hacia adelante y atrás deben ser programados por usted. Para sus experimentos use las matrices cuadradas siguientes

$$\begin{pmatrix} 0.641 & 0.242 \\ 0.321 & 0.121 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

y también las suministradas en el archivo CO3211_proy1datos.mat. Recuerde que para la solución de cada sistema la matriz no cambia, lo que cambia es el vector del término de la derecha.

Construir una tabla con los resultados de los números de condición calculados para los 3 métodos y para cada una de las matrices suministradas. Incluir en la tabla los números de condición calculados usando la función de Matlab `cond`. Debe escribir un informe con el análisis del trabajo realizado, de los resultados obtenidos, así como las conclusiones.