Assignment 2

Luis Alberto Quintanar Díaz

6/27/2020

Pregunta 1

Dada la matriz $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal principal son los que se encuentran marcados en negrita

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \mathbf{a_{44}} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & \mathbf{a_{55}} \end{pmatrix}$$

Los elementos estrictamente superiores de una matriz son los que se encuentran por encima de la diagonal principal

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} & \mathbf{a_{14}} & \mathbf{a_{15}} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} & \mathbf{a_{24}} & \mathbf{a_{25}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \mathbf{a_{34}} & \mathbf{a_{35}} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \mathbf{a_{45}} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

¿Cómo son los elementos estrictamente inferiores?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \mathbf{a_{41}} & \mathbf{a_{42}} & \mathbf{a_{43}} & a_{44} & a_{45} \\ \mathbf{a_{51}} & \mathbf{a_{52}} & \mathbf{a_{53}} & \mathbf{a_{54}} & a_{55} \end{pmatrix}$$

Pregunta 2

Dados los siguientes elementos de la matriz $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{K})$, di cuáles se encuentran por encima y cuáles por debajo.

Los elementos que se encuentran por debajo de la diagonal son aquellos en los que $i > j$, es decir, a_{21}, a_{32} y a_{53}. Por otro lado, los elementos que se encuentran por encima de la diagonal son aquellos en los que $i < j$, es decir, a_{23} y a_{15}.

Pregunta 3

Dada $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{K})$ relaciona correctamente:

- $A_{i,j}$ $i < j$ está por encima de la diagonal principal.
- $A_{i,j}$ $i = j$ está en la diagonal principal.
- $A_{i,j}$ $i > j$ está por debajo de la diagonal principal.

Con lo cual definiremos las entradas de la matriz en la diagonal principal, por encima de la diagonal principal y por debajo de la diagonal principal, respectivamente como:

- A_{ij} está en la diagonal principal $\iff$ $i{=}j$
- A_{ij} está por encima de la diagonal principal $\iff$ $i{<}j$
- A_{ij} está por debajo de la diagonal principal $\iff$ $i{>}j$

Definiendo los conjuntos de matrices triangulares superiores e inferiores

Pregunta 4

Definimos el conjunto de las matrices diagonales como

$$\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad \text{si } i \neq j, \text{ entonces } A_{ij} = 0\}$$

Define formalmente los conjuntos de matrices triangulares inferiores ($L_n(\mathbb{K})$) y superiores ($U_n(\mathbb{K})$)

$$\begin{aligned} L_n(\mathbb{K}) &:= \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad \text{si } i > j, \text{ entonces } A_{ij} = 0\} \\ U_n(\mathbb{K}) &:= \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad \text{si } i < j, \text{ entonces } A_{ij} = 0\} \end{aligned}$$

Pregunta 5

Busquemos la relación entre las matrices triangulares superiores e inferiores. Recordemos que A^t es la matriz transpuesta de A. Con lo cual, podemos afirmar que

$$A \in U_n(\mathbb{K}) \iff A^t \in L_n(\mathbb{K})$$

Pregunta 6

Volvamos a un ejemplo específico Dadas las matrices $A, B \in U_3(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$$

Calcula el producto AB (llena todas las entradas)

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Ahora, observa que hay algunas que valen 0:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}\cdot 0 + a_{13}\cdot 0 & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}\cdot 0 & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ 0\cdot b_{11} + a_{22}\cdot 0 + a_{23}\cdot 0 & 0\cdot b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}\cdot 0 & 0\cdot b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ 0\cdot b_{11} + 0\cdot b_{12} + a_{33}b_{33} & 0\cdot b_{12} + 0\cdot b_{22} + a_{33}\cdot 0 & 0\cdot b_{13} + 0\cdot b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Quita los sumandos nulos y obtendrás la respuesta final:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ 0 & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Pregunta 7

Basándote en lo que has obtenido anteriormente, completa las siguientes afirmaciones

- Las entradas por debajo de la diagonal principal son 0.
- La matriz $AB \in U_3(\mathbb{K})$
- El elemento (i,i)-ésimo de la diagonal principal es el producto de los elementos (i,i)-ésimos de cada matriz.

Calculando las entradas del producto por debajo de la diagonal principal, en la diagonal principal y por encima de la diagonal principal

Pregunta 8

Ahora trabajaremos con el caso particular $n = 8$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} & a_{67} & a_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{77} & a_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{88} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} & b_{17} & b_{18} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} & b_{27} & b_{28} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} & b_{37} & b_{38} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & b_{45} & b_{46} & b_{47} & b_{48} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} & b_{56} & b_{57} & b_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{66} & b_{67} & b_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{77} & b_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{88} \end{pmatrix}$$

Para calcular la entrada AB_{42} del producto AB, por definición del producto de matrices, la entrada de la matriz AB en la cuarta fila y la segunda columna, es el producto de la cuarta fila de A por la segunda columna de B, que es

$$AB_{42} = \sum_{i=1}^{8} a_{4i}b_{i2} = a_{41}b_{12} + a_{42}b_{22} + a_{43}b_{32} + a_{44}b_{42} + a_{45}b_{52} + a_{46}b_{62} + a_{47}b_{72} + a_{48}b_{82}$$

que pasa a ser lo siguiente cuando sustituimos las entradas nulas

$$AB_{42} = 0\cdot b_{12} + 0\cdot b_{22} + 0 + a_{44}\cdot 0 + a_{45}\cdot 0 + a_{46}\cdot 0 + a_{47}\cdot 0 + a_{48}\cdot 0 = 0$$

Siguiendo el ejemplo, calcula las siguientes entradas primero escribiendo todos los sumandos, a continuación indicando los factores nulos y finalmente, simplificando las sumas.

Entradas por debajo de la diagonal principal:

- $$\begin{aligned} AB_{75} = \sum_{i=1}^{8} a_{7i}b_{i5} &= a_{71}b_{15} + a_{72}b_{25} + a_{73}b_{35} + a_{74}b_{45} + a_{75}b_{55} + a_{76}b_{65} + a_{77}b_{75} + a_{78}b_{85} \\ &= 0 \cdot b_{15} + 0 \cdot b_{25} + 0 \cdot b_{35} + 0 \cdot b_{45} + 0 \cdot b_{55} + 0 \cdot 0 + a_{77} \cdot 0 + a_{78} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} AB_{61} = \sum_{i=1}^{8} a_{6i}b_{i1} &= a_{61}b_{11} + a_{62}b_{21} + a_{63}b_{31} + a_{64}b_{41} + a_{65}b_{51} + a_{66}b_{61} + a_{67}b_{71} + a_{68}b_{81} \\ &= 0 \cdot b_{11} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + a_{67} \cdot 0 + a_{68} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} AB_{32} = \sum_{i=1}^{8} a_{3i}b_{i2} &= a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} + a_{34}b_{42} + a_{35}b_{52} + a_{36}b_{62} + a_{37}b_{72} + a_{38}b_{82} \\ &= 0 \cdot b_{12} + 0 \cdot b_{22} + a_{33} \cdot 0 + a_{34} \cdot 0 + a_{35} \cdot 0 + a_{36} \cdot 0 + a_{37} \cdot 0 + a_{38} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} AB_{74} = \sum_{i=1}^{8} a_{7i}b_{i4} &= a_{71}b_{14} + a_{72}b_{24} + a_{73}b_{34} + a_{74}b_{44} + a_{75}b_{54} + a_{76}b_{64} + a_{77}b_{74} + a_{78}b_{84} \\ &= 0 \cdot b_{14} + 0 \cdot b_{24} + 0 \cdot b_{34} + 0 \cdot b_{44} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + a_{77} \cdot 0 + a_{78} \cdot 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} AB_{87} = \sum_{i=1}^{8} a_{8i}b_{i7} &= a_{81}b_{17} + a_{82}b_{27} + a_{83}b_{37} + a_{84}b_{47} + a_{85}b_{57} + a_{86}b_{67} + a_{87}b_{77} + a_{88}b_{87} \\ &= 0 \cdot b_{17} + 0 \cdot b_{27} + 0 \cdot b_{37} + 0 \cdot b_{47} + 0 \cdot b_{57} + 0 \cdot b_{67} + 0 \cdot b_{77} + a_{88} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entradas de la diagonal principal:

- $$\begin{aligned} AB_{77} = \sum_{i=1}^{8} a_{7i}b_{i7} &= a_{71}b_{17} + a_{72}b_{27} + a_{73}b_{37} + a_{74}b_{47} + a_{75}b_{57} + a_{76}b_{67} + a_{77}b_{77} + a_{78}b_{87} \\ &= 0 \cdot b_{17} + 0 \cdot b_{27} + 0 \cdot b_{37} + 0 \cdot b_{47} + 0 \cdot b_{57} + 0 \cdot b_{67} + a_{77}b_{77} + a_{78} \cdot 0 \\ &= a_{77}b_{77} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} AB_{11} = \sum_{i=1}^{8} a_{1i}b_{i1} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41} + a_{15}b_{51} + a_{16}b_{61} + a_{17}b_{71} + a_{18}b_{81} \\ &= a_{11}b_{11} + a_{12} \cdot 0 + a_{13} \cdot 0 + a_{14} \cdot 0 + a_{15} \cdot 0 + a_{16}b \cdot 0 + a_{17} \cdot 0 + a_{18} \cdot 0 \\ &= a_{11}b_{11} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} AB_{33} = \sum_{i=1}^{8} a_{3i}b_{i3} &= a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} + a_{34}b_{43} + a_{35}b_{53} + a_{36}b_{63} + a_{37}b_{73} + a_{38}b_{83} \\ &= 0 \cdot b_{13} + 0 \cdot b_{23} + a_{33}b_{33} + a_{34} \cdot 0 + a_{35} \cdot 0 + a_{36} \cdot 0 + a_{37} \cdot 0 + a_{38} \cdot 0 \\ &= a_{33}b_{33} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} AB_{44} = \sum_{i=1}^{8} a_{4i}b_{i4} &= a_{41}b_{14} + a_{42}b_{24} + a_{43}b_{34} + a_{44}b_{44} + a_{45}b_{54} + a_{46}b_{64} + a_{47}b_{74} + a_{48}b_{84} \\ &= 0 \cdot b_{14} + 0 \cdot b_{24} + 0 \cdot b_{34} + a_{44}b_{44} + a_{45} \cdot 0 + a_{46} \cdot 0 + a_{47} \cdot 0 + a_{48} \cdot 0 \\ &= a_{44}b_{44} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} AB_{88} = \sum_{i=1}^{8} a_{8i}b_{i8} &= a_{81}b_{18} + a_{82}b_{28} + a_{83}b_{38} + a_{84}b_{48} + a_{85}b_{58} + a_{86}b_{68} + a_{87}b_{78} + a_{88}b_{88} \\ &= 0 \cdot b_{18} + 0 \cdot b_{28} + 0 \cdot b_{38} + 0 \cdot b_{48} + 0 \cdot b_{58} + 0 \cdot b_{68} + 0 \cdot b_{78} + a_{88}b_{88} \\ &= a_{88}b_{88} \end{aligned}$$

Entradas por encima de la diagonal principal:

- $$\begin{aligned} AB_{78} = \sum_{i=1}^{8} a_{7i}b_{i8} &= a_{71}b_{18} + a_{72}b_{28} + a_{73}b_{38} + a_{74}b_{48} + a_{75}b_{58} + a_{76}b_{68} + a_{77}b_{78} + a_{78}b_{88} \\ &= 0 \cdot b_{18} + 0 \cdot b_{28} + 0 \cdot b_{38} + 0 \cdot b_{48} + 0 \cdot b_{58} + 0 \cdot b_{68} + a_{77}b_{78} + a_{78}b_{88} \\ &= a_{77}b_{78} + a_{78}b_{88} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} AB_{15} = \sum_{i=1}^{8} a_{1i}b_{i5} &= a_{11}b_{15} + a_{12}b_{25} + a_{13}b_{35} + a_{14}b_{45} + a_{15}b_{55} + a_{16}b_{65} + a_{17}b_{75} + a_{18}b_{85} \\ &= a_{11}b_{15} + a_{12}b_{25} + a_{13}b_{35} + a_{14}b_{45} + a_{15}b_{55} + a_{16} \cdot 0 + a_{17} \cdot 0 + a_{18} \cdot 0 \\ &= a_{11}b_{15} + a_{12}b_{25} + a_{13}b_{35} + a_{14}b_{45} + a_{15}b_{55} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} AB_{36} = \sum_{i=1}^{8} a_{3i}b_{i6} &= a_{31}b_{16} + a_{32}b_{26} + a_{33}b_{36} + a_{34}b_{46} + a_{35}b_{56} + a_{36}b_{66} + a_{37}b_{76} + a_{38}b_{86} \\ &= 0 \cdot b_{16} + 0 \cdot b_{26} + a_{33}b_{36} + a_{34}b_{46} + a_{35}b_{56} + a_{36}b_{66} + a_{37} \cdot 0 + a_{38} \cdot 0 \\ &= a_{33}b_{36} + a_{34}b_{46} + a_{35}b_{56} + a_{36}b_{66} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} AB_{24} = \sum_{i=1}^{8} a_{2i}b_{i4} &= a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24} + a_{23}b_{34} + a_{24}b_{44} + a_{25}b_{54} + a_{26}b_{64} + a_{27}b_{74} + a_{28}b_{84} \\ &= 0 \cdot b_{14} + a_{22}b_{24} + a_{23}b_{34} + a_{24}b_{44} + a_{25} \cdot 0 + a_{26} \cdot 0 + a_{27} \cdot 0 + a_{28} \cdot 0 \\ &= a_{22}b_{24} + a_{23}b_{34} + a_{24}b_{44} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} AB_{58} = \sum_{i=1}^{8} a_{5i}b_{i8} &= a_{51}b_{18} + a_{52}b_{28} + a_{53}b_{38} + a_{54}b_{48} + a_{55}b_{58} + a_{56}b_{68} + a_{57}b_{78} + a_{58}b_{88} \\ &= 0 \cdot b_{18} + 0 \cdot b_{28} + 0 \cdot b_{38} + 0 \cdot b_{48} + a_{55}b_{58} + a_{56}b_{68} + a_{57}b_{78} + a_{58}b_{88} \\ &= a_{55}b_{58} + a_{56}b_{68} + a_{57}b_{78} + a_{58}b_{88} \end{aligned}$$

Deduciendo la fórmula general para las entradas del producto de matrices triangulares superiores

Pregunta 9

Ahora vamos a generalizar el ejemplo anterior a orden n.

Para ello empecemos formalizando el producto de matrices

Si $A, B \in \mathcal{M}_{15}(\mathbb{K})$, entonces

$$AB_{12,3} = a_{12,1}b_{13} + a_{12,2}b_{23} + \cdots + a_{12,15}b_{15,3} = \sum_{k=1}^{15} a_{12,k}b_{k3}$$

Si $A, B \in \mathcal{M}_8(\mathbb{K})$, entonces

$$AB_{85} = a_{81}b_{15} + a_{82}b_{25} + \cdots + a_{8,15}b_{15,5} = \sum_{k=1}^{8} a_{8,k}b_{k5}$$

Si $A, B \in \mathcal{M}_9(\mathbb{K})$, entonces

$$AB_{36} = a_{31}b_{16} + a_{32}b_{26} + \cdots + a_{39}b_{96} = \sum_{k=1}^{9} a_{3k}b_{k6}$$

Siguiendo lo anterior, la fórmula general para

$$AB_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{i,n-1}b_{n-1,j} + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Partición de una suma

Pregunta 10

Ahora, vamos a hablar de particiones de una suma. Básicamente, se trata de dividir una suma en partes, cosa que a veces resulta más cómodo.

Por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{5} s_k = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = (s_1 + s_2 + s_3) + (s_4 + s_5) = \sum_{k=1}^{3} s_k + \sum_{k=4}^{5} s_k$$

o también,

$$\sum_{k=1}^{15} s_k = \sum_{k=1}^{6} s_k + \sum_{k=7}^{10} s_k + \sum_{k=11}^{15} s_k$$

Ahora es tu turno, completa las siguientes particiones de sumas:

$$\sum_{k=1}^{20} s_k = \sum_{k=1}^{7} s_k + \sum_{k=8}^{15} s_k$$

$$\sum_{k=1}^{29} s_k + \sum_{k=1}^{8} s_k + \sum_{k=9}^{20} s_k + \sum_{k=21}^{29} s_k$$

Supongamos ahora que sabemos el valor de los s_k, por ejemplo, $s_k = 7 \ \forall \ k \in \{1, \ldots, 6\}$ y $s_k = 5 \ \forall \ k \in \{7, \ldots, 20\}$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{20} = \sum_{k=1}^{6} s_k + \sum_{k=7}^{20} s_k = 6 \cdot 7 + 14 \cdot 5 = 112$$

Siguiendo el ejemplo, completa las siguientes particiones y calcula su resultado:

$$\sum_{k=1}^{17} = \cdots \qquad \text{donde } s_k = 2 \quad \forall k \in \{1, \ldots, 10\}, s_k = 3 \quad \forall k \in \{11, \ldots, 17\}$$

$$\sum_{k=1}^{17} s_k = \sum_{k=1}^{10} s_k + \sum_{k=11}^{17} s_k = 10 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 41$$

$$\sum_{k=1}^{25} = \cdots \qquad \text{donde } s_k = 7 \quad \forall k \in \{1, \ldots, 12\}, s_k = 9 \quad \forall k \in \{13, \ldots, 19\}, s_k = 5 \quad \forall k \in \{20, \ldots, 25\}$$

$$\sum_{k=1}^{25} s_k = \sum_{k=1}^{12} s_k + \sum_{k=13}^{19} s_k + \sum_{k=20}^{29} s_k = 12 \cdot 7 + 7 \cdot 9 + 10 \cdot 5 = 197$$

Simplifica las sumas:

$$\sum_{k=1}^{31} = \cdots \qquad \text{donde } s_k = 0 \quad \forall k \in \{1, \ldots, 9\} \cup \{25, \ldots, 31\}$$

$$\sum_{k=1}^{31} s_k = \sum_{k=1}^{9} s_k + \sum_{k=10}^{24} s_k + \sum_{k=25}^{31} s_k = 0 + \sum_{k=10}^{24} s_k + 0 = \sum_{k=10}^{24} s_k = 255$$

$$\sum_{k=1}^{27} = \cdots \qquad \text{donde } s_k = 0 \quad \forall k \in \{1, \ldots, 7\} \cup \{12, \cdots, 19\} \cup \{24, \ldots, 27\}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{27} s_k &= \sum_{k=1}^{7} s_k + \sum_{k=8}^{11} s_k + \sum_{k=12}^{19} s_k + \sum_{k=20}^{23} s_k + \sum_{k=24}^{27} s_k \\
&= 0 + \sum_{k=8}^{11} s_k + 0 + \sum_{k=20}^{23} s_k + 0 \\
&= \sum_{k=8}^{11} s_k + \sum_{k=20}^{23} s_k \\
&= 38 + 86 \\
&= 124
\end{aligned}$$

Entradas del producto por debajo de la diagonal principal con partición de sumas

Pregunta 11

En los ejemplos siguientes se considera el producto de dos matrices triangulares superiores $A, B \in U_{15}(\mathbb{R})$ Queremos demostrar que $AB_{13,5} = 0$. Por definición, nosotros sabemos que

$$AB_{13,5} = \sum_{k=1}^{15} a_{13,k} b_{k5}$$

Podemos dividir la suma en tres partes:

- k desde 1 hasta 5.
- k desde 6 hasta 12.
- k desde 13 hasta 55.

De este modo,

$$AB_{13,5} = \sum_{k=1}^{15} a_{13,k} b_{k5} = \sum_{k=1}^{5} a_{13,k} b_{k5} + \sum_{k=6}^{12} a_{13,k} b_{k5} + \sum_{k=13}^{15} a_{13,k} b_{k5}$$

El primer sumando cumple que $a_{13,k} = 0 \quad \forall\ k \in \{1, \dots, 5\}$ ya que recordemos, $A \in U_{15}$, con lo cual $a_{ij} = 0$ si, y sólo si, $i > j$.

De forma similar, el segundo sumando cumple tanto que $a_{13,k} = 0 \quad \forall\ k \in \{6, \dots, 12\}$ como que $b_{k5} = 0 \quad \forall\ k \in \{6, \dots, 12\}$ porque en ambos casos $i > j$.

Finalmente, siguiendo el mismo argumento que en los dos casos anteriores, el tercer sumando cumple que $b_{k5} = 0 \quad \forall\ k \in \{13, 14, 15\}$ ya que de nuevo se cumple que $i > j$.

Por tanto, lo que tenemos es que

$$AB_{13,5} = \sum_{k=1}^{15} a_{13,k} b_{k5} = \sum_{k=1}^{5} 0 \cdot b_{k5} + \sum_{k=6}^{12} 0 \cdot 0 + \sum_{k=13}^{15} a_{13,k} \cdot 0 = 0$$

Como de costumbre, ahora es tu turno: demuestra que las siguientes entradas del producto AB son nulas

- AB_{93}

Por definición, sabemos que

$$AB_{93} = \sum_{k=1}^{15} a_{9k} b_{k3} = \sum_{k=1}^{3} a_{9k} b_{k3} + \sum_{k=4}^{8} a_{9k} b_{k3} + \sum_{k=9}^{15} a_{9k} b_{k3}$$

En el primer sumando se cumple que $a_{9,k} = 0 \quad \forall\ k \in \{1, \dots, 3\}$ ya que recordemos, $A \in U_{15}$, con lo cual $a_{ij} = 0$ si, y sólo si, $i > j$. Con lo cual

$$\sum_{k=1}^{3} a_{9k} b_{k3} = \sum_{k=1}^{3} 0 \cdot b_{k3}$$

En el segundo sumando se cumple tanto que $a_{9,k} = 0 \quad \forall\ k \in \{4, \dots, 8\}$ como que $b_{k3} = 0 \quad \forall\ k \in \{4, \dots, 8\}$ porque en ambos casos $i > j$. Es decir

$$\sum_{k=4}^{8} a_{9k} b_{k3} = \sum_{k=4}^{8} 0 \cdot 0$$

Asimismo, el tercer sumando cumple que $b_{k3} = 0 \quad \forall\ k \in \{9, \dots, 15\}$ ya que de nuevo se cumple que $i > j$. Con lo cual

$$\sum_{k=9}^{15} a_{9k} b_{k3} = \sum_{k=9}^{15} a_{9k} \cdot 0$$

Finalmente, hemos demostrado que AB_{93} es nula pues

$$AB_{93} = \sum_{k=1}^{15} a_{9k}b_{k3} = \sum_{k=1}^{3} 0 \cdot b_{k3} + \sum_{k=4}^{8} 0 \cdot 0 + \sum_{k=9}^{15} a_{9k} \cdot 0 = 0$$

De manera análoga, podemos comprobar que

- AB_{31}

$$\begin{aligned} AB_{31} = \sum_{k=1}^{15} a_{3k}b_{k1} &= a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + \sum_{k=4}^{15} a_{3k}b_{k1} \\ &= 0 \cdot b_{11} + 0 \cdot \; 0 + \sum_{k=4}^{15} a_{3k} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- $AB_{15,3}$

$$\begin{aligned} AB_{15,3} = \sum_{k=1}^{15} a_{15,k}b_{k3} &= \sum_{k=1}^{3} a_{15,k}b_{k3} + \sum_{k=4}^{14} a_{15,k}b_{k3} + a_{15,15}b_{15,3} \\ &= \sum_{k=1}^{3} 0 \cdot b_{k3} + \sum_{k=4}^{14} 0 \cdot 0 + a_{15,15} \cdot 0 \end{aligned}$$

Entradas diagonales del producto con partición de sumas

Pregunta 12

Seguimos en el caso particular $n = 15$, donde $A, B \in U_{15}(\mathbb{R})$ son matrices triangulares superiores de orden 15.

Siguiendo un razonamiento similar al del caso de las entradas por debajo de la diagonal principal, calculemos la entrada AB_{77} por definición y utilizando partición de la suma. De nuevo, volvemos a requerir 3 sumandos:

$$AB_{77} = \sum_{k=1}^{6} a_{7k}b_{k7} + a_{77}b_{77} + \sum_{k=8}^{15} a_{7k}b_{k7}$$

El primer sumando cumple que $a_{7,k} = 0 \quad \forall\, k =\in \{1, \ldots, 6\}$ ya que recordemos, $A \in U_{15}$, con lo cual $a_{ij} = 0$ si, y sólo si, $i > j$.

De forma similar, siguiendo el mismo argumento, el tercer sumando cumple tanto que $b_{k7} = 0 \quad \forall\, k \in \{8, \ldots, 15\}$ porque $i > j$.

De este modo,

$$AB_{77} = 0 + a_{77}b_{77} + 0 = a_{77}b_{77}$$

Calcula las siguientes entradas del producto siguiendo el razonamiento anterior:

- AB_{55}

$$\begin{aligned} AB_{55} = \sum_{k=1}^{15} a_{5k}b_{k5} &= \sum_{k=1}^{4} a_{5k}b_{k5} + a_{55}b_{55} + \sum_{k=6}^{15} a_{5k}b_{k5} \\ &= \sum_{k=1}^{4} 0 \cdot b_{k5} + a_{55}b_{55} + \sum_{k=6}^{15} a_{5k} \cdot 0 \\ &= 0 + a_{55}b_{55} + 0 \\ &= a_{55}b_{55} \end{aligned}$$

- $AB_{10,10}$

$$\begin{aligned} AB_{10,10} = \sum_{k=1}^{15} a_{10,k}b_{k,10} &= \sum_{k=1}^{9} a_{10,k}b_{k,10} + a_{10,10}b_{10,10} + \sum_{k=11}^{15} a_{10,k}b_{k,10} \\ &= \sum_{k=1}^{9} 0 \cdot b_{k,10} + a_{10,10}b_{10,10} + \sum_{k=11}^{15} a_{10,k} \cdot 0 \\ &= 0 + a_{10,10}b_{10,10} + 0 \\ &= a_{10,10}b_{10,10} \end{aligned}$$

- $AB_{15,15}$

$$\begin{aligned} AB_{15,15} = \sum_{k=1}^{15} a_{15,k}b_{k,15} &= \sum_{k=1}^{14} a_{15,k}b_{k,15} + a_{15,15}b_{15,15} \\ &= \sum_{k=1}^{14} 0 \cdot b_{k,15} + a_{15,15}b_{15,15} \\ &= 0 + a_{15,15}b_{15,15} \\ &= a_{15,15}b_{15,15} \end{aligned}$$

Entradas del producto por encima de la diagonal principal

Pregunta 13

Seguimos en el caso particular $n = 15$, donde $A, B \in U_{15}(\mathbb{R})$ son matrices triangulares superiores de orden 15.

Para calcular la entrada $AB_{6,14}$, seguimos el razonamiento anterior: partimos la suma en 3 del siguiente modo:

$$AB_{6,14} = \sum_{k=1}^{5} a_{6k}b_{k,14} + \sum_{k=6}^{14} a_{6k}b_{k,14} + a_{6,15}b_{15,14} = \sum_{k=6}^{14} a_{6k}b_{k,14}$$

Calcula las siguientes entradas del producto siguiendo el razonamiento anterior:

- $AB_{1,5}$

$$
\begin{aligned}
AB_{1,5} = \sum_{k=1}^{15} a_{1k}b_{k5} &= \sum_{k=1}^{5} a_{1k}b_{k5} + \sum_{k=6}^{15} a_{1k}b_{k5} \\
&= \sum_{k=1}^{5} a_{1k}b_{k5} + \sum_{k=6}^{15} a_{1k} \cdot 0 \\
&= \sum_{k=1}^{5} a_{1k}b_{k5}
\end{aligned}
$$

- $AB_{10,13}$

$$
\begin{aligned}
AB_{10,13} = \sum_{k=1}^{15} a_{10,k}b_{k,13} &= \sum_{k=1}^{9} a_{10,k}b_{k,13} + \sum_{k=10}^{13} a_{10,k}b_{k,13} + \sum_{k=14}^{15} a_{10,k}b_{k,13} \\
&= \sum_{k=1}^{9} 0 \cdot b_{k,13} + \sum_{k=10}^{13} a_{10,k}b_{k,13} + \sum_{k=14}^{15} a_{10,k} \cdot 0 \\
&= \sum_{k=10}^{13} a_{10,k}b_{k,13}
\end{aligned}
$$

- $AB_{6,9}$

$$
\begin{aligned}
AB_{6,9} = \sum_{k=1}^{15} a_{6k}b_{k9} &= \sum_{k=1}^{5} a_{6k}b_{k9} + \sum_{k=6}^{9} a_{6k}b_{k9} + \sum_{k=10}^{15} a_{6k}b_{k9} \\
&= \sum_{k=1}^{5} 0 \cdot b_{k9} + \sum_{k=6}^{9} a_{6k}b_{k9} + \sum_{k=10}^{15} a_{6k} \cdot 0 \\
&= \sum_{k=6}^{9} a_{6k}b_{k9}
\end{aligned}
$$

Demostración del caso general

Pregunta 14

El teorema enuncia lo siguiente: *El producto de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior*

Por lo tanto, lo que queremos demostrar es que dadas $A, B \in U_n(\mathbb{K})$, el producto $AB \in U_n(\mathbb{K})$

Sean $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $i > j$. Demostremos que las entradas $AB_{ij} = 0$.

Por definición del producto de matrices, la entrada $(i, j)-$ésima de la matriz producto AB se da del siguiente modo:

$$
AB_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}
$$

Como las matrices A, B son triangulares superiores, tenemos que

$$\begin{aligned} A_{ik} = 0 \quad \forall i, k \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ tales que } i > k \\ B_{kj} = 0 \quad \forall j, k \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ tales que } k > j \end{aligned}$$

De este modo, partimos la suma en 3 sumandos

$$AB_{ij} = \sum_{k=1}^{j} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=j+1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik}b_{kj} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Donde el primer sumando vale 0 porque para todo $k \in \{1, \ldots, j\}, k \leq j < i$; el segundo sumando es 0 porque $\forall\ k \in \{j+1, \ldots, i-1\}, j < k < i$; y, finalmente, el último sumando es nulo porque para todos los valores de $k, k \in \{i, \ldots, n\}, j < i \leq k$.

Así queda demostrado que $AB \in U_n$.

- En el caso de que $A, B \in U_n(\mathbb{K})$, calcula la fórmula para las entradas diagonales AB_{ii}.

$$\begin{aligned} AB_{ii} &= \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{ki} + a_{ii}b_{ii} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot b_{ki} + a_{ii}b_{ii} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} \cdot 0 \\ &= 0 + a_{ii}b_{ii} + 0 \\ &= a_{ii}b_{ii} \end{aligned}$$

- En el caso de que $A, B \in U_n(\mathbb{K})$, calcula la fórmula para las entradas no triviales AB_{ij} con $i \leq j$.

$$\begin{aligned} AB_{ij} &= \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i}^{j} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=j+1}^{n} a_{ik}b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot b_{kj} + \sum_{k=i}^{j} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=j+1}^{n} a_{ik} \cdot 0 \\ &= 0 + \sum_{k=i}^{j} a_{ik}b_{kj} + 0 \\ &= \sum_{k=i}^{j} a_{ik}b_{kj} \end{aligned}$$

- **Enuncia y demuestra el resultado para matrices triangulares inferiores. Calcula para este caso las fórmulas de las entradas diagonales y las entradas no triviales.**

El teorema enuncia lo siguiente: *El producto de matrices triangulares inferiores es una matriz inferior*

Por lo tanto, lo que queremos demostrar es que dadas $A, B \in L_n(\mathbb{K})$, el producto $AB \in L_n(\mathbb{K})$

Sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $i < j$. Demostremos que las entradas $AB_{ij} = 0$.

Por definición del producto de matrices, la entrada $(i, j)-$ésima de la matriz producto AB se da del siguiente modo:

$$AB_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Como las matrices A, B son triangulares superiores, tenemos que

$$\begin{aligned} A_{ik} = 0 \quad & \forall i, k \in \{1, \ldots, n\} \text{ tales que } i < k \\ B_{kj} = 0 \quad & \forall j, k \in \{1, \ldots, n\} \text{ tales que } k < j \end{aligned}$$

De este modo, partimos la suma en 3 sumandos

$$\begin{aligned} AB_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} &= \sum_{k=1}^{i} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i+1}^{j-1} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=j}^{n} a_{ik} b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{i} a_{ik} \cdot 0 + \sum_{k=i+1}^{j-1} 0 \cdot 0 + \sum_{k=j}^{n} 0 \cdot b_{kj} \\ &= 0 + 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donde el primer sumando vale 0 porque para todo $k \in \{1, \ldots, i\}, k \leq i < j$; el segundo sumando es 0 porque $\forall\ k \in \{i+1, \ldots, j-1\}, i < k < j$; y, finalmente, el último sumando es nulo porque para todos los valores de $k, k \in \{j, \ldots, n\}, i < j \leq k$.

Así queda demostrado que $AB \in L_n$.

- En el caso de que $A, B \in L_n(\mathbb{K})$, la fórmula para las entradas diagonales AB_{ii} es

$$\begin{aligned} AB_{jj} &= \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} b_{kj} + a_{jj} b_{jj} + \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk} b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} \cdot 0 + a_{jj} b_{jj} + \sum_{k=j+1}^{n} 0 \cdot b_{kj} \\ &= 0 + a_{jj} b_{jj} + 0 \\ &= a_{jj} b_{jj} \end{aligned}$$

- Finalmente, cuando $A, B \in L_n(\mathbb{K})$, la fórmula para las entradas no triviales AB_{ij} con $j \leq i$ es

$$\begin{aligned} AB_{ij} &= \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=j}^{i} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} \cdot 0 + \sum_{k=j}^{i} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i+1}^{n} 0 \cdot b_{kj} \\ &= 0 + \sum_{k=j}^{i} a_{ik} b_{kj} + 0 \\ &= \sum_{k=j}^{i} a_{ik} b_{kj} \end{aligned}$$

- **Enuncia y desmuestra el resultado para matrices diagonales.**

El teorema enuncia lo siguiente: *El producto de matrices diagonales es una matriz diagonal*

lo que queremos demostrar es que dadas $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $a_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$, el producto $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $a_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$

Por definición del producto de matrices, la entrada $(i, j)-$ésima de la matriz producto AB se da del siguiente modo:

$$AB_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Como las matrices A, B son diagonales, tenemos que

$$\begin{array}{ll} A_{ik} = 0 & \forall i, k \in \{1, \ldots, n\} \text{ tales que } i \neq k \\ B_{kj} = 0 & \forall j, k \in \{1, \ldots, n\} \text{ tales que } k \neq j \end{array}$$

De este modo, partimos la suma en 3 sumandos

$$\begin{aligned} AB_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} &= \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i=j}^{i} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} b_{kj} \\ &= 0 + a_{ii} b_{ii} + 0 \\ &= a_{ii} b_{ii} \\ &= AB_{ii} \end{aligned}$$

Donde $AB_{ii} = AB_{jj} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $ab_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$