Analytics para la Toma de Decisiones
Simulación
Luis Alejandro Quimbayo Suarez
Melissa Orozco Escandón
Laura Fernanda Caballero Ortiz

OPTIMIZACIÓN DE UN PORTAFOLIO DE INVERSIÓN USANDO SIMULACIÓN DE MONTECARLO: UNA APLICACIÓN EN PYTHON.

1. Descripción de la situación problemática

El presente documento pretende mostrar una aplicación de la combinación de la simulación de Montecarlo y la optimización como herramienta útil para la toma de decisiones bajo incertidumbre, en este caso aplicado en el ámbito de las inversiones en activos financieros del mercado de capitales.

Un inversionista desea invertir el 100% de su presupuesto en 5 acciones bursátiles de manera que pueda aumentar la rentabilidad esperada de su portafolio de inversión afrontando un menor riesgo. Para esto hace uso de la metodología de “optimización de portafolio” publicada por Markowitz en el año 1952.

Bajo un escenario con incertidumbre asociada al comportamiento del precio de una acción, no se tiene certeza de cuál será el próximo redimiendo o rentabilidad que ésta presentará. El uso de la estadística junto con modelos de simulación y optimización pueden ayudar a dicho inversionista a asignar el 100% de su presupuesto en diferentes activos, siendo estas las asignaciones que mayor rentabilidad o utilidad generarán de un portafolio de inversión afrontando un nivel bajo de riesgo. De esta manera, se puede brindar información útil sobre en cuales acciones y cuantos recursos del presupuesto invertir para maximizar su ganancia.

2. Estructuración del problema

2.1. Actores involucrados

Cualquier inversor interesado en optimizar su portafolio de inversiones. También involucra la bolsa de valores en la cual se piensa invertir.

2.2. Alcance de la decisión

Determinar el peso a invertir en cada acción en un portafolio maximizando la utilidad minimizando el riesgo.

2.3. Objetivos del proyecto

Decidir en qué acciones invertir y que cantidad de los recursos disponibles.

2.4. Información disponible (o por adquirir)

Para realizar acabo este ejercicio se cuenta con información histórica publica de los retornos de las acciones de 5 compañías que se encuentran la lista de las 30 acciones que han generado mayores ganancias en las últimas 52 semanas de Yahoo Finance. Se ha tomado una serie de los últimos 252 días laborales hasta el 29 de noviembre de 2022. A continuación, se presenta una breve reseña de cada una de las compañías analizadas.

YPF: siglas de Yacimientos Petrolíferos Fiscales, S.A., es una empresa argentina de energía dedicada a la exploración, explotación, destilación, distribución y producción de energía eléctrica, gas, petróleo y derivados de los hidrocarburos y venta de combustibles, lubricantes, fertilizantes, plásticos y otros productos relacionados con la industria. La compañía tiene una composición societaria mixta, en la que el Estado argentino posee el 51 % de las acciones y el 49 % restante cotiza en la Bolsa de Buenos Aires y Nueva York.

TRMD: TORM, con sede en Copenhague, Dinamarca, es una compañía naviera que posee y opera camiones cisterna para productos. Los camiones cisterna de productos de la Compañía transportan productos de petróleo refinado, como gasolina, combustible para aviones, nafta y gasóleo.

ARLP: Es una empresa diversificada de recursos naturales que genera ingresos operativos a partir de la producción y comercialización de carbón e ingresos por regalías de los intereses minerales de carbón y petróleo y gas ubicados en regiones productoras estratégicas en los Estados Unidos.

BTU: Peabody Energy es una empresa de energía y minería del carbón con sede en St. Louis, Missouri. Su negocio principal consiste en la extracción, venta y distribución de carbón, que se compra para su uso en la generación de electricidad y la fabricación de acero. Peabody también comercializa, intermedia y comercializa carbón a través de oficinas en China, Australia, el Reino Unido y los Estados Unidos.

CEIX: Consol Energy Inc. es una compañía energética estadounidense con intereses en el carbón con sede en el suburbio de Cecil Township , en el complejo Southpointe , en las afueras de Pittsburgh , Pensilvania.

2.5. Criterios de decisión

Se tiene como criterio de decisión el indicador o razón entre rentabilidad y riesgo (Sharpe ratio) el cual depende de la configuración de pesos del portafolio de inversión. Si este ratio es lo mayor posible, se garantiza una mayor rentabilidad media y un menor riesgo; entendido como desviación estándar de los retornos del portafolio (Nova Murcia, 2020).

3. Diseño y desarrollo del modelo de simulación

3.1. Conceptualización del modelo

La metodología de elección de un portafolio de inversión o de “Media Varianza” fue publicada en 1952 por Harry Markowitz, el cual analiza la elección de la configuración de inversión en diferentes activos financieros dadas las expectativas de rendimientos futuros de éstos (Mendizabal Zubeldia, Miera Zabalza, & Zubia Zubiaurre, 2018).

Posteriormente, esta metodología da lugar a otra cuyo fin es la optimización de un portafolio dada la Frontera eficiente propuesta también por Markowitz, en donde de un conjunto de portafolios de inversión, habrá un subconjunto que obtiene los mejores rendimientos para determinados niveles de riesgo y de esta frontera o subconjunto de mejores portafolios, habrá uno que maximice el retorno esperado a un menor nivel de riesgo asumido.

Bajo dicho marco conceptual se especificará a continuación los conceptos de rendimiento de un portafolio de inversión, varianza de un portafolio de inversión, la medida de rendimiento o Sharpe ratio de un portafolio.

3.1.1. Definición de variables:

$$w = Vector\ de\ pesos\ del\ portafolio$$

$$v = Matriz\ de\ varianza\ y\ covarianzas\ de\ los\ activos\ del\ portafolio$$

$$R = Vector\ de\ retornos\ esperados\ de\ cada\ activo$$

3.1.2. Rendimiento esperado de un portafolio de inversión:

El rendimiento esperado del portafolio corresponde a la suma producto o a la multiplicación de las matrices de pesos y retorno de cada activo en el portafolio.

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i) = w^T R$$

w_i es el peso del activo i en elportafolio y E(R_i) corresponde al retorno esperado del activo

3.1.3. Varianza de un portafolio de inversión:

La varianza de un portafolio de inversión es un promedio ponderado de la varianza de cada uno de los activos y la covarianza entre cada uno de ellos según su peso en el portafolio. De esta manera se mide la dispersión del rendimiento total de los activos a partir del rendimiento total promedio de ellos.

$$\sigma^2{}_p = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i\, w_{\,j} \sigma_{\,i} \sigma_{\,j} p_{\,ij} = w^T(wv)$$

Donde wi es el peso del activo i del portafolio, σi es la desviación estándar de los retornos del activo i y pij es la correlación entre los retornos del activo i y el activo j

3.1.4. Ratio rentabilidad riesgo (Sharpe ratio):

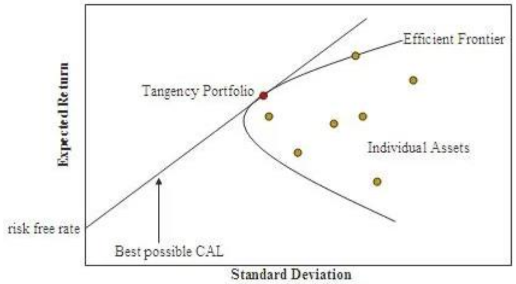
El ratio Sharpe es una medida de rendimiento de una inversión, mide la relación entre la rentabilidad de una inversión y su riesgo. Es deseable un ratio cada vez es mayor, debido a que da muestra de una inversión con mayor rendimiento o menor riesgo.

$$S = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

Donde R_f es la rentabilidad libre de riesgo. Para este ejercicio práctico se supone una Rf de 0.

3.1.5. Frontera eficiente de Markowitz

La frontera eficiente de Markowitz indica los portafolios cuya configuración o pesos a invertir en sus activos, permiten alcanzar el mejor rendimiento del portafolio ante un menor riesgo o desviación estándar (Markowitz, 1952).



Grafica 1: Frontera eficiente de Markowitz[1]

3.1.6. Función objetivo de optimización

Una vez expuesto el marco teórico y la definición de las variables de interés, se pretende usar los números aleatorios para luego optimizar o maximizar el Sharpe ratio. Con esto se garantiza una maximización del rendimiento y una minimización de la desviación estándar simplificando el problema de programación lineal. La única restricción es que la suma de dichas configuraciones debe ser siempre iguales a 1.

$$Max \ \frac{E(R_p)}{\sigma_p}, Sujeto\ a{:}\ \sum_{i=i}^{n} w_i = 1$$

3.2. Análisis de entrada

Ya contextualizado el modelo y previo a la implementación de la simulación, es importante realizar el análisis de entrada para así ajustar un modelo paramétrico que pueda ser usado en el desarrollo de la solución analítica. Para esto se realiza inicialmente un análisis descriptivo para conocer la información con la que se cuenta, posteriormente se ajustaran 5 distribuciones a los datos de cada acción para seleccionar la que mejor se acople

3.2.1. Análisis Descriptivo

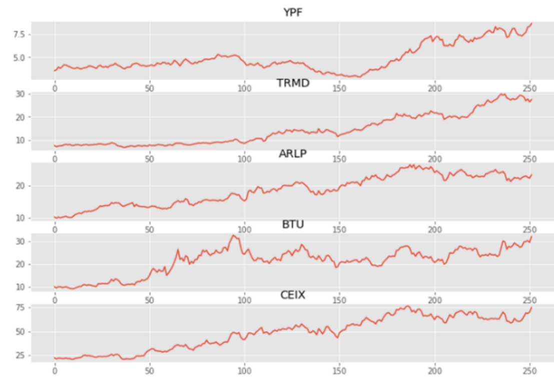
Las estadísticas descriptivas de estos rendimientos por acción se presentan en la siguiente gráfica:

	YPF	TRMD	ARLP	BTU	CEIX
count	251.000	251.000	251.000	251.000	251.000
mean	0.004	0.006	0.004	0.006	0.006
std	0.036	0.038	0.030	0.056	0.043
min	-0.100	-0.113	-0.093	-0.203	-0.118
25%	-0.022	-0.018	-0.015	-0.028	-0.023
50%	0.005	0.005	0.003	0.004	0.003
75%	0.027	0.029	0.022	0.039	0.033
max	0.098	0.161	0.149	0.147	0.142

Tabla 1: Estadística descriptiva de los rendimientos diarios de los activos financieros.

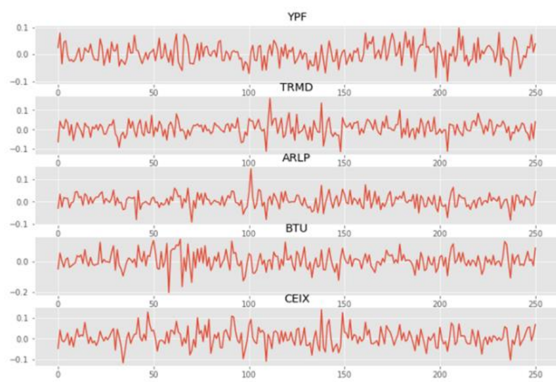
[1] Teoría moderna de portafolios aplicados en R. Tomado de https://mexiquant.substack.com/p/teoria-moderna-de-portafolios-en , consultado el 25 de noviembre de 2022.

La acción que ha presentado el rendimiento máximo durante el marco temporal analizado es TRMD con una variación del 16.1% mientras la que presento la mayor perdida fue BTU con una pérdida de 20.3%. Es interesante ver el comportamiento el precio de las acciones al cierre diario para darse una idea de las tendencias de estos.



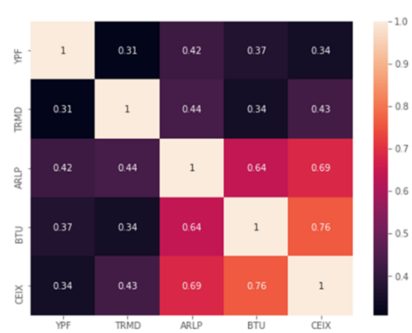
Grafica 2: Serie histórica de los precios de los activos financieros.

Se observa que el precio de las 5 acciones ha venido creciendo en el periodo analizado, lo cual es coherente con la selección de acciones realizada. Es relevante conocer cuál es la variación que puede tener la rentabilidad y en la siguiente gráfica se visualiza lo requerido, donde se observa que todas las acciones salvo BTU varían entre un -10% a un 10%.



Gráfica 3: Volatilidades de los activos financieros.

Respecto a la correlación, se visualiza que las acciones que presentan mayor relación son ARLP, BTU y CEIX, lo cual tiene sentido ya que pertenecen a la misma industria en el mismo país.

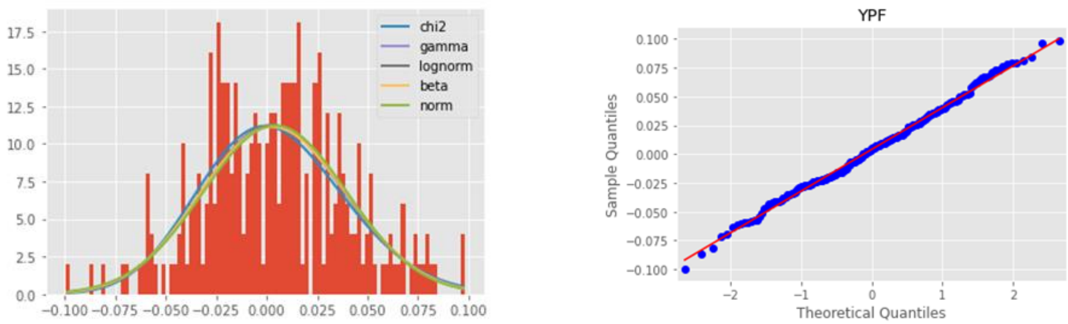


Gráfica 4: Matriz de varianzas y covarianzas de los activos financieros

3.2.2. Ajuste Distribuciones

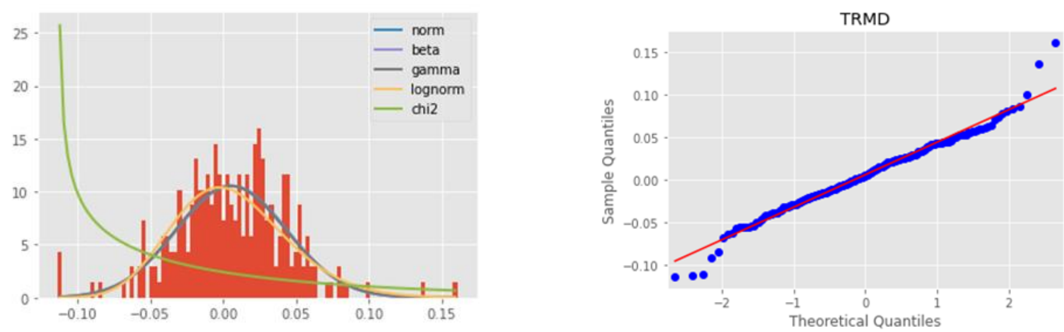
Se va a hacer uso de la función ‘fitter’ de Python para ajustar sobre las 5 acciones, las distribuciones Normal, Lognormal, Gamma, Beta Y Chi Cuadrado. Tomando como criterio de selección el BIC y validando por medio de la prueba de Smirnov Kolmogorov, donde la hipótesis nula es que los datos se distribuyen de acuerdo a la teórica propuesta.

YPF: Se ajusta a la distribución normal con un p-valor de 0.677 y el menor BIC de 387.91.



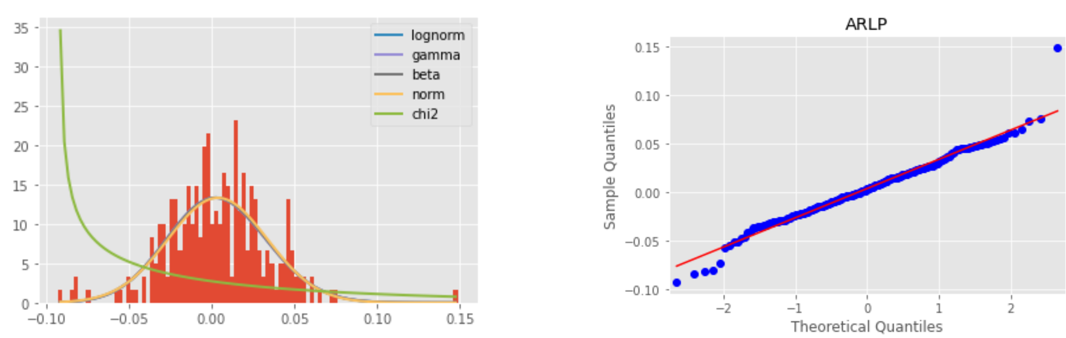
Gráfica 5: Ajuste distribuciones YPF

TRMD: Se ajusta a la distribución normal con un p-valor de 0.946 y el menor BIC de 156.35.



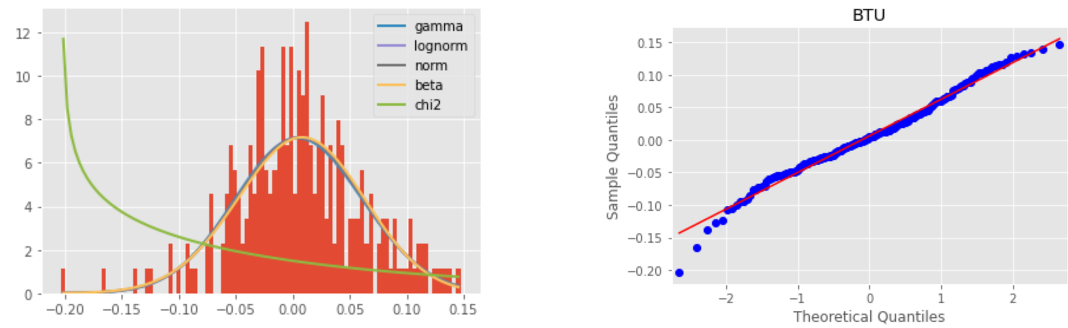
Gráfica 6: Ajuste distribuciones TRMD

ARLP: Se ajusta a la distribución normal con un p-valor de 0.821 y el menor BIC de 305.88.



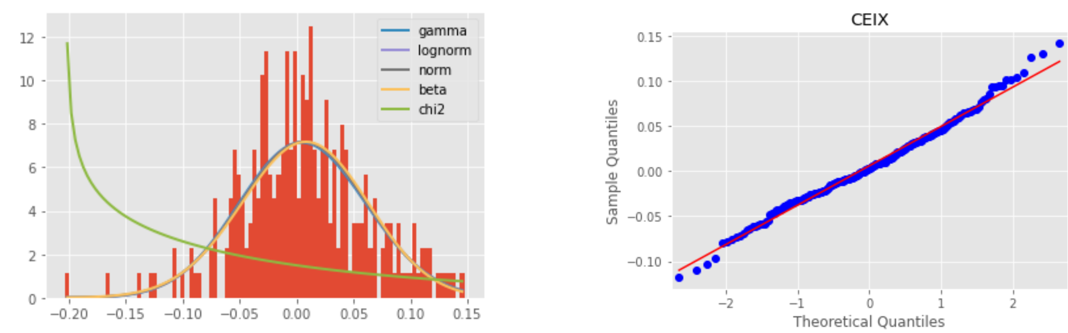
Gráfica 7: Ajuste distribuciones ARLP

BTU: Se ajusta a la distribución normal con un p-valor de 0.394 y el menor BIC de 65.31



Gráfica 8: Ajuste distribuciones BTU

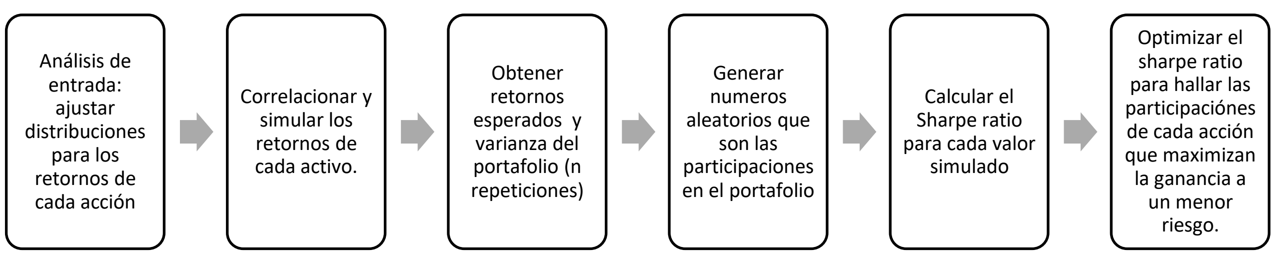
CEIX : Se ajusta a la distribución normal con un p-valor de 0.542 y el menor BIC de 240.98.



Gráfica 9: Ajuste distribuciones BTU

3.3. Implementación del modelo de simulación

Una vez establecido el análisis de entrada, procedemos a construir el modelo de simulación. A continuación, se muestra la secuencia de pasos para ello:



3.4. Verificación y Validación

Verificamos que el modelo posee un rango satisfactorio de precisión consistente con la aplicación esperada de varias formas. Primero, el modelo optimiza el Sharpe ratio dentro de varias alternativas como la que garantiza un máximo ratio. Si analizamos el Sharpe ratio para el ejercicio determinístico (pesos asignados por nosotros), esta toma el valor de 0.006779. Corriendo nuestro modelo que simula y optimiza, encontramos que el mejor Sharpe ratio es de 0.007459. Validamos que nuestro modelo si provee un resultado que es superior a los criterios determinísticos básicos.

Otra verificación realizada consiste en comparar el rendimiento promedio del portafolio dado la distribución de peso resultante del modelo de simulación y optimización, con los datos reales. Esperamos que estos valores sean similares. Encontramos que, usando la información real, el rendimiento esperado es de 0.005658683458856074. Si usamos los datos simulados, el rendimiento es de 0.005658939696725603. Note que para este ejercicio en ambos casos utilizamos los pesos optimizados.

3.5. Diseño de Experimentos

El primer experimento, consiste en realizar una simulación de Montecarlo en la que se hagan mil iteraciones de posibles retornos de los activos correlacionados con los que se obtendrá dada la configuración óptima del portafolio un rendimiento de este mil veces. Con esto se repostería la pregunta de ¿qué pasaría con el rendimiento esperado si tuviese la oportunidad de invertir en dichos activos según la distribución de este portafolio n veces?

El segundo experimento consiste en evaluar la distribución de dicho portafolio optimizado con los rendimientos observados el día inmediatamente siguiente al entrenamiento y obtener el rendimiento de dicho portafolio. Con esto se respondería la pregunta ¿qué pasaría con el rendimiento del portafolio hoy si se hubiese invertido en esas acciones con esa configuración de pesos del portafolio óptima ayer?

3.6. Análisis de Resultados

Una vez realizada la simulación de Montecarlo para determinar los rendimientos correlacionados de los diferentes activos financieros, se hace la optimización del portafolio de inversión, simulando por medio de Montecarlo n configuraciones del peso del portafolio. Una vez se tienen los diferentes rendimientos simulados de cada activo financiero, para cada uno de estos se evaluará una configuración de pesos diferente obteniendo de esta un rendimiento y una desviación estándar. Con estas medidas estadísticas se calcula la ratio Sharpe para cada conjunto de pesos simulados anteriormente.

En el proceso de optimización, se busca la configuración qué permita obtener un mayor rendimiento posible ante una menor desviación estándar asumida. Es decir, se maximiza el Sharpe ratio. Los resultados se muestran a continuación:

```
Las siguientes estadisticas corresponden a un portafolio de inversión optimizado

Media: 0.005657767657967848
Desviación estándar: 0.7587467128092722
Sharpe ratio: 0.007456727735952713 5

Porcentaje a invertir en el activo 1: 0.17714951315250987
Porcentaje a invertir en el activo 2: 0.3473180090302733
Porcentaje a invertir en el activo 3: 8.326672684688674e-17
Porcentaje a invertir en el activo 4: 0.26774426244483945
Porcentaje a invertir en el activo 5: 0.20778821537237735
```

Tabla 2: Resultados iniciales del modelo de simulación

Se muestra la probabilidad asociada al rendimiento esperado del portafolio óptimo:

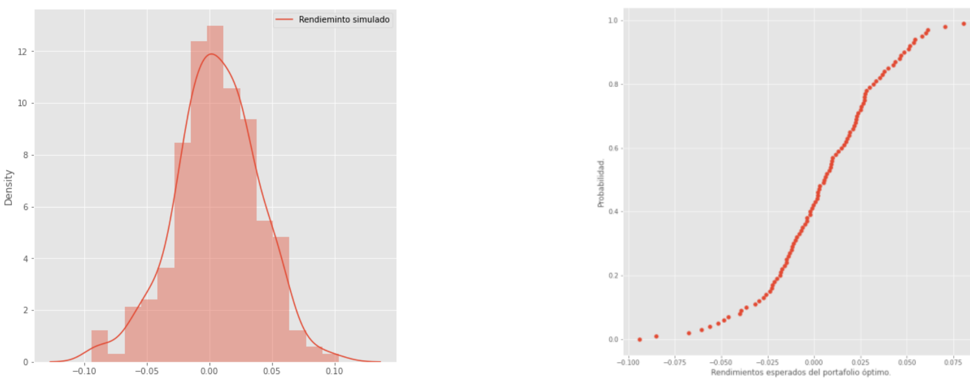
Desigualdad	Probabilidad
$P(R_p) < 0$	43%
$P(R_p) > 0$	57%

Probabilidad	Rendimiento
0.25	-0.015
0.50	0.0055
0.75	0.027

VaR (Prob)	Rendimiento
0.05	-0.052

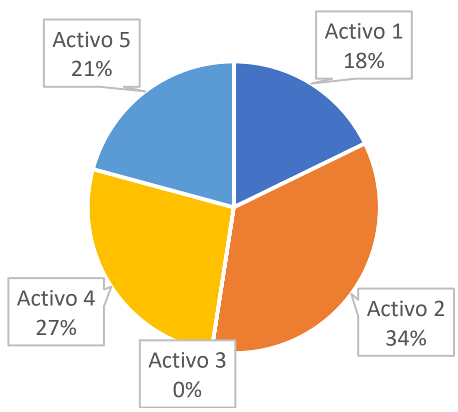
Tabla 3: Probabilidad Rendimiento Esperado Portafolio Optimo

Se muestra histograma de la distribución de los rendimientos simulados y la función empírica de probabilidad:



Gráfica 10: Distribución empírica de los rendimientos del portafolio óptimo

Para optimizar el rendimiento de un portafolio de inversión en los 5 activos financieros propuestos, se debería invertir del presupuesto total las siguientes proporciones en cada activo:



Gráfica 11: Distribución óptima del portafolio de inversión.

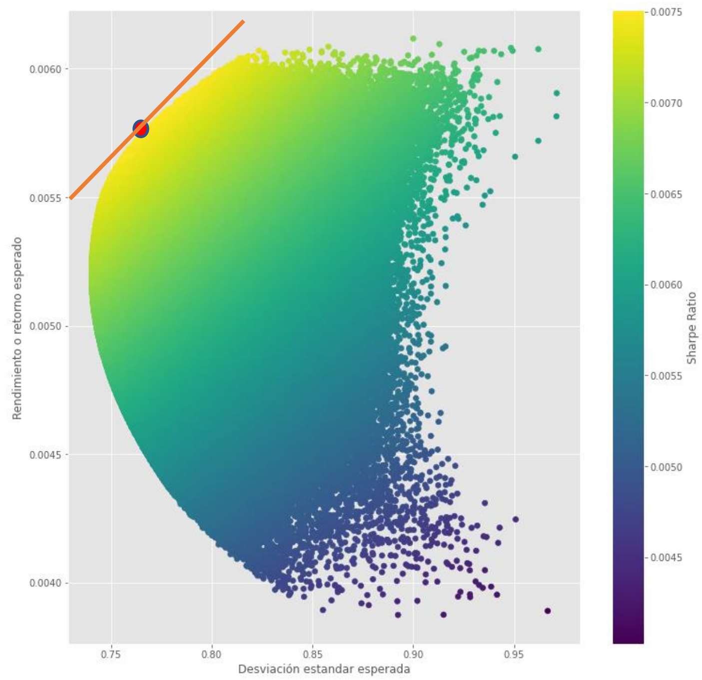
Donde su rendimiento esperado, desviación estandar y Sharpe ratio es el siguiente:

Concepto	Valor efectivo diario.
Rendimiento esperado:	0.00565
Desviación estándar:	0.7587
Sharpe Ratio:	0.0074

Tabla 4: Estadísticas Rendimiento Portafolio Optimo

Estos resultados muestran que, si se invirtiera en ente portafolio, los resultados diarios promedios serían de 0.57% aproximadamente, con una desviación estándar de hasta el 75.8% lo que muestra que hay una relación Sharpe muy baja, es decir es un activo que podría dar buenos rendimientos pero que aun así sigue siendo muy riesgoso en su versión óptima.

La gráfica siguiente muestra la frontera eficiente de Markowitz con los puntos o portafolios de inversión simulados y su respectiva relación rendimiento / riesgo, marcado a la derecha con el Sharpe ratio, el cual nos interesa sea el mayor posible. Finalmente, el punto rojo muestra el portafolio óptimo.



Gráfica 12: Distribución óptima del portafolio de inversión.

3.6.1. Resultados de los experimentos

Una vez realizado el primer experimento, se encuentra que el rendimiento esperado del portafolio de inversión evaluado con nuevos rendimientos diferentes al del entrenamiento es de 0.00567. Contrastado con el rendimiento esperado de la optimización inicial, la diferencia es aproximadamente 0.

```
Experimento 1: Rendimiento esperado del portafolio según nuevos rendimientos simulados vs los simulados inicialmente:

Rendimiento esperado según rendimientos simulados inicialmente y pesos de los activos optimizados: 0.005657767657967839
Rendimiento esperado según nuevos rendiemientos simulados y pesos de los activos optimizados: 0.005657767657967848
Diferencia porcentual entre los resultados: -1.5330458767901105e-15%
```

Ahora bien, al realizar el segundo experimento con la información real de los retornos del día siguiente al entrenamiento, los resultados del rendimiento esperado del portafolio de inversión corresponden a 0.96% efectivo diario, incluso mayor al resultado de la optimización 0.565%. Los retornos se muestran a continuación, los mismos pueden ser consultados con su nemotécnico con corte al 30 de noviembre de 2022.

Activo	Participación	Rendimiento
Activo 1	**17.7%**	**-2.44%**
Activo 2	**34.7%**	**1.67%**
Activo 3	**0%**	**2.2%**
Activo 4	**26.8%**	**-0.06%**
Activo 5	**20.8%**	**4.01%**

Tabla 5: Participación y Rendimiento Esperado por Activo

4. Conclusiones y recomendaciones

Se logra cumplir el objetivo principal de este documento, mostrando una aplicación de la simulación de Montecarlo; en este caso en una aplicación financiera dada la teoría de Media Varianza para elegir carteras o portafolios de inversión óptimos.

Se aplican métodos de ajuste de las distribuciones de probabilidad, seleccionando las que mejor bondad de ajuste obtienen según criterios de información como el BIC, dentro de las más conocidas y teóricamente aplicadas a los rendimientos diarios de una acción.

Adicionalmente se integra el uso de la simulación de Montecarlo con funciones de optimización, dando lugar a una aplicación de optimización dinámica.

Se verifica y valida el resultado del modelo de simulación, como también se realizan experimentos cuyos resultados fueron aceptables.

Se concluye que es útil la aplicación de la integración de la teoría y los métodos analíticos de simulación y optimización en las áreas como la financiera. Especialmente en la optimización de portafolios de inversión.

Se recomienda para el caso específico planteado en este documento, invertir en los activos financieras, de acuerdo con la configuración de pesos resultante del modelo. La probabilidad de obtener rendimientos positivos dada dicha configuración es del 57%. Cabe aclarar que la decisión de inversión estará acotada por el apetito de riesgo del inversionista; si el perfil de riesgo es conservador recomendamos no invertir. De lo contrario, si el perfil es arriesgado o propenso al riesgo, recomendamos que se realice la inversión.

5. Bibliografía

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 77-91.

Mendizabal Zubeldia, A., Miera Zabalza, L. M., & Zubia Zubiaurre, M. (2018). El modelo de Markowitz en la gestión de carteras. *Cuadernos de gestión*, 33-46.

Nova Murcia, E. D. (2020). *Aplicación De Sharpe Y Omega Ratio Para La Selección De Activos.* Bogotá: Colegio de Estudios superiores de administración - CESA.