

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Diplomski studij - Financijska matematika i statistika

# Modeliranje povrata na dionice kompanije Ericsson Nikola Tesla d.d.

Seminarski rad

Student: Lara Juzbašić  
Kolegij: Analiza vremenskih nizova

Osijek, 2021.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Analiza podataka</b>	<b>1</b>
2.1	Kretanje cijena dionica . . . . .	1
2.2	Analiza stacionarnosti . . . . .	2
2.3	Analiza log-povrata cijena dionica . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Identifikacija modela</b>	<b>5</b>
3.1	Modeliranje . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Predikcija</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Zaključak</b>	<b>10</b>

# 1 Uvod

Kompanija Ericsson Nikola Tesla potječe iz nekadašnjeg poduzeća „Nikola Tesla“ osnovanog 1949. godine u Zagrebu. Kao pridružena članica korporacije Ericsson, djeluje unutar Tržišnog područja Europa i Latinska Amerika. Regionalni je isporučitelj komunikacijskih proizvoda i usluga u operatorskom segmentu te inovativnih informacijsko-komunikacijskih rješenja vezanih uz zdravstvenu zaštitu, promet, državnu upravu, komunalne djelatnosti i multimedijску komunikaciju. U ovom radu analizirane su cijene dionica te log-povrati cijena dionica ovog poduzeća u vremenskom periodu od 12.2.2019. do 12.2.2021., kako bismo pronašli model koji dobro opisuje volatilnost. Podaci u vremenskom periodu od 13.2.2021. do 17.8.2021. korišteni su za validaciju modela.

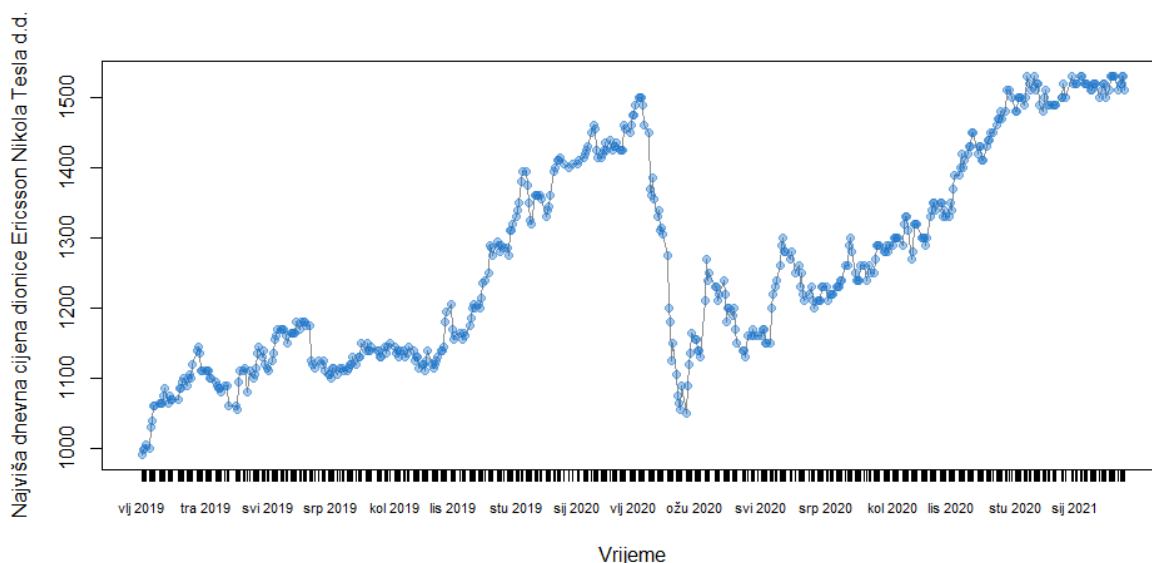
## 2 Analiza podataka

### 2.1 Kretanje cijena dionica

U Tablici 1 prikazane su osnovne mjere deskriptivne statistike najviših dnevnih vrijednosti dionica. Tijekom promatranog dvogodišnjeg perioda, najniža vrijednost dionice kompanije Ericsson Nikola Tesla bila je 902 kune na dan 12.2.2019., a najviša vrijednost od 1530 kuna najduže je održana u vremenskom periodu od 2.2.2021. do 10.2.2021. Prosječna cijena dionice je 1268 kuna.

Minimum	Donji kvartil	Medijan	Prosjek	Gornji kvartil	Maksimum	St. dev.
992	1140	1240	1268	1405	1530	147.05

Tablica 1: Deskriptivna statistika cijena dionica kompanije Ericsson Nikola Tesla

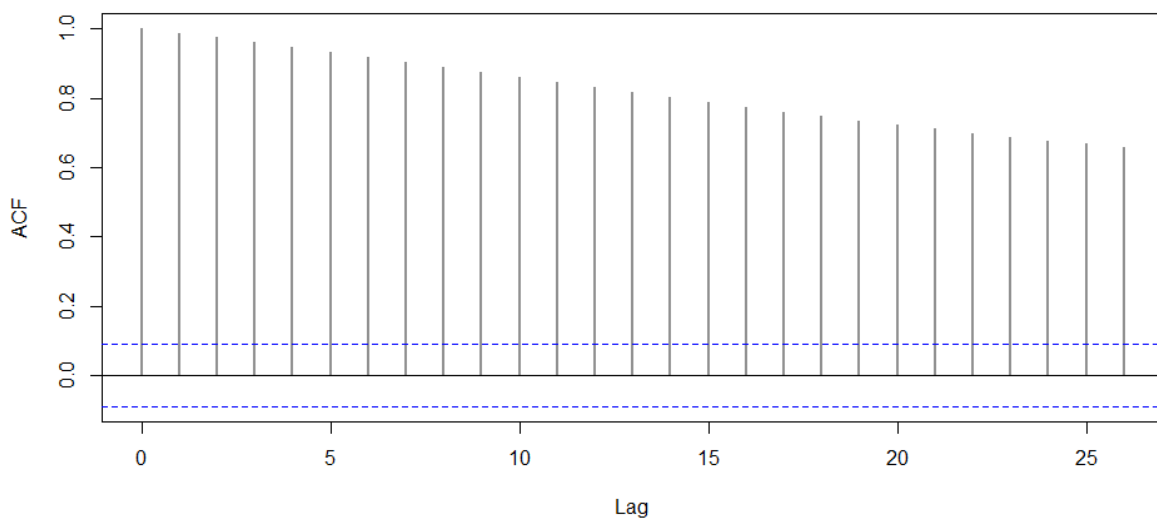


Slika 1: Najviša dnevna cijena dionice Ericsson Nikola Tesla d.d.

Ukoliko promotrimo kretanje cijena dionica na promatranom periodu Na Slici 1, možemo primijetiti nagli pad vrijednosti dionice na intervalu od 18.2.2020. do 18.3.2020., što se može povezati s početkom Pandemije COVID-19 u Europi.

## 2.2 Analiza stacionarnosti

Kako bismo provjerili stacionarnost vremenskog niza, promatramo autokorelacijsku funkciju. Primjećujemo sporo opadanje korelacija među podacima u nulu, što sugerira nestacionarnost niza.



Slika 2: Autokorelacijska funkcija cijena dionica

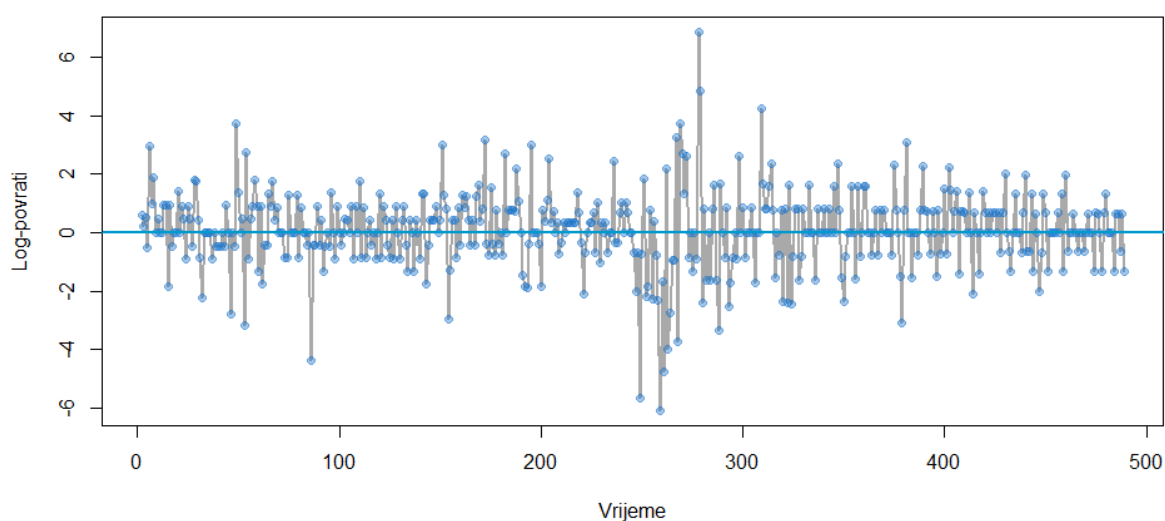
Međutim, uvjet pri modeliranju je stacionarnost niza te je potrebno transformirati podatke kako bismo eliminirali nestacionarnost. Pri odlučivanju je li uzrok nestacionarnosti deterministički ili stohastički trend može pomoći Augmented Dickey-Fuller (ADF) test jediničnog korijena koji govori ima li smisla diferencirati niz. Provodeći ADF test dobivamo p-vrijednost veću od 0.05 ( $p = 0.4136$ ) te na razini značajnosti 0.05 ne odbacujemo hipotezu o postojanju jediničnog korijena, što znači da ima smisla diferencirati niz. Kada se radi o financijskim podacima, uobičajeno je umjesto originalnog niza promatrati log-povrate pa ćemo, prije nego li ga diferenciramo, logaritmirati niz. Označimo li s  $X_t$  najvišu dnevnu vrijednost dionice na t-ti dan, transformirani niz je oblika:

$$R_t = 100(\log X_t - \log X_{t-1})$$

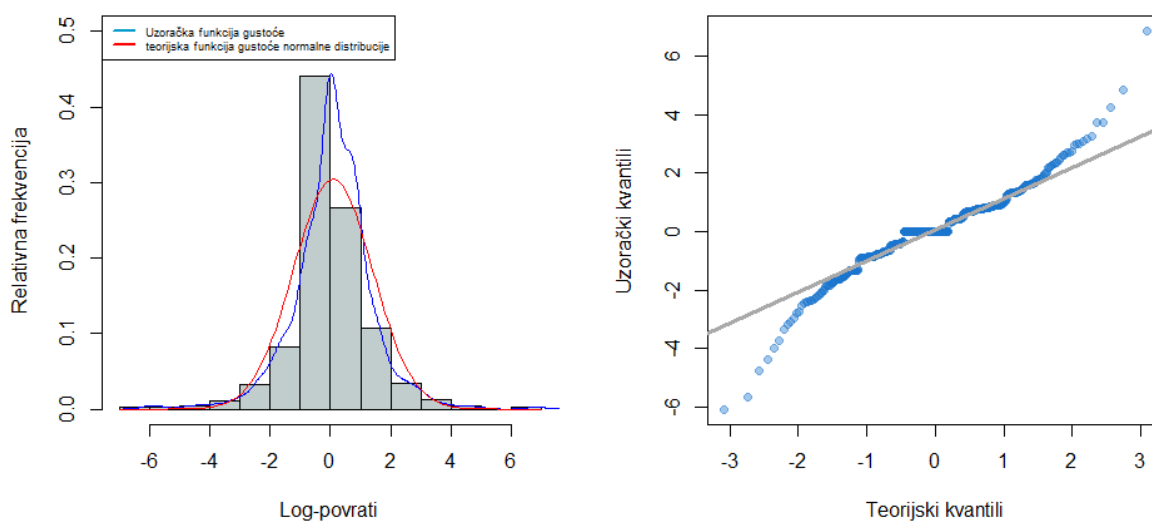
Primjenom ADF testa na log-povrate, dobivamo p-vrijednost manju od 0.01, stoga daljnje diferenciranje nije potrebno.

## 2.3 Analiza log-povrata cijena dionica

U nastavku su prikazani grafički prikazi log-povrata. Na Slici 3 može se uočiti osciliranje trajektorije log-povrata oko konstantne vrijednosti bliske nuli (očekivanja). Mjera odstupanja log-povrata od vrijednosti 0 naziva se volatilnost. Primjećujemo kako su velika odstupanja praćena velikim, a mala odstupanja praćena malim odstupanjima, što je poznato kao svojstvo klasteriranja volatilnosti. Povećana volatilnost između 200-tog i 300-tog dana je posljedica promjene cijena dionica uzrokovane pandemijom. Promotrimo li zatim histogram log-povrata prikazan na Slici 4, vidimo da distribucija log-povrata dionica ima znantno veću maksimalnu vrijednost od teorijske normalne distribucije s parametrima uzoračkog očekivanja i varijance log-povrata.



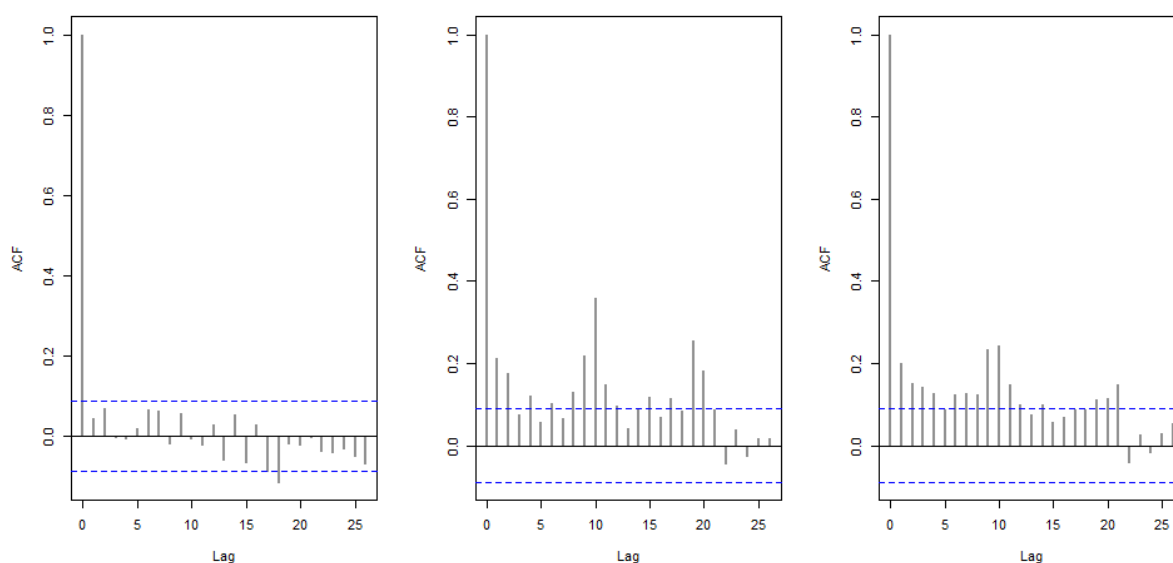
Slika 3: Trajektorija log-povrata



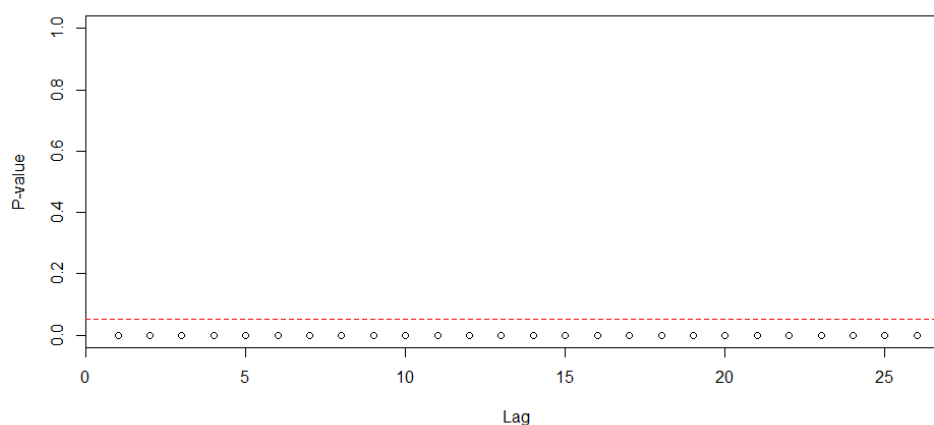
Slika 4: Histogram log-povrata i QQ-graf

Q-Q graf na Slici 4 sugerira kako distribucija log-povrata ima teže repove od normalne distribucije. Osim toga, koeficijent spljoštenosti veći je od tri (3.779) te nas upućuje na traženje distribucije log-povrata među distribucijama s teškim repovima. Na temelju provedene analize odlučujemo pri modeliranju uz normalnu distribuciju reziduala koristiti i Studentovu.

Pogledamo li autokorelacijsku funkciju log-povrata na Slici 5, možemo vidjeti kako nakon prvog koraka značajnih korelacija gotovo da i nema. Ipak, kvadrati i apsolutne vrijednosti log-povrata pokazuju koreliranost, što upućuje na zavisnost podataka. Naime, svaka neprekidna transformacija nezavisnih podataka i dalje je nezavisna. Iz svega navedenog, može se zaključiti da se niz log-povrata približno ponaša kao bijeli šum.



Slika 5: Autokorelacijske funkcije log-povrata, kvadrata log-povrata te apsolutnih log-povrata



Slika 6: Grafički prikaz McLeod-Li testa

Zbog ranije spomenutog klasteriranja volatilnosti sumnjamo na postojanje svojstva uvjetne heteroskedastičnosti u podacima, odnosno mijenjanje uvjetne varijance u vremenu. U svrhu testiranja ovog svojstva provodimo McLeod-Li test te dobivamo p-vrijednost manju od 0.05 na svim koracima, kao što vidimo na Slici 6. Dakle, odbacujemo nultu hipotezu o nepostojanju uvjetne heteroskedastičnosti. Takvo svojstvo, koje odstupa od ARMA procesa, ima GARCH proces pomoću kojeg ćemo u nastavku modelirati log-povrate.

### 3 Identifikacija modela

U ovom poglavlju pokušat ćemo odrediti GARCH modele koji najbolje opisuju log-povrate cijena promatranih dionica. GARCH( $p, q$ ) je proces ( $R_t$ ) oblika  $R_t = \sigma_t \epsilon_t$ , pri čemu je  $\sigma_t$  uvjetna varijanca u trenutku  $t$  te vrijedi

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i R_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2.$$

( $\epsilon_t$ ) je niz nezavisnih i jednako distribuiranih varijabli koji zovemo niz inovacija, a  $\alpha_i, \beta_j$  i  $\omega$  konstante. Uobičajeno se pretpostavlja da niz inovacija ima standardnu normalnu distribuciju, ali često se koristi i Studentova distribucija. Prilikom modeliranja koristit ćemo Akaike informacijski kriterij (AIC) te Bayesov informacijski kriterij (BIC). Model koji bolje opisuje podatke imat će manje AIC i BIC vrijednosti. Osim toga, poželjniji su jednostavniji modeli.

U tablicama 2 i 3 navedeno je pet modela ( $p, q \leq 4$ ) s najmanjom AIC i BIC vrijednosti s normalnom, odnosno Studentovom distribucijom inovacija.

Model	AIC	BIC
GARCH(1,1)	3.254942	3.289289
GARCH(2,1)	3.256454	3.299388
GARCH(1,2)	3.259169	3.302102
GARCH(2,2)	3.260011	3.311532
GARCH(3,1)	3.26056	3.31208

Tablica 2: Informacijski kriteriji modela s normalnom distribucijom inovacija

Model	AIC	BIC
GARCH(1,1)	3.160323	3.211843
GARCH(2,1)	3.164053	3.224160
GARCH(1,2)	3.164501	3.224608
GARCH(3,1)	3.167785	3.236479
GARCH(2,2)	3.168151	3.236845

Tablica 3: Informacijski kriteriji modela sa Studentovom distribucijom inovacija

Možemo uočiti kako su vrijednosti informacijskih kriterija modela sa Studentovom

distribucijom inovacija manji od onih koji pripadaju modelima s normalnom distribucijom. Također, možemo primijetiti da je prema informacijskim kriterijima u oba slučaja najbolji model GARCH(1,1).

### 3.1 Modeliranje

Za model GARCH(1,1) s normalnom distribucijom inovacija dobivamo sve parametre statistički značajne na razini značajnosti 0.05:

	Procjena	Standardna greška	t-vrijednost	p-vrijednost	
mu	0.12130	0.05264	2.304	0.021196	*
omega	0.06855	0.03051	2.247	0.024664	*
alpha1	0.05865	0.01775	3.305	0.000949	***
beta1	0.89760	0.03099	28.964	$< 2e - 16$	***

Tablica 4: Procjene parametara modela GARCH(1,1)

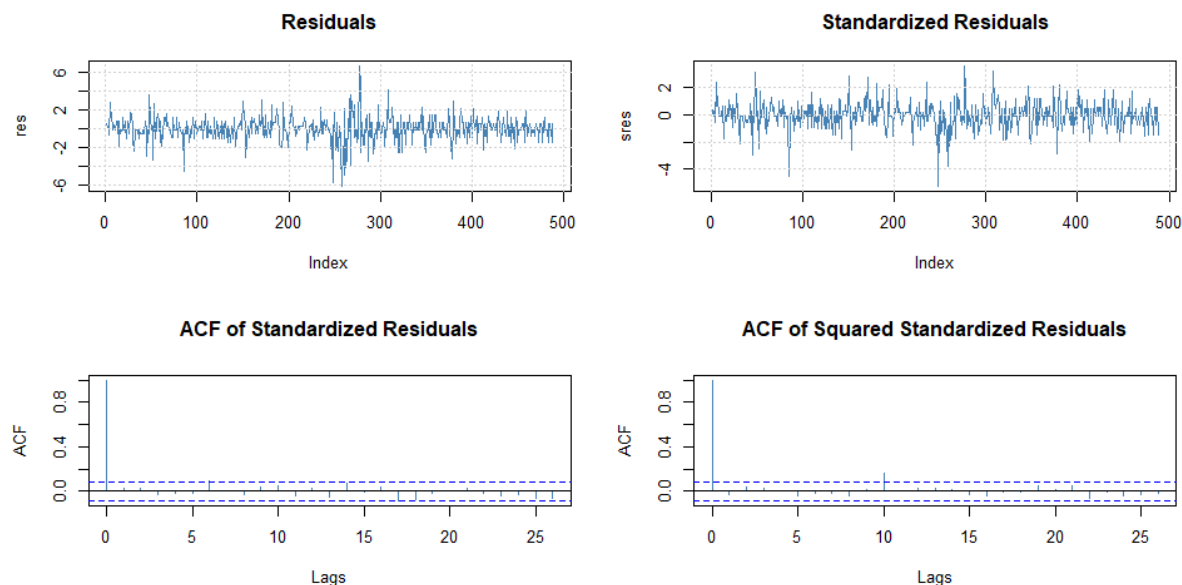
Kako bismo model mogli prihvatiti, treba biti zadovoljena nekoreliranost reziduala. Naime, reziduali trebaju što bolje odgovarati bijelom šumu. Promotrimo li testove nad standardiziranim rezidualima u Tablici 5, uočavamo kako su p-vrijednosti Ljung-Box testa nad standardiziranim rezidualima i njihovim kvadratima na svim koracima veće od 0.05 pa na toj razini značajnosti nemamo razloga sumnjati u nekoreliranost. Jarque-Bera i Shapiro-Wilk test imaju izrazito niske p-vrijednosti te na razini značajnosti 0.05 odbacujemo hipotezu o normalnosti.

Test	Lag	p-vrijednost
Jarque-Bera	-	0
Shapiro-Wilk	-	2.283704e-10
Ljung-Box	10	0.5505397
Ljung-Box	15	0.5663493
Ljung-Box	20	0.4289693
Ljung-Box (nad kvadratima)	10	0.09851112
Ljung-Box (nad kvadratima)	15	0.3024506
Ljung-Box (nad kvadratima)	20	0.485219
LM Arch	-	0.1733765

Tablica 5: Testovi nad standardiziranim rezidualima

Nadalje, promotrimo li na Slici 7 autokorelacijsku funkciju standardiziranih reziduala i njihovih kvadrata, uočavamo da ne ukazuju na njihovu zavisnost kroz vrijeme.





Slika 7: Grafovi i ACF standardiziranih reziduala

Drugi model koji analiziramo je GARCH(2,1) s normalnom distribucijom inovacija. Kao što možemo vidjeti u Tablici 6, parametri  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  nisu statistički značajni. Iz p-vrijednosti navedenih u Tablici 7, vidimo da Jarque-Bera te Shapiro-Wilk test i dalje ne prolaze, dok Ljung-Box test prolazi na svim koracima.

	Procjena	Standardna greška	t-vrijednost	p-vrijednost	
mu	0.11778	0.05234	2.250	0.0244	*
omega	0.07282	0.03290	2.213	0.0269	*
alpha1	0.01300	0.03591	0.362	0.7174	
alpha2	0.05554	0.04214	1.318	0.1875	
beta1	0.88566	0.03519	25.168	$< 2e - 16$	***

Tablica 6: Procjene parametara modela GARCH(2,1)

Test	Lag	p-vrijednost
Jarque-Bera	-	0
Shapiro-Wilk	-	2.889606e-10
Ljung-Box	10	0.5237393
Ljung-Box	15	0.5770592
Ljung-Box	20	0.444407
Ljung-Box (nad kvadratima)	10	0.09789803
Ljung-Box (nad kvadratima)	15	0.3070856
Ljung-Box (nad kvadratima)	20	0.4760657
LM Arch	-	0.1956568

Tablica 7: Testovi nad standardiziranim rezidualima

Pokušamo li modelirati GARCH(1,2) model s normalnom distribucijom inovacija, parametar  $\beta_2$  ne ispada statistički značajan, dok modeliranjem GARCH(2,2) modela niti jedan parametar nije statistički značajan. Naslućujemo kako je najprikladniji od dosadašnjih modela GARCH(1,1), a činjenica da je najjednostavniji također mu ide u prilog.

U nastavku ćemo analizirati modele sa Studentovom distribucijom inovacija. U sljedećoj tablici navedene su procjene parametara takvog GARCH(1,1) modela.

	Procjena	Standardna greška	t-vrijednost	p-vrijednost	
mu	0.11616	0.05219	2.226	0.0260	*
omega	0.07649	0.04992	1.532	0.1254	
alpha1	0.07846	0.03301	2.377	0.0174	*
beta1	0.88127	0.04953	17.793	$< 2e - 16$	***
skew	0.97293	0.06058	16.060	$< 2e - 16$	***
shape	4.15172	0.86095	4.822	1.42e-06	***

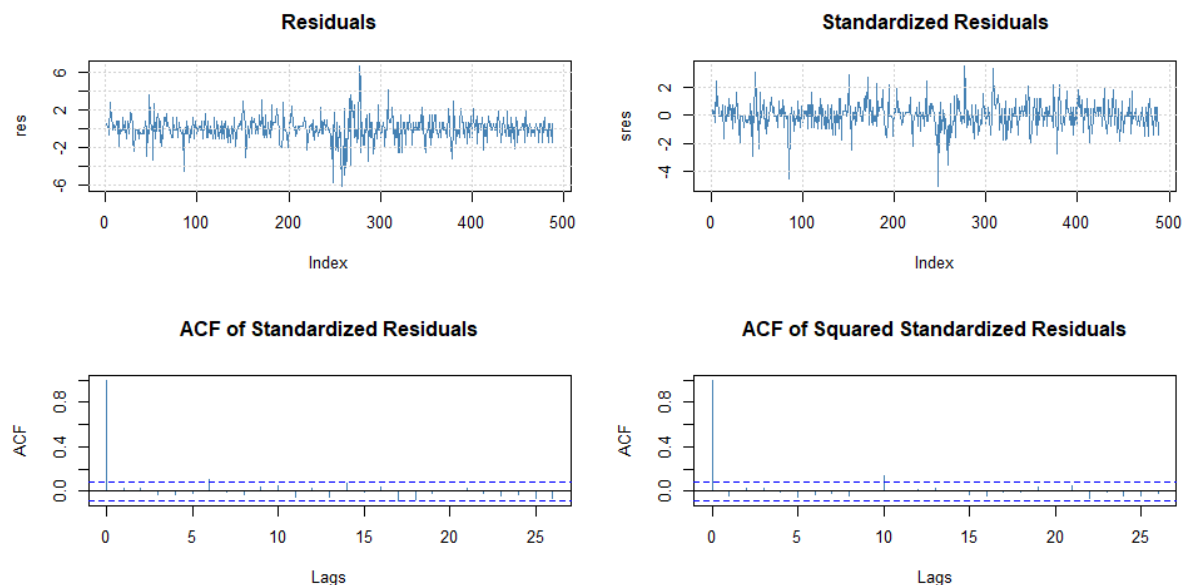
Tablica 8: Procjene parametara modela GARCH(1,1) sa Studentovom distribucijom inovacija

Svi parametri su statistički značajni na razini značajnosti 0.05, osim slobodnog člana  $\omega$ . Unatoč tome,  $\omega$  nećemo izbaciti iz modela jer se uklanjanje tog parametra pokazalo loše za predikciju. Kao i kod prethodno promatranih modela, Ljung-Box test prolazi na svim koracima, a LM Arch test ukazuje na to da je model pokupio svojstvo uvjetne heteroskedastičnosti među log-povratima.

Test	Lag	p-vrijednost
Jarque-Bera	-	0
Shapiro-Wilk	-	1.787996e-10
Ljung-Box	10	0.5379816
Ljung-Box	15	0.5424233
Ljung-Box	20	0.4295347
Ljung-Box (nad kvadratima)	10	0.1990307
Ljung-Box (nad kvadratima)	15	0.4831447
Ljung-Box (nad kvadratima)	20	0.6908645
LM Arch	-	0.332632

Tablica 9: Testovi nad standardiziranim rezidualima

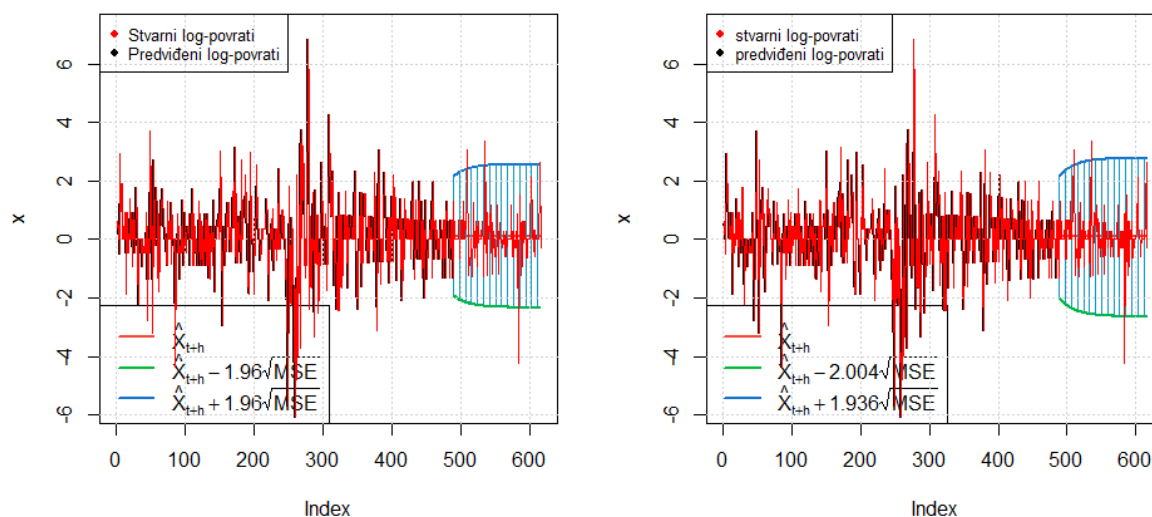
Pri modeliranju preostalih modela sa Studentovom distribucijom inovacija, gotovo nijedan parametar ne pokazuje se statistički značajan. Stoga se zadržavamo na trenutnom modelu za kojeg ćemo napraviti i predikciju, uz model GARCH(1,1) koji se pokazao kao najbolji među modelima s normalnom distribucijom.



Slika 8: Grafovi i ACF standardiziranih reziduala sa Studentovom distribucijom

## 4 Predikcija

U ovom dijelu provest ćemo predikciju standardnog GARCH(1,1) modela te GARCH(1,1) modela sa Studentovom distribucijom inovacija, pri čemu koristimo podatke ostavljene za validaciju modela.



Slika 9: Predikcija standardnog GARCH(1,1) modela te GARCH(1,1) modela sa Studentovom distribucijom inovacija

Na Slici 9 prikazani su 95%-tni pouzdani intervali te vidimo kako se u oba slučaja gotovo sve stvarne vrijednosti log-povrata nalaze unutar pouzdanog intervala. Unatoč odstupanju standardiziranih reziduala od normalne distribucije, kvalitete predikcija su vrlo blizu te smatramo kako je prediktivna moć oba modela vrlo dobra. Kod modela sa Studentovom distribucijom pouzdani interval je nešto širi, ali ne primjećujemo naglo širenje pa se ovi modeli mogu koristiti kod dugoročnih predikcija.

## 5 Zaključak

U radu su promatrane cijene dionica kompanije Ericsson Nikola Tesla d.d. u vremenskom periodu od 12.2.2019. do 12.2.2021. Kako su podaci bili nestacionarni, transformirani su logaritmiranjem i diferenciranjem, čime su dobiveni log-povrati za koje u nastavku tražimo najbolje među GARCH modelima. Pri odabiru modela korišteni su informacijski kriteriji AIC i BIC, te su izabrani GARCH(1,1) modeli s normalnom i Studentovom distribucijom inovacija. Na kraju su napravljene predikcije odabranih modela, koje su se pokazale uspješnima.