Table des matières

1. Systèmes d'attente Markoviens

DANS ce type de systèmes, les deux quantités stochastiques principales " les temps des interarrivées " et " la durée de service " sont des variables aléatoires indépendantes, exponentiellement distribuées.
Soit $X(t)$: le nombre de clients se trouvant dans le système à l'instant t ($t \geq 0$).

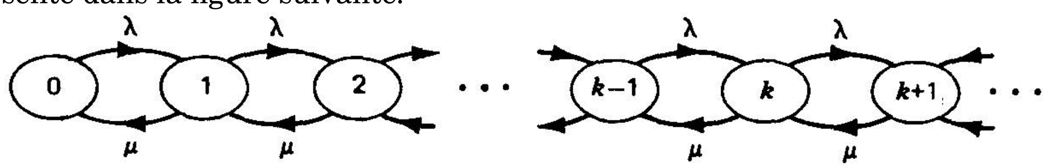
1.1 Système d'attente $M/M/1$

1.1.1 Description et régime permanent

Comme nous l'avons mentionné au chapitre 5, la célèbre file d'attente $M/M/1$ est le système le plus simple et peut être décrite en sélectionnant les coefficients de naissance-mort comme suit :

$$\begin{cases} \lambda_k = \lambda, & k = 0, 1, 2, \dots \\ \mu_k = \mu, & k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

C'est-à-dire que, nous fixons tous les coefficients de naissance égaux à une constante λ et tous les coefficients de mort égaux à une constante μ. Nous supposons en outre que l'espace de file d'attente est infini et que les clients sont servis selon le principe du premier arrivé, premier servi. Pour cet exemple, le diagramme de transition est présenté dans la figure suivante.



En appliquant ces coefficients à l'équation (voir chapitre 5),

$$\pi_k = \left(\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\right)\pi_0.$$

nous avons,

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{\mu}.$$

ou encore,

$$\pi_k = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \quad k \geq 0.$$

Afin de résoudre π_0, nous utilisons (voir chapitre 5),

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\right]^{-1}.$$

et obtenons,

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1}.$$

La somme converge si et seulement si $\lambda < \mu$ et par conséquent

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \left[1 + \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}\right]^{-1} \\ &= 1 - \frac{\lambda}{\mu}\end{aligned}$$

Nous obtenons finalement,

$$\pi_k = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Cette expression peut aussi s'écrire,

$$\pi_k = (1-\rho)\rho^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

avec, $\rho = \lambda/\mu$ est souvent appelée coefficient d'utilisation du système ou encore intensité du trafic ou encore condition d'ergodicité. Elle constitue une mesure pour le degré de saturation du système. En d'autres termes, pour que le système de file d'attente $M/M/1$ soit stable, nous exigeons donc que $0 \leq \rho < 1$; notons que cela assure que $\pi_0 > 0$.

L'équation (1.1) est en effet la solution pour la probabilité en régime permanent (stationnaire) de trouver k clients dans le système. Les probabilités p_k ne dépend que de λ et μ par le biais de leur rapport ρ.

1.1.2 Caractéristiques du système $M/M/1$

A partir de la distribution stationnaire du processus $\{X(t), t \geq 0\}$, on peut calculer d'autres valeurs caractéristiques d'un système d'attente telles que :

- $L = E(X) =$ nombre moyen de clients dans le système.
- $L_q =$ nombre moyen de clients dans la file d'attente.
- $W =$ temps de séjour moyen d'un client dans le système.
- $W_q =$ temps d'attente moyen d'un client.

Ces valeurs permettent de juger du comportement d'un système, et sont liées par les relations suivantes :

$$\begin{cases} L = \lambda_e W \\ L_q = \lambda_e W_q \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} W = W_q + 1/\mu \\ L = L_q + \lambda_e/\mu \end{cases}$$

où λ_e est le taux d'entrée des clients dans le système. Si la capacité du système est illimitée, on a $\lambda_e = \lambda$. Dans le cas contraire, certains des clients doivent s'en aller sans être servis d'où $\lambda_e < \lambda$.

Ces quatre relations sont valables dans des conditions assez générales. Les deux premières relations sont connues sous le nom de formules de Little.

$$\begin{aligned} L &= E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n = (1-\rho)\rho\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} \\ &= (1-\rho)\rho\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\right)' = (1-\rho)\rho\left(\frac{1}{1-\rho}\right)' = (1-\rho)\rho\frac{1}{(1-\rho)^2} \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \end{aligned}$$

Soit ensuite X_q le nombre de clients se trouvant dans la file d'attente :

$$X_q = \begin{cases} 0, & \text{si } X = 0 \\ X-1, & \text{si } X \geq 1 \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} L_q &= E(X_q) = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\pi_n = (1-\rho)\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\rho^n = (1-\rho)\rho^2\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\rho^{n-2} \\ &= (1-\rho)\rho^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{n-1}\right)' = (1-\rho)\rho^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\right)' = (1-\rho)\rho^2\left(\frac{1}{1-\rho}\right)' \\ &= (1-\rho)\rho^2\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \end{aligned}$$

Ou bien,

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\pi_n = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\pi_n - \sum_{n=1}^{\infty}\pi_n = L-(1-\pi_0) = L-\rho$$

On peut maintenant calculer les quantitées W et W_q.
Notons T la durée de séjour d'un client dans le système. Alors :

$$W = E(T) = \sum_{n=0}^{\infty} E(T|A_n)P(A_n)$$

où A_n est l'événement tel qu'il y ait n clients dans le système à l'instant d'entrée $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

$$\begin{cases} E(T|A_n) = (n+1)\frac{1}{\mu} \\ P(A_n) = \pi_n = (1-\rho)\rho^n \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{aligned} W &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(1-\rho)\frac{\rho^n}{\mu} = \frac{(1-\rho)}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\rho^n = \frac{(1-\rho)}{\mu}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{n+1}\right)' \\ &= \frac{(1-\rho)}{\mu}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\right)' = \frac{(1-\rho)}{\mu}\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda} \end{aligned}$$

De la même manière :

$$W_q = E(T_q) = \sum_{n=1}^{\infty} E(T_q|A_n)P(A_n)$$

où T_q : la durée d'attente d'un client.

$$\begin{cases} E(T_q|A_n) = n\frac{1}{\mu} \\ P(A_n) = \pi_n = (1-\rho)\rho^n \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{aligned} W_q &= \sum_{n=1}^{\infty} n(1-\rho)\frac{\rho^n}{\mu} = \frac{(1-\rho)}{\mu}\rho\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} = \frac{(1-\rho)\rho}{\mu}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\right)' \\ &= \frac{(1-\rho)\rho}{\mu}\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \end{aligned}$$

où bien, d'après les formules de Little,

$$\begin{cases} W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} \\ W_q = \frac{L_q}{\lambda_e} = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \end{cases}$$

on retrouve les mêmes résultats.

1.1.3 Distribution du temps de séjour T

En intoduisant à nouveau l'événement A_n = "le client touve à son arivée n personnes dans le système", et soit, T = "temps de séjour d'un client dans le système". On obtient ainsi $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$P(T \leq t) = 1 - P(T > t)$$

où,

$$\begin{aligned} P(T>t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(T>t|A_n)P(A_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_t^{\infty}\frac{\mu(\mu u)^n}{n!}e^{-\mu u}du\right)(1-\rho)\rho^n \\ &= (1-\rho)\mu\int_t^{\infty}e^{-\mu u}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu u\rho)^n}{n!}\right)du \\ &= (1-\rho)\mu\int_t^{\infty}e^{-\mu u}e^{\mu u\rho}du \\ &= (1-\rho)\mu\int_t^{\infty}e^{-\mu(1-\rho)u}du \\ &= e^{-\mu(1-\rho)t} \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} P(T\le t) &= 1-e^{-\mu(1-\rho)t} \\ &= 1-e^{-(\mu-\lambda)t}, \quad t\ge 0 \end{aligned}$$

qui est la distribution du temps de séjour T.

1.1.4 Distribution du temps d'attente T_q

Soit maintenant, T_q = "temps d'attente d'un client". On obtient alors pour $n = 1, 2, \ldots$

$$P(T_q\le t) = 1-P(T_q>t)$$

où,

$$\begin{aligned} P(T_q>t) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(T_q>t|A_n)P(A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_t^{\infty}\frac{\mu(\mu u)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\mu u}du\right)(1-\rho)\rho^n \\ &= (1-\rho)\rho\mu\int_t^{\infty}e^{-\mu u}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mu u\rho)^{n-1}}{(n-1)!}\right)du \\ &= (1-\rho)\rho\mu\int_t^{\infty}e^{-\mu u}e^{\mu u\rho}du \\ &= (1-\rho)\rho\mu\int_t^{\infty}e^{-\mu(1-\rho)u}du \\ &= \rho e^{-\mu(1-\rho)t} \end{aligned}$$

alors,

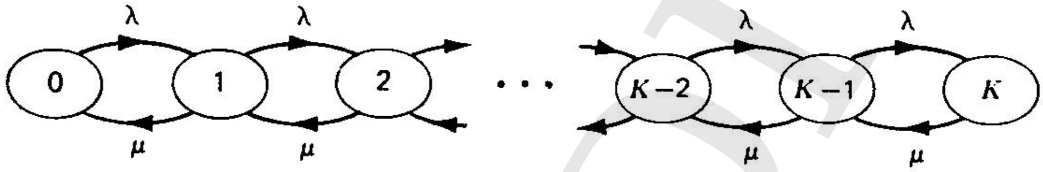
$$\begin{aligned} P(T_q\le t) &= 1-\rho e^{-\mu(1-\rho)t} \\ &= 1-\rho e^{-(\mu-\lambda)t}, \quad t\ge 0 \end{aligned}$$

qui est la distribution du temps d'attente T_q d'un client.

1.2 Système d'attente $M/M/1/K$

1.2.1 Description et régime permanent

Nous considérons maintenant le cas d'un système d'attente dans lequel un nombre maximum de clients peut être stocké ; en particulier, nous supposons que le système peut contenir au maximum K clients (y compris le client en service). Si le système est plein, les clients qui arrivent sont perdus. Le diagramme de transition pour cette chaîne de Markov finie est illustré dans la figure suivante.



Il est intéressant de constater que nous sommes capables de prendre en compte cette description à l'aide du modèle de naissance et de mort. En particulier, nous y parvenons en "désactivant" efficacement l'entrée de Poisson dès que le système est plein, comme suit :

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda, & k < K \\ 0, & k \geq K \end{cases}$$

$$\mu_k = \mu, \quad k = 1, 2, \ldots, K$$

Rappelons que (voir chapitre 5),

$$\pi_k = \left(\frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} \right) \pi_0.$$

avec,

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \right]^{-1}.$$

Si $\lambda \neq \mu$:

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{\mu}, \quad k \leq K$$

ou encore

$$\pi_k = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k, \quad k \leq K$$

Bien entendu, nous avons aussi

$$\pi_k = 0, \quad k > K$$

Concernant π_0, nous avons,

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \left[1+\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1}\\ &= \left[1+\frac{(\lambda/\mu)(1-(\lambda/\mu)^K)}{1-\lambda/\mu}\right]^{-1}\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\pi_0 = \frac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}}$$

Posons $\rho = \lambda/\mu$. Finalement,

$$\pi_k = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^k, & 0 \le k \le K \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Si $\lambda = \mu$:

$$\pi_k = \pi_0, \quad k \le K$$

Nous avons aussi,

$$\pi_k = 0, \quad k > K$$

Concernant π_0, nous avons,

$$\pi_0 = \left[1+\sum_{k=1}^{K}1\right]^{-1} = [1+K]^{-1}$$

d'où,

$$\pi_0 = \frac{1}{1+K}$$

Finalement,

$$\pi_k = \begin{cases} \frac{1}{1+K}, & 0 \le k \le K \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Remarque 1.2.1 Il convient de noter que, si $\lambda < \mu$, et $K \longrightarrow \infty$ alors le modèle $M/M/1/K$ converge vers celui de $M/M/1$.

1.2.2 Caractéristiques du système $M/M/1/K$

Si $\lambda \neq \mu$ **:** alors $\rho \neq 1$ et,

$$\begin{aligned} L &= E(X) = \sum_{k=0}^{K} k\pi_k = \sum_{k=1}^{K} k\pi_k = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho \sum_{k=1}^{K} k\rho^{k-1} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho\left(\sum_{k=0}^{K}\rho^k\right)' \\ &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho\left(\frac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho}\right)' = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho\frac{-(K+1)\rho^K(1-\rho)+1-\rho^{K+1}}{(1-\rho)^2} \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} \leq \frac{\rho}{1-\rho} = L_{M/M/1} \end{aligned}$$

Si $\lambda = \mu$ **:** alors $\rho = 1$ et,

$$L = \sum_{k=0}^{K} k\pi_k = \sum_{k=0}^{K} k\frac{1}{1+K} = \frac{1}{1+K}\sum_{k=0}^{K} k = \frac{K(K+1)/2}{K+1} = \frac{K}{2}$$

Donc,

$$L = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}, & \text{si } \lambda \neq \mu \\ \frac{K}{2}, & \text{si } \lambda = \mu \end{cases}$$

Concernant le nombre moyen de clients en attente, on a

$$L_q = E(X-1) = \sum_{k=1}^{K}(k-1)\pi_k = \sum_{k=1}^{K} k\pi_k - \sum_{k=1}^{K}\pi_k = L - (1-\pi_0)$$

D'où,

$$L_q = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho(1+K\rho^K)}{1-\rho^{K+1}}, & \text{si } \lambda \neq \mu \\ K\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{K+1}\right) = \frac{(K-1)K}{2(K+1)}, & \text{si } \lambda = \mu \end{cases}$$

En appliquant la formule de Little nous obtenons,

$$W = \frac{L}{\lambda_e} \quad \text{et} \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda_e}$$

où,

$$\lambda_e = \lambda(\pi_0 + \pi_1 + \cdots + \pi_{K-1}) = \lambda(1-\pi_K)$$

1.2.3 Exercice

Déterminer la distribution des temps de séjour et d'attente d'un client.

1.3 Système d'attente $M/M/s$

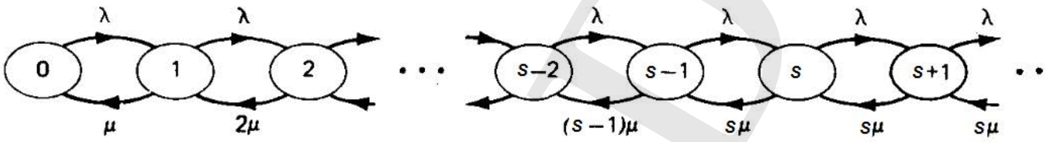
1.3.1 Description et régime permanent

Nous considérons un système d'attente comprenant s stations en parallèle, nous admettons que les durées de services correspondantes suivent la même distribution exponentielle de paramètre μ. Par ailleurs, les flux des arrivées poissonien de

paramètre λ, capacité illimitée de l'espace d'attente et la discipline de service est FIFO.
Ceci peut être formulé en utilisant le processus de naissance et de mort, et conduit à choisir

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \lambda, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \\
\mu_k &= \min[k\mu, s\mu] \\
&= \begin{cases} k\mu, & \text{si } 0 \le k \le s \\ s\mu, & \text{si } s \le k \end{cases}
\end{aligned}$$

Le graphe des transitions associé à ce système est le suivant,



Rappelons que (voir chapitre 5),

$$\pi_k = \left(\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\right)\pi_0.$$

avec,

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\right]^{-1}.$$

Lorsque nous cherchons à résoudre π_k à partir de l'équation ci-dessus, nous constatons que nous devons séparer la solution en deux parties, puisque la dépendance de μ_k par rapport à k est également en deux parties. En conséquence,
pour $k \le s$,

$$\begin{aligned}
\pi_k &= \pi_0 \prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda}{(i+1)\mu} \\
&= \pi_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

De même, pour $k \ge s$,

$$\begin{aligned}
\pi_k &= \pi_0 \prod_{i=0}^{s-1}\frac{\lambda}{(i+1)\mu}\prod_{j=s}^{k-1}\frac{\lambda}{s\mu} \\
&= \pi_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\frac{1}{s!s^{k-s}}
\end{aligned}$$

En rassemblant ces résultats, nous obtenons

$$\pi_k = \begin{cases} \pi_0\frac{\rho^k}{k!}, & k \le s \\ \pi_0\frac{\rho^k}{s!s^{k-s}}, & k \ge s \end{cases}$$

où $\rho = \lambda/\mu$.
Nous pouvons maintenant résoudre π_0, ce qui nous donne

$$\pi_0 \quad = \quad \left[1+\sum_{k=1}^{s-1}\frac{\rho^k}{k!}+\sum_{k=s}^{\infty}\frac{\rho^k}{s!s^{k-s}}\right]^{-1} \quad = \quad \left[\sum_{k=0}^{s-1}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{s^s}{s!}\sum_{k=s}^{\infty}\left(\frac{\rho}{s}\right)^k\right]^{-1}$$

Si $\rho < s$, la somme géométrique infinie du côté droit converge, c'et à dire $\lambda < s\mu$, on appelle $s\mu$ le taux de service global du système, et $\lambda/s\mu$ l'intensité de trafic globale, ou condition d'ergodicité (condition de stabilité). Supposons alors $\lambda < s\mu$ alors,

$$\pi_0 \quad = \quad \left[\sum_{k=0}^{s-1}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^s}{s!(1-\rho/s)}\right]^{-1}$$

1.3.2 Caractéristiques du système $M/M/s$

La probabilité qu'un client qui entre dans le système doive attendre est donnée par,

$$C[s,\rho] = P(X \geq s) = \sum_{k=s}^{\infty}\pi_k = \sum_{k=s}^{\infty}\pi_0\frac{\rho^k}{s!s^{k-s}} = \pi_0\frac{\rho^s}{s!(1-\rho/s)}$$

par conséquent,

$$C[s,\rho] = \frac{\frac{\rho^s}{s!(1-\rho/s)}}{\left[\sum_{k=0}^{s-1}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^s}{s!(1-\rho/s)}\right]}$$

Cette formule est appelée formule d'**Erlang C**.

$$\begin{aligned}
L_q &= \sum_{n=s}^{\infty}(n-s)\pi_n = \sum_{k=0}^{\infty}k\pi_{s+k} = \sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\rho^{k+s}}{s!s^k}\pi_0 = \frac{\rho^s}{s!}\pi_0\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{\rho}{s}\right)^k \\
&= \frac{\rho^{s+1}}{s.s!}\pi_0\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{\rho}{s}\right)^{k-1} = \frac{\rho^{s+1}}{s.s!}\pi_0\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{s}\right)^k\right)' = \frac{\rho^{s+1}}{s.s!}\pi_0\left(\frac{1}{1-(\rho/s)}\right)' \\
&= \frac{\rho^{s+1}}{s.s!}\frac{1}{(1-(\rho/s))^2}\pi_0
\end{aligned}$$

Or, nous avons constaté pendant le calcul de $C[s,\rho]$ que ,

$$\pi_0 = \frac{s!(1-\rho/s)}{\rho^s}C[s,\rho]$$

D'où,

$$L_q \quad = \quad \frac{\rho/s}{1-\rho/s}C[s,\rho] \; = \; \frac{\rho}{s-\rho}C[s,\rho]$$

Par conséquent,

$$L = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu} = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \rho + \frac{\rho}{s-\rho}C[s,\rho]$$

A l'aide des formules de Little, on trouve ensuite les expressions de W_q et W,

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_e} = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho}{s-\rho}C[s,\rho]$$

et

$$W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}\frac{\rho}{s-\rho}C[s,\rho]$$

1.3.3 Distribution du temps d'attente T_q

Un client arrivant doit attendre si $X = n > s$ comme tous les serveurs sont occupés, le temps entre les achèvements de services a une distribution exponentielle de moyenne $(1/s\mu)$.

Dans ce cas, il y a s clients recevant le service et $(n-s)$ clients en attente. Par conséquent, la nouvelle arrivée doit attendre $n-s+1$ fin de service, c'est à dire le temps d'attente dans la file d'attente est la somme de $(n-s+1)$ variables aléatoires exponentielles indépendantes chacune de moyenne $(1/s\mu)$; i.e. il s'agit d'une distribution gamma de paramètre $(n-s+1)$ et $(s\mu)$. D'où, si $t>0$, nous pouvons écrire puisque $\Gamma(n-s-1) = (n-s)!$ que,

$$P(T_q \leq t) = 1 - P(T_q > t)$$

où,

$$\begin{aligned}
P(T_q > t) &= \sum_{n=s}^{\infty} P(T_q > t|A_n)P(A_n) \\
&= \sum_{n=s}^{\infty}\left(\int_t^{\infty}\frac{(s\mu)(s\mu u)^{n-s}}{(n-s)!}e^{-s\mu u}du\right)\frac{\rho^n}{s!s^{n-s}}\pi_0 \\
&= \int_t^{\infty}\frac{s\mu\rho^s\pi_0}{s!}\left(\sum_{n=s}^{\infty}\frac{(\rho\mu u)^{n-s}}{(n-s)!}\right)e^{-s\mu u}du \\
&= \int_t^{\infty}\frac{s\mu\rho^s\pi_0}{s!}e^{\rho\mu u}e^{-s\mu u}du \\
&= \frac{s\mu\rho^s\pi_0}{s!}\int_t^{\infty}e^{\mu(\rho-s)u}du \\
&= \frac{\rho^s\pi_0}{(s-\rho)(s-1)!}e^{-\mu(s-\rho)t}
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
P(T_q \leq t) &= 1 - \frac{\rho^s\pi_0}{(s-\rho)(s-1)!}e^{-\mu(s-\rho)t} \\
&= 1 - C[s,\rho]e^{-\mu(s-\rho)t}
\end{aligned}$$

1.3.4 Exercice

Déterminer la distribution des temps de séjour d'un client.