

Tópicos Avançados I

Joaquim Madeira

24/06/2021

Sumário

- Recap
- Problemas tratáveis vs não-tratáveis
- Algoritmos determinísticos vs não-determinísticos
- Tipos de problemas
- Problemas de Decisão : As Classes P, NP e NP-Completo
- Determinação de soluções aproximadas
- Sugestão de leitura

Let's
RECAP

Recapitulação

Procura Exaustiva

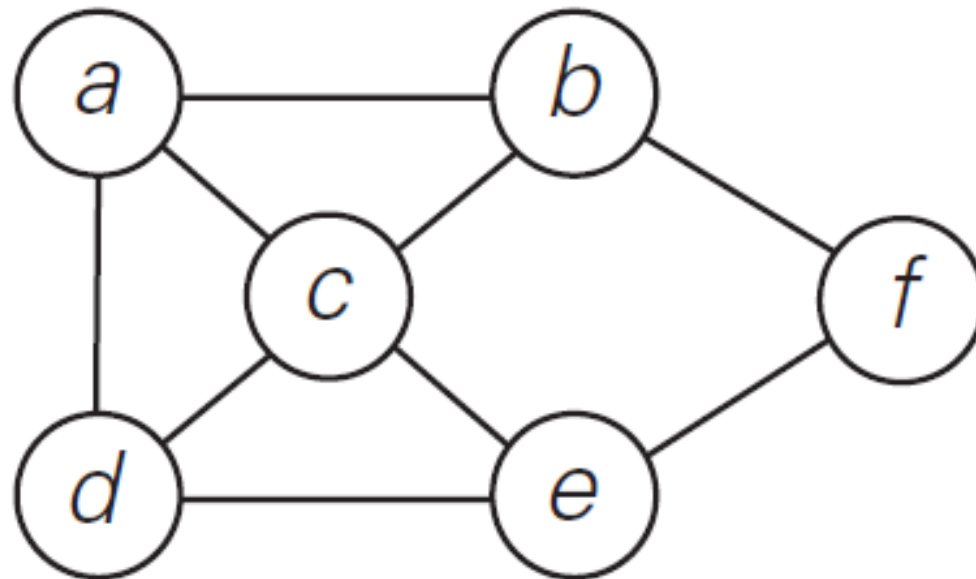
- Estratégia de força-bruta aplicada a **problemas combinatórios**
 - I.e., há um conjunto finito de soluções admissíveis
- Algoritmo
 - Enumerar **todas** as possíveis **soluções candidatas**
 - Verificar se cada uma **satisfaz** as restrições do problema
 - Se necessário, **escolher uma solução** do conjunto de soluções admissíveis
- Como assegurar que foram **verificadas todas as soluções candidatas** ?

Procura Exaustiva

- Características
 - Muitas vezes é simples de implementar
 - Irá **sempre** encontrar uma solução, caso exista (?!?)
- **MAS**, tempo proporcional ao número de soluções candidatas
 - Explosão combinatória !
 - Só praticável para instâncias “muito pequenas” !!
- Como tornar a procura **mais rápida** ?

Problema do Ciclo Hamiltoniano

- Este grafo tem um **Ciclo Hamiltoniano** ?
- **Como fazer** ?



[Levitin]

Problema do Ciclo Hamiltoniano

- Como fazer ?
- Escolher um vértice qualquer de G como vértice inicial
- Gerar, sucessivamente, cada uma das $(n - 1)!$ permutações possíveis dos vértices intermédios
- Acrescentar-lhe o vértice inicial e vértice final
- Verificar se a sequência de vértices define um ciclo em G

O Problema do Caixeiro Viajante

- Determinar o **caminho mais curto** que atravessa **n cidades**
- **MAS**, visitando cada cidade uma só vez !
- E retornando à cidade inicial !
- Problema de **otimização combinatória**



[Wikipedia]

O Problema do Caixeiro Viajante

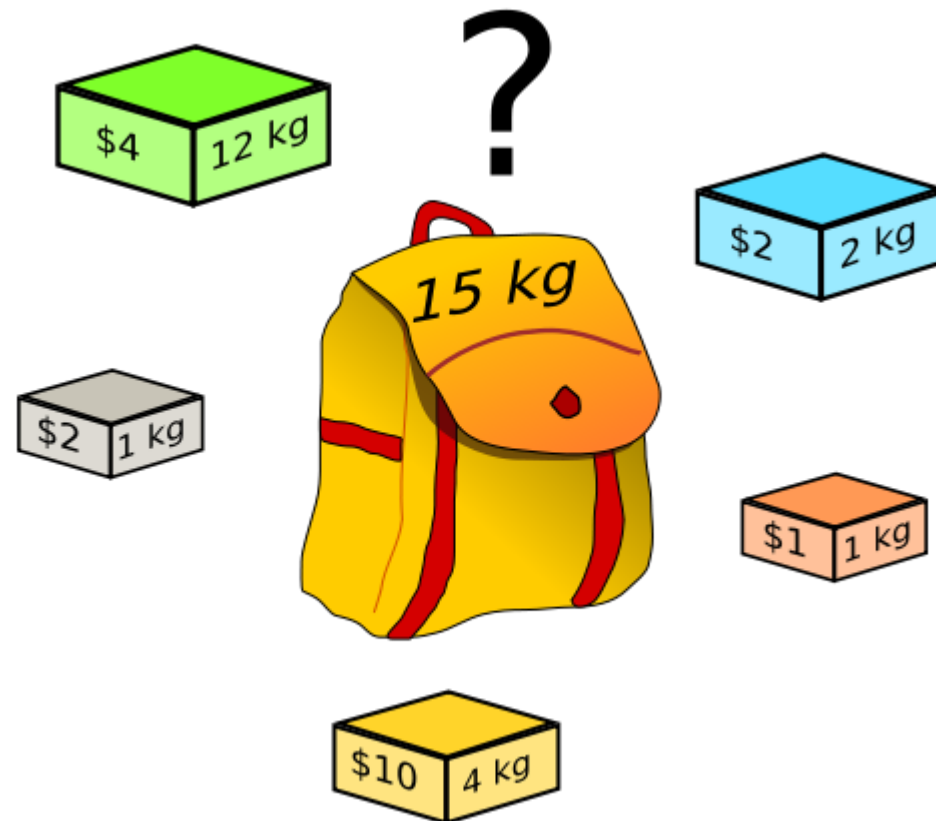
- Como fazer ?
- Escolher um vértice qualquer como vértice inicial
- Gerar, sucessivamente, cada uma das $(n - 1)!$ permutações possíveis dos vértices intermédios
- Acrescentar-lhe o vértice inicial e vértice final
- Verificar se a sequência de vértices define um ciclo em G
- Calcular o seu custo / distância
- Guardar o ciclo mais económico / mais curto

O Problema do Caixeiro Viajante

- Questões
 - Como **armazenar** o grafo ?
 - O grafo é **completo** ?
 - Como gerar todas as **permutações** ?
- Desempenho computacional
 - **$O(n!)$**
 - A procura exaustiva só pode ser aplicada a instâncias muito pequenas !!
 - Alternativas ?

O Problema da Mochila

- Determinar o **subconjunto mais valioso de itens**, que cabe na mochila



[Wikipedia]

O Problema da Mochila

- Como fazer ?
- Gerar os 2^n subconjuntos do conjunto de n itens
- Para cada um dos subconjuntos admissíveis, calcular o seu peso total e o seu valor
- E guardar o subconjunto admissível mais valioso

O Problema da Mochila

- Questões
 - Como gerar todos os subconjuntos ?
 - A ordem é importante ?
- Desempenho computacional
 - $O(2^n)$
 - A procura exaustiva só pode ser aplicada a instâncias muito pequenas !!
 - Alternativas ?
 - Soluções exatas vs. aproximadas

Problemas Tratáveis vs Problemas Não-Tratáveis

Algoritmos – Limitações

- Os algoritmos resolvem problemas
- **MAS :**
 - Alguns problemas não são resolúveis por um algoritmo
 - Outros problemas são resolúveis por um algoritmo, mas não em tempo polinomial
 - Mesmo quando os problemas são resolúveis em tempo polinomial, há, habitualmente, um limite inferior para a ordem de complexidade dos algoritmos usados

Teoria da Complexidade

- **Classificar os problemas** de acordo com a sua ordem de complexidade
- Classificação principal :
 - **Problemas tratáveis** → Resolúveis em tempo polinomial
 - **Problemas não-tratáveis** → **Não podem ser resolvidos em tempo polinomial !!**
OU
Não se sabe, se poderão ser resolvidos em tempo polinomial !!

Teoria da Complexidade

- A Teoria da Complexidade está centrada nos **Problemas de Decisão**
 - Respostas **SIM / NÃO**
- **Problema de decisão não-decidível**
 - Não é resolúvel por um algoritmo !!
 - **The Halting Problem**
- Algoritmos deterministas vs **não-deterministas**
 - **Guessing** + Verification !!
- Como **classificar** os problemas de decisão ?

Algoritmos Deterministas **vs** Algoritmos Não-Deterministas

Algoritmos Deterministas

- Um algoritmo determinista
 - Devolve sempre **o mesmo resultado**, qualquer que seja o número de vezes que é executado com **os mesmos dados de entrada**.
 - Executa sempre **a mesma sequência de instruções** quando é executado com **os mesmos dados de entrada**.
- O tipo mais habitual de algoritmo !
- Há uma definição mais formal em termos de máquinas de estado...

Algoritmos Não-Deterministas

- Um algoritmo não-determinista
 - Pode ter um comportamento diferente, para os mesmos dados de entrada, em diferentes execuções
 - Ao contrário de um algoritmo determinista !
- Habitualmente usados para obter soluções aproximadas para instâncias de problemas de otimização combinatória
 - Quando é demasiado oneroso determinar soluções exatas usando um algoritmo determinista

Algoritmos Não-Deterministas

- Como obter um comportamento diferente em cada execução ?
- Causas de **comportamento não-determinista**
 - Comportamento / estado externo que não os dados de entrada
 - Inputs do utilizador / timer values / **valores (pseudo-)aleatórios**
 - Operações “timing-sensitive” em sistemas com múltiplos processadores
 - Erros de hardware podem originar mudanças de estado inesperadas

Tipos de Problemas

Problemas de Decisão

- Resposta : **SIM / NÃO**
- Dado um número natural n , **n é um número primo ?**
- Dados dois números naturais, x e y , **x é divisível por y ?**
- ...
- Dado um grafo $G(V,E)$, G tem um **Circuito Euleriano ?**
- Dado um grafo $G(V,E)$, G tem um **Ciclo Hamiltoniano ?**
- ...

Problemas de Decisão

- ...
- Dado um **conjunto** A , com **n elementos inteiros e positivos**, e um valor inteiro positivo **S** , a **soma** dos elementos de **algum** dos **subconjuntos** de A é igual a **S** ?
- ...
- **Quais dos problemas são mais “difíceis” ?**
- **Como **resolver** os problemas mais “difíceis” ?**

Problemas de Procura / Identificação

- Identificar / Listar uma solução, **caso exista**
- Dado um grafo $G(V,E)$, listar um **Circuito Euleriano** de G
- Dado um grafo $G(V,E)$, listar um **Ciclo Hamiltoniano** de G
- Dado um **conjunto** A , com **n elementos inteiros e positivos**, e um valor inteiro positivo **S** , listar os elementos de um dos **subconjuntos** de A cuja **soma** é igual a **S**
- Quais dos problemas são mais “difíceis” ?
- Como **resolver** os problemas mais “difíceis” ?

Problemas de Otimização

- Determinar a(uma) **solução ótima**, caso exista
- Dado um grafo $G(V,E)$, determinar o(um) **Ciclo Hamiltoniano** de **menor custo** de G
- Dado um **conjunto de n itens**, e uma **mochila** de capacidade **W** , determinar o(um) **subconjunto** de **maior valor** que cabe na mochila
- Como **resolver** ?

As Classes P, NP e NP-Completo

Probs. de Decisão : Classes de Complexidade

- **Classe P – Polynomial-Time**

- Problemas de decisão resolúveis em tempo polinomial
- Por **algoritmos deterministas** !!

- **Classe NP – Non-deterministic Polynomial-Time**

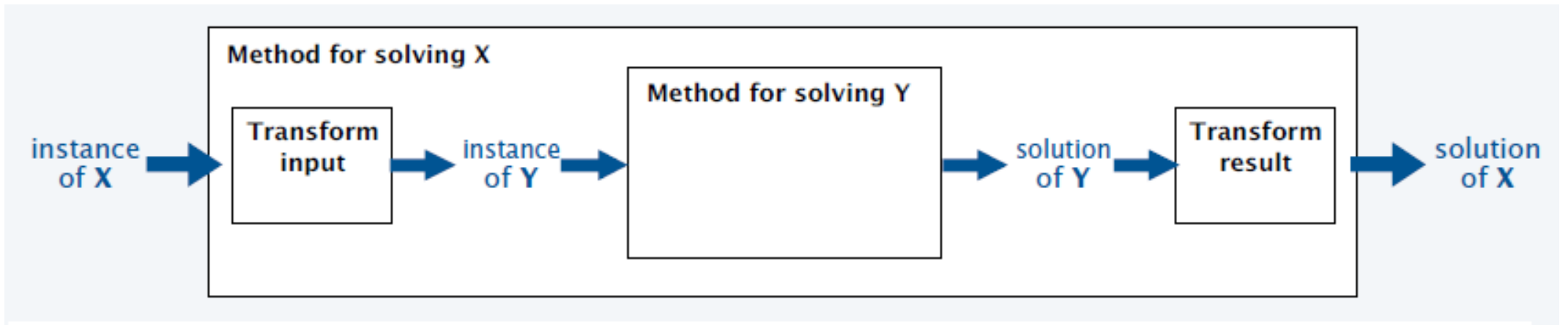
- Problemas de decisão que podem ser resolvidos por algoritmos **não-deterministas**
- **Soluções geradas aleatoriamente** podem ser **verificadas em tempo polinomial** !!

- Exemplos ?

A classe NP-Completo

- **Problema NP-Completo**

- Pertence à classe NP
- **Todos** os outros problemas em NP são **polinomialmente redutíveis** nele



[Sedgewick & Wayne]

Redução em tempo-polinomial

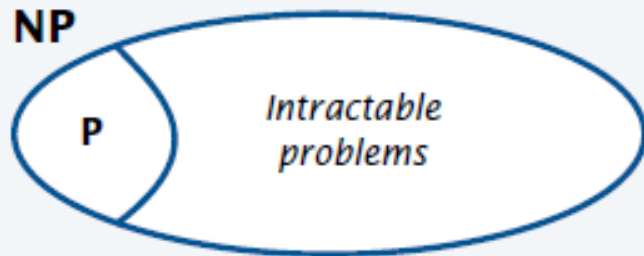
- Problema do Ciclo Hamiltoniano (HCP)
 - O **grafo** G tem um ciclo Hamiltoniano ?
- Problema do Caixeiro Viajante (TSP)
 - O **grafo completo** G' tem um **ciclo Hamiltoniano** de **custo** quando muito m ?
- **HCP α TSP**
- Implicação ?

P = NP ?

- $P \subseteq NP$
- $P = NP$?? \rightarrow “The Million Dollar Question !!”

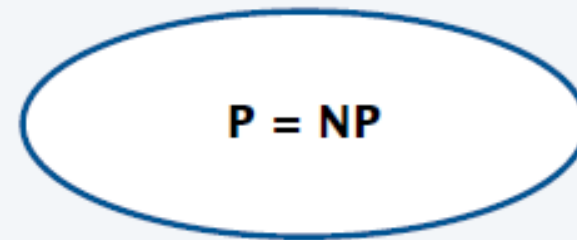
$P \neq NP$

- Intractable search problems exist.
- Brute force search may be the best we can do for some problems.



$P = NP$

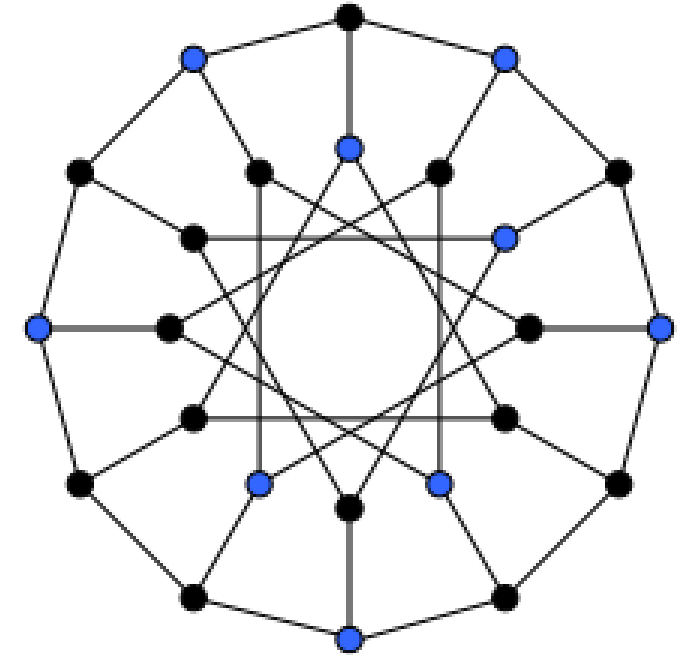
- All search problems are tractable.
- Efficient algorithms exist for IP, SAT, FACTOR ... *all* problems in **NP**.



[Sedgewick & Wayne]

Conjunto independente de vértices

- $V' \subseteq V : v, w \text{ in } V' \rightarrow (v,w) \text{ not in } E$
 - v e w não são adjacentes em G
- O grafo G tem um conjunto independente de vertices de cardinalidade $\geq k$?
 - **NP-Completo !**
- Determinar o conjunto independente de vértices de cardinalidade máxima do grafo G
 - **NP-Difícil !**



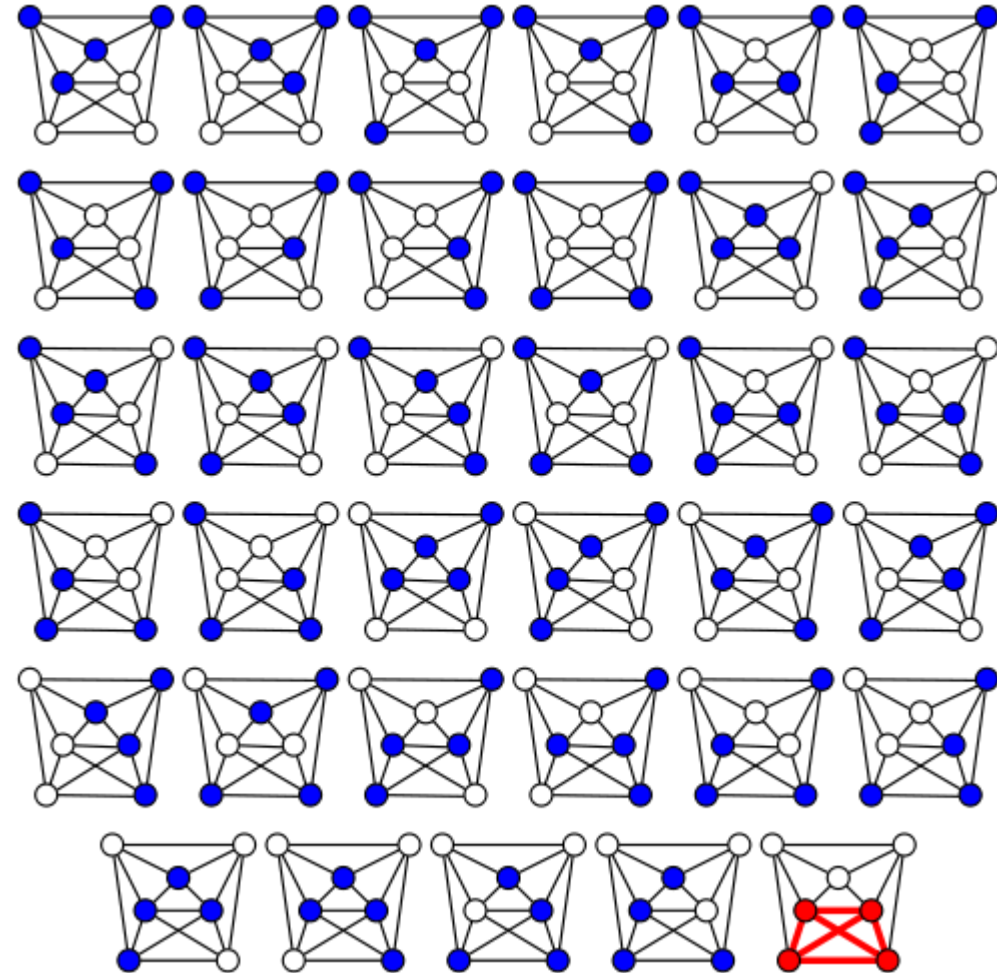
[Wikipedia]

Clique

- $V' \subseteq V : v, w \text{ in } V' \rightarrow (v,w) \text{ in } E$
 - v e w são adjacentes em G
 - Sub-grafo completo
- Clique vs. Conjunto Independente de Vértices ?
- O grafo G tem uma clique de cardinalidade $\geq k$?
 - NP-Completo !
- Determinar a clique de cardinalidade máxima do grafo G
 - NP-Difícil !

Clique

- Determinar uma 4-clique usando a **procura exaustiva**
- **Algoritmos de aproximação** para tipos particulares de grafos !



[Wikipedia]

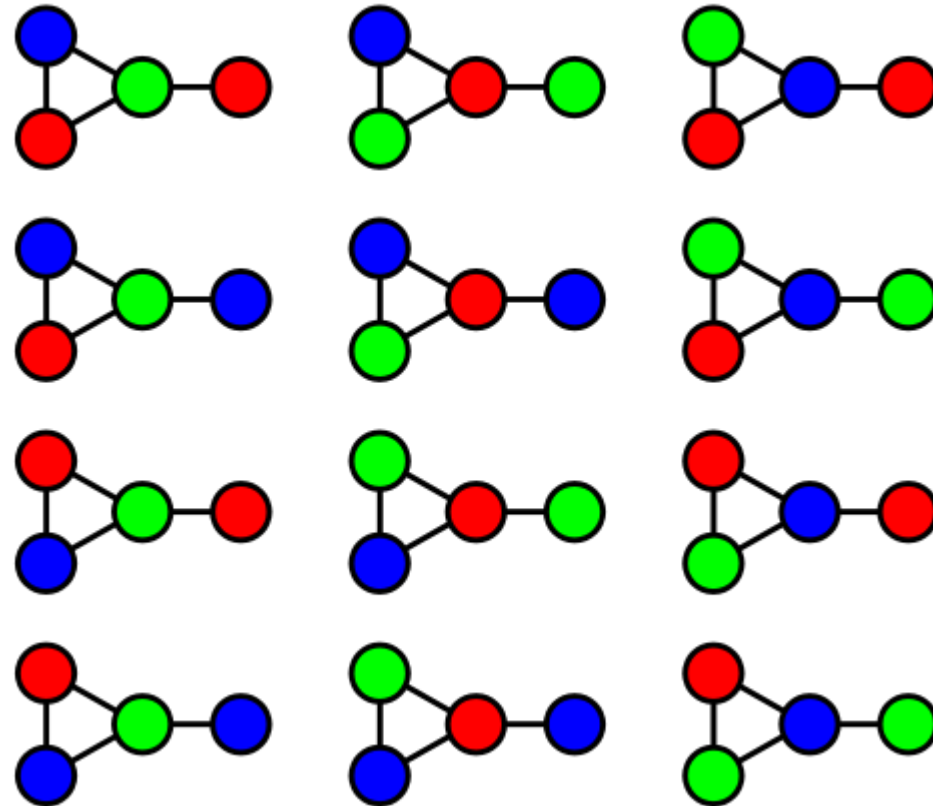
Clique

- Aplicação : **Social Networks**
 - Determinar o maior subconjunto de pessoas em que todos se conhecem
- Outras áreas de aplicação
 - Bioinformática
 - Química Computacional
 - ...

Coloração de Vértices

- Coloração própria dos vértices de $G(V,E)$
 - Vértices adjacentes têm cores distintas (rótulos)
- O grafo G tem uma coloração própria de vértices usando, quando muito, k cores ($\leq k$) ?
 - **NP-Completo**, exceto para $k=1$ ou $k=2$
- Determinar o menor número de cores definindo uma coloração própria dos vértices de G
 - Número cromático de G

Coloração de Vértices



[Wikipedia]

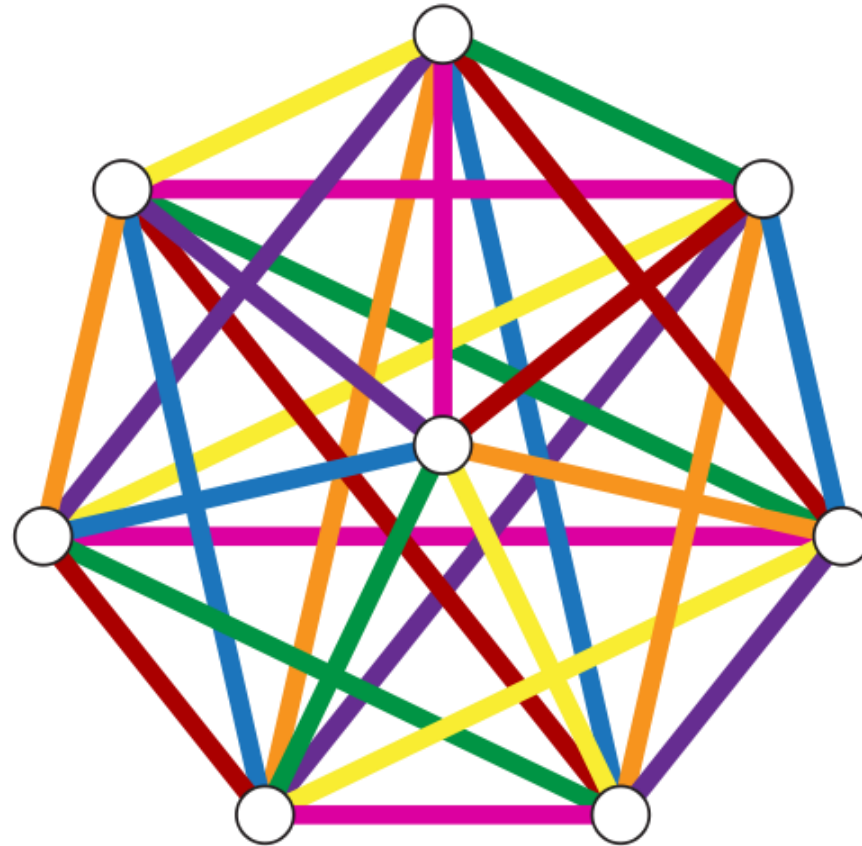
- 12 maneiras diferentes de colorir os vértices usando 3 cores

Coloração de Arestas

- Coloração própria das arestas de $G(V,E)$
 - Arestas adjacentes têm cores distintas (rótulos)
- O grafo G tem uma coloração própria de arestas usando, quando muito, k cores ($\leq k$) ?
 - **NP-Completo**, exceto para $k=1$ ou $k=2$
- Determinar o menor número de cores definindo uma coloração própria das arestas de G
 - Índice cromático de G

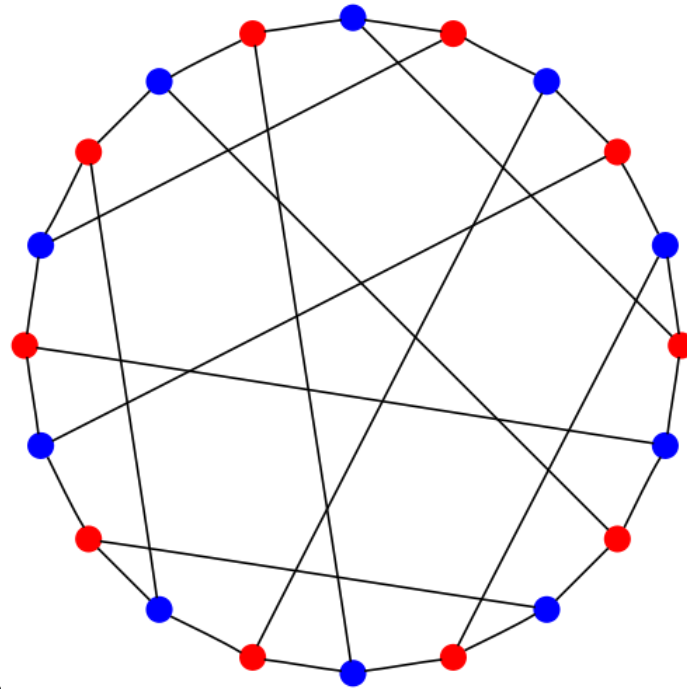
Coloração de Arestas

- K_8
- 8 vértices, 28 arestas
- raio 1
- diâmetro 1
- cintura 3
- 7-regular
- número cromático 8
- Índice cromático 7



[Wikipedia]

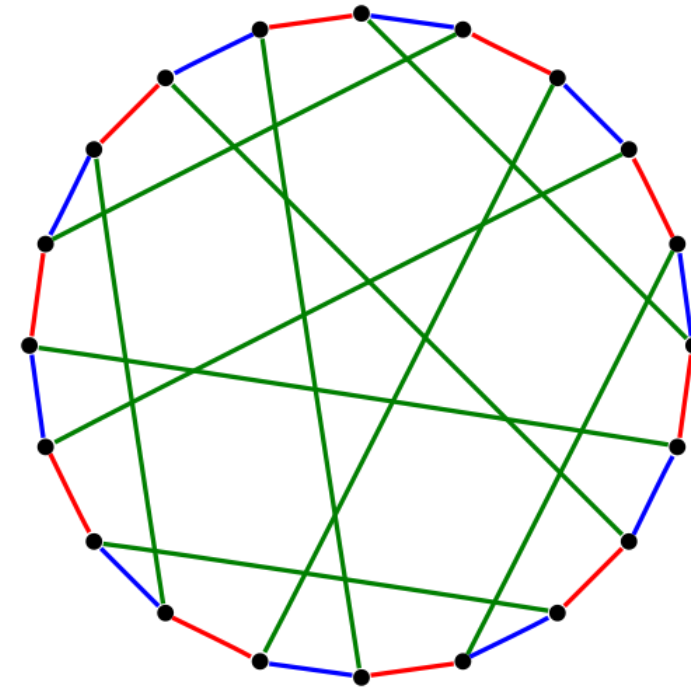
Grafo de Desargues



20 vértices, 30 arestas

raio 5, diâmetro 5, cintura 6

número cromático 2, índice cromático 3



[Wikipedia]

Aplicações

- **Coloração de Vértices**

- Escalonamento
 - Aviões para voos; Alocação de frequências de rádio
- Compiladores : otimização
- Sudoku

- **Coloração de Arestas**

- Escalonamento
 - Competições de todos-contra-todos
- Comunicações óticas

Grafos Isomorfos

- Dados dois grafos, definidos pelas suas listas de adjacências, esses grafos são isomorfos ?
- Pertence à classe NP
- **MAS** não se sabe
 - Se é resolúvel em tempo-polinomial para qualquer classe de grafos
 - Se pertence à classe NP-Completo

Grafos Isomorfos

- Resolúvel em tempo-polinomial para
 - Árvores
 - Grafos planares
 - ...
- Aplicações
 - Identificar um composto químico numa base de dados química
 - Verificar circuitos elétricos (esquema vs. circuito)

Soluções Aproximadas

Soluções Aproximadas

- Não tentar determinar **soluções exatas** para problemas difíceis de otimização combinatória
 - **Pode demorar demasiado tempo !!**
 - Mundo-real : **dados imprecisos**
 - Soluções aproximadas poderão ser suficientes !!
- Calcular **soluções aproximadas**
 - P.ex., usando **heurísticas vorazes / greedy !!**
 - Avaliar a **exatidão** das soluções aproximadas
 - Performance ratio : R_A

Approximation Accuracy – Min Prob

- **Minimizar** uma função $f()$
- Solução aproximada : s_a
- Solução exata : s^*
- Erro relativo : $re(s_a) = (f(s_a) - f(s^*)) / f(s^*)$
- Exatidão / Accuracy ratio : $r(s_a) = f(s_a) / f(s^*)$
- Performance ratio : R_A
 - O menor majorante para os possíveis valores $r(s_a)$
 - Deverá ser tão **próximo de 1** quanto possível
 - Expressa a **qualidade do algoritmo de aproximação**

Approximation Accuracy – Max Prob

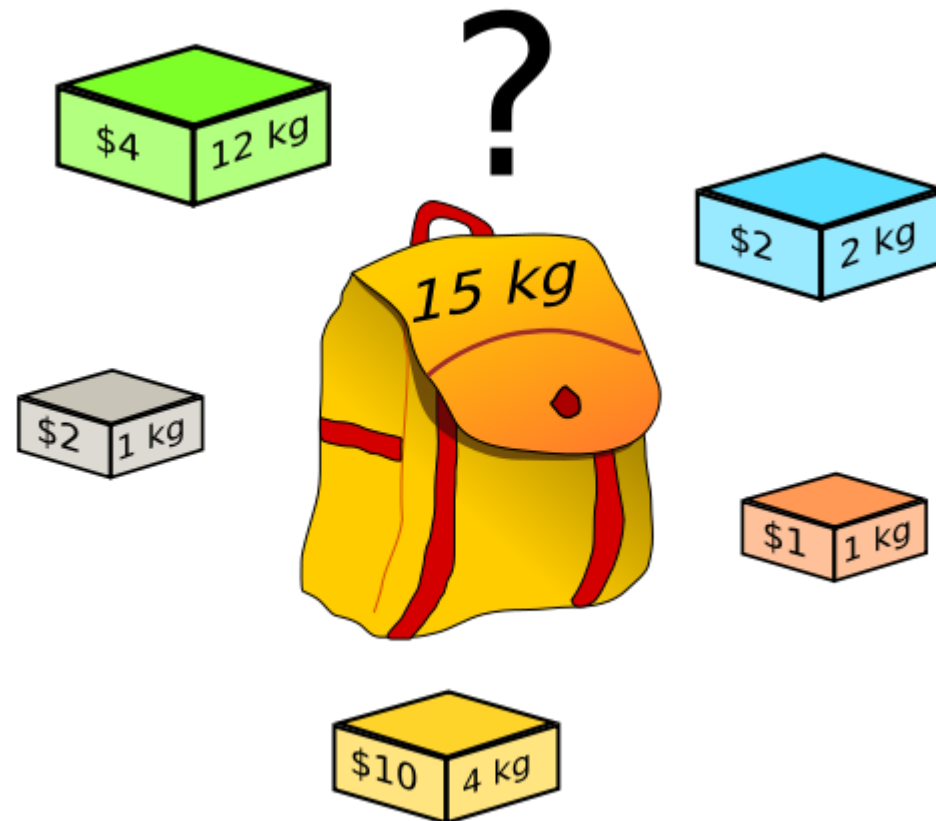
- **Maximizar** uma função $f()$
- Solução aproximada : s_a
- Solução exata : s^*
- Erro relativo : $re(s_a) = (f(s^*) - f(s_a)) / f(s^*)$
- Exatidão / Accuracy ratio : $r(s_a) = f(s^*) / f(s_a)$
- Performance ratio : R_A
 - O maior minorante para os possíveis valores $r(s_a)$
 - Deverá ser tão **próximo de 1** quanto possível

Aplicação – Problemas de Otimização

- Vamos analisar algumas **heurísticas vorazes / greedy** simples
- O Problema da Mochila – The **0-1 Knapsack** Problem
- O Problema do Caixeiro Viajante – The **Traveling Salesperson** Problem

O Problema da Mochila

- Determinar o **subconjunto mais valioso de itens**, que cabe na mochila



[Wikipedia]

O Problema da Mochila

- Dados **n itens**
 - Com **peso** w_1, w_2, \dots, w_n
 - Com **valor** v_1, v_2, \dots, v_n
- Uma mochila de **capacidade** W
- Qual é o (um) **subconjunto mais valioso de itens**, que cabe na mochila ?
- Problema **NP-difícil** !!

O Problema da Mochila

- **Heurística voraz / greedy**
 - Selecionar os itens pela **ordem decrescente** dos seus **rácios v / w**
- **Calcular** os quocientes valor / peso : $r_i = v_i / w_i$
- **Ordenar** os itens em ordem **não-crescente** dos seus rácios r_i
- **Repetir** até que não exista mais nenhum item na lista ordenada
 - Retirar o próximo item da lista
 - Se o **item cabe**, colocá-lo na **mochila**
 - Caso contrário, **esquecê-lo**

O Problema da Mochila

- Mochila de capacidade $W = 10$
- 4 itens
 - Item 1 : $w = 7$; $v = \$42$: $v / w = 6$: 2º
 - Item 2 : $w = 3$; $v = \$12$: $v / w = 4$: 4º
 - Item 3 : $w = 4$; $v = \$40$: $v / w = 10$: 1º
 - Item 4 : $w = 5$; $v = \$25$: $v / w = 5$: 3º
- Solução ?
 - Item 3 + Item 4 : **\$65**
 - Solução ótima

O Problema da Mochila

- É uma **heurística simples**...
 - Existem outras...
- **Poderá ser sempre ótima ?**
- Qual seria a consequência de uma resposta positiva ?

O Problema da Mochila

- Mochila de capacidade $W = 50$
- 3 itens
 - Item 1 : $w = 10$; $v = \$60$: $v / w = 6$
 - Item 2 : $w = 20$; $v = \$100$: $v / w = 5$
 - Item 3 : $w = 30$; $v = \$120$: $v / w = 4$
- Resultado da heurística voraz
 - Item 1 + Item 2 : \$160 ←
- Solução ótima
 - Item 2 + Item 3 : \$220 !! ←

O Problema da Mochila

- Mochila de capacidade $W > 2$
- 2 items
 - Item 1 : $w = 1$; $v = \$2$: $v / w = 2$: 1º !!
 - Item 2 : $w = W$; $v = \$W$: $v / w = 1$: 2º
- Solução ?
 - Item 1 !!!
 - Solução ótima: Item 2
 - $R_A = \infty$!!



O Problema do Caixeiro Viajante

- Determinar o **caminho mais curto** que atravessa **n cidades**
- MAS, visitando cada cidade uma só vez !
- E retornando à cidade inicial !
- Problema de **otimização combinatória**

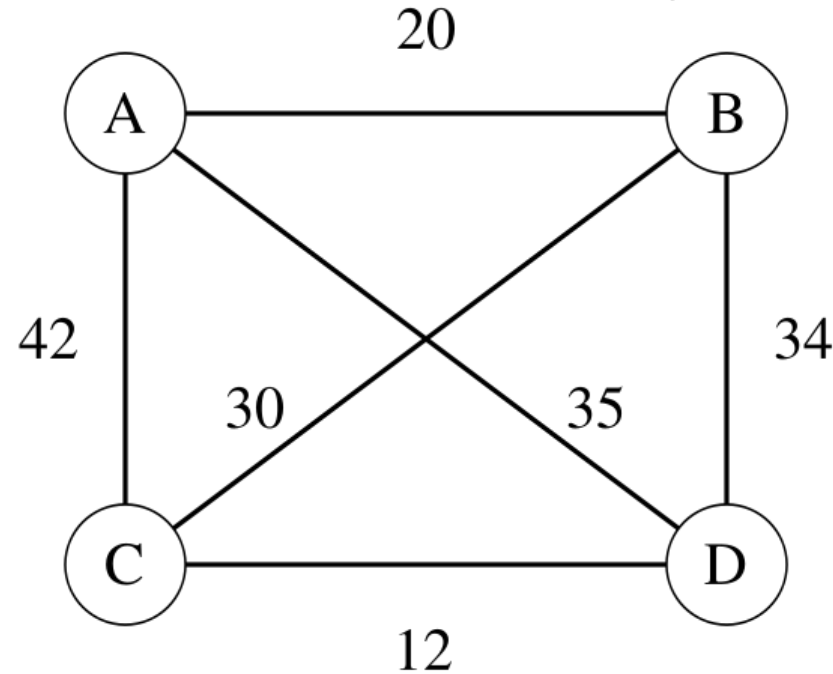


[Wikipedia]

O Problema do Caixeiro Viajante

- Heurística do **Vizinho-Mais-Próximo / Nearest-neighbor – Greedy !!**
 - Prosseguir para a cidade mais próxima e ainda não visitada
- **Escolher** uma qualquer cidade como inicial
- **Repetir** até que todas as cidades tenham sido visitadas
 - Avançar para a cidade mais próxima e ainda não visitada
- **Voltar** à cidade inicial
- Heurística simples
- Mas $R_A = \infty$!!

O Problema do Caixeiro Viajante



- Qual é a solução ótima ?
- Aplicar a **heurística do vizinho-mais-próximo** !
- Exatidão ?

O Problema do Caixeiro Viajante

- Há outras heurísticas simples, por exemplo:
- Bidirectional-Nearest-Neighbor
- Shortest-Edge
- Aplicá-las ao exemplo anterior !!

Sugestão de Leitura

Sugestão de leitura

- A. Levitin, “*Design and Analysis of Algorithms*”, 3rd. Ed., Pearson, 2012
 - Chapter 11, Chapter 12