Análise da Complexidade de Algoritmos Recursivos III

Joaquim Madeira

20/04/2021

Sumário

- Recap
- Multiplicação por partição: o Algoritmo de Karatsuba
- Ordenação por fusão: o Algoritmo Mergesort
- Exercício adicional
- Sugestões de leitura

Recapitulação

Procura num Array – Tentaram fazer ?

- Dado um array de n elementos inteiros
- Encontrar a 1ª ocorrência do maior elemento

- Divide-And-Conquer
  - Encontrar o maior valor do 1º sub-array : ((n+1) div 2) elmentos
  - Encontrar o maior valor do 2º sub-array : (n div 2) elementos
  - Comparar os dois valores e devolver o maior

- Quantas comparações?

Procura num Array – Nº de comparações

- $C(1) = 0$
- $C(2) = 1$
- $C(n) = 1 + C(n \text{ div } 2) + c((n + 1) \text{ div } 2)$

- Seja $n = 2^k$
- $C(n) = 1 + 2 \times C(n / 2) = ?$
- Fazer o desenvolvimento telescópico ou …

The Master Theorem

- Dada uma recorrência, para $n = b^k, k \geq 1$

$$T(1) = c \qquad \text{e} \qquad T(n) = a\,T(n / b) + f(n)$$

com $a \geq 1$, $b \geq 2$, $c \geq 0$

- Se $f(n)$ em $\Theta(n^d)$, em que $d \geq 0$, então

$$T(n) \text{ em } \boldsymbol{\Theta(n^d)}, \text{ se } a < b^d$$

$$T(n) \text{ em } \boldsymbol{\Theta(n^d \log n)}, \text{ se } a = b^d$$

$$T(n) \text{ em } \boldsymbol{\Theta(n^{\log_b a})}, \text{ se } a > b^d$$

The Master Theorem

- Obtemos a ordem de complexidade, dada uma recorrência
  - Mas não obtemos uma expressão para o número de operações !
- Resultados válidos para as notações $O(n)$ e $\Omega(n)$
- Exemplo

$$C(n) = 2 \times C(n / 2) + 1$$

$f(n) = 1$, $f(n)$ em $\Theta(n^0)$, $d = 0$

$a = 2$, $b = 2$, $a > b^d$

$C(n)$ em $\Theta(n)$

The Smoothness Rule

- Seja T(n) uma função eventualmente não decrescente
- Seja g(n) uma função suave ("smooth function")

- Se T(n) em Θ(g(n)) para valores de n que sejam potências de b, b ≥ 2

- Então T(n) em Θ(f(n)), para qualquer n

- Resultados análogos para O(n) e Ω(n) !!

- Boas notícias !!

Smooth Functions

- Função eventualmente não decrescente

$$f(n_1) \leq f(n_2), \text{ para quaisquer } n_2 > n_1 \geq n_0$$

- Função suave ("smooth")
  1) f(n) é eventualmente não decrescente
  2) f(2n) em $\Theta(f(n))$

- Exemplos
  - log n , n, n log n e n^k são funções "smooth"
  - a^n não é !!

Decrease-and-Conquer – Outro padrão

$$T(1) = b$$

$$T(n) = a \times T(n - c) + d$$

- **a = 1**

$$T(n) = b + d \times (n - 1) / c \qquad \boldsymbol{T(n) \in \mathcal{O}(n)}$$

- Fizeram o desenvolvimento ?

Divide-and-Conquer – Outro padrão

$$T(1) = b$$

$$T(n) = a \times T(n - c) + d$$

- $a > 1$

$$T(n) = d/(1 - a) + (b - d/(1 - a)) \times a^{(n-1)/c}$$

$$\boldsymbol{T(n) \in \mathcal{O}(a^{\frac{n}{c}})}$$

- Fizeram o desenvolvimento ?

Decrease-and-Conquer – Outro padrão

$$T(1) = c$$

$$T(n) = T(n / b) + f(n)$$

- $T(n) = \Theta(\log n)$, se $f(n)$ = constante
- $T(n) = \Theta(n)$, se $f(n) = \Theta(n)$

Multiplicação por partição

Multiplicar números inteiros muito longos

- Como fazer?
  - E.g., mais do que 100 algarismos
- Muito maiores do que o maior inteiro representável !
- Usar o algoritmo que aprendemos na escola ?
- Divide-and-Conquer ?
- Eficiência ?

Algoritmo da escola primária

- Algoritmo para multiplicação de 2 números com n algarismos

- Quantos algarismos tem o resultado ?

- 34 x 12 = ?

Algoritmo da escola primária

- 34 x 12 = ?

- Eficiência ?
  - 4 multiplicações algarismo a algarismo : $\Theta(n^2)$
  - 1 deslocamento ("shift")
  - 3 adições
    - Podem ser mais ?

- Será possível reduzir o número de multiplicações ?

Divide-and-Conquer

- Ideia :
  - Subdividir cada número em duas metades
  - Multiplicar recursivamente essas metades
  - Compor o resultado final

- Questões
  - Quando parar o processo recursivo ?
  - Como organizar / multiplicar ?
  - Como obter o resultado final ?

Divide-and-Conquer – 1ª tentativa

- 34 x 12 = ?
- Subdividir
  - a = 3 ; b = 4
  - c = 1 ; d = 2
- Multiplicar
  - a x c = 3 ; a x d = 6
  - b x c = 4 ; b x d = 8
- Obter o resultado final

$$34 \times 12 = (a \times c) \cdot 10^2 + (a \times d + b \times c) \cdot 10^1 + (b \times d) \cdot 10^0$$

Divide-and-Conquer – 1ª tentativa

- 34 x 12 = ?
  - 4 multiplicações algarismo a algarismo
  - 2 deslocamentos
  - 3 adições
- Caso geral ?
  - 4 multiplicações recursivas de números com n/2 algarismos
  - $M(n) = 4\ M\ (n\ /\ 2)$, se n é par
  - Complexidade ? $\Theta(n^2)$!!
- Podemos fazer melhor ?

Divide-and-Conquer – Algoritmo de Karatsuba

- 34 x 12 = ?
- Subdividir
  - a = 3 ; b = 4
  - c = 1 ; d = 2
- Multiplicar
  - **u = (a – b) x (d – c) = -1**
  - **v = a x c = 3**
  - **w = b x d = 8**

Divide-and-Conquer – Algoritmo de Karatsuba

- Resultado final
  - $34 \times 12 = v \cdot 10^2 + (u + v + w) \cdot 10^1 + w \cdot 10^0$
- $34 \times 12 = ?$
  - 3 multiplicações algarismo a algarismo
  - 2 deslocamentos
  - 6 adições / subtrações
- Caso geral ?
  - 3 multiplicações recursivas de números com n/2 algarismos
  - $M(n) = 3\, M(n / 2)$, se n é par
  - Complexidade ? **$\Theta(n^{\log_2 3}) = \Theta(n^{1.585})$!!**

Divide-and-Conquer – Algoritmo de Karatsuba

- $X \times Y = ?$
- Subdividir
  - $X = a \cdot 10^{n/2} + b$
  - $Y = c \cdot 10^{n/2} + d$
- Multiplicar
  - $u = (a - b) \times (d - c)$
  - $v = a \times c$
  - $w = b \times d$
- Obter o resultado
  - $X \times Y = v \cdot 10^{n} + (u + v + w) \cdot 10^{n/2} + w$

Divide-and-Conquer – Algoritmo de Karatsuba

- Quando parar o processo recursivo ?
  - Números com 1 algarismo
  - OU quando o nº de algarismos for suficientemente pequeno !

- Eficiência ?
  - Para números moderadamente grandes, provavelmente exige maior tempo de cálculo que o algoritmos da escola primária
  - Mas, verificou-se ser mais eficiente para multiplicar números com mais do que 600 algarismos !!

Divide-and-Conquer – Algoritmo de Karatsuba

```
// KARATSUBA - PSEUDO-CÓDIGO

BigNum multRec(BigNum X, BigNum Y) {
  // CASO DE BASE

  if (numDigitos(X) < LIMIAR && numDigitos(Y) < LIMIAR) {
    return X * Y;
  }

  int n = numDigitos(maior(X, Y));

  // TAMANHO DA METADE

  n /= 2;
```

Divide-and-Conquer – Algoritmo de Karatsuba

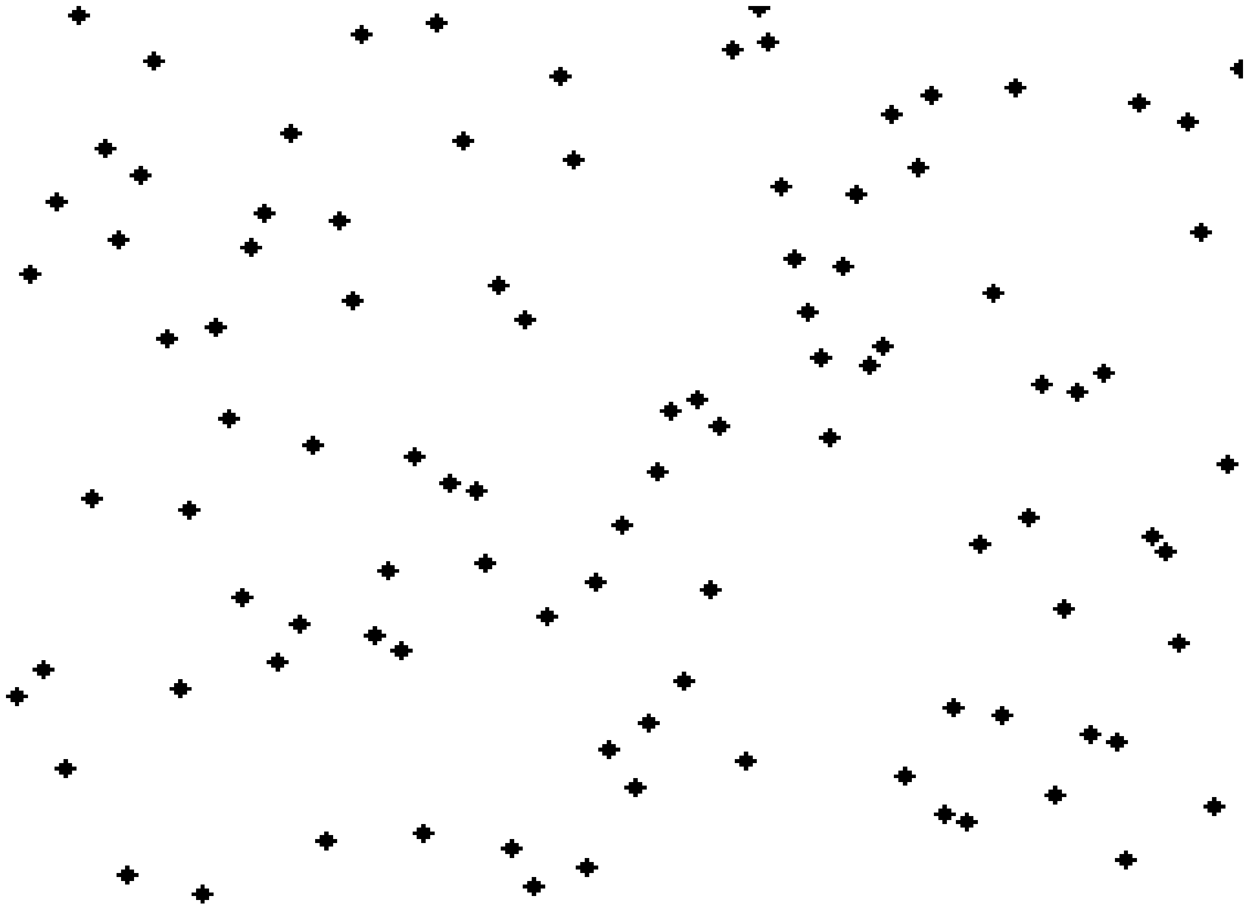
```
// SUBDIVIDIR

BigNum xHIGH = deslocarDireita(X, n);

BigNum xLOW = X - deslocarEsquerda(xHIGH, n);

BigNum yHIGH = deslocarDireita(Y, n);

BigNum yLOW = Y - deslocarEsquerda(yHIGH, n);
```

Divide-and-Conquer – Algoritmo de Karatsuba

```
    BigNum p1 = multRec(xHIGH, yHIGH);

    BigNum p2 = multRec(xLOW, yLOW);

    BigNum p3 = multRec(xHIGH - xLOW, yHIGH - yLOW);

    // RESULTADO FINAL

    return deslocarEsquerda(p1, 2 * n) + deslocarEsquerda(p1 + p2 + p3, n) + p2;
}
```

Mergesort – Ordenação por Fusão

Mergesort



[Wikipedia]

Mergesort

6 5 3 1 8 7 2 4

[Wikipedia]

Mergesort

- Ordenar um array / lista
  - Se o tamanho é 0 ou 1, já está ordenada
  - Caso contrário, subdividir em duas “metades”
    - Aprox. do mesmo tamanho !!
  - Ordenar recusivamente cada “metade”
  - Fundir as duas “metades” ordenadas num só array / lista

- Questão : usar ou não um array / lista adicional ?

Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

7	**2**	**6**

Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

7	**2**

Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

7

Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

7	**2**

Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

7	**2**

Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

7
2

Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

2	**7**

Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

2	**7**	**6**

Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

2	**7**	**6**

Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

	7	**6**		
2				

Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

	7
2	**6**

Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

2	**6**	**7**

Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

4	**3**

2	**6**	**7**

Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

			4	

2	**6**	**7**

Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

4	**3**

2	**6**	**7**

Mergesort

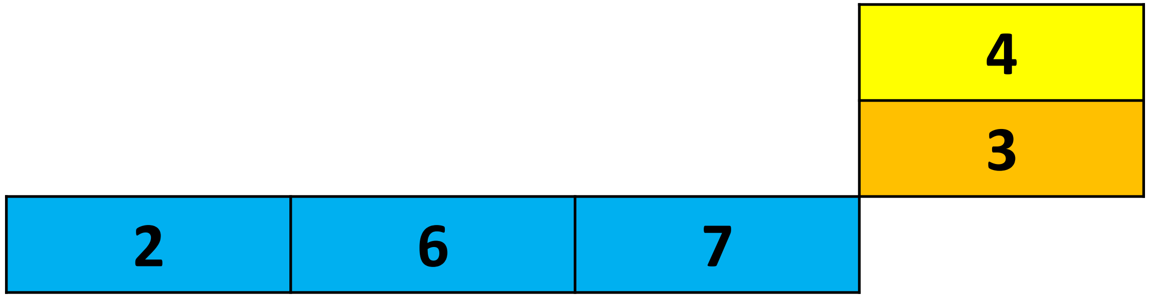
0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

			4	**3**

2	**6**	**7**		

Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**



Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

			3	**4**
2	**6**	**7**		

Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

			3	**4**
2	**6**	**7**		

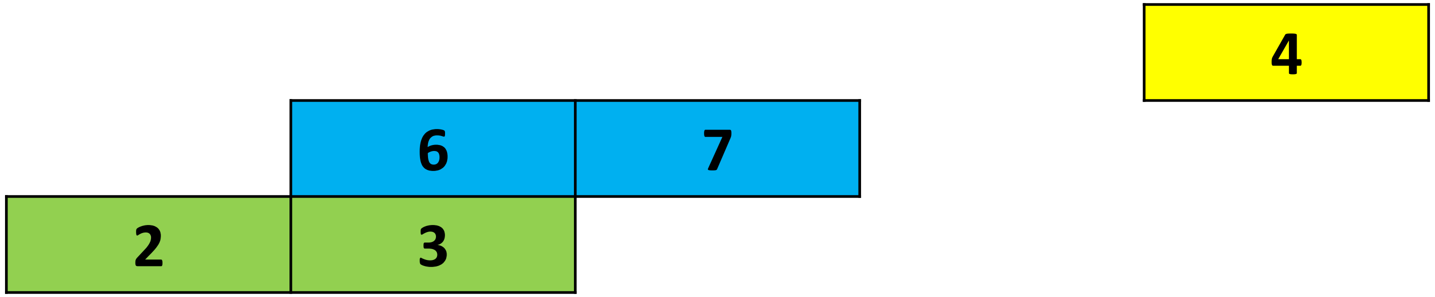
Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

			3	**4**
	6	**7**		
2				

Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**



Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

	6	**7**
2	**3**	**4**

Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

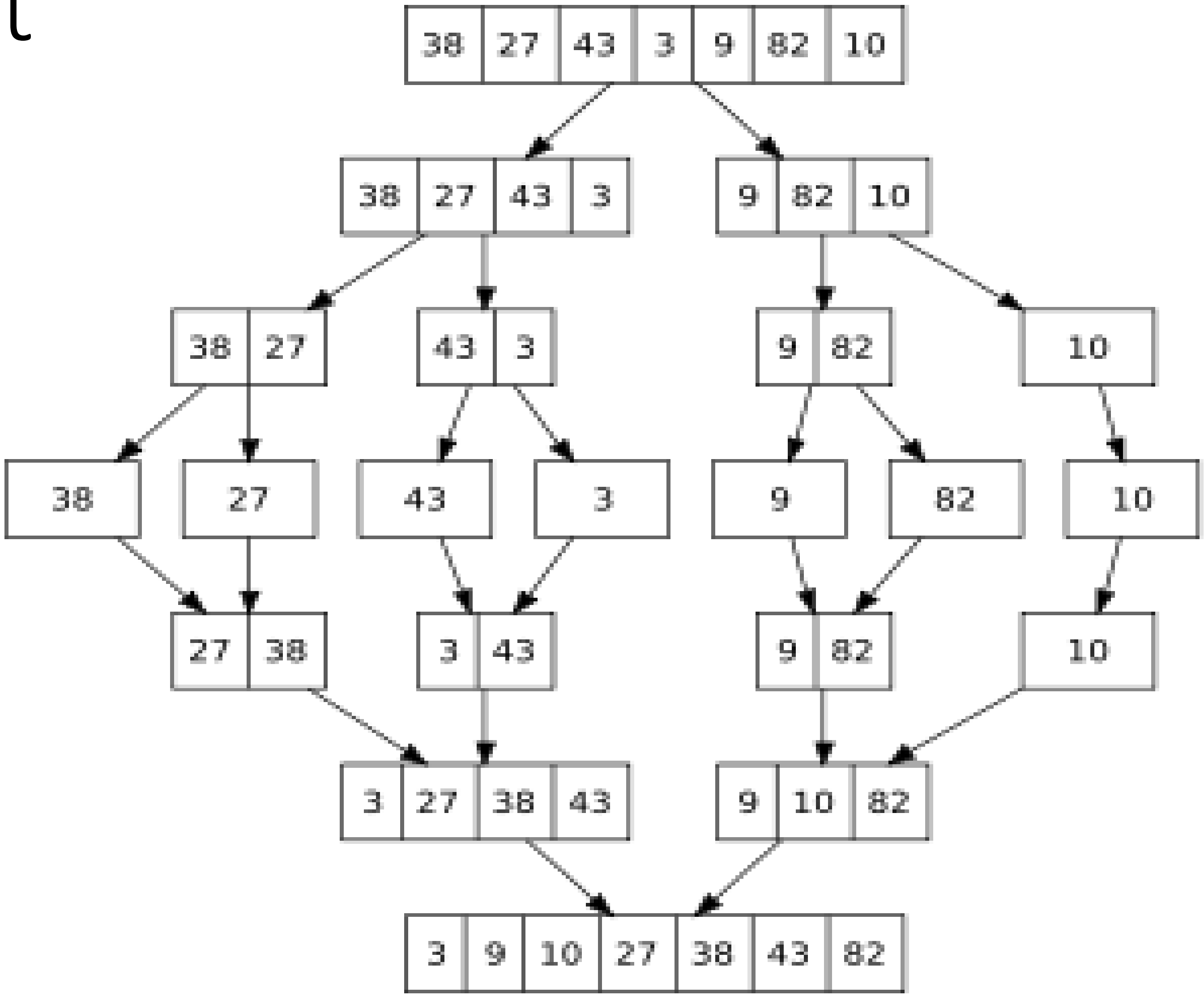
		7	
2	**3**	**4**	**6**

Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

2	**3**	**4**	**6**	**7**

Mergesort



[Wikipedia]

Tarefa: associar a cada seta um rótulo que identifica a sequência pela qual as chamadas são executadas

Mergesort

```
// mergeSort(A, tmpA, 0, n - 1);

void mergeSort(int* A, int* tmpA, int left, int right) {
  // Mais do que 1 elemento ?

  if (left < right) {
    int center = (left + right) / 2;

    mergeSort(A, tmpA, left, center);
    mergeSort(A, tmpA, center + 1, right);
    merge(A, tmpA, left, center + 1, right);
  }
}
```

Mergesort

```
void merge(int* A, int* tmpA, int lPos, int rPos, int rEnd) {
  int lEnd = rPos - 1;
  int tmpPos = lPos;
  int nElements = rEnd - lPos + 1;

  // COMPARAR O 1o ELEMENTO DE CADA METADE
  // E COPIAR ORDENADAMENTE PARA O ARRAY TEMPORÁRIO

  while (lPos <= lEnd && rPos <= rEnd) {
    if (A[lPos] <= A[rPos])
      tmpA[tmpPos++] = A[lPos++];
    else
      tmpA[tmpPos++] = A[rPos++];
  }
```

Mergesort

```c
    // SOBRA, PELO MENOS, 1 ELEMENTO NUMA DAS METADES

    while (lPos <= lEnd) {···
    }

    while (rPos < rEnd) {···
    }

    // COPIAR DE VOLTA PARA O ARRAY ORIGINAL

    for (int i = 0; i < nElements; i++, rEnd--) {
        A[rEnd] = tmpA[rEnd];
    }
}
```

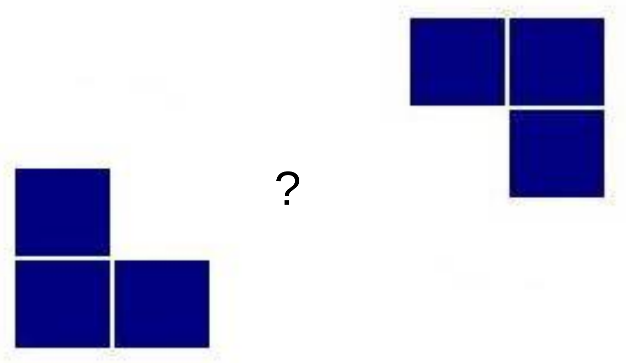
Mergesort – Tarefas

- Eficiência ?
- Todas as comparações são feitas pela função de fusão
- Escrever a recorrência !
- Melhor caso / Pior caso / Caso médio ?
- O(n log n) !!

Exercício adicional

Preencher um tabuleiro com trominós

- Preencher um tabuleiro com trominós em forma de L
  - Tabuleiro de tamanho $n \times n$, com $n = 2^k$
- MAS, uma qualquer das casas está ocupada !
- Como preencher as outras casas ?
- Experimentem!!
  - http://www.cut-the-knot.org



[Wikipedia]

Preencher um tabuleiro com trominós

- Ideia
  - Subdividir em instâncias mais pequenas e semelhantes
    - (n / 2) x (n / 2)
  - Ocupar uma casa em 3 dos sub-tabuleiros
    - Agora temos 4 sub-problemas do mesmo género !!
  - Proceder de modo recursivo
- Casos de base ?

Preencher um tabuleiro com trominós

- Como representar o tabuleiro ?
  - Casas vazias ?
  - Casas ocupadas ?
- Como representar / colocar um trominó ?
  - Localização ?
  - Orientação ?
- Eficiência
  - Tempo proporcional ao nº de trominós colocados
  - Complexidade ?

Sugestões de leitura

Sugestões de leitura

- A. Levitin, Introduction to the Design and Analysis of Algorithms, 3rd Edition, 2012
  - Capítulo 5: secção 5.1
  - Capítulo 5: secção 5.4
  - Apêndice B