Análise da Complexidade de Algoritmos Recursivos V

Joaquim Madeira

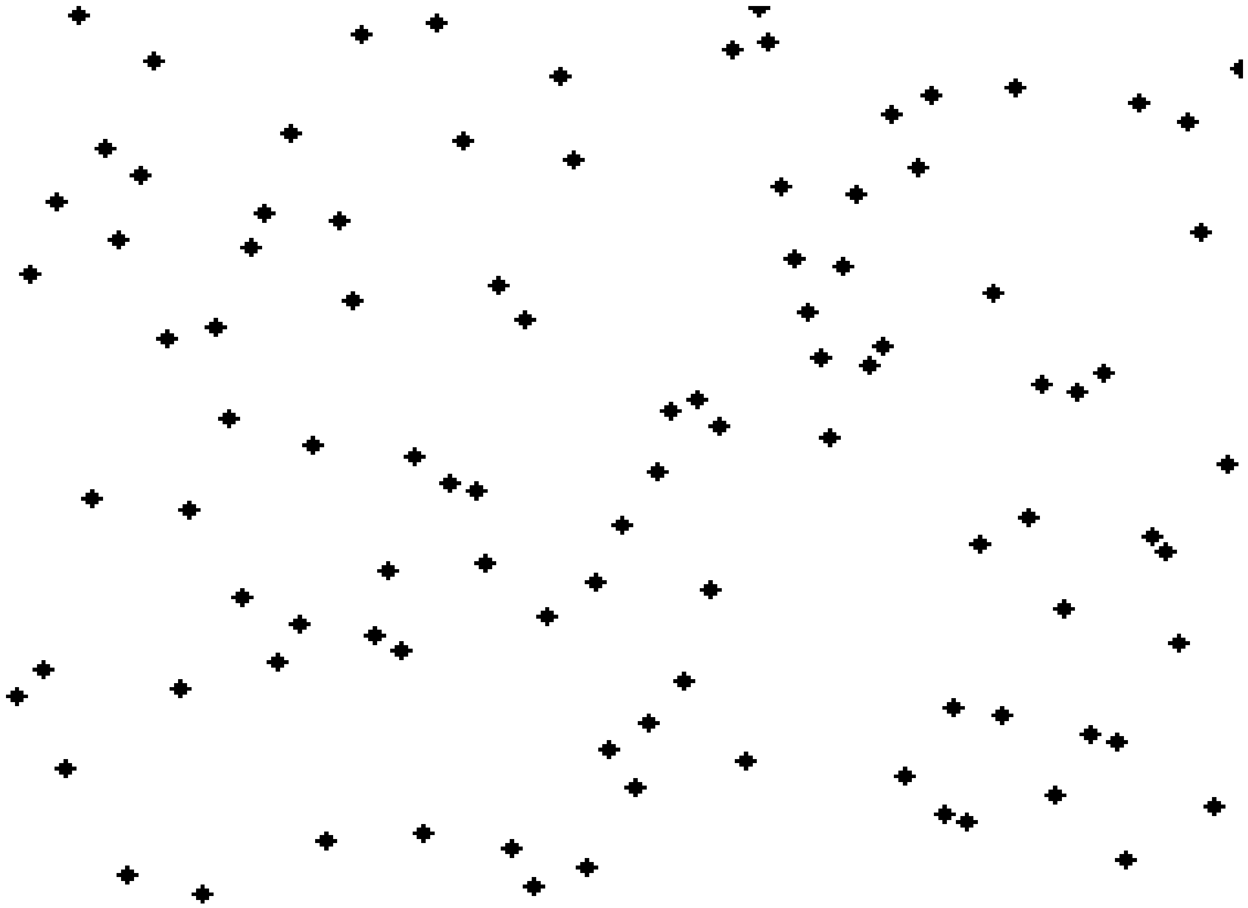
27/04/2021

Sumário

- Recap
- Ordenação por partição: o Algoritmo Quicksort – Análise da Complexidade
- Seleção do k-ésimo elemento
- Sugestões de leitura

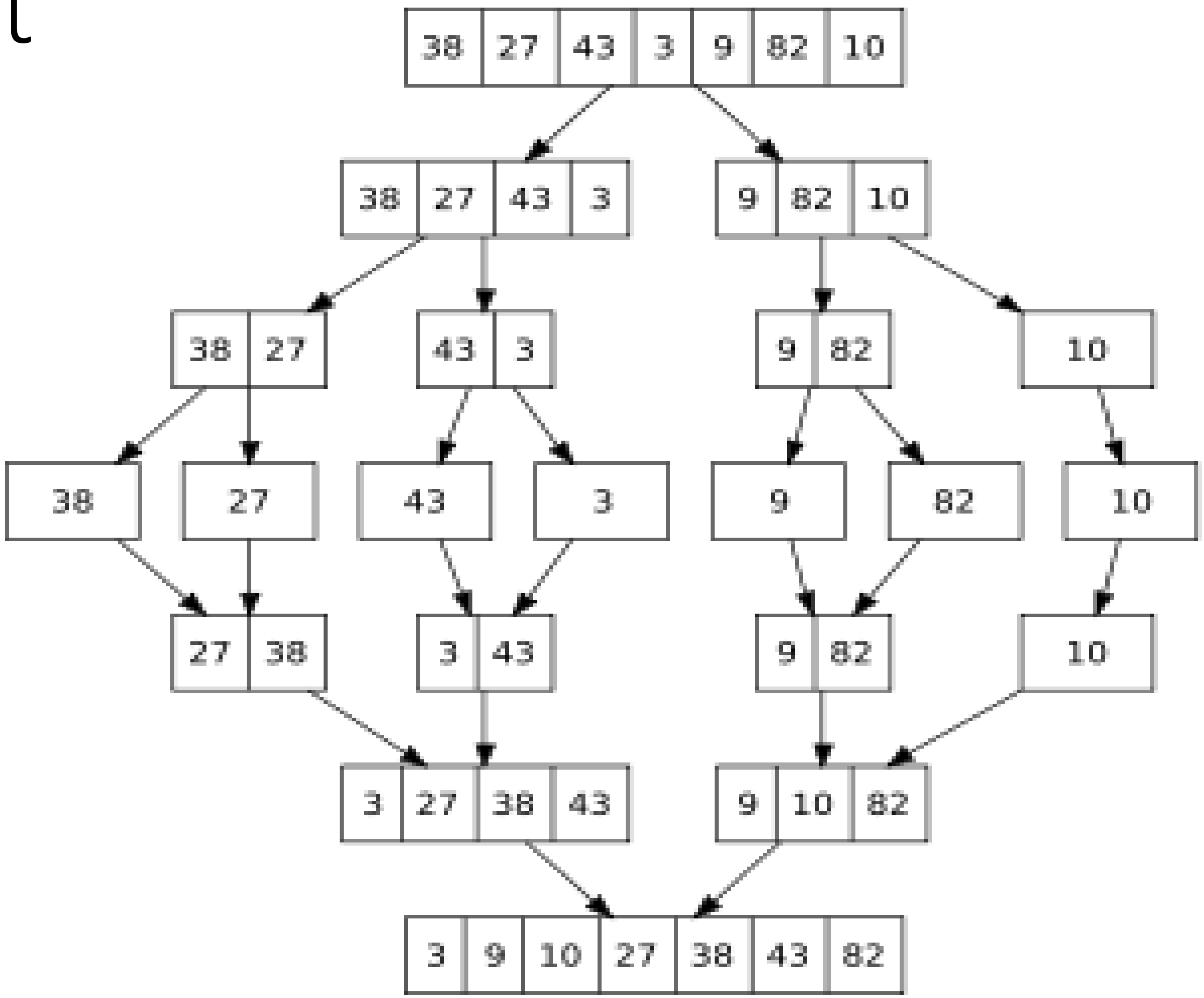
Recapitulação

Mergesort – Ordenação por Fusão



[Wikipedia]

Mergesort



SUBDIVISÃO

FUSÃO

[Wikipedia]

Tarefa: associar a cada seta um rótulo que identifica a sequência pela qual as chamadas são executadas

Eficiência

- Comparações são feitas pela função de fusão
  - Melhor caso / Pior caso / Caso médio

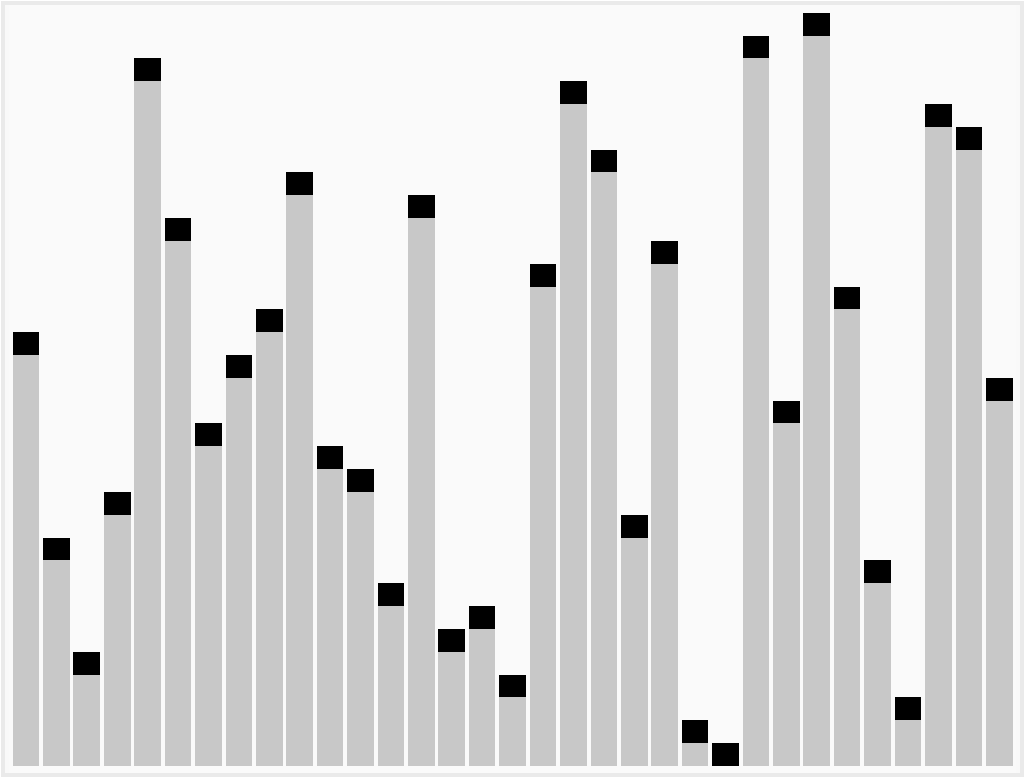
$$C_{sort}(1) = 0$$

$$C_{sort}(n) = C_{sort}(n \textbf{ div } 2) + C_{sort}((n + 1) \textbf{ div } 2) + C_{merge}(n)$$

- $C_{merge}(n) = \Theta(n)$ usando um array auxiliar
- $C_{sort}(n) \quad = \Theta(n \log n)$

Quicksort
– Ordenação por Partição

Quicksort



[Wikipedia]

Quicksort

- Ordenar o array de modo recursivo, sem usar memória adicional
- Particionar o conjunto de elementos, trocando de posição, se necessário
- Com base no valor de um elemento pivot

Quicksort

- Escolher o valor do element pivot

- Particionar o array
- Elementos da 1ª partição são menores ou iguais do que o pivot
- Elementos da 2ª partição são maiores ou iguais do que o pivot

- Ordenar de modo recursivo a 1ª partição e a 2ª partição

Quicksort

```
void quicksort(int* A, int left, int right) {
  // Casos de base
  if (left >= right) return;

  // Caso recursivo
  // FASE DE PARTIÇÃO
  int pivot = (left + right) / 2;
  int i = left;
  int j = right;

  do {
    while (A[i] < A[pivot]) i++;
    while (A[j] > A[pivot]) j--;

    if (i <= j) {
      trocar(&A[i], &A[j]);
      i++;
      j--;
    }
  } while (i <= j);

  // Chamadas recursivas
  quicksort(A, left, j);
  quicksort(A, i, right);
}
```

Tarefa 1

- Analisar outras versões em diferentes linguagens de programação
- https://rosettacode.org/wiki/Sorting_algorithms/Quicksort

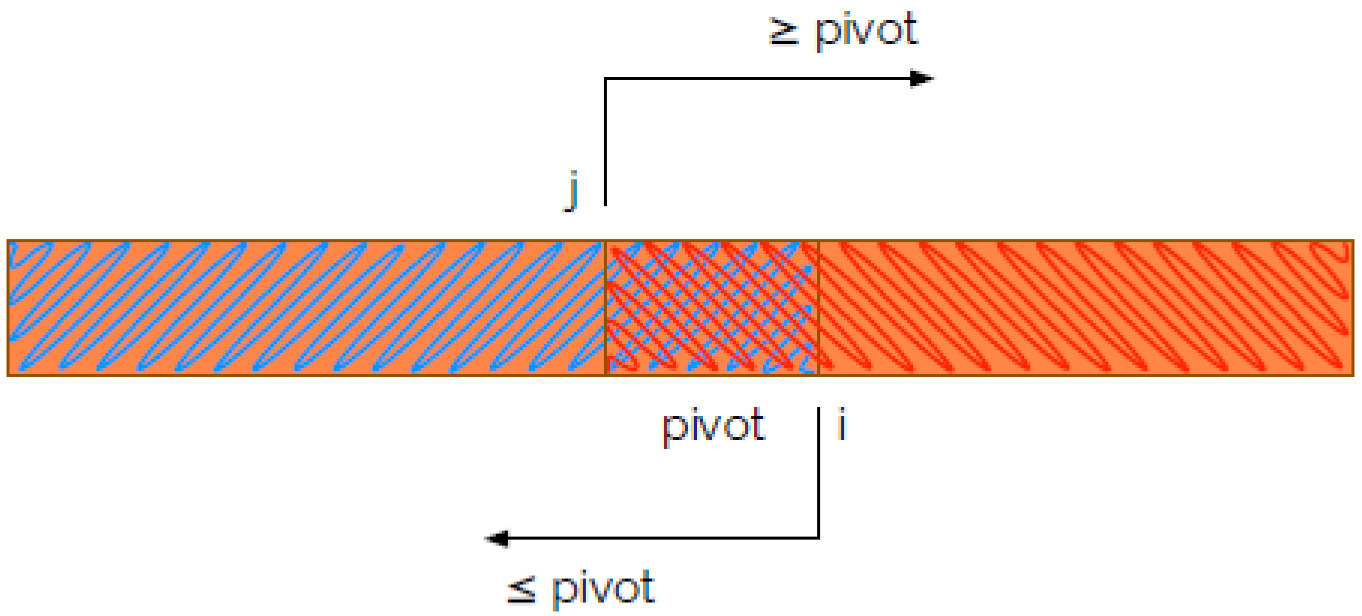
Questões

- Como esolher o pivot ?
  - O elemento do meio? O 1º elemento? O último elemento?
  - O elemento mediano dos 3 anteriores?
  - Um elemento escolhido de modo aleatório?

- Como particionar ?

- Atenção : pode surgir uma terceira partição central, cujos elementos têm o valor do pivot !

Partições



[Rui Lopes]

Fizeram ?

0	1	2	3	4	5
6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

- Ordenar !
- Usar como pivot o elemento do “meio” !

- Qual é o valor do elemento escolhido como pivot ?
- O que tem este exemplo de particular ?

Quicksort – Pivot = elemento do “meio”

0	1	2	3	4	5
6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

Quicksort

0	1	2	3	4	5
6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
i					

6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

Quicksort

0	1	2	3	4	5
6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
i					**j**
6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

Quicksort

0	1	2	3	4	5
6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
	i			**j**	
1	**5**	**4**	**3**	**2**	**6**

Quicksort

0	1	2	3	4	5
6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

	i			**j**	
1	**5**	**4**	**3**	**2**	**6**

Quicksort

0	1	2	3	4	5
6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
	i			**j**	
1	**5**	**4**	**3**	**2**	**6**

Quicksort

0	1	2	3	4	5
6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
	i			**j**	
1	**5**	**4**	**3**	**2**	**6**

Quicksort

0	1	2	3	4	5
6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
		i	**j**		
1	**2**	**4**	**3**	**5**	**6**

Quicksort

0	1	2	3	4	5
6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
		i	**j**		
1	**2**	**4**	**3**	**5**	**6**

Quicksort

0	1	2	3	4	5
6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

		j	i		
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Quicksort

0	1	2	3	4	5
6	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
		j	**i**		
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

- O array já está ordenado no final da fase de partição !!
- MAS, as chamadas recursivas vão continuar !!
- Terminar o exemplo !!

Exemplo – Pivot é o 1º elemento – Fizeram ?

- Fase de partição

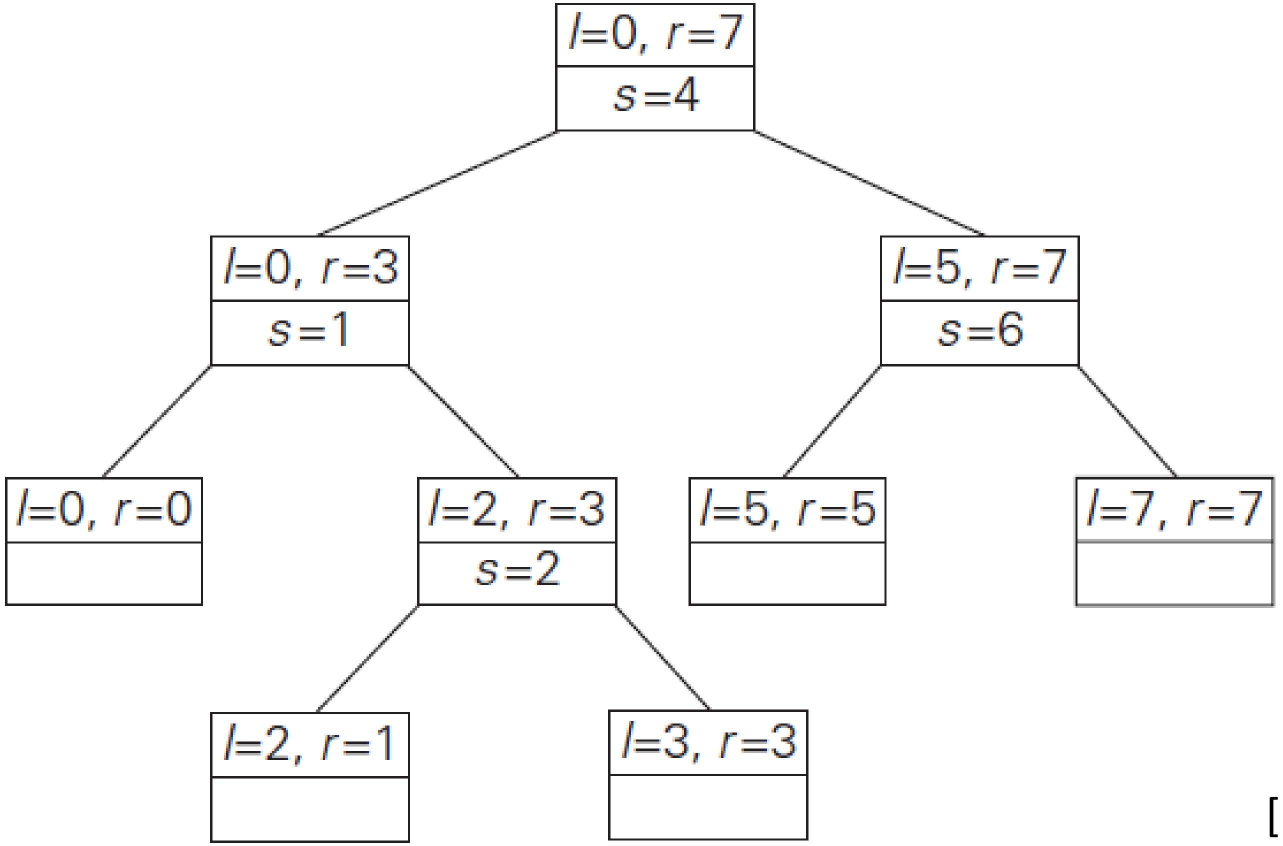
0	1	2	3	4	5	6	7
	i						*j*
5	3	1	9	8	2	4	7
			i			*j*	
5	3	1	9	8	2	4	7
			i			*j*	
5	3	1	4	8	2	9	7
				i	*j*		
5	3	1	4	8	2	9	7
				i	*j*		
5	3	1	4	2	8	9	7
				j	*i*		
5	3	1	4	2	8	9	7
2	3	1	4	**5**	8	9	7

[Levitin]

- Concluir !!

Exemplo – Pivot é o 1º elemento – Fizeram ?

- Chamadas recursivas



[Levitin]

- s é a posição do pivot após a partição

Exemplo

	lo	j	hi	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
initial values				Q	U	I	C	K	S	O	R	T	E	X	A	M	P	L	E
random shuffle				K	R	A	T	E	L	E	P	U	I	M	Q	C	X	O	S
	0	5	15	E	C	A	I	E	K	L	P	U	T	M	Q	R	X	O	S
	0	3	4	E	C	A	E	I	K	L	P	U	T	M	Q	R	X	O	S
	0	2	2	A	C	E	E	I	K	L	P	U	T	M	Q	R	X	O	S
	0	0	1	A	C	E	E	I	K	L	P	U	T	M	Q	R	X	O	S
	1		1	A	C	E	E	I	K	L	P	U	T	M	Q	R	X	O	S
	4		4	A	C	E	E	I	K	L	P	U	T	M	Q	R	X	O	S
	6	6	15	A	C	E	E	I	K	L	P	U	T	M	Q	R	X	O	S
	7	9	15	A	C	E	E	I	K	L	M	O	P	T	Q	R	X	U	S
	7	7	8	A	C	E	E	I	K	L	M	O	P	T	Q	R	X	U	S
	8		8	A	C	E	E	I	K	L	M	O	P	T	Q	R	X	U	S
	10	13	15	A	C	E	E	I	K	L	M	O	P	S	Q	R	T	U	X
	10	12	12	A	C	E	E	I	K	L	M	O	P	R	Q	S	T	U	X
	10	11	11	A	C	E	E	I	K	L	M	O	P	Q	R	S	T	U	X
	10		10	A	C	E	E	I	K	L	M	O	P	Q	R	S	T	U	X
	14	14	15	A	C	E	E	I	K	L	M	O	P	Q	R	S	T	U	X
	15		15	A	C	E	E	I	K	L	M	O	P	Q	R	S	T	U	X
result				A	C	E	E	I	K	L	M	O	P	Q	R	S	T	U	X

no partition for subarrays of size 1

[Sedgewick and Wayne]

Quicksort trace (array contents after each partition)

Eficiência

- Todas as comparações são feitas na fase de partição !!

- Qual é a recorrência ?
- O caso geral é mais difícil de desenvolver e analisar !!

- **O(n log n)** para o melhor caso e o caso médio
- MAS **$O(n^2)$** para o pior caso !!
    - Muito raro, se escolhermos "bem" o pivot !!
    - Ou se gerarmos uma permutação aleatória do array dado

Melhor Caso

Comp(n) ~ n log n

lo	j	hi	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
initial values			H	A	C	B	F	E	G	D	L	I	K	J	N	M	O
random shuffle			H	A	C	B	F	E	G	D	L	I	K	J	N	M	O
0	7	14	D	A	C	B	F	E	G	H	L	I	K	J	N	M	O
0	3	6	B	A	C	D	F	E	G	H	L	I	K	J	N	M	O
0	1	2	A	B	C	D	F	E	G	H	L	I	K	J	N	M	O
0		0	A	B	C	D	F	E	G	H	L	I	K	J	N	M	O
2		2	A	B	C	D	F	E	G	H	L	I	K	J	N	M	O
4	5	6	A	B	C	D	E	F	G	H	L	I	K	J	N	M	O
4		4	A	B	C	D	E	F	G	H	L	I	K	J	N	M	O
6		6	A	B	C	D	E	F	G	H	L	I	K	J	N	M	O
8	11	14	A	B	C	D	E	F	G	H	J	I	K	L	N	M	O
8	9	10	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	N	M	O
8		8	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	N	M	O
10		10	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	N	M	O
12	13	14	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
12		12	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
14		14	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
			A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O

[Sedgewick and Wayne]

Melhor Caso

- Há sempre duas partições com “aprox. metade” dos elementos

$$C_{best}(n) = 2C_{best}(n/2) + n \quad \text{for } n > 1, \quad C_{best}(1) = 0.$$

- The Master Theorem !!

Pior Caso

Comp(n) ~ n^2 / 2

lo	j	hi	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
initial values			A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
random shuffle			A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
0	0	14	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	1	14	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
2	2	14	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
3	3	14	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
4	4	14	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
5	5	14	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
6	6	14	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
7	7	14	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
8	8	14	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
9	9	14	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
10	10	14	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
11	11	14	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
12	12	14	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
13	13	14	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
14		14	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
			A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O

[Sedgewick and Wayne]

Pior Caso

- Há sempre uma partição com (n – 1) elementos

$$C_{worst}(n) = (n+1) + n + \cdots + 3 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3 \in \Theta(n^2).$$

- Muito pouco provável !!
  - Fazer um “shuffling” inicial aos dados

Caso Médio

Comp(n) ~ n log n

lo	j	hi	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
			Q	U	I	C	K	S	O	R	T	E	X	A	M	P	L	E
			K	R	A	T	E	L	E	P	U	I	M	Q	C	X	O	S
0	5	15	E	C	A	I	E	K	L	P	U	T	M	Q	R	X	O	S
0	3	4	E	C	A	E	I	K	L	P	U	T	M	Q	R	X	O	S
0	2	2	A	C	E	E	I	K	L	P	U	T	M	Q	R	X	O	S
0	0	1	A	C	E	E	I	K	L	P	U	T	M	Q	R	X	O	S
1		1	A	C	E	E	I	K	L	P	U	T	M	Q	R	X	O	S
4		4	A	C	E	E	I	K	L	P	U	T	M	Q	R	X	O	S
6	6	15	A	C	E	E	I	K	L	P	U	T	M	Q	R	X	O	S
7	9	15	A	C	E	E	I	K	L	M	O	P	T	Q	R	X	U	S
7	7	8	A	C	E	E	I	K	L	M	O	P	T	Q	R	X	U	S
8		8	A	C	E	E	I	K	L	M	O	P	T	Q	R	X	U	S
10	13	15	A	C	E	E	I	K	L	M	O	P	S	Q	R	T	U	X
10	12	12	A	C	E	E	I	K	L	M	O	P	R	Q	S	T	U	X
10	11	11	A	C	E	E	I	K	L	M	O	P	Q	R	S	T	U	X
10		10	A	C	E	E	I	K	L	M	O	P	Q	R	S	T	U	X
14	14	15	A	C	E	E	I	K	L	M	O	P	Q	R	S	T	U	X
15		15	A	C	E	E	I	K	L	M	O	P	Q	R	S	T	U	X
			A	C	E	E	I	K	L	M	O	P	Q	R	S	T	U	X

[Sedgewick and Wayne]

Caso Médio

- Simplificar : elementos distintos !!
- Tamanho equiprovável para as sucessivas partições

$$C_{avg}(n) = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} [(n+1) + C_{avg}(s) + C_{avg}(n-1-s)] \quad \text{for } n > 1,$$

$$C_{avg}(0) = 0, \quad C_{avg}(1) = 0.$$

$$C_{avg}(n) \approx 2n \ln n \approx 1.39 n \log_2 n.$$

Caso Médio

- Mais comparações do que o Mergesort !!
- MAS, na prática, é mais rápido do que o Mergesort !!
- Faz menos movimentações de elementos do array

K-Selection
– Selecionar o k-ésimo elemento de um array

K-Selection

- Dado um array com n elementos : A[0,…,n – 1]
- O array não está ordenado !!

- Se o array estivesse ordenado
- Qual seria o valor do elemento na posição de índice k ?
  - Min (k = 0) / Max (k = n – 1) / Mediano (k = n **div** 2)
  - Aplicação: **top k** elementos

- Possíveis soluções ?
- Complexidade ?

K-Selection

- Possíveis estratégias ?
- Como usar o procedimento de partição do algoritmo Quicksort ?
- Vamos começar com a estratégia direta !!

K-Selection – Estratégia direta

- Ordenar por ordem não decrescente os n elementos
- Consultar o elemento na posição k
- Quanto tempo ?
    - 1.000.000 elementos / 10.000.000 elementos / …

K-Selection – Estratégia direta

- Ordenar por ordem não decrescente os n elementos

  $O(n^2)$ ou $O(n \log n)$

- Consultar o elemento na posição k

  $O(1)$

- Quanto tempo ?
  - 1.000.000 elementos / 10.000.000 elementos / …

K-Selection – Estratégia direta

- Demasiado esforço computacional !!
- Se o objetivo for apenas consultar o valor de um ou de alguns elementos

- Se k for **muito menor** que n
- Como proceder de modo mais eficiente ?

K-Selection – Estratégia melhorada

- Copiar os primeiros (k + 1) elementos para um array S
- Ordenar o array S por ordem não decrescente
- Para cada um dos restantes (n – k – 1) elementos de A
  - Ignorar se maior ou igual que S[k]
  - Caso contrário, inserir ordenadamente em S
    - O elemento S[k] é expulso do array e substituído

K-Selection – k = 1 – 2º elemento

0	1	2	3	4	5
6	**3**	**4**	**2**	**5**	**1**

K-Selection – k = 1 – 2º elemento

0	1	2	3	4	5
6	**3**	**4**	**2**	**5**	**1**

3	**6**

K-Selection – k = 1 – 2º elemento

0	1	2	3	4	5
6	**3**	**4**	**2**	**5**	**1**
		i			

3	**6**

K-Selection – k = 1 – 2º elemento

0	1	2	3	4	5
6	**3**	**4**	**2**	**5**	**1**
		i			

3	**6**

K-Selection – k = 1 – 2º elemento

0	1	2	3	4	5
6	**3**	**4**	**2**	**5**	**1**
			i		

3	**4**

K-Selection – k = 1 – 2º elemento

0	1	2	3	4	5
6	**3**	**4**	**2**	**5**	**1**
			i		

3	**4**

K-Selection – k = 1 – 2º elemento

0	1	2	3	4	5
6	**3**	**4**	**2**	**5**	**1**
			i		

3	**4**

K-Selection – k = 1 – 2º elemento

0	1	2	3	4	5
6	**3**	**4**	**2**	**5**	**1**
				i	

2	**3**

K-Selection – k = 1 – 2º elemento

0	1	2	3	4	5
6	**3**	**4**	**2**	**5**	**1**
				i	

2	**3**

K-Selection – k = 1 – 2º elemento

0	1	2	3	4	5
6	**3**	**4**	**2**	**5**	**1**
					i

2	**3**

K-Selection – k = 1 – 2º elemento

0	1	2	3	4	5
6	**3**	**4**	**2**	**5**	**1**
					i

2	**3**

K-Selection – k = 1 – 2º elemento

0	1	2	3	4	5
6	**3**	**4**	**2**	**5**	**1**

1	**2**

K-Selection – k = 1 – 2º elemento

0	1	2	3	4	5
6	**3**	**4**	**2**	**5**	**1**

1	**2**

K-Selection – Estratégia melhorada

- O que demora mais tempo ?

- Ordenar os primeiros $(k + 1)$ elementos

  $O(k^2)$ ou $O(k \log k)$

- Para cada um dos restantes $(n – k – 1)$ elementos
  - Ignorar se maior ou igual que S[k] **$O(1)$**
  - Caso contrário, inserir ordenadamente em S **$O(k)$**

K-Selection – Estratégia melhorada

- Ordem de complexidade ?

$$O(k \log k) + (n - k - 1) \times O(k) = O(n \times k)$$

- Encontrar o elemento mediano $\quad O(n^2)$

- Quanto tempo ?
  - 1.000.000 elementos / 10.000.000 elementos / ...

K-Selection – Estratégia melhorada

- Será ainda possível fazer melhor ?

- O que poderemos usar dos algoritmos e estruturas de dados que conhecemos ?

- Será necessário manter o conjunto dinâmico de (k + 1) elementos completamente ordenado ?

Sugestões de leitura

Sugestões de leitura

- A. Levitin, Introduction to the Design and Analysis of Algorithms, 3rd Edition, 2012
  - Capítulo 5: secção 5.2
  - Capítulo 4: secção 4.5
- M. A. Weiss, Data Structures and Algorithm Analysis in C++, 4th Edition, 2014
  - Capítulo 1: secção 1.1
  - Capítulo 7: secção 7.7