Grafos V

Joaquim Madeira

22/06/2021

Ficheiro ZIP

- Está disponível no Moodle um ficheiro ZIP de suporte aos tópicos de hoje

- Módulo para gerar sucessivas permutações
- Módulo para gerar sucessivos subconjuntos

- Exemplos de aplicação da estratégia de procura exaustiva

Sumário

- Recap
- Determinação de Ciclos Hamiltonianos (“Hamilton Tour”)
- Procura Exaustiva
- O Problema do Caixeiro Viajante (“The Traveling Salesman Problem”)
- O Problema da Soma de Subconjuntos (“The Subset Sum Problem”)
- O Problema da Mochila (“The 0-1 Knapsack Problem”)
- Geração de Quadrados Mágicos
- Sugestão de leitura

Recapitulação

Problemas de Otimização Combinatória

- Conjunto finito de soluções
- De entre todas as soluções, determinar a(uma) solução ótima
  - Podem existir soluções ótimas alternativas

- Árvore dos caminhos mais curtos com origem num vértice s
  - Algoritmo de Dijkstra
- MST – Árvore geradora de custo total mínimo
  - Algoritmo de Kruskal
  - Algoritmo de Prim

Algoritmos Vorazes / “Greedy”

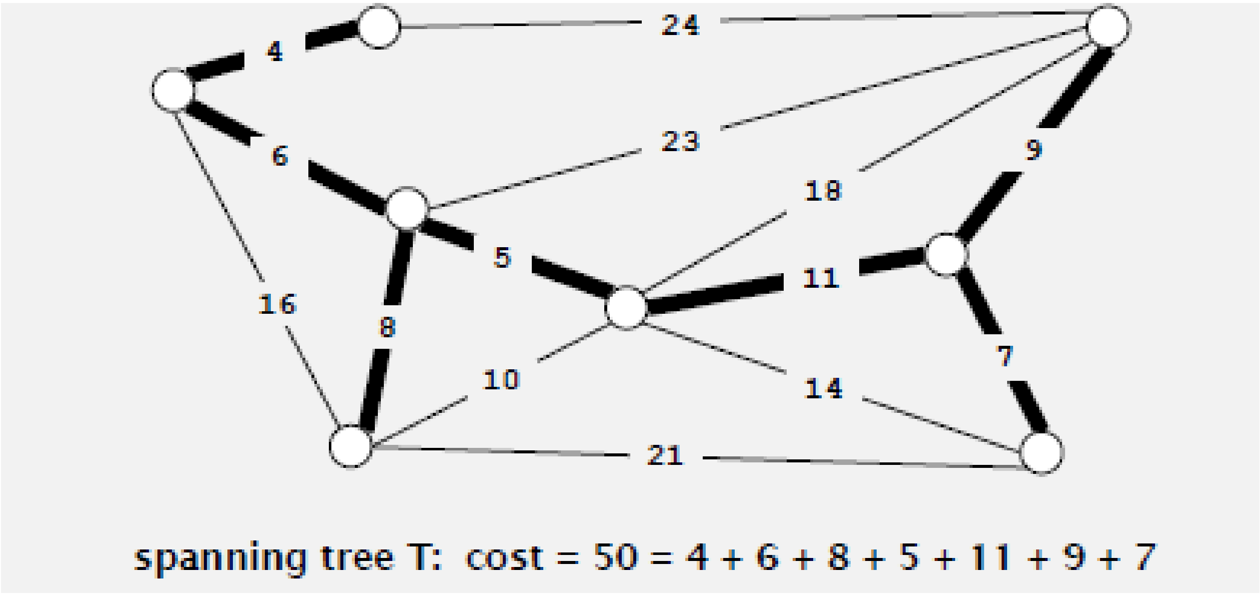
- Construir a solução passo a passo
- Efetuando uma sucessão de escolhas localmente ótimas
- E que são irreversíveis

- Usar uma PRIORITY QUEUE baseada numa HEAP binária
- Obter o próximo vértice / aresta sem grande esforço computacional

- Há outras estruturas de dados que se podem usar
- A ordem de complexidade do algoritmo depende dessa escolha

Árvore Geradora de Custo Mínimo

- Determinar a (uma) árvore geradora de custo total mínimo
  - Soma dos pesos associados às arestas da árvore
  - Assegurar a conectividade entre qualquer par de nós com o menor custo

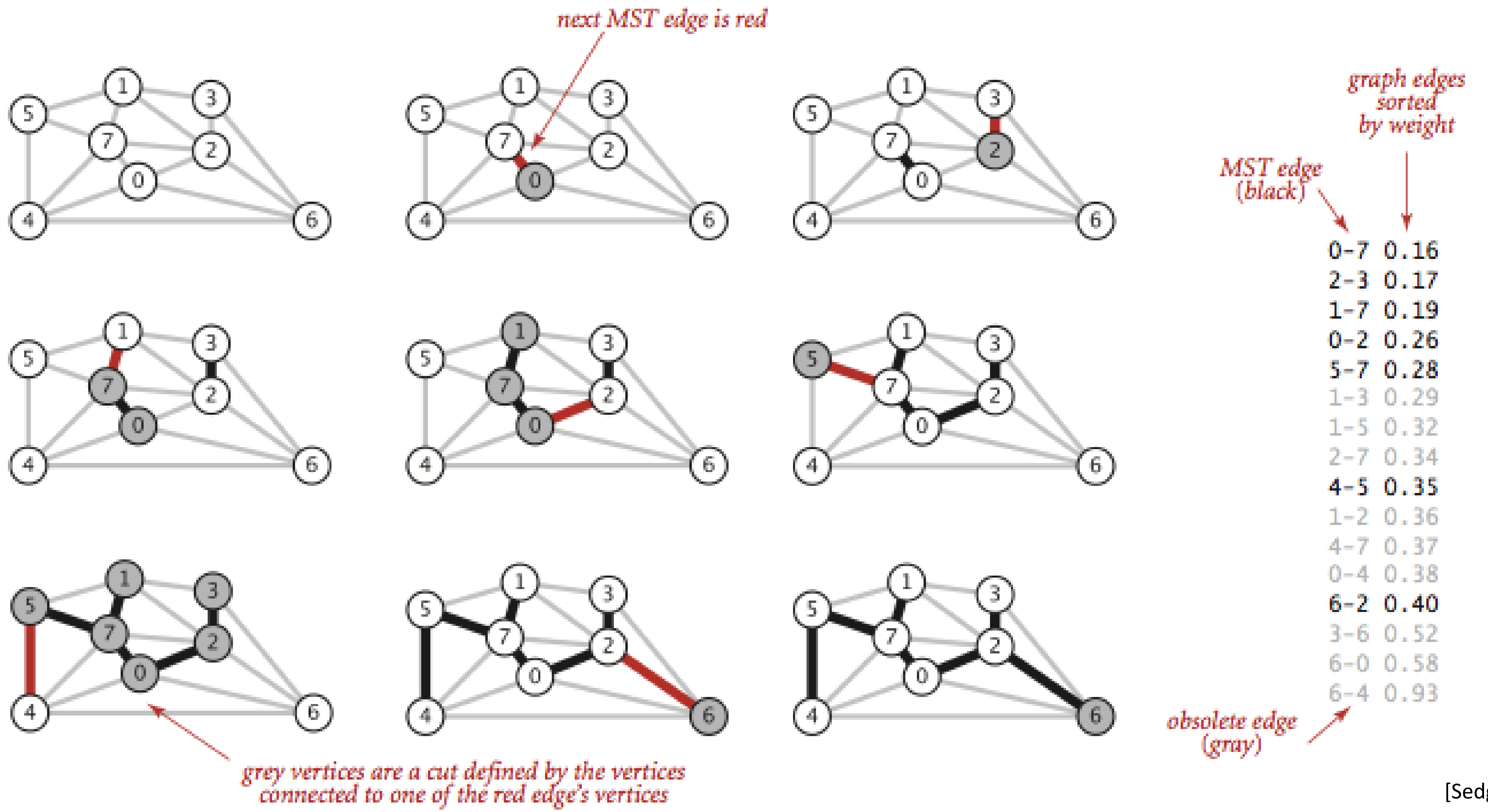


[Sedgewick & Wayne]

Algoritmo de Kruskal

- Ordenar as arestas de acordo com o custo associado
- Começar com uma floresta de árvores, cada uma com um só vértice
- Sucessivamente adicionar uma aresta de menor custo que não origina um ciclo
  - Reunião de duas árvores
  - Como verificar que não se forma um ciclo ?

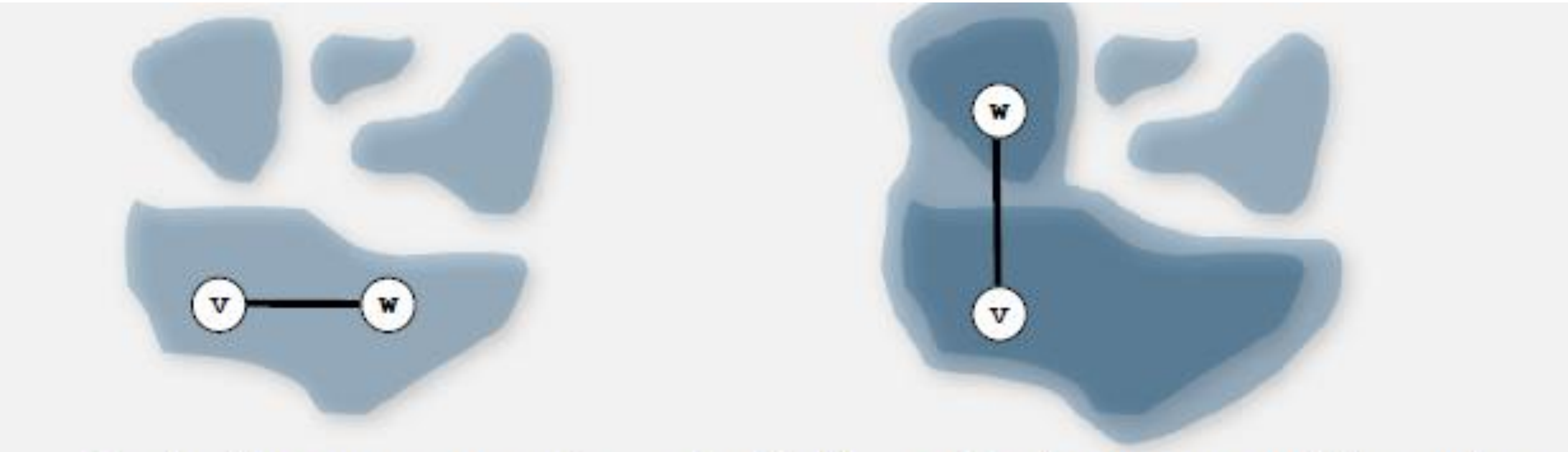
Algoritmo de Kruskal



[Sedgewick & Wayne]

Como verificar que não se forma um ciclo ?

- Estrutura de dados UNION-FIND



Case 1: adding v–w creates a cycle
Case 2: add v–w to T and merge sets containing v and w

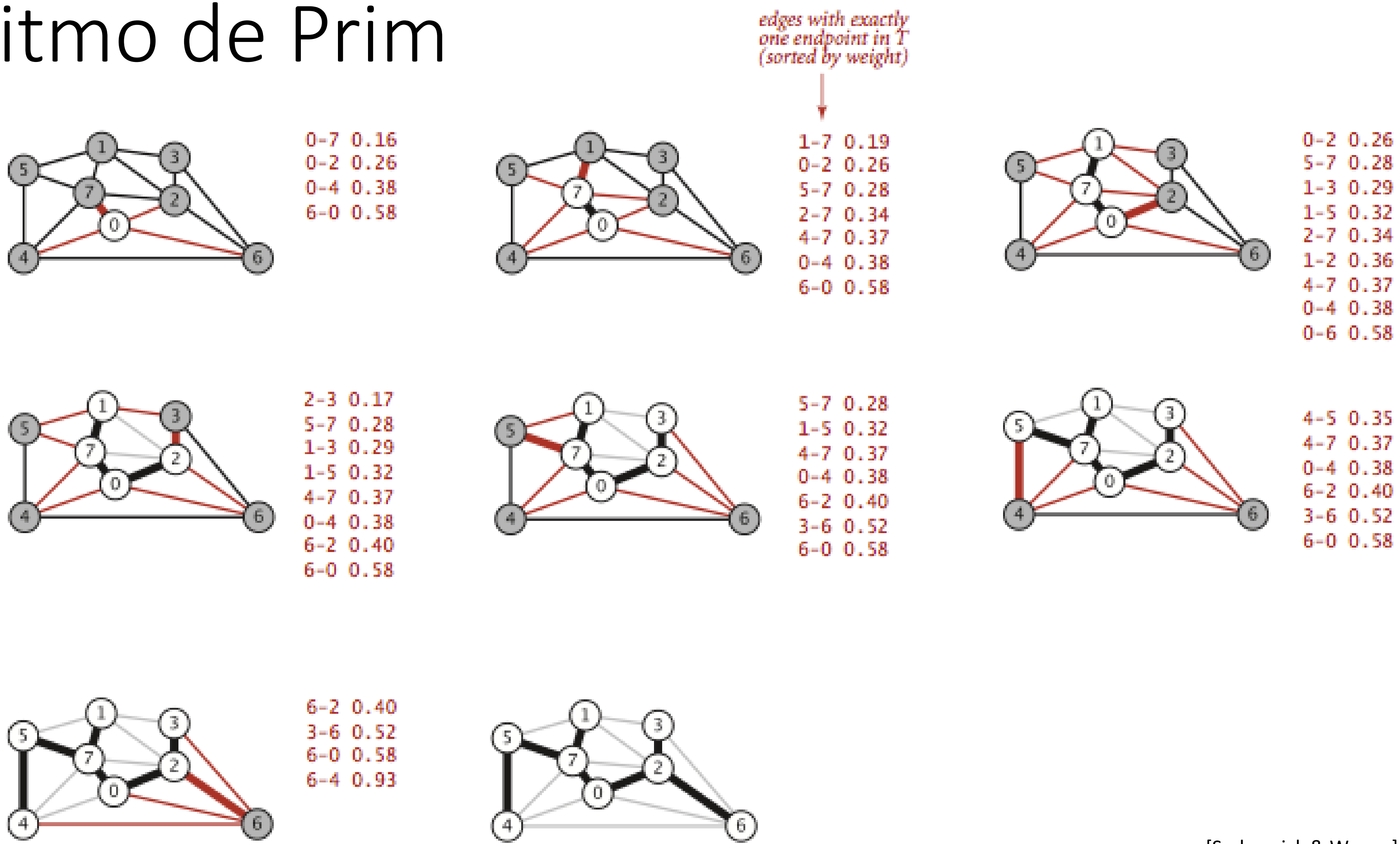
[Sedgewick & Wayne]

Algoritmo de Prim

- Começar com uma árvore T, com um só vértice de G
- Sucessivamente adicionar uma aresta a T : uma aresta mais curta com (apenas) um dos seus vértices em T
  - Não se cria um ciclo !!

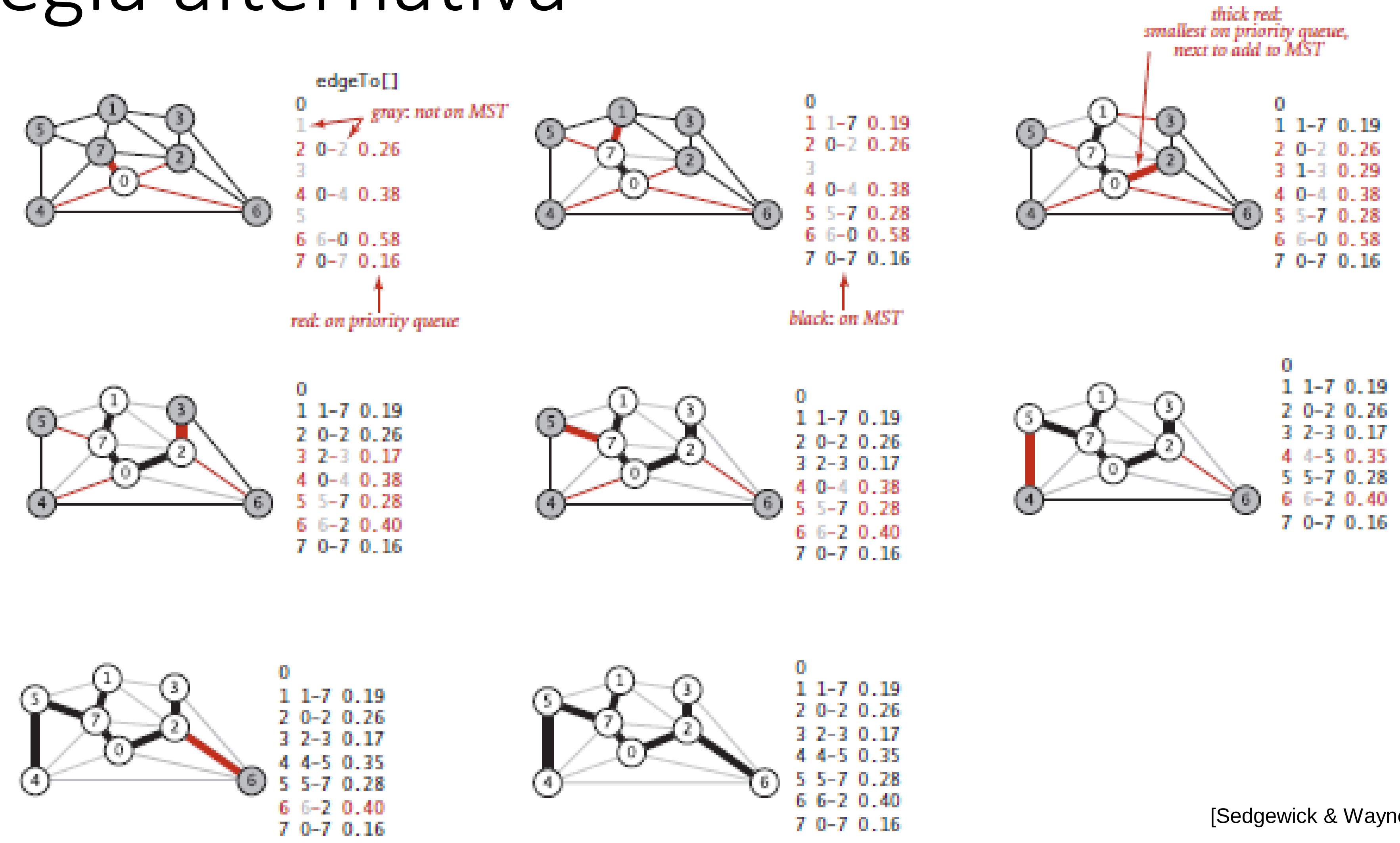
- Manter o conjunto de arestas candidatas
- Usar uma PRIORITY-QUEUE

Algoritmo de Prim



[Sedgewick & Wayne]

Estratégia alternativa



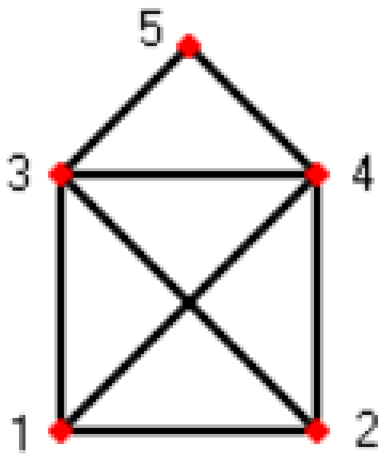
[Sedgewick & Wayne]

Problema das Pontes de Koenigsberg (1736)

[Wikipedia]

Caminho Euleriano / Circuito Euleriano

- Grafo / Grafo orientado
- Caminho que contém uma única vez cada uma das arestas de um grafo
- Circuito que contém uma única vez cada uma das arestas de um grafo
- Qual é a sequência de arestas ?



- Há algum caminho Euleriano ?
- Há algum circuito Euleriano ?

[Wikipedia]

Algoritmo de Fleury (1883)

- Assegurar que cada vértice tem grau par
- v = escolher um qualquer vértice inicial
- Em v, escolher a próxima aresta (v, w) da solução

  Condição : a escolha de (v, w) não torna o grafo desconexo, a menos que seja a única escolha possível – ponte / istmo ?

  Adicionar (v, w) à solução

  v = w

  Apagar (v, w)

  Apagar v, se é agora um vértice isolado

Problemas ?

- Trabalhar sobre uma cópia do grafo dado

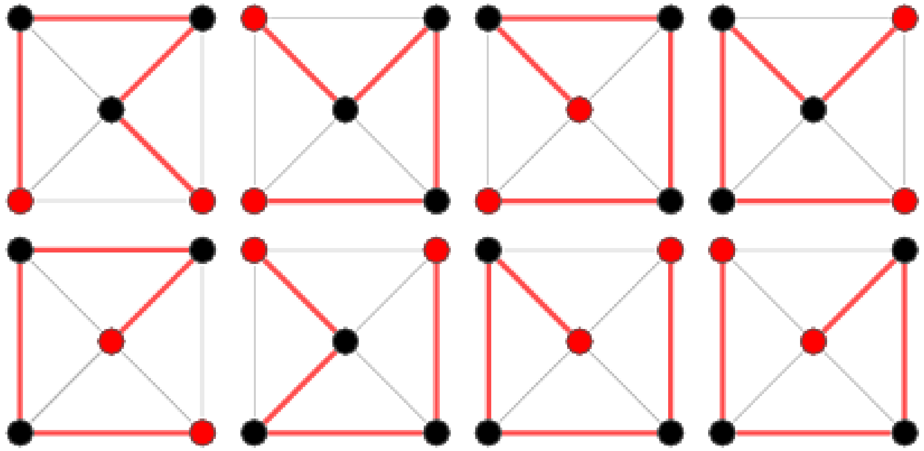
- Como verificar se uma aresta é um istmo / ponte e não pode ser apagada sem tornar o grafo desconexo ?
- Remover tentativamente a aresta e verificar se os outros vértices continuam a ser alcançáveis
  - Sucessivas travessias em profundidade, por exemplo

- Há algoritmos alternativos mais eficientes…

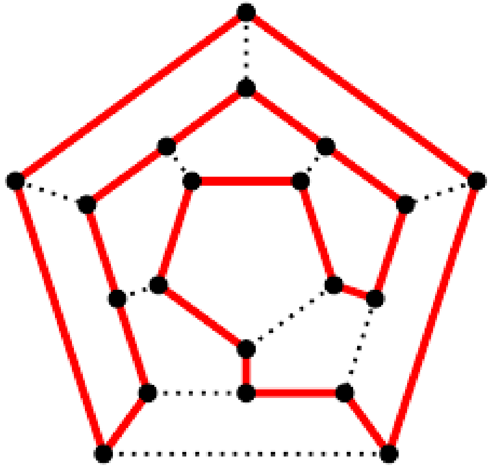
Caminhos e Ciclos Hamiltonianos

Caminho Hamiltoniano / Ciclo Hamiltoniano

- Grafo / Grafo orientado
- Caminho que contém uma única vez cada um dos vértices de um grafo
- Ciclo que contém uma única vez cada um dos vértices de um grafo



[Mathworld]



[Wikipedia]

Problema do Ciclo Hamiltoniano

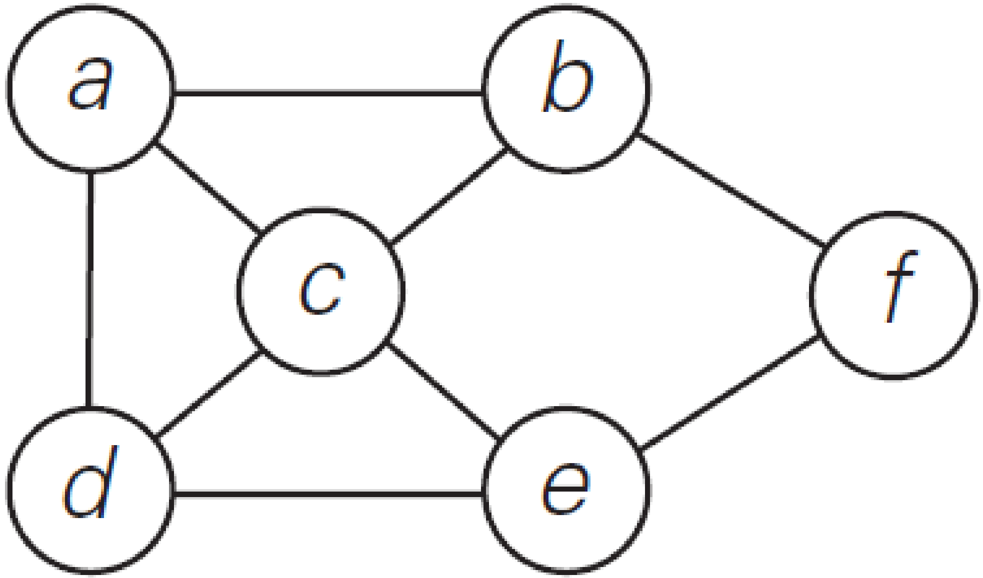
- Dado um grafo/grafo orientado G(V,E), G tem um Ciclo Hamiltoniano ?

- Problema de Decisão
  - Resposta: SIM ou NÃO
- Problema NP-Completo
  - Veremos com o mais cuidado na próxima semana…

- Formulação simples, mas "difícil" de resolver, qualquer que seja o grafo
  - Contrastar com o Problema do Circuito Euleriano !!

Tarefa

- Este grafo tem um Ciclo Hamiltoniano ?
- Como fazer ?



[Levitin]

Procura Exaustiva

Procura Exaustiva

- Estratégia de força-bruta aplicada a problemas combinatórios
  - I.e., há um conjunto finito de soluções admissíveis

- Algoritmo
  - Enumerar todas as possíveis soluções candidatas
  - Verificar se cada uma satisfaz as restrições do problema
  - Se necessário, escolher uma solução do conjunto de soluções admissíveis

- Como assegurar que foram verificadas todas as soluções candidatas ?

Procura Exaustiva

- Algoritmo básico

c ← gerar a primeira solução candidata
enquanto (c é candidata) faz
  se (c é uma solução válida)
  então imprimir (c)
  c ← gerar a próxima solução candidata, se existir

Procura Exaustiva

- Podemos parar após
  - Encontrar a primeira solução válida
  - Encontrar um dado número de soluções válidas
  - Testar um dado número de soluções candidatas
  - Gastar uma dada quantidade de tempo de CPU

Procura Exaustiva

- Características
  - Muitas vezes é simples de implementar
  - Irá sempre encontrar uma solução, caso exista (?!?)
- **MAS,** tempo proporcional ao número de soluções candidatas
  - Explosão combinatória !
  - Só praticável para instâncias “muito pequenas” !!
- Como tornar a procura mais rápida ?

Maior rapidez ?

- Reduzir a dimensão do espaço de procura
  - Usar análise/heurísticas para reduzir o número de soluções candidatas
  - E.g., o problema das n-damas

- Reordenar o espaço de procura
  - Útil quando procuramos uma só solução
  - O tempo de execução depende da ordem pela qual as soluções candidatas são testadas
  - Testar primeiro as soluções mais promissoras !!

O Problema do Caixeiro Viajante – Traveling Salesperson Problem

O Problema do Caixeiro Viajante

- Determinar o caminho mais curto que atravessa n cidades

- **MAS**, visitando cada cidade uma só vez !

- E retornando à cidade inicial !

- Problema de otimização combinatória

[Wikipedia]

O Problema do Caixeiro Viajante

- Modelar o problema usando um grafo G com as distâncias entre cidades associadas às arestas

- Determinar o ciclo Hamiltoniano mais curto definido em G
  - Ciclo de menor custo / distância
  - Atravessa (uma só vez) cada um dos vértices

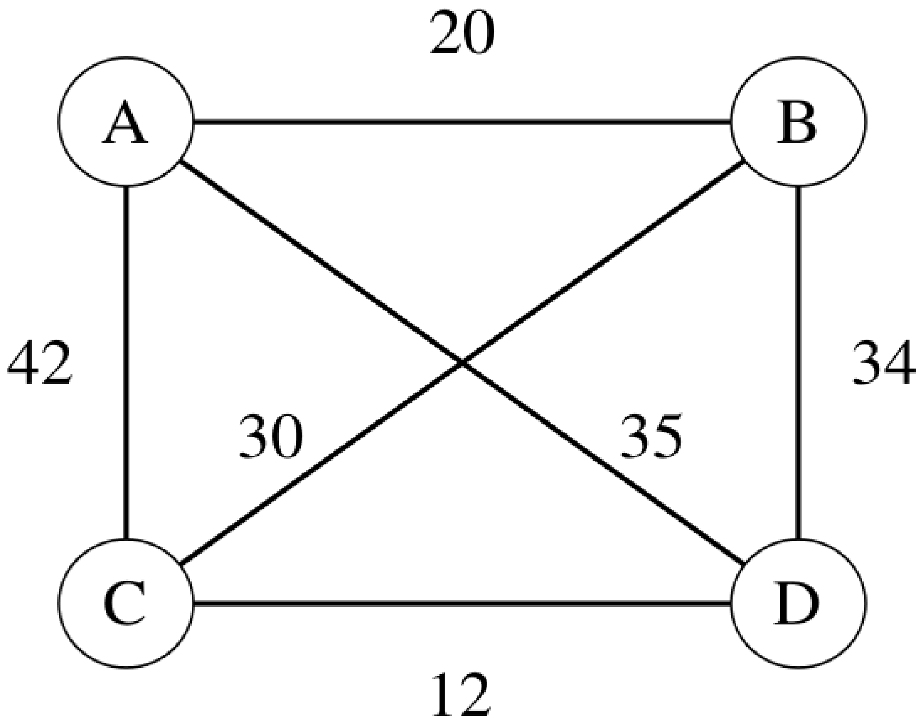
- Problema NP-difícil !!

O Problema do Caixeiro Viajante

- Ciclo Hamiltoniano
  - Sequência de (n + 1) vértices adjacentes
  - O primeiro vértice é o ultimo vértice !

- Como fazer ?
  - Escolher um vértice qualquer como vértice inicial
  - Gerar as (n – 1)! permutações possíveis dos vértices intermédios
  - Para cada um dos ciclos, calcular o seu custo / distância
  - E guardar o ciclo mais económico / mais curto

O Problema do Caixeiro Viajante



[Wikipedia]

- Qual é a solução ?

O Problema do Caixeiro Viajante

- Questões
  - Como armazenar o grafo ?
  - O grafo é completo ?
  - Como gerar todas as permutações ?

- Desempenho computacional
  - O(n!)
  - A procura exaustiva só pode ser aplicada a instâncias muito pequenas !! Alternativas ?
  - São possíveis pequenos melhoramentos

permutation.h

```
int* createFirstPermutation(int n);
/* Cria o array de permutacoes com dimensao n, sendo a primeira permutacao
 * 123456...n */

void copyPermutation(int* original, int* copy, int n);
/* Copia a permutacao actual */

void destroyPermutation(int** p);
/* Destroi o array de permutacoes */

void printPermutation(int* p, int n);
/* Imprime a permutacao actual */

int nextPermutation(int* v, int n);
/* Cria a permutacao seguinte */
```

Tarefa – Problema do Caixeiro Viajante

- Implementar o algoritmo de procura exaustiva

Soma de Subconjuntos – The Subset Sum Problem

O Problema da Soma de Subconjuntos

- Problema de Decisão
- Dado um conjunto A com n elementos inteiros positivos
- Dado um número inteiro positivo S
- Existe um subconjunto de elementos cuja soma seja igual a S ?
  - SIM / NÃO

- Problema combinatório
- NP-Completo !!

O Problema da Soma de Subconjuntos

- Problema de procura – Qual é o subconjunto ?
- Encontrar um subconjunto de um dado conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ de n números inteiros positivos
- Cuja soma é igual a um dado número inteiro positivo S

- Exemplo
  - A = {1, 2, 5, 6, 8} e S = 9
  - Duas soluções : {1, 2, 6} e {1, 8}

- Outra instância
  - A = {3, 5, 6, 7} e S = 15
  - Solução(ões) ?

binarycounter.h

```c
int* createBinCounter(int size);
/* Cria o contador binário com dimensão size, inicializado a zeros */

void copyBinCounter(int* original, int* copy, int size);
/* Copia o contador actual */

void destroyBinCounter(int** binCounter);
/* Destroi o contador */

void printBinCounter(int* binCounter, int size);
/* Imprime o contador */

int increaseBinCounter(int* binCounter, int size);
/* Incrementa o contador */
```

void subsetSumSearch(…)

```c
void subsetSumSearch(int* a, int size, int sum) {
  // Gerar todos os sub-conjuntos dos indices do array
  // Verificar, para cada um, o valor da soma dos elementos
  // Aproveitar a representacao binaria para os gerar !
```

```c
// O numero de sub-conjuntos e 2^n

int numSubSets = (int)pow(2.0, size);

// Nao se testa o (sub-)conjunto vazio

int* binaryCounter = createBinCounter(size);
```

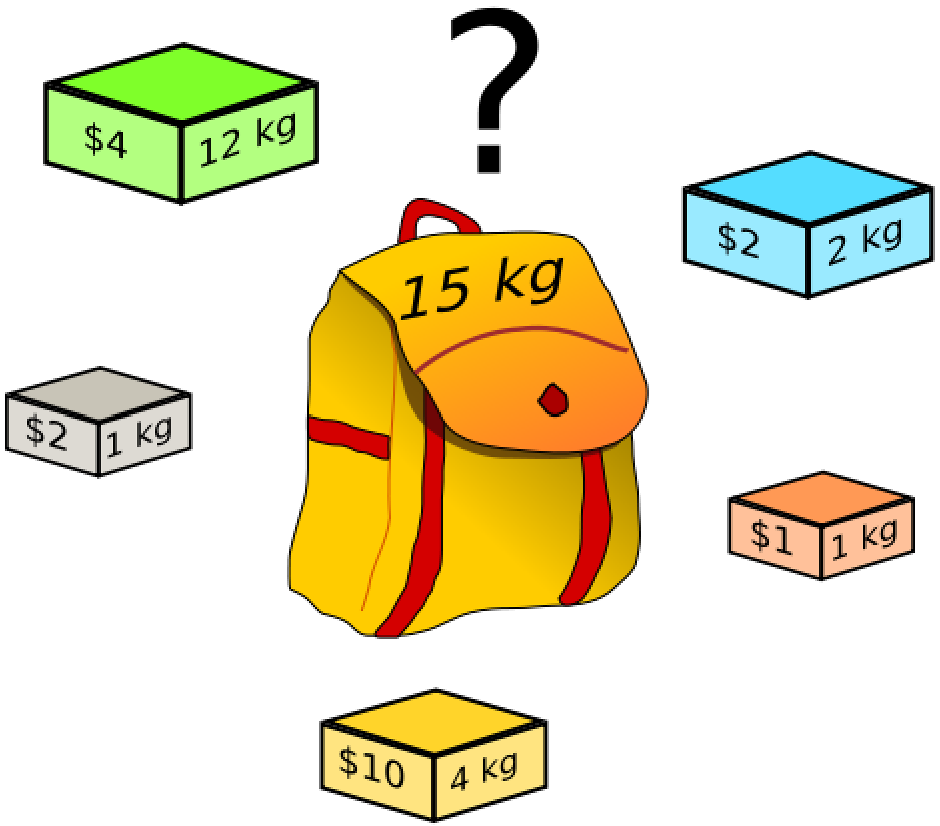
Iterar sobre os subconjuntos de índices

```
for (subSetIndex = 1; subSetIndex < numSubSets; subSetIndex++) {
  sumElements = 0;

  increaseBinCounter(binaryCounter, size);

  for (i = 0; i < size; i++) {
    if (binaryCounter[i] && ((sumElements += a[i]) > sum)) {
      break; /* Eficiencia --- Testar tambem sem este break !!*/
    }
  }

  // Listar todas as solucoes encontradas

  if (sumElements == sum) {
    solutionFound(sum, a, size, binaryCounter);
  }
}
```

O Problema da Mochila – The 0-1 Knapsack Problem

O Problema da Mochila

- Determinar o subconjunto mais valioso de itens, que cabe na mochila



[Wikipedia]

O Problema da Mochila

- Dados n itens
  - Com peso $w_1, w_2, \dots , w_n$
  - Com valor $v_1, v_2, \dots , v_n$
- Uma mochila de capacidade W

- Qual é o (um) subconjunto mais valioso de itens, que cabe na mochila ?

- Problema NP-difícil !!

O Problema da Mochila

- Como formular ?

$$\max \sum x_i v_i$$

sujeito a $\quad \sum x_i w_i \leq W$

com $\quad x_i \text{ in } \{0, 1\}$

O Problema da Mochila

- Como fazer ?
  - Gerar os 2^n subconjuntos do conjunto de n itens
  - Para cada um dos subconjuntos, calcular o seu peso total
    - Subconjunto admissível ?
  - E guardar o / um subconjunto mais valioso que cabe na mochila

O Problema da Mochila

- Mochila de capacidade $W = 10$

- 4 itens
  - Item 1 : $w = 7$; $v = \$42$
  - Item 2 : $w = 3$; $v = \$12$
  - Item 3 : $w = 4$; $v = \$40$
  - Item 4 : $w = 5$; $v = \$25$

- Solução ótima ?

O Problema da Mochila

- Questões
  - Como gerar todos os subconjuntos ?
  - A ordem é importante ?
- Desempenho computacional
  - $O(2^n)$
  - A procura exaustiva só pode ser aplicada a instâncias muito pequenas !!
  - Alternativas ?
    - Soluções exatas vs. aproximadas

int* knapsackSearch(…)

```c
int* knapsackSearch(float* weight, float* value, int n, float capacity) {
  /* Gerar todos os sub-conjuntos dos indices do array de items */
  /* Aproveitar a representacao binaria para os gerar ! */
  /* Verificar, para cada um, o valor da soma dos pesos e dos valores */
```

```c
/* O numero de sub-conjuntos e 2^n */

int numSubSets = (int)pow(2.0, n);

/* Nao se testa o (sub-)conjunto vazio */

int* binaryCounter = createBinCounter(n);

int* currentBestSol = createBinCounter(n);
```

Iterar sobre os subconjuntos de itens

```
for (subSetIndex = 1; subSetIndex < numSubSets; subSetIndex++) {
  sumWeights = 0;
  sumValues = 0;

  increaseBinCounter(binaryCounter, n);

  for (i = 0; i < n; i++) {
    if (binaryCounter[i] && ((sumWeights += weight[i]) > capacity)) {
      break; /* EficiEncia --- Testar tambem sem este break !! */
    }
    if (binaryCounter[i]) {
      sumValues += value[i];
    }
  }
```

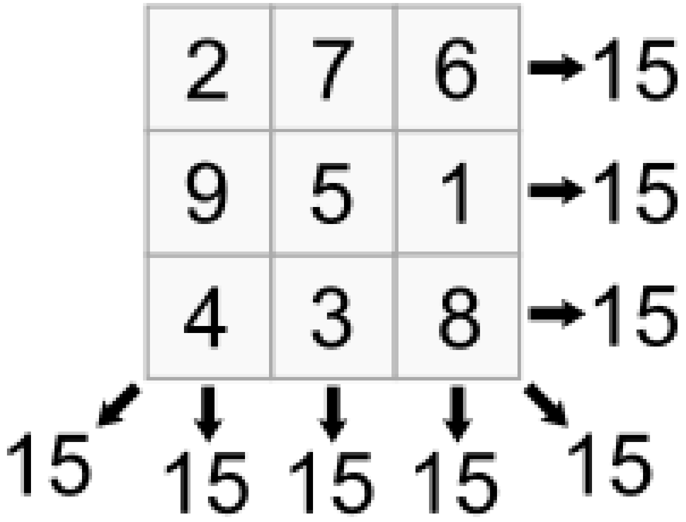
Conseguimos melhorar a solução corrente ?

```
if (sumValues > maxSumValues) {
    maxSumValues = sumValues;

    copyBinCounter(binaryCounter, currentBestSol, n);

    /* Listar as sucessivas melhores solucoes */

    solutionKnapsack(subSetIndex, weight, value, n, capacity, binaryCounter);
  }

  /* Poderia listar tambem eventuais solucoes alternativas !! */
}
```

Quadrados Mágicos

Quadrado Mágico

- Matriz quadrada (n x n)
- Com os elementos 1, 2, 3, … , n^2
- A soma dos elementos de cada linha é igual à soma dos elementos de cada coluna
- E igual à soma dos elementos das duas diagonais principais



[Wikipedia]

Procurar

```c
void magicSquaresSearch(int size) {
  /* Gerar todas as permutacoes dos elementos do array */
  /* Verificar, para cada uma, se se trata de um quadrado magico */

  int sum;
  int permutationIndex = 1;
  int* p;
  p = createFirstPermutation(size);

  do {
    if ((sum = isMagicSquare(p, size))) {
      printf(" *** Permutation %d is a magic square of sum %d :\n\n",
             permutationIndex, sum);
      printMagicSquare(p, size);
    }
    permutationIndex++;
  } while (nextPermutation(p, size));

  destroyPermutation(&p);
}
```

Validar

```c
int isMagicSquare(int* a, int size) {
  int i, j;
  int sum;
  int n = (int)sqrt(size);

  int* sumRow = (int*)calloc(n, sizeof(int));
  int* sumColumn = (int*)calloc(n, sizeof(int));
  int* sumDiag = (int*)calloc(2, sizeof(int));
```

Validar

```c
for (i = 0; i < n; i++) {
  for (j = 0; j < n; j++) {
    sumRow[i] += a[j + i * n];
    sumColumn[j] += a[j + i * n];

    if (i == j) {
      /* Main diagonal */
      sumDiag[0] += a[j + i * n];
    }

    if ((i + j) == (n - 1)) {
      /* The other diagonal */
      sumDiag[1] += a[j + i * n];
    }
  }
}
```

Validar

```c
/* Checking the diagonals */

if (sumDiag[0] != sumDiag[1]) {
  free(sumRow);
  free(sumColumn);
  free(sumDiag);
  return 0;
}

sum = sumDiag[0];

/* Checking the rows */

for (i = 0; i < n; i++) {
  if (sumRow[i] != sum) {
    free(sumRow);
    free(sumColumn);
    free(sumDiag);
    return 0;
  }
}
```

```c
  /* Checking the columns */

  for (i = 0; i < n; i++) {
    if (sumColumn[i] != sum) {
      free(sumRow);
      free(sumColumn);
      free(sumDiag);
      return 0;
    }
  }

  free(sumRow);
  free(sumColumn);
  free(sumDiag);

  return sum;
}
```

Sugestão de Leitura

Sugestão de leitura

- A. Levitin, *“Design and Analysis of Algorithms”*, 3rd. Ed., Pearson, 2012
  - Chapter 3