Aula 11 - Parte 2
Funções de Várias Variáveis Reais: Noções Topológicas em $\mathbb{R}^n$.

Mónica Celis.

Cálculo II -Agrup. IV-5.

2020.

Sumário da Aula 11 - Parte 2.

1. Resolução exercícios Aula 11 - Parte 1.
1. Distancia Euclidiana. Bola aberta. Bola fechada.
2. Ponto interior. Ponto fronteiro. Conjunto aberto /fechado /limitado.
3. Ponto de acumulação/ Isolado.

Resolução Exercícios Aula 11 - Parte 1.

1. Determine o domínio das seguintes funções e descreva-o geometricamente.

(a) $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1+y}}$.

Resolução Exercícios Aula 11 - Parte 1.

1. Determine o domínio das seguintes funções e descreva-o geometricamente.

(a) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1+y}}$.

O domínio de f é o conjunto

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \textit{ tenha significado em } \mathbb{R}\right\}.$$

1. Determine o domínio das seguintes funções e descreva-o geometricamente.

(a) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1+y}}$.

O domínio de f é o conjunto

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \textit{ tenha significado em } \mathbb{R}\right\}.$$

Como a expressão $\sqrt{\dfrac{1+x}{1+y}}$ só tem significado em $\mathbb{R}$ se o radicando for um número real não negativo então devemos ter

Resolução Exercícios Aula 11 - Parte 1.

1. Determine o domínio das seguintes funções e descreva-o geometricamente.

(a) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1+y}}$.

O domínio de f é o conjunto

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \textit{ tenha significado em } \mathbb{R}\right\}.$$

Como a expressão $\sqrt{\dfrac{1+x}{1+y}}$ só tem significado em $\mathbb{R}$ se o radicando for um número real não negativo então devemos ter

$$\frac{1+x}{1+y} \geq 0 \quad \wedge \quad 1+y \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow [(1 + x \geq 0 \ \wedge 1 + y \geq 0) \vee (1 + x \leq 0 \ \wedge 1 + y \leq 0)] \quad \wedge \quad 1 + y \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow [(1 + x \geq 0 \;\wedge 1 + y \geq 0) \vee (1 + x \leq 0 \;\wedge 1 + y \leq 0)] \quad \wedge \quad 1 + y \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow [(x \geq -1 \;\wedge y > -1) \vee (x \leq -1 \;\wedge y < -1)]\,.$$

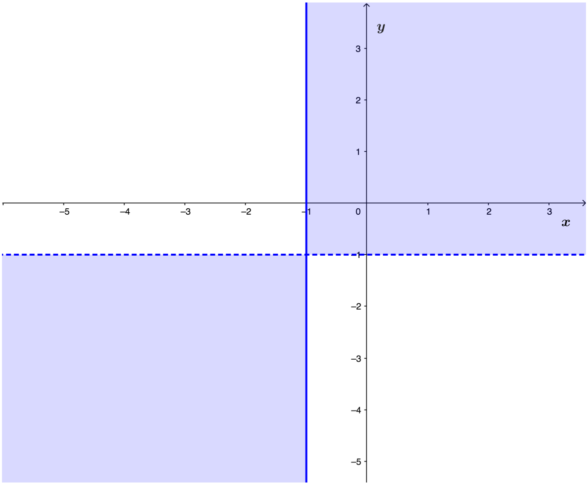
$$\Leftrightarrow [(1+x \geq 0 \ \wedge 1+y \geq 0) \vee (1+x \leq 0 \ \wedge 1+y \leq 0)] \ \ \wedge \ \ 1+y \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow [(x \geq -1 \ \wedge y > -1) \vee (x \leq -1 \ \wedge y < -1)] \, .$$

Logo, o domínio de f é o conjunto

$$D_f = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq -1 \ \wedge y > -1) \vee (x \leq -1 \ \wedge y < -1)\Big\} \, .$$

Representação gráfica.



(b) $g(x,y) = ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right).$

(b) $g(x,y) = ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right).$

Como a expressão $ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)$ só tem significado em $\mathbb{R}$ se o argumento da função logaritmo for positivo e o denominador do argumento diferente de zero, isto é,

(b) $g(x,y) = ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right).$

Como a expressão $ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)$ só tem significado em $\mathbb{R}$ se o argumento da função logaritmo for positivo e o denominador do argumento diferente de zero, isto é,

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x} > 0 \ \wedge \sqrt{x^2+y^2}+x \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \ \sqrt{x^2+y^2}-x > 0 \wedge \sqrt{x^2+y^2} \neq -x$$

(b) $g(x,y) = ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)$.

Como a expressão $ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)$ só tem significado em $\mathbb{R}$ se o argumento da função logaritmo for positivo e o denominador do argumento diferente de zero, isto é,

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x} > 0 \ \wedge \sqrt{x^2+y^2}+x \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \ \sqrt{x^2+y^2}-x > 0 \wedge \sqrt{x^2+y^2} \neq -x$$

$$\Leftrightarrow \ \sqrt{x^2+y^2} > x \wedge y \neq 0.$$

(b) $g(x,y) = ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right).$

Como a expressão $ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)$ só tem significado em $\mathbb{R}$ se o argumento da função logaritmo for positivo e o denominador do argumento diferente de zero, isto é,

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x} > 0 \ \wedge \sqrt{x^2+y^2}+x \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \ \sqrt{x^2+y^2}-x > 0 \wedge \sqrt{x^2+y^2} \neq -x$$

$$\Leftrightarrow \ \sqrt{x^2+y^2} > x \wedge y \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \ y^2 > 0 \wedge y \neq 0$$

(b) $g(x,y) = ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right).$

Como a expressão $ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)$ só tem significado em $\mathbb{R}$ se o argumento da função logaritmo for positivo e o denominador do argumento diferente de zero, isto é,

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x} > 0 \ \wedge \sqrt{x^2+y^2}+x \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \ \sqrt{x^2+y^2}-x > 0 \wedge \sqrt{x^2+y^2} \neq -x$$

$$\Leftrightarrow \ \sqrt{x^2+y^2} > x \wedge y \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \ y^2 > 0 \wedge y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \ y \neq 0$$

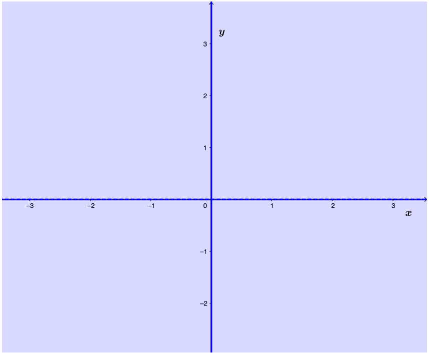
Logo, o domínio de g é o conjunto

$$D_g = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\right\}.$$

Logo, o domínio de g é o conjunto

$$D_g = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0 \right\}.$$

Representação gráfica.



(c) $h(x, y) = \dfrac{2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}$.

(c) $h(x,y) = \dfrac{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$.

Como a expressão $\dfrac{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$ só tem significado em $\mathbb{R}$ se o radicando for um número real não negativo e o denominador diferente de 0 então devemos ter

(c) $h(x,y)=\dfrac{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$.

Como a expressão $\dfrac{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$ só tem significado em $\mathbb{R}$ se o radicando for um número real não negativo e o denominador diferente de 0 então devemos ter

$$4-x^2-y^2\geq 0 \quad\wedge\quad x^2+y^2\neq 0.$$

$$\Leftrightarrow\; x^2+y^2\leq 4 \quad\wedge\quad (x,y)\neq(0,0).$$

Logo, o domínio de g é o conjunto

$$D_g = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x,y) \neq (0,0)\right\}.$$

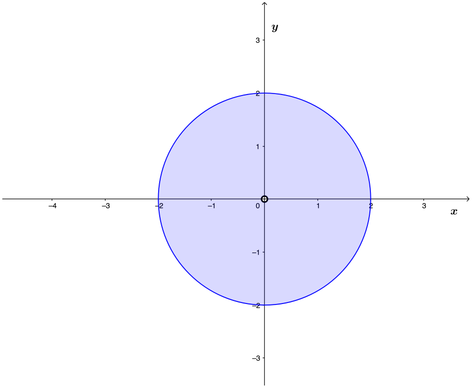
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Logo, o domínio de g é o conjunto

$$D_g = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x,y) \neq (0,0)\Big\}.$$

$$= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 4\Big\}.$$

Representação gráfica.



2. Determinar as curvas/superfícies de nível das seguintes funções e descreva do ponto de vista geométrico. Desenhar as curvas de nível para os valores de k dados.

(a) $f(x,y) = 2 - \left(x^2 + y^2\right),\ k = -3, -2, -1, 0, 1, 2.$

2. Determinar as curvas/superfícies de nível das seguintes funções e descreva do ponto de vista geométrico. Desenhar as curvas de nível para os valores de k dados.

(a) $f(x,y) = 2 - \left(x^2 + y^2\right),\ k = -3, -2, -1, 0, 1, 2.$

Para $k \leq 2$, s curva de nível k de f é

2. Determinar as curvas/superfícies de nível das seguintes funções e descreva do ponto de vista geométrico. Desenhar as curvas de nível para os valores de k dados.

(a) $f(x,y) = 2 - \left(x^2 + y^2\right), \; k = -3, -2, -1, 0, 1, 2.$

Para $k \leq 2$, s curva de nível k de f é

$$\mathcal{C}_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 2 - \left(x^2 + y^2\right) = k\right\}.$$

2. Determinar as curvas/superfícies de nível das seguintes funções e descreva do ponto de vista geométrico. Desenhar as curvas de nível para os valores de k dados.

(a) $f(x,y) = 2 - \left(x^2 + y^2\right),\ k = -3, -2, -1, 0, 1, 2.$

Para $k \leq 2$, s curva de nível k de f é

$$\mathcal{C}_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 2 - \left(x^2 + y^2\right) = k\right\}.$$

A curva de nível k é, para $k < 2$, um circunferência de raio $\sqrt{2-k}$ e centro em $(0,0)$, para $k = 2$ temos uma curva degenerada $(x = y = 0)$

2. Determinar as curvas/superfícies de nível das seguintes funções e descreva do ponto de vista geométrico. Desenhar as curvas de nível para os valores de k dados.

(a) $f(x,y) = 2 - \left(x^2 + y^2\right),\ k = -3, -2, -1, 0, 1, 2.$

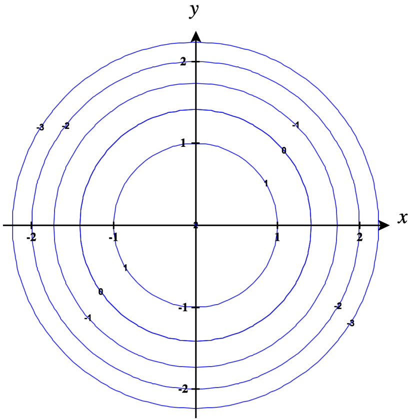
Para $k \leq 2$, s curva de nível k de f é

$$\mathcal{C}_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 2 - \left(x^2 + y^2\right) = k\right\}.$$

A curva de nível k é, para $k < 2$, um circunferência de raio $\sqrt{2-k}$ e centro em $(0,0)$, para $k = 2$ temos uma curva degenerada $(x = y = 0)$

$$\mathcal{C}_{-3} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 2 - \left(x^2 + y^2 - 3\right)\right\}.$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 5\right\}.$$

$$\mathcal{C}_{-3} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 5\right\}$$
$$\mathcal{C}_{-2} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 4\right\}$$
$$\mathcal{C}_{-1} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 3\right\}.$$
$$\mathcal{C}_{0} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 2\right\}.$$
$$\mathcal{C}_{1} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 1\right\}.$$
$$\mathcal{C}_{2} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 0\right\}.$$
$$\mathcal{C}_{2} = \left\{(0, 0)\right\}.$$



(b) $h(x, y) = 2x^2 + 4y^2, \; k = 2, 3, 4, 8.$

(b) $h(x, y) = 2x^2 + 4y^2,\ k = 2, 3, 4, 8.$

Para $k \geq 0$, s curva de nível k de g é

(b) $h(x, y) = 2x^2 + 4y^2, \; k = 2, 3, 4, 8.$

Para $k \geq 0$, s curva de nível k de g é

$$\mathcal{C}_k = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 2x^2 + 4y^2 = k\right\}.$$

(b) $h(x, y) = 2x^2 + 4y^2, \; k = 2, 3, 4, 8.$

Para $k \geq 0$, s curva de nível k de g é

$$\mathcal{C}_k = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 2x^2 + 4y^2 = k\right\}.$$

A curva de nível k é, para $k > 0$, uma elipse centrada na origem e vértices com eixo maior paralelo ao eixo dos x, para $k = 0$ temos uma curva degenerada $(x = y = 0)$

(b) $h(x, y) = 2x^2 + 4y^2,\ k = 2, 3, 4, 8.$

Para $k \geq 0$, s curva de nível k de g é

$$\mathcal{C}_k = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 2x^2 + 4y^2 = k\right\}.$$

A curva de nível k é, para $k > 0$, uma elipse centrada na origem e vértices com eixo maior paralelo ao eixo dos x, para $k = 0$ temos uma curva degenerada ($x = y = 0$)

$$\mathcal{C}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 2 = 2x^2 + 4y^2\right\}.$$

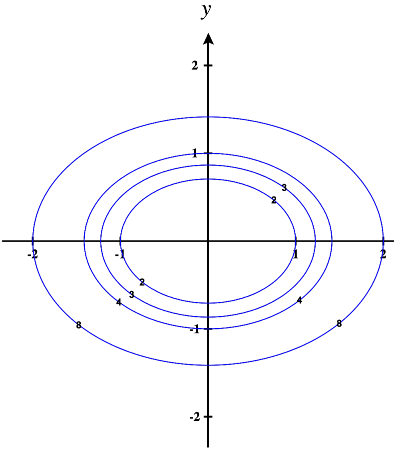
$$= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1/2} = 1\right\}.$$

$$\mathcal{C}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1/2} = 1\right\}$$

$$\mathcal{C}_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{3/2} + \frac{y^2}{3/4} = 1\right\}$$

$$\mathcal{C}_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1\right\}$$

$$\mathcal{C}_8 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1\right\}$$



(c) $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$

(c) $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Para $k \geq 0$, s curva de nível k de h é

(c) $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Para $k \geq 0$, s curva de nível k de h é

$$\mathcal{S}_k = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = k \right\}.$$

(c) $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2.$

Para $k \geq 0$, s curva de nível k de h é

$$\mathcal{S}_k = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = k\right\}.$$

A curva de nível k é, para $k > 0$, a superfície esférica de centro $(0,0,0)$ e raio $\sqrt{k}$, para $k = 0$ temos uma uma quádrica degenerada $(x = y = z = 0)$.

Definição 5

A distancia euclidiana entre dois pontos (x_1, x_2) *e* (y_1, y_2) *de* $\mathbb{R}^2$ *define-se por*

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Definição 5

A distancia euclidiana entre dois pontos (x_1, x_2) *e* (y_1, y_2) *de* $\mathbb{R}^2$ *define-se por*

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Definimos em $\mathbb{R}^n$*, de modo análogo, a* ***distancia euclidiana*** *entre dois pontos por*

$$d(X, Y) = ||\overrightarrow{XY}|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

para $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *e* $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$.

Exemplo 10

Determine o conjunto de pontos $X \in \mathbb{R}^2$ *tais que estejam a uma distancia igual ou menor do que 2 do ponto* $P(1, 2)$.

Exemplo 10

Determine o conjunto de pontos $X \in \mathbb{R}^2$ tais que estejam a uma distancia igual ou menor do que 2 do ponto $P(1,2)$.
Seja $X(x_1, x_2)$ queremos que $d(X,P) \leq 2$, isto é,

$$\sqrt{(x_1-1)^2+(x_2-2)^2} \leq 2 \Leftrightarrow (x_1-1)^2+(x_2-2)^2 \leq 4$$

Exemplo 10

Determine o conjunto de pontos $X \in \mathbb{R}^2$ tais que estejam a uma distancia igual ou menor do que 2 do ponto $P(1, 2)$.
Seja $X(x_1, x_2)$ queremos que $d(X, P) \leq 2$, isto é,

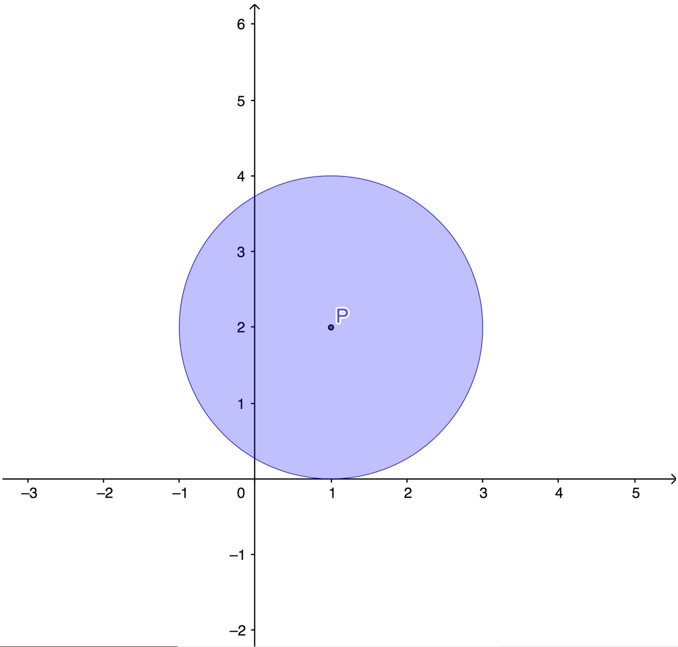
$$\sqrt{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2} \leq 2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 4$$

Logo, o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ pedido é

$$\left\{ X \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 4 \right\}.$$

A representação gráfica do conjunto é:

A representação gráfica do conjunto é:



Definição 6

Sejam $P \in \mathbb{R}^n$ e $r \in \mathbb{R}^+$, definimos

- *A **bola aberta de centro em** P **e raio** r como o conjunto*

$$B_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^n : d(X, P) < r\}.$$

- *A **bola fechada de centro em** P **e raio** r como o conjunto*

$$\overline{B}_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^n : d(X, P) \leq r\}.$$

Em particular,

Em particular,
Em $\mathbb{R}$: $B_r(p) =]p - r, p + r[$, intervalo aberto.

Em particular,
Em $\mathbb{R}$: $B_r(p) =]p - r, p + r[$, intervalo aberto.
Em $\mathbb{R}^2$: $B_r(P)$ corresponde ao interior de um circulo centrado em P e raio r.

Em particular,
Em $\mathbb{R}$: $B_r(p) =]p - r, p + r[$, intervalo aberto.
Em $\mathbb{R}^2$: $B_r(P)$ corresponde ao interior de um circulo centrado em P e raio r.
Em $\mathbb{R}^3$: $B_r(P)$ corresponde ao interior da esfera centrada em P e raio r.

Em particular,
Em $\mathbb{R}$: $B_r(p) =]p - r, p + r[$, intervalo aberto.
Em $\mathbb{R}^2$: $B_r(P)$ corresponde ao interior de um circulo centrado em P e raio r.
Em $\mathbb{R}^3$: $B_r(P)$ corresponde ao interior da esfera centrada em P e raio r.

Definição 7

*Um ponto $P \in \mathcal{D}$ diz-se um **ponto interior** de um conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ se existe um $r > 0$ tal que $B_r(P) \subset \mathcal{D}$.*
*O **interior de** $\mathcal{D}$ é o conjunto formado por todos os pontos interiores de $\mathcal{D}$ e denota-se por int $(\mathcal{D})$.*

Exemplo 11

O interior do conjunto $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ *é o conjunto*

$$int(\mathcal{D}) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

Representação gráfica,

Exemplo 11

O interior do conjunto $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ *é o conjunto*

$$int(\mathcal{D}) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

Representação gráfica,

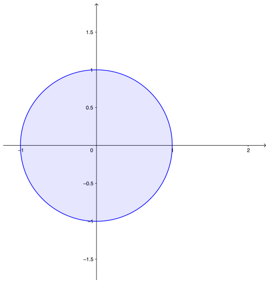


Figura: Conjunto $\mathcal{D}$.

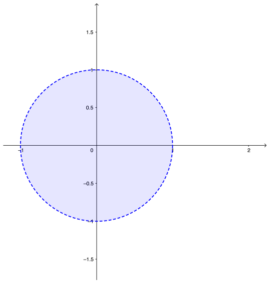
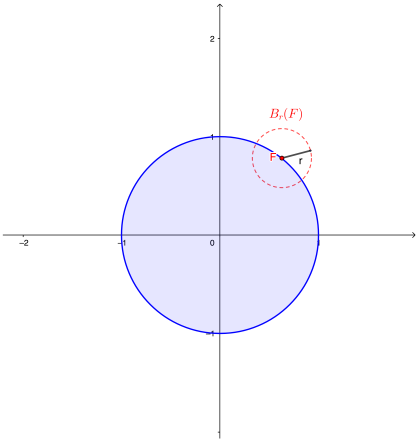


Figura: int($\mathcal{D}$).

Note que, o interior de $\mathcal{D}$ não inclui os pontos da circunferência que limita o circulo de centro $(0, 0)$ e raio 1, pois se F é um ponto desta circunferência não podemos encontrar um $r > 0$ tal que $B_r(F)$ esteja completamente contida no conjunto $\mathcal{D}$. Observemos:

Note que, o interior de $\mathcal{D}$ não inclui os pontos da circunferência que limita o circulo de centro $(0,0)$ e raio 1, pois se F é um ponto desta circunferência não podemos encontrar um $r > 0$ tal que $B_r(F)$ esteja completamente contida no conjunto $\mathcal{D}$. Observemos:



Definição 8

*Um conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se **aberto** se todos os seus pontos são pontos interiores de $\mathcal{D}$, isto é, se*

$$int(\mathcal{D}) = \mathcal{D}.$$

Definição 8

*Um conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se **aberto** se todos os seus pontos são pontos interiores de $\mathcal{D}$, isto é, se*

$$int(\mathcal{D}) = \mathcal{D}.$$

Exemplo 12

Em $\mathbb{R}$, o conjunto $I =]a, b[$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$ é um conjunto aberto.

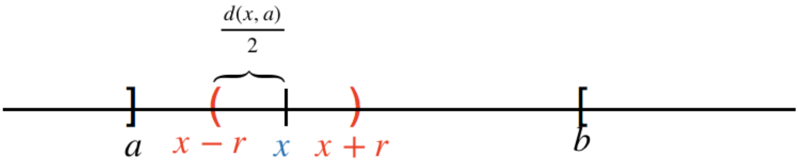
Definição 8

*Um conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se **aberto** se todos os seus pontos são pontos interiores de $\mathcal{D}$, isto é, se*

$$int(\mathcal{D}) = \mathcal{D}.$$

Exemplo 12

Em $\mathbb{R}$, o conjunto $I =]a, b[$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$ é um conjunto aberto. Sabemos que I é aberto se todos seus pontos são pontos interiores, isto é, se para todo $x \in I$ existe um $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset I$.



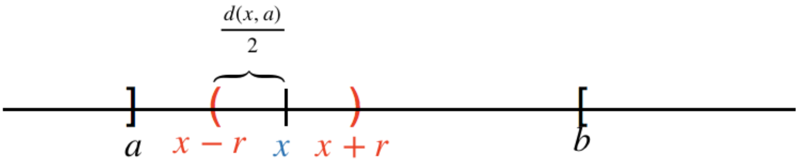
Definição 8

*Um conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se **aberto** se todos os seus pontos são pontos interiores de $\mathcal{D}$, isto é, se*

$$int(\mathcal{D}) = \mathcal{D}.$$

Exemplo 12

Em $\mathbb{R}$, o conjunto $I =]a, b[$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$ é um conjunto aberto. Sabemos que I é aberto se todos seus pontos são pontos interiores, isto é, se para todo $x \in I$ existe um $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset I$.



Se consideramos, por exemplo, $r = \frac{1}{2}\, min\{d(x,a), d(x,b)\}$, garantimos que para qualquer $x \in]a,b[$ temos que $B_r(x) \subset I$. Logo, I é aberto.

Se consideramos, por exemplo, $r = \frac{1}{2}\, min\{d(x,a), d(x,b)\}$, garantimos que para qualquer $x \in]a,b[$ temos que $B_r(x) \subset I$. Logo, I é aberto. Em geral, toda bola aberta $B_r(X)$ de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.

Se consideramos, por exemplo, $r = \frac{1}{2}\, min\{d(x,a), d(x,b)\}$, garantimos que para qualquer $x \in]a,b[$ temos que $B_r(x) \subset I$. Logo, I é aberto. Em geral, toda bola aberta $B_r(X)$ de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.

Definição 9

*Um ponto $P \in \mathbb{R}^n$ diz-se um **ponto fronteiro** de um conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ se para todo $r > 0$, $B_r(P) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ e $B_r(P) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{D}) \neq \emptyset$. Em outras palavras, se qualquer bola aberta de centro P tem pontos que pertencem a $\mathcal{D}$ e pontos que não pertencem a $\mathcal{D}$.*
*A **fronteira de** $\mathcal{D}$ é o conjunto formado por todos os pontos fronteiros de $\mathcal{D}$ e denota-se por $fr(\mathcal{D})$.*

Exemplo 13

A fronteira da esfera (sólida),

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

é a superfície esférica

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Exemplo 13

A fronteira da esfera (sólida),

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

é a superfície esférica

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Observação 2

Um ponto fronteiro de $\mathcal{D}$ pode ou não pertencer ao conjunto $\mathcal{D}$.

Exemplo 13

A fronteira da esfera (sólida),

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

é a superfície esférica

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Observação 2

Um ponto fronteiro de $\mathcal{D}$ pode ou não pertencer ao conjunto $\mathcal{D}$.

Definição 10

Um conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se ***fechado*** *se todos os pontos fronteiros de $\mathcal{D}$ lhe pertencem, isto é, se*

$$fr(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}.$$

Exemplo 14

Represente geometricamente e caracterize desde o ponto de vista topológico o seguinte conjunto

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1 \right\}.$$

Exemplo 14

Represente geometricamente e caracterize desde o ponto de vista topológico o seguinte conjunto

$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\right\}.$$

Representação geométrica.

$$|x| + |y| \leq 1 \Leftrightarrow |y| \leq 1 - |x| \Leftrightarrow |x| - 1 \leq y \leq 1 - |x|$$

- $x \geq 0$

$$|x| - 1 \leq y \leq 1 - |x| \Leftrightarrow x - 1 \leq y \leq 1 - x$$

Exemplo 14

Represente geometricamente e caracterize desde o ponto de vista topológico o seguinte conjunto

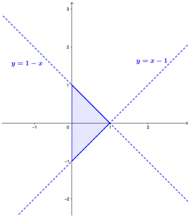
$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\right\}.$$

Representação geométrica.

$$|x| + |y| \leq 1 \Leftrightarrow |y| \leq 1 - |x| \Leftrightarrow |x| - 1 \leq y \leq 1 - |x|$$

- $x \geq 0$

$$|x| - 1 \leq y \leq 1 - |x| \Leftrightarrow x - 1 \leq y \leq 1 - x$$

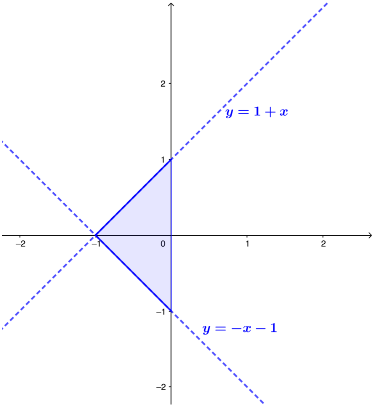


- $x < 0$

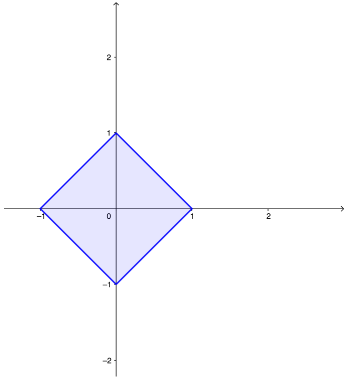
$$|x| - 1 \leq y \leq 1 - |x| \Leftrightarrow -x - 1 \leq y \leq 1 + x$$

- $x < 0$

$$|x| - 1 \leq y \leq 1 - |x| \Leftrightarrow -x - 1 \leq y \leq 1 + x$$



Logo, a representação geométrica do conjunto T é



O interior de T é:

$$int(T) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\right\}.$$

O interior de T é:

$$int(T) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\right\}.$$

A fronteira de T é:

$$fr(T) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\right\}.$$

O interior de T é:

$$int(T) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\right\}.$$

A fronteira de T é:

$$fr(T) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\right\}.$$

Como $fr(T) \subset T$, então T é um conjunto fechado.

Definição 11

*Um conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se **limitado** se existe um $r \in \mathbb{R}^+$ e $C \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{D} \subseteq \overline{B}_r(C)$.*

Definição 11

Um conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se ***limitado*** *se existe um $r \in \mathbb{R}^+$ e $C \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{D} \subseteq \overline{B}_r(C)$.*

Exemplo 15

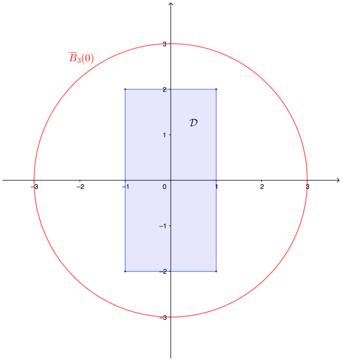
O conjunto $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$ é limitado, pois está contido, por exemplo, na bola $\overline{B}_3(0)$.

Definição 11

*Um conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se **limitado** se existe um $r \in \mathbb{R}^+$ e $C \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{D} \subseteq \overline{B}_r(C)$.*

Exemplo 15

O conjunto $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$ é limitado, pois está contido, por exemplo, na bola $\overline{B}_3(0)$.



Definição 12

Dizemos que $P \in \mathbb{R}^n$ é um ***ponto de acumulação*** *de um conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ se, para todo $r > 0$, a bola $B_r(P)$ tem pontos de $\mathcal{D}$ distintos de P, ou seja,*

$$B_r(P) \cap (\mathcal{D} \setminus \{P\}) \neq \emptyset.$$

Um ponto $P \in \mathcal{D}$ diz-se um ***ponto isolado*** *de $\mathcal{D}$ se não é um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$.*

O conjunto dos pontos de acumulação de $\mathcal{D}$ se chama **conjunto derivado** de $\mathcal{D}$ e denota-se por $\mathcal{D}'$.

Exemplo 16

Consideremos o conjunto

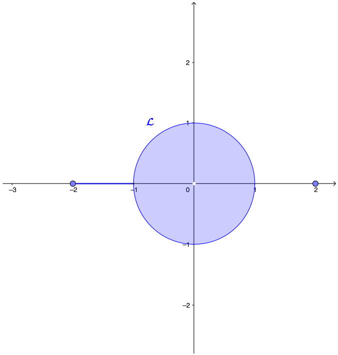
$$\mathcal{L} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : x^2 + y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1)\right\} \cup \{(2,0)\}\,.$$

Exemplo 16

Consideremos o conjunto

$$\mathcal{L} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : x^2 + y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1)\right\} \cup \{(2,0)\}\,.$$

A representação gráfica do conjunto é



O conjunto dos pontos de acumulação de $\mathcal{L}$ é

$$\mathcal{L}' = \left\{(x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1))\right\}$$

O conjunto dos pontos de acumulação de $\mathcal{L}$ é

$$\mathcal{L}' = \left\{ (x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1)) \right\}$$

Note que a este conjunto pertence o ponto $(0, 0)$, que não é ponto do conjunto $\mathcal{L}$, mas que satisfaz a definição de ponto de acumulação,isto é, toda bola centrada em $(0, 0)$ contém pontos do conjunto $\mathcal{L}$.

O conjunto dos pontos de acumulação de $\mathcal{L}$ é

$$\mathcal{L}' = \left\{(x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1))\right\}$$

Note que a este conjunto pertence o ponto $(0, 0)$, que não é ponto do conjunto $\mathcal{L}$, mas que satisfaz a definição de ponto de acumulação,isto é, toda bola centrada em $(0, 0)$ contém pontos do conjunto $\mathcal{L}$.

O único ponto isolado de $\mathcal{L}$ é o ponto $(2, 0)$.

O conjunto dos pontos de acumulação de $\mathcal{L}$ é

$$\mathcal{L}' = \Big\{(x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1))\Big\}$$

Note que a este conjunto pertence o ponto $(0, 0)$, que não é ponto do conjunto $\mathcal{L}$, mas que satisfaz a definição de ponto de acumulação,isto é, toda bola centrada em $(0, 0)$ contém pontos do conjunto $\mathcal{L}$.

O único ponto isolado de $\mathcal{L}$ é o ponto $(2, 0)$.

O interior de $\mathcal{L}$ é o conjunto:

O conjunto dos pontos de acumulação de $\mathcal{L}$ é

$$\mathcal{L}' = \Big\{(x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1))\Big\}$$

Note que a este conjunto pertence o ponto $(0,0)$, que não é ponto do conjunto $\mathcal{L}$, mas que satisfaz a definição de ponto de acumulação,isto é, toda bola centrada em $(0,0)$ contém pontos do conjunto $\mathcal{L}$.

O único ponto isolado de $\mathcal{L}$ é o ponto $(2,0)$.

O interior de $\mathcal{L}$ é o conjunto:

$$int(\mathcal{L}) = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : x^2 + y^2 < 1 \vee (y = 0 \wedge -2 < x < -1).\Big\}$$

O conjunto dos pontos de acumulação de $\mathcal{L}$ é

$$\mathcal{L}' = \Big\{(x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1))\Big\}$$

Note que a este conjunto pertence o ponto $(0, 0)$, que não é ponto do conjunto $\mathcal{L}$, mas que satisfaz a definição de ponto de acumulação,isto é, toda bola centrada em $(0, 0)$ contém pontos do conjunto $\mathcal{L}$.

O único ponto isolado de $\mathcal{L}$ é o ponto $(2, 0)$.

O interior de $\mathcal{L}$ é o conjunto:

$$int(\mathcal{L}) = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : x^2 + y^2 < 1 \vee (y = 0 \wedge -2 < x < -1).\Big\}$$

A fronteira de $\mathcal{L}$ é o conjunto:

O conjunto dos pontos de acumulação de $\mathcal{L}$ é

$$\mathcal{L}' = \left\{(x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1 \vee (y = 0 \wedge -2 \leq x \leq -1))\right\}$$

Note que a este conjunto pertence o ponto $(0, 0)$, que não é ponto do conjunto $\mathcal{L}$, mas que satisfaz a definição de ponto de acumulação,isto é, toda bola centrada em $(0, 0)$ contém pontos do conjunto $\mathcal{L}$.

O único ponto isolado de $\mathcal{L}$ é o ponto $(2, 0)$.

O interior de $\mathcal{L}$ é o conjunto:

$$int(\mathcal{L}) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : x^2 + y^2 < 1 \vee (y = 0 \wedge -2 < x < -1).\right\}$$

A fronteira de $\mathcal{L}$ é o conjunto:

$$fr(\mathcal{L}) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\} \cup \{(2, 0), (0, 0), (-2, 0)\}.$$

Exercício 2

Considere o seguinte conjunto

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 \geq 1 \wedge x - y + 1 > 0 \wedge x^2 - y \leq 0\right\}.$$

(a) *Represente geometricamente o conjunto A.*

(b) *Determine o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de A.*

(c) *A é um conjunto limitado? Justifique.*

(d) *A é um conjunto fechado? Justifique.*

(e) *A é um conjunto aberto? Justifique.*

Exercício 3

Considere o seguinte conjunto

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 > 1\right\} \cup \{(0,0)\}.$$

(a) *Represente geometricamente o conjunto B.*

(b) *Determine o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de B.*

(c) *B é um conjunto limitado? Justifique.*

(d) *B é um conjunto fechado? Justifique.*

(e) *B é um conjunto aberto? Justifique.*