Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo II - Agrupamento II — Exame de Recurso

10 de julho de 2017

Duração: **2h30m**

1. Considere a série de potências $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{n\,3^n}$.

[15pts] (a) Determine o domínio de convergência da série.

[15pts] (b) Calcule o valor de $S'(1)$.

[20pts] 2. Determine o integral geral da equação diferencial $2y' - x = xy$.

[15pts] 3. A função $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \ln(n+2)} \operatorname{sen}(nx)$, $x \in \mathbb{R}$ é contínua? Porquê?

4. Seja $f :]-3, +\infty[\to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = (x+3)\ln(x+3)$.

[15pts] (a) Utilizando o método de indução matemática mostre que: $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n-2)!}{(x+3)^{n-1}}$, $\forall_{n \geq 2,\, n \in \mathbb{N}}$.

[10pts] (b) Determine uma estimativa para o valor absoluto do erro cometido quando se toma para aproximação de f o polinómio de Taylor de ordem 3 em torno de $c = -2$ no intervalo $[-2,5; -1,5]$.

[15pts] 5. Considere a função 2π periódica f definida em $-\pi \leq x < \pi$ por $f(x) = x + 3$. A soma da série de Fourier de f representa f? Porquê?

6. Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$.

[10pts] (a) Indique, justificando, o domínio de continuidade de F.

[10pts] (b) Descreva algebricamente e identifique geometricamente as curvas de nível de F.

[15pts] (c) Descreva o lugar geométrico dos pontos $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ em que o vector gradiente $\nabla F(x,y)$ é paralelo ao vetor $(2,2)$.

[20pts] (d) Determine os pontos críticos de F, caso existam, e estude a sua natureza.

[20pts] 7. Determine o integral geral da equação diferencial $y''' - y = x^2$.

[20pts] 8. Utilize transformadas de Laplace para resolver o **PVI**: $y'' - 3y' = \operatorname{sen}(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

"*Quem olha para fora, sonha. Quem olha para dentro, desperta.*

Carl Gustave Jung