Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo II - agr. 4 **2016/17**

exame de recurso Duração: 2h30

- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas. A cotação e o formulário de transformadas de Laplace encontram-se no verso.**

---

1. Considera a função real de duas variáveis reais definida pela expressão $f(x,y) := 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.
   (a) Determina e classifica os quatro pontos críticos de f.
   (b) Escreve (não resolvas!) o sistema que permite determinar os pontos críticos de f restrita à condição $x^2 + y^2 = 5$.
   (c) Sabendo que os pontos críticos referidos na alínea anterior são os seis pontos $(\pm\sqrt{5}, 0)$, $(-1, \pm 2)$, $(-\frac{5}{3}, \pm\frac{2}{3}\sqrt{5})$, calcula, se existirem, o máximo e o mínimo absolutos de f sujeita à condição indicada. Se ajudar, repara que $\sqrt{5} = 2{,}236\ldots$. Não te esqueças de justificar o teu raciocínio.

2. Classifica e resolve as seguintes equações diferenciais ordinárias:
   (a) $(2xy + 3y)dx = -(4y^3 + x^2 + 3x + 4)dy$;
   (b) $y' = \dfrac{-2xy}{1 + x^2}$.

3. Resolve o PVI $2y'' + y' = -4 + 2t$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

4. Considera a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n}(1 - 2x)^n$.
   (a) Determina o seu intervalo de convergência.
   (b) Observando que a série dada é também, para cada x, uma série geométrica, determina a expressão para a sua soma no intervalo de convergência.

5. Seja f a função 2π-periódica que em $[-\pi, \pi[$ se expressa como $f(x) := \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$
   (a) Determina os coeficientes de Fourier de f.
   (b) Esboça o gráfico da soma da série de Fourier de f no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$. Justifica o teu raciocínio.

6. Considera a função real de duas variáveis reais definida pela expressão $f(x,y) := 2x^2 + 6y^2$.
   (a) Determina a direção e o sentido em que f mais decresce em cada ponto (x,y) do seu domínio.
   (b) Determina a curva $g(t) = (x(t), y(t))$ tal que $g(0) = (1,1)$ e $(x'(t), y'(t)) = -(\nabla f)(x(t), y(t))$.
   (c) Se a variável t representar instantes de tempo, explica por palavras tuas como achas que evolui a curva $\gamma(t) = (g(t), f(g(t)))$ com o tempo na superfície definida pelo gráfico de f.

Cotação:

1\. 4; 2. 3; 3. 4; 4. 3; 5. 3; 6. 3.

Formulário (Transformadas de Laplace):

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad s > s_f; \qquad G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s), \quad s > s_g$$

função	transformada
$t^n \ (n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$
$e^{at} \ (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{s-a}$, $s > a$
$\sin(at) \ (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$
$\cos(at) \ (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$, $s > 0$
$\sinh(at) \ (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$, $s > \lvert a \rvert$
$\cosh(at) \ (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$, $s > \lvert a \rvert$
$f(t)+g(t)$	$F(s)+G(s)$, $s > s_f, s_g$
$\alpha f(t) \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha F(s)$, $s > s_f$
$e^{\lambda t} f(t) \ (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)$, $s > s_f + \lambda$
$H_a(t) f(t-a) \ (a > 0)$	$e^{-as} F(s)$, $s > s_f$
$f(at) \ (a > 0)$	$\dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{s}{a}\right)$, $s > a\, s_f$
$t^n f(t) \ (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$, $s >$ ordem exp. de f
$f'(t)$	$s\,F(s) - f(0)$, $s >$ ordem exp. de f
$f''(t)$	$s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$, $s >$ ordens exp. de f, f'
$f^{(n)}(t) \ (n \in \mathbb{N})$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$, onde $f^{(0)} \equiv f$, $s >$ ordens exp. de $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$
$(f * g)(t)$	$F(s)\,G(s)$, $s >$ ordens exp. de f, g
$\int_0^t f(\tau)\, d\tau$	$\dfrac{F(s)}{s}$, $s > 0$, ordem exp. de f

Nota: O facto de se indicarem restrições numa dada linha do quadro acima não significa que não haja restrições adicionais a considerar para que a fórmula indicada nessa linha seja válida.

Exame Recurso Agrup. IV 2016/2017

1. $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

a) Determinar e classificar os 4 pontos críticos de f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 + y^2 + 10x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + 2y$$

$$\nabla f(x,y) = (6x^2 + y^2 + 10x \, , \, 2xy + 2y) = (0,0)$$

$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 2y(x+1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + 10x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 6\times(-1)^2 + y^2 + 10\times(-1) = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x(3x+5) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 6 + y^2 - 10 = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x + 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y^2 = 4 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -5/3 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -2 \\ x = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Pontos críticos : $(0,0)$

$(-5/3, 0)$

$(-1, -2)$

$(-1, 2)$

Classificação: Usando o Teste da Hessiana

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x + 10 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x + 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12x+10 & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{(0,0)}$

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det_{H(0,0)} = 20 > 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 10 > 0$$

$(0,0)$ é minimizante local

$\boxed{(-1,-2)}$

$$H(-1,-2) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det_{H(-1,-2)} = 2 \times 0 - (-4) \times (-4) = -16 < 0$$

$(-1,-2)$ é ponto de sela

$\boxed{(-1,2)}$

$$H(-1,2) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det_{H(-1,2)} = 2 \times 0 - 4 \times 4 = -16 < 0$$

$(-1,2)$ é ponto de sela

$\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$

$$H\left(-\tfrac{5}{3}, 0\right) = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\tfrac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\det_{H(-5/3,0)} = -10 \times \left(-\tfrac{4}{3}\right) - 0 \times 0 = \frac{40}{3} > 0 \quad e$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) < 0$, logo $\left(-\tfrac{5}{3}, 0\right)$ é maximizante local

b) $x^2 + y^2 = 5$

$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 + y^2 - 5}_{g(x)} = 0$

Método dos multiplicadores de Lagrange

$g(x) = x^2 + y^2 - 5$

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x$

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2y$

$\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$

$\nabla f(x,y) = (6x^2 + y^2 + 10x, 2xy + 2y)$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6x^2 + y^2 + 10x, 2xy + 2y) = \lambda(2x, 2y) \\ x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = \lambda \cdot 2x \\ 2xy + 2y = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

c) pontos críticos: $(\sqrt{5},0)$, $(-\sqrt{5},0)$, $(-1,2)$, $(-1,-2)$
$\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\sqrt{5}\right)$, $\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{5}\right)$

Como é uma função contínua por ser uma função polinomial e o conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 5\}$ é limitado (trata-se de uma circunferência) e é fechado, então, pelo Teorema de Weierstrass, existe um máximo e um mínimo absolutos de f sujeitos à condição indicada.

$$f(-\sqrt{5},0) = 2(-\sqrt{5})^3 + 0 + 5(\sqrt{5})^2 + 0 = -10\sqrt{5} + 25 \rightarrow \text{mínimo absoluto}$$

$$f(\sqrt{5},0) = 2(\sqrt{5})^3 + 0 + 5(\sqrt{5})^2 + 0 = 10\sqrt{5} + 25 \rightarrow \text{máximo absoluto}$$

$$f(-1, \pm 2) = -2 - \cancel{4} + 5 + \cancel{4} = 3$$

$$f\left(-\frac{5}{3}, \pm \frac{2}{3}\sqrt{5}\right) = -2 \times \frac{5^3}{3^3} - \frac{5}{3} \times \frac{4}{9} \times 5 + \frac{125}{9} + \frac{4}{9} \times 5 =$$

$$= \frac{-250}{27} - \frac{100}{27} + \frac{145}{9} =$$

$$= \frac{-350 + 435}{27} = \frac{85}{27} = 3,14\ldots$$

2.

b) $y' = \dfrac{-2xy}{1+x^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{y}\, y' = \dfrac{-2x}{1+x^2}$

EDO de variáveis separáveis

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{y}\, dy = -\dfrac{2x}{1+x^2}\, dx$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{1}{y}\, dy = -\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx$

$\Leftrightarrow \ln|y| = -\ln|1+x^2| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y = e^{-\ln|1-x^2| + C_1}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y = (1+x^2)^{-1} \cdot e^{C_1}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y = C \cdot \dfrac{1}{(1+x^2)}, \quad C \in \mathbb{R}$

3. PVI $\begin{cases} 2y'' + y' = -4 + 2t \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 0 \end{cases}$

- EDO homogénea associada $\quad 2y'' + y' = 0$

Equação característica: $\quad 2x^2 + x = 0$

$\Leftrightarrow x(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = -\frac{1}{2}$

Solução geral: $\quad y = C_1 + C_2\, e^{-\frac{1}{2}t}$

- Solução particular

→ Usando o método dos coeficientes indeterminados

$$b(x) = \underbrace{B_m(x)}_{2t-4}\ \underbrace{e^{\overset{0}{\alpha} x}}_{1}\ \underbrace{\cos(\overset{0}{\beta} x)}_{1}$$

polinómio de grau 1

Como $\alpha + \beta i = 0 + i0 = 0$ é raiz do polinómio característico então $K = 1$

$$y_p = x^k e^{\alpha x} \left(Q(x) \cos(\beta x) + R(x) \sin(\beta x) \right)$$

$$= x(Ax+B)$$

$$= Ax^2 + Bx = -x^2 - 8x$$

$$y_p' = 2Ax + B$$

$$y_p'' = 2A$$

$$2y'' + y' = -4 + 2x$$

$$\Leftrightarrow 2(2A) + 2Ax + B = -4 + 2x$$

$$\Rightarrow 4A + 2x \cdot A + B = -4 + 2x$$

$$\begin{cases} 2A = 2 \\ 4A + B = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ 4 + B = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -8 \end{cases}$$

$$y = C_1 + C_2 e^{-\frac{1}{2}t} - x^2 - 8x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$y' = -\frac{1}{2} C_2 e^{-\frac{1}{2}t} - 2t - 8$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 e^{-\frac{1}{2} \times 0} - 0^2 - 8 \times 0 = 1 \\ -\frac{1}{2} C_2 e^{-\frac{1}{2} \times 0} - 2 \times 0 - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -\frac{1}{2} C_2 - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ -\frac{1}{2} C_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ C_2 = -16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 17 \\ C_2 = -16 \end{cases}$$

$$y = 17 - 16 e^{-\frac{1}{2}t} - t^2 - 8t$$

1.

série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} (1-2x)^n$

a) Intervalo de convergência

Centro da série: $1-2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Logo, a série é igual a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{5^n} (-2)^n \left(x - \frac{1}{2}\right)^n$

Raio de convergência: $R = \frac{1}{L}$, $a_n = \frac{3^n (-2)^n}{5^n}$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{3^{n+1} (-2)^{n+1}}{5^{n+1}}}{\frac{3^n (-2)^n}{5^n}} \right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\cancel{3^{n+1}} \, \cancel{(-2)^{n+1}} \, \cancel{5^n}}{\cancel{3^n} \, \cancel{(-2)^n} \, \cancel{5^{n+1}}} \right| = \frac{6}{5}$$

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{6/5} = \frac{5}{6}$$

Intervalo de convergência:

$$]c-R, c+R[\; = \;]\frac{1}{2} - \frac{5}{6}, \frac{1}{2} + \frac{5}{6}[\; =$$

$$= \;]\frac{3}{6} - \frac{5}{6}, \frac{3}{6} + \frac{5}{6}[\; = \;]-\frac{2}{6}, \frac{8}{6}[\; =$$

$$= \;]-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}[$$

b)

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{5^n}(1-2x)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}(1-2x)\right)^n$ é uma série geométrica de razão $= \frac{3}{5}(1-2x)$ e o 1° termo é igual a

$$a_1 = \left(\frac{3}{5}(1-2x)\right)^1 = \frac{3}{5}(1-2x)$$

Logo a sua soma é igual a:

$$S(x) = \frac{a_1}{1-x} = \frac{\frac{3}{5}(1-2x)}{1-\frac{3}{5}(1-2x)} =$$

$$= \frac{\frac{3(1-2x)}{5}}{\frac{5-3(1-2x)}{5}} = \frac{3-6x}{5-3+6x} = \frac{3-6x}{2+6x}$$

Digitalizada com CamScanner

5.

f 2π - periódica

$$[-\pi, \pi[\Rightarrow f(x) := \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

a) coeficientes de Fourier de f

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\cancel{\int_{-\pi}^{0} 0\,dx} + \int_{0}^{\pi/2} 1\,dx + \cancel{\int_{\pi/2}^{\pi} 0\,dx}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{1}{\pi}\left[x \Big|_0^{\pi/2}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{1}{\cancel{\pi}}\cdot\frac{\cancel{\pi}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} 1\cdot\cos(nx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\Big|_0^{\pi/2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0\right) = \begin{cases} 0, & n - \text{par} \\ \frac{(-1)^{k+1}}{\pi n}, & n - \text{ímpar} = 2k-1 \\ & (k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} 1\cdot\operatorname{sen}(nx)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi/2}\right] = -\frac{1}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - \cos(0)\right] =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - 1\right] =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{n\pi}, & n - \text{ímpar} \\ \frac{1}{n\pi}\left(1 - (-1)^k\right), & n = 2k \\ & (n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$