*Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro*

**Cálculo II - Agrupamento IV — 1ª Prova de Avaliação Discreta**

***10 de abril de 2019***

Duração: **2h**

**– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –**

**[25pts]** 1. Determine o domínio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n3^n}(x-2)^n$.

**[20pts]** 2. Seja $g(x) = \ln(x+1)$, para $x \in ]-1, +\infty[$.
Use o polinómio de MacLaurin de ordem 2, $T_0^2 g(x)$, para determinar um valor aproximado de $\ln(1,1)$ e mostre que o erro absoluto cometido nessa aproximação é inferior a $\frac{1}{3}10^{-3}$.

3. Seja $f$ a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$.

**[18pts]** (a) Sabendo que $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad |x| < 1$, obtenha uma representação em série de potências da função $f$, indicando o maior intervalo onde a representação é válida.

**[17pts]** (b) Mostre que $\displaystyle\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(4n+2)} x^{2n+1}, \quad |x| < 2$.

4. Seja $f$ a função $2\pi$-periódica definida em $[-\pi, \pi]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & se \quad -\pi \leq x < 0 \\ \\ 0 & se \quad 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

**[20pts]** (a) Determine a série de Fourier associada à função $f$.

**[15pts]** (b) Como $f$ é seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$, a série obtida na alínea anterior converge pontualmente em todo o $x \in \mathbb{R}$. Indique, justificando, a sua função soma, $S(x)$, e faça um esboço gráfico de $S(x)$ no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

**[15pts]** 5. Mostre que não existe o limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{4x^2+y^2}$.

6. Considere a função $f$ definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = xy^2 + x^2y$.

**[18pts]** (a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Justifique que $f$ é diferenciável em todo o seu domínio.

**[12pts]** (b) Determine uma equação do plano tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(1,1,2)$.

**[10pts]** (c) Determine um vetor segundo o qual a derivada direcional da função $f$ no ponto $(1,1)$ é nula.

7.

**[15pts]** (a) Seja $a > 1$. Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

converge uniformemente no intervalo $[a, +\infty[$.

**[15pts]** (b) Seja

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}, \quad x \in [3, +\infty[.$$

Determine, justificando, uma série numérica cuja soma é $g'(4)$.