Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo 2 - Agrupamento 1 — Teste 2

22 de junho de 2017

Duração: **2 horas**

Justifique devidamente todas as suas respostas.

Este teste tem frente e verso.

1. (**30 pontos**) Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\,2^{n+1}} x^{n+1}.$$

   (a) Determine o intervalo de convergência da série de potências.

   (b) Determine a soma da série.
   Sugestão: Recorde a soma da série geométrica.

2. (**30 pontos**) Considere a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Prove que esta série é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

   (b) Sendo $S(x)$ a soma da série dada, isto é, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$, $x \in \mathbb{R}$, mostre que

$$\int_0^1 S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \arctan \frac{1}{n}.$$

3. (**20 pontos**) Sendo f uma função de classe C^∞ numa vizinhança da origem e verificando as condições

$$f(0) = 1 \ \text{ e } \ f'(x) = f(x) + x, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

   determine o desenvolvimento de MacLaurin de f.

4. (**30 pontos**) Seja f uma função periódica de período 2π definida em $[-\pi, \pi]$ como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right] \\ 0 & \text{se} \quad \left]-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[\\ 1 & \text{se} \quad \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right] \end{cases}.$$

   (a) Mostre que a série de Fourier associada a f é uma série de cossenos.

   (b) Prove que

$$f(x) \sim \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{5n\pi}{6}\right)}{n} \cos(nx).$$

   (c) Esboce o gráfico da função soma da série, $S(x)$, no intervalo $[-\pi, \pi]$.

vire se faz favor

5. (**55 pontos**) Considere o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = e^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

(a) Mostre que

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+2s+5)}, \ s > 1$$

onde $\mathcal{L}\{y\}(s)$ representa a transformada de Laplace da função y.

(b) Determine a solução do problema de Cauchy dado.

(c) Determine a solução geral da EDO

$$y'' + 2y' + 5y = \cos(2t).$$

(d) Usando a informação obtida nas alíneas anteriores determine uma solução **particular** para a EDO

$$y'' + 2y' + 5y = \cos(2t) + e^t.$$

6. (**35 pontos**) Utilizando o Método da Variação das Constantes, determine o integral geral da equação diferencial

$$x^2 y'' - 2y = x - 1, \ x > 0$$

sabendo que $y_1 = \dfrac{1}{x}$ e $y_2 = x^2$ constituem soluções particulares da correspondente EDO homogénea.