Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II – Agrupamento IV 2017/2018

Soluções da 2.ª Prova (13/junho/2018) da Avaliação Discreta (e alguns tópicos de resolução)[1]

1. (a) A função é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, uma vez que as suas derivadas parciais existem e são contínuas em $\mathbb{R}^2$.

   (b) $D_{\hat{u}}g(1,0) = \langle \nabla g(1,0), \hat{u} \rangle = \frac{e}{\sqrt{2}}$, sendo $\hat{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

2. (a) $(0,0)$ e $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$; Resolva $\nabla f(x,y) = 0$.

   (b) $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ é um minimizante local de f e $(0,0)$ é um ponto de sela.
   Analise a matriz Hessiana $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ nos pontos críticos $(0,0)$ e $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, usando, por exemplo, o teste da 2.ª derivada.

   (c) Não. Por exemplo, $f(-3,0) = -27 < -\frac{4}{27} = f(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

   (d) Direção e sentido do vetor $\nabla f(1,0) = (3,-2)$.

3. (a) $3x - z - 4 = 0$. Considere que plano pedido é formado pelos pontos (x,y,z) que satisfazem $\langle \nabla F(1,0,-1), (x-1, y, z+1) \rangle = 0$

   (b) 0 e 1, minímo e máximo globais, respetivamente.
   Sendo $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, a restrição $g(x,y) = 0$ do domínio de $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1$ descreve um conjunto limitado e fechado. Então f admite, nesse conjunto, máximo e mínimo (T. Weierstrass). Use o método dos multiplicadores de Lagrange, resolvendo o sistema $\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ obtendo os pontos $(-1,0), (1,0), (0,-1), (0,1)$ como candidatos a extremantes. Tire a conclusão pedida, analisando os valores de f nesses pontos $1 = f(0,-1) = f(0,1)$ e $0 = f(-1,0) = f(1,0)$.

   (Resolução alternativa: A restrição dada descreve uma circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1, que pode ser parametrizada por $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Então, substituindo em f tem-se a função real de uma variável real $h(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = \sin^2\theta$. Determine o mínimo e máximo de h, nesse intervalo.)

4. $y = Cx^4$, $C \in \mathbb{R}$.

   Resolução como EDO de variáveis separáveis: Tomando $y \neq 0$,

   $$\frac{1}{y}y' = \frac{4}{x} \quad \text{(EDO de variáveis separadas).}$$

   Integrando, tem-se o integral geral $\ln|y| = 4\ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$, ou seja, $y = Kx^4$, $K \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. A função $y = 0$ é também solução da EDO, pelo que a solução geral da EDO é $y = Cx^4$, $C \in \mathbb{R}$.

   Resolução como EDO linear de 1ª ordem, usando fator integrante: Escreva a EDO na forma $y' - \frac{4}{x}y = 0$. Assim, multiplique ambos os membros da EDO pelo fator integrante $\mu(x) = \frac{1}{x^4}$, obtenha $\left(\frac{1}{x^4}y\right)' = 0$, ou seja, $\frac{1}{x^4}y = C$, $C \in \mathbb{R}$.

[1] Note que não é intenção deste texto apresentar resoluções completas e que a distância dos tópicos apresentados a uma resposta completa varia significativamente de alínea para alínea.

5. $y^2 = \dfrac{e^{-x^2}}{2x+c}$, $c \in \mathbb{R}$, ($y = 0$ solução singular).

   Faça mudança de variável $z = \frac{1}{y^2}$, pelo que $z' = -\frac{2}{y^3}y'$, e obtenha a EDO linear de 1ª ordem $z' - 2xz = 2e^{x^2}$. Resolva esta EDO usando o fator integrante $\mu(x) = e^{-x^2}$ e obtenha $z = 2xe^{x^2} + ce^{x^2}$, $c \in \mathbb{R}$. Faça $z = y^{-2}$, obtendo o integral geral $y^2 = \frac{e^{-x^2}}{2x+c}$, $c \in \mathbb{R}$, da EDO inicial. A função $y = 0$ é solução da EDO, sendo solução singular.

6. $\mu(x) = e^{2y}$ é um fator integrante que torna a EDO dada na EDO exata $e^{2y}x\,dx + e^{2y}(y+x^2)\,dy = 0$. A solução geral é
$$e^{2y}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right) = c,\ c \in \mathbb{R}.$$

7. $y = C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x + \frac{2}{3}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
   Dado que a EDO é linear, determine y_h é a solução geral da EDO homogénea associada $y'' + 3y = 0$ e determine y_p uma qualquer solução particular da EDO completa $y'' + 3y = 2$.

   i) Como a EDO tem coeficientes constantes, resolva a sua equação característica $r^2 + 3 = 0$ obtendo as soluções $r = \sqrt{3}i$ e $r = -\sqrt{3}i$. Logo, conclua que $\{\cos\sqrt{3}x, \sin\sqrt{3}x\}$ é um sistema fundamental de soluções da EDO. Portanto, $y_h = C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\sin\sqrt{3}x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

   ii) Uma solução particular será da forma $y_p = A$, para um certo $A \in \mathbb{R}$. Substituindo na EDO completa, obtém-se $A = \frac{2}{3}$. (Resolução alternativa: método da variação das constantes).

   Obtenha a solução geral da EDO dada somando y_h com y_p.

8. $(-1+3t)e^{-3t}$.
   Aplique transformadas de Laplace a ambos os membros, use as propriedades necessárias, manipule a equação e conclua que a transformada de Laplace de $y(t)$ é
$$Y\{s\} = \frac{-s}{(s+3)^2},\ s \geq -3.$$

   Obtenha $y(t)$ determinando a transformada inversa esta função racional.