Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo II - Agrupamento 4

Folha de exercícios **Ano letivo 2016/2017** ($2^{\underline{o}}$ Semestre)

1.3 Derivadas, gradientes e diferenciais - parte 3

---

1. Suponha que o potencial numa lâmina plana é dado por
$$V(x,y) = 80 - 20xe^{-\frac{x^2+y^2}{20}}$$
em volts, com x e y em cm.
   (a) Qual é a taxa máxima de variação do potencial no ponto $(1,2)$?
   (b) Em que direção e sentidos, a partir da origem, o potencial aumenta mais e diminui mais?

2. Admita que $T(x,y) = x^2 + 3y^2$ representa a distribuição da temperatura num plano $x0y$ (T em ^oC, x e y em cm).
   (a) A partir de $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, qual é a direção e sentido de maior crescimento da temperatura? Qual é a taxa de crescimento nessa direção e sentido?
   (b) A partir de $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, qual é a direção e sentido de menor crescimento da temperatura? Qual é a taxa de crescimento nessa direção e sentido?

3. Em que direção e sentido a função dada cresce mais rapidamente no ponto dado? E em que direção e sentido decresce mais rapidamente?
   (a) $f(x,y) = \ln(\|(x,y)\|)$ em $(1,-1)$;
   (b) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$ em $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

4. Determine a equação da reta tangente à curva $x^2 - y = 1$ no ponto $(\sqrt{2}, 1)$.

5. Sejam $f(x,y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$ e C a curva de nível 3 de f. Determine as equações da reta perpendicular e da reta tangente a C no ponto $(1, 2\sqrt{2})$.

6. Seja $f(x,y) = 3x^3y - x^2$. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de f no ponto $(1, 1, f(1,1))$.

7. Determine o plano tangente e a reta normal às superfícies no ponto P_0:
   (a) $(x^2 + y^2 + 1)\, e^{-(x^2+y^2)} - z = 0, \quad P_0 = (0,0,1)$;

(b) $x^2 + xy^2 + y^3 + z + 1 = 0, \quad P_0 = (2, -3, 4)$;

(c) $e^{x-y} + xy^2 - z = 0, \quad P_0 = (1, 1, 2)$;

(d) $x2 + 2xy + y^2 + z - 7 = 0, \quad P_0 = (1, 1, 2)$;

(e) $x^2 - y^2 - z^2 = 1, \quad P_0 = (3, 2, 2)$;

(f) $x^2 + y^2 - z^2 = 25, \quad P_0 = (5, 5, 5)$;

(g) $x - y - z^2 = 3, \quad P_0 = (3, 4, 2)$.

8. Determine a reta normal e o plano tangente ao cone

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

no ponto $(3, 4, -2)$.

9. Determine um vetor unitário normal a $5x^2 + y^2 - \frac{2z^2}{5} = 10$ no ponto $(1, \sqrt{5}, 0)$.