1) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi \\ 2, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ 2π- periódica

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 2\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[2x\Big|_{-\pi}^{0} + x\Big|_{0}^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\left[2\pi + \pi\right] = \frac{3\pi}{\pi} = 3$$

$\boxed{a_0 = 3}$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 2\cos(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} \cos(nx)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{n}\operatorname{sen}(nx)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{n}\operatorname{sen}(-n\pi) + \frac{\operatorname{sen}(n\pi)}{n}\right] = 0.$$

$n > 0$

$\boxed{a_n = 0}$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 2\operatorname{sen}(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi}\operatorname{sen}(nx)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2}{n}\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{0}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2}{n}\left[\cos(0) - \cos(-n\pi)\right] + \frac{1}{n}\left[-\cos(n\pi) + \cos(0)\right]\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2}{n}\left[1 - \cos(n\pi)\right] + \frac{1}{n}\left[1 - \cos(n\pi)\right]\right]$$

$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1, & n\text{-par} \\ -1, & n\text{-ímpar} \end{cases}$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2}{n}(2) + \frac{1}{n}(2)\right] = -\frac{4}{\pi n} + \frac{2}{n\pi} = -\frac{2}{n\pi}, \quad \underline{n\text{-ímpar}}$$

$\boxed{b_n = -\frac{2}{n\pi}}$, n-ímpar

A série de Fourier associada a f é:

$$\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{\pi(2n-1)} \operatorname{sen}(2n-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)}{2n-1}}$$

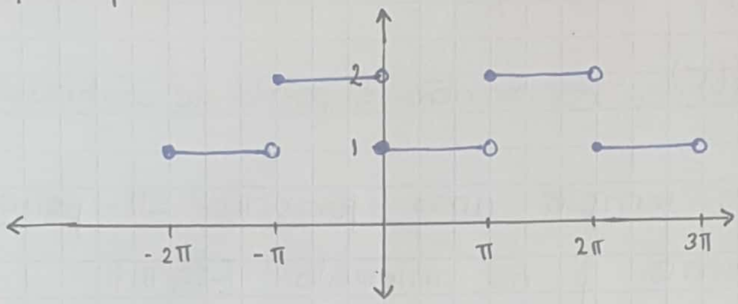
Exercício Séries de Fourier

1) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 2 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$

f - 2π-periódica

A série de Fourier associada a f é

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}((2n-1)x)}{2n-1}$$



Para aplicar o Tma de Dirichlet devemos verificar que

f é $\underbrace{\text{seccionalmente diferenciável}}$ em $\mathbb{R}$

f - seccionalmente contínua   f' - seccionalmente contínua

(i) f é seccionalmente contínua em $[-\pi, \pi]$

Para f ser seccionalmente contínua em $[-\pi, \pi]$ deve existir uma partição $\{a_0, \dots, a_n\}$ de $[\pi, \pi]$ tal que

- f é contínua em cada um dos intervalos abertos

$]a_0, a_1[\,, \;]a_1, a_2[\,, \dots, \;]a_{n-1}, a_n[$ e

$\lim_{x \to a^+} f(x), \; \lim_{x \to a_1^+} f(x), \dots, \lim_{x \to a_{n-1}^+} f(x)$

e $\lim_{x \to a_1^-} f(x), \; \lim_{x \to a_2^-} f(x), \dots, \lim_{x \to a_n^-} f(x)$

existem e são finitos

Neste caso, consideremos a partição $\{\underset{a_0}{-\pi}, \underset{a_1}{0}, \underset{a_2}{\pi}\}$, já que considerando esta partição tem-se que

- f é contínua em $]-\pi, 0[$ e $]0, \pi[$ e

$\lim_{x \to -\pi^+} f(x) = 2$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2$ $\lim_{x \to \pi^-} f(x) = 1$

Portanto, f é seccionalmente contínua em $[\pi, \pi]$ e sendo 2π-periódica f é seccionalmente contínua em $\mathbb{R}$

(ii) $f'(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi \\ 0, & -\pi < x < 0 \end{cases}$ A derivada de f em $x = 0, \pi, -\pi$ não existe.

Se consideramos a partição $\{-\pi, 0, \pi\}$, f' é contínua nos intervalos $]-\pi, 0[$ e $]0, \pi[$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$, $\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\pi^+}$ são finitos iguais a 0.

$\therefore$ f' é seccionalmente contínua em $[-\pi, \pi]$.

De (i) e (ii) temos que f é seccionalmente contínua em $[-\pi\ \pi]$ e como f é 2π-periódica f é diferenciável em $\mathbb{R}$

Pelo Tma de Dirichlet a série de Fourier de f converge para a função S.

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \text{ é ponto de continuidade de } f \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, & \text{se } x \text{ não é ponto de continuidade de } f \end{cases}$$

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq \pi K \quad , K \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, & x = \pi K \quad , K \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dado que S é sempre uma função 2π-periódica então determinamos S no intervalo $[-\pi, \pi]$

Os pontos de discontinuidade de f em $[-\pi, \pi]$ são $x = 0$, $x = \pi$, $x = -\pi$

- $f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ $\qquad f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2$

$$\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{3}{2}$$

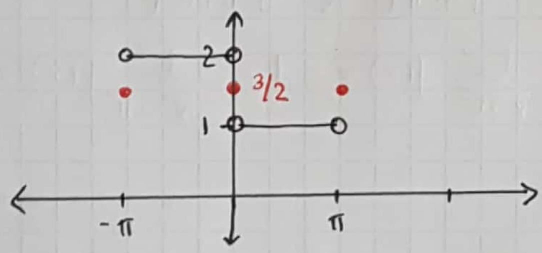
- $f(\pi^+) = 2$ $\qquad f(\pi^-) = 1$

$$\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{3}{2}$$

- $f(-\pi^-) = 1$ $\qquad f(-\pi^+) = 2$

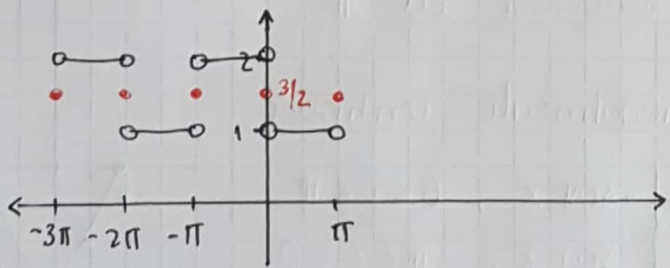
$$\frac{f(-\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{3}{2}$$

Gráfico de S em $[-\pi, \pi]$



$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0, \pi, -\pi \\ \frac{3}{2}, & x = 0, \pi, -\pi \end{cases}$$

Gráfico de S em $[-3\pi, \pi]$



(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)}{2n-1}$

Como a série de Fourier $\displaystyle\frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}((2n-1)x)}{2n-1}$ converge para $S(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 3/2, & x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

se $x = 1$

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\sum \frac{\operatorname{sen}(2n-1)}{2n-1} = 1$$

$$\frac{2}{\pi}\sum \frac{\operatorname{sen}(2n-1)}{2n-1} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)}{2n-1} = \frac{\pi}{4}}$$

2) $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & , 0 \leq x < \pi \\ -\cos(x) & , -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ 2π- periódica

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\cos x\,dx + \int_0^{\pi} \cos x\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\operatorname{sen} x\Big|_{-\pi}^{0} + \operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi}\right] = 0.$$

$\boxed{a_0 = 0}$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\cos^2(nx)dx + \int_0^{\pi}\cos^2(nx)dx\right]$$

$\cos^2 nx = \frac{1}{2}\cos(2xn) + \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0}\frac{1}{2}\cos(2nx) + \frac{1}{2}dx + \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cos(2xn) + \frac{1}{2}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\left[\frac{\operatorname{sen}(2nx)}{4n} + \frac{1}{2}x\right]\Bigg|_{-\pi}^{0} + \left[\frac{\operatorname{sen}(2xn)}{4n} + \frac{1}{2}x\right]\Bigg|_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = 0.$$

$\boxed{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}(\alpha+\beta).}$

$\boxed{a_n = 0}$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\cos(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx + \int_0^{\pi}\cos(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0}\frac{1}{2}\operatorname{sen}\overbrace{(nx-x)}^{(n-1)x} + \operatorname{sen}\overbrace{(nx+x)}^{(n+1)x} + \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\operatorname{sen}\overbrace{(nx-x)}^{(n-1)x} + \operatorname{sen}(nx+x)\,dx\right]$$

$$= \frac{-1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((n-1)x)}{n-1} - \frac{\cos((n+1)x)}{n+1}\right]\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos((n-1)x)}{n-1} - \frac{\cos((n+1)x)}{n+1}\right]\Bigg|_0^{\pi}\right]$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}x - n\cos(nx)\cos x}{n^2-1}\right]\Bigg|_{\pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(nx) + n\cos(nx)\cos(x)}{n^2-1}\right]$$

$$= -\frac{1}{\pi(n^2-1)}\left[-n + n\cos(n\pi)\right] - \frac{1}{\pi(n^2-1)}\left[-n\cos(n\pi) - n\right]$$

$$= +\frac{n}{\pi(n^2-1)}\left[\underbrace{1 + \cos(n\pi)}_{2}\right] + \frac{n}{\pi(n^2-1)}\left[\underbrace{\cos(n\pi)+1}_{2}\right] = \frac{4n}{\pi(n^2-1)}$$ - n- par

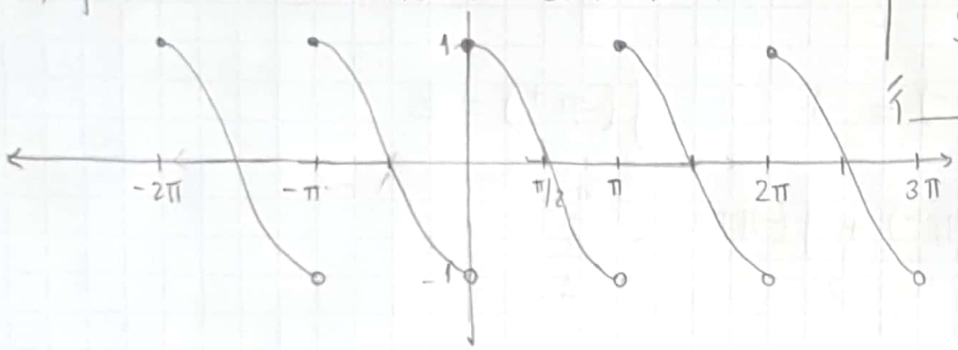
$\boxed{b_n = \frac{8n}{\pi(4n^2-1)}}$

2) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x < \pi \\ -\cos x, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ 2π-periódico

Série de Fourier associada a f

$\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4n^2-1} \operatorname{sen}(2nx)$

(i) f é seccionalmente contínua



$\{0, \pi, -\pi\} \rightarrow$ Partição do intervalo $[-\pi, \pi]$

f é contínua em $]0, \pi[$ e $]-\pi, 0[$

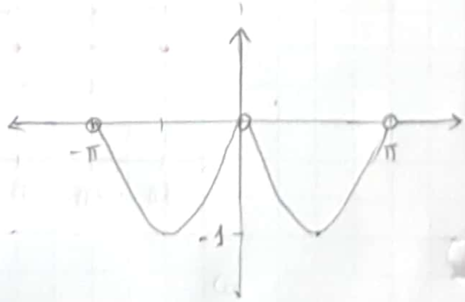
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ $\quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$, $\quad \lim_{x \to \pi^-} f(x) = -1$

$\lim_{x \to -\pi^+} f(x) = 1$

$\therefore$ f é secc. contínua em $[-\pi, \pi]$, como f é 2π-periódica f é sec. contínua em $\mathbb{R}$.

(ii) f' é seccionalmente contínua

$f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x, & 0 < x < \pi \\ \operatorname{sen} x, & -\pi < x < 0 \end{cases}$



$\{0, \pi, -\pi\}$

f' é contínua em $]0, \pi[$ e $]-\pi, 0[$

- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} -\operatorname{sen} x = 0$ $\qquad \lim_{x \to -\pi^+} f(x) = 0$
- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ $\qquad \lim_{x \to \pi^-} f(x) = 0$

$\therefore$ f' é sec. contínua em $[-\pi, \pi]$,

$\therefore$ f é seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$.

Pelo teorema de Dirichlet a série de Fourier de f converge para a função S

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \neq \pi K \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2} & , \quad x = \pi K \end{cases}$$

$\underline{x=0}$

$$\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = 0 \; ;$$

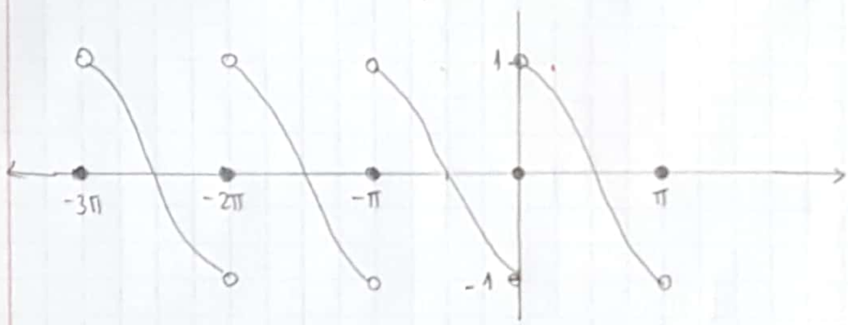
$\underline{x=\pi}$

$$\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2} = 0 \; ;$$

$\underline{x=-\pi}$

$$\frac{f(-\pi^+)+f(-\pi^-)}{2} = 0$$

$$S(x) = \begin{cases} f(x) , & x \neq K\pi \\ 0 , & x = \pi K \end{cases} \quad , K \in \mathbb{Z}$$



(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4n^2-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)$

Como a série de Fourier $\displaystyle\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4n^2-1} \operatorname{sen}(2nx)$

converge para $S(x) = \begin{cases} f(x) , & x \neq K\pi \\ 0 , & x = K\pi \end{cases}$

Se $x = \pi/4$. então

$$\frac{8}{\pi} \sum \frac{n}{4n^2-1} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{4}\right) = \cos(\pi/4)$$

$$\frac{8}{\pi} \sum \frac{n}{4n^2-1} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4n^2-1} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{8}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4n^2-1} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{16}}$$