Aula 18: Sumário

- Equação diferencial ordinária (EDO).
- Exemplos.
- EDOs e solução de uma EDO. Integral geral de uma EDO de ordem n.
- Exercíos e exemplos 1.
- Problema de valores iniciais (PVI).
- Exercícios e exemplos 2.
- Equações diferenciais de primeira ordem abordadas na disciplina.
- EDOs de variáveis separáveis.
- Exercícios.
- Exemplo: modelação - função logística.

Equações Diferenciais

Aula 18: Equação diferencial ordinária (EDO)

- Equação diferencial ordinária (EDO) de ordem n ($n \in N$):
  equação do tipo $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \quad (y = y(x))$
- EDO está na forma normal: quando a derivada de maior ordem está explicitamente expressa em função das restantes variáveis:
  $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$.
- A ordem de uma EDO é a maior ordem da derivada de y.
- Eq. dif. ordinária porque y é função de uma só variável independente. Como só vamos tratar de funções de uma única variável independente, a palavra ”ordinária” irá ser omitida.
- $y^{(n)}$, ou $\dfrac{d^n y}{dx^n}$, denota a derivada de ordem n da função y.

Aula 18: Exemplos

- Lei do arrefecimento (aquecimento) de Newton: “A taxa de variação da temperatura T com o tempo de um corpo (sem energia própria) é proporcional à diferença da temperatura do meio T_m com a temperatura do corpo”:

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = k(T_m - T)} \qquad x := t, \;\; y := T \;\; \rightsquigarrow \;\; \boxed{y' + ky = kT_m}$$

- Lei de Hook: “A força elástica ($m\,a$) exercida por uma mola num corpo de massa m é proporcional ao seu deslocamento”:

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x} \qquad x := t, \;\; y := x \;\; \rightsquigarrow \;\; \boxed{m\,y'' + k\,y = 0}$$

Aula 18: EDOs e solução de uma EDO

Definição 2.2: Chama-se solução da equação diferencial $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, num domínio I, a toda a função $\phi : I \longrightarrow R$ com derivadas finitas até à ordem n tal que

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), ..., \phi^{(n)}(x)) = 0\,, \quad \forall\, x \in I.$$

- Resolver (ou integrar) uma equação diferencial de ordem n consiste em determinar uma família de soluções, ou uma equação

  $$f(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0$$

  cujas funções $y = y(x)$ (muitas vezes na forma implícita) são soluções da equação diferencial, que depende de n parâmetros (ou constantes de integração) reais arbitrários $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

- Solução geral: conjunto de todas as soluções de uma EDO. Poderá não ser (ou dificilmente ser) determinada ou identificada.

- integral geral de uma equação diferencial de ordem n: é uma família de soluções (função) parametrizada com n parâmetros (constantes de integração). Pode haver mais do que um integral geral.

Aula 18: Integral geral de uma EDO de ordem n

- Também se chama integral geral de uma equação diferencial de ordem n a uma equação $f(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0$ com n constantes de integração que implicitamente representa soluções $y = f(x)$ da equação diferencial. É esta última interpretação que iremos usar nos exercícios.

- Uma solução particular (ou integral particular) é uma solução que se obtém dum integral geral por concretização de todas as suas constantes de integração.

- Uma solução que não seja solução particular de nenhum integral geral chama-se solução singular.

- Uma solução que não seja solução particular de um dado integral geral será também dito uma solução singular relativo a esse integral geral.

- Uma equação diferencial simples $y' = f(x)$, $x \in I$, tem solução geral $y = \displaystyle\int f(x)dx + C$ ($x \in I$). Mais geralmente equações diferencias simples de ordem n, $y^{(n)} = f(x)$ resolvem-se por n integração sucessivas.

Aula 18: Exercíos e exemplos

1. Determine uma equ. dif. para a qual a família de curvas $y = e^{cx}$ é um integral geral.
2. Determine uma equ. dif. para a qual a família de curvas $y = Ae^{Bx}$ é um integral geral.
3. Determine uma edo para a qual a família de curvas $y = A \operatorname{sen}(x + B) + C$ é um integral geral.
4. A equação diferencial $(y')^2 = 1$ tem dois integrai gerais: $y = x + c$ e $y = -x + c$. Qualquer solução particular duma é solução singular da outra.
5. A equação dif. $xy' = 4y$ (eq. dif. variáveis separáveis) possui uma infinidade de integrais gerais. Uma delas, a mais óbvia, é $y = cx^4$ (que é a que vai ser calculada pelo método das eq. de variáveis separáveis na próxima aula).
6. A equação $(y')^2 - 4y = 0$ tem integral geral $y = (x + c)^2$, c constante arbitrária.
   $y = x^2$ é uma solução particular e $y = 0$ é uma solução singular.
7. Determine a solução geral das equações diferenciais simples: $y' = cos(x)$, $y'' = xe^x$, $y + xy' = e^x$, e $y' - yx = 0$.

Aula 18: Problema de valores iniciais (PVI) ou problema de Cauchy

Definição: Definição 2.3 Chama-se **problema de valores iniciais** (PVI) (ou problema de Cauchy) a todo o problema que consiste em encontrar a solução (ou soluções) de uma equação diferencial de ordem n satisfazendo n certas condições (ditas condições iniciais) num mesmo ponto x_0:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

- Resolver um PVI significa determinar a(s) solução(ões) da equação diferencial de ordem n envolvida que satisfaz(em) as n condições iniciais no único ponto x_0 (notar que $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ são números reais dados).

9. Determine a solução do seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) = 1 \ , \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

10. Determine a solução do seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y'' + 3x^2 = 0 \\ y(0) = 1 \ , \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

11. A equação diferencial de valores iniciais

$$\begin{cases} |y'| + |y| = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

não tem solução, pois a única solução de $|y'| + |y| = 0$ é $y = 0$.

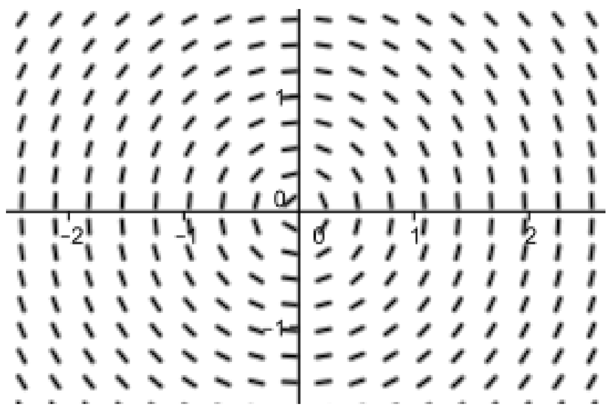
Equações diferenciais de primeira ordem

Aula 18: Equações diferenciais de primeira ordem

- As equaçoes dif. de 1^a ordem que vamos estudar são equações do tipo

$$y' = f(x, y), \text{ onde } f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

- Este tipo de equações diferenciais podem ser visualizadas geometricamente no plano XOY, agregando a cada ponto (x, y) do plano, um declive y' dada pelo valor $f(x, y)$ (ver geogebra CampoDeDeclives).



$$y' = -\frac{x}{y}$$

- Caso mais simples: $y' = g(x)$ que se resolve facilmente por primitivação da função g:
$y = \int g(x)dx + c$.

Aula 18: Equações diferenciais de 1^{a} ordem que vamos estudar:

- Equações diferenciais de primeira ordem que vamos abordar:
  - EDOs de variáveis separáveis.
  - EDOS exatas.
  - EDOs lineares (de primeira ordem).
  - Equações diferenciais de Bernoulli.
  - EDOs homogéneas.

Aula 18: EDOs de variáveis separáveis

A eq. dif. $y' = f(x,y)$ diz-se de variáveis separáveis se

$$\boxed{y' = f(x,y) = \frac{p(x)}{q(y)} \quad \text{com} \;\; q(y) \neq 0}$$

Forma separada duma eq. dif. de var. separáveis:

$$\boxed{q(y)\, y' = p(x) \qquad \text{ou} \qquad q(y)dy = p(x)dx}$$

As funções p e q assumem-se contínuas nos respetivos intervalos.

Resolução: obtém-se integrando ambos os membros da forma separada:

$$\boxed{\int q(y)dy = \int p(x)dx + C}$$

Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDOs:

1. $xy' - y = 0$ Sol: $y = c\,x,\ c \in \mathbb{R}$

2. $x + yy' = 0$ Sol: $y^2 + x^2 = c,\ c \in \mathbb{R}_0^+$

3. $(t^2 - xt^2)\dfrac{dx}{dt} + x^2 = -tx^2$ Sol: $x\,e^{\frac{1}{x}} = c\,t e^{-\frac{1}{t}},\ c \neq 0$; $x = 0$ sol. singular.

Resolva os seguintes problemas de Cauchy: (S.P.C. - Solução do P. de Cauchy)

1. $xy' + y = y^2;\ \ y(1) = 1/2$ Sol: $y = \dfrac{1}{1 - c\,x}$, S.P.C.: $y = \dfrac{1}{x+1}$, $x \neq -1$.

2. $x(y+1) + y'\sqrt{4+x^2} = 0;\ y(0) = 1;$ Sol: $y = \dfrac{c}{e^{\sqrt{x^2+4}}} - 1$, S.P.C.: $y = 2e^{2-\sqrt{x^2+4}} - 1$

3. $(1+x^3)y' = x^2y;\ \ y(1) = 2.$ Sol: $y = c\sqrt[3]{x^3+1}$, S.P.C.: $\sqrt[3]{4(x^3+1)}$

Aula 18: Exercícios 2 (casa)

Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDOs:

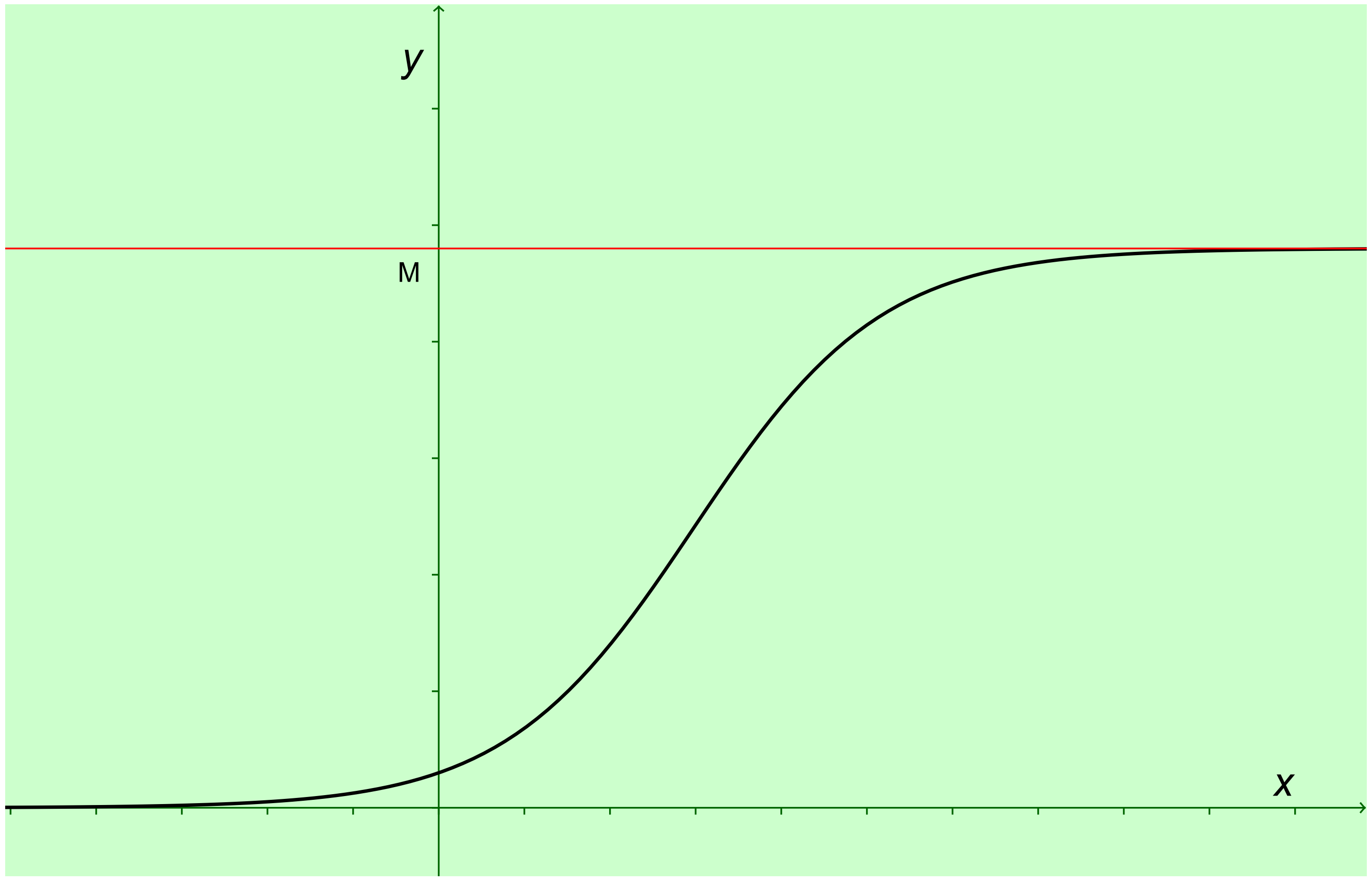
1. $y + y' cosec(x) = 0$
2. $y^2 + y = (x^2 - x)y'$
3. $y' sen(x) + y cos(x) = 0$
4. $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$

Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

1. $y' \operatorname{cotg}(x) + y = 2$, com $y(\frac{\pi}{4})=-1$. Sol: $y = 2\text{-}c\cos(x)$ S.P.C.: $y = 2\text{-}3\sqrt{2}\cos(x)$
2. Uma esfera de cobre é aquecida a uma temperatura de 100^{o}C. A esfera é então colocada num recipiente com água em que esta é mantida a uma temperatura constante de 30^{o}C. Determine a forma como varia a temperatura (T) da esfera ao longo do tempo (t).

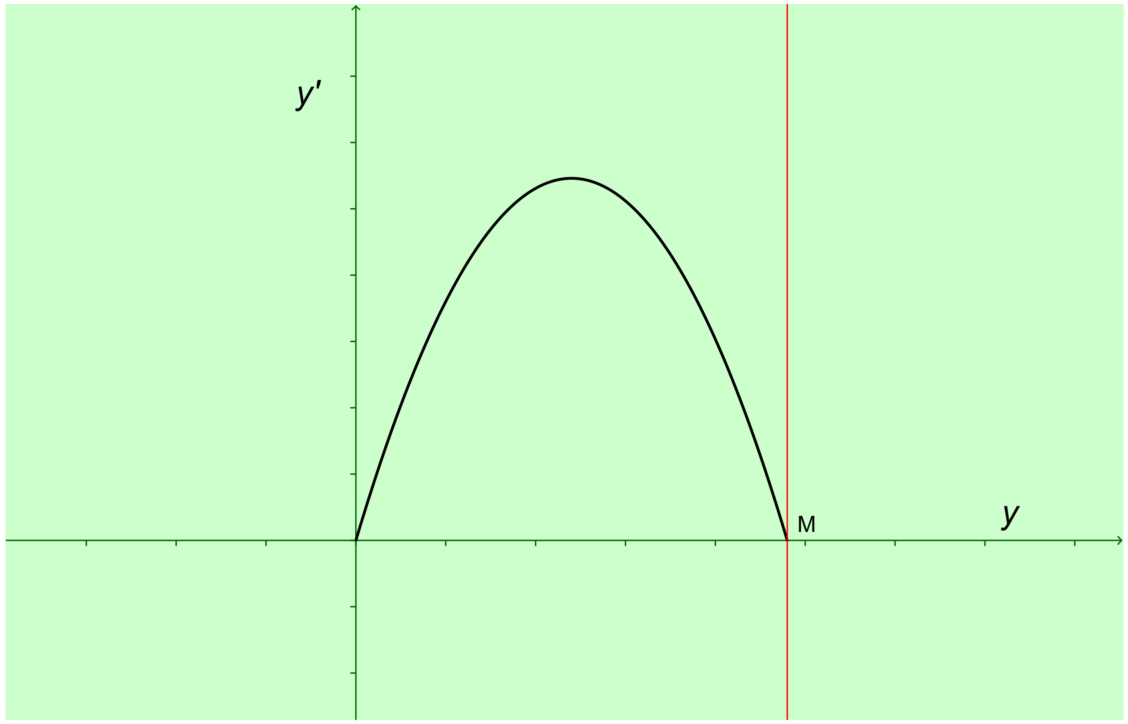
Aula 10: Exemplo: modelação - função logística

Determinar uma curva $y = y(x)$ cujo gráfico tenha uma forma parecida com



Aula 10: função logística - resolução

Vejamos como é que os declives y' se comportam relativamente a y:



$\therefore$ Podemos modelar y' como uma parábola invertida:

$$y' = ay^2 + by + c\,, \quad a < 0.$$

$c = 0$, pois $y' \to 0$ quando $y \to 0$.

$b = -aM$, pois $y' \to 0$ quando $y \to M$.

Aula 10: Função logística - resolução (cont.)

Como a é negativo, ponhamos $a = -\frac{k}{M}$ (para simplificar as expressões no final). A eq. dif. resultante

$$\boxed{\mathbf{y}' = \frac{k}{M}\,\mathbf{y}\,(M-\mathbf{y}) \;=\; k\,\mathbf{y}\,(1-\frac{\mathbf{y}}{M})}$$

é conhecida como equação diferencial logística. Esta eq. é de variáveis separáveis:

$$\frac{1}{y(M-y)}dy = \frac{k}{M}dx \quad\Leftrightarrow\quad (\frac{1}{y} + \frac{1}{M-y})dy = k\,dx$$

Integrando: $\ln|y| - \ln|M-y| = kx + c_1 \quad\Leftrightarrow\quad \ln|\frac{y}{M-y}| = kx + c_1.$

ou seja, $|\frac{y}{M-y}| = c\,e^{kx}\,,\quad c>0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{y}{M-y} = c\,e^{kx}\,,\quad c \neq 0.$

Tirando y em função de x: $\quad y = \frac{M\,ce^{kx}}{ce^{kx}+1} \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{y = \frac{M}{1+d\,e^{-kx}}}$, em que $d = \frac{1}{c}$.

Esta função chama-se função logística.

Formulário Derivadas

$$(u^p)' = p\, u^{p-1}\, u'$$

$$(\,\text{arcsen}\,(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\,\text{arctg}\,(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$(\cos u)' = -u'\ \text{sen}\, u$$

$$(\sec u)' = u' \sec(u)\,\text{tg}\,(u)$$

$$(\,\text{sen}\, u)' = u'\ \cos u$$

$$(\,\text{cosec}\, u)' = -u'\,\text{cosec}\,(u)\,\text{cotg}\,(u)$$

$$(\,\text{tg}\, u)' = u'\ \sec^2 u$$

$$(e^u)' = u'\, e^u$$

$$(\,\text{cotg}\, u)' = -u'\ \text{cosec}^{\,2} u$$

$$(a^u)' = \frac{u' a^u}{\ln a}\ ,\ \ a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$$

Tabela das primitivas quase imediatas $\quad (c \in \mathbb{R})$

$$\int u'\, u^p\, dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + c, \quad p \neq -1$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + c$$

$$\int u' \sin u dx = \cos u + c$$

$$\int u' \cos u dx = \sin u + c$$

$$\int u' \sec^2 u dx = \tan u + c$$

$$\int u' \operatorname{cosec}^2 u dx = -\mathrm{cotgu} + \mathrm{c}$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + c$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctan(u) + c$$

$$\int u' \sec(u) \tan(u) dx = \sec u + c$$

$$\int u' \operatorname{cosec}(u) \mathrm{cotg(u)dx} = -\operatorname{cosec} \mathrm{u} + \mathrm{c}$$

$$\int u' e^u dx = e^u + c$$

$$\int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + c, \quad a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$$