25/03/2020 — 2ª aula zoom

Aula 11 - ppto prof. Mónica Célia

Exercício 1

1. Domínio das funções e descrever geometricamente

a) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1+y}}$

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto z = f(x,y) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1+y}}$

$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{1+x}{1+y} \geq 0 \ \wedge \ 1+y \neq 0\right\}$

$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{1+x}{1+y} \geq 0 \ \wedge \ y \neq -1\right\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ((1+x \geq 0 \wedge 1+y \geq 0) \vee (1+x \leq 0 \wedge 1+y \leq 0)) \wedge y \neq -1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq -1 \wedge y > -1) \vee (x \leq -1 \wedge y < -1)\}$

b) $g(x,y) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2} + x}\right)$

$\longrightarrow D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto z = g(x,y) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2} + x}\right)$

$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 0 \ \wedge \ \sqrt{x^2+y^2} + x \neq 0 \ \wedge \ \dfrac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2} + x} > 0\right\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+y^2 \geq 0}_{\text{é sempre positiva}} \ \wedge \ \sqrt{x^2+y^2} \neq -x \ \wedge \ \sqrt{x^2+y^2} - x > 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 0 \ \wedge \ x^2+y^2 \neq (-x)^2 \ \wedge \ x^2+y^2 > x^2\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 0 \ \wedge \ y^2 \neq 0 \ \wedge \ y^2 > 0\} \Leftrightarrow y \neq 0$

$y \neq 0 \qquad y > 0 \qquad = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

c) $h(x,y) = \dfrac{2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}$

$D_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0 \wedge 4 - x^2 - y^2 \geq 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 4\}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x,y) \neq (0,0)$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x,y) \neq (0,0)\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 4\}$

2.

a) $f(x,y) = 2 - (x^2 + y^2)$, $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2$

$CD_f =]-\infty, 2]$

Para $k \leq 2$, a curva de nível k de f é

$C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 - (x^2 + y^2) = k\}$

$-(x^2 + y^2) = k - 2$

$x^2 + y^2 = 2 - k$

circunferência de centro $(0,0)$ e raio $\sqrt{2-k}$

b) $CD_h = [0, +\infty[$

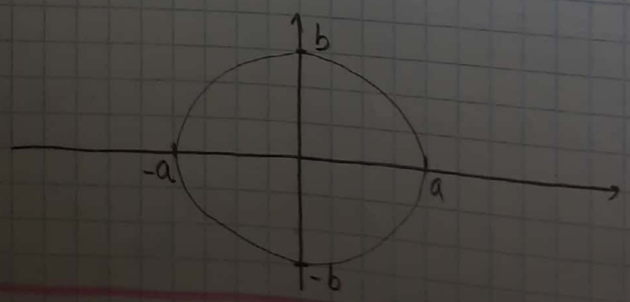
$\dfrac{x^2}{k/2} + \dfrac{y^2}{k/4} = 1$

$C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 4y^2 = k\}$

$\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{1/2} = 1$

equação geral da elipse:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



e) $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$K \geq 0$

$S_K = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = K \}$

esfera de centro $(0,0,0)$ e raio $\sqrt{K}$

para $K = 0 \rightarrow$ quádrica degenerada $(x = y = z = 0)$

Resolução

1.

a) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1+y}}$

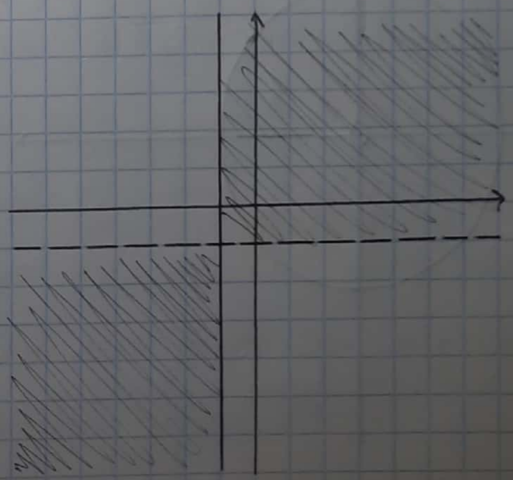
$D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y)$ tenha significado em $\mathbb{R} \}$

$\dfrac{1+x}{1+y} \geq 0 \quad \wedge \quad 1 + y \neq 0$

$\Leftrightarrow [(1 + x \geq 0 \ \wedge \ 1 + y \geq 0) \ \vee (1 + x \leq 0 \ \wedge \ 1 + y \leq 0)] \ \wedge \ 1 + y \neq 0$

$\Leftrightarrow (x \geq -1 \ \wedge \ y > -1) \ \vee \ (x \leq -1 \ \wedge \ y < -1)$

$D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq -1 \ \wedge \ y > -1) \vee (x \leq -1 \ \wedge \ y < -1) \}$



b) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)$

$\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x} > 0 \ \wedge \ \sqrt{x^2+y^2}+x \neq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}-x > 0 \ \wedge \ \sqrt{x^2+y^2} \neq -x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} > 0 \ \wedge \ y \neq 0$

$\Leftrightarrow y^2 > 0 \ \wedge \ y \neq 0$

$\Leftrightarrow y \neq 0$

$D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \neq 0\}$

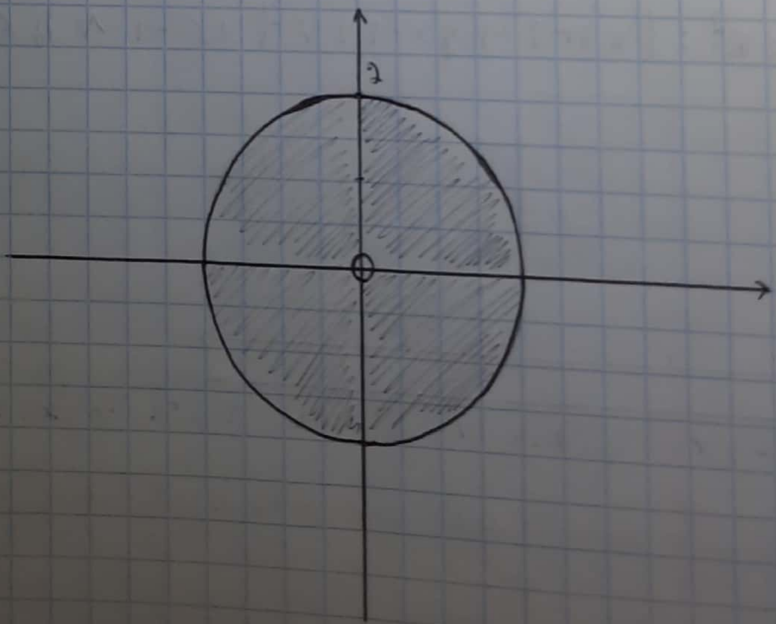
c) $h(x,y) = \dfrac{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$

$4-x^2-y^2 \geq 0 \ \wedge \ x^2+y^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 4 \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0)$

$D_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 4 \wedge (x,y) \neq (0,0)\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 \leq 4\}$



2.

a) $f(x,y) = 2-(x^2+y^2)$, $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2$

Para $k \leq 2$, a curva de nível k de f é

$C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2-(x^2+y^2) = k\}$

A curva de nível k é, para $k < 2$, uma circunferência de raio $\sqrt{2-k}$ e centro em $(0,0)$. Para $k=2$ temos uma curva degenerada $(x=y=0)$

$C_{-3} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2-(x^2+y^2-3)\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 5\}$

$C_{-2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4\}$

$C_{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 3\}$

$C_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 2\}$

$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$

$C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 0\} = \{(0,0)\}$

b) $h(x,y) = 2x^2 + 4y^2$, $k = 2, 3, 4, 8$

Para $k \geq 0$, a curva de nível k de h é

$C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 4y^2 = k\}$

A curva de nível k é, para $k > 0$, uma elipse centrada na origem e vértices com eixo maior paralelo ao eixo Ox, para $k=0$ temos uma curva degenerada $(x=y=0)$.

$C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 = 2x^2+4y^2\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{1/2} = 1\}$

$C_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{3/2} + \frac{y^2}{3/4} = 1 \}$

$C_4 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1 \}$

$C_8 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \}$

c) $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

Para $K \geq 0$, a curva de nível K de h é

$S_K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = K \}$

A curva de nível K é, para $K > 0$, a superfície esférica de centro $(0, 0, 0)$ e raio $\sqrt{K}$, para $K = 0$, temos uma quádrica degenerada $(x = y = z = 0)$

Digitalizada com CamScanner