Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo 2 - Agrupamento 1 — Exame Final

22 de junho de 2017

Duração: **2 horas e 30 minutos**

Justifique devidamente todas as suas respostas.

Este exame tem frente e verso.

1. (**15 pontos**) Considere a função definida por
$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$
   (a) Determine o domínio de f.
   (b) Calcule, caso exista,
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

2. (**30 pontos**) Considere a seguinte função
$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27.$$
   (a) Calcule o gradiente de f.
   (b) A função é diferenciável no seu domínio? Justifique.
   (c) Estude f quanto à existência de extremos locais.
   (d) Poderá aplicar o teorema de Weierstrass à função f no seu domínio? Justifique.
   (e) A função f atinge máximo global no seu domínio? E mínimo global? Justifique.

3. (**25 pontos**) Considere o problema de extremos condicionados
$$\begin{array}{c}\max f(x,y) = 2x + y - 2 \\ s.a.\ x^2 + y^2 = 1\end{array}$$
   (a) Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os pontos de estacionariedade da função lagrangeana associada.
   (b) O problema tem solução? Em caso afirmativo indique-a e justifique devidamente.

4. (**35 pontos**) Considere o seguinte problema de Cauchy
$$\left\{\begin{array}{l} y'' + 2y' + 5y = e^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{array}\right. .$$
   (a) Mostre que
$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+2s+5)},\ s > 1$$
   onde $\mathcal{L}\{y\}(s)$ representa a transformada de Laplace da função y.
   (b) Determine a solução do problema de Cauchy dado.
   (c) Determine a solução geral da EDO
$$y'' + 2y' + 5y = \cos(2t).$$
   (d) Usando a informação obtida na s alíneas anteriroes determine uma solução **particular** para a EDO
$$y'' + 2y' + 5y = \cos(2t) + e^t.$$

vire se faz favor

5. (**25 pontos**) Resolva as seguintes EDOs

   (a) $(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0;\ x, y > 0.$

   (b) $y' + xy = x^3y^3$, com $x, y > 0$.

6. (**20 pontos**) Considere a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Prove que esta série é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

   (b) Sendo $S(x)$ a soma da série dada, isto é, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$, $x \in \mathbb{R}$, mostre que

$$\int_0^1 S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \arctan \frac{1}{n}.$$

7. (**15 pontos**) Sendo f uma função de classe C^∞ numa vizinhança da origem e verificando as condições

$$f(0) = 1 \ \text{ e } \ f'(x) = f(x) + x,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

   determine o desenvolvimento de MacLaurin de f.

8. (**20 pontos**) Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\,2^{n+1}} x^{n+1}$$

   (a) Determine o intervalo de convergência da série de potências.

   (b) Determine a soma da série.
   Sugestão: Recorde a soma da série geométrica.

9. (**15 pontos**) Seja f uma função periódica de período 2π definida em $[-\pi, \pi]$ como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \left[-\pi, -\dfrac{5\pi}{6}\right] \\[2ex] 0 & \text{se} \quad \left]-\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right[\\[2ex] 1 & \text{se} \quad \left[\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right] \end{cases} .$$

   (a) Mostre que a série de Fourier associada a f é uma série de cossenos.

   (b) Prove que

$$f(x) \sim \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\dfrac{5n\pi}{6}\right)}{n} \cos(nx).$$

   (c) Esboce o gráfico da função soma da série, $S(x)$, no intervalo $[-\pi, \pi]$.