Exemplo do slide 50 (slides 2)

f 2π-periódica tal que $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Sabe-se que (ver slide 39)

$$f \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}.$$

Notar que f é contínua em $\mathbb{R}$, na verdade

- $\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \pi = \lim_{x \to -\pi^+} f(x)$

  $= \lim_{x \to \pi^+} f(x)$,

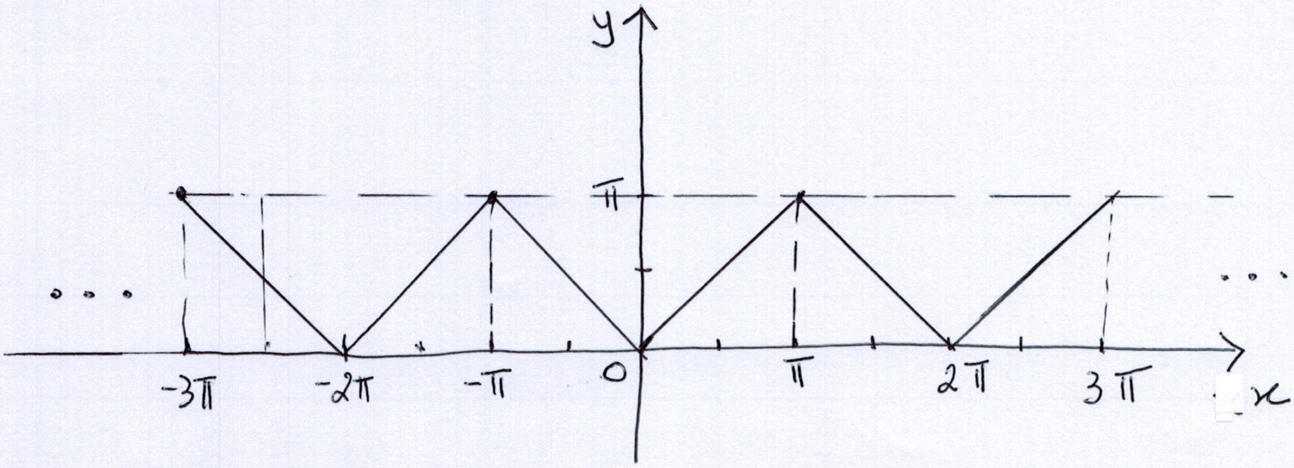
  dada a periodicidade.

- Para $x \in]-\pi, \pi[$

  $f(x) = |x|$

  e portanto é contínua aí.

Esboço gráfico:



f é seccionalmente diferenciável, pois

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

não existindo em $x=0$, $x=-\pi$ e $x=\pi$, repetindo-se o mesmo comportamento nos sucessivos intervalos de amplitude 2π, para a direita e para a esquerda.

Pelo Teorema de Dirichlet, $f(x)$ é a soma da série de Fourier dada, para todo o $x \in \mathbb{R}$, uma vez que f é contínua em $\mathbb{R}$. Ou seja,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Em particular, para $x \in [-\pi, \pi]$,

$$(*) \qquad |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}.$$

Aplicação ao cálculo da soma de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}. \qquad \text{(Ver slide 52)}$$

Se em $(*)$ tomarmos $x=0$,

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

ou seja

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$