Aula 12: Sumário

- Derivadas direccionais.
- Plano tangente.
- Diferenciabilidade de funções reais de uma variável real.
- Diferenciabilidade de funções reais de 2 ou mais variáveis.
- Continuidade das funções diferenciáveis.

Aula 12: Derivadas direccionais

$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $p_0 \in \operatorname{int}(D)$ e $\vec{u}$ um vector unitário ($\|\vec{u}\| = 1$).

Tome-se a recta $L = \{p_0 + t\vec{u} \,:\, t \in \mathbb{R}\}$. Seja $f_{\vec{u}}(t) = f_{|D\cap L}(t) = f(p_0 + t\vec{u})$, com t a variar num intervalo I em que $p_0 + t\vec{u} \in D$.

Definição: A derivada direccional de f na direcção e sentido de $\vec{u}$ no ponto p_0 é

$$D_{\vec{u}} f(p_0) = f'_{\vec{u}}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_{\vec{u}}(t) - f_{\vec{u}}(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(p_0 + t\vec{u}) - f(p_0)}{t}$$

A derivada direccional $D_{\vec{u}} f(p_0)$ dá-nos o declive da recta tangente ao gráfico de $f_{\vec{u}}$ em $\mathbb{R}^3$ no ponto $(x_0, y_0, f(p_0))$. 👉DerivadaDirecional Se $\|\vec{u}\| \neq 1$, então define-se $D_{\vec{u}} f(p_0) := D_{\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}} f(p_0)$.

Vector director da recta tangente ao $G(f)$ na direcção de $\vec{u}$ no pto $(p_0, f(p_0))$, é $(\vec{u}, D_{\vec{u}} f(p_0))$.

$n = 3$: Eq. vectorial da reta tangente ao $G(f)$ no ponto $(x_0, y_0, f(p_0))$ na direcção de $\vec{u} = (a, b)$:

$$(x_0, y_0, f(p_0)) + t(a, b, D_{\vec{u}} f(p_0)).$$

Eq. paramétricas da reta tangente ao $G(f)$ no ponto $(x_0, y_0, f(p_0))$ na direcção de $\vec{u} = (a, b)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + a\,t \\ y = y_0 + b\,t \\ z = z_0 + t\, D_{\vec{u}} f(p_0) \end{cases} .$$

Aula 12: Plano tangente $\quad f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $p_0 \in \mathrm{int}(D)$ e $\vec{u}$ um vector unitário

Para determinar o plano tangente ao gráfico $G(f) = \{(x, y, f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$ no ponto $P_0 = (p_0, f(p_0))$, precisamos de dois vectores directores do plano. Como

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(p_0) = D_{(1,0)} f(p_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = D_{(0,1)} f(p_0)}$$

então $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(p_0))$ e $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(p_0))$ são dois vectores directores do plano tangente que são linearmente independentes. A equação vectorial do plano tangente é portanto

$$P = P_0 + r(1, 0, \tfrac{\partial f}{\partial x}(p_0)) + s(0, 1, \tfrac{\partial f}{\partial y}(p_{p_0}))$$

ou seja, $x = x_0 + r$, $y = y_0 + s$ e $z = z_0 + r\frac{\partial f}{\partial x}(p_0) + s\frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$. A equação cartesiana do plano tangente é:

$$\boxed{\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + (x - x_0)\tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0\,,\, y - y_0) \end{aligned}}$$

Isto mostra que $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$, ou seja,

$$\boxed{\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right) \text{ é um vector ortogonal ao plano tangente}}$$

Aula 12: Polinómio de Taylor de grau 1 de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais finitas em $p_0 = (x_0, y_0)$.
Existe um só polinómio P de grau 1 a duas variáveis $p - p_0 = (x - x_0, y - y_0)$ tal que

$$\begin{cases} P(p_0) = f(p_0) \\ \frac{\partial}{\partial x} P(p_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(p_0) \\ \frac{\partial}{\partial y} P(p_0) = \frac{\partial}{\partial y} f(p_0) \end{cases}$$

Esse polinómio é $P = f(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0)$.

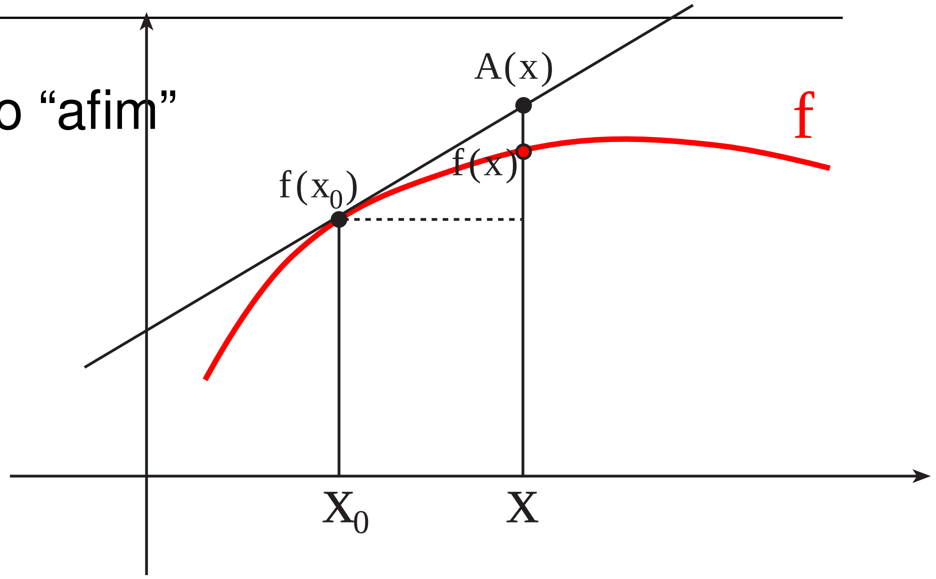
O gráfico da função afim

$$A(p) = f(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0)$$

dá-nos o plano tangente ao gráfico $G(f)$ da função f no ponto $(p_0, f(p_0))$.

A extensão para funções de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é imediata tendo em conta que no sistema acima as derivadas parciais são agora relatitvas a todas as variáveis. O plano tangente deixa de ser plano para ser espaço tangente, naturalmente.

Aula 12: Diferenciabilidade - (1) caso de funções reais de variável real



Seja $A(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = T^1_{x_0} f$ a aplicação "afim" cujo gráfico dá a recta tangente ao gráfico de f no ponto x_0.

Se f é diferenciável em x_0, próximo de x_0 temos que $f(x) \approx A(x)$. O erro $f(x) - A(x)$, ou melhor, o rácio do erro $\dfrac{f(x) - A(x)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{f(x) - A(x)}{|x - x_0|} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$

Temos assim:

$$f \text{ é diferenciável em } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - A(x)}{|x - x_0|} = 0$$

Aula 12: Diferenciabilidade de funções reais de 2 variáveis reais

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Em $p_0 = (x_0, y_0) \in \operatorname{int}(D)$ suponhamos que existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(p_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$; isto é, existe $\nabla f(x_0, y_0)$.

O gráfico da função afim $A(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0\,,\, y - y_0)$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0). Seja $p = (x, y) \in \operatorname{int}(D)$.

Definição: Dizemos que f é diferenciável em $p_0 = (x_0, y_0)$ se

$$\lim_{p \to p_0} \frac{f(p) - A(p)}{\|p - p_0\|} = 0$$

em que $A(p) = f(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0)$ é a função afim cujo gráfico de $A(p)$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto p_0.

Nota: Esta função afim A é o polinómio de Talor $T^1_{p_0} f$ de grau 1 da função f no ponto $p_0 = (x_0, y_0)$.

Aula 12: Diferenciabilidade - em R^n

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Em $p_0 \in \text{int}(D)$ suponhamos que existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)\ i = 1, 2, \ldots, n;$ isto é, existe $\nabla f(p_0)$.

O gráfico da função afim $A(\mathbf{x}) = f(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot (\mathbf{x} - p_0)$ é o espaço tangente ao gráfico de f no ponto $(p_0, f(p_0))$. Seja $p = \mathbf{x} \in \text{int}(D)$.

Definição: f é diferenciável em p_0 se $\nabla f(p_0)$ existe e

$$\lim_{p \to p_0} \frac{f(p) - A(p)}{\|p - p_0\|} = 0$$

em que $A(p) = f(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0)$ é a função afim cujo gráfico de $A(p)$ é o espaço tangente ao gráfico de f no ponto p_0.

Nota: Esta função afim A é o polinómio de Talor $T^1_{p_0} f$ de grau 1 da função f no ponto p_0.

Aula 12: Continuidade das funções diferenciáveis

Teorema (continuidade de funções diferenciáveis) Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $p_0 \in \operatorname{int} D$. Se f é diferenciável em p_0 então f é contínua em p_0.

Sendo f diferenciável em p_0, então $\lim_{p \to p_0} \frac{f(p)-A(p)}{\|p-p_0\|} = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{p \to p_0} f(p) - A(p) = 0$. Queremos mostrar que $\lim_{p \to p_0} f(p) = f(p_0) \Leftrightarrow \lim_{p \to p_0} f(p) - f(p_0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{p \to p_0} |f(p) - f(p_0)| = 0$.

De facto,

$$0 \le |f(p) - f(p_0)| = |f(p) - A(p) + A(p) - f(p_0)| \le |f(p) - A(p)| + |A(p) - f(p_0)|$$

$$\le |f(p) - A(p)| + |\nabla f(p_0) \cdot (p - p_0)| \le^{a} \underbrace{|f(p) - A(p)|}_{\downarrow \atop 0} + \|\nabla f(p_0)\| \underbrace{\|p - p_0\|}_{\downarrow \atop 0}.$$

---

[a] Desigualdade de Cauchy-Schwarz: Dados dois vectores $a, b \in \mathbb{R}^n$, $|a \cdot b| \le \|a\|\|b\|$.