Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo II - agr. 4 **2016/17**

2.º teste Duração: 2h15

- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas. A cotação e o formulário de transformadas de Laplace encontram-se no verso.**

---

1. O conjunto $\{e^{-3x}, xe^{-3x}\}$ constitui um sistema fundamental de soluções da equação homogénea associada à equação diferencial
$$e^{3x}y'' + 6e^{3x}y' + 9e^{3x}y = 1.$$
   (a) Usando o método da variação das constantes determina uma solução particular da EDO. Diz também qual é a solução geral da EDO.
   (b) Determina usando transformadas de Laplace a solução do problema de valores iniciais $e^{3x}y'' + 6e^{3x}y' + 9e^{3x}y = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$. [Sugestão: Começa por dividir por e^{3x} ambos os membros da EDO.]

2. Sabendo que $(\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$, para $x > -1$ e $n \in \mathbb{N}$,
   (a) escreve a expressão do polinómio de MacLaurin de ordem $n \in \mathbb{N}$ da função definida por $\ln(1+x)$ para $x > -1$;
   (b) determina um valor de $n \in \mathbb{N}$ para o qual consigas garantir que o valor do polinómio anterior em 1 seja uma aproximação de $\ln 2$ com erro inferior a uma décima.

3. Considera a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n+1}(x+1)^n$.
   (a) Determina o raio de convergência da série e indica o seu centro.
   (b) Determina agora o intervalo e o domínio de convergência da série.

4. Seja f a função 2π-periódica que em $]-\pi, \pi]$ se expressa como $f(x) := \begin{cases} x, & -\pi < x < 0 \\ -\pi - x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$.
   (a) Calcula os coeficientes de Fourier do tipo a_n de f.
   (b) Sabendo que a série de Fourier de f é
$$-\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos((2n-1)x) - \frac{2}{2n-1} \sin((2n-1)x) \right)$$
   determina a soma da série numérica
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

5. A partir da definição de transformada de Laplace, e tendo em conta que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, mostra que $\mathcal{L}\{\frac{1}{\sqrt{t}}\}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$ para $s > 0$.
Sugestão: No integral que define transformada de Laplace procede a uma mudança de variável de maneira a que e^{-st} se transforme em e^{-x^2}.

Cotação:

1. 5; 2. 4; 3. 4; 4. 4; 5. 3.

Formulário (Transformadas de Laplace):

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad s > s_f; \qquad G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s), \quad s > s_g$$

função	transformada
$t^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}\,,\ s > 0$
$\mathrm{e}^{at} \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{s-a}\,,\ s > a$
$\sin(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\cos(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\sinh(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a\rvert$
$f(t)+g(t)$	$F(s)+G(s)\,,\ s > s_f, s_g$
$\alpha f(t) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha F(s)\,,\ s > s_f$
$\mathrm{e}^{\lambda t} f(t) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)\,,\ s > s_f + \lambda$
$H_a(t) f(t-a) \quad (a > 0)$	$\mathrm{e}^{-as} F(s)\,,\ s > s_f$
$f(at) \quad (a > 0)$	$\dfrac{1}{a}\, F\left(\dfrac{s}{a}\right)\,,\ s > a\, s_f$
$t^n f(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)\,,\ s >$ ordem exp. de f
$f'(t)$	$s\,F(s) - f(0)\,,\ s >$ ordem exp. de f
$f''(t)$	$s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)\,,\ s >$ ordens exp. de f, f'
$f^{(n)}(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$s^n F(s) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$, onde $f^{(0)} \equiv f$, $s >$ ordens exp. de $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$
$(f * g)(t)$	$F(s)\, G(s)\,,\ s >$ ordens exp. de f, g
$\displaystyle\int_0^t f(\tau)\, d\tau$	$\dfrac{F(s)}{s}\,,\ s > 0$, ordem exp. de f

Nota: O facto de se indicarem restrições numa dada linha do quadro acima não significa que não haja restrições adicionais a considerar para que a fórmula indicada nessa linha seja válida.