Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo II — Agrup. IV

Exame Final; 19 de junho de 2019

Duração: **2h45min**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[30pts] 1. Seja $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}(x-1)^n$, $x \in D$, onde D é o domínio de convergência da série.

(a) Determine o domínio D de convergência da série .

(b) Seja G a primitiva de g, definida em D, que se anula em $x = 1$. Calcule $G(2)$.

[20pts] 2. Seja $f(x) = \sqrt{x+1}$, $x > -1$.

(a) Calcule uma aproximação de $\sqrt{1,5}$, usando o polinómio de MacLaurin de ordem 2 de f.

(b) Mostre que o erro absoluto cometido na aproximação da alínea anterior é inferior a 2^{-7}.

[25pts] 3. Seja f a função real de variável real 2π–periódica tal que $f(x) = \frac{x}{2}$, $-\pi \leq x < \pi$.

(a) Determine a série de Fourier de f.

(b) Indique o domínio de convergência da série de Fourier de f e diga, justificando, se esta série é uniformemente convergente nesse domínio.

[25pts] 4. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}^2$ tal que $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x\,y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(a) Mostre que g não é contínua em $(0,0)$.

(b) g é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

(c) Calcule, caso exista, a derivada direcional de g segundo o vetor $U = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ no ponto $(1,0)$.

[35pts] 5. Considere a função f definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

(a) Determine os pontos críticos de f.

(b) A função f tem dois extremantes locais, um deles é $(0,0)$, identifique o outro e classifique-os.

(c) A restrição de f a $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$ tem extremos globais? Justifique.

[20pts] 6. Usando a mudança de variável $z = \frac{y}{x}$, obtenha um integral geral da EDO: $xy' = y + \frac{y^2}{x}$, para $x > 0$.

[25pts] 7. Considere a EDO (linear de coeficientes não constantes)

$$(1-x)y'' + xy' - y = (1-x)^2, \quad x > 1.$$

(a) Mostre que $\{x, e^x\}$ é um sistema fundamental de soluções da EDO homogénea associada.

(b) Sabendo que a EDO completa dada admite uma solução particular da forma

$$y = Ax^2 + Bx + C, \quad A, B, C \in \mathbb{R},$$

determine a sua solução geral.

[20pts] 8. Usando transformadas de Laplace determine a solução do seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 5e^{-t} \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$