Aula 15: Sumário

- Matriz Hessiana.
- Menores principais.
- Extremos - Teste da segunda derivada.
- Extremos - Teste da 2^{a} derivada - Caso particular: $n = 2$.
- Exercícios.

Aula 15: Matriz Hessiana

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ com derivadas de primeira e segunda ordem em $p_0 \in \operatorname{int}(D)$. A matriz

$$Hf(p_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\nabla(f)(p_0) \\ \frac{\partial}{\partial y}\nabla(f)(p_0) \\ \frac{\partial}{\partial z}\nabla(f)(p_0) \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(p_0) & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(p_0) & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(p_0) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

chama-se matriz Hessiana de f em p_0. Ao determinante de $Hf(p_0)$ chamamos Hessiano de f em p_0. A matriz Hessiana é uma matriz simétrica (ver Critério seguinte).

Teorema de Schwarz (Critério da igualdade das derivadas mistas) Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e x, y duas variáveis da função f. Se existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ numa bola aberta centrada em $p_0 \in \operatorname{int}(D)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é contínua em p_0, então existe $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ em p_0 e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0)$.

Aula 15: Menores principais

Chama-se **menor principal de ordem k** de uma matriz de ordem n ao determinante da submatriz de ordem k que se obtém eliminando as últimas $n-k$ linhas e as últimas $n-k$ colunas. Designamos por Δ_k ao menor principal de ordem k e por $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n)$.

Exemplo: $M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ então $\Delta_1 = a_1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ e $\Delta_3 = \det M$.

Explo: $M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Então $\Delta_1 = -1$, $\Delta_2 = 1$, $\Delta_3 = -3$, $\Delta_4 = 6$.

Logo $\Delta = (-1, 1, -3, 6)$ e Sinal$(\Delta) = (-, +, -, +)$, isto é,

Sinal(Δ) =(negativo,positivo,negativo,positivo).

Aula 15: Extremos - Teste da segunda derivada

Um ponto crítico que não seja extremante diz-se um ponto de sela.

Teorema 3: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com derivadas de primeira e de segunda ordem contínuas numa bola aberta centrada em $p_0 \in \operatorname{int}(D)$. Se p_0 é um ponto crítico de f (i.e. $\nabla f(p_0) = \vec{0}$), então

1) Se $\det Hf(p_0) \neq 0$, então

(a) Se Sinal$(\Delta) = (+, +, +, \dots, +)$, então $f(p_0)$ é um mínimo local estrito de f.

(b) Se Sinal$(\Delta) = (-, +, -, +, -, \dots)$, então $f(p_0)$ é um máximo local estrito de f.

(c) Se nenhuma das situações anteriores ocorrer, p_0 é ponto de sela de f.

2) Se $\det Hf(p_0) = 0$ nada se pode concluir.

Exercício 1:

(1)Classifica os p$^{\text{tos}}$críticos da função $f(x, y, z) = xy + yz + z^2 + x^3 + y^2 + 5$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(2) Classifica os p$^{\text{tos}}$críticos da função $f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. imagem

(1) Considera a função real de duas variáveis reais definida pela expressão

$$f(x,y) := 2x^3 + \frac{y^2}{2} - y.$$

(a) Determina e classifica os pontos críticos de f.

(b) Justifica a existência de extremos absolutos de f restrita ao conjunto definido pelas desigualdades $y - x^2 \geq -1$ e $y + x^2 \leq 1$. Calcula-os, assim como os respetivos extremantes absolutos, indicando também quais são maximizantes e quais são minimizantes.

Aula 15: Exercícios 4 (folha 1.5)

1. Determine e classifique os pontos críticos das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$;

   (j) $f(x,y,z) = x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 4xy - 2x - 4y - 8z + 2$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3.$$

   (a) Determine os extremos locais da função f.

   (b) O que pode afirmar sobre os extremos absolutos de f? Justifique.

3. Mostre que $(1,1)$ é minimizante local de $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{3}{x} + \frac{3}{y} + 5$.

5. Mostre que $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ é maximizante local de $f(x,y) = x + 2y - 2xy - x^2 - 3y^2$.

6. Mostre que a função $f(x,y) = 2(y^3 + x^2 + xy)$ tem um mínimo local em $(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6})$.

Formulário Derivadas

$$(u^p)' = p\,u^{p-1}\,u'$$

$$(\operatorname{arcsen}(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\operatorname{arctg}(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$(\cos u)' = -u'\ \operatorname{sen} u$$

$$(\sec u)' = u' \sec(u)\operatorname{tg}(u)$$

$$(\operatorname{sen} u)' = u'\ \cos u$$

$$(\operatorname{cosec} u)' = -u' \operatorname{cosec}(u) \operatorname{cotg}(u)$$

$$(\operatorname{tg} u)' = u'\ \sec^2 u$$

$$(e^u)' = u'\,e^u$$

$$(\operatorname{cotg} u)' = -u'\ \operatorname{cosec}^2 u$$

$$(a^u)' = \frac{u' a^u}{\ln a}\ ,\ \ a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$$