Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo II — Agrup. IV

Exame Final; 13 de junho de 2018

Duração: **2h45**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[15pts] 1. Sabendo que a série numérica de termos positivos $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente e que a série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x-2)^n$ tem raio de convergência $R=1$, determine, justificando detalhadamente, o domínio de convergência da série de potências.

[20pts] 2. Seja $f(x) = \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$.

(a) Determine o polinómio de Taylor de f de ordem 3 centrado em $c=1$, isto é, $T_1^3 f(x)$.

(b) Mostre que o erro absoluto cometido ao aproximar $\ln(\frac{3}{2})$ usando $T_1^3 f(\frac{3}{2})$ é inferior a $\frac{1}{64}$.

[20pts] 3. Considere a série de funções

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3+\sqrt{n}+2}$$

(a) Mostre que a série converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

(b) Denotando por S a função soma da série, calcule, justificando, $S'(\pi)$.

[15pts] 4. Seja g a função real de variável real 2π–periódica tal que $g(x) = 3x$, $-\pi \leq x < \pi$. Determine a série de Fourier de g.

[25pts] 5. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}^2$ tal que $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-3y}{x^2-y} & \text{se } y \neq x^2 \\ 0 & \text{se } y = x^2 \end{cases}$.

(a) Determine a curva de nível 2 de g e faça o seu esboço gráfico.

(b) Mostre que g não é contínua em $(0,0)$.

(c) g é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

[40pts] 6. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = x^3 + y^2 - 2xy$.

(a) Determine os pontos críticos de f.

(b) Mostre que o ponto $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ é um minimizante local de f, averiguando se existem outros extremantes locais.

(c) O ponto $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ é minimizante global de f? Justifique.

[15pts] 7. Resolve a equação diferencial de Bernoulli $y' + xy = -e^{x^2}y^3$

[15pts] 8. Determine a solução geral da EDO exata $xe^{2y}dx + (y+x^2)e^{2y}dy = 0$

[15pts] 9. Encontre a solução geral da EDO linear $y'' + 3y = 2$.

[20pts] 10. Usando transformadas de Laplace, resolva o problema de valores iniciais $\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 6. \end{cases}$

Exame Final C-II Agrup. IV 13/06/2018

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente

$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n (x-2)^n \longrightarrow R = 1$

$D = ?$

centro da série $= 2$

Intervalo de convergência: $]c-R, c+R[\; = \;]2-1, 2+1[=$

$=]1, 3[$

$\boxed{\cdot\, x = 1}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n (1-2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n (-1)^n \longrightarrow$ convergente

$\boxed{\cdot\, x = 3}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n (3-2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n 1^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \longrightarrow$ convergente

Domínio de convergência:

$D = [1, 3]$

1. $f(x) = \ln x, \quad x \in \mathbb{R}^+$

a) polinómio de Taylor de f de ordem 3 e centro em $c = 1$.

$T_1^3 f(x)$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{polinómio de Taylor} \\ T_c^n f(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k\end{array}}$$

$$T_1^3 f(x) = T_1^3 (\ln x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k =$$

$f(x) = \ln(x)$	$f(1) = \ln 1 = 0$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f'(1) = \frac{1}{1} = 1$
$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$
$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$	$f'''(1) = \frac{2}{1^3} = 2$

$$= \cancel{\frac{0}{0!}(x-1)^0} + \frac{1}{1!}(x-1)^1 +$$

$$+ \frac{-1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 =$$

$$= x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3 =$$

$$= x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$$

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3+\sqrt{n}+2}$

a)

$$\frac{\cos(nx)}{n^3+\sqrt{n}+2} \leq \frac{1}{n^3+\sqrt{n}+2} = a_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3+\sqrt{n}+2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Como $\lim_{n\to+\infty} a_n$ é 0, então é uma série convergente.

Logo, a série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3+\sqrt{n}+2}$ é uma série convergente.

Atendendo ao critério de Weierstrass, uma vez que:

$$\frac{\cos(nx)}{n^3+\sqrt{n}+2} \leq \underbrace{\frac{1}{n^3+\sqrt{n}+2}}_{a_n}, \forall n \geq n_0, \forall x \in D \text{ e a}$$

série de termos não negativos $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente, então

podemos concluir que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3+\sqrt{n}+2}$ é uniformemente

convergente em todo o seu domínio $\mathbb{R}$.

4. $g(x) = 3x, \quad -\pi \leq x < \pi$

Determinar a série de Fourier de g.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \right)$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 3x \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot 3 \left[\frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = \frac{3}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2} - \frac{(-\pi)^2}{2} \right] = 0$$

$$\boxed{a_0 = 0}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 3x\cos(nx)\,dx =$$

$$= \frac{3}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos(nx)\,dx =$$

$u = x \qquad dv = \cos(nx)$

$du = 1 \qquad v = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$

$$= \frac{3}{\pi}\left[x \cdot \cancel{\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}}_{0} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] - \frac{3}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cancel{\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}}_{0} =$$

$$= 0 \qquad \boxed{a_n = 0}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 3x\operatorname{sen}(nx)\,dx =$$

$$= \frac{3}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx)\,dx =$$

$u = x \qquad dv = \operatorname{sen}(nx)$

$du = 1 \qquad v = -\frac{\cos(nx)}{n}$

$$= -\frac{3}{\pi n}\left[x\cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] + \frac{3}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,dx =$$

$$= -\frac{3}{\pi n}\left[\pi\cos(n\pi) - (-\pi)\cos(-n\pi) \right] + \frac{3}{\pi n^2}\left[\cancel{\operatorname{sen}(nx)}_{0} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] =$$

$$= -\frac{3}{\cancel{\pi} n}\left[2\cancel{\pi}\cos(n\pi) \right] = \underbrace{\frac{6}{n}(-1)^{n+1}}_{\boxed{b_n}}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{n}(-1)^{n+1} \operatorname{sen}(nx)$$

5.

g função de domínio $\mathbb{R}^2$

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3y}{x^2-y} & , \quad y\neq x^2\\ 0 & , \quad y=x^2\end{cases}$$

a)

Para $k\geq 0$, a curva de nível de k de g é

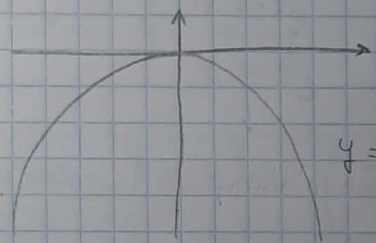
$$C_k=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \frac{x^2-3y}{x^2-y}=k\right\}$$

$$C_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \frac{x^2-3y}{x^2-y}=2\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2-3y=2(x^2-y)\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2-3y=2x^2-2y\right\}$$

$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: -x^2=y\right\} \rightarrow \text{parábola}$$



b) Para que g seja contínua em (0,0),

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0)$$

- $g(0,0)=0$
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$

Consideremos os conjuntos $R_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x=0\}$ e

$R_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=0\}$

$$\rightarrow \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in R_1}} g(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in R_1}} \frac{x^2-3y}{x^2-y} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0^2-3y}{0^2-y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-3y}{-y} = 3$$

$$\rightarrow \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in R_2}} g(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in R_2}} \frac{x^2-0}{x^2-0} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Como os limites não são iguais, podemos concluir que g não é contínua em $(0,0)$.

c) Como g não é contínua em $(0,0)$ pois $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$

então g não é diferenciável.

6. função f de domínio $\mathbb{R}^2$

$f(x,y) = x^3 + y^2 - 2xy$

a) pontos críticos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 2y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 2x$$

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 2y, 2y - 2x) = (0,0)$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y = 0 \\ 2y - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2x = 0 \\ \cancel{2}y = \cancel{2}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(3x-2) = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = x \end{cases} \vee \begin{cases} 3x - 2 = 0 \\ y = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2/3 \\ y = 2/3 \end{cases}$$

Pontos críticos: $(0,0)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Matriz Hessiana:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$$

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -2 \\ -2 & +2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)}$

$$H\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & +2 \end{bmatrix}$$

$$\det H\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 4 \times 2 - (+2) \times (-2) = 8 - 4 = 4$$

Como $\det H\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) > 0$, podemos concluir que $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ é minimizante local

$\boxed{(0,0)}$

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det H(0,0) = 0 \times 2 - (-2) \times (-2) = 0 - 4 = -4$$

Como $\det H(0,0) < 0$, $(0,0)$ é ponto de sela

c) Como o domínio de f é $\mathbb{R}^2$, f pode tomar qualquer par (x, y) desse domínio. De igual modo, não há a existência de nenhum conjunto S que restrinja esse domínio.

Por exemplo:

$$f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{27}$$

$$f(-3, 0) = -27 < -\frac{4}{27}$$

Como $f(-3,0) < f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, podemos concluir que $f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ não é maximizante global de f.

7. Resolver a EDO de Bernoulli

$$y' + xy = e^{x^2} y^{3} \longrightarrow \alpha = 3$$

$$\Leftrightarrow y^{-3} y' + x y y^{-3} = e^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow y^{-3} y' + x y^{-2} = e^{x^2}$$

Substituição: $z = y^{1-\alpha} = y^{-2}$

$$z' = -2 y^{-3} y'$$

$$-z' = 2 y^{-3} y'$$

$$-\frac{z'}{2} = y^{-3} y'$$

$$-\frac{z'}{2} + x \cdot z = e^{x^2} \Leftrightarrow \underbrace{z' - 2xz}_{} = \underbrace{-2e^{x^2}}_{} \quad (*)$$

$$p(x) = -2x \qquad q(x) = -2e^{x^2}$$

· fator integrante: $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-2\int x\, dx} = e^{-\cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}}} = e^{-x^2}$

(*)

$$\underbrace{e^{-x^2} z' - e^{-x^2} \cdot 2xz}_{(e^{-x^2} z)'} = -2 e^{x^2} \cdot e^{-x^2}$$

$$(e^{-x^2} z)' = -2$$

$$e^{-x^2} z = \int -2\, dx$$

$$e^{-x^2} z = -2x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$z = \frac{-2x + C}{e^{-x^2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y^{-2} = \frac{-2x + C}{e^{-x^2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y^2 = \frac{e^{-x^2}}{-2x + C}, \quad C \in \mathbb{R}$$

9. Resolver a EDO linear

$$y'' + 3y = 2$$

- Solução homogénea

$$y'' + 3y = 0$$

Usando polinómio característico: $p(x) = x^2 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = -3 \Leftrightarrow x = \underbrace{\pm\sqrt{3}\, i}$

$\alpha = 0$

$\beta = \sqrt{3}$

$$SFS = \{e^{\alpha} \cos(\beta x), e^{\alpha} sen(\beta x)\} =$$
$$= \{e^{0} \cos(\sqrt{3} x), e^{0} sen(\sqrt{3} x)\} =$$
$$= \{\cos(\sqrt{3} x), sen(\sqrt{3} x)\}$$

$$y_h(x) = C_1 \cos(\sqrt{3} x) + C_2\, sen(\sqrt{3} x), C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

- Solução particular

$$y'' + 3y = \overbrace{2}^{b(x)}$$

$$b(x) = \underbrace{B_m}_{2} e^{\overset{0}{\alpha} x} \underbrace{\cos(\overset{0}{\beta} x)}_{1}$$

grau $m = 0$

Como $\alpha + \beta i = 0 + 0i = 0$ não é raiz do polinómio característico, então $k = 0$

$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x} \left(Q(x) \underbrace{\cos(\beta x)}_{=1} + R(x) \underbrace{\cancel{\text{sen}(\beta x)}}_{0} \right)$$

$$= x^0 e^{0x} A$$

$$= A$$

$$y'_p = 1$$

$$y''_p = 0$$

$$y'' + 3y = 2$$

$$\Leftrightarrow 0 + 3 \cdot A = 2$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{2}{3}$$

Logo, $y_p(x) = \frac{2}{3}$

Solução geral da EDO linear:

$$y = y_h + y_p$$

$$= c_1 \cos(\sqrt{3}\, x) + c_2 \,\text{sen}(\sqrt{3}\, x) + \frac{2}{3}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

10. Transformadas de Laplace

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{y'' + 6y' + 9y\}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{y''\} + 6\mathcal{L}\{y'\} + 9\mathcal{L}\{y\}$$

$$\Leftrightarrow s^2 Y(s) + s^1 \underset{-1}{\underset{\parallel}{y(0)}} + s^0 \underset{6}{\underset{\parallel}{y'(0)}} + 6(sY(s) + y(0)) + 9Y(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow s^2 Y(s) - s + 6 + 6(sY(s) + (-1)) + 9(Y(s)) = 0$$

$$\Leftrightarrow s^2 Y(s) - s + \cancel{6} + 6sY(s) - \cancel{6} + 9(Y(s)) = 0$$

$$\Leftrightarrow s^2 Y(s) + 6sY(s) + 9(Y(s)) = s$$

$$\Leftrightarrow Y(s)(s^2 + 6s + 9) = s$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{s}{(s+3)^2}$$

Então, $Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+3)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+3)^2}\right\} =$

$$= -e^{-3t} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}\right\}$$

$$= -e^{-3t} - 3(-e^{-3t})t$$

$$= -e^{-3t} + 3te^{-3t}$$

$$= e^{-3t}(1 + 3t)$$