Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II - Agrupamento 4 **2014/15**

Folha 5 - parte 2: *Séries de Fourier*

---

1. Determine a série de Fourier das seguintes funções:

   (a) $f(x) = x + x^2\,, \quad x \in [-\pi, \pi[;$

   (b) $g(x) = e^x\,, \quad x \in [-\pi, \pi[;$

   (c) $h(x) = \begin{cases} -1\,, & -\pi \leq x < 0, \\ 0\,, & x = 0, \\ 1\,, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

2. Considere a função constante $f(x) = 2$ no intervalo $[0, \pi]$. Determine a (soma da) série de Fourier de senos e a (soma da) série de Fourier de cossenos de f e represente-as graficamente no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

3. Considere a função f, 2π-periódica, definida por $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

   (a) Determine a série de Fourier de f.

   (b) Verifique que a série de Fourier é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

   (c) Mostre que

   $$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx)\,, \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

   (d) Justifique que

   $$\frac{x^3 - \pi^2 x}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^3} \operatorname{sen}(nx)\,, \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

4. Considere a série de Fourier

   $$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx)$$

   da função f, periódica de período 2π, definida em $[-\pi, \pi]$ por $f(x) = x^2$.

   (a) Indique, justificando, a função soma desta série.

   (b) Usando a representação de f em série de Fourier, mostre que

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{\cancel{12}}.$$

   6

   (*Exame de Recurso, julho de 2011*).