Aula 5: Sumário

- Série de funções
- Exemplo introdutório
- Sucessões de funções e convergência pontual e uniforme
- Exemplo
- Propriedades da convergência uniforme de sucessões de funções
- Convergência pontual e uniforme de série de funções
- Observações
- Propriedades da convergência uniforme (Teor. 5.5)
- Observação e exemplo
- Critério de Weierstrass para convergência uniforme
- Exercícios

Série de funções

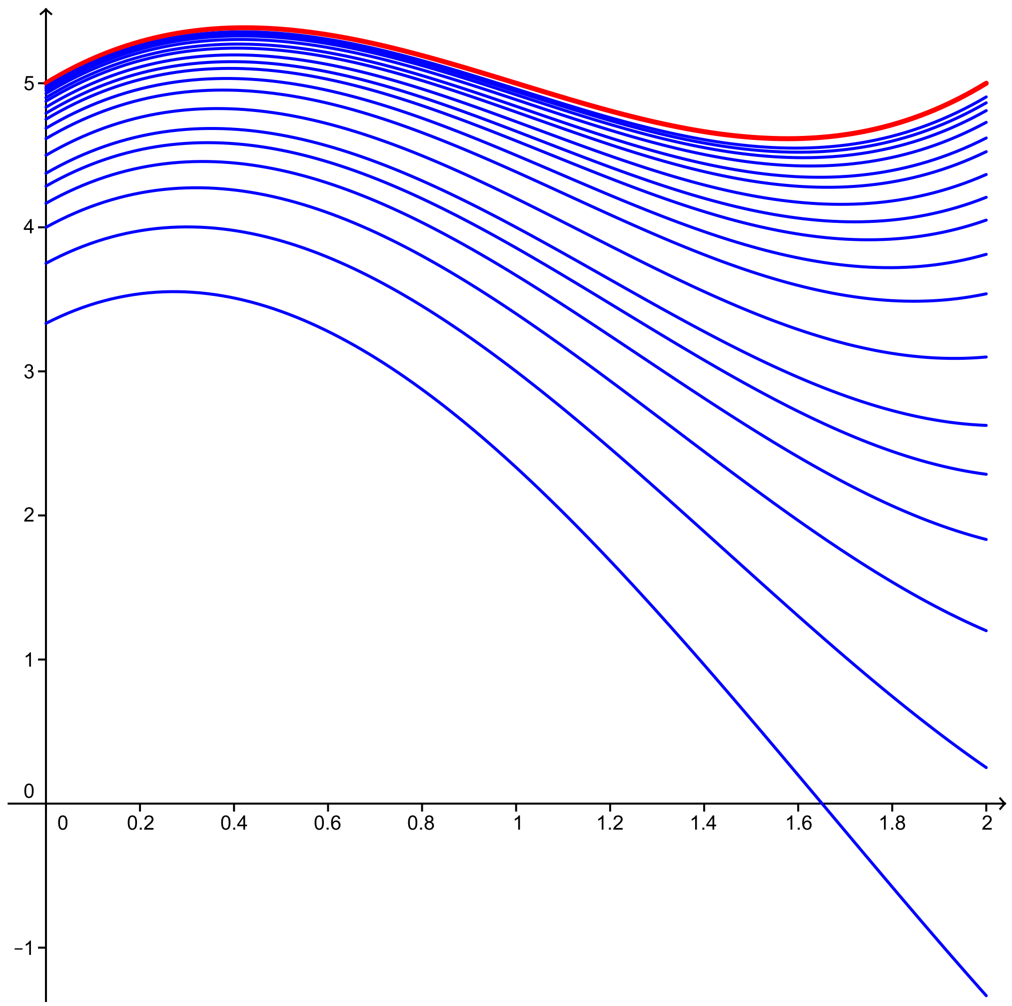
Consideremos a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ para $|x| < 1$, isto é, no domínio $I =]-1, 1[$:

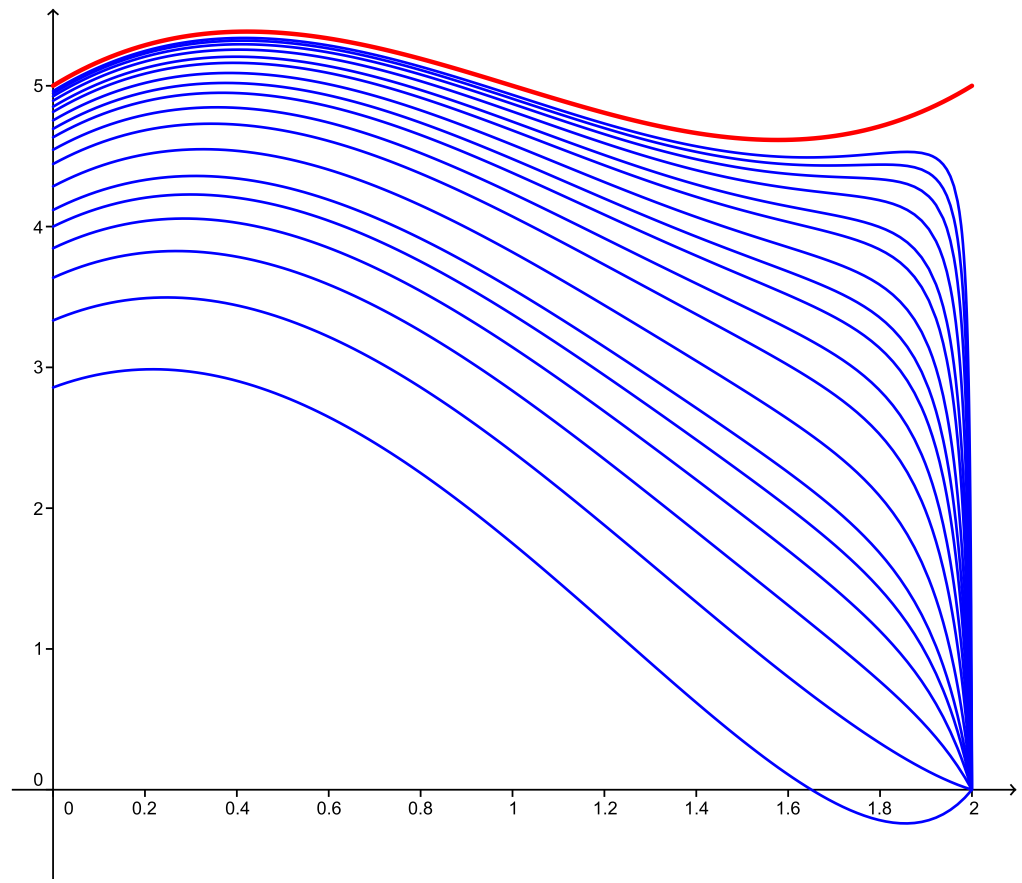
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x}$$

Temos assim uma sucessão de funções $(S_n)_n = \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)_n$ que converge para a função $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

Há dois tipos de convergência $(S_n)_n \longrightarrow S$: convergência pontual e convergência uniforme.

Aula 5: Sucessões de funções e convergência pontual / uniforme





Aula 5: Convergência pontual e uniforme de sucessões de funções

Sejam (f_n) uma sucessão de funções reais definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

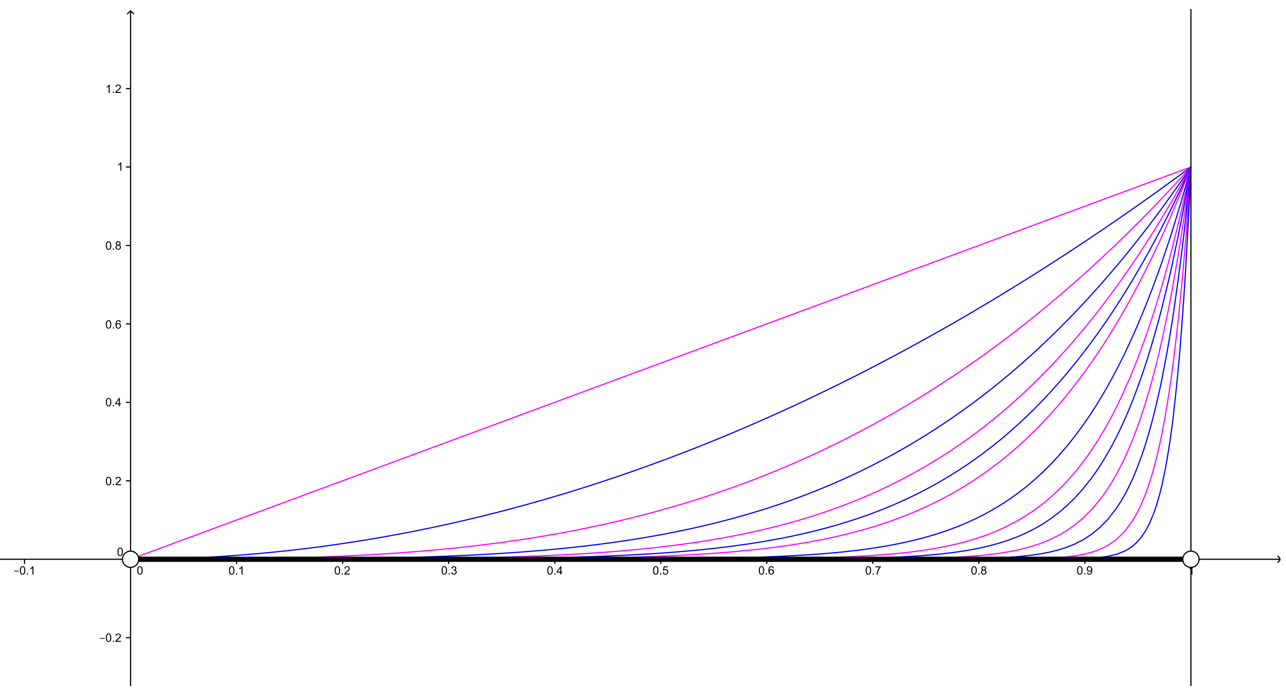
(f_n) converge pontualmente para f em D se, para cada $x \in D$, temos $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

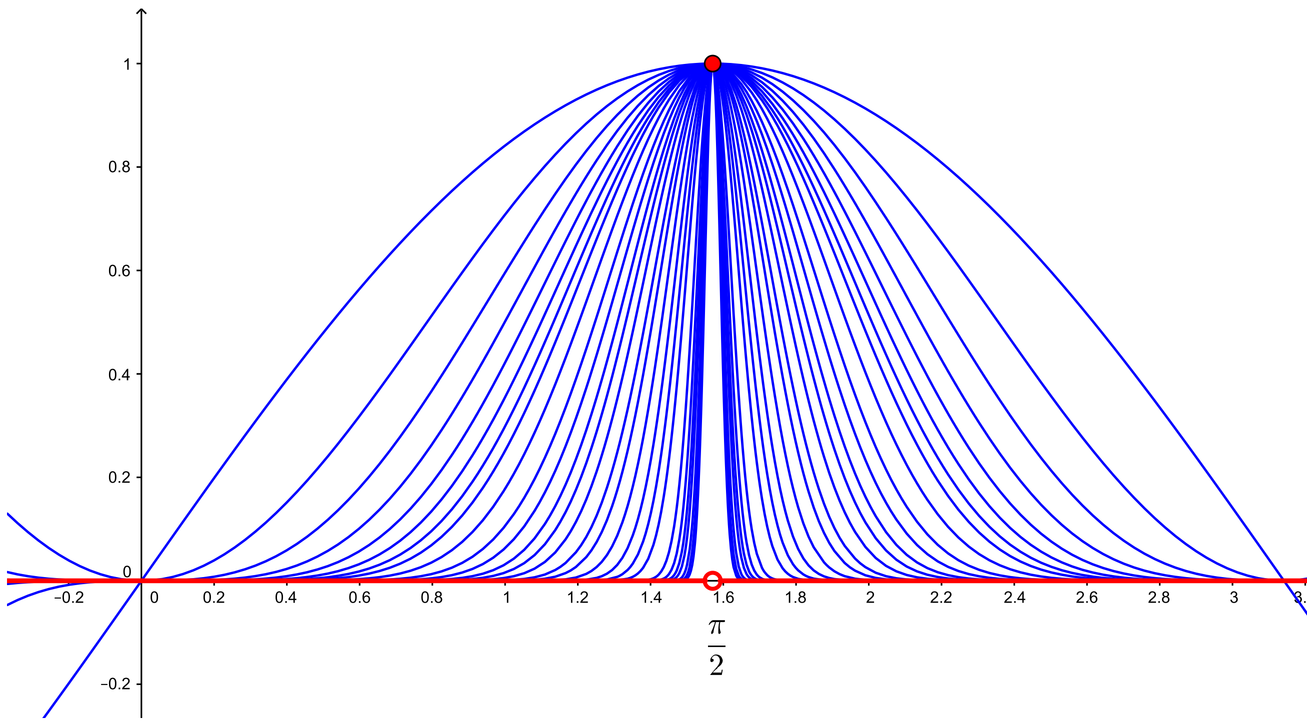
(f_n) converge uniformemente para f em D se a sucessão numérica de termo geral $M_n := \underset{x\in D}{\text{supremo}} \{|f_n(x) - f(x)|\}$ converge para zero (i.e. é um infinitésimo).

Prop. 5.1 Se (f_n) converge uniformemente para f num conjunto D, então (f_n) converge pontualmente para f nesse conjunto.

Aula 5: Exemplo

A sucessão $f_n(x) = x^n$ em $D =]0,1[$ (fig. da esquerda), converge apenas pontualmente para a função nula. A sucessão $f_n(x) = \sin(x)^{\frac{1}{n}}$ em $D = [0, \pi]$ (fig. à direita) converge apenas pontualmente para a função descontínua $f(x) = 0$, se $x \neq \frac{\pi}{2}$, e $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ (a vermelho).





Teor. 5.3 Seja (f_n) uma sucessão de funções contínuas em $[a,b]$, $a \neq b$. Suponha-se que (f_n) converge uniformemente para f num intervalo $[a,b]$. Então:

(i) f é contínua em $[a,b]$;

(ii) f é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx;$$

(iii) Adicionalmente, se as funções f_n têm derivadas contínuas em $[a,b]$ e a sucessão (f_n') converge uniformemente em $[a,b]$, então f é diferenciável neste intervalo e

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \forall\, x \in [a,b].$$

Aula 5: Convergência pontual e uniforme de série de funções

Sejam $f_n : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \;\; n \in \mathbb{N}, \, x \in D.$$

Diz-se que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge pontualmente (uniformemente) em D se a sucessão (S_n) das somas parciais convergir pontualmente (uniformemente) em D. Em caso de convergência, a função S, limite da sucessão (S_n), designa-se por soma da série e escreve-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = S.$$

Nesse caso, também se diz que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge (pontual ou uniformemente) para S.

Aula 5: Observação / série da soma e multiplicação escalar de funções

A convergência pontual de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ corresponde à convergência da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ para cada x. Assim, definimos o domínio de convergência D_f da série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ como sendo o conjunto dos pontos x para os quais a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ é convergente.

Dos **critérios gerais de convergência** tiramos:

Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ convergem pontualmente então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (f_n \pm g_n)$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda\, f_n \quad (\lambda \neq 0)$ convergem pontualmente e temos: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (f_n \pm g_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda\, f_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

O domínio de convergência destas séries: $D_{f\pm g} \supset D_f \cap D_g$ e $D_{\lambda f} = D_f$.

Exemplo: Determine, indicando o domínio de convergência, a representação em série de potências de $\cosh(x)$ e $\operatorname{senh}(x)$ a partir do desenvolvimento em série de potências de e^x.

Aula 5: (Teor. 5.5) Propriedades da convergência uniforme

Teor. 5.5 Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uma série de funções contínuas em $[a, b]$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em $[a, b]$ com soma S, então:

(i) A soma S é contínua em $[a, b]$;

(ii) A soma S é integrável em $[a, b]$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx \quad \text{[integração termo a termo]}$$

(iii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge (basta pontualmente) para $S(x)$ e cada f_n é de classe C^1 em $[a, b]$ e $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge uniformemente em $[a, b]$, então S é diferenciável neste intervalo e

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = S'(x), \ \ x \in [a, b]. \quad \text{[derivação termo a termo]}$$

Aula 5: Observação e exemplo

Importa notar que a derivação termo a termo indicada em (iii) mantém-se válida se substituirmos a hipótese da convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ pela convergência (pontual) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ nalgum $x_0 \in [a, b]$.

Exemplo: a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ (de funções contínuas em $\mathbb{R}$) é pontualmente convergente em $\mathbb{R}$ e a sua soma é a função descontínua

$$S(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(observe-se que se trata de uma série geométrica de razão $\frac{1}{1+x^2}$ para cada $x \neq 0$). Consequentemente, a convergência da série não pode ser uniforme.

Teor. 5.6 (Critério de Weierstrass) Consideremos a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, com as funções f_n definidas em D. Se

$$|f_n(x)| \leq a_n, \ \ \forall\, n \geq n_0, \forall\, x \in D\,,$$

e a série numérica de termos não negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é uniformemente convergente em D.

Aula 5: Exercícios 1 (Folha de exercícios 5 P1)

1. Considere a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}$.

(a) Mostre que a série converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

(b) Justifique que a função $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}$ é contínua em $\mathbb{R}$.

2. Obtenha uma representação em série de potências (de Taylor) para cada uma das seguintes funções, a partir dos desenvolvimentos conhecidos das funções exponencial, seno, cosseno e $\dfrac{1}{1-x}$. Em cada caso, indique o maior conjunto onde é válida a representação.

(a) e^{-x^2} **(b)** $\cosh(4x)$ **(c)** $\operatorname{senh}(3x)$

(d) $2\cos^2 x$ **(e)** $\dfrac{1}{4+x^2}$

Aula 5: Exercícios 2

Mostre que as seguintes séries convergem uniformemente nos intervalos indicados:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2x}{n^3x+1}}$ em $\mathbb{R}^+$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2nx)-\ln(nx+1)}{n^2+1}$ em $[1,+\infty[$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2x^2}{n^4x^2+5n}$ em $\mathbb{R}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-\frac{1}{n})^n}{n^2+1}$ em $]0,1]$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{x^2+1}}$ em $\mathbb{R}$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{5}{4}} \operatorname{sech}(nx)$ em $\mathbb{R}$.

Séries de potências de algumas funções

- $\diamond$ $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ \forall\, x \in]-1,1[.$

- $\diamond$ $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

- $\diamond$ $\operatorname{sen}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$

- $\diamond$ $\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

- $\diamond$ $\operatorname{senh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$

- $\diamond$ $\cosh(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$