Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo II - Agrupamento 4

Ano letivo 2016/2017 (2º Semestre)

---

1. Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{1-x^2}+y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

   (a) Determine o domínio D de definição de f e represente-o geometricamente.

   (b) Determine:

      i. a fronteira fr(D) de D;

      ii. o interior int(D) de D;

      iii. o exterior ext(D) de D;

      iv. o conjunto D' dos pontos de acumulação de D (designado por derivado de D).

   (c) Diga, justificando, se D é aberto ou fechado.

2. Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{x+y}}}.$$

   Determine o domínio D de definição de f e diga, justificando, se D é aberto ou fechado.

3. Para cada uma das funções, justifique a continuidade em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e, com base num seu gráfico, diga se a função parece ser prolongável por continuidade a $(0,0)$ (i.e., se parece ser possível atribuir um valor nesse ponto que faça com que a função assim estendida seja contínua em $\mathbb{R}^2$).

   (a) $f(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$;

   (b) $g(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

4. Atendendo às regras que permitem identificar como contínuas as funções construídas à custa de funções contínuas mais simples, justifique a continuidade de cada uma das seguintes funções no seu domínio de definição e descreva esse domínio (nos casos mais complicados não precisa de resolver as inequações resultantes).

   (a) $f(x, y) = \ln(\cos(x^2 + y^2))$;

   (b) $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$;

   (c) $f(x, y) = \sqrt{2}$;

   (d) $f(x, y) = \sin(x^2 y)$;

   (e) $f(x, y, z) = xe^{-\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$;

   (f) $f(x, y, z) = y$;

   (g) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$;

   (h) $f(x, y) = \frac{e^{x+y}}{x+y}$.

5. Em cada uma das alíneas seguintes, seja S o conjunto de todos os pontos (x, y) em $\mathbb{R}^2$ satisfazendo as condições dadas. Explique se S é aberto, fechado, simultaneamente aberto e fechado, ou nem aberto nem fechado.

   (a) $x^2 + y^2 \geq 0$;

   (b) $x^2 + y^2 < 0$;

   (c) $x^2 + y^2 \leq 1$;

   (d) $1 < x^2 + y^2 < 2$;

   (e) $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$;

   (f) $1 < x^2 + y^2 \leq 2$;

   (g) $1 \leq x \leq 2,\ 3 \leq y \leq 4$;

   (h) $1 \leq x \leq 2,\ 3 \leq y < 4$;

   (i) $y = x^2$;

   (j) $y \geq x^2$;

   (k) $y \geq x^2, \quad |x| < 2$;

   (l) $y \geq x^2, \quad |x| \leq 2$.

6. Em cada uma das alíneas seguintes, seja S o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ satisfazendo as condições dadas. Explique se S é aberto ou não.

   (a) $z^2 - x^2 - y^2 - 1 > 0$;

(b) $|x| < 1, \ |y| < 1, \ |z| < 1$;

(c) $x + y + z < 1$;

(d) $|x| \leq 1, \ |y| < 1, \ |z| < 1$;

(e) $x + y + z < 1, \ x > 0, \ y > 0, \ z > 0$;

(f) $x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2x + 16y + 40z + 113 < 0$.

7. Para cada um dos seguintes conjuntos determine a fronteira, o interior e o exterior e diga, justificando, se o conjunto é aberto, se é fechado e se é limitado.

   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x + y} < 3\}$;

   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$;

   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(xy) \leq 0\}$;

   (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z < 1\}$;

   (e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; \ y = x\}$.

8. Considere a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ no domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ definido pela condição $|x| + |y| \leq 1$.

   (a) Aplique cuidadosamente o Teorema de Weierstrass para garantir a existência de extremos absolutos de f.

   (b) Represente geometricamente o domínio D (neste caso permitimos que use um software gráfico para o efeito) e determine depois os extremos e os extremantes absolutos da função (sugestão: relacione o valor de f em cada (x, y) com a norma desse mesmo ponto).

9. Seja $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$ e $f(x, y, z) = z^2$. O Teorema de Weierstrass garante a existência de extremos absolutos de f em A? Justifique.

10. Seja $f(x, y) = -x^2$. Mostre, usando diretamente a definição de maximizante global, que f possui um número infinito de tais maximizantes.

11. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$.

    (a) O Teorema de Weierstrass garante a existência de extremos absolutos de f? Justifique.

    (b) Verifique, usando diretamente a definição de minimizante absoluto, que $(0, 0)$ é um tal minimizante de f.

12. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$. Verifique, usando diretamente a definição de maximizante absoluto, que $(0, 0)$ é um tal maximizante de f.

13. Sejam $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $f(x,y) = y$.

   (a) Justifique que f possui extremos globais em B.

   (b) Identifique os extremantes globais de f em B (sugestão: represente geometricamente o conjunto B e "observe" a evolução do valor de f ao longo de segmentos "horizontais" e de segmentos "verticais" dentro de B).

   (c) f possui extremos em A? Justifique.

14. Mostre que a função $f(x,y) = \dfrac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2)$ atinge o seu máximo global na origem.

15. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = x^3 + 2xy$;

   (b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$;

   (c) $f(x,y) = e^{2xy^3}$;

   (d) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$;

   (e) $f(x,y) = \sin^2(x - 3y)$;

   (f) $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$;

   (g) $f(x,y) = x^2 y + \cos(y) + y \sin(x)$;

   (h) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 x$.

16. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de cada uma das seguintes funções no ponto P:

   (a) $f(x,y,z) = e^z + xy, \quad P = (1,1,1)$;

   (b) $j(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 x, \quad P = (1,0,1)$;

   (c) $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad P = (0,1)$;

   (d) $h(x,y) = \ln(x^2 + y^2), \quad P = (1,0)$;

17. Seja $f(x,y,z) = xe^z - ye^x + ze^{-y}$. Determine:

   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,-1,0)$;

   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y,-1)$;

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,-1,z)$.

18. Determine os pontos críticos das seguintes funções:

    (a) $f(x,y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$;

    (b) $f(x,y) = x^2y^3(6-x-y)$;

    (c) $f(x,y) = \sin x \cosh y$;
    (Relembre que $\cosh y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$)

    (d) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 4z^2$;

    (e) $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$

19. Mostre que a função $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$ tem apenas um mínimo local e que este ocorre apenas no ponto $(1,2)$.

20. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4(x-2y)$, onde $D = [0,1] \times [0,2]$.

    (a) Diga, justificando, se f tem pontos críticos.

    (b) Prove a existência de extremos absolutos de f e determine-os.

21. Determine os extremantes absolutos da função $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ que satisfazem a desigualdade $x^2 + y^2 \leq 1$.

22. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e suponha que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0,$$

para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Prove que f é constante.

23. Dê um exemplo de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0,$$

para qualquer $(x,y) \in D$, mas que não seja constante.