Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO 2 - agrup. 1 **2017/18**

Folha 1: *Séries de potências, séries de Taylor, formula de Taylor*

---

1. (a) $x \in \mathbb{R}$
   (b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   (c) $\in \mathbb{R} \setminus \{]-1,1]\}$

2. Quais das séries seguintes são séries de potências? Em caso afirmativo indique a sucessão de coeficientes e o ponto de desenvolvimento.
   (a) NÃO
   (b) NÃO
   (c) SIM, $a_n = 1/n!$ e $c = -1$
   (d) NÃO

3. Determine o raio de convergência das seguintes séries de potências
   (a) $R = 256$
   (b) $R = 0$,
   (c) $R = 2^{-3/4}$,
   (d) $1/\sqrt{5}$.

4. $a_{2k} = (-1/2)^{k+1}$, $a_{2k+1} = -(-1/2)^{k+1}$

5. Créditos de anuidade são a forma mais comum de financiar a compra de imóveis. O banco e o recipiente fixam um montante de crédito K, uma taxa de juro anual ρ, o valor mensal da prestação R e o tempo de duração do crédito. No final do tempo fica uma dívida restante para qual se faz um novo contrato de crédito com uma nova taxa. Para estimar o risco é importante saber qual é a dívida restante.
   (a) Sabendo que o cálculo da dívida restante em cada mês nos dá a fórmula recursiva

$$\begin{aligned} a_0 &= K, \\ a_n &= \left(1 + \frac{p}{12}\right) a_{n-1} - R, \end{aligned}$$

determine a função representada pela série de potências $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Solução:

$$\begin{aligned} f(x) &= K + \left(1 + \frac{p}{12}\right) x f(x) - \frac{Rx}{1-x} \\ &= \frac{K}{1 - \left(1 + \frac{p}{12}\right) x} - \frac{Rx}{(1-x)\left(1 - \left(1 + \frac{p}{12}\right) x\right)} \end{aligned}$$

(b) A partir da fórmula explícita de f determine a representação em série de potências e a formula explícita para os coeficientes a_n.

Solução:

$$a_n = K \left(1 + \frac{p}{12}\right)^n - R \frac{1 - \left(1 + \frac{p}{12}\right)^n}{1 - \left(1 + \frac{p}{12}\right)}$$

6. (a)

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + R_3(x)$$

(b)

$$f(x) = (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + R_3(x)$$

(c)

$$f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + R_3(x)$$

7. Determine $\ln(1,5)$ usando um polinómio de Taylor de ordem 4 para a função $f(x) = \ln(1+x)$ e apresente uma estimativa para o erro.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \frac{1}{(1+\theta x)^5}$$

$$\ln(1,5) \approx 0,401$$

Erro com resto: $\delta = \frac{(0,5)^5}{5} \frac{1}{(1+\theta \cdot 0,5)^5}$ o que implica $0,0008 < \delta < 0,0063$

Erro com termo seguinte (série alternada): $\delta \leq \frac{(0,5)^5}{5} = 0,00625$

8. (a) Com o critério de Weierstraß dado que

$$\left| \frac{1}{3^n \sqrt{1 + (2n+1)x}} \right| \leq \frac{1}{3^n}$$

e a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ converge

(b) Com o critério de Weierstraß dado que

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2^n + nx}}\right| \leq \frac{1}{2^{n/2}}$$

e a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n/2}}$ converge

9.

$$f(x) = \frac{1+x^3}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1+x^3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n-2}}\right)x^n$$

10.

$$2^{1/n} + \frac{1}{n2^{1-1/n}}(x-1)$$

11.

$$\frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n(x-1)^n, \qquad |x-1| < 1$$

12.

$$\operatorname{artanh}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$