Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo 2 - Agrupamento 1 — Teste 1

5 de abril de 2017

Duração: **2 horas**

Este teste consta de 5 exercícios.

Justifique adequadamente todas as suas respostas, quer enunciando resultados teóricos, quer explicitando os seus cálculos.

Exercício 1 (**40 pontos**) Considere a função de duas variáveis reais definida por

$$f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$$

1. Determine o domínio de f, D_f.
2. Calcule $f(x,x)$ e $f(x,2x)$. O que pode dizer sobre o
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)?$$
Justifique a sua resposta.
3. Determine o gradiente de f num ponto genérico $(x,y) \in D_f$.
4. A função f é diferenciável no seu domínio? Justifique.

Exercício 2 (**40 pontos**) Considere função definida por

$$f(x,y) = \frac{4}{3}x^3 - 2xy + \frac{1}{2}y^2$$

1. Estude f quanto à existência de extremos locais.
2. Poderá aplicar o Teorema de Weierstrass à função f no seu domínio? Justifique.
3. A função atinge máximo e mínimo globais no seu domínio? Justifique a sua resposta.

Exercício 3 (**40 pontos**) Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

sujeita à restrição

$$2x + y - 2 = 0.$$

1. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar pontos de estacionariedade da função lagrangeana associada.
2. O problema de extremos condicionados
$$\begin{array}{ll} \min & f(x,y) = x^2 + y^2 \\ s.a. & 2x + y - 2 = 0 \end{array}$$
tem solução? Em caso afirmativo, indique essa solução e justifique devidamente a sua resposta.

Vire a folha se faz favor

Exercício 4 (**40 pontos**) Considere a seguinte equação diferencial

$$u' - 2 = \frac{u-1}{2u+5}$$

onde $u = u(x)$.

1. Mostre que a EDO é de variáveis separáveis e resolva-a.

   Ajuda: Efetue uma divisão de polinómios para determinar uma das primitivas.

2. Considere agora a equação diferencial

$$y' = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$$

   Resolva esta equação usando uma substituição adequada.

Exercício 5 (**40 pontos**) Resolva as seguintes equações diferenciais:

1. $xy' = y(\ln y - \ln x) + y$, com $x > 0$;
2. $(\cos x + 3x^2 y)dx + (x^3 - y^2)dy = 0$.

FIM

Exercício 1

1. O domínio de f, D_f é o conjunto onde a expressão da função tem significado:

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\right\}$$

2. $f(x,x) = \arctan \frac{x}{x} = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$ e $f(x,2x) = \arctan \frac{2x}{x} = \arctan 2$.

   Se considerarmos os limites $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)$ e $\lim\limits_{x\to 0} f(2x,x)$ temos

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

   e

$$\lim_{x\to 0} f(2x,x) = \lim_{x\to 0} \arctan 2 = \arctan 2$$

   Portanto, não existe o

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

3. Como o gradiente de f num ponto genérico $(x,y) \in D_f$ é dado por

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

   começamos por calcular as derivadas parciais de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

   e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

   Assim,

$$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

4. A função f é diferenciável no seu domínio porque as derivadas parciais são funções contínuas em D_f.

Exercício 2

1. Começamos por determinar os pontos críticos da função, isto é, os pontos que satisfazem a equação

$$\nabla f(x,y) = (0,0)$$

As derivadas parciais são

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^2 - 2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x + y$$

A equação $\nabla f(x,y) = (0,0)$ é equivalente ao sistema de equações

$$\begin{cases} 4x^2 - 2y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 2y = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4x = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x(x-1) = 0 \\ y = 2x \end{cases}$$

Temos assim duas soluções

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Os pontos críticos são portanto $(0,0)$ e $(1,2)$.

Vamos agora determinar a matriz hessiana desta função

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8x & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

já que as derivadas parciais de segunda ordem são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8x; \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2.$$

Para cada um dos pontos críticos vamos aplicar o teste da segunda derivada:

- $Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e como $|Hf(0,0)| = H_2(0,0) = -4 < 0$ o ponto $(0,0)$ é um ponto de sela.
- $Hf(1,2) = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e como $|Hf(1,2)| = H_2(1,2) = 4 > 0$ e $H_1(1,2) = 8 > 0$ o ponto $(1,2)$ é um ponto de mínimo local. O mínimo é $f(1,2) = -\dfrac{2}{3}$.

2. Não se pode aplicar o Teorema de Weierstrass à função f no seu domínio, já que o domínio, sendo $\mathbb{R}^2$ não é um conjunto fechado e limitado.

3. Esta função não tem máximo nem mínimo, já que não é uma função limitada, o seu contradomínio é $\mathbb{R}$. Notemos que, fazendo, por exemplo $y = 0$, temos a função real contínua $g(x) = \dfrac{4}{3}x^3$ que tende para $+\infty$ quando x tende para $+\infty$ e para $-\infty$ quando x tende para $-\infty$, portanto de contradomínio $\mathbb{R}$.

Exercício 3 A função de Lagrange, $L = f - \lambda g$, para a função $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeita à condição $g(x,y) = 2x + y - 2 = 0$ é

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(2x + y - 2)$$

Vamos determinar os pontos críticos da função de Lagrange:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2\lambda = 0 \\ 2y - \lambda = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x \\ 2y - x = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x \\ x = 2y \\ 4y + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{4}{5} \\ x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$$

O único ponto de estacionariedade é $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$.
Como apenas temos um ponto de estacionariedade, não podemos, sem mais, dizer que é um ponto de máximo ou de mínimo. Contudo, se pensarmos na restrição da função f ao conjunto $2x + y - 2 = 0$, podemos definir uma nova função de uma variável, $h(x) = f(x, 2 - 2x) = x^2 + (2 - 2x)^2 = 5x^2 - 8x + 4$. Esta função é uma parábola cujo vértice é o mínimo.
O vértice da parábola é precisamente o ponto de estacionariedade, $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$, logo será um ponto de mínimo da função.

Exercício 4

1. A EDO
$$u' - 2 = \frac{u-1}{2u+5}$$
é de variáveis separáveis já que pode ser escrita na forma
$$du = \left(\frac{u-1}{2u+5} + 2\right) dx \Leftrightarrow du = \left(\frac{5u+9}{2u+5}\right) dx \Leftrightarrow \frac{2u+5}{5u+9} du = dx$$
Para resolver a equação começamos por decompor a fração do 1º membro numa soma, efetuando a divisão dos polinómios:
$$\frac{2u+5}{5u+9} = \frac{2}{5} + \frac{\frac{7}{5}}{5u+9}$$
integrando ambos os membros temos
$$\int \left(\frac{2}{5} + \frac{\frac{7}{5}}{5u+9}\right) du = \int dx$$
e portanto,
$$\frac{2}{5}u + \frac{7}{25} \ln|5u+9| = x + C,\ C \in \mathbb{R}$$
2. Considere agora a equação diferencial
$$y' = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$$
Fazendo a substituição $u = 2x + y$ obtemos a EDO
$$u' - 2 = \frac{u-1}{2u+5}$$
Na solução obtida para a EDO de variáveis separáveis substituímos u por $2x + y$ e vem
$$\frac{2}{5}(2x+y) + \frac{7}{25} \ln|5(2x+y)+9| = x + C,\ C \in \mathbb{R}$$
que é a solução da EDO
$$y' = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5}.$$

Exercício 5

1. Comecemos por observar que x e y devem ser positivos, para estarem no domínio do logaritmo.
A EDO $xy' = y(\ln y - \ln x) + y$ escrita na forma normal é
$$y' = \frac{y(\ln y - \ln x) + y}{x} = \frac{y}{x}(\ln y - \ln x) + \frac{y}{x} = \frac{y}{x} \ln\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}$$
Facilmente se verifica que $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$, ou seja, que a função f é homogénea.
Fazendo a substituição $z = \frac{y}{x}$ (consequentemente, $y' = z'x + z$) vem
$$z'x + z = z\ln z + z \Leftrightarrow z'x = z\ln z \Leftrightarrow \frac{1}{z\ln z} dz = \frac{1}{x} dx, \text{ com} z \neq 1$$
e integrando vem
$$\ln|\ln z| = \ln x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Regressando à variável inicial,

$$\ln\left|\ln\frac{y}{x}\right| = \ln x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

A função $z = 1$, correspondente à função $y = x$ é também solução da EDO (basta substituir na equação original e verificar). Esta solução corresponde a $K = 0$.

Incluindo a solução $y = x$, a expressão da solução pode ser apresentada de uma forma "mais elegante":

$$y = xe^{Kx},\ K \in \mathbb{R}$$

2. A EDO $(\cos x + 3x^2y)dx + (x^3 - y^2)dy = 0$ é exata já que, considerando $M(x,y) = \cos x + 3x^2y$ e $N(x,y) = x^3 - y^2$, a condição

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Leftrightarrow 3x^2 = 3x^2$$

A EDO pode ser escrita na forma $dF = 0$, onde

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

Para determinar a função F começamos por integrar N relativamente à variável y:

$$F(x,y) = \int N(x,y)\,dy = x^3y - \frac{y^3}{3} + k(x)$$

Atendendo agora a que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$$

e derivando a função F em ordem a x temos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \Leftrightarrow 3x^2y + k'(x) = \cos x + 3x^2y \Leftrightarrow k'(x) = \cos x$$

Assim, $k(x) = \sin x + C$, $C \in \mathbb{R}$. A função F terá a seguinte expressão

$$F(x,y) = x^3y - \frac{y^3}{3} + \sin x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Como o diferencial da função é nulo, $dF = 0$, a solução da EDO é dada por

$$x^3y - \frac{y^3}{3} + \sin x = D,\ D \in \mathbb{R}$$