

Derivada parcial em ordem a x

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \text{int}(\mathcal{D})$. Fixando $y = b$, fica definida uma função, g_b , real de uma variável, x , tal que

$$\begin{aligned} g_b : \{x \in \mathbb{R} : (x, b) \in \mathcal{D}\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g_b(x) = f(x, b) \end{aligned}$$

À derivada de g_b em $x = a$, caso exista, chama-se **derivada parcial de f em ordem a x em (a, b)** , denota-se por, $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, i.e.,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

caso este limite exista e seja um número real^a.

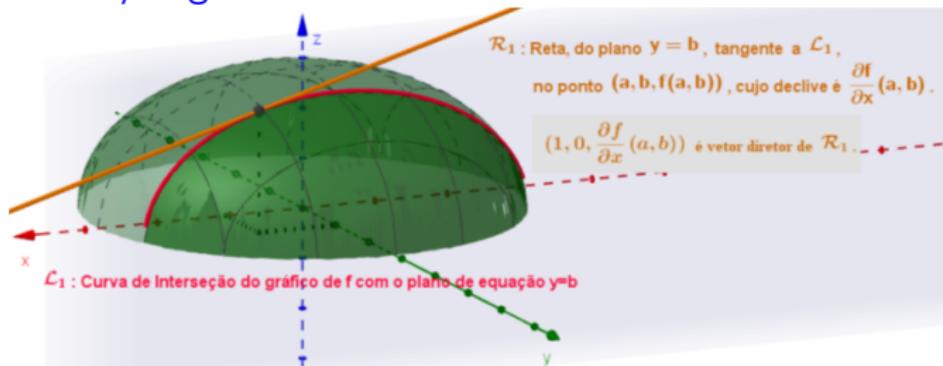
Notação alternativa: $f'_x(a, b)$.

^aPodem considerar-se derivadas iguais a $+\infty$ (ou $-\infty$) mas, neste contexto, não irão ser relevantes

Considerações geométricas sobre o conceito de derivada parcial em ordem a x

- ① A derivada parcial de f em ordem a x no ponto (a, b) é o declive da reta, \mathcal{R}_1 , tangente à curva de interseção do gráfico de f com o plano $y = b$, no ponto $(a, b, f(a, b))$.

Ilustração gráfica:



▶ applet

▶ outra applet

- ② A reta \mathcal{R}_1 tem equações cartesianas:

$$\begin{cases} y = b \\ z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) \end{cases}$$

- ③ $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b))$ é vetor diretor de \mathcal{R}_1 .

Derivada parcial em ordem a y

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \text{int}(\mathcal{D})$. Fixando $x = a$, fica definida uma função, g_a , real de uma variável, y , tal que

$$\begin{aligned} g_a : \quad \{y \in \mathbb{R} : (a, y) \in \mathcal{D}\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto g_a(y) = f(a, y) \end{aligned}$$

A derivada de g_a em $y = b$, caso exista, chama-se **derivada parcial de f em ordem a y em (a, b)** , denota-se por, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, i.e.,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

caso este limite exista e seja um número real.

Notação alternativa: $f'_y(a, b)$.

Considerações geométricas sobre o conceito de derivada parcial em ordem a y

- ① A derivada parcial de f em ordem a y no ponto (a, b) é o declive da reta, \mathcal{R}_2 , tangente à curva de interseção do gráfico de f com o plano $x = a$, no ponto $(a, b, f(a, b))$.

Ilustração gráfica:



▶ applet

▶ outra applet

- ② A reta \mathcal{R}_2 tem equações cartesianas:

$$\begin{cases} x = a \\ z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \end{cases}$$

- ③ $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b))$ é vetor diretor dessa reta.

Interpretação geométrica derivada parcial (exemplo).

Derivada parcial em ordem a x

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \text{int}(\mathcal{D})$. Fixando $y = b$, fica definida uma função, g_b , real de uma variável, x , tal que

$$g_b : \{x \in \mathbb{R} : (x, b) \in \mathcal{D}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g_b(x) = f(x, b)$$

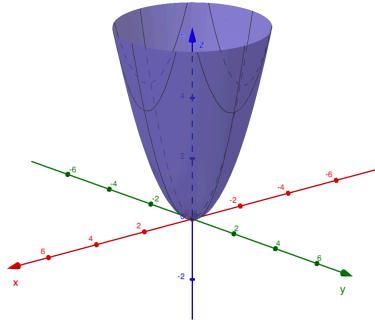
A derivada de g_b em $x = a$, caso exista, chama-se **derivada parcial de f em ordem a x em (a, b)** , denota-se por, $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, i.e.,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

caso este limite exista e seja um número real^a.

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

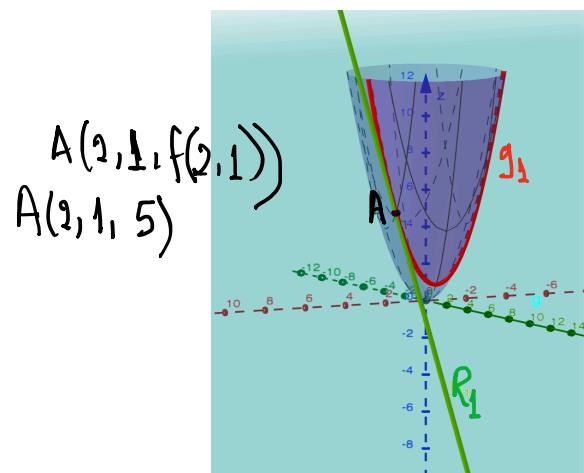
Paraboloide Elíptico.



$$f(2,1) = 2^2 + 1^2 = 5$$

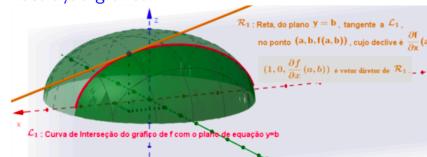
- Calculemos a derivada parcial de f em

Interpretação geométrica: Declive da reta tangente ao gráfico de f com o plano $y=1$ no ponto $(2,1, f(2,1))$.



- A derivada parcial de f em ordem a x no ponto (a, b) é o declive da reta, R_1 , tangente à curva de interseção do gráfico de f com o plano $y = b$, no ponto $(a, b, f(a, b))$.

Ilustração gráfica:



[applet](#)
[outra applet](#)

- A reta R_1 tem equações cartesianas:

$$\begin{cases} y = b \\ z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) \end{cases}$$

- $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b))$ é vetor diretor de R_1 .

ordem a x no ponto $(2,1)$.

te à curva de interseção do

$$y=1$$

$$g_1 : \left\{ x \in \mathbb{R} : (x, 1) \in \mathbb{R}^2 \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g_1(x) = x^2 + 1$$

Interseção com o
plano $y=1$

$$g_1'(2) = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 2 \cdot (2) = 4$$

dedeive da reta tangente R_1 .

Usando a definição

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h, 1) - f(2,1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 + 1^2 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4+2h+h^2+1 - 5}{h} =$$

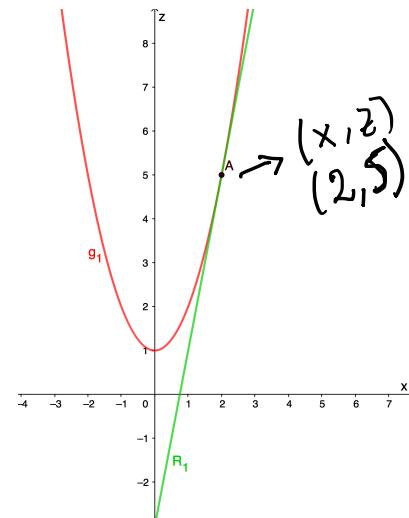
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2+4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h+4 = 4$$

Eq. cartesiana da reta R_1

$$R_1 \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 5 + 4(x-2) \end{cases}$$

$$(x,y,z) \in R_1 \Leftrightarrow (x,y,z) = (x, 1, 5+4(x-2)) = (x, 1, 4x-3) = (0, 1, -3) + x \underbrace{(1, 0, 4)}, x \in \mathbb{R}$$

A função g_1 no plano xz



Eq. da reta R_1

R_1 é uma reta que passa pelo ponto $(2,5)$ e tem inclinação 4.

$$z - 5 = 4(x - 2)$$

$$\boxed{z = 5 + 4(x-2)}$$

vetor diretor da reta.

Interpretação geométrica derivada parcial (cont.).

Derivada parcial em ordem a y

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \text{int}(\mathcal{D})$. Fixando $x = a$, fica definida uma função, g_a , real de uma variável, y , tal que

$$g_a : \{y \in \mathbb{R} : (a, y) \in \mathcal{D}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y \mapsto g_a(y) = f(a, y)$$

À derivada de g_a em $y = b$, caso exista, chama-se **derivada parcial de f em ordem a y em (a, b)** , denota-se por, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, i.e.,

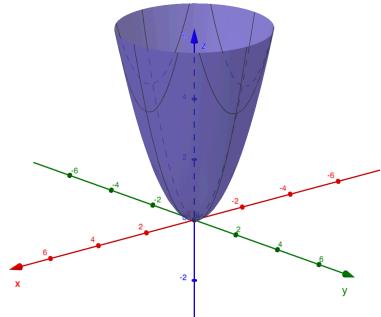
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

caso este limite exista e seja um número real.

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

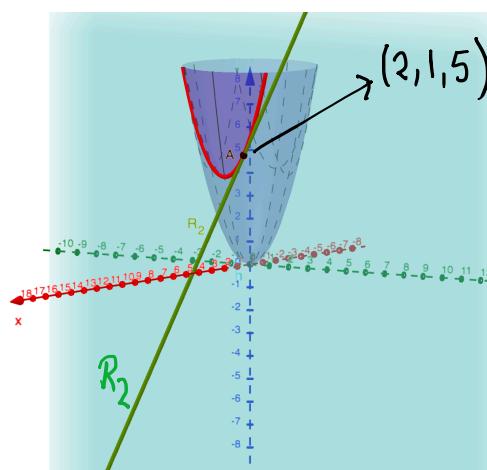
- Calculemos a derivada parcial de f em

Paraboloide Elíptico.



$$f(2, 1) = 2^2 + 1^2 = 5$$

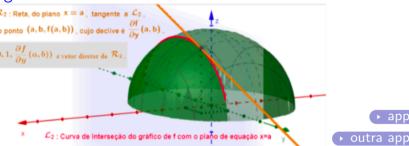
Interpretação geométrica: Declive da reta tangente ao gráfico de f com o plano $x=2$ no ponto $(2, 1, f(2, 1))$.



Considerações geométricas sobre o conceito de derivada parcial em ordem a y

- A derivada parcial de f em ordem a y no ponto (a, b) é o declive da reta, R_2 , tangente à curva de interseção do gráfico de f com o plano $x = a$, no ponto $(a, b, f(a, b))$.

Ilustração gráfica:



- A reta R_2 tem equações cartesianas:

$$\begin{cases} x = a \\ z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \end{cases}$$

- $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b))$ é vetor diretor dessa reta.

ordem a y no ponto $(2, 1)$.

te à curva de interseção do



$$x=2$$

$$g_2 : \{y \in \mathbb{R} : (2, y) \in \mathbb{R}^2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y \rightarrow g_2(y) = f(2, y) = 4 + y^2$$

Interseção com o
plano $x = 2$

$$g'(1) = \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 2(1) = 2$$

^t dedive da reta tangente R_2

Usando a definição

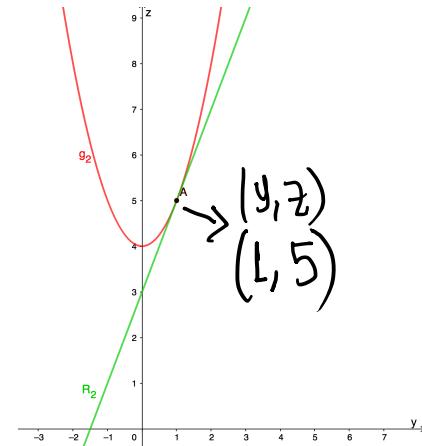
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2,h+1) - f(2,1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+1)^2 + 4 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h + 1 + 4 - 5}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h + 2 = 2 \end{aligned}$$

Eq. cartesiana da reta R_2

$$R_2 \equiv \begin{cases} x = 2 \\ z = 5 + 2(y-1) \end{cases}$$

$$(x,y,z) \in R_1 \Leftrightarrow (x,y,z) = (2, y, 5+2(y-1)) = (2, y, z-y+3) = (2, 0, 3) + u \underbrace{(0, 1, 2)}_{\text{vetor diretor da reta } R_2}, u \in \mathbb{R}$$

A função g_1 no plano yz



Eq. da reta R_2

R_2 é uma reta que passa pelo ponto $(1, 5)$ e tem inclinação 2.

$$z - 5 = 2(y - 1)$$

$$\boxed{z = 5 + 2(y-1)}$$

^t dedive da reta R_2

Derivação parcial: exemplos

Na prática, se a função f estiver definida numa vizinhança de um ponto por uma única expressão derivável (usando regras de derivação) em relação a uma das variáveis, por exemplo x , considerando as restantes constantes, a derivada de f em ordem a x , nessa vizinhança, é a expressão obtida dessa derivação.

Exemplos:

- ① $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 + xy + \ln(1 + y^2)$. Para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, existem as derivadas parciais de f em ordem a x (a y) e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + \frac{2y}{1 + y^2}.$$

- ② $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = \cos(xy^2) + \ln(zy^3)$.

Para todo o $(x, y, z) \in \mathcal{D}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -y^2 \sin(xy^2)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -2xy \sin(xy^2) + \frac{3}{y} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{1}{z}.$$

Derivação parcial: exemplos

Em alguns casos, apenas a definição é utilizável. Tal como nas funções a uma variável, deve usar-se as definições para determinar as derivadas parciais num ponto P , se na vizinhança do ponto P a função não está definida por uma expressão analítica única.

Exemplos:

- ① Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

- ② Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \begin{cases} xy, & \text{se } x \neq y \\ x^3, & \text{se } x = y \end{cases}$. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(3, 4) = 3$ e que $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 2)$ não existe.

Exemplo : Slide 28

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

1) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ | $\frac{\partial f(0,h)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, h) - f(0,0)}{h}$

• $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \cdot \frac{0 - 0}{h} = 0$

• $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$

Assim, $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$

Observe que, f , não é contínua em $(0,0)$. De fato, como
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ não existe (ver exercício 4 da aula 12
parte 2)

f não é contínua em $(0,0)$.

O fato que as derivadas parciais existam não garante que a função seja contínua.

Exemplo 2 : Slide 2B.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (i) \quad f(x,y) = \begin{cases} xy, & x \neq y \\ x^3, & x = y \end{cases}$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h,1) - f(1,1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3,h+4) - f(3,4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(h+4) - 32}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h + 12 - 32}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3.$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y}(2,2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2,h+2) - f(2,2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(h+2) - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + 4 - 8}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h - 4}{h} \quad \begin{matrix} \rightarrow +\infty, & h \rightarrow 0^- \\ \rightarrow -\infty, & h \rightarrow 0^+ \end{matrix}$$

Logo, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h - 4}{h}$ não existe.

∴ $\frac{\partial f}{\partial y}(2,2)$ não existe.

Agora, calculemos as derivadas parciais em um ponto qualquer (x_0, y_0) .

- Se $x_0 \neq y_0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = y_0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = x_0$$

Exemplo 2

slide 28

(cont)

- Se $x_0 = y_0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_0(x_0+h) - x_0^3}{h} = \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x=y}} \frac{x_0^2 + x_0 h - x_0^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2(1-x_0) + x_0 h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2(1-x_0)}{h} + \frac{x_0 h}{h} = \begin{cases} 1, & \text{se } x_0 = y_0 = 1 \\ 0, & \text{se } x_0 = y_0 = 0 \\ \text{não existe}, & x_0 = y_0 \neq 1 \\ & x_0 = y_0 \neq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0(y_0+h) - x_0^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + x_0 h - x_0^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2(1-x_0) + x_0 h}{h} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 = y_0 = 1 \\ 0 & \text{se } x_0 = y_0 = 0 \\ \text{não existe}, & x_0 = y_0 \neq 1 \\ & x_0 = y_0 \neq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Derivadas parciais de ordem superior

Definições e notação:

Seja $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais em ordem a x e a y , em algum conjunto de pontos no interior de \mathcal{D} . As funções

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}$$

com domínio nos conjuntos de pontos onde cada uma existe, terão, ou não, derivadas em ordem a x e a y nesse conjunto. As **derivadas parciais de ordem 2 de f** são as funções (definidas nos pontos onde existem):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Teorema de Schwarz

Exemplo:

Seja f a função real de domínio \mathbb{R}^2 tal que $f(x, y) = x^3y + 5xy + \sin(y^2)$. Verifique que, para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y + 5y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 + 5x + 2y \cos(y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6xy \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \cos(y^2) - 4y^2 \sin(y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 3x^2 + 5 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 3x^2 + 5$$

Teorema de Schwarz: Sejam $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $P \in \text{int}(\mathcal{D})$.

Se existem $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ numa bola aberta centrada em P e se $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é contínua em P , então existe $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P)$.

Função de classe C^k ; Corolário do Teorema de Schwarz

Definição:

Sejam $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, com \mathcal{D} aberto, e $k \in \mathbb{N}_0$. Dizemos que f é de classe C^k em \mathcal{D} se f possuir todas derivadas parciais até à ordem k contínuas em todo o ponto de \mathcal{D} .

Notação: $f \in C^k(\mathcal{D})$.

Corolário do Teorema de Schwarz:

Se $f \in C^2(\mathcal{D})$, então $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)$, para todo o $P \in \mathcal{D}$, com $i, j = 1, 2, \dots, n$

Exemplo

$$f(x,y) = x + \sin(xy) - e^y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + y \cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y^2 \sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \cos(xy) - xy \sin(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \cos(xy) - e^y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^2 \sin(xy) - e^y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \cos(xy) - xy \sin(xy)$$

Exemplo

$$f(x,y,z) = y^2 - 3xz - \cos(yz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -3z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y + \sin(yz) \cdot z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -3x + y \sin(yz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 2 + \cos(yz) \cdot z^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = y^2 \cos(yz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = -3 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = yz \cos(yz) + \sin(yz) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z)$$

Derivadas Direcionais

As derivadas parciais de $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são casos particulares de derivadas chamadas derivadas direcionais, no caso segundo os vetores $U = (1, 0)$ ou $U = (0, 1)$, consoante o caso.

Definição:

Sejam $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $P \in \text{int}(\mathcal{D})$ e U um vetor unitário de \mathbb{R}^n . A derivada direcional de f segundo U no ponto P é o seguinte limite, caso exista e seja finito,

$$D_U f(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + hU) - f(P)}{h}$$

Interpretação geométrica (caso n=2):

▶ applet

$D_U f(P)$, com $P = (a, b)$, dá informação sobre a variação da cota dos pontos no gráfico de f , ao passar por $(a, b, f(a, b))$, quando é colocado um ponto X no domínio da função a deslocar-se na direção e sentido de U .

Exemplo de função com todas as derivadas direcionais num ponto e descontínua nesse ponto

Exemplo:

Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Se $U = (u_1, u_2)$, com $\|U\| = 1$, então

$$D_U f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hU) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3 u_1 u_2^2}{h^2 u_1^2 + h^4 u_2^4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + h^2 u_2^4}$$

logo

$$D_U f(0, 0) = \begin{cases} \frac{u_2^2}{u_1}, & \text{se } u_1 \neq 0 \\ 0, & \text{se } u_1 = 0 \end{cases}$$

f não é contínua no ponto $(0, 0)$, pois não existe limite de f nesse ponto.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Seja $\vec{u} = (u_1, u_2)$, com $\|\vec{u}\| = 1$

Calculemos a derivada direcional de f no direção de u no ponto $(0,0)$.

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + h(u_1, u_2)) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hu_1, hu_2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(hu_1) \cdot h^2 u_2^2}{h^2 u_1^2 + h^4 u_2^4} \cdot \frac{1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 u_1 u_2^2}{h^3 u_1^2 + h^5 u_2^4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + h^2 u_2^4} = \begin{cases} \frac{u_2^2}{u_1} & \text{se } u_1 \neq 0 \\ 0 & \text{se } u_1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$D_{\vec{u}} f(0,0) = \begin{cases} \frac{u_2^2}{u_1}, & u_1 \neq 0 \\ 0, & u_1 = 0 \end{cases}$$

Obs: f não é contínua em $(0,0)$, pois $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ não existe.

De fato, considere os conjuntos

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=0\} \quad \text{e} \quad R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=y^2\}$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in R_1}} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in R_2}} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

Como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \neq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ existem $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ não existe

Diferenciabilidade: O que será para mais do que uma variável?

Como pode constatar com o exemplo do slide anterior a existência das derivadas parciais (ou mesmo de todas as direcionais) de f num ponto P , não garante a continuidade de f em P . Recorde que para $n = 1$, a existência de derivada finita (diferenciabilidade) num ponto é garantia da continuidade nesse ponto.

Em \mathbb{R}^n , para $n \geq 2$, qual será a noção de função diferenciável num ponto?

Vamos responder a essa questão para $n = 2$, recordando o caso $n = 1$. Para dimensões superiores é só fazer a adaptação devida.

Caso $n = 1$: diferenciabilidade/reta tangente

Seja $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in \text{int}(\mathcal{D})$, i.e., existe e é finito o seguinte limite:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

logo, tomindo $\epsilon(\Delta x) = -f'(a) + \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$, obtemos

$$f(a + \Delta x) = f(a) + \Delta x f'(a) + \Delta x \epsilon(\Delta x), \text{ com } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \epsilon(\Delta x) = 0.$$

Deste modo, na vizinhança de a , f fica "bem aproximada" pela reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, a que corresponde a chamada linearização de f em torno de a :

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Caso n=2: diferenciabilidade/plano tangente (I)

Sejam $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $P = (a, b) \in \text{int}(\mathcal{D})$. Considere que existem $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$. Recorde-se que

$$U_1 = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(P)) \text{ e } U_2 = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(P))$$

são vetores tangentes às curvas de interseção do gráfico de f com $y = b$ e $x = a$, no ponto P , respectivamente.

Os vetores U_1 e U_2 são não colineares e portanto, existe o **plano, \mathcal{T}** , que passa em $(a, b, f(a, b))$ e contém U_1 e U_2 . Atendendo a que, o vetor $N = (-\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b), 1)$ é ortogonal a ambos,

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

é uma equação cartesiana do **plano \mathcal{T}** .

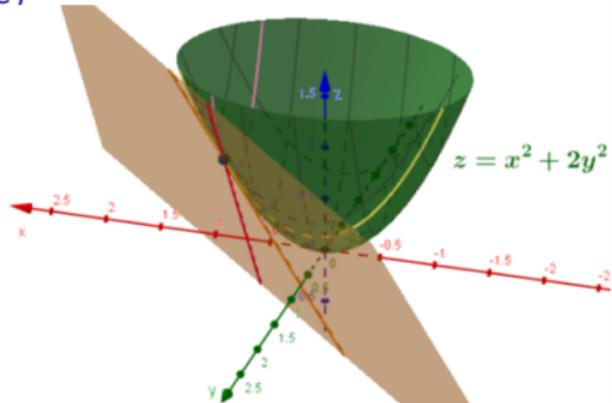


Caso n=2: diferenciabilidade/plano tangente (II)

Nas funções diferenciáveis, ver definição no slide seguinte, f fica "bem aproximada" em redor de (a, b) pelos valores assumidos no plano \mathcal{T} , ou seja, pela sua linearização em torno de (a, b) :

$$L(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

Ilustração Gráfica: (plano tangente)



▶ applet

Função Diferenciável (caso $n = 2$)

Definição:

Sejam $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $P = (a, b) \in \text{int}(\mathcal{D})$ tais que existem $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$. Sejam Δx e Δy , reais, tais que $(a + \Delta x, b + \Delta y) \in B_r(P) \subset \mathcal{D}$, para algum $r > 0$.

Se existem funções $\epsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ e $\epsilon_2(\Delta x, \Delta y)$, com

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \epsilon_1(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \epsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0, \text{ tais que}$$

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

para quaisquer Δx e Δy nas condições referidas, então
f diz-se **diferenciável em (a, b)** .

Proposição: Uma função $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $P = (a, b) \in \mathcal{D}$ se e só se as derivadas parciais de f existem em P e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y) - \left[f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \right]}{\|(x,y) - (a,b)\|} = 0$$

onde

$$\|(x,y) - (a,b)\|$$

representa a distância de (x,y) a (a,b) , que é dada por $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$.

Dois exemplos (abordagem gráfica) ^{1:}

- 1 Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

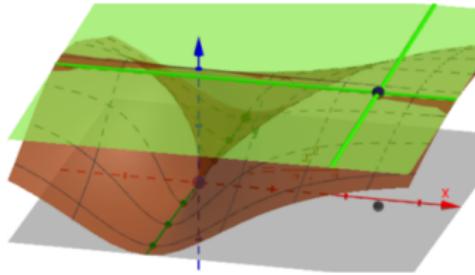
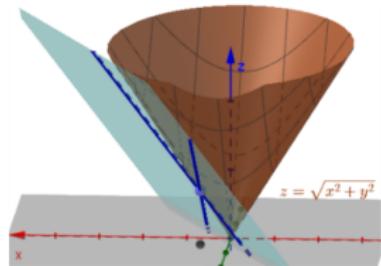
não é diferenciável em $(0, 0)$, mas é diferenciável em qualquer outro ponto.

► applet

- 2 Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

não é diferenciável em $(0, 0)$,
mas é diferenciável em qualquer outro ponto.



¹Ver à frente, as justificações das afirmações.

Condições suficientes de diferenciabilidade

Teorema:

Sejam $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $P \in \text{int}(\mathcal{D})$. Se existem $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ numa bola aberta centrada em P e se pelo menos uma dessas derivadas é contínua em P , então f é diferenciável em P .

Corolário:

Sejam $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $P \in \text{int}(\mathcal{D})$. Se f é de classe C^1 numa bola aberta centrada em P , então f é diferenciável em qualquer ponto dessa bola (incluindo P).

Exercício:

Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Use o Teorema anterior (ou o Corolário), para concluir que f é diferenciável em (a, b) , se $(a, b) \neq (0, 0)$.

Condição necessária de diferenciabilidade

Teorema:

Se $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $P \in \text{int}(\mathcal{D})$, então f é contínua em P .

Nota:

O Teorema anterior tem a seguinte formulação equivalente:

Se $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ não é contínua em $P \in \text{int}(\mathcal{D})$, então f não é diferenciável em P .

Exercício:

Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Use o Teorema anterior, para concluir que f não é diferenciável em $(0, 0)$.