CÁLCULO II – 2019/20

Ana Foulquié

foulquie@ua.pt

https://educast.fccn.pt/vod/channels/39f6r3p2m?locale=en

Teorema de Dirichlet Consideremos uma função f definida num intervalo $[-\pi, \pi]$, seccionalmente diferenciável neste intervalo, então:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)+\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, x \in [-\pi, \pi]$$

onde

$$f(x^+) = \lim_{t\to x, t>x} f(t)\,, f(x^-) = \lim_{t\to x, t<x} f(t)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Consideraremos a extensão a todo $\mathbb{R}$ por periodicidade.

Exemplo

Calcule a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-\pi, 0[\\ x & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

e obtenha uma representação gráfica desta série no intervalo $[-6\pi, 6\pi]$.

Resolução: Neste caso a função $f(x)$ é seccionalmente diferenciável no intervalo $[-\pi, \pi]$. Calculamos os coeficientes da série de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left. -x\right|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{\pi} = -1 + \frac{\pi}{2}.$$

Para $n = 1, 2 \ldots$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\,(-1)\frac{\sin(nx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\Big(\,x\frac{\sin(nx)}{n}\bigg|_{0}^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx\Big)$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{\cos(nx)}{n^2}\bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2}(\cos(n\pi) - 1) = \frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1).$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{n par} \\ \frac{-2}{\pi n^2} & \text{n ímpar} \end{cases}$$

Para $n = 1, 2\ldots$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)dx$$

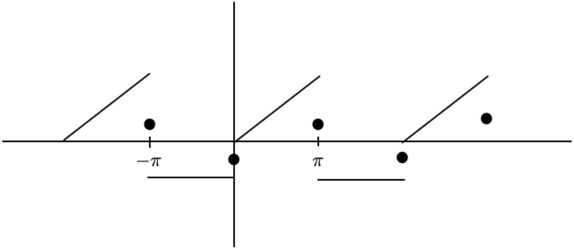
$$= \frac{1}{\pi}\ \frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\Big(\ x\frac{-\cos(nx)}{n}\Big|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi}\frac{-\cos(nx)}{n}dx\Big)$$

$$= \frac{1}{n\pi}(1-(-1)^n) + \frac{1}{\pi}\Big(\pi\frac{-(-1)^n}{n} - 0\Big) = \frac{1}{n\pi}(1-(-1)^n) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

A série de Fourier da função $f(x)$ é dada por

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) = \begin{cases} -1 & x \in]-\pi, 0[\\ x & x \in]0, \pi[\\ ???? & x = -\pi, 0, \pi. \end{cases}$$

Estamos somente a descrever o intervalo $[-\pi, \pi]$ porque a função é



2π periódica.

$$S(-\pi) = \frac{\pi - 1}{2},\ S(0) = \frac{0 - 1}{2},\ S(\pi) = \frac{\pi - 1}{2}.$$

Cálculo de uma série numérica usando a série de Fourier

Sabemos que $S(0) = -\frac{1}{2}$, pelo que

$$-\frac{1}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Neste caso $a_0 = -1 + \frac{\pi}{2}$ e $a_n = \begin{cases} 0 & \text{n par} \\ \frac{-2}{\pi n^2} & \text{n ímpar} \end{cases}$

$$-\frac{1}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}$$

ou

$$-\frac{1}{2} = \frac{-1+\frac{\pi}{2}}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-2}{\pi(2n+1)^2}$$

$$0 = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-2}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Exercício 1. Calcule a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & x \in\in [-\pi, 0[\\ x^2 & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

e obtenha uma representação gráfica desta série no intervalo $[-6\pi, 6\pi]$.

Exercício 2. Calcule a série de Fourier da função

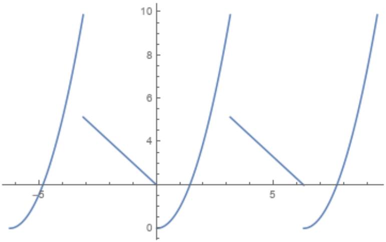
$$f(x) = |2x+1|, x \in [-\pi, \pi]$$

e obtenha uma representação gráfica desta série no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

Resolução do Exercício 1

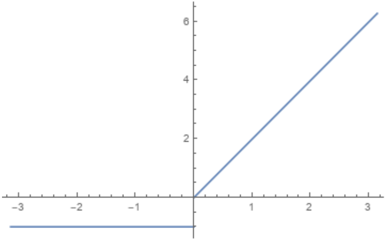
Desenhamos a extensão 2π periódica da função

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & x \in\in [-\pi, 0[\\ x^2 & x \in [0, \pi] \end{cases}$$



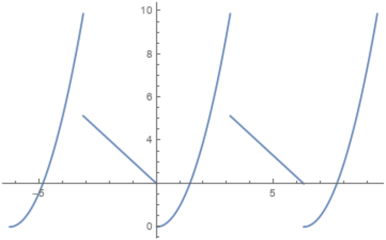
que é uma função seccionalmente diferenciável. Esta função é seccionalmente diferenciável porque a sua derivada é seccionalmente contínua (uma união de gráficos de funções contínuas excepto num conjunto finito de pontos no intervalo $[-\pi, \pi]$)

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x \in\in [-\pi, 0[\\ 2x & x \in [0, \pi] \end{cases}$$



Novamente, a extensão 2π periódica da função

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & x \in\in [-\pi, 0[\\ x^2 & x \in [0, \pi] \end{cases}$$



$$f(\pi^+) = f(-\pi) = 2 - (-\pi) = 2 + \pi.$$

$$f(\pi^-) = f(\pi) = (\pi)^2.$$

$$f(0^+) = 0\, f(0^-) = 2$$

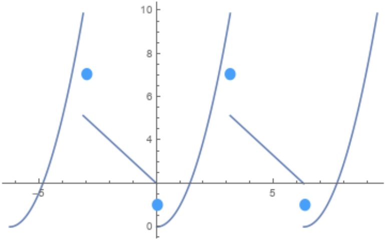
Calculamos os coeficientes de Fourier e obtemos

$$a_0 = \pi + \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^3}{6}$$

$$a_n = \frac{-1 + (1 + 2\pi)(-1)^n}{n^2}$$

$$b_n = \frac{-2(1 + n^2) + (2 + n^2(2 + \pi - \pi^2))(-1)^n}{n^3}$$

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$



Sabemos que

$S(x) = f(x), x \in \mathbb{R} \setminus \{0, k\pi\},\ k \in \mathbb{Z}$.

$$S(\pi) = \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{2 + \pi + \pi^2}{2}$$

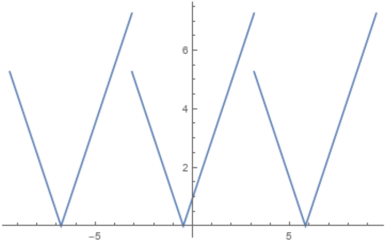
$$S(0) = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{0 + 2}{2} = 1$$

$$S(-\pi) = \frac{2 + \pi + \pi^2}{2}$$

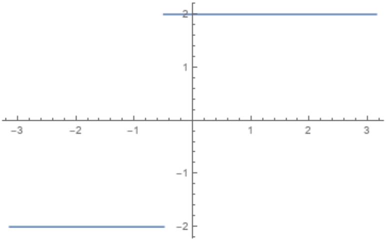
Desenhamos a extensão 2π periódica da função

$$f(x) = |2x+1|, x \in [-\pi, \pi]$$

(neste caso no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$)

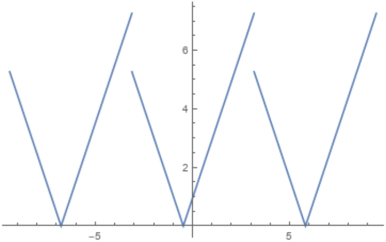


Esta função é seccionalmente diferenciável porque a sua derivada é seccionalmente contínua (uma união de gráficos de funções contínuas excepto num conjunto finito de pontos no intervalo $[-\pi, \pi]$)


2
1
−1
−2
−3
−2
−1
1
2
3

$$f(x) = |2x+1|, x \in [-\pi, \pi]$$

(neste caso no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$)



$$f(\pi^+) = f(-\pi) = |-2\pi + 1| = 2\pi - 1$$

$$f(\pi^-) = |2\pi + 1| = 2\pi + 1$$

Calculamos os coeficientes de Fourier, e temos em conta que

$$f(x) = |2x+1|, \, x \in [-\pi, \pi]$$

pode ser descrita como

$$f(x) = \begin{cases} -(2x+1) & x \in [-\pi, -\frac{1}{2}[\\ 2x+1 & x \in [-\frac{1}{2}, \pi] \end{cases}$$

Calculamos os coeficientes de Fourier e obtemos

$$a_0 = \frac{1+4\pi^2}{2}, a_n = \frac{4(-\cos(\frac{n}{2}) + (-1)^n)}{n^2}$$

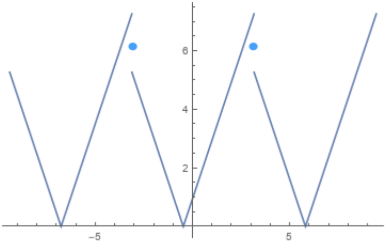
$$b_n = \frac{2(n(-1)^n - 2\sin(\frac{n}{2}))}{n^2}$$

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

Pelo Teorema de Dirichlet sabemos que $S(x) = f(x), x \in \mathbb{R} \setminus k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ou seja em todo ponto onde f é uma função contínua.

$$S(\pi) = \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{2\pi - 1 + 2\pi + 1}{2} = 2\pi.$$

$$S(-\pi) = 2\pi.$$



Vamos começar esta aula a explicar a afirmação do ex. 4, retirado do slide 2 do eLearning.

A sucessão $p_n(x)$ converge pontualmente para a função nula no intervalo $[0, 1]$ mas não converge uniformemente.

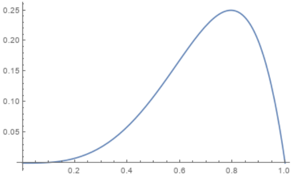
No slide apresentado pela professora Isabel Brás aparecem os gráficos de cada uma destas funções. Observamos que estos gráficos quando consideramos cada x fixo se aproximam sucessivamente ao valor 0, mas quando uma parte do gráfico de cada uma destas funções está perto do gráfico da função nula, a outra parte do gráfico ainda está longe, pelo que intuímos que a convergência não é uniforme. Vamos agora a dar um argumento analítico para entender esta afirmação.

Primeiro vamos tomar limite
$p_n(x) = x^n(1 - x^n)$ quando $n \to +\infty$ para cada $x \in [0, 1]$.
Como devemos saber $x^n \to 0$ quando $n \to +\infty$ para $|x| < 1$, pelo que

$$p_n(x) = x^n(1 - x^n) \to 0(1 - 0) = 0, x \in [0, 1[$$

quando $n \to +\infty$. Para $x = 1$, $p_n(1) = 0$. Neste caso diremos que a sucessão de funções $p_n(x) = x^n(1 - x^n)$ converge pontualmente para a função $p(x) = 0$ para $x \in [0, 1]$. Vamos mostrar que esta convergência não é uniforme

Consideramos por exemplo $p_3(x) = x^3(1 - x^3)$, e usamos um programa de cálculo como o mathemática e desenhamos

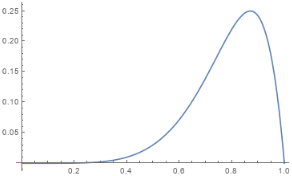


O ponto de máximo é dado como um ponto onde a derivada primeira desta função é nula pelo que calculamos

$$p_3'(x) = 3x^2 - 6x^5 = 0 \Leftrightarrow 3x^2(1 - 2x^3) = 0$$

e obtemos o ponto $x_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.
$p_3(x_0) = x_0^3(1 - x_0^3) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Se fazemos as mesmas contas para $p_5(x) = x^5(1-x^5)$, e

desenhamos 

O ponto de máximo é dado como um ponto onde a derivada primeira desta função é nula pelo que calculamos

$$p_5'(x) = 5x^4 - 10x^9 = 0 \Leftrightarrow 5x^4(1-2x^5) = 0$$

e obtemos o ponto $x_0 = \sqrt[5]{\frac{1}{2}}$. Também reparamos que $p_5(x_0) = x_0^5(1-x_0^5) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Em geral para $p_n(x) = x^n(1 - x^n)$ a função presenta um máximo no ponto $x_0 = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ e $p_n(x_0) = \frac{1}{4}$. Se a convergência fosse uniforme, significaria que podíamos majorar o erro a distância entre os gráficos da função $p_n(x)$ e $p(x)$ por um infinitésimo que não depende de $x \in [0, 1]$

$$|p_n(x) - p(x)| \leq \epsilon_n$$

mas isto não é possível porque para cada n, no ponto $x_0 = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$, a distância entre os gráficos será exactamente $\frac{1}{4}$.

Quando temos convergência uniforme num intervalo, para valores grandes de n o gráfico da sucessão e o gráfico da função limite deve ser quase idêntico em todo ponto

Exercício: Calcule a soma da série de potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n+1}(x-1)^n$$

, no intervalo de convergência desta série.

Vamos identificar esta série com uma função $f(x)$ num certo domínio usando a soma da série geométrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$$

Sabemos que podemos derivar e integrar séries de potências termo a termo, no intervalo de convergência da série dada. Neste caso sabemos por exemplo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$$

se derivamos obtemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, |x| < 1$$

ou ao integrar obteríamos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x) + k, |x| < 1$$

e neste caso $k = 0$ porque quando substituímos $x = 0$ obtemos a identidade

$$0 = 0 + k.$$

Voltamos ao nosso exercício, determinar

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n+1}(x-1)^n$$

, onde esta série seja convergente Vamos primeiro encontrar a soma da série

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}x^n$$

que será um problema equivalente, se temos em conta que $f(x) = g(4(x-1))$.

Queremos então determinar

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n$$

que fazemos?

Se tivéssemos (mas não temos!)

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

ao derivar termo a termo chegaríamos à série geométrica!

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n$$

Podemos então multiplicar ambos membros desta identidade por x

$$xg(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

A seguir derivamos ambos membros desta identidade e obtemos

$$(xg(x))' = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

e esta identidade terá sentido para $|x| < 1$, pelo que obtemos

$$(xg(x))' = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$$

$$(xg(x))' = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$$

Integramos ambos membros desta identidade e obtemos

$$xg(x) = -\ln(1-x) + k$$

mas quando fazemos $x = 0$ obtemos $k = 0$. Chegamos então $g(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$ e finalmente

$$f(x) = g(4(x-1)) = -\frac{\ln(1-4(x-1))}{4(x-1)}$$

e esta identidade será verdadeira para $|4(x-1)| < 1$, ou

$$|x-1| < \frac{1}{4}.$$

O raio de convergência da série dada no enunciado do exercício é $\frac{1}{4}$ e o intervalo de convergência é $]1-\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4}[$.

Exercício 1 Determine explícitamente a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \frac{1}{n+2} x^n$$

indicando o intervalo de convergência desta série.

Exercício 2 Determine explícitamente a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{n-1}(n+2)(2x-1)^n$$

indicando o intervalo de convergência desta série.

Teorema de Abel Suponhamos que
$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $-r < x < r$. e suponhamos que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ é convergente. Então verifica–se que a série é uniformemente convergente em $[0, r]$ e

$$\lim_{x \to r^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n.$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + k, \qquad |x| < 1,$$

O domínio de convergência desta série é $]-1,1]$, uma vez que em $x = 1$ a série obtida é dada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, que é convergente (usando o critério de Leibniz como já foi referido anteriormente) e no ponto $x = -1$ obtemos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)}{n}$ que é uma série divergente.

Usando o teorema de Abel temos que
$\ln 2 = \lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

A seguir iremos comentar a resolução dos exercícios 1 e 2 propostos na aula anterior e vamos estudar o que acontece nos extremos dos intervalos.

Determine explícitamente a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \frac{1}{n+2} x^n$$

indicando o intervalo de convergência desta série.

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} (-\frac{1}{2}x)^n$$

Consideramos a função

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} x^n$$

e reparamos que

$$f(x) = \frac{1}{2} g(-\frac{1}{2}x).$$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+2}x^n$$

Multiplicamos ambos membros desta identidade por x^2 e obtemos

$$x^2g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+2}x^{n+2}$$

Derivamos ambos membros desta identidade

$$(x^2g(x))'=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{n+1}$$

e reparamos

$$(x^2g(x))'=x\sum_{n=0}^{+\infty}x^{n}$$

pelo que para $|x|<1$ obtemos

$$(x^2g(x))'=x\frac{1}{1-x}$$

$$(x^2 g(x))' = x\frac{1}{1-x}\ |x| < 1$$

Temos em conta que $\frac{x}{1-x} = \frac{x-1+1}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$ Integramos ambos membros desta equação

$$x^2 g(x) = -x - \ln(1-x) + k,\ |x| < 1$$

Substituímos $x = 0$ e concluímos que $k = 0$.

$$g(x) = \frac{-x - \ln(1-x)}{x^2},\ |x| < 1$$

Pelo que chegamos a

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{-\frac{-x}{2} - \ln(1 - \frac{-x}{2})}{(-\frac{-x}{2})^2}$$

$$= 2\frac{\frac{x}{2} - \ln(1 + \frac{x}{2})}{x^2}$$

para $|\frac{-x}{2}| < 1$ ou $|x| < 2$.

$$2\frac{\frac{x}{2} - \ln(1 + \frac{x}{2})}{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\frac{1}{n+2}x^n, \; |x| < 2.$$

No ponto $x = 2$, aparece a série (convergente pelo C. Leibniz)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2} \frac{1}{n+2},$$

Pelo que chegamos a que

$$\lim_{x \to 2^-} (2 \frac{\frac{x}{2} - \ln(1 + \frac{x}{2})}{x^2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2} \frac{1}{n+2},$$

ou

$$2 \frac{1 - \ln(2)}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2} \frac{1}{n+2},$$

No ponto $x = -2$, aparece a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{n+2}$, divergente (Série de Dirichlet para $\alpha = 1$).

Resolução do Exercício 2

Determine explicitamente a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{n-1}(n+2)(2x-1)^n$$

indicando o intervalo de convergência desta série.
Re-escrevemos a função $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(3(2x-1))^n$$

e consideramos a função

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)x^n$$

Temos em conta que $f(x) = \frac{1}{3}g(3(2x-1))$.

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)x^n$$

Multiplicamos ambos membros desta identidade por x

$$xg(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)x^{n+1}$$

integramos os dois membros desta identidade

$$\int xg(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+2} + k$$

desta vez não vamos identificar a constante k.

$$\int xg(x)dx = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + k$$

Obtemos então no intervalo $|x| < 1$ a identidade

$$\int xg(x)dx = x^2 \frac{1}{1-x} + k$$

Derivamos ambos membros desta identidade e obtemos

$$xg(x) = \left(\frac{x^2}{1-x} + k\right)'$$

Calculamos esta derivada usando a regra da derivada de um quociente e obtemos

$$xg(x) = \frac{2x(1-x) - x^2(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}$$

Pelo que

$$g(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2}, \; |x| < 1$$

Temos em conta que

$$f(x) = \frac{1}{3}\frac{2-3(2x-1)}{(1-3(2x-1))^2}.$$

para $|3(2x-1)| < 1$ ou $|6(x-\frac{1}{2})| < 1$ ou $|x-\frac{1}{2}| < \frac{1}{6}$.
O intervalo de convergência desta série é

$$]\frac{1}{2}-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}+\frac{1}{6}[.$$

Nos pontos extremos deste intervalo podem comprovar que a série é divergente pelo que o intervalo de convergência coincide com o domínio de convergência.

Exercício 1, folha 2

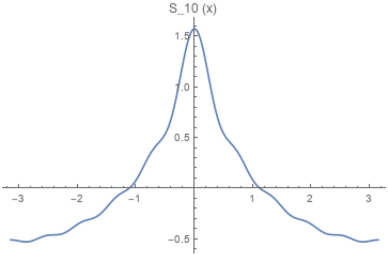
Considere a série de funções

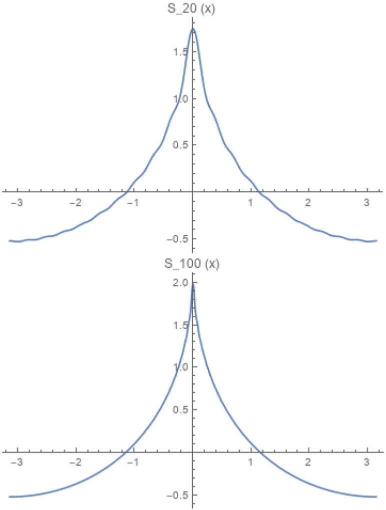
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}.$$

1. Mostre que a série converge uniformemente em $\mathbb{R}$.
2. Justifique que a função (soma) $S(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Vamos considerar as somas parciais desta série de funções, por exemplo para $n = 10$

$$S_{10}(x) = \sum_{n=1}^{10} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}} = \frac{\cos x}{\sqrt{2}} + \frac{\cos(2x)}{2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{\cos(10x)}{10\sqrt{11}}$$





S_20 (x)
1.5
1.0
0.5
−0.5
−3
−2
−1
1
2
3
S_100 (x)
2.0
1.5
1.0
0.5
−0.5
−3
−2
−1
1
2
3

Observamos que a sucessão $S_n(x)$ (formada por funções 2π periódicas), converge uniformemente para uma função limite.
Como vamos justificar esta afirmação?

Teorema M-Weierstrass

Consideremos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,, x \in E \subset \mathbb{R}$$

Suponhamos que para $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x)| \leq M_n,\, x \in E$$

, e se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$$

é convergente, então a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

é uniformemente convergente em E. Em particular também podemos referir que é absolutamente convergênte em E.

Exemplo

A série de funções $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ é uniformemente convergente (e absolutamente) convergente em $\mathbb{R}$.
Neste caso podemos verificar que

$$\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente pelo que se aplicamos o Teorema M-Weierstrass podemos concluir que esta série é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

Para a série dada no exercício, vamos tentar aplicar de forma análoga este Critério M-Weierstrass

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}.$$

Consideramos que

$$\left| \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}} \right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n+1}}, x \in \mathbb{R}$$

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$$

é convergente (pelo critério de comparação no limite, com a série de Dirichlet para $\alpha = 1 + \frac{1}{2}$.) Concluímos então que a série é absoluta e uniformemente convergente para $x \in \mathbb{R}$.

A segunda afirmação deste exercício é provar que o limite uniforme de esta série é uma função contínua. A ideia que devemos ter é a seguinte: Para cada n, estivemos a desenhar os gráficos da somas parciais. Pela convergência uniforme provada, sabemos que o gráfico das somas parciais e o gráfico da função limite, para valores de n muito grandes, é quase idêntico para $x \in \mathbb{R}$. Então como cada um destas somas parciais são somas de funções contínuas é muito natural que o gráfico da função limite seja o gráfico de uma função contínua.

Continuidade, integração e convergência uniforme

Teorema Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ uma série de funções, com $f_n : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que a série converge uniformemente em E e denotemos $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

• Se cada uma da funções f_n é uma função continua em E então a função s é uma função continua em E.

• Para $[a, b]$ intervalo finito, $[a, b] \subset E$, temos que

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Exercícios propostos

Exercício 1 Considere a série de funções

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} e^{nx}$$

Encontre um intervalo onde possa afirmar que esta série converge uniformemente. Explique se nesse intervalo a função limite será ou não uma função contínua.

Exercício 2 Considere a série de funções

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (3+x)^n$$

Encontre um intervalo onde possa afirmar que esta série converge uniformemente. Calcule a função limite $f(x)$, e verifique que é uma função contínua nesse intervalo.

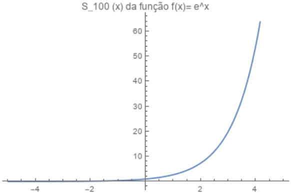
Série de Taylor da função exponencial

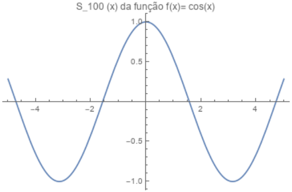
Considere a série de Taylor das seguintes funções

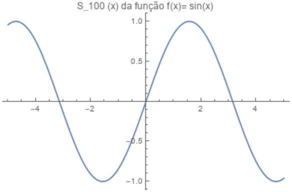
$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n, \; x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \; x \in \mathbb{R}.$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \; x \in \mathbb{R}.$$


S_100 (x) da função f(x)= e^x
60
50
40
30
20
10
−4
−2
2
4


S_100 (x) da função f(x)= cos(x)
1.0
0.5
−0.5
−1.0
−4
−2
2
4


S_100 (x) da função f(x)= sin(x)
1.0
0.5
−0.5
−1.0
−4
−2
2
4

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \; |x| < 1$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 \cdots + \ldots, \; |x| < 1$$

ou

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n, \; |x| < 1$$

Exercício Obtenha uma representação em série de potências. Em cada caso indique o maior conjunto onde é válida a representação.

$$\text{(a)} \quad e^{-x^2}\,; \qquad \text{(b)} \quad xe^{1-x},; \qquad \text{(c)} \quad \sinh(3x)$$

$$\text{(d)} \quad 2\cos^2 x \qquad \text{(e)} \quad \frac{1}{4+x} \qquad \text{(f)} \quad \frac{1}{2x+3}.$$

Exercício (Aparece uma dica de resolução!)

Obtenha uma representação em série de potências. Em cada caso indique o maior conjunto onde é válida a representação.

(a)	e^{-x^2};	(b)	$xe^{1-x}, ;$
(c)	$\sinh(3x) = \frac{e^{3x}+e^{-3x}}{2}$	(d)	$2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$
(e)	$\frac{1}{4+x} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-(-\frac{x}{4})},$	(f)	$\frac{1}{2x+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-(-\frac{2x}{3})}, .$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n, \; x \in \mathbb{R}.$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (-x^2)^n, \; x \in \mathbb{R}.$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n,\ x \in \mathbb{R}.$$

$$xe^{1-x} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(1-x)^n = (x-1+1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n (x-1)^n,\ x \in \mathbb{R}.$$

$$= (x-1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n (x-1)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n (x-1)^n,\ x \in \mathbb{R}.$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n (x-1)^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n (x-1)^n,\ x \in \mathbb{R}.$$

Agora chamo a atenção que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n (x-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}(x-1)^n$$

pelo que, se continuamos o cálculo

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}(x-1)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n (x-1)^n,\ x \in \mathbb{R}.$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1} + \frac{1}{n!}(-1)^n \right)(x-1)^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1-n}{n!}(-1)^n \right)(x-1)^n,\ x \in \mathbb{R}.$$

Obtivemos uma série de potências centrada em $c = 1$. Se queremos obter a série de potências centrada em $c = 0$

$$xe^{1-x} = xee^{-x} = xe\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e}{n!}(-1)^n x^{n+1},\ x \in \mathbb{R}.$$

Exercício

Calcule a (função) soma das séries seguintes:

1. $1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^n}{n!} + \cdots$
2. $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots + (-1)^n x^{3n} + \cdots$

$$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

ou

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Sabemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \; x \in \mathbb{R}$$

pelo que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = e^{(-x)}, \; x \in \mathbb{R}.$$

$$1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots + (-1)^n x^{3n} + \cdots$$

ou

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x^3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^3)^n = \frac{1}{1-(-x^3)} = \frac{1}{1+x^3}$$

onde $|x^3| < 1$ ou de forma equivalente $|x| < 1$.

Exercício

Calcule a soma das séries indicadas

$$\text{(a)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}\,; \quad \text{(b)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\,;$$

$$\text{(c)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n (n+1)}\,; \quad \text{(d)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!}\,.$$