Aula 20: EDOs de primeira ordem

- EDOS de variáveis separáveis.
- EDOS exatas.
- EDOs lineares (de primeira ordem).
- Equações diferenciais de Bernoulli.
- EDOs homogéneas.

Aula 20: EDOs lineares de primeira ordem

EDOS linear de 1^a ordem: eq. dif. da forma $\boxed{a(x)\mathbf{y}' + b(x)\mathbf{y} + c(x) = 0}$,

em que a, b, c são funções def. num int. I, com $a(x) \neq 0, \forall\, x \in I$.

Passando $c(x)$ para o outro membro e dividindo por $a(x)$ temos:

$$\boxed{\mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y} = q(x)}$$

Exercício 2: determine uma função $\mu = \mu(x)$ que satisfaz: $\mu(\mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y}) = (\mu\,\mathbf{y})'$.

Resolução:

$$\begin{aligned}
\mu(\mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y}) = (\mu\,\mathbf{y})' \quad &\Leftrightarrow \quad \mu\mathbf{y}' + \mu p(x)\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}' + \mu'\mathbf{y} \\
&\Leftrightarrow \quad \mu' = \mu\, p(x) \ \ \text{(eq. dif. de var. sep.)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\mu}\, d\mu = p(x)dx
\end{aligned}$$

Exercício 3: resolva agora esta equação diferencial de variáveis separáveis em x e $\mu = \mu(x)$. Nota importante: Esta função $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ é um factor integrante da equação não exata (supondo $p(x) \neq 0$) $p(x)\mathbf{y} - q(x) + \mathbf{y}' = 0$. De facto, seja $M = p(x)\mathbf{y} - q(x)$ e $N = 1$. Então $\mu M dx + \mu N dy = 0$ é exata: $\frac{\partial \mu M}{\partial \mathbf{y}} = \mu p(x)$ e $\frac{\partial \mu N}{\partial x} = \mu' = (e^{\int p(x)dx})' = e^{\int p(x)dx} p(x) = \mu p(x)$.

Aula 20: Resolução das EDOs lineares de primeira ordem

$$\boxed{\mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y} = q(x)}$$

Resolução:

(1) Calcular uma primitiva $P(x)$ de $p(x)$, isto é, $\boxed{P(x) = \int p(x)dx}$

(2) Construir o **factor integrante** $\boxed{\mu(x) = e^{P(x)}}$

multiplicar ambos os membros da eq. dif. linear anterior por $\mu(x)$:

$$\mu(x)(\mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y}) = \mu(x)q(x) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{(\mu(x)\mathbf{y})' = \mu(x)q(x)}$$

(3) Integral geral: $\boxed{\mu(x)\,\mathbf{y} = \int \mu(x)q(x)\,dx + C\,.}$

Aula 20: EDOs lineares - Exemplos

$$\boxed{\mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y} = q(x)}$$

- Se $p(x) = 0$ ou $q(x) = 0$, a EDO é (também) de variáveis separáveis.
- Se $p(x) = p$ e $q(x) = q$ são const$^{\text{es}}$, a EDO é de variáveis separáveis.

Exercício 4: Resolva as seguintes EDOs:

(a) $xy' - y = x - 1; x > 0$ Sol: $y = x \ln x + cx + 1$

(b) $xy' + y - e^x = 0; x > 0$ Sol: $y = \dfrac{e^x + c}{x}$

(c) $y' - y = -e^x$ Sol: $(c - x)e^x$

(d) $y' + 2y = \cos x$ Sol: $\dfrac{2\cos x + \operatorname{sen} x}{5} + c\, e^{-2x}$

Aula 20: Existência e unicidade do problema linear de Cauchy

Teor. 2.5: Se p e q são funções contínuas num intervalo I (contendo o pto inicial x_0), então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y} = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Obs: todos os problemas de Cauchy apresentados nesta aula envolvem funções contínuas num intervalo contendo o ponto inicial, pelo que a solução apresentada é única nesse intervalo.

Aula 20: EDOs lineares - Exercícios 5

Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

(a) $$\begin{cases} y' - y = -e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Sol: $y = -x\, e^x$

(b) $$\begin{cases} 3y' - 4y = x \\ y(0) = \dfrac{13}{16} \end{cases}$$

Sol: $y = e^{\frac{4}{3}x} - \dfrac{4x+3}{16}$

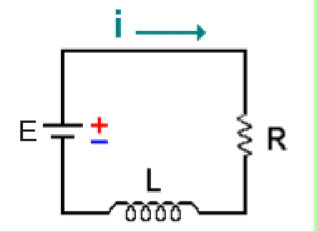
(c) $$\begin{cases} y'' = (xy)' \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Sol: $y = e^{\frac{x^2}{2}}$

Aula 20: Exercício 4 - equação dif. de Kirchoff

A 2ª Lei de Kirchhoff "*A soma das quedas e das subidas de tensão é zero*" aplicada a um circuito RL com tensão variante (resistência R e indutância L fixos):

$$\boxed{L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)} \qquad x := t,\ \ y := I(t) \ \ \rightsquigarrow \ \ \boxed{L\,y' + R\,y = E(x)}$$



Sejam E_0, k e ω constantes. Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDOS:

- $Ly' + Ry = E_0$; Sol: $y = \dfrac{E_0}{R} + c\,e^{-\frac{R}{L}t}$
- $Ly' + Ry = E_0 e^{kt}$; Sol: $y = \dfrac{E_0\,e^{kt}}{R + kL} + c\,e^{-\frac{R}{L}t}$
- $Ly' + Ry = E_0 \sin(\omega t), \omega > 0.$ Sol: $y = \dfrac{E_0 L}{R^2 + L^2\omega^2}(\dfrac{R}{L}\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)) + c\,e^{-\frac{R}{L}t}$

Tabela das primitivas quase imediatas $(c \in \mathbb{R})$

$$\int u'\, u^p\, dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + c, \quad p \neq -1$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + c$$

$$\int u' \sin u dx = \cos u + c$$

$$\int u' \cos u dx = \sin u + c$$

$$\int u' \sec^2 u dx = \tan u + c$$

$$\int u' \operatorname{cosec}^2 u dx = -\mathrm{cotg u} + \mathrm{c}$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + c$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctan(u) + c$$

$$\int u' \sec(u)\tan(u) dx = \sec u + c$$

$$\int u' \operatorname{cosec}(u) \mathrm{cotg(u)dx} = -\operatorname{cosec}\mathrm{u} + \mathrm{c}$$

$$\int u' e^u dx = e^u + c$$

$$\int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + c, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

Formulário Derivadas

$$(u^p)' = p\, u^{p-1}\, u'$$

$$(\,\mathrm{arcsen}\,(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\,\mathrm{arctg}\,(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$(\cos u)' = -u'\ \mathrm{sen}\, u$$

$$(\sec u)' = u' \sec(u)\,\mathrm{tg}\,(u)$$

$$(\,\mathrm{sen}\, u)' = u'\ \cos u$$

$$(\,\mathrm{cosec}\, u)' = -u'\,\mathrm{cosec}\,(u)\,\mathrm{cotg}\,(u)$$

$$(\,\mathrm{tg}\, u)' = u'\ \sec^2 u$$

$$(e^u)' = u'\, e^u$$

$$(\,\mathrm{cotg}\, u)' = -u'\ \mathrm{cosec}^{\,2} u$$

$$(a^u)' = \frac{u' a^u}{\ln a}\ ,\ \ a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$$