Aula 12. Funções de Várias Variáveis Reais: Limite e Continuidade.

Mónica Celis.

Cálculo II -Agrup. IV-5.

2020

Sumário da Aula 12.

1. Resolução de exercícios Aula 11-Parte 2.
2. Limite de uma sucessão de pontos em $\mathbb{R}^p$.
3. Definição de Limite.
4. Limite segundo um conjunto.
5. Continuidade.

Resolução de Exercícios Aula 11-Parte2.

Exercício 1

Considere o seguinte conjunto

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \wedge x - y + 1 > 0 \wedge x^2 - y \leq 0 \right\}.$$

(a) *Represente geometricamente o conjunto A.*

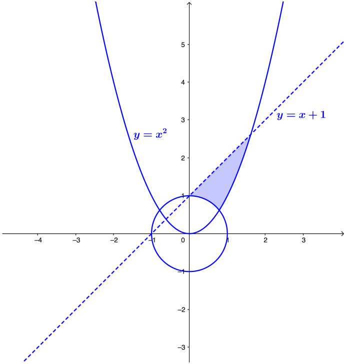
Resolução de Exercícios Aula 11-Parte2.

Exercício 1

Considere o seguinte conjunto

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \wedge x - y + 1 > 0 \wedge x^2 - y \leq 0\right\}.$$

(a) *Represente geometricamente o conjunto A.*



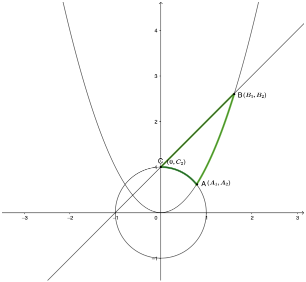
(b) Determine o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de A.

(b) Determine o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de A.

- $Int(A) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \wedge x + 1 > y \wedge x^2 < y\right\}.$

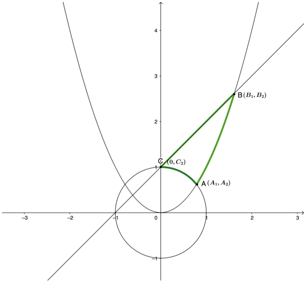
(b) Determine o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de A.

- $Int(A) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \wedge x + 1 > y \wedge x^2 < y\right\}.$
- $fr(A) = F_1 \cup F_2 \cup F_3.$



(b) Determine o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de A.

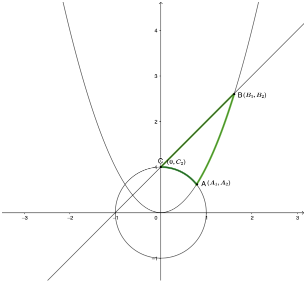
- $Int(A) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \wedge x + 1 > y \wedge x^2 < y\right\}$.
- $fr(A) = F_1 \cup F_2 \cup F_3$.



$$F_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \wedge 0 \leq x \leq A_1\right\}.$$

(b) Determine o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de A.

- $Int(A) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \wedge x + 1 > y \wedge x^2 < y\right\}$.
- $fr(A) = F_1 \cup F_2 \cup F_3$.

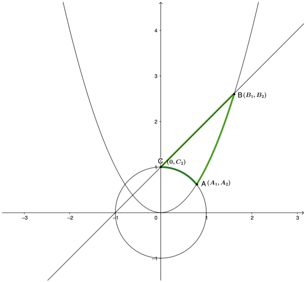


$$F_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \wedge 0 \leq x \leq A_1\right\}.$$

$$F_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y \wedge A_1 \leq x \leq B_1\right\}.$$

(b) Determine o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de A.

- $Int(A) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \wedge x + 1 > y \wedge x^2 < y\right\}.$
- $fr(A) = F_1 \cup F_2 \cup F_3.$



$$F_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \wedge 0 \leq x \leq A_1\right\}.$$
$$F_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y \wedge A_1 \leq x \leq B_1\right\}.$$
$$F_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 1 = y \wedge 0 \leq x \leq B_1\right\}.$$

- $A' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1 \wedge x + 1 \geq y \wedge x^2 \leq y\right\}.$

- $A' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1 \wedge x + 1 \geq y \wedge x^2 \leq y\right\}.$

(c) A é um conjunto limitado? Justifique.

- $A' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1 \wedge x + 1 \geq y \wedge x^2 \leq y\right\}$.

(c) A é um conjunto limitado? Justifique.

O conjunto A é limitado pois $A \subseteq \overline{B}_3(0,0)$.

- $A' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1 \wedge x + 1 \geq y \wedge x^2 \leq y\right\}$.

(c) A é um conjunto limitado? Justifique.

O conjunto A é limitado pois $A \subseteq \overline{B}_3(0,0)$.

(d) A é um conjunto fechado? Justifique.

- $A' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1 \wedge x + 1 \geq y \wedge x^2 \leq y\}$.

(c) A é um conjunto limitado? Justifique.

O conjunto A é limitado pois $A \subseteq \overline{B}_3(0, 0)$.

(d) A é um conjunto fechado? Justifique.

O conjunto A não é fechado pois $fr(A) \nsubseteq A$.

- $A' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1 \wedge x + 1 \geq y \wedge x^2 \leq y\right\}.$

(c) A é um conjunto limitado? Justifique.

O conjunto A é limitado pois $A \subseteq \overline{B}_3(0,0)$.

(d) A é um conjunto fechado? Justifique.

O conjunto A não é fechado pois $fr(A) \not\subseteq A$.

(e) A é um conjunto aberto? Justifique.

- $A' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1 \wedge x + 1 \geq y \wedge x^2 \leq y\right\}.$

(c) A é um conjunto limitado? Justifique.

O conjunto A é limitado pois $A \subseteq \overline{B}_3(0,0)$.

(d) A é um conjunto fechado? Justifique.

O conjunto A não é fechado pois $fr(A) \nsubseteq A$.

(e) A é um conjunto aberto? Justifique.

Como $int(A) \neq A$ então A não é aberto.

Exercício 2

Considere o seguinte conjunto

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 > 1\right\} \cup \{(0,0)\}.$$

Exercício 2

Considere o seguinte conjunto

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 > 1\right\} \cup \{(0, 0)\}.$$

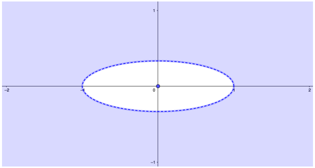
(a) *Represente geometricamente o conjunto B.*

Exercício 2

Considere o seguinte conjunto

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 > 1\right\} \cup \{(0,0)\}.$$

(a) *Represente geometricamente o conjunto B.*



(b) Determine o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de B.

(b) Determine o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de B.

- $Int(B) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 > 1\right\}.$

(b) Determine o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de B.

- $Int(B) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 > 1\right\}.$
- $fr(B) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 = 1\right\} \cup \{(0, 0)\}.$

(b) Determine o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de B.

- $Int(B) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 > 1\right\}$.
- $fr(B) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 = 1\right\} \cup \{(0, 0)\}$.
- $B' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 \geq 1\right\}$.

(b) Determine o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de B.

- $Int(B) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 > 1\right\}$.
- $fr(B) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 = 1\right\} \cup \{(0, 0)\}$.
- $B' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 \geq 1\right\}$.

(c) B é um conjunto limitado? Justifique.

(b) Determine o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de B.

- $Int(B) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 > 1\right\}$.
- $fr(B) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 = 1\right\} \cup \{(0,0)\}$.
- $B' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 \geq 1\right\}$.

(c) B é um conjunto limitado? Justifique.

O conjunto não é limitado, não existe uma bola fechada na qual o conjunto B esteja completamente contido. Com efeito,

Suponhamos que B é limitado, isto é, existe uma bola fechada $\overline{B}_r((a,b))$ de raio $r > 0$ e centro um ponto (a,b) de $\mathbb{R}^2$ tal que B está contido nela.

Sem perda de generalidade, podemos supor que a bola esta centrada em $(0,0)$

$$B \subseteq \overline{B}_r((0,0))$$

O ponto $F(0, r+1)$ pertence ao conjunto B mas não pertence a bola, pois para pertencer a bola a distancia do ponto F ao centro da bola $(0,0)$ deve ser menor ou igual do que r

$$d(F, (0,0)) = r + 1 > r$$

Encontramos um ponto do conjunto que não está na bola, o que contradisse o fato $B \subseteq \overline{B}_r((0,0)$. Portanto, não existe uma bola fechada na qual B esteja contido.

Assim, B não é limitado.

(d) B é um conjunto fechado? Justifique.

O ponto $F(0, r+1)$ pertence ao conjunto B mas não pertence a bola, pois para pertencer a bola a distancia do ponto F ao centro da bola $(0, 0)$ deve ser menor ou igual do que r

$$d(F, (0, 0)) = r + 1 > r$$

Encontramos um ponto do conjunto que não está na bola, o que contradisse o fato $B \subseteq \overline{B}_r((0, 0)$. Portanto, não existe uma bola fechada na qual B esteja contido.

Assim, B não é limitado.

(d) B é um conjunto fechado? Justifique.

Como $fr(B) \nsubseteq B$, B não é fechado.

O ponto $F(0, r+1)$ pertence ao conjunto B mas não pertence a bola, pois para pertencer a bola a distancia do ponto F ao centro da bola $(0,0)$ deve ser menor ou igual do que r

$$d(F,(0,0)) = r + 1 > r$$

Encontramos um ponto do conjunto que não está na bola, o que contradisse o fato $B \subseteq \overline{B}_r((0,0)$. Portanto, não existe uma bola fechada na qual B esteja contido.

Assim, B não é limitado.

(d) B é um conjunto fechado? Justifique.

Como $fr(B) \nsubseteq B$, B não é fechado.

(e) B é um conjunto aberto? Justifique.

O ponto $F(0, r+1)$ pertence ao conjunto B mas não pertence a bola, pois para pertencer a bola a distancia do ponto F ao centro da bola $(0,0)$ deve ser menor ou igual do que r

$$d(F,(0,0)) = r + 1 > r$$

Encontramos um ponto do conjunto que não está na bola, o que contradisse o fato $B \subseteq \overline{B}_r((0,0)$. Portanto, não existe uma bola fechada na qual B esteja contido.

Assim, B não é limitado.

(d) B é um conjunto fechado? Justifique.

Como $fr(B) \nsubseteq B$, B não é fechado.

(e) B é um conjunto aberto? Justifique.

B não é aberto pois $int(B) \neq B$.

Limite de uma sucessão de pontos em $\mathbb{R}^p$.

Limite de uma sucessão de pontos em $\mathbb{R}^p$.

Recordemos que uma sucessão de números reais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e uma função $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e dizemos que a sucessão é convergente para o número real L se

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon.$$

e escreve-se $\lim u_n = L$.

Limite de uma sucessão de pontos em $\mathbb{R}^p$.

Recordemos que uma sucessão de números reais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e uma função $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e dizemos que a sucessão é convergente para o número real L se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon.$$

e escreve-se $\lim u_n = L$.

Definição 1

Uma sucessão $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos em $\mathbb{R}^p$ é uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}^p$, que a cada n faz corresponder $X_n = (x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{np})$.

Limite de uma sucessão de pontos em $\mathbb{R}^p$.

Recordemos que uma sucessão de números reais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e uma função $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e dizemos que a sucessão é convergente para o número real L se

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon.$$

e escreve-se $\lim u_n = L$.

Definição 1

Uma sucessão $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos em $\mathbb{R}^p$ é uma aplicação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}^p$, que a cada n faz corresponder $X_n = (x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{np})$.

Assim, definir uma sucessão em $\mathbb{R}^p$ corresponde a definir p sucessões de números reais.

Exemplo 1

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *com termo geral* $X_n = (\frac{1}{n}, e^{\frac{1}{n}})$ *é uma sucessão de pontos em* $\mathbb{R}^2$,

Exemplo 1

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com termo geral $X_n = (\frac{1}{n}, e^{\frac{1}{n}})$ é uma sucessão de pontos em $\mathbb{R}^2$,

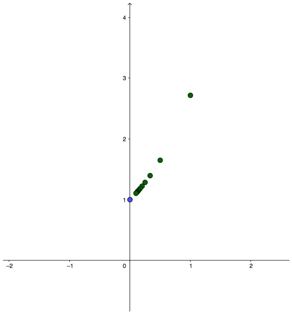
$$(1, e), \left(\frac{1}{2}, e^{\frac{1}{2}}\right), \left(\frac{1}{3}, e^{\frac{1}{3}}\right), \cdots$$

Exemplo 1

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com termo geral $X_n = (\frac{1}{n}, e^{\frac{1}{n}})$ é uma sucessão de pontos em $\mathbb{R}^2$,

$$(1, e), \left(\frac{1}{2}, e^{\frac{1}{2}}\right), \left(\frac{1}{3}, e^{\frac{1}{3}}\right), \cdots$$

As coordenadas do termo geral da sucessão são as sucessões de números reais de termo geral $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = e^{\frac{1}{n}}$.

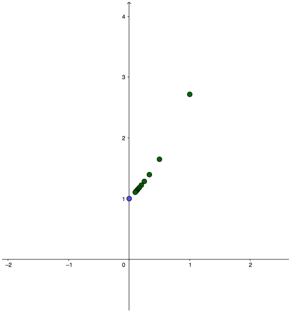


Exemplo 1

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com termo geral $X_n = (\frac{1}{n}, e^{\frac{1}{n}})$ é uma sucessão de pontos em $\mathbb{R}^2$,

$$(1, e), \left(\frac{1}{2}, e^{\frac{1}{2}}\right), \left(\frac{1}{3}, e^{\frac{1}{3}}\right), \cdots$$

As coordenadas do termo geral da sucessão são as sucessões de números reais de termo geral $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = e^{\frac{1}{n}}$.



Exemplo 2

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *com termo geral* $X_n = \left(n, (\frac{1}{2})^n, \frac{1}{n}\right)$ *é uma sucessão de pontos em* $\mathbb{R}^3$,

Exemplo 2

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *com termo geral* $X_n = \left(n, (\frac{1}{2})^n, \frac{1}{n}\right)$ *é uma sucessão de pontos em* $\mathbb{R}^3$,

$$\left(1, \frac{1}{2}, 1\right), \left(2, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \frac{1}{2}\right), \left(3, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \frac{1}{3}\right), \cdots$$

Exemplo 2

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *com termo geral* $X_n = \left(n, (\frac{1}{2})^n, \frac{1}{n}\right)$ *é uma sucessão de pontos em* $\mathbb{R}^3$,

$$\left(1, \frac{1}{2}, 1\right), \left(2, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \frac{1}{2}\right), \left(3, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \frac{1}{3}\right), \cdots$$

Definição 2

Seja $L \in \mathbb{R}^p$. *Dizemos que uma sucessão* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge para L*** *se para todo* $r > 0$, *existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $X_n \in B_r(L)$ *para todo o* $n \geq m$. *Escreve-se:* $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = L$.

O limite (quando existe) é único.

Exemplo 2

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *com termo geral* $X_n = \left(n, (\frac{1}{2})^n, \frac{1}{n}\right)$ *é uma sucessão de pontos em* $\mathbb{R}^3$,

$$\left(1, \frac{1}{2}, 1\right), \left(2, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \frac{1}{2}\right), \left(3, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \frac{1}{3}\right), \cdots$$

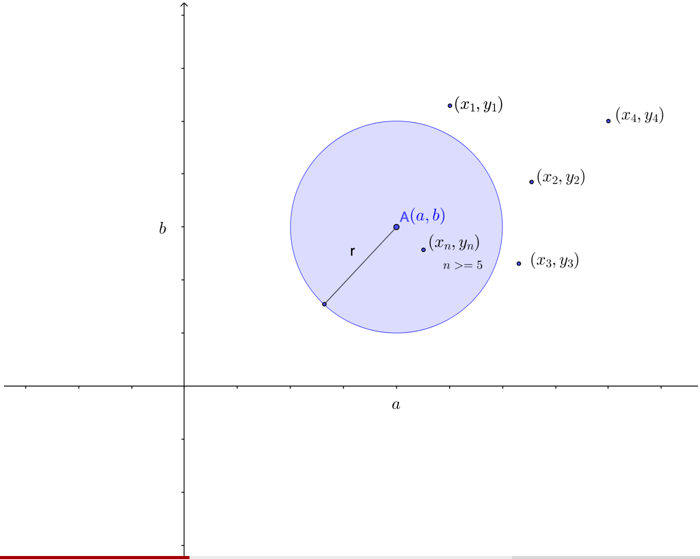
Definição 2

Seja $L \in \mathbb{R}^p$. *Dizemos que uma sucessão* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge para L*** *se para todo* $r > 0$, *existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $X_n \in B_r(L)$ *para todo o* $n \geq m$. *Escreve-se:* $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = L$.

O limite (quando existe) é único.

Em $\mathbb{R}^2$, se temos uma sucessão $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $X_n = (x_n, y_n)$ que converge para o ponto $A(a, b)$ então, para todo $r > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \in B_r(A)$ para todo o $n \geq m$.

Em $\mathbb{R}^2$, se temos uma sucessão $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $X_n = (x_n, y_n)$ que converge para o ponto $A(a, b)$ então, para todo $r > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \in B_r(A)$ para todo o $n \geq m$.



Em $\mathbb{R}^p$ temos,

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{np}) \longrightarrow (\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_p)$$

sse

$$\lim_{n\to\infty} x_{ni} = \ell_i, \text{ para todo o } i = 1, 2, \cdots, p.$$

Em $\mathbb{R}^p$ temos,

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{np}) \longrightarrow (\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_p)$$

sse

$$\lim_{n\to\infty} x_{ni} = \ell_i, \text{ para todo o } i = 1, 2, \cdots, p.$$

Exemplo 3

A sucessão $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$*de* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $X_n = \left(3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n, n\,\mathit{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ *converge para o ponto* $(3, 1)$, *pois*

Em $\mathbb{R}^p$ temos,

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{np}) \longrightarrow (\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_p)$$

sse

$$\lim_{n\to\infty} x_{ni} = \ell_i, \text{ para todo o } i = 1, 2, \cdots, p.$$

Exemplo 3

A sucessão $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$*de* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $X_n = \left(3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n, n\, sen(\frac{1}{n})\right)$ *converge para o ponto* $(3, 1)$, *pois*

$$\lim_{n\to+\infty} 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 3 \;\; e \;\; \lim_{n\to+\infty} n\, sen\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Em $\mathbb{R}^p$ temos,

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{np}) \longrightarrow (\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_p)$$

sse

$$\lim_{n\to\infty} x_{ni} = \ell_i, \text{ para todo o } i = 1, 2, \cdots, p.$$

Exemplo 3

A sucessão $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$*de* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $X_n = \left(3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n, n\, sen(\frac{1}{n})\right)$ *converge para o ponto* $(3, 1)$, *pois*

$$\lim_{n\to+\infty} 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 3 \;\; e \;\; \lim_{n\to+\infty} n\, sen\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Exemplo 4

$$X_n = \left(\frac{1}{n}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \frac{1}{n}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) \longrightarrow (0,0)$$

pois,

Exemplo 4

$$X_n = \left(\frac{1}{n}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \frac{1}{n}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) \longrightarrow (0,0)$$

pois,

$$d(X_n,0) = ||X_n - 0|| = \sqrt{\left(\frac{1}{n}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{n}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0\right)^2}$$

Exemplo 4

$$X_n = \left(\frac{1}{n}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \frac{1}{n}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) \longrightarrow (0,0)$$

pois,

$$d(X_n, 0) = ||X_n - 0|| = \sqrt{\left(\frac{1}{n}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{n}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{n}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{n}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0\right)^2}$$

Exemplo 4

$$X_n = \left(\frac{1}{n}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \frac{1}{n}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) \longrightarrow (0,0)$$

pois,

$$d(X_n, 0) = ||X_n - 0|| = \sqrt{\left(\frac{1}{n}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{n}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{n}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{n}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2}cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}sen^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2}\left(cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) + sen^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2}\left(cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) + sen^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2}\left(cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) + sen^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty$$

Assim, $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$.

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2}\left(cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) + sen^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty$$

Assim, $\lim_{n\to\infty} X_n = 0.$

Logo, podemos afirmar que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2}\left(cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) + sen^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty$$

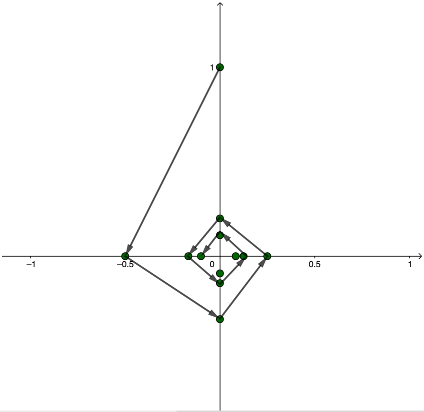
Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0.$

Logo, podemos afirmar que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$$



Exemplo 5

Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $X_n = \left(\frac{1}{n}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$

Exemplo 5

Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $X_n = \left(\frac{1}{n}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$
Como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0 \;\; e \;\; \lim_{n\to+\infty} sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) \text{ não existe,}$$

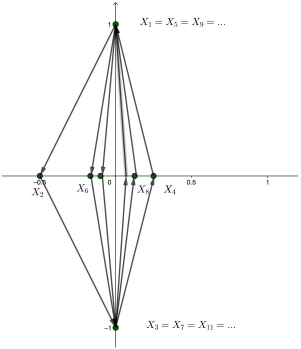
então $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

Exemplo 5

Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $X_n = \left(\frac{1}{n}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$ *Como*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0 \ \ e \ \ \lim_{n\to+\infty} sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) \text{ não existe,}$$

então $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*



Definição 3

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, *A um ponto de acumulação de* $\mathcal{D}$ *e* $\ell \in \mathbb{R}$. *Dizemos que o limite de f quando X tende para A é* ℓ *se para qualquer sucessão* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de pontos em* $\mathcal{D} \setminus \{A\}$ *convergente para A, a correspondente sucessão das imagens* $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* ℓ. *Neste caso,* $\lim_{X\to A} f(X) = \ell$.

Exemplo 6

Consideremos a função f definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}.$$

Exemplo 6

Consideremos a função f definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

O domínio da função f é $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.

Exemplo 6

Consideremos a função f definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}.$$

O domínio da função f é $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.

Calculemos $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Exemplo 6

Consideremos a função f definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

O domínio da função f é $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.

Calculemos $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Consideremos uma sucessão arbitrária (x_n, y_n) *de pontos de D convergente para* $(0,0)$, *isto é,* $x_n \to 0$ *e* $y_n \to 0$ *quando* $n \to \infty$. *Para a sucessão* $(f(x_n, y_n))$ *que se obtém temos*

Exemplo 6

Consideremos a função f definida por

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

O domínio da função f é $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$.

Calculemos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

Consideremos uma sucessão arbitrária (x_n, y_n) *de pontos de D convergente para* $(0, 0)$*, isto é,* $x_n \to 0$ *e* $y_n \to 0$ *quando* $n \to \infty$*. Para a sucessão* $(f(x_n, y_n))$ *que se obtém temos*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) =$$

Exemplo 6

Consideremos a função f definida por

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

O domínio da função f é $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$.

Calculemos $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

Consideremos uma sucessão arbitrária (x_n, y_n) *de pontos de D convergente para* $(0, 0)$, *isto é,* $x_n \to 0$ *e* $y_n \to 0$ *quando* $n \to \infty$. *Para a sucessão* $(f(x_n, y_n))$ *que se obtém temos*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^2 y_n}{x_n^2 + y_n^2} =$$

Exemplo 6

Consideremos a função f definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}.$$

O domínio da função f é $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.

Calculemos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Consideremos uma sucessão arbitrária (x_n, y_n) *de pontos de D convergente para* $(0,0)$, *isto é,* $x_n \to 0$ *e* $y_n \to 0$ *quando* $n \to \infty$. *Para a sucessão* $(f(x_n,y_n))$ *que se obtém temos*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^2 y_n}{x_n^2+y_n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(y_n \frac{x_n^2}{x_n^2+y_n^2} \right) =$$

Exemplo 6

Consideremos a função f definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

O domínio da função f é $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.

Calculemos $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Consideremos uma sucessão arbitrária (x_n, y_n) *de pontos de D convergente para* $(0,0)$, *isto é,* $x_n \to 0$ *e* $y_n \to 0$ *quando* $n \to \infty$. *Para a sucessão* $(f(x_n, y_n))$ *que se obtém temos*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^2 y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(y_n \frac{x_n^2}{x_n^2 + y_n^2} \right) = 0$$

Exemplo 6

Consideremos a função f definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

O domínio da função f é $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$.

Calculemos $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Consideremos uma sucessão arbitrária (x_n, y_n) *de pontos de D convergente para* $(0,0)$*, isto é,* $x_n \to 0$ *e* $y_n \to 0$ *quando* $n \to \infty$*. Para a sucessão* $(f(x_n, y_n))$ *que se obtém temos*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^2 y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(y_n \frac{x_n^2}{x_n^2 + y_n^2} \right) = 0$$

já que, $\lim_{n\to+\infty} y_k = 0$ *e a sucessão de termo geral* $\dfrac{x_n^2}{x_n^2 + y_n^2}$ *é limitada.*

$$0 \leq x_n^2 \leq x_n^2 + y_n^2.$$

$$0 \leq \frac{x_n^2}{x_n^2 + y_n^2} \leq 1.$$

$0 \leq x_n^2 \leq x_n^2 + y_n^2.$

$$0 \leq \frac{x_n^2}{x_n^2 + y_n^2} \leq 1.$$

Assim, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

$0 \leq x_n^2 \leq x_n^2 + y_n^2.$

$0 \leq \dfrac{x_n^2}{x_n^2 + y_n^2} \leq 1.$

Assim, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

Exemplo 7

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

Mostremos que o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *não existe.*

Consideremos duas sucessões de pontos

$$(x_n, y_n) = \left(0, \frac{1}{n}\right) \;\; e \;\; (u_n, v_n) = \left(0, -\frac{1}{n}\right)$$

ambas convergentes para o ponto $(0, 0)$.

No primeiro caso,

Consideremos duas sucessões de pontos

$$(x_n, y_n) = \left(0, \frac{1}{n}\right) \;\; e \;\; (u_n, v_n) = \left(0, -\frac{1}{n}\right)$$

ambas convergentes para o ponto $(0, 0)$.

No primeiro caso,

$$f((x_n, y_n)) = 1, \; pois \; \frac{1}{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \;\; \Rightarrow \;\; \lim_{n\to\infty} f((x_n, y_n)) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Consideremos duas sucessões de pontos

$$(x_n, y_n) = \left(0, \frac{1}{n}\right) \ \ e \ \ (u_n, v_n) = \left(0, -\frac{1}{n}\right)$$

ambas convergentes para o ponto $(0, 0)$.

No primeiro caso,

$$f((x_n, y_n)) = 1, \ pois \ \frac{1}{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \ \ \Rightarrow \ \ \lim_{n\to\infty} f((x_n, y_n)) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

$$f((u_n, v_n)) = 0, \ pois \ -\frac{1}{n} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \ \ \Rightarrow \ \ \lim_{n\to\infty} f((u_n, v_n)) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Consideremos duas sucessões de pontos

$$(x_n, y_n) = \left(0, \frac{1}{n}\right) \ \ e \ \ (u_n, v_n) = \left(0, -\frac{1}{n}\right)$$

ambas convergentes para o ponto $(0, 0)$.

No primeiro caso,

$$f((x_n, y_n)) = 1, \ pois \ \frac{1}{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \ \ \Rightarrow \ \ \lim_{n\to\infty} f((x_n, y_n)) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

$$f((u_n, v_n)) = 0, \ pois \ -\frac{1}{n} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \ \ \Rightarrow \ \ \lim_{n\to\infty} f((u_n, v_n)) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Assim, temos duas sucessões convergentes para $(0, 0)$ tais que as correspondentes sucessões das imagens convergem para valores diferentes, o que mostra que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

Exercício 3

Mostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^6+2x^3}$ *não existe.*

Propriedades algébricas dos limites.

Proposição 1

Sejam $f, g : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *A um ponto de acumulação de* $\mathcal{D}$. *Se* $\ell_1 = \lim\limits_{X \to A} f(X)$ *e* $\ell_2 = \lim\limits_{X \to A} g(X)$, *então*

1. $\lim\limits_{X \to A} (f+g)(X) = \ell_1 + \ell_2$;
2. $\lim\limits_{X \to A} (\lambda f)(X) = \lambda \ell_1$, *onde* $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\lim\limits_{X \to A} (fg)(X) = \ell_1 \ell_2$;
4. $\lim\limits_{X \to A} (\frac{f}{g})(X) = \frac{\ell_1}{\ell_2}$.