



Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro  
**Cálculo II — Agrup. IV**  
**2.ª Prova de Avaliação Discreta; 13 de junho de 2018**  
Duração: **2h00**

**– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –**

- [20pts] 1. Seja  $g$  a função de domínio  $\mathbb{R}^2$  tal que  $g(x, y) = e^x \cos y + \frac{y^2}{2} + 1$ .
- (a)  $g$  é uma função diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ ? Justifique.
- (b) Calcule a derivada direcional de  $g$  segundo um vetor unitário colinear a  $(1, 1)$  no ponto  $(1, 0)$ .
- [35pts] 2. Seja  $f$  a função de domínio  $\mathbb{R}^2$  tal que  $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2xy$ .
- (a) Determine os pontos críticos de  $f$ .
- (b) Mostre que o ponto  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$  é um minimizante local de  $f$ , averiguando se existem outros extremantes locais.
- (c) O ponto  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$  é minimizante global de  $f$ ? Justifique.
- (d) Qual é a direção e sentido de maior crescimento de  $f$  no ponto  $(1, 0)$ ?
- [30pts] 3. Seja  $F$  a função de domínio  $\mathbb{R}^3$  tal que  $F(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2 + xz - 2$ .
- (a) Determine uma equação do plano tangente à superfície de equação  $F(x, y, z) = 0$  no ponto  $(1, 0, -1)$ .
- (b) Considere a função  $f$  de domínio  $\mathbb{R}^2$  tal que

$$f(x, y) = \frac{1}{2}F(x, y, 0), \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Determine os extremos de  $f$  sujeitos à condição  $x^2 + y^2 = 1$ .

- [15pts] 4. Determine a solução geral da EDO  $y' = \frac{4}{x}y$ .
- [20pts] 5. Resolva a seguinte equação diferencial de Bernoulli  $y' + xy = -e^{x^2}y^3$
- [20pts] 6. A seguinte EDO não é exata, mas é convertível a exata,

$$xdx + (y + x^2)dy = 0.$$

Encontrando um fator integrante da forma  $u(y) = e^{ay}$ , para  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , converta a EDO numa exata e resolva-a.

- [25pts] 7. Encontre a solução geral da seguinte EDO linear:

$$y'' + 3y = 2.$$

- [35pts] 8. Usando transformadas de Laplace, resolva o seguinte problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 6. \end{cases}$$