



FICHA DE EXERCÍCIOS 5
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS (EDO)

1. Verifique se as seguintes funções são solução (em \mathbb{R}) das equações diferenciais dadas:

(a) $y = \sin x - 1 + e^{-\sin x}$	$\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x);$
(b) $z = \cos x$	$z'' + z = 0;$
(c) $y = \cos^2 x$	$y'' + y = 0;$
(d) $y = Cx - C^2 \quad (C \in \mathbb{R})$	$(y')^2 - xy' + y = 0.$

2. Indique uma equação diferencial para a qual a família de curvas indicada constitui um integral geral.

- (a) $y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$ (retas do plano não verticais que passam pela origem);
(b) $y = Ax + B, \quad A, B \in \mathbb{R}$ (retas do plano não verticais);
(c) $y = e^{Cx}, \quad C \in \mathbb{R}.$

3. Considere a família de curvas sinusoidais definidas por

$$y = A \sin(x + B) \quad \text{com} \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Indique uma EDO de terceira ordem para a qual estas funções constituam uma família de soluções

4. (a) Determine a solução geral da equação diferencial $y'' - \sin x = 0$.
(b) Mostre que a função definida por $\varphi(x) = 2x - \sin x$ é uma solução particular da EDO da alínea anterior, que satisfaz as condições $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(0) = 1$.
5. Determine a solução geral das seguintes EDOs:

(a) $y' - \frac{1}{(1+x^2) \arctg x} = 0;$
(b) $y' - \sqrt{1-x^2} = 0;$
(c) $y' - \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1} = 0.$

6. Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDOs de variáveis separáveis:

(a) $x + yy' = 0;$
(b) $xy' - y = 0;$
(c) $(t^2 - xt^2) \frac{dx}{dt} + x^2 = -tx^2;$
(d) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0.$

7. Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

(a) $xy' + y = y^2, \quad y(1) = 1/2;$

(b) $xy + x + y'\sqrt{4+x^2} = 0, \quad y(0) = 1;$

(c) $(1+x^3)y' = x^2y, \quad y(1) = 2.$

8. Verifique que as seguintes equações diferenciais são homogêneas e determine um seu integral geral.

(a) $(x^2 + y^2)y' = xy;$

(b) $y' \left(1 - \ln \frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}, \quad x > 0.$

9. Considere a equação diferencial $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x), \quad x > 0.$

(a) Verifique que se trata de uma equação diferencial homogênea.

(b) Determine um integral geral desta EDO.

10. Resolva as seguintes equações diferenciais exatas:

(a) $(2x + \sin y) dx + x \cos y dy = 0;$

(b) $(2xy - x - e^y) dx = (xe^y + y - x^2) dy;$

(c) $\left(\frac{y}{x} + 6x\right) dx + (\ln x - 2) dy = 0.$

11. Resolva a equação $e^x \sec y - \operatorname{tg} y + y' = 0$ sabendo que ela admite um fator integrante da forma $\mu(x, y) = e^{\beta x} \cos y$.

12. Resolva as seguintes equações diferenciais, usando em cada caso o fator integrante indicado:

(a) $y dx + (y^2 - x) dy = 0 \quad [\mu(y) = y^{-2}];$

(b) $(2y - x^3) dx + x dy = 0 \quad [\mu(x) = x];$

13. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares usando fatores integrantes:

(a) $y' + 2y = \cos x;$

(b) $x^3 y' - y - 1 = 0;$

(c) $\frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2 + 1} y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}, \quad x \neq 0.$

14. Considere a EDO $x^2 y' + 2xy = 1$ em $]0, +\infty[$. Mostre que qualquer solução desta EDO tende para zero quando $x \rightarrow +\infty$.

15. Resolva as seguintes equações diferenciais de Bernoulli:

(a) $xy' + y = y^2 \ln x, \quad x > 0;$

(b) $y' - \frac{y}{2x} = 5x^2 y^5, \quad x \neq 0.$

16. Usando o método da variação das constantes, determine a solução geral das seguintes EDOs lineares:

(a) $y' - \frac{2y}{x} = x^3$;

(b) $y' \sin x + y \cos x = \sin^2 x$;

(c) $y' - \frac{x}{x^2 + 1} y = \sqrt{x^2 + 1}$, (rever EDO do Ex. 11(c)).

17. Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares:

(a) $y' + y = \sin x$;

(b) $y'' - y + 2 \cos x = 0$;

(c) $y'' + y' = 2y + 3 - 6x$;

(d) $y'' - 4y' + 4y = x e^{2x}$;

(e) $y'' + y' = e^{-x}$;

(f) $y'' + 4y = \operatorname{tg}(2x)$;

(g) $y''' + y' = \sin x$;

(h) $y'' + 9y = \sin x - e^{-x}$.

18. Considere o problema de valores iniciais

$$y'' + 4y' + 4y = \cos(2x), \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 1.$$

Justifique que este problema possui uma única solução (em \mathbb{R}) e determine-a.

19. Resolva o seguinte problema de valor inicial $\begin{cases} y' + y \cos x = \cos x \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

20. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

(a) $(1 + x^2)y' + 4xy = 0$;

(b) $y'' + y + 2 \sin x = 0$;

(c) $(1 + x^2)y' - y = 0$;

(d) $y''' + 4y' = \cos x$;

(e) $y' - 3x^2y = x^2$;

(f) $y''' - 3y' + 2y = 12e^x$.

21. Resolva a EDO $xy'' - y' = 3x^2$ (Sugestão: Efetue a mudança de variável $z = y'$).

22. Considere a EDO linear homogênea (de coeficientes não constantes)

$$(1 - x)y'' + xy' - y = 0, \quad x \in]1, \infty[.$$

(a) Mostre que $\{x, e^x\}$ forma um sistema fundamental de soluções da equação.

(b) Obtenha a solução geral da EDO.

(c) Resolva agora a EDO

$$(1 - x)y'' + xy' - y = x^2 - 2x + 2, \quad x \in]1, \infty[.$$

começando por verificar que ela admite uma solução do tipo $y = \beta x^2$ para certo $\beta \in \mathbb{R}$.

Soluções

1. (a) Sim; (b) Sim; (c) Não; (d) Sim.
2. (a) $xy' - y = 0$; (b) $y'' = 0$; (c) $xy' - y \ln(y) = 0$.
3. $y''' + y' = 0$.
4. (a) $y = C_1 x - \operatorname{sen} x + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
5. (a) $y = \ln(\operatorname{arctg} x) + C$, $C \in \mathbb{R}$;
(b) $y = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsen x + C$, $C \in \mathbb{R}$;
(c) $y = \frac{x^3}{3} + \operatorname{arctg} x + C$, $C \in \mathbb{R}$.
6. (a) $x^2 + y^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$;
(b) $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$ (compare com o ex. 2(a));
(c) $\frac{x}{t} = C e^{-\frac{1}{x} - \frac{1}{t}}$, $C \in \mathbb{R}$;
(d) $y = \frac{1}{\ln|x^2 - 1| - C}$, $C \in \mathbb{R}$;
7. (a) $y = \frac{1}{x+1}$; (b) $y = -1 + 2e^{2-\sqrt{4+x^2}}$; (c) $y^3 = 4(1+x^3)$.
8. (a) $\ln|y| - \frac{x^2}{2y^2} = C$, $C \in \mathbb{R}$ ($y = 0$ é solução singular).
(b) $y = x e^{Ky}$, $x > 0$, $K \in \mathbb{R}$.
9. (b) $y = x e^{Cx}$, $x > 0$, $C \in \mathbb{R}$.
10. (a) $x^2 + x \operatorname{sen} y = C$, $C \in \mathbb{R}$;
(b) $x^2 + y^2 + 2xe^y - 2yx^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$;
(c) $y = \frac{C - 3x^2}{\ln|x| - 2}$, $C \in \mathbb{R}$.
11. $x + e^{-x} \operatorname{sen} y = C$, $C \in \mathbb{R}$ (um fator integrante é $\mu(x, y) = e^{-x} \cos y$).
12. (a) $x + y^2 = Cy$, $C \in \mathbb{R}$
(b) $yx^2 - \frac{x^5}{5} = C$, $C \in \mathbb{R}$
13. (a) $y = \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \operatorname{sen} x + C e^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$;
(b) $y = -1 + C e^{-\frac{1}{2x^2}}$, $x \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$;
(c) $y = (C+x)\sqrt{x^2+1}$, $C \in \mathbb{R}$.
14. Comece por verificar que a solução geral possui a forma $y = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}$, $C \in \mathbb{R}$.
15. (a) $y = \frac{1}{1+Cx+\ln x}$, $x > 0$, $C \in \mathbb{R}$ ($y = 0$ é solução singular).
(b) $y^4 = \frac{x^2}{C-4x^5}$, $C \in \mathbb{R}$ ($y = 0$ é solução singular).

16. (a) $y = \frac{x^4}{2} + Kx^2$, $K \in \mathbb{R}$;
 (b) $y = \frac{x}{2} \operatorname{cosec} x - \frac{\cos x}{2} + K \operatorname{cosec} x$, $K \in \mathbb{R}$.
17. (a) $y = C_1 e^{-x} + \frac{\operatorname{sen} x}{2} - \frac{\cos x}{2}$;
 (b) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \cos x$;
 (c) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + 3x$;
 (d) $y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^3}{6}\right) e^{2x}$;
 (e) $y = C_1 + (C_2 - x) e^{-x}$;
 (f) $y = C_1 \operatorname{sen}(2x) + C_2 \cos(2x) - \frac{1}{4} \cos(2x) \ln |\sec(2x) + \operatorname{tg}(2x)|$;
 (g) $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x - \frac{x}{2} \operatorname{sen} x$;
 (h) $y = C_1 \operatorname{sen}(3x) + C_2 \cos(3x) + \frac{\operatorname{sen} x}{8} - \frac{e^{-x}}{10}$.
 (C_1, C_2, C_3 são constantes reais arbitr rias).
18. $y = \frac{3}{4}(x - \pi) e^{2(\pi-x)} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{8}$.
19. $y = 1 + e^{-\operatorname{sen} x}$, $x \in \mathbb{R}$.
20. (a) $y = \frac{K}{(x^2 + 1)^2}$, $K \in \mathbb{R}$;
 (b) $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + x \cos x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;
 (c) $y = C e^{\arctg x}$, $C \in \mathbb{R}$;
 (d) $y = C_1 + C_2 \cos(2x) + C_3 \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{3} \operatorname{sen} x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;
 (e) $y = K e^{x^3} - \frac{1}{3}$, $K \in \mathbb{R}$;
 (f) $y = C_1 e^{-2x} + (C_2 + C_3 x + 2x^2) e^x$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.
21. $y = Cx^2 + x^3 + K$, $C, K \in \mathbb{R}$.
22. (a) –
 (b) $y = C_1 x + C_2 e^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
 (c) $y = C_1 x + C_2 e^x + x^2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.