Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II — Agrupamento 4 2019/2020

Ficha de Exercícios 3
Funções reais de várias variáveis reais (parte I):
Domínios; Conjuntos de nível; Limites; Continuidade; derivação parcial e diferenciabilidade

Exercícios Propostos

1. Represente geometricamente os seguintes conjuntos:

   (a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + 2y^2 < 4\}$;

   (b) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < (x-1)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2\}$;

   (c) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$;

   (d) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}$;

   (e) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$.

   Caracterize cada um dos conjuntos do ponto de vista topológico (usando a topologia usual em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$).

2. Determine o domínio das seguintes funções e descreva-o geometricamente:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$;

   (b) $f(x,y,z) = \sqrt{y - x^2}$;

   (c) $f(x,y) = \dfrac{2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}$;

   (d) $f(x,y) = \ln(xy)$;

   (e) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$;

   (f) $f(x,y,z) = \operatorname{arcsen} \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3. Determine as curvas / superfícies de nível das seguintes funções e descreva-as do ponto de vista geométrico:

   (a) $f(x,y) = x - 4y$;

   (b) $f(x,y) = x^2 - 4y$;

   (c) $f(x,y) = x^2 + y^2$;

   (d) $f(x,y) = x^2 - 4y^2$;

   (e) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2$;

   (f) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

4. Suponha que $T(x,y) = 40 - x^2 - y^2$ representa uma distribuição de temperatura no plano xOy (admita que x e y são dados em quilómetros e a temperatura T em graus Celsius). Um indivíduo encontra-se na posição $(3,2)$ e pretende dar um passeio.
   Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se desejar desfrutar sempre da mesma temperatura.

5. Determine, caso existam, os seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - 4y^4}{2x^2 + 4y^2}$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + 2y^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{xy}\right)$

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 y}{x^2 + 2y^2}$

   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{y^4 + (y-x)^2}$

6. Considere f a função de domínio contido em $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

   (a) Determine o domínio de f e diga, justificando, se é um conjunto fechado.

   (b) Determine as curvas de nível $\mathcal{C}_k$ de f, para $k = 0$ e $k = \frac{1}{2}$, respetivamente. Faça os seus esboços gráficos.

(c) Mostre que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

7. Determine o domínio de continuidade das funções, de domínio $\mathbb{R}^2$, definidas por:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x-y} & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$ (b) $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } xy = 0 \\ 0 & \text{se } xy \neq 0 \end{cases}$.

8. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem da função f dada por

$$f(x,y,z) = e^x \operatorname{sen} x + \cos(z - 3y).$$

9. Calcule, caso existam, as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções nos pontos P indicados:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{xy}$ $[P = (2,2)]$;

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{4-x^2-2y^2}, & \text{se } x^2+2y^2 \neq 4 \\ 0, & \text{se } x^2+2y^2 = 4 \end{cases}$ $[P = (2,0)]$;

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \\ x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$ $[P = (0,0)]$.

10. Determine as derivadas parciais de primeira e de segunda ordens da função

$$f(x,y) = \ln(x+y) - \ln(x-y).$$

11. Sendo $z = \ln(x^2+xy+y^2)$, mostre que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$.

12. Mostre que a função $f(x,y) = \operatorname{arctg}(y/x)$ verifica a equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad (\textit{equação de Laplace}).$$

13. Considere a função $f(x,y) = \ln x + xy^2$.

   (a) Indique o domínio de f.

   (b) Determine equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de f no ponto $(1,2,4)$.

14. Seja $f(x,y,z) = x \operatorname{sen}(yz)$.

   (a) Determine o gradiente de f.

   (b) Calcule a derivada direcional de f no ponto $(1,3,0)$ segundo o vetor unitário U com a direção e sentido de $V = (1,2,-1)$.

15. Considere a função f definida por $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.

   (a) Indique o domínio D de f e caracterize-o do ponto de vista topológico.

   (b) Descreva as curvas de nível da função f.

   (c) Justifique que f é diferenciável em $(3,0)$.

   (d) Escreva a expressão geral das derivadas direcionais de f no ponto $(3,0)$.

   (e) Determine a direção e sentido segundo os quais se atinge o valor máximo das derivadas direcionais de f em $(3,0)$.

16. Determine a reta normal e o plano tangente à superfície cónica

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 3 - z = \sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

   no ponto $(3,4,-2)$.

17. Considere a função f dada por $f(x,y,z) = 3xy + z^2$.

   (a) Calcule o gradiente de f num ponto genérico.

   (b) Determine uma equação do plano tangente à superfície de nível 4 de f, no ponto $(1,1,1)$.

Exercícios Resolvidos

1. Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y,z) = x + y + z + e^{xyz}$.

   (a) Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R}^3$.

   (b) Determine a direção e sentido de maior crescimento de f no ponto $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e calcule a derivada direcional correspondente nesse ponto.

   (c) Determine uma equação cartesiana do plano tangente à superfície de nível 0 de f no ponto $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

   Resolução:

   (a) As derivadas de 1.ª ordem de f em $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ são:

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 1 - yz\, e^{xyz}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 1 - xz\, e^{xyz}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1 - xy\, e^{xyz}$$

   que são contínuas em $\mathbb{R}^3$, logo, f é diferenciável em $\mathbb{R}^3$.

   (b) A direção e sentido de maior crescimento de f em $P = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é dada pelo vetor gradiente de f em P:

   $$\begin{aligned} \nabla f(P) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{\partial f}{\partial y}(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{\partial f}{\partial z}(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{4}, 1 - 0, 1 - 0\right) \\ &= \left(\frac{3}{4}, 1, 1\right) \end{aligned}$$

   A norma deste vetor é $\| \nabla f(P) \| = \frac{\sqrt{43}}{4}$. A derivada direcional correspondente nesse ponto é portanto $\frac{\sqrt{43}}{4}$.

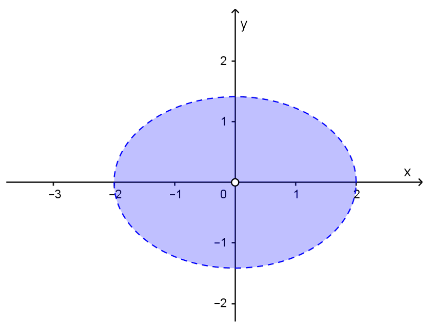
   (c) Notar que $\mathcal{S}_0 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z - e^{xyz} = 0\right\}$ e portanto $P \in \mathcal{S}_0$. Uma vez que $\nabla f(P) \neq 0$, o plano tangente a $\mathcal{S}_0$ em $P = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ tem esse vetor como vetor ortogonal. Assim, uma equação desse plano é

   $$\left(x - 0, y - \frac{1}{2}, z - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}, 1, 1\right) = 0$$

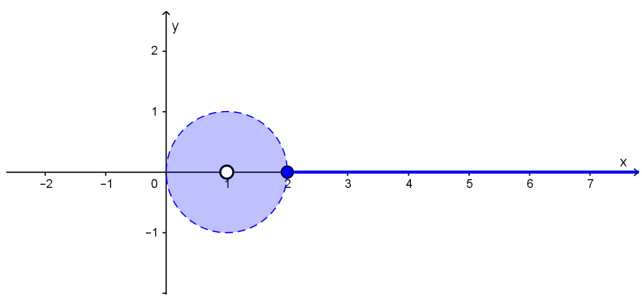
   ou seja, $3x + 4y + 4z - 4 = 0$ é uma equação cartesiana do plano pedido.

Soluções

1. (a) É aberto.



   (b) Não é aberto, nem é fechado.

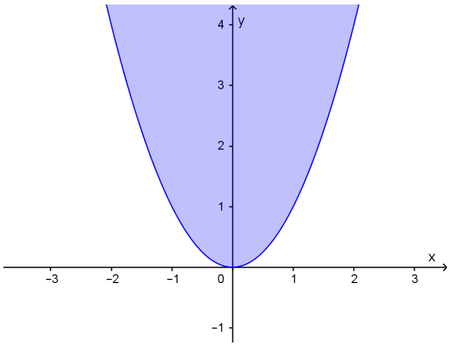


(c) É fechado.

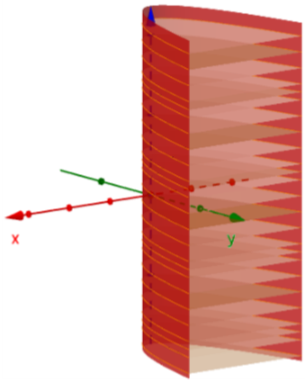
(d) É fechado.

(e) É fechado.

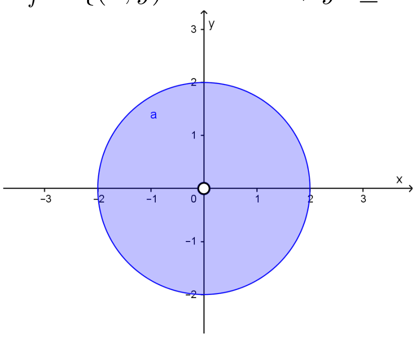
2. (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$.



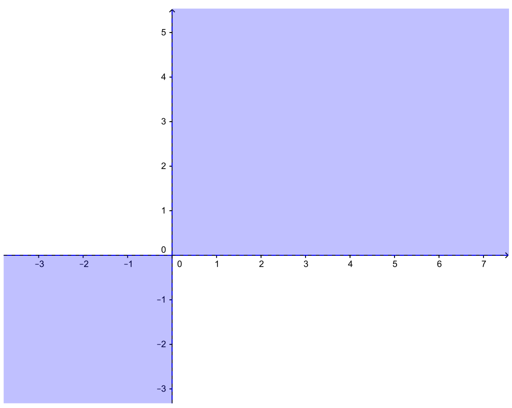
(b) $D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq x^2\}$. Trata-se de um cilindro parabólico (incluindo os pontos que se situam no seu interior).



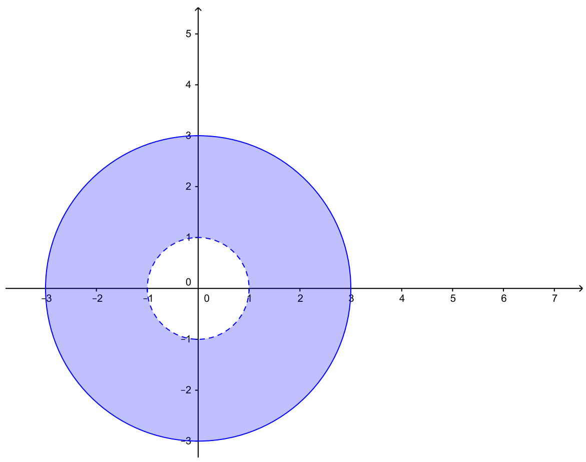
(c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x,y) \neq (0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 4\}$.



(d) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)\} = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cup (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-)$.



(e) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 9\}$.



(f) $D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \neq (0, 0) \wedge z^2 \leq x^2 + y^2\}$.

3. (a) Para $k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x}{4} - \frac{k}{4}\}$ é a reta de declive $\frac{1}{4}$ e com ordenada na origem $\frac{k}{4}$.

   (b) Para $k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x^2}{4} - \frac{k}{4}\}$ é uma parábola com concavidade voltada para cima e vértice $\left(0, -\frac{k}{4}\right)$.

   (c) $\mathcal{C}_0 = \{(0, 0)\}$. Para $k \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{C}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = k\}$ é a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt{k}$.

   (d) $\mathcal{C}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm\frac{x}{2}\}$ são duas retas que passam na origem e com delives $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$. Para $k \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{C}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4y^2 = k\}$ são hipérboles cujos vértices se encontram no eixo Ox. Para $k \in \mathbb{R}^-$, $\mathcal{C}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4y^2 = k\}$ são hipérboles cujos vértices se encontram no eixo Oy.

   (e) $\mathcal{S}_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = y^2 + z^2\}$ é uma superfície cónica;
   para $k \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{S}_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 - z^2 = k\}$ é um hiperbolóide de duas folhas;
   para $k \in \mathbb{R}^-$, $\mathcal{S}_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 - z^2 = k\}$ é um hiperbolóide de uma folha.

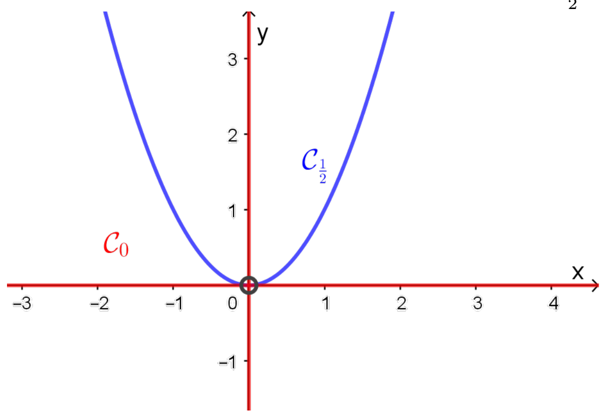
   (f) $\mathcal{S}_0 = \{(0, 0, 0)\}$ é um ponto (quádrica degenerada). Para cada $k \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{S}_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = k\}$ é a superfície esférica de centro $(0, 0, 0)$ e raio $\sqrt{k}$.

4. $\{(x, y) : T(x, y) = T(3, 2)\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 13\}$

5.
   (a) 0; (b) $\frac{1}{5}$; (c) 0; (d) 0; (e) Não existe.

6. (a) $D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

   (b) $\mathcal{C}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 0 \vee y = 0\} \backslash \{(0, 0)\}$, $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x^2\} \backslash \{(0, 0)\}$.



   (c) —

7. (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \neq y\} \cup \{(0, 0\}$

(b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon xy\neq 0\}\cup\{(0,0\}$

8. Para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, temos
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=e^x(\operatorname{sen}x+\cos x)$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=3\operatorname{sen}(z-3y)$,
$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=-\operatorname{sen}(z-3y)$.

9. (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(2,2)=\frac{1}{2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(2,2)=\frac{1}{2}$.
   (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(2,0)=0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(2,0)$ não existe.
   (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ não existe; $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

10. Para $y>-x$ e $x>y$, temos
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2y}{y^2-x^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2x}{x^2-y^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{4xy}{(x^2-y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=-\frac{2(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}$.

11. –

12. –

13. (a) $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\}=\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$.
    (b) Plano tangente: $5x+4y-z-9=0$.
    Reta normal:
    $(x,y,z)=(1,2,4)+\alpha(5,4,-1),\ \alpha\in\mathbb{R}$ (equação vetorial) ou
    $\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{4}=4-z$ (equações cartesianas).

14. (a) $\nabla f(x,y,z)=(\operatorname{sen}(yz), xz\cos(yz), xy\cos(yz))$.
    (b) $D_{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)}f(1,3,0)=-\frac{3}{\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$.

15. (a) $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2>0\}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$
    (é aberto e não é fechado).
    (b) As curvas de nível $k\in\mathbb{R}$ de f são $C_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=e^k\}$ (circunferências de centro $(0,0)$).
    (c) Sim, porque tem derivadas parciais de 1.ª ordem contínuas em todo o seu domínio, em particular em $(3,0)$.
    (d) $D_{(u,v)}f(3,0)=\frac{2}{3}u$, com $u^2+v^2=1$.
    (e) Na direção e sentido do vetor $(1,0)$, (notar que é a direção e sentido do vetor gradiente de f em $(3,0)$).

16. Reta normal: $(x,y,z)=(3,4,-2)+\alpha(3,4,5),\ \alpha\in\mathbb{R}$.
Plano tangente: $3x+4y+5z-15=0$.

17. (a) $\nabla f(x,y,z)=(3y,3x,2z)$.
    (b) $3x+3y+2z-8=0$.