Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo II - Agrupamento 4

Ano letivo 2016/2017 ($2^{\underline{o}}$ Semestre)

Folha 3: Derivadas, gradientes e diferenciais - parte 1

---

1. Supondo que existe a derivada direcional $f'_{\vec{a}}(P_0)$ da função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ segundo $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ em $P_0 \in \text{int}D$, mostre que $f'_{-\vec{a}}(P_0)$ também existe e que $f'_{-\vec{a}}(P_0) = -f'_{\vec{a}}(P_0)$.

2. Após garantir a diferenciabilidade das seguintes funções f nos seus domínios de definição, determine a expressão geral das derivadas direcionais nas direções e sentidos indicados:

   (a) $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ na direção e sentido do vetor $(1, 1)$;

   (b) $f(x, y) = x^2 - 4y$ na direção e sentido do vetor $(1, 3)$;

   (c) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ na direção e sentido do vetor $(1, 1)$;

   (d) $f(x, y) = x^2y^3$ na direção e sentido do vetor $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$;

   (e) $f(x, y, z) = xyz$ na direção e sentido do vetor $(1, 2, 2)$;

   (f) $f(x, y, z) = e^x + yz$ na direção e sentido do vetor $(-1, 5, -2)$;

   (g) $f(x, y, z) = \cos(xy) + \sin(yz)$ na direção e sentido do vetor $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

3. Determine a expressão geral das derivadas direcionais da função $f(x, y) = x^2 - 3xy$ na direção e sentido de um vetor de coordenadas positivas que seja diretor da reta tangente à parábola de equação $y = x^2 - x + 2$ no ponto $(1, 2)$.

4. Determine a derivada direcional de $f(x, y) = 3ye^x$ no ponto $(1, 2)$ e na direção e sentido de um vetor do 1.º quadrante que faça com o eixo das abcissas um ângulo de 60º.

5. Suponha que o potencial elétrico numa lâmina plana é dado por

$$V(x, y) = 80 - 20xe^{-\frac{x^2+y^2}{20}}$$

   em volts, com x e y em cm.

   (a) Determine a expressão geral da taxa de variação do potencial na direção e sentido do eixo dos xx.

(b) Determine a expressão geral da taxa de variação do potencial na direção e sentido do eixo dos yy.

(c) Determine a expressão geral da taxa de variação do potencial na direção e sentido do vetor $(1, 1)$.

6. Após garantir a diferenciabilidade da função no respetivo ponto do domínio, determine a equação do plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$ no ponto P_0 indicado:

   (a) $z = 2x^2 + y^2$ (paraboloide); $P_0 = (1, 1, 3)$.

   (b) $z = \sqrt{x - y}$; $P_0 = (5, 1, 2)$.

   (c) $z = \ln(2x + y)$; $P_0 = (-1, 3, 0)$.

   (d) $z = \sin(xy)$; $P_0 = (1, \pi, 0)$.

   (e) $z = \dfrac{x^2 + 4y^2}{5}$; $P_0 = (3, -2, 5)$.

   (f) $z = \dfrac{4 - xy}{x + y}$; $P_0 = (2, 2, f(2, 2))$.

   (g) $z = xe^{x^2 - y^2}$; $P = (2, 2, f(2, 2))$.

7. Seja $f(x, y) = x - 6y^2$. Determine:

   (a) equações para os planos tangentes ao gráfico de $z = x - 6y^2$ nos pontos $(1, 1, f(1, 1))$ e $(-1, -1, f(-1, -1))$;

   (b) equações para as retas perpendiculares ao gráfico de f nos pontos $(1, 1, f(1, 1))$ e $(-1, -1, f(-1, -1))$.

8. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de $z = xy$ que passa pelos pontos (1, 1, 2) e (-1, 1, 1).

9. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de $z = x^2 + y^2$ que seja paralelo ao plano $z - 2x - y = 0$.

10. Determine a equação do plano tangente à esfera de centro na origem e raio unitário no ponto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

11. Justifique as seguintes afirmações:

    (a) As funções polinomiais em n variáveis são diferenciáveis em todos os pontos de $\mathbb{R}^n$.

    (b) A função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

    (c) A função $f(x, y) = xy^2 + \dfrac{y}{x^2 + y^2 + 1}$ é diferenciável em todo o $\mathbb{R}^2$.

(d) A função $f(x, y) = e^y + \ln x$ é diferenciável para todo o $(x, y) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}$.

12. Para funções $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ cujas derivadas parciais de primeira ordem existam num dado ponto, prove que $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$ em tal ponto.