**Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro**

**CÁLCULO 2 - agrup. 1** **2017/18**

**Folha 4:** *Equações com derivadas ordinárias*

---

1. Verifique que as seguintes equações diferenciais são exactas e resolva-as:

   (a) $(3x^2 - 2xy)dx + (2y - x^2)dy = 0$

   (b) $3x^3y^2y' + 3x^2y^3 - 5x^4 = 0$

   (c) $(3x^2y^2 - 4xy)dy + (2xy^3 - 2y^2)dx = 0$

   (d) $xe^{xy}y' + ye^{xy} - 4x^3 = 0$

   (e) $\cos x \cos y - (\sin x \sin y + y^2)y' = 0$

   (f) $(x - y + 1)dy - (x - y - 1)dx = 0.$

2. Encontre a solução geral das seguintes equações e, quando aplicável, resolva os problemas de valores iniciais:

   (a) $x^2y' + y = 0$

   (b) $x + xy + y'(y + xy) = 0$

   (c) $t\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+t^2}y' = 0$

   (d) $y' \tan x = y$

   (e) $y'x^3 = 2y$

   (f) $2y'\sqrt{x} = y, y(4) = 1$

   (g) $y' = (2y+1)\cot x, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

   (h) $x^2y' + y^2 = 0, y(-1) = 1$

3. Encontre a solução geral das seguintes equações e, quando aplicável, resolva os problemas de valores iniciais:

   (a) $y' - 2y = x^2 + x,$

   (b) $y' + (\cos(x))\ y = \sin(x)\ \cos(x),$

   (c) $xy' + y = 3x^3 - 1, \quad x > 0,$

   (d) $y' - y\tan(x) = e^{\sin(x)}, \quad 0 < x < \pi/2,$

   (e) $y' + ay = \sin\ x + e^{-5x}, \quad y(0) = 0,$

   (f) $y' - \frac{2}{x}y = x, \quad y(1) = 0.$

   (g) $y^{(4)} + y^{(3)} = 2$

   (h) $\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\ y' = -x^2, \quad y(2) = 2$

   (i) $2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0, \quad y(1) = 1$

4. Encontre a solução geral das seguintes equações homogéneas:

   (i) $yy' = 2y - x$

   (ii) $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$

5. Uma equação diferencial da forma $y' + a(x)y = b(x)y^k$, $k \in \mathbb{R}$, diz-se de uma *equação de Bernoulli*. Resolva os problemas

(i) $y'x + y = -xy^2$ (ii) $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$.

6. Durante uma certa reacção química a concentração de clorobutano ($C_4H_9Cl$) satisfaz a equação

$$\frac{d[C_4H_9Cl]}{dt} = -k[C_4H_9Cl]$$

com $k = 0,1223$/seg. Quanto tempo precisa a reacção consumir 90% da quantia inicial do clorobutano?

7. Considere a decomposição de dióxidio de nitrogénio:

$$2NO_2 \to 2NO + O_2$$

Porque esta reacção precisa de duas moléculas de $NO_2$ o rácio da reacção é proporcional ao quadrado da concentração de $NO_2$, i.e.

$$\frac{d[NO_2]}{dt} = -k[NO_2]^2$$

onde $[NO_2]$ denota a concentração de $NO_2$ e $k$ é uma constante. Determine a concentração $[NO_2]$ em função da temperatura $t$.

8. Considere uma colónia de bactérias a crescer num ambiente com recursos limitados. Neste caso um modelo geral para o crescimento dessa colónia é dado pela equação logística

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{P_{\max}}\right)$$

Determine a população $P$ em relação ao tempo $t$.

9. O Sr. Silva tirou uma garrafa de cerveja do frigorífico, que estava à temperatura de $7^o$ C. Antes de conseguir abri-la chegou o seu irmão, que o manteve ocupado durante cerca de 90 minutos. Isto aconteceu na sala de estar, mantida a uma temperatura confortável de $19^o$ C. O Sr. Silva, após a saída do seu irmão, mediu a temperatura da sua cerveja, chegando à conclusão de que esta se encontrava agora à temperatura de $15^o$ C, demasiadamente alta para a cerveja ser bebida. Como qualquer bebedor de cerveja, sabe que a lei do arrefecimento de Newton estabelece que

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a),$$

onde $T = T(t)$ é a temperatura, $T_a$ a temperatura ambiente e $k > 0$ é uma constante que depende apenas da cerveja. Assim, o Sr. Silva conclui que uma garrafa à temperatura ambiente da sala deve ser posta no frigorífico por 3 horas de forma a reduzir a sua temperatura para uns aceitáveis $8^o$ C.

Ele tem razão? Encontrando-se agora à temperatura de $15^o$ C, quanto tempo deve a garrafa ficar no frigorífico ?

10. Um bolo de maçã com temperatura inicial de 170°C é tirado do forno e deixado a arrefeçer numa sala com temperatura ambiente de 20°C. Dado que a temperatura do bolo inicialmente está a descrescer num rácio de 3°C/min, quanto tempo precisamos de esperar até o bolo ficar a uma temperatura de 30°C?

11. Em 1974 Stephen Hawking descobriu que os buracos negros emitem uma pequena quantia de radiação, que resulta numa evaporação lenta do buraco. De acordo com Hawking, a massa $M$ de um buraco negro satisfaz a equação
$$\frac{dM}{dt} = -\frac{k}{M^2}$$
com $k = 1,25 \times 10^{23}\mathrm{kg}^3/\mathrm{ano}$.

    (a) Determine a solução geral completa desta equação.

    (b) Depois de uma supernova, o resto da estrela colapsou num buraco negro com massa inicial de $6,00 \times 10^{31}$kg. Quanto tempo o buraco negro vai precisar para evaporar completamente?

12. A equação de Gompertz foi usada para modelar o crescimento de tumores malignos. A equação diz que
$$\frac{dP}{dt} = kP(\ln P_{\max} - \ln P)$$
onde $P$ denota a população das células de cancro e $k, P_{\max}$ são constantes.

    (a) Determine a solução geral usando separação de variáveis.

    (b) Um tumor com 5000 células cresce inicialmente com um rácio de 200 células/dia. Supondo um tamanho máximo do tumor de $P_{\max} = 100000$ células, qual é o seu tamanho depois de 100 dias?

13. (Datação por carbono do sudário de Turin) O mais famoso exemplo de datação por carbono é o Sudário de Turin, que se pensa ter coberto Jesus na sua campa. Em 1988, amostragens do tecido foram estudadas e a ETH de Zurique obteve o valor médio $M = 0.8808$, da razão entre carbono 14 e carbono 12. Sabendo que o nível de carbono 12 é constante, podemos considerar a equação
$$\frac{dM}{dt} = -rM,$$
onde $r = 1.2097 \times 10^{-4}$/anos denota o *tempo de meia vida* do carbono 14, com valor inicial $M(0) = 1$. Resolva a equação e determine o tempo $t$ necessário para chegar ao valor médio obtida na ETH.

14. Determine a solução geral da EDO linear homogénea:

(a) $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y'' - 4y' = 0$

(b) $y''' - 4y'' + 4y' - y = 0$

(c) $y''' - 2y'' + y' = 0$

(d) $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$

(e) $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$

15. Determine a solução do PVI

(a) $y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x}$ com $y(0) = 9$ e $y'(0) = 6$

(b) $y''' + y'' - 5y' + 3y = 6\sinh(2x)$ com $y(0) = y'(0) = 0$ e $y''(0) = 4$

(c) $y'' - 6y' + 9y = 0$ com $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$

(d) $y'' + 4y = \cos(2x)$ com $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$

(e) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 2 - 4x$ com $y(0) = \frac{1}{2}$ e $y'(0) = y''(0) = 0$

(f) $y'' + 4y = f(x)$ com $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ e $f(x) = \begin{cases} 4x & 0 \leq x < \pi \\ 4\pi & x \geq \pi \end{cases}$