Conteúdos leccionados da disciplina de Cálculo II

Ana Foulquié Moreno.

Conteúdo

Séries Numéricas

Os conteúdos aqui apresentados foram dados na disciplina de Cálculo I. O aluno pode com este material relembrar algumas questões que surjam ao estudar os temas que daremos a seguir.

0.1 Definição e primeiras propriedades algébricas

Pretendemos com o estudo das séries numéricas, dar sentido ao cálculo de somas infinitas de números reais.

Dado um quadrado de lado 1, estamos interessados em calcular a área de metade desta figura, que será $\frac{1}{2}$, a este valor acrescentamos a metade da área da figura restante, que será $\frac{1}{4}$, e assim sucessivamente. Este processo infinito de soma de áreas conduz-nos ao cálculo da soma infinita

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

A nossa intuição nos diz que, no fim deste processo infinito, estaremos a calcular a área da figura toda, neste caso um quadrado de lado 1, pelo que de forma intuitiva temos a firme convicção que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1.$$

Vamos tentar formalizar, do ponto de vista matemático, este processo que acabamos de ver, provando que, efetivamente, a nossa intuição está certa.

Definição (de Série Numérica). Dada uma sucessão de números reais, (a_n), definimos série numérica, e denotamos por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

o limite

$$\lim_{n\to+\infty}(a_0+a_1+\cdots+a_n)$$

quando este limite existe e é um número real.

Neste caso diremos que esta série é convergente e o valor limite é chamado de *soma da série*. Se o valor do limite não existir ou for $+\infty$ ou $-\infty$, nesse caso diremos que esta série é divergente.

Chamaremos:

• a_n *termo geral da série*,

• $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, *soma parcial da série*.

Assim, diremos que uma série é convergente se o limite da sucessão das somas parciais existe e é um número real.

Podemos definir, da mesma forma, a série

$$\sum_{n=m}^{+\infty} a_n$$

como o valor calculado pelo limite

$$\lim_{n\to+\infty}(a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n)$$

para $m = 0, 1, \ldots$, número fixo. Neste caso a soma parcial será calculada como

$$s_n = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n = \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Podemos afirmar que a série $\sum_{n=m}^{+\infty} a_n$ é convergente se e somente se a série $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ também o for, para valores fixos $m, p = 0, 1, \ldots$. Nesse caso se $m \leq p$ teremos

$$\sum_{n=m}^{+\infty} a_n = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{p-1} + \sum_{n=p}^{+\infty} a_n.$$

Portanto, para discutir se a natureza de uma série, ou seja se a série é ou não convergente, não é relevante onde começa a série

Teorema (Álgebra das séries convergentes–Associatividade)**.**

• Suponhamos que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ são séries numéricas convergentes, e consideremos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, neste caso a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$$

é convergente e verifica-se

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Demonstração. Suponhamos por hipóteses que

$$\lim_{n\to+\infty}(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) = A$$

e

$$\lim_{n\to+\infty}(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) = B$$

Se calculamos agora a soma parcial da série $\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$, obtemos

$$s_n = (\alpha a_0 + \beta b_0) + (\alpha a_1 + \beta b_1) + \cdots + (\alpha a_n + \beta b_n)$$

$$= \alpha(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) + \beta(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) = \alpha A + \beta B,$$

como pretendíamos provar. □

Suponhamos agora que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente, pelo que existe a soma infinita

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

Suponhamos ainda que queremos calcular esta soma infinita, associando os termos de dois em dois,

$$(a_0 + a_1) + (a_2 + a_3) + \cdots$$

então podemos afirmar que esta nova soma infinita é convergente e o valor desta soma é o mesmo que o valor da soma anterior. Mais concretamente estamos a afirmar que *se a série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *é convergente, verifica-se* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$.

Esta mesma propriedade pode ser enunciada no caso de ir associando qualquer número finito e não necessariamente fixo de termos.

Demonstração. Vamos provar que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ é convergente e vamos calcular o valor desta série. Consideramos a sua soma parcial

$$s_n = (a_0 + a_1) + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2n} + a_{2n+1})$$

e queremos verificar que o limite desta soma parcial existe quando $n \to \infty$. Reparamos que s_n é também a soma parcial de uma outra série, neste caso da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, pelo que se denotamos

$$t_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

a soma parcial da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, obtemos que $s_n = t_{2n+1}$. Se tomamos limite obtemos que

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} t_{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

pelo que a afirmação ficou provada. □

Observação. A série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ é divergente mas se associamos os termos desta série dois a dois obtemos

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots$$

pelo que obteríamos uma nova série convergente para o valor 0. Isto contradiz o resultado anteriormente enunciado?

0.2 A série geométrica

Chamamos série geométrica de razão r à série numérica da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n.$$

Se queremos calcular o valor desta série, definimos a sua soma parcial

$$s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$$

Se $r = 1$, a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots$$

é claramente divergente. Se $r = -1$, a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

é também divergente, uma vez que a soma parcial é alternadamente 1 ou 0 pelo que não tem limite quando $n \to \infty$. Para qualquer outro número r se temos em atenção que

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

obtemos que

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Para valores de r, tais que $|r| < 1$, verifica-se que $\lim\limits_{n \to +\infty} r^n = 0$, pelo que para estes valores

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r},$$

e obtemos que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}, \quad |r| < 1.$$

e se $|r| > 1$, tendo em atenção que $\lim\limits_{n \to +\infty} |r|^n = +\infty$, obtemos que

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

não existe para $r < -1$, existe e é $+\infty$ para $r > 1$, pelo que concluímos que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$$

é divergente para $|r| \geq 1$.

Exemplo. Calculemos a soma infinita $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$.

Discussão. Já estamos em condições de calcular esta soma infinita. Consideremos que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

corresponde à série numérica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

neste caso trata-se de uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$, pelo que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

e obtemos que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} 2 = 1$$

como pretendíamos provar. $\square$

Exemplo. Calculemos a soma da série $\sum\limits_{n=m}^{+\infty} r^n, \quad |r| < 1.$

Discussão. Neste caso, reescrevemos a série como

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^{n+m} = r^m \sum_{n=0}^{+\infty} r^n = r^m \frac{1}{1-r} = \frac{r^m}{1-r}. \qquad \square$$

Exemplo. Calculemos a soma da série $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3^{n+2}}{5^{n-3}}$.

Discussão. Neste caso realizamos as seguintes operações

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3^{n+2}}{5^{n-3}} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3^2}{5^{-3}} \frac{3^n}{5^n} = 3^2 5^3 \sum_{n=3}^{+\infty} (\frac{3}{5})^n = 3^2 5^3 \frac{(\frac{3}{5})^3}{1-\frac{3}{5}} = \frac{3^5 5}{2}. \qquad \square$$

0.3 Condição necessária de convergência e critério de Cauchy

Teorema. Se a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente, então $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Demonstração. Consideremos a soma parcial da série

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente, pelo que existe um valor real s tal que

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s.$$

Podemos escrever $a_n = s_n - s_{n-1}$, pelo que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0,$$

como queríamos provar. $\square$

Observação. Este resultado é bastante intuitivo. Imaginemos que o limite do termo geral a_n fosse por exemplo 1, e imaginemos que a partir do termo 49 de fato a_n e mesmo muito parecido com o valor 1. Nesse caso como será de forma aproximada o valor da soma

$$\sum_{n=0}^{100000} a_n.$$

ou da soma

$$\sum_{n=50}^{100000} a_n \ ?$$

Que podemos concluir?

Exemplo. Se consideramos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{n+1}$$

podemos afirmar que esta série é divergente, uma vez que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 2 \neq 0.$$

Exemplo. Se consideramos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n}$$

podemos afirmar que esta série é divergente, uma vez que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \neq 0.$$

Uma generalização deste resultado é a chamada condição de Cauchy.

Teorema (de equivalência)**.** A série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente se e somente se dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$:

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad n \geq m > n_0.$$

Observação. Esta condição necessária de convergência nada diz quando o termo geral da série é de facto um infinitésimo!

Exemplo. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

neste caso verifica-se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

pelo que nada podemos concluir.

Discussão. Se tivermos em conta que

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \leq \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}$$

$$\vdots$$

teremos que

$$1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + 8\frac{1}{16} + \cdots$$

$$\leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \cdots +$$

ou

$$1 + k\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k}$$

ou

$$1 + k\frac{1}{2} \leq s_{2^k}.$$

A sucessão das somas parciais (s_n), é uma sucessão de números reais crescente, pelo que (s_n) é uma sucessão convergente ou (s_n) é uma sucessão que tende para $+\infty$.

Se tomamos $k \to +\infty$, obtemos que $\lim_{k\to+\infty} s_{2^k} = +\infty$, pelo que podemos afirmar que (s_n) é uma sucessão que tende para $+\infty$ e a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente. □

Pode ainda provar-se que, neste caso, existe uma sucessão infinitesimal, (ε_n) tal que $s_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$ onde $\gamma = 0,5772156\ldots$ é a *constante de Euler*.

Exemplo. Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

neste caso verifica-se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

pelo que nada podemos concluir.

Discussão. Se tivermos em conta que

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \le \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = 2\frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} \le \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} = 4\frac{1}{4^2} = \frac{1}{4}$$

ou em geral

$$\frac{1}{(2^{k-1})^2} + \frac{1}{(2^{k-1}+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2^k-1)^2} \le \frac{1}{2^{k-1}}$$

pelo que

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(2^k-1)^2} \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}$$

tendo em atenção que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} \le \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^n = 2$$

teremos que para qualquer valor de n,

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \le 2$$

pelo que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série convergente. □

Acabamos de usar o seguinte resultado:

> *uma sucessão de números reais, crescente e limitada superiormente é uma sucessão convergente*

Neste caso aplicado à sucessão (s_n) das somas parciais.

0.4 Critério geral de comparação ou de Gauss

Critério geral de comparação ou de Gauss.

$a)$ Se $|a_n| \leq c_n$, para $n \geq n_0$, onde n_0 é um certo indice $n_0 \in \mathbb{N}$, e se $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} c_n$ for convergente então $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente.

$b)$ Se $a_n \geq d_n \geq 0$, para $n \geq n_0$, onde n_0 é um certo indice $n_0 \in \mathbb{N}$, e se $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} d_n$ for divergente então $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Demonstração. Se a série $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} c_n$ é convergente, pela condição de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe um indice N, $N \geq n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq m \geq N$

$$|c_{m+1} + \cdots + c_n| = c_{m+1} + \cdots + c_n \leq \varepsilon$$

Verifica-se

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| \leq c_{m+1} + \cdots + c_n \leq \varepsilon$$

pelo que é verificada a condição de Cauchy para a série $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$, e podemos afirmar que esta série ou equivalentemente a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente, pelo que $a)$ fica provado.

$b)$ é consequência de $a)$, se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ for uma série convergente implicaria que $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} d_n$ seria uma série convergente, o que contradiz a hipótese.

Exemplo. Vamos estudar a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$.

Trata-se de uma série de termos positivos. Como $\dfrac{\sin^2 n}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$, $n = 1, \ldots$, e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é harmónica ou de Dirichlet com $p = 2 > 1$, logo convergente, temos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$ é convergente pelo critério de comparação.

Exemplo. Vamos estudar a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Como $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$, $n = 1, \ldots$, e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, temos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ é convergente.

Exemplo. Vamos estudar a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Neste caso, $0 \leq \sqrt{n} \leq n$, para $n \geq 1$, pelo que $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, para $n \geq 1$ e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente, pelo que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente.

Neste exemplo se substituímos $\sqrt{n}$ por n^α, com $\alpha \in]0,1]$, obteriamos pelo critério de comparação que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha},\ \alpha \in]0,1]$$

é divergente.

0.5 Critério de Cauchy-Hadamard ou da raiz

Teorema (Critério) de Cauchy-Hadamard ou da raiz. Seja $(a_n) \subset \mathbb{R}$.

- Se $\exists\, k \in]0,1[\,, n_0 \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{|a_n|} \leq k < 1\,,\ n \geq n_0$, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente.
- Se $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, para un número infinito de valores n, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Demonstração. Verifica-se para $n \geq n_0$, $\sqrt[n]{|a_n|} \leq k$, i.e. $|a_n| \leq k^n$. A série $\sum_{n=0}^{+\infty} k^n$ é convergente, é a série geométrica de razão k com $k \in]0,1[$; pelo critério de comparação de Gauss, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente.

Da mesma forma, se $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ para un número infinito de valores n, teremos que $|a_n| \geq 1$, para un número infinito de valores n, pelo que a sucessão (a_n) não poderá ter como limite 0; e pela condição necessária de convergência concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Critério de Cauchy-Hadamard (cont.) Seja $(a_n) \subset \mathbb{R}$.

- Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell < 1$, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente.
- Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell > 1 \text{ ou} + \infty$, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Demonstração. Note-se que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ implica que existe um indice $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma valor real $k < 1$ tal que

$$\sqrt[n]{|a_n|} < k,\ n \geq n_0$$

então pelo teorema anterior, concluímos que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente.
Agora se $\ell > 1$ou $+\infty$, existe um indice $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma valor real $k > 1$ tal que

$$\sqrt[n]{|a_n|} > k,\ n \geq n_0$$

e então, novamente pelo teorema anterior, concluímos que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Exemplo. Vamos estudar a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{n+1}{n+3}\Big)^{n^2}.$$

Pelo critério de Cauchy-Hadamard, temos

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\Big(\frac{n+1}{n+3}\Big)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \Big(1-\frac{2}{n+3}\Big)^{n+3}\Big(1-\frac{2}{n+3}\Big)^{-3} = e^{-2} < 1.$$

pelo que concluímos que a série dada é convergente.

Exemplo. Vamos estudar a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^3+3n+2}\frac{1}{2^n}.$$

Pelo critério de Cauchy-Hadamard, temos

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{n^3+3n+2}\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1.$$

pelo que concluímos que a série dada é convergente.
Neste exemplo podemos efetuar o cálculo do limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{n^3+3n+2}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{n^3}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^3}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\sqrt[n]{\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^3}}} = 1$$

se temos em atenção que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

0.6 Critério de d'Alembert ou da razão

Teorema (Critério) de d'Alembert ou da razão. Seja $(a_n) \subset \mathbb{R}, a_n \neq 0$.

- Se $\exists\, k \in]0,1[\,, n_0 \in \mathbb{N} : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq k < 1,\ n \geq n_0$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente.
- Se $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq k > 1,\ n \geq n_0$ então $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Demonstração. Se a partir de um certo n_0 $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq k$, i.e. $|a_{n+1}| \leq \left(\dfrac{|a_{n_0}|}{k^{n_0}}\right)k^{n+1}$, para $n \geq n_0$, então, pelo critério de comparação, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente, dado que a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} k^n$, série geométrica, com $k \in]0,1[$, é convergente.

Da mesma forma que se $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq k > 1,\ n \geq n_0$, então $|a_{n+1}| \geq |a_n| \geq \cdots \geq |a_{n_0}|$, o que implica que a sucessão (a_n) não pode ter como limite 0, e pela condição necessária de convergência, concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é divergente.

Teorema (Critério) de d'Alembert ou da razão(cont.) Seja $(a_n) \subset \mathbb{R}$,.

- Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell < 1$, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente.
- Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell > 1, \text{ou} + \infty$, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Demonstração. Note-se que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ implica que existe um indice $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma constante real $k < 1$ tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < k < 1,\ n \geq n_0$$

então pelo teorema anterior, concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente.

Agora se $\ell > 1$ ou $+\infty$, existe um indice $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma constante real $k > 1$ tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > k > 1,\ n \geq n_0$$

e então, novamente pelo teorema anterior, concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é divergente.

anterior concluímos que a série $\sum a_n$ é convergente.

Exemplo. Estude a natureza da série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Neste caso $a_n = \frac{2^n}{n!} > 0$, Se aplicamos o critério de d'Alembert,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\frac{2^n}{2^{(n+1)}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2} = +\infty$$

pelo que a série é divergente.

Exemplo. Estude a natureza da série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{(n+4)5^n}$$

Neste caso $a_n = \frac{n+2}{(n+4)5^n} > 0$, Se aplicamos o critério de d'Alembert,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+3}{(n+5)5^{n+1}}}{\frac{n+2}{(n+4)5^n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{5}\frac{(n+3)(n+4)}{(n+2)(n+5)} = \frac{1}{5} < 1$$

pelo que esta série é convergente.

Critério geral de comparação "no limite". Sejam $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ duas séries de termos positivos. Suponhamos que existe $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \ell$.

- Caso $\ell \neq 0, +\infty$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ são da mesma natureza.
- Caso $\ell = 0$; se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ é convergente então $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente.
- Caso $\ell = +\infty$; se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ é divergente então $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Demonstração. De $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \ell$ temos que se $\ell \neq 0, +\infty$, existem constantes reais positivas A, B tais que

$$0 < A < \frac{a_n}{b_n} < B$$

para $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ fixo, pelo que

$$0 < Ab_n < a_n < Bb_n,$$

usando o critério de comparação de Gauss concluímos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ têm a mesma natureza. Caso $\ell = 0$ temos que para $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ fixo,

$$\frac{a_n}{b_n} < 1, \qquad \text{ou} \qquad a_n < b_n,$$

logo, pelo critério de comparação, a convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ implica a convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
Caso $\ell = +\infty$, então temos que dada uma constante real $M > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ fixo tal que

$$\frac{a_n}{b_n} > M, \qquad \text{ou} \qquad a_n > M\, b_n,$$

assim, novamente pelo critério de comparação, a divergência de $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ implica a divergência de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Exemplo. Estudemos a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2+3n+5}{n^3+5}$$

Neste caso $a_n = \dfrac{2n^2+3n+5}{n^3+5} > 0.$ Se temos em conta que

$$a_n = \frac{n^2}{n^3}\frac{2+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{n}\frac{2+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{1}{n^3}}$$

consideramos $b_n = \dfrac{1}{n}$, pelo que

$$a_n = b_n\frac{2+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{1}{n^3}}$$

ou

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{1}{n^3}}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = 2 \neq 0, +\infty$$

pelo que usando o critério de comparação no limite, as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2+3n+5}{n^3+5}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ têm a mesma natureza.
A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ é divergente, pelo que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2+3n+5}{n^3+5}$também será divergente.

Exemplo.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n}}.$$

Consideramos a série de termos positivos

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

podemos utilizar o critério de comparação por passagem ao limite, onde

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n}}, \qquad b_n = \frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

Se calculamos

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3}(\sqrt{\frac{n^3+1}{n^3}}+\sqrt{\frac{n}{n^3}})} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{1}{n^2}})} = 1$$

Como o valor deste limite é uma constante real distinta de zero, o critério de comparação afirma que as séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

e

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

têm a mesma natureza. A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

é convergente se e somente se $\alpha > 1$, pelo que podemos afirmar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

é convergente ($\alpha = \frac{3}{2}$), e equivalentemente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n}}$$

é convergente.

0.7 Critério de condensação de Cauchy

Critério de condensação de Cauchy. Consideremos $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \cdots \geq a_n \cdots \geq 0$. A série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente se e somente se a série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$$

converge.

Demonstração. Denotamos por $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e $t_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n}$ as somas parciais das séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$ respectivamente.
Usando que a sucessão (a_n) é decrescente, temos que

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \cdots + a_{2^{k+1}-1} \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k}.$$

ou $s_{2^{k+1}-1} \leq t_{2^k}$. Também podemos considerar que

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2^k} \geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} = \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k})$$

ou

$$s_{2^k} \geq \frac{1}{2} t_{2^k}$$

Agora podemos concluir destas desigualdades que a sucessão (s_n) é limitada superiormente se e somente se a sucessão (t_n) o for, pelo que obtemos a demonstração pretendida.

Série harmónica ou de Dirichlet. Podemos ainda completar o estudo da natureza das séries,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Se $\alpha \leq 0$ esta série não cumpre a condição necessária de convergência pelo que é divergente.
Para $\alpha > 0$, o termo geral $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ é uma sucessão de termos positivos e decrescente pelo que

podemos aplicar o critério de condensação de Cauchy, e obtemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ é convergente se e somente se a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha}$$

for convergente.
Esta última série é igual a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2^k)^{\alpha-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{2^{\alpha-1}})^k,$$

série geométrica de razão $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$, convergente se e somente se $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ ou equivalentemente se $\alpha > 1$.
Portanto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

é convergente se e somente se $\alpha > 1$.

0.8 Critério do integral

Critério do integral. Recordemos a noção de integral impróprio; seja f uma função real de variável real definida em $[1,+\infty[$, integrável em $[1,b]$, $b \in [1,+\infty[$.

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)\,dx$$

designamos por *integral impróprio*.
Caso o limite considerado, exista e seja finito, dizemos que o *integral impróprio é convergente*, e se o limite é não existe ou é infinito, dizemos que o *integral impróprio é divergente*.

Teorema (Critério) do integral. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não negativos e decrescentes, i.e. $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq 0$. Se a função real de variável real, f, definida em $[1,+\infty[$ é monótona decrescente e $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ são da mesma natureza.

Demonstração. Em cada intervalo $[k,k+1[$, $k \in \mathbb{N}$, como f é decrescente, é aí integrável e tem-se

$$a_k = f(k) \geq f(x) \geq f(k+1) = a_{k+1},$$

então

$$a_k = \int_k^{k+1} f(k)\,dt \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq \int_k^{k+1} f(k+1)\,dt = a_{k+1}\, k \in \mathbb{N}.$$

Agora, somando com $k = 1,\ldots,n-1$ temos

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \geq \int_1^n f(t)\,dt \geq -a_1 + \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Desta desigualdade obtida segue-se a afirmação do teorema.

Exemplo. Estudemos a natureza da série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Consideremos a função $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, função monótona decrescente,(é o produto de duas funções monótonas decrescentes), tal que $f(n) = \dfrac{1}{n \ln n}$ para $n \geq 2$. O integral impróprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} = \lim_{b \to +\infty} \ln \ln x]_2^b = \lim_{b \to +\infty} (\ln \ln b - \ln \ln 2) = +\infty$$

é divergente pelo que a série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

é divergente.

0.9 Séries alternadas–Critério de Leibniz

Definição. Uma *série* de termos reais, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, é *alternada*, se (b_n) admitir uma das seguintes representações, $b_n = (-1)^n a_n$ ou $b_n = (-1)^{n+1} a_n$ com $a_n > 0$.

Teorema (critério) de Leibniz. Uma série alternada, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ é convergente se $(a_n) \subset \mathbb{R}^+$ for uma sucessão decrescente e $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Demonstração. Considere-se a sucessão das somas parciais, (s_n), associadas à série dada. Vê-se facilmente que a sucessão (s_{2n}) é monótona crescente e a sucessão (s_{2n+1}) é monótona decrescente:

$$s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0 \quad \text{e} \quad s_{2n+1} - s_{2n-1} = -a_{2n} + a_{2n+1} < 0, \, n \in \mathbb{N}$$

(pois a sucessão (a_n) é monótona decrescente).

Vemos também que a sucessão (s_{2n}) está limitada superiormente por s_1 (pois, $s_1 > s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1} > s_{2n}$) e a sucessão (s_{2n+1}) está limitada inferiormente por s_2 (pois, $s_2 < s_{2n+2} = s_{2n+1} - a_{2n+2} < s_{2n+1}$).

Assim, (s_{2n}) e (s_{2n+1}) têm limite ℓ_1 e ℓ_2, respectivamente, e de $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ concluímos que $\ell_1 = \ell_2$ se, e somente se, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Exemplo. A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ é convergentes. Mais ainda, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

Resolução. Usamos o Critério de Leibniz concluímos que é convergente. Para calcular o seu valor, vamos expressar

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = h_{2n} - h_n$$

onde $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$ (γ é a constante de Euler e (ε_n) é uma sucessão infinitesimal introduzidas aquando da discussão sobre a natureza da série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$); e, portanto,

$$s_{2n} = \ln(2n) + \gamma + \varepsilon_{2n} - (\ln(n) + \gamma + \varepsilon_n) = \ln 2 + (\varepsilon_{2n} - \varepsilon_n),$$

pelo que $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \ln 2$.

0.10 Séries absolutamente convergentes e séries simplesmente convergentes

Definição. Dizemos que a *série* de termos reais, $(a_n) \subset \mathbb{R}$, i.e. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, é *absolutamente convergente,* se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente; caso contrário dizemos que a *série* é *absolutamente divergente*.

Teorema. A convergência absoluta implica a convergência, i.e. se uma série de termos reais, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, é absolutamente convergente então é convergente. (O reciproco não é verdadeiro.)

Demonstração. Lembramos que uma série é convergente se e somente a sucessão das suas somas parciais é uma sucessão de Cauchy.
Usando este resultado, se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ é uma série convergente, a sua sucessão de somas parciais (t_n), $t_n = |a_0| + \cdots + |a_n|$ é uma sucessão de Cauchy. i.e., dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq m > n_0$, verifica-se

$$|t_n - t_m| = |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon$$

Se consideramos a desigualdade

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \cdots + |a_n|$$

obtemos que a sucessão das somas parciais s_n, $s_n = a_0 + \cdots + a_n$ também é uma sucessão de Cauchy pelo que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é uma série convergente.
Podemos ainda referir uma outra forma de demonstrar este teorema. Se denotamos por

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2}$$

teremos que $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$, pelo que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n^+ + a_n^-).$$

Cada uma das séries, de termos não negativos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^-$$

são convergentes, (as suas somas parciais estão majoradas por $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|$), pelo que, usando $a_n = a_n^+ - a_n^-$ podemos escrever

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^-$$

e concluímos que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente.

Definição. Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente e não é absolutamente convergente diremos que a série é simplesmente convergente.

Exemplos. Vimos já que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente, no entanto a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente pelo que diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é simplesmente convergente.

Os critérios da raiz n-ésima e de d'Alembert podemos ser re-escritos da seguinte forma

Critério de Cauchy-Hadamard. Seja $(a_n) \subset \mathbb{R}$.

- Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell < 1$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e em particular convergente).
- Se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell > 1 \,\text{ou} +\infty$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Critério de d'Alembert. Seja $(a_n) \subset \mathbb{R}$,.

- Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell < 1$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e em particular convergente).
- Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell > 1, \text{ou} +\infty$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Exemplos. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n$ é absolutamente convergente, com $(a_n) \subset \mathbb{R}$.

A série $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n$ é convergente por se tratar de uma série geométrica de razão $-\frac{1}{2} \in]-1,1[$.

Também converge absolutamente, pois a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ é também geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

Exemplos. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin a_n}{3^n}$ é absolutamente convergente, com $(a_n) \subset \mathbb{R}$.

Se consideramos a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\sin a_n}{3^n}\right|$, podemos provar que $\left|\frac{\sin a_n}{3^n}\right| \leq \frac{1}{3^n}$, pelo que usando o critério de comparação e que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ é convergente, é a série geométrica de razão $r = \frac{1}{3} < 1$.

0.11 Reordenação de séries–Teorema de Riemann

Dada uma série, podemos-nos perguntar se a ordem em que aparecem os termos desta série pode influenciar a natureza da série e caso esta for convergente, na sua soma. Para ser mais preciso, dada uma série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diremos que $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ é uma reordenação desta série se existe uma função $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que faz corresponder para cada $n \in \mathbb{N}$ um e um só elemento $k(n)$, tal que $b_n = a_{k(n)}$. Se consideramos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \cdots$$

podemos considerar a série reordenada

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

esta nova série é convergente (pode ser provado que as somas parciais de indice $3n$, $3n+1$, $3n+2$, são convergentes e convergem ao mesmo valor). Vamos provar que o valor da sua soma é diferente do valor da soma da série original.

Pelo argumento apresentado na demonstração do Teorema de Leibniz, sabemos que a soma da série original é um valor s, $s < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Por outro lado, nesta série reordenada, temos que

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} > 0, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} > 0$$

e em geral

$$\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} > 0$$

pelo que se denotamos por t_n as somas parciais da série reordenada, obtemos que $\frac{5}{6} = t_3 < t_6 < t_9 < \cdots$, pelo que caso esta série reordenada convergir, a sua soma não poderá ser inferior a $\frac{5}{6}$, pelo que observamos neste exemplo que a reordenação de uma série pode alterar a sua soma.

Neste exemplo a série original é uma série simplesmente convergente, ou seja é convergente mas a série dos módulos é divergente. Os seguintes teoremas dão uma resposta completa à questão colocada.

Teorema da Riemann. Dada uma série simplesmente convergente e dado um qualquer valor $\alpha \in \mathbb{R}$, existe uma reordenação desta série tal que a soma desta série reordenada é α.

Demonstração. Considemos a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, simplesmente convergente. Denotamos por

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2}$$

a_n^+ e a_n^+- são valores não negativos. Se temos en conta que $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$, temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n| = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n^+ + a_n^-).$$

Usando a divergência da série dos módulos, podemos afirmar que pelo menos uma das séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+$ ou $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^-$ é divergente. Se usamos agora que $a_n = a_n^+ - a_n^-$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n^+ - a_n^-).$$

Usando que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente, concluímos que esta série não pode ser a soma ou a diferença de uma série convergente e uma série divergente pelo que podemos afirmar que cada uma destas séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^-$$

são divergentes, e como são séries de termos não negativos, o limite das suas respectivas somas parciais é $+\infty$. Também da convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n =$ obtemos que $\lim_{n\to+\infty} a_n^+ = 0$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n^- = 0$.

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, podemos supor sem perda de generalidade que $\alpha > 0$.A seguir vamos descrever o procedimento para construir a nova série, série reordenada da série dada, com a propriedade que a sua soma é igual a α.

Vamos definir a série reordenada $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{k_1} \\ b_2 &= a_{k_2} \\ &\vdots \\ b_{N_1} &= a_{k_{N_1}} \end{aligned}$$

onde k_1 é o primeiro indice tal que $a_{k_1} > 0$, k_2 é o segundo indice tal que $a_{k_2} > 0$, e assim sucessivamente, (estaremos a seleccionar na mesma ordem que aparecem os primeiros N_1 termos positivos da série dada), desde que se verifique a seguinte condição

$$\begin{array}{rcl} b_1 & < & \alpha \\ b_1 + b_2 & < & \alpha \\ & \vdots & \\ b_1 + b_2 + \cdots + b_{N_1-1} & < & \alpha \\ b_1 + b_2 + \cdots + b_{N_1-1} + b_{N_1} & > & \alpha \end{array}$$

ou seja N_1 é o primeiro indice que verifica que a soma parcial da nova série reordenada é maior do que a constante α. Denotamos por $S_1 = b_1 + b_2 + \cdots + b_{N_1-1} + b_{N_1}$ e verificamos que

$$|S_1 - \alpha| < |S_1 - (b_1 + b_2 + \cdots + b_{N_1-1})| = b_{N_1}$$

A seguir definimos

$$\begin{aligned} b_{N_1+1} &= a_{m_1} \\ b_{N_1+2} &= a_{m_2} \\ &\vdots \\ b_{N_1+N_2} &= a_{m_{N_2}} \end{aligned}$$

onde m_1 é o primeiro indice tal que $a_{m_1} < 0$, m_2 é o segundo indice tal que $a_{m_2} < 0$, e assim sucessivamente, (estaremos a seleccionar na mesma ordem que aparecem os primeiros N_2 termos negativos da série dada), desde que seja cumprida a seguinte condição

$$\begin{aligned} S_1 + b_{N_1+1} &> \alpha \\ S_1 + b_{N_1+1} + b_{N_1+2} &> \alpha \\ &\vdots \\ S_1 + b_{N_1+1} + \cdots + b_{N_1+N_2-1} &> \alpha \\ S_1 + b_{N_1+1} + \cdots + b_{N_1+N_2-1} + b_{N_1+N_2} &< \alpha \end{aligned}$$

Denotamos por $S_2 = b_1 + b_2 + \cdots + b_{N_1+N_2}$.Verificamos que

$$|S_2 - \alpha| < |S_2 - (b_1 + b_2 + \cdots + b_{N_1+N_2-1})| = |b_{N_1+N_2}|$$

repetimos sucessivamente este processo. Desta maneira os intervalos $[S_2, S_1]$, $[S_2, S_3]$, $[S_4, S_3]$, ..., sucessivamente construidos, vão conter os valores das somas parciais da nova série definida. Se temos agora em conta que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, obtemos que a interseção destes intervalos é o ponto α, pelo que o limite destas somas parciais será α e ficará provada a afirmação do teorema para $\alpha \in \mathbb{R}$. É de referir que neste processo estamos a usar que as somas parciais dos termos positivos da série dada convergem para $+\infty$ e que as somas parciais dos termos negativos da série dada convergem para $-\infty$ usando o facto provado que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+$ é divergente, e que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^-$ é divergente, respectivamente.

Teorema. Dada uma série absolutamente convergente, podemos afirmar que qualquer uma reordenação desta série é novamente uma série absolutamente convergente, e o valor da soma em ambas as séries coincide.

Aula 1: Séries de potências

1.1 Definição e cálculo da série geométrica

Designamos por *séries de potências* às séries de funções da forma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Os números reais, $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ são chamados os coeficientes da série de potências. Podemos entender que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n + \ldots$$

pelo que podemos imaginar a série como um polinómio de grau infinito.

Observação. Quando consideramos uma série de potências, para cada valor fixo de x estamos a considerar uma série numérica.

Se definimos $s_n(x)$, a soma n-ésima da série de potências

$$s_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n$$

teremos a definição rigurosa

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \lim_{n \to +\infty} s_n(x).$$

Quando este limite existir diremos que a série é convergente e o valor deste limite (que dependerá de cada x considerado) será chamado a soma da série.

Podemos considerar a forma mais geral $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ e neste caso diremos que a série está centrada em c.

Série Geométrica Vamos falar como primeiro exemplo muito importante de série a chamada série geométrica.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Vamos tentar somar

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \ldots$$

Precisamos muito de ter um truque!

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = S$$

Multiplicamos por x ambos membros desta identidade

$$x + x^2 + \cdots + x^{n+1} = xS$$

Subtraímos ambas e obtemos

$$1 - x^{n+1} = S - xS \Leftrightarrow \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = S$$

ou seja temos obtido

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

(Esta identidade a podemos verificar pela regra da divisão!)

A identidade

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

serve-nos para o cálculo da soma infinita.

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\lim_{n\to\infty}\left(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\frac{1}{1-x}, \text{somente para } |x|<1.$$

Para $|x|\geq 1$ este limite não existe. Chegamos finalmente

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}, |x|<1.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}, |x|<1.$$

No ponto $x=1$ ou $x=-1$ esta série é divergente, porque estaríamos a tentar somar

$$1+1+1+\ldots$$

ou

$$1-1+1-1+1-1+\ldots$$

e em ambos casos esta soma não existe.

Observação. Neste exemplo concreto:

• A série converge num intervalo, centrado em $c=0$, de raio 1.

• Temos obtido a soma da série para cada x neste intervalo.

Em geral, para uma outra série vamos verificar:

• A série converge num intervalo, centrado em $c=0$, de raio r, que chamaremos intervalo de convergência da série, e r será chamado raio da série (r pode tomar o valor 0, ou o valor ∞).

• Não é fácil obter uma fórmula para o cálculo da série para cada x neste intervalo.

• Precisamos de um teorema que afirme se existe ou não um intervalo de convergência para qualquer série de potências. • Precisamos de critérios que nos ajudem a determinar o intervalo onde a série é convergente .

Teorema (de Cauchy-Hadamard)**.** Considere-se a série de potências, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$; então, existe $r\in[0,+\infty]$ que designamos por *raio de convergência* tal que:

• A série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ é absolutamente convergente em $|x|<r$;

• A série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ é divergente em $|x|>r$;

(Caso $x = r$ ou $-r$ a série pode ou não ser convergente.)

O intervalo $]-r, r[$ será chamado *intervalo de convergência*. O *domínio de convergência* da série, conjunto dos pontos onde a série é convergente, será por isso um dos intervalos $]-r, r[$, $]-r, r]$, $[-r, r[$ ou $[-r, r]$.

Exemplo.

• A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ é absolutamente convergente em $]-1, 1[$ e divergente em ± 1;

• A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ é é absolutamente convergente em $]-1, 1[$ e divergente em 1 mas é simplesmente convergente para $x = -1$;

• A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ é absolutamente convergente em $[-1, 1]$.

Observação. De forma análoga, podemos enunciar este teorema para as séries de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, (x-c)^n\,,$$

pois estas reduzem-se às anteriores fazendo a mudança de variável $x \mapsto x - c$, e tendo em atenção que o intervalo de convergência passa a ser $|x - c| < r$.

1.2 Critérios de convergência

Vamos estudar os seguintes critérios que nos ajudam a encontrar o intervalo de convergência de uma série de potências.

Condição necessária de convergência

Seja $(b_n) \subset \mathbb{R}$.

• Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n$, é diferente de 0 ou não existe então $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ é divergente.

Exemplo. A série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n\,x)^n$, somente converge em $x = 0$. De facto, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |n\,x|^n = \infty$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. pelo que não se verifica a condição necessária de convergência para $x \neq 0$. Neste caso $r = 0$ é o único ponto onde a série converge é o ponto $x = 0$.

Critério de Cauchy-Hadamard ou da raiz

Seja $(b_n) \subset \mathbb{R}$.

• Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \ell < 1$, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ é absolutamente convergente.

• Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \ell > 1$ ou $+\infty$, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ é divergente.

Exemplo. Discuta a convergência ou divergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2} 2^n (x-1)^n$ por aplicação do critério de Cauchy-Hadamard ou da raiz.

Resolução: Identificamos $b_n = \frac{n+1}{n^2}2^n(x-1)^n$, e calculamos

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n+1}{n^2}2^n(x-1)^n\right|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n+1}{n^2}2^n|x-1|^n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n+1}{n^2}}2|x-1|$$

Agora usamos um resultado que diz

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

o que implica que

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} = 1$$

Em geral podemos afirmar que para qualquer polinómio $p(n)$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{p(n)} = 1$$

e para qualquer quociente $\frac{p(n)}{q(n)}$, onde $p(n)$ e $q(n)$ são polinómios

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{p(n)}{q(n)}} = 1$$

pelo que obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n+1}{n^2}}2|x-1| = 2|x-1|$$

Aplicamos o critério de Cauchy-Hadamard ou da raiz e obtemos que para o valores de x tais que

$$2|x-1| < 1$$

podemos afirmar que a série dada é absolutamente convergente. Para os valores de x tais que

$$2|x-1| > 1$$

a série é divergente. Para identificar o intervalo de convergência desta série, reparamos que

$$2|x-1| < 1 \Leftrightarrow |x-1| < \frac{1}{2}$$

O intervalo de convergência está centrado no ponto $c = 1$ e de raio $\frac{1}{2}$. O intervalo de convergência é $]1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}[$, ou seja, $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$.

□

Para discutir o que acontece nos pontos $x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{3}{2}$ devemos substituir estes valores na série e aplicar os critérios estudados anteriormente sobre convergência de séries numéricas.

Para $x = \frac{1}{2}$ obtemos a série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}2^n(-\frac{1}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}(-1)^n$$

Trata-se de uma série alternada, do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$$

O critério de Leibniz para as séries alternadas afirma que, no caso que:

- $b_n > 0$,
- $b_{n+1} < b_n$,
- $\lim\limits_{n\to 0} b_n = 0$

podemos afirmar que esta série é convergente. Neste caso $b_n = \dfrac{n+1}{n^2}$ e verificamos que $b_n > 0$ e $\lim\limits_{n\to 0} b_n = 0$. A sucessão $(b_n)_{n\in\mathbb{R}}$ é decrescente.

$$\frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

e a soma de duas sucessões decrescentes o que implica que é uma sucessão decrescente.

Podemos então afirmar que no ponto $x = \frac{1}{2}$ a série é convergente.

Para estudarmos o ponto $x = \frac{3}{2}$ substituímos este valor na série e obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2} 2^n (\frac{1}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}.$$

Aplicamos o critério de comparação no limite, para séries de termos positivos. Comparamos com a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

que é divergente e concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$ é divergente.

No ponto $x = \frac{1}{2}$ diremos que a série é simplesmente convergente (é convergente mas não é absolutamente convergente).

Exemplo. Discuta a convergência ou divergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+1}{3^n+1}(3x-1)^n$.

Resolução: Identificamos $b_n = \dfrac{2n^2+1}{3^n+1}(3x-1)^n$, e calculamos

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2n^2+1}{3^n+1}(3x-1)^n\right|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2+1}{3^n+1}|3x-1|^n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2+1}{3^n+1}}|3x-1|$$

Agora calculamos

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2+1}{3^n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{2n^2+1}}{\sqrt[n]{3^n+1}} = \frac{1}{3}$$

onde temos usado

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2(2+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{n})^2 \sqrt[n]{2+\frac{1}{n^2}} = 1$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n(1+\frac{1}{3^n})} = \lim_{n\to+\infty} 3\sqrt[n]{(1+\frac{1}{3^n})} = 3.$$

pelo que finalmente obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2+1}{3^n+1}}|3x-1| = \frac{1}{3}|3x-1|.$$

Aplicamos o critério de Cauchy-Hadamard ou da raiz e obtemos que para o valores de x tais que

$$\frac{1}{3}|3x-1|<1$$

podemos afirmar que a série é absolutamente convergente. Para os valores de x tais que

$$\frac{1}{3}|3x-1|>1$$

a série é divergente. Para identificar o intervalo de convergência

$$\frac{1}{3}|3x-1|<1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}|3(x-\frac{1}{3})|<1 \Leftrightarrow |x-\frac{1}{3}|<1$$

Para esta série diremos que existe um intervalo de convergência, centrado no ponto $c=\frac{1}{3}$ e de raio 1. O intervalo de convergência é $]\frac{1}{3}-1, \frac{1}{3}+1[$, ou seja, $]-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}[$. □

No ponto $x=\frac{4}{3}$, substituímos na série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+1}{3^n+1}(3x-1)^n$ e obtemos a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+1}{3^n+1}3^n.$$

Neste caso, $b_n=\frac{2n^2+1}{3^n+1}3^n$, o termo geral desta série, verifica

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+1}{3^n+1}3^n=+\infty \neq 0$$

pelo que esta série não cumpre a condição necessária de convergência, pelo que neste ponto a série é divergente No ponto $x=-\frac{2}{3}$, substituímos na série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+1}{3^n+1}(3x-1)^n$ e obtemos a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+1}{3^n+1}(-3)^n=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+1}{3^n+1}3^n(-1)^n$$

O mesmo argumento verifica-se para esta série e concluímos que no ponto $x=-\frac{2}{3}$ a série é divergente.

Critério de d'Alembert ou da razão.

Seja $(b_n) \subset \mathbb{R}$,.

- Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \ell < 1$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ é absolutamente convergente.
- Se $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \ell > 1, \text{ou} +\infty$, então $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ é divergente.

Exemplo. Aplique este critério à série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n+2}(2x-1)^n$.

Resolução: Neste caso $b_n=\frac{\sqrt{n}}{3^n+2}(2x-1)^n$. Calculamos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{3^{n+1}+2}(2x-1)^{n+1}}{\frac{\sqrt{n}}{3^n+2}(2x-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}\frac{3^n+2}{3^{n+1}+2}|2x-1|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n(1+\frac{1}{n})}{n}} \frac{3^n(1+\frac{2}{3^n})}{3^{n+1}(1+\frac{2}{3^{n+1}})}|2x-1| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} \frac{1+\frac{2}{3^n}}{3(1+\frac{2}{3^{n+1}})}|2x-1| = \frac{1}{3}|2x-1|$$

Aplicamos o critério do quociente ou de d'Alembert e obtemos que para o valores de x tais que

$$\frac{1}{3}|2x-1| < 1$$

podemos afirmar que a série é absolutamente convergente. Para os valores de x tais que

$$\frac{1}{3}|2x-1| > 1$$

a série é divergente. Para identificar o intervalo de convergência

$$\frac{1}{3}|2x-1| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}|2(x-\frac{1}{2})| < 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3}|(x-\frac{1}{2})| < 1 \Leftrightarrow |x-\frac{1}{2}| < \frac{3}{2}.$$

Para esta série diremos que existe um intervalo de convergência, centrado no ponto $c = \frac{1}{2}$ e de raio $\frac{3}{2}$. O intervalo de convergência é $]\frac{1}{2}-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}+\frac{3}{2}[$, ou seja, $]-1,2[$. Estudamos a convergência no ponto $x = 2$. Substituímos na série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n+2}(2x-1)^n$ e obtemos a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n+2}3^n$$

Verificamos que esta série não verifica a condição necessária de convergência, porque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n+2}3^n = +\infty$$

pelo que esta série é divergente.

O mesma conclusão é obtida para o estudo da convergência no ponto $x = -1$. □

Exemplo. Aplique este critério à série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}x^n$.

Resolução: Neste caso $b_n = \dfrac{n!}{(2n)!}x^n$. Calculamos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}x^{n+1}}{\frac{n!}{(2n)!}x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!}\frac{(2n)!}{(2n+2)!}|x| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)}|x| = 0.$$

Aplicamos o critério do quociente ou de d'Alembert e obtemos que para o valores de x tais que

$$0 < 1$$

podemos afirmar que a série é absolutamente convergente. Portanto neste caso é convergente para qualquer valor de $\mathbb{R}$. Diremos neste caso que o raio de convergência para esta série é $+\infty$ e o intervalo de convergência é $\mathbb{R}$. □

Outros exemplos:

• A série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}$, é absolutamente convergente para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Aplicamos o critério de Cauchy, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x}{n}\right|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n} = 0$.

O critério diz que uma vez que o valor do limite obtido é $0 < 1$ podemos afirmar que a série dada é absolutamente convergente. Neste caso, para qualquer x fixo que estejamos a considerar o valor deste limite é 0, pelo que a série é absolutamente convergente em $x \in \mathbb{R}$.

• A série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, é absolutamente convergente para $x \in \mathbb{R}$.

Aplicamos o critério do quociente, onde neste caso definimos $b_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, e calculamos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(2n+2)!}|x|^{2n+2}}{\frac{1}{(2n)!}|x|^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{2n+2}}{|x|^{2n}} \frac{n!}{(2n+2)!}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0.$$

O critério diz uma vez que o valor do limite obtido é $0 < 1$ podemos afirmar que a série dada é absolutamente convergente. Neste caso, para qualquer x fixo que estejamos a considerar o valor deste limite é 0, pelo que a série é absolutamente convergente em $x \in \mathbb{R}$.

Observação. A série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

representa o polinómio infinito

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$$

Veremos nas próximas aulas que este polinómio infinito representa a função $\cos x$.

Exercício (resolvido na aula)**.** Determine o intervalo de convergência das seguintes séries de potências, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta. Estude também a convergência nos pontos extremos deste intervalo.

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} n^2(n+1)x^n \ ; \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(n-1)!} \ ; \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \ ;$$

Proposição (Cálculo do raio de convergência)**.** Usando os critérios de Cauchy e de d'Alembert, e caso existam os limites ai indicados, temos

$$r = \frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

ou

$$r = \frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |a_{n+1}/a_n|}\,.$$

Note-se que caso algum dos limites indicados seja $+\infty$ (respectivamente, 0) devemos tomar $r = 0$ (respectivamente, $r = +\infty$).

Demonstração. Vamos deduzir a primeira identidade. Estamos a considerar a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$

Usaremos o critério de Cauchy ou da raiz. Identificamos $b_n = a_n\, x^n$, e calculamos

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n||x^n|} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x| = A|x|$$

onde estamos a supor

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = A.$$

Usamos o referido critério e obtemos que para os valores x tais que

$$A|x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{A}$$

a série é absolutamente convergente. Neste caso identificamos como r, o raio de convergência

$$r = \frac{1}{A} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Para provar a segunda identidade usamos o mesmo tipo de argumentos, e aplicamos o critério do quociente ou de d'Alembert. □

1.3 Exercícios propostos

1. Determine o domínio de convergência das seguintes séries de potências, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(n-1)!}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$;

   (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{2n+4}$; (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$; (f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n!(x-2)^n}{n-1}$;

   (g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}(x+2)^n$; (h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2+n^3} x^n$; (i) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^{3n}}{\ln n}$;

   (j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n6^n}(3x-2)^n$; (k) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}(x-2)^n$; (l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{2n+1}} x^n$.

2. Determine o domínio de convergência das seguintes séries de potências, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1}(2x)^n$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{(n+2)!}$; (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n+1}$;

   (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{2n+4}$; (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$; (f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n!(3x+1)^{2n}}{n-1}$;

1.4 Operações com séries de potências (Conteúdo que não faz parte do programa)

Este conteúdo e apresentado como um material que não faz parte do programa da disciplina pelo que não será avaliado. Fica aqui escrito para uma leitura mais alargada da matéria de Cálculo II.

Devemos ficar com esta ideia "As operações algébricas que realizamos com polinómios permanecem válidas para séries de potências, quando as realizamos dentro do intervalo de convergência."

Teorema. Para todo o $x \in]-r, r[$ e $r = \min\{r_1, r_2\}$, onde r_1, r_2 são os raios de convergência das séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, respectivamente, temos:

i) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$,

ii) $(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n$., ou seja

$(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\dots) = a_0b_0+(a_1b_0+a_0b_1)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)+\dots$

iii) Se a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ verifica que $a_0 \neq 0$, então existe $(c_n) \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

, i.e. $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n\right) = 1$, ou $a_0 c_0 = 1$, $a_0 c_1 + a_1 c_0 = 0, \dots,$ $a_0 c_n + \cdots + a_n c_0 = 0$, ...

Exercício (resolvido na aula). Calcule os primeiros cinco termos das seguintes séries de potências e indique um intervalo onde a série indicada converge:

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}; \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (2x)^n \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n; \qquad \text{(c)}\ 1 / \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Exercício (proposto). Calcule os cinco primeiros termos não nulos das seguintes séries de potências e indique um intervalo onde a série indicada converge:

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{n+1} x^{2n}; \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^{2n}; \text{(c)} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n}$$

Aula 2: Polinómio de Taylor

Começaremos esta aula por falar que os polinómios constituem um conjunto de funções, com propriedades tais como:

- Podemos somar, multiplicar e dividir polinómios.
- Estas funções tem boas propriedades, são contínuas, existe derivada de qualquer ordem.
- Qualquer polinómio está identificado de forma única pelos seus coeficientes.

2.1 Cálculo dos coeficientes dum polinómio e polinómio de Taylor

Consideremos um polinómio de grau 3 para exemplificar

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Que podemos dizer dos coeficientes de $p(x)$?
Como são calculados?
Reparamos que $p(0) = a_0$,

$$p'(x) = 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1$$

pelo que $p'(0) = a_1$. Voltamos a derivar o polinómio

$$p''(x) = 6a_3 x + 2a_2$$

e temos que $p''(0) = 2a_2$. Da mesma forma obtemos

$$p'''(x) = 6a_3 \Rightarrow p'''(0) = 6a_3$$

Por tanto, os coeficientes do polinómio são dados por

$$a_0 = p(0),\ a_1 = p'(0), a_2 = \frac{p''(0)}{2}, a_3 = \frac{p'''(0)}{3!}$$

Temos obtido que

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

ou

$$p(x) = p(0) + p'(0)x + \frac{p''(0)}{2}x^2 + \frac{p'''(0)}{3!}x^3$$

Neste caso estamos a desenvolver o polinómio em potências centradas em 0. Se queremos desenvolver o polinómio em potências centradas em c, podemos raciocinar de forma análoga

$$p(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3$$

e obtemos que

$$p(x) = p(c) + p'(c)(x-c) + \frac{p''(c)}{2}(x-c)^2 + \frac{p'''(c)}{3!}(x-c)^3$$

Definição (Polinómio de Taylor de uma função)**.** Seja f uma função real de variável real $C^{n+1}(]-r,r[)$, com $r>0$
Ao polinómio

$$T_0^n f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

chamamos *polinómio de Taylor em* 0 ou *de Mac-Laurin* de ordem n de f.

Em geral, f uma função real de variável real $C^{m+1}(]c-r,c+r[)$, com $r>0$.

definimos

$$T_c^n f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n,$$

e chamamos *polinómio de Taylor em* c de ordem n de f.

Exemplo. Polinómio de Taylor de ordem n em 0 da função $f(x)=e^x$.

$$T_0^n(e^x)(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = 1\,,$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1\,,$$

em geral

$$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1\,,$$

e

$$T_0^n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Exemplo. Polinómio de Taylor de ordem n em 0 da função $f(x)=xe^x$.

$$T_0^n(f)(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

$$f(x) = xe^x \Rightarrow f(0) = 0\,,$$

$$f'(x) = e^x + xe^x, \Rightarrow f'(0) = 1\,,$$

$$f''(x) = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x, \Rightarrow f''(0) = 2\,,$$

$$f'''(x) = 2e^x + e^x + xe^x = 3e^x + xe^x, \Rightarrow f'''(0) = 3\,,$$

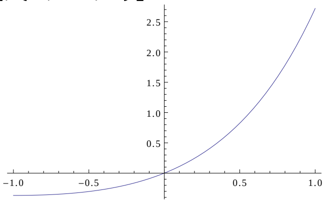
em geral obtemos

$$f^{(n)}(x) = ne^x + xe^x, \Rightarrow f^{(n)}(0) = n\,.$$

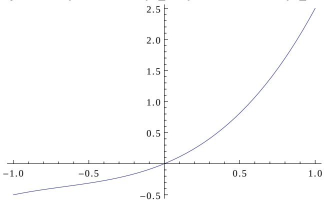
e

$$\begin{aligned} T_0^n(x)(xe^x) &= 0 + 1x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 + \cdots + \frac{n}{n!}x^n \\ &= x + x^2 + \frac{1}{2!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^n \end{aligned}$$

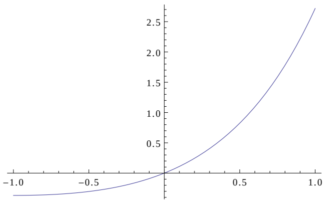
Vamos comparar os gráficos da função $f(x) = xe^x$,no intervalo $[-1, 1]$
Usando o comando $Plot[x * Exp[x], \{x, -1, 1\}])$



e o gráfico do polinómio de Taylor de ordem 3, $T(x) = x + x^2 + \frac{1}{2!}x^3$.
Usando o comando $Plot[Sum[x^{(n+1)}/n!, \{n, 0, 2\}], \{x, -1, 1\}]$



Também incluímos o gráfico do polinómio de Taylor de ordem 10, $T_{10}(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + \frac{1}{9!}x^{10}$.



Observação.
• Apesar de ter usado um polinómio de Taylor de grau 3 , observamos que este polinómio consegue reproduzir muito aproximadamente a função.
• Quando substituímos a função $f(x)$ pelo polinómio de Taylor $T_n(x)$ estamos a cometer um erro que é exactamente $R_n(x)$, chamado neste caso resto, que pode apresentar distintas formulações.
• Gostávamos de saber se quando calculamos o polinómio de Taylor para valores de n cada vez maiores, o erro que estamos a cometer diminui.

2.2 Fórmula de Taylor com resto de Lagrange ou de Cauchy

Teorema (Fórmula de Taylor ou Mac-Laurin com resto de Lagrange)**.** Seja f uma função real de variável real $C^{n+1}(]-r, r[)$, com $r > 0$. Então, para todo $x \in]-r, r[$

$$f(x) = T_0^n f(x) + R_0^n f(x),$$

com

$$R_0^n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \xi_x \text{ entre } 0 \text{ e } x.$$

Observação. $R_0^n f$ é chamado *resto de Lagrange de ordem n da função* f .

Teorema (Fórmula de Taylor ou Mac-Laurin com resto de Cauchy)**.** Seja f uma função real de variável real $C^{n+1}(]-r, r[)$, com $r > 0$. Então, para todo $x \in]-r, r[$

$$f(x) = T_0^n f(x) + R_0^n f(x),$$

com

$$R_0^n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n}{n!} x^{n+1}, \theta \in]0,1[.$$

Observação. $R_0^n f$ é chamado *resto de Cauchy de ordem n da função f*.

Exemplo. Consideremos a função $f(x) = e^x + 2e^{-x}$.

i) Calcule o seu polinómio de Taylor centrado em $c = 0$, de ordem 4, denotado por $T_4(x)$

ii) Escreva uma fórmula que represente o erro cometido quando substituímos $f(x)$ por $T_4(x)$.

iii) Estime este erro cometido para $x \in [-1,2]$.

Discussão. Este exercício está bem planteado porque a função f pode ser derivada até a ordem 5, em qualquer $x \in \mathbb{R}$. De fato é derivável para qualquer ordem.

i) Para o cálculo deste polinómio procedemos por cálculo direto

$$f(x) = e^x + 2e^{-x} \Rightarrow f(0) = 3\,,$$

$$f'(x) = e^x - 2e^{-x} \Rightarrow f'(0) = -1\,,$$

$$f''(x) = e^x + 2e^{-x} \Rightarrow f''(0) = 3\,,$$

$$f'''(x) = e^x - 2e^{-x} \Rightarrow f'''(0) = -1\,,$$

$$f^{(iv)}(x) = e^x + 2e^{-x} \Rightarrow f^{(iv)}(0) = 3\,,$$

e assim

$$T_0^4(e^x + 2e^{-x})(x) = 3 - x + \frac{3}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{3}{4!}x^4$$

ii) Pelo teorema de Taylor sabemos que

$$f(x) = T_0^4 f(x) + R_0^4 f(x)$$

onde $R_0^4 f(x)$ é chamado o resto. Podemos escolher a formulação para este resto de Lagrange e obtemos

$$R_0^4 f(x) = \frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5!} x^5, , \xi_x \text{ entre } 0 \text{ e } x,\ x \in [-1,2]$$

o ponto ξ_x onde estamos a calcular esta derivada 5 da função f representa um número que não conhecemos de forma explícita mas que está no intervalo $]-1,2[$.

$$f^{(5)}(x) = e^x - 2e^{-x}$$

Para estimar o erro no intervalo $[-1,2]$ temos majorar a expressão

$$\left|\frac{f^{(5)}(\theta x)}{5!} x^5\right|,\ x \in [-1,2].$$

Neste caso para fazer uma estimação nos devemos colocar na pior da situações para tentar dar uma cota para esta derivada. Sabemos que o ponto ξ_x estará no intervalo $]-1,2[$, pelo que

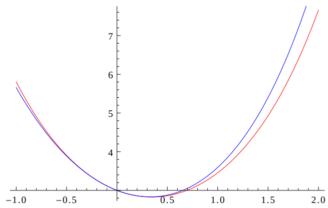
$$|f^{(5)}(\xi_x)| = |e^{\xi_x} - 2e^{-\xi_x}| \leq e^{\xi_x} + 2e^{-\xi_x} \leq e^2 + 2e^1 \leq 3^2 + 6 = 15$$

(a primeira exponencial é uma função crescente pelo que majoramos pelo extremo superior do intervalo e a segunda exponencial é uma função decrescente pelo que majoramos pelo extremo inferior do intervalo). Na última desigualdade temos usado que $e \leq 3$. Usando este resultado temos:

$$\Big|\frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5!}x^5\Big| \leq \frac{15}{5!}2^5 = 4.$$

e esta será uma medida do erro que estamos a cometer.
Desenhamos estes dois gráficos

$a := Plot[Exp[x] + 2Exp[-x], \{x, -1, 2\}, PlotStyle -> Red]$
$b := Plot[3 - x + (3/2)x^2 - (1/31)x^3 + (3/4!)x^4, \{x, -1, 2\},$
$PlotStyle -> Blue]$
$Show[a, b]$.



Pelo gráfico reparamos que a majoração para o erro calculado é muito grande. Para tentar obter uma majoração mais apurada devemos ter em conta que a função

$$f^{(5)}(x) = e^x - 2e^{-x}$$

é estritamente crescente. Se calculamos a sua derivada reparamos que é sempre positiva, pelo que podemos majorar o seu valor absoluto pelo maior valor entre os que toma nos extremos dos intervalos, e neste caso será no extremo superior, no ponto $x = 2$, pelo que se usarmos estes argumentos obtemos

$$|R_0^5 f(x)(x)| = \Big|\frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5!}x^5\Big| \leq \frac{e^2 - 2e^{-2}}{5!}2^5 < 1.9$$

que já parece uma majoração mais ajustada do erro que cometemos quando comparada com o gráfico. Estaremos a dizer que 1.9 é o maior erro que cometemos quando usamos o polinómio $T_0^4 f(x)$ para substituir pela função $f(x)$ é em cada ponto $x \in [-1,2]$. (Ainda esta majoração da uma estimação para o erro demasiado grande que deriva do fato da não sabermos onde está o ponto ξ_x).

$\square$

2.3 Exercícios propostos

1. Considere a função $f(x) = e^x + e^{-2x}$ e calcule $T_0^5 f(x)$, o polinómio de Taylor de ordem 5, centrado em $x = 0$,

   i) Por cálculo direto das derivadas sucessivas da função $f(x)$.

   ii) Escreva uma fórmula que represente o erro $R_0^5 f(x)$ cometido quando substituímos $f(x)$ por $T_5(x)$.

   iii) Calcule um valor aproximado de $f(1)$ usando o polinómio de Taylor. Estime o erro.

   iv) Estime o erro cometido ao substituir a função dada pelo polinómio de Taylor, em $[-2, 1]$.

2. Considere a função $f(x) = \sqrt[5]{1 + \frac{x}{2}}$.

   i) Calcule $T_0^4 f(x)$ o polinómio de Taylor de ordem 4, centrado em $x = 0$ desta função.

   ii) Escreva uma fórmula que represente o erro $R_4(x)$ quando substituímos $f(x)$ por $T_0^4 f(x)$.

   iii) Estime este erro para $x = 1$.

   iv) Estime este erro para $x = 2$.

   v) Escreva uma fórmula para o erro $R_0^4 f(x)$.

   vi) No ponto $x = 1$ e no ponto $x = 2$ explique se o erro aumenta ou não quando tomamos valores de n cada vez maiores. (Faça experiências numéricas!)

3. Considere a função $f(x) = (x - 1)\operatorname{sen} x$,

   i) Calcule $T_0^5(x)$ o polinómio de Taylor de ordem 5, centrado em $x = 0$ desta função.

   ii) Escreva uma fórmula que represente o erro $R_0^5 f(x)$ quando substituímos $f(x)$ por $T_0^5 f(x)$.

   iii) Estime este erro para $x \in [-\pi, \pi]$.

   (iv) Explique se o erro aumenta ou não quando tomamos valores de n cada vez maiores.

Aula 3: Resolução de exercícios da ficha 1.

Temos dedicado esta aula a resolver exercícios da ficha de exercícios. No final desta aula fizemos a apresentação da série de Taylor e calculamos a série de Taylor da função $\sin x$. Na próxima aula justificaremos quando a série de Taylor de uma função representa a própria função.

Exercício. Determine o domínio de convergência das seguintes séries de potências, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n \,; \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(n-1)!} \,; \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \,;$$

$$\text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{2n+4} \,; \qquad \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n \,; \qquad \text{(f)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!(x-2)^n}{n-1} \,;$$

$$\text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} (x+2)^n \,; \qquad \text{(h)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2+n^3} x^n \,; \qquad \text{(i)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{3n}}{\ln n} \,;$$

$$\text{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n6^n} (3x-2)^n \,; \qquad \text{(k)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} (x-2)^n \,; \qquad \text{(l)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{2n+1}} x^n \,.$$

Discussão:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$$

Para encontrar o intervalo de convergência desta série de potências podemos aplicar o critério de Cauchy-Hadamard ou da raiz que voltamos a lembrar **Critério de Cauchy-Hadamard ou da raiz**

Seja $(b_n) \subset \mathbb{R}$.

- Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \ell < 1$, então $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ é absolutamente convergente.
- Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \ell > 1 \,\text{ou} + \infty$, então $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ é divergente.

Neste caso identificamos $b_n = n(n+1)x^n$, pelo que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|n(n+1)x^n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n(n+1)|x|^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n(n+1)}|x| = |x|.$$

Quando $|x| < 1$ podemos afirmar que esta série é absolutamente convergente. Para $|x| > 1$ esta série é divergente. A condição $|x| < 1$ é equivalente a $x \in]-1,1[$, e este é o chamado intervalo de convergência. Esta série está centrada em 0 e o raio de convergência é 1. Nos pontos $x = -1$ e $x = 1$ ainda nada sabemos porque neste caso o valor do limite calculado é 1 e o critério de Cauchy-Hadamard ou da raiz nada diz neste caso. Para estudar o comportamento nestes pontos devemos substituir $x = -1$ e $x = 1$ na série e estudar com outros critérios a convergência ou divergência da série numérica que aparece em cada caso. Portanto substituímos $x = 1$ na série e obtemos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) = 1(2) + 2(3) + 3(4) + \cdots + n(n+1) + \ldots$$

Esta série é claramente divergente porque o termo geral, $n(n+1)$ não cumpre a condição necessária de convergência (é necessário para que esta série convergir que o limite quando n tende para $+\infty$ do termo geral seja 0). De qualquer forma neste caso deve ser muito evidente para nós que a soma infinita destes termos não existe (seria $=+\infty$). Quando substituímos $x=-1$ obtemos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(-1)^n = -1(2)+2(3)-3(4)+\cdots+n(n+1)(-1)^n+\ldots$$

Neste caso o termo geral desta série também não converge para 0, pelo que também podemos afirmar que esta série é divergente. A resposta final é que esta série é absolutamente convergente em $]-1,1[$ e diverge em .$\mathbb{R}\setminus]-1,1[$. $\square$

Discussão:

$$\text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(n-1)!}$$

Para encontrar o intervalo de convergência desta série de potências podemos aplicar o critério de

Critério de d'Alembert ou da razão.

Seja $(b_n) \subset \mathbb{R}$,.

- Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \ell < 1$, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ é absolutamente convergente.
- Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \ell > 1, \text{ou} +\infty$, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ é divergente.

Identificamos $b_n = \frac{(2x)^n}{(n-1)!}$, e consideramos $x \neq 0$, e calculamos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2x)^{n+1}}{n!}}{\frac{(2x)^n}{(n-1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|2x|^{n+1}}{|2x|^n}\frac{(n-1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{|2x|}{n} = 0.$$

Uma vez que o limite obtido é 0, verifica-se que para qualquer $x \neq 0$ esta série converge absolutamente. No ponto $x=0$ não ficamos muito preocupados com a discussão, uma vez que a série fica reduzida a uma soma finita e portanto é sempre convergente (e até podemos dizer absolutamente convergente). Diremos finalmente que a série converge absolutamente em $\mathbb{R}$.Esta série está centrada em 0 e o raio de convergência é $+\infty$. $\square$

Discussão:

$$\text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Para encontrar o intervalo de convergência usaremos o critério de Cauchy-Hadamard ou da raiz. Neste caso identificamos $b_n = (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$, pelo que

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^{n+1}}{n+1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{\frac{n+1}{n}}}{\sqrt[n]{n+1}} = |x|.$$

Quando $|x|<1$ podemos afirmar que esta série é absolutamente convergente. Para $|x|>1$ esta série é divergente. A condição $|x|<1$ é equivalente a $x \in]-1,1[$, e este é o chamado intervalo de convergência. Nos pontos $x=-1$ e $x=1$ ainda nada sabemos porque neste caso o valor do limite calculado é 1 e o critério de Cauchy-Hadamard ou da raiz nada diz neste caso. Para estudar o comportamento nestes pontos devemos substituir $x=-1$ e $x=1$ na série e estudar com outros critérios a convergência ou divergência da série numérica que aparece em cada caso. No ponto $x=-1$ obtemos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n+1}=(-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}+\dots\right)$$

Esta série é divergente, porque em geral sabemos que qualquer série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$

é convergente se e somente se $\alpha>1$. Substituímos $x=1$ na série e obtemos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}+\dots$$

Esta série é uma série alternada. Pelo critério de Leibniz, uma vez que $\frac{1}{n+1}$ converge para 0, quando $n\to+\infty$, é suficiente para afirmar a convergência desta série que $\frac{1}{n+1}$, $n=1,2,\dots$, seja decrescente, o que neste caso sabemos que é verdadeiro porque

$$\frac{1}{n+2}<\frac{1}{n+1}.$$

A resposta final é que esta série é absolutamente convergente em $]-1,1[$ e simplesmente convergente em $x=1$. Esta série está centrada em 0 e o raio de convergência é 1. □

Discussão:

$$\text{(d)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-3)^n}{2n+4}$$

Para encontrar o intervalo de convergência usaremos o critério de Cauchy-Hadamard ou da raiz. Neste caso identificamos $b_n=\frac{(2x-3)^n}{2n+4}$, pelo que

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|b_n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(2x-3)^n}{2n+4}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{|2x-3|^n}}{\sqrt[n]{2n+4}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|2x-3|}{\sqrt[n]{2n+4}}=|2x-3|$$

Quando $|2x-3|<1$ podemos afirmar que esta série é absolutamente convergente. Para $|2x-3|>1$ esta série é divergente. A condição $|2x-3|<1$ é equivalente a $|2(x-\frac{3}{2})|<1$ ou $|x-\frac{3}{2}|<\frac{1}{2}$, pelo que obtemos o intervalo $x\in]\frac{3}{2}-\frac{1}{2},\frac{3}{2}+\frac{1}{2}[=]1,2[$, e este é o chamado intervalo de convergência. Diremos que esta série está centrada em $\frac{3}{2}$ e o seu raio de convergência é $\frac{1}{2}$.

Nos pontos $x=1$ e $x=2$ ainda nada sabemos porque neste caso o valor do limite calculado é 1 e o critério de Cauchy-Hadamard ou da raiz nada diz neste caso. Para estudar o comportamento nestes pontos devemos substituir $x=1$ e $x=2$ na série e estudar com outros critérios a convergência ou divergência da série numérica que aparece em cada caso. No ponto $x=2$ obtemos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+4}=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2n+4}+\dots\right)$$

O termo geral desta série pode ser comparado com o termo $\frac{1}{n}$, ou seja,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2n+4}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

Isto nos permite concluir por aplicação do critério de comparação no limite, de séries de termos positivos, que as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+4}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

têm a mesma natureza. Como esta última série é divergente concluímos que no ponto $x = 2$ a série de potências é divergente. Estudamos agora o ponto $x = 1$. Neste caso substituímos este valor na série de potências e obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+4} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots \frac{(-1)^n}{2n+4} + \ldots$$

Neste caso trata-se de uma série alternada, de termo geral $\frac{(-1)^n}{2n+4}$, tal que $\frac{1}{2n+4}$ converge para 0 quando $n \to +\infty$, e para $n = 1, 2\ldots$ esta sucessão é decrescente, ou seja verifica-se

$$\frac{1}{2(n+1)+4} < \frac{1}{2n+4}$$

Então o critério de Leibniz nos permite afirmar que esta série é convergente. A resposta final é que esta série é absolutamente convergente em $]1, 2[$ e simplesmente convergente em $x = 1$. $\square$

Discussão:

$$\text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$$

Para encontrar o intervalo de convergência desta série de potências podemos aplicar o critério de **Critério de d'Alembert ou da razão.**
Consideramos $x \neq 0$. Identificamos $b_n = \frac{n^2}{n!} x^n$ e calculamos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!} x^(n+1)}{\frac{n^2}{n!} x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n^2} |x| = 0.$$

Uma vez que o limite obtido é 0, verifica-se que para qualquer $x \neq 0$ esta série converge absolutamente. No ponto $x = 0$ não ficamos muito preocupados com a discussão, uma vez que a série fica reduzida a uma soma finita e portanto é sempre convergente (e até podemos dizer absolutamente convergente). Diremos finalmente que a série converge absolutamente em $\mathbb{R}$. O raio de convergência da série neste caso é $+\infty$. $\square$

Discussão:

$$\text{(f)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!(x-2)^n}{n-1}$$

Para encontrar o intervalo de convergência desta série de potências podemos aplicar o critério de **Critério de d'Alembert ou da razão.**
Consideramos $x \neq 0$. Identificamos $b_n = \frac{n!(x-2)^n}{n-1}$ e calculamos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)!(x-2)^{n+1}}{n}}{\frac{n!(x-2)^n}{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\frac{(n-1)}{n}\frac{|x-2|^{n+1}}{|x-2|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n-1)}{n}|x-2| = +\infty$$

Uma vez que o limite obtido é $+\infty$, verifica-se que para qualquer $x \neq 2$ esta série diverge. No ponto $x = 2$ não ficamos muito preocupados com a discussão, uma vez que a série fica reduzida a uma soma finita e portanto é sempre convergente (e até podemos dizer absolutamente convergente). Diremos finalmente que a série converge absolutamente em $x = 2$. O raio de convergência da série neste caso é zero. □

Discussão:

$$\text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}(x+2)^n$$

Para encontrar o intervalo de convergência desta série de potências podemos aplicar o critério de **Critério de d'Alembert ou da razão.**
Consideramos $x \neq -2$. Identificamos $b_n = \frac{\ln n}{n}(x+2)^n$ e calculamos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\ln(n+1)}{n+1}(x+2)^{n+1}}{\frac{\ln n}{n}(x+2)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\frac{n+1}{n+2}|x+2|$$

Vamos discutir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}$$

Consideramos a função real de variável real $f(x) = \ln x$, definida para $x > 0$, e calculamos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln x}$$

Uma vez que temos uma indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$, aplicamos a regra de Cauchy e obtemos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(x+1))'}{(\ln x)'}$$

se este último limite existir. Calculamos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(x+1))'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1} = 1$$

pelo que concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1.$$

Finalmente podemos obter que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\frac{n+1}{n+2}|x+2| = |x+2|$$

Uma vez que o limite obtido é $|x-2|$, verifica-se que para $|x+2| < 1$ esta série é absolutamente convergente. (O ponto $x = -2$ já está incluído nesta afirmação pelos argumentos apresentados nas resoluções anteriores). A série está centrada em $x=2$ e o raio de convergência da série neste caso é 1. O intervalo de convergência é $]-2-1,-2+1[=]-3,-1[$. Devemos estudar agora a convergência da série de potências nos pontos $x=-3$ e $x=-1$. Substituímos $x=-1$ na série e obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}(-1+2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}=0+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}+\ldots$$

O termo geral desta série verifica a desigualdade

$$\frac{1}{n}<\frac{\ln n}{n}\,n=3,4,\ldots$$

pelo que se usamos o critério de comparação para séries de termos positivos, concluímos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$$

é divergente como consequência da dirvergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Analizamos agora a convergência no ponto $x=-3$, pelo que obtemos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}(-1)^n=0+\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln 3}{3}\cdots+\frac{(-1)^n\ln n}{n}+\ldots$$

O termo geral desta série é $\frac{(-1)^n\ln n}{n}$. Se verificamos que $\frac{\ln n}{n}, n=3,4,\ldots$ é uma sucessão de termos positivos, convergente para 0 e decrescente, o critério de Leibniz permite-nos concluir que esta série alternada é convergente. Começamos por verificar que $\frac{\ln n}{n}>0$ para $n=3,4,\ldots$, uma vez que $\ln x$ é positivo para $x>e$. Para estudar

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}$$

Estudamos o limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$$

e usamos a regra de Cauchy

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}$$

se este último limite existir. Calculamos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

Pelo que concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0.$$

Para estudar se a sucessão $\frac{\ln n}{n}, n=3,4\ldots$ é decrescente, usamos a função

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}$$

e estudamos se esta função é decrescente para $x\geq 3$. Calculamos

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

e concluímos que $f'(x) < 0$ para $x > 3$. Isto implica que f é uma função decrescente para $x > 3$. Obtemos então que

$$f(n+1) < f(n), n = 3, 4 \ldots$$

que era o que pretendíamos provar. Podemos então afirmar que no ponto $x = -3$ a série é simplesmente convergente. A série converge absolutamente no intervalo $]-3, -1[$, O domínio de convergência da série é o intervalo $[-3, -1[$. $\square$

Discussão:

$$\text{(h)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2+n^3} x^n$$

Para encontrar o intervalo de convergência desta série de potências podemos aplicar o critério de Cauchy-Hadamard ou da raiz. Identificamos $b_n = n(n+1)x^n$, pelo que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{3^n}{2+n^3} x^n\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n(n+1)} 3|x|} = 3|x|.$$

Quando $3|x| < 1$ podemos afirmar que esta série é absolutamente convergente. Para $3|x| > 1$ esta série é divergente. A condição $3|x| < 1$ é equivalente à $|x| < \frac{1}{3}$, pelo que $x \in]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$, e este é o chamado intervalo de convergência. Esta série está centrada em 0 e o raio de convergência é $\frac{1}{3}$. Nos pontos $x = -\frac{1}{3}$ e $x = \frac{1}{3}$ ainda nada sabemos porque neste caso o valor do limite calculado é 1 e o critério de Cauchy-Hadamard ou da raiz nada diz neste caso. Para estudar o comportamento nestes pontos devemos substituir $x = -\frac{1}{3}$ e $x = \frac{1}{3}$ na série e estudar com outros critérios a convergência ou divergência da série numérica que aparece em cada caso. Portanto substituímos $x = \frac{1}{3}$ na série e obtemos a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2+n^3} (\frac{1}{3})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2+n^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2+1^3} + \cdots + \frac{1}{2+n^3} + \ldots$$

O termo geral, $\frac{1}{2+n^3}$ pode se comparado no limite com o termo $\frac{1}{n^3}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2+n^3}}{\frac{1}{n^3}} = 1.$$

O critério de comparação no limite para séries de termos positivos garante que as séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2+n^3}$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

têm a mesma natureza. Neste caso como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ é convergente podemos afirmar que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2+n^3}$ é convergente.

Quando substituímos $x = -\frac{1}{3}$ obtemos a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2+n^3} (-\frac{1}{3})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2+n^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2+1^3} + \cdots + \frac{1}{2+n^3} + \ldots$$

Esta série é convergente, uma vez que quando tomamos esta série em módulo obtemos a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2+n^3}(-\frac{1}{3})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2+n^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2+1^3} + \cdots + \frac{1}{2+n^3} + \ldots$$

que já tínhamos concluído que era convergente. Portanto nos pontos $x = \frac{1}{3}$ e $x = -\frac{1}{3}$ diremos que a série de potências converge absolutamente. Como resumo podemos dizer que a série converge absolutamente no intervalo fechado $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, que chamaremos domínio de convergência da série. $\square$

Discussão:

$$\text{(i)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{3n}}{\ln n}$$

Para encontrar o intervalo de convergência desta série de potências podemos aplicar o critério de **Critério de d'Alembert ou da razão.**

Consideramos $x \neq 0$. Identificamos $b_n = \frac{x^{3n}}{\ln n}$ e calculamos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{x^{3(n+1)}}{\ln(n+1)}}{\frac{x^{3n}}{\ln n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \frac{|x|^{3(n+1)}}{|x|^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)}|x|^3$$

Vamos discutir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)}$$

Consideramos a função real de variável real $f(x) = \ln x$, definida para $x > 0$, e calculamos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)}$$

Uma vez que temos uma indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$, aplicamos a regra de Cauchy e obtemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(\ln(x+1))'}$$

se este último limite existir. Calculamos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(\ln(x+1))'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

pelo que concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = 1.$$

Finalmente podemos obter que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)}|x|^3 = |x|^3.$$

Uma vez que o limite obtido é $|x|^3$, verifica-se que para $|x|^3 < 1$ esta série é absolutamente convergente. (O ponto $x = 0$ já está incluído nesta afirmação pelos argumentos apresentados nas resoluções anteriores). Esta condição é equivalente à $|x| < 1$.A série está centrada em $x = 0$ e o raio de convergência da série neste caso é 1. O intervalo de convergência é $]-1, 1[$. Devemos estudar agora a convergência da série de potências nos pontos $x = -1$ e $x = 1$. Substituímos $x = 1$ na série e obtemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{\ln 2} + \cdots + \frac{1}{\ln n} + \ldots$$

O termo geral desta série verifica a desigualdade

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}\, n = 3, 4, \ldots$$

pelo que se usamos o critério de comparação para séries de termos positivos, concluímos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

é divergente como consequência da dirvergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Analizamos agora a convergência no ponto $x = -1$, pelo que obtemos a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{\ln n} + \ldots$$

O termo geral desta série é $\frac{(-1)^n}{\ln n}$. Se verificamos que $\frac{\ln n}{n}, n = 3, \ldots$ é uma sucessão de termos positivos, convergente para 0 e decrescente, o critério de Leibniz permite-nos concluir que esta série alternada é convergente. Começamos por verificar que $\frac{1}{\ln n} > 0$ para $n = 3, 4, \ldots$, uma vez que $\ln x$ é positivo para $x > e$.Verificamos

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$$

A sucessão $\frac{1}{\ln n} n = 3, 4 \ldots$ é decrescente porque $\ln(n+1) > \ln n$, n = 1, 2 ...Podemos então afirmar que no ponto $x = -1$ a série é simplesmente convergente. A série converge absolutamente no intervalo $]-1, 1[$, O domínio de convergência da série é o intervalo $[-1, 1[$. $\square$

Aula 4: Série de Taylor

4.1 Série de Taylor

Definição. Seja $f :]-r,r[\to \mathbb{R}$, tal que $f \in C^\infty(]-r,r[)$

Definimos a série de Taylor da função f centrada no ponto c, como a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$, $x \in]-r,r[$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n + \ldots$$

"Podemos entender a série de Taylor como o polinómio de Taylor de grau infinito."

Exemplo (de Cauchy). Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função de expressão analitica $f(x) = e^{-1/x^2}$, $x \neq 0$, e $f(0) = 0$. Esta função é $C^\infty(\mathbb{R})$ e $f^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, pelo que a série de Taylor de f é dada por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)(0)}}{n!}x^n = 0 + 0\,x + 0\,x^2 + \cdots + 0\,x^n + \cdots = 0;$$

assim, a série de Taylor não representa f, mas sim a função nula.

"Ainda que a série de Taylor duma função, f, exista, i.e. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, esta série pode não representar f."

Exemplo. Consideremos $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Calculamos polinómio de Taylor de f no ponto 0.

$$T_0^n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots \frac{f''(0)}{n!}x^n.$$

Calculamos $f(0) = 1$,

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \Rightarrow f''(0) = 2,$$

e em geral

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \Rightarrow f(n)(0) = n!$$

Obtemos então, que para a função $f(x) = \frac{1}{1-x}$,

$$T_0^n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

e a série de Taylor desta função é dada por $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Tínhamos verificado que no intervalo $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to+\infty}(1 + x + x^2 + \ldots x^n)$$

o que significa para $|x| < 1$ o polinómio de Taylor aproxima a função.

Para $|x| \geq 1$ a série de Taylor desta função não converge e portanto não serve para aproximar a função.

4.2 Condição necessária e suficiente para uma função admitir desenvolvimento em série de Taylor

Teorema (Condição necessária e suficiente para uma função admitir desenvolvimento em série de Taylor)**.** Seja f uma função real de variável real $C^\infty(]-r,r[)$, com $r>0$. Para que f admita desenvolvimento em série de potências é necessário e suficiente que o **resto de Lagrange de ordem** n, da aproximação polinomial de Taylor de f, $R_0^n f(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, para algum ξ_x entre 0 e x, **tenha limite zero quando** n **tende para infinito**, para cada $x \in]-r,r[$, i.e. $\lim_{n\to+\infty} R_0^n f(x) = 0$, $x \in]-r,r[$.

Demonstração. Seja $I =]-r,r[$. Como por hipótese f é $C^\infty(I)$, podemos usar que $f(x) = T_0^n f(x) + R_0^n f(x)$, com $R_0^n f(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, para algum ξ_x entre 0 e x. Obtemos que

$$|f(x) - T_0^n f(x)| = |R_0^n f(x)|$$

pelo que $\lim_{n\to+\infty} T_0^n f(x) = f(x)$ em I se, e somente se, $R_0^n f$ tende para 0 em I, como pretendíamos provar. Quando isto acontece diremos que a função f admite uma representação em série de potências, neste caso centrada em 0. □

A série de Taylor da função f é a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, pelo que a soma parcial desta série

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

é igual a $T_0^n f(x)$, polinómio de Taylor de ordem n.

Exemplo. Determine o desenvolvimento em série de Taylor da função exponencial.

Discussão. Comecemos por analisar a função $f(x) = e^x$. Esta função é $C^\infty(\mathbb{R})$ e $f^{(n)}(x) = f(x) = e^x$, $n \in \mathbb{N}$. O resto de Lagrange, de ordem n, para f, é dado por,

$$R_0^n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^{\xi_x}x^{n+1}}{(n+1)!}$$

, para algum $\xi_x \in]0,x[$. Agora, para um valor x fixo qualquer verifica-se

$$|R_0^n f(x)| < e^{\xi_x}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} < e^x\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,\ x \in \mathbb{R}$$

, pelo que o desenvolvimento em série de Taylor para e^x é dado por $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\ x \in \mathbb{R}$. □

Exemplo. As funções seno e co-seno hiperbólicas têm os seguintes desenvolvimentos em série de Taylor:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{e} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in \mathbb{R}.$$

4.3 Condição suficiente para a existência do desenvolvimento em série de Taylor.

Teorema (Condição suficiente para a existência do desenvolvimento em série de Taylor)**.** Seja f uma função real de variável real $C^{\infty}(]-r,r[)$, com $r>0$. Se $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, n \in \mathbb{N}$$

e $x \in]-r,r[$, então f admite desenvolvimento em série de potências em $x \in]-r,r[$, i.e.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, x \in]-r,r[.$$

Demonstração. No seguimento do exposto no resultado anterior, temos que provar que nas hipóteses apresentadas o resto, de Lagrange, de ordem n de f tende para zero quando $n \to +\infty$ para cada $x \in]-r,r[$. Agora,

$$|R_0^n f(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi_x)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} < M\frac{r^{n+1}}{(n+1)!};$$

e como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r^n}{n!} = 0$ temos que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_0^n f(x) = 0$, $x \in]-r,r[$. □

Exemplo. Tendo em atenção este resultado mostre que se têm os seguintes desenvolvimentos em série de Taylor: $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ e $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$.

Discussão. Consideramos a função $f(x) = \sin x$ e calculamos sucessivamente

$$\begin{array}{ccc}
f(x) = \sin x & \Rightarrow & f(0) = 0; \\
f'(x) = \cos x & \Rightarrow & f'(0) = 1; \\
f''(x) = -\sin x & \Rightarrow & f''(0) = 0; \\
f'''(x) = \sin x & \Rightarrow & f'''(0) = -1; \\
 & & \\
f^{(4)}(x) = \sin x & \Rightarrow & f^{(4)}(0) = 0; \\
f^{(5)}(x) = \cos x & \Rightarrow & f^{(5)}(0) = 1; \\
f^{(6)}(x) = -\sin x & \Rightarrow & f^{(6)}(0) = 0; \\
f^{(7)}(x) = \sin x & \Rightarrow & f^{(7)}(0) = -1;
\end{array}$$

Se queremos construir $T_0^7 f(x)$ obtemos

$$T_0^7 f(x) = 0 + x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 + \frac{-1}{7!}x^7$$

em geral observamos que os coeficientes das potências pares de x são zero e os coeficientes da potências ímpares, x^{2n+1} são da forma $\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$, pelo que a série de Taylor da função $\sin x$ é dada por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Tendo em conta que, $|\sin^{(n)}(x)| \leq 1$, pela condição suficiente de convergência, a série de Taylor da função $\sin x$ converge para a função $\sin x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, pelo que

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, x \in \mathbb{R}$$

Para obter a série da função $\cos x$ podemos proceder de forma análoga ou derivar ambos membros desta identidade obtida, e deste modo chegamos a:

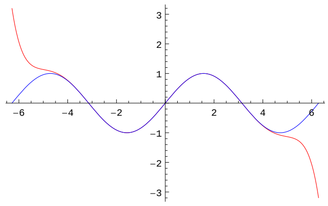
$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n+1},\ x \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Vamos representar a função $\sin x$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ e o polinómio de Taylor de ordem 11, centrado em zero, desta função no mesmo intervalo

$Plot[Sin[x], \{x, -2Pi, 2Pi\}, PlotStyle -> Blue]$

$Plot[Sum[(-1)^n/(2n+1)!x^(2n+1), \{n, 0, 5\}], \{x, -2Pi, 2Pi\},$

$PlotStyle -> Red]$



4.4 Exercícios propostos

1. Considere a função $f(x) = e^{x^2}$,

   i) Calcule $T_0^5(x)$ o polinómio de Taylor de ordem 5, centrado em $x = 0$ desta função.

   ii) Escreva uma fórmula que represente o erro $R_0^5 f(x)$ quando substituímos $f(x)$ por $T_0^5 f(x)$.

   iii) Estime este erro para $x \in [-3, 4]$.

   (iv) Explique se o erro aumenta ou não quando tomamos valores de n cada vez maiores e conclua se a série de Taylor da função $f(x)$ representa a própria função. Indique em que intervalo da reta real isto acontece.

2. Considere a função $f(x) = e^x \sin x$,

   i) Calcule $T_0^3(x)$ o polinómio de Taylor de ordem 3, centrado em $x = 0$ desta função.

   ii) Escreva uma fórmula que represente o erro $R_0^3 f(x)$ quando substituímos $f(x)$ por $T_0^3 f(x)$.

   iii) Estime este erro para $x \in [-10, 10]$.

   (iv) Explique se o erro aumenta ou não quando tomamos valores de n cada vez maiores e conclua se a série de Taylor da função $f(x)$ representa a própria função. Indique em que intervalo da reta real isto acontece.

3. (a) Obtenha o polinómio de Taylor de ordem $n \in \mathbb{N}$ da função $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $c = 1$.

   (b) Determine um valor de n para o qual se garanta que o polinómio $T_1^n\left(\frac{1}{x}\right)$, obtido na alínea anterior, aproxime $\frac{1}{x}$ no intervalo $[0.9, 1.1]$, com erro inferior a 10^{-3}.

   (c) Explique se o erro aumenta ou não quando tomamos valores de n cada vez maiores e conclua se a série de Taylor da função $f(x)$ representa a própria função. Indique em que intervalo da reta real isto acontece.

Aula 5: Convergência uniforme da série de potências

Temos falado do intervalo de convergência de uma série de potências, isto é do intervalo $]-r,r[$ onde podemos garantir que a série de potências é absolutamente convergente. Isto significa que para cada valor de x que tomamos nesse intervalo podemos obter a soma da série. Se representamos num gráfico a função que representa a soma de um número finito de termos, como será este gráfico? A resposta pode ser dada assim:

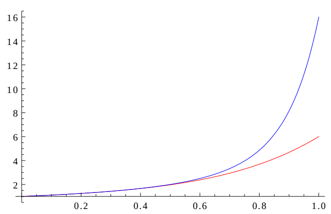
> *As somas parciais da série de potências convergem uniformemente para uma função limite em qualquer intervalo fechado definido dentro do intervalo de convergência da série de potências.*

Mas que significa esta frase? Quando falamos de convergência uniforme queremos exprimir de forma precisa a seguinte ideia, se começamos a desenhar sucessivamente as somas parciais para número de termos cada vez maior observamos que o gráfico avança em todos os pontos de maneira uniforme até chegar a um gráfico final que representa o gráfico da soma da série de potências. Vamos ilustrar esta ideia intuitiva com o seguinte exemplo.

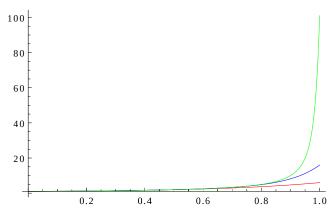
Exemplo (usando "Mathematicæ"). Consideremos a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $|x|<1$, cujo intervalo de convergência é o intervalo $]-1,1[$ e consideremos as suas somas parciais $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1+x+x^2+\cdots+x^n$.

Denotemos por an o gráfico desta soma parcial neste caso no intervalo $[0,1]$:

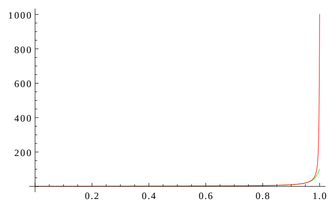
$a5 := Plot[Sum[x^i, \{i,0,5\}], \{x,0,1\}, PlotStyle->Red, PlotRange->All]$
$a15 := Plot[Sum[x^i, \{i,0,15\}], \{x,0,1\}, PlotStyle->Blue, PlotRange->All]$
$a100 := Plot[Sum[x^i, \{i,0,100\}], \{x,0,1\}, PlotStyle->Green, PlotRange->All]$
$a1000 := Plot[Sum[x^i, \{i,0,1000\}], \{x,0,1\}, PlotStyle->Red, PlotRange->All]$



Show[a5, a15]



Show[a5, a15, a100]

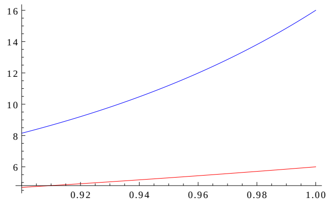


Show[a100, a1000]

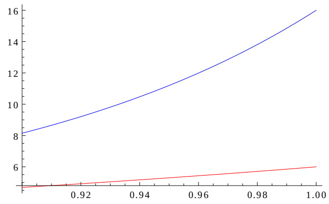
Observamos que o gráfico destas somas parciais é muito idêntico excepto quando estamos perto do final deste intervalo. Vamos voltar a desenhar estes gráficos mas desta vez quando consideramos o intervalo $[0.9,1]$ para observar mais facilmente o que está a acontecer, e os vamos a denotar como bn:

$b5 := Plot[Sum[x^i, i,0,5], \{x,0.9,1\}, PlotStyle->Red, PlotRange->All]$
$b15 := Plot[Sum[x^i, \{i,0,15\}], \{x,0.9,1\}, PlotStyle->Blue, PlotRange->All]$

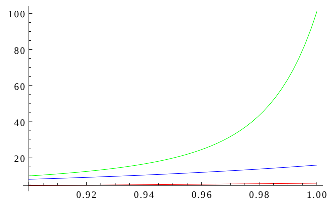
$b100 := Plot[Sum[x^i, \{i, 0, 100\}], \{x, 0.9, 1\}, PlotStyle -> Green, PlotRange -> All]$
$b1000 := Plot[Sum[x^i, \{i, 0, 1000\}], \{x, 0.9, 1\}, PlotStyle -> Red, PlotRange -> All]$



Show[b5, b15]



Show[b5, b15, b100]

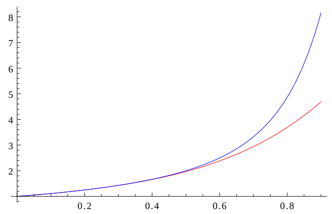


Show[b100, b1000]

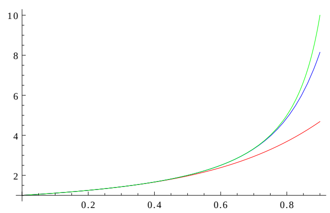
Observamos que perto do final do intervalo $[0,1]$ os gráficos sucessivos das somas parciais desta série não ficam acoplados pelo que indica que a situação quando aumentamos o número de termos na soma parcial não melhora.

Finalmente vamos voltar a desenhar os gráficos das somas parciais, desta vez denotaremos por cn e neste caso será no intervalo $[0, 0.9]$:

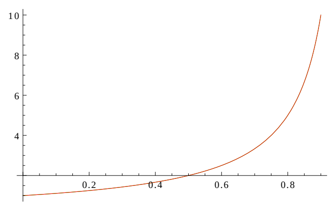
$c5 := Plot[Sum[x^i, \{i, 0, 5\}], \{x, 0, 0.9\}, PlotStyle -> Red, PlotRange -> All]$
$c15 := Plot[Sum[x^i, \{i, 0, 15\}], \{x, 0, 0.9\}, PlotStyle -> Blue, PlotRange -> All]$
$c100 := Plot[Sum[x^i, \{i, 0, 100\}], \{x, 0, 0.9\}, PlotStyle -> Green, PlotRange -> All]$
$c1000 := Plot[Sum[x^i, \{i, 0, 1000\}], \{x, 0, 0.9\}, PlotStyle -> Red, PlotRange -> All]$



Show[c5, c15]



Show[c5, c15, c100]



Show[c100, c1000]

Nestes últimos gráficos observamos que para um número relativamente grande como 100 ou 1000 o gráfico da soma parcial aparece ja quase idêntico pelo que vemos que os gráficos "avançaram de forma idêntica em todos os pontos" até desenharem um gráfico final que vai ser o gráfico limite destas somas parciais. Voltamos a enunciar o teorema de Cauchy-Hadamard, onde desta vez incluímos o resultado que fala da existência convergência uniforme da série, tal e como a temos descrito no exemplo.

Teorema (de Cauchy-Hadamard). Considere-se a série de potências, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$; então, existe $r \in [0, +\infty]$ que designamos por *raio de convergência* tal que:

- A série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente em $|x| < r$;
- A série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é divergente em $|x| > r$;
- A série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é uniformemente convergente em $|x| < (1-\epsilon)r$, para $\epsilon > 0$.

Ainda podemos falar

Teorema (de Abel). Suponhamos que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $-r < x < r$. e suponhamos que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ é convergente. Então verifica–se que a série é uniformemente convergente em $[0, r]$.

Voltaremos a falar da convergência uniforme para séries de funções onde enunciaremos de forma precisa a definição de convergência uniforme, daremos um critério para poder decidir se esta convergência acontece, o chamado Critério de Weierstrass. Os resultados que se seguem são importantes consequências desta convergência uniforme.

5.1 Derivação e integração de séries de potências

Definição (Séries derivada e primitiva). Designamos por *série derivada* e *série primitiva* de uma dada série de potências, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$, às séries, dadas respectivamente por:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n\, x^{n-1} = a_1 + 2a_2\, x + \cdots + na_n x^{n-1} + \cdots$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots$.

Teorema. Os raios de convergência das séries derivada e primitiva coincidem com o da série de potências dada, já o domínio de convergência tem de ser estudado caso a caso.

Teorema. Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$, definida no intervalo de convergência da série de potencias. então:
• f é continua.
• $f'(x) := \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n\, x^{n-1}$.
• Em geral f admite derivada continua de qualquer ordem, $k \in \mathbb{N}$, e $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n\, x^{n-k}$.
• Uma primitiva $F(x)$ da função $f(x)$ é dada por

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

• A função f é integrável em qualquer subintervalo $[a, b]$ do dominio de convergência da série e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n\, x^n dx.$$

Observação (Cálculo dos coeficientes da série de potências). Como consequência deste teorema obtemos que se f ,definida em $]-r, r[$, com $r > 0$ admite um desenvolvimento em série de potências, ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \;\; x \in]-r, r[$$

então obtemos

$$f(0) = a_0,\, f'(0) = a_1,\, f''(0) = 2a_2$$

e em geral obtemos, quando derivamos a série sucessivamente e substituímos $x = 0$

$$f^{(n)}(0) = n!\, a_n,\ n = 0, 1, \dots ,$$

pelo que reparamos que $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pelo e esta série de potências será a série de Taylor da função f no ponto 0 e quando consideramos a soma parcial desta série até grau n, estaremos a obter o polinómio de Taylor em 0 de grau n da função f.

Teorema (de Unicidade)**.** Se as séries de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n$ coincidem para todo o $x \in]-r, r[$, e $r > 0$, então $a_n = b_n$, $n = 0, 1, \dots$.

Demonstração. É uma consequência directa de que as séries de potências representam uma mesma função, f, em $]-r, r[$; agora, do teorema anterior obtemos que $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = b_n$, $n = 0, 1, \dots$. □

Ainda podemos acrescentar este resultado que fala da continuidade no domínio de convergência.

Teorema (de Abel)**.** Suponhamos que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $-r < x < r$. e suponhamos que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ é convergente. Então verifica–se que a série é uniformemente convergente em $[0, r]$ e

$$\lim_{x \to r^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n.$$

5.2 Aplicação: Séries de potências deduzidas por derivação e integração e manipulação algébrica

Vamos aplicar os teoremas apresentados para obter a representação explícita de novas séries de potências a partir de séries já conhecidas. Começaremos então pela série de potências que tínhamos deduzido pelo cálculo da série geométrica.

Exemplo (Representação em série de potências por derivação e integração e manipulação algébrica)**.** Tendo em atenção que, $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $|x| < 1$ vamos mostrar que:

i) $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$, $|x| < 1$;

ii) $\dfrac{1}{2+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$, $|x| < 2$;

iii) $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1}$, $|x| < 1$;

iv) $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$, $x \in]-1, 1]$;

v) $\operatorname{arctg} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, $x \in [-1,1]$.

Discussão i). Começamos por considerar a representação em série de potências da função $\frac{1}{1-x}$, que tínhamos calculado usando a série geométrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,\ |x| < 1$$

Fazendo a mudança de variável $x \mapsto -x^2$ nesta igualdade obtemos imediatamente

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n,\ |-x^2| < 1$$

ou de forma equivalente, tendo em atenção que $|x^2| < 1 \equiv |x| < 1$, concluímos que

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n,\ |x| < 1. \qquad \square$$

Discussão ii). Para a função $\dfrac{1}{2+x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+x/2}$, e fazendo a mudança de variável $x \mapsto -\dfrac{x}{2}$ obtemos a representação procurada, com intervalo de convergência $\left|-\dfrac{x}{2}\right| < 1 \equiv |x| < 2$. $\square$

Discussão iii). Aplicando o teorema anterior (para a série derivada) à série geométrica obtemos directamente a primeira identidade, i.e. a representação em série para a função $\dfrac{1}{(1-x)^2}$. $\square$

Discussão iv). Para a representação em série da função logaritmo, podemos determinar a série integral da função

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n,\ |x| < 1,$$

(pois, basta tomar $-x$ em lugar de x na representação em série da função $\dfrac{1}{1-x}$). Neste caso podemos afirmar que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + k, \qquad |x| < 1,$$

onde k é uma constante real. Fazemos $x = 0$ nesta identidade concluímos que $k = 0$.

O domínio de convergência desta série é $]-1,1]$, uma vez que em $x = 1$ a série obtida é dada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, que é convergente (usando o critério de Leibniz como já foi referido anteriormente) e no ponto $x = -1$ obtemos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)}{n}$ que é uma série divergente.

Usando o teorema de Abel temos que $\ln 2 = \displaystyle\lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. $\square$

Discussão v). Para a representação em série da função arco-tangente, podemos determinar a série integral da função $\dfrac{1}{1+x^2}$ uma vez que

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n},\ |x| < 1$$

(pois, basta tomar $-x^2$ em lugar de x na representação em série da função $\frac{1}{1-x}$), e o domínio de convergência desta série integral não sofre alteração, pelo que

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + k\,, x \in]-1,1[$$

onde k é uma constante real. Se tomamos $x = 0$ obtemos que $k = 0$.

Agora, em $x = 1$ a série obtida é dada por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} 4,$$

que é simplesmente convergente; No ponto $x = -1$ obtemos a mesma série e, portanto, o domínio de convergência desta série de potências é $[-1,1]$.

A função $\operatorname{arctg} x$ é contínua em $[-1,1]$, assim e usando o teorema de Abel temos que

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(1) = \lim_{x\to 1^-} \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \qquad \square$$

5.3 Exercícios propostos

1. Determine uma representação em série de potências, centrada em $x = 0$, para cada uma das seguintes funções (indicando o intervalo onde tal é válida):

   (a) $\dfrac{1}{5-x}$; (b) $\dfrac{2}{2+x^2}$; (c) $\dfrac{x}{x+1}$; (d) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$.

2. Determine uma representação em série de potências, centrada em $x = 1$, para cada uma das seguintes funções (indicando o intervalo onde tal é válida):

   (a) $\dfrac{1}{1-2x}$; (b) $\dfrac{2x}{2+x}$; (c) $\dfrac{x}{x^2-3}$; (d) $\dfrac{1}{x^2+x}$.

3. Considere a série de potências $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$.

   (a) Verifique que tem raio de convergência igual a 2.

   (b) Explicite $f(x)$ e indique o seu domínio.

4. Considere a série de potências $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$.

   (a) Determine o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ no qual a série é absolutamente convergente.

   (b) Calcule $f'(x)$ e obtenha explícitamente $f(x)$.

5. Sabendo que $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

   (a) obtenha uma representação em série de potências para a função $f(x) = xe^{x^3}$ e indique o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ em que esta representação é válida;

   (b) obtenha uma representação em série numérica do integral $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^3}\,dx$.

Aplicação: Determinação da solução de uma equação diferencial através da sua representação em série de potências (Conteúdo que não faz parte do programa)

Esta matéria não foi leccionada na aula.

Exemplo (Determinação da solução de uma equação diferencial)**.** Vamos determinar o desenvolvimento em série de potências da função exponencial, o seu raio e intervalo de convergência absoluta.

Discussão. Consideremos a equação diferencial $y' = y$, com valores iniciais $y(0) = 1$. Esta equação diferencial tem como única solução a função exponencial, $y = e^x$. Procuremos agora uma solução y desta equação diferencial da forma $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, com raio de convergência $r > 0$. Do teorema da série derivada, obtemos que

$$y = y' \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n x^{n-1}, x \in]-r, r[.$$

tendo em atenção que $\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n$ e usando o teorema de unicidade da representação de uma função em série de potências, concluímos que

$$a_n = (n+1)a_{n+1}, \text{ ou } a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}\; n = 0, \dots.$$

Se agora usamos a condição inicial $y(0) = 1$, temos que $a_0 = 1$ e também que $a_n = \frac{1}{n!}$, $n = 0, \dots$. Aplicando o critério de d'Alembert a esta série de potências vemos que o raio de convergência é

$$r = \lim_{n\to+\infty} \frac{1/(n)!}{1/(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty.$$

Pelo unicidade da solução da equação diferencial dada obtemos que $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$. pelo que obtemos o desenvolvimento em série de potências da função exponencial. □

Exemplo. Vamos determinar o desenvolvimento em série de potências da *função binomial*, $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \neq 0, 1, \dots$ bem como o raio e intervalo de convergência absoluta.

Discussão. Usando que $(1+x)((1+x)^\alpha)' = \alpha(1+x)^\alpha$ e $f(0) = 1$, obtemos que a função binomial é solução única da equação diferencial

$$\begin{cases} (1+x)y' = \alpha y, \quad x > -1, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Procuremos agora uma solução y desta equação diferencial da forma $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, com raio de convergência $r > 0$. Do teorema da série derivada, obtemos que

$$(1+x)y' = \alpha y \Longleftrightarrow (1+x) \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n =, x \in]-r, r[.$$

ou

$$(1+x)(a_1+2a_2\,x+\cdots)=a_1+(a_1+2a_2)x+(2\,a_2+3\,a_3)x^2+\cdots=\alpha(a_0+a_1\,x+a_2\,x^2+\cdots).$$

Assim, do teorema de unicidade da representação de uma função em série de potências, concluímos que

$$a_n=\frac{(\alpha-(n-1))\cdots(\alpha-1)\alpha}{n!}a_0,\ n=1,\ldots,$$

e usando a condição inicial $y(0)=1$, temos que $a_0=1$.

Aplicando o critério de d'Alembert a esta série de potências calculamos o raio de convergência

$$r=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(\alpha-(n-1))\cdots(\alpha-1)\alpha}{n!}\frac{(n+1)!}{(\alpha-n)(\alpha-(n-1))\cdots(\alpha-1)\alpha}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right|=1.$$

Pela unicidade na solução da equação diferencial obtemos

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha\,x+\frac{(\alpha-1)\alpha}{2}\,x+\cdots+\frac{(\alpha-(n-1))\cdots(\alpha-1)\alpha}{n!}\,x^n+\cdots\ x\in\,]-1,1[.\qquad\square$$

Exemplo. Determine o desenvolvimento em série de potências e domínio de convergência para as funções $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Discussão. Basta fazer a mudança de variável $x\mapsto -x^2$ (respectivamente, $x\mapsto x^2$) e $\alpha=-1/2$ no desenvolvimento em série de potências da função binomial para obter

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{1\,3}{2\,4}x^4+\cdots+\frac{1\,3\cdots(2n-1)}{2\,4\cdots(2n)}x^{2n}+\cdots,\ x\in\,]-1,1[;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1\,3}{2\,4}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{1\,3\cdots(2n-1)}{2\,4\cdots(2n)}x^{2n}+\cdots,\ x\in\,]-1,1[.\qquad\square$$

Exemplo. Determine o desenvolvimento em série de potências e domínio de convergência para as funções $\arcsin x$ e $\arg\sinh x$.

Indicação. Basta fazer aplicar o teorema da série primitiva às séries de potências do problema anterior, uma vez que $\displaystyle\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\arcsin x$ e $\displaystyle\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt=\arg\sinh x$. $\square$

Exemplo (Séries de Mac-Laurin ou de Taylor de funções hiperbólicas)**.** Determine o desenvolvimento em série de potências e domínio de convergência para as funções co-seno e seno hiperbólico.

Discussão. É sabido que $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ e $e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$, $x\in\mathbb{R}$.

Fazendo a mudança de variável $x\mapsto -x$ obtemos $e^{-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$, $x\in\mathbb{R}$; e, portanto,

$$\cosh(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+(-1)^n)\,x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad\text{e}\quad\sinh(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1-(-1)^n)\,x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$x\in\mathbb{R}$. $\square$

Exemplo (Séries de Mac-Laurin ou de Taylor de funções trigonométricas)**.** Determine o desenvolvimento em série de potências das funções co-seno e da função seno, bem como os raios e intervalo de convergência absoluta.

Discussão. Note que $\cos'' x = -\cos x$, $\cos(0) = 1$, $\cos'(0) = 0$. (é também $\sin'' x = -\sin x$, $\sin(0) = 0$, $\sin'(0) = 1$.) Consideremos o problema da valor inicial

$$\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

que admite como solução única em $\mathbb{R}$ a função $y = \cos x$.

Procuremos agora y da forma $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de raio de convergência r.

Temos que

$$y'' = -y \Longleftrightarrow (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n)'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = -\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

(pelo teorema da série derivada); do teorema de unicidade obtemos

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_n,\ n = 0, 1, \ldots.$$

Usando a condição inicial $y(0) = 1, y'(0) = 0$ obtemos $a_0 = 1, a_1 = 0$ pelo que $a_{2n+1} = 0$, $n = 0, 1, \ldots$ e $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$, $n = 0, 1, \ldots$; e portanto,

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Aplicando o critério de d'Alembert podemos concluir que o raio de convergência da série de potências encontrada é $+\infty$.

Pela unicidade de solução da equação diferencial concluímos que

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R}$$

Se queremos obter a representação em série de potências da função $\sin x$, derivamos ambos membros desta identidade obtendo $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$. □

Exercício. Considere a equação diferencial

$$\begin{cases} y' = 2xy, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

tal que a sua solução existe e esta solução é única num certo intervalo centrado no ponto $x = 0$. Calcule então uma série de potências que verifica esta equação pelo método da identificação dos coeficientes. Calcule o raio de convergência desta série. Uma vez calculada esta série, identifique explicitamente a função definida por ela.

Resolução. Podemos considerar

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ |x| < r$$

e vamos verificar se de facto existe esta série e qual será o valor do seu raio de convergência.

Tendo em conta que $y(0) = 1$, obtemos como primeira condição que $a_0 = 1$.

Consideramos agora a equação diferencial $y' = 2xy$, e substituímos y pela sua representação em série, obtendo

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ |x| < r$$

ou, derivando a série de potências concluímos que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1},\ |x| < r.$$

Identificamos o coeficiente de x^n em ambas as séries para $n = 0, 1, \ldots$, obtendo as seguintes identidades

$$n = 0, \Longrightarrow a_1 = 0 \qquad n = 1, \Longrightarrow 2a_2 = 2a_0 \qquad n = 1+2, \Longrightarrow 3a_3 = 2a_1$$

em geral, obtemos

$$na_n = 2a_{n-2} \qquad \text{ou seja} \qquad a_n = \frac{2}{n} a_{n-2}.$$

Agora, usando esta identidade recursivamente e que $a_1 = 0$, obtemos que todos os coeficientes de índice ímpar são nulos, $a_{2n+1} = 0, n = 0, 1, \ldots$. Os coeficientes de índice par verificam

$$a_{2n} = \frac{2}{2n} a_{2n-2} = \frac{2}{2n} \frac{2}{2n-2} a_{2n-4} = \cdots = \frac{2}{2n} \frac{2}{2n-2} \cdots \frac{2}{2} a_0 = \frac{1}{n!}$$

pelo que se tem

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}.$$

Podemos calcular o intervalo de convergência desta série; agora lembre-se que

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \ x \in \mathbb{R}$$

logo a série anterior é de facto e^{x^2}, que é a solução da equação diferencial considerada. $\square$

Exercícios propostos

1. Considere a equação diferencial $y' = 2y, \quad y(0) = 3$. Calcule uma série de potências que verifica esta equação pelo método da identificação dos coeficientes. Calcule o raio de convergência desta série. Uma vez calculada esta série, identifique explicitamente a função definida por ela.

2. Considere a equação diferencial $\begin{cases} y'' + 4y = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = 2. \end{cases}$ Calcule os primeiros 5 termos da série de potências que verifica esta equação. Pode dar uma expressão geral para cada um dos coeficientes desta série?. Calcule explicitamente a função obtida através da sua representação em série de potências.

3. Use o desenvolvimento em série de potências da função binomial $(1+x)^\alpha$ para obter o desenvolvimento em série de potências da função $f(x) = \sqrt[3]{1-2x}$, e indique o raio de convergência da série obtida.

Aula 6: Resolução de Exercícios

Exercício. Determine uma representação em série de potências, centrada em $x=0$, para cada uma das seguintes funções, indicando o intervalo de convergência em cada uma de elas. Considere como ponto de partida a identidade $\dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^n, \quad |x|<1.$

$$\text{(a) } \frac{1}{3+x}\,; \qquad \text{(b) } \frac{2}{1-x^2}\,; \qquad \text{(c) } \frac{x+2}{x+1}\,; \qquad \text{(d) } \frac{1}{x^2-x-2}\,.$$

Resolução (a). Consideramos

$$\frac{1}{3+x}=\frac{1}{3(1+\frac{x}{3})}=\frac{1}{3(1-\frac{-x}{3})}$$

e usamos a identidade proposta para $\left|\dfrac{-x}{3}\right|<1$, obtemos

$$\frac{1}{3+x}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{-x}{3})^n,\ \left|\frac{-x}{3}\right|<1.$$

ou $\dfrac{1}{3+x}=\dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{-1}{3})^n x^n,\ |x|<3.$ □

Resolução (b). Consideramos

$$\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}$$

e usamos a identidade proposta para $|x^2|<1$ ou de forma equivalente para $|x|<1$ donde

$$\frac{2}{1-x^2}=2\sum_{n=0}^{+\infty}(x^2)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}2x^{2n},\ |x|<1.$$ □

Resolução (c). Consideramos

$$\frac{x+2}{x+1}=1+\frac{1}{x+1}=1+\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n,\ |x|<1$$

ou $\dfrac{x+2}{x+1}=2+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^n,\ |x|<1..$ □

Resolução (d). Consideramos

$$\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{1}{(x+1)(x-2)}=\frac{\frac{-1}{3}}{x+1}+\frac{\frac{1}{3}}{x-2}$$

Agora procuramos a representação em série de potências para cada uma destas funções, obtendo

$$\frac{\frac{-1}{3}}{x+1}=\frac{-1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3}x^n, \quad |x|<1$$

e

$$\frac{\frac{1}{3}}{x-2}=\frac{1}{3}\frac{1}{(-2)}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{-1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{x}{2})^n, \quad \left|\frac{x}{2}\right|<1 \text{ ou },|x|<2.$$

Finalmente obtemos para $|x|<1$:

$$\frac{1}{x^2-x-2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3}x^n+\frac{-1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{x}{2})^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{3}+\frac{(-1)}{6}\frac{1}{2^n}\right)x^n,\ |x|<1.$$ □

Exercício. Determine uma representação em série de potências, centrada em $x = 1$, para cada uma das seguintes funções (indicando o intervalo onde tal é válida):

$$\text{(a) } \frac{1}{3+x}\ ; \qquad \text{(b) } \frac{1}{2-3x}\ ; \qquad \text{(c) } \frac{x^2+2}{x+1}\ ; \qquad \text{(d) } \frac{1}{x^2+2x}\ .$$

Resolução. (a) Consideramos

$$\frac{1}{3+x} = \frac{1}{4+x-1} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{x-1}{4})^n, \qquad \left|\frac{x-1}{4}\right| < 1 \text{ ou }, |x-1| < 4.$$

(b) Consideramos

$$\frac{1}{2-3x} = \frac{1}{2-3(x-1)-3} = \frac{1}{-1-3(x-1)} = \frac{-1}{1+3(x-1)} = (-1)\sum_{n=0}^{+\infty}(-3(x-1))^n$$

e esta representação é válida para $|-3(x-1)| < 1$ ou $|x-1| < \frac{1}{3}$.
(c) Consideramos

$$\frac{x^2+2}{x+1} = x-1+\frac{3}{x+1} = x-1+\frac{3}{2+(x-1)} = (x-1)+\frac{3}{2}\frac{1}{1+\frac{(x-1)}{2}}$$

donde se tem que

$$\frac{x^2+2}{x+1} = (x-1)+\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{x-1}{2})^n, \qquad \left|-\frac{x-1}{2}\right| < 1 \text{ ou }, |x-1| < 2.$$

(d) Considere

$$\frac{1}{x^2+2x} = \frac{1}{x(x+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{-1}{2}}{x+2}.$$

Agora procuramos a representação em série de potências centrada em $x = 1$ para cada um dos termos anteriores, obtemos:

$$\frac{\frac{1}{2}}{x} = \frac{\frac{1}{2}}{1+x-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-(x-1))^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x-1)^n, \quad |x-1| < 1.$$

$$\frac{\frac{-1}{2}}{x+2} = \frac{\frac{-1}{2}}{3+x-1} = \frac{-1}{6}\frac{1}{(1+\frac{x-1}{3})} = \frac{-1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{3^n}, |x-1| < 3.$$

pelo que finalmente obtemos $\displaystyle\frac{1}{x^2+2x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2} - \frac{(-1)^n}{63^n}\right)(x-1)^n, \quad |x-1| < 1.$ □

Exercício. Considere a série de potências $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(-x)^n}{3^n}$.

1. Calcule o seu raio de convergência.

2. Explicite $f(x)$ e calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$. Coincide o domínio de convergência da série com o domínio da função f?

Resolução. Para procurar a função f vamos simplificar o problema e determinar a função g tal que

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n.$$

Sabemos que

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x|<1$$

pelo que podemos derivar ambos membros desta identidade, obtendo

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad |x|<1$$

(reparamos que o somatório começa em $n=0$ porque perdemos o termo $n=0$, que era neste caso uma constante), multiplicamos ambos membros desta identidade por x, i.e.

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n}, \quad |x|<1.$$

Voltamos a derivar ambos membros tem-se

$$\frac{1+x}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}, \quad |x|<1$$

(reparamos que o somatório novamente começa em $n=1$ porque neste caso corresponde a derivar o termo x que não é uma constante pelo que não desaparece).

Voltamos a multiplicar ambos membros por x concluímos que

$$\frac{x+x^2}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n}, \quad |x|<1.$$

No problema proposto devemos encontrar a função f tal que $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(-x)^n}{3^n}$, pelo que identificamos x por $\frac{-x}{3}$ vem que

$$\frac{\frac{-x}{3}+(\frac{-x}{3})^2}{(1-\frac{-x}{3})^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(-x)^n}{3^n},$$

pelo que

$$f(x)=\frac{\frac{-x}{3}+(\frac{-x}{3})^2}{(1-\frac{-x}{3})^3}=\frac{3x(x-3)}{(x+3)^3}.$$

Se queremos calcular $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$, devemos reparar que $f(-1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$, pelo que a soma desta série é dada por $f(-1)=\frac{3}{2}$.

O domínio de convergência de f não coincide com o domínio da série, que sabemos que é sempre um intervalo que pode ou não conter os pontos extremos e o domínio da função f é $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$. $\square$

Exercício. Sabendo que $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}$ para todo $x\in\mathbb{R}$:

1. obtenha uma representação em série de potências para a função $f(x)=x\sin(x^3)$ e indique o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ em que esta representação é válida;

2. obtenha uma representação em série numérica do integral $\displaystyle\int_0^1 x\sin(x^3)dx$.

Resolução. A função $\sin x$ pode ser representada em série de potências para todo $x \in \mathbb{R}$, pelo que para qualquer x, no ponto x^3 não temos qualquer restrição e podemos afirmar

$$\sin x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^3)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n+3}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

multiplicamos ambos membros desta identidade por x obtemos

$$x\sin x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n+4}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se queremos obter uma representação em série numérica do integral $\displaystyle\int_0^1 x\sin(x^3)dx$, substituímos no integral a função pela sua representação em série de potências e a seguir podemos trocar a ordem de integração com o somatório, tal e como acontece no caso das somas finitas, sempre que o intervalo onde estejamos a integrar esteja contido no domínio de convergência da série de potências considerada, $\delta \int_0^1 x\sin(x^3)dx = \int_0^1 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n+4}}{(2n+1)!}dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{6n+4}}{(2n+1)!}dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(6n+5)}$. □

Aula 7: Convergência pontual e uniforme de séries de funções

Começamos esta aula com a resolução do exercício 9 da folha 1 de exercícios propostos.

Exercício. Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Calcule o seu polinómio de Taylor de ordem n centrado no ponto $c = 1$.

2. Estime o erro cometido quando consideramos $x \in [0.9, 1.1]$

Discussão. Usamos a definição do polinómio de Taylor

$$T_1^n(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

e calculamos as derivadas sucessivas da função $f(x) = \frac{1}{x}$,

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, f'(x) = (-1)x^{-2}, f''(x) = 2x^{-3}, f'''(x) = -3!x^{-4}$$

Pelos cálculos efetuados, vamos provar por indução que

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}.$$

Verificamos que para $n = 1$ esta identidade é verdadeira. Vamos assumir que esta fórmula é verdadeira para a derivada de ordem n e vamos provar que isto implica que a derivada de ordem $n+1$ também é dada por esta fórmula. Usamos a identidade

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}.$$

e voltamos a derivar

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n!(-(n+1))x^{-(n+1)-1} = (-1)^{n+1}(n+1)! x^{-(n+2)}.$$

Uma vez que provamos que a fórmula mantém o mesmo padrão diremos que temos provado por indução a validade desta fórmula para a derivada de ordem n da função f. Construimos o polinómio de Taylor, tendo em conta que $f(1) = 1$, $f'(1) = -1$, $\ldots f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$, pelo que obtemos

$$T_1^n(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 + \cdots + (-1)^n (x-1)^n$$

A fórmula de Taylor diz, uma vez que esta função é derivável até qualquer ordem no intervalo $[0.9, 1.1]$

$$f(x) = T_1^n(x) + R_1^n(x)$$

O erro que estamos a cometer, quando substituímos $f(x)$ pelo seu polinómio $T_1^n(x)$, é dado por

$$|f(x) - T_1^n(x)| = |R_1^n(x)|$$

$R_1^n(x)$ é o chamado resto da fórmula de Taylor, e pode ser dado por diferentes fórmulas, todas equivalentes. Neste caso vamos usar a formulação de Lagrange e obtemos

$$R_1^n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}$$

Temos em conta que

$$f^{(n+1)}(\xi_x) = (-1)^{n+1}(n+1)!x^{-(n+2)}.$$

onde ξ_x é um número que está situado entre 1 e x. Uma vez que x está no intervalo $[0.9, 1.1]$, este número ξ_x pode estar no intervalo $]0.9, 1.1[$. Vamos então estimar o valor deste resto

$$\left|R_1^n(x)\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!(\xi_x)^{-(n+2)}}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}\right| = \left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(\xi_x)^{n+2}}\right| \leq \frac{0.1^{n+1}}{0.9^{n+2}} = (\frac{0.1}{0.9})^{n+1}\frac{1}{0.9} = (\frac{1}{9})^{n+1}\frac{1}{0.9}$$

A sucessão $(\frac{1}{9})^{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, é uma sucessão decrescente, de limite 0, pelo que podemos afirmar que se o grau do polinómio de Taylor aumenta, estaremos a aproximar a função com um erro que diminui, até ser 0, no limite, quando $n \to \infty$. Se queremos que o erro seja menor que $\frac{1}{1000}$, teremos de encontrar n tal que

$$(\frac{1}{9})^{n+1}\frac{1}{0.9} < \frac{1}{1000}$$

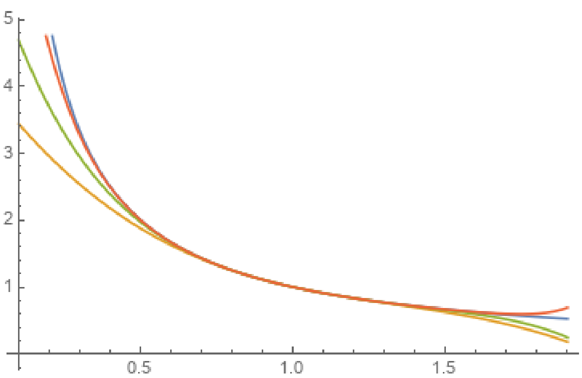
e verificamos que isto acontece para $n \geq 3$. □

Vou ainda fazer algumas considerações, relativas a este exercício que acabamos de resolver Temos calculado, através da estimação do resto de Lagrange, que

$$\left|f(x) - T_1^n(x)\right| < (\frac{1}{9})^{n+1}\frac{1}{0.9}, x \in [0.9, 1.1]$$

Isto significa que a distância entre os gráficos destas duas funções é menor do que $(\frac{1}{9})^{n+1}\frac{1}{0.9}$, (um número cada vez mais pequeno, a medida que n aumenta), e esta estimação da distância serve para qualquer ponto do intervalo. Isto é a essência da definição que vamos introduzir. Neste caso a sucessão formada para cada valor de n pelo polinômio de Taylor, aproxima o valor da função f, com uma estimação uniforme em todo o intervalo $[0.9, 1.1]$.

Se representamos o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, e os polinómios $T_1^3(x), T_1^5(x), T_1^{10}(x)$,



observamos esta convergência uniforme. O gráfico dos polinômios sucessivos avança com erro "uniforme"no intervalo considerado.

Exemplo. Vamos considerar novamente a função $\frac{1}{x}$, e vamos procurar a sua série de Taylor, por manipulação algébrica. Lembramos a identidade

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, |x| < 1$$

Usamos esta identidade e obtemos

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x-1+1} = \frac{1}{1+x-1} = \frac{1}{1-(-(x-1))} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-(x-1))^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x-1)^n \; |-(x-1)| < 1$$

A identidade $|-(x-1)| < 1$ é equivalente à $|x-1| < 1$, e obtemos o intervalo de convergência $]0,2[$. Se consideramos qualquer intervalo dentro deste intervalo de convergência, por exemplo o intervalo $[0.1, 1.8]$, e queremos aproximar a função $f(x) = \frac{1}{x}$, pelo o seu polinómio de Taylor de ordem, $n = 5$ (por exemplo), neste caso teríamos, se usamos a série de Taylor

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x-1)^n = 1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4-(x-1)^5+\sum_{n=6}^{+\infty}(-1)^n(x-1)^n$$

Portanto neste caso se queremos estimar o erro cometido neste intervalo quando substituímos a função pelo seu polinómio de Taylor obtemos

$$\left|\frac{1}{x}-(1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4-(x-1)^5)\right| = \left|\sum_{n=6}^{+\infty}(-(x-1))^n\right|$$

se queremos estimar esta soma, somente devemos reparar que para $r < 1$,

$$r^6+r^7+r^8+\cdots = r^6(1+r+r^2+\dots) = r^6\frac{1}{1-r} = \frac{r^6}{1-r}.$$

No nosso caso teríamos

$$\left|\frac{1}{x}-(1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4-(x-1)^5)\right| = \left|\sum_{n=6}^{+\infty}(-(x-1))^n\right|$$

$$\leq \left|\frac{(-(x-1))^6}{1-(-(x-1))}\right| = \frac{|x-1|^6}{|x|}$$

Podemos estimar este erro, no intervalo $[0.1, 1.8]$ e obtemos

$$\frac{|x-1|^6}{|x|} \leq \frac{0.9^6}{0.1}$$

Em geral para o polinómio de Taylor de ordem n centrado em $c = 1$, a estimação do erro no intervalo $[0.1, 1.8]$ é de

$$\frac{|x-1|^{n+1}}{|x|} \leq \frac{0.9^{n+1}}{0.1}.$$

Voltamos a observar que a estimação do erro é "uniforme"para todos os pontos do intervalo $[0.1, 1.8]$.

7.1 Convergência pontual e uniforme de sucessões de funções

Definição (Convergência pontual)**.** Consideremos uma sucessão de funções f_n, n $= 1, 2 \dots,$ definidas cada uma delas num certo domínio D e para cada x suponhamos que existe $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ que chamaremos $f(x)$. Estaremos então a definir para cada $x \in D$, $f(x)$, pelo que temos definido uma função chamada o limite pontual da sucessão f_n, no domínio D.

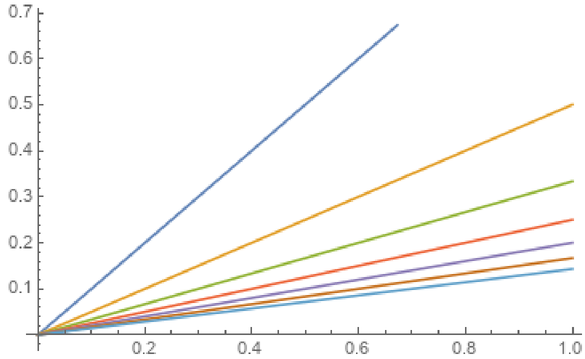
Exemplo. Consideremos a função $f_n(x) = \frac{x}{n}$, n= 1, 2 ..., e consideremos o domínio $D = [0,1]$. Para cada $x \in [0,1]$, calculamos

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = 0$$

pelo que diremos que a função $f(x) = 0$, definida em $[0,1]$ é o limite pontual da função $f_n(x)$. Neste caso podemos estudar a distância entre os gráficos de $f(x)$ e $f_n(x)$ no intervalo $[0,1]$

$$|f(x) - f_n(x)| = \left|0 - \frac{x}{n}\right| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Uma vez que conseguimos "controlar"a distância entre os dois gráficos, pela sucessão $\frac{1}{n}$, para todos os pontos do intervalo $[0,1]$, diremos que a sucessão $f_n(x)$ converge uniformemente para a função $f(x)$ no intervalo $[0,1]$. Desenhamos



Definição (Convergência uniforme)**.** Diremos que a sucessão de funções f_n, definidas num domínio D, convergem uniformemente neste domínio para a função f, se

$$|f(x) - f_n(x)| \leq m_n, x \in D$$

onde m_n é uma sucessão que converge para 0 quando $n \to +\infty$.

Exemplo. Consideremos a sucessão de funções $f_n(x) = x^n$, n= 1, 2 .... Calculamos o limite pontual desta sucessão quando $n \to +\infty$, para $x \in [0,1]$.

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & x \in [0,1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Este limite não é uniforme. Se tentamos encontrar uma sucessão m_n tal que

$$|f(x) - f_n(x)| \leq m_n, x \in [0,1]$$

então também será verdadeiro para

$$|f(x) - f_n(x)| \leq m_n, x \in [0,1[$$

Neste intervalo a função limite $f(x) = 0$, $x \in [0,1[$, e obtemos

$$|f(x) - f_n(x)| = |x^n - 0| = |x|^n \leq m_n, x \in [0,1[$$

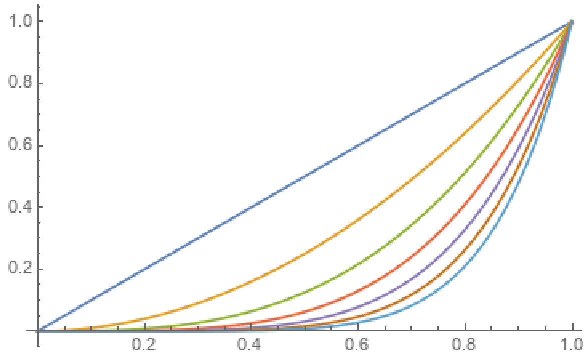
A sucessão m_n se existisse deve ser uma sucessão de limite 0 quando $n \to +\infty$, mas se observamos

$$|x|^n \leq m_n$$

quando $x \to 1$, acontece que obtemos a desigualdade

$$1 \leq m_n$$

pelo que vemos que chegamos a um absurdo. Não existe m_n sucessão de limite 0 quando $n \to +\infty$, ou seja não conseguimos controlar o "erro"de manera uniforme, e afirmamos que a sucessão f_n não converge uniformemente.



7.2 Convergência pontual e uniforme de séries de funções: Continuidade e integrabilidade

Consideremos séries cujos termos são funções reais de variável real, i. e. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. No caso em que $f_n \equiv a_n x^n$, $n = 0, 1, \ldots$ chamaremos séries de potências.

Definição. Diremos que a série de funções $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ com $f_n : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ converge pontualmente em E, se para cada valor $x \in E$ fixo, dado $\varepsilon > 0$ existe um indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$

$$|f(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

onde $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ e $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ denotam respectivamente a soma da série e a soma parcial da série no ponto $x \in E$.

Quando a série converge pontualmente em E, a estimação do erro cometido $|f(x) - s_n(x)|$ depende de cada ponto $x \in E$. Quando isto não acontece estaremos a falar de convergência uniforme de séries de funções. Mais concretamente temos a seguinte definição.

Definição. Diremos que a série de funções $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ com $f_n : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ é uniformemente convergente em E, se dado $\varepsilon > 0$ existe um indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, $|f(x) - s_n(x)| < \varepsilon$, onde $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ e $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ denotam respectivamente a soma da série e a soma parcial da série em cada ponto $x \in E$. Vamos enunciar o seguinte critério, ferramenta muito útil na discussão da convergência uniforme de uma série.

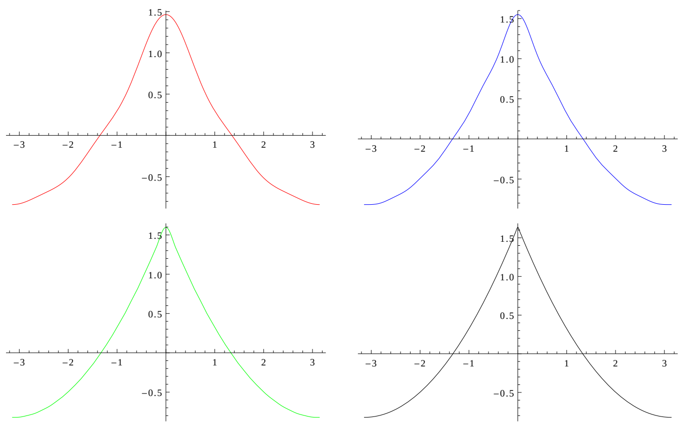
Teorema (M-Weierstrass)**.** Sejam $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ uma série de funções, com $f_n : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ e $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} M_n$ uma série de termos reais positivos. Se $|f_n(x)| \leq M_n$, para todo o $x \in E$ e cada $n \in \mathbb{N}$, i.e. *a série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} M_n$ *é majorante da* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ *em* E, e se $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} M_n$ é convergente, então a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ é uniformemente convergente em E. Em particular também podemos referir que é absolutamente convergente em E.

Exemplo. A série de funções $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ é uniforme e absolutamente convergente em $\mathbb{R}$.

Neste caso podemos verificar que $\left|\dfrac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}$. A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente pelo que se aplicamos o Teorema M-Weierstrass podemos concluir que esta série é absoluta e uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

Incluímos os gráficos das somas parciais desta série

$$a5 := Plot[Sum[Cos[n*x]/n^2, \{n, 1, 5\}], \{x, -Pi, Pi\}, PlotStyle->Red]$$
$$a10 := Plot[Sum[Cos[n*x]/n^2, \{n, 1, 10\}], \{x, -Pi, Pi\}, PlotStyle->Blue]$$
$$a20 := Plot[Sum[Cos[n*x]/n^2, \{n, 1, 20\}], \{x, -Pi, Pi\}, PlotStyle->Green]$$
$$a100 := Plot[Sum[Cos[n*x]/n^2, \{n, 1, 100\}], \{x, -Pi, Pi\}, PlotStyle->Black]$$



A convergência uniforme de uma série de funções garante propriedades importantes no comportamento da série. Apresentamos o seguinte teorema

Teorema (continuidade, integração e convergência uniforme). Seja $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ uma série de funções, com $f_n : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que a série converge uniformemente em E e denotemos $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

• Se cada uma da funções f_n é uma função contínua em E então a função s é uma função contínua em E.

• Para $[a, b]$ intervalo finito, $[a, b] \subset E$, temos que

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Exemplo. Se queremos calcular a área do gráfico representado pela função $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$, entre o ponto 0 e o ponto 1.3, deveremos calcular

$$\int_0^{1.3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} dx.$$

Agora usando que esta série converge uniformemente no intervalo $[0, 1.3]$ podemos trocar a ordem da integração com o integral, obtendo

$$\int_0^{1.3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{1.3} \frac{\cos(nx)}{n^2} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}\Bigg|_0^{1.3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n(1.3))}{n^3}.$$

Para calcular esta soma de forma aproximada calculamos o valor da soma parcial

$$s_{100} = \sum_{n=1}^{100} \frac{\sin(n(1.3))}{n^3} = 0.994175.$$

Se calculamos a área do triângulo de base 1.3 e altura 1.7 obtemos o valor $A = 1.3 * 1.7/2 = 1.105$.

7.3 Exemplo de aplicação do teorema M de Weierstrass para a convergência uniforme num intervalo fechado qualquer definido dentro do intervalo de convergência da série de potências

Para acabar a aula, vamos a usar o teorema de Weierstrass para provar que em qualquer intervalo fechado, definido dentro do intervalo de convergência de uma série de potências, esta série de potências converge absoluta e uniformemente.

Vou realizar este cálculo num exemplo concreto, ainda que as ideias que usamos podem ser aplicadas de forma análoga num outro caso qualquer Se consideramos uma série de potências (vamos considerar centrada em $c = 0$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

que converge absolutamente no seu intervalo de convergência $]-1, 1[$ e consideremos um intervalo fechado qualquer, contido neste intervalo de convergência, por exemplo podemos considerar o intervalo $[-0.3, 0.5]$. Para estudar a convergência uniforme desta série de potências neste intervalo $[-0.3, 0.5]$, para usar o critério M de Weierstrass, devemos majorar o termo geral desta série neste intervalo considerado

$$|x^n| = |x|^n \leq (0.5)^n$$

A série numérica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (0.5)^n$$

é convergente, pelo que por aplicação deste critério podemos afirmar que a série de potência é absolutamente e uniformemente convergente no intervalo $[-0.3, 0.5]$. A ideia da demonstração, neste caso é tentar majorar o resto da série

$$\left| \sum_{n=m}^{+\infty} x^n \right| \leq \sum_{n=m}^{+\infty} |x|^n \leq \sum_{n=m}^{+\infty} (0.5)^n = \frac{(0.5)^m}{1-5}$$

e reparamos que a majoração do erro cometido é uniforme, pelo que a convergência é uniforme.

Aula 8: Séries de Fourier

Vamos dar a definição de série de Fourier, a fórmula para o cálculo dos coeficientes desta série e um resultado principal que nos garante em que condições podemos afirmar que a série de Fourier de uma função representa em cada ponto o valor da dita função.

Definição. Dada uma função f definida no intervalo $[-L, L]$ denominamos como série de Fourier desta função à soma infinita de senos e co-senos

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\big)$$

onde os coeficientes são dados por

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

Para deduzir a fórmula destes coeficientes, baseamo-nos nas propriedades, ditas de ortogonalidade

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{k\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad k \neq n \\ L & \text{se} \quad k = n \neq 0 \\ 2L & \text{se} \quad k = n = 0. \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{k\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad k \neq n \\ L & \text{se} \quad k = n \neq 0 \end{cases}$$

e

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{k\pi x}{L}dx = 0.$$

Exemplo. Vamos calcular a série de Fourier da função f(x) = 1+x, no intervalo $[-1, 1]$.

Para construir esta série precisamos de calcular os coeficientes a_n e b_n, para $L = 1$, pelo que:

$$a_0 = \int_{-1}^{1}(1+x)dx = x + \frac{x^2}{2}\bigg|_{-1}^{1} = (1 + \frac{1^2}{2}) - ((-1) + \frac{(-1)^2}{2}) = 2.$$

Para $n = 1, 2 \dots$, calculamos

$$a_n = \int_{-1}^{1}(1+x)\cos(n\pi x)dx = (1+x)\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\bigg|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}dx$$

$$= \frac{\cos(n\pi x)}{(n\pi)^2}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{\cos(n\pi)}{(n\pi)^2} - \frac{\cos(-n\pi)}{(n\pi)^2} = 0.$$

Calculamos agora os coeficientes b_n, para $n = 1, 2, \dots$, onde vamos a usar a identidade $\cos n\pi = (-1)^n$

$$b_n = \int_{-1}^{1}(1+x)\sin(n\pi x)dx = -(1+x)\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\bigg|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}dx$$

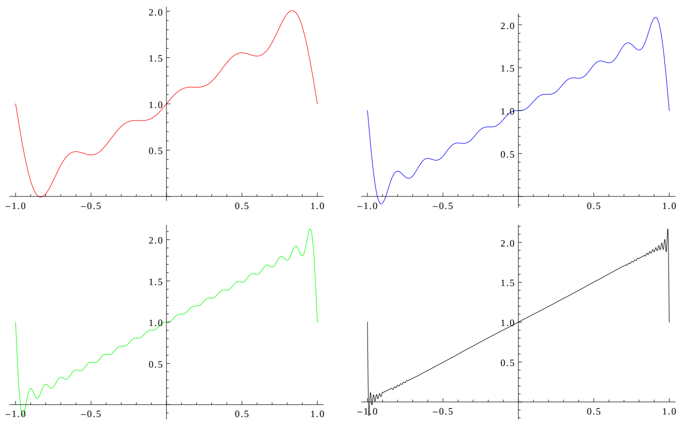
$$= -2\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi)^2}\Bigg|_{-1}^{1} = -2\frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{\sin(n\pi)}{(n\pi)^2} - \frac{\sin(-n\pi)}{(n\pi)^2} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Pelo que obtemos que a série de Fourier da função $1 + x$ no intervalo $[-1, 1]$ é dada por

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(n\pi x).$$

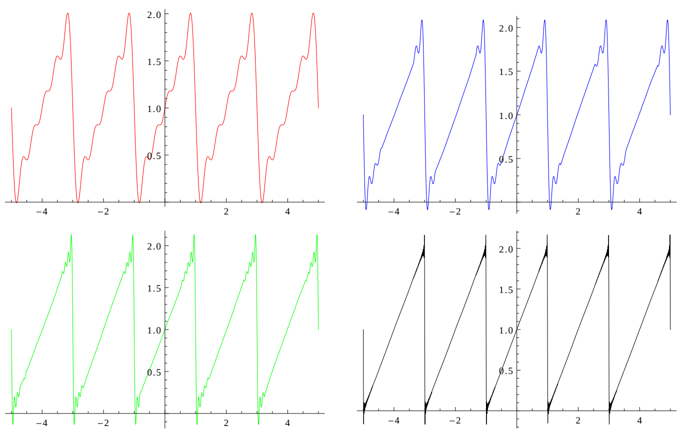
Incluímos os gráficos das somas parciais desta série

$$a5 := Plot[1 + Sum[2 * (-1)^{(}n + 1)Sin[n * Pi * x]/(nPi), \{n, 1, 5\}], \{x, -1, 1\}, PlotStyle -> Red]$$
$$a10 := Plot[1 + Sum[2 * (-1)^{(}n + 1)Sin[n * Pi * x]/(nPi), \{n, 1, 10\}], \{x, -1, 1\}, PlotStyle -> Blue]$$
$$a20 := Plot[1 + Sum[2 * (-1)^{(}n + 1)Sin[n * Pi * x]/(nPi), \{n, 1, 20\}], \{x, -1, 1\}, PlotStyle -> Green]$$
$$a100 := Plot[1 + Sum[2 * (-1)^{(}n + 1)Sin[n * Pi * x]/(nPi), \{n, 1, 100\}], \{x, -1, 1\}, PlotStyle -> Black]$$



Pela observação destes gráficos parece que a série reproduz a função $f(x) = 1 + x$ no intervalo $[-1, 1]$ e também parece claro que esta série não converge uniformemente quando estamos perto dos extremos do intervalo $[-1, 1]$. Se agora representamos estas somas parciais no intervalo $[-5, 5]$

$$a5 := Plot[1 + Sum[2 * (-1)^{(}n + 1)Sin[n * Pi * x]/(nPi), \{n, 1, 5\}], \{x, -5, 5\}, PlotStyle -> Red]$$
$$a10 := Plot[1 + Sum[2 * (-1)^{(}n + 1)Sin[n * Pi * x]/(nPi), \{n, 1, 10\}], \{x, -5, 5\}, PlotStyle -> Blue]$$
$$a20 := Plot[1 + Sum[2 * (-1)^{(}n + 1)Sin[n * Pi * x]/(nPi), \{n, 1, 20\}], \{x, -5, 5\}, PlotStyle -> Green]$$
$$a100 := Plot[1 + Sum[2 * (-1)^{(}n + 1)Sin[n * Pi * x]/(nPi), \{n, 1, 100\}], \{x, -1, 1\}, PlotStyle -> Black]$$



observamos que estas somas parciais são periódicas, pelo que a série é periódica e somente pode ser usada para aproximar a função $f(x) = 1 + x$, no intervalo $]-1, 1[$. Fora deste intervalo esta série reproduz uma função periódica, de período 2.

8.1 Série de Fourier de uma função par ou ímpar

Quando calculamos a série de Fourier no intervalo $[-L, L]$ de uma função par, $f(x) = f(-x)$ os coeficientes b_n são nulos pelo que se diz que a série de Fourier é uma série de co-senos. Vamos calcular estes coeficientes b_n

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

a função que estamos a integrar é a multiplicação de uma função par por uma função ímpar do que resulta uma função ímpar. b_n corresponde então ao valor da área determinada pelo gráfico de uma função ímpar, no intervalo simétrico $[-L, L]$, pelo que dada a simetria da figura podemos afirmar que esta área é zero.

Exemplo. Consideramos a função par $f(x) = x^2$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Calculamos os coeficientes da sua série de Fourier,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^\pi = \frac{2\pi^2}{3}.$$

para $n = 1, 2\ldots$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos(nx)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(x^2\left.\frac{\sin(nx)}{n}\right|_0^\pi - \int_0^\pi 2x\frac{\sin(nx)}{n}dx\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(2x\left.\frac{-\cos(nx)}{n^2}\right|_0^\pi + \int_0^\pi 2\frac{\cos(nx)}{n^2}dx\right) = -\frac{2}{\pi}2\pi\frac{-(-1)^n}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

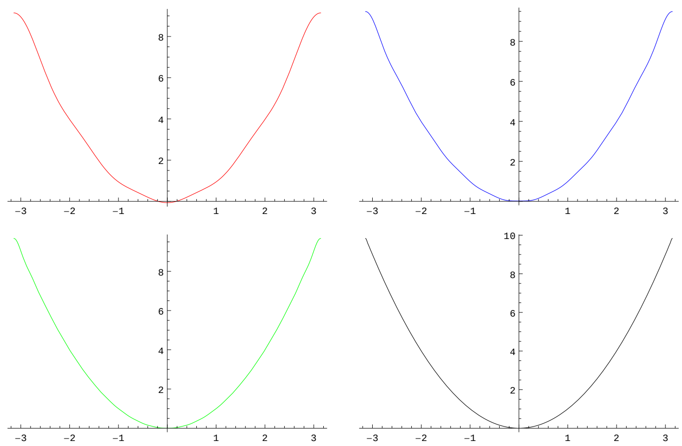
como já foi referido, se calculamos os coeficientes b_n obtemos

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin(nx)dx = 0$$

A série de Fourier da função $f(x) = x^2$, no intervalo $[-\pi, \pi]$ é dada por

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Incluímos os gráficos para 5, 10, 15 e 100 termos nos somatórios



Quando calculamos a série de Fourier no intervalo $[-L,L]$ de uma função ímpar, $f(x)=-f(-x)$ os coeficientes a_n são nulos pelo que se diz que a série de Fourier é uma série de senos. Vamos calcular estes coeficientes a_n

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = 0, \quad n=1,2,\ldots,$$

onde temos usado que a função que estamos a integrar é a multiplicação de uma função ímpar por uma função par do que resulta uma função ímpar. O integral num intervalo simétrico de uma função ímpar é nulo.

Exemplo. Consideramos a função ímpar $f(x)=x$ no intervalo $[-2\pi,2\pi]$.

Calculamos os coeficientes da sua série de Fourier,

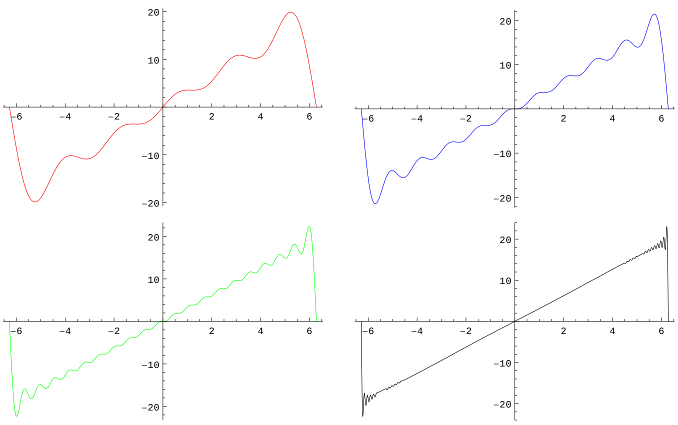
$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} x\sin(\frac{n}{2}x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x\sin(\frac{n}{2}x)dx = \frac{1}{\pi}\left(x\frac{-\cos(\frac{n}{2}x)}{\frac{n}{2}}\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{-\cos(\frac{n}{2}x)}{\frac{n}{2}}dx\right)$$
$$= 2\pi\frac{-\cos(\frac{n}{2}(2\pi))}{\frac{n}{2}} = \frac{4\pi(-1)^{n+1}}{n}$$

para $n=1,2\ldots$.

A série de Fourier é dada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4\pi(-1)^{n+1}}{n}\sin(\frac{n}{2}x).$$

Incluímos os gráficos para 5, 10, 15 e 100 termos nos somatórios



8.2 Teorema de representação

É claro pelos gráficos obtidos anteriormente que a série de Fourier está muito perto de representar a função dada no intervalo $[-L,L]$. O seguinte teorema da-nos uma primeira resposta a esta questão da representação de uma função pela sua série de Fourier.

Teorema. Suponhamos que f é uma função contínua e derivável no intervalo $[-L,L]$ tal que $f(L)=f(-L)$ e $f'(-L)=f'(L)$, então verifica-se

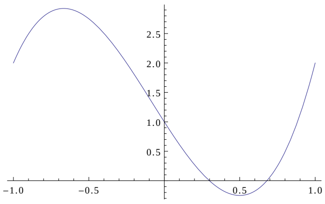
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

para $x\in[-L,L]$.

Exemplo. Calcule a série de Fourier da função $f(x) = 1-4x+x^2+4x^3$, no intervalo $[-1,1]$. Calcule, justificando, $f(1)$ através do cálculo da série obtida nesse ponto $x=1$ e obtenha a identidade

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Discussão. Esta função verifica as hipóteses do teorema de representação de Fourier, $f(x)$ é uma função contínua e existe a sua derivada no intervalo $[-1,1]$. Também verifica-se $f(-1) = f(1) = 2$. Incluímos o gráfico desta função neste intervalo:



Para construir a série de Fourier precisamos de calcular os coeficientes a_n e b_n, para $L=1$, pelo que:

$$a_0 = \int_{-1}^{1} (1-4x+x^2+4x^3)dx = (x-2x^2+\frac{1}{3}x^3+x^4)\Big|_{-1}^{1} = (1-2+\frac{1}{3}+1)-((-1)-2-\frac{1}{3}+1)) = 2+\frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

Para $n = 1, 2 \ldots$, calculamos

$$a_n = \int_{-1}^{1} (1-4x+x^2+4x^3)\cos(n\pi x)dx$$

Este cálculo é demorado mas podemos usar a seguinte simplificação: Cada vez que encontramos potências ímpares de x a multiplicar pela função $\cos(n\pi x)$ obtemos uma função ímpar, e uma vez que estamos a integrar num intervalo simétrico a contribuição para o valor do integral será nula, pelo que o cálculo do a_n é simplificado para

$$a_n = \int_{-1}^{1} (1-4x+x^2+4x^3)\cos(n\pi x)dx = \int_{-1}^{1} (1+x^2)\cos(n\pi x)dx$$

Agora para calcular este integral usamos a integração por partes, onde voltamos a lembrar

$$\int f g' = f g - \int f' g$$

neste caso a função que iremos identificar com f é $1+x^2$ e a função que identificaremos por g será $\cos(n\pi x)$, e assim obtemos

$$a_n = \int_{-1}^{1} (1+x^2)\cos(n\pi x)dx = (1+x^2)\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2x\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}dx$$

uma vez que $\sin(n\pi) = 0$ a contribuição deste primeiro somando é nula. Usamos que a função $2x\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}$ é a multiplicação de duas funções ímpares pelo que é uma função par e transformamos o intervalo de integração (somente com o intuito de facilitar os cálculos) e chegamos a:

$$a_n = -2\int_{0}^{1} 2x\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}dx$$

voltamos a aplicar integração por partes obtemos:

$$a_n = -2\left(2x\frac{-\cos(n\pi x)}{(n\pi)^2}\Big|_{0}^{1} + \int_{0}^{1} 2\frac{-\cos(n\pi x)}{(n\pi)^2}dx\right)$$

usamos a identidade $\cos n\pi = (-1)^n$

$$a_n = -2\left(2\frac{(-1)^{n+1}}{(n\pi)^2} + 2\frac{-\sin(n\pi x)}{(n\pi)^3}\Big|_0^1\right) = \frac{(-1)^n 4}{(n\pi)^2}.$$

Calculamos agora os coeficientes b_n, para $n = 1, 2, \ldots$,

$$b_n = \int_{-1}^{1}(1-4x+x^2+4x^3)\sin(n\pi x)dx = \int_{-1}^{1}(-4x+4x^3)\sin(n\pi x)dx = 2\int_{0}^{1}(-4x+4x^3)\sin(n\pi x)dx$$

$$= 8\int_0^1(-x+x^3)\sin(n\pi x)dx = 8\left((-x+x^3)\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big|_0^1 + \int_0^1(-1+3x^2)\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}dx\right)$$

$$= 8\left((-1+3x^2)\frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi)^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 6x\frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi)^2}dx\right)$$

$$= -8\left(6x\frac{-\cos(n\pi x)}{(n\pi)^3}\Big|_0^1 + \int_0^1 6\frac{\cos(n\pi x)}{(n\pi)^3}dx\right) = 48\frac{(-1)^n}{(n\pi)^3}.$$

Pelo que obtemos que a série de Fourier da função $f(x) = (1-4x+x^2+4x^3)$ no intervalo $[-1, 1]$ é dada por

$$\frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 4}{(n\pi)^2}\cos(n\pi x) + 48\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n\pi)^3}\sin(n\pi x).$$

e verifica-se por aplicação direta do Teorema de representação

$$1-4x+x^2+4x^3 = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 4}{(n\pi)^2}\cos(n\pi x) + 48\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n\pi)^3}\sin(n\pi x),\ x \in [-1, 1]$$

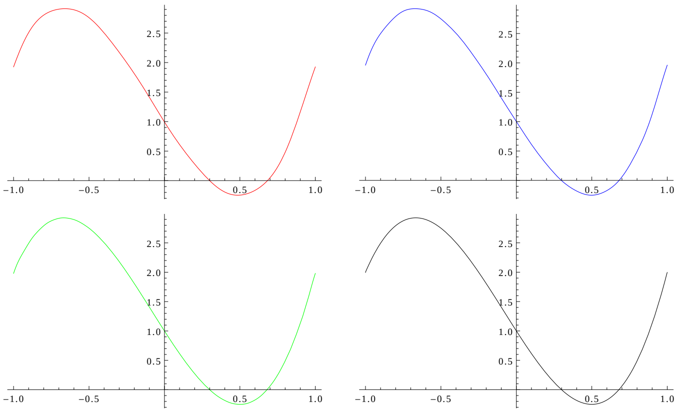
Em particular, se substituímos $x = 1$ na identidade obtida chegamos à

$$2 = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 4}{(n\pi)^2}(-1)^n \qquad \text{ou} \qquad 2 = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{(n\pi)^2}, \qquad \text{i.e.} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{(n\pi)^2} = 2 - \frac{4}{3};$$

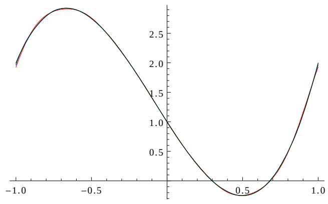
logo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = (\frac{2}{3})\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6}.$ □

Incluímos os gráficos das somas parciais desta série

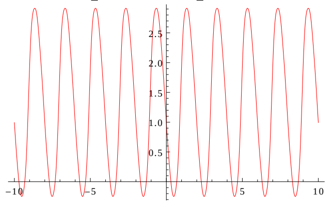
$a5 := Plot[4/3 + Sum[4*(-1)^n Cos[n*Pi*x]/(nPi)^2+$
$48(-1)^n * Sin[n*Pi*x]/(nPi)^3, \{n, 1, 5\}], \{x, -1, 1\}, PlotStyle -> Red]$
$a10 := Plot[4/3 + Sum[4*(-1)^n Cos[n*Pi*x]/(nPi)^2+$
$48*(-1)^n * Sin[n*Pi*x]/(nPi)^3, \{n, 1, 10\}], \{x, -1, 1\}, PlotStyle -> Blue]$
$a20 := Plot[4/3 + Sum[4*(-1)^n Cos[n*Pi*x]/(nPi)^2+$
$48*(-1)^n * Sin[n*Pi*x]/(nPi)^3, \{n, 1, 20\}], \{x, -1, 1\}, PlotStyle -> Green]$
$a100 := Plot[4/3 + Sum[4*(-1)^n Cos[n*Pi*x]/(nPi)^2+$
$48*(-1)^n * Sin[n*Pi*x]/(nPi)^3, \{n, 1, 100\}], \{x, -1, 1\}, PlotStyle -> Black]$



A convergência destas séries é uniforme, por aplicação do Critério de Weierstrass já com 5 termos obtemos uma simulação muito apurada da função original $f(x)$. Se desenhamos os gráficos todos juntos,



quase não podemos observar nenhuma diferença entre eles. Desenhamos agora a soma parcial da série de Fourier para 5 termos no intervalo $[-10, 10]$



8.3 Exercícios propostos

1. Use a identidade trigonométrica $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$ e prove que

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{k\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad k \neq n \\ L & \text{se} \quad k = n \neq 0 \\ 2L & \text{se} \quad k = n = 0. \end{cases}$$

2. Calcule a série de Fourier da função $f(x) = -1 - 4x + x^2 + x^3$ no intervalo $[-2, 2]$ e obtenha uma representação gráfica para a soma com 5 termos. Identifique, justificando, o valor desta série no ponto $x = 2$.

3. Calcule a série de Fourier da função $f(x) = e^x$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.

4. Usando o resultado do exercício anterior calcule a série de Fourier da função

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

no intervalo $[-\pi, \pi]$. Explique o valor obtido para os coeficientes b_n.

Aula 9: Teorema de Dirichlet para séries de Fourier. Séries de senos e séries de cosenos

9.1 Teorema de Dirichlet

Existem funções que são contínuas e deriváveis de forma contínua num intervalo excepto num conjunto finito de pontos. Estas funções aparecem também de forma natural em muitas aplicações pelo que é natural perguntar se estas funções podem ser representadas pela sua série de Fourier. A resposta é dada no seguinte teorema.

Teorema (Dirichlet)**.** Suponhamos que f é uma função de classe C^1 no intervalo $[-L, L]$ excepto num conjunto finito de pontos. Então

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

para $x \in (-L, L)$, onde

$$f(x^+) = \lim_{t \to x, t > x} f(t)$$

denota o valor limite da função f no ponto x quando nos aproximamos deste ponto pela direita e

$$f(x^-) = \lim_{t \to x, t < x} f(t)$$

denota o valor limite da função f no ponto x quando nos aproximamos deste ponto pela esquerda. Também se verifica que

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} = \frac{f(L) + f(-L)}{2}$$

Observação. Nos pontos onde a função $f(x)$ é contínua, verifica-se que $f(x^+) = f(x^-)$ pelo que neste caso

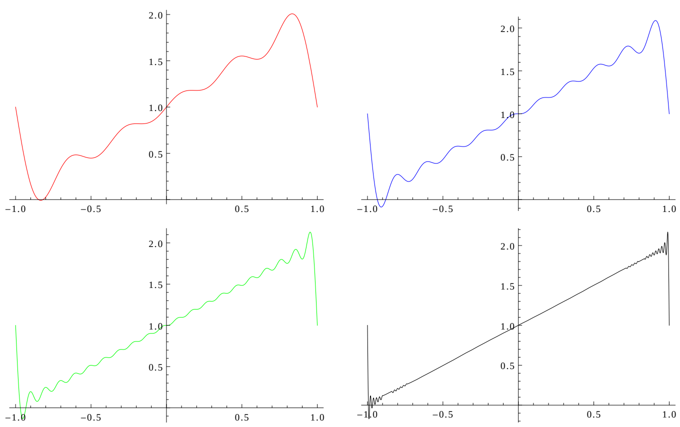
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = f(x)$$

e a soma parcial da série de Fourier aproxima o valor da função nesse ponto.

Na aula anterior tínhamos calculado a série de Fourier da função f(x) = 1+x, no intervalo $[-1, 1]$,

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(n\pi x).$$

Incluímos os gráficos das somas parciais desta série



Pela observação destes gráficos parece que a série reproduz a função $f(x) = 1 + x$ no intervalo $]-1,1[$, e nos pontos extremos o gráfico tentar tomar o valor 1, que corresponde ao ponto meio entre $f(-1)$ e $f(1)$. Isto é exatamente o que nos diz o teorema de Dirichlet.

Exemplo. Calcule a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-2,0[\\ 2 & x \in [0,2] \end{cases}$$

e obtenha uma representação gráfica para a soma com 10 termos no intervalo $[-6,6]$.

Discussão. Neste caso a função $f(x)$ é contínua e diferenciável em todo o ponto do intervalo $[-2,2]$ excepto no ponto 0. Calculamos os coeficientes da série de Fourier, onde neste caso $L = 2$, pelo que

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-1)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 2dx$$
$$= \frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}4 = 1.$$

Para $n = 1,2\ldots$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 2\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$
$$= \frac{1}{2}\,(-1)\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Bigg|_{-2}^{0} + \frac{1}{2}\,2\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Bigg|_{0}^{2} = 0$$

Para $n = 1,2\ldots$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-1)\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 2\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$
$$= \frac{1}{2}\,(-1)\frac{-\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Bigg|_{-2}^{0} + \frac{1}{2}\,2\frac{-\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Bigg|_{0}^{2} = \frac{1}{2}\frac{1-\cos(-n\pi)}{\frac{n\pi}{2}} + \frac{1}{2}2\frac{1-\cos(n\pi)}{\frac{n\pi}{2}}$$
$$= \frac{3}{n\pi}(1-\cos(n\pi)) = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{6}{n\pi} & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

A série de Fourier da função $f(x)$ é dada por

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6}{(2n+1)\pi}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2} = \begin{cases} f(x) & x \in]-2,0[\text{ou } x \in]0,2[\\ \frac{1}{2} & x = -2,0,2. \end{cases} \qquad \square$$

9.2 Série de Fourier de senos ou de co-senos

As séries de Fourier são uma ferramenta fundamental na resolução de equações diferenciais em derivadas parciais, que aparecem em inúmeros modelos associados as leis da Física, como a equação do calor. Na resolução destas EDP pode ser necessário obter a série de Fourier de uma função somente como somas de senos ou somente como somas de co-senos. Isto acontece naturalmente quando a função f que estamos a considerar, definida no intervalo $[-L,L]$ é uma função ímpar ou par respectivamente.

Se a função f que estamos a querer representar como série de Fourier, somente como soma de senos ou como soma de co-senos, está definida no intervalo $[0,L]$, podemos estender a definição de esta função a todo o intervalo $[-L,L]$ como uma função ímpar, que lembro que são as funções g que verificam $g(x)=-g(-x)$ e neste caso a sua série de Fourier somente terá senos o podemos estender a definição desta função a todo o intervalo $[-L,L]$ como uma função par, que lembro que são as funções g que verificam $g(x)=g(-x)$ e neste caso a sua série de Fourier somente terá co-senos.

Série de Fourier de senos. Consideremos f definida no intervalo $[0,L]$ de classe C^1 excepto num conjunto finito de pontos. Pretendemos calcular uma série de Fourier para esta função onde somente apareçam senos. Isto seria natural no caso que a função f fosse uma função ímpar. Definiremos uma nova função g definida no intervalo $[-L,L]$, chamada extensão ímpar da função f, que pode ser definida como

$$g(x)=\begin{cases} -f(-x) & x\in[-L,0] \\ f(x) & x\in[0,L] \end{cases}$$

A série de Fourier desta função g, no intervalo $[-\pi,\pi]$ pode ser obtida como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

onde os coeficientes são dados por

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n=1,2,\ldots,$$

se usamos que a função que estamos a integrar é a multiplicação de uma função ímpar por outra função ímpar verificamos que estamos a integrar uma função par pelo que este integral pode ser escrito como

$$=\frac{2}{L}\int_{0}^{L} g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

e agora, a função g é exatamente a nossa função f, no intervalo $[0,L]$, pelo que

$$b_n=\frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

e a série de Fourier obtida, em principio para a função g no intervalo $[-L,L]$ é a série que procurávamos para a função f no intervalo $[0,L]$. □

Série de Fourier de co-senos. Podemos proceder de forma análoga e a série de Fourier de co-senos da função f no intervalo $[0,L]$, é dada por

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

onde os coeficientes desta série são calculados como

$$a_n=\frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n=0,1,2,\ldots$$ □

Exemplo. Vamos calcular a série de Fourier da função $f(x)=x$ no intervalo $[-1,1]$.

Neste caso trata-se de uma função ímpar pelo que a sua soma de Fourier é uma soma de senos.

Discussão. Neste caso a série de Fourier é dada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi x)$$

onde

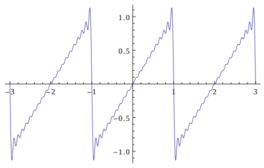
$$b_n = \int_{-1}^{1} x \sin(n\pi x) dx = \frac{(-1)^{n+1} 2}{n\pi}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Temos então que $x = \frac{2}{\pi}\sin(\pi x) - \frac{2}{2\pi}\sin(2\pi x) + \frac{2}{3\pi}\sin(3\pi x) + \ldots$, para $[-1, 1]$. □

Incluímos o gráfico da função

$$g(x) = \sum_{n=1}^{20} \frac{(-1)^{n+1} 2}{n\pi} \sin(n\pi x)$$

para $x \in [-3, 3]$. Esta função é uma aproximação à série e portanto à função $f(x) = x$ no intervalo $]-1, 1[$. Nos pontos -1 e 1 toma-se a semi-soma do valor $f(-1)$ e $f(1)$ que é dado por $\frac{f(-1)+f(1)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$.



Exemplo. Vamos calcular a série de Fourier da função $f(x) = x$ no intervalo $[0, 1]$ como soma de co-senos.

Para isto acontecer vamos a estender esta função a todo o intervalo $[-1, 1]$ como uma função par.

Discussão. Neste caso a série de Fourier é dada por $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\pi x)$ onde

$$a_0 = 2\int_0^1 x dx = x^2\Big|_0^1 = 1.$$

Para $n = 1, 2 \ldots$

$$a_n = 2\int_0^1 x \cos(n\pi x) dx = 2x\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 2\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} dx$$

$$= 2\frac{\cos(n\pi x)}{(n\pi)^2}\Bigg|_0^1 = 2\frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2},$$

pelo que $a_{2n} = 0$ e $a_{2n+1} = \frac{-4}{((2n+1)\pi)^2}$, para $n = 0, 2, \ldots$.

Temos então que a série de Fourier obtida é dada por

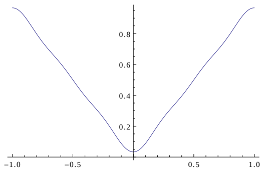
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n+1} \cos((2n+1)\pi x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-4}{((2n+1)\pi)^2} \cos((2n+1)\pi x)$$

ou $x = \frac{1}{2} + \frac{-4}{\pi^2}\cos(\pi x) + \frac{-4}{9\pi^2}\cos(3\pi x) + \frac{-4}{25\pi^2}\cos(5\pi x) + \ldots$ para $[0, 1]$. □

Incluímos o gráfico da soma parcial da série de Fourier obtida

$$s_5(x) = \frac{1}{2} + \frac{-4}{\pi^2}\cos(\pi x) + \frac{-4}{9\pi^2}\cos(3\pi x) + \frac{-4}{25\pi^2}\cos(5\pi x)$$

que é uma aproximação ao valor desta série e portanto à função $f(x) = x$ no intervalo $[0,1]$. Reparamos que este gráfico no intervalo $[-1,1]$ é uma aproximação à chamada extensão par da função $f(x) = x$ definida no intervalo $[0,1]$.



Exercício. Considere a função $f(x) = \cos x$ onde $x \in [-\pi, \pi]$.

a) Obtenha a sua série de Fourier, no intervalo $[-\pi, \pi]$.

b) Obtenha a função $f(x)$ como soma de senos quando $x \in [0, \pi]$.

Discussão. a) Considere a função $f(x) = \cos x$ onde $x \in [-\pi, \pi]$. Calcular a sua série de Fourier no intervalo $[-\pi, \pi]$ é obter a função $\cos x$ como uma soma infinita em termos de $\cos nx$ e $\sin nx$ pelo que esperamos que os coeficientes desta série de Fourier sejam $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = 0, b_n = 0$ para $n = 1, 2, \ldots$

Vamos realizar estes cálculos para verificar que se têm estes valores:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = \frac{1}{\pi} \sin x|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Para $n = 1, 2, \ldots$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos x \cos(nx) dx.$$

Para o cálculo de a_n usamos as seguintes identidades trigonométricas

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{cases}$$

Somamos estas identidades obtemos

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta.$$

Identificando $\alpha = nx$, $\beta = x$ obtemos

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x))) dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin((n+1)x)}{n+1} + \frac{\sin((n-1)x))}{n-1}\right)\Big|_0^{\pi} = 0.$$

Calculamos b_n, para $n = 1, 2 \ldots$ obtendo

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin(nx) dx = 0;$$

uma vez que estamos a integrar o produto de uma função par por uma função ímpar, i.e. uma função ímpar num intervalo de integração simétrico.

Por tanto a série de Fourier da função $\cos x$ no intervalo $[-\pi, \pi]$ é a própria função $\cos x$. $\square$

Discussão. b) Vamos agora a obter a série de senos da função $\cos x$ no intervalo $[0,\pi]$.

Neste caso calculamos os coeficientes b_n, para $n = 1, 2 \ldots$, dados por

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos x \sin(nx) dx$$

Usamos as identidades trigonométricas

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{cases}$$

Somamos estas identidades tem-se que

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

pelo que, se tomamos $\alpha = nx$ e $\beta = x$ obtemos

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big(\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)\Big)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} + \frac{\cos((n-1)x))}{n-1}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} - (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1})\right).$$

pelo que para $n = 0, 1, \ldots$ podemos considerar os coeficientes de índices pares ou ímpares e temos que

$$b_{2n} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-2}{2n+1} + \frac{-2}{2n-1}\right) = \frac{-8n}{\pi(4n^2-1)}$$

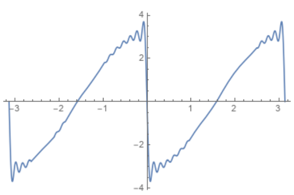
e $b_{2n+1} = 0$. A série de Fourier de senos da função $\cos x$ no intervalo $[0,\pi]$ é dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}\sin(2nx) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-8n}{\pi(4n^2-1)}\sin(2nx)$$

pelo que

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}\sin(2nx) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-8n}{\pi(4n^2-1)}\sin(2nx),\ x \in]0,\pi[$$

nos pontos $0, \pi$ a série de Fourier toma o valor 0. $\square$



9.3 Exercícios propostos

1. Calcule a Série de Fourier de senos da função $f(x) = x + x^2$ no intervalo $[0,2]$. Represente graficamente a função f e faça um esboço de como acredita, justificando, que será a representação da soma parcial desta série para $n = 50$, no intervalo $[-6,6]$. Indique o valor da série de Fourier obtida nos pontos -2 e 2.

2. Calcule a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \in [-2, 1] \\ 2 & , x \in [1, 2]. \end{cases}$$

   Faça um esboço de como acredita que será a representação da soma parcial para $n = 50$ da série de Fourier obtida no intervalo $[-4, 4]$, indicando os valores que toma esta série nos pontos $-2, 1, 0$ e 2.

3. Calcule a série de Fourier da função $f(x) = |2x+1|$ no intervalo $[-1, 1]$. Calcule o valor desta série de Fourier obtida nos pontos $-1, \frac{1}{2}$ e 1.

4. Calcule a série de Fourier da função $f(x) = \sin x$ no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Calcule o valor desta série de Fourier obtida nos pontos $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$.