Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO 2 - agrup. 1 **2017/18**

Folha 1: *Séries de potências, séries de Taylor, formula de Taylor*

---

1. Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ convergem as seguintes séries numéricas
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$,
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nx}$,
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nx^n}$.

2. Quais das séries seguintes são séries de potências? Em caso afirmativo indique a sucessão de coeficientes e o ponto de desenvolvimento.
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \frac{1}{x^n}$
   (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{x^2}$
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{j} x^j$
   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \cos x$

3. Determine o raio de convergência das seguintes séries de potências
   (a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^4}{(4k)!} z^k$,
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (z-2)^n$,
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(\sqrt{2}i)^n} \binom{2n}{n} z^{2n}$,
   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+i)^n - i}{i^n} (z+1)^n$.

4. Dado a função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ com $f(z) = (z-1)/(z^2+2)$ determine a série de potências que satisfaz $z - 1 = (z^2+2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Qual é o raio de convergência desta série?

5. Créditos de anuidade são a forma mais comum de financiar a compra de imóveis. O banco e o recipiente fixam um montante de crédito K, uma taxa de juro anual ρ, o valor mensal da prestação R e o tempo de duração do crédito. No final do tempo fica uma dívida restante para qual se faz um novo contrato de crédito com uma nova taxa. Para estimar o risco é importante saber qual é a dívida restante.

(a) Sabendo que o cálculo da dívida restante em cada mês nos dá a fórmula recursiva

$$\begin{aligned} a_0 &= K, \\ a_n &= \left(1 + \frac{p}{12}\right) a_{n-1} - R, \end{aligned}$$

determine a função geradora da série de potências $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(b) A partir da fórmula explícita de f determine a representação em série de potências e a formula explícita para os coeficientes a_n.

6. Use a formula de Taylor para representar f no ponto $x = x_0$ como polinómio de Taylor até ao termo com $n = 3$. O resto não precisa de ser dado explicitamente.

   (a) $f(x) = e^{2x-x^2}$, $x_0 = 0$,

   (b) $f(x) = x^x - 1$, $x_0 = 1$,

   (c) $f(x) = \sin(\sin x)$, $x_0 = 0$.

7. Determine $\ln(1,5)$ usando o polinómio de Taylor de ordem 4 para a função $f(x) = \ln(1 + x)$ e apresente uma estimativa para o erro.

8. Justifique a convergência uniforme das seguintes séries no intervalo $[0, 10]$:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt{1+(2n+1)x}}$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n+nx}}$

9. Determine a série de Taylor para a função racional

$$f(x) = \frac{1 + x^3}{2 - x}, \qquad x \neq 2$$

   usando a série geométrica.

10. Determine os primeiros dois termos da série de Taylor de $f(x) = (1 + x)^{1/n}, x > -1$, com centro em $x_0 = 1$.

11. Determine a série de Taylor para a função $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ com $f(x) = 1/x^2$ no ponto $x_0 = 1$. Para que valores de x converge a série?

12. Determine a série de Tayor para a função $f :]-1, 1[\mapsto \mathbb{R}$ com $f(x) = \operatorname{artanh}(x)$ no ponto $x_0 = 0$. (Sugestão: Use a formula $f(x) = \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$)