Exame de recurso – Cálculo II (agr. 4) – 2016/17

Resolução

1. $f(x,y) := 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

(a) $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ \cancel{2}xy + \cancel{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)y = 0 \\ \text{——} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 6 + y^2 - 10 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x(6x+10) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y^2 = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee$

$\vee \begin{cases} y = 0 \\ x = -\frac{10}{6} \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (-1,-2) \vee (x,y) = (-1,2) \vee (x,y) = (0,0) \vee$

$\vee\ (x,y) = (-\frac{5}{3}, 0)$. Estes são os 4 pontos críticos de f.

$f''_{x^2} = 12x + 10$; $f''_{xy} = 2y = f''_{yx}$; $f''_{y^2} = 2x + 2$, todas contínuas em $\mathbb{R}^2$

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 12x+10 & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{bmatrix}$. Classificação dos pontos críticos:

Usando o teste das derivadas de 2ª ordem

$(-1,-2)$: $\det H(-1,-2) = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 16 < 0$: ponto de sela.

$(-1,2)$: $\det H(-1,2) = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 16 < 0$: ponto de sela.

$(0,0)$: $\det H(0,0) = \begin{vmatrix} \overset{>0}{10} & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 20 > 0$: minimizante local.

$(-\frac{5}{3},0)$: $\det H(-\frac{5}{3},0) = \begin{vmatrix} \overset{<0}{-10} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = \frac{40}{3} > 0$: maximizante local

(b) Designando $g(x,y) := x^2+y^2$,

$$\begin{cases} f'_x = \lambda g'_x \\ f'_y = \lambda g'_y \end{cases}$$, a que devemos juntar $x^2+y^2=5$;

devemos ainda considerar a possibilidade $\nabla g = \vec{0}$.

De resto, estamos a usar o método dos multiplicadores de Lagrange, atendendo também que f e g são continuamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$.

O sistema propriamente dito, exibido acima, é, mais concretamente,
$$\begin{cases} 6x^2+y^2+10x = \lambda . 2x \\ 2xy+2y = \lambda . 2y \end{cases}$$

A condição $\nabla g = \vec{0} \Leftrightarrow (2x,2y)=(0,0)$ não dá origem a nenhum ponto da restrição $x^2+y^2=5$.

(c) Informamos que as soluções (x,y) que tornam possível o sistema anterior (juntamente com a condição $x^2+y^2=5$) são os seis pontos

$$(\pm\sqrt{5},0),\ (-1,\pm 2),\ \left(-\frac{5}{3}, \pm\frac{2}{3}\sqrt{5}\right).$$

Como f é contínua (por ser polinomial) e $S := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=5\}$ é limitado (trata-se de uma circunferência) e fechado (trata-se de um conjunto determinado por uma condição do tipo igualdade onde um dos membros é constante e o outro é uma função contínua — por ser polinomial — em todo o $\mathbb{R}^2$), então o Teorema de Weierstrass é aplicável e garante que $f|S$ tem máximo e mínimo absolutos. E só podem ser atingidos no conjunto dos 6 pontos críticos condicionados listados acima.

$f(-\sqrt{5},0) = 2(-\sqrt{5})^3 + 0 + 5(\sqrt{5})^2 + 0 = -10\sqrt{5} + 25.$

$f(\sqrt{5},0) = 2(\sqrt{5})^3 + 0 + 5(\sqrt{5})^2 + 0 = 10\sqrt{5} + 25 > 25$

$f(-1,\pm 2) = -2 - \cancel{4} + 5 + \cancel{4} = 3.$

$$f\left(-\frac{5}{3}, \pm\frac{2}{3}\sqrt{5}\right) = -2 \times \frac{5^3}{3^3} - \frac{5}{3} \times \frac{4}{9} \times 5 + \frac{125}{9} + \frac{4}{9} \times 5$$

$$= \frac{-250}{27} - \frac{100}{27} + \frac{145}{9} = \frac{-350+435}{27} = \frac{85}{27} = 3{,}14\ldots$$

Por comparação, é imediato que $10\sqrt{5}+25$ é o máximo absoluto.

Por outro lado, observando, tirando partido da informação $\sqrt{5} = 2{,}236\ldots$, que $\sqrt{5} \geq 2{,}236$, donde $10\sqrt{5} \geq 22{,}36$, $-10\sqrt{5} \leq -22{,}36$ e $-10\sqrt{5}+25 \leq -22{,}36 + 25 < 3$, então, comparando com os restantes, $-10\sqrt{5}+25$ é o mínimo absoluto.

2.(a) $\underbrace{(2xy+3y)}_{M(x,y)}\,dx + \underbrace{(4y^3+x^2+3x+4)}_{N(x,y)}\,dy = 0$

Se for exata, então $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2x+3$; $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x+3$. Como M e N são continuamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$, que é simplesmente conexo, então a EDO dada é, de facto, exata, tendo como solução geral implícita $F(x,y) = C$ tal que $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N$. Assim,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + 3y \Rightarrow F(x,y) = yx^2 + 3yx + C(y);$$

$$4y^3 + x^2 + 3x + 4 = \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 3x + C'(y), \text{ donde}$$

$$C'(y) = 4y^3 + 4, \Leftarrow C(y) = y^4 + 4y$$

$\therefore$ Solução geral implícita: $x^2y + 3xy + y^4 + 4y = C$, $C \in \mathbb{R}$.

(b) $y' = \frac{-2xy}{1+x^2} \Leftrightarrow_{(y \neq 0)} \frac{y'}{y} = -\frac{2x}{1+x^2}$ EDO de variáveis separáveis (mas outras classificações são possíveis)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}\,dy = -\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int -\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = -\ln(1+x^2) + C \Leftrightarrow |y| = e^C \frac{1}{1+x^2}.$$

juntando a sol. $y \equiv 0$ excluída, obtém-se a sol. geral $y = k\frac{1}{1+x^2}$, $k \in \mathbb{R}$.

3. PVI $\begin{cases} 2y'' + y' = -4 + 2t \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$

EDO homogénea associada: $2y'' + y' = 0$.

Eq. característica: $2r^2 + r = 0$, $\Leftrightarrow r(2r+1) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \vee r = -\frac{1}{2}$.

Sol. geral da EDO homogénea associada: $C_1 + C_2 e^{-\frac{1}{2}t}$

Usar, por exemplo, o método da variação das constantes, para obter uma solução particular da EDO completa:

$$\begin{cases} C_1' + C_2' e^{-\frac{1}{2}t} = 0 \\ 0 + C_2'(-\cancel{\tfrac{1}{2}}) e^{-\frac{1}{2}t} = \dfrac{-4+2t}{\cancel{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -C_2' \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \\ C_2' = e^{\frac{1}{2}t}(4-2t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -\cancel{e^{\frac{1}{2}t}}(4-2t) \cdot \cancel{e^{-\frac{1}{2}t}} \\ C_2' = 4e^{\frac{1}{2}t} - 2te^{\frac{1}{2}t} \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} C_1(t) = t^2 - 4t \\ C_2(t) = 8e^{\frac{1}{2}t} - 4te^{\frac{1}{2}t} + \int 4e^{\frac{1}{2}t}\,dt \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad} \\ C_2(t) = 8e^{\frac{1}{2}t} - 4te^{\frac{1}{2}t} + 8e^{\frac{1}{2}t} = (16-4t)e^{\frac{1}{2}t} \end{cases}$$

Sol. geral da EDO completa: $y = t^2 - 4t + (16-4t)\cancel{e^{\frac{1}{2}t}} \cdot \cancel{e^{-\frac{1}{2}t}} + C_1 + C_2 e^{-\frac{1}{2}t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Conjugando com as condições iniciais:

$$\begin{cases} 1 = 0 - 0 + 16 - 0 + C_1 + C_2 \\ 0 = 0 - 8 - \frac{1}{2}C_2 \end{cases}$$

C.A: $y' = 2t - 8 - \frac{1}{2}C_2 e^{-\frac{1}{2}t}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}C_2 = -8 \\ C_1 = -C_2 - 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = -16 \\ C_1 = 16 - 15 = 1 \end{cases}$$

Solução do PVI: $y = t^2 - 8t + 17 - 16e^{-\frac{1}{2}t}$.

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n}(1-2x)^n$

(a) A série é igual a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(-2)^n}{5^n}\left(x - \frac{1}{2}\right)^n$, sendo neste formato imediato ver que o centro é $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-6)^n}{5^n}\right|}{\left|\frac{(-6)^{n+1}}{5^{n+1}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{5^n} \cdot 5 \cdot \cancel{6^n}}{\cancel{5^n} \cdot \cancel{6^n} \cdot 6} = \frac{5}{6} \leftarrow \text{raio de convergência.}$$

Intervalo de convergência: $\left]\frac{1}{2} - \frac{5}{6}, \frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right[= \left]-\frac{2}{6}, \frac{8}{6}\right[= \left]-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right[$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n}(1-2x)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}(1-2x)\right)^n$, série geométrica

de razão $\frac{3}{5}(1-2x)$ e 1.º termo $\frac{3}{5}(1-2x)$, para cada x.

Para x no intervalo de convergência, a soma da série é $\dfrac{\frac{3}{5}(1-2x)}{1-\frac{3}{5}(1-2x)}$, $= \dfrac{\frac{3-6x}{\cancel{5}}}{\frac{5-3+6x}{\cancel{5}}}$, $= \dfrac{3-6x}{2+6x}$.

5. $f(x) := \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ em $[-\pi,\pi[$, 2π-periódica.

(a) $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\,dx =$

$n \neq 0 \longrightarrow = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{\pi n}\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - 0\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ par} \\ \dfrac{(-1)^{k+1}}{\pi n} & \text{se } n = 2k-1 \\ & (k \in \mathbb{N}) \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

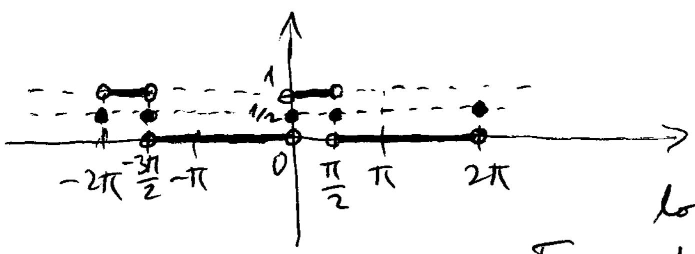
$a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos(0x)}_{=1}\,dx = \dfrac{1}{\cancel{\pi}}\cdot\dfrac{\cancel{\pi}}{2} = \dfrac{1}{2}$.

$b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx)\,dx =$

$= \dfrac{1}{\pi}\left[-\dfrac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi/2} = -\dfrac{1}{\pi n}\left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - 1\right)$

$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi n} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \dfrac{1}{\pi n}\left(1-(-1)^k\right) & \text{se } n = 2k \\ & (k \in \mathbb{N}) \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$.

(b)



f 2π-periódica obedece às hipóteses do Teorema de Dirichlet (é seccionalmente (continuamente) diferenciável), logo em cada $x \in \mathbb{R}$ a série de Fourier de f converge para $\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.

6. $f(x,y) := 2x^2+6y^2$.

(a) A direção e sentido pedidos é a do vetor simétrico do vetor gradiente ∇f em cada ponto (x,y), logo é $(-4x, -12y)$.

(b) $(x'(t), y'(t)) = -(\nabla f)(x(t), y(t))$

$$\Leftrightarrow (x'(t), y'(t)) = (-4x(t), -12y(t))$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = -4x(t) \\ y'(t) = -12y(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) + 4x(t) = 0 \\ y'(t) + 12y(t) = 0 \end{cases}$$

C.A.:
São EDO's lineares homogéneas de coeficientes constantes.
$r+4=0 \Leftrightarrow r=-4$
$r+12=0 \Leftrightarrow r=-12$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 e^{-4t} \\ y(t) = c_2 e^{-12t} \end{cases}$$

Conjugando com $(x(0), y(0)) = (1,1)$, tem-se que $\begin{cases} 1 = c_1 e^{-4\times 0} \\ 1 = c_2 \cdot e^{-12\times 0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$

logo $g(t) = (e^{-4t}, e^{-12t})$.

(c) $\gamma(t) = (g(t), f(g(t)))$

A curva g foi definida de modo a que a derivada em cada ponto apontasse no sentido de maior decrescimento de f. Como a última coordenada de γ coloca esta curva na superfície definida pelo gráfico de f, então γ parte de $(1,1,f(1,1))$ $[=(1,1,8)]$ e desce pela superfície escolhendo sempre a maior inclinação em cada ponto. Atendendo à expressão obtida para g, qd $t\to\infty$, $\gamma(t)\to(0,0,0)$.

Uma simulação para $t\in[0,1]$ pode ver-se em 6c-[illegible].gif