Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II - Agrupamento 4 **2014/15**

Folha 5 - parte 1: *Soluções*

---

1. —

2. (a) $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$

   (b) $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$

   (c) $\operatorname{senh}(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 3x + \frac{3^3}{3!} x^3 + \cdots + \frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots, \ x \in \mathbb{R}.$

   (d) $2\cos^2 x = 1 + \cos(2x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$

   $= 2 - \frac{4}{2!} x^2 + \frac{2^4}{4!} x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$

   (e) $\frac{1}{4+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n} = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4^2} + \frac{x^4}{4^3} - \cdots + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n} + \cdots, \quad x \in]-2, 2[.$

3. $\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (x-3)^n, \quad x \in]-1, 7[.$

4. (a) $e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R};$

   (b) $\frac{1}{1+x^3}, \quad x \in]-1, 1[.$

5. (a) $\ln(x+1) = \int_0^x \frac{1}{t+1}\, dt = \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in]-1, 1[.$

   (Observação: a igualdade é também válida no ponto $x = 1$; a justificação pode ser encontrada no texto de apoio).

   (b) $(x+1)\ln(x+1) - x, \quad x \in]-1, 1[$
   (por integração termo a termo da série da alínea anterior).

6. (a) 1; (b) $\cosh(1)$; (c) $-3\ln(2/3)$; (d) $2\sqrt{e}$.

7. (a) —

   (b) $f(x) = \frac{2x}{(2-x)^2}.$

8. —

9. Sugestão: comece por mostrar que a série é uniformemente convergente em $\mathbb{R}_0^+$.

10. (a) $]1, 5[$.

    (b) $f'(4) = 1$.

11. (a) $xe^{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$

(b) $\int_0^1 xe^{x^3}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)\,n!}.$

12. Represente e^{x^2} em série de MacLaurin e derive termo a termo.