5. Equações Diferenciais Ordinárias

baseado no texto de Alexandre Almeida, Cálculo II, fev. 2018, pp. 51–92, e versões anteriores de slides de Cálculo II

Isabel Brás

UA, 27/4/2020

Cálculo II – Agrup. IV 19/20

Resumo dos Conteúdos

1. EDO – Introdução, Conceitos e Terminologia
2. Problemas de Valores Iniciais e Problemas de Valores na Fronteira
3. Equações de variáveis separáveis
4. EDO Lineares de Primeira Ordem
5. Equações Diferenciais Homogéneas
6. EDO de Bernoulli
7. EDO Lineares de Ordem Arbitrária
    - Solução Geral e Conjunto Fundamental de Soluções
    - Solução particular de uma EDO linear completa
    - Problemas de Cauchy

Equações Diferenciais, o que são?

Equações que envolvem uma função e as suas derivadas e/ou a variável que é o argumento dessa função.
Estas equações aparecem frequentemente quando se pretende modelar matematicamente fenómenos reais, em especial, naqueles de evolução temporal.

Exemplos:

1. Taxa de variação de temperatura de um objeto:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m),$$

$T(t) \rightarrow$ temperatura do objeto,
$T_m \rightarrow$ temperatura do meio ambiente, $k \rightarrow$ constante positiva.

Exemplos (cont.):

2. Movimento harmónico de uma mola:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$m \rightarrow$ massa do objeto colocado na extremidade da mola vertical;
$x(t) \rightarrow$ deslocamento a partir da posição (inicial) de equilíbrio da mola;
$k > 0 \rightarrow$ constante de mola; Ver figura

3. Lei de Kirchhoff aplicada a uma malha constituída por uma bobine em série com uma resistência:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t),$$

onde L e R são constantes (indutância e resistência, respetivamente), $I(t)$ a intensidade de corrente e $E(t)$ a tensão da fonte de energia.

Equação diferencial ordinária

Definição:

Chama-se equação diferencial ordinária (EDO) de ordem n ($n \in \mathbb{N}$), a uma equação do tipo

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad \text{(EDO)}$$

onde y é função (real) de x.

Terminologia associada:

y é designada por variável dependente;
x é designada por variável independente;
Uma EDO diz-se estar na forma normal quando se apresenta na forma

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

Notação alternativa: No slide anterior $y^{(n)}$ denota a derivada de ordem n da função y. Em alternativa, podemos usar a notação $\frac{d^n y}{dx^n}$ e (re)escrever a EDO na forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

Exemplos :

1. $$-y' + x^3 - 1 = 0$$

   é uma equação diferencial de ordem 1, onde x é a variável independente e y a variável dependente;

2. $$3t\,\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = \cos(t)$$

   é uma equação diferencial de ordem 2, onde t é a variável independente e x a variável dependente;

Solução de uma EDO

Definição

Chama-se solução da equação diferencial

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0\,,$$

num intervalo I, a toda a função $\varphi : I \to \mathbb{R}$, com derivadas finitas até à ordem n, tal que

$$F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0\,, \qquad \forall x \in I.$$

Exemplo:

$\varphi_1(x) = \operatorname{sen} x$ e $\varphi_2(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$ são duas soluções (em $\mathbb{R}$) de

$$y'' + y = 0$$

Identifique outras!

Solução de uma EDO

Definição

Chama-se solução da equação diferencial

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

num intervalo I, a toda a função $\varphi : I \to \mathbb{R}$, com derivadas finitas até à ordem n, tal que

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Exemplo:

$\varphi_1(x) = \text{sen}\, x$ e $\varphi_2(x) = \cos x - \text{sen}\, x$ são duas soluções (em $\mathbb{R}$) de

$$y'' + y = 0$$

Identifique outras!

$$y'' + y = 0 \quad (1)$$

- $\varphi_1(x) = \text{sen}\, x$ é solução de (1)

$\varphi_1'(x) = \cos x$

$\varphi_1''(x) = -\text{sen}\, x$

Logo,

$-\text{sen}\, x + \text{sen}\, x = 0$ ✓

- $\varphi_2(x) = \cos x - \text{sen}\, x$ é solução de (1)

$\varphi_2'(x) = -\text{sen}\, x - \cos x$

$\varphi_2''(x) = -\cos x + \text{sen}\, x$

Logo,

$$\underbrace{-\cos x + \text{sen}\, x}_{\varphi_2''(x)} + \underbrace{\cos x - \text{sen}\, x}_{\varphi_2'(x)} = 0$$

- $\varphi_3(x) = 2\,\text{sen}\, x$ é solução de (1)

$\varphi_3'(x) = 2\cos x$

$\varphi_3''(x) = -2\,\text{sen}\, x$

Logo,

$\varphi_3''(x) + \varphi_3(x) = 0$

$-2\,\text{sen}\, x + 2\,\text{sen}\, x = 0$

Mais terminologia associada a uma EDO de ordem n

Integral Geral: Família de soluções que se obtêm por técnicas de integração adequadas, que é definida, em geral, usando n constantes arbitrárias;
o processo de obtenção dessa família de soluções é usualmente designado por integração(ou resolução) da EDO.

Integral Particular (ou solução particular): Solução que faz parte do integral geral;

Solução Singular: Solução que não se obtém a partir do integral geral;

Solução Geral: Conjunto de todas as soluções.

Exemplo: $(y')^2 - 4y = 0.$

- Determinação de um integral geral:

$$\begin{aligned} (y')^2 - 4y &= 0 \\ y' &= 2\sqrt{y}, \quad y \geq 0 \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} (y')^2 &= 4y \\ y'(y)^{-\frac{1}{2}} &= 2, \quad y > 0 \end{aligned}$$

  integrando em ordem a x,

$$\int y'(y)^{-\frac{1}{2}}\, dx = \int 2\, dx, \ y > 0\,,$$

  determinando as primitivas e simplificando, obtem-se o seguinte integral geral: $y = (x + C)^2$, onde $C \in \mathbb{R}$;

- Notar que $y = 0$ é também solução da EDO, mas não pertence ao integral geral obtido, esta solução é uma solução singular da EDO (em relação ao referido integral geral).
- Tomando no integral geral C=0 e C=1, obtem-se duas soluções particulares: $y = x^2$ e $y = (x + 1)^2$, respetivamente.

Exemplo: $(y')^2 - 4y = 0$.

- Determinação de um integral geral:

$$\begin{aligned} (y')^2 - 4y &= 0 \\ y' &= 2\sqrt{y}, \quad y \geq 0 \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} (y')^2 &= 4y \\ y'(y)^{-\frac{1}{2}} &= 2, \quad y > 0 \end{aligned}$$

integrando em ordem a x,

$$\int y'(y)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int 2\,dx,\ y > 0\,,$$

determinando as primitivas e simplificando, obtem-se o seguinte integral geral: $y = (x + C)^2$, onde $C \in \mathbb{R}$;

- Notar que $y = 0$ é também solução da EDO, mas não pertence ao integral geral obtido, esta solução é uma solução singular da EDO (em relação ao referido integral geral).
- Tomando no integral geral C=0 e C=1, obtem-se duas soluções particulares: $y = x^2$ e $y = (x + 1)^2$, respetivamente.

$$(y')^2 - 4y = 0 \quad (1)$$

Se $\varphi(x)$ é solução de (1) então $\varphi(x)$

$$(\varphi'(x))^2 - 4\varphi(x) = 0$$

$$\underbrace{(\varphi'(x))^2}_{\geq 0} = 4\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) \geq$$

$$(y')^2 - 4y = 0$$

$$(y')^2 = 4y$$

$$y' = 2\sqrt{y}\,,\ y \geq 0 \qquad \not\Leftarrow \qquad y' = 2\sqrt{y}\,,\ y >$$

$$\underbrace{y'\,y^{-1/2} = 2}\,,\ y >$$

$$\underbrace{\int y'\,\boxed{y^{-1/2}}\,dx} = \underbrace{\int 2\,dx}\,,\ y > 0 \qquad y(x) = u$$

$$2y^{1/2} + K_1 = 2x + K_2\,,\ K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

$$2y^{1/2} = 2x + K\,,\ K \in \mathbb{R}$$

$$y^{1/2} = x + C\,,\ C \in \mathbb{R}$$

Integral geral. $\rightarrow$ $\boxed{y = (x + C)^2}\,,\ C \in \mathbb{R}$

$y=0$ é uma solução da EDO já que

$y=y'=0$

Contudo, ele não se pode obter da família de funções $y=(x+c)^2$.

$y=0$ é uma solução singular da EDO.

Tomando no integral geral $c=0$ obtemos a solução particular $y=x^2$

Tomando $c=1$ obtemos outra solução particular $y=(x+1)^2$

4)

Exemplo:

$y=-\frac{x^3}{6}+1$ é solução do PVI

$$\begin{cases} y''+x=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

Verifique!

$y'=-\frac{x^2}{2}$

$y''=-x$

$y''+x=0$

$-x+x=0$

$y(0)=0+1=1$

$y'(0)=0$

Problema de valores iniciais

Definição:

Chama-se problema de valores iniciais (PVI) (ou problema de Cauchy) a todo o problema que consiste em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo certas condições (ditas condições iniciais) num mesmo ponto:

$$\begin{cases} F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \ldots \ , \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Exemplo:

$y = -\frac{x^3}{6} + 1$ é solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Verifique!

Existência e Unicidade de Solução para um PVI

- Nem todo o PVI admite solução;
- Caso exista solução para o PVI, esta pode não ser única;
- É possível provar que um PVI de primeira ordem na forma normal, *i.e.*, do tipo
$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
admite uma e uma só solução (definida num intervalo centrado em x_0), desde que a função f satisfaça determinadas condições (*Teorema de Cauchy-Picard*). Não estudamos aqui este resultado, mas trataremos um caso particular a propósito das EDO lineares (mais à frente).

Problema de valores na fronteira

Definição:

Chama-se problema de valores na fronteira (ou problema de fronteira) a todo o problema que consista em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo condições em dois ou mais pontos.

Exemplo:

O problema de fronteira

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) + y'(1) = -\frac{1}{3} \\ y(1) + y'(0) = 0 \end{cases}$$

tem uma única solução. Qual é?

Equações de variáveis separáveis

EDO de primeira ordem da forma:

$$y' = \frac{p(x)}{q(y)}, \quad (\text{com } q(y) \neq 0)$$

para p e q dependentes apenas de x e de y, respetivamente.

Determinação dum integral geral

1. Escrever a equação na forma:

$$y'q(y) = p(x) \qquad (1)$$

2. Integrar ambos os membros de (1), para obter um integral geral da equação na seguinte forma implícita:

$$Q(y) = P(x) + C, C \in \mathbb{R},$$

onde $Q(y)$ é uma primitiva de $q(y)$ e $P(x)$ é uma primitiva de $p(x)$.

Problema de valores na fronteira

Definição:

Chama-se problema de valores na fronteira (ou problema de fronteira) a todo o problema que consista em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo condições em dois ou mais pontos.

Exemplo:

O problema de fronteira

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) + y'(1) = -\frac{1}{3} \\ y(1) + y'(0) = 0 \end{cases}$$

tem uma única solução. Qual é?

$$y'' + x = 0$$

$$y'' = -x$$

$$y' = -\int x\,dx$$

$$y' = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y = \int -\frac{x^2}{2} + C_1\,dx$$

$$y = -\frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

$y(0) = C_2$ e $y'(1) = -\frac{1}{2} + C_1$

$\rightarrow y(0) + y'(1) = -\frac{1}{3} \Rightarrow C_2 - \frac{1}{2} + C_1 = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow C_1 + C_2 = \frac{1}{6}$

$$y(1) + y'(0) = 0$$

$$-\frac{1}{6} + c_1 + \underbrace{c_2 + c_1} = 0$$

$$-\frac{1}{6} + C_1 + \frac{1}{6} = 0$$

$$C_1 = 0 \qquad\qquad C_2 = \frac{1}{6}$$

Logo, $y = \frac{-x^3}{6} + \frac{1}{6}$ é a solução do problema de valores fronteira

Exemplo 1: $y' = \frac{1}{y} e^x, y \neq 0$

Separando as variáveis, a equação toma a forma:

$$yy' = e^x$$

Integrando em ordem a x, que é o mesmo que:

$$\int y \, dy = \int e^x \, dx \,,$$

obtem-se $\dfrac{y^2}{2} = e^x + K,\ K \in \mathbb{R}$ e portanto

$$y^2 = 2e^x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

é um integral geral da EDO.

Exemplo 2: $y' + xy = 0$

Separando as variáveis, a equação toma a forma:

$$\frac{1}{y}y' = -x\,, \qquad \text{para } y \neq 0,$$

integrando,

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int x\,dx\,,$$

obtem-se, sucessivamente

$$\begin{array}{rcl} \ln|y| & = & -x + K,\ K \in \mathbb{R} \\ |y| & = & e^{-\frac{x^2}{2}+K} \\ |y| & = & Ae^{-\frac{x^2}{2}},\ A \in \mathbb{R}^+ \\ y & = & Be^{-\frac{x^2}{2}},\ B \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{array}$$

Como $y = 0$ também é solução da EDO, obtem-se o integral geral:

$$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}},\ C \in \mathbb{R}\,.$$

Equações de variáveis separáveis

EDO de primeira ordem da forma:

$$y' = \frac{p(x)}{q(y)}, \quad (\text{com } q(y) \neq 0)$$

para p e q dependentes apenas de x e de y, respetivamente.

Determinação dum integral geral

1. Escrever a equação na forma:
$$y'q(y) = p(x) \qquad (1)$$
2. Integrar ambos os membros de (1), para obter um integral geral da equação na seguinte forma implícita:
$$Q(y) = P(x) + C, C \in \mathbb{R},$$
onde $Q(y)$ é uma primitiva de $q(y)$ e $P(x)$ é uma primitiva de $p(x)$.

Exemplo 2: $y' + xy = 0$

Separando as variáveis, a equação toma a forma:

$$\frac{1}{y}y' = -x, \quad \text{para } y \neq 0,$$

integrando,

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int x\,dx,$$

obtem-se, sucessivamente

$$\begin{aligned} \ln|y| &= -x + K,\ K \in \mathbb{R} \\ |y| &= e^{-\frac{x^2}{2}+K} \\ |y| &= Ae^{-\frac{x^2}{2}},\ A \in \mathbb{R}^+ \\ y &= Be^{-\frac{x^2}{2}},\ B \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{aligned}$$

Como $y = 0$ também é solução da EDO, obtem-se o integral geral:

$$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}},\ C \in \mathbb{R}.$$

$$y' + xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -xy \quad , y \neq 0$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -x$$

$$\int \frac{1}{y}\,dx = -\int x\,dx$$

$$\ln|y| = -\frac{x^2}{2} + K \quad , K \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{-\frac{x^2}{2}+K} = e^{-\frac{x^2}{2}}e^{K}$$

$$|y| = e^{-\frac{x^2}{2}}A \quad , A \in \mathbb{R}^+$$

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}A \quad \text{ou} \quad y = -e^{-\frac{x^2}{2}}A \quad , A \in \mathbb{R}^+$$

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}A \quad \text{ou} \quad y = e^{-\frac{x^2}{2}}(-A) \quad , A \in \mathbb{R}^+$$

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}B \quad , B \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Como $y=0$ também é solução da EDO, obtem-se o integral geral

$$y = Ce^{-x^2/2} \quad , C \in \mathbb{R}$$

Exercício 1: Determine o integral geral da EDO

$$y' \operatorname{sen} x + y \cos x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = -\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx$$

$$\ln|y| = -\ln|\operatorname{sen} x| + C_1, \ C_1 \in \mathbb{R}$$

$$|y| = (\operatorname{sen} x)^{-1} e^{C_1}$$

$$\boxed{y = \frac{C}{\operatorname{sen} x}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

CA

$$-\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx = -\int \frac{1}{u}\, du = -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$u = \operatorname{sen} x$

$du = \cos x \, dy$

Exercício 2 : Determina o integral geral da EDO.

$$(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dx = 0$$

$$\frac{1}{1+x^2}\,dx = -\frac{1}{1+y^2}\,dy$$

$$\operatorname{arctg}(x) = -\operatorname{arctg}(y) + C \quad , \; C \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arctg}(y) = -\operatorname{arctg}(x) + C \quad , \; C \in \mathbb{R}$$

$$y = \operatorname{tg}(-\operatorname{arctg}(x) + C) \quad , \; C \in \mathbb{R}$$

Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem:

$$a_0(x)\, y' + a_1(x)\, y = b(x)$$

onde a_0, a_1, b são funções definidas num certo intervalo I, com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Deste modo, esta equação pode tomar a seguinte forma:

$$y' + p(x)\, y = q(x).$$

Quando $b \equiv 0$ ($q \equiv 0$), a equação diz-se incompleta ou homogénea.

Exemplos:

- $y' + xy = 1$ equação diferencial linear de 1.ª ordem completa.
- $y' + xy = 0$ equação diferencial linear de 1.ª ordem incompleta (ou homogénea).

Note que, se $q \equiv 0$ ou se p e q forem funções constantes a EDO é de variáveis separáveis.

Resolução de uma EDO Linear de 1.ª Ordem usando um Fator Integrante

Para resolver a equação
$$y' + p(x)\,y = q(x).$$
pode multiplicar-se ambos os membros pelo fator integrante $\mu(x) = e^{P(x)}$, onde $P(x)$ é uma primitiva de $p(x)$, e integrar de seguida em ordem a x.

Exemplo 1: A EDO do Slide 15, $y' + xy = 0$, que resolvemos como equação de variáveis separáveis, é uma EDO linear de 1.ª ordem. Podemos resolvê-la, mais rapidamente, usando o fator integrante $\mu(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.
Multiplicando ambos os membros da equação por $\mu(x)$ obtemos
$$e^{\frac{x^2}{2}} y' + e^{\frac{x^2}{2}} xy = 0\,, \qquad i.e., \qquad \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^2}{2}} y\right) = 0.$$
Integrando vem
$$e^{\frac{x^2}{2}} y = C\,, \qquad C \in \mathbb{R}.$$
Assim, um integral geral da equação linear é
$$y = C\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Resolução de uma EDO Linear de 1.ª Ordem usando um Fator Integrante

Exemplo 2:

$$y' - y = -e^x$$

Como uma primitiva de $p(x) = -1$ é $P(x) = -x$, um fator integrante da EDO é e^{-x}.
Multiplicando ambos os membros da equação por e^{-x} obtemos

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = -1$$

i.e,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}y\right) = -1.$$

Integrando vem

$$e^{-x}y = \int(-1)\,dx = -x + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Assim, um integral geral da equação linear é

$$y = (C - x)\,e^x\,, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

PVI associado a EDO Linear de Primeira Ordem:

Teorema (existência e unicidade de solução):

Se p e q são funções contínuas num intervalo I, então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' + p(x)\,y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Exemplo:

O problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' - \ y = -e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tem como solução única $y = -xe^x$, para $x \in \mathbb{R}$. Porquê?