

1. Determine o domínio de convergência das seguintes séries de potências, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

(a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^n$

(b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{(n-1)!}$

(c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

(d)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x-3)^n}{2n+4}$

(e)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$

(f)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!(x-2)^n}{n-1}$

(g)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} (x+2)^n$

(h)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2+n^3} x^n$

(i)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{\ln n}$

(j)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n6^n} (3x-2)^n$

(k)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} (x-2)^n$       (*Exame de Recurso de 2010*)

(l)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{2n+1}} x^n$       (*Exame de Recurso de 2007*)

2. Mostre que:

(a) se  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  é absolutamente convergente num dos extremos do seu domínio de convergência, então também é absolutamente convergente no outro extremo.

(b) se o domínio de convergência de  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  é  $] -r, r]$ , então a série é simplesmente convergente em  $x = r$ .

3. Considere a representação em série de potências da função  $\frac{1}{1-x}$  dada por

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

Determine a representação em série de potências de (indicando o intervalo onde é válida):

(a)  $\frac{1}{1-3x}$

(b)  $\frac{2}{2+x}$

(c)  $\frac{1}{x}$

4. Determine os polinómios de Taylor seguintes:

(a)  $T_0^3(x^3 + 2x + 1)$ ;

(b)  $T_\pi^3(\cos x)$ ;

(c)  $T_1^3(xe^x)$ ;

(d)  $T_0^5(\sin x)$ ;

(e)  $T_0^6(\sin x)$ ;

(f)  $T_1^n\left(\frac{1}{x}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$ ;

(g)  $T_1^n(\ln x) \quad (n \in \mathbb{N})$ .

5. Considere  $f(x) = e^x$ .

(a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem  $n$  da função  $f$ .

(b) Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem  $n$  permite aproximar  $e^x$  no intervalo  $] -1, 0[$ , com erro inferior a  $\frac{1}{(n+1)!}$ .

(c) Escolha um dos polinómios de MacLaurin de  $f$  e use-o para obter uma aproximação de  $\frac{1}{\sqrt{e}}$ , indicando uma estimativa para o erro cometido nessa aproximação.

6. Usando o resto de Lagrange, determine um majorante para o erro cometido na aproximação de  $\sin(3)$  quando se usa o polinómio de Taylor de ordem 5 em torno do ponto  $a = \pi$ .

7. Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem 7 da função seno permite aproximar os valores desta função, no intervalo  $[-1, 1]$ , com erro inferior a  $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$ .

8. Determine um valor de  $n$  para o qual garanta que o polinómio de Taylor de ordem  $n$  da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  no ponto  $c = 1$  aproxima essa função, no intervalo  $[0.9, 1.1]$ , com erro inferior a  $10^{-3}$ .

9. Determine o menor valor de  $n$  tal que o polinómio de MacLaurin de ordem  $n$  da função  $f(x) = e^x$  aproxime  $f(1)$  com erro inferior a  $10^{-3}$ .

10. Mostre, usando a fórmula de Taylor, que  $\ln(1+x) \leq x$ , para todo  $x > -1$ .