

(1)

$$\boxed{\text{Ex 16]} \text{ (c)} \quad y'' + y' = 2y + 3 - 6x$$

$$y'' + y' - 2y = \underbrace{3 - 6x}_{b(x)} \quad (*)$$

• Solução da homogênea

$$y'' + y' - 2y = 0$$

$$p(r) = r^2 + r - 2 = 0 \Leftrightarrow (r+2)(r-1) = 0$$

$$r = -2$$

$$r = 1$$

$$\text{SFS} \quad \left\{ e^{-2x}, e^x \right\}$$

Solução geral da homogênea

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

(2)

- Solução particular de  $(x)$

$$y_p = c_1(x) e^{-2x} + c_2(x) e^x \text{ onde}$$

$$\begin{bmatrix} e^{-2x} & e^x \\ -2e^{-2x} & e^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3-6x \end{bmatrix} \rightarrow \frac{b(x)}{a_0}$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ 3-6x & e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & e^x \\ -2e^{-2x} & e^x \end{vmatrix}} = \frac{-e^x(3-6x)}{e^{-x} + 2e^{-x}} = \frac{-3e^x(1-2x)}{3e^{-x}} = -e^x(1-2x)$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & 3-6x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & e^x \\ -2e^{-2x} & e^x \end{vmatrix}} = \frac{e^{-2x}(3-6x)}{3e^{-x}} = e^{-x}(1-2x)$$



(3)

Assim,

$$C_1(x) = -e^{2x} (1-2x)$$

$$C_2(x) = e^{-x} (1-2x)$$

$$C_1(x) = - \int e^{2x} (1-2x) dx$$

$$= - \int e^{2x} dx + \int e^{2x} 2x dx$$

$$= -\frac{e^{2x}}{2} + x e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$= -e^{2x} + x e^{2x}$$

$$C_1(x) = -e^{2x} + x e^{2x}$$

CA

$$\begin{aligned} u &= 2x & du &= 2dx \\ dv &= e^{2x} & v &= \frac{e^{2x}}{2} \end{aligned}$$

$$e^{2x} 2x dx = x e^{2x} - \int e^{2x} dx$$

$$e^{2x} 2x dx = x e^{2x} - \frac{e^{2x}}{2}$$

(4)

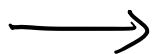
$$C_2(x) = \int e^{-x} (1-2x) dx = \int e^{-x} - 2x e^{-x} dx$$

$$= \int e^{-x} dx - \int 2x e^{-x} dx$$

$$= -e^{-x} + 2x e^{-x} + 2e^{-x}$$

$$= e^{-x} + 2x e^{-x}$$

$$C_2(x) = e^{-x} + 2x e^{-x}$$



Logo, a solução particular de (\*) é

(5)

$$y_p = (-e^{2x} + xe^{2x}) e^{-2x} + (e^{-x} + 2xe^{-x}) e^x$$

$$y_p = -1 + x + 1 + 2x = 3x$$

$$y_p = 3x$$

A solução geral de (\*) é

$$y = y_h + y_p$$

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + 3x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

# Método dos coef. indeterminados

(6)

## Exemplo 1: (SL 43)

$$y' - 3y = \underbrace{e^{3x}}_{b(x)} \quad (*)$$

$$e^{3x} = P_m(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$\text{com } P_m(x) = 1 \text{ (grau zero)}, \quad m=0, \quad \alpha=3 \quad \text{e} \quad \beta=0$$

Com o  $\alpha + \beta i = 3 + 0i = 3$  é raiz do polinômio característico,  $p(r) = r - 3$  com multiplicidade 1 então  $k = 1$

## (SL 42)

### Método dos Coeficientes Indeterminados:

- Método para determinar uma solução particular, aplicável às EDO lineares de coeficientes constantes completas

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x) \quad (5)$$

com  $b(x)$  da forma

$$b(x) = B_m(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad \text{ou} \quad b(x) = B_m(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

onde  $B_m(x)$  denota um polinômio de grau  $m \in \mathbb{N}_0$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- Neste caso, prova-se que existe uma solução particular da equação (5) do tipo

$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x} (Q(x) \cos(\beta x) + R(x) \sin(\beta x)) \quad (6)$$

onde:

- (i)  $k$  é a multiplicidade de  $\alpha + i\beta$ , se  $\alpha + i\beta$  for raiz do polinômio característico da equação homogênea associada a (5); Senão,  $k = 0$ ;
- (ii)  $Q(x)$ ,  $R(x)$  são polinômios de grau  $m$  cujos coeficientes terão de ser determinados usando a EDO (5) e a expressão para a solução (6).

Então, a solução particular de (\*) é da forma 7

$$y_p = x^1 e^{3x} \left( A \cos(0x) + B \sin(0x) \right)$$

$$y_p = x e^{3x} A, A \in \mathbb{R}$$

ten grau zero  
é decir, não tem.

Devemos determinar A.

Como  $y_p$  deve ser solução de (\*) então

$$y_p' - 3 y_p = e^{3x}$$
$$Ae^{3x} + \cancel{3Ax} e^{3x} - 3(Axe^{3x}) = e^{3x}$$

$$Ae^{3x} = e^{3x}$$

$$(A-1)e^{3x} = 0 \Rightarrow A-1=0 \Rightarrow A=1$$

Assim,

$$y_p = x e^{3x}$$

Exemplo 2:  $y' - 3y = \underbrace{2x}_{b(x)} \quad (2)$

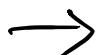
$$2x = P_m(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

Com  $P_m(x) = 2x \rightarrow$  grau 1 ,  $m=0$

$$d=0 \quad e \quad \beta=0$$

Como  $\alpha + \beta i = 0$  não é raiz de  $p(r) = r - 3$

e nôo  $K=0$



(9)

Então, uma solução particular da EDO (2) é

$$y_p = x^0 e^{0x} \left( -A(x) \cos(0x) + B(x) \cancel{\sin(0x)} \right)$$

ter grau 1

$y_p = A(x)$ , como  $A(x)$  é um polinômio de grau 1 podemos escrever  
 $A(x) = C_0 x + C_1$

$$y_p = C_0 x + C_1$$

Determinemos  $A(x)$



(10)

$y_p$  deve wahrzeichen (z)

$$y_p' - 3 y_p = 2x$$

$$\underbrace{c_0}_{y_p'} - 3 \underbrace{(c_0 x + c_1)}_{y_p} = 2x$$

$$-3c_0 x + (c_0 - 3c_1) = 2x$$

$$\rightarrow -3c_0 = 2 \quad c_0 - 3c_1 = 0$$

$$c_0 = -\frac{2}{3}$$

$\frac{-2}{3} - 3c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{2}{9}$

folg.:  $y_p = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}$  //

(11)

Exemplo 3: Determinar a solução geral da E.D.D

$$5y + 2y' + y'' = 2e^{2x} \quad (3).$$

• solução da homogênea associada

$$5y + 2y' + y'' = 0$$

$$p(r) = r^2 + 2r + 5 = 0$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

$$SFS: \{ e^{-x} \cos(2x), e^{-x} \sin(2x) \}$$

A solução geral da homogênea

$$y_h = A e^{-x} \cos(2x) + B e^{-x} \sin(2x), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

(12)

• Soluções particulares de (3)

$$2e^{-2t} = P_m(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

com  $P_m(x) = 2 \Rightarrow m = 0$ ,

$$\alpha = -2, \beta = 0$$

Como  $\alpha + \beta i = -2 + 0i = -2$  é raiz do polinômio característico  $p(r) = r^2 + 2r + 5$  entâo

$$K=0$$

Assim, uma solução particular de (3) é da forma  $y_p = x^0 e^{-2x} [C \cos(0x) + D \sin(0x)]$

(13)

$$y_p(x) = C e^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ a determinar}$$

Substituindo  $y_p''$ ,  $y_p'$  e  $y_p$  em (3) temos:

$$5C e^{-2x} - 4C e^{-2x} + 4C e^{-2x} = 2e^{-2x}$$

$$5C - 4C + 4C = 2$$

$$5C = 2$$

$$C = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \frac{2}{5} e^{-2x}$$

Logo, solução geral de (3) é

$$y = y_h + y_p$$

$$y = A e^{-x} \cos(2x) + B e^{-x} \sin(2x) + \frac{2}{5} e^{-2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

## Exemplo 4

A EDO  $y' - 3y = e^{3x} + 2x$

Tem solução particular

$$y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) \quad \text{onde}$$

$y_1(x)$  é solução particular da equação  $y' - 3y = e^{3x}$

Do exemplo (1) :  $y_1(x) = xe^{3x}$

$y_2(x)$  é solução particular da eq.  $y' - 3y = 2x$

Do exemplo (2)  $y_2(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}$

Logo,  $y_p(x) = xe^{3x} - \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}$

### Princípio de sobreposição

#### Teorema:

Suponha-se que  $y_1$  é uma solução (particular) da equação

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = b_1(x),$$

e que  $y_2$  é uma solução (particular) da equação

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = b_2(x).$$

Então  $y_1 + y_2$  é uma solução (particular) da equação

$$\underline{a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b_1(x) + b_2(x)}.$$