Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo II - agr. 4 **2016/17**

exame de recurso Duração: 2h30

- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas. A cotação e o formulário de transformadas de Laplace encontram-se no verso.**

---

1. Considera a função real de duas variáveis reais definida pela expressão $f(x,y) := 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.
   (a) Determina e classifica os quatro pontos críticos de f.
   (b) Escreve (não resolvas!) o sistema que permite determinar os pontos críticos de f restrita à condição $x^2 + y^2 = 5$.
   (c) Sabendo que os pontos críticos referidos na alínea anterior são os seis pontos $(\pm\sqrt{5}, 0)$, $(-1, \pm 2)$, $(-\frac{5}{3}, \pm\frac{2}{3}\sqrt{5})$, calcula, se existirem, o máximo e o mínimo absolutos de f sujeita à condição indicada. Se ajudar, repara que $\sqrt{5} = 2{,}236\ldots$. Não te esqueças de justificar o teu raciocínio.

2. Classifica e resolve as seguintes equações diferenciais ordinárias:
   (a) $(2xy + 3y)dx = -(4y^3 + x^2 + 3x + 4)dy$;
   (b) $y' = \dfrac{-2xy}{1 + x^2}$.

3. Resolve o PVI $2y'' + y' = -4 + 2t$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

4. Considera a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n}(1 - 2x)^n$.
   (a) Determina o seu intervalo de convergência.
   (b) Observando que a série dada é também, para cada x, uma série geométrica, determina a expressão para a sua soma no intervalo de convergência.

5. Seja f a função 2π-periódica que em $[-\pi, \pi[$ se expressa como $f(x) := \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$.
   (a) Determina os coeficientes de Fourier de f.
   (b) Esboça o gráfico da soma da série de Fourier de f no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$. Justifica o teu raciocínio.

6. Considera a função real de duas variáveis reais definida pela expressão $f(x,y) := 2x^2 + 6y^2$.
   (a) Determina a direção e o sentido em que f mais decresce em cada ponto (x, y) do seu domínio.
   (b) Determina a curva $g(t) = (x(t), y(t))$ tal que $g(0) = (1, 1)$ e $(x'(t), y'(t)) = -(\nabla f)(x(t), y(t))$.
   (c) Se a variável t representar instantes de tempo, explica por palavras tuas como achas que evolui a curva $\gamma(t) = (g(t), f(g(t)))$ com o tempo na superfície definida pelo gráfico de f.

Cotação:

1. 4; 2. 3; 3. 4; 4. 3; 5. 3; 6. 3.

Formulário (Transformadas de Laplace):

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad s > s_f; \qquad G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s), \quad s > s_g$$

função	transformada
$t^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}\,,\ s > 0$
$\mathrm{e}^{at} \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{s-a}\,,\ s > a$
$\sin(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\cos(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\sinh(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a\rvert$
$f(t)+g(t)$	$F(s)+G(s)\,,\ s > s_f, s_g$
$\alpha f(t) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha F(s)\,,\ s > s_f$
$\mathrm{e}^{\lambda t} f(t) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)\,,\ s > s_f + \lambda$
$H_a(t) f(t-a) \quad (a > 0)$	$\mathrm{e}^{-as} F(s)\,,\ s > s_f$
$f(at) \quad (a > 0)$	$\dfrac{1}{a}\, F\left(\dfrac{s}{a}\right)\,,\ s > a\, s_f$
$t^n f(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)\,,\ s >$ ordem exp. de f
$f'(t)$	$s\,F(s) - f(0)\,,\ s >$ ordem exp. de f
$f''(t)$	$s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)\,,\ s >$ ordens exp. de f, f'
$f^{(n)}(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$, onde $f^{(0)} \equiv f$, $s >$ ordens exp. de $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$
$(f * g)(t)$	$F(s)\,G(s)\,,\ s >$ ordens exp. de f, g
$\int_0^t f(\tau)\, d\tau$	$\dfrac{F(s)}{s}\,,\ s > 0$, ordem exp. de f

Nota: O facto de se indicarem restrições numa dada linha do quadro acima não significa que não haja restrições adicionais a considerar para que a fórmula indicada nessa linha seja válida.