Aula 16: Sumário

- Extremos condicionados: método dos multiplicadores de Lagrange.
- Exemplos.
- Exercícios.

Aula 16: Extremos condicionados - mét.$^{\text{do}}$ dos multiplicadores de Lagrange

Teorema 6: Sejam D aberto em $\mathbb{R}^n$ e $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável em D (i.e. com derivadas parciais contínuas). Se $p_0 = (x_0, y_0, z_0, \ldots) \in D$ é um extremante local da função $f(x, y, z, \ldots)$ condicionado à restrição $g(x, y, z, \ldots) = k$, então p_0 satisfaz um dos sistemas:

$$(1) \quad \begin{cases} \nabla g(p_0) \neq \vec{0} \\ \nabla f(p_0) = \lambda \nabla g(p_0) \\ g(p_0) = k \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad (2) \quad \begin{cases} \nabla g(p_0) = 0 \\ g(p_0) = k \end{cases}$$

Geometricamente: No caso de n=2, se $\nabla g(p_0) \neq \vec{0}$ e $\nabla f(p_0) \neq \vec{0}$, então p_0 é um ponto onde a curva de nível de f é tangente à curva restrição $g(x, y) = k$.
Se $\nabla(g) \neq \vec{0}$, as condições acimas são equivalentes a encontrar os pontos críticos da função lagrangiana $L(x, y; \lambda) = f(x, y) - \lambda h(x, y)$, em que $h(x, y) = g(x, y) - k$.

Aula 16: Método dos multiplicadores de Lagrange - demonstração

Se p_0 é um extremante de $f(x,y,z,\dots)$ condicionado à restrição $g(x,y,z,\dots)=k$, então $g(p_0)=k$.

(n=2): A restrição determina $N_g(k)=\{(x,y)\mid g(x,y)=k\}=$ uma curva de nível k de g.

(n=3): A restrição determina $N_g(k)=\{(x,y,z)\mid g(x,y,z)=k\}=$ superfície de nível k de g.

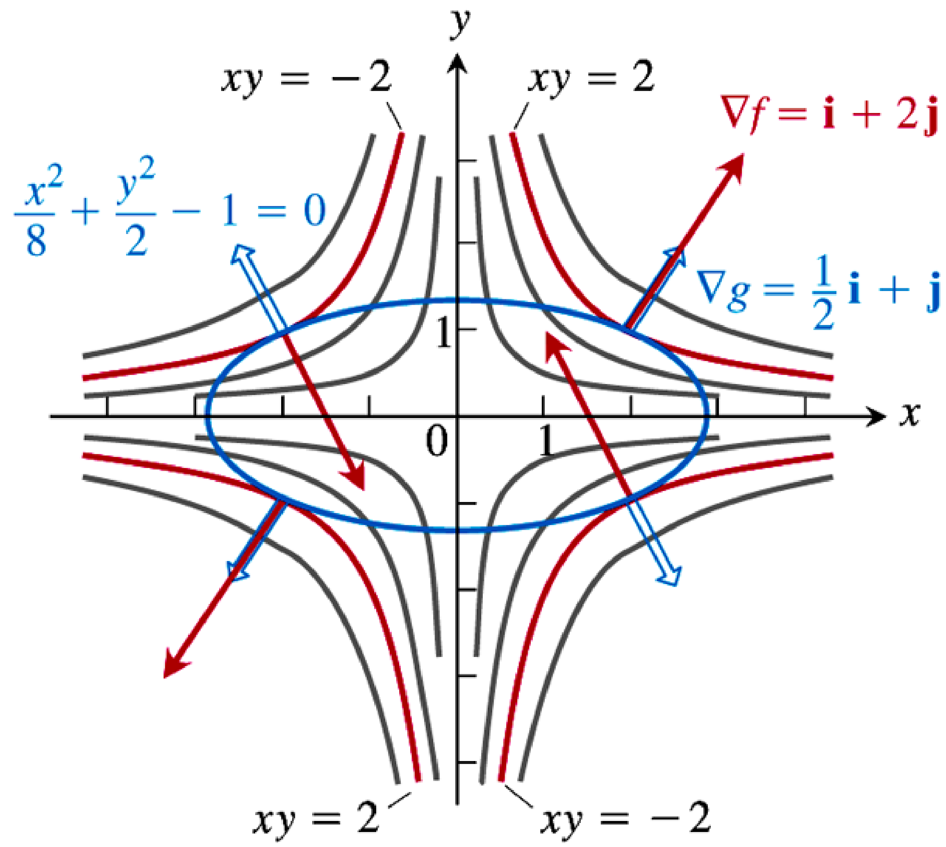
Em qualquer dos casos, seja $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t),...)$ uma qualquer curva em $N_g(k)$ que passe por p_0, isto é, $g(\gamma(t))=k$ e $p_0=\gamma(t_0)$.

Como $p_0=\gamma(t_0)$ é extremante local da função $f_{|_{N_g(k)}}$, em particular é também um extremante local da função real de variável real $f(\gamma(t))=F\circ\gamma(t)$, pelo que p_0 é um ponto estacionário (crítico):

$$\frac{d\,f(\gamma(t))}{dt}=0\ \Leftrightarrow\ \nabla f(p_0)\cdot\frac{d\gamma}{dt}=0.$$

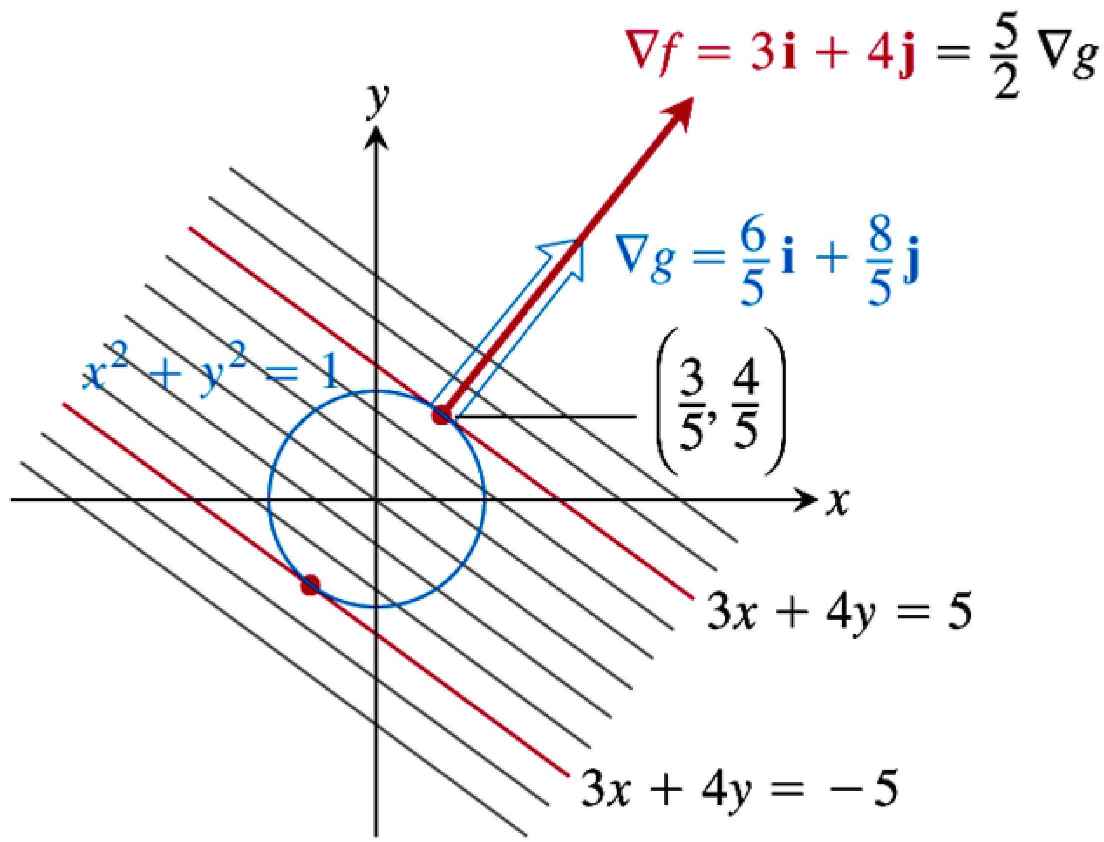
Por outro lado, $g(\gamma(t))=k$, pelo que $\frac{g(\gamma(t))}{dt}=\frac{d\,k}{dt}=0\ \Leftrightarrow\ \nabla g(p_0)\cdot\frac{d\gamma}{dt}=0.$

Como γ é qualquer, podemos tomar aquelas em que $\frac{d\gamma}{dt}\neq 0$, pelo que se $\nabla f(p_0)$ e $\nabla g(p_0)$ não são vectores nulos, serão perpendiculares ao espaço (reta, plano,etc) tangente em p_0 gerado pelos diferentes vectores $\frac{d\gamma}{dt}\neq 0$ originários das várias curvas γ tomadas; logo serão paralelos, ou seja, serão linearmente dependentes.



max e min $f(x,y) = xy$

sujeito à $g(x,y) = \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1.$



min $f(x,y) = 3x + 4y$

sujeito à $x^2 + y^2 = 1.$

Aula 4: Exercícios 1

1 Determine os extremos de $f(x,y) = 2x + 2y$ sugeito à restrição $x^2 + y^2 = 1$.

2 Determine os extremos de $f(x,y) = xy$ sugeito à restrição $3x^2 + y^2 = 6$.

3 Determine os extremos de $f(x,y) = x^2 y$ sugeito à restrição $x^2 + y^2 = 1$.

(4) Considera a função real de duas variáveis reais definida pela expressão $f(x,y) := x^2 + \dfrac{y^2}{2}$.

(a) Determina e classifica os pontos críticos de f.

(b) Justifica a existência de extremos absolutos de f restrita ao conjunto definido pelas desigualdades $y - x^2 \geq -1$ e $y + x^2 \leq 1$. Calcula-os, assim como os respetivos extremantes absolutos, indicando também quais são maximizantes e quais são minimizantes.

Aula 16: Exercícios 3 (folha4)

2. Determine os extremantes da função $f(x,y,z) = xyz$ sujeita à condição $x^2 + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} = 1$.

3. Determine o ponto do plano $2x + y + 3z = 6$ mais próximo da origem.

4. Determine o ponto da reta de interseção dos planos $x + y + z = 2$ e $x + 3y + 2z = 12$ que esteja mais próximo da origem.

5. Determine os extremantes absolutos da função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeita à condição $3x - 2y + z - 4 = 0$.

8. Determine os extremos absolutos das seguintes funções f nos domínios D indicados:

   (a) $f(x,y) = x + y, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \ \wedge \ x + y \geq 1\}$.

   (b) $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ x \geq -1\}$.