Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo II — Agrup. IV

Exame de Recurso; 2 de julho de 2018

Duração: **2h30min**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[20pts] 1. Determine o domínio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{n2^{n-1}}$.

[20pts] 2. Considere o seguinte desenvolvimento em série $\operatorname{sen}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Partindo desse desenvolvimento, escreva o desenvolvimento em série de MacLaurin de $\cos(x)$, para $x \in \mathbb{R}$, justificando.

(b) Obtenha a soma da seguinte série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi(-\pi^2)^n}{(2n+1)!}$.

[25pts] 3. A série de Fourier da função real de variável real 2π–periódica g, tal que $g(x) = x,\ -\pi \le x < \pi$, é $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}\operatorname{sen}(nx)}{n}$.

(a) Justifique que a série converge pontualmente, para todo o $x \in \mathbb{R}$, e determine a sua soma $S(x)$, para $x \in [-\pi, \pi[$.

(b) Justifique a veracidade da seguinte afirmação:

Esta série não converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

[35pts] 4. Seja h a função de domínio $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ tal que $h(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.

(a) Determine a curva de nível 0 de h e descreva-a geometricamente.

(b) Determine o gradiente de h, $\nabla h(x,y)$, para $(x,y) \neq (0,0)$.

(c) Determine uma equação do plano tangente ao gráfico de h no ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

[35pts] 5. Sejam f a função de domínio $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = x^2y - y$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \le 4\}$.

(a) Mostre que f não tem extremantes locais no interior de D.

(b) Justifique que f tem máximo e mínimo globais em D e que os respetivos extremantes pertencem à fronteira de D.

(c) Mostre que o ponto $(\sqrt{3}, -1)$ surge como um candidato a extremante de f na fronteira de D, quando se utiliza o método dos multiplicadores de Lagrange.

[25pts] 6. Considere a EDO $\ y''' - 2y'' + y' = 2x + 1$,

(a) Mostre que a EDO tem uma solução da forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(b) Encontre a sua solução geral.

[20pts] 7. Determine um integral geral da equação $\ xyy' = x^2 e^{-\frac{y}{x}} + y^2$, efetuando a mudança de variável $z = \dfrac{y}{x}$.

[20pts] 8. Usando transformadas de Laplace, resolva o problema de valores iniciais $\begin{cases} y'' + 9y = 20\, e^{-t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1\ . \end{cases}$