Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO 2 - agrup. 1 **2017/18**

Folha 1: *Séries de potências, séries de Taylor, formula de Taylor*

---

1. (a) $x \in \mathbb{R}$
   (b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   (c) $\in \mathbb{R} \setminus \{]-1,1]\}$

2. Quais das séries seguintes são séries de potências? Em caso afirmativo indique a sucessão de coeficientes e o ponto de desenvolvimento.

   (a) NÃO
   (b) NÃO
   (c) SIM, $a_n = 1/n!$ e $c = -1$
   (d) NÃO

3. Determine o raio de convergência das seguintes séries de potências

   (a) $R = 256$
   (b) $R = 0$,
   (c) $R = 2^{-3/4}$,
   (d) $1/\sqrt{5}$.

4. $a_{2k} = (-1/2)^{k+1}$, $a_{2k+1} = -(-1/2)^{k+1}$

5. Créditos de anuidade são a forma mais comum de financiar a compra de imóveis. O banco e o recipiente fixam um montante de crédito K, uma taxa de juro anual ρ, o valor mensal da prestação R e o tempo de duração do crédito. No final do tempo fica uma dívida restante para qual se faz um novo contrato de crédito com uma nova taxa. Para estimar o risco é importante saber qual é a dívida restante.

   (a) Sabendo que o cálculo da dívida restante em cada mês nos dá a fórmula recursiva

$$
\begin{aligned}
a_0 &= K, \\
a_n &= \left(1 + \frac{p}{12}\right) a_{n-1} - R,
\end{aligned}
$$

determine a função representada pela série de potências $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= K + \left(1 + \frac{p}{12}\right) x f(x) - \frac{Rx}{1-x} \\
&= \frac{K}{1 - \left(1 + \frac{p}{12}\right) x} - \frac{Rx}{(1-x)\left(1 - \left(1 + \frac{p}{12}\right) x\right)}
\end{aligned}
$$

(b) A partir da fórmula explícita de f determine a representação em série de potências e a formula explícita para os coeficientes a_n.

Solução:

$$
a_n = K\left(1 + \frac{p}{12}\right)^n - R\frac{1 - \left(1 + \frac{p}{12}\right)^n}{1 - \left(1 + \frac{p}{12}\right)}
$$

6. Use a formula de Taylor para representar f no ponto $x = x_0$ como polinómio de Taylor até ao termo com $n = 3$. O resto não precisa de ser dado explicitamente.

   (a) $f(x) = e^{2x - x^2}$, $x_0 = 0$,

   (b) $f(x) = x^x - 1$, $x_0 = 1$,

   (c) $f(x) = \sin(\sin x)$, $x_0 = 0$.

7. Determine $\ln(1,5)$ usando um polinómio de Taylor de ordem 4 para a função $f(x) = \ln(1+x)$ e apresente uma estimativa para o erro.

8. Justifique a convergência uniforme das seguintes séries no intervalo $[0, 10]$:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt{1 + (2n+1)x}}$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n + nx}}$

9. Determine a série de Taylor para a função racional

$$
f(x) = \frac{1 + x^3}{2 - x}, \qquad x \neq 2
$$

   usando a série geométrica.

10. Determine os primeiros dois termos da série de Taylor de $f(x) = (1+x)^{1/n}, x > -1$, com centro em $x_0 = 1$.

11. Determine a série de Taylor para a função $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ com $f(x) = 1/x^2$ no ponto $x_0 = 1$. Para que valores de x converge a série?

12. Determine a série de Tayor para a função $f :]-1, 1[\mapsto \mathbb{R}$ com $f(x) = \operatorname{artanh}(x)$ no ponto $x_0 = 0$. (Sugestão: Use a formula $f(x) = \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$)