Derivada parcial em ordem a x

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a, b) \in int(\mathcal{D})$. Fixando $y = b$, fica definida uma função, g_b, real de uma variável, x, tal que

$$\begin{array}{rccl} g_b : & \{x \in \mathbb{R} \colon (x, b) \in \mathcal{D}\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g_b(x) = f(x, b) \end{array}$$

À derivada de g_b em $x = a$, caso exista, chama-se derivada parcial de f em ordem a x em (a, b), denota-se por, $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, *i.e.*,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

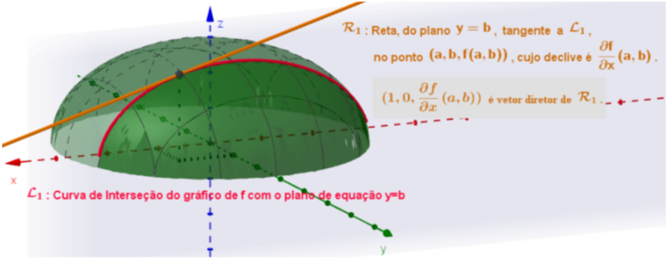
caso este limite exista e seja um número real[a].
Notação alternativa: $f'_x(a, b)$.

[a] Podem considera-se derivadas iguais a $+\infty$ (ou $-\infty$) mas, neste contexto, não irão ser relevantes

Considerações geométricas sobre o conceito de derivada parcial em ordem a x

1. A derivada parcial de f em ordem a x no ponto (a, b) é o declive da reta, $\mathcal{R}_1$, tangente à curva de interseção do gráfico de f com o plano $y = b$, no ponto $(a, b, f(a, b))$.

   Ilustração gráfica:



applet

outra applet

2. A reta $\mathcal{R}_1$ tem equações cartesianas:
$$\begin{cases} y = b \\ z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) \end{cases}$$
3. $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b))$ é vetor diretor de $\mathcal{R}_1$.

Derivada parcial em ordem a y

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in \text{int}(\mathcal{D})$. Fixando $x = a$, fica definida uma função, g_a, real de uma variável, y, tal que

$$\begin{array}{rccc} g_a: & \{y \in \mathbb{R} \colon (a,y) \in \mathcal{D}\} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & g_a(y) = f(a,y) \end{array}$$

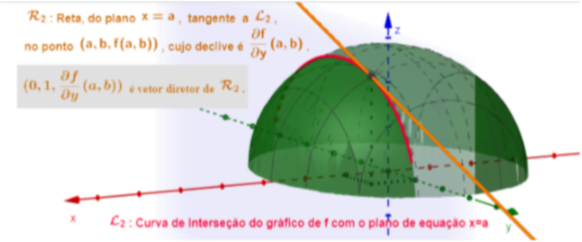
À derivada de g_a em $y = b$, caso exista, chama-se derivada parcial de f em ordem a y em (a,b), denota-se por, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, *i.e.*,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

caso este limite exista e seja um número real.
Notação alternativa: $f'_y(a,b)$.

Considerações geométricas sobre o conceito de derivada parcial em ordem a y

1. A derivada parcial de f em ordem a y no ponto (a, b) é o declive da reta, $\mathcal{R}_2$, tangente à curva de interseção do gráfico de f com o plano $x = a$, no ponto $(a, b, f(a, b))$.
   Ilustração gráfica:



applet

outra applet

2. A reta $\mathcal{R}_2$ tem equações cartesianas:

$$\begin{cases} x = a \\ z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \end{cases}$$

3. $(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b))$ é vetor diretor dessa reta.

Interpretação geométrica derivada parcial (exemplo).

Derivada parcial em ordem a x

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in int(\mathcal{D})$. Fixando $y = b$, fica definida uma função, g_b, real de uma variável, x, tal que

$$g_b : \begin{array}{rcl} \{x \in \mathbb{R} \colon (x,b) \in \mathcal{D}\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g_b(x) = f(x,b) \end{array}$$

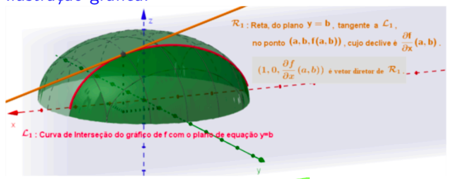
À derivada de g_b em $x = a$, caso exista, chama-se derivada parcial de f em ordem a x em (a,b), denota-se por, $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, *i.e.*,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

caso este limite exista e seja um número real[a].

1. A derivada parcial de f em ordem a x no ponto (a,b) é o declive da reta, $\mathcal{R}_1$, tangente à curva de interseção do gráfico de f com o plano $y = b$, no ponto $(a,b,f(a,b))$.

Ilustração gráfica:



applet

outra applet

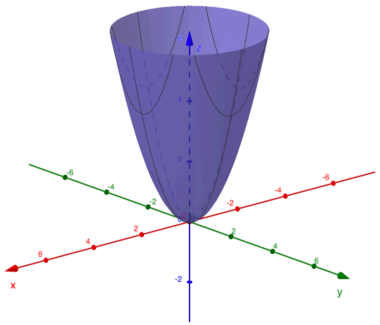
2. A reta $\mathcal{R}_1$ tem equações cartesianas:

$$\begin{cases} y = b \\ z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) \end{cases}$$

3. $(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b))$ é vetor diretor de $\mathcal{R}_1$.

$$\boxed{f(x,y) = x^2 + y^2}$$

Paraboloide Elíptico.

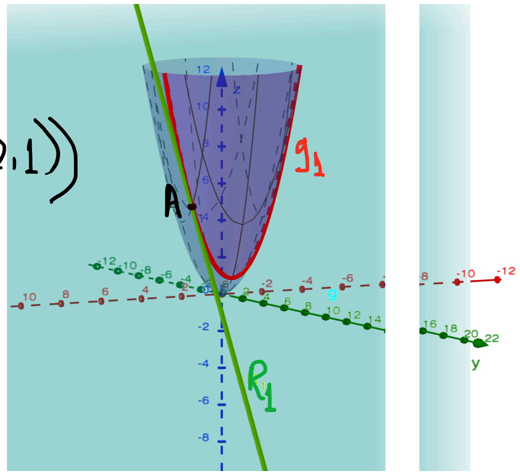


- Calculemos a derivada parcial de f em ordem a x no ponto (2,1).

Interpretação geométrica: Declive da reta tangente à curva de interseção do gráfico de f com o plano y=1 no ponto (2,1,f(2,1)).

$A(2,1,f(2,1))$

$A(2,1,5)$



$f(2,1) = 2^2 + 1^2 = 5$

$y = 1$

$$g_1 : \{x \in \mathbb{R} \colon (x,1) \in \mathbb{R}^2\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g_1(x) = x^2 + 1$$

interseção com o plano y=1

$$g_1'(2) = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 2\cdot(2) = 4$$

↑ Declive da reta tangente R_1.

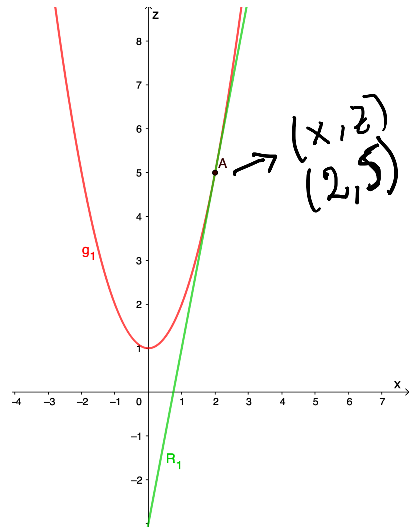
Usando a definição

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h,1) - f(2,1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 + 1^2 - 5}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4+2h+h^2+1-5}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2+4h}{h} = \lim_{h\to 0} h+4 = 4$$

A função g_1 no plano xOz



$\to (x,z)$
$(2,5)$

Eq. da reta R_1

R_1 é uma reta que passa pelo ponto $(2,5)$ e tem inclinação 4.

$$z-5 = 4(x-2)$$

$$\boxed{z = 5 + 4(x-2)}$$

Eq. cartesiana da reta R_1

$$R_1 \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 5 + 4(x-2) \end{cases}$$

$$(x,y,z) \in R_1 \Leftrightarrow (x,y,z) = (x,1,5+4(x-2)) = (x,1,4x-3) = (0,1,-3) + x\overbrace{(1,0,4)}^{\text{vetor diretor da reta.}},\ x\in\mathbb{R}$$

Interpretação geométrica derivada parcial (cont).

Derivada parcial em ordem a y

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \operatorname{int}(\mathcal{D})$. Fixando $x = a$, fica definida uma função, g_a, real de uma variável, y, tal que

$$\begin{array}{rccl} g_a : & \{y \in \mathbb{R} : (a, y) \in \mathcal{D}\} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & g_a(y) = f(a, y) \end{array}$$

À derivada de g_a em $y = b$, caso exista, chama-se derivada parcial de f em ordem a y em (a, b), denota-se por, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, *i.e.*,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

caso este limite exista e seja um número real.

Considerações geométricas sobre o conceito de derivada parcial em ordem a y

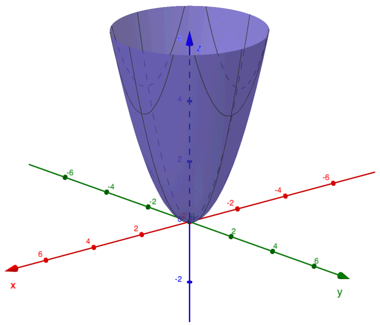
1. A derivada parcial de f em ordem a y no ponto (a, b) é o declive da reta, $\mathcal{R}_2$, tangente à curva de interseção do gráfico de f com o plano $x = a$, no ponto $(a, b, f(a, b))$.
   Ilustração gráfica:

applet
outra applet

2. A reta $\mathcal{R}_2$ tem equações cartesianas:
$$\begin{cases} x = a \\ z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) \end{cases}$$
3. $\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)$ é vetor diretor dessa reta.

$$\boxed{f(x, y) = x^2 + y^2}$$

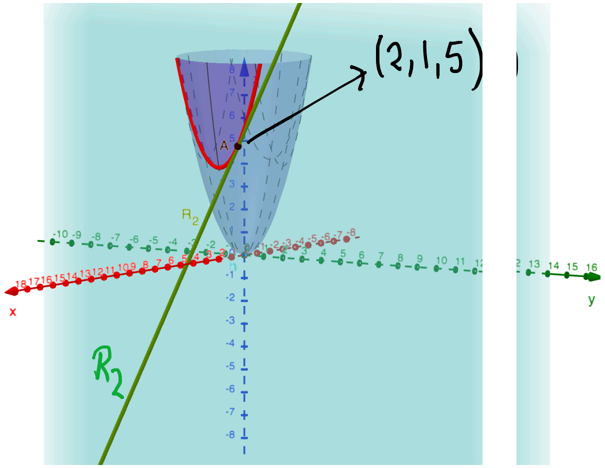
Paraboloide Elíptico.



$$f(2,1) = 2^2 + 1^2 = 5$$

- Calculemos a derivada parcial de f em ordem a y no ponto (2,1).

Interpretação geométrica: Declive da reta tangente à curva de interseção do gráfico de f com o plano x=2 no ponto (2,1,f(2,1)).



$x=2$

$$g_2 : \{y \in \mathbb{R} : (2,y) \in \mathbb{R}^2\} \to \mathbb{R}$$
$$y \to g_2(y) = f(2,y) = 4 + y^2$$

interseção com o plano $x = 2$

$$g'(1) = \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 2(1) = 2$$

← Declive da reta tangente R_2

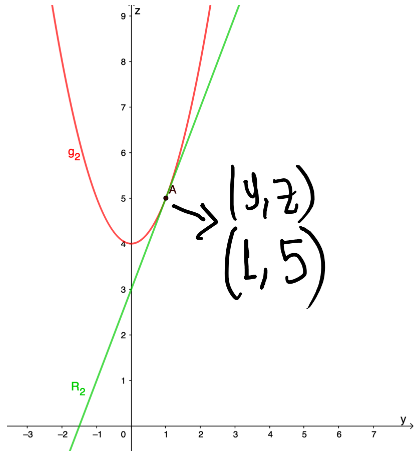
Usando a definição

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2,h+1) - f(2,1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(h+1)^2 + 4 - 5}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h+1+4 - 5}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h}{h} = \lim_{h\to 0} h+2 = \underline{\underline{2}}.$$

A função g_1 no plano yOz



$(y,z) \to (1,5)$

Eq. da reta R_2

R_2 é uma reta que passa pelo ponto $(1,5)$ e tem inclinação 2.

$$z - 5 = 2(y-1)$$

$$\boxed{z = 5 + 2(y-1)}.$$

Eq. cartesiana da reta R_2

$$R_2 \equiv \begin{cases} x = 2 \\ z = 5 + 2(y-1) \end{cases}$$

$$(x,y,z) \in R_1 \Leftrightarrow (x,y,z) = (2, y, 5+2(y-1)) = (2, y, 2y+3) = (2,0,3) + y\overbrace{(0,1,2)}^{\text{vetor diretor da reta } R_2}, \; y \in \mathbb{R}$$

Derivação parcial: exemplos

Na prática, se a função f estiver definida numa vizinhança de um ponto por uma única expressão derivável (usando regras de derivação) em relação a uma das variáveis, por exemplo x, considerando as restantes constantes, a derivada de f em ordem a x, nessa vizinhança, é a expressão obtida dessa derivação.

Exemplos:

1. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = x^2 + xy + \ln(1+y^2)$. Para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, existem as derivadas parciais de f em ordem a x (a y) e
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + \frac{2y}{1+y^2}\,.$$
2. $f:\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y,z) = \cos(xy^2) + \ln(zy^3)$.
Para todo o $(x,y,z) \in \mathcal{D}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -y^2\sin(xy^2)$,
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -2xy\sin(xy^2) + \frac{3}{y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{1}{z}.$$

Derivação parcial: exemplos

Em alguns casos, apenas a definição é utilizável. Tal como nas funções a uma variável, deve usar-se as definições para determinar as derivadas parciais num ponto P, se na vizinhança do ponto P a função não está definida por uma expressão analítica única.

Exemplos:

1. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.
   Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
2. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} xy, & \text{se } x \neq y \\ x^3, & \text{se } x = y \end{cases}$. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = 3$ e que $\frac{\partial f}{\partial y}(2,2)$ não existe.

Exemplo : Slide 28, $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a,b)}{h}$$

1) $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, h+0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Observe que, f, não é contínua em (0,0). De fato, como

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$ não existe (ver exercício 4 da aula 12 Parte 2)

f não é contínua em (0,0).

O fato que as derivadas parciais existam não garante que a função seja contínua

Exemplo 2 : Slide 28.

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad ; \quad f(x,y) = \begin{cases} xy, & x \neq y \\ x^3, & x = y \end{cases}$$

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,1) - f(1,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h) - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3,h+4) - f(3,4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(h+4) - 12}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h+12-12}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h} = 3.$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y}(2,2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2,h+2) - f(2,2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(h+2) - 8}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h+4-8}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h-4}{h} \begin{cases} \nearrow +\infty, & h \to 0^- \\ \searrow -\infty, & h \to 0^+ \end{cases}$$

Logo, $\lim_{h\to 0} \frac{2h-4}{h}$ não existe.

$\therefore \frac{\partial f}{\partial y}(2,2)$ não existe.

Agora, calculemos as derivadas parciais em um ponto qualquer (x_0, y_0).

- Se $x_0 \neq y_0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = y_0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = x_0$$

Digitalizado com

Exemplo 2 Slide 28 (cont)

- Se $x_0 = y_0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{y_0(x_0+h) - x_0^3}{h} =$$

$$\underset{x=y}{=} \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + x_0 h - x_0^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2(1-x_0) + x_0 h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2(1-x_0)}{h} + \frac{x_0 h}{h} = \begin{cases} 1, & \text{se } x_0 = y_0 = 1. \\ 0, & \text{se } x_0 = y_0 = 0 \\ \text{não existe}, & x_0 = y_0 \neq 1 \\ & x_0 = y_0 \neq 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h} = \lim \frac{x_0(y_0+h) - x_0^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + x_0 h - x_0^3}{h} = \lim \frac{x_0^2(1-x_0) + x_0 h)}{h}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 = y_0 = 1 \\ 0 & \text{se } x_0 = y_0 = 0 \\ \text{não existe}, & x_0 = y_0 \neq 1 \wedge x_0 = y_0 \neq 0 \end{cases}$$

Derivadas parciais de ordem superior

Definições e notação:

Seja $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais em ordem a x e a y, em algum conjunto de pontos no interior de $\mathcal{D}$. As funções

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}$$

com domínio nos conjuntos de pontos onde cada uma existe, terão, ou não, derivadas em ordem a x e a y nesse conjunto. As derivadas parciais de ordem 2 de f são as funções (definidas nos pontos onde existem):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Teorema de Schwarz

Exemplo:

Seja f a função real de domínio $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = x^3y + 5xy + \sin(y^2)$. Verifique que, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + 5y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + 5x + 2y\cos(y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\cos(y^2) - 4y^2\sin(y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3x^2 + 5 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3x^2 + 5$$

Teorema de Schwarz: Sejam $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P \in \operatorname{int}(\mathcal{D})$.

Se existem $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ numa bola aberta centrada em P e se $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é contínua em P, então existe $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P)$.

Função de classe C^k; Corolário do Teorema de Schwarz

Definição:

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, com $\mathcal{D}$ aberto, e $k \in \mathbb{N}_0$. Dizemos que f é de classe C^k em $\mathcal{D}$ se f possuir todas derivadas parciais até à ordem k contínuas em todo o ponto de $\mathcal{D}$.
Notação: $f \in C^k(\mathcal{D})$.

Corolário do Teorema de Schwarz:

Se $f \in C^2(\mathcal{D})$, então $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)$, para todo o $P \in \mathcal{D}$, com $i, j = 1, 2, \ldots, n$

Exemplo

$$f(x,y) = x + \text{sen}(xy) - e^{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + y\cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy) - e^{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y^2\,\text{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^2\,\text{sen}(xy) - e^{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \cos(xy) - xy\,\text{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \cos(xy) - xy\,\text{sen}(xy)$$

Exemplo

$$f(x,y,z) = y^2 - 3zx - \cos(yz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -3z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y + \text{sen}(yz)\cdot z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -3x + y\,\text{sen}(yz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 2 + \cos(yz)\cdot z^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = y^2\cos(yz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y,z) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}(x,y,z) = -3 = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}(x,y,z) = yz\cos(yz) + \text{sen}(yz) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}(x,y,z)$$

Digitalizado com

Derivadas Direcionais

As derivadas parciais de $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são casos particulares de derivadas chamadas derivadas direcionais, no caso segundo os vetores $U = (1, 0)$ ou $U = (0, 1)$, consoante o caso.

Definição:

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P \in int(\mathcal{D})$ e U um vetor unitário de $\mathbb{R}^n$. A derivada direcional de f segundo U no ponto P é o seguinte limite, caso exista e seja finito,

$$D_U f(P) = \lim_{h \to 0} \frac{f(P + hU) - f(P)}{h}$$

Interpretação geométrica (caso n=2): ▸ applet

$D_U f(P)$, com $P = (a, b)$, dá informação sobre a variação da cota dos pontos no gráfico de f , ao passar por $(a, b, f(a, b))$, quando é colocado um ponto X no domínio da função a deslocar-se na direção e sentido de U.

Derivada direcional exemplo.

Calcular a derivada direcional de $f(x,y) = x^2 + y^2$ no ponto (2,1) no sentido do vetor $v = (1,1)$.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$f(2,1) = 2^2 + 1^2 = 5$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rightarrow \text{vetor unitário}$$

$$D_{\vec{u}} f(2,1) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(P + h\vec{u}) - f(P)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\left((2,1) + h\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)\right) - f(2,1)}{h}$$

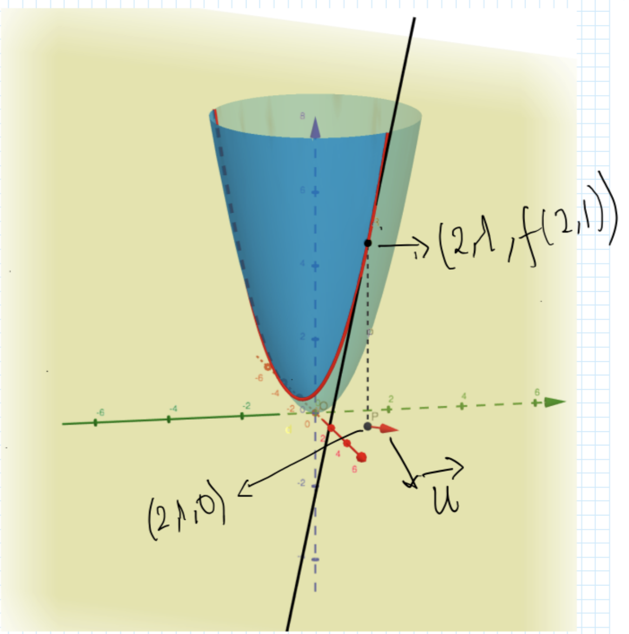
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(2 + h/\sqrt{2},\ 1 + h/\sqrt{2}\right) - f(2,1)}{h}$$

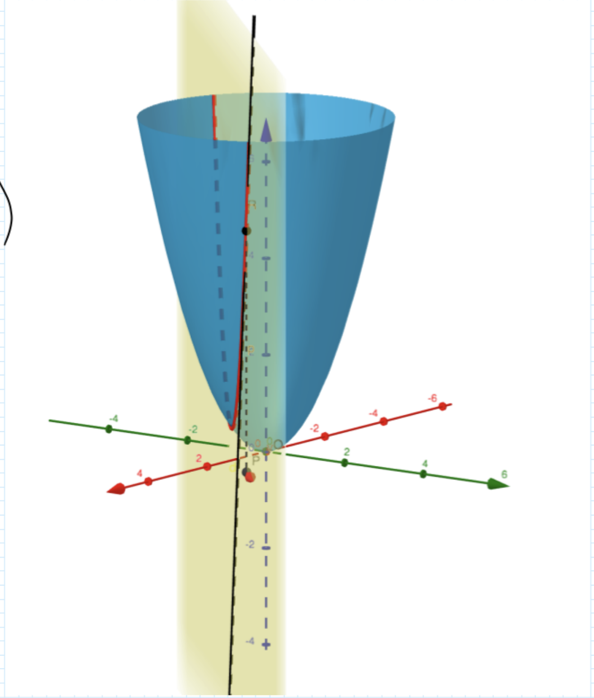
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(2 + h/\sqrt{2}\right)^2 + \left(1 + h/\sqrt{2}\right)^2 - 5}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{4} + \frac{4h}{\sqrt{2}} + \frac{h^2}{2} + \cancel{1} + 2h/\sqrt{2} + \frac{h^2}{2} - \cancel{5}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{6\cancel{h}}{\sqrt{2}} + h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} \frac{6}{\sqrt{2}} + h = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$D_u f(2,1) = \frac{6}{\sqrt{2}}$$





Exemplo de função com todas as derivadas direcionais num ponto e descontínua nesse ponto

Exemplo:

Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Se $U = (u_1, u_2)$, com $\|U\| = 1$, então

$$D_U f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hU) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3 u_1 u_2^2}{h^2 u_1^2 + h^4 u_2^4}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + h^2 u_2^4}$$

logo

$$D_U f(0,0) = \begin{cases} \frac{u_2^2}{u_1}, & \text{se } u_1 \neq 0 \\ 0, & \text{se } u_1 = 0 \ . \end{cases}$$

f não é contínua no ponto $(0,0)$, pois não existe limite de f nesse ponto.

Exemplo, Slide 33

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Seja $\vec{u} = (u_1, u_2)$, com $\|\vec{u}\| = 1$

Calculemos a derivada direcional de f na direção de u no ponto $(0,0)$

$$D_{\vec{u}} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(u_1,u_2)) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f((hu_1, hu_2))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(hu_1)\cdot h^2u_2^2}{h^2u_1^2 + h^4u_2^4} \cdot \frac{1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3 u_1 u_2^2}{h^3u_1^2 + h^5u_2^4} = \lim_{h\to 0} \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + h^2 u_2^4} = \begin{cases} \dfrac{u_2^2}{u_1} & \text{se } u_1 \neq 0 \\ 0 & \text{se } u_1 = 0 \end{cases}$$

$$D_{\vec{u}} f(0,0) = \begin{cases} \dfrac{u_2^2}{u_1}, & u_1 \neq 0 \\ 0, & u_1 = 0 \end{cases}$$

Obs: f não é contínua em $(0,0)$, pois o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

De fato, consideremos os conjuntos

$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ e $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in R_1}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in R_2}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

Como $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in R_1}} f(x,y) \neq \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in R_2}} f(x,y)$ então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe

Digitalizado com

Diferenciabilidade:
O que será para mais do que uma variável?

Como pode constatar com o exemplo do slide anterior a existência das derivadas parciais (ou mesmo de todas as direcionais) de f num ponto P, não garante a continuidade de f em P. Recorde que para $n = 1$, a existência de derivada finita (diferenciabilidade) num ponto é garantia da continuidade nesse ponto.

Em $\mathbb{R}^n$, para $n \geq 2$, qual será a noção de função diferenciável num ponto?

Vamos responder a essa questão para $n = 2$, recordando o caso $n = 1$. Para dimensões superiores é só fazer a adaptação devida.

Caso $n = 1$: diferenciabilidade/reta tangente

Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D})$, *i.e.*, existe e é finito o seguinte limite:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

logo, tomando $\epsilon(\Delta x) = -f'(a) + \dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$, obtemos

$$f(a + \Delta x) = f(a) + \Delta x\, f'(a) + \Delta x\, \epsilon(\Delta x), \text{ com } \lim_{\Delta x \to 0} \epsilon(\Delta x) = 0 \,.$$

Deste modo, na vizinhança de a, f fica "bem aproximada" pela reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, a que corresponde a chamada linearização de f em torno de a:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Caso n=2: diferenciabilidade/plano tangente (I)

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P = (a, b) \in \text{int}(\mathcal{D})$. Considere que existem $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$. Recorde-se que

$$U_1 = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(P)) \text{ e } U_2 = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(P))$$

são vetores tangentes às curvas de interseção do gráfico de f com $y = b$ e $x = a$, no ponto P, respetivamente.

Os vetores U_1 e U_2 são não colineares e portanto, existe o plano, $\mathcal{T}$, que passa em $(a, b, f(a, b))$ e contém U_1 e U_2. Atendendo a que, o vetor $N = (-\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b), 1)$ é ortogonal a ambos,

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

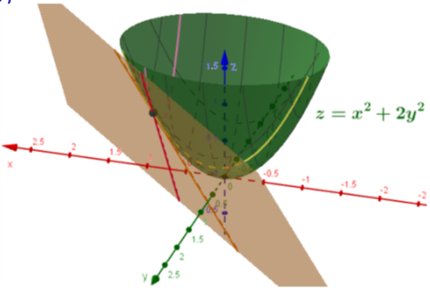
é uma equação cartesiana do plano $\mathcal{T}$.

Caso n=2: diferenciabilidade/plano tangente (II)

Nas funções diferenciáveis, ver definição no slide seguinte, f fica "bem aproximada" em redor de (a, b) pelos valores assumidos no plano $\mathcal{T}$, ou seja, pela sua linearização em torno de (a, b):

$$L(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)\,.$$

Ilustração Gráfica: (plano tangente)



applet

Função Diferenciável (caso $n = 2$)

Definição:

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P = (a, b) \in \text{int}(\mathcal{D})$ tais que existem $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$. Sejam Δx e Δy, reais, tais que $(a + \Delta x, b + \Delta y) \in B_r(P) \subset \mathcal{D}$, para algum $r > 0$.
Se existem funções $\epsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ e $\epsilon_2(\Delta x, \Delta y)$, com $\displaystyle\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \epsilon_1(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \epsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$, tais que

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

para quaisquer Δx e Δy nas condições referidas, então
f diz-se diferenciável em (a, b).

Proposição: Uma função $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $P = (a, b) \in \mathcal{D}$ se e só se as derivadas parciais de f existem em P e

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - \left[f(a,b) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \right]}{||(x,y)-(a,b)||} = 0$$

onde

$$||(x,y)-(a,b)||$$

representa a distância de (x, y) a (a, b), que é dada por $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$.

Exemplo:

Provar que a função $f(x,y) = x^2 + y^2$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

A função f dada possui derivadas parciais em todos os pontos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ que são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 2x_0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 2y_0$$

Assim, para mostrarmos que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ resta verificar que para qualquer $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, o limite da anterior proposição (slide 38) é zero

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x^2+y^2-[x_0^2+y_0^2+2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)]}{\|(x-x_0, y-y_0)\|}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x^2-2x_0x+x_0^2+y^2-2y_0y+y_0^2}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = 0$$

Logo, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo: A função f definida por $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, admite derivadas parciais no ponto $(0,0)$ mas não é diferenciável. De facto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

Para mostrar que f não é diferenciável em $(0,0)$ temos que provar que o limite

$$(*) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - [\overset{0}{f(0,0)} + \overset{0}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}(x-x_0) + \overset{0}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}(y-y_0)]}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

não é igual a zero

Consideremos o conjunto $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y \ , x > 0\}$ $(0,0)$ ponto de acum

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in R_1}} \frac{x^{1/3}y^{1/3}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^{2/3}}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2/3}}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{1/3}} = +\infty$$

Assim, o límite $(*)$ não é igual a zero

Portanto, f não é diferenciável em $(0,0)$.

Digitalizado com

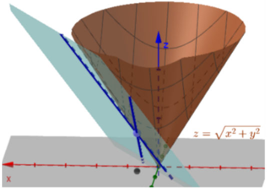
Dois exemplos (abordagem gráfica) [1]:

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

não é diferenciável em $(0, 0)$, mas é diferenciável em qualquer outro ponto.

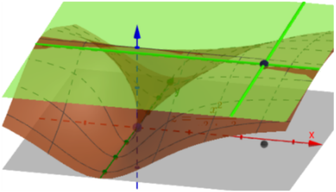
applet



2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

não é diferenciável em $(0, 0)$,
mas é diferenciável em qualquer outro ponto.



[1] Ver à frente, as justificações das afirmações.

Condições suficientes de diferenciabilidade

Teorema:

Sejam $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P \in \text{ int } (\mathcal{D})$. Se existem $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ numa bola aberta centrada em P e se pelo menos uma dessas derivadas é contínua em P, então f é diferenciável em P.

Corolário:

Sejam $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P \in \text{ int } (\mathcal{D})$. Se f é de classe C^1 numa bola aberta centrada em P, então f é diferenciável em qualquer ponto dessa bola (incluindo P).

Exercício:

Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Use o Teorema anterior (ou o Corolário), para concluir que f é diferenciável em (a, b), se $(a, b) \neq (0, 0)$.

Exercício: Slide 40

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

- As derivadas parciais de f em (0,0) não existem.

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & h\to 0^+ \\ -1, & h\to 0^- \end{cases}$

$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ não existe

- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h+0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} = \lim \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & h\to 0^+ \\ -1, & h\to 0^- \end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ não existe.

A função f tem derivadas em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$, exceto na origem.

$(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Estas derivadas parciais são contínuas em todos os pontos de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Logo, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Digitalizado com

Condição necessária de diferenciabilidade

Teorema:

Se $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $P \in \text{ int } (\mathcal{D})$, então f é contínua em P.

Nota:

O Teorema anterior tem a seguinte formulação equivalente:
Se $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ não é contínua em $P \in \text{ int } (\mathcal{D})$, então f não é diferenciável em P.

Exercício:

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.
Use o Teorema anterior, para concluir que f não é diferenciável em $(0, 0)$.

Exercício : Slide 41,

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Provemos que f não é diferenciável em (0,0)

• f não é contínua em (0,0)

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

De fato, se consideramos os conjuntos

$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ e $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in R_1}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in R_2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Como $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in R_1}} f(x,y) \neq \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in R_2}} f(x,y)$ então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe

Dado que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe então f não é contínua em (0,0).

Pelo teorema da cond. necessária de diferenciabilidade a função f não é diferenciável em (0,0).

Digitalizado com

Plano Tangente e Vetor Normal ao Gráfico de uma Função

Definições: Seja $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(a, b) \in \text{int}(\mathcal{D})$.

O plano de equação

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

é o plano tangente ao gráfico[a] de f no ponto $(a, b, f(a, b))$. (ver slide 36)

Dizemos que o vetor

$$N = (-\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b), 1)$$

é um vetor ortogonal ao gráfico de f, no ponto $(a, b, f(a, b))$.

A reta com vetor diretor N que passa em $(a, b, f(a, b))$ é chamada de reta ortogonal (ou normal) à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $(a, b, f(a, b))$.

[a] superfície de equação $z = f(x, y)$

Exemplo: Plano tangente e reta normal

O plano tangente ao gráfico de f, com $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, no ponto $P = (1,-1,2)$ tem equação

$$z - 2 = -2(x-1) + 2(y+1), \text{ ou seja, } -2x + 2y - z = -6.$$

O vetor $N = (-2,2,-1)$ é vetor ortogonal (ou normal) à superfície de equação $z = 4 - x^2 - y^2$ no ponto P.
A reta normal ao gráfico de f no ponto P tem equação:

$$(x,y,z) = (1,-1,2) + \lambda(-2,2,-1), \lambda \in \mathbb{R}$$

Vetor Gradiente e Derivadas Direcionais

Definição:

Seja $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com derivadas parciais de 1.ª ordem em $P \in \operatorname{int}(\mathcal{D})$. Ao vetor

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \frac{\partial f}{\partial x_2}(P), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)\right)$$

chamamos gradiente de f em P.

Teorema:

Sejam $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ função diferenciável em $\mathcal{D}$, $P \in \operatorname{int}(\mathcal{D})$ e $U \in \mathbb{R}^n$ um vetor unitário. Existe a derivada direcional de f segundo U no ponto P e

$$D_U f(P) = \nabla f(P) \cdot U\,,$$

onde $\cdot$ representa o produto interno (usual) de vetores em $\mathbb{R}^n$.

Interpretações Geométricas do Gradiente (caso $n = 2$)

applet

- Sendo $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função diferenciável em $\mathcal{D}$, $P \in \text{int}(\mathcal{D})$, e $U \in \mathbb{R}^2$ um vetor unitário.

$$D_U f(P) = \nabla f(P) \cdot U = \|\nabla f(P)\| \cos\theta, \text{ onde } \theta = \measuredangle(\nabla f(P), U)$$

Assim, a derivada direcional máxima em P ocorre na direção e sentido correspondente a $\theta = 0$, ou seja, na direção e sentido do vetor gradiente de f em P.

O vetor $\nabla f(P)$ fornece a direção e sentido na qual f, em redor de P, apresenta maior crescimento.

- Nas condições anteriores, se $P = (a, b)$ e $f(a, b) = k$, o vetor gradiente de f em (a, b) é ortogonal à reta tangente à curva de nível $\mathcal{C}_k$, que passa em (a, b). Isto é,

$\nabla f(a, b)$ é ortogonal à curva de nível de f que passa em (a, b).

Interpretação geométrica do gradiente (caso $n = 3$):

Plano tangente a uma superfície de nível

Seja $h\colon \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ função diferenciável em $\mathcal{B}$,
$\mathcal{S}_k = \{(x, y, z) \in \mathcal{B}\colon h(x, y, z) = k\}$ uma sua superfície de nível e $P \in \mathcal{S}_k$.

O vetor gradiente de h em P é ortogonal a $\mathcal{S}_k$ em P.

Assim, se $\nabla h(P) \neq 0$, então a equação do plano tangente a $\mathcal{S}_k$ no ponto P é dada por

$$\nabla h(P) \cdot \overrightarrow{PX} = 0\,,$$

i.e., o plano tangente à superfície de equação $h(x, y, z) = k$ em $P = (a, b, c)$ tem por equação:

$$(x - a)\frac{\partial h}{\partial x}(a, b, c) + (y - b)\frac{\partial h}{\partial y}(a, b, c) + (z - c)\frac{\partial h}{\partial z}(a, b, c) = 0 \quad .$$

Exemplo de determinação de plano tangente a uma superfície de nível

Consideremos o elipsoide de equação $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 49$ e $P = (1, -2, 3)$ um ponto desse elipsoide. Pretendemos determinar uma equação do plano tangente ao elipsoide no ponto P.

O elipsoide pode ser encarado como a superfície de nível 49 da função h de domínio $\mathbb{R}^3$ tal que $h(x, y, z) = 4x^2 + 9y^2 + z^2$. Note que $h \in C^1(\mathbb{R}^3)$, uma vez que, para todo o $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z) = 8x\,, \frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) = 18y \ \text{ e } \ \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) = 2z.$$

Assim, $\nabla h(P) = (8, -36, 6)$ e portanto uma equação do plano tangente ao elipsoide em P é

$$8(x-1) - 36(y+2) + 6(z-3) = 0\,.$$

Diferencial de uma função real de uma variável real

Reta Tangente/Linearização em torno de um ponto:

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em $x_0 \in \operatorname{int}(D)$. A função L definida por

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ ,$$

cujo gráfico é a reta tangente, é a chamada linearização de f em x_0.

Diferencial: Como L é uma boa aproximação local de f, para x próximo de x_0, tomando $\Delta f := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ e $\Delta x := x - x_0$, $\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$.
O diferencial de f em x_0 é a função, que depende de Δx, definida por

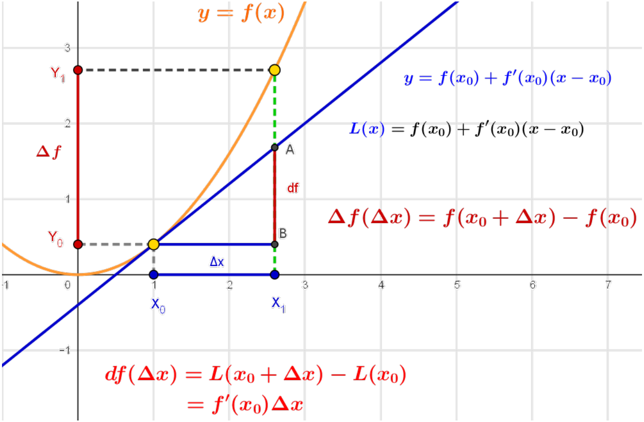
$$df(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x$$

Como $dx(\Delta x) = \Delta x$, escreve-se:

$$\boxed{df = f'(x_0)dx \ .}$$

(ver interpretação geométrica no slide seguinte e/ou em GeoGebra, agradecimentos a Ana Breda)

Diferencial de uma função real de uma variável real (interpretação geométrica)



Diferencial de uma função real de duas variáveis reais

Plano Tangente/Linearização em torno de um ponto:

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(x_0, y_0) \in \text{int}(D)$. O plano tangente ao gráfico de f no ponto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tem equação

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

A função L definida por

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

cujo gráfico é o plano tangente, é a chamada linearização de f em (x_0, y_0).

Diferencial Total: Analogamente ao caso $n = 1$, para x próximo de x_0 e y próximo de y_0, considerando $\Delta f := f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, $\Delta x := x - x_0$ e $\Delta y := y - y_0$,

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \; .$$

O diferencial total de f em (x_0, y_0) é

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy} \; .$$

Generalização para n variáveis (análogo):

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) \in \text{int}(D)$.
O diferencial total de f em $(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ é

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})dx_n} \; .$$