Exercícios miniteste de simulação

1.

Considerando a seguinte série de potências:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{a^{n+2} 3^n} x^n \quad , a \in \mathbb{R}^+$$

a) Determinar, em função de a, o raio de convergência

Raio de convergência : $R = \frac{1}{L}$

$$L = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\cancel{(-1)^{n+1}} \frac{1}{a^{n+3} 3^{n+1}}}{\cancel{(-1)^n} \frac{1}{a^{n+2} 3^n}} \right| =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{a^{n+2}} \; \cancel{3^n}}{\cancel{a^{n+3}} \; \cancel{3^{n+1}}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3a}$$

$$R = \frac{1}{1/3a} = 3a$$

b) Domínio de convergência

Intervalo de convergência : $]c - R, c + R[=]-3a, 3a[$

$\boxed{x = -3a}$ $$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{a^{n+2} 3^n} (-3a)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \cancel{(-1)^n} \frac{1}{a^{n+2} 3^n} \cancel{(-1)^n} (3a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a^{n+2} 3^n} (3a^n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cancel{3^n}}{a^2 \cancel{3^n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a^2}$$

$\downarrow$

divergente

$\boxed{x = 3a}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{a^{n+2} 3^n} (3a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cancel{3^n} \cancel{a^n}}{a^{\cancel{n}+2} \cancel{3^n}} =$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{a^2}$

Série dos módulos

$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{a^2} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a^2}$

↳ divergente

Logo, $D =]-3a, 3a[$

2. Seja f uma função 2π - periódica seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$ e contínua em $x=0$ com $f(0)=0$. Sabendo que a série de Fourier é

$\frac{\pi}{2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \pi} \left((-1)^n - 1 \right) \cos(nx)$

podemos concluir que a série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

$0 = \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \pi} (-2) \cos(0)$

$0 = \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \pi} (-2) \cdot 1$

$-\frac{\pi}{2} = -4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 \pi} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

↳ converge e tem soma $\frac{\pi^2}{8}$

3. Sabendo que $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$, a série de McLaurin de $f(x) = \sin(2x)$ é $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$

4. Sabendo que $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \Leftrightarrow e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!}$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} - 1 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}\right) - 1$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} + \underbrace{\frac{x^0}{0!}}_{=1} - 1$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} + \cancel{1} - \cancel{1}$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

5. Seja f a função 2π-periódica de domínio $\mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ b, & \text{se } 0 \leq x < \pi \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Acerca da soma da sua série de Fourier, $s(x)$ o que pode concluir?

$$s(-\pi) = \frac{a+b}{2}$$