

6. Transformadas de Laplace

baseado no texto de Alexandre Almeida, Cálculo II, fev. 2018, pp. 93–102

Isabel Brás

UA, 20/5/2020

Cálculo II – Agrup. IV 19/20

Resumo dos Conteúdos

- 1 Definição, exemplos, existência e propriedades básicas
- 2 Propriedades da Transformada de Laplace
 - Aplicação à resolução de um PVI linear
- 3 Transformada de Laplace Inversa
 - Aplicação à resolução dum PVI linear(cont.)

Transformada de Laplace

Definição:

Seja $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, chama-se **transformada de Laplace de f** à função F definida por

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

nos pontos $s \in \mathbb{R}$ em que este integral impróprio é convergente.

Notação: $F(s)$ ou $\mathcal{L}\{f\}(s)$ ou $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ ou, simplesmente, $\mathcal{L}\{f\}$.

Exemplo

$f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) = 1$. Por definição

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt$$

para $s \in \mathbb{R}$ em que este integral impróprio é convergente. Ora, estudando a convergência do integral conclui-se que

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \text{ para } s > 0$$

(para $s \leq 0$ este integral diverge). Assim,

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}, \text{ para } s > 0$$

Outros Exemplos

- $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \neq 1, t \neq 2, \\ 2 & \text{se } t = 1, \\ 0 & \text{se } t = 2. \end{cases}$

$$\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0. \quad [\text{Verifique!}]$$

- $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}, \quad s > a, \quad (a \in \mathbb{R})$

- $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0, \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

- $\mathcal{L}\{\sin(at)\}(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0, \quad (a \in \mathbb{R})$

- $\mathcal{L}\{\cos(at)\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0, \quad (a \in \mathbb{R})$

Linearidade da Transformada de Laplace

Proposição:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Suponha-se que existem $\mathcal{L}\{f\}(s)$ e $\mathcal{L}\{g\}(s)$ para $s > s_f$ e $s > s_g$, respectivamente. Então:

- (i) $\mathcal{L}\{f + g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) + \mathcal{L}\{g\}(s), \quad s > \max\{s_f, s_g\};$
- (ii) $\mathcal{L}\{\alpha f\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s), \quad s > s_f.$

Exemplos de aplicação:

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad \mathcal{L}\{\cosh(at)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right\}(s) \\
 &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}(s) \\
 &= \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+a}, \quad s > a \text{ e } s > -a \\
 &= \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|, \quad (a \in \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{L}\{\sinh(at)\}(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|, \quad (a \in \mathbb{R}) \quad \text{análogo, exercício!}$$

Existência da Transformada de Laplace

Observação:

Nem toda a função admite transformada de Laplace.

Por exemplo, $f(t) = e^{t^2}$ não tem transformada de Laplace, uma vez que o integral impróprio $\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{t^2} dt$ diverge para qualquer $s \in \mathbb{R}$.

[Verifique!]

Questão:

Que propriedades da função f poderão garantir a existência de $\mathcal{L}\{f\}(s)$, com $s > s_0$, para algum $s_0 \in \mathbb{R}$?

Condição Suficiente de Existência de Transformada de Laplace

Definição:

Sejam função $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$. f diz-se uma **função de ordem exponencial k** (à direita) se existem constantes $M > 0$, $T > 0$ tais que

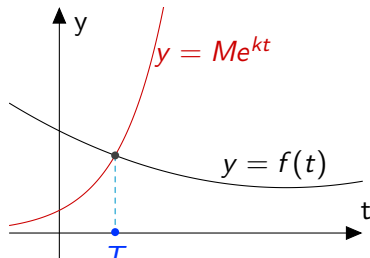
$$|f(t)| \leq M e^{kt}, \quad \forall t \geq T.$$

Teorema:

Se $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente contínua e f é de ordem exponencial k (para algum $k \in \mathbb{R}$) então $\mathcal{L}\{f\}(s)$ existe para $s > k$.

Sobre funções de ordem exponencial

Ilustração gráfica de uma função de ordem exponencial (caso $k > 0$):



Exemplos de funções de ordem exponencial:

- ① Funções polinomiais;
- ② Funções limitadas;
- ③ Funções do tipo $f(t) = t^n e^{at} \cos(bt)$, com $n \in \mathbb{N}_0$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- ④ Funções do tipo $f(t) = t^n e^{at} \sin(bt)$, com $n \in \mathbb{N}_0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Observação:

Se f é uma função de ordem exponencial k , então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} f(t) = 0, \quad \text{para todo } s > k. \quad [\text{Porquê?}]$$

Observação:

A função $f(t) = e^{t^2}$ não é de ordem exponencial.

Propriedades da Transformada de Laplace

1 (deslocamento na transformada)

$f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0, b]$, $b > 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s - \lambda), \text{ para } s > \lambda + s_f$$

2 (transformada do deslocamento)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0, b]$, $b > 0$, $H_a(t)$ a função degrau unitário¹ em $t = a$.

Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então, para todo $a \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathcal{L}\{H_a(t)f(t-a)\}(s) = e^{-as} F(s), \text{ para } s > s_f$$

¹Função de domínio \mathbb{R} tal que $H_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < a \\ 1 & \text{se } t \geq a \end{cases}$, também designada por função de Heaviside (quando $a = 0$).

Propriedades da Transformada de Laplace (cont.)

3 (transformada da expansão/contração)

$f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0, b]$, $b > 0$.

Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então, para todo o $a \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \text{ para } s > a s_f.$$

4 (transformada da convolução)

O produto de convolução de duas funções f e g , caso o integral exista, define-se como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau, \quad t \geq 0.$$

Se f e g são funções ordem exponencial s_0 , para algum $s_0 \in \mathbb{R}$, e seccionalmente contínuas em $[0, +\infty[$, então

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s)G(s), \text{ para } s > s_0,$$

(F e G são as transformadas de Laplace de f e g , respetivamente.)

Propriedades da Transformada de Laplace (cont.)

5 (derivada da transformada)

$f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0, b]$, com $b > 0$. Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s), \text{ para } s > s_f.$$

onde $F^{(n)}$ denota a derivada de ordem n da função F .

6 (transformada da derivada)

Suponha-se que $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ ($n \in \mathbb{N}$) funções ordem exponencial s_0 , para algum $s_0 \in \mathbb{R}$;

Se $f^{(n)}$ existe e é seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$, então existe $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s)$, para $s > s_0$, e

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Exemplo

- Cálculo de $\mathcal{L}\{\cos^2 t\}$ usando a transformada da derivada:

Como $(\cos^2 t)' = -\sin(2t)$, então

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}\{\sin(2t)\} &= \mathcal{L}\{(\cos^2 t)'\} \\ &= s\mathcal{L}\{\cos^2 t\} - \cos^2(0) \\ &= s\mathcal{L}\{\cos^2 t\} - 1, \quad \text{para } s > 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, $\mathcal{L}\{\sin(2t)\} = \frac{2}{s^2+4}$ e portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos^2 t\} &= \frac{1}{s}(1 - \mathcal{L}\{\sin(2t)\}) \\ &= \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

Exemplo de aplicação das transformadas de Laplace na resolução dum PVI

Problema de Valor Inicial: Determinar $y = y(t)$ tal que

$$y'' + 2y' + 10y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação dada, (admitindo que $y(t)$ tem transformada de Laplace, $Y(s)$)

$$s^2 Y(s) + 2s Y(s) + 10 Y(s) = \mathcal{L}\{1\}. \quad [\text{Porquê?}]$$

Daqui resulta que

$$(s^2 + 2s + 10)Y(s) = \frac{1}{s}, \text{ i.e., } Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 10)} \quad (s > 0).$$

Falta averiguar que função terá $Y(s)$ como transformada de Laplace. 

Transformada de Laplace Inversa

Para terminar a resolução do **PVI** do slide anterior, falta identificar a função que terá $Y(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+10)}$ como transformada de Laplace. Isto é, falta determinar a **transformada de Laplace inversa** de $Y(s)$.

Em geral, dada $F(s)$ interessa determinar “a” função f (definida em \mathbb{R}_0^+) tal que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Tal f , caso exista, chama-se **transformada de Laplace inversa** de F e escreve-se

$$f = \mathcal{L}^{-1}\{F\} \quad \text{ou} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t).$$

Será esta função única, existirá? Nem sempre existe, mas, caso existam funções nessas condições, a unicidade pode garantir-se escolhendo aquela que é contínua (ver teorema do slide seguinte).

Transformada de Laplace Inversa (unicidade)

Teorema

Sejam f e g duas funções seccionalmente contínuas em $[0, +\infty[$ tais que

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \mathcal{L}\{g\}(s), \quad \text{para } s > \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Se f e g são contínuas no ponto $t \in \mathbb{R}^+$, então $f(t) = g(t)$.

Observação:

Assim, em particular, se $F(s)$ é transformada de Laplace de uma função contínua $f(t)$, esta função é a única função contínua nessas condições (ou seja, a única transformada inversa contínua de F).

Propriedades da Transformada de Laplace Inversa

1 (linearidade da transformada inversa)

Suponha-se que F e G admitem transformada de Laplace inversa. Então as funções $F + G$ e αF ($\alpha \in \mathbb{R}$) também admitem transformada inversa e

$$(i) \quad \mathcal{L}^{-1}\{F + G\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \mathcal{L}^{-1}\{G\};$$

$$(ii) \quad \mathcal{L}^{-1}\{\alpha F\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F\}.$$

2 (transformada inversa do deslocamento)

Se F admite transformada de Laplace inversa, então $F(s - \lambda)$ também admite transformada inversa para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s - \lambda)\} = e^{\lambda t} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

3 (transformada inversa do produto)

Se F e G admitem transformada de Laplace inversa, então FG também admite transformada inversa e

$$\mathcal{L}^{-1}\{FG\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} * \mathcal{L}^{-1}\{G\}$$

Exemplos:

1

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{(s-2)^3} \right\} &= \frac{3}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{(s-2)^3} \right\} \quad s > 2 \\
 &= \frac{3}{2} e^{2t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^3} \right\} \\
 &= \frac{3}{2} e^{2t} t^2, \quad t \geq 0
 \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2+1)} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{1}{s^2+1} \right\} \quad s > 0 \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} * \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} \\
 &= (1 * \text{sen})(t) \quad t \geq 0 \\
 &= \int_0^t \text{sen}(\tau) d\tau \\
 &= -\cos(t) + 1
 \end{aligned}$$

Voltando ao PVI do slide 15:

[▶ ver slide 15](#)

Uma vez que

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 10)} \quad (s > 0),$$

a solução do problema pode ser determinada do seguinte modo:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{10} \frac{1}{s} - \frac{1}{10} \frac{s+2}{s^2 + 2s + 10}\right\} \quad s > 0 \\ &= \frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+1)^2 + 9}\right\} \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2 + 9} + \frac{1}{(s+1)^2 + 9}\right\} \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{10} e^{-t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 9}\right\} - \frac{1}{10} e^{-t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 9}\right\} \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{10} e^{-t} \cos(3t) - \frac{1}{30} e^{-t} \sin(3t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$