Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II — Agrupamento 4 2019/2020

Ficha de Exercícios 1
Séries de Potências e Fórmula de Taylor

Exercícios Propostos

1. Determine o domínio de convergência das seguintes séries de potências, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(n-1)!}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{2n+4}$;

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}x^n$; (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!(x-2)^n}{n-1}$; (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}(x+2)^n$; (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2+n^3}x^n$;

   (i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{\ln n}$; (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n6^n}(3x-2)^n$; (k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}(x-2)^n$; (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{2n+1}}x^n$;

   (m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(-2)^n}x^{2n}$.

2. Mostre que:

   (a) se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente num dos extremos do seu domínio de convergência, então também é absolutamente convergente no outro extremo;

   (b) se o domínio de convergência de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é $]-r, r]$, então a série é simplesmente convergente em $x = r$.

3. Determine os polinómios de Taylor seguintes:

   (a) $T_0^3(x^3+2x+1)$; (b) $T_\pi^3(\cos x)$; (c) $T_1^3(xe^x)$;
   (d) $T_0^5(\operatorname{sen} x)$; (e) $T_0^6(\operatorname{sen} x)$; (f) $T_1^n(\ln x)$ $(n \in \mathbb{N})$.

4. Considere $f(x) = e^x$.

   (a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem n da função f.
   (b) Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem n permite aproximar e^x no intervalo $]-1, 0[$, com erro inferior a $\frac{1}{(n+1)!}$.
   (c) Escolha um dos polinómios de MacLaurin de f e use-o para obter uma aproximação de $\frac{1}{\sqrt{e}}$, indicando uma estimativa para o erro cometido nessa aproximação.

5. Usando o resto de Lagrange, determine um majorante para o erro cometido na aproximação de sen(3) quando se usa o polinómio de Taylor de ordem 5 em torno do ponto $a = \pi$.

6. Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem 7 da função seno permite aproximar os valores desta função, no intervalo $[-1, 1]$, com erro inferior a $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$.

7. (a) Obtenha o polinómio de Taylor de ordem $n \in \mathbb{N}$ da função $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $c = 1$.
   (b) Determine um valor de n para o qual se garanta que o polinómio $T_1^n\left(\frac{1}{x}\right)$, obtido na alínea anterior, aproxime $\frac{1}{x}$ no intervalo $[0.9, 1.1]$, com erro inferior a 10^{-3}.

8. Determine o menor valor de n tal que o polinómio de MacLaurin de ordem n da função $f(x) = e^x$ aproxime $f(1)$ com erro inferior a 10^{-3}.

9. Mostre, usando a fórmula de Taylor, que $\ln(1 + x) \leq x$, para todo $x > -1$.

10. Considere a representação em série de potências da função $\frac{1}{1-x}$ dada por

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

Determine uma representação em série de potências para cada uma das seguintes funções (indicando o intervalo onde tal é válida):

$$\text{(a) } \frac{1}{1-3x}\ ; \qquad \text{(b) } \frac{2}{2+x}\ ; \qquad \text{(c) } \frac{1}{x}\ .$$

11. Desenvolva a função $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ em série de potências de $x - 3$, indicando o maior intervalo onde o desenvolvimento é válido.

12. [1] Considere a seguinte série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n+1}(x-1)^n$.
   (a) Calcule o raio de convergência da série.
   (b) Determine o seu domínio de convergência.

13. Seja $f(x) = \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$.
   (a) Determine o polinómio de Taylor de f de ordem 3 centrado em $c = 1$, isto é, $T_1^3 f(x)$.
   (b) Mostre que o erro absoluto cometido ao aproximar $\ln(\frac{3}{2})$ usando $T_1^3 f(\frac{3}{2})$ é inferior a $\frac{1}{64}$.

Exercícios Resolvidos

1. Determine o domínio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x-2}{4}\right)^n$.

Resolução: Usando o Critério da Raíz,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\left(\frac{x-2}{4}\right)^n\right|} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{|x-2|}{4\sqrt[n]{n}} \\ &= \frac{|x-2|}{4} \end{aligned}$$

Assim, a série é convergente para valores de x tais que $L < 1$ e divergente para valores de x tais que $L > 1$. Como, $\frac{|x-2|}{4} < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 6$, o intervalo de convergência da série é $I =]-2, 6[$. Podem

[1] A partir deste exercício são retomados conteúdos já abordados em exercícios anteriores.

ainda pertencer ao domínio de convergência os pontos $x=-2$ e $x=6$.
Para $x=-2$, obtem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(-1)^n\,,$$

trata-se da série harmónica alternada, que é convergente (esta conclusão pode obter-se usando o Critério de Leibniz).
Para $x=6$, obtem-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\,,$$

trata-se da série harmónica, que é divergente.
Conclusão, o domínio de convergência da série é $[-2,6[$.
Nota: Em alternativa, pode determinar o intervalo de convergência I, calculando o raio de convergência usando os coeficientes da série.

2. (a) Escreva a fórmula de Taylor de 2.ª ordem no ponto 1 da função $f(x)=\ln(x)$.
   (b) Calcule um valor aproximado de $\ln(1.2)$ usando opolinómio de Taylor de ordem 2 obtido na alínea anterior e mostre que o erro absoluto cometido é inferior a 3×10^{-3}.

Resolução:

(a) Como

$$\begin{aligned} f(x)=\ln(x), &\quad f(1)=0\\ f'(x)=\frac{1}{x}, &\quad f'(1)=1\\ f''(x)=-\frac{1}{x^2}, &\quad f'(1)=-1\\ f^{(3)}(x)=\frac{2}{x^3}, &\quad f^{(3)}(\theta)=\tfrac{2}{\theta^3}\end{aligned}$$

o polinómio de Taylor de ordem 2 no ponto 1 e o resto de Lagrange de ordem 2 correspondente são, respetivamente,

$$\begin{aligned} T_1^2f(x) &= 0+1(x-1)+\frac{-1}{2}(x-1)^2\\ &= (x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2\\ R_1^2f(x) &= \frac{\frac{2}{\theta^3}}{3!}(x-1)^3\\ &= \frac{1}{3\theta^3}(x-1)^3,\ \text{para algum } \theta \text{ entre } x \text{ e } 1.\end{aligned}$$

A fórmula de Taylor pedida é

$$\ln(x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3\theta^3}(x-1)^3,\ \text{para algum } \theta \text{ entre } x \text{ e } 1\,.$$

(b)

$$\begin{aligned} \ln(1.2) &\simeq T_1^2f(1.2)\\ &= 0.2-\frac{1}{2}(0.2)^2\\ &= 0.2-0.02\\ &= 0.18\end{aligned}$$

O erro absoluto cometido nesta aproximação é $|R_1^2 f(1.2)|$ e

$$\begin{aligned} |R_1^2 f(1.2)| &= \frac{\frac{2}{\theta^3}}{3!}(0.2)^3 \\ &= \frac{8}{3\theta^3}10^{-3}, \text{ para algum } \theta \text{ entre } 1 \text{ e } 1.2\,, \\ &< \frac{8}{3} \times 10^{-3} \\ &< 3 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Soluções

1. (a) $]-1,1[$, sendo absolutamente convergente em todos os pontos desse intervalo.
   (b) $\mathbb{R}$, sendo absolutamente convergente em todos os pontos desse intervalo.
   (c) $]-1,1]$, sendo simplesmente convergente em $x=1$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.
   (d) $[1,2[$, sendo simplesmente convergente em $x=1$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.
   (e) $\mathbb{R}$, sendo absolutamente convergente em todos os pontos desse intervalo.
   (f) $\{2\}$, sendo absolutamente convergente nesse ponto.
   (g) $[-3,-1[$, sendo simplesmente convergente em $x=-3$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.
   (h) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$, sendo absolutamente convergente em todos os pontos desse intervalo.
   (i) $[-1,1[$, sendo simplesmente convergente em $x=-1$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.
   (j) $\left]-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right]$, sendo simplesmente convergente em $x=\frac{8}{3}$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.
   (k) $]0,4[$, sendo absolutamente convergente em todos os pontos desse intervalo.
   (l) $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, sendo simplesmente convergente em $x=\frac{1}{2}$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.
   (m) $\left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$, sendo absolutamente convergente em todos os pontos do intervalo.

2. —

3. (a) $T_0^3(x^3+2x+1) = x^3+2x+1$
   (b) $T_\pi^3(\cos x) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2}$
   (c) $T_1^3(xe^x) = e + 2e(x-1) + \frac{3}{2}e(x-1)^2 + \frac{2}{3}e(x-1)^3$
   (d) $T_0^5(\operatorname{sen} x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$
   (e) $T_0^6(\operatorname{sen} x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$
   (f) $T_1^n(\ln x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$.

4. (a) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1}$, para algum θ entre 0 e x.
   (b) —
   (c) Por exemplo, $\frac{1}{\sqrt{e}} \simeq T_0^2 f(-\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 0.625$, com erro inferior a $\frac{1}{6}$.

5. $|R_5(3)| \leq \frac{(3-\pi)^6}{6!}$

6. —

7. (a) $T_1^n\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 + \cdots + (-1)^n(x-1)^n\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$
   (b) $n = 3$ (ou outro superior a este).

8. $n = 6$.

9. —

10. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$, para $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$;
    (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n$, para $-2 < x < 2$;
    (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$, para $0 < x < 2$.

11. $\displaystyle\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (x-3)^n\,, \qquad x \in]-1,7[.$

12. (a) $R = \frac{1}{4}$.
    (b) $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}[$.

13. (a) $T_1^3 f(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$.
    (b) —