# Aula 7: Sumário

- Exercícios de revisão

## Séries de potências de algumas funções

- $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \; \forall\, x \in ]-1,1[.$
- $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \; \forall\, x \in \mathbb{R}.$
- $\operatorname{sen}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$
- $\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$
- $\operatorname{senh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$
- $\cosh(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$

# Aula 7: Raio de converg. da derivada e do integral das séries de potência

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R \neq 0$.

Então as séries de potência

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(x-c)^n)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\right)' \qquad (5.1)$$

e $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_c^x a_n(t-c)^n dt = \int_c^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-c)^n dt \qquad (5.2)$$

têm igualmente o mesmo raio de convergência $R$ [Verifique!].

Repare-se que a série (5.2) é a série obtida por primitivação dos seus termos (tomando as primitivas que se anulam em $x = c$).

## Aula 7: Questões de aula 1 (ano transato)

Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}} x^n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}x + \frac{1}{4^3}x^2 + \frac{1}{4^4}x^3 + \cdots$$

1. Determine o raio de convergência da série.
2. Justifique que a série de potências dada é a série de Taylor da função $f(x) = \frac{1}{4-x}$ centrada no ponto $c = 0$.

---

Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^{2n} = 1 - 2x^2 + 4x^4 - 8x^6 + \cdots$$

1. Determine o raio de convergência da série.
2. Justifique que a série de potências dada é a série de Taylor da função $f(x) = \frac{1}{1+2x^2}$ centrado no ponto $c = 0$.

# Aula 7: Questões de aula 2 (ano transato)

Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} x^n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} x + \frac{2^2}{3^3} x^2 + \frac{2^3}{3^4} x^3 + \cdots$$

1. Determine o raio de convergência da série.
2. Justifique que a série de potências dada é a série de Taylor da função $f(x) = \frac{1}{3-2x}$ centrada no ponto $c = 0$.

---

Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (x-2)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{16}(x-2)^3 + \ldots$$

1. Determine o raio de convergência da série.
2. Justifique que a série de potências dada é a série de Taylor da função $f(x) = \frac{1}{4-x}$ centrada no ponto $c = 2$.

## Aula 7: Questões de aula 3 (ano transato)

Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} x^{3n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}x^3 + \frac{4}{27}x^6 + \frac{8}{81}x^9 + \dots$$

1. Determine o raio de convergência da série;
2. Justifique que a série de potências dada é a série de Taylor da função $f(x) = \frac{1}{3-2x^3}$ centrada no ponto $c = 0$.

---

Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^{n+1}(n+1)} x^{n+1} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{81}x^3 - \dots$$

1. Determine o raio de convergência da série;
2. Justifique que a série de potências dada é a série de Taylor da função $f(x) = \ln(1 + \frac{x}{3})$ centrada no ponto $c = 0$.

# Aula 7: Questões de aula 4 (ano transato)

Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1} = 2x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{32}{5}x^5 - \ldots$$

1. Determine o raio de convergência da série;
2. Justifique que a série de potências dada é a série de Taylor da função $f(x) = \arctan(2x)$ centrada no ponto $c = 0$.

---

Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3^{2n+1}(2n+1)} x^{2n+1} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{81}x^3 + \frac{1}{1215}x^5 - \ldots$$

1. Determine o raio de convergência da série;
2. Justifique que a série de potências dada é a série de Taylor da função $f(x) = \arctan(\frac{x}{3})$ centrada no ponto $c = 0$.

# Aula 7: Exercícios extra 1

**1.** Desenvolva a função $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{2-x}$ em série de potências. Indique o maior intervalo onde o desenvolvimento é válido.

**2.** Calcule a (função) soma das séries seguintes:

(a) $1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dots$

(b) $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots$

**3.** (a) Determine o desenvolvimento em série de MacLaurin da função $\ln(x+1)$.

(b) Calcule a soma da série $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3 \cdot 2} + \dfrac{x^4}{4 \cdot 3} - \dfrac{x^5}{5 \cdot 4} + \dots$.

# Aula 7: Exercícios extra 2

1. Calcule a soma das séries indicadas (a soma corresponde a $f(a)$, onde $a$ é um número óbvio e $f$ é dada por uma série de potências. Em geral, a série deverá ser manipulada até se encontrar uma série de potências conhecida):

**(a)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}$;

**(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$;

**(c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)}$;

**(d)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!}$.

2. (a) Verifique que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$ tem raio de convergência igual a 2.

(b) Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$; $-2 < x < 2$. Explicite $f(x)$.

(Sugestão: use a representação em série de potências de $\dfrac{1}{1-x}$).

# Aula 7: Exercícios extra 3

8. Usando representações adequadas em série de potências, justifique que:

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{sen x}{x} = 1$ ; (b) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

9. Considere a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-nx}}{2^n}$. Justifique que a função $S$ definida por

$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-nx}}{2^n}$ é integrável no intervalo $[0, \ln 2]$ e mostre que $\int_0^{\ln 2} S(x)dx = \frac{2}{3}$.

($2^o$ teste, junho de 2010 ).

# Aula 7: Exercícios extra 4

10. Considere a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$.

(a) Determine o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ no qual a série é absolutamente convergente.

(b) Calcule $f'(4)$, onde $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$ (definida no domínio de convergência da série).

(Exame de Recurso, julho de 2011 ).

11. Sabendo que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$

(a) obtenha uma representação em série de potências para a função $f(x) = xe^{x^3}$ e indique o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ em que esta representação é válida;

(b) obtenha uma representação em série numérica do integral $\int_0^1 xe^{x^3} dx$.

(Exame da Época Normal, junho de 2008).