Aula 6: Sumário

- Exercícios
- Convergência uniforme das séries de potências
- Diferenciação e integração de série de potências
- Unicidade da representação em série de potências
- Exemplos e exercícios

Revisão: (Aula5) Propriedades da converg. uniforme (Séries de funções)

Teor. 5.5 Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uma série de funções contínuas em $[a, b]$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em $[a, b]$ com soma S, então:

(i) A soma S é contínua em $[a, b]$;

(ii) A soma S é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx \quad \text{[integração termo a termo]}$$

(iii) Adicionalmente, se cada f_n é de classe C^1 em $[a, b]$ e $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ converge uniformemente em $[a, b]$, então S é diferenciável neste intervalo e

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x), \;\; x \in [a, b]. \quad \text{[derivação termo a termo]}$$

Revisão: (Aula5) Critério de Weierstrass para convergência uniforme

Teor. 5.6 (Critério de Weierstrass) Consideremos a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, com as funções f_n definidas em D. Se

$$|f_n(x)| \leq a_n, \ \ \forall\, n \geq n_0, \forall\, x \in D\,,$$

e a série numérica de termos não negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em D.

Aula 6: Exercícios 1

Mostre que as seguintes séries convergem uniformemente nos intervalos indicados:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2x}{n^3x+1}}$ em $\mathbb{R}^+$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2nx)-\ln(nx+1)}{n^2+1}$ em $[1,+\infty[$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2x^2}{n^4x^2+5n}$ em $\mathbb{R}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-\frac{1}{n})^n}{n^2+1}$ em $]0,1]$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{x^2+1}}$ em $\mathbb{R}$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{5}{4}}\ \operatorname{sech}(nx)$ em $\mathbb{R}$.

Série de potências

(séries uniformemente convergentes em intervalos fechados)

Aula 6: Convergência uniforme das séries de potências

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R \neq 0$, intervalo de convergência $I =]c-R, c+R[$ e domínio de convergência D. (Mostre que:)

Teor. 5.7. A série de potências com raio de convergência $R \neq 0$ **converge uniformemente** em qualquer intervalo fechado $[a, b]$ contido no seu domínio de convergência D. Se D é um intervalo fechado, então a série de potência converge uniformemente em D.

Conseq. do Teor. 5.5. A soma $S(x)$ da série de potências é contínua em qualquer intervalo fechado $[a, b] \subset D$. De facto, $S(x)$ vai ser contínua em todo o domínio de convergência D da série de potências (cf Teor. 5.9)

Quanto aos extremos do intervalo de convergência:

Teor. 5.8 (Teorema de Abel). Se a série de potências é convergente no ponto extremo $x = c+R$ (resp. no ponto $x = c - R$), então ela **converge uniformemente** no intervalo $[\theta, c+R]$ (resp. no intervalo $[c-R, \theta]$), para qualquer $\theta \in I$.

Aula 6: Diferenciação e integração de série de potências

Teor. 5.9 Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R \neq 0$, $f(x)$ a soma da série e I o seu intervalo de convergência ($I =]c-R, c+R[$). Então:

(i) A função f é **contínua** em todo o **domínio** de convergência D da série.

(ii) A função f é diferenciável em I e $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-c)^{n-1}, \ \forall\, x \in I$.

(iii) A função $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-c)^{n+1}}{n+1}$, é um primitiva de f em D; concretamente é a primitiva de f que se anula em $x = c$, i.e. $F(x) = \int_c^x f(t)dt$.

(iv) A função f é integrável em qualquer subintervalo fechado $[a, b] \subset D$ e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(x-c)^n dx.$$

Aula 6: Unicidade da representação em série de potências

Teo. 5.10 Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, $x \in I =]c-R, c+R[$ ($R \neq 0$), então f possui derivadas finitas de qualquer ordem em I e $a_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Consequentemente $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = T_c f$.

Isto é, a representação em série de potências de $(x-c)$ de uma função com derivadas finitas de todas as ordens nas vizinhanças de c, é única e dada pela série de taylor $T_c f(x)$.

Aula 6: Exemplos e exercícios 2 - Mostre que:

(a) $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n, \ -1 < x < 1.$

(b) $\ln \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\int \frac{1}{1-x}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, \ -1 < x < 1.$

(c) $\ln x = \displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}, \ \ 0 < x < 2.$ Domínio de conv.: $D =]0,2]$.

(d) $\ln 2 = \displaystyle\lim_{x\to 2^-} \ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ em $[1,2]$ (Usar teor. 5.9i).

(e) $\operatorname{arctg} x = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ com domínio de conv.: $D = [-1,1]$.

(f) $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\lim_{x\to 1^-} \operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ em $[-1,1]$ (Serie de Gregory).

Aula 6: Exercícios 3

Determine uma representação em série de potências de cada uma das seguintes funções:

(a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$.

(b) $\ln x + \ln(x-1)$.

(c) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

(d) $\ln(x(x-1))$

(e) $\dfrac{1}{x(x-1)}$

(f) $\ln(\dfrac{x}{x-1})$

(g) $e^{x+\ln x}$

(h) $\dfrac{x}{1+x^4}$

(j) $\operatorname{arctg}\left(x^2\right)$

[**Sugestão:** (a) Exprima $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x-1}$ em séries de potência centradas num mesmo centro c.]

Formulário Derivadas

$(u^p)' = p\,u^{p-1}\,u'$

$(\,\text{arcsen}\,(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\,\text{arctg}\,(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

$(\cos u)' = -u'\ \text{sen}\,u$

$(\sec u)' = u'\sec(u)\,\text{tg}\,(u)$

$(\,\text{sen}\,u)' = u'\ \cos u$

$(\,\text{cosec}\,u)' = -u'\,\text{cosec}\,(u)\,\text{cotg}\,(u)$

$(\,\text{tg}\,u)' = u'\ \sec^2 u$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(\,\text{cotg}\,u)' = -u'\ \text{cosec}^{\,2} u$

$(a^u)' = \dfrac{u' a^u}{\ln a}\ ,\ a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

Tabela das primitivas quase imediatas $\quad (c \in \mathbb{R})$

$$\int u'\, u^p\, dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + c, \quad p \neq -1$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + c$$

$$\int u' \sin u dx = \cos u + c$$

$$\int u' \cos u dx = \sin u + c$$

$$\int u' \sec^2 u dx = \tan u + c$$

$$\int u' \operatorname{cosec}^2 u dx = -\mathrm{cotgu} + \mathrm{c}$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + c$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctan(u) + c$$

$$\int u' \sec(u) \tan(u) dx = \sec u + c$$

$$\int u' \operatorname{cosec}(u) \mathrm{cotg(u)dx} = -\operatorname{cosec} \mathrm{u} + \mathrm{c}$$

$$\int u' e^u dx = e^u + c$$

$$\int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + c, \quad a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$$

Revisão: Exemplos de séries numéricas e suas somas

- A série dos inversos dos factoriais: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ (convergente).
- A série "alternada" dos inversos dos naturais: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ (convergente).
- A série de Gregory: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ (convergente).
- As séries de Euler: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ (convergentes).

Séries de potências de algumas funções

- $\diamond$ $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ \forall\, x \in]-1,1[.$

- $\diamond$ $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

- $\diamond$ $\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$

- $\diamond$ $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

- $\diamond$ $\operatorname{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$

- $\diamond$ $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$

Critério de convergência de séries alternadas $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n,\ a_n > 0$.

Critério de Leibniz: Se (a_n) é uma sucessão tal que

(i) $a_n = f(n) > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$,

(ii) (a_n) é uma sucessão decrescente (por exemplo se $f'(x) < 0,\, x \in]1, +\infty[$) e

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,$,

então a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ é convergente.

Além disso, se S representa a sua soma e S_n a n-ésima soma parcial, então verifica-se

$$0 < (-1)^n(S_n - S) < a_{n+1}, n \in N.$$

Numa série alternada convergente com $a_n = f(n) > 0$ decrescente, o erro que se comete ao tomar S_n como valor aproximado de S é: Erro $= |S_n - S| < a_{n+1}$.

Critérios de convergência absoluta para séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$

Critério de D'Alembert: Se $a_n \neq 0, \forall\, n > n_0$, e existe $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$, então:

(1) $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

(2) $L > 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente. (3) Se $L = 1$, nada se pode concluir.

Critério da raiz : Se existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, então:

(1) $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

(2) $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente. (3) $L = 1$, nada se pode concluir.