Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo II — Agrup. IV

Exame de Recurso; 8 de julho de 2019

Duração: **2h45min**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[25pts] 1. Considere a função $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, e tenha em conta que $\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Obtenha uma representação de f em série de potências.

(b) Determine uma série numérica convergente cuja soma é $\int_0^1 f(x)dx$.

[25pts] 2. Considere a função 2π-periódica h, definida em $[-\pi, \pi]$ por $h(x) = |x|$, cuja série de Fourier é

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\left[(2n-1)x\right] .$$

(a) Mostre que esta série é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$;

(b) Conclua, justificando, que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

[25pts] 3. Considere a função g real a duas variáveis reais definida por $g(x, y) = \ln(xy)$.

(a) Determine o domínio de g.

(b) Seja $k \in \mathbb{R}$. Determine a curva de nível k de g e faça um esboço gráfico da curva.

(c) Calcule a derivada direcional de g segundo o vetor $U = (0, 1)$ no ponto $(3, \frac{1}{3})$.

[30pts] 4. Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

(a) Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

(b) Justifique que a restrição de f a $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$ tem extremos globais e que estes são atingidos na fronteira de $\mathcal{D}$.

[20pts] 5. Efetuando a mudança de variável $y = zx$, determine um integral geral da equação diferencial

$$xy' = xe^{-\frac{y}{x}} + y, \qquad x > 0$$

[25pts] 6. Considere a EDO linear $\quad y''' - y'' = -2.$

(a) Mostre que $\{1, x, e^x\}$ é um sistema fundamental de soluções da EDO homogénea associada.

(b) Determine uma solução particular da EDO completa dada, usando o método da variação das constantes. Escreva a solução geral da EDO.

[25pts] 7. Resolva o seguinte problema de Cauchy, usando transformadas de Laplace: $\begin{cases} y'' + y' = -\sin(t) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$.

[25pts] 8. Seja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com derivadas finitas de qualquer ordem em todo o $x \in \mathbb{R}$, tal que

$f'(x) - f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e $f(-1) = 2$.

(a) Determine a série de Taylor de f centrada no ponto $c = -1$.

(b) Considere que $|f(x)| < 2$, para $-1,1 < x < -1$.
Mostre que o erro absoluto cometido ao aproximar $f(-1,1)$ usando o polinómio de Taylor de ordem 2 de f centrado no ponto $c = -1$ e calculado em $x = -1,1$ é inferior a 10^{-3}.