Aula 4: Sumário

- Exercícios
- Séries de Taylor e de MacLaurin
- Exemplos
- Exercícios
- Funções analíticas
- Condição necessária e suficiente para que uma função seja analítica
- Condição suficiente para que uma função seja analítica
- Exemplos e exercícios

Derivadas de ordem n de algumas funções

$f(x) = \frac{1}{1-x} \rightsquigarrow f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ $\quad$ $f(x) = \frac{1}{x} \rightsquigarrow f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$

$f(x) = \frac{1}{1+x} \rightsquigarrow f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$

$f(x) = \ln(1+x) \rightsquigarrow f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ $\quad$ $f(x) = \ln(x) \rightsquigarrow f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \rightsquigarrow f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x), & n \equiv 0 \bmod 4; \quad \text{(i.e. } n = 0 + \text{múltiplo de 4)} \\ \cos(x), & n \equiv 1 \bmod 4; \quad \text{(i.e. } n = 1 + \text{múltiplo de 4)} \\ -\operatorname{sen}(x), & n \equiv 2 \bmod 4; \quad \text{(i.e. } n = 2 + \text{múltiplo de 4)} \\ -\cos(x), & n \equiv 3 \bmod 4. \quad \text{(i.e. } n = 3 + \text{múltiplo de 4)} \end{cases}$$

$$f(x) = \cos(x) \rightsquigarrow f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos(x), & n \equiv 0 \bmod 4; \\ -\operatorname{sen}(x), & n \equiv 1 \bmod 4; \\ -\cos(x), & n \equiv 2 \bmod 4; \\ \operatorname{sen}(x), & n \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

$f(x) = e^{-x^{-2}} \rightsquigarrow f^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^{-(n+2i)} e^{-x^{-2}}$, em que $c_i =$constante.

$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$ $\quad$ [**Sugestão:** Mostre que $\lim_{x\to 0} x^{-(n+2i)} e^{-x^{-2}} = 0$ fazendo a substit. $y = x^{-1}$, em que $y \to \infty$.]

Polinómios de Taylor de algumas funções

$$T_0^n \ln(x+1) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

$$T_0^n \sin x = \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \qquad \ell = \tfrac{n}{2} \text{ (n par) ou } \ell = \tfrac{n+1}{2} \text{ (n ímpar)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^{k} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \ell = \tfrac{n-2}{2} \text{ (n par) ou } \ell = \tfrac{n-1}{2} \text{ (n ímpar)}$$

$$T_0^n e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad , \qquad T_0^n \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

$$T_0^n \cos x = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \ell = \tfrac{n}{2} \text{ (n par) ou } \ell = \tfrac{n-1}{2} \text{ (n ímpar)}$$

$$T_\pi^n \sin x = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^{k} \frac{(x-\pi)^{2k-1}}{(2k-1)!}, \qquad \ell = \tfrac{n}{2} \text{ (n par) ou } \ell = \tfrac{n-1}{2} \text{ (n ímpar)}$$

Aula 4: Séries de Taylor e de MacLaurin

Seja $f(x)$ um função com derivadas finitas de qualquer ordem num ponto $c \in \mathbb{R}$. Chama-se série de Taylor de f no ponto c à série de potências:

$$\begin{aligned} T_c f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots \\ &= \lim_{n\to\infty} T_c^n f(x) \end{aligned}$$

No caso particular de $c = 0$ temos a série de MacLaurin de f:

$$T_0 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

Se a série de Taylor $T_c f(x)$ tiver raio de convergência $R > 0$, então ela representa uma função $S(x)$ no seu domínio de convergência.

Aula 4: Exercícios 3

Mostre que

(a) $T_0^{2n+1} \operatorname{sen}(x) = T_0^{2n+2} \operatorname{sen}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

(b) $T_0^{2n} \cos(x) = T_0^{2n+1} \cos(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

Determine a série de Taylor $T_c f(x)$ das seguintes funções no ponto c referido, e indique o domínio de convergência das mesmas:

1. $T_0\, e^x$.
2. $T_0\, \operatorname{sen}(x)$.
3. $T_0\, \cos(x)$.
4. $T_0\, \ln(1+x)$.
5. $T_1\, \ln(x)$.
6. $T_2\, \ln(x)$.

Aula 4: Exemplos

(1) A função $\frac{1}{1-x}$ também possui derivadas finitas de todas as ordens em $c \neq 1$. Em particular a série de MacLaurin desta função é a série geométrica de razão x:

$$T_0 \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

O raio de convergência desta série de potências é $R = 1$ e a sua soma é $S(x) = \frac{1}{1-x}$. Ou seja, a série de Taylor de $\frac{1}{1-x}$ em $]-1, 1[$ representa a própria função $\frac{1}{1-x}$.

(2) A função $\phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ possui derivadas finitas em todo o $c \in \mathbb{R}$; $\phi^{(n)}(x) = P_n(x^{-1})\phi(x)$, para algum polinómio $P_n(x^{-1})$ em x^{-1}. Em particular, $\phi^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ [de facto, pondo $y = x^{-1}$, $\lim_{x \to 0} \phi^{(n)}(x) = \lim_{y \to \infty} \frac{P_n(y)}{e^{y^2}} = 0$ pela regra de Cauchy.] pelo que a série de MacLaurin de $\phi(x)$ é

$$T_0\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} x^n = 0 + 0x + 0x^2 + \dots$$

Esta série tem raio de convergência $+\infty$ e a sua soma é a função nula $S(x) = 0$. Portanto a série de Taylor de ϕ representa a função nula, e não ϕ.

Há funções que são representadas pelas séries de Taylor por elas geradas, e há outras que não.

Aula 4: Funções analíticas

Uma função $f(x)$ diz-se analítica em $x = c$ se a série de Taylor $T_c f(x)$ tiver raio de convergência $R > 0$ e para algum intervalo (aberto) I contendo c e contido no domínio de convergência, a soma $S(x) = f(x)$, $\forall\, x \in I$. Por outras palavras, se a série de Taylor de $f(x)$ no ponto c convergir para $f(x)$ numa vizinhança aberta de c.

Portanto se $f(x)$ é analítica no ponto c, então $f(x)$ admite uma representação, ou desenvolvimento, em série de potências de $x - c$, isto é, f é desenvolvível em série de Taylor em torno do ponto c.

Nos exemplos anteriores: $\phi(x)$ não é analítica em $x = 0$ e $1/(1-x)$ é analítica em $x = 0$.

Se $f(x)$ tem derivadas finitas de qualquer ordem e $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$, $\forall\, x \in I$ ($c \in I$),

então $T_c f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} T_c^n f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$. Não irá ser necessário impor que f seja derivável de ordem n.

Exercício: Mostre que a função $1/(1-x^2)$ é analítica em $x = 0$.

Aula 4: Condição necessária e suficiente para que $T_c f(x) = f(x)$

Teo. 4.6 Sejam I um intervalo, $c \in I$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas finitas de qualquer ordem em I. Então

$$T_c f(x) = f(x),\ \forall\, x \in I \quad \text{se, e só se,} \quad \lim_{n\to\infty} R_c^n f(x) = 0\,,\ \ \forall\, x \in I\,.$$

Logo, $f(x)$ é analítica em $c \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |R_c^n f(x)| = 0\,,\ \forall\, x \in I$.

Teo. 4.7 Sejam I, c e f nas mesmas condições do Teorema 4.6.
Se existe $M > 0$ tal que $|f^{(n)}(x)| \leq M\,,\ \forall\, x \in I, \forall\, n \in \mathbb{N}_0$, então

$$T_c f(x) = f(x)\,,\ \forall\, x \in I.$$

Portanto, $\boxed{\text{se } |f^{(n)}(x)| \leq M\,,\ \forall\, x \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \ \text{ então } f(x) \text{ é analítica em } c}$.

Nestas condições temos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n\,,\ \ \forall\, x \in I.$$

Aula 4: Exemplos (exercícios 4)

Mostre que:

1. $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ \forall\, x \in]-1, 1[.$

2. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

3. $\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$ $\forall\, x \in \mathbb{R}.$

4. $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!},$ $\forall\, x \in \mathbb{R}.$

5. $xe^x = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n-1)!}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

6. $x \operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2n}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^{2n}}{(2n-1)!}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$