Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo II — Agrup. IV

Exame Final; 13 de junho de 2018

Duração: **2h45**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[15pts] 1. Sabendo que a série numérica de termos positivos $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente e que a série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x-2)^n$ tem raio de convergência $R = 1$, determine, justificando detalhadamente, o domínio de convergência da série de potências.

[20pts] 2. Seja $f(x) = \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$.

(a) Determine o polinómio de Taylor de f de ordem 3 centrado em $c = 1$, isto é, $T_1^3 f(x)$.

(b) Mostre que o erro absoluto cometido ao aproximar $\ln(\frac{3}{2})$ usando $T_1^3 f(\frac{3}{2})$ é inferior a $\frac{1}{64}$.

[20pts] 3. Considere a série de funções

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3 + \sqrt{n} + 2}$$

(a) Mostre que a série converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

(b) Denotando por S a função soma da série, calcule, justificando, $S'(\pi)$.

[15pts] 4. Seja g a função real de variável real 2π–periódica tal que $g(x) = 3x,\ -\pi \leq x < \pi$. Determine a série de Fourier de g.

[25pts] 5. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}^2$ tal que $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-3y}{x^2-y} & \text{se } y \neq x^2 \\ 0 & \text{se } y = x^2 \end{cases}$.

(a) Determine a curva de nível 2 de g e faça o seu esboço gráfico.

(b) Mostre que g não é contínua em $(0,0)$.

(c) g é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

[40pts] 6. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = x^3 + y^2 - 2xy$.

(a) Determine os pontos críticos de f.

(b) Mostre que o ponto $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ é um minimizante local de f, averiguando se existem outros extremantes locais.

(c) O ponto $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ é minimizante global de f? Justifique.

[15pts] 7. Resolve a equação diferencial de Bernoulli $y' + xy = -e^{x^2} y^3$

[15pts] 8. Determine a solução geral da EDO exata $xe^{2y}dx + (y + x^2)e^{2y}dy = 0$

[15pts] 9. Encontre a solução geral da EDO linear $y'' + 3y = 2$.

[20pts] 10. Usando transformadas de Laplace, resolva o problema de valores iniciais $\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 6\ . \end{cases}$