Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II – Agrupamento IV 2017/2018

SOLUÇÕES DO EXAME FINAL (13/JUNHO/2018)
(E ALGUNS TÓPICOS DE RESOLUÇÃO)[1]

1. (a) $[1, 3]$.

2. (a) $T_1^3 f(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$.

   (b) —

   Considere que $\left|R_1^3 f(\frac{3}{2})\right| = \frac{|f^{(4)}(\theta)|}{4!}(\frac{3}{2}-1)^4$, para algum $\theta \in]1, \frac{3}{2}[$, e majore.

3. (a) —

   Use o critério de Weierstrass, atendendo a que $\dfrac{|\cos(nx)|}{n^3+\sqrt{n}+2} \leq \dfrac{1}{n^3+\sqrt{n}+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e mostrando que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3+\sqrt{n}+2}$ é convergente.

   (b) $S'(\pi) = 0$.

4. $g(x) \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6\,\sin(nx)}{n}(-1)^{n+1}$.

5. (a) $\mathcal{C}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 2\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x^2\right\} \setminus \{(0,0)\}$.

   (b) Não é contínua em $(0, 0)$.

   Basta considerar uma trajetória segundo a qual o limite da função $g(x,y)$, quando (x,y) tende para a origem seja diferente de zero, já que $g(0,0) = 0$; por exemplo, $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} g(x,y) = 1$.

   (c) g não é diferenciável em $(0, 0)$ porque não é contínua nesse ponto.

6. (a) $(0,0)$ e $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$; Resolva $\nabla f(x,y) = 0$.

   (b) $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ é um minimizante local de f e $(0, 0)$ é um ponto de sela.

   Analise a matriz Hessiana $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ nos pontos críticos $(0,0)$ e $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, usando, por exemplo, o teste da 2.ª derivada.

   (c) Não. Por exemplo, $f(-3, 0) = -27 < -\frac{4}{27} = f(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

7. $y^2 = \dfrac{e^{-x^2}}{2x+c}$, $c \in \mathbb{R}$, ($y = 0$ solução singular).

   Faça mudança de variável $z = \frac{1}{y^2}$, pelo que $z' = -\frac{2}{y^3}y'$, e obtenha a EDO linear de 1ª ordem $z' - 2xz = 2e^{x^2}$. Resolva esta EDO usando o fator integrante $\mu(x) = e^{-x^2}$ e obtenha $z = 2xe^{x^2} + ce^{x^2}$, $c \in \mathbb{R}$. Faça $z = y^{-2}$, obtendo o integral geral $y^2 = \frac{e^{-x^2}}{2x+c}$, $c \in \mathbb{R}$, da EDO inicial. A função $y = 0$ é solução da EDO, sendo solução singular.

8. $e^{2y}\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{4}\right) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

9. $y = C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x + \frac{2}{3}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

   Dado que a EDO é linear, determine y_h a solução geral da EDO homogénea associada $y'' + 3y = 0$ e determine y_p uma qualquer solução particular da EDO completa $y'' + 3y = 2$.

[1]Note que não é intenção deste texto apresentar resoluções completas e que a distância dos tópicos apresentados a uma resposta completa varia significativamente de alínea para alínea. Por vezes, é só dada a solução.

i) Como a EDO tem coeficientes constantes, resolva a sua equação característica $r^2 + 3 = 0$ obtendo as soluções $r = \sqrt{3}i$ e $r = -\sqrt{3}i$. Logo, conclua que $\left\{\cos\sqrt{3}x, \sin\sqrt{3}x\right\}$ é um sistema fundamental de soluções da EDO. Portanto, $y_h = C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\sin\sqrt{3}x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

ii) Uma solução particular será da forma $y_p = A$, para um certo $A \in \mathbb{R}$. Substituindo na EDO completa, obtém-se $A = \frac{2}{3}$. (Resolução alternativa: método da variação das constantes).

Obtenha a solução geral da EDO dada somando y_h com y_p.

10. $(-1 + 3t)e^{-3t}$.
Aplique transformadas de Laplace a ambos os membros da EDO, use as propriedades necessárias, manipule a equação e conclua que a transformada de Laplace de $y(t)$ é $Y(s) = \dfrac{-s}{(s+3)^2}$.
Obtenha $y(t)$ determinando a transformada inversa desta função racional.