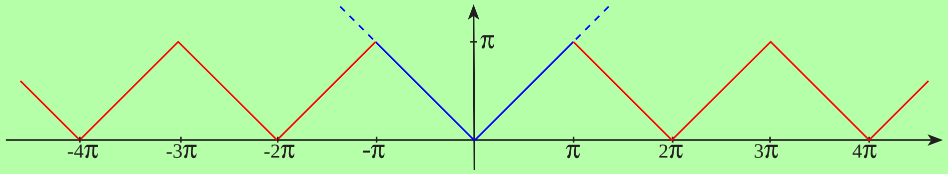
Aula 9: Sumário

- Exemplos calculados na aula anterior
- Mais exercícios
- Aplicação ao cálculo da soma de séries numéricas
- Exercícios
- Extensões par e ímpar de uma função $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$
- Exercícios

Aula 9: Exemplos calculados na aula anterior

- $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi[$. Extensão 2π-periódica $\bar{f}$:

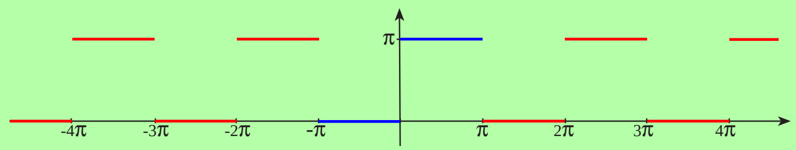


A série de Fourier de f é: $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$. (ver)

Como f é seccionalmente diferenciável em $[-\pi, \pi]$, a extensão 2π-periódica $\bar{f}$ é seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$ e contínu, pelo teorema de Dirichlet, $\bar{f}$ coincide com a soma da série de Fourier:

$$\bar{f}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- $g(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0; \\ \pi, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$. Ext. 2π-periódica $\bar{g}$:



Série de Fourier de g: $\dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x], \quad x \in \mathbb{R}.$ (ver)

Revisão (Aula 8): Teorema de Dirichlet

Se $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente diferenciável (i.e. com derivadas seccionalmente contínuas) em $]-\pi, \pi[$, então a sua extensão 2π-periódica $\widetilde{f}$ é seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$.

Teor. 5.12 (Teorema de Dirichlet) Se $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente diferenciável em $]-\pi, \pi[$, então a série de Fourier de f converge pontualmente em $\mathbb{R}$. Neste caso a sua soma $S(x)$ satisfaz:

$$\forall\, c \in \mathbb{R}, \quad S(c) = \frac{\widetilde{f}(c^+) + \widetilde{f}(c^-)}{2},$$

isto é, a série de Fourier de f em c converge para a média dos limites laterais de $\widetilde{f}$ no ponto c.

Se $\widetilde{f}$ é contínua em $\mathbb{R}$, isto é, se f é contínua em $[-\pi, \pi]$ e $f(-\pi) = f(\pi)$, então

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = \widetilde{f}(x).$$

Observação: Nas condições do teorema anterior, a série de Fourier de f converge (pontualmente) para a função

$$S(x) = \begin{cases} \widetilde{f}(x), & \text{se } x \text{ é ponto de continuidade de } \widetilde{f};\,; \\ \dfrac{\widetilde{f}(x^+) + \widetilde{f}(x^-)}{2}, & \text{se } x \text{ não é ponto de continuidade de } \widetilde{f}. \end{cases}$$

Nota: $\widetilde{f}(c^+) := \lim_{x \to c^+} \widetilde{f}(x)$ e $\widetilde{f}(c^-) := \lim_{x \to c^-} \widetilde{f}(x)$.

Aula 9: Observação

Uma função f diz-se seccionalmente contínua em $[a,b]$ se existir uma partição de $[a,b]$ com marcas $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, tal que f é contínua em cada subintervalo aberto $]a_{j-1}, a_j[$ $(j = 1, \ldots, n)$ e existirem e forem finitos os limites laterais $f(a_{j-1}^+) := \lim\limits_{x \to a_{j-1}^+} f(x)$ e $f(a_j^-) := \lim\limits_{x \to a_j^-} f(x)$.

A função f diz-se seccionalmente contínua em $\mathbb{R}$ se for seccionalmente contínua em qualquer intervalo fechado $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Note-se que uma função seccionalmente contínua em $[a,b]$ pode, eventualmente, não estar definida num conjunto finito de pontos deste intervalo.

Uma função f diz-se seccionalmente diferenciável se a sua derivada f' é uma função seccionalmente contínua.

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua, então a sua extensão 2π-periódica é seccionalmente contínua em $\mathbb{R}$.

Aula 9: Exemplo 5.16 = 5.13 - Exercícios 4

Voltando ao exemplo 5.13: $\bar{f}(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$. Seja f a extensão 2π-periódica de $\bar{f}$ a $\mathbb{R}$. Como $\bar{f}$ é seccionalmente diferenciável em $[-\pi, \pi]$, f é seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$, e a sua série de Fourier é convergente em $\mathbb{R}$. Além disso, como $\bar{f}$ é contínua em $[-\pi, \pi]$ e $\bar{f}(-\pi) = \bar{f}(\pi)$, a extensão f é contínua em $\mathbb{R}$. Pelo Teorema de Dirichlet, $f(x)$ coincide com a soma da série de Fourier:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Quando assim acontece podemos substituir o símbolo "$\sim$" pela igualdade. Mostre que neste caso a convergência é uniforme. (Ver figura aqui)

Revisão (Aula 7): Funções pares e ímpares

Definição: Uma função $f : [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se par se $f(-x) = f(x)$ e diz-se ímpar se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in [-a,a]$.

O coseno é função par e o seno é função ímpar. É fácil de verificar que o produto de duas funções com a mesma paridade é uma função par, enquanto que o produto de duas funções com paridades diferentes é uma função ímpar.

No caso de f ser par ou ímpar o cálculo dos coeficientes de Fourier simplifica-se:

f ímpar $\Rightarrow \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$ e f dá origem a uma série de senos: $f(x) \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$.

f par $\Rightarrow \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx$ e f dá origem a uma série de cossenos: $f(x) \sim$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

Aula 9: Exercícios 1

1. Determine a série de Fourier das seguintes funções:

(a) $f(x) = x + x^2, \quad x \in [-\pi, \pi[;$

(b) $g(x) = e^x, \quad x \in [-\pi, \pi[;$

(c) $$h(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0; ; \\ 0, & x = 0; ; \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Integrais de senos e cosenos

- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = 0, \;\; n > 0.$
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)dx = 0.$
- $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos(nx)dx = 0, \;\; \forall\, n \neq 0.$
- $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)dx = \frac{1-(-1)^n}{n}, \;\; \forall\, n \neq 0.$
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \pi, & m = n \end{cases}$
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \pi, & m = n \end{cases}$
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx = 0, \;\; \forall, m, n \in \mathbb{N}.$

Associatividade e comutatividade das séries

Nem sempre se pode associar ou trocar a ordem dos termos de uma série. Embora a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ seja divergente, a série obtida associando termos consecutivos aos pares $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$ e $1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots$ convergem para zero e 1 respectivamente. A série obtida trocando o 2º e 3º termos entre si, o 4º e o 5º termos entre si, o 6º e o 7º termos entre si, etc. e associando pares consecutivamente (deixando o primeiro par de fora), converge para 2.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então a série que se obtém associando de qualquer modo termos consecutivos em número finito é uma série convergente para a mesma soma.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente, então qualquer troca da ordem dos seus termos não altera a natureza, das séries assim obtidas, nem a soma.

Aula 9: Exercícios 2 - Aplicação ao cálculo da soma de séries numéricas

(a) A partir da série de Fourier $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$, $\quad x \in [-\pi, \pi]$ (aula 26 (exercício 1)) mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

(b) Seja $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Mostre que $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots = \dfrac{s}{4}$ e que $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$. Deduza que $s = \dfrac{s}{4} + \dfrac{\pi^2}{8}$. Daqui conclua que: $s = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (série de Euler).

(c) Tendo em conta que $\operatorname{arctg}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ em $[-1, 1]$, deduza que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ (série de Gregory).

Aula 9: Extensões par e ímpar de uma função $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$

Série de Fourier dos cossenos : $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ Série de Fourier dos senos : $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$

Relativamente a uma função integrável $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ obter-se-á:

– uma série de cossenos – série de Fourier da extensão par f_p de f com coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)dx \quad , \qquad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

– uma série de senos – série de Fourier da extensão ímpar f_i de f com coeficientes de Fourier:

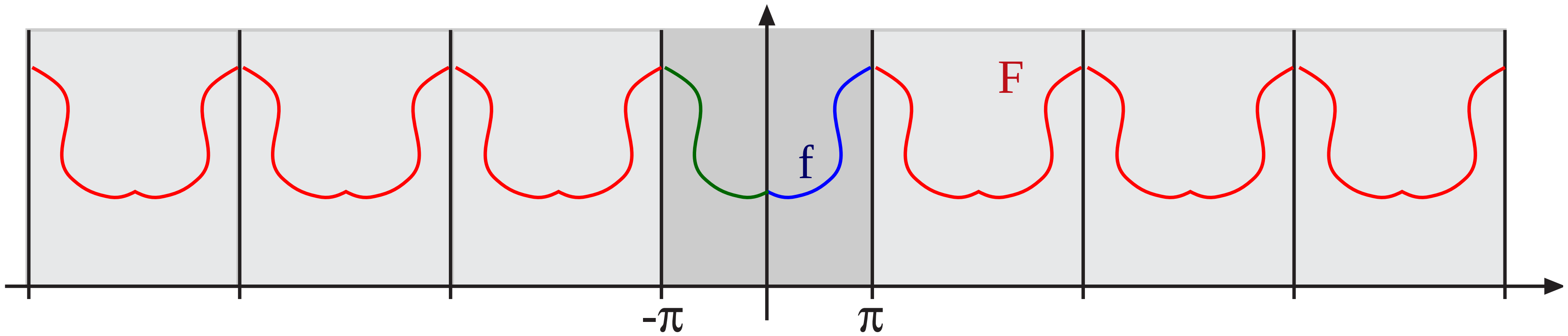
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)dx$$

em que a extensão ímpar f_i de f e a extensão par f_p de f, são as funções

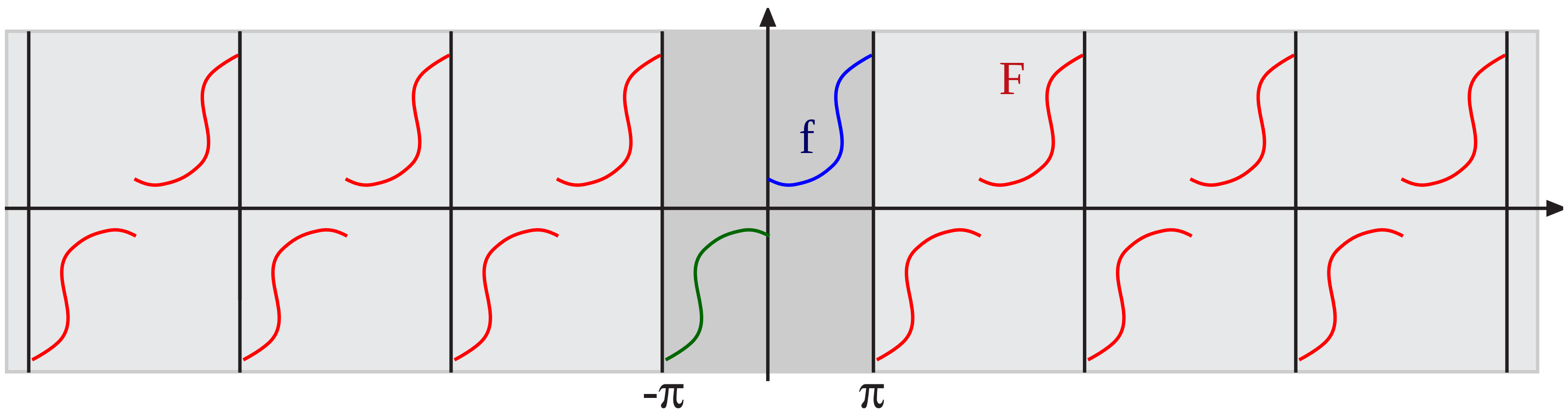
$$f_i(x) \begin{cases} -f(-x), & x \in [-\pi, 0[; \\ f(x), & x \in [0, \pi] \end{cases} \quad \text{e} \quad f_p(x) = \begin{cases} f(-x), & x \in [-\pi, 0]; \\ f(x), & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

(Eventualmente redefinindo f na origem no caso da extensão ímpar, embora tal seja irrelevante).

Aula 9: Ilustração das extensões par e ímpar de $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$



Extensão 2π-periódica $\widetilde{f_p}$ da extensão par f_p de f.



Extensão 2π-periódica $\widetilde{f_i}$ da extensão ímpar f_i de f.

2. Considere a função constante $f(x) = 2$ no intervalo $[0, \pi]$.

(a) Determine a (soma da) série de Fourier de senos de f e represente-as graficamente no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

(b) Determine a (soma da) série de Fourier de cossenos de f e represente-as graficamente no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

3. Considere a função $f(x) = cos(x)$ no intervalo $[0, \pi]$.

(a) Determine a (soma da) série de Fourier de senos.

(b) Determine a (soma da) série de Fourier de cossenos de f.

Alguns integrais definidos

- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \pi, & m = n \end{cases}$
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \pi, & m = n \end{cases}$
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx = 0, \ \forall\, m,n \in \mathbb{N}$
- $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos(nx)dx = 0 \ (n > 0)$ • $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos^2(nx)dx = \frac{\pi}{2} \ (n > 0)$ • $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}^2(nx)dx = \frac{\pi}{2} \ (n > 0)$
- $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)dx = \frac{1-(-1)^n}{n} = \begin{cases} 0, & n \text{ par;} \\ \dfrac{2}{n}, & n \text{ ímpar} \end{cases}$
- $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \dfrac{\pi}{2}, & m = n \end{cases}$
- $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \dfrac{\pi}{2}, & m = n \end{cases}$
- $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0, & m = n; \\ \dfrac{m[1-(-1)^{m+n}]}{m^2-n^2}, & m \neq n \end{cases} = \begin{cases} 0, & m = n; \\ 0, & m \neq n \text{ e } m+n \text{ par;} \\ \dfrac{2m}{m^2-n^2}, & m \neq n \text{ e } m+n \text{ ímpar} \end{cases}$

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$; $\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$; $\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x-y)+\operatorname{sen}(x+y))$.

Revisão (aula13): Exemplos de séries numéricas e suas somas

- A série dos inversos dos factoriais: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ (convergente).
- A série “alternada” dos inversos dos naturais: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ (convergente).
- A série de Gregory: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ (convergente).
- As séries de Euler: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ (convergentes).

Revisão: Exemplos clássicos de séries de potências

1. $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ \forall\, x \in]-1, 1[.$

2. $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

3. $\operatorname{sen}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$ $\forall\, x \in \mathbb{R}.$

4. $\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$ $\forall\, x \in \mathbb{R}.$

5. $\operatorname{senh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$

6. $\cosh(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$

Revisão (Aula 7): Teorema de Dirichlet

Se $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente diferenciável (i.e. com derivadas seccionalmente contínuas) em $]-\pi, \pi[$, então a sua extensão 2π-priódica $\widetilde{f}$ é seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$.

Teor. 5.12 (Teorema de Dirichlet) Se $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente diferenciável em $]-\pi, \pi[$, então a série de Fourier de f converge pontualmente em $\mathbb{R}$. Neste caso a sua soma $S(x)$ satisfaz:

$$\forall\, c \in \mathbb{R}, \quad S(c) = \frac{\widetilde{f}(c^+) + \widetilde{f}(c^-)}{2},$$

isto é, a série de Fourier de f em c converge para a média dos limites laterais de $\widetilde{f}$ no ponto c.

Se $\widetilde{f}$ é contínua em $\mathbb{R}$, isto é, se f é contínua em $[-\pi, \pi]$ e $f(-\pi) = f(\pi)$, então

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = \widetilde{f}(x).$$

Observação: Nas condições do teorema anterior, a série de Fourier de f converge (pontualmente) para a função

$$S(x) = \begin{cases} \widetilde{f}(x), & \text{se } x \text{ é ponto de continuidade de } \widetilde{f};\,; \\ \dfrac{\widetilde{f}(x^+) + \widetilde{f}(x^-)}{2}, & \text{se } x \text{ não é ponto de continuidade de } \widetilde{f}. \end{cases}$$

Nota: $\widetilde{f}(c^+) := \lim\limits_{x \to c^+} \widetilde{f}(x)$ e $\widetilde{f}(c^-) := \lim\limits_{x \to c^-} \widetilde{f}(x)$.

Revisão (Aula 7): Funções seccionalmente contínuas

Uma função f diz-se seccionalmente contínua em $[a, b]$ se existir uma partição de $[a, b]$ com marcos $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, tal que f é contínua em cada subintervalo aberto $]a_{j-1}, a_j[$ $(j = 1, \ldots, n)$ e existirem e forem finitos os limites laterais $f(a_{j-1}^+) := \lim_{x \to a_{j-1}^+} f(x)$ e $f(a_j^-) := \lim_{x \to a_j^-} f(x)$.

A função f diz-se seccionalmente contínua em $\mathbb{R}$ se for seccionalmente contínua em todo o intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Note-se que uma função seccionalmente contínua em $[a, b]$ pode, eventualmente, não estar definida num conjunto finito de pontos deste intervalo.

Uma função f diz-se seccionalmente diferenciável se a sua derivada f' é uma função seccionalmente contínua (seria melhor dizer seccionalmente C^1).

Revisão: (Aula4) Critério de Weierstrass para convergência uniforme

Teor. 5.6 (Critério de Weierstrass) Consideremos a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, com as funções f_n definidas em D. Se

$$|f_n(x)| \leq a_n, \;\; \forall\, n \geq n_0, \forall\, x \in D \,,$$

e a série numérica de termos não negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em D.

Soluções

(1a) $\tilde{f} \sim \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4\cos(nx) - 2n \operatorname{sen}(nx)}{n^2}$.

(1b) $\tilde{g} \sim \frac{2\operatorname{senh}(\pi)}{\pi} + \frac{2\operatorname{senh}(\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx) - n\operatorname{sen}(nx)}{1+n^2}$, em que $2\operatorname{senh}(\pi) = e^{\pi} - e^{-\pi}$.

(1c) $\tilde{h} \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}[(2n-1)x]}{2n-1}$.

(2a) Tomar $x = 0$.

(2b) —

(3.2a) $\widetilde{f_i} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)\pi} \operatorname{sen}[(2n-1)x]$, em que f_i é a extensão ímpar de f a $]-\pi,\pi]$ e $\widetilde{f_i}$ é a extensão periódica de f_i.

(3.2b) $\widetilde{f_p} \sim 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0\cos(nx)$, em que f_p é a extensão par de f a $]-\pi,\pi]$ e $\widetilde{f_p} = 2$ é a extensão periódica de f_p.

(3.3a) $\widetilde{f_i} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8n}{\pi(4n^2-1)} \operatorname{sen}(2nx)$, em que f_i é a extensão ímpar de f a $]-\pi,\pi]$ e $\widetilde{f_i}$ é a extensão periódica de f_i.

(3.3b) $\widetilde{f_p} \sim 0 + \cos(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} 0\,\cos(nx)$, em que f_p é a extensão par de f a $]-\pi,\pi]$ e $\widetilde{f_p} = cos(x)$ é a extensão periódica de f_p.