Limite segundo um conjunto

Definição 4

*Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathcal{R}$ um subconjunto de $\mathcal{D}$ para o qual A é ponto de acumulação. Chama-se **limite de** f **quando** X **tende para** A**, segundo o conjunto** $\mathcal{R}$, ao limite quando X tende para A da restrição de f a $\mathcal{R}$, i.e,*

$$\lim_{\substack{X \to A \\ x \in \mathcal{R}}} f(X) = \lim_{X \to A} f_{|\mathcal{R}}(X)$$

Exemplo 8

Consideremos o conjunto $\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\right\} \setminus \{(0, 0)\}$,

Exemplo 8

Consideremos o conjunto $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \setminus \{(0,0)\}$,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x\in\mathcal{R}}} \frac{y^2}{x^2+y^2} =$$

Exemplo 8

Consideremos o conjunto $\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\right\} \setminus \{(0, 0)\}$,

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ x \in \mathcal{R}}} \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \to 0} \frac{y^2}{y^2} =$$

Exemplo 8

Consideremos o conjunto $\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\right\} \setminus \{(0, 0)\}$,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\in\mathcal{R}}} \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2} = 1$$

Exemplo 8

Consideremos o conjunto $\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\right\} \setminus \{(0,0)\}$,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x \in \mathcal{R}}} \frac{y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2} = 1$$

Do limite calculado não podemos concluir que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ existe.

Proposição 2

- *Se existe algum* $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}$ *nas condições da definição, tal que* $\lim_{\substack{X \to A \\ x \in \mathcal{R}}} f(X)$ *não existe, então não existe* $\lim_{X \to A} f(X)$.

Proposição 2

- *Se existe algum* $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}$ *nas condições da definição, tal que* $\lim\limits_{\substack{X \to A \\ x \in \mathcal{R}}} f(X)$ *não existe, então não existe* $\lim\limits_{X \to A} f(X)$.
- *Se existem* $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subseteq \mathcal{D}$ *nas condições da definição, tais que*

$$\lim_{\substack{X \to A \\ x \in \mathcal{R}_1}} f(X) \neq \lim_{\substack{X \to A \\ x \in \mathcal{R}_2}} f(X),$$

então não existe $\lim\limits_{X \to A} f(X)$.

Exemplo 9

Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ *não existe.*

Exemplo 9

Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ *não existe.*
Consideremos os conjuntos

$$\mathcal{R}_1 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\Big\}$$

$$\mathcal{R}_2 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x\Big\}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{R}_1}} \frac{x^2}{x^2+y^2} =$$

Exemplo 9

Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ *não existe.*
Consideremos os conjuntos

$$\mathcal{R}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\right\}$$

$$\mathcal{R}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x\right\}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{R}_1}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+4x^2} =$$

Exemplo 9

Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ *não existe.*
Consideremos os conjuntos

$$\mathcal{R}_1 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\Big\}$$

$$\mathcal{R}_2 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x\Big\}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{R}_1}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+4x^2} = \frac{1}{5}.$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{R}_2}} \frac{x^2}{x^2+y^2} =$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{R}_2}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+9x^2} =$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{R}_2}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+9x^2} = \frac{1}{10}.$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\mathcal{R}_2}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+9x^2} = \frac{1}{10}.$$

Logo, pela proposição o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ não existe.

Exercício 4

Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ *não existe.*

Exercicio 4

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

Consideremos os conjuntos

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=0\}$$

e

$$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=x\}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in R_2}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot x\cdot 0}{x^2+0^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in R_2}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot x\cdot x}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$

Como $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in R_1}} \frac{2xy}{x^2+y^2} \neq \lim_{(x,y)\in R_2} \frac{2xy}{x^2+y^2}$

Então, pelo prop. 2 o limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ não existe.

Proposição 3

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \cdots, \mathcal{R}_k$. *com* $k \in \mathbb{N}$, *subconjuntos de* $\mathcal{D}$ *tais que* A *é um ponto de acumulação e* $\mathcal{D} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{R}_k$. *Se* $\lim\limits_{\substack{X \to A \\ x \in \mathcal{R}_i}} f(X) = \ell$, *para todo o* $i = 1, 2 \cdots, k$, *então* $\lim\limits_{X \to A} f(X) = \ell$.

Proposição 3

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \cdots, \mathcal{R}_k$. *com* $k \in \mathbb{N}$, *subconjuntos de* $\mathcal{D}$ *tais que* A *é um ponto de acumulação e* $\mathcal{D} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{R}_k$. *Se* $\lim\limits_{\substack{X \to A \\ x \in \mathcal{R}_i}} f(X) = \ell$, *para todo o* $i = 1, 2 \cdots, k$, *então* $\lim\limits_{X \to A} f(X) = \ell$.

Exemplo 10

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *tal que* $f(x, y) = \begin{cases} -5x^2y + 1, & se\ y < 0 \\ 1 + x^2 + y^2, & se\ y \geq 0, \end{cases}$ *calcule* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$

Usemos a proposição anterior

Usemos a proposição anterior

Consideremos os conjuntos

Usemos a proposição anterior

Consideremos os conjuntos

$\mathcal{R}_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\right\}$ e $\mathcal{R}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\right\}$.

Usemos a proposição anterior

Consideremos os conjuntos

$\mathcal{R}_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\right\}$ e $\mathcal{R}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\right\}$.

Temos,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{R}_1}} f(x, y) =$$

Usemos a proposição anterior

Consideremos os conjuntos

$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$ e $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$.

Temos,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{R}_1}} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -5x^2y + 1 =$$

Usemos a proposição anterior

Consideremos os conjuntos

$\mathcal{R}_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\right\}$ e $\mathcal{R}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\right\}$.

Temos,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{R}_1}} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -5x^2y + 1 = 1$$

Usemos a proposição anterior

Consideremos os conjuntos

$\mathcal{R}_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\right\}$ e $\mathcal{R}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\right\}$.

Temos,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{R}_1}} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -5x^2y + 1 = 1$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{R}_2}} f(x, y) =$$

Usemos a proposição anterior

Consideremos os conjuntos

$\mathcal{R}_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\right\}$ e $\mathcal{R}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\right\}$.

Temos,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{R}_1}} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -5x^2y + 1 = 1$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{R}_2}} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 + x^2 + y^2 =$$

Usemos a proposição anterior

Consideremos os conjuntos

$\mathcal{R}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\right\}$ e $\mathcal{R}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\right\}$.

Temos,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{R}_1}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -5x^2y + 1 = 1$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\mathcal{R}_2}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 + x^2 + y^2 = 1$$

Pela proposição anterior, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$.

Proposição 4 (Infinitésimo por limitada)

Sejam $f, g : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *A um ponto de acumulação de* $\mathcal{D}$*. Se* $\lim\limits_{X \to A} f(X) = 0$ *e se g é uma função limitada em* $\mathcal{D} \cap B_r(A)$, *para algum* $r > 0$, *então* $\lim\limits_{X \to A} f(X)g(X) = 0$.

Proposição 4 (Infinitésimo por limitada)

Sejam $f, g : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *A um ponto de acumulação de* $\mathcal{D}$. *Se* $\lim\limits_{X \to A} f(X) = 0$ *e se g é uma função limitada em* $\mathcal{D} \cap B_r(A)$, *para algum* $r > 0$, *então* $\lim\limits_{X \to A} f(X)g(X) = 0$.

Proposição 5 (Mudança de variável)

Sejam $f, u : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *e g uma função real de variável real tal que* $f(X) = g(u(X))$. *Se* $\lim\limits_{X \to A} u(X) = c$ *e* $\lim\limits_{z \to c} g(z) = \ell$, *então*

$$\lim_{X \to A} f(X) = \lim_{z \to c} g(z) = \ell.$$

Exemplo 11

Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^{x-y}-1}{y-x}$

Exemplo 11

Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^{x-y}-1}{y-x}$

Vamos aplicar a proposição 5, considerando

Exemplo 11

Calcular $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^{x-y}-1}{y-x}$

Vamos aplicar a proposição 5, considerando

$$f(x,y) = \frac{e^{x-y}-1}{y-x}, z = u(x,y) = x - y \text{ e } g(z) = \frac{e^{z}-1}{-z}.$$

Exemplo 11

Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{e^{x-y}-1}{y-x}$

Vamos aplicar a proposição 5, considerando

$$f(x,y) = \frac{e^{x-y}-1}{y-x}, z = u(x,y) = x - y \text{ e } g(z) = \frac{e^{z}-1}{-z}.$$

Temos $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} u(x,y) = 0$

Exemplo 11

Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^{x-y}-1}{y-x}$

Vamos aplicar a proposição 5, considerando

$$f(x,y) = \frac{e^{x-y}-1}{y-x}, z = u(x,y) = x - y \text{ e } g(z) = \frac{e^{z}-1}{-z}.$$

Temos $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} u(x,y) = 0$ *e* $\displaystyle\lim_{z\to 0} g(z) = -1$, *logo*

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) =$$

Exemplo 11

Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{e^{x-y}-1}{y-x}$

Vamos aplicar a proposição 5, considerando

$$f(x,y) = \frac{e^{x-y}-1}{y-x}, z = u(x,y) = x - y \text{ e } g(z) = \frac{e^z-1}{-z}.$$

Temos $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} u(x,y) = 0$ *e* $\lim\limits_{z\to 0} g(z) = -1$, *logo*

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^{x-y}-1}{y-x} =$$

Exemplo 11

Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{e^{x-y}-1}{y-x}$

Vamos aplicar a proposição 5, considerando

$$f(x,y) = \frac{e^{x-y}-1}{y-x}, z = u(x,y) = x - y \text{ e } g(z) = \frac{e^{z}-1}{-z}.$$

Temos $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} u(x,y) = 0$ *e* $\lim\limits_{z\to 0} g(z) = -1$, *logo*

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^{x-y}-1}{y-x} = \lim_{z\to 0} g(z) =$$

Exemplo 11

Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{e^{x-y}-1}{y-x}$

Vamos aplicar a proposição 5, considerando

$$f(x,y) = \frac{e^{x-y}-1}{y-x}, z = u(x,y) = x - y \text{ e } g(z) = \frac{e^z-1}{-z}.$$

Temos $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} u(x,y) = 0$ *e* $\lim\limits_{z\to 0} g(z) = -1$, *logo*

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^{x-y}-1}{y-x} = \lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{-z} = -1.$$

Exemplo 12

Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 - 4xy^2}{x^2 + y^2}$

Exemplo 12.

Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-4xy^2}{x^2+y^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-4xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} - \frac{4xy^2}{x^2+y^2}$$

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{x}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\hookrightarrow \text{limitada}} \underset{\text{Prop 5.}}{\overset{}{=}} 0.$

$$0 < x^2 \leq x^2+y^2$$
$$0 < \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-4xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{-4x}_{\downarrow\, 0.} \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\hookrightarrow \text{limitada}} \underset{\text{Prop 5}}{=} 0.$

$$0 < y^2 \leq x^2+y^2$$
$$0 < \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

Logo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-4xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-4xy^2}{x^2+y^2} = 0+0 = 0.$$

Continuidade

Continuidade

Definição 5

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $P \in \mathcal{D}$. Se P é um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$, f diz-se ***contínua em P****, se* $\lim\limits_{X \to P} f(X) = f(P)$.

Definição 5

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $P \in \mathcal{D}$. Se P é um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$, f diz-se ***contínua em P****, se $\lim_{X \to P} f(X) = f(P)$.*
Caso P seja ponto isolado de $\mathcal{D}$, consideramos que f é contínua em P.
Ao conjunto de pontos onde f é contínua chamamos domínio de continuidade de f.

Definição 5

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $P \in \mathcal{D}$. Se P é um ponto de acumulação de $\mathcal{D}$, f diz-se ***contínua em P****, se $\lim\limits_{X \to P} f(X) = f(P)$.*
Caso P seja ponto isolado de $\mathcal{D}$, consideramos que f é contínua em P.
Ao conjunto de pontos onde f é contínua chamamos domínio de continuidade de f.

Proposição 6

Se $f, g : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções continuas em $P \in \mathcal{D}$ e $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(\mathcal{D}) \subseteq I$, é contínua em $f(P)$, então

1. $f + g$, fg e $\lambda f, \lambda \in \mathbb{R}$, são contínuas em P.
2. $\frac{f}{g}$ é contínua em P, desde que $g(P) \neq 0$.
3. $\alpha \circ f$ é contínua em P.

Exemplo 13

Verificar que

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - yx}{x^2 - y^2} & x \neq \pm y \\ \frac{1}{4}(x+y), & x = \pm y \end{cases}$$

é contínua em $(1,1)$.

Exemplo 13.

Verificar que $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - yx}{x^2 - y^2} & x \neq \pm y \\ \dfrac{1}{4}(x+y) & , x = \pm y \end{cases}$ é contínua em $(1,1)$

Para que f seja contínua em $(1,1)$ devemos verificar

que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = f(1,1)$

- $f(1,1) = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

- $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$ -

Consideremos os conjuntos

$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \pm y\}$ e $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq \pm y\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1) \\ (x,y)\in R_1}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{4}(x+y) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1) \\ (x,y)\in R_2}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - yx}{x^2 - y^2} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x\cancel{(x-y)}}{\cancel{(x-y)}(x+y)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x}{x+y} = \frac{1}{2}$$

Pelo prop. 3, como $R_1 \cup R_2 = \mathbb{R}^2$ (domínio da função f) e

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1) \\ (x,y)\in R_1}} f(x,y) = \frac{1}{2} = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1) \\ (x,y)\in R_2}} f(x,y)$ então $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \frac{1}{2}$

Portanto, como $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = f(1,1)$ então f é contínua em $(1,1)$