Aula 1: Informação

- Docente: João Breda.
- Avaliação padrão: discreta. Podem escolher avaliação por exame final no moodle se assim o desejarem.
- Data limite para inscrição ao exame final: 17 Março (limite dado pelo PACO).
- Avaliação discreta: 1^o teste: 10 de abril (4-feira). 2^o teste: exame final.
- Vai haver duas questões de aulas (25% da nota).
  Questão 1 (séries): na semana 4-8 de março.
  Questão 2: na semana 13-17 Maio.
  Nota $>$ 18: prova de defesa de nota. Consultar Moodle para mais informações.
- OT1-4: Sexta feira das 16-17.
- Slides das aulas aqui: https://www.dropbox.com/sh/o79ℓ7o8qf82rzkg/AAA_BGOcCAcG-hb693fq839Za?dℓ=0
- Recomendo o software livre Geogebra para visualizarem superfícies e curvas.
- Vídeos de Cálculo 2 $\longrightarrow$ https://siacua.web.ua.pt/

Aula 1: Programa

- Séries de Potências e Fórmula de Taylor.
- Sucessões e séries de funções: Convergência pontual e uniforme; Critério de Weierstrass; Séries de Fourier.
- Extremos de funções reais de várias variáveis reais: Derivação parcial; Extremos locais; Extremos globais; Extremos condicionados.
- Equações diferenciais ordinárias (EDOs): Equações diferenciais de 1^{a} ordem - equações diferenciais de variáveis separadas, de variáveis separáveis, redutíveis a variáveis separáveis, homogéneas, exatas, com fator integrante, lineares de primeira ordem, de Bernoulli; equações diferenciais de ordem superior; equações diferenciais lineares de ordem n - homogénea de coeficientes constantes, completa de coeficientes constantes.
- Transformada de Laplace e sua aplicação à resolução de EDOs

Bibliografia: consultar o moodle.

Séries

Aula 1: Sumário

- Revisão sumária sobre séries
- Séries de potências
- Domínio de convergência
- Raio de convergência
- Intervalo de convergência versus domínio de convergência
- Cálculo do raio de convergência
- Exercícios

Revisão sumária sobre séries

(5 slides)

Natureza e critérios gerais de convergência de séries numéricas

- A natureza de uma série não depende dos seus primeiros termos.
- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.
- Teste de divergência: Se $\lim_{n\to\infty} |a_n|$ não existe ou $\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.
- Se $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ nada se pode concluir acerca da natureza de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n$ têm a mesma natureza. Se convergem temos:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,.$$
- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são convergentes, também $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ é convergente e tem-se:
$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$
- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge.
- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergem, nada se pode concluir acerca da natureza de $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$.

Séries geométricas

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, com $a_1 \neq 0$, é uma série geométrica de razão r se $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ é constante (não depende de n). Neste caso $a_n = a_1\, r^n$, pelo que a forma de uma série geométrica é:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^n\,, \quad (a \neq 0)}$$

Seja $u_1 = ar^k$ o 1^o termo da série geométrica $\sum_{n=k}^{\infty} a\, r^n$ de razão $r \neq 1$. Então:

- Soma parcial dos primeiros n termos: $S_n = u_1 \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$
- $\sum_{n=k}^{\infty} a\, r^n$ converge $\Leftrightarrow |r| < 1$. Se $|r| < 1$, $S = \sum_{n=k}^{\infty} a\, r^n = \dfrac{u_1}{1 - r}$.

Critérios de convergência para séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ com $a_n \geq 0$

- Critério do Integral: Se $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ é função decrescente tal que $f(n) = a_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e o integral impróprio $\int_1^{\infty} f(x)dx$ têm a mesma natureza.

- Critério de Comparação: Se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq a_n \leq b_n$, para todo $n \geq n_0$, então

  (i) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

- Critério de Comparação no limite: Se $b_n \geq 0$ e existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$, então:

  (i) $\ell \in]0, +\infty[$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são da mesma natureza.

  (ii) ℓ=0: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. (ii) ℓ=∞: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Critérios de convergência absoluta para séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$

Critério de D'Alembert: Se $a_n \neq 0, \forall\, n > n_0$, e existe $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$, então:

(1) $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

(2) $L > 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente. (3) Se $L = 1$, nada se pode concluir.

Critério da raiz : Se existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, então:

(1) $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

(2) $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente. (3) $L = 1$, nada se pode concluir.

Critério de convergência de séries alternadas $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n,\ a_n > 0.$

Critério de Leibniz: Se (a_n) é uma sucessão tal que

(i) $a_n = f(n) > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$,

(ii) (a_n) é uma sucessão decrescente (por exemplo se $f'(x) < 0, x \in]1, +\infty[$) e

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,$,

então a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ é convergente.

Além disso, se S representa a sua soma e S_n a n-ésima soma parcial, então verifica-se

$$0 < (-1)^n(S_n - S) < a_{n+1}, n \in N.$$

Numa série alternada convergente com $a_n = f(n) > 0$ decrescente, o erro que se comete ao tomar S_n como valor aproximado de S é: Erro $= |S_n - S| < a_{n+1}$.

Aula 1:

Séries de potências

Aula 1: Séries de potências e domínio de convergência

Série de potências centrada em c, ou série de potências de $x - c$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \; = \; a_0 + a_1(x-c) + a_1(x-c)^2 + \ldots$$

$a_n \in \mathbb{R}$ são os coeficientes da série. Convenção: $(x-c)^0 = 1$.

Ao conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série é convergente designa-se por domínio de convergência da série.

A série converge sempre em $x = c$, sendo a sua soma a_0.

Logo c pertence sempre ao domínio de convergência da série.

O domínio de convergência de uma série de potências pode ser determinado pelos critérios D'Alembert ou da raiz.

Exemplo: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(x-c)^n$ tem domínio de convergência $]c-1, c+1[$ e aqui a soma é $\dfrac{1}{1-(x-c)}$.

- Mostre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^{2n+3}$ é uma série de potências.

Aula 1: Raio de convergência

Teor. 4.2 Numa série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ verifica-se uma e uma só das condições seguintes:

(a) A série converge absolutamente apenas em $x = c$ e diverge para $x \neq c$;

(b) A série converge absolutamente $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

(c) Existe $R > 0$ tal que a série converge absolutamente se $|x-c| < R$ e diverge se $|x-c| > R$.

⋆ Ao número R da alínea (c) chama-se raio de convergência da série de potências.

⋆ No caso da alínea (a) o raio de convergência é nulo, $R = 0$.

⋆ No caso da alínea (b) o raio de convergência é infinito, $R = +\infty$.

⋆ Quando $R \neq 0$, ao intervalo $]c-R, c+R[$ (= $\mathbb{R}$ no caso de $R = +\infty$) designa-se por intervalo de convergência.

Aula 1: Intervalo de convergência versus domínio de convergência

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n}$$

- O intervalo de convergência (absoluta) da série é centrado em c e é:

  $= \mathbb{R}$, se $R = +\infty$ ou

  $=]c-R, c+R[$, se R é finito e diferente de zero.

- Domínio de convergência da série:

  pode ser $\{c\}$, no caso em que $R = 0$, ou $\mathbb{R}$, no caso em que $R = +\infty$;

  e caso em que $R \in \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$ pode ser:

  $]c-R, c+R[$, caso em que a série diverge em x=$c-R$ e em x=$c+R$;

  $[c-R, c+R[$, caso em que a série converge em x=$c-R$ e diverge em x=$c+R$;

  $]c-R, c+R]$, caso em que a série diverge em x=$c-R$ e converge em x=$c+R$;

  ou $[c-R, c+R]$, caso em que a série converge em x=$c-R$ e em x=$c+R$;

Aula 1: Cálculo do raio de convergência 1 (não aconselho)

Prop. 4.1 Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ou $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^{n+k}$ ou $\sum_{n=b}^{\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências. Então, o raio de convergência R da série pode ser obtido de duas formas: (desde que os limites existam, finitos ou $+\infty$)

(1) $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$, se $a_n \neq 0$, para $\forall\, n > n_0$;

ou

(2) $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$;

A série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^{kn}$ tem raio de convergência $R = \sqrt[k]{r}$, em que $r = \frac{1}{\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$ ou $r = \frac{1}{lim\ \sqrt[n]{|a_n|}}$. Note-se que r é o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, em que $X = (x-c)^k$. Esta série não é a série dada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^{kn} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$ em que b_m satisfaz: $b_m = 0$ se $\frac{m}{k}$ não é inteiro (i.e. se $m \neq 0 \bmod k$) e $b_m = a_{\frac{m}{k}}$ se $m = 0 \bmod k$; m surge tomando $m = kn$).

Aula 1: Cálculo do raio de convergência 2

Prop. 4.1 Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^{rn+k}$ uma série de potências. Aconselho a que o raio de convergência R da série seja obtido usando ou critério d'Alembert ou o critério da raiz (desde que os limites existam, finitos ou $+\infty$):

Seja $u_n(x) = a_n(x-c)^{rn+k}$. Usando o critério d'Alembert (critério da raiz é o mesmo procedimento) : Seja

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = |x-c|^r \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-c|^r\, Q\,;$$

em que $Q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0^+,\ \infty$ ou $r \in \mathbb{R}$.

Então

$$L < 1 \iff |x-c|^r\, Q < 1 \iff |x-c|^r < \frac{1}{Q} \iff |x-c| < \frac{1}{\sqrt[r]{Q}} = R\,;$$

O raio é $R = \dfrac{1}{\sqrt[r]{Q}}$ $[R = \frac{1}{0^+} = +\infty$, ou $R = \frac{1}{\infty} = 0$ se $Q = 0^+$, ou $Q = \infty$, resp.].

Aula 1: Exercícios 1

Determine o domínio de convergência das séries seguintes, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta:

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n\sqrt{n+1}}$$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^{2n}} x^n$$

(5) $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3^n}$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9^{n+1} n!} (x-3)^n$$

(4) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} x^n$$

(6) $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}} (x-1)^n$$

Aula 1: Exercícios 2

Indique o domínio de convergência de cada uma das seguintes séries potências:

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{2n+1}}\, x^n.$$

(3) $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}(x-2)^n$$

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}\,(x+2)^n$$

Aula 1: Exercícios 3

Indique o intervalo e o domínio de convergência de cada uma das seguintes séries potências:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n-1}(x-2)^n.$

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\ln(n)}$

(3) Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente num dos extremos do seu domínio de convergência, mostre que ela é também absolutamente convergente no outro extremo.

(4) Se o domínio de convergência de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é $]-r,r]$, mostre que a série é simplesmente convergente em $x=r$.

(5) Se uma série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ tem intervalo de convergência $]-2,8[$, em que ponto c a série está centrada e qual o raio de convergência?

Aula 1: Soluções dos exercícios

Série de potências de centro c e raio R. I = intervalo de convergência. D = domínio de convergência.

1.1 $c = 0$. $L = |x|\frac{1}{3}$. $R = 3$. $I =]-3, 3[$. $D = [-3, 3[$.

1.2 $c = 3$. $L = \frac{|x-3|}{9} \times 0^+$. $R = \infty$. $I = D = \mathbb{R}$.

1.3 $c = 0$. $L = |x| \times 0^+$. $R = \infty$. $I = D = \mathbb{R}$.

1.4 $c = 0$. $L = |x| \times \infty$. $R = 0$. $I = \emptyset$. $D = \{0\}$.

1.5 $c = 0$. $L = \frac{|x|}{3}$. $r = 3$. $I =]-3, 3[$. $D =]-3, 3[$.

1.6 $c = 1$. $L = |x - 1|$. $R = 1$. $I =]0, 2[$. $D =]0, 2[$.

2.1 $c = 0$. $L = 2|x|$. $R = \frac{1}{2}$. $I =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. $D =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

2.2 $c = 2$. $L = \frac{|x-2|}{2}$. $R = 2$. $I =]0, 4[$. $D =]0, 4[$.

2.3 $c = 0$. $L = |x|$. $R = 1$. $I =]-1, 1[$. $D =]-1, 1]$.

2.4 $c = -2$. $L = |x + 2|$. $R = 1$. $I =]-3, -1[$. $D = [-3, -1[$.

3.1 $c = 2$. $L = |x - 2| \times \infty$. $R = 0$. $I = \emptyset$. $D = \{2\}$.

3.2 $c = 0$. $L = |x|^2$. $R = 1$. $I =]-1, 1[$. $D =]-1, 1[$.

3.3 Seja $D = [-r, r]$. Nos extremos $x = -r$ e $x = r$, a série dos valores absolutos é a mesma, pelo que se a série é absolutamente convergente num dos extremos ela também será absolutmente convergente no outro extremo. Isto também diz que se a série não for absolutamente convergente num dos extremos ela também não será absolutamente convergente no outro extremo.

3.4 Se o domínio de convergência é $]-r, r]$, isto significa que a série não é convergente em $x = -r$, pelo que a série não pode ser absolutamente convergente em $x = -r$. Não sendo absolutamente convergente num dos extremos a série não pode ser absolutamente convergente no outro extremo. Assim a série é apenas simplesmente convergente em $x = r$.