Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO 2 - agrup. 1 **2017/18**

Folha 5: *Transformada de Laplace*

---

1. Determine as transformadas de Laplace das funções $f = f(t)$, $t \geq 0$, dadas pelas seguintes expressões:

   (a) $1 + 2t + 3t^2$

   (b) e^{5t+3}

   (c) $f(t) = 4\sin t \cos t + 2e^{-t}$

   (d) $f(t) = t^5 + \cos(2t)$

   (e) $f(t) = 2e^{3t} - \sin(5t)$

   (f) $f(t) = e^{2t}(\sin t + \cos t)$

   (g) $f(t) = t\cos(2t)$

   (h) $f(t) = t^2 \sin t$

   (i) $f(t) = [1 - H(t-\pi)]\sin t$

   (j) $f(t) = (t-2)^2 e^{2(t-2)} H(t-2)$

   (k) $f(t) = \begin{cases} 4t, & 0 \leq t < \pi \\ 4\pi, & t \geq \pi \end{cases}$

   (l) $f(t) = |\sin t|$ Sug: usar a serie de potencias de sen t e interligar o resultado com coth(x).

   (m) $\int_0^t \tau \sin \tau d\tau$

   (n) $\sin^3 t$

2. Seja $L[f](p) = F(p)$, $s > 0$. Verifique que:

   (a) Então $L[f''](p) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$, $p > 0$.

   (b) $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\to+\infty} pF(p)$. Sug: Integrar duas vezes por partes na definição de F(s)=L{f}(s) suponha que f não é contínua em 0: não poderá colocar f(0) mas sim $\lim_{t\to 0+} f(t)$

3. Verifique que $L[\mathrm{Si}(t)](p) = L\left[\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau\right](p) = \frac{1}{p}\arctan\left(\frac{1}{p}\right)$, $p > 0$. sug: no cálculo da TL de sen(t)/t passar isto a série de potências. Comparar a séire final com a série do artg(x).

4. Determine as transformadas inversas de Laplace das seguintes funções $F = F(p)$, consideradas em domínios adequados:

   (a) $F(p) = \frac{7}{(p-1)^3} + \frac{1}{(p+1)^2 - 4}$

   (b) $F(p) = \frac{e^{-\pi p}}{p^2+16}$

(c) $F(p) = \frac{p}{p^2-3p-4}$

(d) $F(p) = \frac{3p+7}{p^2-2p-3}$

(e) $F(p) = \frac{2}{p^3-4p^2+5p}$

(f) $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)}$

(g) $F(p) = \arctan\left(\frac{4}{p}\right)$ sug: calcule a TL da derivada

(h) $F(p) = \ln\left(1+\frac{1}{p^2}\right)$ sug: calcule a TL da derivada

(i) $\frac{d}{dp}\left(\frac{1-e^{-5p}}{p}\right)$

(j) $\frac{1}{p^2}\left(\frac{s+1}{s^2+1}\right)$

5. Usando transformadas de Laplace, determine uma solução $y = y(t),\ t \geq 0$, das seguintes equações:

   (a) $y' + y = 0, \quad \text{com } y(0) = 1$

   (b) $y'' + 3y' + 2y = 0, \quad \text{com } y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

   (c) $y''' - my'' + m^2y' - m^3y = 0, \quad$ com constante $m > 0$ e $y(0) = y'(0) = 0$ e $y''(0) = 1$.

   (d) $y''(t) + 4y(t) = \sin(3t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

6. Determine o par de soluções $y = y(t), z = z(t),\ t \geq 0$, do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 3y'(t) + z'(t) + 2y(t) = 1 \\ y'(t) + 4z'(t) + 3z(t) = 0 \end{cases}, \quad y(0) = z(0) = 0.$$

7. Usando a formula para a convolução $L\left[\int_0^t f(\tau - t)g(\tau)d\tau\right](p) = L[f](p)L[g](p)$ resolve a equação integro-diferencial

$$y'(t) + \int_0^t y(\tau)\cosh(t-\tau)d\tau = 0, \quad y(0) = 1.$$

y'(t) + y(t) * cosh(t) = 0

8. Usando transformadas de Laplace, justifique que:

   (a) $\int_0^\infty te^{-2t}\cos t dt = \frac{3}{25}$;

   (b) $\int_0^\infty t^3e^{-t}\sin t dt = 0.$