Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II — Agrupamento 4 2019/2020

Ficha de Exercícios 2

Sucessões e Série de Funções; Séries de Potências(revisitadas) e Séries de Fourier

Exercícios Propostos

1. Considere a série de funções

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}.$$

   (a) Mostre que a série converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

   (b) Justifique que a função (soma) $S(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

2. Obtenha uma representação em série de potências (de Taylor) para cada uma das seguintes funções, a partir dos desenvolvimentos conhecidos das funções exponencial, seno, co-seno e $\frac{1}{1-x}$. Em cada caso, indique o maior conjunto onde é válida a representação.

$$\text{(a)}\ \ e^{-x^2}\,; \quad \text{(b)}\ \ \operatorname{senh}(3x)\,; \quad \text{(c)}\ \ 2\cos^2 x\,; \quad \text{(d)}\ \ \frac{1}{4+x^2}.$$

3. Calcule a (função) soma das séries seguintes:

   (a) $1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^n}{n!} + \cdots$

   (b) $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots + (-1)^n x^{3n} + \cdots$

4. (a) Determine o desenvolvimento em série de MacLaurin da função $\ln(x+1)$. (Sugestão: desenvolva primeiro a função $\dfrac{1}{x+1}$ em série de MacLaurin).

   (b) Calcule a soma da série

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{x^5}{5 \cdot 4} + \cdots + \frac{(-1)^n\, x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \cdots$$

5. Calcule a soma das séries indicadas (a soma corresponde a $f(a)$, onde a é um número óbvio e f é dada por uma série de potências. Em geral, a série deverá ser manipulada até se encontrar uma série de potências conhecida):

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}\,; \quad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)}\,; \quad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!}\,.$$

6. (a) Verifique que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$ tem raio de convergência igual a 2.

   (b) Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n\,, \quad -2 < x < 2$. Explicite $f(x)$.
   (Sugestão: use a representação em série de potências de $\frac{1}{1-x}$).

7. Usando representações adequadas em série de potências, justifique que:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \ ; \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

8. Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$.

   (a) Determine o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ no qual a série é absolutamente convergente.

   (b) Calcule $f'(4)$, onde $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$ (f definida no domínio de convergência da série).

9. Sabendo que $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

   (a) obtenha uma representação em série de potências para a função $f(x) = xe^{x^3}$ e indique o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ em que esta representação é válida;

   (b) obtenha uma representação em série numérica do integral $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^3} dx$.

10. Usando a representação em série de MacLaurin da função exponencial, justifique a igualdade

$$\left(e^{x^2}\right)' = 2x\, e^{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

11. Seja $f(x) = x\, e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Desenvolva $f(x)$ em série de MacLaurin.

   (b) Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1) 2^n}{n!}$
   (Sugestão: Começar por derivar a série obtida em (a)).

   (c) Usando a fórmula de MacLaurin com resto de Lagrange, obtenha um majorante para o erro que se comete ao aproximar $f(x)$ por $T_0^2 f(x)$ no intervalo $]0, 0.1]$.

12. Determine a série de Fourier das seguintes funções:

   (a) $f(x) = x + x^2, \quad x \in [-\pi, \pi[$;

   (b) $g(x) = e^x, \quad x \in [-\pi, \pi[$;

   (c) $h(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

13. Considere a função constante $f(x) = 2$ no intervalo $[0, \pi]$. Determine a série de Fourier de senos e a série de Fourier de cossenos de f e represente graficamente as respetivas somas no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

14. Determine a série de Fourier de senos da função f dada $f(x) = \cos x$ em $[0, \pi]$. Qual será a sua série de Fourier de cossenos?

15. Considere a função f, 2π-periódica, definida por $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

    (a) Determine a série de Fourier de f.

    (b) Mostre que

    $$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx)\,, \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

    (c) Usando a representação de f em série de Fourier, mostre que

    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

    (d) Verifique que a série de Fourier de f é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

    (e) Justifique que

    $$\frac{x^3 - \pi^2 x}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^3} \operatorname{sen}(nx)\,, \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

16. Seja f a função 2π–periódica tal que $f(x) = |\operatorname{sen}(x)|$, $x \in [-\pi, \pi]$.

    (a) Mostre que a série de Fourier associada a f é

    $$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}.$$

    (b) Justifique que a série da alínea anterior é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$ e identifique a sua soma, $s(x)$.

    (c) Esboce o gráfico de $s(x)$, no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

    (d) Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$

Exercícios Resolvidos

1. Sabendo que $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.

    (a) Determine a série de MacLaurin de $\cosh(x)$.

    (b) Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}$

    Resolução:

    (a) Como $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, para $x \in \mathbb{R}$,

    $$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n!} x^n\,. \end{aligned}$$

Uma vez que, $1+(-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k+1 \\ 2 & \text{se } n = 2k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$

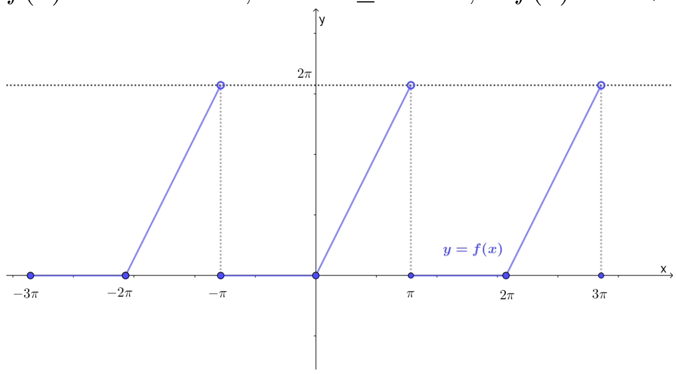
$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k)!} x^{2k} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n)!} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Tendo em conta a alínea anterior, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} = \cosh(1)$.

2. Considere a função 2π–periódica f tal $f(x) = x + |x|$, se $x \in [-\pi, \pi[$.
   (a) Esboce o gráfico de f em $[-3\pi, 3\pi]$.
   (b) Determine a série de Fourier de f.
   (c) Justifique que essa série é convergente pontualmente em $\mathbb{R}$ e esboçe o gráfico da sua soma, no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

Resolução:

(a) $f(x) = x - x = 0$, se $-\pi \leq x < 0$, e $f(x) = x + x = 2x$, se $0 \leq x < \pi$.



(b)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}\,(nx)\right), \quad \text{onde}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2x dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[x^2\right]_0^{\pi} \quad = \quad \pi \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nx) x\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\text{sen}\,(nx) x\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{n}\text{sen}\,(nx)\, dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{2}{\pi n}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n-1) \quad = \begin{cases} \frac{-4}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ par} \\ 0 & \text{se } n \text{ impar} \end{cases} \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) f(x)\, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}(nx) x\, dx \\
&= -\frac{2}{\pi n}\left[\cos(nx)x\right]_0^\pi + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{n}\cos(nx)\, dx \\
&= -\frac{2}{\pi n}(\cos(n\pi)\pi + \frac{2}{\pi n}\left[-\frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)\right]_0^\pi \\
&= -\frac{2}{n}\cos(n\pi) \quad = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}
\end{aligned}
$$

Assim,

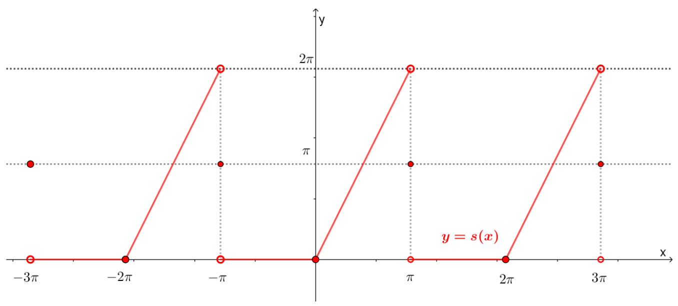
$$
f(x) \sim \frac{\pi}{2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-2}{\pi(2n-1)^2}\cos((2n-1)x) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(nx\ .)\right)
$$

(c) A derivada de f é a função 2π-periódica, não definida em $-\pi, 0$ e π, tal que

$$
f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}
$$

que é seccionalmente contínua. Assim, f é seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$ e portanto f é convergente pontualmente em todo o $\mathbb{R}$, pelo Teorema de Dirichlet. A sua soma $s(x)$ é 2π–periódica e, tendo em conta esse teorema,

$$
s(x) = \begin{cases} \frac{f(-\pi^+)+f(-\pi^-)}{2} & \text{se } x = -\pi \\ 0 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 2x & \text{se } 0 \le x < \pi \end{cases} \quad = \begin{cases} \pi & \text{se } x = -\pi \\ 0 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 2x & \text{se } 0 \le x < \pi \end{cases}
$$



Soluções

1. Aplicar o Critério de Weierstrass (alínea (a)) e as propriedades da convergência uniforme (alínea (b)).

2. (a) $e^{-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots \frac{(-1)^n}{n!}x^{2n} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$

   (b) $\operatorname{senh}(3x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 3x + \frac{3^3}{3!}x^3 + \cdots + \frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots\ ,\ x \in \mathbb{R}.$

(c) $2\cos^2 x = 1 + \cos(2x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$

$= 2 - \frac{4}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, \qquad x \in \mathbb{R}.$

(d) $\frac{1}{4+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n} = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4^2} + \frac{x^4}{4^3} - \cdots + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}x^{2n} + \cdots, \qquad x \in]-2, 2[.$

3. (a) $e^{-x}\,, \qquad x \in \mathbb{R};$

   (b) $\frac{1}{1+x^3}\,, \qquad x \in]-1, 1[.$

4. (a) $\ln(x+1) = \int_0^x \frac{1}{t+1}\,dt = \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\,, \qquad x \in]-1, 1[.$

   (Observação: a igualdade é também válida no ponto $x = 1$; a justificação pode ser encontrada no Texto de Apoio).

   (b) $(x+1)\ln(x+1) - x\,, \quad x \in]-1, 1[$

   (por integração termo a termo da série da alínea anterior).

5. (a) 1; (b) $-3\ln(2/3)$; (c) $2\sqrt{e}$.

6. (a) —

   (b) $f(x) = \frac{2x}{(2-x)^2}$.

7. —

8. (a) $]1, 5[$.

   (b) $f'(4) = 1$.

9. (a) $xe^{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n!}\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$

   (b) $\int_0^1 xe^{x^3}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)\,n!}.$

10. Representar e^{x^2} em série de MacLaurin e derivar a série termo a termo.

11. (a) $xe^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$

    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1) 2^n}{n!} = -1 - e^{-2}.$

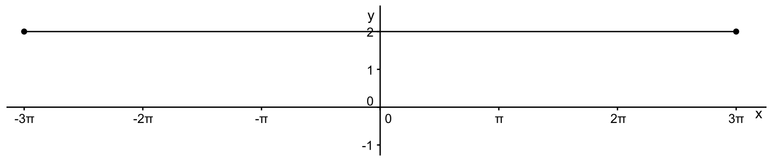
    (c) $|R_0^2 f(x)| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}.$

12. (a) $f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx) + (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx) \right];$

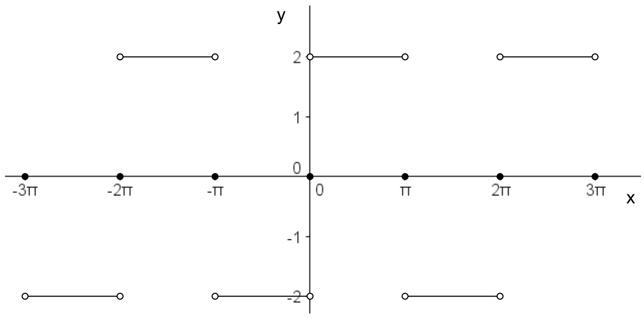
    (b) $g(x) \sim \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi} \left[\frac{(-1)^n}{n^2+1} \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+1} \operatorname{sen}(nx) \right];$

    (c) $h(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{1-(-1)^n}{\pi n} \operatorname{sen}(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \operatorname{sen}((2n-1)x).$

13. Soma da série de cossenos: $s(x) = 2$;



Soma da série de senos: $S(x) = \begin{cases} -2 & , \quad x \in]-\pi + 2k\pi, 2k\pi[\\ 0 & , \quad x = k\pi \\ 2 & , \quad x \in]2k\pi, \pi + 2k\pi[\end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$



14. Série de Fourier de senos: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{k}{4k^2 - 1} \operatorname{sen}(2kx)$.

A série de Fourier de cossenos reduz-se à função $\cos x$.

15. (a) $f(x) \sim \dfrac{\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx), \qquad x \in \mathbb{R}.$

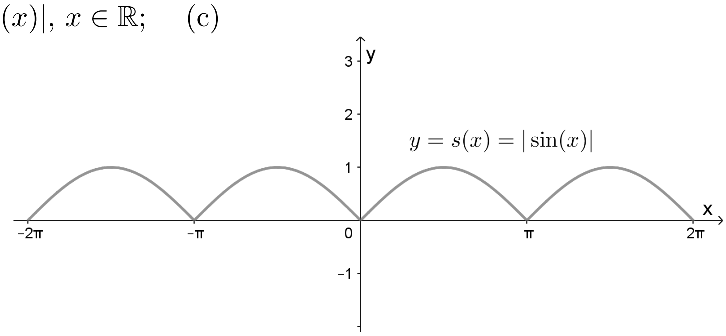
   (b) A função f é contínua e seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$. Portanto, a soma da série coincide com a própria função f (em $\mathbb{R}$). Notar que $f(x) = x^2$ em $[-\pi, \pi]$.

   (c) Tomar, em particular, $x = 0$ na representação indicada na alínea (b).

   (d) Sugestão: aplique o Critério de Weierstrass.

   (e) Integrar ambos os membros da igualdade em (b), tendo em conta o resultado indicado em (d).

16. (a)— (b) $s(x) = |\operatorname{sen}(x)|$, $x \in \mathbb{R}$; (c)



(d) $\frac{2-\pi}{4}$