1. Funções reais de várias variáveis

Cálculo dos extremos

Aula 10: Sumário

- Graficos de funções de domínios de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}$.
- Exemplos de curvas e superfícies como gráficos de funções.
- Imagens de aplicações de domínios de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$.
- Exemplos de curvas e superfícies como imagens de aplicações.
- Conjuntos de nível de funções de domínios de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}$.
- Exemplos de curvas e de superfícies de nível.
- Curvas de nível de uma superfície $G(f)$.
- Limite duma função de várias variáveis (segundo Heine).
- Continuidade.

Aula 10: Gráficos de funções

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y, z, \ldots) \in \mathbb{R} \quad \text{seja} \quad w = f(x, y, z, \ldots)$$

Gráfico de f: $\;G(f) = \{(x, y, z, \ldots, w) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid w = f(x, y, z, \ldots)\}$

Gráfico de f é, em geral (se não for vazio, um ponto, ou outra degeneração):

– uma curva se $n = 1$;

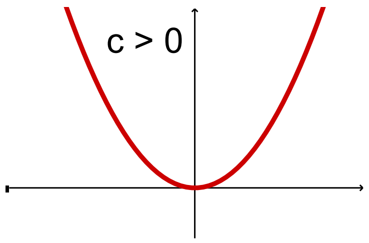
– uma superfície se $n = 2$;

– uma variedade de dimensão 3 se $n = 3$.

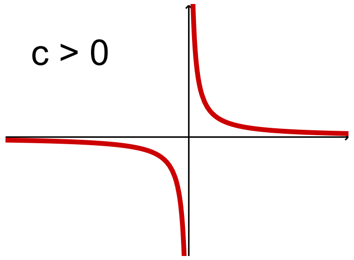
Aula 10: Exemplos de curvas como gráficos de funções

1) $f(x) = mx + b$. $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + b\}$ $=$ **reta não vertical** no plano de declive m e ordenada na origem b. $y = mx + b$ é a equação reduzida da reta.

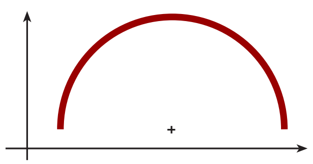
2) $f(x) = c\,x^2$. $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = c\,x^2\}$ $=$ **parábola**.



3) $f(x) = \dfrac{c}{x}$. $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \dfrac{c}{x}\}$ $=$ **hipérbole**.



4) $f(x) = \sqrt{r^2 - (x-a)^2} + b$.
$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{r^2 - (x-a)^2} + b\}$ $=$
semicircunferência superior de centro (a, b) e raio r.

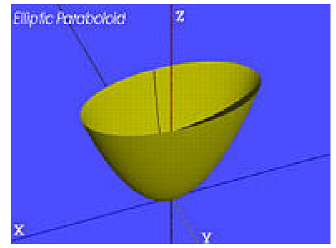


Aula 10: Exemplos de superfícies como gráficos de funções

1) $f(x,y) = Ax + By + c$,

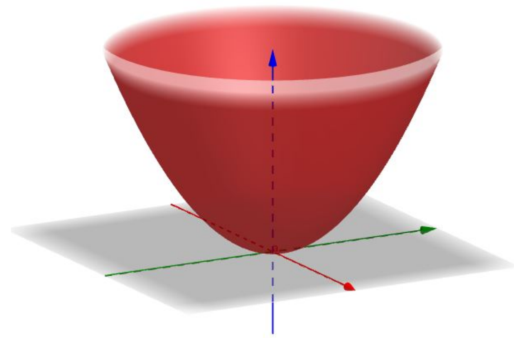
$G(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = Ax + By + C\}$ $=$ **plano** não vertical.

2) $f(x,y) = k\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$. Seja $c = \frac{1}{k}$.



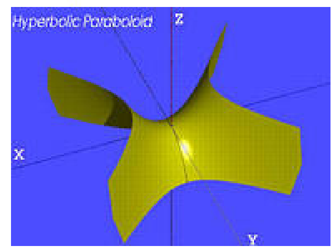
$G(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz\}$ $=$ **parabolóide elítico**

3) $f(x,y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \quad (a = b)$.



$G(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\}$ $=$

parabolóide de revolução



4) $f(x,y) = k\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$. Seja $c = \frac{1}{k}$.

$G(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz\}$ $=$ **parabolóide hiperbólico**

Aula 10: Imagens de aplicações

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \text{ (espaço vectorial de dim. } m\text{)}$$

$$f(x, y, z, \ldots) \text{ é um vector de } \mathbb{R}^m$$

Imagem de f: $Im(f) = \{f(x, y, z, \ldots) \mid (x, y, z, \ldots) \in \mathbb{R}^n\}$.

Imagem de f, i.e. $0 + Im(f)$, no caso $m \geq n$, é em geral (se não for vazio, um ponto, ou outra degeneração):

– um curva no espaço $\mathbb{R}^m$, se $n = 1$;

– uma superfície no espaço $\mathbb{R}^m$, se $n = 2$;

– uma variedade de dimensão 3 no espaço $\mathbb{R}^m$, se $n = 3$.

Aula 10: Exemplos de curvas como imagens de aplicações

1) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, então $G(f) = Im(\phi)$ em que $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\phi(x, y, z, \dots) = (x, y, z, \dots, f(x, y, z, \dots)).$$

2) $f(t) = P_0 + t\,\vec{v}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$.
$Im(f) = \{P_0 + t\,\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\} = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid P = P_0 + \vec{v}\} =$ **reta** no espaço ($m = 3$) (seria no plano se $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$) que passa por P_0 e tem a direcção de $\vec{v}$. Aqui $P = P_0 + \vec{v}$ é equação vectorial da recta. Fazendo $P = (x, y, z)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$, então:
$Im(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_0 + t\,a,\ y = y_0 + t\,b,\ z = z_0 + t\,c\}$ é uma **reta** no espaço. As equações

$$x = x_0 + t\,a \quad \wedge \quad y = y_0 + t\,b \quad \wedge \quad z = z_0 + t\,c$$

são as equações paramétricas da reta ($t \in \mathbb{R}$).

3) $f(t) = P_0 + r(\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$ (ou $t \in \mathbb{R}$).
$Im(f) = \{P_0 + t\,\vec{v} \mid t \in [0, \pi]\} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid P = P_0 + r(\cos(t), \sin(t))\} =$ **circunferência** no plano de centro P_0 e raio r. Fazendo $P_0 = (x_0, y_0)$, então as equações paramétricas da circunferência são:

$$x = x_0 + r\cos(t) \quad \wedge \quad y = y_0 + r\sin(t)$$

Aula 10: Exemplos de superfícies como imagens de aplicações

1) $f(r,s) = P_0 + r\,\vec{u} + s\,\vec{v}$, com $\vec{u}$, $\vec{v}$ linearmente independentes em $\mathbb{R}^3$. Então $Im(f)$ é o **plano** que passa por P_0 e é paralelo aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Fazendo $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$, então $Im(f) = \{(x,y,z) \mid (x,y,z)$ satisfaz $(1)\}$

$$x = x_0 + r\,a_1 + s\,b_1 \quad , \quad y = y_0 + r\,a_2 + s\,b_2 \quad , \quad z = z_0 + r\,a_3 + s\,b_3. \tag{1}$$

As equações (1) são as equações paramétricas do plano.

2) $f(u,v) = (x_0, y_0, 0) + (a\,v\cos(u), b\,v\sin(u), v^2)$. Então $Im(f)$ é o **parabolóide elítico**. Se $a = b$, o parabolóide é de revolução.

3) $f(u,v) = P_0 + (r\cos(u)\cos(v), r\cos(v)\sin(u), r\sin(v))$. $Im(f)$ é uma **esfera** de centro P_0 e raio r.

4) $f(u,v) = P_0 + (a\cos(u)\cos(v), a\cos(v)\sin(u), b\sin(v))$. $Im(f)$ é uma **elipsoide de revolução**.

Aula 10: Conjuntos de nível

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Conjunto de nível k de f:

$N_k(f) = \{(x, y, z, \dots) \in \mathbb{R}^n \mid f(x, y, z, \dots) = k\}$

$N_k(f)$ é, em geral (se não for vazio, um ponto, ou outra degeneração):

- um curva se $n = 2$; neste caso $N_k(f) =$ curva de nível k de f. A equação $f(x, y) = k$ é a equação cartesiana da curva.
- uma superfície se $n = 3$; neste caso $N_k(f) =$ superfície de nível k de f. A equação $f(x, y, z) = k$ é a equação cartesiana da superfície.

▶ $N_k(f) = N_0(\phi)$, em que $\phi = f - k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

▶ $G(f) \longleftrightarrow \{N_w(f) \mid w \in \mathbb{R} \wedge N_w(f) \neq \varnothing\}$

Aula 10: Exemplos de curvas de nível $\quad P_0 = (x_0, y_0)$

1) $f(x,y) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$. $\quad N_k(f) = \{(x,y) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = k\}$ ($k > 0$) é uma **circunferência** de raio $\sqrt{k}$ centrada em P_0.

2) $f(x,y) = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2}$. $\quad N_k(f) = \{(x,y) \mid \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = k\}$ ($k > 0$) é uma **elipse**, centrada em P_0; a e b são os tamanhos do eixo-x e do eixo-y (controlam o formato). O valor k controla o tamanho da elipse.

3) $f(x,y) = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2}$. $\quad N_k(f) = \{(x,y) \mid \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = k\}$ é uma **hipérbole** ($k \neq 0$) ou duas retas concorrentes ($k = 0$), centrada em P_0; a e b são os tamanhos do eixo-x e do eixo-y (controlam o afastamento da curva aos eixos). O valor k controla o afastamento dos vértices ao centro P_0.

4) $f(x,y) = xy$. $\quad N_k(f) = \{(x,y) \mid xy = k\}$ é uma **hipérbole** no 1^o e 3^o quadrantes ($k > 0$) ou no 2^o e 4^o quadrantes ($k < 0$).

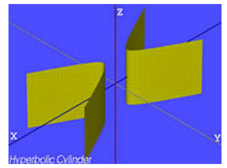
5) $f(x,y) = \frac{(x-x_0)^2}{(y-y_0)}$. $\quad N_k(f) = \{(x,y) \mid (x-x_0)^2 = k(y-y_0)\}$ é uma **parábola** com vértice em P_0. O valor k controla o formato da parábola.

6) $f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$. $\quad (A,B,C) \neq (0,0,0)$. Seja $\Delta = B^2 - 4AC$. Então $N_0(f)$ é elipse se $\Delta < 0$, parábola se $\Delta = 0$, hipérbole se $\Delta > 0$.

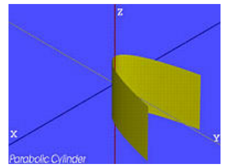
Aula 10: Exemplos de superfícies de nível

1) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$. $\quad N_k = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 = k\}$ é um **cilindro** $(k > 0)$.

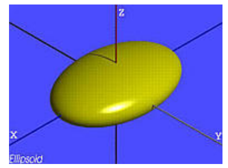
2) $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$. $\quad N_k(f) =$ **cilindro hiperbólico** $(k \neq 0)$.



3) $f(x,y,z) = x^2 - cy$. $\quad N_k(f) =$ **cilindro parabólico**.

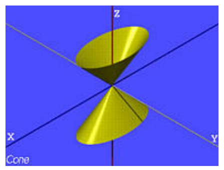


4) $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$. $\quad N_k(f) =$ **elipsóide** $(k > 0)$.

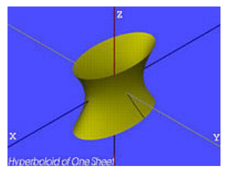


5) $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$.

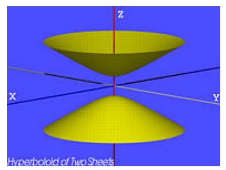
$N_k(f) =$ **cone** se $k = 0$,



hiperboloide de 1 folha se $k > 0$,



hiperboloide de 2 folhas se $k < 0$.

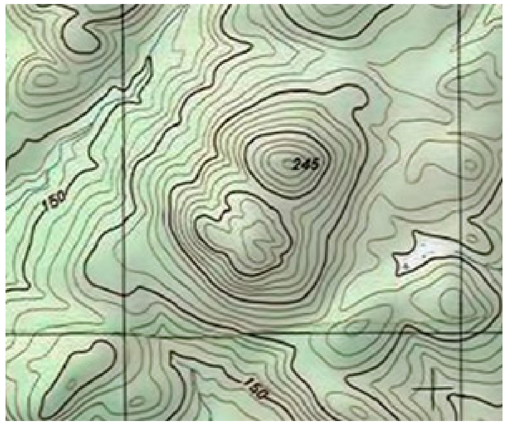


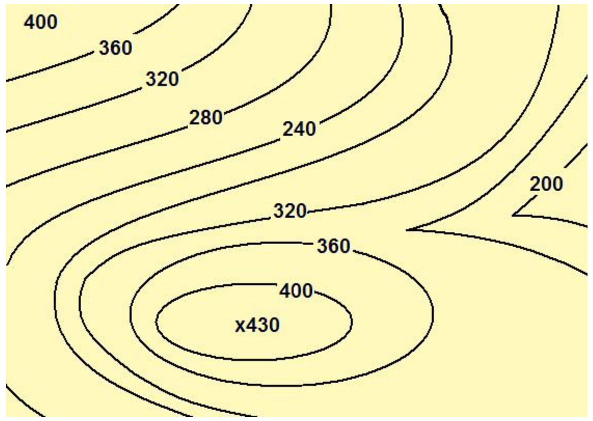
Aula 10: Curvas de nível de uma superfície $G(f)$

Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico $G(f) = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y)\}$ é uma superfície no espaço. As curvas de nível da superfície $G(f)$ são as curvas nível da família

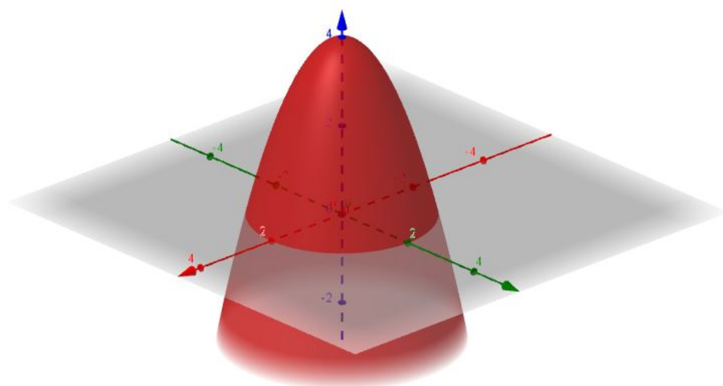
$$\{N_k(f) \mid k \in \mathbb{R} \wedge N_k(f) \neq \varnothing\} \subset XOY.$$

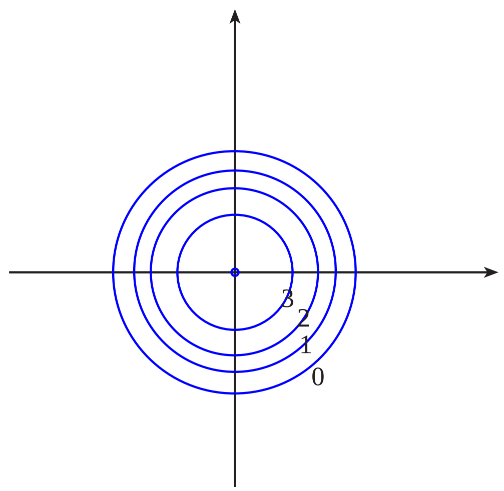
As cartas topográficas são um exemplo do uso prático das curvas de nível (os 2 exemplos da internet):





Por exemplo, seja $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$. O gráfico de f e algumas das suas curvas de nível:





Aula 10: Limite duma função (segundo Heine)

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Seja $X = (x, y, z, \dots) \in \mathbb{R}^n$.

Definição (Heine): $\lim_{X \to A} f(X) = b \Leftrightarrow$ para qualquer sucessão $(X_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D \setminus \{A\}$, se
$$\lim_{k \to \infty} (X_k) = A \;\text{ então }\; \lim_{k \to \infty} f(X_k) = b.$$

Aqui A pode não pertencer a D, mas A é um ponto de acumulação de D: i.e., existe pelo menos uma sucessão de elementos de D diferentes de A que converge para A.

A convergência $X_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} A$, significa que $\lim_{k \to \infty} \|X_k - A\| = 0$, onde $\| \cdot \|$ é a notação usada para a norma: se $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, a norma de X é $\|X\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. É uma extensão natural a $n > 3$ das expressões que em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$ nos dão a distância de X à origem e que ocupa em $\mathbb{R}^n$ o lugar que o módulo $| \cdot |$ ocupa em $\mathbb{R}$. No caso $n = 1$, $\|X\| = |X|$. Logo,

$\lim_{X \to A} f(X) = b \;\Leftrightarrow\;$ sempre que $\lim_{k \to \infty} \|X_k - A\| = 0$ para uma sucessão $(X_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D \setminus \{A\}$, se tem também $\lim_{k \to \infty} |f(X_k) - b| = 0$.

Aula 10: Limite duma função (def. equivalente)

$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, com D conexo por curvas (i.e. quaisquer dois pontos A e B de D existe uma curva em D que liga A a B).

$\lim\limits_{X \to A} f(X) = b \Leftrightarrow \forall$ curva $\gamma \subset D$ com A ponto de acumulação de γ, $\lim\limits_{\substack{p \to A \\ p \in \gamma}} f(p) = b$.

Exemplo: A função $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ definida por $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ não tem limite em $A = (0,0)$.

Verificar que para $p \in \gamma =$ retas não verticais $y = mx$ que passam por $A = (0,0)$, o limite de $\lim\limits_{p \to A} f(p) = \frac{m}{1+m^2}$ enquanto para $\gamma =$ retas verticais, ou horizontais, e $p \in \gamma$, $\lim\limits_{p \to A} f(p) = 0$.

Aula 10: Calculo do limite de funções de 2 ou 3 variáveis

Para calcular o limite de funções de 2 variáveis $f(x, y)$ quando $(x, y) \to (x_0, y_0)$, proceder à mudança de variáveis para variáveis polares: $x = x_0 + r\cos(\theta)$, $y = y_0 + r \operatorname{sen}(\theta)$. Temos assim:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{r\to 0} f(x_0 + r\cos(\theta), y_0 + r \operatorname{sen}(\theta)).$$

Para calcular o limite de funções de 3 variáveis $f(x, y, z)$ quando $(x, y, z) \to (x_0, y_0, z_0)$, proceder à mudança de variáveis para variáveis esféricas $x = x_0 + r\cos(\phi)\cos(\theta)$, $y = y_0 + r\cos(\phi) \operatorname{sen}(\theta)$, $z = z_0 + r \operatorname{sen}(\phi)$. Temos assim:

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x, y, y) = \lim_{r\to 0} f(x_0 + r\cos(\phi)\cos(\theta), y_0 + r\cos(\phi) \operatorname{sen}(\theta), z_0 + r \operatorname{sen}(\phi)).$$

Se o cálculo do limite anterior for uma função dependente de θ (resp. de θ ou ϕ), então o limite não existe. Se no limite calculado não aparecer θ (resp. θ e ϕ), então o limite existe e é esse valor calculado.

Aula 10: Continuidade

A função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se contínua num ponto de acumulação $A \in D$ se e só se $\lim_{X \to A} f(X) = f(A)$.

Observa que f é contínua em $A \in D$, então $f(A)$ é o valor do limite da função nesse ponto.

Regras para identificar funções contínuas. Para aliviar a notação, daremos apenas para funções $f(x, y, z)$[a] de três variáveis, mas correspondentes resultados são válidos para funções de qualquer número finito de variáveis:

1. As funções constantes (isto é, aquelas que assumem sempre um mesmo valor) são contínuas.
2. As funções $f(x, y, z) = x$, $f(x, y, z) = y$ e $f(x, y, z) = z$ são contínuas.
3. A soma, o produto e o quociente de funções contínuas é ainda uma função contínua[b].
4. A composição de funções contínuas é ainda uma função contínua, isto é, se $f(x, y, z)$ e $g(t)$ forem contínuas então a função que a (x, y, z) faz corresponder $g(f(x, y, z))$ (supondo que tal é possível) é contínua.
5. A restrição de uma função contínua a um subconjunto do seu domínio é também uma função contínua.

[a] Quando não indicarmos o domínio da função, subentender-se-á que o domínio é o de definição da expressão.

[b] No domínio de definição das expressões.

Conjugando isto com as duas regras (1), (2) e (3) podemos afirmar que a função

$$f(x,y,z) = \frac{2xy + 5z^2x}{7y^3z - xyz}$$

é contínua – no seu domínio, é claro, o que exclui os ternos (x, y, z) que anulam o denominador.

Conjugando isto com as regras (1-4) ou outras já conhecidas, temos, por exemplo, que a função

$$\frac{e^{x+y}z^2 + \sin(xyz)}{\ln(xz) + \frac{z}{y^3}}$$

é contínua.

Aula 10: Exercícios

1. Verifique se existe existem os seguintes limites:

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{y^2+x}$. **(2)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2x+y}{x}$. **(3)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{1-e^{(x-1)y}}{(x-1)y}$.

(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x+4y}{x-y}$. **(5)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\ln(x)}{y-1}$. **(6)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},-1)} \frac{(y+1)(x-\frac{\pi}{2})\operatorname{tg} x}{y^2+y+x}$.

2. Serão as seguintes funções contínuas em $(0,0)$? Justifique.

(1) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+y}{y^2+x}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$ **(2)** $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2x+y}{x}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

(3) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1-e^{xy}}{xy}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **(4)** $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{2})}{y^2+x+2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

Aula 10: Soluções

1. (1) Não existe limite.

(2) Não existe limite.

(3) $-1.$

(4) Não existe limite.

(5) Não existe limite.

(6) 0.

2. (1) Não é contínua em $(0,0)$ porque não existe o limite de $f(x,y)$ quando $(x,y) \to (0,0)$.

(2) Não é contínua em $(0,0)$ porque não existe o limite de $f(x,y)$ quando $(x,y) \to (0,0)$.

(3) Não é contínua em $(0,0)$ porque $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -1 \neq 1 = f(0,0).$

(4) Não é contínua em $(0,0)$ porque $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \neq 1 = f(0,0).$