Aula 19: Sumário

- EDOS exatas.
- Tragectórias ortogonais.

Aula 19: EDOs de primeira ordem

- EDOS de variáveis separáveis.
- EDOS exatas.
- EDOs lineares (de primeira ordem).
- Equações diferenciais de Bernoulli.
- EDOs homogéneas.

Aula 19: EDOs exatas

EDOS do tipo: $\quad M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \qquad (1)$

$$\Leftrightarrow \quad M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

A edo (1) diz-se exata se existe uma função $F(x,y)$ com derivadas parciais contínuas tal que

$$\boxed{\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = M(x,y) + N(x,y)y'. \qquad (2)}$$

Aplicando a regra da cadeia, (1) é exata se e só se $\boxed{M = \frac{\partial F}{\partial x} \text{ e } N = \frac{\partial F}{\partial y}.}$

Teorema 1 (Critério): Se M, N, $\frac{\partial M}{\partial y}$ e $\frac{\partial N}{\partial x}$ são contínuas num aberto *simplesmente conexo* $D \subset \mathbb{R}^2$, então $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é exata se e só se $\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.}$

Isto porque $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Se (1) é exata, então a edo (1) torna-se numa edo simples: $\boxed{\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = 0 \qquad (2)}$ cuja solução é $\boxed{F(x,y) = C.}$ Isto é, qualquer função $y = \phi(x)$ que satisfaça esta equação é solução da edo (1).

Aula 19: EDOs exatas $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (1)

Critério: M, N, $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ contínuas em $\mathbb{R}^2$, então (1) é **exata** se e só se $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Sendo (1) exata então existe uma função $F(x,y)$ com derivadas parciais contínuas tal que

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = M(x,y) + N(x,y)y'. \quad (2)$$

Cálculo de $F(x,y)$: Resolver o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \\ \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$$

Solução da EDO: De (1) e (2) sai que a edo (1) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{d}{dx}F(x,y(x)) = 0$ cuja solução é

$$\boxed{F(x,y) = C\,.}$$

Aula 19: Exercícios 1

Verifique se a EDO é exata e no caso afirmativo determine as soluções na forma implícita.

(1) $(2y^2 + 2x)dx + 4xydy = 0.$ Sol: $F(x,y) = 2xy^2 + x^2$ sol da EDO: $F(x,y) = C \Leftrightarrow 2xy^2 + x^2 = C$

(2) $\sin y + (y^2 - x\sin y)y' = 0.$ Sol: Não é exata

(3) $(2xy - 3x^2)dx + (x^2 - 2y)dy = 0.$ Sol: $F(x,y) = x^2y - y - x^3$ sol. da EDO: $F(x,y) = C \Leftrightarrow x^2y - y - x^3 = C.$

(4) $y + 2xe^y + (x^2e^y + x - 2y)y' = 0.$ Sol: $F(x,y) = yx + x^2e^y - y^2$ sol da EDO: $F(x,y) = C \Leftrightarrow yx + x^2e^y - y^2 = C$

Aula 19: Exercícios 2

A Verifique se a EDO é exata e no caso afirmativo determine as soluções na forma implícita.

(1) $(2y^2 + 2x)dx + 4xydy = 0.$ Sol: $2xy^2 + x^2 = C$

(2) $\cos y + (y^2 - x\sin y)y' = 0.$ Sol: $x\cos y + \frac{y^3}{3} = C$

(3) $(2xy - 3x^2)dx + (x^2 - 2y)dy = 0.$ Sol: $x^2y - x^3 - y^2 = C$

(4) $y + 2xe^y + (x^2e^y + x - 2y)y' = 0.$ Sol: $yx + x^2e^y - y^2 = C$

B Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

1. $\begin{cases} y'(x\cos(xy) + e^y) = 1 - y\cos(xy) \\ y(1) = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

Sol: $\sin(xy) - x + e^y = C$ S.P.C.: $\sin(xy) - x + e^y = e^{\frac{\pi}{2}}$

2. $\begin{cases} y'(y - x^2) = 2xy - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Sol: $(y - x^2)^2 + 2x - x^4 = C$ S.P.C.: $C = 1$: $(y - x^2)^2 + 2x - x^4 = 1$

$y(0) = 1 \quad \Rightarrow$ sol. $y = x^2 + \sqrt{1 + x^4 - 2x}$

Nota: (2) com a restrição $y(0.8) = 1$ não teria solução. Com a restrição $y(1) = 1$ também não teria solução pois y não seria diferenciável em 1.

Aula 19: Trajectórias Ortogonais

Uma trajectória ortogonal a uma família de curvas é uma curva que intersecta ortogonalmente cada um dos membros dessa família.

Para obter a família das trajectórias ortogonais a uma família de curvas procedemos:

(1) Deduzir a EDO associada à família de curvas dada: $y' = f(x, y)$

(2) Escrever a EDO das trajectórias ortogonais: $y' = -\dfrac{1}{f(x, y)}$

(3) Integrar a EDO anterior.

Exercício 4: Determine as trajectórias ortogonais às famílias de curvas:

(a) família das rectas na origem. Sol: $x^2 + y^2 = C$ (circunferências centradas na origem)

(b) família de parábolas $y = kx^2$ Sol: $y^2 + \frac{x^2}{2} = C$ (elipses centradas na origem)

(c) família $y = kxe^x$. Sol: $\frac{y^2}{2} + x = \ln|x + 1| + C$

Aula 19: Exercícios 5

Determine as trajectórias ortogonais às famílias de curvas:

(a) $y = \dfrac{c}{x}, x > 0.$ Sol: $y^2 - x^2 = C$

(b) $y = \ln(x^2 + c).$ Sol: $y = \frac{C}{\sqrt{|x|}}$

(c) $y = x\sqrt{c + \ln x}.$ Sol: $y^3 + \frac{3}{2}yx^2 = Cx^2$