Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Exame Final de Cálculo II (Agrupamento 4) **25 de junho de 2020**

Enunciado e Resoluções

Nota: As resoluções seguintes omitem alguns pormenores, mas têm os passos essenciais numa resolução admissível.

Questão 1. Seja f a função 2π–periódica tal que $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ 2 & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$.

[20pts] (a) Mostre que a série de Fourier associada a f é dada por

$$1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cos((2n-1)x)}{2n-1}.$$

[[15pts] (b) Calcule, usando a alínea anterior e justificando, a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi}$.

(a)Como $f(x) = f(-x)$ para todo o $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$, a série de Fourier de f é uma série de cossenos. Assim,

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx), \text{ onde } a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx\,, n \in \mathbb{N}_0.$$

Isto é,

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,dx = 2 \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx\,, \quad n \in \mathbb{N} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{n}\text{sen}(nx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{4}{\pi n}\text{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Como $\text{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k \\ (-1)^{k+1} & \text{se } n = 2k-1 \end{cases}, k \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k \\ \frac{4}{\pi(2k-1)}(-1)^{k+1} & \text{se } n = 2k-1 \end{cases}, k \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$f \sim 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)}(-1)^{k+1}\cos((2k-1)x)\,,$$

ou seja,

$$f \sim 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos((2n-1)x)\,.$$

(b) Como f é seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$, a série de Fourier de f é convergente em $\mathbb{R}$ e converge em cada ponto x para $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$, pelo Teorema de Dirichlet. Como f é contínua em $x=0$,

$$f(0) = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos((2n-1)0)\,.$$

ou seja, $2 = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ e portanto, $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1$. Logo,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi} = \frac{1}{4}$$

Questão 2.

[25pts] (a) Sabendo que $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad |t|<1$, mostre que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1.$$

[15pts] (b) Determine uma aproximação de $\ln(2)$ através do polinómio de MacLaurin de ordem 3 da função $f(x) = \ln(1+x)$.

[15pts] (c) Calcule um majorante para o erro absoluto cometido na aproximação obtida na alínea anterior.

(a) Uma vez que $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad |t|<1$, considerando $t=-x$, tem-se

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x|<1.$$

Primitivando termo a termo, obtém-se

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x|<1 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \quad |x|<1 \end{aligned}$$

Como $x=-1$ não pertence ao domínio da função $f(x) = \ln(1+x)$, resta, então, estudar a convergência da série numérica que se obtém quando $x=1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}.$$

Esta é uma série alternada convergente (pode provar-se pelo critério de Leibniz). Logo,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \quad -1 < x \leq 1,$$

tendo em conta a continuidade da sua soma, por ser uma série de potências, em qualquer intervalo do tipo $[b,1] \subset]-1,1]$.

(b) O polinómio de MacLaurin de ordem 3 de $f = \ln(1+x)$ é dado por

$$\begin{aligned} T_0^3 f(x) &= \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}. \end{aligned}$$

Então, $\ln(2) = \ln(1+1) = f(1) \approx T_0^3 f(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

(c) O erro absoluto cometido na aproximação anterior é dado por

$$\left|R_0^3 f(1)\right| = \left|\frac{f^{(4)}(\theta)}{4!}\right| 1^4, \quad \theta \in]0,1[.$$

Obtém-se um majorante, majorando a derivada de ordem 4 de f no intervalo $]0,1[$. Como

$$\left|f^{(4)}(\theta)\right| = \frac{6}{(1+\theta)^4} < 6, \quad \forall \theta \in]0,1[,$$

então

$$\left|R_0^3 f(1)\right| < \frac{6}{4!} = 0,25.$$

Questão 3. Considere a função f de domínio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ tal que

$$f(x,y) = \sqrt{1 - (x^2+y^2)} + xy\,.$$

`[25pts]` (a) Determine os pontos críticos de f.

`[10pts]` (b) Justifique a existência de extremantes globais de f e diga, sem efetuar cálculos adicionais, qual a sua localização possível.

`[20pts]` (c) Determine esses extremantes globais de f.

(a) Os pontos críticos desta função são os pontos onde é diferenciável e o vetor gradiente é nulo. Para estes pontos, que pertencem ao interior de $\mathcal{D}$, calculamos o vetor gradiente

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + y, \frac{1}{2}\frac{-2y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + x\right) = \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + y, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + x\right)$$

e identificamos os pontos que verificam $\nabla f(x,y) = (0,0)$, resolvendo o sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + y &=& 0 \\ \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + x &=& 0 \end{array}\right.,$$

chegando à solução $(x,y) = (0,0)$. Uma resolução desse sistema poderá ser a seguinte:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + y &=& 0 \\ \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + x &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x\sqrt{1-x^2-y^2} + y(1-x^2-y^2) &=& 0 \\ -y + x\sqrt{1-x^2-y^2} &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x\sqrt{1-x^2-y^2} + y(1-x^2-y^2) &=& 0 \\ -y + y(1-x^2-y^2) &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x\sqrt{1-x^2-y^2} + y(1-x^2-y^2) &=& 0 \\ y &=& 0 \end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{rcl} -x\sqrt{1-x^2-y^2} + y(1-x^2-y^2) &=& 0 \\ x^2+y^2 &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& 0 \end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{rcl} -x+y &=& 0 \\ x^2+y^2 &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& 0 \end{array}\right.$$

(b) Para justificar a existência de pontos de máximo e mínimo absolutos no domínio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

da função f, usamos o Teorema de Weierstrass, que diz que se uma função contínua está definida num domínio fechado e limitado, então nesse domínio a função atinge o seu valor máximo e o seu valor mínimo. Neste caso a função é contínua no círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ porque é a soma, produto e composição de funções contínuas e o domínio é fechado, porque contem os pontos $x^2 + y^2 = 1$, que são a sua fronteira e é limitado, porque está contido num disco centrado em $(0, 0)$ e de raio finito (neste caso qualquer raio maior do que 1). O ponto (ou pontos) onde se alcança o valor máximo ou o valor mínimo poderá estar situado no ponto $(0, 0)$, porque se for ponto de máximo ou mínimo global, e estiver situado no interior do domínio será também um extremante local, e será condição necessária nesse caso que seja um ponto crítico. Os pontos de máximo ou de mínimo global também podem estar situados na fronteira do domínio.

(c) Para determinar os pontos de máximo ou de mínimo global, estudamos a função restringida ao seu valor nos pontos da fronteira do domínio, ou seja estudamos o valor da função nos pontos $x^2 + y^2 = 1$. Neste caso verificamos que a função

$$f(x, y) = xy$$

para os pontos (x, y) tais que $x^2 + y^2 = 1$. Agora podemos estudar os candidatos a máximo ou a mínimo, pelo método dos multiplicadores de Lagrange ou pela parametrização da circunferência, $x = \cos t, y = \mathrm{sen} t, t \in [0, 2\pi]$.

Obtemos como solução os pontos

$$P_1 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), P_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), P_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), P_4 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}),$$

Agora comparamos os valores de f em cada um destes pontos e no ponto $(0, 0)$

$$f(0, 0) = 1, f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}, f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{2}; f(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{2}, f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}$$

pelo que concluímos que o valor máximo desta função em D é 1, alcançado no ponto $(0, 0)$ e o valor mínimo é $-\frac{1}{2}$, alcançado nos pontos $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

Questão 4. Considere a equação diferencial $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}\, y = \dfrac{xe^x}{1+x^2}$.

`[10pts]` (a) Sem a resolver, mostre que:
Se $\varphi_0(x)$ é uma solução da EDO, então $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \dfrac{1}{1+x^2}$ também é uma sua solução.

`[25pts]` (b) Determine a solução geral da equação.

(a) Sendo $\varphi'(x) = \varphi_0'(x) - \frac{2x}{(1+x^2)^2}$, tem-se que

$$\varphi'(x) + \frac{2x}{1+x^2}\,\varphi(x) = \varphi_0'(x) - \frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{2x}{1+x^2}\left(\varphi_0(x) + \frac{1}{1+x^2}\right) = \varphi_0'(x) + \frac{2x}{1+x^2}\,\varphi_0(x)\,.$$

Logo, se φ_0 é solução da EDO, então também φ é solução.

(b) A EDO dada é uma EDO linear de primeira ordem com fator integrante $\mu(x) = e^{P(x)}$, onde $P(x)$ é uma primitiva de $\dfrac{2x}{1+x^2} = \big(\ln(1+x^2)\big)'$. Sendo assim, podemos tomar

$$\mu(x) = e^{\ln(1+x^2)} = 1 + x^2\,.$$

Multiplicando pelo fator integrante $\mu(x)$ a EDO dada, temos que $((1+x^2)y)' = xe^x$. Logo

$$(1+x^2)y = \int xe^x\,dx = (x-1)e^x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

A solução geral da EDO é portanto $\quad y = \dfrac{(x-1)e^x + C}{1+x^2}$ com $C \in \mathbb{R}$.

[30pts]**Questão 5.** Resolva o seguinte problema de Cauchy usando transformadas de Laplace:

$$y'' - 2y' + 2y = e^{-t}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Seja $\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$. Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação dada,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y'' - 2y' + 2y\} &= \mathcal{L}\left\{e^{-t}\right\} \\
\mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\left\{e^{-t}\right\} \\
s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 2\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) &= \frac{1}{s+1}, s > -1 \\
s^2Y(s) - 1 - 2sY(s) + 2Y(s) &= \frac{1}{s+1}, s > -1 \\
Y(s)\left(s^2 - 2s + 2\right) &= \frac{1}{s+1} + 1, s > -1 \\
Y(s)\left(s^2 - 2s + 2\right) &= \frac{s+2}{s+1}, s > -1 \\
Y(s) &= \frac{s+2}{(s+1)\left(s^2 - 2s + 2\right)}, s > -1. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Decomposição desta fração em elementos simples:

$$\frac{s+2}{(s+1)\left(s^2-2s+2\right)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2-2s+2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A+B &=& 0 \\ -2A+B+C &=& 1 \\ 2A+C &=& 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} A+B &=& 0 \\ -2A+B+C &=& 1 \\ 2A+C &=& 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A &=& -B \\ C &=& 1-3B \\ C &=& 2+2B \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 1-3B &=& 2+2B \\ B &=& -\frac{1}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A &=& 1/5 \\ B &=& -1/5 \\ C &=& 8/5 \end{array}\right. .$$

Assim, $\dfrac{s+2}{(s+1)\left(s^2-2s+2\right)} = \dfrac{\frac{1}{5}}{s+1} + \dfrac{-\frac{1}{5}s+\frac{8}{5}}{s^2-2s+2} = \dfrac{\frac{1}{5}}{s+1} + \dfrac{-\frac{1}{5}s+\frac{8}{5}}{(s-1)^2+1}$.

Aplicando a inversa da transformada de Laplace em (1), temos

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+1)\left(s^2-2s+2\right)}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-8}{(s-1)^2+1}\right\} \\
&= \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right\} + \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{(s-1)^2+1}\right\} \\
&= \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{1}{5}e^t cos(t) + \frac{7}{5}e^t sen(t), t \geq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a função y é dada por:

$$y(t) = \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{1}{5}e^t\cos(t) + \frac{7}{5}e^t\mathrm{sen}(t), t \geq 0.$$