Ex 16 (c) $y'' + y' = 2y + 3 - 6x$ (1)

$$y'' + y' - 2y = \underbrace{3 - 6x}_{b(x)} \qquad (*)$$

· Solução da homogénea

$$y'' + y' - 2y = 0$$

$$p(r) = r^2 + r - 2 = 0 \Leftrightarrow (r+2)(r-1) = 0$$

$$\boxed{r = -2} \qquad \boxed{r = 1}$$

$$SFS \quad \{ e^{-2x}, e^{x} \}$$

Solução geral da homogénea

$$\boxed{y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

- Solução particular de (*)

$$y_p = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^{x} \quad \text{onde}$$

$$\begin{bmatrix} e^{-2x} & e^{x} \\ -2e^{-2x} & e^{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3-6x \end{bmatrix} \rightarrow \frac{b(x)}{a_0}$$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{x} \\ 3-6x & e^{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{x} \\ -2e^{-2x} & e^{x} \end{vmatrix}} = \frac{-e^{x}(3-6x)}{e^{-x}+2e^{-x}} = \frac{-3e^{x}(1-2x)}{3e^{-x}} = -e^{x}(1-2x)$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & 3-6x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{x} \\ -2e^{-2x} & e^{x} \end{vmatrix}} = \frac{e^{-2x}(3-6x)}{3e^{-x}} = e^{-x}(1-2x)$$

$\longrightarrow$

Assim,

$$C_1'(x) = -e^{2x}(1-2x)$$

$$C_2'(x) = e^{-x}(1-2x$$

$$C_1(x) = -\int e^{2x}(1-2x)\,dx$$

$$= -\int e^{2x}\,dx + \underbrace{\int e^{2x}\,2x\,dx}$$

$$= -\frac{e^{2x}}{2} + xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$= -e^{2x} + xe^{2x}$$

$$\boxed{C_1(x) = -e^{2x} + xe^{2x}}$$

CA

$u = 2x \quad du = 2dx$

$dv = e^{2x} \quad v = \frac{e^{2x}}{2}$

$$\int e^{2x}\,2x\,dx = xe^{2x} - \int e^{2x}\,dx$$

$$\int e^{2x}\,2x\,dx = xe^{2x} - \frac{e^{2x}}{2}$$

$$C_2(x) = \int e^{-x}(1-2x)\,dx = \int e^{-x} - 2xe^{-x}\,dx$$

$$= \int e^{-x}\,dx - \int 2xe^{-x}\,dx$$

$$= -e^{-x} + 2x\,e^{-x} + 2e^{-x}$$

$$= e^{-x} + 2x\,e^{-x}$$

$$\boxed{C_2(x) = e^{-x} + 2xe^{-x}}$$

$\longrightarrow$

Logo, a solução particular de (*) é

$$y_p = (-e^{2x} + xe^{2x})e^{-2x} + (e^{-x} + 2xe^{-x})e^{x}$$

$$y_p = -1 + x + 1 + 2x = 3x$$

$$\boxed{y_p = 3x}$$

A solução geral de (*) é

$$y = y_h + y_p$$

$$\boxed{y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} + 3x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

Método dos coef. indeterminados (SL42)

Método dos Coeficientes Indeterminados:

- Método para determinar uma solução particular, aplicável às EDO lineares de coeficientes constantes completas
$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = b(x) \qquad (5)$$
com $b(x)$ da forma
$$b(x) = B_m(x)\, e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad \text{ou} \quad b(x) = B_m(x)\, e^{\alpha x}\, \text{sen}\,(\beta x),$$
onde $B_m(x)$ denota um polinómio de grau $m \in \mathbb{N}_0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- Neste caso, prova-se que existe uma solução particular da equação (5) do tipo
$$y_p(x) = x^k\, e^{\alpha x}\, (Q(x) \cos(\beta x) + R(x)\, \text{sen}\,(\beta x)) \qquad (6)$$
onde:
(i) k é a multiplicidade de $\alpha + i\beta$, se $\alpha + i\beta$ for raiz do polinómio caraterístico da equação homogénea associada a (5); Senão, $k = 0$;
(ii) $Q(x)$, $R(x)$ são polinómios de grau m cujos coeficientes terão de ser determinados usando a EDO (5) e a expressão para a solução (6).

Exemplo 1: (SL43)

$$y' - 3y = \underbrace{e^{3x}}_{b(x)} \qquad (*)$$

$$e^{3x} = P_m(x)\, e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

com $P_m(x) = 1$ (grau zero), $m = 0$, $\alpha = 3$ e $\beta = 0$

Como $\alpha + \beta i = 3 + 0i = 3$ é raiz do polinômio característico, $p(r) = r - 3$ com multiplicidade 1

então $k = 1$

Então, a solução particular de (*) é da forma (7)

$$y_p = x^1 e^{3x} \left(A \cos(0x) + B \operatorname{sen}(0x) \right)$$

tem grau zero

é decir, são ~~ctes~~.

$$y_p = x e^{3x} A \ , \ A \in \mathbb{R}$$

Devemos determinar A.

Como y_p deve ser solução de (*) então

$$y_p' - 3y_p = e^{3x}$$

$$A e^{3x} + \cancel{3Ax e^{3x}} - 3\cancel{(Axe^{3x})} = e^{3x}$$

$$A e^{3x} = e^{3x}$$

$$(A-1) e^{3x} = 0 \Rightarrow A - 1 = 0 \Rightarrow A = 1$$

Assim, $\boxed{y_p = x e^{3x}}$

Exemplo 2: $\qquad y' - 3y = \underbrace{2x}_{b(x)} \qquad (2)$

$$2x = P_m(x)\, e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

com $P_m(x) = 2x \rightarrow$ grau 1, $m = 0$

$\alpha = 0$ e $\beta = 0$

Como $\alpha + \beta i = 0$ não é raiz de $p(r) = r - 3$

então $K = 0$

$\rightarrow$

Então, uma solução particular da EDO (2) é

$$y_p = x^0 e^{0x}\left(A(x)\cos(0x) + B(x)\,\mathrm{sen}(0x)\right)$$

$\to 0$

tem grau 1

$$y_p = A(x)$$

, como $A(x)$ é um polinômio de grau 1 podemos escrever

$$A(x) = C_0 x + C_1$$

$$y_p = C_0 x + C_1$$

Determinemos $A(x)$

$\longrightarrow$

y_p deve satisfazer (2)

$$y_p' - 3y_p = 2x$$

$$\underbrace{c_0}_{y_p'} - 3\underbrace{(c_0x + c_1)}_{y_p} = 2x$$

$$-3c_0 x + (c_0 - 3c_1) = 2x$$

$\Rightarrow$ $-3c_0 = 2$ $\qquad$ $c_0 - 3c_1 = 0$

$c_0 = -\dfrac{2}{3}$ $\qquad$ $-\dfrac{2}{3} - 3c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -\dfrac{2}{9}$

Logo, $\boxed{y_p = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}}$ //

Exemplo 3: Determinar a solução geral da EDO

$$5y + 2y' + y'' = 2e^{2x} \qquad (3).$$

· Solução da homogénea associada

$$5y + 2y' + y'' = 0$$

$$p(r) = r^2 + 2r + 5 = 0$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

SFS: $\{ e^{-x}\cos(2x), e^{-x}\operatorname{sen}(2x) \}$

A solução geral da homogénea

$$y_h = Ae^{-x}\cos(2x) + Be^{-x}\operatorname{sen}(2x), \; A, B \in \mathbb{R}$$

· Solução particular de (3)

$$2e^{-2t} = P_m(x)\, e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

com $P_m(x) = 2 \Rightarrow m = 0$,

$\alpha = -2$, $\beta = 0$

Como $\alpha + \beta i = -2 + 0i = -2$ não é raiz do polinómio característico $p(r) = r^2 + 2r + 5$ então

$k = 0$

Assim, uma solução particular de (3) é da forma

$$y_p = x^0 e^{-2x} \left[C \cos(0x) + D \sin(0x) \right]$$

grau 0

$y_p(x) = Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$ a determinar

Substituindo y_p'', y_p' e y_p em (3) temos:

$$5Ce^{-2x} - 4Ce^{-2x} + 4Ce^{-2x} = 2e^{-2x}$$

$$5C - 4C + 4C = 2$$

$$5C = 2$$

$$C = \frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{y_p(x) = \frac{2}{5}e^{-2x},}$$

Logo, solução geral de (3) é

$$y = y_h + y_p$$

$$\boxed{y = Ae^{-x}\cos(2x) + Be^{-x}\operatorname{sen}(2x) + \frac{2}{5}e^{-2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}}$$ //

Exemplo 4

A EDO $y' - 3y = e^{3x} + 2x$

Tem solução particular

$$y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) \quad \text{onde}$$

Princípio de sobreposição

Teorema:
Suponha-se que y_1 é uma solução (particular) da equação

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\, y = b_1(x)\,,$$

e que y_2 é uma solução (particular) da equação

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\, y = b_2(x)\,.$$

Então $y_1 + y_2$ é uma solução (particular) da equação

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = b_1(x) + b_2(x).$$

$y_1(x)$ é solução particular da equação $y' - 3y = e^{3x}$

Do exemplo (1): $y_1(x) = x e^{3x}$

$y_2(x)$ é solução particular da eq. $y' - 3y = 2x$

Do exemplo (2) $y_2(x) = -2/3\, x - 2/9$

Logo, $\boxed{y_p(x) = x e^{3x} - 2/3\, x - 2/9}$