Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO 2 - agrup. 1 **2017/18**

Folha 3: *Cálculo de funções de varias variáveis*

---

1. Determine todas as derivadas parciais de primeira e segunda ordem das seguintes funções
   (a) $f(x,y) = x^T 2e^y + e^{xy}$
   (b) $g(x,y) = \sin^2(xy)$
   (c) $h(x,y) = e^{\cos x + y^3}$

2. Determine se as funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $(0,0)$ com
   - $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   - $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3. Desenvolve a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $f(x,y) = y \ln x + xe^{y+2}$ no ponto $c = (1/e, -1)$ num polinómio de Taylor de segunda ordem.

4. Desenvolve a função $f(x,y) = x^y$ no ponto $c = (1,1)$ num polinómio de Taylor de segunda ordem. Usando esse polinómio determine uma aproximação de $\sqrt[10]{(1,05)^9}$.

5. Faça a transformação da expressão

$$W = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

   para coordenadores polares. (Sugestão: considere a função $u(r,\theta) = U(r\cos\theta, r\sin\theta)$)

6. Determine as soluções das equações com derivadas ordinárias

$$2x\cos y - x^2 \sin y y' = 0$$

   e

$$e^x y + (e^x + 2y)y' = 0.$$

7. Determine todos os pontos críticos da função $f(x,y) = (y^2 - x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ e verfique se os pontos são pontos de máximos, de mínimos, ou pontos de sela.

8. Determine e classifique todos os pontos extremais da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com

$$f(x, y) = (1 + 2x - y)^2 + (2 - x + y)^2 + (1 + x - y)^2.$$

9. Determine os pontos estacionários dda funcão $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ com

$$f(x, y, z) = x^2 + xz + y^2$$

sob a condição $g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$. Estes pontos são pontos extremais?

10. Determine os valores e os erros das seguintes grandezas:

    (a) Volume do cilindro V, $V = r^2\pi h$, $r = (10,0 \pm 0,1)$cm, $h = (50,0 \pm 0,1)$cm

    (b) Aceleração a, $s = \frac{1}{2}at^2$, $s = (100,0\pm, 0,5)$m, $t = (3,86 \pm 0,01)$s

    (c) Resistência R_{12} numa ligaão paralela, $\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, $R_1 = (100 \pm 5)\Omega$, $R_2 = (50 \pm 5)\Omega$.

11. Determine os pontos extremais nos casos seguintes:

    (a) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ com $x + y = 2$

    (b) $z = x + y$ com $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$

    (c) $z = xy$ com $x^2 + y^2 = 2$