Aula 11: Sumário

- Fronteira, conjunto limitado, conjunto fechado e conjunto aberto, interior, exterior e derivado.
- Regras para reconhecer conjuntos fechados e conjuntos abertos.
- Conjunto limitado, conjunto fechado e conjunto aberto - exemplos.
- Teorema de Weierstrass.
- Derivadas parciais e gradiente.
- Outra notações e interpretação geométrica.
- Extremos relativos ou locais.
- Teorema de Fermat.

Aula 11: Fronteira, cjto limitado, fechado e aberto, interior, exterior e

A fronteira de um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto fr(D) constituídos pelos pontos de $\mathbb{R}^n$ que estão simultaneamente "juntos" a pontos de D e a pontos do complementar D^c.

Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ diz-se limitado se e só se $\exists M > 0 : \forall p \in D,\ \|p\| \leq M$.

Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ diz-se fechado se e só se contiver a sua fronteira.

Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ diz-se aberto se e só se for disjunto da sua fronteira.

O interior de $D \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto $\text{int}(D) = D \backslash \text{fr}(D)$.

O exterior de $D \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto $\text{ext}(D) = \mathbb{R}^n \backslash (D \cup \text{fr}(D)) = \text{int}(D^c)$.

O ponto $p \in \mathbb{R}^n$ diz-se um ponto de acumulação de $D \subset \mathbb{R}^n$, se existe uma sucessão $(x_n) \subset D \backslash \{p\}$ que converge para p.

O derivado de D é o conjunto D' constituído pelos pontos de acumulação de D.
$D' = (D \cup \text{fr}(D)) \backslash \{\text{pontos isolados de } D\}$

$$\mathbb{R}^n = \text{int}(D) \,\dot{\cup}\, \text{fr}(D) \,\dot{\cup}\, \text{ext}(D)$$

Aula 11: Regras para reconhecer conjuntos fechados e conjuntos abertos

Se um conjunto $D \subset \mathbb{R}^3$ é definido por um número finito de conjunções e/ou disjunções de desigualdades do tipo $g_1(x,y,z) \leq a_1$ e/ou $h_1(x,y,z) \geq b_1$ e/ou de igualdades do tipo $g_2(x,y,z) = a_2$, onde a_1, b_1 e a_2 são constantes e g_1, h_1, g_2 e h_2 são funções contínuas em todo o $\mathbb{R}^3$, então D é um conjunto fechado.

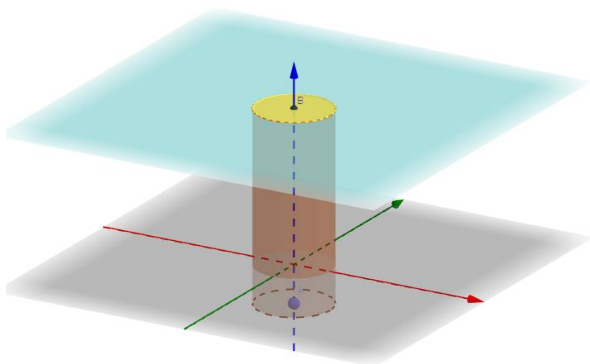
Se um conjunto $D \subset \mathbb{R}^3$ é definido por um número finito de conjunções e/ou disjunções de desigualdades do tipo $g(x,y,z) < a$ e/ou $h(x,y,z) > b$, onde a e b são constantes e g e h são funções contínuas em todo o $\mathbb{R}^3$, então D é um conjunto aberto.

A união e/ou intersecção de um número finito de abertos é aberto.

A união e/ou intersecção de um número finito de fechados é fechado.

Aula 11: Conjunto limitado, conjunto fechado e conjunto aberto - exemplos

1. A esfera sólida $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ é um conjunto limitado (qualquer valor $M \geq 1$ serve na definição).
2. A superfície esférica $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é um conjunto limitado (qualquer valor $M \geq 1$ serve na definição).
3. A esfera sólida é um conjunto fechado porque contém a sua fronteira (superfície esférica).
4. A superfície esférica é um conjunto fechado, pois ela é a sua própria fronteira, logo contém esta.
5. Pelas regras o conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq -1 \wedge xy + z^2 \leq 4\}$ é fechado.
6. $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \ \wedge \ z < 5\}$.



- D nem é aberto nem é fechado.
- fr$(D) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1 \wedge z \leq 5\} \cup \{(x, y, 5) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- int$(D) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < 1 \ \wedge \ z < 5\}$.
- ext$(D) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 > 1 \ \vee \ z > 5\}$.

Aula 11: Teorema de Weierstrass

Podemos finalmente enunciar o seguinte teorema para funções de um qualquer número n de variáveis:

> Weierstrass (generalizado) Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua e D é um conjunto conexo, limitado e fechado, então $f(D) = [m, M]$ é um intervalo limitado e fechado.

Se f está nas condições do Teorema de Weierstrass então $f(D) = [m, M]$ é um intervalo fechado. Os valores m e M são, respectivamente, o mínimo valor e o máximo valor que f pode atingir, isto é, respectivamente, o mínimo absoluto (ou global) e o máximo absoluto (ou global) de f, também globalmente designados por extremos absolutos (ou globais) de f.

Os pontos onde esses extremos são atingidos dizem-se extremantes (minimizantes ou maximizantes consoante o caso).

Derivadas parciais e gradiente

$$f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad D \text{ aberto e } \quad p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$$

Sejam:

$f_1(x) := f(x, y_0, z_0) : I_{x_0} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde I_{x_0} = certo intervalo aberto centrado em x_0;

$f_2(y) := f(x_0, y, z_0) : I_{y_0} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde I_{y_0} = certo intervalo aberto centrado em y_0;

$f_3(z) := f(x_0, y_0, z) : I_{z_0} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde I_{z_0} = certo intervalo aberto centrado em z_0;

Definição: As derivadas parciais de f no ponto p_0 relativamente às variáveis x, y e z são respectivamente: $f'_x(p_0) := f'_1(x_0)$, $f'_y(p_0) := f'_2(y_0)$ e $f'_z(p_0) := f'_3(y_0)$

Exercício: Calcule as derivadas parciais de $f(x, y, z) = 3x^2y + 2yz + z^3 \;:\; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ no ponto $p_0 = (2, 3, 1)$.

Tomando agora $p_0 = (x, y, z)$ um ponto genérico de D, temos a funções derivadas parciais de f:

$f'_x = 6xy$ função derivada parcial de f relativamente a x (obtida tomando y e z constantes),

$f'_y = 3x^2 + 2z$ função derivada parcial de f relativamente a y (obtida tomando x e z constantes)

$f'_z = 2y + 3z^2$ função derivada parcial de f relativamente a z (obtida tomando x e y constantes).

Outra notações e interpretação geométrica

Em vez da notação f'_x, f'_y e f'_z, usada acima, para as derivadas parciais, também se usa

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

e até mesmo, f_x, f_y e f_z.

O gradiente de f é o vector $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$. $\nabla f(p_0) = (f'_x(p_0), f'_y(p_0), f'_z(p_0))$.

Interpretação geométrica: No caso $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$, as derivadas parciais num ponto $p_0 = (x_0, y_0) \in D$ têm uma interpretação geométrica simples:

- $f'_x(x_0, y_0)$ é o declive da reta tangente em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ à curva $G(f(x, y_0))$, gráfico de $z = f(x, y_0)$. Esta curva é a interseção do gráfico de $z = f(x, y)$ com o plano de equação $y = y_0$.
- $f'_y(x_0, y_0)$ é o declive da reta tangente em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ à curva $G(f(x_0, y))$, gráfico de $z = f(x_0, y)$. Esta curva é a interseção do gráfico de $z = f(x, y)$ com o plano de equação $x = x_0$.
- Mais tarde veremos que $\nabla f(p_0)$ dá-nos a direcção em p_0 que aponta para o maior crescimento da função.

Extremos relativos ou locais

$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $p_0 \in D$

$f(p_0)$ é um máximo relativo (ou máximo local) de f se for o máximo absoluto de $f|_{D\cap B_r(p_0)}$ para algum $r > 0$, onde $B_r(p_0) := \{X \in \mathbb{R}^n : \|X - p_0\| < r\}$ é a bola aberta de centro em p_0 e raio r.

$f(p_0)$ é um mínimo relativo (ou mínimo local) de f se for o mínimo absoluto de $f|_{D\cap B_r(p_0)}$ para algum $r > 0$.

Máximos e mínimos relativos designam-se, no seu conjunto, por extremos relativos (ou locais).

Os pontos p_0 onde os extremos relativos são atingidos dizem-se extremantes relativos (ou locais) – minimizantes no caso de $f(p_0)$ ser mínimo; maximizantes no caso de $f(p_0)$ ser máximo.

Observe-se que todos os extremos absolutos de uma função são também seus extremos relativos, de modo que se detectarmos todos os extremos relativos dessa função temos a certeza de que entre eles estão os extremos absolutos, se existirem.

Teorema de Fermat

Fermat (generalizado) Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $p_0 \in \text{int}(D)$. Se $f(p_0)$ for um extremo relativo de f, então ou uma das detrivadas parciais $f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n}$ não existe em p_0 ou no caso de existirem, $\nabla f(p_0) = \vec{0}$.

Os pontos p_0 que anulam o gradiente de f, mesmo não sendo extremantes dessa função de f, dizem-se pontos críticos (ou de estacionaridade) de f.

Num caso concreto poderá não ser fácil ter a certeza que consideramos no estudo todos os pontos do domínio onde uma dada função tem derivadas parciais. Para facilitar, limitar-nos-emos a tentar averiguar sobre a existência de tais derivadas em subconjuntos do domínio que sejam abertos, já que pelo menos em tal situação está garantida a existência de intervalos centrados em x_0 e em y_0, necessária para o cálculo das derivadas parciais.

Aula 11: Exercícios 1

1. Seja $f(x, y) = 3x^2y$.

(a) Determine os pontos críticos de f em $D = \mathbb{R}^2$.

(b) Determine os pontos críticos de f em $D =]2, 8[\times]2, 10[$.

(c) Determine os pontos críticos de f em $D =]-2, 8[\times]2, 10[$.

(d) Determine os pontos em $D = [2, 8] \times [2, 10]$ onde f possa ter extremos. Qual é o mínimo e o máximo da função em D? Onde ocorrem esses extremos?

2. Seja $f(x, y) = x^2 + xy$.

(a) Determine os pontos críticos de f em $D = \mathbb{R}^2$.

(b) Determine os pontos críticos de f em $D =]1, 2[\times]-1, 1[$.

(c) Considere a restrição de f à região fechada D determinada pelas curvas $y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x^2$. Determine os pontos em D onde f possa ter extremos. Qual é o máximo e o mínimo?

3. Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$.

(a) Determine os pontos críticos de f em $D = \mathbb{R}^3$.

(b) Determine os pontos em $D = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ onde f possa ter extremos. Qual é o valor máximo e qual é o valor mínimo? nde ocorrem?

Aula 11: Soluções do exercício 1

1.a Uma linha de pontos críticos $\{(0, y) \ : \ y \in \mathbb{R}\}$.

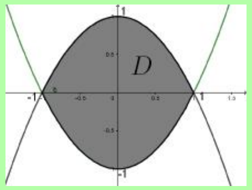
1.b Nenhum .

1.c $\{(0, y) \ : \ y \in]2, 10[\, \}$.

1.d Os quatro cantos do quadrado: $P_1 = (2, 2)$, $P_2 = (8, 2)$, $P_3 = (2, 10)$ e $P_4 = (8, 10)$. Como D é conexo, fechado e limitado e f é contínua, então $f(D) = [m, M]$. O mínimo é $m = 24$ que ocorre em P_1 (minimizante) e o máximo é $M = 1920$ que ocorre em P_4 (maximizante).

2.a Um ponto crítico $(0, 0)$.

2.b Nenhum .

2.c Região D: 

Esta região é conexa, limitada e fechada, e como f é contínua, $f(D) = [m, M]$. No interior de D o único ponto crítico é $P_1 = (0, 0)$. A fronteira $\partial D = \partial_1 \cup \partial_2$, em que $\partial_1 = \{(x, y) : y = x^2 - 1, x \in [-1, 1]\, \}$ e $\partial_2 = \{(x, y) : y = 1 - x^2, x \in [-1, 1]\, \}$. A restrição de f ao interior de ∂_1 dá origem ao ponto crítico $P_2 = (\frac{1}{3}, -\frac{8}{9})$ e a restrição de f ao interior de ∂_2 dá origem ao ponto crítico $P_3 = (-\frac{1}{3}, \frac{8}{9})$. Temos ainda os pontos fronteiros de ∂_1 e ∂_2 não considerados $P_4 = (-1, 0)$ e $P_5 = (1, 0)$. O máximo absoluto é $M = 1$ atingido em dois pontos P_4 e P_5 (dois maximizantes) e o mínimo absoluto é $m - \frac{5}{27}$ atingido também em dois pntos P_2 e P_3 (dois minimizantes).

3.a Um ponto crítico $(0, 0, 0)$.

3.b Sendo D conexa, limitada e fechada, e f contínua, $f(D) = [m, M]$. No interior de D temos um ponto crítico $(0, 0, 0)$. Nas seis faces de D, caracterizados por $(\pm 1, y, z)$, $(x, \pm 1, z)$ e $x, y, \pm 1)$, temos na restrição de f ao interior delas 6 pontos críticos $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ e $(0, 0, \pm 1)$. Nos 12 lados de D, caracterizados por $(\pm 1, \pm 1, z)$, $(\pm 1, y, \pm 1)$ e $(x, \pm 1, \pm 1)$, temos na restrição de f ao inteior desses lados 12 pontos críticos $(\pm 1, \pm 1, 0)$, $(\pm 1, 0, \pm 1)$ e $(0, \pm 1, \pm 1)$. Finalmente temos ainda os 8 vértices de D não considerados anteriormente $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. O mínimo global (ou absloluto) é $m = -1$ que ocorre em $(0, -1, 0)$ (minimizante) e o máximo global é $M = 3$ que ocorre em 4 pontos $(\pm 1, 1, \pm 1)$ (4 maximizantes).

Procedimento para o cálculo de extremos absolutos

Passamos agora à consideração do problema da determinação dos extremos absolutos de funções, cuja resolução se apoia fortemente no Teorema de Weierstrass e no Teorema de Fermat.

Para se determinarem os extremos absolutos de uma função contínua num subconjunto limitado e fechado D, pode proceder-se do seguinte modo:

1. obter os pontos críticos da função no maior conjunto aberto $A \subset D$ que se conseguir;
2. considerar os pontos do conjunto anterior A onde pelo menos uma das derivadas parciais da função não esteja definida;
3. considerar os restantes pontos $D \backslash A$ do domínio da função, ou apenas alguns deles caso se consiga reduzir, nem que seja parcialmente, esta parte do estudo ao problema da determinação dos extremos para funções de uma variável – cf. exemplo em baixo;
4. calcular os valores da função em todos os pontos anteriores; o menor valor será o mínimo absoluto da função; o maior valor será o máximo absoluto da função.

Exercício-Exemplo 2

Determinar os extremos absolutos de $f(x,y) := x^2 + y^2 - x - y + 1$ em $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. O subconjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ do domínio é aberto e é fácil verificar que a função tem derivadas parciais em todos os pontos do mesmo e que tem aí um único ponto crítico, a saber, $(1/2, 1/2)$.

2. A função tem derivadas parciais em todos os pontos de A, logo não há nada a fazer neste passo.

3. Sobra $B = \mathrm{fr}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = Im(\phi)$, onde $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. f restrita a B é a aplicação $g(t) = \cos^2 t + \sin^2 t - \cos t - \sin t + 1 = -\cos t - \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Os extremos de f em B, são os extremos de g em $[0, 2\pi]$. A função g é contínua no intervalo limitado e fechado $[0, 2\pi]$, logo atinge os seus extremos absolutos em pontos desse intervalo. Ora g tem derivada em $]0, 2\pi[$ e que os seus pontos de estacionaridade são $t = \pi/4$ e $t = 5\pi/4$. Os pontos fronteiros são $t = 0$ e $t = 2\pi$.

4. Como $f(1/2, 1/2) = 1/2$, $g(\pi/4) = 2 - \sqrt{2}$, $g(5\pi/4) = 2 + \sqrt{2}$ e $g(0) = g(2\pi) = 1$, então o mínimo absoluto de f é $1/2$, atingido em $(1/2, 1/2)$, e o máximo absoluto é $2 + \sqrt{2}$, atingido em $t = 5\pi/4$, isto é, em $\phi(5\pi/4) = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

Exercício 3

Encontrar o valor máximo do produto $xyzw$ de quatro números não negativos x, y, z, w sob a condição de a sua soma ser uma constante C $(x + y + z + w = C)$.

Sugestao: Observa que a condição $x + y + z + w = C$ é equivalente a $w = C - x - y - z$ (em particular, w é determinado a partir do conhecimento dos outros três números: x, y, z). Podemos então formalizar o problema do seguinte modo:

maximizar a função $f(x, y, z) := xyz(C - x - y - z)$ no conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + y + z \leq C\}$.

Sol. O máximo pretendido é $(\frac{C}{4})^4$, e podemos até dizer que ele é atingido quando $x = y = z = w = \dfrac{C}{4}$.