Aula 13: Sumário

- Diferenciabildade e derivadas direcionais.
- Critério para a diferenciabilidade.
- Linearização e exemplo.
- Diferenciais - Uma variável.
- Diferenciais - Duas variável.
- Regra da cadeia.

Revisão (Aula 12): Derivadas direccionais e diferenciabilidade

$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $p_0 \in \text{int}(D)$ e $\vec{u}$ um vector unitário ($\|\vec{u}\| = 1$).

Tome-se a recta $L = \{p_0 + t\vec{u} \, : \, t \in \mathbb{R}\}$. Seja $f_{\vec{u}}(t) = f_{|D \cap L}(t) = f(p_0 + t\vec{u})$, com t a variar num intervalo I em que $p_0 + t\vec{u} \in D$.

A derivada direccional de f na direcção e sentido de $\vec{u}$ no pto p_0 é $D_{\vec{u}} f(p_0) = f'_{\vec{u}}(0)$.

Casos particulares: No caso de $p = (x, y, z, \dots) \in \mathbb{R}^n$ temos:
Se $\vec{u} = (1, 0, \dots, 0)$ então $D_{\vec{u}} f(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)$. Se $\vec{u} = (0, 1, 0, \dots, 0)$ então $D_{\vec{u}} f(p_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$. Se $\vec{u} = (0, 0, 1, 0 \dots, 0)$ então $D_{\vec{u}} f(p_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(p_0)$.
$D_{\vec{u}} f(p_0)$ é o declive da recta tangente ao gráfico de $f_{\vec{u}}$ em $\mathbb{R}^3$ no ponto $(p_0, f(p_0))$.

Se $\vec{u}$ é unitário, então $(\vec{u}, D_{\vec{u}} f(p_0))$ é um vector director da recta tangente ao $G(f)$ na direcção de $\vec{u}$ no pto $(p_0, f(p_0))$.

f é diferenciável em p_0 se $\nabla f(p_0)$ existe e $\lim\limits_{p \to p_0} \frac{f(p) - A(p)}{\|p - p_0\|} = 0.$

em que $A(p) = f(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0)$ é a função afim cujo gráfico de $A(p)$ é o espaço tangente ao gráfico de f no ponto $(p_0, f(p_0))$. Também $A(p)$ é o polinómio de Talor $T^1_{p_0} f$ de grau 1 da função f no ponto p_0.

Aula 13: Diferenciabildade e derivadas direcionais (taxa de variação)

Teorema Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em $p_0 \in \operatorname{int}(D)$. Então existem e são finitas as derivadas direcionais de f em p_0 segundo qualquer vector (unitário) $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, verificando-se

$$D_{\vec{u}}(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$$

Sendo f diferenciável em p_0, então $\nabla f(p_0)$ existe e por conseguinte $\nabla f(p_0) \cdot \vec{u}$ é um real. Seja $\vec{u}$ unitário ($\|\vec{u}\| = 1$). Então,

$$\begin{aligned}
D_{\vec{u}} f(p_0) &= f'_{\vec{u}}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_{\vec{u}}(t) - f_{\vec{u}}(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(p_0 + t\vec{u}) - f(p_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(p_0+t\vec{u}) - A(p_0+t\vec{u}) + A(p_0+t\vec{u}) - f(p_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(p_0+t\vec{u}) - A(p_0+t\vec{u}) + \nabla f(p_0)\cdot t\vec{u}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(p_0+t\vec{u}) - A(p_0+t\vec{u}) + t\nabla f(p_0)\cdot \vec{u}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(p_0+t\vec{u}) - A(p_0+t\vec{u})}{t} + \nabla f(p_0)\cdot\vec{u} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(p_0+t\vec{u}) - A(p_0+t\vec{u})}{t\|\vec{u}\|} + \nabla f(p_0)\cdot\vec{u} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(p_0+t\vec{u}) - A(p_0+t\vec{u})}{\pm\|t\vec{u}\|} + \nabla f(p_0)\cdot\vec{u} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(p_0+t\vec{u}) - A(p_0+t\vec{u})}{\pm\|p_0+t\vec{u}-p_0\|} + \nabla f(p_0)\cdot\vec{u} = 0 + \nabla f(p_0)\cdot\vec{u}\,.
\end{aligned}$$

Aula 13: Exercícios 1 (derivada direccional)

1. Calcule a derivada direccional de $f(x, y) = 3x^2y$ na direcção e sentido de $(1, 5)$.

2. Calcule a taxa de variação das seguintes funções na direcções (e sentido) indicados:

(a) $f(x, y) = x^2 + xy$ na direcção e sentido de $(-2, 4)$.

(b) $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$ na direcção e sentido de $(1, 0, 1)$.

(c) $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$ na direcção e sentido de $(0, 0, 1)$.

(d) $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$ na direcção e sentido de $(1, 0, 0)$.

Aula 13: Critério para a diferenciabilidade

As duas provas acima mostram ser possível trabalhar com a definição algo complicada de função diferenciável para se obterem resultados importantes como a continuidade em pontos de diferenciabilidade e a fórmula simples para o cálculo de derivadas direcionais. No entanto, esta última fórmula de pouco vale se não houver uma maneira mais simples de garantir a diferenciabilidade sem ser através da sua definição. As boas notícias é que essa maneira existe, como é explicado no seguinte resultado, que enunciamos sem prova:

Teorema (condição suficiente de diferenciabilidade) Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $p_0 \in \mathrm{int}(D)$. Se as derivadas parciais de f **existem** e são **finitas** numa bola aberta centrada em p_0, e são **contínuas** em p_0, então f é diferenciável em p_0.

Aula 13: Linearização $A(p)$ e exemplo

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável num ponto $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathrm{Int}(D)$

A transformação afim $A(p) = f(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0)$ tem como gráfico $G(A) =$ plano tangente ao gráfico $G(f)$ no ponto $(x_0, y_0, f(p_0))$. Este plano tangente é uma linearização do gráfico de f numa vizinhança próxima de p_0. Por conseguinte, qualquer ponto $p = (x, y)$ próximo de p, $A(p) \approx f(p)$, pois $\frac{f(p)-A(p)}{\|p-p_0\|} \underset{p \to p_0}{\longrightarrow} 0$. Esta função $A(p)$ diz-se uma linearização de f no ponto p_0. Ela serve não só para descrever o plano tangente como para dar aproximações aos valores de $f(p)$ para pontos p próximos de p_0.

Exemplo. Seja f definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. O seu domínio $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ e o seu gráfico $G(f)$ é o cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Seja $p_0 = (3,4)$ do interior do domínio da função. Como as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, existem e são contínuas fora de $(0,0)$. Pelo critério dado no final da parte anterior a função é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, logo, em particular, também em $(3,4)$, onde $\frac{\partial f}{\partial x}(3,4) = \frac{3}{5}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = \frac{4}{5}$.

A linearização de f junto a $(3,4)$ é então
$$\begin{aligned} A(x,y) &= f(3,4) + \nabla f(3,4) \cdot (x-3, y-4) \\ &= 5 + \left(\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}\right) \cdot (x-3, y-4) \\ &= 5 + \tfrac{3}{5}(x-3) + \tfrac{4}{5}(y-4). \end{aligned}$$

Portanto $f(3.1, 3.9) \approx A(3.1, 3.9) = 5 + \frac{3}{5} \times 0.1 - \frac{4}{5} \times 0.1 = 4.98$. Note-se que o valor exacto é $f(3.1, 3.9) = 4,98196...$

Aula 13: Exercícios 2 (linearização)

1. Calcule a linearização das seguintes funções nos pontos indicados:

(a) $f(x,y) = 3x^2y$ em $p_0 = (1,5)$.

(b) $f(x,y) = \ln(xy)$ em $p_0 = (1,1)$.

(c) $f(x,y,z) = e^{xy} + yz + 6$ em $p_0 = (0,1,1)$.

(d) $f(x,y,w,z) = xy^2 + \operatorname{sen}(wz)$ em $p_0 = (1,1,0,1)$.

2. Calcule o plano tangente das seguintes funções nos pontos indicados:

(a) $f(x,y) = x^2 + xy$ em $(-2,4,-4)$.

(b) $f(x,y) = y \operatorname{sen}(x)$ em $(\frac{\pi}{4}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

3. Use a linearização para obter uma aproximação do valor $f(0.1, 0.1)$ para as seguintes funções:

(a) $f(x,y) = \cosh(xy) + x + y$.

(b) $f(x,y) = x\cos(y) + y\cos(x)$.

Aula 13: Diferenciais - Uma variável

$$\boxed{f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ diferenciável num ponto } x_0 \in \mathrm{Int}(I)}$$

Sejam $y = f(x)$ e $y_0 = f(x_0)$.

Designemos por $\Delta x = x - x_0$ e $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ (ou seja $\Delta y = y - y_0$).

A transformação afim (linearização de f) $A(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = y_0 + f'(x_0)\Delta x$, assume valores muito próximos de $f(x)$ quando x está próximo de x_0. Neste sentido $f(x) \approx A(x)$ e por conseguinte $\Delta f \approx A(x) - y_0 = f'(x_0)\Delta x$.

Portanto $\boxed{\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x\,.}$ Passando a distâncias infinesimais, isto é, a distância "quanticas" escrevemos dx em vez de Δx e df em vez de Δf. Neste caso temos $f(x) = A(x)$ e temos o diferencial de f: $\boxed{df = f'(x_0)dx\,.}$ Isto mostra que $\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx f'(x_0)$. Note-se que na recta $y = mx$, $\frac{dy}{dx} = m$. A igualdade $dy = f'(x_0)dx$ dá-nos uma notação para a derivada de f:

$$\frac{df}{dx} = f'(x_0)\ , \quad \text{isto é ,} \quad \frac{df}{dx}_{|x=x_0} = f'(x_0).$$

Aula 13: Diferenciais - Duas variável

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável num ponto $p_0 = (x_0, y_o) \in \mathrm{Int}(D)$

Neste caso $p = (x, y)$, e $\Delta p = p - p_0 = (x - x_0, y - y_0)$. Como $A(p) = f(p_0) + \nabla(p_0) \cdot \Delta p$, se p estiver suficientemente próximo de p_0, então $f(p) \approx A(p)$, pelo que

$$\Delta f = (f(p) - f(p_0)) \approx A(p) - f(p) = \nabla f(p_0) \cdot \Delta p.$$

Note-se que $\nabla f(p_0) \cdot \Delta p$ é o produto de duas matrizes: $[\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)][x - x_0, y - y_0]^T$. Como a igualdade envolve matrizes, podemos omitir o produto escalar se escrevermos $\Delta p = [x - x_0, y - y_0]^T$. Quando p está "quânticamente" próximo de p_0 $(p = p_0)$, temos a igualdade de matrizes, ou seja o diferencial de f:

$$\boxed{df = \nabla f(p_0)\, dp \;=\; [\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)]\,[dx, dy]^T \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)\, dy.}$$

Esta igualdade permite definir uma notação para o gradiente de f:
$\frac{df}{dp} = \nabla f(p_0)$, ou seja, $\frac{df}{dp}_{|p=p_0} = \nabla f(p_0)$. Estas duas igualdades estendem-se naturalmente para n variáveis.

Aula 13: Regra da cadeia

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\quad p = (x, y) \in D \ \mapsto\ f(p) = f(x, y)$. Se $x = x(t)$ e $y = y(t)$, isto é, se restringirmos f a uma curva γ de equações paramétricas $x = g_1(t)$ e $y = g_2(t)$, então $f(x(t), y(t))$ é uma função de t. Qual é então a derivada de f em ordem a t?

Sejam $\ a = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)\ $ e $\ b = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$. Ora $f(p(t)) \approx A(p(t)) = f(p_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0)$.

Portanto

$$\frac{df(p(t))}{dt} \approx a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} \qquad .$$

Para p “quânticamente” próximo de p_0 ($p = p_0$), temos $f(p) = A(p)$ e portanto, usando $dp = [dx, dy]^T$ e em particular denotando por $\frac{dp}{dt} = [\frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt}]^T$ temos

$$\frac{df(p(t))}{dt} = a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} = \nabla f(p_0)\frac{dp}{dt}\,.$$

Usando a notação $\frac{df}{dp}_{|p=p_0}$ para denotar o gradiente $\nabla f(p_0)$, temos a regra da cadeia:

Regra da cadeia Se $x_1 = g_1(t), \ldots, x_n = g_n(t)$ forem diferenciáveis em t_0 e se $f(X) = f(x_1, \ldots, x_n)$ for diferenciável em p_0 então $h(t) := f(X(t)) =: (f \circ X)(t)$ é diferenciável em t_0 e

$$\frac{d(f \circ X)}{dt}(t_0) = \nabla f(p_0) \cdot \frac{dX}{dt}(t_0) = \frac{df}{dX}_{|X=p_0}\frac{dX}{dt}(t_0).$$

Nota: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Então $h = f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{df}{dg}\frac{\partial g}{\partial x}$, porque a derivada parcial em ordem x pressupõe as outras variáveis constantes, pelo que relativamente à variável x podemos ver $f \circ g$ como a composição de duas funções reais de variável real, pelo que a regra da cadeia aqui é a regra da cadeia usual para funções reais de uma variável. Exemplo, determine a derivada parcial de $h = f(x^2 + y^2)$ em ordem a x e em ordem a y (pressupondo que f é derivável).

Aula 13: Regra da cadeia (mais geral)

Seja $f(x, y, z)$ uma função de $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $p_0 \in \mathbb{R}^3$. Se x, y e z dependem de t, então a composição $f(x(t), y(t), z(t))$ é uma função de t e a a derivada parcial de $f(x(t), y(t), z(t))$ no ponto t_0, é dada por

$$\boxed{\frac{df}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)\frac{dy}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(p_0)\frac{dz}{dt}(t_0)}$$

em que $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0)$ e $z_0 = z(t_0)$.

Seja $f(x, y, z)$ uma função de $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $p_0 \in \mathbb{R}^3$. Se x, y e z dependem de u e v, então a composição $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ é uma função de u e v, e a derivada parcial de $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ no ponto (u_0, v_0) é dada por

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u}((u_0, v_0)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(p_0)\frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\\
\frac{\partial f}{\partial v}((u_0, v_0)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)\frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(p_0)\frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)
\end{aligned}}$$

em que $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $x_0 = x(u_0, v_0),\ y_0 = y(u_0, v_0)$ e $z_0 = z(u_0, v_0)$,

Aula 13: Exercícios 3 (regra da cadeia)

Exemplo: Seja $f(x,y) = x^2y + xe^y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + e^y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + xe^y$.
Sejam $x = t^2+1$, $y = \operatorname{sen} t$ e $h(t) = f(x(t), y(t)) = (t^2+1)^2 \operatorname{sen} t + (t^2+1)e^{\operatorname{sen} t}$.
Ora $t=0 \rightsquigarrow p_0 = (1{,}0)$ e $h'(0) = \frac{df}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\frac{dx}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\frac{dy}{dt}(0) = 1{\times}0{+}2{\times}1 = 2$.

1. Determine a derivada da função composta no ponto $t = 0$:

(a) $f(x,y) = 3x^2y$ em que $x = \operatorname{sen}(t)$ e $y = \cos(t)$.

(b) $f(x,y) = ln(xy)$ em que $x = \cosh(t)$ e $y = 1 + \operatorname{senh}(t)$.

(c) $f(x,y) = x^2 + y^2$ em que $x = 1 + t$ e $y = 2 + t^2$.

(d) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + xz$ em que $x = \cos(t)$, $y = \operatorname{sen}(t)$ e $z = 5t + 1$.

2. Dado $u(x,y) = x^2 + 2y$, onde $x(r,t) = r \operatorname{sen}(t)$ e $y(r,t) = \operatorname{sen}^2(t)$, determine o valor de $\frac{\partial u}{\partial r}$ e $\frac{\partial u}{\partial t}$ usando a regra da cadeia.

3. Determine as derivadas parciais da função composta no ponto $(r,t) = (0,0)$:

(a) $f(x,y) = \operatorname{senh}(xy)$ em que $x(r,t) = 1 + r + t^2$ e $y(r,t) = r + 3t$.

(b) $f(x,y) = x\cos(y) + y \operatorname{sen}(x)$ em que $x(r,t) = r\cosh(t)$ e $y(r,t) = t \operatorname{senh}(r)$.

(c) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z$ em que $x = r + \cosh(t)$, $y = 2 + t + \operatorname{senh}(r)$ e $z = r + t$.

Aula 13: Soluções dos exercícios 1 e 2

Exercícios 1:

1 f é diferenciável em qualquer $p_0 = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, logo podemos usar a fórmula: $D_{(1,5)}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \frac{(1,5)}{\sqrt{26}} = \frac{6xy+30x^2}{\sqrt{26}}$.

2(a) f é diferenciável em qualquer ponto $p_0 = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, logo $D_{(-2,4)}f(x, y) = (2x + y, x) \cdot \frac{(-2,4)}{\sqrt{20}} = -\frac{2y}{\sqrt{20}}$.

2(b) f é diferenciável em qualquer ponto $p_0 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, logo $D_{(1,0,1)}f(x, y, z) = (1, 2y, 3z^2) \cdot \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}} = \frac{1+3z^2}{\sqrt{2}}$.

2(c) $D_{(0,0,1)}f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2$.

2(d) $D_{(1,0,0)}f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 1$.

Exercícios 2:

1(a) $A(x, y) = 15 + (6xy, 3x^2)_{|_{(1,5)}} \cdot (x - 1, y - 5) = 30x + 3y - 30$.

1(b) $A(x, y) = 0 + (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})_{|_{(1,1)}} \cdot (x - 1, y - 1) = x + y - 2$.

1(c) $A(x, y, z) = 8 + (ye^{xy}, xe^{xy} + z, y)_{|_{(0,1,1)}} \cdot (x, y - 1, z - 1) = x + y + z + 6$.

1(d) $A(x, y, w, z) = 1 + (y^2, 2xy, z\cos(wz), w\cos(wz))_{|_{(1,1,0,1)}} \cdot (x - 1, y - 1, w, z - 1) = x + 2y + w - 2$.

2(a) $p_0 = (-2, 4)$ e $A(x, y) = f(-2, 4) + \nabla f(-2, 4) \cdot (x + 2, y - 4) = -2y$.
Logo a eq. cartesiana do plano tangente ao $G(f)$ no ponto $(p_0, f(p_0)) = (-2, 4, -4)$ é $z = A(x, y) \Leftrightarrow z = -2y$.

2(b) $p_0 = (\frac{\pi}{4}, 1)$ e $A(x, y) = f(\frac{\pi}{4}, 1) + \nabla f(\frac{\pi}{4}, 1) \cdot (x - \frac{\pi}{4}, y - 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$.
Logo a eq. cartesiana do plano tangente ao $G(f)$ no ponto $(p_0, f(p_0)) = (\frac{\pi}{4}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ é $z = A(x, y) \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$.

3(a) Tome-se $p_0 = (0, 0) \approx (0.1, 0.1)$. $A(x, y) = f(0, 0) + \nabla f(0, 0) \cdot (x - 0, y - 0) = x + y + 1$. Como f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, $A(x, y) \approx f(x, y)$ para pontos (x, y) próximos de $(0, 0)$. Logo $f(0.1, 0.1) \approx A(0.1, 0.1) = 1.2$.

3(b) $f(0.1, 0.1) \approx A(0.1, 0.1) = 0.2$: tomou-se $p_0 = (0, 0) \approx (0.1, 0.1)$ e $A(x, y) = f(0, 0) + \nabla f(0, 0) \cdot (x - 0, y - 0) = x + y$. Como f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, $A(x, y) \approx f(x, y)$ para pontos (x, y) próximos de $(0, 0)$.

Aula 13: Soluções do exercício 3

1(a) $\frac{df}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)\frac{dx}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\frac{dy}{dt}(0) = 0.$

1(b) $\frac{df}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\frac{dx}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\frac{dy}{dt}(0) = 1.$

1(c) $\frac{df}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\frac{dx}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\frac{dy}{dt}(0) = 2.$

1(d) $\frac{df}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0,1)\frac{dx}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0,1)\frac{dy}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial z}(1,0,1)\frac{dz}{dt}(0) = 5.$

2 $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = 2x \operatorname{sen} t = 2r \operatorname{sen}^2 t.$

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 2xr\cos t + 2 \times 2 \operatorname{sen} t \cos t = (2r^2 + 4)\operatorname{sen} t \cos t.$

3(a) $\frac{\partial f}{\partial r}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\frac{\partial x}{\partial r}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\frac{\partial y}{\partial r}(0,0) = 1.$

$\frac{\partial f}{\partial t}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\frac{\partial x}{\partial t}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\frac{\partial y}{\partial t}(0,0) = 3.$

3(b) $\frac{\partial f}{\partial r}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\frac{\partial x}{\partial r}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\frac{\partial y}{\partial r}(0,0) = 1.$

$\frac{\partial f}{\partial t}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\frac{\partial x}{\partial t}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\frac{\partial y}{\partial t}(0,0) = 0.$

3(c) $\frac{\partial f}{\partial r}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2,0)\frac{\partial x}{\partial r}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,0)\frac{\partial y}{\partial r}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,0)\frac{\partial z}{\partial r}(0,0) = 8.$

$\frac{\partial f}{\partial t}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2,0)\frac{\partial x}{\partial t}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,0)\frac{\partial y}{\partial t}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,0)\frac{\partial z}{\partial t}(0,0) = 5.$