Aula 8:

Séries trigonométricas de Fourier

Aula 8: Sumário

- Funções periódicas, mudança de período.
- Extensões periódicas de funções
- Funções pares e ímpares
- Séries trigonométricas de Fourier
- Série trigonométrica de período 2π
- Série de Fourier - definição
- Série de Fourier - Observações
- Série de Fourier dos senos e dos cosenos
- Exercícios
- Exemplo 5.14
- Mais exercícios
- Teorema de Dirichlet
- Observação
- Exemplo 5.16 e exercícios

Aula 8: Funções periódicas

Definição: Uma função $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se periódica se existir $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A T designamos um período (de repetição) de f e dizemos que f é T-periódica. Ao menor valor de T que verifica aquela igualdade chamamos período fundamental de f. Por exemplo, as funções seno e co-seno habituais têm período fundamental 2π. Qualquer outro múltiplo de 2π, por exemplo 6π, é um período do seno e do coseno.

Se f é P-periódica, então $g(x) = f(\frac{P}{T}x)$ é T-periódica. Por conseguinte, se f é T-periódica, então $f(wx)$ é $\frac{T}{w}$-periódica. Se f tem período fundamental T, então para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(nx)$ tem período fundamental $\frac{T}{n}$, mas continua a ser T-periódica.

Exercício 1:

1. Qualé o período das seguintes funções periódicas:

(a) $\cos(2x)$, **(b)** $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, **(c)** $\operatorname{tg}(3x)$, **(d)** $\cos(\frac{\pi}{30}x)$, **(e)** $\cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$.

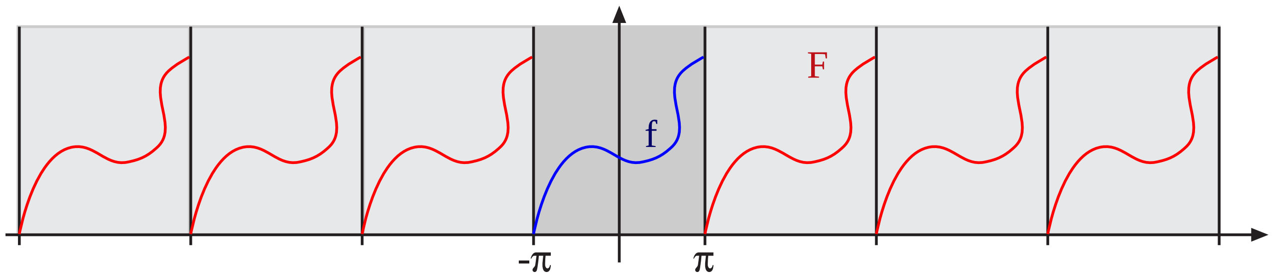
2. Determine ω de modo a que:

(a) $f(x) = \cos(wx)$ tenha período $\frac{\pi}{6}$. **(b)** $g(x) = \operatorname{tg}(wx)$ tenha período $\frac{\pi}{6}$.

Aula 8: Extensões periódicas de funções

Dada uma função f definida em $[-\pi, \pi[$ ou em $]-\pi, \pi]$, (ou ainda em $[-\pi, \pi]$ se $f(-\pi) = f(\pi)$), podemos construir uma função 2π-periódica $\widetilde{f}$, a única extensão 2π-periódica de f, por repetição de f nos intervalos subjacentes:

$$\widetilde{f}(x + 2k\pi) = f(x)\,, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$



Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é 2π-periódica, então a sua extensão 2π-periódica é $\widetilde{f} = f$.

Exercício 2: Desenhe o gráfico das extensões 2π-periódicas das seguintes funções:

(a) $f(x) = |x|$ definida em $[-\pi, \pi]$.

(b) $f(x) = x$ definida em $[-\pi, \pi[$.

(c) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0; \\ 1, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$

Integrais de senos e cosenos

- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = 0, \quad n > 0.$
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)dx = 0.$
- $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos(nx)dx = 0, \quad \forall\, n \neq 0.$
- $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)dx = \frac{1-(-1)^n}{n}, \quad \forall\, n \neq 0.$
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \pi, & m = n \end{cases}$
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \pi, & m = n \end{cases}$
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx = 0, \quad \forall, m, n \in \mathbb{N}.$

Aula 8: Série trigonométrica de período 2π

Uma série trigonométrica 2π-periódica é uma série da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \,\mathrm{sen}\,(nx)]$$

Se ela for convergente, a sua soma $F(x)$ é a função 2π-periódica: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \,\mathrm{sen}\,(nx)] \qquad (5.3)$$

Se a convergência for uniforme, os coeficientes a_n e b_n são completa/ determinadas por $F(x)$:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(mx)\, dx\,, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \,\mathrm{sen}\,(mx)\, dx\,, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Isto resulta multiplicando ambos os membros de (5.3) por $\cos(mx)$, para obter a_m, e por $\mathrm{sen}\,(mx)$ para obter b_m, e ter em conta que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \pi, & m = n \end{cases} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}\,(mx)\,\mathrm{sen}\,(nx)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}\,(mx)\cos(nx)dx = 0, m, n \in \mathbb{N}$. Estas formulas estabelecem-se imediatamente a partir das fórmulas trigonométricas:

$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$; $\quad \mathrm{sen}\,(x)\,\mathrm{sen}\,(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$;

$\mathrm{sen}\,(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\,\mathrm{sen}\,(x-y) + \,\mathrm{sen}\,(x+y))$.

Aula 8: Série de Fourier - definição

Definição:

Seja f uma função definida em $[-\pi, \pi]$ e que seja integrável neste intervalo. Chama-se série de Fourier de f à série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)], \qquad (5.7)$$

onde os coeficientes de Fourier a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ e b_n $(n \in \mathbb{N})$ são determinados pelas fórmulas:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx. , \qquad (5.8)$$

♦ Se a série (5.7) convergir, a sua soma $F(x)$ define uma função $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é 2π-periódica, e pode muito bem ser diferente de f mesmo quando $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

♦ Para exprimir que os coeficientes da série (5.7) foram calculados à custa de f (ou à custa da sua extensão 2π-peródica $\widetilde{f}$) através das fórmulas (5.8) escrevemos

$$f(x) \text{ ou } \widetilde{f}(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)].$$

e dizemos que a série (5.7) está associada à função f (ou $\widetilde{f}$).

Aula 8: Série de Fourier - Observações

♦ Se f for periódica de período 2π, os coeficientes de Fourier no intervalo $[-\pi, \pi]$ coincidem com os coeficientes obtidos em qualquer intervalo de amplitude 2π (i.e., da forma $[a, a+2\pi]$):

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx; \quad \int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,(mx)dx.$$

♦ A série de Fourier nem sempre é convergente e quando converge a sua soma $F(x)$ (que é sempre uma função 2π-periódica) pode não coincidir com a função que lhe deu origem.

♦ Uma função f pode ser a soma de uma série trigonométrica diferente da sua série de Fourier. Isto é, f pode ser a soma duma série do tipo $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ em que os coeficientes a_n e b_n não são os coeficientes de Fourier de f. Exemplo disto é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$. (ver!)

♦ As séries de Fourier permitem lidar com funções meramente integráveis, ao contrário das séries de Taylor onde é exigido que as funções sejam infinitamente diferenciáveis.

Aula 8: Série de Fourier dos senos e dos cosenos

Definição: Uma função $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se par se $f(-x) = f(x)$ e diz-se ímpar se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in [-a, a]$.

O coseno é função par e o seno é função ímpar. É fácil de verificar que o produto de duas funções com a mesma paridade é uma função par, enquanto que o produto de duas funções com paridades diferentes é uma função ímpar.

No caso de f ser par ou ímpar o cálculo dos coeficientes de Fourier simplifica-se:

f ímpar $\Rightarrow \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$ e f dá origem à série de senos:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx).$$

f par $\Rightarrow \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx$ e f dá origem à série de cossenos:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \ .$$

Aula 8: Exemplo 5.13 - Exercícios 1

Considere a função par $f(x) = |x|$. Mostre que os coeficientes de Fourier são:

$$b_n = 0 \;\; (n \in \mathbb{N}), \quad a_0 = \pi \quad \text{e} \quad \text{para } n \geq 1, \;\; a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ par;} \\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

A série de Fourier de f é: $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\cos x - \dfrac{4}{\pi}\dfrac{\cos(3x)}{3^2} - \dfrac{4}{\pi}\dfrac{\cos(5x)}{5^2} - \cdots$ (ver aqui)

Justifique a igualdade:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{4}{\pi}\frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}\right] = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}.$$

Aula 8: Exemplo 5.14 - Exercícios 2

Considere a função $g(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0; \\ \pi, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$.

Mostre que os coeficientes de Fourier são dados por

$$a_0 = \pi, \;\; a_n = 0 \;(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad e \quad b_n = \begin{cases} \frac{2}{n}, & n \text{ ímpar;} \\ 0, & n \text{ par.} \end{cases}$$

Pelo que a série de Fourier de g toma a forma:

$$g(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}\left[(2n-1)x\right], \quad x \in \mathbb{R}.$$ (ver aqui)

Aula 8: Teorema de Dirichlet

Se $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente diferenciável (i.e. com derivadas seccionalmente contínuas) em $]-\pi, \pi[$, então a sua extensão 2π-priódica $\widetilde{f}$ é seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$.

Teor. 5.12 (Teorema de Dirichlet) Se $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente diferenciável em $]-\pi, \pi[$, então a série de Fourier de f converge pontualmente em $\mathbb{R}$. Neste caso a sua soma $S(x)$ satisfaz:

$$\forall\, c \in \mathbb{R}, \quad S(c) = \frac{\widetilde{f}(c^+) + \widetilde{f}(c^-)}{2},$$

isto é, a série de Fourier de f em c converge para a média dos limites laterais de $\widetilde{f}$ no ponto c.

Se $\widetilde{f}$ é contínua em $\mathbb{R}$, isto é, se f é contínua em $[-\pi, \pi]$ e $f(-\pi) = f(\pi)$, então

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = \widetilde{f}(x).$$

Observação: Nas condições do teorema anterior, a série de Fourier de f converge (pontualmente) para a função

$$S(x) = \begin{cases} \widetilde{f}(x), & \text{se } x \text{ é ponto de continuidade de } \widetilde{f};\,; \\ \dfrac{\widetilde{f}(x^+) + \widetilde{f}(x^-)}{2}, & \text{se } x \text{ não é ponto de continuidade de } \widetilde{f}. \end{cases}$$

Nota: $\widetilde{f}(c^+) := \lim\limits_{x \to c^+} \widetilde{f}(x)$ e $\widetilde{f}(c^-) := \lim\limits_{x \to c^-} \widetilde{f}(x)$.

Aula 8: Observação

Uma função f diz-se seccionalmente contínua em $[a,b]$ se existir uma partição de $[a,b]$ com marcas $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, tal que f é contínua em cada subintervalo aberto $]a_{j-1}, a_j[$ $(j = 1, \ldots, n)$ e existirem e forem finitos os limites laterais $f(a_{j-1}^+) := \lim_{x \to a_{j-1}^+} f(x)$ e $f(a_j^-) := \lim_{x \to a_j^-} f(x)$.

A função f diz-se seccionalmente contínua em $\mathbb{R}$ se for seccionalmente contínua em qualquer intervalo fechado $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Note-se que uma função seccionalmente contínua em $[a,b]$ pode, eventualmente, não estar definida num conjunto finito de pontos deste intervalo.

Uma função f diz-se seccionalmente diferenciável se a sua derivada f' é uma função seccionalmente contínua.

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua, então a sua extensão 2π-periódica é seccionalmente contínua em $\mathbb{R}$.

Aula 8: Exemplo 5.16 = 5.13 - Exercícios 4

Voltando ao exemplo 5.13: $\bar{f}(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$. Seja f a extensão 2π-periódica de $\bar{f}$ a $\mathbb{R}$. Como $\bar{f}$ é seccionalmente diferenciável em $[-\pi, \pi]$, f é seccionalmente diferenciável em $\mathbb{R}$, e a sua série de Fourier é convergente em $\mathbb{R}$. Além disso, como $\bar{f}$ é contínua em $[-\pi, \pi]$ e $\bar{f}(-\pi) = \bar{f}(\pi)$, a extensão f é contínua em $\mathbb{R}$. Pelo Teorema de Dirichlet, $f(x)$ coincide com a soma da série de Fourier:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Quando assim acontece podemos substituir o símbolo "$\sim$" pela igualdade. Mostre que neste caso a convergência é uniforme. (Ver figura aqui)

Aula 8: Exercícios 3

1. Determine a série de Fourier das seguintes funções:

(a) $f(x) = x + x^2, \quad x \in [-\pi, \pi[;$

(b) $g(x) = e^x, \quad x \in [-\pi, \pi[;$

(c) $$h(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0; ; \\ 0, & x = 0; ; \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Revisão: (Aula5) Critério de Weierstrass para convergência uniforme

Teor. 5.6 (Critério de Weierstrass) Consideremos a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, com as funções f_n definidas em D. Se

$$|f_n(x)| \leq a_n, \ \ \forall\, n \geq n_0, \forall\, x \in D\,,$$

e a série numérica de termos não negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em D.