Aula 14: Sumário

- Propriedades do vector gradiente.
- Exercícios.
- Derivadas de segunda ordem.
- Matriz Hessiana.

Aula 14: (Resumo) Diferenciabilidade e Derivadas direccionais

Teorema (condição suficiente de diferenciabilidade) Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $p_0 \in \mathrm{int}(D)$. Se as derivadas parciais de f **existem** e são **finitas** numa bola aberta centrada em p_0, e são **contínuas** em p_0, então f é diferenciável em p_0.

Teorema Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em $p_0 \in \mathrm{int}(D)$. Então existem e são finitas as derivadas direcionais (taxa de variação na direcção) de f em p_0 segundo qualquer vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, verificando-se

$$D_{\vec{u}} f(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$$

Nota: esta fórmula evita esquecerem-se que o vector $\vec{u}$ é unitário.

A direcção e sentido onde a taxa de variação (derivada direccional) de f em p_0 mais cresce é dado por $\vec{v} = \nabla f(p_0)$. A direcção e sentido onde a taxa de variação menos cresce é dado por $-\vec{v}$. Atenção: este vector $\vec{v}$ pode não ser unitário. (Aula 5)

Seja f diferenciável em $p_0 \in \mathrm{int}(D)$. A linearização de f em p_0 é a função afim

$$\boxed{A(p) = f(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0) \ , \quad p \in \mathbb{R}^n}$$

Aula 14: (Resumo) Diferenciais e regra da cadeia

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável num ponto $p_0 \in \operatorname{Int}(D)$

O diferencial de f em p_0 é a expressão

$$\boxed{\begin{aligned} df &= \nabla f(p_0) \cdot dp \ , \quad \text{em que } dp = (dx, dy, \ldots) \\ &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(p_0)\, dx + \tfrac{\partial f}{\partial y}(p_0)\, dy \, , \quad \text{se } f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(p_0)\, dx + \tfrac{\partial f}{\partial y}(p_0)\, dy + \tfrac{\partial f}{\partial z}(p_0)\, dz \, , \quad \text{se } f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \end{aligned}}$$

Regra da cadeia: Seja $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ função de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Se $x_1 = g_1(t), \ldots, x_n = g_n(t)$ forem diferenciáveis em t_0 e se $f(x_1, \ldots, x_n)$ for diferenciável em $p_0 = (x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0))$, então $h(t) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ é diferenciável em t_0 e

$$\boxed{\frac{df}{dt}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) \tfrac{dx_i}{dt}(t_0).}$$

Aula 14: Propriedades do vector gradiente 1

Teorema 1: Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p_0 \in \text{int}(D)$ um ponto onde f é diferenciável e $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$. Então

$$D_{\vec{u}} f(p_0) = \nabla f(p_0) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \|\nabla f(p_0)\| \cos(\theta),$$

em que θ é o ângulo que os dois vectores $\nabla f(p_0)$ e $\vec{u}$ fazem, e consequentemente

$$-\|\nabla f(p_0)\| \leq D_{\vec{u}} f(p_0) \leq \|\nabla f(p_0)\|.$$

Corolario 2: A derivada direccional $D_{\vec{u}} f(p_0)$ (ou taxa de variação) de uma função diferenciável $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ num ponto $p_0 \in \text{int}(D)$ atinge o valor máximo quando $\vec{u} = \nabla f(p_0)$, sendo esse valor máximo igual a $\|\nabla f(p_0)\|$, e atinge o valor mínimo quando $\vec{u} = -\nabla f(p_0)$, sendo esse valor mínimo igual $-\|\nabla f(p_0)\|$.

Aula 14: Propriedades do vector gradiente 2

Teorema 3: Sejam D aberto e $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em D. Então para todo $p_0 \in N_k(f) = \{X \in D \mid f(X) = k\}$, o gradiente $\nabla f(p_0)$, se não é um vector nulo é um vector ortogonal ao conjunto de nível $N_k(f)$ em p_0.

Corolário 4: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em D (aberto). Um vector ortogonal à curva de nível $N_k(f) = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = k\}$ no ponto $p \in N_k(f)$ é o gradiente $\nabla f(p) = (\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p))$, se $\nabla f(p) \neq \vec{0}$.

Corolário 5: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciável em D (aberto). Um vector ortogonal à superfície de nível $N_k(f) = \{(x, y, z) \in D \mid f(x, y, z) = k\}$ no ponto $p \in N_k(f)$ é $\nabla f(p) = (\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p))$, se $\nabla f(p) \neq \vec{0}$.

Caso particular: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em D (aberto). O gráfico de f, $G(f) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$ é em particular um conjunto de nível $G(f) = N_0(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y) - z = 0\}$, pelo que o gradiente de g, $\nabla g(x_0, y_0, z_0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1) \neq \vec{0}$, é um vector ortogonal à superfície de nível $N_0(g) = G(f)$, isto é, ao gráfico de f, no ponto $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$.

Aula 14: Cálculo do plano tangente

Se a superfície é dada pelo $G(f)$, gráfico de f, isto é, por uma equação do tipo $z = f(x, y)$, onde f é diferenciável num ponto $p_0 = (x_0, y_0)$ (interior ao domínio de f), então o plano tangente Π a $G(f)$ no ponto $(p_0, f(p_0))$ é dado por $\boxed{z = A(x, y)}$, em que $A(x, y)$ é a linearização de f, isto é, $A(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$.

Outra maneira é calcular um vector ortogonal a Π no ponto $(p_0, f(p_0))$; para isso temos de ver $G(f) = N_0(f - z)$, e então $\nabla(f - z)(p_0, f(p_0)) = (\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0), -1)$ é um vector ortogonal a Π no ponto $(p_0, f(p_0))$, pelo que o plano Π pode ser descrito como o conjunto dos vectors com base em p_0 que são perpendiculares a $(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0), -1)$:

$$\begin{aligned} \Pi &= \{p \mid (p - (p_0, f(p_0))) \cdot (\tfrac{\partial f}{\partial x}(p_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(p_0), -1) = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \mid (x - x_0, y - y_0, z - f(p_0)) \cdot (\tfrac{\partial f}{\partial x}(p_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(p_0), -1) = 0\} \end{aligned}$$

Se a superfície é dada pelo conjunto de nível $N_k f$, isto é por uma eq. do tipo $f(x, y, z) = k$, então calcular o plano tangente Π a $N_k f$ no ponto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ é facilitado calculando primeiro o vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$, que se for $\neq (0, 0, 0)$ é um vector ortogonal a Π, e depois o plano

$$\boxed{\begin{aligned} \Pi &= \{p \mid (p - p_0) \cdot (\tfrac{\partial f}{\partial x}(p_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(p_0), \tfrac{\partial f}{\partial z}(p_0)) = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \mid (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (\tfrac{\partial f}{\partial x}(p_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(p_0), \tfrac{\partial f}{\partial z}(p_0)) = 0\} \end{aligned}}$$

Aula 14: Exercícios 1

1. Determine a direção e o sentido em que se atinge o valor máximo e o valor mínimo da derivada direcional das seguintes funções nos pontos indicados:

(a) $f(x, y) = x^2y^3$ no ponto $(1, 1)$.

(b) $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(xy) - \operatorname{sen}(yz)$ no ponto $(0, 1, 0)$.

(c) $f(x, y, z) = xyz + x^2$ no ponto $(1, 1, 0)$.

2. Determine as equações do plano tangente e da reta normal aos graficos das seguintes funções nos pontos indicados:

(a) $f(x, y) = xy$ no ponto $(1, 2, 2)$.

(b) $f(x, y) = x^2 - y^2$ no ponto $(1, 0, 1)$.

(c) $f(x, y) = \ln(x + y)$ no ponto $(1, 1, \ln 2)$.

3. Determine as equações do plano tangente e da reta normal às seguintes superfíes de nível nos pontos indicados:

(a) $x^2 + xy + 2z = 1$ em $(-2, 4, 3)$.

(b) $y \operatorname{sen}(x) - z^2 = 2$ em $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}, 1)$.

(c) (elipsoide) $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ em $(-2, 1, -3)$.

(d) $\cosh(xy) + xy + yz = 5$ em $(0, 1, 4)$.

Aula 14: Derivadas de segunda ordem

Seja $f(x, y, z, \dots)$ uma função real definida em $D \subset \mathbb{R}^n$. Como vimos as derivadas parciais de f em $p_0 = (a_1, a_2, \dots) \in D$ são dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p_0) = D_{(1,0,0,\dots)} f(p_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1+t, a_2, a_3 \dots) - f(a_1, a_2, a_3 \dots)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = D_{(0,1,0,\dots)} f(p_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, a_2+t, a_3, \dots) - f(a_1, a_2, a_3 \dots)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(p_0) = D_{(0,0,1,\dots)} f(p_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, a_2, a_3+t, \dots) - f(a_1, a_2, a_3 \dots)}{t}$$

etc

As derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \dots$ são funções de $x, y, z, \dots$.

As derivadas parciais de segunda ordem de f são as funções:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \qquad \dots$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \qquad \dots$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \qquad \dots$$

etc

Aula 14: Polinómio de Taylor de funções $f(x,y)$ e a matriz Hessiana

Um polinómio em x e y é um polinómio do tipo

$$a_0 + b_1x + b_2y + c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + d_1x^3 + d_2x^2y + d_3xy^2 + d_4y^3 + \ldots$$

(Polinómio de Taylor de grau 2): Seja $f(x,y)$ uma função com derivadas parciais contínuas até ordem 2, numa vizinhança de p_0. Seja $p_0 = (x_0, y_0)$. Existe um polinómio $P(x,y)$ de grau 2 em $(x - x_0)$ e $(y - y_0)$ tal que $P(p_0) = f(p_0)$, $\frac{\partial P}{\partial x}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$, $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)$, $\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}(p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0)$, $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(p_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0)$.

Esse polinómio é o polinómio de Taylor de $f(x,y)$ no ponto $p_0 = (x_0, y_0)$. Os polinómios de Taylor de grau 1 e de grau 2 de $f(x,y)$ são:

$$T^1_{p_0} f(p) = A(p) = f(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0)$$

$$T^2_{p_0} f(p) = f(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0) + (p - p_0) H f(p_0) (p - p_0)^T$$

em que $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ é o gradiente de f e $Hf = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \nabla f \\ \frac{\partial}{\partial y} \nabla f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$ é a matriz Hessiana de f.

Seja $p = (x,y)$ e $p_0 = (x_0, y_o)$. O erro de tomar $A(x,y) = T^1_{p_0} f(x,y)$ no lugar de $f(x,y)$ é dado por

$$|f(p) - A(p)| = \frac{1}{2} \left| (p - p_0) H f(\theta) (p - p_0)^T \right|,$$

para algum $\theta = (\alpha, \beta)$ com α entre x e x_0 e β entre y e y_0.

Aula 14: Matriz Hessiana

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ com derivadas de primeira e segunda ordem em $p_0 \in \mathrm{int}(D)$. A matriz

$$Hf(p_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\nabla(f)(p_0) \\ \frac{\partial}{\partial y}\nabla(f)(p_0) \\ \frac{\partial}{\partial z}\nabla(f)(p_0) \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(p_0) & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(p_0) & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(p_0) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

chama-se matriz Hessiana de f em p_0. Ao determinante de $Hf(p_0)$ chamamos Hessiano de f em p_0. A matriz Hessiana é uma matriz simétrica (ver Critério seguinte).

Teorema de Schwarz (Critério da igualdade das derivadas mistas) Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e x, y duas variáveis da função f. Se existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ numa bola aberta centrada em $p_0 \in \mathrm{int}(D)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é contínua em p_0, então existe $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ em p_0 e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0)$.

Aula 14: Soluções dos exercícios 1

Exercícios 1: As respectivas funções são todas diferenciáveis nos pontos em questão.

1(a) Valor máximo na direcão e sentido de $(2,3)$ e valor mínimo é atingido na direcão e sentido $(-2,-3)$.

1(b) Valor máximo na direcão e sentido de $(1,0,-1)$ e valor mínimo é atingido na direcão e sentido $(-1,0,1)$.

1(c) Valor máximo na direcão e sentido de $(2,0,1)$ e valor mínimo é atingido na direcão e sentido $(-2,0,-1)$.

2(a) Eq$^{\mathrm{s}}$ cartesianas do plano tangente ao $G(f)$: $z = A(x,y) \Leftrightarrow z = -2+2x+y.$

Cálculo: $A(x,y)$ é a linearização de $f(x,y)$ no ponto $(x_0,y_0) = (1,2)$:
$A(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0) = 2+(2,1)\cdot(x-1,y-2) = -2+2x+y.$

Eq$^{\mathrm{s}}$ cartesianas da reta normal ao $G(f) = N_0(f–z)$: $y = \frac{3+x}{2} \wedge z = \frac{5-x}{2}.$

Cálculo: o vetor $\nabla(f-z)(1,2,2) = (\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2), -1) = (2,1,-1)$ é ortogonal a $N_0(f-z) = G(f)$ no ponto $(p_0, f(p_0))$.
Reta normal $L = \{(1,2,2)+t(2,1,-1) \mid t\in\mathbb{R}\} = \{(1+2t, 2+t, 2-t) \mid t\in\mathbb{R}\}$. Isto dá as eq$^{\mathrm{s}}$ paramétricas $x = 1+2t \wedge y = 2+t \wedge z = 2-t$, e as eq$^{\mathrm{s}}$ cartesianas (tirando $t = \frac{x-1}{2}$) $y = \frac{3+x}{2} \wedge z = \frac{5-x}{2}$.

2(b) Eq$^{\mathrm{s}}$ cartesianas do plano tangente ao $G(f)$: $z = A(x,y) \Leftrightarrow z = 2x-1.$

Cálculo: $A(x,y)$ é a linearização de $f(x,y)$ no ponto $(x_0,y_0) = (1,0,1)$:
$A(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0) = 1+(2,0)\cdot(x-1,y) = 2x-1.$

Eq$^{\mathrm{s}}$ cartesianas da reta normal ao $G(f) = N_0(f-z)$: $x = 3-2z \wedge y = 0.$

Cálculo: o vetor $\nabla(f-z)(1,0,1) = (\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0), -1) = (2,0,-1)$ é ortogonal a $N_0(f-z) = G(f)$ no ponto $(p_0, f(p_0))$.
Reta normal $L = \{(1,0,1)+t(2,0,-1) \mid t\in\mathbb{R}\} = \{(1+2t, 0, 1-t) \mid t\in\mathbb{R}\}$. Isto dá as eq$^{\mathrm{s}}$ paramétricas $x = 1+2t \wedge y = 0 \wedge z = 1-t$, e as eq$^{\mathrm{s}}$ cartesianas (tirando $t = 1-z$) $x = 3-2z \wedge y = 0$.

2(c) Eq$^{\mathrm{s}}$ cartesianas do plano tangente ao $G(f)$: $z = A(x,y) \Leftrightarrow z = 1+\ln 2+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}.$

Cálculo: $A(x,y)$ é a linearização de $f(x,y)$ no ponto $(x_0,y_0) = (1,1)$:
$A(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0) = \ln 2+(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\cdot(x-1,y-1) = \ln 2+\frac{x-1}{2}+\frac{y-1}{2}.$

Eq$^{\mathrm{s}}$ cartesianas da reta normal ao $G(f) = N_0(f–z)$: $y = x \wedge z = \ln 2-2-2x.$

Cálculo: o vetor $\nabla(f-z)(1,1,\ln 2) = (\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1), -1) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)$ é ortogonal a $N_0(f-z) = G(f)$ no ponto $(p_0, f(p_0))$.
Reta normal $L = \{(1,1,\ln 2)+t(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1) \mid t\in\mathbb{R}\} = \{(1+\frac{t}{2}, 1+\frac{t}{2}, \ln 2-t) \mid t\in\mathbb{R}\}$. Isto dá as eq$^{\mathrm{s}}$ paramétricas $x = 1+\frac{t}{2} \wedge y = 1+\frac{t}{2} \wedge z = \ln 2-t$, e as eq$^{\mathrm{s}}$ cartesianas (tirando $t = 2(x-1)$) $y = x \wedge z = \ln 2-2x-2$.

Aula 14: Soluções dos exercícios 1 (cont)

Exercícios 1: As respectivas funções são todas diferenciáveis nos pontos em questão.

3(a) $\boxed{\text{Eq}^{\text{s}} \text{ cartesianas da reta normal a } N_1(f) \text{ no pto } (-2,4,3)\text{: } \quad x=-2 \;\; \wedge \;\; z=7-y.}$

Cálculo: o vetor $\nabla f(-2,4,3) = (\frac{\partial f}{\partial x}(-2,4,3), \frac{\partial f}{\partial y}(-2,4,3), \frac{\partial f}{\partial z}(-2,4,3)) = (0,-2,2)$ é ortogonal a $N_1(f)$ no ponto $(-2,4,3)$. Reta normal $L = \{(-2,4,3)+t(0,-2,2) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(-2, 4-2t, 3+2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Isto dá as eq$^{\text{s}}$ paramétricas $x=-2 \wedge y = 4-2t \wedge z = 3+2t,$ e as eq$^{\text{s}}$ cartesianas (tirando $2t = 4-y$) $x=-2 \wedge z = 7-y$?.

$\boxed{\text{Eq. cartesiana do plano tangente } \Pi \text{ a } N_1(f) \text{ no pto } (-2,4,3)\text{: } \quad z=y-1.}$

Cálculo: $\Pi = \{(x,y,z) \mid ((x,y,z)-(-2,4,3))\cdot(0,-2,2)=0\} = \{(x,y,z) \mid -y+z+1=0\}$.

Outra maneira: nas vizinhanças de $(-2,4,3)$, $N_1(f) = G(z)$, em que a expressão $f(x,y,z)=1 \Leftrightarrow z =$função$(x,y)$ (Teorema da função implícita). Assim a equação de Π é: $z = A(x,y)$, em que $A(x,y)$ é a linearização de z (como função de x e y) no ponto $(x_0,y_0)=(-2,4)$: $A(x,y) = z_0 + \nabla z(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0) = 3 + (\frac{\partial z}{\partial x}(-2,4), \frac{\partial z}{\partial y}(-2,4))\cdot(x+2, y-4)$. A derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}(-2,4)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(-2,4)$ calculam-se derivando a equação $x^2+xy+2z=1$ em ordem a x e em ordem a y, no ponto $(-2,4,3)$:

$$2x+y+2\frac{\partial z}{\partial x}=0\,\Big|_{(-2,4,3)} \;\Leftrightarrow\; 2\frac{\partial z}{\partial x}(-2,4)=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial z}{\partial x}(-2,4)=0$$

$$x+2\frac{\partial z}{\partial y}=0\,\Big|_{(-2,4,3)} \;\Leftrightarrow\; -2+2\frac{\partial z}{\partial y}(-2,4)=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial z}{\partial y}(-2,4)=1.$$

Logo $A(x,y) = 3+(0,1)\cdot(x+2,y-4) = y-1$. Logo a eq. de Π é $z=y-1$.

3(b) $\boxed{\text{Eq}^{\text{s}} \text{ cartesianas da reta normal a } N_2(f) \text{ no pto } (\frac{\pi}{4},\sqrt{2},1)\text{: } \quad y=\sqrt{2}+(x-\frac{\pi}{4})\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; \wedge \;\; z=1+\frac{\pi}{2}-2x.}$

Cálculo: o vetor $\nabla f(\frac{\pi}{4},\sqrt{2},1) = (\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{4},\sqrt{2},1), \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{4},\sqrt{2},1), \frac{\partial f}{\partial z}(\frac{\pi}{4},\sqrt{2},1)) = (1,\frac{\sqrt{2}}{2},-2)$ é ortogonal a $N_2(f)$ no ponto $(\frac{\pi}{4},\sqrt{2},1)$. Reta normal $L = \{(\frac{\pi}{4},\sqrt{2},1)+t(1,\frac{\sqrt{2}}{2},-2) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(\frac{\pi}{4}+t, \sqrt{2}+t\frac{\sqrt{2}}{2}, 1-2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Isto dá as eq$^{\text{s}}$ paramétricas $x=\frac{\pi}{4}+t \wedge y=\sqrt{2}+t\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge z=1-2t$. Tirando $t = x-\frac{\pi}{4}$ vem as eq$^{\text{s}}$ cartesianas de Π.

$\boxed{\text{Eq. cartesiana do plano tangente } \Pi \text{ a } N_2(f) \text{ no pto } (\frac{\pi}{4},\sqrt{2},1)\text{: } \quad x+\frac{\sqrt{2}}{2}y-2z+1-\frac{\pi}{4}=0.}$

Cálculo: $\Pi = \{(x,y,z) \mid ((x,y,z)-(\frac{\pi}{4},\sqrt{2},1))\cdot(1,\frac{\sqrt{2}}{2},-2)=0\} = \{(x,y,z) \mid x-\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}(y-\sqrt{2}=-2(z-1)=0\}$.

Aula 14: Soluções dos exercícios 1 (cont)

Exercícios 1: As respectivas funções são todas diferenciáveis nos pontos em questão.

3(c) $\boxed{\text{Eq}^{\text{s}}\text{ cartesianas da reta normal a } N_3(f) \text{ no pto } (-2,1,-3):\quad y=-2x-3 \ \wedge \ 3z=2x-5.}$

Cálculo: o vetor $\nabla f(-2,1,-3) = (\frac{\partial f}{\partial x}(-2,1,-3), \frac{\partial f}{\partial y}(-2,1,-3), \frac{\partial f}{\partial z}(-2,1,-3)) = (-1,2,-\frac{2}{3})$ é ortogonal a $N_3(f)$ no ponto $(-2,1,-3)$. Reta normal $L = \{(-2,1,-3)+t(-1,2,-\frac{2}{3}) \mid t\in\mathbb{R}\} = \{(-2-t, 1+2t, -3-\frac{2t}{3}) \mid t\in\mathbb{R}\}$. Isto dá as eq$^{\text{s}}$ paramétricas $x=-2-t \wedge y=1+2t \wedge z=-3-\frac{2t}{3}$, e as eq$^{\text{s}}$ cartesianas vêm tirando $t=-x-2$.

$\boxed{\text{Eq. cartesiana do plano tangente } \Pi \text{ a } N_3(f) \text{ no pto } (-2,1,-3):\quad 3x-6y+2z+18=0.}$

Cálculo: $\Pi = \{(x,y,z) \mid ((x,y,z)-(-2,1,-3))\cdot(-1,2,-\frac{2}{3})=0\} = \{(x,y,z) \mid x-2y+\frac{2z}{3}+6=0\}$.

Outra maneira: nas vizinhanças de $(-2,1,-3)$, $N_3(f)=G(z)$, em que a expressão $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3 \Leftrightarrow z=z(x,y)$ (T. da f. implícita). Assim a equação de Π é: $z=A(x,y)$, em que $A(x,y)$ é a linearização de z (como função de x e y) no ponto $(x_0,y_0)=(-2,1)$:
$A(x,y) = z_0+\nabla z(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0) = -3+(\frac{\partial z}{\partial x}(-2,1), \frac{\partial z}{\partial y}(-2,1))\cdot(x+2,y-1)$. A derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}(-2,1)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(-2,1)$ calculam-se derivando a equação $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$ em ordem a x e em ordem a y, no ponto $(-2,1,-3)$:

$$\frac{x}{2}+\frac{2z}{9}\frac{\partial z}{\partial x}=0\,\Big|_{(-2,1,-3)} \quad\Leftrightarrow\quad -1-\frac{2}{3}\frac{\partial z}{\partial x}(-2,1)=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial z}{\partial x}(-2,1)=-\frac{3}{2}$$

$$2y+\frac{2z}{9}\frac{\partial z}{\partial y}=0\,\Big|_{(-2,1,-3)} \quad\Leftrightarrow\quad 2-\frac{2}{3}\frac{\partial z}{\partial y}(-2,1)=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial z}{\partial y}(-2,1)=3.$$

Logo $A(x,y) = -3+(-\frac{3}{2},3)\cdot(x+2,y-1) = 3y-\frac{3}{2}x-9$. Logo a eq. de Π é $z=3y-\frac{3}{2}x-9$.

3(d) $\boxed{\text{Eq}^{\text{s}}\text{ cartesianas da reta normal a } N_5(f) \text{ no pto } (0,1,4):\quad y=1+4x \ \wedge \ z=4+x.}$

Cálculo: o vetor $\nabla f(0,1,4) = (\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,4), \frac{\partial f}{\partial y}(0,1,4), \frac{\partial f}{\partial z}(0,1,4)) = (1,4,1)$ é ortogonal a $N_5(f)$ no ponto $(0,1,4)$.
Reta normal $L = \{(0,1,4)+t(1,4,1) \mid t\in\mathbb{R}\} = \{(t,1+4t,4+t) \mid t\in\mathbb{R}\}$.
Isto dá as eq$^{\text{s}}$ paramétricas $x=t \wedge y=1+4t \wedge z=4+t$. As eq$^{\text{s}}$ cartesianas é imediato.

$\boxed{\text{Eq. cartesiana do plano tangente } \Pi \text{ a } N_5(f) \text{ no pto } (0,1,4):\quad x+4y+z-8=0.}$

Cálculo: $\Pi = \{(x,y,z) \mid ((x,y,z)-(0,1,4))\cdot(1,4,1)=0\} = \{(x,y,z) \mid x+4(y-1)+z-4=0\}$.

Aula 14: Exercícios 1 (folha3-parte1)

1. Supondo que existe a derivada direcional $f'_{\vec{a}}(P_0)$ da função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ segundo $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ em $P_0 \in \text{int}D$, mostre que $f'_{-\vec{a}}(P_0)$ também existe e que $f'_{-\vec{a}}(P_0) = -f'_{\vec{a}}(P_0)$.

2. Após garantir a diferenciabilidade das seguintes funções f nos seus domínios de definição, determine a expressão geral das derivadas direcionais nas direções e sentidos indicados:

   (a) $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ na direção e sentido do vetor $(1, 1)$;

   (b) $f(x, y) = x^2 - 4y$ na direção e sentido do vetor $(1, 3)$;

   (c) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ na direção e sentido do vetor $(1, 1)$;

   (d) $f(x, y) = x^2y^3$ na direção e sentido do vetor $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$;

   (e) $f(x, y, z) = xyz$ na direção e sentido do vetor $(1, 2, 2)$;

   (f) $f(x, y, z) = e^x + yz$ na direção e sentido do vetor $(-1, 5, -2)$;

   (g) $f(x, y, z) = \cos(xy) + \sin(yz)$ na direção e sentido do vetor $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

3. Determine a expressão geral das derivadas direcionais da função $f(x, y) = x^2 - 3xy$ na direção e sentido de um vetor de coordenadas positivas que seja diretor da reta tangente à parábola de equação $y = x^2 - x + 2$ no ponto $(1, 2)$.

Aula 14: Exercícios 2 (folha3-parte1)

5. Suponha que o potencial elétrico numa lâmina plana é dado por

$$V(x,y) = 80 - 20xe^{-\frac{x^2+y^2}{20}}$$

em volts, com x e y em cm.

(a) Determine a expressão geral da taxa de variação do potencial na direção e sentido do eixo dos xx.

(b) Determine a expressão geral da taxa de variação do potencial na direção e sentido do eixo dos yy.

(c) Determine a expressão geral da taxa de variação do potencial na direção e sentido do vetor $(1,1)$.

6. Após garantir a diferenciabilidade da função no respetivo ponto do domínio, determine a equação do plano tangente ao gráfico de $z = f(x,y)$ no ponto P_0 indicado:

(a) $z = 2x^2 + y^2$ (paraboloide); $P_0 = (1,1,3)$.

(b) $z = \sqrt{x-y}$; $P_0 = (5,1,2)$.

(c) $z = \ln(2x+y)$; $P_0 = (-1,3,0)$.

(d) $z = \sin(xy)$; $P_0 = (1,\pi,0)$.

Aula 14: Exercícios 3 (folha3-parte1)

7. Seja $f(x, y) = x - 6y^2$. Determine:

   (a) equações para os planos tangentes ao gráfico de $z = x - 6y^2$ nos pontos $(1, 1, f(1, 1))$ e $(-1, -1, f(-1, -1))$;

   (b) equações para as retas perpendiculares ao gráfico de f nos pontos $(1, 1, f(1, 1))$ e $(-1, -1, f(-1, -1))$.

8. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de $z = xy$ que passa pelos pontos (1, 1, 2) e (-1, 1, 1).

9. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de $z = x^2 + y^2$ que seja paralelo ao plano $z - 2x - y = 0$.

11. Justifique as seguintes afirmações:

    (a) As funções polinomiais em n variáveis são diferenciáveis em todos os pontos de $\mathbb{R}^n$.

    (b) A função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

12. Para funções $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ cujas derivadas parciais de primeira ordem existam num dado ponto, prove que $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$ em tal ponto.

Aula 14: Exercícios 4 (folha3-parte2)

1. Para cada uma das funções seguintes determine o diferencial no ponto indicado e a linearização numa vizinhança do mesmo ponto, após garantida a diferenciabilidade no ponto em questão:

   (a) $f(x, y) = \sin(xy)$, $(0, 1)$;

   (b) $f(x, y, z) = xyz$, $(1, 1, 1)$;

2. Usando a regra da cadeia, calcule a expressão das derivadas $\dfrac{dz}{dt}$ ou $\dfrac{dw}{dt}$ nos pontos de diferenciabilidade das funções z de t ou w de t respetivamente:

   (a) $z = x^2 + 2y^2$, $x = \sin(t)$, $y = \cos(t)$;

   (b) $z = \arctan\left(\frac{dz}{dt}\right)$, $x = \ln(t)$, $y = e^t$;

   (c) $z = \tan\left(\frac{x}{y}\right)$, $x = t$, $y = e^t$;

   (d) $z = e^{xy}$, $x = 3t + 1$, $y = t^2$;

   (e) $z = x^2\cos(y) - x$, $x = t^2$, $y = \frac{1}{t}$;

   (f) $z = \ln(x) + \ln(y) + xy$, $x = e^t$, $y = e^{-t}$;

   (g) $w = xyz$, $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^4$;

   (h) $w = e^{-x}y^2\sin(z)$, $x = t$, $y = 2t, z = 3t$;

3. Seja $z = f\left(\frac{bx^2}{2} - \frac{ay^3}{3}\right)$, onde f é diferenciável e $a, b \in \mathbb{R}$. Mostra que então f satisfaz a equação

$$ay^2\frac{\partial z}{\partial x} + bx\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Formulário Derivadas

$$(u^p)' = p\, u^{p-1}\, u'$$

$$(\operatorname{arcsen}(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\operatorname{arctg}(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$$

$$(\sec u)' = u' \sec(u) \operatorname{tg}(u)$$

$$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$$

$$(\operatorname{cosec} u)' = -u' \operatorname{cosec}(u) \operatorname{cotg}(u)$$

$$(\operatorname{tg} u)' = u' \sec^2 u$$

$$(e^u)' = u'\, e^u$$

$$(\operatorname{cotg} u)' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$$

$$(a^u)' = \frac{u' a^u}{\ln a}\ ,\ \ a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$$