## Aula 2: Sumário

- Exercícios (cont)
- Soma de séries de potências.
- Exercícios.
- Polinómio de Taylor de ordem $n$ em torno de $c$
- Aproximação pelo Polinómio de Taylor

## Revisão: Raio de convergência e Intervalo de convergência

**(1)** $R > 0$ é raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \Leftrightarrow$ a série converge (absolutamente) se $|x-c| < R$ e diverge se $|x-c| > R$.

**(2)** O intervalo de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ com raio de convergência $R > 0$ é $]c-R, c+R[$.

**(3)** Se uma série de potências tem intervalo de convergência $]a, b[$, então o raio de convergência é $R = \dfrac{b-a}{2}$ e a série de potências é centrada no ponto médio $c = \dfrac{a+b}{2}$.

## Aula 1: Exercícios 1-3

Indique o intervalo e o domínio de convergência de cada uma das seguintes séries potências:

**(1.2b)** $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9^{n+1} n^2} (x-3)^n.$$

**(1.6)** $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}} (x-1)^n.$$

**(3.1)** $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{n-1} (x-2)^n.$$

**(3.2b)** $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{\ln(n)}.$$

# Aula 2: Soma de séries de potências

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ é uma série de potências (ou série de funções) com domínio de convergência $D$ e $f(x)$ uma função em que $f(x) \neq 0\,,\ \ \forall\, x \notin D$, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f(x)(x-c)^n$ é uma série (não necessaria/ uma série de potências) com o mesmo domínio de convergência $D$.

Se $p(x)$ é um polinómio com zeros apenas dentro do domínio $D$, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p(x)(x-c)^n$ é uma série de potências com o mesmo domínio de convergência $D$.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$ são duas séries de potências com domínios de convergência $D_a$ e $D_b$, respectivamente, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)(x-c)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)(x-c)^n$ uma série de potências com domínio de convergência $D \supset D_a \cap D_b$. Esta série tem raio de convergência $R \geq \min\{R_a, R_b\}$. Se $R_a \neq R_b$, então $R = \min\{R_a, R_b\}$. No entanto, se $R_a = R_b = r$, o raio da série resultante pode ser maior do que $r$ (embora ela se decompõe na soma das referidas séries apenas na intersecção dos domínios de convergência). Por exemplo, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0\, x^n$ ocorre somente no domínio $]-1,1[$, no entanto a série de potências resultante $\sum_{n=0}^{\infty} 0\, x^n$ tem raio de convergência $+\infty$ enquanto que as sérias parcelares que lhe deram origem têm raio de convergência 1.

## Aula 2: Exercícios 1 - Determinação da série de potências

Usando a série geométrica, determine as séries potências que representam cada uma das seguintes funções (e respectivo raio de convergência):

**(1)** $\dfrac{x}{2-3x^2}$.

**(2)** $\dfrac{6+x^2}{5-x^3}$.

**(3)** $\dfrac{1+x+x^3}{2+x^4}$.

**(4)** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$.

**(5)** $\dfrac{28}{(1-x)(1+x)}$.

[**Sugestão:** (4) Exprima $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x-1}$ em séries de potência centradas num mesmo centro $c$. (5) Reduza a frações simples]

Reciprocamente: determine a função $f(x)$ representada pela série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ em que,

**(6)** $a_0 = 5$ e $a_n = 2a_{n-1} + 1$.

**(7)** $a_0 = c$ e $a_n = ka_{n-1} + r$.

## Aula 2: Polinómio de Taylor de ordem $n$ em torno de $c$

Seja $f(x)$ uma função com derivadas finitas até ordem $n \in \mathbb{N}$ num dado ponto $c \in \mathbb{R}$.

Existe um único polinómio $P_n(x)$ de grau $n$ que satisfaz

$$P(c) = f(c),\ \ P'(c) = f'(c),\ \ P''(c) = f''(c), \ldots,\ \ P^{(n)}(c) = f^{(n)}(c)$$

Esse polinómio é o polinómio de Taylor de ordem $n$ da função $f$ no ponto $c$:

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(x) = T_c^n f(x) &:= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \\ &= f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \end{aligned}}$$

Se $c = 0$ o polinómio de Taylor chama-se polinómio de MacLaurin de ordem $n$ de $f$.

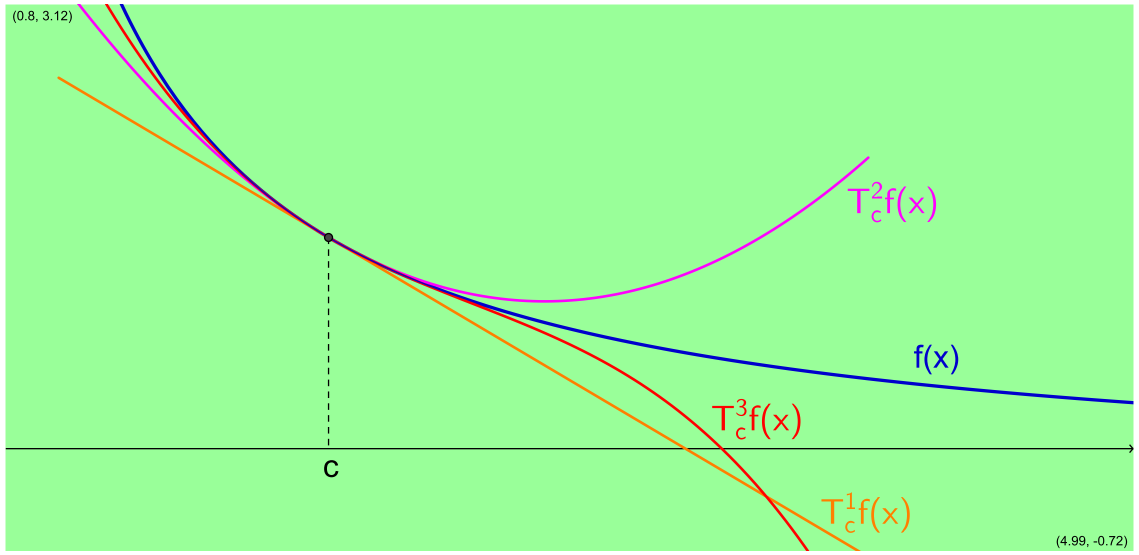
De facto, o polinómio $T_c^n f(x)$ satisfaz aquelas condições. Qualquer outro polinómio $P_n(x)$ pode ser escrito centrado no ponto $c$: $P_n(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n$. Aquelas condições aplicadas a este $P_n(x)$ obriga à igualdade entre os coeficientes $a_k = \dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

# Aula 2: Aproximação pelo Polinómio de Taylor.

Seja $f(x)$ uma função com derivadas finitas até ordem $n \in \mathbb{N}$ num dado ponto $c \in \mathbb{R}$.

Nas vizinhanças de $c$, mas próximo de $c$, $f(x)$ pode ser aproximado pelo polinómio de Taylor de $f$.

Quando maior for o grau deste polinómio melhor é a aproximação:




Se $P_m(x) = a_0 + a_1(x-c) + \cdots + a_m(x-c)^m = \sum_{k=0}^{m} a_k(x-c)^k$ é um polinómio em $x - c$,

então $T_c^n P_m(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-c)^k$, para $n \leq k$  e para $n \geq m$, $T_c^n P_m(x) = P_m(x)$.

# Aula 2: Soluções dos exercícios

**1.1** $\frac{x}{2-3x^2} = \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3x^2}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}x^{2n+1}$. Raio de conv. $R = \sqrt{\frac{2}{3}}$, determinado na primeira igualdade (pois $x = 0$ no domínio de convergência da série).

**1.2** $\frac{6+x^2}{5-x^3} = \frac{6+x^2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x^3}{5})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{6+x^2}{5^{n+1}}x^{3n}$ série de potências com raio de conv. $R = \sqrt[3]{5}$, determinado na 1ª igualdade, pois $6 + x^2 \neq 0$.

$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{6}{5^{n+1}}x^{3n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^{n+1}}x^{3n+2} = \sum_{m=0}^{\infty} d_m x^m$, onde

$$d_m = \begin{cases} \frac{6}{5^{\frac{m+3}{3}}}\,, & \text{se } m = 0 \bmod 3 \quad \text{(i.e. } m = 3n) \\ 0\,, & \text{se } m = 1 \bmod 3 \quad \text{(i.e. } m = 1+3n) \\ \frac{1}{5^{\frac{m+1}{3}}}\,, & \text{se } m = 2 \bmod 3 \quad \text{(i.e. } m = 2+3n) \end{cases}$$

**1.3** $\frac{1+x+x^3}{2+x^4} = \frac{1+x+x^3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x^4}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^{4n}$, série de potências com raio de conv. $R = \sqrt[4]{2}$, determinado na 1ªigualdade (pois $\mathrm{f} = 1 + x + x^3$ tem uma raiz real só e ela encontra-se em $]-\sqrt[4]{2}, 0[$ que está contido no domínio de conv. da série; de facto $\mathrm{f}' = 1 + 2x^2 > 0$, logo $\mathrm{f}$ é estritamente crescente e $\mathrm{f}(-\sqrt[4]{2}) < 0$ e $\mathrm{f}(0) > 0$).

$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}x^{4n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^{4n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^{4n+3} = \sum_{m=0}^{\infty} d_m x^m$, onde

$$d_m = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{m}{4}}}{2^{\frac{m+4}{4}}}\,, & \text{se } m = 0 \bmod 4 \quad \text{(i.e. } m = 4n) \\ \frac{(-1)^{\frac{m-1}{4}}}{2^{\frac{m+3}{4}}}\,, & \text{se } m = 1 \bmod 4 \quad \text{(i.e. } m = 1+4n) \\ 0\,, & \text{se } m = 2 \bmod 4 \quad \text{(i.e. } m = 2+4n) \\ \frac{(-1)^{\frac{m-3}{4}}}{2^{\frac{m+1}{4}}}\,, & \text{se } m = 2 \bmod 4 \quad \text{(i.e. } m = 2+4n) \end{cases}$$

# Aula 2: Soluções dos exercícios (cont.)

**1.4** $\frac{1}{x} = \frac{1}{c}\frac{1}{1-(-\frac{x-c}{c})} = \frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{c^n}(x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{c^{n+1}}(x-c)^n$, $c \neq 0$, raio de conv. $R_1 = |c|$.

$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{c-1}\frac{1}{1-(-\frac{x-c}{c-1})} = \frac{1}{c-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(c-1)^n}(x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(c-1)^{n+1}}(x-c)^n$, $c \neq 1$, raio de conv. $R_2 = |c-1|$.

Queremos um centro comum $c$, e já agora um raio comum: $R_1 = R_2 \Leftrightarrow |c| = |c-1| \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$. Tomando $c = \frac{1}{2}$, temos:

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[1-(-1)^n]2^{n+1}(x-\frac{1}{2})^n = \sum_{m=1}^{\infty} - 2^{2m+1}(x-\frac{1}{2})^{2m-1}$, série de potências com raio de conv. $R = \frac{1}{2}$.

**1.5** $\frac{28}{(1-x)(1+x)} = \frac{14}{1-x} + \frac{14}{1+x} = 14\sum_{n=0}^{\infty}x^n + 14\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ , ambas com raio de conv. 1.

$= \sum_{n=0}^{\infty}14[1+(-1)^n]x^n = \sum_{m=0}^{\infty}28\,x^{2m}$, raio de conv. $R = 1$.

**1.6** $a_n = 6 \times 2^n - 1$.

**1.7** $a_n = r\frac{k^n-1}{k-1} + ck^n$.