Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II - Agrupamento 4 **2014/15**

Folha 2 - parte 1: *Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)*

---

1. Verifique se as seguintes funções são solução (em $\mathbb{R}$) das equações diferenciais dadas:

   ✓ (a) $y = \operatorname{sen} x - 1 + e^{-\operatorname{sen} x}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} + y \cos x = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$;

   ✓ (b) $z = \cos x$ $\qquad z'' + z = 0$;

   ✗ (c) $y = \cos^2 x$ $\qquad y'' + y = 0$;

   ✓ (d) $y = Cx - C^2 \quad (C \in \mathbb{R})$ $\qquad (y')^2 - xy' + y = 0$.

2. Indique uma equação diferencial para a qual a família de curvas indicada é um integral geral:

   (a) $y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$ (retas do plano não verticais que passam pela origem);

   (b) $y = Ax + B, \quad A, B \in \mathbb{R}$ (retas do plano não verticais);

   (c) $y = e^{Cx}, \quad C \in \mathbb{R}$.

3. Considere a família de curvas sinusoidais definidas por

$$y = A \operatorname{sen}(x + B) \qquad \text{com} \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

   Indique uma EDO de terceira ordem para a qual estas funções constituam uma família de soluções.

4. (a) Determine a solução geral da equação diferencial $y'' - \operatorname{sen} x = 0$.

   (b) Mostre que a função definida por $\varphi(x) = 2x - \operatorname{sen} x$ é uma solução particular da EDO da alínea anterior, que satisfaz as condições $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(0) = 1$.

5. Determine a solução geral das seguintes EDOs:

   (a) $y' - \dfrac{1}{(1 + x^2)\operatorname{arctg} x} = 0$; $\quad y' = \dfrac{u'}{u} \Leftrightarrow y = \ln(u) + c \qquad u = \operatorname{artg}(x)$

   (b) $y' - \sqrt{1 - x^2} = 0$; $\quad y = \operatorname{arcsen}(x) + c$

   (c) $y' - \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1} = 0$. $\quad Y' = 1 + x^2 + \dfrac{1}{1 + x^2} \qquad y = x + \dfrac{x^3}{3} + \operatorname{artg}(x) + c$

6. Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDOs de variáveis separáveis:

   (a) $x + yy' = 0$;

   (b) $xy' - y = 0$;

   (c) $(t^2 - xt^2)\dfrac{dx}{dt} + x^2 = -tx^2$;

   (d) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$.

7. Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

(a) $xy' + y = y^2, \quad y(1) = 1/2;$

(b) $xy + x + y'\sqrt{4+x^2} = 0, \quad y(0) = 1;$

(c) $(1+x^3)y' = x^2 y, \quad y(1) = 2.$

8. Verifique que as seguintes equações diferenciais são homogéneas e determine um seu integral geral.

   (a) $(x^2 + y^2)y' = xy;$

   (b) $y'\left(1 - \ln \dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{y}{x}\,, \quad x > 0$ (EDO da Obs. 2.2 do Texto de Apoio);

9. Considere a equação diferencial $y' = \dfrac{y}{x}\left(1 + \ln y - \ln x\right), \quad x > 0.$

   (a) Verifique que se trata de uma equação diferencial homogénea.

   (b) Determine um integral geral para esta EDO.

10. Resolva as seguintes equações diferenciais:

    (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y-3}{x-y-1}\,;$

    (b) $y' = \dfrac{y-x}{y-x+2}\,.$
    (Sugestão: Efetue a mudança de variável dada por $z = y - x$.)

11. Resolva cada uma das seguintes equações diferenciais usando fatores integrantes:

    (a) $y' + 2y = \cos x;$

    (b) $x^3 y' - y - 1 = 0;$

    (c) $\dfrac{1}{x}\,y' - \dfrac{1}{x^2+1}\,y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,, \quad x \neq 0.$

12. Resolva as seguintes equações diferenciais de Bernoulli:

    (a) $xy' + y = y^2 \ln x, \quad x > 0;$

    (b) $y' - \dfrac{y}{2x} = 5x^2 y^5\,, \quad x \neq 0.$