# Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

**Cálculo II - Agrupamento 4**

**Folha de exercícios** **Ano letivo 2016/2017** (2º Semestre)

**1.3 Derivadas, gradientes e diferenciais - parte 2**

---

1. Para cada uma das funções seguintes determine o diferencial no ponto indicado e a linearização numa vizinhança do mesmo ponto, após garantida a diferenciabilidade no ponto em questão:

   (a) $f(x,y) = \sin(xy), \quad (0,1);$

   (b) $f(x,y,z) = xyz, \quad (1,1,1);$

   (c) $f(x,y,z) = \sqrt[4]{x^2+y^2+z^2}, \quad (1,0,0);$

   (d) $f(x,y,z) = xy^3 + \cos(\pi z), \quad (1,3,1);$

   (e) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2 + xyz, \quad (1,1,0).$

2. Usando a regra da cadeia, calcule a expressão das derivadas $\dfrac{dz}{dt}$ ou $\dfrac{dw}{dt}$ nos pontos de diferenciabilidade das funções $z$ de $t$ ou $w$ de $t$ respetivamente:

   (a) $z = x^2 + 2y^2, \quad x = \sin(t), \quad y = \cos(t);$

   (b) $z = \arctan\left(\frac{dz}{dt}\right), \quad x = \ln(t), \quad y = e^t;$

   (c) $z = \tan\left(\frac{x}{y}\right), \quad x = t, \quad y = e^t;$

   (d) $z = e^{xy}, \quad x = 3t+1, \quad y = t^2;$

   (e) $z = x^2\cos(y) - x, \quad x = t^2, \quad y = \frac{1}{t};$

   (f) $z = \ln(x) + \ln(y) + xy, \quad x = e^t, \quad y = e^{-t};$

   (g) $w = xyz, \quad x = t^2, \quad y = t^3, \quad z = t^4;$

   (h) $w = e^{-x}y^2\sin(z), \quad x = t, \quad y = 2t, z = 3t;$

   (i) $w = x^2 + y^2 + z^2, \quad x = e^t, \quad y = e^t\cos(t), \quad z = e^t\sin(t);$

   (j) $w = \dfrac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2+z^2}, \quad x = \cos(t), \quad y = \sin(t), \quad z = e^t;$

   (k) $w = \dfrac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}, \quad x = \cos(t), \quad y = \sin(t), \quad z = e^t.$

3. Seja $z = f\left(\frac{bx^2}{2} - \frac{ay^3}{3}\right)$, onde $f$ é diferenciável e $a, b \in \mathbb{R}$. Mostra que então $f$ satisfaz a equação
$$ay^2\frac{\partial z}{\partial x} + bx\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$