Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo II - Agrupamento II — 1.º Teste de Avaliação

5 de abril de 2017

Duração: **2h**

[15pts] 1. (a) **Sem resolver**, efetue a mudança de variável $z = y + e^x$ em $(y' + e^x)(2x + y + e^x) = x$ e classifique a equação diferencial obtida.

[10pts] (b) **Sem resolver**, mostre que $y(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}$ é solução do problema de valor inicial

$$(y'')^2 + (y')^2 = 1, \;\; y(0) = 0$$

.

2. Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 \sin(x)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

[15pts] (a) Determine o domínio de continuidade de F.

[20pts] (b) Calcule, caso existam, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0, 0)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0, 0)$ e a derivada direcional de F no ponto $(0, 0)$ segundo o vetor unitário $v = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

[15pts] (c) A função F não é diferenciável em $(0, 0)$. Porquê?

3. Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = 2x + 2y - z$.

[20pts] (a) Garanta a existência e determine os valores máximo e mínimo (absolutos) de f em

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

[20pts] (b) Determine uma equação para o plano tangente no ponto $(1, 1, 0)$ à superfície de nível 4 da função

$$g(x, y, z) = x\, f(x, y, z).$$

4. Determine o integral geral das seguintes equações diferenciais.

[25pts] (a) $y' = \dfrac{2x}{1 + y^2}$.

[25pts] (b) $y' - x^2 y = x^2$.

[10pts] 5. Utilize diferenciais para calcular um valor aproximado de $(2.01)^5 \ln(0.99)$.

6. Considere a equação diferencial $\sin(2y) + (x + 1) - \cos(2y) y' = 0, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

[15pts] (a) Mostre que esta equação diferencial não é exata mas que admite um factor integrante, apenas função de x, $\mu(x) = e^{\lambda x}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

[10pts] (b) Sabendo que y_1 é solução da equação diferencial dada será $y_2 = -y_1$ também uma sua solução?

"Pensar é o trabalho mais difícil que existe,
o que é provavelmente a razão por que tão poucos se envolvem nele."

Henry Ford