Cálculo II – gr. 4 – 2016/17 – 2º teste – Resolução

1. (a) Sendo $\{e^{-3x}, xe^{-3x}\}$ um SFS, o método da variação das constantes garante que há uma solução particular da forma $C_1(x)e^{-3x}+C_2(x)xe^{-3x}$,

onde as funções $C_1(x)$ e $C_2(x)$ satisfazem o seguinte sistema:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-3x} + C_2'(x)xe^{-3x} = 0 \\ C_1'(x)(-3e^{-3x}) + C_2'(x)\left(x(-3e^{-3x}) + e^{-3x}\right) = \dfrac{1}{e^{3x}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)\cdot x \\ \cancel{+3e^{-3x}C_2'(x)\cdot x} \cancel{-3e^{-3x}\cdot C_2'(x)\cdot x} + C_2'(x)e^{-3x} = e^{-3x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -x \\ C_2'(x) = 1 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} C_1(x) = -\dfrac{x^2}{2} \\ C_2(x) = x \end{cases}.$$

Obtém-se, assim, a solução particular $y_p = -\dfrac{x^2}{2}\cdot e^{-3x} + x^2e^{-3x}$,

$$\Leftrightarrow y_p = \frac{x^2}{2}e^{-3x}.$$

Solução geral: $y = \dfrac{x^2}{2}e^{-3x} + C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(b) $$y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{y''(x) + 6y'(x) + 9y(x)\}(s) = \mathcal{L}\{e^{-3x}\}(s)$$

Linhas 7, 8, 13, 14 e 2 da tabela

$$\Leftrightarrow s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=0} + 6sY(s) - 6\underbrace{y(0)}_{=0} + 9Y(s) = \frac{1}{s+3}$$

($s > -3$ pelo menos)

$$\Leftrightarrow \underbrace{(s^2 + 6s + 9)}_{=(s+3)^2}Y(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+3)^3}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^3}\right\}(x)$$

Linhas 1, 8 e 9 da tabela

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{2}e^{-3x}\cdot x^2.$$

2. (a)

$$T_0^n \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left.(\ln(1+x))^{(k)}\right|_{x=0}}{k!} x^k$$

$$= \ln(1+0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} x^k \quad \leftarrow \text{pela informação dada no enunciado}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Queremos determinar uma $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \left. \left(T_0^n \ln(1+x)\right)\right|_{x=1} - \ln(1+1) \right| < 10^{-1}.$$

Usando a forma de Lagrange para o resto, queremos garantir que ← e a informação dada no enunciado

$$\frac{\left|(-1)^n n!\,(1+\xi)^{-(n+1)}\right|}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} < \frac{1}{10},$$

onde $\xi \in [0,1]$, ou seja, que

(1) $$\frac{1}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} < \frac{1}{10}.$$

Como $\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}$ decresce quando ξ cresce, então $\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}} \leq 1$ quando $\xi \in [0,1]$, logo se garantirmos que

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{10},$$

então também a desigualdade (1) será verdadeira.

Como $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow n+1 > 10 \Leftrightarrow n > 9$,

basta considerar $n=10$ para se garantir o pretendido.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n+1}(x+1)^n$.

(a) O centro é -1.

$$\frac{\left|\frac{2^{-n}}{n+1}\right|}{\left|\frac{2^{-(n+1)}}{n+2}\right|} = \frac{\cancel{2^{-n}}}{\cancel{2^{-n}}\cdot 2^{-1}} \cdot \underbrace{\frac{n+2}{n+1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 = R \text{ é o raio}$$

de convergência da série de potências.

(b) Intervalo de convergência: $]c-R, c+R[$,

$=]-1-2, -1+2[, =]-3, 1[$.

$x=-3$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n+1}(-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^{-n}\cdot 2^n}{n+1}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$: converge, pelo Critério

de Leibniz (série alternada e $\left(\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ decresce com limite zero).

$x=1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n+1} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$: série

de Dirichlet divergente

$\therefore$ Domínio de convergência: $[-3, 1[$.

4. $f(x) := \begin{cases} x, & -\pi < x < 0 \\ -\pi - x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ em $]-\pi, \pi]$ e é 2π-periódica.

(a) $\forall m \in \mathbb{N}$, $a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx)\, dx =$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} x \cos(mx)\, dx + \int_{0}^{\pi} (-\pi - x) \cos(mx)\, dx \right)$$

integração por partes →

$$= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{\sin(mx)}{m} \cdot x \right]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin(mx)}{m}\, dx + \right.$$

$$\left. + \left[(-\pi - x) \frac{\sin(mx)}{m} \right]_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi} \frac{\sin(mx)}{m}\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(0 - \frac{1}{m} \left[-\frac{\cos(mx)}{m} \right]_{-\pi}^{0} + 0 + \frac{1}{m} \left[-\frac{\cos(mx)}{m} \right]_{0}^{\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{m^2} \left(1 - \cos(m(-\pi))\right) - \frac{1}{m^2} \left(\cos(m\pi) - 1 \right) \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^2}(-1)^m - \frac{1}{m^2}(-1)^m + \frac{1}{m^2} \right)$$

$$= \frac{2}{\pi m^2} \left(1 - (-1)^m \right) = \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ par} \\ \frac{4}{\pi m^2} & \text{se } m \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} x\, dx + \int_{0}^{\pi} -\pi - x\, dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{0} + \left[-\pi x - \frac{x^2}{2} \right]_{0}^{\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(0 - \frac{\pi^2}{2} - \pi^2 - \frac{\pi^2}{2} - 0 \right) = \frac{1}{\pi}(-2\pi^2) = -2\pi.$$

(b) A série numérica dada pode obter-se a partir da série de Fourier de f fazendo $x=0$ nela, pois $\cos 0 = 1$ e $\sin 0 = 0$.

Por outro lado, como o Teorema de Dirichlet é aplicável (pois a função 2π-periódica f é seccionalmente (continuamente) diferenciável), então quando $x=0$ a série de Fourier converge para $\frac{f(0+)+f(0-)}{2} = \frac{-\pi+0}{2} = -\frac{\pi}{2}$.

Assim,

$$-\frac{\pi}{2} = -\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cdot\underbrace{\cos((2n-1).0)}_{=1} - \frac{2}{2n-1}\underbrace{\sin((2n-1).0)}_{=0}\right),$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)^2} = \frac{\pi}{2},$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

5. $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$, onde o integral convergir.

No caso de $f(t) := \frac{1}{\sqrt{t}}$ vem então, para $s>0$,

mudança de variável tal que $e^{-st} = e^{-x^2}$, como sugerido: $st = x^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow t = \frac{x^2}{s}$; $\frac{dt}{dx} = \frac{2x}{s}$;

t	x
1	$\sqrt{s}$
b	$\sqrt{sb}$

t	x
a	$\sqrt{sa}$
1	$\sqrt{s}$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{a\to 0+}\int_a^1 e^{-st}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt + \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-st}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{a\to 0+}\int_{\sqrt{sa}}^{\sqrt{s}} e^{-x^2}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{s}}}\frac{2x}{s}\,dx +$$

$$+\lim_{b\to\infty}\int_{\sqrt{s}}^{\sqrt{sb}} e^{-x^2}\frac{1}{\frac{\cancel{x}}{\sqrt{s}}}\cdot\frac{2\cancel{x}}{s}\,dx =$$

$$=\lim_{a\to 0^+}\int_{\sqrt{sa}}^{\sqrt{s}}\frac{2}{\sqrt{s}}e^{-x^2}\,dx+\lim_{b\to\infty}\int_{\sqrt{s}}^{\sqrt{sb}}\frac{2}{\sqrt{s}}e^{-x^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{s}}\frac{2}{\sqrt{s}}e^{-x^2}\,dx+\int_{\sqrt{s}}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{s}}e^{-x^2}\,dx$$

usando a informação do enunciado

$$=\frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\frac{\cancel{2}}{\sqrt{s}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\cancel{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$