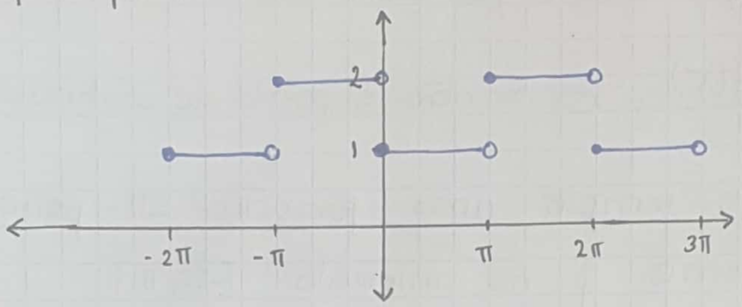
Exercício Séries de Fourier

1) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 2 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$

f - 2π-periódica

A série de Fourier associada a f é

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}((2n-1)x)}{2n-1}$$



Para aplicar o Tma de Dirichlet devemos verificar que

f é $\underbrace{\text{seccionalmente diferenciável}}$ em $\mathbb{R}$

f - seccionalmente contínua

f' - seccionalmente contínua

(i) f é seccionalmente contínua em $[-\pi, \pi]$

Para f ser seccionalmente contínua em $[-\pi,\pi]$ deve existir uma partição $\{a_0, \ldots, a_n\}$ de $[\pi,\pi]$ tal que:

- f é contínua em cada um dos intervalos abertos

$]a_0, a_1[$, $]a_1, a_2[$, ..., $]a_{n-1}, a_n[$ e

$\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to a_1^+} f(x)$, ..., $\lim_{x\to a_{n-1}^+} f(x)$

e $\lim_{x\to a_1^-} f(x)$, $\lim_{x\to a_2^-} f(x)$, ..., $\lim_{x\to a_n^-} f(x)$

existem e são finitos

Neste caso, consideremos a partição $\{\underset{a_0}{-\pi}, \underset{a_1}{0}, \underset{a_2}{\pi}\}$, já que considerando esta partição tem-se que

- f é contínua em $]-\pi, 0[$ e $]0,\pi[$ e

$\lim_{x\to -\pi^+} f(x) = 2$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$ $\qquad$ $\lim_{x\to \pi^-} f(x) = 1$

Portanto, f é seccionalmente contínua em $[\pi,\pi]$ e sendo 2π-periódica f é seccionalmente contínua em $\mathbb{R}$

(ii) $f'(x) = \begin{cases} 0 \,, & 0 < x < \pi \\ 0 \,, & -\pi < x < 0 \end{cases}$ A derivada de f em $x = 0, \pi, -\pi$ não existe.

Se consideramos a partição $\{-\pi, 0, \pi\}$, f' é contínua nos intervalos $]-\pi, 0[$ e $]0, \pi[$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$, $\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\pi^+}$ são finitos iguais a 0.

$\therefore$ f' é seccionalmente contínua em $[-\pi, \pi]$.

De (i) e (ii) temos que f é seccionalmente contínua em $[-\pi\ \pi]$ e como f é 2π- periódica f é diferenciável em $\mathbb{R}$

Pelo Tma de Dirichlet a série de Fourier de f converge para a função S.

$$S(x) = \begin{cases} f(x) \,, & \text{se } x \text{ é ponto de continuidade de } f \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \,, & \text{se } x \text{ não é ponto de continuidade de } f \end{cases}$$

$$S(x) = \begin{cases} f(x) \,, & x \neq \pi K \,, \ K \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \,, & x = \pi K \,, \ K \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dado que S é sempre uma função 2π- periódica então determinamos S no intervalo $[-\pi, \pi]$

Os pontos de descontinuidade de f em $[-\pi, \pi]$ são $x = 0$, $x = \pi$, $x = -\pi$

- $f(0^+) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ $\qquad$ $f(0^-) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2$

$$\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{3}{2}$$

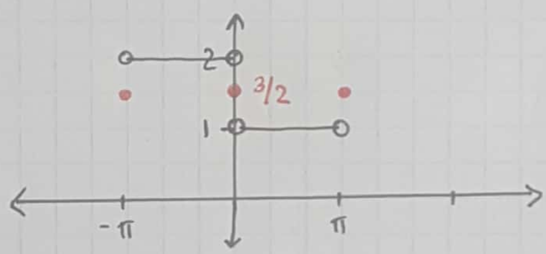
- $f(\pi^+) = 2 \qquad f(\pi^-) = 1$

$$\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{3}{2}$$

- $f(-\pi^-) = 1 \qquad f(-\pi^+) = 2$

$$\frac{f(-\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{3}{2}$$

Gráfico de S em $[-\pi, \pi]$



$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0, \pi, -\pi \\ \frac{3}{2}, & x = 0, \pi, -\pi \end{cases}$$

Gráfico de S em $[-3\pi, \pi]$