Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Exame Final de Cálculo II (Agrupamento 4) — 25 de junho de 2020

Enunciado

Questão 1. Seja f a função 2π–periódica tal que $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ 2 & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$.

[20pts] (a) Mostre que a série de Fourier associada a f é dada por

$$1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos((2n-1)x)}{2n-1}.$$

[[15pts] (b) Calcule, usando a alínea anterior e justificando, a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi}$.

Questão 2.

[25pts] (a) Sabendo que $\dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^n$, $|t| < 1$, mostre que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1.$$

[15pts] (b) Determine uma aproximação de $\ln(2)$ através do polinómio de MacLaurin de ordem 3 da função $f(x) = \ln(1+x)$.

[15pts] (c) Calcule um majorante para o erro absoluto cometido na aproximação obtida na alínea anterior.

Questão 3. Considere a função f de domínio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ tal que

$$f(x,y) = \sqrt{1 - (x^2+y^2)} + xy.$$

[25pts] (a) Determine os pontos críticos de f.

[10pts] (b) Justifique a existência de extremantes globais de f e diga, sem efetuar cálculos adicionais, qual a sua localização possível.

[20pts] (c) Determine esses extremantes globais de f.

Questão 4. Considere a equação diferencial $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}\, y = \dfrac{xe^x}{1+x^2}$.

[10pts] (a) Sem a resolver, mostre que:
Se $\varphi_0(x)$ é uma solução da EDO, então $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \dfrac{1}{1+x^2}$ também é uma sua solução.

[25pts] (b) Determine a solução geral da equação.

[30pts]**Questão 5.** Resolva o seguinte problema de Cauchy usando transformadas de Laplace:

$$y'' - 2y' + 2y = e^{-t}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$