Aula 3: Sumário

- Polinómio de Taylor de ordem n em torno de c (cont.)
- Aproximação pelo Polinómio de Taylor
- Exercícios
- Resto de ordem n e erro
- Grandeza da ordem do Pol. de Taylor em aproximações
- Fórmula de Taylor com resto Integral e com resto de Lagrange
- Exercícios

Aula 3: Polinómio de Taylor de ordem n em torno de c

Seja $f(x)$ uma função com derivadas finitas até ordem $n \in \mathbb{N}$ num dado ponto $c \in \mathbb{R}$.

Existe um único polinómio $P_n(x)$ de grau n que satisfaz

$$P(c) = f(c),\ P'(c) = f'(c),\ P''(c) = f''(c), \ldots,\ P^{(n)}(c) = f^{(n)}(c)$$

Esse polinómio é o polinómio de Taylor de ordem n da função f no ponto c:

$$\begin{aligned} P_n(x) = T_c^n f(x) &:= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \\ &= f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \end{aligned}$$

Se $c = 0$ o polinómio de Taylor chama-se polinómio de MacLaurin de ordem n de f.

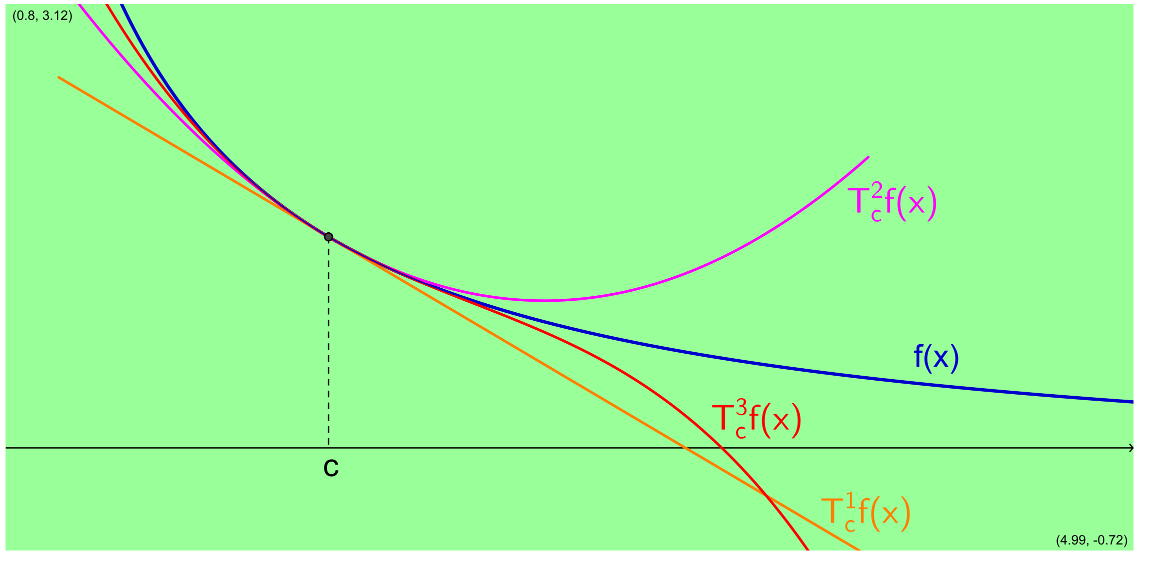
De facto, o polinómio $T_c^n f(x)$ satisfaz aquelas condições. Qualquer outro polinómio $P_n(x)$ pode ser escrito centrado no ponto c: $P_n(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n$. Aquelas condições aplicadas a este $P_n(x)$ obriga à igualdade entre os coeficientes $a_k = \dfrac{f^{(k)}(c)}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Aula 3: Aproximação pelo Polinómio de Taylor.

Seja $f(x)$ uma função com derivadas finitas até ordem $n \in \mathbb{N}$ num dado ponto $c \in \mathbb{R}$.

Nas vizinhanças de c, mas próximo de c, $f(x)$ pode ser aproximado pelo polinómio de Taylor de f.

Quando maior for o grau deste polinómio melhor é a aproximação:



Se $P_m(x) = a_0 + a_1(x-c) + \cdots + a_m(x-c)^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k(x-c)^k$ é um polinómio em $x - c$,

então $T_c^n P_m(x) = P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x-c)^k$, para $n \leq k$ e para $n \geq m$, $T_c^n P_m(x) = P_m(x)$.

Aula 3: Exercícios 1

Determine o polinómio de MacLaurin $T_0^n f(x)$ de ordem n das seguintes funções $f(x)$:

(1) $n = 3, \quad f(x) = \ln(x+1)$.

(2) $n = 5, \quad f(x) = sen(x)$.

(3) $n = 8, \quad f(x) = e^x$

(4) $n = 3, \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$.

Determine o polinómio de MacLaurin de ordem n das seguintes funções:

(5) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^4}$

(6) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

(7) $f(x) = \cos(x)$

Determine os seguintes polinómios de Taylor:

(8) $T_\pi^n \operatorname{sen}(x)$

(9) $T_0^n e^x$

(10) $T_1^n \ln(x)$

(11) $T_0^n x e^x$

Aula 3: Resto de ordem n e erro

f = função real com derivadas contínuas até à ordem $(n+1)$ num intervalo I contendo c.

$$T_c^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k.$$

Nas vizinhanças de c, $f(x) \approx T_c^n f(x)$. Seja $R_c^n f(x)$ o resto dessa aproximação:

$$R_c^n f(x) = f(x) - T_c^n f(x)\,.$$

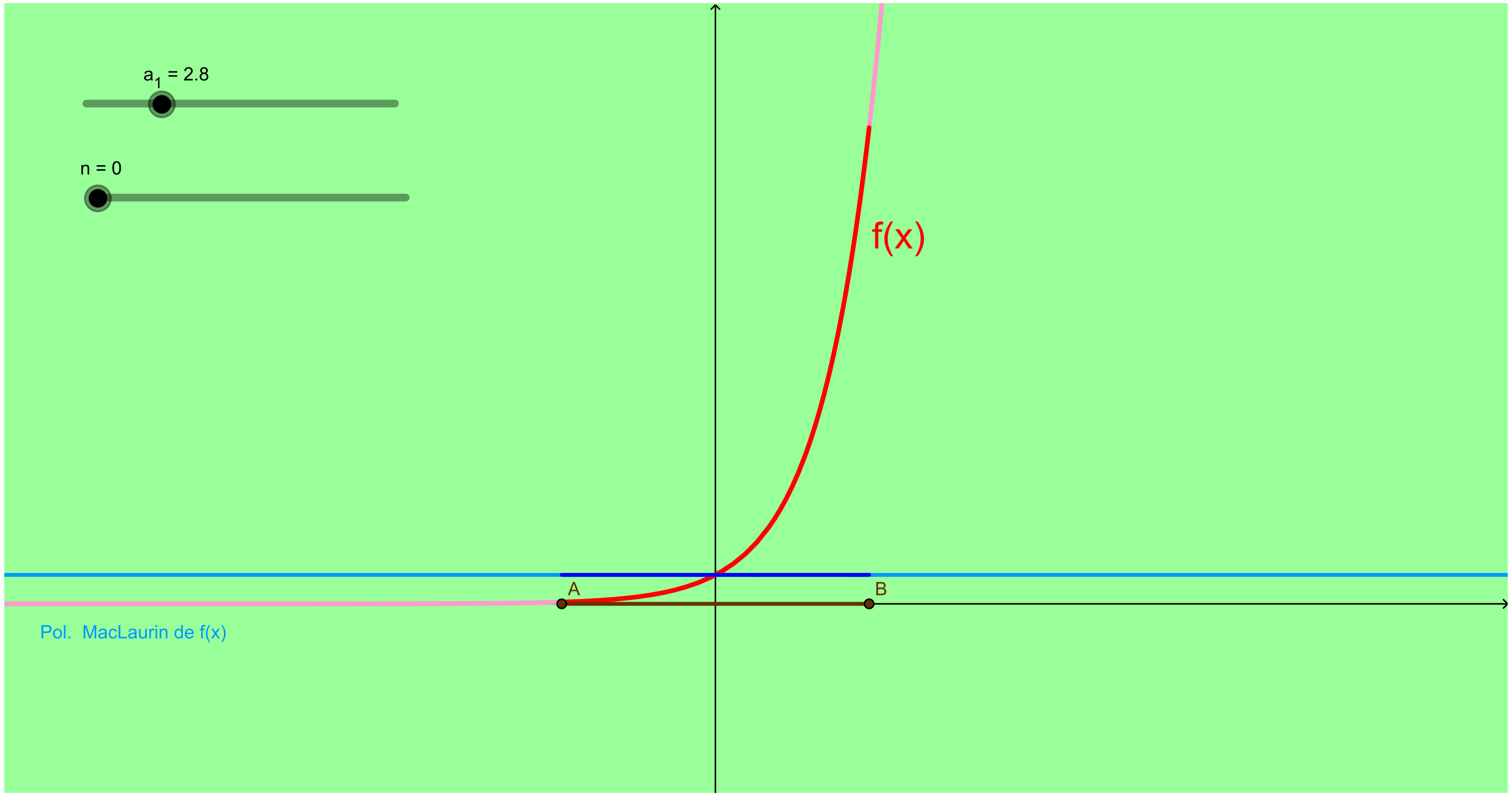
Logo nas vizinhanças de c,

$$f(x) = T_c^n f(x) + R_c^n f(x)$$

O erro de tomar $T_c^n f(x)$ como vaor aproximado de $f(x)$ é dado por

$$\text{Erro} = |R_c^n f(x)|$$

Aula 3: Grandeza da ordem do Pol. de Taylor em aproximações



Aula 3: Fórmula de Taylor

f = função real com derivadas contínuas até à ordem $(n+1)$ num intervalo I contendo c.

$$T_c^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k.$$

Fórmula de Taylor (ou de MacLaurin se $c=0$) com resto Integral (Teor. 4.4): $\forall\, x \in I,$

$$f(x) = T_c^n f(x) + R_c^n(x)\ , \quad \text{com} \quad R_c^n(x) = \frac{1}{n!}\int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt$$

Fórmula de Taylor com resto de Lagrange (Cor. 4.5): $\forall\, x \in I\backslash\{c\}$, existe θ_n entre x e c tq

$$f(x) = T_c{}^n f(x) + R_c{}^n(x)\ , \quad \text{com} \quad R_c{}^n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_n)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Exemplo: Mostre que $x - \frac{x^2}{2} \leq \operatorname{sen}(x) \leq x + \frac{x^2}{2}$ clique aqui

O erro da aproximação $f(x) \approx T_c^n f(x)$ calcula-se com o resto de Lagrange: erro $= |R_c^n f(x)|$.

Num ponto particular x_0, o valor $f(x_0) \approx T_c^n f(x_0)$ com erro $= |R_c^n f(x_0)|$.

Aula 3: Exercícios 2

(1) Considere $f(x) = e^x$.

(a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem n da função f.

(b) Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem n permite aproximar e^x no intervalo $]-1, 0[$, com erro inferior a $\dfrac{1}{(n+1)!}$.

(c) Escolha um dos polinómios de MacLaurin de f e use-o para obter uma aproximação de $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$, indicando uma estimativa para o erro cometido nessa aproximação.

(2) Usando o resto de Lagrange, determine um majorante para o erro cometido na aproximação de $\operatorname{sen}(3)$ quando se usa o polinómio de Taylor de ordem 5 em torno do ponto $a = \pi$.

(3) Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem 7 da função seno permite aproximar os valores desta função, no intervalo $[-1, 1]$, com erro inferior a $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$.

Aula 3: Exercícios 3

(1) Usando o resto de Lagrange, determine um majorante para o erro cometido na aproximação de $\cos(4)$ quando se usa o polinómio de Taylor de ordem 5 perto do ponto $c = \pi$.

(2) Determine um valor de n para o qual garanta que o polinómio de Taylor de ordem n da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no ponto $c = 1$ aproxima essa função, no intervalo $[0.9, 1.1]$, com erro inferior a 10^{-3}.

(3) Determine o menor valor de n tal que o polinómio de MacLaurin de ordem n da função $f(x) = e^x$ aproxime $f(1)$ com erro inferior a 10^{-3}.

(4) Mostre, usando a fórmula de Taylor, que $\ln(1 + x) \leq x$, para todo $x > -1$.

Aula 3: Soluções dos exercícios

1.1 $T_0^3 \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = \sum_{n=1}^{3} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

1.2 $T_0^5 \operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = \sum_{n=0}^{5} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

1.3 $T_0^8 e^x = \sum_{n=0}^{8} \frac{x^n}{n!}$.

1.4 $T_0^3 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.

1.5 $T_0^n (x+1)^{-4} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{6}$.

1.6 $T_0^n \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k$ (se $|x| < 1$ isto é a soma parcial dos 1$^{\text{os}}$ $n+1$ termos da série geométrica de razão x: $S_{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$).

1.7 $T_0^n \cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

1.8 $T_\pi^n \operatorname{sen}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(x-\pi)^{2k-1}}{(2k-1)!}$.

1.9 $T_0^n e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

1.10 $T_1^n \ln(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k}$.

1.11 $T_0^n x e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(k-1)!}$.

Aula 3: Soluções dos exercícios (cont.)

2.1a $T_0^n e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

2.1b Erro$= |R_0^n e^x| = \frac{e^{\theta_n}}{(n+1)!}|x|^{n+1} < \frac{e^{\theta_n}}{(n+1)!} < \frac{1}{(n+1)!}$. $(x \in]-1,0[\Rightarrow \theta_n \in]-1,0[)$

2.1c $\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}}$, $-\frac{1}{2} \in]-1,0[$. Logo $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx T_0^2 e^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{2} \frac{(-\frac{1}{2})^k}{k!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$, com erro inferior a $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

2.2 Erro$= |R_\pi^5 \operatorname{sen}(3)| = \frac{|\operatorname{sen}^{(6)}(\theta_5)|}{6!}|3-\pi|^6 \leq \frac{(\pi-3)^6}{6!} < \frac{0.2^6}{6!} = \frac{1}{5^3 \times 3^2 \times 10^4} = \frac{1}{11250000}$.

2.3 Erro$= |R_0^7 \operatorname{sen}(x)| = \frac{|\operatorname{sen}^{(8)}(\theta_7)|}{8!}|x|^8 \leq \frac{|x|^8}{8!} < \frac{1}{8!} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{12 \times 1680} < \frac{1}{2} \times \frac{1}{10^4}$.

3.1 Erro$= |R_\pi^5 \cos(4)| = \frac{|\cos^{(6)}(\theta_5)|}{6!}|4-\pi|^6 \leq \frac{(4-\pi)^6}{6!} < \frac{1}{6!}$.

3.2 Erro$= |R_1^n \frac{1}{x}| = \frac{n!}{(n+1)!\theta_n^{n+1}}|x-1|^{n+1} < \frac{1}{9 \times (n+1) \times 10^n}$.

Erro$< 10^{-3}$ se $\frac{1}{9 \times (n+1) \times 10^n} < \frac{1}{10^3} \Leftrightarrow 9 \times 10^{n-3} \times (n+1) > 1 \Leftrightarrow n \geq 3.$

3.3 Erro$= |R_0^n e^1| = \dfrac{e^{\theta_n}}{(n+1)!}|1-0|^{n+1} < \dfrac{2.8}{(n+1)!}$.

Erro$< 10^{-3}$ se $\dfrac{2.8}{(n+1)!} < \frac{1}{10^3} \Leftrightarrow (n+1)! > 2800 \Leftrightarrow n \geq 6.$

3.4 $\ln(1+x) = T_0^1 \ln(1+x) + R_0^1 \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2(1+\theta_1)^2} \leq x.$

Polinómios de Taylor de grau $n \leq 2$ de funções $f(x, y)$

Seja $f(x, y)$ uma função de duas variáveis definidas num domínio aberto centrado em $c = (c_0, c_1)$ onde a função tem derivadas parciais contínuas. Existe um único polinómio de grau 1 a duas variáveis $P(x, y)$ que satisfaz: $P(c) = f(c)$, $\frac{\partial P}{\partial x}(c) = \frac{\partial f}{\partial x}(c)$ e $\frac{\partial P}{\partial y}(c) = \frac{\partial f}{\partial y}(c)$. Esse polinómio é o polinómio de Taylor de grau 1 de f em c:

$$T_c^1 f(x, y) = f(c) + \nabla(f)(c)(x - c_0, y - c_1)^{\mathrm{T}},$$

em que $\nabla(f)(c)$ é a matriz $[\frac{\partial f}{\partial x}(c), \frac{\partial f}{\partial y}(c)]$. Existe um único polinómio de grau 2 a duas variáveis $P(x, y)$ que satisfaz: $P(c) = f(c)$ e todas as derivadas parciais de P em c coincidem com as respectivas derivadas parciais de f em c. Esse é o polinómio de Taylor de grau 2 de f:

$$T_c^1 f(x, y) = f(c) + \nabla(f)(c)(x - c_0, y - c_1)^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}(x - c_0, y - c_1)H_f(c)(x - c_0, y - c_1)^{\mathrm{T}},$$

em que $H_f(c)$ é a matriz Hessiana de f no ponto c: $H_f(c) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c) \end{bmatrix}$.

Derivadas de ordem n de algumas funções

$f(x)=\frac{1}{1-x} \rightsquigarrow f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ $\qquad$ $f(x)=\frac{1}{x} \rightsquigarrow f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$

$f(x)=\frac{1}{1+x} \rightsquigarrow f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$

$f(x)=\ln(1+x) \rightsquigarrow f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ $\qquad$ $f(x)=\ln(x) \rightsquigarrow f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

$$f(x)=\operatorname{sen}(x) \rightsquigarrow f^{(n)}(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}(x), & n\equiv 0 \bmod 4; & \text{(i.e. } n=0+\text{múltiplo de 4)}\\ \cos(x), & n\equiv 1 \bmod 4; & \text{(i.e. } n=1+\text{múltiplo de 4)}\\ -\operatorname{sen}(x), & n\equiv 2 \bmod 4; & \text{(i.e. } n=2+\text{múltiplo de 4)}\\ -\cos(x), & n\equiv 3 \bmod 4. & \text{(i.e. } n=3+\text{múltiplo de 4)}\end{cases}$$

$$f(x)=\cos(x) \rightsquigarrow f^{(n)}(x)=\begin{cases}\cos(x), & n\equiv 0 \bmod 4;\\ -\operatorname{sen}(x), & n\equiv 1 \bmod 4;\\ -\cos(x), & n\equiv 2 \bmod 4;\\ \operatorname{sen}(x), & n\equiv 3 \bmod 4.\end{cases}$$

$f(x)=e^{-x^{-2}} \rightsquigarrow f^{(n)}(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i x^{-(n+2i)}e^{-x^{-2}}$, em que $c_i=$constante.

$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x)=0$ **[Sugestão:** Mostre que $\lim_{x\to 0} x^{-(n+2i)}e^{-x^{-2}}=0$ fazendo a substit. $y=x^{-1}$, em que $y\to\infty$.]