Aula 21: Sumário

- EDOs de Bernoulli.
- Exercícios 1.
- EDOs homogéneas.
- Exercícios 2.
- Caso específico.
- Exercícios 3.

Aula 21: EDOs de primeira ordem

- EDOs de variáveis separáveis.
- EDOS exatas.
- EDOs lineares (de primeira ordem).
- EDOs de Bernoulli.
- EDOs homogéneas.

Aula 21: EDOs de Bernoulli

Uma equação diferencial de Bernoulli é uma equação diferencial da forma

$$\boxed{\mathbf{y}'+a(x)\mathbf{y}=b(x)\mathbf{y}^{\alpha}\text{ , com } \alpha\in\mathbb{R} \text{ e } \alpha\neq 0,1}$$

Se $\alpha>0$, então $y=0$ é sempre uma solução da eq. dif. de Bernoulli.

Soluções $y\neq 0$: Dividindo ambos os membros da eq. por $\mathbf{y}^{\alpha}$ obtemos:

$$\boxed{\mathbf{y}^{-\alpha}\mathbf{y}'+a(x)\mathbf{y}^{1-\alpha}=b(x)}$$

A substituição $\boxed{z=y^{1-\alpha}}$ transforma a edo de Bernoulli numa edo linear de primeira ordem:

$$\boxed{z'+(1-\alpha)a(x)z=(1-\alpha)b(x)}$$

cuja solução é: $z=h(x)+C$ ou $W(z,x,C)=0$. Revertendo a substituição obtém-se a solução da edo original: $y^{1-\alpha}=h(x)+C$ ou $W(y^{1-\alpha},x,C)=0$.

Exemplo: Resolva a edo $y'+y=e^x y^2$. Sol: $y=\dfrac{1}{e^x(c-x)}$

Aula 21: Exercícios 1

Resolva as seguintes equações diferenciais

(a) $y' + \frac{1}{x}y = xy^2$ Sol: $y = \dfrac{1}{x(c-x)}$

(b) $y' + \operatorname{sen}(x)y = \operatorname{sen}(x)y^2$ Sol: $y = \dfrac{e^{\cos x}}{e^{\cos x} + c}$

(c) $\begin{cases} x^2y' - 2xy = 3y^4\,; \\ y(1) = \frac{1}{2}\,. \end{cases}$ Sol: $y^3 = \dfrac{5x^6}{c - 9x^5}$, S.P.C.: $y = \sqrt[3]{\dfrac{5x^6}{49 - 9x^5}}$.

(d) $\begin{cases} xy' + y = -\dfrac{(xy)^4}{3+3x^2}; \\ y(1) = 1. \end{cases}$ Sol: $y = \dfrac{1}{x\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x + c}}$, S.P.C.: $y = \dfrac{1}{x\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x + 1 - \frac{\pi}{4}}}$.

Aula 21: EDOs homogéneas

A eq. dif. $y' = f(x,y)$ diz-se homogénea se $f(x,y)$ é homogénea (de grau zero[a]), isto é, se $\boxed{f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)}$, $\forall\,(x,y) \in D$, $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}$, tais que $(\lambda x, \lambda y) \in D$. Neste caso $f(x,y) = f(1, \dfrac{y}{x}) = g(\dfrac{y}{x})$, $(x \neq 0)$, pelo que uma equação homogénea pode sempre escrever-se na forma $\boxed{y' = g(\dfrac{y}{x})}$ em que g é uma função de uma variável apenas.

Resolução: Através da mudança de variável $\boxed{\dfrac{y}{x} = z}$, a edo homogénea transforma-se numa edo de variáveis separáveis em x e z: $\boxed{z + xz' = g(z)}$ cuja solução é $z = h(x) + C$, ou $W(z, x, C) = 0$. Revertendo a substituição obtém-se a solução da edo original: $\frac{y}{x} = h(x) + C$ ou $W(\frac{y}{x}, x, C) = 0$.

[a] Um função $f(x,y)$ diz-se homogénea de grau m se $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x,y)$.

Aula 21: Exercícios 2

Verifique que cada uma das seguinte EDOs é homogénea e determine o seu integral geral:

(a) $xe^{\frac{y}{x}}y' = ye^{\frac{y}{x}} + x;$ Sol: $y = x\,ln(ln(|x|) + c)$

(b) $(x^3 + y^3)dx - y^2xdy = 0;$ Sol: $y = x\,\sqrt[3]{c + 3\ln|x|}$

(c) $(x + y)dx + (y - x)dy = 0;$ Sol: $\ln(x^2 + y^2) = 2\arctan\frac{y}{x} + c$

(d) $(2y - x)y' = x - y;$ Sol: $\frac{\sqrt{2}\,y - x}{\sqrt{2}\,y + x} = c\,|2y^2 - x^2|^{\sqrt{2}},\, c \neq 0$

(e) $(x + y)y' = x - y;$ Sol: $y^2 + 2xy = x^2 + c \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2x^2 + c} - x$

Aula 21: Caso específico

$$\boxed{y' = h\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)}$$

Se a equação diferencial não é homogénea ($c_1 \neq 0$ ou $c_2 \neq 0$) então:

(1) Se $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ então a substituição $z = a_1x + b_1y$ (se $b_1 \neq 0$), ou $z = a_2x + b_2y$ (se $b_2 \neq 0$), converte a eq. dif. numa edo de variáveis separáveis.

(2) Se $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ então o sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0; \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$ determina uma única solução $(x, y) = (\alpha, \beta)$. A mudança de variáveis $\begin{cases} x = \alpha + w; \\ y = \beta + z. \end{cases}$ transforma a eq. dif. numa edo homogénea em w e $z = z(w)$: $\boxed{z' = h\left(\frac{a_1w + b_1z}{a_2w + b_2z}\right)}$

Aula 21: Exercícios 3

Resolva as seguintes equações diferenciais

(a) $y' = \dfrac{x+y+4}{x-y-6}$.   Sol: $\ln(x^2+y^2-2x+10y+26) = 2\,\arctan(\dfrac{y+5}{x-1}) + c$

(b) $y' = \dfrac{2x-y+1}{x-\frac{1}{2}y-4}$.   Sol: $16(2x-y)-(2x-y)^2 = 36x+c$

(c) $y' = \dfrac{x-y+3}{-x+2y-4}$.   Sol: $\dfrac{x-\sqrt{2}\,y+2+\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}\,y+2-\sqrt{2}} = (x^2-2y^2+2x+4y+2)^{\sqrt{2}}\,c$

(d) $y' = \dfrac{x-y}{x+y+8}$.   Sol: $y^2+16y+2xy = x^2+c \;\Leftrightarrow\; y = \pm\sqrt{2(x+4)^2+c}-x-8$

Tabela das primitivas quase imediatas $(c \in \mathbb{R})$

$$\int u'\, u^p\, dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + c, \quad p \neq -1$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + c$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + c$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctan(u) + c$$

$$\int u' \sin u dx = \cos u + c$$

$$\int u' \sec(u) \tan(u) dx = \sec u + c$$

$$\int u' \cos u dx = \sin u + c$$

$$\int u' \operatorname{cosec}(u) \mathrm{cotg(u)dx} = -\operatorname{cosec} \mathrm{u} + \mathrm{c}$$

$$\int u' \sec^2 u dx = \tan u + c$$

$$\int u' e^u dx = e^u + c$$

$$\int u' \operatorname{cosec}^2 u dx = -\mathrm{cotgu} + \mathrm{c}$$

$$\int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + c, \quad a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$$