Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo II - Agrupamento 4

Ano letivo 2016/2017 ($2^{\underline{o}}$ Semestre)

Gráficos, imagens e conjuntos de nível

---

1. Considere a reta r definida pelos pontos $A = (-1, 2, 0)\,, B = (0, 0, -3)\,.$ Determine:

   (a) uma equação vetorial da reta r;

   (b) as equações paramétricas de r;

   (c) equações cartesianas de r;

   (d) uma equação da reta s, que passa por $M = (2, 0, -3)$ e é paralela a r.

2. Escreva uma equação cartesiana do plano α :

   (a) que passa pelos pontos $A = (1, -2, -4)\,, B = (3, 1, -3)\,, C = (5, 1, -7)\,;$

   (b) definido pelas retas
   $$r : \frac{2-x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$$
   $$s : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{4} = -\frac{z}{2}$$

   (c) que contém a reta
   $$r : \frac{x-1}{2} = -\frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$$
   e passa pela origem.

3. Determine uma equação para cada um dos planos indicados:

   (a) o plano que passa pelos ponto $(1, 0, 2)$ e com vetor normal $(3, -2, 1)\,;$

   (b) o plano que passa pelo ponto $(2, -1, 1)$ e é perpendicular à reta definida por
   $$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3-t \\ y & = & 5+2t \\ z & = & 1+7t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}.$$

4. Determine as equações paramétricas da reta:
   $$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=2 \\ 3x-2y=5. \end{array}\right.$$

5. Para cada um dos seguintes exercícios, determine o domínio e descreva as curvas de nível da função:

   (a) $f(x, y) = x^2 - y^2$;
   (b) $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2}$;
   (c) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$;
   (d) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$;
   (e) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$;
   (f) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

6. Seja $V(x, y)$ o potencial elétrico de um ponto (x, y) do plano xy. As curvas de nível de V são chamadas curvas equipotenciais, porque nelas todos os pontos têm o mesmo potencial elétrico. Esboce algumas curvas equipotenciais de
$$V(x, y) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

7. Dada a função $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

   (a) Determine as equações das curvas de nível $z = \frac{1}{4}$, $z = 4$ e $z = 9$.
   (b) Determine a equação e faça o esboço da curva de nível que contém o ponto $(0, 2)$.

8. Seja $f(x, y) = \sqrt{10 - x - y^2}$.

   (a) Represente o domínio de f no plano xy.
   (b) Identifique as interseções do gráfico de f com os planos $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$, $y = 0$ e $x = 0$.

9. Associe a cada função o seu gráfico (indicado por A-F na Figura 1) e o gráfico das respectivas curvas de nível (indicado por I-VI na Figura 2).

   (a) $z = \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$;
   (b) $z = x^2y^2\ e^{-x^2-y^2}$;
   (c) $z = \frac{1}{x^2+4y^2}$;
   (d) $z = x^3 - 3xy^2$;
   (e) $z = \sin(x)\sin(y)$;
   (f) $z = \sin^2(x) + \frac{1}{4}y^2$.

10. Na Figura 3 são apresentadas curvas de nível para uma dada função f. Descreva uma possibilidade para a forma do gráfico de $f(x,y)$.

Figura 1:

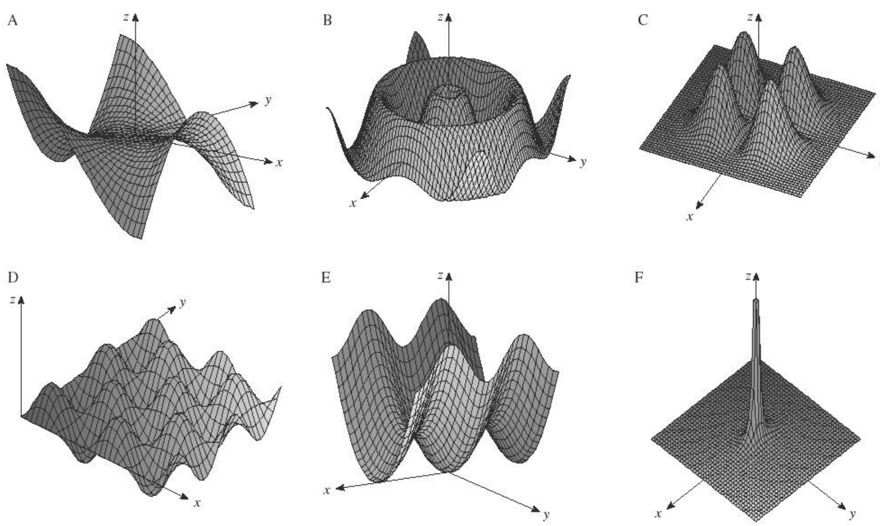


Figura 2:

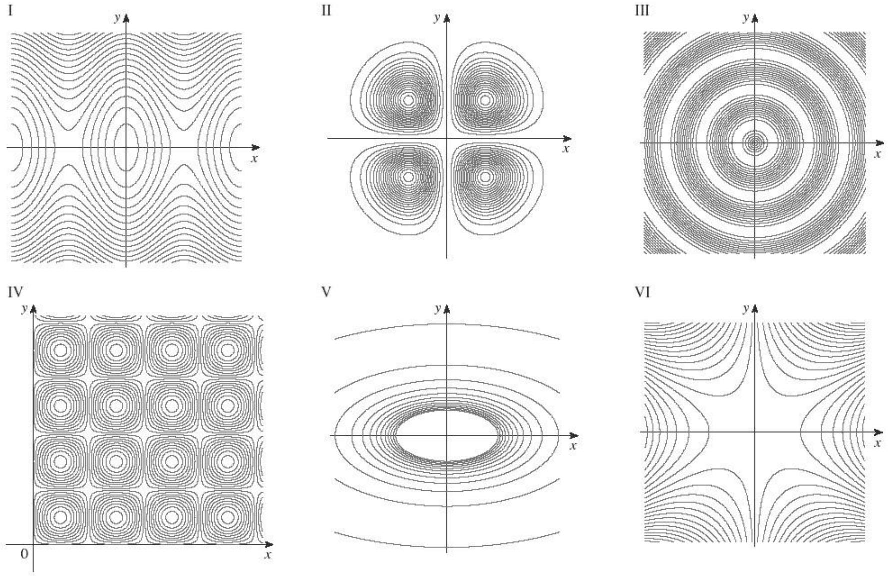
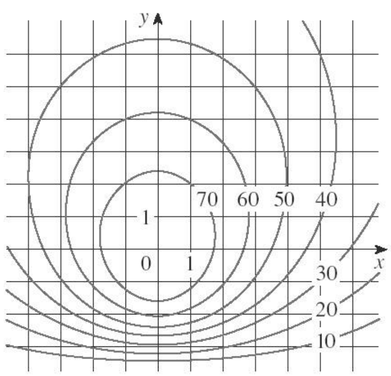


Figura 3:



11. Para cada uma das alíneas do exercício 9, indique uma função de 3 variáveis relativamente à qual o gráfico da função dada na alínea seja uma superfície de nível, e indicar o nível em causa.

12. Determine o domínio das seguintes funções e descreva-o geometricamente:

    (a) $g(x,y) = \arcsin \dfrac{x}{y^2}$;

    (b) $h(x,y,z) = \ln(2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6)$;

    (c) $j(x,y,z) = \dfrac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)}$;

    (d) $l(x,y,z) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}$, com $a \in \mathbb{R}$;

(e) $p\,(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$.

13. Determine as curvas de nível ou as superfícies de nível das seguintes funções e descreva-as geometricamente:

    (a) $f(x, y) = 2x + y$;
    (b) $g(x, y) = e^{xy}$;
    (c) $h(x, y, z) = x + y + 3z$;
    (d) $j\,(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

14. Desenhe a superfície de nível 1 de $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.