Apuntes de Topología I

Lara Olmos Camarena

3 de julio de 2017

Referencias

[1] Apuntes de *Topología*. Cursos 2015 a 2017. UAM. Profesor: Mª Ángeles Zurro.

[2] *Capítulos I, II y III - 2016-2017*. UAM. José García-Cuerva.

[3] *Topología*. James R. Munkres. 2ª edición.

Secundarias:

[4] *Problemas de topología general*. G. Fleitas y J. Margalef.

[5] *Introducción a la topología*. Juan Margaleff Roig y Enrique Outerelo Domínguez.

¡OJO! Estos apuntes no están libres de errores. Para cualquier corrección contactar: lara.olmos@estudiante.uam.es

Índice

1. Bloque I: Conceptos básicos

1.1. Espacios topológicos

Definición 1 (Topología sobre un conjunto). Una **topología sobre un conjunto X** es una colección τ de subconjuntos de X, $\tau \subset P(X)$, con las propiedades:

1. $\emptyset$ (vacío) y X (total) pertenecen a τ.
2. La **unión** de elementos de cualquier subcolección de τ está en τ. Es decir, dada $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ con $A_\lambda \in \tau, \forall\lambda \in \Lambda \Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \tau$.
3. La **intersección** de los elementos de cualquier subcolección **finita** de τ están en τ. Es decir, para $A \in \tau, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$.

El par (X, τ) es un **espacio topológico**.

Definición 2 (Conjunto abierto). Un subconjunto U de X es un **conjunto abierto de X** si U pertenece a la topología sobre X, τ.

$$U \subset X, U \text{ abierto de } X \Leftrightarrow U \in \tau$$

Definición 3 (Conjunto cerrado). Un subconjunto K de X es un **conjunto cerrado de X** si el **complementario de K** es abierto.

$$K \subset X, K \text{ cerrado de } X \Leftrightarrow C_X K \in \tau$$

Ejemplo 1. Dado el conjunto $X = \{a, b, c\}$.

- $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{c\}\}$ es una topología sobre X.
- $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a, b\}\}$ es una topología sobre X.
- $\tau_3 = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ **no** es una topología sobre X, porque $\{b\} = \{a, b\} \cap \{b, c\}$ y $\{b\} \notin \tau_3$.

1.1.1. Topologías habituales

Sea X un conjunto cualquiera.

- La colección de **todos** los subconjuntos de X es una topología sobre X, la **topología discreta**. En esta topología, los **conjuntos unipuntuales son abiertos y cerrados**.
  Para cada $x_0 \in X$, $G = \{x_0\} \in \tau$ luego G es abierto para τ. Además, $C_X G = X \setminus \{x_0\} \in \tau$, luego G es cerrado para τ.
- La topología compuesta únicamente por X y $\emptyset$ es la **topología trivial**.

- **Topología de Zariski o cofinita**. Dada la colección de todos los subconjuntos U de X tales que

$$U \in \tau \Leftrightarrow C_X U \text{ es finito o } U = \emptyset$$

Es topología porque tanto X como $\emptyset$ están en τ: $C_X X$ es finito (por ser $\emptyset$) y $C_X \emptyset$ es todo X. Sea $\{U_\alpha\}$ una familia indexada de elementos no vacíos de τ.

  - $\bigcup U_\alpha \in \tau$, porque $X \setminus \bigcup U_\alpha = \bigcap (X \setminus U_\alpha)$. El último conjunto es finito porque cada $X \setminus U_\alpha = C_X U_\alpha$ lo es.
  - $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_\alpha \in \tau$. Si $U_1, U_2, ..., U_n$ son elementos no vacíos de la topología, $X \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_\alpha = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (X \setminus U_i) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_X U_i$ (unión finita $\Rightarrow$ conjunto finito).

- Colección (a,b) = $\{x : a < x < b\}$ intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ es la **topología usual** en $\mathbb{R}$.
- **Topología límite inferior**: $\tau = \{[a, b) : a, b \in X, a < b\}$
- **Topología límite superior**: $\tau = \{(a, b] : a, b \in X, a < b\}$
- **Topología complemento numerable**: $\tau = \{U \subset X : X \setminus U \text{ numerable o } X \setminus U = X\}$

1.2. Bases y subbases

Definición 4 (Base para una topología)**.** Si X es un conjunto no vacío, diremos que $\beta \subset P(X)$ es una **base** para una topología sobre X, τ_β, si satisface:

1. Para cada $x \in X$ $\exists \Omega_x \in \beta$ elemento de la base que depende de x tal que $x \in \Omega_x$.
2. Si $B_1, B_2 \in \beta, x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \beta, x \in B_3$ y $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

También, se llama **base** de la topología τ a cualquier colección de conjuntos abiertos $\beta \subset \tau$ que cumple que cualquier **abierto es unión de alguna familia de conjuntos abiertos de** β.

Consecuencia: $X = \bigcup\limits_{B \in \beta} B$. $\bigcup\limits_{B \in \beta} B \subset X$, por ser β una colección de subconjuntos de X. $\bigcup\limits_{B \in \beta} B \supset X$ por la propiedad 1 de base.

Definición 5 (Subbase para una topología)**.** Una **subbase para una topología sobre X**, Σ, es una familia de subconjuntos de X tal que su **unión es X** y cuyas **intersecciones finitas** forman una **base**. (También se dice que Σ genera la topología).

1.2.1. Construcción de una topología a partir de una base, τ_β

$$U \subset X, U \in \tau_\beta \Leftrightarrow \forall x \in U, \exists\ \Omega_x \in \beta, x \in \Omega_x, \Omega_x \subseteq U$$

Demostración de que τ_β es una topología sobre X:

1. $\emptyset \in \tau_\beta$ porque $\forall x \in \emptyset, \exists \Omega_x \in \beta, x \in \Omega_x, \Omega_x \subset \emptyset$. $X \in \tau_\beta$ porque por la propiedad 1 de base, se verifica que $\forall x \in X, \exists \Omega_x \in \beta, x \in \Omega_x, \Omega_x \subset X$.
2. Dada la familia $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de elementos de τ_β, probamos que $A = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau_\beta$. Para cada $x \in A$, existe un índice λ_0 tal que $x \in A_{\lambda_0}$. Puesto que A_{λ_0} es abierto, $\exists B \in \beta$ tal que $x \in B \subset A_{\lambda_0}$. Entonces $x \in B$ y $B \subset A$, por lo que A es abierto por definición.
3. Dados $A, B \in \tau_\beta$ veamos que $A \cap B \in \tau_\beta$. Sea $x \in A \cap B \Rightarrow \exists \Omega_x \in \beta, x \in \Omega_x, \Omega_x \subset A$. También, $\exists \tilde{\Omega}_x \in \beta, x \in \tilde{\Omega}_x, \tilde{\Omega}_x \subset B$. Por la propiedad 2 de base, $\exists \hat{\Omega}_x \in \beta$, $x \in \hat{\Omega}_x$, $\hat{\Omega}_x \subset \Omega_x \cap \tilde{\Omega}_x \subset A \cap B$.

Observación: Cada elemento de la base es un abierto de X en la topología τ_β, $\forall B \in \beta, B \in \tau_\beta$.

> **Proposición 1.** Si X es un conjunto no vacío, β es una base para una topología, $\tau = \tau_\beta$. Entonces, τ es la familia de **uniones arbitrarias de elementos de** β.

Demostración: $U \in \tau \Rightarrow U = \bigcup\limits_{x \in U} \Omega_x$.

1.3. Comparación de topologías

Sea X conjunto no vacío, τ_1, τ_2 dos topologías sobre X.

Definición 6 (Más fina)**.** τ_2 **es más fina que** $\tau_1 \Leftrightarrow$ todo abierto de τ_1 es abierto de $\tau_2 \Leftrightarrow \tau_1 \subset \tau_2$.

Observación: La topología más fina que se puede dar sobre X es la topología discreta. Es decir, $\tau_{trivial} \subset \tau \subset \tau_{discreta}$.

> **Proposición 2.** Si β_1, β_2 son bases para las topologías τ_1, τ_2 de X, respectivamente, son equivalentes:
>
> 1. τ_2 es más fina que τ_1.
> 2. $\forall x \in X, \forall B_1 \in \beta_1, x \in B_1 \Rightarrow \exists B_2 \in \beta_2$ tal que $x \in B_2$ y $B_2 \subset B_1$.

Demostración:

$(1 \Rightarrow 2)$. Sea $x \in X$ y $B_1 \in \beta_1$ con $x \in B_1$. Como τ_2 es más fina que τ_1, $\tau_1 \subset \tau_2 \Rightarrow B_1 \in \tau_2$. Luego, $B_1 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$, con $\Omega_\lambda \in \beta_2$. Como $x \in B_1$, $\exists\ \lambda_0 \in \Lambda$, con $x \in \Omega_{\lambda_0}$. Basta tomar $B_2 = \Omega_{\lambda_0}$.

$(2 \Rightarrow 1)$. Sea $U \in \tau_1 \Rightarrow U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_{1,\lambda}$ con $B_{1,\lambda} \in \beta_1$ $\forall \lambda \in \Lambda$. Para cada $\lambda_0 \in \Lambda$, veamos que B_{1,λ_0} es abierto para τ_2.

Para cada $x \in B_{1,\lambda_0}$, por hipótesis, $\exists B_{2,\lambda_0,x} \in \beta_2$ con $x \in B_{2,\lambda_0,x}$, $B_{2,\lambda_0,x} \subset B_{1,\lambda_0} \Rightarrow$ $B_{1,\lambda_0} = \bigcup_{x \in B_{1,\lambda_0}} B_{2,\lambda_0,x} \Rightarrow U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \big(\bigcup_{x \in B_{1,\lambda}} B_{2,\lambda,x} \big) \in \tau_2$

Proposición 3. Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una **familia de abiertos** para τ. Si $\mathcal{F}$ satisface:

$$\forall U \in \tau, \forall x \in U \Rightarrow \exists\ \Omega \in \mathcal{F}, x \in \Omega \subset U$$

Entonces, $\mathcal{F}$ **es una base para una topología** y $\tau_{\mathcal{F}} = \tau$.

Ejemplo 1. La familia de abiertos $\mathcal{F} = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ de la topología usual es una base y $\tau_{usual} = \tau_{\mathcal{F}}$.

Ejemplo 2. La colección $[a,b) = \{x : a \leqslant x < b, a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ genera la **topología límite inferior**.

Comprobemos que la topología que genera $\beta_2 = \{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ no es la topología usual de $\mathbb{R}$, con base $\beta_1 = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. De hecho, la topología límite inferior es **más fina** que la topología usual de $\mathbb{R}$.

¿$\tau_{\beta_2} \subset \tau_{usual}$? Dado $x \in B_2 = [x, d)$, no existe $(a, d) = B_1$ abierto tal que $x \in B_1$ y que cumpla $B_1 \subset B_2$. Dicho de otra forma, $U_1 = [a, b)$ abierto de la topología límite inferior no puede ser un abierto en τ_{usual}, no puede escribirse como unión de elementos de β_1.

¿$\tau_{usual} \subset \tau_{\beta_2}$? Dado $x \in B_1 = (a,b) \in \beta_1$, $\exists\ B_2 = [x, b) \in \beta_2$ tal que $x \in B_2$ y $B_2 \subset B_1$. Dicho de otra forma, un abierto de la topología usual (a, b) es abierto en la topología límite inferior.

Definición 7 (Topología generada por un conjunto $\Sigma \in P(X)$). Sea X un conjunto y Σ una colección cualquiera de subconjuntos de X. Entre todas las **topologías que contienen a** Σ la **menos fina** (o **topología mínima** en el orden de conjuntos) es aquella engendrada por Σ, aquella cuyos **abiertos** son las **uniones de intersecciones de subfamilias finitas de** Σ.

1.4. Topología asociada a un orden

Definición 8 (Relación de orden u orden lineal)**.** Sea $X \neq \emptyset$, se dice que **R es una relación de orden (total) sobre X** si se cumplen las propiedades:

1. **Comparabilidad**: $\forall x, y \in X,\ x \neq y \Rightarrow xRy$ o yRx.
2. **Irreflexiva**: $\forall x, y \in X,\ xRy,\ yRx \Rightarrow (x \neq y)$. (Ningún $x \in X$ cumple xRx).
3. **Transitiva**: $\forall x, y, z \in X,\ xRy, yRz \Rightarrow xRz$.

Decimos que (X,R) es un conjunto (linealmente) ordenado.

Dados $a, b \in X$, denotamos los intervalos abiertos, cerrados, semiabiertos y rayos:

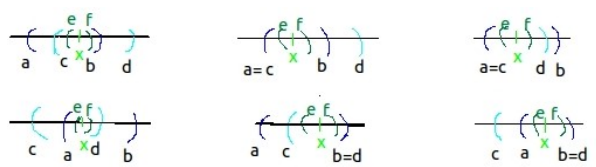
$$\begin{aligned} (a,b) &= \{x \in X : a < x < b\} & [a,b] &= \{x \in X : a \leqslant x \leqslant b\} \\ (a,b] &= \{x \in X : a < x \leqslant b\} & [a,b) &= \{x \in X : a \leqslant x < b\} \\ (a,\infty) &= \{x \in X : x > a\} & [a,\infty) &= \{x \in X : x \geqslant a\} \\ (-\infty,a) &= \{x \in X : x < a\} & (-\infty,a] &= \{x \in X : x \leqslant a\} \end{aligned}$$

Definición 9 (Base para la topología asociada al orden)**.** $\beta \subset P(X)$ formada por:

1. Todos los intervalos de la forma (a, b) con $a, b \in X$.
2. Si existe a_0 **mínimo** de X, incluye los intervalos: $[a_0, b)$ tales que $b \in X$.
3. Si existe b_0 **máximo** de X, incluye los intervalos: $(a, b_0]$ tales que $a \in X$.

Demostración:

1. Probemos que $\forall x \in X, \exists B \in \beta$ tal que $x \in B$. Sea $x \in X$.
   - Si x es mínimo de $X \Rightarrow \exists b \in X, b \neq x$ tal que $x \in B = [x, b) \in \beta$.
   - Si x es máximo de $X \Rightarrow \exists a \in X, a \neq x$ tal que $x \in B = (a, x] \in \beta$.
   - Si x no es mínimo ni máximo de $X \Rightarrow \exists a < x$ y $b > x$ para $a, b \in X$ tal que $x \in B = (a, b) \in \beta$.
2. Probemos que dados $B_1, B_2 \in \beta$, $\forall x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \beta, x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.
   Si $B_1 = (a, b), B_2 = (c, d)$ cumplen $\emptyset \neq B_1 \cap B_2 = (a, b) \cap (c, d)$, tenemos distintos casos, en función de las relaciones de orden entre los elementos a, b, c y d de X. En todos podemos encontrar $(e, f) = B_3 \subset B_1 \cap B_2$ tal que $x \in B_3$.



1.4.1. Orden lexicográfico

Sea $X = \mathbb{R}^2$, definimos la relación de orden:

$$(a, b) <_L (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a < c \\ a = c \Rightarrow b < d \end{cases}$$

El conjunto $\mathbb{R}^2$ no tiene máximo ni mínimo, por lo que la base de la topología generada en $(\mathbb{R}^2, <_L)$ tiene como abiertos:

$$(P, Q) = \{R \in \mathbb{R}^2 : P <_L R <_L Q \text{ donde } P, Q \in \mathbb{R}^2\}$$

Por ejemplo, siendo $Q_1 = (0, 1), P = (0, 0)$ y $Q_2 = (1, 0)$, tenemos que:

$$(P, Q_1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0) <_L (x, y) <_L (0, 1)\}$$
$$\equiv \{0 < x \text{ ó } 0 = x \Rightarrow 0 < y\} \text{ y } \{x < 0 \text{ ó } x = 0 \Rightarrow y < 1\} \equiv \{0 < y < 1\}$$

$$(P, Q_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (0, 0) <_L (x, y) <_L (1, 0)\}$$
$$\equiv \{0 < x \text{ ó } 0 = x \Rightarrow 0 < y\} \text{ y } \{x < 1 \text{ ó } x = 1 \Rightarrow y < 0\}$$
$$\equiv \{0 < x < 1, y \in \mathbb{R}\} \bigcup \{x = 0, 0 < y\} \bigcup \{x = 1, y < 0\}$$

Para describir un intervalo abierto de la topología usual de $\mathbb{R}$ para el eje de ordenadas en la topología asociada al orden lexicográfico, tenemos:

$$Y = \{(0, y) : y > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P, H_n) \quad \text{con } H_n = (0, n) \in \mathbb{R}^2$$

Dicha unión es abierta para la topología asociada al orden. Tenemos que el eje de ordenadas completo es: $L := \bigcup_{n=1}^{\infty} ((0, -n), (0, n))$

1.5. Topología producto

1.5.1. Sobre $X \times Y$

Definición 10 (Topología producto sobre $X \times Y$). Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos. La **topología producto** sobre $X \times Y$ es la topología que tiene como **base** la colección β:

$$\beta_{X \times Y} = \{U \times V : U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$$

$\beta_{X \times Y}$ **no es topología**, porque la unión de dos elementos disjuntos $U_1 \times V_1$, $U_2 \times V_2$ no se puede escribir como $U \times V$, $U \in \tau_X$, $V \in \tau_Y$.

Veamos si $\beta_{X \times Y}$ es base:

1. $(x_0, y_0) \in X \times Y \Rightarrow \exists U \in \tau_X, V \in \tau_Y, (x_0, y_0) \in U \times V$, basta que U = X, V = Y.

2. Sean $B_1 = U_1 \times V_1, B_2 = U_2 \times V_2$ y sea $(x_0, y_0) \in B_1 \cap B_2 = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$. $\exists B_3$ tal que $(x_0, y_0) \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \in \beta$ porque $U_1 \cap U_2 \in \tau_X$ y $V_1 \cap V_2 \in \tau_Y$, por la propiedad 3 de topología.

Proposición 4. Sean τ_X, τ_Y topologías con bases β_X, β_Y respectivamente. Entonces la colección:

$$C = \{A \times B : A \in \beta_X, B \in \beta_Y\}$$

es una **base para la topología producto de** $X \times Y$.

Demostración:

Generalmente $C = \{A \times B : A \in \beta_X, B \in \beta_Y\} \subset \beta = \{U \times V : U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$.

Para ver que C es base de la topología producto $X \times Y$, verificamos que cualquier conjunto de β es unión de conjuntos de C. Supongamos que:

$$U \in \tau_X \text{ se puede escribir como } U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \text{ con } A_\lambda \in \beta_X \ \forall \lambda \in \Lambda$$

$$V \in \tau_Y \text{ se puede escribir como } V = \bigcup_{\alpha \in \Delta} B_\alpha \text{ con } B_\alpha \in \beta_Y \ \forall \alpha \in \Delta$$

$$U \times V = (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \times (\bigcup_{\alpha \in \Delta} B_\alpha) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda, \alpha \in \Delta} (A_\lambda \times B_\alpha) \text{ con } A_\lambda \times B_\alpha \in C \ \forall \lambda \in \Lambda, \forall \alpha \in \Delta.$$

Demostración alternativa:

Veamos que C cumple las propiedades de base.

1. $\forall (x, y) \in X \times Y \ \exists \Omega_{(x,y)} \in C$ tal que $(x, y) \in \Omega_{(x,y)}$.

   Basta tomar $\Omega_{(x,y)} = \Omega_x \times \Omega_y$ tales que $\Omega_x \in \beta_X$ y $\Omega_y \in \beta_Y$ con $x \in \Omega_x$, $y \in \Omega_y$ (existen por ser β_X y β_Y bases).

2. Sean $\Omega_1, \Omega_2 \in C$ con $(x, y) \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \Rightarrow \ \exists \Omega_3 \in C$ tal que $(x, y) \in \Omega_3, \Omega_3 \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$.

   $$\left.\begin{array}{l} \Omega_1 = \Omega_{1x} \times \Omega_{1y} \text{ con } \Omega_{1x} \in \beta_X, \Omega_{1y} \in \beta_Y \\ \Omega_2 = \Omega_{2x} \times \Omega_{2y} \text{ con } \Omega_{2x} \in \beta_X, \Omega_{2y} \in \beta_Y \end{array}\right\} \Rightarrow x \in \Omega_{1x} \cap \Omega_{2x}, y \in \Omega_{1y} \cap \Omega_{2y}$$

   Como β_X y β_Y son bases para X e Y respectivamente,

   $$\left.\begin{array}{l} \exists \Omega_{3x} \in \beta_X \text{ tal que } x \in \Omega_{3x}, \Omega_{3x} \subset \Omega_{1x} \cap \Omega_{2x} \\ \exists \Omega_{3y} \in \beta_Y \text{ tal que } y \in \Omega_{3y}, \Omega_{3y} \subset \Omega_{1y} \cap \Omega_{2y} \end{array}\right\} \Rightarrow \Omega_3 = \Omega_{3x} \times \Omega_{3y} \in C, \ (x, y) \in \Omega_3,$$

   $\Omega_3 \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$

La topología generada por $\beta_{X\times Y} = \{U \times V : U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$ es:

$$\tau_{X\times Y} = \{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda \times V_\lambda) : U_\lambda \in \tau_X, V_\lambda \in \tau_Y, \forall\lambda \in \Lambda\}$$

Proposición 5. Si β_X y $\tilde{\beta}_X$ son bases de τ_X y β_Y y $\tilde{\beta}_Y$ son bases de $\tau_Y \Rightarrow \beta_X \times \beta_Y$ genera la misma topología en $X \times Y$ que $\tilde{\beta}_X \times \tilde{\beta}_Y$.

Definición 11 (Proyecciones de $X \times Y$)**.** Son las aplicaciones **sobreyectivas**:

$$\begin{aligned} \pi_1 : X \times Y &\to X & \qquad \pi_2 : X \times Y &\to Y \\ \pi_1(x, y) &= x & \qquad \pi_2(x, y) &= y \end{aligned}$$

Si $U \in \tau_X$, tenemos que

$$\pi_1^{-1}(U) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in U\} = U \times Y$$

y que $\pi_1^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en $X \times Y$. Análogamente para $V \in \tau_Y$,

$$\pi_2^{-1}(V) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in V\} = X \times V$$

es abierto para $X \times Y$.

Proposición 6. La colección $\mathbf{S} = \{\pi_1^{-1}(U) : U \in \tau_X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) : V \in \tau_Y\}$ es una **subbase** para la topología producto sobre $X \times Y$.

Demostración: Veamos que S es subbase de la topología producto, para ello:

1. La unión de los elementos de la subbase es $X \times Y$.
   $\bigcup_{U\in\tau_X} \pi_1^{-1}(U) \cup \bigcup_{V\in\tau_Y} \pi_2^{-1}(V) = ((\bigcup_{U\in\tau_X} U) \times Y) \cup (X \times (\bigcup_{V\in\tau_Y} V)) = X \times Y$
2. Las intersecciones finitas de elementos de la subbase forman abiertos de $X \times Y$. Dadas las familias $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de τ_X, $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de τ_Y, $W = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \pi_1^{-1}(U_\lambda) \cap \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \pi_2^{-1}(V_\lambda)$
   $= ((\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda) \times Y) \cap (X \times (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda)) = (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda) \times (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda)$
   Por la propiedad 3 de topología, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \tau_X$, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \in \tau_Y$, por lo que W es un elemento de la base de la topología sobre $X \times Y$.

Observación: Para el caso de dos espacios topológicos tenemos:

$$\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V) = (U \times Y) \cap (X \times V) = U \times V$$

Por tanto las dos formas de construir la topología producto (con la base $\beta_{X\times Y}$ y la subbase S) dan lugar a la misma topología. Veremos que en el caso de productos infinitos no.

1.5.2. Sobre un número finito de espacios topológicos

Definición 12 (Topología caja)**.** Dado el conjunto $Y = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, la topología caja es aquella generada por la base:

$$\beta = \{\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \text{ con } U_\lambda \in \tau_\lambda \forall\lambda \in \Lambda\}$$

Veamos que β es base.

1. $y = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in Y \Rightarrow B = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in \beta$, $X_\lambda \in \tau_\lambda$.
2. $B_1 = \prod_{\lambda\in\Lambda} U_{1,\lambda}, B_2 = \prod_{\lambda\in\Lambda} U_{\lambda,2}$
   $y \in B_1 \cap B_2, y = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \Rightarrow x_\lambda \in U_{1\lambda}$ o $x_\lambda \in U_{2\lambda}\ \forall\lambda \in \Lambda \Rightarrow B_1 \cap B_2 =$
   $= \prod_{\lambda\in\Lambda}(U_{1,\lambda} \cap U_{2,\lambda})$

Proposición 7. Sea $\{(X_\lambda, \tau_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos. Sea $Y = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, definimos la aplicación:

$$\pi_\lambda : Y \to X_\lambda,$$
$$y = (x_\mu)_{\mu\in\Lambda} \to x_\lambda$$

Definimos

$$\mathbf{S} := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \{\boldsymbol{\pi}_\lambda^{-1}(\mathbf{U}_\lambda) : \mathbf{U}_\lambda \textbf{ abierto en } \mathbf{X}_\lambda \textbf{ para } \boldsymbol{\tau}_\lambda\}$$

es una **subbase** para la **topología producto de Y**, $\tau_Y = \tau_{prod}$.

Observación: $\bigcap_{n=1}^{N} \pi_n^{-1}(U_n) = \prod_{n=1}^{N} U_n$

Demostración: Pongamos $\beta' = \{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda : U_\lambda \in S\}$, es decir, el conjunto de intersecciones finitas de elementos de S. Veamos que β' es una base:

1. $y \in Y \Rightarrow y \in B = Y \in \beta'$.
2. Sea $B_1, B_2 \in \beta'$, $x \in B_1 \cap B_2$. Tenemos que:
   $B_1 \in \beta' \Rightarrow \exists I_1 \subset \Lambda, |I_1| < \infty$ tal que
   $$B_1 = \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_{1\lambda} \text{ con } Y_{1\lambda} = \begin{cases} X_\lambda & \text{para } \lambda \notin I_1 \\ U_{1\lambda} \in \tau_\lambda & \text{para } \lambda \in I_1 \end{cases}$$
   $B_2 \in \beta' \Rightarrow \exists I_2 \subset \Lambda, |I_2| < \infty$ tal que
   $$B_2 = \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_{2\lambda} \text{ con } Y_{2\lambda} = \begin{cases} X_\lambda & \text{para } \lambda \notin I_2 \\ U_{2\lambda} \in \tau_\lambda & \text{para } \lambda \in I_2 \end{cases}$$

Luego $\exists B_3$, tal que $x \in B_3$,

$$B_3 := B_1 \cap B_2 = \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_{3\lambda} \text{ donde } Y_{3\lambda} = \begin{cases} X_\lambda & \text{si } \lambda \notin I_1 \cup I_2 \\ U_{1\lambda} \cap U_{2\lambda} & \text{si } \lambda \in I_1 \cap I_2 \\ U_{1\lambda} & \text{si } \lambda \in I_1 \setminus (I_1 \cap I_2) \\ U_{2\lambda} & \text{si } \lambda \in I_2 \setminus (I_1 \cap I_2) \end{cases}$$

1.5.3. Espacio producto de infinitos factores

Sea una familia numerable de espacios topológicos $(X_\lambda, \tau_\lambda)$.

Proposición 8. (Comparación de las topologías caja y producto)
La **topología por cajas** sobre $\prod X_\lambda$ tiene como base a todos los conjuntos de la forma $\prod U_\lambda$ donde $U_\lambda \in \tau_\lambda$ $\forall \lambda \in \Lambda$.

La **topología producto** sobre $\prod X_\lambda$ tiene como base a todos los U_λ donde U_λ es abierto en X_λ y $U_\lambda = X_\lambda$ excepto para un número finito de valores de λ. (Es decir, creamos los elementos de la base a partir de todas las intersecciones finitas de elementos de la subbase de la topología producto). Tenemos que para cada subconjunto finito de índices F:

$$\bigcap_{n \in F} \pi_n^{-1}(U_\lambda) = \prod_{n \in \mathbb{N}} V_n \text{ tal que } V_n = \begin{cases} U_n \text{ si } n \in F \\ X_n \text{ si } n \notin F \end{cases}$$

Proposición 9. La topología caja es más fina que la topología producto, $\tau_{prod} \subset \tau_{caja}$.

Demostración: (Empleando la Proposición 2). Consideramos las topologías τ_{prod} y τ_{caja} del conjunto $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, y sus respectivas bases, β_{prod} y β_{caja}.

Sea $x \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $x \in \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, $\prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \beta_{caja}$ porque cada $x_\lambda \in U_\lambda$ para algún $U_\lambda \in \tau_\lambda$.

Para un conjunto de índices finito F_0, $\bigcap\limits_{n \in F_0} \pi_n^{-1}(U_n) \in \beta_{prod}$ tal que $x \in \bigcap\limits_{n \in F_0} \pi_n^{-1}(U_n)$ y

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \subset \bigcap_{n \in F_0} \pi_n^{-1}(U_n) = \prod_{n \in \mathbb{N}} V_n \text{ donde } V_n = \begin{cases} U_n \text{ si } n \in F_0 \\ X_n \text{ si } n \notin F_0 \end{cases}$$

1.6. Topología de subespacio

Definición 13 (Topología de subespacio). Sea (X, τ) un espacio topológico, Y un subconjunto de X, $Y \subset X$. La familia

$$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$$

define una topología sobre Y, llamada la **topología de subespacio** (o inducida o heredada). (Y, τ_Y) es un **subespacio topológico** de (X, τ).

Comprobamos que efectivamente es topología:

1. $\emptyset \in \tau, Y \subset X \Rightarrow \emptyset, Y \in \tau_Y$.
2. $\forall \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}\ A_\lambda \in \tau_Y \Rightarrow \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau_Y$.

   Para cada $\lambda \in \Lambda$, $A_\lambda = U_\lambda \cap Y$ para cada $U_\lambda \in \tau$. $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = (\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda) \cap Y \in \tau_Y$
3. $\forall A, B \in \tau_Y \Rightarrow A \cap B \in \tau_Y$

$$\begin{matrix} A = U \cap Y, U \in \tau \\ B = V \cap Y, V \in \tau \end{matrix} \Rightarrow (U \cap V) \cap Y = A \cap B \in \tau_Y \text{ porque } U \cap V \in \tau$$

Ejemplo 3. Sea $Y = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, \tau)$, τ la topología usual de $\mathbb{R}$. Veamos si los siguientes conjuntos son abiertos o cerrados relativos de Y.

- $A = \{x \in Y : \frac{1}{2} < |x| < 1\} = (-1, \frac{-1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1) = ((-1, \frac{-1}{2}) \cap Y) \cup ((\frac{1}{2}, 1) \cap Y)$. A es abierto en Y por ser unión de abiertos relativos de Y.
- $B = \{x \in Y : \frac{1}{2} < |x| \leqslant 1\} = [-1, \frac{-1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1] = ((-2, \frac{-1}{2}) \cap Y) \cup ((\frac{1}{2}, 2) \cap Y)$. B es abierto por ser unión de los abiertos de Y $[-1, \frac{-1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, 1]$.
- $C = \{x \in Y : \frac{1}{2} \leqslant |x| < 1\} = (-1, \frac{-1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1)$ no es abierto en Y. El complementario de C es $C_Y(C) = \{-1\} \cup (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}) \cup \{1\}$, tampoco es abierto en Y, por lo que C no es cerrado.
- $D = \{x \in Y : \frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 1\} = [-1, \frac{-1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$ no es abierto. $C_Y(D) = (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ sí es abierto en Y, por tanto, D es cerrado.

Proposición 10. Sea Y subespacio de X, β base para τ de X, entonces, la colección de subconjuntos de Y:

$$\beta_Y = \{B \cap Y : B \in \beta\}$$

es **base de la topología de subespacio** τ_Y de Y.

Demostración:

1. Sea $y \in Y$. Tenemos que $y \in X$, por lo que $y \in B_y$ para algún $B_y \in \beta$, por ser β base para τ topología de X. Por tanto, $y \in B_y \cap Y$, $B_y \cap Y \in \beta_Y$.
2. Sean $B_1, B_2 \in \beta_Y$, sea $y \in B_1 \cap B_2$. Veamos que $\exists B_3 \in \beta_Y$ tal que $y \in B_3$ y $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Tenemos que $B_1 = A_1 \cap Y$, $B_2 = A_2 \cap Y$ para $A_1, A_2 \in \beta$, $y \in A_1 \cap A_2$. Como β es base, $\exists A_3 \in \beta$ tal que $y \in A_3$, $A_3 \subset A_1 \cap A_2$. Por tanto, basta considerar $B_3 = A_3 \cap Y$.

Proposición 11. Sea Y un subespacio de X. Ω es un **abierto relativo en Y** e Y es abierto en X $\Rightarrow$ Ω es un abierto en X.

Demostración: Sea Ω abierto en Y, $\Omega = U \cap Y$, para algún $U \in \tau$. Como $U, Y \in \tau \Rightarrow$ $\Omega = U \cap Y \in \tau$ por la propiedad 3 de topología.

1.6.1. Topología de subespacio y producto

¿Es lo mismo el subespacio del producto que el producto de los subespacios?

Dados los espacios (X, τ_X), (Y, τ_Y) consideramos $A \subset X$, $B \subset Y$. Tenemos dos formas diferentes de dar una topología sobre $A \times B$:

- Ver $A \times B$ como subespacio de $X \times Y$, $P_{A\times B}$.
- Dar en A y B las topologías τ_A, τ_B respectivamente y formar la topología producto en $A \times B$, el producto de los subespacios.

Proposición 12. La topología de **subespacio del producto es igual que la topología del producto de los subespacios**.

Demostración: Partiendo de la base de la topología producto de $X \times Y$:

$$\beta_{X\times Y} = \{U \times V : U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$$

Entonces para la topología de subespacio del producto tenemos:

$$\beta_{A\times B} = \{(U \times V) \cap (A \times B) : U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$$

Por otro lado, la base para la topología producto es:

$$\beta = \{E \times F : E \in \tau_A, F \in \tau_B\} = \{(U \cap A) \times (V \cap B) : U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$$

Tenemos que $\beta_{A\times B} = \beta$ ya que $(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B)$.

$(\supset)$ $(x, y) \in ((U \cap A) \times (V \cap B))$. $x \in U \cap A, y \in V \cap B \Rightarrow (x, y) \in (U \times V), (x, y) \in (A \times B)$.

$(\subset)$ $(x, y) \in ((U \times V) \cap (A \times B)) \Rightarrow x \in U, x \in A$ e $y \in V, y \in B \Rightarrow x \in (U \cap A), y \in (V \cap B)$.

1.6.2. Topología de subespacio y del orden

Supongamos que $(X, <)$ es un conjunto ordenado y consideremos $Y \subset X$. Hay dos maneras de dotar a Y de una topología:

- Considerar Y como **subespacio** del espacio topológico $(X, \tau_<)$. Esta topología sobre Y es la topología de subespacio, τ_Y.
- Dar primero un orden en Y, es decir, restringir a Y el orden de X (Y es totalmente ordenado también). Después, dar en Y la topología de orden, $\tau_<|_Y$.

Proposición 13. $\tau_<|_Y \subset \tau_Y$

Observación: En general, $\tau_Y \neq \tau_<|_Y$.

Definición 14 (Convexo). En un conjunto ordenado X, un subconjunto Y se dice **convexo** si $\forall a, b \in Y$ y $\forall c \in X$, $a < c < b$ se tiene que $c \in Y$.

Proposición 14. Sea X un conjunto totalmente ordenado. Entonces la colección de todos los rayos abiertos:

$$\Sigma = \{(-\infty, a) : a \in X\} \cup \{(a, \infty) : a \in X\}$$

es una subbase para la topología del orden sobre X.

Proposición 15. Sea $(X, <)$ un conjunto ordenado y consideramos la topología del orden $\tau_<$. Sea Y un conjunto **convexo** $Y = (a, b)$ ó $(-\infty, b)$ ó $(a, +\infty)$. Entonces,

$$\tau_Y = \tau_<|_Y \text{ es la topología asociada al orden en } Y$$

Demostración: La subbase de τ_X es $S_X = \{(-\infty, a) : a \in X\} \cup \{(b, \infty) : b \in X\}$. Sabemos que $\forall B \in S_X \Rightarrow B \cap Y \in \tau_<|_Y$. La subbase para la topología $\tau_<|_Y$ es:
$S_<|_Y = \{(-\infty, a) : a \in Y\} \cup \{(b, \infty) : b \in Y\}$.

Tenemos que probar que las topologías generadas por las bases que forman las subbases (con las intersecciones finitas de sus elementos) son iguales. Es decir, hay que comprobar que $\tau_Y \subset \tau_<| \subset Y, \tau_<|_Y \subset \tau_Y$, para cada posible subconjunto ordenado Y. Probaremos para el caso $Y = (a, b)$.

Sea $B \in S \Rightarrow B \cap Y \in \tau_<|_Y$ por definición de subbase. Si $B = (-\infty, a) = \{x \in X : x < a\}$ $\Rightarrow B \cap Y = \{x \in Y : x < a\}$, entonces, $\tau_Y \subset \tau_<|_Y$.

Para ver el contenido contrario: $(a, b)_X = \{x \in X : a < x < b\}$, $(a, b)_Y = \{x \in Y : a < x < b\}$,
$S<|_Y = \{(-\infty, y)_Y : y \in Y\} \cup \{(y, \infty)_Y : y \in Y\}$
$= \{(-\infty, y)_X \cap Y : y \in Y\} \cup \{(y, \infty)_X \cap Y : y \in Y\} = S_X \cap Y \equiv S_X$.

1.7. Entornos

Definición 15 (Entorno)**.** Sea $\Omega \subset X$, $x \in X$. Se dice Ω es un **entorno** de x si $U \in \tau$ tal que $x \in U$, $U \subset \Omega$. $\mathbb{V}(X) = \{\Omega \subset X : V \text{ entorno de } x\}$

Observación: Puede ser subconjunto abierto y/o cerrado o ni abierto ni cerrado en X.

Proposición 16. Las colecciones de todos los entornos de $\mathbb{V}(x)$, $x \in X$ de un espacio topológico satisfacen las propiedades:

- $\forall x \in X$ y $\forall \Omega \in \mathbb{V}(x)$, $x \in \Omega$.
- $U, V \in \mathbb{V}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathbb{V}(x)$
- $\Omega \subset U$, $\Omega \in \mathbb{V}(x) \Rightarrow U \in \mathbb{V}(x)$
- $\Omega \in \mathbb{V}(x) \Rightarrow \exists V \subset \Omega$, $V \in \mathbb{V}(X)$ y $\forall y \in V$, $\Omega \in \mathbb{V}(y)$

Observación: Estas propiedades son las que se deben verificar para que dada una familia de subconjuntos de X para cada $x \in X$, $F(x)$ defina una única topología en X tal que $\forall x \in X$ $\mathbb{V}(x) = F(x)$.

Proposición 17. Sea (X, τ) espacio topológico y sea Y subconjunto con la topología de subespacio. Tenemos que para cualquier $V \subset Y$ y cualquier $y \in Y$, son equivalentes:

1. V es entorno de y en la topología de subespacio.
2. $\exists U \subset X$ tal que U es entorno de y en el espacio topológico (X, τ) y $V = U \cap Y$.

Observación: Una forma de dar la topología de subespacio en Y sería considerar para cada $y \in Y$ la colección $F(y) = \{V \cap Y : V \in \mathbb{V}(y)\}$ y ver que cumple las cuatro condiciones que caracterizan a los sistemas de entornos.

Definición 16 (Sistema fundamental de entornos o base de entornos de x)**.** Un sistema fundamental de entornos de $x \in X$, β_x es una familia de subconjuntos de X tales que

$$\forall \Omega \text{ entorno de } x,\ \exists B \in \beta_x \text{ tal que } B \subset \Omega$$

Ejemplo 4. $X = \mathbb{R}$, $\tau = \tau_{usual}$, $x \in \mathbb{R}$. $\{(x - \epsilon, x + \epsilon)\} = \beta_x$ para $\epsilon > 0$.

1.8. Interior de un conjunto

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea A subconjunto de X. Sea $x \in X$.

Definición 17 (Punto interior). x es **interior a A** $\Leftrightarrow \exists U \in \tau, x \in U, U \subset A$.

Definición 18 (Interior de un conjunto). Es la **unión de todos los abiertos contenidos en A**. También, $\mathrm{Int}(A) = \{x \in A : \ x \text{ es interior a } A\}$

Proposición 18. $\mathrm{Int}(A)$ es el **mayor abierto** contenido en A.

Proposición 19. A es abierto en $X \Leftrightarrow A = \mathrm{Int}(A)$.

Proposición 20. $\forall A, B \subset X$, $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$.

Demostración: $(\subset)$ Sea $x \in \mathrm{Int}(A \cap B) \Rightarrow \exists U \in \tau$ tal que $x \in U, U \subset A \cap B \Rightarrow U \subset A$ y $U \subset B$. Por lo tanto, $x \in \mathrm{Int}(A)$ y $x \in \mathrm{Int}(B) \Rightarrow x \in \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$.

$(\supset)$ Sea $x \in \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \Rightarrow x \in \mathrm{Int}(A)$ y $x \in \mathrm{Int}(B)$. Existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$ y $x \in V$, $U \subset A$ y $V \subset B$. Por tanto, $x \in U \cap V \subset A \cap B$. $U \cap V \in \tau, x \in \mathrm{Int}(A \cap B)$.

Proposición 21. Sea X conjunto y $f : P(X) \to P(X); A \to f(A)$ aplicación que cumple:

1. $\forall A \subset X, f(A) \subset A$.
2. $\forall A \subset X, f(f(A)) = f(A)$.
3. $\forall A, B \subset X, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
4. $f(X) = X$

Entonces $\exists! \tau$ en X tal que $\forall A \subset X$, $\mathrm{Int}(A) = f(A)$

Demostración: Veamos que $\tau = \{A \subset X : f(A) = A\}$ es topología. $\emptyset \in \tau$ porque $f(\emptyset) \subset \emptyset \Rightarrow f(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \tau$. También $X \in \tau$ porque $f(X) = X$.

¿$f\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau$? Es decir, ¿para cada $f(U_\lambda) = U_\lambda \forall \lambda \in \Lambda \Rightarrow f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$?

Por 3 tenemos que $C \subset D \Rightarrow f(C) \subset f(D)$. Entonces, $\forall \lambda \in \Lambda$ $f(U_\lambda) \subset f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda) \Rightarrow$

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(U_\lambda) \subset f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \Rightarrow f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

$A, B \in \tau$ con $f(A) = A, f(B) = B \Rightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) = A \cap B \Rightarrow A \cap B \in \tau$

Por último, vemos si para esta τ tenemos que $\forall A \subset X$, $\mathrm{Int}(A) = f(A)$.
$f(f(A)) = f(A) \Rightarrow f(A) \in \tau$. Como $f(A) \subset A \Rightarrow f(A) \subset \mathrm{Int}(A)$.
En la otra dirección $\mathrm{Int}(A) \subset A \Rightarrow \mathrm{Int}(A) = f(\mathrm{Int}(A)) \subset f(A)$.

1.9. Conjuntos cerrados

Recordemos que un subconjunto K de X es un **conjunto cerrado de X** si el **complementario de K**, $C_X K$ o $X \setminus K$, es abierto.

Proposición 22. Sea $X \neq \emptyset$, $F \subset P(X)$. Si se cumplen las propiedades:

1. $\emptyset, X \in F$.
2. La **intersección arbitraria** de elementos de F está en F.
3. La **unión finita** de elementos de F está en F.

Entonces $\exists \tau$ topología sobre X tal que $U \in \tau \Leftrightarrow C_X U \in F$.

Demostración:

1. $\emptyset$, X son cerrados porque sus complementarios son abiertos X, $\emptyset$ respectivamente.
2. Dada una colección de conjuntos cerrados $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ aplicamos la ley de De Morgan:
$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} (X \setminus A_\alpha)$$
Como los conjuntos $X \setminus A_\alpha$ son abiertos por definición, la parte derecha es unión arbitraria de abiertos, por tanto, abierto. Así, $\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$ es cerrado.
3. Si A_i es cerrado para $i = 1, ..., n$ consideramos la ecuación
$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus A_i)$$
El conjunto de la parte derecha es una intersección finita de abiertos, por tanto abierto. Así $\bigcup A_i$ es cerrado.

Proposición 23. Sea Y subespacio de X. Un conjunto **A es cerrado en Y** $\Leftrightarrow A = F \cap Y$ para algún F cerrado en X.

Demostración: $(\Leftarrow)$ Sea $A = F \cap Y$ con F cerrado en $X \Rightarrow X \setminus F$ es abierto en $X \Rightarrow (X \setminus F) \cap Y$ es abierto en Y. $(X \setminus F) \cap Y = Y \setminus A$, por lo que también es abierto $\Rightarrow A$ es cerrado en Y.
$(\Rightarrow)$ Sea A cerrado en $Y \Rightarrow Y \setminus A$ es abierto en $Y \Rightarrow Y \setminus A = U \cap Y$ para U abierto en X $\Rightarrow X \setminus U$ es cerrado en X y $A = (X \setminus U) \cap Y$, donde $X \setminus U$ es cerrado.

Proposición 24. Sea Y subespacio de X, $A \subset Y$. Si A es un cerrado en Y e Y es cerrado en $X \Rightarrow A$ es cerrado en X.

1.10. Adherencia o cierre de un conjunto

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea A subconjunto de X. Sea $x \in X$.

Definición 19 (Punto adherente). x es **adherente a A** $\Leftrightarrow \forall K$ cerrado de X, $A \subset K \Rightarrow x \in K$.

Definición 20 (Adherencia de un conjunto). Es la **intersección de todos los cerrados de X que contienen a A**. También, $\overline{A} \equiv \mathrm{Adh}(A) = \{x \in X : \ x \text{ es adherente a } A\}$.

Proposición 25. $\overline{A}$ es el **menor cerrado** que contiene a A.

Proposición 26. $\mathrm{Int}(A) \subset A \subset \overline{A}$.

Proposición 27. A es cerrado en X $\Leftrightarrow A = \overline{A} \Leftrightarrow A' \subset A$

Proposición 28. (Criterio para $x \in \overline{A}$)

1. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall \mathbf{U} \in \boldsymbol{\tau}$ tal que $x \in U$, $U \cap A \neq \emptyset$. (Análogo si U entorno de x).
2. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall B \in \beta$ tal que $x \in B$, $B \cap A \neq \emptyset$.

Demostración: 1. $(x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall K \text{ cerrado en } X, A \subset K, x \in K) \Leftrightarrow \forall\, U \in \tau, x \in U, U \cap A \neq \emptyset$.

$(\rightarrow)$ Sea U abierto en X, $x \in U$. Sea $K = C_X U$, cerrado en X. Si $A \subset K \Rightarrow x \in K \Rightarrow x \notin U$, absurdo. Luego $K \not\supset A \Leftrightarrow C_X U \not\supset A$, por lo tanto, $U \cap A \neq \emptyset$.

$(\leftarrow)$ Sea K cerrado en X, $A \subset K$. Sea $U = C_X K$ abierto. Si $x \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow C_X K \cap A \neq \emptyset$, pero $K \supset A$, absurdo. Si $x \notin C_X K \Rightarrow x \in K$.

2. $(\rightarrow)$ $x \in \overline{A} \Rightarrow \forall B \in \beta, x \in B, B \cap A \neq \emptyset$. Misma demostración que en $1 \rightarrow$ para $B \in \beta$, B abierto en X (puesto que los elementos de la base son abiertos para la topología que genera dicha base).

$(\leftarrow)$ Sea $U \in \tau \Rightarrow U = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda, B_\lambda \in \beta$. Como $x \in U \Rightarrow \exists \lambda_0 \in \Lambda, x \in B_{\lambda_0} \Rightarrow B_{\lambda_0} \cap A \neq \emptyset$.
Como $B_{\lambda_0} \cap A \subset \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} (B_\lambda \cap A) = U \cap A \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$.

Proposición 29. $\forall A, B \subset X$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Demostración:

$(\subset)$ Sea $x \in \overline{A \cup B}$. Por definición, $\forall U \in \tau$ tal que $x \in U$ se cumple que $U \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. Por tanto, $U \cap A \neq \emptyset$ o $U \cap B \neq \emptyset$. Si se da el primer caso, $x \in \overline{A}$; en el segundo, $x \in \overline{B}$. En ambas situaciones, $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

($\supset$) Sea $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Bien $x \in \overline{A}$ o $x \in \overline{B}$. Si $x \in \overline{A} \Rightarrow \forall U \in \tau$, $x \in U$ y $U \cap A \neq \emptyset \Rightarrow U \cap (A \cup B) \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$. Análogo para el caso $x \in \overline{B}$.

Proposición 30. Sea Y subespacio (con la topología de subespacio τ_Y) de (X, τ). Entonces, $\forall E \subset Y$ el **cierre de E en la topología de subespacio** es:

$$Adh_Y(E) = Adh_X(E) \cap Y$$

Demostración: Los complementarios de los cerrados de Y son abiertos en Y, es decir, para $A \in \tau$, $\mathbf{Y \setminus (Y \cap A) = Y \cap C_X(Y \cap A)} = Y \cap (C_X(Y) \cup C_X(A)) = Y \cap C_X(A) = Y \cap C$ donde C es un cerrado de (X, τ). Como $Adh_Y(E)$ es la intersección de todos los **cerrados de** (Y, τ_Y) **que contienen a E**: $Adh_Y(E) = \bigcap\limits_{E \subset C} (Y \cap C) = Y \cap (\bigcap\limits_{E \subset C} C) = Y \cap Adh_X E$.

Proposición 31. Sea X conjunto y $f : P(X) \to P(X); A \to f(A)$ aplicación que cumple:

1. $\forall A \subset X$, $f(A) \subset A$.
2. $\forall A \subset X$, $f(f(A)) = f(A)$.
3. $\forall A, B \subset X$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
4. $f(\emptyset) = \emptyset$

Entonces $\exists! \tau$ en X tal que $\forall A \subset X$, $\overline{A} = f(A)$

Definición 21 (Conjunto denso). A es **denso** $\Leftrightarrow Adh_X(A) = X$.

1.11. Exterior y frontera

Definición 22 (Exterior de un conjunto). Es el conjunto de los puntos exteriores:

$$x \in X \text{ es } \textbf{exterior} \text{ a } A \Leftrightarrow x \in Int(C_X(A))$$

Proposición 32. $ext(A) = C_X(\overline{A}) = Int(C_X(A))$.

$$x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists V \in \mathbb{V}(x) \text{ tal que } V \cap A = \emptyset \Leftrightarrow$$
$$\exists V \in \mathbb{V}(x) \text{ tal que } V \subset C_X(A) \Leftrightarrow x \in Int(C_X(A))$$

Definición 23 (Frontera de un conjunto). $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{C_X(A)}$. Es cerrada.

- $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A)$.
- $\overline{A} = \mathrm{Fr}(A) \cup A$.
- La frontera de un conjunto es igual a la frontera de su complemento.
- $p \in \mathrm{Fr}(A) \Leftrightarrow$ todo entorno de p contiene al menos un punto del conjunto y al menos un punto que no sea del conjunto.
- A **cerrado** $\Leftrightarrow \mathrm{Fr}(A) \subset A$.
- A **abierto** $\Leftrightarrow A \cap \mathrm{Fr}(A) = \emptyset$.

1.12. Puntos de acumulación y conjunto derivado

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $A \subset X$. Sea $x \in X$.

Definición 24 (Punto de acumulación de A). $x \in X$ es un **punto de acumulación** de A $\Leftrightarrow$ **Cada entorno de x** corta a A en un punto distinto de x.

Definición 25 (Conjunto derivado). $A' = \{x \in X : x \text{ es punto de acumulación de } A\}$

Proposición 33. $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \cup \mathbf{A'}$.

Demostración:

$(\supset)$ $A \subset \overline{A}$ por definición. Veamos que $A' \subset \overline{A}$. Si $x \in A'$, para cada entorno de x, Ω_x, $\exists U_{\Omega_x} \subset \Omega_x$, $U_{\Omega_x} \in \tau$ tal que $x \in U_{\Omega_x} \Rightarrow U_{\Omega_x} \cap A \neq \emptyset$ (cada entorno de x interseca a A). Luego, por el teorema 9, $x \in \overline{A}$. $A \subset \overline{A}$ y $A' \subset \overline{A} \Rightarrow A \cup A' \subset \overline{A}$.

$(\subset)$ Sea $\mathbf{x} \in \overline{\mathbf{A}}$. Si $x \in A \Rightarrow x \in A \cup A'$, queda demostrado. Pero si $x \notin A \Rightarrow \forall\, \Omega$ entorno de x se da que $\Omega \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in \Omega \cap A$ con $y \neq x \Rightarrow x \in A'$.

Ejemplo 5. En el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_{cofinita})$, consideremos el subconjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ donde $x_{2p} = 1 - 1/2p$ y $x_{2p+1} = -1 + 1/(2p+1)$.

Tenemos que $A' = \{1, -1\} \cup A = \mathbb{R} = \overline{A}$, porque podemos tomar entornos de cada $x \in A$ de forma que cortan en algún $y \in A$, $x \neq y$. Dichos entornos tienen abiertos de la forma $\mathbb{R} \setminus \{x_i\}_{i \in I}$ para un conjunto de índices I finito que cumplen la condición de corte con A.

En la topología usual, $A' = \{\{1\}, \{-1\}\}$

1.13. Funciones continuas

Sean (X,τ), (Y,S) dos espacios topológicos, $f : X \to Y$ aplicación.

Definición 26 (Función continua). f es **continua** $\Leftrightarrow \forall \mathbf{V} \in \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{Y}} \Rightarrow \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{V}) \in \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{X}}$. (Análogo para entornos).

Ejemplo 6. $\pi_1 : X \times Y \to X : (x,y) \to x$. $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y \in \tau_{X\times Y}$, $U \in \tau_X \Rightarrow \pi_1$ es continua. También π_2.

Proposición 34. Son equivalentes:

1. f continua.
2. $\forall A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$
3. $\forall F \subset Y$, F cerrado en $Y \Rightarrow f^{-1}(F)$ cerrado de X.

Demostración:

$(3 \to 1)$. Sea $V \in \tau_Y$. Sea $F = C_Y(V)$ cerrado en $Y \Rightarrow f^{-1}(C_Y(V))$ cerrado en X. Como $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{V})) = \mathbf{C}_{\mathbf{X}}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{V}))$. Luego $f^{-1}(V)$ es abierto.

Observación: $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{V})) = \mathbf{C}_{\mathbf{X}}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{V}))$.
$x \in f^{-1}(C_Y(V)) \Rightarrow f(x) \in C_Y(V) \Rightarrow f(x) \notin V \Rightarrow x \notin f^{-1}(V) \Rightarrow x \in C_X(f^{-1}(V))$
$x \in C_X(f^{-1}(V)) \Rightarrow x \notin f^{-1}(V) \Rightarrow f(x) \notin V \Rightarrow f(x) \in C_Y(V) \Rightarrow x \in f^{-1}(C_Y(V))$

$(1 \to 2)$. Sea $x \in \overline{A}$ tal que $y = f(x)$. Sea $V \in \tau_Y$, $y \in V$. Como f es continua $\Rightarrow$ $U = f^{-1}(V) \in \tau_X$. Tenemos que $x \in f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V) = U \in \tau_X \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$ porque $x \in \overline{A}$. Entonces, $\exists a \in A$, $f(a) \in V \Rightarrow f(a) \in f(A) \cap V \Rightarrow f(A) \cap V \neq \emptyset$.

$(2 \to 3)$. Sea $F \subset Y$, F cerrado en Y. Pongamos $A = f^{-1}(F) \subset X \Rightarrow f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))}$.
Veamos que $f^{-1}(F)$ es cerrado $\Leftrightarrow \overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$.
$(\supset)$ Tenemos que $f^{-1}(F) \subset \overline{f^{-1}(F)}$, por definición de cierre.
$(\subset)$ $f(f^{-1}(F)) = f(\{x \in X : f(x) \in F\}) = f(X) \cap F \subset F \Rightarrow f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F$ $\Rightarrow \overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(F)$.

Proposición 35. $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ continua $\Leftrightarrow \forall B \subset Y$, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Demostración: $(\to)$ Sea $B \subset Y$. $B \subset \overline{B} \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\overline{B}) \Rightarrow \overline{f^{-1}(B)} \subset \overline{f^{-1}(\overline{B})} = f^{-1}(\overline{B})$ porque $\overline{B}$ es cerrado en Y y f continua, luego $f^{-1}(\overline{B})$ es cerrado de X.

$(\leftarrow)$ Sea B cerrado en $Y \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(B)$. Por def., $f^{-1}(B) \subset \overline{f^{-1}(B)}$. Tenemos que $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$, luego es cerrado y así f continua.

Proposición 36. $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ continua $\Leftrightarrow \forall N \subset Y\ f^{-1}(\mathrm{Int}(N)) \subset \mathrm{Int}(f^{-1}(N))$.

Demostración:

$(\to)$ Sea $N \subset Y$. $\mathrm{Int}(N) \subset N \Rightarrow f^{-1}(\mathrm{Int}(N)) \subset f^{-1}(N)$ y $f^{-1}(\mathrm{Int}(N))$ es abierto $\Rightarrow f^{-1}(\mathrm{Int}(N)) \subset \mathrm{Int}(f^{-1}(N))$.

$(\leftarrow)$ Sea $B \in \tau' \Rightarrow B = \mathrm{Int}(B) \Rightarrow f^{-1}(B) = f^{-1}(\mathrm{Int}(B)) \subset \mathrm{Int}(f^{-1}(B))$. Luego $f^{-1}(B)$ es abierto.

Proposición 37. Sea β_Y una base para τ_Y. Entonces,

$$f : X \to Y \text{ es continua} \Leftrightarrow \forall B \in \beta_Y,\ f^{-1}(B) \in \tau_X$$

Demostración:

$(\to)$ $\forall B \in \beta_Y$, $B \in \tau_Y$. Como f es continua, $f^{-1}(B) \in \tau_X$.

$(\leftarrow)$ Sea $V \in \tau_Y$, $V = \bigcup\limits_{\alpha \in \Delta} B_\alpha$ con $B_\alpha \in \beta_Y \Rightarrow f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha \in \Delta} B_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in \Delta} f^{-1}(B_\alpha)$. Cada $f^{-1}(B_\alpha)$ es abierto, $f^{-1}(V) \in \tau_X$ también.

Proposición 38. Sea $f : X \to Y$ y sea Σ subbase de (Y, τ_Y). Entonces,

$$f \text{ es continua} \Leftrightarrow \forall S \in \Sigma,\ f^{-1}(S) \text{ es abierto}$$

Demostración:

$(\to)$ Si f es continua y $\forall S \in \Sigma$, $S \in \tau_Y \Rightarrow f^{-1}(S) \in \tau_X$.

$(\leftarrow)$ Sea $A \in \tau_Y$. $f^{-1}(A) = f^{-1}(\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} (\bigcap\limits_{i=1}^{n} S_{i,\lambda})) = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} (\bigcap\limits_{i=1}^{n} f^{-1}(S_{i,\lambda}))$ es abierto en X. Luego f es continua.

Proposición 39. Sea $\tau_1 \subset \tau_2$, τ_2 más fina que $\tau_1 \Leftrightarrow$

$$\mathrm{id} : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2); x \to x \text{ es continua.}$$

Demostración:

Proposición 40. Reglas de construcción de funciones continuas. Sean X,Y, Z espacios topológicos.

1. **Función constante**. $f : X \to Y$, $f(x) = y_0$, $\forall x \in X \Rightarrow f$ es continua.
2. **Composición**. Sean $f : X \to Y$ continua, $g : Y \to Z$ aplicaciones. Entonces, $g \circ f : X \to Z$ es continua.
3. **Restricción del dominio**. $f : (X, \tau) \to Y$ continua, $A \subset X \Rightarrow f_A = f|_A : (A, \tau_A) \to Y$ continua.
4. **Restricción del recorrido**. $f : X \to Y$, $W \subset Y$, $\mathrm{Im}(f) \subset W \Rightarrow f : X \to W$ continua.
5. **Inclusión**. $f : X \to Y$ continua, $Y \subset Z$ y además $\tau_X = \tau_X|_Y \Rightarrow f : X \to Z$ continua.

Proposición 41. (Lema de pegado). Sea X espacio topológico unión de dos cerrados propios, $X = A \cup B$ con $A \subset X$, $B \subset X$.

Sean $f : A \to Y$, $g : B \to Y$ continuas con $f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B} \Rightarrow \exists h : X \to Y$ continua y extensión de ambas, es decir, $h|_A = f$, $h|_B = g$.

Demostración: Sea $h : X = A \cup B \to Y, x \to h(x)$ donde

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in A \\ g(x) \text{ si } x \in B \end{cases}$$

Sea F un cerrado de Y, veamos que $h^{-1}(F)$ es cerrado en X.

$h^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$ con:

- $f^{-1}(F)$ es cerrado en X porque F es cerrado en A y A es cerrado en X
- $g^{-1}(F)$ es cerrado en X porque F es cerrado en B y B es cerrado en X.

Así, $h^{-1}(F)$ es cerrado en X por ser unión de cerrados de X.

Observación: No se puede generalizar el lema de pegado a una colección infinita de cerrados.

Proposición 42. Continuidad en productos. Sean $f : X \to Y$, $g : X \to Z$ continuas $\Rightarrow$ la aplicación $h = f \times g$ es continua.

$$\begin{aligned} h := (f, g) : X &\to Y \times Z \\ x &\to (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

Demostración: Sea Ω abierto en $Y \times Z$. Entonces $\Omega = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \times W_\lambda$ con $V_\lambda \in \tau_Y, W_\lambda \in \tau_Z$

$\Rightarrow h^{-1}(\Omega) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} h^{-1}(V_\lambda \times W_\lambda)$

Veamos que $h^{-1}(V_\lambda \times W_\lambda)$ es abierto en X $\forall \lambda \in \Lambda$. Para ello, probemos que $h^{-1}(V_\lambda \times W_\lambda) = f^{-1}(V_\lambda) \cap g^{-1}(W_\lambda)$ abierto en X.

$(\subset)$ Sea $x \in h^{-1}(V_\lambda \times W_\lambda) \Rightarrow (f(x), g(x)) \in V_\lambda \times W_\lambda \Rightarrow x \in f^{-1}(V_\lambda), x \in g^{-1}(W_\lambda)$.

$(\supset)$ Sea $x \in (f^{-1}(V_\lambda) \cap g^{-1}(W_\lambda)) \Rightarrow f(x) \in V_\lambda$ y $g(x) \in W_\lambda \Rightarrow$ $(f(x), g(x)) = h(x) \in V_\lambda \times W_\lambda \Rightarrow x \in h^{-1}(V_\lambda \times W_\lambda)$.

1.13.1. Funciones continuas y espacio producto de infinitos factores

Proposición 43. Sean $(X_\lambda, \tau_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ espacios topológicos. La topología producto τ_P es la mínima topología sobre $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ que hace que las proyecciones sean todas continuas:

$$\begin{aligned} \Pi_\lambda : X = \textstyle\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda &\to X_\lambda \\ x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} &\to x_\lambda \end{aligned}$$

Proposición 44. Sean $(X_\lambda, \tau_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ espacios topológicos. Formamos el producto cartesiano $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ en el que consideramos la topología producto dada por las τ_λ. Si consideramos otro espacio topológico (Y, S) y una aplicación $f : Y \to X$, entonces:

$$f : (Y, S) \to (X, \tau_p) \text{ es continua} \Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda, \Pi_\lambda \circ f : (Y, S) \to (X_\lambda, \tau_\lambda) \text{ es continua.}$$

En otras palabras, si $f(y) = (f_\alpha(y))_{\alpha \in J}$, $f : (Y, S) \to (X, \tau_p)$ es continua $\Leftrightarrow$ $\forall \lambda$, $f_\lambda : (Y, S) \to (X_\lambda, \tau_\lambda)$ es continua.

Demostración:

$(\to)$ La composición de funciones continuas es continua.

$(\leftarrow)$ f_λ continua implica que para cada $A \in \tau_\lambda$, $f_\lambda^{-1}(A) \in S$. Pero

$$f_\lambda^{-1}(A) = (\pi_\lambda \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(\pi_\lambda^{-1}(A))$$

Vemos con esto que para todo abierto G de la subbase Σ de τ_p se cumple que $f^{-1}(G) \in S$, así f continua.

1.13.2. Criterio local de continuidad

Definición 27 (Función continua en $x \in X$). f es **continua** en $x \in X \Leftrightarrow$ para cada entorno V de $f(x)$ en (Y, τ_Y), $V \in \mathbb{V}(f(x))$ existe algún entorno U de x en (X, τ), $U \in \mathbb{V}(x)$ tal que $f(U) \subset V$. Análogamente, como $f(U) \subset V \equiv U \subset f^{-1}(V)$, existe $U \in \mathbb{V}(x)$ tal que $f(U) \subset V \equiv f^{-1}(V) \in \mathbb{V}(x)$.

Proposición 45. f es continua $\Leftrightarrow \forall x \in X$, f es continua en x.

Demostración: $(\rightarrow)$ Sea $x_0 \in X$, sea V entorno de $f(x_0)$. Entonces $\exists$ W abierto $f(x_0) \in W \subset V$ $\Rightarrow f^{-1}(W)$ es abierto en X, $x_0 \in f^{-1}(W) = U$.

Veamos si $f(f^{-1}(W)) \subset W \subset V$. Sea $y = f(a)$ con $a \in f^{-1}(W) \Rightarrow f(a) \in W$.

$(\leftarrow)$ Veamos que dado Ω abierto de $Y \Rightarrow f^{-1}(\Omega)$ es abierto de X. Sea $x_0 \in f^{-1}(\Omega) \Rightarrow f(x_0) \in \Omega$, Ω entorno de $f(x_0)$. Por hipótesis, $\exists U_{x_0}$ entorno de x_0 tal que $f(U_{x_0}) \subset \Omega \Rightarrow U_{x_0} \subset f^{-1}(\Omega) \Rightarrow x_0 \in \mathrm{Int}(f^{-1}(\Omega))$.

Proposición 46. Sean $f : X \to Y$ continua en $x_0 \in X$, $g : Y \to Z$ continua en $f(x_0) = y_0 \in Y \Rightarrow g \circ f : X \to Z$ es continua en x_0.

Demostración: Dado $V \in \mathbb{V}((g \circ f)(x_0))$ queremos ver que $(g \circ f)^{-1}(V) \in \mathbb{V}(x_0)$. Pero $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ y como g es continua en $f(x_0) = y_0$ y $g(y_0) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$, será $g^{-1}(V) \in \mathbb{V}(y_0) = \mathbb{V}(f(x_0))$.

Usando que f es continua en x_0, llegamos a que $f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \mathbb{V}(x_0)$.

Proposición 47. Formulación local de la continuidad. $f : X \to Y$ es continua si existe una familia de abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ tal que $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ y para cada $\lambda \in \Lambda$, $f|_{U_\lambda}$ es continua.

1.14. Homeomorfismos, funciones abiertas y cerradas

Definición 28 (Homeomorfismo)**.** Sea $f : (X, \tau) \to (Y, S)$ aplicación es **homeomorfismo** $\Leftrightarrow$ $\exists f^{-1}$ y f y f^{-1} son continuas.

$$f \text{ biyectiva es homeomorfismo} \Leftrightarrow \forall U \subset X, U \in \tau \Leftrightarrow f(U) \in S$$

- Dos espacios topológicos son **homeomorfos** si existe un homeomorfismo entre ellos.
- La composición de homeomorfismos es homeomorfismo.

Proposición 48. Si $f : X \to Y$ **biyectiva**, son equivalentes:

1. f homeomorfismo.
2. $\forall E \subset X$, E cerrado en X $\Leftrightarrow$ $f(E)$ es cerrado en Y.
3. $\forall E \subset X$, $f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$.

Definición 29 (Inclusión topológica de X en Y)**.** Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua e inyectiva entre espacios topológicos. Si la aplicación $\tilde{f} : X \to f(X); x \to f(x)$ es un **homeomorfismo** del espacio X sobre $(f(X), \tau_{subespacioY})$ $\Rightarrow$ f es una **inclusión topológica** de X en Y.

Observación: Para que $f : X \to Y$ sea inclusión topológica hay que pedir que para todo A abierto de Y:

$$\tilde{f}^{-1}(f(X) \cap A) = \{x \in X : f(x) \in A\} = f^{-1}(A)$$

sea abierto de X. Todo abierto de X ha de ser igual a $f^{-1}(A)$ para algún A abierto de Y.

Ejemplo 7. Sea $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ la esfera unidad de $\mathbb{R}^2$, vista como espacio topológico con la topología que hereda de $\mathbb{R}^2$.
La aplicación: $f : [0, 1) \to S^1; t \to e^{2\pi t} = (\cos(2\pi t), sen(2\pi t))$ es continua y biyectiva pero no homeomorfismo.

Por ejemplo, $f([0, 1/4))$ no es abierto de S^1 puesto que $f(0) = (1, 0)$ no pertenece a ningún abierto de V de $\mathbb{R}^2$ tal que $V \cap S^1 \subset f([0, 1/4))$.

Definición 30 (Función abierta)**.** f es **abierta** si lleva abiertos de X en abiertos de Y.

Definición 31 (Función cerrada)**.** f es **cerrada** si lleva cerrados de X en cerrados de Y.

1.15. Convergencia y espacios topológicos Hausdorff

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos del espacio topológico (X,τ).

Definición 32 (Sucesión converge a un punto). La sucesión **converge** al punto $a \in X$, $x_n \to a \Leftrightarrow \forall V \in \mathbb{V}(a), \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant n_0$, $x_n \in V$.

Ejemplo 8. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales con todos los términos distintos.

- Consideremos la topología de los complementos finitos en $\mathbb{R}$. Entonces, tenemos que $\forall a \in \mathbb{R}$, $x_n \to a$. **Justificación**: Sea U entorno de a (podemos suponer abierto, forman base local). Como los abiertos no vacíos tienen complemento finito, basta excluir un número finito de términos de la sucesión (con índice menor que cierto n_0) para garantizar que los demás pertenecen a U.
- Consideramos la topología usual. Veamos que para cada sucesión solo hay un límite (y no varios como antes). Supongamos que $x_n \to a$ y $x_n \to b$, siendo $a \neq b$. Entonces por definición de convergencia, dado cualquier $\epsilon > 0$ $\exists n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geqslant n_0$, $|x_n - a| \leqslant \epsilon$ y $\forall n \geqslant n_1$, $|x_n - b| \leqslant \epsilon$. Tomando $n_2 = max(n_0, n_1)$ resulta que $\forall n \geqslant n_2$, simultáneamente $|x_n - a| \leqslant \epsilon$ y $|x_n - b| \leqslant \epsilon$. Para ϵ suficientemente pequeño las dos condiciones son incompatibles: $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap (b-\epsilon, b+\epsilon) = \emptyset$.

Definición 33 (Espacio topológico Hausdorff). Sea (X,τ) espacio topológico. Decimos que X es un **espacio topológico Hausdorff (o T_2)** $\Leftrightarrow$

$$\forall x, y \in X,\ x \neq y,\ \exists U_x, U_y \text{ entornos de } x,\ y \text{ respectivamente tales que } U_x \cap U_y = \emptyset$$

Proposición 49. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos de un espacio topológico T_2, se tiene que $x_n \to a$ y $x_n \to b \Rightarrow a = b$.

Demostración: Si $x_n \to a$ y $x_n \to b$ con $a \neq b$, tomando entornos tenemos $x_n \in (U_a \cap U_b) \neq \emptyset$, contradicción con que el espacio es T_2 a partir de cierto n.

Proposición 50. Sea X un espacio topológico T_2. Sea $A \subset X$, $|A| < \infty \Rightarrow$ A es cerrado.

Demostración: Basta considerar el caso $A = \{x_0\}$, pues si $|A| = n$, $A = \{x_1, ..., x_n\} = \bigcup_{j=1}^{n} \{x_j\}$ también es cerrado por ser unión de cerrados (aplicando inducción en n queda demostrado para un conjunto finito de más de un elemento).

Demostremos que $\overline{A} = A$. Por definición $A \subset \overline{A}$. Veamos $\overline{A} \subseteq A$. Si tenemos $x \in \overline{A}$ y $x \notin A$, es decir, $x \neq x_0 \Rightarrow \exists U_x$ entorno de x, U_{x_0} entorno de x_0 tal que $U_{x_0} \cap U_x = \emptyset$. Pero como $x \in \overline{A} \Rightarrow U_x \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x_0 \in U_x \Rightarrow x_0 \in U_x \cap U_{x_0}$, llegamos a una contradicción. Por tanto, $\forall x \in \overline{A} \Rightarrow x \in A$. Por lo tanto, A es cerrado.

Proposición 51. Sea (X, τ) un espacio T_2, $A \subset X$, $|A| \geqslant \aleph_0$.

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall \text{ U entorno de } x, |U \cap A| \geqslant \aleph_0$$

Demostración:

$(\leftarrow)$ Sea U entorno de x, $|U \cap A| = \infty \Rightarrow |(U \setminus \{x\}) \cap A| = \infty \Rightarrow (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

$(\rightarrow)$ Supongamos que $\exists U$ entorno de $x = x_0$ tal que $|U \cap A| = n + 1 < \infty$.
$U \cap A = \{x_0, ..., x_n\} \Rightarrow U \cap (A \setminus \{x_0\}) = \{x_1, ..., x_n\}$

$\Omega = U \setminus \{x_1, ..., x_n\} = U \cap C_X(\bigcup\limits_{j=1}^{n} \{x_j\}) = U \cap (\bigcup\limits_{j=1}^{n} C_X(\{x_j\})) = \bigcup\limits_{j=1}^{n} (U \cap C_X\{x_j\})$

Ω es un entorno de x_0 porque la intersección del abierto del entorno U con cada $C_X\{x_j\}$ es abierto por ser cada $C_X\{x_j\}$ abierto ya que X es T_2.

Proposición 52. (X, τ) es $T_2 \Leftrightarrow \Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$ es **cerrada**.

Demostración: $(\rightarrow)$ Veamos que $\Omega = C_{X \times X}(\Delta) \subset X \times X$, es decir, que para $(x, y) \in \Omega$, $(x, y) \in \mathrm{Int}(\Omega)$. Como $(x, y) \in \Omega \Rightarrow x \neq y \Rightarrow \exists U$ entorno de x, V entorno de y tal que $U \cap V = \emptyset$. Entonces $U \times V$ es un entorno de (x,y) en $X \times X \Rightarrow (U \times V) \cap \Delta = \emptyset$ $\Rightarrow U \times V \subset \Omega$.

$(\leftarrow)$ Sean $x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow (x, y) \notin \Delta \Rightarrow (x, y) \in C_X(\Delta)$ abierto $\Rightarrow \exists\ U \times V$ abierto $x \in U$, V abierto tal que $y \in V$, $U \times V \subset C_X(\Delta) \Leftrightarrow U \cap V = \emptyset$. Por tanto, X es T_2.

Proposición 53.

1. Todo conjunto ordenado con la topología asociada al orden es T_2.
2. Sean X_1 y X_2 espacios $T_2 \Rightarrow X_1 \times X_2$ es T_2.
3. (X, τ) es T_2, $Y \subset X \Rightarrow (Y, \tau_Y)$ es T_2.

Demostración:

(1) Sea $<$ orden sobre X, $\tau_<$ topología asociada a dicho orden. Veamos que $(X, \tau_<)$ es T_2. Dados $x, y \in X$ con $x < y$, tenemos varios casos.

Caso 1: Si $\exists a$ tal que $x < a < y$, entonces:

- $x \in I_a$ donde si x es extremo inferior de X, $I_a = [x, a)$ es abierto en $\tau_<$. Si x no es extremo inferior de X entonces $\exists x_1 < x$, $x_1 \in X \Rightarrow I_a = (x_1, a)$.
- $y \in J_a$ donde si x es extremo superior de X, $J_a = (a, y]$ es abierto en $\tau_<$. Si x no es extremo superior de X entonces $\exists y_1 < y$, $y_1 \in X \Rightarrow J_a = (a, y_1)$.

Además, $I_a \cap J_a = \emptyset$.

Caso 2: No existe a entre x e y, $I = (*, y)$, $J = (x, *) \Rightarrow I \cap J = \emptyset$.

(2) Sean $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in X \times Y$, $z_1 \neq z_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$ ó $x_1 = x_2$ y $y_1 \neq y_2$.
Si $x_1 \neq x_2$ $\exists U_1 \in \beta_{x_1}, U_2 \in \beta_{x_2}, U_1 \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow V_1 = U_1 \times Y \in \beta_{z_1}, V_2 = U_2 \times Y \in \beta_{z_2}$.
Tenemos que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
Si $x_1 = x_2$ y $y_1 \neq y_2$ $\exists \Omega_1 \in \beta_{y_1}, \Omega_2 \in \beta_{y_2}, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Tenemos que $W_1 = X \times \Omega_1 \in \beta_{z_1}$, $W_2 = X \times \Omega_2 \in \beta_{z_2}$, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.

(3) Sean $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2 \Rightarrow \exists U_1$, U_2 abiertos en X de y_1, y_2 respectivamente, tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow \exists V_1 = U_1 \cap Y$, $V_2 = U_2 \cap Y$ entornos abiertos en Y de y_1, y_2 respectivamente tales que $V_1 \cap V_2 \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Proposición 54. Sea $f : X \to Y$ continua e Y es $T_2 \Rightarrow$

$$K = \{(x_1, x_2) : f(x_1) = f(x_2), x_1, x_2 \in X\} \text{ es cerrado en } X \times X$$

Demostración: Como Y es $T_2 \Rightarrow \Delta = \{(y, y) : y \in Y\}$ es cerrado en $Y \times Y$. Formando la aplicación $h : X \times X \to Y \times Y, h(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2)) \Rightarrow h^{-1}(\Delta)$ es cerrado en $X \times X$. $h^{-1}(\Delta) = \{(x_1, x_2) : (f(x_1), f(x_2)) \in \Delta\} = \{(x_1, x_2) : f(x_1) = f(x_2)\} = K$. Así, K es cerrado en $X \times X$.

Forma resumida de escribir la demostración: $K = (f, f)^{-1}(\Delta)$.

1.16. Espacios métricos

Definición 34 (Espacio métrico). Sea $X \neq \emptyset$, (X, τ_d) se dice espacio métrico si d es una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que cumple:

1. $\forall x, y \in X$, $d(x, y) \geqslant 0$ y $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $\forall x, y, z \in X$, $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$

Definición 35 (Topología asociada a la distancia). $U \in \tau_d \Leftrightarrow \forall x \in U$ $\exists \epsilon > 0$ tal que $B_d(x, \epsilon) \subset U$.

- **Bolas abiertas** $B_d(x_0, \epsilon) = \{x \in X : d(x, x_0) < \epsilon\}$.
- **Bolas cerradas** $B_d(x_0, \epsilon) = \{x \in X : d(x, x_0) \leqslant \epsilon\}$.
- La familia $F = \{B_d(x, \epsilon) : x \in X, \epsilon > 0\}$ es una **base** para τ_d.
- El conjunto $\beta_x = \{B_d(x, \epsilon) : \epsilon > 0\}$ es un **sistema fundamental de entornos de x**.

Definición 36 (Espacio métrico metrizable). (X, τ) es **metrizable** $\Leftrightarrow \exists d$ distancia $\tau = \tau_d$.

Proposición 55. (X, τ_d) es metrizable $\Rightarrow$ (X, τ_d) es T_2.

Corolario: $X = \mathbb{R}$, $\tau = \tau_{Zariski} \Rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{Zariski})$ no es metrizable.

Definición 37 (Diámetro de un conjunto). Sea (X, d), $A \subset X$. El **diámetro** de A es

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A\}$$

Definición 38 (Conjunto acotado). A se dice **acotado** si $\mathrm{diam}(A) < \infty$.

Proposición 56. Sea (X, d) espacio métrico y sea $\overline{d} : X \times X \to \mathbb{R}$, tal que

$$\overline{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$$

Entonces, $(X, \overline{d})$ es un espacio métrico.

Ejemplo 9. En $\mathbb{R}$, $B_{\overline{d}}(0, \frac{1}{2}) = \{y \in \mathbb{R} : \overline{d}(y, 0) < \frac{1}{2}\} = \{y \in \mathbb{R} : \min\{|y|, 1\} < \frac{1}{2}\}$
$= B_{|\ |}(0, \frac{1}{2})$

Definición 39 (Topología uniforme de $\mathbb{R}^J$). Sea J un conjunto de índices, $\mathbb{R}^J \in (x_\alpha)_{\alpha \in J}$.

$$\rho((x_\alpha)_{\alpha \in J}, (y_\alpha)_{\alpha \in J}) := \sup\{\overline{d}(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in J\}$$

$(\mathbb{R}^J, \rho)$ es un espacio métrico, y la topología inducida, τ_ρ se llama **topología uniforme de** $\mathbb{R}^J$.

Observación: $\mathbb{R}^J = \{\varphi : J \to R; \alpha \to \varphi(x) := x_\alpha\} \in (x_\alpha)_{\alpha \in J}$

Proposición 57.

1. La topología uniforme, τ_ρ es $\mathbb{R}^J$ es **más fina** que la topología producto.
2. Si $|J| = \infty$, entonces $\tau_\rho \neq \tau_{prod}$.

Demostración:

(1) $X = \mathbb{R}^J = \prod_{\alpha \in J}^{x} \alpha$, $x_\alpha = \mathbb{R}\ \forall \alpha \in J$.

Veamos que $\tau_{prod} \subset \tau_\rho$. Basta demostrar que un abierto de la forma $U = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha$ con $U_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ si $\alpha \in \{x_1, ..., x_n\} \subset J$ o $U_\alpha = \mathbb{R} \alpha \in J \setminus \{x_1, ..., x_n\}$.

Veamos que todos los puntos de U son interiores. Sea $x \in U$, $x = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$, $x_\alpha \in U_\alpha$. Para $i = 1, ..., n$, $x_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i} \Rightarrow \exists \epsilon_i > 0$, $B_{\overline{d}}(x_{\alpha_i}, \epsilon_i) \subset U_{\alpha_i}$. Sea $\epsilon = \min\{\epsilon_1, ..., \epsilon_k\}$. $B_d(x_{\alpha_i}, \epsilon) \subset U_\alpha$.

$B_\rho(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^J : \rho(x, y) < \epsilon\} = \{y \in \mathbb{R}^J : \overline{d}(x_\alpha, y_\alpha) \leqslant \sup\{\overline{d}(x_\alpha, y_\alpha : \alpha \in J\} < \epsilon\} \subset U$.
Entonces, $x \in \mathrm{Int}(U)$ para τ_ρ, $U = \mathrm{Int}(U)$, U es abierto para τ_ρ.

(2) Sea $B_\rho(0, \frac{1}{2}) = \{y \in \mathbb{R}^J : \sup\{\overline{d}(0, y_\alpha), \alpha \in J\} < \frac{1}{2}\} = \min\{d(0, y_\alpha), 1\} =$
$\{y \in \mathbb{R}^J : d(0, y_\alpha) < \frac{1}{2}, \alpha \in J\} = \prod_{\alpha \in J} B_d(0, \frac{1}{2})$ No es abierto para la topología producto, aunque sí para la topología caja.

Ejemplo 10. Veamos que el espacio de sucesiones, $\mathbb{R}^w$ cumple $\mathbb{R}^w = \mathbb{R}^N$ con la topología producto en un espacio métrico.

1.16.1. Funciones continuas y metrizabilidad

Proposición 58. (Lema de la sucesión)

1. Sea (X, τ) espacio topológico. Sea $A \subset X$. Si existe una sucesión de puntos de A, $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ tales que $a_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, entonces $x \in \overline{A}$.
2. (X, d) espacio métrico, $A \subset X$, $x \in \overline{A} \Rightarrow \exists \{a_n\}_{n=0}^\infty$ $a_n \in A$ tal que $a_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

Demostración: (1) Sea $U \in \beta_x$ entorno. Como $a_n \to x$, entonces $\exists n_0$ tal que $n \geqslant n_0$, $a_n \in U \Rightarrow a_n \in U \cap A \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$. Luego, $x \in \overline{A}$.

(2) Sea $B_1 = B_d(x, 1)$. Sea $a_1 \in B_1 \cap A \neq \emptyset$. Sea $\epsilon_2 = \frac{d(x, a_1)}{2}$ y $B_2 = B_d(x, \epsilon_2)$. Entonces $\exists a_2 \in B_2 \cap A \neq \emptyset$. Supongamos construídas las bolas $B_1 \supset ... \supset B_n$, $a_i \in B_i \setminus B_{i+1}$ para $i = 1, ..., n-1$.

Probamos por inducción. Tenemos que $\epsilon_{n+1} = \frac{1}{2}d(x, a_n)$, $B_{n+1} = B(x, \epsilon_{n+1})$, $a_{n+1} \in B_{n+1} \cap A \neq \emptyset$. Además, $B_{n+1} \subset B_n$. Así, por inducción en n construímos $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, veamos que efectivamente converge, $a_n \to x$.

Sea $U \in \beta_x$, entonces $\exists \epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset U \Rightarrow \exists n_0$ tal que $\epsilon_{n_0} < \epsilon$, por lo que $B(x, \epsilon_{n_0}) \subset B(x, \epsilon) \subset U$, $\forall n \geqslant n_0$ $a_n \in B_n \subset B_{n_0} \subset B(x, \epsilon) \subset U$.

Proposición 59. Sea $f : (X, d_x) \to (Y, d_Y)$ una función. Son equivalentes:

1. $f : (X, \tau_{d_X}) \to (Y, \tau_{d_Y})$ continua.
2. $\forall x_0 \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $y \in X$, $d_x(x_0, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(y)) < \epsilon$.

Demostración: (1) $\to$ (2) Sea $x_0 X$, f continua en x_0. Consideremos $B_Y(f(x_0); \epsilon) = V_{f(x_0)}$. Entonces, $\exists U_{x_0} \in \beta_{x_0}$ tal que $f(U_{x_0}) \subset V_{f(x_0)} = VB_Y(f(x_0), \epsilon) \Rightarrow \exists \delta > 0$, $B_x(x_0; \delta) \subset U_{x_0}$, $f(B_x(x_0; \delta)) \subset B_Y(f(x); \epsilon) \Rightarrow \exists \delta > 0$ $\forall y \in B_X(x_0; \epsilon)$ se tiene $f(y) \in B_Y(f(x_0), \epsilon) \Rightarrow \exists \delta > 0$, $\forall y \in X$, $d_X(x_0, y) < \delta$, se tiene que $d_Y(f(x_0), f(y)) < \epsilon$.

(2) $\to$ (1) Veamos que $\forall x_0 \in X$, f es continua en x_0, (al ser continua localmente en todo punto, f es continua). Sea $V \in \beta_{f(x_0)}$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $B_Y(f(x_0), \epsilon) \subset V$. Por el segun-

do apartado, $\exists \delta > 0$ tal que si $y \in B_X(x_0), \delta) \Rightarrow f(y) \in B_Y(f(x_0), \delta)$. Si $U := B_x(x_0, \delta)$, entonces $f(U) \subset B_Y(f(x_0), \epsilon) \subset V$.

Proposición 60. Sea $f : (X, d_x) \to (Y, d_Y)$ una función. f es continua $\Leftrightarrow \forall x_n \to x$ en X, $f(x) \to f(x_0)$ en Y.

Demostración: Sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $x_n \to x$. Sea $\{f(x)\}_{n=0}^{\infty}$ sucesión en Y. Veamos que $f(x_n) \to f(x)$. Sea $\epsilon > 0$, $V = B_Y(f(x), \epsilon)$. Por el teorema anterior, $\exists \delta > 0$ tal que $y \in B_x(x, \delta) \Rightarrow^*$ $f(y) \in B_Y(f(x), \epsilon)$.

Consideremos $U = B_x(x, \delta)$. $x_n \to x$, se tiene que $\exists n_0$ tal que $n \geqslant n_0$, $x_n \in B_x(x, \delta) \Rightarrow^*$ $f(x_n) \in B_Y(f(x), \epsilon) = V$.

$(2) \to (1)$ Recordemos el resultado: f continua $\Leftrightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Sea $A \subset X$. Sea $y \in f(\overline{A})$. Entonces $y = f(x)$ para un $x \in \overline{A}$. Por el Lema de la sucesión $\exists a_n \in A$, $a_n \to x \Rightarrow f(a_n) \to f(x)$ $\Rightarrow y = f(x) \in \overline{f(A)}$.

1.16.2. Convergencia uniforme

Definición 40 (Convergencia uniforme). Sea $f_n : X \to (Y, d)$. Decimos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a $f : X \to (Y, d)$ si $\forall \epsilon > 0$ $\exists N > 0$ $\forall n \geqslant N$ tal que $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ $\forall x \in X$.

Proposición 61. Sea $f_n : (X, \tau) \to (Y, d)$ continuas. Si $f_n \to f$ uniformemente, entonces f es continua.

Demostración: Sea V abierto de Y. Veamos que $f^{-1}(V)$ es abierto en X. Sea $x_0 \in f^{-1}(V) \Rightarrow$ $y_0 = f(x_0) \in V$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $B_Y(y_0, \epsilon) \subset V$.

Sea $N > 0$ tal que $\forall n \geqslant N$, $d_Y(f_n(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{4}$, $\forall x \in X$. Tenemos que:

- $d_Y(f_N(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{4}$, $\forall x \in X$.
- f_N es continua en x_0. $\exists U \in \beta_{x_0}$ tal que $f_N(U) \subset B_d(f_N(x_0), \frac{\epsilon}{2})$. Comprobemos si $f(U) \subset B_d(y_0, \epsilon) \subset V$.

  $y \in f(U), y = f(x), x \in U$. $d_Y(y, y_0) = d_Y(f(x), f(x_0)) \leqslant d_Y(f(x), f_N(x)) + d_Y(f_N(x), f(x_0))$ $\leqslant \frac{\epsilon}{4} + d_Y(f_N(x), f_N(x_0)) + d_Y(f_N(x_0, f(x))) < \epsilon$

1.16.3. Completitud

Definición 41 (Sucesión de Cauchy). Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en (X, d). Se dice que la **sucesión es de Cauchy** $\Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 > 0 \text{ tal que } n, m \geqslant n_0,\ d(a_n, a_m) < \epsilon$$

Proposición 62. (**Criterio de Cauchy**) Para una sucesión $s = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales, son equivalentes:

- s es convergente.
- s es una sucesión de Cauchy.

Proposición 63. Toda sucesión de números reales tiene alguna **subsucesión monótona**. Si tenemos una sucesión s de números $x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow$ podemos encontrar una sucesión creciente de índices naturales n_k tales que la sucesión $s' = (x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ subsucesión monótona (o bien creciente o bien decreciente).

Proposición 64. **(Teorema de Bolzano-Weierstrass)** Toda sucesión acotada de números reales tiene alguna subsucesión convergente.

Definición 42 (Espacio completo). Un espacio métrico (X, d) es **completo** si **toda sucesión de Cauchy es convergente**.

Observación: $K \subset (X, d)$. X es completo, K cerrado $\Rightarrow$ K completo.

Lema. Sea un espacio métrico (X, d). Si cada sucesión de Cauchy admite una subsucesión convergente, entonces X es completo.

Demostración: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de Cauchy. Veamos si $x_n \to x \in X$. Sea $\epsilon > 0$, sea n_0 tal que $n \geqslant n_0$, $d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$ $d(x_n, x) < d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x)$. Sea N tal que $n, m > N$, $d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$. Luego $n_0' = \max(n_0, N)$, $n > n_0'$, $d(x_n, x) \leqslant d(x_n, x'_{n_0}) + d(x'_{n_0}, x) < \epsilon$.

Proposición 65. Sea $(\mathbb{R}^*, d)$, donde d es la métrica euclídea. Entonces $(\mathbb{R}^k, d)$ es completo.

Demostración: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de puntos de $\mathbb{R}^k$ que sea de Cauchy. Luego $\exists N, n, m \geqslant N$ tal que $d(x_n, x_m) < 1$. Denotemos $M = \max\{d(x_L, 0_{\mathbb{R}^k}), ..., d(x_{N-L}, 0_{\mathbb{R}^k}), 1 + d(x_N, \overline{0})\}$. Entonces $\forall n \geqslant N$ $d(x_n, \overline{0}) \leqslant d(x_n, x_N) + d(x_N, \overline{0}) \leqslant 1 + d(x_N, \overline{0}) < M$

$A = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^k$ entonces $A \subset [-M, M]^k \Rightarrow x_n \to x \in \overline{A} \subset \overline{[-M, M]^k} = [-M, M]^k$.

Observación: $(\mathbb{Q}, |.|)$ no es completo.

1.17. Axiomas de numerabilidad

Sea (X, τ) espacio topológico, $x \in X$.

Definición 43 (Base numerable). X tiene una **base numerable en x** si $\exists \tilde{\beta}_x$ una familia numerable de entornos de x tal que cada entorno de x contiene a uno de los $\tilde{\beta}_x$.

Definición 44 (1AN). X satisface el 1^{o} **axioma de numerabilidad** $\Leftrightarrow$

$\forall x \in X$, X tiene una **base numerable en x**.

Proposición 66. Sea (X, τ) espacio topológico.

1. (X, τ) satisface 1AN, $A \subset X$. $x \in \overline{A} \Rightarrow \exists \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in A$, $a_n \to x$.
2. $f : X \to Y$, X es 1AN, si cada sucesión $x_n \to x$ satisface $f(x_n) \to f(x)$, entonces f es continua.

Proposición 67.

1. Un subespacio topológico de un espacio 1AN es 1AN.
2. Un producto numerable de espacios 1AN es 1AN.

Definición 45 (2AN). X satisface el 2^{o} **axioma de numerabilidad** $\Leftrightarrow$

τ tiene una base β numerable.

Proposición 68. 2AN $\Rightarrow$ 1AN.

Ejemplo 11. (X, d) espacio métrico es 1AN.

Ejemplo 12. $(\mathbb{R}, \tau_{usual})$ $\beta = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$ es 2AN.

Lema. (X, τ) es 2AN, $A \subset X$, A discreto $\Rightarrow$ A es numerable.

Demostración: $\varphi : A \to \beta$; $a \to B_a$, donde β es una base numerable de τ. $B_a \cap A = \{a\}$. Como φ es inyectiva, $|A| \leqslant |B| \leqslant \aleph_0$. Es inyectiva porque si $B_a = B_b \Rightarrow$ $\{a\} = B_a \cap A = B_b \cap A = \{b\}$

1.18. Topología y espacio cociente

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea R una **relación de equivalencia en X**. Consideramos el conjunto cociente X/R cuyos elementos son las clases de equivalencia $R(x)$, $x \in X$ donde

$$\forall x \in X \text{ para } R(x) = \{y \in X : xRy\}$$

La proyección canónica es: $\pi : X \to X/R;\ x \to R(x)$

Definición 46 (Topología cociente)**.** Es la colección de subconjuntos de X/R:

$$\boldsymbol{\tau_\pi = \{U \subset X/R : \pi^{-1}(U) \in \tau\}}$$

- $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau \Rightarrow \emptyset \in \tau_\pi$. $\pi^{-1}(X/R) = X \in \tau \Rightarrow X/R \in \tau_\pi$.
- $\forall \alpha \in J\ U_\alpha \in \tau_\pi \Rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) \in \tau \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in J} \pi^{-1}(U_\alpha) = \pi^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha \in J} U_\alpha) \in \tau \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in J} U_\alpha \in \tau_\pi$.
- $A, B \in \tau_\pi \Rightarrow \pi^{-1}(A), \pi^{-1}(B) \in \tau \Rightarrow \pi^{-1}(A) \cap \pi^{-1}(B) = \pi^{-1}(A \cap B) \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau_\pi$.

Observación: $E \subset X/R$ es **cerrado** $\Leftrightarrow \pi^{-1}(E)$ es **cerrado en X**.

Definición 47 (Espacio topológico cociente)**.** $(X/R, \tau_\pi)$ es el espacio topológico cociente de (X, τ) por la relación de equivalencia R.
$X/R \equiv X^*$ es partición de X (subconjuntos disjuntos cuya unión es X).

Definición 48 (Conjunto saturado)**.** R relación de equivalencia en X, $A \subset X$ es **saturado** si:

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \{x \in X : \exists a \in A \text{ tal que } xRa\}$$

Proposición 69. X/R esp. top. cociente de X y sea $\pi : X \to X/R$ proyección canónica. Sea Y otro espacio topológico. Entonces:

$$g : X/R \to Y \text{ es continua} \Leftrightarrow g \circ \pi : X \to Y \text{ es continua.}$$

Proposición 70. R rel. equiv., la proyección canónica $\pi : X \to X/R$, $\mathbf{f : X \to Y}$ aplicación **continua** y **constante en cada clase de equivalencia** $R(x)$, $x \in X$. Entonces,

$$\exists \tilde{f} : X/R \to Y \text{ tal que } \boldsymbol{\tilde{f} \circ \pi = f}, \ \boldsymbol{\tilde{f}} \textbf{ continua}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\
& X/R \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Observación: $\tilde{f}$ abierta (cerrada) $\Leftrightarrow f(U)$ es abierto (cerrado) para cada U abierto (cerrado) saturado de X.

1.18.1. Aplicaciones cociente

Sean (X, τ), (Y, S) espacios topológicos. *Motivación: ¿Y si no tenemos relación de equivalencia?*

Definición 49 (Aplicación cociente). $p : (X, \tau) \to (Y, S)$ es **aplicación cociente** si cumple:

- Es **sobreyectiva**.
- Cualquier V es abierto de $Y \Leftrightarrow p^{-1}(V)$ es abierto de X.
  Observación: Es equivalente $K \subset Y$ cerrado $\Leftrightarrow p^{-1}(K)$ cerrado en X. Se sigue de: $p^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus p^{-1}(B)$ para $B \subset Y$.

Observación: Si p es cociente $\Rightarrow p$ es continua.

Proposición 71. $p : X \to Y$ **sobreyectiva**, **continua** y **abierta** $\Rightarrow p$ **aplicación cociente**.

Demostración: Comprobemos que $\forall V \in S \Leftrightarrow p^{-1}(V) \in \tau$. $(\to)$ Sea V abierto de Y, p continua $\Rightarrow p^{-1}(V)$ es abierto en X. $(\leftarrow)$ $p^{-1}(V)$ es abierto en X, p abierta $\Rightarrow p(p^{-1}(V))$ es abierto en Y y como p es sobreyectiva $\Rightarrow p(p^{-1}(V)) = V$ abierto en Y.

Definición 50 (Conjunto saturado). Sea $C \subset X$, C es **saturado** respecto a la aplicación sobreyectiva $p : X \to Y \Leftrightarrow C$ contiene cada $p^{-1}(y)$ **fibra** que lo corta.

$$y \in Y \text{ tal que } p^{-1}(y) \cap C \neq \emptyset \Rightarrow p^{-1}(y) \subset C$$

Así, **C es saturado** si es **igual a la imagen inversa completa** de un **subconjunto de Y**.

Proposición 72. Dada $p : X \to Y$ aplicación **sobreyectiva**, son equivalentes:

1. p es **aplicación cociente**.
2. p es **continua** y lleva **abiertos saturados** de X en **abiertos** de Y.

Demostración:

$(1 \to 2)$ p continua, C abierto saturado de X, $V := p(C) \subset Y$ es abierto en $Y \Leftrightarrow p^{-1}(V)$ es abierto en X. $p^{-1}(V) = p^{-1}(p(C)) = C$ por ser C saturado.

$(2 \to 1)$ Tenemos que p es continua y sobreyectiva, veamos que es abierta (así es cociente).

Sea V abierto de $Y \Rightarrow p^{-1}(V)$ abierto en X, por ser p continua. $\bigcup_{y \in V} p^{-1}(y) \subset p^{-1}(V)$, $p^{-1}(V)$ es abierto saturado de $X \Rightarrow p(p^{-1}(V)) = V$ (p sobreyectiva), abierto de Y.

Definición 51 (Topología cociente inducida a p)**.** Sea $p : X \to A$ sobreyectiva. Sea $\Omega \subset A$ abierto en $\tau_p \Leftrightarrow p^{-1}(\Omega) \in \tau$. Entonces, la **topología cociente inducida por p** se define como:

$$\tau_p = \{\Omega \subset A : p^{-1}(\Omega) \in \tau\}$$

Proposición 73. Sea $p : X \to Y$, $q : Y \to Z$ **aplicaciones cociente** $\Rightarrow$

$q \circ p : X \to Z$ es **aplicación cociente**

Observación: $p : X \to Y$, $q : G \to H$ aplicaciones cociente. En general **NO** se cumple que:

1. Dado $A \subset X \Rightarrow p_A : A \to Y$ es cociente.
2. $(p, q) : X \times G \to Y \times H$ sea cociente. Se necesitan condiciones de compacidad. O que p y q sean abiertas.

Proposición 74. Sea $p : X \to Y$ una aplicación cociente. Sea Z un espacio topológico, $g : X \to Z$ continua y constante sobre las fibras $p^{-1}(y)$, $y \in Y$. Entonces, g induce una aplicación continua f tal que:

$$p : X \to Y = X^*,\ g : X \to Z \Rightarrow \exists f : Y \to Z \text{ tal que } f \circ p = g$$

Demostración: Para cada $y \in Y$ definimos $f(y) = g(p^{-1}(y))$. f está bien definida porque, dados $x_1, x_2 \in p^{-1}(y) \Rightarrow g(x_1) = g(x_2)$ por ser g constante sobre la fibra.

Veamos que f es continua. Sea V abierto de $Z \Rightarrow g^{-1}(V)$ es abierto de X por ser g continua. $U = g^{-1}(V)$ es abierto en $X \Leftrightarrow p(U)$ es abierto en Y. Pero, $p(U) = p(g^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$.

Dado $y \in p(g^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$, es decir, para cada $y_0 \in Y$, $f(y_0) \in V \equiv g(p^{-1}(y_0)) \in V$.

$y = p(a), a \in g^{-1}(V); g(a) \in V \Rightarrow g(p^{-1}(y)) = g(p^{-1}(p(a))) = g(a) \in V$

Proposición 75. Sea $p : X \to Y$ **sobreyectiva** y aplicación **cociente**.

$\{y\} \subset Y$ cerrado $\Leftrightarrow p^{-1}(y)$ es cerrado en X

Demostración: $(\to)$ $V = C_Y(\{y\})$ abierto en $Y \Rightarrow p^{-1}(V) = C_X(p^{-1}(y))$ es abierto en X (por ser p cociente) $\Rightarrow p^{-1}(y)$ es cerrado en X.

$(\leftarrow)$ Dado $\Omega = C_Y(\{y\})$ es abierto en $Y \Leftrightarrow p^{-1}(\Omega) \equiv C_X(p^{-1}(y))$ es abierto de X.

Proposición 76. $p : X \to Y$ aplicación cociente, A subespacio de X **saturado** con respecto a p y $p_A : A \to p(A)$.

1. A **abierto** o cerrado en X $\Rightarrow$ q es aplicación **cociente**.
2. Si p es **abierta** o cerrada $\Rightarrow$ q es aplicación **cociente**.

Demostración: Paso 1.

- $\mathbf{q^{-1}(V) = p^{-1}(V)}$ si $V \subset p(A)$. Como $V \subset p(A)$ y A es saturado, $p^{-1}(V) \subset A \Rightarrow p^{-1}(V) = q^{-1}(V)$.
- $\mathbf{p(U \cap A) = p(U) \cap p(A)}$ si $U \subset X$. $p(U \cap A) \subset p(U) \cap p(A)$. Para probar la inclusión inversa supongamos $y = p(u) = p(a)$ para algún $u \in U$ y $a \in A$. Como A es saturado, $p^{-1}(p(a)) \subset A \Rightarrow u \in A$. $y = p(u) \Rightarrow u \in U \cap A$.

Paso 2. Supongamos que A es abierto o p abierta. Dado $V \subset p(A)$, supongamos que $q^{-1}(V)$ es abierto en A. Veamos que V es abierto en p(A).

Supongamos A abierto. Como $q^{-1}(V)$ abierto en A y A abierto en X $\Rightarrow q^{-1}(V)$ abierto en X. Como $q^{-1}(V) = p^{-1}(V) \Rightarrow p^{-1}(V)$ es abierto en X $\Rightarrow$ V es abierto en Y (p es cociente) $\Rightarrow$ V abierto en p(A).

Supongamos ahora p abierta. Como $q^{-1}(V) = p^{-1}(V)$ y $q^{-1}(V)$ es abierto en A, $p^{-1}(V) = U \cap A$ para algún U abierto en X. $p(p^{-1}(V)) = V$ por ser p sobreyectiva $\Rightarrow V = p(p^{-1}(V)) = p(U \cap A) = p(U) \cap p(A)$. p(U) abierto en Y (p abierta), entonces V abierto en p(A).

Paso 3. Prueba análoga para el caso de cerrado (sustituir *abierto* por cerrado en el paso 2).

Proposición 77. Sea $g : X \to Z$ aplicación continua y sobreyectiva. Sea X^* partición de X: $X^* = \{g^{-1}(z) : z \in Z\} \subset X$. Sea $p : X \to X^*$ la proyección canónica de X a X^*. Entonces:

1. Z es $T_2 \Rightarrow (X^*, \tau^*)$ es T_2.
2. g induce una aplicación **continua** y **biyectiva** $f : X^* \to Z$.
   f es **homeomorfismo** $\Leftrightarrow$ **g es aplicación cociente**.

Observación: Sea $p : X \to Y$, p aplicación cociente. Sea $f : (Y, \tau_p) \to (Z, S)$, *¿induce un homeomorfismo?*
Tenemos que ver si para $W \subset Z$ abierto, $f^{-1}(W) = V$ es abierto en Y, para ello ver si $p^{-1}(V)$ es abierto en X.

1.18.2. Ejemplos

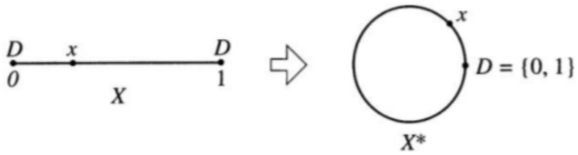
Ejemplo 13. **Circunferencia unidad** (Pegar extremos de un intervalo).

Llevamos $I = [0,1]$ sobre $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ mediante: $f : I \to \mathbb{S}^1$; $t \to e^{2\pi i t} = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$.

Definimos una relación de equivalencia en I identificando los puntos en los que f toma el mismo valor: $tRt' \Leftrightarrow f(t) = f(t')$. Esta relación nos da, para cada $t \notin \{0,1\}$, $R(t) = \{t\}$ y $R(0) = R(1) = \{0,1\}$. Al pasar al cociente, $\tilde{f}$ es biyectiva.

$\tilde{f}$ también es continua, abierta porque cualquier abierto saturado A que contega a un extremo ha de contener a los intervalos $[0,\epsilon)$ y $(1-\delta, 1]$ para ciertos $\delta, \epsilon > 0$. Esto garantiza que $f(A)$ contiene un arco abierto que contiene a $f(0) = (1,0)$. Por ser **continua y abierta**, la **biyección** $\tilde{f}$ es un **homeomorfismo**.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{S}^1 \\ & I/\mathcal{R} \arrow[ur, "\approx", "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

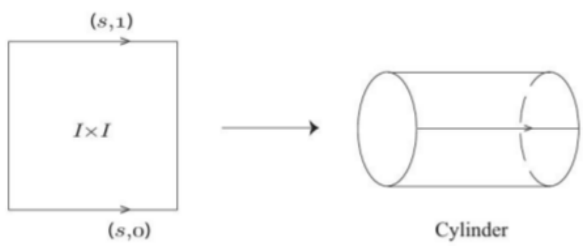


Ejemplo 14. **Cilindro** (identificando punto a punto los lados verticales de un cuadrado).

$f : I \times I \to I \times \mathbb{S}^1$; $(s,t) \to (s, e^{2\pi i t}) = (s, \cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$

Definimos la relación de equivalencia en el cuadrado: $(s,t)R(s',t') \Leftrightarrow f(s,t) = f(s',t')$.

Para cada (s,t) tal que $0 < t < 1$, $R(s,t) = \{(s,t)\}$; $\forall s \in I$ $R(s,0) = R(s,1) = \{(s,0),(s,1)\}$. Al pasar al cociente, $\tilde{f}$ es biyectiva. $\tilde{f}$ es continua y abierta, ya que cualquier abierto $A \subset I \times I$ que sea saturado y contenga a $(s,0)$ contiene entornos de $(s,0)$ y $(s,1)$ cuya imagen conjunta contiene un entorno de $(s,1,0)$. Esto garantiza que $f(A)$ es entorno de $f(s,0) = f(s,1) = (s,1,0)$. Por ser continua y abierta, la biyección $\tilde{f}$ es un homeomorfismo.



Ejemplo 15. **Toro topológico** (identificando punto a punto tanto los lados verticales y horizontales de un cuadrado).

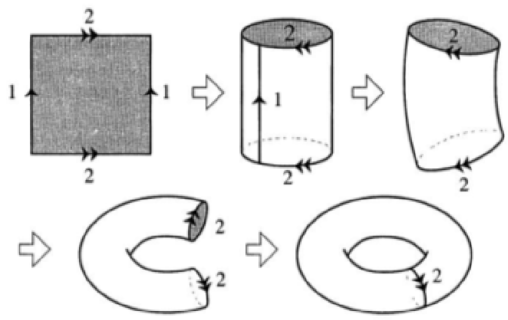
$f : I \times I \to S^1 \times S^1; (s,t) \to (e^{2\pi is}, e^{2\pi it})$

Definimos la relación de equivalencia: $(s,t)R(s',t') \Leftrightarrow f(s,t) = f(s',t')$. Las clases son:

- $R(s,t) = \{(s,t)\}, \forall t, s \in (0,1)$,
- $R(0,t) = R(1,t) = \{(0,t),(1,t)\} \; \forall t \in (0,1)$,
- $R(s,0) = R(s,1) = \{(s,0),(s,1)\} \; \forall s \in (0,1)$,
- $R(0,0) = R(0,1) = R(1,0) = R(1,1)$

Al pasar al cociente, $\tilde{f}$ es biyectiva. $\tilde{f}$ es continua, abierta $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ es un homeomorfismo.

Otra forma: $f : I \times I \to \mathbb{R}^3$;
$(s,t) \to (\ (1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t))\cos(2\pi s), (1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t))\mathrm{sen}(2\pi s), \frac{1}{2}\mathrm{sen}(2\pi t)\ )$



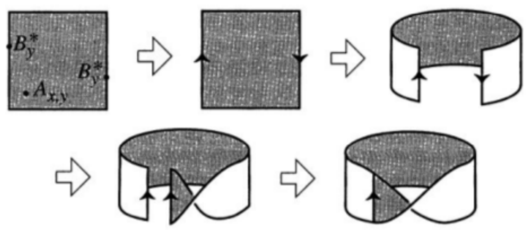
Ejemplo 16. **Banda de Möebius**. Consideremos $X = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$.
$X^* = \{\ \{(x,y)\} : x \in (0,1), y \in (0,1)\} \cup \{\ \{(0,y),(1,1-y)\} : y \in [0,1]\}$

Definamos $f : X^* \to S$, donde $S = \{p \in X^* : p = [(x,\frac{1}{2})], 0 \leqslant x \leqslant 1\} \approxeq S^1$.

f está bien definida: $[(0,y)] = [(1,1-y)] \xrightarrow{f} [(0,\frac{1}{2})] = [(1,\frac{1}{2})]$,

$f^{-1}(\{[(x,\frac{1}{2})] : |x - x_0| < \epsilon\}) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \times [0,1]$ es abierto en $[0,1] \times [0,1]$.

$f^{-1}(\{[(x,\frac{1}{2})] : |x| < \epsilon, |1-x| < \epsilon\}) = [0,) \times [0,1] \cup (1-,1] \times [0,1]$ es abierto en $[0,1] \times [0,1]$ por ser unión de abiertos.



2. Bloque II: Compacidad y conexión

2.1. Compacidad

2.1.1. Cubrimientos y recubrimientos de espacios topológicos

Definición 52 (Recubrimiento, subrecubrimiento y cubrimiento). (X, τ) espacio topológico, $A = \{A_i\}_{i \in I}$ familia de subconjuntos de X, Y un subespacio de X e I conjunto de índices arbitrario.

- A es un **recubrimiento de X** $\Leftrightarrow X = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.
- A es un **recubrimiento abierto** si cada $A_i \in A$ es **abierto**.
- A es un **subrecubrimiento de Y** $\Leftrightarrow Y \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i = X$.
- A es un **cubrimiento de Y** $\Leftrightarrow Y \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i \subset X$.

Observación: Sea $A' \subset A$.

- A' es un **subrecubrimiento de A** $\Leftrightarrow A'$ es **recubrimiento de X**, $X = \bigcup\limits_{i \in I} A'_i$.
- A' es un **subrecubrimiento de A** $\Leftrightarrow A'$ es **cubrimiento de Y**, $Y \subset \bigcup\limits_{i \in I} A'_i \subset X$.

Proposición 78. Sea (X, τ) espacio topológico 2AN.

1. Todo recubrimiento abierto de X tiene un subrecubrimiento numerable.
2. Existe $D \subset X$ **denso** ($\overline{D} = X$) y numerable.

Demostración:

(1) Sea $\beta = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ base numerable de τ. Sea $A = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un recubrimiento abierto de X. Sea $n \in \mathbb{N}$, $\exists \alpha = \alpha(n)$ tal que $B_n \subset U_{\alpha(n)}$ por ser $U_{\alpha(n)} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n$ abierto y β base.

$A' = \{U_{\alpha(n)} : n \in \mathbb{N}\} \subset A$, $|A'| \leqslant \aleph_0$.

$X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} U_{\alpha(n)} \subset X \Rightarrow X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} U_{\alpha(n)} = \bigcup\limits_{U \in A'} U$.

(2) Sea $\beta = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $B_n \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_n \in B_n$, $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$.

Sea $x \in X$. Sea V entorno de $x \Rightarrow \exists n$ tal que $x \in B_n \subset V$ (por definición de entorno, $x \in B_n \subset U \subset V$ donde U es un abierto en X). Entonces, $x_n \in B_n \cap D \subset V \cap D \Rightarrow$ $V \cap D = \emptyset$.

2.1.2. Espacio topológico compacto

Definición 53 (Espacio topológico compacto). (X, τ) espacio topológico se dice **compacto** si todo **recubrimiento abierto** de X tiene un **subrecubrimiento** finito.
Un **subconjunto** $E \subset X$ es compacto $\Leftrightarrow$ E con la topología de subespacio es compacto.

Proposición 79. $f : X \to Y$ continua, X compacto $\Rightarrow$ $f(X)$ compacto.

Demostración: Sea $\zeta = \{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ cubrimiento abierto de $f(X)$. Sea $A = \{f^{-1}(W_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ recubrimiento por abiertos de X. Sea $A = \{f^{-1}(W_{\lambda_1}), ..., f^{-1}(W_{\lambda_n})\}$ subrecubrimiento de A. Sea $\zeta' = \{W_{\lambda_1}, ..., W_{\lambda_n}\} \subset \zeta$.
$f(X) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} W_{\lambda_j}$. En efecto, $y = f(x) \in f(X)$, para $x \in X$. Entonces, como $X = \bigcup\limits_{j=1}^{n} f(W_{\lambda_j}) \Rightarrow$ $\exists j_0 \in \{1, ..., n\}$ tal que $x \in f^{-1}(W_{\lambda_{j_0}}) \Rightarrow y = f(x) \in W_{\lambda_{j_0}}$.

Proposición 80. Sea (X, τ) espacio topológico T_2, $Y \subset X$, Y compacto, $x_0 \notin Y \Rightarrow \exists U, V$ abiertos en X tales que $x_0 \in U$, $Y \subset V$, $U \cap V = \emptyset$.

Demostración: Sea $y \in Y$. Como $x_0 \notin Y$, entonces $y \neq x_0$. Como X es T_2, $\exists U_{x_0,y} \in \beta_{x_0}$ abierto, $V_y \in \beta_y$ abierto tal que $U_{x_0,y} \cap V_y = \emptyset$.

Sea $A = \{V_y \cap Y : y \in Y\}$. A es un recubrimiento abierto de Y. Y es compacto, $\exists y_1, ..., y_n \in Y$ tales que $A' = \{V_{y_1} \cap Y, ..., V_{y_n} \cap Y\}$ es un recubrimiento de Y.

$U = U_{x_0,y} \cap ... \cap U_{x_0,y_n}$ abierto, $\bigcup\limits_{j=1}^{n} V_{y_j} \cap Y = Y \subset V = \bigcup\limits_{j=1}^{n} V_{y_j}$ abierto finito.

$U \cap V \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} U \cap V_{y_j} = \emptyset$, porque cada $U \cap V_{y_j} = \emptyset$.

Proposición 81. X compacto, $K \subset X$, K cerrado $\Rightarrow$ K compacto.

Demostración: Sea $\Omega = X \setminus K$ abierto de X. Sea $\zeta = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un cubr. abierto de K. Sea $A = \{\Omega\} \cup \zeta$ un recubr. abierto de X. Sea $A' = \{\Omega\} \cup \{U_{\lambda_1}, ..., U_{\lambda_n}\} \subset A$ subrecubr. abierto de $X \Rightarrow \zeta' = \{U_{\lambda_1}, ..., U_{\lambda_n}\}$ satisface que $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{\lambda_j}$.

Proposición 82. (X, τ) T_2, $Y \subset X$, Y compacto $\Rightarrow$ Y es cerrado.

Demostración: Sea $\Omega = C_X Y = X \setminus Y$. Sea $x_0 \in \Omega$. Veamos que $x_0 \in \mathrm{Int}(\Omega)$. $\exists U, V$ abiertos en X tales que $x_0 \in U$, $V_0 \supset Y$, $U \cap V = \emptyset$. Luego $U \subset \Omega = C_X Y$, $x_0 \in U \Rightarrow x_0 \in \mathrm{Int}(\Omega)$.

Proposición 83. $f : X \to Y$ continua y biyectiva, X compacto, Y $T_2 \Rightarrow f$ homeomorfismo.

Demostración: $f(X) \subset Y$ compacto $\Rightarrow Y = f(X)$ es compacto y T_2. Sea K cerrado de X compacto $\Rightarrow K$ es compacto. $\tilde{f} = f|_K : K \to Y$ continua $\tilde{f}(K) = f(K)$ compacto, $f(K) \subset Y$ es $T_2 \Rightarrow f(K)$ es cerrado.

Proposición 84. (**Conjunto compacto**). (X, τ) espacio topológico, $Y \subset X$. Son equivalentes:

1. **Y es compacto.**
2. $\forall$ cubrimiento de Y por abiertos de X, tiene un subrecubrimiento finito. $Y \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \Rightarrow Y \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{\lambda_j}$.

Demostración:

(1) $\to$ (2) Sea $\zeta = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un subrecubrimiento de Y por abiertos de x. Sea $\mathcal{A} = \{U_\lambda \cap Y\}$ un recubrimiento de Y por abiertos Y. $\exists \mathcal{A}' = \{U_{\lambda_1} \cap Y, ..., U_{\lambda_n} \cap Y\} \subset \mathcal{A}$ subrecubrimiento de A. $Y = \bigcup_{j=1}^{n} U_{\lambda_j} \cap Y \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{\lambda_j}$. Sea $\zeta' = \{U_{\lambda_1}, ..., U_{\lambda_n}\} \subset \zeta \Rightarrow \zeta'$ es un subrecubr. de ζ.

(2) $\to$ (1) Sea $\mathcal{A} = \{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, Ω_λ abierto en Y. Para cada $\lambda \in \Lambda$, $\exists U_\lambda \in \tau$ tal que $\Omega_\lambda = U \cap Y$. Sea $\zeta = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. $Y \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, ζ es un cubrimiento abierto de Y.

Sea $\zeta' = \{U_{\lambda_1}, ..., U_{\lambda_n}\} \subset \zeta$ subrecubrimiento de ζ.
Luego $Y \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{\lambda_j}$, $Y \subset (\bigcup_{j=1}^{n} U_{\lambda_j}) \cap Y = \bigcup_{j=1}^{n} \Omega_{\lambda_j} \subset Y \Rightarrow Y = \bigcup_{j=1}^{n} \Omega_{\lambda_j}$.

Entonces $\mathcal{A}' = \{\Omega_{\lambda_1}, ..., \Omega_{\lambda_n}\} \subset \mathcal{A}$ es un subrecubrimiento abierto de Y.

Proposición 85. Un espacio topológico es **compacto** $\Leftrightarrow$

- Toda **familia de cerrados** con **intersección vacía** tiene una **subfamilia finita** con **intersección vacía**.
- Toda **familia de cerrados** $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ que tiene una **subfamilia finita** $\{E_i\}_{i=1}^{n}$, $\bigcap_{i=1}^{n} E_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda \neq \emptyset$.

Corolario. Si X es un espacio topológico compacto y tenemos una sucesión decreciente de cerrados no vacíos de X,

$$F_1 \supset F_2 \supset ... \supset F_n \supset ... \Rightarrow \bigcap_{j\in\mathbb{N}} F_j \neq \emptyset$$

2.1.3. Producto de espacios compactos

Proposición 86. Lema del tubo. Sea X e Y espacios topológicos, Y compacto y $x_0 \in X$. Para cada abierto N de $X \times Y$ tal que $\{x_0\} \times Y \subset N$, $\exists\, U_{x_0}$ entorno abierto de x_0 en X tal que $U_{x_0} \times Y \subset N$.

Demostración: Sea N abierto de $X \times Y$ tal que $x_0 \times Y \subset N$. Para cada $y \in Y$ se tiene que $(x_0, y) \in N = Int(N)$. Entonces existe $W_y \times V_y$ entorno abierto de (x_0, y), $W_y \times V_y \subset N$.

$\{x_0 \times V_y : y \in Y\}$ es un cubrimiento de $x_0 \times Y$. Pero como $x_0 \times Y$ es compacto, existen $y_1, ..., y_n \in Y$ tales que $\{x_0 \times V_{y_1}, ..., x_0 \times V_{y_n}\}$ es un cubrimiento finito de $x_0 \times Y$.

$U_{x_0} := W_{y_1} \cap ... \cap W_{y_n}$ entorno abierto de x_0. Además $x_0 \times Y \subset U_{x_0} \times Y =$
$(\bigcap\limits_{j=1}^{n} W_j) \subseteq \bigcap\limits_{j=1}^{n} W_{y_j} \times (\bigcap\limits_{j=1}^{n} V_{y_j}) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} W_{y_j} \times V_{y_j}$, $W_{y_j} \times V_{y_j} \subset N$.

Proposición 87. Sean $(X_1, \tau_1), ..., (X_n, \tau_n)$ espacios topológicos **compactos** $\Rightarrow$ $(X_1 \times ... \times X_n, \tau_1 \times ... \times \tau_n)$ es un espacio topológico **compacto**.

Demostración: Lo demostramos para $n = 2$, por inducción se generaliza.
$(X_1, \tau_1) = (X, \tau_X)$, $(X_2, \tau_2) = (Y, \tau_Y)$.

Sea $F = \{\Omega_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ recubrimiento abierto de $X \times Y$. Sea $x_0 \in X$, $F_{x_0} = \{\Omega_\lambda \cap (x_0 \times Y)\}_{\lambda \in \Lambda}$.
$\tilde{\Omega}_{\lambda, x_0} := \Omega_\lambda \cap (x_0 \times Y)$.

Como $x_0 \times Y$ es compacto, entonces existen $\{\tilde{\Omega}_{\lambda_j, x_0}\}_{j \in J_{x_0}}$ es un cubrimiento abierto de $x_0 \times Y$. $N_{x_0} = \bigcap\limits_{j \in J_{x_0}}^{\supset} x_0 \times Y$ por el Lema del tubo, $\exists U_{x_0}$ entorno abierto de x_0 en X tal que $x_0 \times Y \subset U_{x_0} \times Y \subset N_{x_0}$.

Sea $G = \{U_{x_0} : x_0 \in X\}$ recubrimiento abierto de X. Como X es compacto, tiene un subrecubrimiento finito $X = \bigcup\limits_{p=1}^{m} U_{x_p}$.

$$X \times Y = (\bigcup_{p=1}^{m} U_{x_p}) \times Y = \bigcup_{p=1}^{m} (U_{x_p} \times Y) \subset \bigcup_{p=1}^{m} N_{x_p} = \bigcup_{p=1}^{m} (\bigcap_{j \in J_{x_p}} \tilde{\Omega}_{\lambda_j}) \subset \bigcup_{p=1}^{m} (\bigcap_{j \in J_{x_p}} \Omega_{\lambda_j})$$
$$\subset \bigcup_{p=1}^{m} \bigcup_{j \in J_{x_p}} \Omega_{\lambda_j}.$$

Proposición 88. Teorema de Tychonoff. Si los espacios topológicos X_λ, $\lambda \in \Lambda$ son todos compactos, entonces el espacio topológico producto $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es también compacto.

2.1.4. Subconjuntos compactos en $\mathbb{R}^n$ y en espacios métricos

Proposición 89. $E \subset \mathbb{R}^n$ es subconjunto compacto en $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$

1. $\forall \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$, $x_j \in E \; \forall j$, tiene una **subsucesión que converge** a algún **punto de E**.
2. E es **cerrado** y **acotado** (existe alguna bola que lo contiene).
3. Todo **recubrimiento abierto de E** tiene un **subrecubrimiento finito**.

   $\forall \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ familia de abiertos de $\mathbb{R}^n$ tal que $E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \Rightarrow \exists$ conjunto finito de

   $$\text{índices tal que } E \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

Demostración: Compacto $\Leftrightarrow$ Cerrado y acotado.

$(\rightarrow)$ $X = \mathbb{R}^2$ es T_2, E compacto, $\Rightarrow$ E es cerrado.
Sea $\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\}$. $\tilde{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

$F = \{B(\tilde{0}, n) : n \in \mathbb{N}\}$. F es un cubrimiento de E, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $E \subset B(\tilde{0}, n_0) \Rightarrow$ E es acotado.

$(\leftarrow)$ Como E es acotado $\exists m_0$ tal que $E \subset B(\tilde{0}, m_0)$.
Sea $\tilde{a}_0 \in E$, $\rho(\tilde{x}, \tilde{0}) \leqslant \rho(\tilde{x}, \tilde{a}_0) + \rho(a_0, \tilde{0}) \leqslant N + r = \lambda$. $E = [-\lambda, \lambda]^n$, entonces, E es compacto. E es cerrado $\Rightarrow$ compacto. El producto finito de espacios compactos es compacto.

Proposición 90. Todo conjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}$ tiene máximo y mínimo.

$$\emptyset \neq E \subset \mathbb{R} \text{ y } E \text{ compacto} \Rightarrow \exists m, M \in E \text{ tal que } \forall x \in E,\ m \leqslant x \leqslant M$$

Proposición 91. Sea $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua y $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto.

- La imagen continua de un compacto es compacto.
- f definida en K está acotada, es decir, $sup_{x \in K} ||f(x)|| < \infty$.
- Una función f en K compacto alcanza en K su máximo y su mínimo, es decir, $\exists a, b \in K$ tales que $\forall x \in K$, $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$.

Definición 54 (Distancia de x a A, diámetro). (X, d) espacio métrico, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in X$.

- **Distancia** de x_0 a A: $d(x_0, A) = \inf\{d(x_0, a) : a \in A\}$.
- **Diámetro**: $dia(A) = sup\{d(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A\}$.

Definición 55 (Número de Lebesgue de un recubrimiento). (X, d) un espacio métrico, $\mathcal{A}$ un recubrimiento abierto de X. Para X compacto $\exists \delta > 0$ tal que para cada subconjunto $B \subset X$ con $\text{dia}(B) < \delta$ $\exists$ un elemento del recubrimiento, $A \in \mathcal{A}$ tal que $B \subset A$. δ es el **número de Lebesgue del recubrimiento** $\mathcal{A}$.

Demostración: (del Lema del número de Lebesgue). Sea $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Si $X \in \mathcal{A}$, queda demostrado. Veamos para $X \notin \mathcal{A}$. Como X es compacto, $X = A_1 \cup ... \cup A_n$ con $A_i \in \mathcal{A}$. $C_i = X \setminus A_i$ cerrados.

Sea $f : X \to \mathbb{R}; x \to \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x, C_i)$, $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in X$.

Sea $B \subset X$, $\text{diam}(B) < \delta$. Sea $x_0 \in B \Rightarrow B \subset B_d(x_0, \delta)$. $\max\{d(x_0, C_1), ..., d(x_0, C_n)\} > 0$ $\Rightarrow x_0 \in A_n$.

Veamos que $B_d(x_0; \delta) \subset A_m$. $\delta \leqslant f(x_0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x_0, C_i) \leqslant d(x_0, C_m) \Rightarrow$ $d(x_0, y) < \delta \leqslant d(x_0, C_m)$. $y \notin C_m$ porque debe darse que $\delta > 0$ y $d(x_0, y) > 0$.

Propiedades:

- $f : x \in X \to d(x, A) \in \mathbb{R}$ es una aplicación continua.
- Sea f tal que $\forall x \in X$, $f(x) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ tal que $\delta = \max\{f(x) : x \in X\}$ y $\delta = \min\{f(x) : x \in X\}$.

Definición 56 (Función uniformemente continua). Sea $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ función entre espacios métricos. f es **uniformemente continua** $\Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } d_x(x_0, x_1) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(x_1)) < \epsilon$$

Proposición 92. (**Teorema de la continuidad uniforme**) $f : X \to Y$ continua entre espacios métricos, X es compacto $\Rightarrow$ f es uniformemente continua.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$. Consideramos $B_y = \{B_{d_y}(y, \frac{\epsilon}{2}) : y \in Y\}$. Sea $\mathcal{A} = \{f^{-1}(B_y) y \in Y\}$ recubrimiento abierto. Tenemos que, por ser f continua en X, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall B \subset X$ $\text{dia}(B) < \delta$. $\exists y \in Y$ tal que $B \subset f^{-1}(B_y)$.

Sea $B = \{x_0, x_1\}$ tal que $\text{dia}(B) = d(x_0, x_1) < \delta \Rightarrow \exists y \in Y$ con $B \subset f^{-1}(B_y) \Rightarrow f(\tilde{B}) \subset B_y$. $d_Y(f(x_0), y) < \frac{\epsilon}{2}$, $d_Y(f(x_0), y) < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(x_1)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Definición 57 (Punto aislado). $x_0 \in X$ **aislado** $\Leftrightarrow \{x_0\}$ es abierto.

Proposición 93. X es T_2 y $x_0 \in X$ es un punto aislado, $U \subset X$, $U \neq \emptyset \Rightarrow \exists V \subset U$ abierto tal que $x_0 \notin \overline{V}$.

Proposición 94. X compacto y T_2, si X no tiene puntos aislados $\Rightarrow$ X no es numerable.

2.1.5. Compactos para la topología del orden

Proposición 95. Sea $(X, \leqslant)$ totalmente ordenado con la topología del orden. Todo conjunto compacto no vacío de X tiene máximo y mínimo.

Proposición 96. Sea X un conjunto **simplemente ordenado** que verifica la propiedad de mínima cota superior. Entonces cada intervalo cerrado $[a, b]$ es compacto para la topología del orden.

Proposición 97. Teorema de los valores extremos. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua, Y conjunto ordenado con la topología asociada al orden. Entonces, si X es compacto, existen puntos c,d en X tales que:

$$m = f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d) = M$$

Demostración: $A = f(X) \subset Y$, A es compacto.

1. A no tiene elemento maximal. Sea $\mathcal{A} = \{(-\infty, a) : a \in A\}$, $A \subset \bigcup_{a \in A} (-\infty, a) \Rightarrow$ $A \subset (-\infty, a_1) \cup ... \cup (-\infty, a_n) \Rightarrow \tilde{a} = max\{a_1, ..., a_n\} \Rightarrow A \subset (-\infty, \tilde{a})$ $\tilde{a} = f(d) = M$ para algún $d \in X$. ¡Contradicción!
2. Si A no tiene elemento minimal. Sea $\mathcal{A} = \{(a, \infty) : a \in A\} \Rightarrow A \subset \bigcup_{a \in A} (a, \infty) \Rightarrow$ $A \subset (a_0, \infty) \cup ... \cup (a_n, \infty)$. $\tilde{a} \in A$, $\tilde{a} = min\{a_1, ..., a_n\} = f(c) = m$ para algún $d \in X$. Entonces, $A \subset (\tilde{a}, \infty) \Rightarrow m = f(c) \leqslant f(x) x \in X$.

2.1.6. Compactificación por un punto

Proposición 98. Un espacio topológico X es homeomorfo a un subespacio abierto de un espacio compacto y $T_2 \Leftrightarrow$ X es localmente compacto y T_2.

Definición 58 (Localmente compacto). Sea X espacio topológico. Sea $x_0 \in X$. Diremos que X es **localmente compacto** en x_0 si existe $K \subset X$ compacto que contiene a un entorno de x_0. **X es localmente compacto** si $\forall x_0 \in X$, X es localmente compacto en x_0.

Proposición 99. Son equivalentes:

1. X localmente compacto y T_2.
2. $\exists\ \tilde{X}$ espacio topológico tal que X es un subespacio topológico de $\tilde{X}$, $|\tilde{X} \setminus X| = 1$ y $\tilde{X}$ es compacto y T_2.

Además, si $\tilde{X}$ es otro espacio que satisface el segundo punto, entonces existe un homeomorfismo $\varphi : \tilde{X} \to \hat{X}$ tal que $\varphi|_X = id_X$.

2.2. Conexión

Sea (X, τ) espacio topológico.

Definición 59 (Espacio topológico conexo). X es **conexo** $\Leftrightarrow$ X **no es unión** de **abiertos propios disjuntos**.

$$\nexists\, A, B \in \tau,\ A, B \neq \emptyset, X \text{ tales que } X = A \cup B,\ A \cap B = \emptyset$$

Definición 60 (Subconjunto conexo). $A \subset X$ es **conexo** $\Leftrightarrow$ A con la topología de subespacio es conexo.

Proposición 100. Son equivalentes:

1. X es conexo.
2. Los únicos subconjuntos de X que son **simultáneamente abiertos y cerrados (clopen)** son $\emptyset$ y X.
3. X **no** es unión de dos **cerrados** no vacíos **disjuntos**.
4. $\nexists A, B \subset X$ no vacíos tales que $X = A \cup B$, $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset$.

Demostración:

$(1 \to 2)$ Supongamos que X es conexo. Sea A abierto y cerrado, $A \neq \emptyset, X \Rightarrow A \cup C_X(A) = X$ con A abierto, $C_X(A)$ cerrado; también A cerrado y $C_X(A)$ abierto $\Rightarrow$ X no es conexo.

$(2 \to 1)$ Supongamos que X no es conexo $\Rightarrow \exists\, U, V$ abiertos tales que $X = U \cup V$ abierto, $U \cap V = \emptyset$. Como U es abierto, $C_X(U) = V$ es abierto y cerrado $\Rightarrow$ U es abierto y cerrado no trivial.

$(1 \to 3)$ Supongamos que X es conexo y que $X = K \cup F$ para K, F cerrados no vacíos $K \cap F = \emptyset$. Por un lado, $C_X(K) = F$, $C_X(F) = K \Rightarrow X = C_X(K) \cup C_X(F)$. Por otro lado, $\emptyset = C_X(K \cup F) = C_X(K) \cap C_X(F)$. Como X es unión de dos abiertos disjuntos no vacíos, no es conexo.

$(3 \to 1)$ Supongamos que X no es conexo $\Rightarrow \exists\, U, V$ abiertos tales que $X = U \cup V$ abierto, $U \cap V = \emptyset \Rightarrow \emptyset = C_X(U \cup V) = C_X(U) \cap C_X(V)$ y $X = V \cup U = C_X(U) \cup C_X(V)$. X es unión de dos cerrados no vacíos disjuntos, contradicción con 3.

$(1 \to 4)$ Supongo que $\exists A, B \subset X$ no vacíos tales que $X = A \cup B$, $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset$
$\Rightarrow \overline{A} \cap B = \emptyset$, $\overline{A} \subset A \Rightarrow$ A es cerrado.
$\Rightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$, $\overline{B} \subset B \Rightarrow$ B es cerrado.
$A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \overline{A} \cap B = \emptyset \Rightarrow$ X es unión de dos cerrados disjuntos $\Rightarrow$ X no es conexo.

$(4 \to 1)$ Supongamos que X no es conexo $\Rightarrow \exists A, B$ abiertos propios disjuntos tales que $X = A \cup B$. $C_X(A) = B$ y $C_X(B) = A$, A y B son cerrados $\Rightarrow \emptyset = A \cap B = \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B}$ $\Rightarrow (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset$ para A, B subconjuntos de X no vacíos, contradicción con 4.

Lema 1. Sea (X, τ) espacio topológico $\{C, D\}$ una partición propia de X en abiertos disjuntos. Si $A \subset X$ conexo ((A, τ_A) es conexo) $\Rightarrow (A \subset C)$ ó $(A \subset D)$.

Demostración: Sea $X = C \cup D$, C, D abiertos propios disjuntos. Podemos escribir $A = A \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D)$ como abiertos relativos de A. Como A es conexo, tenemos dos opciones (no simultáneas): $\{A \cap C = \emptyset \Rightarrow A \subset D = C_X(C)\}$ y $\{ A \cap C = A \Rightarrow A \subset C\}$.

Definición 61 (Separación de un conjunto). Sea $A \subset X$. Una **separación de A** es una partición $\{C, D\}$ de A en conjuntos **no vacíos** tales que **ninguno contiene un punto de acumulación del otro**.

Lema 2. A **conexo** $\Leftrightarrow \nexists$ una **separación** de A.

Demostración: $(1 \to 2 \equiv \neg 2 \to \neg 1)$ Supongamos que $\exists$ una separación $\{C, D\}$ de A. $A = C \cup D$, $C' \cap D = \emptyset$, $D' \cap C = \emptyset$. $Adh_A(C) = A \cap Adh_X(C) = A \cap (C' \cup C) = (A \cap C) \cup (A \cap C') = C \cup [(C \cup D) \cap C'] = C \cup (C \cap C') \cup (D \cap C') = C$. Luego C es cerrado en A. Análogo para D, D es cerrado en A. Por tanto A no es conexo.

$(2 \to 1 \equiv \neg 1 \to \neg 2)$ Si A es no conexo, $\exists C, D$ abiertos propios y disjuntos tales que $A = C \cup D$.

- $C = C_A(D)$ cerrado en $A \Rightarrow C = Adh_X(C) \cap A = Adh_X(C) \cap (C \cup D) = (\overline{C} \cap C) \cup (\overline{C} \cap D) = C \cup (\overline{C} \cap D) \Rightarrow \overline{C} \cap D \subset C \Rightarrow C' \cap D \subset C$.
  También, $C' \cap D \subset D$ pero $C \cap D = \emptyset \Rightarrow C' \cap D = \emptyset$.
- $D = C_A(C)$ cerrado en $A \Rightarrow D = Adh_X(D) \cap A = Adh_X(D) \cap (C \cup D) = (\overline{D} \cap D) \cup (\overline{D} \cap C) = D \cup (\overline{D} \cap C) \Rightarrow \overline{D} \cap C \subset D \Rightarrow D' \cap C \subset D$.
  También, $D' \cap C \subset C$ pero $C \cap D = \emptyset \Rightarrow D' \cap C = \emptyset$.

Proposición 101. $A \subset X$ conexo tal que $\forall\, B \subset X$, $A \subseteq B \subseteq \overline{A} \Rightarrow B$ es conexo en X.

Demostración: Si $B = C \cup D$ una separación de $B \Rightarrow A \subset C$ ó $A \subset D$.
$A \subset C \Rightarrow B \subset \overline{A} \subset \overline{C} \Rightarrow B \cap D \subset \overline{C} \cap D \Rightarrow D = B \cap D \Rightarrow \overline{C} \cap D \neq \emptyset$.
$A \subset D \Rightarrow B \subset \overline{A} \subset \overline{D} \Rightarrow B \cap C \subset \overline{D} \cap C \Rightarrow C = B \cap C \Rightarrow \overline{D} \cap C \neq \emptyset$.
Pero $C' \cap D = \emptyset$ y $D' \cap C = \emptyset$, luego no existe separación de $B \Rightarrow B$ es conexo.

Proposición 102. La **unión** de una familia de **subconjuntos conexos** de un espacio topológico (X, τ) que **tiene un punto en común** es un **conexo** de X.

Demostración: Sea $F = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ familia de conexos de X tal que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$. Sea $p \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$.
Sea $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Veamos que A es un conexo en X por contradicción.

Supongamos que $\exists\{C, D\}$ separación de $A \Rightarrow A = C \cup D$. Supongamos que $p \in C$. Veamos que $A = C$. Sea $\lambda \in \Lambda$, veamos que $A_\lambda \subset C$. En efecto, A_λ es conexo en A (por serlo en X), $A_\lambda \subset C \cup D \Rightarrow \{A_\lambda \subset C \Rightarrow p \in A_\lambda \Rightarrow p \in C\}$ ó $\{A_\lambda \subset D$, pero llegamos a un absurdo porque $p \in A_\lambda$, pero $p \in C$, $p \notin D\}$.

Proposición 103.

- $A \subset X$ es conexo $\Leftrightarrow$ para cada par de abiertos $U, V \subset X$ tales que $A \subset U \cup V$ y $U \cap V \cap A = \emptyset \Rightarrow A \subset U$ y $A \cap V = \emptyset$ o bien $A \subset V$ y $A \cap U = \emptyset$.
- $A \subset X$ es conexo $\Leftrightarrow$ para cada par de cerrados $F, G \subset X$ tales que $A \subset F \cup G$ y $F \cap G \cap A = \emptyset \Rightarrow A \subset F$ y $A \cap G = \emptyset$ o bien $A \subset G$ y $A \cap F = \emptyset$.

Proposición 104. X conexo, $f : X \to Y$ continua $\Rightarrow f(X)$ conexo.

Demostración: Sean U, V abiertos de Y, $f(X) \subset U \cup V$, $U \cap V \cap f(X) = \emptyset$.
$f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos, $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = X$ y $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$. Como X es conexo,

- o bien $f^{-1}(U) = \emptyset \Rightarrow f(X) \subset V$ y $f(X) \cap U = \emptyset$;
- o bien $f^{-1}(V) = \emptyset \Rightarrow f(X) \subset U$ y $f(X) \cap V = \emptyset$.

Luego f(X) es conexo.

Demostración alternativa: Supongamos que f(X) no es conexo $\Rightarrow f(X) = C \cup D$ separación de f(X). $X = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ separación de $X \Rightarrow X$ no es conexo.

Lema 3. X conexo, $f : X \to Y$ continua, Y con topología discreta $\Rightarrow$ f es constante.
Demostración: f(X) conexo de $Y \Rightarrow |f(X)| = 1$ $\exists y_0 \in Y$ tal que $f(x) = \{y_0\}$.

Proposición 105. Sea $E \subset X$ subconjunto conexo $\Rightarrow \overline{E}$ es conexo.

Demostración: $\overline{E} \subset F \cup G$ con F y G cerrados tales que $F \cap G \cap \overline{E} = \emptyset \Rightarrow E \subset F \cup G$ y $E \cap F \cap G = \emptyset$. Como E es conexo, será

- $E \subset F$ y $E \cap G = \emptyset \Rightarrow \overline{E} \subset F$ y $\overline{E} \cap G = \emptyset$.
- o $E \subset G$ y $E \cap F = \emptyset \Rightarrow \overline{E} \subset G$ y $\overline{E} \cap F = \emptyset$.

Así, $\overline{E}$ es conexo.

2.2.1. Subconjuntos conexos de la recta real

Sea (X, R) con más de un elemento, R relación de orden en X.

Definición 62 (Propiedad de la mínima cota superior). R la cumple si $\forall A \subset X$ acotado superiormente, existe una mínima cota superior.

Definición 63 (Continuo lineal). Un conjunto ordenado es un **continuo lineal** si X tiene la propiedad de la mínima cota superior y $\forall\ xRy \Rightarrow \exists\ z \in X$, xRz, zRy.

Proposición 106. $(X, <)$ es continuo lineal $\Rightarrow$ X, sus intervalos y los rayos $(-\infty, a)$ o (a, ∞) son conexos con la **topología del orden**.

Demostración: Basta demostrar para abiertos de A, porque $\mathrm{Int}(A) \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{A}$ es conexo. Sea el abierto $Y = X$, (a,b), $(-\infty, a)$ ó (a, ∞), es decir, Y **convexo**, porque dados $a, b \in Y$, $(a, b) \subset Y$. Sea $Y = A \cup B$ abiertos en Y disjuntos no vacíos. Sea $a \in A$, $b \in B$ y supongamos $a < b$, $a, b \in Y$. Entonces, $[a, b] \subset Y \Rightarrow [a, b] = A_0 \cup B_0$, donde $A_0 = [a, b] \cap A$ y $B_0 = [a, b] \cap B$.

Como A_0 está acotado superiormente $\Rightarrow \exists$ c mínima cota superior de A_0, $c \leqslant b$.

- $c_0 \in A_0 \Rightarrow c_0 \neq b$, $c_0 = a$ ó fa $< c_0 < b$.ComoA_0 es abierto, $\exists U_{c_0} \subset A$ entorno de c_0, $U_{c_0} = [c_0, c) \subset A_0$ para algún $c \in A_0 \Rightarrow c_0$ no es mínima cota superior. Para $a = c_0$ contradicción también.
- $c_0 \in B_0$, $c_0 = b$ o $a < c_0 < b$. $(e, c_0] \subset B_0$ por ser B_0 abierto. Como $A_0 \cap B_0 \Rightarrow$ $\forall x \in A_0$, $x < c \Rightarrow$ e es cota superior de A_0.

Como no podemos ubicar c_0, no se puede separar los abiertos de $Y \Rightarrow Y$ es conexo.

Corolario. $\mathbb{R}$ con la topología usual es conexa. También sus intervalos y rayos.

Proposición 107. (Teorema del valor medio). Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua del espacio topológico conexo X al espacio Y ordenado con la topología del orden. Si $a, b \in X$ y $y \in Y$ tal que $f(a) < y < f(b) \Rightarrow \exists c \in X$ tal que $f(c) = y$.

2.2.2. Conexión en productos

Proposición 108. El producto cartesiano de espacios topológicos **conexos** es **conexo** con la **topología producto**.

Demostración: (Idea). Construímos $Y \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ tal que Y es denso y conexo. $\overline{Y}$ es conexo y $\overline{Y} = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Para $b = \{b_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, $n \in \mathbb{N}$. $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset \Lambda$.

$X_{\{\lambda_1,...,\lambda_n\}} := \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ donde $B_\lambda = \begin{cases} X_\lambda \text{ si } \lambda \in \{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \\ \{b_\lambda\} \text{ si } \lambda \notin \{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \end{cases}$

$b \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{J\subset\Lambda,|J|=n} X_J \neq \emptyset$. X_J conexo $\Rightarrow Y = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{J\subset\Lambda,|J|=n} X_J$ conexo.

Para seguir la demostración, necesitamos el siguiente lema.

Lema. Sea Z, W conexos $\Rightarrow Z \times W$ es conexo.

Demostración: $T_z = (Z \times \{b\}) \cup (\{z\} \times W) \Rightarrow T_z$ conexo. $\bigcup\limits_{z\in Z} T_z = Z \times W$, $(a, b) \in \bigcap\limits_{z\in Z} T_z$ para b fijo $\Rightarrow Z \times W$ es conexo.

Siguiendo la demostración de la proposición, veamos que Y es denso.
$x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in X$. ¿$\forall$ entorno de x tenemos un elemento de Y? $U = \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, $U_\lambda = X_\lambda$ si $\lambda \notin \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}\{b_\lambda\}$.

$y = (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \Leftrightarrow y_\lambda = \begin{cases} x_\lambda \lambda \in \{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \\ b_\lambda \lambda \notin \{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \end{cases}$

$y \in X_J \Rightarrow y \in U \cap X_J \subset (U \cap Y) \neq \emptyset$.

2.2.3. Conexión local y componentes conexas

Sea (X, τ) espacio topológico. Definimos la relación entre los puntos:

$$xRy \Leftrightarrow \exists A \text{ conexo tal que } x, y \in A \subset X$$

Veamos que R es una **relación de equivalencia**, es decir, que se cumplen las propiedades:

- **Reflexiva**: xRx, basta $x = y \in A$.
- **Simétrica**: $xRy \Rightarrow yRx$. Si existe A conexo tal que $x, y \in A$ se verifican ambas.
- **Transitiva**: xRy, $yRz \Rightarrow xRz$. $x, y \in A$ conexo, $y, z \in B$ conexo $\Rightarrow x, z \in A \cup B$ que es conexo por $y \in A \cap B$.

Definición 64 (Componentes conexas). Clases de equivalencia en X dadas por la relación anterior. Para cada $x \in X$ la componente conexa $C_x = R(x)$ que contiene a x es el **máximo conexo que contiene a x**.

$$X^* = X/R = \{[x] : x \in X\}, [x] \subset X \text{ componente conexa de x }\}$$

Corolario. [x] conexo de X.

Demostración: Supongamos que [x] no es conexo de X. Sea Y = [x] = $C \cup D \Rightarrow x \in C$ ó $x \in D$. Sea $y \in D$, $y \in [x] \Rightarrow \exists H \subset X$ conexo. $x, y \in H \Rightarrow$

- $H \subset C$. Pero $y \in C \Rightarrow C \cap D \neq \emptyset$. Absurdo.
- $H \subset D$. Pero $x \in C \Rightarrow C \cap D \neq \emptyset$. Absurdo.

Proposición 109. Las **componentes conexas de X** son subespacios **disjuntos** y **conexos** de X cuya **unión es X** de forma que **cada subespacio conexo de X** no trivial interseca a **una** de ellas.

Demostración: $\{C_\lambda\}\lambda \in \Lambda$, C_λ componente conexa de X. $C(x_\lambda) = C_\lambda = [x_\lambda]$ para un $x_\lambda \in X$, $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ (unión disjunta). Veamos que:

1. C_λ conexo. Si no lo es $C = C_\lambda = U \cup V$ para U,V abiertos disjuntos propios. Dados $x_0 \in U$, $y_0 \in V \Rightarrow x_0, y_0 \in C$ $\exists A$ tal que $x_0, y_0 \in A \Rightarrow \{A \subset U \Rightarrow y_0 \in U\}$ ó $\{A \subset V \Rightarrow x_0 \in V\}$. Absurdo.
2. $A \subset X$ conexo $\Rightarrow \exists \lambda \in \Lambda$, $A \subset C_\lambda$.

Corolario. Cada **componente conexa** es **cerrada** de X.

Demostración: Como C_λ conexo $\Rightarrow \overline{C_\lambda}$ conexo y $C_\lambda \cap \overline{C_\lambda} \neq \emptyset \Rightarrow \overline{C_\lambda} \subset C_\lambda \Rightarrow \overline{C_\lambda} = C_\lambda$.

Proposición 110.

1. $f : X \to Y$ continua $\Rightarrow$ la imagen de cada componente conexa de X está contenida en una componente conexa de Y.
2. Además, si $h : X \to Y$ homeomorfismo, h induce una correspondencia $1:1$ entre las componentes conexas de X y las de Y y los que se corresponden son homeomorfas. (h(C(x)) = C(h(x)))

Ejemplo 17. $h : \mathbb{R} \to S^1$. ¿h homeomorfismo? Consideremos $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to S^1 \setminus \{h(0)\}$. El primero tiene dos componentes conexas y el segundo solo una, por tanto, no pueden ser homeomorfos.

Definición 65 (Espacio topológico localmente conexo). (X, τ) es **localmente conexo** si cada $x \in X$ tiene un sistema fundamental de entornos que son todos conexos.

X localmente conexo $\Leftrightarrow$ para cada $A \in \tau$ y $x \in A$ $\exists V_x$ entorno conexo de x tal que $V \subset A$

Proposición 111. X es localmente conexo $\Leftrightarrow$ las componentes conexas de los abiertos son abiertas.

2.2.4. Conexión por arcos o caminos

Sea (X, τ) espacio topológico y sean $x, y \in X$ con $x \neq y$.

Definición 66 (Arco o camino). Una aplicación **continua** $\gamma : [0, 1] \to X, \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = y_0$ es un **camino** o **arco** que conecta x_0 e y_0.

- Si $x_0 = y_0$ se dice que γ es un **lazo** en x_0.
- **Camino opuesto**. Sea γ el camino que une x e y. El camino que conecta y con x es:

$$\sigma : [0, 1] \to X \text{ tal que } \sigma(t) = \gamma(1 - t)\ \forall t \in [0, 1]$$

Definición 67 (Espacio topológico arcoconexo). X es **arcoconexo** o **conexo por arcos** si $\forall x_0, y_0 \in X$, $\exists \gamma : [0, 1] \to X$ continua tal que $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = y_0$.

Definición 68 (Subconjunto arcoconexo). $M \subset X$ es conexo por arcos en (X, τ) si (M, τ_M) es conexo por arcos.

Proposición 112. σ camino en $(X, \tau) \Rightarrow \mathrm{Im}(\sigma)$ es compacto y conexo en (X, τ).

Proposición 113. X arcoconexo $\Rightarrow$ X conexo.

Demostración: $X = C \cup D$ una separación de X. Sea $c \in C$, $d \in D$. Sea $\gamma : [0, 1] \to X$ camino que une c con d. $\gamma(0) = c$, $\gamma(1) = d$.
$[0, 1]$ conexo $\Rightarrow \gamma([0, 1])$ conexo $\Rightarrow \gamma([0, 1]) \subset C \Rightarrow d \in C$, absurdo.
$[0, 1]$ conexo $\Rightarrow \gamma([0, 1])$ conexo $\Rightarrow \gamma([0, 1]) \subset D \Rightarrow c \in D$, absurdo.

Proposición 114. Todo conjunto **convexo** de un $\mathbb{R}$-esp. vect. topológico es **arcoconexo**.

Definición 69 (Yuxtaposición de caminos). Es el camino $\sigma \circ \gamma : [0, 1] \to X$:

$$(\sigma\gamma)(t) = \begin{cases} \sigma(2t) & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \gamma(2t - 1) & \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Proposición 115. $f : (X, \tau) \to (Y, S)$ continua y $A \subset X$ subconjunto **conexo por caminos** $\Rightarrow f(A) \subset Y$ subconjunto **conexo por caminos**.

Demostración: Sea $x' = f(x), y' = f(y)$ para $x, y \in A$. Sea $\sigma : [0, 1] \to A$ tal que $\sigma(0) = x$, $\sigma(1) = y$ camino $\Rightarrow f \circ \sigma : [0, 1] \to f(A)$ camino tal que $(f \circ \sigma)(0) = x'$, $(f \circ \sigma)(1) = y'$. Luego $f(M)$ es conexo por caminos.

Proposición 116. $(X_1, \tau_1), ..., (X_n, \tau_n)$ espacios topológicos no vacíos. Son equivalentes:

1. $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \tau_i)$ es conexo por caminos.
2. (X_i, τ_i) es conexo por caminos $\forall i \in \{1, ..., n\}$.

Demostración:

$(\rightarrow)$ Aplicando la proposición anterior con las aplicaciones proyección (continuas y sobreyectivas).
$(\leftarrow)$ Sean $x, y \in \prod_{i=1}^{n} X_i$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$. Sea $g : [0, 1] \to \prod_{i=1}^{n} X_i$ con $g(0) = x = \sigma(x) = (\sigma_1(0), \sigma_2(0), ..., \sigma_n(0))$, $g(1) = y = \sigma(y) = (\sigma_1(1), \sigma_2(1), ..., \sigma_n(1))$ con σ_i camino en X_i. Así g es camino en $\prod_{i=1}^{n} X_i$, por lo que $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es conexo por caminos.

2.2.4.1 Componentes conexas por caminos

Sea (X, τ) espacio topológico. Consideramos la relación R_a en X:

$$xR_a y \Leftrightarrow \exists \gamma : [0, 1] \to X \text{ continua tal que } \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$$

Veamos que es **relación de equivalencia** en X:

- **Reflexiva**. $\exists \sigma : [0, 1] \to X$ tal que $\sigma(0) = x$, $\sigma(1) = y$, el camino opuesto $\gamma : [0, 1] \to X$ tal que $\gamma(0) = y, \gamma(1) = x$. Formando el camino yuxtapuesto obtenemos el lazo: $\alpha := \sigma\gamma : [0, 1] \to X$, $\alpha(0) = \alpha(1) = x$,

$$\alpha(t) = \begin{cases} \sigma(2t) & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1) & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

- **Simétrica**. $xRy \Rightarrow yRx$. Dado $\sigma : [0, 1] \to X$ con $\sigma(0) = x, \sigma(1) = y$, $\exists \gamma : [0, 1] \to X$ tal que $\gamma(0) = y, \gamma(1) = x$ definido como $\gamma(t) = \sigma(1 - t)$ para $t \in [0, 1]$.
- **Transitiva**. $xRy, yRz \Rightarrow xRz$. Formamos el camino yuxtapuesto con $\sigma : [0, 1] \to X$ tal que $\sigma(0) = x$, $\sigma(1) = y$ y $\gamma : [0, 1] \to X$ tal que $\gamma(0) = y, \gamma(1) = z$.

Definición 70 (Arcocomponentes o componentes conexas por caminos). Tenemos que $X/R_a = \{[x]_a : x \in X\}$, definimos las **arcocomponentes de X** como $C_a(x) = [x]_a \subset X$.

Proposición 117. Las **arcocomponentes de X** son subespacios **disjuntos** y **conexos** de X cuya **unión es X** de forma que **cada subespacio conexo de X** no trivial interseca a **una** de ellas.

Proposición 118. Sea X espacio topológico.

- Cada **arcocomponente** de X está contenida en cada **componente conexa** de X.

$$\forall a \in X, [x]_a \subset [x]$$

- Si X es **localmente conexo por caminos** $\Rightarrow$ las componentes conexas y las arcocomponentes de X coinciden.

Demostración: (1) Por definición la componente conexa en x, $[x]$ es el máximo conexo que contiene a x. Por tanto, $[x]_a \subset [x]$. (2) Supongamos que $P \subset C$ con X localmente arcoconexo. Sea Q la unión de todas las arcocomponentes de X que son distintas de P y que intersecan a C, cada una está contenida necesariamente en $C \Rightarrow C = P \cup Q$. X localmente arcoconexo $\Rightarrow$ cada arcocomponente de X es un abierto de X $\Rightarrow$ las arcocomponentes de P y Q son abiertas en X $\Rightarrow$ forman una separación de C ¡Contradicción! C es conexo.

Proposición 119. X conexo y localmente arcoconexo $\Rightarrow$ X es arcoconexo.

Proposición 120. En $(\mathbb{R}, \tau_{usual})$, A abierto y conexo $\Rightarrow$ A es conexo por caminos.

Proposición 121. C componente conexa y A conexo con $A \cap C \neq \emptyset \Rightarrow A \subset C$.

Proposición 122. Si X e Y son **homeomorfos** $\Rightarrow$ tienen el **mismo número de componentes conexas** (por caminos también).

3. Bloque III: Homotopía

Sean X, Y espacios topológicos. Sean $f, g : X \to Y$ aplicaciones continuas.

Definición 71 (Homotopía). f es **homotópica** a g $\Leftrightarrow \exists\, F : X \times [0,1] \to Y$ **continua** tal que:

$$F(x,0) = f(x) \text{ y } F(x,1) = g(x)$$

F es homotopía entre f y g. Notación: $f \sim g$.

Definición 72 (Homotopía de caminos). σ, γ caminos son **homotópicos** si tienen el mismo punto inicial y final, x_0, x_1, respectivamente, y si $\exists\, F : [0,1] \times [0,1] \to X$ **continua** tal que:

$$F(s,0) = \sigma(s) \text{ y } F(s,1) = \gamma(s)\ \forall s \in [0,1]$$
$$F(0,t) = x_0 \text{ y } F(1,t) = x_1\ \forall t \in [0,1]$$

F es homotopía de caminos entre σ y γ. Notación: $\sigma \sim_p \gamma$.

Proposición 123. $\sim$ y $\sim_p$ son relaciones de equivalencia.

Demostración: (para $\sim$, análogo para $\sim_p$)

- Reflexiva: $f \sim f$. $F(x,t) = f(x)$ es homotopía.
- Simétrica: $f \sim g$, $g \sim f$. F homotopía entre f y g $\Rightarrow G(x,t) = F(x, 1-t)$ homotopía entre g y f.
- Transitiva: $f \sim g$, $g \sim h$. F homotopía entre f y g, G homotopía entre g y h. Definimos $H : X \times [0,1] \to Y$ como:

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1) & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Ejemplo 18. Sean f y g aplicaciones cualesquiera de un espacio X en $\mathbb{R}^2$. f y g son homotópicas, $\exists$ F continua $F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$, F es la **homotopía por rectas** (F lleva f(x) a g(x) a lo largo de la recta que los une).

Definición 73 (Producto de caminos). σ camino de x_0 a x_1 en X, γ camino de x_1 a x_2. El producto de los caminos es $\omega := \sigma * \gamma$ tal que:

$$\omega(s) = \begin{cases} \sigma(s) & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma(s) & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

ω está bien definida ($\sigma(1) = \omega(0)$), ω es continua por el lema de pegado $\Rightarrow \omega$ es camino entre x_0 y x_2.

Lema. $\sigma_1 \sim \sigma_2, \gamma_1 \sim \gamma_2$ con $\sigma_1(1) = \gamma_1(0)$ y $\sigma_2(1) = \gamma_2(0) \Rightarrow \sigma_1\gamma_1 \sim \sigma_2\gamma_2$.

Esta operación induce una operación bien definida sobre las clases de homotopía de caminos: $[\sigma] * [\gamma] = [\sigma * \gamma]$. Para comprobarlo, dada F homotopía entre σ_1, σ_2 y G homotopía entre γ_1, γ_2, tenemos:

$$H(x,t) = \begin{cases} F(2s,t) & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ G(2s-1,t) & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

$*$ es asociativa, tiene neutro a la izquierda y a la derecha, e inverso.

3.1. Grupo fundamental

Definición 74 (Grupo fundamental)**.** Sea X espacio topológico y $x_0 \in X$. El conjunto de las clases de homotopía de caminos asociadas a los lazos de x_0 con la operación $*$ es el **grupo fundamental** de X relativo a x_0. Notación: $\boldsymbol{\Pi_1(X, x_0) := L_{x_0/\sim}}$.

Observación: Generalmente, $(\Pi_1(X, x_0), *)$ es un grupo no conmutativo.

Definición 75 (Lazo constante en x_0)**.** $c_{x_0}(s) = x_0\ \forall s \in X$, $[c_{x_0}] * [\sigma] = [c_{x_0}\sigma] = [\sigma]$

Demostración:

$[c_{x_0}] * [\sigma] = [\sigma] \Leftrightarrow \exists\, F : [0,1] \times [0,1] \to X$ tal que $F(s,0) = c_{x_0}\sigma$, $F(s,1) = \sigma(s)$, $F(0,t) = x_0$, $F(1,t) = x_0$.

$$F(s,t) = \begin{cases} x_0 & 0 \leqslant s \leqslant \dfrac{1-t_0}{2} \\ \sigma\left(\dfrac{2s-1+t_0}{1+t_0}\right) & \dfrac{1-t_0}{2} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

Proposición 124. Sea $f : X \to Y$, $x_0 \in X$.

1. $\Pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \Pi_1(X, x_0)$; $[\sigma] \to [f \circ \sigma]$. $[0,1] \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{\tau} Y$,
   f_* es homomorfismo de grupos:
   $f_*([\sigma] * [\tau]) = f_*([\sigma]) * f_*([\tau])$. $[f \circ (\sigma\tau)] = [(f \circ \sigma)(f \circ \tau)]$
2. X conexo por caminos, $x_0, x_1 \in X$ en la misma **arcocomponente** $\Rightarrow \Pi_1(X, x_0) \approxeq \Pi_1(X, x_1)$.
3. $X \approxeq Y$ son **homeomorfos** (f homeomorfismo) $\Rightarrow \boldsymbol{\Pi_1(X, x_0) \approxeq \Pi_1(Y, f(x_0))}$.

Ejemplo 19. $\Pi_1(S^1, x_1) = \mathbb{Z}$ para $x_1 \in S^1$.

3.2. Equivalencia homotópica de espacios

Definición 76 (Homomorfismo inducido por h). Sea f lazo en x_0, $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ una aplicación continua. h_* es el **homomorfismo inducido por h** relativo a x_0.

$$\begin{aligned} h_* : \Pi_1(X, x_0) &\to \Pi_1(Y, y_0) \\ h_*([f]) &= [h \circ f] \end{aligned}$$

Definición 77. Sean X, Y espacios topológicos **conexos por caminos** son **homotópicamente equivalentes** si $\exists\, f, g : Y \to X$ tales que $g \circ f \sim id_Y$ y $f \circ g \sim id_X$.

Corolario. $(f \circ g)_* = (id_X)_* \Rightarrow f_* \circ g_* = (id_X)_*$. Análogo para $g_* \circ f_* = (id_Y)_*$.
Luego $\boldsymbol{\Pi_1(X, x_0) = \Pi_1(Y, y_0)}$ para $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$.

Resultados (Notación: $pr_1 : X \times Y \to X$, $pr_2 : X \times Y \to Y$)

- $\sigma, \gamma : [0, 1] \to X \times Y$ con $\sigma(0) = \gamma(0)$, $\sigma(1) = \gamma(1)$,
$$\sigma \sim \gamma \Rightarrow pr_1 \circ \sigma \sim pr_1 \circ \gamma,\ pr_2 \circ \sigma \sim pr_2 \circ \gamma$$
- $\sigma, \gamma : [0, 1] \to X \times Y$ con $\sigma(1) = \gamma(0)$ y $h = \sigma\gamma \Rightarrow pr_i(h) = pr_i(\sigma)pr_i(\gamma)$ $i = 1, 2$.

Proposición 125. Sea $X \equiv X'$ homotópicamente, $x_0 \in X, x_0' \in X'$. $Y \equiv Y'$ homotópicamente, $y_0 \in Y, y_0' \in Y'$. Entonces:

$$\Pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \equiv \Pi_1(X', x_0') \times \Pi_1(Y', y_0') \equiv \Pi_1(X, x_0) \times \Pi_1(Y, y_0)$$

Ejemplo 20. (Cilindro) $\Pi_1(S^1 \times \mathbb{R}, (p_0, 0)) \equiv \Pi_1(S^1, p_0) \times \Pi_1(\mathbb{R}, 0) = \mathbb{Z} \times \{c_0\} = \mathbb{Z}$, porque $\mathbb{R}$ es contractible.

3.3. Retracto de deformación fuerte

Definición 78 (Retracto de deformación fuerte). Sea A subespacio de X, A es un **retracto de deformación** de X si la aplicación **identidad de X** es **homótopa** a una aplicación que lleva X a A dejando los puntos de A fijos. Es decir, $\exists\, H : X \times [0, 1] \to X$ **homotopía** tal que:

- $H(x, 0) \in A\ \forall x \in X$.
- $H(x, 1) = x\ \forall x \in X$.
- $H(a, t) = a\ \forall a \in A$

Proposición 126. Si A es un retracto de deformación fuerte de X $a_1 \in A \Rightarrow$ la aplicación inclusión $i : (A, a_0) \to (X, a_0)$ induce un isomorfimo en homotopía: $\Pi_1(A, x_0) \equiv \Pi_1(X, x_0)$.

3.3.1. Espacio contractible

Definición 79 (Espacio contractible). X **contractible** $\Leftrightarrow$ X **homotóp. equiv. a un punto**.

Proposición 127. X es contractible $\Leftrightarrow$ la **identidad en X** es **homotópica a una constante**: $id_X \sim_p c_{x_0} \Leftrightarrow \exists\ F : X \times [0,1] \to X$ continua tal que $F(x,0) = id_X(x)$ y $F(x,1) = c_{x_0}(x)$ $\forall x \in X$.

Ejemplo 21. *¿ $\mathbb{R}^n$ es contractible en $p_0 = (0,p)$?*
$F : \mathbb{R}^n \times [0,1]$ continua tal que $F(p_0, t) = (1-t)p_0 + p_0 t$

Corolario.

1. Todo $\mathbb{R} - ev$ topológico es contractible.
2. K convexo en $\mathbb{R} - ev$ top. es contractible.

Proposición 128. (**Caracterización de los espacios contractibles**). X contractible $\Leftrightarrow \forall\ Y$ espacio topológico, $f, g : Y \to X$ continuas $\Rightarrow f \sim_* g$.

Proposición 129. Todo espacio **contractible** es **conexo por arcos**.

Demostración: Sea X contractible y sean $x, y \in X$. $F : X \times I \to X$ homotopía entre la identidad y la función constante x_0, definimos:

$$h(t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ F(y, 2-2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

y f es un camino en X que conecta x e y (es aplicación bien definida y continua).

Proposición 130. Si X es contractible, las aplicaciones continuas de X a Y o de Y a X para Y cualquier espacio topológico son **homotópas a una constante**.

Demostración: X contractible, $c_{x_0} : X \to X$ con $c_{x_0}(x) = x_0\ \forall x \in X$. Sea $f : X \to Y$ continua, $f = f \circ id_X \sim f \circ c_{x_0}$. Como $f \circ c_{x_0}$ es contante, f homótopa a una constante.

Análogo para $g : Y \to X$, $g = id_X \circ g \sim c_{x_0} \circ g$.

Proposición 131. X es contractible $\Rightarrow$ para cada Y, $X \times Y$ es homotópicamente equivalente a Y.

3.3.2. Espacio simplemente conexo

Definición 80 (Espacio simplemente conexo). X es **simplemente conexo** si es **conexo por caminos** y $\Pi_1(X, x_0)$ es el grupo **trivial** (un elemento, el neutro) para algún $x_0 \in X$, y por tanto $\forall x_0 \in X$.

Proposición 132. Si X es simplemente conexo, dos caminos cualesquiera con los mismos puntos inicial y final son homotópicos por caminos.

Proposición 133. Todo espacio contractible es simplemente conexo.
Demostración: $\Pi_1(X) \equiv \Pi_1([x_0]) = \{[c_{x_0}]\}$ grupo trivial.

4. Ejercicios

Hoja 1

H1E7. Prueba que si β es una base para una topología sobre X, entonces la topología generada por β, τ_β, es igual a la intersección de todas las topologías sobre X que contienen a β.

La **topología generada por** β es aquella cuyos abiertos cumplen que

$$U \in \tau_\beta \Leftrightarrow \forall x \in U\ \exists \Omega_x \in \beta \text{ tal que } x \in \Omega_x \text{ y } \Omega_x \subseteq U$$

Es decir, los abiertos de τ_β **son las uniones arbitrarias de elementos de la base**. Los conjuntos $U \in \beta$ son abiertos de τ_β, también las uniones arbitrarias e intersecciones de abiertos de τ_β.

La **topología intersección de todas las topologías sobre X que contienen a** β, $\tau_\cap = \bigcap\limits_{\beta \subset \tau_i} \tau_i$, es aquella cuyos abiertos son:

1. $\emptyset, X \in \tau_\cap$, porque por definición de topología, $\emptyset, X$ está en todas las topologías que contienen a β, τ_i.
2. $U \in \tau_\cap \Leftrightarrow U \in \tau_i\ \forall i$.
3. Uniones arbitrarias de los abiertos que pertenecen a todas las topologías que contienen a β. Es decir, $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau_\cap$ para los $U_\lambda \in \tau_i$.
4. Intersecciones finitas de abiertos que pertenecen a todas las topologías que contienen a β. Es decir, $\bigcap\limits_{j=1}^{n} U_j \in \tau_\cap$ para los $U_j \in \tau_i$.

Para ver que las topologías descritas son iguales, observamos que:

- $\tau_\beta \subset \tau_\cap$. Veamos que los abiertos de τ_β son abiertos de $\tau_\cap$. Sea $U \in \tau_\beta$.
  - Si $U \in \beta$. Como cada τ_i contiene a β los elementos de β son abiertos para cada τ_i. Por tanto, U es abierto para $\tau_\cap$.
  - Si U es unión arbitraria de abiertos de β. Entonces, U es unión de abiertos de $\tau_\cap$ por el punto anterior y por definición de topología dicha unión es abierta.
  - Si U es unión arbitraria o intersección finita de abiertos de τ_β. Entonces U se puede escribir como unión arbitraria o intersección finita, respectivamente, de abiertos de τ_i. Por tanto, $U \in \tau_i$. En consecuencia, U es abierto para $\tau_\cap$.
- $\tau_\cap \subset \tau_\beta$. $\beta \subset \tau_\beta$. Luego, $\tau_\beta \cap (\bigcap\limits_{\beta \subset \tau_i} \tau_i) \subset \tau_\beta$.

H1E8. Sea τ_j, $j \in J$ una familia de topologías sobre X. Demuestra que si existe una topología que **contiene a todas las** τ_j para $j \in J$ y además es la **menos** fina de todas las que verifican esta propiedad.

Ejemplo previo:

Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Sea $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{c\}, \{b, c\}\}$. Tenemos que $\tau_1 \cup \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$ no es topología, porque:
$\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$ y $\{a\} \cap \{c\} = \{a, c\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$.
También, recordemos que τ_{discreta} es la topología más fina que contiene a todas las topologías sobre X. τ_{trivial} es la topología menos fina. Además, (si $\tau_1 \cup \tau_2$ fuese topología), tenemos que $\tau_{\text{discreta}} \supset \tau_1 \cup \tau_2 \supset \tau_1, \tau_2 \supset \tau_1 \cap \tau_2 \supset \tau_{\text{trivial}}$.
La topología **menos fina** que contiene a τ_1 y τ_2 es:

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

La topología buscada debe contener a los abiertos de cada τ_j, las intersecciones finitas de abiertos de las τ_j y las uniones arbitrarias de abiertos de las τ_j. Es decir, los abiertos son de la forma:

$$\Omega \in \tau \Leftrightarrow \Omega = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Big(\bigcap_{j_\lambda \in J_\lambda;\, |J_\lambda| < \infty} U_{j_\lambda} \Big) \text{ con } U_{j_\lambda} \in \bigcup_{j \in J} \tau_j,\ U_{j_\lambda} \in \tau_{j_\lambda}$$

Veamos que efectivamente es una topología:

1. $\emptyset, X \in \tau$ porque $\emptyset, X \in \tau_j \forall j \in J$, por definición de topología.
2. Sean $A, B \in \tau$. Veamos que $A \cap B \in \tau$. (Por inducción se extiende a intersecciones finitas).
$$A \in \tau \Rightarrow A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_1} \Big(\bigcap_{j_\lambda \in J_\lambda;\, |J_\lambda| < \infty} U_{j_\lambda} \Big)$$
$$B \in \tau \Rightarrow B = \bigcup_{\alpha \in \Lambda_2} \Big(\bigcap_{l_\alpha \in L_\alpha;\, |L_\alpha| < \infty} V_{l_\alpha} \Big)$$
$$A \cap B = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_1} \Big\{ \Big(\bigcap_{j_\lambda \in J_\lambda;\, |J_\lambda| < \infty} U_{j_\lambda} \Big) \cap B \Big\} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_1} \Big(\bigcap_{j_\lambda \in J_\lambda;\, |J_\lambda| < \infty} U_{j_\lambda} \cap B \Big) \text{ donde}$$
$$U_{j_\lambda} \cap B = U_{j_\lambda} \cap \Big(\bigcup_{\alpha \in \Lambda_2} \Big(\bigcap_{l \in L_\alpha;\, |L_\alpha| < \infty} V_{l_\alpha} \Big) \Big) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda_2} \Big(\bigcap_{l \in L_\alpha;\, |L_\alpha| < \infty} (U_{j_\lambda} \cap V_{l_\alpha}) \Big)$$
3. $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \tau$ donde $A_\gamma = \bigcup_{\lambda_\gamma \in \Lambda_\gamma} \Big(\bigcap_{j_\gamma \in J_{\lambda_\gamma};\, |J_{\lambda_\gamma}| < \infty} U_{j_\gamma} \Big)$
$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \Big(\bigcup_{\lambda_\gamma \in \Lambda_\gamma} \Big(\bigcap_{j_\gamma \in J_{\lambda_\gamma};\, |J_{\lambda_\gamma}| < \infty} U_{j_\gamma} \Big) \Big) \text{ donde } U_{j_\gamma} \in \bigcup_{j \in J} \tau_j.$$

Veamos que τ es la menos fina. Tenemos que $\tau = \Big(\bigcap_{\{\tau_j\}_{j \in J} \subset \omega_\gamma} \omega_\gamma \Big) \subset \omega_\gamma \forall \gamma$.

Hoja 3

H3E3. Demostrar que si f y g son funciones continuas definidas de X en Y siendo Y un espacio Hausdorff, entonces $A := \{x : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

Veamos que $C_X(A)$ es abierto. Sea $x \in C_X(A)$, se verifica $f(x) \neq g(x) \Rightarrow \exists V_1, V_2$ entornos abiertos en Y de $f(x), g(x)$, respectivamente, tales que $f(x) \in V_1$, $g(x) \in V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, por ser Y Hausdorff.

Sean $U_1 = f^{-1}(V_1)$, $U_2 = f^{-1}(V_2)$ abiertos por ser f y g continuas. Tenemos que $U_1 \cap U_2$ es abierto por ser intersección finita de abiertos y $x \in (U_1 \cap U_2) \neq \emptyset$. Veamos que $(U_1 \cap U_2) \subset C_X(A)$.

Sea $y \in U_1 \cap U_2$, $f(y) \in U_1$, $g(y) \in U_2 \Rightarrow f(y) \neq g(y) \Rightarrow y \notin A$. Luego $y \in C_X(A)$.