Mockup UAS MA1101 - Aleams Barra, Ph.D.

Bagian A

1. Misalkan $f(x) = (x-1)^2(x-3)$. Tentukan semua nilai x yang mungkin.

   (a) Nilai maksimum lokal dari f terjadi di $x =$ __________

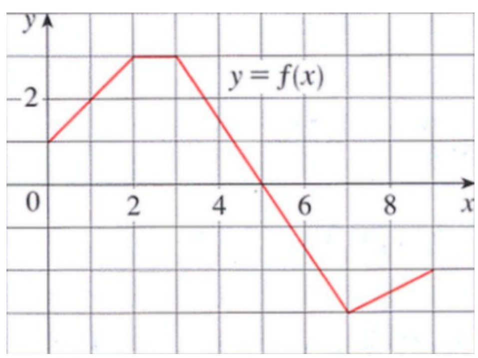
   (b) Nilai minimum lokal dari f terjadi di $x =$ __________

   Solusi
   Akan dicari titik-titik stasioner untuk menentukan maksimum dan minimum lokal

$$f'(x) = 2(x-1)(x-3) + (x-1)^2$$
$$f'(x) = (x-1)(2(x-3) + (x-1))$$
$$f'(x) = (x-1)(3x-7)$$

   Didapat bahwa titik stasioner akan tercapai saat $x = 1$ dan $x = \frac{7}{3}$. Perhatikan bahwa f monoton naik pada interval $(-\infty, 1) \cup (\frac{7}{3}, \infty)$ dan f monoton turun pada interval $(1, \frac{7}{3})$. Sehingga nilai maksimum lokal dari f terjadi di $\boxed{x = 1}$ dan nilai minimum lokal dari f terjadi di $\boxed{x = \frac{7}{3}}$

2. Grafik $y = f(x)$ diberikan pada gambar berikut.



   (a) $\int_1^5 f(x)\,dx =$ __________

   (b) $\int_3^9 |f(x)|\,dx =$ __________

   Solusi
   Integral menyatakan luas di bawah kurva. Untuk jawaban (a) akan dihitung dengan

menjumlahkan luas dua buah trapesium.

$$\int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx$$
$$\int_1^5 f(x)\,dx = \frac{5}{2} + 6$$
$$\int_1^5 f(x)\,dx = \boxed{\frac{17}{2}}$$

Untuk jawaban soal (b) karena ada fungsi mutlak, maka grafik fungsi dari $x = 5$ hingga $x = 9$ dicerminkan terhadap sumbu-X sehingga semua nilainya positif.

$$\int_3^9 |f(x)|\,dx = \int_3^5 |f(x)|\,dx + \int_5^7 |f(x)|\,dx + \int_7^9 |f(x)|\,dx$$
$$\int_3^9 |f(x)|\,dx = 3 + 3 + 5$$
$$\int_3^9 |f(x)|\,dx = \boxed{11}$$

3. Misalkan

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^4}\,dt$$
$$G(x) = \int_{2\sin x}^0 \cos\left(t^2\right)dt$$

Maka

(a) $F'(0) =$ __________

(b) $G'(0) =$ __________

Solusi

Akan digunakan TDK 1 untuk menjawab soal ini. Untuk jawaban (a)

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^4}$$
$$F'(0) = \boxed{1}$$

Sedangkan untuk jawaban (b) bentuk integral akan sedikit dimanipulasi agar TDK 1 dapat digunakan

$$G(x) = -\int_0^{2\sin x} \cos\left(t^2\right)dt$$

Dengan TDK 1 akan didapatkan:

$$G'(x) = -\cos\left((2\sin x)^2\right)(2\cos x)$$
$$G'(0) = \boxed{-2}$$

4. Misalkan $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{(x-1)^2}$. Maka

$$\ln y = a\ln(x^2+1) + b\ln(x-1)$$

dengan a, b konstan.

(a) Maka $ab =$ __________

(b) Jika kita tuliskan $\dfrac{dy}{dx} = y.f(x)$, maka $f(x) =$ __________

Solusi
Dengan menggunakan sifat fungsi logaritma natural, akan didapatkan

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln\sqrt{x^2+1} - \ln(x-1)^2 \\
\ln y &= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 2\ln(x-1)
\end{aligned}$$

Maka didapat nilai $a = \dfrac{1}{2}$ dan $b = -2$. Sehingga nilai $\boxed{ab = -1}$

Untuk soal (b) akan kita turunkan kedua ruas

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} \\
\frac{dy}{dx} &= y\left(\frac{x(x-1) - 2(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}\right) \\
\frac{dy}{dx} &= y\left(\frac{-x^2-x-2}{(x^2+1)(x-1)}\right)
\end{aligned}$$

Maka didapatkan $\boxed{f(x) = \dfrac{-(x^2+x+2)}{(x^2+1)(x-1)}}$

5. Misalkan $f(x) = 2^x - x^2$.

(a) $f'(x) =$ __________

(b) $\displaystyle\int f(x)\,dx =$ __________

Solusi
Turunan dari $f(x)$ adalah

$$\boxed{f'(x) = (\ln 2)2^x - 2x}$$

Sedangkan integral dari $f(x)$ adalah

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{3}x^3 + C}$$

Bagian B

1. Tentukan solusi persamaan diferensial $\dfrac{dy}{dx} = xe^y$ yang memenuhi $y(0) = \ln 2$

   Solusi
   Dengan metode separasi variabel akan didapatkan

$$\frac{1}{e^y}\,dy = x\,dx$$

   Integralkan kedua ruas

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^y}\,dy &= \int x\,dx \\ -\frac{1}{e^y} &= \frac{1}{2}x^2 + C\end{aligned}$$

   Subtitusi $x = 0$ dan $y = \ln 2$ untuk mendapat nilai C

$$\begin{aligned}-\frac{1}{e^{\ln 2}} &= C \\ C &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

   Sederhanakan solusi persamaan diferensialnya menggunakan fungsi logaritma natural

$$\begin{aligned}-e^{-y} &= \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right) \\ e^{-y} &= \frac{1}{2}(1 - x^2) \\ \ln e^{-y} &= \ln\left(\frac{1 - x^2}{2}\right) \\ y &= -\ln\left(\frac{1 - x^2}{2}\right)\end{aligned}$$

   Solusi persamaan diferensialnya adalah $\boxed{y = -\ln\left(\dfrac{1 - x^2}{2}\right)}$

2. Tentukan nilai minimum dari $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos(2x) + \sin x$ pada selang $\left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$

   Solusi
   Perhatikan bahwa $f(x)$ adalah fungsi yang kontinu dimana saja. Sehingga titik singular tidak ada. Akan dicari titik stasioner dari $f(x)$ dimana $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned}-\sin(2x) + \cos x &= 0 \\ \cos x - 2\sin x\cos x &= 0 \\ \cos x(1 - 2\sin x) &= 0\end{aligned}$$

Titik stasionernya adalah $x = \dfrac{\pi}{2}$ dan $x = \dfrac{5\pi}{6}$. Sehingga, kita peroleh ada empat absis titik kritis, yaitu $x = \dfrac{\pi}{3}$, $x = \pi$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ dan $x = \dfrac{5\pi}{6}$. Absis ini akan disubtitusi ke $f(x)$ untuk ditentukan nilai minimumnya.

$$\begin{aligned}
f(\frac{\pi}{3}) &= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \\
f(\pi) &= \frac{1}{2}\cos(2\pi) + \sin\pi = \frac{1}{2} \\
f(\frac{\pi}{2}) &= \frac{1}{2}\cos(2\left(\frac{\pi}{2}\right)) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \\
f(\frac{5\pi}{6}) &= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Didapat nilai minimum dari $f(x)$ tercapai saat $x = \dfrac{\pi}{2}$ dan $x = \pi$ dimana kedua nilai x memberikan nilai minimum yang sama, yaitu $\boxed{f(\pi) = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}}$

3. Tentukan nilai rata-rata $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ pada selang $\left[\sqrt{2}, \sqrt{8}\right]$

Solusi
Misalkan nilai rata-rata L, nilai rata-rata pada selang $[a, b]$ dapat dicari dengan integral dengan persamaan

$$L = \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Misalkan $u = 1 + x^2$, maka $du = 2x\,dx$. Saat $x = \sqrt{2}$, $u = 3$ dan saat $x = \sqrt{8}$, $u = 9$.

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_3^9 \frac{1}{2u}\,du \\
L &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln u\right]_3^9 \\
L &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\ln 9 - \ln 3) \\
L &= \frac{\ln 3}{2\sqrt{2}} \\
L &= \frac{\ln 3 \times \sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

Nilai rata-rata $f(x)$ pada selang $\left[\sqrt{2}, \sqrt{8}\right]$ adalah $\boxed{\dfrac{\ln 3 \times \sqrt{2}}{4}}$

4. Waktu paruh suatu zat X adalah 1000 tahun. Jika mula-mula terdapat 512 gram zat X, berapa waktu yang diperlukan agar zat X yang tersisa tinggal 1 gram? (asumsikan

zat X meluruh secara eksponensial)

Solusi
Peluruhan suatu zat dapat dimodelkan dengan persamaan

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

Diketahui nilai $y_0 = 512$ dan $y(1000) = 256$, maka akan dicari nilai k

$$\begin{aligned} 256 &= 512e^{1000k} \\ \frac{1}{2} &= e^{1000k} \\ \ln 2^{-1} &= \ln e^{1000k} \\ -\ln 2 &= 1000k \\ k &= \frac{-\ln 2}{1000} \end{aligned}$$

Karena sudah tahu nilai k, bisa dicari nilai t

$$\begin{aligned} 1 &= 512e^{\frac{-\ln 2}{1000}t} \\ 2^{-9} &= e^{\frac{-\ln 2}{1000}t} \\ e^{-9\ln 2} &= e^{\frac{-\ln 2}{1000}t} \\ -9\ln 2 &= -\frac{\ln 2}{1000}t \\ t &= 9000 \end{aligned}$$

Zat X akan tersisa tinggal 1 gram setelah $\boxed{t = 9000}$ tahun

5. Taksir nilai $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^4}\,dt$ dengan menggunakan metode Riemann Kanan dan $n = 4$

Solusi
Akan dicari nilai Δx terlebih dahulu

$$\Delta x = \frac{1-(-1)}{4} = \frac{1}{2}$$

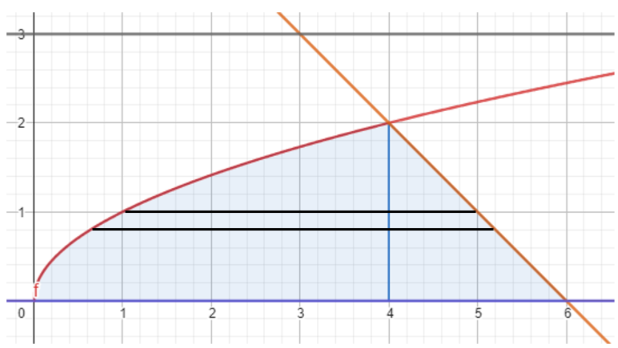
Misalkan L adalah nilai dari integral, maka dengan aproksimasi Riemann Kanan akan dicari taksiran nilai L

$$L \approx \Delta x(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4))$$
$$L \approx \frac{1}{2}\left(\frac{16}{17} + \frac{1}{2} + \frac{16}{17} + \frac{1}{2}\right)$$
$$L \approx \frac{1}{2}\left(\frac{32}{17} + 1\right)$$
$$L \approx \frac{1}{2}\left(\frac{49}{17}\right)$$
$$L \approx \frac{49}{34}$$

Taksiran nilai $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^4}\,dt$ tersebut adalah $\boxed{\frac{49}{34}}$

6. Misalkan D adalah daerah tertutup yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$, dan sumbu-x. Nyatakan volume benda putar yang didapat dengan memutar D terhadap garis $y = 3$ sebagai suatu integral tentu (tidak perlu dihitung integralnya) yang dihitung dengan menggunakan metode kulit tabung

Solusi
Soal di atas dapat kita skesta dengan ilustrasi berikut.



Karena diminta menggunakan metode kulit tabung, kita pilih partisi horizontal. Maka kita harus membuat fungsi dalam x

$$y = \sqrt{x} \iff x = y^2$$
$$y = 6 - x \iff x = 6 - y$$

Titik potong kedua grafik tersebut adalah $(4, 2)$. Perhatikan bahwa grafik $x = 6 - y$ selalu di atas grafik $x = y^2$ sehingga integral tentu yang menyatakan volume benda putarnya adalah

$$V = \int_0^2 2\pi(3 - y)(6 - y - y^2)\,dy$$
$$V = \boxed{2\pi \int_0^2 (3 - y)(6 - y - y^2)\,dy}$$

Bagian C

1. Misalkan $f(x) = x^3 + x^2 + x - 3$.

   (a) Jelaskan mengapa $f(x)$ punya invers.

   (b) Tentukan $(f^{-1})'(0)$, yakni turunan dari fungsi $f^{-1}(x)$ di $x = 0$.

   (c) Hitung $\int_{-4}^{0} f^{-1}(x)\, dx$

   Solusi
   Untuk membuktikan bahwa $f(x)$ mempunyai invers, akan dicari turunan pertama dari $f(x)$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

   Perhatikan bahwa $f'(x) > 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, sehingga $f(x)$ monoton naik dan f merupakan fungsi satu-satu. Akibatnya f punya invers.

   Menurut Teorema Fungsi Invers, jika $f(a) = b$ maka berlaku

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

   Akan dicari nilai a yang menyebabkan $f(a) = 0$, pada kasus ini $x = 1$ memenuhi $f(a) = 0$. Sehingga dapat dicari nilai dari $(f^{-1})'(0)$

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)}$$
$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{6}$$

   Untuk mencari nilai $\int_{-4}^{0} f^{-1}(x)\, dx$ misalkan $u = f^{-1}(x)$. Karena $u = f^{-1}(x)$, maka $f(u) = x \iff f'(u)\, du = dx$. Saat $x = -4$, akibatnya $f(u) = -4$ sehingga nilai u yang memenuhi adalah $u = -1$. Sedangkan, saat $x = 0$, akibatnya $f(u) = 0$ sehingga nilai u yang memenuhi adalah $u = 1$. Bentuk integral dari soal bisa diganti menjadi bentuk integral berikut

$$\int_{-4}^{0} f^{-1}(x)\, dx = \int_{-1}^{1} u.f'(u)\, du$$

Akan ditentukan nilai $\int_{-4}^{0} f^{-1}(x)\,dx$

$$\int_{-4}^{0} f^{-1}(x)\,dx = \int_{-1}^{1} u.(3u^2+2u+1)\,du$$
$$\int_{-4}^{0} f^{-1}(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (3u^3+2u^2+u)\,du$$
$$\int_{-4}^{0} f^{-1}(x)\,dx = \left[\frac{3}{4}u^4+\frac{2}{3}u^3+\frac{1}{2}u^2\right]_{-1}^{1}$$
$$\int_{-4}^{0} f^{-1}(x)\,dx = \frac{4}{3}$$

Maka, nilai dari $\boxed{\int_{-4}^{0} f^{-1}(x)\,dx = \frac{4}{3}}$

2. Pak Warsoma akan menimba air pada suatu sumur dengan kedalaman 15 meter. Ember yang digunakan mempunyai massa 2 kg dan terikat pada suatu tambang dengan massa jenis 1 kg/m. Jika ember terisi penuh, maka ember akan memuat 10 kg air. Asumsikan percepatan gravitasi sebesar 10 m/s^2.

   (a) Tentukan besar usaha yang dilakukan untuk menimba air pada ember yang penuh sampai pada ketinggian 5 meter dari permukaan air.

   (b) Ketika ember mencapai ketinggian 5 meter, ember bocor dengan laju konstan. Diketahui bahwa usaha yang diperlukan untuk mengangkat air dari kedalaman 5 meter sampai ke tepi atas sumur sama dengan usaha yang diperoleh di bagian (a). Berapa kliogram air yang tersisa dalam ember yang berhasil diangkat keluar dari sumur

   Solusi
   Asumsikan dasar sumur di posisi $y = 0$ dan permukaan tanah di posisi $y = 15$. Total berat ember, air, dan tali tambang dari permukaan tanah ketika benda ada di posisi y adalah $\Delta w \approx g(2 + 10 + (15 - y)) = g(27 - y)$. Usaha untuk mengangkat benda dari posisi y ke Δy adalah $\Delta W \approx g(27-y)\,dy$. Sehingga, usaha yang dilakukan untuk menimba air sampai ketinggian 5 meter adalah

$$W = \int_{0}^{5} g(27-y)\,dy$$
$$W = g\left[27y - \frac{1}{2}y^2\right]_{0}^{5}$$
$$W = 122,5g$$
$$W = 1225$$

   Maka besar usaha yang dilakukan untuk menimba air pada ember yang penuh sampai pada ketinggian 5 meter dari permukaan air adalah 1225 Joule

Ember mulai bocor saat ketinggian 5 meter, misalkan posisi tersebut sebagai $y_1 = 5$ dan posisi ember keluar dari sumur sebagai $y_2 = 15$. Saat posisi $y_1 = 5$, massa air 10 kg kita tulis sebagai $m_1 = 10$ dan saat ember sudah keluar dari sumur massanya tidak kita ketahui, maka kita tulis $m_2 = M$. Karena ember bocor dengan laju konstan, dapat disusun persamaan linearnya

$$\begin{aligned}
\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} &= \frac{m - m_1}{m_2 - m_1} \\
\frac{y - 5}{10} &= \frac{m - 10}{M - 10} \\
m - 10 &= \frac{My - 5M - 10y + 50}{10} \\
m &= \frac{M}{10}y - \frac{1}{2}M - y + 15
\end{aligned}$$

Usaha yang diperlukan untuk mengangkat air dari kedalaman 5 meter sampai ke tepi atas sumur adalah 1225 Joule, dari informasi ini bisa kita cari massa air yang tersisa dalam ember

$$\begin{aligned}
1225 &= \int_5^{15} g\left(2 + \left(\frac{M}{10}y - \frac{1}{2}M - y + 15\right) + (15 - y)\right)\, dy \\
1225 &= g\int_5^{15} \left(\left(\frac{M}{10}y - 2y\right) + \left(32 - \frac{1}{2}M\right)\right)\, dy \\
1225 &= g\left[\frac{My^2}{20} - y^2 + 32y - \frac{1}{2}My\right]_5^{15} \\
1225 &= g(5M + 120) \\
1225 &= 50M + 1200 \\
M &= 0.5
\end{aligned}$$

Jadi, massa air yang tersisa dalam ember adalah 0,5 kg.

Catatan: Perhitungan soal (b) akan lebih mudah jika mengambil acuan baru yaitu $y_1 = 0$ dan $y_2 = 10$, disini saya mengambil acuan yang sama dengan bagian (a) supaya lebih mudah dipahami.