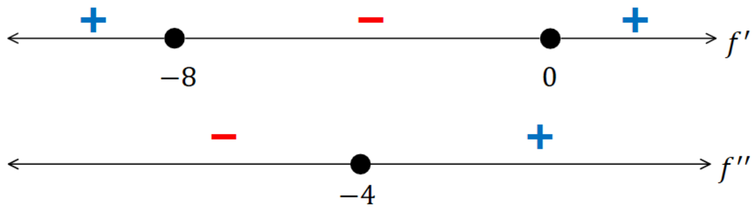
Bagian A (Tipe ■)

1. Diketahui

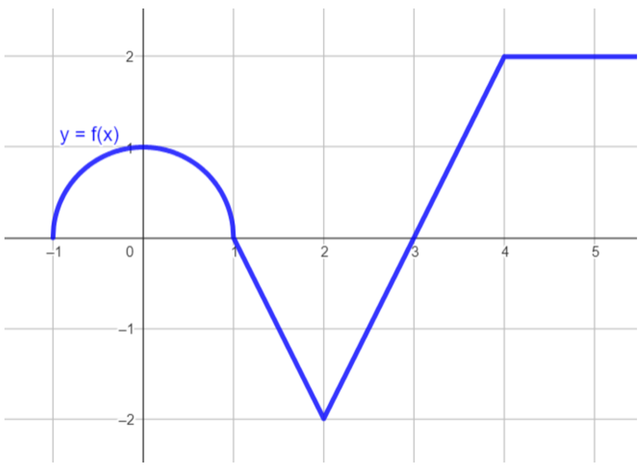
$$f'(x) = x^2 + 8x = x(x+8)$$
$$f''(x) = 2x + 8$$



(a) f monoton turun jika $f' < 0$, yaitu pada selang $(-8,0)$

(b) f cekung ke bawah jika $f'' < 0$, yaitu pada selang $(-\infty, -4)$

2. Diberikan grafik $y = f(x)$



(a) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$

(b) $\int_{1}^{5} f(x)\,dx = \int_{1}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{5} f(x)\,dx = -\frac{2\cdot 2}{2} + \frac{2+1}{2} \cdot 2 = -2 + 3 = 1$
(Integral tentu adalah luas daerah **bertanda**)

3. $\int_{1}^{x} f(t)\,dt = 2x^3 + C$ dengan C konstanta. Menurut TDK 1,

$$\frac{d}{dx}\int_{1}^{x} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}(2x^3 + C)$$
$$f(x) = 6x^2$$

Untuk $x = 1$,

$$\int_{1}^{1} f(t)\,dt = 2 \cdot 1^3 + C$$
$$0 = 2 + C$$
$$C = -2$$

4. Diberikan data nilai fungsi g di beberapa titik pada $[2,8]$

x	2	3	4	5	6	7	8
$g(x)$	3	4	5	5	7	3	2

Akan dihampiri $\int_2^8 g(x)\,dx$ dengan metode Jumlah Riemann Kanan dengan $n = 3$.
Kita punya $a = 2$, $b = 8$, $n = 3$.

(a) Lebar tiap subinterval adalah $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{8-2}{3} = 2$, dengan batas-batas $x_i = a + i\Delta x = 2 + i \cdot 2$

(b) Nilai hampiran

$$\begin{aligned}\int_2^8 g(x)\,dx &\approx \Delta x[g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)]\\ &= 2[g(4) + g(6) + g(8)]\\ &= 2[5 + 7 + 2]\\ &= 28\end{aligned}$$

5. Misalkan $y(t)$ massa (gram) zat radioaktif setelah t tahun.

$$y(t) = Ae^{kt}$$

Waktu paruh 500 tahun artinya:

$$\begin{aligned}y(t+500) &= \frac{1}{2}y(t)\\ Ae^{k(t+500)} &= \frac{1}{2}Ae^{kt}\\ e^{kt}e^{k\cdot 500} &= \frac{1}{2}e^{kt}\\ 500k &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2^{-1}) = -\ln 2\\ k &= -\frac{\ln 2}{500}\end{aligned}$$

Karena $y(0) = 12$, maka

$$\begin{aligned}Ae^{k\cdot 0} &= 12\\ A \cdot 1 &= 12\\ A &= 12\end{aligned}$$

diperoleh

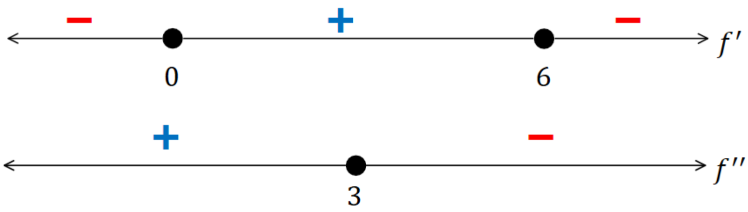
$$y(t) = 12\exp\left(-\frac{\ln 2}{500}t\right) = 12\left(e^{\ln 2}\right)^{-t/500} = 12 \cdot 2^{-t/500}$$

Jadi,
(a) $y(500) = 12 \cdot 2^{-500/500} = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$
(b) $y(250) = 12 \cdot 2^{-250/500} = 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$

Bagian A (Tipe ▲)

1. Diketahui

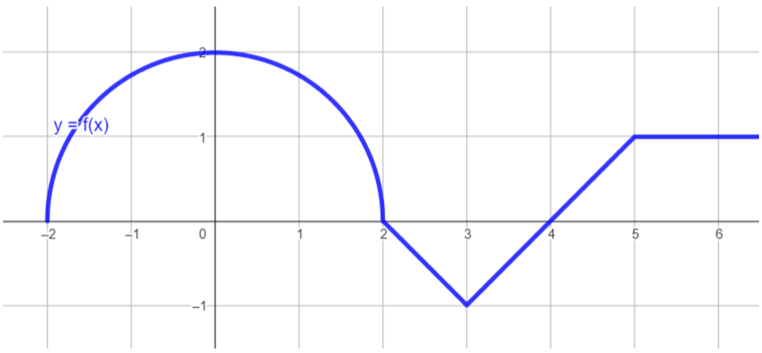
$$f'(x) = 6x - x^2 = x(6 - x)$$
$$f''(x) = 6 - 2x$$



(a) f monoton naik jika $f' > 0$, yaitu pada selang $(0,6)$

(b) f cekung ke atas jika $f'' > 0$, yaitu pada selang $(-\infty, 3)$

2. Diberikan grafik $y = f(x)$



(a) $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx = \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = 2\pi$

(b) $\int_{2}^{6} f(x)\, dx = \int_{2}^{4} f(x)\, dx + \int_{4}^{6} f(x)\, dx = -\frac{2\cdot 1}{2} + \frac{2+1}{2} \cdot 1 = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$
(Integral tentu adalah luas daerah **bertanda**)

3. $\int_{1}^{x} f(t)\, dt = 3x^3 + C$ dengan C konstanta. Menurut TDK 1,

$$\frac{d}{dx}\int_{1}^{x} f(t)\, dt = \frac{d}{dx}(3x^3 + C)$$
$$f(x) = 9x^2$$

Untuk $x = 1$,

$$\int_{1}^{1} f(t)\, dt = 3 \cdot 1^3 + C$$
$$0 = 3 + C$$
$$C = -3$$

4. Diberikan data nilai fungsi g di beberapa titik pada $[2,8]$

x	2	3	4	5	6	7	8
$g(x)$	3	4	5	5	7	3	2

Akan dihampiri $\int_2^8 g(x)\,dx$ dengan metode Jumlah Riemann Kiri dengan $n = 3$.
Kita punya $a = 2$, $b = 8$, $n = 3$.

(a) Lebar tiap subinterval adalah $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{8-2}{3} = 2$, dengan batas-batas $x_i = a + i\Delta x = 2 + i \cdot 2$

(b) Nilai hampiran

$$\begin{aligned}
&\int_2^8 g(x)\,dx \approx \Delta x[g(x_0) + g(x_1) + g(x_2)] \\
&= 2[g(2) + g(4) + g(6)] \\
&= 2[3 + 5 + 7] \\
&= 30
\end{aligned}$$

5. Misalkan $y(t)$ massa (gram) zat radioaktif setelah t tahun.

$$y(t) = Ae^{kt}$$

Waktu paruh 600 tahun artinya:

$$\begin{aligned}
y(t+600) &= \frac{1}{2}y(t) \\
Ae^{k(t+600)} &= \frac{1}{2}Ae^{kt} \\
e^{kt}e^{k\cdot 600} &= \frac{1}{2}e^{kt} \\
600k &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2^{-1}) = -\ln 2 \\
k &= -\frac{\ln 2}{600}
\end{aligned}$$

Karena $y(0) = 10$, maka

$$\begin{aligned}
Ae^{k\cdot 0} &= 10 \\
A \cdot 1 &= 10 \\
A &= 10
\end{aligned}$$

diperoleh

$$y(t) = 10\exp\left(-\frac{\ln 2}{600}t\right) = 10\left(e^{\ln 2}\right)^{-t/600} = 10 \cdot 2^{-t/600}$$

Jadi,
(a) $y(600) = 10 \cdot 2^{-600/600} = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$
(b) $y(300) = 10 \cdot 2^{-300/600} = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

Bagian B

1. Diberikan PD

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3}{y^2}$$

Lakukan pemisahan variabel, lalu integralkan. Maka akan didapatkan solusinya,

$$\int y^2 \, dy = \int 4x^3 \, dx$$
$$\frac{y^3}{3} = x^4 + C_1$$
$$y^3 = 3x^4 + C$$
$$y = \sqrt[3]{3x^4 + C}$$

2. Akan dihitung $\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$.
Substitusi $u(x) = x^3 + 1 \Rightarrow du = 3x^2\,dx$,
$u(0) = 1, u(2) = 9$. Maka

$$\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \int_1^9 \sqrt{u}\;du = \left.\frac{u^{3/2}}{3/2}\right|_1^9 = \frac{2}{3}\left(9^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{2}{3}(27-1) = \frac{52}{3}$$

3. Nilai rata-rata dari $f(x) = \cos(2x)$ pada $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ adalah

$$f_{ave} = \frac{1}{\pi/2 - (-\pi/2)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2x)\;dx$$

Karena $\cos(2x)$ genap, maka

$$f_{ave} = \frac{1}{\pi}\cdot 2\int_0^{\pi/2}\cos(2x)\;dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sin(2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}(\sin\pi - \sin 0) = 0$$

Lalu, akan ditentukan c di I sehingga $f(c) = f_{ave}$.

$$\cos(2c) = 0$$
$$2c = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$$
$$c = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}$$

dimana k bulat. Karena $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, maka $c = -\frac{\pi}{4}$ dan $c = \frac{\pi}{4}$.

4. Diketahui $f(x) = 3x + \ln x$ dengan $x > 0$ punya invers. Akan ditentukan $(f^{-1})'(3)$.

$(f^{-1})'(3)$ adalah $(f^{-1})'(y)$ saat $y = 3$.

Jika $y = 3$, maka

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow 3x + \ln x = 3 \Leftrightarrow x = 1$$

Turunan Fungsi Invers

Jika f punya invers, maka

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \Leftrightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{f'(x)}$$

Jadi, $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3+\frac{1}{x}\Big|_{x=1}} = \frac{1}{3+\frac{1}{1}} = \frac{1}{4}$.

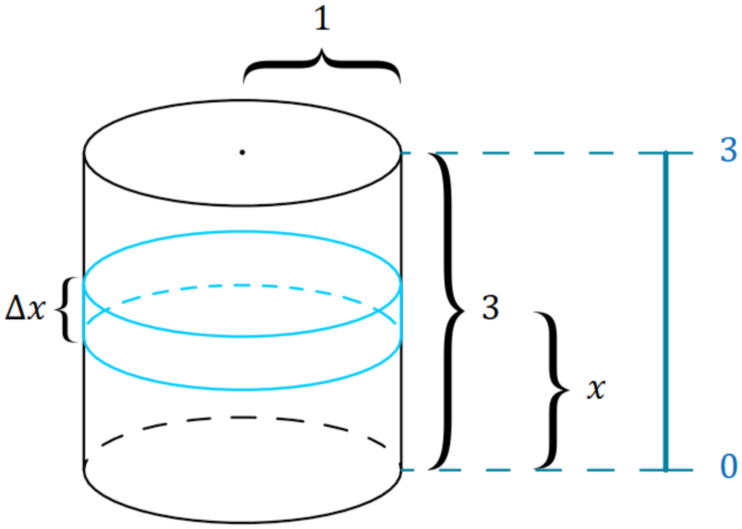
5. Diketahui $f(x) = e^{2x-4} + \log_3 x$. Akan ditentukan $f'(2)$.

$$f'(x) = 2e^{2x-4} + \frac{1}{x \ln 3}$$

$$f'(2) = 2e^0 + \frac{1}{2\ln 3} = 2 + \frac{1}{2\ln 3}$$

6. Diberikan suatu tangki berbentuk tabung yang berisi air setinggi 2 meter.

Misalkan x ketinggian air dari permukaan tanah (meter). Bayangkan usaha untuk memompa air sehingga tinggi air berkurang sejauh Δx.



Volume irisan airnya adalah

$$\Delta V \approx \pi \cdot 1^2 \cdot \Delta x = \pi \Delta x$$

Berat jenis air adalah 10000 N/m^3,

Berat jenis = Berat / Volume
Berat = Berat jenis × Volume

$$\Delta F \approx 10000 \cdot \Delta V = 10000\pi\Delta x$$

Irisian air tersebut harus dipompa/dipindahkan hingga ketinggian 4 meter, maka irisan air harus berpindah sejauh $(4 - x)$ meter.

$$\Delta W \approx \Delta F(4 - x) = 10000\pi(4 - x)\Delta x$$

Jadi, usaha totalnya (dalam Joule) adalah

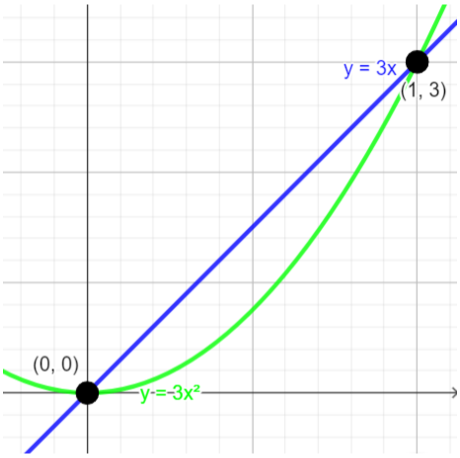
$$\begin{aligned} W &= 10000\pi \int_0^2 (4 - x)\, dx \\ &= 10000\pi \left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 \\ &= 10000\pi \left(4 \cdot 2 - \frac{2^2}{2}\right) \\ &= 60000\pi\,. \end{aligned}$$

Bagian C

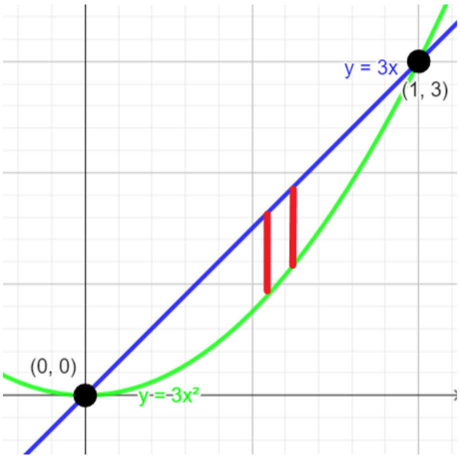
1. Misal R daerah tertutup di kuadran I yang dibatasi $y = 3x^2$ dan $y = 3x$.

(a) Perpotongan $y = 3x^2$ dan $y = 3x$:

$$\begin{aligned} 3x^2 = 3x &\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \end{aligned}$$



Titik potongnya adalah $(0,0)$ dan $(1,3)$. Sketsa daerah R ada di samping kanan.



(b) Iriskan daerah.

Luas irisan daerah adalah

$$\Delta L \approx (3x - 3x^2)\Delta x$$

Luas total daerah adalah

$$L = \int_0^1 (3x - 3x^2)\, dx = \left(\frac{3x^2}{2} - x^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

(c) Misalkan $a < 0$. Jika daerah R diputar terhadap $x = a$, menghasilkan benda dengan volume $\frac{5\pi}{2}$. Akan ditentukan nilai a.

Akan digunakan metode kulit tabung karena dipilih pengirisan vertikal yang sejajar dengan sumbu putar.

Volume irisan benda (kulit tabung) adalah

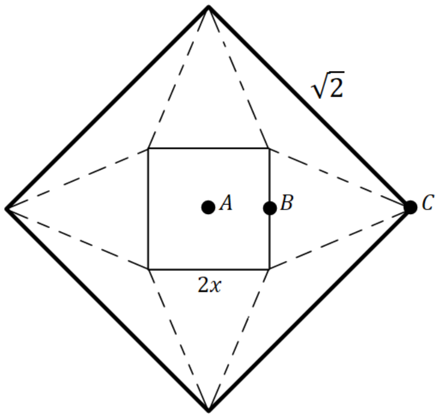
$$\begin{aligned} \Delta V &\approx 2\pi r \cdot h \cdot \Delta x \\ &= 2\pi\big(x - (-a)\big) \cdot (3x - 3x^2)\Delta x \\ &= 6\pi(x + a)(x - x^2)\Delta x \end{aligned}$$

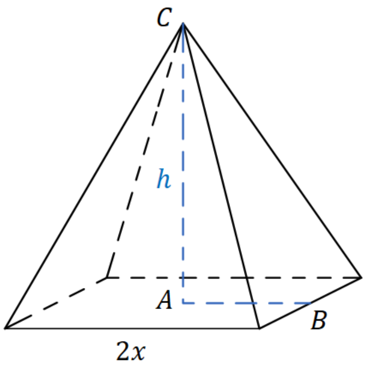
Volume total benda adalah

$$\begin{aligned} V &= 6\pi \int_0^1 (-x^3 + (1-a)x^2 + ax)\, dx \\ &= 6\pi\left(-\frac{x^4}{4} + (1-a)\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= 6\pi\left(-\frac{1}{4} + \frac{1-a}{3} + \frac{a}{2}\right) \\ &= 6\pi\frac{-3 + (4 - 4a) + 6a}{12} \\ &= 6\pi\frac{2a+1}{12} = \frac{\pi}{2}(2a+1) \end{aligned}$$

Karena $V = \frac{5\pi}{2}$, maka $2a + 1 = 5 \Leftrightarrow a = -2$.

2. Budi ingin membuat limas persegi dari karton berbentuk persegi dengan panjang sisi $\sqrt{2}$ meter. Jaring-jaring limas dibentuk dengan memotong karton seperti pada gambar berikut.





(a) dan (b) Misalkan panjang sisi alas $2x$ meter. Akan dihitung tinggi limas.

Perhatikan bahwa panjang diagonal karton adalah $\sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{2+2} = 2$. Kita juga punya,

$$\begin{aligned}
&2(AB + BC) = 2 \\
&AB + BC = 1 \\
&x + BC = 1 \\
&BC = 1 - x
\end{aligned}$$

Maka, tinggi limas adalah

$$h = AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(1-x)^2 - x^2} = \sqrt{(1 - 2x + x^2) - x^2} = \sqrt{1 - 2x}$$

Saat panjang sisi alas 0,36 meter ($2x = 0{,}36$), maka

$$h = \sqrt{1 - 0{,}36} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$$

(c) Misalkan V volume limas. Volume limas adalah

$$V = \frac{1}{3}(2x)^2 h = \frac{4}{3}x^2\sqrt{1-2x}$$

Untuk selang/domain V:

- $x > 0$, dan
- $1 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 1/2$

Diperoleh $D_V = (0, 1/2)$. (Ujung selang tidak dimasukkan karena volumenya 0, kita ingin memaksimumkan V)

$$\begin{aligned}
V'(x) &= \frac{8}{3}x\sqrt{1-2x} + \frac{4}{3}x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-2x}}(-2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-2x}}\left[\frac{8}{3}x(1-2x) - \frac{4}{3}x^2\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-2x}} \cdot \frac{4}{3}[2x - 4x^2 - x^2] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-2x}} \cdot \frac{4}{3}[2x - 5x^2] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-2x}} \cdot \frac{4}{3}x(2 - 5x)
\end{aligned}$$

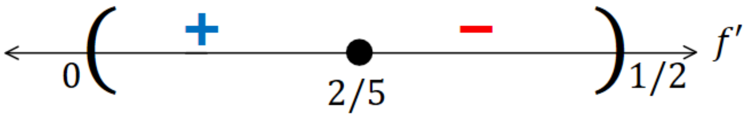
Titik kritis:

- Titik stasioner:

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2}{5}$$

  Karena $D_V = (0,1/2)$, maka $x = \frac{2}{5}$.

Uji Turunan Pertama:



(Cek: $V'\left(\frac{1}{5}\right) > 0$ karena $\frac{1}{5}\left(2 - 5 \cdot \frac{1}{5}\right) > 0$)

Jadi, volume limas persegi maksimumnya (dalam cm^3) adalah

$$V\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^2 \sqrt{1 - 2 \cdot \frac{2}{5}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{25}\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{16}{75\sqrt{5}}$$