Solusi Ujian Reevaluasi MA1101 2022

BPA Akademik STEI-K 2023

20 Desember 2023

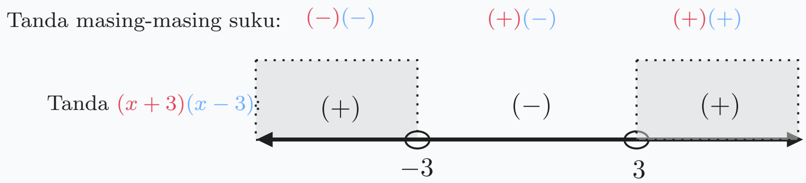
Bagian A

1. (a) Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $x^2 - 9 > 0$ adalah $\boxed{}$

   (b) Daerah asal fungsi $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ adalah $D_f = \boxed{}$

SOLUSI.

(a) $x^2 - 9 > 0 \iff (x+3)(x-3) > 0$. Selanjutnya, cek tanda $\pm$-nya pada garis bilangan:



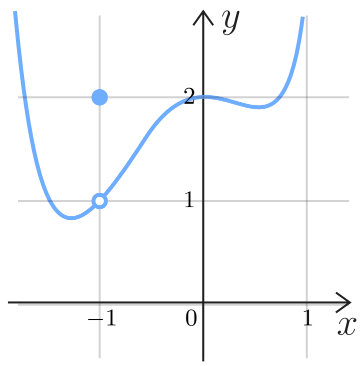
Jadi, himpunan penyelesaian pertidaksamaan tersebut adalah $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$. □

(b) Fungsi akar kuadrat akan menjadi tak terdefinisi jika ekspresi di dalamnya bernilai negatif. Jadi, ekspresi di dalam akar harus lebih besar atau sama dengan nol:

$$9 - x^2 > 0 \iff x^2 - 9 < 0$$

Dari cek tanda yang dilakukan pada bagian (a), nampak bahwa pertidaksamaan di atas berlaku pada selang $(-3, 3)$. Dengan demikian, $D_f = (-3, 3)$. □

2. Diberikan grafik fungsi f sebagai berikut.



   (a) $f(-1) = \boxed{}$

   (b) $\lim_{x \to -1} f(x) = \boxed{}$

SOLUSI.

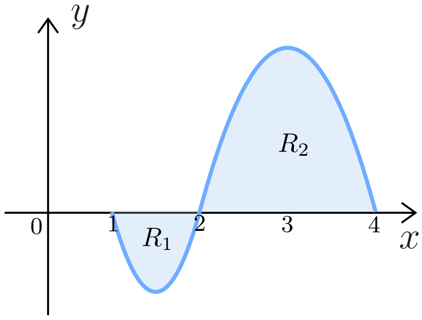
(a) $f(-1) = 2$ karena titik tertutup ada di $(-1, 2)$.
NB: Titik berlubang pada $(-1, 1)$ menandakan bahwa $f(-1) \neq 1$.

(b) Nampak bahwa nilai f mendekati 1 ketika x mendekati -1 baik dari sisi kiri maupun sisi kanan, yakni

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$$

sehingga $\lim_{x \to -1} f(x) = 1$. $\square$

3. Grafik fungsi f dan daerah R_1 dan R_2 diberikan sebagai berikut.



Jika luas daerah R_1 dan R_2 berturut-turut adalah 1 satuan luas dan 6 satuan luas maka

(a) $\int_4^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{}$

(b) $\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{}$

Solusi. Integral tentu dari suatu fungsi merepresentasikan luas bertanda dari daerah yang berada di bawah grafik fungsi tersebut. Luasan di bawah sumbu-x (y-nya negatif) bernilai negatif, sedangkan luasan di atas sumbu-x bernilai positif. Jadi, $-\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ dan $\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ secara berturut-turut sama dengan luas dari R_1 dan R_2.

(a) Berdasarkan sifat integral untuk batas bawah yang lebih besar dari batas atas integrasi, kita dapatkan $\int_4^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = -6$. $\square$

(b) Berdasarkan sifat aditif untuk integral, kita dapatkan $\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = -1 + 6 = 5$. $\square$

4. Dengan substitusi $u = 2x + 7$, diperoleh

$$\int_0^1 \sqrt{2x+7}\,\mathrm{d}x = \int_7^b g(u)\,\mathrm{d}u$$

dengan

(a) $b = \boxed{}$

(b) $g(u) = \boxed{}$

Solusi. Jika $u = 2x + 7$ maka menurunkan kedua ruas menghasilkan $\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x$, atau $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{2}$.

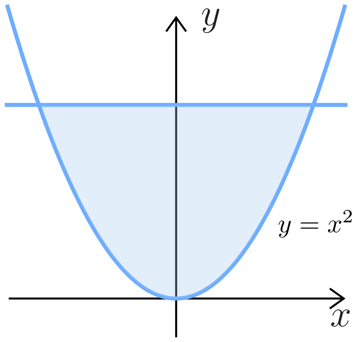
Selanjutnya, batas-batas integralnya perlu diganti menurut variabel u. Ketika $x = 0$, $u = 2(0)+7 = 7$ dan ketika $x = 1$, $u = 2(1) + 7 = 9$. Jadi, batas bawah dan batas atasnya secara berturut-turut adalah $u = 7$ dan $u = 9$.

Dengan demikian, integral semula dapat ditulis kembali sebagai

$$\int_0^1 \sqrt{2x+7}\,\mathrm{d}x = \int_7^9 \sqrt{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{2} = \int_7^9 \frac{\sqrt{u}}{2}\,\mathrm{d}u$$

Mencocokkan dengan bentuk $\int_7^b g(u)\,\mathrm{d}u$, kita dapatkan $b = 9$ dan $g(u) = \sqrt{u}/2$. $\square$

5. Suatu daerah R dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan garis $y = 9$, seperti diberikan pada gambar di bawah.



Luas daerah R adalah $\int_{-a}^{a} h(x)\,\mathrm{d}x$ dengan

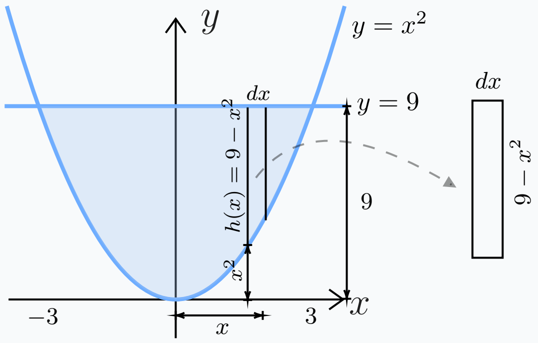
(a) $a =$ $\boxed{}$

(b) $h(x) =$ $\boxed{}$

SOLUSI. Titik potong antara $y = x^2$ dan $y = 9$ adalah

$$\begin{aligned} x^2 &= 9 \\ x^2 - 9 &= 0 \\ (x-3)(x+3) &= 0 \\ x &= -3 \vee x = 3 \end{aligned}$$

Didapatkan titik potong $x = -3$ dan $x = 3$. Perhatikan ilustrasi berikut.



Berdasarkan ilustrasi di atas, luas satu irisan kecil dari daerah R adalah

$$\mathrm{d}A = (9 - x^2)\,\mathrm{d}x$$

Mengingat daerah R memanjang dari $x = -3$ hingga $x = 3$, luas daerah R adalah

$$A_R = \int_{-3}^{3} \mathrm{d}A = \int_{-3}^{3} (9 - x^2)\,\mathrm{d}x$$

Mencocokkan bentuk di atas dengan $\int_{-a}^{a} h(x)\,\mathrm{d}x$, didapatkan $a = 3$ dan $h(x) = 9 - x^2$. $\square$

6. (a) Jika $y = \ln x$ maka $y'(2) =$ $\boxed{}$

(b) $\int_{1}^{2} \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x =$ $\boxed{}$

Solusi.

(a) Berdasarkan definisi fungsi logaritma natural, $y' = \frac{1}{x}$ sehingga $y'(2) = \frac{1}{2}$. $\square$

(b) Berdasarkan teorema dasar kalkulus II kita dapatkan

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x &= 3\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= 3\ln|x|\Big|_1^2 \\ &= 3\left(\ln|2| - \underbrace{\ln|1|}_{0}\right) \\ &= 3\ln 2\end{aligned}$$

7. Misalkan $f(x) = \sin x$.

(a) Nilai $f'(0) = \boxed{}$

(b) Dengan menggunakan diferensial diperoleh $f\left(\frac{1}{100}\right) \approx \boxed{}$

Solusi.

(a) $f'(x) = \cos x$ sehingga $f'(0) = \cos 0 = 1$. $\square$

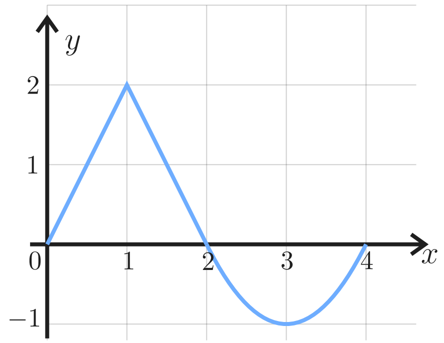
(b) Menurut konsep aproksimasi diferensial, nilai $f(x + \Delta x)$ dapat ditaksir dengan hubungan

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x.$$

Pada soal ini kita punya $f(x) = \sin x$ sehingga $f'(x) = \cos x$. Kita bebas memilih x yang memudahkan kita untuk mengaproksimasi nilai yang diinginkan. Karena $f(x) = \sin x$ adalah fungsi trigonometri, akan lebih mudah kalau x-nya kita pilih dari sudut-sudut istimewa. Misalnya, pilih $x = 0$ dan $\Delta x = \frac{1}{100}$ sehingga

$$\begin{aligned}f(0 + \frac{1}{100}) &\approx f(0) + f'(0) \cdot \Delta x \\ f(\frac{1}{100}) &\approx \sin(0) + \cos(0) \cdot \frac{1}{100} \\ &= 0 + 1 \cdot \frac{1}{100} \\ &= \frac{1}{100} \quad \square\end{aligned}$$

8. Jika grafik fungsi g pada selang $[0, 4]$ adalah sebagai berikut

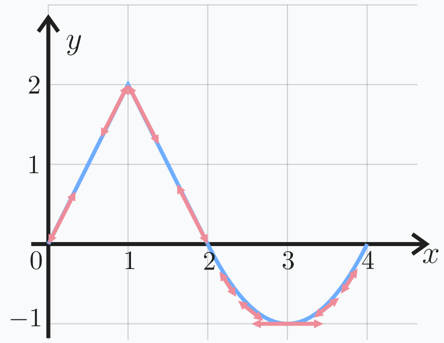


maka

(a) $g'(x) < 0$ pada selang (a, b) dengan $a =$ $\boxed{}$ dan $b =$ $\boxed{}$

(b) Titik stasioner dari fungsi g adalah $x =$ $\boxed{}$

Solusi. Catat bahwa turunan dari suatu fungsi menyatakan gradien garis singgung pada grafik fungsi tersebut. Beberapa garis singgung pada grafik fungsi g digambarkan oleh garis merah pada ilustrasi berikut.



(a) $g'(x) < 0$ ketika $g(x)$ monoton turun, yakni ketika gradien garis singgung bernilai negatif. Secara grafis, pada kondisi ini gradien garis singgungnya menurun. Kondisi tersebut tercapai pada selang $(1, 3)$. Jadi, $a = 1$ dan $b = 3$. $\square$

(b) Titik stasioner tercapai ketika $g'(x) = 0$, yakni garis singgung grafik mendatar. Kondisi tersebut tercapai ketika $x = 3$. Titik $x = 1$ tidak termasuk titik stasioner karena turunan dari sisi kiri dan sisi kanannya berbeda, yang secara grafis menghasilkan titik yang lancip. $\square$

Bagian B

1. Hitunglah $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$.

   Solusi. Mensubstitusikan $x = 2$ akan memberikan bentuk tak tentu $0/0$ sehingga kita perlu sederhanakan dahulu.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} &= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x+2} \\ &= \frac{2+1}{2+2} \\ &= \frac{3}{4} \quad \square\end{aligned}$$

2. Jika $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, hitunglah $f'(2)$.

   Solusi. Untuk menurunkan $f(x)$ kita perlu menerapkan aturan rantai.

   Misalkan $u = x^2 + 5$ sehingga

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x.$$

   Di samping itu, $f(x) = \sqrt{u} = u^{1/2}$ sehingga

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{2} u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

   Akibatnya, dengan aturan rantai kita peroleh

$$\begin{aligned}f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \\ &= \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{u}} \cdot \cancel{2}x \\ &= \frac{x}{\sqrt{u}} \\ &= \frac{x}{x^2 + 5} \\ f'(2) &= \frac{2}{2^2 + 5} \\ &= \frac{2}{9} \quad \square\end{aligned}$$

3. Tentukan nilai minimum dan maksimum dari fungsi $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ pada selang $[1, 5]$.

   Solusi. Pertama, kita cari titik-titik kritis dari fungsi tersebut. *Titik Ujung Selang*
   Titik ujung selangnya adalah $x = 1$ dan $x = 5$. *Titik Stasioner*
   Turunan pertama $f(x) = x + 4x^{-1}$ adalah

$$f'(x) = 1 - 4x^{-2} = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}.$$

   Pembuat nol $f'(x)$ adalah

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x^2} = 0 \iff x = -2 \lor x = 2$$

   Didapatkan dua titik stasioner: $x = 2$ dan $x = -2$. *Titik Singular*
   Titik singular terjadi ketika $f'(x)$ tak terdefinisi, yakni ketika penyebutnya nol, yang terjadi pada

$x = 0$. Akan tetapi, $f(x)$ juga tidak terdefinisi pada $x = 0$ sehingga kita tidak perlu pertimbangakan titik ini.

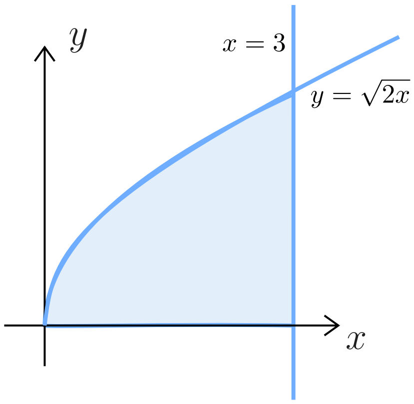
Selanjutnya, hitung nilai f untuk titik-titik kritis yang sudah didapatkan:

$$\begin{aligned} f(-2) &= -2 + \frac{4}{-2} = -4 \\ f(1) &= 1 + \frac{4}{1} = 5 \\ f(2) &= 2 + \frac{4}{2} = 4 \\ f(5) &= 5 + \frac{4}{5} = \frac{29}{5} \end{aligned}$$

Dengan membandingkan seluruh nilai f di atas, didapatkan nilai minimum $f(-2) = -4$ dan nilai maksimum $f(5) = \frac{29}{5}$. $\square$

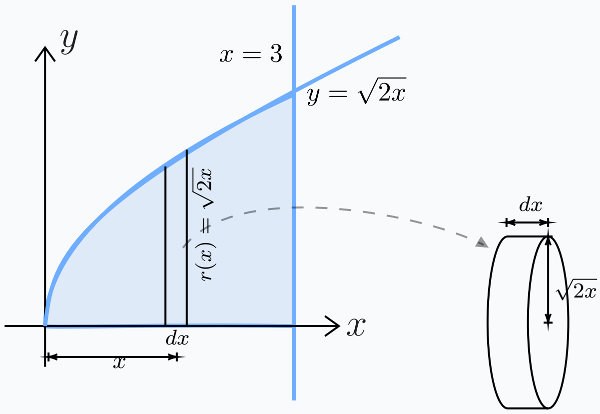
Nilai minimum tercapai di $x = a$ jika $f'(x) < 0$ (monoton turun) di kiri a lalu $f'(x) > 0$ (monoton naik) di kanannya, dan sebaliknya berlaku untuk nilai maksimum. Jadi,

4. Suatu daerah D di kuadran I dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{2x}$, garis $x = 3$, dan sumbu-x.



Tentukan volume benda pejal yang diperoleh dengan memutar daerah D mengelilingi sumbu-x.

SOLUSI. Perhatikan skema berikut.



Taksiran volume satu irisan pada daerah D adalah

$$\mathrm{d}V = \pi\left(\sqrt{2x}\right)^2 \mathrm{d}x = 2\pi x \, \mathrm{d}x\,.$$

Daerah D memanjang dari $x = 0$ hingga $x = 3$ sehingga volumenya adalah

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 \mathrm{d}V \\ &= \int_0^3 2\pi x \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$= \cancel{2}\pi \frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_0^3$$

$$= \pi x^2\Big|_0^3$$

$$= \pi(3^2 - 0^2)$$

$$= 9\pi$$

5. Tentukan solusi umum persamaan diferensial $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3t^2 y$ dengan $y(t) > 0$.

Solusi. Persamaan diferensial ini adalah persmaaan diferensial separabel di mana kita bisa sepenuhnya memisahkan variabel y dan t pada ruas yang berbeda:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3t^2 y$$

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = 3t^2\,\mathrm{d}t$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas, diperoleh

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int 3t^2\,\mathrm{d}t$$

$$\ln|y| = t^3 + C$$

Pangkatkan kedua ruas terhadap e sehingga

$$e^{\ln|y|} = e^{t^3+C}$$

$$|y| = e^{t^3+C}$$

Catat bahwa $|y| = y$ mengingat $y > 0$. Dengan demikian, solusi umum persamaan diferensial tersebut adalah

$$y = e^{t^3+C} \quad \square$$

Arsip soal oleh @PanduGus di Twitter
Solusi dan *typesetting* di LaTeX oleh Z. Nayaka Athadiansyah