UJIAN AKHIR SEMESTER I

MA 1101 KALKULUS IA

2014/2015

Bagian A

1. **Soal.** Hitunglah $\lim_{x\to\infty} x \sin \frac{2}{x}$

2. **Soal.** Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x) = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$

3. **Soal.** Gunakan aturan trapesium dengan $n = 3$ untuk menghampiri nilai $\int_0^3 \sqrt{3x^2 + 6x + 1}\, dx$

4. **Soal.** Hitunglah $\int_0^1 \frac{x}{x+1}\, dx$

5. **Soal.** Jika laju $y = f(x)$ terhadap x adalah $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ dan $f(0) = 2$, tentukan $f(2)$.

6. **Soal.** Tentukan solusi persamaan diferensial $y' + y = 2xe^x$.

7. **Soal.** Jika $y = f(x)$ termuat secara implisit dalam $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$, tentukan persamaan garis singgung pada kurca f di titik (1,1).

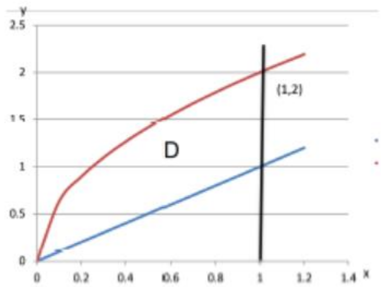
Bagian B

1. **Soal.** Diketahui $f(x) = \begin{cases} x^2 + c^2, & x \le 1 \\ cx + 1, & x > 1 \end{cases}$

   (a) Tentukan $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, dan konstanta c agar f kontinu di 1.

   (b) Gambarkan kurva f untuk c yang diperoleh.

2. **Soal.** Diketahui daerah D yang dibatasi kurva $y = 2\sqrt{x}$, garis $x = 1$, dan garis $y = x$ (lihat gambar). Hitunglah



(a) Luas D,

(b) Volume benda jika D diputar terhadap sumbu x,

(c) Volume jika D diputar terhadap sumbu y.

3. **Soal.** Laju perubahan waktu tertentu banyaknya penduduk suatu kota pada setiap saat sebanding dengan banyaknya penduduk pada saat itu. Jika pada tahun 2000 (saat t = 0) jumlah penduduk kota itu 1,5 juta juwa dan pada tahun 2008 (saat t = 8) banyaknya penduduk kota itu 3 juta jiwa, tentukan :

(a) Banyaknya penduduk setiap saat t untuk $0 \leq t \leq 20$,

(b) Banyaknya penduduk pada tahun 2016

PEMBAHASAN UP 2014

1. **Soal.** Hitunglah $\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{2}{x}$

$$L = \lim_{x\to\infty} x\sin{}^2/_x = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin{}^2/_x}{{}^1/_x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sin{}^2/_x}{{}^2/_x} = 2 \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\sin{}^2/_x}{{}^2/_x}$$

misal $\theta = {}^2/_x$. saat $x \to \infty$ maka $\theta \to 0^+$ sehingga

$$L = 2 \cdot \lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = 2 \cdot 1 = 2$$

Jadi, $\lim_{x\to\infty} x\sin{}^2/_x = 2$

2. **Soal.** Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x) = \frac{1+\sin x}{\cos x}$

$u = 1+\sin x$ $\qquad v = \cos x$

$du = \cos x$ $\qquad dv = -\sin x$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - (1+\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x \cdot \cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= \sec^2 x + \sec x \cdot \tan x$$

Jadi, $f'(x) = \sec^2 x + \sec x \cdot \tan x$

3. **Soal.** Gunakan aturan trapesium dengan $n = 3$ untuk menghampiri nilai $\int_0^3 \sqrt{3x^2+6x+1}\,dx$

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ maka $\Delta x = \frac{3-0}{3} = 1$

$x_0 = 0$ maka $f(0) = \sqrt{3(0)^2+6(0)+1} = 1$

$x_1 = 1$ maka $f(1) = \sqrt{10}$

$x_2 = 2$ maka $f(2) = 5$

$x_3 = 3$ maka $f(3) = \sqrt{46}$

$$\int_0^3 {}^2/_{x^2+1}\,dx \approx {}^1/_2\,[f(0) + 2f(1) + 2f(2) + f(3)]$$

$$= {}^1/_2\,[1 + 2\sqrt{10} + 2(5) + \sqrt{46}]$$

$$= {}^1/_2\,[11 + 2\sqrt{10} + \sqrt{46}]$$

4. **Soal.** Hitunglah $\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx$

$u = x+1 \rightarrow x = u-1$

$du = 1\,dx$

- ganti batas integral

$x = 1$ maka $u = (1)+1 = 2$

$x = 0$ maka $u = 0+1 = 1$

$$\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx = \int_1^2 \frac{u-1}{u}\,du$$

$$= \int_1^2 \left[1 - \frac{1}{u}\right] du$$

$$\rightarrow [u - \ln|u|]_1^2$$

$$(2 - \ln 2) - (1 - \ln 1)$$

$$2 - \ln 2 - 1 + 0 \quad [\ln 1 = 0]$$

$$1 - \ln 2$$

5. **Soal.** Jika laju $y = f(x)$ terhadap x adalah $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+1)^2}$ dan $f(0) = 2$, tentukan $f(2)$.

$$dy = \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$\int dy = \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$y = -\frac{1}{x+1} + C$$

Cari konstanta C dari $f(0) = 2$

$$2 = -\frac{1}{0+1} + C$$

$$1 = -1 + C$$

$$C = 2$$

$$f(x) = -{}^1/_{x+1} + 2$$

$$f(2) = -{}^1/_3 + 2 = {}^5/_3$$

6. **Soal.** Tentukan solusi persamaan diferensial $y' + y = 2xe^x$.

[DIASUMSIKAN SALAH SOAL]

seharusnya $y' - y = 2xe^x$

$P(x) = -1$ maka $\int P(x)\,dx = \int -1\,dx = -x + C$

faktor integrasi $I(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{-x}$

gunakan rumus $\frac{d}{dx}[y \cdot I(x)] = Q(x) \cdot I(x)$ dengan

$Q(x) = 2xe^x$

$$\frac{d}{dx}(y \cdot e^{-x}) = 2xe^x \cdot e^{-x}$$

$$d(y \cdot e^{-x}) = 2xe^0\,dx$$

$$\int d(y \cdot e^{-x}) = \int 2x\,dx$$

$$y \cdot e^{-x} = x^2 + C$$

$$y = e^x(x^2 + C)$$

7. **Soal.** Jika $y = f(x)$ termuat secara implisit dalam $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$, tentukan persamaan garis singgung pada kurva f di titik (1,1).

- turunkan kurva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ terhadap x secara implisit

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \frac{d}{dx}(2)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$m = \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}} = -\sqrt{\frac{1}{1}} = -1$$

Persamaan garis singgung di titik (1,1) dan $m = -1$

$y - 1 = -1(x-1)$ atau $y = -x + 2$

1. **Soal.** Diketahui $f(x) = \begin{cases} x^2 + c^2, & x \le 1 \\ cx + 1, & x > 1 \end{cases}$

(a) Tentukan $\lim_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim_{x \to 1^+} f(x)$, dan konstanta c agar f kontinu di 1.

(b) Gambarkan kurva f untuk c yang diperoleh.

a. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 + c^2 = (1)^2 + c^2 = 1 + c^2$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} cx + 1 = c(1) + 1 = c + 1$

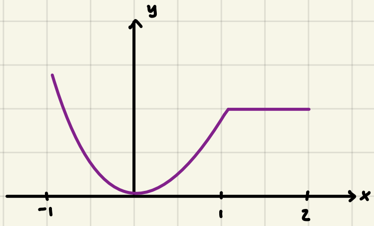
fungsi f kontinu di $x = 1$: $f(2) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$

$f(x) = x^2 + c^2$ maka $f(1) = 1^2 + c^2 = 1 + c^2$

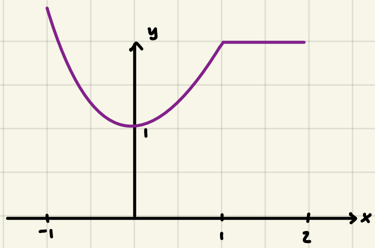
sehingga $1 + c^2 = c + 1 \iff c^2 - c = 0 \iff c(c-1) = 0$

maka $c = 0$ dan $c = 1$

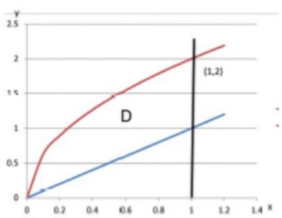
b. $c = 0$: $f(x) = \begin{cases} x^2 ; & x \le 1 \\ 1 ; & x > 1 \end{cases}$



$c = 1$: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 ; & x \le 1 \\ x + 1 ; & x > 1 \end{cases}$



2. **Soal.** Diketahui daerah D yang dibatasi kurva $y = 2\sqrt{x}$, garis $x = 1$, dan garis $y = x$ (lihat gambar). Hitunglah



(a) Luas D,

(b) Volume benda jika D diputar terhadap sumbu x,

(c) Volume jika D diputar terhadap sumbu y.

a. $L \approx \sum_{i=1}^{n} (2\sqrt{x_i} - x_i) . \Delta x$

$L = \int_0^1 (2\sqrt{x} - x)\, dx$
$= \left[\frac{4}{3} x^{3/2} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$
$= \left[\frac{4}{3} - \frac{1}{2} \right]$
$= \frac{5}{6}$

c. METODE KULIT TABUNG

$\Delta V = 2\pi r h . \Delta x$

$r = x$

$h = 1 - x^2$

$V \approx 2\pi \int_0^1 x(1 - x^2)\, dx$
$= 2\pi \int_0^1 x - x^3\, dx$
$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1$
$= \frac{1}{2}\pi$

b. METODE CINCIN

R (jari-jari luar) = $2\sqrt{x}$

r (jari-jari dalam) = x

$$V = \pi \int_0^1 [(2\sqrt{x})^2 - (x^2)]\,dx$$
$$= \pi \int_0^1 (4x - x^2)\,dx$$
$$= \pi \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$= \pi \left[(2 - 1/3)\right]$$
$$= 5/3\,\pi$$

3. **Soal.** Laju perubahan waktu tertentu banyaknya penduduk suatu kota pada setiap saat sebanding dengan banyaknya penduduk pada saat itu. Jika pada tahun 2000 (saat t = 0) jumlah penduduk kota itu 1,5 juta juwa dan pada tahun 2008 (saat t = 8) banyaknya penduduk kota itu 3 juta jiwa, tentukan :

(a) Banyaknya penduduk setiap saat t untuk $0 \leq t \leq 20$,

(b) Banyaknya penduduk pada tahun 2016

a. misal y adalah jumlah penduduk, maka

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

$$\frac{dy}{y} = k\,dt$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\,dt$$

$$\ln y = kt + C$$

$y = 1.5$ saat $t = 0$

$$\ln 1.5 = k(0) + C$$
$$C = \ln 1.5$$

$y = 3$ saat $t = 8$

$$\ln 3 = k(8) + C$$
$$\ln 3 = k(8) + \ln 1.5$$
$$k = \frac{\ln 2}{8}$$

$$\ln y = kt + \ln 1.5$$
$$y = e^{kt + \ln 1.5}$$
$$= e^{kt} \cdot e^{\ln 1.5}$$
$$= 1.5\, e^{kt}$$
$$= 1.5\, e^{\frac{\ln 2}{8} t}$$

jadi, banyaknya penduduk : $y = 1.5\, e^{\frac{\ln 2}{8} \cdot t}$

b. $y(16) = 1.5\, e^{\frac{16}{8}\ln 2}$
$$= 1.5\, e^{2\ln 2}$$
$$= 1.5\, e^{\ln 2^2}$$
$$= 1.5\,(2^2)$$
$$= 6$$

banyaknya penduduk adalah 6 juta jiwa