Bagian A (Tipe ∇)

1. Misalkan $f(x) = 6x^2$.
(a) Anti turunan dari f adalah

$$F(x) = \int 6x^2 \ dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} + C = 2x^3 + C$$

(b) Misalkan F memenuhi $F(1) = 4$, artinya

$$2 \cdot 1^3 + C = 4 \Leftrightarrow C = 2$$

Jadi, $F(0) = 2 \cdot 0^3 + 2 = 2$.

2. Misalkan f kontinu pada $[1,5]$ dan $F'(x) = f(x)$ (F antiturunan dari f) dengan $F(1) = 3$ dan $F(5) = 11$. Akan dihitung integral berikut dengan substitusi.

$$\int_0^2 6xf(x^2+1) \ dx$$

Substitusi $\boxed{u(x) = x^2 + 1}$ $\Rightarrow du = 2x\,dx$. Lalu $u(0) = 1, u(2) = 5$. Diperoleh

$$\boxed{\int_0^2 6xf(x^2+1) \ dx = \int_1^5 f(u) \cdot 3du = 3F(u)|_1^5 = 3[F(5) - F(1)] = 3[11 - 3] = 24}.$$

3. Misalkan f genap dan $\int_0^8 f(x)\,dx = 24$.

(a) Nilai rata-rata dari f pada $[0,8]$ adalah

$$\frac{1}{8-0}\int_0^8 f(x)\,dx = \frac{1}{8} \cdot 24 = 3$$

(b) Karena f genap, maka

$$\int_{-8}^8 f(x)\,dx = 2\int_0^8 f(x)\,dx = 2 \cdot 24 = 48$$

4. Misalkan $f(x) = \ln(4x - 3)$, maka
(a) $f'(1) = \left.\frac{4}{4x-3}\right|_{x=1} = \frac{4}{4 \cdot 1 - 3} = 4$
(b) Misalkan $y = f^{-1}(0) \Leftrightarrow 0 = f(y)$. Maka

$$\begin{aligned} \ln(4y-3) = 0 &\Leftrightarrow 4y - 3 = 1 \\ &\Leftrightarrow y = 1 \end{aligned}$$

Jadi, $f^{-1}(0) = 1$.

5. Misal $2^a = 3$ dan $2^b = 6$, maka
(a) $2^{2a-b} = \frac{2^{2a}}{2^b} = \frac{(2^a)^2}{2^b} = \frac{3^2}{6} = \frac{3}{2}$

(b) $\int_1^2 2^x\,dx = \left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_1^2 = \frac{2^2 - 2^1}{\ln 2} = \frac{2}{\ln 2}$

Bagian A (Tipe ◯)

1. Misalkan $f(x) = 9x^2$.
(a) Anti turunan dari f adalah

$$F(x) = \int 9x^2 \ dx = 9 \cdot \frac{x^3}{3} + C = 3x^3 + C$$

(b) Misalkan F memenuhi $F(1) = 6$, artinya

$$3 \cdot 1^3 + C = 6 \Leftrightarrow C = 3$$

Jadi, $F(0) = 3 \cdot 0^3 + 3 = 3$.

2. Misalkan f kontinu pada $[2,11]$ dan $F'(x) = f(x)$ (F antiturunan dari f) dengan $F(2) = 2$ dan $F(11) = 9$. Akan dihitung integral berikut dengan substitusi.

$$\int_0^2 6xf(x^2+1) \ dx$$

Substitusi $\boxed{u(x) = x^2 + 2}$ $\Rightarrow du = 2x\,dx$. Lalu $u(0) = 2, u(3) = 11$. Diperoleh

$$\boxed{\int_0^3 8xf(x^2+1) \ dx = \int_2^{11} f(u) \cdot 4du = 4F(u)|_2^{11} = 4[F(11) - F(2)] = 4[9-2] = 28}.$$

3. Misalkan f genap dan $\int_0^6 f(x)\,dx = 12$.

(a) Nilai rata-rata dari f pada $[0,6]$ adalah

$$\frac{1}{6-0}\int_0^6 f(x)\,dx = \frac{1}{6} \cdot 12 = 2$$

(b) Karena f genap, maka

$$\int_{-6}^6 f(x)\,dx = 2\int_0^6 f(x)\,dx = 2 \cdot 12 = 24$$

4. Misalkan $f(x) = \ln(3x-5)$, maka
(a) $f'(2) = \left.\frac{3}{3x-3}\right|_{x=1} = \frac{3}{3\cdot 2-3} = 1$
(b) Misalkan $y = f^{-1}(0) \Leftrightarrow 0 = f(y)$. Maka

$$\begin{aligned} \ln(3y-5) = 0 &\Leftrightarrow 3y - 5 = 1 \\ &\Leftrightarrow y = 2 \end{aligned}$$

Jadi, $f^{-1}(0) = 2$.

5. Misal $3^a = 5$ dan $3^b = 10$, maka
(a) $3^{2a-b} = \frac{3^{2a}}{3^b} = \frac{(3^a)^2}{3^b} = \frac{5^2}{10} = \frac{5}{2}$

(b) $\int_1^2 3^x \ dx = \left.\frac{3^x}{\ln 3}\right|_1^2 = \frac{3^2-3^1}{\ln 3} = \frac{6}{\ln 3}$

Bagian B

1. Akan ditentukan nilai ekstrim global dari $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ pada $[-1,1]$.

Untuk titik stasioner dan singular:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$$

Titik kritis:

- Titik ujung selang : $x = -1$, $x = 1$
- Titik singular : tidak ada
- Titik stasioner :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x = 4$$

Karena selangnya $[-1,1]$, maka $x = 0$.

Uji titik kritis (membandingkan nilai):

x	$f(x)$
-1	$-1-6+1=-6$
1	$1-6+1=-4$
0	1

Jadi, nilai maksimum globalnya adalah 1 dan nilai minimum globalnya -6.

2. Misalkan f kontinu di $\mathbb{R}$ dan diketahui

$$\int_1^5 f(x)\,dx = 6, \int_3^5 f(x)\,dx = -2.$$

Maka

$$\int_1^3 (3f(x)+2)\,dx = 3\int_1^3 f(x)\,dx + \int_1^3 2\,dx = 3\left[\int_1^5 f(x)\,dx + \int_5^3 f(x)\,dx\right] + 2x|_1^3$$
$$= 3[6 + (-2)] + 2(3-1) = 12 + 4 = 16$$

3. Misalkan $g(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{t^2+3}\,dt$. Akan ditentukan $g'(1)$.
Menurut aturan rantai TDK 1,

$$g'(x) = \sqrt{(x^2)^2+3} \cdot 2x$$

Maka

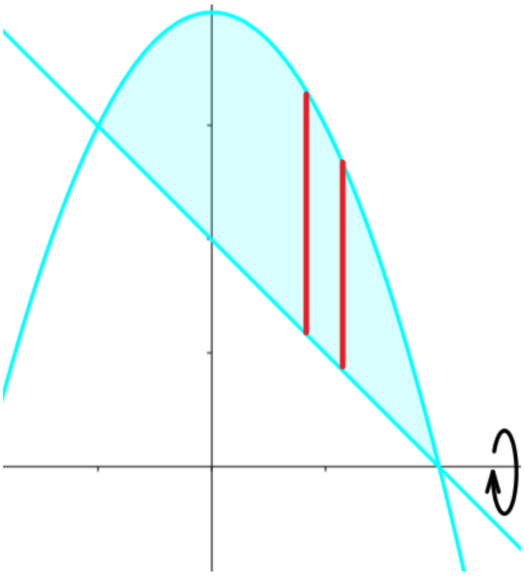
$$g'(1) = \sqrt{1+3} \cdot 2 = 4$$

4. Misalkan $f(x) = \frac{15}{x}$. Akan dihitung hampiran $\int_1^3 f(x)\,dx$ dengan metode Trapesium $n = 4$.
Kita punya $x_0 = a = 1$, $x_n = b = 3$, dan $n = 4$, sehingga

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$

Jadi,

$$\int_1^3 f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)]$$
$$= \frac{1/2}{2}\left[f(1) + 2f\left(\frac{3}{2}\right) + 2f(2) + 2f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{15}{1} + 2\cdot\frac{15}{3/2} + 2\cdot\frac{15}{2} + 2\cdot\frac{15}{5/2} + \frac{15}{3}\right] = \frac{1}{4}[15+20+15+12+5] = \frac{67}{4} = 16{,}75$$



5. Daerah dibatasi $y = 2 - x$ dan $y = 4 - x^2$ diputar terhadap sumbu-x. Akan dihitung volume benda putar yang dihasilkan.

Pilih pengirisan vertikal. Volume irisan bendanya (cincin) adalah

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx \pi[R^2 - r^2]\Delta x \\ &= \pi[(4 - x^2)^2 - (2 - x)^2]\Delta x \end{aligned}$$

Kita perlu cari perpotongan $y = 2 - x$ dan $y = 4 - x^2$:

$$\begin{aligned} &2 - x = 4 - x^2 \\ &x^2 - x - 2 = 0 \\ &(x - 2)(x + 1) = 0 \\ &x = 2 \vee x = -1 \end{aligned}$$

Maka volume total bendanya adalah

$$V = \pi \int_{-1}^{2} [(4 - x^2)^2 - (2 - x)^2]\, dx$$

(tidak perlu dihitung nilai integralnya).

6. Misalkan $y(t)$ populasi penduduk (juta jiwa) t tahun setelah 2003. Diketahui

$$\begin{aligned} &y(t) = Ae^{kt} \\ &y(0) = 2 \\ &y(20) = 6 \end{aligned}$$

Akan ditentukan kapan $y = 10$.

Karena $y(0) = 2$ ($t = 0$, $y = 2$),

$$\begin{aligned} &Ae^{k\cdot 0} = 2 \\ &A = 2 \end{aligned}$$

Karena $y(20) = 6$ ($t = 20$, $y = 6$),

$$\begin{aligned} &2e^{k\cdot 20} = 6 \\ &e^{k\cdot 20} = 3 \\ &20k = \ln 3 \\ &k = \frac{\ln 3}{20} \end{aligned}$$

$y = 10$ saat

$$\begin{aligned} &2e^{kt} = 10 \\ &e^{kt} = 5 \\ &kt = \ln 5 \\ &t = \frac{1}{k}\ln 5 = \frac{20}{\ln 3}\ln 5 \end{aligned}$$

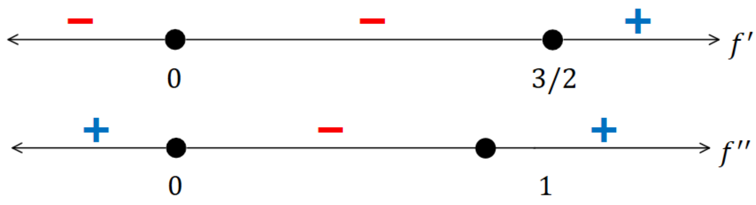
Jadi, populasi menjadi 10 juta jiwa sekitar $\frac{20\ln 5}{\ln 3}$ tahun setelah 2003.

Bagian C

1. Misalkan $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.

(a) Menentukan interval kemonotonan dan kecekungan setara dengan menentukan tanda dari f' dan f''.

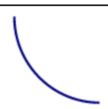
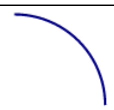
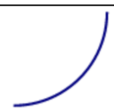
$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3)$$
$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1)$$



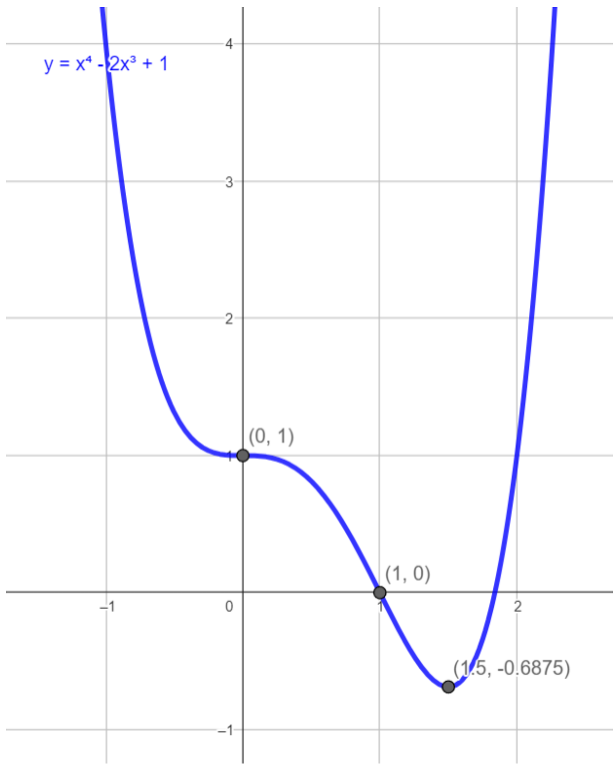
- f naik pada $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$
- f turun pada $(-\infty, 0)$ dan $\left(0, \frac{3}{2}\right)$
- f cekung ke atas pada $(-\infty, 0)$ dan $(1, \infty)$
- f cekung ke bawa pada $(0,1)$

(b) Menurut uji turunan pertama (perubahan kemonotonan), minimum lokal terjadi di $x = \frac{3}{2}$.
($x = 0$ bukan ekstrim lokal).

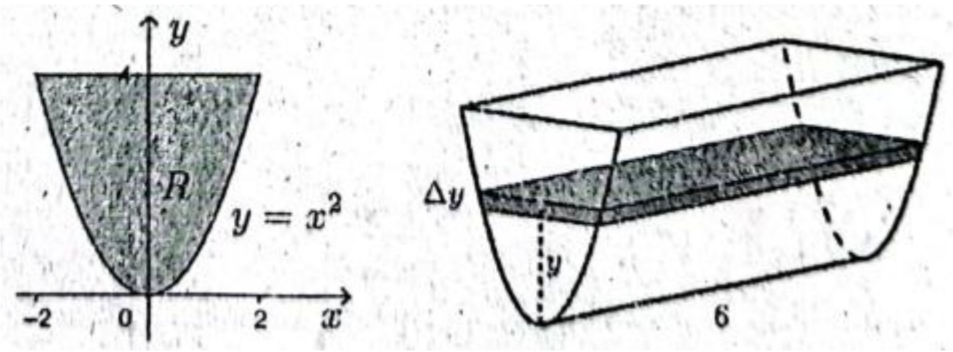
(c) Kita rekapitulasi informasi kemonotonan, kecekungan, dan titik-titik yang dilalui.

Selang	Kemonotonan	Kecekungan	Bentuk
$(-\infty, 0)$	Turun	Cekung ke atas	
$(0,1)$	Turun	Cekung ke bawah	
$\left(1, \frac{3}{2}\right)$	Turun	Cekung ke atas	
$\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$	Naik	Cekung ke atas	

x	$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$
0	1
1	$1 - 2 + 1 = 0$
$\frac{3}{2}$	$\frac{81}{16} - 2 \cdot \frac{27}{8} + 1 = \frac{81 - 108 + 16}{16} = -\frac{11}{16}$



2. Tangki diletakkan di atas permukaan tanah yang panjangnya 6 meter dengan penampang vertikal berbentuk daerah R yang dibatasi $y = x^2$ dan $y = 4$ seperti berikut.



Tangki penuh berisi air dipompa hingga ketinggian 5 meter dari **permukaan tanah**.

(a) Untuk menghitung luas daerah R kita gunakan pengirisan horizontal. Perhatikan $y = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y}$.

Luas irisan daerah R:

$$\Delta L \approx \left(\sqrt{y} - \left(-\sqrt{y}\right)\right)\Delta y = 2\sqrt{y}\,\Delta y$$

Luas total daerah R:

$$L = 2\int_0^4 \sqrt{y}\,dy = 2\left.\frac{y^{3/2}}{3/2}\right|_0^4 = \frac{4}{3}\left(4^{3/2}\right) = \frac{4}{3}\cdot 8 = \frac{32}{3}$$

Volume air di dalam tangki:

$$V = L\cdot 6 = \frac{32}{3}\cdot 6 = 64$$

Bisa juga dihitung dengan pengirisan vertikal:

$$L = \int_{-2}^{2}(4 - x^2)\,dx = 2\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$$
$$= 2\left.\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^2 = 2\left(4\cdot 2 - \frac{8}{3}\right)$$
$$= 2\,\frac{24 - 8}{3} = \frac{32}{3}$$

(b) Volume potongan air:

$$\Delta V \approx pl\Delta y = 6\left(\sqrt{y} - \left(-\sqrt{y}\right)\right)\Delta y = 12\sqrt{y}\,\Delta y$$

(c) Berat jenis air adalah 10^4 N/m^3,

Berat jenis = Berat / Volume
Berat = Berat jenis × Volume

Berat potongan air:

$$\Delta F \approx 10^4\cdot\Delta V = 12\cdot 10^4\sqrt{y}\,\Delta y$$

Potongan air (saat ketinggian y meter) mau dipompa/dipindahkan sampai ketinggian 5 meter (harus berpindah sejauh $(5 - y)$ meter). Maka, potongan kerja/usahanya adalah

$$\Delta W \approx \Delta F\cdot(5 - y) = 12\cdot 10^4(5 - y)\sqrt{y}\,\Delta y$$

Jadi, total usahanya (dalam Joule) adalah

$$W = 12\cdot 10^4\int_0^4 \left(5\sqrt{y} - y^{3/2}\right)dy = 12\cdot 10^4\left.\left(5\frac{y^{3/2}}{3/2} - \frac{y^{5/2}}{5/2}\right)\right|_0^4 = 12\cdot 10^4\left(\frac{10}{3}4^{3/2} - \frac{2}{5}4^{5/2}\right)$$
$$= 12\cdot 10^4\left(\frac{80}{3} - \frac{64}{5}\right) = 10^3\cdot 120\left(\frac{400 - 192}{15}\right) = 10^3\cdot 8\cdot 208 = 1664000$$