Ujian Reevaluasi MA1101 Matematika IA
Semester I 2013-2014
Waktu: 120 Menit

Bagian A

1. Tentukan daerah asal fungsi $f(x) = \sqrt{x - \frac{4}{x}}$.
2. Tentukan konstanta k agar fungsi $f(x) = \begin{cases} kx^2, & : \quad x \leq 2 \\ 2x + k & : \quad x > 2 \end{cases}$ kontinu pada $\mathbb{R}$.
3. Hitunglah $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.
4. Tentukan $f'(0)$ jika $f(x) = 2e^{-x} + \sin x$.
5. Tentukan konstanta k agar $x = -2$ menjadi titik stasioner dari fungsi $f(x) = x - \frac{k}{x}$.
6. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 2$ dan $y = -x$.
7. Hitunglah nilai $\cos\left(\sin^{-1}(\frac{5}{13})\right)$.

Bagian B

1. Diketahui sebuah kurva dengan persamaan $x^2 - xy + y^2 = 4$.
   (a) Tentukan semua titik potong kurva tersebut dengan garis $y = x$.
   (b) Tentukan persamaan garis singgung kurva tersebut pada titik titik tersebut.
2. Tentukan solusi persamaan diferensial $y' = y + e^{2x}$ dengan syarat awal $y(0) = 2$.
3. Misalkan D adalah daerah yang dibatasi oleh garis $y = 1$, $x = 0$ dan garis $y = x^2$. Tentukan volume benda putar yang diperoleh ketika D diputar mengelilingi garis $y = 1$.

Skema Penilaian dan Solusi Ujian Reevaluasi

Bagian A

1. (a) Mempertimbangkan pertaksamaan $x - \frac{4}{x} \geq 0$ (1 point)
   (b) Menyelesaikan pertaksamaan (2 point)
2. (a) Mengindikasikan bahwa perlu penganalisaan kekontinuan di $x = 2$ (1 point)
   (b) Mendapatkan k dari persamaan limit kiri sama dengan limit kanan yang juga sama dengan $f(2)$ (2 point)
   (Tanpa menggunakan limit, yakni hanya memasukkan $x = 2$ ke kx^2 dan $2x + k$) (1 point)
3. (a) Melakukan pembagian ruas atas dan bawah dengan x (1 point)
   (b) Menghitung limit dengan benar (2 point)
4. (a) Mengitung turunan masing-masing suku dengan benar (masing-masingnya 1 point) (2 point)
   (b) Menghitung $f'(0)$ dengan benar (1 point)
5. (a) Menghitung $f'(x)$ (1 point)
   (b) Mengetahui bahwa titik stasioner terjadi ketika $f'(x) = 0$ (1 point)
   (c) Mendapatkan nilai k. (1 point)
6. (a) Menggambar sketsa grafik dengan benar (1 point)
   (b) Mensetup integral dengan benar (1 point)
   (c) Menghitung integral dengan benar (1 point)
7. (a) Memisalkan $\theta = \sin^{-1}(5/13)$ untuk mendapatkan $\sin\theta = \frac{5}{13}$ (1 point)
   (b) Membuat diagram segitiga siku-siku dengan panjang sisi dengan penempatan θ yang tepat (1 point)
   (c) Menentukan $\cos\theta$ dengan benar (1 point)

Banyak tanda -	Pengurangan nilai
0-2	0
3-4	1
5-6	2
7-8	3

Bagian B

1. (a) Memperoleh dua buah titik potong (4 point)
   (b) i. Menurunkan secara implisit untuk mendapatkan y' (2 point)
   ii. Memperoleh kemiringan garis singgung di masing-masing titik dan memperoleh dua buah garis singgung dengan benar (4 point)
2. (a) Menulis ulang persamaan menjadi $y' - y = e^{2x}$ (2 point)
   (b) Menentukan faktor integral dan mengalikan persamaan dengan faktor integral tersebut (2 point)
   (c) Mendapatkan $y = Ce^x + e^{2x}$ (3 point)
   (d) Menentukan konstanta C (2 point)
   (e) Kesimpulan (1 point)
3. (a) Menggambar sketsa daerah D (2 point)
   (b) Mensetup integral dengan benar (baik dengan pemotongan terlebih dahulu atau langsung) (5 point)
   (c) Menghitung integral dengan benar (3 point)

Bagian A

1. Agar $f(x)$ terdefinisi maka $x - \frac{4}{x} \geq 0$ dan $x \neq 0$. Ketaksamaan ekivalen dengan

$$\frac{x^2-4}{x} = \frac{(x+2)(x-2)}{x} \geq 0.$$

Dari ketaksamaan ini didapat $-2 \leq x < 0$ atau $x \geq 2$. Dengan demikian daerah asal $f(x)$ adalah $[-2, 0) \cup [2, \infty)$.

2. Fungsi polinom kontinu dimana-mana. Dengan demikian jelas bahwa kx^2 kontinu di selang $x < 2$ dan $2x + k$ kontinu diselang $x > 2$. Jadi, agar $f(x)$ kontinu dimana-mana cukup dicari k yang menyebabkan $f(x)$ kontinu di $x = 2$. Agar hal tersebut berlaku maka haruslah

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \\ \lim_{x\to 2^-} kx^2 &= \lim_{x\to 2^+} 2x + k = 4k \\ 4k &= 4 + k = 4 \\ 3k &= 4 \\ k &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

3.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Dengan langkah terakhir didapat karena fungsi $\sqrt{x}$ kontinu (di daerah definisinya).

4. Jika $f(x) = 2e^{-x} + \sin x$ maka $f'(x) = -2e^{-x} + \cos x$. Akibatnya $f'(0) = -2 + 1 = -1$.

5. Dari $f(x) = x - \frac{k}{x}$ diperoleh $f'(x) = 1 + \frac{k}{x^2}$. Titik $x = -2$ merupakan titik stasioner jika dan hanya jika $f'(-2) = 1 + \frac{k}{4} = 0 \Leftrightarrow k = -4$.

6. Luas $= \int_{-2}^{1} -x - (x^2 - 2)\, dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{3}{2} - 3 + 6 = \frac{9}{2}$.

7. Karena $-\pi/2 \leq \sin^{-1} x \leq \pi/2$ maka $\cos(\sin^{-1} x) \geq 0$. Misalkan $\theta = \sin^{-1}\frac{5}{13}$ maka $\sin\theta = \frac{5}{13}$. Akibatnya $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$. Karena $\cos(\theta) \geq 0$ maka haruslah $\cos(\theta) = \sqrt{144/169} = 12/13$.

   Cara lain: Dari fakta bahwa $\sin\theta = \frac{5}{13}$ maka diperoleh segitiga siku-siku yang salah satu sudutnya θ. Panjang sisi dihadapan θ adalah 5 sedang sisi miring segitiga adalah 13. Dari sini panjang sisi yang lainnya adalah 12. Dengan demikian $\cos\theta = \frac{12}{13}$.

Bagian B

1. (a) Titik potong (x, y) dari kurva $x^2 - xy + y^2 = 4$ dan $y = x$ memenuhi $x^2 - x^2 + x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Karena $y = x$ maka diperoleh titik $(2, 2)$ dan $(-2, -2)$.

   (b) Dengan menurunkan $x^2 - xy + y^2 = 4$ secara implisit diperoleh $2x - y - xy' + 2yy' = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{y-2x}{2y-x}$. Kemiringan garis singgung dititik $(2, 2)$ dan $(-2, -2)$ adalah -1. Dengan demikian persamaan garis singgung titik $(2, 2)$ dan $(-2, -2)$ masing-masing adalah $y - 2 = -(x - 2)$ dan $y + 2 = -(x + 2)$.

2. Tulis ulang persamaan differensial sebagai $y' - y = e^{2x}$. Diperoleh faktor integral $e^{\int -1\,dx} = e^{-x}$. Kalikan persamaan dengan e^{-x} untuk mendapatkan

$$\begin{aligned} e^{-x}y' - e^{-x}y &= e^x \\ \left(e^{-x}y\right)' &= e^x \\ e^{-x}y &= \int e^x = e^x + C \\ y &= e^{2x} + Ce^x \end{aligned}$$

   Dengan kondisi awal $y(0) = 2$ diperoleh $2 = 1 + C$. Dengan demikian $C = 1$ dan $y(x) = e^x + e^{2x}$.

3. $V = \int_0^1 \pi(1 - x^2)^2\,dx = \pi \int_0^1 x^4 - 2x^2 + 1\,dx = \pi\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{8\pi}{15}$.