LIMIT

1 Pengantar Limit

a) Pemahaman secara intuisi

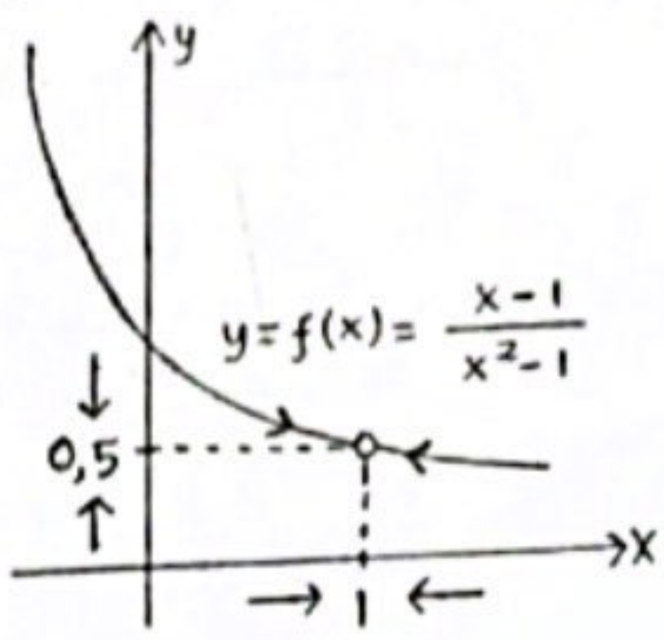
Perkirakan nilai $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$.

Fungsi $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ tidak terdefinisi saat $x=1$, karena menghasilkan bentuk $\frac{0}{0}$.

$x<1$	$f(x)$
0,5	0,666667
0,9	0,526316
0,99	0,502513
0,999	0,500250

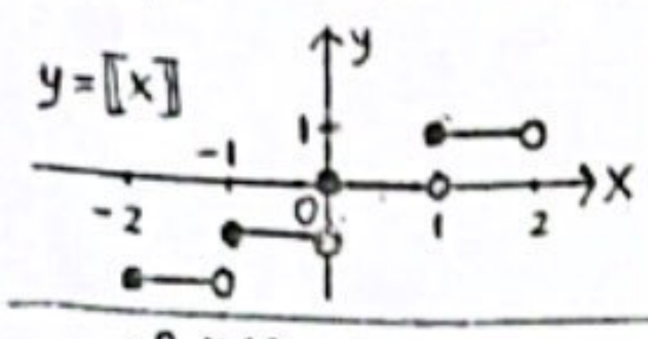
$x>1$	$f(x)$
1,5	0,400000
1,1	0,476190
1,01	0,497512
1,001	0,499750

Tabel di kiri memberikan nilai $f(x)$ saat x dekat 1. Maka dapat diperkirakan $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1} = 0,5$.

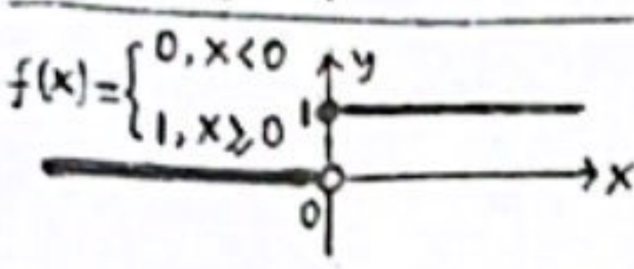


b) Kasus fungsi tak mempunyai limit

1. Terdapat loncatan/lompatan di suatu titik.



$\lim\limits_{x\to 1}[\![x]\!]$ tidak ada, karena $0 \le x < 1$, $[\![x]\!] = 0$ dan $1 \le x < 2$, $[\![x]\!] = 1$.

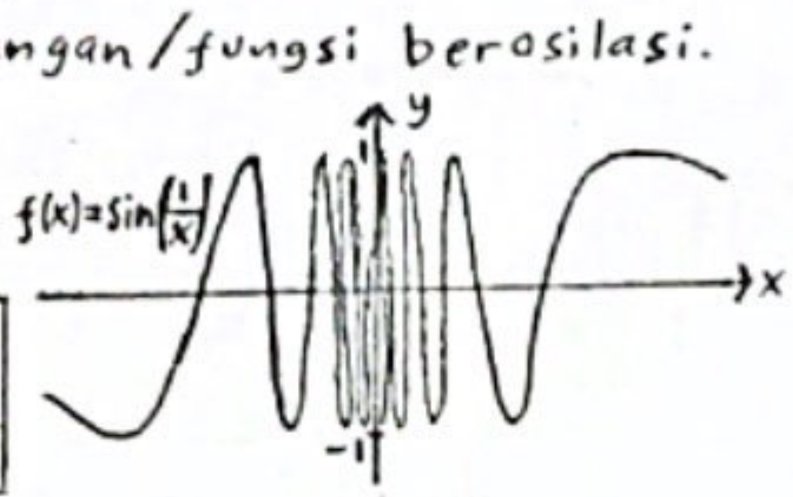


$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ tidak ada, karena $x<0$ mendekati nol, $f(x)=0$ & $x>0$ mendekati nol, $f(x)=1$

2. Terdapat banyak goyangan/fungsi berosilasi.

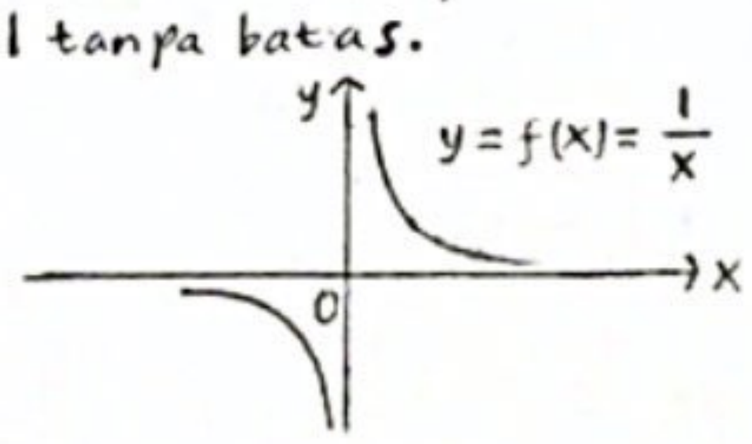
Saat x mendekati nol, nilai $f(x)$ berosilasi diantara -1 dan 1.

x	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{3\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{2}{7\pi}$	$\frac{2}{9\pi}$	$\frac{2}{11\pi}$	$\frac{2}{13\pi}$
$f(x)$	1	-1	1	-1	1	-1	-1



3. Membesar atau mengecil tanpa batas.

Saat x mendekati nol nilai $f(x)$ membesar $(x>0)$ dan mengecil $(x<0)$ tanpa batas serta $f(x)$ tidak tetap di satu angka.



c) Limit sepihak

- $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$
- Limit kiri ditulis: $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$

  Limit kanan ditulis: $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$
- Contoh

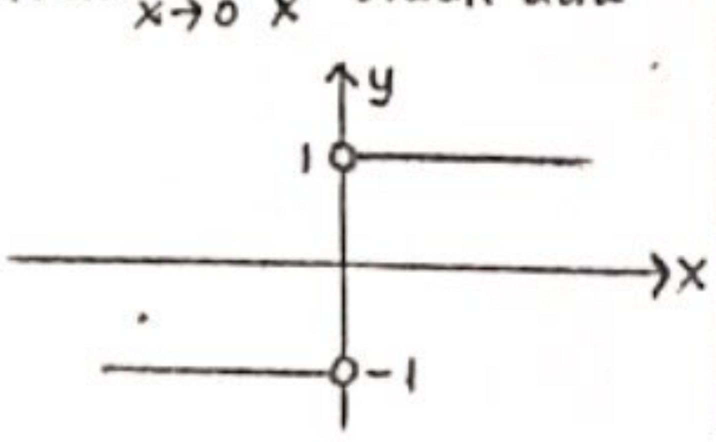
Hitung $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$.

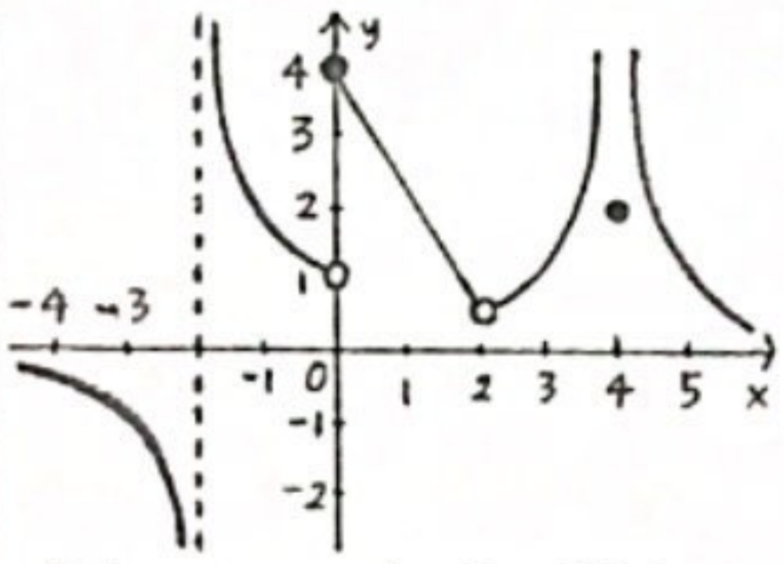
$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases}1 & \text{jika } x>0\\ -1 & \text{jika } x<0\end{cases}$

dengan $D_f = (-\infty, 0)\cup(0,\infty)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$ dan $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$,

maka $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ tidak ada





- $f(-2)$ tidak ada
- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$
- $f(0) = 4$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ tdk ada

- $f(2)$ tidak ada
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{2}$
- $f(4) = 2$
- $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \infty$

2 Definisi yang Tepat dari Limit

a) Definisi

- Misal f suatu fungsi yg terdefinisi di selang buka yg mengandung titik c, kecuali di c sendiri, maka limit dari $f(x)$ saat x mendekati c adalah L ditulis sebagai $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$
- Untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ maka akan terdapat suatu bilangan $\delta > 0$, sehingga

$\boxed{\text{Jika } 0<|x-c|<\delta \text{ maka } |f(x)-L|<\varepsilon}$ $x \neq c$

$|x-c|$ adalah jarak dari x ke c

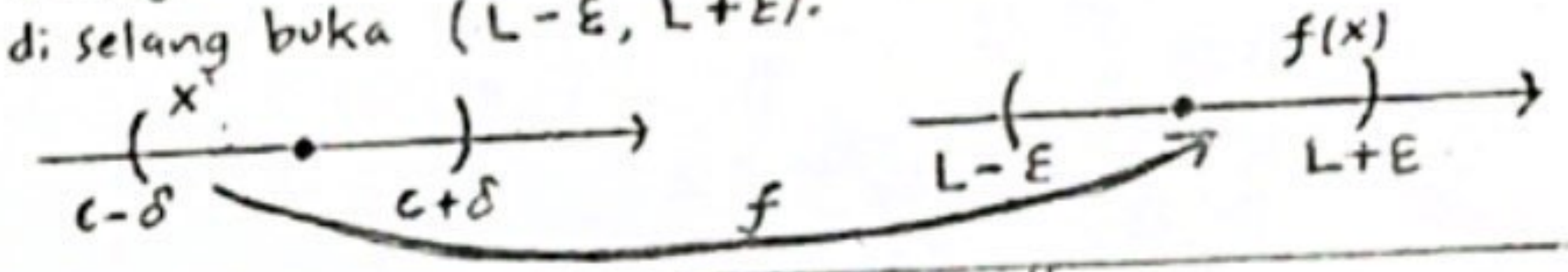
$|f(x)-L|$ adalah jarak dari $f(x)$ ke L

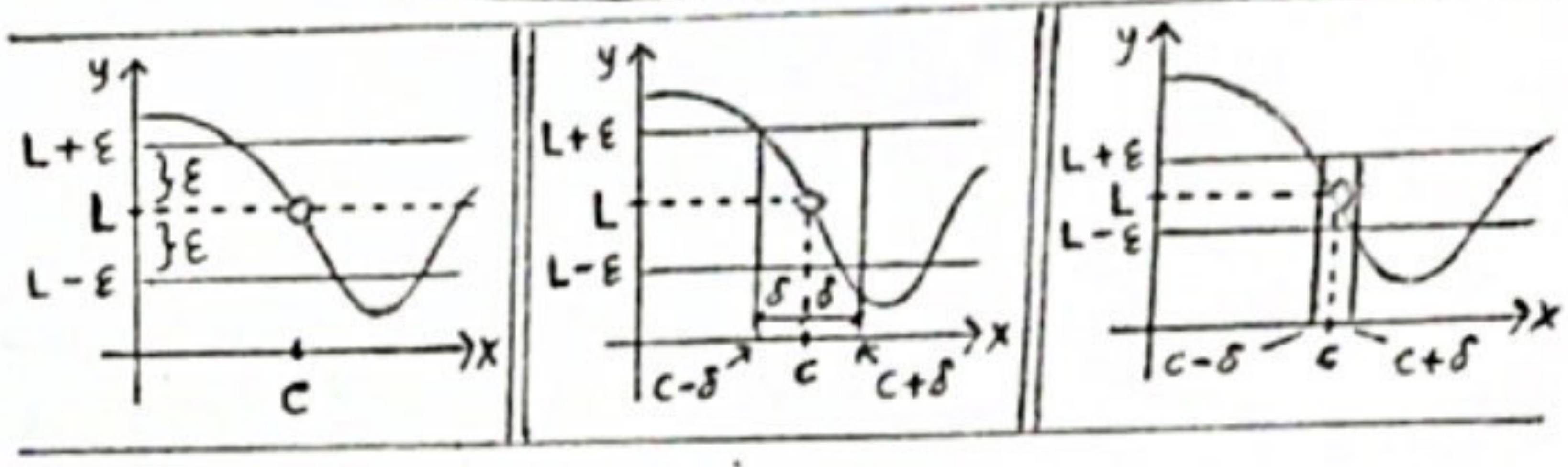
- $|x-c|<\delta$ ekivalen dgn $c-\delta < x < c+\delta$

$0<|x-c|$ adalah benar jika dan hanya jika $x-c\neq 0, x\neq c$

$|f(x)-L|<\varepsilon$ ekivalen dgn $L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$

- Definisi dapat dinyatakan sebagai: Untuk setiap $\varepsilon>0$ (tdk masalah ε sangat kecil) akan bisa ditentukan $\delta>0$, dgn demikian jika x berada di selang buka $(c-\delta, c+\delta)$ dan $x\neq c$, maka $f(x)$ berada di selang buka $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.





b) Menentukan δ secara aljabar untuk ε yang diberikan

Contoh:

Tentukan $\delta>0$ agar jika $0<|x-5|<\delta$ maka $|\sqrt{x-1}-2|<1$.

- $|\sqrt{x-1}-2|<1 \Leftrightarrow -1<\sqrt{x-1}-2<1$

$1<\sqrt{x-1}<3$

$1<x-1<9$

$2<x<10$

$|x-5|<\delta \Leftrightarrow -\delta<x-5<\delta$

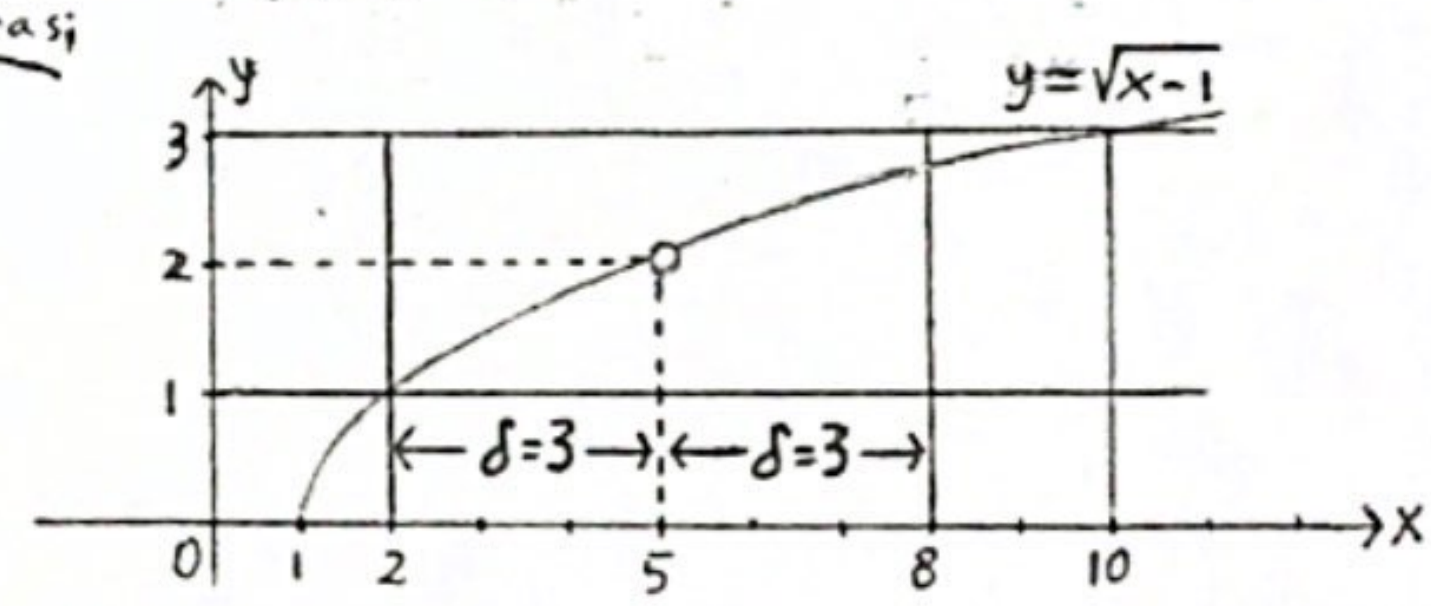
$5-\delta<x<5+\delta$

- Maka $5-\delta_1 = 2$ diperoleh $\delta_1 = 5-2 = 3$

$5+\delta_2 = 10$ diperoleh $\delta_2 = 10-5 = 5$

Pilih $\delta = \min\{3,5\} = 3$.

- Ilustrasi



c) Pembuktian limit menggunakan δ dan ε

Contoh:

Buktikan $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-7) = 1$

Analisis Awal (memilih/mencari nilai δ)

Jika $0<|x-2|<\delta$ maka $|(x^2+2x-7)-1|<\varepsilon$

$|(x^2+2x-7)-1|<\varepsilon \Leftrightarrow |x^2+2x-8|<\varepsilon \Leftrightarrow |x+4|\,|x-2|<\varepsilon$

Faktor $|x-2|$ bisa dibuat sekecil mungkin, yaitu

$|x-2|<1 \Rightarrow -1<x-2<1 \Rightarrow 1<x<3 \Rightarrow 5<x+4<7$

$\Rightarrow |x+4|<7$

sehingga $|x+4|\,|x-2|<\varepsilon \Rightarrow 7|x-2|<\varepsilon \Rightarrow |x-2|<\varepsilon/7$.

Pilih $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\} = \varepsilon/7$

Bukti Formal

Diberikan $\varepsilon>0$, pilih $\delta\le\varepsilon/7$ maka $0<|x-2|<\delta$ mengimplikasikan bahwa

$|(x^2+2x-7)-1| = |x^2+2x-8| = |x+4|\,|x-2| < 7(\varepsilon/7) = \varepsilon$.

Jadi, $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-7)=1$ berdasarkan definisi limit.

3 Teorema Limit

a) Teorema limit utama

Misal n bilangan bulat positif, k konstanta, f dan g fungsi yang memiliki limit di c. Maka

1. $\lim_{x\to c} k = k$
2. $\lim_{x\to c} x = c$
3. $\lim_{x\to c} k\cdot f(x) = k\cdot \lim_{x\to c} f(x)$
4. $\lim_{x\to c} [f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$
5. $\lim_{x\to c} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x)\cdot \lim_{x\to c} g(x)$
6. $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$ jika $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$
7. $\lim_{x\to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$
8. $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$; dgn $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ saat n genap

b) Teorema substitusi

Jika f adalah fungsi polinom atau fungsi rasional maka $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ dgn syarat $f(c)$ terdefinisi

Contoh

$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = ?$

Limit tdk bisa dicari dgn cara substitusi karena $f(9)$ tidak terdefinisi. Penggunaan limit rasional juga tdk bisa digunakan karena limit penyebut bernilai 0. Lakukan faktorisasi thd penyebut:

$\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$ maka

$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}$

c) Menghilangkan penyebut nol secara aljabar

Jika $f(x) = g(x)$, $x \neq c$ dan jika $\lim_{x\to c} g(x)$ ada maka $\lim_{x\to c} f(x)$ ada, sehingga $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$.

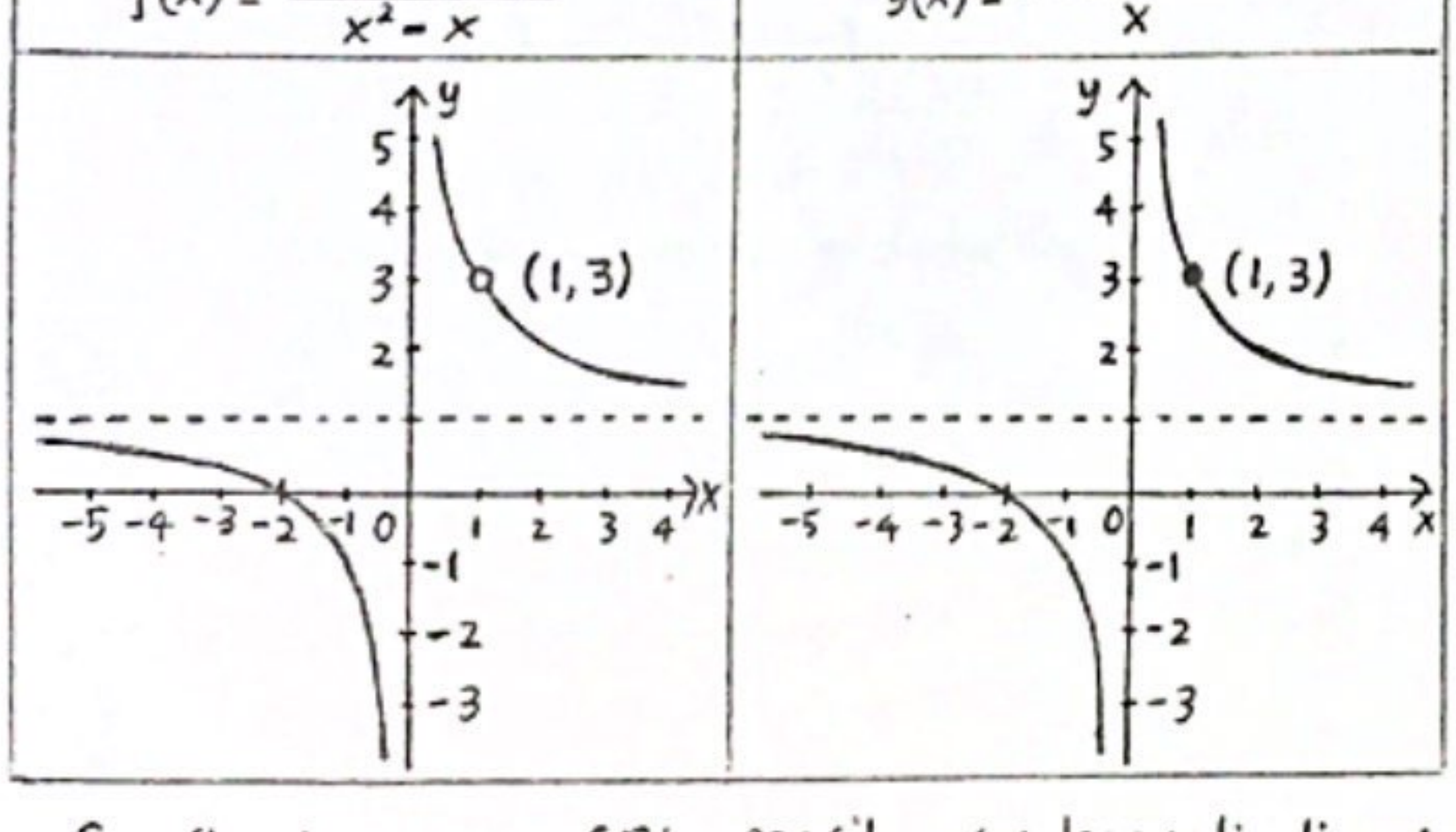
Contoh

Hitung $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$.

$\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)} = \frac{x+2}{x}$ jika $x \neq 1$

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$

$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$	$g(x) = \frac{x+2}{x}$



Grafik $f(x)$ sama spt grafik $g(x)$ kecuali di $x=1$, dimana fungsi f tidak terdefinisi. Kedua fungsi memiliki limit yang sama saat x mendekati 1.

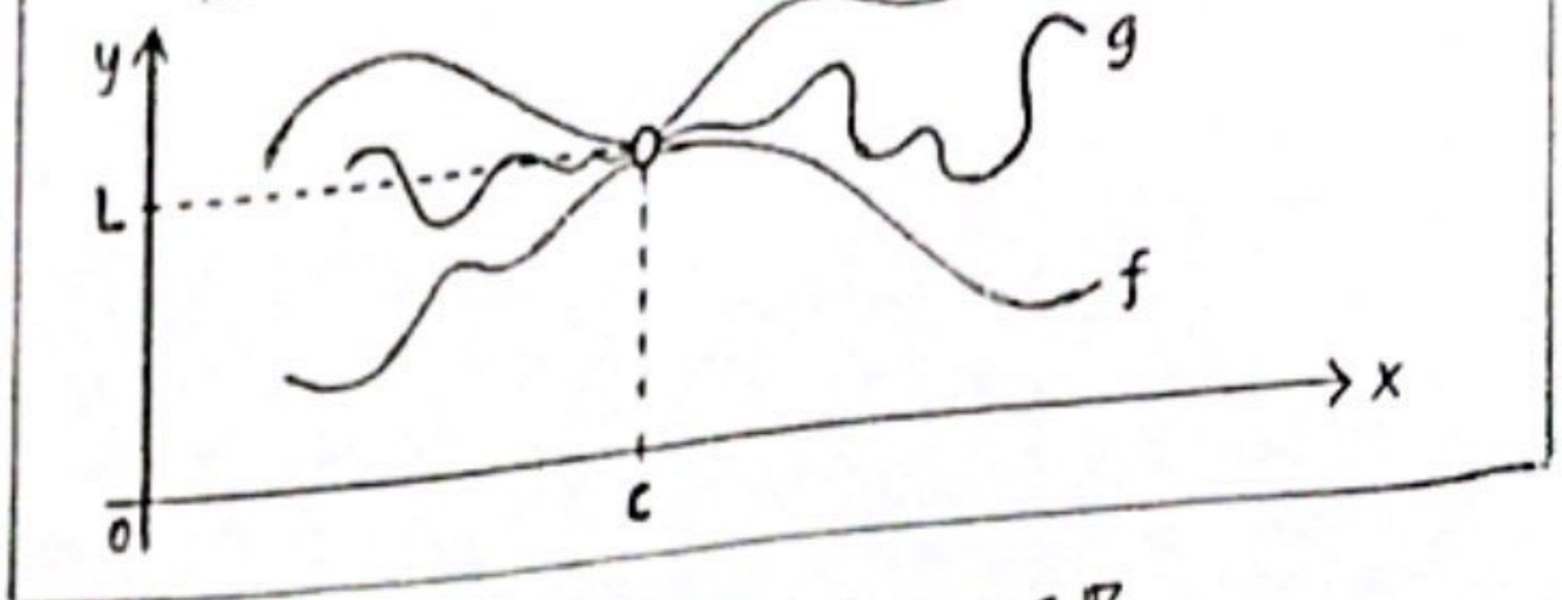
d) Limit nilai mutlak

- Jika $\lim_{x\to c} f(x) = L$, maka $\lim_{x\to c} |f(x)| = |L|$
- Jika $\lim_{x\to c} |f(x)| = 0$, maka $\lim_{x\to c} f(x) = 0$

e) Teorema apit / The squeeze (sandwich) theorem

Teorema apit/The squeeze (sandwich) theorem yg memenuhi:

Misal f, g, dan h fungsi-fungsi yg memenuhi $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk setiap x, dekat c, kecuali di c.
Jika $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$, maka $\lim_{x\to c} g(x) = L$



Contoh:

1. Jika $2x \leq g(x) \leq x^4 - x^2 + 2$ dgn $x \in \mathbb{R}$.
   Tentukan $\lim_{x\to 1} g(x)$.
   $\lim_{x\to 1} 2x = 2(1) = 2$ dan $\lim_{x\to 1} x^4 - x^2 + 2 = 1-1+2 = 2$
   maka berdasarkan Teorema Apit $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$.
2. Tunjukkan $\lim_{x\to 0} x^2 . \sin \frac{1}{x} = 0$
   - Kita tidak dapat menggunakan $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ karena $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ tidak ada (fungsi berosilasi)
   - Gunakan T. Apit, dgn lebih dahulu mencari fungsi² pengapit $f(x)$ dan $h(x)$ mendekati nol. Karena fungsi sinus diantara -1 dan 1, maka
     $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$
     Semua pertidaksamaan dikali x^2 (ingat $x^2 \geq 0$) diperoleh $-x^2 \leq x^2 . \sin\frac{1}{x} \leq x^2$.
   - $\lim_{x\to 0} (-x^2) = 0$ dan $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, maka berdasarkan Teorema Apit $\lim_{x\to 0} x^2 . \sin\frac{1}{x} = 0$.

$\boxed{\text{INGAT! } 0 \leq \sin^2 x \leq 1}$

4 Limit Fungsi Trigonometri

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\theta}{\sin\theta} = 1$$

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$$

Contoh:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 0\cdot 1 = 0$.
2. $\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\frac{\cos\theta-1}{\theta}}{\frac{\sin\theta}{\theta}} = \frac{\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta-1}{\theta}}{\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}} = \frac{0}{1} = 0$.
3. $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+2} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}$
4. $\lim_{t\to 0} \frac{2t}{\tan t} = 2\cdot \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t/\cos t} = 2\cdot \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} \cdot \lim_{t\to 0} \cos t = 2\cdot 1\cdot 1 = 2$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0 - \frac{1}{2}(1) = -\frac{1}{2}$
6. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{2(x-\frac{\pi}{2})} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{(x-\frac{\pi}{2})\to 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\frac{\pi}{2}-x} = -\frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}$.
*7. $\lim_{x\to\infty} x\cdot \sin\frac{2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}} = 2\cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}$
   Misal $\theta = \frac{2}{x}$, saat $x \to \infty$ maka $\theta \to 0^+$ sehingga
   $2\cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}} = 2\cdot \lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = 2\cdot 1 = 2$
   Jadi, $\lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{2}{x} = 2$
   Catatan: soal ini gagal menggunakan Teorema Apit

[5] Limit di Tak Hingga dan Limit Tak Hingga

a) Limit di tak hingga

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ dan $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$
- Grafik dari suatu fungsi dari limit di atas menghasilkan asimtot datar $y=L$.
- Jika $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ dan $\lim_{x\to-\infty} f(x)=M$ maka grafik memiliki 2 asimtot datar, $y=L$ & $y=M$.
- Jika $r>0$ bilangan rasional maka $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^r}=0$

  Jika $r>0$ dan x^r terdefinisi saat $x<0$ maka $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^r}=\infty$
- Contoh: Tentukan limit dan asimtot datar jika ada

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}}$
$=\frac{5+0-0}{3+0}$
$=\frac{5}{3}$

Asimtot datar $y=\frac{5}{3}$.

2. $\lim_{x\to-\infty}\frac{11x+2}{2x^3-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{11x+2}{2x^3-1}\cdot\frac{1/x^3}{1/x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}}=\frac{0+0}{2-0}=0$

$y=0$ adalah asimtot datar.

3. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{3-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{3-x}\cdot\frac{1/x}{1/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\frac{3}{x}-1}=-\infty$

Karena saat $x\to\infty$, $x+1\to\infty$ dan $3/x-1\to-1$.
Tidak ada asimtot datar.

*4. $f(x)=\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$

$\boxed{\text{INGAT: } \sqrt{x^2}=|x| \text{ dan } |x|=\begin{cases}x, & x>0\\ -x, & x<0\end{cases}}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}\cdot\frac{1/x}{1/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x-2)/x}{\sqrt{2x^2+1}/\sqrt{x^2}}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-2/x}{\sqrt{(2x^2+1)/x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-2/x}{\sqrt{2+1/x^2}}$
$=\frac{3-0}{\sqrt{2+0}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}\cdot\frac{1/x}{1/x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3x-2}{-x}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2}}}$
$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3+2/x}{\sqrt{(2x^2+1)/x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3+2/x}{\sqrt{2+1/x^2}}$
$=\frac{-3+0}{\sqrt{2+0}}=-\frac{3}{\sqrt{2}}$

Jadi, asimtot datar di $y=\frac{3}{\sqrt{2}}$ dan $y=-\frac{3}{\sqrt{2}}$

5. $\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+16})=\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+16})\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+16}}{x+\sqrt{x^2+16}}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2+16)}{x+\sqrt{x^2+16}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-16}{x+\sqrt{x^2+16}}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{-16}{x+\sqrt{x^2+16}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-16/x}{1+\sqrt{(x^2+16)/x^2}}=\frac{0}{0+\sqrt{1+0}}=0$

$y=0$ adalah asimtot datar

*6. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x+\sqrt{x}}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\sin x+\sqrt{x})/x}{(x+\sin x)/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{\sin x}{x}}=\frac{1+0+0}{1+0}=1$

Catatan: $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ diperoleh dari Teorema Apit
$-1\le\sin x\le 1\Leftrightarrow-\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}$
$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ dan $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$ maka
berdasarkan Teorema Apit $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

Asimtot datar $y=0$.

7. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2}{|x|^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3-2)/x^3}{(x^3+1)/x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-2/x^3}{1+1/x^3}=\frac{1-0}{1+0}=1$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2}{|x|^3+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2}{(-x)^3+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^3+2)/x^3}{(-x^3+1)/x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-2/x^3}{-1+1/x^3}=\frac{1-0}{-1+0}=-1$

$y=1$ dan $y=-1$ sebagai asimtot datar

b) Limit tak hingga

- $\lim_{x\to c^+} f(x)=\pm\infty$ atau $\lim_{x\to c^-} f(x)=\pm\infty$
- Dihasilkan asimtot tegak $x=c$ dari grafik $f(x)$
- Misal $f(x)=\frac{A(x)}{C(x)}$, kemungkinan asimtot tegak saat $f(x)$ tidak terdefinisi atau $C(x)=0$.
- Contoh: Tentukan asimtot tegak jika ada

1. $\lim_{x\to7}\frac{1}{(x-7)^2}=+\infty$. Asimtot tegak di $x=7$.
2. $\lim_{x\to0}\frac{2}{x^{2/5}}=\lim_{x\to0}\frac{2}{(x^{1/5})^2}=+\infty$. Asimtot tegak di $x=0$.
3. $f(x)=\frac{3}{x^{1/5}}$. Kemungkinan asimtot tegak di $x=0$.

$\lim_{x\to0^+}\frac{3}{x^{1/5}}=+\infty$, karena $x^{1/5}\to0^+$ saat $x\to0^+$
$\lim_{x\to0^-}\frac{3}{x^{1/5}}=-\infty$, karena $x^{1/5}\to0^-$ saat $x\to0^-$
Jadi, $x=0$ adalah asimtot tegak.

4. $g(x)=\tan 2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$

Kemungkinan asimtot tegak di $x=\pm\frac{\pi}{4},\pm\frac{3\pi}{4},\pm\frac{5\pi}{4},\dots$

$\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-}\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=+\infty$, karena $\sin 2x\to1$ & $\cos 2x\to0^+$ saat $x\to(\pi/4)^-$

$\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=-\infty$, karena $\sin 2x\to1$ dan $\cos 2x\to0^-$ saat $x\to(\pi/4)^+$

Berlaku untuk $x=\pm\frac{3\pi}{4},\pm\frac{5\pi}{4},\dots=\pm(2N-1)\cdot\frac{\pi}{4}$

Jadi, asimtot tegak di $x=\pm(2N-1)\frac{\pi}{4}$.

5. $\lim_{\theta\to0^+}(2-\cot\theta)=\lim_{\theta\to0^+}2-\lim_{\theta\to0^+}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=2-\infty=-\infty$

Karena $\cos\theta\to1$ dan $\sin\theta\to0^+$ saat $\theta\to0^+$.

$\lim_{\theta\to0^-}(2-\cot\theta)=\lim_{\theta\to0^-}2-\lim_{\theta\to0^-}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=2-(-\infty)=+\infty$

Karena $\cos\theta\to1$ dan $\sin\theta\to0^-$ saat $\theta\to0^-$.
Jadi, $\theta=0$ adalah asimtot tegak.

Catatan
$\lim_{\theta\to0}(2-\cot\theta)$ tdk ada, karena $\lim_{\theta\to0^+}(2-\cot\theta)\neq\lim_{\theta\to0^-}(2-\cot\theta)$

6. $p(x)=\frac{2017}{2x^2+7}$. Karena $2x^2+7>0$ untuk $x\in\mathbb{R}$ maka fungsi P tidak ada asimtot tegak.

*7. $r(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-1}$. Calon asimtot tegak di $x=1$ & $x=-1$.

→ $\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1^-}\frac{x-2}{x-1}=+\infty$

$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{x-2}{x-1}=-\infty$

→ $\lim_{x\to-1^+}r(x)=\lim_{x\to-1^-}r(x)=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x-1}=\frac{-1-2}{-1-1}=\frac{3}{2}$

Jadi, asimtot tegak di $x=1$.

*8. $w(x)=\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2}$. $x=0$ adalah calon asimtot tegak

$\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0^-}\frac{1-\cos x}{x}=1\cdot0=0$

$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x}=1.0=0$

Jadi, tidak ada asimtot tegak.

9. Tentukan limit $g(x)$ jika $\lim_{x\to1}\frac{3x^2+1}{g(x)}=+\infty$.

Jawab
$\lim_{x\to1}\frac{3x^2+1}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to1}3x+1}{\lim_{x\to1}g(x)}=\frac{3(1)+1}{\lim_{x\to1}g(x)}=\frac{4}{\lim_{x\to1}g(x)}$

Agar $\frac{4}{\lim_{x\to1}g(x)}=+\infty$ maka $\lim_{x\to1}g(x)=0$.

·) datar: $f(x)=L$
·) tegak: $f(x)=\pm\infty$

• = fungsi

6 Kekontinuan Fungsi

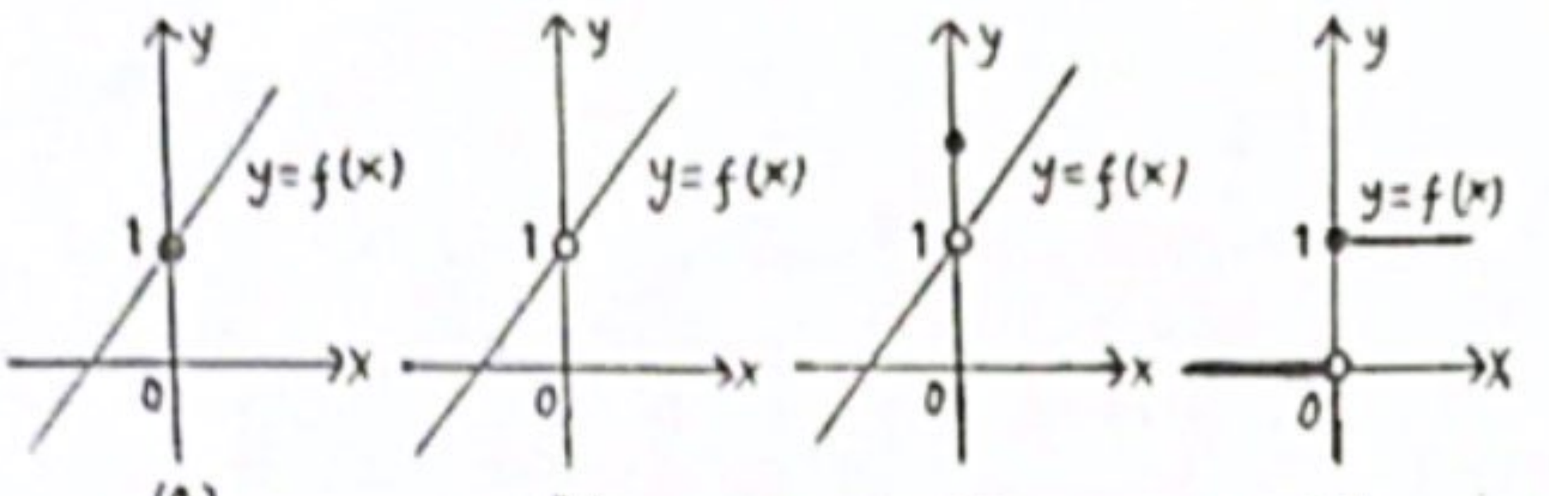
a) Kekontinuan di suatu titik

* Definisi

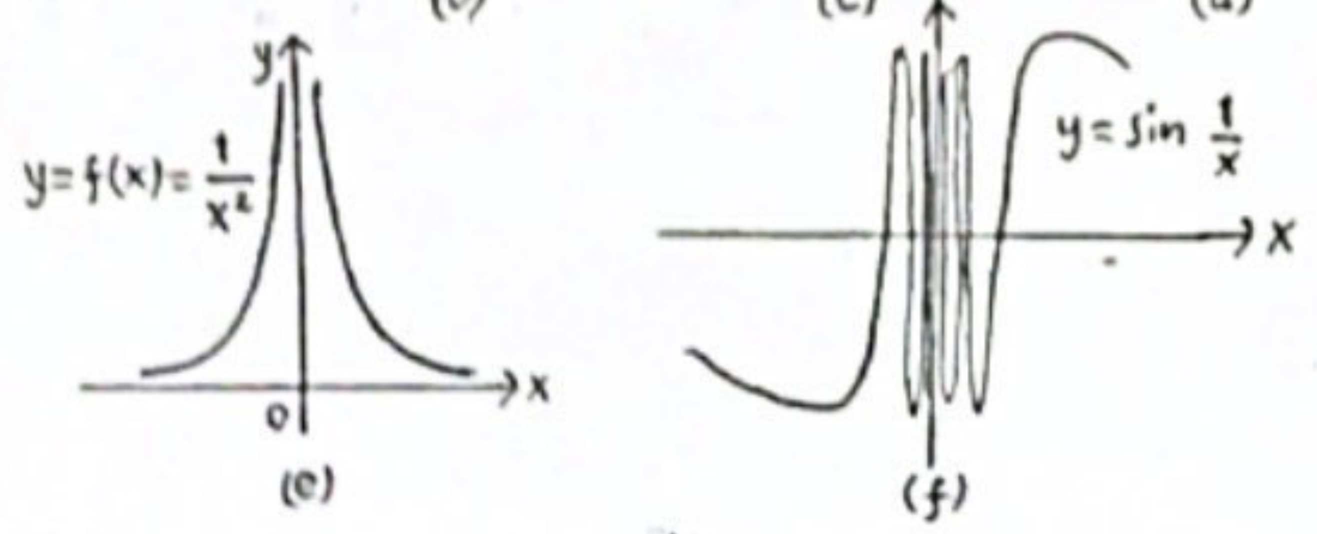
> Misal f fungsi yg terdefinisi di selang buka yg terdapat titik c. Fungsi f kontinu di c jika $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Definisi ini memerlukan 3 hal, yaitu:

1. $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ ada
2. $f(c)$ ada
3. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$



(a) (b) (c) (d)



(e) (f)

Fungsi (a) kontinu di $x=0$

Fungsi (b) – (f) tidak kontinu/diskontinu di $x=0$

* Diskontinu terhapuskan

Fungsi bisa terdefinisi atau didefinisikan ulang di c sehingga fungsi menjadi kontinu.

Contoh

1. Grafik (b) dan (c) di atas
2. Grafik di halaman $\boxed{2/4}$, catatan $\boxed{3}$ c)
3. $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x-1}$ tidak terdefinisi di $x=1$, tapi

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1} (x^2+1)(x+1)$$
$$= (1^2+1)(1+1)$$
$$= 4$$

maka $f(1) = 4$, sehingga fungsi kontinu di $x=1$.

* Diskontinu tak terhapuskan

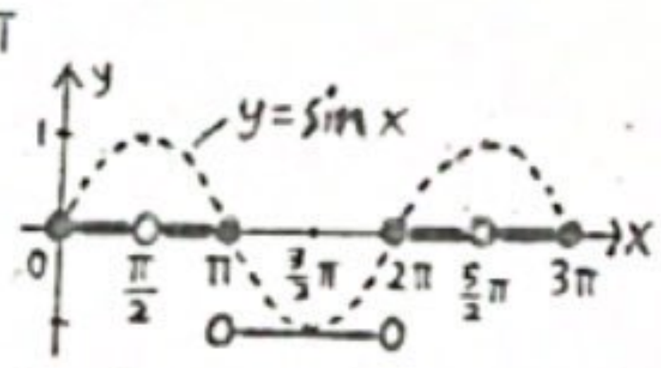
Fungsi tidak bisa didefinisikan ulang di c.

Contoh:

1. Grafik (d) – (f) di atas
2. $f(x) = [\![\sin x]\!]$ di $c = \pi$

$\lim\limits_{x\to \pi^-} [\![\sin x]\!] = \lim\limits_{x\to\pi^-} (0) = 0$ &

$\lim\limits_{x\to \pi^+} [\![\sin x]\!] = \lim\limits_{x\to\pi^+} (-1) = -1$



maka $\lim\limits_{x\to\pi} [\![\sin x]\!]$ tidak ada, shg diskontinu tak terhapuskan

3. $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x \le 2 \\ x^2, & x > 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 2^-} (2x-3) = 2(2)-3 = 1$ & $\lim\limits_{x\to 2^+} x^2 = (2)^2 = 4$

Karena $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \ne \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ maka $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ tdk ada shg diskontinu tak terhapuskan.

@pandugus1550

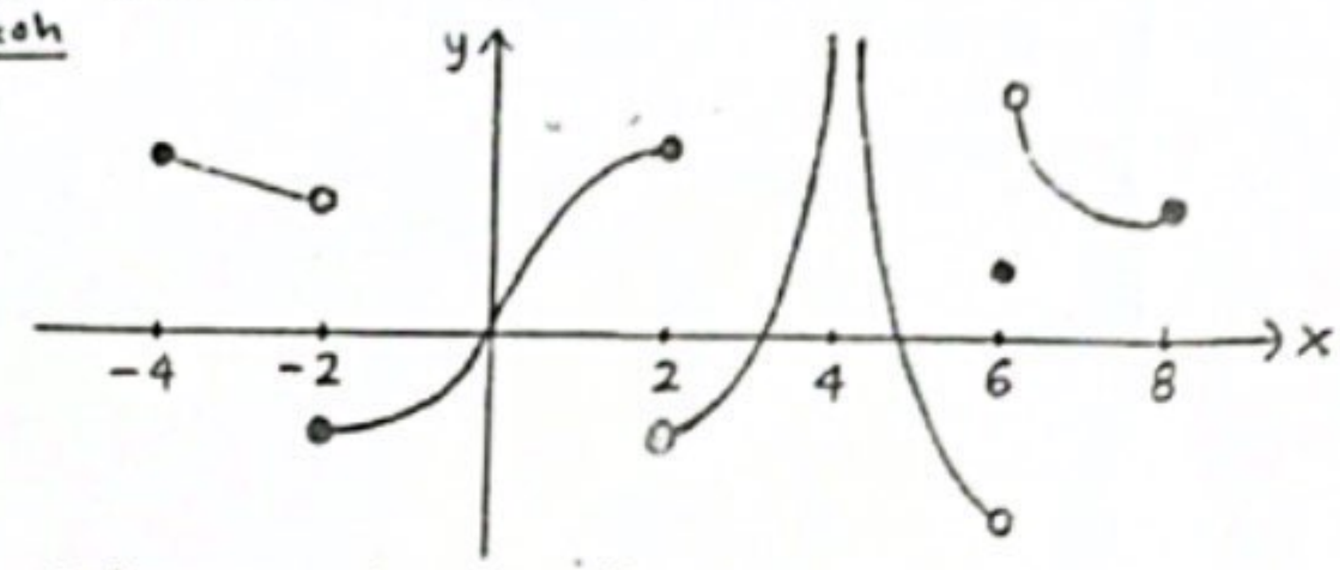
b) Fungsi-fungsi kontinu

1. Fungsi polinom/sukubanyak
   Kontinu di semua bilangan real ($x \in \mathbb{R}$)
2. Fungsi rasional/pecahan
   Kontinu di $x \in \mathbb{R}$, kecuali penyebut bernilai nol.
3. Fungsi nilai mutlak
   Kontinu di $x \in \mathbb{R}$
4. Fungsi akar ke-n, $\sqrt[n]{f(x)}$
   - n ganjil : kontinu di $x \in \mathbb{R}$
   - n genap : kontinu di bilangan bulat positif
5. Kekontinuan operasi fungsi
   Jika f dan g kontinu di c & k konstanta, begitu juga kf, $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ ($g(c) \ne 0$), f^n, dan $\sqrt[n]{f}$ (dgn syarat $f(c) > 0$ jika n genap)
6. Fungsi trigonometri
   - Fungsi sin dan cos kontinu di $x \in \mathbb{R}$
   - Fungsi tan, sec, dan csc kontinu di domainnya.
7. Fungsi komposisi
   Jika g kontinu di c dan f kontinu di $g(c)$, maka fungsi komposisi $f \circ g$ kontinu di c.

c) Kekontinuan di suatu interval

1. Kontinu kanan di a jika $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
2. Kontinu kiri di b jika $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$
3. Fungsi f kontinu di selang tutup $[a,b]$ jika fungsi f kontinu di tiap titik pada (a,b), kontinu kiri di b, dan kontinu kanan di a.

Contoh



- Fungsi kontinu kanan di $x=-4$ dan $x=-2$.
- Fungsi kontinu kiri di $x=2$ dan $x=8$.
- Fungsi kontinu di selang $[-4,-2)$, $[-2,2]$, $(2,4)$, $(4,6)$ & $(6,8]$.

d) Teorema Nilai Antara (TNA)

> Misal f fungsi kontinu & terdefinisi pada $[a,b]$ dan misal W suatu bilangan diantara $f(a)$ dan $f(b)$ dimana $f(a) \ne f(b)$. Maka akan terdapat setidaknya satu bilangan c pada (a,b) dimana $f(c) = W$.

Akibatnya untuk mencari lokasi akar dari persamaan.

Jika f kontinu pada $[a,b]$ dan $f(a)\cdot f(b) < 0$, maka terdapat c pada (a,b) dimana $f(c) = 0$.

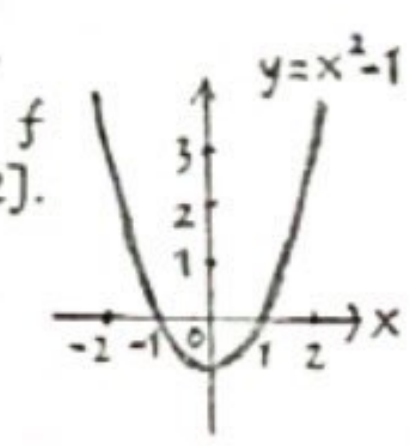
$f(c)=0$ artinya kurva f memotong sumbu-x di c.

Contoh:

Tunjukkan persamaan $x^2-1=0$ memiliki solusi pada selang $[0,2]$.

Jwb

- Misal $f(x) = x^2-1$.
  $f(x)$ adalah fungsi polinom sehingga f kontinu di $[0,2]$ & terdefinisi di $[0,2]$.



- $f(0) = 0-1 = -1 < 0$
  $f(2) = 2^2-1 = 3 > 0$
- Karena f kontinu di $[0,2]$ serta $f(0) < 0$ dan $f(2) > 0$, maka berdasarkan Teorema Nilai Antara terdapat minimal satu titik c di $(0,2)$.
  Sehingga $f(c) = 0$.
  Dimana titik c adalah akar/solusi dari persamaan $x^2-1=0$.