FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

UJIAN AKHIR SEMESTER
MA1101 KALKULUS 1A
SENIN, 13 DESEMBER 2010
WAKTU 09:15 – 11:05 (110 MENIT)

Dilarang menggunakan kalkulator, handphone dan sejenisnya. Ujian ini terdiri dari 8 soal bagian A dan 3 soal bagian B. Setiap soal pada bagian A bernilai maksimum 3, sedangkan setiap soal pada bagian B bernilai maksimum 10. Selesaikanlah soal-soal tersebut pada tempat yang tersedia.

Bagian A

1. Hitunglah $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}$. Jelaskan jawaban Anda.
2. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = 4x - x^2$ di titik $(2, 4)$.
3. Tentukan konstanta a dan b agar fungsi $f(x) = \begin{cases} \sin x & , x < \pi \\ ax + b & , x \geq \pi \end{cases}$ terdiferensialkan di $x = \pi$.
4. Tentukan y' jika $y = \ln(x^2 + x + 1)$.
5. Tentukan anti turunan dari $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$ yang grafiknya melalui titik $\left(0, \frac{3}{2}\right)$.
6. Hitunglah $\sin\left(2\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$.
7. Tentukan selang kemonotonan grafik fungsi $g(x) = e^{x^2-1}$.
8. Tentukan solusi persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{y}}$ dengan $y(1) = 4$.

Bagian B

1. Selebaran iklan harus memuat 50 inci persegi bahan cetakan. Margin kiri dan kanan selebaran tersebut masing-masing 1 inci, sedangkan margin atas dan bawahnya, masing-masing 2 inci. Tentukan ukuran selebaran tersebut yang menggunakan kertas sesedikit mungkin.
2. Tentukan pusat massa lamina homogen yang dibatasi oleh kurva $y = 9 - x^2$ dan sumbu x.
3. Bu Yayuk membuat puding dengan cara memanaskan adonan hingga mencapai 105^o Celcius. Kemudian adonan tersebut diletakkan dalam ruang bertemperatur konstan 25^o Celcius. Setelah 20 menit temperatur puding turun menjadi 65^o Celcius. Puding tersebut akan siap saji jika temperaturnya mencapai 35^o Celcius. Tentukan waktu yang diperlukan agar puding tersebut siap saji. (*Menurut Hukum Pendinginan Newton, laju perubahan temperatur suatu benda, sebanding dengan perbedaan temperatur benda tersebut dengan temperatur lingkungannya.*)

No
Date

Pembahasan Soal Ujian Akhir Semester MA 1101 Kalkulus 1A Senin, 13 Desember 2010 Waktu 09.15 - 11.05 (110 Menit)

Dilarang menggunakan kalkulator, handphone, dan sejenisnya. Ujian ini terdiri dari 8 soal bagian A dan 3 soal bagian B. Setiap soal pada bagian A bernilai maksimum 3, sedangkan setiap soal pada bagian B bernilai maksimum 10. Selesaikanlah soal-soal tersebut pada tempat yang tersedia.

Bagian A

~~1. Hitunglah~~ $\cancel{\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}}$ ~~jelaskan jawaban anda.~~

jawab

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}$$

Gunakan teorema apit

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \le \lim_{x\to\infty} g(x) \le \lim_{x\to\infty} h(x) = L$$

$$-1 \le \cos x \le 1$$

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\cos x}{x} \le \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

~~maka, berdasarkan teorema apit~~ $\frac{\cos x}{x} = 0$

jadi, $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

2. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = 4x - x^2$ di titik $(2,4)$

jawab

$y = 4x - x^2$

$y' = 4 - 2x$

$m = y'(2,4) = 4 - 2(2) = 0$

Persamaan garis singgung di titik $(2,4)$ dan $m = 0$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 4 = 0(x - 2)$

$y = 4$

Jadi, persamaan garis singgung kurva adalah $y = 4$

No
Date

~~3. Tentukan konstanta a dan b agar fungsi~~ $f(x) = \begin{cases} \sin x & , x < \pi \\ ax+b & , x \geq \pi \end{cases}$ ~~terdiferensialkan di~~ $x = \pi$

jawab

Jika fungsi f punya turunan di $x = \pi$, maka fungsi f kontinu di $x = \pi$

Syarat agar fungsi f kontinu di $x = \pi$

$\lim_{x \to 1} f(x) = f(\pi)$ atau $\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^+} f(x) = f(\pi)$

Tinjau limit kiri

$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} \sin x = \sin \pi = 0$

Tinjau limit kanan

$\lim_{x \to \pi^+} f(x) = \lim_{x \to \pi^+} ax+b = \pi a + b$

Tinjau fungsi

$f(x) = ax+b$ maka $f(\pi) = \pi a + b$ sehingga $\boxed{\pi a + b = 0}$ persamaan I

Syarat agar fungsi f punya turunan di $x = 1$, $f'_+(1) = f'_-(1)$

Tinjau turunan kanan

$$f'_-(\pi) = \lim_{x \to \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi}$$

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{(ax+b) - (a(\pi)+b)}{x - \pi}$$

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{ax+b - \pi a - b}{x - \pi}$$

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{a\cancel{(x-\pi)}}{\cancel{x-\pi}}$$

$$\lim_{x \to \pi^-} a = a$$

Tinjau turunan

$$f'_+(\pi) = \lim_{x \to \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi}$$

$$\lim_{x \to \pi^+} \frac{\sin x - (a(\pi)+b)}{x - \pi}$$

$$\lim_{x \to \pi^+} \frac{\sin x - 0}{x - \pi}$$

$$\lim_{x \to \pi^+} \frac{-\sin(x-\pi)}{x - \pi}, \quad \sin(x-\pi) = -\sin x$$

$$\lim_{x \to \pi^+} (-1) = -1$$

sehingga $a = -1$, substitusi a ke persamaan I

$\pi a + b = 0$

$\pi(-1) + b = 0$

$-\pi + b = 0$

$b = \pi$

jadi, fungsi punya turunan di $x = \pi$ jika $a = -1$ dan $b = \pi$

1. Tentukan y' jika $y = \ln(x^2+x+1)$

jawab

$y = \ln(x^2+x+1)$

$$y' = \frac{1}{x^2+x+1} \cdot \frac{d}{dx}(x^2+x+1)$$

$$y' = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

No

Date

5. Tentukan anti turunan dari $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{2x^2+1}}$ yang grafiknya melalui titik $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

jawab

$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{2x^2+1}}$

$y = \int f(x)\,dx$

$y = \int \frac{3x}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx$

$y = \frac{3}{2}\sqrt{2x^2+1} + C$

Cari konstanta C dari titik $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

$\cancel{\frac{3}{2}} = \cancel{\frac{3}{2}}\sqrt{2(0)^2+1} + C$

$C = 0$

sehingga

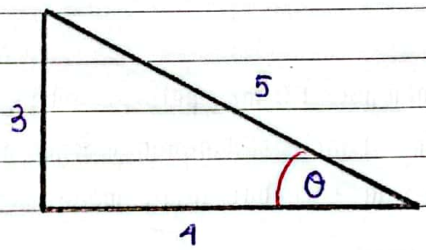
$f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{2x^2+1} + 0$

6. Hitunglah $\sin\left(2\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$

jawab

misal $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$

maka $\cos\theta = \frac{4}{5}$; $0 \le \theta \le \pi$



$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\sin\left(2\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right) = 2\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$

$\sin\left(2\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right) = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$

$\sin\left(2\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right) = \frac{24}{25}$

7. Tentukan selang kemonotonan grafik fungsi $g(x) = e^{x^2-1}$

jawab

Daerah asal dari $g(x) = e^{x^2-1}$ adalah $(-\infty, \infty)$

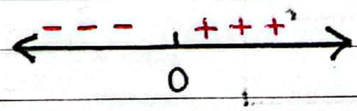
$g(x) = e^{x^2-1}$

$g'(x) = e^{x^2-1}\frac{d}{dx}(x^2-1)$

$g'(x) = e^{x^2-1} \cdot 2x$

Titik stationer $g'(c) = 0$

$e^{x^2-1} \cdot 2x = 0$, maka $x = 0$ (dimana $e^{x^2-1} > 0$).



jadi, selang kemonotonan $g(x)$ adalah monoton naik $(-\infty, 0)$ dan monoton turun $(0, \infty)$

No

Date

8. Tentukan solusi persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{y}}$ dengan $y(1) = 4$

jawab

$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{y}}$

$\sqrt{y}\, dy = \sqrt{x}\, dx$

$\int \sqrt{y}\, dy = \int \sqrt{x}\, dx$

$\frac{2}{3} y^{3/2} = \frac{2}{3} x^{3/2} + C_1$

$y^{3/2} = x^{3/2} + C$ dengan $C = \frac{3}{2} C_1$

maka $y = (x^{3/2} + C)^{2/3}$

Cari konstanta C menggunakan $y(1) = 4$

$4 = ((1)^{3/2} + C)$

$1 + C = (4)^{3/2}$

$1 + C = (2^2)^{3/2}$

$1 + C = 8$

$C = 8 - 1 = 7$

jadi, solusi persamaan diferensial adalah $y = (x^{3/2} + 7)^{2/3}$

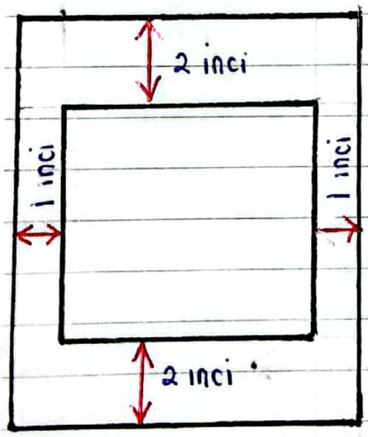
Bagian B

1. Selebaran iklan harus memuat 50 inci persegi bahan cetakan. Margin kiri dan kanan selebaran tersebut masing-masing 1 inci, sedangkan margin atas dan bawahnya, masing-masing 2 inci. Tentukan ukuran selebaran tersebut yang menggunakan kertas sesedikit mungkin

jawab

ketentuan x = lebar

y = tinggi



kita ingin meminimalkan area selebaran

$A = xy$

A dinyatakan dalam dua variabel jadi kita perlu menulis satu dalam hal lain

Area cetakan selebaran memiliki luas 50 inci persegi. persamaan luasnya adalah

$(x-2)(y-4) = 50$

$y = \frac{50}{x-2} + 4$

Substitusi persamaan y pada persamaan A

$A = xy$

$A = x\left(\frac{50}{x-2} + 4\right)$

$A = \frac{50x}{x-2} + 4x$

dengan x berada pada interval $2 < x < \infty$. kita ingin meminimalkan A pada interval buka $(2, \infty)$

$\frac{dA}{dx} = \frac{(x-2)50 - 50x}{(x-2)^2} + 4$

$\frac{dA}{dx} = \frac{-100}{(x-2)^2} + 4$

$\frac{dA}{dx} = \frac{4x^2 - 16x - 84}{(x-2)^2}$

$\frac{dA}{dx} = \frac{4(x-7)(x+3)}{(x-2)^2}$

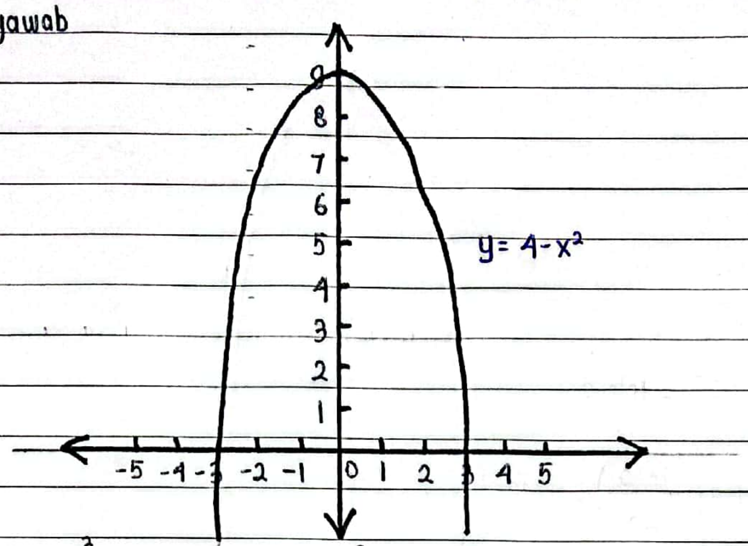
titik kritis akan diperoleh saat $\frac{dA}{dx} = 0$. Ini akan menghasilkan $x = 7$ dan $x = -3$. $x = -3$ Tidak memenuhi domain $(2, \infty)$ saat $\frac{dA}{dx} < 0$ untuk x di $(2, 7)$ dan $\frac{dA}{dx} > 0$ untuk x di $(7, \infty)$ kita dapat menyimpulkan bahwa A mencapai nilai minimum saat $x = 7$. Nilai ini akan membuat $y = 14$. Jadi, dimensi dari selebaran akan mencapai minimum pada ukuran 7 inci x 14 inci

No

Date

2. Tentukan pusat massa lamina homogen yang dibatasi oleh kurva

jawab



$$m = \delta \int_{-3}^{3} (9-x^2)\,dx = 2\delta \int_{0}^{2} (9-x^2)\,dx = 2\delta \left[9 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 2\delta\left[(27-9)-0\right] = 36\delta$$

$$M_x = \frac{\delta}{2} \int_{-3}^{3} (9-x^2)^2\,dx = 2\,\frac{\delta}{2} \int_{0}^{3} (9-x^2)^2\,dx = \delta \int_{0}^{3} (81-18x^2+x^4)\,dx$$

$$M_x = \delta \left[81x - \frac{18x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_0^3 = \delta\left[\left(243-162+\frac{243}{5}\right)-0\right] = \delta\left(\frac{405+243}{5}\right) = \frac{648}{5}\delta$$

$\bar{x} = 0$, karena kurva $y = 9-x^2$ simetris terhadap sumbu y

$$\bar{y} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{648}{5}\cancel{\delta}}{36\cancel{\delta}} = \frac{54}{15}$$

jadi, pusat massa lamina adalah

$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(0, \frac{54}{15}\right)$$

3. Bu Yayuk membuat pudding dengan cara memanaskan adonan hingga mencapai 105° Celcius. Kemudian adonan tersebut diletakkan dalam ruang bertemperatur konstan 25° Celcius. Setelah 20 menit temperatur pudding turun menjadi 65° Celcius. Pudding tersebut akan siap saji jika temperaturnya mencapai 35° Celcius. Tentukan waktu yang diperlukan agar pudding siap saji (Menurut Hukum Perbandingan Newton, laju perubahan temperatur suatu benda sebanding dengan perbedaan temperatur benda tersebut dengan temperatur lingkungannya)

Diketahui

$t = 0$, $T_b = 105°C$

$t = 20$, $T_b = 65°C$

$$\frac{dT_b}{dt} = k(T_b - T_i)$$

$$\frac{dT_b}{dt} = k(T_b - 25)$$

$$\frac{dT_b}{T_b - 25} = k\,dt$$

$$\int \frac{dT_b}{T_b - 25} = k\int dt$$

misal $u = T_b - 25$

maka $du = dT_b$

$$\int \frac{dT_b}{T_b - 25} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + k$$

$\ln|u| = kt + C$. maka. $\ln|T_b - 25| = kt + C$

=> Cari konstanta C

$t = 0$

$T_b = 105°C$

No

Date

$\ln|105-25| = k(0) + C$

$\ln 80 = C$

maka $C = \ln 80$

$\ln|T_b - 25| = kt + \ln 80$

=> Cari konstanta k

$t = 20$, $T_b = 65°C$

$\ln|65-25| = k(20) + \ln 80$

$\ln 40 = 20k + \ln 80$

$20k = \ln 40 - \ln 80 = \ln\left(\frac{40}{80}\right) = \ln \frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2$

maka $k = -\frac{\ln 2}{20}$. Sehingga $\ln|T_b - 25| = \left(-\frac{\ln 2}{20}\right)t + \ln 80$

=> Cari waktu t pudding siap saji pada saat $T_b = 35°C$

$\ln|35-25| = \left(-\frac{\ln 2}{20}\right)t + \ln 80$

$\left(-\frac{\ln 2}{20}\right)t = \ln 10 - \ln 80 = \ln\left(\frac{1}{8}\right) = \ln(2^{-3}) = -3\ln 2$

$\frac{\cancel{\ln 2}}{20}t = 3\cancel{\ln 2}$

$t = 3 \cdot 20$

$t = 60$ menit

jadi, pudding siap disajikan dalam 60 menit