Bagian A

Nomor A1

Misalkan $F(x) = \int_2^x \frac{1}{t^2+7}\,dt$. Akan ditentukan $F'(2)$.

Menurut TDK 1,

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_2^x \frac{1}{t^2+7}\,dt = \frac{1}{x^2+7} \Rightarrow F'(2) = \frac{1}{2^2+7} = \boxed{\frac{1}{11}}$$

Nomor A2

Misalkan f genap dan terintegralkan pada $[-5, 5]$. Diketahui $\int_{-5}^{5} f(x)\,dx = 22$, maka akan ditentukan $\int_0^5 f(x)\,dx$.

Karena f genap,

$$\int_{-5}^{5} f(x)\,dx = 2\int_0^5 f(x)\,dx = 22 \Leftrightarrow \boxed{\int_0^5 f(x)\,dx = 11}$$

Nomor A3

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}i\right) = \int_0^b f(x)\,dx$$

Akan ditentukan b dan $f(x)$.

Ingat bahwa

$$\text{Integral Tentu} = \text{Limit Jumlah Riemann}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

dengan $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ dan $x_i = a + i\,\Delta x$.

Kita harus bisa mencocokkan! Δx mempunyai bentuk *bilangan per n*, sisanya menjadi $f(x_i)$.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(\frac{\pi}{n}\right)}_{\Delta x}\underbrace{\sin\left(i\frac{\pi}{n}\right)}_{f(x_i)} = \int_{0=a}^{b} f(x)\,dx$$

- $\Delta x = \frac{\pi}{n} = \frac{b-a}{n} \Rightarrow b - a = \pi$

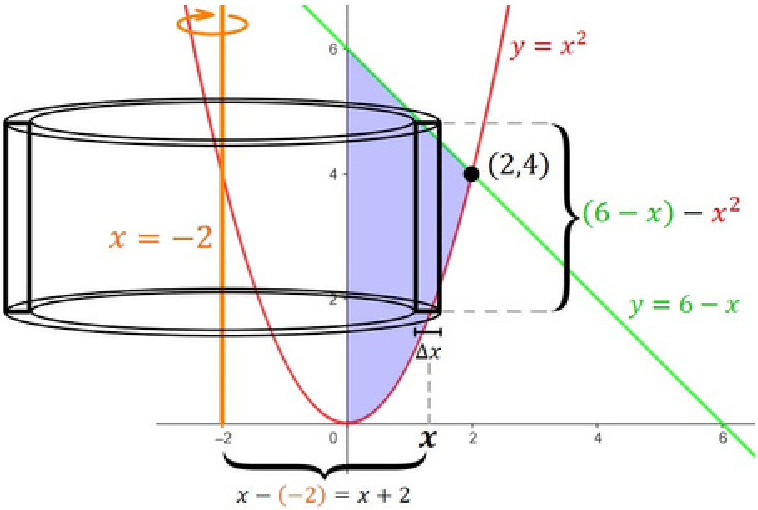
Karena $a=0$, maka

- $\boxed{b = \pi}$
- $x_i = a + i\,\Delta x = 0 + i\cdot\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n}i$

Lalu, $f(x_i) = \sin\left(\frac{\pi}{n}i\right) = \sin(x_i) \Rightarrow \boxed{f(x) = \sin x}$

Nomor A4

Misalkan S daerah tertutup di kuadran pertama dibatasi kurva $y=x^2$, $y=6-x$, dan sumbu-y. Jika S diputar terhadap garis $x=-2$, akan dihitung volume benda putar yang dihasilkan.



Volume irisan bendanya (kulit tabung):

$$\Delta V \approx 2\pi r \cdot h \cdot \Delta x = 2\pi(x+2)(6-x-x^2)\Delta x$$

Volume benda putarnya:

$$V = \int_0^2 2\pi(x+2)(6-x-x^2)\,dx = 2\pi\int_0^2 \boxed{\underbrace{(-x^3-3x^2+4x+12)}_{f(x)}}\,dx$$

Nomor A5

Misalkan f punya invers di $[0,\infty)$. Jika $f(1)=4$, $f(4)=12$, $f'(1)=4$ dan $f'(4)=2$, maka akan ditentukan $(f^{-1})'(4)$.

Ingat $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ dengan $y = f(x)$. Saat $y = f(x) = 4$, maka $x = 1$.

Jadi,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\boxed{(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}}$$

Nomor A6

Jika $f(x) = e^{3x}$, maka $f'(0) = 3e^{3x}\big|_{x=0} = 3e^0 = \boxed{3}$.

Nomor A7

Ingat! $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \Rightarrow \int a^x \ln a\,dx = a^x + C$

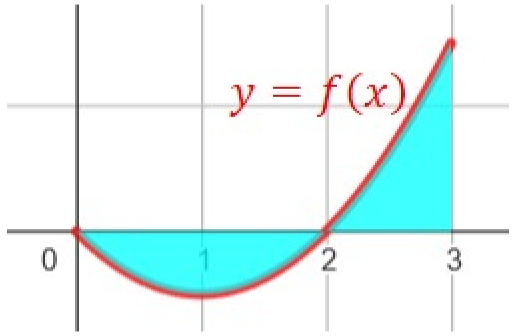
$$\int_1^2 2^x \ln 2\,dx = 2^x\Big|_1^2 = 2^2 - 2^1 = \boxed{2}$$

Nomor A8

$$\cos^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{3}}$$

Bagian B

Nomor B1



Perhatikan gambar di samping. Diketahui $\int_0^2 f(x)\,dx = -1$ dan $\int_0^3 f(x)\,dx = -\frac{1}{4}$. Akan ditentukan luas daerah yang diarsir.

Penting untuk dipahami bahwa

- Luas daerah tidak boleh negatif
- Integral tentu bisa negatif

Menurut sifat penjumlahan selang:

$$\underbrace{\int_0^3 f(x)\,dx}_{-1/4} = \underbrace{\int_0^2 f(x)\,dx}_{-1} + \int_2^3 f(x)\,dx$$

$$\int_2^3 f(x)\,dx = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

Catatan: Rumus luas daerah selalu *integral tentu dari fungsi atas kurang fungsi bawah*.

Jadi, luas daerah yang diarsir adalah

$$\int_0^2 (0 - f(x))\,dx + \int_2^3 (f(x) - 0)\,dx = -\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$$

$$= -(-1) + \frac{3}{4} = \boxed{\frac{7}{4}}$$

Nomor B2

$$\int_0^{\pi/2} (3x^2 + \cos x)\,dx = [x^3 + \sin x]_0^{\pi/2} = \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \sin\frac{\pi}{2}\right) - (0^3 + \sin 0) = \boxed{\frac{\pi^3}{8} + 1}$$

Nomor B3

Misalkan $f(x) = \frac{1}{x}$. Akan ditentukan hampiran metode trapesium untuk menaksir nilai $\int_1^5 f(x)\,dx$ dengan partisi sebanyak $n = 4$ subinterval.

$a = 1$, $b = 5$, $n = 4$ maka $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{4} = 1$ dan $x_i = a + i\,\Delta x = 1 + i \cdot 1 = 1 + i$

Hampiran metode trapesiumnya:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

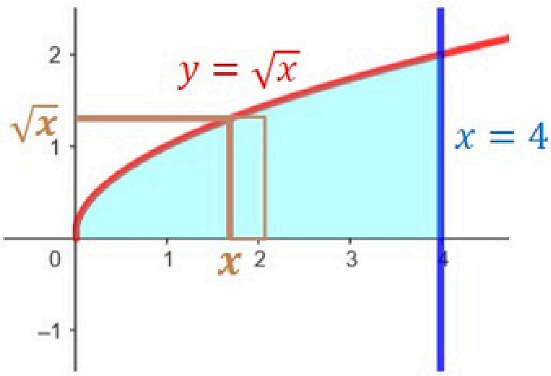
$$\int_1^5 f(x)\,dx \approx \frac{\;}{\;}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\right)$$

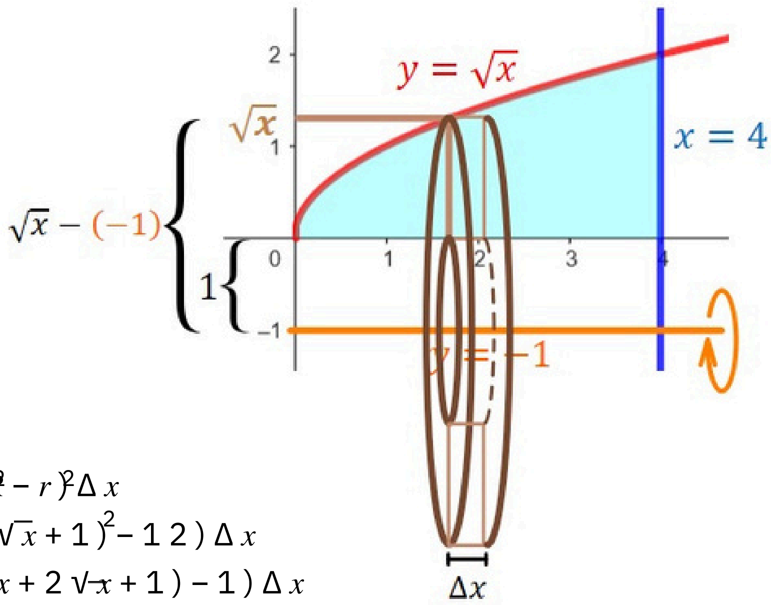
$$= \frac{1}{2}\left(f(1) + 2f(2) + 2f(3) + 2f(4) + f(5)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\frac{1}{1} + \frac{2}{2}}_{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\Big) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{60 + 20 + 15 + 6}{60} = \boxed{\frac{101}{60}}$$

Nomor B4

Sketsa daerah tertutup yang dibatasi $y=\sqrt{x}$, $x=4$, dan sumbu-x. Daerah itu diputar terhadap $y=-1$.
Akan dihitung volume benda yang dihasilkan (nilai integralnya saja, tidak perlu dihitung).





Volume irisan bendanya (metode cincin):

$$\Delta V \approx \pi\left(R^2 - r^2\right)\Delta x$$
$$= \pi\left(\left(\sqrt{x}+1\right)^2 - 1^2\right)\Delta x$$
$$= \pi\left(\left(x+2\sqrt{x}+1\right) - 1\right)\Delta x$$
$$= \pi\left(x+2\sqrt{x}\right)\Delta x$$

Volume bendanya:

$$\boxed{V = \int_0^4 \pi\left(x+2\sqrt{x}\right)\, dx}$$

Nomor B5

Akan ditentukan integral berikut dengan integral substitusi.

$$\int \frac{x}{2x^2+1}\, dx$$

Substitusi $u = 2x^2+1 \Rightarrow du = 4x\, dx \Rightarrow \frac{du}{4} = x\, dx$

$$\int \frac{x}{2x^2+1}\, dx = \int \frac{1}{u}\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\ln|u| + C = \boxed{\frac{1}{4}\ln|2x^2+1| + C}$$

Nomor B6

Populasi suatu bakteri saat t jam tumbuh secara eksponensial dan memenuhi $y(t)=Ce^{kt}$ dengan C dan k suatu konstanta. Diketahui setelah 2 jam ukuran populasi adalah 10 ribu dan setelah 5 jam ukurannya menjadi 80 ribu. Akan ditentukan ukuran populasi awal.

Misalkan $y(t)$ dalam ribu. Populasi awal adalah $y(0)=Ce^{k\cdot 0}=C$. Akan ditentukan C.

Diketahui $y(2)=10$ dan $y(5)=80$.

$$y(2)=Ce^{k\cdot 2}=10$$
$$y(5)=Ce^{k\cdot 5}=80$$

Maka

$$\frac{Ce^{k\cdot 5}}{Ce^{k\cdot 2}}=\frac{80}{10} \Leftrightarrow e^{k\cdot 3}=8$$
$$\Leftrightarrow \left(e^{k\cdot 3}\right)^{1/3}=(8)^{1/3}$$
$$\Leftrightarrow e^{k}=2$$

Masukkan $e^k=2$ ke $y(2)$,

$$Ce^{k\cdot 2}=C\left(e^{k}\right)^2=C\cdot 2^2=10 \Leftrightarrow \boxed{C=\frac{5}{2}=2{,}5}$$

Jadi, populasi awalnya dua ribu lima ratus.

Bagian C

Nomor C1

Diberikan persamaan diferensial (PD) $(2x+1)$

$$\frac{dy}{dx} + y = \sqrt{2x+1}\cos x, \quad x \geq 0.$$

(a) Persamaan di atas akan ditulis dalam bentuk $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$. Bagi PD di atas dengan $2x+1$.

$$\frac{dy}{dx} + \underbrace{\frac{1}{2x+1}}_{P(x)} y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\cos x$$

(b) Akan ditentukan faktor integrasi dari PD di bagian (a).

$$\int P(x)\,dx = \int \frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(2x+1) = \ln(2x+1)^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{2x+1}$$

Faktor integrasinya:

$$e^{\int P(x)\,dx} = e^{\ln\sqrt{2x+1}} = \sqrt{2x+1}$$

(c) Akan ditentukan solusi umumnya.

Kalikan PD dengan $\sqrt{2x+1}$:

$$\underbrace{\sqrt{2x+1}}_{u}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{v} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2x+1}}}_{u}\underbrace{y}_{v} = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2x+1}\cdot y\right) = \cos x$$

$$\int d\left(\sqrt{2x+1}\cdot y\right) = \int \cos x\,dx$$

$$\boxed{\sqrt{2x+1}\cdot y = \sin x + C}$$

$$y = \frac{\sin x + C}{\sqrt{2x+1}}$$

(d) Akan ditentukan solusi khususnya dengan syarat $y(0) = 5$.

$y=5$ saat $x=0$, maka

$$\sqrt{2\cdot 0+1}\cdot 5 = \sin 0 + C \Leftrightarrow C = 5$$

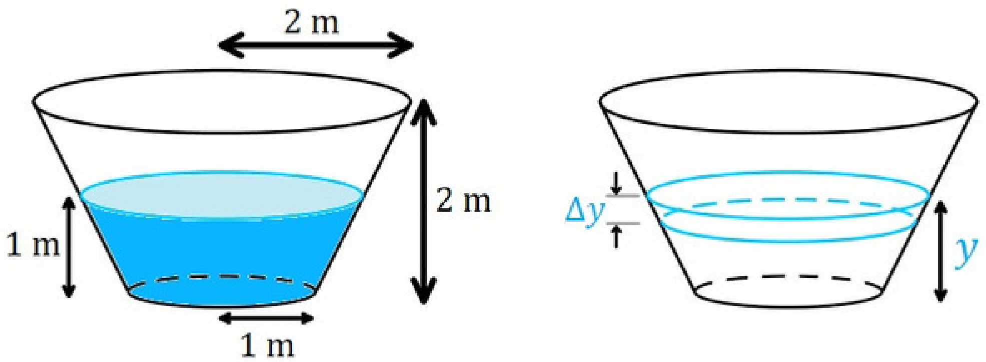
Jadi, solusi khususnya

$$\sqrt{2x+1}\cdot y = \sin x + 5$$

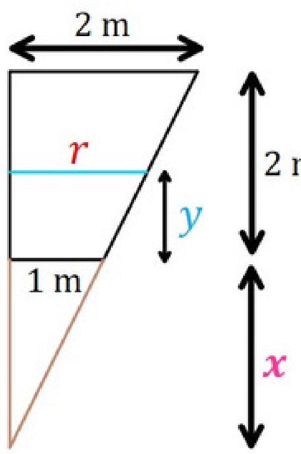
$$\boxed{y = \frac{\sin x + 5}{\sqrt{2x+1}}}$$

Bagian C2

Suatu tangki berbentuk kerucut terpancung memiliki jari-jari bagian atas 2 meter, jari-jari dasar tangki 1 meter, dan tinggi 2 meter. Tangki tersebut berisi air hingga ketinggian 1 meter dari atas tangki. Berat jenis air adalah 104 N/m3.



(a) Akan ditaksir volume potongan air ΔV pada ketinggian y dengan ketebalan Δy.



Misalkan r taksiran jari-jari potongan air. Manfaatkan kesebangunan segitiga.

$$\frac{x}{1} = \frac{x+2}{2} \Leftrightarrow 2x = x + 2$$
$$\Leftrightarrow x = 2$$

$$\frac{x}{1} = \frac{x+y}{r} \Leftrightarrow \frac{2}{1} = \frac{2+y}{r}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{r = \frac{1}{2}(2+y)}$$

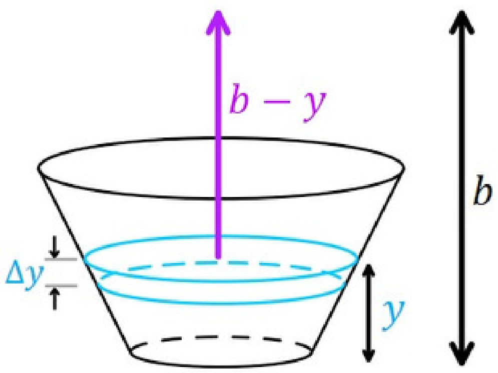
Maka, volume potongan airnya

$$\Delta V \approx \pi r^2 \Delta y$$
$$= \pi \left(\frac{1}{2}(2+y)\right)^2 \Delta y$$
$$= \frac{\pi}{4}(y^2 + 4y + 4)\Delta y$$

(b) Akan ditentukan integral tentu yang menyatakan volume seluruh air di tangki (tinggi air hingga 1 m) . Nilai integral tidak perlu dihitung.

$$V = \int_0^1 \frac{\pi}{4}(y^2 + 4y + 4)\, dy$$

(c) Diketahui kerja/usaha yang dilakukan untuk memompa seluruh air di dalam tangki hingga ketinggian b meter dari dasar tangki adalah $87\times 5^4\pi$ Joule. Akan ditentukan nilai b.



$$\text{Berat Jenis} = \frac{\text{Berat}}{\text{Volume}}$$
$$\text{Berat} = \text{Berat Jenis} \times \text{Volume}$$

Berat potongan airnya adalah
$$\Delta F \approx 10^4 \cdot \Delta V$$
$$= 10^4 \cdot \frac{\pi}{4}(y^2+4y+4)\Delta y$$

Usaha untuk memindahkan potongan air ke ketinggian b (perpindahannya $b-y$) adalah
$$\Delta W \approx \Delta F \cdot (b-y)$$
$$= 10^4 \cdot \frac{\pi}{4}(y^2+4y+4)(b-y)\Delta y$$

Usaha total memindahkan seluruh air adalah
$$W = \int_0^1 10^4 \cdot \frac{\pi}{4}(y^2+4y+4)(b-y)\, dy$$
$$= 2^4 \cdot 5^4 \frac{\pi}{4}\int_0^1 \left(-y^3+(b-4)y^2+(4b-4)y+4b\right) dy$$
$$= 4\cdot 5^4\pi\left[-\frac{1}{4}y^4 + \frac{b-4}{3}y^3 + (2b-2)y^2 + 4by\right]_0^1$$
$$= 4\cdot 5^4\pi\left(-\frac{1}{4} + \frac{b-4}{3} + (2b-2) + 4b\right)$$

Lalu, $W = 87\times 5^4\pi$. Maka
$$4\cdot \cancel{5^4\pi}\left(-\frac{1}{4}+\frac{b-4}{3}+(2b-2)+4b\right) = 87\times \cancel{5^4\pi}$$
$$-1+\frac{4b-16}{3}+(8b-8)+16b = 87$$
$$-3+(4b-16)+(24b-24)+48b = 87\cdot 3$$
$$76b-43 = 261$$
$$76b = 304$$
$$\boxed{b=4}$$