A1-A5

08 December 2022 21:52

A1

1. Misalkan fungsi f dan g memenuhi $\int_1^4 f(x)\,dx = 7$, $\int_4^6 f(x)\,dx = 10$, dan $\int_4^6 g(x)\,dx = 3$.

   (a) $\int_1^6 f(x)\,dx = \boxed{7+10=17}$

   (b) $\int_4^6 (f(x)+g(x))\,dx = \boxed{10+3=13}$

(a) $\int_1^6 f(x)\,dx = \int_1^4 f(x)\,dx + \int_4^6 f(x)\,dx$
$= 7 + 10 = 17$

(b) $\int_4^6 (f(x)+g(x))\,dx = \int_4^6 f(x)\,dx + \int_4^6 g(x)\,dx$
$= 10 + 3 = 13$

A2

2. Misalkan $f(x) = \log_6(3x)$.

   (a) Jika $f(a) = 1$, maka $a =$ ☐

   (b) Jika $f(b) = 5$, maka $f(3b^2) =$ ☐

(a) $f(a) = 1 \Leftrightarrow \log_6(3a) = 1$
$\Leftrightarrow 6^1 = 3a$
$\Leftrightarrow a = 2$

(b) $f(3b^2) = \log_6(3 \cdot 3b^2)$
$= \log_6((3b)^2)$
$= 2 \cdot \log_6(3b)$
$= 2 \cdot f(b)$
$= 2 \cdot 5 = 10$

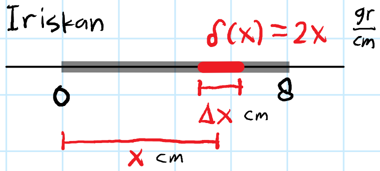
A3

3. Suatu kawat memiliki panjang 8 cm dan memiliki rapat massa $\delta(x) = 2x$ gram/cm di titik berjarak x cm dari ujung kiri kawat. Integral yang menyatakan momen total kawat terhadap titik ujung kiri kawat adalah $\int_0^b g(x)\,dx$ dengan

   (a) $b =$ ☐

   (b) $g(x) =$ ☐

- Iriskan



- Aproksimasikan

$\Delta m = \delta(x)\,\Delta x = 2x\,\Delta x$

$\Delta M = \Delta m \cdot x = (2x\,\Delta x)\,x = 2x^2\,\Delta x$

- Integralkan

$M = \int_0^8 2x^2\,dx$

A4

4. Jika $F(x) = \int_x^1 \sqrt{t^4+3}\,dt$, maka

   (a) $F(1) =$ ☐

   (b) $F'(1) =$ ☐

(a) $F(1) = \int_1^1 \sqrt{t^4+3}\,dt = 0$

(b) $F'(x) = D_x\left[\int_x^1 \sqrt{t^4+3}\,dt\right] = -\sqrt{x^4+3}$

maka $F'(1) = -\sqrt{1^4+3} = -2$

A5

5. Pada tabel di bawah ini disajikan data kecepatan sesaat suatu kendaraan pada beberapa waktu tertentu dalam selang waktu $[0, 6]$ (dalam jam).

t (jam)	$v(t)$ (km/jam)
0	10
1	40
2	50
3	55
4	35
5	30
6	25

Jika digunakan metode Jumlah Riemann Kiri dengan $n = 3$ untuk menaksir jarak yang ditempuh dalam selang waktu tersebut, maka

   (a) lebar subinterval adalah $\Delta t =$ ☐,

   (b) taksiran jarak yang ditempuh kendaraan tersebut adalah ☐

$a = 0$, $b = 6$, $n = 3$, $\underbrace{\bar{t}_i = t_{i-1}}_{\text{riemann kiri}}$

(a) $\Delta t = \dfrac{b-a}{n}$
$= \dfrac{6-0}{3} = 2$

$t_i = a + i\Delta x = 0 + i2 = 2i$, $i = 0, 1, 2, 3$

Karena $\dfrac{ds}{dt} = v \Leftrightarrow \overbrace{s}^{\text{perpindahan}} = \int v\,dt$

Karena kecepatan positif (bergerak maju) maka s juga jarak

maka

$$\int_0^6 v(t)\,dt \approx \sum_{i=1}^{3} v(t_{i-1})\,\Delta t$$
$$= 2\,(v(t_0) + v(t_1) + v(t_2))$$
$$= 2\,(v(0) + v(2) + v(4))$$
$$= 2\,(10 + 50 + 35) = 190$$

B1-B4

08 December 2022 22:44

B1

1. Hitunglah $\int_0^3 6x\sqrt{x^2+16}\,dx$.

Misalkan $u(x) = x^2 + 16 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$$\int_0^3 \sqrt{x^2+16} \cdot 3(2x\,dx) = \int_{u(0)}^{u(3)} \sqrt{u} \cdot 3\,du = 3\int_{16}^{25} \sqrt{u}\,du = \cancel{3} \cdot \left[\frac{2}{\cancel{3}} u^{3/2}\right]_{16}^{25}$$

$$= 2\left[25^{3/2} - 16^{3/2}\right] = 2\left[125 - 64\right] = 2[61] = 122$$

B2

2. Jika $y(x) = e^{2x} + \ln(x+1)$, tentukan $y'(1)$.

$$y'(x) = 2e^{2x} + \frac{1}{x+1} \Rightarrow y'(1) = 2e^{2(1)} + \frac{1}{1+1} = 2e^2 + \frac{1}{2}$$

B3

3. Tentukan solusi persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = \frac{10x^4}{3y^2}$ dengan $y(1) = 1$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10x^4}{3y^2}, \quad y(1) = 1$$

Terapkan metode pemisahan variabel

$$3y^2\,dy = 10x^4\,dx$$

$$\int 3y^2\,dy = \int 10x^4\,dx$$

$$y^3 = 2x^5 + C$$

Saat $x = 1$, $y(1) = 1$

$$1^3 = 2 \cdot 1^5 + C \Leftrightarrow C = -1$$

Jadi, $y^3 = 2x^5 - 1 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{2x^5 - 1}$

B4

4. Misalkan $f(x) = a + b\tan^{-1}(x)$. Tentukan nilai a dan b agar grafik fungsi f melalui titik $P(0,5)$ dan persamaan garis singgung grafik f di P adalah $x - 2y + 10 = 0$.

$f(x) = a + b\tan^{-1}(x)$. Akan ditentukan a dan b supaya memenuhi

$\underbrace{f(0) = 5}_{f \text{ melewati } P}$ dan $\underbrace{f'(0) = \frac{1}{2}}_{\text{gradien garis singgung di } P}$

Perhatikan bahwa

$$f(0) = 5$$

$$a + b\tan^{-1}(0) = 5$$

$$a + b \cdot 0 = 5$$

$$a = 5$$

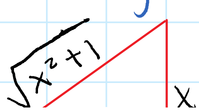
Selanjutnya, perlu dicari $f'(x) = b \cdot \frac{d}{dx}\tan^{-1}(x)$

Tinjau

$$y = \tan^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \tan(y)$$

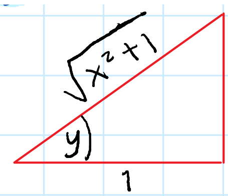
Terapkan teorema turunan fungsi invers

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\tan^{-1}(x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}\tan(y)} = \frac{1}{\sec^2 y} = \underbrace{\cos^2 y}_{\text{kembalikan } y \text{ dalam } x}$$



Jadi, $\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Jadi, $\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x) = \frac{1}{x^2+1}$



kembalikan y dalam x

$x = \tan y \Rightarrow \cos y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Karena $f'(0) = \frac{1}{2}$, maka

$$b \cdot \frac{1}{x^2+1}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

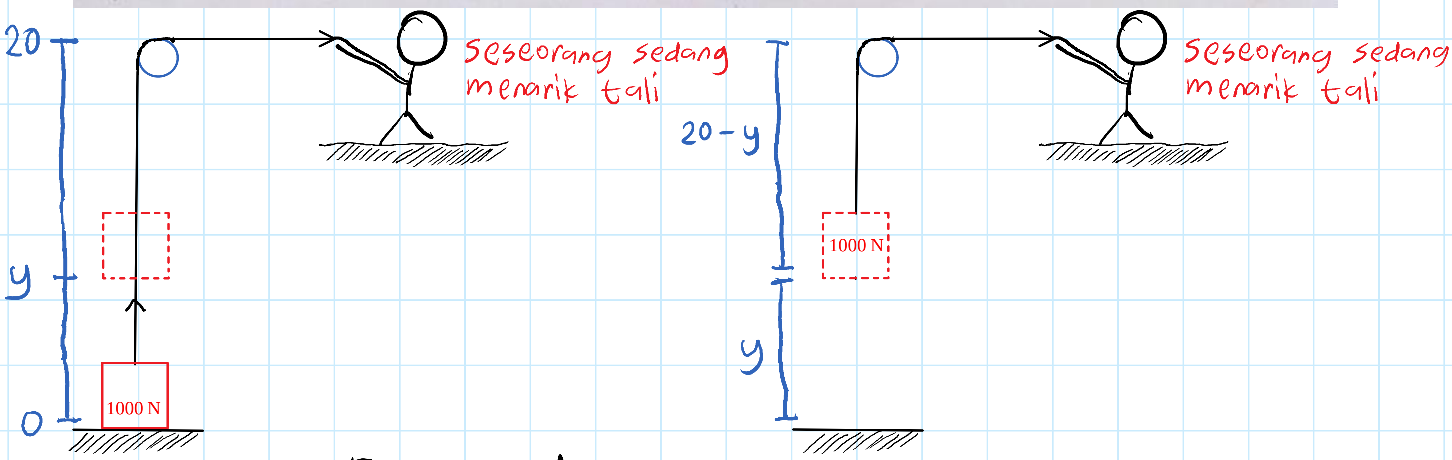
Periksa pakai kalkulator grafik, ternyata benar

B5-B6

08 December 2022 23:26

B5

5. Suatu tali tambang dengan **berat jenis** 15 Newton/meter digunakan untuk menarik benda dengan **berat** 1000 Newton dari dasar sumur dengan kedalaman 20 meter dari permukaan tanah. Tentukan integral yang menyatakan kerja yang dilakukan untuk menarik benda tersebut sampai kedalaman 10 meter dari permukaan tanah.
(Catatan: Nilai integral **tidak perlu** dihitung)



Berat benda : $F_b = 1000$ N

Berat jenis tali : 15 N/m

Misalkan $F_t(y)$ menyatakan berat tali yang harus ditarik saat benda di ketinggian y dari tanah. Maka

$$F_t(y) = 15(20 - y) = 300 - 15y$$

Jadi, berat totalnya adalah $F(y) = F_b + F_t(y) = 1300 - 15y$

Selanjutnya, akan dihitung usaha

Ambil Partisi (Iriskan dan Aproksimasikan)

$\Delta W = F(y)\,\Delta y$ (usaha yg dilakukan supaya benda terangkat sejauh Δy)

Integralkan

$$W = \int_0^{10} F(y)\,dy = \int_0^{10} (1300 - 15y)\,dy$$

karena diangkat sampai kedalaman 10 m (atau 10 m di atas tanah)

B6

6. Tentukan nilai rata-rata fungsi $f(x) = 3x + \sin^7(2x+1)$ pada selang $[-2, 1]$.

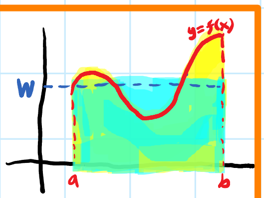
Teorema Nilai Rata-Rata

Ada nilai W sehingga

$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)W$

$W = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

dimana W adalah nilai rata-rata fungsi $f(x)$ pada interval $[a, b]$



Nilai rata-ratanya diberikan oleh

$$W = \frac{1}{1-(-2)} \int_{-2}^{1} \left[3x + \sin^7(2x+1)\right] dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\int_{-2}^{1} 3x\,dx + \int_{-2}^{1} \sin^7(2x+1)\,dx\right]$$

Tinjau $\int \sin^7(2x+1)\,dx$

Karena $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ maka

$$\int \sin^7(2x+1)\,dx = \int \left(1 - \cos^2(2x+1)\right)^3 \sin(2x+1)\,dx$$

Misalkan $y = \cos(2x+1) \Rightarrow dy = -2\sin(2x+1)\,dx$, maka

Misalkan $y = \cos(2x+1) \Rightarrow dy = -2\sin(2x+1)\,dx$, maka

$$\int \sin^7(2x+1)\,dx = \int (1-y^2)^3 \left(\frac{dy}{-2}\right) = -\frac{1}{2}\int (1-3y^2+3y^4-y^6)\,dy$$
$$= -\frac{1}{2}\left[y - y^3 + \frac{3}{5}y^5 - \frac{1}{7}y^7\right] + C$$

$$\int_{-2}^{1} \sin^7(2x+1)\,dx = -\frac{1}{2}\left[y - y^3 + \frac{3}{5}y^5 - \frac{1}{7}y^7\right]_{y(-2)}^{y(1)}$$

Perhatikan bahwa $y(-2) = \cos(2(-2)+1) = \cos(-3)$

dan $y(1) = \cos(2(1)+1) = \cos(3) = \cos(-3) = y(-3)$

sehingga $\int_{-2}^{1} \sin^7(2x+1)\,dx = 0$. (CARA NGULI)

Jadi, $W = \frac{1}{3}\int_{-2}^{1} 3x\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}x^2\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{2}[1-4] = -\frac{3}{2}$

Ada cara lain untuk menghitung $\int_{-2}^{1} \sin^7(2x+1)\,dx$ yaitu dengan kesimetrian fungsi (fungsi ganjil)

Misalkan $u = 2x+1 \Rightarrow du = 2\,dx$. Maka

$$\int_{-2}^{1} \sin^7(2x+1)\,dx = \int_{u(-2)}^{u(1)} \sin^7(u)\left(\frac{du}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_{-3}^{3} \sin^7(u)\,du$$

Misal $g(u) = \sin^7(u)$. Perhatikan bahwa

$g(-u) = \sin^7(-u) = [-\sin(u)]^7 = -\sin^7(u) = -g(u)$,

sehingga $g(u)$ fungsi ganjil.

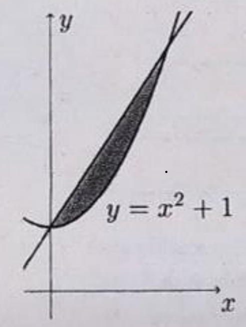
Jadi, $\int_{-3}^{3} \sin^7(u)\,du = 0$.

C1

09 December 2022 1:02

C1

1. Diketahui bahwa R adalah daerah yang dibatasi oleh sumbu-y, garis $y = 2x + 1$ dan parabola $y = x^2 + 1$.



(a) Tentukan dua titik potong garis dan parabola tersebut.

(b) Hitunglah luas daerah R.

(c) Hitunglah volume benda pejal yang diperoleh dengan memutar daerah R mengelilingi garis $x = -1$.

(a) Titik potong $y = 2x+1$ dan $y = x^2+1$

$2x+1 = x^2+1$

$0 = x^2 - 2x$

$0 = x(x-2)$

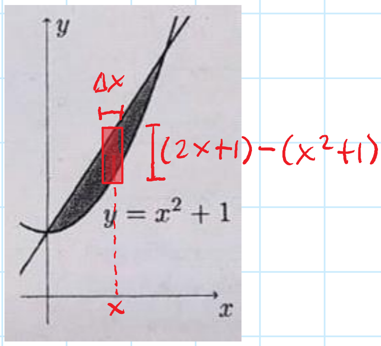
$x = 0 \vee x = 2$

untuk $x = 0$, $y = 2(0)+1 = 1$

untuk $x = 2$, $y = 2(2)+1 = 5$

Jadi, titik potongnya $(0,1)$ dan $(2,5)$

(b) • Iriskan



• Aproksimasikan

Luas Irisan

$\Delta A = [(2x+1)-(x^2+1)]\,\Delta x$

$= [2x - x^2]\,\Delta x$

• Integralkan

$A = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx$

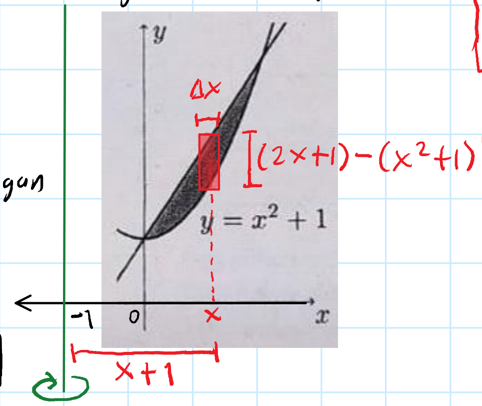
$= [x^2 - \frac{1}{3}x^3] = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$

(c) Daerah diputar thd garis $x = -1$

• Iriskan

• Aproksimasikan

Volume kulit tabung dengan ketebalan Δx



$\Delta V = 2\pi(x+1)\Delta x \cdot [(2x+1)-(x^2+1)]$

$= 2\pi(x+1)[2x - x^2]\Delta x$

$= 2\pi(-x^3 + x^2 + 2x)\Delta x$

• Integralkan

$V = 2\pi \int_0^2 (-x^3 + x^2 + 2x)\,dx = 2\pi\left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^2 = 2\pi\left[-4 + \frac{8}{3} + 4\right] = \frac{16\pi}{3}$

C2

09 December 2022 1:34

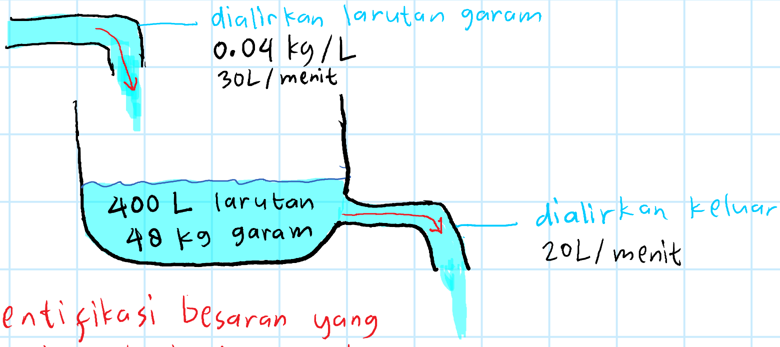
C2

2. Suatu tangki memiliki kapasitas 1000 liter dan mula-mula terisi 400 liter larutan garam yang mengandung garam terlarut sebanyak 48 kg. Ke dalam tangki tersebut dialirkan larutan garam dengan konsentrasi $\frac{1}{25}$ kg per liter dengan laju 30 liter per menit. Pada waktu bersamaan, larutan dalam tangki dialirkan keluar dengan laju 20 liter per menit. Asumsikan bahwa larutan di dalam tangki teraduk sempurna setiap saat.

(a) Tentukan volume larutan di dalam tangki pada saat t, untuk $0 \le t \le 60$ (dalam menit).

(b) Jika y menyatakan massa garam terlarut dalam larutan di dalam tangki pada saat t, tentukan suatu persamaan diferensial yang dipenuhi oleh y beserta nilai awalnya (saat $t = 0$).

(c) Agar diperoleh larutan garam di dalam tangki dengan konsentrasi tepat $\frac{1}{20}$ kg per liter, tentukan kapan aliran larutan ke dalam dan ke luar tangki harus dihentikan.



• Identifikasi besaran yang berubah terhadap waktu

Misalkan $y(t)$ menyatakan massa garam (dalam kg)
$V(t)$ menyatakan volume larutan (dalam L)

(a) Dalam satu menit, volume larutan dalam tangki bertambah 30 L sekaligus berkurang 20 L, maka

$$\frac{dV}{dt} = 30 - 20 = 10 \Leftrightarrow V(t) = 10t + C$$

Diketahui $V(0) = 400$, maka $C = 400$ sehingga $V(t) = 10t + 400$

(b) • Identifikasi pergerakan garam

Garam masuk: $0.04 \frac{kg}{L} \; 30 \frac{L}{mnt} = 1.2 \frac{kg}{mnt}$

Garam keluar: $\frac{y(t)}{V(t)} \frac{kg}{L} (-20) \frac{L}{mnt} = -\frac{20y}{10t+400} \frac{kg}{mnt} = -\frac{2y}{t+40} \frac{kg}{mnt}$

Jadi, diperoleh laju perubahan banyak garam (dalam kg/menit)

$$\frac{dy}{dt} = 1.2 - \frac{2y}{t+40}, \text{ dengan } y(0) = 48$$

Selesaikan PD di atas dengan faktor integrasi

$$\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t+40} y = 1.2$$

Tinjau $\int \frac{2}{t+40} dt = 2 \ln(t+40)$

Tinjau $\int \frac{2}{t+40}\,dt = 2\ln(t+40)$

Faktor Integrasi: $e^{\int \frac{2}{t+40}dt} = e^{2\ln(t+40)} = (t+40)^2$

Kedua ruas PD dikalikan dengan faktor integrasi

$$(t+40)^2 \frac{dy}{dt} + 2(t+40)y = 1.2(t+40)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left[(t+40)^2 y\right] = 1.2(t+40)^2$$

$$\int d(t+40)^2 y = \int 1.2(t+40)^2\,dt$$

$$(t+40)^2 y = 0.4(t+40)^3 + C$$

Karena saat $t=0$, $y(0)=48$

$$(40)^2\, 48 = 0.4\,(40)^3 + C$$

$$(40)^2(48 - 0.4\cdot 40) = C$$

$$C = 1600\cdot 32 = 51200$$

maka diperoleh

$$(t+40)^2 y = 0.4(t+40)^3 + 51200$$

$$y = 0.4(t+40) + 51200(t+40)^{-2}$$

(c) Diinginkan konsentrasi garam di tangki tepat $\frac{1}{20}\ \frac{kg}{L}$, maka

$$\frac{y(t)}{V(t)} = \frac{1}{20}$$

Tinjau ruas kiri

$$\frac{0.4(t+40) + 51200(t+40)^{-2}}{10t+400} = \frac{0.4(t+40) + 51200(t+40)^{-2}}{10(t+40)}$$

$$= 0.04 + 5120(t+40)^{-3}$$

maka,

$$0.04 + 5120(t+40)^{-3} = \frac{1}{20}$$

$$5120(t+40)^{-3} = 0.05 - 0.04$$

$$(t+40)^{-3} = \frac{0.01}{5120} = \frac{0.001}{512}$$

$$(t+40)^{-1} = \sqrt[3]{\frac{0.001}{512}} = \frac{0.1}{8}$$

$$t + 40 = 80$$

$$t = 40$$

Jadi, larutan ke dalam dan ke luar tangki harus dihentikan setelah 40 menit supaya konsentrasi larutan di dalam tangki tepat $\frac{1}{20}$ kg/Liter.