laras hati M.

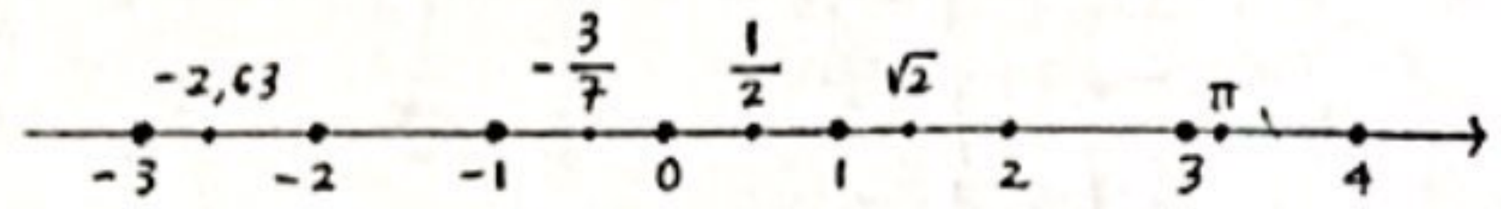
PENDAHULUAN

1 Bilangan Real, $\mathbb{R}$

- Mencakup bilangan rasional dan irrasional
- Bilangan rasional berbentuk $\frac{m}{n}$, dimana m dan n adalah bilangan bulat dengan $n \neq 0$

  Contoh : $\frac{1}{3}, -\frac{4}{9} = \frac{-4}{9} = \frac{4}{-9}, \frac{200}{13}$, dan $57 = \frac{57}{1}$.
- Bilangan irrasional adalah bilangan real yg bukan bilangan rasional & tdk bisa ditulis sebagai $\frac{m}{n}$.

  Contoh : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{7}, \pi, e, \log_{10} 3, \sin 1°, 5^{\pi}$.
- Garis real / garis bilangan real / garis koordinat : garis yg menggambarkan bilangan $\mathbb{R}$ sebagai titik² di suatu garis bilangan.



- $\mathbb{N}$ = bilangan asli = 1, 2, 3, 4, 5, ...

  $\mathbb{Z}$ = bilangan bulat = ..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
- Bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$

  Definit positif jika dan hanya jika $D = b^2 - 4ac < 0$ & $a > 0$.

  Contoh :

  $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1 > 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$

  Definit negatif jika dan hanya jika $D = b^2 - 4ac < 0$ & $a < 0$.

  Contoh :

  $-x^2 + 2x - 2 = -(x-1)^2 - 1 \leq -1 < 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$

2 Pertaksamaan dan Nilai Mutlak

a) Interval

↳ Interval terbuka :

memuat seluruh bilangan kecuali titik ujung

Contoh :

$a < x < b = (a, b) = \{x : a < x < b\}$

dapat diartikan 2 pertaksamaan $a < x$ dan $x < b$

↳ Interval tertutup :

memuat seluruh bilangan termasuk titik ujung

Contoh :

$a \leq x \leq b = [a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$

Tabel Jenis-Jenis Interval

Notasi Interval	Notasi	Grafik / Gambaran
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	a b
$[a, b]$	$\{x : a \leq x \leq b\}$	a b
$[a, b)$	$\{x : a \leq x < b\}$	a b
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	a b
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	a
$[a, \infty)$	$\{x : x \geq a\}$	a
$(-\infty, b)$	$\{x : x < b\}$	b
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	b
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$	

b) Pertaksamaan

Aturan-aturan dari pertaksamaan :

(1) Jika $a < b$ dan $b < c$ maka $a < c$. (Sifat transitif)

(2) Jika $a < b$ dan $c \in \mathbb{R}$ maka $a + c < b + c$.

(3) Jika $a < b$ dan $c < d$ maka $a + c < b + d$.

(4) Jika $a < b$ dan $c > 0$ maka $ac < bc$.

(5) Jika $a < b$ dan $c < 0$ maka $ac > bc$.

Kasus khusus :

Jika $a < b$ maka $-b < -a$.

(6) Jika $0 < a < b$ dan $0 < c < d$ maka $ac < bd$.

(7) Jika $a > 0$ maka $\frac{1}{a} > 0$.

(8) Misal a dan b keduanya positif atau keduanya negatif

Jika $a < b$ maka $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Penyelesaian pertaksamaan

(1) $2x - 1 < x + 3$

$2x < x + 4$ (kedua ruas ditambah 1)

$x < 4$ (kedua ruas dikurangi x)

Jadi, solusi atau himpunan penyelesaian (HP) $= (-\infty, 4)$.

(2) $4 \leq 3x - 2 < 13$

$6 \leq 3x < 15$ (kedua ruas ditambah 2)

$2 \leq x < 5$ (kedua ruas dibagi 3)

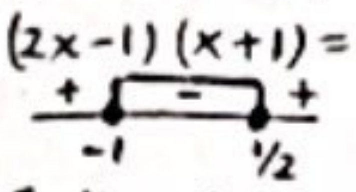
Jadi, solusi atau HP $= [2, 5)$.

(3) $2x^2 + x \leq 1$

$2x^2 + x - 1 \leq 0$ (kedua ruas ditambah -1)

$(2x-1)(x+1) \leq 0$ (difaktorkan)

$(2x-1)(x+1) = 0$ memiliki solusi $x = \frac{1}{2}$ dan $x = -1$

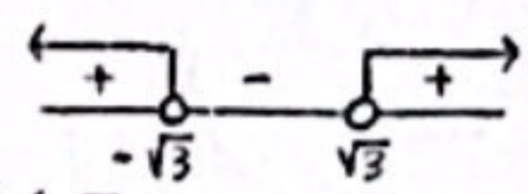


Jadi, solusi atau HP $= [-1, \frac{1}{2}]$.

(4) $x^2 > 3$

$x^2 - 3 > 0$

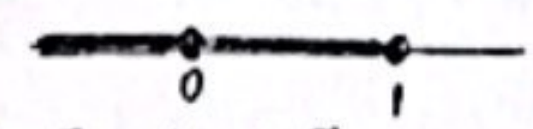
$(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) > 0$



Jadi, HP $= (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$.

(5) $x^3 - x^2 \leq 0$

$x^2(x-1) \leq 0$



Jadi, HP $= (-\infty, 0] \cup [0, 1] = (-\infty, 1]$

*(6) $-3 < \frac{1}{x} \leq 1$

ide : Selesaikan pertaksamaan secara terpisah & kedua solusi diiris

→ $-3 < \frac{1}{x}$

Untuk $x > 0$: pernyataan $-3 < 1/x$ selalu benar

Untuk $x < 0$:

$-3x > 1$ (baca aturan pertaksamaan no. 5)

$x < -\frac{1}{3}$ (dibagi -3)

Jadi, $HP_1 = (-\infty, -1/3) \cup (0, \infty)$.

→ $\frac{1}{x} \leq 1$

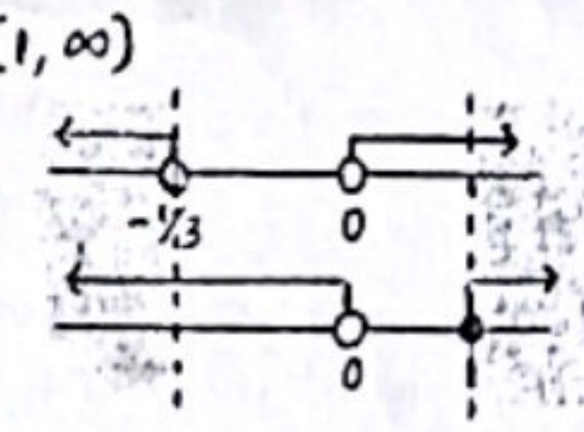
Untuk $x < 0$: pernyataan $1/x \leq 1$ selalu benar

Untuk $x > 0$: $1 \leq x$ atau ...

Jadi, $HP_2 = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$

→ $HP_{total} = HP_1 \cap HP_2$

$= (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup [1, \infty)$.

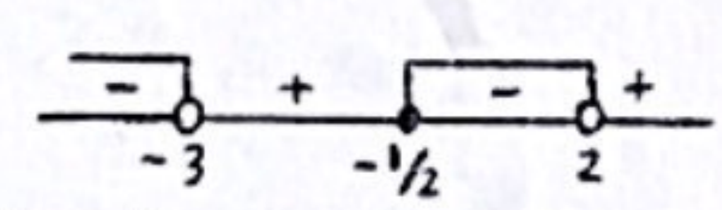


(7) $\frac{x+1}{x-2} \leq \frac{x}{x+3}$

$\frac{x+1}{x-2} - \frac{x}{x+3} \leq 0$

$\frac{(x+1)(x+3) - (x)(x-2)}{(x-2)(x+3)} \leq 0$

$\frac{6x+3}{(x-2)(x+3)} \leq 0$



Jadi, HP $= (-\infty, -3) \cup [-1/2, 2)$.

c) Nilai Mutlak

(1)
$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Contoh:

Ekspresikan $|3x - 2|$ tanpa simbol nilai mutlak

Jwb:

$$|3x-2| = \begin{cases} 3x - 2 & \text{jika } 3x - 2 \geq 0 \\ -(3x-2) & \text{jika } 3x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x - 2 & \text{jika } x \geq \frac{2}{3} \\ 2 - 3x & \text{jika } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

(2) Sifat-sifat nilai mutlak

1. $|-a| = |a|$
2. $|ab| = |a||b|$
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$; $b \neq 0$
4. $|a+b| \leq |a| + |b|$
5. $|x|^2 = |x^2| = x^2$
6. $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$
7. $\sqrt{x^2} = |x|$
8. $|x - y| = |y - x|$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$x^2 - 1^2 = (x-1)(x-1)$

$x - 2 = (\sqrt{x} + 2)$

$(\sqrt{x} - \sqrt{2})$

(3) Untuk $a > 0$

1. $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$
2. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
3. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ atau $x \geq a$

Contoh : tentukan solusi dari persamaan² berikut

(1) $|3x+5| = 1$

$3x+5=-1$; $3x=-6$; $x=-2$ } $3x+5=1$; $3x=-4$; $x=-4/3$

Jadi, solusinya adalah $x=-2$ dan $x=-4/3$.

(2) $|x+3| = |2x+1|$

$x+3=-(2x+1)$; $3x=-4$; $x=-4/3$ ‖ $x+3=2x+1$; $x=2$

· Jadi, solusinya adalah $x=-4/3$ dan $x=2$

(3) $|x-1| = 1-x$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{jika } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{jika } x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & \text{jika } x \geq 1 \\ 1-x & \text{jika } x < 1 \end{cases}$$

$x<1$	$x \geq 1$
$1-x = 1-x$ (selalu benar)	$x-1 = 1-x$
Berlaku $x \in \mathbb{R}$	$2x = 2$
$HP_1 = (-\infty,1) \cap (-\infty,\infty)$	$x = 1$
$= (-\infty,1)$	$HP_2 = [1,\infty) \cap 1 = 1$

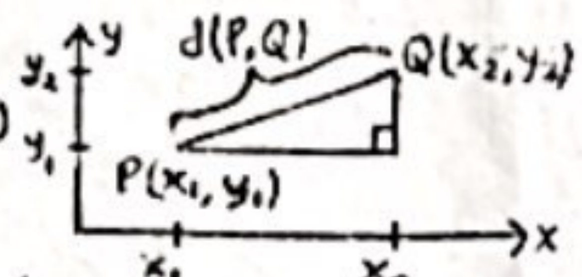
$\therefore HP_{total} = HP_1 \cup HP_2 = (-\infty, 1]$

3 Sistem Koordinat

a) Rumus jarak

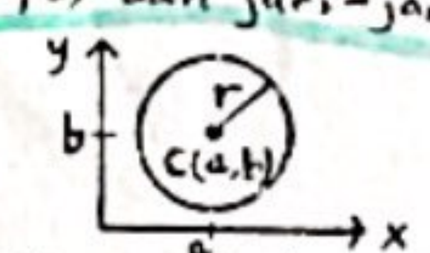
Jarak antara titik $P(x_1,y_1)$ ke $Q(x_2,y_2)$

$d(P,Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

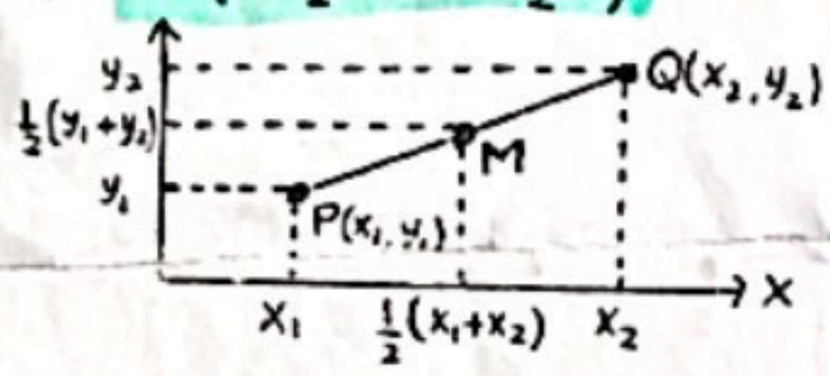


b) Persamaan lingkaran pusat $C(a,b)$ dan jari-jari r

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$



c) Rumus titik tengah dari garis menghubungkan titik $P(x_1,y_1)$ dan $Q(x_2,y_2)$ = $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$



d) Garis

- Gradien / kemiringan, m, melewati titik $P(x_1,y_1)$ & $Q(x_2,y_2)$

  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

  Kemiringan dari suatu garis vertikal: tidak terdefinisi
- Persamaan garis singgung melalui titik $P(x_1,y_1)$ dan kemiringan m : $y-y_1 = m(x-x_1)$
- Persamaan perpotongan-kemiringan : $y = mx + c$

  Garis tsb memotong sumbu-y ($x=0$) di titik $(0,c)$.
- Garis vertikal/tegak : $x = k$

  Garis horisontal/datar : $y = k$

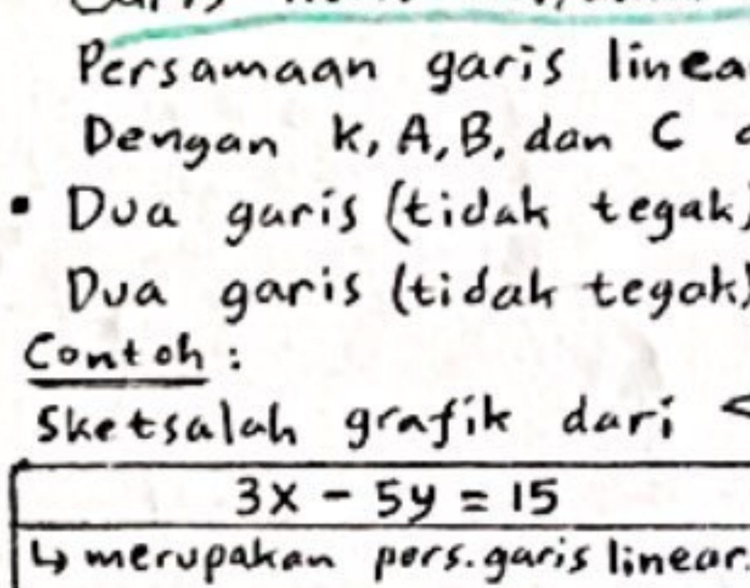
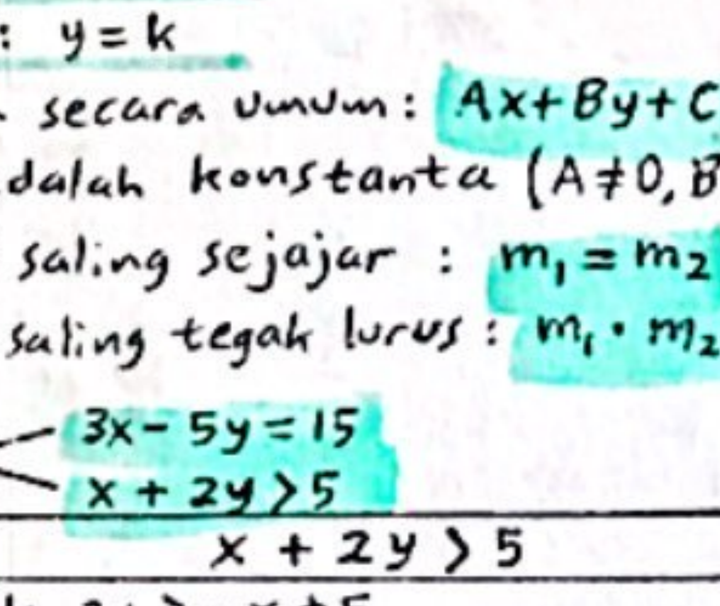
  Persamaan garis linear secara umum: $Ax+By+C=0$

  Dengan $k, A, B,$ dan C adalah konstanta ($A \neq 0, B \neq 0$)
- Dua garis (tidak tegak) saling sejajar : $m_1 = m_2$

  Dua garis (tidak tegak) saling tegak lurus : $m_1 \cdot m_2 = -1$

Contoh :

Sketsalah grafik dari $\begin{cases} 3x-5y=15 \\ x+2y>5 \end{cases}$

$3x-5y=15$	$x+2y>5$
↳ merupakan pers. garis linear.	↳ $2y > -x+5$; $y > -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
↳ perpotongan sumbu-x ($y=0$) diperoleh $3x=15$, $x=5$.	↳ bandingkan dgn $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$, maka $m=-\frac{1}{2}$ & perpotongan sumbu-y di $(0, 5/2)$.
↳ perpotongan sumbu-y ($x=0$) diperoleh $-5y=15$, $y=-3$.	↳ grafik di atas garis $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$
↳ titik² perpotongan sumbu: $(5,0)$ dan $(0,-3)$	
	

4 Grafik Persamaan

a) Prosedur menggambar grafik

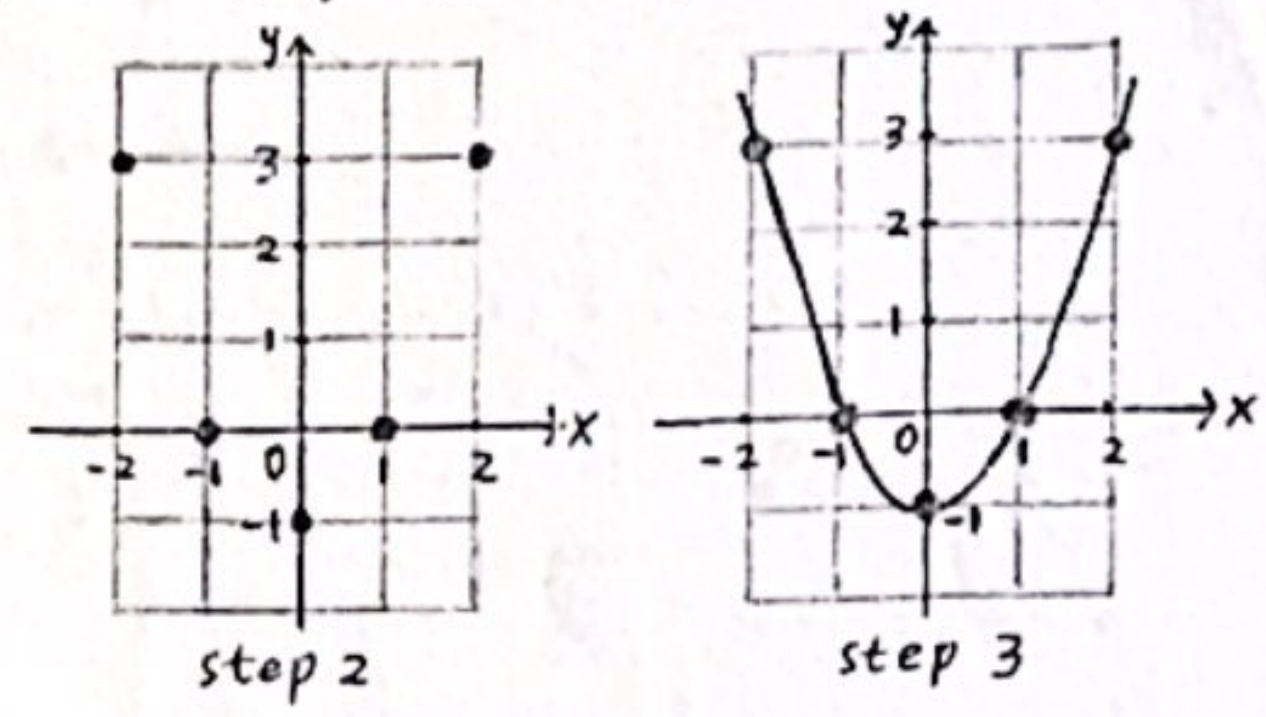
1. Cari koordinat dari beberapa titik yg memenuhi persamaan.
2. Plot titik-titik tsb di atas bidang.
3. hubungkan titik-titik tsb menjadi kurva yg mulus.

Contoh: gambar grafik $y = x^2 - 1$

$y = x^2 - 1$

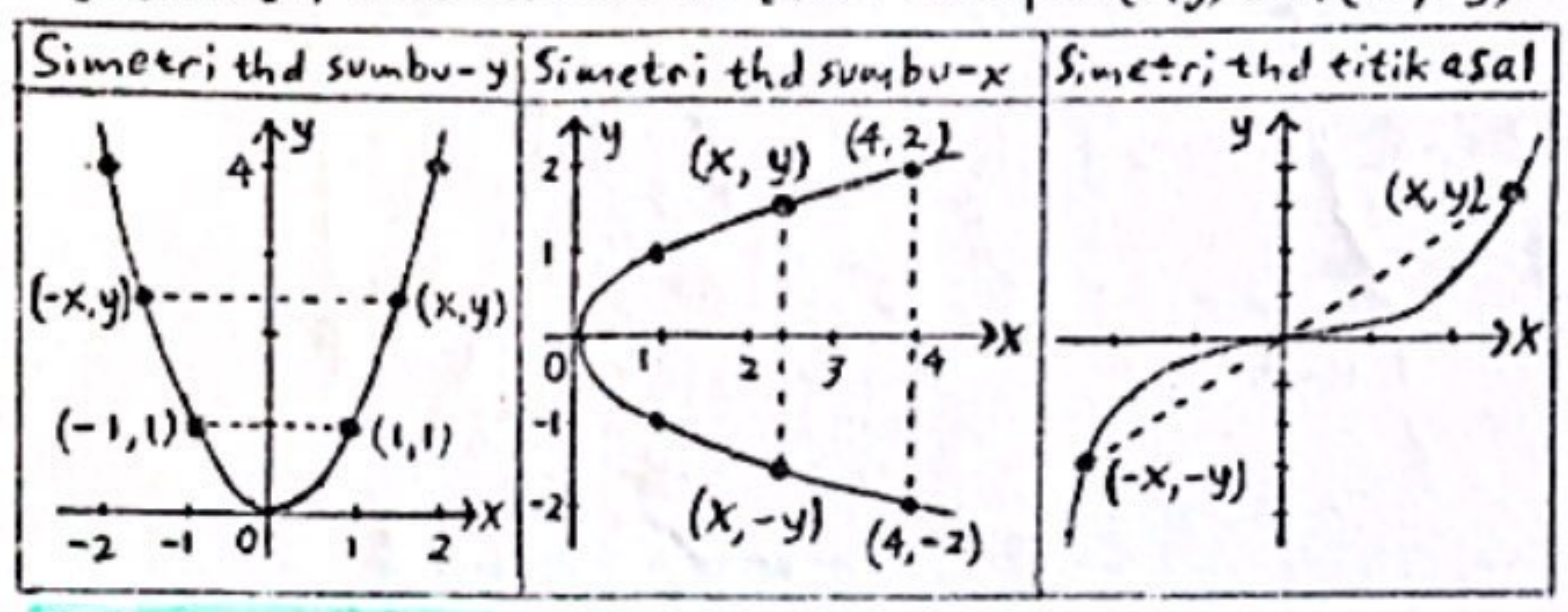
x	y
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3

step 1



b) Kesimetrian dari suatu grafik

1. Simetri thd sumbu-y: terdapat (x,y) dan $(-x,y)$.
2. Simetri thd sumbu-x : terdapat (x,y) dan $(x,-y)$.
3. Simetri thd titik asal $(0,0)$: terdapat (x,y) dan $(-x,-y)$.

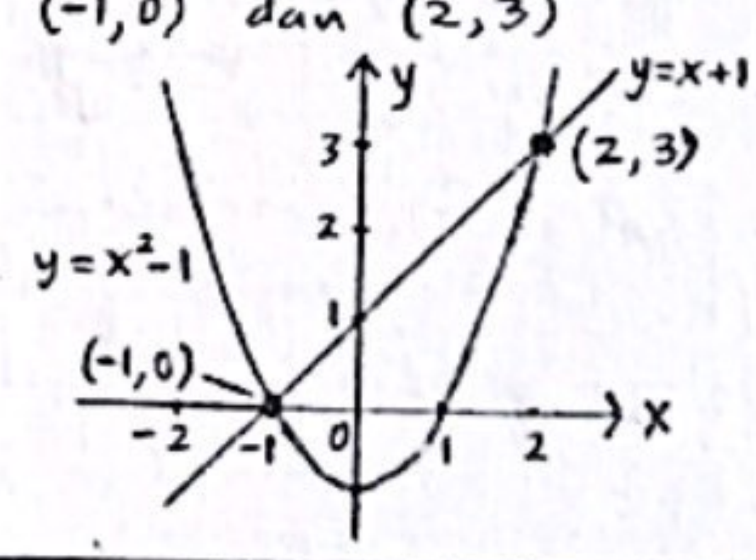
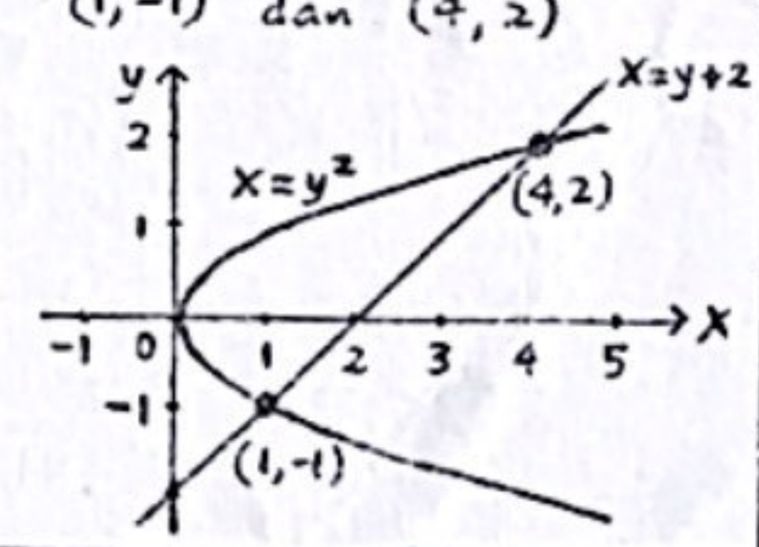


c) Titik perpotongan dari grafik-grafik

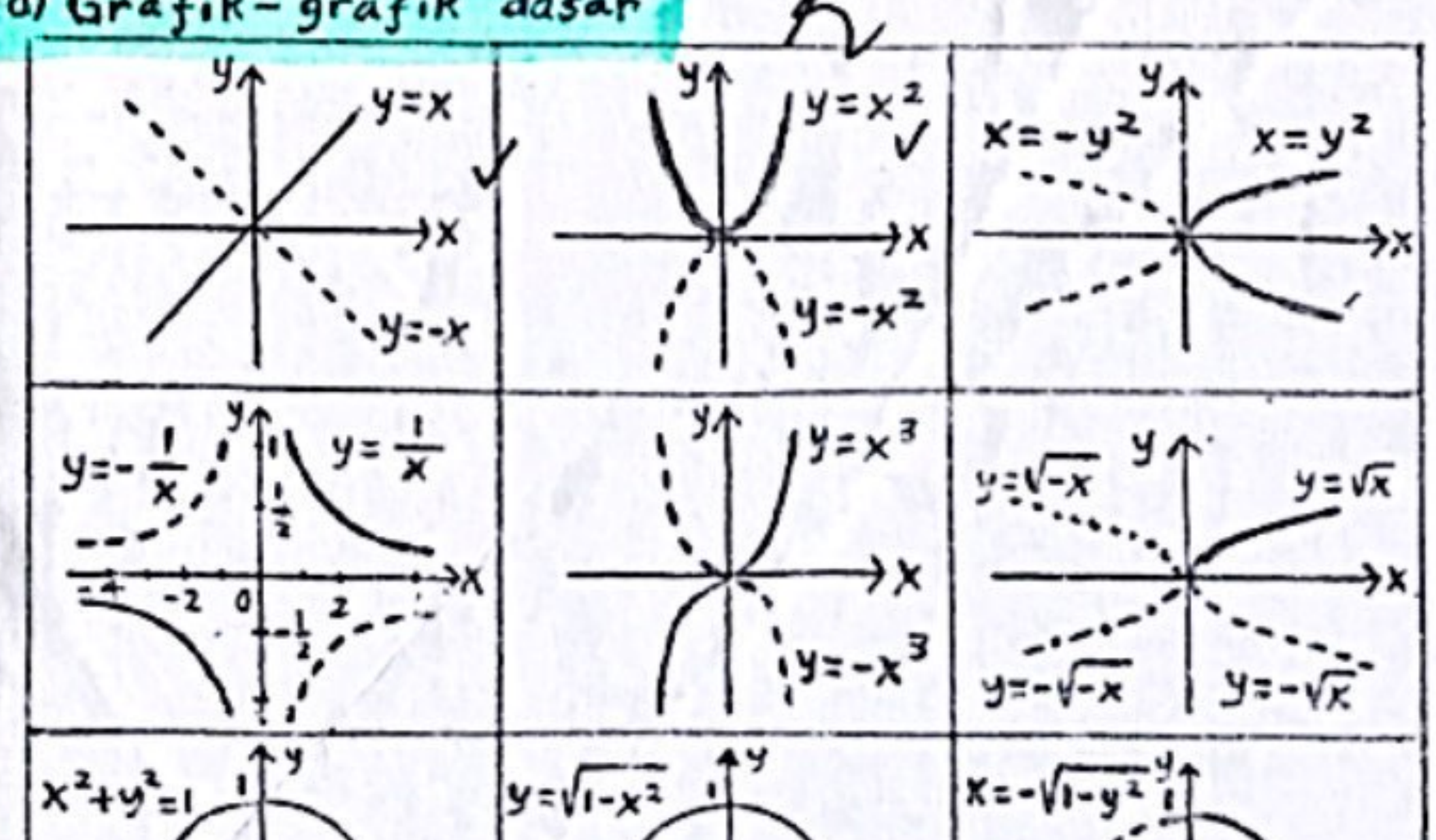
Diperoleh dgn cara menyamakan persamaan²,

$y_1 = y_2$ atau $x_1 = x_2$

Contoh

$y=x^2-1$ dari $y=x+1$	$x=y^2$ dan $x=y+2$
$y_1 = y_2$	$x_1 = x_2$
$x^2-1 = x+1$	$y^2 = y+2$
$x^2-x-2=0$	$y^2-y-2=0$
$(x+1)(x-2)=0$	$(y+1)(y-2)=0$
$x=-1$, maka $y=0$	$y=-1$, maka $x=1$
$x=2$, maka $y=3$	$y=2$, maka $x=4$
Titik potong kedua grafik: $(-1,0)$ dan $(2,3)$	Titik potong kedua grafik : $(1,-1)$ dan $(4,2)$
	

d) Grafik-grafik dasar



5 Fungsi dan Grafiknya

a) Fungsi, domain, dan range

- y sebagai fungsi dari x ditulis sebagai

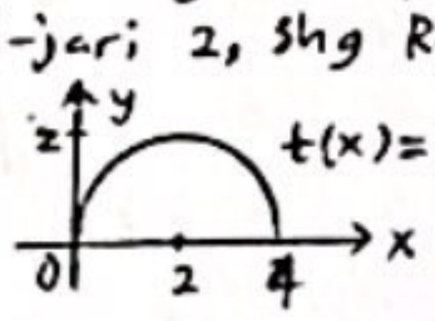
$y = f(x)$ $\quad$ $y = f(x)$

- Fungsi adalah suatu aturan yg mengaitkan setiap unsur di A dgn tepat satu unsur di B (gambar 1).
- Himpunan A dinamakan domain/daerah asal/daerah definisi fungsi f dan ditulis D_f.
- Unsur y yg terkait dgn x dinamakan peta dari x dan ditulis $f(x)$.
- x dinamakan peubah bebas
  y dinamakan peubah tak bebas
- Himpunan $f(x)$ dinamakan daerah nilai/daerah hasil fungsi f dan ditulis R_f.

Gambar 1

Contoh Tentukan domain & range fungsi berikut

1. $f(x) = x^2+1$
   $D_f = \mathbb{R}$ dan $R_f = [1,\infty)$ karena $x^2 \geq 0$ maka $x^2+1 \geq 1$
2. $g(x) = \frac{1}{x}$
   $D_g = (-\infty, 0) \cup (0,\infty)$ dan $R_g = (-\infty,0)\cup(0,\infty)$
3. $h(x) = \frac{2}{3x-1}$
   Agar fungsi h terdefinisi $3x-1 \neq 0$ atau $x \neq \frac{1}{3}$, maka $D_h = (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$ dan $R_h = (-\infty,0)\cup(0,\infty)$.
4. $r(x) = \sqrt{5x+10}$
   Agar fungsi r terdefinisi $5x+10 \geq 0$ atau $x \geq -2$, maka $D_r = [-2,\infty)$ dan $R_r = [0,\infty)$
5. $p(x) = \sqrt{x^2-4x}$
   $x^2-4x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-4) \geq 0$ $\quad$ + 0 − 4 + $\quad$ $\therefore D_p = (-\infty,0] \cup [4,\infty)$
   $R_p = [0,\infty)$
6. $t(x) = \sqrt{4x-x^2}$
   $4x-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(4-x) \geq 0$ $\quad$ − 0 + 4 − $\quad$ $\therefore D_t = [0,4]$
   $y = \sqrt{4x-x^2}$
   $y^2 = 4x-x^2$
   $x^2-4x+y^2 = 0$
   $(x-2)^2-4+y^2 = 0$
   $(x-2)^2+y^2 = 4$
   $y \geq 0$ maka lingkaran pusat di $(2,0)$ dan jari-jari 2, shg $R_t = [0,2]$

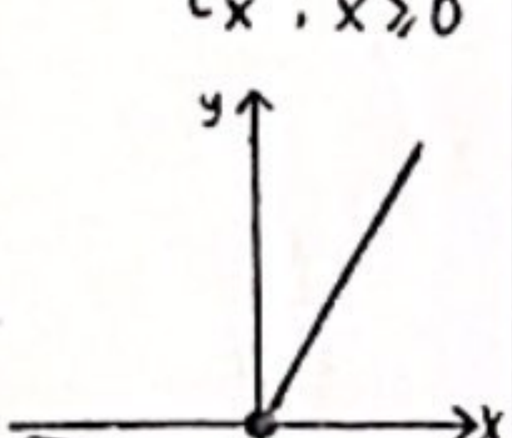
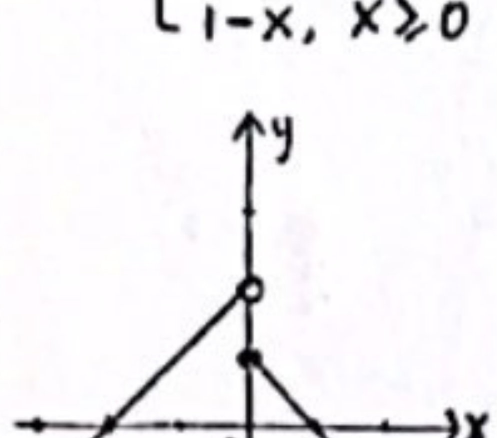
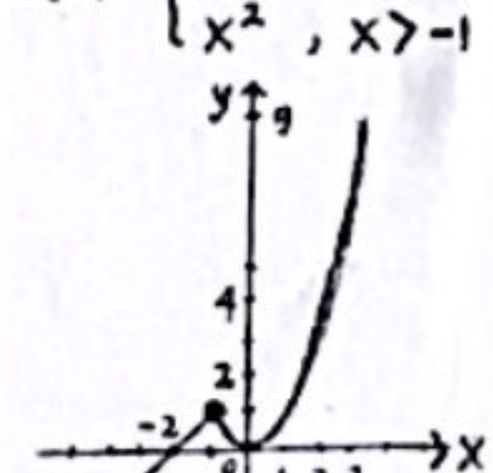


7. $w(x) = \sqrt{16-x^4}$
   Agar fungsi w terdefinisi :
   $16-x^4 \geq 0 \Leftrightarrow (4-x^2)(4+x^2) \geq 0$
   Karena $4+x^2$ definit positif maka
   $(4-x^2) \geq 0 \Leftrightarrow (2+x)(2-x) \geq 0$ $\quad$ − −2 + 2 − $\quad$ $\therefore D_w = [-2,2]$
   $y \geq 0$ dan $y \leq \sqrt{16}$ maka $0 \leq y \leq 4$ $\therefore R_w = [0,4]$

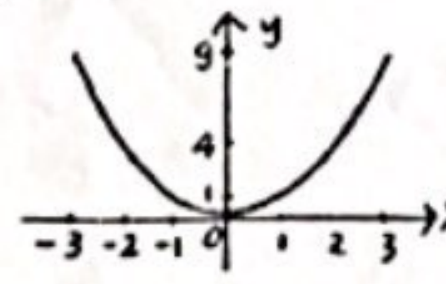
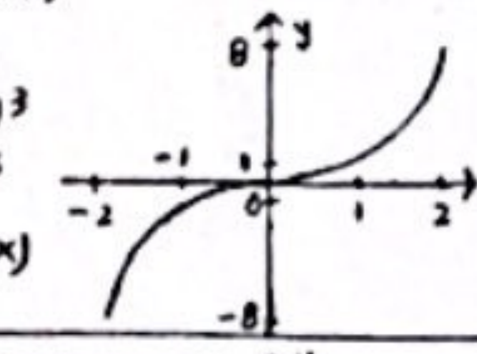
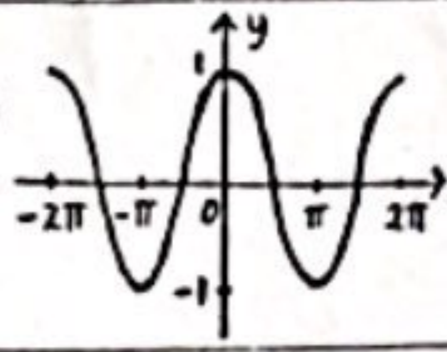
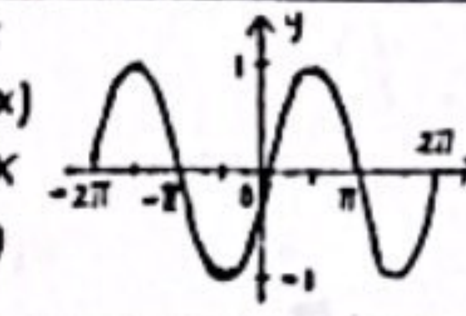
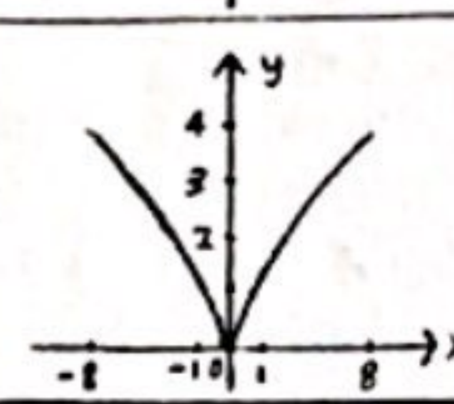
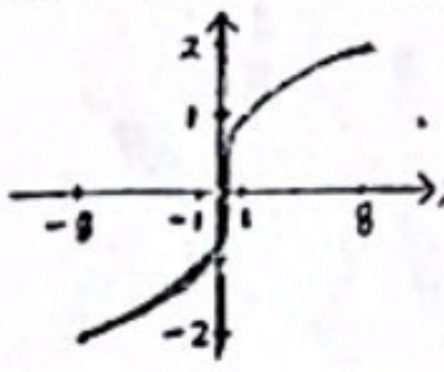
b) Fungsi dengan banyak aturan

Fungsi mempunyai lebih dari satu aturan di domainnya

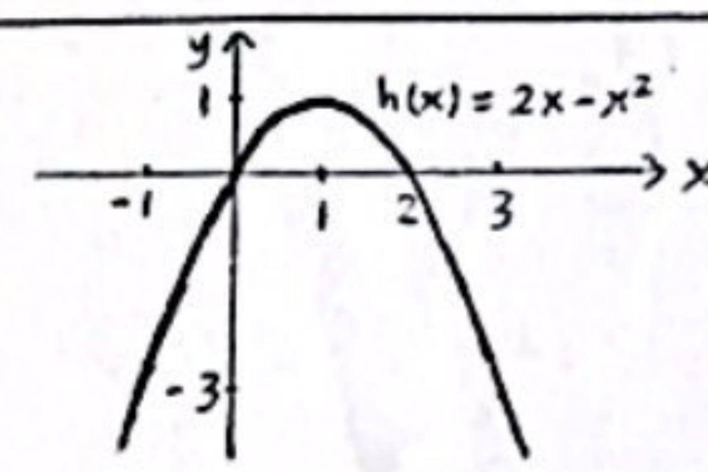
Contoh

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x<0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$	$g(x) = \begin{cases} x+2, & x<0 \\ 1-x, & x \geq 0 \end{cases}$	$h(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1 \\ x^2, & x>-1 \end{cases}$
		

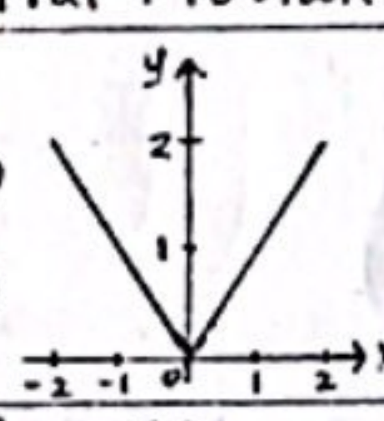
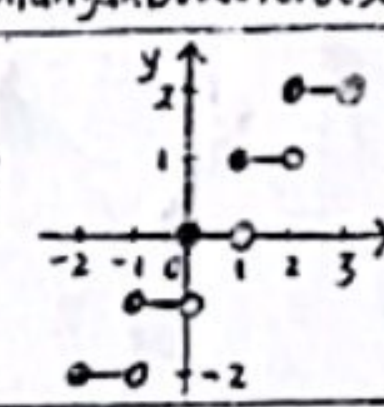
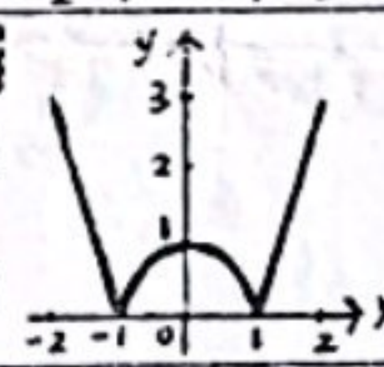
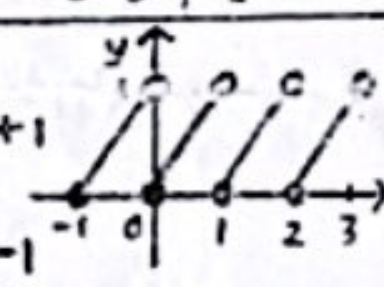
c) Fungsi genap dan fungsi ganjil

Fungsi Genap		Fungsi Ganjil	
• $f(-x) = f(x)$ • simetri thd sumbu-y		• $g(-x) = -g(x)$ • Simetri thd titik asal $(0,0)$	
• Contoh : $f(x) = x^2$ $f(-x) = (-x)^2$ $= x^2$ $= f(x)$		• Contoh : $g(x) = x^3$ $g(-x) = (-x)^3$ $= -x^3$ $= -g(x)$	
$f(x) = \cos x$ $f(-x) = \cos(-x)$ $= \cos x$ $= f(x)$		$g(x) = \sin x$ $g(-x) = \sin(-x)$ $= -\sin x$ $= -g(x)$	
$f(x) = x^{2/3}$ $f(-x) = (-x)^{2/3}$ $= ((-x)^2)^{1/3}$ $= x^{2/3}$ $= f(x)$		$g(x) = x^{1/5}$ $g(-x) = (-x)^{1/5}$ $= -x^{1/5}$ $= -g(x)$	

$h(x) = 2x - x^2$
$h(-x) = 2(-x)-(-x)^2$
$= -2x - x^2$
Karena $h(-x) \neq h(x)$ dan $h(-x) \neq -h(x)$ maka fungsi h bukan fungsi genap atau ganjil.



d) Dua fungsi spesial

Fungsi Nilai Mutlak		Fungsi Tangga/Bilangan Bulat Terbesar	
$f(x) = \lvert x \rvert$ $= \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$		$r(x) = [\![x]\!]$ $-2 \leq x < -1, r(x) = -2$ $-1 \leq x < 0, r(x) = -1$ $0 \leq x < 1, r(x) = 0$ $1 \leq x < 2, r(x) = 1$ $2 \leq x < 3, r(x) = 2$	
$g(x) = \lvert x^2-1 \rvert$ $= \begin{cases} x^2-1, & \lvert x \rvert \geq 1 \\ 1-x^2, & \lvert x \rvert < 1 \end{cases}$		$u(x) = x - [\![x]\!]$ $-1 \leq x < 0, u(x) = x+1$ $0 \leq x < 1, u(x) = x$ $1 \leq x < 2, u(x) = x-1$ $2 \leq x < 3, u(x) = x-2$	

6 Operasi pada Fungsi

a) Operasi aljabar

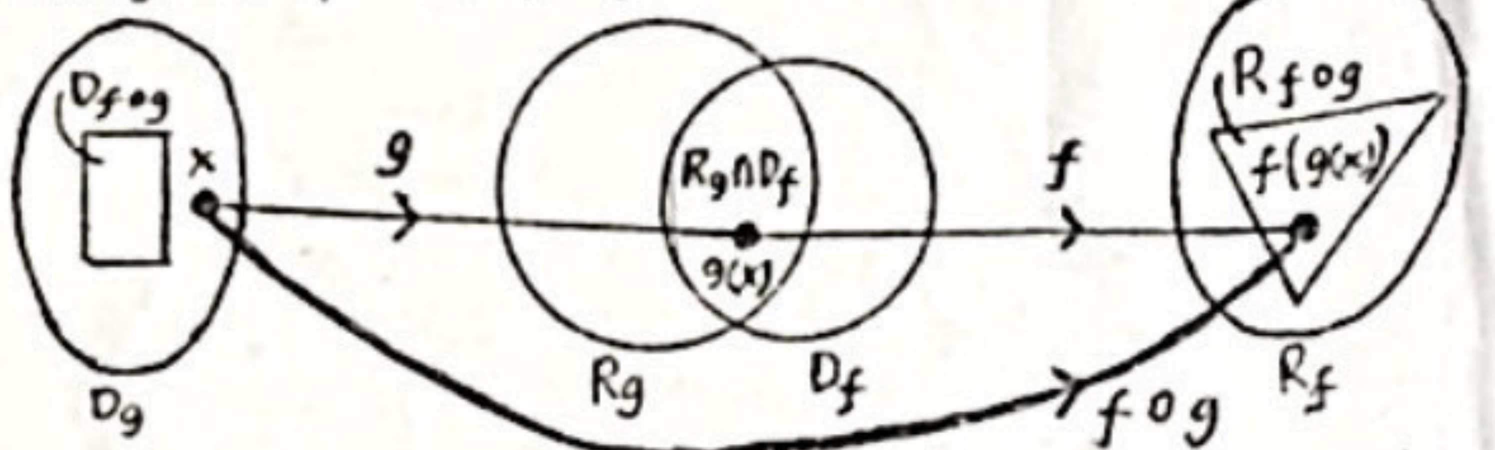
- Penjumlahan : $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
- Pengurangan : $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$
- Perkalian : $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- Pembagian : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

- Domain dari penjumlahan, pengurangan & perkalian adalah irisan kedua fungsi, yaitu $D_f \cap D_g$.
  Domain dari pembagian adalah irisan kedua fungsi dgn syarat tambahan fungsi penyebut $\neq 0$.
- Contoh :
  $f(x) = \sqrt{3-x}$, $D_f = (-\infty, 3]$
  $g(x) = \sqrt{x^2-1}$, $D_g = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$
  maka $D_f \cap D_g = (-\infty,-1] \cup [1,3]$

Operasi	Rumus	Domain
$f+g$	$(f+g)(x) = \sqrt{3-x} + \sqrt{x^2-1}$	$(-\infty,-1] \cup [1,3]$
$f-g$	$(f-g)(x) = \sqrt{3-x} - \sqrt{x^2-1}$	$(-\infty,-1] \cup [1,3]$
$g-f$	$(g-f)(x) = \sqrt{x^2-1} - \sqrt{3-x}$	$(-\infty,-1] \cup [1,3]$
fg	$(fg)(x) = \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{x^2-1}$	$(-\infty,-1] \cup [1,3]$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f}{g}(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x^2-1}}$	$(-\infty,-1) \cup (1,3]$
$\frac{g}{f}$	$\frac{g}{f}(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{3-x}}$	$(-\infty,-1] \cup [1,3)$

b) Fungsi komposisi

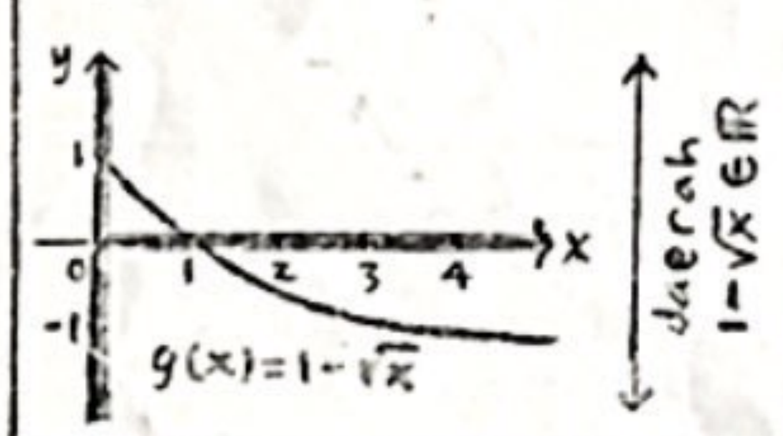
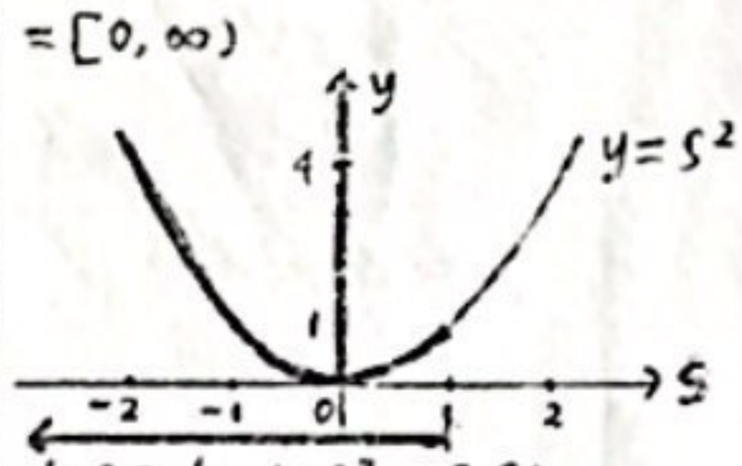
- Fungsi $f: D_f \to R_f$ dan $g: D_g \to R_g$ dgn $R_g \cap D_f \neq \varnothing$ (tak kosong)
- $f \circ g$ (g dilanjutkan f) dgn aturan $(f\circ g)(x) = f(g(x))$
- Domain $f\circ g$, $D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$
  Range $f\circ g$, $R_{f\circ g} = \{y \in R_f \mid y = f(s),\ s \in R_g\}$
  Berlaku sebaliknya untuk komposisi $f\circ g$.
- Diagram panah fungsi komposisi $f\circ g$



- Contoh: Cari domain dan range dari $f\circ g$ dan $g\circ f$.
  $f(x) = x^2$ maka $D_f = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ dan $R_f = [0, \infty)$
  $g(x) = 1 - \sqrt{x}$ maka $D_g = [0, \infty)$ dan $R_g = (-\infty, 1]$

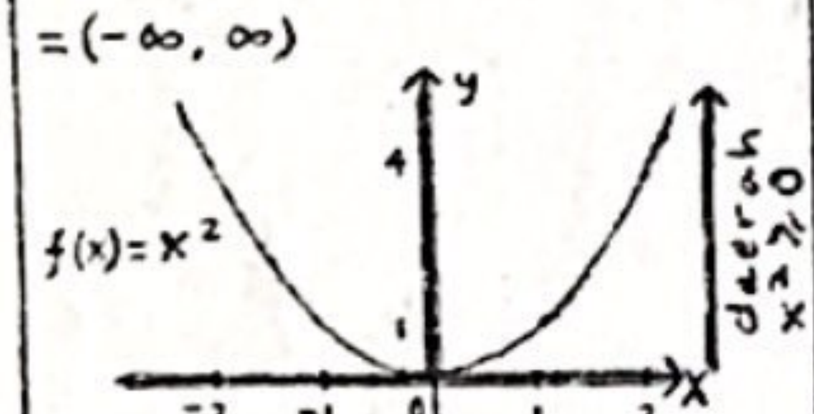
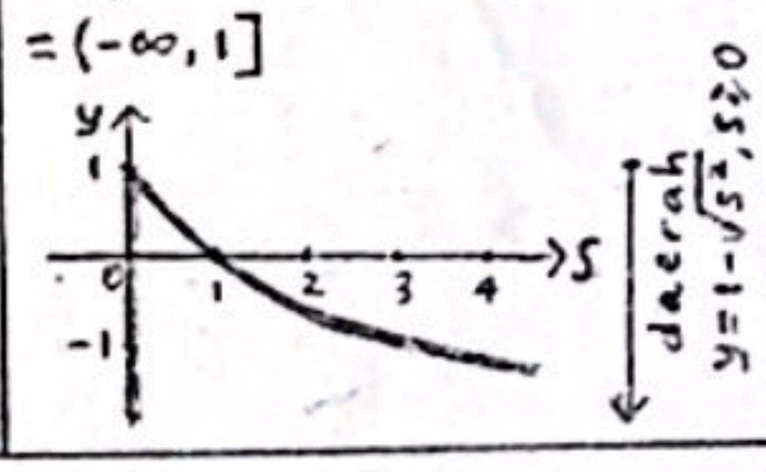
$f\circ g$

Karena $R_g \cap D_f = (-\infty, 1] \cap \mathbb{R} = (-\infty, 1] \neq \varnothing$, maka $f\circ g$ terdefinisi dgn $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = (1-\sqrt{x})^2 = 1 - 2\sqrt{x} + x$

Domain, $D_{f\circ g}$	Range, $R_{f\circ g}$
$= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$	$= \{y \in R_f \mid y = f(s),\ s \in R_g\}$
$= \{x \geq 0 \mid 1 - \sqrt{x} \in \mathbb{R}\}$	$= \{y \in \mathbb{R} \mid y = s^2,\ s \leq 1\}$
$= [0, \infty)$	$= [0, \infty)$
	

$g\circ f$

Karena $R_f \cap D_g = [0,\infty) \cap [0,\infty) = [0,\infty) \neq \varnothing$, maka $g\circ f$ terdefinisi dgn $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = 1 - \sqrt{x^2} = 1 - |x|$

Domain, $D_{g\circ f}$	Range, $R_{g\circ f}$
$= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$	$= \{y \in R_g \mid y = g(s),\ s \in R_f\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 0\}$	$= \{y \leq 1 \mid y = 1 - \sqrt{s},\ s \geq 0\}$
$= (-\infty, \infty)$	$= (-\infty, 1]$
	

c) Transformasi suatu fungsi

1) Pergeseran vertikal dan horizontal, $c > 0$

- $y = f(x) + c$, geser grafik $y = f(x)$ ke atas sejauh c satuan
- $y = f(x) - c$, geser grafik $y = f(x)$ ke bawah sejauh c satuan
- $y = f(x - c)$, geser grafik $y = f(x)$ ke kanan sejauh c satuan
- $y = f(x + c)$, geser grafik $y = f(x)$ ke kiri sejauh c satuan

2) Pelebaran vertikal dan horisontal, $c > 1$

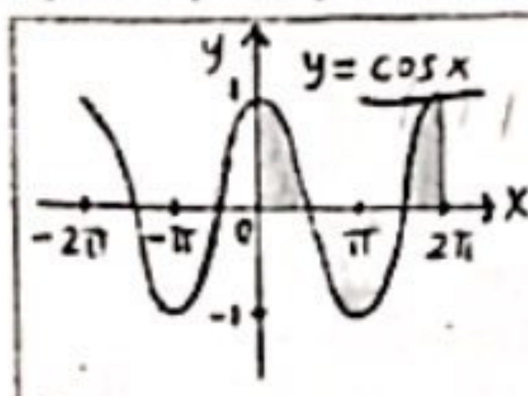
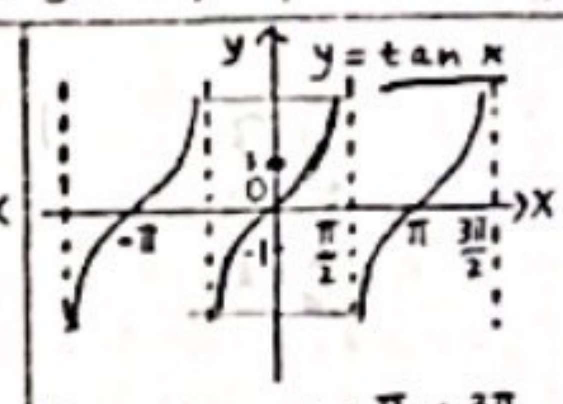
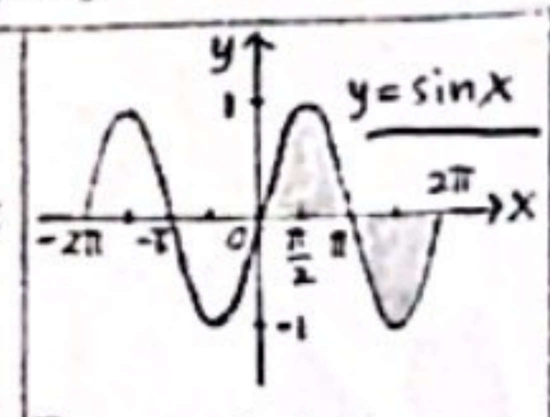
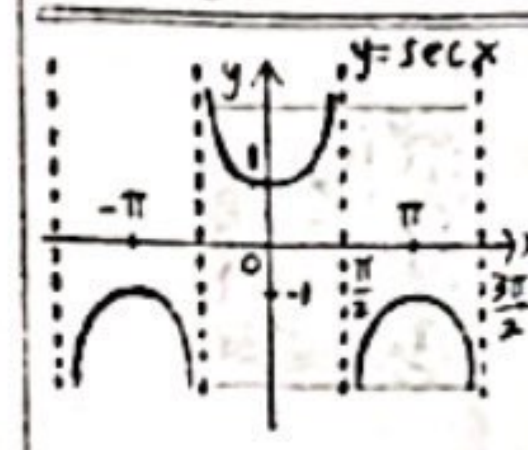
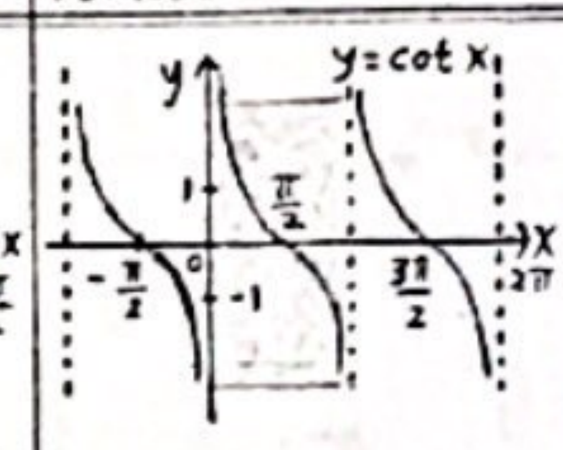
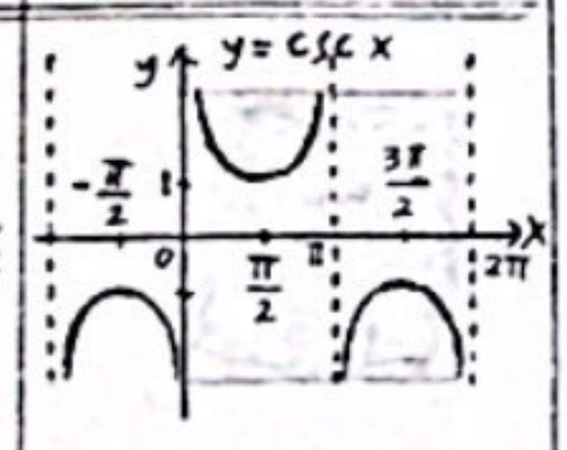
- $y = c f(x)$, perlebar grafik $y = f(x)$ secara vertikal dgn faktor c
- $y = \left(\frac{1}{c}\right) f(x)$, perkecil grafik $y = f(x)$ secara vertikal dgn faktor c
- $y = f(cx)$, perkecil grafik $y = f(x)$ secara horisontal dgn faktor c
- $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$, perlebar grafik $y = f(x)$ secara horisontal dgn faktor c

3) Pencerminan

- $y = -f(x)$, grafik $y = f(x)$ dicerminkan thd sumbu-x
- $y = f(-x)$, grafik $y = f(x)$ dicerminkan thd sumbu-y
- $y = -f(-x)$, grafik $y = f(x)$ dicerminkan thd titik asal $(0,0)$

7 Fungsi Trigonometri

a) Grafik-grafik dan keperiodikan fungsi trigonometri
$f(x + p) = f(x)$ dengan p = periode, $p > 0$.

		
Domain: $-\infty < x < \infty$	Domain: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$	Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $-1 \leq y \leq 1$	Range: $-\infty < y < \infty$	Range: $-1 \leq y \leq 1$
Periode: 2π	Periode: π	Periode: 2π
		
Domain: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$	Domain: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$	Domain: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Range: $y \leq -1$ atau $y \geq 1$	Range: $-\infty < y < \infty$	Range: $y \leq -1$ atau $y \geq 1$
Periode: 2π	Periode: π	Periode: 2π

b) Identitas trigonometri

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

c) Rumus penjumlahan

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cdot \cos B \pm \cos A \cdot \sin B$$
$$\cos(A \pm B) = \cos A \cdot \cos B \mp \sin A \cdot \sin B$$

d) Rumus sudut rangkap

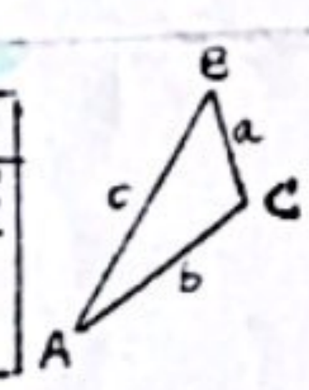
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \qquad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

e) Rumus setengah-sudut

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad \sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

f) Aturan cosinus dan aturan sinus

Aturan cosinus	Aturan sinus
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$	
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$	



g) Fungsi-fungsi kebalikan

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

h) Transformasi dari grafik trigonometri

$$y = A \cdot \sin(Bx + C) + D$$

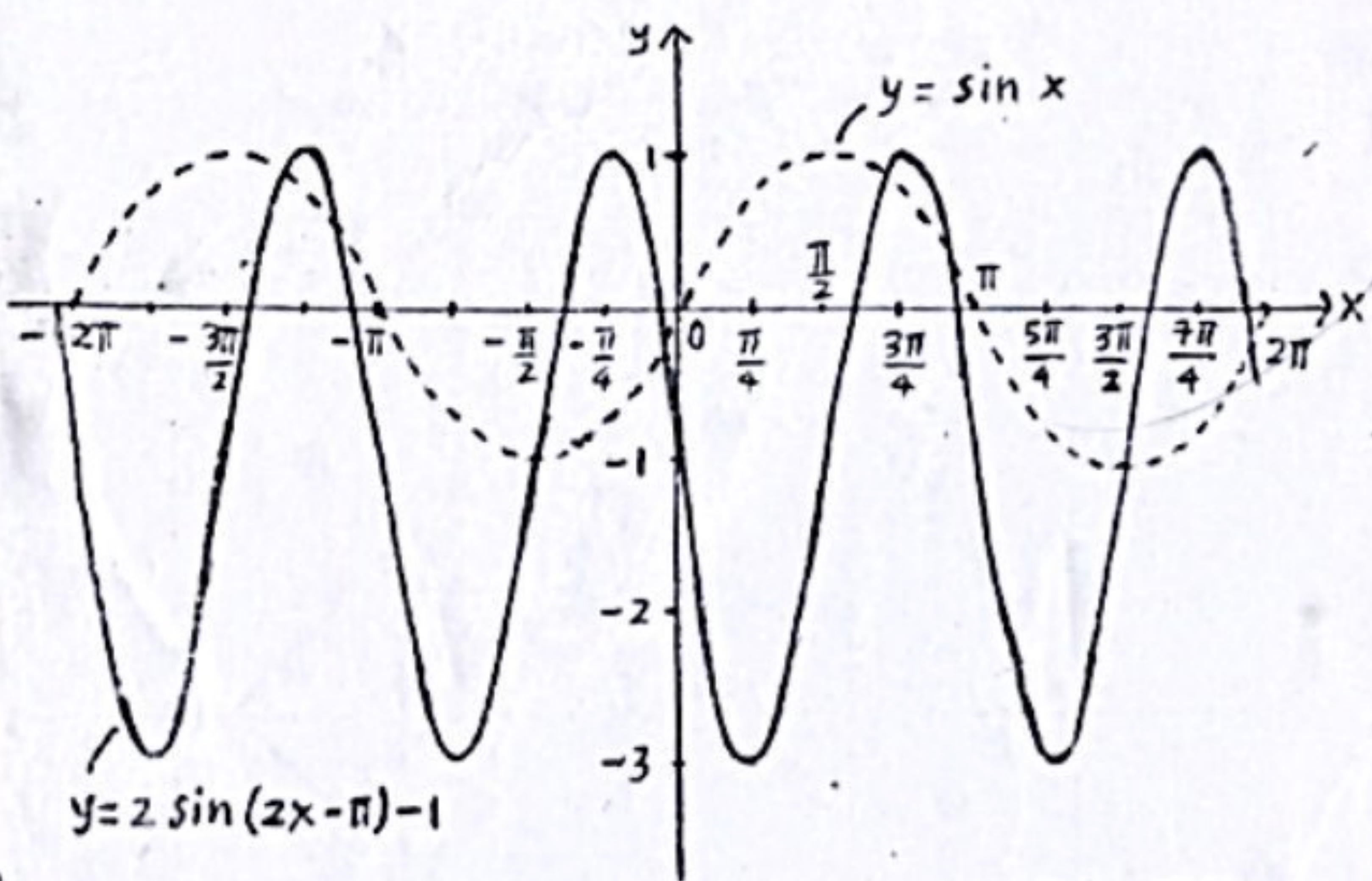
- A = amplitudo
- C = pergeseran horisontal
- D = pergeseran vertikal

periode $= \frac{2\pi}{B}$ (berlaku thd fungsi cosinus dan sinus)

Contoh

$y = 2\sin(2x - \pi) - 1 = 2\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] - 1$

Periode $= \frac{2\pi}{2} = \pi$, amplitudo $= 2$, geser ke kanan $= \frac{\pi}{2}$, dan geser ke bawah 1 satuan.



 @pandugus1550

$\varnothing$ atau $\{\}$; Himpunan kosong