

Lasers e Óptica Biomédica

Mestrado em Física Médica

3 de Abril de 2016

Os problemas desta colecção foram seleccionados da bibliografia da UC, e de séries de problemas de cadeiras de Electromagnetismo e Fundamentos de Óptica de anos anteriores.

Conteúdo

1 Ondas Electromagnéticas e Óptica	3
1.1 Características das ondas e.m.	3
1.2 prismas e guias de onda	4
1.3 Equações de Fresnel	5
1.4 Formação de Imagem - lentes	6
1.5 Formação de Imagem - espelhos	7
1.6 Sistemas Ópticos	7
1.7 Instrumentos Ópticos	10
1.8 Polarização	11
1.9 Interferência / difracção Óptica	12
1.10 Medidas Doppler	13
2 Luz e Matéria	15
2.1 Sistemas Ópticos em LOB	15
2.2 meios opacos - propriedades de tecidos biológicos	16
2.3 meios opacos - espalhamento (<i>scattering</i>) e funções de fase	18

Referências

- [1] Engineering toolbox - database. http://www.engineeringtoolbox.com/specific-heat-capacity-d_339.html. Consultado em Março de 2016.
- [2] R. Blum and D. E. Roller. *Physics - Electricity, Magnetism, and Light*, volume 2. Holden-Day, 1982.
- [3] Markolf H. Niemz. *Laser-Tissue Interactions*. Springer, 2007.
- [4] Eugene Hecht. *Optics*. Addison-Wesley (english) ou FCGulbenkian (português), 3 edition, vários.
- [5] P. Lorrain, D. Corson, and F. Lorrain. *Campos e Ondas Electromagnéticas*. Fundação Calouste Gulbenkian, 2000.
- [6] F. L. Pedrotti and L. S. Pedrotti. *Introduction to Optics*. Prentice-Hall, 1996.
- [7] Julia L. Sandell and Timothy C. Zhu. A review of in-vivo optical properties of human tissues and its impact on pdt. *J Biophotonics*, ((11-12)):773,Äi787, November 2011.
- [8] R. Splinter and B. A. Hooper. *An Introduction to Biomedical Optics*. Series in Optics and Optoelectronics. Taylor & Francis, 2006.
- [9] Tipler. *Physics*. 4 edition.

1 Ondas Electromagnéticas e Óptica

1.1 Características das ondas e.m.

- Um meio material é perturbado pela oscilação descrita por: $y = 3 \sin(\pi x/10) \sin(\omega t)$ (x e y em centímetro, t em segundo). Determine a amplitude, frequência, comprimento de onda, velocidade e direcção das duas ondas cuja sobreposição produz este resultado.
 - Calcule o número de comprimentos de onda de luz vermelha emitida por um laser de Hélio-Néon, $\lambda = 632.8$ nm, que cabem numa folha de papel de espessura 0.075 mm. Qual o espaço ocupado pelo mesmo número de comprimentos de onda, considerando radiação de microondas à frequência $f = 10$ GHz?
- Uma nuvem de gafanhotos, de densidade de 100 insectos por metro cúbico, voa na direcção norte à velocidade de 6 m/min. Qual é a densidade de fluxo dos gafanhotos, i.e quantos gafanhotos atravessam uma área de 1 m^2 , perpendicular à sua trajectória, por segundo?
- Está nas proximidades de uma antena que emite ondas planas a uma frequência de 100 MHz e com uma densidade de fluxo de $20 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2$. Calcule a densidade de fluxo de fótons. Quantos fótons se encontram, em média, por metro cúbico?
- Uma lâmpada de flash (3.0 V, 0.25 A) converte cerca de 10% da potência dissipada em luz ($\lambda \approx 550$ nm). Se o feixe tiver uma secção inicial de 5 cm^2 :
 - quantos fótons são emitidos por segundo?
 - quantos fótons ocupam cada metro de feixe?
 - quais as características do vector de Poynting (direcção e magnitude) à saída da lâmpada?
- Uma onda plana monocromática, polarizada linearmente, e com uma amplitude de 10 V/m propaga-se ao longo de uma direcção a 45° com o eixo dos x e sobre o plano xy . O plano de polarização da onda é o plano xy .
 - Represente esquematicamente a propagação da onda no espaço xyz , representando também os vectores dos campos eléctrico e magnético.
 - Escreva uma expressão vectorial que descreva a onda assumindo que k_x e k_y são valores positivos.
 - Calcule a densidade do fluxo para a onda no vazio.
- A intensidade média da radiação solar na órbita da Terra é $S = 1353 \text{ Wm}^{-2}$.
 - Determine a intensidade média sobre a superfície solar (raio do Sol $r_{sol} = 7 \times 10^8$ m, distância Terra-Sol $d_{T-s} = 1.5 \times 10^{11}$ m).
 - Determine o valor eficaz (E_{rms}) do campo eléctrico na superfície do Sol.
 - Determine o valor eficaz (H_{rms}) da indução magnética na superfície do Sol.
- Um laser emite impulsos de luz infra-vermelha a 800 nm de duração de 10.0 fs. O diâmetro do feixe é de 2.5 mm e a energia de cada impulso é de 6.0 mJ.
 - Determine o número de ciclos ópticos dentro de cada trem de ondas ;

- b) Calcule a energia média por unidade de volume e a densidade de momento para um tal impulso.
 - c) Determine o valor máximo do campo eléctrico dentro de cada trem de onda, admitindo que a descrição de onda plana ainda é válida.
8. Um laser de He-Ne emite um feixe luminoso com 2 mm de diâmetro e 5 mW de potência com comprimento de onda de 632.8 nm.
- a) Determine a intensidade S das ondas luminosas.
 - b) Determine o valor quadrático médio do campo eléctrico.
 - c) Determine a frequência das ondas.
9. Luz de intensidade S incide num espelho com um ângulo θ relativamente à superfície do espelho.
- a) Qual é a pressão da luz sobre o espelho?
 - b) Se uma fracção (a) da energia incidente for absorvida pelo espelho, qual será a pressão exercida sobre o espelho?
10. Luz de densidade de energia u incide sobre uma esfera. Uma fracção da energia α é absorvida e a restante reflectida. Determinar:
- a) a força por unidade de área sobre a esfera, na direcção de incidência,
 - i. devida à absorção;
 - ii. devida à reflexão;
 - b) a força total sobre a esfera.
11. Uma nave espacial de densidade média 8 g/cm^3 tem a forma de uma esfera de raio R e é projectada com uma superfície exterior metálica, polida, de espessura 5 cm. Determine a distância percorrida pela nave em deriva durante um ano se esta estiver apenas sob a influência da radiação solar, e assumindo que nunca passa pela zona de sombra da Terra. Ignore todas as outras forças (mas tente enumerá-las), e exprima o resultado em função de números de raios da terra ($R_{Terra} = 6400 \text{ km}$). Justifique eventuais aproximações.
12. Considere um astronauta flutuando no espaço livre equipado apenas com uma lanterna de 10 W e alimentada por uma bateria inesgotável. Quanto tempo levará o astronauta a atingir a velocidade de 10 m/s se fizer uso da radiação como mecanismo de propulsão? A massa total do astronauta, completamente equipado, é de 100 kg. E como deve o astronauta utilizar a lanterna?

1.2 prismas e guias de onda

1. Considere uma lâmina de vidro de faces planas e paralelas, imersa no ar.
- a) Prove que um raio incidente segundo um ângulo θ_i , emerge da lâmina segundo o mesmo ângulo.
 - b) Derive uma expressão para o deslocamento lateral a do raio, se a espessura da lâmina for d .

2. Um prisma de ângulo α é utilizado para desviar um feixe de luz. O ângulo de desvio em relação à direcção inicial do feixe, d , depende das características do prisma e do ângulo de incidência na sua face. Mostre que existe um ângulo mínimo de desvio δ_{min} , e que nessa situação o feixe que atravessa o prisma é paralelo à sua base.
3. Considere um bloco de acrílico de superfícies planas, de espessura d e de faces paralelas. A superfície do bloco é iluminada com um feixe de luz de pequeno diâmetro, cuja direcção de incidência está desviada de um ângulo α em relação à normal da superfície.
 - a) Esquematize a propagação do feixe de luz a partir da incidência na lâmina.
 - b) Derive uma expressão que permita conhecer o deslocamento lateral do feixe a , em relação à direcção inicial de propagação.
4. Considere uma fina fibra de vidro, de material transparente a luz de comprimento de onda visível com n_n , de secção circular, envolvida por uma fina cobertura de índice de refração mais baixo, n_c . Pretende inserir-se um feixe de luz de pequena dimensão transversal através de uma das extremidades da fibra.
 - a) se θ_{max} traduzir o ângulo máximo de incidência no topo da fibra que garante a guiagem de luz, mostre que:

$$\sin \theta_{max} = \frac{\sqrt{n_n^2 - n_c^2}}{n_n}$$

- b) Quais os ângulos de incidência permitidos no acoplamento da luz do ar para a fibra ($n_n = 1.5$ e $n_c = 1.48$) para que a radiação se propague ao longo da fibra?

1.3 Equações de Fresnel

1. Calcule a percentagem de intensidade luminosa reflectida na interface ar-vidro ($n_{ar} = 1.0003$ e $n_{vidro} = 1.52$), em incidência normal.
 - a) Repita os cálculos, considerando agora que existe uma camada de água sobre o vidro ($n_{agua} = 1.333$), desprezando reflexões múltiplas e efeitos de interferência.
2. O feixe de um apontador laser (laser semiconductor) incide sobre o centro da face superior de um cubo, num ângulo de 45° com a normal à superfície. O plano de incidência da luz divide virtualmente o cubo em dois blocos de faces paralelas. O índice de refração do cubo é $n = 1.414$.
Trace o percurso do feixe luminoso através do cubo, com todo o detalhe possível.
3. Uma lâmpada de 100 W está colocada a 1 m da superfície da água. Assuma que toda a a potência eléctrica é convertida em potência luminosa. O índice de refração da água é $n = 1.33$.
 - a) Calcular o valor quadrático médio dos campos eléctrico e magnético relativos aos feixes luminosos incidente, reflectido e refractado, na superfície da água, mesmo abaixo da lâmpada.
 - b) Determinar os coeficientes de reflexão e transmissão.

1.4 Formação de Imagem - lentes

1. Uma esfera de vidro, de diâmetro de 10 cm e índice de refração de 1.53, tem duas pequenas bolhas de ar no seu interior. Uma das bolhas parece estar exactamente no centro da esfera, enquanto que a outra parece estar a meio caminho entre o centro e a superfície frontal. Determine as posições reais das duas bolhas.
2. Uma lente biconvexa tem 5 cm de diâmetro e espessura nula nos bordos. Um objecto pontual, situado no eixo que passa pelo centro da lente, forma uma imagem real no eixo, do outro lado da lente. As distâncias do objecto e da imagem ao plano que bissecta a lente são iguais com o valor de 30 cm. O índice de refração do vidro da lente tem o valor de 1.52. Usando a equivalência dos caminhos ópticos, determine a espessura da lente no seu centro.
3. O raio de curvatura de uma das superfícies de uma lente biconvexa é seis vezes o da outra. O material de que é feita a lente tem um índice de refração de 1.53, e a lente tem uma potência de +5 D. Determine os raios de curvaturas das superfícies.
4. Um bloco de vidro de 2 cm de comprimento e índice de refração 1.60, é plano numa extremidade, e tem uma superfície esférica convexa de 1.875 cm de raio na outra extremidade. É colocada de modo a que a face curva esteja de frente para uma fonte pontual muito distante. Determine a curvatura da frente de onda que emerge da face plana e a posição do ponto onde os raios focam.
5. Um menisco de espessura central 7.,60 mm é feito de vidro com índice de refração 1.520, e a superfície posterior (a de trás) tem uma potência de -6 D. Que potência deve ter a primeira superfícies para que a "potência do vértice posterior" ($1/bfl$, *bfl* ~ *back focal length*) seja +9,7 D?
6. Considere um bloco de vidro de índice de refração $n = 1.5$ e de 60 cm comprimento. A face esquerda do bloco é plana, e a face direita, quando observada exteriormente, é côncava e de forma esférica, com uma curvatura de 10 cm.
 - a) Se no centro do bloco se encontrar uma fonte de luz pontual, localizar a posição das imagens dessa fonte, quando vista de cada um dos extremos;
 - b) Considerando o sistema como uma lente espessa, determinar a distância focal e a localização dos pontos focais anterior e posterior.
7. Uma formiga é observada através de uma lente convergente delgada, posicionada a 20 cm.
 - a) Qual deverá ser a distância focal da lente f para que a imagem final, virtual, resulte num factor de ampliação de $3\times$? (Considere que a formiga se encontra à direita da lente.)
 - b) Se utilizar uma segunda lente, de $f_2 = 15$ cm, 10 cm à esquerda da lente inicial, determine a localização e as características da nova imagem resultante.
8. Uma vela de 6 cm de altura encontra-se a 10 cm de uma lente delgada côncava com raio de curvatura de 30 cm. Determinar a localização e as características da imagem final:
 - a) numericamente;
 - b) por traçado de raios.

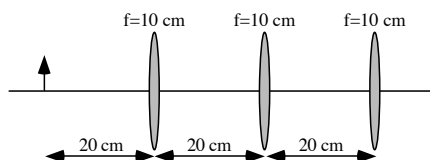
9. Uma garrafa de vidro esférica, de 20 cm de diâmetro e com paredes de espessura desprezável, está cheia de água. A garrafa encontra-se no assento traseiro de um automóvel, num dia de sol.
- Qual é a sua distância focal?
 - Qual a ampliação com que é formada a imagem de uma flor que se encontra repousada no banco, a 50 cm do centro da garrafa? Descreva detalhadamente a imagem, calculando a localização do plano de formação da imagem.

1.5 Formação de Imagem - espelhos

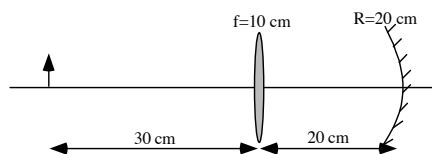
- Considere um espelho plano vertical.
 - Qual deve ser o menor comprimento de um espelho plano vertical para que um observador, de 1.80 m de altura colocado a 2 m de distância, se veja na totalidade? E como deve estar posicionado?
 - Como depende o resultado da distância do observador ao espelho?
- Um objecto com 3 cm é colocado 15 cm em frente do foco principal de um espelho esférico côncavo, e uma imagem real de 1.25 cm de altura é formada. Determine a curvatura do espelho e as distâncias do objecto e da imagem ao espelho.
- Num parque de diversões, um espelho esférico convexo está colocado de frente para um espelho plano, a 10 m de distância. Uma menina de 1 m de altura coloca-se a meio caminho entre os dois espelhos. Nessa posição ela vê a sua imagem criada pelo espelho plano como sendo o dobro da criada pelo espelho curvo. Isto é, o ângulo subtendido na posição do observador pela imagem no espelho plano é duas vezes o subtendido pela imagem no espelho curvo. Qual é o raio de curvatura do espelho curvo?

1.6 Sistemas Ópticos

- Duas lentes delgadas e de distâncias focais $f_1 = 15$ cm e $f_2 = 15$ cm encontram-se a 60 cm de distância. Uma página impressa está 25 cm à frente da lente convexa. Descrever detalhadamente a imagem da página impressa:
 - numericamente;
 - por traçado de raios.
- Duas lentes positivas de distâncias focais $f_1 = 30$ cm e $f_2 = 50$ cm encontram-se separadas de 20 cm. Localizar em relação à segunda lente a imagem de uma borboleta colocada no eixo central, 50 cm à frente da primeira lente.
- Utilizando o traçado de raios, determine a posição e ampliação da imagem do objecto no sistema óptico esquematizado na figura seguinte. Todos os raios que traçar devem iniciar-se no objecto e terminar na imagem final.



4. Utilizando o traçado de raios, determine a posição e ampliação da imagem do objecto no sistema óptico esquematizado na figura seguinte. Todos os raios que traçar devem iniciar-se no objecto e terminar na imagem final.



5. Uma lente de potência $+10D$ é montada coaxialmente e 5 cm em frente de uma segunda lente de potência $-8D$.
- Determine a posição e ampliação de um objecto colocado 20 cm à frente da primeira lente.
 - Determine a potência da combinação e a posição dos pontos principais.
6. Duas lentes finas positivas de distâncias focais 80 mm e 60 mm, são coaxiais e separadas por 35 mm. Determine por construção gráfica a distância focal equivalente da combinação e as posições dos seus pontos focais e principais. Verifique os resultados através de cálculos.
7. Um sistema consiste em duas lentes finas de distâncias focais $+10$ cm e $+15$ cm, separadas por 5 cm. Uma abertura de 2 cm de diâmetro é colocada coaxialmente entre as lentes e a 3 cm da lente de menor distância focal, que é a que está mais próxima do objecto. Determine as posições e diâmetros das pupilas de entrada e de saída. (Pupilas são as imagens das aberturas disponíveis para a luz na entrada e na saída do sistema óptico.)
8. Considere um sistema óptico composto por 3 lentes finas, L_1 , L_2 e L_3 , de distâncias focais 20 cm, -5 cm e 10 cm, respectivamente. Um objecto é colocado 10 cm à esquerda da primeira lente, e as distâncias entre os vértices das lentes são $\overline{V_1V_2} = \overline{V_2V_3} = 10$ cm.
- Determine a posição da imagem através de traçado de raios. Todos os raios desenhados devem partir do objecto e terminar na imagem;
 - Calcule a posição da imagem formada pelo sistema de lentes e as suas características principais.
9. Um objecto de 1 cm de altura é colocado 5 cm à esquerda de uma lente convergente, de distância focal 10 cm. À direita da lente, a 20 cm, é posicionado um espelho côncavo de raio de curvatura 30 cm. (eixos ópticos da lente e espelho coincidentes).
- Determine a posição da imagem através de traçado de raios. Todos os raios desenhados devem partir do objecto e terminar na imagem;
 - Calcule a posição da imagem formada pelo sistema de lentes e as suas características principais.
10. Para fotografar uma árvore de 2 m de altura, é utilizado um sistema óptico, cuja primeira lente, de potência 2 D, está a 10 m desse objecto. A segunda lente está afastada 5 cm da primeira e tem uma distância focal de 5 cm. O filme fotográfico é colocado a uma certa distância d da segunda lente.
- Determine a distância d que permite o registo nítido da imagem da árvore sobre o filme fotográfico;
 - Calcule as dimensões da imagem obtida;

- c) Se decidir substituir o conjunto de duas lentes por uma única, sem alterar a posição do filme, que lente deveria usar, e qual a separação d entre essa lente e o filme?
11. Considere um sistema óptico composto por 3 lentes finas convergentes, L_1 , L_2 e L_3 , de distâncias focais 10 cm, 10 cm e 15 cm, respectivamente. Um objecto é colocado 30 cm à esquerda da primeira lente, e as distâncias entre os vértices das lentes são $\overline{V_2V_3} = 2 \times \overline{V_1V_2} = 30$ cm.
- Determine a posição da imagem através de traçado de raios. Todos os raios desenhados devem partir do objecto e terminar na imagem;
 - Calcule a posição da imagem formada pelo sistema de lentes e as suas características principais.
12. Considere um sistema óptico composto por 2 lentes finas, L_1 , L_2 , de distâncias focais +15 cm e +10 cm, respectivamente, separadas de 35 cm. É colocada uma abertura circular de 1 cm de diâmetro entre as lentes, a 20 cm da primeira.
- Determine a distância focal equivalente do conjunto, e a localização dos planos focais anterior (à esquerda de L_1) e posterior (à direita de L_2);
 - Através de traçado de raios, determine as posições das imagens da abertura:
 - formada pela primeira lente (pupila de entrada);
 - formada pela segunda lente (pupila de saída);
 - discutir a relevância das pupilas;
 - Um carro está situado a 300 m de distância da primeira lente; os seus faróis estão separados de 1.5 m e consideram-se contidos num plano transversal ao eixo óptico do sistema de lentes. Qual a separação das imagens dos faróis formadas pelo sistema óptico?
13. Considere um sistema óptico composto por 2 lentes finas, L_1 , L_2 , de distâncias focais +20 cm e -60 cm, respectivamente, e com $\overline{V_1V_2} = 10$ cm. À esquerda de L_1 , a 40 cm, é colocado um objecto de 1 cm de altura.
- Determine a posição da imagem através de traçado de raios. Todos os raios desenhados devem partir do objecto e terminar na imagem ;
 - Calcule a posição da imagem formada pelo sistema óptico e as suas características principais.
14. Considere um sistema óptico composto por 2 lentes finas, L_1 , L_2 , de distâncias focais -30 cm e +10 cm, respectivamente, e com $\overline{V_1V_2} = 15$ cm. À direita de L_2 , a 40 cm, é colocado um espelho plano, inclinado de 45° com o eixo óptico das lentes.
- Determine a posição da imagem através de traçado de raios. Todos os raios desenhados devem partir do objecto e terminar na imagem;
 - Calcule a posição da imagem formada pelo sistema óptico e as suas características principais.
15. Pretende desenhar-se o olho para um robot, usando um espelho esférico côncavo, de modo a que a imagem de um objecto com 1,0 m de altura e a 10 cm de distância ocupe inteiramente a superfície de um detector foto-sensível com 1 cm^2 de área (o detector é móvel para facilidade de focagem).

- a) Onde se deve encontrar o detector relativamente ao espelho?
 - i. Qual deve ser a distância focal do espelho?
 - ii. Construa o diagrama de raios.

1.7 Instrumentos Ópticos

1. A objectiva de um microscópio tem marcado: $20\times$; $NA\ 0.5$; $EFL = 9\text{ mm}$ (EFL , distância focal equivalente). A ocular tem marcado $12.5\times$.
 - a) calcule o comprimento do tubo óptico e a distância entre as lentes, supostas finas, quando o microscópio está ajustado para o infinito;
 - b) para colocar a imagem final no ponto próximo do olho, quanto é necessário aproximar o instrumento do objecto, ou de que distância deve a ocular ser deslocada na direcção da objectiva?
 - c) Calcule a ampliação para cada um dos casos da alínea anterior.
2. O ponto próximo, na visão, corresponde à menor distância a que é possível colocar um objecto para a qual, por acomodação do olho, é ainda possível formar uma imagem nítida de um objecto sobre a retina. Um paciente tem o seu ponto próximo a 50 cm da córnea. Para um olho de cerca de 2 cm de diâmetro:
 - a) qual a potência do sistema dióptrico do olho, quando focado em infinito?
 - b) qual a potência ocular necessária para ver claramente um objecto no ponto próximo normal, isto é, a 25 cm da córnea?
 - c) qual a potência que se deve adicionar para compensar a visão próxima do paciente?
3. Considere o olho humano como um sistema óptico perfeito de potência $+60\text{ D}$, abertura de 3,5 mm de raio, e índice de refração do fluido vítreo $n = 4/3$.
 - a) calcule o raio do primeiro anel escuro no padrão de difracção de Airy de uma fonte pontual distante ($\lambda = 560\text{ nm}$);
 - b) tomando o diâmetro dos cones foveais como 0.0025 mm, comente sobre a conhecida capacidade do olho de resolver duas estrelas, ou fontes pontuais, separadas por menos de um minuto de arco.
4. Um optometrista descobre que uma pessoa com hipermetropia tem o ponto próximo a 125 cm.
 - a) Explique o que se entende por “ponto próximo”;
 - b) Que potência devem ter as lentes de contacto para que movam o ponto próximo para uma distância de 25 cm para poder ler um livro confortavelmente?
5. Num olho míope o ponto focal imagem para um objecto infinitamente distante situa-se à frente da retina. Considere o modelo simples para o olho, mas com $f' = 20\text{ mm}$ em vez de 22.38 mm. Determine a potência da lente correctiva que, situada a 14 mm da córnea, coloca f' na retina. Repita o cálculo para uma lente de contacto.

1.8 Polarização

1. indique diferentes formas de polarizar luz.
2. Luz não polarizada atravessa em sucessão três polarizadores cujos eixos de transmissão fazem ângulos com a horizontal de 0° , 30° , e 60° respectivamente. Qual é a irradiância da luz que atravessa o sistema, relativamente à irradiância da luz incidente?
3. Qual deve ser a espessura de uma lâmina de mica para que esta se comporte como uma lâmina de meio comprimento de onda para a radiação do laser de He-Ne? Os índices de refração relevantes da mica são 1.599 e 1.594.
4. Considere que dispõe de polarizadores dicróicos perfeitos para utilizar com luz natural de intensidade I_o .
 - a) Mostre que, se colocar dois polarizadores com os eixos fazendo um ângulo θ , a intensidade transmitida pelo par é $(I_o/2) \cos^2 \theta$.
 - b) Qual a intensidade que atravessa o par quando o primeiro polarizador faz um ângulo de 0° com a horizontal e o segundo 90° ?
 - c) Se colocarmos entre os dois polarizadores anteriores cinco novos polarizadores fazendo sucessivamente 15° , 30° , 45° , 60° , e 75° com a horizontal, qual será agora a percentagem da intensidade incidente que é transmitida?
5. Luz incide na superfície de água ($n = 1.333$) com um ângulo tal que a luz reflectida é linearmente polarizada.
 - a) Qual é o ângulo de incidência?
 - b) A luz refractada incide posteriormente na superfície de um vidro com índice de refração 1.50. A luz reflectida no vidro é linearmente polarizada. Qual é o ângulo entre a superfície da água e a face do vidro?
6. O campo eléctrico de um feixe de radiação electro-magnética, direccionado para a pele, pode ser expresso como:

$$E_x = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(kz - \omega t) \hat{e}_x$$

$$E_y = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(kz - \omega t) \hat{e}_y$$

onde E_0 é a intensidade do campo eléctrico, k é o número de onda, ω a frequência angular, e_x e e_y os vectores unitários nas direcções x e y , respectivamente. O feixe de luz atinge a superfície segundo o ângulo $\theta = 33.750^\circ$. Assumindo que o índice de refração da derme é $n = 1.35$,

- a) calcule a densidade de fluxo radiativo do feixe ao entrar na derme;
- b) que pode concluir da polarização do feixe transmitido ao tecido, tendo em conta as possibilidades de diferentes estados de polarização do feixe incidente para o mesmo ângulo de incidência ?

1.9 Interferência / difracção Óptica

1. Duas lâminas de microscópio são sobrepostas mas separadas numa das extremidades por um pedaço de folha de alumínio. Sob a iluminação de uma lâmpada de sódio ($\lambda = 589 \text{ nm}$) com incidência normal na película de ar formada entre as lâminas, observam-se exactamente 40 franjas claras no espaço entre as extremidades de vidro em contacto e a extremidade apoiada na folha de alumínio. Determine a espessura da folha de alumínio.
2. Considere radiação a um comprimento de onda de 550 nm , calcule a largura das fendas rectangulares que irão produzir no seu padrão de difracção, no campo longínquo, um máximo central com uma largura angular de 30° , 45° , 90° ou 180° . Determine a razão I/I_0 em pontos que fazem um ângulo 10° , 20° e 35° com o eixo para o primeiro caso, ilustrando a distribuição de intensidade em função do ângulo de observação.
3. Uma montagem para observação de anéis de Newton (superfície esférica de raio 1 m) é iluminada por luz com dois comprimentos de onda distintos. Um dos comprimentos de onda é 546 nm .
 - a) Se o décimo primeiro anel claro do sistema de franjas de 546 nm coincide com o décimo anel do outro sistema de franjas, qual é o segundo comprimento de onda?
 - b) A que raio se dá a sobreposição, e que espessura tem a película de ar aí?
4. Dois feixes luminosos ($\lambda = 500 \text{ nm}$) coerentes entre si, com a mesma polarização e cujas intensidades estão na razão de 1 para 2, interferem fazendo um ângulo de 1° . Calcule o espaçamento entre franjas e a sua visibilidade.
5. Um interferómetro de Michelson é utilizado para medir o índice de refracção de um gás. O gás é introduzido numa célula de vidro com comprimento L colocada num dos braços do interferómetro. O comprimento de onda da radiação é λ .
 - a) Se se contarem N franjas, quando a pressão na célula aumenta do vazio até à pressão atmosférica, qual será o índice de refracção do gás em função de N , L , e λ ?
 - b) Numa célula de 10 cm de comprimento cheia de dióxido de carbono ($n = 1.00045$) e utilizando a luz do sódio a 590 nm , quantas franjas se contariam?
6. Uma lente de vidro de máquina fotográfica, com um índice de refracção de 1.55 , vai ser revestida com um filme de criolite ($n \approx 1,30$) para diminuir a reflexão de luz verde, a 500 nm , incidente segundo a normal. Que espessura deve ter o revestimento?
7. Luz do Sol incidente num ecrã contendo duas fendas longas e estreitas separadas por 0.20 mm , lança um padrão numa folha de papel branco que está a 2 m .
8. Olhando para um interferómetro de Michelson iluminado por luz de comprimento de onda de 546.1 nm , observa-se uma série de franjas rectas com uma densidade de 12 por centímetro. Explique a sua ocorrência.
9. Uma lâmina de fluorite de índice $n = 1.434$ é inserida normalmente a um dos feixes do interferómetro. Observa-se que o padrão se desloca de 35 franjas. Qual é a espessura da lâmina?

10. Duas fendas alongadas são iluminadas por luz branca e a radiação emergente é observada num alvo distante. Se a componente vermelha a 780 nm, em primeira ordem, se sobrepuser à componente violeta de segunda ordem, qual é o comprimento de onda da radiação violeta?
11. Um feixe de luz branca (espectro contínuo de 400 a 700 nm) incide com um ângulo de 45° em duas lâminas de vidro de faces paralelas separadas por uma película de ar de 0.001 cm de espessura. A luz reflectida é admitida num espectrómetro de prisma. Quantas linhas escuras são observadas ao longo de todo o espectro?
12. Considere um feixe colimado de luz de comprimento de onda de 550 nm.
 - a) Calcule a largura da fenda rectangular que irá produzir no seu padrão de difracção, no campo longínquo, um máximo central com uma largura angular de 30° , 45° , 90° ou 180° .
 - b) Para o primeiro caso da alínea anterior, determinar a razão I/I_0 para os ângulos de observação θ de 10° , 20° e 35° com o eixo.
13. Considere a difracção de Fraunhofer no case de uma fenda dupla, em que a é a separação entre fendas, e b a largura de cada uma das fendas.
 - a) Mostre que quando $a = m \times b$, o número de franjas claras dentro do máximo central de difracção é igual a $2m$.
 - b) Um ecrã opaco contém duas fendas longas de 0.10 mm de largura, de centros separados de 0.20 mm, iluminadas por luz com $\lambda = 560$ nm.
 - c) Se o plano de observação estiver a 2,5 m de distância, o padrão observado corresponderá a difracção de Fresnel ou de Fraunhofer?
 - d) Quantas franjas de Young se observarão dentro da banda central clara?

1.10 Medidas Doppler

1. Efeito Doppler: considere uma fonte sonora, que emite ondas de frequência f_0 . A fonte encontra-se na vizinhança de um ouvinte. Derive expressões para a frequência sonora percebida pelo ouvinte, nos seguintes casos:
 - a) fonte move-se à velocidade v_{fonte} relativamente ao observador, e o observador está estático;
 - b) observador move-se à velocidade v_{obs} relativamente à fonte, e a fonte está estática;
 - c) ambos fonte e observador se movem, às velocidades v_{fonte} e v_{obs} (deslocamentos sobre a mesma linha espacial);
 - d) se em vez de som, tivesse um feixe de luz incidente sobre um espelho em movimento, qual o desvio de frequência introduzido no feixe reflectido?
2. Efeito Doppler: observações astronómicas identificam “um desvio para o vermelho” no espectro óptico da luz emitida por estrelas. A partir desta observação pode medir-se a velocidade das estrelas. O que pode inferir-se deste “desvio para o vermelho”?
3. Pode medir-se a velocidade do fluxo sanguíneo por efeito Doppler. Para o cenário de uma artéria que passe perto da superfície de um membro (perna ou braço),
 - a) que tipo de ondas poderá utilizar para fazer esta medição?

- b) qual o desvio de frequência induzido pelo movimento dos glóbulos vermelhos, à velocidade v_{sangue} , quando a emissão e detecção é feita numa linha de vista que faz um ângulo θ com a direcção do movimento sanguíneo?

2 Luz e Matéria

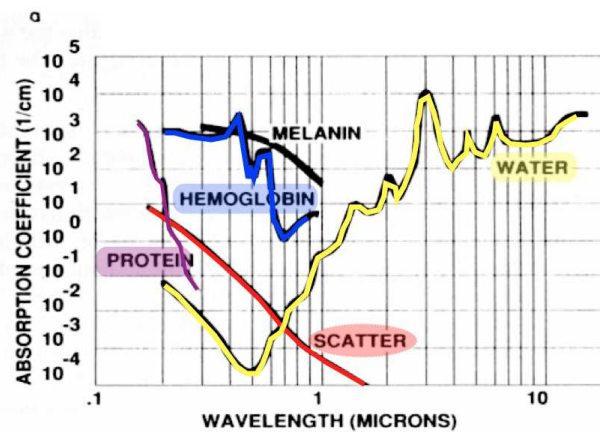
2.1 Sistemas Ópticos em LOB

1. Um feixe laser incide num ponto da superfície separatriz de dois meios ópticos, de índices de refração n_1 e n_2 .
 - a) Derive as expressões genéricas da transmitância das componentes normal e perpendicular, escrita em função dos ângulos de incidência θ_1 e de transmissão θ_2 .
 - b) Derive as expressões genéricas da reflectância das componentes normal e perpendicular, para um feixe laser incidente que faz um ângulo θ com a normal à interface.
2. Duas fibra ópticas são caracterizadas por um núcleo de vidro de sílica, de índice de refração $n = 1.5$ e diâmetro $\Phi = 500 \mu\text{m}$. Uma das fibras, designada fibra A, tem um *cladding* de um material óptico de índice de refração $n_{clad} = 1.43$. A outra fibra, designada fibra B, não tem camadas adicionais nem qualquer bainha de protecção.
 - a) Estime o ângulo máximo do cone de luz correspondente a luz guiada em cada uma das fibras.
 - b) Descreva a distribuição espacial de luz emergente na extremidade de saída das fibras.
3. Injecta-se um feixe de um laser HeNe de 1 mW de potência numa fibra óptica de abertura numérica N.A. = 0.20 .
 - a) Que lente utilizar na saída da fibra, de forma a produzir um feixe colimado de 3 cm de diâmetro?
 - b) Assumindo 100% de eficiência na injeção do feixe laser na fibra:
 - i. determine a irradiância do feixe colimado após a lente escolhida na alínea anterior.
 - ii. compare com a irradiância do feixe laser original, assumindo que este tem um diâmetro de cerca de 1 mm.
4. Uma fibra óptica tem o seu eixo orientado a 10° relativamente à normal da superfície de um material constituído maioritariamente por água. Se a abertura numérica da fibra for $\text{NA} = 0.173$,
 - a) qual a gama de variação da reflectância dessa superfície, nessa configuração?
 - b) repita para o eixo da fibra orientado a 60° em relação à normal.
5. Um laser pulsado emite impulsos de 50 mJ de energia, à taxa de 10 Hz. Cada impulso tem duração de 1 μs . O feixe é focado numa área de 0.0001 cm^2 . Determine:
 - a) a potência média;
 - b) a potência por impulso;
 - c) as intensidades média e de impulso, no foco;
 - d) a fluência no foco.
6. Para um feixe colimado de perfil Gaussiano:

- a) Determine a percentagem de potência óptica contida dentro do círculo de raio equivalente ao *beam waist* w_0 .
 - b) É colocada uma abertura circular no percurso do feixe. Que diâmetro deve ter esta abertura, em unidades de *beam waist*, para que a potência óptica transmitida seja exactamente 99% do valor máximo?
7. Pretende utilizar-se um feixe laser de Nd:YAG, de 2 mm de diâmetro, numa experiência de interacção com um tecido biológico. O laser opera em regime pulsado, à taxa de 10 Hz, e os impulsos têm energia 1 mJ e duração de 6 ns.
- a) O feixe é expandido para 2 cm de diâmetro. Para tal utiliza-se um par de lentes, sendo a primeira lente divergente, e a segunda convergente.
 - i. esboce genericamente o esquema de expansão da dimensão de feixe proporcionado pelo par de lentes divergente-convergente;
 - ii. o espaço de montagem disponível para a expansão de feixe tem cerca de 10 cm; na gaveta de lentes existem disponíveis as seguintes distâncias focais: $\{-9; -12; -18; -25; -50; +50; +75; +100; +125; +150; +200\}$ [mm]; escolha o par de lentes que permite obter a expansão desejada no espaço disponível.
 - b) Na zona de interacção, utiliza-se uma lente de +25 mm de distância focal, e de diâmetro de 1 polegada, para focar a luz no tecido.
 - i. qual o diâmetro de *spot* mínimo esperado sobre o tecido?
 - ii. qual a irradiância máxima?
 - iii. quais os efeitos possíveis na interacção da luz com o tecido?
 - c) se o feixe não tivesse sido expandido, e fosse utilizada a mesma lente de focagem para o tecido, o que mudava nas respostas da alínea anterior?
 - d) discuta vantagens ou desvantagens na realização da expansão de feixe à custa de duas lentes convergentes.

2.2 meios opacos - propriedades de tecidos biológicos

1. Num meio totalmente absorvente (sem difusão), e de coeficiente de absorção μ_a :
 - a) qual a percentagem de luz disponível após propagação de uma distância L ?
 - b) derive o valor esperado para o comprimento de propagação de um fóton não absorvido (sobrevivente).
2. Determine o livre percurso médio para radiação de lasers KrF, HeNe e CO₂, em água, e na pele. [ver ref.[7]]
3. Comente as curvas de absorção ilustradas no gráfico



- a) estime o comprimento de absorção dos lasers mais comuns (Argon, Krypton, Nd:YAG+KTP, Nd:YAG, CO₂) em pele e água:
4. Um laser CW de 25 mW é utilizado para medir as propriedades ópticas de uma amostra de tecido biológico no laboratório. O coeficiente de absorção da amostra no comprimento de onda do laser é muito pequeno. A amostra, de 3.5 cm de espessura, é posicionada entre duas janelas de vidro, e pode existir uma camada de ar intermédia entre a amostra e o vidro. O feixe do laser é colimado e atravessa uma abertura de 1 mm, atingindo a superfície em incidência normal. Uma segunda abertura de 1 mm de diâmetro é colocada a 50 cm da amostra, colinear com o eixo de propagação do laser, e um medidor de potência óptica é colocada por detrás.
- a) sabendo que o detector indica uma potência de 2.5 μ W, estime o coeficiente de espalhamento (*scattering*) da amostra.
- b) qual a razão do posicionamento do detector a tão grande distância da amostra?
5. Um laser de semiconductor emite luz a 550 nm. O feixe é colimado e direccionado para a pele de um paciente. Os parâmetros ópticos da pele, neste comprimento de onda, são: $\mu_a = 40 \text{ cm}^{-1}$, $\mu_s \approx 580 \text{ cm}^{-1}$, $g \sim 0.78$.
- a) estime o comprimento de absorção;
- b) determine o coeficiente de *scattering* reduzido;
- c) estime a fracção de perda de intensidade da radiação devido ao *scattering*, a cada 10 μ m de percurso óptico, quando uma amostra semi-infinita de pele, de 3 mm de espessura, é iluminada por este feixe laser.
6. Quando se pretende medir o coeficiente de absorção de uma solução líquida, utiliza-se habitualmente uma montagem em transmissão, em que o líquido é colocado numa cuvette de dimensão conhecida, e depois é medida a atenuação do feixe de luz a comprimento de onda conhecido. A medida obtida é o coeficiente de extinção molar $\epsilon(\lambda)$, e expresso em unidades $\text{cm}^{-1}\text{M}^{-1}$. O coeficiente de absorção é então dado por $\mu_a = \epsilon(\lambda) \cdot c$, em que c é a concentração molar da solução.
- a) demonstre que no caso de uma solução resultante de duas substâncias diferentes,

$$\mu_a(\lambda) = \epsilon_1(\lambda) \cdot c_1 + \epsilon_2(\lambda) \cdot c_2$$

- b) o estado de saturação de oxigénio em sangue SO_2 , é medido a partir do conhecimento dos valores das concentrações de sangue oxigenado c_{ox} e desoxigenado c_{de} , através da expressão

$$SO_2 = \frac{c_{ox}}{c_{ox} + c_{de}}.$$

Derive as expressões que permitem obter c_{ox} e c_{de} , a partir do conhecimento das curvas de extinção $\epsilon_{ox}(\lambda)$ e $\epsilon_{de}(\lambda)$, e de duas medidas do coeficiente de absorção μ_a , realizadas em dois comprimentos de onda diferenciados.

2.3 meios opacos - espalhamento (*scattering*) e funções de fase

1. Identifique que partículas / estruturas / objectos podem induzir um forte espalhamento de Rayleigh, nas gamas de luz:
 - a) Ultravioleta e Visível;
 - b) Infra-vermelho;
 - c) Micro-ondas.
2. Mostre que a função de fase de Henyey-Greenstein se reduz a $p(\theta) \sim \frac{1}{4\pi} (1 + 3g \cos \theta)$ quando o espalhamento de luz é ligeiramente frontal.
3. A função de fase conhecida como δ -Eddington é definida por:

$$p(\theta) = \frac{1}{4\pi} \{2f \delta(1 - \cos \theta) + (1 - f)(1 + 3g \cos \theta)\}$$

em que $\delta(x)$ é a função δ de Dirac, e f indica a contribuição do espalhamento frontal, face ao total do espalhamento.

- a) Explique o que traduzem os diferentes termos.
- b) Considere $f = 0.5$ e $g = 0.9$: faça o gráfico da função δ -Eddington.