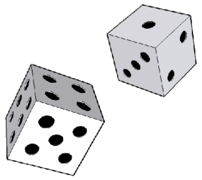
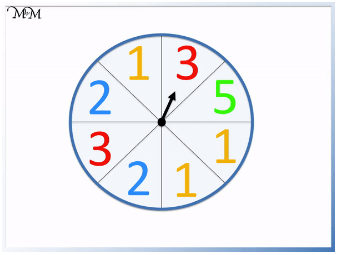
X. Números aleatórios.

A Natureza está repleta de processos que apresentam aleatoriedade (decaimento radioactivo, o ruído de sinal electromagnético, fenómenos atmosféricos, ...). Nós mesmos utilizamos isso tradicionalmente como jogo, até como forma de prever o futuro, e sobretudo, e mais importante e cientificamente: em computação !!

Exemplos:

1 – Lançamento de dados: 

2 – Atirar uma moeda ao ar:

3 – Roda da sorte: 

Uma sequência de números aleatórios obedece às seguintes características:
- Os números estão uniformemente distribuídos ao longo de um intervalo definido.
- Não existe forma de prever qual vai ou vão ser o valor ou os valores futuros na sequência.

Isto é possível em computação?

X. Números aleatórios e números pseudo-aleatórios.

Um computador (determinista) não consegue gerar números verdadeiramente aleatórios *(apesar de existirem hoje em dia alguns programas que dizem conseguir gerar números verdadeiramente aleatórios a partir, por exemplo, de dados de ruído electromagnético).*

Números pseudo-aleatórios – "aparentam aleatoriedade"

- *Aparentam* estar uniformemente distribuídos ao longo de um intervalo definido.
- Não existe forma *aparente* de prever qual vai ou vão ser o valor ou os valores futuros na sequência.

Gerador de números "pseudo"-aleatórios

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m \qquad \begin{cases} 0 < m & \longrightarrow \text{Módulo ou resto} \\ 0 < a < m & \longrightarrow \text{Multiplicador} \\ 0 \leq c < m & \longrightarrow \text{Incremento} \\ 0 < X_0 < m & \longrightarrow \text{Valor inicial ou semente} \end{cases}$$

Existem 'n' formas de verificar a aleatoriedade das sequências geradas

X. Amostragem em distribuições não uniformes.

- Os números aleatórios assim gerados possuem distribuições uniformes
- No entanto a maior parte das vezes nós queremos que obedeçam a distribuições conhecidas (ex: gaussiana, binomial, Poisson, ...)
- Para o fazer existem dois métodos:

Função cumulativa inversa

Imaginemos que queremos fazer uma amostragem de um variável Z de acordo com distribuição $f(Z)$.

Parte 1: gerar número aleatório X usando PSNG (ou seja entre 0 e 1)

Parte 2: Determinar a função cumulativa

$$F(X) = \int_{-\infty}^{X} f(x)dx$$

Parte 3: Seja $Z = F^{-1}(X)$, então Z está distribuída de acordo com $f(Z)$.

Exemplo

Imaginemos que queremos fazer uma amostragem de um variável Z de acordo com distribuição e^{-Z}, para $Z>0$. A função cumulativa é:

$$F(X) = \int_{0}^{X} e^{-x}dx = 1 - e^{-X}$$

E a inversa:

$$F^{-1}(X) = -\ln(\mathrm{u})$$

Logo ao gerar um número aleatório u de 0 a 1, o valor de X estará distribuído de acordo com e^{-Z}.

X. Amostragem em distribuições não uniformes.

Rejeição

Este método compara a distribuição que queremos obter $f(x)$ com outra distribuição $g(x)$, rejeita os valores que não obedecem à primeira, e aceita os que aceitam.

Parte 1: Gerar número aleatório X distribuído de acordo com uma função conhecida $g(x)$ – p. ex. atráves do método anterior.

Parte 2: Gerar segundo número aleatório U.

Parte 3: Se:

$$U \leq \frac{f(X)}{cg(X)},$$

U é aceite. Se não, U é rejeitado.
Repetir.

Exemplo

Imaginemos que queremos fazer uma amostragem da função anterior e^{-Z} usando a função uniforme.

- $g(x) = Unif(0,1)$
- $f(x) = e^{-x}$
- Como $f(x) \leq 10$, escolhemos $c = 10$.
- Geramos X= $Unif(0,1)$
- Geramos U
- Verificamos parte 3. Repetimos.

Resumo da aula

- Distribuição gaussiana: propriedades. Valores z. Cálculos de percentagens a partir destes valores

- Números aleatórios e números pseudo-aleatórios
- Geradores de números aleatórios
- Amostrar em distribuições não uniformes: método da função cumulativa inversa, e método da rejeição.

Monte Carlo