Complessità e Teoria dell'Informazione

Prof.ssa Carla Piazza

Appunti di Claudio Desideri e Lara Vignotto – a.a. 2023/2024

Indice

Parte I

Complessità

Capitolo 1

Introduzione

Libro di Papadimitriou main reference.

In questa parte utilizzeremo come modello di computazione le **macchine di Turing** (MdT). Esistono diversi modelli di MdT: macchine di Turing multinastro, macchine di Turing input/output, macchine di Turing con oracolo, macchine di Turing nondeterministiche. Le MdT verranno utilizzate per confrontare i diversi risultati di complessità che possiamo ottenere.

Ci concentreremo sia su **complessità temporale** (time complexity) che **spaziale** (space complexity). Il focus non sarà sulla complessità di un dato algoritmo, ma sulla complessità di un problema. I **problemi** possono essere classificati come di decisione (decision problems), di funzione (function problems), o di ottimizzazione (optimization problems).

- **Decision problem** P : inputs $\rightarrow \{\text{yes}, \text{no}\}$
- **Function problem** computare una data funzione, ad esempio l'ordinamento di una lista
- **Optimization problem** tra tutti i possibili output, si vuole trovare quello che minimizza o massimizza una funzione di costo.

Esempio Sia $G = (V, E)$ un grafo, e $u, v \in V$ due nodi.

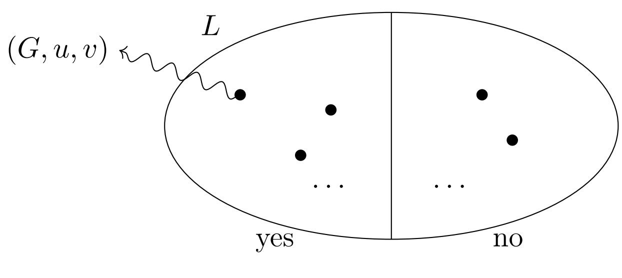
– decidere se esiste un cammino da u a v è un problema di decisione

– trovare un cammino da u a v è un problema di funzione

– trovare il cammino più corto da u a v è un problema di ottimizzazione

In questo corso ci concentreremo sui problemi di decisione. Se si ha una soluzione per un problema di funzione o di ottimizzazione, si possiede automaticamente una soluzione per il problema di decisione.

Immaginiamo tutti gli input possibili al problema dell'esempio precedente come ad un insieme infinito di tuple (G, u, v). Questo insieme si può dividere in due: il sottoinsieme dei yes di tutte le codifiche binarie di triple (G, u, v) tali che esiste un cammino in G da u a v, e, inversamente, il sottoinsieme no.



La codifica binaria di una tripla è una stringa del tipo $1011\ldots$. Più precisamente, è una stringa sull'alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$. L'insieme di tutte le possibili stringhe binarie è Σ^*. Questo insieme è quindi il linguaggio L sottoinsieme di Σ^*, ovvero $L \subseteq \Sigma^*$.

$$L = \{\text{bin}(G, u, v) | ln\ G\ u \rightarrow v\}$$

Esempio Consideriamo interi rappresentati in binario. Vogliamo decidere se un dato intero x è divisibile per 4.

$$\text{bin}(x) = 10\ldots11$$

in questo caso non è divisibile per 4. Un numero binario è divisibile per 4 se e solo se i due bit meno significativi sono 0.

$$\text{bin}(x) = x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 0 \text{ and } x_1 = 0$$

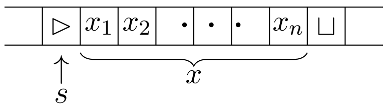
Il linguaggio indicato da questo problema di decisione è

$$L = \{x \in \{0,1\}^* | x = x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0 \wedge x_0 = 0 \wedge x_1 = 0\}$$

Esempio: palindromo Decidere se una stringa è palindroma, con $\Sigma = \{0, 1\}$.

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_3, x_2, x_1$$

Ad esempio, $x = 101$ è palindroma, mentre $x = 1010$ non lo è. Cerchiamo il linguaggio $L = \{x | x \text{ è palindroma}\}$. Utilizziamo una macchina di Turing.



Si parte dallo stato s e si vuole finire nello stato p solo quando x è palindroma. Per decidere se x è palindroma, si può leggere x_1, ricordarne il valore nello stato del puntatore, e poi confrontarlo con x_n. Se sono uguali, si ripete lo stesso procedimento con x_2 e x_{n-1}, e così via. Se si arriva a x_n e x_1 senza aver trovato una discrepanza, allora x è palindroma. Se invece si trova una discrepanza, allora x non è palindroma. Le transizioni sono le seguenti:

$$\delta(s, \triangleright) = (q, \triangleright, \rightarrow)$$
$$\delta(q, 1) = (q_1, \triangleright, \rightarrow)$$
$$\delta(q, 0) = (q_0, \triangleright, \rightarrow)$$

TODO: finire di scrivere le transizioni Questa macchina eseguirà un numero quadratico di passi per controllare se la stringa x è palindroma: $O(|x|^2)$.

Se si vuole controllare in C (o in un altro linguaggio) se una stringa è palindroma, si può scrivere un programma che confronta il primo e l'ultimo carattere, poi il secondo e il penultimo, e così via, eseguendo un numero lineare di passi. La complessità è $O(|x|)$. Questo è un esempio di come la complessità di un problema dipenda dal modello di computazione utilizzato.

1.1 Tesi di Church-Turing Estesa

La tesi di Church-Turing afferma che ogni cosa che può essere computata, può essere computata da una macchina di Turing.

La versione estesa afferma che tutti i modelli (ragionevoli) di calcolo sono correlati polinomialmente. Questo significa che se un problema è risolvibile in tempo polinomiale in un modello di computazione, allora è risolvibile in tempo polinomiale in ogni modello di computazione.

In altre parole, la tesi di Church-Turing estesa afferma che la complessità computazionale di un problema è indipendente dal modello di calcolo utilizzato per risolverlo.

$$\underset{\text{problema}}{P} \rightarrow \text{MdT } O(f(n)) \rightarrow \underset{\text{modello}}{M} \ O(p(f(n)))$$

Ma è vera anche la direzione contraria. TODO: ???

Capitolo 2

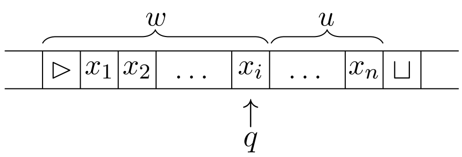
Macchine di Turing

2.1 Definizioni

Definizione 2.1.1 (Configurazione) *Una configurazione è una tripla* (q, w, u), *con*

- $q \in K \cup \{yes,\ no,\ halt\}$
- $w, u \in \Sigma^*$

Ad esempio, graficamente, una configurazione è



Definizione 2.1.2 (Configurazione Iniziale) *La configurazione iniziale su una stringa* x *è una tripla*

$$(1, \triangleright, x)$$

Definizione 2.1.3 (Configurazioni Finali) *Le configurazioni finali su una stringa* x *sono una tripla*

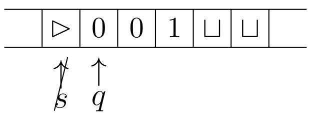
$$(H, w, u)$$

dove $H \in \{yes,\ no,\ halt\}$.

Definizione 2.1.4 (Passo di Computazione)

$$(q, w, u) \xrightarrow{\delta} (q', w', u')$$

Ad esempio, il passo di computazione è $(s, \triangleright, 001) \to (q, \triangleright 0, 01)$



Eseguito applicando $\delta(s, \triangleright) = (q, \triangleright, \to)$.

Definizione 2.1.5 (Time Complexity per una MdT $\mathcal{M}$ sull'input x) $\mathcal{M}$ *ha time complexity* t *su* x *se dopo esattamente* t *passi si raggiunge una configurazione finale.*

$$(s, \triangleright, x) \underbrace{\to \cdots \to}_{t\ passi} (H, w, u)$$

Indicata in breve con $(s, \rhd, x) \to^t (H, w, u)$.

$\mathcal{M}$ *ha time complexity* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *se,* $\forall x \in \Sigma^*$, $(s, \rhd, x) \to^t (H, w, u)$ *con* $t \leq f(|x|)$.

La dimensione dell'input (bit length dell'input) è $|x|$. Questa è una complessità nel caso peggiore ($\leq$). Non stiamo utilizzando la notazione big-O.

2.2 Unlimited Register Machines

Una Unlimited Register Machine (URM) è una macchina di Turing con un numero illimitato di registri.

R_0	r_0
R_1	r_1
	$\dots$
R_m	r_m
	$\dots$

Ogni registro contiene un numero naturale. Quindi, il contenuto del registro R_m sarà $r_m \in \mathbb{N}$. Le operazioni possibili sono:

- **incremento** $S(i)$: $r_i := r_i + 1$
- **azzeramento** $Z(i)$: $r_i := 0$
- **trasferimento** $T(i, j)$: $r_j := r_i$, ovvero trasferisco il contenuto del registro R_i nel registro R_j
- **jump** $J(i, j, k)$: se $r_i = r_j$ allora salta all'istruzione k, altrimenti prosegue con l'istruzione successiva

Esempio Dati $x, y \in \mathbb{N}$, decidere se $x = y$.

MdT Si può utilizzare una macchina di Turing che contiene la rappresentazione binaria dei due interi, separati da un separatore.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & \rhd & x_1 & \dots & x_n & ; & y_1 & \dots & y_m & \sqcup \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{s}{\uparrow} \quad \rhd\ \overbrace{x_1\ \dots\ x_n}^{x}\ ;\ \overbrace{y_1\ \dots\ y_m}^{y}\ \sqcup$$

Questa macchina richiede, nel caso peggiore, un numero quadratico di passi per terminare. La complessità è $\Theta(|x|^2)$.

URM Possiamo utilizzare una URM con x e y rispettivamente nei registri R_0 e R_1.

R_0	x
R_1	y

Alla fine, scriveremo 1 in R_0 se $x = y$, 0 altrimenti. Le istruzioni sono le seguenti:

1. $J(0, 1, 4)$
2. $Z(0)$
3. $J(0, 0, 100)$
4. $Z(0)$

5. $S(0)$

In questo caso, la complessità si può calcolare in due modi.

> **Definizione 2.2.1 (Time Complexity su URM)**
>
> - Uniform cost criterium *(criterio del costo uniforme): numero di istruzioni eseguite.*
> - Logarithmic cost criterium *(criterio del costo logaritmico): ogni istruzione ha un costo proporzionale al numero di cifre coinvolte.*

Quindi, per questa macchina, la complessità è

- utilizzando il criterio del costo uniforme: $\Theta(1)$
- utilizzando il criterio del costo logaritmico: $\Theta(|x| + |y|)$

Nel secondo caso, ci si avvicina al costo per la macchina di Turing.

Mentre le macchine di Turing sono un modello di computazione sequenziale, nelle URM si ha l'istruzione *jump*. In altre parole:

- **MdT** 1 bit di informazione in ogni cella $\rightarrow$ tempo: numero di passi
- **URM** registri, un intero di lunghezza arbitraria (più bit) in ogni registro $\rightarrow$ tempo: numero di istruzioni (uniform time complexity)

Esempio Computare $x + 1$, $x \in \mathbb{N}$.

MdT Si ha una macchina di Turing che contiene x in binario.

$$\Big|\ \triangleright\ \Big|\ \overbrace{x_1\ \Big|\ \dots\ \Big|\ x_n}^{x}\ \Big|\ \sqcup\ \Big|$$

Nel caso peggiore $x = 111 \dots 1$, quindi la complessità è lineare $\Theta(n)$.

URM Si ha una URM con x nel registro R_0. È suffieciente una singola istruzione $S(0)$, quindi la complessità è $\Theta(1)$.

2.2.1 URM + Prodotto

Cambiamo il modello di computazione URM, considerando URM + prodotto. Oltre alle istruzioni $S(i)$, $Z(i)$, $T(i, j)$, e $J(i, j, k)$, aggiungiamo l'istruzione $P(i)$, che esegue l'operazione $r_i := r_i * r_i$.

Esempio di programma per URM + prodotto Abbiamo in input un numero x, che copiamo anche in R_1. Applichiamo il prodotto sul contenuto del registro R_0 per x volte. In altre parole, vogliamo calcolare x^{2^x}.

1. $J(1, 2, 5)$
2. $P(0)$
3. $S(2)$
4. $J(3, 3, 1)$

Pertendo da un input di x in R_0, x in R_1, e 0 in tutti gli altri registri. In un generico passo di iterazione i si avrà:

$$
\begin{array}{c|c|}
R_0 & x \\ \hline
R_1 & x \\ \hline
R_2 & 0 \\ \hline
R_3 & 0 \\ \hline
R_4 & \vdots
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c|c|}
R_0 & x^2 \\ \hline
R_1 & x \\ \hline
R_2 & 1 \\ \hline
R_3 & 0 \\ \hline
R_4 & \vdots
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c|c|}
R_0 & (x^2)^2 \\ \hline
R_1 & x \\ \hline
R_2 & 2 \\ \hline
R_3 & 0 \\ \hline
R_4 & \vdots
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{c|c|}
R_0 & (x^4)^2 \\ \hline
R_1 & x \\ \hline
R_2 & 3 \\ \hline
R_3 & 0 \\ \hline
R_4 & \vdots
\end{array}
\rightarrow \dots \rightarrow
\begin{array}{c|c|}
R_0 & x^{2^i} \\ \hline
R_1 & x \\ \hline
R_2 & i \\ \hline
R_3 & 0 \\ \hline
R_4 & \vdots
\end{array}
$$

Il numero di istruzioni è lineare $\Theta(n)$.

MdT Se si eseguisse la stessa computazione su una macchina di Turing, si avrebbe

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
\triangleright & \overbrace{x_1 \quad \dots \quad x_n}^{x} & \sqcup \\
\hline
\end{array}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
\triangleright & \underbrace{y_1 \quad \dots \quad y_m}_{x^{2^x}} & \sqcup \\
\hline
\end{array}
$$

Quindi $\Omega(\log(x^{2^x})) = \Omega(2^x \log(x))$.

Questo risultato sembra contraddire la tesi di Church-Turing estesa, che afferma che tutti i modelli **ragionevoli** di computazione sono correlati polinomialmente. Ma cosa significa *ragionevole*? Non si può avere una operazione che fa crescere "troppo" l'input (nell'esempio, il prodotto), si deve utilizzare il criterio logaritmico.

In altre parole, se l'algoritmo utilizza operazioni che in un numero polinomiale di passi fanno crescere l'input esponenzialmente, e queste sono utilizzate un numero di volte che dipende dalla dimensione dell'input, allora si deve utilizzare un criterio logaritmico. Quando non si è sicuri della potenza delle operazioni della macchina, il costo di ogni singola operazione dev'essere proporzionale al numero di bit manipolati.

istruzione	uniform	logarithmic
$S(i)$	$\Theta(1)$	$\Theta(\log(r_i))$
$Z(i)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
$T(i,j)$	$\Theta(1)$	$\Theta(\log(r_i))$
$J(i,j,k)$	$\Theta(1)$	$\Theta(\min(\log(r_i), \log(r_j)))$
$P(i)$	$\Theta(1)$	$\Theta((\log(r_i))^2)$

Con r_i contenuto del registro i. In particolare per $P(i)$, nella moltiplicazione di un numero x per se stesso si ha $x_1, x_2, \dots, x_n \times x_1, x_2, \dots, x_n$. Si hanno x^n bit operazioni, quindi $O((\log(x))^2)$.

2.3 Ulteriori Definizioni

Come abbiamo visto, nei problemi di decisione si ha un input $x \in \Sigma^*$ e un output in $\{\text{yes}, \text{no}\}$. Possiamo definire un linguaggio L come l'insieme di tutte le stringhe che hanno output yes.

$$L \subseteq (\Sigma \backslash \{\sqcup\})^*$$

Un problema P è una funzione

$$P : \Sigma^* \rightarrow \{\text{yes}, \text{no}\}$$

Definizione 2.3.1 (Linguaggio Ricorsivo)

Una macchina di Turing $\mathcal{M}$ decide un linguaggio L

$$\Updownarrow$$

$$\forall x \in (\Sigma \backslash \{\sqcup\})^* \begin{cases} x \in L \to \mathcal{M}(x) = yes \\ x \notin L \to \mathcal{M}(x) = no \end{cases}$$

*Il linguaggio L si dice **ricorsivo**.*

Definizione 2.3.2 (Linguaggio Ricorsivamente Enumerabile)

Una macchina di Turing $\mathcal{M}$ accetta un linguaggio L

$$\Updownarrow$$

$$\forall x \in (\Sigma \backslash \{\sqcup\})^* \begin{cases} x \in L \to \mathcal{M}(x) = yes \\ x \notin L \to \mathcal{M}(x) \uparrow \ \ (\textit{non termina}) \end{cases}$$

*Il linguaggio L si dice **ricorsivamente enumerabile**.*

Teorema 2.3.1

$$L \text{ è ricorsivo} \Rightarrow L \text{ è ricorsivamente enumerabile}$$

Esempio Trovare un linguaggio L tale che L è ricorsivamente enumerabile ma non ricorsivo.

Nell'halting problem abbiamo

$$\mathcal{U}(\mathcal{M}; x) = \mathcal{M}(x)$$

L'halting language

$$H = \{(\text{bin}(\mathcal{M}); x) \mid \mathcal{M}(x) \downarrow\}$$

è ricorsivamente enumerabile ma non ricorsivo. Infatti, se $\mathcal{M}$ termina su x, allora $\mathcal{U}(\mathcal{M}; x) = \mathcal{M}(x) =$ yes, altrimenti $\mathcal{U}(\mathcal{M}; x) \uparrow$. Questo è un risultato qualitativo.

Esempio Sia

$$L = \{\text{bin}(\mathcal{M}) \mid \forall x \ \mathcal{M}(x) \downarrow \text{ in al massimo 100 passi}\}$$

L è ricorsivo. Infatti, la macchina $\mathcal{M}$ può eseguire al massimo 100 spostamenti a destra sul nastro. Quindi, tutte le macchine che terminano in al massimo 100 passi accettano input $\forall x \in |\Sigma|^n$ con $n \leq 100$.

Definizione 2.3.3 (Computazione di Funzioni) *Sia f una funzione $f : (\Sigma \backslash \sqcup)^* \to \Sigma^*$. Una macchina di Turing $\mathcal{M}$ computa f se*

$$\forall x \in (\Sigma \backslash \sqcup)^* \qquad \mathcal{M}(x) \downarrow \ \textit{e alla fine } f(x) \textit{ è sul nastro}$$

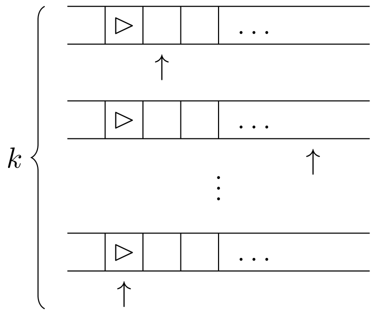
*La funzione f è detta **ricorsiva**, o **computabile**.*

2.4 Macchine di Turing a k-nastri e Input/Output

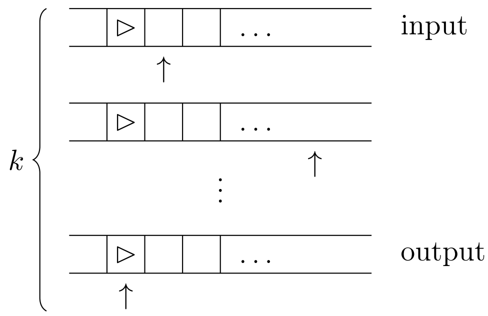
Definizione 2.4.1 (Macchina di Turing a k-nastri) *Una macchina di Turing a k-nastri è una tupla $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \delta, s)$ con K, Σ, s definite come per una macchina di Turing, e*

$$\delta : K \times \Sigma \to (K \cup \{yes, no, halt\}) \times (\Sigma \times \{\leftarrow, \rightarrow, -\})^k$$

Una macchina di Turing a k-nastri è una macchina di Turing con un numero limitato di nastri, che possono essere utilizzati in parallelo. La funzione δ cambia perché si ha un puntatore per nastro.



Definizione 2.4.2 (Macchina di Turing a k-nastri con Input/Output) *Una macchina di Turing a k-nastri con I/O è una macchina di Turing a k-nastri con un nastro di input e un nastro di output. Il nastro di input è di sola lettura, il nastro di output è di sola scrittura.*



Definizione 2.4.3 (Configurazione e Configurazione Iniziale) *Siano $w_i, u_i \in \Sigma^*$ stringhe. Una configurazione è una tupla*

$$(q, w_1, u_1, w_2, u_2, \dots, w_k, u_k) \to (q', w'_1, u'_1, w'_2, u'_2, \dots, w'_k, u'_k)$$

Una configurazione iniziale su input x è una tupla

$$(s, \triangleright, x, \triangleright, \varepsilon, \dots, \triangleright, \varepsilon)$$

TODO: lezione 11

2.4.1 Complessità Spaziale

Definizione 2.4.4 (Complessità Spaziale per una MdT a k-nastri su input x) *Si ha che*

$$(s, \triangleright, x) \to^* (H, w_1, u_1, \dots, w_k, u_k)$$

con $H = \{halt, yes, no\}$. Lo spazio utilizzato è

$$\sum_{i=1}^{k} |w_i| + |u_i|$$

Definizione 2.4.5 (Complessità Spaziale per una MdT a k-nastri con I/O) *Si ha che*

$$(s, \triangleright, x) \to^* (H, w_1, u_1, \dots, w_k, u_k)$$

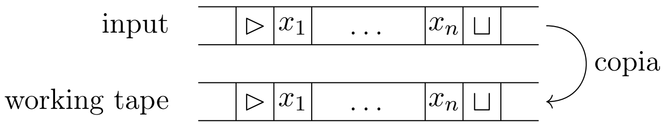
con $H = \{halt, yes, no\}$. *Lo spazio utilizzato è*

$$\sum_{i=1}^{k-1} |w_i| + |u_i|$$

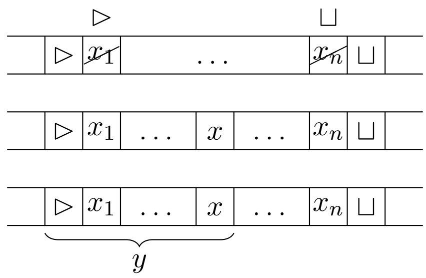
dove $\delta(q, \sigma_1, \ldots, \sigma_k) = (q', \sigma'_1, \ldots, \sigma'_k, \rightarrow)$.

Definizione 2.4.6 (Classi di Complessità Spaziale) *L è decidibile in spazio $f(n)$ se esiste una macchina di Turing a k-nastri con I/O $\mathcal{M}$ che decide L e, $\forall x$, $\mathcal{M}$ utilizza uno spazio al massimo $f(|x|)$.*

Esempio: palindromo $L = \{x | x \text{ è palindroma}\}$. Si vuole trovare la macchina più efficiente in termini di spazio. La seguente macchina è efficiente nel tempo:



perché ha TIME $\Theta(n)$ e SPACE $\Theta(n)$. Mentre la seguente macchina è efficiente nello spazio:



con SPACE $\Theta(\log n)$.

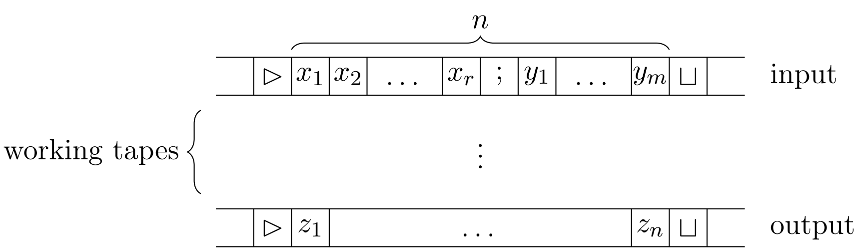
Definizione 2.4.7

$$\mathit{TIME}(f(n)) = \{L \mid L \text{ può essere deciso in tempo } f(n)\}$$
$$\mathit{SPACE}(f(n)) = \{L \mid L \text{ può essere deciso in spazio } f(n)\}$$

In altre parole, SPACE($f(n)$) è l'insieme di tutti i linguaggi che possono essere decisi in tempo $f(n)$ da una macchina di Turing a k-nastri con I/O. Per ogni input x tale che $|x| = n$, la macchina utilizza spazio al più $f(n)$.

Proprietà 2.4.1 *Se esiste una macchina di Turing che decide L in tempo $f(n)$, e $f(n) \geq n$, allora esiste una macchina di Turing con I/O che decide L in tempo $O(f(n))$.*

Esempio Calcola $x + y$.



Questo ha spazio lineare $\Theta(n)$ (molto male).

Definizione 2.4.8 (Classe P) *Definiamo la classe P come*

$$P = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} TIME(n^h)$$

ovvero l'unione di tutti i problemi che possono essere risolti in tempo polinomiale.

La classe P ci piace così tanto perché abbiamo la tesi di Church-Turing estesa. Questa classe è **invariante** rispetto alla scelta del modello di computazione. Possiamo definire la classe EXP

$$\text{EXP} = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \text{TIME}(2^{n^h})$$

La classe $\mathbb{L}$, PSPACE, e EXPSPACE

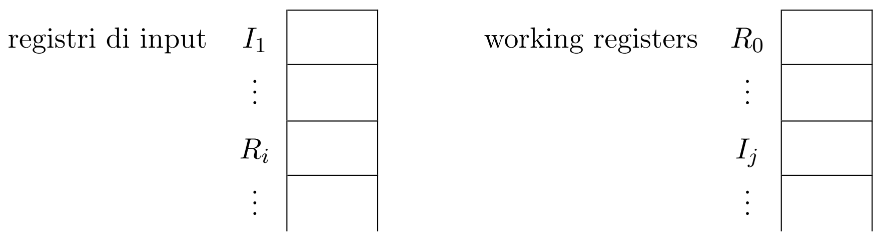
$$\mathbb{L} = \text{SPACE}(\log n)$$
$$\text{PSPACE} = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \text{SPACE}(n^h)$$
$$\text{EXPSPACE} = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \text{SPACE}(2^{n^h})$$

Proprietà 2.4.2

$$TIME(f(n)) \subseteq SPACE(f(n))$$

2.5 Random Access Machines

Capitolo 2.6 del libro. Le random access machine (RAM), sono un modello di computazione sequenziale, composte da registri di input e registri di lavoro. Ogni registro contiene un intero.



Le operazioni possibili sono:

- `READ` j: $r_0 := i_j$
- `READ` $\uparrow j$: $r_0 := i_{r_j}$ (vai al registro R_j, leggine il contenuto h, vai al registro I_h, copiane il contenuto in R_0)
- `STORE` j: $r_j := r_0$
- `STORE` $\uparrow j$
- `LOAD` j: $r_0 := r_j$
- `LOAD` $\uparrow j$
- `LOAD` $= j$: $r_0 := j$
- `ADD` j: $r_0 := r_0 + r_j$
- `ADD` $\uparrow j$: $r_0 := r_0 + r_{r_j}$

- `ADD` $= j$
- `SUB` j
- ...
- `HALF`: $r_0 := \left\lfloor \frac{r_0}{2} \right\rfloor$ (tolgo da r_0 l'ultimo bit)
- `JUMP` j: $k := j$ (contatore)
- `JPOS` j: if $r_0 > 0$ then $k := j$
- `JNEG` j
- `JZERO` j
- `HALT`

Il libro dimostra che

Teorema 2.5.1 *RAM con complessità temporale uniforme e macchine di Turing con k-nastri sono correlate polinomialmente.*

In particolare

$$\underbrace{\text{MdT}}_{f(n)} \to^{\text{simula}} \underbrace{\text{RAM}}_{O(f(n))}$$
$$\underbrace{\text{RAM}}_{f(n)} \to^{\text{simula}} \underbrace{\text{MdT a 7-nastri}}_{O((f(n))^3)}$$

Ad esempio, quando si sommano due numeri, si ottiene al massimo 1 bit in più dell'input maggiore.

2.6 Macchine Nondeterministiche

Si hanno

- Macchine deterministiche $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \delta, s)$, con δ **funzione**

  $$\delta : K \times \Sigma^k \to (K \cup \{\text{yes}, \text{no}, \text{halt}\}) \times \Sigma^k \times \{\leftarrow, \rightarrow, -\}^k$$

  la cui configurazione è del tipo

  $$c \to c'$$

- Macchine nondeterministiche $\mathcal{N} = (K, \Sigma, \Delta, s)$, con Δ **relazione**

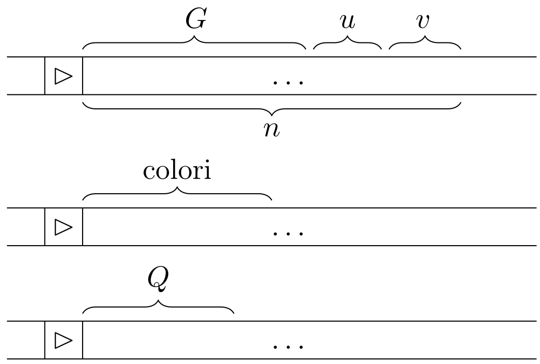
  $$\Delta \subseteq K \times \Sigma^k \times (K \cup \{\text{yes}, \text{no}, \text{halt}\}) \times \Sigma^k \times \{\leftarrow, \rightarrow, -\}^k$$

  quindi con una o più possibili transizioni. La configurazione $(q, u_1, w_1, \ldots, q_k, w_k)$ è del tipo

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & c' \\ c & \longrightarrow & c'' \\ & \searrow & c''' \end{array}$$

Esempio: Reachability Problem Dato un grafo diretto $G = (V, E)$, e due nodi $u, v \in V$, decidere se u raggiunge v (se esiste un cammino da u a v). Studiamo la complessità in tempo e spazio di questo problema utilizzando sia un modello deterministico che nondeterministico.

Modello deterministico Un possibile algoritmo per risolvere questo problema è BFS(G, u). Si costruisce un albero con radice u, e ad ogni livello si aggiungono i nodi raggiungibili in un passo. Utilizzando dei colori, alla fine della visita tutti i nodi visitati saranno neri, e quelli non raggiungibili grigi: è sufficiente controllare se v è nero. Se v è raggiungibile da u, allora v sarà raggiunto da u in un numero di passi $\leq |V|$. Quindi, la **complessità in tempo** è $O(|V| + |E|)$, ovvero lineare rispetto alla dimensione del grafo. Con una macchina di Turing:



con Q queue. Quindi, per la tesi di Church-Turing estesa, la complessità è $O(n^\alpha)$ per qualche $\alpha \in \mathbb{N}$. Si ha che

$$\text{Reachability} \in \text{P}$$

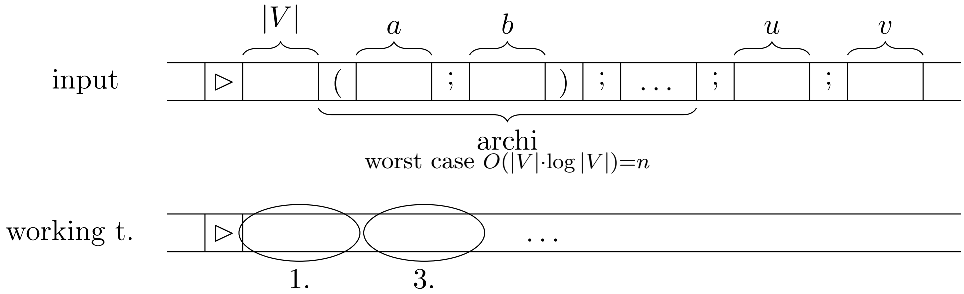
Per quanto riguarda la **complessità in spazio**, si ha che i colori e Q sono molto gradi, quindi

$$\text{Reachability} \in \text{PSPACE}$$

Esercizio: migliorare questo risultato. In particolare, Reachability $\in \mathbb{L} = \text{SPACE}(\log n)$? Reachability $\in$ SPACE$((\log n)^2)$?

Modello nondeterministico Si hanno diversi possibili stati futuri. Immaginiamo un grafo con un cammino da u a v. Una macchina deterministica segue tutti i cammini uno ad uno, e per ognuno controlla se è quello corretto. Una macchina nondeterministica è in grado di "indovinare" il cammino corretto e di seguirlo.

Analizziamo la **complessità spaziale**. In questo caso non si ha bisogno dei colori. La macchina nondeterministica genera ad ogni passo un nuovo nodo nel working tape:



1. Genera il codice di un nodo (ad esempio, del nodo a)
2. Controlla se esiste un arcp da u ad a
   - Se non esiste, ritorna "no"
   - Se esiste, vai avanti
3. Aggiungi un altro nodo (ad esempio, il nodo b)
4. Controlla se esiste un arco da a ad b
   - Se non esiste, ritorna "no"

   - Se esiste, vai avanti

5. Sostituisci a con b, e aggiungi un altro nodo (ad esempio, il nodo c)

6. ...

Esempio Consideriamo il grafo

$$\begin{tikzcd}
 & & e & \\
 & a \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \\
u \arrow[ur] & & f \arrow[r] & v \\
 & b \arrow[ul] \arrow[dl] & & \\
c \arrow[rr] & & d \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

Proviamo a trovare un cammino da u a v:

- Esiste un arco da u ad a? Sì, quindi ua
- Esiste un arco da a a e? Sì, quindi uae
- Esiste un arco da e a c? No, quindi non esiste un cammino $uaec$

Esiste invece una computazione che genera il cammino $uafv$? Sì. Si può notare come ci sia però un problema, ovvero i cicli (ad esempio $uabuabcdbcdb\ldots$). In realtà, questo non è un problema: ragionando sulla complessità, e non sulla computabilità, consideriamo solo macchine di Turing che terminano.

Un modo per evitare i cicli è quello di immagazzinare in un working tape un contatore di passi eseguiti. Quando tale contatore raggiunge $|V|+1$, si può fermare la computazione e ritornare "no".

$$\text{Reachability} \in \mathrm{N}\mathbb{L} = \mathrm{NSPACE}(\log n)$$

Definizione 2.6.1 (Macchina Nondeterministica) *Una macchina nondeterministica è una tupla $\mathcal{N}(K, \Sigma, \Delta, s)$, dove*

- *K è un insieme finito di stati, di cui $s \in K$ è quello iniziale*
- *Σ è un alfabeto finito, e $\triangleright, \sqcup \in \Sigma$.*
- *Δ è la relazione di transizione, definita come*

$$\Delta \subseteq K \times \Sigma^k \times (K \cup \{yes, no, halt\}) \times \Sigma^k \times \{\leftarrow, \rightarrow, -\}^k$$

La relazione di transizione tra due configurazioni è definita come per le macchine deterministiche:

$$(q, u_1, w_1, \ldots, q_k, w_k) \rightarrow (q', u'_1, w'_1, \ldots, q'_k, w'_k)$$

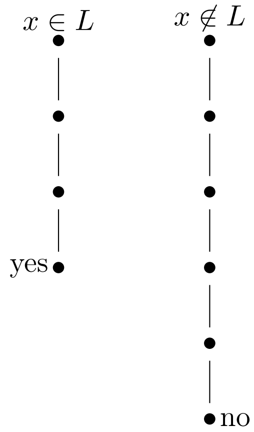
con $(q', u'_1, w'_1, \ldots, q'_k, w'_k)$ uno dei possibili risultati dell'applicazione di Δ.

Definizione 2.6.2 (Linguaggio deciso da una Macchina Nondeterministica) *Un linguaggio* $L \subseteq (\Sigma \backslash \{\sqcup\})^*$ *è deciso da una macchina nondeterministica* $\mathcal{N}$ *(con* $\mathcal{N}(x)$ *che termina sempre)*

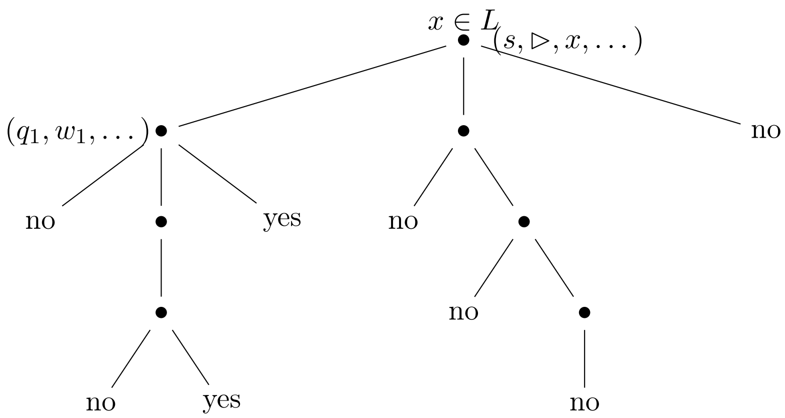
se $\forall x \in L(\Sigma \backslash \{\sqcup\})^*$

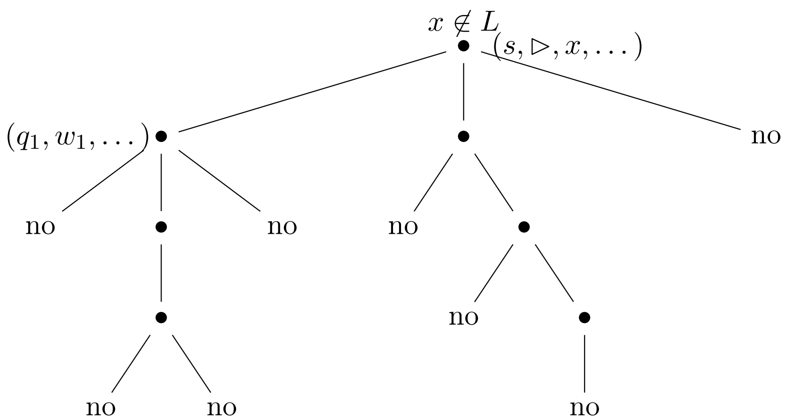
- $x \in L \Rightarrow$ *esiste una computazione di* $\mathcal{N}$ *che inizia da* $(s, \triangleright, x, \triangleright, \varepsilon, \dots, \triangleright, \varepsilon)$ *e termina in* $(yes, \dots)$
- $x \notin L \Rightarrow$ *tutte le computazioni di* $\mathcal{N}$ *che iniziano da* $(s, \triangleright, x, \triangleright, \varepsilon, \dots, \triangleright, \varepsilon)$ *terminano in* $(no, \dots)$

Se si ha una macchina che decide un linguaggio, bisogna definire la complessità spaziale e temporale su quella macchina. Per le macchine deterministiche, si ha che la complessità temporale è la lunghezza della computazione ne laso peggiore, per ogni possibile stringa di lunghezza n:



Ma nel caso nondeterministico si hanno degli alberi:





In questo caso, la complessità si può definire come l'altezza dell'albero.

Definizione 2.6.3 (Complessità Temporale di una Macchina Nondeterministica) *Una macchina di Turing nondeterministica $\mathcal{N}$ con input x richiede tempo t se ogni possibile computazione di $\mathcal{N}$ su x ha lunghezza al massimo t. $\mathcal{N}$ richiede tempo $f(n)$ se, per ogni x, $\mathcal{N}$ termina su x in tempo $f(|x|)$.*

Esempio Immaginiamo che il grado del nondeterminismo di una macchina $\mathcal{N}$ sia 3, ovvero i nodi del suo albero hanno grado 3 ($d = 3$). L'altezza è $f(|x|)$, e il numero di foglie è $d^{f(|x|)}$ (molto grande).

Definizione 2.6.4 (NTIME($f(n)$)) *$L \in NTIME(f(n))$ se esiste una macchina di Turing nondeterministica $\mathcal{N}$ che decide L in tempo $f(n)$.*

Notare che, ad esempio, $\text{TIME}(n^5) \neq \text{NTIME}(n^5)$. Quest'ultimo è l'insieme di tutti i linguaggi che possono essere decisi in tempo n^5 da una macchina di Turing nondeterministica.

Proposizione 2.6.1

$$TIME(f(n)) \subseteq NTIME(f(n))$$

Abbiamo che

$$\text{P} = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \text{TIME}(n^h) \qquad \text{NP} = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \text{NTIME}(n^h)$$

Quindi

$$\text{P} \subseteq \text{NP}$$

Abbiamo definito la complessità temporale di una macchina nondeterministica. Possiamo definire anche la complessità spaziale come la configurazione (nodo dell'albero) massima.

Definizione 2.6.5 (Complessità Spaziale di una Macchina Nondeterministica) *Una macchina di Turing nondeterministica con I/O $\mathcal{N}$ sull'input x utilizza spazio s se*

$$s \geq \sum_{h=2}^{k-1} |w_h| + |u_h|$$

Ovvero s è il massimo su tutte le possibili computazioni di $\mathcal{N}$ su x

$$s = \max \left(\sum |w_h| + |u_h| \right)$$

$\mathcal{N}$ lavora in NSPACE$f(n)$, $\mathcal{N}$ decide L in NSPACE$f(n)$.

$$\text{PSPACE} = \mathbb{L} \quad \text{spazio polinomiale su modello deterministico}$$
$$\text{NPSPACE} = \text{N}\mathbb{L} \quad \text{spazio polinomiale su modello nondeterministico}$$

TODO: finire lezione 13
TODO: lezione 14
TODO: lezione 15
TODO: lezione 16