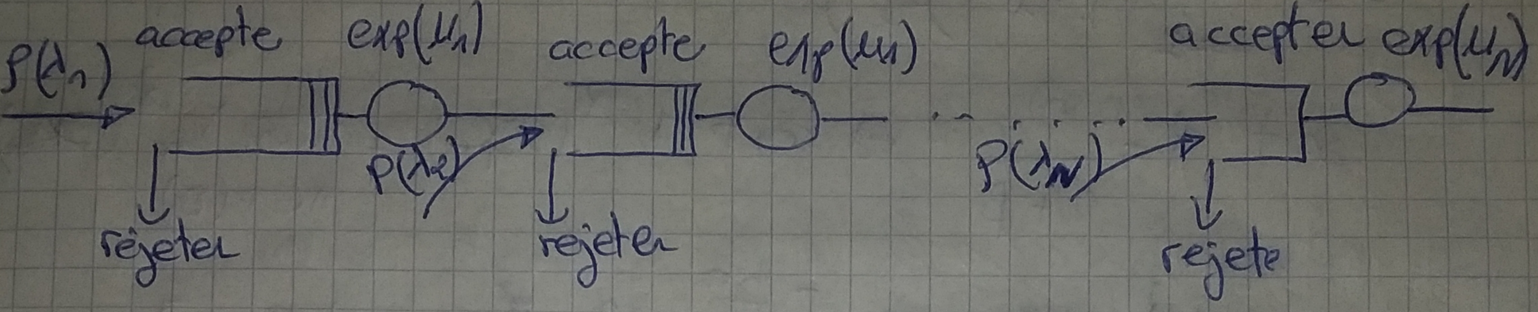
-Devoir 1 :



1. Puisque la fonction du coût ~~actualise~~ instantanée est positive et l'espace d'action A est fini, donc le problème (P) est bien défini et admet une politique stationnaire déterministe qui le minimise.

$$(P) \quad \lim_{T \to +\infty} \sup E_\pi \left[\int_0^T e^{-\beta t} c(x_t, a_t)\, dt / x_0 = x \right]$$

avec $\beta \in \mathbb{R}_+^*$

soit $J^\beta(x) = \min_{\pi \in \Pi(D)} J_\pi^\beta(x)$

où $J_\pi^\beta(x) = E_\pi \left[\int_0^\infty e^{-\beta t} \cdot c(x_t, a_t)\, dt \Big|_{x_0 = x} \right]$

② : On suppose que le temps de séjour dans n'importe quel état suit une loi exponentielle de paramètre

$$\nu = \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i + \mu_i)$$

soit $\alpha = \dfrac{\nu}{\nu+\beta}$ et soit $V^\alpha(x) = \min\limits_{\pi \in \Pi(D)} V_\pi^\alpha(x)$

avec $V_\pi^\alpha(x) = E_\pi \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n c(x_n, a_n) / x \right]$

On a donc $J^\beta(x) = \dfrac{1}{\nu+\beta} V^\alpha(x)$

③ : l'equation de programmation dynamique à l'étape $n+1$ pour le problème discret :

$$V_{n+1}^\alpha(x) = \min_{a \in \{0,1\}^N} \left\{ c(x,a) + \alpha \sum_{x' \in \mathbb{N}^N} P(x'/x,a) \times V_n^\alpha(x') \right\}$$

④ : Equation de programmatio dynamique :

$$V_{n+1}^\alpha(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i x^i + \frac{\alpha}{\nu+\beta} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \mu_i V_n^\alpha(D_i x) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \min \left\{ V_n^\alpha(x) + \varepsilon_i ; V_n^\alpha(A_i x) \right\} \right\}$$

Propriétés structurelles de la politique optimale :

$P_1)$ V_n^α ↗ en x_i avec $i \in \{1, 2, \dots, N\}$

$P_2)$ $V_n^\alpha(x) - V_n^\alpha(A_i x)$ ↘ en x^i avec $i \in \{1, \dots, N\}$

On suppose que $v_0^\alpha(x) = 0$ si $\lim_{n \to +\infty} V_n^\alpha(x) = V^\alpha(x)$

existe, alors V^α verifier aussi P_1, P_2

On a $V_1^\alpha(x) = cx = \sum_{i=1}^{N} c_i x^i$ car $V_0^\alpha(x) = 0$

$$V_2^\alpha(x) = cx + \frac{\alpha}{\vartheta + \delta} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \mu_i V_1^\alpha(D_i x) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \min\left\{ V_1^\alpha(x) + \xi_i ; V_1^\alpha(A_i x) \right\} \right\}$$

$$V_n^\alpha(x) - V_n^\alpha(A_i x) = cx + \frac{\alpha}{\vartheta + \delta} \left\{ \sum_i^N \mu_i V_{n-1}^\alpha(D_i x) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \min\left\{ V_{n-1}^\alpha(x) + \xi_i , V_{n-1}^\alpha(A_i x) \right\} \right\} -$$

$$c(x+1) + \frac{\alpha}{\vartheta + \delta} \left\{ \sum_i^N \mu_i V_{n-1}^\alpha(D_i A_i x) + \sum_i^N \lambda_i \min\left\{ V_{n-1}^\alpha(A_i x) + \xi_i , V_{n-1}^\alpha(A_i A_i x) \right\} \right\}$$

$$= -c + \frac{\alpha}{\vartheta + \delta} \left\{ \sum_i \mu_i \left(V_{n-1}^\alpha(D_i x) \right) - V_{n-1}^\alpha(x) \right)$$

$$+ \sum_i \lambda_i \left\{ \min\left\{ V_{n-1}^\alpha(x) + \xi_i ; V_{n-1}^\alpha(A_i x) \right\} - \min\left\{ V_{n-1}^\alpha(A_i x) + \xi_i , V_{n-1}^\alpha(A A_i x) \right\} \right.$$

Pour démontré les propriétés structurels on peut, utiliser la démonstration par récurence

5 la politique optimale se caractérise par le fait que si on rejette un client à un état x, on va lui rejetter aussi à l'état $A_j x$,

$j = 1, 2, \dots, N$