فصل ۱

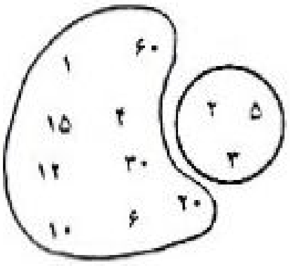
مجموعه ها

وَ هُوَ الَّذی جَعَلَ لَکُم النُّجومَ لِتَهتَدوا بِهٰا فی ظُلُماتِ البَرِّ وَالبَحرِ ......
او کسی است که ستارگان را برای شما قرار داد، تا در تاریکی‌های خشکی و دریا، به وسیلهٔ آنها راه یابید...
(سورهٔ انعام، آیهٔ ۹۷)

منظومهٔ شمسی مجموعه‌ای است شامل ستارهٔ خورشید و سیّاره‌هایی که روی مدارهای خاصّی در حال چرخش هستند؛ نظیر ستارهٔ خورشید. ستاره‌هایی با بزرگی چندهزار برابر خورشید رصد شده است. طوری که اگر به اندازهٔ خورشید به زمین نزدیک بودند، تمام آسمان ما را می‌پوشاندند.

درس اوّل: معرفی مجموعه

فعالیت



در شکل روبه‌رو شمارنده‌های طبیعی عدد ۶۰ را نوشته‌ایم و بین آنها شمارنده‌های اوّل را مشخص کرده‌ایم. شما هم شمارنده‌های ۶۰ را که اوّل نیست در یک منحنی بسته قرار دهید.

اگر شمارنده‌های طبیعی و اوّلِ عدد ۶۰ یعنی ۲، ۳ و ۵ را در داخل دو آکلاد قرار دهیم و آن را با حرفی چون A یا B یا ... نام‌گذاری کنیم و بنویسیم A = {۲,۳,۵} در این‌صورت یک **مجموعه** تشکیل داده‌ایم و به هریک از عددهای ۲، ۳ و ۵ یک **عضو** مجموعهٔ A می‌گوییم؛ در این‌صورت مجموعهٔ A دارای ۳ عضو است.

❊ شما شمارنده‌های مرکب عدد ۶۰ را به‌صورت یک مجموعه بنویسید و آن را B بنامید.

B = {۴، ۶، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۲۰، ۳۰، ۶۰}

❊ مجموعهٔ شامل شمارنده‌های عدد ۶۰ که نه اوّل باشد و نه مرکب، چند عضو دارد؟ یک عضو این مجموعه را نیز C بنامید و آن را نمایش دهید. C = {۱}

❊ مجموعهٔ D شامل همهٔ شمارنده‌های دورقمی ۶۰ را تشکیل دهید؛ این مجموعه چند عضو دارد؟

D = {۱۰، ۱۲، ۱۵، ۲۰، ۳۰، ۶۰}

از رضا و احمد خواسته شد تا مجموعهٔ شامل ۳ شمارندهٔ زوج عدد ۶۰ را تشکیل دهند. احمد نوشت: {۴,۶,۱۰} و رضا نوشت: {۶,۱۰,۱۲} به نظر شما چرا جواب‌های آنها با هم فرق دارد؟ چون ۸ شمارنده زوج وجود دارد احمد و رضا هر کدام از این ۸ شمارنده سه شمارنده انتخاب کرده‌اند

نتیجه: عبارت‌هایی شبیه این عبارت، که مشخص کنندهٔ یک مجموعهٔ معین و یکتا نباشد، مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کند.

> در نمایش مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن عضوهای مجموعه، مهم نیست و با جابه‌جایی عضوهای یک مجموعه، مجموعهٔ جدیدی ساخته نمی‌شود؛ همچنین با تکرار عضوهای یک مجموعه، مجموعهٔ جدیدی ساخته نمی‌شود؛ بنابراین به‌جای {۳,۳,۴} می‌نویسیم {۳,۴}.

معرفی مجموعه

ما، در زندگی روزمره در صحبت‌ها و نوشته‌هایمان از واژه‌هایی مانند دسته، گروه و مجموعه استفاده می‌کنیم؛ برای مثال وقتی می‌گوییم «گروهی از ورزشکاران وارد ورزشگاه شدند»، نام ورزشکاران را مشخص نکرده‌ایم، درحالی که ما از مجموعه در ریاضی **برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای مشخص (عضویت این اشیا در مجموعه کاملاً معین باشد) و متمایز (غیرتکراری)** استفاده می‌کنیم.

فعالیت

۱ــ کدام یک از عبارت‌های زیر مشخص کننده یک مجموعه است؟ مجموعهٔ موردنظر را نمایش دهید.

✓الف) عددهای طبیعی و یک رقمی ✗ب) چهار شاعر ایرانی ✗ج) دو عدد اوّل کوچک‌تر از ۱۲

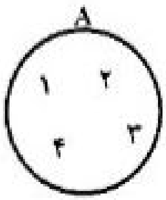
{۱, ۲, ۳, ... و ۹}

۲ــ با توجه به شرط متمایز بودن عضوهای یک مجموعه، جاهای خالی را پر کنید:

الف) به‌جای {۱،۲،۱،۴،۵} = A باید بنویسیم A = {۱, ۲, ۴, ۵}

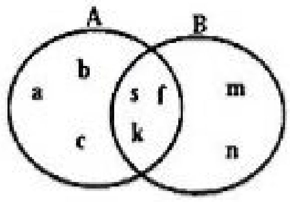
ب) به دلیل تکراری بودنِ عدد ۵ در {۵،۶،۵،۷} = B آن را به‌صورت {۵و۶و۷} می‌نویسیم.

اگر مجموعهٔ A را به‌صورت A = {a,b,۵,۷} درنظر بگیریم برای نشان دادن اینکه a عضوی از مجموعهٔ A است می‌نویسیم a ∈ A و می‌خوانیم «a عضوِ A است» و چون عدد ۴ عضو A نیست، می‌نویسیم ۴ ∉ A و می‌خوانیم «۴ عضو A نیست».



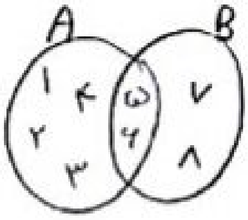
نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار وِن: مجموعه را می‌توان با استفاده از منحنی‌های بسته نمایش داد؛ به عنوان مثال مجموعهٔ A = {۱،۲،۳،۴} را به‌صورت روبه‌رو نمایش می‌دهیم که نمایش با استفاده از نمودار وِن است.

فعالیت



۱ــ با توجه به نمودار وِن، که برای دو مجموعهٔ A و B رسم شده است، مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان مشخص کنید.

A={a, b, c, s, k, f}   B={m, n, s, f, k}



۲ــ دو مجموعهٔ A = {۱،۲،۳،۴،۵،۶} و B = {۵،۶،۷،۸} را درنظر بگیرید:

دو مجموعه را با یک نمودار وِن نمایش دهید. کدام عددها هم در منحنی بستهٔ مربوط به A و هم در منحنی بستهٔ B وجود دارد؟ ۵و۶

۳ــ مجموعهٔ عددهای دو رقمی و زوجِ اوّل را بنویسید و آن را E بنامید. این مجموعه چند عضو دارد؟ عضوی ندارد.

E={ }

«اگر در مجموعه‌ای عضوی وجود نداشته باشد، آن را مجموعهٔ تُهی می‌نامیم و با نماد ∅ یا { } نمایش می‌دهیم.» توجه شود که این مجموعه با مجموعهٔ {∅} یا {۰} که هر کدام دارای یک عضو هستند، یکی نیست.

۴ــ کدام یک از عبارت‌های زیر، مجموعهٔ تهی را مشخص می‌کند؟

✓الف) عددهای طبیعی بین ۵ و ۶ ب) عددهای صحیح بین ۱- و ۱

ج) عددهای اول و زوج د) عددهای طبیعی یک رقمی و مضرب ۳ که اول باشند.

کار در کلاس

(سئوال ۱ و ۲ باز پاسخ می باشند)

۱ــ سه عبارت بنویسید که هر کدام نشان دهندهٔ مجموعهٔ تهی باشد؛ سپس عبارت‌های خود را با نوشته‌های هم‌کلاسی‌های خود مقایسه کنید. (اعداد طبیعی کوچکتر از ۱) د (اعداد صحیح بین ۶- و ۷-) د (اعداد طبیعی زوج بین ۲ و ۴)

۲ــ سه عبارت بنویسید که هر کدام مشخص کنندهٔ مجموعه‌ای فقط با یک عضو باشد. (چنین مجموعه‌هایی را مجموعه‌های یک‌عضوی می‌نامند.) (اعداد حسابی کوچکتر از ۱) د (اعداد اول بین ۹۰ و ۱۰۰) د (اعداد اول زوج)

۳ــ عبارت هایی که مجموعه‌ای را مشخص می‌کند با علامت ✓ و بقیه را با علامت × مشخص کنید (با ذکر دلیل).

✗الف) چهار عدد فرد متوالی ✓ب) سه عدد طبیعی زوج متوالی با شروع از ۲

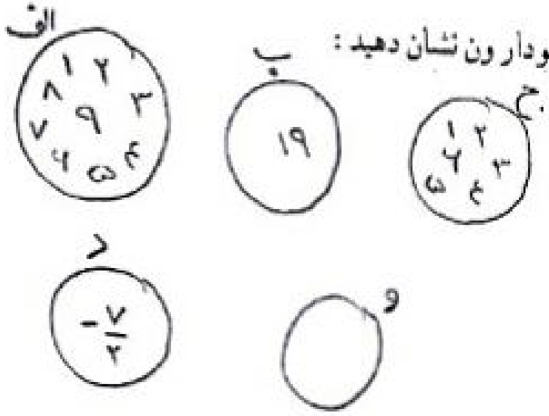
✓ج) عددهای اولِ کوچک‌تر از ۲۰ ✗د) سه شهر ایران ✓هـ) شمارنده‌های عدد ۲۴

✗و) ۵ عدد بزرگ ✓ز) عددهای طبیعی بین ۲ و ۳

۴ــ مانند نمونه کامل کنید:

۱) مجموعهٔ حروف الفبای فارسی	① A = {الف، ب، پ، ....، ی}
۲) {۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹}	④ B = {۴،۸،۱۲،...}
۳) مجموعهٔ عددهای صحیح بین ۲- و ۳-	⑦ C : مجموعهٔ حروف a و b و عدد ۳
۴) مجموعهٔ عددهای طبیعی و مضرب ۴	⑥ D = {۵}
۵) مجموعهٔ عددهای اول و یک رقمی	③ E = { }
۶) مجموعهٔ عددهای اول و مضرب ۵	⑧ F = {۲،۴،۶،۸}
۷) {۳،a،b}	② G: مجموعهٔ عددهای طبیعی بین ۲ و ۱۰
۸) {۶،۴،۲،۸}	⑤ H = {۲،۳،۵،۷}

۵ـ کدام‌یک از عبارت‌های زیر مشخص‌کنندهٔ یک مجموعه است؟ با نمودار ون نشان دهید :



✓ الف) عددهای صحیح مثبت و کمتر از ۱۰

✓ ب) شمارنده‌های اولِ عدد ۱۹

✓ ج) عددهایی که شش وجه یک تاس معمولی مشخص می‌کند.

✓ د) جواب‌های معادلهٔ ۱=۲x+۸

هـ) چهار میوه خوشمزه

✓ و) عددهای منفی و بزرگ‌تر از یک

تمرین

۱ـ متناظر با هر عبارت، یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه، یک عبارت بنویسید و تعداد عضوهای هر مجموعه را تعیین کنید :

الف) A = {۱,۸,۲۷,۶۴,۱۲۵} توان سوم اعداد طبیعی بین صفر و ۶ ← ۵ عضو

ب) C = {۱۰} اعداد طبیعی بین ۹ و ۱۱ ← ۱ عضو

ج) عددهای طبیعیِ مضرب ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۰۰ {۳, ۶, ۹, ۱۲, ..., ۹۹۹} ← ۳۳۳ عضو

د) عددهای طبیعیِ بزرگ‌تر از ۴ و کوچک‌تر از ۵ { } ← صفر عضو

هـ) عددهای صحیح منفی که بین ۴ و ۷ قرار دارد. { } ← صفر عضو

و) عددهای اوّل دورقمی که مضرب ۷ باشند. { } ← صفر عضو

۲ـ جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل، درست باشد.

الف) عبارت «۵ عدد طبیعی که بین ۱ و ۲۰ قرار داشته باشند» یک مجموعه را مشخص نمی‌کند.

ب) مجموعهٔ {۲,۳,۴,...,۹} دارای ۸ عضو است.

ج) مجموعهٔ A = {۰,∅} دارای ۲ عضو است.

د) با توجه به مجموعهٔ A = {۳,۵,۷,۹,۱۱} ؛ داریم : ۵ عضو A است یا با نماد ریاضی ۵∈A

و ۱۲ عضو A نیست یا با نماد ریاضی ۱۲∉A .

۳ـ سه مجموعهٔ متفاوت بنویسید که عدد ۲ عضو آن باشند. (۱ بارپاسخ)

{۲} و {۲, ۳, ۵, ...} و {۱, ۲, ۳}

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

دو مجموعهٔ برابر

فعالیت

۱۰	-۱۰	۱۲
۶	۴	۲
-۲	۱۸	-۲

۱ــ جدول عددهای صحیحِ روبه‌رو را طوری کامل کنید که مجموع عددهای روی هر سطر، هر ستون و هر قطرِ آن برابر ۱۲ شود؛ سپس مجموعهٔ عددهای سطر دوم جدول را بنویسید و آن را A بنامید. $A = \{2, 4, 6\}$

اکنون مجموعهٔ B را چنان بنویسید که شامل سه عدد زوج متوالی و میانگین عضوهای آن با ۴ برابر باشد. هریک از مجموعه‌های A و B چند عضو دارد؟ ۳عضو دارد. $B = \{2, 4, 6\}$

آیا هر عضو A در مجموعهٔ B است؟ بله آیا هر عضو B در مجموعهٔ A است؟ بله

همان‌طور که ملاحظه کردید، عضوهای دو مجموعهٔ A و B یکسان است و هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B، عضوی از A است؛ در این صورت دو مجموعهٔ A و B برابر است و می‌نویسیم $A = B$.

۲ــ مجموعهٔ A شامل سه عدد طبیعی متوالی است به‌طوری که حاصل جمع آنها برابر ۲۷ است. ابتدا A را با عضوهای آن بنویسید؛ سپس مجموعه‌هایی را مشخص کنید که در زیر معرفی شده و با A برابر است : $A = \{8, 9, 10\}$

الف) مجموعهٔ عددهای طبیعی بین ۶ و ۱۰ $\{7, 8, 9\}$

ب) مجموعهٔ عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۷ و کوچک‌تر از ۱۱ $\{8, 9, 10\}$

ج) مجموعهٔ سه عدد طبیعی متوالی که میانگین آنها با ۹ برابر است. $\{8, 9, 10\}$

همان‌طور که دیدید مجموعهٔ {۸،۹،۱۰} با مجموعه {۷،۸،۹} برابر نیست؛ زیرا همهٔ عضوهایشان یکسان نیست.

اگر عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که عضو A نباشد در این‌صورت مجموعهٔ A با B برابر نیست و می‌نویسیم $A \neq B$.

کار در کلاس

۱ــ جاهای خالی را در مجموعه‌های زیر طوری پرکنید که مجموعه‌ها برابر باشند :

الف) $\left\{\frac{2}{5}, 3, \frac{-\sqrt{144}}{(-2)^2}, \sqrt{16}, \sqrt{25}\right\} = \left\{5, -3, \frac{2}{5}, 4, \frac{9}{3}\right\}$

می‌توان اعداد را به صورت های دیگر نیز نوشت

ب) $\left\{7, \frac{4}{10}, \sqrt{\frac{4}{9}}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{4}, 0/625\right\} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, -0/5, \frac{5}{8}, \sqrt{49}, -2\right\}$

۲ــ دو مجموعه به نام‌های A و B مانند سؤال بالا طرح کنید. پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید.

(بازپاسخ) هر مجموعه درست مورد قبول است

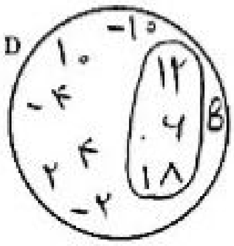
$A = \{-\sqrt{4}, -\sqrt{9}, -\sqrt{25}\}$

$B = \{-2, -3, -5\}$

زیرمجموعه

فعالیت

مجموعهٔ عددهای جدول فعالیت قبل را D بنامید؛ سپس عضوهای مجموعهٔ D را در نمودار وِن روبه‌رو بنویسید :



در نمودار بالا، عضوهایی را که بر ۳ بخش‌پذیر است با یک منحنی بسته مشخص کنید و B بنامید.

مجموعهٔ B را بنویسید. آیا هر عضو B، عضوی از D نیز هست؟ $B = \{6, 12, 18\}$

در مجموعهٔ D، عددهای زوج را مشخص کنید و آن را C بنامید؛ آیا $D = C$؟ $C = \{2, 4, 6, 12, 18, -10, -4, -2\}$

همان‌طور که دیدید، عضوهای مجموعهٔ B همگی در D هست؛ یعنی هر عضو B، عضوی از D است؛ در این صورت مجموعهٔ B زیرمجموعهٔ D است و می‌نویسیم $B \subseteq D$.

آیا مجموعهٔ C زیرمجموعهٔ D است؟ بله

با توجه به تعریف زیر مجموعه، واضح است که هر مجموعه، زیر مجموعهٔ خودش هست؛ یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، داریم : $A \subseteq A$.

اکنون زیرمجموعه‌ای از D را مشخص کنید که عضوهای آن عددهای فرد باشد؛ نام دیگر این مجموعه چیست؟ { } تهی

آیا عبارت $D \subseteq \{-6, 2, -4, 4, 10\}$ درست است؟ چرا؟ نخیر. چون ۶- عضو مجموعه D نمی‌باشد.

اگر بتوانیم عضوی در B بیابیم که در A نباشد، می‌گوییم B زیرمجموعهٔ A نیست و می‌نویسیم $B \nsubseteq A$.

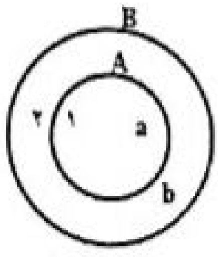
آیا در مجموعهٔ تُهی عضوی هست که در مجموعهٔ دلخواهی مانند A نباشد؟ نخیر

مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای دلخواه مانند A است؛ یعنی: $\varnothing \subseteq A$.

مثال : دلیل درستی رابطه‌های زیر مشخص شده است.

الف) $\{a,b,d\} \not\subseteq \{a,b,c,e\}$؛ زیرا در مجموعهٔ سمت چپ، d هست که در مجموعه سمت راست نیست.

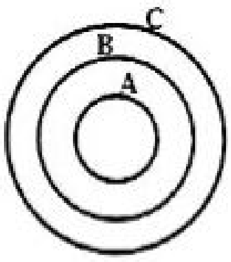
ب) $\{-۱,۰,۱,۳\} \subseteq \{۴,۳,۰,۱,-۱,۲\}$؛ زیرا هر عضو مجموعهٔ سمت چپ، عضوی از مجموعهٔ سمت راست است.



$A \subseteq B, B \not\subseteq A$

ج) با توجه به شکل مقابل $A \subseteq B$ درست است؛ زیرا همهٔ عضوهای A در B قرار دارد و $B \not\subseteq A$ درست است؛ زیرا عضوی در B مانند ۲ می‌توان یافت که در A وجود ندارد.

کار در کلاس



۱ــ با توجه به نمودار مقابل، دلیل درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید :

$C \not\subseteq A$ ✓ ، $B \subseteq A$ ✗ ، $A \not\subseteq C$ ✗

$A \subseteq B$ ✓ ، $B \subseteq C$ ✓ ، $\varnothing \subseteq A$ ✓

۲ــ مجموعه‌های A، B و C را درنظر بگیرید؛ سپس درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید (با ذکر دلیل) :

$A = \{۱,۳,۶,۴\}$ ، $B = \{۵,۱,۳\}$ ، $C = \{۲,۵,۱,۳,۶\}$

$B \not\subseteq A$ ✓، $۳ \subseteq B$ ✗، $A \subseteq B$ ✗، $B \subseteq C$ ✓، $A \not\subseteq C$ ✓، $۲ \in A$ ✗

$\{۱,۴\} \in A$ ✗ ، $۶ \in A$ ✗ ، $\{۵,۶\} \subseteq C$ ✓ ، $۵ \in C$ ✓ ، $۰ \subseteq A$ ✗

مثال : همهٔ زیرمجموعه‌های $A = \{a,b,c\}$ در زیر نوشته شده است :

$\varnothing, \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$

مانند مثال قبل، تمام زیرمجموعه‌های هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید :

الف) مجموعهٔ عددهای طبیعی بین ۹ و ۱۲. $= \{۱۰,۱۱\}$ ب) $\{a,b,c,d\}$

$\varnothing, \{۱۰\}, \{۱۱\}, \{۱۰,۱۱\}$

$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$
$\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}$
$\{a,b,c\}, \{a,b,d\}$
$\{a,c,d\}, \{b,c,d\}$
$\{a,b,c,d\}$

نمایش مجموعه‌های اعداد

در سال‌های گذشته با عددهای طبیعی آشنا شده‌اید؛ از این عددها برای شمارش استفاده می‌کنیم.

مجموعهٔ عددهای طبیعی را با $\mathbb{N}$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, \dots\}$$

تاکنون مجموعه‌ها را با عضوها و نمودار وِن مشخص کردیم. یک روش دیگر برای نمایش مجموعه‌ها استفاده از نمادهای ریاضی است؛ برای مثال : مجموعهٔ عددهای طبیعی زوج $E = \{۲, ۴, ۶, ۸, \dots\}$ را درنظر بگیرید. می‌دانیم عضوهای این مجموعه خاصیت مشترکی دارد؛ یعنی همگی آنها مضرب ۲ است و از قبل می‌دانیم که هر عدد زوج طبیعی به‌صورت $۲k$ قابل نمایش است که در آن $k \in \mathbb{N}$، پس می‌نویسیم : $E = \{۲k | k \in \mathbb{N}\}$

و می‌خوانیم E برابر است با مجموعهٔ عددهایی به شکل $۲k$ به‌طوری که k متعلق به مجموعهٔ عددهای طبیعی است. در مجموعهٔ E علامت «|» خوانده می‌شود «به‌طوری که». در زیر چند مجموعه را با نمادهای ریاضی نوشته‌ایم :

الف) مجموعهٔ عددهای طبیعی فرد : $O = \{۲k - ۱ | k \in \mathbb{N}\}$

ب) $A = \{۷, ۸, ۹, ۱۰\}$ $\quad A = \{x \in \mathbb{N} | ۷ \leq x \leq ۱۰\}$ یا $A = \{x \in \mathbb{N} | ۶ < x < ۱۱\}$

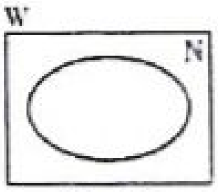
ج) زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}$ که عضوهای آن همگی بر ۳ بخش‌پذیر است : $\{۳k | k \in \mathbb{N}\}$

مثال : مجموعهٔ $A = \{۵n + ۳ | n \in \mathbb{N}\}$ را با عضوهایش مشخص کنید :

برای این منظور جدول زیر را کامل کنید و در هر مرحله به‌جای n یک عدد طبیعی در $۵n+۳$ قرار دهید.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...
۵n + ۳	$\underbrace{۵(۱)+۳}_{۸}$	$\underbrace{۵(۲)+۳}_{۱۳}$	$\underbrace{۵(۳)+۳}_{۱۸}$	$\underbrace{۵(۴)+۳}_{۲۳}$	$\underbrace{۵(۵)+۳}_{۲۸}$	$\underbrace{۵(۶)+۳}_{۳۳}$	$\underbrace{۵(۷)+۳}_{۳۸}$	...

بنابراین داریم : $A = \{۸, ۱۳, ۱۸, ۲۳, ۲۸, ۳۳, ۳۸, \dots\}$

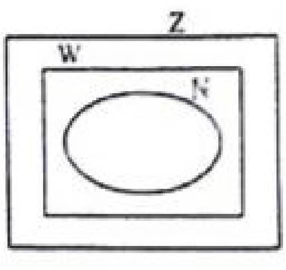


$N \subseteq W$

مجموعهٔ عددهای حسابی را با W نمایش می‌دهند : $W = \{۰, ۱, ۲, ۳, \dots\}$

مجموعهٔ عددهای حسابی را می‌توان با نمادهای ریاضی به‌صورت $W = \{k - ۱ | k \in \mathbb{N}\}$ نوشت.

هر عدد طبیعی یک عدد حسابی است؛ یعنی $\mathbb{N} \subseteq W$



مجموعهٔ عددهای صحیح را با $\mathbb{Z}$ نمایش می‌دهیم :

$$= \{\dots, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \dots\}$$

همهٔ عددهای طبیعی و حسابی، عضو $\mathbb{Z}$ هم هست؛ پس : $\mathbb{N} \subseteq W \subseteq \mathbb{Z}$

کار در کلاس

مجموعه‌های زیر را با عضوها مشخص کنید:

الف) مجموعهٔ عددهای صحیح فرد $\{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$

ب) $A=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, -5\le x<5\}$ $\{-5, -4, \dots, 3, 4\}$

ج) $B=\{3k+2 \mid k\in\mathbb{Z}\} = \{\dots, -7, -4, -1, 2, \dots\}$

مجموعه عددهای گویا را با Q نمایش می‌دهیم. چون اوّلین عدد گویای بزرگ‌تر از هر عدد گویا مشخص نیست، نمی‌توان این مجموعه را با عضوها مشخص کرد؛ به همین دلیل مجموعهٔ عددهای گویا را با نمادهای ریاضی تعریف می‌کنیم: $Q=\left\{\frac{a}{b} \mid a,b\in\mathbb{Z}, b\ne 0\right\}$ یا $Q=\left\{\frac{a}{b} \mid a\in \mathbb{Z}, b\in \mathbb{N}\right\}$

توجه کنید که هر عدد صحیح، عددی گویا است؛ یعنی برای هر عدد صحیح a داریم: $a=\frac{a}{1}$، درنتیجه $\mathbb{Z}\subseteq Q$.

تمرین

۱ــ مجموعهٔ $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ را درنظر بگیرید. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با هم برابر است؟ (B و C مساویند)

$B=\{x \mid x\in A, x^2\le 2\} = \{-1, 0, 1\}$ ، $C=\{x \mid x\in A, -1\le x\le 1\} = \{0, -1, 1\}$ ، $D=\{x \mid x\in A, x^2=1\} = \{1, -1\}$

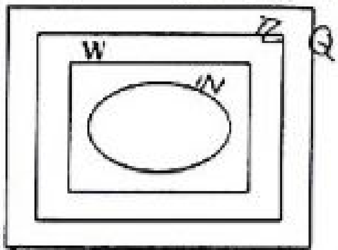
۲ــ سه مجموعه مانند A، B و C بنویسید به‌طوری که $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$. آیا می‌توان نتیجه گرفت $A\subseteq C$؟ بله (با ذکر پاسخ)

$A=\{1, 2\}$
$B=\{1, 2, 3\}$
$C=\{1, 2, 3, 4\}$

۳ــ تمام زیرمجموعه‌های هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید:

الف) $A=\{x \mid x\in \mathbb{N}, 2x+1=3\} = \{1\}$ ؛ $\varnothing$ و $\{1\}$

ب) $B=\{2x \mid x=0,2,3\} = \{0, 4, 6\}$ جواب پایین صفحه



۴ــ نمودار روبه‌رو، وضعیت مجموعه‌های Q، W، $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ را نسبت به هم نشان می‌دهد: آنها را نام‌گذاری و با علامت $\subseteq$ باهم مقایسه کنید.

$N\subseteq W$ ، $N\subseteq Z$ ، $N\subseteq Q$ ، $W\subseteq Z$ ، $W\subseteq Q$ ، $Z\subseteq Q$ یا $N\subseteq W\subseteq Z\subseteq Q$

۵ــ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید:

الف) هر عدد گویا عددی حسابی است. ✗ مثلاً $\frac{5}{4}$ گویا هست ولی حسابی نیست

ب) هر عدد حسابی عددی گویا است. ✓ هر عدد حسابی را می‌توان به صورت یک عدد کسری نوشت که مخرج آن مخالف صفر باشد.

ج) هر عدد صحیح عددی گویا است. ✓ هر عدد صحیح را می‌توان به صورت کسری نوشت که مخرج آن مخالف صفر باشد. پس گویا است.

د) بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح است. ✓ آن دسته از اعداد گویا که بعد از ساده کردن به صورت عدد صحیح درمی‌آیند را می‌توانیم در نظر بگیریم.

زیرمجموعه‌های B ← $\varnothing$ و $\{0\}, \{4\}, \{6\}, \{0,4\}, \{0,6\}, \{4,6\}, \{0,4,6\}$

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

$F = \{$ علی و رضا و محمد و کیوان و سبحان و حسن $\}$

فعالیت

$V = \{$ علی و رضا و حسین و فرشید و احسان و سامان $\}$

۱ــ در کلاس درس، علی و رضا عضو هر دو تیم والیبال و فوتبال هستند. سامان، احسان، فرشید و حسین فقط در تیم والیبال و محمد، حسن، کیوان و سبحان فقط در تیم فوتبال بازی می کنند.

الف) اگر مجموعهٔ دانش‌آموزان عضو تیم والیبال را با V و فوتبال را با F نشان دهیم، این مجموعه‌ها را با نمودار وِن نمایش و سپس با عضوهایشان بنویسید.

ب) مجموعهٔ دانش‌آموزانی را که در هر دو تیم عضویت دارند، بنویسید : $\{$ علی و رضا $\}$

ج) مجموعهٔ دانش‌آموزانی را که حداقل در یکی از این دو تیم عضویت دارند، بنویسید : $\{$ سبحان و کیوان و محمد و حسن و علی و رضا و فرشید و حسین و احسان و سامان $\}$

۲ــ دو مجموعهٔ $A=\{x\in \mathbb{N} \mid x\leq ۶\}$ و $B=\{x\in \mathbb{Z} \mid -۲\leq x\leq ۳\}$ را درنظر بگیرید و مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان تشکیل دهید :

الف) $A=\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ ب) $B=\{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳\}$

ج) مجموعهٔ عددهایی که در هر دو مجموعهٔ A و B هست $=\{۱, ۲, ۳\}$

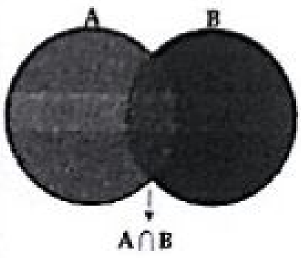
(این مجموعه را اشتراک A و B می‌نامیم و با نماد $A\cap B$ نشان می دهیم).

د) مجموعهٔ عددهایی که حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A و B هست $=\{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$

(این مجموعه را اجتماع A و B می‌نامیم و با نماد $A\cup B$ نشان می‌دهیم).

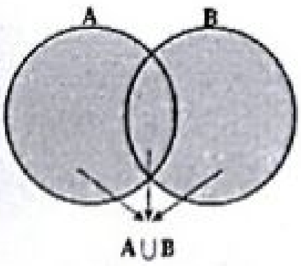
اشتراک دو مجموعه : اشتراک دو مجموعهٔ A و B، مجموعه‌ای شامل همهٔ عضوهایی است که هم عضو مجموعهٔ A و هم عضو مجموعهٔ B است. این مجموعه را با نماد $A\cap B$ نشان می‌دهیم. در نمودار روبه‌رو قسمت هاشور خورده اشتراک دو مجموعه را نشان می‌دهد.

اگر در شکل فقط قسمت اشتراک رنگی باشد بهتر است.



$$A\cap B=\{x \mid x\in A, x\in B\}$$

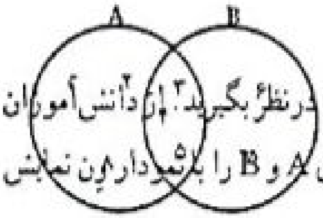
اجتماع دو مجموعه : اجتماع دو مجموعهٔ A و B، مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A و B باشند. این مجموعه را با نماد $A\cup B$ نشان می‌دهیم. در نمودار، قسمت هاشور خورده، اجتماع دو مجموعه را نشان می‌دهد :



$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ یا } x\in B\}$$

مثال : با توجه به نمودار زیر ابتدا مجموعه‌های A و B را با عضوهایشان می‌نویسیم و سپس $A\cap B$ و $A\cup B$ را تشکیل می‌دهیم :

$$A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۸\} \text{ و } B=\{۳,۴,۵,۶,۷\}$$



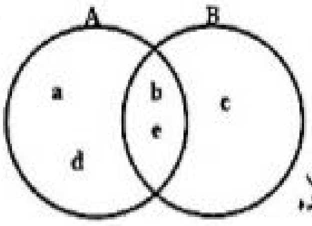
$$A\cap B=\{۳,۴,۵\} \quad , \quad A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۸,۶,۷\}$$

فعالیت

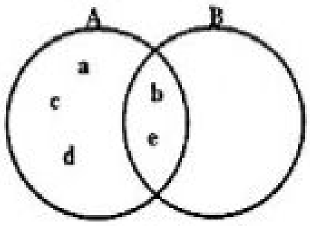
۱ـ دو مجموعهٔ $A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$ و $A\cap B=\{b,e\}$ را درنظر بگیرید. از دانش‌آموزان یک کلاس خواسته شده است که با توجه به این دو مجموعه، مجموعه‌های A و B را با نمودار ون نمایش دهند. پاسخ چهار دانش‌آموزِ این کلاس را در زیر می‌بینید :

الف) دربارهٔ درستی یا نادرستی پاسخ این دانش‌آموزان بحث کنید و برای درستی یا نادرستی آنها دلیل بیاورید.

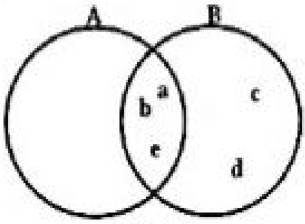
ب) آیا شما هم می‌توانید جواب درست دیگری به این سؤال بدهید؟ پاسخ خود را با پاسخ هم کلاسی‌های خود مقایسه کنید.



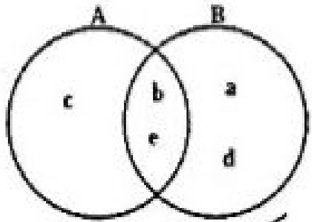
باسخ حمیده



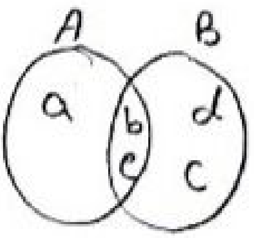
باسخ ریحانه

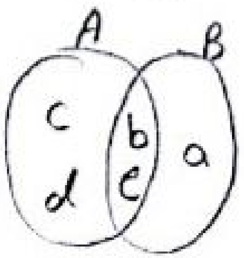


باسخ زهرا



باسخ حنانه



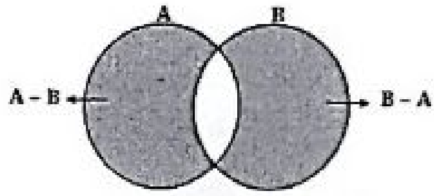


۲ـ با توجه به اوّلین فعالیت این درس و ورزشکاران دو تیم والیبال و فوتبال مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن عضو تیم والیبال باشد، ولی عضو تیم فوتبال نباشد (فقط در تیم والیبال بازی کند). این مجموعه را «V منهای F» می‌نامیم و با نماد V − F نمایش می‌دهیم :

V − F = {احسان و فرشید و حمید و ساسان} F − V = {کیوان و سبحان و حسن و محمد}

تفاضل دو مجموعه : مجموعهٔ A − B (A منهای B) مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که عضو مجموعهٔ A هستند ولی عضو مجموعهٔ B نیستند. در شکل زیر مجموعه‌های A − B و B − A هاشور خورده است :

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

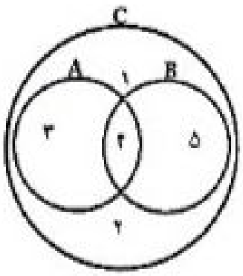


مثال : اگر $A = \{a, b, c, d, e, k\}$ و $B = \{c, d, k, f, s, t\}$ در این‌صورت :

$A - B = \{a, b, e\}$ و $B - A = \{f, s, t\}$

کار در کلاس

۱ــ با توجه به نمودار زیر کدام عبارت، درست و کدام نادرست است؟



الف) $A \subseteq C$ ✓ ب) $B \subseteq C$ ✓ ج) $C \subseteq (A \cup B)$ ✗

د) $(A \cup B) \subseteq C$ ✓ هـ) $۲ \in (A \cup B)$ ✗ و) $۴ \notin (A \cap B)$ ✗

ز) $A \cup B = A$ ✗ ح) $۵ \in (A \cup B)$ ✓ ط) $۴ \in (A \cup B)$ ✓

۲ــ مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲ را A و مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۸ را B بنامید. ابتدا A و B را تشکیل و سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید :

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
$B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

الف) مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن، شمارندهٔ ۱۸ باشد ولی شمارندهٔ ۱۲ نباشد. $\{9, 18\}$

ب) مجموعه‌ای تشکیل دهید که عضوهای آن، هم شمارندهٔ ۱۲ و هم شمارندهٔ ۱۸ باشند. $\{1, 2, 3, 6\}$

۳ــ مجموعه‌های $(\mathbb{Z} - \mathbb{N})$، $(\mathbb{N} - \mathbb{Z})$ و $(\mathbb{W} - \mathbb{N})$ را تشکیل دهید.

$\{\dots, -2, -1, 0\}$ $\{\ \}$ $\{0\}$

قرارداد : تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با n(A) نمایش می‌دهیم؛ به عنوان مثال، اگر A مجموعه‌ای k عضوی باشد، می‌نویسیم $n(A) = k$.

مثلاً اگر $A = \{۲, ۴, ۶, ۷\}$ در این صورت $n(A) = ۴$.

سؤال ۳ :

$\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{0, -1, -2, \dots\}$

$\mathbb{N} - \mathbb{Z} = \{1, 2, 3, \dots\} - \{\dots, -1, 0, 1, \dots\} = \{\ \}$

$\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} - \{1, 2, 3, \dots\} = \{0\}$

سؤال ۱:

الف) {۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹}

ب) {۱, ۳, ۵, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱}

ج) {۱, ۲, ۴, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱}

د) {۹}

هـ) {۲, ۴, ۶, ۸}

و) {۸, ۱۰, ۱۱}

ز) {۲, ۴, ۶, ۹}{۷}{۵, ۳, ۹} = {۲, ۴, ۶, ۹, ۵, ۳}

ح) {۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۹}

ط) {۲, ۴, ۶, ۸, ۹}

ی) { }

ک) {۱, ۵, ۷, ۳, ۹}

ل) {۱, ۷, ۸, ۱۰, ۱۱}

تمرین

۱ـ مجموعه‌های $A=\{۲,۴,۶,۸,۹\}$ و $B=\{۱,۵,۷,۳,۹\}$ و $C=\{۱,۷,۸,۱۰,۱۱\}$ را در نظر بگیرید؛ سپس هریک از مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید:

الف) $A \cup B$　ب) $B \cup C$　ج) $A \cup C$　د) $A \cap B$

هـ) $A - B$　و) $C - B$　ز) $(A - C) \cup (B - C)$　ح) $(A \cup B) - C$

ط) $A \cap A$　ی) $A \cap \varnothing$　ک) $B \cup B$　ل) $C \cup \varnothing$

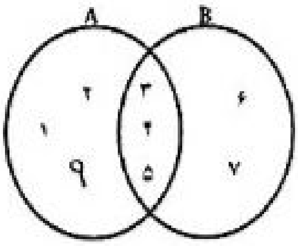
۲ـ با توجه به نمودار زیر، عبارت‌های درست را با ✓ و گزاره‌های نادرست را با × مشخص کنید:

✓ الف) $B-A=\{۶,۷\}$　✓ ب) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

✗ ج) $(A - B) \cup (B - A) = \{۱,۲,۶\}$

✓ د) $n(A \cup B) = ۸$

✗ هـ) $A - B = B - A$　✓ و) $n(A - B) = n(B - A)$



۳ـ کلمات و مجموعه‌های داده شدهٔ زیر را در جاهای خالی قرار دهید:

۱) B　۲) A　۳) اجتماع

۴) زیرمجموعهٔ　۵) $(A \cup B)$

الف) اشتراک دو مجموعه، زیر مجموعهٔ اجتماع همان دو مجموعه است.

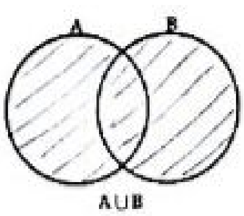
ب) هریک از دو مجموعهٔ A و B زیرمجموعهٔ $A \cup B$ است.

ج) اشتراک دو مجموعهٔ A و B زیرمجموعهٔ هریک از دو مجموعهٔ A و B است.

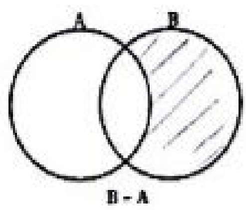
د) مجموعهٔ $A - B$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ A است.

هـ) اجتماع دو مجموعهٔ $(B - A)$ و $(A \cap B)$ با مجموعهٔ B مساوی است.

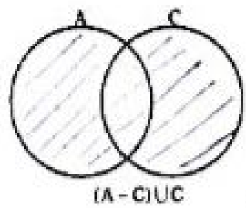
۴ـ در هریک از شکل‌های زیر مجموعهٔ موردنظر را هاشور بزنید.



$A \cup B$



$B - A$



$(A - C) \cup C$

درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال

در سال گذشته برای محاسبهٔ احتمال هر پیشامد از دستور زیر استفاده کردیم :

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

اکنون با توجه به آشنایی و شناخت شما نسبت به مجموعه‌ها و نمادگذاری‌ها تا حدودی راحت‌تر می‌توان این فرمول را نوشت و به‌کار برد.

اگر مجموعهٔ شاملِ همهٔ حالت‌های ممکن را S، مجموعهٔ شاملِ همهٔ حالت‌های مطلوب را A و احتمالِ رخ دادن پیشامد A را با نماد P(A) نشان دهیم، دستور بالا به‌صورت $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ نوشته می‌شود.

یادآوری

مثال : اگر تاسی را بیندازیم، احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را به‌دست آورید :

الف) عدد رو شده مضرب ۳ باشد. $\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

ب) عدد رو شده اوّل باشد. $\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$

ج) عدد رو شده از ۶ بزرگ‌تر باشد. ۰

د) عدد رو شده از ۷ کمتر باشد. ۱

حل : الف) پیشامد مطلوب یعنی رو شدن مضرب ۳ را A می‌نامیم؛ در این صورت داریم :

$A=\{۳,۶\}\ ,\ S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\};\ n(A)=۲\ ,\ n(S)=۶$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

ب) B : پیشامد رو شدن عدد اوّل ; $B=\{۲,۳,۵\};\ n(B)=۳$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

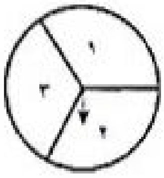
ج) C : پیشامد رو شدن عدد بزرگ‌تر از ۶ ; $C=\varnothing \rightarrow n(\varnothing)=۰$

$$P(C)=P(\varnothing)=\frac{۰}{۶}=۰$$

د) D : پیشامد رو شدن عدد کمتر از ۷ ; $D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}=S$

$$P(D)=P(S)=\frac{n(S)}{n(S)}=\frac{۶}{۶}=۱$$

فعالیت



۱ــ با توجه به چرخندهٔ مقابل، همهٔ حالت‌های ممکن را که عقربه می‌تواند بایستد و عددی را نمایش دهد، مجموعهٔ S بنامید. S را با عضوهایش نمایش دهید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید :

$S=\{۱,۲,۳\}$

الف) مانند نمونه برای هر مجموعه با بیان یک جمله، یک پیشامد تعریف کنید :

A = {۳،۱} (عقربه روی ناحیهٔ ۱ یا ۳ بایستد) یا (عقربه روی عدد فرد بایستد)

B = {۱،۲} عقربه روی اعداد کوچکتر از ۳ بایستد

C = {۲،۳} عقربه روی اعداد اول بایستد ..... D = {۲} عقربه روی عدد زوج بایستد

پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

ب) هریک از زیرمجموعه‌های S را پیشامد تصادفی می‌نامیم. احتمال رخداد هریک از این پیشامدها را به‌دست آورید. چه تعداد از این پیشامدها هم‌شانس است؟ پاسخ‌های خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

$A=\{۱\},B=\{۲\},C=\{۳\} \rightarrow P(A)=P(B)=P(C)=\frac{۱}{۳}$

ج) همهٔ زیرمجموعه‌های S را تشکیل دهید.

$\varnothing,\{۱\},\{۲\},\{۳\},\{۱,۲\},\{۱,۳\},\{۲,۳\},\{۱,۲,۳\}$

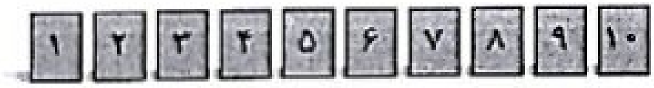
$D=\{۱,۲\},E=\{۱,۳\},F=\{۲,۳\} \rightarrow P(D)=P(E)=P(F)=\frac{۲}{۳}$

$G=\{\ \} \rightarrow P(G)=۰$

$H=\{۱,۲,۳\} \rightarrow P(H)=۱$

کار در کلاس

۱۰ کارت یکسان با شماره‌های ۱ تا ۱۰ را داخل جعبه‌ای قرار می‌دهیم و تصادفی یک کارت بیرون می‌آوریم.



الف) مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن S = {۱،۲،...،۱۰} است پیشامد A را به این صورت تعریف می‌کنیم که «عدد روی کارت خارج شده از ۵ کمتر باشد». مجموعهٔ A را تشکیل دهید و احتمال رخداد پیشامد آن را به‌دست آورید.

$A=\{۱,۲,۳,۴\} \qquad \frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$

ب) مجموعه یا پیشامدی تعریف کنید که احتمال رخ دادنِ آن پیشامد، $\frac{۴}{۱۰}$ باشد. عدد روی کارت خارج شده بیشتر از ۶ باشد

ج) اگر B پیشامد خارج شدن عدد اول و C پیشامد خارج شدن عدد زوج باشد، مجموعه‌های B و C را تشکیل دهید و احتمال رخدادِ هریک را محاسبه کنید. آیا پیشامدهای B و C هم‌شانس است؟ چرا؟ خیر

$B=\{۲,۳,۵,۷\} \qquad P(B)=\frac{۴}{۱۰}$

$C=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\} \qquad P(C)=\frac{۵}{۱۰}$

تمرین

۱ــ اگر تاسی را بیندازیم، چقدر احتمال دارد :

الف) عدد رو شده زوج باشد. $\frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۶}$ ب) عدد رو شده زوج و از ۲ بزرگ‌تر باشد. $\frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۶}$

ج) عدد رو شده زوج و اول باشد. $\frac{۱}{۶}$ د) عدد رو شده از ۳ کمتر باشند. $\frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۶}$

۲ــ اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد، اوّلاً مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را تشکیل دهید (هر عضو این مجموعه را به‌طور مثال به‌صورت (د،د،پ) نمایش دهید). ثانیاً چقدر احتمال دارد این خانواده دارای دو دختر باشد؟ (دارای دو دختر یعنی دقیقاً دو دختر و یعنی فرزند اوّل پسر و دو فرزند بعدی دختر بوده است.) $\frac{۳}{۸}$

۳ــ در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ سبز وجود دارد. اگر ۱ مهره را تصادفی از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد :

الف) این مهره آبی باشد. $\frac{۱}{۳} = \frac{۴}{۱۲}$ ب) این مهره سبز نباشد. $۱ - \frac{۵}{۱۲} = \frac{۷}{۱۲}$

ج) این مهره، قرمز یا سبز باشد. (یعنی آبی نباشد) $۱ - \frac{۴}{۱۲} = \frac{۸}{۱۲} = \frac{۲}{۳}$ یا $\frac{۳}{۱۲} + \frac{۵}{۱۲} = \frac{۸}{۱۲} = \frac{۲}{۳}$

۴ــ اگر تاسی را دو بار بیندازیم (یا دو تاسِ آبی و قرمز را با هم بیندازیم)، چقدر احتمال دارد :

(اگر مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را S بنامیم، n(s) = ۳۶)

الف) هر دو بار، عدد اول رو شود. $\frac{۱}{۴} = \frac{۹}{۳۶}$ ب) دو عدد رو شده، مثل هم باشند. $\frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$

ج) دو عدد رو شده، مضرب ۳ باشند. $\frac{۱}{۹} = \frac{۴}{۳۶}$ د) مجموع دو عدد، ۷ باشد. $\frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$

خواندنی

در بسیاری از کتاب‌های ریاضی، از مجموعه به‌عنوان گروهی (یا دسته‌ای) از اشیا نام برده شده است. غافل از آنکه اگر بگوییم مجموعه گروهی از اشیاء است، باید بگوییم گروه چیست؟! آیا می‌توانیم گروه را تعریف کنیم؟

درواقع چاره‌ای نیست جز آنکه مانند سیمورلیپ‌شوتز (ریاضی‌دان معاصر) بگوییم : در همهٔ شاخه‌های ریاضی مجموعه یک مفهوم بنیادی است. به عبارت دیگر مجموعه جزء نخستین تعریف نشده‌ها است، مانند مفاهیمی چون نقطه و خط در هندسه، که برای آنها تعریف دقیقی نداریم ولی آنها را با اثر خود می‌شناسیم.

سئوال ۴:

الف) (۲,۲),(۲,۳),(۲,۵),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۲),(۵,۳),(۵,

ب) (۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)

ج) (۳,۳),(۳,۶),(۶,۳),(۶,۶)

د) (۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۶,۱),(۵,۲),(۴,۳)