

8 – Transformadas de Fourier

8.1 – Introdução à Análise de Fourier	3
8.2 – A Transformada de Fourier para sinais contínuos	4
■ Exemplo 8.1	6
■ Exemplo 8.2	9
■ Exemplo 8.3	11
8.3 – A Transformada de Fourier para sinais periódicos	13
■ Exemplo 8.4	14
■ Exemplo 8.5	15
■ Exemplo 8.6	15
■ Exemplo 8.7	17
8.4 – Propriedades da Transformada de Fourier para sinais contínuos	20
■ Linearidade	20
■ Translação no tempo (“ <i>time shifting</i> ”)	21
■ Exemplo 8.8	21
■ Conjugação	23
■ Exemplo 8.9	25
■ Derivadas	26
■ Integral	27
■ Exemplo 8.10	27
■ Exemplo 8.11	28
■ Escalonamento no tempo (“ <i>time scaling</i> ”)	29
■ Sinal reflectido / reversão no tempo (“ <i>time reversal</i> ”)	29

■ Relação de Parseval	30
■ Dualidade	30
■ Exemplo 8.12	30
■ Derivada na frequência (dual da derivada)	31
■ Dual da integral	31
■ Translação na frequência (“ <i>frequency shifting</i> ”)	32
■ Convolução	32
■ Multiplicação (dual da convolução)	33
8.5 – Interpretação da propriedade da Convolução	33
■ Exemplo 8.13	35
■ Exemplo 8.14	36
■ Exemplo 8.15	37
■ Exemplo 8.16	38
8.6 – Tabela da Transformada de Fourier de alguns sinais contínuos	40
8.7 – A Transformada de Fourier para sinais discretos	43
8.8 – Propriedades da Transformada de Fourier para sinais discretos	45

Transformadas de Fourier

8.1 – Introdução às Transformadas de Fourier

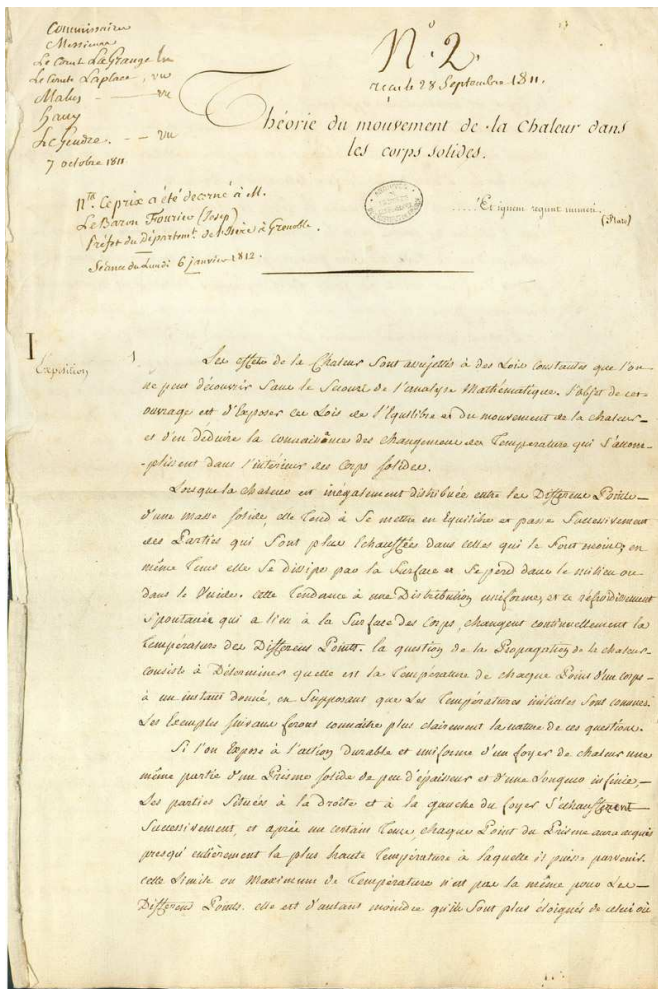
Neste capítulo continuaremos a Análise de Fourier estudando agora as Transformadas de Fourier.



Fig. 8.1 – Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), francês.

A obra principal de *Fourier* tem o título: “*Mémoire sur la théorie de la chaleur*”, publicada no “Extrait du mémoire lu à l'Académie des sciences” le 1^{er} décembre 1828, 1829, t. 11 p. 13-30.

Na figura 8.2 vemos o livro onde foi publicado esta sua obra e alguns extractos dos originais de Fourier.



171.
Nous reprendrons maintenant l'équation
$$1 = a \cos. x + b \cos. 3x + c \cos. 5x + d \cos. 7x + \text{etc.}$$

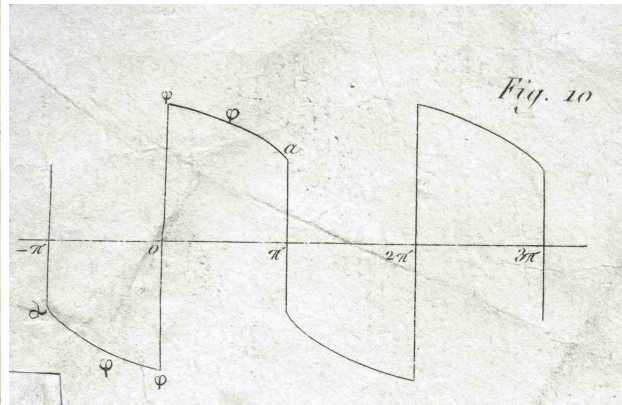
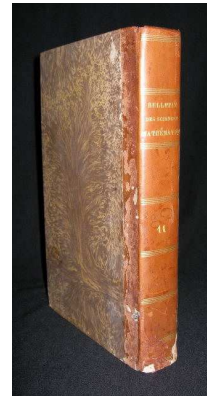


Fig. 8.2 – Alguns extractos dos originais de Fourier. O livro “Extrait du mémoire lu à l'Académie des sciences” onde foi publicado a principal obra de *Fourier* e alguns extractos dos seus originais.

Enquanto que as séries de Fourier eram definidas apenas para sinais periódicos, as Transformadas de Fourier são definidas para uma classe de sinais muito mais ampla.

Devido ao facto que os sinais sinusoidais são diferenciáveis, a transformada de Fourier permite representar equações diferenciais lineares com coeficientes constantes na forma de equações algébricas ordinárias.

Outro detalhe: as transformadas de Fourier tornam a operação de convolução em multiplicações simples.

8.2 – Transformadas de Fourier para sinais contínuos

A série de Fourier só se aplica a sinais periódicos. Sinais que não são periódicos (ditos sinais “*aperiódicos*”) têm uma outra representação com a transformada de Fourier.

Um *sinal aperiódico* pode ser visto como um sinal periódico com um período infinito. Mas na série de Fourier, quando o período T de um sinal periódico aumenta, a frequência ω_0

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

diminui, e os termos harmonicamente relacionados ficam mais próximos na frequência.

Ou seja, quando o período T cresce,

$$T \rightarrow \infty$$

e por conseguinte a frequência ω_0 diminui

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$$

as componentes em frequência (i.e., os c_k ‘s) formam um contínuo, e o somatório da série de Fourier deste sinal se converte em uma integral.

Considere portanto

um sinal contínuo $x(t) \in \mathbb{C}$ {conjunto dos números complexos}

ou seja, o sinal $x(t)$ tem valores complexos, com parte real e parte imaginária.

A transformada de Fourier deste sinal $x(t)$, normalmente simbolizada por:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$$

permite expressar o sinal $x(t)$, o que não era possível com a série de Fourier se o sinal não fosse periódico, como:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad \text{eq. (8.1)}$$

onde:

$$\boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot \omega t} \cdot dt} \quad \text{eq. (8.2)}$$

é a transformada de Fourier do sinal $x(t)$.

Portanto, a transformada de Fourier é uma função de ω (ou de $j\omega$) e, de certa forma, generaliza a série de Fourier.

A equação eq. (8.1) acima é conhecida como a equação de síntese, ou também como a fórmula da ***transformada inversa de Fourier***.

Por outro lado a equação eq. (8.2), que dá propriamente a fórmula da ***transformada de Fourier***, é conhecida como a equação de análise.

Quanto à convergência destas integrais, é possível mostrar que estas fórmulas são válidas para uma classe bastante ampla de sinais de duração infinita.

Exemplo 8.1:

Considere o sinal

$$x(t) = e^{-at} \cdot u_1(t), \quad a > 0$$

cujo gráfico vê-se na figura 8.3.

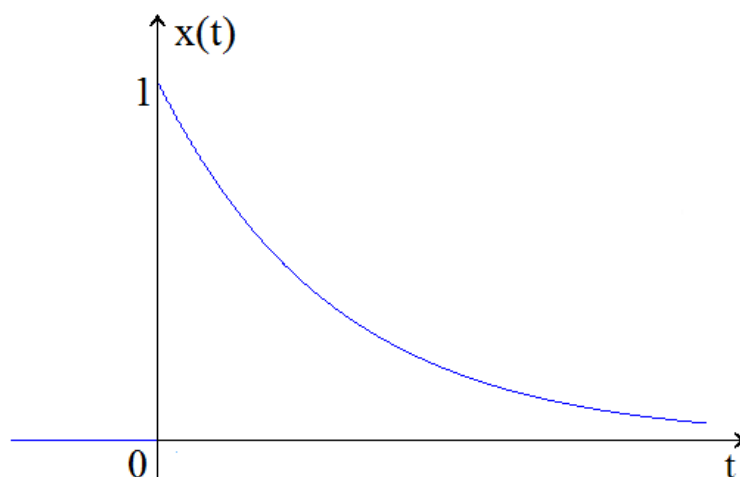


Fig. 8.3 – O sinal exponencial $x(t) = e^{-at} \cdot u_1(t)$, $a > 0$ do Exemplo 8.1.

A transformada de Fourier deste sinal $x(t)$ pode ser calculada usando a equação eq. (8.2).

$$\begin{aligned}
 X(j\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j \cdot \omega t} \cdot dt = \\
 &= \frac{-1}{(a + j\omega)} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty}
 \end{aligned}$$

e portanto a transformada de Fourier deste sinal $x(t)$ é dada por:

$$X(j\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)}, \quad a > 0$$

Como a transformada de Fourier tem valores complexos, para expressá-la através de um gráfico é necessário decompor em

diagrama de módulo $|X(j\omega)|$,

e,

diagrama de fase $\angle X(j\omega)$.

Para esta transformada $X(j\omega)$ é fácil de verificar que o **diagrama de módulo** $|X(j\omega)|$ tem a expressão

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

que está ilustrado na figura 8.4.

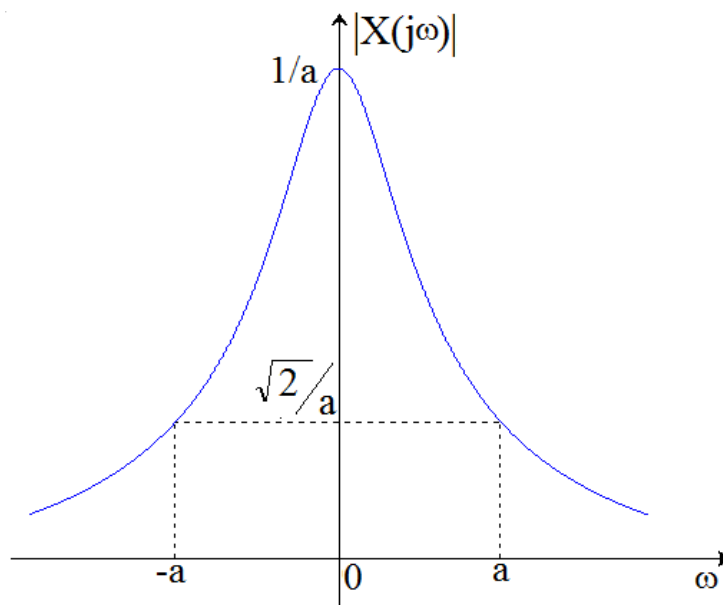


Fig. 8.4 – A transformada de Fourier do sinal $x(t)$. **Diagrama de módulo** $|X(j\omega)|$.

e que o *diagrama de fase* $\angle X(j\omega)$ tem a expressão

$$\angle X(j\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

e isso está ilustrado na figura 8.5.

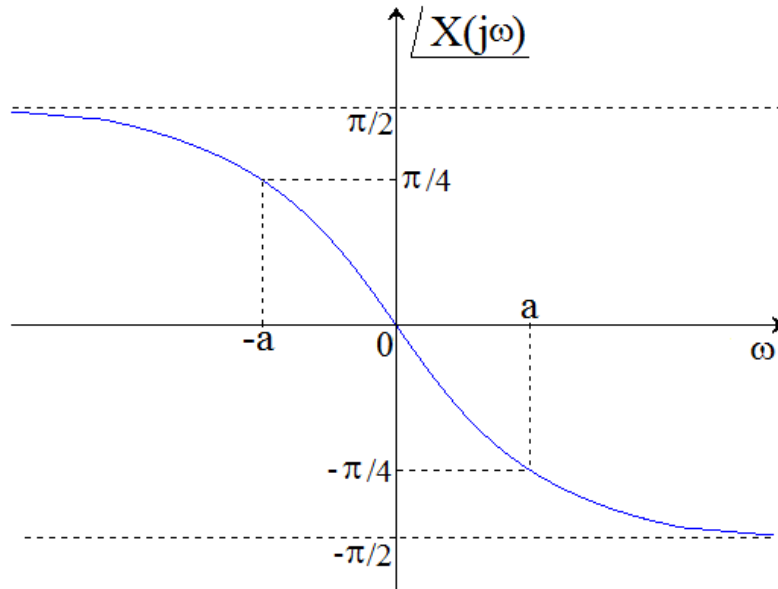


Fig. 8.5 – A transformada de Fourier do sinal $x(t)$. *Diagrama de fase* $\angle X(j\omega)$.

Observe que se $\omega = 0$, então

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right) = \operatorname{arctg}(0) = 0,$$

e portanto

$$\angle X(j0) = -\operatorname{arctg}(0) = 0.$$

Também é fácil verificar que se $\omega = -a$, então $\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) = \operatorname{tg}^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, e portanto

$$\angle X(j\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right) \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

Por outro lado, se $\omega = a$, então $\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$ e portanto

$$\angle X(j\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right) \rightarrow -\frac{\pi}{4}$$

Note também que se $\omega \rightarrow -\infty$, então

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right) = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right) \cong \operatorname{arctg}(-\infty) \rightarrow -\frac{\pi}{2},$$

e portanto

$$\angle X(j\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Mas entretanto, se $\omega \rightarrow \infty$, então

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right) \cong \operatorname{arctg}(\infty) \rightarrow \frac{\pi}{2},$$

e portanto

$$\angle X(j\omega) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

□

Exemplo 8.2:

Considere agora o sinal

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$$

cujo gráfico vê-se na figura 8.6.

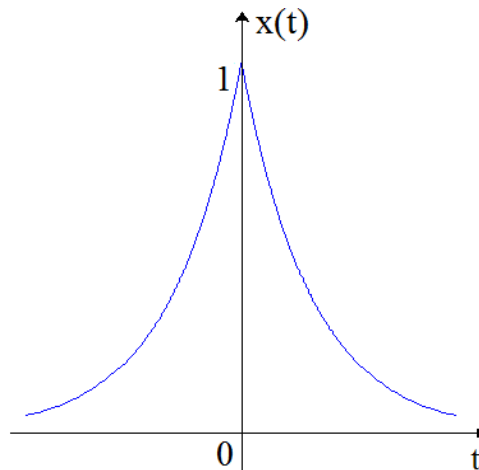


Fig. 8.6 – O sinal $x(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$ do Exemplo 8.2.

A transformada de Fourier de $x(t)$ pode ser calculada usando a equação eq. (8.2).

$$\begin{aligned}
 X(j\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-a|t|} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{at} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt + \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \\
 &= \frac{1}{(a - j\omega)} \cdot e^{(a-j\omega)t} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{-(a + j\omega)} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{(a - j\omega)} + \frac{1}{(a + j\omega)}
 \end{aligned}$$

e portanto a transformada de Fourier deste sinal $x(t)$ é dada por:

$$X(j\omega) = \frac{2a}{(a^2 - \omega^2)}$$

o que está ilustrado na figura 8.7.

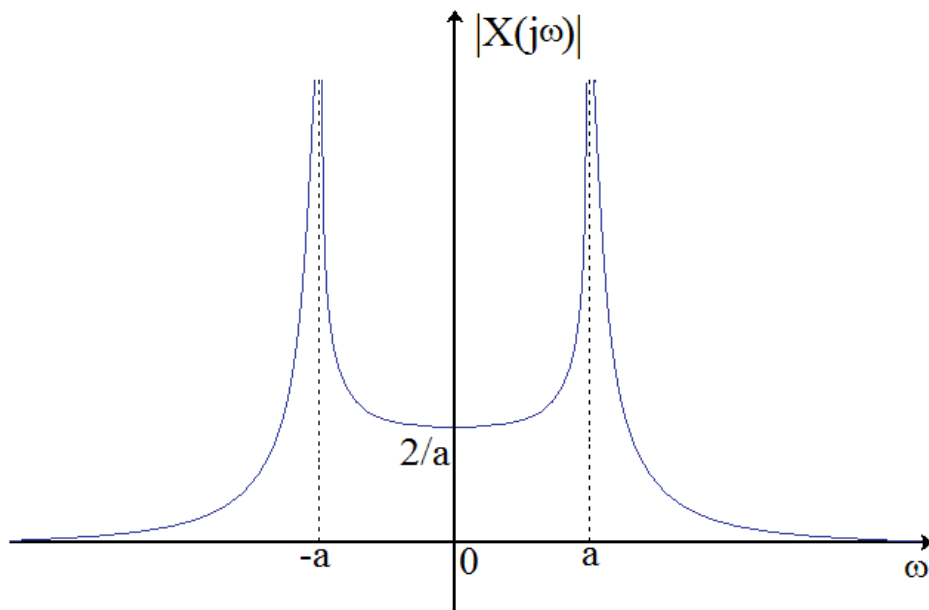


Fig. 8.7 – A transformada de Fourier do sinal $x(t)$. **Diagrama de módulo** $|X(j\omega)|$.

O diagrama de módulo $|X(j\omega)|$

$$|X(j\omega)| = \frac{2a}{|(a^2 - \omega^2)|}$$

Como o $X(j\omega)$ tem valores reais positivos para $|\omega| < a$ e valores reais e negativos para $|\omega| > a$, o diagrama de fase $\angle X(j\omega)$ é tem a expressão

$$\angle X(j\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } -a < \omega < a \\ -\pi, & \text{se } \omega < -a \text{ ou } \omega > a \end{cases}$$

e isso está ilustrado na figura 8.8.

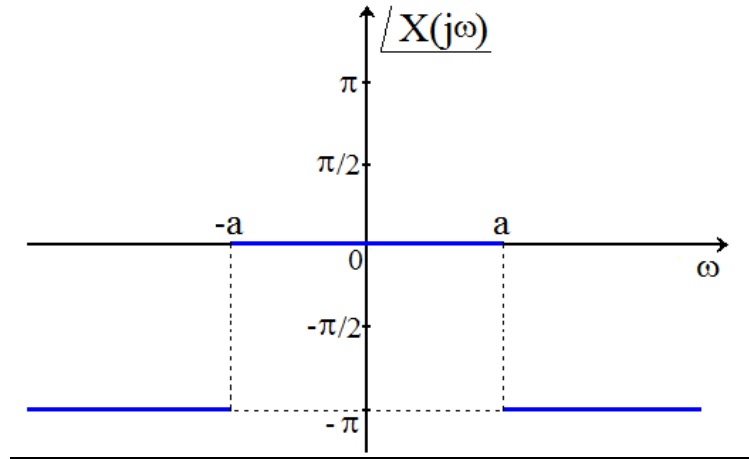


Fig. 8.8 – A transformada de Fourier do sinal $x(t)$. **Diagrama de fase** $\angle X(j\omega)$.

Exemplo 8.3:

Considere agora o sinal

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } |t| < a \\ 0, & \text{se } |t| > a \end{cases}$$

cujo gráfico vê-se na figura 8.9 e é chamado de um “*pulso quadrado*”.

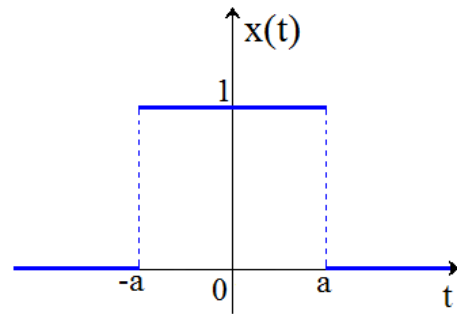


Fig. 8.9 – O sinal $x(t)$ do Exemplo 8.3. “*pulso quadrado*”.

Calculando-se a transformada de Fourier de $x(t)$ usando a equação eq. (8.2), temos

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-a}^a 1 \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \\ &= \frac{-1}{(j\omega)} \cdot e^{(-j\omega)t} \Big|_{-a}^a \end{aligned}$$

e logo,

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \cdot (e^{a\omega j} - e^{-a\omega j})$$

e portanto, usando Eüler, a transformada de Fourier deste sinal $x(t)$ é dada por:

$$X(j\omega) = \frac{2 \operatorname{sen}(a\omega)}{\omega}$$

Portanto, esta transformada de Fourier $X(j\omega)$ também só tem valores reais $\forall \omega$, mas entretanto, os valores que $X(j\omega)$ assume são ora positivos e ora negativos, devido às oscilações do seno.

O gráfico de $X(j\omega)$ está ilustrado na figura 8.10.

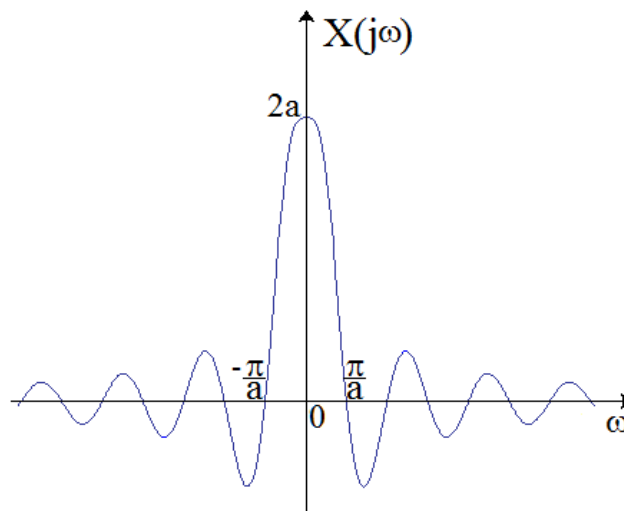


Fig. 8.10 – A transformada de Fourier do sinal $x(t)$ do Exemplo 8.3.

Logo, é fácil de se obter o diagrama de módulo $|X(j\omega)|$ conforme pode-se ver ilustrado na figura 8.11.

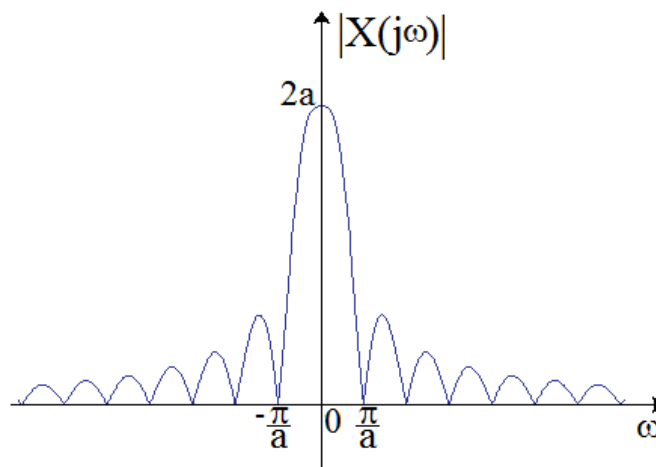


Fig. 8.11 – A transformada de Fourier do sinal $x(t)$ do Exemplo 8.3. **Diagrama de módulo** $|X(j\omega)|$.

e o gráfico do diagrama de fase $\angle X(j\omega)$ é mostrado na figura 8.12.

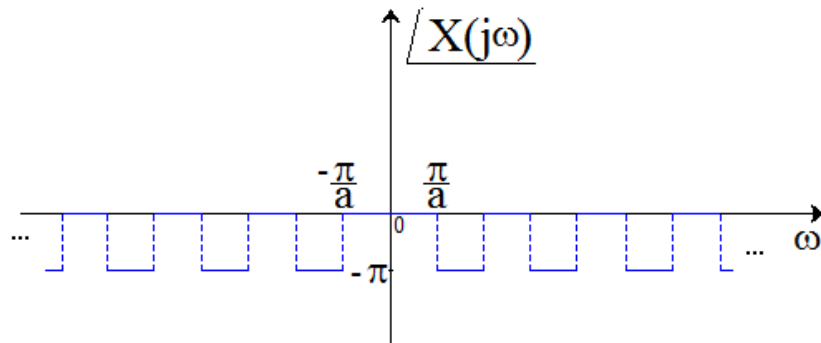


Fig. 8.12 – A transformada de Fourier do sinal $x(t)$ do Exemplo 8.3. **Diagrama de fase** $\angle X(j\omega)$.

Ou seja,

$$\angle X(j\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } X(j\omega) > 0 \\ -\pi & \text{se } X(j\omega) < 0 \end{cases}$$

□

8.3 – Transformadas de Fourier para sinais periódicos

Note que se

$$X(j\omega) = 2\pi \cdot u_o(\omega - \omega_o)$$

então

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \cdot u_o(\omega - \omega_o) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \cdot d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_o(\omega - \omega_o) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \cdot d\omega = \\ &= e^{j\omega_o t} \end{aligned}$$

Logo, se

$$\boxed{X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \cdot c_k \cdot u_o(\omega - k\omega_o)} \quad \text{eq. (8.3)}$$

$x(t)$ então será:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

que é a série de Fourier para sinais periódicos.

$X(j\omega)$ que satisfaz a equação eq. (8.3) acima é chamado de

“train of impulses”

e define a transformada de Fourier para os sinais que são periódicos em função dos coeficientes c_k 's da série de Fourier exponencial.

Exemplo 8.4:

Considere o sinal periódico do seno:

$$x(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$$

Neste caso os coeficientes c_k 's da série exponencial de Fourier são:

$$\text{se } k = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2j}$$

$$\text{se } k = -1 \Rightarrow c_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

$$\text{se } k \notin \{-1, 1\} \Rightarrow c_k = 0$$

E a transformada de Fourier (*“train of impulses”*) neste caso é:

$$X(j\omega) = \frac{\pi}{j} \cdot u_o(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j} \cdot u_o(\omega + \omega_0)$$

que pode ser vista no gráfico da figura 8.13.

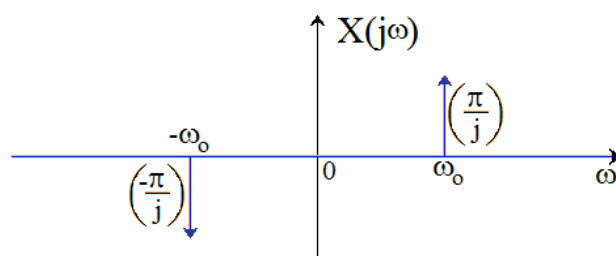


Fig. 8.13 – A transformada de Fourier do sinal $x(t)$ do Exemplo 8.4.

□

Exemplo 8.5:

Considere o sinal periódico do co-seno:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

Agora, neste caso os coeficientes c_k 's da série exponencial de Fourier são:

$$\text{se } k = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{se } k = -1 \Rightarrow c_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{se } k \notin \{-1, 1\} \Rightarrow c_k = 0$$

e a transformada de Fourier (“*train of impulses*”) neste caso é:

$$X(j\omega) = \pi \cdot u_o(\omega + \omega_0) + \pi \cdot u_o(\omega - \omega_0)$$

que encontra-se ilustrado na figura 8.14

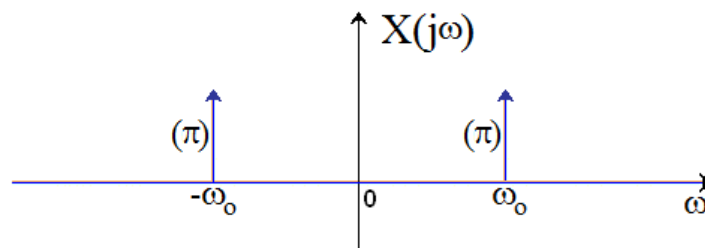


Fig. 8.14 – A transformada de Fourier do sinal $x(t)$ do Exemplo 8.5.

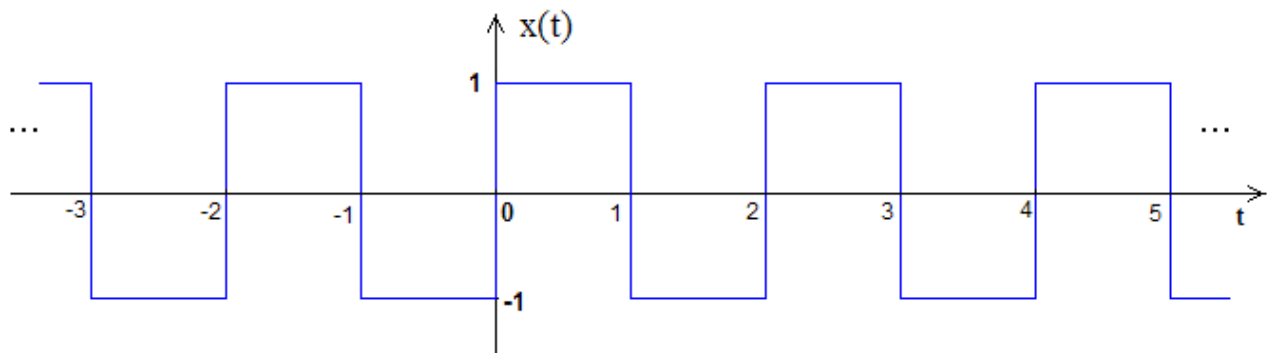
□

Exemplo 8.6:

Considere o sinal $x(t)$ do exemplo 7.1 no capítulo 7 (onda quadrada).

$$x(t) = \begin{cases} -1, & \text{se } -1 < t < 0 \\ 1, & \text{se } 0 < t < 1 \end{cases}$$

que após ser repetido (ou estendido) para a direita de $t = 1$ e para esquerda de $t = -1$, nos dá um sinal periódico para $\forall t$ ($-\infty < t < \infty$), ilustrado na figura 8.15.

Fig. 8.15 – Onda quadrada estendida para $\forall t$ ($-\infty < t < \infty$).

Este sinal tem frequência natural

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

No Exemplo 7.2 vimos que os coeficientes c_k s da série de Fourier complexa são:

$$c_k = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \\ \frac{-2}{\pi k} j, & \text{se } k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \end{cases}$$

Logo a Transformada de Fourier deste sinal $x(t)$ será dada por

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \cdot c_k \cdot u_o(\omega - k\omega_o) = \\ &= \sum_{k=\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots} 2\pi \cdot \left(\frac{-2}{\pi k} j \right) \cdot u_o(\omega - k\pi) = \\ &= \sum_{k=\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots} \left(\frac{-4}{k} j \right) \cdot u_o(\omega - k\pi) \end{aligned}$$

que é um “*train of impulses*” complexos com áreas: $\pm 4j, \frac{\pm 4j}{3}, \frac{\pm 4j}{5}, \dots$ localizados em $\omega = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$, respectivamente. Logo, é fácil de se obter o **diagrama de módulo** $|X(j\omega)|$ conforme pode-se ver ilustrado na figura 8.16.

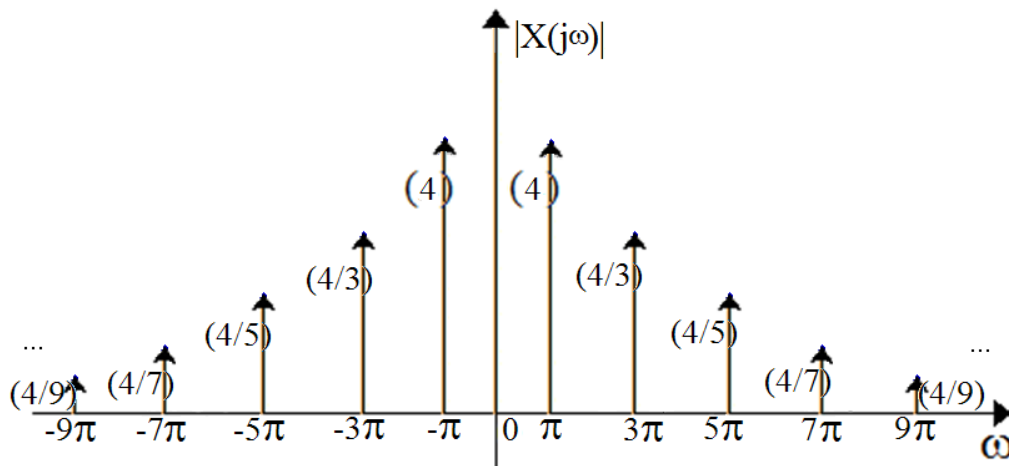


Fig. 8.16 – A transformada de Fourier do sinal $x(t)$, “train of impulses”. **Diagrama de módulo** $|X(j\omega)|$.

Para o **diagrama de fase** $\angle X(j\omega)$, note que quando os impulsos estão multiplicados por $+j$, o ângulo (ou fase) é $\pi/2$ (ou 90°); e quando os impulsos estão multiplicados por $-j$, o ângulo (ou fase) é $-\pi/2$ (ou -90°). Isso pode se ver ilustrado na figura 8.17.

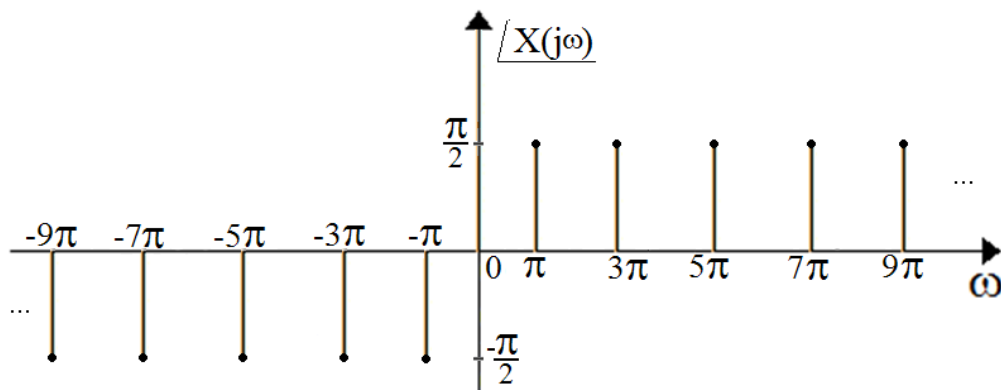


Fig. 8.17 – A transformada de Fourier do sinal $x(t)$ do Exemplo 8.6. **Diagrama de fase** $\angle X(j\omega)$.

Exemplo 8.7:

Considere o sinal periódico $x(t)$ abaixo:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } |t| < a \\ 0, & \text{se } a < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$

e suponha que foi estendido para esquerda e para direita, tornando-o um sinal periódico, como se encontra-se ilustrado na figura 8.18.

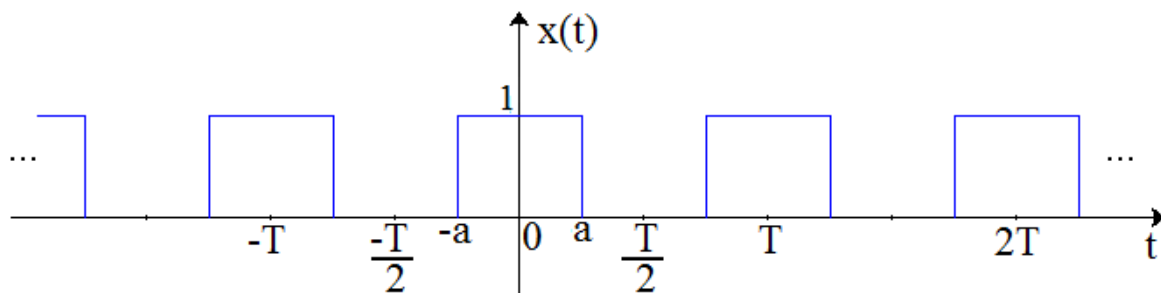


Fig. 8.18 – O sinal $x(t)$ do Exemplo 8.7. “Onda quadrada”.

Para calcular os coeficientes c_k 's da série de Fourier exponencial, fazemos primeiro para $k = 0$, e temos que:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} \int_{-a}^a 1 \cdot dt \\ &= \frac{2a}{T} \end{aligned}$$

Para $k \neq 0$ temos que:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-a}^a 1 \cdot e^{-j \omega_0 \cdot k \cdot t} \cdot dt = \\ &= -\frac{1}{j \cdot \omega_0 \cdot k \cdot T} \cdot e^{-j \omega_0 \cdot k \cdot t} \Big|_{-a}^a = \\ &= \frac{2}{\omega_0 \cdot k \cdot T} \left(\frac{e^{j \omega_0 \cdot k \cdot a} - e^{-j \omega_0 \cdot k \cdot a}}{2j} \right), \quad k \neq 0 \end{aligned}$$

onde $\omega_0 = \left(\frac{2\pi}{T} \right)$. Agora, usando-se as equações de Eüler temos que:

$$c_k = \frac{2 \operatorname{sen}(k \omega_0 a)}{k \omega_0 T}, \quad k \neq 0$$

ou, equivalentemente:

$$c_k = \frac{\text{sen}(k \omega_0 a)}{k \pi}, \quad k \neq 0$$

Logo, a transformada de Fourier deste sinal periódico $x(t)$ é o “*train of impulses*” $X(j\omega)$ abaixo:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= 2\pi \cdot \frac{2a}{T} \cdot u_0(a) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} 2 \cdot \frac{\text{sen}(k \omega_0 a)}{k} \cdot u_0(\omega - k\omega_0) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \cdot u_0(\omega - k\omega_0) \end{aligned}$$

onde:

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{4\pi a}{T} & \text{se } k = 0 \\ 2 \cdot \frac{\text{sen}(k \omega_0 a)}{k} & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

Na figura 8.19 pode-se ver o gráfico de $X(j\omega) \times \omega$ para o caso particular de $T = 4a$.

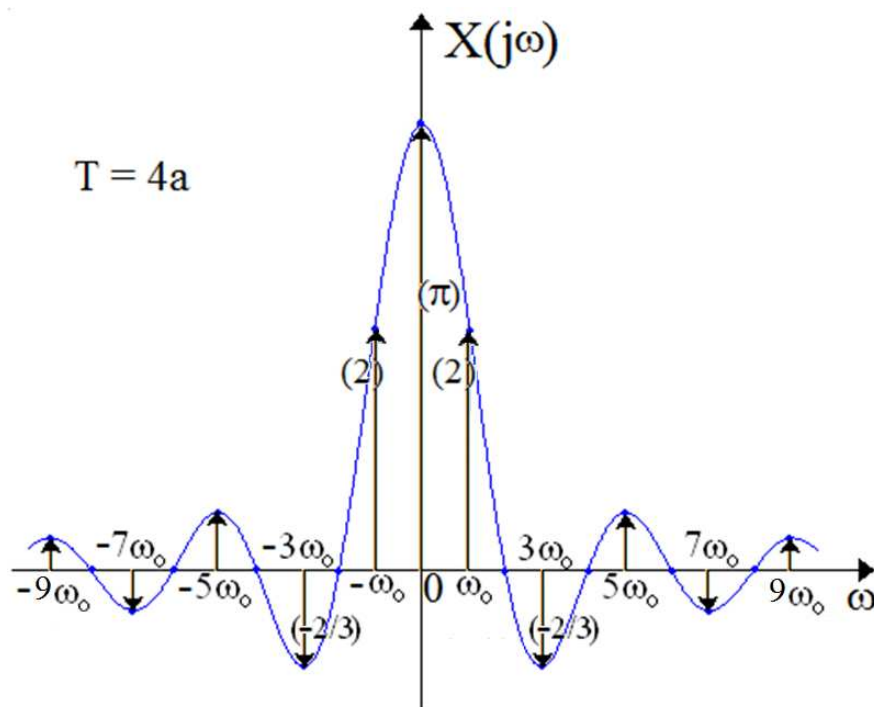


Fig. 8.19 – A transformada de Fourier do sinal $x(t)$ do Exemplo 8.7.

Neste caso ($T = 4a$), $\omega_0 = \pi/2$, e os valores de c_k e dos γ_k são:

$$\begin{array}{ll}
 c_0 = \frac{1}{2} & \gamma_0 = \pi \\
 c_1 = c_{-1} = \frac{1}{\pi} & \gamma_1 = \gamma_{-1} = 2 \\
 c_2 = c_{-2} = 0 & \gamma_2 = \gamma_{-2} = 0 \\
 c_3 = c_{-3} = -\frac{1}{3\pi} & \gamma_3 = \gamma_{-3} = -\frac{2}{3} \\
 c_4 = c_{-4} = 0 & \gamma_4 = \gamma_{-4} = 0 \\
 c_5 = c_{-5} = -\frac{1}{5\pi} & \gamma_5 = \gamma_{-5} = -\frac{2}{5} \\
 c_6 = c_{-6} = 0 & \gamma_6 = \gamma_{-6} = 0 \\
 \vdots & \vdots
 \end{array}$$

□

8.4 – Propriedades da Transformada de Fourier para sinais contínuos

● Linearidade:

Suponha que

$x_1(t)$ e $x_2(t)$ são dois sinais contínuos.

e que

$$y(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$$

então, mostra-se que a transformada de Fourier de $y(t)$ é:

$$Y(j\omega) = \alpha \cdot X_1(j\omega) + \beta \cdot X_2(j\omega)$$

ou seja,

$$\mathcal{F}\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha \cdot \mathcal{F}\{x_1(t)\} + \beta \cdot \mathcal{F}\{x_2(t)\}$$

Translação no tempo (“time shifting”):

Suponha que $x(t)$ é um sinal contínuo e que:

$$y(t) = x(t - t_o)$$

ou seja, $y(t)$ é o sinal $x(t)$ com uma translação (*shift*) no tempo, de t_o .

Então, mostra-se que:

$$Y(j\omega) = e^{-j\omega t_o} \cdot X(j\omega)$$

ou seja,

$$\mathcal{F}\{x(t - t_o)\} = e^{-j\omega t_o} \cdot \mathcal{F}\{x(t)\}$$

Nota:

O módulo do sinal transladado não se altera. Somente a fase. Ou seja, escrevendo-se a transformada de Fourier de $x(t)$ na forma polar (módulo e ângulo):

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega) = |X(j\omega)| \cdot e^{j\angle X(j\omega)}$$

temos que a transformada de Fourier de $x(t-t_o)$ pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x(t - t_o)\} &= e^{-j\omega t_o} \cdot X(j\omega) = \\ &= |X(j\omega)| \cdot e^{j[\angle X(j\omega) - \omega t_o]} \end{aligned}$$

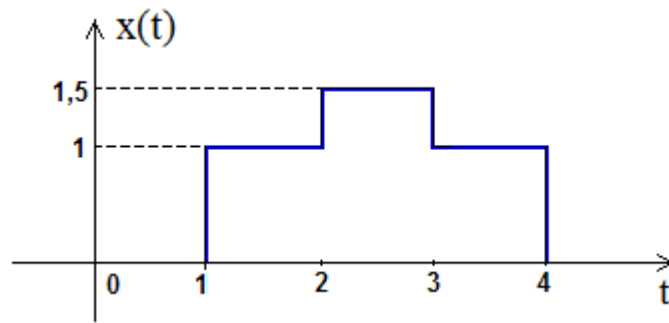
Uma translação ou *shift* (de t_o) no sinal $x(t)$



uma translação ou *shift* (de ωt_o)
na transformada $X(j\omega)$ deste sinal.

Exemplo 8.8:

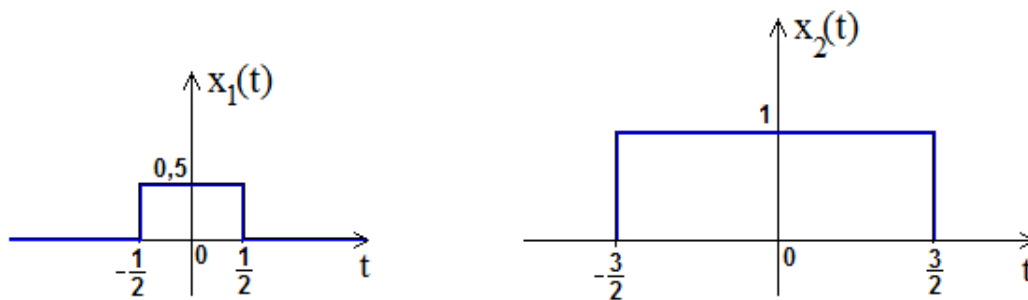
Considere o sinal $x(t)$ da figura 8.20:

Fig. 8.20 – O sinal $x(t)$ do Exemplo 8.8.

Este sinal pode ser reescrito em função de dois sinais transladados: $x_1(t-2,5)$ e $x_2(t-2,5)$:

$$x(t) = x_1(t-2,5) + x_2(t-2,5)$$

que estão representados graficamente na figura 8.21.

Fig. 8.21 – Sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ do Exemplo 8.8.

Como as transformadas de Fourier de $x_1(t)$ e de $x_2(t)$ são respectivamente $X_1(j\omega)$ e $X_2(j\omega)$:

$$X_1(j\omega) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega} \quad \text{e} \quad X_2(j\omega) = \frac{2 \text{sen}\left(\frac{3\omega}{2}\right)}{\omega}$$

então, usando as propriedades da linearidade e da translação (*time shifting*) temos que:

$$X(j\omega) = e^{-j\frac{5\omega}{2}} \cdot \left\{ \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right) + 2 \text{sen}\left(\frac{3\omega}{2}\right)}{\omega} \right\}$$

□

● Conjugação:

Suponha que

$x(t)$ é um sinal com período T e tem coeficientes de Fourier C_k

e que

$$y(t) = x^*(t)$$

o conjugado de $x(t)$; então, mostra-se que a transformada de Fourier de $y(t)$ é:

$$Y(j\omega) = X^*(-j\omega)$$

isto é, a transformada de Fourier do conjugado de um sinal é o simétrico do conjugado da transformada de Fourier deste sinal:

$$\mathcal{F}\{x^*(t)\} = X^*(-j\omega)$$

Nota:

Como consequência desta propriedade pode-se concluir que:

Se $x(t) \in \mathbb{R}$, então

$$X(j\omega) = X^*(-j\omega)$$

Além disso, se a transformada de Fourier de $x(t)$ é expressa na forma cartesiana (parte real e parte imaginária):

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega) = \text{Re}\{X(j\omega)\} + j\text{Im}\{X(j\omega)\}$$

então, como $x(t) \in \mathbb{R}$, temos que

$$\text{Re}\{X(j\omega)\} = \text{Re}\{X(-j\omega)\} \quad (\text{a } \underline{\text{parte real}} \text{ de } X(j\omega) \text{ é par}) \quad \text{eq. (8.4)}$$

$$\text{Im}\{X(j\omega)\} = -\text{Im}\{X(-j\omega)\} \quad (\text{a } \underline{\text{parte imaginária}} \text{ de } X(j\omega) \text{ é ímpar}) \quad \text{eq. (8.5)}$$

Entretanto, se a transformada de Fourier de $x(t)$ é expressa na forma polar (módulo e ângulo):

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega) = |X(j\omega)| \cdot e^{j\angle X(j\omega)}$$

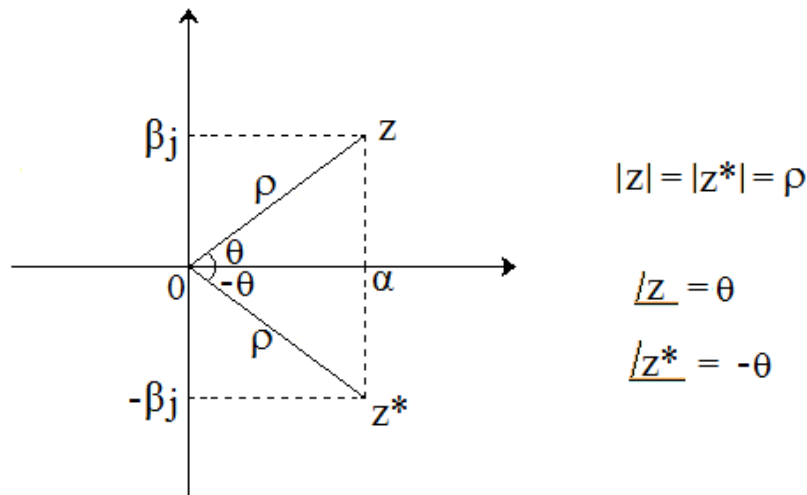


Fig. 8.22 – Diagrama esquemático que mostra o módulo e a fase de ambos z e z^* .

Conforme ilustra a figura 8.22,

$$|z| = |z^*|$$

e

$$\angle z = -\angle z^*$$

e portanto, temos então que:

$$|X(j\omega)| = |X^*(-j\omega)| \quad (\text{o } \underline{\text{módulo}} \text{ de } X(j\omega) \text{ é par}) \quad \text{eq. (8.6)}$$

$$\angle X(j\omega) = -\angle X^*(-j\omega) \quad (\text{a } \underline{\text{fase}} \text{ de } X(j\omega) \text{ é ímpar}) \quad \text{eq. (8.7)}$$

Logo, se $x(t) \in \mathbb{R}$, então só é necessário calcular a transformada de Fourier, para frequências

$$\omega > 0$$

tanto no caso de módulo e fase

$$(|X(j\omega)| \text{ e } \angle X(j\omega)),$$

como no caso de parte real e parte imaginária

$$(\text{Re}\{X(-j\omega)\} \text{ e } \text{Im}\{X(-j\omega)\}),$$

pois estes valores para frequências negativas ($\omega < 0$) podem ser determinados usando as relações acima [eq. (8.4) e eq. (8.5), ou eq. (8.6) e eq. (8.7)].

Outro detalhe:

Se $x(t) \in \mathbb{R}$ é um sinal par ($x(t) = x(-t)$) \Rightarrow

$X(j\omega) \in \mathbb{R}$, isto é, $X(j\omega) \in$ eixo real; e

$X(j\omega) = X(-j\omega)$, isto é, $X(j\omega)$ é par.

(a transformada de Fourier é uma função real e par)

Se $x(t) \in \mathbb{R}$ é um sinal ímpar ($x(t) = -x(-t)$) \Rightarrow

$X(j\omega)$ é imaginário puro, isto é, $X(j\omega) \in$ eixo imaginário; e

$X(j\omega) = -X(-j\omega)$, isto é, $X(j\omega)$ é ímpar.

Finalmente, a decomposição de um sinal $x(t)$ em parte par ($\text{Ev}\{X(j\omega)\}$) e ímpar ($\text{Od}\{X(j\omega)\}$):

$$\mathcal{F}\{\text{Ev}\{x(t)\}\} = \text{Re}\{\mathcal{F}\{x(t)\}\} = \text{Re}\{X(j\omega)\} \quad \text{eq. (8.8)}$$

$$\mathcal{F}\{\text{Od}\{x(t)\}\} = j \cdot \text{Im}\{\mathcal{F}\{x(t)\}\} = j \cdot \text{Im}\{X(j\omega)\} \quad \text{eq. (8.9)}$$

Exemplo 8.9:

Considere o sinal $x(t)$ abaixo:

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$$

que vimos na figura 8.6 (Exemplo 8.2) acima. Mas, pelo resultado do Exemplo 8.1 sabemos que:

$$\mathcal{F}\{x(t) \cdot u_1(t)\} = \frac{1}{(a + j\omega)}$$

e como

$$x(t) = \begin{cases} e^{-a t} & \text{se } t > 0 \\ e^{a t} & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

podemos escrever que:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{-at} \cdot u_1(t) + e^{at} \cdot u_1(-t) = \\
 &= 2 \left[\frac{e^{-at} \cdot u_1(t) + e^{at} \cdot u_1(-t)}{2} \right] = \\
 &= 2 \cdot \text{Ev} \{ e^{-at} \cdot u_1(t) \}
 \end{aligned}$$

Agora, usando a eq. (8.8) acima, temos que:

$$\mathcal{F} \left\{ \text{Ev} \{ e^{-at} \cdot u_1(t) \} \right\} = \text{Re} \left\{ \frac{1}{(a + j\omega)} \right\}$$

logo,

$$\begin{aligned}
 X(j\omega) &= 2 \cdot \mathcal{F} \left\{ \text{Ev} \{ e^{-at} \cdot u_1(t) \} \right\} = \\
 &= 2 \cdot \text{Re} \left\{ \frac{1}{(a + j\omega)} \right\} = \\
 &= \frac{2a}{(a^2 + \omega^2)}
 \end{aligned}$$

que foi o resultado obtido no Exemplo 8.2.

□

● Derivadas:

Suponha que $x(t)$ é um sinal e que

$$y(t) = \frac{dx}{dt}(t)$$

então, mostra-se que:

$$Y(j\omega) = j\omega \cdot X(j\omega)$$

ou seja,

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{dx}{dt}(t) \right\} = j\omega \cdot \mathcal{F} \{ x(t) \}$$

Nota:

Para o caso de derivadas de ordem 2 ou mais, pode-se aplicar esta regra sucessivas vezes. Por exemplo, no caso da segunda derivada, se

$$y(t) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

então a Transformada de Fourier de $y(t)$ é

$$Y(j\omega) = (j\omega)^2 \cdot X(j\omega) = -\omega^2 \cdot X(j\omega).$$

ou seja,

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^2 x}{dt^2} \right\} = -\omega^2 \cdot \mathcal{F} \{ x(t) \}$$

● Integral:

Suponha que $x(t)$ é um sinal e que

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

então, mostra-se que:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \cdot X(j\omega) + \pi X(0) u_o(\omega)$$

ou seja,

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{j\omega} \cdot \mathcal{F} \{ x(t) \} + \pi X(0) u_o(\omega)$$

Exemplo 8.10:

A transformada de Fourier do impulso unitário $u_o(t)$:

$$\mathcal{F} \{ u_o(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} u_o(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

e usando a propriedade da integral para o impulso unitário $u_o(t)$, que vimos no capítulo 3 [eq. (3.13)], isto é,

$$\int_{\alpha}^{\beta} x(t) \cdot u_o(t-a) dt = x(a), \quad \alpha < a < \beta$$

obtemos que:

$$\mathcal{F}\{u_o(t)\} = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 1$$

Ou seja, a transformada de Fourier do impulso unitário $u_o(t)$ é igual a 1. □

Exemplo 8.11:

Considere o sinal $x(t)$ degrau unitário $u_1(t)$:

$$x(t) = u_1(t)$$

Como

$$x(t) = \int_{-\infty}^t u_o(\tau) d\tau$$

então, como $\mathcal{F}\{u_o(t)\} = 1$ usando a propriedade da integral para a transformada de Fourier, temos que

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi \cdot 1 \cdot u_o(\omega)$$

ou seja, a transformada de Fourier do degrau unitário $u_1(t)$ é:

$$\mathcal{F}\{u_1(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi \cdot u_o(\omega)$$

Por outro lado, como

$$u_o(t) = \frac{du_1}{dt}(t)$$

usando a propriedade da derivada para a transformada de Fourier, temos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} \{ u_o(t) \} &= j\omega \cdot \mathcal{F} \{ u_i(t) \} = \\
 &= j\omega \cdot \left[\frac{1}{j\omega} + \pi \cdot u_o(\omega) \right] = \\
 &= 1 + j \cdot \pi \cdot u_o(\omega) \cdot \omega
 \end{aligned}$$

Entretanto, sabemos que $u_o(\omega) = 0$, $\forall \omega \neq 0$ e isso implica que:

$$u_o(\omega) \cdot \omega = 0$$

e portanto:

$$\mathcal{F} \{ u_o(t) \} = 1$$

que foi o resultado encontrado no Exemplo 8.10. □

● **Escalonamento no tempo** (“*time scaling*”):

Suponha que $x(t)$ é um sinal e que

$$y(t) = x(\alpha t)$$

então, mostra-se que:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot X\left(\frac{j\omega}{\alpha}\right)$$

ou seja,

$$\mathcal{F} \{ x(\alpha t) \} = \frac{1}{|\alpha|} \cdot X\left(\frac{j\omega}{\alpha}\right)$$

● **Sinal reflectido / reversão no tempo** (“*time reversal*”) em torno de $t = 0$:

Suponha que $x(t)$ é um sinal e que

$$y(t) = x(-t)$$

então, mostra-se que:

$$Y(j\omega) = X(-j\omega)$$

ou seja,

$$\mathcal{F} \{ x(-t) \} = X(-j\omega)$$

● Relação de Parseval:

Suponha que $x(t)$ é um sinal. Então, mostra-se que a energia total do sinal

$$E_{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} |x^2(t)| dt$$

pode ser expressa em termos da transformada de Fourier pela relação de Parseval:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x^2(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

● Dualidade:

Suponha que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são sinais contínuos e que

$$\mathcal{F}\{x_1(t)\} = X_1(j\omega)$$

$$\mathcal{F}\{x_2(t)\} = X_2(j\omega)$$

Mostra-se que: se

$$x_2(t) = X_1(j\omega) \Big|_{\omega=t}$$

então,

$$X_2(j\omega) = 2\pi \cdot x_1(t) \Big|_{t=\omega}$$

Exemplo 8.12:

Usando o resultado obtido no Exemplo 8.2 podemos afirmar que: se

$$f(t) = e^{-|t|}$$

então:

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{2}{(1+\omega^2)}$$

Logo, se

$$g(t) = \frac{2}{(1+t^2)}$$

então, pela propriedade da dualidade:

$$G(j\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = 2\pi \cdot e^{-|\omega|}$$

□

● Derivada na frequência (dual da derivada):

Suponha que $x(t)$ é um sinal e que

$$y(t) = -j t \cdot x(t)$$

então, mostra-se que:

$$Y(j\omega) = \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

ou seja,

$$\mathcal{F}\{-j t \cdot x(t)\} = \frac{d}{d\omega}(\mathcal{F}\{x(t)\})$$

que é a derivada de $X(j\omega)$ em ω , ou dita: derivada na frequência.

● Dual da integral:

Suponha que $x(t)$ é um sinal e que

$$y(t) = -\frac{1}{jt} \cdot x(t) + \pi \cdot x(0) \cdot u_o(t)$$

então, mostra-se que:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} X(\gamma) d\gamma$$

ou seja,

$$\mathcal{F}\left\{-\frac{1}{jt} \cdot x(t) + \pi \cdot x(0) \cdot u_o(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\omega} X(\gamma) d\gamma$$

● Translação na frequência (“*frequency shifting*”):

Esta propriedade é a dual da propriedade da translação no tempo (“*time shifting*”). Agora a translação (*shift*) foi aplicada à variável ω e não no tempo t .

Suponha que $x(t)$ é um sinal e que

$$y(t) = e^{j\omega_0 t} \cdot x(t)$$

ou seja, $y(t)$ é o sinal $x(t)$ multiplicado por $e^{j\omega_0 t}$.

Então, mostra-se que:

$$Y(j\omega) = X(j(\omega - \omega_0))$$

ou seja,

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} \cdot x(t)\} = X(j(\omega - \omega_0))$$

a transformada de Fourier de $y(t)$ é a transformada $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ com uma translação (*shift*) na frequência ω , de ω_0 .

● Convolução:

Suponha que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são sinais contínuos e que

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t - \tau) \cdot x_2(\tau) d\tau = \\ &= x_1(t) * x_2(t) \end{aligned}$$

então, mostra-se que:

$$Y(j\omega) = X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x_1(t) * x_2(t)\} &= \mathcal{F}\{x_1(t)\} \cdot \mathcal{F}\{x_2(t)\} \\ &= X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega) \end{aligned}$$

isto é, a transformada de Fourier da convolução entre 2 sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ é o produto das transformadas de Fourier destes sinais.

● Multiplicação (dual da convolução):

Suponha que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são sinais contínuos e que

$$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$$

Então, mostra-se que:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\theta) \cdot X_2(j(\omega - \theta)) \cdot d\theta$$

ou seja,

$$\mathcal{F}\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\theta) \cdot X_2(j(\omega - \theta)) \cdot d\theta$$

8.5 – Interpretação da propriedade da Convolução

Uma interpretação da propriedade da Convolução vista na secção anterior é dada aqui.

Já vimos no capítulo 4 (sobre *Sistemas*) que a saída $y(t)$ de um sistema linear e invariante no tempo (SLIT) é a convolução de $\mathbf{h(t)}$ [*resposta do sistema ao impulso unitário*] com $\mathbf{x(t)}$ [*sinal de entrada do sistema*].

A figura 8.23 ilustra o que foi dito acima através do diagrama de blocos (caixa preta) de um sistema termos de $x(t)$, $h(t)$ e $y(t)$, conforme visto no capítulo 4.

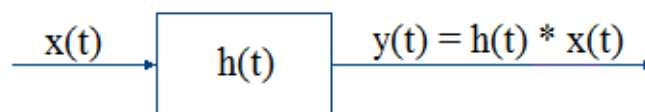


Fig. 8.23 – Diagrama esquemático de um sistema em função de $x(t)$, $h(t)$ e $y(t)$.

A figura 8.24 apresenta novamente o diagrama de blocos (caixa preta) de um sistema mas agora em termos de $X(j\omega)$, $H(j\omega)$ e $Y(j\omega)$.

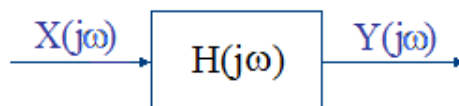


Fig. 8.24 – Diagrama esquemático de um sistema em função de $X(j\omega)$, $H(j\omega)$ e $Y(j\omega)$.

Portanto, $Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$, a transformada de Fourier da saída $y(t)$ de um sistema é o produto

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

onde:

$H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ = a transformada de Fourier de $\mathbf{h(t)}$ [*resposta impulsional do sistema*], também chamado de “*resposta na frequência*”.

$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ = a transformada de Fourier $\mathbf{x(t)}$ [*sinal de entrada do sistema*]

A propriedade da convolução permite escrevermos o diagrama de blocos (caixa preta) na forma mostrada na figura 8.25.

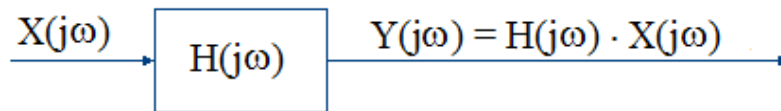


Fig. 8.25 – Diagrama esquemático de um sistema em função de $X(j\omega)$, $H(j\omega)$ e $Y(j\omega)$ ilustrando a propriedade da transformada da convolução.

Além disso, também foi visto no capítulo 4 (sobre *Sistemas*) que se dois sistemas $\mathbf{S_1}$ e $\mathbf{S_2}$, lineares e invariantes no tempo (SLIT), estão ligados em cascata, conforme ilustra a figura 8.26, então a *resposta à entrada impulso unitário* dos dois sistemas juntos ($\mathbf{S_1}$ e $\mathbf{S_2}$) é a convolução ($\mathbf{h_1(t) * h_2(t)}$).

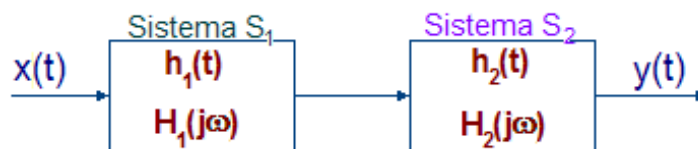


Fig. 8.26 – Diagrama esquemático de um sistema em cascata.

Portanto, a saída $\mathbf{y(t)}$ deste sistema em cascata é a convolução (*dupla*) de $\mathbf{h_1(t)}$ com $\mathbf{h_2(t)}$ com $\mathbf{x(t)}$.

$$y(t) = h_1(t) * h_2(t) * x(t)$$

e isso está ilustrado na figura 8.27.

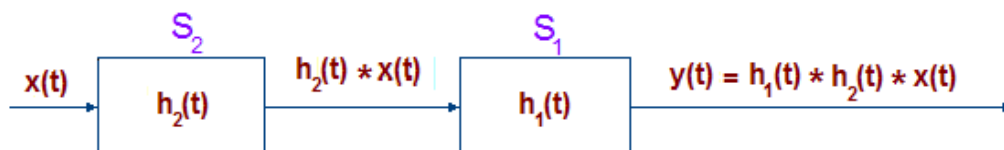


Fig. 8.27 – Diagrama esquemático de um sistema em cascata.

Este sistema em cascata pode ser representado de forma equivalente por apenas um bloco conforme mostra a figura 8.28.

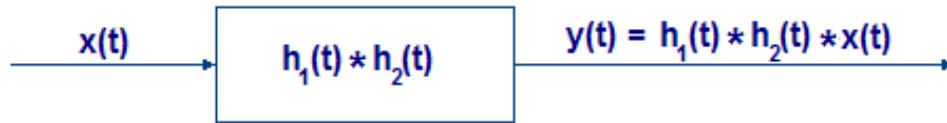


Fig. 8.28 – Diagrama esquemático equivalente a de um sistema em cascata.

Pela propriedade da convolução para a Transformada de Fourier, a resposta na frequência deste sistema é

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$$

e a transformada de Fourier da saída $y(t)$ deste sistema em cascata é o produto das transformadas de Fourier de $h_1(t)$, $h_2(t)$ e $x(t)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{y(t)\} &= \mathcal{F}\{h_1(t)\} \cdot \mathcal{F}\{h_2(t)\} \cdot \mathcal{F}\{x(t)\} \\ &= H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega) \cdot X(j\omega) \end{aligned}$$

E isso está ilustrado na figura 8.29.

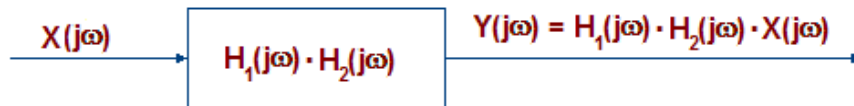


Fig. 8.29 – Diagrama esquemático equivalente a de um sistema em cascata.

Exemplo 8.13:

Considere o sistema SLIT onde a resposta ao impulso é dada por

$$h(t) = u_o(t - t_o).$$

Usando a propriedade dual do “*time shifting*” para a transformada de Fourier, obtemos a resposta no domínio da frequência, a transformada de Fourier de $h(t)$

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= e^{-j\omega t_o} \cdot \mathcal{F}\{u_o(t)\} = \\ &= e^{-j\omega t_o} \end{aligned}$$

e isso está ilustrado na figura 8.30.

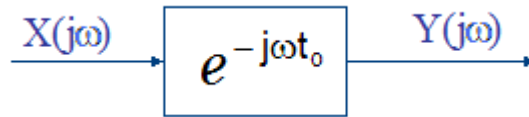


Fig. 8.30 – Diagrama esquemático de um sistema SLIT com $H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$.

Portanto, para uma entrada $\mathbf{x}(t)$ com transformada de Fourier $X(j\omega) = \mathcal{F}\{\mathbf{x}(t)\}$, tem-se que a transformada de Fourier da saída $\mathbf{y}(t)$, $Y(j\omega) = \mathcal{F}\{\mathbf{y}(t)\}$ é dada por

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= H(j\omega) \cdot X(j\omega) = \\ &= e^{-j\omega t_0} \cdot X(j\omega) \end{aligned}$$

e portanto, usando a propriedade dual do “*time shifting*” para a transformada de Fourier

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t - t_0)$$

observamos que a saída $\mathbf{y}(t)$ é o sinal $\mathbf{x}(t)$ com uma translação (*shift*) de t_0 e que este sistema é o “*sistema com retardo*” (*time delay system*).

□

Exemplo 8.14:

Considere o sistema SLIT chamado de “*diferenciador*”, onde para um sinal de entrada $\mathbf{x}(t)$ a saída $\mathbf{y}(t)$ é a sua derivada

$$\mathbf{y}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$$

conforme está ilustrado na figura 8.31.

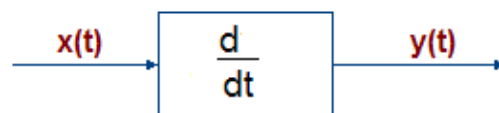


Fig. 8.31 – Diagrama esquemático do sistema “*diferenciador*”.

Usando a propriedade da derivada para a transformada de Fourier temos que

$$Y(j\omega) = \mathcal{F}\{\mathbf{y}(t)\} = j\omega \cdot X(j\omega)$$

Logo, pela propriedade da convolução para a transformada de Fourier, a resposta na frequência $H(j\omega)$ é

$$H(j\omega) = j\omega$$

que se encontra ilustrado na figura 8.32.

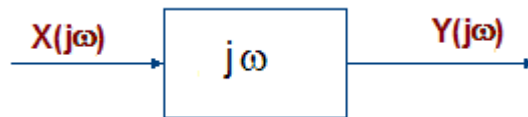


Fig. 8.32 – Diagrama esquemático do sistema “*diferenciador*”, $H(j\omega) = j\omega$.

Este resultado é consistente com a definição de $H(j\omega)$, pois

$$h(t) = \frac{du_o(t)}{dt}$$

e portanto $H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ é

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= j\omega \cdot \mathcal{F}\{u_o(t)\} = \\ &= j\omega \end{aligned}$$

□

Exemplo 8.15:

Considere agora o sistema SLIT abaixo chamado de “*integrador*”, onde para um sinal de entrada $\mathbf{x(t)}$ a saída $\mathbf{y(t)}$ é a sua integral

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

que está ilustrado na figura 8.33.

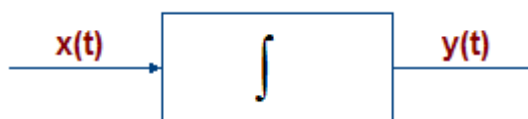


Fig. 8.33 – Diagrama esquemático do sistema “*integrador*”.

Usando a propriedade da integral para a transformada de Fourier,

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t u_1(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega} + \pi u_o(\omega)$$

e, como

$$h(t) = \int_{-\infty}^t u_o(\tau) d\tau$$

então a resposta do sistema na frequência é:

$$H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \left[\frac{1}{j\omega} + \pi u_o(\omega) \right].$$

que se encontra ilustrado na figura 8.34.

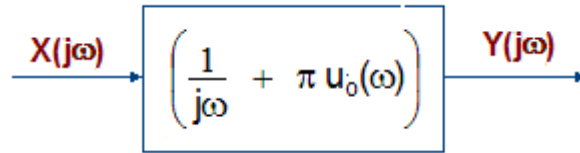


Fig. 8.34 – Diagrama esquemático do sistema “integrador”.

e pela propriedade da convolução para a transformada de Fourier, temos que $Y(j\omega)$, a transformada de Fourier da saída $y(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= H(j\omega) X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \cdot X(j\omega) + \pi \cdot X(j\omega) \cdot u_o(\omega) = \\ &= \frac{1}{j\omega} \cdot X(j\omega) + \pi \cdot X(0) \cdot u_o(\omega) \end{aligned}$$

que é o mesmo resultado que obtemos calculando $Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$ pela propriedade da integral para transformada de Fourier.

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega} \cdot X(j\omega) + \pi \cdot X(0) \cdot u_o(\omega)$$

□

Exemplo 8.16:

Considere agora o filtro passa-baixa ideal (“*low pass band filter*”).

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{se } |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

que se encontra ilustrado na figura 8.35.

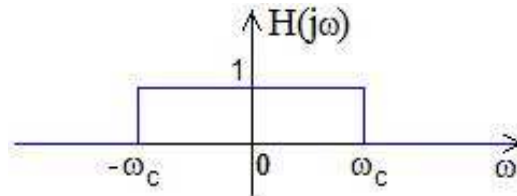


Fig. 8.35 – Diagrama esquemático do filtro passa-baixa ideal (“*low pass band filter*”).

Pelo Exemplo 8.3 e pela propriedade da dualidade para transformada de Fourier temos que

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} = \\ &= \frac{\text{sen}(\omega_c t)}{\pi t} \end{aligned}$$

cujo gráfico é mostrado na figura 8.36.

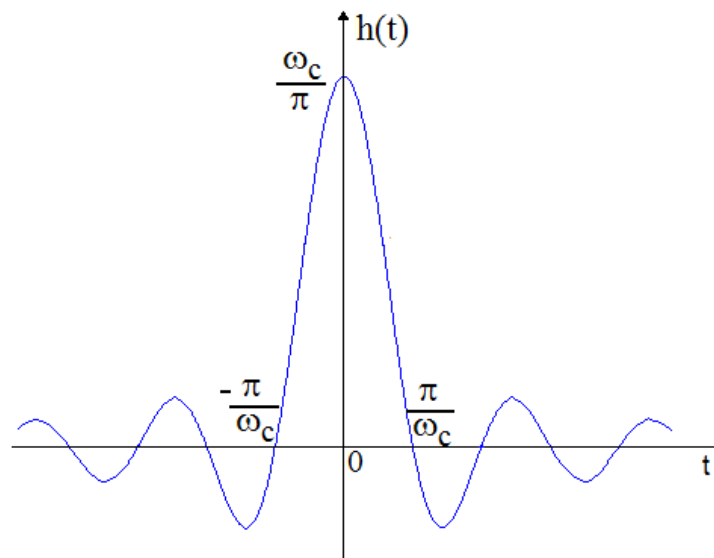


Fig. 8.36 – Gráfico de $h(t)$ do filtro passa-baixa ideal (“*low pass band filter*”).

□

8.6 – Tabela da Transformada de Fourier de alguns sinais contínuos conhecidos

$x(t)$	$X(j\omega)$
$x(t) = u_o(t)$	$X(j\omega) = 1, \quad \forall \omega$
$x(t) = u_1(t)$	$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi \cdot u_o(\omega)$
$x(t) = u_2(t)$	$X(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2} + \frac{1}{j} u_o(\omega)$
$x(t) = e^{j\omega t}$	$X(j\omega) = 2\pi u_o(\omega - \omega_o)$
$x(t) = 1, \quad \forall t$	$X(j\omega) = 2\pi u_o(\omega)$
$x(t) = \text{sen } \omega_o t$	$X(j\omega) = \frac{\pi}{j} [u_o(\omega - \omega_o) - u_o(\omega + \omega_o)]$
$x(t) = \text{cos } \omega_o t$	$X(j\omega) = \pi [u_o(\omega - \omega_o) + u_o(\omega + \omega_o)]$
$x(t) = e^{-at} u_1(t), \quad a > 0$	$X(j\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)}$
$x(t) = t \cdot e^{-at} u_1(t), \quad a > 0$	$X(j\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^2}$
$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-at} u_1(t), \quad a > 0$	$X(j\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^n}$
$x(t) = \frac{\text{sen}(\omega_c t)}{\pi t}$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega < \omega_c \\ 0 & \text{se } \omega > \omega_c \end{cases}$
$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t < t_o \\ 0 & \text{se } t > t_o \end{cases}$	$X(j\omega) = \frac{2 \cdot \text{sen}(\omega t_o)}{\omega}$
$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_o(t - nT)$	$X(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_o\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$