



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA - CT

LARISSA FERNANDES DA SILVA

MATEUS SOUZA SOARES

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS APLICADO AO
ELETROMAGNETISMO

VITÓRIA

2025

LARISSA FERNANDES DA SILVA

MATEUS SOUZA SOARES

**MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS APLICADO AO
ELETROMAGNETISMO**

Relatório apresentado à disciplina de Eletromagnetismo 2, dos cursos de Engenharia de Computação e Engenharia Elétrica como parte dos requisitos necessários à obtenção de nota.

Professora: Elizandra Pereira Roque Coelho

VITÓRIA
2025

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	2
2. ATIVIDADES	4
3. CONCLUSÃO.....	11
4. REFERÊNCIAS.....	12

1. INTRODUÇÃO

Existem diversas técnicas analíticas para resolver problemas de Eletromagnetismo (EM), sendo essas soluções obtidas na forma fechada, ou seja, expressas por equações algébricas explícitas que permitem a substituição direta de parâmetros. Diante da dificuldade de encontrar soluções analíticas para problemas mais elaborados, recorre-se a métodos não analíticos, os quais incluem abordagens gráficas, experimentais, analógicas e numéricas. Com o avanço dos computadores, os métodos numéricos se tornaram cada vez mais atrativos, permitindo a solução de problemas mais complexos de forma eficiente.

Sendo assim, entre os métodos numéricos mais utilizados em Eletromagnetismo, destacam-se o método das diferenças finitas (FDM), o método dos elementos finitos e o método dos momentos. As equações diferenciais parciais que surgem nos problemas de EM são, em sua maioria, resolvidas por meio desses métodos, sendo que cada um deles apresenta vantagens e desvantagens dependendo da aplicação. Embora os métodos numéricos forneçam soluções aproximadas, sua precisão pode ser aumentada por meio do refinamento computacional, tornando-os amplamente aplicáveis na engenharia e superando as limitações das soluções analíticas.

No método das diferenças finitas (FDM), um problema bem definido depende de três fatores principais: a equação diferencial parcial que governa o sistema, a delimitação do domínio onde a equação será aplicada e as condições de contorno ou iniciais. Esse método discretiza o domínio do problema em uma malha de pontos, como na *figura 2*, e substitui as derivadas diferenciais por aproximações baseadas nos valores dos pontos vizinhos. Assim, transforma a equação contínua em um sistema de equações algébricas, que pode ser resolvido iterativamente para obter uma solução aproximada.

Desse modo, este trabalho tem por objetivo utilizar o método das diferenças finitas com o auxílio da linguagem de programação Python, para determinar a distribuição de potenciais em uma micro linha com condutores muito longos, cuja seção transversal é apresentada na *figura 1*. O problema envolve a análise das condições de contorno que garantem a unicidade da solução, a formulação das equações diferenciais que descrevem o sistema e a discretização dessas equações para aplicação do método numérico. Além disso, será adotada uma malha de pontos adequada para a resolução

iterativa do problema, garantindo a convergência dentro de uma precisão desejada. Por fim, será analisado o comportamento das equipotenciais na interface, considerando variações na posição dos condutores internos.

Figura 1: Seção transversal da micro linha.

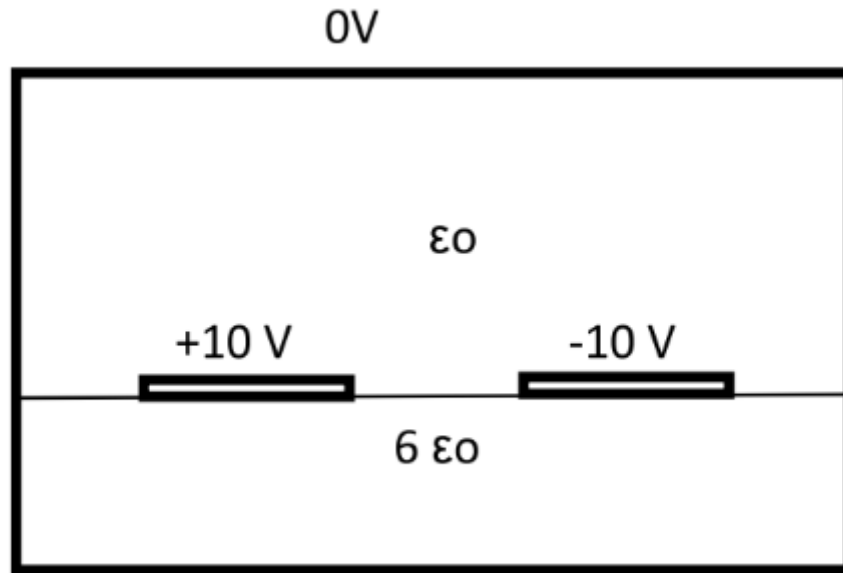
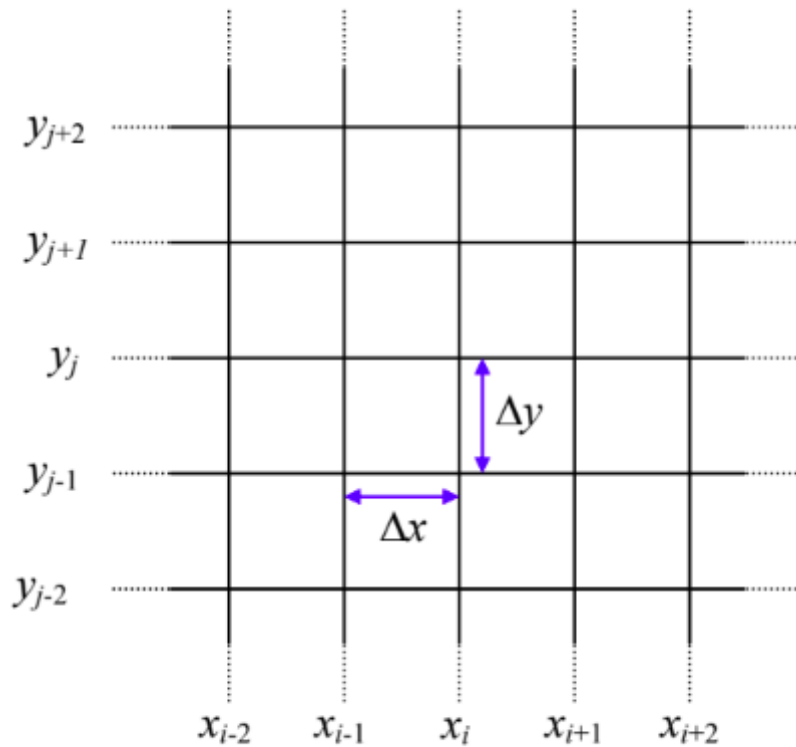


Figura 2: Malha de pontos.



2. ATIVIDADES

a) Verificar as condições de contorno que garantem a unicidade da solução do problema.

R: Para garantir a unicidade da solução, as condições de contorno devem ser bem definidas. Para esse problema eletrostático, as condições de contorno podem ser de dois tipos:

1. *Condições de Dirichlet:* O potencial elétrico é especificado em certos pontos, garantindo valores fixos. No problema, temos:
 - Condutores internos: +10V e -10V (fixos).
 - Borda externa: 0V fixo (superfície condutora aterrada).
2. *Condições de Neumann:* A derivada do potencial (campo elétrico) é especificada em certos pontos (geralmente em superfícies isolantes). Nas interfaces entre os materiais com permissividades diferentes (ϵ_0 e $6\epsilon_0$), devem obedecer à continuidade do deslocamento elétrico:

$$\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}$$

Portanto, no trabalho em questão, os condutores internos terão potenciais fixos (condições de Dirichlet), e as interfaces entre os materiais seguirão a regra da continuidade do deslocamento elétrico. A borda externa, tendo potencial fixo (0V), não pode ser considerada isolante (Neumann), mas sim uma superfície condutora aterrada (Dirichlet).

b) Estabelecer as equações que descrevem o problema.

R: Precisamos considerar:

1. A equação que governa o potencial elétrico.
2. As condições de contorno.
3. As condições de interface entre os materiais.

No problema eletrostático, a distribuição de potenciais é governada pela equação de Laplace, que é válida em regiões onde não há cargas livres ($\rho=0$). A equação de Laplace é dada por:

$$\nabla^2 V = 0$$

Em coordenadas cartesianas, a equação de Laplace é escrita como:

$$\boxed{\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} = 0}$$

Essa equação descreve o comportamento do potencial $V(x, y)$ em todo o domínio, exceto nas interfaces entre materiais com diferentes permissividades. É preciso considerar também o

Potencial fixo nos condutores internos:

$V=+10V$ (condutor 1) e $V=-10V$ (condutor 2).

Potencial fixo na borda externa: $V=0V$.

e *Condições de interface entre materiais:* Continuidade do deslocamento elétrico, onde E_n é a derivada normal do potencial na interface:

$$\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$$

c) Escrever a equação discretizada (diferenças finitas) para o potencial e analisar as condições a serem aplicadas à interface dos dois materiais.

R: Temos que a ideia é aproximar as derivadas parciais por diferenças finitas, ou seja, substituir as derivadas por expressões que envolvem valores discretos da função em pontos da malha. Logo, a discretização da equação de Laplace para um ponto (i, j) na malha é:

$$\frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

Se $\Delta x = \Delta y = h$, a equação simplifica para:

$$V_{i,j} = \frac{1}{4}(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1})$$

Essa é a equação discretizada que vai ser usada para calcular o potencial em cada ponto da malha. Na interface entre os materiais, a equação discretizada precisa ser modificada para levar

em conta as diferentes permissividades. Para um ponto (i,j) na interface, a **equação discretizada** é:

$$V_{i,j} = \frac{\epsilon_1 V_{i+1,j} + \epsilon_1 V_{i-1,j} + \epsilon_2 V_{i,j+1} + \epsilon_2 V_{i,j-1}}{2(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

Chegamos a isso, observando que para o ponto (i,j) , a derivada normal do potencial na interface na direção y (acima e abaixo) é:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{i,j} \approx \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta y} \quad (\text{abaixo})$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{i,j} \approx \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta y} \quad (\text{acima})$$

Aplicando a continuidade do deslocamento elétrico na interface, temos:

$$\epsilon_1 \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta y} = \epsilon_2 \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta y}$$

Simplificando, obtemos:

$$\epsilon_1 (V_{ij} - V_{i,j-1}) = \epsilon_2 (V_{i,j+1} - V_{ij})$$

Isolando V_{ij} , temos:

$$V_{ij} = \frac{\epsilon_1 V_{i,j-1} + \epsilon_2 V_{i,j+1}}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

E substituímos essa expressão na equação de Laplace discretizada, tendo assim a equação final.

d) Adotar uma malha de pontos adequada e resolver o problema por iteração, observando a convergência da solução (precisão desejada em décimos de volt).

R: Vamos adotar uma malha de 50x50 pontos e resolver o problema iterativamente usando o método de relaxação, por meio da linguagem de programação *Python*. O método das diferenças finitas é aplicado iterativamente até que a solução convirja. A convergência é verificada comparando a diferença máxima entre duas iterações consecutivas. Se a diferença for menor que a tolerância (0,01V), a solução é considerada convergente. A precisão desejada é alcançada quando a diferença máxima entre iterações é menor que 0,01V.

OBS: O método da relaxação é uma técnica iterativa usada para resolver sistemas de equações lineares, como aqueles que surgem na discretização de equações diferenciais parciais (por exemplo, a equação de Laplace). Ele é uma variação do método de Gauss-Seidel, que é um método iterativo para resolver sistemas de equações lineares. A ideia básica do método da relaxação é: atualizar iterativamente os valores da solução em cada ponto da malha e relaxar a solução, ou seja, ajustar os valores gradualmente até que a solução convirja para um valor estável. O código percorre todos os pontos da malha (exceto os condutores internos) e atualiza o potencial $V_{i,j}$ usando a média dos valores dos vizinhos. Se o ponto estiver na interface entre dois materiais com permissividades diferentes, a equação é ajustada para levar em conta a continuidade do deslocamento elétrico e a convergência é verificada comparando a diferença máxima entre duas iterações consecutivas.

Um trecho do código em Python para resolver o problema é apresentado abaixo:

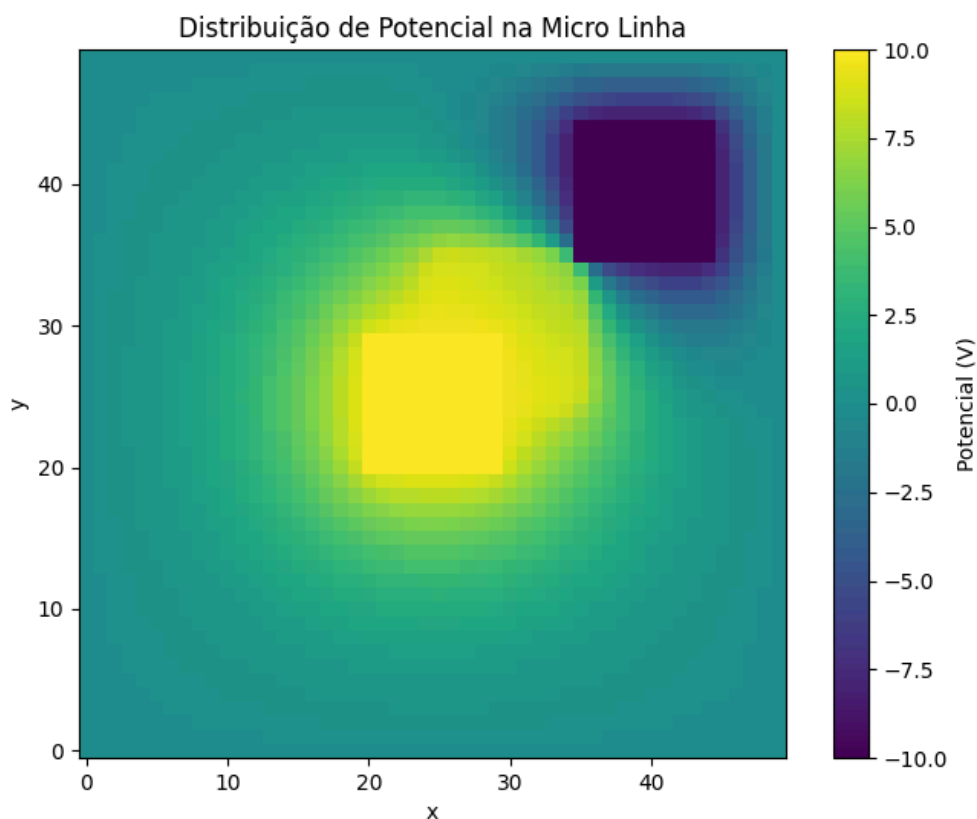
```

1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3
4  # Parâmetros da malha
5  N = 50 # Número de pontos na malha (N x N). Escolhemos N = 50 para balancear precisão e tempo de execução.
6  V = np.zeros((N, N)) # Matriz de potenciais. Inicialmente, todos os pontos têm potencial zero.
7
8  # Condições de contorno
9  V[:, 0] = 0 # Potencial na borda esquerda fixado em 0 V (condição de Dirichlet).
10 V[:, -1] = 0 # Potencial na borda direita fixado em 0 V (condição de Dirichlet).
11 V[0, :] = 0 # Potencial na borda superior fixado em 0 V (condição de Dirichlet).
12 V[-1, :] = 0 # Potencial na borda inferior fixado em 0 V (condição de Dirichlet).
13
14 # Condutores internos ajustados
15 V[20:30, 20:30] = 10 # Potencial no condutor interno 1 fixado em +10 V (condição de Dirichlet).
16 V[35:45, 35:45] = -10 # Potencial no condutor interno 2 fixado em -10 V (condição de Dirichlet).
17
18 # Permissividades dos materiais
19 epsilon = np.ones((N, N)) # Permissividade padrão (epsilon_1 = 1).
20 epsilon[25:35, 25:35] = 6 # Região com permissividade epsilon_2 = 6 * epsilon_1.
21
22 # Parâmetros da iteração
23 max_iter = 10000 # Número máximo de iterações. Escolhido para garantir que o método tenha tempo suficiente para convergir
24 tolerancia = 0.01 # Tolerância para convergência. A iteração para quando a diferença máxima entre duas iterações é menor
25
26 # Método das diferenças finitas com relaxação
27 for k in range(max_iter):
28     V_old = V.copy() # Salva o potencial da iteração anterior para verificar a convergência.
29     for i in range(1, N-1):

```

A versão completa está disponível no github, e acessível por meio do seguinte link a seguir:

[clique aqui!](#).



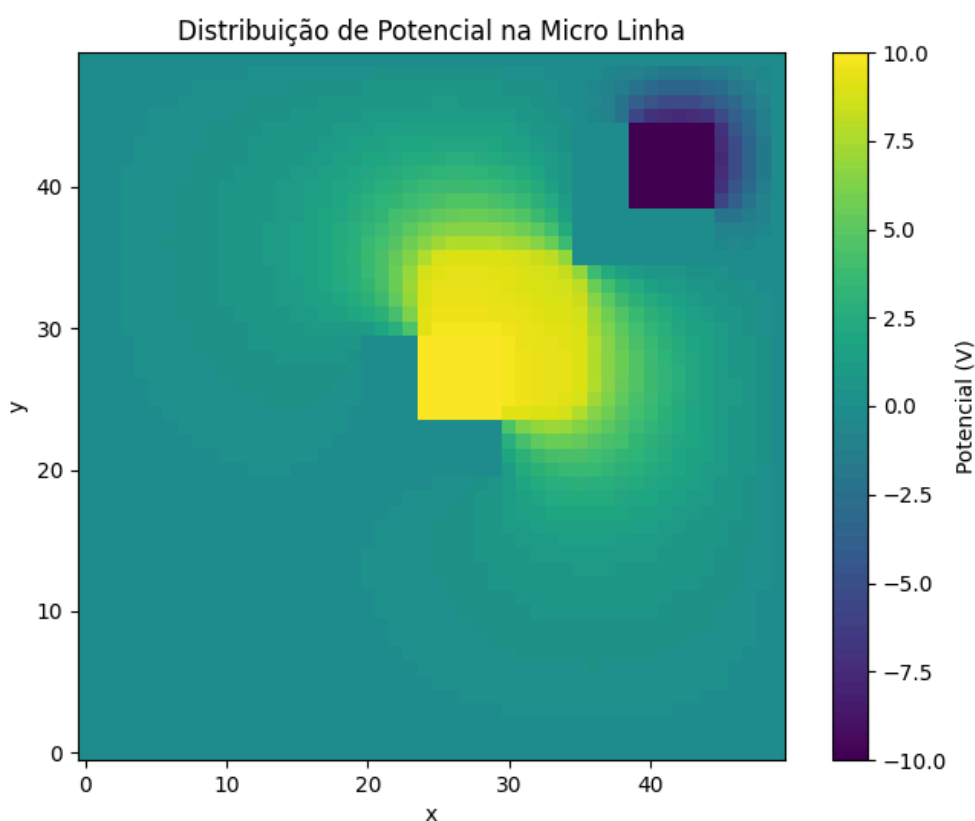
Para alcançar os valores de potencial em cada ponto do gráfico foram realizadas 219 iterações pelo código, pois foi definido anteriormente um valor de tolerância, que consiste na diferença entre os valores de duas iterações consecutivas, de 0,01. Sempre que chegamos na 219ª iteração temos que a diferença de potencial (V) entre a iteração presente e a anterior – definido no código como sendo $V - V_{old}$ – é de aproximadamente 0.009869, que evidentemente é menor do que a tolerância pré definida no código, de forma a encerrar o código nesta iteração.

Observando o gráfico podemos perceber que há uma concentração do potencial 10V em x variando de 20 a 30, e y variando no mesmo intervalo. Já o potencial -10V se concentra na região onde x varia de 35 a 45, e y, da mesma forma que o caso anterior, variando no mesmo intervalo. Na região entre a concentração de 10V e a de -10V vemos que o potencial está em torno de 7,5 e 9V. A maior parte do gráfico contém valores de potencial elétrico bem próximos de 0V.

e) Observar o comportamento das equipotenciais na interface, variando a posição dos condutores internos para cima e para baixo. Fazer as figuras.

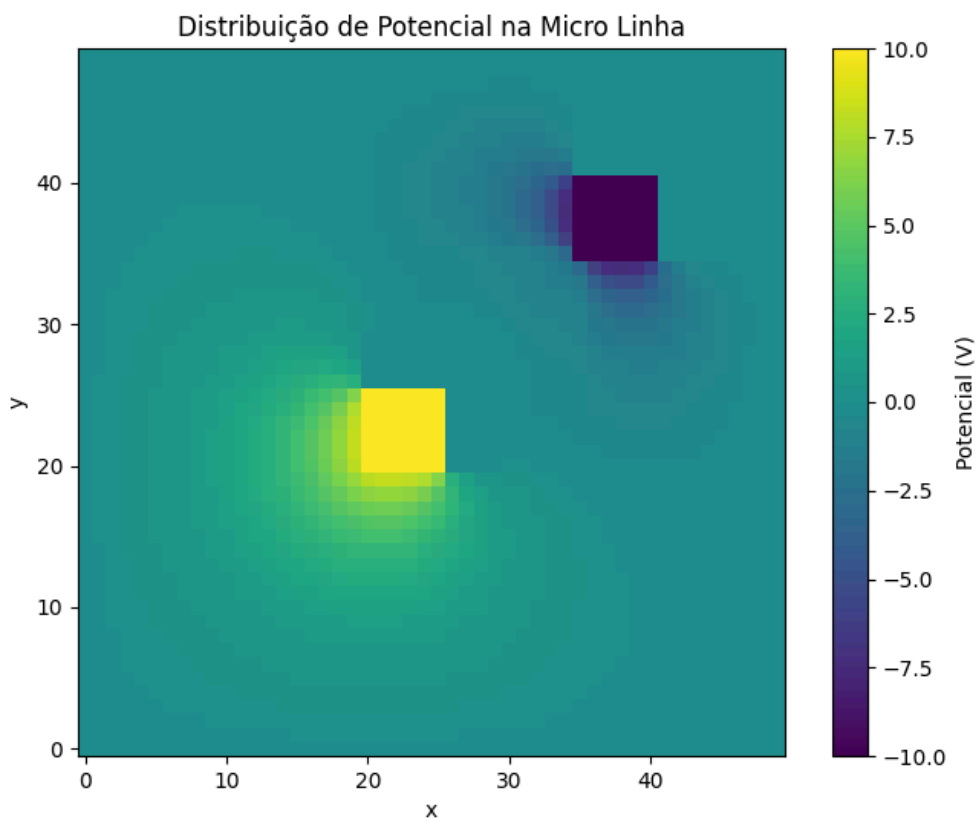
R: Para variar a posição dos condutores foram modificadas as linhas 15 e 16 do código, alterando 4 unidades, tanto para cima quanto para baixo, e dessa forma foram plotados os gráficos que seguem abaixo.

Variando 4 unidades para cima obtemos:



Para chegar ao gráfico mostrado foram necessárias 259 iterações para alcançar a convergência. Analisando o gráfico, vemos que a região que concentra os potenciais de valor 10 e -10V diminuiu em área, comparando com o gráfico anterior. Podemos perceber ainda que a área que continha potenciais variando de 7,5 a 10V diminuíram em relação ao primeiro caso, e há agora uma região nessa mesma área em que o potencial está próximo de 0V.

Variando 4 unidades para baixo obtemos:



Para chegar ao gráfico mostrado foram necessárias 160 iterações para alcançar a convergência, bem menos que nos outros dois casos. De modo semelhante ao caso anterior, no qual os condutores foram deslocados para cima, a área de concentração dos potenciais 10 e -10V diminuíram, mas neste caso em que os condutores foram deslocados para baixo a área em que o potencial varia de 7,5 a 10V diminuiu mais do que no caso anterior, deixando ainda uma vasta área entre os potenciais 10 e -10V com um valor de potencial bem próximo de 0V.

3. CONCLUSÃO

O método das diferenças finitas é uma ferramenta poderosa para resolver problemas eletrostáticos. A implementação numérica permite explorar diferentes condições de contorno e avaliar o comportamento das equipotenciais e linhas de campo elétrico em diferentes configurações. Ela se torna bem útil por sua simplicidade e por sua facilidade de implementação, tornando-o uma escolha interessante para problemas mais básicos ou para quando se deseja obter soluções de forma rápida e eficiente.

Desse modo, conseguimos verificar a variação do potencial elétrico em uma dada micro linha, que contém diferentes *permissividades* e condutores com potenciais diferentes em seu meio, fazendo isso de forma iterativa, sem necessariamente precisar realizar cálculos complexos, e usando dessa forma aproximações tais que nos permitem chegar a resultados bem próximos da realidade. Logo, a análise não foi realizada de forma contínua, mas particionada em vários pedaços para poder ser obtida de forma discreta, facilitando os cálculos, de modo a ser realizável por uma linguagem de programação, que no caso do presente trabalho foi feito em Python.

Portanto, foi verificado que é possível determinar, por diferenças finitas, a distribuição de potenciais em uma micro linha com condutores, através de cálculos relativamente simples e um código compacto. Essas análises podem ainda servir de base para trabalhos mais complexos e detalhados, podendo ter uma aplicação direta da teoria utilizada.

4. REFERÊNCIAS

ELITON FONTANA. Método das Diferenças Finitas - Aula 01/Parte I: Conceito Geral de Discretização. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=QP5aAlXhlzM>>. Acesso em: 10 fev. 2025.

INÊS BARBOSA DE CARVALHO, M. Métodos Numéricos no Traçado de Campos ELECTROTECNIA TEÓRICA LEEC Aníbal Castilho Coimbra de Matos. [s.l: s.n.]. Disponível em: <https://paginas.fe.up.pt/~mines/publicacoes_pedagogicas/apontamentos/ET_MNumericos.pdf>. Acesso em: 12 fev. 2025.

Métodos iterativos para sistemas lineares. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/reatmat/CalculoNumerico/livro-py/sdsl-metodos_iterativos_para_sistemas_lineares.html>.

NEUMANN.Resolved Analytics. Disponível em: <<https://www.resolvedanalytics.com/cfd/what-is-a-neumann-boundary-condition>>. Acesso em: 12 fev. 2025.

NumPy Tutorial. Disponível em: <<https://www.w3schools.com/python/numpy/default.asp>>.

SADIKU, Matthew N. O. Elementos de eletromagnetismo. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

W3SCHOOLS. Matplotlib Pyplot. Disponível em: <https://www.w3schools.com/python/matplotlib_pyplot.asp>.