Aula 2

Técnicas Digitais

CONCEITOS BÁSICOS

- Complexas operações de um computador digital = combinações de simples operações aritméticas e lógicas:
  - Somar bits
  - Complementar bits
  - Comparar bits
  - Mover bits

OPERADORES LÓGICOS

Os OPERADORES LÓGICOS são:

- E (ou AND) - uma sentença é verdadeira SE - e somente se - todos os termos forem verdadeiros.
- OU (ou OR) - uma sentença resulta verdadeira se QUALQUER UM dos termos for verdadeiro.
- NÃO (ou NOT) - este operador INVERTE um termo.

Os operadores lógicos são representados por:

____

NOT --> (uma barra horizontal sobre o termo a ser invertido ou negado).

E ------> . (um ponto, como se fosse uma multiplicação)

OU ----> + (o sinal de soma)

TABELA VERDADE

- São tabelas que representam todas as possíveis combinações das variáveis de entrada de uma função, e os seus respectivos valores de saída.

PORTAS LÓGICAS

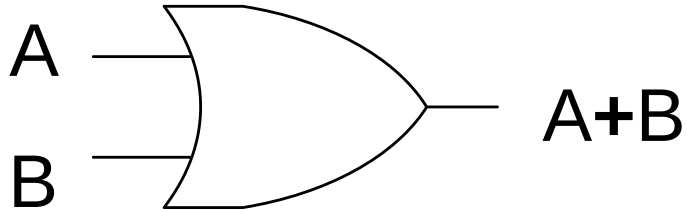
- Diversos tipos, cada uma com operação ou função lógica bem definida.

- Operação lógica assume somente dois valores: verdadeiro ou falso, ou em binário, 1 ou 0.
- São dispositivos ou circuitos lógicos que operam um ou mais sinais lógicos de entrada para produzir uma (e somente uma) saída, a qual é dependente da função implementada no circuito.

Adição Lógica (OU, OR)

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

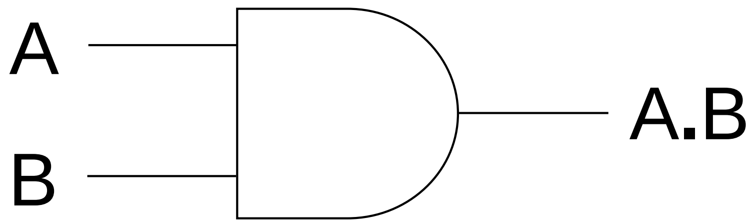
Componente: porta OU (OR gate)



Multiplicação Lógica (E, AND)

A	B	A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

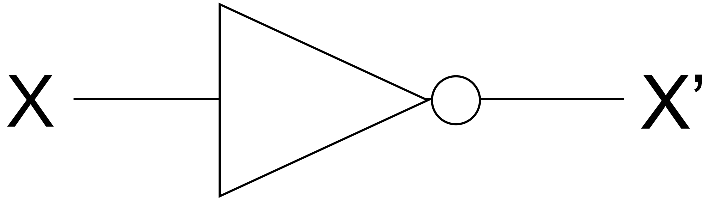
Componente: porta E (AND gate)



Complementação (NOT)

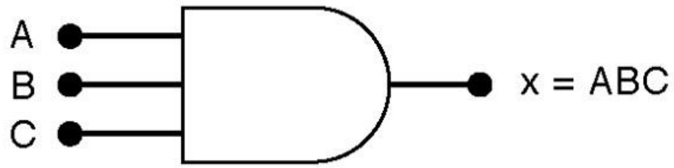
X	X’
0	1
1	0

Componente: inversor ou porta NOT (inverter)

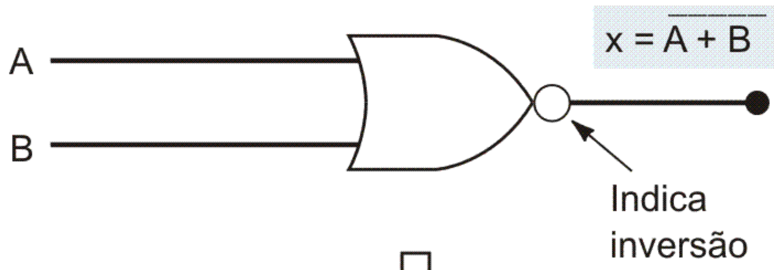


Portas com mais de uma entrada

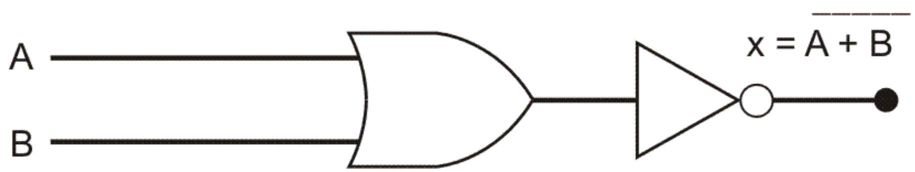
A	B	C	x = ABC
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1



Portas NOR



(a)

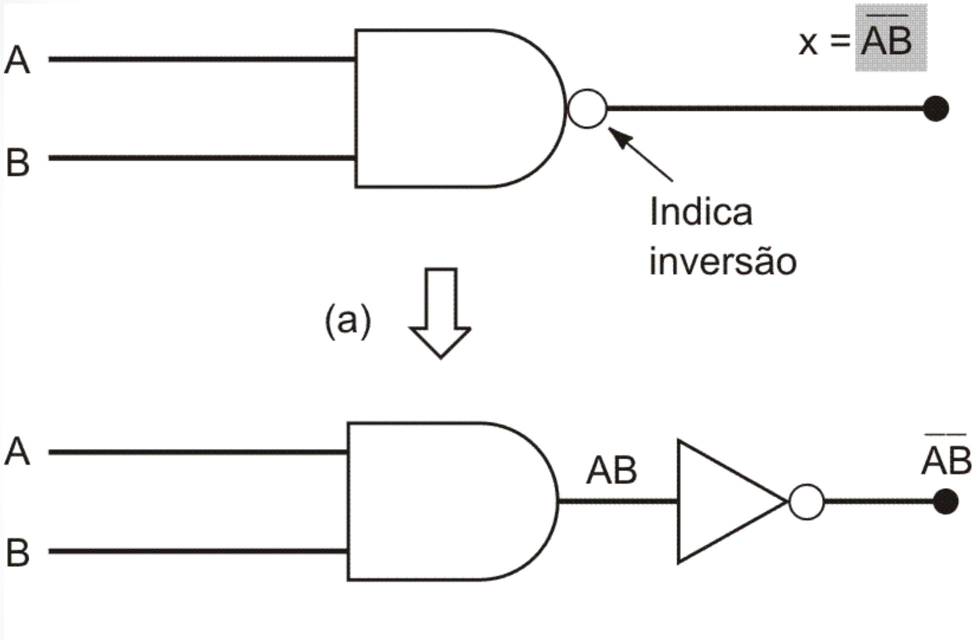


(b)

		OR	NOR
A	B	$A + B$	$\overline{A + B}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

(c)

Portas NAND



(b)

		AND	NAND
A	B	AB	$\overline{AB}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

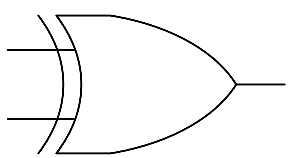
(c)

PORTA XOR (OU EXCLUSIVO)

A porta XOR compara os bits; ela produz saída 0 quando todos os bits de entrada são iguais e saída 1 quando pelo menos um dos bits de entrada é diferente dos demais.

Porta XOR
(2 entradas)

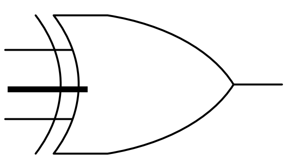
A	B	A ⊕ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



- ou exclusivo
- função "não iguais"

Porta XOR
(mais de 2 entradas)

A	B	C	(A ⊕ B ⊕ C)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

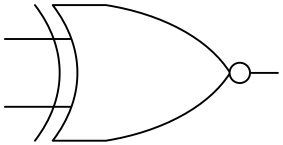


- função "ímpar": Numero impar de '1s' na entrada

Portas mais complexas (2)

Porta XNOR
(2 entradas)

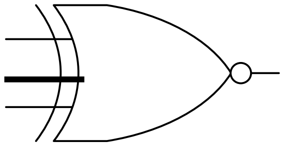
A	B	$(A \oplus B)'$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



- não ou exclusivo
- função “iguais”

Porta XNOR
(mais de 2 entradas)

A	B	C	$(A \oplus B \oplus C)'$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0



- função “par”: Numero par de ‘1s’ na entrada

Resumo Xor e Xnor

★ **XOR** (Exclusive-OR)

$x \oplus y$

$\bar{x}\,y + x\,\bar{y}$

x	*y*	*XOR*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

★ **XNOR** (Exclusive-NOR)
(Equivalence)

$\overline{x \oplus y}$

$x \odot y$

$\bar{x}\,\bar{y} + x\,y$

x	*y*	*XNOR*
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

CIRCUITOS LÓGICOS

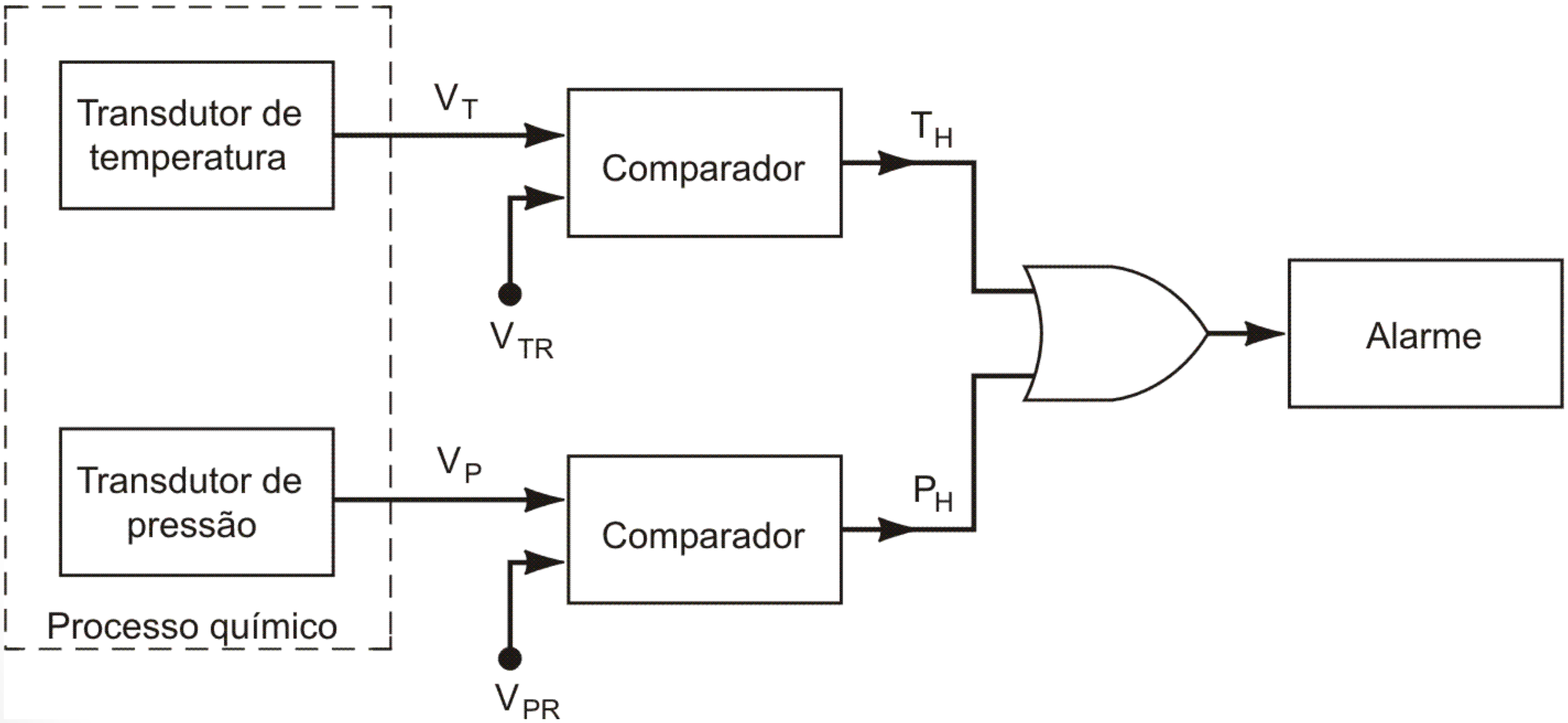
- Um computador é constituído de uma infinidade de circuitos lógicos, formados a partir das portas lógicas, que executam as seguintes funções básicas:

    - realizam operações matemáticas
    - controlam o fluxo dos sinais
    - armazenam dados

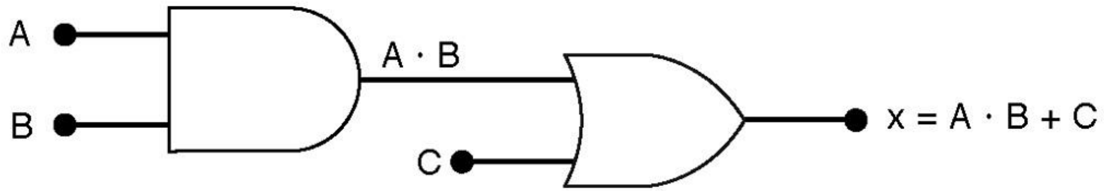
CIRCUITOS LÓGICOS

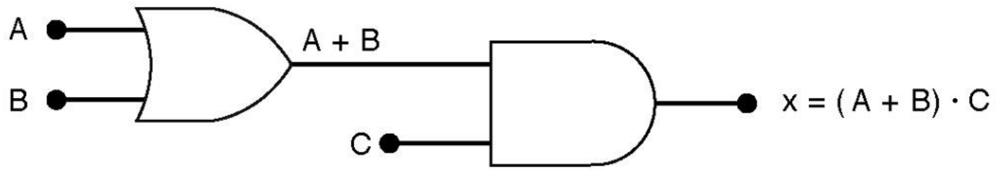
- COMBINACIONAL - a saída é função dos valores de entrada correntes; esses circuitos não tem capacidade de armazenamento.
- SEQUENCIAL - a saída é função dos valores de entrada correntes e dos valores de entrada no instante anterior; é usada para a construção de circuitos de memória (chamados "flip-flops").

Exemplo do uso de uma porta OR em um sistema de alarme

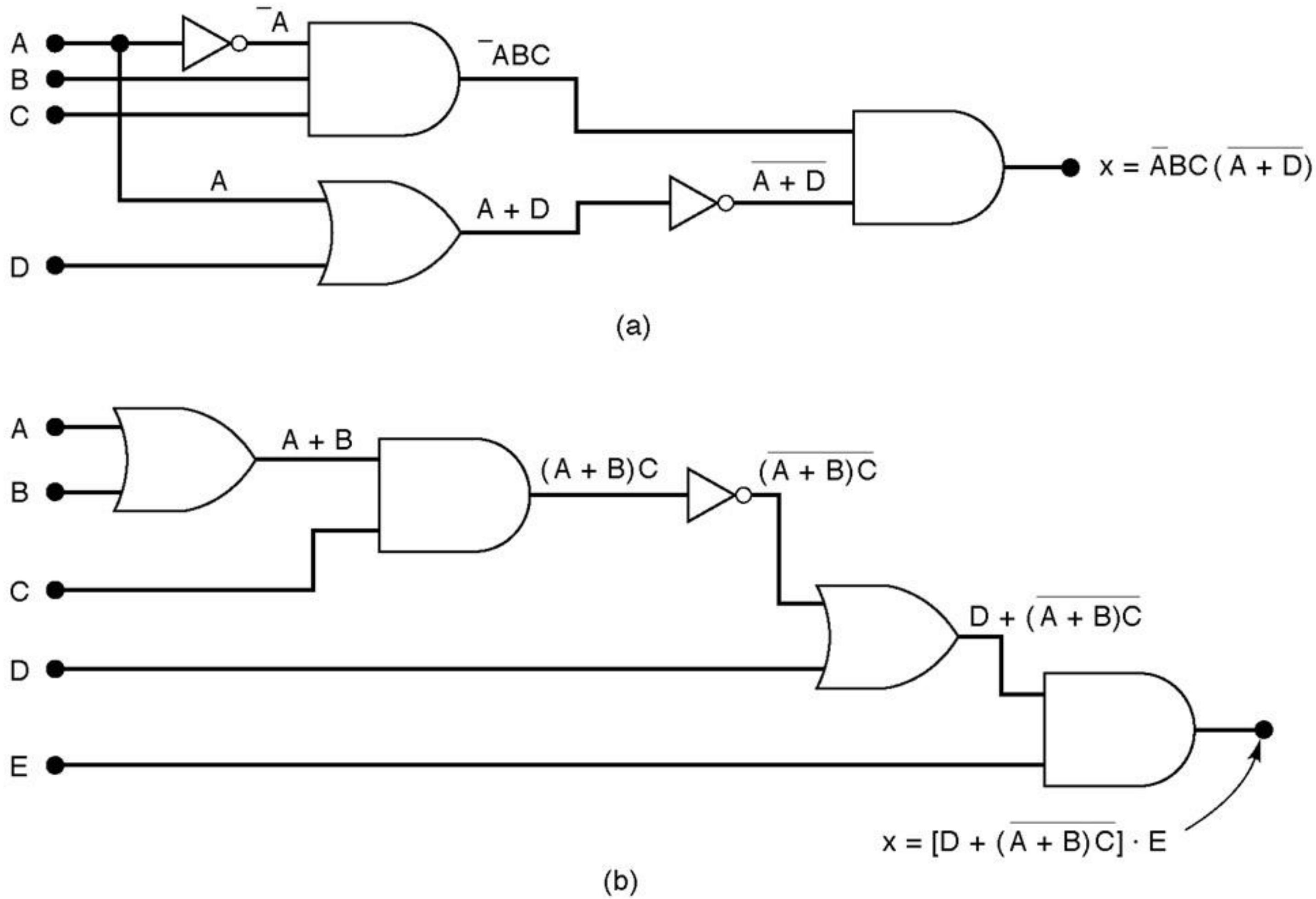


Expressão Booleana

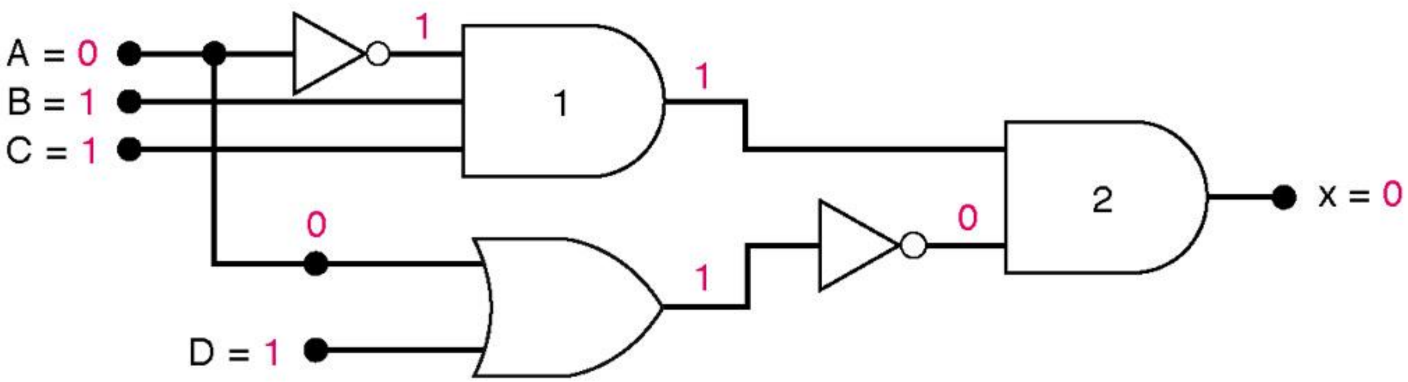




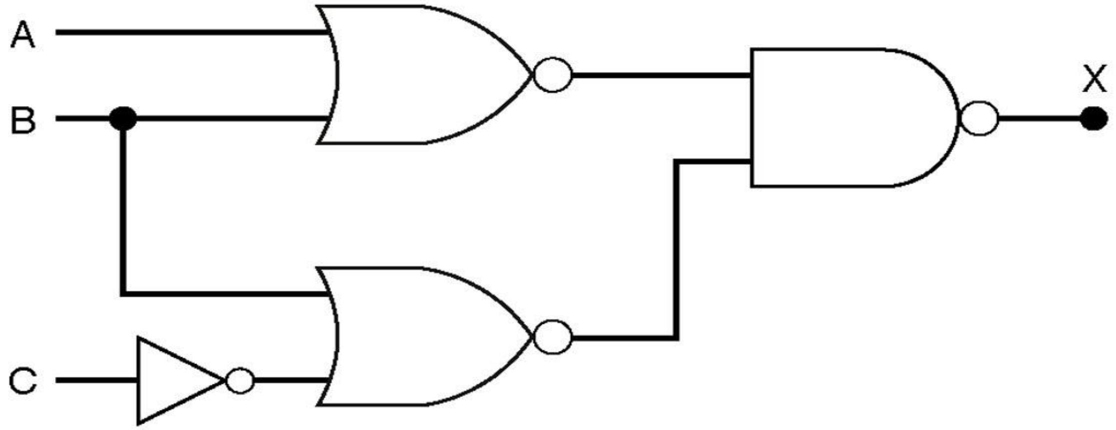
Expressão Booleana



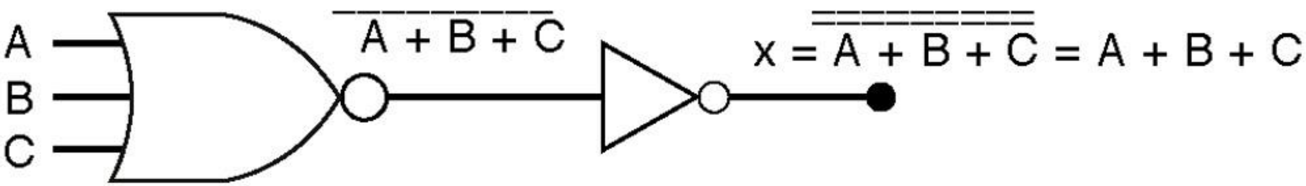
Saida para uma determinada entrada



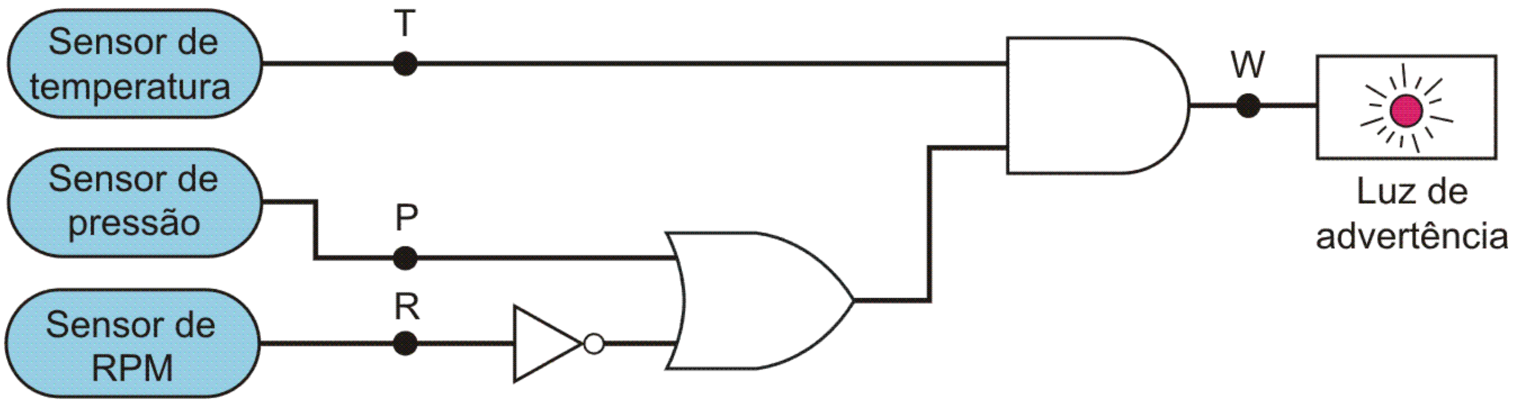
Escreva a Expressão Booleana para a figura abaixo



Exemplo

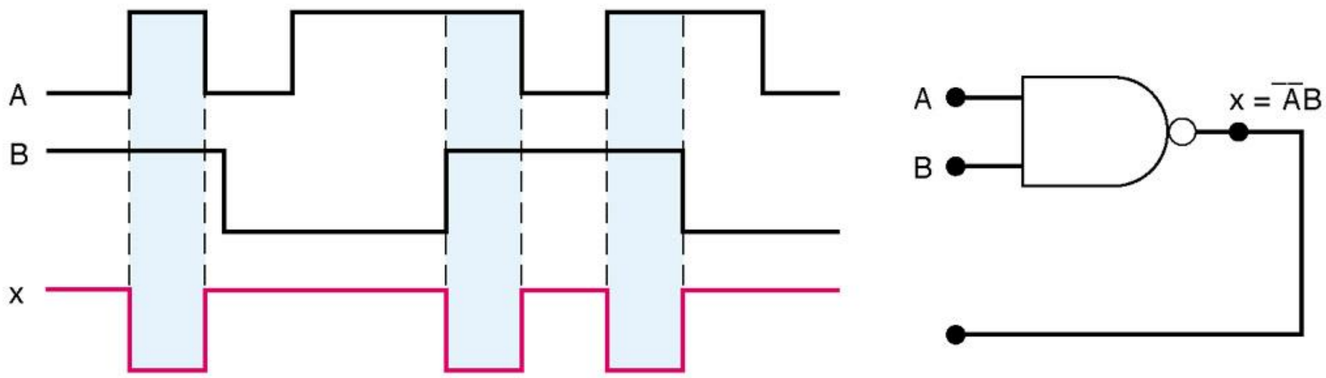


EXEMPLOS

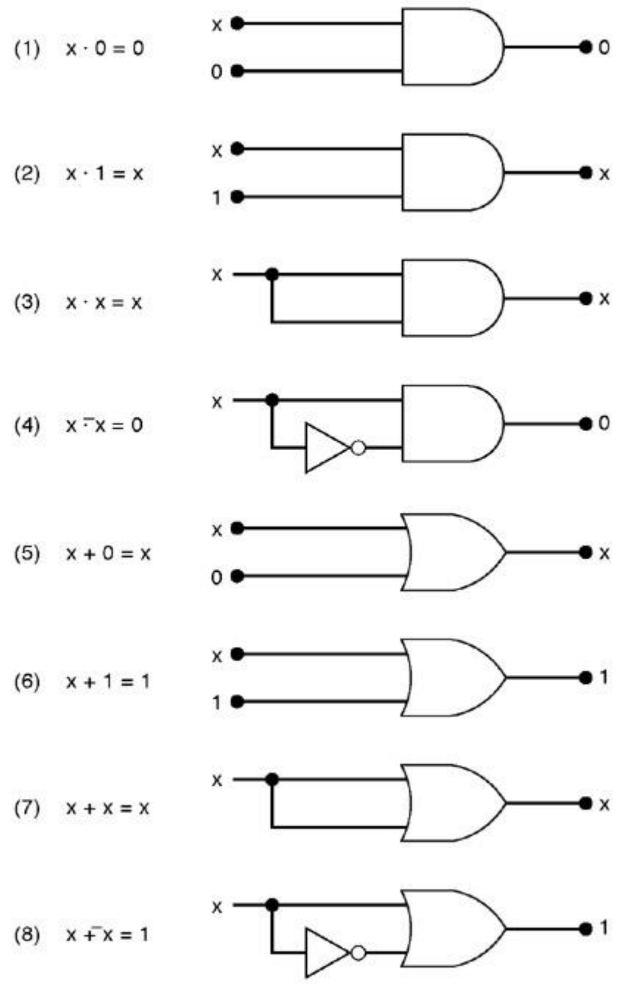


Sensor de temperatura
Sensor de pressão
Sensor de RPM
T
P
R
W
Luz de advertência

Diagrama de tempo -exemplo



Teoremas da Álgebra de Boole



$\overline{(X.Y)} = \overline{X} + \overline{Y}$ $\overline{(X+Y)} = \overline{X}.\overline{Y}$

Teoremas com 2 variáveis

9	A + B = B + A
10	A . B = B . A
11	A + (B + C)= (A+B)+ C
12	A.(B.C) = (A.B).C = A.B.C
13	A . (B + C) = A . B + A . C
14	A + A . B = A
15	**A + $\overline{A}$. B = A + B**
16	A . ($\overline{A}$ + B) = A . B
17	A . (A + B) = A
18	A + B . C = (A + B) . (A + C)
20	A . B + A . $\overline{B}$ = A
21	(A + B) . (A + $\overline{B}$) = A

Prove teorema 15 apos Demorgan

Prove teorema 21

Leis De Morgan

25	$\overline{(X+Y)} = \overline{X}.\overline{Y}$
26	$\overline{(X.Y)} = \overline{X} + \overline{Y}$

Circuitos Lógicos Combinacionais

- Forma de Soma de Produto (lógica positiva)
  - Termos AND's conectados por portas OR

$$z = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + B\overline{C}D$$

- Forma de Produto de Somas (lógica negativa)
  - Termos OR's conectados por portas AND

$$y = (A + B + C)(A + \overline{B})$$

Numeração Mintermos

- Associa-se o digito “1” para cada variável não complementada e “0” para cada variável complementada. Cada termo é associado um numero.
  - Cada termo AND é denominado Mintermo(sendo que todas as variáveis da função devem aparecer.)

Exemplos

- 1) $f(A,B) = AB + A\overline{B}$
- 2) $f(A,B) = AB + A$
- 3) $f(A,B,C) = A(\overline{B} + C)$
- 4) $f(A,B,C,D) = (\overline{A} + BC)(B + \overline{C}D)$

Mintermo

- Expressão a partir das tabelas verdades.

A	B	C	Minterm	Designation
0	0	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	m_0
0	0	1	$\bar{A}\bar{B}C$	m_1
0	1	0	$\bar{A}B\bar{C}$	m_2
0	1	1	$\bar{A}BC$	m_3
1	0	0	$A\bar{B}\bar{C}$	m_4
1	0	1	$A\bar{B}C$	m_5
1	1	0	$AB\bar{C}$	m_6
1	1	1	ABC	m_7

Maxtermo

Tabela Verdade com os maxtermos para funções de 3 variáveis.

A	B	C	Maxterm	Designation
0	0	0	$A + B + C$	M_0
0	0	1	$A + B + \overline{C}$	M_1
0	1	0	$A + \overline{B} + C$	M_2
0	1	1	$A + \overline{B} + \overline{C}$	M_3
1	0	0	$\overline{A} + B + C$	M_4
1	0	1	$\overline{A} + B + \overline{C}$	M_5
1	1	0	$\overline{A} + \overline{B} + C$	M_6
1	1	1	$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$	M_7

Mintermo/Maxtermo

- Conversão de uma forma para a outra
  - Cada Maxtermo é o complemento do seu correspondente mintermo e vice-versa

Tabela verdade com os mintermos com funções de 3 variáveis

A	B	C	Minterm	Designation
0	0	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	m_0
0	0	1	$\bar{A}\bar{B}C$	m_1
0	1	0	$\bar{A}B\bar{C}$	m_2
0	1	1	$\bar{A}BC$	m_3
1	0	0	$A\bar{B}\bar{C}$	m_4
1	0	1	$A\bar{B}C$	m_5
1	1	0	$AB\bar{C}$	m_6
1	1	1	ABC	m_7

Tabela Verdade com os maxtermos para funções de 3 variáveis.

A	B	C	Maxterm	Designation
0	0	0	$A+B+C$	M_0
0	0	1	$A+B+\bar{C}$	M_1
0	1	0	$A+\bar{B}+C$	M_2
0	1	1	$A+\bar{B}+\bar{C}$	M_3
1	0	0	$\bar{A}+B+C$	M_4
1	0	1	$\bar{A}+B+\bar{C}$	M_5
1	1	0	$\bar{A}+\bar{B}+C$	M_6
1	1	1	$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$	M_7

Exemplo 1.

Prove que $\overline{M_1} = m_1$

Exemplo 02.

Prove que $\overline{m_6} = M_6$.

Expresse as funções D e B por soma de Mintermos

Tabela Verdade

Inputs			Outputs	
X	Y	Z	D	B
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Expresse as funções D e B por soma de Mintermos

Tabela Verdade

Inputs			Outputs	
X	Y	Z	D	B
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

$$D = \overline{X}\overline{Y}Z + \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}\overline{Z} + XYZ = m_1 + m_2 + m_4 + m_7 = \Sigma(1, 2, 4, 7)$$

$$B = \overline{X}\overline{Y}Z + \overline{X}Y\overline{Z} + \overline{X}YZ + XYZ = m_1 + m_2 + m_3 + m_7 = \Sigma(1, 2, 3, 7)$$

Expresse as funções D e B por soma de Maxtermos

Tabela Verdade

Inputs			Outputs	
X	Y	Z	D	B
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Expresse as funções D e B por soma de Maxtermos

Tabela Verdade

Inputs			Outputs	
X	Y	Z	D	B
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

$$D = (X+Y+Z)(X+\bar{Y}+\bar{Z})(\bar{X}+Y+\bar{Z})(\bar{X}+\bar{Y}+Z)$$
$$= (M_0 \cdot M_3 \cdot M_5 \cdot M_6) = \Pi(0, 3, 5, 6)$$

$$B = (X+Y+Z)(\bar{X}+Y+Z)(\bar{X}+Y+\bar{Z})(\bar{X}+\bar{Y}+Z)$$
$$= (M_0 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M_6) = \Pi(0, 4, 5, 6)$$

Numeração Maxtermos

- Associa-se o digito “0” para cada variável não complementada e “1” para cada variável complementada. Cada termo é associado um numero.
  - Representa a função como um produto de soma, porem cada soma contem todas as variáveis da função. Cada termo OR é denominado Maxtermo(sendo que todas as variáveis da função devem aparecer.)

Exemplos

- 1) $f(A,B) = AB + A\overline{B}$
- 2) $f(A,B) = AB + A$
- 3) $f(A,B,C) = A(\overline{B} + C)$

Simplificação

- Circuitos que implementam a mesma lógica com um menor numero de portas é desejável por questões econômicas e de confiabilidade.

- Formas de simplificação:
- 1) Álgebra Booleana
  - A expressão é colocada sobre a forma de soma de produtos e verifica a simplificação

- 2) Mapas de Karnaugh

- Exercicios

Simplifique

$$y1 = A\bar{B}D + A\bar{B}\bar{D}$$

$$y2 = (\bar{A} + B)(A + B)$$

$$y3 = ACD + \bar{A}BCD$$

$$y4 = \overline{A + \bar{B}C}$$

$$y5 = \overline{(A + BC).(D + EF)}$$

$$y6 = ABC + A\bar{B}(\overline{\bar{A}\bar{C}})$$

$$y7 = (\bar{A} + B)(A + B + D)\bar{D}$$