



# ME951 - Estatística e Probabilidade I

Parte 15

1S2024

# Intervalo de Confiança

# Eleições



[Vídeo: Pesquisa Eleitoral - JN - 20/08/2018](#)

# Introdução

- Vimos que podemos utilizar uma estatística, como  $\bar{X}$  ( $\hat{p}$ ), para estimar um parâmetro populacional, como a média populacional  $\mu$  (proporção populacional  $p$ ).
- Após coletarmos uma amostra aleatória calculamos  $\bar{x}$ , que é a nossa estimativa para  $\mu$ . Chamamos esta estimativa de **estimativa pontual**.
- Uma estimativa pontual fornece apenas um único valor plausível para o parâmetro. E sabemos que ela pode ser diferente para cada amostra obtida: distribuição amostral.
- O ideal é que se reporte não só a estimativa, mas também a sua imprecisão.
- Duas maneiras: fornecer a estimativa juntamente com o seu **erro padrão** ou fornecer um intervalo de valores plausíveis para o parâmetro de interesse (**intervalo de confiança**).

# Introdução

Suponha que queremos estimar o parâmetro populacional  $\theta$  através de um intervalo.

Um intervalo de confiança (IC) para  $\theta$  é sempre da forma:

estimativa  $\pm$  margem de erro

$\hat{\theta} \pm$  margem de erro

Sendo:

- $\hat{\theta}$  uma estimativa pontual de  $\theta$
- **margem de erro:** quantidade que depende da distribuição amostral do estimador pontual de  $\theta$ , do grau de confiança pré-estabelecido e do erro padrão da estimativa

# Intervalo de Confiança como Estimativa de $p$

# Distribuição Amostral de $\hat{p}$

Temos uma população com proporção  $p$  e variância  $p(1 - p)$  desconhecidos.

Retira-se uma amostra aleatória de tamanho  $n$  e calcula-se a proporção amostral  $\hat{p}$  para estimar o parâmetro populacional desconhecido  $p$ .

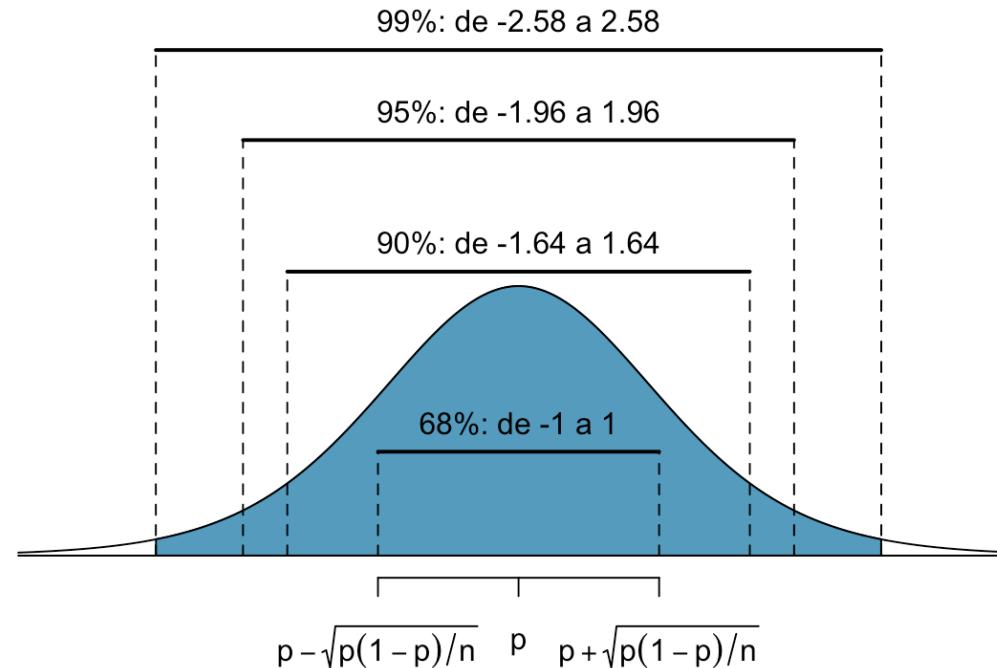
Temos as propriedades:

$$E(\hat{p}) = p \quad Var(\hat{p}) = \frac{p(1 - p)}{n} \quad EP(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p(1 - p)}{n}}$$

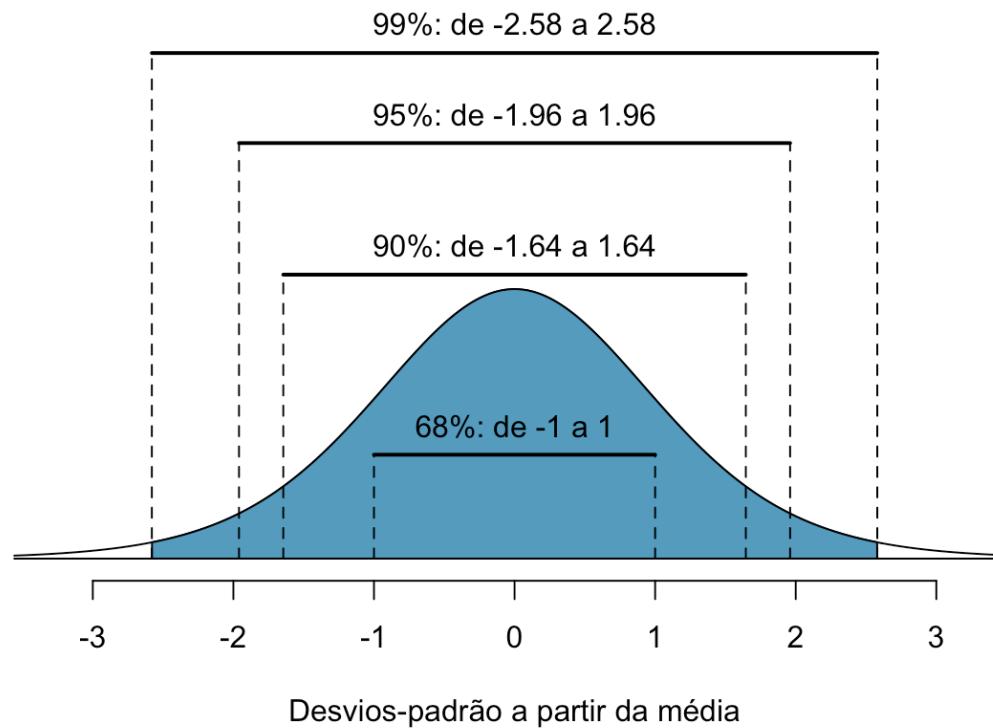
Pelo Teorema do Limite Central: a distribuição amostral de  $\hat{p}$  aproxima-se da seguinte **distribuição Normal** quando  $n$  for suficientemente grande:

$$\hat{p} \sim \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1 - p)}{n}\right)$$

# Distribuição Amostral de $\hat{p}$



$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$



Qual a probabilidade de que o estimador  $\hat{p}$  esteja distante do valor verdadeiro,  $p$ , em no máximo 1 erro-padrão?

Qual a probabilidade de que o estimador  $\hat{p}$  esteja distante do valor verdadeiro,  $p$ , em no máximo 1 erro-padrão?

$$P \left( |\hat{p} - p| \leq \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$$

Qual a probabilidade de que o estimador  $\hat{p}$  esteja distante do valor verdadeiro,  $p$ , em no máximo 1 erro-padrão?

$$P \left( |\hat{p} - p| \leq \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$$

$$\begin{aligned} P \left( |\hat{p} - p| \leq \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) &= P \left( -\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \hat{p} - p \leq \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) \\ &= P \left( -1 \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq 1 \right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.68 \end{aligned}$$

Qual a probabilidade de que o estimador  $\hat{p}$  esteja distante do valor verdadeiro,  $p$ , em no máximo 1.96 erro-padrão?

Qual a probabilidade de que o estimador  $\hat{p}$  esteja distante do valor verdadeiro,  $p$ , em no máximo 1.96 erro-padrão?

$$P \left( |\hat{p} - p| \leq 1.96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$$

Qual a probabilidade de que o estimador  $\hat{p}$  esteja distante do valor verdadeiro,  $p$ , em no máximo 1.96 erro-padrão?

$$P \left( |\hat{p} - p| \leq 1.96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$$

$$\begin{aligned} P \left( |\hat{p} - p| \leq 1.96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) &= P \left( -1.96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \hat{p} - p \leq 1.96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) \\ &= P \left( -1.96 \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq 1.96 \right) \\ &= P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) \\ &= 0.95 \end{aligned}$$

Intervalo de confiança de 95%

$$IC(p, 95\%) = \left[ \hat{p} - 1.96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; \hat{p} + 1.96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Intervalo de confiança de 90%

$$IC(p, 90\%) = \left[ \hat{p} - 1.64 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; \hat{p} + 1.64 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Intervalo de confiança de 99%

$$IC(p, 99\%) = \left[ \hat{p} - 2.58 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; \hat{p} + 2.58 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Intervalo de confiança de 95%

$$IC(p, 95\%) = \left[ \hat{p} - 1.96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; \hat{p} + 1.96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Intervalo de confiança de 90%

$$IC(p, 90\%) = \left[ \hat{p} - 1.64 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; \hat{p} + 1.64 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Intervalo de confiança de 99%

$$IC(p, 99\%) = \left[ \hat{p} - 2.58 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; \hat{p} + 2.58 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Qual o problema?

Sabemos  $p(1 - p)$ ?

Intervalo de confiança de 95%

$$IC(p, 95\%) = \left[ \hat{p} - 1.96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; \hat{p} + 1.96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Intervalo de confiança de 90%

$$IC(p, 90\%) = \left[ \hat{p} - 1.64 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; \hat{p} + 1.64 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

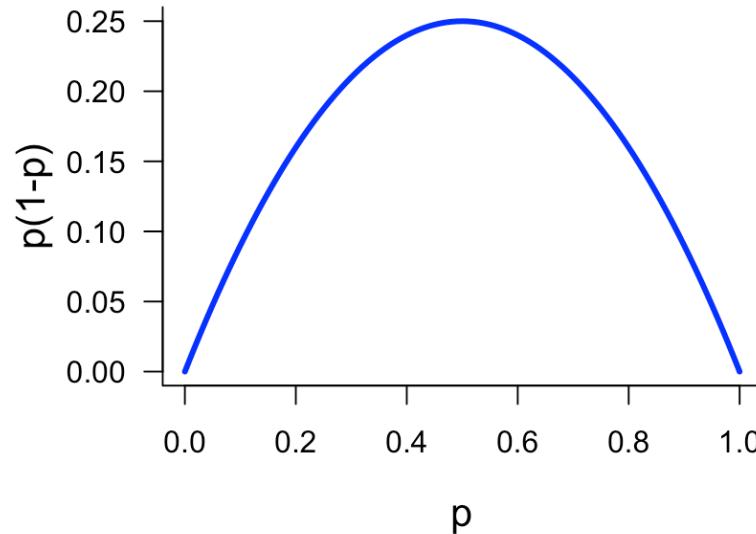
Intervalo de confiança de 99%

$$IC(p, 99\%) = \left[ \hat{p} - 2.58 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; \hat{p} + 2.58 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Qual o problema?

Sabemos  $p(1 - p)$ ?

Não sabemos  $p(1 - p)$ , porém:



A função  $p(1 - p)$  atinge o valor máximo quando  $p = 1/2$ , ou seja,  
 $p(1 - p) \leq \frac{1}{4}$ .

# Intervalo de confiança para $p$

Vimos que  $p(1 - p) \leq \frac{1}{4}$ , então erro padrão é maximizado por:

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \sqrt{\frac{1}{4n}} \iff -\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \geq -\sqrt{\frac{1}{4n}}$$

Portanto,  $IC(p, 95\%) = \left[ \hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{1}{4n}}; \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{1}{4n}} \right]$ .

Caso geral (conservador): Um IC de  $100(1 - \alpha)\%$  para  $p$  é dado por

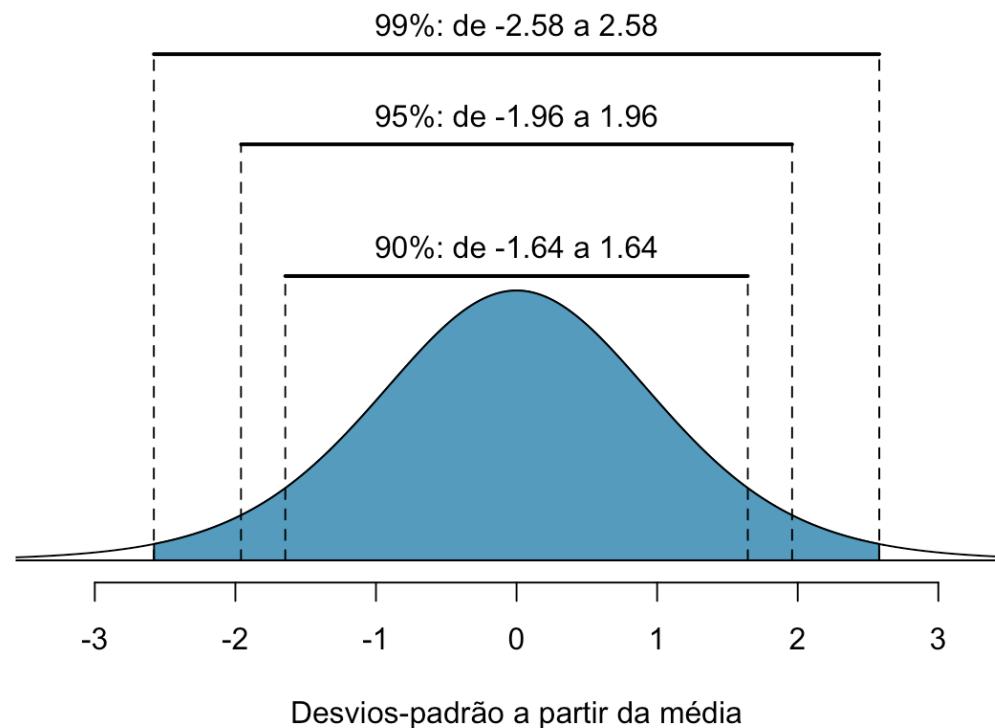
$$IC(p, 1 - \alpha) = \left[ \hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{4n}}; \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{4n}} \right]$$

em que  $z_{\alpha/2}$  é tal que:

$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

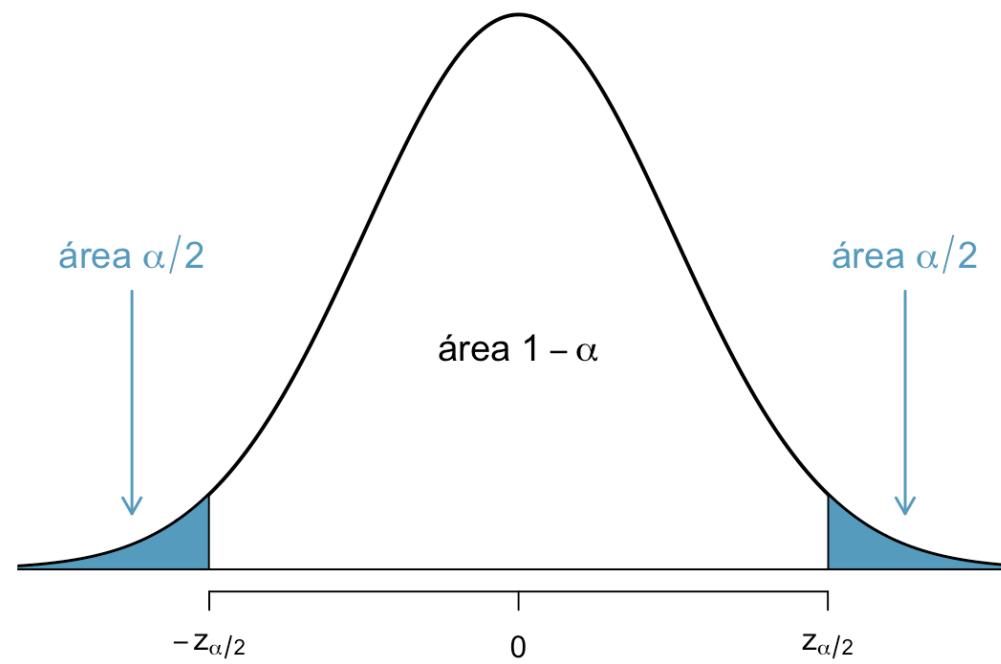
# Como encontrar $z_{\alpha/2}$

$$P(|Z| \leq z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$



# Como encontrar $z_{\alpha/2}$

$$P(|Z| \leq z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$



# Como encontrar $z_{\alpha/2}$

Seja  $Z \sim N(0, 1)$ . O percentil  $z_{\alpha/2}$  é tal que  $1 - \alpha = P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2})$

Como determinar  $z_{\alpha/2}$ ?

$$\begin{aligned}1 - \alpha &= P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = P(Z \leq z_{\alpha/2}) - P(Z \leq -z_{\alpha/2}) \\&= P(Z \leq z_{\alpha/2}) - P(Z \geq z_{\alpha/2}) \\&= P(Z \leq z_{\alpha/2}) - [1 - P(Z \leq z_{\alpha/2})] \\&= 2P(Z \leq z_{\alpha/2}) - 1 \\&= 2\Phi(z_{\alpha/2}) - 1\end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } 1 - \frac{\alpha}{2} = \Phi(z_{\alpha/2}) \quad \Rightarrow \quad \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = z_{\alpha/2}$$

Procure na tabela o valor de  $z$  tal que a probabilidade acumulada até o valor de  $z$ , isto é  $P(Z \leq z) = \Phi(z)$ , seja  $1 - \alpha/2$ .

# Exemplo

Encontrar  $z_{0.05}$  tal que  $0.90 = P(-z_{0.05} \leq Z \leq z_{0.05})$ .

Tabela I: Distribuição Normal Padrão Acumulada



Fornece  $\Phi(z) = P(-\infty < Z \leq z)$ , para todo  $z$ , de 0,01 em 0,01, desde  $z = 0,00$  até  $z = 3,59$   
A distribuição de  $Z$  é Normal(0;1)

<b>z</b>	<b>0,00</b>	<b>0,01</b>	<b>0,02</b>	<b>0,03</b>	<b>0,04</b>	<b>0,05</b>	<b>0,06</b>	<b>0,07</b>	<b>0,08</b>	<b>0,09</b>
<b>0,0</b>	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
<b>0,1</b>	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
<b>0,2</b>	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
<b>0,3</b>	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
<b>0,4</b>	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
<b>0,5</b>	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
<b>0,6</b>	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
<b>0,7</b>	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
<b>0,8</b>	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
<b>0,9</b>	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
<b>1,0</b>	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
<b>1,1</b>	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
<b>1,2</b>	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
<b>1,3</b>	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
<b>1,4</b>	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
<b>1,5</b>	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
<b>1,6</b>	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
<b>1,7</b>	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
<b>1,8</b>	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
<b>1,9</b>	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
<b>2,0</b>	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

Pela tabela,  $z_{0.05} = 1.64$ .

# Exemplo

Numa pesquisa de mercado,  $n = 400$  pessoas foram entrevistadas (usando amostra aleatória) sobre preferência do produto da marca A, e 60% destas pessoas preferiam a marca A.

Encontre um  $IC$  de 95% para a proporção de pessoas que preferem a marca A.

# Exemplo

Numa pesquisa de mercado,  $n = 400$  pessoas foram entrevistadas (usando amostra aleatória) sobre preferência do produto da marca A, e 60% destas pessoas preferiam a marca A.

Encontre um  $IC$  de 95% para a proporção de pessoas que preferem a marca A.

Pelo resultado da pesquisa,  $\hat{p} = 0.6$ .

Logo, o  $IC$  com grau de confiança  $1 - \alpha = 0.95$  é dado por:

$$\begin{aligned} IC(p, 0.95) &= \left[ 0.6 - 1.96 \frac{1}{\sqrt{1600}}; 0.6 + 1.96 \frac{1}{\sqrt{1600}} \right] \\ &= [0.6 - 0.049; 0.6 + 0.049] \\ &= [0.551; 0.649] \end{aligned}$$

# Exemplo

Suponha que em  $n = 400$  entrevistados, tivéssemos obtido  $k = 80$  respostas de pessoas que preferem a marca A.

Vamos obter um intervalo de confiança para  $p$ , com grau de confiança de 90%:

- $\hat{p} = \frac{80}{400} = 0.2$
- $1 - \alpha = 0.90$ . Então  $\alpha/2 = 0.05 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.64$

$$\begin{aligned} IC_1(p, 0.90) &= \left[ 0.2 - 1.64 \frac{1}{\sqrt{1600}}; 0.2 + 1.64 \frac{1}{\sqrt{1600}} \right] \\ &= [0.2 - 0.041; 0.2 + 0.041] \\ &= [0.159; 0.241] \end{aligned}$$

# Exemplo

E se usarmos a estimativa  $\hat{p}$  para também estimar o erro padrão  $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ ?

Podemos construir o seguinte  $IC$  de  $100(1 - \alpha)\%$

$$IC(p, 1 - \alpha) = \left[ \hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \right]$$

Para os dados do exemplo anterior,

$$\begin{aligned} IC_2(p, 0.90) &= \left[ 0.2 - 1.64 \sqrt{\frac{(0.2)(0.8)}{400}}; 0.2 + 1.64 \sqrt{\frac{(0.2)(0.8)}{400}} \right] \\ &= [0.2 - 0.033; 0.2 + 0.033] \\ &= [0.167; 0.233] \end{aligned}$$

# Exemplo

O intervalo que utiliza  $\hat{p}$  também para estimar o erro padrão tem menor margem de erro e, portanto, menor amplitude do que o intervalo que utiliza o fato de  $p(1 - p) \leq \frac{1}{4}$ . Por isso esse último é chamado de **conservador**.

Veja as amplitudes dos  $IC$ 's que encontramos no exemplo anterior:

- $IC_1(p, 0.90) = [0.159; 0.241] \Rightarrow A_1 = 0.241 - 0.159 = 0.082$
- $IC_2(p, 0.90) = [0.167; 0.233] \Rightarrow A_2 = 0.233 - 0.167 = 0.066$

A amplitude é o dobro da margem de erro.

# Intervalo de Confiança para $p$

Em resumo, os intervalos de  $100(1 - \alpha)\%$  de confiança para  $p$  podem então ser de duas formas:

1. Método Conservador

$$IC_1(p, 1 - \alpha) = \left[ \hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{4n}}; \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{4n}} \right]$$

2. Usando  $\hat{p}$  para estimar o erro padrão

$$IC_2(p, 1 - \alpha) = \left[ \hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \right]$$

Veja que nos dois casos, os  $IC$ 's são da forma  $\hat{p} \pm$  margem de erro

# Exemplo: Universitários Não Fumantes

De uma amostra aleatória de 100 alunos de uma universidade, 82 afirmaram ser não fumantes.

Construa um intervalo de confiança de 99% para a proporção de não fumantes entre todos os alunos da universidade.

# Exemplo: Universitários Não Fumantes

De uma amostra aleatória de 100 alunos de uma universidade, 82 afirmaram ser não fumantes.

Construa um intervalo de confiança de 99% para a proporção de não fumantes entre todos os alunos da universidade.

$$\hat{p} = 0.82, n = 100, \alpha = 0.01, \text{ e } z_{0.005} = 2.58$$

$$\begin{aligned} IC_1(p, 0.99) &= \left[ \hat{p} - z_{0.005} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_{0.005} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \right] \\ &= \left[ 0.82 - 2.58 \sqrt{\frac{(0.82)(0.18)}{100}}; 0.82 + 2.58 \sqrt{\frac{(0.82)(0.18)}{100}} \right] \\ &= [0.82 - 0.10; 0.82 + 0.10] \\ &= [0.72; 0.92] \end{aligned}$$

# Exemplo: Universitários Não Fumantes

Podemos também calcular o  $IC$  de 99% pelo método conservador:

$$\begin{aligned} IC_2(p, 0.99) &= \left[ \hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{4n}}; \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{4n}} \right] \\ &= \left[ 0.82 - 2.58 \sqrt{\frac{1}{400}}; 0.82 + 2.58 \sqrt{\frac{1}{400}} \right] \\ &= [0.82 - 0.13; 0.82 + 0.13] \\ &= [0.69; 0.95] \end{aligned}$$

**Interpretação:** Com um grau de confiança de 99%, estimamos que a proporção de não fumantes entre os alunos está entre 72% e 92% (resultado do slide anterior).

E pelo método conservador, com um grau de confiança de 99%, estimamos que a proporção de não fumantes entre os alunos está entre 69% e 95%.

# Exemplo: A esposa deve sacrificar a carreira?

Pesquisa do [GSS](#). Você concorda ou não com a seguinte frase: “é mais importante para um esposa ajudar a carreira do marido do que ter uma carreira própria.”

A última vez que esta pergunta foi incluída no [GSS](#) foi em 1998 onde 1823 pessoas responderam e 19% concordaram.

- Calcule e interprete o  $IC$  de 95% para a proporção na população que concorda com a frase.
- Encontre e interprete a margem de erro do  $IC$  de 95%.

# Exemplo: A esposa deve sacrificar a carreira?

Calcule e interprete o  $IC$  de 95% para a proporção na população que concorda com a frase.

$$\hat{p} = 0.19, n = 1823, \alpha = 0.05, \text{ e } z_{0.025} = 1.96$$

Então,

$$\begin{aligned} IC(p, 0.95) &= \left[ \hat{p} - 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}; \hat{p} + 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \right] \\ &= \left[ 0.19 - 1.96 \sqrt{\frac{0.19(1 - 0.19)}{1823}}; 0.19 + 1.96 \sqrt{\frac{0.19(1 - 0.19)}{1823}} \right] \\ &= [0.19 - 0.02; 0.19 + 0.02] \\ &= [0.17; 0.21] \end{aligned}$$

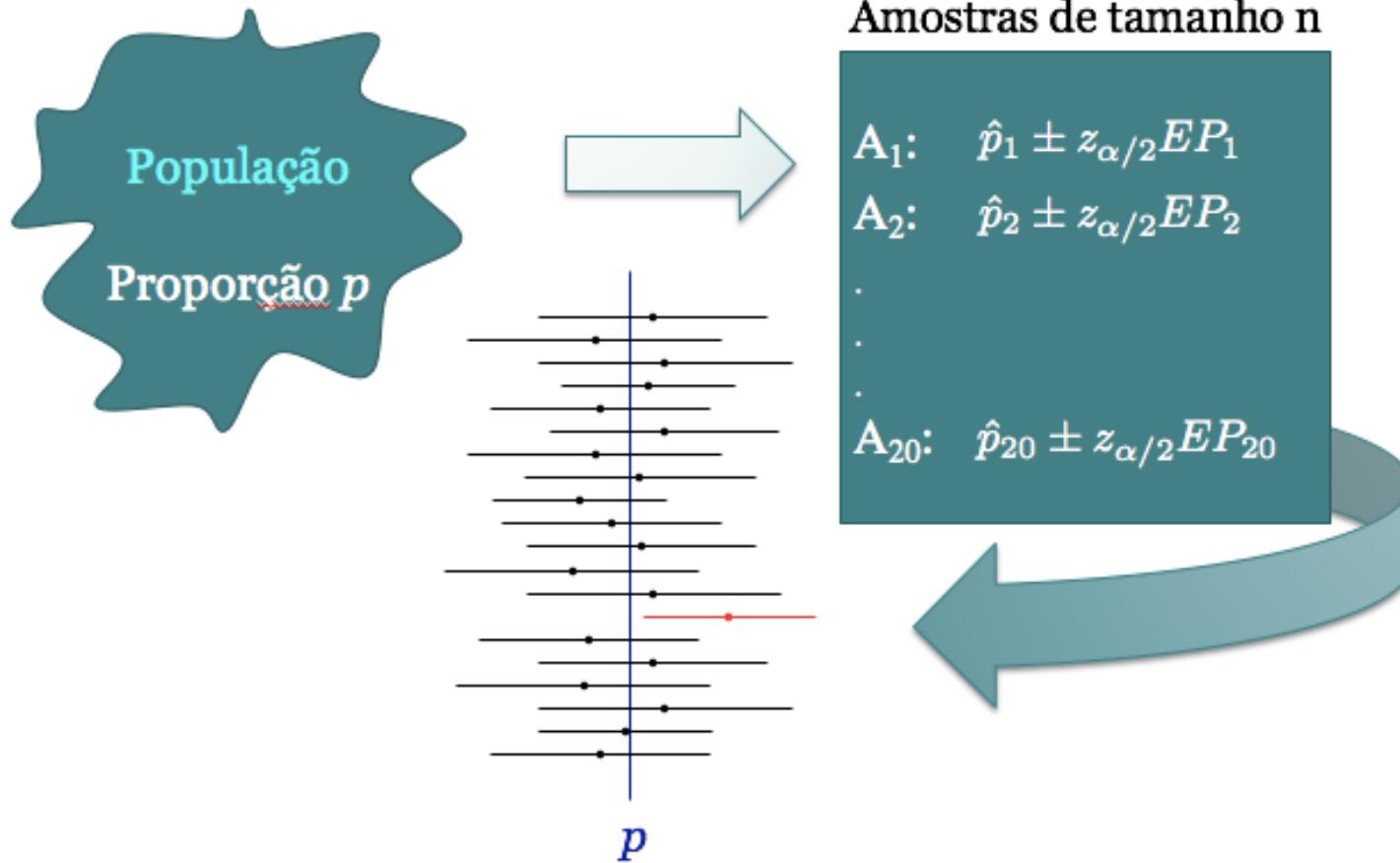
# Interpretação do Intervalo de Confiança

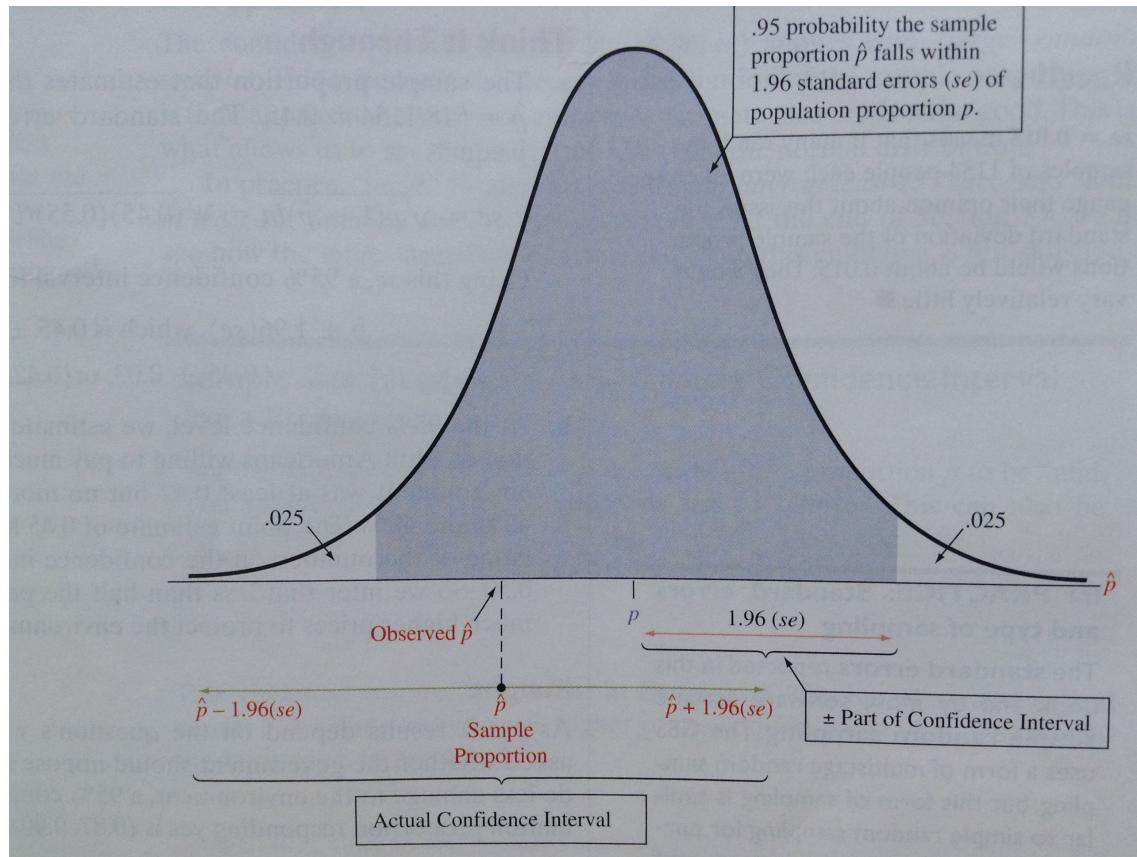
**Interpretação:** Se várias amostras aleatórias forem retiradas da população e calcularmos um  $IC$  de 95% para cada amostra, cerca de 95% desses intervalos irão conter a verdadeira proporção na população,  $p$ .

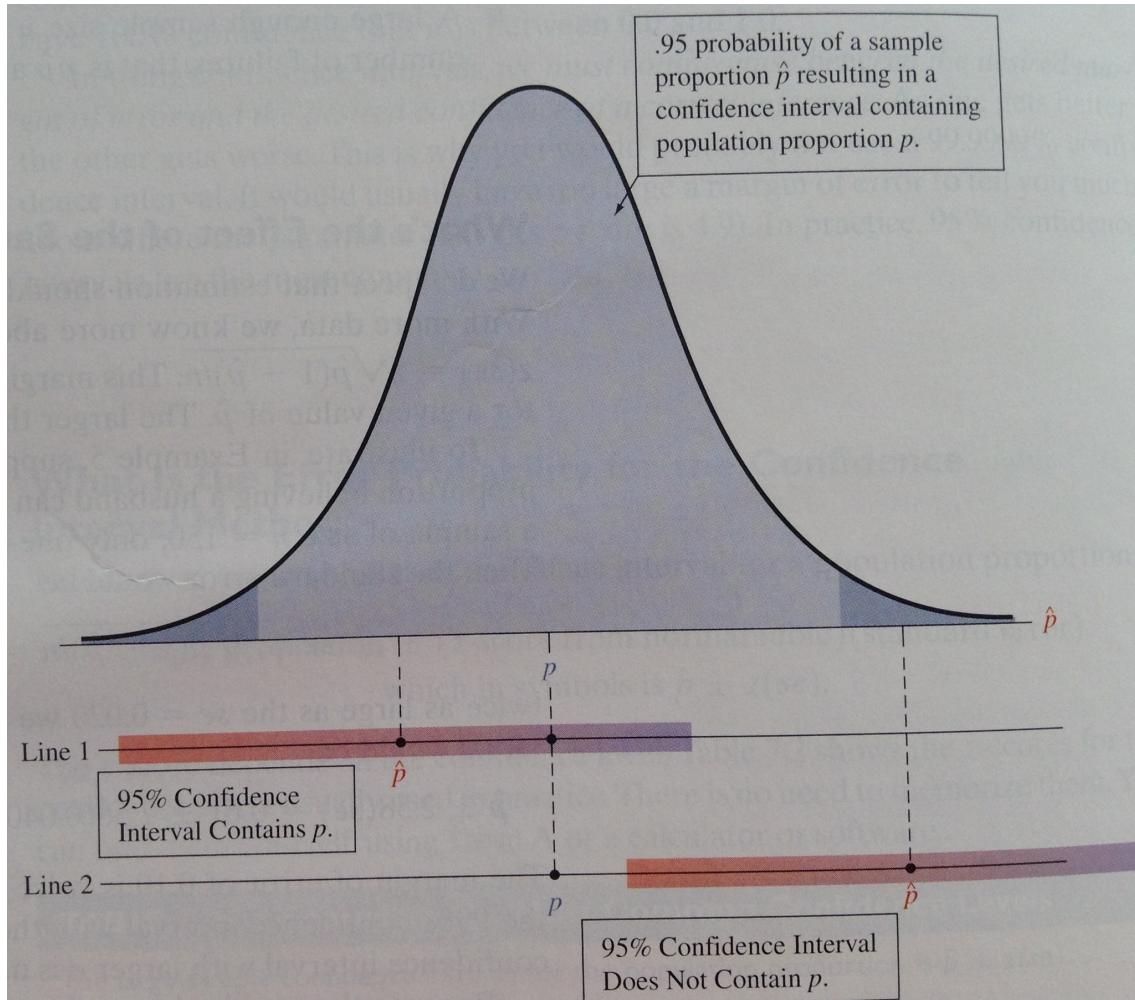
**INCORRETO:** Dizer que “a probabilidade de que  $p$  esteja dentro do intervalo é 95%”

Por que incorreto?  $p$  é uma constante, não é variável aleatória. Ou  $p$  está no intervalo calculado ou não está.

# Interpretação do Intervalo de Confiança







# Exemplo (continuação)

Um  $IC$  de 95% para  $p$  é:  $[0.17; 0.21]$

A margem de erro (metade do comprimento do IC) é:

$$ME = 1.96 \sqrt{\frac{0.19(1 - 0.19)}{1823}} = 0.02$$

$$P(|\hat{p} - p| < 0.02) = 0.95$$

**Interpretação:** Com probabilidade 0.95, o erro ao usar a proporção amostral para estimar a proporção populacional não excede 0.02.

Curiosidade: em 1977 a pergunta foi feita pela primeira vez no [GSS](#).  $\hat{p} = 0.57$  e  $IC$  de 95% foi  $[0.55; 0.59]$ .

# Exemplo: Proteção ao Meio Ambiente

Na teoria, muita gente se considera “*eco-friendly*”. Mas e na prática?

**Pergunta:** Você pagaria mais para um produto em favor ao meio ambiente?

Em 2000, [GSS](#) perguntou: “Você estaria disposto a pagar mais pela gasolina para proteger o ambiente?”

Entre  $n = 1154$  participantes, 518 responderam que sim.

- Encontre IC 95% para a proporção da população que concorda.
- Interprete.

# Exemplo (continuação)

Estimativa:  $\hat{p} = 518/1154 = 0.45$

erro padrão (desvio padrão da estimativa):  $EP(\hat{p}) = \sqrt{\frac{(0.45)(1-0.45)}{1154}} = 0.015$

Margem de erro:  $1.96EP(\hat{p}) = 0.03$

$$\begin{aligned} IC(p, 0.95) &= \left[ 0.45 - 1.96\sqrt{\frac{(0.45)(0.55)}{1154}}; 0.45 + 1.96\sqrt{\frac{(0.45)(0.55)}{1154}} \right] \\ &= [0.45 - 0.03; 0.45 + 0.03] \\ &= [0.42; 0.48] \end{aligned}$$

**Interpretação:** Com grau de confiança de 95%, estimamos que a proporção populacional que concorda em pagar mais está entre 0.42 e 0.48. A estimativa pontual, 0.45, tem margem de erro de 3%.

# Exemplo (continuação)

E se estivéssemos interessados na proporção que não pagaria mais?

Estimativa:  $\hat{p} = 1 - 518/1154 = 0.55$

erro padrão (desvio padrão da estimativa):  $EP(\hat{p}) = \sqrt{\frac{(0.55)(1-0.55)}{1154}} = 0.015$

Margem de erro:  $1.96EP(\hat{p}) = 0.03$

$$\begin{aligned} IC(p, 0.95) &= \left[ 0.55 - 1.96\sqrt{\frac{(0.55)(0.45)}{1154}}; 0.55 + 1.96\sqrt{\frac{(0.55)(0.45)}{1154}} \right] \\ &= [0.55 - 0.03; 0.55 + 0.03] \\ &= [0.52; 0.58] \end{aligned}$$

**Interpretação:** Com grau de confiança de 95%, estimamos que a proporção populacional que não pagaria mais está entre 0.52 e 0.58. A estimativa pontual, 0.55, tem margem de erro de 3%.

# Exemplo: Esposa vs Marido

Pergunta: Se a esposa quer ter um filho, mas o marido não, é justo que ele se recuse a ter um filho?

GSS: 598 responderam, 366 acham justo. Encontre um *IC* de 99%.

Estimativa:  $\hat{p} = 366/598 = 0.61$

erro padrão (desvio padrão da estimativa):  $EP(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.02$

Margem de erro:  $2.58EP(\hat{p}) = 0.05$

$$IC(p, 0.99) = [0.61 - 0.05 ; 0.61 + 0.05] = [0.56 ; 0.66]$$

Com grau de confiança igual a 99%, estimamos que a proporção populacional que concorda está entre 0.56 e 0.66. A estimativa pontual, 0.61, tem margem de erro de 5%.

# Exemplo (continuação)

E o  $IC$  de 95%?

Margem de erro:  $1.96EP(\hat{p}) = 1.96 \times 0.02 = 0.04$

$$\begin{aligned} IC(p, 0.95) &= [0.61 - 0.04 ; 0.61 + 0.04] \\ &= [0.57 ; 0.65] \end{aligned}$$

Com grau de confiança igual a 95%, estimamos que a proporção populacional que concorda está entre 0.57 e 0.65. A estimativa pontual, 0.61, tem margem de erro de 4%.

Com maior grau de confiança, temos uma margem de erro um pouco maior.

# Tamanho da amostra para estimar $p$

# Exemplo: Datafolha

A Datafolha quer fazer uma pesquisa de boca-de-urna para predizer o resultado de uma eleição com apenas dois candidatos.

Seleciona então uma a.a. de eleitores e pergunta em quem cada um votou. Para esta pesquisa, o Datafolha quer uma margem de erro de 4%. Qual o tamanho de amostra necessário?

- O grau de confiança é 95% e  $IC(p, 0.95) = \hat{p} \pm 1.96 \times EP(\hat{p})$
- Erro padrão de  $\hat{p}$  é  $EP(\hat{p}) = \sqrt{p(1 - p)/n}$
- Margem de erro:  $1.96 \times EP(\hat{p}) = 1.96\sqrt{p(1 - p)/n}$
- Margem de erro desejada é 0.04. Então, o tamanho amostral necessário  $n$  é:

$$1.96\sqrt{\frac{p(1 - p)}{n}} = 0.04 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{1.96^2 p(1 - p)}{0.04^2}$$

# Exemplo: Datafolha

Problema é que não conhecemos  $p$ .

Assim como para encontrar os  $IC$ 's, podemos usar o método conservador ou então usar informações obtidas em pesquisas anteriores (caso existam).

**Método Conservador:**

- Lembre que  $p(1 - p)/n$  é a variância da estimativa  $\hat{p}$  e já vimos anteriormente que  $p(1 - p) \leq 1/4$ .
- Então,

$$n = \frac{1.96^2 \times (1/4)}{0.04^2} = 600$$

# Exemplo: Datafolha

## Outra alternativa

- O Datafolha fez uma pesquisa na semana passada e o resultado foi 58% votariam no candidato *A* e 42% no *B*.
- Podemos usar então estas estimativas:

$$n = \frac{1.96^2 \hat{p}(1 - \hat{p})}{0.04^2} = \frac{1.96^2(0.58)(0.42)}{0.04^2} = 585$$

- Uma a.a. de tamanho 585 deverá resultar numa margem de erro de 4% para um IC de 95% para a proporção da população que vota no candidato *A*.

# Exemplo: Campeonato Brasileiro

Uma firma de propaganda está interessada em estimar a proporção de domicílios que estão assistindo a final do campeonato brasileiro de futebol.

Para isso, está planejando ligar para os domicílios selecionados aleatoriamente a partir de uma lista.

Qual o tamanho da amostra necessário se a firma quer 90% de confiança de que a estimativa obtida tenha uma margem de erro igual a 0.02?

# Exemplo: Campeonato Brasileiro

Método conservador:  $IC(p, 1 - \alpha) = \left[ \hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{4n}} ; \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{4n}} \right]$

Margem de erro 0.02:  $z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{4n}} = 0.02$

Como eles querem 90% de confiança,  $\alpha = 0.10$  e  $z_{0.05} = 1.645$

$$1.645 \sqrt{1/4n} = 0.02 \iff 1/4n = (0.02/1.645)^2 \Rightarrow n = 1691.3$$

Tamanho amostral: 1692.

Em geral, para uma margem de erro  $m$ :

$$n = \left( \frac{z_{\alpha/2}}{2m} \right)^2$$

# Exemplo: Mulheres em uma Escola

Suponha que  $p = 30\%$  dos estudantes de uma escola sejam mulheres.

Coletamos uma amostra aleatória simples de  $n = 10$  estudantes e calculamos a proporção de mulheres na amostra, ou seja,  $\hat{p}$ .

Qual a probabilidade de que  $\hat{p}$  difira de  $p$  em menos de 0.01? E se  $n = 50$ ?

*Adaptado de: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5<sup>a</sup> edição, pág 276.*

# Exemplo: Mulheres em uma Escola

Suponha que  $p = 30\%$  dos estudantes de uma escola sejam mulheres.

Coletamos uma amostra aleatória simples de  $n = 10$  estudantes e calculamos a proporção de mulheres na amostra, ou seja,  $\hat{p}$ .

Qual a probabilidade de que  $\hat{p}$  difira de  $p$  em menos de 0.01? E se  $n = 50$ ?

*Adaptado de: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5<sup>a</sup> edição, pág 276.*

**Solução:** Temos que a probabilidade que desejamos encontrar é dada por

$$P(|\hat{p} - p| < 0.01) = P(-0.01 < \hat{p} - p < 0.01)$$

onde  $p$  é o valor verdadeiro da proporção de mulheres, e  $\hat{p}$  a proporção observada na amostra.

# Exemplo: Mulheres em uma Escola

Seja  $X_i$  a v.a. indicando se a pessoa  $i$  é mulher, ou seja,  $X_i \sim \text{Bernoulli}(0.3)$ .

Então sabemos que  $\mathbb{E}(X_i) = p = 0.3$  e  $Var(X_i) = p(1 - p) = 0.21$ .

Coletamos uma amostra de tamanho  $n$ :  $X_1, \dots, X_n$ . Calculamos a proporção de mulheres na amostra:

$$\bar{X}_n = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

Sabemos que  $\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mathbb{E}(X_i) = p = 0.3$  e  $Var(\bar{X}_n) = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{0.21}{10} = 0.021$ .

Pelo TCL, quando  $n$  é grande,

$$\bar{X}_n = \hat{p} \sim N(p, p(1 - p)/n) = N(0.3, 0.021)$$

# Exemplo: Mulheres em uma Escola

A probabilidade que queremos calcular é:

$$\begin{aligned} P(|\hat{p} - p| < 0.01) &= P(-0.01 < \hat{p} - p < 0.01) \\ P\left(-\frac{0.01}{\sqrt{Var(\hat{p})}} < \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{Var(\hat{p})}} < \frac{0.01}{\sqrt{Var(\hat{p})}}\right) \\ P\left(\frac{-0.01}{\sqrt{0.021}} < Z < \frac{0.01}{\sqrt{0.021}}\right) &= P(-0.07 < Z < 0.07) = 0.056. \end{aligned}$$

Mas  $n = 10$  é grande o suficiente?

Podemos comparar essa probabilidade com o resultado exato!

# Exemplo: Mulheres em uma Escola

Não sabemos a distribuição de  $\hat{p}$ , mas sabemos que  $X_i$  são v.a. independentes e identicamente distribuidas Bernoulli(0.3).

Portanto,  $\sum_{i=1}^n X_i \sim Bin(10, 0.3)$  e  $\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

Então,

$$\begin{aligned} P(|\hat{p} - p| < 0.01) &= P(-0.01 < \hat{p} - p < 0.01) \\ &= P(-0.01n < n\hat{p} - np < 0.01n) \\ &= P\left(-0.1 < \sum_{i=1}^n X_i - 3 < 0.1\right) \\ &= P\left(2.9 < \sum_{i=1}^n X_i < 3.1\right) \end{aligned}$$

# Exemplo: Mulheres em uma Escola

Como  $\sum X_i$  assume somente valores inteiros, temos que

$$\begin{aligned} P(|\hat{p} - p| < 0.01) &= P\left(2.9 < \sum_{i=1}^n X_i < 3.1\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i = 3\right) \\ &= \binom{10}{3}(0.3)^3(0.7)^7 = 0.267. \end{aligned}$$

Temos uma probabilidade que é 5 vezes maior que a aproximação.

# Exemplo: Mulheres em uma Escola

Considere agora  $n = 50$ . Nesse caso, a variância é  $\frac{p(1-p)}{n} = 0.0042$  e, portanto, a probabilidade aproximada é:

$$\begin{aligned} P(|\hat{p} - p| < 0.01) &\approx P\left(|Z| < \frac{0.01}{\sqrt{0.0042}}\right) = P(-0.154 < Z < 0.154) \\ &= 0.12239 \end{aligned}$$

A probabilidade exata agora é dada por:

$$\begin{aligned} P(|\hat{p} - p| < 0.01) &= P\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i - 50(0.3)\right| < 0.5\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i = 15\right) = \binom{50}{15}(0.3)^{15}(0.7)^{35} = 0.12235. \end{aligned}$$

A diferença agora é muito menor e, à medida que  $n \rightarrow \infty$  ela tende a 0, pelo TCL. A aproximação só é válida para grandes tamanhos de amostra.

# Exercício: Intervalo de Confiança para proporções

Suponha que estejamos interessados em estimar a porcentagem de consumidores de um certo produto. Se a amostra de tamanho 300 forneceu 100 indivíduos que consomem o dado produto, determine:

1. O intervalo de 95% de confiança para  $p$ . Interprete o resultado.
2. O tamanho da amostra para que o erro da estimativa não exceda 0.02 unidades com probabilidade de 95%. Interprete o resultado.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5<sup>a</sup> edição, pág 309.

# Intervalo de Confiança para proporções

1. O intervalo de confiança de 95% é dado por:

$$\text{IC}(p; 0.95) = 0.333 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.333 \times 0.667}{300}} = 0.333 \pm 0.053$$

Ou simplesmente (0.280; 0.387).

**Interpretação:** Se pudéssemos construir um grande número de intervalos aleatórios para  $p$ , todos baseados em amostras de tamanho n, 95% deles conteriam o parâmetro  $p$ .

# Intervalo de Confiança para proporções

- 1.
2. Utilizando a estimativa da amostra observada ( $\hat{p} = 0.333$ ), temos que  $n$  é dado por

$$n = \left( \frac{1.96}{0.02} \right)^2 \times 0.333 \times 0.667 \cong 2134.$$

Contudo, frequentemente devemos determinar o tamanho da amostra antes de realizar qualquer experimento, isto é, sem nenhuma informação prévia de  $p$ . Se esse for o caso, devemos considerar o caso em que a variância da amostra é a pior possível.

# Intervalo de Confiança para proporções

- 1.
2. Utilizando o valor máximo de  $p(1 - p)$ , isto é,  $1/4$ , obtemos

$$n = \left( \frac{1.96}{0.02} \right)^2 \times \frac{1}{4} \cong 2401$$

**Interpretação:** Utilizando o tamanho amostral encontrado, teremos uma probabilidade de 95% de que a proporção amostral não difira do verdadeiro valor de  $p$  em menos que 2%.

Note que a prática de obter amostras pequenas para examinar  $p$ , e aí determinar o tamanho amostral sem utilizar o “pior caso”, é no que consiste a idéia de **amostras piloto**.

# Leituras

- [Ross](#): capítulo 8.
- [OpenIntro](#): seção 4.2.
- Magalhães: seção 7.4.

Slides produzidos pelos professores:

- Samara Kiihl
- Tatiana Benaglia
- Larissa Matos
- Benilton Carvalho

