

# ME951 - Estatística e Probabilidade I

## Aula 10

Notas de aula de ME414 produzidas pelos professores **Samara Kiihl**, **Tatiana Benaglia** e **Benilton Carvalho** modificadas e alteradas pela Profa. **Larissa Avila Matos**

## Esperança e Variância - variável aleatória discreta

## Variância: variável aleatória discreta

Vimos que a esperança nos dá a média ponderada de todos os resultados possíveis de uma v.a..

## Variância: variável aleatória discreta

Vimos que a esperança nos dá a média ponderada de todos os resultados possíveis de uma v.a..

No entanto, a esperança não descreve a dispersão dos dados.

## Variância: variável aleatória discreta

Vimos que a esperança nos dá a média ponderada de todos os resultados possíveis de uma v.a..

No entanto, a esperança não descreve a dispersão dos dados.

Considere as seguintes v.a.'s:

## Variância: variável aleatória discreta

Vimos que a esperança nos dá a média ponderada de todos os resultados possíveis de uma v.a..

No entanto, a esperança não descreve a dispersão dos dados.

Considere as seguintes v.a.'s:

$$U = 0, \text{ com probabilidade } 1$$

$$V = \begin{cases} -1, & \text{com prob. } 1/2 \\ 1, & \text{com prob. } 1/2 \end{cases} \quad \text{e} \quad W = \begin{cases} -10, & \text{com prob. } 1/2 \\ 10, & \text{com prob. } 1/2 \end{cases}$$

## Variância: variável aleatória discreta

Vimos que a esperança nos dá a média ponderada de todos os resultados possíveis de uma v.a..

No entanto, a esperança não descreve a dispersão dos dados.

Considere as seguintes v.a.'s:

$$U = 0, \text{ com probabilidade } 1$$

$$V = \begin{cases} -1, & \text{com prob. } 1/2 \\ 1, & \text{com prob. } 1/2 \end{cases} \quad \text{e} \quad W = \begin{cases} -10, & \text{com prob. } 1/2 \\ 10, & \text{com prob. } 1/2 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(W) = 0$$

## Variância: variável aleatória discreta

Vimos que a esperança nos dá a média ponderada de todos os resultados possíveis de uma v.a..

No entanto, a esperança não descreve a dispersão dos dados.

Considere as seguintes v.a.'s:

$$U = 0, \text{ com probabilidade } 1$$

$$V = \begin{cases} -1, & \text{com prob. } 1/2 \\ 1, & \text{com prob. } 1/2 \end{cases} \quad \text{e} \quad W = \begin{cases} -10, & \text{com prob. } 1/2 \\ 10, & \text{com prob. } 1/2 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(W) = 0$$

No entanto, claramente a dispersão é bem diferente para as três variáveis.



## Variância: variável aleatória discreta

Queremos uma medida para quantificar quão distantes os valores da v.a.  $X$  estão da sua esperança.

## Variância: variável aleatória discreta

Queremos uma medida para quantificar quão distantes os valores da v.a.  $X$  estão da sua esperança.

**Definição:** Se  $X$  é uma v.a. com esperança  $\mathbb{E}(X) = \mu$ , então a variância de  $X$  é:

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2]$$

**Notação:**  $\sigma^2 = Var(X)$

## Variância: variável aleatória discreta

Queremos uma medida para quantificar quão distantes os valores da v.a.  $X$  estão da sua esperança.

**Definição:** Se  $X$  é uma v.a. com esperança  $\mathbb{E}(X) = \mu$ , então a variância de  $X$  é:

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2]$$

**Notação:**  $\sigma^2 = Var(X)$

Se  $X$  é uma v.a. discreta assumindo valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  com respectivas probabilidades  $P(X = x_i) = p_i$ , então:

$$Var(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i$$

# Propriedade Geral da Variância

**Definição:**  $Var(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2)$

# Propriedade Geral da Variância

**Definição:**  $Var(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2)$

Uma forma alternativa de calcular a variância é usando a fórmula:

# Propriedade Geral da Variância

**Definição:**  $Var(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2)$

Uma forma alternativa de calcular a variância é usando a fórmula:

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

# Propriedade Geral da Variância

**Definição:**  $Var(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2)$

Uma forma alternativa de calcular a variância é usando a fórmula:

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

**Demonstração:**

# Propriedade Geral da Variância

**Definição:**  $Var(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2)$

Uma forma alternativa de calcular a variância é usando a fórmula:

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned}\mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) &= \mathbb{E}([X - \mu]^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2 - 2X\mu + \mu^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mu\mathbb{E}(X) + \mu^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2 = \mathbb{E}(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mu^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2\end{aligned}$$



## Exemplo

Encontre  $Var(X)$ , onde  $X$  é uma v.a. tal que:

## Exemplo

Encontre  $Var(X)$ , onde  $X$  é uma v.a. tal que:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p \\ 0, & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases}$$

## Exemplo

Encontre  $Var(X)$ , onde  $X$  é uma v.a. tal que:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p \\ 0, & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - p^2$$

## Exemplo

Encontre  $Var(X)$ , onde  $X$  é uma v.a. tal que:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p \\ 0, & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - p^2$$

$$X^2 = \begin{cases} 1^2, & \text{com probabilidade } p \\ 0^2, & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases}$$

## Exemplo

Encontre  $Var(X)$ , onde  $X$  é uma v.a. tal que:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p \\ 0, & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - p^2$$

$$X^2 = \begin{cases} 1^2, & \text{com probabilidade } p \\ 0^2, & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$$

$$Var(X) = p - p^2 = p(1 - p)$$

# Propriedades da Esperança

**1** Para qualquer v.a.  $X$  e constantes  $a$  e  $b$ :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

# Propriedades da Esperança

- Para qualquer v.a.  $X$  e constantes  $a$  e  $b$ :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

Casos particulares:

- $\mathbb{E}(X + b) = \mathbb{E}(X) + b$
- $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$

# Propriedades da Esperança

- 1 Para qualquer v.a.  $X$  e constantes  $a$  e  $b$ :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

Casos particulares:

- $\mathbb{E}(X + b) = \mathbb{E}(X) + b$
- $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$

- 2 Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são variáveis aleatórias:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$$



# Propriedades da Esperança

**Proposição:** Se  $X$  é uma v.a. discreta com valores  $x_i$  e função de massa  $p(x_i)$ , então para qualquer função  $g$ :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_i g(x_i)p(x_i)$$

# Propriedades da Esperança

**Proposição:** Se  $X$  é uma v.a. discreta com valores  $x_i$  e função de massa  $p(x_i)$ , então para qualquer função  $g$ :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_i g(x_i)p(x_i)$$

**Exemplo:** Seja  $X$  uma v.a. tal que:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p \\ 0, & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases}$$

# Propriedades da Esperança

**Proposição:** Se  $X$  é uma v.a. discreta com valores  $x_i$  e função de massa  $p(x_i)$ , então para qualquer função  $g$ :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_i g(x_i)p(x_i)$$

**Exemplo:** Seja  $X$  uma v.a. tal que:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p \\ 0, & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \times p + 0^2 \times (1 - p) = p$$

# Propriedades da Variância

**1** Para qualquer v.a.  $X$  e constantes  $a$  e  $b$ :

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

# Propriedades da Variância

- Para qualquer v.a.  $X$  e constantes  $a$  e  $b$ :

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

Casos particulares:

- $\text{Var}(X + b) = \text{Var}(X)$
- $\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$

# Propriedades da Variância

- 1 Para qualquer v.a.  $X$  e constantes  $a$  e  $b$ :

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

Casos particulares:

■  $\text{Var}(X + b) = \text{Var}(X)$

■  $\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$

- 2 Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são variáveis aleatórias independentes:

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$$

## Medidas de posição para v.a.'s discretas

- A **média, valor esperado ou esperança** de uma variável aleatória discreta  $X$ , cuja f.d.p. é dada por  $P(X = x_i) = p_i$  é dada pela expressão:

$$\mu_X = \mathbb{E}(X) = \sum_{i \geq 1} x_i p_i$$

# Medidas de posição para v.a.'s discretas

- A **média, valor esperado ou esperança** de uma variável aleatória discreta  $X$ , cuja f.d.p. é dada por  $P(X = x_i) = p_i$  é dada pela expressão:

$$\mu_X = \mathbb{E}(X) = \sum_{i \geq 1} x_i p_i$$

- A **mediana** ( $Md$ ) é o valor que satisfaz:

$$P(X \geq Md) \geq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad P(X \leq Md) \geq \frac{1}{2}$$



# Medidas de posição para v.a.'s discretas

- A **média, valor esperado ou esperança** de uma variável aleatória discreta  $X$ , cuja f.d.p. é dada por  $P(X = x_i) = p_i$  é dada pela expressão:

$$\mu_X = \mathbb{E}(X) = \sum_{i \geq 1} x_i p_i$$

- A **mediana** ( $Md$ ) é o valor que satisfaz:

$$P(X \geq Md) \geq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad P(X \leq Md) \geq \frac{1}{2}$$

- A **moda** ( $Mo$ ) é o valor da variável  $X$  que tem maior probabilidade de ocorrência:

$$P(X = Mo) = \max\{p_1, p_2, \dots\}$$

## Medidas de posição para v.a.'s discretas

**Exemplo:** Considere a v.a. discreta  $X$ , tal que:

$X$	-5	10	15	20
$P(X = x)$	0.3	0.2	0.4	0.1

# Medidas de posição para v.a.'s discretas

**Exemplo:** Considere a v.a. discreta  $X$ , tal que:

$X$	-5	10	15	20
$P(X = x)$	0.3	0.2	0.4	0.1

$$\mu_X = \mathbb{E}(X) = (-5) \times 0.3 + 10 \times 0.2 + 15 \times 0.4 + 20 \times 0.1 = 8.5$$

# Medidas de posição para v.a.'s discretas

**Exemplo:** Considere a v.a. discreta  $X$ , tal que:

$X$	-5	10	15	20
$P(X = x)$	0.3	0.2	0.4	0.1

$$\mu_X = \mathbb{E}(X) = (-5) \times 0.3 + 10 \times 0.2 + 15 \times 0.4 + 20 \times 0.1 = 8.5$$

$$Mo(X) = 15$$

## Medidas de posição para v.a.'s discretas

**Exemplo:** Considere a v.a. discreta  $X$ , tal que:

$X$	-5	10	15	20
$P(X = x)$	0.3	0.2	0.4	0.1

$$\mu_X = \mathbb{E}(X) = (-5) \times 0.3 + 10 \times 0.2 + 15 \times 0.4 + 20 \times 0.1 = 8.5$$

$$Mo(X) = 15$$

$$P(X \leq 10) = P(X \geq 15) = 0.5,$$

então a mediana é

$$Md(X) = \frac{10+15}{2} = 12.5$$

# Medidas de posição para v.a.'s discretas

**Exemplo:** Considere a v.a. discreta  $X$ , tal que:

$X$	-5	10	15	20
$P(X = x)$	0.3	0.2	0.4	0.1

$$\mu_X = \mathbb{E}(X) = (-5) \times 0.3 + 10 \times 0.2 + 15 \times 0.4 + 20 \times 0.1 = 8.5$$

$$Mo(X) = 15$$

$$P(X \leq 10) = P(X \geq 15) = 0.5,$$

então a mediana é

$$Md(X) = \frac{10+15}{2} = 12.5$$

- Obs: Note que nem a média (8.5) nem a mediana (12.5) são valores assumidos pela variável  $X$ .

# Medidas de posição para v.a.'s discretas

**Exemplo:** Considere a v.a.  $X$  tal que:

$X$	2	5	8	15	20
$P(X = x)$	0.1	0.3	0.2	0.2	0.2

Calcule a média, a moda e a mediana de  $X$ .

# Medidas de posição para v.a.'s discretas

**Exemplo:** Considere a v.a.  $X$  tal que:

$X$	2	5	8	15	20
$P(X = x)$	0.1	0.3	0.2	0.2	0.2

Calcule a média, a moda e a mediana de  $X$ .

$$\mu_X = 10.3$$



# Medidas de posição para v.a.'s discretas

**Exemplo:** Considere a v.a.  $X$  tal que:

$X$	2	5	8	15	20
$P(X = x)$	0.1	0.3	0.2	0.2	0.2

Calcule a média, a moda e a mediana de  $X$ .

$$\mu_X = 10.3$$

$$Mo(X) = 5$$

# Medidas de posição para v.a.'s discretas

**Exemplo:** Considere a v.a.  $X$  tal que:

$X$	2	5	8	15	20
$P(X = x)$	0.1	0.3	0.2	0.2	0.2

Calcule a média, a moda e a mediana de  $X$ .

$$\mu_X = 10.3$$

$$Mo(X) = 5$$

$$Md(X) = 8$$

## Medidas de posição para v.a.'s discretas

**Exemplo:** Considere a v.a.  $X$  do slide anterior e seja  $Y = 5X - 10$  ,  
então

## Medidas de posição para v.a.'s discretas

**Exemplo:** Considere a v.a.  $X$  do slide anterior e seja  $Y = 5X - 10$ , então

$Y$	0	15	30	65	90
$P(Y = y)$	0.1	0.3	0.2	0.2	0.2

Calcule a média, a moda e a mediana de  $Y$ .

## Medidas de posição para v.a.'s discretas

**Exemplo:** Considere a v.a.  $X$  do slide anterior e seja  $Y = 5X - 10$ , então

$Y$	0	15	30	65	90
$P(Y = y)$	0.1	0.3	0.2	0.2	0.2

Calcule a média, a moda e a mediana de  $Y$ .

$$\mu_Y = 41.5, \quad Mo(Y) = 15 \quad \text{e} \quad Md(Y) = 30$$

## Medidas de posição para v.a.'s discretas

**Exemplo:** Considere a v.a.  $X$  do slide anterior e seja  $Y = 5X - 10$ , então

$Y$	0	15	30	65	90
$P(Y = y)$	0.1	0.3	0.2	0.2	0.2

Calcule a média, a moda e a mediana de  $Y$ .

$$\mu_Y = 41.5, \quad Mo(Y) = 15 \quad \text{e} \quad Md(Y) = 30$$

Note que, como  $Y = 5X - 10$ :

$$\mu_Y = 5\mu_X - 10 = 5 \times 10.3 - 10 = 41.5$$

$$Mo(Y) = 5Mo(X) - 10 = 5 \times 5 - 10 = 15$$

$$Md(Y) = 5Md(X) - 10 = 5 \times 8 - 10 = 30$$

## Exemplo

Considere uma urna contendo três bolas vermelhas e cinco pretas.

Retire três bolas, sem reposição, e defina a variável aleatória  $X$  igual ao número de bolas pretas.

Obtenha a distribuição de  $X$ . Calcule a esperança e a variância.

*Fonte:* Morettin | Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 135.

Repare que não há reposição:

# Exemplo

Considere uma urna contendo três bolas vermelhas e cinco pretas.

Retire três bolas, sem reposição, e defina a variável aleatória  $X$  igual ao número de bolas pretas.

Obtenha a distribuição de  $X$ . Calcule a esperança e a variância.

*Fonte:* Morettin | Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 135.

Repare que não há reposição:

- a primeira extração tem 5 possibilidades em 8 de ser uma bola preta;



# Exemplo

Considere uma urna contendo três bolas vermelhas e cinco pretas.

Retire três bolas, sem reposição, e defina a variável aleatória  $X$  igual ao número de bolas pretas.

Obtenha a distribuição de  $X$ . Calcule a esperança e a variância.

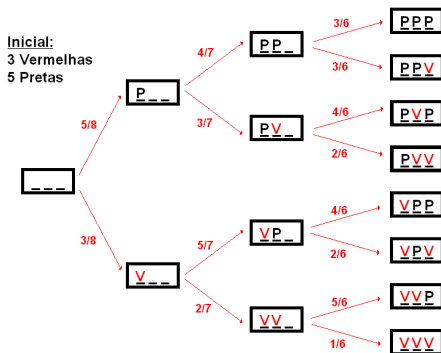
*Fonte:* Morettin | Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 135.

Repare que não há reposição:

- a primeira extração tem 5 possibilidades em 8 de ser uma bola preta;
- a segunda terá 5 em 7 se a primeira for vermelha, ou 4 em 7 se a primeira foi preta, e assim por diante.

# Exemplo (continuação)

Retirar 3 bolas, sem reposição, de uma urna com 3 bolas vermelhas e 5 pretas



## Exemplo (continuação)

A partir do gráfico, podemos construir uma tabela com os eventos do espaço amostral:

Extrações	Probabilidade
PPP	$5/8 \times 4/7 \times 3/6 = 5/28$
PPV	$5/8 \times 4/7 \times 3/6 = 5/28$
PVP	$5/8 \times 3/7 \times 4/6 = 5/28$
VPP	$3/8 \times 5/7 \times 4/6 = 5/28$
PVV	$5/8 \times 3/7 \times 2/6 = 5/56$
VPV	$3/8 \times 5/7 \times 2/6 = 5/56$
VVP	$3/8 \times 2/7 \times 5/6 = 5/56$
VVV	$3/8 \times 2/7 \times 1/6 = 1/56$

## Exemplo (continuação)

Como  $X$  é o número de bolas pretas, temos que:

## Exemplo (continuação)

Como  $X$  é o número de bolas pretas, temos que:

Somando as probabilidades dos eventos, encontradas anteriormente, obtemos a função de distribuição de  $X$ ,  $p_X(x)$ .

## Exemplo (continuação)

Como  $X$  é o número de bolas pretas, temos que:

Somando as probabilidades dos eventos, encontradas anteriormente, obtemos a função de distribuição de  $X$ ,  $p_X(x)$ .

Eventos	$X = x$	$p_X(x) = P(X = x)$
$\{VVV\}$	0	0.02
$\{VVP\} \cup \{VPV\} \cup \{PVV\}$	1	0.27
$\{PPV\} \cup \{PVP\} \cup \{VPP\}$	2	0.53
$\{PPP\}$	3	0.18

## Exemplo (continuação)

Podemos calcular a esperança e a variância de  $X$  a partir de sua função de probabilidade:

$$\begin{aligned}\mu = \mathbb{E}(X) &= \sum_{x=0}^3 xp_X(x) \\ &= 0 \times 0.02 + 1 \times 0.27 + 2 \times 0.53 + 3 \times 0.18 = 1.87\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] &= \sum_{x=0}^3 (x - \mu)^2 p_X(x) \\ &= (0 - 1.87)^2 \times 0.02 + (1 - 1.87)^2 \times 0.27 + \\ &\quad + (2 - 1.87)^2 \times 0.53 + (3 - 1.87)^2 \times 0.18 = 0.51\end{aligned}$$

## Exemplo

O tempo  $T$ , em minutos, necessário para um operário processar certa peça é uma v.a. com a seguinte distribuição de probabilidade:

$T$	2	3	4	5	6	7
$P(T = t)$	0.1	0.1	0.3	0.2	0.2	0.1

- 1 Calcule o tempo médio de processamento.
- 2 Cada peça processada paga ao operador \$2.00 mas, se ele processa a peça em menos de 6 minutos, ganha \$0.50 por minuto poupado. Por exemplo, se ele processa a peça em 4 minutos, ganha um bônus de \$1.00. Encontre a distribuição, a média e a variância da v.a.  $S$ : quantia paga por peça.

*Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 140.*



## Exemplo (continuação)

- 1 Tempo médio de processamento

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= \sum_{t=2}^7 tP(T=t) \\ &= 2 \times 0.1 + 3 \times 0.1 + 4 \times 0.3 + 5 \times 0.2 + 6 \times 0.2 + 7 \times 0.1 = 4.6\end{aligned}$$

- 2 Podemos trocar os valores na tabela do tempo, pelo total ganho por peça. Note, contudo, que o operário receberá \$2.00 no evento  $\{T=6\} \cup \{T=7\}$ , logo somamos suas probabilidades. Seja  $S$  a v.a. “ganho final”.

$S$	\$4.00	\$3.50	\$3.00	\$2.50	\$2.00
$P(S=s)$	0.1	0.1	0.3	0.2	0.3

## Exemplo (continuação)

Obtemos a média e a variância de  $S$  através da definição:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S) &= \sum_s sP(S=s) \\ &= 4 \times 0.1 + 3.5 \times 0.1 + 3 \times 0.3 + 2.5 \times 0.2 + 2 \times 0.3 = 2.75\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S^2) &= \sum_s s^2P(S=s) \\ &= 16 \times 0.1 + 12.25 \times 0.1 + 9 \times 0.3 + 6.25 \times 0.2 + 4 \times 0.3 = 7.975\end{aligned}$$

Então,

$$\text{Var}(S) = 7.975 - (2.75)^2 = 0.4125$$

# Principais Modelos Discretos

# Uniforme Discreta

**Exemplo:** Uma rifa tem 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Tenho 5 bilhetes consecutivos numerados de 21 a 25, e meu colega tem outros 5 bilhetes, com os números 1, 11, 29, 68 e 93.

Quem tem maior probabilidade de ser sorteado?

**Exemplo:** Uma rifa tem 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Tenho 5 bilhetes consecutivos numerados de 21 a 25, e meu colega tem outros 5 bilhetes, com os números 1, 11, 29, 68 e 93.

Quem tem maior probabilidade de ser sorteado?

- espalhar os números é a melhor forma de ganhar o sorteio?

**Exemplo:** Uma rifa tem 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Tenho 5 bilhetes consecutivos numerados de 21 a 25, e meu colega tem outros 5 bilhetes, com os números 1, 11, 29, 68 e 93.

Quem tem maior probabilidade de ser sorteado?

- espalhar os números é a melhor forma de ganhar o sorteio?
- assumindo honestidade da rifa, todos os números têm a mesma probabilidade de ocorrência, com  $\frac{1}{100}$  para cada um.

# Uniforme Discreta

**Exemplo:** Uma rifa tem 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Tenho 5 bilhetes consecutivos numerados de 21 a 25, e meu colega tem outros 5 bilhetes, com os números 1, 11, 29, 68 e 93.

Quem tem maior probabilidade de ser sorteado?

- espalhar os números é a melhor forma de ganhar o sorteio?
- assumindo honestidade da rifa, todos os números têm a mesma probabilidade de ocorrência, com  $\frac{1}{100}$  para cada um.
- como eu e meu colega temos 5 bilhetes, temos a mesma probabilidade de ganhar a rifa:  $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ .

**Exemplo:** Uma rifa tem 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Tenho 5 bilhetes consecutivos numerados de 21 a 25, e meu colega tem outros 5 bilhetes, com os números 1, 11, 29, 68 e 93.

Quem tem maior probabilidade de ser sorteado?

- espalhar os números é a melhor forma de ganhar o sorteio?
- assumindo honestidade da rifa, todos os números têm a mesma probabilidade de ocorrência, com  $\frac{1}{100}$  para cada um.
- como eu e meu colega temos 5 bilhetes, temos a mesma probabilidade de ganhar a rifa:  $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ .
- assim, a probabilidade de ganhar depende somente da quantidade de bilhetes que se tem na mão, independente da numeração.



# Uniforme Discreta

- A v.a. discreta  $X$ , assumindo valores  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , segue uma distribuição uniforme discreta se, e somente se, cada valor possível tem a mesma probabilidade de ocorrer, isto é,

$$P(X = x_i) = p(x_i) = \frac{1}{k}, \quad \forall 1 \leq i \leq k.$$

# Uniforme Discreta

- A v.a. discreta  $X$ , assumindo valores  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , segue uma distribuição uniforme discreta se, e somente se, cada valor possível tem a mesma probabilidade de ocorrer, isto é,

$$P(X = x_i) = p(x_i) = \frac{1}{k}, \quad \forall 1 \leq i \leq k.$$

**Exemplo:** lançamento de um dado honesto de 6 faces

$X$	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

# Uniforme Discreta

A média e a variância são dadas por:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^k x_i P(X = x_i) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i,$$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - \mathbb{E}(X))^2 P(X = x_i) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - \mathbb{E}(X))^2$$

ou

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{1}{k} \left[ \sum_{j=1}^k x_j^2 - \frac{1}{k} \left( \sum_{j=1}^k x_j \right)^2 \right].$$

# Uniforme Discreta

**Exemplo:** lançamento de um dado honesto de 6 faces

$X$	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

# Uniforme Discreta

**Exemplo:** lançamento de um dado honesto de 6 faces

$X$	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Calculando a esperança e a variância de  $X$ , temos

**Exemplo:** lançamento de um dado honesto de 6 faces

$X$	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Calculando a esperança e a variância de  $X$ , temos

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3.5$$

$$Var(X) = \frac{1}{6} \left[ (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) - \frac{1}{6}(21)^2 \right] = \frac{1}{6} \times \frac{35}{2} = 2.92$$

# Uniforme Discreta

Cálculo da função de distribuição acumulada (f.d.a.) de uma variável uniforme discreta:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \frac{1}{k} = \frac{\#(x_i \leq x)}{k}$$

# Uniforme Discreta

Cálculo da função de distribuição acumulada (f.d.a.) de uma variável uniforme discreta:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \frac{1}{k} = \frac{\#(x_i \leq x)}{k}$$

**Exemplo:** voltando ao exemplo do lançamento de um dado honesto de 6 faces

■  $F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{6}$

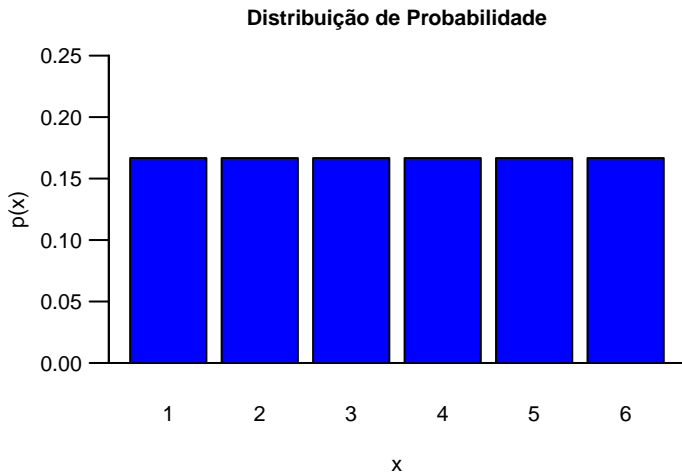
■  $F(2.5) = P(X \leq 2.5) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{6}$



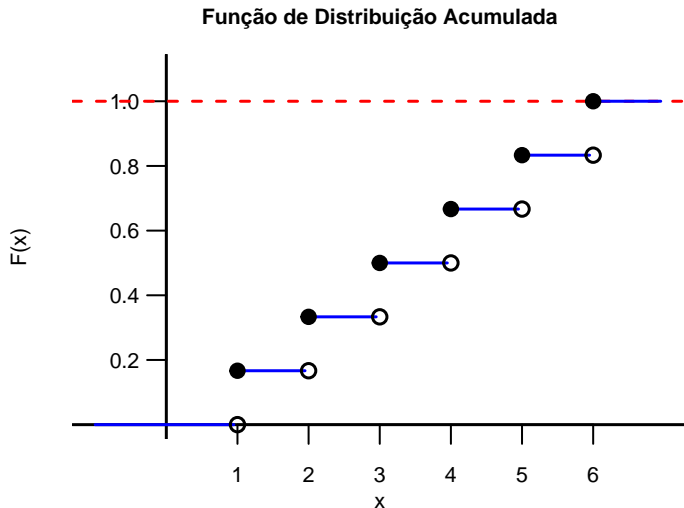
## Uniforme Discreta - f.d.a

$X$	$p(x)$	$F(x)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{6}$

# Uniforme Discreta - Gráficos



# Uniforme Discreta - Gráficos



# Bernoulli

Em muitas aplicações, cada observação de um experimento aleatório é **binária**: tem apenas dois resultados possíveis.

Em muitas aplicações, cada observação de um experimento aleatório é **binária**: tem apenas dois resultados possíveis.

Por exemplo, uma pessoa pode:

Em muitas aplicações, cada observação de um experimento aleatório é **binária**: tem apenas dois resultados possíveis.

Por exemplo, uma pessoa pode:

- aceitar ou recusar uma oferta de cartão de crédito de seu banco.

Em muitas aplicações, cada observação de um experimento aleatório é **binária**: tem apenas dois resultados possíveis.

Por exemplo, uma pessoa pode:

- aceitar ou recusar uma oferta de cartão de crédito de seu banco.
- votar sim ou não em uma assembléia.

# Modelo Bernoulli

Considere um experimento aleatório com dois resultados possíveis: **sucesso** e **fracasso**.

Seja  $p$  a probabilidade de sucesso.



# Modelo Bernoulli

Considere um experimento aleatório com dois resultados possíveis: **sucesso** e **fracasso**.

Seja  $p$  a probabilidade de sucesso.

**Exemplo:** lançar uma moeda e verificar se cai cara ou coroa.

Consideramos como sucesso, a obtenção de cara. Se a moeda é honesta,  $p = 1/2$ .

# Modelo Bernoulli

Considere um experimento aleatório com dois resultados possíveis: **sucesso** e **fracasso**.

Seja  $p$  a probabilidade de sucesso.

**Exemplo:** lançar uma moeda e verificar se cai cara ou coroa.

Consideramos como sucesso, a obtenção de cara. Se a moeda é honesta,  $p = 1/2$ .

Esse tipo de experimento é conhecido como **Ensaio de Bernoulli**.

# Modelo Bernoulli

**Exemplo:** lançar um dado, sendo “sucesso” a obtenção da face 6. Se o dado é honesto, a probabilidade de sucesso é  $p = 1/6$ .

# Modelo Bernoulli

**Exemplo:** lançar um dado, sendo “sucesso” a obtenção da face 6. Se o dado é honesto, a probabilidade de sucesso é  $p = 1/6$ .

**Exemplo:** Uma pessoa é escolhida ao acaso entre os moradores de uma cidade, e é perguntado a ela se concorda com um projeto.

# Modelo Bernoulli

**Exemplo:** lançar um dado, sendo “sucesso” a obtenção da face 6. Se o dado é honesto, a probabilidade de sucesso é  $p = 1/6$ .

**Exemplo:** Uma pessoa é escolhida ao acaso entre os moradores de uma cidade, e é perguntado a ela se concorda com um projeto.

As possíveis respostas são apenas “Sim” ou “Não”.

$$\Omega = \{\text{Sim}, \text{Não}\}$$

# Modelo Bernoulli

**Exemplo:** lançar um dado, sendo “sucesso” o obtenção da face 6. Se o dado é honesto, a probabilidade de sucesso é  $p = 1/6$ .

**Exemplo:** Uma pessoa é escolhida ao acaso entre os moradores de uma cidade, e é perguntado a ela se concorda com um projeto.

As possíveis respostas são apenas “Sim” ou “Não”.

$$\Omega = \{\text{Sim}, \text{Não}\}$$

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se a pessoa respondeu sim (sucesso)} \\ 0, & \text{caso contrário (fracasso)} \end{cases}$$

# Modelo Bernoulli

**Exemplo:** lançar um dado, sendo “sucesso” a obtenção da face 6. Se o dado é honesto, a probabilidade de sucesso é  $p = 1/6$ .

**Exemplo:** Uma pessoa é escolhida ao acaso entre os moradores de uma cidade, e é perguntado a ela se concorda com um projeto.

As possíveis respostas são apenas “Sim” ou “Não”.

$$\Omega = \{\text{Sim}, \text{Não}\}$$

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se a pessoa respondeu sim (sucesso)} \\ 0, & \text{caso contrário (fracasso)} \end{cases}$$

$$P(X = 1) = P(\text{sucesso}) = p \rightarrow P(X = 0) = P(\text{fracasso}) = 1 - p$$

# Modelo Bernoulli

Seja  $X$  uma v.a. discreta assumindo apenas valores 0 e 1, onde  $X = 1$  corresponde a sucesso e seja  $p$  a probabilidade de sucesso.

A distribuição de probabilidade de  $X$  é dada por:

$$P(X = x) = \begin{cases} p & \text{se } x = 1 \\ 1 - p & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Ou de forma equivalente, podemos escrever como:

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}, \quad \text{para } x = 0, 1$$

**Notação:**  $X \sim b(p)$



# Bernoulli - Esperança e Variância

Se  $X$  é um v.a. Bernoulli,  $X \sim b(p)$ , então:

# Bernoulli - Esperança e Variância

Se  $X$  é um v.a. Bernoulli,  $X \sim b(p)$ , então:

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = p(1 - p)$$

# Bernoulli - Esperança e Variância

Se  $X$  é um v.a. Bernoulli,  $X \sim b(p)$ , então:

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = p(1 - p)$$

**Demonstração:**

# Bernoulli - Esperança e Variância

Se  $X$  é um v.a. Bernoulli,  $X \sim b(p)$ , então:

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = p(1 - p)$$

**Demonstração:** Temos que,

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

e

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times (1 - p) + 1^2 \times p = p$$

Então,

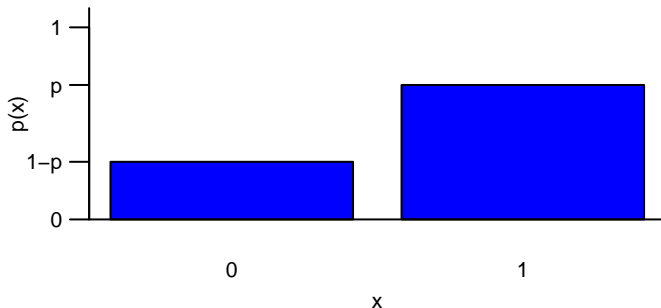
$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \\ &= p - p^2 = p(1 - p)\end{aligned}$$

# Bernoulli

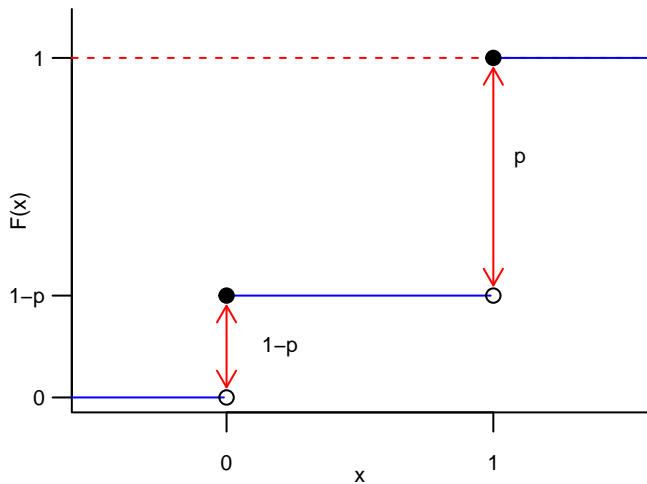
A função de distribuição acumulada de uma v.a. Bernoulli é:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

**Distribuição de Probabilidade**



## Função de Distribuição Acumulada



**Exemplo:** lançamos um dado e consideramos sucesso a obtenção da face 5.

**Exemplo:** lançamos um dado e consideramos sucesso a obtenção da face 5.

Supondo que o dado seja honesto, a probabilidade de sucesso é  $p = 1/6$ .  
Então:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{1-x} && \text{para } x = 0, 1 \\ &= \begin{cases} 5/6 & \text{se } x = 0 \\ 1/6 & \text{se } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Encontre a esperança e variância de  $X$ .



**Exemplo:** lançamos um dado e consideramos sucesso a obtenção da face 5.

Supondo que o dado seja honesto, a probabilidade de sucesso é  $p = 1/6$ . Então:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{1-x} && \text{para } x = 0, 1 \\ &= \begin{cases} 5/6 & \text{se } x = 0 \\ 1/6 & \text{se } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Encontre a esperança e variância de  $X$ .

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \qquad \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{6}$$

**Exemplo:** lançamos um dado e consideramos sucesso a obtenção da face 5.

Supondo que o dado seja honesto, a probabilidade de sucesso é  $p = 1/6$ . Então:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{1-x} && \text{para } x = 0, 1 \\ &= \begin{cases} 5/6 & \text{se } x = 0 \\ 1/6 & \text{se } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Encontre a esperança e variância de  $X$ .

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \qquad \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{6}$$

$$Var(X) = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{6-1}{36} = \frac{5}{36}$$

# Modelo Binomial

Ao obtermos uma amostra do experimento/fenômeno aleatório com observações binárias, podemos resumir os resultados usando o número ou a proporção de observações com o resultado de interesse.

# Modelo Binomial

Ao obtermos uma amostra do experimento/fenômeno aleatório com observações binárias, podemos resumir os resultados usando o número ou a proporção de observações com o resultado de interesse.

*Sob certas condições, a v.a.  $X$  que conta o número de vezes que um resultado específico ocorreu, dentre dois possíveis, tem uma distribuição de probabilidade chamada **Binomial**.*

# Modelo Binomial

Ao obtermos uma amostra do experimento/fenômeno aleatório com observações binárias, podemos resumir os resultados usando o número ou a proporção de observações com o resultado de interesse.

*Sob certas condições, a v.a.  $X$  que conta o número de vezes que um resultado específico ocorreu, dentre dois possíveis, tem uma distribuição de probabilidade chamada **Binomial**.*

Considere um experimento aleatório com espaço amostral  $\Omega$  e o evento  $A$ .

# Modelo Binomial

Ao obtermos uma amostra do experimento/fenômeno aleatório com observações binárias, podemos resumir os resultados usando o número ou a proporção de observações com o resultado de interesse.

*Sob certas condições, a v.a.  $X$  que conta o número de vezes que um resultado específico ocorreu, dentre dois possíveis, tem uma distribuição de probabilidade chamada **Binomial**.*

Considere um experimento aleatório com espaço amostral  $\Omega$  e o evento  $A$ .

Vamos dizer que ocorreu sucesso se o evento  $A$  aconteceu. Se  $A$  não aconteceu ocorreu fracasso.

# Modelo Binomial

Ao obtermos uma amostra do experimento/fenômeno aleatório com observações binárias, podemos resumir os resultados usando o número ou a proporção de observações com o resultado de interesse.

*Sob certas condições, a v.a.  $X$  que conta o número de vezes que um resultado específico ocorreu, dentre dois possíveis, tem uma distribuição de probabilidade chamada **Binomial**.*

Considere um experimento aleatório com espaço amostral  $\Omega$  e o evento  $A$ .

Vamos dizer que ocorreu sucesso se o evento  $A$  aconteceu. Se  $A$  não aconteceu ocorreu fracasso.

Repetimos o experimento  $n$  vezes, de forma independente.

# Modelo Binomial

Ao obtermos uma amostra do experimento/fenômeno aleatório com observações binárias, podemos resumir os resultados usando o número ou a proporção de observações com o resultado de interesse.

*Sob certas condições, a v.a.  $X$  que conta o número de vezes que um resultado específico ocorreu, dentre dois possíveis, tem uma distribuição de probabilidade chamada **Binomial**.*

Considere um experimento aleatório com espaço amostral  $\Omega$  e o evento  $A$ .

Vamos dizer que ocorreu sucesso se o evento  $A$  aconteceu. Se  $A$  não aconteceu ocorreu fracasso.

Repetimos o experimento  $n$  vezes, de forma independente.

Seja  $X$  o número de sucessos nos  $n$  experimentos.



## Exemplo: vacinas

Sabe-se que a eficiência de uma vacina é de 80%.

Um grupo de 3 indivíduos é sorteado, dentre a população vacinada, e cada um é submetido a testes para averiguar se está imunizado.

Nesse caso, consideramos como sucesso a imunização.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{indivíduo } i \text{ está imunizado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

## Exemplo: vacinas

Sabe-se que a eficiência de uma vacina é de 80%.

Um grupo de 3 indivíduos é sorteado, dentre a população vacinada, e cada um é submetido a testes para averiguar se está imunizado.

Nesse caso, consideramos como sucesso a imunização.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{indivíduo } i \text{ está imunizado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Pelo enunciado, sabe-se que  $P(X_i = 1) = p = 0.8$ .

## Exemplo: vacinas

Os indivíduos 1, 2 e 3 são independentes.

## Exemplo: vacinas

Os indivíduos 1, 2 e 3 são independentes.

As v.a.'s  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  são Bernoulli.

## Exemplo: vacinas

Os indivíduos 1, 2 e 3 são independentes.

As v.a.'s  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  são Bernoulli.

Se o interesse está em estudar  $X$  = número de indivíduos imunizados no grupo,  $X$  poderá assumir valores  $\{0, 1, 2, 3\}$ .

## Exemplo: vacinas

Os indivíduos 1, 2 e 3 são independentes.

As v.a.'s  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  são Bernoulli.

Se o interesse está em estudar  $X$  = número de indivíduos imunizados no grupo,  $X$  poderá assumir valores  $\{0, 1, 2, 3\}$ .

Note que  $X = X_1 + X_2 + X_3$ .

## Exemplo: vacinas

evento	P(evento)	X
$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0$	$(0.2)^3$	0
$X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1$	$(0.8)^3$	3

# Modelo Binomial

Assim, as probabilidades de cada valor possível de  $X$  são:

$X$	0	1	2	3
$P(X = x)$	$(0.2)^3$	$3 \times 0.8 \times (0.2)^2$	$3 \times (0.8)^2 \times 0.2$	$(0.8)^3$



# Modelo Binomial

Assim, as probabilidades de cada valor possível de  $X$  são:

$X$	0	1	2	3
$P(X = x)$	$(0.2)^3$	$3 \times 0.8 \times (0.2)^2$	$3 \times (0.8)^2 \times 0.2$	$(0.8)^3$

E o comportamento de  $X$  é completamente determinado pela função:

# Modelo Binomial

Assim, as probabilidades de cada valor possível de  $X$  são:

$X$	0	1	2	3
$P(X = x)$	$(0.2)^3$	$3 \times 0.8 \times (0.2)^2$	$3 \times (0.8)^2 \times 0.2$	$(0.8)^3$

E o comportamento de  $X$  é completamente determinado pela função:

$$P(X = x) = \binom{3}{x} (0.8)^x (0.2)^{3-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3$$

# Binomial

**Modelo Geral:** Considere a repetição de  $n$  ensaios  $X_i$  Bernoulli independentes e todos com a mesma probabilidade de sucesso  $p$ .

# Binomial

**Modelo Geral:** Considere a repetição de  $n$  ensaios  $X_i$  Bernoulli independentes e todos com a mesma probabilidade de sucesso  $p$ .

A variável aleatória  $X = X_1 + \dots + X_n$  representa o total de sucessos e corresponde ao modelo Binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ , ou seja,  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ .

# Binomial

**Modelo Geral:** Considere a repetição de  $n$  ensaios  $X_i$  Bernoulli independentes e todos com a mesma probabilidade de sucesso  $p$ .

A variável aleatória  $X = X_1 + \dots + X_n$  representa o total de sucessos e corresponde ao modelo Binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ , ou seja,  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ .

A probabilidade de se observar  $x$  é dada pela expressão geral:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

# Binomial

**Modelo Geral:** Considere a repetição de  $n$  ensaios  $X_i$  Bernoulli independentes e todos com a mesma probabilidade de sucesso  $p$ .

A variável aleatória  $X = X_1 + \dots + X_n$  representa o total de sucessos e corresponde ao modelo Binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ , ou seja,  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ .

A probabilidade de se observar  $x$  é dada pela expressão geral:

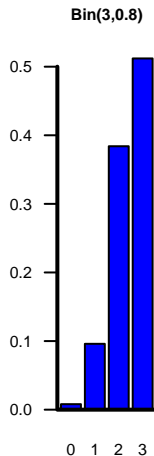
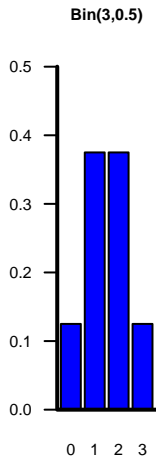
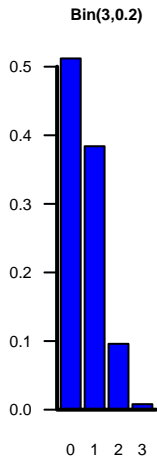
$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

A esperança e variância de uma v.a. Binomial são dadas por:

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = np(1 - p)$$

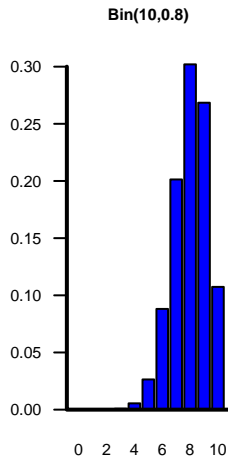
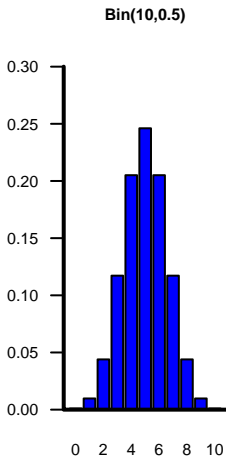
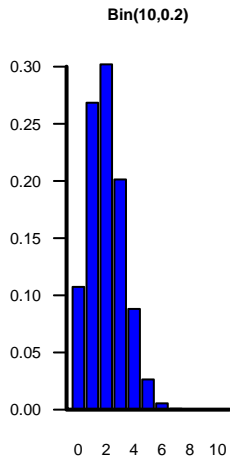
# Modelo Binomial

Distribuição de probabilidade de uma  $\text{Bin}(3, p)$ , com  $p = 0.2, 0.5$  e  $0.8$ .



# Modelo Binomial

Distribuição de probabilidade de uma  $\text{Bin}(10, p)$ , com  $p = 0.2, 0.5$  e  $0.8$ .





## Exemplo: Vacina

No exemplo da vacina, temos então que o número de indivíduos imunizados segue uma distribuição Binomial com  $n = 3$  e  $p = 0.8$

## Exemplo: Vacina

No exemplo da vacina, temos então que o número de indivíduos imunizados segue uma distribuição Binomial com  $n = 3$  e  $p = 0.8$

$$X \sim \text{Bin}(3, 0.8)$$

Qual a probabilidade de que dentre os 3 indivíduos, nenhum tenha sido imunizado?

## Exemplo: Vacina

No exemplo da vacina, temos então que o número de indivíduos imunizados segue uma distribuição Binomial com  $n = 3$  e  $p = 0.8$

$$X \sim \text{Bin}(3, 0.8)$$

Qual a probabilidade de que dentre os 3 indivíduos, nenhum tenha sido imunizado?

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} (0.8)^0 (0.2)^3 = 0.008$$

Encontre a esperança e variância.

## Exemplo: Vacina

No exemplo da vacina, temos então que o número de indivíduos imunizados segue uma distribuição Binomial com  $n = 3$  e  $p = 0.8$

$$X \sim \text{Bin}(3, 0.8)$$

Qual a probabilidade de que dentre os 3 indivíduos, nenhum tenha sido imunizado?

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} (0.8)^0 (0.2)^3 = 0.008$$

Encontre a esperança e variância.

$$\mathbb{E}(X) = 3 \times 0.8 = 2.4 \quad \text{e} \quad \text{Var}(X) = 3 \times 0.8 \times 0.2 = 0.48$$

## Exemplo: Inspeção

Um inspetor de qualidade extrai uma amostra aleatória de 10 tubos armazenados num depósito onde, de acordo com os padrões de produção, se espera um total de 20% de tubos defeituosos.

## Exemplo: Inspeção

Um inspetor de qualidade extrai uma amostra aleatória de 10 tubos armazenados num depósito onde, de acordo com os padrões de produção, se espera um total de 20% de tubos defeituosos.

Qual é a probabilidade de que não mais do que 2 tubos extraídos sejam defeituosos?

## Exemplo: Inspeção

Um inspetor de qualidade extrai uma amostra aleatória de 10 tubos armazenados num depósito onde, de acordo com os padrões de produção, se espera um total de 20% de tubos defeituosos.

Qual é a probabilidade de que não mais do que 2 tubos extraídos sejam defeituosos?

Se  $X$  denotar a variável “número de tubos defeituosos em 10 extrações independentes e aleatórias”, qual o seu valor esperado? Qual a variância?

## Exemplo: Inspeção

Um inspetor de qualidade extrai uma amostra aleatória de 10 tubos armazenados num depósito onde, de acordo com os padrões de produção, se espera um total de 20% de tubos defeituosos.

Qual é a probabilidade de que não mais do que 2 tubos extraídos sejam defeituosos?

Se  $X$  denotar a variável “número de tubos defeituosos em 10 extrações independentes e aleatórias”, qual o seu valor esperado? Qual a variância?



## Exemplo: Inspeção

Note que a variável aleatória  $X =$  número de tubos defeituosos em 10 extrações tem distribuição binomial, com parâmetros  $n = 10$  e  $p = 0.2$ .

## Exemplo: Inspeção

Note que a variável aleatória  $X$  = número de tubos defeituosos em 10 extrações tem distribuição binomial, com parâmetros  $n = 10$  e  $p = 0.2$ . Então, “não mais do que dois tubos defeituosos” é o evento  $\{X \leq 2\}$ .

## Exemplo: Inspeção

Note que a variável aleatória  $X$  = número de tubos defeituosos em 10 extrações tem distribuição binomial, com parâmetros  $n = 10$  e  $p = 0.2$ .

Então, “não mais do que dois tubos defeituosos” é o evento  $\{X \leq 2\}$ .

Sabemos que, para  $X \sim \text{Bin}(10, 0.2)$

$$P(X = x) = \binom{10}{x} (0.2)^x (0.8)^{10-x}, \quad x = 0, 1, \dots, 10$$

## Exemplo: Inspeção

Note que a variável aleatória  $X$  = número de tubos defeituosos em 10 extrações tem distribuição binomial, com parâmetros  $n = 10$  e  $p = 0.2$ .

Então, “não mais do que dois tubos defeituosos” é o evento  $\{X \leq 2\}$ .

Sabemos que, para  $X \sim \text{Bin}(10, 0.2)$

$$P(X = x) = \binom{10}{x} (0.2)^x (0.8)^{10-x}, \quad x = 0, 1, \dots, 10$$

e que

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= (0.8)^{10} + 10(0.2)(0.8)^9 + 45(0.2)^2(0.8)^8 = 0.678 \end{aligned}$$

## Exemplo: Inspeção

Se  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ , então  $\mathbb{E}(X) = np$  e  $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

Então:

## Exemplo: Inspeção

Se  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ , então  $\mathbb{E}(X) = np$  e  $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

Então:

$$\mathbb{E}(X) = 10(0.2) = 2$$

## Exemplo: Inspeção

Se  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ , então  $\mathbb{E}(X) = np$  e  $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

Então:

$$\mathbb{E}(X) = 10(0.2) = 2$$

$$\text{Var}(X) = 10(0.2)(0.8) = 1.6$$

## Exemplo: Inspeção

Se  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ , então  $\mathbb{E}(X) = np$  e  $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

Então:

$$\mathbb{E}(X) = 10(0.2) = 2$$

$$\text{Var}(X) = 10(0.2)(0.8) = 1.6$$

Quando se encontram quatro ou mais tubos defeituosos, o processo de produção é interrompido para revisão. Qual é a probabilidade que isto aconteça?



## Exemplo: Inspeção

Se  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ , então  $\mathbb{E}(X) = np$  e  $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

Então:

$$\mathbb{E}(X) = 10(0.2) = 2$$

$$\text{Var}(X) = 10(0.2)(0.8) = 1.6$$

Quando se encontram quatro ou mais tubos defeituosos, o processo de produção é interrompido para revisão. Qual é a probabilidade que isto aconteça?

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) \\ &= 1 - P(X \leq 3) \\ &= 1 - 0.879 = 0.121 \end{aligned}$$

## Exemplo: Comprador A ou B?

**Exemplo:** Um industrial fabrica peças, das quais  $1/5$  são defeituosas. Dois compradores **A** e **B** classificaram um grande lote de peças adquiridas em categorias *I* e *II*, pagando \$1.20 e \$0.80 por peça, respectivamente, do seguinte modo:

- **Comprador A:** retira uma amostra de cinco peças; se encontrar mais que uma defeituosa, classifica como *II*.
- **Comprador B:** retira uma amostra de dez peças; se encontrar mais que duas defeituosas, classifica como *II*.

Em média, qual comprador oferece mais lucro?

*Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5ª edição, pág 159.*

## Exemplo: Comprador A ou B?

Sabemos que  $1/5$  das peças são defeituosas.

## Exemplo: Comprador A ou B?

Sabemos que  $1/5$  das peças são defeituosas.

Podemos nos concentrar na probabilidade dos vendedores julgarem um lote como tipo  $I$  ou  $II$ .

## Exemplo: Comprador A ou B?

Sabemos que  $1/5$  das peças são defeituosas.

Podemos nos concentrar na probabilidade dos vendedores julgarem um lote como tipo  $I$  ou  $II$ .

Seja  $X$  o número de peças defeituosas em  $n$  testes.

## Exemplo: Comprador A ou B?

Sabemos que  $1/5$  das peças são defeituosas.

Podemos nos concentrar na probabilidade dos vendedores julgarem um lote como tipo  $I$  ou  $II$ .

Seja  $X$  o número de peças defeituosas em  $n$  testes.

O experimento do **comprador A** tem distribuição  $X_A \sim \text{Bin}(5, 1/5)$  enquanto o experimento do **comprador B** tem distribuição  $X_B \sim \text{Bin}(10, 1/5)$ .

## Exemplo: Comprador A ou B?

Sabemos que  $1/5$  das peças são defeituosas.

Podemos nos concentrar na probabilidade dos vendedores julgarem um lote como tipo  $I$  ou  $II$ .

Seja  $X$  o número de peças defeituosas em  $n$  testes.

O experimento do **comprador A** tem distribuição  $X_A \sim \text{Bin}(5, 1/5)$  enquanto o experimento do **comprador B** tem distribuição  $X_B \sim \text{Bin}(10, 1/5)$ .

Para o **comprador A**, temos que:

## Exemplo: Comprador A ou B?

Sabemos que  $1/5$  das peças são defeituosas.

Podemos nos concentrar na probabilidade dos vendedores julgarem um lote como tipo  $I$  ou  $II$ .

Seja  $X$  o número de peças defeituosas em  $n$  testes.

O experimento do **comprador A** tem distribuição  $X_A \sim \text{Bin}(5, 1/5)$  enquanto o experimento do **comprador B** tem distribuição  $X_B \sim \text{Bin}(10, 1/5)$ .

Para o **comprador A**, temos que:

$$\begin{aligned} P(X_A > 1) &= 1 - P(X_A = 0) - P(X_A = 1) \\ &= 1 - \binom{5}{0} \left(1 - \frac{1}{5}\right)^5 - \binom{5}{1} \left(\frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right)^4 = 0.263 \end{aligned}$$



## Exemplo: Comprador A ou B?

De modo similar, para o **comprador B** temos:

## Exemplo: Comprador A ou B?

De modo similar, para o **comprador B** temos:

$$\begin{aligned} P(X_B > 2) &= 1 - \binom{10}{0} \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{10} - \binom{10}{1} \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5}\right)^9 \\ &\quad - \binom{10}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{5}\right)^8 = 0.322 \end{aligned}$$

## Exemplo: Comprador A ou B?

De modo similar, para o **comprador B** temos:

$$\begin{aligned} P(X_B > 2) &= 1 - \binom{10}{0} \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{10} - \binom{10}{1} \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5}\right)^9 \\ &\quad - \binom{10}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{5}\right)^8 = 0.322 \end{aligned}$$

Como o segundo comprador irá classificar o lote como *II* com maior probabilidade que o primeiro, ele é o que oferece menor lucro para o fornecedor.

## Exemplo: Comprador A ou B?

De modo similar, para o **comprador B** temos:

$$\begin{aligned} P(X_B > 2) &= 1 - \binom{10}{0} \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{10} - \binom{10}{1} \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5}\right)^9 \\ &\quad - \binom{10}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{5}\right)^8 = 0.322 \end{aligned}$$

Como o segundo comprador irá classificar o lote como *II* com maior probabilidade que o primeiro, ele é o que oferece menor lucro para o fornecedor.

Mas podemos verificar o lucro esperado do vendedor.

## Exemplo: Comprador A ou B?

Preço por peça na categoria  $I$ : \$1.20. Preço por peça na categoria  $II$ : \$0.80.

## Exemplo: Comprador A ou B?

Preço por peça na categoria *I*: \$1.20. Preço por peça na categoria *II*: \$0.80.

Se o industrial decidir vender o lote para o **comprador A**, temos que

$$\mathbb{E}(\text{lucro A}) = 1.20 \times 0.737 + 0.80 \times 0.263 \approx 1.09$$

## Exemplo: Comprador A ou B?

Preço por peça na categoria *I*: \$1.20. Preço por peça na categoria *II*: \$0.80.

Se o industrial decidir vender o lote para o **comprador A**, temos que

$$\mathbb{E}(\text{lucro A}) = 1.20 \times 0.737 + 0.80 \times 0.263 \approx 1.09$$

Ou seja, ele irá lucrar em média \$1.09 por peça.

## Exemplo: Comprador A ou B?

Preço por peça na categoria *I*: \$1.20. Preço por peça na categoria *II*: \$0.80.

Se o industrial decidir vender o lote para o **comprador A**, temos que

$$\mathbb{E}(\text{lucro A}) = 1.20 \times 0.737 + 0.80 \times 0.263 \approx 1.09$$

Ou seja, ele irá lucrar em média \$1.09 por peça.

Já se ele vender para o **comprador B**, temos que

$$\mathbb{E}(\text{lucro B}) = 1.20 \times 0.678 + 0.80 \times 0.322 \approx 1.07$$

que é um lucro dois centavos inferior.



## Exemplo: Comprador A ou B?

Preço por peça na categoria *I*: \$1.20. Preço por peça na categoria *II*: \$0.80.

Se o industrial decidir vender o lote para o **comprador A**, temos que

$$\mathbb{E}(\text{lucro A}) = 1.20 \times 0.737 + 0.80 \times 0.263 \approx 1.09$$

Ou seja, ele irá lucrar em média \$1.09 por peça.

Já se ele vender para o **comprador B**, temos que

$$\mathbb{E}(\text{lucro B}) = 1.20 \times 0.678 + 0.80 \times 0.322 \approx 1.07$$

que é um lucro dois centavos inferior.

Portanto, é mais interessante ao industrial que o comprador A examine mais peças.

- Ross: capítulo 5
- Magalhães: capítulo 3