# ME951 - Estatística e Probabilidade I

## Parte 3

Notas de aula de ME414 produzidas pelos professores **Samara Kiihl**, **Tatiana Benaglia** e **Benilton Carvalho** modificadas e alteradas pela Profa. **Larissa Avila Matos**

# Simetria e Assimetria da Distribuição

O formato da distribuição influencia se a média será maior ou menor do que a mediana.

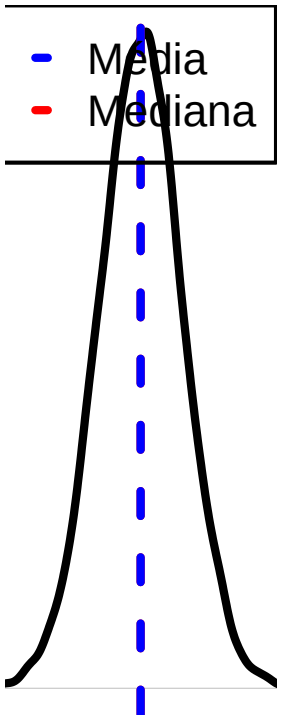
Um valor extremamente grande na cauda direita, puxa a média para a direita.

Em geral, se o formato é:

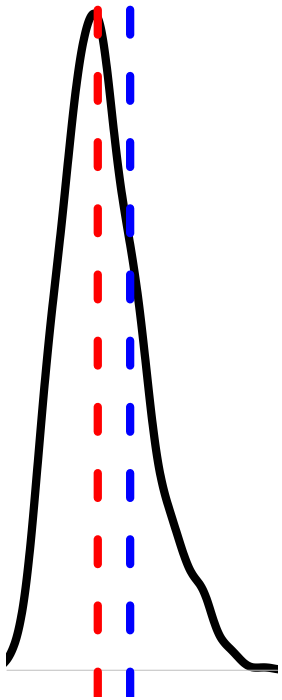
- perfeitamente simétrico: média = mediana.
- assimétrico à direita: média > mediana.
- assimétrico à esquerda: média < mediana.

# Simetria e Assimetria da Distribuição

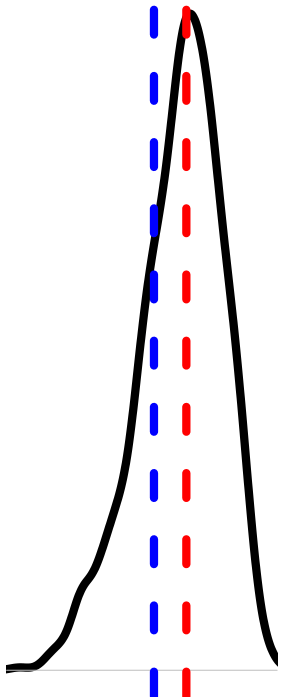
**Média=Mediana**




**Média > Mediana**



**Média < Mediana**



# Dispersão dos Dados

Considere dois conjuntos de dados:

$$A = \{10, 20, 30\},\ \overline{x}_A = 20,\ s_A = 10.$$

$$B = \{10000, 10010, 10020\},\ \overline{x}_B = 10010,\ s_B = 10.$$

Ambos têm o mesmo desvio padrão.

Se compararmos as escalas de cada conjunto de dados, poderíamos dizer que o segundo conjunto tem menor dispersão.

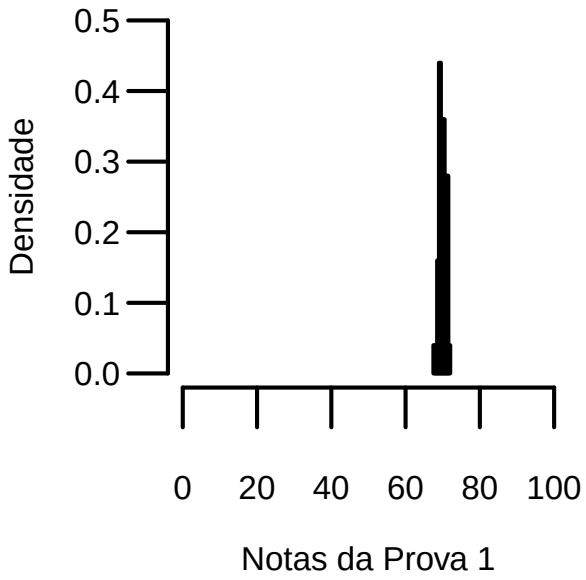
Por exemplo, a maior observação do conjunto $B$, 10020, é 0.2% maior do que a menor observação, 10000.

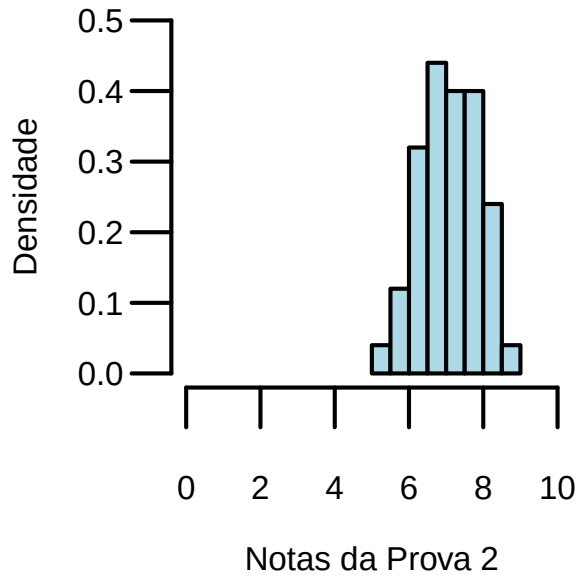
A maior observação do conjunto $A$, 30, é 3 vezes maior do que a menor observação, 10.

# Exemplo

Considere notas de 2 provas:

- Prova 1: 0 a 100. Média da turma: 70. Desvio padrão 1.
- Prova 2: 0 a 10. Média da turma: 7. Desvio padrão 1.




Neste caso, como as escalas são diferentes, não podemos tirar conclusões usando apenas o desvio padrão.

# Coeficiente de Variação

$$\text{Coeficiente de Variação (CV)} = \frac{s}{\bar{x}}$$

**Exemplo:** $A = \{10, 20, 30\}$, $\overline{x}_A = 20$, $s_A = 10$.

$B = \{10000, 10010, 10020\}$, $\overline{x}_B = 10010$, $s_B = 10$.

$CV_A = \frac{s_A}{\overline{x}_A} = 0.5$ e $CV_B = \frac{s_B}{\overline{x}_B} \approx 0.0009$.

**Exemplo:** Prova 1: 0 a 100. Média da turma: 70. Desvio padrão 1.

Prova 2: 0 a 10. Média da turma: 7. Desvio padrão 1.

$CV_1 = \frac{s_1}{\overline{x}_1} = 0.014$ e $CV_2 = \frac{s_2}{\overline{x}_2} \approx 0.14$.

# Usando medidas de posição para descrever dispersão

Média e mediana: medidas de posição **central**.

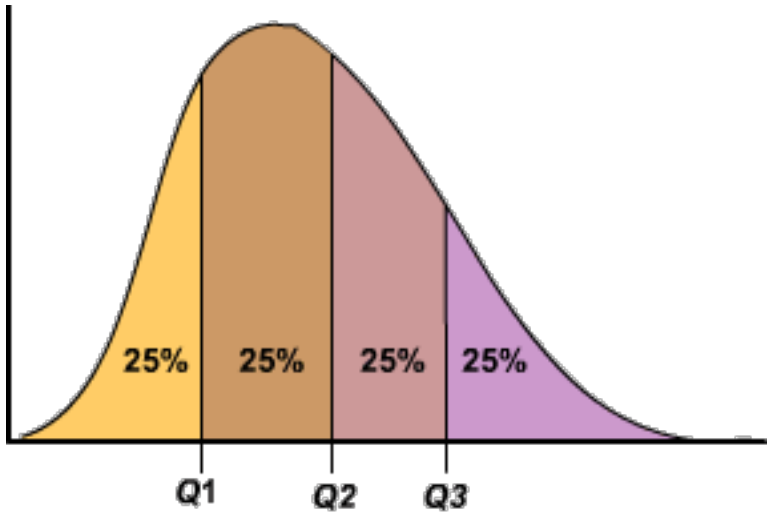
Amplitude e desvio padrão: medidas de dispersão.

Há outros tipos de medida de posição para descrever a distribuição dos dados: **quartis** e **percentis**.

**Quartis** dividem os dados em 4 partes iguais: primeiro quartil ($Q_1$), segundo quartil ($Q_2$) e o terceiro quartil ($Q_3$).

O **p-ésimo percentil** é o valor tal que uma porcentagem **p** dos dados ficam abaixo dele.

# Quartis




Para obter os quartis:

- Ordene os dados em ordem crescente.
- Encontre a mediana: $Q_2$=mediana.
- Considere o subconjunto de dados abaixo da mediana. $Q_1$ é a mediana deste subconjunto de dados.
- Considere o subconjunto de dados acima da mediana. $Q_3$ é a mediana deste subconjunto de dados.

# Exemplo: Quantidade de sódio (mg) em 20 cereais matinais

0, 70, 125, 125, 140, 150, 170, 170, 180, **200**

**200**, 210, 210, 220, 220, 230, 250, 260, 290, 290

Para calcular $Q1$: calcula-se a mediana considerando apenas as 10 primeiras observações ordenadas:

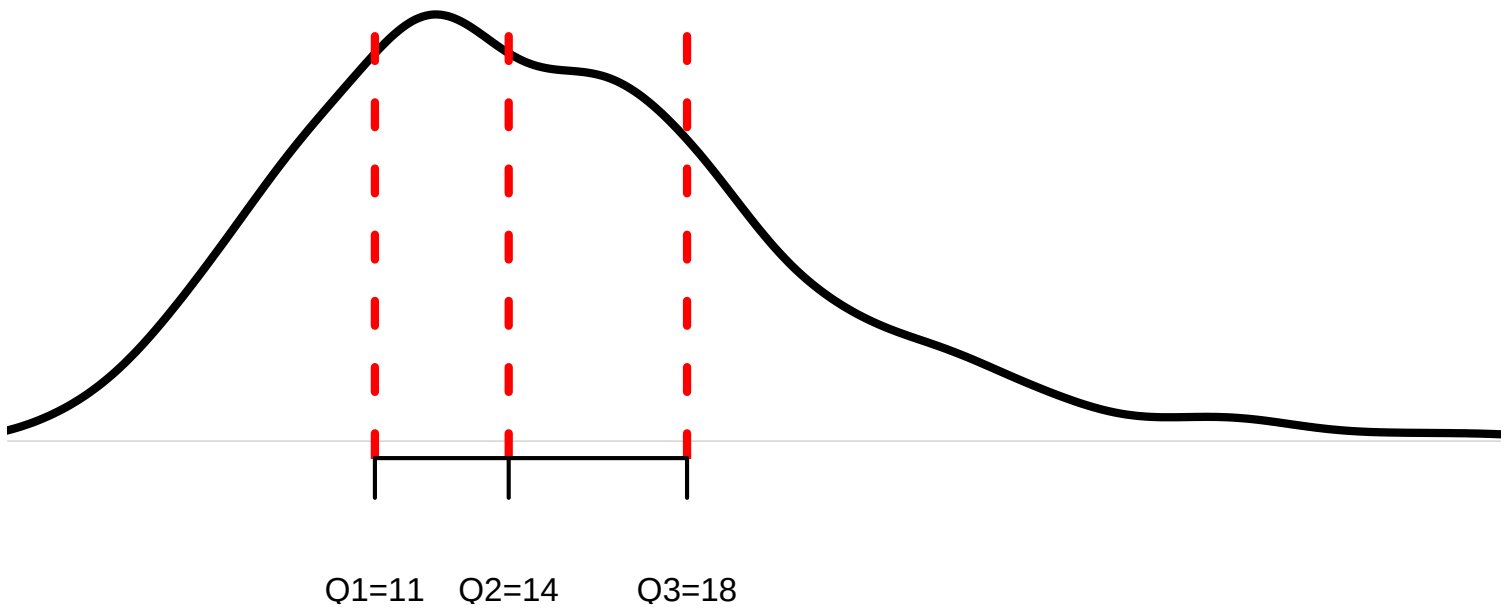
0, 70, 125, 125, $\underbrace{140, 150}_{Q_1=145}$, 170, 170, 180, **200**

Para calcular $Q3$: calcula-se a mediana considerando apenas as 10 últimas observações ordenadas:

**200**, 210, 210, 220, $\underbrace{220, 230}_{Q_3=225}$, 250, 260, 290, 290

# Quartis e Assimetria

Os quartis também fornecem informação sobre o formato da distribuição.




A mediana $Q_2$ é 14. A distância entre $Q_1$ e $Q_2$ é 3, enquanto que a distância entre $Q_2$ e $Q_3$ é 4, indicando que a distribuição é assimétrica à direita.

# Usando quartis para medir dispersão

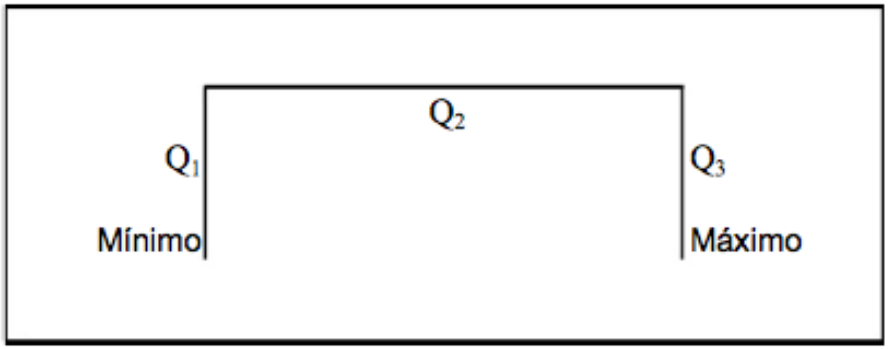
A vantagem do uso de quartis sobre o desvio padrão ou a amplitude, é que os quartis são mais resistentes a dados extremos.

**Intervalo interquartílico (IQ)** $= Q_3 - Q_1$.

Representa 50% dos dados localizados na parte central da distribuição.

# Esquema dos 5 números

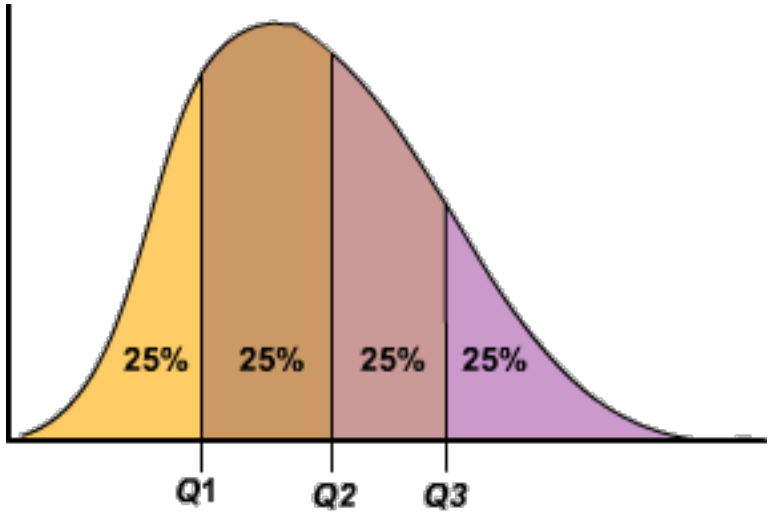
# Esquema dos 5 números




Notação: $x_{(1)}$ = mínimo, $x_{(n)}$ = máximo, onde $x_{(k)}$ é a $k$-ésima observação depois de ordenar os dados.

$$Q_2 = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

# Quartis e simetria da distribuição




Para uma distribuição simétrica ou aproximadamente simétrica:

- $Q_2 - x_{(1)} \approx x_{(n)} - Q_2$
- $Q_2 - Q_1 \approx Q_3 - Q_2$
- $Q_1 - x_{(1)} \approx x_{(n)} - Q_3$
- distâncias entre a mediana e $Q_1$, $Q_3$ menores do que as distâncias entre os extremos e $Q_1$, $Q_3$.

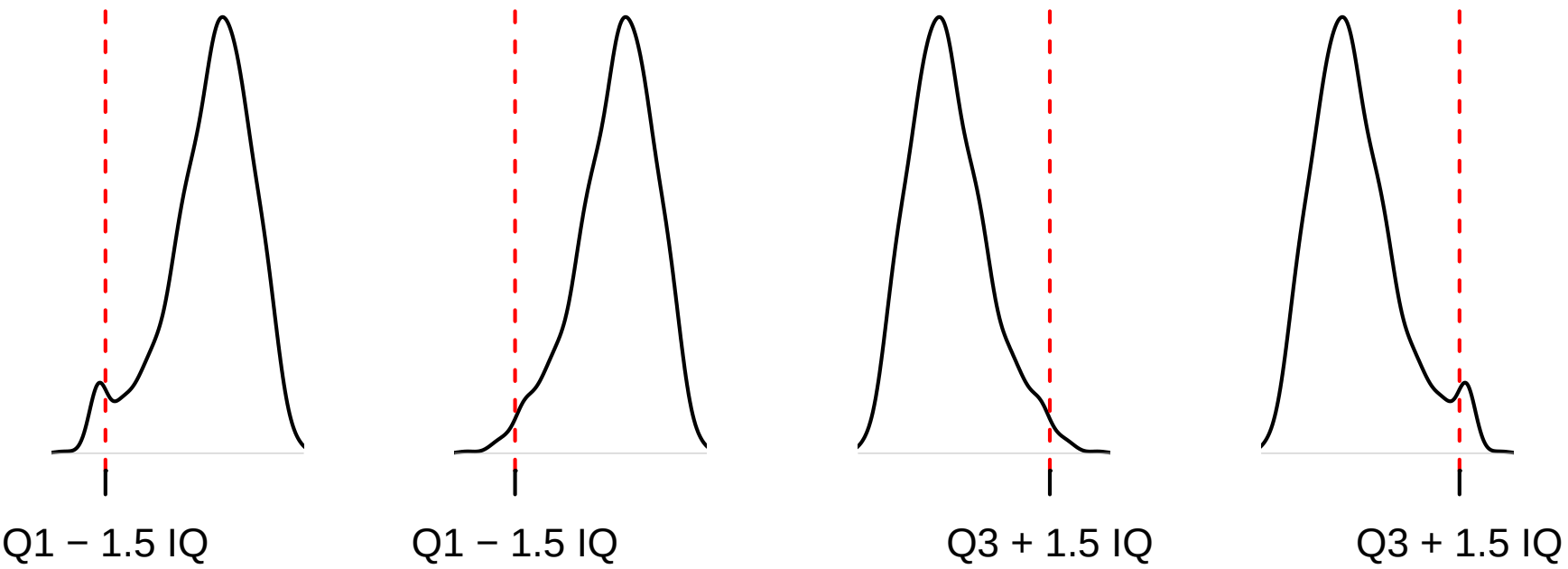
# Dados discrepantes (*outliers*)

Importante: examinar os dados para verificar se há observações discrepantes.

- Média e desvio padrão são muito afetados por observações discrepantes.
- Após detectar a observação discrepante, verificar se não é um erro de digitação ou um caso especial da sua amostra.
- Com poucos dados, podemos detectar um dados discrepante facilmente, apenas observando a sequência ordenada.
- Podemos usar o IQ como um critério mais geral de detecção de dados discrepantes.

# Dados discrepantes (*outliers*)

Uma observação é um potencial *outlier* se está abaixo de $Q_1 - 1.5 \times IQ$ ou se está acima de $Q_3 + 1.5 \times IQ$.

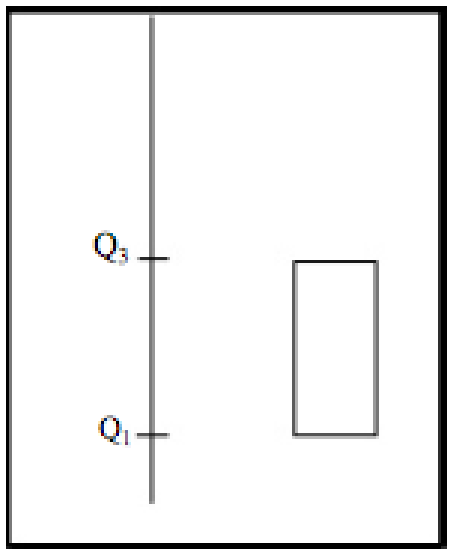



Dizemos *potencial outlier*, pois se a distribuição tem cauda longa (à direita ou à esquerda), algumas observações irão cair no critério, apesar de não serem outliers.

# Boxplot

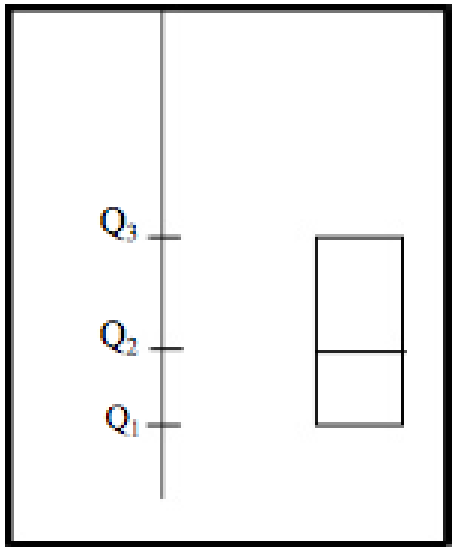
O esquema dos 5 números forma a base do gráfico denominado **boxplot**.

**Primeiro passo:** construir uma caixa que vai do primeiro ao terceiro quartil.



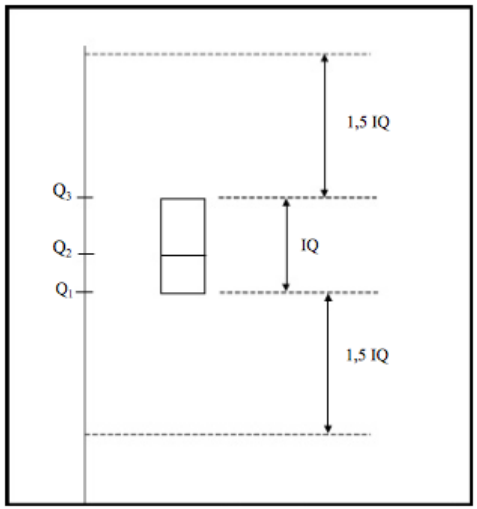
# Boxplot

**Segundo passo:** construir uma linha no meio da caixa, na altura da mediana ($Q_2$).



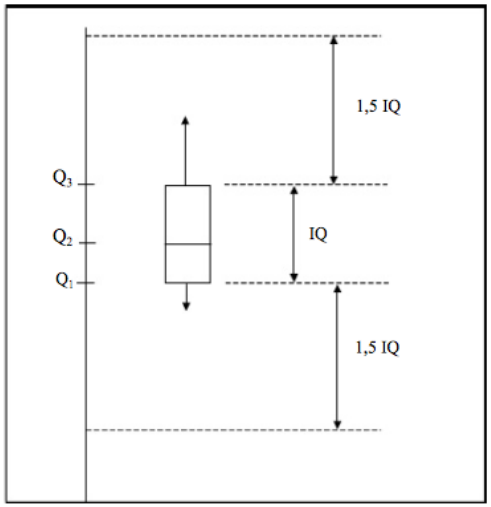
# Boxplot

**Terceiro passo:** definir os limites para que uma observação seja considerada *outlier*.



# Boxplot

**Quarto passo:** desenhar uma linha que saia da parte inferior da caixa e desça até o menor valor dos dados, mas que não ultrapasse os limites do critério de outliers. Desenhar uma linha que saia da parte superior da caixa e suba até o maior valor dos dados, mas que não ultrapasse os limites do critério de outliers. Outliers, quando existem, aparecem indicados separadamente no gráfico.



# Exemplo: População, em 1000 habitantes, dos estados brasileiros

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| RR | 325 | MS | 2079 | PB | 3444 | PR | 9564 |
| AP | 478 | MT | 2505 | GO | 5004 | RS | 10188 |
| AC | 558 | RN | 2777 | SC | 5357 | BA | 13071 |
| TO | 1158 | AM | 2813 | MA | 5652 | RJ | 14392 |
| RO | 1380 | AL | 2823 | PA | 6193 | MG | 17892 |
| SE | 1785 | PI | 2844 | CE | 7431 | SP | 37033 |
| DF | 2052 | ES | 3098 | PE | 7919 | | |

27 estados, $n$ é ímpar, mediana é $x_{(\frac{n+1}{2})} = x_{(\frac{27+1}{2})} = x_{(14)} = 3098$ (ES).

A metade inferior dos dados: 13 observações. A mediana deste subconjunto é $Q_1 = x_{(7)} = 2052$ (DF).

A metade superior dos dados: 13 observações. A mediana deste subconjunto é $Q_3 = x_{(21)} = 7919$ (PE).

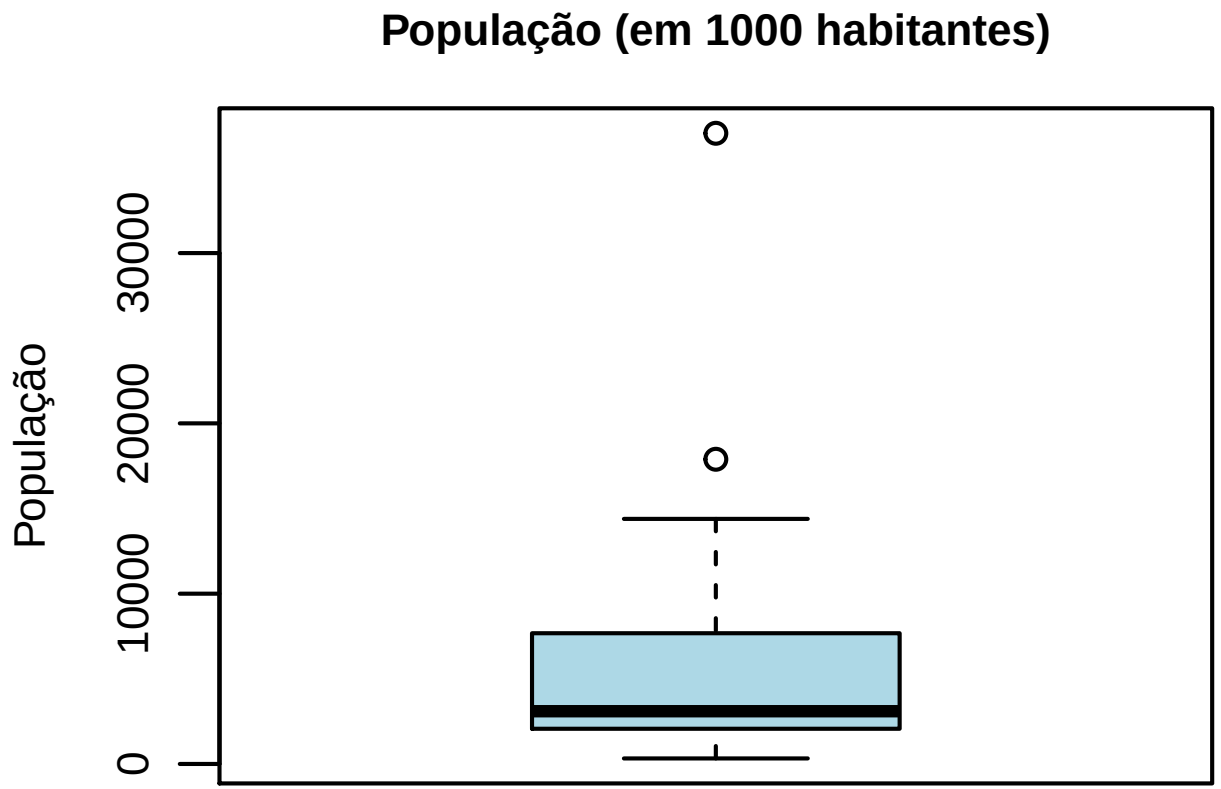
# Exemplo: População dos estados brasileiros

$IQ = Q_3 - Q_1 = 7919 - 2052 = 5867$

$Q_1 - 1.5 \times IQ = -6748.5$

$Q_3 + 1.5 \times IQ = 16720$

Temos outliers?



# Exemplo: Quantidade de sódio (mg) em 20 cereais matinais

$$0,\ 70,\ 125,\ 125,\ \underbrace{140, 150}_{Q_1=145},\ 170,\ 170,\ 180,\ \mathbf{200}$$

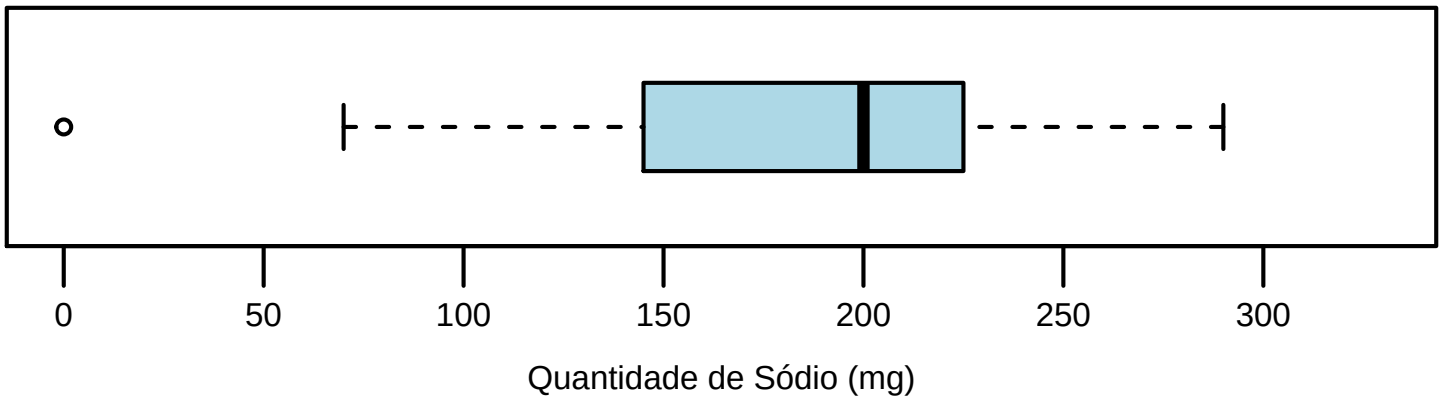
$$\mathbf{200},\ 210,\ 210,\ 220,\ \underbrace{220, 230}_{Q_3=225},\ 250,\ 260,\ 290,\ 290$$

$$IQ = Q_3 - Q_1 = 225 - 145 = 80$$

$$Q_1 - 1.5 \times IQ = 145 - 1.5 \times 80 = 25$$

$$Q_3 + 1.5 \times IQ = 225 + 1.5 \times 80 = 345$$

# Exemplo: Sódio em cereais matinais




Outlier: observação menor do que 25 ou maior do que 345.

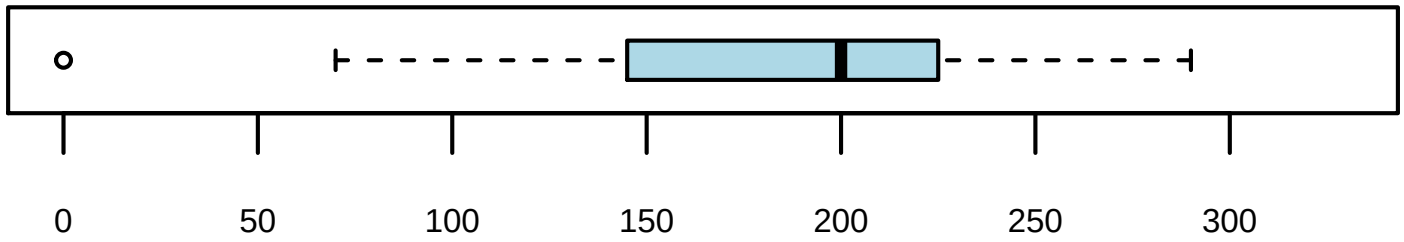
As linhas pontilhadas denotam o mínimo/máximo dos dados que estão na região entre $Q_1 - 1.5 \times IQ$ e $Q_3 + 1.5 \times IQ$.

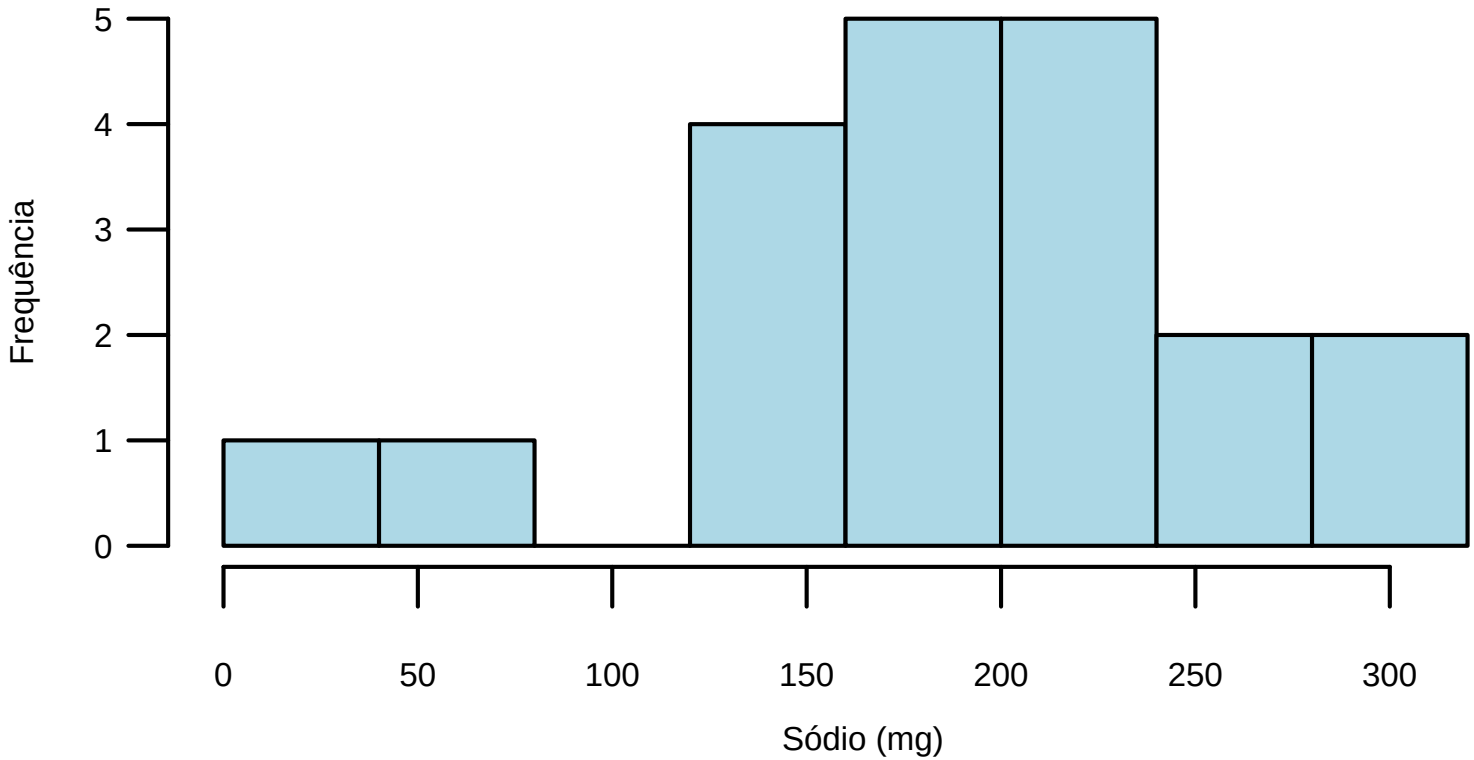
A observação máxima dos dados, 290, está no intervalo, então a linha do lado direito vai até 290.

A observação mínima dos dados, 0, está fora do intervalo (outlier=0).

Desconsiderando o outlier, o valor mínimo dos dados é 70, que está no intervalo. Portanto, a linha do lado direito vai até 70.

# Exemplo: Sódio em cereais matinais

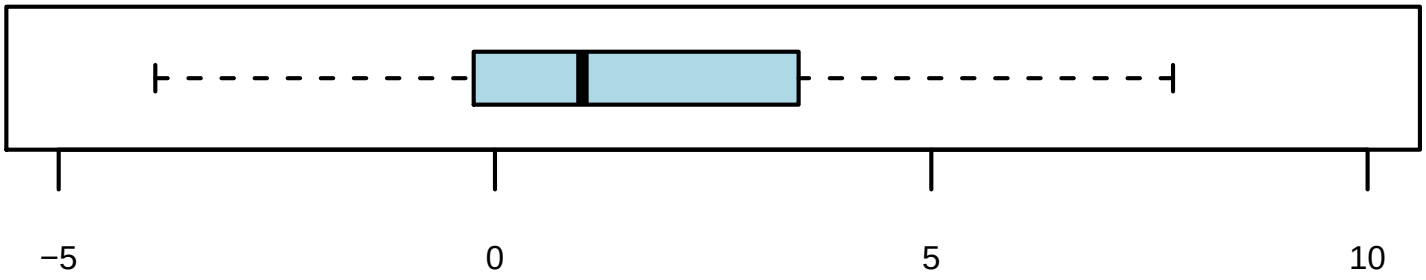


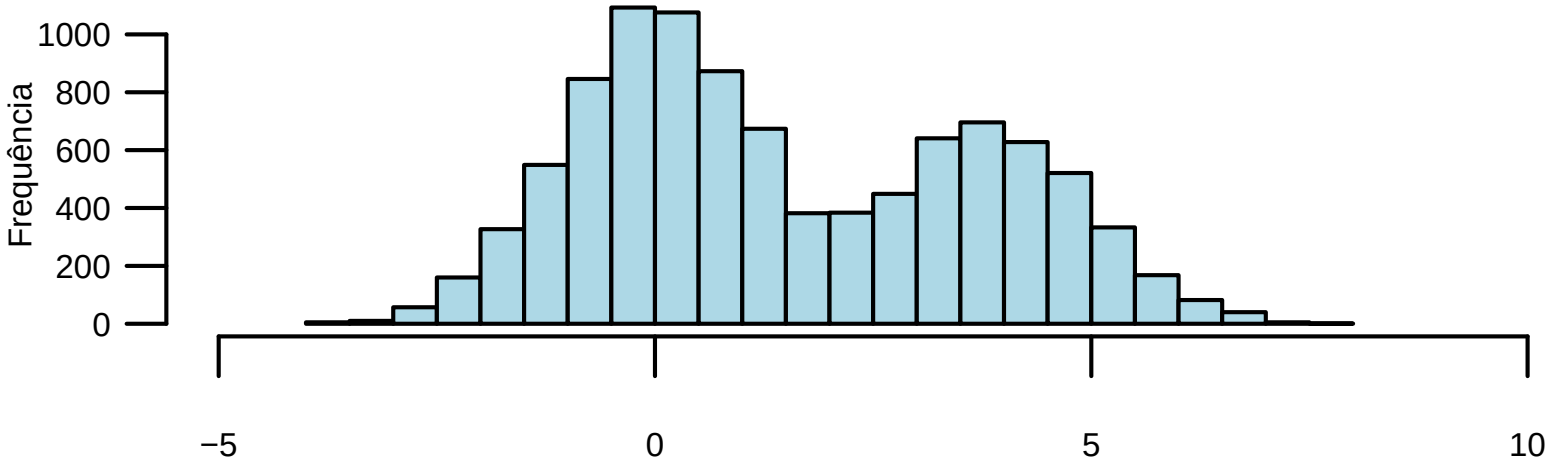



# Boxplot x Histograma

Boxplot não substitui o histograma e vice-versa.

Por exemplo, se a distribuição é bimodal, não observamos isso pelo boxplot.



# Exemplo: Peso (em libras) de 64 alunas de educação física

$\bar{x} = 133$, $Q_1 = 119$, mediana=131.5, $Q_3 = 144$.

Como interpretar os quartis?

- 25% das alunas pesa até 119 libras.
- 25% das alunas pesa mais do que 144 libras.
- 75% das alunas pesa até 144 libras.

Você acredita que a distribuição seja simétrica?

$$Q_2 - Q_1 \approx Q_3 - Q_2 \quad (?)$$

$$\underbrace{Q_2 - Q_1}_{131.5-119=12.5} = \underbrace{Q_3 - Q_2}_{144-131.5=12.5}$$

# Exemplo: Taxa de desemprego na UE em 2003

| | Taxa | Pais |
|---|---|---|
| 1 | 8.3 | Bélgica |
| 2 | 6.0 | Dinamarca |
| 3 | 9.2 | Alemanha |
| 4 | 9.3 | Grécia |
| 5 | 11.2 | Espanha |
| 6 | 9.5 | França |
| 7 | 6.7 | Portugal |
| 8 | 4.4 | Holanda |
| 9 | 3.9 | Luxemburgo |
| 10 | 4.6 | Irlanda |
| 11 | 8.5 | Itália |
| 12 | 8.9 | Finlândia |
| 13 | 4.5 | Áustria |
| 14 | 6.0 | Suécia |
| 15 | 4.8 | Reino Unido |

Qual a amplitude?

$Q_1$, $Q_3$, mediana?

Desenhe um boxplot.

# Exemplo: Taxa de desemprego na UE em 2003

Ordenando os dados:

3.9, 4.4, 4.5, **4.6**, 4.8, 6.0, 6.0, **6.7**, 8.3, 8.5, 8.9, **9.2**, 9.3, 9.5, 11.2

Qual a amplitude?

$11.2 - 3.9 = 7.3$

$Q_1 = 4.6$, $Q_3 = 9.2$, mediana=6.7.

$IQ = Q_3 - Q_1 = 4.6$

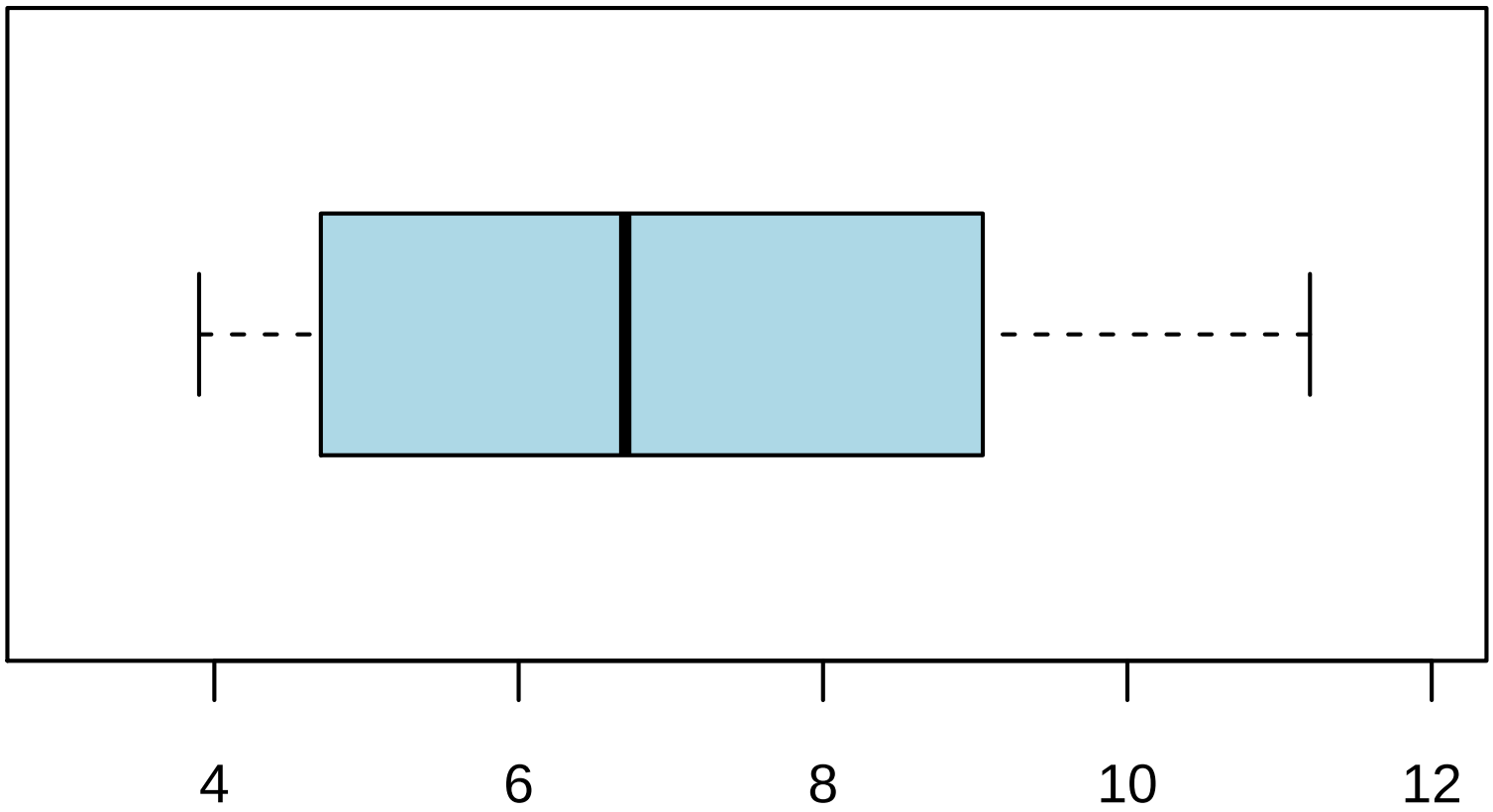
$Q_1 - 1.5 \times IQ = -2.3$

$Q_3 + 1.5 \times IQ = 16.1$

O mínimo e o máximo pertencem ao intervalo $(-2.3, 16.1)$, portanto as linhas pontilhadas terminam no máximo (11.2) e no mínimo (3.9).

# Exemplo: Taxa de desemprego na UE em 2003

$Q_1 = 4.6$, mediana $(Q_2)$=6.7, $Q_3 = 9.2$ e $IQ = 4.6$

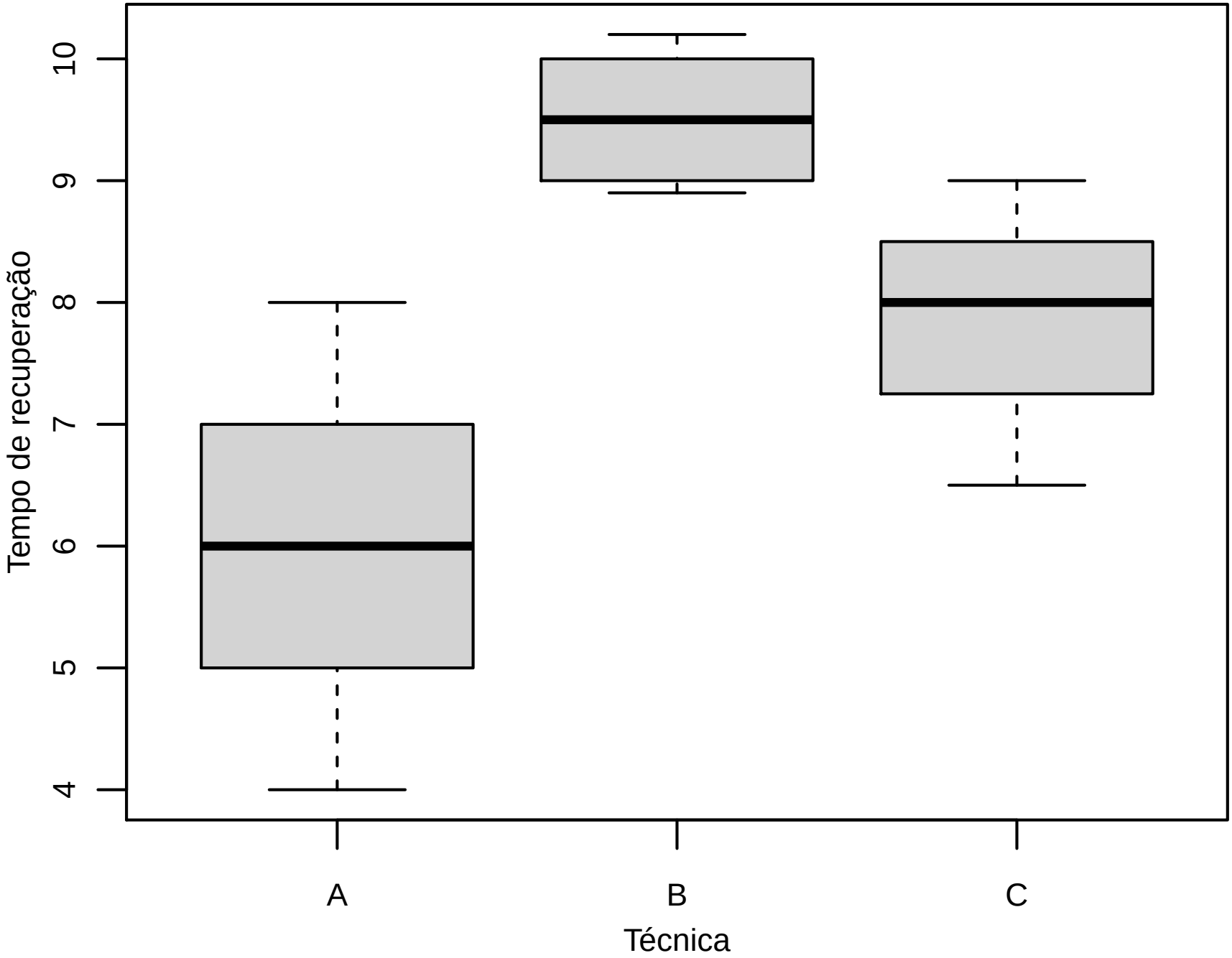


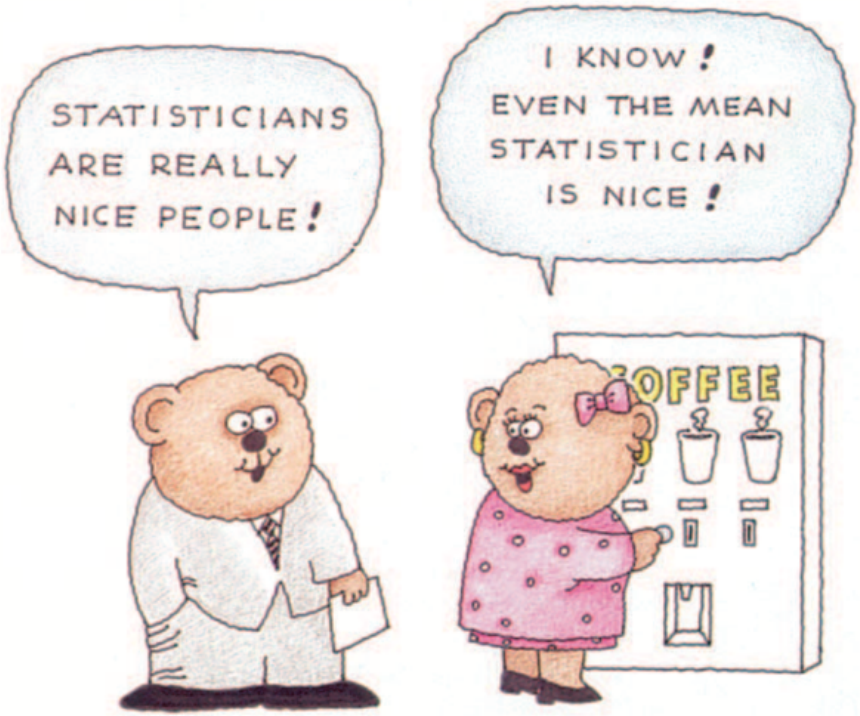
# Exercício

Deseja-se comparar 3 técnicas cirúrgicas para a extração de dente de siso. Cada uma das técnicas foi aplicada em 20 pacientes e os resultados são apresentados a seguir.

Responda:

1. Qual os valores aproximados para a mediana de cada técnica?
2. Qual é o intervalo interquartil? Conclusão?
3. Discuta a variabilidade do tempo de recuperação em cada técnica.
4. Se você é otimista, qual a técnica você escolheria?


Tempo de recuperação
4
5
6
7
8
9
10
A
B
C
Técnica


STATISTICIANS ARE REALLY NICE PEOPLE!
I KNOW! EVEN THE MEAN STATISTICIAN IS NICE!
COFFEE