ME720 - Modelos Lineares Generalizados

Parte 9 - Inferência em MLGs

Profa. **Larissa Avila Matos**

Estimação dos parâmetros

Estimação dos parâmetros

Uma vez definido cada componente do modelo, obteremos expressões gerais para a função de verossimilhança e para as distribuições assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros para os MLGs.

Para n observações independentes, temos que a função log-verossimilhança do modelo é dada por $\ell(\boldsymbol{\beta}, \phi) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i(\boldsymbol{\beta}, \phi)$, onde

$$\ell_i(\boldsymbol{\beta}, \phi) = \frac{[\mathrm{y}_i \theta_i - b(\theta_i)]}{a(\phi)} + c(\mathrm{y}_i, \phi).$$

Então,

$$\ell(\boldsymbol{\beta}, \phi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{[\mathrm{y}_i \theta_i - b(\theta_i)]}{a(\phi)} + \sum_{i=1}^{n} c(\mathrm{y}_i, \phi).$$

Para um GLM $\eta_i = \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij} = g(\mu_i)$, com função de ligação g. Portanto, o sistema de equações de verossimilhança para $\boldsymbol{\beta}$ é dado por

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta}, \phi)}{\partial \beta_j =} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ell_i}{\partial \beta_j} = 0, \quad \forall j.$$

Para diferenciar a log-verossimilhança, usamos a regra da cadeia,

$$\frac{\partial \ell_i}{\partial \beta_j} = \frac{\partial \ell_i}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j}.$$

Uma vez que,

$$\frac{\partial \ell_i}{\partial \theta_i} = \frac{[\mathrm{y}_i - b'(\theta_i)]}{a(\phi)} \quad \text{e} \quad \mu_i = b'(\theta_i), \quad \mathrm{Var}(Y_i) = b''(\theta_i) a(\phi),$$

temos que

$$\frac{\partial \ell_i}{\partial \theta_i} = \frac{(\mathrm{y}_i - \mu_i)}{a(\phi)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_i} = b''(\theta_i) = \frac{\mathrm{Var}(Y_i)}{a(\phi)}.$$

Também uma vez que $\eta_i = \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij}$, então $\frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} = x_{ij}$.

Finalmente, $\eta_i = g(\mu_i) \Rightarrow \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i}$, depende da função de ligação para o modelo escolhido.

Resumindo, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell_i}{\partial \beta_j} &= \frac{\partial \ell_i}{\partial \theta_i}\frac{\partial \theta_i}{\partial \mu_i}\frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i}\frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} \\
&= \frac{(\mathrm{y}_i - \mu_i)}{a(\phi)}\frac{a(\phi)}{\mathrm{Var}(Y_i)}\frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} x_{ij} = \frac{(\mathrm{y}_i - \mu_i)\, x_{ij}}{\mathrm{Var}(Y_i)}\frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i}
\end{aligned}$$

A soma das n observações produz o sistema de equações de verossimilhança para um MLG.

Equações de verossimilhança para um MLG

Equações de verossimilhança para um MLG:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta}, \phi)}{\partial \beta_j} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(\mathrm{y}_i - \mu_i)\, x_{ij}}{\mathrm{Var}(\mathrm{Y}_i)} \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, p, \quad \text{e} \\
\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta}, \phi)}{\partial \phi} &= 0,
\end{aligned}$$

onde $\eta_i = \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij} = g(\mu_i)$ para uma função de ligação g.

Seja $\boldsymbol{V}$ a matriz diagonal de variâncias das n observações, e seja $\boldsymbol{D}$ uma matriz diagonal com os elementos de $\frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i}$.

Para as expressões de um MLG $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$, com matriz de planejamento $\boldsymbol{X}$, as equações de verossimilhança têm a forma

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0}.$$

Apesar de $\boldsymbol{\beta}$ não aparecer nessas equações, ele aparece implicitamente através de $\mu_i = g^{-1}(\sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij})$.

Diferentes funções de ligação gera diferentes conjuntos de equações.

Essas equações são funções não lineares de $\boldsymbol{\beta}$, e esse problema deve ser resolvido iterativamente. Há várias opções de algoritmos numéricos para resolução de sistemas não lineares: Newton-Raphson, Escore de Fisher (EF), Nelder-Mead, BFGS entre outros.

Exercício

- Encontrar as equações de máxima verossimilhança para o Modelo Poisson Log Linear.

Relação entre média e variância

Os sistema de equações de máxima verossimilhança depende da distribuição de Y_i somente pela média ($\mathbb{E}(Y_i)$) e pela variância ($\mathrm{Var}(Y_i)$).

Além disso, a variância depende da média pela forma

$$\mathrm{Var}(Y_i) = V(\mu_i),$$

para alguma função $V(\cdot)$.

Ou seja, a relação entre a média e a variância caracteriza a distribuição de Y_i.

Exemplo: Se Y_i tem distribuição pertencente a família exponencial e $\mathrm{Var}(Y_i) = \mu_i$, então necessariamente Y_i tem distribuição de Poisson.

Distribuição Assintótica de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$

Através das propriedades de máxima verossimilhança, e sob condições de regularidade, para n grande o estimador de máxima verossimilhança $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ de $\boldsymbol{\beta}$ para um MLG é eficiente e tem distribuição Normal.

Temos que a matrix de informação $\boldsymbol{I}$, tem elementos dados por

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(-\frac{\partial^2 \ell_i}{\partial\beta_j \partial\beta_k}\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{\partial \ell_i}{\partial\beta_j}\frac{\partial \ell_i}{\partial\beta_k}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{(Y_i-\mu_i)\,x_{ij}}{\operatorname{Var}(Y_i)}\frac{\partial\mu_i}{\partial\eta_i}\frac{(Y_i-\mu_i)\,x_{ik}}{\operatorname{Var}(Y_i)}\frac{\partial\mu_i}{\partial\eta_i}\right) \\
&= \frac{x_{ij}x_{ik}}{\operatorname{Var}(Y_i)^2}\left(\frac{\partial\mu_i}{\partial\eta_i}\right)^2 \underbrace{\mathbb{E}\left((Y_i-\mu_i)^2\right)}_{=\operatorname{Var}(Y_i)} = \frac{x_{ij}x_{ik}}{\operatorname{Var}(Y_i)}\left(\frac{\partial\mu_i}{\partial\eta_i}\right)^2.
\end{aligned}
$$

A matriz $\boldsymbol{I}$ é chamada de matriz de informação esperada.

Então,

$$\mathbb{E}\left(-\frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_j \partial \beta_k}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{ij} x_{ik}}{\text{Var}(Y_i)} \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i}\right)^2$$

Seja, $\boldsymbol{W}$ uma matriz diagonal com elementos dados por

$$w_i = \frac{(\partial \mu_i / \partial \eta_i)^2}{\text{Var}(Y_i)}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{I} = \boldsymbol{X}' \boldsymbol{W} \boldsymbol{X}$$

A forma de $\boldsymbol{W}$ depende da função de ligação $g(\cdot)$, uma vez que $\partial \mu_i / \partial \eta_i = g'(\mu_i)$.

Portanto, a matriz de covariância de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ é dada pela inversa da matriz de informação $\boldsymbol{I}$.

Distribuição Assintótica de $\widehat{\beta}$ para um MLG $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{X}\beta$:

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ tem distribuição aproximadamente normal, $N_p(\boldsymbol{\beta}, (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{X})^{-1})$,

onde $\boldsymbol{W}$ é a matriz diagonal com elementos $w_i = \frac{(\partial\mu_i/\partial\eta_i)^2}{\mathrm{Var}(Y_i)}$.

A matriz de covariância assintótica é estimada por $\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = (\boldsymbol{X}'\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{X})^{-1}$, onde $\widehat{\boldsymbol{W}}$ é $\boldsymbol{W}$ avaliado em $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$.

Obs:

1. Para a FE com parâmetro de escala, θ e ϕ são parâmetros ortogonais.
2. $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ e $\widehat{\phi}$ são assintoticamente independentes.

Matriz de covariância para os valores ajustados

O preditor linear estimado é dado por

$$\widehat{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}.$$

Para n grande, temos

$$\text{Var}(\widehat{\boldsymbol{\eta}}) = \boldsymbol{X}'\text{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})\boldsymbol{X} \approx \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}.$$

Podemos obter a variância assintótica de $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ ($\text{Var}(\widehat{\boldsymbol{\mu}})$) por $\text{Var}(\widehat{\boldsymbol{\eta}})$, através do método delta. Então,

$$\text{Var}(\widehat{\boldsymbol{\mu}}) \approx \boldsymbol{D}'\text{Var}(\widehat{\boldsymbol{\eta}})\boldsymbol{D} \approx \boldsymbol{D}\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{D},$$

onde $\boldsymbol{D}$ é uma matriz diagonal com elementos $\partial\mu_i/\partial\eta_i$.

Exercício: Pesquisar sobre o método delta.

Exercício

- Voltando ao exemplo da Poisson, encontre os elementos da matriz $\boldsymbol{W}$.

Estimação de $\boldsymbol{\beta}$

Como encontramos os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros de um MLG?

Problema: O sistema de equações são geralmente não-lineares em $\boldsymbol{\beta}$.

Solução: Métodos iterativos para resolver sistema de equações não lineares. Focaremos em dois métodos:

- *Newton-Raphson*
- *Escore de Fisher*

Método de Newton-Raphson

O algoritmo Newton-Raphson, método de Newton-Raphson, foi desenvolvido por Isaac Newton e Joseph Raphson e tem o objetivo estimar as raízes de uma função.

Suponha que queremos encontrar a solução da equação $g(x_0) = 0$, onde g é uma função diferenciável. Dado um número x próximo de x_0, segue da expansão em série de Taylor em torno de x que

$$0 = g(x_0) \approx g(x) + g'(x)(x_0 - x).$$

Resolvendo para x_0, temos

$$x_0 \approx x - \frac{g(x)}{g'(x)}.$$

Assim, dado um valor estimado x_t, então podemos ter um novo valor estimado x_{t+1} por

$$x_{t+1} \approx x_t - \frac{g(x_t)}{g'(x_t)}.$$

Este procedimento é repetido para $t = 1, 2, 3, \ldots$ até $|g(x_t)/g'(x_t)|$ ser suficientemente pequeno.

Método de Newton-Raphson

Voltando ao nosso problema, queremos encontrar a solução da equação $\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$.

No passo t, o processo iterativo $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ aproxima $\ell(\boldsymbol{\beta})$ próximo de $\boldsymbol{\beta}^{(t)}$ pela expansão em série de Taylor de segunda ordem,

$$\ell(\boldsymbol{\beta}) \approx \ell(\boldsymbol{\beta}^{(t)}) + \boldsymbol{u}^{(t)}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^{(t)}) + \left(\frac{1}{2}\right)(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^{(t)})'\boldsymbol{H}^{(t)}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^{(t)}),$$

onde $\boldsymbol{u}^{(t)}$ e $\boldsymbol{H}^{(t)}$ são $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{H}$ avaliados em $\boldsymbol{\beta}^{(t)}$ respectivamente, com

- $\boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1}, \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_2}, \ldots, \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_p}\right)'$, e
- $\boldsymbol{H}$ a matriz *Hessiana*, onde $H_{ij} = \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_i \partial \beta_j}$.

Obs: $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$ valor inicial (chute inicial).

Resolvendo, $\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \approx \boldsymbol{u}^{(t)} + \boldsymbol{H}^{(t)}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^{(t)}) = \mathbf{0}$, temos a seguinte aproximação

$$\boldsymbol{\beta}^{(t+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(t)} - (\boldsymbol{H}^{(t)})^{-1}\boldsymbol{u}^{(t)},$$

assumindo que $\boldsymbol{H}^{(t)}$ é não singular.

O procedimento descrito é repetido até que mudanças em $\ell(\boldsymbol{\beta}^{(t)})$ entre ciclos sucessivos são suficientemente pequenas.

Para muitos MLGs, a matriz Hessiana é negativa definida, e a log verossimilhança é uma função estritamente côncava. Então, as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo existem e são únicas sob condições bastante gerais. A convergência de $\boldsymbol{\beta}^{(t+1)}$ para $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ na vizinhança de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ é rápida.

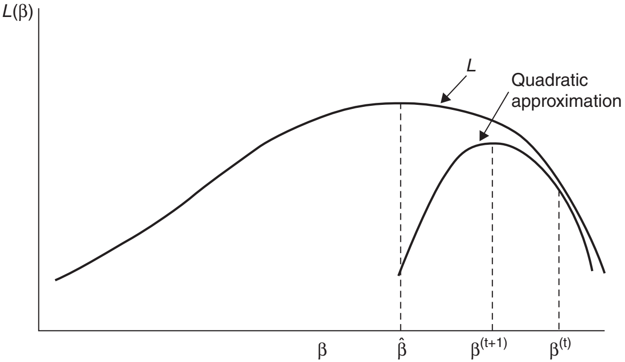


Figure 4.2 Illustration of a cycle of the Newton–Raphson method.

Figura ilustrativa do livro texto (Agresti, A. (2015)).

Método de Escore de Fisher

O método de Escore de Fisher é um método iterativo alternativo para resolver o sistema de equações de verossimilhança.

A diferença entre o método de Escore de Fisher e o método de Newton-Raphson está na maneira como escolhemos a matriz *Hessiana*.

O método de Escore de Fisher usa o valor esperado da matriz *Hessiana*, chamada de matriz de informação esperada, enquanto método de Newton-Raphson usa a própria matriz *Hessiana*, chamada de matriz de informação observada.

Portanto, temos a seguinte aproximação

$$\boldsymbol{\beta}^{(t+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(t)} + (\boldsymbol{I}^{(t)})^{-1}\boldsymbol{u}^{(t)},$$

onde $\boldsymbol{I}^{(t)}$ é $\boldsymbol{I}$ avaliado em $\boldsymbol{\beta}^{(t)}$, ou seja $\boldsymbol{I}^{(t)}$ tem elementos $-\mathbb{E}(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_i \partial \beta_j})$ avaliado em $\boldsymbol{\beta}^{(t)}$.

Os algoritmos de Escore de Fisher e de Newton-Raphson são idênticos para os MLGs que usam a função de ligação canônica (Nelder e Wedderburn, 1972).

Newton-Raphson e Escore de Fisher

Newton-Raphson e Escore de Fisher para o parâmetro de uma binomial

Exemplo para o método de Newton-Raphson e Escore de Fisher de um problema mais simples para o qual sabemos a resposta.

Newton-Raphson e Escore de Fisher

Newton-Raphson e Escore de Fisher para o parâmetro de uma binomial

Exemplo para o método de Newton-Raphson e Escore de Fisher de um problema mais simples para o qual sabemos a resposta.

Seja Y uma a.a de uma distribuição $Bin(n, p)$, a função de log-verossimilhança é dada por

$$\ell(p) = \log(p^{n\text{y}}(1-p)^{n-n\text{y}}) = n\text{y}\log(p) + (n - n\text{y})\log(1-p).$$

Sabemos que

$$u = \frac{\partial \ell}{\partial p} = \frac{(n\text{y} - np)}{p(1-p)} \quad \text{e} \quad H = \frac{\partial^2 \ell}{\partial p^2} = -\left[\frac{n\text{y}}{p^2} + \frac{n - n\text{y}}{(1-p)^2}\right].$$

Maximizando a log-verossimilhança temos que o estimador de MV para p é $\widehat{p} = \text{y}$.

Cada passo do algoritmo de Newton-Raphson é dado por

$$p^{(t+1)} = p^{(t)} + \left[\frac{n\mathrm{y}}{(p^{(t)})^2} + \frac{n - n\mathrm{y}}{(1-p^{(t)})^2}\right]^{-1} \frac{(n\mathrm{y} - np^{(t)})}{p^{(t)}(1-p^{(t)})}.$$

- Se, $p^{(0)} = \frac{1}{2} \Rightarrow p^{(1)} = \mathrm{y}$.
- Quando $p^{(t)} = \mathrm{y}$, temos que $p^{(t+1)} = \mathrm{y}$, ou seja, não temos nenhuma alteração da iteração t para $t+1$, o qual é o estimador de MV.

Calculando a esperança de H, temos que

$$I = \frac{n}{p(1-p)},$$

e cada passo do algoritmo de Escore de Fisher é dado por

$$\begin{aligned} p^{(t+1)} &= p^{(t)} + \left[\frac{n}{p^{(t)}(1-p^{(t)})^2}\right]^{-1} \frac{(n\mathrm{y} - np^{(t)})}{p^{(t)}(1-p^{(t)})} \\ &= p^{(t)} + (\mathrm{y} - p^{(t)}) = \mathrm{y} \end{aligned}$$

- Ou seja, $p^{(t+1)}$ é o estimador de MV após apenas uma iteração e ficando nesse valor em todas as iterações.

Estimação do parâmetro de escala

1. Maximizar $\ell(\boldsymbol{\beta}, \phi)$ com respeito a ϕ. (Muito sensível a suposição da distribuição)

2. Sabemos que $\text{Var}(Y_i) = a(\phi)V(\mu_i)$, então

$$\frac{\mathbb{E}((Y_i - \mu_i)^2)}{V(\mu_i)} = a(\phi)$$

$$\Rightarrow \widehat{a}(\phi) = \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i - \widehat{\mu}_i)^2}{\text{Var}(\widehat{\mu}_i)}.$$

Inferência

Vimos que $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ tem distribuição aproximadamente normal, i.e.,

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} \approx N_p(\boldsymbol{\beta}, (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{X})^{-1}),$$

onde $\boldsymbol{W}$ é a matriz diagonal com elementos $w_i = \frac{(\partial\mu_i/\partial\eta_i)^2}{\text{Var}(Y_i)}$, com $\text{Var}(Y_i) = b''(\theta_i)a(\phi)$.

Se $\widehat{\beta_j}$ é a j-ésima componente do vetor $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, então

$$\widehat{\beta_j} \approx N_p(\beta_j, \psi_j),$$

em que ψ_j é o j-ésimo elemento da diagonal principal de $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{X})^{-1}$.

Vimos também que $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ é um estimador consistente, então

$$\frac{\widehat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\widehat{\psi}_j}} \approx N(0,1),$$

onde $\widehat{\psi}_j$ é o j-ésimo elemento da diagonal principal de $(\boldsymbol{X}'\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{X})^{-1}$. Veremos mais adiate que $(\widehat{\beta}_j - \beta_j)/\sqrt{\psi_j}$ é a estatística de Wald.

Portanto, um intervalo $(1-\alpha)\%$ de confiança para β_j é dado por

$$IC(100(1-\alpha)\%, \beta_j) = \left[\widehat{\beta}_j - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{\psi}_j};\ \ \widehat{\beta}_j + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{\psi}_j}\right].$$

Exemplo

Exemplo: Exposição de Bactérias

Vamos considerar um exemplo de um modelo log-linear de Poisson para ajustar dados de contagem.

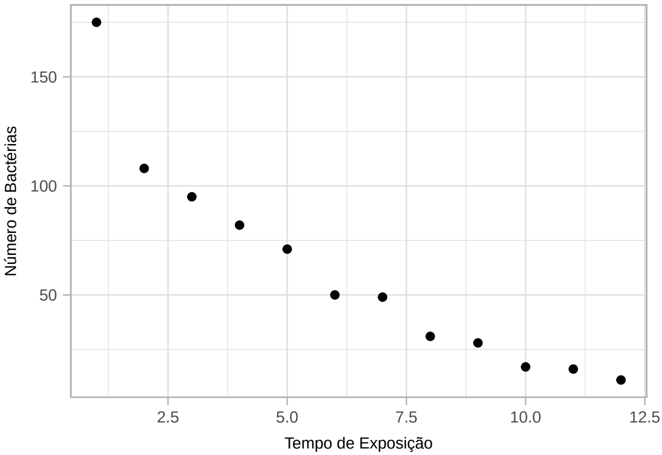
Recordando - Variáveis:

- variável resposta: número de bactérias sobreviventes em amostras de um produto alimentício exposto a uma temperatura de 300^oF.
- variável explicativa: tempo de exposição do produto (em minutos).

(Montgomery, Peck e Vining, 2001) (Paula, 2013a).

Descrição dos Dados:

Bactérias	175	108	95	82	71	50	49	31	28	17	16	11
Exposição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12



Exemplo: Exposição de Bactérias

Ajuste Modelo Log-linear de Poisson:

$$log(\mu_i) = \alpha + \beta \text{ tempo}_i,$$

em que $y_i \sim P(\mu_i)$. As estimativas desse modelo usando a função `glm()` do `R` é dada a seguir.

```
fit<-glm(bacterias~exposicao,family=poisson(link = "log"))
summary(fit)$coefficients
```

```
              Estimate Std. Error   z value     Pr(>|z|)
(Intercept)  5.3055715 0.06348273  83.57504 0.000000e+00
exposicao   -0.2288956 0.01269994 -18.02336 1.277325e-72
```

Iremos agora implementar a “nossa” função `glm` do modelo log-linear de Poisson atráves do método de Newton- Raphson. Encontraremos:

- as estimativas de $\boldsymbol{\beta}$,
- a matriz de covariância estimada de $\boldsymbol{\beta}$,
- testes de hipóteses simples, e
- intervalos de confianças.

Obs.: Para o modelo log-linear de Poisson o método de Newton- Raphson é equivalente ao método de Ecore de Fisher.

```r
newton <-function(y,X,init,eps=1e-6,maxiter=50){
  beta <- init
  n<-dim(X)[1]
  out <- matrix(NA, nrow=maxiter+1,ncol=length(t(beta)))
  out[1,] <- t(init)
  i <- 1
  continue <- T
  while (continue) {
    i <- i+1
    beta.o <- beta
    W<-diag(n)
    diag(W)<-exp(X%*%beta.o)
    mu<-exp(X%*%beta.o)
    beta <- beta.o  + solve(t(X)%*%W%*%X)%*%t(X)%*%(y-mu)
      if(sum(is.na(beta))>0){stop("NA nas estimativas")}
    out[i,] <- t(beta)
    continue <- (abs(beta-beta.o) > eps) && (i <= maxiter)
  }
  if (i > maxiter) {
    warning("Máximo número de iterações atingido")
  }
  out <- out[!is.na(out[,1]),]
  saida<-list(out=out,est=out[i,],iter=i)
  return(saida)
}
```

```r
chute.inicial<-matrix(c(1,1),2,1)
intercepto<-rep(1,length(exposicao))
X<-cbind(intercepto,exposicao)
newton.possoin<-newton(bacterias,X,chute.inicial,eps=1e-6,maxiter=20)
newton.possoin
```

```
$out
             [,1]        [,2]
 [1,]  1.00000000  1.00000000
 [2,]  0.09664021  0.99162795
 [3,] -0.64604637  0.96932626
 [4,] -0.98475052  0.91193810
 [5,] -0.43927926  0.77734889
 [6,]  1.37981370  0.52942633
 [7,]  3.33639853  0.26268220
 [8,]  4.26155271  0.08280845
 [9,]  4.82694578 -0.06209716
[10,]  5.14919441 -0.16720809
[11,]  5.28158348 -0.21856597
[12,]  5.30484337 -0.22856887
[13,]  5.30557072 -0.22889523
[14,]  5.30557147 -0.22889557

$est
[1]  5.3055715 -0.2288956

$iter
[1] 14
```

```r
estimativas<-newton.possoin$est
estimativas
```

```
[1]  5.3055715 -0.2288956
```

```r
W<-diag(length(exposicao))
diag(W)<-exp(X%*%estimativas)
I=t(X)%*%W%*%X
se=sqrt(diag(solve(I)))
se
```

```
intercepto  exposicao
0.06348273 0.01269994
```

```r
z.value=estimativas/se
z.value
```

```
intercepto  exposicao
  83.57504  -18.02336
```

```r
p.value=pnorm(abs(z.value), lower.tail = F)
p.value
```

```
  intercepto    exposicao
0.000000e+00 6.386627e-73
```

```r
cbind(estimativas,se,z.value,p.value)
```

```
           estimativas         se   z.value      p.value
intercepto   5.3055715 0.06348273  83.57504 0.000000e+00
exposicao   -0.2288956 0.01269994 -18.02336 6.386627e-73
```

```r
summary(fit)$coefficients
```

```
              Estimate Std. Error   z value     Pr(>|z|)
(Intercept)  5.3055715 0.06348273  83.57504 0.000000e+00
exposicao   -0.2288956 0.01269994 -18.02336 1.277325e-72
```

```r
z.alpha<-qnorm(0.975)
LI=estimativas-z.alpha*se
LI
```

```
intercepto  exposicao
  5.181148  -0.253787
```

```r
LS=estimativas+z.alpha*se
LS
```

```
intercepto  exposicao
 5.4299953 -0.2040042
```

$$IC(95\%, \beta_0) = [5.1811476;\ 5.4299953]$$

$$IC(95\%, \beta_1) = [-0.253787;\ -0.2040042]$$

Usando o estimador de minimos quadrados do modelo linear normal como valor inicial.

```
EMQ<-matrix(solve(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%bacterias,2,1)
EMQ
```

```
          [,1]
[1,] 142.19697
[2,] -12.47902
```

```
n1<-newton(bacterias,X,EMQ,eps=1e-6,maxiter=20)
```

```
Warning in newton(bacterias, X, EMQ, eps = 1e-06, maxiter = 20): Máximo
número de iterações atingido
```

```
n1$est
```

```
[1] 122.19697 -12.47902
```

```r
n1$out
```

```
          [,1]      [,2]
 [1,] 142.197 -12.47902
 [2,] 141.197 -12.47902
 [3,] 140.197 -12.47902
 [4,] 139.197 -12.47902
 [5,] 138.197 -12.47902
 [6,] 137.197 -12.47902
 [7,] 136.197 -12.47902
 [8,] 135.197 -12.47902
 [9,] 134.197 -12.47902
[10,] 133.197 -12.47902
[11,] 132.197 -12.47902
[12,] 131.197 -12.47902
[13,] 130.197 -12.47902
[14,] 129.197 -12.47902
[15,] 128.197 -12.47902
[16,] 127.197 -12.47902
[17,] 126.197 -12.47902
[18,] 125.197 -12.47902
[19,] 124.197 -12.47902
[20,] 123.197 -12.47902
[21,] 122.197 -12.47902
```

```r
n2<-newton(bacterias,X,EMQ,eps=1e-6,maxiter=200)
n2$iter
```

```
[1] 130
```

```r
n2$est
```

```
[1]  5.3055715 -0.2288956
```

Valores iniciais com problemas:

```r
newton(bacterias,X,matrix(c(-1,-1),2,1),eps=1e-6,maxiter=20)
```

```
Error in newton(bacterias, X, matrix(c(-1, -1), 2, 1), eps = 1e-06, maxiter = 20): NA nas estimativas
```

```r
EMQ1<-matrix(solve(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%sqrt(bacterias),2,1)
newton(bacterias,X,EMQ1,eps=1e-6,maxiter=20)
```

```
$out
           [,1]       [,2]
 [1,] 12.572735 -0.8160687
 [2,] 11.566699 -0.8109121
 [3,] 10.550649 -0.7971663
 [4,]  9.509567 -0.7617262
 [5,]  8.414967 -0.6781443
 [6,]  7.255059 -0.5215246
 [7,]  6.185418 -0.3472236
 [8,]  5.528580 -0.2561283
 [9,]  5.322676 -0.2309032
[10,]  5.305679 -0.2289080
[11,]  5.305571 -0.2288956
[12,]  5.305571 -0.2288956

$est
[1]  5.3055715 -0.2288956

$iter
[1] 12
```

Referência

- Notas de aula do Prof. Gilberto de Paula.
- Paula, G.A. (2013). Modelos de Regressão com Apoio Computacional.
- Agresti, A. (2015). *Foundations of Linear and Generalized Linear Models*. Wiley series in probability and statistics.