ME951 - Estatística e Probabilidade I

Parte 12

Notas de aula de ME414 produzidas pelos professores **Samara Kiihl**, **Tatiana Benaglia** e **Benilton Carvalho** modificadas e alteradas pela Profa. **Larissa Avila Matos**

Variáveis Aleatórias Contínuas

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Variáveis aleatórias discretas: v.a. com valores possíveis enumeráveis. Soma das probabilidades de todos os valores possíveis igual a 1.

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Variáveis aleatórias discretas: v.a. com valores possíveis enumeráveis. Soma das probabilidades de todos os valores possíveis igual a 1.
- Variáveis aleatórias contínuas: v.a. com valores possíveis em um intervalo no conjunto de números reais.

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Variáveis aleatórias discretas: v.a. com valores possíveis enumeráveis. Soma das probabilidades de todos os valores possíveis igual a 1.
- Variáveis aleatórias contínuas: v.a. com valores possíveis em um intervalo no conjunto de números reais.
- Exemplo: tempo para finalizar um experimento, peso de uma pessoa, duração de uma chamada telefônica, tempo de vida de uma lâmpada, etc...

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Variáveis aleatórias discretas: v.a. com valores possíveis enumeráveis. Soma das probabilidades de todos os valores possíveis igual a 1.
- Variáveis aleatórias contínuas: v.a. com valores possíveis em um intervalo no conjunto de números reais.
- Exemplo: tempo para finalizar um experimento, peso de uma pessoa, duração de uma chamada telefônica, tempo de vida de uma lâmpada, etc...
- Para esses tipos de quantidades, não é possível associar frequências pontuais tais que a soma de todas seja igual a 1.

Variáveis Aleatórias Contínuas

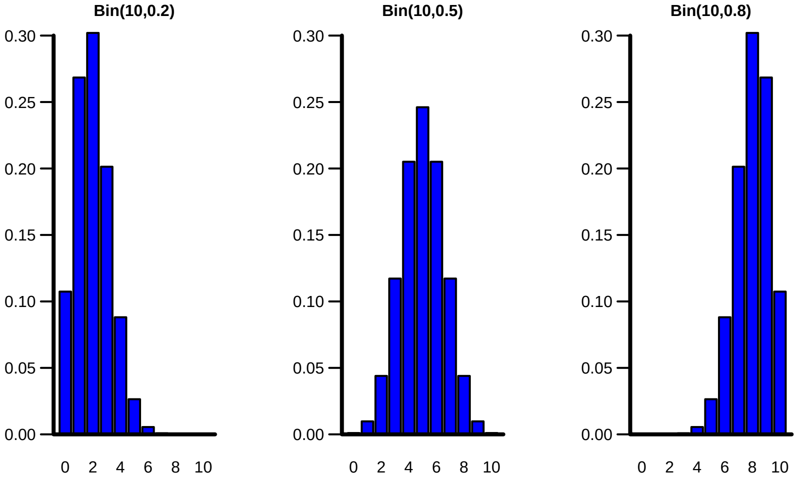
- Variáveis aleatórias discretas: v.a. com valores possíveis enumeráveis. Soma das probabilidades de todos os valores possíveis igual a 1.
- Variáveis aleatórias contínuas: v.a. com valores possíveis em um intervalo no conjunto de números reais.
- Exemplo: tempo para finalizar um experimento, peso de uma pessoa, duração de uma chamada telefônica, tempo de vida de uma lâmpada, etc...
- Para esses tipos de quantidades, não é possível associar frequências pontuais tais que a soma de todas seja igual a 1.
- Surge então o conceito de "função de densidade de probabilidade" (f.d.p.).

Variáveis Aleatórias Contínuas

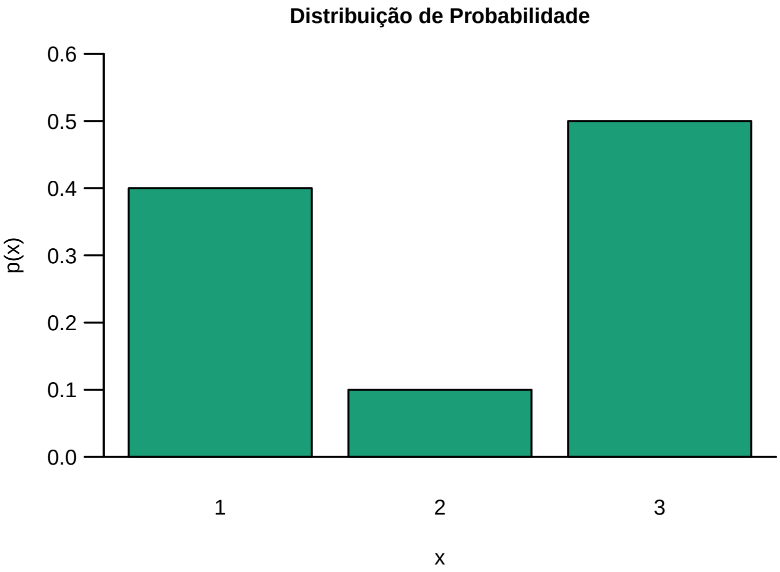
- Variáveis aleatórias discretas: v.a. com valores possíveis enumeráveis. Soma das probabilidades de todos os valores possíveis igual a 1.
- Variáveis aleatórias contínuas: v.a. com valores possíveis em um intervalo no conjunto de números reais.
- Exemplo: tempo para finalizar um experimento, peso de uma pessoa, duração de uma chamada telefônica, tempo de vida de uma lâmpada, etc...
- Para esses tipos de quantidades, não é possível associar frequências pontuais tais que a soma de todas seja igual a 1.
- Surge então o conceito de "função de densidade de probabilidade" (f.d.p.).
- Para cada v.a. contínua, associamos uma função de densidade de probabilidade.

Exemplo: v.a. discreta

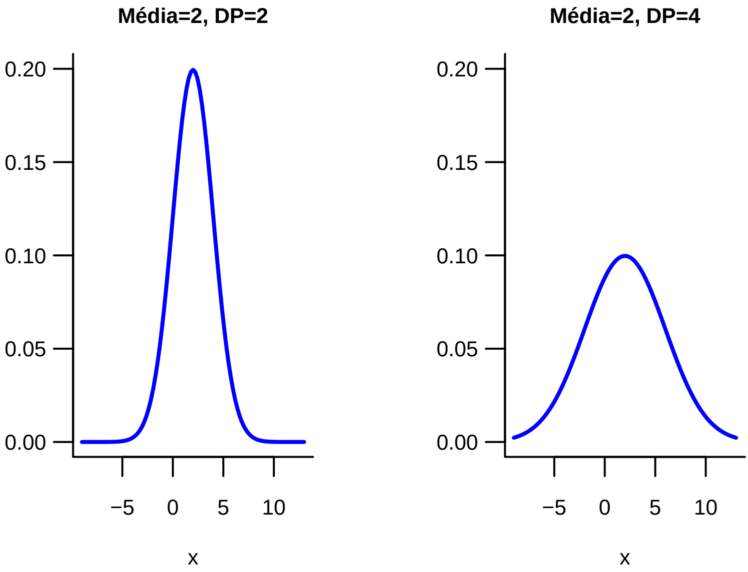
Distribuição de probabilidade de uma $Bin(10, p)$, com $p = 0.2, 0.5$ e 0.8.



Exemplo: v.a. discreta



Exemplo: v.a. contínua



Variáveis Aleatórias Contínuas

Definição: a função de densidade de probabilidade de uma v.a. X é uma função f que verifica:

Variáveis Aleatórias Contínuas

Definição: a função de densidade de probabilidade de uma v.a. X é uma função f que verifica:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Variáveis Aleatórias Contínuas

Definição: a função de densidade de probabilidade de uma v.a. X é uma função f que verifica:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (f é integrável)

Variáveis Aleatórias Contínuas

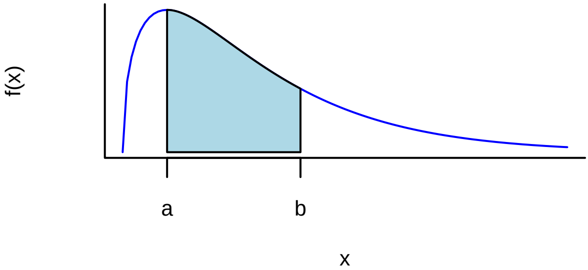
Definição: a função de densidade de probabilidade de uma v.a. X é uma função f que verifica:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (f é integrável)

Toda v.a. X à qual seja possível associar uma função de densidade de probabilidade será chamada de v.a. contínua.

A probabilidade de que uma v.a. X contínua pertença a um intervalo da reta (a,b], $a < b$ é dada por:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$



Obs: $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b)$ quando X é v.a. contínua.

Notação: se X v.a. contínua com função de densidade de probabilidade f, no lugar de f denotaremos f_X.

Variáveis Aleatórias Contínuas

Notação: se X v.a. contínua com função de densidade de probabilidade f, no lugar de f denotaremos f_X.

À probabilidade de que uma v.a. X contínua pertença ao intervalo da reta $(-\infty, x]$ daremos o nome de **função de distribuição acumulada** (f.d.a.), e a denotaremos por F_X

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = P(X \leq x)$$

Exemplo: X v.a. contínua com função de densidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo: X v.a. contínua com função de densidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Pela definição de função de densidade:

Exemplo: X v.a. contínua com função de densidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Pela definição de função de densidade:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Exemplo: X v.a. contínua com função de densidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Pela definição de função de densidade:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (2-x)dx = 1$

Exemplo: X v.a. contínua com função de densidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Pela definição de função de densidade:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (2-x)dx = 1$
- Podemos também calcular $P(0 < X \leq 0.8) = \displaystyle\int_0^{0.8} xdx = 0.32$

Variáveis Aleatórias Contínuas

Propriedade: toda v.a. X contínua (ou seja, que possui f_X como função de densidade) tem probabilidade pontual nula: $P(X = x) = 0$.

Variáveis Aleatórias Contínuas

Propriedade: toda v.a. X contínua (ou seja, que possui f_X como função de densidade) tem probabilidade pontual nula: $P(X = x) = 0$.

Resumindo: $F(x) = P(X \leq x)$

Variáveis Aleatórias Contínuas

Propriedade: toda v.a. X contínua (ou seja, que possui f_X como função de densidade) tem probabilidade pontual nula: $P(X = x) = 0$.

Resumindo: $F(x) = P(X \leq x)$

- caso discreto: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$

Variáveis Aleatórias Contínuas

Propriedade: toda v.a. X contínua (ou seja, que possui f_X como função de densidade) tem probabilidade pontual nula: $P(X = x) = 0$.

Resumindo: $F(x) = P(X \leq x)$

- caso discreto: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$
- caso contínuo: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$

Exemplo

Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 2e^{-2x} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1. Mostre que esta é uma função de densidade de probabilidade.
2. Calcule a probabilidade de $X > 10$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 166.

Exemplo (solução - item 1)

Uma função de densidade de probabilidade deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Exemplo (solução - item 1)

Uma função de densidade de probabilidade deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Note que e^{-x} é positiva para qualquer x e, consequentemente, $2e^{-2x}$ também.

Exemplo (solução - item 1)

Uma função de densidade de probabilidade deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Note que e^{-x} é positiva para qualquer x e, consequentemente, $2e^{-2x}$ também.

Resta mostrar que sua integral é 1:

$$\int 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}$$

Exemplo (solução - item 1)

Note que a função está definida nesta forma para $x \geq 0$; para $x < 0$, ela é 0.

Exemplo (solução - item 1)

Note que a função está definida nesta forma para $x \geq 0$; para $x < 0$, ela é 0.

Então a integral é:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} 2e^{-2x}dx =$$

$$= \left[-e^{-2x}\right]_0^{\infty} = \lim_{x\to\infty} -e^{-2x} - \left(-e^{-0}\right) = 1$$

Exemplo (solução - item 2)

A probabilidade é dada por:

$$P(X > 10) = \int_{10}^{\infty} 2e^{-2x} dx = \lim_{x \to \infty} -e^{-2x} - \left(-e^{-2\times 10}\right) = \frac{1}{e^{20}}$$

Esperança

Definição: seja X uma v.a. contínua com densidade f_X, a **esperança** de X é dada por:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x) dx\,.$$

Esperança

Definição: seja X uma v.a. contínua com densidade f_X, a **esperança** de X é dada por:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x) dx\,.$$

Definição: seja X uma v.a. contínua com densidade f_X, o k**-ésimo momento** de X é dado por:

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k\, f_X(x) dx\,.$$

Variância

Definição: seja X v.a. com valor esperado $E(X)$, definimos por **variância**, a quantidade:

$$Var(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - [E(X)]^2 \, .$$

Variância

Definição: seja X v.a. com valor esperado $E(X)$, definimos por **variância**, a quantidade:

$$Var(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - [E(X)]^2 \, .$$

E definimos como **desvio padrão**:

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Variância

Definição: seja X v.a. com valor esperado $E(X)$, definimos por **variância**, a quantidade:

$$Var(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - [E(X)]^2 \, .$$

E definimos como **desvio padrão**:

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Note que assim como no caso discreto, ambas as quantidades oferecem medidas de dispersão da variável X em relação ao valor esperado $E(X)$.

Exemplo

Para a função f_X, calcular:

- $E(X)$
- $Var(X)$

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x) dx = 1$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [x-1]^2 f_X(x) dx = \frac{1}{6}$$

Exemplo

Uma variável aleatória X tem distribuição triangular no intervalo $[0, 1]$ se sua f.d.p. for dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ Cx & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ C(1-x) & \text{se} \quad 1/2 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

1. Qual valor deve ter a constante C?
2. Faça o gráfico de $f(x)$.
3. Determine $P(X \leq 1/2)$, $P(X > 1/2)$ e $P(1/4 \leq X \leq 3/4)$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 166.

Exemplo

Item 1 - Devemos escolher C de modo que $f(x)$ satisfaça:

- $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Exemplo

Item 1 - Devemos escolher C de modo que $f(x)$ satisfaça:

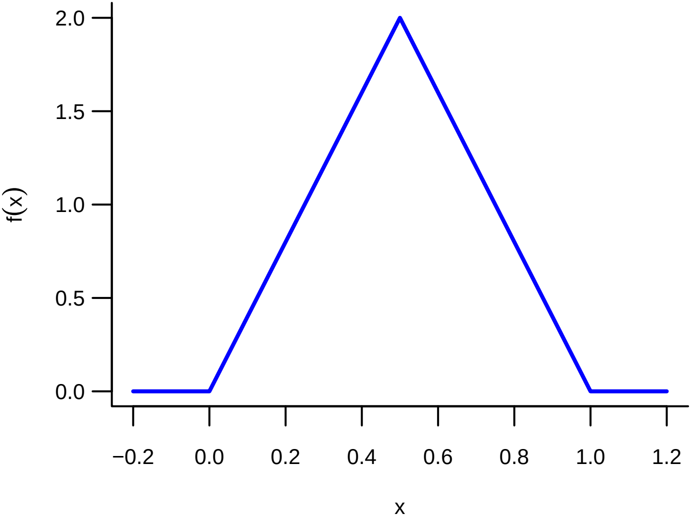
- $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Pela primeira condição, temos que $C > 0$. Agora, para que C satisfaça a segunda condição, devemos integrar $f(x)$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1/2} Cxdx + \int_{1/2}^{1} C(1-x)dx + \int_{1}^{\infty} 0dx \\
&= C\int_{0}^{1/2} xdx + C\int_{1/2}^{1}(1-x)dx = C\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1}\right) \\
&= C\left(\frac{1}{8} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = \frac{C}{4} \Rightarrow C \text{ deve ser igual a } 4.
\end{aligned}$$

Exemplo

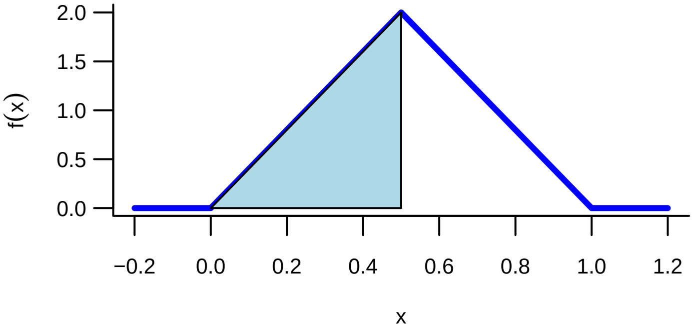
Item 2 - Função de densidade $f(x)$



Exemplo

Item 3 - Para encontrarmos as probabilidades dos eventos, basta integrar nas regiões correspondentes:

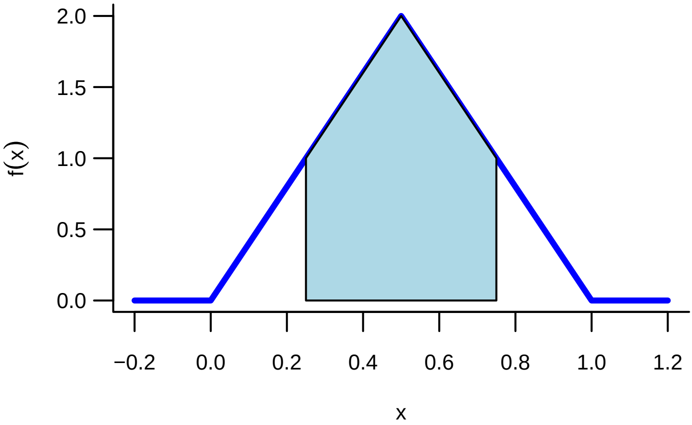
$$P(X \leq 1/2) = \int_0^{1/2} f(x)dx = \int_0^{1/2} 4xdx = 1/2\,.$$



Note que $P(X > 1/2) = 1 - P(X \leq 1/2) = 1 - 1/2 = 1/2$.

Exemplo

$$P(1/4 \leq X \leq 3/4) = \int_{1/4}^{3/4} f(x)dx = \int_{1/4}^{1/2} 4x dx + \int_{1/2}^{3/4} 4(1-x)dx = \frac{3}{4}\,.$$



Exemplo

Calcule a esperança, a variância e a f.d.a. da variável aleatória X com a densidade triangular em $[0, 1]$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 171.

Exemplo

Calcule a esperança, a variância e a f.d.a. da variável aleatória X com a densidade triangular em $[0, 1]$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 171.

- Esperança

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{1/2} 4x^2 dx + \int_{1/2}^{1} 4x(1-x) dx \\
&= \left[\frac{4x^3}{3}\right]_0^{1/2} + \left[\frac{2}{3}x^2(3-2x)\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Exemplo

- Variância

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx \\
&= \int_0^{1/2} 4 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 x dx + \int_{1/2}^{1} 4 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 (1-x) dx \\
&= \left[x^4 - \frac{4}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{1/2} + \left[-x^4 + \frac{8}{3}^3 - \frac{5}{2} x^2 + x \right]_{1/2}^{1} \\
&= \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

Exemplo

- f.d.a.

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória contínua é dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Exemplo

- f.d.a.

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória contínua é dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Temos que para $x \in [0, 1/2)$, $F(x)$ é dada por

$$F(x) = \int_{0}^{x} 4tdt = 2x^2$$

Exemplo

- f.d.a.

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória contínua é dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Temos que para $x \in [0, 1/2)$, $F(x)$ é dada por

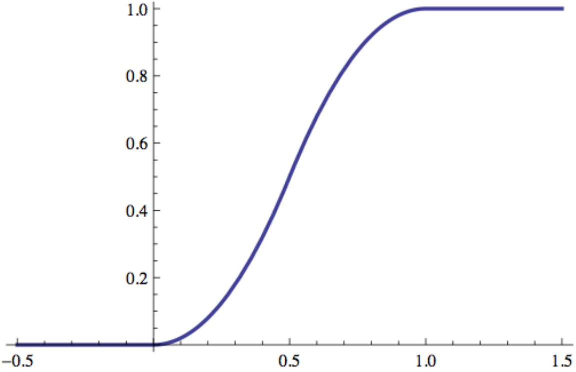
$$F(x) = \int_{0}^{x} 4tdt = 2x^2$$

Para $x \in [1/2, 1]$, a acumulada é dada por

$$F(x) = \int_{0}^{1/2} 4tdt + \int_{1/2}^{x} 4(1-t)dt = -2x^2 + 4x - 1$$

Exemplo

Para valores de $x \geq 1$, a acumulada assume valor 1. O gráfico de $F(x)$ é dado por:



Distribuição Uniforme

Uniforme

Dizemos que a v.a. X tem distribuição Uniforme no intervalo $[a, b]$, $a < b$ se a função de densidade de probabilidade f_X é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Notação: $X \sim U[a, b]$ ou $X \sim U(a, b)$.

Uniforme

Dizemos que a v.a. X tem distribuição Uniforme no intervalo $[a, b]$, $a < b$ se a função de densidade de probabilidade f_X é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

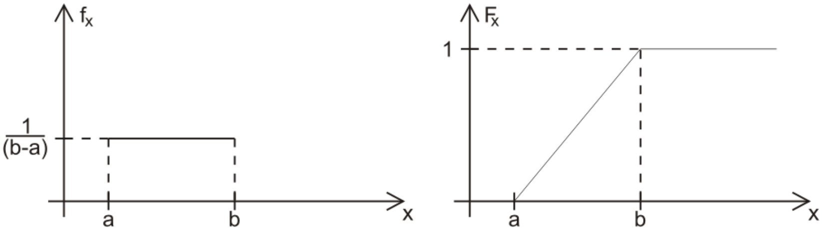
Notação: $X \sim U[a, b]$ ou $X \sim U(a, b)$.

Cálculo da função de distribuição acumulada:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Uniforme

Gráficos da função de densidade de probabilidade e da função de distribuição acumulada:



Esperança de Variância

- Cálculo da $E(X)$:

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{(b+a)}{2}$$

Esperança de Variância

- Cálculo da $E(X)$:

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{(b+a)}{2}$$

- Cálculo da $Var(X)$:

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{(a^2+ab+b^2)}{3}$$

Esperança de Variância

- Cálculo da $E(X)$:

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{(b+a)}{2}$$

- Cálculo da $Var(X)$:

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{(a^2+ab+b^2)}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{(a^2+ab+b^2)}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exemplo: peça de aço

A dureza H de uma peça de aço pode ser pensada como uma v.a. com distribuição uniforme no intervalo $[50, 70]$ da escala de Rockwel.

Calcule a probabilidade de que uma peça tenha dureza entre 55 e 60.

Exemplo: peça de aço

A dureza H de uma peça de aço pode ser pensada como uma v.a. com distribuição uniforme no intervalo $[50, 70]$ da escala de Rockwel.

Calcule a probabilidade de que uma peça tenha dureza entre 55 e 60.

$$f_H(h) = \begin{cases} \frac{1}{70-50} = \frac{1}{20}, & 50 \leq x \leq 70 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo: peça de aço

A dureza H de uma peça de aço pode ser pensada como uma v.a. com distribuição uniforme no intervalo $[50, 70]$ da escala de Rockwel.

Calcule a probabilidade de que uma peça tenha dureza entre 55 e 60.

$$f_H(h) = \begin{cases} \frac{1}{70-50} = \frac{1}{20}, & 50 \leq x \leq 70 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$P(55 < H < 60) = \int_{55}^{60} \frac{1}{20} dh = \frac{1}{20}(60 - 55) = \frac{1}{4}\,.$$

Exemplo

Seja X uma variável aleatória distribuída uniformemente, com média 15 e variância 25/3.

- Encontre a função de densidade de X.
- Qual é a probabilidade que $X > 14$?

Exemplo

Lembre-se que a esperança de uma v.a. uniforme em $[a, b]$ é dada por

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

e sua variância por

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exemplo

Lembre-se que a esperança de uma v.a. uniforme em $[a, b]$ é dada por

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

e sua variância por

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Temos o seguinte sistema, portanto:

Exemplo

Lembre-se que a esperança de uma v.a. uniforme em $[a, b]$ é dada por

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

e sua variância por

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Temos o seguinte sistema, portanto:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{a+b}{2} & = & 15 \\ \frac{(b-a)^2}{12} & = & \frac{25}{3} \end{array} \right.$$

Exemplo

$$\begin{cases} a + b &= 30 \\ (b - a)^2 &= 100 \end{cases}$$

Exemplo

$$\begin{cases} a + b & = & 30 \\ (b-a)^2 & = & 100 \end{cases}$$

Ou simplesmente (você é capaz de dizer por que tomamos a raiz positiva apenas, neste sistema não-linear?)

$$\begin{cases} a + b & = & 30 \\ b - a & = & 10 \end{cases}$$

Exemplo

$$\begin{cases} a + b & = & 30 \\ (b-a)^2 & = & 100 \end{cases}$$

Ou simplesmente (você é capaz de dizer por que tomamos a raiz positiva apenas, neste sistema não-linear?)

$$\begin{cases} a + b & = & 30 \\ b - a & = & 10 \end{cases}$$

O sistema tem solução $a = 10$, $b = 20$, o que nos mostra que $X \sim U[10, 20]$ e

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & 10 \leq x \leq 20 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo

A probabilidade de que $X > 14$ é dada por

$$P(X > 14) = \int_{14}^{20} \frac{1}{10} dx = \frac{(20 - 14)}{10} = 0.6$$

Distribuição Exponencial

Exponencial

Dizemos que uma v.a. X possui distribuição exponencial com parâmetro λ ($\lambda > 0$) se a função de densidade de probabilidade f_X é dada por:

Exponencial

Dizemos que uma v.a. X possui distribuição exponencial com parâmetro λ ($\lambda > 0$) se a função de densidade de probabilidade f_X é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exponencial

Dizemos que uma v.a. X possui distribuição exponencial com parâmetro λ ($\lambda > 0$) se a função de densidade de probabilidade f_X é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Notação: $X \sim exp(\lambda)$.

Exponencial

Dizemos que uma v.a. X possui distribuição exponencial com parâmetro λ ($\lambda > 0$) se a função de densidade de probabilidade f_X é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Notação: $X \sim exp(\lambda)$.

Cálculo da função de distribuição acumulada:

Exponencial

Dizemos que uma v.a. X possui distribuição exponencial com parâmetro λ ($\lambda > 0$) se a função de densidade de probabilidade f_X é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

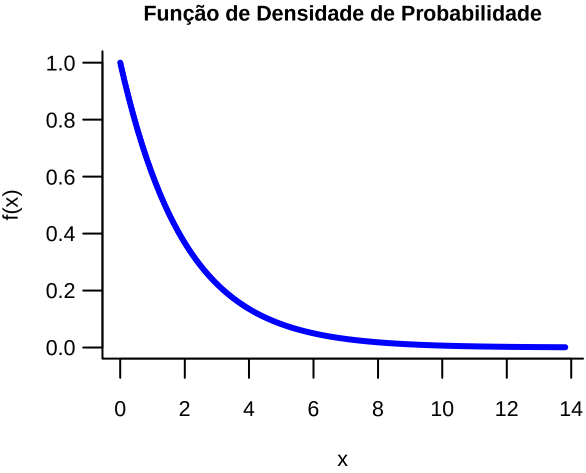
Notação: $X \sim exp(\lambda)$.

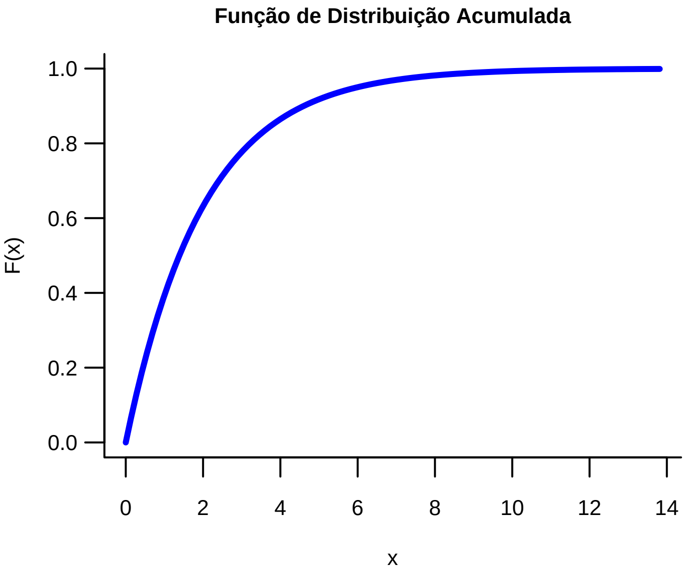
Cálculo da função de distribuição acumulada:

$$F_X(x) = \begin{cases} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Distribuição Exponencial

Gráficos da função de densidade de probabilidade (esquerda) e da função de distribuição acumulada (direita) de $X \sim Exp(0.5)$:




Função de Distribuição Acumulada
F(x)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
2
4
6
8
10
12
14
x

Esperança de Variância

- Cálculo da $E(X)$:

$$E(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

Esperança de Variância

- Cálculo da $E(X)$:

$$E(X) = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

- Cálculo da $Var(X)$:

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

Esperança de Variância

- Cálculo da $E(X)$:

$$E(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

- Cálculo da $Var(X)$:

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exemplo: componente eletrônico

O tempo de vida, X, em horas, de um componente eletrônico segue uma distribuição exponencial de tal forma que $P(X \leq 1000) = 0.75$.

Qual é o tempo médio de vida do componente?

Exemplo: componente eletrônico

Sabemos que se $X \sim exp(\lambda)$, então

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

e $E(X) = \lambda^{-1}$.

Exemplo: componente eletrônico

Sabemos que se $X \sim exp(\lambda)$, então

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

e $E(X) = \lambda^{-1}$.

Basta então observarmos que

$$P(X \leq 1000) = 1 - e^{-\lambda 1000} = 0.75 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\ln(4)}{1000} = 0.0013863$$

Exemplo: componente eletrônico

Sabemos que se $X \sim exp(\lambda)$, então

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

e $E(X) = \lambda^{-1}$.

Basta então observarmos que

$$P(X \leq 1000) = 1 - e^{-\lambda 1000} = 0.75 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\ln(4)}{1000} = 0.0013863$$

Concluimos então que o tempo médio de vida, $E(X)$, é igual a $1/0.0013863 = 721.3475$ horas, e que 75% dos componentes duram 1000 horas ou menos.

Exemplo: tubos de TV

Um antiga fábrica de tubos de TV determinou que a vida média dos tubos de sua fabricação é de 800 horas de uso contínuo e segue uma distribuição exponencial.

Qual a probabilidade de que a fábrica tenha que substituir um tubo gratuitamente, se oferece uma garantia de 300 horas de uso?

Exemplo: tubos de TV

X: vida útil do tubo de TV.

Exemplo: tubos de TV

X: vida útil do tubo de TV.

$E[X] = 800$. Como X tem distribuição exponencial com parâmetro λ, $E[X] = \frac{1}{\lambda} = 800$, portanto $\lambda = \frac{1}{800}$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo: tubos de TV

X: vida útil do tubo de TV.

$E[X] = 800$. Como X tem distribuição exponencial com parâmetro λ, $E[X] = \frac{1}{\lambda} = 800$, portanto $\lambda = \frac{1}{800}$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{800} e^{-\frac{x}{800}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo: tubos de TV

X: vida útil do tubo de TV.

$E[X] = 800$. Como X tem distribuição exponencial com parâmetro λ, $E[X] = \frac{1}{\lambda} = 800$, portanto $\lambda = \frac{1}{800}$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{800} e^{-\frac{x}{800}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Se $X < 300$, a fábrica tem que substituir gratuitamente.

$$P(X < 300) = \int_0^{300} \frac{1}{800} e^{-\frac{x}{800}} dx = \left[-e^{-\frac{x}{800}}\right]_0^{300} = 0.3127\,.$$

Exemplo: produto alimentício

A f.d.p.

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

representa a distribuição do índice de acidez (X) de um determinado produto alimentício.

Exemplo: produto alimentício

A f.d.p.

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

representa a distribuição do índice de acidez (X) de um determinado produto alimentício.

O produto é consumível se este índice for menor do que 2.

Exemplo: produto alimentício

A f.d.p.

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

representa a distribuição do índice de acidez (X) de um determinado produto alimentício.

O produto é consumível se este índice for menor do que 2.

O setor de fiscalização apreendeu 30 unidades do produto. Qual a probabilidade de que pelo menos 10% da amostra seja imprópria para consumo?

Exemplo: produto alimentício

Produto liberado para consumo se:
$P(X < 2) = \int_0^2 2e^{-2x} dx = \left[-e^{-2x}\right]_0^2 = 0.98.$

Exemplo: produto alimentício

Produto liberado para consumo se:
$P(X < 2) = \int_0^2 2e^{-2x} dx = \left[-e^{-2x}\right]_0^2 = 0.98.$

Produto não consumível com probabilidade $1 - P(X < 2) = 0.02 = p$.

Exemplo: produto alimentício

Produto liberado para consumo se:
$P(X < 2) = \int_0^2 2e^{-2x} dx = \left[-e^{-2x}\right]_0^2 = 0.98.$

Produto não consumível com probabilidade $1 - P(X < 2) = 0.02 = p$.

Y: número de unidades impróprias para consumo na amostra de 30.

Exemplo: produto alimentício

Produto liberado para consumo se:
$P(X < 2) = \int_0^2 2e^{-2x} dx = \left[-e^{-2x}\right]_0^2 = 0.98.$

Produto não consumível com probabilidade $1 - P(X < 2) = 0.02 = p$.

Y: número de unidades impróprias para consumo na amostra de 30.

$Y \sim \text{Bin}(30, 0.02)$.

Exemplo: produto alimentício

Produto liberado para consumo se:
$P(X < 2) = \int_0^2 2e^{-2x}dx = \left[-e^{-2x}\right]_0^2 = 0.98.$

Produto não consumível com probabilidade $1 - P(X < 2) = 0.02 = p$.

Y: número de unidades impróprias para consumo na amostra de 30.

$Y \sim \text{Bin}(30, 0.02)$.

Probabilidade de que pelo menos 10% de uma amostra de 30 unidades seja imprópria:

$$\begin{aligned}
P(Y \geq 3) &= 1 - P(Y < 3) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)] \\
&= 1 - \left[\binom{30}{0}(0.02)^0(0.98)^{30} + \binom{30}{1}(0.02)^1(0.98)^{29} + \binom{30}{2}(0.02)^2(0.98)^{28}\right] \\
&= 0.022\,.
\end{aligned}$$

Leituras

- Ross: seções 6.1 e 6.2.
- Magalhães: capítulo 6.