ME951 - Estatística e Probabilidade I

Parte 12

Notas de aula de ME414 produzidas pelos professores **Samara Kiihl**, **Tatiana Benaglia** e **Benilton Carvalho** modificadas e alteradas pela Profa. **Larissa Avila Matos**

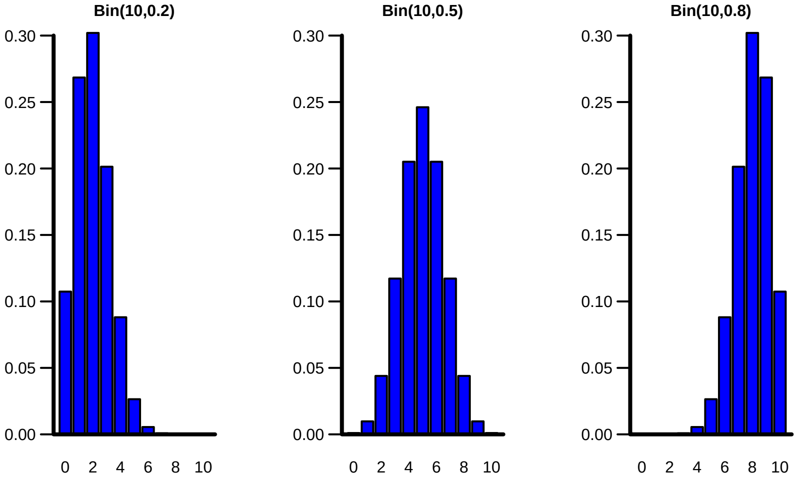
Variáveis Aleatórias Contínuas

Variáveis Aleatórias Contínuas

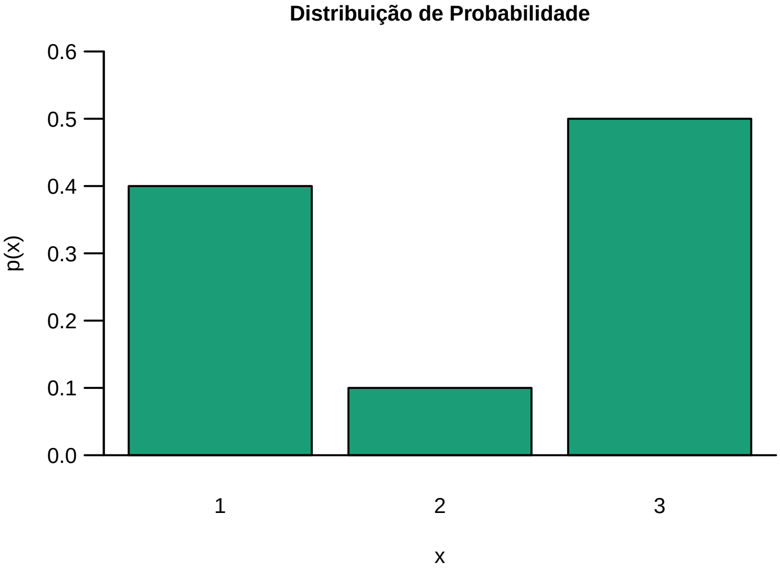
- Variáveis aleatórias discretas: v.a. com valores possíveis enumeráveis. Soma das probabilidades de todos os valores possíveis igual a 1.
- Variáveis aleatórias contínuas: v.a. com valores possíveis em um intervalo no conjunto de números reais.
- Exemplo: tempo para finalizar um experimento, peso de uma pessoa, duração de uma chamada telefônica, tempo de vida de uma lâmpada, etc...
- Para esses tipos de quantidades, não é possível associar frequências pontuais tais que a soma de todas seja igual a 1.
- Surge então o conceito de "função de densidade de probabilidade" (f.d.p.).
- Para cada v.a. contínua, associamos uma função de densidade de probabilidade.

Exemplo: v.a. discreta

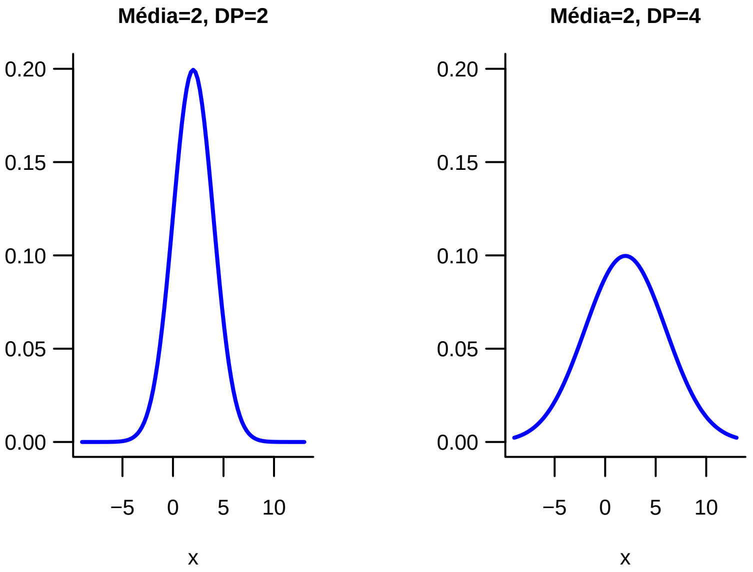
Distribuição de probabilidade de uma $Bin(10, p)$, com $p = 0.2, 0.5$ e 0.8.



Exemplo: v.a. discreta



Exemplo: v.a. contínua



Variáveis Aleatórias Contínuas

Definição: a função de densidade de probabilidade de uma v.a. X é uma função f que verifica:

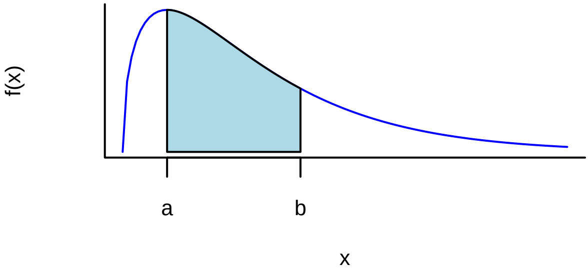
- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (f é integrável)

Toda v.a. X à qual seja possível associar uma função de densidade de probabilidade será chamada de v.a. contínua.

Variáveis Aleatórias Contínuas

A probabilidade de que uma v.a. X contínua pertença a um intervalo da reta (a,b], $a < b$ é dada por:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$



Obs: $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b)$ quando X é v.a. contínua.

Variáveis Aleatórias Contínuas

Notação: se X v.a. contínua com função de densidade de probabilidade f, no lugar de f denotaremos f_X.

À probabilidade de que uma v.a. X contínua pertença ao intervalo da reta $(-\infty, x]$ daremos o nome de **função de distribuição acumulada** (f.d.a.), e a denotaremos por F_X

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = P(X \leq x)$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

Exemplo: X v.a. contínua com função de densidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Pela definição de função de densidade:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (2-x)dx = 1$
- Podemos também calcular $P(0 < X \leq 0.8) = \displaystyle\int_0^{0.8} xdx = 0.32$

Variáveis Aleatórias Contínuas

Propriedade: toda v.a. X contínua (ou seja, que possui f_X como função de densidade) tem probabilidade pontual nula: $P(X = x) = 0$.

Resumindo: $F(x) = P(X \leq x)$

- caso discreto: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$
- caso contínuo: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$

Exemplo

Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 2e^{-2x} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1. Mostre que esta é uma função de densidade de probabilidade.
2. Calcule a probabilidade de $X > 10$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 166.

Exemplo (solução - item 1)

Uma função de densidade de probabilidade deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Note que e^{-x} é positiva para qualquer x e, consequentemente, $2e^{-2x}$ também.

Resta mostrar que sua integral é 1:

$$\int 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}$$

Exemplo (solução - item 1)

Note que a função está definida nesta forma para $x \geq 0$; para $x < 0$, ela é 0.

Então a integral é:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} 2e^{-2x}dx =$$

$$= \left[-e^{-2x}\right]_0^{\infty} = \lim_{x\to\infty} -e^{-2x} - \left(-e^{-0}\right) = 1$$

Exemplo (solução - item 2)

A probabilidade é dada por:

$$P(X > 10) = \int_{10}^{\infty} 2e^{-2x} dx = \lim_{x \to \infty} -e^{-2x} - \left(-e^{-2\times 10}\right) = \frac{1}{e^{20}}$$

Esperança

Definição: seja X uma v.a. contínua com densidade f_X, a **esperança** de X é dada por:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_X(x) dx \,.$$

Definição: seja X uma v.a. contínua com densidade f_X, o k**-ésimo momento** de X é dado por:

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, f_X(x) dx \,.$$

Variância

Definição: seja X v.a. com valor esperado $E(X)$, definimos por **variância**, a quantidade:

$$Var(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - [E(X)]^2\,.$$

E definimos como **desvio padrão**:

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Note que assim como no caso discreto, ambas as quantidades oferecem medidas de dispersão da variável X em relação ao valor esperado $E(X)$.

Exemplo

Para a função f_X, calcular:

- $E(X)$
- $Var(X)$

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2 - x) dx = 1$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [x - 1]^2 f_X(x) dx = \frac{1}{6}$$

Exemplo

Uma variável aleatória X tem distribuição triangular no intervalo $[0,1]$ se sua f.d.p. for dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ Cx & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ C(1-x) & \text{se} \quad 1/2 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

1. Qual valor deve ter a constante C?
2. Faça o gráfico de $f(x)$.
3. Determine $P(X \leq 1/2)$, $P(X > 1/2)$ e $P(1/4 \leq X \leq 3/4)$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 166.

Exemplo

Item 1 - Devemos escolher C de modo que $f(x)$ satisfaça:

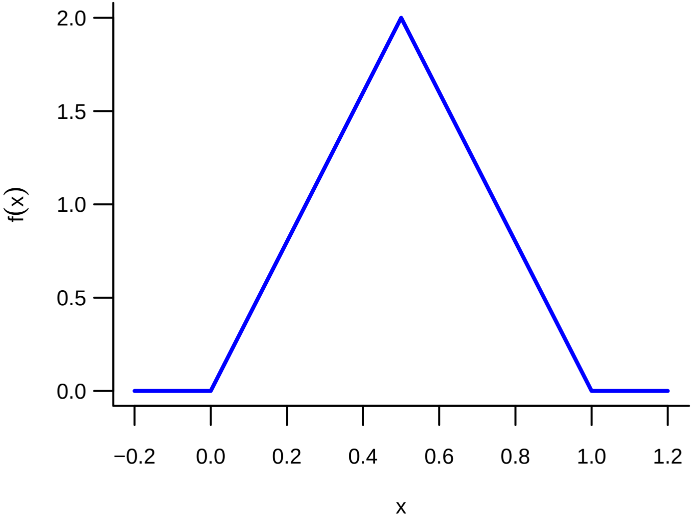
- $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Pela primeira condição, temos que $C > 0$. Agora, para que C satisfaça a segunda condição, devemos integrar $f(x)$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1/2} Cxdx + \int_{1/2}^{1} C(1-x)dx + \int_{1}^{\infty} 0dx \\
&= C\int_{0}^{1/2} xdx + C\int_{1/2}^{1} (1-x)dx = C\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1}\right) \\
&= C\left(\frac{1}{8} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = \frac{C}{4} \Rightarrow C \text{ deve ser igual a 4.}
\end{aligned}$$

Exemplo

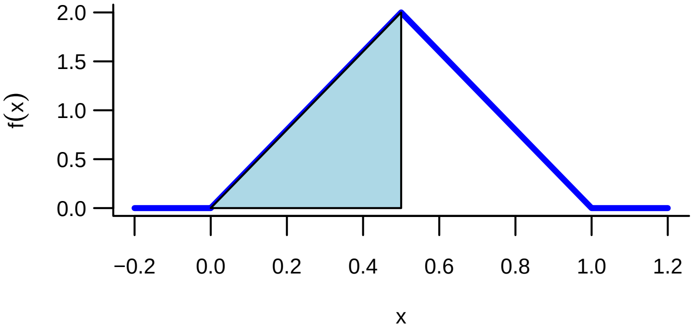
Item 2 - Função de densidade $f(x)$



Exemplo

Item 3 - Para encontrarmos as probabilidades dos eventos, basta integrar nas regiões correspondentes:

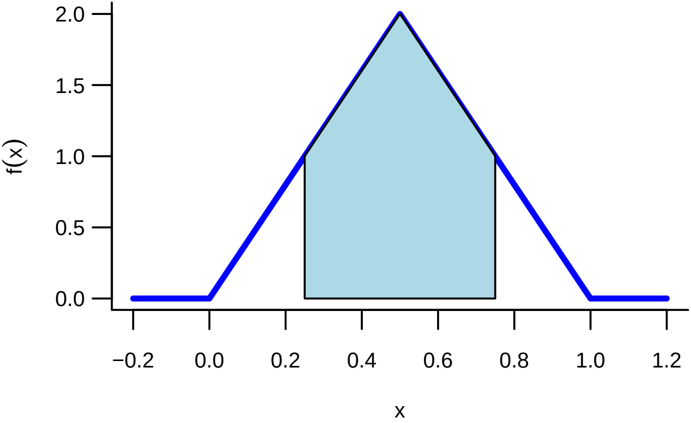
$$P(X \leq 1/2) = \int_0^{1/2} f(x)dx = \int_0^{1/2} 4x dx = 1/2\,.$$



Note que $P(X > 1/2) = 1 - P(X \leq 1/2) = 1 - 1/2 = 1/2$.

Exemplo

$$P(1/4 \leq X \leq 3/4) = \int_{1/4}^{3/4} f(x)dx = \int_{1/4}^{1/2} 4xdx + \int_{1/2}^{3/4} 4(1-x)dx = \frac{3}{4}\,.$$



Exemplo

Calcule a esperança, a variância e a f.d.a. da variável aleatória X com a densidade triangular em $[0, 1]$.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 171.

- Esperança

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{1/2} 4x^2 dx + \int_{1/2}^{1} 4x(1-x) dx \\ &= \left[\frac{4x^3}{3}\right]_0^{1/2} + \left[\frac{2}{3} x^2 (3 - 2x)\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exemplo

- Variância

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx \\
&= \int_0^{1/2} 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 x dx + \int_{1/2}^{1} 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (1-x)dx \\
&= \left[x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^{1/2} + \left[-x^4 + \frac{8}{3}^3 - \frac{5}{2}x^2 + x\right]_{1/2}^{1} \\
&= \frac{1}{24}
\end{aligned}
$$

Exemplo

- f.d.a.

A função de distribuição acumulada de uma variável aleatória contínua é dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Temos que para $x \in [0, 1/2)$, $F(x)$ é dada por

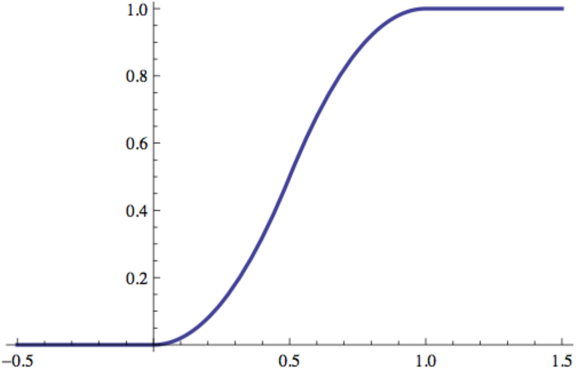
$$F(x) = \int_{0}^{x} 4tdt = 2x^2$$

Para $x \in [1/2, 1]$, a acumulada é dada por

$$F(x) = \int_{0}^{1/2} 4tdt + \int_{1/2}^{x} 4(1-t)dt = -2x^2 + 4x - 1$$

Exemplo

Para valores de $x \geq 1$, a acumulada assume valor 1. O gráfico de $F(x)$ é dado por:



Leituras

- Ross: seções 6.1 e 6.2.
- Magalhães: capítulo 6.