

ME720 - Modelos Lineares Generalizados

Profa.: Larissa Avila Matos
1ª Lista de Exercícios - Modelos Lineares

- Q1.** Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 12 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.
- a. Mostre que $AB = 0$.
 - b. Encontre um vetor x tal que $Ax = 0$.
 - c. Qual é o posto de A e o posto de B ?

Q2. Mostre que cada coluna do produto AB pode ser expressa como uma combinação linear das colunas de A , com coeficientes resultantes da coluna correspondente de B .

Q3. Suponha que A e B são matrizes $n \times n$ e que $AB = 0$. Mostre que A e B são ambos singulares ou um deles é 0 .

- Q4.** Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.
- Os autovalores de A são $1, 4, -2$.
- a. Encontre os autovetores normalizados e use-os como colunas de uma matriz ortogonal C .
 - b. Mostre que $A = CDC'$, onde D ; e mostre que $C'AC = D$.

- Q5.** Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.
- a. Mostre que $|A| > 0$.
 - b. Encontre os autovalores de A , eles são todos positivos?

- Q6.** Considere $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.
- a. Encontre o posto de A .
 - b. Mostre que A é idempotente.
 - c. Mostre que $A(I - A) = 0$.
 - d. Encontre $tr(A)$.
 - e. Encontre os autovalores de A .

Q7. Considere uma matriz $A_{p \times p}$ com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. Mostre que $[tr(A)]^2 = tr(A^2) + 2 \sum \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j$.

Q8. Considere 4 vetores aleatórios de dimensão p (Y , X , V , e W). Além disso, considere 4 matrizes de constantes $A_{h \times p}$, $B_{h \times p}$, $C_{h \times p}$, and $D_{h \times p}$. Encontre $Cov(AY + BX, CV + DW)$.

Q9. Considere $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)'$ um vetor aleatório, com vetor de medias e matriz de covariâncias dados por

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

- a. Tome $Z = 2Y_1 - 3Y_2 + Y_3$. Calcule $E(Z)$ e $Var(Z)$.
- b. Tome $Z_1 = Y_1 + Y_2 + Y_3$ e $Z_2 = 3Y_1 + Y_2 - 2Y_3$. Calcule $E(Z)$ e $Var(Z)$, onde $Z = (Z_1, Z_2)'$.

Q10. Assumindo que $Y \sim N_p(\mu, \sigma^2 I)$ e C é uma matriz ortogonal, mostre que CY é $N_p(C\mu, \sigma^2 I)$.

Q11. Suponha que $Y \sim N_4(\mu, \Sigma)$, onde

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 5 & -4 \\ 2 & -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Encontre:

- a. A distribuição conjunta de Y_1 e Y_3 .
- b. A distribuição marginal de Y_2 .
- c. Distribuição de $Z = Y_1 + 2Y_2 - Y_3 + 3Y_4$.
- d. A distribuição conjunta de $Z_1 = Y_1 + Y_2 - Y_3 - Y_4$ e $Z_2 = -3Y_1 + Y_2 + 2Y_3 - 2Y_4$.
- e. $f(y_1, y_2 | y_3, y_4)$.
- f. $f(y_1, y_3 | y_2, y_4)$.
- g. $f(y_1 | y_2, y_3, y_4)$.

Q12. Mostre que $(1/n)\mathbf{J}$ é idempotente, $\mathbf{I} - (1/n)\mathbf{J}$ é idempotente, e $[\mathbf{I} - (1/n)\mathbf{J}][(1/n)\mathbf{J}] = \mathbf{0}$.

Q13. Mostre que $\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}) \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, sabendo que $\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Q14. Mostre que $\mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{A}(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}) + 2(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}$, onde \mathbf{A} é uma matriz simétrica de constantes.

Q15. Se $\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, verifique que $(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})$ é $\chi^2(n)$. Qual a distribuição de $\mathbf{Y}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{Y}$?

Q16. Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 \\ -3 & 2 & -6 \\ -8 & -6 & 3 \end{bmatrix}$. Além disso, considere $\mathbf{Y} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, com

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- a. Encontre $\mathbb{E}(\mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Y})$.
- b. Encontre $\text{Var}(\mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Y})$.
- c. $\mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Y}$ tem distribuição chi-quadrado?
- d. Se $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{I}$, $\mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Y}$ tem distribuição chi-quadrado?

Q17. Exercícios do Capítulo 1 do livro texto:

1.1, 1.2, 1.5, 1.11, 1.12, 1.13, 1.18.

Q18. Exercícios do Capítulo 2 do livro texto:

2.3, 2.4, 2.8, 2.9, 2.12, 2.24, 2.25, 2.29, 2.30, 2.42, 2.44, 2.45, 2.46, 2.47, 2.48, 2.49.

Q19. Exercícios do Capítulo 3 do livro texto:

3.7, 3.8, 3.12, 3.30, 3.31, 3.32, 3.33, 3.34, 3.39, 3.40.