

ME414 - Estatística para Experimentalistas

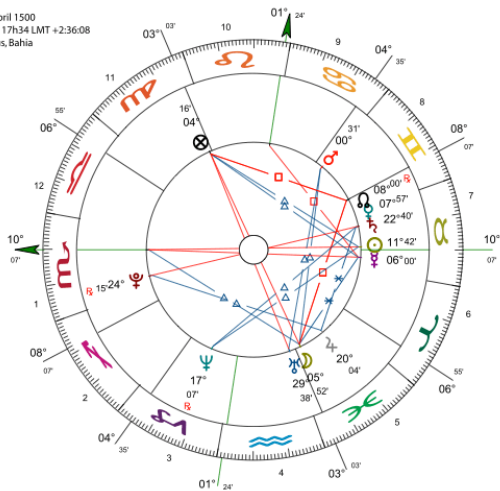
Parte 17

Notas de aula produzidas pelos professores **Samara Kiihl**,
Tatiana Benaglia e **Benilton Carvalho** e modificadas pela
Profa. **Larissa Avila Matos**

Teste de Hipóteses: Introdução

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

22 abril 1500
circa 17h34 LMT +2:36:08
Ilhéus, Bahia



Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Se você fornece data, hora e local de nascimento, um astrólogo monta o seu Mapa Astral.

De acordo com a astrologia, a posição dos astros no momento em que nascemos influencia nossa maneira de ser. - Wikipedia

As configurações de um Mapa Astral se repetem apenas a cada 26.000 anos, portanto ele é quase como uma impressão digital - não existe um igual ao outro. - Wikipedia

Há comprovação científica de que seu mapa astral reflete sua personalidade?

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Um teste foi feito da seguinte maneira: 116 pessoas selecionadas aleatoriamente forneceram data, hora e local de nascimento.

Um astrólogo preparou um mapa astral para essas 116 pessoas, usando apenas os dados fornecidos acima.

Cada voluntário também preencheu um questionário: “[California Personality Index](#)”.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Para **um outro astrólogo**, foram dados:

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Para **um outro astrólogo**, foram dados:

- data, hora, local, Mapa Astral de um dos voluntários, por exemplo, voluntário 3.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Para **um outro astrólogo**, foram dados:

- data, hora, local, Mapa Astral de um dos voluntários, por exemplo, voluntário 3.
- questionário de personalidade preenchidos pelo voluntário 3.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Para **um outro astrólogo**, foram dados:

- data, hora, local, Mapa Astral de um dos voluntários, por exemplo, voluntário 3.
- questionário de personalidade preenchidos pelo voluntário 3.
- 2 questionários de personalidade, escolhidos ao acaso entre os 115 restantes, preenchidos por outros dois voluntários.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Para **um outro astrólogo**, foram dados:

- data, hora, local, Mapa Astral de um dos voluntários, por exemplo, voluntário 3.
- questionário de personalidade preenchidos pelo voluntário 3.
- 2 questionários de personalidade, escolhidos ao acaso entre os 115 restantes, preenchidos por outros dois voluntários.

Ao astrólogo, pediu-se então para identificar qual questionário havia sido preenchido pelo dono daquele Mapa Astral.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Seja p a probabilidade de que o astrólogo identifique o questionário correto.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Seja p a probabilidade de que o astrólogo identifique o questionário correto.

Se de fato a informação do Mapa Astral não caracteriza a personalidade de uma pessoa e na verdade o astrólogo está apenas escolhendo um dos 3 questionários ao acaso, a probabilidade de acerto é $p = 1/3$.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Seja p a probabilidade de que o astrólogo identifique o questionário correto.

Se de fato a informação do Mapa Astral não caracteriza a personalidade de uma pessoa e na verdade o astrólogo está apenas escolhendo um dos 3 questionários ao acaso, a probabilidade de acerto é $p = 1/3$.

Astrólogos confiam em seus estudos e dizem que a probabilidade de acerto é maior do que $1/3$.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Seja p a probabilidade de que o astrólogo identifique o questionário correto.

Se de fato a informação do Mapa Astral não caracteriza a personalidade de uma pessoa e na verdade o astrólogo está apenas escolhendo um dos 3 questionários ao acaso, a probabilidade de acerto é $p = 1/3$.

Astrólogos confiam em seus estudos e dizem que a probabilidade de acerto é maior do que $1/3$.

Como testar se eles estão certos?

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Seja p a probabilidade de que o astrólogo identifique o questionário correto.

Se de fato a informação do Mapa Astral não caracteriza a personalidade de uma pessoa e na verdade o astrólogo está apenas escolhendo um dos 3 questionários ao acaso, a probabilidade de acerto é $p = 1/3$.

Astrólogos confiam em seus estudos e dizem que a probabilidade de acerto é maior do que $1/3$.

Como testar se eles estão certos?

Escolher ao acaso um astrólogo e fazer o teste com ele uma vez, é suficiente?

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

28 astrólogos foram selecionados aleatoriamente a partir de uma lista de astrólogos familiarizados com o “California Personality Index”.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

28 astrólogos foram selecionados aleatoriamente a partir de uma lista de astrólogos familiarizados com o “California Personality Index”.

A lista foi preparada pelo “National Council for Geocosmic Research”.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

28 astrólogos foram selecionados aleatoriamente a partir de uma lista de astrólogos familiarizados com o “California Personality Index”.

A lista foi preparada pelo “[National Council for Geocosmic Research](#)”.

Vimos que podemos estudar fenômenos aleatórios definindo variáveis aleatórias e teoria da probabilidade.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

28 astrólogos foram selecionados aleatoriamente a partir de uma lista de astrólogos familiarizados com o “California Personality Index”.

A lista foi preparada pelo “[National Council for Geocosmic Research](#)”.

Vimos que podemos estudar fenômenos aleatórios definindo variáveis aleatórias e teoria da probabilidade.

Um astrólogo pode associar corretamente o questionário ao mapa astral ou não.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

28 astrólogos foram selecionados aleatoriamente a partir de uma lista de astrólogos familiarizados com o “California Personality Index”.

A lista foi preparada pelo “National Council for Geocosmic Research”.

Vimos que podemos estudar fenômenos aleatórios definindo variáveis aleatórias e teoria da probabilidade.

Um astrólogo pode associar corretamente o questionário ao mapa astral ou não.

Para cada situação, há uma probabilidade associada. Portanto temos um evento aleatório.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

28 astrólogos foram selecionados aleatoriamente a partir de uma lista de astrólogos familiarizados com o “California Personality Index”.

A lista foi preparada pelo “[National Council for Geocosmic Research](#)”.

Vimos que podemos estudar fenômenos aleatórios definindo variáveis aleatórias e teoria da probabilidade.

Um astrólogo pode associar corretamente o questionário ao mapa astral ou não.

Para cada situação, há uma probabilidade associada. Portanto temos um evento aleatório.

Como definir a variável aleatória?

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

X_i : astrólogo associa corretamente um questionário ao mapa astral i .

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

X_i : astrólogo associa corretamente um questionário ao mapa astral i .

$X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

X_i : astrólogo associa corretamente um questionário ao mapa astral i .

$X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Podemos pensar em p como a proporção de acerto na população de astrólogos.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

X_i : astrólogo associa corretamente um questionário ao mapa astral i .

$X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Podemos pensar em p como a proporção de acerto na população de astrólogos.

Se astrólogos não têm a capacidade de predição, $p = 1/3$.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

X_i : astrólogo associa corretamente um questionário ao mapa astral i .

$X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Podemos pensar em p como a proporção de acerto na população de astrólogos.

Se astrólogos não têm a capacidade de predição, $p = 1/3$.

Astrólogos alegam que são capazes: $p > 1/3$.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

X_i : astrólogo associa corretamente um questionário ao mapa astral i .

$X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Podemos pensar em p como a proporção de acerto na população de astrólogos.

Se astrólogos não têm a capacidade de predição, $p = 1/3$.

Astrólogos alegam que são capazes: $p > 1/3$.

Como usar dados para testar estes dois cenários?

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?



Definindo hipóteses

Objetivo em muitos estudos: checar se os dados apóiam certas afirmações que são feitas para uma população.

Definindo hipóteses

Objetivo em muitos estudos: checar se os dados apóiam certas afirmações que são feitas para uma população.

Afirmações a serem testadas: **hipóteses**.

Definindo hipóteses

Objetivo em muitos estudos: checar se os dados apóiam certas afirmações que são feitas para uma população.

Afirmações a serem testadas: **hipóteses**.

Expressamos as hipóteses em termos dos parâmetros da população.

Definindo hipóteses

Objetivo em muitos estudos: checar se os dados apóiam certas afirmações que são feitas para uma população.

Afirmações a serem testadas: **hipóteses**.

Expressamos as hipóteses em termos dos parâmetros da população.

Por exemplo: o parâmetro pode ser uma proporção populacional.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Hipótese: Usando o mapa astral de uma pessoa, a probabilidade, p , de um astrólogo prever corretamente qual dos 3 questionários está associado àquele mapa astral é igual a $1/3$. Ou seja, os astrólogos apenas selecionam ao acaso um dos questionários.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Hipótese: Usando o mapa astral de uma pessoa, a probabilidade, p , de um astrólogo prever corretamente qual dos 3 questionários está associado àquele mapa astral é igual a $1/3$. Ou seja, os astrólogos apenas selecionam ao acaso um dos questionários.

Nesse caso, para saber se os astrólogos têm a capacidade de prever a personalidade usando o mapa astral, usaríamos as seguintes **hipóteses**:

$$\begin{cases} H_0 : p = 1/3 & (\text{hipótese nula}) \\ H_a : p > 1/3 & (\text{hipótese alternativa}) \end{cases}$$

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Hipótese: Usando o mapa astral de uma pessoa, a probabilidade, p , de um astrólogo prever corretamente qual dos 3 questionários está associado àquele mapa astral é igual a $1/3$. Ou seja, os astrólogos apenas selecionam ao acaso um dos questionários.

Nesse caso, para saber se os astrólogos têm a capacidade de prever a personalidade usando o mapa astral, usaríamos as seguintes **hipóteses**:

$$\begin{cases} H_0 : p = 1/3 & \text{(hipótese nula)} \\ H_a : p > 1/3 & \text{(hipótese alternativa)} \end{cases}$$

No experimento com os 28 astrólogos, observar uma proporção alta de acertos pode ser uma evidência contra a hipótese de que $p = 1/3$.

Passos de um teste de hipótese

Passo 1: suposições.

O teste é válido sob algumas suposições. A mais importante assume que os dados do experimento foram produzidos através de um processo de aleatorização.

Passos de um teste de hipótese

Passo 1: suposições.

O teste é válido sob algumas suposições. A mais importante assume que os dados do experimento foram produzidos através de um processo de aleatorização.

Passo 2: hipóteses.

O teste de hipótese tem sempre duas hipóteses sobre o parâmetro populacional de interesse. As hipóteses devem ser definidas **antes** de se realizar o experimento e coletar dados.

- **Hipótese Nula** - H_0 : afirma que o parâmetro populacional assume um dado valor.
- **Hipótese Alternativa** - H_a : afirma que o parâmetro populacional assume outros valores, diferente do valor descrito na H_0 .

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

No experimento dos astrólogos, $H_0: p = 1/3$ representa a hipótese de que **não há efeito**, no sentido de que os astrólogos não têm uma capacidade maior de prever a personalidade usando o mapa astral.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

No experimento dos astrólogos, $H_0: p = 1/3$ representa a hipótese de que **não há efeito**, no sentido de que os astrólogos não têm uma capacidade maior de prever a personalidade usando o mapa astral.

A hipótese alternativa, $H_a: p > 1/3$, representa a hipótese de que **há efeito**, ou seja, os astrólogos têm uma capacidade de prever a personalidade usando o mapa astral.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

No experimento dos astrólogos, $H_0: p = 1/3$ representa a hipótese de que **não há efeito**, no sentido de que os astrólogos não têm uma capacidade maior de prever a personalidade usando o mapa astral.

A hipótese alternativa, $H_a: p > 1/3$, representa a hipótese de que **há efeito**, ou seja, os astrólogos têm uma capacidade de prever a personalidade usando o mapa astral.

Em teste de hipóteses, mantém-se a favor de H_0 a menos que os dados tragam grande evidência contra.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

No experimento dos astrólogos, $H_0: p = 1/3$ representa a hipótese de que **não há efeito**, no sentido de que os astrólogos não têm uma capacidade maior de prever a personalidade usando o mapa astral.

A hipótese alternativa, $H_a: p > 1/3$, representa a hipótese de que **há efeito**, ou seja, os astrólogos têm uma capacidade de prever a personalidade usando o mapa astral.

Em teste de hipóteses, mantém-se a favor de H_0 a menos que os dados tragam grande evidência contra.

A hipótese nula é conservadora: “o réu é inocente até que se prove o contrário”.

Passos de um teste de hipótese

Passo 3: estatística do teste.

Vimos que podemos usar uma estatística para estimar um parâmetro populacional. A **estatística do teste** descreve quão longe do parâmetro populacional usado na H_0 a estimativa está.

Passos de um teste de hipótese

Passo 3: estatística do teste.

Vimos que podemos usar uma estatística para estimar um parâmetro populacional. A **estatística do teste** descreve quão longe do parâmetro populacional usado na H_0 a estimativa está.

Por exemplo, se $H_0 : p = 1/3$, e se $\hat{p} = 40/116 = 0.345$, queremos uma estatística que quantifique quão longe está $\hat{p} = 0.345$ de $p = 1/3$.

Passos de um teste de hipótese

Passo 3: estatística do teste.

Vimos que podemos usar uma estatística para estimar um parâmetro populacional. A **estatística do teste** descreve quão longe do parâmetro populacional usado na H_0 a estimativa está.

Por exemplo, se $H_0 : p = 1/3$, e se $\hat{p} = 40/116 = 0.345$, queremos uma estatística que quantifique quão longe está $\hat{p} = 0.345$ de $p = 1/3$.

Passo 4: valor-de-p.

Para interpretar uma estatística do teste, vamos usar uma probabilidade para resumir a evidência contra H_0 . Esta probabilidade é o que chamamos de **valor-de-p**.

Passos de um teste de hipótese

Passo 5: conclusão.

Baseado no valor-de-p, decidir se rejeita ou não a hipótese nula. Note que a conclusão é sempre em termos da hipótese nula: rejeitar ou não H_0 .

Mas quão pequeno deve ser o valor-de-p para ser considerado forte evidência contra H_0 ?

Geralmente, fixamos o **nível de significância** do teste (α), e usamos a seguinte regra. É comum usarmos $\alpha = 0.05$.

Passos de um teste de hipótese

Passo 5: conclusão.

Baseado no valor-de-p, decidir se rejeita ou não a hipótese nula. Note que a conclusão é sempre em termos da hipótese nula: rejeitar ou não H_0 .

Mas quão pequeno deve ser o valor-de-p para ser considerado forte evidência contra H_0 ?

Geralmente, fixamos o **nível de significância** do teste (α), e usamos a seguinte regra. É comum usarmos $\alpha = 0.05$.

- Se valor-de-p $\leq \alpha$: rejeitamos H_0 , ou seja, os dados trazem forte evidência contra a hipótese nula
- Se valor-de-p $> \alpha$: não rejeitamos H_0 , ou seja, não temos evidência nos dados contra a hipótese nula

Passos de um teste de hipótese

Assumimos primeiro que H_0 é verdadeira.

Passos de um teste de hipótese

Assumimos primeiro que H_0 é verdadeira.

Consideramos então todos os valores possíveis para a estatística do teste, de acordo com sua distribuição amostral.

Passos de um teste de hipótese

Assumimos primeiro que H_0 é verdadeira.

Consideramos então todos os valores possíveis para a estatística do teste, de acordo com sua distribuição amostral.

Calculamos a estatística do teste observada para o experimento realizado e verificamos onde, na distribuição amostral, ela se posiciona.

Passos de um teste de hipótese

Assumimos primeiro que H_0 é verdadeira.

Consideramos então todos os valores possíveis para a estatística do teste, de acordo com sua distribuição amostral.

Calculamos a estatística do teste observada para o experimento realizado e verificamos onde, na distribuição amostral, ela se posiciona.

Calculamos a probabilidade de um valor igual ou mais extremo ao da estatística do teste observada (valor-de-p). Mais extremo: mais evidência contra H_0 .

Passos de um teste de hipótese

Assumimos primeiro que H_0 é verdadeira.

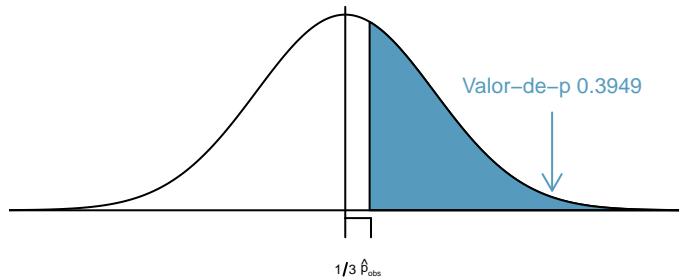
Consideramos então todos os valores possíveis para a estatística do teste, de acordo com sua distribuição amostral.

Calculamos a estatística do teste observada para o experimento realizado e verificamos onde, na distribuição amostral, ela se posiciona.

Calculamos a probabilidade de um valor igual ou mais extremo ao da estatística do teste observada (valor-de-p). Mais extremo: mais evidência contra H_0 .

Se o valor-de-p obtido é bem pequeno, por exemplo, 0.01, isto quer dizer que se H_0 é verdadeira, então seria incomum obter uma amostra com os resultados como o observado. Um valor-de-p muito baixo traz fortes evidências contra H_0 .

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?



Distribuição amostral da proporção amostral \hat{p} sob H_0 . A área em azul representa uma probabilidade, que chamamos de valor-de-p: probabilidade de proporção amostral assumir um valor igual ao observado, \hat{p}_{obs} , ou mais extremo, sob H_0 .

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 1: suposições.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 1: suposições.

A variável de interesse é binária.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 1: suposições.

A variável de interesse é binária.

X_i : astrólogo i associa corretamente um questionário ao mapa astral.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 1: suposições.

A variável de interesse é binária.

X_i : astrólogo i associa corretamente um questionário ao mapa astral.

$X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 1: suposições.

A variável de interesse é binária.

X_i : astrólogo i associa corretamente um questionário ao mapa astral.

$X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Os dados foram obtidos usando processo de aleatorização: uma amostra aleatória de voluntários e astrólogos foi feita.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 1: suposições.

A variável de interesse é binária.

X_i : astrólogo i associa corretamente um questionário ao mapa astral.

$X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Os dados foram obtidos usando processo de aleatorização: uma amostra aleatória de voluntários e astrólogos foi feita.

Temos uma a.a. de tamanho 116. Portanto, a distribuição amostral da estimativa para p , \hat{p} , tem distribuição aproximadamente normal, pelo TCL.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 2: hipóteses.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 2: hipóteses.

H_0 : $p = p_0 = 1/3$. Astrólogos *chutam* qual o questionário está associado ao mapa astral.

H_a : $p > p_0 = 1/3$. Astrólogos predizem melhor do que um *chute* qual o questionário está associado ao mapa astral.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 3: estatística do teste.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 3: estatística do teste.

Estatística do teste mede quão longe está a proporção amostral, \hat{p} , da proporção populacional, p , assumindo que H_0 seja verdadeira?

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 3: estatística do teste.

Estatística do teste mede quão longe está a proporção amostral, \hat{p} , da proporção populacional, p , assumindo que H_0 seja verdadeira?

$$\hat{p} \sim \text{Normal} \left(p, \frac{p(1-p)}{n} \right).$$

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 3: estatística do teste.

Estatística do teste mede quanto longe está a proporção amostral, \hat{p} , da proporção populacional, p , assumindo que H_0 seja verdadeira?

$$\hat{p} \sim \text{Normal} \left(p, \frac{p(1-p)}{n} \right).$$

$$\text{Se } H_0 \text{ é verdadeira: } \hat{p} \sim \text{Normal} \left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n} \right).$$

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 3: estatística do teste.

A estatística do teste é:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{EP_0(\hat{p})},$$

onde $EP_0(\hat{p})$ é o erro padrão de \hat{p} sob H_0 : $\sqrt{p_0(1-p_0)/n}$.

Então,

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \stackrel{H_0}{\sim} \text{Normal}(0, 1).$$

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 3: estatística do teste.

A estatística do teste é:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{EP_0(\hat{p})},$$

onde $EP_0(\hat{p})$ é o erro padrão de \hat{p} sob H_0 : $\sqrt{p_0(1-p_0)/n}$.

Então,

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \stackrel{H_0}{\sim} \text{Normal}(0, 1).$$

A estatística do teste mede quão distante está \hat{p} de p em unidades de “erro-padrão”.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 3: estatística do teste.

No experimento dos astrólogos, dentre 116 mapas, 40 foram corretamente associados ao questionário de personalidade.

$$\hat{p} = 40/116 = 0.345.$$

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 3: estatística do teste.

No experimento dos astrólogos, dentre 116 mapas, 40 foram corretamente associados ao questionário de personalidade.

$$\hat{p} = 40/116 = 0.345.$$

$$z_{obs} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.345 - 1/3}{\sqrt{\frac{1/3(1-1/3)}{116}}} = 0.27$$

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 3: estatística do teste.

No experimento dos astrólogos, dentre 116 mapas, 40 foram corretamente associados ao questionário de personalidade.

$$\hat{p} = 40/116 = 0.345.$$

$$z_{obs} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.345 - 1/3}{\sqrt{\frac{1/3(1-1/3)}{116}}} = 0.27$$

A proporção amostral está a 0.27 erro-padrão de distância da proporção populacional segundo H_0 .

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 4: valor-de-p.

$z_{obs} = 0.27$ traz evidência contra H_0 a favor de H_a ?

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 4: valor-de-p.

$z_{obs} = 0.27$ traz evidência contra H_0 a favor de H_a ?

Quão improvável é $z_{obs} = 0.27$ se a proporção de acertos dos astrólogos é de fato $p = p_0 = 1/3$?

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 4: valor-de-p.

$z_{obs} = 0.27$ traz evidência contra H_0 a favor de H_a ?

Quão improvável é $z_{obs} = 0.27$ se a proporção de acertos dos astrólogos é de fato $p = p_0 = 1/3$?

Valor-de-p: probabilidade de que uma estatística do teste assuma um valor igual ou mais extremo, assumindo que $p = p_0 = 1/3$.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 4: valor-de-p.

$z_{obs} = 0.27$ traz evidência contra H_0 a favor de H_a ?

Quão improvável é $z_{obs} = 0.27$ se a proporção de acertos dos astrólogos é de fato $p = p_0 = 1/3$?

Valor-de-p: probabilidade de que uma estatística do teste assuma um valor igual ou mais extremo, assumindo que $p = p_0 = 1/3$.

Mais extremo: neste caso, é um maior valor de z_{obs} , pois equivale a um maior \hat{p} , maior proporção amostral de acertos (astrólogos alegam que $p > 1/3$).

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 4: valor-de-p.

$z_{obs} = 0.27$ traz evidência contra H_0 a favor de H_a ?

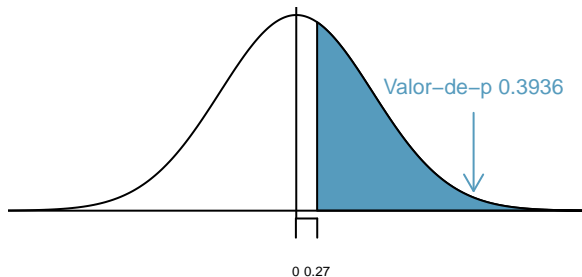
Quão improvável é $z_{obs} = 0.27$ se a proporção de acertos dos astrólogos é de fato $p = p_0 = 1/3$?

Valor-de-p: probabilidade de que uma estatística do teste assuma um valor igual ou mais extremo, assumindo que $p = p_0 = 1/3$.

Mais extremo: neste caso, é um maior valor de z_{obs} , pois equivale a um maior \hat{p} , maior proporção amostral de acertos (astrólogos alegam que $p > 1/3$).

Valor-de-p: $P(Z > z_{obs}) = P(Z > 0.27) = 0.3936$, onde $Z \sim \text{Normal}(0, 1)$.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?



Distribuição amostral da estatística do teste Z sob H_0 . A área em azul representa a probabilidade de valores mais extremos que z_{obs} ocorrerem, que chamamos de valor-de-p.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 5: conclusão.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 5: conclusão.

O valor-de-p obtido no experimento foi 0.3936.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 5: conclusão.

O valor-de-p obtido no experimento foi 0.3936.

O valor não é tão pequeno.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 5: conclusão.

O valor-de-p obtido no experimento foi 0.3936.

O valor não é tão pequeno.

Não encontramos evidências contra H_0 .

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 5: conclusão.

O valor-de-p obtido no experimento foi 0.3936.

O valor não é tão pequeno.

Não encontramos evidências contra H_0 .

Não podemos concluir que astrólogos têm poderes preditivos especiais usando mapa-astral.

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

Passo 5: conclusão.

O valor-de-p obtido no experimento foi 0.3936.

O valor não é tão pequeno.

Não encontramos evidências contra H_0 .

Não podemos concluir que astrólogos têm poderes preditivos especiais usando mapa-astral.

Detalhes da pesquisa podem ser encontrados no artigo da revista Nature: [A double-blind test of Astrology](#).

Resumo: Teste de Hipótese para uma proporção

Suponho que temos uma população e uma hipótese sobre a proporção p de indivíduos com certa característica.

Hipóteses:

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{vs} \quad H_a : p \neq p_0 \quad (\text{bilateral})$$

$$p < p_0 \quad (\text{unilateral à esquerda})$$

$$p > p_0 \quad (\text{unilateral à direita})$$

Estatística do teste: Baseada na distribuição amostral de \hat{p}

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \stackrel{H_0}{\sim} N(0, 1)$$

Condição: $np_0 \geq 10$ e $n(1 - p_0) \geq 10$ para aproximação normal

Resumo: Teste de Hipótese para uma proporção

valor-de-p:

$H_a : p \neq p_0$ (bilateral): valor-de-p= $P(|Z| \geq |z_{obs}|)$

$H_a : p < p_0$ (unilateral à esquerda): valor-de-p= $P(Z \leq z_{obs})$

$H_a : p > p_0$ (unilateral à direita): valor-de-p= $P(Z \geq z_{obs})$

Conclusão:

Para um nível de significância α :

- Se valor-de-p $\leq \alpha$: rejeitamos H_0
- Se valor-de-p $> \alpha$: não rejeitamos H_0

Exemplo

Uma indústria farmacêutica diz que menos de 20% dos pacientes que estão usando um certo medicamento terão efeitos colaterais.

Realizou-se então um ensaio clínico com 400 pacientes e verificou-se que 68 pacientes apresentaram efeitos colaterais.

Exemplo

Uma indústria farmacêutica diz que menos de 20% dos pacientes que estão usando um certo medicamento terão efeitos colaterais.

Realizou-se então um ensaio clínico com 400 pacientes e verificou-se que 68 pacientes apresentaram efeitos colaterais.

Hipóteses: $H_0 : p = 0.20$ vs $H_a : p < 0.20$

Exemplo

Uma indústria farmacêutica diz que menos de 20% dos pacientes que estão usando um certo medicamento terão efeitos colaterais.

Realizou-se então um ensaio clínico com 400 pacientes e verificou-se que 68 pacientes apresentaram efeitos colaterais.

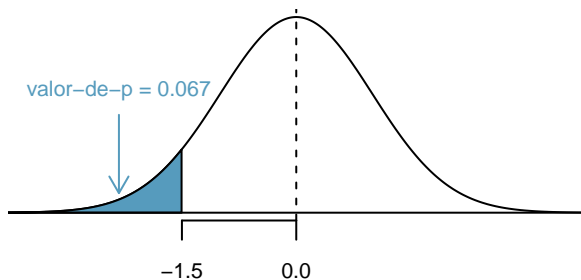
Hipóteses: $H_0 : p = 0.20$ vs $H_a : p < 0.20$

Estatística do teste: Da amostra temos que $\hat{p} = 68/400 = 0.17$

$$z_{obs} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.17 - 0.20}{\sqrt{\frac{0.20(1-0.20)}{400}}} = -1.5$$

Exemplo (continuação)

$$\text{valor-de-p} = P(Z \leq -1.5) = 0.067$$

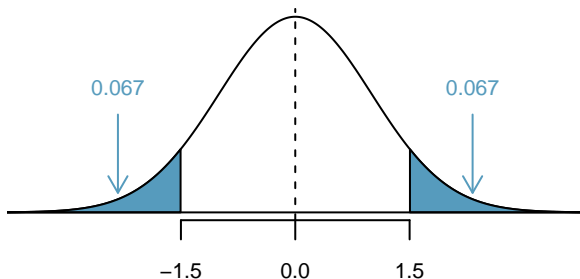


Conclusão: Para $\alpha = 0.05$, como o valor-de-p é maior que 0.05, não temos evidências nos dados para rejeitar a hipótese de que $p = 0.20$. Na verdade, a evidência está na direção que a indústria farmacêutica queria, mas não é o suficiente para rejeitar H_0 .

Exemplo (continuação)

E se estivéssemos testando: $H_0 : p = 0.20$ vs $H_a : p \neq 0.20$

$$\begin{aligned}\text{valor-de-p} &= P(|Z| \geq 1.5) = P(Z \leq -1.5) + P(Z \geq 1.5) \\ &= 2P(Z \leq -1.5) = 2 \times 0.067 = 0.134\end{aligned}$$



Conclusão: Para $\alpha = 0.05$, como o valor-de-p é maior que 0.05, não temos evidências nos dados para rejeitar a hipótese de que $p = 0.20$.

Coca vs Coca Zero - você consegue distinguir?

STOP
Coca-Cola
zero™

TASTE CONFUSION HURTS US ALL



Coca-Cola Zero® has pirated the taste of Coca-Cola® to the point that it's hard to tell the two apart. As employees of the Coca-Cola® brand, we demand that the Coke Zero® brand CEASE AND DESIST from copying our product. For all we care the Coke Zero® brand can fold up like a cheap lawnchair. Coca-Cola® is the rightful home of real Coca-Cola® taste!

Experimento da Coca vs Coca Zero

Algumas pessoas afirmam que conseguem distinguir o sabor da coca-cola normal da coca zero.

Experimento da Coca vs Coca Zero

Algumas pessoas afirmam que conseguem distinguir o sabor da coca-cola normal da coca zero.

Faremos então um teste para comprovar se a afirmação é verdadeira.

Experimento da Coca vs Coca Zero

Algumas pessoas afirmam que conseguem distinguir o sabor da coca-cola normal da coca zero.

Faremos então um teste para comprovar se a afirmação é verdadeira.

Experimento:

Experimento da Coca vs Coca Zero

Algumas pessoas afirmam que conseguem distinguir o sabor da coca-cola normal da coca zero.

Faremos então um teste para comprovar se a afirmação é verdadeira.

Experimento:

- Sorteia-se, sem a pessoa saber, coca ou coca zero, usando um dado (se sair par, recebe uma coca-cola normal, se sair ímpar, uma coca zero).

Experimento da Coca vs Coca Zero

Algumas pessoas afirmam que conseguem distinguir o sabor da coca-cola normal da coca zero.

Faremos então um teste para comprovar se a afirmação é verdadeira.

Experimento:

- Sorteia-se, sem a pessoa saber, coca ou coca zero, usando um dado (se sair par, recebe uma coca-cola normal, se sair ímpar, uma coca zero).
- A bebida sorteada é então dada à pessoa sendo testada, que deve então dizer qual ela acredita que é.

Experimento da Coca vs Coca Zero

Algumas pessoas afirmam que conseguem distinguir o sabor da coca-cola normal da coca zero.

Faremos então um teste para comprovar se a afirmação é verdadeira.

Experimento:

- Sorteia-se, sem a pessoa saber, coca ou coca zero, usando um dado (se sair par, recebe uma coca-cola normal, se sair ímpar, uma coca zero).
- A bebida sorteada é então dada à pessoa sendo testada, que deve então dizer qual ela acredita que é.
- Repetimos isso 20 vezes.

Experimento da Coca vs Coca Zero

Algumas pessoas afirmam que conseguem distinguir o sabor da coca-cola normal da coca zero.

Faremos então um teste para comprovar se a afirmação é verdadeira.

Experimento:

- Sorteia-se, sem a pessoa saber, coca ou coca zero, usando um dado (se sair par, recebe uma coca-cola normal, se sair ímpar, uma coca zero).
- A bebida sorteada é então dada à pessoa sendo testada, que deve então dizer qual ela acredita que é.
- Repetimos isso 20 vezes.
- Anota-se o total de acertos.

Experimento da Coca vs Coca Zero

Suposições:

Experimento da Coca vs Coca Zero

Suposições:

Cada tentativa, X_i , é uma Bernoulli(p), em que p é a probabilidade de acerto.

Experimento da Coca vs Coca Zero

Suposições:

Cada tentativa, X_i , é uma Bernoulli(p), em que p é a probabilidade de acerto.

Estamos interessados no total de acertos em 20 tentativas:

$$T = \sum_{i=1}^{20} X_i \sim \text{Binomial}(20, p).$$

Experimento da Coca vs Coca Zero

Suposições:

Cada tentativa, X_i , é uma Bernoulli(p), em que p é a probabilidade de acerto.

Estamos interessados no total de acertos em 20 tentativas:

$$T = \sum_{i=1}^{20} X_i \sim \text{Binomial}(20, p).$$

Podemos usar a aproximação pela Normal caso as condições sejam satisfeitas.

Experimento da Coca vs Coca Zero

Suposições:

Cada tentativa, X_i , é uma Bernoulli(p), em que p é a probabilidade de acerto.

Estamos interessados no total de acertos em 20 tentativas:

$$T = \sum_{i=1}^{20} X_i \sim \text{Binomial}(20, p).$$

Podemos usar a aproximação pela Normal caso as condições sejam satisfeitas.

Hipóteses:

Experimento da Coca vs Coca Zero

Suposições:

Cada tentativa, X_i , é uma Bernoulli(p), em que p é a probabilidade de acerto.

Estamos interessados no total de acertos em 20 tentativas:

$$T = \sum_{i=1}^{20} X_i \sim \text{Binomial}(20, p).$$

Podemos usar a aproximação pela Normal caso as condições sejam satisfeitas.

Hipóteses:

$H_0 : p = 1/2$, indicando que a pessoa não consegue diferenciar as duas bebidas.

Experimento da Coca vs Coca Zero

Suposições:

Cada tentativa, X_i , é uma Bernoulli(p), em que p é a probabilidade de acerto.

Estamos interessados no total de acertos em 20 tentativas:

$$T = \sum_{i=1}^{20} X_i \sim \text{Binomial}(20, p).$$

Podemos usar a aproximação pela Normal caso as condições sejam satisfeitas.

Hipóteses:

$H_0 : p = 1/2$, indicando que a pessoa não consegue diferenciar as duas bebidas.

$$H_a : p > 1/2.$$

Experimento da Coca vs Coca Zero

Estatística do teste:

Experimento da Coca vs Coca Zero

Estatística do teste:

Usamos $T = \sum_{i=1}^{20} X_i \sim \text{Binomial}(20, p)$.

Experimento da Coca vs Coca Zero

Estatística do teste:

Usamos $T = \sum_{i=1}^{20} X_i \sim \text{Binomial}(20, p)$.

Valor-de-p:

Experimento da Coca vs Coca Zero

Estatística do teste:

Usamos $T = \sum_{i=1}^{20} X_i \sim \text{Binomial}(20, p)$.

Valor-de-p:

Evidência contra H_0 . Calculamos a probabilidade, sob H_0 , de ocorrer um valor igual ou mais extremo ao valor observado no experimento.

Experimento da Coca vs Coca Zero

Resultado do experimento:

Experimento da Coca vs Coca Zero

Resultado do experimento:

Seja $t_{obs} = 19$ o número de acertos, o valor-de-p foi então:

$P(T \geq 19) = 0$, onde $T \stackrel{H_0}{\sim} \text{Binomial}(20, 1/2)$.

Experimento da Coca vs Coca Zero

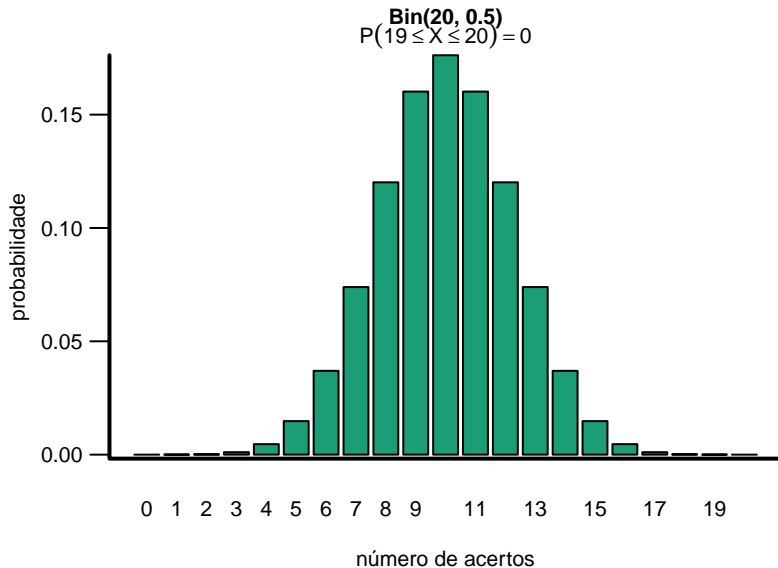
Resultado do experimento:

Seja $t_{obs} = 19$ o número de acertos, o valor-de-p foi então:

$P(T \geq 19) = 0$, onde $T \stackrel{H_0}{\sim} \text{Binomial}(20, 1/2)$.

Conclusão: Decidimos rejeitar H_0 .

Experimento da Coca vs Coca Zero



Experimento da Coca vs Coca Zero

Utilizando a aproximação pela Normal:

Experimento da Coca vs Coca Zero

Utilizando a aproximação pela Normal:

Temos que $T \sim \text{Bin}(20, p)$, onde T é o número de acertos.

Experimento da Coca vs Coca Zero

Utilizando a aproximação pela Normal:

Temos que $T \sim \text{Bin}(20, p)$, onde T é o número de acertos.

A proporção amostral de acertos $\hat{p} = \frac{T}{20} = 19/20 = 0.95$.

Experimento da Coca vs Coca Zero

Utilizando a aproximação pela Normal:

Temos que $T \sim \text{Bin}(20, p)$, onde T é o número de acertos.

A proporção amostral de acertos $\hat{p} = \frac{T}{20} = 19/20 = 0.95$.

Vamos testar o seguinte: $H_0 : p = 0.50$ vs $H_a : p > 0.50$.

Experimento da Coca vs Coca Zero

Utilizando a aproximação pela Normal:

Temos que $T \sim \text{Bin}(20, p)$, onde T é o número de acertos.

A proporção amostral de acertos $\hat{p} = \frac{T}{20} = 19/20 = 0.95$.

Vamos testar o seguinte: $H_0 : p = 0.50$ vs $H_a : p > 0.50$.

Estatística do teste:

$$z_{obs} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.95 - 0.5}{\sqrt{\frac{(0.50)(0.50)}{20}}} = 4.02$$

Experimento da Coca vs Coca Zero

Utilizando a aproximação pela Normal:

Temos que $T \sim \text{Bin}(20, p)$, onde T é o número de acertos.

A proporção amostral de acertos $\hat{p} = \frac{T}{20} = 19/20 = 0.95$.

Vamos testar o seguinte: $H_0 : p = 0.50$ vs $H_a : p > 0.50$.

Estatística do teste:

$$z_{obs} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.95 - 0.5}{\sqrt{\frac{(0.50)(0.50)}{20}}} = 4.02$$

valor-de-p = $P(Z \geq 4.02) = 0$

Experimento da Coca vs Coca Zero

Utilizando a aproximação pela Normal:

Temos que $T \sim \text{Bin}(20, p)$, onde T é o número de acertos.

A proporção amostral de acertos $\hat{p} = \frac{T}{20} = 19/20 = 0.95$.

Vamos testar o seguinte: $H_0 : p = 0.50$ vs $H_a : p > 0.50$.

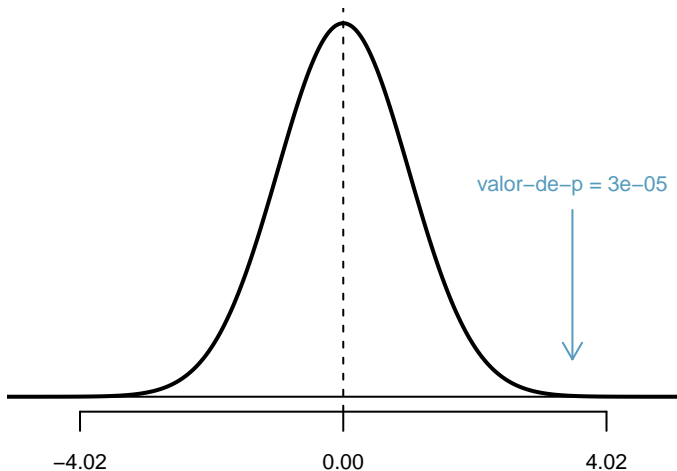
Estatística do teste:

$$z_{obs} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.95 - 0.5}{\sqrt{\frac{(0.50)(0.50)}{20}}} = 4.02$$

valor-de-p = $P(Z \geq 4.02) = 0$

Conclusão: Fixando $\alpha = 0.05$, rejeitamos a hipótese de que $p = 0.5$ e, portanto, rejeitamos a hipótese de que probabilidade de acertos é 50%.

Experimento da Coca vs Coca Zero



- [Ross](#): capítulo 9.
- [OpenIntro](#): seções 4.3 e 6.1.
- Magalhães: capítulo 8.