ME414 - Estatística para Experimentalistas

Gabarito LISTA 4

Questão 1.

Seja X: o tempo (em minutos) que os veículos têm que esperar antes de entrar no cruzamento.

$$f(x) = \begin{cases} 0,8 - 0,32x, & \text{se } 0 < x < 2,5 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a. Calcule $E(X)$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{2,5} x f(x)dx = \int_0^{2,5} x(0,8 - 0,32x)dx = \int_0^{2,5} 0,8x - 0,32x^2 dx \\ &= \left[0,8\left(\frac{x^2}{2}\right) - 0,32\left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^{2,5} = 0,8\frac{2,5^2}{2} - 0,32\frac{2,5^3}{3} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

b. Calcule $Var(X)$.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^{2,5} x^2 f(x)dx = \int_0^{2,5} x^2(0,8 - 0,32x)dx = \int_0^{2,5} 0,8x^2 - 0,32x^3 dx \\ &= \left[0,8\left(\frac{x^3}{3}\right) - 0,32\left(\frac{x^4}{4}\right)\right]_0^{2,5} = 0,8\frac{2,5^3}{3} - 0,32\frac{2,5^4}{4} = \frac{25}{24}. \end{aligned}$$

Portanto,
$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dfrac{25}{24} - \left(\dfrac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{25}{72} \approx 0,347.$

Questão 2.

Seja X: densidade de um composto de silício.

$$f(x) = \begin{cases} k, & \text{se } -0,04 < x < 0,04 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a. Encontre o valor de k.

Para que $f(x)$ seja uma função de densidade se deve cumprir que: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-0,04}^{0,04} kdx = kx\Big|_{-0,04}^{0,04} = k(0,04) - k(-0,04) = 0,08k \Rightarrow 0,08k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{0,08} = 12,5.$$

Daquí segue que $f(x) = \begin{cases} 12,5, & \text{se } -0,04 < x < 0,04 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$.

b. Encontre a probabilidade de que X esteja entre $-0,03$ e 0,01.

$$P(-0,03 < X < 0,01) = \int_{-0,03}^{0,01} 12,5dx = 12,5x\Big|_{-0,03}^{0,01} = 12,5(0,01) - 12,5(-0,03) = 0,50.$$

c. Calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-0,04}^{0,04} 12,5xdx = 12,5\frac{x^2}{2}\Big|_{-0,04}^{0,04} = 12,5\frac{0,04^2}{2} - 12,5\frac{(-0,04)^2}{2} = 0. \\
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-0,04}^{0,04} 12,5x^2dx = 12,5\frac{x^3}{3}\Big|_{-0,04}^{0,04} = 12,5\frac{0,04^3}{3} - 12,5\frac{(-0,04)^3}{3} \\
&= 0,000533. \\
Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = 0,000533 - (0)^2 = 0,000533.
\end{aligned}$$

Questão 3. $f(x) = \begin{cases} kx^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

a. Determine o valor de k.

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 kx^2dx = k\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = k\frac{1^3}{3} - k\frac{0^3}{3} = \frac{k}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 3.$$

b. Calcule $P(1/4 < X < 1/2)$.

$P(1/4 < X < 1/2) = \int_{1/4}^{1/2} 3x^2dx = 3\frac{x^3}{3}\Big|_{1/4}^{1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{7}{64} \approx 0,109.$

c. Calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 3x^3dx = 3\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = 3\frac{1^4}{4} = \frac{3}{4}. \\
E(X^2) &= \int_0^1 3x^4dx = 3\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = 3\frac{1^5}{5} = \frac{3}{5}. \\
Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80}.
\end{aligned}$$

Questão 4. $f(y) = \begin{cases} k(8-2y), & \text{se } 0 < y < 4 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

a. Verifique que $k = 0,0625$ e que a mediana é 1,172.

$$\int_0^4 f(y)dy = \int_0^4 k(8-2y)dy = (8ky - ky^2)\Big|_0^4 = 8k(4) - k(4)^2 = 16k \Rightarrow 16k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{16} = 0,0625.$$

x é o valor da mediana se, e somente se, $P(Y \leq x) = 0,5$.

$$P(Y \leq x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x 0,0625(8-2y)dy = (0,5y - 0,0625y^2)\Big|_0^x = 0,5x - 0,0625x^2$$
$$\Rightarrow 0,5x - 0,0625x^2 = 0,5 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 - 8x + 8 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1,172.$$

Logo, $k = 0,0625$ e a mediana é $4 - 2\sqrt{2} \approx 1,172$.

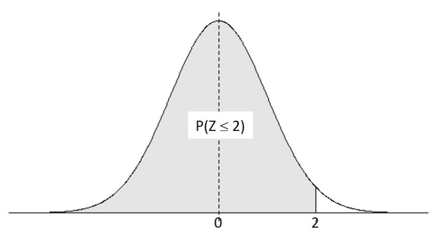
b. Calcule $E(Y)$ e $Var(Y)$.

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_0^4 y f(y) dy = \int_0^4 0,0625(8y - 2y^2) dy = \left(0,5\frac{y^2}{2} - 0,125\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^4 \\
&= 0,5\frac{4^2}{2} - 0,125\frac{4^3}{3} = \frac{4}{3} \approx 1,333. \\
E(Y^2) &= \int_0^4 y^2 f(y) dy = \int_0^4 0,0625(8y^2 - 2y^3) dy = \left(0,5\frac{y^3}{3} - 0,125\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^4 \\
&= 0,5\frac{4^3}{3} - 0,125\frac{4^4}{4} = \frac{8}{3} \approx 2,667. \\
Var(Y) &= E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{8}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} \approx 0,889.
\end{aligned}$$

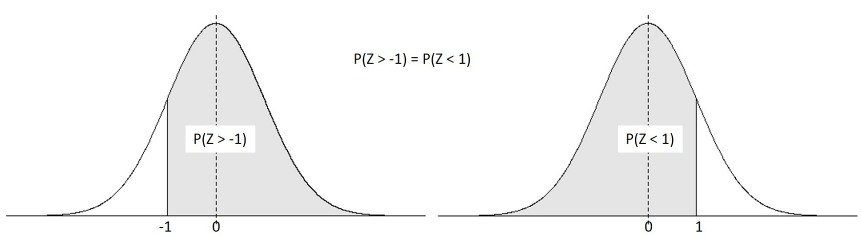
Questão 5.

Seja $X \sim N(5, 16)$ e $Z \sim N(0, 1)$.

a. $P(X \leq 13) = P\left(\frac{X-5}{4} \leq \frac{13-5}{4}\right) = P(Z \leq 2) = 0,9772.$



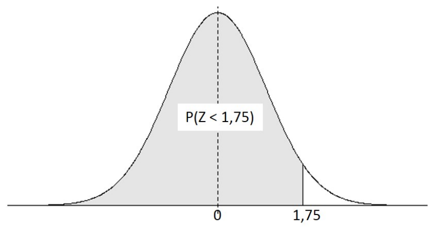
b. $P(X > 1) = P\left(\frac{X-5}{4} > \frac{1-5}{4}\right) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = 0,8413.$



c. Como a $P(X \leq a) = 0,04$, a é um valor menor que zero.

$$\begin{aligned}
P(X \leq a) &= P\left(\frac{X-5}{4} \leq \frac{a-5}{4}\right) = P\left(Z \leq \frac{a-5}{4}\right) = P\left(Z \geq -\frac{a-5}{4}\right) \\
&= 1 - P\left(Z < -\frac{a-5}{4}\right) = 0,04 \quad \Rightarrow \quad P\left(Z < -\frac{a-5}{4}\right) = 1 - 0,04 = 0,96.
\end{aligned}$$

Portanto, $-\frac{a-5}{4} = 1,75 \quad \Rightarrow \quad a = -4(1,75) + 5 = -2.$



Questão 6.

Seja X: o tempo de vida útil (em anos) de um eletrodoméstico.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^{-x/2}}{4}, & x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a. Mostre que de fato f é uma densidade.

Para demonstrar que f é uma densidade, vamos verificar se $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Para esta função em particular, vamos usar integração por partes considerando $u = x$ e $dv = e^{-x/2}dx \Rightarrow du = dx$ e $v = -2e^{-x/2}$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_0^{\infty} \frac{xe^{-x/2}}{4}dx = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} xe^{-x/2}dx = \frac{1}{4}\left[-2xe^{-x/2} + 2\int_0^{\infty} e^{-x/2}dx\right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{4}\left[-2xe^{-x/2} - 4e^{-x/2}\right]_0^{\infty} = 0 + e^{-0/2} = 1. \end{aligned}$$

Portanto, f(x) é uma função de densidade.

b. Se o fabricante dá um tempo de garantia de seis meses para o produto, qual a proporção de aparelhos que devem usar essa garantia.

Os aparelhos que devem usar a garantia são aqueles cuja vida útil seja menor do que 6 meses (0,5 anos).

$$\begin{aligned} P(X \leq 0,5) &= \int_0^{0,5} \frac{xe^{-x/2}}{4}dx = \frac{1}{4}\left[-2xe^{-x/2} - 4e^{-x/2}\right]_0^{0,5} \\ &= \frac{1}{4}\left[-2(0,5)e^{-0,5/2} - 4e^{-0,5/2} + 4e^{-0/2}\right]. \end{aligned}$$

$\Rightarrow P(X \leq 0,5) = 0,0265$ é a proporção de aparelhos que devem usar essa garantia.

Questão 7.

Seja X: o peso (em gramas) de um determinado produto. $X \sim N(\mu, 20^2)$.

a. O objetivo será encontrar o valor de μ tal que$P(X \leq 500) = 0,10$. Então,

$$\begin{aligned} P(X \leq 500) &= P\left(\frac{X-\mu}{20} \leq \frac{500-\mu}{20}\right) = P\left(Z \leq \frac{500-\mu}{20}\right) = P\left(Z \geq -\frac{500-\mu}{20}\right) \\ &= 1 - P\left(Z < -\frac{500-\mu}{20}\right) = 0,10 \quad \Rightarrow \quad P\left(Z < -\frac{500-\mu}{20}\right) = 1 - 0,10 = 0,90. \end{aligned}$$

Logo, $-\dfrac{500-\mu}{20} = 1,28 \quad \Rightarrow \quad \mu = 500 + 20(1,28) = 525,60$ gramas.

b. Seja Y: o peso total (em gramas) de 4 pacotes. $Y \sim N(4(525,60), 4(20)^2)$, i.e., $Y \sim N(2102,4; 40^2)$. Então,

$$\begin{aligned} P(Y \leq 2000) &= P\left(\frac{Y-2102,4}{40} \leq \frac{2000-2102,4}{40}\right) = P(Z \leq -2,56) = P(Z \geq 2,56) \\ &= 1 - P(Z < 2,56) = 1 - 0,9948 = 0,0052. \end{aligned}$$

Questão 8.

Seja $\bar{Y}$: o peso médio (em gramas) de 4 pacotes. $\bar{Y} \sim N(525,60; 10^2)$. A produção será parada para reajustar a máquina se $\bar{Y}$ for inferior a 495,6 gr ou superior a 555,6 gr.

a. A probabilidade de fazer uma parada desnecessária.

$$\begin{aligned} P(\bar{Y} < 495,6 \text{ ou } \bar{Y} > 555,6) &= P(\bar{Y} < 495,6) + P(\bar{Y} > 555,6) \\ &= P\left(\frac{\bar{Y}-525,6}{10} < \frac{495,6-525,6}{10}\right) + P\left(\frac{\bar{Y}-525,6}{10} > \frac{555,6-525,6}{10}\right) \\ &= P(Z < -3) + P(Z > 3) = P(Z > 3) + P(Z > 3) \\ &= 2P(Z > 3) = 2[1 - P(Z \leq 3)] = 2 - 2P(Z \leq 3) \\ &= 2 - 2(0,9987) = 0,0026. \end{aligned}$$

b. Se $X \sim N(510, 20^2)$, então $\bar{Y} \sim N(510, 10^2)$. A probabilidade de continuar a produção fora dos padrões desejados é:

$$\begin{aligned} P(\bar{Y} < 495,6 \text{ ou } \bar{Y} > 555,6) &= P(\bar{Y} < 495,6) + P(\bar{Y} > 555,6) \\ &= P\left(\frac{\bar{Y}-510}{10} < \frac{495,6-510}{10}\right) + P\left(\frac{\bar{Y}-510}{10} > \frac{555,6-510}{10}\right) \\ &= P(Z < -1,44) + P(Z > 4,56) = P(Z > 1,44) + P(Z > 4,56) \\ &= 1 - P(Z \leq 1,44) + 1 - P(Z \leq 4,56) \\ &= 2 - P(Z \leq 1,44) - P(Z \leq 4,56) = 2 - 0,9251 - 1 = 0,0749. \end{aligned}$$

Questão 9.

Seja X: quantidade de acido xanturênico excretado na urina por trabalhadores de uma industria (em mg/15ml). $X \sim N(4,8;2^2)$.

a.

$$
\begin{aligned}
P(2,8 \leq X \leq 7) &= P\left(\frac{2,8-4,8}{2} \leq \frac{X-4,8}{2} \leq \frac{7-4,8}{2}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1,1) \\
&= P(Z \leq 1,1) - P(Z < -1) = P(Z \leq 1,1) - P(Z > 1) \\
&= P(Z \leq 1,1) - [1 - P(Z \leq 1)] = P(Z \leq 1,1) + P(Z \leq 1) - 1 \\
&= 0,8643 + 0,8413 - 1 = 0,7056.
\end{aligned}
$$

A probabilidade que um trabalhador da industria apresente níveis de acido xanturênico normal é 0,7056.

b. Seja a a quantidade de acido xanturênico excretado na urina de um trabalhador, temos interesse no valor de a tal que $P(X \leq a) = 0,10$.

$$
\begin{aligned}
P(X \leq a) &= P\left(\frac{X-4,8}{2} \leq \frac{a-4,8}{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{a-4,8}{2}\right) = P\left(Z \geq -\frac{a-4,8}{2}\right) \\
&= 1 - P\left(Z < -\frac{a-4,8}{2}\right) = 0,10 \quad \Rightarrow \quad P\left(Z < -\frac{a-4,8}{2}\right) = 1 - 0,10 = 0,90.
\end{aligned}
$$

Portanto, $-\dfrac{a-4,8}{2} = 1,285 \quad \Rightarrow \quad a = 4,8 - 2(1,285) = 2,23.$

c. Seja Y: número de trabalhadores dentre os 10 seleccionados ao acaso com níveis de acido xanturênico anormal. $Y \sim Binomial(10;0,2944)$.

$$
\begin{aligned}
P(Y \leq 2) &= P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) = \sum_{y=0}^{2} \binom{10}{y} (0,2944)^y (0,7056)^{10-y} \\
&= 0,031 + 0,128 + 0,240 = 0,398.
\end{aligned}
$$

Questão 10.

Seja X: o comprimento do lado de um quadrado aleatório. $X \sim Uniforme[0,5]$. Seja A: área do quadrado aleatório, tal que $A = X^2$.

$$E(A) = E(X^2) = \int_0^5 x^2 f(x)dx = \int_0^5 \frac{x^2}{5}dx = \left.\frac{x^3}{15}\right|_0^5 = \frac{5^3}{15} = \frac{125}{15} = \frac{25}{3} \approx 8,333.$$

Portanto, a área esperada do quadrado é 8,333 unidades ao quadrado.

Questão 11.

Seja X: tempo de duração de um componente eletrônico. $X \sim Exponencial(1)$.

a. $P(X < 10) = \int_0^{10} f(x)dx = \int_0^{10} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{10} = -e^{-10} + e^0 = 1 - e^{-10} = 0,999.$

b. $P(5 \leq X \leq 15) = \displaystyle\int_5^{15} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_5^{15} = e^{-5} - e^{-15} = 0,0067.$
c. Encontrar o valor t tal que $P(X > t) = 0,01$.

$$P(X > t) = \int_t^{\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_t^{\infty} = e^{-t} = 0,01 \qquad \Rightarrow \quad t = -\ln(0,01) = 4,605.$$

Questão 12.

Seja X: o comprimento do lado de um cubo aleatório. $X \sim Exponencial(3)$. Seja V: o volume do cubo aleatório.

$$E(V) = E(X^3) = \int_0^{\infty} x^3 f(x)dx = \int_0^{\infty} 3x^3 e^{-3x}dx.$$

Para resolver essa integral usaremos integração por partes, considerando $u = x^3$ e $dv = 3e^{-3x}dx \Rightarrow du = 3x^2dx$ e $v = -e^{-3x}$.

$$E(V) = -x^3e^{-3x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 3x^2e^{-3x}dx = \int_0^{\infty} 3x^2e^{-3x}dx.$$

Aplicando novamente integração por partes, considerando $u = x^2$ e $dv = 3e^{-3x}dx \Rightarrow du = 2xdx$ e $v = -e^{-3x}$.

$$E(V) = -x^2e^{-3x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2xe^{-3x}dx = \int_0^{\infty} 2xe^{-3x}dx.$$

Aplicando mais uma vez integração por partes, com $u = x$ e $dv = 2e^{-3x}dx \Rightarrow du = dx$ e $v = -\frac{2}{3}e^{-3x}$. Então,

$$E(V) = -\frac{2x}{3}e^{-3x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{2}{3}e^{-3x}dx = -\frac{2}{9}e^{-3x}\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{9} \approx 0,222.$$

Questão 13.

Seja $T \sim Exponencial(2)$ e $X = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq T < 1 \\ 1, & \text{se } 1 \leq T < 2 \\ 2, & \text{se } T \geq 2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(0 \leq T < 1) = \int_0^1 2e^{-2x}dx = -e^{-2x} = 1 - e^{-2} = 0,865. \\ P(X=1) &= P(1 \leq T < 2) = \int_1^2 2e^{-2x}dx = e^{-2} - e^{-4} = 0,117. \\ P(X=2) &= P(T \geq 2) = \int_2^{\infty} 2e^{-2x}dx = e^{-4} = 0,018. \end{aligned}$$

Portanto, a função de probabilidade de X é: $P(X=x)=\begin{cases} 0,865, & \text{se } x=0 \\ 0,117, & \text{se } x=1 \\ 0,018, & \text{se } x=2 \end{cases}$.

Questão 14.

a. $P(X \leq \mu+2\sigma) = P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{\mu+2\sigma-\mu}{\sigma}\right) = P(Z \leq 2) = 0,9772.$

b.

$$\begin{aligned}
P(|X-\mu| \leq \sigma) &= P(-\sigma \leq X-\mu \leq \sigma) = P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) \\
&= P\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) \\
&= P(Z \leq 1) - P(Z < -1) = P(Z \leq 1) - P(Z > 1) \\
&= P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = 2P(Z \leq 1) - 1 = 2(0,8413) - 1 \\
&= 0,6826.
\end{aligned}$$

c. O número a tal que $P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = 0,99$

$$\begin{aligned}
P(\mu-a\sigma \leq X \leq \mu+a\sigma) &= P\left(\frac{\mu-a\sigma-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{\mu+a\sigma-\mu}{\sigma}\right) \\
&= P(-a \leq Z \leq a) = P(Z \leq a) - P(Z < -a) \\
&= P(Z \leq a) - P(Z > a) = P(Z \leq a) - [1 - P(Z \leq a)] \\
&= 2P(Z \leq a) - 1 = 0,99 \quad \Rightarrow \quad P(Z \leq a) = 0,995.
\end{aligned}$$

Logo, $a = 2,57$.

d. O número a tal que $P(X > a) = 0,90$.

$$P(X > a) \;=\; P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < -\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = 0,90.$$

Logo, $-\dfrac{a-\mu}{\sigma} = 1,285 \quad \Rightarrow \quad a = \mu - 1,285\sigma.$

Para o caso particular em que $\mu = 1$ e $\sigma = \sqrt{2}$, temos $a = 1 - 1,285\sqrt{2} = -0,8173$.

Data de atualização: 12 de Outubro de 2019.