ME720 - Modelos Lineares Generalizados

Parte 13 - Modelos para Dados de Contagem - Poisson

Profa. **Larissa Avila Matos**

Modelos para Dados de Contagem

Muitas variáveis de resposta tem contagens como possíveis resultados. Exemplos:

1. número de bebidas alcoólicas que você tomou na semana anterior;
2. número de dispositivos que você possui que podem acessar a Internet (laptops, telefones celulares inteligentes, tablets, etc.).

Essas contagens também ocorrem nas entradas das caselas nas tabelas de contingência que classificam as variáveis categóricas. Iremos ver modelos lineares generalizados (MLGs) para variáveis de resposta de contagens, como

1. modelos que assumem uma distribuição Poisson para a resposta. Esse modelo pode ser adaptado para modelar uma taxa quando a contagem é baseada em um índice, como espaço ou tempo;
2. modelos que assumem uma distribuição binomial negativa para a resposta; e
3. modelos que lidam com excesso de zeros na variável de resposta.

MLGs de Poisson para dados de contagem e taxas

A distribuição mais simples para dados de contagem, colocando sua massa no conjunto de valores inteiros não negativos, é a distribuição de Poisson. Suas probabilidades dependem de um único parâmetro, a média $\mu > 0$.

Vimos que, se Y é uma v.a. com distribuição de Poisson ($Y \sim P(\mu_i)$), a f.d.p. é dada por

$$f(\mathrm{y};\mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^{\mathrm{y}}}{\mathrm{y}!} = \exp\left[\mathrm{y}\log(\mu) - \mu - \log(\mathrm{y}!)\right], \quad \mathrm{y} = 0, 1, 2, \ldots,$$

e $Y \in$ F.E., com $\mathbb{E}(Y) = \mathrm{Var}(Y) = \mu$.

Além disso, a distribuição de Poisson é uma distribuição unimodal e sua assimetria é descrita por

$$\frac{\mathbb{E}\left[(Y-\mu)^3\right]}{\sigma^3} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}.$$

A medida que μ aumenta, a distribuição de Poisson é menos assimétrica e se aproxima de uma distribuição Normal, sendo uma aproximação razoavelmente boa quando $\mu > 10$.

A distribuição de Poisson é frequentemente usada para contagens de eventos que ocorrem aleatoriamente ao longo do tempo ou no espaço a uma taxa específica, quando os resultados em períodos ou regiões disjuntos são independentes.

Por exemplo, um fabricante de telefones celulares pode indicar que a distribuição de Poisson descreve razoavelmente bem o número de reclamações de garantia recebidas a cada semana.

A distribuição de Poisson também pode ser utilizada para a aproximação de uma distribuição Binomial quando o número de ensaios n é grande e π é muito pequeno, com $n\pi = \mu$.

Para a Binomial, se $n \to \infty$ e $\pi \to 0$ tal que $n\pi = \mu$ é fixo, a distribuição Binomial converge para a Poisson.

Demonstração

Por exemplo, se um fabricante tiver vendido 5.000 celulares de um tipo específico e cada um independentemente tiver probabilidade 0,001 de ter uma reivindicação de garantia em uma determinada semana, o número de reclamações por semana terá aproximadamente uma distribuição de Poisson com uma média de $5000(0,001) = 5$.

Modelo Poisson Log Linear

Modelo Poisson Log Linear

Assumindo que $Y_1, \cdots, Y_n$ são v.a.'s independentes, com $Y_i \sim \text{Poisson}(\mu_i)$.

Então, como já vimos, o modelo Poisson Log Linear, é dado por:

Modelo Poisson Log Linear:

$$\log(\mu_i) = \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n;$$

ou

$$\log(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} \text{ (na forma matricial).}$$

Ajustando um modelo Poisson Log Linear

Para $\eta_i = \log(\mu_i)$ e $\frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} = \mu_i$, as equações de log-verossimilhança são dadas por

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{y}_i - \mu_i) x_{ij} = 0,$$

com visto anteriormente.

Para um modelo log-linear de Poisson vimos também que

$$\mu_i = \exp\left(\sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ij}\right) = \left(e^{\beta_p}\right)^{x_{ip}} \ldots \left(e^{\beta_1}\right)^{x_{i1}}.$$

O aumento de uma unidade em x_{ij} tem o impacto multiplicativo de e^{β_j}, ou seja, a média em $x_{ij} + 1$ e igual a média em x_{ij} multiplicado por e^{β_j}, fixando as outras covariáveis.

A matriz da informação é dada por

$$-\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta};\mathrm{y})}{\partial\beta_j \partial\beta_k} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_{ik} \mu_i$$

Então, temos que a matriz Hessiana é definida-negativa, portanto a função de log-verossimilhança é côncava e possui um máximo único.

As matrizes de informação observada e esperada são idênticas. Portanto, o método Newton-Raphson é equivalente ao Escore de Fisher, uma conseqüência de usarmos a função de ligação canônica.

Além disso para o modelo log-linear de Poisson a matriz de covariância assintótica de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ é dada por

$$\widehat{\mathrm{Var}}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \left(\boldsymbol{X}'\widehat{\boldsymbol{W}}\boldsymbol{X}\right)^{-1},$$

onde $\boldsymbol{W}$ é uma matriz diagonal com elementos $w_{ii} = \frac{(\partial\mu_i/\partial\eta_i)^2}{\mathrm{Var}(Y_i)} = \mu_i$.

Desvio

O desvio para modelo Poisson Log Linear é

$$D(\mathbf{y}; \widehat{\boldsymbol{\mu}}) = 2 \sum_{i=1}^{n} \left[\mathrm{y}_i \log\left(\frac{\mathrm{y}_i}{\widehat{\mu_i}}\right) - \mathrm{y}_i + \widehat{\mu_i} \right].$$

Se o modelo tem intercepto, temos que $\sum_{i=1}^{n} \widehat{\mu_i} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{y}_i$, então o desvio é dado por

$$D(\mathbf{y}; \widehat{\boldsymbol{\mu}}) = 2 \sum_{i} \mathrm{y}_i \log\left(\frac{\mathrm{y}_i}{\widehat{\mu_i}}\right).$$

Além disso temos que $\mathrm{Var}(\mathrm{y}_i) = V(\mu_i) = \mu_i$, com $\phi = 1$, a estatística de escore para comparar o modelo escolhido com o modelo saturado é

$$X^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\mathrm{y}_i - \widehat{\mu_i})^2}{\widehat{\mu_i}} \quad \text{(Estatística de Pearson)}.$$

Modelando Taxas

Modelando Taxas: incluindo um *offset* no modelo

Frequentemente, o valor esperado de uma resposta de contagem Y_i é proporcional a um índice t_i.

Por exemplo, t_i pode ser uma quantidade de tempo e/ou um tamanho da população, como na modelagem da contagem de crimes para várias cidades. Pode ser também uma área espacial, como na modelagem da contagem de um determinado animal ou espécie vegetal.

Então, a taxa de amostragem é $\frac{Y_i}{t_i}$, com valor esperado $\frac{\mu_i}{t_i}$.

Considerando variáveis explicativas, um modelo log-linear para a taxa esperada tem a forma

$$\log\left(\frac{\mu_i}{t_i}\right) = \sum_{i=1}^{p} \beta_p x_{ij}.$$

Como $\log\left(\frac{\mu_i}{t_i}\right) = \log(\mu_i) - \log(t_i)$, o modelo faz a correção $-\log(t_i)$ na função de ligação da média.

Esse termo de correção é chamado de *offset* (deslocamento).

O ajuste corresponde ao uso de $\log(t_i)$ como uma variável explicativa no preditor linear para $\log(\mu_i)$ e força seu coeficiente ser igual a 1, ou seja,

$$\begin{aligned}
\log(\mu_i) - \log(t_i) &= \sum_{i=1}^{p} \beta_p x_{ij} \\
\log(\mu_i) &= \sum_{i=1}^{p} \beta_p x_{ij} + \log(t_i).
\end{aligned}$$

Para esse modelo, a contagem da resposta esperada satisfaz

$$\mu_i = t_i \exp\left(\sum_{i=1}^{p} \beta_p x_{ij}\right).$$

A média possui uma constante de proporcionalidade para t_i que depende dos valores das variáveis explicativas.

O modelo usando a função de ligação identidade, é dada por

$$\frac{\mu_i}{t_i} = \sum_{i=1}^{p} \beta_p x_{ij}, \quad \text{ou} \quad \mu_i = \sum_{i=1}^{p} \beta_p x_{ij} t_i,$$

ou seja, esse modelo corresponde a um MLG de Poisson comum a função de ligação identidade sem intercepto e com variáveis explicativas $x_{i1}t_i, \ldots, x_{ip}t_i$. Esse modelo fornece efeitos aditivos, e não multiplicativos, das variáveis explicativas.

Exemplo

Exemplo: Crimes no campus

Os alunos querem se sentir seguros quando frequentam uma faculdade ou universidade.

Todas as instituições de ensino superior americana que participam de programas federais de auxílio estudantil são obrigadas a coletar e relatar dados sobre crimes que ocorrem no campus para o Departamento de Educação.

Esses dados estão disponíveis publicamente no site U.S. Department of Education.

Estamos interessados em verificar se existem diferenças regionais em crimes violentos no campus, controlando diferenças no tipo de instituição.

Os dados para esse exemplo não foram retirados do site do departamento americano mas do conjunto de dados do livro *Broadening Your Statistical Horizons (BYSH): Generalized Linear Models and Multilevel Models.*

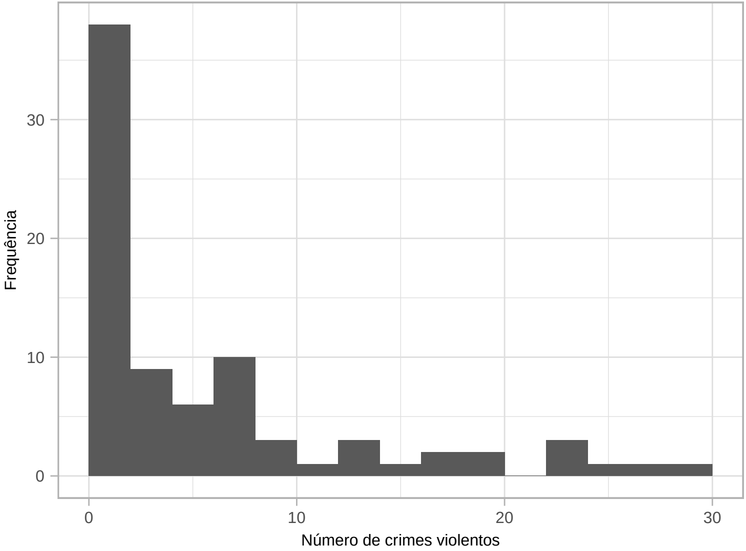
Cada linha do conjunto de dados contém informações sobre os crimes de uma instituição do ensino superior, uma faculdade ou universidade. As variáveis incluem:

- **`tipo`** = tipo de instituição: faculdade (C) ou universidade (U);
- **`regiao`** = região do país (C = Central, MW = Midwest, NE = Northeast, SE = Southeast, SW = Southwest, e W = West);
- **`nc`** = número de crimes violentos para na instituição no ano determinado;
- **`matric`** = número de matriculados na instituição;
- **`matric1000`** = número de matriculados na instituição, em milhares;
- **`nctaxa`** = número de crimes violentos por 1000 estudantes.

Combinamos a região SW e SE para formar uma única categoria do sul S.

```r
dados = read.table("Crimes.txt", header=T)
dados2<-dados[,1:5]
regiaoS<-dados$regiao
dados2$regiao <- as.factor(ifelse(regiaoS %in% c('SE','SW'), 'S',as.character(regiaoS)))
dados2[1:10,]
```

```
   matric tipo nc      nctaxa matric1000 regiao
1    5590    U 30 5.36672630      5.590      S
2     540    C  0 0.00000000      0.540      S
3   35747    U 23 0.64341064     35.747      W
4   28176    C  1 0.03549120     28.176      W
5   10568    U  1 0.09462528     10.568      S
6    3127    U  0 0.00000000      3.127      S
7   20675    U  7 0.33857316     20.675      W
8   12548    C  0 0.00000000     12.548      W
9   30063    U 19 0.63200612     30.063      C
10   4429    C  4 0.90313841      4.429      C
```



Frequência
30
20
10
0
0
10
20
30
Número de crimes violentos

O histograma do número de crimes violentos, revela que muitas escolas não relataram crimes violentos ou muito poucos crimes. Algumas instituições têm um grande número de crimes.

Podemos usar um modelo de Poisson para modelar nossos dados, uma vez que são dados de contagem (número de crimes violentos).

Número de crimes:

```r
dados2 %>%
  group_by(regiao, tipo) %>%
  summarize(mean=mean(nc),var=var(nc),n=length(nc))
```

```
# A tibble: 10 x 5
# Groups:   regiao [5]
   regiao tipo   mean    var     n
   <fct>  <fct> <dbl>  <dbl> <int>
 1 C      C     1.6    3.3       5
 2 C      U     4.75  30.9      12
 3 MW     C     0.333  0.333     3
 4 MW     U     8.71  30.9       7
 5 NE     C     6     32.9       8
 6 NE     U     5.92  79.2      13
 7 S      C     1.12   5.84      8
 8 S      U     9.88  90.9      17
 9 W      C     0.5    0.333     4
10 W      U    12.5   57         4
```

Analisando as covariáveis de interesse: tipo de instituição e região, temos que a maioria das instituições são universidades (65% das 81 instituições) e apenas 35% são faculdades.

A Tabela a seguir resume a proporção do tipo de instituição por região. A proporção de faculdades varia de 29% no sudoeste (S) a 50% no oeste (W).

```r
tab<-table(dados2$tipo,dados2$regiao)
round(prop.table(tab,2),3)
```

```
        C    MW    NE     S     W
  C 0.294 0.300 0.381 0.320 0.500
  U 0.706 0.700 0.619 0.680 0.500
```

Embora um modelo de Poisson seja uma boa escolha, pois as respostas são contadas por ano, é importante observar que essas contagens não são diretamente comparáveis uma vez que são provenientes de instituições de tamanhos diferentes.

Ou seja, esperamos que instituições com mais alunos tenham mais relatos de crimes violentos, pois há mais estudantes que podem ser afetados.

Não podemos comparar a primeira instituição no conjunto de dados que tem 30 crimes violentos com a segunda instituição que tem nenhum crime violento quando suas matrículas são muito diferentes; 5.590 para a instituição 1 versus 540 para a instituição 2.

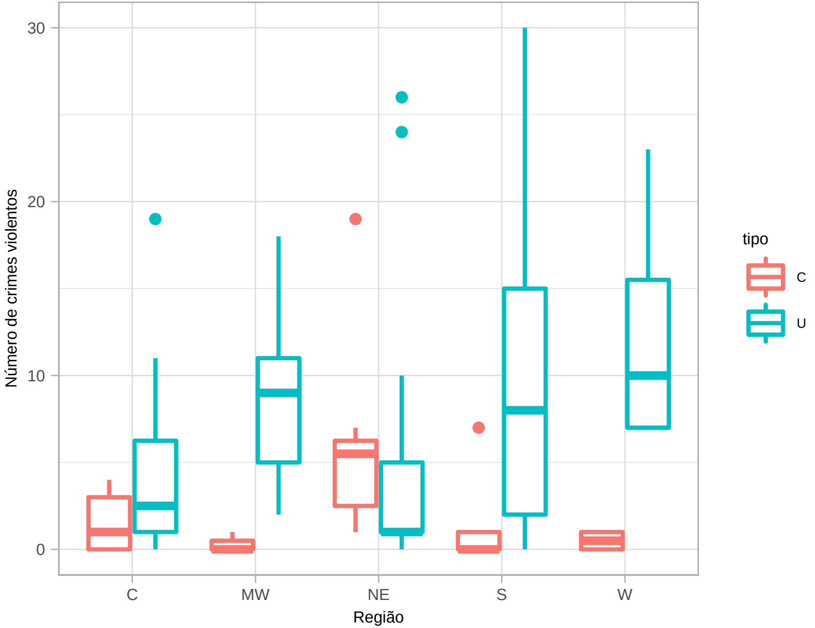
Primeiro vamos analisar a contagem de crimes violentos em termos da taxa por 1.000 matriculados $\frac{\text{número de crimes violentos}}{\text{número matriculados}} * 1000$.

A Tabela e a Figura a seguir mostram as taxas médias de crimes violentos. Essa taxas são geralmente mais baixas nas faculdades de uma região (com exceção do Nordeste (NE), Centro). Além disso, o padrão regional das taxas nas universidades parecem diferir do das faculdades.

Taxa de crimes:

```r
dados2 %>%
  group_by(regiao, tipo) %>%
  summarize(mean=mean(nctaxa),var=var(nctaxa),n=length(nctaxa))
```

```
# A tibble: 10 x 5
# Groups:   regiao [5]
   regiao tipo    mean      var     n
   <fct>  <fct>  <dbl>    <dbl> <int>
 1 C      C     0.398  0.278        5
 2 C      U     0.222  0.0349      12
 3 MW     C     0.0163 0.000793     3
 4 MW     U     0.402  0.0621       7
 5 NE     C     1.12   1.18         8
 6 NE     U     0.436  0.385       13
 7 S      C     0.187  0.105        8
 8 S      U     0.853  1.61        17
 9 W      C     0.0680 0.0129       4
10 W      U     0.468  0.0247       4
```



Número de crimes violentos
30
20
10
0
C
MW
NE
S
W
Região
tipo
C
U

Modelo

Estamos interessados principalmente nas diferenças de crimes violentos entre os tipos instituições e regiões. Então, vamos considerar o seguinte modelo

$$\log\left(\frac{\mu_i}{matric1000}\right) = \beta_0 + \beta_1\ tipo_i + \beta_2\ regiao_i, \quad i = 1, \ldots, 81,$$

onde μ_i é o número médio de crimes violentos por ano na instituição i, então $\mu_i/matric1000$ é a taxa anual de crimes por matriculados em milhares na instituição i.

Portanto, ajustamos um modelo considerando a região e o tipo de instuição à nossa compensação. A região central(C) é o nível de referência no nosso modelo.

```r
fit<-glm(formula = nc ~ tipo + regiao, family = poisson, data = dados2,
    offset = log(matric1000))
summary(fit)
```

```
Call:
glm(formula = nc ~ tipo + regiao, family = poisson, data = dados2,
    offset = log(matric1000))

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-4.5671  -1.9636  -0.7205   1.0170   8.8476

Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) -1.59629    0.17115  -9.327  < 2e-16 ***
tipoU        0.33415    0.13235   2.525   0.0116 *
regiaoMW     0.09939    0.17752   0.560   0.5756
regiaoNE     0.78081    0.15305   5.102 3.37e-07 ***
regiaoS      0.74926    0.14503   5.166 2.39e-07 ***
regiaoW      0.27223    0.18742   1.453   0.1464
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

    Null deviance: 491.00  on 80  degrees of freedom
Residual deviance: 431.45  on 75  degrees of freedom
AIC: 661.32
```

Do modelo ajustado, o Nordeste (NE) e o Sul (S) diferem significativamente da região Central (p-valor$= 3.37e-07$ e p-valor$= 2.39e-07$, respectivamente).

O coeficiente estimado de 0,778 significa que a taxa de crimes violentos por 1.000 matriculados no Nordeste (NE) é de quase 2,2 ($e^{0,781}$) vezes a da região Central, fixando o tipo de instituição.

Um intervalo de confiança de Wald para esse fator pode ser construído calculando primeiro um IC para o coeficiente $(0,781 \pm 1,96 * 0,153)$ e, em seguida, exponenciando $(1,62;\ 2,95)$.

Os resultados da análise exploratória sugerem que o efeito do tipo de instituição pode variar dependendo da região; portanto, consideramos um modelo com iteração entre região e tipo.

O ajuste é dado por

```r
fit2<-glm(formula = nc ~ tipo + regiao + regiao:tipo, family = poisson, data = dados2,
    offset = log(matric1000))
summary(fit2)
```

```
Call:
glm(formula = nc ~ tipo + regiao + regiao:tipo, family = poisson,
    data = dados2, offset = log(matric1000))

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.7292  -1.7103  -0.8095   0.8828   8.6480

Coefficients:
               Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)     -1.4741     0.3536  -4.169 3.05e-05 ***
tipoU            0.1959     0.3775   0.519  0.60377
regiaoMW        -1.9765     1.0607  -1.863  0.06239 .
regiaoNE         1.5529     0.3819   4.066 4.77e-05 ***
regiaoS         -0.1562     0.4859  -0.322  0.74779
regiaoW         -1.8337     0.7906  -2.319  0.02037 *
tipoU:regiaoMW   2.1965     1.0765   2.040  0.04132 *
tipoU:regiaoNE  -1.0698     0.4200  -2.547  0.01086 *
tipoU:regiaoS    0.9873     0.5095   1.938  0.05265 .
tipoU:regiaoW    2.4106     0.8140   2.962  0.00306 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

    Null deviance: 491.00  on 80  degrees of freedom
Residual deviance: 355.99  on 71  degrees of freedom
AIC: 593.86

Number of Fisher Scoring iterations: 6
```

Esses resultados fornecem evidências de uma iteração entre o efeito da região e o tipo de instituição.

Um teste de desvio mostra que temos evidências estatisticamente significativas ($\chi^2 = 75,463$, $g.l. = 4$, $p < 0,001$) que a diferença entre faculdades e universidades na taxa de crimes violentos difere por região.

Por exemplo, esse modelo estima que as taxas de crimes violentos sejam 13,6 ($e^{0.196+2.411}$) vezes superior nas universidades do oeste (W) em comparação com as faculdades.

Enquanto no Nordeste(NE), estimamos que as taxas de crimes violentos sejam 0,42($e^{-1,07+0,196}$) vezes maior nas universidades em comparação com as faculdades, ou estimamos que as taxas de crimes violentos sejam 2,4($\frac{1}{e^{-1,07+0,196}}$)) vezes maior nas universidades em comparação com as faculdades.

```r
anova(fit, fit2, test="Chisq")
```

```
Analysis of Deviance Table

Model 1: nc ~ tipo + regiao
Model 2: nc ~ tipo + regiao + regiao:tipo
  Resid. Df Resid. Dev Df Deviance  Pr(>Chi)
1        75     431.45
2        71     355.99  4   75.463 1.591e-15 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```r
deviance(fit) - deviance(fit2)
```

```
[1] 75.4625
```

```r
df.residual(fit) - df.residual(fit2)
```

```
[1] 4
```

```r
fitted(fit2)
```

```
          1           2           3           4           5           6 
 3.57474021  0.10576484 17.73023966  1.03118138  6.75811351  1.99968026 
          7           8           9          10          11          12 
10.25464249  0.45922998  8.37401286  1.01416836  5.53348034 12.04868813 
         13          14          15          16          17          18 
 9.45984002  7.87593925  2.09140171 16.46235012  0.71312920  3.92920299 
         19          20          21          22          23          24 
 0.03997462  7.75006353  4.01388835  6.23837914  1.87268365 15.28441247 
         25          26          27          28          29          30 
 9.90503597  2.62531827  4.83084484  4.95186432  5.07423850  5.60562618 
         31          32          33          34          35          36 
 6.02749270  4.69461726 13.27481281  0.30977157 16.17251758  3.25553608 
         37          38          39          40          41          42 
10.79328537  0.25814455  3.61249951  0.65901480  6.34088510  1.78995465 
         43          44          45          46          47          48 
11.56307039  0.35488947 16.09830047  7.40708683 15.18976819  2.27402078 
         49          50          51          52          53          54 
 1.81438910  2.92749739 16.30311751  0.32767513  3.27684820  0.52483041 
         55          56          57          58          59          60 
 6.50378365  0.65025381 16.05371703  0.38408304  1.46261978  2.05788477 
         61          62          63          64          65          66 
 6.44112645  8.41114417 14.70823341  0.94388489  2.57936198 16.64780176 
         67          68          69          70          71          72 
 2.49448325  4.71239009  8.51350919  7.70688846  5.17709019  2.09435954 
         73          74          75          76          77          78 
 4.45117663 10.45204746  0.15469917 10.28394656  3.32377603 14.20288354 
         79          80          81 
 3.66126334  3.44453458  0.62489624 
```

```r
X<-cbind(rep(1,length(dados2$nc)), ifelse(dados2$tipo=="U",1,0), ifelse(dados2$regiao=="MW",1,0),
         ifelse(dados2$regiao=="NE",1,0), ifelse(dados2$regiao=="S",1,0), ifelse(dados2$regiao=="W",1,0),
         ifelse(dados2$tipo=="U",1,0)*ifelse(dados2$regiao=="MW",1,0),
         ifelse(dados2$tipo=="U",1,0)*ifelse(dados2$regiao=="NE",1,0),
         ifelse(dados2$tipo=="U",1,0)*ifelse(dados2$regiao=="S",1,0),
         ifelse(dados2$tipo=="U",1,0)*ifelse(dados2$regiao=="W",1,0))
betas<-matrix(fit2$coefficients,10,1)

cbind(exp(X%*%betas+log(dados2$matric1000)),dados2$matric1000*exp(X%*%betas),fitted(fit2))[1:15,]
```

```
         [,1]       [,2]       [,3]
1   3.5747402  3.5747402  3.5747402
2   0.1057648  0.1057648  0.1057648
3  17.7302397 17.7302397 17.7302397
4   1.0311814  1.0311814  1.0311814
5   6.7581135  6.7581135  6.7581135
6   1.9996803  1.9996803  1.9996803
7  10.2546425 10.2546425 10.2546425
8   0.4592300  0.4592300  0.4592300
9   8.3740129  8.3740129  8.3740129
10  1.0141684  1.0141684  1.0141684
11  5.5334803  5.5334803  5.5334803
12 12.0486881 12.0486881 12.0486881
13  9.4598400  9.4598400  9.4598400
14  7.8759392  7.8759392  7.8759392
15  2.0914017  2.0914017  2.0914017
```

Outra forma de incluir o *offset*:

```r
fit3<-glm(formula = nc ~ tipo + regiao + offset(log(matric1000)), family = poisson,
          data = dados2)
fit3
```

```
Call:  glm(formula = nc ~ tipo + regiao + offset(log(matric1000)), family = poisson,
    data = dados2)

Coefficients:
(Intercept)        tipoU      regiaoMW      regiaoNE      regiaoS
   -1.59629      0.33415       0.09939       0.78081      0.74926
    regiaoW
    0.27223

Degrees of Freedom: 80 Total (i.e. Null);  75 Residual
Null Deviance:      491
Residual Deviance: 431.4    AIC: 661.3
```

Exercício

- Ler a sub seção 7.1.5 do livro texto: Modelo de Análise de Variância.

Referência

- Legler, J, and Roback,P. (2019). Bookdown: *Broadening Your Statistical Horizons (BYSH): Generalized Linear Models and Multilevel Models.*

- Paula, G.A. (2013). Modelos de Regressão com Apoio Computacional.

- Agresti, A. (2015). *Foundations of Linear and Generalized Linear Models*. Wiley series in probability and statistics.

- Faraway, J. J. (2006). *Extending the Linear Model with R. Generalized Linear, Mixed Effects and Nonparametric Regression Models.* Chapaman and Hall/CRC.