



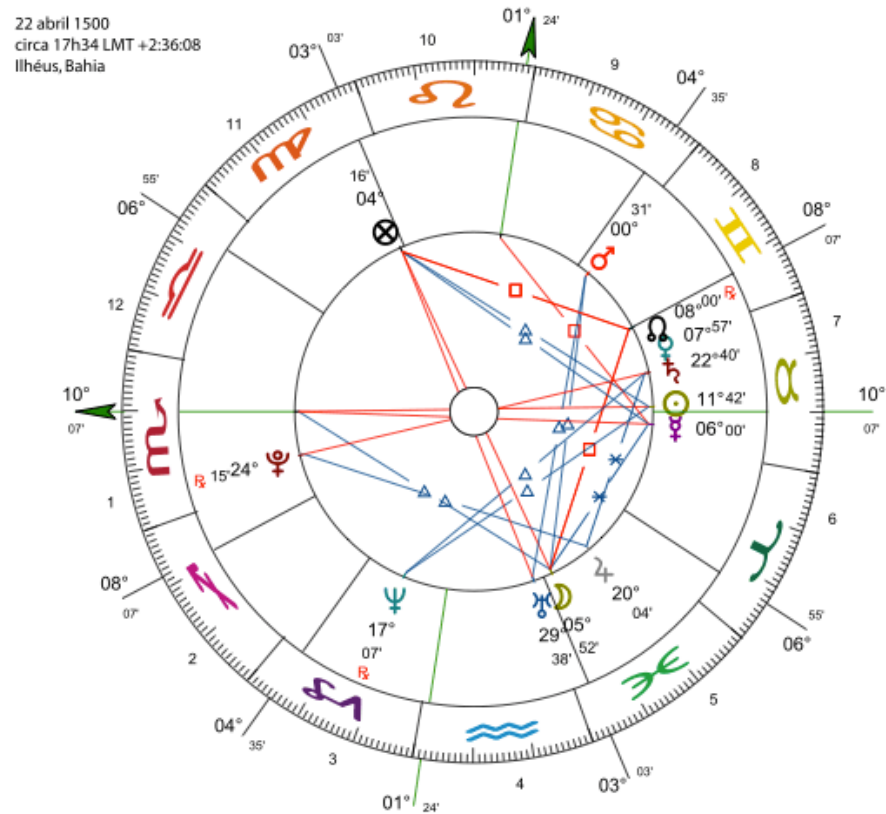
ME951 - Estatística e Probabilidade I

Parte 17

1S2024

Teste de Hipóteses: Introdução

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?



Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?

- Se você fornece data, hora e local de nascimento, um astrólogo monta o seu Mapa Astral.
- *De acordo com a astrologia, a posição dos astros no momento em que nascemos influencia nossa maneira de ser. - Wikipedia*
- *As configurações de um Mapa Astral se repetem apenas a cada 26.000 anos, portanto ele é quase como uma impressão digital - não existe um igual ao outro. - Wikipedia*
- Há comprovação científica de que seu mapa astral reflete sua personalidade?

Exemplo: Mapa Astral

Um teste foi feito da seguinte maneira: 116 pessoas selecionadas aleatoriamente forneceram data, hora e local de nascimento.

Um astrólogo preparou um mapa astral para essas 116 pessoas, usando apenas os dados fornecidos acima.

Cada voluntário também preencheu um questionário: "[California Personality Index](#)".

Exemplo: Mapa Astral

Para **um outro astrólogo**, foram dados:

- data, hora, local, Mapa Astral de um dos voluntários, por exemplo, voluntário 3.
- questionário de personalidade preenchidos pelo voluntário 3.
- 2 questionários de personalidade, escolhidos ao acaso entre os 115 restantes, preenchidos por outros dois voluntários.
- Ao astrólogo, pediu-se então para identificar qual questionário havia sido preenchido pelo dono daquele Mapa Astral.

Exemplo: Mapa Astral

- Seja p a probabilidade de que o astrólogo identifique o questionário correto.
- Se de fato a informação do Mapa Astral não caracteriza a personalidade de uma pessoa e na verdade o astrólogo está apenas escolhendo um dos 3 questionários ao acaso, a probabilidade de acerto é $p = 1/3$.
- Astrólogos confiam em seus estudos e dizem que a probabilidade de acerto é maior do que $1/3$.
- Como testar se eles estão certos?
- Escolher ao acaso um astrólogo e fazer o teste com ele uma vez, é suficiente?

Exemplo: Mapa Astral

- Astrólogos foram selecionados aleatoriamente a partir de uma lista de astrólogos familiarizados com o “California Personality Index”.
- A lista foi preparada pelo [“National Council for Geocosmic Research”](#).
- Vimos que podemos estudar fenômenos aleatórios definindo variáveis aleatórias e teoria da probabilidade.
- Um astrólogo pode associar corretamente o questionário ao mapa astral ou não.
- Para cada situação, há uma probabilidade associada. Portanto temos um evento aleatório.

Exemplo: Mapa Astral

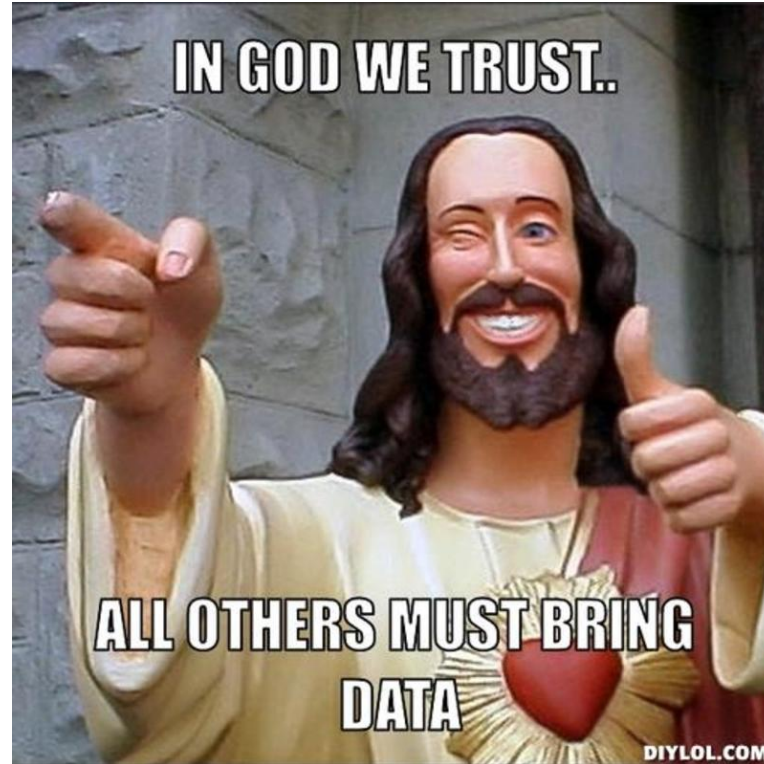
Como definir a variável aleatória?

- X_i : astrólogo associa corretamente um questionário ao mapa astral i , ou seja,

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$$

- Podemos pensar em p como a proporção de acerto na população de astrólogos.
- Se astrólogos não têm a capacidade de predição, $p = 1/3$.
- Astrólogos alegam que são capazes: $p > 1/3$.
- Como usar dados para testar estes dois cenários?

Exemplo: Astrólogos conseguem prever nossa personalidade com um mapa astral?



Definindo hipóteses

- Objetivo em muitos estudos: checar se os dados apóiam certas afirmações que são feitas para uma população.
- Afirmações a serem testadas: **hipóteses**.
- Expressamos as hipóteses em termos dos parâmetros da população.
- Por exemplo: o parâmetro pode ser uma proporção populacional.

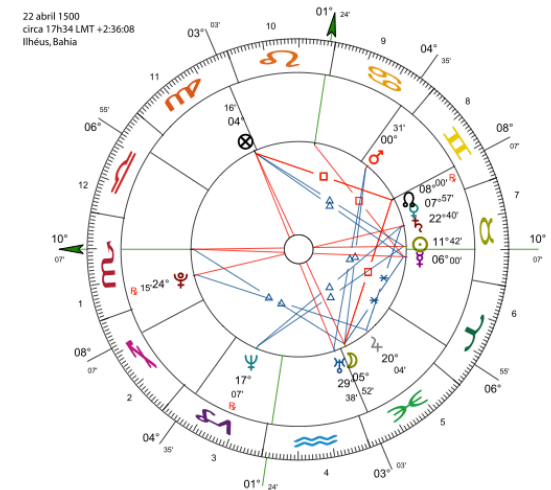
Exemplo: Mapa Astral

Hipótese: Usando o mapa astral de uma pessoa, a probabilidade p de um astrólogo prever corretamente qual dos 3 questionários está associado àquele mapa astral é igual a $1/3$. Ou seja, os astrólogos apenas selecionam ao acaso um dos questionários.

Nesse caso, para saber se os astrólogos têm a capacidade de prever a personalidade usando o mapa astral, usaríamos as seguintes **hipóteses**:

$$\begin{cases} H_0 : p = 1/3 & \text{(hipótese nula)} \\ H_A : p > 1/3 & \text{(hipótese alternativa)} \end{cases}$$

No experimento com os astrólogos, observar uma proporção alta de acertos pode ser uma evidência contra a hipótese de que $p = 1/3$?



Passos de um teste de hipótese

- **Passo 1: Suposições**

O teste é válido sob algumas suposições. A mais importante assume que os dados do experimento foram produzidos através de um processo de aleatorização.

- **Passo 2: Hipóteses**

O teste de hipótese tem sempre duas hipóteses sobre o parâmetro populacional de interesse. As hipóteses devem ser definidas **antes** de se realizar o experimento e coletar dados.

- **Hipótese Nula (H_0):** afirma que o parâmetro populacional assume um dado valor.
- **Hipótese Alternativa (H_A):** afirma que o parâmetro populacional assume outros valores, diferente do valor descrito na H_0 .

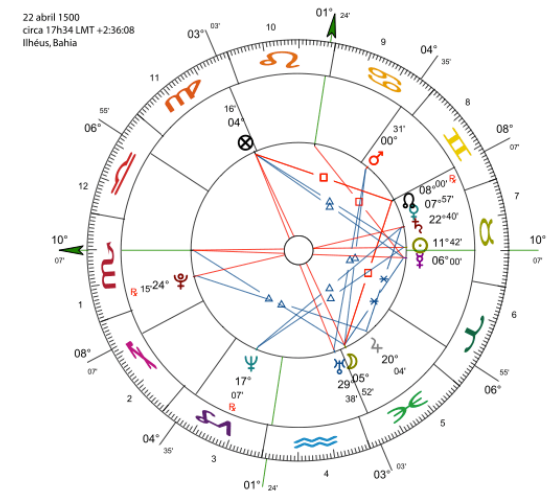
Exemplo: Mapa Astral

No experimento dos astrólogos, $H_0: p = 1/3$ representa a hipótese de que **não há efeito**, no sentido de que os astrólogos não têm uma capacidade maior de predizer a personalidade usando o mapa astral.

A hipótese alternativa, $H_A: p > 1/3$, representa a hipótese de que **há efeito**, ou seja, os astrólogos têm uma capacidade de predizer a personalidade usando o mapa astral.

Em teste de hipóteses, mantém-se a favor de H_0 a menos que os dados tragam grande evidência contra.

A hipótese nula é conservadora: “o réu é inocente até que se prove o contrário”.



Passos de um teste de hipótese

- **Passo 3: Estatística do teste**

Vimos que podemos usar uma estatística para estimar um parâmetro populacional. A **estatística do teste** descreve quão longe do parâmetro populacional usado na H_0 a estimativa está.

Por exemplo, se $H_0 : p = 1/3$, e se $\hat{p} = 40/116 = 0.345$, queremos uma estatística que quantifique quão longe está $\hat{p} = 0.345$ de $p = 1/3$.

- **Passo 4: valor-de-p**

Para interpretar uma estatística do teste, vamos usar uma probabilidade para resumir a evidência contra H_0 . Esta probabilidade é chamada de **valor-de-p**.

Passos de um teste de hipótese

- Passo 5: Conclusão

Baseado no valor-de-p, decidir se rejeita ou não a hipótese nula. Note que a conclusão é sempre em termos da hipótese nula: rejeitar ou não H_0 .

Mas quão pequeno deve ser o valor-de-p para ser considerado forte evidência contra H_0 ?

Geralmente, fixamos o **nível de significância** do teste (α), e usamos a seguinte regra. É comum usarmos $\alpha = 0.05$.

- Se valor-de-p $\leq \alpha$: rejeitamos H_0 , ou seja, os dados trazem forte evidência contra a hipótese nula
- Se valor-de-p $> \alpha$: não rejeitamos H_0 , ou seja, não temos evidência nos dados contra a hipótese nula

Passos de um teste de hipótese

Assumimos primeiro que H_0 é verdadeira.

Consideramos então todos os valores possíveis para a estatística do teste, de acordo com sua distribuição amostral.

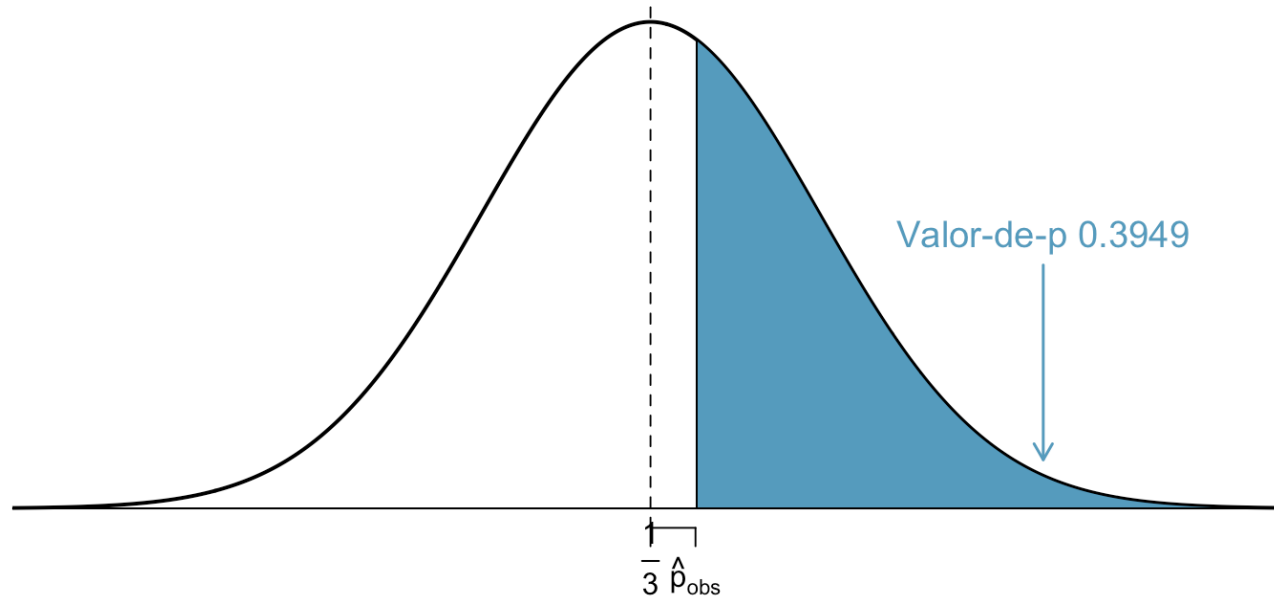
Calculamos a estatística do teste observada para o experimento realizado e verificamos onde, na distribuição amostral, ela se posiciona.

Calculamos a probabilidade de um valor igual ou mais extremo ao da estatística do teste observada (valor-de-p). Mais extremo: mais evidência contra H_0 .

Se o valor-de-p obtido é bem pequeno, por exemplo, 0.01, isto quer dizer que se H_0 é verdadeira, então seria incomum obter uma amostra com os resultados como o observado. Um valor-de-p muito baixo traz fortes evidências contra H_0 .

Exemplo: Mapa Astral

Distribuição amostral da proporção amostral \hat{p} sob H_0 .



valor-de-p (área em azul): probabilidade da proporção amostral assumir um valor igual ao observado, \hat{p}_{obs} , ou mais extremo, sob H_0 .

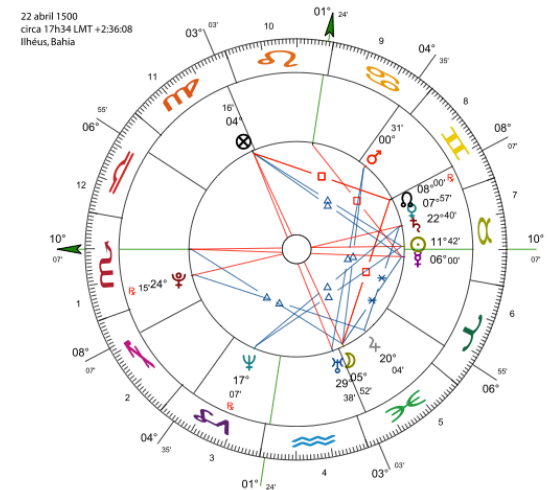
Exemplo: Mapa Astral

Passo 1: Suposições

- A variável de interesse é binária.
- X_i : astrólogo i associa corretamente um questionário ao mapa astral, ou seja,

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p).$$

- Os dados foram obtidos usando processo de aleatorização: uma amostra aleatória de voluntários e astrólogos foi feita.
- Temos uma a.a. de tamanho 116. Portanto, a distribuição amostral da estimativa para p , \hat{p} , tem distribuição aproximadamente normal, pelo TCL.



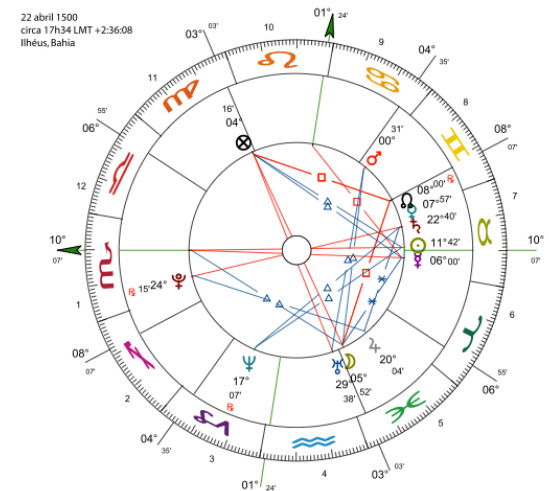
Exemplo: Mapa Astral

Passo 2: Hipóteses

- $H_0: p = p_0 = 1/3.$
- $H_A: p > p_0 = 1/3.$

Em outras palavras:

- H_0 : Astrólogos *chutam* qual o questionário está associado ao mapa astral.
- H_A : Astrólogos predizem melhor do que um *chute* qual o questionário está associado ao mapa astral.



Exemplo: Mapa Astral

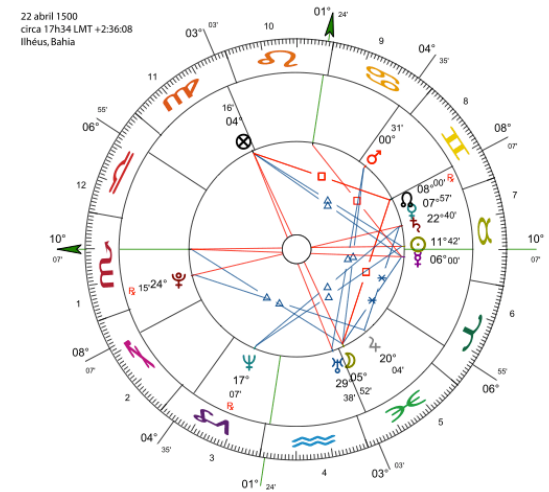
Passo 3: Estatística do teste

- Estatística do teste mede quão longe está a proporção amostral, \hat{p} , da proporção populacional, p , assumindo que H_0 seja verdadeira?
- Sabemos que:

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

- Se H_0 é verdadeira ($p = p_0$), então:

$$\hat{p} \sim N\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right)$$



Exemplo: Mapa Astral

Passo 3: Estatística do teste

- A estatística do teste é:

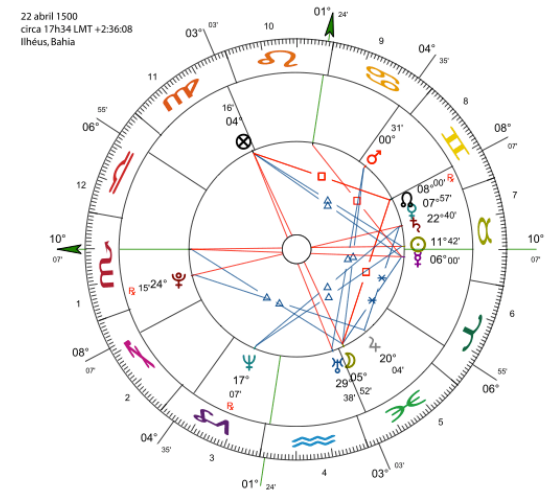
$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{EP_0(\hat{p})}$$

onde $EP_0(\hat{p})$ é o erro padrão de \hat{p} sob H_0 .

Portanto,

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \stackrel{H_0}{\sim} N(0, 1)$$

- A estatística do teste mede quão distante está \hat{p} de p_0 em unidades de “erro padrão”.



Exemplo: Mapa Astral

Passo 3: Estatística do teste

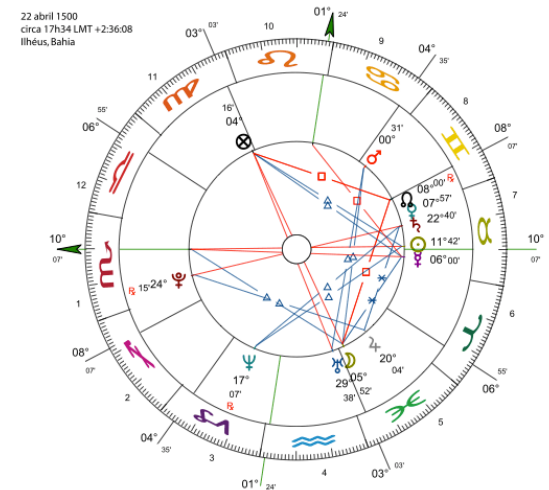
- No experimento dos astrólogos, dentre 116 mapas, 40 foram corretamente associados ao questionário de personalidade.

$$\hat{p} = 40/116 = 0.345$$

- A estatística do teste observada é:

$$z_{obs} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.345 - 1/3}{\sqrt{\frac{1/3(1-1/3)}{116}}} = 0.27$$

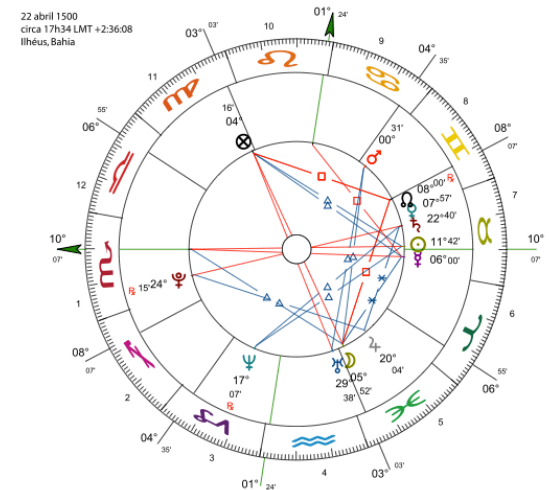
- A proporção amostral está a 0.27 erro padrão de distância da proporção populacional, segundo H_0 .



Exemplo: Mapa Astral

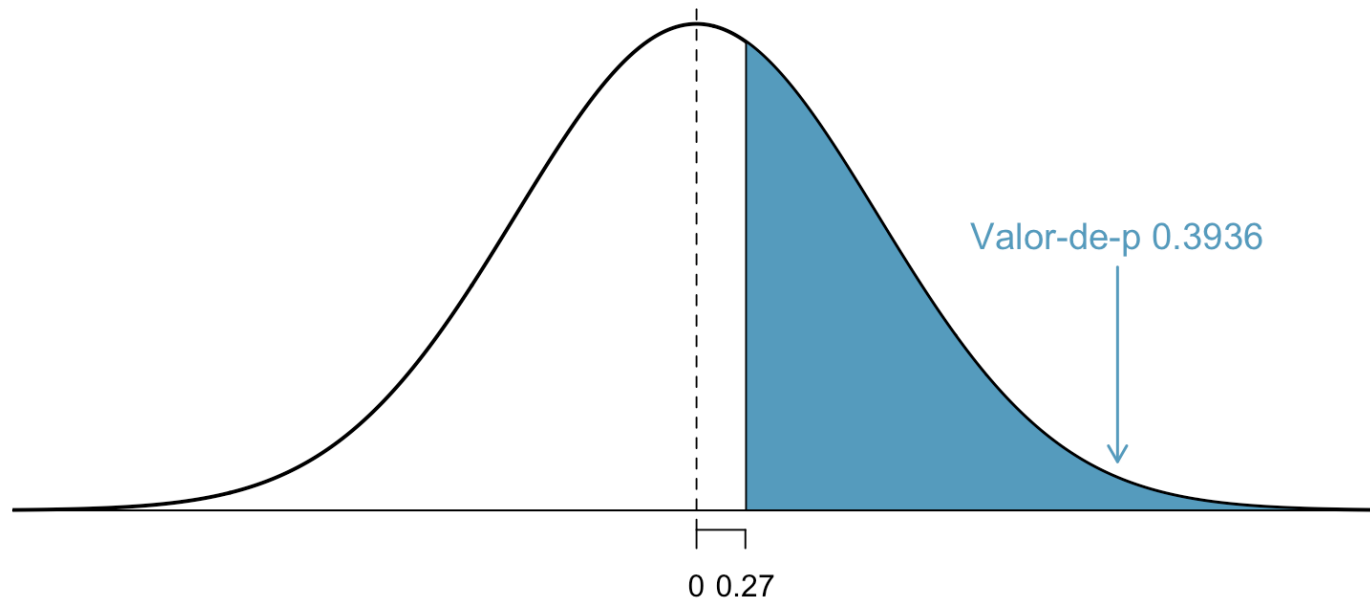
Passo 4: Valor-de-p

- Tendo observado $z_{obs} = 0.27$, isso traz evidência contra H_0 (a favor de H_A)?
- Quão improvável é $z_{obs} = 0.27$ se a proporção de acertos dos astrólogos é de fato $p = p_0 = 1/3$?
- valor-de-p: probabilidade de que uma estatística do teste assuma um valor igual ou mais extremo do que o observado, assumindo H_0 verdadeira.
- Mais extremo: neste caso, um valor maior que z_{obs} , pois equivale a um maior \hat{p} , maior proporção amostral de acertos (astrólogos alegam que $p > 1/3$).
- valor-de-p: $P(Z > z_{obs}) = P(Z > 0.27) = 0.3936$, onde $Z \sim N(0, 1)$.



Exemplo: Mapa Astral

Distribuição amostral da estatística do teste Z sob H_0 .

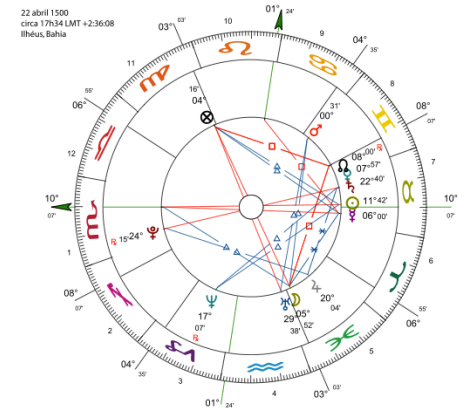


valor-de-p (área em azul): representa a probabilidade de valores mais extremos que z_{obs} ocorrerem.

Exemplo: Mapa Astral

Passo 5: Conclusão

- O valor-de-p obtido no experimento foi 0.3936.
- O valor não é tão pequeno. Portanto, não temos evidências contra H_0 .
- Não podemos concluir que astrólogos têm poderes preditivos especiais usando mapa-astral.



Detalhes da pesquisa podem ser encontrados no artigo da revista Nature: [A double-blind test of Astrology.](#)

MENU ▾

nature
International journal of science

Commentary | Published: 05 December 1985

A double-blind test of astrology

Shawn Carlson

Nature **318**, 419–425 (05 December 1985) | [Download Citation](#)

Two double-blind tests were made of the thesis that astrological 'natal charts' can be used to describe accurately personality traits of test subjects.

Resumo: Teste de Hipótese para uma proporção

Resumo: Teste de Hipótese para uma proporção

Suponho que temos uma população e uma hipótese sobre a proporção p de indivíduos com certa característica.

Hipóteses:

$$\begin{aligned} H_0 : p = p_0 \quad \text{vs} \quad H_A : p \neq p_0 \text{ (bilateral)} \\ p < p_0 \text{ (unilateral à esquerda)} \\ p > p_0 \text{ (unilateral à direita)} \end{aligned}$$

Estatística do teste: Baseada na distribuição amostral de \hat{p}

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \stackrel{H_0}{\sim} N(0, 1)$$

Condição: $np_0 \geq 10$ e $n(1 - p_0) \geq 10$ para aproximação normal

Resumo: Teste de Hipótese para uma proporção

valor-de-p

- $H_A : p \neq p_0$ (bilateral): valor-de-p= $P(|Z| \geq |z_{obs}|)$
- $H_A : p < p_0$ (unilateral à esquerda): valor-de-p= $P(Z \leq z_{obs})$
- $H_A : p > p_0$ (unilateral à direita): valor-de-p= $P(Z \geq z_{obs})$

Conclusão

Para um nível de significância α :

- Se valor-de-p $\leq \alpha$: rejeitamos H_0
- Se valor-de-p $> \alpha$: não rejeitamos H_0

Exemplo: Efeitos Colaterais

Uma indústria farmacêutica diz que menos de 20% dos pacientes que estão usando um certo medicamento terão efeitos colaterais.

Realizou-se então um ensaio clínico com 400 pacientes e verificou-se que 68 pacientes apresentaram efeitos colaterais

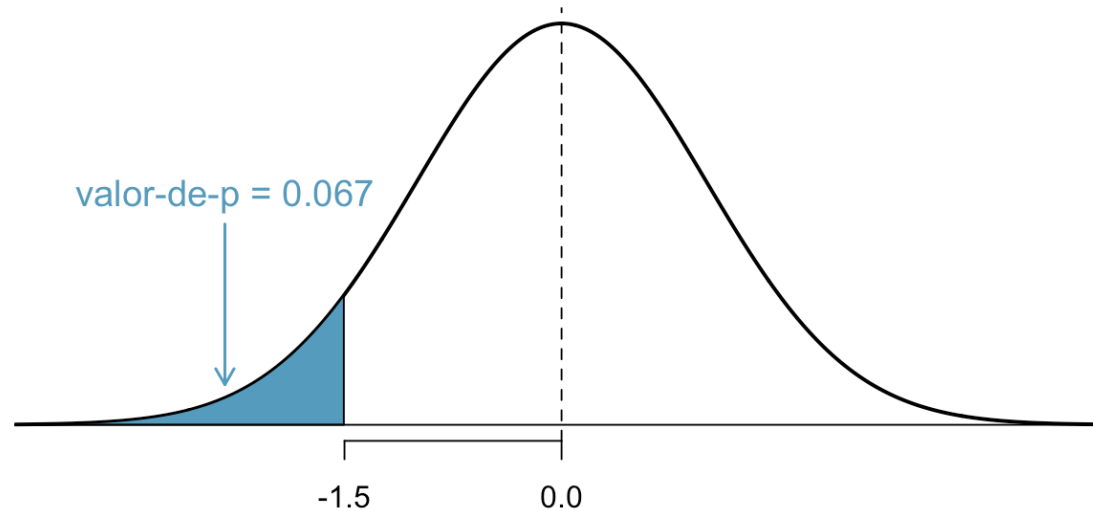
Hipóteses: $H_0 : p = 0.20$ vs $H_A : p < 0.20$

Estatística do teste: Da amostra temos que $\hat{p} = 68/400 = 0.17$

$$z_{obs} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.17 - 0.20}{\sqrt{\frac{0.20(1-0.20)}{400}}} = -1.5$$

Exemplo: Efeitos Colaterais

$$\text{valor-de-p} = P(Z \leq -1.5) = 0.067$$



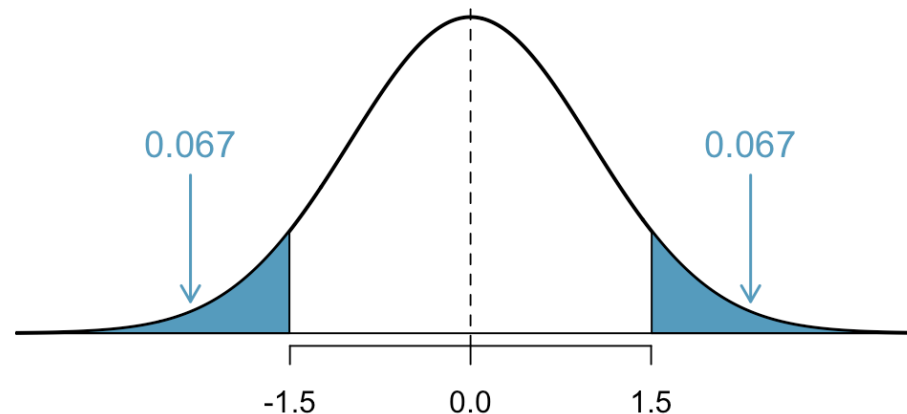
Conclusão: Para $\alpha = 0.05$, como o valor-de-p é maior que 0.05, não temos evidências nos dados para rejeitar a hipótese de que $p = 0.20$.

Na verdade, a evidência está na direção que a indústria farmacêutica queria, mas não é o suficiente para rejeitar H_0 .

Exemplo: Efeitos Colaterais

E se estivéssemos testando: $H_0 : p = 0.20$ vs $H_A : p \neq 0.20$

$$\begin{aligned}\text{valor-de-p} &= P(|Z| \geq 1.5) = P(Z \leq -1.5) + P(Z \geq 1.5) \\ &= 2P(Z \leq -1.5) = 2 \times 0.067 = 0.134\end{aligned}$$



Conclusão: Para $\alpha = 0.05$, como o valor-de-p é maior que 0.05, não temos evidências nos dados para rejeitar a hipótese de que $p = 0.20$.

Coca vs Coca Zero: Você consegue distinguir?



Algumas pessoas afirmam que conseguem distinguir o sabor da coca-cola normal da coca zero.

Faremos então um teste para comprovar se a afirmação é verdadeira.

Experimento:

- Sorteia-se, sem a pessoa saber, coca ou coca zero, usando um dado (se sair par, recebe uma coca-cola normal, se sair ímpar, uma coca zero).
- A bebida sorteada é então dada à pessoa, que deve experimentar e dizer que tipo de Coca-Cola está tomando.
- Repetimos isso 20 vezes e anotamos o total de acertos.

Experimento da Coca vs Coca Zero

Suposições:

- Cada tentativa, X_i , é uma Bernoulli(p), em que p é a probabilidade de acerto.
- Estamos interessados no total de acertos em 20 tentativas:
$$T = \sum_{i=1}^{20} X_i \sim \text{Bin}(20, p)$$
- Podemos usar a aproximação pela Normal caso as condições sejam satisfeitas.

Hipóteses:

- $H_0 : p = 1/2$ (a pessoa não consegue diferenciar as duas bebidas)
- $H_A : p > 1/2$.

Experimento da Coca vs Coca Zero

Estatística do teste: $T = \sum_{i=1}^{20} X_i \sim \text{Bin}(20, p)$.

Valor-de-p: evidência contra H_0 . Calculamos a probabilidade, sob H_0 , de ocorrer um valor igual ou mais extremo ao valor observado no experimento.



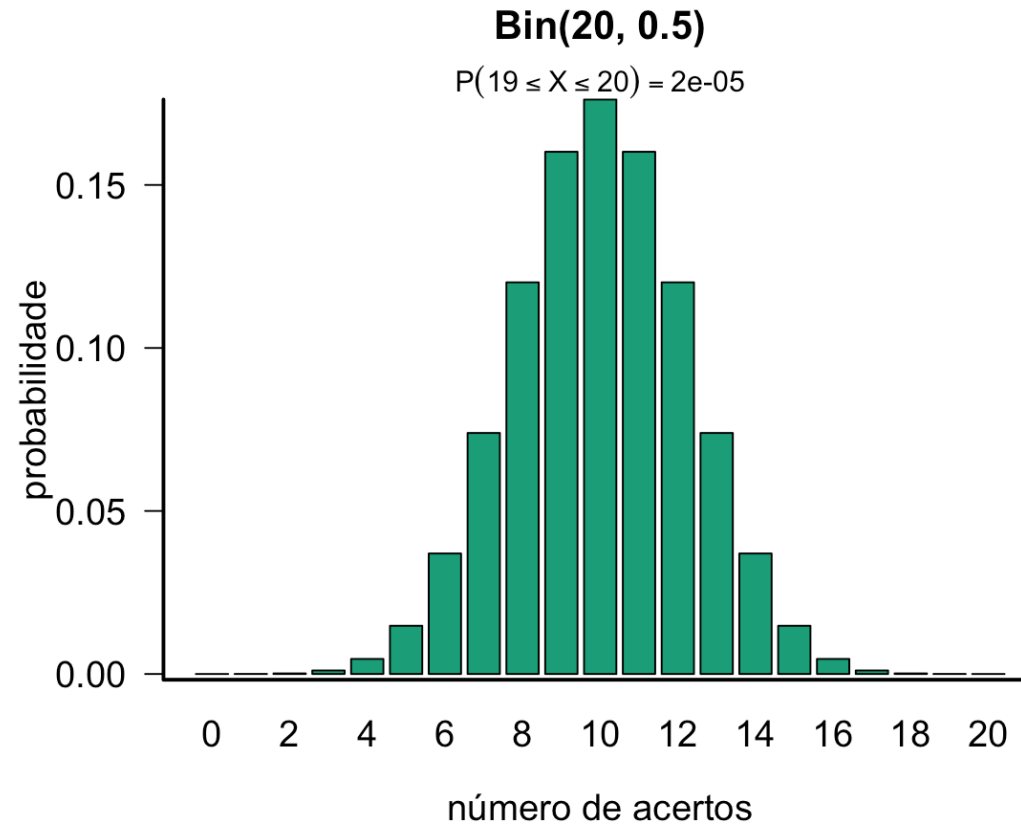
Resultado do experimento:

Seja $t_{obs} = 19$ o número de acertos.

Valor-de-p: $P(T \geq 19) = 2 \times 10^{-5}$, onde $T \stackrel{H_0}{\sim} \text{Bin}(20, 1/2)$.

Conclusão: Decidimos rejeitar H_0 .

Experimento da Coca vs Coca Zero



Experimento da Coca vs Coca Zero

Seja T é o número de acertos. Utilizando a aproximação pela Normal, temos que $T \sim \text{Bin}(20, p)$.

A proporção amostral de acertos $\hat{p} = \frac{T}{20} = 19/20 = 0.95$.

Vamos testar o seguinte: $H_0 : p = 0.50$ vs $H_A : p > 0.50$.

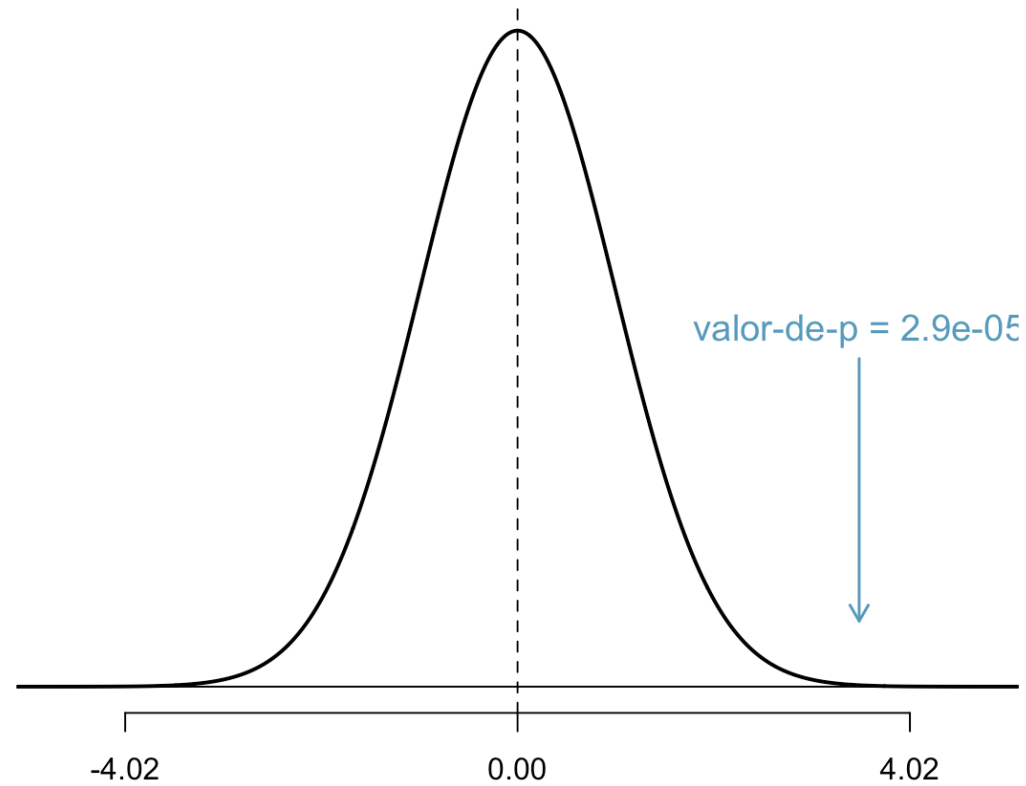
Estatística do teste:

$$z_{obs} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.95 - 0.5}{\sqrt{\frac{(0.50)(0.50)}{20}}} = 4.02$$

valor-de-p = $P(Z \geq 4.02) = 2.9 \times 10^{-5}$

Conclusão: Fixando $\alpha = 0.05$, rejeitamos a hipótese de que probabilidade de acertos é 50%.

Experimento da Coca vs Coca Zero



Leituras

- [Ross](#): capítulo 9.
- [OpenIntro](#): seções 4.3 e 6.1.
- Magalhães: capítulo 8.

Slides produzidos pelos professores:

- Samara Kiihl
- Tatiana Benaglia
- Larissa Matos
- Benilton Carvalho

[Fonte da imagem](#)



THE PUSH TO PUBLISH NEGATIVE RESULTS SEEMS
KINDA WEIRD, BUT I'M HAPPY TO GO ALONG WITH IT.