ME414 - Estatística para Experimentalistas

Gabarito LISTA 5

Questão 1.

$X \sim Gama(\alpha = 4, \beta = 2) \quad \Rightarrow \quad E(X) = \dfrac{\alpha}{\beta} = 2 \quad$ e $\quad Var(X) = \dfrac{\alpha}{\beta^2} = 1.$

$$Y_1 = \frac{1}{2}X \qquad \Rightarrow \qquad E(Y_1) = E\left(\frac{1}{2}X\right) = \frac{1}{2}E(X) = \frac{1}{2}(2) = 1.$$

$$\Rightarrow \qquad Var(Y_1) = Var\left(\frac{1}{2}X\right) = \frac{1}{4}Var(X) = \frac{1}{4}(1) = \frac{1}{4}.$$

$$Y_2 = 2X + 1 \qquad \Rightarrow \qquad E(Y_2) = E(2X + 1) = 2E(X) + 1 = 2(2) + 1 = 5.$$

$$\Rightarrow \qquad Var(Y_2) = Var(2X + 1) = Var(2X) = 4Var(X) = 4(1) = 4.$$

$$Y_3 = 5X \qquad \Rightarrow \qquad E(Y_3) = E(5X) = 5E(X) = 5(2) = 10.$$

$$\Rightarrow \qquad Var(Y_3) = Var(5X) = 25Var(X) = 25(1) = 25.$$

Questão 2.

Seja X: o tempo (em segundos) de resposta em um terminal de computador on-line. $X \sim Gama(\alpha, \beta)$ tal que $E(X) = 4$ e $Var(X) = 8$.

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta} = 4 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 4\beta$$

$Var(X) = \dfrac{\alpha}{\beta^2} = 8 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 8\beta^2 \quad \Rightarrow \quad 4\beta = 8\beta^2 \quad \Rightarrow \quad \beta = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ e portanto $\quad \alpha = 4\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2.$

Logo, $X \sim Gama(2, 1/2) \Rightarrow f(x) = \dfrac{xe^{-x/2}}{4}, x > 0.$

Questão 3.

Seja X: a renda anual dos advogados de uma cidade. $X \sim Gama(1000, 20)$.

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1000}{20} = 50.$$

$$Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{1000}{20^2} = 2,50.$$

Questão 4.

Seja X: o tempo (em horas) de inatividade para uma determinada máquina industrial. $X \sim Gama(3, 2)$.

Seja $L = 30X + 2X^2$ a função de perda. Lembre que $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

$$\begin{aligned} E(L) &= E(30X + 2X^2) = 30E(X) + 2E(X^2) = 30E(X) + 2\left[Var(X) + (E(X))^2\right] \\ &= 30\left(\frac{3}{2}\right) + 2\left(\frac{3}{4}\right) + 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{90}{2} + \frac{6}{4} + \frac{18}{4} = 51. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(L) &= E(L^2) - (E(L))^2 = E[(30X + 2X^2)^2] - (51)^2 = E[900X^2 + 120X^3 + 4X^4] - (51)^2 \\ &= 900E(X^2) + 120E(X^3) + 4E(X^4) - (51)^2. \end{aligned}$$

Em que,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= Var(X) + (E(X))^2 = \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3. \\ E(X^3) &= \int_0^\infty x^3\left(4x^2e^{-2x}\right)dx = \int_0^\infty 4x^5e^{-2x}dx = 7,50. \\ E(X^4) &= \int_0^\infty x^4\left(4x^2e^{-2x}\right)dx = \int_0^\infty 4x^6e^{-2x}dx = 22,50. \end{aligned}$$

$\Rightarrow Var(L) = 900(3) + 120(7,50) + 4(22,50) - (51)^2 = 1089.$

Questão 5.

Seja Y: a probabilidade de ganhar uma rifa na feira. $Y \sim Beta(5,2)$.

$$\begin{aligned} P(Y \le 0,10) &= \int_0^{0,10} f(y)dy = \int_0^{0,10} 30y^4(1-y)dy = \int_0^{0,10} 30y^4 - 30y^5dy = 6y^5 - 5y^6\Big|_0^{0,10} \\ &= 6(0,10)^5 - 5(0,10)^6 = 0,000055. \end{aligned}$$

Questão 6.

Se $X \sim Binomial(n,p)$ e n é suficientemente grande, então a distribuição de X pode ser aproximada pela distribuição Normal, isto é, $X \sim N(np, np(1-p))$.

a. Se $B \sim Binomial(80; 0,30) \Rightarrow B \sim N(24; 16,8)$.

$$\begin{aligned} P(20 \le B \le 30) &= P\left(\frac{20-24}{\sqrt{16,8}} \le Z \le \frac{30-24}{\sqrt{16,8}}\right) = P(-0,976 \le Z \le 1,464) \\ &= P(Z \le 1,464) - P(Z < -0,976) = P(Z \le 1,464) - P(Z > 0,976) \\ &= P(Z \le 1,464) - [1 - P(Z \le 0,976)] = P(Z \le 1,464) + P(Z \le 0,976) - 1 \\ &= 0,9285 + 0,8352 - 1 = 0,7637. \end{aligned}$$

b. Se $B \sim Binomial(100; 0,40) \Rightarrow B \sim N(40; 24)$.

$$P(B \leq 40) \quad = \quad P\left(Z \leq \frac{40-40}{\sqrt{24}}\right) = P(Z \leq 0) = 0,50.$$

c. Se $B \sim Binomial(80; 0,70) \Rightarrow B \sim N(56; 16,8)$.

$$\begin{aligned} P(50 \leq B \leq 60) &= P\left(\frac{50-56}{\sqrt{16,8}} \leq Z \leq \frac{60-56}{\sqrt{16,8}}\right) = P(-1,464 \leq Z \leq 0,976) \\ &= P(Z \leq 0,976) - P(Z < -1,464) = P(Z \leq 0,976) - P(Z > 1,464) \\ &= P(Z \leq 0,976) - [1 - P(Z \leq 1,464)] = P(Z \leq 0,976) + P(Z \leq 1,464) - 1 \\ &= 0,8352 + 0,9285 - 1 = 0,7637. \end{aligned}$$

d. Se $B \sim Binomial(300; 0,25) \Rightarrow B \sim N(75; 56,25)$.

$$P(B \geq 50) = P\left(Z \geq \frac{50-75}{7,50}\right) = P(Z \geq -3,333) = P(Z \leq 3,333) = 0,9996.$$

Questão 7.

Seja X: o número de pessoas dentre 100 moradores de uma cidade que apoiava o antigo prefeito. $X \sim Binomial(100; 0,30)$. Como n é grande o suficiente X pode ser aproximada através da distribuição Normal, isto é, $X \sim N(30, 21)$.

$$P(X \geq 40) = P\left(Z \geq \frac{40-30}{\sqrt{21}}\right) = P(Z \geq 2,182) = 1 - P(Z < 2,182) = 1 - 0,9854 = 0,0146.$$

Questão 8.

Seja X: o número de pessoas acima de 40 anos que têm artrite. $X = 240$ e $n = 4000$.

a. $\hat{p} = \dfrac{X}{n} = \dfrac{240}{4000} = 0,06$.

b. $IC(p; 0,95) = \left[\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$, em que $z_{\alpha/2}$, é o percentil $\alpha/2$ da distribuição Normal padrão, portanto $z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$.

$$IC(p; 0,95) = \left[0,06 - 1,96\sqrt{\frac{0,06(1-0,06)}{4000}}; 0,06 + 1,96\sqrt{\frac{0,06(1-0,06)}{4000}}\right] = [0,052; 0,067].$$

Com um grau de confiança de 95%, estimamos que a proporção de pessoas acima de 40 anos que têm artrite está entre 0,052 e 0,067.

Questão 9.

Seja p: proporção de pessoas que preferem a marca X de sabonete. $\hat{p} = 0,70$, $n = 625$ e $z_{\alpha/2} = z_{0,05} =$

$1,64$.

$$IC(p;0,90)=\left[0,70-1,64\sqrt{\frac{0,70(1-0,70)}{625}};0,70+1,64\sqrt{\frac{0,70(1-0,70)}{625}}\right]=[0,67;0,73].$$

Com um grau de confiança de 90%, estimamos que a proporção de pessoas que preferem a marca X de sabonete está entre 67% e 73%.

Questão 10.

Seja p: proporção de pessoas que são favoráveis a um determinado partido. $\hat{p}=0,6$ e $n=100$.

a. Seja ME a margem de erro e $\alpha=0,20$.

$$ME=z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=z_{0,10}\sqrt{\frac{0,60(1-0,60)}{n}}=1,285\sqrt{\frac{0,24}{n}}=0,01 \quad \Rightarrow \quad n=\frac{0,24(1,285)^2}{(0,01)^2}=3962,94.$$

Portanto, o tamanho da amostra seria 3963 para que o erro cometido na estimativa seja no máximo 0,01 com probabilidade 0,80.

b. Se $n=3963$, $\hat{p}=0,55$ e $z_{\alpha/2}=z_{0,025}=1,96$.

$$IC(p;0,95)=\left[0,55-1,96\sqrt{\frac{0,55(1-0,55)}{3963}};0,55+1,96\sqrt{\frac{0,55(1-0,55)}{3963}}\right]=[0,534;0,565].$$

Com um grau de confiança de 95%, estimamos que a proporção de pessoas que são favoráveis a um determinado partido está entre 53,4% e 56,5%.

Questão 11.

Seja p: proporção de consumidores de um certo produto. Considere $n=300$ e $\hat{p}=1/3$.

a. $z_{\alpha/2}=z_{0,025}=1,96$.

$$IC(p;0,95)=\left[\frac{1}{3}-1,96\sqrt{\frac{1/3(1-1/3)}{300}};\frac{1}{3}+1,96\sqrt{\frac{1/3(1-1/3)}{300}}\right]=[0,280;0,387].$$

Com grau de confiança de 95%, estimamos que a proporção populacional de consumidores de um certo produto está entre 0,280 e 0,387.

b. ME margem de erro.

$$ME=z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=z_{0,025}\sqrt{\frac{1/3(1-1/3)}{n}}=1,96\sqrt{\frac{2/9}{n}}=0,02 \quad \Rightarrow \quad n=\frac{2(1,96)^2}{9(0,02)^2}=2134,22.$$

Portanto, o tamanho da amostra seria 2135 para que o erro cometido na estimativa seja no máximo 0,02 com probabilidade 0,95.

Questão 12.

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$.

$$E(T) = E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu = \mu \sum_{i=1}^{n} a_i = \mu(1) = \mu.$$

Portanto, T é um estimador não viciado para a média μ.

Data de atualização: 2 de Novembro de 2019.