ME951 - Estatística e Probabilidade I

Profa.: Larissa Avila Matos

4^a Lista de Exercícios - Variáveis Aleatórias Contínuas

Q1. Uma rotatória temporária é instalada em um cruzamento. O tempo, X minutos, que os veículos têm que esperar antes de entrar no cruzamento tem função de densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0,8 - 0,32x, & \text{se } 0 < x < 2,5; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

Q2. Uma técnica para medir a densidade de um composto de silício é uma variável aleatória, X, função de densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} k, & \text{se } -0,04 < x < 0,04; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Encontre o valor de k

(b) Encontre a probabilidade de que X esteja entre $-0,03$ e $0,01$

(c) Calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

Q3. Seja X uma variável aleatória contínua cuja densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine o valor de k.

(b) Calcule $P(1/4 < X < 1/2)$.

(c) Calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

Q4. A variável aleatória, Y, tem função de densidade de probabilidade dada por

$$f(y) = \begin{cases} k(8 - 2y), & \text{se } 0 < y < 4; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Verifique que $k = 0,0625$ e que a mediana é $1,172$

(b) Calcule $E(Y)$ e $Var(Y)$.

Q5. Seja X uma variável aleatória com distribuição $N(5, 16)$. Obtenha:

(a) $P(X \leq 13)$.

(b) $P(X > 1)$.

(c) O valor de a tal que $P(X \leq a) = 0.04$.

Q6. O tempo de vida útil, em anos, de um eletrodoméstico é uma variável aleatória com densidade dada por

$$f(x) = \frac{xe^{-x/2}}{4}, \quad x > 0.$$

(a) Mostre que de fato f é uma densidade

(b) Se o fabricante dá um tempo de garantia de seis meses para o produto, qual a proporção de aparelhos que devem usar essa garantia?

Q7. A máquina de empacotar um determinado produto o faz segundo uma distribuição normal, com média μ e desvio padrão 20g.

(a) Em quanto deve ser regulado o peso médio μ para que apenas 10% dos pacotes tenham menos do que 500g?

(b) Com a máquina assim regulada, qual a probabilidade de que o peso total de 4 pacotes escolhidos ao acaso seja inferior a 2kg?

Q8. No exercício anterior e após a máquina estar regulada, programou-se uma carta de controle de qualidade. De hora em hora, será retirada uma amostra de 4 pacotes, e estes serão pesados. Se a média da amostra for inferior a 495,6g ou superior a 555,6g para-se a produção para reajustar a máquina, isto é, reajustar o peso médio.

(a) Qual a probabilidade de ser feita uma parada desnecessária?

(b) Se o peso médio da máquina desregulou para 510g, qual a probabilidade de continuar a produção fora dos padrões desejados?

Q9. Sabe-se que a quantidade de acido xanturênico excretado na urina por trabalhadores de um industria, que usa sulfeto de carbono como solvente, segue uma distribuição normal com média 4,8 mg/15 ml e desvio padrão 2 mg/15 ml. Recomendações médicas consideram que níveis de acido xanturênico excretado na urina como normais se estão entre 2,8 e 7,0 mg/15 ml.

(a) Qual é probabilidade de um trabalhador dessa industria possuir níveis de acido xanturênico normal?

(b) Qual deve ser a quantidade de acido xanturênico excretado na urina de um trabalhador para ser considerado entre os 10% com menor nível de acido xanturênico?

(c) Dez trabalhadores são sorteados ao acaso, qual é a probabilidade de que no máximo dois trabalhadores possuam níveis de acido xanturênico anormal?

Q10. O comprimento do lado de um quadrado aleatório é uma variável aleatória uniforme em $[0, 5]$. Calcule a área esperada do quadrado.

Q11. Suponha que a duração de uma componente eletrônica possui distribuição exponencial com parâmetro $\lambda = 1$, calcule:

(a) A probabilidade de que a duração seja menor que 10.

(b) A probabilidade de que a duração esteja entre 5 e 15.

(c) O valor t tal que a probabilidade de que a duração seja maior que t assuma o valor de 0.01.

Q12. O comprimento do lado de um cubo alaetório é uma variável aleatória contínua $Exp(3)$. Calcule o volume esperado do cubo.

Q13. Seja T uma variável aleatória contínua com distribuição exponencial de parâmetro 2 e seja X uma variável aleatória discreta definida como

$$X = \begin{cases} 0, & \text{se } \ 0 \leq T < 1 \\ 1, & \text{se } \ 1 \leq T < 2 \\ 2, & \text{se } \ 2 \leq T \end{cases}$$

Determine a função de probabilidae de X.

Q14. Assumindo que X possui distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, calcule:

(a) $P(X \leq \mu + 2\sigma)$.

(b) $P(|X - \mu| \leq \sigma)$.

(c) O número a tal que $P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = 0.99$.

(d) O número a tal que $P(X > a) = 0.90$.

Por simplicidade assuma primeiramente que $\mu = 1$ e $\sigma = \sqrt{2}$. Logo, determine as quantidades requeridas para μ e σ geral.

Q15. Seja X uma variável aleatória com distribuição Gamma, com parâmetros $\alpha = 4$ e $\beta = 2$. Defina as seguintes variáveis aleatórias:

$$Y_1 = \frac{1}{2}X$$
$$Y_2 = 2X + 1$$
$$Y_3 = 5X$$

Qual a esperança e a variância dessas variáveis?

Q16. Os tempos de resposta em um terminal de computador on-line têm uma distribuição Gama, com média de 4 segundos e variação de 8 segundos^2. Escreva a função de densidade de probabilidade para os tempos de resposta.

Q17. As rendas anuais para os advogados de uma cidade têm distribuição Gama, com $\alpha = 1000$ e $\beta = 20$. Encontre a média e a variância dessas rendas.

Q18. Seja X o tempo (em horas) de inatividade para uma determinada máquina industrial. Além diss, sabemos que X segue uma distribuição Gama, com parâmetros $\alpha = 3$ e $\beta = 2$. A perda, em reais, para a operação industrial como resultado desse tempo de inatividade é dada por $L = 30X + 2X^2$. Encontre o esperança e a variância de L.

Q19. Marta está fazendo uma rifa na feira local e está se perguntando quais são suas chances de ganhar. Se sua probabilidade de ganhar pode ser modelada por uma distribuição Beta, com $\alpha = 5$ e $\beta = 2$, qual é a probabilidade de que ela tenha no máximo 10% de chance de ganhar?

Q20. Use a aproximação da binomial pela normal para estimar as seguintes probalilidades:

(a) $P(20 \leq B \leq 30)$, sendo $B \sim \text{Bin}(80; 0,3)$;

(b) $P(B \leq 40)$, sendo $B \sim \text{Bin}(100; 0,4)$;

(c) $P(50 \leq B \leq 60)$, sendo $B \sim \text{Bin}(80; 0,7)$;

(d) $P(B \geq 50)$, sendo $B \sim \text{Bin}(300; 0,25)$.