ME951 - Estatística e Probabilidade I

Profa.: Larissa Avila Matos

5^a Lista de Exercícios

Q1. Seja X uma variável aleatória com distribuição Gamma, com parâmetros $\alpha = 4$ e $\beta = 2$. Defina as seguintes variáveis aleatórias:

$$Y_1 = \frac{1}{2}X$$
$$Y_2 = 2X + 1$$
$$Y_3 = 5X$$

Qual a esperança e a variância dessas variáveis?

Q2. Os tempos de resposta em um terminal de computador on-line têm uma distribuição Gama, com média de 4 segundos e variação de 8 segundos^2. Escreva a função de densidade de probabilidade para os tempos de resposta.

Q3. As rendas anuais para os advogados de uma cidade têm distribuição Gama, com $\alpha = 1000$ e $\beta = 20$. Encontre a média e a variância dessas rendas.

Q4. Seja X o tempo (em horas) de inatividade para uma determinada máquina industrial. Além diss, sabemos que X segue uma distribuição Gama, com parâmetros $\alpha = 3$ e $\beta = 2$. A perda, em reais, para a operação industrial como resultado desse tempo de inatividade é dada por $L = 30X + 2X^2$. Encontre o esperança e a variância de L.

Q5. Marta está fazendo uma rifa na feira local e está se perguntando quais são suas chances de ganhar. Se sua probabilidade de ganhar pode ser modelada por uma distribuição Beta, com $\alpha = 5$ e $\beta = 2$, qual é a probabilidade de que ela tenha no máximo 10% de chance de ganhar?

Q6. Use a aproximação da binomial pela normal para estimar as seguintes probalilidades:

(a) $P(20 \leq B \leq 30)$, sendo $B \sim \text{Bin}(80; 0,3)$;

(b) $P(B \leq 40)$, sendo $B \sim \text{Bin}(100; 0,4)$;

(c) $P(50 \leq B \leq 60)$, sendo $B \sim \text{Bin}(80; 0,7)$;

(d) $P(B \geq 50)$, sendo $B \sim \text{Bin}(300; 0,25)$.

Q7. Exatamente 30% da população da cidade apoiava o antigo prefeito que perdeu a última eleição. (Observe que as eleições já passaram e é por isto que sabe-se a proporção exata do eleitorado do antigo prefeito.) Calcule aproximadamente, usando a aproximação da binomial pela normal, a probabilidade de que, dentre 100 moradores da cidade, escolhidos ao acaso, no mínimo 40 sejam do eleitorado deste candidato.

Q8. Considere que queremos determinar, em uma população, a proporção de pessoas acima de 40 anos que sofrem de artrite. Sabemos que, de uma amostra de 4000 pessoas acima de 40 anos, foi verificado que 240 pessoas têm artrite.
(a) Estime a proporção de pessoas acima de 40 anos que sofrem de artrite.
(b) Determine um intervalo de confiança de 95% para a verdadeira proporção de pessoas acima de 40 anos que sofrem de artrite?

Q9. Uma amostra aleatória de 625 pessoas revelou que 70% preferem a marca X de sabonete. Construa um interevalo de 90% de confinaça para p =proporção de pessoas que preferem a marca X.

Q10. Antes de uma eleição um determinado partido está interessado em estimar a proporção p de eleitores favoráveis a seu candidato. Uma amostra piloto de tamanho 100 revelou que 60% dos eleitores eram favoráveis ao cantidato em questão.
(a) Determine o tamanho da amostra necessário para que o erro cometido na estimação seja no máximo 0.01 com probabilidade de 80%.

(b) Se na amostra fina (com tamanho dado por (a)) observou-se que 55% dos eleitores eram favoráveis ao candidato em questão, construa um intervalo de confiança (95%) para a proporção p.

Q11. Suponha que estejamos interessados em estimar a porcentagem de consumidores de um certo produto. Se uma amostra de tamanho 300 forneceu 100 indivíduos que consomem o dado produto, determine:
(a) O intervalo de confiança para p, com coeficiente de confiança 95%.
(b) O tamanho da amostra para que o erro da estimativa não exceda a 0.02 unidades com probabilidade 95%.

Q12. Seja uma $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Mostre que a estatística $T = \sum_{1=1}^{n} a_i X_i$ com $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ é não viciada para a média, ou seja, mostre que $E(T) = \mu$.