ME414 - Estatística para Experimentalistas

Parte 23

Notas de aula produzidas pelos professores **Samara Kiihl**, **Tatiana Benaglia** e **Benilton Carvalho** e modificadas pela Profa. **Larissa Avila Matos**

Correlação e Regressão Linear Simples

Problema - Exercícios do Moodle e nota da Prova 1

O conjunto de dados é refere às notas dos Exercícios do Moodle e da Prova P1 de 453 alunos matriculados em ME414 no 2S2015.

Focaremos nas observações referentes a 116 alunos que obtiveram, no máximo, 6.25 pontos nas atividades do Moodle.

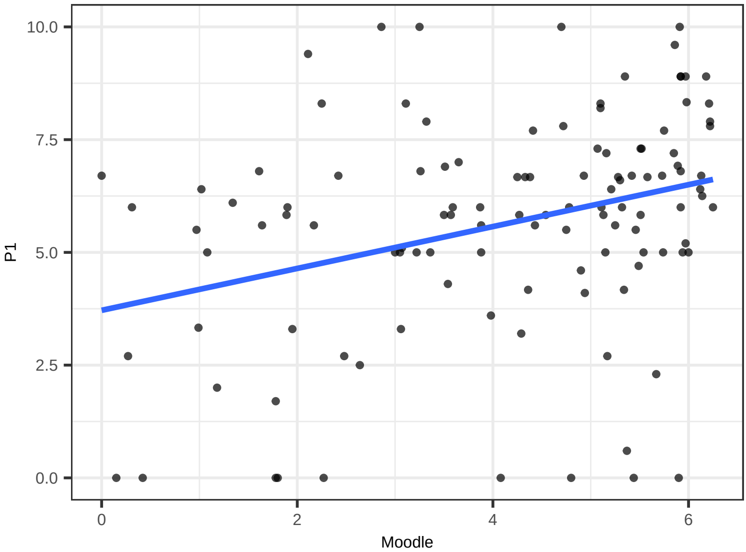
Nosso objetivo é inferir a respeito da associação das notas (absolutas) das atividades disponibilizadas no Moodle com aquelas da Prova P1.

Moodle (≤ 6.25) e Notas da Prova P1

Primeiras 10 linhas do conjuto de dados:

Moodle	P1
5.98	8.33
3.00	5.00
2.42	6.70
2.11	9.40
3.88	5.00
2.86	10.00
1.08	5.00
6.22	7.80
5.94	5.00
5.67	2.30

Como Explicar essa Associação?



Explicando Associação Linear

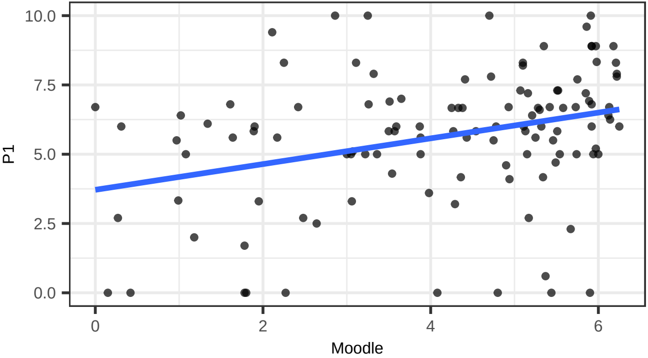
- **Coeficiente de correlação**
  - Quantidade no intervalo $(-1, 1)$;
  - Mede a força da associação linear em função da dispersão dos dados.
- **Modelo de regressão linear simples**
  - Estima a forma $Y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X$;
  - O modelo é linear **nos parâmetros**.

Correlação Linear

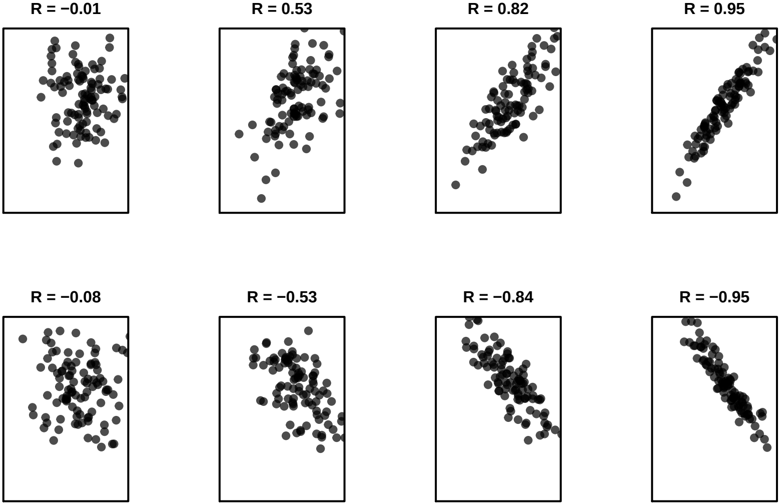
Introdução à Correlação Linear

Denotamos a correlação por R;

- $R = -1$, associação linear negativa entre X e Y;
- $R = 0$, ausência de associação linear entre X e Y;
- $R = +1$, associação linear positiva entre X e Y;



Diferentes níveis de correlação



Determinação do Coeficiente de Correlação

Hipóteses:

- Duas variáveis contínuas: X e Y;
- n pares de observações: (X_i, Y_i).

Fórmula 1

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}} \\
&= \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX}^2 S_{YY}^2}} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}S_{YY}}
\end{aligned}
$$

Notem que S_{XX}^2 e S_{YY}^2 são as somas de quadrados de X e Y corrigida por suas respectivas médias.

$$
\begin{aligned}
S_{XY} &= 157.99 \\
S_{XX} &= 18.45 \\
S_{XY} &= 26.41 \\
R &= 0.3243
\end{aligned}
$$

Fórmula 2

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}} \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i - \bar{X})}{s_X}\frac{(Y_i - \bar{Y})}{s_Y}
\end{aligned}
$$

Notem que s_X e s_Y representam os desvios-padrão amostrais de X e Y, respectivamente.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i - \bar{X})}{s_X}\frac{(Y_i - \bar{Y})}{s_Y} &= 37.29 \\
n-1 &= 115 \\
R &= 0.3243
\end{aligned}
$$

Fórmula 3

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}} \\
&= \frac{1}{n-1}\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{s_X s_Y}
\end{aligned}
$$

Observem que $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ representam as médias amostrais de cada uma das variáveis; e s_X e s_Y são os desvios-padrão amostrais de cada uma das variáveis.

$$\bar{X} = 4.14, \quad \bar{Y} = 5.64 \quad \text{e} \quad n-1 = 115$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{s_X s_Y} &= 37.29 \\
R &= 0.3243
\end{aligned}
$$

Regressão Linear Simples

Terminologia em Regressão Linear Simples

Um modelo de regressão possui, pelo menos, duas variáveis:

- Variável independente, variável exploratória, variável preditora, covariável: x;
- Variável dependente, variável resposta: y.

Para alunos com notas de atividades de no máximo 6.25, como as notas das atividades se associam com a nota da prova P1?

- Variável dependente (resposta): nota da prova P1;
- Variável independente: nota das atividades do Moodle.

Forma do Modelo

O modelo de regressão usual descreve associação linear:

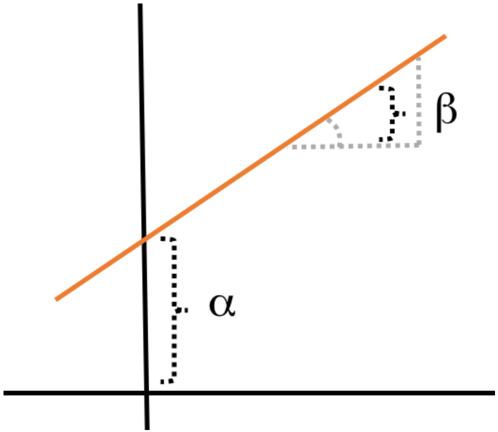
$$Y = \alpha + \beta X + \epsilon.$$

Neste modelo, os termos adicionais são:

- α: intercepto;
- β: coeficiente angular;
- ϵ: erro observacional.

Considerar o erro é necessário, pois associações perfeitas são improváveis.

Forma do Modelo



Hipóteses do Modelo de Regressão Linear

Modelo de regressão linear assume:

- Linearidade entre variáveis;
- Erros aleatórios nas observações;
- Erro tem média zero;
- Variância constante do erro σ^2.

Desta forma, a variável aleatória Y,

$$Y = \alpha + \beta X + \epsilon,$$

possui as seguintes características:

- $E(Y) = E(\alpha + \beta X + \epsilon) = \alpha + \beta X$; e
- $\mathrm{Var}(Y) = Var(\alpha + \beta X + \epsilon) = Var(\epsilon) = \sigma^2$.

Como saber se a Regressão Linear é adequada?

- Utilizar diagramas de dispersão;
- Analisar visualmente a forma de associação entre X e Y;
- Buscar associação linear;
- Aferir a homogeneidade da variância;
- Buscar informação sobre independência das observações.

Exemplo: Notas no Moodle e P1

O conjunto de dados é refere às notas dos Exercícios do Moodle e da Prova P1 de 453 alunos matriculados em ME414 no 2S2015.

Focaremos nas observações referentes a 116 alunos que obtiveram, no máximo, 6.25 pontos nas atividades do Moodle.

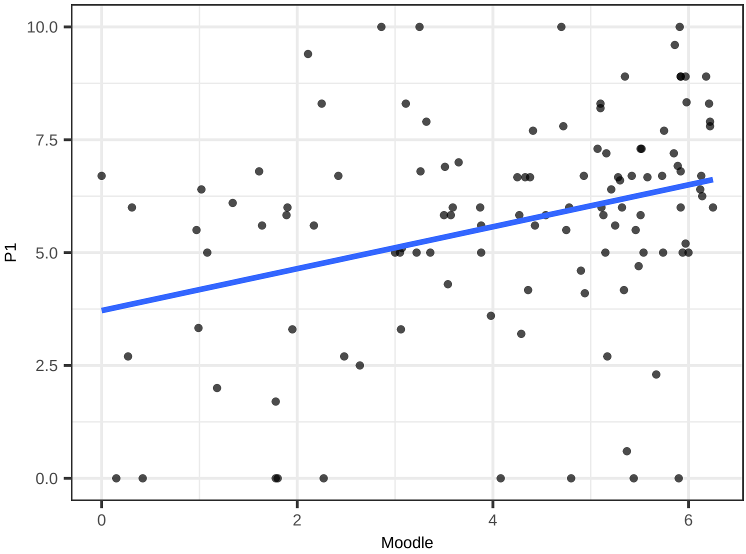
Nosso objetivo é inferir a respeito da associação das notas (absolutas) das atividades disponibilizadas no Moodle com aquelas da Prova P1.

Exemplo: Notas no Moodle e P1

Primeiras 6 linhas do conjuto de dados:

Moodle	P1
5.98	8.33
3.00	5.00
2.42	6.70
2.11	9.40
3.88	5.00
2.86	10.00

Exemplo: Notas no Moodle e P1



Escolha da Melhor Reta

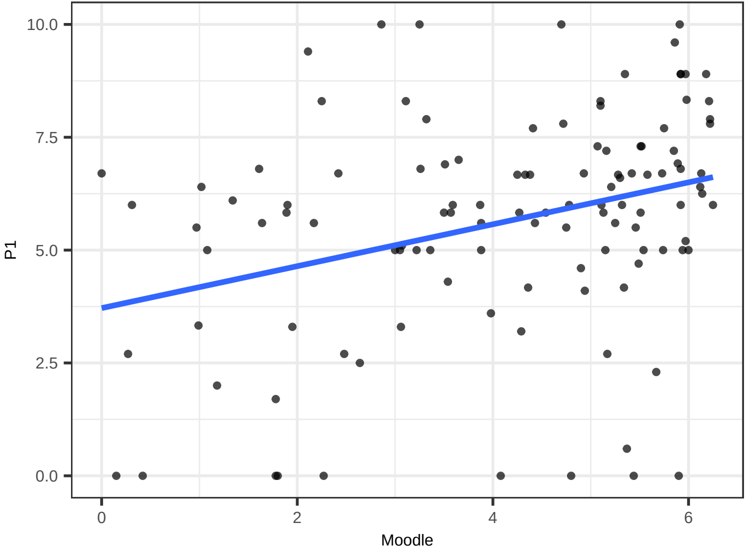
Um modo de determinar a melhor reta é pelo meio da minimização da soma dos erros quadrados:

- Determinar a função a ser minimizada;
- Determinar a primeira derivada com respeito aos parâmetros de interesse;
- Igualar estas derivadas a zero;
- Verificar segundas derivadas.

Escolha da Melhor Reta

$$
\begin{aligned}
Y_i &= \alpha + \beta X_i + \epsilon_i \\
f(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2 \\
\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} &= -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i) \\
\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial \beta} &= -2 \sum_{i=1}^{n} X_i (Y_i - \alpha - \beta X_i) \\
\hat{\alpha} &= \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \\
\hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}}
\end{aligned}
$$

A Escolha da Melhor Reta

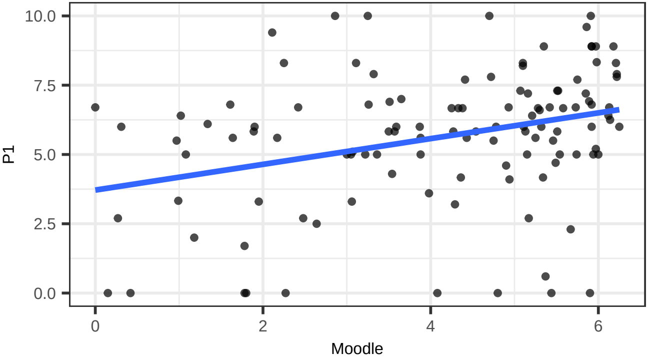


Exemplo: Moodle x P1

$$\hat{\beta} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{157.9881517}{340} = 0.46$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} = 5.64 - 0.46 \times 4.14 = 3.72$$

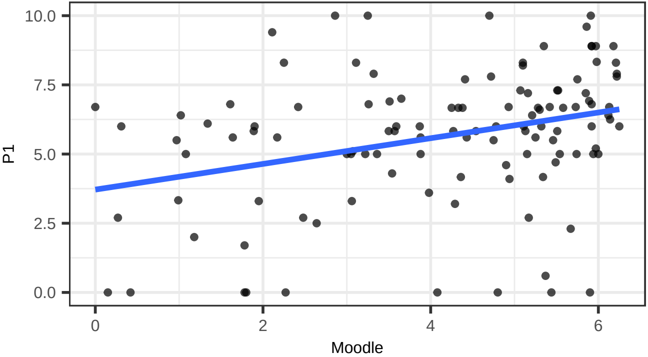
$$\text{P1} = 3.72 + 0.46 \times \text{Moodle}$$



Interpretação dos Parâmetros

$$\hat{\alpha} = 3.72 \quad \text{e} \quad \hat{\beta} = 0.46$$

- $\hat{\alpha}$ é a nota média na P1 para alunos com nota 0 no Moodle;
- $\hat{\beta}$ é o aumento médio na nota da P1 para cada ponto extra no Moodle.



Observações

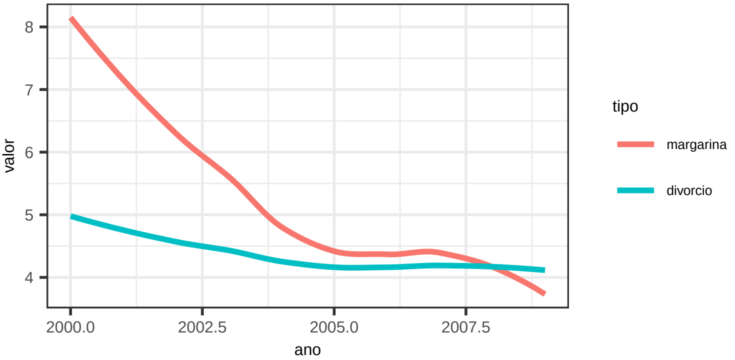
Erros na Interpretação de Correlação e Regressão

Correlação e regressão apresentam **associação**;

Associação não indica causalidade;

Extrapolações não devem ser feitas;

O gráfico abaixo apresenta o número de divórcios (por 1000 casamentos) no Maine/EUA e o consumo *per capita* de margarina (em libras) ao longo dos anos.



Associações

A correlação entre estas duas variáveis (número de divórcios e consumo de margarina) é 0.9926.

Considere o número de divórcios como variável resposta e o consumo de margarina como variável independente.

Temos o seguinte modelo de regressão linear:

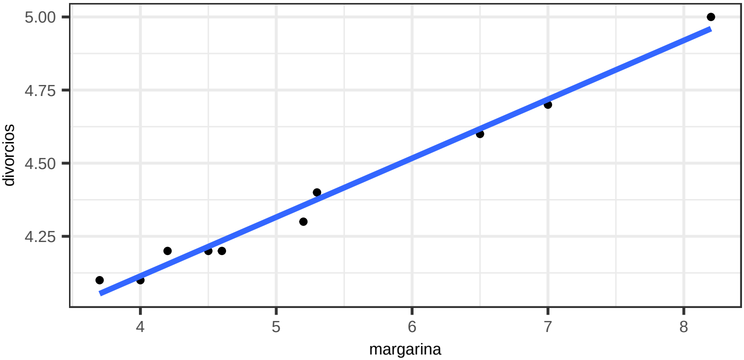
	Estimativa	Erro Padrão	valor t	valor-de-p
(Intercept)	3.308626	0.0480316	68.88431	0
margarina	0.201386	0.0087350	23.05495	0

Ou seja,

$$\text{divórcios} = 3.30 + 0.20 \times \text{margarina}$$

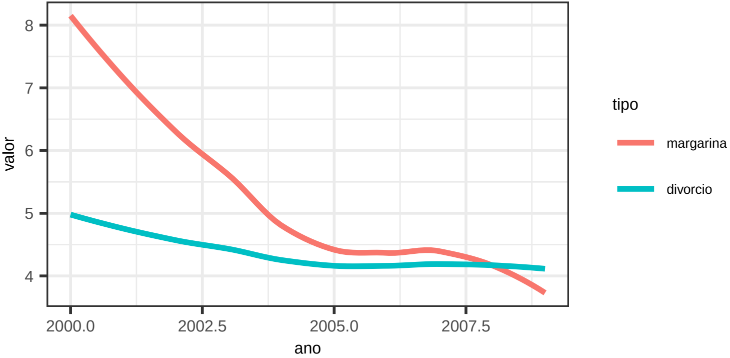
Associações

Importante lembrar que modelos de regressão descrevem associação, não causalidade.



Extrapolações

Qual o consumo esperado de margarina em 2016?



Leituras

- Ross: capítulo 12
- OpenIntro: seções 7.1 e 7.2
- Magalhães: seção 9.5