

# ME720 - Modelos Lineares Generalizados

## Parte 8 - MLGs - Introdução

Profa. **Larissa Avila Matos**

# Modelos Lineares Generalizados (MLGs)

Nelder e Wedderburn (1972), propuseram os Modelos Lineares Generalizados (MLGs), que são uma extensão dos modelos normais lineares.

A idéia básica consiste em abrir o leque de opções para a distribuição da variável resposta, permitindo que a mesma pertença à família exponencial de distribuições, bem como dar maior flexibilidade para a relação funcional entre a média da variável resposta ( $\mu$ ) e o preditor linear  $\eta$ .

A ligação entre a média e o preditor linear não é necessariamente a identidade, podendo assumir qualquer forma monótona não-linear.

O modelo de regressão linear (modelos lineares) utiliza a linearidade para descrever a relação entre a média da variável resposta e um conjunto de variáveis explicativas, assumindo que a distribuição da variável resposta é normal. Os modelos lineares generalizados (MLGs) estendem os modelos de regressão linear para abranger distribuições de respostas não-normais e possivelmente funções não-lineares da média. Eles têm três componentes:

- *Componente aleatório,*
- *Preditor linear,*
- *Função de ligação.*

*Componente aleatório:* especifica a variável de resposta  $\mathbf{y}$  e sua distribuição de probabilidade. As observações  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  nessa distribuição são tratadas como independentes.

*Preditor linear:* Para um vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)'$  e uma matriz  $\mathbf{X}_{n \times p}$  do modelo que contém valores de  $p$  variáveis explicativas para as  $n$  observações, o preditor linear é  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\eta}$ .

*Função de ligação:* Esta é uma função  $g$  aplicada a cada componente de  $E(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\mu}$  que a relaciona com o preditor linear,

$$g(E(\mathbf{y})) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}.$$

# Antes dos MLGs

Os MLGs foram criados com o objetivo de reunir numa mesma família vários modelos estatísticos que eram tratados separadamente.

Em geral, nas análises de regressão, procurava-se algum tipo de transformação que levasse à normalidade, tais como a transformação de Box-Cox (1964) dada abaixo

$$z = \begin{cases} \frac{y^\lambda - 1}{\lambda}, & \text{se } \lambda \neq 0, \\ \log(y), & \text{se } \lambda = 0; \end{cases}$$

em que  $y > 0$  e  $\lambda$  é uma constante desconhecida.

## Família Exponencial

# Família Exponencial

A família exponencial compreende um conjunto de distribuição flexível que varia entre variáveis aleatórias contínuas e discretas. Alguns membros dessa família são:

- Gaussiana:  $\mathbb{R}^p$
- Multinomial: *Categórico*
- Bernoulli: Binário  $\{0, 1\}$
- Binomial: Contagens de sucesso/fracasso
- Gama:  $\mathbb{R}^+$
- Poisson:  $\mathbb{N}^+$
- Laplace:  $\mathbb{R}^+$
- Exponencial:  $\mathbb{R}^+$
- Beta:  $\{0, 1\}$
- Dirichlet:  $\Delta$  (Simplex)
- Weibull:  $\mathbb{R}^+$
- Weishart: matrizes simétricas positivas definidas

Todas estas distribuições seguem um formato geral.

# Família Exponencial

Dizemos que uma variável aleatória  $Y$ , com distribuição  $f(y; \theta)$ , pertence a família exponencial se sua função de densidade ou função de probabilidades pode ser escrita na forma

$$f(y; \theta) = \exp [y\theta - b(\theta) + c(y)] \underbrace{\mathcal{I}(y \in A)}_{\text{não depende de } \theta},$$

ou seja,

$$\Rightarrow Y \sim f(y; \theta) \in \text{FE}(\theta),$$

onde  $\theta$  é o *parâmetro natural*.



## Exemplo

Seja  $Y$  uma variável aleatória com distribuição Poisson ( $Y \sim P(\mu)$ ), a sua função de probabilidade é dada por

$$f(y; \mu) = \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!} \quad y = 0, 1, 2, \dots$$

## Exemplo

Seja  $Y$  uma variável aleatória com distribuição Poisson ( $Y \sim P(\mu)$ ), a sua função de probabilidade é dada por

$$\begin{aligned} f(y; \mu) &= \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!} \quad y = 0, 1, 2, \dots \\ &= \exp [y \log(\mu) - \mu - \log(y!)] , \end{aligned}$$

# Exemplo

Seja  $Y$  uma variável aleatória com distribuição Poisson ( $Y \sim P(\mu)$ ), a sua função de probabilidade é dada por

$$\begin{aligned} f(y; \mu) &= \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!} \quad y = 0, 1, 2, \dots \\ &= \exp [y \log(\mu) - \mu - \log(y!)] , \end{aligned}$$

Temos que,  $\log(\mu) = \theta \Rightarrow \mu = e^\theta$ , então

$$f(y; \mu) = \exp \left[ y\theta - \underbrace{\exp \theta}_{b(\theta)} - \underbrace{\log(y!)}_{c(y)} \right]$$

$\Rightarrow Y \in \text{FE}(\theta)$ .

# Família Exponencial com parâmetro de escala

Sejam  $Y_1, \dots, Y_n$  variáveis aleatórias independentes, cada uma com função de densidade ou função de probabilidades dada por

$$f(y_i; \theta_i, \phi) = \exp \left[ \frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a(\phi)} + c(y_i, \phi) \right] \mathcal{I}(y_i \in A),$$

com  $\phi > 0$ , constante.

Dizemos que  $Y_i$  tem distribuição pertencente à família exponencial com parâmetro de escala,  $Y_i \sim f(y_i; \theta_i, \phi) \in \text{FE}(\theta_i, \phi)$ . Além disso,

- $\theta_i$  é o *parâmetro natural*; e
- $\phi$  é o *parâmetro de dispersão*.

Frequentemente,  $a(\phi) = 1$  e  $c(y_i, \phi) = c(y_i)$ , resultando na família exponencial natural, vista anteriormente.

Sabe-se que  $\int_{-\infty}^{\infty} f(y_i; \theta_i, \phi) dy_i = 1$ .

# Função Geradora de Momentos

A Função Geradora de Momentos (F.G.M.) de  $Y_i$  é dada por

$$\begin{aligned}M_{Y_i}(t) &= \mathbb{E}(e^{tY_i}) = \int_A e^{tY_i} f(y_i; \theta_i, \phi) dy_i \\&= \exp \left[ \frac{b(a(\phi)t + \theta_i) - b(\theta_i)}{a(\phi)} \right].\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_i) &= \left. \frac{d}{dt} M_{Y_i}(t) \right|_{t=0} = \exp \left[ \frac{b(a(\phi)t + \theta_i) - b(\theta_i)}{a(\phi)} \right] \left. \frac{b'(a(\phi)t + \theta_i) a(\phi)}{a(\phi)} \right|_{t=0} \\&= b'(\theta_i) \\&= \mu_i.\end{aligned}$$

# Função Cumulante

Os cumulantes são definidos através da expansão em série de Taylor de  $\log(\mathbb{E}(e^{tY_i}))$ , ou seja

$$K_{Y_i}(t) = \log(M_{Y_i}(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k_j t^j}{j!},$$

$k_1, k_2, k_3, \dots$  = cumulantes de  $Y_i$ , ou seja, são os momentos centrados na média.

Então,

$$K_{Y_i}(t) = \frac{b(a(\phi)t + \theta_i) - b(\theta_i)}{a(\phi)}.$$

Assim como na função geradora de momentos, temos que

$$\begin{aligned}k_1 &= \left. \frac{d}{dt} K_{Y_i}(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{b'(a(\phi)t + \theta_i)a(\phi)}{a(\phi)} \right|_{t=0} \\&= b'(\theta_i) = \mu_i \\k_2 &= \mathbb{E}((Y_i - \mu_i)^2) = \text{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y_i^2) - \mu_i^2 \\&= \left. \frac{d^2}{dt^2} K_{Y_i}(t) \right|_{t=0} = \left. b''(a(\phi)t + \theta_i)a(\phi) \right|_{t=0} \\&= b''(\theta_i)a(\phi) \\k_3 &= \mathbb{E}((Y_i - \mu_i)^3) = \mathbb{E}(Y_i^3) - 3\mathbb{E}(Y_i^2)\mu_i - 2\mu_i^3 = \left. b''(a(\phi)t + \theta_i)a(\phi) \right|_{t=0} \\&= b'''(\theta_i)a^2(\phi) \\&\vdots \\k_j &= b^{(j)}(\theta_i)[a(\phi)]^{j-1}\end{aligned}$$

# Propriedade de invariância de cumulantes

Os cumulantes padronizados são dados por

$$\rho_j = \frac{k_j}{k_2^{j/2}}, \quad j = 2, 3, \dots$$

- $\rho_j$  é invariante com respeito a locação, i.e., se  $Y_i = \frac{X_i - a}{b}$ ,  $\forall a$  e  $b \neq 0$ , os cumulantes de  $X_i$  e  $Y_i$  são os mesmos.



Podemos também encontrar expressões para  $\mathbb{E}(Y_i)$  e  $\text{Var}(Y_i)$  que usam quantidades de  $f(y_i; \theta_i, \phi)$  de outra forma.

Considere  $\ell_i = \log(f(y_i; \theta_i, \phi))$  a contribuição de  $Y_i$  na função de log-verossimilhança,  $\ell = \sum_i \ell_i$ . Então, temos que

$$\ell_i = \frac{[y_i \theta_i - b(\theta_i)]}{a(\phi)} + c(y_i, \phi),$$

com

$$\frac{\partial \ell_i}{\partial \theta_i} = \frac{[y_i - b'(\theta_i)]}{a(\phi)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \ell_i}{\partial \theta_i^2} = \frac{-b''(\theta_i)}{a(\phi)},$$

onde  $b'(\theta_i)$  e  $b''(\theta_i)$  são a primeira e a segunda derivada de  $b(\cdot)$  avaliada em  $\theta_i$ , respectivamente.

Podemos mostrar sob certas condições de regularidade, que

$$\mathbf{1} \quad \mathbb{E} \left( \frac{\partial \ell_i}{\partial \theta_i} \right) = 0, \quad \forall_i \rightarrow \mathbb{E} \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right) = 0; \text{ e}$$

$$\mathbf{2} \quad \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 \ell_i}{\partial \theta_i^2} \right) = -\mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial \ell_i}{\partial \theta_i} \right)^2 \right], \quad \forall_i \rightarrow \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} \right) = -\mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right)^2 \right].$$

Prova:??

Prova: Para facilitar a notação, considere  $f(y_i; \theta_i, \phi) = f(y_i)$ .

$$\mathbf{1} \quad \mathbb{E} \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right) = 0$$

Prova: Para facilitar a notação, considere  $f(y_i; \theta_i, \phi) = f(y_i)$ .

$$\mathbf{1} \quad \mathbb{E} \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right) = 0$$

$$\mathbb{E} \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right) = \int_A \frac{\partial \ell}{\partial \theta} f(y) dy = \int_A \frac{\partial \log(f(y))}{\partial \theta} f(y) dy$$

Prova: Para facilitar a notação, considere  $f(y_i; \theta_i, \phi) = f(y_i)$ .

$$\mathbf{1} \quad \mathbb{E} \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right) &= \int_A \frac{\partial \ell}{\partial \theta} f(y) dy = \int_A \frac{\partial \log(f(y))}{\partial \theta} f(y) dy \\ &= \int_A \frac{\partial f(y)}{\partial \theta} \frac{1}{f(y)} f(y) dy = \int_A \frac{\partial f(y)}{\partial \theta} dy \end{aligned}$$

Prova: Para facilitar a notação, considere  $f(y_i; \theta_i, \phi) = f(y_i)$ .

$$\mathbf{1} \quad \mathbb{E} \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right) &= \int_A \frac{\partial \ell}{\partial \theta} f(y) dy = \int_A \frac{\partial \log(f(y))}{\partial \theta} f(y) dy \\ &= \int_A \frac{\partial f(y)}{\partial \theta} \frac{1}{f(y)} f(y) dy = \int_A \frac{\partial f(y)}{\partial \theta} dy \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \underbrace{\int_A f(y) dy}_1 = \frac{\partial}{\partial \theta} 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E} \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right) = 0 \quad \square$$

$$\mathbf{2} \quad \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} \right) = -\mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

$$\mathbf{2} \quad \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} \right) = -\mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

$$\mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} \right) = \int_A \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} f(y) dy = \int_A \frac{\partial^2 \log(f(y))}{\partial \theta^2} f(y) dy$$



$$\mathbf{2} \quad \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} \right) = -\mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} \right) &= \int_A \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} f(y) dy = \int_A \frac{\partial^2 \log(f(y))}{\partial \theta^2} f(y) dy \\ &= \int_A \left[ \frac{\partial^2 f(y)}{\partial \theta^2} \frac{1}{f(y)} - \left( \frac{\partial \log(f(y))}{\partial \theta} \right)^2 \right] f(y) dy \end{aligned}$$

$$\mathbf{2} \quad \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} \right) = -\mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} \right) &= \int_A \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} f(y) dy = \int_A \frac{\partial^2 \log(f(y))}{\partial \theta^2} f(y) dy \\ &= \int_A \left[ \frac{\partial^2 f(y)}{\partial \theta^2} \frac{1}{f(y)} - \left( \frac{\partial \log(f(y))}{\partial \theta} \right)^2 \right] f(y) dy \\ &= \int_A \frac{\partial^2 f(y)}{\partial \theta^2} dy - \int_A \left( \frac{\partial \log(f(y))}{\partial \theta} \right)^2 f(y) dy \end{aligned}$$

$$\mathbf{2} \quad \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} \right) = -\mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} \right) &= \int_A \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} f(y) dy = \int_A \frac{\partial^2 \log(f(y))}{\partial \theta^2} f(y) dy \\ &= \int_A \left[ \frac{\partial^2 f(y)}{\partial \theta^2} \frac{1}{f(y)} - \left( \frac{\partial \log(f(y))}{\partial \theta} \right)^2 \right] f(y) dy \\ &= \int_A \frac{\partial^2 f(y)}{\partial \theta^2} dy - \int_A \left( \frac{\partial \log(f(y))}{\partial \theta} \right)^2 f(y) dy \\ &= \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \int_A f(y) dy}_1 - \mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial \log(f(y))}{\partial \theta} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\mathbf{2} \quad \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} \right) = -\mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} \right) &= \int_A \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} f(y) dy = \int_A \frac{\partial^2 \log(f(y))}{\partial \theta^2} f(y) dy \\ &= \int_A \left[ \frac{\partial^2 f(y)}{\partial \theta^2} \frac{1}{f(y)} - \left( \frac{\partial \log(f(y))}{\partial \theta} \right)^2 \right] f(y) dy \\ &= \int_A \frac{\partial^2 f(y)}{\partial \theta^2} dy - \int_A \left( \frac{\partial \log(f(y))}{\partial \theta} \right)^2 f(y) dy \\ &= \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \int_A f(y) dy}_1 - \mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial \log(f(y))}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} 1 - \mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right)^2 \right] = \end{aligned}$$

$$\boxed{2} \quad \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} \right) = -\mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} \right) &= \int_A \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} f(y) dy = \int_A \frac{\partial^2 \log(f(y))}{\partial \theta^2} f(y) dy \\
 &= \int_A \left[ \frac{\partial^2 f(y)}{\partial \theta^2} \frac{1}{f(y)} - \left( \frac{\partial \log(f(y))}{\partial \theta} \right)^2 \right] f(y) dy \\
 &= \int_A \frac{\partial^2 f(y)}{\partial \theta^2} dy - \int_A \left( \frac{\partial \log(f(y))}{\partial \theta} \right)^2 f(y) dy \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \underbrace{\int_A f(y) dy}_1 - \mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial \log(f(y))}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial \theta} 1 - \mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right)^2 \right] = -\mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\
 \\
 \Rightarrow \mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} \right) &= -\mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right)^2 \right] \quad \square
 \end{aligned}$$

# $\text{Var} \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right)$

Podemos também calcular  $\text{Var} \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right)$ , por (2.) temos que

$$\begin{aligned}\text{Var} \left( \frac{\partial \ell}{\partial \theta} \right) &= \text{Var} \left( \frac{\partial \log(f(y))}{\partial \theta} \right) \\&= \mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial \log(f(y))}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \underbrace{\left[ \mathbb{E} \left( \frac{\partial \log(f(y))}{\partial \theta} \right) \right]^2}_0 \\&= \mathbb{E} \left[ \left( \frac{\partial \log(f(y))}{\partial \theta} \right)^2 \right] = -\mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 \log(f(y))}{\partial \theta^2} \right) \\&= -\mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta^2} \right)\end{aligned}$$

# Propriedades

Se  $Y_i \sim FE(\theta_i, \phi)$ , então

**1**  $\mathbb{E}(Y_i) = \mu_i = b'(\theta_i)$ ; e

**2**  $\text{Var}(Y_i) = a(\phi)V(\mu_i)$ , em que  $V_i = V(\mu_i) = d\mu_i/d\theta_i$  é a função de variância.

$\phi > 0$  é o parâmetro de dispersão (precisão), pois quanto menor o valor da sua função, menor será a variância.

Prova:??

A função de variância desempenha um papel importante na família exponencial, uma vez que a mesma caracteriza a distribuição. Isto é, dada a função de variância, tem-se uma classe de distribuições correspondentes, e vice-versa.

Prova: Vimos que

$$\ell_i = \frac{[y_i \theta_i - b(\theta_i)]}{a(\phi)} + c(y_i, \phi),$$

e

$$\frac{\partial \ell_i}{\partial \theta_i} = \frac{[y_i - b'(\theta_i)]}{a(\phi)}, \quad \frac{\partial^2 \ell_i}{\partial \theta_i^2} = \frac{-b''(\theta_i)}{a(\phi)}.$$

Então, da condição de regularidade (1.), temos



Prova: Vimos que

$$\ell_i = \frac{[y_i \theta_i - b(\theta_i)]}{a(\phi)} + c(y_i, \phi),$$

e

$$\frac{\partial \ell_i}{\partial \theta_i} = \frac{[y_i - b'(\theta_i)]}{a(\phi)}, \quad \frac{\partial^2 \ell_i}{\partial \theta_i^2} = \frac{-b''(\theta_i)}{a(\phi)}.$$

Então, da condição de regularidade (1.), temos

$$\mathbb{E} \left( \frac{\partial \ell_i}{\partial \theta_i} \right) =$$

Prova: Vimos que

$$\ell_i = \frac{[y_i \theta_i - b(\theta_i)]}{a(\phi)} + c(y_i, \phi),$$

e

$$\frac{\partial \ell_i}{\partial \theta_i} = \frac{[y_i - b'(\theta_i)]}{a(\phi)}, \quad \frac{\partial^2 \ell_i}{\partial \theta_i^2} = \frac{-b''(\theta_i)}{a(\phi)}.$$

Então, da condição de regularidade (1.), temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \frac{\partial \ell_i}{\partial \theta_i} \right) &= \mathbb{E} \left( \frac{Y_i - b'(\theta_i)}{a(\phi)} \right) = \frac{\mathbb{E}(Y_i) - b'(\theta_i)}{a(\phi)} = 0 \\ &\Rightarrow \mathbb{E}(Y_i) = b'(\theta_i). \end{aligned}$$

Da condição de regularidade (2.) vimos que

$$\text{Var} \left( \frac{\partial \ell_i}{\partial \theta_i} \right) = -\mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 \ell_i}{\partial \theta_i^2} \right)$$

$$\Rightarrow \text{Var} \left( \frac{Y_i - b'(\theta_i)}{a(\phi)} \right) = -\mathbb{E} \left( \frac{-b''(\theta_i)}{a(\phi)} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Var}(Y_i)}{(a(\phi))^2} = \frac{b''(\theta_i)}{a(\phi)}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(Y_i) = b''(\theta_i)a(\phi)$$

**Exemplo:** A função de variância definida por  $V(\mu) = \mu(1 - \mu)$ ,  $0 < \mu < 1$ , caracteriza a classe de distribuições binomiais com probabilidades de sucesso  $\mu$  ou  $1 - \mu$ .

Uma propriedade interessante envolvendo a distribuição de  $Y$  e a função de variância é a seguinte

$$\frac{(Y - \mu)}{\sqrt{a(\phi)}} \xrightarrow{d} N(0, V(\mu)), \quad \text{quando } a(\phi) \rightarrow \infty.$$

Ou seja, para  $\phi$  grande  $Y$  segue distribuição aproximadamente normal de média  $\mu$  e variância  $a(\phi)V(\mu)$ . Esse tipo de abordagem assintótica, diferente da usual em que  $n$  é grande, foi introduzida por Jørgensen (1987).

## Casos particulares FE

# Poisson

Seja  $Y_i$  uma variável aleatória com distribuição Poisson ( $Y \sim P(\mu_i)$ ), a função de probabilidades fica dada por

$$f(y_i; \mu) = \frac{e^{-\mu_i} \mu_i^{y_i}}{y_i!} = \exp [y_i \log(\mu_i) - \mu_i - \log(y_i!)] , \quad y_i = 0, 1, 2, \dots$$

Fazendo  $\log(\mu_i) = \theta_i$ , temos

$$f(y_i; \mu) = \exp \left[ y_i \theta_i - \underbrace{\exp \theta_i}_{b(\theta_i)} - \underbrace{\log(y_i!)}_{c(y_i, \phi)} \right] ,$$

onde  $\theta_i$  é o parâmetro natural e  $a(\phi) = 1$ .

Portanto, essa distribuição pertence a família exponencial com parâmetro de escala, com

- $b(\theta_i) = \exp(\theta_i),$

- $a(\phi) = 1,$  e

- $c(y_i, \phi) = -\log(y_i!).$

Então,

$$\mathbb{E}(Y_i) = b'(\theta_i) = \exp(\theta_i) = \mu_i,$$

e

$$\text{Var}(Y_i) = a(\phi)b''(\theta_i) = \exp(\theta_i) = \mu_i.$$

Segue portanto que  $V(\mu_i) = \mu_i.$

# Binomial

Seja  $Y_i^*$  a proporção de sucessos em  $n_i$  ensaios independentes, cada um com probabilidade de ocorrência  $\mu_i$ . Assumimos que  $n_i Y_i^* \sim \text{Bin}(n_i, \mu_i)$ , nesse caso temos que  $\mathbb{E}(Y_i^*) = \mu_i$  não depende de  $n_i$ .

A função de probabilidades de  $Y^*$  fica então expressa na forma

$$\begin{aligned} f(y_i^*; \mu_i, n_i) &= \binom{n_i}{n_i y_i^*} \mu_i^{n_i y_i^*} (1 - \mu_i)^{n_i - n_i y_i^*}, \quad y_i^* = 0, \frac{1}{n_i}, \frac{2}{n_i}, \dots, 1; \\ &= \exp \left[ n_i \log(1 - \mu_i) + n_i y_i^* \log \left( \frac{\mu_i}{1 - \mu_i} \right) + \log \left( \binom{n_i}{n_i y_i^*} \right) \right]. \end{aligned}$$

Fazendo  $\log\left(\frac{\mu_i}{1 - \mu_i}\right) = \theta_i$ , temos

$$f(y_i^*; \mu_i, n_i) = \exp \left[ \frac{y_i^* \theta_i - \log(1 + \exp(\theta_i))}{1/n_i} + \log \left( \binom{n_i}{n_i y_i^*} \right) \right],$$

onde  $\theta_i$  é o parâmetro natural, chamado de *logito*.



Portanto, essa distribuição pertence a família exponencial com parâmetro de escala, com

$$\blacksquare b(\theta_i) = \log(1 + \exp(\theta_i)),$$

$$\blacksquare a(\phi) = 1/n_i, \text{ e}$$

$$\blacksquare c(y_i, \phi) = \log \begin{pmatrix} n_i \\ n_i y_i^* \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\mathbb{E}(Y_i) = b'(\theta_i) = \frac{\exp(\theta_i)}{1 + \exp(\theta_i)} = \mu_i,$$

e

$$\text{Var}(Y_i) = a(\phi)b''(\theta_i) = \frac{\exp(\theta_i)}{n_i[1 + \exp(\theta_i)]^2} = \frac{\mu_i(1 - \mu_i)}{n_i}.$$

Segue portanto que  $V(\mu_i) = \mu_i(1 - \mu_i)$ .

# Normal

Seja  $Y_i$  uma variável aleatória com distribuição normal de média  $\mu_i$  e variância  $\sigma^2$ ,  $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ . A função densidade de  $Y$  é expressa na forma

$$\begin{aligned} f(y_i; \mu_i, \sigma^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (y_i - \mu_i)^2 \right] \\ &= \exp \left[ \frac{\mu_i y_i - \frac{\mu_i^2}{2}}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \left( \log(2\pi\sigma^2) + \frac{y_i^2}{\sigma^2} \right) \right] \\ &= \exp \left[ \frac{\theta_i y_i - \frac{\theta_i^2}{2}}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \left( \log(2\pi\sigma^2) + \frac{y_i^2}{\sigma^2} \right) \right], \end{aligned}$$

em que  $-\infty < \mu_i, y_i < \infty$  e  $\sigma^2 > 0$ . Além disso,  $\theta_i = \mu_i$  é o parâmetro natural.

Portanto, essa distribuição pertence a família exponencial com parâmetro de escala, com

$$\blacksquare b(\theta_i) = \frac{\theta_i^2}{2},$$

$$\blacksquare a(\phi) = \sigma^2, \text{ e}$$

$$\blacksquare c(y_i, \phi) = -\frac{1}{2} \left( \log(2\pi\sigma^2) + \frac{y_i^2}{\sigma^2} \right).$$

Então,

$$\mathbb{E}(Y_i) = b'(\theta_i) = \theta_i = \mu_i;$$

e

$$\text{Var}(Y_i) = a(\phi)b''(\theta_i) = \sigma^2.$$

Segue portanto que  $V(\mu_i) = 1$ .

Seja  $Y_i$  uma variável aleatória com distribuição gama de média  $\mu_i$  e coeficiente de variação  $\phi^{1/2}$ , denotamos  $Y_i \sim G(\mu_i, \phi)$ . A função densidade de  $Y_i$  é dada por

$$\begin{aligned} f(y_i; \mu_i, \phi) &= \frac{1}{\Gamma(\phi)} \left( \frac{\phi y_i}{\mu_i} \right)^\phi \exp \left( -\frac{\phi y_i}{\mu_i} \right) y_i^{-1} \\ &= \exp \left[ \phi \left( -\frac{y_i}{\mu_i} - \log(\mu_i) \right) - \log(\Gamma(\phi)) + \phi \log(\phi y_i) - \log(y_i) \right] \\ &= \exp \left[ \frac{-\frac{y_i}{\mu_i} - \log(\mu_i)}{1/\phi} + (\phi - 1) \log(y_i) + \phi \log(\phi) - \log(\Gamma(\phi)) \right] \\ &= \exp \left[ \frac{-y_i \theta_i + \log(-\theta_i)}{1/\phi} + (\phi - 1) \log(y_i) + \phi \log(\phi) - \log(\Gamma(\phi)) \right] \end{aligned}$$

**Obs.** A escolha da parametrização, consistiu em escrever a fdp de  $Y_i$  em termos de  $\mu_i = \mathbb{E}(Y_i)$  e do parâmetro de precisão  $\phi$ , de modo que  $cv(Y_i) = dp(Y_i)/\mathbb{E}(Y_i) = \phi^{-1/2}$ , o que implica que  $\text{Var}(Y_i) = V(\mu_i)/\phi$ .

Portanto, essa distribuição pertence a família exponencial com parâmetro de escala, onde  $\theta_i = -\frac{1}{\mu_i}$  é o parâmetro natural. Além disso,

- $b(\theta_i) = -\log(-\theta_i),$

- $a(\phi) = \frac{1}{\phi},$  e

- $c(y_i, \phi) = (\phi - 1) \log(y_i) + \phi \log(\phi) - \log(\Gamma(\phi)).$

Então,

$$\mathbb{E}(Y_i) = b'(\theta_i) = \mu_i \quad \text{e} \quad \text{Var}(Y_i) = a(\phi)b''(\theta_i) = \frac{\mu_i^2}{\phi},$$

com  $V(\mu_i) = \mu_i^2$ .

Nessa parametrização,

- se  $\phi = 1$ , então  $Y_i \sim \text{Exp}(\mu_i);$

- se  $\phi = k/2$  e  $\mu_i = k$ , então  $Y_i \sim \chi^2(k).$

# Normal Inversa

Seja  $Y_i$  uma variável aleatória com distribuição normal inversa de média  $\mu_i$  e parâmetro de precisão  $\phi$ ,  $Y_i \sim NI(\mu_i, \phi)$  e cuja função de densidade é dada por

$$\begin{aligned} f(y_i; \mu_i, \phi) &= \frac{\phi^{1/2}}{\sqrt{2\pi y_i^3}} \exp \left[ -\frac{\phi(y_i - \mu_i)^2}{2\mu_i^2 y_i} \right] \\ &= \exp \left[ \frac{\left( -\frac{y_i}{2\mu_i^2} + \frac{1}{\mu_i} \right)}{1/\phi} - \frac{1}{2} \left( \log(2\pi y_i^3/\phi) + \frac{\phi}{y_i} \right) \right], \end{aligned}$$

em que  $y_i > 0$  e  $\mu_i > 0$ . Fazendo  $\theta_i = -\frac{1}{2\mu_i}$ , temos

$$f(y_i; \mu_i, \phi) = \exp \left[ \frac{y_i \theta_i + (-2\theta_i)^{1/2}}{1/\phi} - \frac{1}{2} \left( \log(2\pi y_i^3/\phi) + \frac{\phi}{y_i} \right) \right].$$

Portanto, essa distribuição pertence a família exponencial com parâmetro de escala, com

$$\blacksquare b(\theta_i) = -(-2\theta_i)^{1/2},$$

$$\blacksquare a(\phi) = \frac{1}{\phi}, \text{ e}$$

$$\blacksquare c(y_i, \phi) = -\frac{1}{2} \left( \log(2\pi y_i^3 / \phi) + \frac{\phi}{y_i} \right).$$

Então,

$$\mathbb{E}(Y_i) = b'(\theta_i) = \frac{1}{\sqrt{-2\theta_i}} = \sqrt{\mu_i}$$

e

$$\text{Var}(Y_i) = a(\phi)b''(\theta_i) = \frac{1}{\phi} \frac{1}{2\sqrt{2}(-\theta_i)^{3/2}} = \frac{\mu_i^{3/2}}{\phi},$$

com  $V(\mu_i) = \mu_i^{3/2}$ .

Principais distribuições pertencentes à família exponencial.

| Distribuição( $Y_i$ ) | $b(\theta_i)$              | $\theta_i$                    | $a(\phi)$        | $V(\mu_i)$         |
|-----------------------|----------------------------|-------------------------------|------------------|--------------------|
| Poisson               | $\exp(\theta_i)$           | $\log(\mu_i)$                 | 1                | $\mu_i$            |
| Binomial              | $\log(1 + \exp(\theta_i))$ | $\log(\frac{\mu_i}{1-\mu_i})$ | $\frac{1}{n_i}$  | $\mu_i(1 - \mu_i)$ |
| Normal                | $\frac{\theta_i^2}{2}$     | $\mu_i$                       | $\sigma^2$       | 1                  |
| Gama                  | $-\log(-\theta_i)$         | $-\frac{1}{\mu_i}$            | $\frac{1}{\phi}$ | $\mu_i^2$          |
| Normal Inversa        | $-\sqrt{-2\theta_i}$       | $-\frac{1}{2\mu_i^2}$         | $\frac{1}{\phi}$ | $\mu_i^{3/2}$      |



## Exercício

Seja  $Y_i$  uma variável aleatória com função de distribuição dada por

$$f(y_i; \lambda) = \frac{y_i}{\lambda^2} \exp \left[ -\frac{y_i^2}{2\lambda^2} \right] \mathcal{I}(y_i > 0).$$

- Mostre que  $Y_i$  pertence a família exponencial.
- Encontre  $\mathbb{E}(Y_i^2)$  e  $\text{Var}(Y_i^2)$ .

## Funções de ligação

# Função de ligação

A *função de ligação* de um MLG conecta a componente aleatória e o preditor linear.

Sejam  $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$  covariáveis (constantes conhecidas). Um MLG formula que um preditor linear  $\eta_i = \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij}$  está relacionado com  $\mu_i$  por  $\eta_i = g(\mu_i)$ , para uma função de ligação  $g(\cdot)$ . Ou equivalentemente, a função resposta  $g^{-1}$  mapeia os valores do preditor linear para a média.

A função de ligação  $g$  que transforma a média  $\mu_i$  para o parâmetro natural  $\theta_i$  na expressão da família exponencial com parâmetro de escala é chamada de ligação canônica. Para isso, a relação direta

$$\theta_i = \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij}$$

igual a o parâmetro natural ao preditor linear.

# Exemplo Poisson

Seja  $Y_i$  uma variável aleatória com distribuição Poisson ( $Y \sim P(\mu_i)$ ), então

$$f(y_i; \mu) = \exp \left[ y_i \theta_i - \underbrace{\exp \theta_i}_{b(\theta_i)} - \underbrace{\log(y_i!)}_{c(y_i, \phi)} \right],$$

onde

- $b(\theta_i) = \exp(\theta_i)$ ,
- $a(\phi) = 1$ , e
- $c(y_i, \phi) = -\log(y_i!)$ .

Temos que,

$$\mu_i = b'(\theta_i) = \exp(\theta_i) \quad \Rightarrow \quad \theta_i = \underbrace{\log(\mu_i)}_{\text{função de ligação canônica}}$$

As ligações canônicas mais comuns são:

Distribuição:

- Poisson
- Binomial
- Normal
- Gama
- Normal Inversa

Ligação:

$$\eta_i = \log(\mu_i)$$

$$\eta_i = \log\left(\frac{\mu_i}{1-\mu_i}\right) \text{ (logito)}$$

$$\eta_i = \mu_i$$

$$\eta_i = \mu_i^{-1}$$

$$\eta_i = \mu_i^{-2}$$

Uma das vantagens de usarmos ligações canônicas é que as mesmas garantem a concavidade de  $\ell$  e conseqüentemente muitos resultados assintóticos são obtidos mais facilmente. Por exemplo, a concavidade de  $\ell$  garante a unicidade da estimativa de máxima verossimilhança de  $\theta_i$ , quando essa existe.

# Ligação probito

Seja  $\mu_i$  a proporção de sucessos de uma distribuição binomial. A ligação probito é definida por

$$\Phi^{-1}(\mu_i) = \eta_i,$$

em que  $\Phi(\cdot)$  é a função de distribuição acumulada da normal padrão.

De modo equivalente,  $\mu_i = \Phi(\eta_i)$ .

## Ligação complemento log-log

A distribuição do valor extremo (logaritmo da exponencial) tem função densidade dada por

$$f(y_i) = \exp [y_i - \exp(y_i)] ,$$

em que  $-\infty < y_i < \infty$ . Logo, a função de distribuição acumulada fica dada por

$$F(y_i) = 1 - \exp [- \exp(y_i)] .$$

Assim, o modelo binomial com ligação complemento log-log é definido tal que

$$\mu_i = 1 - \exp [- \exp(\eta_i)] ,$$

ou equivalentemente,

Sabemos que,

$$\text{logito}(\mu_i) = \log \left( \frac{\mu_i}{1 - \mu_i} \right).$$

Além disso, note que

$$\text{logito}(\mu_i) = -\text{logito}(1 - \mu_i)$$

Prova:



Sabemos que,

$$\text{logito}(\mu_i) = \log \left( \frac{\mu_i}{1 - \mu_i} \right).$$

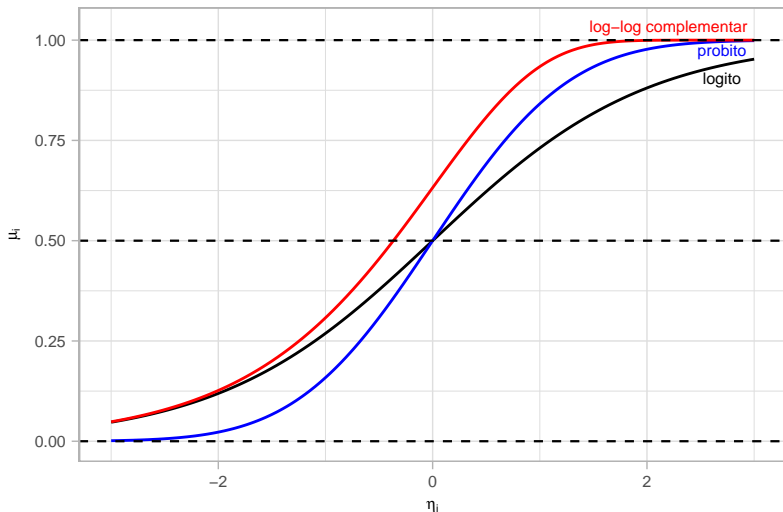
Além disso, note que

$$\text{logito}(\mu_i) = -\text{logito}(1 - \mu_i)$$

Prova:

$$\text{logito}(\mu_i) = \log \left( \frac{\mu_i}{1 - \mu_i} \right) = -\log \left( \frac{1 - \mu_i}{\mu_i} \right) = -\text{logito}(1 - \mu_i)$$

### Funções de ligação para médias no intervalo (0,1)



Essas funções de ligações (probit e logito) são simétricas em torno de zero. As funções probit e logito não são apropriadas para dados que não tem simetria.

# Ligação de Box-Cox

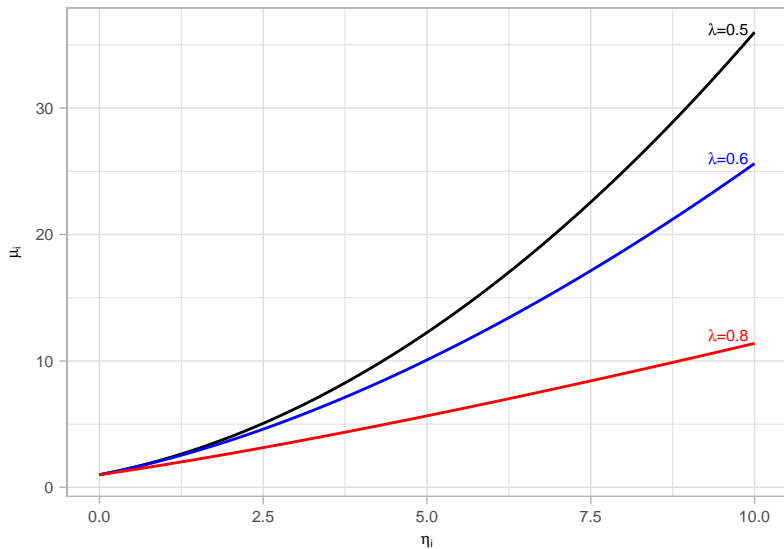
Uma classe importante de ligações, pelo menos para observações positivas, é a classe de ligações de Box-Cox definida por

$$\eta_i = \frac{(\mu_i^\lambda - 1)}{\lambda},$$

para  $\lambda \neq 0$  e  $\eta_i = \log(\mu_i)$  para  $\lambda \rightarrow 0$ .

A ideia agora é aplicarmos a transformação de Box-Cox, vista anteriormente, na média da variável resposta ao invés de transformarmos a própria variável resposta.

Comportamento de  $\mu_i$  para alguns valores de  $\lambda$  e para  $\eta_i$  variando no intervalo  $(0, 10)$ .



- [Notas](#) de aula do Prof. Gilberto de Paula.
- Agresti, A. (2015). *Foundations of Linear and Generalized Linear Models*. Wiley series in probability and statistics.