ME951 - Estatística e Probabilidade I

Parte 14

Notas de aula de ME414 produzidas pelos professores **Samara Kiihl**, **Tatiana Benaglia** e **Benilton Carvalho** modificadas e alteradas pela Profa. **Larissa Avila Matos**

Fundamentos de Inferência

Introdução

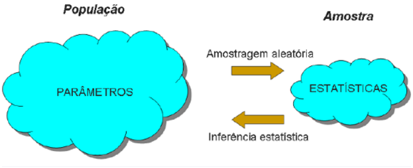
Um dos principais objetivos da Estatística é tirar conclusões a partir dos dados.

Dados em geral consistem de uma amostra de elementos de uma população de interesse.

O objetivo é usar a amostra e tirar conclusões sobre a população.

Quão confiável será utilizar a informação obtida apenas de uma amostra para concluir algo sobre a população?

Inferência Estatística

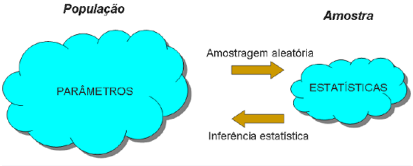


Variável Aleatória: Característica numérica do resultado de um experimento.

População: todos os elementos ou resultados de um problema que está sendo estudado.

Amostra: qualquer subconjunto da população que contém os elementos que podem ser observados e é onde as quantidades de interesse podem ser medidas.

Inferência Estatística



Parâmetros: Característica numérica (desconhecida) da distribuição dos elementos da população.

Estimador/Estatística: Função da amostra, construída com a finalidade de representar, ou estimar um parâmetro de interesse na população.

Estimativa: Valor numérico que um estimador assume para uma dada amostra.

Estatística

Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra, $T = f(X_1, ..., X_n)$ é uma estatística.

- $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$: a média amostral é uma estatística.
- $X_{(1)} = min\{X_1, ..., X_n\}$.
- $X_{(n)} = max\{X_1, ..., X_n\}$.
- $X_{(i)}$ é o i-ésimo valor da amostra ordenada.

Note que uma estatística é uma função que em uma determinada amostra assume um valor específico (estimativa).

Estatística

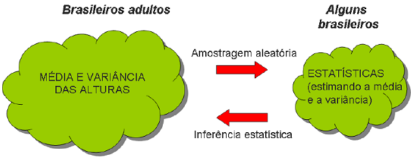
Para que serve uma estatística? Para "estimar" os valores de uma distribuição, ou características de uma população.

- **População:**
  - média_P.
  - variância_P.
- **Amostra:**
  - $\text{média}_A = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$ "estima" a média_P.
  - $\text{variância}_A = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \text{média}_A)^2}{n}$ "estima" a variância_P

Exemplo

Temos interesse em conhecer a média e variância das alturas dos brasileiros adultos. Sabemos que a distribuição das alturas pode ser representada por um modelo normal.

- Solução 1: Medir a altura de todos os brasileiros adultos.
- Solução 2: Selecionar de forma aleatória algumas pessoas (amostra), analisá-las e inferir propriedades para toda a população.



Exemplo

Seja θ a proporção de alunos na Unicamp que concorda com a presença da PM no campus.

Inviável perguntar para todos os estudantes: coleta-se uma amostra.

Planejamento amostral: obter uma amostra aleatória simples de tamanho $n = 100$ alunos, sem reposição.

Cada X_i, $i = 1, ..., 100$, vai assumir o valor 1 se o aluno i concorda com presença da PM, e 0 se não.

Estatística: $T = \frac{X_1 + ... + X_{100}}{100}$.

Uma vez que a coleta foi implementada, T assume um valor, por exemplo, 0.63, que será usado para estimar θ, ou seja, $\hat{\theta} = 0.63$.

Parâmetro

Cada quantidade de interesse (como θ no exemplo anterior) é chamada de parâmetro da população.

Para apresentar uma estimativa de um parâmetro ($\hat{\theta}$), devemos escolher uma estatística (T).

Note que da maneira que o plano amostral foi executado (amostra aleatória simples), a estatística T é uma variável aleatória, visto que cada vez que executarmos o plano amostral poderemos obter resultados diversos.

Portanto, a estatística T possui uma distribuição de probabilidade, chamada de **distribuição amostral** de T.

Distribuição Amostral

Exemplo

Imagine um fenômeno de interesse que possa ser representado por uma v.a. X que assume os valores 1 ou 2 com igual probabilidade.

$$\begin{aligned}\mu = E(X) &= 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= Var(X) = E[(X-\mu)^2] \\ &= (1-1.5)^2 \times P(X=1) + (2-1.5)^2 \times P(X=2) \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Exemplo

Imagine que uma população de interesse tenha distribuição como a de X definida anteriormente.

Imagine também que, embora saibamos que os valores possíveis sejam 1 e 2, não tenhamos conhecimento sobre suas respectivas probabilidades.

Isto é, se temos N elementos nessa população, podemos pensar que a característica de interesse de cada elemento i segue uma v.a. X_i em que $P(X_i = 1) = P(X_i = 2) = 1/2$, mas nós não sabemos disso.

Imagine que o interesse seja μ.

Exemplo

Vamos coletar uma amostra aleatória simples com reposição (AAS_c) de tamanho $n = 2$ e calcular a média amostral.

Usaremos esta média amostral para estimar μ.

Quão útil é esta estimativa que se baseia em apenas 2 elementos da população?

Quão precisa?

Exemplo

Imagine que o aluno A coleta uma AAS_c com $n = 2$ a partir da população, obtém os dados e calcula $\bar{x}$.

O aluno B coleta uma AAS_c com $n = 2$ a partir da população, obtém os dados e calcula $\bar{x}$.

As duas médias amostrais serão necessariamente iguais?

A média amostral é uma v.a. e, portanto, tem uma distribuição de probabilidade.

Exemplo

Todas as combinações possíveis de valores para o primeiro e para o segundo elemento amostrados segundo o plano AAS_c com $n = 2$ são:

Possibilidades	$(X_1 = 1, X_2 = 1)$	$(X_1 = 1, X_2 = 2)$
$\bar{x}$	1	1.5
$P(X_1 = i, X_2 = j)$	0.25	0.25

Possibilidades	$(X_1 = 2, X_2 = 1)$	$(X_1 = 2, X_2 = 2)$
$\bar{x}$	1.5	2
$P(X_1 = i, X_2 = j)$	0.25	0.25

$$E(\bar{X}) = 1 \times \frac{1}{4} + 1.5 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} Var(\bar{X}) &= E\left[(\bar{X} - E(\bar{X}))^2\right] \\ &= (1 - 1.5)^2 \times \frac{1}{4} + (1.5 - 1.5)^2 \frac{1}{2} + (2 - 1.5)^2 \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Repare que:

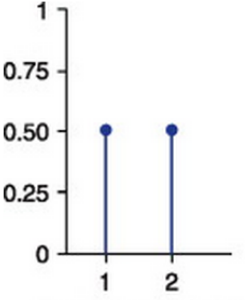
$$E(\bar{X}) = \mu = E(X)$$

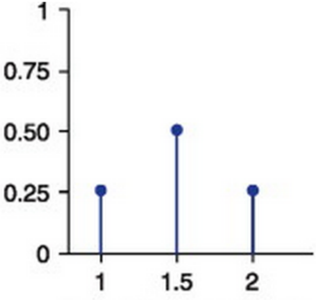
e

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{Var(X)}{n}.$$

Exemplo

Distribuição de probabilidade de X (esquerda) e de $\bar{X}$ (direita):





Distribuição Amostral

Resultado:

Seja X uma v.a. com média μ e variância σ^2.

Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória simples de X.

$\bar{X}_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$.

$E\left(\bar{X}_n\right) = \mu$.

$Var\left(\bar{X}_n\right) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Ou seja, embora μ seja desconhecido, sabemos que o valor esperado da média amostral é μ. Além disso, conforme o tamanho amostral aumenta, a imprecisão da média amostral para estimar μ fica cada vez menor, pois $Var(\bar{X}) = \sigma^2/n$.

Exemplo

Exemplo: X_1, X_2, X_3 ensaios de Bernoulli(p) independentes.

$\mu = E\left(X_i\right) = 0.3 \quad \Rightarrow \quad E\left(\bar{X}_3\right) = 0.3.$

$\sigma^2 = Var\left(X_i\right) = p(1-p) = 0.3(0.7) = 0.21 \quad \Rightarrow \quad Var\left(\bar{X}_3\right) = \frac{0.21}{3} = 0.07$

Teorema do Limite Central

Teorema do Limite Central

Usando o resultado enunciado anteriormente, temos a esperança e a variância da média amostral $\bar{X}$: $E(\bar{X}) = \mu$ e $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

No entanto, para conhecermos a distribuição de probabilidade de $\bar{X}$, como foi feito no exemplo anterior, é preciso conhecer todos os valores possíveis de X e suas respectivas probabilidades.

Mas, se conhecermos tudo isso, não precisamos fazer amostragem nem inferência: saberemos tudo o que desejarmos daquela população!

O exemplo anterior foi um caso hipotético apenas para demonstrar como a média amostral $\bar{X}$ se comporta quando realizamos a amostragem.

Na prática, não teremos informações suficientes para de fato descrevermos a distribuição exata de $\bar{X}$.

Teorema Central do Limite (TLC)

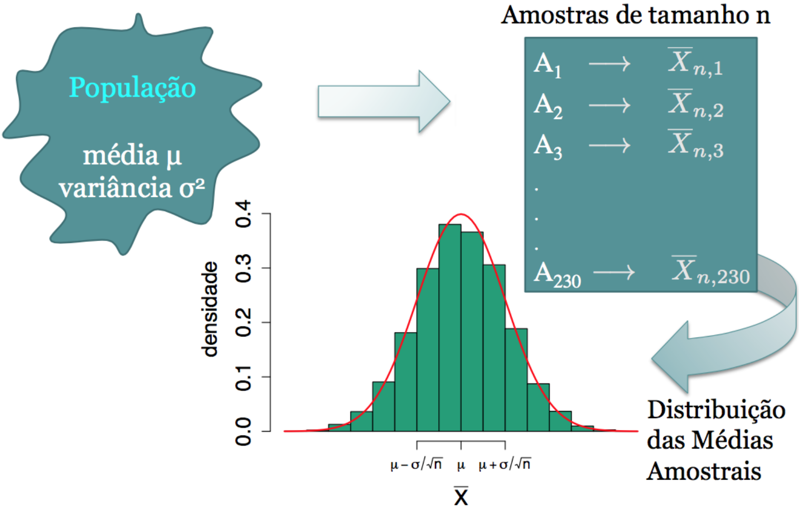
Resultado

Para uma amostra aleatória simples $X_1, ..., X_n$ coletada de uma população com média μ e variância σ^2, a distribuição amostral de $\bar{X}_n$ aproxima-se de uma **distribuição Normal** de média μ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$, quando n for suficientemente grande.

Definimos também:

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Teorema do Limite Central



Exemplo

Seja $X_1, ..., X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n tal que $X \sim Exp(2)$:

$$f_{X_i}(x) = 2e^{-2x}, \qquad \text{para } x \geq 0$$

Então $E\left(X_i\right) = \frac{1}{2}$ e $Var\left(X_i\right) = \frac{1}{4}$.

Suponha que X_i modela o tempo de vida de um transistor em horas. Os tempos de vida de 100 transistores são coletados. Desejamos estudar a variável aleatória $\bar{X}_{100}$ (média amostral de uma amostra de tamanho 100). Sabemos:

$$E\left(\bar{X}_{100}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad Var\left(\bar{X}_{100}\right) = \frac{1/4}{100} = \frac{1}{400}.$$

Pelo TLC, temos que: $\bar{X}_n \sim N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{400}\right)$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
F_{\bar{X}_{100}}(x) = P\left(\bar{X}_{100} \leq x\right) &= P\left(\frac{\bar{X}_{100} - (1/2)}{(1/2)/\sqrt{100}} \leq \frac{x - (1/2)}{(1/2)/\sqrt{100}}\right) \\
&= P\left(Z \leq 10(2x - 1)\right)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
P\left(\bar{X}_{100} \geq x\right) &= 1 - P\left(\bar{X}_{100} < x\right) \\
&= 1 - P\left(\frac{\bar{X}_{100} - (1/2)}{(1/2)/\sqrt{100}} \leq \frac{x - (1/2)}{(1/2)/\sqrt{100}}\right) \\
&= 1 - P\left(Z \leq 10(2x - 1)\right)
\end{aligned}
$$

Exemplo

X = resultado obtido no lançamento de um dado honesto.

x	1	2	3	4	5	6
$p(x) = P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E(X) = \frac{1}{6} \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3.5$

$Var(X) = \frac{1}{6}[(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) - \frac{1}{6} \times (21)^2] = \frac{35}{2} = 17.5$

X_i: resultado do i-ésimo lançamento de um dado honesto.

X_i tem distribuição uniforme discreta $\forall i$.

$\mu = E(X_i) = 3.5 \qquad \text{e} \qquad \sigma^2 = Var(X_i) = 17.5, \ \forall i.$

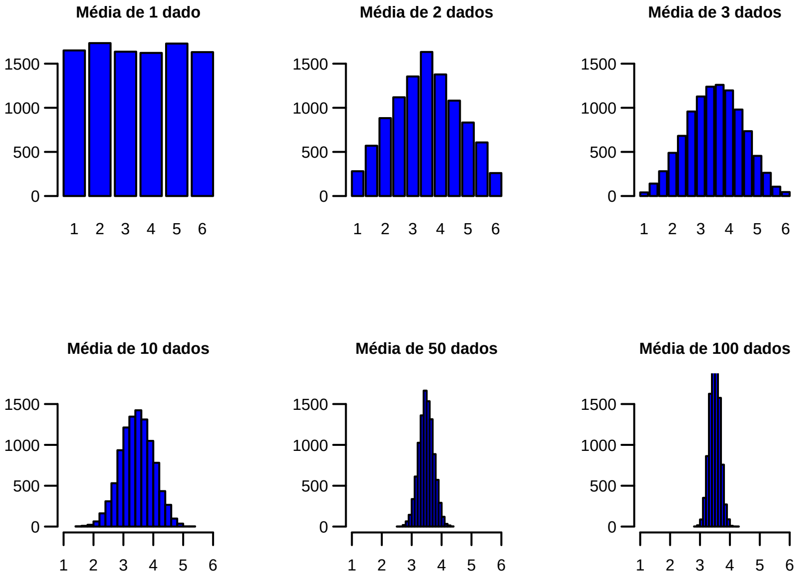
Exemplo

Se temos uma amostra aleatória simples de tamanho n:
$X_1, X_2, \ldots, X_n$, pelo TLC sabemos que a distribuição amostral de $\bar{X}_n$ é aproximadamente Normal$\left(3.5, \frac{17.5}{n}\right)$.

O primeiro histograma a seguir mostra o resultado de 10000 repetições do seguinte experimento: observar o resultado do lançamento de 1 dado. Repare que é muito próximo de uma distribuição uniforme discreta (chance 1/6 para cada resultado).

O segundo histograma mostra o resultado de 10000 repetições do seguinte experimento: observar a média do lançamento de 2 dados (equivalente a observar a média de 2 lançamentos de um dado).

Exemplo



Média de 1 dado
Média de 2 dados
Média de 3 dados
Média de 10 dados
Média de 50 dados
Média de 100 dados
0
500
1000
1500
1
2
3
4
5
6

Exemplo

O último histograma mostra o resultado de 10000 repetições do seguinte experimento: observar a média do lançamento de 100 dados (equivalente a observar a média de 100 lançamentos de um dado).

Repare que conforme o número de dados (tamanho amostral) aumenta, a distribuição da média amostral se aproxima da distribuição normal com média 3.5 e variância cada vez menor (17.5/n).

Teorema do Limite Central (TLC)

Você pode verificar o comportamento de $\bar{X}$ para vários tipos de distribuição de X:

https://nishantsbi.shinyapps.io/CLT_Shiny

https://gallery.shinyapps.io/CLT_mean/

Aproximação da Distribuição Binomial pela Normal

Aproximação da Binomial pela Normal

Consideremos uma população em que a proporção de indivíduos portadores de uma certa característica seja p.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o indivíduo i possui a característica} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$\Rightarrow X_i \sim Bernoulli(p);\ i = 1, 2, ..., n.$

Se as observações são independentes:

$$S_n = X_1 + ... + X_n \sim Bin(n, p).$$

Após a coleta de uma amostra aleatória simples de n indivíduos, podemos considerar:

$\hat{p} = \frac{S_n}{n}$ (média amostral como estimador da média populacional).

Aproximação da Binomial pela Normal

Utilizando a distribuição exata (n pequeno):

$$P\left(\hat{p} = \frac{k}{n}\right) = P\left(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}\right) = P\left(S_n = k\right) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) p^k \left(1-p\right)^{n-k},$$

para $k = 0, 1, ..., n$.

Utilizando a aproximação para a Normal (n grande):

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

Exemplo

Se p for a proporção de fumantes no estado de SP, $p = 0.2$ e tivermos coletado uma amostra aleatória simples de 500 indivíduos:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o indivíduo i é fumante} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{500} X_i}{500}$.

$\hat{p} \sim N\left(0.2, \frac{0.2 \times 0.8}{500}\right) = N\left(0.2, 0.00032\right)$

$P\left(\hat{p} \leq 0.25\right) = P\left(Z \leq 2.795\right) = \Phi\left(2.795\right) = 0.9974$

Aproximação da Binomial pela Normal

$\hat{p} = \frac{S_n}{n} \Rightarrow S_n = n\hat{p}$.

Quando n é grande o suficiente $\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$.

Qual a distribuição de S_n quando n é grande o suficiente?

$S_n = X_1 + ... + X_n$

$\hat{p} = \frac{S_n}{n} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

$S_n = n\hat{p} \sim N\left(np, np(1-p)\right)$

Portanto: $Bin(n, p) \approx N\left(np, np(1-p)\right)$ quando n é grande.

Exemplo

$X \sim Bin(100, 0.4)$

$E(X) = 100 \times 0.4 = 40$

$Var(X) = 100 \times 0.4 \times 0.6 = 24$

$X \approx N(40, 24)$

$P\left(X \leq 50\right) = P\left(Z \leq \frac{50-40}{\sqrt{24}}\right) \approx \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{24}}\right) = \Phi\left(2.04\right) \approx 0.9793$

Leituras

- Ross: capítulo 7.
- OpenIntro: seção 4.1
- Magalhães: capítulo 7.