ME414 - Estatística para Experimentalistas

Gabarito LISTA 6

Questão 1.

A organização não revelou o grau de confiança $(1-\alpha)$ e o tamanho amostral.

Questão 2.

Uma estimativa pontual fornece apenas um único valor plausível para o parâmetro e o valor de $\hat{p}$ pode ser diferente para cada amostra obtida. Enquanto que, o intervalo de confiança fornece um intervalo de valores plausíveis para o parâmetro de interesse.

Questão 3.

$IC(p, 1-\alpha) : \hat{p} \pm$ margem de erro $= 0,222 \pm 0,044$.

$IC(p, 1-\alpha) = [0,178; 0,266]$

Questão 4.

Seja $p = 0,30$: proporção de mulheres de uma escola; $n = 10$: tamanho da amostra e $\hat{p}$: proporção de mulheres na amostra.

Seja X_i a variável aleatória que indica se a i-ésima pessoa é mulher. Temos que, $X_i \sim Bernoulli(p)$, com $p = 0,30$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Portanto, $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Binomial(n, p)$. Lembre que, $\hat{p} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$.

Então,

$$\begin{aligned} P(|\hat{p}-p| < 0,01) &= P(-0,01 < \hat{p}-p < 0,01) = P(p-0,01 < \hat{p} < p+0,01) \\ &= P\left(p-0,01 < \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} < p+0,01\right) = P\left(n(p-0,01) < \sum_{i=1}^{n} X_i < n(p+0,01)\right) \end{aligned}$$

$*$ Para $n = 10, p = 0,30$, temos $n(p-0,01) = 2,90$ e $n(p+0,01) = 3,10$. Logo,

$$P(|\hat{p}-p| < 0,01) = P\left(2,90 < \sum_{i=1}^{10} X_i < 3,10\right) = P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i = 3\right) = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} (0,30)^3 (0,70)^7 = 0,267.$$

$*$ Para $n = 50, p = 0,30$, temos $n(p-0,01) = 14,50$ e $n(p+0,01) = 15,50$. Logo,

$$P(|\hat{p}-p| < 0,01) = P\left(14,50 < \sum_{i=1}^{50} X_i < 15,50\right) = P\left(\sum_{i=1}^{50} X_i = 15\right) = \begin{pmatrix} 50 \\ 15 \end{pmatrix} (0,30)^{15} (0,70)^{35} = 0,122.$$

Questão 5.

Seja $n = 50$, $\bar{x} = 20,5$ e $\sigma = 2$.

a. $\alpha = 0,01 \Rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0,005} = 2,575$.

$$\begin{aligned}
IC(\mu, 1-\alpha) &= \left[\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \\
IC(\mu, 0,99) &= \left[20,5 - 2,575\frac{2}{\sqrt{50}}; 20,5 + 2,575\frac{2}{\sqrt{50}}\right] = [19,772; 21,228].
\end{aligned}$$

Com grau de confiança igual a 99%, estimamos que a média populacional do tempo gasto para montar o brinquedo está entre 19,772 e 21,228.

b. $\alpha = 0,01 \Rightarrow z_{0,005} = 2,575$ e $ME = \epsilon = 0,10$.

$$\epsilon = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad n = \sigma^2\left(\frac{z_{\alpha/2}}{\epsilon}\right)^2 = 4\left(\frac{2,575}{0,10}\right)^2 = 2652,25.$$

Portanto, o tamanho amostral deverá ser $n = 2653$.

Questão 6.

Sejam $n = 25$, $\alpha = 0,05 \Rightarrow t_{24;0,025} = 2,064$, $\bar{x} = 97,64$ e $s = 17,821$.

$$\begin{aligned}
IC(\mu, 1-\alpha) &= \left[\bar{x} - t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right] \\
IC(\mu, 0,95) &= \left[97,64 - 2,064\frac{17,821}{\sqrt{25}}; 97,64 + 2,064\frac{17,821}{\sqrt{25}}\right] = [90,283; 104,997].
\end{aligned}$$

Com grau de confiança igual a 95%, estimamos que a média populacional do nível glicêmico está entre 90,283 e 104,997 mg/dL.

Questão 7.

Sejam $n = 100$, $\bar{x} = 500$, $\sigma = 5$ e $\alpha = 0,05 \Rightarrow z_{0,025} = 1,96$.

$$\begin{aligned}
IC(\mu, 1-\alpha) &= \left[\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \\
IC(\mu, 0,95) &= \left[500 - 1,96\frac{5}{\sqrt{100}}; 500 + 1,96\frac{5}{\sqrt{100}}\right] = [499,02; 500,98].
\end{aligned}$$

Com grau de confiança igual a 95%, estimamos que a média populacional do tempo de vida de uma peça de equipamento está entre 499,02 e 500,98 horas.

Questão 8.

Seja $\alpha = 0,10 \Rightarrow z_{0,05} = 1,645$. Seja C: o comprimento do intervalo de confiança.

$$IC(\mu, 1-\alpha) = \left[\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \quad \Rightarrow \quad C = 2z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0,20\sigma \quad \Rightarrow \quad n > \left(\frac{2z_{\alpha/2}\sigma}{0,20\sigma}\right)^2$$

Portanto, $n > \left(\dfrac{2 \cdot 1,645}{0,20}\right)^2 = (16,45)^2 = 270,60 \quad \Rightarrow \quad n \geq 271.$

Questão 9.

Sejam $n = 10$, $\alpha = 0,10 \Rightarrow t_{9;0,05} = 1,833$, $\bar{x} = 8,70$ e $s = 2,003$.

$$\begin{aligned} IC(\mu, 1-\alpha) &= \left[\bar{x} - t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right] \\ IC(\mu, 0,90) &= \left[8,70 - 1,833\frac{2,003}{\sqrt{10}}; 8,70 + 1,833\frac{2,003}{\sqrt{10}}\right] = [7,539; 9,861]. \end{aligned}$$

Questão 10.

Sejam $n = 15$, $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15} = 0,58$, $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{15} x_i^2 - 15\bar{x}^2}{14} = \dfrac{27,30 - 15(0,58)^2}{14} = 1,59$
$\Rightarrow s = 1,261$ e $\alpha = 0,05 \Rightarrow t_{14,0,025} = 2,145$.

$$\begin{aligned} IC(\mu, 1-\alpha) &= \left[\bar{x} - t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right] \\ IC(\mu, 0,95) &= \left[0,58 - 2,145\frac{1,261}{\sqrt{15}}; 0,58 + 2,145\frac{1,261}{\sqrt{15}}\right] = [-0,118; 1,278]. \end{aligned}$$

Questão 11.

Os dois grupos são amostras aleatórias de duas populações independentes e normalmente distribuídas. Os tamanhos amostrais são $n_1 = n_2 = 18$, as médias amostrais $\bar{x}_1 = 6,622$ e $\bar{x}_2 = 5,750$ e variâncias amostrais $s_1^2 = 1,325$ e $s_2^2 = 0,739$. Vamos supor que as variâncias populacionais são iguais e desconhecidas. Portanto, o estimador da variância populacional é:
$s_p^2 = \dfrac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \dfrac{17(1,325) + 17(0,739)}{34} = 1,032.$
Então, um intervalo de confiança de 95% para a diferença das médias populacionais é dado por:

$$IC(\mu_1 - \mu_2, 1-\alpha) = \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{n_1+n_2-2,\alpha/2}\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}; (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{n_1+n_2-2,\alpha/2}\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}\right]$$

Em que $\alpha = 0,05 \Rightarrow t_{34,0,025} = 2,032$.

$$\begin{aligned} IC(\mu_1 - \mu_2; 0,95) &= \left[(6,622 - 5,750) - 2,032\sqrt{1,032\left(\frac{2}{18}\right)}; (6,622 - 5,750) + 2,032\sqrt{1,032\left(\frac{2}{18}\right)}\right] \\ &= [0,184; 1,560]. \end{aligned}$$

Com um grau de confiança de 95%, estimamos que a diferença entre os resultados médios obtidos entre o grupo 1 e o grupo 2 está entre 0,184 e 1,560.

Data de atualização: 10 de Novembro de 2019.