ME951 - Estatística e Probabilidade I

Parte 15

1S2024

Intervalo de Confiança

Eleições

Vídeo: Pesquisa Eleitoral - JN - 20/08/2018

Introdução

- Vimos que podemos utilizar uma estatística, como $\bar{X}$ ($\hat{p}$), para estimar um parâmetro populacional, como a média populacional μ (proporção populacional p).
- Após coletarmos uma amostra aleatória calculamos $\bar{x}$, que é a nossa estimativa para μ. Chamamos esta estimativa de **estimativa pontual**.
- Uma estimativa pontual fornece apenas um único valor plausível para o parâmetro. E sabemos que ela pode ser diferente para cada amostra obtida: distribuição amostral.
- O ideal é que se reporte não só a estimativa, mas também a sua imprecisão.
- Duas maneiras: fornecer a estimativa juntamente com o seu **erro padrão** ou fornecer um intervalo de valores plausíveis para o parâmetro de interesse (**intervalo de confiança**).

Introdução

Suponha que queremos estimar o parâmetro populacional θ através de um intervalo.

Um intervalo de confiança (IC) para θ é sempre da forma:

$$\text{estimativa} \pm \text{margem de erro}$$

$$\widehat{\theta} \pm \text{margem de erro}$$

Sendo:

- $\widehat{\theta}$ uma estimativa pontual de θ
- **margem de erro:** quantidade que depende da distribuição amostral do estimador pontual de θ, do grau de confiança pré-estabelecido e do erro padrão da estimativa

Intervalo de Confiança como Estimativa de p

Distribuição Amostral de $\hat{p}$

Temos uma população com proporção p e variância $p(1-p)$ desconhecidos.

Retira-se uma amostra aleatória de tamanho n e calcula-se a proporção amostral $\hat{p}$ para estimar o parâmetro populacional desconhecido p.

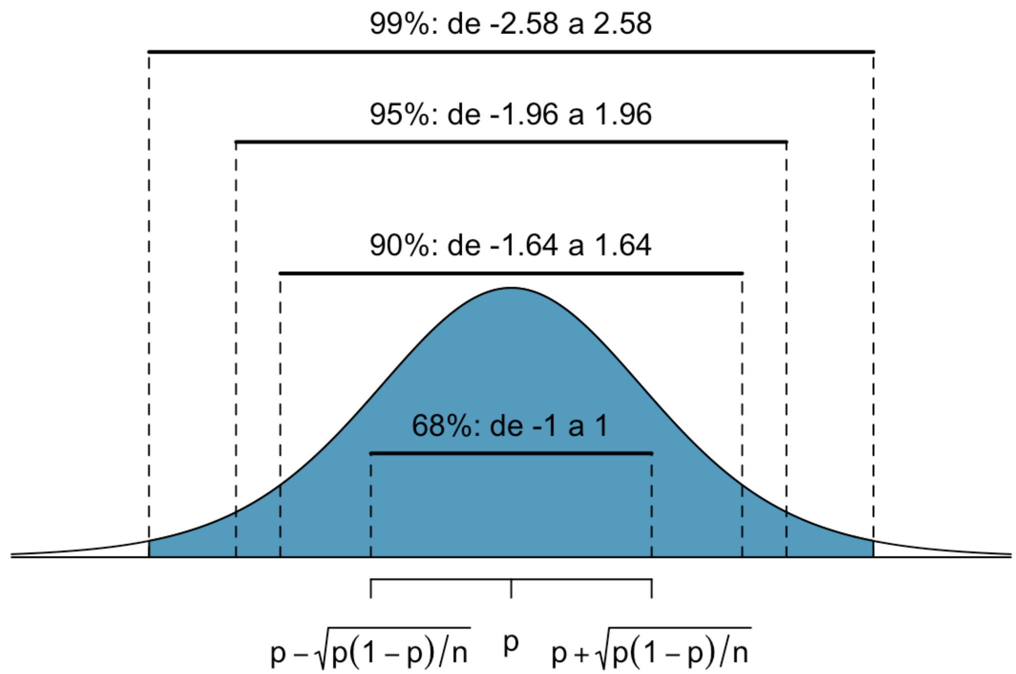
Temos as propriedades:

$$E(\hat{p}) = p \qquad Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n} \qquad EP(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

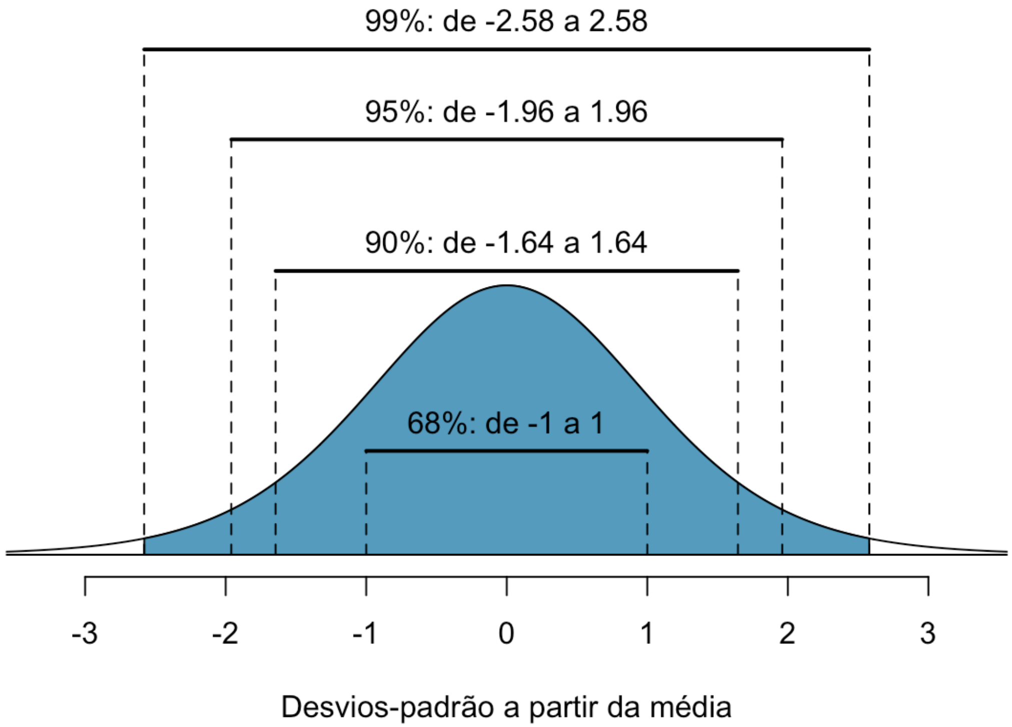
Pelo Teorema do Limite Central: a distribuição amostral de $\hat{p}$ aproxima-se da seguinte **distribuição Normal** quando n for suficientemente grande:

$$\hat{p} \sim \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

Distribuição Amostral de $\hat{p}$



$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$



Qual a probabilidade de que o estimador $\hat{p}$ esteja distante do valor verdadeiro, p, em no máximo 1 erro-padrão?

$$P\left(|\hat{p} - p| \leq \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

$$\begin{aligned}
P\left(|\hat{p} - p| \leq \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) &= P\left(-\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \hat{p} - p \leq \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \\
&= P\left(-1 \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq 1\right) \\
&= P(-1 \leq Z \leq 1) \\
&= 0.68
\end{aligned}$$

Qual a probabilidade de que o estimador $\hat{p}$ esteja distante do valor verdadeiro, p, em no máximo 1.96 erro-padrão?

$$P\left(|\hat{p} - p| \leq 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

$$\begin{aligned}
P\left(|\hat{p} - p| \leq 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) &= P\left(-1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \hat{p} - p \leq 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \\
&= P\left(-1.96 \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq 1.96\right) \\
&= P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) \\
&= 0.95
\end{aligned}$$

Intervalo de confiança de 95%

$$IC(p, 95\%) = \left[\hat{p} - 1.96\sqrt{\tfrac{p(1-p)}{n}}; \hat{p} + 1.96\sqrt{\tfrac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Intervalo de confiança de 90%

$$IC(p, 90\%) = \left[\hat{p} - 1.64\sqrt{\tfrac{p(1-p)}{n}}; \hat{p} + 1.64\sqrt{\tfrac{p(1-p)}{n}}\right]$$

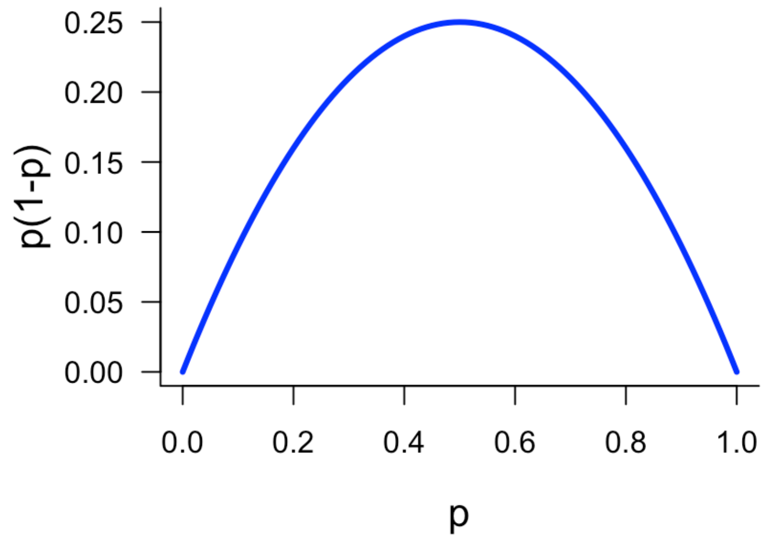
Intervalo de confiança de 99%

$$IC(p, 99\%) = \left[\hat{p} - 2.58\sqrt{\tfrac{p(1-p)}{n}}; \hat{p} + 2.58\sqrt{\tfrac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Qual o problema?

Sabemos $p(1-p)$?

Não sabemos $p(1-p)$, porém:



A função $p(1-p)$ atinge o valor máximo quando $p = 1/2$, ou seja, $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.

Intervalo de confiança para p

Vimos que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$, então erro padrão é maximizado por:

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \sqrt{\frac{1}{4n}} \quad \Longleftrightarrow \quad -\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \geq -\sqrt{\frac{1}{4n}}$$

Portanto, $IC(p, 95\%) = \left[\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{1}{4n}}; \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{1}{4n}}\right]$.

Caso geral (conservador): Um IC de $100(1-\alpha)\%$ para p é dado por

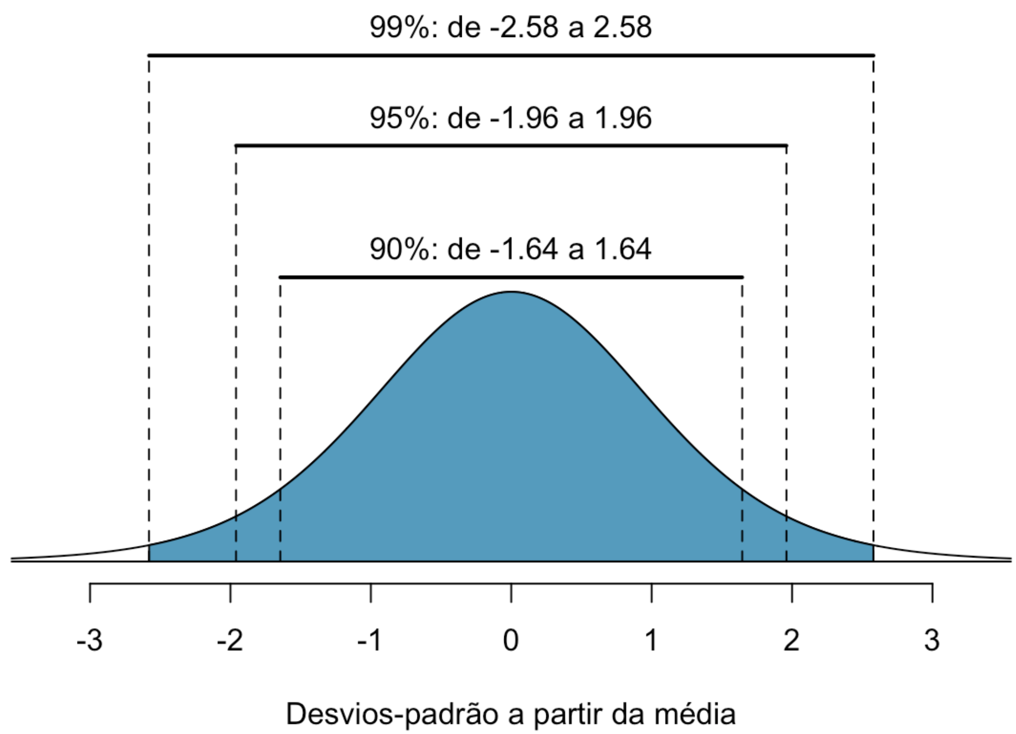
$$IC(p, 1-\alpha) = \left[\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{4n}}; \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{4n}}\right]$$

em que $z_{\alpha/2}$ é tal que:

$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

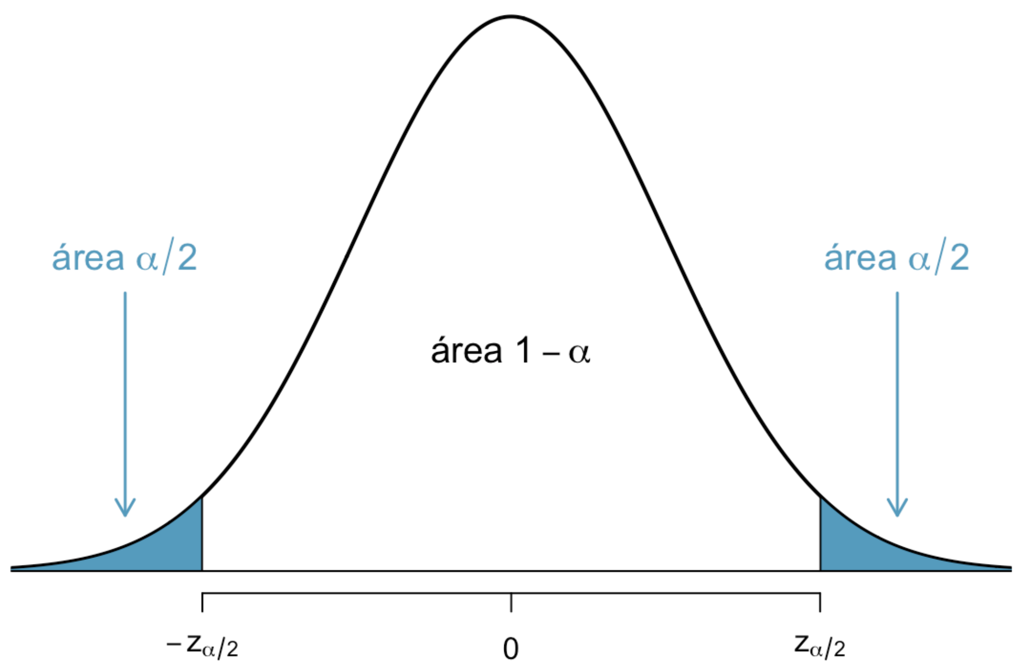
Como encontrar $z_{\alpha/2}$

$$P(|Z| \leq z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$



Como encontrar $z_{\alpha/2}$

$$P(|Z| \leq z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$



Como encontrar $z_{\alpha/2}$

Seja $Z \sim N(0,1)$. O percentil $z_{\alpha/2}$ é tal que $1-\alpha = P\left(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}\right)$

Como determinar $z_{\alpha/2}$?

$$\begin{aligned}
1-\alpha = P\left(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}\right) &= P(Z \leq z_{\alpha/2}) - P(Z \leq -z_{\alpha/2}) \\
&= P(Z \leq z_{\alpha/2}) - P(Z \geq z_{\alpha/2}) \\
&= P(Z \leq z_{\alpha/2}) - [1 - P(Z \leq z_{\alpha/2})] \\
&= 2P(Z \leq z_{\alpha/2}) - 1 \\
&= 2\Phi(z_{\alpha/2}) - 1
\end{aligned}$$

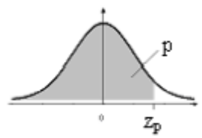
Portanto, $1-\frac{\alpha}{2} = \Phi(z_{\alpha/2}) \quad \Rightarrow \quad \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = z_{\alpha/2}$

Procure na tabela o valor de z tal que a probabilidade acumulada até o valor de z, isto é $P(Z \leq z) = \Phi(z)$, seja $1-\alpha/2$.

Exemplo

Encontrar $z_{0.05}$ tal que $0.90 = P\left(-z_{0.05} \leq Z \leq z_{0.05}\right)$.

Tabela I: Distribuição Normal Padrão Acumulada



Fornece $\Phi(z) = P(-\infty < Z \leq z)$, para todo z, de 0,01 em 0,01, desde z = 0,00 até z = 3,59
A distribuição de Z é Normal(0;1)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

Pela tabela, $z_{0.05} = 1.64$.

Exemplo

Numa pesquisa de mercado, $n = 400$ pessoas foram entrevistadas (usando amostra aleatória) sobre preferência do produto da marca A, e 60% destas pessoas preferiam a marca A.

Encontre um IC de 95% para a proporção de pessoas que preferem a marca A.

Pelo resultado da pesquisa, $\widehat{p} = 0.6$.

Logo, o IC com grau de confiança $1 - \alpha = 0.95$ é dado por:

$$
\begin{aligned}
IC(p, 0.95) &= \left[0.6 - 1.96\frac{1}{\sqrt{1600}}; 0.6 + 1.96\frac{1}{\sqrt{1600}}\right] \\
&= [0.6 - 0.049; 0.6 + 0.049] \\
&= [0.551; 0.649]
\end{aligned}
$$

Exemplo

Suponha que em $n = 400$ entrevistados, tivéssemos obtido $k = 80$ respostas de pessoas que preferem a marca A.

Vamos obter um intervalo de confiança para p, com grau de confiança de 90%:

- $\widehat{p} = \frac{80}{400} = 0.2$
- $1 - \alpha = 0.90$. Então $\alpha/2 = 0.05 \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.64$

$$
\begin{aligned}
IC_1(p, 0.90) &= \left[0.2 - 1.64\frac{1}{\sqrt{1600}}; 0.2 + 1.64\frac{1}{\sqrt{1600}}\right] \\
&= [0.2 - 0.041; 0.2 + 0.041] \\
&= [0.159; 0.241]
\end{aligned}
$$

Exemplo

E se usarmos a estimativa $\widehat{p}$ para também estimar o erro padrão $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$?

Podemos construir o seguinte IC de $100(1-\alpha)\%$

$$IC(p, 1-\alpha) = \left[\widehat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}; \widehat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right]$$

Para os dados do exemplo anterior,

$$\begin{aligned} IC_2(p, 0.90) &= \left[0.2 - 1.64\sqrt{\frac{(0.2)(0.8)}{400}}; 0.2 + 1.64\sqrt{\frac{(0.2)(0.8)}{400}}\right] \\ &= [0.2 - 0.033; 0.2 + 0.033] \\ &= [0.167; 0.233] \end{aligned}$$

Exemplo

O intervalo que utiliza $\widehat{p}$ também para estimar o erro padrão tem menor margem de erro e, portanto, menor amplitude do que o intervalo que utiliza o fato de $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$. Por isso esse último é chamado de **conservador**.

Veja as amplitudes dos IC's que encontramos no exemplo anterior:

- $IC_1(p, 0.90) = [0.159; 0.241] \quad \Rightarrow \quad A_1 = 0.241 - 0.159 = 0.082$
- $IC_2(p, 0.90) = [0.167; 0.233] \quad \Rightarrow \quad A_2 = 0.233 - 0.167 = 0.066$

A amplitude é o dobro da margem de erro.

Intervalo de Confiança para p

Em resumo, os intervalos de $100(1-\alpha)\%$ de confiança para p podem então ser de duas formas:

1. Método Conservador

$$IC_1(p, 1-\alpha) = \left[\widehat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{4n}}; \widehat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{4n}}\right]$$

2. Usando $\hat{p}$ para estimar o erro padrão

$$IC_2(p, 1-\alpha) = \left[\widehat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}; \widehat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right]$$

Veja que nos dois casos, os IC's são da forma $\widehat{p} \pm \text{margem de erro}$

Exemplo: Universitários Não Fumantes

De uma amostra aleatória de 100 alunos de uma universidade, 82 afirmaram ser não fumantes.

Construa um intervalo de confiança de 99% para a proporção de não fumantes entre todos os alunos da universidade.

$\widehat{p} = 0.82, n = 100, \alpha = 0.01,$ e $z_{0.005} = 2.58$

$$
\begin{aligned}
IC_1(p, 0.99) &= \left[\widehat{p} - z_{0.005}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}; \widehat{p} + z_{0.005}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right] \\
&= \left[0.82 - 2.58\sqrt{\frac{(0.82)(0.18)}{100}}; 0.82 + 2.58\sqrt{\frac{(0.82)(0.18)}{100}}\right] \\
&= [0.82 - 0.10; 0.82 + 0.10] \\
&= [0.72; 0.92]
\end{aligned}
$$

Exemplo: Universitários Não Fumantes

Podemos também calcular o IC de 99% pelo método conservador:

$$
\begin{aligned}
IC_2(p, 0.99) &= \left[\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{4n}}; \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{4n}}\right] \\
&= \left[0.82 - 2.58\sqrt{\frac{1}{400}}; 0.82 + 2.58\sqrt{\frac{1}{400}}\right] \\
&= [0.82 - 0.13; 0.82 + 0.13] \\
&= [0.69; 0.95]
\end{aligned}
$$

Interpretação: Com um grau de confiança de 99%, estimamos que a proporção de não fumantes entre os alunos está entre 72% e 92% (resultado do slide anterior).

E pelo método conservador, com um grau de confiança de 99%, estimamos que a proporção de não fumantes entre os alunos está entre 69% e 95%.

Exemplo: A esposa deve sacrificar a carreira?

Pesquisa do GSS. Você concorda ou não com a seguinte frase: "é mais importante para um esposa ajudar a carreira do marido do que ter uma carreira própria."

A última vez que esta pergunta foi incluída no GSS foi em 1998 onde 1823 pessoas responderam e 19% concordaram.

- Calcule e interprete o IC de 95% para a proporção na população que concorda com a frase.
- Encontre e interprete a margem de erro do IC de 95%.

Exemplo: A esposa deve sacrificar a carreira?

Calcule e interprete o IC de 95% para a proporção na população que concorda com a frase.

$\widehat{p} = 0.19, n = 1823, \alpha = 0.05,$ e $z_{0.025} = 1.96$

Então,

$$
\begin{aligned}
IC(p, 0.95) &= \left[\widehat{p} - 1.96\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}; \widehat{p} + 1.96\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right] \\
&= \left[0.19 - 1.96\sqrt{\frac{0.19(1-0.19)}{1823}}; 0.19 + 1.96\sqrt{\frac{0.19(1-0.19)}{1823}}\right] \\
&= [0.19 - 0.02; 0.19 + 0.02] \\
&= [0.17; 0.21]
\end{aligned}
$$

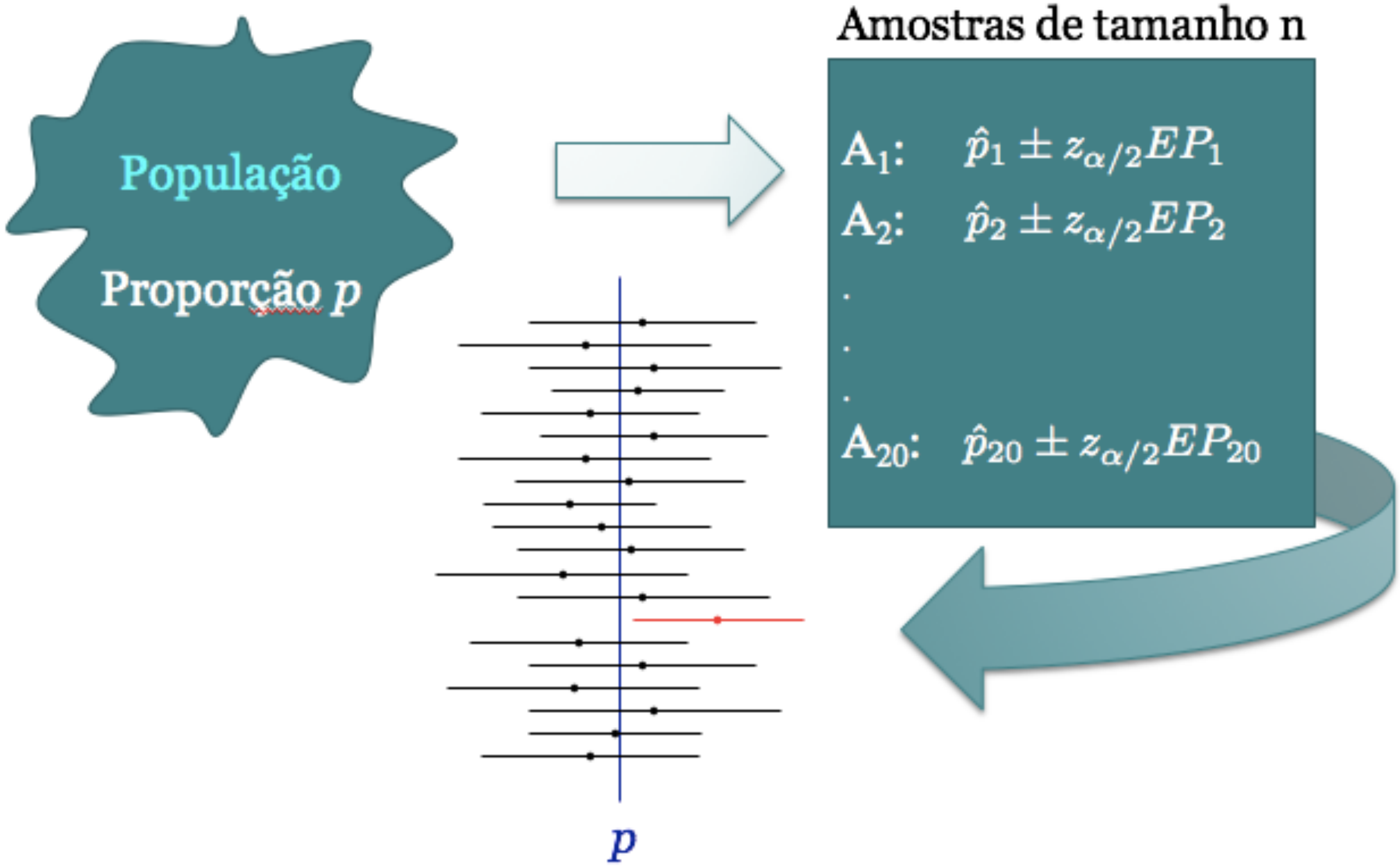
Interpretação do Intervalo de Confiança

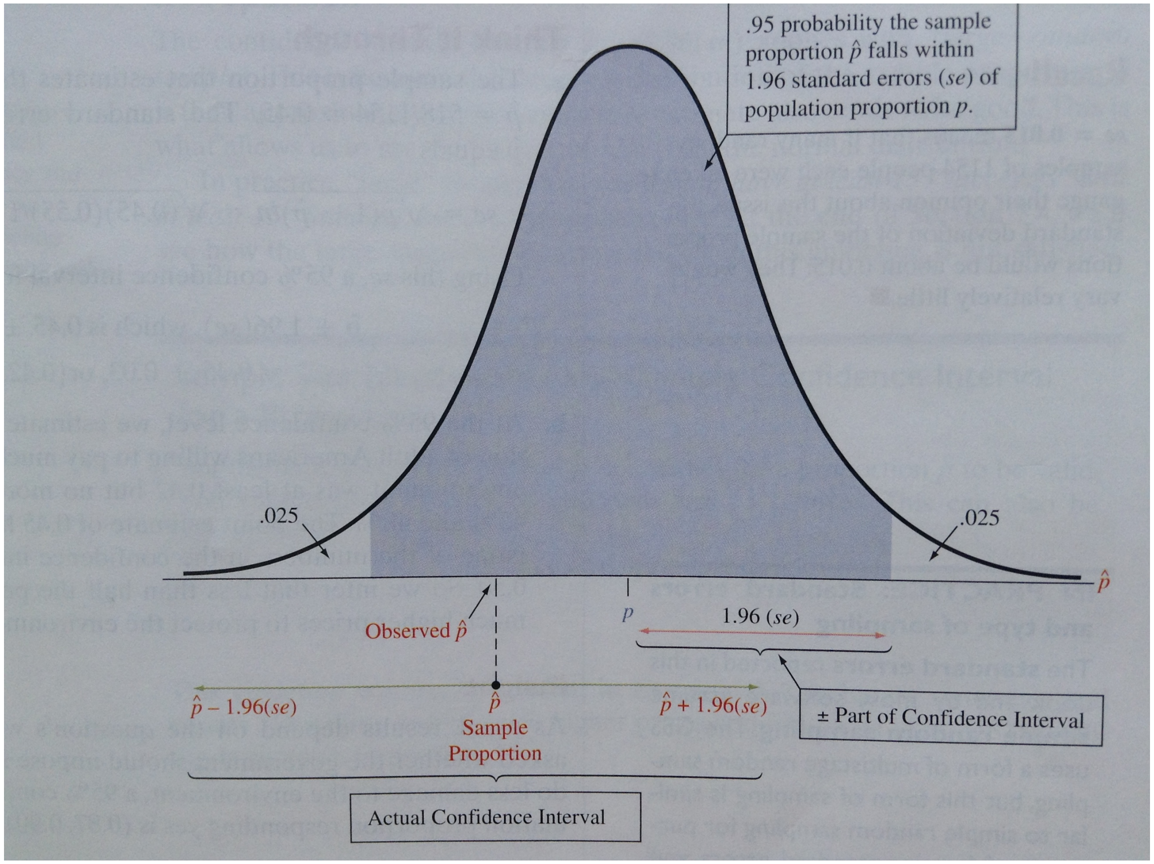
Interpretação: Se várias amostras aleatórias forem retiradas da população e calcularmos um IC de 95% para cada amostra, cerca de 95% desses intervalos irão conter a verdadeira proporção na população, p.

INCORRETO: Dizer que "a probabilidade de que p esteja dentro do intervalo é 95%"

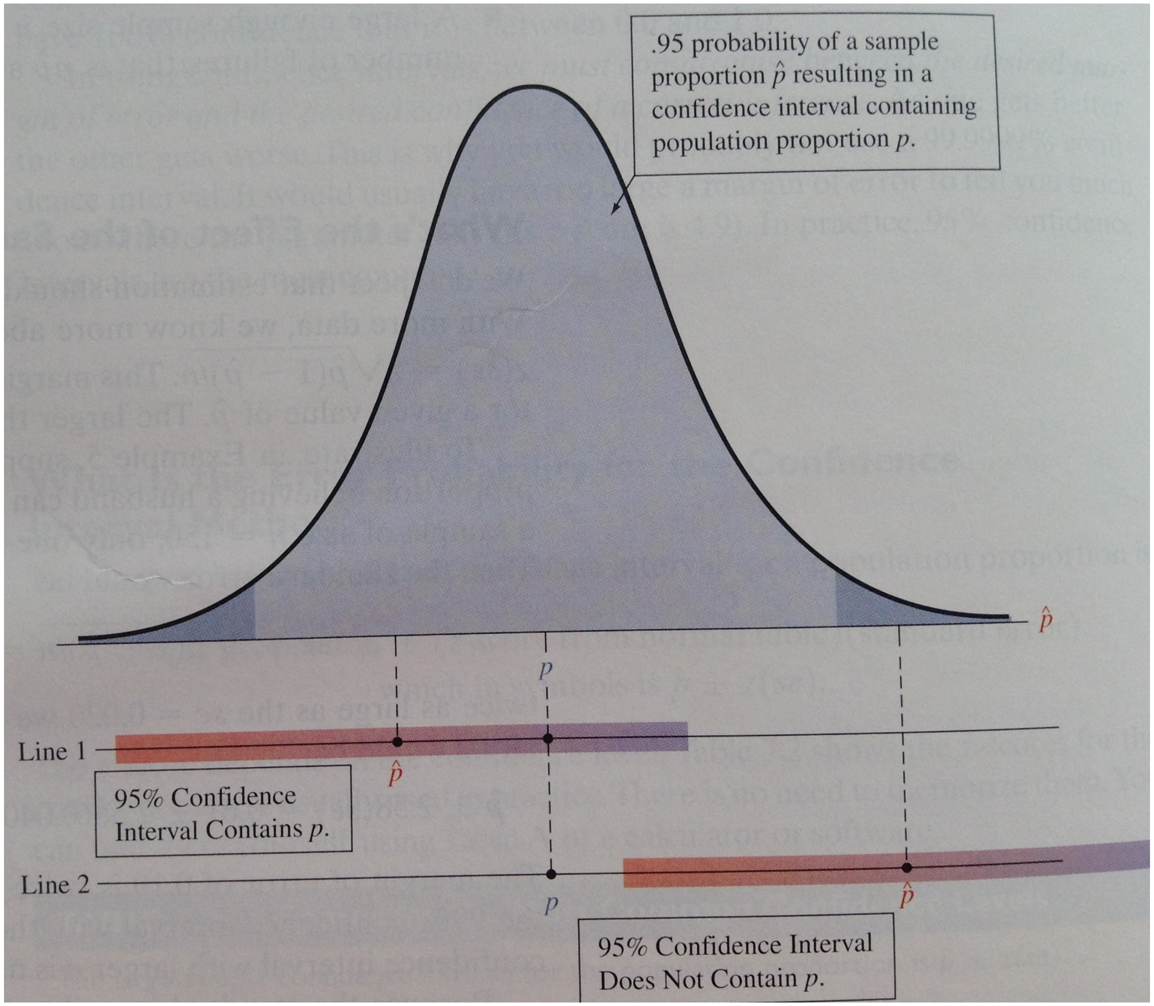
Por que incorreto? p é uma constante, não é variável aleatória. Ou p está no intervalo calculado ou não está.

Interpretação do Intervalo de Confiança





.95 probability the sample proportion $\hat{p}$ falls within 1.96 standard errors (se) of population proportion p.
.025
.025
$\hat{p}$
Observed $\hat{p}$
p
1.96 (se)
$\hat{p} - 1.96(se)$
$\hat{p}$
Sample Proportion
$\hat{p} + 1.96(se)$
± Part of Confidence Interval
Actual Confidence Interval



.95 probability of a sample proportion $\hat{p}$ resulting in a confidence interval containing population proportion p.
$\hat{p}$
p
Line 1
$\hat{p}$
95% Confidence Interval Contains p.
Line 2
p
$\hat{p}$
95% Confidence Interval Does Not Contain p.

Exemplo (continuação)

Um IC de 95% para p é: $[0.17; 0.21]$

A margem de erro (metade do comprimento do IC) é:

$$ME = 1.96\sqrt{\frac{0.19(1-0.19)}{1823}} = 0.02$$

$$P(|\widehat{p} - p| < 0.02) = 0.95$$

Interpretação: Com probabilidade 0.95, o erro ao usar a proporção amostral para estimar a proporção populacional não excede 0.02.

Curiosidade: em 1977 a pergunta foi feita pela primeira vez no GSS. $\widehat{p} = 0.57$ e IC de 95% foi $[0.55; 0.59]$.

Exemplo: Proteção ao Meio Ambiente

Na teoria, muita gente se considera "*eco-friendly*". Mas e na prática?

Pergunta: Você pagaria mais para um produto em favor ao meio ambiente?

Em 2000, GSS perguntou: "Você estaria disposto a pagar mais pela gasolina para proteger o ambiente?"

Entre $n = 1154$ participantes, 518 responderam que sim.

- Encontre IC 95% para a proporção da população que concorda.
- Interprete.

Exemplo (continuação)

Estimativa: $\hat{p} = 518/1154 = 0.45$

erro padrão (desvio padrão da estimativa): $EP(\hat{p}) = \sqrt{\frac{(0.45)(1-0.45)}{1154}} = 0.015$

Margem de erro: $1.96 EP(\hat{p}) = 0.03$

$$\begin{aligned} IC(p, 0.95) &= \left[0.45 - 1.96\sqrt{\frac{(0.45)(0.55)}{1154}}; 0.45 + 1.96\sqrt{\frac{(0.45)(0.55)}{1154}}\right] \\ &= [0.45 - 0.03; 0.45 + 0.03] \\ &= [0.42; 0.48] \end{aligned}$$

Interpretação: Com grau de confiança de 95%, estimamos que a proporção populacional que concorda em pagar mais está entre 0.42 e 0.48. A estimativa pontual, 0.45, tem margem de erro de 3%.

Exemplo (continuação)

E se estivéssemos interessados na proporção que não pagaria mais?

Estimativa: $\widehat{p} = 1 - 518/1154 = 0.55$

erro padrão (desvio padrão da estimativa: $EP(\widehat{p}) = \sqrt{\frac{(0.55)(1-0.55)}{1154}} = 0.015$

Margem de erro: $1.96EP(\widehat{p}) = 0.03$

$$
\begin{aligned}
IC(p, 0.95) &= \left[0.55 - 1.96\sqrt{\frac{(0.55)(0.45)}{1154}}; 0.55 + 1.96\sqrt{\frac{(0.55)(0.45)}{1154}}\right] \\
&= [0.55 - 0.03; 0.55 + 0.03] \\
&= [0.52; 0.58]
\end{aligned}
$$

Interpretação: Com grau de confiança de 95%, estimamos que a proporção populacional que não pagaria mais está entre 0.52 e 0.58. A estimativa pontual, 0.55, tem margem de erro de 3%.

Exemplo: Esposa vs Marido

Pergunta: Se a esposa quer ter um filho, mas o marido não, é justo que ele se recuse a ter um filho?

GSS: 598 responderam, 366 acham justo. Encontre um IC de 99%.

Estimativa: $\hat{p} = 366/598 = 0.61$

erro padrão (desvio padrão da estimativa): $EP(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.02$

Margem de erro: $2.58EP(\hat{p}) = 0.05$

$$IC(p, 0.99) = [0.61 - 0.05\,;\ 0.61 + 0.05] = [0.56\,;\ 0.66]$$

Com grau de confiança igual a 99%, estimamos que a proporção populacional que concorda está entre 0.56 e 0.66. A estimativa pontual, 0.61, tem margem de erro de 5%.

Exemplo (continuação)

E o IC de 95%?

Margem de erro: $1.96EP(\widehat{p}) = 1.96 \times 0.02 = 0.04$

$$\begin{aligned} IC(p, 0.95) &= [0.61 - 0.04\,;\ 0.61 + 0.04] \\ &= [0.57\,;\ 0.65] \end{aligned}$$

Com grau de confiança igual a 95%, estimamos que a proporção populacional que concorda está entre 0.57 e 0.65. A estimativa pontual, 0.61, tem margem de erro de 4%.

Com maior grau de confiança, temos uma margem de erro um pouco maior.

Tamanho da amostra para estimar p

Exemplo: Datafolha

A Datafolha quer fazer uma pesquisa de boca-de-urna para predizer o resultado de uma eleição com apenas dois candidatos.

Seleciona então uma a.a. de eleitores e pergunta em quem cada um votou. Para esta pesquisa, o Datafolha quer uma margem de erro de 4%. Qual o tamanho de amostra necessário?

- O grau de confiança é 95% e $IC(p, 0.95) = \widehat{p} \pm 1.96 \times EP(\widehat{p})$
- Erro padrão de $\widehat{p}$ é $EP(\hat{p}) = \sqrt{p(1-p)/n}$
- Margem de erro: $1.96 \times EP(\widehat{p}) = 1.96\sqrt{p(1-p)/n}$
- Margem de erro desejada é 0.04. Então, o tamanho amostral necessário n é:

$$1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.04 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{1.96^2 p(1-p)}{0.04^2}$$

Exemplo: Datafolha

Problema é que não conhecemos p.

Assim como para encontrar os IC's, podemos usar o método conservador ou então usar informações obtidas em pesquisas anteriores (caso existam).

Método Conservador:

- Lembre que $p(1-p)/n$ é a variância da estimativa $\widehat{p}$ e já vimos anteriormente que $p(1-p) \leq 1/4$.
- Então,

$$n = \frac{1.96^2 \times (1/4)}{0.04^2} = 600$$

Exemplo: Datafolha

Outra alternativa

- O Datafolha fez uma pesquisa na semana passada e o resultado foi 58% votariam no candidato A e 42% no B.
- Podemos usar então estas estimativas:

$$n = \frac{1.96^2 \widehat{p}(1-\widehat{p})}{0.04^2} = \frac{1.96^2(0.58)(0.42)}{0.04^2} = 585$$

- Uma a.a. de tamanho 585 deverá resultar numa margem de erro de 4% para um IC de 95% para a proporção da população que vota no candidato A.

Exemplo: Campeonato Brasileiro

Uma firma de propaganda está interessada em estimar a proporção de domicílios que estão assistindo a final do campeonato brasileiro de futebol.

Para isso, está planejando ligar para os domicílios selecionados aleatoriamente a partir de uma lista.

Qual o tamanho da amostra necessário se a firma quer 90% de confiança de que a estimativa obtida tenha uma margem de erro igual a 0.02?

Exemplo: Campeonato Brasileiro

Método conservador: $IC(p, 1-\alpha) = \left[\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{4n}}\ ;\ \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{4n}}\right]$

Margem de erro 0.02: $z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{4n}} = 0.02$

Como eles querem 90% de confiança, $\alpha = 0.10$ e $z_{0.05} = 1.645$

$$1.645\sqrt{1/4n} = 0.02 \quad \Longleftrightarrow \quad 1/4n = (0.02/1.645)^2 \quad \Rightarrow \quad n = 1691.3$$

Tamanho amostral: 1692.

Em geral, para uma margem de erro m:

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{2m}\right)^2$$

Exemplo: Mulheres em uma Escola

Suponha que $p = 30\%$ dos estudantes de uma escola sejam mulheres.

Coletamos uma amostra aleatória simples de $n = 10$ estudantes e calculamos a proporção de mulheres na amostra, ou seja, $\widehat{p}$.

Qual a probabilidade de que $\widehat{p}$ difira de p em menos de 0.01? E se $n = 50$?

Adaptado de: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 276.

Solução: Temos que a probabilidade que desejamos encontrar é dada por

$$P\left(|\widehat{p} - p| < 0.01\right) = P\left(-0.01 < \widehat{p} - p < 0.01\right)$$

onde p é o valor verdadeiro da proporção de mulheres, e $\widehat{p}$ a proporção observada na amostra.

Exemplo: Mulheres em uma Escola

Seja X_i a v.a. indicando se a pessoa i é mulher, ou seja, $X_i \sim \text{Bernoulli}(0.3)$.

Então sabemos que $\mathbb{E}(X_i) = p = 0.3$ e $Var(X_i) = p(1-p) = 0.21$.

Coletamos uma amostra de tamanho n: $X_1, \dots, X_n$. Calculamos a proporção de mulheres na amostra:

$$\bar{X}_n = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

Sabemos que $\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mathbb{E}(X_i) = p = 0.3$ e $Var(\bar{X}_n) = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{0.21}{10} = 0.021$.

Pelo TCL, quando n é grande,

$$\bar{X}_n = \widehat{p} \sim N\left(p, p(1-p)/n\right) = N(0.3, 0.021)$$

Exemplo: Mulheres em uma Escola

A probabilidade que queremos calcular é:

$$P\left(|\widehat{p} - p| < 0.01\right) = P\left(-0.01 < \widehat{p} - p < 0.01\right)$$

$$P\left(-\frac{0.01}{\sqrt{Var(\widehat{p})}} < \frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{Var(\widehat{p})}} < \frac{0.01}{\sqrt{Var(\widehat{p})}}\right)$$

$$P\left(\frac{-0.01}{\sqrt{0.021}} < Z < \frac{0.01}{\sqrt{0.021}}\right) = P(-0.07 < Z < 0.07) = 0.056\,.$$

Mas $n = 10$ é grande o suficiente?

Podemos comparar essa probabilidade com o resultado exato!

Exemplo: Mulheres em uma Escola

Não sabemos a distribuição de $\widehat{p}$, mas sabemos que X_i são v.a. independentes e identicamente distribuidas Bernoulli(0.3).

Portanto, $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(10, 0.3)$ e $\widehat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Então,

$$
\begin{aligned}
P\left(|\widehat{p} - p| < 0.01\right) &= P\left(-0.01 < \widehat{p} - p < 0.01\right) \\
&= P\left(-0.01n < n\widehat{p} - np < 0.01n\right) \\
&= P\left(-0.1 < \sum_{i=1}^{n} X_i - 3 < 0.1\right) \\
&= P\left(2.9 < \sum_{i=1}^{n} X_i < 3.1\right)
\end{aligned}
$$

Exemplo: Mulheres em uma Escola

Como $\sum X_i$ assume somente valores inteiros, temos que

$$\begin{aligned} P\left(|\hat{p} - p| < 0.01\right) &= P\left(2.9 < \sum_{i=1}^{n} X_i < 3.1\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = 3\right) \\ &= \binom{10}{3}(0.3)^3(0.7)^7 = 0.267. \end{aligned}$$

Temos uma probabilidade que é 5 vezes maior que a aproximação.

Exemplo: Mulheres em uma Escola

Considere agora $n = 50$. Nesse caso, a variância é $\frac{p(1-p)}{n} = 0.0042$ e, portanto, a probabilidade aproximada é:

$$
\begin{aligned}
P(|\widehat{p} - p| < 0.01) \approx P\left(|Z| < \frac{0.01}{\sqrt{0.0042}}\right) &= P(-0.154 < Z < 0.154) \\
&= 0.12239
\end{aligned}
$$

A probabilidade exata agora é dada por:

$$
\begin{aligned}
P(|\widehat{p} - p| < 0.01) &= P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - 50(0.3)\right| < 0.5\right) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = 15\right) = \binom{50}{15}(0.3)^{15}(0.7)^{35} = 0.12235.
\end{aligned}
$$

A diferença agora é muito menor e, à medida que $n \to \infty$ ela tende a 0, pelo TCL. A aproximação só é válida para grandes tamanhos de amostra.

Exercício: Intervalo de Confiança para proporções

Suponha que estejamos interessados em estimar a porcentagem de consumidores de um certo produto. Se a amostra de tamanho 300 forneceu 100 indivíduos que consomem o dado produto, determine:

1. O intervalo de 95% de confiança para p. Interprete o resultado.
2. O tamanho da amostra para que o erro da estimativa não exceda 0.02 unidades com probabilidade de 95%. Interprete o resultado.

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 309.

Intervalo de Confiança para proporções

1. O intervalo de confiança de 95% é dado por:

$$\mathrm{IC}(p; 0.95) = 0.333 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.333 \times 0.667}{300}} = 0.333 \pm 0.053$$

   Ou simplesmente $(0.280; 0.387)$.

Interpretação: Se pudéssemos construir um grande número de intervalos aleatórios para p, todos baseados em amostras de tamanho n, 95% deles conteriam o parâmetro p.

Intervalo de Confiança para proporções

1.
2. Utilizando a estimativa da amostra observada ($\hat{p} = 0.333$), temos que n é dado por

$$n = \left(\frac{1.96}{0.02}\right)^2 \times 0.333 \times 0.667 \cong 2134.$$

   Contudo, frequentemente devemos determinar o tamanho da amostra antes de realizar qualquer experimento, isto é, sem nenhuma informação prévia de p. Se esse for o caso, devemos considerar o caso em que a variância da amostra é a pior possível.

Intervalo de Confiança para proporções

1.
2. Utilizando o valor máximo de $p(1-p)$, isto é, $1/4$, obtemos

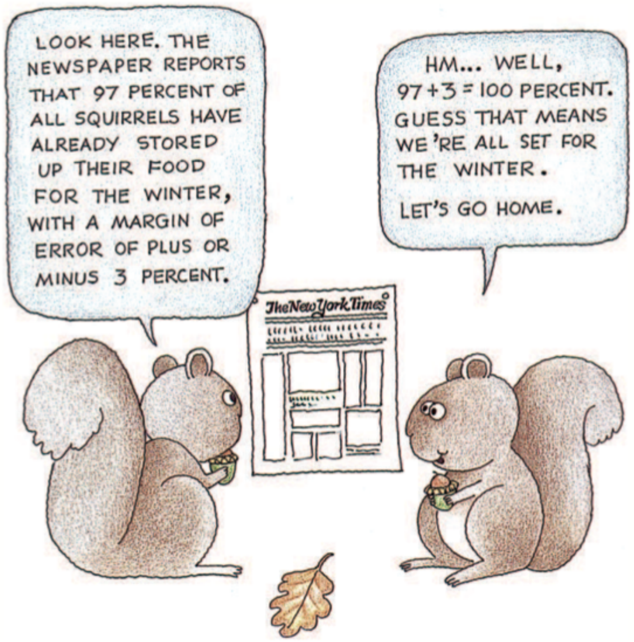
$$n = \left(\frac{1.96}{0.02}\right)^2 \times \frac{1}{4} \cong 2401$$

Interpretação: Utilizando o tamanho amostral encontrado, teremos uma probabilidade de 95% de que a proporção amostral não difira do verdadeiro valor de p em menos que 2%.

Note que a prática de obter amostras pequenas para examinar p, e aí determinar o tamanho amostral sem utilizar o "pior caso", é no que consiste a idéia de **amostras piloto**.

Leituras

- Ross: capítulo 8.
- OpenIntro: seção 4.2.
- Magalhães: seção 7.4.



Slides produzidos pelos professores:

- Samara Kiihl
- Tatiana Benaglia
- Larissa Matos
- Benilton Carvalho