ME720 - Modelos Lineares Generalizados

Profa.: Larissa Avila Matos

1^a Lista de Exercícios - Modelos Lineares

Q1. Sejam $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 12 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

a. Mostre que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$.

b. Encontre um vetor $\boldsymbol{x}$ tal que $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$.

c. Qual é o posto de $\boldsymbol{A}$ e o posto de $\boldsymbol{B}$?

Q2. Mostre que cada coluna do produto $\boldsymbol{AB}$ pode ser expressa como uma combinação linear das colunas de $\boldsymbol{A}$, com coeficientes resultantes da coluna correspondente de $\boldsymbol{B}$.

Q3. Suponha que $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são matrizes $n \times n$ e que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$. Mostre que $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são ambos singulares ou um deles é $\boldsymbol{0}$.

Q4. Seja $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Os autovalores de $\boldsymbol{A}$ são $1, 4, -2$.

a. Encontre os autovetores normalizados e use-os como colunas de uma matriz ortogonal C.

b. Mostre que $A = CDC'$, onde D; e mostre que $C'AC = D$.

Q5. Seja $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

a. Mostre que $|\boldsymbol{A}| > 0$.

b. Encontre os autovalores de $\boldsymbol{A}$, eles são todos positivos?

Q6. Considere $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

a. Encontre o posto de $\boldsymbol{A}$.

b. Mostre que $\boldsymbol{A}$ é idempotente.

c. Mostre que $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$.

d. Encontre $tr(\boldsymbol{A})$.

e. Encontre os autovalores de $\boldsymbol{A}$.

Q7. Considere uma matriz $\boldsymbol{A}_{p\times p}$ com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$. Mostre que $[tr(\boldsymbol{A})]^2 = tr(\boldsymbol{A}^2) + 2\sum\sum_{i\neq j} \lambda_i\lambda_j$.

Q8. Considere 4 vetores aleatórios de dimensão p ($\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{V}$, e $\boldsymbol{W}$). Além disso, considere 4 matrizes de contantes $\boldsymbol{A}_{h\times p}$, $\boldsymbol{B}_{h\times p}$, $\boldsymbol{C}_{h\times p}$, and $\boldsymbol{D}_{h\times p}$. Encontre $Cov(\boldsymbol{AY} + \boldsymbol{BX}, \boldsymbol{CV} + \boldsymbol{DW})$.

Q9. Considere $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)'$ um vetor aleatório, com vetor de medias e matriz de covariâncias dados por

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

a. Tome $Z = 2Y_1 - 3Y_2 + Y_3$. Calcule $\mathbb{E}(Z)$ e $Var(Z)$.

b. Tome $Z_1 = Y_1 + Y_2 + Y_3$ e $Z_2 = 3Y_1 + Y_2 - 2Y_3$. Calcule $\mathbb{E}(\boldsymbol{Z})$ e $Var(\boldsymbol{Z})$, onde $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2)'$.

Q10. Assumindo que $\boldsymbol{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\boldsymbol{I})$ e $\boldsymbol{C}$ é uma matriz ortogonal, mostre que $\boldsymbol{CY}$ é $N_p(\boldsymbol{C\mu}, \sigma^2\boldsymbol{I})$.

Q11. Suponha que $\boldsymbol{Y} \sim N_4(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, onde

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 5 & -4 \\ 2 & -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Encontre:

a. A distribuição conjunta de Y_1 e Y_3.

b. A distribuição marginal de Y_2.

c. Distribuição de $Z = Y_1 + 2Y_2 - Y_3 + 3Y_4$.

d. A distribuição conjunta de $Z_1 = Y_1 + Y_2 - Y_3 - Y_4$ e $Z_2 = -3Y_1 + Y_2 + 2Y_3 - 2Y_4$.

e. $f(y_1, y_2|y_3, y_4)$.

f. $f(y_1, y_3|y_2, y_4)$.

g. $f(y_1|y_2, y_3, y_4)$.

Q12. Mostre que $(1/n)\boldsymbol{J}$ é idempotente, $\boldsymbol{I} - (1/n)\boldsymbol{J}$ é idempotente, e $[\boldsymbol{I} - (1/n)\boldsymbol{J}][(1/n)\boldsymbol{J}] = \boldsymbol{0}$.

Q13. Mostre que $\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}) \sim N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$, sabendo que $\boldsymbol{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Q14. Mostre que $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}) + 2(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu}$, onde $\boldsymbol{A}$ é uma matriz simétrica de constantes.

Q15. Se $\boldsymbol{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, verifique que $(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu})$ é $\chi^2(n)$. Qual a distribuição de $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{Y}$?

Q16. Seja $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 \\ -3 & 2 & -6 \\ -8 & -6 & 3 \end{bmatrix}$. Além disso, considere $\boldsymbol{Y} \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, com

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a. Encontre $\mathbb{E}(\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y})$.

b. Encontre $Var(\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y})$.

c. $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$ tem distribuição chi-quadrado?

d. Se $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$ tem distribuição chi-quadrado?

Q17. Exercícios do Capitulo 1 do livro texto:

1.1, 1.2, 1.5, 1.11, 1.12, 1.13, 1.18.

Q18. Exercícios do Capitulo 2 do livro texto:

2.3, 2.4, 2.8, 2.9, 2.12, 2.24, 2.25, 2.29, 2.30, 2.42, 2.44, 2.45, 2.46, 2.47, 2.48, 2.49.

Q18. Exercícios do Capitulo 3 do livro texto:

3.7, 3.8, 3.12, 3.30, 3.31, 3.32, 3.33, 3.34, 3.39, 3.40.