# ME951 - Estatística e Probabilidade I

## Parte 16

Notas de aula de ME414 produzidas pelos professores **Samara Kiihl**, **Tatiana Benaglia** e **Benilton Carvalho** modificadas e alteradas pela Profa. **Larissa Avila Matos**

# Intervalo de confiança para a média populacional

# Revisão

Vimos que podemos usar uma estatística para estimar um parâmetro de uma distribuição que temos interesse.

Por ex: podemos usar a proporção amostral ($\hat{p}$), obtida a partir de um amostra aleatória, se estamos interessados na proporção populacional ($p$).

Por ex: podemos usar a média amostral ($\bar{x}$), obtida a partir de um amostra aleatória, se estamos interessados na média populacional ($\mu$).

**Resultado:** Se $X$ tem $\mathbb{E}(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$, então a distribuição da média amostral, $\bar{X}_n$, tem

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mu \quad \text{e} \quad Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

# Distribuição da Média Amostral

A média amostral, $\bar{X}_n$, tem em geral valores diferentes para diferentes amostras aleatórias obtidas: é uma variável aleatória.

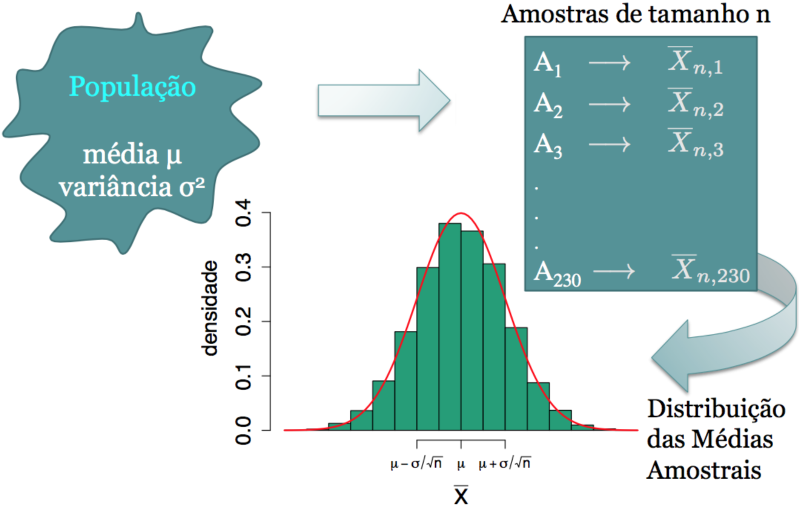
Para obtermos a distribuição da média amostral:

Coletar uma a.a. de tamanho $n$ a partir da população com distribuição $X$ e guardar o valor da média desta amostra.

Coletar outra a.a. de tamanho $n$ a partir da população com distribuição $X$ e guardo o valor da média desta amostra. Repetir isso várias vezes.

Construir um histograma com todas as médias obtidas para estudar o comportamento de $\bar{X}_n$: avaliando a média, a dispersão e a distribuição.

# Teorema Central do Limite



# Teorema Central do Limite

Na prática: iremos coletar somente uma amostra de tamanho $n$, não faremos inúmeras vezes esse processo. Teremos apenas 1 valor: $\bar{x}$.

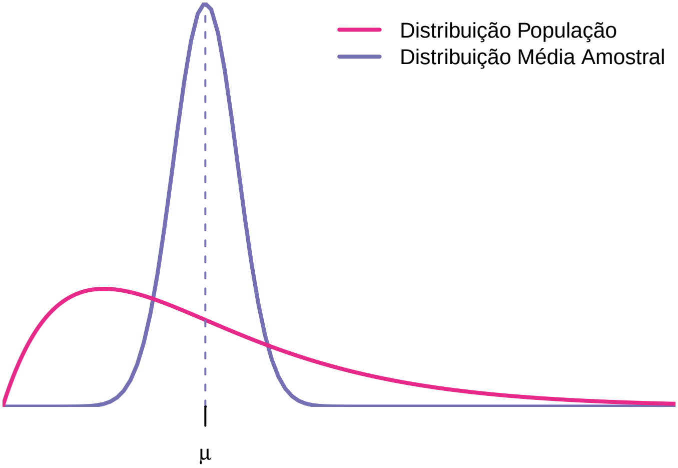
Então como saberemos as propriedades deste estimador? Quão útil ele é?

**Resultado (TCL):**

Para amostras aleatórias simples $X_1, ..., X_n$ coletadas de uma população com média $\mu$ e variância $\sigma^2$, a distribuição amostral de $\bar{X}_n$ aproxima-se de uma distribuição Normal de média $\mu$ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$, quando $n$ for suficientemente grande, isto é,

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

# Teorema Central do Limite



# Usando o TCL para construir um IC

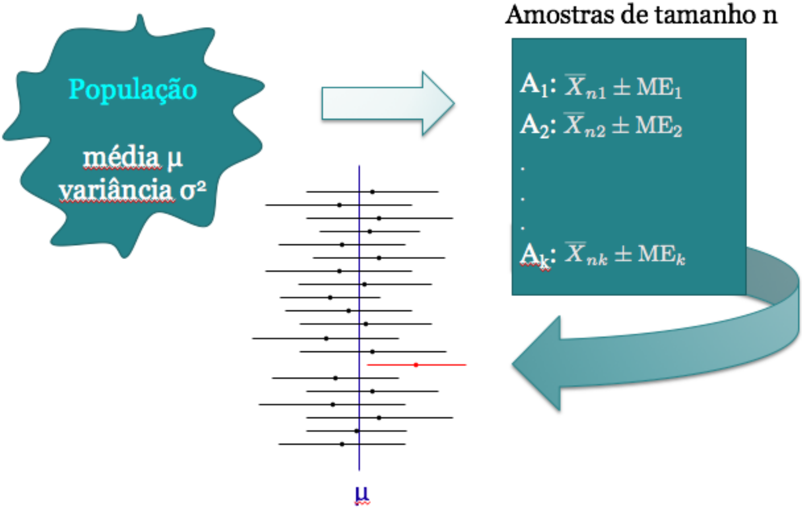
Temos uma amostra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ e estamos usando a média amostral $\bar{X}_n$ para estimar $\mu$, a média populacional.

Quão boa é esta estimativa? Ela tem boa precisão? Qual o grau de confiança?

Em geral: queremos alto grau de confiança, por exemplo, $1 - \alpha = 0.95$.

Imagine que seja possível coletar uma amostra de tamanho $n$ da população várias vezes. Para cada vez, você calcula $\bar{x}$ é constrói um IC de 95% para $\mu$. Imagine também que você conhece $\mu$ e conte quantos dos intervalos contêm $\mu$. A proporção de intervalos que contem $\mu$ será próxima a 0.95.

# Interpretação do Intervalo de Confiança para $\mu$



# Exemplo

Uma variável aleatória $X$ tem distribuição normal, com média 100 e desvio padrão 10.

Qual a $P(90 < X < 110)$?

Se $\bar{X}$ for a média de uma amostra de 16 elementos retirados dessa população, calcule $P(90 < \bar{X} < 110)$.

Represente, num único gráfico, as distribuições de $X$ e $\bar{X}$.

Que tamanho deveria ter a amostra para que $P(90 < \bar{X} < 110) = 0.95$?

*Fonte: Morettin & Bussab*, Estatística Básica $5^a$ edição, pág 274.

# Exemplo

Qual a $P(90 < X < 110)$?

Devemos padronizar o evento, para usar a distribuição normal padrão.

$$P(90 < X < 110) = P\left(\tfrac{90-100}{10} < \tfrac{X-100}{10} < \tfrac{110-100}{10}\right)$$

$$= P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1) = \Phi(1) - \Phi(-1)$$

Consultando a tabela Normal disponível na página da disciplina, vemos que $\Phi(1) = 0.8413$

Por simetria, $\Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 0.1569$ e portanto

$$P(90 < X < 110) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.6844$$

# Exemplo

Calcule $P(90 < \bar{X} < 110)$, sendo $\bar{X}$ for a média de uma amostra de 16 elementos dessa população.

Sabemos que $\mathbb{E}(\bar{X}) = 100$ e $Var(\bar{X}) = \sigma^2/n = 100/16$.

Consequentemente, o desvio padrão de $\bar{X}$ será $\sigma/\sqrt{n} = 10/4$.

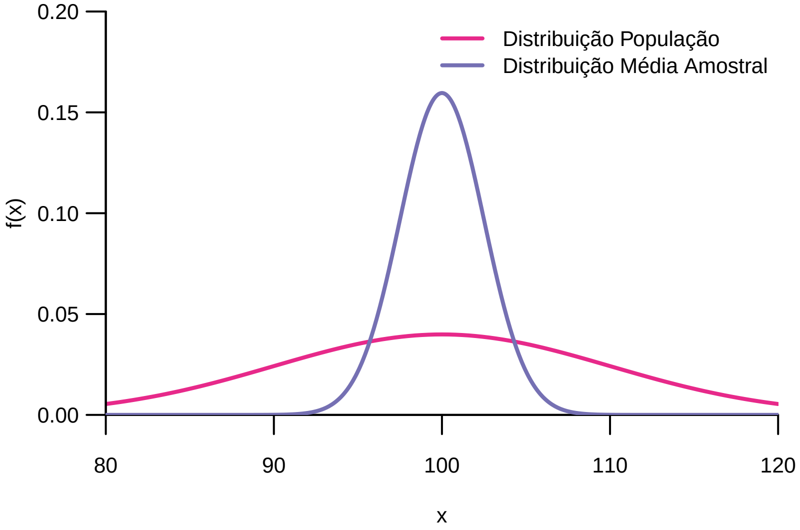
Então, temos que

$$\begin{aligned} P(90 < \bar{X} < 110) &= P\left(\frac{90-100}{10/4} < \frac{\bar{X}-100}{10/4} < \frac{110-100}{10/4}\right) \\ &= P(-4 < Z < 4) = P(Z < 4) - P(Z < -4) \\ &= \Phi(4) - \Phi(-4) \end{aligned}$$

Se consultarmos a tabela agora, veremos que a probabilidade $P(Z < 4)$ é tão grande nem está listada. Ela então pode ser considerada como aproximadamente igual a 1. De fato, com a ajuda de algum método de integração numérica, podemos verificar que $\Phi(4) - \Phi(-4)$ é igual a 0.9999367.

# Exemplo

Distribuições de $X$ e $\bar{X}$:



# Exemplo

Que tamanho deveria ter a amostra para que $P(90 < \bar{X} < 110) = 0.95$?

Queremos resolver a seguinte equação:

$$P\left(\frac{90-100}{10/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}-100}{10/\sqrt{n}} < \frac{110-100}{10/\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

Consultando a tabela, vemos que $P(-z_{0.025} < Z < z_{0.025}) = 0.95$ se $z_{0.025} = 1.96$.

Então a equação que queremos resolver pode ser reescrita como:

$$\frac{110-100}{10/\sqrt{n}} = 1.96 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n}\frac{110-100}{10} = 1.96 \quad \Leftrightarrow \quad n = 1.96^2$$

Portanto, $n = 4$ é suficiente para obtermos a confiança desejada.

# Intervalo de Confiança para $\mu$

Coletamos uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de uma população com média $\mu$ e a variância $\sigma^2$ e usamos $\bar{X}_n$ para estimar $\mu$.

Pelo TCL:

$$\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

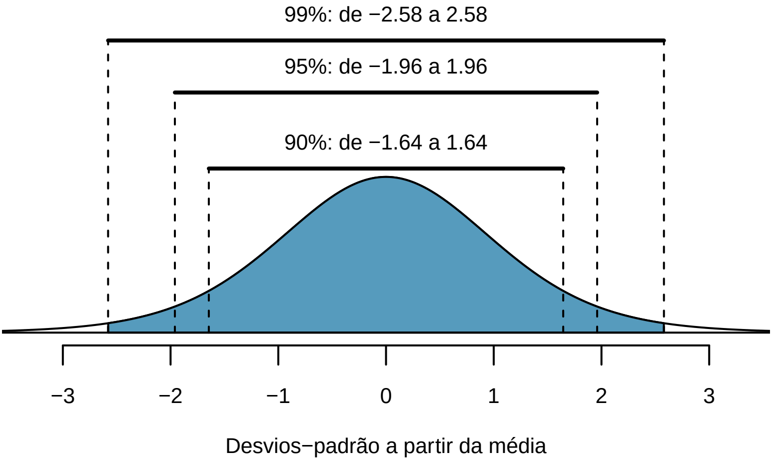
Propriedade da Normal:

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$$

$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

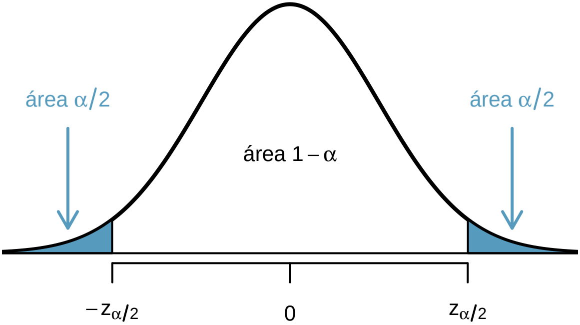
# Como encontrar $z_{\alpha/2}$

$$P(|Z| \leq z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$



# Como encontrar $z_{\alpha/2}$

$$P(|Z| \leq z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

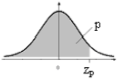



Procure na tabela o valor de $z$ tal que a probabilidade acumulada até o valor de $z$, isto é $P(Z \leq z) = \Phi(z)$, seja $1 - \alpha/2$.

# Exemplo

Encontrar $z_{0.05}$ tal que $0.90 = P\left(-z_{0.05} \leq Z \leq z_{0.05}\right)$.

**Tabela I: Distribuição Normal Padrão Acumulada**




Fornece $\Phi(z) = P(-\infty < Z \leq z)$, para todo z, de 0,01 em 0,01, desde z = 0,00 até z = 3,59
A distribuição de Z é Normal(0;1)

| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,0** | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| **0,1** | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| **0,2** | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| **0,3** | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| **0,4** | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| **0,5** | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| **0,6** | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| **0,7** | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| **0,8** | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| **0,9** | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| **1,0** | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| **1,1** | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| **1,2** | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| **1,3** | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| **1,4** | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| **1,5** | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| **1,6** | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | $\boxed{0{,}9495}$ | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| **1,7** | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| **1,8** | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| **1,9** | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| **2,0** | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |

# Intervalo de Confiança para $\mu$: $\sigma$ conhecido

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de uma população com média $\mu$ e variância $\sigma^2$ conhecida. Então,

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$$

$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Um Intervalo de $100(1-\alpha)\%$ de confiança para $\mu$ é dado por:

$$IC(\mu, 1-\alpha) = \left[\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

# Exemplo: Café

Uma máquina enche pacotes de café com variância igual a $100g^2$. Ela estava regulada para encher os pacotes com uma média de 500g. Mas o fabricante desconfia que a máquina está desregulada e quer então estimar a nova média $\mu$.

Uma amostra de 25 pacotes apresentou uma média de 485g. Encontre um $IC$ de 95% para a verdadeira média $\mu$.

$\bar{x} = 485, n = 25, \sigma = 10, \alpha = 0.05, z_{0.025} = 1.96$

$$
\begin{aligned}
IC(\mu, 0.95) &= \left[\bar{x} - z_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \\
&= \left[485 - 1.96\frac{10}{5}; 485 + 1.96\frac{10}{5}\right] \\
&= [481.08; 488.92]
\end{aligned}
$$

# Tamanho da Amostra

**Exemplo:** Por experiência, sabe-se que o peso de um salmão de certo criatório segue uma distribuição normal com uma média que varia a cada estação, mas com desvio padrão sempre igual a 0.3 libras.

Se quisermos estimar o peso médio dos peixes de maneira que nossa estimativa seja diferente da verdadeira média em no máximo 0.1 libras para mais ou para menos com probabilidade igual a 0.9, qual o tamanho amostral necessário?

**Solução**

$$IC(\mu, 1-\alpha) = \left[\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,\bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Margem de erro: $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

# Tamanho da Amostra

Margem de erro 0.1, isto é,

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.1$$

$\alpha = 0.1$ (90% de confiança) e $z_{0.05} = 1.645$.

$$1.645\frac{0.3}{\sqrt{n}} = 0.1 \quad \Rightarrow \quad n = 24.35$$

Tamanho amostral: 25

Em geral, para uma margem de erro $m$ e confiança $100(1-\alpha)\%$:

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{m}\right)^2 \sigma^2$$

# Intervalo de Confiança para $\mu$: $\sigma$ desconhecido

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma a.a. de uma população com média $\mu$, mas com variância $\sigma^2$ desconhecida

Nesse caso, usaremos a variância amostral ($s^2$) como uma estimativa de $\sigma^2$:

$$s^2 = \tfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Como consequência, não temos mais distribuição Normal, mas sim a **distribuição $t$-student** com $n-1$ graus de liberdade:

$$T = \tfrac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim t_{n-1}$$

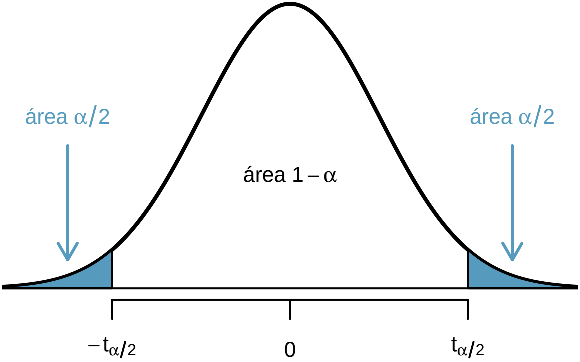
$$P(-t_{n-1,\alpha/2} < T < t_{n-1,\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Um intervalo de $100(1-\alpha)\%$ de confiança para $\mu$ é dado por:

$$IC(\mu, 1-\alpha) = \left[\bar{x} - t_{n-1,\alpha/2} \tfrac{s}{\sqrt{n}};\, \bar{x} + t_{n-1,\alpha/2} \tfrac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

# Como encontrar $t_{n-1,\alpha/2}$

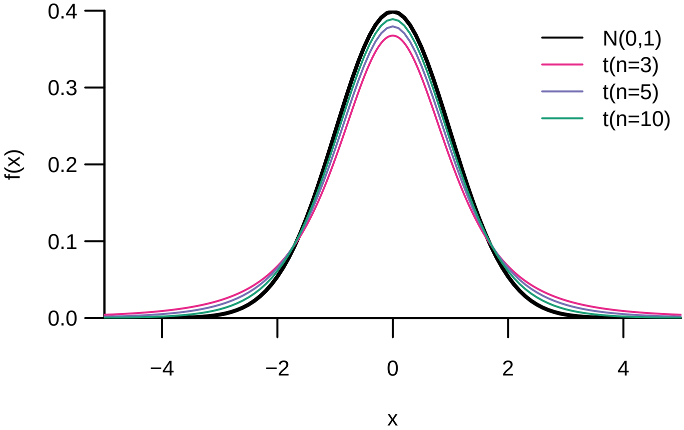
$$P(-t_{n-1,\alpha/2} < T < t_{n-1,\alpha/2}) = 1 - \alpha$$




Os valores da distribuição $t$-student também encontram-se tabelados.

# Distribuição $t$-student e Normal Padrão

Para $n$ grande a distribuição $t$-student se aproxima da normal padrão $N(0,1)$.



# Exemplo: Café

No exemplo da máquina que enche pacotes de café, suponha agora que a variância é **desconhecida**.

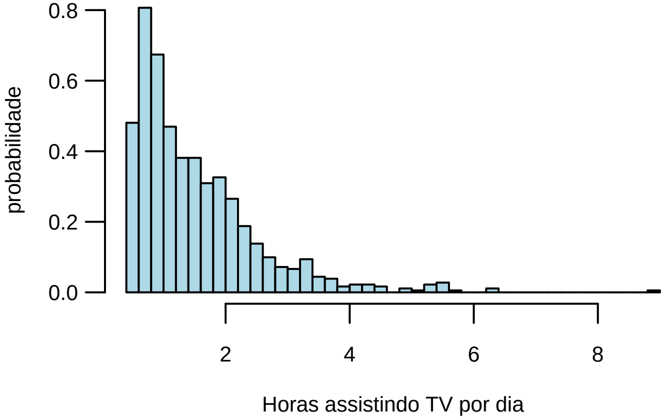
Lembre-se que uma amostra de 25 pacotes apresentou uma média de 485g. Observou-se um desvio padrão na amostra de 7.1g

Encontre um IC de 95% para a verdadeira média $\mu$.

$$
\begin{aligned}
IC(\mu, 0.95) &= \left[\bar{x} - t_{24,0.025}\frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{24,0.025}\frac{s}{\sqrt{n}}\right] \\
&= \left[485 - 2.06\frac{7.1}{5}; 485 + 2.06\frac{7.1}{5}\right] \\
&= [482.07; 487.93]
\end{aligned}
$$

# Exemplo: Quantas horas de TV você assiste por dia?

O histograma a seguir apresenta a distribuição do número de horas de TV por dia entre os participantes de um estudo em que se coletou uma amostra aleatória.



# Exemplo: horas de TV por dia

Encontre um IC de 95% para a média de horas que uma pessoa assiste por dia. Sabendo que?

$n = 905$ pessoas responderam.

$x_i$ é o número de horas de TV que a pessoa $i$ da amostra assiste.

$\bar{x} = 1.52$ e $s = 1$

Erro padrão da média amostral: $s/\sqrt{n} = 0.03$

# Exemplo: horas de TV por dia

Utilizamos a distribuição Normal e não a distribuição t, pois $n$ é grande.

Pelo TCL: $\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

O IC 95% para $\mu$ fica:

$$IC(\mu, 0.95) = \left[\bar{x} - 1.96\frac{s}{\sqrt{n}};\, \bar{x} + 1.96\frac{s}{\sqrt{n}}\right] = [1.46\,;\, 1.58]$$

Com grau de confiança igual a 95%, estimamos que a média populacional de horas de TV está entre 1.46 e 1.58 horas.

# Exemplo - Leite materno

O Ministério da Saúde está preocupado com quantidade de um certo componente tóxico no leite materno.

Em uma amostra de 20 mulheres, a quantidade do componente para cada uma foi:

```
16 0 0 2 3 6 8 2 5 0 12 10 5 7 2 3 8 17 9 1
```

Obtenha um intervalo de confiança de 95% para a quantidade média do componente no leite materno.

# Exemplo - Solução

$\bar{x} = 5.8$

$s = 5.08$

$n = 20$

$t_{19,0.025} = 2.093$

$$IC(\mu, 0.95) = \left[\bar{x} - t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\,;\,\bar{x} + t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= [3.41, ;\, 8.19]$$

Com grau de confiança igual a 95%, estimamos que a média da quantidade do componente entre as mulheres está entre 3.41 e 8.19.

# Exemplo - Exame

O desvio padrão da pontuação em um certo exame é 11.3. Uma amostra aleatória de 81 estudantes que fizeram o exame foi coletada e a nota de cada estudantes foi anotada. A pontuação média entre os estudantes amostrados foi 74.6.

Encontre um intervalo de 90% de confiança para a pontuação média entre todos os estudantes que fizeram o exame.

$\bar{x} = 74.6$, $\sigma = 11.3$, $n = 81$, $\alpha = 0.10$ e $z_{0.05} = 1.645$

$$
\begin{aligned}
IC(\mu, 0.90) &= \left[74.6 - 1.645\frac{11.3}{9}; \, 74.6 + 1.645\frac{11.3}{9}\right] \\
&= [72.53; \, 76.67]
\end{aligned}
$$

Com grau de confiança igual a 90%, estimamos que a pontuação média entre os estudantes está entre 72.53 e 76.67.

# Exemplo: precisão e tamanho amostral

Qual deve ser o tamanho de uma amostra cuja população da qual ela será sorteada possui um desvio-padrão igual a 10, para que a diferença da média amostral para a média da população, em valor absoluto, seja menor que 1, com coeficiente de confiança igual a:

95%

99%

*Fonte: Morettin & Bussab*, Estatística Básica $5^a$ edição, pág 308.

# Exemplo: precisão e tamanho amostral

Pelo TCL: $\bar{X}_n \sim N(\mu, 10^2/n)$

Queremos $P(|\bar{X} - \mu| < 1) = 0.95$

$$P(-1 < \bar{X} - \mu < 1) = 0.95$$

$$P\left(-\frac{1}{10/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X} - \mu}{10/\sqrt{n}} < \frac{1}{10/\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

O que é equivalente a

$$P\left(-\sqrt{n}/10 < Z < \sqrt{n}/10\right) = 0.95$$

Como $P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$, então

$$\frac{\sqrt{n}}{10} = 1.96 \quad \Rightarrow \quad n \approx 385$$

# Exemplo: precisão e tamanho amostral

De modo análogo, para um grau de confiança de 99%, temos que

$$P(-2.58 < Z < 2.58) = 0.99$$

Então,

$$\sqrt{n}/10 = 2.58 \quad \Rightarrow \quad n \approx 665.$$

Em geral, como já dissemos anteriormente, para uma margem de erro $m$:

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{m}\right)^2 \sigma^2.$$

# Leituras

- Ross: capítulo 8.
- OpenIntro: seção 4.2.
- Magalhães: capítulo 7.