ME414 - Estatística para Experimentalistas

Parte 13

Notas de aula produzidas pelos professores **Samara Kiihl**, **Tatiana Benaglia** e **Benilton Carvalho** e modificadas pela Profa. **Larissa Avila Matos**

Distribuição Normal

Distribuição Normal

Dizemos que uma v.a. X possui distribuição normal com parâmetros μ e σ^2, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$, se a f.d.p. f_X é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \qquad -\infty < x < \infty$$

Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Distribuição Normal

Dizemos que uma v.a. X possui distribuição normal com parâmetros μ e σ^2, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$, se a f.d.p. f_X é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \qquad -\infty < x < \infty$$

Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Distribuição mais importante da Estatística. Também conhecida como distribuição Gaussiana.

Distribuição Normal

Dizemos que uma v.a. X possui distribuição normal com parâmetros μ e σ^2, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$, se a f.d.p. f_X é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \qquad -\infty < x < \infty$$

Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Distribuição mais importante da Estatística. Também conhecida como distribuição Gaussiana.

A esperança e variância de uma v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ são:

$$\mathbb{E}(X) = \mu \qquad \text{e} \qquad Var(X) = \sigma^2$$

Distribuição Normal - Esperança e Variância

Esperança:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \mu$$

Distribuição Normal - Esperança e Variância

Esperança:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \mu$$

Variância

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Distribuição Normal

Gráfico da função de densidade de probabilidade de uma v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Função Densidade: "Forma de sino", centrada em μ e escala controlada por σ^2.

Exemplo: OkCupid

OkCupid é uma rede social para relacionamentos.

Usuários devem colocar características pessoais como, por exemplo, altura.

Exemplo: OkCupid

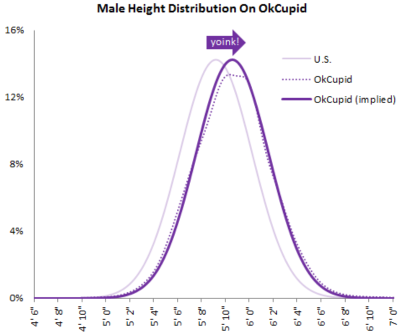
OkCupid é uma rede social para relacionamentos.

Usuários devem colocar características pessoais como, por exemplo, altura.

Será que são sinceros?

Exemplo: OkCupid

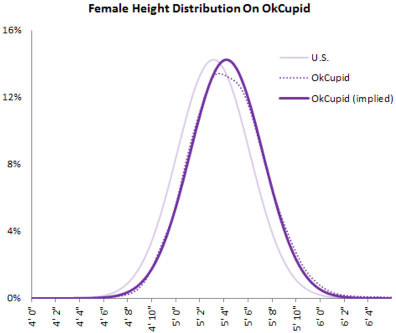
Comparação da distribuição das alturas da população adulta norte-americana e a distribuição das alturas dos usuários do site:



Fonte: http://blog.okcupid.com/index.php/the-biggest-lies-in-online-dating/

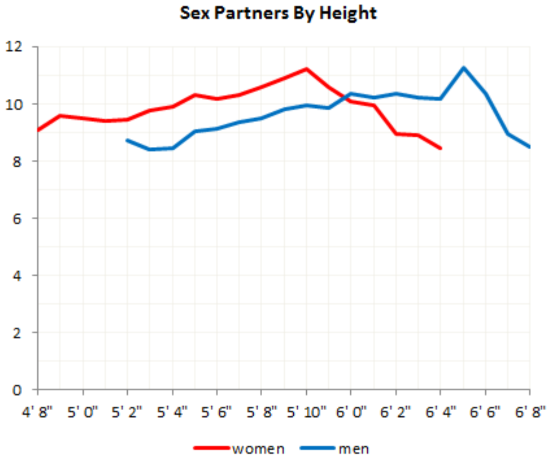
Exemplo: OkCupid

Comparação da distribuição das alturas da população adulta norte-americana e a distribuição das alturas dos usuários do site:



Fonte: http://blog.okcupid.com/index.php/the-biggest-lies-in-online-dating/

Exemplo: OkCupid



Fonte: http://blog.okcupid.com/index.php/the-biggest-lies-in-online-dating/

Distribuição Normal Padrão

Propriedade: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

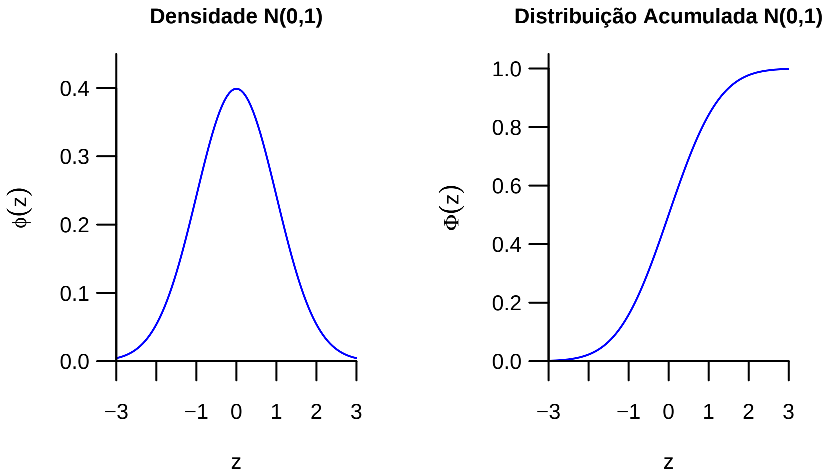
Dizemos que Z tem distribuição **Normal Padrão** e sua densidade se reduz a:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \qquad -\infty < z < \infty$$

A f.d.a. de uma Normal padrão, que denotaremos por Φ, é:

$$\Phi(t) = P(Z \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

Distribuição Normal Padrão



Exemplo: SAT e ACT

Uma universidade americana recebeu inscrição de dois alunos (Pam e Jim) com os respectivos históricos escolares. No entanto, Pam realizou o SAT e tirou 1800, enquanto que o Jim fez o ACT e tirou 24. Como a universidade pode comparar os dois alunos, baseando-se nesses testes?

Exemplo: SAT e ACT

Uma universidade americana recebeu inscrição de dois alunos (Pam e Jim) com os respectivos históricos escolares. No entanto, Pam realizou o SAT e tirou 1800, enquanto que o Jim fez o ACT e tirou 24. Como a universidade pode comparar os dois alunos, baseando-se nesses testes?

Precisamos avaliar quão melhor (ou pior) a Pam foi em relação aos demais alunos que realizaram o SAT.

Exemplo: SAT e ACT

Uma universidade americana recebeu inscrição de dois alunos (Pam e Jim) com os respectivos históricos escolares. No entanto, Pam realizou o SAT e tirou 1800, enquanto que o Jim fez o ACT e tirou 24. Como a universidade pode comparar os dois alunos, baseando-se nesses testes?

Precisamos avaliar quão melhor (ou pior) a Pam foi em relação aos demais alunos que realizaram o SAT.

Precisamos avaliar quão melhor (ou pior) o Jim foi em relação aos demais alunos que realizaram o ACT.

Exemplo: SAT e ACT

A universidade tem acesso à média (1500) e ao desvio-padrão (300) das notas de todos os alunos que realizaram o SAT juntamente com a Pam.

Exemplo: SAT e ACT

A universidade tem acesso à média (1500) e ao desvio-padrão (300) das notas de todos os alunos que realizaram o SAT juntamente com a Pam.

A universidade tem acesso à média (21) e ao desvio-padrão (5) das notas de todos os alunos que realizaram o ACT juntamente com a Jim.

Exemplo: SAT e ACT

A universidade tem acesso à média (1500) e ao desvio-padrão (300) das notas de todos os alunos que realizaram o SAT juntamente com a Pam.

A universidade tem acesso à média (21) e ao desvio-padrão (5) das notas de todos os alunos que realizaram o ACT juntamente com a Jim.

Assumindo que as notas dos dois testes seguem uma distribuição normal:

Exemplo: SAT e ACT

A universidade tem acesso à média (1500) e ao desvio-padrão (300) das notas de todos os alunos que realizaram o SAT juntamente com a Pam.

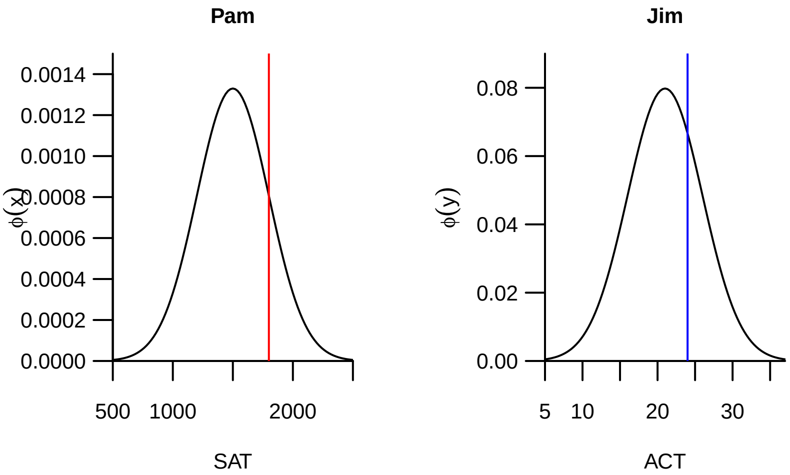
A universidade tem acesso à média (21) e ao desvio-padrão (5) das notas de todos os alunos que realizaram o ACT juntamente com a Jim.

Assumindo que as notas dos dois testes seguem uma distribuição normal:

Seja X uma v.a. representando a nota no SAT:
$X \sim N(\mu = 1500, \sigma = 300)$.

Seja Y uma v.a. representando a nota no ACT: $X \sim N(\mu = 21, \sigma = 5)$.

Exemplo: SAT e ACT



Exemplo: SAT e ACT

Seja X uma v.a. representando a nota no SAT:
$X \sim N(\mu = 1500, \sigma = 300)$.

Exemplo: SAT e ACT

Seja X uma v.a. representando a nota no SAT:
$X \sim N(\mu = 1500, \sigma = 300)$.

Padronizando a v.a. das notas do SAT: $Z_1 = \frac{X-1500}{300} \sim N(0,1)$.

Exemplo: SAT e ACT

Seja X uma v.a. representando a nota no SAT:
$X \sim N(\mu = 1500, \sigma = 300)$.

Padronizando a v.a. das notas do SAT: $Z_1 = \frac{X-1500}{300} \sim N(0,1)$.

Padronizando a nota da Pam:

$\frac{1800-1500}{300} = 1$

Exemplo: SAT e ACT

Seja X uma v.a. representando a nota no SAT:
$X \sim N(\mu = 1500, \sigma = 300)$.

Padronizando a v.a. das notas do SAT: $Z_1 = \frac{X-1500}{300} \sim N(0,1)$.

Padronizando a nota da Pam:

$\frac{1800-1500}{300} = 1$

Seja Y uma v.a. representando a nota no ACT: $Y \sim N(\mu = 21, \sigma = 5)$.

Exemplo: SAT e ACT

Seja X uma v.a. representando a nota no SAT:
$X \sim N(\mu = 1500, \sigma = 300)$.

Padronizando a v.a. das notas do SAT: $Z_1 = \frac{X-1500}{300} \sim N(0,1)$.

Padronizando a nota da Pam:

$\frac{1800-1500}{300} = 1$

Seja Y uma v.a. representando a nota no ACT: $Y \sim N(\mu = 21, \sigma = 5)$.

Padronizando a v.a. das notas do ACT: $Z_2 = \frac{Y-21}{5} \sim N(0,1)$.

Exemplo: SAT e ACT

Seja X uma v.a. representando a nota no SAT:
$X \sim N(\mu = 1500, \sigma = 300)$.

Padronizando a v.a. das notas do SAT: $Z_1 = \frac{X-1500}{300} \sim N(0,1)$.

Padronizando a nota da Pam:

$\frac{1800-1500}{300} = 1$

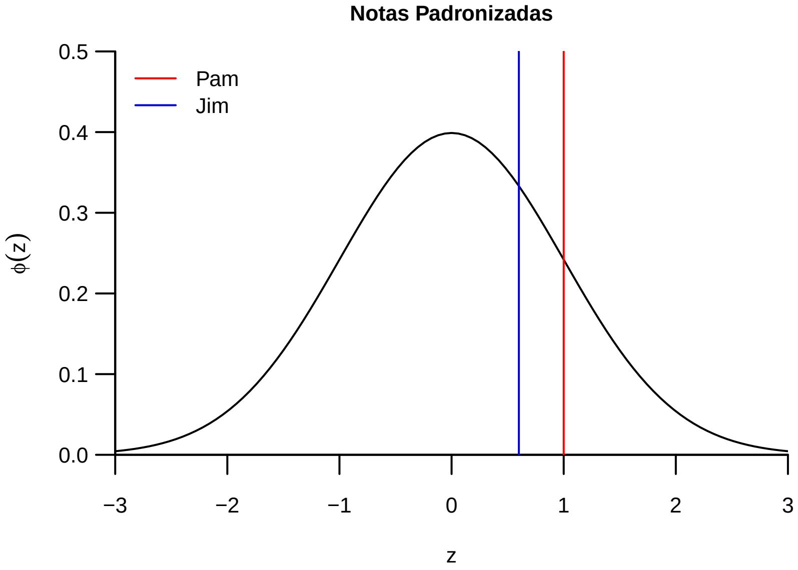
Seja Y uma v.a. representando a nota no ACT: $Y \sim N(\mu = 21, \sigma = 5)$.

Padronizando a v.a. das notas do ACT: $Z_2 = \frac{Y-21}{5} \sim N(0,1)$.

Padronizando a nota do Jim:

$\frac{24-21}{5} = 0.6$

Exemplo: SAT e ACT



Distribuição Normal

- Para calcular as probabilidades, precisamos usar a f.d.a. de $Z \sim N(0, 1)$

$$\Phi(t) = P(Z \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz,$$

que não tem forma fechada, pois e^{-z^2} não tem antiderivada.

Distribuição Normal

- Para calcular as probabilidades, precisamos usar a f.d.a. de $Z \sim N(0,1)$

$$\Phi(t) = P(Z \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz,$$

que não tem forma fechada, pois e^{-z^2} não tem antiderivada.

- Contudo, os valores para $Z \sim N(0,1)$ e $\phi(z)$ encontram-se tabelados.

Distribuição Normal

- Para calcular as probabilidades, precisamos usar a f.d.a. de $Z \sim N(0,1)$

$$\Phi(t) = P(Z \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz,$$

que não tem forma fechada, pois e^{-z^2} não tem antiderivada.

- Contudo, os valores para $Z \sim N(0,1)$ e $\phi(z)$ encontram-se tabelados.
- Tudo o que precisamos fazer é transformar a variável em $N(0,1)$ e usar os valores tabelados. Ou seja, para $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, temos:

Distribuição Normal

- Para calcular as probabilidades, precisamos usar a f.d.a. de $Z \sim N(0,1)$

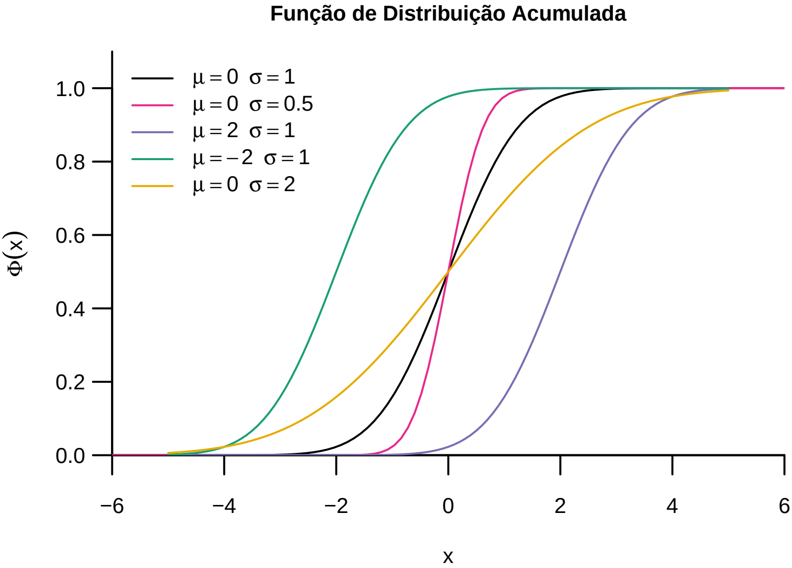
$$\Phi(t) = P(Z \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz,$$

que não tem forma fechada, pois e^{-z^2} não tem antiderivada.

- Contudo, os valores para $Z \sim N(0,1)$ e $\phi(z)$ encontram-se tabelados.
- Tudo o que precisamos fazer é transformar a variável em $N(0,1)$ e usar os valores tabelados. Ou seja, para $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, temos:

$$F_X(a) = P(X \leq a) = P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

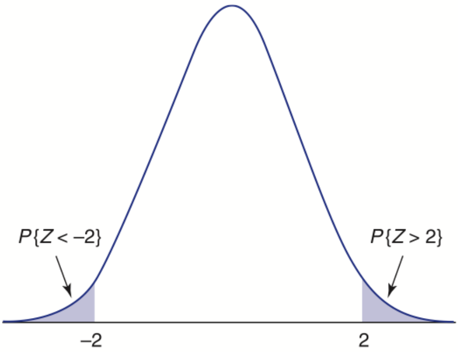
Distribuição Normal



Distribuição Normal - Simetria

A distribuição normal é simétrica, portanto

$$P(Z < -z) = P(Z > z)$$



Distribuição Normal

$Z \sim \text{Normal}(0, 1)$, com f.d.a. Φ:

$$\Phi(t) = P(Z \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

Distribuição Normal

$Z \sim \text{Normal}(0,1)$, com f.d.a. Φ:

$$\Phi(t) = P(Z \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

- $\Phi(0) = 0.5$

Distribuição Normal

$Z \sim \text{Normal}(0, 1)$, com f.d.a. Φ:

$$\Phi(t) = P(Z \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

- $\Phi(0) = 0.5$
- $\Phi(-\infty) = 0$

Distribuição Normal

$Z \sim \text{Normal}(0, 1)$, com f.d.a. Φ:

$$\Phi(t) = P(Z \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

- $\Phi(0) = 0.5$
- $\Phi(-\infty) = 0$
- $\Phi(\infty) = 1$

Distribuição Normal

$Z \sim \text{Normal}(0,1)$, com f.d.a. Φ:

$$\Phi(t) = P(Z \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

- $\Phi(0) = 0.5$
- $\Phi(-\infty) = 0$
- $\Phi(\infty) = 1$
- Por simetria:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= P(Z < x) = P(Z > -x) \\ &= 1 - P(Z < -x) = 1 - \Phi(-x) \end{aligned}$$

Distribuição Normal

A probabilidade de um intervalo é dada por:

$$\begin{aligned} P(a < Z < b) &= P(Z < b) - P(Z < a) \\ &= P(Z \leq b) - P(Z \leq a) \\ &= \Phi(b) - \Phi(a) \end{aligned}$$

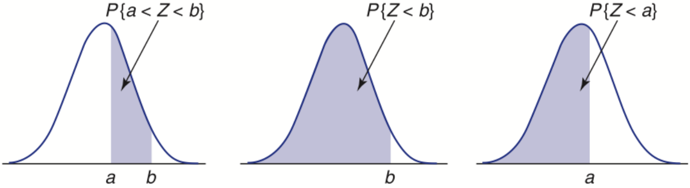
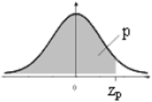


Tabela Normal

Tabela I: Distribuição Normal Padrão Acumulada



Fornece $\Phi(z) = P(-\infty < Z \leq z)$, para todo z, de 0,01 em 0,01, desde z = 0,00 até z = 3,59
A distribuição de Z é Normal(0;1)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177

Exercitando com a tabela da Normal:

Distribuição Normal

Exercitando com a tabela da Normal:

- $\Phi(0.2)$

Distribuição Normal

Exercitando com a tabela da Normal:

- $\Phi(0.2) = 0.5793$
- $\Phi(0.45)$

Distribuição Normal

Exercitando com a tabela da Normal:

- $\Phi(0.2) = 0.5793$
- $\Phi(0.45) = 0.6736$
- $\Phi(1.28)$

Distribuição Normal

Exercitando com a tabela da Normal:

- $\Phi(0.2) = 0.5793$
- $\Phi(0.45) = 0.6736$
- $\Phi(1.28) = 0.8997$
- $\Phi(-0.45)$

Distribuição Normal

Exercitando com a tabela da Normal:

- $\Phi(0.2) = 0.5793$
- $\Phi(0.45) = 0.6736$
- $\Phi(1.28) = 0.8997$
- $\Phi(-0.45) = 1 - \Phi(0.45)$

Distribuição Normal

Exercitando com a tabela da Normal:

- $\Phi(0.2) = 0.5793$
- $\Phi(0.45) = 0.6736$
- $\Phi(1.28) = 0.8997$
- $\Phi(-0.45) = 1 - \Phi(0.45) = 0.3264$

Exemplo: Se $X \sim N(10, 4)$, calcular:

1. $P(8 < X < 10)$
2. $P(9 \leq X \leq 12)$
3. $P(X > 10)$
4. $P(X < 8 \text{ ou } X > 11)$

Fonte: Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 182.

Distribuição Normal

Recorde que se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Neste problema, sabemos que $\mu = 10$ e $\sigma^2 = 4$, logo $\sigma = 2$. Então

$$Z = \frac{(X-10)}{2} \sim N(0,1)$$

Devemos transformar X de modo que o evento $8 < X < 10$ permaneça inalterado. Fazemos isso transformando todos os lados da inequação:

$$\begin{aligned} 8 < X < 10 &\Leftrightarrow 8 - 10 < X - 10 < 10 - 10 \\ &\Leftrightarrow \frac{8-10}{2} < \frac{X-10}{2} < \frac{10-10}{2} \\ &\Leftrightarrow -1 < Z < 0 \end{aligned}$$

Distribuição Normal

Então, $P(8 < X < 10) = P(-1 < Z < 0)$

O valor $\Phi(0)$ está disponível na tabela e é igual a 0.5.

Para obtermos $\Phi(-1)$, devemos usar a simetria da função Φ em torno do zero:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

A tabela nos dá $\Phi(1) = 0.8413 \quad \rightarrow \quad \Phi(-1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

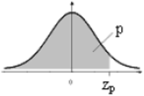
Concluimos portanto que

$$\begin{aligned} P(8 < X < 10) &= P(-1 < Z < 0) \\ &= \Phi(0) - \Phi(-1) \\ &= 0.5 - 0.1587 = 0.3413 \end{aligned}$$

Distribuição Normal

Esta é a tabela da normal, com os valores de $\Phi(1)$ e $\Phi(0)$ destacados:

Tabela I: Distribuição Normal Padrão Acumulada

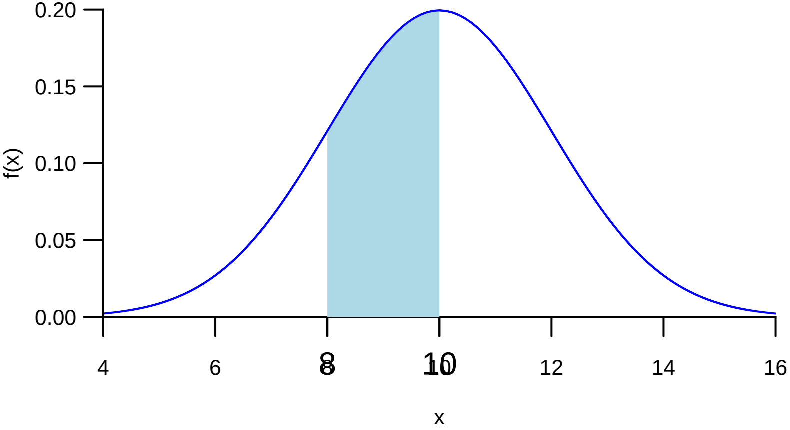


Fornece $\Phi(z) = P(-\infty < Z \leq z)$, para todo z, de 0,01 em 0,01, desde z = 0,00 até z = 3,59
A distribuição de Z é Normal(0;1)

z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	$\boxed{0{,}5000}$	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	$\boxed{0{,}8413}$	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177

Distribuição Normal

Este é o gráfico da curva $N(10, 4)$, com a região $[8, 10]$ correspondente ao item 1. em destaque:



Distribuição Normal

$$
\begin{aligned}
P(9 \leq X \leq 12) &= P\left(\frac{9-10}{2} \leq \frac{X-10}{2} \leq \frac{12-10}{2}\right) \\
&= P(-1/2 \leq Z \leq 1) = 0.5328
\end{aligned}
$$

Distribuição Normal

$$\begin{aligned} P(9 \leq X \leq 12) &= P\left(\frac{9-10}{2} \leq \frac{X-10}{2} \leq \frac{12-10}{2}\right) \\ &= P(-1/2 \leq Z \leq 1) = 0.5328 \end{aligned}$$

$$P(X > 10) = P\left(\frac{X-10}{2} > \frac{10-10}{2}\right) = P(Z > 0) = 0.5$$

Distribuição Normal

$$P(9 \leq X \leq 12) = P\left(\frac{9-10}{2} \leq \frac{X-10}{2} \leq \frac{12-10}{2}\right)$$
$$= P(-1/2 \leq Z \leq 1) = 0.5328$$

$$P(X > 10) = P\left(\frac{X-10}{2} > \frac{10-10}{2}\right) = P(Z > 0) = 0.5$$

$$\begin{aligned}
P(X < 8 \text{ ou } X > 11) &= P(X < 8) + P(X > 11) \\
&= P\left(\frac{X-10}{2} < \frac{8-10}{2}\right) + P\left(\frac{X-10}{2} > \frac{11-10}{2}\right) \\
&= P(Z < -1) + P(Z > 1/2) \\
&= 0.1586 + 0.3085 = 0.4671
\end{aligned}$$

Distribuição Normal

Exemplo: Se $X \sim N(4, 3^2)$, calcule $P(X \leq 7)$ e $P(1 < X \leq 7)$.

Distribuição Normal

Exemplo: Se $X \sim N(4, 3^2)$, calcule $P(X \leq 7)$ e $P(1 < X \leq 7)$.

$$\begin{aligned} F_X(7) = P(X \leq 7) &= P\left(\frac{X-4}{3} \leq \frac{7-4}{3}\right) \\ &= P(Z \leq 1) = \Phi(1) = 0.8413 \end{aligned}$$

Distribuição Normal

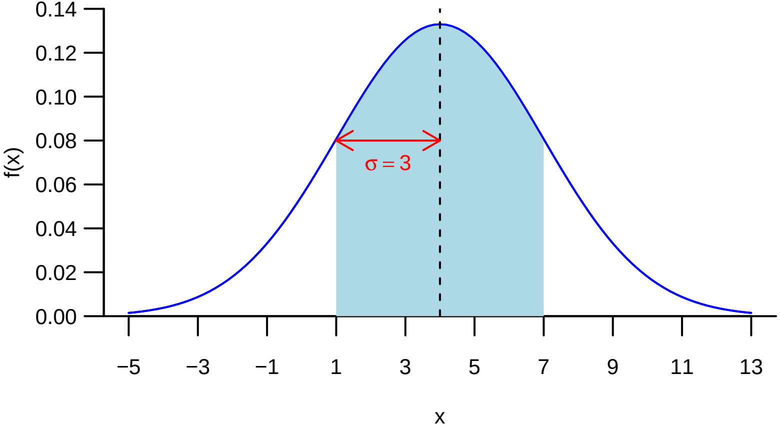
Exemplo: Se $X \sim N(4, 3^2)$, calcule $P(X \leq 7)$ e $P(1 < X \leq 7)$.

$$
\begin{aligned}
F_X(7) = P(X \leq 7) &= P\left(\frac{X-4}{3} \leq \frac{7-4}{3}\right) \\
&= P(Z \leq 1) = \Phi(1) = 0.8413
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(1 < X \leq 7) &= P\left(\frac{1-4}{3} < \frac{X-4}{3} \leq \frac{7-4}{3}\right) \\
&= P(-1 < Z \leq 1) \\
&= \Phi(1) - \Phi(-1) \\
&= \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] \\
&= 2\Phi(1) - 1 = 2 \times 0.8413 - 1 = 0.6826
\end{aligned}
$$

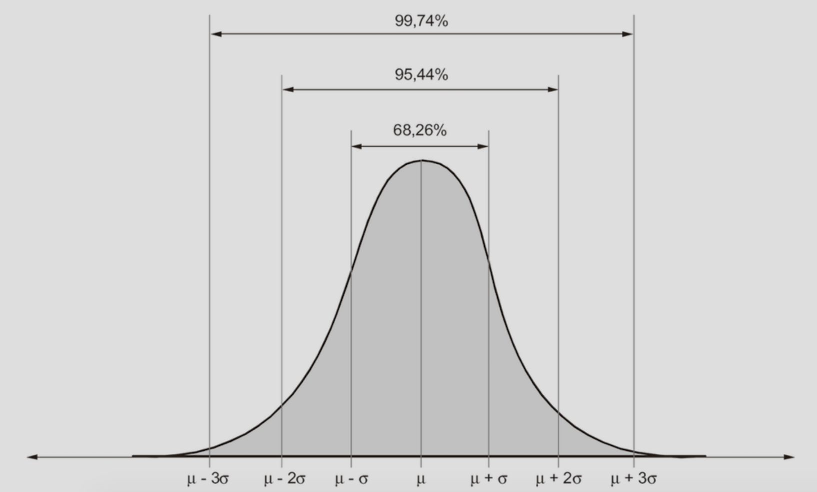
Distribuição Normal

Exemplo: $X \sim N(4, 3^2)$ e a região correspondente a $P(1 < X \leq 7)$ em destaque no gráfico



Regra Empírica

Em uma distribuição normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, temos o seguinte:

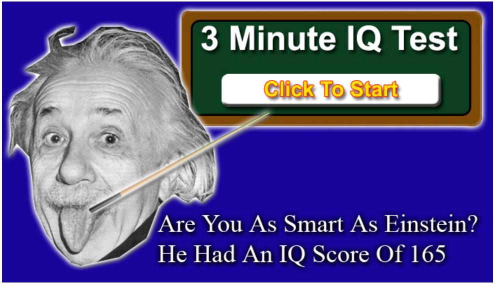


Regra Empírica

Exemplo: Suponha que o QI da população mundial segue uma distribuição normal com média 100 e desvio padrão de 15

Encontre um intervalo que englobe os QI's de 68.3% da população?

E se quisermos 95%? E 99.7%?



Regra Empírica

Como $QI \sim N(100, 15)$, pela regra empírica:

Regra Empírica

Como $QI \sim N(100, 15)$, pela regra empírica:

68.3% da população: $85 \leq QI \leq 115$

Regra Empírica

Como $QI \sim N(100, 15)$, pela regra empírica:

68.3% da população: $85 \leq QI \leq 115$

95% da população: $70 \leq QI \leq 130$

Regra Empírica

Como $QI \sim N(100, 15)$, pela regra empírica:

68.3% da população: $85 \leq QI \leq 115$

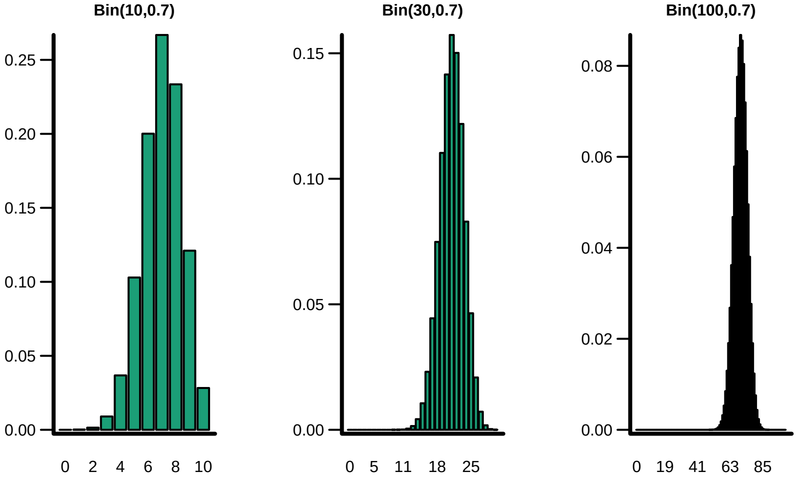
95% da população: $70 \leq QI \leq 130$

99.7% da população: $55 \leq QI \leq 145$

Aproximação Normal para uma Binomial

Seja $X \sim Bin(n, p)$

O que acontece quando o número de ensaios n aumenta?



Aproximação Normal para uma Binomial

Seja $X \sim Bin(n, p)$. Se n é suficientemente grande, a distribuição de X pode ser aproximada pela distribuição normal, isto é,

Aproximação Normal para uma Binomial

Seja $X \sim Bin(n, p)$. Se n é suficientemente grande, a distribuição de X pode ser aproximada pela distribuição normal, isto é,

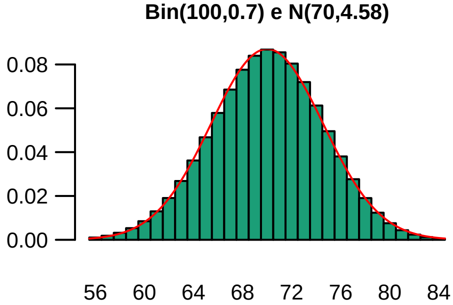
$$X \sim N(np, np(1-p))$$

Aproximação Normal para uma Binomial

Seja $X \sim Bin(n, p)$. Se n é suficientemente grande, a distribuição de X pode ser aproximada pela distribuição normal, isto é,

$$X \sim N(np, np(1-p))$$

Exemplo: Se $X \sim Bin(100, 0.7)$, podemos usar a aproximação $X \sim N(70, 21)$



Aproximação Normal para uma Binomial

Exemplo: Seja X o número de vezes que uma moeda honesta resulta em cara quando é lançada 40 vezes. Então

$$X \sim Bin(40, 0.5)$$

Encontre $P(X = 20)$ usando a fórmula exata e a aproximação normal.

Aproximação Normal para uma Binomial

Exemplo: Seja X o número de vezes que uma moeda honesta resulta em cara quando é lançada 40 vezes. Então

$$X \sim Bin(40, 0.5)$$

Encontre $P(X = 20)$ usando a fórmula exata e a aproximação normal.

- Binomial

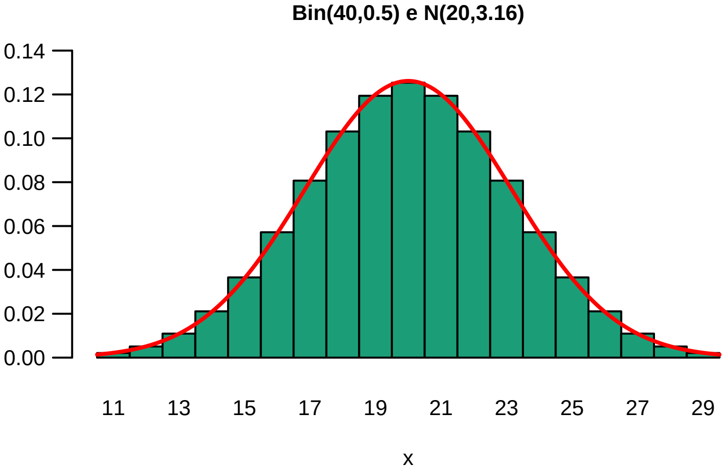
$$P(X = 20) = \binom{40}{20}(0.5)^{20}(0.5)^{20} = 0.125$$

- Normal

$$P(X = 20) \approx P(19.5 < X \leq 20.5) = 0.1256$$

Aproximação Normal para uma Binomial

Exemplo: $X \sim Bin(40, 0.5)$



Aproximação Normal para uma Binomial

Em geral, para que a aproximação para a normal seja utilizada:

$$np \geq 10$$

$$n(1-p) \geq 10$$

Ou seja, pelo menos 10 sucessos e pelo menos 10 fracassos na amostra.

Relembrando: Propriedades da Esperança

1. Para qualquer v.a. X e constantes a e b:

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

   Casos particulares:

   - $\mathbb{E}(X + b) = \mathbb{E}(X) + b$
   - $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$

2. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

Relembrando: Propriedades da Variância

1. Para qualquer v.a. X e constantes a e b:

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

Casos particulares:

- $Var(X + b) = Var(X)$
- $Var(aX) = a^2 Var(X)$

2. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes:

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

Propriedades da Normal

- Se adicionarmos ou multiplicarmos uma constante a uma v.a. com distribuição Normal, a v.a. resultante continua tendo distribuição normal.

Propriedades da Normal

- Se adicionarmos ou multiplicarmos uma constante a uma v.a. com distribuição Normal, a v.a. resultante continua tendo distribuição normal.

- Ou seja, se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Propriedades da Normal

- Se adicionarmos ou multiplicarmos uma constante a uma v.a. com distribuição Normal, a v.a. resultante continua tendo distribuição normal.
- Ou seja, se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.
- Isso explica

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Propriedades da Normal

- Se adicionarmos ou multiplicarmos uma constante a uma v.a. com distribuição Normal, a v.a. resultante continua tendo distribuição normal.
- Ou seja, se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.
- Isso explica

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

- Se X e Y são v.a.'s independentes, tal que $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$, então

$$X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$$

Distribuição Gama

Distribuição Gama

Dizemos que uma v.a. X tem distribuição Gama com parâmetros $\alpha > 0$ (também denominado parâmetro de forma) e $\beta > 0$ (parâmetro de taxa), se sua função densidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \text{ se } x \geq 0 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Notação: $X \sim$ Gama(α, β).

Distribuição Gama

Dizemos que uma v.a. X tem distribuição Gama com parâmetros $\alpha > 0$ (também denominado parâmetro de forma) e $\beta > 0$ (parâmetro de taxa), se sua função densidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \text{ se } x \geq 0 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

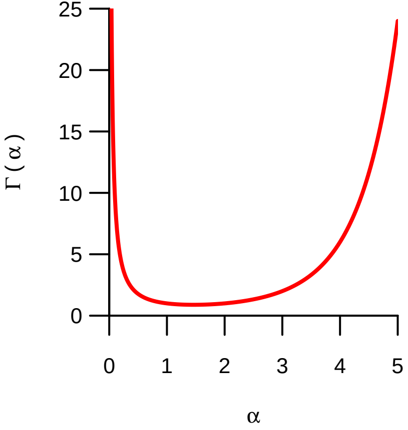
Notação: $X \sim$ Gama(α, β).

A distribuição gama é uma das mais gerais distribuições, pois diversas distribuições são caso particular dela como por exemplo a exponencial, a qui-quadrado, entre outras. Essa distribuição tem como suas principais aplicações à análise de tempo de vida de produtos.

Função Gama

A função gama é definida por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} \mathrm{d}x, \quad \text{para } \alpha > 0$$



Temos que,

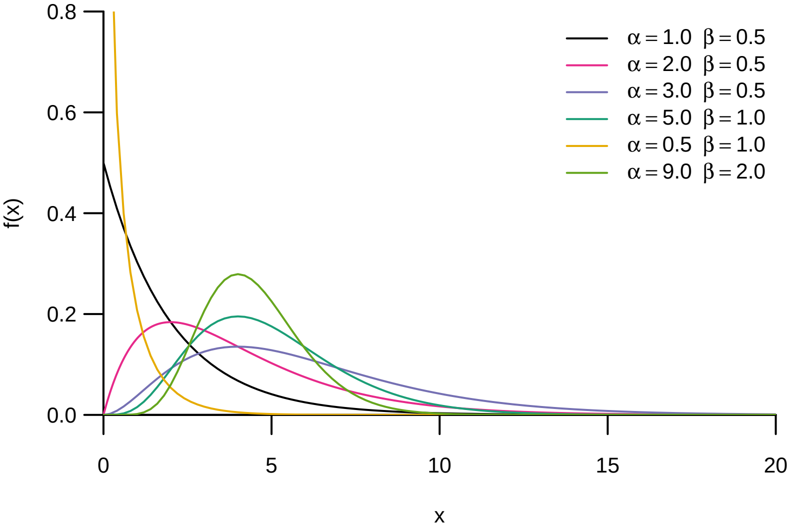
$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1).$

Se α é um número natural, então

$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$

Distribuição Gama

Gráficos da função de densidade de probabilidade:



Distribuição Gama - distribuição acumulada

A função de distribuição acumulada é a função gama regularizada:

$$F(x;\alpha,\beta) = \int_0^x f(u;\alpha,\beta)\,du = \frac{\gamma(\alpha,\beta x)}{\Gamma(\alpha)},$$

onde $\gamma(\alpha,\beta x)$ é a função gama incompleta inferior.

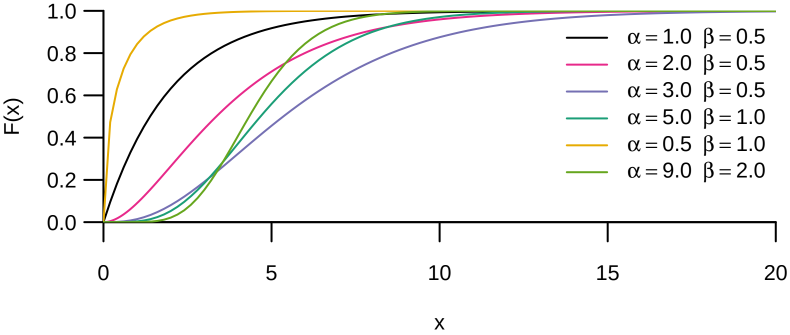
Distribuição Gama - distribuição acumulada

A função de distribuição acumulada é a função gama regularizada:

$$F(x;\alpha,\beta) = \int_0^x f(u;\alpha,\beta)\,du = \frac{\gamma(\alpha,\beta x)}{\Gamma(\alpha)},$$

onde $\gamma(\alpha,\beta x)$ é a função gama incompleta inferior.

Gráficos da função de distribuição acumulada:



Distribuição Gama

Como dito anteriormente, há uma relação estreita entre a distribuição exponencial e a distribuição gama. Temos que, se $\alpha = 1$ a distribuição gama se reduz à distribuição exponencial.

Distribuição Gama

Como dito anteriormente, há uma relação estreita entre a distribuição exponencial e a distribuição gama. Temos que, se $\alpha = 1$ a distribuição gama se reduz à distribuição exponencial.

Se a variável aleatória X é a soma de α variáveis aleatórias independentes, distribuídas exponencialmente cada uma com parâmetro β, então X tem uma densidade Gama com parâmetros α e β. Seja

Distribuição Gama

Como dito anteriormente, há uma relação estreita entre a distribuição exponencial e a distribuição gama. Temos que, se $\alpha = 1$ a distribuição gama se reduz à distribuição exponencial.

Se a variável aleatória X é a soma de α variáveis aleatórias independentes, distribuídas exponencialmente cada uma com parâmetro β, então X tem uma densidade Gama com parâmetros α e β. Seja

$$Y_i \sim \text{Exp}(\beta), \text{ com } i = 1, \cdots, \alpha \text{ e } \alpha \text{ sendo um inteiro positivo.}$$

Então,

Distribuição Gama

Como dito anteriormente, há uma relação estreita entre a distribuição exponencial e a distribuição gama. Temos que, se $\alpha = 1$ a distribuição gama se reduz à distribuição exponencial.

Se a variável aleatória X é a soma de α variáveis aleatórias independentes, distribuídas exponencialmente cada uma com parâmetro β, então X tem uma densidade Gama com parâmetros α e β. Seja

$$Y_i \sim \text{Exp}(\beta), \text{ com } i = 1, \cdots, \alpha \text{ e } \alpha \text{ sendo um inteiro positivo.}$$

Então,

$$X = \sum_{i=1}^{\alpha} Y_i \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$$

Esperança de Variância

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

Esperança de Variância

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Esperança de Variância

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Demontração:

Esperança de Variância

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Demontração: Seja $Y_i \sim \text{Exp}(\beta)$, com $i = 1, \cdots, \alpha$ e α um inteiro positivo.

Esperança de Variância

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Demontração: Seja $Y_i \sim \text{Exp}(\beta)$, com $i = 1, \cdots, \alpha$ e α um inteiro positivo.

$$E(X) = E(\sum_{i=1}^{\alpha} Y_i) = \sum_{i=1}^{\alpha} E(Y_i) =$$

Esperança de Variância

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Demontração: Seja $Y_i \sim \text{Exp}(\beta)$, com $i = 1, \cdots, \alpha$ e α um inteiro positivo.

$$E(X) = E(\sum_{i=1}^{\alpha} Y_i) = \sum_{i=1}^{\alpha} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Esperança de Variância

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Demontração: Seja $Y_i \sim \text{Exp}(\beta)$, com $i = 1, \cdots, \alpha$ e α um inteiro positivo.

$$E(X) = E(\sum_{i=1}^{\alpha} Y_i) = \sum_{i=1}^{\alpha} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$Var(X) = Var(\sum_{i=1}^{\alpha} Y_i) = \sum_{i=1}^{\alpha} Var(Y_i) =$$

Esperança de Variância

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Demontração: Seja $Y_i \sim \text{Exp}(\beta)$, com $i = 1, \cdots, \alpha$ e α um inteiro positivo.

$$E(X) = E(\sum_{i=1}^{\alpha} Y_i) = \sum_{i=1}^{\alpha} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$Var(X) = Var(\sum_{i=1}^{\alpha} Y_i) = \sum_{i=1}^{\alpha} Var(Y_i) = \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Exemplo

Suponha que o tempo gasto por um funcionário selecionado aleatoriamente para realizar uma tarefa em uma empresa tem uma distribuição gama com média 20 minutos e variância de 80 minutos^2.

Quais são os parâmetros da distribuição gama utilizada?

Qual é a probabilidade de um funcionário realizar a tarefa em no máximo 24 minutos?

Qual é a probabilidade de um funcionário passar entre 20 e 40 minutos realizando a tarefa?

Exemplo

Suponha que o tempo gasto por um funcionário selecionado aleatoriamente para realizar uma tarefa em uma empresa tem uma distribuição gama com média 20 minutos e variância de 80 minutos^2.

Quais são os parâmetros da distribuição gama utilizada?

Qual é a probabilidade de um funcionário realizar a tarefa em no máximo 24 minutos?

Qual é a probabilidade de um funcionário passar entre 20 e 40 minutos realizando a tarefa?

Seja $T =$ tempo gasto para realizar a tarefa, $T \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$.

Exemplo

Suponha que o tempo gasto por um funcionário selecionado aleatoriamente para realizar uma tarefa em uma empresa tem uma distribuição gama com média 20 minutos e variância de 80 minutos^2.

Quais são os parâmetros da distribuição gama utilizada?

Qual é a probabilidade de um funcionário realizar a tarefa em no máximo 24 minutos?

Qual é a probabilidade de um funcionário passar entre 20 e 40 minutos realizando a tarefa?

Seja $T =$ tempo gasto para realizar a tarefa, $T \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$.

Lembre-se que a esperança de uma v.a. Gama é dada por $E(T) = \frac{\alpha}{\beta}$ e sua variância por $\text{Var}(T) = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

Exemplo

Temos o seguinte sistema,

Exemplo

Temos o seguinte sistema,

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} & = & 20 \\ \frac{\alpha}{\beta^2} & = & 80 \end{cases}$$

Exemplo

Temos o seguinte sistema,

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} & = & 20 \\ \frac{\alpha}{\beta^2} & = & 80 \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{cases} \alpha & = & 20\beta \\ \frac{20\beta}{\beta^2} & = & 80 \end{cases}$$

Exemplo

Temos o seguinte sistema,

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} & = & 20 \\ \frac{\alpha}{\beta^2} & = & 80 \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{cases} \alpha & = & 20\beta \\ \frac{20\beta}{\beta^2} & = & 80 \end{cases}$$

$\Rightarrow 20 = 80\beta$

Exemplo

Temos o seguinte sistema,

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} & = & 20 \\ \frac{\alpha}{\beta^2} & = & 80 \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{cases} \alpha & = & 20\beta \\ \frac{20\beta}{\beta^2} & = & 80 \end{cases}$$

$\Rightarrow 20 = 80\beta$

$\Rightarrow \beta = \frac{20}{80} = \frac{1}{4} = 0,25$

Exemplo

Temos o seguinte sistema,

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} & = & 20 \\ \frac{\alpha}{\beta^2} & = & 80 \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{cases} \alpha & = & 20\beta \\ \frac{20\beta}{\beta^2} & = & 80 \end{cases}$$

$\Rightarrow 20 = 80\beta$

$\Rightarrow \beta = \frac{20}{80} = \frac{1}{4} = 0,25$

$\Rightarrow \alpha = 20\beta = 20 * 0,25 = 5$

Exemplo

Temos o seguinte sistema,

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} & = & 20 \\ \frac{\alpha}{\beta^2} & = & 80 \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{cases} \alpha & = & 20\beta \\ \frac{20\beta}{\beta^2} & = & 80 \end{cases}$$

$\Rightarrow 20 = 80\beta$

$\Rightarrow \beta = \frac{20}{80} = \frac{1}{4} = 0,25$

$\Rightarrow \alpha = 20\beta = 20 * 0,25 = 5$

$$\Rightarrow T \sim \text{Gama}(5, 0, 25)$$

A probabilidade de um funcionário realizar a tarefa em no máximo 24 minutos, é dada por

$$P(X \leq 24)$$

A probabilidade de um funcionário realizar a tarefa em no máximo 24 minutos, é dada por

$$P(X \leq 24) = \frac{\gamma(5,6)}{\Gamma(5)} = \frac{17.1586440}{24} = 0.7149435$$

A probabilidade de um funcionário realizar a tarefa em no máximo 24 minutos, é dada por

$$P(X \leq 24) = \frac{\gamma(5,6)}{\Gamma(5)} = \frac{17.1586440}{24} = 0.7149435$$

A probabilidade de um funcionário passar entre 20 e 40 minutos realizando a tarefa é dada por

$$P(20 < X < 40)$$

A probabilidade de um funcionário realizar a tarefa em no máximo 24 minutos, é dada por

$$P(X \leq 24) = \frac{\gamma(5,6)}{\Gamma(5)} = \frac{17.1586440}{24} = 0.7149435$$

A probabilidade de um funcionário passar entre 20 e 40 minutos realizando a tarefa é dada por

$$P(20 < X < 40) \quad = \quad P(X \leq 40) - P(X \leq 20)$$

A probabilidade de um funcionário realizar a tarefa em no máximo 24 minutos, é dada por

$$P(X \leq 24) = \frac{\gamma(5,6)}{\Gamma(5)} = \frac{17.1586440}{24} = 0.7149435$$

A probabilidade de um funcionário passar entre 20 e 40 minutos realizando a tarefa é dada por

$$\begin{aligned} P(20 < X < 40) &= P(X \leq 40) - P(X \leq 20) \\ &= \frac{\gamma(5,10)}{\Gamma(5)} - \frac{\gamma(5,5)}{\Gamma(5)} \\ &= \frac{23.2979355}{24} - \frac{13.4281612}{24} = 0.4112406 \end{aligned}$$

Exercício

Para cada cliente que entra na fila do caixa de uma loja de roupas:

1. O tempo de espera na fila segue uma distribuição de probabilidade exponencial com média de 5 minutos;
2. O tempo de atendimento segue uma distribuição de probabilidade exponencial com média de 3 minutos;

Sabendo que esses dois tempos são v.a.'s independentes.

Para a variável T= tempo total do cliente no caixa (incluindo a espera na fila e o atendimento), determine a densidade, a esperança e o desvio padrão.

Distribuição Gama

Relação entre a distribuição Poisson e a distribuição Gamma:

Teorema: Se o número de ocorrências de um processo de contagem segue distribuição de Poisson(λ), então a variável aleatória "Tempo até a n-ésima ocorrência" do referido processo tem distribuição Gama(n,λ).

Exemplo

As falhas em CPU's de computadores usualmente são modeladas por processos de Poisson. Isso porque, tipicamente, as falhas não são causadas por desgaste, mas por eventos externos ao sistema. Assuma que as unidades que falham sejam imediatamente reparadas e que o número médio de falhas por hora seja 0,0001. Determine a probabilidade de que:

- o tempo até a quarta falha exceda 40.000 horas.

Distribuição Beta

Distribuição Beta

Dizemos que uma v.a. X tem distribuição Beta com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, se sua função densidade é dada por

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad x \in (0,1) \text{ e } \alpha, \beta > 0$$

Notação: $X \sim$ Beta(α, β).

Distribuição Beta

Dizemos que uma v.a. X tem distribuição Beta com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, se sua função densidade é dada por

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad x \in (0,1) \text{ e } \alpha, \beta > 0$$

Notação: $X \sim$ Beta(α, β).

Os parâmetros α e β definem a forma da distribuição. Se $\alpha = \beta$, a distribuição é simétrica, se $\alpha > \beta$, a assimetria é negativa e, no caso de $\alpha < \beta$, sua assimetria é positiva.

A distribuição Beta é frequentemente usada para modelarmos a proporção, ou modelagem de objetos que pertenceção ao intervalo $(0,1)$, pois essa distribuição está definida neste intervalo.

Distribuição Beta

A função distribuição acumulada é

$$F(x;\alpha,\beta) = \frac{\mathrm{B}(x;\alpha,\beta)}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} = \frac{\int_0^x t^{a-1}\,(1-t)^{b-1}\,dt}{B(\alpha,\beta)} = I_x(\alpha,\beta)$$

onde $\mathrm{B}(x;\alpha,\beta)$ é a função beta incompleta e $I_x(\alpha,\beta)$ é a função beta incompleta regularizada.

Distribuição Beta

A função distribuição acumulada é

$$F(x;\alpha,\beta) = \frac{\mathrm{B}(x;\alpha,\beta)}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} = \frac{\int_0^x t^{a-1}\,(1-t)^{b-1}\,dt}{B(\alpha,\beta)} = I_x(\alpha,\beta)$$

onde $\mathrm{B}(x;\alpha,\beta)$ é a função beta incompleta e $I_x(\alpha,\beta)$ é a função beta incompleta regularizada.

- Esperança de Variância

$$E(X) = \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Distribuição Beta

A função distribuição acumulada é

$$F(x;\alpha,\beta) = \frac{\mathrm{B}(x;\alpha,\beta)}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} = \frac{\int_0^x t^{a-1}\,(1-t)^{b-1}\,dt}{B(\alpha,\beta)} = I_x(\alpha,\beta)$$

onde $\mathrm{B}(x;\alpha,\beta)$ é a função beta incompleta e $I_x(\alpha,\beta)$ é a função beta incompleta regularizada.

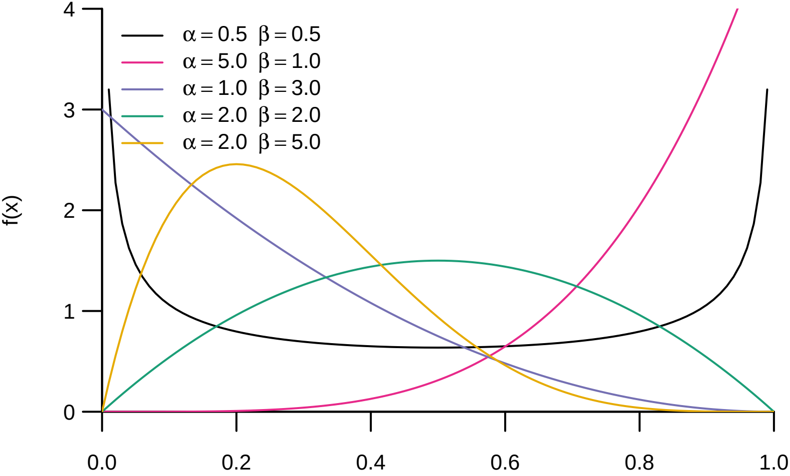
- Esperança de Variância

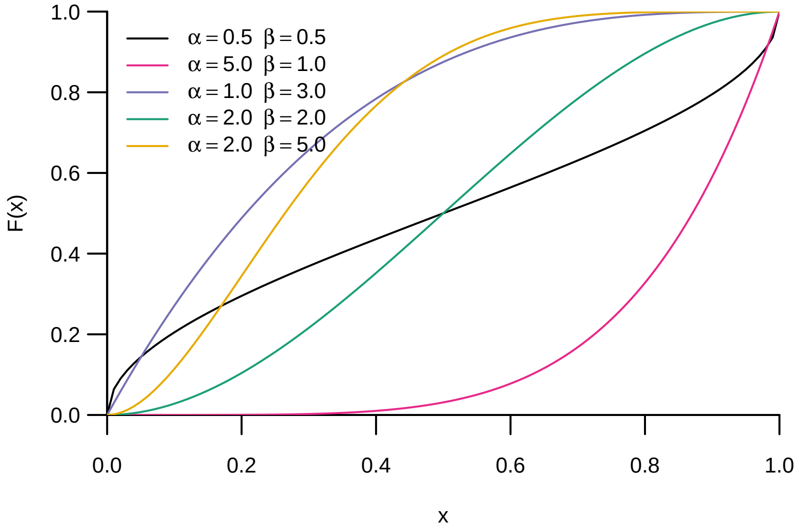
$$E(X) = \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \tfrac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \tfrac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} = \tfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

Distribuição Beta

Gráficos da função de densidade de probabilidade e da função de distribuição acumulada:

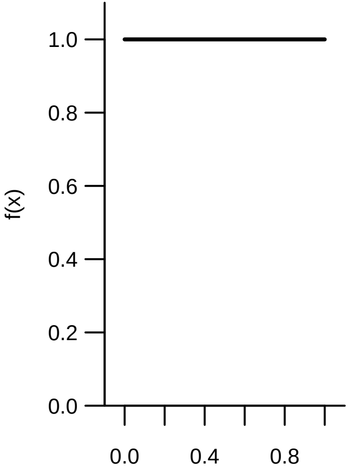


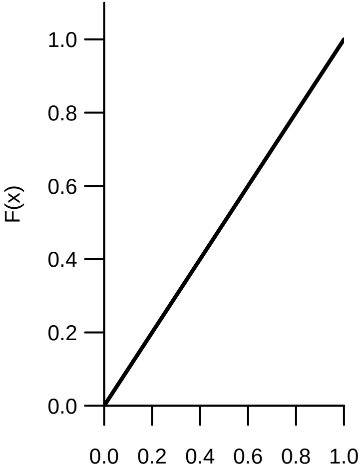


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
F(x)
$\alpha = 0.5$ $\beta = 0.5$
$\alpha = 5.0$ $\beta = 1.0$
$\alpha = 1.0$ $\beta = 3.0$
$\alpha = 2.0$ $\beta = 2.0$
$\alpha = 2.0$ $\beta = 5.0$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x

Distribuição Beta

- Caso paticular: se $\alpha = \beta = 1$, a densidade de Beta se reduz à Uniforme no intervalo $(0, 1)$.





Exemplo

A percentagem de impurezas por lote, em um determinado produto químico, é uma variável aleatória com distribuição Beta de parâmetros $\alpha = 3$ e $\beta = 2$. Um lote com mais de 40% de impurezas não pode ser vendido.

1. Qual é a probabilidade de que um lote selecionado ao acaso não poder ser vendidos por causa do excesso de impurezas?

2. Quantos lotes em média são selecionados ao acaso até que se encontre um que não pode ser vendidos por causa do excesso de impurezas?

3. Qual a porcentagem média de impurezas nos lotes desse produto químico?

Exemplo

1. Seja X=percentagem de impurezas em um lote. Queremos encontrar $P(X > 0,4)$.

Exemplo

1. Seja X=percentagem de impurezas em um lote. Queremos encontrar $P(X > 0,4)$.
   Pelo enunciado temos que $X \sim \text{Beta}(3,2)$. Então, a função densidade de X, para $0 < x < 1$, é dada por:

$$f(x) = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(3)\Gamma(2)} x^2(1-x), \quad x \in (0,1)$$

$$\Rightarrow f(x) = 12x^2(1-x), \quad x \in (0,1)$$

Exemplo

1. Seja X=percentagem de impurezas em um lote. Queremos encontrar $P(X > 0,4)$.
   Pelo enunciado temos que $X \sim \text{Beta}(3,2)$. Então, a função densidade de X, para $0 < x < 1$, é dada por:

$$f(x) = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(3)\Gamma(2)} x^2(1-x), \quad x \in (0,1)$$

$$\Rightarrow f(x) = 12x^2(1-x), \quad x \in (0,1)$$

   Então,

$$P(X > 0,4) = \int_{0,4}^{1} 12x^2(1-x)\mathrm{d}x = 12\int_{0,4}^{1} x^2 - x^3\mathrm{d}x = 0,8208$$

Exemplo

2. Seja $Y =$ números de lotes selecionados ao acaso até que se encontre um que não pode ser vendido por excesso de impureza.

   Queremos $E(Y)$.

Exemplo

2. Seja Y = números de lotes selecionados ao acaso até que se encontre um que não pode ser vendido por excesso de impureza.

   Queremos $E(Y)$.

   Temos que Y tem distribuição geométrica, ou seja, $Y \sim \mathrm{G}(p = 0,8208)$.

Exemplo

2. Seja Y = números de lotes selecionados ao acaso até que se encontre um que não pode ser vendido por excesso de impureza.

   Queremos $E(Y)$.

   Temos que Y tem distribuição geométrica, ou seja, $Y \sim \mathrm{G}(p = 0,8208)$.

   Então,
   $E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,8208} = 1,218.$

Exemplo

2. Seja Y = números de lotes selecionados ao acaso até que se encontre um que não pode ser vendido por excesso de impureza.

   Queremos $E(Y)$.

   Temos que Y tem distribuição geométrica, ou seja,
   $Y \sim \mathrm{G}(p = 0,8208)$.

   Então,
   $E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}8208} = 1,218.$
3. Queremos calcular E(X).

Exemplo

2. Seja Y = números de lotes selecionados ao acaso até que se encontre um que não pode ser vendido por excesso de impureza.

   Queremos $E(Y)$.

   Temos que Y tem distribuição geométrica, ou seja,
   $Y \sim \mathrm{G}(p = 0,8208)$.

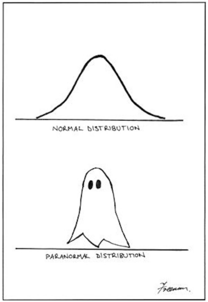
   Então,
   $E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}8208} = 1,218.$

3. Queremos calcular E(X).

   Como $X \sim \mathrm{Beta}(3,2)$, sabemos que $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{3}{5} = 0,6.$

   Ou seja, a porcentagem média de impurezas nos lotes desse produto químico é de 60%.

Leituras



- Ross: seções 6.3 a 6.7.
- OpenIntro: seções 3.1, 3.2, 3.4.2
- Magalhães: capítulo 6.