ME414 - Estatística para Experimentalistas

Parte 20

Notas de aula produzidas pelos professores **Samara Kiihl**, **Tatiana Benaglia** e **Benilton Carvalho** e modificadas pela Profa. **Larissa Avila Matos**

Inferência para duas populações: Teste de hipótese para duas médias

Teste de hipótese para duas médias

População 1: Coletamos uma amostra aleatória $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de uma população com média μ_1 e a variância σ_1^2 e usamos $\bar{X}$ para estimar μ_1.

População 2: Coletamos uma amostra aleatória $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ de uma população com média μ_2 e a variância σ_2^2 e usamos $\bar{Y}$ para estimar μ_2.

A população 1 é independente da população 2.

Teste de hipótese para duas médias

Condições:

1. As populações 1 e 2 são aproximadamente normais ou
2. Os tamanhos amostrais n e m são suficientemente grandes.

Se pelo menos uma das condições acima é satisfeita, temos:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n}\right) \quad \text{e} \quad \bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{m}\right)$$

Teste de hipótese para duas médias ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)

Caso 1: Variâncias diferentes e conhecidas

Assumindo que as duas amostras $X_1, \ldots, X_n$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ são independentes com $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ conhecidas, temos:

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right)$$

Teste de hipótese para duas médias ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)

Caso 1: Variâncias diferentes e conhecidas

Temos interesse em: H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ vs H_a: $\mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$ (ou H_a: $\mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$ ou H_a: $\mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$).

E daí, sob H_0, temos que:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \overbrace{(\mu_1 - \mu_2)}^{\Delta_0}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

Teste de hipótese para duas médias ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)

Se temos interesse em: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0 \quad vs \quad H_a : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$.

Uma amostra aleatória de tamanho m é coletada da população X e calcula-se a média amostral, $\bar{x}$. Similarmente, para a população Y, temos $\bar{y}$ obtida a partir de uma amostra aleatória de tamanho n.

$$\begin{aligned}\text{p-valor} &= P\left(\frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m}} \geq \frac{\bar{x} - \bar{y} - \Delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m}}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{\bar{x} - \bar{y} - \Delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{x} - \bar{y} - \Delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m}}\right),\end{aligned}$$

em que $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ para $Z \sim N(0, 1)$.

Teste de hipótese para duas médias ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)

Se temos interesse em: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0 \quad vs \quad H_a : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$.

$$\begin{aligned}
\text{p-valor} &= P\left(\frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \leq \frac{\bar{x} - \bar{y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}\right) \\
&= P\left(Z \leq \frac{\bar{x} - \bar{y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}\right) = \Phi\left(\frac{\bar{x} - \bar{y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}\right)
\end{aligned}$$

em que $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ para $Z \sim N(0, 1)$.

Teste de hipótese para duas médias ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)

Se temos interesse em: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0 \quad vs \quad H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$.

$$\begin{aligned}
\text{p-valor} &= P\left(\frac{|\bar{X} - \bar{Y} - \Delta_0|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \geq \frac{|\bar{x} - \bar{y} - \Delta_0|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}\right) \\
&= P\left(|Z| \geq \frac{|\bar{x} - \bar{y} - \Delta_0|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}\right) = 2 \times \left[1 - \Phi\left(\frac{|\bar{x} - \bar{y} - \Delta_0|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}\right)\right]
\end{aligned}$$

em que $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ para $Z \sim N(0, 1)$.

Teste de hipótese para duas médias ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)

Caso 2: Variâncias iguais e conhecidas

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m}\right)$$

Temos interesse em: H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ vs H_a: $\mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$ (ou H_a: $\mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$ ou H_a: $\mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$).

E daí, sob H_0, temos que:

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \overbrace{(\mu_1 - \mu_2)}^{\Delta_0}}{\sqrt{\sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}} \sim N(0,1)$$

Teste de hipótese para duas médias ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ desconhecidas)

Caso 3: Variâncias iguais e desconhecidas

Assim como no caso de uma média com variância desconhecida, usamos uma estimativa de σ^2 e a distribuição normal é substituída pela distribuição t.

No caso de duas populações, o estimador da variância σ^2 é a combinação das variâncias amostrais de cada população, ou seja,

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2},$$

sendo S_i^2 é a variância amostral da população i.

Teste de hipótese para duas médias ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ desconhecidas)

Quando σ^2 é conhecida:

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma^2(1/n + 1/m)}} \sim N(0,1)$$

Quando σ^2 é desconhecida:

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2(1/n + 1/m)}} \sim t_{n+m-2}$$

Teste de hipótese para duas médias ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ desconhecidas)

Temos interesse em: H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ vs H_a: $\mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$ (ou H_a: $\mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$ ou H_a: $\mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$).

E daí, sob H_0, temos que:

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \overbrace{(\mu_1 - \mu_2)}^{\Delta_0}}{\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}} \sim t_{n+m-2}$$

Observação: Se n e m são pequenos, as duas amostras devem vir de populações aproximadamente normais. Se n e m são grandes, então a distribuição t com $n + m - 2$ graus de liberdade aproxima-se de uma normal.

Resumo: Teste de hipótese para duas médias

Para H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ vs H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$

Variâncias	Estatística do teste	Valor crítico para α	Valor de p
Diferentes e conhecidas ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)	$Z = \dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0, 1)$	rejeitar se $\mid z_{obs} \mid \geq z_{\alpha/2}$	$2P(Z \geq \mid z_{obs} \mid)$
Iguais e conhecidas ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)	$Z = \dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \Delta_0}{\sqrt{\sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}} \sim N(0, 1)$	rejeitar se $\mid z_{obs} \mid \geq z_{\alpha/2}$	$2P(Z \geq \mid z_{obs} \mid)$
Iguais e desconhecidas ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)	$T = \dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \Delta_0}{\sqrt{S_p^2(1/m + 1/n)}} \sim t_{n+m-2}$	rejeitar se $\mid t_{obs} \mid \geq t_{n+m-2,\alpha/2}$	$2P(T \geq \mid t_{obs} \mid)$

Resumo: Teste de hipótese para duas médias

Para H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ vs H_1: $\mu_1 - \mu_2 \leq \Delta_0$

Variâncias	Estatística do teste	Valor crítico para α	Valor de p
Diferentes e conhecidas ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)	$Z = \dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$	rejeitar se $z_{obs} \leq -z_\alpha$	$P(Z \leq z_{obs})$
Iguais e conhecidas ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)	$Z = \dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \Delta_0}{\sqrt{\sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}} \sim N(0,1)$	rejeitar se $z_{obs} \leq -z_\alpha$	$P(Z \leq z_{obs})$
Iguais e desconhecidas ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)	$T \sim \dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \Delta_0}{\sqrt{S_p^2(1/m + 1/n)}} \sim t_{n+m-2}$	rejeitar se $t_{obs} \leq -t_{n+m+2,\alpha}$	$P(T \leq t_{obs})$

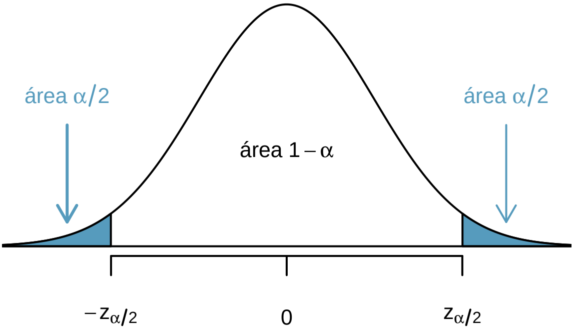
Resumo: Teste de hipótese para duas médias

Para H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ vs H_1: $\mu_1 - \mu_2 \geq \Delta_0$

Variâncias	Estatística do teste	Valor crítico para α	Valor de p
Diferentes e conhecidas ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)	$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0, 1)$	rejeitar se $z_{obs} \geq z_\alpha$	$P(Z \geq z_{obs})$
Iguais e conhecidas ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)	$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \Delta_0}{\sqrt{\sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}} \sim N(0, 1)$	rejeitar se $z_{obs} \geq z_\alpha$	$P(Z \geq z_{obs})$
Iguais e desconhecidas ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$)	$T \sim \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \Delta_0}{\sqrt{S_p^2(1/m + 1/n)}} \sim t_{n+m-2}$	rejeitar se $t_{obs} \geq t_{n+m+2,\alpha}$	$P(T \geq t_{obs})$

Relembrando: Como encontrar $z_{\alpha/2}$

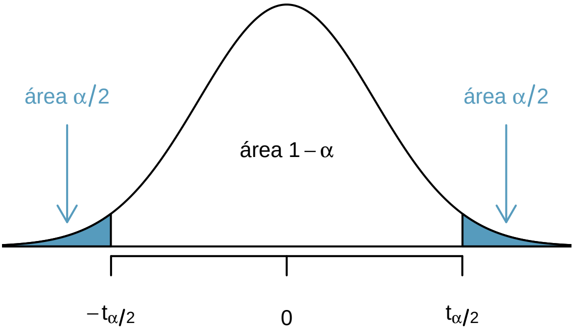
$$P(|Z| \leq z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$



Procure na tabela o valor de z tal que a probabilidade acumulada até o valor de z, isto é $P(Z \leq z) = \Phi(z)$, seja $1 - \alpha/2$.

Relembrando: Como encontrar $t_{\nu,\alpha/2}$

$$P(-t_{\nu,\alpha/2} < T < t_{\nu,\alpha/2}) = 1 - \alpha$$



Nesse caso, $\nu = n + m - 2$ e os valores da distribuição t encontram-se tabelados.

Exemplo: tempo de incubação de dois vírus

O tempo de incubação do vírus 1 segue uma distribuição normal com média μ_1 e desvio padrão $\sigma_1 = \sqrt{2}$.

Por outro lado, o tempo de incubação do vírus 2 segue uma distribuição normal com média μ_2 e desvio padrão $\sigma_2 = 1$.

Os tempos de incubação de ambos os vírus são considerados independentes.

Afirma-se que em média, o tempo de incubação do vírus 1 é 3 meses depois do tempo médio de incubação do vírus 2.

Exemplo: tempo de incubação de dois vírus

Realizaram um estudo de controle e os tempos de incubação registrados foram (tempo em meses):

- X: tempo de incubação do vírus 1 (20 observações)

```
 [1] 4.56 3.72 3.45 2.86 4.03 4.08 6.56 4.31 0.42 5.56 5.92 2.65 4.54 4.04
[15] 4.23 6.24 6.16 5.46 3.22 2.28
```

- Y: tempo de incubação do vírus 2 (22 observações)

```
 [1] 2.44 1.49 2.68 2.60 1.51 1.60 1.47 3.70 2.22 1.78 2.36 1.56 2.98 3.33
[15] 2.22 0.58 2.26 2.26 1.92 0.50 1.17 1.70
```

Exemplo: tempo de incubação de dois vírus

Recentemente, pacientes contaminados com os vírus foram avaliados e suspeita-se que talvez o tempo de incubação do vírus 1 não seja 3 meses depois do tempo médio de incubação do vírus 2.

Definindo as hipóteses as serem testadas:

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 3 \quad vs \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 3$

Os dados coletados serão usados para avaliar se temos ou não evidências contra H_0.

Vamos calcular a média amostral das duas populações: $\bar{x} = 4.21$ e $\bar{y} = 2.02$.

Pelo enunciado, as duas populações são normais e as variâncias são conhecidas: $\sigma_1^2 = 2$ e $\sigma_2^2 = 1$. Veja que as populações são normais, variâncias diferentes mas conhecidas. Além disso, $n = 20$ e $m = 22$.

Exemplo: tempo de incubação de dois vírus

$$
\begin{aligned}
\text{p-valor} &= P\left(\frac{|\bar{X}-\bar{Y}-\Delta_0|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}} \geq \frac{|4.21-2.02-3|}{\sqrt{\frac{2}{22}+\frac{1}{20}}}\right) \\
&= P\left(|Z| \geq 2.12\right) = 2 \times P\left(Z \geq 2.12\right) \\
&= 2 \times \left[1-\Phi\left(2.12\right)\right] = 2 \times \left[1-0.983\right] = 0.034
\end{aligned}
$$

Se $\alpha = 0.01$, como p-valor=0.034 $> \alpha = 0.01$, não temos evidência para rejeitar $H_0 : \mu_1 = 3 + \mu_2$ com nível de significância 0.01.

Valor crítico para $\alpha = 0.01$: 2.58, ou seja, se $|z_{obs}| \geq 2.58$ temos evidências para rejeitar H_0 com nível de significância $\alpha = 0.01$.

Exemplo: Tecidos

Dois tipos diferentes de tecido devem ser comparados. Uma máquina de testes *Martindale* pode comparar duas amostras ao mesmo tempo. O peso (em miligramas) para sete experimentos foram:

Tecido	1	2	3	4	5	6	7
A	36	26	31	38	28	20	37
B	39	27	35	42	31	39	22

Construa um teste de hipótese com nível de significância 5% para testar a hipótese nula de igualdade entre os pesos médios dos tecidos. Admita que a variância é a mesma, e igual a 49.

Quais outras suposições são necessárias para que o teste seja válido?

Adaptado de: Profa. Nancy Garcia, Notas de aula.

Exemplo: Tecidos

Os tecidos do tipo A tem uma média amostral igual a $\bar{x}_A = 30.86$. Já os tecidos do tipo B têm média amostral de $\bar{x}_B = 33.57$.

A variância populacional é igual a 49, enquanto as variâncias amostrais são 44.14 e 52.62, respectivamente.

Suposições: Como os tamanhos amostrais $n = m = 7$ são pequenos, devemos assumir os pesos dos tecidos dos dois tipos são normalmente distribuídos ou seja, $X_A \sim N(\mu_A, \sigma^2)$ e $X_B \sim N(\mu_B, \sigma^2)$. Além disso são independentes e com variâncias iguais.

Exemplo: Tecidos

Assumimos que as variâncias são iguais e **conhecidas** ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 49$). Além disso, $n = 7$ e $m = 7$.

Definindo as hipóteses as serem testadas:

$H_0 : \mu_A - \mu_B = 0 \quad vs \quad H_1 : \mu_A - \mu_B \neq 0.$

Como a variância é conhecida, a estatística do teste é dada por

$$Z = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B - \Delta_0}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}}$$

Se a hipótese nula é verdadeira, temos que $\Delta_0 = \mu_A - \mu_B = 0$ e $Z \sim N\left(0, 1\right)$. Note que a hipótese alternativa é do tipo $\neq$, então o teste é bilateral.

Exemplo: Tecidos

$$
\begin{aligned}
\text{p-valor} &= P\left(\frac{|\bar{X}_A - \bar{X}_B - \Delta_0|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \geq \frac{|30.86 - 33.57 - 0|}{7\sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{7}}}\right) \\
&= P\left(|Z| \geq 0.72\right) = 2 \times P\left(Z \geq 0.72\right) \\
&= 2 \times \left[1 - \Phi\left(0.72\right)\right] = 2 \times \left[1 - 0.7642\right] = 0.4716
\end{aligned}
$$

Se $\alpha = 0.05$, como p-valor=$0.4716 > \alpha = 0.05$, não temos evidência para rejeitar $H_0 : \mu_A = \mu_B$ com nível de significância 0.05.

Valor crítico para $\alpha = 0.05$: 1.96, ou seja, se $|z_{obs}| \geq 1.96$ temos evidências para rejeitar H_0 com nível de significância $\alpha = 0.05$.

Exemplo: Tecidos

Vamos assumir agora que a variância populacional não fosse conhecida.

Assumindo ainda que as variâncias são iguais mas **desconhecidas**, vamos então estimar a variância amostral combinada.

Sabendo que $s_1^2 = 44.14$, $s_2^2 = 52.62$ e $n = m = 7$ temos:

$$\begin{aligned} s_p^2 &= \frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-2} \\ &= \frac{(7-1)44.14 + (7-1)52.62}{7+7-2} \\ &= 48.38 \end{aligned}$$

Exemplo: Tecidos

Nesse caso, a estatística do teste, sob H_0, é dada por:

$$T = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}} \sim t_{n+m-2}$$

$$\begin{aligned} t_{obs} &= \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{s_p^2(1/n_A + 1/n_B)}} \\ &= \frac{30.86 - 33.57}{\sqrt{48.38(1/7 + 1/7)}} = -0.73 \end{aligned}$$

Exemplo: Tecidos

Considerando nível de significância 0.05, rejeitamos H_0 se $|t_{obs}| \geq t_{n+m-2,0.025}$.

Valor crítico para $\alpha = 0.05$: 2.18, ou seja, se $|t_{obs}| \geq 2.18$ temos evidências para rejeitar H_0 com nível de significância $\alpha = 0.05$.

No caso, $|t_{obs}| = 0.73 < 2.18$, portanto não encontramos evidências para rejeitar a hipótese de que as médias são iguais.

Exemplo: tempo de adaptação

Num estudo comparativo do tempo médio de adaptação (em anos), uma amostra aleatória, de 50 homens e 50 mulheres de um grande complexo industrial, produziu os seguintes resultados:

Estatística	Homens	Mulheres
Média	3.2	3.7
Desvio Padrão	0.8	0.9

Construa um teste de hipótese com nível de significância de 5% para a diferença entre o tempo médio de adaptação para homens e mulheres.

Fonte: Adaptado de Morettin & Bussab, Estatística Básica 5^a edição, pág 365.

Exemplo: tempo de adaptação

Veja que não sabemos a variância populacional, mas temos os desvios-padrão amostrais e estes são bem próximos. Então iremos assumir que as variâncias são iguais porém desconhecidas.

Nesse caso, vamos então estimar a variância amostral combinada.

Sabendo que $s_1 = 0.8$, $s_2 = 0.9$ e $n = m = 50$ temos:

$$\begin{aligned} s_p^2 &= \frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-2} \\ &= \frac{(50-1)(0.8)^2 + (50-1)(0.9)^2}{50+50-2} \\ &= 0.73 \end{aligned}$$

Exemplo: tempo de adaptação

Nesse caso, a estatística do teste, sob H_0, é dada por:

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}} \sim t_{n_A + m_B - 2}$$

$$\begin{aligned} t_{obs} &= \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_p^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})}} \\ &= \frac{3.2 - 3.7}{\sqrt{0.73(\frac{1}{50} + \frac{1}{50})}} = -2.93 \end{aligned}$$

Exemplo: tempo de adaptação

Considerando nível de significância 0.05 e H_a: $\mu_1 \neq \mu_2$, rejeitamos H_0 se $|t_{obs}| \geq t_{n+m-2,0.025} = 1.98$.

Valor crítico para $\alpha = 0.05$: 1.98, ou seja, se $|t_{obs}| \geq 1.98$ temos evidências para rejeitar H_0 com nível de significância $\alpha = 0.05$.

No caso, $|t_{obs}| = 2.93 > 1.98$, portanto encontramos evidências para rejeitar a hipótese de que as médias são iguais.

Inferência para duas populações: Teste de hipótese para duas proporções

Teste de hipótese para duas proporções

Considere $X_1, \ldots, X_{n_1}$ e $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ duas amostras independentes de ensaios de Bernoulli tal que $X \sim b(p_1)$ e $Y \sim b(p_2)$, com probabilidade p_1 e p_2 de apresentarem uma certa característica.

Queremos testar: H_0: $p_1 - p_2 = 0$ vs H_a: $p_1 - p_2 \neq 0$ (ou H_a: $p_1 - p_2 < 0$ ou H_a: $p_1 - p_2 > 0$).

Em aulas anteriores vimos que:

$$\hat{p}_1 \sim N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1}\right) \quad \text{e} \quad \hat{p}_2 \sim N\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$$

Como as variâncias de $\hat{p}_1$ e $\hat{p}_2$ dependem de p_1 e p_2 e, portanto, não são conhecidas, iremos usar uma estimativa dessas variâncias.

Teste de hipótese para duas proporções

Sob H_0, $p_1 = p_2 = p$, portanto:

$$\hat{p}_1 \sim N\left(p_1, \frac{p(1-p)}{n_1}\right) \quad \text{e} \quad \hat{p}_2 \sim N\left(p_2, \frac{p(1-p)}{n_2}\right)$$

No entanto, p é desconhecido. Iremos utilizar como estimativa para p: $\hat{p}$, definido como o número de sucessos entre todos os elementos amostrados. Ou seja, o estimador é a proporção de sucessos na amostra toda, sem levar em consideração as populações, pois, sob H_0, $p_1 = p_2$ (não há diferença entre as proporções das duas populações).

Teste de hipótese para duas proporções

Então, para H_0: $p_1 = p_2$ usamos a estatística do teste a seguir:

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim N(0,1)$$

em que $\hat{p}$ é a proporção de sucessos entre os $n_1 + n_2$ elementos amostrados.

Condições: Todas as quantidades $n_1\hat{p}_1,\ n_1(1-\hat{p}_1),\ n_2\hat{p}_2$ e $n_2(1-\hat{p}_2)$ devem ser pelo menos igual a 10 para que a aproximação pela normal seja válida.

Teste de hipótese para duas proporções

Resumindo:

Para H_0: $p_1 - p_2 = 0$

H_a	Valor crítico para α	Valor de p
$p_1 - p_2 \neq 0$	rejeitar se $\mid z_{obs} \mid \geq z_{\alpha/2}$	$2P(Z \geq \mid z_{obs} \mid)$
$p_1 - p_2 < 0$	rejeitar se $z_{obs} \leq -z_{\alpha}$	$P(Z \leq z_{obs})$
$p_1 - p_2 > 0$	rejeitar se $z_{obs} \geq z_{\alpha}$	$P(Z \geq z_{obs})$

Exemplo: decisão sobre gastos

O dinheiro que não é gasto hoje pode ser gasto depois.

Será que ao relembrar o aluno deste fato faz com que tome a decisão sobre uma compra de maneira diferente?

Exemplo: decisão sobre gastos

O dinheiro que não é gasto hoje pode ser gasto depois.

Será que ao relembrar o aluno deste fato faz com que tome a decisão sobre uma compra de maneira diferente?

O cético pode pensar que relembrar não irá influenciar na decisão.

Exemplo: decisão sobre gastos

O dinheiro que não é gasto hoje pode ser gasto depois.

Será que ao relembrar o aluno deste fato faz com que tome a decisão sobre uma compra de maneira diferente?

O cético pode pensar que relembrar não irá influenciar na decisão.

Podemos utilizar um teste de hipótese:

Exemplo: decisão sobre gastos

O dinheiro que não é gasto hoje pode ser gasto depois.

Será que ao relembrar o aluno deste fato faz com que tome a decisão sobre uma compra de maneira diferente?

O cético pode pensar que relembrar não irá influenciar na decisão.

Podemos utilizar um teste de hipótese:

- H_0: Relembrar o aluno de que ele pode poupar para comprar algo especial depois não irá influenciar na decisão de gasto do aluno.
- H_a: Relembrar o aluno de que ele pode poupar para comprar algo especial depois irá aumentar a chance dele não gastar em algo no presente.

Exemplo: decisão sobre gastos

Alunos de ME414 do segundo semestres de 2015 foram recrutados para um estudo e cada um recebeu a seguinte informação através do Google Forms:

Imagine que você estivesse poupando para comprar algo especial. Em uma visita ao shopping você encontra um DVD da sua série/filme favorita que estava na sua "lista de desejos" há tempos. O DVD está em promoção, custando R$ 20,00. O que você faria?

56 alunos (grupo 1) selecionados ao acaso receberam a seguinte opção de resposta:

- Compraria o DVD.
- Não compraria o DVD.

54 alunos (grupo 2) selecionados ao acaso receberam a seguinte opção de resposta:

- Compraria o DVD.
- Não compraria o DVD. Pouparia os R$ 20,00 para algo especial.

Obs: estudo adaptado do artigo *Frederick S, Novemsky N, Wang J, Dhar R, Nowlis S. 2009. Opportunity Cost Neglect. Journal of Consumer Research 36: 553-561.*

Exemplo: decisão sobre gastos

	Compraria	Não compraria
grupo1	31	25
grupo2	29	25

Entre os alunos do grupo 1, a proporção que decide não comprar foi 0.45.

Entre os alunos do grupo 2, a proporção que decide não comprar foi 0.46.

Exemplo: decisão sobre gastos

	Compraria	Não compraria
grupo1	31	25
grupo2	29	25

Entre os alunos do grupo 1, a proporção que decide não comprar foi 0.45.

Entre os alunos do grupo 2, a proporção que decide não comprar foi 0.46.

Temos evidências contra a hipótese nula, ou seja, relembrar o aluno não influencia na decisão?

Exemplo: decisão sobre gastos

Para realizar o teste de hipótese, devemos fazer algumas suposições.

Considere duas populações: X e Y tal que:

- $X_i \sim b(p_1)$ indica se o i-ésimo aluno do **grupo 1** decide não comprar o DVD e p_1 é a probabilidade de decidir por não comprar.
- $Y_i \sim b(p_2)$ indica se o i-ésimo aluno do **grupo 2** decide não comprar o DVD e p_2 é a probabilidade de decidir por não comprar.

Queremos testar:

H_0: $p_1 = p_2$

H_a: $p_1 < p_2$

Exemplo: decisão sobre gastos

Seja $\hat{p}_1$ a proporção que decide não comprar entre os alunos n_1 **amostrados do grupo 1**.

Seja $\hat{p}_2$ a proporção que decide não comprar entre os n_2 alunos **amostrados do grupo 2**.

Exemplo: decisão sobre gastos

Seja $\hat{p}_1$ a proporção que decide não comprar entre os alunos n_1 **amostrados do grupo 1**.

Seja $\hat{p}_2$ a proporção que decide não comprar entre os n_2 alunos **amostrados do grupo 2**.

Relembrando o TCL:

$$\hat{p}_1 \sim N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1}\right) \quad \text{e} \quad \hat{p}_2 \sim N\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$$

Condições: Todas as quantidades $n_1\hat{p}_1,\ n_1(1-\hat{p}_1),\ n_2\hat{p}_2$ e $n_2(1-\hat{p}_2)$ devem ser pelo menos igual a 10 para que a aproximação pela normal seja válida.

Então, para H_0: $p_1 = p_2$ usamos a estatística do teste a seguir:

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim N(0,1)$$

em que $\hat{p}$ é a proporção que decide não comprar entre os $n_1 + n_2$ alunos amostrados.

Exemplo: decisão sobre gastos

H_0: $p_1 = p_2$ vs H_a: $p_1 < p_2$, que é equivalente a testar: H_0: $p_1 - p_2 = 0$ vs H_a: $p_1 - p_2 < 0$.

$$\text{p-valor} = P\left(\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \leq \frac{25/56 - 25/54}{\sqrt{5/11(1-5/11)(\frac{1}{56} + \frac{1}{54})}}\right)$$
$$= P(Z \leq -0.17) = 0.4325$$

Se $\alpha = 0.05$, como p-valor$=0.4325 > \alpha = 0.05$, não temos evidência para rejeitar H_0 com nível de significância 0.05.

Valor crítico para $\alpha = 0.05$: -1.64, ou seja, se $z_{obs} \leq -1.64$ temos evidências para rejeitar H_0 com nível de significância $\alpha = 0.05$.

Leituras

- Ross: seções 10.1, 10.2, 10.3, 10.4 e 10.6.
- OpenIntro: seções 3.2 e 4.3.
- Magalhães: capítulo 9.