ME414 - Estatística para Experimentalistas

Gabarito LISTA 7

Questão 1.

Seja p: proporção de clientes que estão muito satisfeitos com o serviço da concessionária de energia elétrica.

Sejam $n = 100$, $\hat{p} = 0,73$, $\alpha = 0,05$.

Vamos testar o seguinte:

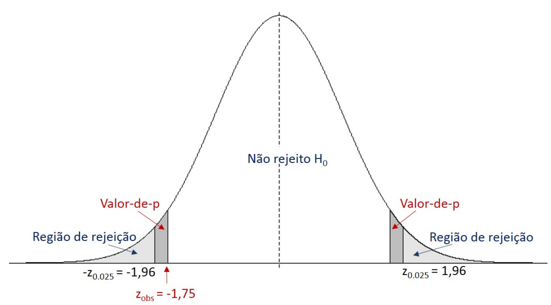
$$H_0 : p = 0,80 \quad vs. \quad H_a : p \neq 0,80$$

Estatística do teste: $z_{obs} = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \dfrac{0,73 - 0,80}{\sqrt{\frac{0,8(1-0,8)}{100}}} = -1,75.$

valor-de-p: $P(|Z| \geq 1,75) = 2P(Z \geq 1,75) = 2[1 - P(Z < 1,75)] = 2(1 - 0,9599) = 0,0802.$

Valor crítico: $z_{crit} = z_{0,025} = 1,96.$

Como valor-de-p é maior que 0,05, não rejeitamos a hipótese de que a proporção de clientes que estão muito satisfeitos com o serviço seja $p = 0,80$.



Questão 2.

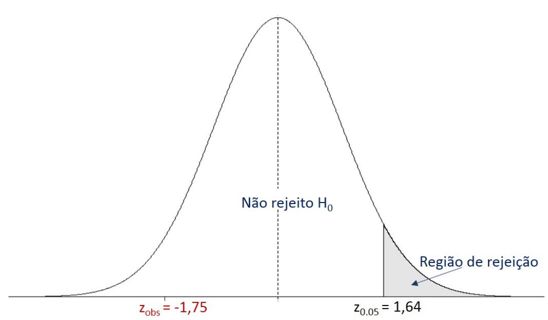
Vamos testar o seguinte:

$$H_0 : p = 0,80 \quad vs. \quad H_a : p > 0,80$$

Estatística do teste: $z_{obs} = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \dfrac{0,73 - 0,80}{\sqrt{\frac{0,8(1-0,8)}{100}}} = -1,75.$

Valor crítico: $z_{crit} = z_{0,05} = 1,64.$

Como o valor crítico $z_{crit} = 1,64 > -1,75 = z_{obs}$, não rejeitamos a hipótese nula de que a proporção de clientes que estão muito satisfeitos com o serviço seja $p = 0,80$.



Questão 3.

Seja p: a proporção de associados que apoiam a política de privatização do governo. Sejam $\alpha = 0,05$ e $n = 80$. Vamos testar o seguinte:

$$H_0 : p = 0,60 \quad vs. \quad H_a : p > 0,60$$

Estatística do teste: $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$.

Valor crítico: $z_{crit} = z_{0,05} = 1,64$.

Região de rejeição: Rejeitamos H_0 se $Z \geq 1,64 \Rightarrow C = \left\{ (X_1, \ldots, X_n) : \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \geq 1,64 \right\}$

Questão 4.

Seja p: proporção de recém-nascidos masculinos ao longo prazo. Sejam $n = 5000$, $\hat{p} = 0,5255$ e $\alpha = 0,10$. Vamos testar o seguinte:

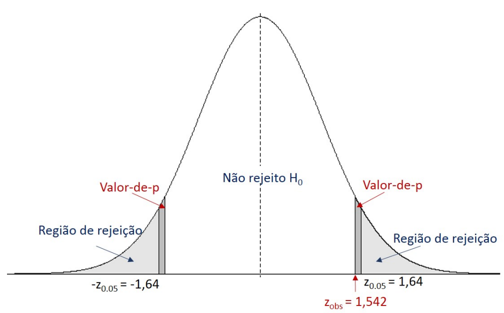
$$H_0 : p = 0,5146 \quad vs. \quad H_a : p \neq 0,5146$$

Estatística do teste: $z_{obs} = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \dfrac{0,5255 - 0,5146}{\sqrt{\frac{0,5146(1-0,5146)}{5000}}} = 1,542$.

valor-de-p: $P(|Z| \geq 1,542) = 2P(Z \geq 1,542) = 2[1 - P(Z < 1,542)] = 2(1 - 0,9382) = 0,1236$.

Valor crítico: $z_{crit} = z_{0,05} = 1,64$.

Como valor-de-p é maior que 0,10, não rejeitamos a hipótese de que a proporção de recém-nascidos masculinos ao longo prazo seja $p = 0,5146$.



Questão 5.

a. Sejam $n = 15$, $\bar{X} = 83,9$, $s = 18,2$ e $\alpha = 0,10$.

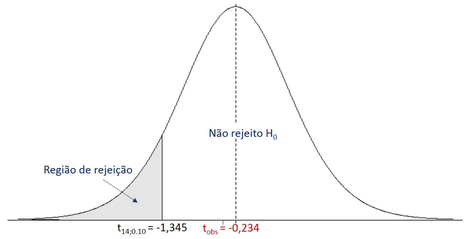
Vamos testar o seguinte:

$$H_0 : \mu = 85 \quad vs. \quad H_a : \mu < 85$$

Estatística do teste: $t_{obs} = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{83,9 - 85}{18,2/\sqrt{15}} = -0,234$.

Valor crítico: $t_{crit} = t_{14,0,10} = -1,345$.

Com valor crítico ($t_{crit} = -1,345$) menor que o valor observado da estatística do teste ($t_{obs} = -0,234$) não rejeitamos a hipótese que a média é 85.



b. Sejam $n = 15$, $\bar{X} = 79,1$, $s = 11,8$ e $\alpha = 0,10$.

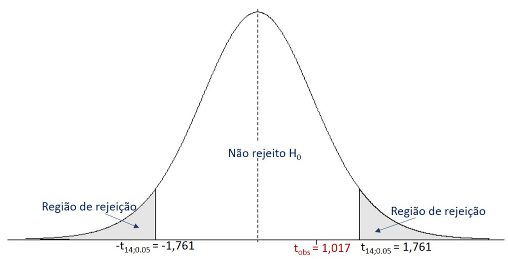
Vamos testar o seguinte:

$$H_0 : \mu = 76 \quad vs. \quad H_a : \mu \neq 76$$

Estatística do teste: $t_{obs} = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{79,1 - 76}{11,8/\sqrt{15}} = 1,017$.

Valor crítico: $t_{crit} = t_{14;0,05} = 1,761$.

Com valor crítico ($t_{crit} = 1,761$) maior que o valor observado da estatística do teste ($t_{obs} = 1,017$) não rejeitamos a hipótese que a média é 76.



Questão 6.

Sejam $n = 16$, $\bar{X} = 94,32$ e $\sigma = 1,20$.

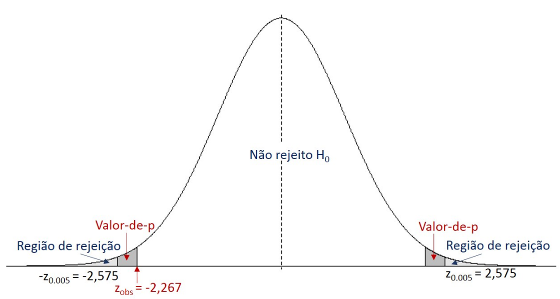
a. Vamos testar o seguinte:

$$H_0 : \mu = 95 \quad vs. \quad H_a : \mu \neq 95$$

Estatística do teste: $z_{obs} = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{94,32 - 95}{1,20/\sqrt{16}} = -2,267$.

valor-de-p: $P(|Z| \geq |z_{obs}|) = P(|Z| \geq 2,267) = 2P(Z \geq 2,267) = 2[1 - P(Z < 2,267)] = 2(1 - 0,9883) = 0,0234$.

Com valor-de-p maior que 0,01, concluimos que existe evidência para não rejeitar a hipótese de que o ponto de desvanecimento médio de uma certa marca de vegetais hidrogenados é 95.



b. Seja $\alpha = 0,01 \Rightarrow z_{crit} = 2,575$ e $\mu' = 94 \Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu', \sigma^2/n)$.

$$\begin{aligned}
\beta &= P(\text{Não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ falsa}) = P(|Z| < z_{crit} | \mu' = 94) = P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < 2,575 \Big| \mu' = 94\right) \\
&= P\left(-2,575 < \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < 2,575 \Big| \mu' = 94\right) = P\left(-2,575 + \frac{\mu_0-\mu'}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}-\mu'}{\sigma/\sqrt{n}} < 2,575 + \frac{\mu_0-\mu'}{\sigma/\sqrt{n}} \Big| \mu' = 94\right) \\
&= P\left(-2,575 + \frac{95-94}{1,20/\sqrt{16}} < Z < 2,575 + \frac{95-94}{1,20/\sqrt{16}}\right) = P(0,758 < Z < 5,908) \\
&= P(Z < 5,908) - P(Z \leq 0,758) = 1 - 0,7758 = 0,2242.
\end{aligned}$$

Questão 7.

Sejam $n = 16$, $\sigma = 0,30$, $\bar{X} = 5,25$.

Vamos testar o seguinte:

$$H_0: \mu = 5,5 \quad vs. \quad H_a: \mu \neq 5,5$$

Estatística do teste: $z_{obs} = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{5,25-5,5}{0,30/\sqrt{16}} = -3,333.$

valor-de-p: $P(|Z| \geq |z_{obs}|) = P(|Z| \geq 3,333) = 2P(Z \geq 3,333) = 2[1 - P(Z < 3,333)] = 2(1 - 0,9996) = 0,0008.$

Com valor-de-p muito menor que 0,05, rejeitamos a hipótese de que o ponto médio de SiO_2 em certo tipo de cimento aluminoso é de 5,50.

Questão 8.

Sejam $n = 50$, $\bar{X} = 295$, $s = 20$ e $\alpha = 0,05$.

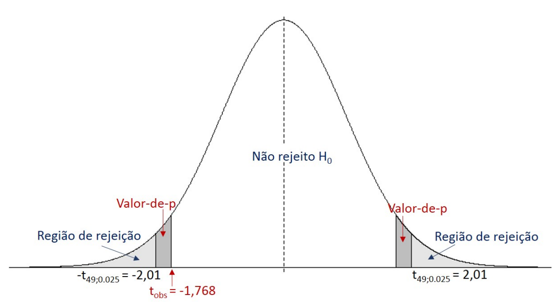
Vamos testar o seguinte:

$$H_0: \mu = 300 \quad vs. \quad H_a: \mu \neq 300$$

Estatística do teste: $t_{obs} = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{295-300}{20/\sqrt{50}} = -1,768.$

Valor crítico: $t_{crit} = t_{49;0,025} = 2,010$

Como a estatística do teste observada $(t_{obs} = -1,768)$ é maior que o valor crítico $(t_{crit} = -2,010)$, não rejeitamos a hipótese de que o tempo médio de funcionamento do motor é de 300 minutos.



Questão 9.

Sejam $n_A = 100$, $\hat{p}_A = 0,75$, $n_B = 100$, $\hat{p}_B = 0,65$ e $\hat{p} = \frac{75+65}{200} = 0,70$.

Vamos testar o seguinte:

$$H_0 : p_A - p_B = 0 \quad vs. \quad H_a : p_A - p_B > 0$$

Estatística do teste: $z_{obs} = \dfrac{\hat{p}_A - \hat{p}_B}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}} = \dfrac{0,75 - 0,65}{\sqrt{0,70(1-0,70)\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100}\right)}} = 1,543.$

valor-de-p: $P(Z \geq z_{obs}) = P(Z \geq 1,543) = 1 - P(Z < 1,543) = 1 - 0,939 = 0,061.$

Se considerarmos $\alpha \leq 0,05$, então com valor-de-p maior que α não rejeitamos a hipótese nula de que a verdadeira proporção de curados usando soro é igual a verdadeira proporção de curados não usando soro.

Questão 10.

Sejam $\hat{p}_1 = 54/150 = 0,36$, $\hat{p}_2 = 33/100 = 0,33$ e $\hat{p} = \frac{54+33}{150+100} = 0,348$.

Vamos testar o seguinte:

$$H_0 : p_1 - p_2 = 0 \quad vs. \quad H_a : p_1 - p_2 > 0$$

Estatística do teste: $z_{obs} = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \dfrac{0,36 - 0,33}{\sqrt{0,348(1-0,348)\left(\frac{1}{150} + \frac{1}{100}\right)}} = 0,488.$

valor-de-p: $P(Z \geq z_{obs}) = P(Z \geq 0,488) = 1 - P(Z < 0,488) = 1 - 0,6872 = 0,3128.$

Como o valor-de-p é maior que 0,05, não rejeitamos a hipótese nula, isto é, que os dois métodos tem a mesma proporção de sucesso para provocar chuva.

Questão 11.

Sejam $n_H = 97$, $\bar{X}_H = 10,40$, $\sigma_H = 4,83$, $n_M = 148$, $\bar{X}_M = 9,26$, $\sigma_M = 4,86$ e $\alpha = 0,05$.

Vamos testar o seguinte:

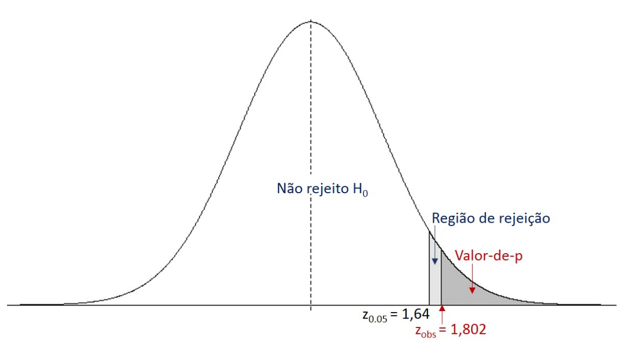
$$H_0 : \mu_H - \mu_M = 0 \quad vs. \quad H_a : \mu_H - \mu_M > 0$$

Assumindo que a classificação fornecida pela escala possui distribuição normal e que as variâncias são conhecidas e diferentes.

Estatística de teste: $z_{obs} = \dfrac{\bar{X}_H - \bar{X}_M - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_H^2}{n_H} + \frac{\sigma_M^2}{n_M}}} = \dfrac{10,40 - 9,26}{\sqrt{\frac{4,83^2}{97} + \frac{4,86^2}{148}}} = 1,802.$

valor-de-p: $P(Z \geq z_{obs}) = P(Z \geq 1,802) = 1 - P(Z < 1,802) = 1 - 0,964 = 0,036.$

Com valor-de-p menor que 0,05, existe evidência para rejeitar a hipótese de que não existe diferença entre a facilidade que os estudantes homens e as estudantes mulheres entediam-se.



Questão 12.

Suponha que a duração das superfícies de rodagem possuem distribuição Normal. Sejam $\alpha = 0,05$, $m = 40$, $\bar{X} = 36500$, $\sigma_1 = 2200$, $n = 40$, $\bar{Y} = 33400$ e $\sigma_2 = 1900$.

Vamos testar o seguinte:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad vs. \quad H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

Estatística de teste: $z_{obs} = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} = \dfrac{36500 - 33400}{\sqrt{\frac{2200^2}{40} + \frac{1900^2}{40}}} = 6,745.$

valor-de-p: $P(|Z| \geq z_{obs}) = P(|Z| \geq 6,745) = 2[1 - P(Z < 6,745)] \approx 0.$

Como o valor-de-p é menor que 0,05, existe evidência para rejeitar a hipótese de que os pontos médios de duração das superfícies de rodagem são iguais.

Questão 13.

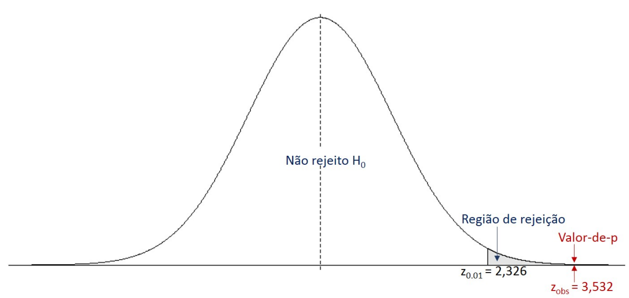
Suponha que os dados tem distribuição Normal. Sejam $\bar{X} = 18,12$, $m = 40$, $\sigma_1 = 1,60$, $\bar{Y} = 16,87$, $n = 32$, $\sigma_2 = 1,40$ e $\alpha = 0,01$. Vamos testar o seguinte:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad vs. \quad H_a : \mu_1 - \mu_2 > 0$$

Estatística de teste: $z_{obs} = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} = \dfrac{18,12 - 16,87}{\sqrt{\frac{1,60^2}{40} + \frac{1,40^2}{32}}} = 3,532.$

valor-de-p: $P(Z \geq z_{obs}) = P(Z \geq 3,532) = 1 - P(Z < 3,532) = 1 - 0,9998 = 0,0002.$

Como o valor-de-p é menor que 0,01, existe evidência para rejeitar a hipótese nula de que a resistência média de coesão à tensão do morteiro modificado de látex de polímeros é igual a do morteiro não modificado.



Questão 14.

Suponha que o conteúdo de nicotina das duas marcas tem distribuição Normal e que as duas variâncias populacionais são iguais. Sejam $\alpha = 0,05$, $\bar{X}_A = 20$, $s_A^2 = 6$, $n_A = 4$, $\bar{Y}_B = 21$, $s_B^2 = 5$ e $n_B = 5$. Como as variâncias populacionais são desconhecidas e iguais, vamos determinar o estimador da variância:

$S_p^2 = \dfrac{s_A^2(n_A - 1) + s_B^2(n_B - 1)}{n_A + n_B - 2} = \dfrac{6(4-1) + 5(5-1)}{4 + 5 - 2} = 5,429.$

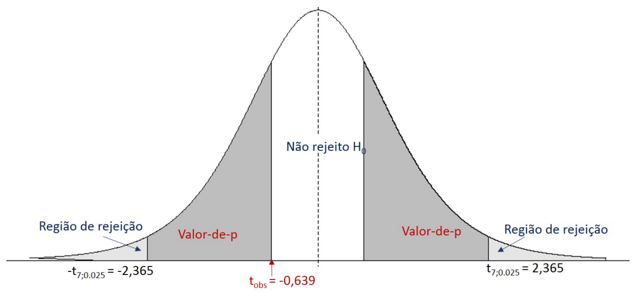
Vamos testar o seguinte:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad vs. \quad H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

Estatística de teste: $t_{obs} = \dfrac{\bar{X}_A - \bar{X}_B - \Delta_0}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}} = \dfrac{20 - 21}{\sqrt{5,429\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)}} = -0,639$

valor-de-p: $P(|T| \geq |t_{obs}|) = P(|T| \geq 0,639) = 2P(T \geq 0,639) = 2[1 - P(T < 0,639)] = 2(1 - 0,728) = 0,544$.

Como o valor-de-p é maior que 0,05, existe evidência para não rejeitar a hipótese que o conteúdo médio de nicotina das duas marcas de cigarros é o mesmo.



Data de atualização: 13 de Novembro de 2019.