
Aprendizaje Automático, Computación Evolutiva e Inteligencia de Enjambre para Aplicaciones de Robótica

Gabriela Iriarte Colmenares



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ingeniería



Aprendizaje Automático, Computación Evolutiva e
Inteligencia de Enjambre para Aplicaciones de Robótica

Trabajo de graduación presentado por Gabriela Iriarte Colmenares para
optar al grado académico de Licenciado en Ingeniería Electrónica

Guatemala,

2020

Vo.Bo.:

(f) _____
Dr. Luis Alberto Rivera Estrada

Tribunal Examinador:

(f) _____
Dr. Luis Alberto Rivera Estrada

(f) _____
—

(f) _____
—

Fecha de aprobación: Guatemala, _ de _ de _ .

Prefacio

La elaboración de la presente tesis surgió del interés personal en el área de inteligencia computacional. La inteligencia artificial es un tema que considero que está presente en muchos ámbitos de la vida cotidiana, haciéndola más fácil y amena. Hoy en día contamos con aparatos que reconocen la voz o las canciones al instante, cuando antes era necesario comprar el CD de su artista preferido para poder escucharlo. Desde pequeña sabía que quería ser ingeniera, aunque no estaba muy segura en qué, sí estaba segura de que quería estudiar algo relacionado con tecnología. Este trabajo abarca áreas como la robótica, sistemas de control, computación paralela, inteligencia computacional, evolutiva y de enjambre, por lo que, definitivamente, cumplí mi sueño de estudiar algo tecnológico.

Considero pertinente agradecer a Dios, al comité de ayuda financiera, al programa de becas Potencia-T de la SEEA y a mi madre por brindarme la oportunidad de estudiar en la Universidad del Valle de Guatemala. Además quiero agradecer a mi asesor de tesis Dr. Luis Alberto Rivera por compartir conmigo su conocimiento y brindarme su tiempo para resolver mis cincuenta mil dudas semanales, y a Msc. Miguel Zea por proveerme un poco de su tiempo para darme retroalimentación útil y compartirme sus conocimientos de robótica para esta tesis. Asimismo, quisiera agradecer a todas las personas que he conocido durante mi estudio en UVG, pues todas las memorias compartidas con ustedes impactaron mi vida de una u otra forma.

Debido a la actual coyuntura mundial, el presente trabajo quiero dedicarlo a todos los médicos que valientemente salen a trabajar en plena pandemia por el bien común, y a las víctimas de la pandemia COVID-19, especialmente a todos los médicos que no lograron la batalla.

Índice

Prefacio	III
Lista de figuras	IX
Lista de cuadros	X
Resumen	XI
Abstract	XII
1. Introducción	1
2. Antecedentes	2
2.1. Megaproyecto Robotat Fase II	2
2.2. Robotarium de Georgia Tech	2
2.3. Wyss Institute Swarm Robots	3
2.4. Aplicaciones de Ant Colony Optimization (ACO)	3
3. Justificación	4
4. Objetivos	5
4.1. Objetivo General	5
4.2. Objetivos Específicos	5
5. Alcance	6
6. Marco teórico	7
6.1. Inteligencia Computacional de Enjambre	7
6.2. Particle Swarm Optimization (PSO)	7
6.2.1. Funcionamiento del Algoritmo PSO	8
6.2.2. Mejora del Algoritmo	8
6.3. Ant Colony Optimization (ACO)	8
6.3.1. Simple Ant Colony Optimization (SACO)	9
6.3.2. Ant System	10

6.4.	Computación Evolutiva	11
6.4.1.	Algoritmos Genéticos (GA)	11
6.4.2.	Métodos de codificación	12
6.4.3.	Función de costo	13
6.4.4.	Métodos de selección proporcional	14
6.4.5.	Operadores de crusa en GA	15
6.4.6.	Métodos de mutación	16
6.5.	Grafos	16
6.5.1.	Grafos en Matlab	17
6.6.	Programación Orientada a Objetos	17
6.7.	Computación Paralela	18
6.7.1.	Programación paralela en Matlab	18
6.8.	Planificación de movimiento	19
6.8.1.	Espacio de configuración	19
6.8.2.	Planificación de trayectorias	20
6.9.	Métodos de Planificación de Movimiento	20
6.9.1.	Métodos completos	20
6.9.2.	Métodos de cuadrícula	20
6.9.3.	Métodos de muestreo	21
6.9.4.	Artificial Potential Fields	22
6.10.	Modelado de Robots Móviles	22
6.10.1.	Modelo Uniciclo	23
6.10.2.	Modelo diferencial	23
6.10.3.	Difeomorfismo	24
6.11.	Controladores de Posición y Velocidad de Robots Diferenciales	24
6.11.1.	Control proporcional de velocidades con saturación limitada	24
6.11.2.	Control PID de velocidad lineal y angular	25
6.11.3.	Control PID de acercamiento exponencial	25
6.11.4.	Control de pose	26
6.11.5.	Control de pose de Lyapunov	26
6.11.6.	Control Closed-Loop Steering	26
6.11.7.	Control LQR	26
6.11.8.	Control LQI	27
7.	Controladores Punto a Punto	28
7.1.	Simulación por Software	28
7.1.1.	Webots	28
7.1.2.	Robot e-puck	29
7.2.	Control TUC	30
7.3.	Control PID de Velocidad Lineal y Angular	31
7.4.	Control PID de Acercamiento Exponencial	33
7.5.	Control de Pose	33
7.6.	Control de Pose de Lyapunov	34
7.7.	Control Closed-Loop Steering	36
7.8.	Control LQR	38
7.9.	Control LQI	40

8. Diseño Experimental AS	42
8.1. Validación del Algoritmo Ant System	42
8.2. Validación del Algoritmo Ant System Paralelizado	44
8.3. AS Paralelizado con PRM	46
8.4. AS Paralelizado con RRT	47
8.5. AS con Grafo de Visibilidad	47
9. Resultados AS	49
9.1. Validación del Algoritmo Ant System	49
9.2. Validación del Algoritmo Ant System Paralelizado	50
9.3. AS Paralelizado con PRM	50
9.4. Experimento 4	52
9.5. Experimento 5	52
10. AS Controlado *todavía en construcción*	55
10.1. Mundo Cuadriculado	55
10.1.1. Control TUC	55
10.1.2. Control de Pose	55
10.1.3. Control de Pose de Lyapunov	56
10.1.4. Control LQR	57
10.1.5. Control LQI	58
11. Diseño Experimental GA	63
11.1. Minimizando Funciones de Costo	63
12. Resultados GA	64
12.1. Minimizando Funciones de Costo	64
13. Conclusiones	66
14. Recomendaciones	67
15. Bibliografía	68
16. Anexos	71
16.1. Especificaciones de computadora de alto desempeño	71

Lista de figuras

1.	Ejemplo de un grafo [7].	9
2.	Gráfico y función de Rosenbrock [14].	13
3.	Gráfico y función de Ackley [14].	13
4.	Gráfico y función de Rastrigin [14].	14
5.	Gráfico y función de Booth [14].	14
6.	Selección de la ruleta en forma gráfica para 6 individuos.	15
7.	Computación serial [25]	18
8.	Computación paralela [25]	19
9.	Ejemplo de grafo de visibilidad en Matlab.	20
10.	Ejemplo de un RRT [31]	21
11.	Ejemplo de un PRM en Matlab.	21
12.	Ejemplo de un APF en Matlab.	22
13.	Distancia recorrida de una rueda para el robot móvil.	23
14.	Ángulos en Webots.	29
15.	Ángulos del e-puck.	29
16.	Posición inicial de robot para pruebas con controladores.	30
17.	Gráfica de velocidad lineal para controlador TUC.	30
18.	Gráfica de velocidad angular para controlador TUC.	31
19.	Gráfica de velocidad en los motores para controlador TUC.	31
20.	Trayectoria generada con el controlador TUC.	31
21.	Gráfica de velocidad lineal para controlador PID.	32
22.	Gráfica de velocidad angular para controlador PID.	32
23.	Gráfica de velocidad en los motores para controlador PID.	32
24.	Trayectoria generada con el controlador PID.	33
25.	Gráfica de velocidad lineal para controlador PID de acercamiento exponencial.	33
26.	Gráfica de velocidad angular para controlador PID de acercamiento exponencial.	34
27.	Gráfica de velocidad en los motores para controlador PID de acercamiento exponencial.	34
28.	Trayectoria generada con el controlador PID de acercamiento exponencial.	34
29.	Gráfica de velocidad lineal para controlador de pose.	35
30.	Gráfica de velocidad angular para controlador de pose.	35
31.	Gráfica de velocidad en los motores para controlador de pose.	35

32.	Trayectoria generada con el controlador de pose.	36
33.	Gráfica de velocidad lineal para controlador de pose de Lyapunov.	36
34.	Gráfica de velocidad angular para controlador de pose de Lyapunov.	36
35.	Gráfica de velocidad en los motores para controlador de pose de Lyapunov. .	37
36.	Trayectoria generada con el controlador de pose de Lyapunov.	37
37.	Gráfica de velocidad lineal para controlador Closed-Loop Steering.	37
38.	Gráfica de velocidad angular para controlador Closed-Loop Steering.	38
39.	Gráfica de velocidad en los motores para controlador Closed-Loop Steering. .	38
40.	Trayectoria generada con el controlador Closed-Loop Steering.	38
41.	Gráfica de velocidad lineal para controlador LQR.	39
42.	Gráfica de velocidad angular para controlador LQR.	39
43.	Gráfica de velocidad en los motores para controlador LQR.	39
44.	Trayectoria generada con el controlador LQR.	40
45.	Gráfica de velocidad lineal para controlador LQI.	40
46.	Gráfica de velocidad angular para controlador LQI.	41
47.	Gráfica de velocidad en los motores para controlador LQI.	41
48.	Trayectoria generada con el controlador LQI.	41
49.	Piscina paralela en Matlab.	46
50.	Aplicación que genera grafos de visibilidad.	47
51.	Camino óptimo encontrado del nodo (1,1) al (6,6).	49
52.	Feromona del camino óptimo encontrado del nodo (1,1) al (6,6).	50
53.	Animaciones generadas con mundo cuadriculado.	51
54.	Animaciones generadas con PRM.	51
55.	Animaciones generadas con RRT.	52
56.	Animaciones generadas con grafo de visibilidad.	53
57.	Gráfica de velocidad lineal para controlador TUC.	56
58.	Gráfica de velocidad angular para controlador TUC.	56
59.	Gráfica de velocidad en los motores para controlador TUC.	56
60.	Trayectoria generada con el controlador TUC.	57
61.	Gráfica de velocidad lineal para controlador de pose.	57
62.	Gráfica de velocidad angular para controlador de pose.	57
63.	Gráfica de velocidad en los motores para controlador de pose.	58
64.	Trayectoria generada con el controlador de pose.	58
65.	Gráfica de velocidad lineal para controlador de pose de Lyapunov.	58
66.	Gráfica de velocidad angular para controlador de pose de Lyapunov.	59
67.	Gráfica de velocidad en los motores para controlador de pose de Lyapunov. .	59
68.	Trayectoria generada con el controlador de pose de Lyapunov.	59
69.	Gráfica de velocidad lineal para controlador LQR.	60
70.	Gráfica de velocidad angular para controlador LQR.	60
71.	Gráfica de velocidad en los motores para controlador LQR.	60
72.	Trayectoria generada con el controlador LQR.	61
73.	Gráfica de velocidad lineal para controlador LQI.	61
74.	Gráfica de velocidad angular para controlador LQI.	61
75.	Gráfica de velocidad en los motores para controlador LQI.	62
76.	Trayectoria generada con el controlador LQI.	62

77.	Experimento 1 con función de Rastrigin.	64
78.	Experimento 1 con función de Rosenbrock.	65
79.	Experimento 1 con función de Ackley.	65
80.	Experimento 1 con función de Booth.	65
81.	Procesador Intel Xeon Gold [33]	71

Lista de cuadros

1.	Parámetros del experimento 1.	44
2.	Parámetros utilizados en AS paralelizado.	46
3.	Resultados del experimento 1.	50
4.	Resultados del experimento 2.	51
5.	Resultados del AS con PRM.	52
6.	Resultados del AS con RRT.	53
7.	Resultados del AS con grafo de visibilidad.	54
8.	Parámetros que varían según la función de costo.	63

Resumen

Implementar y verificar algoritmos de inteligencia de enjambre y computación evolutiva como alternativa al método de Particle Swarm Optimization para los Bitbots de UVG.

Abstract

This is an abstract of the study developed under the

CAPÍTULO 1

Introducción

En este trabajo se presenta una propuesta de inteligencia de enjambre para aplicaciones de robótica. Una de las motivaciones para realizar este trabajo es que en el futuro los robots pueden utilizarse aplicaciones de búsqueda y rescate. Principalmente se desea comparar el rendimiento entre el algoritmo *Particle Swarm Optimization* (PSO) y *Ant System* (o simplemente *Ant Colony*), que son algoritmos de inteligencia de enjambre con distintos enfoques (función de costo vs. búsqueda en grafos). Uno de los objetivos es encontrar cuál de estos dos algoritmos es el mejor, para que en un futuro sea implementado en robots físicos similares a un robot e-puck.

Como metodología, primero se implementó el algoritmo *Simple Ant Colony*, y después el algoritmo *Ant System*. Estos algoritmos difieren en la forma en la que toman la decisión de qué camino seguir. Los parámetros encontrados para el correcto funcionamiento del *Ant System* se validó por medio de simulaciones computarizadas que permiten la visualización del comportamiento de la feromonía depositada por la colonia. Finalmente se adaptó los modelos del movimiento y de la cinemática de los Bitbots, desarrollados en la fase anterior del proyecto, al algoritmo ACO. De esta forma, fue posible implementarlo en el software WeBots para comparar su desempeño con el del Modified Particle Swarm Optimization (MPSO).

A continuación se presenta una sección de antecedentes, marco teórico y algunas secciones de diseño experimental y de los resultados obtenidos para el algoritmo *Ant System* y para una propuesta que se hizo de algoritmos genéticos como alternativa.

CAPÍTULO 2

Antecedentes

2.1. Megaproyecto Robotat Fase II

En la segunda fase del proyecto Robotat [1] se elaboró un algoritmo basado en el *Particle Swarm Optimization* (PSO) para que distintos agentes llegaran a una meta definida (el mínimo de una función de costo). El algoritmo modificado elaboraba una trayectoria a partir de la actualización de los puntos de referencia a seguir, generados por el PSO clásico. Asimismo, se realizaron distintas pruebas para encontrar los mejores parámetros del algoritmo PSO, probando distintas funciones de costo. Para realizar dicho algoritmo se tomó en cuenta que la velocidad de los robots diferenciales tiene un límite, además de tener que seguir las restricciones físicas de un robot real. Para simular estas restricciones se utilizó el software de código abierto Webots luego de haberlo implementado en Matlab como partículas sin masa ni restricciones. Además, en [2] se realizaron experimentos con el mismo algoritmo, pero utilizando *Artificial Potential Fields* (APF) como forma de evasión de obstáculos.

En Webots también se implementó distintos controladores para que la trayectoria fuera suave y lo más uniforme posible. Entre los controladores que se implementaron están: Control proporcional de cinemática transformada (TUC), PID con acercamiento exponencial, PID de velocidad lineal y angular, Controlador simple de pose (SPC), Controlador de pose Lyapunov (LSPC), Controlador de direccionamiento de lazo cerrado (CLSC), LQR y LQI. El controlador con el mejor resultado en esta fase fue el LQI, pues generaba trayectorias casi rectas y una pequeña variación en la velocidad de las ruedas del robot.

2.2. Robotarium de Georgia Tech

El Robotarium del Tecnológico de Georgia en Estados Unidos desarrolló una mesa de pruebas para robótica de enjambre para que personas de todo el mundo pudieran hacer pruebas con sus robots. De este modo, ellos están apoyando a que más personas, sin importar sus recursos económicos, puedan aportar a la investigación de robótica de enjambre. Además,

eso ayudaría a los investigadores a ir más allá de la simulación y realizar pruebas con sus algoritmos en prototipos reales. Para utilizar la plataforma es necesario descargar el simulador del Robotarium de Matlab o Python, registrarse en la página del Robotarium y esperar a ser aprobado para crear el experimento [3].

2.3. Wyss Institute Swarm Robots

El Instituto Wyss de Harvard desarrolló robots de bajo costo miniatura llamados *Kilobots* para probar algoritmos de inteligencia computacional de enjambre. Este tipo de robots es desarrollado para potencialmente realizar tareas complejas en el ambiente como lo son polinizar o creación de construcciones. Estos Kilobots cuentan con sensores, micro actuadores y controladores robustos para permitir a los robots adaptarse a los ambientes dinámicos y cambiantes [4].

2.4. Aplicaciones de Ant Colony Optimization (ACO)

En [5] se aplica el método de ACO para planificar la trayectoria de un robot autónomo en una cuadrícula con un obstáculo estático. El robot se coloca en la esquina inferior izquierda y se pretende que alcance el objetivo en la esquina superior derecha de la cuadrícula. La simulación de este trabajó se realizó en Matlab y se implementó con una cuadrícula de 100×100 unidades con la unidad como el tamaño de las aristas. Además, en la cuadrícula los agentes podían moverse norte, sur, este, oeste y en forma diagonal.

También en [6] se realizó una comparación de los algoritmos PSO y ACO, en donde se resaltaron algunas ventajas y desventajas de cada uno de los métodos. El PSO es simple pero sufre al quedarse atascado con mínimos locales por la regulación de velocidad. Por otro lado, el ACO se adapta muy bien en ambientes dinámicos, pero el tiempo de convergencia puede llegar a ser muy largo (aunque la convergencia sí está garantizada).

CAPÍTULO 3

Justificación

En la segunda fase del proyecto Robotat de la Universidad del Valle de Guatemala se desarrolló un algoritmo basado en el algoritmo *Particle Swarm Optimization* para planificar una trayectoria óptima para que los robots llegaran a una meta determinada. También se elaboró el diseño de distintos controladores para asegurar que los robots recibieran velocidades coherentes con respecto a sus limitantes físicas. Ya que este algoritmo y controlador fueron exitosos en simulación, se desearía compararlos con otros algoritmos para que, de este modo, el mejor algoritmo sea finalmente implementado en los robots físicos.

Como propuesta de algoritmo se tiene el *Ant Colony Optimization* (ACO), pues es otro de los más utilizados de la rama de inteligencia computacional de enjambre. Se debe de encontrar los mejores parámetros para que el algoritmo converja en un tiempo similar al logrado con el PSO de la fase II del proyecto Robotat. Asimismo se busca implementar los mismos controladores que en el proyecto mencionado anteriormente para que la comparación sea equitativa.

CAPÍTULO 4

Objetivos

4.1. Objetivo General

Implementar y verificar algoritmos de inteligencia de enjambre y computación evolutiva como alternativa al método de *Particle Swarm Optimization* para los Bitbots de UVG.

4.2. Objetivos Específicos

- Implementar el algoritmo *Ant Colony Optimization* (ACO) y encontrar el valor de los parámetros de las ecuaciones del ACO que permitan a los elementos de la colonia encontrar una meta específica, en un tiempo finito.
- Validar los parámetros encontrados por medio de simulaciones computarizadas que permitan la visualización del comportamiento de la colonia.
- Adaptar los modelos del movimiento y de la cinemática de los Bitbots, desarrollados en la fase anterior del proyecto, al algoritmo ACO.
- Validar el algoritmo ACO adaptado implementándolo en robots físicos simulados en el software WeBots, y comparar su desempeño con el del *Modified Particle Swarm Optimization* (MPSO).

CAPÍTULO 5

Alcance

El alcance de este trabajo fue la implementación del algoritmo *Ant Colony* (ACO) para planificar trayectorias en robots diferenciales. Para realizar esto primero se programó una versión simple del algoritmo llamada *Simple Ant Colony* (SACO) y luego se implementó la versión planteada por Marco Dorigo, *Ant System* (AS). Asimismo, se implementaron varios controladores en la velocidad de las ruedas de los robots para considerar sus restricciones físicas. Los robots utilizados en esta fase fueron los robots e-puck, por lo que en futuras implementaciones se debería de considerar robots con dimensiones similares. Esto último se realizó con el *software* Webots con el lenguaje de programación Matlab. Para futuras implementaciones se podrá implementar este algoritmo en los Bitbots físicos de UVG. Además, también podría realizarse pruebas con obstáculos o incluso con otros lenguajes de programación para su comparar desempeño.

CAPÍTULO 6

Marco teórico

6.1. Inteligencia Computacional de Enjambre

El campo de la inteligencia computacional de enjambre, o *Swarm*, parte de la idea de que individuos interactúan entre ellos para resolver un objetivo global por medio de intercambio de su información local. De esta manera, la información se propaga más rápido y por tanto, el problema se resuelve de una manera más eficiente. El término *Swarm Intelligence* (SI) se refiere a esta estrategia de resolución de problemas colectiva, mientras que *Computational Swarm Intelligence* (CSI) se refiere a algoritmos que modelan este comportamiento [7].

Al tener diversos estudios sobre distintos tipos de animales es posible crear algoritmos que modelen las situaciones. Algunos sistemas biológicos que han inspirado este tipo de algoritmos son: hormigas, termitas, abejas, arañas, escuelas de peces y bandadas de pájaros. Dos de los algoritmos que se estudiarán más adelante están basados en pájaros y hormigas, modelando su comportamiento individual y colectivo.

6.2. Particle Swarm Optimization (PSO)

Este algoritmo hace referencia al comportamiento de las bandadas de pájaros y cardúmenes de peces al realizar búsquedas óptimas [8]. Las partículas encuentran la solución a partir de su mejor posición y la mejor posición de todas las partículas [9]. Las ecuaciones que modelan esta situación son las siguientes [8], [9]:

$$v_{id}^{t+1} = v_{id}^t + c_1 r_1 (p_{id}^t - x_{id}^t) + c_2 r_2 (p_{gd}^t - x_{id}^t) \quad (1)$$

$$x_{id}^{t+1} = x_{id}^t + v_{id}^{t+1} \quad (2)$$

Donde v es la velocidad, x la posición, c son constantes de aceleración, p_{id} es la mejor

posición personal, p_{gd} es la mejor posición que tuvo todo el enjambre en la iteración y r son números aleatorios entre 0 y 1. La fase de exploración ocurre cuando se tiene una diferencia grande entre la posición de la partícula y el particle best (**pbest**) o global best (**gbest**). La ventaja de este método contra los que necesitan usar el gradiente es que no se requiere que el problema sea diferenciable y puede optimizarse problemas con ruido o cambiantes. La función que se desea optimizar en este caso se llama función de costo [8].

6.2.1. Funcionamiento del Algoritmo PSO

Se inicia el programa creando las partículas, dándoles una posición y velocidad inicial. Luego se introducen esos valores a la función de costo, se actualizan los valores de **pbest** y **gbest**. Este proceso se repite hasta que se cumpla un número de iteraciones o se logre la convergencia del algoritmo. La convergencia se alcanza cuando todas las partículas son atraídas a la partícula con la mejor solución (**gbest**). Un factor que se debe tomar en cuenta es el de restringir los valores que pueden tomar las funciones para que el algoritmo no diverja [9].

6.2.2. Mejora del Algoritmo

El algoritmo puede mejorarse a través del incremento de partículas, introducción del peso de inercia w o la introducción de un factor de restricción K. El factor de inercia controla las fases de explotación y desarrollo del algoritmo. Se sugiere utilizar un valor mayor de inercia y decrementarlo hasta un valor menor para tener una mayor exploración al principio, pero al final mayor explotación [8].

$$v_{id}^{t+1} = wv_{id}^t + c_1r_1(p_{id}^t - x_{id}^t) + c_2r_2(p_{gd}^t - x_{id}^t) \quad (3)$$

$$v_{id}^{t+1} = K(wv_{id}^t + c_1r_1(p_{id}^t - x_{id}^t) + c_2r_2(p_{gd}^t - x_{id}^t)) \quad (4)$$

El otro caso es utilizar el factor de restricción K para mejorar la probabilidad de convergencia y disminuir la probabilidad de que las partículas se salgan del espacio de búsqueda [8].

6.3. Ant Colony Optimization (ACO)

A partir de las observaciones de los entomólogos, se determinó que las hormigas tienen la habilidad de encontrar el camino más corto entre una fuente de alimento y su hormiguero. Marco Dorigo desarrolló un algoritmo con base en el comportamiento de estos insectos, a partir del cual se han derivado muchas otras variantes. Sin embargo, la idea principal de utilizar a las hormigas como base del algoritmo puede verse como una instancia de la metaheurística de Ant Colony Optimization (ACO-MH). Algunas de las instancias más conocidas son: Ant System (AS), Ant Colony System (ACS), Max-Min Ant Aystem (MMAS), Ant-Q, Fast Ant System, Antabu, AS-rank y ANTS [7].

Cuando una hormiga encuentra una fuente de alimento, al regresar al nido esta deja un rastro de feromonas para indicarle a sus compañeras que si siguen ese camino, encontrarán comida. Mientras más hormigas escojan ese camino, más feromona habrá y asimismo, mayor probabilidad de que las demás hormigas elijan esa ruta. Esta forma de comunicación indirecta que tienen las hormigas es denominada *stigmergy*. “La feromona artificial imita las características de la feromona real, indicando la popularidad de la solución del problema de optimización que se está resolviendo. De hecho, la feromona artificial funciona como una memoria a largo plazo del proceso completo de la búsqueda” [7].

Al principio, las hormigas se comportan de una manera aleatoria. Deneubourg realizó un experimento en el que se colocó comida a cierta distancia del hormiguero, pero solo podían acceder a ella en dos caminos diferentes. En este experimento, los caminos eran del mismo tamaño, pero con el comportamiento aleatorio de las hormigas uno de ellos fue seleccionado. Este experimento es conocido como el "puente binario". Asimismo, en un experimento similar pero con uno de los caminos más corto que el otro, las hormigas al principio eligieron los dos de forma equitativa, pero conforme el tiempo pasó eligieron el más corto. Este efecto es denominado “largo diferencial” [7].

6.3.1. Simple Ant Colony Optimization (SACO)

Este algoritmo es el que se utilizó en la implementación del experimento del puente binario. Este considera el problema general de búsqueda del camino más corto entre un conjunto de nodos en un grafo $G = (V, E)$ donde la matriz V representa a todos los vértices o nodos del grafo y la matriz E a todas las aristas o *edges* del grafo [7].

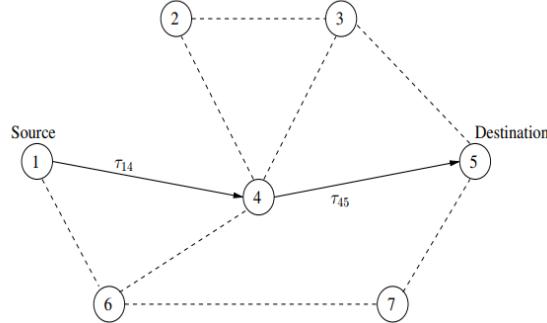


Figura 1: Ejemplo de un grafo [7].

Asimismo, el largo L^k del camino construido por la hormiga k se calcula como el número de saltos en el camino desde el nodo que representa al nido hasta el que representa el destino con la comida. En la figura 1 puede verse un camino marcado con flechas continuas con un largo de 2. En cada arista (i,j) del grafo se tiene cierta concentración de feromona asociada τ_{ij} . En este algoritmo, la concentración inicial de feromona se asigna de forma aleatoria¹ (aunque en la vida real sea de 0). Cada hormiga decide inicialmente de forma aleatoria² a qué arista dirigirse. K hormigas se colocan en el nodo fuente (*source*). Para cada iteración, cada

¹Sin embargo en [10] recomiendan que todas las aristas comiencen con el mismo valor, como 1 por ejemplo.

²En [10] y [7] recomiendan usar el algoritmo *Roulette Wheel*.

hormiga construye una solución al nodo destino. En cada nodo i, cada hormiga k determina a qué nodo j debe de dirigirse basado en la probabilidad p:

$$p_{(i,j)}^k(t) = \begin{cases} \frac{(\tau_{ij}(t))^\alpha}{\sum_{k \in J_k} (\tau_{ij}(t))^\alpha} & \text{si } j \in N_i^k \\ 0 & \text{si } j \notin N_i^k \end{cases} \quad (5)$$

Donde N representa al conjunto de nodos viables conectados al nodo i. Si en cualquier nodo el conjunto N es el conjunto vacío, entonces el nodo anterior se incluye. En la ecuación 5, α es una constante positiva que se utiliza para modular la influencia de la concentración de feromonas. Cuando este parámetro es muy grande la convergencia puede ser extremadamente rápida y resultar en un camino no óptimo. Cuando las hormigas llegan al nodo destino regresan a su nodo fuente por el mismo camino por el cual llegaron y depositan feromonas en cada arista [7]. En este proceso también se modela una forma de evaporación de feromonas para aumentar la probabilidad de exploración del terreno.

La ecuación que gobierna la evaporación de la feromona en los trayectos es la siguiente:

$$\tau_{ij}(t+1) = (1 - \rho) \cdot \tau_{ij}(t) + \sum_{k=1}^m (\Delta \tau_{ij}^k(t)) \quad (6)$$

Donde m es el número de hormigas, ρ es el factor de evaporación de feromona (entre 0 y 1). Además, se sabe que:

$$\Delta \tau_{ij}^k(t) = \frac{Q}{L_k}(t) \quad (7)$$

Donde Q es una constante y L es el costo del trayecto, como el largo del mismo. El valor representa el cambio de feromona entre el nodo i y j que la hormiga visitó en la iteración t [8].

6.3.2. Ant System

Este fue el primer algoritmo desarrollado que emula el comportamiento de las hormigas, que consiste en hacer ciertas mejoras al algoritmo presentado anteriormente. El algoritmo anterior tenía un objetivo más instructivo, por lo que era más simple. Algunas de las mejoras son la incorporación de información heurística en la ecuación de probabilidad y agregando capacidad de memoria con una lista tabú. La nueva ecuación de probabilidad es la siguiente:

$$p_{(i,j)}^k(t) = \begin{cases} \frac{(\tau_{ij}(t))^\alpha \cdot (\eta_{ij}(t))^\beta}{\sum_{k \in J_k} (\tau_{ij}(t))^\alpha \cdot (\eta_{ij}(t))^\beta} & \text{si } j \in N_i^k \\ 0 & \text{si } j \notin N_i^k \end{cases} \quad (8)$$

Donde el nuevo parámetro η representa el inverso del costo de la arista. En ambos algoritmos presentados, la condición de paro puede ser un límite de iteraciones o generaciones, o bien, cuando un porcentaje determinado de hormigas haya elegido la misma solución [7].

6.4. Computación Evolutiva

La evolución (en biología) puede ser definida como un proceso de optimización donde los individuos cambian de forma dinámica para sobrevivir en ambientes competitivos. Aunque Darwin se considera el padre de la teoría de la evolución, fue Jean-Baptiste Lamark quien en realidad lo teorizó. Esta teoría consistía en que los padres heredan ciertas características a sus hijos y luego estos continúan adaptándose. Además, la teoría de selección natural de Darwin resume el hecho de que los individuos con mejores características tienen mayor probabilidad de supervivencia y de reproducirse. Por tanto, las características menos útiles y los individuos más débiles suelen desaparecer. La computación evolutiva (EC por sus siglas en inglés) se encarga de resolver problemas utilizando modelos de procesos evolutivos como la selección natural y supervivencia del más apto [7]. Dependiendo de la implementación, estos algoritmos pueden dividirse en los siguientes paradigmas:

- Algoritmos genéticos (GA)
- Programación genética (GP)
- Programación evolutiva (EP)
- Estrategias evolutivas (ES)
- Evolución diferencial (DE)
- Evolución cultural (CE)
- Co-evolution (CoE)

6.4.1. Algoritmos Genéticos (GA)

Los algoritmos genéticos son un tipo de algoritmo que utiliza de forma inteligente los conocimientos sobre evolución en biología para resolver problemas en distintos ámbitos de forma computacional. En esta evolución, las características de los individuos se expresan en genotipos y se tiene un operador de selección y otro de crusa o recombinación. El operador de selección se encarga de modelar la supervivencia de los individuos más aptos, mientras que el operador de recombinación modela la reproducción entre los individuos. Asimismo, la etapa de la recombinación o crusa se encarga de explotar las soluciones, mientras que la etapa de mutación se encarga de proveerle cierto grado de diversidad a la población para así evitar convergencia prematura a soluciones sub-óptimas [7].

Inicialmente se tiene una población de soluciones conformada por cromosomas (cada cromosoma representa una solución), los cuales están conformados por genes o características. Los valores que pueden tomar estos genes son los alelos y dependen de la codificación que se

le de al problema. ¿Por qué es necesario codificar? Pues principalmente porque necesitamos traducir las variables físicas con las que trabaja el problema para que la computadora pueda interpretarlas y así aplicarle los operadores genéticos [7].

6.4.2. Métodos de codificación

John Holland es considerado el padre de los algoritmos genéticos, luego de realizar trabajos con los mismos a partir de los trabajos previamente realizados por Bremermann y Reed. En este primer algoritmo genético canónico se utilizó una codificación binaria con formato de *string*, selección proporcional para elegir qué padres serán recombinados, cruza en un punto para producir “cromosomas hijos” y mutación uniforme [7].

Codificación binaria

Algunas ventajas de este tipo de codificación son que casi todos los tipos de hipótesis pueden ser planteadas utilizando números binarios y que las computadoras tienen como lenguaje primario al código binario. Por lo tanto, las computadoras realizan todas sus operaciones en binario por ser el único lenguaje que conocen y si le damos directamente números en su idioma el tiempo de procesamiento será más rápido. Para realizar el diseño de la codificación de un espacio de hipótesis con código binario se representan ciertos atributos utilizando subconjuntos del mismo *string* de números binarios. Estos subconjuntos (o genes en nuestro caso) pueden ser alterados sin necesidad de alterar a sus subconjuntos vecinos [11].

Codificación entera

Además de la codificación binaria también existen codificaciones en base 10 como lo son la codificación de enteros y la de los reales. La codificación de enteros son muy convenientes en problemas que requieran como respuesta un orden específico de objetos ordenados. Un ejemplo donde es fácil visualizar la utilidad de este tipo de codificación es en el problema del vendedor viajero o TSP por sus siglas en inglés. Este problema busca encontrar el orden en el que el viajero debe de visitar ciertas ciudades dadas, tomando en cuenta que se debe de optimizar la ruta según la distancia de ciudad en ciudad. La codificación binaria podría utilizarse aquí, pero es posible que se requiera algún algoritmo corrector extra luego de hacer las operaciones de cruza o mutación pues algunos resultados pueden llevar a nodos (o ciudades) no existentes en la precisión dada por la longitud del número binario [12].

Codificación real

Finalmente tenemos la codificación de valores reales, que puede ser conveniente en problemas donde se esté trabajando en tiempo continuo, por lo que lo más intuitivo es utilizar números de punto flotante. Estos números claro que pueden ser expresados en binario, pero puede llegar a ser muy complicado su manejo. Por lo tanto, en estos casos donde la comple-

jidad de la representación de los objetos es alta con números binarios se recomienda utilizar valores reales [13].

Como se mostró anteriormente, la codificación binaria es lo suficientemente robusta para representar todos los casos. Cabe recordar que nuestra computadora utiliza binario como lenguaje nativo y por lo tanto es posible codificar todo en este lenguaje. Sin embargo, en algunos casos es más intuitivo y fácil de calcular y manejar el problema utilizando números en base 10. Por lo tanto, se recomienda al lector apegarse a lo que le sea más fácil de interpretar, claro, sin comprometer la velocidad y complejidad del algoritmo.

6.4.3. Función de costo

Esta es la función que se desea minimizar (o maximizar) utilizando los algoritmos genéticos. Existen algunas funciones famosas utilizadas para probar algoritmos de optimización que tienen ciertas características como: muchos mínimos locales, forma de plato hondo, forma de valle, con gotas, etc. A continuación se presenta algunos ejemplos de este tipo de funciones [14].

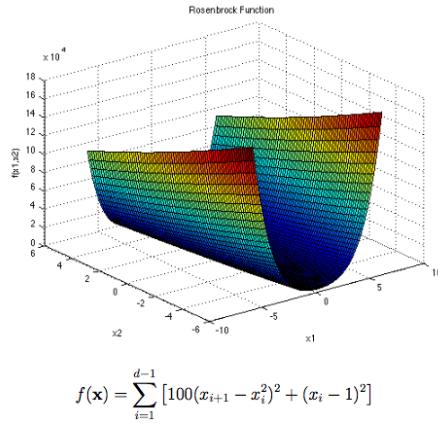


Figura 2: Gráfico y función de Rosenbrock [14].

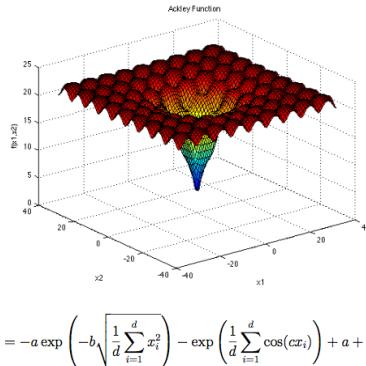
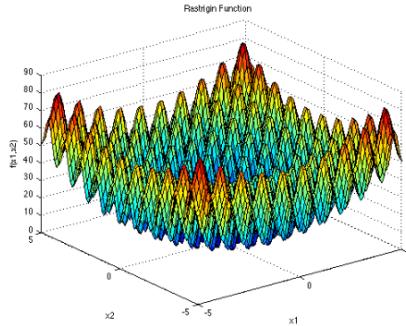
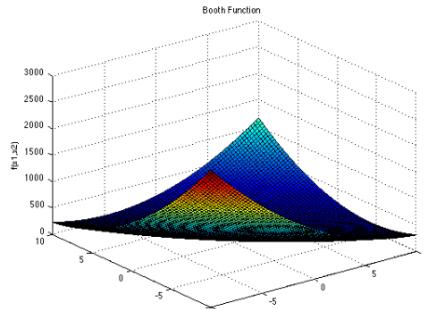


Figura 3: Gráfico y función de Ackley [14].



$$f(\mathbf{x}) = 10d + \sum_{i=1}^d [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i)]$$

Figura 4: Gráfico y función de Rastrigin [14].



$$f(\mathbf{x}) = (x_1 + 2x_2 - 7)^2 + (2x_1 + x_2 - 5)^2$$

Figura 5: Gráfico y función de Booth [14].

6.4.4. Métodos de selección proporcional

El método de selección proporcional fue propuesto por John Holland y sesga la selección según el costo de los individuos; es decir, los mejores individuos tienen mayor probabilidad de ser seleccionados [15]. Por tanto, se crea una distribución proporcional al costo como se muestra a continuación:

$$\phi_s(x_i(t)) = \frac{f_\gamma(x_i(t))}{\sum_{l=1}^{n_s} f_\gamma(x_l(t))} \quad (9)$$

Donde n_s representa al número de individuos en la población, $\phi_s(x_i)$ es la probabilidad de que un individuo x_i sea seleccionado y $f_\gamma(x_i(t))$ es igual al valor máximo de la función de costo menos el valor de la función de costo para el individuo x_i .

Determinístico

Uno de los métodos más populares y el método utilizado en este trabajo es el de la selección mediante una ruleta. En este caso cada sección de la ruleta es proporcional a la probabilidad normalizada de un individuo.

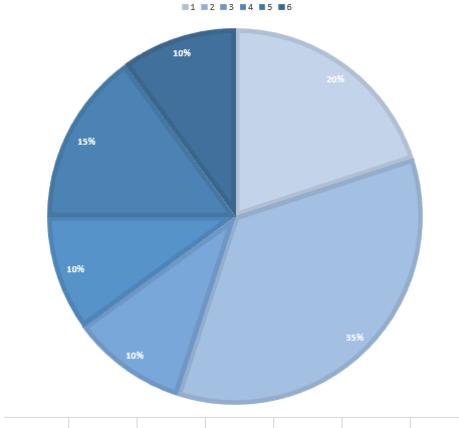


Figura 6: Selección de la ruleta en forma gráfica para 6 individuos.

A parte de este método de selección también existe el método estocástico y los métodos de selección tipo torneo. Sin embargo estos no son relevantes para esta investigación por lo que se dejará al lector profundizar al respecto en [7] si así lo desea. Asimismo puede investigarse sobre métodos de selección más elaborados como el presentado en [16].

6.4.5. Operadores de crusa en GA

Existen tres clases principales de operadores de crusa o recombinación: asexual, sexual y multi-recombinación. En el caso de la asexual, los descendientes son generados a partir de solamente un parente. En la segunda clase, los descendientes son generados a partir de dos padres seleccionados. Cabe mencionar que en este caso la cantidad de descendientes puede ser de 1 o 2. Finalmente, tenemos el caso de multi recombinación donde la única diferencia con el anterior es que puede producir más hijos (más de 2) si así se desea. Aparte de esta clasificación de los operadores, también se tiene la clasificación por tipo de dato (binario, entero o decimal) que se utilizará en la codificación de los cromosomas [7].

En la mayor parte de los operadores binarios se utiliza la reproducción sexual con dos padres, donde debe especificarse qué bits serán intercambiados para crear a los dos hijos. Como se mencionó anteriormente, para codificar los cromosomas se utiliza el alfabeto finito binario, constituido por los valores de 0 y 1 únicamente. Este fue el método usado por Holland y el más simple de utilizar con *strings* de bits de un largo fijo. Algunas desventajas son el hecho de que el largo tiene que ser fijo y que por lo tanto, la precisión de la respuesta también está sujeta a dicho parámetro [11].

En la crusa de un punto se elige un punto en los dos individuos seleccionados, cruzando la segunda parte de sus dígitos. Por ejemplo, si elijo intercambiar los últimos dos dígitos, el resultado A' y B' sería como sigue:

$$\begin{array}{ll} A = 111|11 & B = 000|00 \\ A' = 111|00 & B' = 000|11 \end{array}$$

En la cruza de dos puntos se elige dos puntos y se intercambian los segmentos del medio:

$$\begin{array}{ll} A = 101|010|1010 & B = 010|101|0101 \\ A' = 101|101|1010 & B' = 010|010|0101 \end{array}$$

Además de estos métodos presentados en [15], también existen otros métodos más complejos como los presentados en [17], donde explican 11 métodos diferentes de cruza para representaciones con números enteros. En este último artículo se centran en investigar el desempeño de varios métodos de cruza para la solución del problema del agente viajero.

6.4.6. Métodos de mutación

Un método de mutación puede ser el intercambio aleatorio de uno o más bits en GA binarios (*Bit Flip Mutation*). También se puede hacer el llamado *Random Resetting*, donde se cambia un valor en una cadena de números enteros por uno de los valores permitidos. Asimismo, para las cadenas de enteros existe la mutación de cambio de valores o *Swap Mutation*. A continuación se da un ejemplo de *Swap Mutation* [18].

$$\begin{array}{l} A = 1234567890 \\ A' = 1634527890 \end{array}$$

La mutación debe de aplicarse con una probabilidad menor al 10 % y teniendo cuidado de no eliminar soluciones potenciales. La utilidad de la mutación en los algoritmos genéticos está en la exploración de nuevas soluciones, mientras que en la cruza ocurre explotación de las soluciones encontradas. La clave de un buen algoritmo genético está en encontrar la combinación adecuada entre explotación y exploración de las soluciones [15]. Al igual que con la cruza, en [17], Larrañaga et. al compara también 6 distintos métodos de mutación para el problema del agente viajero.

6.5. Grafos

Como pudo observarse anteriormente, el algoritmo *Ant System* es un algoritmo de búsqueda basado en grafos y no funciones como el PSO. Por lo tanto, es necesario definir qué es un grafo y de qué maneras puede representarse. Un grafo G es un par de conjuntos (V, E) donde V representa al conjunto de vértices del grafo y E al conjunto de pares no ordenados de elementos de V [19].

$$V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$$

$$E = \{(V_i, V_j), (V_i, V_j), \dots\}$$

Existen los grafos dirigidos (o digrafos), donde el enlace del nodo i al j no es el mismo que del nodo j al i. Estos grafos sí cuentan con dirección. Asimismo, existen los grafos (y digrafos) ponderados. A estos se les asocia un número de peso o costo a cada arista. Este número podría ser distancia, capacidad o valor temporal dependiendo de la aplicación [20].

Los grafos pueden representarse a partir de dibujos como el de la figura 1, donde los grafos se muestran como en la figura y los digrafos con flechas para indicar la dirección. Además, también pueden representarse a partir de matrices como la matriz de adyacencia. En esta matriz cuadrada de tamaño número de vértices se muestra qué vértices están y no están conectados con un 1 y un 0 respectivamente [21]. A continuación se muestra un ejemplo de matriz de adyacencia de la figura 1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como puede observarse, cada fila y columna representa a un vértice, empezando desde el vértice 1 en la primera fila y primera columna (esquina superior izquierda).

6.5.1. Grafos en Matlab

Para representar grafos en Matlab se utiliza la clase `graph`, ya disponible para utilizarse en Matlab. Estos objetos de la clase `graph` tienen métodos para acceder y modificar nodos y aristas, para mostrar el grafo en representación de matrices, mostrar información del grafo, visualización e incluso para encontrar el camino más corto entre nodos. Algunos de los atributos (o propiedades como les llama Matlab) son las aristas y los nodos, aunque es posible agregarle más atributos a la clase. Para mas información y documentación acerca de la clase `graph` de Matlab visitar [22].

6.6. Programación Orientada a Objetos

Como se explicó anteriormente, el software Matlab representa los grafos como objetos, por lo que es necesario saber lo básico de cómo funcionan estos para implementarlos. Primero, ¿Qué es un objeto? Un objeto es una colección de datos con ciertos comportamientos

asociados. Un objeto puede ser de una clase en específico, que se define como una plantilla para crear objetos. El objeto en sí de una clase se llama instancia, y es el que se utiliza activamente en la programación. Para diferenciar objetos se utilizan atributos o características del mismo. Por ejemplo, un objeto de la clase fruta puede ser manzana o pera y se diferencian por sus atributos color y forma (por ejemplo) [23].

Como se explicó en el párrafo anterior, un objeto tiene comportamientos asociados, lo que nos hace pensar en ciertas funciones o acciones que pueden hacerse con el objeto. Estas funciones se llaman métodos y básicamente son funciones que solo pueden ser utilizadas por instancias de la clase donde están definidas [23]. Generalmente para referirse a un atributo se utiliza la notación `instancia.atributo` y para usar un método se utiliza `instancia.función()`. Para conocer y aprender sobre la notación específica de programación orientada a objetos en Matlab puede verse [24].

6.7. Computación Paralela

Para realizar pruebas debe de correrse el programa varias veces, por lo que se consumiría demasiado tiempo dependiendo de la cantidad y forma de realizar las pruebas. Por lo tanto se propone utilizar programación paralela para aprovechar los distintos núcleos de las computadoras para acelerar el proceso [25].

Los *softwares* tradicionales se escriben para computación serial y no paralela, por lo que el problema se divide en pedazos pequeños y se van pasando uno por uno al procesador como puede verse en la figura 7 [25].

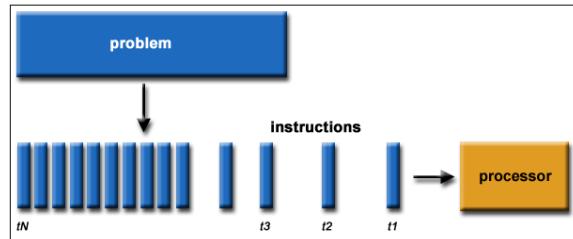


Figura 7: Computación serial [25]

Sin embargo, en la computación paralela la tarea se divide en el número de núcleos que tenga la máquina para realizar tareas en simultáneo y así ahorrar tiempo de ejecución (ver figura 8). Además, con paralelización es posible resolver problemas más complejos y al minimizar el tiempo (dependiendo de la aplicación) incluso podría ahorrarse algún costo [25].

6.7.1. Programación paralela en Matlab

Matlab tiene un *Toolbox* de computación paralela con funciones como el `parfor`, que reemplaza el `ciclo for` normal por un `ciclo for` paralelizado. Para correr un programa paralelizado de Matlab primero es necesario habilitar el `Parallel Pool` de Matlab y establecer la cantidad de procesadores (Matlab les llama *workers*) a utilizar [25].

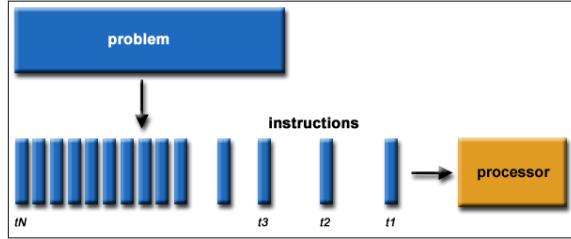


Figura 8: Computación paralela [25]

Para reescribir un **ciclo for** normal a un **parfor** se requiere que cada una de las subtareas sea independiente, por lo que no pueden utilizarse entre sí. Además, también es necesario que el orden de ejecución de las tareas no importe (también el orden debe ser independiente). Algunas restricciones para el **parfor** son que no se puede introducir variables utilizando las funciones **load**, **eval** y **global**, no pueden contener **break** o **return** y tampoco puede contener otro **parfor** dentro [25]. Para más información sobre este tema se recomienda ver [26].

Además de la programación paralela en Matlab, se recomienda utilizarla en conjunto con buenas prácticas de programación [27] y técnicas específicas para mejorar el desempeño [28], que incluyen estrategias como vectorización de código [29]. Si llegara a suceder que el código está trabajando de forma muy lenta es posible utilizar la técnica de búsqueda de cuellos de botella dada en [30] específicamente para Matlab utilizando la función *profiler*. Si se desea implementar paralelización en Matlab se recomienda leer todas las referencias bibliográficas de esta sección.

6.8. Planificación de movimiento

Se define como el problema de encontrar el movimiento desde un destino hasta un final esquivando obstáculos (si hubiese) y cumpliendo restricciones de juntas y/o torque para un robot [31].

6.8.1. Espacio de configuración

El espacio de configuración o espacio C corresponde a una configuración q del robot. Es decir, cada punto del espacio de configuración corresponde a una configuración diferente del robot. La configuración de un robot serial con n juntas está representada por el vector q con la posición de las n juntas, por lo que será un vector de dimensión n. El espacio libre en el espacio de configuración está dado por todas las configuraciones del robot donde este no colisiona con ningún obstáculo [31]. Este concepto de espacio de configuración se utilizará posteriormente para planificar la trayectoria.

6.8.2. Planificación de trayectorias

El problema de planificar una trayectoria es un subproblema de la planificación de movimiento. En este caso se requiere encontrar un camino sin colisiones desde un inicio hasta un destino. Estos problemas pueden ser resueltos *online* u *offline*, dependiendo de si se necesita el resultado inmediatamente o si el ambiente es estático respectivamente [31].

6.9. Métodos de Planificación de Movimiento

6.9.1. Métodos completos

Los métodos completos se enfocan en representar de manera exacta la geometría del espacio libre de configuración [31].

Grafos de visibilidad

Este grafo es un mapa que utiliza los vértices de los obstáculos en el espacio de configuración como nodos. Estos se conectan solamente si pueden *verse*. El peso de las aristas del grafo es la distancia euclídea entre los nodos. Este método puede utilizarse y resultar adecuado para obstáculos poligonales [31].

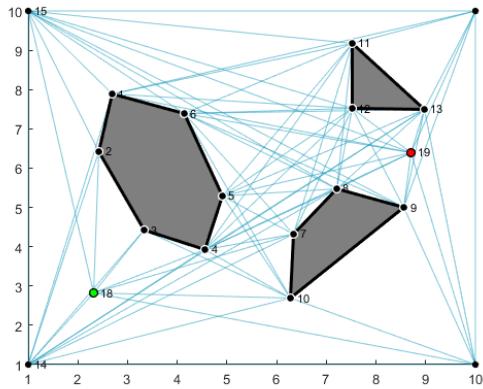


Figura 9: Ejemplo de grafo de visibilidad en Matlab.

6.9.2. Métodos de cuadrícula

Este método discretiza el espacio libre de configuración, creando una especie de cuadrícula para que el algoritmo busque una solución. Estos métodos pueden ser efectivos, pero la memoria requerida y el tiempo de búsqueda crecen de manera exponencial con el número de dimensiones del espacio. Es decir, una resolución de 100 en un espacio de dimensión 2 lleva a una cantidad de 100^2 nodos [31].

6.9.3. Métodos de muestreo

Estos métodos utilizan una función aleatoria o determinística para elegir muestras del espacio de configuración. Luego, evalúan si la muestra tomada está en el espacio libre y determina la muestra más cercana en el espacio libre para conectarlas. El resultado final de este algoritmo es un grafo o árbol que representa los movimientos legales del robot. Estos métodos sacrifican la resolución del mapa para minimizar la complejidad computacional [31].

Rapidly Exploring Random Trees (RRT)

Este método representa el espacio de configuración en forma de un árbol (grafo con nodos), utilizando el método de muestreo aleatorio presentado anteriormente para encontrar el siguiente nodo disponible. Existe una variante de este método, donde se arma dos árboles: uno desde el nodo inicio y otro desde el nodo destino y cada cierto tiempo el algoritmo intenta unir ambos árboles.

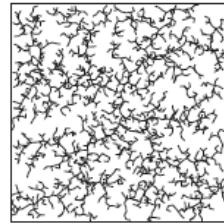


Figura 10: Ejemplo de un RRT [31]

Probability Road Maps (PRM)

Un PRM también representa el espacio libre de configuración con puntos aleatorios conectados entre sí. Una ventaja de este algoritmo es que se puede crear de forma rápida, por lo que puede ser eficiente. La clave para el PRM es elegir cómo hacer el muestreo, pues generalmente se hace de forma aleatoria a partir de una distribución uniforme del espacio de configuración, pero se ha mostrado que los mejores resultados se obtienen al muestrear de forma más densa cerca de los obstáculos.

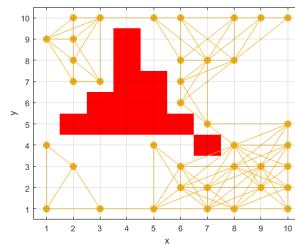


Figura 11: Ejemplo de un PRM en Matlab.

6.9.4. Artificial Potential Fields

Los campos de potencial artificiales crean fuerzas atractivas en el objetivo, atrayendo al robot en su dirección. Asimismo, crean fuerzas repulsivas en los obstáculos para alejar al robot de los mismos y así evitar colisiones. Este método es relativamente fácil de implementar y evaluar, pero puede quedarse atascado en mínimos locales de la función de potencial [31]. Este fue el método utilizado en la etapa II del proyecto Robotat UVG [2] y puede observarse un ejemplo con un simple obstáculo en la figura 12.

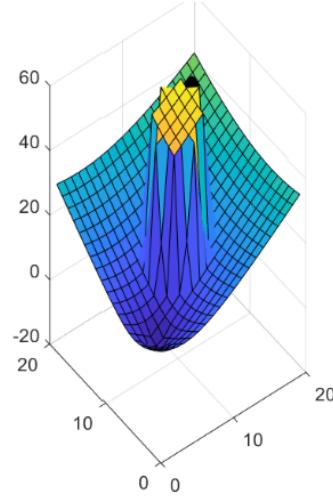


Figura 12: Ejemplo de un APF en Matlab.

6.10. Modelado de Robots Móviles

Los robots seriales pueden representarse utilizando cinemática directa. En esta se mapea el vector de configuración de robot (dado por los ángulos de las juntas) a la posición (x, y, θ) . Sin embargo, en el caso de los robots móviles³, en lugar de juntas tenemos ruedas. Estas ruedas tendrán una velocidad angular ϕ , por lo que si queremos encontrar la distancia recorrida s (por rueda), sabiendo que r es el radio de las llantas, tendríamos que:

$$s = r\phi \quad (10)$$

En teoría, podríamos encontrar la distancia recorrida, pero esto no funciona porque si se realiza una trayectoria similar, pero en otra dirección como en la figura 13, la distancia resultante sería la misma ($s_1 = s_2$). Sin embargo, el punto x , y no es el mismo, entonces este mapeo similar al de cinemática directa no es posible. Una configuración nos lleva a varias poses, lo que nos indica que tenemos restricciones no integrables (si integramos la velocidad no obtenemos posición). Estas restricciones también se conocen como restricciones no holonómicas [32]. Debido a que estas restricciones aplican a las velocidades, se aplicará la cinemática diferencial.

³Se recomienda al lector ver las lecciones 11 y 12 de robótica 1 en [32] antes de leer esta y la sección siguiente.

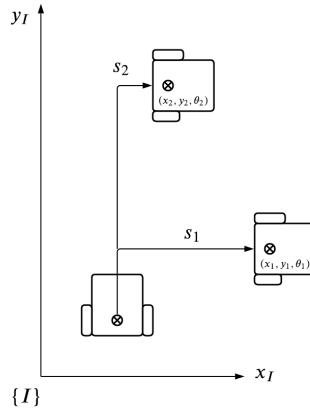


Figura 13: Distancia recorrida de una rueda para el robot móvil.

6.10.1. Modelo Uniciclo

Este es el modelo más simple de un robot móvil. Consiste en una sola rueda y vector de configuración $q = (\phi, x, y, \theta)$. De este se obtienen las velocidades lineales de las ruedas como sigue:

$$v_R = \phi_R r \quad v_L = \phi_L r \quad w = w$$

Donde w representa a la velocidad angular del robot, v representa la velocidad lineal del robot y v_R y v_L son las velocidades lineales de las ruedas derecha e izquierda respectivamente. La velocidad angular de los motores (ϕ) es conocida, por lo que de este modo es posible calcular las velocidades lineales. Estas variables mantendrán el mismo significado en el resto del trabajo.

6.10.2. Modelo diferencial

El modelo diferencial del robot móvil ya toma en cuenta 2 ruedas, por lo que es el que utilizaremos. Sin embargo, se necesita el modelo uniciclo para realizar el desarrollo de este último modelo [31]. Las ecuaciones siguientes describen el mapeo inverso, es decir, velocidad de las llantas en función de la velocidad lineal y la angular. Esto se debe a que en *software* controlaremos el uniciclo, pero con el mapeo del modelo diferencial [32].

$$v_R = \frac{v + wl}{r} \quad v_L = \frac{v - wl}{r}$$

Donde l es el radio del robot (asumiendo el modelo de un e-puck) y r es el radio de las ruedas del mismo.

6.10.3. Difeomorfismo

Cuando un sistema no es controlable se realiza un ajuste llamado difeomorfismo en el que se logra controlar un robot diferencial solo conociendo la velocidad y orientación en un punto. Las ecuaciones modificadas son las siguientes, donde u_1 y u_2 conforman el vector de control u .

$$v = u_1 \cdot \cos\phi + u_2 \cdot \sin\phi$$

$$w = \frac{-u_1 \cdot \sin\phi}{l} + \frac{u_2 \cdot \cos\phi}{l}$$

6.11. Controladores de Posición y Velocidad de Robots Diferenciales

Es necesario controlar la posición y velocidad de los robots para garantizar que llegarán a la pose deseada. Asimismo, se busca que estas trayectorias sean suaves y controladas. Para profundizar más en este tema se recomienda leer el capítulo 6 de [1], así como sus referencias. También se recomienda ver el video 12 de [32].

6.11.1. Control proporcional de velocidades con saturación limitada

En este controlador se utilizan constantes de saturación I y la función $\tanh(x)$ para que las velocidades estén acotadas. Las ecuaciones de control son las siguientes:

$$u_1 = I_x \cdot \tanh\left(\frac{k_x \cdot (x_g - x)}{I_x}\right)$$

$$u_2 = I_y \cdot \tanh\left(\frac{k_y \cdot (y_g - y)}{I_y}\right)$$

Donde x_g se refiere a la coordenada en x de la meta y x la posición actual, I son constantes mayores o iguales a 0. Estas ecuaciones luego las combinamos con el difeomorfismo encontrado anteriormente para obtener las ecuaciones que implementaremos en código. La variable l representa la distancia entre el centro y el punto de difeomorfismo, pero en esta tesis y en [1] se tomó igual al radio del robot.

$$v = I_x \cdot \tanh\left(\frac{k_x \cdot (x_g - x)}{I_x}\right) \cos\phi + I_y \cdot \tanh\left(\frac{k_y \cdot (y_g - y)}{I_y}\right) \sin\phi$$

$$w = \frac{-I_x \cdot \tanh\left(\frac{k_x \cdot (x_g - x)}{I_x}\right) \sin\phi}{l} + \frac{I_y \cdot \tanh\left(\frac{k_y \cdot (y_g - y)}{I_y}\right) \cos\phi}{l}$$

6.11.2. Control PID de velocidad lineal y angular

Uno de los controladores más populares en el área de sistemas de control es el controlador PID. En este se determinan las constantes K_p, K_I, K_d de forma empírica para compensar el error en estado estable y demás parámetros de rendimiento (t_p, t_s, M_p). La ecuación en el dominio del tiempo del control PID en función del error $e(t)$ es el siguiente:

$$PID(e(t)) = K_p \cdot e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) \cdot d\tau + K_d \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

Por lo tanto, nuestra implementación puede ser resumida como:

$$\begin{aligned} w &= PID(e_o) \\ v &= PID(e_p) \end{aligned}$$

Donde e_o es el error de orientación y e_p es el error de posición. Estos pueden calcularse como sigue:

$$\begin{aligned} e_o &= \text{atan2}\left(\frac{\sin(\theta_g - \theta)}{\cos(\theta_g - \theta)}\right) \\ e_p &= \sqrt{(x_g - x)^2 + (y_g - y)^2} \end{aligned}$$

Donde θ_g es el ángulo calculado desde el punto actual hasta la meta y θ es el ángulo actual.

Algoritmo 6.1: Pseudocódigo de PID [1]

```

1 e_k_1 = 0;
2 E_k = 0;
3 ...
4 e_k = r - y;
5 eD = e_k - e_k_1;
6 E_k = E_k + e_k;
7 u_k = kP*e_k + K_I*E_k + kD*eD;
8 e_k_1 = e_k;

```

6.11.3. Control PID de acercamiento exponencial

En este se corrige el comportamiento en espiral que presenta el controlador PID ordinario.

$$w = PID(e_o) \quad v = \frac{v_o(1 - e^{-\alpha e_p^2})}{e_p}$$

Donde v_o es la velocidad máxima del robot y α es un parámetro de ajuste arbitrario.

6.11.4. Control de pose

A diferencia de los controladores presentados anteriormente, estos sí toman en cuenta la pose final del robot. Este controlador se explica en la sección 6.4.4 de [1]. Las ecuaciones que definen al controlador son las siguientes:

$$\begin{aligned}\alpha &= -\theta + \theta_g \\ \beta &= -\theta - \alpha \\ v &= k_p \rho \\ w &= k_\alpha \alpha + k_\beta \beta\end{aligned}$$

Sabiendo que ρ es el error de posición (como el calculado en las secciones anteriores) y que las constantes k siguen las reglas dadas en [1].

6.11.5. Control de pose de Lyapunov

Este control de pose se basa en el criterio de estabilidad de Lyapunov para que el sistema sea asintóticamente estable. En este caso se tiene el mismo cálculo para α y ρ que en la sección anterior, pero se elimina el uso de un parámetro β .

$$\begin{aligned}v &= k_\rho \cdot \rho \cdot \cos(\alpha) \\ w &= k_\rho \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + k_\alpha \cdot \alpha\end{aligned}$$

6.11.6. Control Closed-Loop Steering

Este controlador presenta características similares a los controladores de pose, pero difiere en el cálculo de las velocidades. El cálculo de α , β y ρ es igual al de las secciones anteriores.

$$\begin{aligned}v &= k_\rho \cdot \rho \cdot \cos(\alpha) \\ w &= \frac{2v}{5\rho} \cdot \left(k_2 \cdot (\alpha + \text{atan}(-k_1 \cdot \beta)) + \left(1 + \frac{k_1}{1 + (k_1 \cdot \beta)^2} \right) \cdot \sin(\alpha) \right)\end{aligned}$$

6.11.7. Control LQR

El regulador cuadrático lineal o LQR por sus siglas en inglés, es un controlador óptimo, que utiliza la menor cantidad de control para alcanzar su objetivo. Debido a que el sistema a controlar resulta no ser controlable, al final de aplicar el control LQR se debe de utilizar el difeomorfismo.

$$u = -K \cdot (x - x_g) + u_g$$

6.11.8. Control LQI

Debido a que el LQR es sensible al ruido (no es robusto a perturbaciones) que existe en la medición de los sensores se le agregó una parte integral para compensar el error de estado estable. Al igual que en el controlador anterior es necesario utilizar el difeomorfismo.

$$u = -K_1 \cdot x + K_2 \cdot \sigma$$

CAPÍTULO 7

Controladores Punto a Punto

7.1. Simulación por Software

Para realizar las simulaciones de esta tesis se utilizó el lenguaje MATLAB versión R2018b debido a la experiencia que se contaba con el mismo. Además, para hacer simulaciones más realistas se utilizó el software Webots R2020a revisión 1 porque fue el programa utilizado en la fase anterior. En este software se coloca una mesa de pruebas del tamaño que el investigador desee. En este caso se colocó una de 2×2 metros al igual que en la fase II del proyecto Robotat [1]. Esta mesa de pruebas tiene su propio marco de referencia, que tomaremos como el inercial. Luego, es posible agregar luces, sombras y por supuesto, el robot a controlar. Ya que uno de los objetivos es comparar el algoritmo de [1] con el de esta tesis, se utilizó el mismo robot e-puck. Este último también tiene su propio marco de referencia, que no coincide con el inercial.

7.1.1. Webots

Webots es un programa muy particular, donde los ejes y ángulos se miden de forma diferente a la común. Cabe mencionar que la parte trasera del e-puck está marcada con un círculo negro. En la figura 14 se desea medir el ángulo entre la posición actual del robot y la meta¹ marcada con una estrella amarilla en el centro del marco inercial. A este ángulo le llamaremos θ_g , y como puede verse en la figura, se mide en dirección de las agujas del reloj. Sin embargo, en la figura 14b notamos que si hacemos $-\theta_g = -\text{atan}2(\frac{\Delta z}{\Delta x})$ nos quedarían $\frac{\pi}{4}$ radianes, que es un ángulo un poco más intuitivo.

¹La meta no necesariamente tiene que estar en el centro del marco, podría estar en otro lugar, pero se eligió este por razones didácticas.

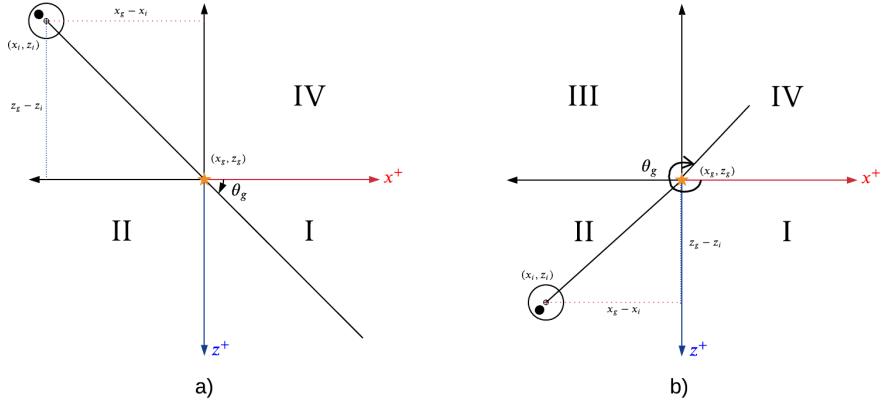


Figura 14: Ángulos en Webots.

7.1.2. Robot e-puck

Para saber la posición del robot en tiempo real se le coloca un módulo *compass*. Esta brújula devuelve las componentes en x y z del robot del vector norte. El vector norte por defecto es el eje x positivo del marco inercial. Al operar el arcotangente de las componentes $\text{atan}2(\frac{x}{z})$ se obtiene el ángulo ϕ . Sin embargo, posteriormente para calcular el error de orientación se necesitará encontrar un ángulo similar a θ_g , por lo que nos damos cuenta en el diagrama 15 que podemos obtener al ángulo $\theta = \pi - \phi$.

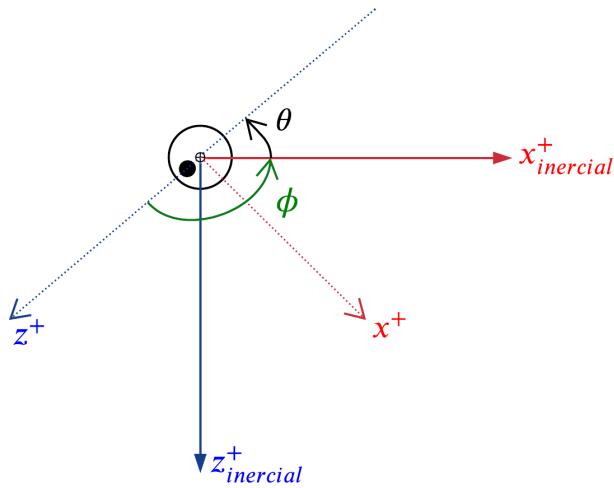


Figura 15: Ángulos del e-puck.

En lo que resta de este capítulo se presenta la transcripción de los controladores presentados en [1] de C a Matlab para luego unirlos con el AS. En la figura 16 puede verse la configuración inicial del mundo con la que se realizaron las pruebas. Como es posible observar, la parte delantera del robot se encuentra hacia abajo, con el propósito de colocarlo en un escenario difícil, pues tiene que darse la vuelta para comenzar su camino hacia la meta



Figura 16: Posición inicial de robot para pruebas con controladores.

marcada con una estrella. La finalidad de realizar las pruebas de esta sección es descubrir qué controladores dan los mejores resultados para luego ser implementados en conjunto con el AS. Las métricas que se utilizarán para medir este desempeño serán la variabilidad de la velocidad en las ruedas del motor y velocidad de convergencia del controlador.

7.2. Control TUC

El control proporcional de velocidades con saturación limitada presenta poca variación y rápida convergencia en las ruedas del motor. Esto puede evidenciarse en la figura 19, donde incluso se nota que el controlador no para de repente, sino que de una forma relativamente suave. La única desventaja que le vería a este controlador es que la trayectoria generada no es la óptima pues presenta una ligera curvatura visible en 20.

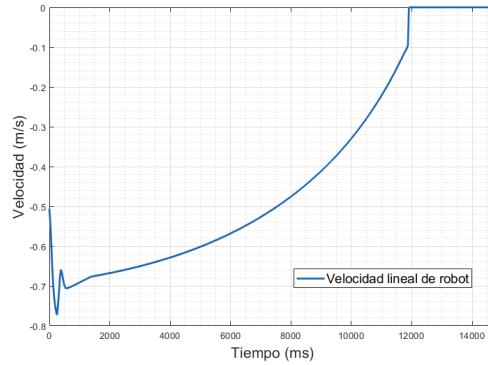


Figura 17: Gráfica de velocidad lineal para controlador TUC.

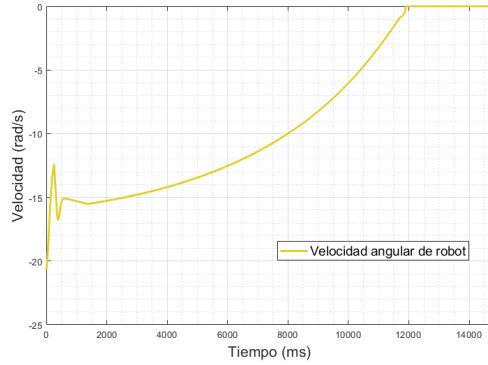


Figura 18: Gráfica de velocidad angular para controlador TUC.

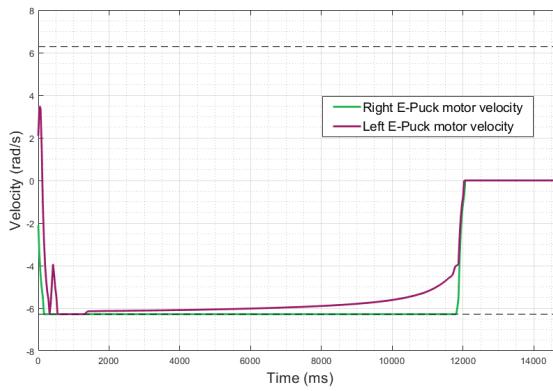


Figura 19: Gráfica de velocidad en los motores para controlador TUC.

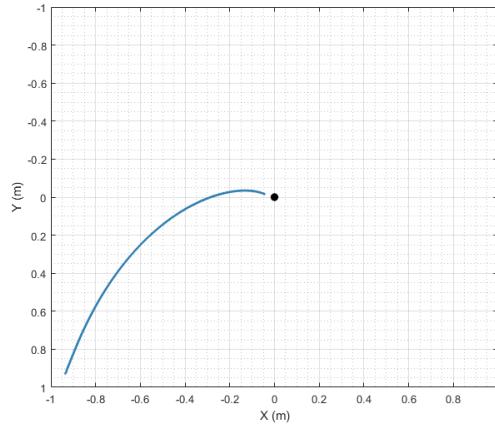


Figura 20: Trayectoria generada con el controlador TUC.

7.3. Control PID de Velocidad Lineal y Angular

Este controlador no converge de manera rápida. Incluso en la figura 21 puede evidenciarse que comienza con oscilaciones y un porcentaje de sobre elevación alto. Incluso en la figura

23 pueden evidenciarse los cambios bruscos de velocidad en los motores del robot. También es posible observar en la figura 24 que la trayectoria se aleja de ser suave y óptima porque realiza algunos cruces extraños debido a que el controlador no ha terminado de converger.

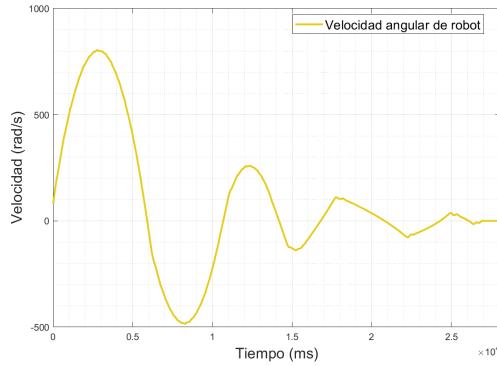


Figura 21: Gráfica de velocidad lineal para controlador PID.

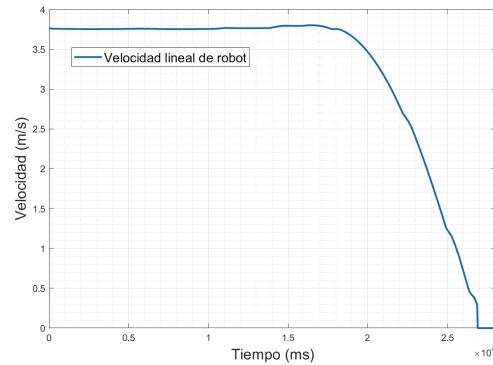


Figura 22: Gráfica de velocidad angular para controlador PID.

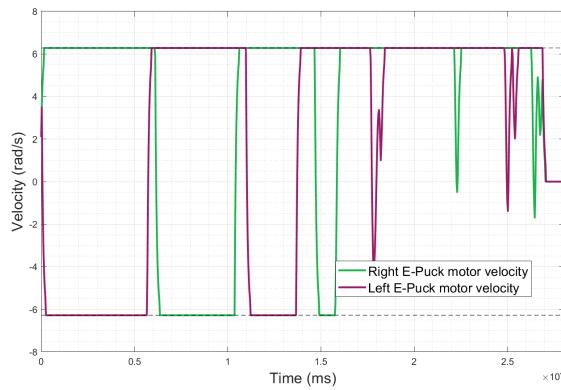


Figura 23: Gráfica de velocidad en los motores para controlador PID.

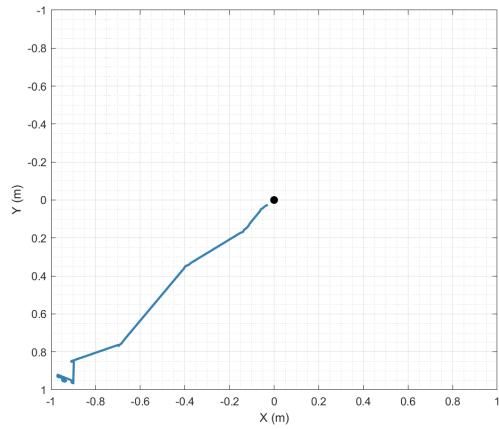


Figura 24: Trayectoria generada con el controlador PID.

7.4. Control PID de Acercamiento Exponencial

Este controlador tampoco converge de manera rápida, pero puede evidenciarse en 25 que lo hace más rápido que en el control PID de velocidad y posición. Asimismo, en la figura 27 puede verse que la variación entre la velocidad de los motores es grande, similar al caso anterior.

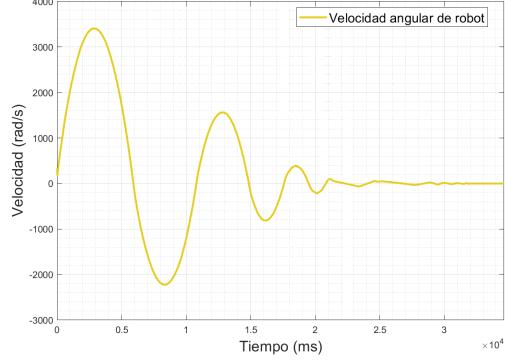


Figura 25: Gráfica de velocidad lineal para controlador PID de acercamiento exponencial.

7.5. Control de Pose

El control de pose presenta una aceleración grande al principio, pero conforme llega a la meta la velocidad baja hasta parar por completo. Este comportamiento puede apreciarse en la figura 31. Además, este controlador presenta una trayectoria recta y suave, como puede observarse en 32.

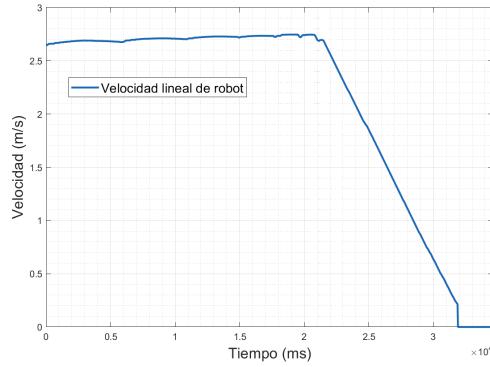


Figura 26: Gráfica de velocidad angular para controlador PID de acercamiento exponencial.

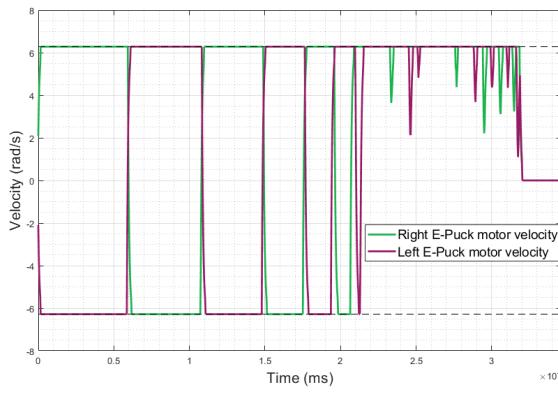


Figura 27: Gráfica de velocidad en los motores para controlador PID de acercamiento exponencial.

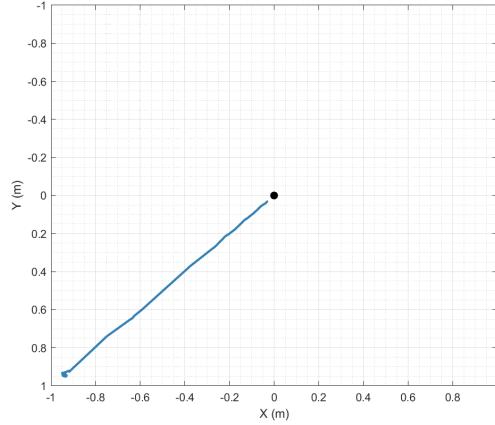


Figura 28: Trayectoria generada con el controlador PID de acercamiento exponencial.

7.6. Control de Pose de Lyapunov

Este controlador de pose presenta una respuesta casi igual al controlador anterior, por lo que su trayectoria y sus velocidades son suaves. La mayor diferencia puede verse en la

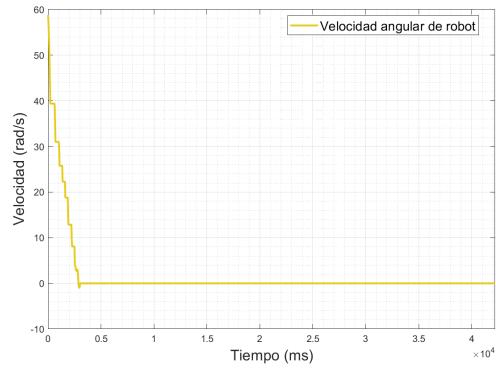


Figura 29: Gráfica de velocidad lineal para controlador de pose.

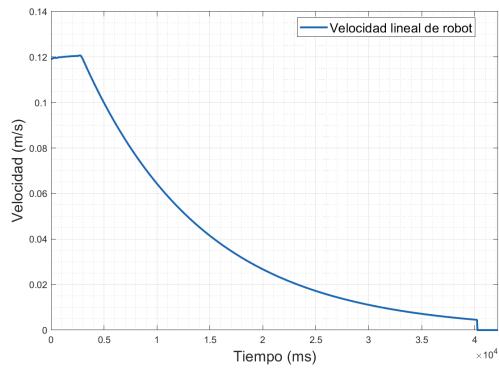


Figura 30: Gráfica de velocidad angular para controlador de pose.

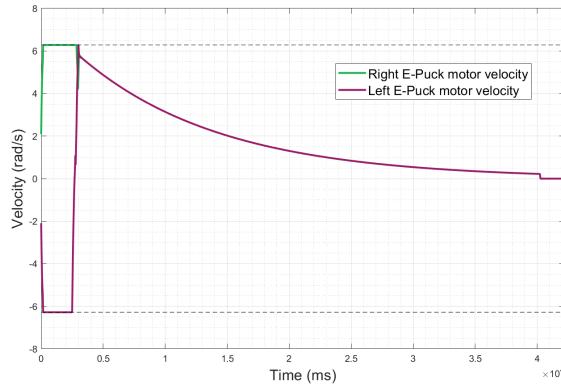


Figura 31: Gráfica de velocidad en los motores para controlador de pose.

gráfica de velocidad angular (figura 34), pero en general su desempeño es similar.

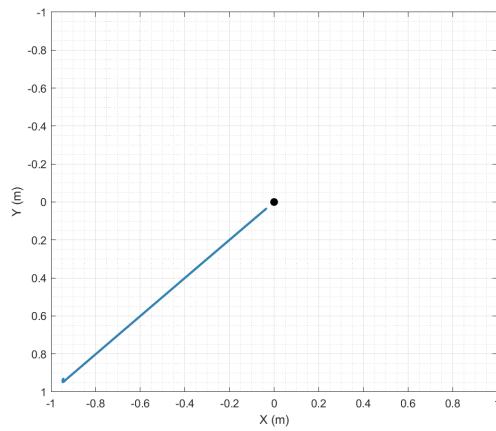


Figura 32: Trayectoria generada con el controlador de pose.

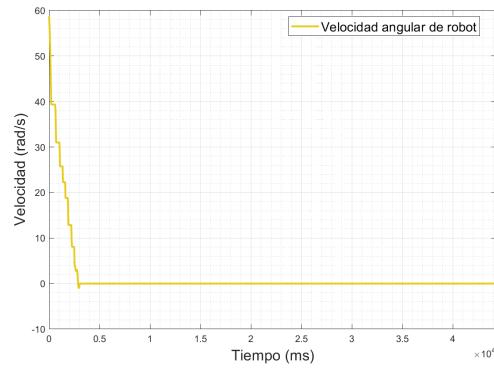


Figura 33: Gráfica de velocidad lineal para controlador de pose de Lyapunov.

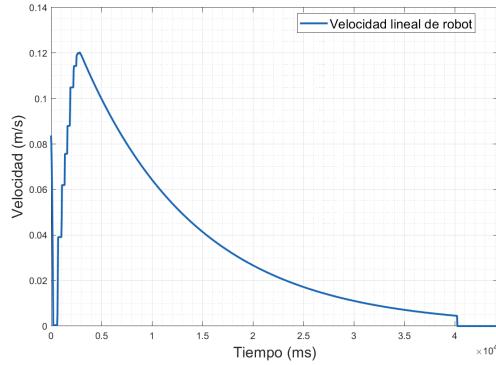


Figura 34: Gráfica de velocidad angular para controlador de pose de Lyapunov.

7.7. Control Closed-Loop Steering

Aunque a simple vista el controlador Closed-Loop Steering genera una trayectoria suave, las velocidades oscilan de una manera muy agresiva como puede observarse en las figuras 39

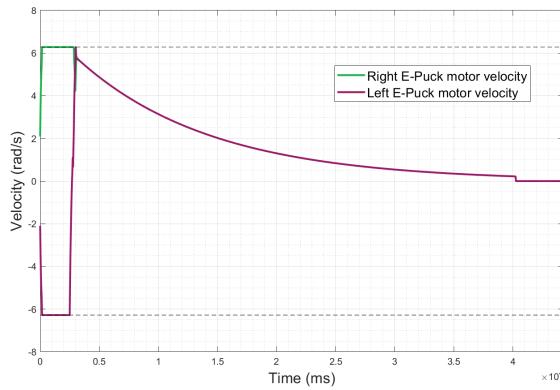


Figura 35: Gráfica de velocidad en los motores para controlador de pose de Lyapunov.

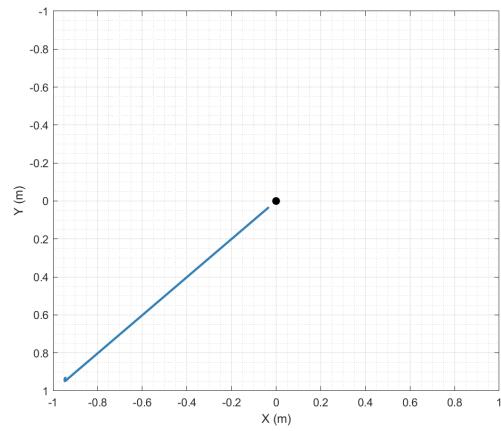


Figura 36: Trayectoria generada con el controlador de pose de Lyapunov.

y 37.

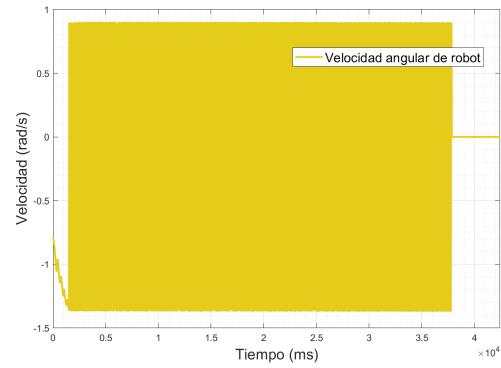


Figura 37: Gráfica de velocidad lineal para controlador Closed-Loop Steering.

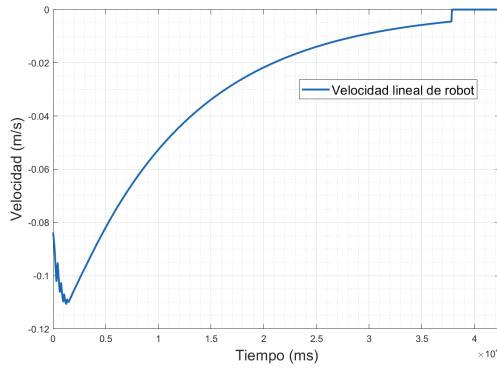


Figura 38: Gráfica de velocidad angular para controlador Closed-Loop Steering.

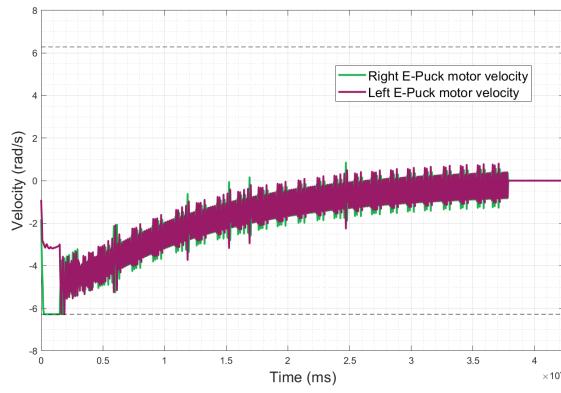


Figura 39: Gráfica de velocidad en los motores para controlador Closed-Loop Steering.

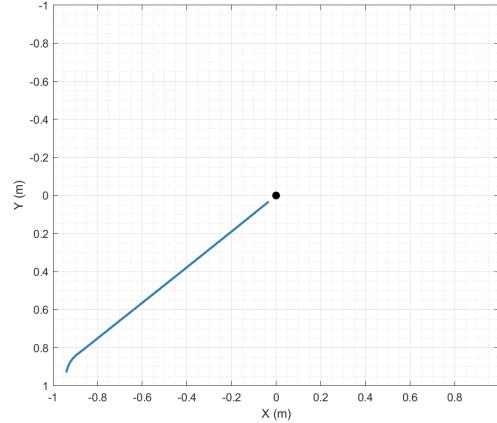


Figura 40: Trayectoria generada con el controlador Closed-Loop Steering.

7.8. Control LQR

Este controlador presenta una respuesta similar al del controlador TUC, pero con la ventaja de que este para en la meta de forma suave como puede observarse en la figura 43.

Su trayectoria está un poco curveada, como puede observarse en 44, pero sus velocidades no oscilan ni varían de forma muy drástica.

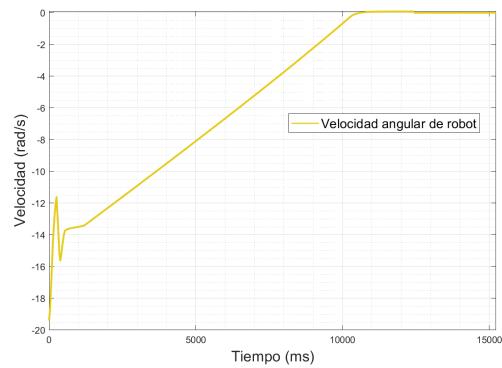


Figura 41: Gráfica de velocidad lineal para controlador LQR.

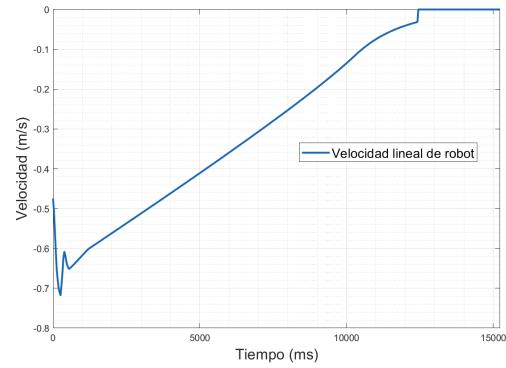


Figura 42: Gráfica de velocidad angular para controlador LQR.

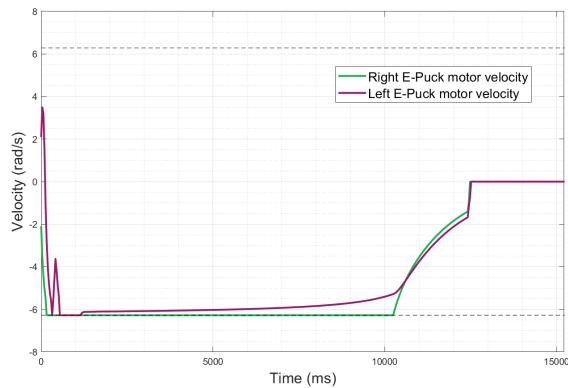


Figura 43: Gráfica de velocidad en los motores para controlador LQR.

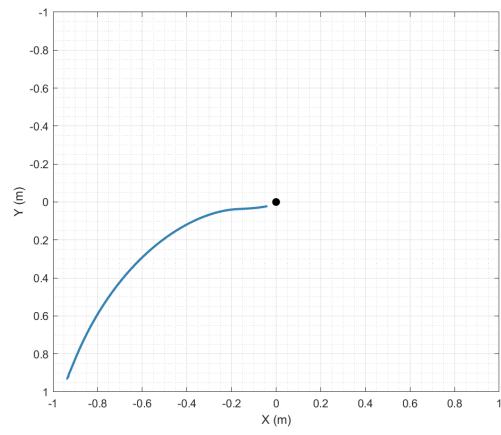


Figura 44: Trayectoria generada con el controlador LQR.

7.9. Control LQI

Este controlador, al igual que el anterior, no presenta oscilaciones ni variaciones bruscas en las velocidades. De hecho, este controlador también para de manera suave al llegar a la meta. A diferencia del controlador de la sección anterior, este genera una trayectoria bastante recta.

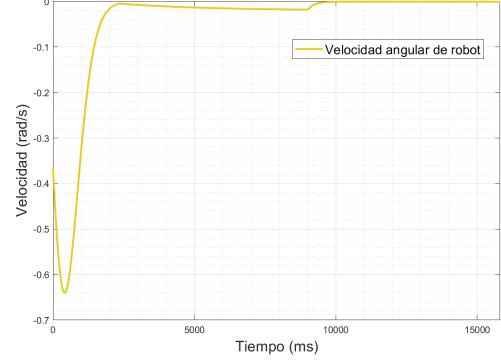


Figura 45: Gráfica de velocidad lineal para controlador LQI.

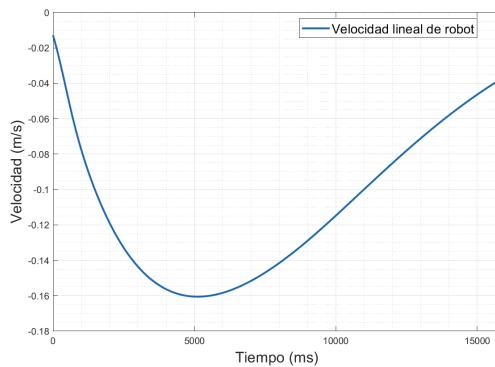


Figura 46: Gráfica de velocidad angular para controlador LQI.

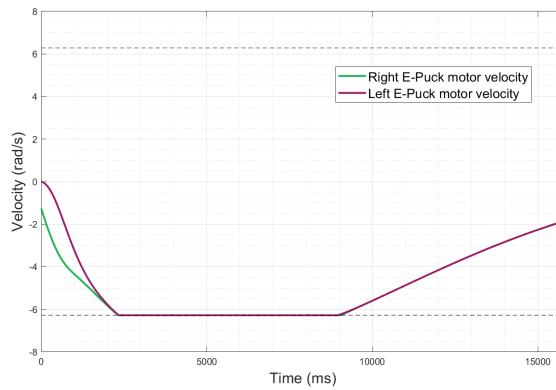


Figura 47: Gráfica de velocidad en los motores para controlador LQI.

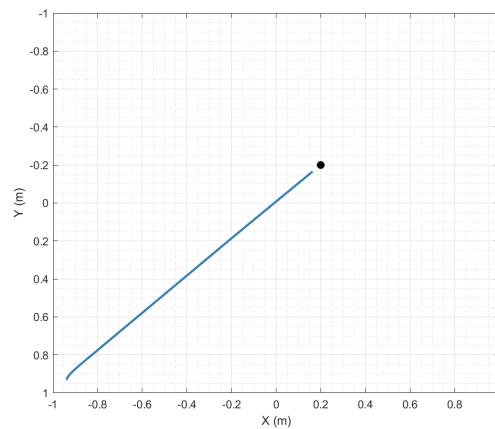


Figura 48: Trayectoria generada con el controlador LQI.

CAPÍTULO 8

Diseño Experimental AS

8.1. Validación del Algoritmo Ant System

Este experimento consiste principalmente en realizar una simulación simple del algoritmo Ant System para comprobar su funcionamiento. Primero se codificó el algoritmo Simple Ant Colony y luego se sobreescribió con el Ant System, que es un modelo un poco más complejo pues toma en consideración el costo por distancia y no solo la cantidad de feromonas depositadas. Además, este algoritmo también toma en cuenta otra variable Q para escalar la cantidad de feromona que se deposita. A continuación se presenta el pseudocódigo que se siguió (se recomienda ver el algoritmo 17.3 de [7]).

Algoritmo 8.1: Pseudocódigo de AS.

```
1 inicializar parametros
2 hasta que un porcentaje de las hormigas siga el mismo camino:
3     por cada hormiga:
4         hasta encontrar el nodo destino:
5             caminar al siguiente nodo segun eq. de probabilidad
6             end
7         end
8     por cada arista:
9         evaporar feromona
10        actualizar feromona segun largo de cada arista
11    end
12 retornar el camino encontrado
```

Las variables en negrilla representan a variables tipo celda, de lo contrario la variable es

un *array* o matriz común y corriente. Asumiendo que tenemos k hormigas¹, n nodos en el grafo y un número máximo de iteraciones tf.

Primero se presentarán las variables con forma de matrices de adyacencia con pesos; mientras más grandes sean los valores, mayor probabilidad tendrán de ser escogidos por la función `ant_decision`.

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \dots & \tau_{nn} \end{bmatrix} \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \dots & \eta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{n1} & \dots & \eta_{nn} \end{bmatrix}$$

La siguiente variable es una celda que contiene vectores columna:

$$vytau = \begin{bmatrix} \text{vecinos nodo 1} & \tau \text{ de los vecinos nodo 1} \\ \vdots & \vdots \\ \text{vecinos nodo n} & \tau \text{ de los vecinos nodo n} \end{bmatrix}$$

A partir de ahora utilizaremos la variable x para referirnos a vectores fila (x,y) apilados en una columna. En `feas_nodes` se guardan los nodos no visitados o viables a los que cada nodo sí puede dirigirse. En la celda `last_node` se guardan los nodos visitados anteriormente.

$$feas_nodes = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \dots & x_{kn} \end{bmatrix} \quad last_node = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \dots & x_{kn} \end{bmatrix}$$

`Blocked nodes` guarda la lista de nodos ya visitados por cada nodo y `path_k` guarda la lista de los nodos escogidos por la hormiga k (la actual).

$$blocked_nodes = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{k1} \end{bmatrix} \quad path_k = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{k1} \end{bmatrix}$$

L guarda el costo total de cada camino por hormiga (filas) y por iteración (columnas), mientras que `all_path` guarda cada camino (vectores fila apilados) por hormiga (filas) y por iteración (columnas).

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & \dots & L_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{k1} & \dots & L_{kt} \end{bmatrix} \quad last_node = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & \dots & x_{kt} \end{bmatrix}$$

¹en el código el número se expresa como `hormigas`, pero por términos de simplificación se utilizará k en este documento

Parámetro	Valor
ρ	0.5
α	1.3
β	1
Q	1
tf	70
ϵ	0.9
τ_0	0.1

Cuadro 1: Parámetros del experimento 1.

Los parámetros son sensibles a la lejanía de los nodos inicial y final, por lo que se recomienda hacer el barrido de parámetros con respecto a la lejanía con la que se desea evaluar al algoritmo. Para este experimento se utilizó el nodo (6,6) como nodo de prueba (y el 1,1 como inicial), utilizando los parámetros mostrados en el cuadro 1. En este experimento solamente se realizó 10 corridas debido a que la computadora disponible no puede ejecutar muchos experimentos complejos varios **ciclos for** anidados. Por lo mismo se propone utilizar una computadora de alto rendimiento como se explicará a continuación.

8.2. Validación del Algoritmo Ant System Paralelizado

Se notó que el algoritmo tardaba demasiado tiempo para hacer corridas de pruebas de barrido de parámetros (más de 8 horas para pocos parámetros en **ciclos for** anidados). Por lo tanto, se propuso realizar la implementación del algoritmo paralelizado, para ejecutar el programa en la computadora de alto rendimiento del departamento de Ingeniería Electrónica UVG aprovechando así todos sus núcleos. Para hacer el algoritmo paralelizado fue necesario modificar el **ciclo for** donde las hormigas recorren el mapa y encuentran un camino para que el proceso dentro fuera completamente independiente. Las variables que causaban problema eran **feas_nodes** y **blocked_nodes**, pero por la forma de implementarlo, no se podía modificar sin cambiar por completo el código.

Como se explicó en el marco teórico, Matlab cuenta con una clase grafo, por lo que se implementó el algoritmo haciendo uso de programación orientada a objetos. Los atributos de la clase grafo son **Nodes** y **Edges**, por lo que si creamos el grafo G, podemos acceder a esos atributos como sigue:

```

1 % Acceso a los atributos
2 grid_size = 10;
3 G = graph_grid(grid_size);
4 G.Nodes
5 G.Edges

```

Donde la función **graph grid** es una función auxiliar que se encarga de crear un grafo con los atributos **Nodes** y **Edges**, que son tablas con los siguientes parámetros:

```

1 % grid_graph.m
2 G = graph(table(EndNodes, Weight, Eta), table(Name, X, Y));

```

Como puede observarse, el primer argumento de la función `graph` corresponde al atributo `Edge` y el segundo al atributo `Node`. `EndNodes` representa dos nodos que conforman una arista, a la cual le corresponde un peso τ y un η , similar al código anterior. Con esto podemos eliminar las variables `tau`, `eta` y `vytau`. En el atributo `Nodes` tenemos el nombre del nodo y sus respectivas coordenadas.

Un objeto además de tener datos, tiene funciones, por lo que también contamos con los métodos `neighbors` y `plot` para encontrar a sus vecinos y visualizar el grafo respectivamente. En el código anterior, sin programación orientada a objetos, se tenía varias funciones como `neighbors` que ya no son necesarias por tener la clase grafo.

Para sustituir el resto de variables, primero debemos darnos cuenta de que estas están relacionadas con cada hormiga. Por lo tanto, podría pensarse que es posible crear un objeto hormiga y que cada una tenga sus atributos. Sin embargo, debemos recordar que cada objeto debe tener datos y funciones relacionadas. Entonces, en este caso no tenemos funciones por lo que se optó por utilizar una estructura de datos de Matlab llamada `ants` de tamaño igual a la cantidad de hormigas y con los siguientes parámetros:

```

1 hormigas = 50;
2 ants(1:hormigas) = struct('blocked_nodes', [], 'last_node',
    'nodo_init', 'current_node', 'nodo_init', 'path', 'nodo_init', 'L',
    zeros(1, t_max));

```

Esto se debe a que cada hormiga tendrá: sus nodos bloqueados o lista tabú, su último nodo, su nodo actual, el camino encontrado y la longitud del mismo. Aparte de estas variables también se tiene un histórico de los caminos y longitudes para comparar si los datos se están calculando de forma correcta.

Ya con estos cambios realizados es posible realizar la paralelización, donde cada iteración es completamente independiente de las demás. La paralelización en Matlab se activa cuando utilizamos la función `parfor` (de *parallel for* en inglés) como se muestra a continuación:

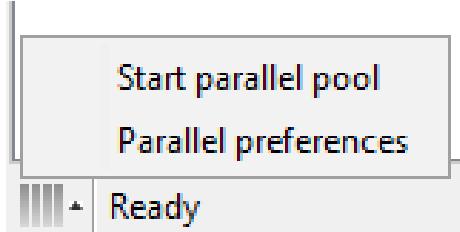
```

1 parfor k = 1:hormigas
2     while( no se haya llegado al nodo destino )
3         % construir el camino
4     end
5 end

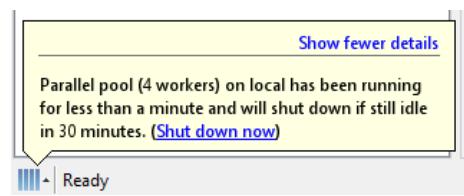
```

Para ejecutar el código es necesario prender lo que Matlab llama *Parallel Pool* (piscina paralela) en la esquina inferior izquierda (figura 49a). De no hacerlo, Matlab lo hace al ejecutar el código, pero se recomienda prenderlo antes para que sea más rápida la primera ejecución del programa. En la figura 49b se observa una piscina paralela de Matlab lista para ser utilizada.

El criterio de paro del algoritmo está dividido en dos partes. La primera detiene el



(a) Piscina paralela apagada.



(b) Piscina paralela lista para ejecutarse en una computadora con 4 núcleos.

Figura 49: Piscina paralela en Matlab.

algoritmo cuando la frecuencia de la moda corresponde a un ϵ en porcentaje (0-1) y el segundo criterio es un número máximo de iteraciones. Los parámetros utilizados en este experimento se muestran en 2.

Parámetro	Valor
ρ	0.5
α	1
β	1
Q	2
tf	70
ϵ	0.9
τ_0	1

Cuadro 2: Parámetros utilizados en AS paralelizado.

8.3. AS Paralelizado con PRM

Además de la representación del espacio como cuadrícula, también se incluyó la representación por medio de *probabilistic road maps* (PRM). Esta implementación se realizó utilizando la función del *Toolbox* de Robótica de Peter Corke, por lo que necesita instalarlo antes de ejecutar el algoritmo. Se generó un grafo con la función *prm_generator* y se guardó en un archivo *.mat*, para luego cargarlo en Matlab y utilizar el mismo mapa en cada ejecución. La función antes mencionada fue codificada a partir de la función *prm* del *Toolbox* de Peter Corke, realizando modificaciones en el grafo para adaptarlo al *Ant Colony*.

Puede existir un problema de compatibilidad entre el *Toolbox* de Peter Corke y algunas funciones de Matlab. Este problema yace en que algunas funciones de Peter Corke tienen el mismo nombre que otras funciones intrínsecas de Matlab. Este problema se resuelve y discute en el archivo *léeme* del repositorio de GitHub de esta tesis.

El experimento de esta sección consistió en ejecutar el programa 10 veces, al igual que en los experimentos anteriores. En este caso se utilizó los parámetros del cuadro 2, pero con una cantidad de hormigas igual a 100 (en los otros casos fue de 50) y un tf de 200 iteraciones.

8.4. AS Paralelizado con RRT

Al igual que en el experimento anterior, se utilizó el *Toolbox* de Peter Corke, por lo que los problemas mencionados se comparten. Para hacer uniformes las ejecuciones de esta representación del mapa se generó un grafo con la función `rrt_generator` y se guardó en un archivo .mat, para luego cargarlo en Matlab y así hacer similares las corridas. La función antes mencionada fue codificada a partir de la función de RRT del *Toolbox* de Peter Corke, realizando modificaciones en el grafo para adaptarlo al *Ant Colony*.

El experimento de esta sección consistió en ejecutar el programa 10 veces, al igual que en los experimentos anteriores. En este caso se utilizó los parámetros del cuadro 2 con 50 hormigas y un tf de 200 iteraciones.

8.5. AS con Grafo de Visibilidad

Como extra se añadió la posibilidad de probar el *Ant System* con un espacio con obstáculos con un grafo de visibilidad. Sin embargo, esta implementación no considera la dimensión del robot, por lo que se asume que es una masa puntual y el espacio de trabajo es el mismo que el de configuración. Para una implementación más realista es necesario tomar en cuenta la dimensión del robot en los obstáculos y hacerlos más anchos.

El grafo de visibilidad se crea con una aplicación llamada `poly_graph.mplapp` que debe abrirse con el AppDesigner de Matlab. Para editar el programa se ejecuta en la línea de comandos de matlab el comando: `appdesigner` y luego se abre el archivo. Para solamente ejecutar el programa y generar el grafo se puede dar doble click desde el folder actual de Matlab. Primero se debe de presionar el botón de `Add Obstacle` y dibujar los polígonos que se desee, luego se presiona `add start point` para agregar un punto de inicio, `add end point` para agregar un punto final y finalmente `visibility graph` para generar el grafo y guardarlo en un archivo .mat en el folder donde se está actualmente. En el archivo principal de ACO se importa el último archivo generado para utilizarlo como mapa.

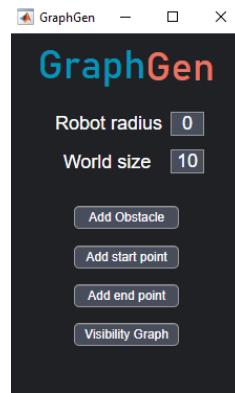


Figura 50: Aplicación que genera grafos de visibilidad.

Se realizó la interfaz de la aplicación para que fuera posible hacer obstáculos con dibujos personalizados por el usuario. De esta forma, en el futuro cuando se quiera probar con una

cámara se pueda hacer el trazo a mano sobre la imagen o incluso con el mismo Matlab se procese la imagen con visión por computadora. Las funciones de Matlab que hacen esto son similares a la utilizada ahora, por lo que en un futuro no debería de ser tan difícil la implementación. La aplicación también cuenta con un espacio para colocar el radio del robot para que en el futuro se pueda implementar con restricciones físicas.

El experimentó consistió en ejecutar el algoritmo 10 veces, al igual que en los experimentos anteriores, con 50 hormigas y los parámetros mostrados en el cuadro 2, exceptuando t_f que fue de 200.

CAPÍTULO 9

Resultados AS

9.1. Validación del Algoritmo Ant System

A continuación se muestra un camino óptimo y una imagen de la simulación de feromona hallada por el programa. Los resultados de las 10 ejecuciones del programa se muestran en el cuadro 3.

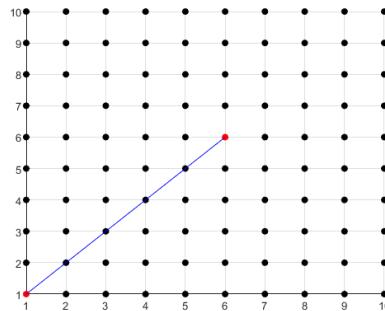


Figura 51: Camino óptimo encontrado del nodo (1,1) al (6,6).

En este ejemplo el costo mínimo que se podía obtener era 2.5, ya que el costo de las diagonales era de 0.5. El tiempo fue medido con las funciones `tic` y `toc` de Matlab. Al final de la tabla se muestra la media de cada parámetro. Para cada corrida es posible observar que el tiempo aumenta cuando las hormigas toman malas decisiones al principio. Puede que esto se arregle modificando la tasa de evaporación para aumentar el tiempo de exploración de las hormigas. Como puede observarse en la figura 52, la cantidad de feromona se ve reflejada en el ancho del camino. Además, los nodos no tienen un orden con respecto al plano X, Y, por lo que en el siguiente experimento también se hizo esas mejoras gráficas.

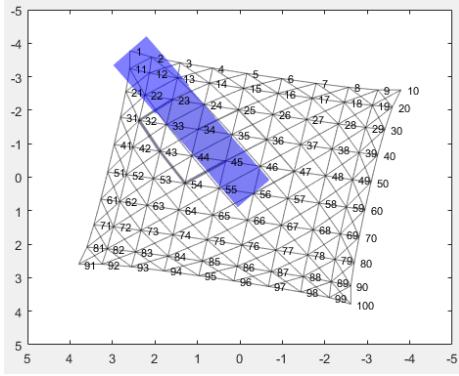


Figura 52: Feromona del camino óptimo encontrado del nodo (1,1) al (6,6).

iteración	tiempo	costo
14	14.2161	2.5
10	9.6620	2.5
9	9.2031	2.5
18	49.5735	3.5
43	44.7586	3.5
17	16.0491	2.5
26	25.3741	3.5
11	26.8102	2.5
22	60.7632	3.5
13	12.3290	3.5
18.3	26.8739	3

Cuadro 3: Resultados del experimento 1.

9.2. Validación del Algoritmo Ant System Paralelizado

Al ejecutar el código se verán dos gráficas animadas. La figura 1 tendrá la media \bar{x} del largo del camino y la moda \hat{x} del mismo. La segunda figura tiene una animación de los caminos y su feromona. Esta última animación cambia de color y de grosor de línea en cada arista que tiene mayor τ . Dentro del código se agrega un nuevo parámetro al atributo `Edges` que guarda la cantidad de feromona normalizada para utilizarla en esta animación. El color rojo indica mayor presencia de feromona, mientras que el color blanco indica que esa arista tiene menor cantidad. Los resultados de las 10 ejecuciones descritas en el capítulo anterior se muestran en el cuadro 4.

9.3. AS Paralelizado con PRM

Al ejecutar el código veremos dos gráficas animadas iguales a las del experimento anterior, con la diferencia de que estas se realizaron con un mapa con PRM. Los resultados de las 10 corridas descritas en el capítulo anterior se muestran en el cuadro 5.

Al ejecutar el código veremos dos gráficas animadas iguales a las del experimento anterior,

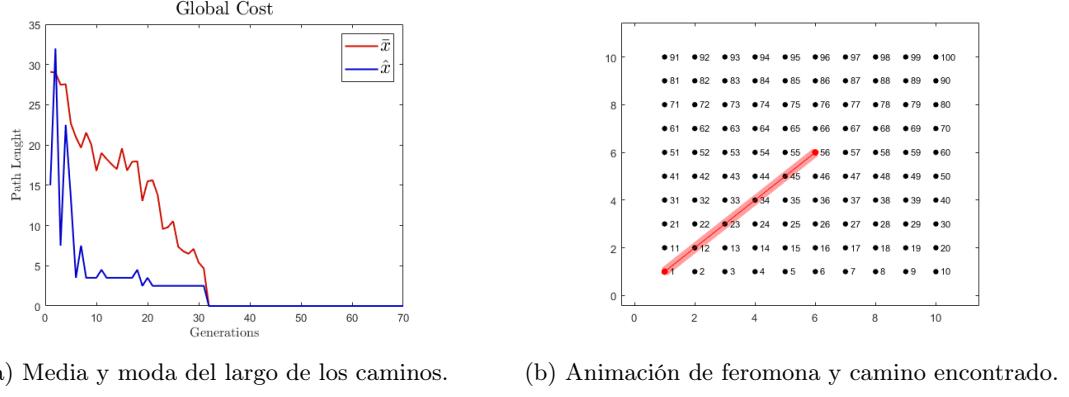
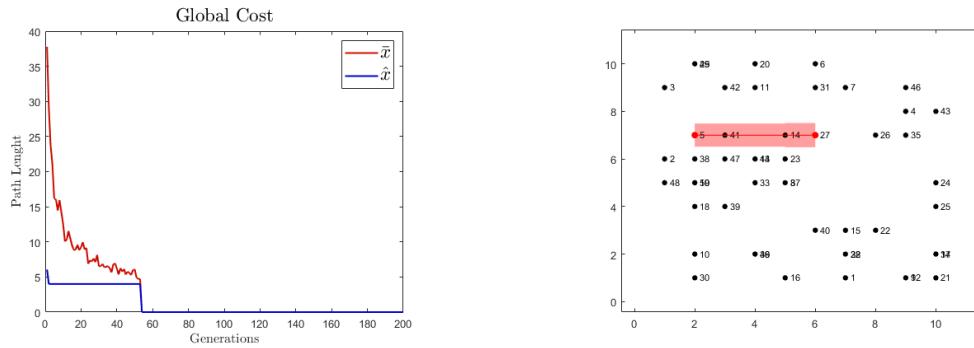


Figura 53: Animaciones generadas con mundo cuadrículado.

iteración	tiempo	costo
30	47.72	2.5
33	56.22	2.5
27	46.65	2.5
54	97.47	3.5
24	43.62	2.5
25	44.37	2.5
53	96.31	2.5
70	125.35	2.5
42	69.83	2.5
42	70.58	2.5
40	69.81	2.6

Cuadro 4: Resultados del experimento 2.



(a) Media y moda del largo de los caminos. (b) Animación de feromona y camino encontrado.

Figura 54: Animaciones generadas con PRM.

con la diferencia de que estas se realizaron con RRT. Los resultados de las 10 corridas descritas en el capítulo anterior se muestran en el cuadro 6.

iteración	tiempo	costo
69	79.30	4.00
146	152.03	6.00
105	117.28	4.00
82	88.59	4.00
83	87.08	6.00
192	211.31	6.00
178	206.50	6.00
95	106.60	6.00
117	130.32	6.00
53	53.20	4.00
112	123.22	5.2

Cuadro 5: Resultados del AS con PRM.

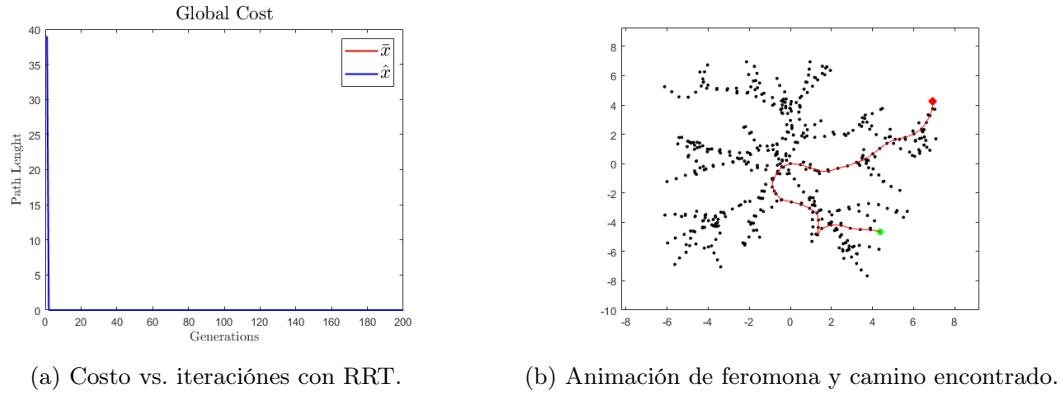


Figura 55: Animaciones generadas con RRT.

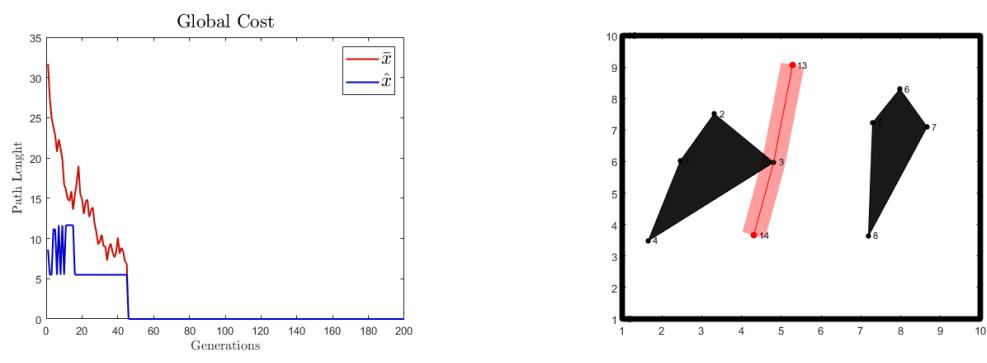
9.4. Experimento 4

Al ejecutar el código veremos dos gráficas animadas iguales a las del experimento anterior, con la diferencia de que estas se realizaron con grafos de visibilidad. En la figura 56b puede observar los obstáculos y el mejor camino generado. Los resultados de las 10 corridas descritas en el capítulo anterior se muestran en el cuadro 7.

9.5. Experimento 5

iteración	tiempo	costo
1	21.26	39
1	21.26	39
1	20.66	39
1	18.71	39
1	21.05	39
1	17.51	39
1	15.67	39
1	23.45	39
1	19.27	39
1	15.50	39
1	23.45	39
1	15.16	39
1	17.34	39
1	24.73	39
1	20.06	39
1	17.81	39
1	18.74	39
1	19.72	39
1	18.39	39
1	18.54	39
1	19.4140	39

Cuadro 6: Resultados del AS con RRT.



(a) Media y moda del largo de los caminos. (b) Animación de feromona y camino encontrado.

Figura 56: Animaciones generadas con grafo de visibilidad.

iteración	tiempo	costo
56	23.46	7.88
114	42.96	7.88
41	17.48	5.49
129	47.03	7.88
100	38.04	7.88
82	30.19	5.49
36	21.72	7.88
172	65.71	7.88
45	31.17	5.49
87	32.18	5.49
86.2	34.99	6.92

Cuadro 7: Resultados del AS con grafo de visibilidad.

CAPÍTULO 10

AS Controlado *todavía en construcción*

En esta sección se modificó el archivo del algoritmo AS para que exportara el camino encontrado por las hormigas a la carpeta donde se encuentra el controlador de Webots. A este camino se le tuvo que modificar las coordenadas debido a que los ejes de la mesa de pruebas o marco inercial de Webots se encuentra reflejado. Además, es necesario ajustar la cuadrícula de 10x10 unidades a la mesa de pruebas de 2x2 metros. Por lo tanto el ajuste que se realizó fue la siguiente operación entre vectores:

$$webots_{path} = (b_{path} - gridsize/2) . * [1/5, -1/5]$$

10.1. Mundo Cuadriculado

Para este experimento se utilizó el camino generado de la figura 53b.

10.1.1. Control TUC

El control proporcional de velocidades con saturación limitada

10.1.2. Control de Pose

El control de pose presenta

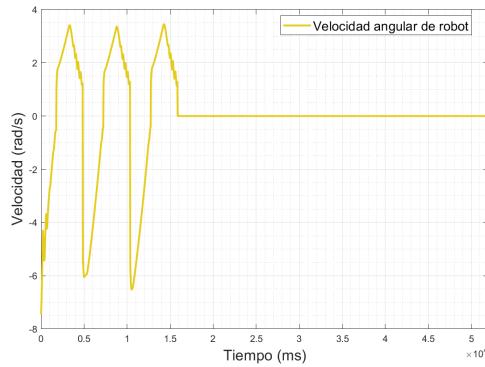


Figura 57: Gráfica de velocidad lineal para controlador TUC.

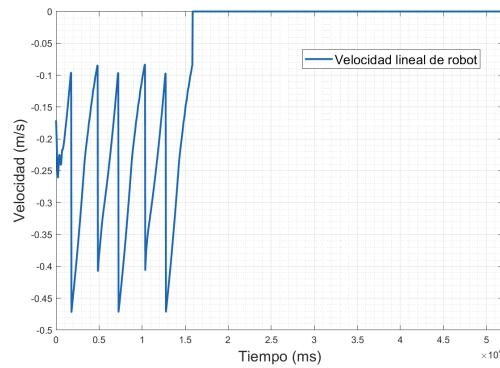


Figura 58: Gráfica de velocidad angular para controlador TUC.

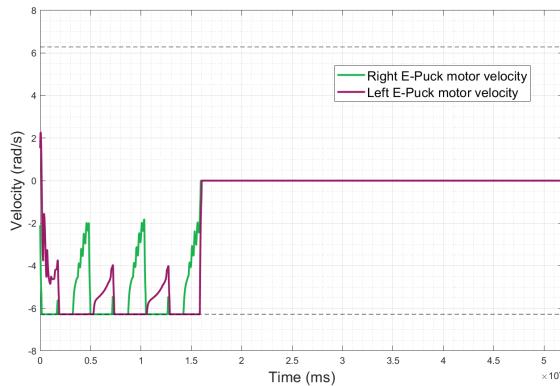


Figura 59: Gráfica de velocidad en los motores para controlador TUC.

10.1.3. Control de Pose de Lyapunov

Este controlador de pose

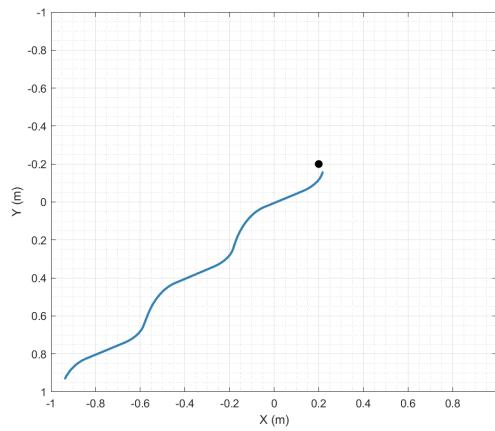


Figura 60: Trayectoria generada con el controlador TUC.

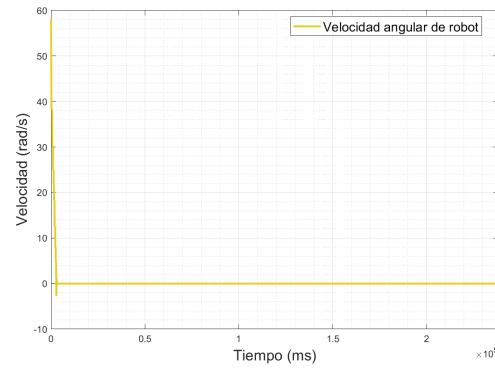


Figura 61: Gráfica de velocidad lineal para controlador de pose.

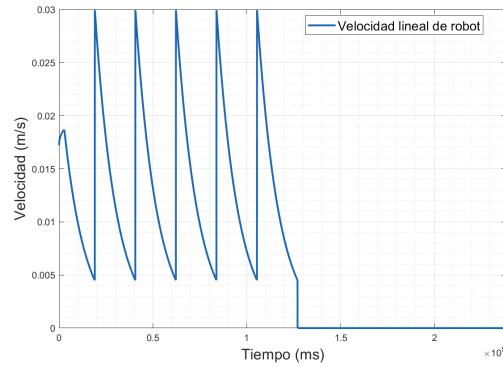


Figura 62: Gráfica de velocidad angular para controlador de pose.

10.1.4. Control LQR

Este controlador presenta una

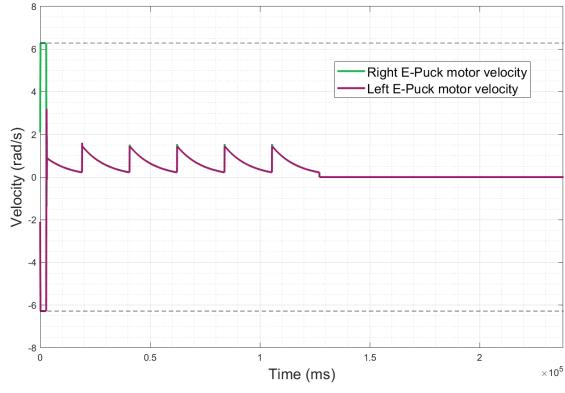


Figura 63: Gráfica de velocidad en los motores para controlador de pose.

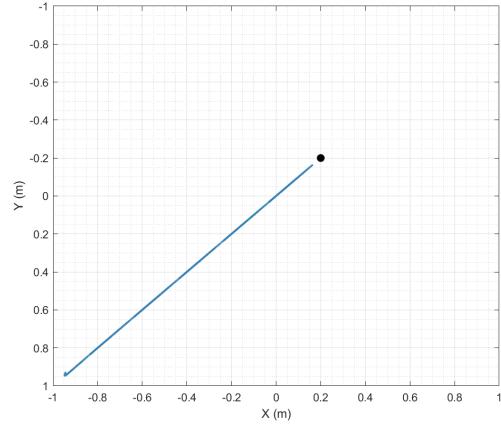


Figura 64: Trayectoria generada con el controlador de pose.

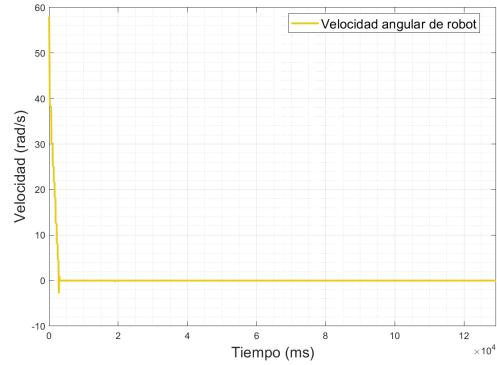


Figura 65: Gráfica de velocidad lineal para controlador de pose de Lyapunov.

10.1.5. Control LQI

Este controlador

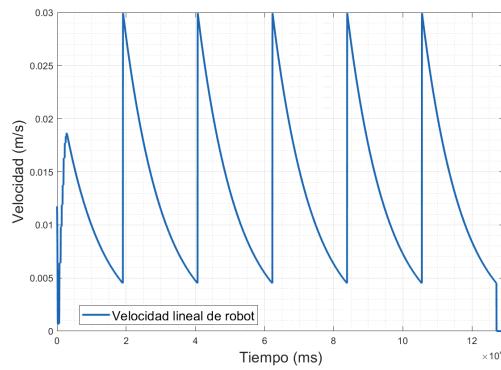


Figura 66: Gráfica de velocidad angular para controlador de pose de Lyapunov.

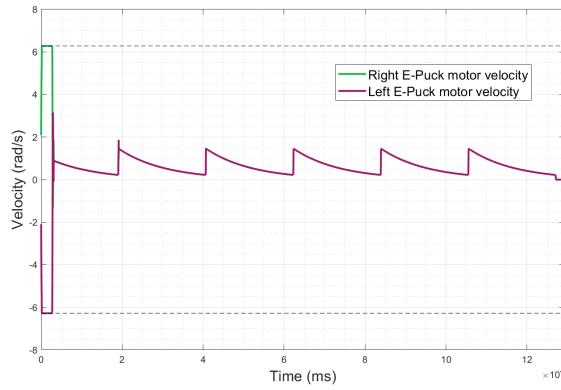


Figura 67: Gráfica de velocidad en los motores para controlador de pose de Lyapunov.

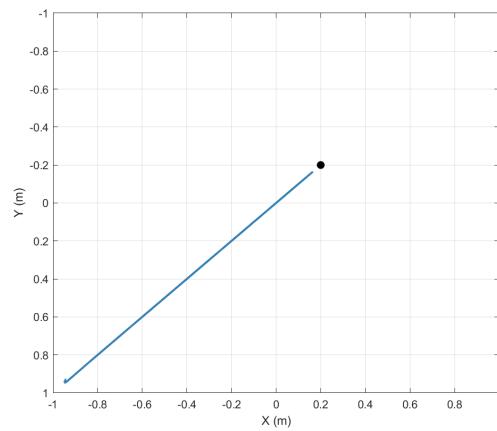


Figura 68: Trayectoria generada con el controlador de pose de Lyapunov.

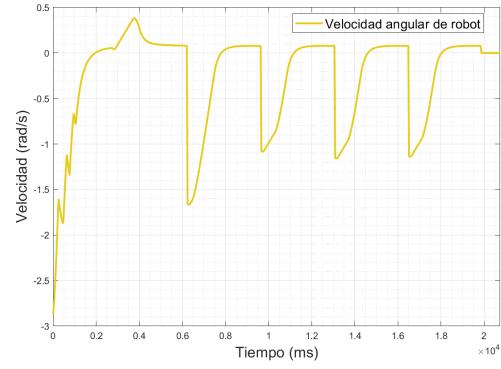


Figura 69: Gráfica de velocidad lineal para controlador LQR.

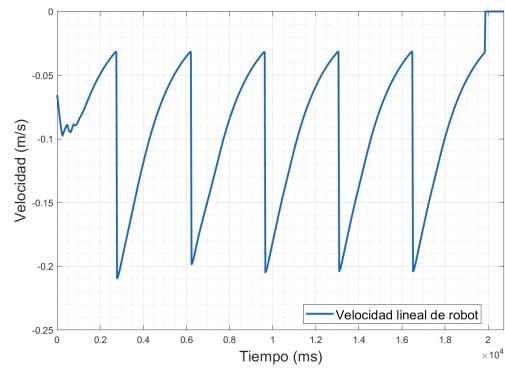


Figura 70: Gráfica de velocidad angular para controlador LQR.

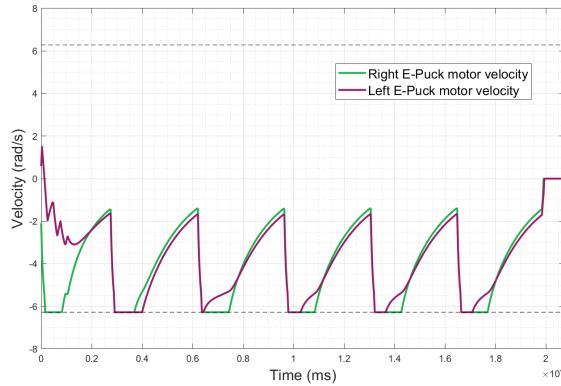


Figura 71: Gráfica de velocidad en los motores para controlador LQR.

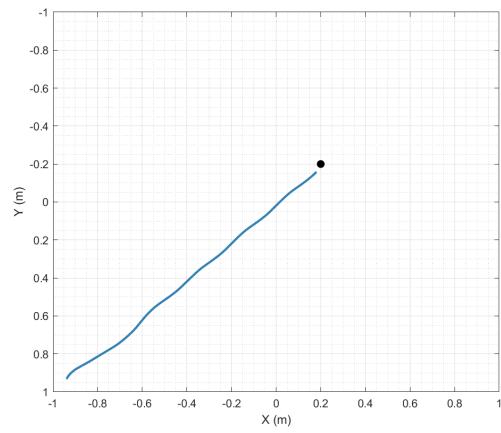


Figura 72: Trayectoria generada con el controlador LQR.

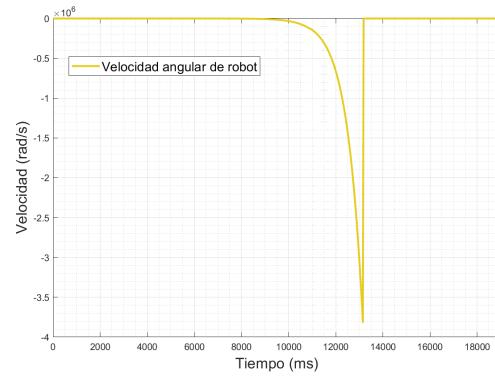


Figura 73: Gráfica de velocidad lineal para controlador LQI.

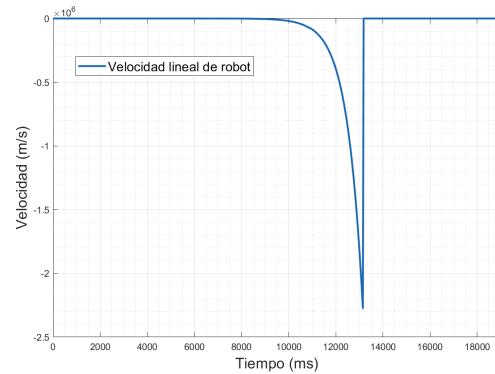


Figura 74: Gráfica de velocidad angular para controlador LQI.

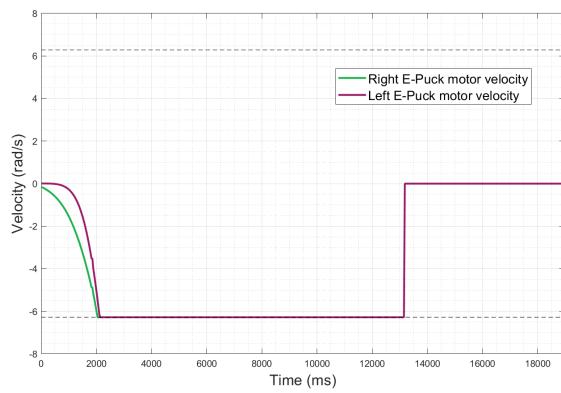


Figura 75: Gráfica de velocidad en los motores para controlador LQI.

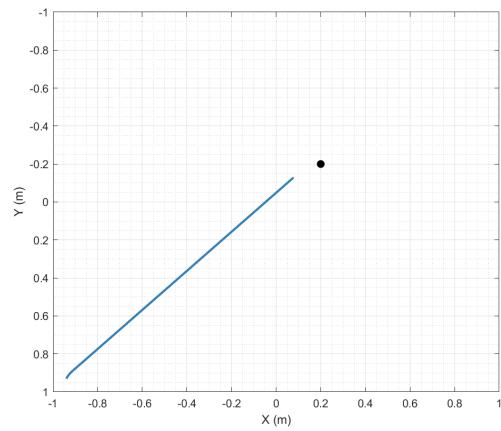


Figura 76: Trayectoria generada con el controlador LQI.

CAPÍTULO 11

Diseño Experimental GA

11.1. Minimizando Funciones de Costo

Inicialmente se pensó que el algoritmo genético podía ser utilizado como un algoritmo que encuentra caminos como el PSO al minimizar la función de costo. Por lo tanto, se propuso minimizar 4 funciones famosas de prueba descritas en el marco teórico: Rosenbrock, Ackley, Rastrigin y Booth. Para cada ejecución del programa se utilizó 100 individuos, probabilidad de cruce de 90 %, probabilidad de mutación de 1 %, un máximo de 100 generaciones y una tolerancia de 5 % para considerar convergencia del algoritmo. El largo de los individuos es de 20 bits, para tener 10 bits para x y otros 10 bits para y. Asimismo, se desea tener 5 bits para el número y 5 bits para representar a sus decimales. En el caso de la función de Ackley es necesario aumentar los bits porque al utilizar representación binaria con 5 bits solo es posible llegar a $2^5 - 1 = 31$, pero el rango sugerido por [14] es de 32.768 positivo y negativo. En el cuadro 8 puede observarse los rangos utilizados y la longitud de los individuos.

Función	Rango x	Rango y	Lind
Rosenbrock	[-5, 10]	[-5, 10]	20
Ackley	[-32.768, 32.768]	[-32.768, 32.768]	24
Rastrigin	[-5.12, 5.12]	[-5.12, 5.12]	20
Booth	[-10, 10]	[-10, 10]	20

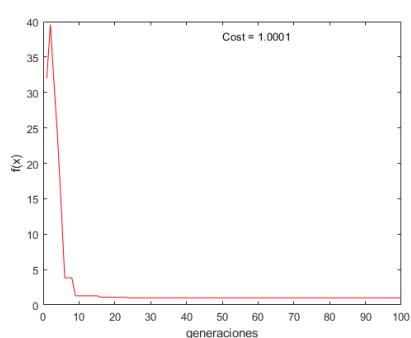
Cuadro 8: Parámetros que varían según la función de costo.

CAPÍTULO 12

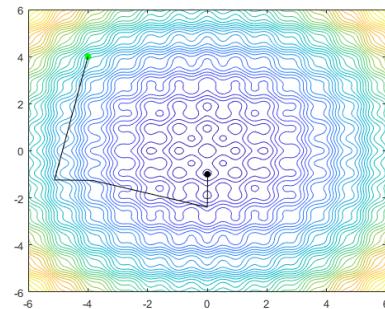
Resultados GA

12.1. Minimizando Funciones de Costo

Como se podrá observar en las siguientes figuras, los caminos generados por el algoritmo genético no son para nada suaves y óptimos. Los mejores resultados pueden verse con la función de Ackley y Rastrigin, pero aún así los resultados no son buenos a comparación con los del AS.

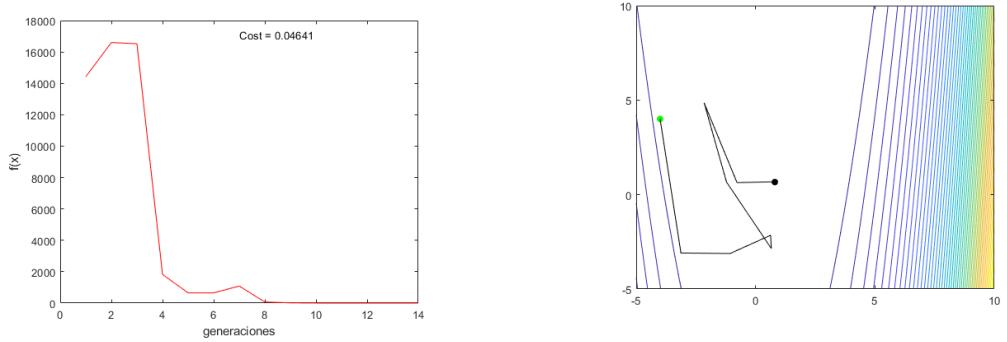


(a) Costo de la función de Rastrigin.

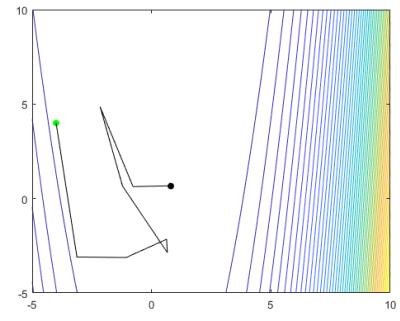


(b) Animación de algoritmo genético con la función de costo de Rastrigin.

Figura 77: Experimento 1 con función de Rastrigin.

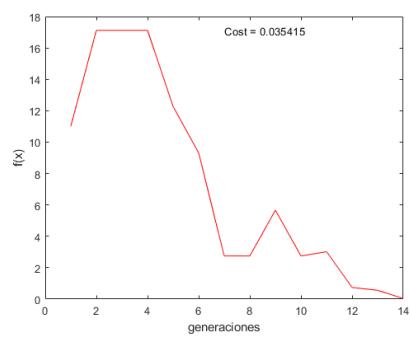


(a) Costo de la función de Rosenbrock.

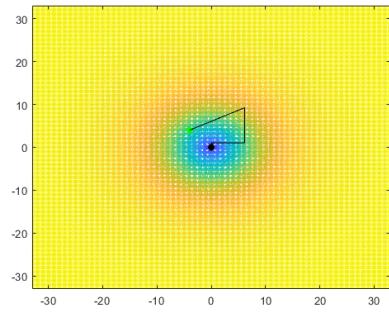


(b) Animación de algoritmo genético con la función de costo de Rosenbrock.

Figura 78: Experimento 1 con función de Rosenbrock.

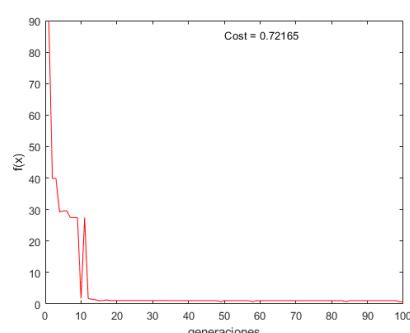


(a) Costo de la función de Ackley.

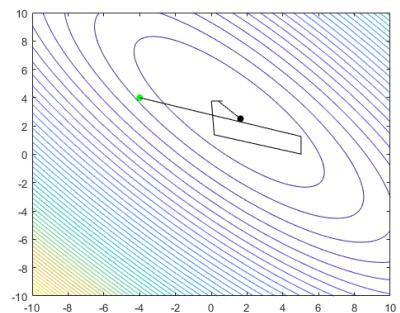


(b) Animación de algoritmo genético con la función de costo de Ackley.

Figura 79: Experimento 1 con función de Ackley.



(a) Costo de la función de Booth.



(b) Animación de algoritmo genético con la función de costo de Booth.

Figura 80: Experimento 1 con función de Booth.

CAPÍTULO 13

Conclusiones

CAPÍTULO 14

Recomendaciones

- En [7] se plantea la posibilidad de utilizar el algoritmo Ant Colony para optimizar el *Floorplanning* en aplicaciones de VLSI. Por tanto, considero que en el futuro sería interesante abrir una línea de investigación de algoritmos de inteligencia artificial aplicada a VLSI.
- Ya que solo se probó en mundos sin obstáculos, sería recomendable que en la siguiente fase se incorporen obstáculos para visualizar la evolución del algoritmo.
- También podría compararse este tipo de algoritmos de inteligencia computacional contra los métodos tradicionales como A*, Dijkstra, Breathfire.
- Además del SACO y AS, existen otras variantes como el Ant max-min y el AntQ. El último incluye una modificación parecida a la usada en Q Learning.
- Podría intentarse la mezcla entre entre algoritmos genéticos y PSO o algoritmos genéticos y ACO.
- Ya que el programa en Matlab requería de una computadora de alto rendimiento, se podría transcribir a Python (junto con la paralelización) para comprobar si se puede hacer que el algoritmo se ejecute más rápido.
- Sería recomendable probar los algoritmos en el Robotarium del Tecnológico de Georgia como alternativa a la simulación, pues ellos cuentan con robots disponibles para todo el mundo.
- Podría aplicarse *Q Learning*, *Deep Learning* u otros métodos inteligentes para ajustar los parámetros de la mejor manera sin necesidad de una computadora de alto rendimiento.
- En [17] comparan el desempeño del TSP en utilizando distintos tipos de cruxa y mutación en algoritmos genéticos, por lo que se podría hacer lo mismo para nuestro problema.
- Podría intentarse usar algoritmos genéticos combinados con APF.

CAPÍTULO 15

Bibliografía

- [1] A. S. A. Nadalini, «Algoritmo Modificado de Optimización de Enjambre de Partículas (MPSO)», Universidad del Valle de Guatemala, UVG, nov. de 2019.
- [2] J. P. C. Pérez, «Implementación de enjambre de robots en operaciones de búsqueda y rescate», Universidad del Valle de Guatemala, UVG, nov. de 2019.
- [3] *Robotarium / Institute for Robotics and Intelligent Machines*. dirección: <http://www.robotics.gatech.edu/robotarium>.
- [4] *Programmable Robot Swarms*, en-US, ago. de 2016. dirección: <https://wyss.harvard.edu/technology/programmable-robot-swarms/> (visitado 06-04-2020).
- [5] S. P. ROUL, «Application of Ant Colony Optimization for finding Navigational Path of mobile robot», National Institute of Technology, Rourkela, 2011.
- [6] *Comparative Analysis of Ant Colony and Particle Swarm Optimization Techniques* V.Selvi Lecturer, Department of Computer Science, Nehru Memorial College,
- [7] A. P. Engelbrecht, *Computational intelligence: an introduction*. Wiley, 2008.
- [8] M. N. A. Wahab, S. Nefti-Meziani y A. Atyabi, «A Comprehensive Review of Swarm Optimization Algorithms», *PLoS ONE*, vol. 10, n.º 5, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0122827>.
- [9] Y. Zhang, S. Wang y G. Ji, «A Comprehensive Survey on Particle Swarm Optimization Algorithm and Its Applications», *Hindawi*, vol. 2015, n.º 931256, 2015. DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2015/931256>.
- [10] M. Dorigo y T. Stützle, *Ant colony optimization*, en. Cambridge, Mass: MIT Press, 2004, ISBN: 978-0-262-04219-2.
- [11] U. Sydney, *Genetic Algorithm:A Learning Experience*. dirección: http://www.cse.unsw.edu.au/~cs9417ml/GA2/encoding_other.html (visitado 27-07-2020).
- [12] D. Samanta, «Encoding Techniques in Genetic Algorithms», en, pág. 42,
- [13] M. Obitko, *Encoding - Introduction to Genetic Algorithms - Tutorial with Interactive Java Applets*, 1998. dirección: <https://www.obitko.com/tutorials/genetic-algorithms/encoding.php> (visitado 27-07-2020).

- [14] D. Bingham. (2017). Optimization Test Problems, dirección: <https://www.sfu.ca/~ssurjano/optimization.html>.
- [15] K. Rodríguez Vázquez, *Cómputo evolutivo - Inicio*, es, Library Catalog: www.coursera.org. dirección: <https://www.coursera.org/learn/computo-evolutivo/home/welcome> (visitado 27-07-2020).
- [16] H. Mühlenbein y D. Schlierkamp-Voosen, «Predictive Models for the Breeder Genetic Algorithm I. Continuous Parameter Optimization», en, *Evolutionary Computation*, vol. 1, n.º 1, págs. 25-49, mar. de 1993, ISSN: 1063-6560, 1530-9304. DOI: 10.1162/evco.1993.1.1.25. dirección: <http://www.mitpressjournals.org/doi/10.1162/evco.1993.1.1.25> (visitado 27-07-2020).
- [17] L. P., K. C.M.H., M. R.H., I. I. y D. S., «Genetic Algorithms for the Travelling Salesman Problem: A Review of Representations and Operators», en, pág. 42,
- [18] *Genetic Algorithms - Mutation - Tutorialspoint*. dirección: https://www.tutorialspoint.com/genetic_algorithms/genetic_algorithms_mutation.htm (visitado 08-08-2020).
- [19] C. A. Maeso, *Métodos basados en grafos*. dirección: http://pdg.cnb.uam.es/pazos/cursos/bionet_UAM/Grafos_CAguirre.pdf.
- [20] K. Thulasiraman y M. N. S. Swamy, *Graphs: Theory and Algorithms*, en. John Wiley & Sons, mar. de 2011, Google-Books-ID: rFH7eQffQNkC, ISBN: 978-1-118-03025-7.
- [21] K. " Thulasiraman, S. Arumugam, A. Brandstädt y T. Nishizeki, eds., *Handbook of Graph Theory, Combinatorial Optimization, and Algorithms*, en, 0.^a ed. Chapman y Hall/CRC, ene. de 2016, ISBN: 978-0-429-15023-4. DOI: 10.1201/b19163. dirección: <https://www.taylorfrancis.com/books/9781420011074> (visitado 12-07-2020).
- [22] *Graph with undirected edges - MATLAB - MathWorks América Latina*. dirección: <https://la.mathworks.com/help/matlab/ref/graph.html> (visitado 12-07-2020).
- [23] D. Phillips, *Python 3 object oriented programming: harness the power of Python 3 objects*, en, ép. Community experience distilled. Birmingham: Packt Publ, 2010, OCLC: 802342008, ISBN: 978-1-84951-126-1.
- [24] *Clases - MATLAB & Simulink - MathWorks América Latina*. dirección: <https://la.mathworks.com/help/matlab/object-oriented-programming.html> (visitado 12-07-2020).
- [25] T. Mathieu, G. Hernandez y A. Gupta, «Parallel Computing with MATLAB», en, pág. 56,
- [26] *Using parfor Loops: Getting Up and Running*, Library Catalog: blogs.mathworks.com. dirección: <https://blogs.mathworks.com/loren/2009/10/02/using-parfor-loops-getting-up-and-running/> (visitado 13-07-2020).
- [27] *Programming Patterns: Maximizing Code Performance by Optimizing Memory Access*, en, Library Catalog: la.mathworks.com. dirección: <https://la.mathworks.com/company/newsletters/articles/programming-patterns-maximizing-code-performance-by-optimizing-memory-access.html> (visitado 13-07-2020).
- [28] *Techniques to Improve Performance - MATLAB & Simulink - MathWorks América Latina*. dirección: https://la.mathworks.com/help/matlab/matlab_prog/techniques-for-improving-performance.html (visitado 13-07-2020).

- [29] *Vectorization - MATLAB & Simulink - MathWorks América Latina*. dirección: https://la.mathworks.com/help/matlab/matlab_prog/vectorization.html (visitado 13-07-2020).
- [30] *Buscar cuellos de botella de código - MATLAB & Simulink - MathWorks América Latina*. dirección: https://la.mathworks.com/help/matlab/creating_plots/assessing-performance.html (visitado 13-07-2020).
- [31] K. M. Lynch y F. C. Park, *Modern robotics: mechanics, planning, and control*, en. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2017, OCLC: ocn983881868, ISBN: 978-1-107-15630-2.
- [32] M. Zea, *MT3005 Lección 11 - modelado de robots móviles*. dirección: <https://www.youtube.com/watch?v=5AqXC8ivZ8U&list=PLWIV1mZv4WUbgPWFhWgEucu7tTKollf8K&index=2> (visitado 28-08-2020).
- [33] *Procesador Intel® Xeon® Oro 6152 (caché de 30.25 M, 2.10 GHz) Especificaciones de productos*, es. dirección: <https://ark.intel.com/content/www/es/es/ark/products/120491/intel-xeon-gold-6152-processor-30-25m-cache-2-10-ghz.html> (visitado 13-08-2020).

CAPÍTULO 16

Anexos

16.1. Especificaciones de computadora de alto desempeño



Figura 81: Procesador Intel Xeon Gold [33]

La computadora es una DELL Precision Tower 3620 con 2 procesadores Intel Xeon Gold 6152 de 2.1 Ghz y 3.7 Ghz Turbo, 3 Ultra Path Interconnect, 30MB de Cache y 140W de energía promedio que el procesador disipa al operar en la frecuencia básica con todas los núcleos activos. La tecnología de este procesador es de 14 nm. Cada procesador tiene 22 núcleos, por lo que en total se cuenta con 44 núcleos para procesamiento. Además, esta computadora cuenta con 384GB de memoria DDR4 con una frecuencia de 2666MHz, un disco duro de M.2 2TB de estado sólido y 3 discos de 12 TB 7200rpm SATA Enterprise Hard Drive [33]. Matlab fue instalado en una partición de Windows, pues su sistema operativo principal es CentOS 7.

