

Introducción al control óptimo

El método de diseño por realimentación de estados y observador, no obstante ser una herramienta fundamental en el control de sistemas en E.E., no siempre es el método de diseño más útil por:

- ⑥ El traslado de las especificaciones de diseño (máximo sobre impulso, etc.), no siempre es directo, particularmente para sistemas complejos; ¿cuál es la mejor configuración de polos para las especificaciones dadas?
- ⑥ En sistemas MIMO las ganancias de realimentación de estados que logran una configuración de polos dada, no es única. ¿Cuál es la mejor K para una configuración de polos dada?
- ⑥ Los autovalores del observador deberían escogerse más rápidos que los del sistema de lazo cerrado. ¿Hay algún otro criterio disponible para ayudar a decidirse por una configuración o por otra?

Los métodos que introduciremos ahora dan respuesta a esas preguntas. Veremos cómo las ganancias de la realimentación de estados y del observador se pueden calcular en una forma óptima.

El problema de control óptimo básico

¿Qué significa óptimo?. Óptimo significa hacer un trabajo en la mejor forma posible. No obstante, antes de iniciar a buscar una solución óptima,

- ⑥ Se debe definir el trabajo.
- ⑥ Se debe establecer una escala matemática para cuantificar lo que significamos como mejor.
- ⑥ Se deben descartar las otras alternativas posibles.

A menos que los cualificadores sean claros y consistentes, declarar que un sistema es óptimo no tiene sentido real.

Un sistema simple, impreciso, pero no costoso, fácil de implementar y con un desempeño adecuado podría considerarse óptimo.

De otro lado, un sistema muy preciso y elegante podría considerarse no óptimo por ser demasiado costoso o muy complejo o por que su implementación tarda mucho tiempo.

El problema de control óptimo básico

La declaración matemática del problema de control óptimo consiste de,

1. Una descripción del sistema a ser controlado.
2. Una descripción de las limitaciones y posibles alternativas del sistema
3. Una descripción de la tarea a ser desarrollada
4. Una declaración del criterio para juzgar el desempeño óptimo

El problema de control óptimo básico

El sistema dinámico a ser controlado se describe en la forma de variables de estado, i.e., en tiempo continuo por,

$$\begin{aligned}x(t) &= Ax(t) + Bu(t); & x(0) &= x_0 \\y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

o en tiempo discreto por,

$$\begin{aligned}x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k]; & x[0] &= x_0 \\y[k] &= Cx[k]\end{aligned}$$

En lo que sigue, asumiremos que todos los estados están disponibles para medidas, o de otro modo, que el sistema es observable, de modo que se puede construir un observador para estimar el estado.

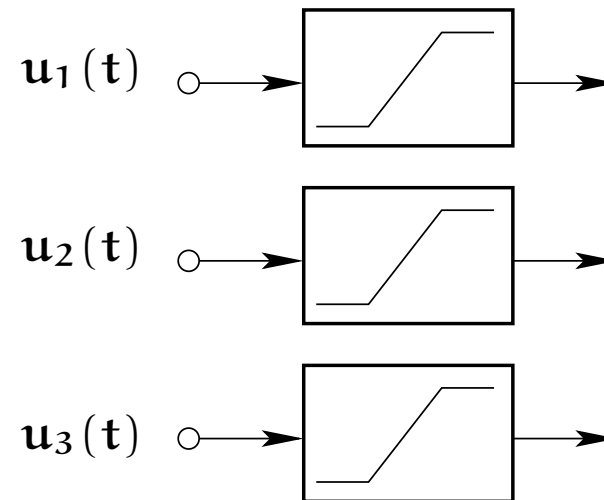
El problema de control óptimo básico

Las limitaciones del sistema existirán algunas veces sobre valores permitidos de las variables de estado o sobre las entradas de control. Por ejemplo, el conjunto de controles admisibles podría ser el conjunto de vectores continuos a trozos $u(t) \in \mathcal{U}$ tales que

$$\mathcal{U} = u(t) : \|u(t)_k\| < M \forall t$$

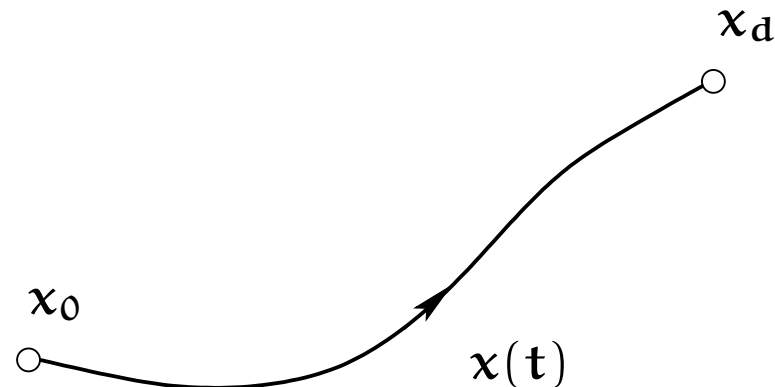
representar saturación en los actuadores.

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} \right\| &= |u_1(t)|^2 + |u_2(t)|^2 + |u_3(t)|^2 \\ &< M^2 \quad \forall t \end{aligned}$$



El problema de control óptimo básico

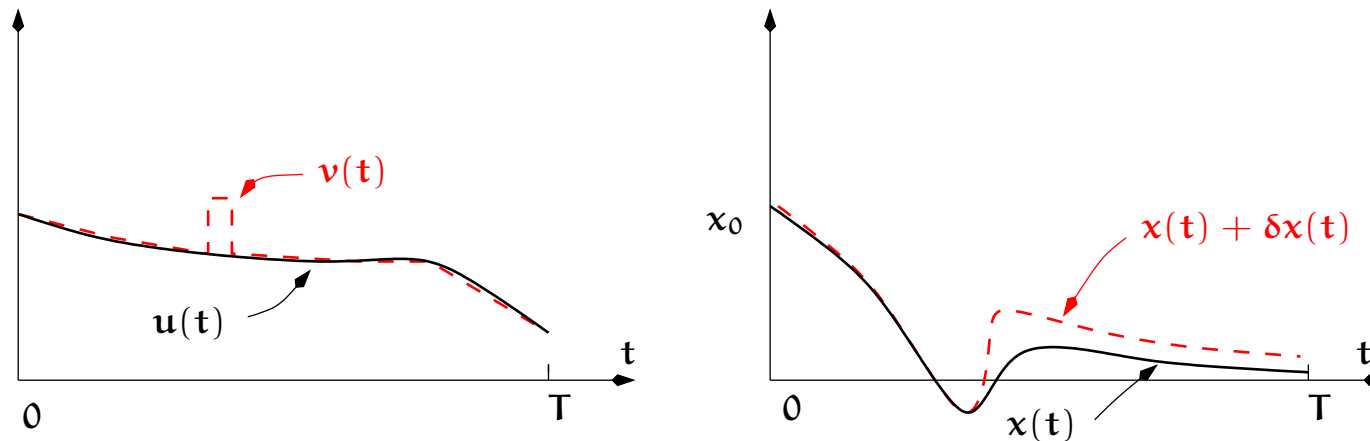
La tarea a realizar usualmente toma la forma de condiciones de frontera adicionales sobre las ecuaciones de espacio de estados. Por ejemplo, podríamos desear transferir el estado $x(t)$ desde un estado inicial conocido x_0 a un estado final especificado $x_f(t_f) = x_d$ en un tiempo especificado t_f , o en el mínimo t_f posible.



A menudo, la tarea a realizar se considera implícitamente en el criterio de desempeño.

El problema de control óptimo básico

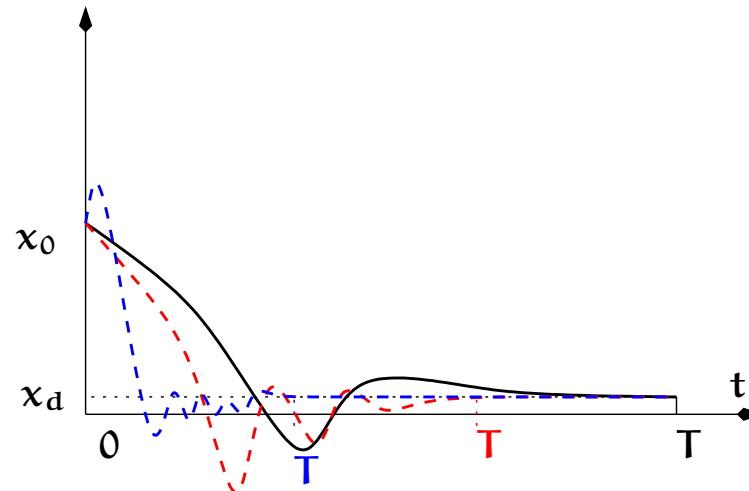
El criterio de desempeño, denotado J , es una medida de la calidad del desempeño del sistema. Usualmente, intentaremos minimizar o maximizar el criterio de desempeño seleccionando la entrada de control. Para cada $u(t)$ posible (i.e., uno que realice la tarea deseada satisfaciendo las restricciones del sistema), se asociará una trayectoria del sistema $x(t)$.



La entrada $u(t)$ genera la trayectoria $x(t)$. Una variación $v(t)$ en $u(t)$ genera una trayectoria diferente $x(t) + \delta x(t)$.

El problema de control óptimo básico

Un criterio de desempeño común es el de tiempo mínimo, en el cual buscamos el control $u(t)$ que produce la trayectoria más rápida para obtener el estado final deseado.

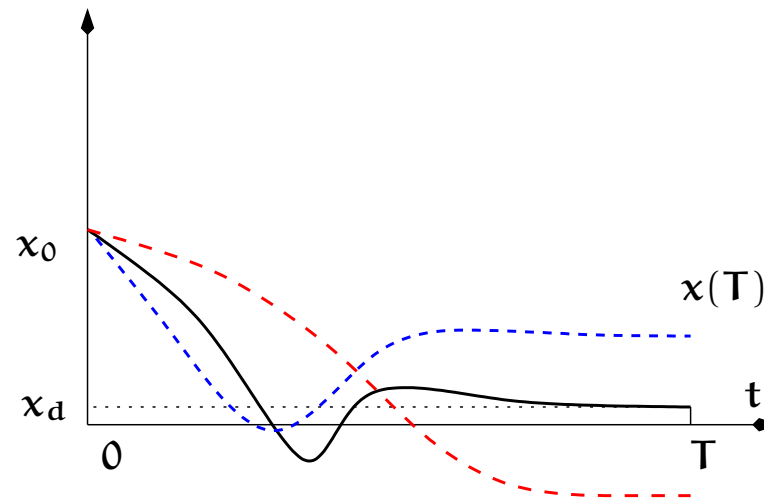


En este caso el criterio de desempeño a minimizar puede expresarse matemáticamente simplemente como $J = T$

El problema de control óptimo básico

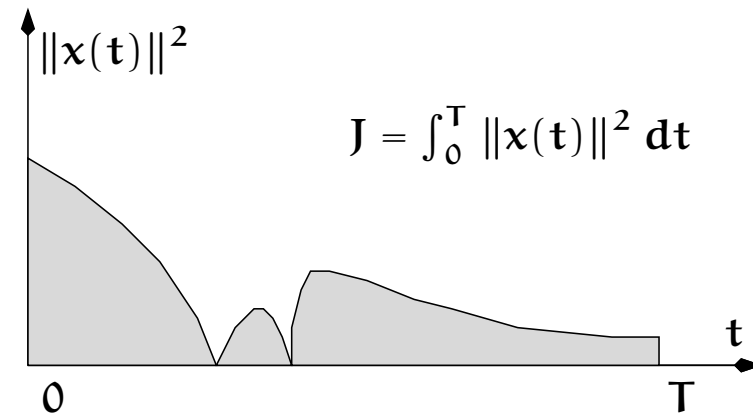
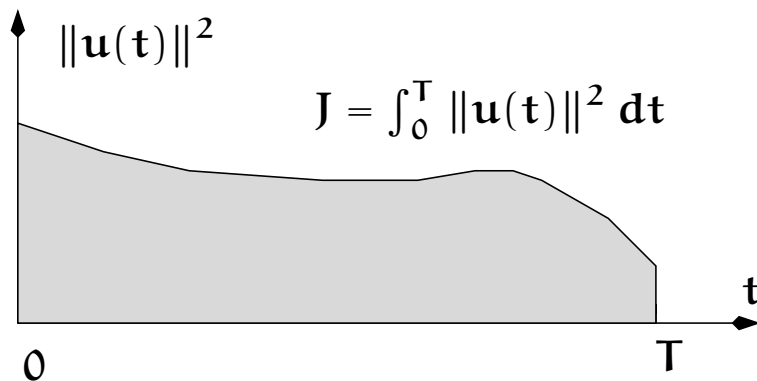
Otro criterio de desempeño podría ser el error final al obtener el estado final deseado en un tiempo especificado de antemano T ,

$$J = ||x(T)||^2$$



El problema de control óptimo básico

Otro criterio de desempeño podría ser minimizar el área bajo $\|x(t)\|^2$, como una forma para seleccionar aquellos controles que producen los transitorios más pequeños sobre toda la trayectoria generada entre x_0 y el estado final.



Aún otro criterio de desempeño podría ser minimizar el área bajo $\|u(t)\|^2$, como una forma de seleccionar aquellos controles que usan el menor esfuerzo de control.

Control óptimo cuadrático

Un criterio de desempeño muy importante que combina los ejemplos previos es el criterio de desempeño cuadrático. Este criterio se puede expresar en forma general como

$$J = x^T(T)Sx(T) + \int_0^T [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Rx(t)]dt$$

Las matrices de peso S , Q y R permiten un trato pesado entre los criterios previos. En particular, por ejemplo,

$$S = I; \quad Q = 0; \quad R = 0 \quad \Rightarrow \quad J = ||x(T)||^2$$

$$S = 0; \quad Q = 0; \quad R = I \quad \Rightarrow \quad J = \int_0^T ||u(t)||^2 dt$$

Las matrices S y Q son simétricas y no definidas negativas, mientras R es simétrica y definida positiva.

Matrices definidas positivas

Recordemos que una matriz simétrica $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es definida positiva si $x^T M x > 0 \forall x \neq 0; x \in \mathbb{R}^n$, y no definida negativa si $x^T M x \geq 0 \forall x \neq 0; x \in \mathbb{R}^n$.

Una matriz simétrica es definida positiva (no definida negativa) si y solo si todos sus autovalores son positivos (no negativos)

Ejemplo.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ es definida positiva; } \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} M_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3x_1^2 + x_2^2$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ es no definida negativa; } \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} M_2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3x_1^2$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ No es signo definida; } \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} M_3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3x_1^2 - x_2^2$$

Control óptimo cuadrático

El criterio de desempeño cuadrático para sistemas de tiempo discreto es,

$$J_{0,N} = x_N^T S x_N + \sum_{K=0}^{N-1} x_K^T Q x_K + u_K^T R x_K$$

donde se ha escrito x_k para representar $x[k]$, por simplicidad de notación.

Si N (*horizonte de optimización*) se fija a $N = \infty$ obtenemos un *problema de control óptimo de horizonte finito*. En este caso, por estabilidad, se requerirá que $\lim_{N \rightarrow \infty} X_N = 0$.

$$J_{0,\infty} = \sum_{K=0}^{\infty} x_K^T Q x_K + u_K^T R x_K$$

El criterio de horizonte infinito en tiempo continuo es

$$J_{\infty} = \int_0^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R x(t)] dt$$

Realimentación de estados óptima LQ (LQR)

Teorema (LQR). Considere el sistema de espacio de estados

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu; \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad u \in \mathbb{R}^p \\ y &= Cx;\end{aligned}$$

y el criterio de desempeño $J = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$; donde Q es no definida negativa y R es definida positiva. Entonces el control óptimo que minimiza (J) está dado por la ley lineal de realimentación de estado,

$$u(t) = -Kx(t) \quad \text{con} \quad K = R^{-1}B^T P$$

y donde P es la única solución definida positiva de la matriz *Ecuación Algebraica de Riccati* (EAR),

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Realimentación de estados óptima LQ (LQR)

Así, para diseñar una ley de realimentación de estado óptima $u = -Kx$ minimizando el costo

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Rx(t)]dt,$$

tenemos que,

1. Encontrar la solución simétrica y definida positiva de la (EAR)

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

2. Fijar $K = R^{-1}B^T P$.

En *MATLAB* K y P se pueden calcular usando,

$$[K, P] = \text{lqr}(A, B, Q, R);$$

Realimentación de estados óptima LQ (LQR)

Las matrices $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (definidas no negativas) y $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$ (definida positiva), son los parámetros de sintonía del problema. Por ejemplo, la elección $Q = C^T C$ y $R = \lambda I$, con $\lambda > 0$ corresponde a hacer un equilibrio entre las "energías" de la salida de la planta y la entrada, con el costo

$$J = \int_0^\infty [||y(\tau)||^2 + \lambda ||u(\tau)||^2] d\tau$$

- ⑥ λ pequeña \Rightarrow convergencia más rápida de $y(t) \rightarrow 0$ pero comandos de control $u(t)$ grandes (ganancia de control grande)
- ⑥ λ grande \Rightarrow respuesta convergencia más rápida de $y(t) \rightarrow 0$ pero comandos de control $u(t)$ más pequeños (ganancia de control pequeña).

Realimentación de estados óptima LQ (LQR)

Bajo algunas asunciones razonables, la matriz P que resuelve la (EAR) $A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$ existe. Además, el sistema de lazo cerrado correspondiente es estable (i.e. $A - BK$ es Hurwitz).

Ejemplo

Suponga que $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$. Escribiendo $x_2 = \frac{1}{s+1}u$; $x_1 = \frac{1}{s}x_2$ y $y = x_1$, obtenemos la representación en espacio de estado,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0]x\end{aligned}$$

suponga que la función de costo de la realimentación de estado es

$$J = \int_0^\infty [u^2 + x_1^2 + x_2^2] dt$$

Realimentación de estados óptima LQ (LQR)

Esto da las matrices de pesado $Q = I$ y $R = 1$. La EAR requiere que P satisfaga

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} P + P \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} P + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Ya que requerimos que P sea definida positiva, y symétrica, sea,

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

Esto arroja las ecuaciones simultáneas

$$p_{12}^2 - 1 = 0$$

$$2(p_{12} - p_{22}) - p_{22}^2 + 1 = 0$$

$$p_{11} = p_{12} + p_{12}p_{22}$$

Realimentación de estados óptima LQ (LQR)

Hay tres posibles soluciones a las ecuaciones simultáneas previas, a saber,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solo la última de ellas es definida positiva, así que es la que requerimos. Esto da,

$$K = R^{-1} B^T P = [0 \ 1] P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [1 \ 1]$$

con polos de lazo cerrado en los autovalores de

$$\begin{aligned} (A - BK) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 1] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Obtención del control óptimo LQR

Veremos cómo se obtiene el resultado del control LQR. Querramos encontrar una ley de control que minimice el criterio de desempeño de horizonte infinito

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u(t)^T Ru(t)]dt$$

Suponga que P es simétrica definida positiva, solución de la EAR $A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$

Definamos la forma cuadrática $V(t) = x^T(t)Px(t)$. Notemos que,

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x} \\ &= (Ax + Bu)^T Px + x^T P(Ax + Bu) \\ &= x^T (A^T P + PA)x + u^T B^T Px + x^T PBu\end{aligned}$$

Obtención del control óptimo LQR

De la EAR tenemos que,

$$A^T P + P A = -Q + P B R^{-1} B^T P$$

así que

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -x^T Q x + x^T (P B R^{-1} B^T P) x + u^T B^T P x + x^T P B u + u^T R u - u^T R u \\ &= -[x^T Q x + u^T R u] + (B^T P x + R u)^T R^{-1} (B^T P x + R u)\end{aligned}$$

Luego,
$$\int_0^\infty \dot{V}(t) dt = -J + \int_0^\infty (B^T P x + R u)^T R^{-1} (B^T P x + R u) dt$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{V(\infty)}_0 - V(0) = -J + \int_0^\infty (B^T P x + R u)^T R^{-1} (B^T P x + R u) dt$$

$$\Leftrightarrow J = x^T(0) P x(0) + \int_0^\infty (B^T P x + R u)^T R^{-1} (B^T P x + R u) dt$$

Obtención del control óptimo LQR

Llegamos a,

$$J = x^T(0)Px(0) + \int_0^\infty (B^T Px + Ru)^T R^{-1} (B^T Px + Ru) dt$$

Ya que el segundo término de la derecha no es negativo, el mínimo de J se logra claramente cuando

$$u = \boxed{-R^{-1}B^T Px} = -Kx$$

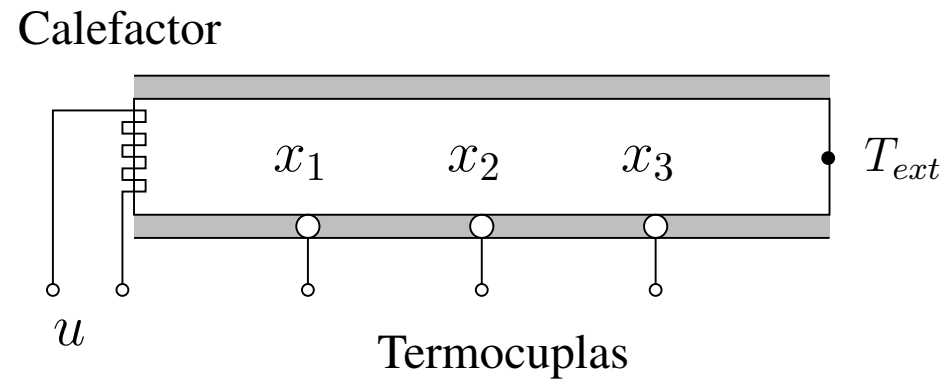
y el valor mínimo del costo es por eso

$$\boxed{\min_u J = x^T(0)Px(0)}$$

Ejemplo de diseño LQR

Regulación de temperatura de un horno.

La Figura representa un horno, aislado longitudinalmente, pero expuesto a la temperatura ambiente T_{ext} en un extremo y calentado en el otro extremo u .



El horno posee tres puntos de medición, indicados como "termocuplas" para sensor las temperaturas en x_1 , x_2 y x_3 .

Un modelo en ecuaciones de estado, tomando como variables de estado las temperaturas en x_1 , x_2 y x_3 , como entrada de control u y como entrada de perturbación T_{ext} , es

Ejemplo de diseño LQR

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Text.$$

Criterios de diseño

Se desea diseñar un regulador para la temperatura en x_2 para que con una temperatura de referencia $T_{ref} = 200^\circ C$ se satisfagan las siguientes especificaciones:

1. Tiempo de establecimiento menor a 5 segundos.
2. Sobreimpulso menor a 15%.
3. Error cero estático a una entrada T_{ref} escalón arbitraria.
4. Error cero estático a una perturbación escalón $Text$ arbitraria.

Las especificaciones exigen agregar una acción integral.

Ejemplo de diseño LQR

Diseñemos la ganancia de realimentación usando la función l_{qr} . Escojamos (para la planta aumentada $(A_a; B_a)$ con acción integral)

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad y \quad R = \lambda^{-k}; \quad \text{con } k = 0, 1, 2, 3.$$

Esta elección de pesos representará la función de costo de minimización

$$J = \int_0^{\infty} [\sigma^2(\tau) + \lambda u^2(\tau)] d\tau;$$

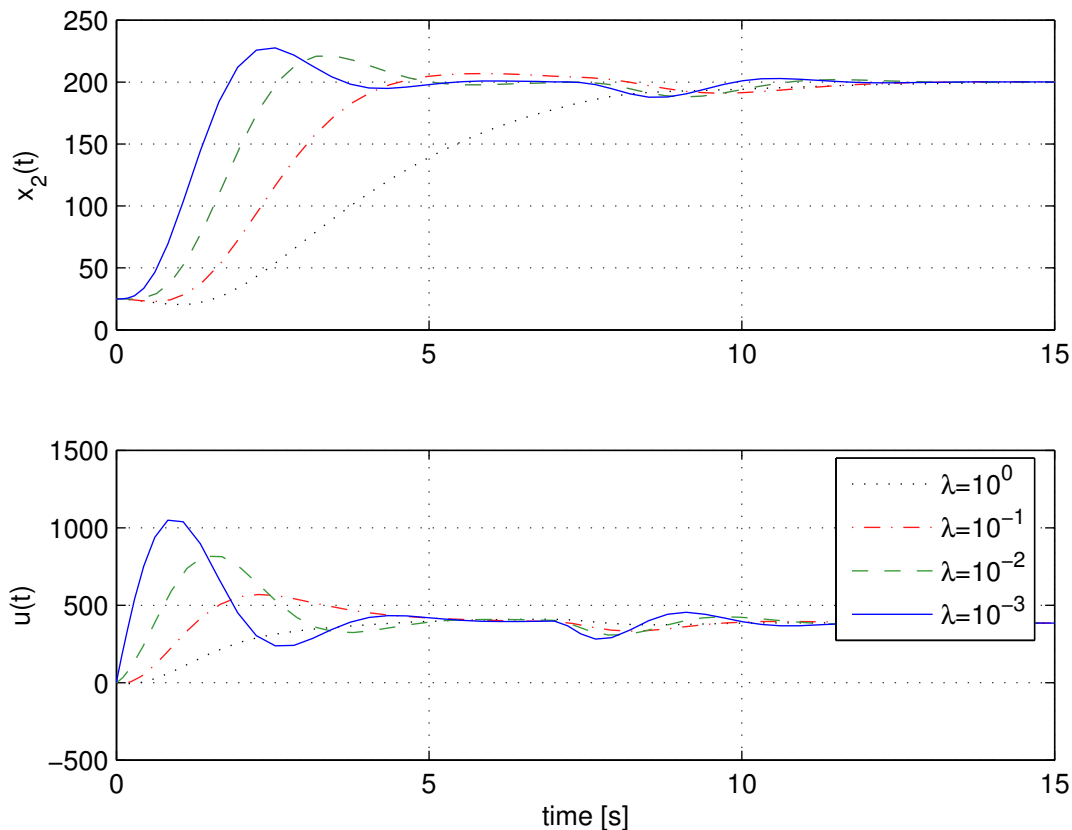
donde σ es la integral del error de seguimiento.

Ejemplo de diseño LQR

Diseñamos las ganancias usando la función

$$K_a = \text{dlqr}(A_a, B_a, Q, R);$$

para los distintos valores de λ , y se obtuvo un conjunto de cuatro ganancias.



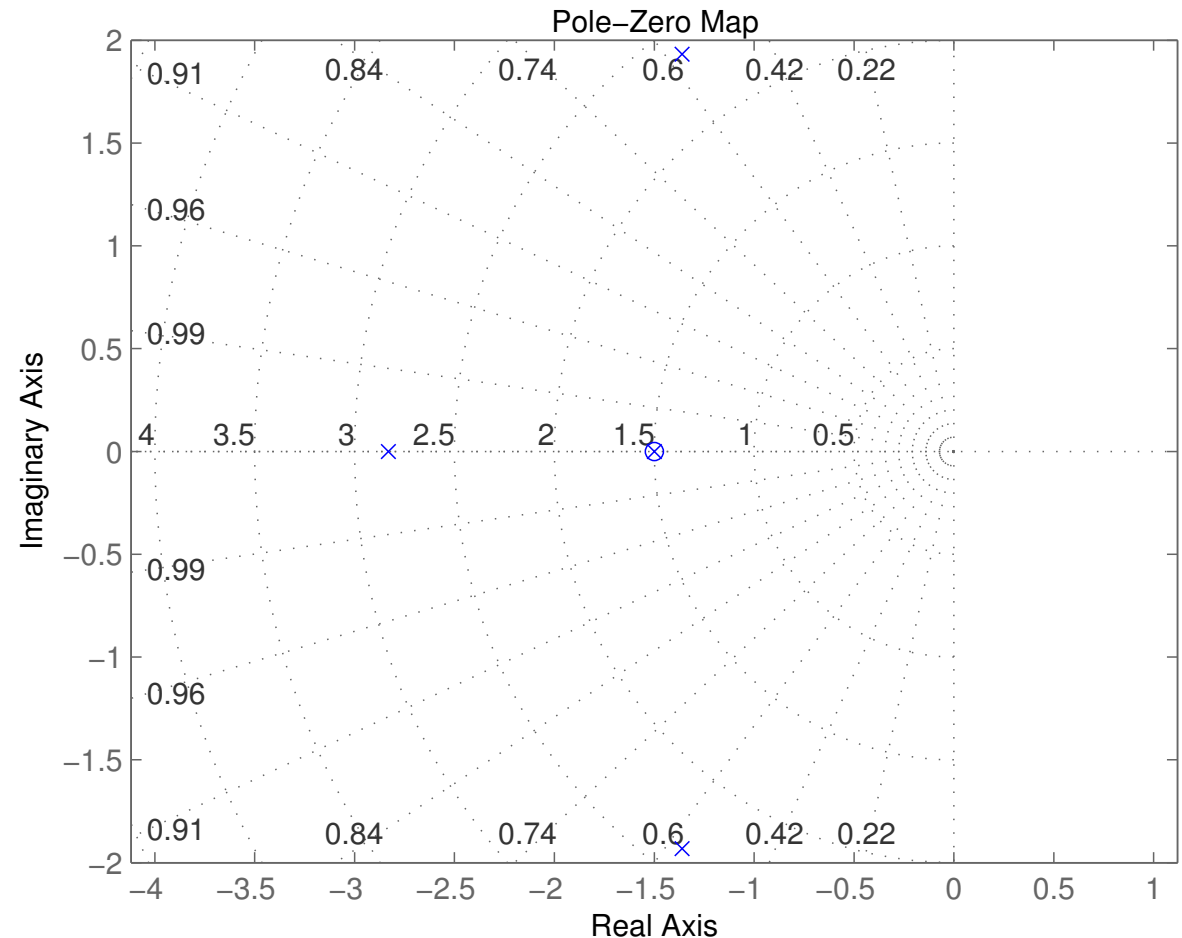
Simulamos la respuesta del sistema de lazo cerrado para cada una de ellas.

Vemos que a menor λ , mejor desempeño de $x_2(t)$ pero mayor el esfuerzo de control requerido.

Ejemplo de diseño LQR

Es interesante chequear el patrón de polos de lazo cerrado obtenidos por el controlador óptimo de alta ganancia ($\lambda = 10^{-3}$).

Note que un polo se ubica justo cancelando el cero estable del sistema (lo que evita excesivo sobre impulso), y los otros 3 se distribuyen como en un filtro Butterworth.



Realimentación de estado óptima LQ discreta

El criterio de desempeño cuadrático para sistemas de tiempo discreto es

$$J_{0,N} = x_N^T S x_N + \sum_{k=0}^{N-1} x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k$$

donde por simplicidad notacional escribimos x_k para representar $x[k]$. Cuando el tiempo final N (el horizonte de optimización) se fija a $N = \infty$ obtenemos un *problema de control óptimo de horizonte infinito*. En este caso, para estabilidad, requerimos que $\lim_{N \leftarrow \infty} \mathbf{x}_N = 0$,

$$J_{0,\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k$$

Para sistemas de tiempo discreto hay un resultado paralelo al LQR de tiempo continuo. El control óptimo se encuentra también via realimentación de estado, pero se requiere resolver una ecuación de Riccati diferente.

Realimentación de estado óptima LQ discreta

Teorema:

Sea

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k]$$

Entonces el control óptimo está dado por la ley de realimentación de estado $u_k = -K x_k$ con $K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$ y donde P es la solución de la ecuación algebraica de Riccati discreta (EARD)

$$A^T P A - P - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A + Q = 0$$

Realimentación de estado óptima LQ discreta

Como en el caso continuo, bajo algunas asunciones razonables existe una solución única definida positiva P . Además, el sistema de lazo cerrado correspondiente es estable ($A - BK$ tiene sus autovalores en el círculo unitario). En *MATLAB* K y P se pueden calcular usando

$$[K, P] = \text{dlqr}(A, B, Q, R)$$

Escogiendo

$$Q = C^T C \quad \text{y} \quad R = \lambda I$$

se obtiene,

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [||y_k||^2 + \lambda ||u_k||^2]$$

Como antes, λ puede usarse como un parámetro simple de sintonía para equilibrar el desempeño de la salida contra la acción de control.

Estimación de estado óptima LQE

Ahora consideremos los observadores de estado óptimos lineales cuadráticos. El problema del observador óptimo LQ es dual al problema de realimentación de estado LQ. No obstante, los observadores óptimos LQ tienen una interpretación estocástica, en el sentido en que *son óptimos estimando el estado en presencia de ruidos Gaussianos corrompiendo las medidas de las salidas y el estado.*

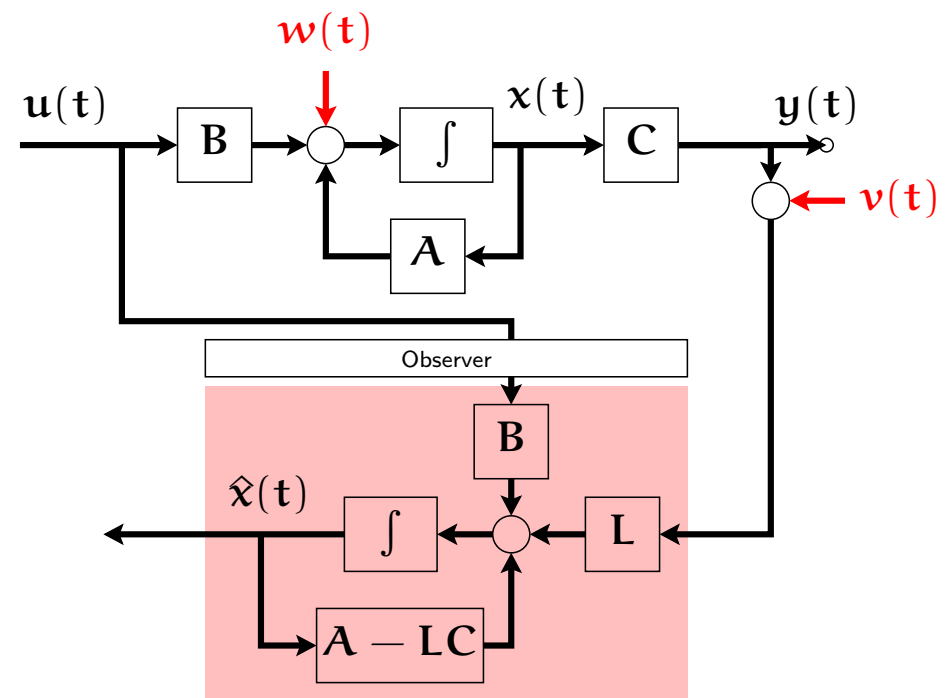
Suponga que introducimos procesos de ruido al estado y salida, w y v , de modo que

$$\dot{x} = Ax + Bu + w$$

$$y = Cx + v$$

Las señales w y v son procesos Gaussianos estocásticos de media cero no correlacionados en el tiempo y el uno al otro. poseen las siguientes covarianzas:

$$E(ww^T) = W \quad \text{y} \quad E(vv^T) = V$$



Estimación de estado óptima LQE

Podemos diseñar un observador óptimo LQ

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

Con L dada por,

$$L = PC^T V^{-1}$$

donde P es la solución del la EAR

$$AP + PA^T - PC^T V^{-1} CP + W = 0$$

Es usual tratar a W y V como parámetros de diseño. Por ejemplo, es común asignar $W = BB^T$ (para que w efectivamente sea una señal de ruido de entrada) y $V = \mu I$

Estimación de estado óptima LQE

Altos valores relativos de W llevan a L grandes, de modo que se da más peso a la señal de salida y , mientras que valores relativos altos de V llevarán a L pequeños, de modo que se da más peso a la señal de entrada u . Podemos pensar en esto como que valores altos de V otorgan más confianza al modelo, dando dinámicas del observador realimentado más lentas.

Tal estimador de estado óptimo LQ se conoce como (en régimen permanente) **filtro de Kalman**. En *MATLAB*, L y P se pueden calcular como

$$[L, P] = \text{lqr}(A', C', W, V)';$$