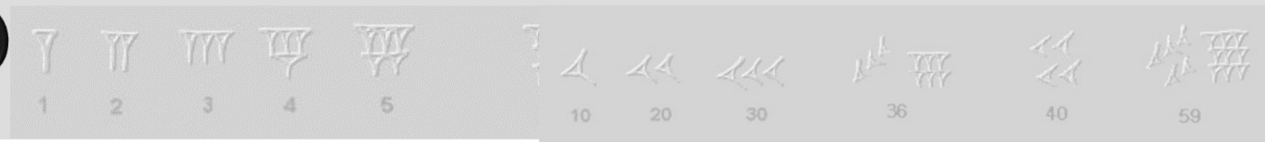
Lógica y Algebra de Boole

MATEMÁTICA APLICADA PARA COMPUTACIÓN
ANALISTA EN TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN
UNIVERSIDAD ORT URUGUAY

TEMARIO



- **Lógica Matemática**
- **Proposiciones**
- **Operadores**
- **Tablas de Verdad**
- **Algebra de Boole**
- **Expresiones booleanas**
- **Teoremas**
- **Optimización de expresiones booleanas**

INTRODUCCIÓN A LÓGICA

- La lógica estudia la forma del razonamiento, es una disciplina que por medio de reglas y técnicas determina si un teorema es falso o verdadero.
- Es ampliamente aplicada en filosofía, matemáticas, computación y física.
- En filosofía se utiliza para establecer si un razonamiento es válido o no.
- En matemática es útil para demostrar teoremas, inferir resultados y resolver problemas.
- En computación se aplica en la elaboración y revisión de programas, estudio de lenguajes formales y la relacion existente entre ellos.
- En física se necesita tanto para establecer procedimientos de un experimento como para interpretar resultados

INTRODUCCIÓN A LÓGICA

- La lógica matemática es la rama más matemática de la lógica, que estudia la inferencia mediante sistemas formales como la lógica proposicional, la lógica de primer orden y la lógica modal.
- La lógica computacional es la aplicación de la lógica matemática a las ciencias de la computación.
- La lógica filosófica utiliza los métodos y resultados de la lógica moderna para el estudio de problemas filosóficos.

PROPOSICIONES

- Una proposición o enunciado es una oración, frase o expresión matemática que puede ser falsa o verdadera, pero no ambas a la vez
- La proposición es un elemento fundamental en la lógica matemática

PROPOSICIONES SIMPLES

Ejemplo:

- Aprobaré el semestre

PROPOSICIONES COMPUESTAS

- Existen conectores u operadores lógicos que permiten formar proposiciones compuestas.
- Se dice que una proposición es compuesta cuando está integrada por dos o más proposiciones simples conectadas por operadores lógicos.
- Una proposición simple es aquella que no se puede dividir

PROPOSICIONES COMPUESTAS

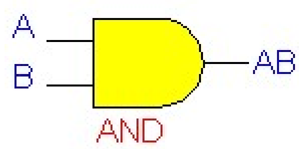
Ejemplo:

- Si asisto a clase y estudio, entonces me irá bien en la carrera.

OPERADORES

- AND (y)
- &
- ^

Operador AND		
Condición 1	Condición 2	Resultado
FALSO	FALSO	FALSO
FALSO	VERDADERO	FALSO
VERDADERO	FALSO	FALSO
VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO



OPERADORES

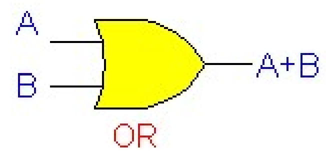
AND Ejemplo:

- Está lloviendo y hace frío

OPERADORES

- OR (o)
- |
- v

Operador OR		
Condición 1	**Condición 2**	**Resultado**
FALSO	FALSO	FALSO
FALSO	VERDADERO	VERDADERO
VERDADERO	FALSO	VERDADERO
VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO



OPERADORES

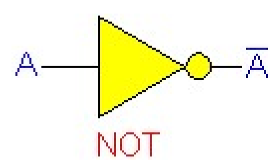
OR Ejemplo:

- En verano llueve o hace calor

OPERADORES

- NOT (no)
- !
- ~
- ’

TABLA DE VERDAD DEL OPERADOR NOT
NOT true → false
NOT false → true



OPERADORES

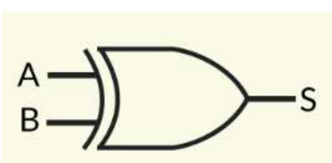
NOT Ejemplo:

- Sea p: el caballo es blanco, el complemento de p es:
- p’: el caballo no es blanco

OPERADORES

- XOR (or exclusivo)
- $\oplus$

XOR		
Condición 1	Condición 2	Resultado
VERDADERO	VERDADERO	FALSO
VERDADERO	FALSO	VERDADERO
FALSO	VERDADERO	VERDADERO
FALSO	FALSO	FALSO



OPERADORES

- NAND

- NOR

- XNOR

PROPOSICIÓN CONDICIONAL

- Una proposición condicional es aquella proposición que teniendo un antecedente deriva en una consecuencia, tiene una estructura “si P entonces Q”

- P ➡ Q

Proposición Condicional		
P	Q	Resultado
VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO
VERDADERO	FALSO	FALSO
FALSO	VERDADERO	VERDADERO
FALSO	FALSO	VERDADERO

PROPOSICIÓN CONDICIONAL

Ejemplo:

- Si es feriado, entonces no tengo clase

PROPOSICIÓN BICONDICIONAL

- Su estructura P $\leftrightarrow$ Q se traduce a “P si y solo si Q”, “entonces y solo entonces”.
- P $\Longleftrightarrow$ Q

Proposición Bicondicional		
P	**Q**	**Resultado**
VERDADERO	VERDADERO	VERDADERO
VERDADERO	FALSO	FALSO
FALSO	VERDADERO	FALSO
FALSO	FALSO	VERDADERO

PROPOSICIÓN BICONDICIONAL

Ejemplo:

- El programa corre, si y solo si no tiene errores de compilación.

JERARQUÍA DE OPERACIÓN

Jerarquía	Operador
1°	()
2°	’
3°	^
4°	v
5°	$\rightarrow$ $\leftrightarrow$

TABLAS DE VERDAD

- Es una tabla que muestra el valor de verdad de una proposición simple o compuesta, para cada combinación de verdad que se pueda asignar

- Verdadero (El valor verdadero se representa con la letra V; si se emplea notación numérica se expresa con un 1)
- Falso (El valor falso F; si se emplea notación numérica se expresa con un 0)

TABLAS DE VERDAD

Ejemplo:

p	q	r	Resultado
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

TAUTOLOGÍA, CONTRADICCIÓN Y CONTINGENCIA

- Tautología: proposición verdadera para todos los valores de verdad de sus variables
- Contradicción: proposición falsa para todos los valores de verdad de sus variables
- Contingencia: proposición que puede ser verdadera o falsa dependiendo de los valores de verdad de sus variables

TAUTOLOGÍA

Ejemplo:

p	q	r	Resultado
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

CONTRADICCIÓN

Ejemplo:

p	q	r	Resultado
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

ALGEBRA DE BOOLE

El álgebra booleana se relaciona con la lógica matemática, la cual sienta los principios de la electrónica digital que, a su vez, es la que hace funcionar los sistemas informáticos. El álgebra de Boole permite la simplificación de circuitos lógicos en el contexto de la electrónica digital, utilizar menos componentes y hacer más económicos y eficientes los procesos derivados de hacer las cosas de forma más simple y concreta.

EXPRESIONES BOOLEANAS

Una expresión booleana es una expresión algebraica que da lugar a uno de dos posibles valores, 1 ("verdadero") o 0 ("falso").

Están compuestas de letras mayúsculas (A, B, C,…), cada una de ellas representando la señal de un sensor, y también pueden contener 1 o 0.

El valor de las señales solo puede ser 1 o 0 (verdadero o falso).

Las letras de las expresiones booleanas pueden estar conectadas por medio de los operadores lógicos: ^ (y), v (o), ’ (negación).

F = A’B + (ABC) + C(B’+A)

F = 0 + AB + X’Z’Y’

EXPRESIONES BOOLEANAS

A	B	C	D	**F**
0	0	0	0	**0**
0	0	0	1	**1**
0	0	1	0	**0**
0	0	1	1	**1**
0	1	0	0	**0**
0	1	0	1	**0**
0	1	1	0	**0**
0	1	1	1	**0**
1	0	0	0	**0**
1	0	0	1	**1**
1	0	1	0	**1**
1	0	1	1	**1**
1	1	0	0	**0**
1	1	0	1	**0**
1	1	1	0	**0**
1	1	1	1	**0**

$F = A'B'C'D + A'B'CD + AB'C'D + AB'CD' + AB'CD$

EXPRESIONES BOOLEANAS

Determinar la expresión correspondiente

A	B	C	F
0	0	0	**0**
0	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	0	1	**0**
1	1	0	**1**
1	1	1	**0**

A	B	C	D	F
0	0	0	0	**1**
0	0	0	1	**0**
0	0	1	0	**0**
0	0	1	1	**0**
0	1	0	0	**1**
0	1	0	1	**1**
0	1	1	0	**0**
0	1	1	1	**0**
1	0	0	0	**1**
1	0	0	1	**0**
1	0	1	0	**0**
1	0	1	1	**0**
1	1	0	0	**0**
1	1	0	1	**0**
1	1	1	0	**0**
1	1	1	1	**1**

P	Q	R	S	T	F
0	0	0	0	0	**1**
0	0	0	0	1	**0**
0	0	0	1	0	**0**
0	0	0	1	1	**0**
0	0	1	0	0	**1**
0	0	1	0	1	**1**
0	0	1	1	0	**0**
0	0	1	1	1	**0**
0	1	0	0	0	**0**
0	1	0	0	1	**1**
0	1	0	1	0	**1**
0	1	0	1	1	**0**
0	1	1	0	0	**0**
0	1	1	0	1	**0**
0	1	1	1	0	**0**
0	1	1	1	1	**0**
1	0	0	0	0	**0**
1	0	0	0	1	**1**
1	0	0	1	0	**1**
1	0	0	1	1	**1**
1	0	1	0	0	**0**
1	0	1	0	1	**0**
1	0	1	1	0	**0**
1	0	1	1	1	**0**
1	1	0	0	0	**0**
1	1	0	0	1	**0**
1	1	0	1	0	**0**
1	1	0	1	1	**1**
1	1	1	0	0	**0**
1	1	1	0	1	**0**
1	1	1	1	0	**1**
1	1	1	1	1	**0**

TEOREMAS

	Teorema	Dual
1	0A = 0	1 + A = 1
2	1A = A	0 + A = A
3	AA = A	A + A = A
4	AA´ = 0	A + A´ = 1
5	AB = BA	A + B = B + A
6	ABC = A(BC)	A + B + C = A + (B + C)
7	(AB…Z)´ = A´ + B´ +…+ Z´	(A + B +… + Z)´ = A´B´…Z´
8	AB + AC = A (B + C)	(A + B)(A + C) = A + BC
9	AB + AB´ = A	(A + B)(A + B´) = A
10	A + AB = A	A(A + B) = A
11	A + A´B = A + B	A(A´ + B) = AB
12	CA + CA´B = CA + CB	(C + A)(C + A´+ B) = (C + A)(C + B)
13	AB + A´C + BC = AB + A´C	(A + B)(A´ + C)(B + C) = (A + B)(A´ + C)

EXPRESIONES BOOLEANAS

Están compuestas de letras mayúsculas (A, B, C,…) y cada una de ellas representa la señal de un sensor.

El valor de las señales o de la función solo puede ser 0 o 1, falso o verdadero.

Además de letras, pueden existir los valores 0 o 1.

Las letras de las expresiones booleanas pueden estar conectadas por medio de los operadores lógicos: ∧ (y), ∨ (o), ¬ (negación). El operador “y” es una multiplicación lógica, el “o” es una suma lógica y la “negación” es el complemento.

$F=A'B + (ABC) + C(B'+A)$

MAPAS DE KARNAUGH

Método para minimizar expresiones booleanas.

Tabla con 2^n casillas, con n = nº de variables.

Ej. F = X´Y + XY

Se marcan con 1 los mini términos X´Y, XY.

Se agrupan los ‘1’ adyacentes en bloques cuadrados o rectangulares

F = Y

X	Y	
	0	1
0	0	1
1	0	1

MAPAS DE KARNAUGH

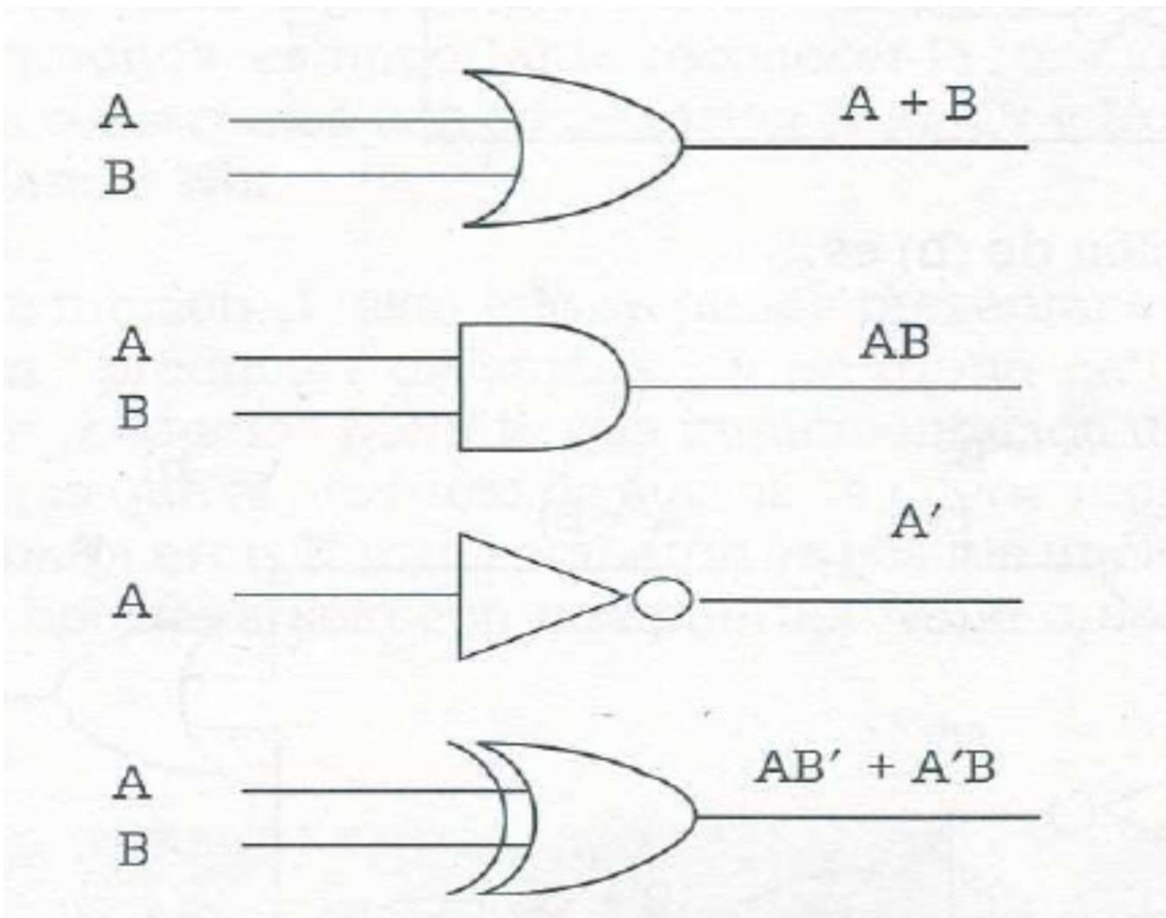
Ejemplo

F = X´Y´Z + X´YZ + XY´Z + XYZ´ + XYZ

X	YZ 00	01	11	10
0		1	1	
1		1	1	1

F = Z + XY

COMPUERTAS LÓGICAS



COMPUERTAS LÓGICAS

Ejemplo: Representar en compuerta lógicas la siguiente expresión:

F = AB´ + A´C´ + B