

Preuve par résolution

- Procédure générale pour faire de l'inférence
 - ◆ modus ponens et l'instantiation universelle sont des cas particuliers
- Cette procédure est correcte et complète (sous certaine condition, à voir plus tard)
- On aura besoin des outils suivants :
 - ◆ la **substitution**
 - ◆ l'**unification**
 - ◆ la **transformation sous forme normale conjonctive**

Mettre une formule sous forme normale conjonctive

1. Élimination de l'implication

- ◆ Utiliser l'équivalence
$$\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg \alpha \vee \beta$$
pour enlever toutes les implications de la formule

2. Réduire la portée de \neg

- ◆ Utiliser les **lois de Morgan**, c-à-d.

i. $\neg (f_1 \vee f_2) \equiv \neg f_1 \wedge \neg f_2$

ii. $\neg (f_1 \wedge f_2) \equiv \neg f_1 \vee \neg f_2$

iii. $\neg \neg f \equiv f,$

de sorte que \neg est toujours suivi d'un prédicat

3. Standardiser les variables

- ◆ renommer les variables de telle sorte qu'aucune paire de quantificateurs ne porte sur la même variable

Mettre une formule sous forme normale conjonctive

4. Éliminer les quantificateurs existentiels

- ◆ chaque quantificateur existentiel est éliminé, en **remplaçant sa variable par une fonction des quantificateurs universels englobants**
 - » ex. : $\forall x \forall y \exists z p(x, y, z)$ est remplacé par $\forall x \forall y p(x, y, f(x, y))$
 - » on appelle ces fonctions (ex. $f(x, y)$ ci-haut) des **fonctions de Skolem**
 - » le symbole de la fonction doit être unique (ne pas utiliser f à chaque fois)
 - » si aucun argument, on utilise une constante unique
 - ex. : $\exists x q(x)$ devient $q(a)$ (où a n'est pas une constante déjà définie)

5. Mettre en forme prénexe

- ◆ mettre tous les quantificateurs universels en tête

6. Distribuer les disjonctions dans les conjonctions

- ◆ mettre sous forme de conjonction (\wedge) de disjonctions (\vee) de littéraux, en utilisant les équivalences de distributivité :
$$f_1 \vee (f_2 \wedge f_3) \equiv (f_1 \vee f_2) \wedge (f_1 \vee f_3)$$

Mettre une formule sous forme normale conjonctive

7. Éliminer les symboles de quantificateurs universels

- ◆ on ne laisse que les variables

8. Éliminer les conjonctions (\wedge)

- ◆ on génère des clauses séparées (sur des lignes différentes)

9. Standardiser les variables à part

- ◆ renommer les variables de telle sorte que deux clauses différentes n'aient pas les mêmes variables

Exemple

1. Marcus est une personne.
2. Marcus est un pompéien.
3. Tous les pompéiens sont des romains.
4. César est un dirigeant.
5. Tout le monde est loyal à quelqu'un.
6. Tous les romains sont loyaux à César ou le haïssent.
7. Les seuls dirigeants qu'une personne essaie d'assassiner sont ceux auxquels elle n'est pas loyal
8. Marcus a essayer d'assassiner César.

1. *personne*(Marcus)
2. *pompeien*(Marcus)
3. $\forall x \text{ pompeien}(x) \rightarrow \text{romain}(x)$
4. *dirigeant*(Cesar)
5. $\forall x \exists y \text{ loyal}(x,y)$
6. $\forall x \text{ romain}(x) \rightarrow \text{loyal}(x,\text{Cesar}) \vee \text{hait}(x,\text{Cesar})$
7. $\forall x \forall y \text{ personne}(x) \wedge \text{dirigeant}(y) \wedge \text{assassiner}(x,y) \rightarrow \neg \text{loyal}(x,y)$
8. *assassiner*(Marcus,Cesar)

Etape 1 : éliminer l'implication

1. *personne*(*Marcus*)
2. *pompeien*(*Marcus*)
3. $\forall x \text{ pompeien}(x) \rightarrow \text{romain}(x)$
4. *dirigeant*(*Cesar*)
5. $\forall x \exists y \text{ loyal}(x,y)$
6. $\forall x \text{ romain}(x) \rightarrow \text{loyal}(x,\text{Cesar}) \vee \text{hait}(x,\text{Cesar})$
7. $\forall x \forall y \text{ personne}(x) \wedge \text{dirigeant}(y) \wedge$
 $\text{assassiner}(x,y) \rightarrow \neg \text{loyal}(x,y)$
8. *assassiner*(*Marcus*,*Cesar*)

1. *personne*(*Marcus*)
2. *pompeien*(*Marcus*)
3. $\forall x \neg \text{pompeien}(x) \vee \text{romain}(x)$
4. *dirigeant*(*Cesar*)
5. $\forall x \exists y \text{ loyal}(x,y)$
6. $\forall x \neg \text{romain}(x) \vee \text{loyal}(x,\text{Cesar}) \vee \text{hait}(x,\text{Cesar})$
7. $\forall x \forall y \neg (\text{personne}(x) \wedge \text{dirigeant}(y) \wedge$
 $\text{assassiner}(x,y)) \vee \neg \text{loyal}(x,y)$
8. *assassiner*(*Marcus*,*Cesar*)

Etape 2 : réduire la porte de \neg

1. *personne*(Marcus)
2. *pompeien*(Marcus)
3. $\forall x \neg \text{pompeien}(x) \vee \text{romain}(x)$
4. *dirigeant*(Cesar)
5. $\forall x \exists y \text{loyal}(x,y)$
6. $\forall x \neg \text{romain}(x) \vee \text{loyal}(x,\text{Cesar}) \vee \text{hait}(x,\text{Cesar})$
7. $\forall x \forall y \neg (\text{personne}(x) \wedge \text{dirigeant}(y) \wedge$
 $\text{assassiner}(x,y)) \vee \neg \text{loyal}(x,y)$
8. *assassiner*(Marcus,Cesar)

1. *personne*(Marcus)
2. *pompeien*(Marcus)
3. $\forall x \neg \text{pompeien}(x) \vee \text{romain}(x)$
4. *dirigeant*(Cesar)
5. $\forall x \exists y \text{loyal}(x,y)$
6. $\forall x \neg \text{romain}(x) \vee \text{loyal}(x,\text{Cesar}) \vee \text{hait}(x,\text{Cesar})$
7. $\forall x \forall y \neg \text{personne}(x) \vee \neg \text{dirigeant}(y) \vee$
 $\neg \text{assassiner}(x,y) \vee \neg \text{loyal}(x,y)$
8. *assassiner*(Marcus,Cesar)

Etape 3 : standardiser les variables

1. *personne*(*Marcus*)
2. *pompeien*(*Marcus*)
3. $\forall x \neg \text{pompeien}(x) \vee \text{romain}(x)$
4. *dirigeant*(*Cesar*)
5. $\forall x \exists y \text{loyal}(x,y)$
6. $\forall x \neg \text{romain}(x) \vee \text{loyal}(x,\text{Cesar}) \vee \text{hait}(x,\text{Cesar})$
7. $\forall x \forall y \neg \text{personne}(x) \vee \neg \text{dirigeant}(y) \vee$
 $\neg \text{assassiner}(x,y) \vee \neg \text{loyal}(x,y)$
8. *assassiner*(*Marcus*,*Cesar*)

1. *personne*(*Marcus*)
2. *pompeien*(*Marcus*)
3. $\forall x1 \neg \text{pompeien}(x1) \vee \text{romain}(x1)$
4. *dirigeant*(*Cesar*)
5. $\forall x2 \exists x3 \text{loyal}(x2,x3)$
6. $\forall x4 \neg \text{romain}(x4) \vee \text{loyal}(x4,\text{Cesar}) \vee$
hait(*x4*,*Cesar*)
7. $\forall x5 \forall x6 \neg \text{personne}(x5) \vee \neg \text{dirigeant}(x6) \vee$
 $\neg \text{assassiner}(x5,x6) \vee \neg \text{loyal}(x5,x6)$
8. *assassiner*(*Marcus*,*Cesar*)

Etape 4 : éliminer les quantificateurs existentiels

1. *personne*(*Marcus*)
2. *pompeien*(*Marcus*)
3. $\forall x1 \neg \text{pompeien}(x1) \vee \text{romain}(x1)$
4. *dirigeant*(*Cesar*)
5. $\forall x2 \exists x3 \text{loyal}(x2, x3)$
6. $\forall x4 \neg \text{romain}(x4) \vee \text{loyal}(x4, \text{Cesar}) \vee$
hait(*x4*, *Cesar*)
7. $\forall x5 \forall x6 \neg \text{personne}(x5) \vee \neg \text{dirigeant}(x6) \vee$
 $\neg \text{assassiner}(x5, x6) \vee \neg \text{loyal}(x5, x6)$
8. *assassiner*(*Marcus*, *Cesar*)

1. *personne*(*Marcus*)
2. *pompeien*(*Marcus*)
3. $\forall x1 \neg \text{pompeien}(x1) \vee \text{romain}(x1)$
4. *dirigeant*(*Cesar*)
5. $\forall x2 \text{loyal}(x2, f1(x2))$
6. $\forall x4 \neg \text{romain}(x4) \vee \text{loyal}(x4, \text{Cesar}) \vee$
hait(*x4*, *Cesar*)
7. $\forall x5 \forall x6 \neg \text{personne}(x5) \vee \neg \text{dirigeant}(x6) \vee$
 $\neg \text{assassiner}(x5, x6) \vee \neg \text{loyal}(x5, x6)$
8. *assassiner*(*Marcus*, *Cesar*)

Etape 5 : mettre les formules en forme prénexe

1. *personne*(*Marcus*)
2. *pompeien*(*Marcus*)
3. $\forall x1 \neg \textit{pompeien}(x1) \vee \textit{romain}(x1)$
4. *dirigeant*(*Cesar*)
5. $\forall x2 \textit{loyal}(x2, f1(x2))$
6. $\forall x4 \neg \textit{romain}(x4) \vee \textit{loyal}(x4, \textit{Cesar}) \vee \textit{hait}(x4, \textit{Cesar})$
7. $\forall x5 \forall x6 \neg \textit{personne}(x5) \vee \neg \textit{dirigeant}(x6) \vee \neg \textit{assassiner}(x5, x6) \vee \neg \textit{loyal}(x5, x6)$
8. *assassiner*(*Marcus*, *Cesar*)

1. *personne*(*Marcus*)
2. *pompeien*(*Marcus*)
3. $\forall x1 \neg \textit{pompeien}(x1) \vee \textit{romain}(x1)$
4. *dirigeant*(*Cesar*)
5. $\forall x2 \textit{loyal}(x2, f1(x2))$
6. $\forall x4 \neg \textit{romain}(x4) \vee \textit{loyal}(x4, \textit{Cesar}) \vee \textit{hait}(x4, \textit{Cesar})$
7. $\forall x5 \forall x6 \neg \textit{personne}(x5) \vee \neg \textit{dirigeant}(x6) \vee \neg \textit{assassiner}(x5, x6) \vee \neg \textit{loyal}(x5, x6)$
8. *assassiner*(*Marcus*, *Cesar*)

Aucun changement dans ce cas-ci

Etape 6 : distribuer les disjonctions dans les conjonctions

1. *personne*(Marcus)
2. *pompeien*(Marcus)
3. $\forall x1 \neg \text{pompeien}(x1) \vee \text{romain}(x1)$
4. *dirigeant*(Cesar)
5. $\forall x2 \text{loyal}(x2, f1(x2))$
6. $\forall x4 \neg \text{romain}(x4) \vee \text{loyal}(x4, \text{Cesar}) \vee$
hait(x4,Cesar)
7. $\forall x5 \forall x6 \neg \text{personne}(x5) \vee \neg \text{dirigeant}(x6) \vee$
 $\neg \text{assassiner}(x5, x6) \vee \neg \text{loyal}(x5, x6)$
8. *assassiner*(Marcus,Cesar)

1. *personne*(Marcus)
2. *pompeien*(Marcus)
3. $\forall x1 \neg \text{pompeien}(x1) \vee \text{romain}(x1)$
4. *dirigeant*(Cesar)
5. $\forall x2 \text{loyal}(x2, f1(x2))$
6. $\forall x4 \neg \text{romain}(x4) \vee \text{loyal}(x4, \text{Cesar}) \vee$
hait(x4,Cesar)
7. $\forall x5 \forall x6 \neg \text{personne}(x5) \vee \neg \text{dirigeant}(x6) \vee$
 $\neg \text{assassiner}(x5, x6) \vee \neg \text{loyal}(x5, x6)$
8. *assassiner*(Marcus,Cesar)

Aucun changement dans ce cas-ci

Etape 7 : éliminer les quantificateurs universels

1. *personne*(Marcus)
2. *pompeien*(Marcus)
3. $\forall x1 \neg \text{pompeien}(x1) \vee \text{romain}(x1)$
4. *dirigeant*(Cesar)
5. $\forall x2 \text{loyal}(x2, f1(x2))$
6. $\forall x4 \neg \text{romain}(x4) \vee \text{loyal}(x4, \text{Cesar}) \vee \text{hait}(x4, \text{Cesar})$
7. $\forall x5 \forall x6 \neg \text{personne}(x5) \vee \neg \text{dirigeant}(x6) \vee \neg \text{assassiner}(x5, x6) \vee \neg \text{loyal}(x5, x6)$
8. *assassiner*(Marcus, Cesar)

1. *personne*(Marcus)
2. *pompeien*(Marcus)
3. $\neg \text{pompeien}(x1) \vee \text{romain}(x1)$
4. *dirigeant*(Cesar)
5. *loyal*(x2, f1(x2))
6. $\neg \text{romain}(x4) \vee \text{loyal}(x4, \text{Cesar}) \vee \text{hait}(x4, \text{Cesar})$
7. $\neg \text{personne}(x5) \vee \neg \text{dirigeant}(x6) \vee \neg \text{assassiner}(x5, x6) \vee \neg \text{loyal}(x5, x6)$
8. *assassiner*(Marcus, Cesar)

Etape 8 : éliminer les conjonctions

1. *personne*(*Marcus*)
2. *pompeien*(*Marcus*)
3. $\neg \text{pompeien}(x1) \vee \text{romain}(x1)$
4. *dirigeant*(*Cesar*)
5. *loyal*($x2, f1(x2)$)
6. $\neg \text{romain}(x4) \vee \text{loyal}(x4, \text{Cesar}) \vee \text{hait}(x4, \text{Cesar})$
7. $\neg \text{personne}(x5) \vee \neg \text{dirigeant}(x6) \vee$
 $\neg \text{assassiner}(x5, x6) \vee \neg \text{loyal}(x5, x6)$
8. *assassiner*(*Marcus*, *Cesar*)

1. *personne*(*Marcus*)
2. *pompeien*(*Marcus*)
3. $\neg \text{pompeien}(x1) \vee \text{romain}(x1)$
4. *dirigeant*(*Cesar*)
5. *loyal*($x2, f1(x2)$)
6. $\neg \text{romain}(x4) \vee \text{loyal}(x4, \text{Cesar}) \vee \text{hait}(x4, \text{Cesar})$
7. $\neg \text{personne}(x5) \vee \neg \text{dirigeant}(x6) \vee$
 $\neg \text{assassiner}(x5, x6) \vee \neg \text{loyal}(x5, x6)$
8. *assassiner*(*Marcus*, *Cesar*)

Aucun changement dans ce cas-ci

Etape 9 : standardiser les variables

1. *personne*(*Marcus*)
2. *pompeien*(*Marcus*)
3. $\neg \text{pompeien}(x1) \vee \text{romain}(x1)$
4. *dirigeant*(*Cesar*)
5. *loyal*(*x2*, *f1*(*x2*))
6. $\neg \text{romain}(x4) \vee \text{loyal}(x4, \text{Cesar}) \vee \text{hait}(x4, \text{Cesar})$
7. $\neg \text{personne}(x5) \vee \neg \text{dirigeant}(x6) \vee$
 $\neg \text{assassiner}(x5, x6) \vee \neg \text{loyal}(x5, x6)$
8. *assassiner*(*Marcus*, *Cesar*)

1. *personne*(*Marcus*)
2. *pompeien*(*Marcus*)
3. $\neg \text{pompeien}(x1) \vee \text{romain}(x1)$
4. *dirigeant*(*Cesar*)
5. *loyal*(*x2*, *f1*(*x2*))
6. $\neg \text{romain}(x4) \vee \text{loyal}(x4, \text{Cesar}) \vee \text{hait}(x4, \text{Cesar})$
7. $\neg \text{personne}(x5) \vee \neg \text{dirigeant}(x6) \vee$
 $\neg \text{assassiner}(x5, x6) \vee \neg \text{loyal}(x5, x6)$
8. *assassiner*(*Marcus*, *Cesar*)

Aucun changement dans ce cas-ci