

Exercice – Réseaux bayésiens

Soit les variables booléennes A, B, C, D, F et E , et soit leurs tables de probabilités suivantes:

A	C	$F=vrai$
<i>faux</i>	<i>faux</i>	0.1
<i>faux</i>	<i>vrai</i>	0.2
<i>vrai</i>	<i>faux</i>	0.8
<i>vrai</i>	<i>vrai</i>	0.7

E	$C=vrai$
<i>faux</i>	0.2
<i>vrai</i>	0.4

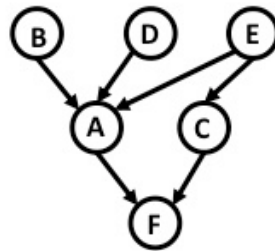
$D=vrai$
0.2

B	D	E	$A=vrai$
<i>faux</i>	<i>faux</i>	<i>faux</i>	0.7
<i>faux</i>	<i>faux</i>	<i>vrai</i>	0.2
<i>faux</i>	<i>vrai</i>	<i>faux</i>	0.5
<i>faux</i>	<i>vrai</i>	<i>vrai</i>	0.1
<i>vrai</i>	<i>faux</i>	<i>faux</i>	0.2
<i>vrai</i>	<i>faux</i>	<i>vrai</i>	0.9
<i>vrai</i>	<i>vrai</i>	<i>faux</i>	0.8
<i>vrai</i>	<i>vrai</i>	<i>vrai</i>	0.6

$E=vrai$
0.9

$B=vrai$
0.7

a) Dessinez sous forme de graphe le réseau bayésien associé à ces tables de probabilités.



b) Calculez la probabilité $P(A=faux \mid E=vrai)$

$$(A=faux \rightarrow \neg a, E=vrai \rightarrow e)$$

$$P(\neg a \mid e) = P(\neg a, e) / P(e) = (\sum_b \sum_d P(\neg a, e, D=d, B=b)) / P(e)$$

$$\begin{aligned}
 \sum_b \sum_d P(\neg a, e, D=d, B=b) &= \sum_b \sum_d P(\neg a \mid e, D=d, B=b) P(B=b) P(D=d) P(e) \\
 &= P(\neg a \mid e, D=faux, B=faux) P(B=faux) P(D=faux) P(e) + \\
 &\quad P(\neg a \mid e, D=faux, B=vrai) P(B=vrai) P(D=faux) P(e) + \\
 &\quad P(\neg a \mid e, D=vrai, B=faux) P(B=faux) P(D=vrai) P(e) + \\
 &\quad P(\neg a \mid e, D=vrai, B=vrai) P(B=vrai) P(D=vrai) P(e) \\
 &= (1-0.2) * (1-0.7) * (1-0.2) * 0.9 + (1-0.9) * 0.7 * (1-0.2) * 0.9 + \\
 &\quad (1-0.1) * (1-0.7) * 0.2 * 0.9 + (1-0.6) * 0.7 * 0.2 * 0.9 \\
 &= 0.3222
 \end{aligned}$$

$$P(e) = 0.9$$

$$\text{Réponse : } P(\neg a \mid e) = 0.3222 / 0.9 = 0.358$$

c) Calculez la distribution $P(D|A=vrai, B=vrai, C=faux, F=vrai)$

$(A=vrai \rightarrow a, B=vrai \rightarrow b, C=faux \rightarrow \neg c, F=vrai \rightarrow f)$

$$P(D=faux|a,b,\neg c,f) = P(D=faux,a,b,\neg c,f) / P(a,b,\neg c,f) = (\sum_e P(D=faux,a,b,\neg c,f,E=e)) / \alpha$$

$$\begin{aligned} \sum_e P(D=faux,a,b,\neg c,f,E=e) &= \sum_e P(f|a,c) P(a|b,D=faux,E=e) P(\neg c|E=e) P(D=faux) P(b) P(E=e) \\ &= P(f|a,\neg c) P(a|b,D=faux,E=faux) P(\neg c|E=faux) P(D=faux) P(b) P(E=faux) + \\ &\quad P(f|a,\neg c) P(a|b,D=faux,E=vrai) P(\neg c|E=vrai) P(D=faux) P(b) P(E=vrai) \\ &= 0.8 * 0.2 * (1-0.2)*(1-0.2)*0.7*(1-0.9) + \\ &\quad 0.8 * 0.9 * (1-0.4)*(1-0.2)* 0.7 * 0.9 \\ &= 0.224896 \end{aligned}$$

$$P(D=vrai|a,b,\neg c,f) = P(D=vrai,a,b,\neg c,f) / P(a,b,\neg c,f) = (\sum_e P(D=vrai,a,b,\neg c,f,E=e)) / \alpha$$

$$\begin{aligned} \sum_e P(D=vrai,a,b,\neg c,f,E=e) &= \sum_e P(f|a,\neg c) P(a|b,D=vrai,E=e) P(\neg c|E=e) P(D=vrai) P(b) P(E=e) \\ &= P(f|a,\neg c) P(a|b,D=vrai,E=faux) P(\neg c|E=faux) P(D=vrai) P(b) P(E=faux) + \\ &\quad P(f|a,\neg c) P(a|b,D=vrai,E=vrai) P(\neg c|E=vrai) P(D=vrai) P(b) P(E=vrai) \\ &= 0.8 * 0.8 * (1-0.2) * 0.2 * 0.7 * (1-0.9) + \\ &\quad 0.8 * 0.6 * (1-0.4) * 0.2 * 0.7 * 0.9 \\ &= 0.043456 \end{aligned}$$

$$\alpha = 0.224896 + 0.043456 = 0.268352$$

$$\text{Réponse : } P(D|a,b,\neg c,f) = [0.224896, 0.043456] / \alpha \approx [0.838, 0.162]$$