

Problème de satisfaction de contraintes

- Formellement, un problème de satisfaction de contraintes (ou CSP pour *Constraint Satisfaction Problem*) est défini par :
 - ◆ un **ensemble fini de variables** $V = \{ X_1, \dots, X_N \}$
 - » chaque variable X_i a un **domaine** D_i de valeurs possibles
 - ◆ un **ensemble fini de contraintes** C_1, \dots, C_M sur les variables.
 - » une contrainte restreint les valeurs pour un sous-ensemble de variables
- Un **état (nœud)** d'un problème CSP est défini par une **assignation de valeurs** $\{X_i=v_i, X_j=v_j, \dots\}$ à certaines variables ou à toutes les variables
 - ◆ une assignation qui viole aucune contrainte est dite **compatible** ou **légal**
 - ◆ une assignation est **complète** si elle concerne toutes les variables
 - ◆ une solution à un problème CSP est une assignation **complète et compatible**

Exemple 1

- Soit le problème CSP défini comme suit :
 - ◆ ensemble de variables $V = \{X_1, X_2, X_3\}$
 - ◆ un domaine pour chaque variable $D_1 = D_2 = D_3 = \{1, 2, 3\}$.
 - ◆ une contrainte spécifiée par l'équation linéaire $X_1 + X_2 = X_3$.
- Il y a trois solutions possibles :
 - ◆ $\{X_1=1, X_2=1, X_3=2\}$
 - ◆ $\{X_1=1, X_2=2, X_3=3\}$
 - ◆ $\{X_1=2, X_2=1, X_3=3\}$

Exemple 2 : Colorier une carte

- Soit une carte de l'Australie
 - ◆ on doit utiliser seulement **trois couleurs** (rouge, vert et bleu) de sorte que **deux états frontaliers n'aient jamais les mêmes couleurs**



Exemple 2 : Colorier une carte

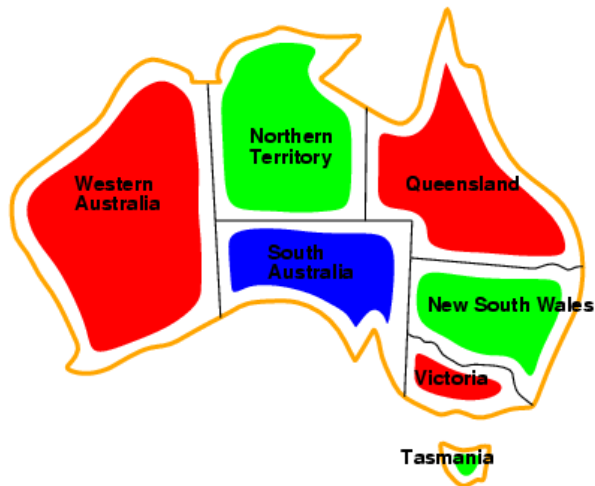
- Formulation du problème CSP :
 - ◆ les variables sont les états de l'Australie :
 - » $V = \{WA, NT, Q, NSW, V, SA, T\}$
 - ◆ le domaine de chaque variable est l'ensemble des trois couleurs : $\{R, G, B\}$



- ◆ contraintes : les états frontaliers doivent avoir des couleurs différentes :
 - » $WA \neq NT, \dots, NT \neq Q, \dots$

Exemple 2 : Colorier une carte

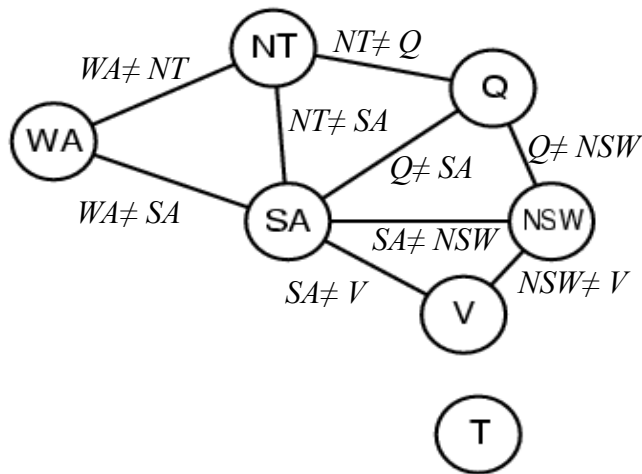
- Solution :



$\{ \text{WA} = \text{R}, \text{NT} = \text{G}, \text{Q} = \text{R}, \text{NSW} = \text{G}, \text{V} = \text{R}, \text{SA} = \text{B}, \text{T} = \text{G} \}$

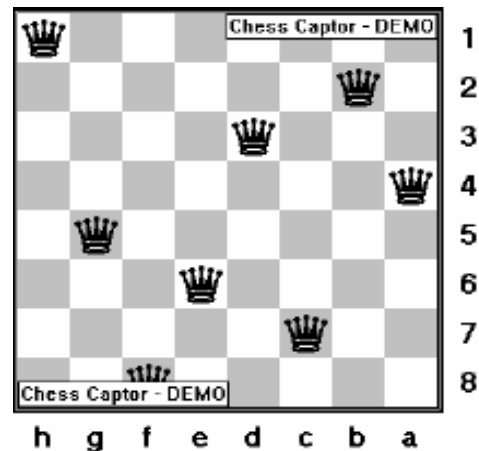
Graphe de contraintes

- Pour des problèmes avec des **contraintes binaires** (c-à-d. entre deux variables), on peut visualiser le problème CSP par **un graphe de contraintes**
- Un graphe de contraintes est un graphe dont les nœuds sont des variables (un nœud par variable) et les arcs sont des contraintes entre les deux variables



Exemple 3 : *N-Queens*

- Positionner N reines sur un échiquier de sorte qu'aucune d'entre elles ne soit en position d'attaquer une autre
 - ◆ exemple avec 8 reines (*8-Queens*)
- Nombre de configurations :
 - ◆ avec $N = 4$: 256 configurations.
 - ◆ $N = 8$: 16 777 216
 - ◆ $N = 16$: 18,446,744,073,709,551,616 configurations



Exemple 3 : *N-Queens*

- Modélisation comme problème CSP :
 - ◆ variables : colonnes 1, ..., N
 - ◆ domaines : rangées 1, ..., N
 - ◆ la colonne i a la valeur k si la reine dans la colonne i est dans la rangée k
 - ◆ contraintes : pas deux reines sur même rangée ou diagonale
(par définition des variables, il y aura toujours une seule reine par colonne)

