



单位代码 10006

学 号 39041406

分 类 号 V231.2

北京航空航天大学
B E I H A N G U N I V E R S I T Y

毕业设计(论文)

控制三角形数量的非结构网格生成方法研究

学院名称	能源与动力工程学院
专业名称	飞行器动力工程
学生姓名	刘春辉
指导教师	岳 明

2013 年 6 月



北京航空航天大学

本科生毕业设计(论文)任务书

I、毕业设计(论文)题目:

控制三角形数量的非结构网格生成方法研究

II、毕业设计(论文)使用的原始资料(数据)及设计技术要求:

对于二维求解域,探究在保证网格质量的前提下生成给定数量的三角形的非结构网格生成方法

III、毕业设计(论文)工作内容:

1.生成给定规模的网格

2.完成对网格的优化

3.翻译文献

4.撰写论文,完成答辩



IV、主要参考资料:

[1]聂玉峰, and 刘莹. "非结构网格布点方法研究进展." 计算机工程与应用 44, no. 32 (2008): 35-40.

[2]陶文铨. "近代计算传热学进展." (2000).

[3]Zhang, Hanzhou, and Andrei V. Smirnov. "Node placement for triangular mesh generation by Monte Carlo simulation." International Journal for numerical methods in engineering 64, no. 7 (2005): 973-989.

[4]周培德. 计算几何: 算法分析与设计. 清华大学出版社, 2000.

[5]陈炎, 曹树良, 梁开洪, and 祝宝山. "结合前沿推进的 Delaunay 三角化网格生成及应用." 计算物理 26, no. 4 (2009): 527-533.

[6]Pirzadeh, S. "Unstructured grid generation by advancing front method using structured background grids." In Thirteenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, pp. 285-289. Springer Berlin Heidelberg, 1993.



能源与动力工程 学院(系) 飞行器动力工程 专业类 39041406 班

学生 刘春辉

毕业设计(论文)时间: 2013 年 3 月 4 日至 2013 年 6 月 14 日

答辩时间: 2013 年 6 月 14 日

成 绩: _____

指导教师: 岳明

兼职教师或答疑教师(并指出所负责部分):

_____(教研室)主任(签字): _____



本人声明

我声明，本论文及其研究工作是由本人在导师指导下独立完成的，在完成论文时所利用的一切资料均已在参考文献中列出。

作者：刘春辉

签字：

时间：2013 年 6 月



控制三角形数量的非结构网格生成方法研究

学 生：刘春辉

指导教师：岳明

摘 要

本文提出在保证非结构网格质量的前提下，控制网格规模的思想。它基于三角形单元数目等于求解域面积除以三角形平均面积这一原理。通过事先给定求解域内单元总数，求得求解域内的理想单元面积和边长，进而在插入节点过程中，使得新生成的单元同理想单元想接近，然后用 Delaunay 三角化法连接区域内节点。通过删除质量太差的三角形以及使用 Laplace 光顺化来提高网格质量。这样，网格的规模和质量同时的到保证。结果证明该算法简单而有效。

关键词：非结构网格；网格规模；理想单元；Delaunay 三角形化方法；Laplace 光顺化。



Research about unstructured mesh generation with the controlled number of triangles

Author : Chunhui Liu

Tutor : Ming Yue

Abstract

This paper proposes to control the scale of unstructured mesh in the context of ensuring the quality of unstructured mesh. It is based on the idea that number of element in mesh equals to the area in region divided by mean area of all elements in mesh. It defines the number of element in domain, computes the optimal element's area and side. After this, it distributes nodes one after another which is close to optimal element and connect them by Delaunay triangular method. It ensures the quality of mesh by deleting some bad triangular and with Laplace smoothing method. So both the scale and quality of mesh satisfy requirement. Result shows that this method is simple and efficient.

Key words: Unstructured mesh; scale of mesh; optimal element; Delaunay triangular method; Laplace smoothing.



目录

1.绪论	1
1.1 课题研究的背景和意义.....	1
1.2 国内外研究现状.....	1
1.2.1 前沿推进法.....	1
1.2.2 Delaunay 三角形化方法	4
1.2.3 布点方法.....	5
1.3 论文的研究内容.....	11
2.网格生成	12
2.1 理想单元边长 b 及面积 s	12
2.2 网格的生成.....	13
2.2.1 生成初始网格.....	13
2.2.2 向求解域内自动加点.....	16
3.网格优化	20
4.结果分析	22
4.1 不同的预先给定网格规模;	22
4.1.1 网格规模误差.....	30
4.1.2 网格质量.....	31
4.2 不规则边界.....	32
5.结论及展望	35
5.1 结论.....	35
5.2 展望.....	35
致 谢	36
参考文献	37



1. 绪论

1.1 课题研究的背景和意义

网格生成技术即是对不规则物理区域进行离散以生成规则计算区域网格的方法，是 CFD 的重要组成部分，所需人力时间约占一个计算任务全部人力时间的 60%左右，并且影响 CFD 计算精度。此外在计算机图形学等领域网格生成也至关重要^[1]。

网格生成的质量对于其模拟的收敛性和精确性有着重大的影响，网格生成的规模则直接决定了计算量和计算时间的大小。网格规模的增大有助于计算精度的提高，但同时对于计算机性能提出了更高的要求，因而成本越高。因此，在实际工程应用中，保证网格质量（即满足计算精度要求）的前提下，生成规模可控的网格就显得尤其重要了。

一般而言，网格包括结构化网格和非结构化网格。相比结构化网格，非结构网格对复杂区域和求解变化迅速的问题有很好的适应性，在航空、航天等领域得到广泛研究和应用。而目前，非结构网格生成技术多关注于对网格质量的控制，对网格规模的控制涉及较少。

因此，在保证网格质量的前提下，生成规模可控的非结构网格的技术就显得尤其重要了。考虑到三角形单元的数量 N 取决于区域的总面积 S 同三角形单元平均面积 s 的比值，本文提出以生成大小相同的三角形单元为目标，根据预先给定的单元数量及求解域面积，求得理想单元的面积，在网格生成过程中控制单元面积，最终实现对控制网格规模和质量的控制。

1.2 国内外研究现状

非结构网格生成方法有前沿推进法，Delaunay 三角化网格生成法以及相关的布点方法。

1.2.1 前沿推进法

前沿推进法：前沿被定义为已生成网格区域同未生成网格区域之间的边界。算法的关键步骤是每次向未生成网格区域添加新的单元，同时生成新的前沿替换旧的前沿。算

法的核心在与三角形逐层推进生成。

如图所示为图 1.1 一个简单的多连通域应用前沿推进法生成的非结构化网格的过程^[2]。其中图 h 是光顺化处理后的网格。

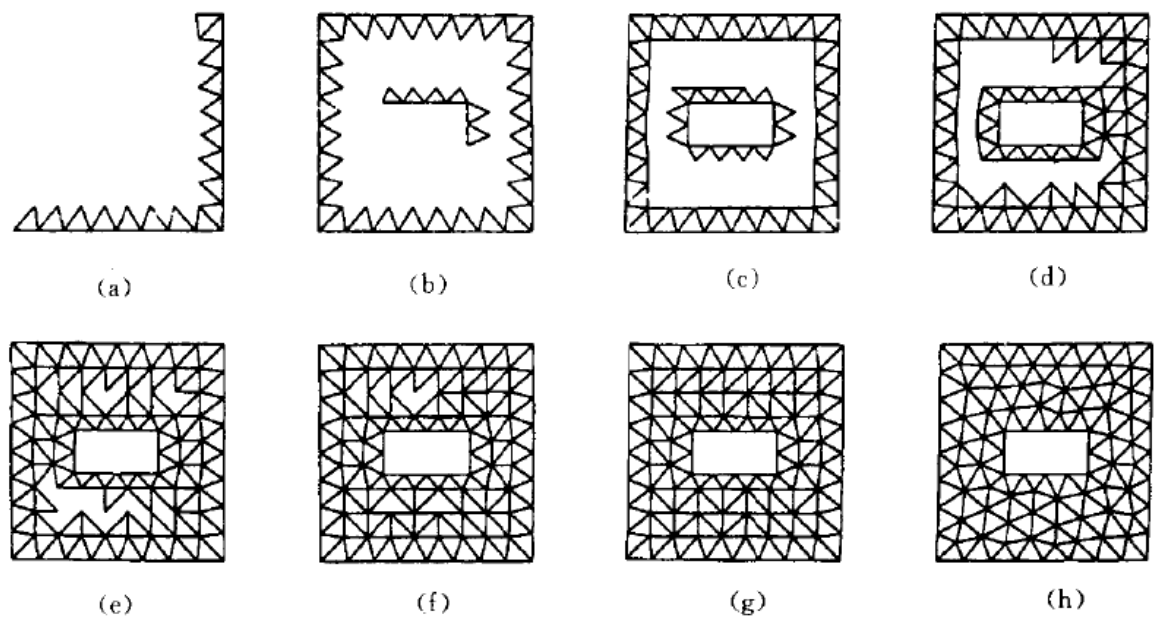


图 1.1 前沿推进法的过程

前沿推进法的不同实施方法主要区别在于下述三个方面：(1) 如何形成边界的前沿；(2) 如何向区域内部加点；(3) 如何推进前沿使与内点连成三角形。

Lo 提出预先生成所有内部及边界节点。按求解区域边界上两个点之间的平均距离来生成内点，把边界上的所有有向线段都设置为前沿，从某前沿(见图 1.2)出发，在其左侧内寻找按上述方法生成的内点 C_i ，找出其中使 $(1C_i^2 + C_i^5)$ 为最小的点，生成 $\triangle 15C$ 。

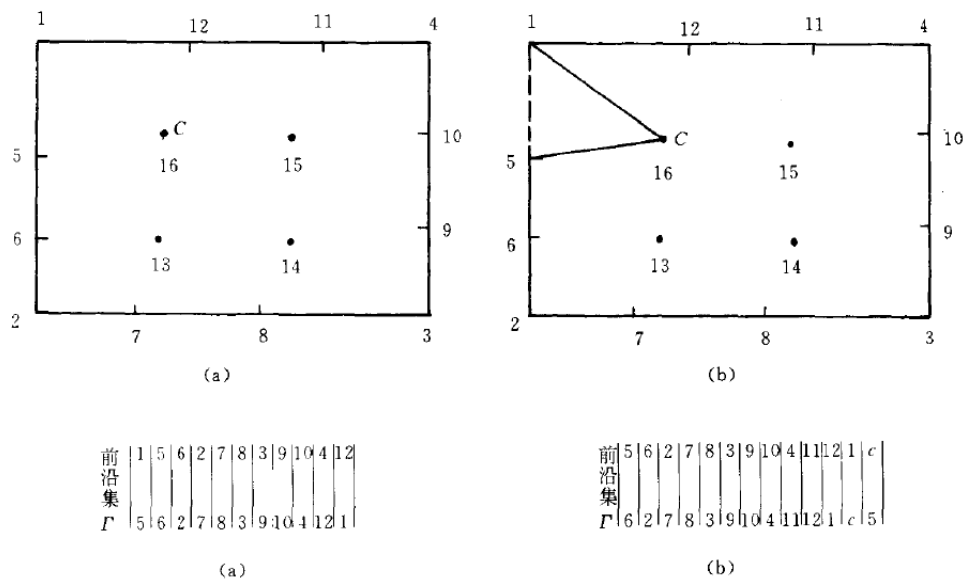


图 1.2 Lo 提出的前沿推进法

在一些其他三角形生成方法中,新的节点同新三角形单元同时生成。**Peraire** 提出将新节点布置过前沿三角形的形心且垂直于在前沿边的,选择节点到前沿中点的距离来使得节点到前沿三角形三个顶点的平均距离相一致。**Jin** 和 **Tanner** 也提出新节点相似的位置---通过三角形形心的三角形法向方向,另外,他们引入了许多位于 7 个法向方向的备选节点,他们试图从已有的相邻节点以及新生成的这些节点中选择一个最优方案^[3]。

前沿推进法的优点是对区域边界拟合的比较好,边界附近网格质量很高,所以在流体力学等对区域边界要求比较高的情况下,常常采用这种方法。

它的缺点是对区域内部的网格生成的质量比较差,而且由于每次选定网格节点时需要检查选定的节点是否与前沿相交,这将花费大量的时间。对于生成稀疏密度要求不同的网格需要对算法进行特殊处理,并且理论上无法保证生成网格质量达到设定的标准。

另外,前沿推进过程中无法实现对网格最终规模的控制。人们事先无法判断前沿推进过程推进多少步后会停止,也就无法预先控制网格规模。网格最终规模只能等网格生成完毕才能知晓。而前沿推进过程结束后,一旦网格规模不符合要求,只能通过经验修改边界节点密度或者其他参数,反复尝试直到最终网格规模满足要求。

1.2.2 Delaunay 三角形化方法

生成非结构网格的另一种重要方法是 Delaunay 三角形化方法。这种方法基于计算几何学的严密规则之上, 在 20 世纪的 80-90 年代得到了迅速的发展, 目前已成为生成非结构化网格的一种主要方法^[2]。

Delaunay 三角形化是一种将平面上一组已给定的点连接成三角形的方法, 这些所连接而成的三角形具有以下特点:

- (1) 所形成的三角形互不重叠;
- (2) 所形成的三角形可以覆盖整个平面;
- (3) 每一个点均不位于不包含该点的三角形的外接圆内。

用 Delaunay 三角形化方法所连接成的三角形中的最小角对给定的这一组点是各种连接方案中的最大者, 因而这种结果也是唯一的, 并称之为最大最小角准则。这就意味着, 对给定的这一组点, 用这种方法生成的三角形的边长的均匀性是最好的。显然, 这一特点对网格生成是很有吸引力的。因为在生成三角形的网格时, 我们希望所有三角形都尽可能的接近于正三角形, 以减小离散过程中由于网格不均匀而引入的额外误差。图 1.3 给出了将给定的五个点连接成三个互不重叠的三角形的三种方案。

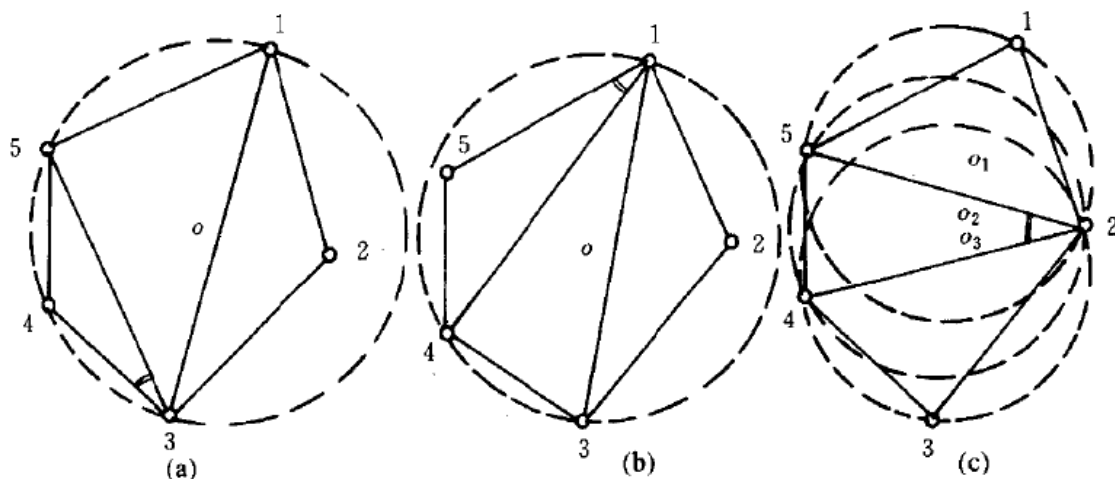


图 1.3 平面点集的连接方式

在第一二方案中, 虚线所示的圆分别是 $\triangle 345$ 及 $\triangle 134$ 的外接圆。显然, 第三种方案由于三个三角形中的最小角最大, 因而变长的均匀性也最好。从几何位置上看, 之所

以第三个方案好,是因为第三个方案中每一个三角形的外接圆都不包含除了该三角形三个顶点以外的两个点,而第一二个方案则不是如此。为以后叙述质变,我们把由 Delaunay 三角形化所形成的三角形成为 Delaunay 三角形。

Delaunay 三角形化方法有两种方法:(1) 网格生成后如何保证满足 Delaunay 准则;
(2) 在已有求解域内部节点之后如何连接形成满足 Delaunay 准则的网格

(1) 使已生成的网格满足 Delaunay 准则: 如图图 1.4 所示,对于三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$,如果将公共边 AC 翻转成公共边 BD 后两个三角形的最大最小角增大——即三角形网格质量有所改善,则将进行这一操作。这一过程称为 Delaunay 优化^[4]

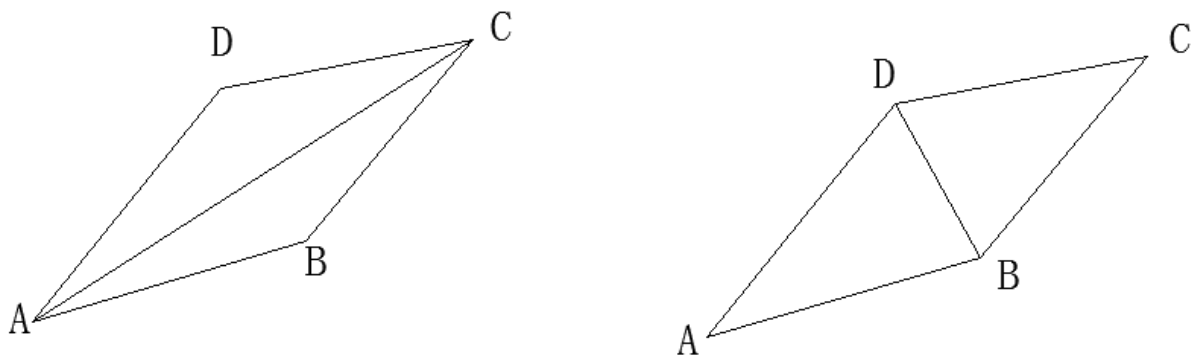


图 1.4 Delaunay 优化

(2) 已有求解域内部节点之后如何连接形成满足 Delaunay 准则的三角形:

首先,利用网格边界节点,生成初始化 Delaunay 三角形,然后向求解域内依据 Delaunay 准则逐个插入内部节点^[2]。

Delaunay 三角形化方法仅仅是在求解域内节点或者网格给定的情况下如何连接成三角形的方法,无法控制网格的规模。

1.2.3 布点方法

无论前沿推进还是 Delaunay 三角化方法,节点的布置都是至关重要的。布点方法主要分为几何布点法和物理布点法。

1.2.3.1 几何布点法^[1]

1.2.3.1.1 增量 Delaunay 三角化布点方法

在增量 Delaunay 三角化方法中,对存在的网格递增的插入点,对每个新插入的点,依据 Delaunay 准则从新连接生成网格。对新点的插入位置,有许多不同的方法。

陶文铨提出每次向无量纲半径最大的三角形外接圆圆心插入一个点。Rivara 等对于网格中不满足质量要求的单元,在其 LSPP 中最后一个单元的最长边的中心插入新(见图 1.5)。Borouchaki 等对每一个初始的点给定合理的局部尺寸 h ,对每一个内边,由它的两个端点的 h 值计算应在其上插入的点数和点位置,选择合适的点插入。

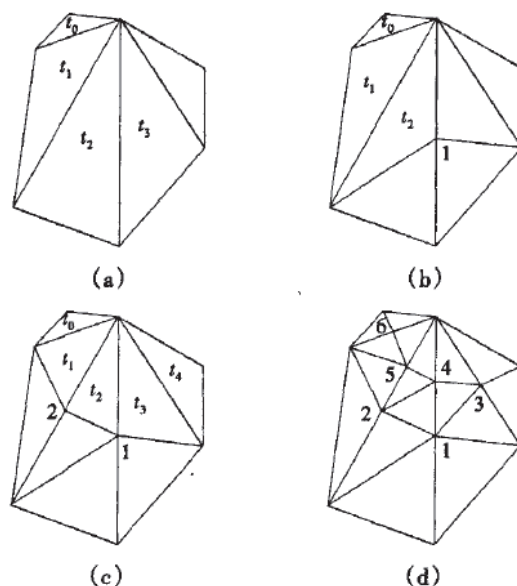


图 1.5 Backward Longest Side Bisection

1.2.3.1.2 法向偏移方法

利用法向偏移方法进行布点的基本思想是:先将区域边界离散成理想长度的线段,再沿边界的法向方向向里移动边界上生成的初始点列,得到新边界的位置,重复进行直到点在整个区域内布满(见图 1.6)。最后用 Delaunay 方法完成三角化。

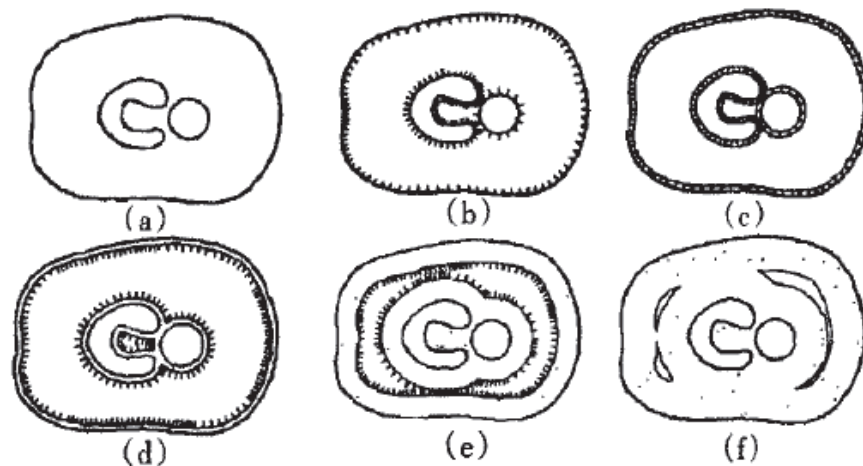


图 1.6 利用法向偏移方法布点

1.2.3.1.3 圆堆砌

Bern 等用元堆砌三角化 n 个顶点的多边形区域, 生成的网格中最大角小于 90° 。首先在区域内对其补充切的圆盘, 似的圆盘间的空隙至多被四个边包围。连接圆盘的圆心和切点, 将整个区域划分为简单的小多边形区域。在小多边形内和边界上增加 Steiner 点 (见图 1.7), 三角化每个小多边形。生成的网格点虽然最大角得到控制, 但是单元纵横比可能不好。

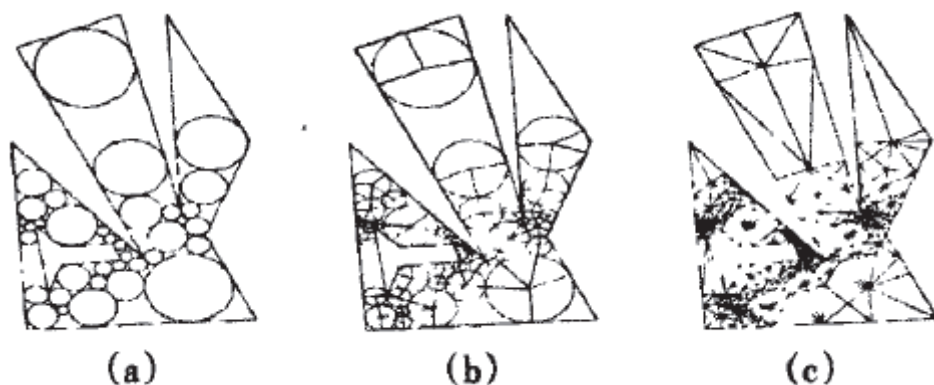


图 1.7 圆堆砌三角化

Miller 等支出在待剖分区域内, 根据给定的建个函数, 生成一个圆堆砌, 以圆心为网格点, 基于 Delaunay 准则生成三维协调的网格。进一步还可以得到一种基于函数的粗化方法: 对于初始网格, 计算其每个网格点的最近邻函数, 即其与最近网格点的距离; 一枚各网格点为圆心, 以 $0.5NN_p$ 为半径, 在区域内形成一个圆堆砌; 然后粗化圆半径, 圆之间出现重叠; 计算其最大独立集, 以圆心为网格点, 连接生成新的网格(见图图 1.8)。

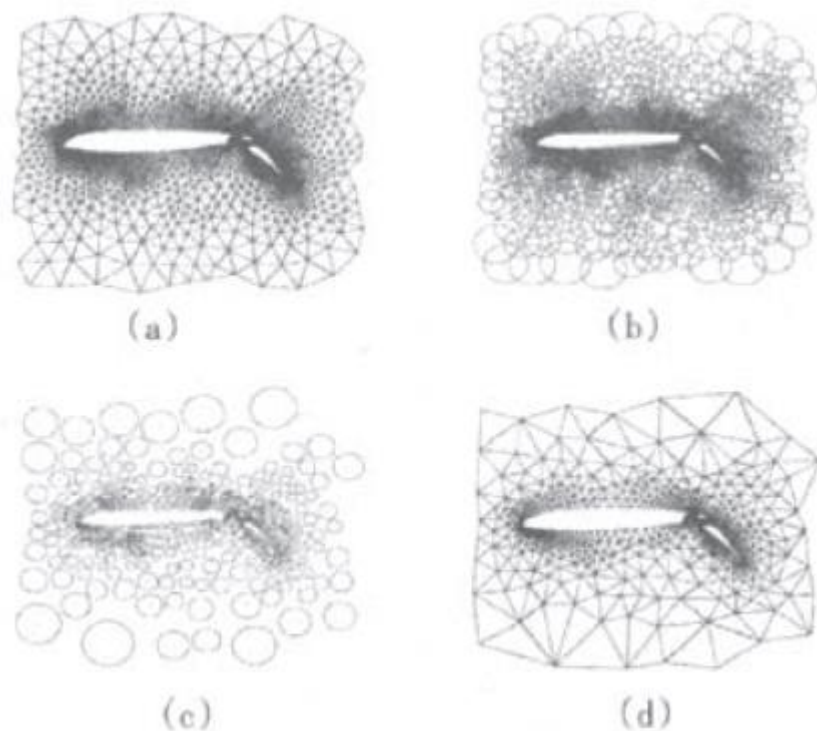


图 1.8 Function Based Coarsening

1.2.3.2 物理布点方法

1.2.3.2.1 基于物理的光滑

因为渐进网格与实际自然现象的相似性，发展了基于物理的光滑方法。Persson 等将网格看做一个桁架，先对区域做约束 Delaunay 三角剖分，在迭代光滑，优化，重剖分。在没一次迭代中，利用每条边上的线性力位移函数，移动点的位置，再用 Delaunay 三角化方法调整拓扑（见图 1.9）。在之前，Lohner 等将网格看做一个点之间的弹簧系统。

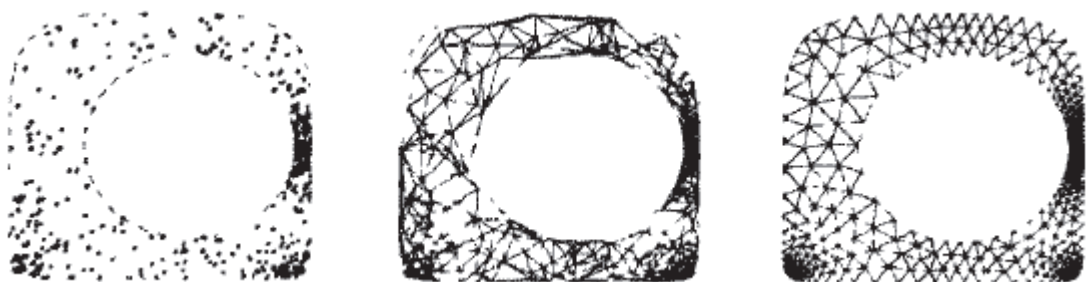


图 1.9 初始布点→三角化→力平衡

Bossen 等在每一次迭代中, 随机选择一个点, 根据其邻近点对他的引力/斥力:

$$F(d)=(1-d^4)*\exp(-d^4) \quad (1.1)$$

计算新的位置, 其中 d 为两个网格点间的距离, 点邻域被重新网格化, 必要时删除/插入点, 相应点邻域被重新网格化。不同于一般的光滑方法, 它可以通过点的删除, 插入操作控制区域内点的数量: 也可生成渐进的, 各向异性的三角形网格。

1.2.3.2.2 泡泡堆砌

受两个电荷之间的 Van der Waals 力随距离产生排斥和吸引作用的启发, 在区域内生成具有相互作用力的泡泡:

$$f(w) = \begin{cases} aw^3 + bw^2 + cw + d & (0 \leq w \leq 1.5) \\ 0 & (1.5 < w) \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 w 为当前距离和目标距离的比值。泡泡在此两两相互作用力的合力作用下遵守牛顿第二运动定律。达到力平衡状态时, 泡泡中心的点构成的点集, 即是最佳的点布置 (见图 1.10)。最后用 Delaunay 三角化方法生成最终网格。点的数量可在动态模拟过程中自适应的控制。

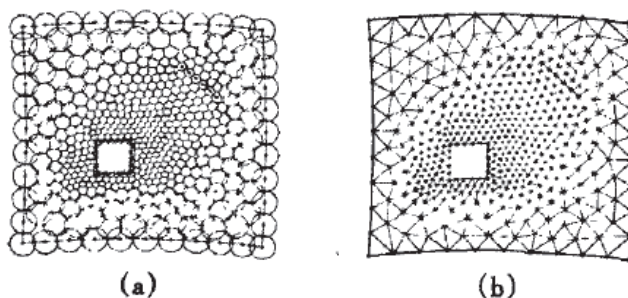


图 1.10 泡泡堆砌

当需要生成各向异性网格时, 用椭圆形泡泡代替圆形泡泡。该方法适用于二维平面, 参数曲面, 三维空间中的网格生成, 而且已被应用于微波问题, 大变形问题等的求解中, 其自适应方法也已得到研究。

1.3.2.2.2.3 MC mesh

Zhanghanzhou 提出, 所有粒子的每一种未知状态都对应于一个系统能量总值。当粒子的结构平衡时, 系统的总能量达到最小值。将粒子看做网格点, 总能量达到最小值时

的粒子结构即为最佳的点布置。所以使用 Metropolis Monte Carlo 方法进行统计模拟最小化系统势能，同时通过对系统能量的符号判断来控制粒子个数或者利用 Grand Canonical Monte Carlo 方法删除/插入/移除粒子直接到接近平衡或达到指定扫描次数。最后利用 Delaunay 网格化方法得到区域的网格划分。

能量函数：

$$\Phi(r) = 4\varepsilon((\sigma/r)^{12} - (\sigma/r)^6) \quad (1.3)$$

其中 σ 将决定平衡状态时粒子之间的距离， ε 将决定势能的负井深。

与泡泡方法相比，此方法引入 Monte Carlo 方法，以能量平衡代替力平衡，在点的密度控制上更简洁。因为同样是对整个区域的一个全局优化，与一般的 Delaunay 网格相比具有更好的质量（见图 1.11）。但作为一种统计模拟方法，它的不确定性是显的。

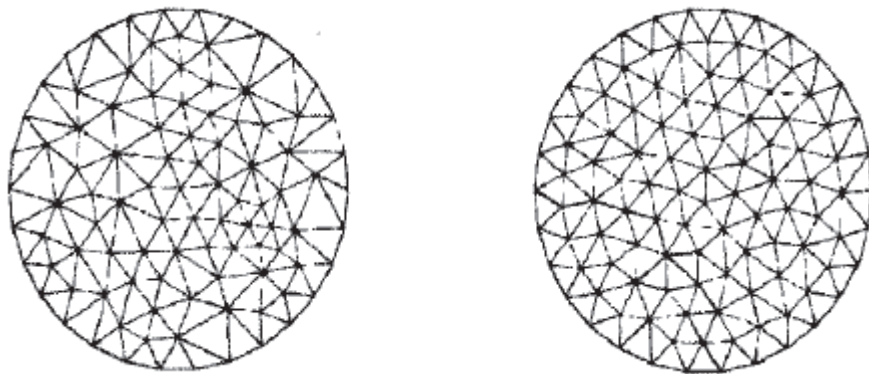


图 1.11 以最小角为优化准则的 Triangle 生成的网格和 MC mesh 生成的网格

1.2.3.3 布点方法的不足

几何布点法网络的规模均无法预先控制：增量 Delaunay 三角化布点方法中，插入节点何时停止的判据取决于网络的质量，而不是网络的规模，因此无法预先知道插入多少节点后网络质量能满足要求，法向偏移方法和圆堆砌方法无法预先得知布点的数量，同样无法控制网络规模。



物理布点法中基于物理的光滑以及泡泡堆砌法, 事先均未给定节点数目, 依靠力学上的平衡来实现节点数目的自适应调整, 这一过程同样无法控制, 因此, 无法实现对网格规模的预先控制。

MC mesh 虽然能预先规定节点数目来控制网格规模, 但由于该方法在生成边界网格点方面存在困难, 以及作为统计模拟方法的不确定性, 显然存在缺陷。

1.3 论文的研究内容

本文目标为生成均匀分布的网格单元, 研究如何在保证网格质量的前提下, 控制非结构网格规模。研究内容主要包括网格的生成, 网格的优化。

首先要解决的问题是如何将给定的网格规模转化为某种准则, 并选取网格生成方法, 将该准则应用到网格生成方法中, 生成给定规模的网格。然后, 针对生成网格单元存在的具体问题, 选取适当优化方法, 保证网格质量的要求。

2. 网格生成

以图 2.1 所示简单的双连通域为例, 说明网格生成的主要步骤:

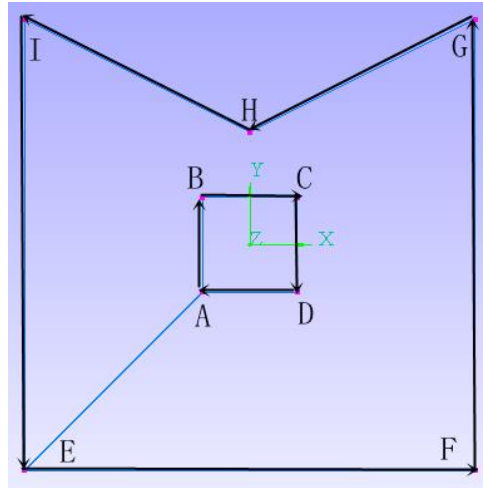


图 2.1 双连通域

四边形 ABCD 和多边形 EFGHI 所包围的区域为求解域, 图中有向线段的左侧即为求解域, 给定网格规模为 200。

2.1 理想单元边长 b 及面积 s

首先根据给定网格规模 N 以及求解域的面积 S , 求得理想单元---等边三角形边长 b 和面积 s :

$$s = S / N \quad (2.1)$$

$$b = \sqrt{4s / \sqrt{3}} \quad (2.2)$$

对于图 2.1 中的算例:

规定该求解域生成的单元数 $N=200$

该求解域面积 $S=332.36$

理想单元面积 $s=1.66$

理想单元边长 $b=1.96$

2.2 网格的生成

网格生成主要分为两个步骤：生成初始网格^[5]，向求解域内自动加点

2.2.1 生成初始网格

1. 以区域内的初始边界节点为基础，生成初始化 Delaunay 三角形；

这一步主要是为了恢复给定区域的边界，同时形成粗糙的初始化 Delaunay 三角形后，相当于将之前的多连通域分解成了一个单连通域，这样在以后的插入节点时只需将节点布置在已有三角形内部或者边界处即可，无需额外判断节点是否位于求解域内。实现将一个复杂的多连通域问题简化为多个单连通域问题。

具体步骤如下：

- (1) 包围整个求解域，作一矩形，连接矩形对角线，生成两个三角形（见图 2.2）

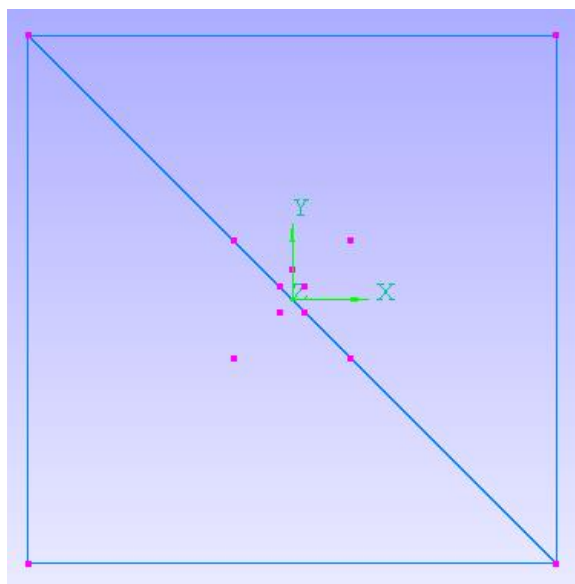


图 2.2 包为求解域的两个辅助三角形

- (2) 使用 Delaunay 三角化方法依次插入求解域的边界节点, 结果如图 2.3 所示

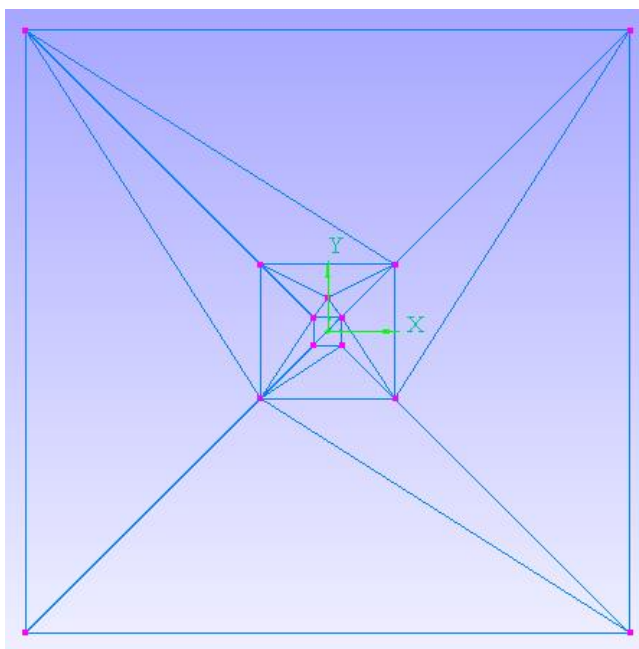


图 2.3 插入边界节点

- (3) 删除求解域外的三角形

按照图 2.1 中标示的方向, 删除位于边界有向线段左侧的三角形, 即可得到初始化 Delaunay 三角形

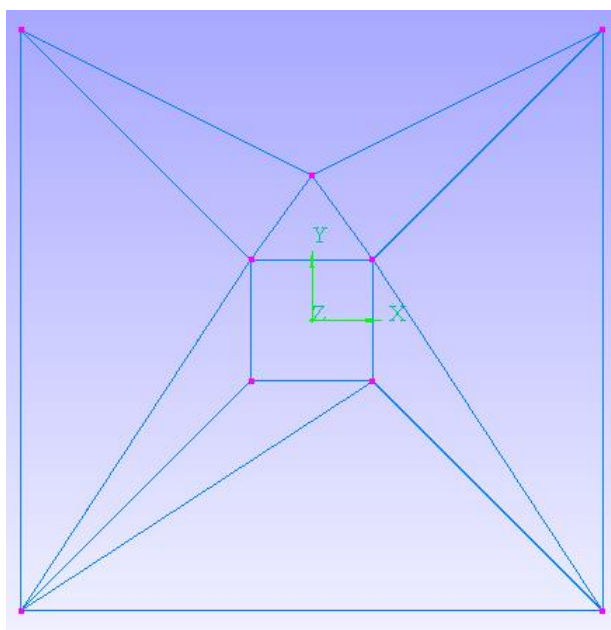


图 2.4 初始化 Delaunay 三角形

2 利用求得的理想单元边长 b , 对边界进行等分, 使每一小段长度 $\approx b$ (见图 2.5)。

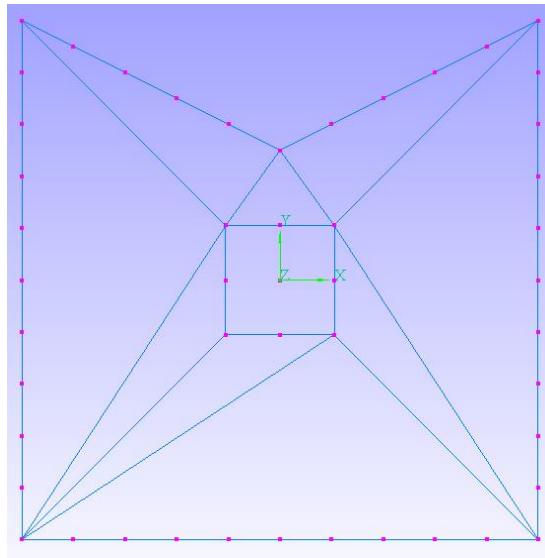


图 2.5 划分边界节点

.3.在初始化 Delaunay 三角形内部, 利用步骤 2 生成的边界节点, 生成初始网格 (见图 2.6), 并进行 Delaunay 优化 (见图 2.7)。

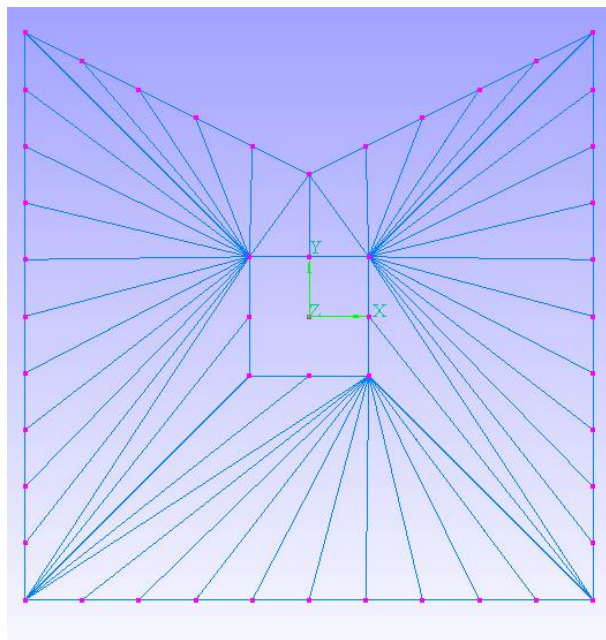


图 2.6 初始网格

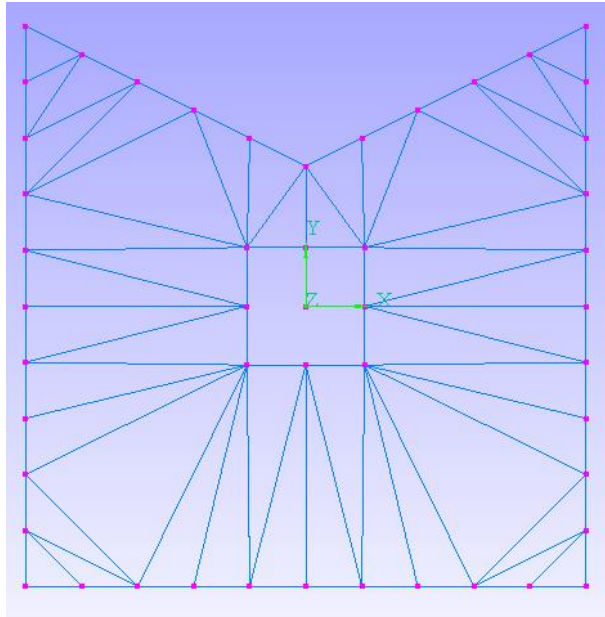


图 2.7 Delaunay 三角化后的初始网格

2.2.2 向求解域内自动加点

在已有的初始网格基础上,向求解域内自动加点是决定网格规模最终能否同预先给定的规模相一致的关键技术。只有每次插点后生成的单元接近理想单元或者面积同理想单元接近,最终网格的规模才能得到控制。本文提出,将插入节点分为两个阶段,分别采用两个布点方式。即生成理想单元与生成接近理想单元两个阶段。下面单独介绍这两个布点方式。

1 生成理想单元阶段

以三角形边长为 b 的一边作为前沿,如果能在三角形内部插入节点后连接该节点以及三角形三个顶点生成一个理想单元,则执行该操作。需要注意的是,每插入一批节后都要对已有网格进行 Delaunay 三角化优化。如图 2.8 所示,BC 为前沿,D 为新插入的节点,△BCD 为理想单元。DORNIER A-5 AIRFOIL 算例如图 2.9 所示。

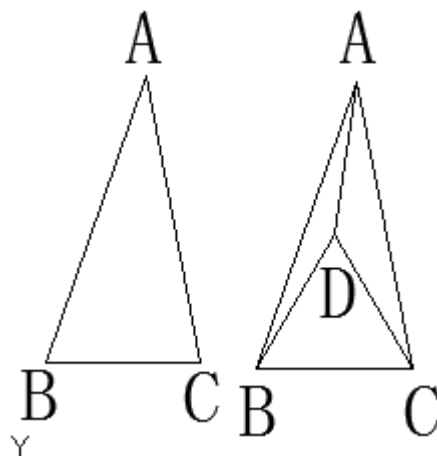


图 2.8 生成理想单元的插点方式

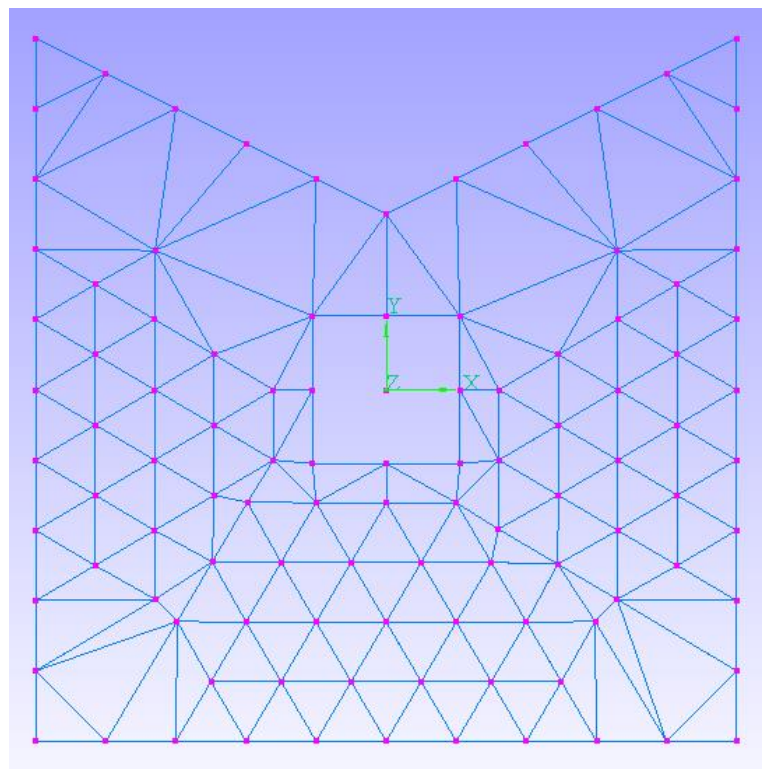


图 2.9 理想单元

2 生成接近理想单元阶段

经过第一阶段，区域内仍然存在一部分非理想单元，为了处理这些单元，将其按照面积分为两类，面积介于 $1.5s$ (s 为理想单元面积) 和 $3s$ 之间的单元，以及面积大于 $3s$ 的单元

- (1) 对于第一类单元，在其一边适当位置上插入一个节点将三角形

一分为二，这样，新生成的单元面积大致接近于理想单元。

具体实施时，选择边长接近于 b 的一边，找到同它夹角近于 60° 的另一条边，在另一条边上从该角的顶点出发，在距离 b 处插入节点，连接该点及其对应的三角形顶点，生成两个新三角形；如图 2.10 中 BC 及 BC 长度为 b 。

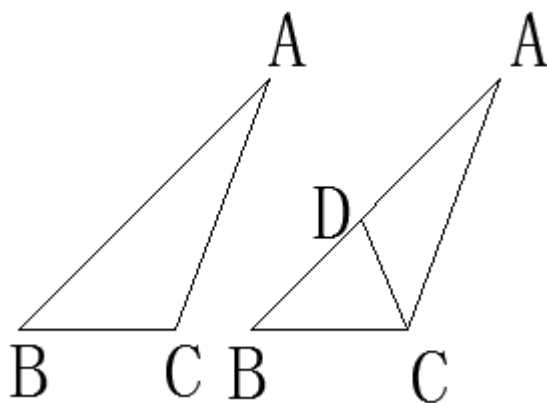


图 2.10 生成非理想单元 a

(2) 对于第二类单元，直接在三角形中心处插入节点，将三角形一分为三。基于三角形重心将面积三等分的原理，当原三角形面积接近与 $3s$ 时，生成的三个单元面积都接近于 s ，实现了对单元的面积控制。当原三角形面积远大于 $3s$ 时（如 $9s$ ），通过这种多次分割，同样能使最终单元面积接近于 s 。如图 2.11 D 为新插入的节点。

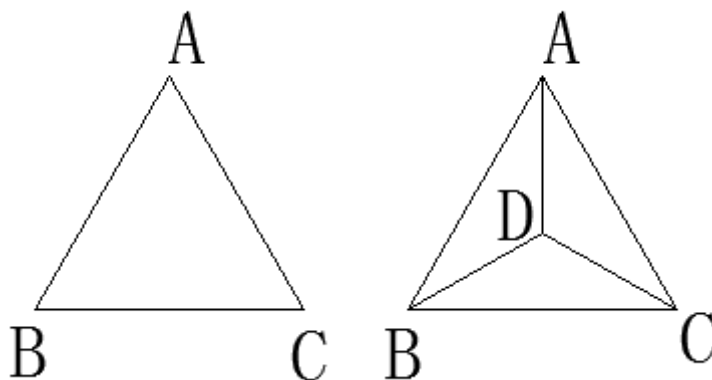


图 2.11 生成非理想单元 b

反复执行这两种插入节点方式，同时依据 Delaunay 准则对三角形连接方式进行优化，直到最终区域内所有三角形面积均小于 $1.5s$ 。

通过分阶段对区域内加点，实现了通过对生成三角形面积的控制来控制网格规模的理念。

对于图 2.1 算例，最终生成的网格如下图 2.12：

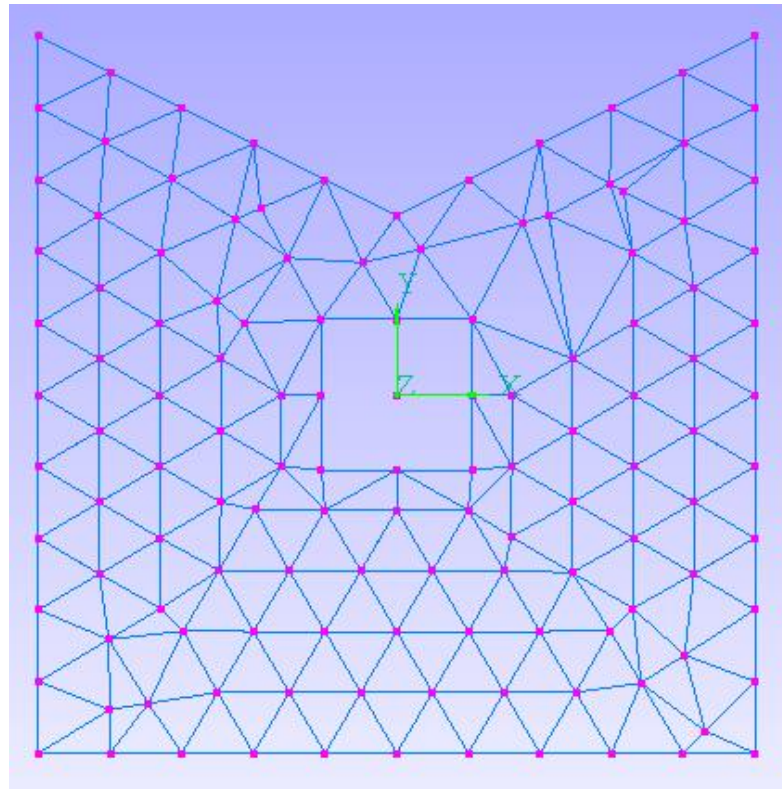


图 2.12 优化前的网格

3.网格优化

经过上述步骤生成的网格,存在一些质量较差的单元:如边长过小的单元,以及单元大小过渡不光滑的网格,针对这两种情况,分别采用删除边长过小的单元以及 Laplace 光顺化方法先后进行优化。

(1) 删除边长远小于 b 的三角形(如图 3.1 所示)^[2]

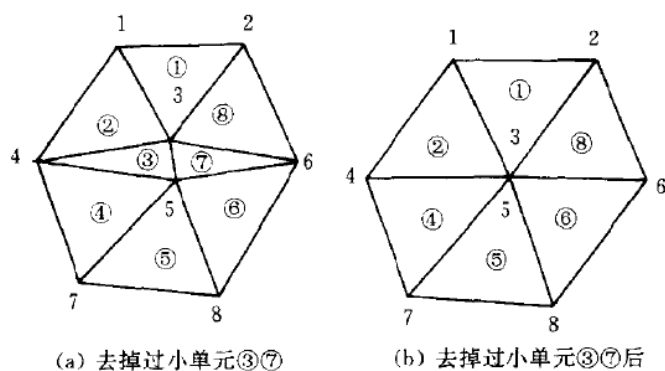


图 3.1 删除边长远小于 b 的单元

(2) Laplace 优化:移动内部网格点的位置,使他处于有共享此点的三角形所组成的多边形的中心^[2]。

$$(x_i, y_i) = (x_i, y_i) + w / n * \sum_{k=1}^n ((x_k, y_k) - (x_i, y_i)) \quad (3.1)$$

式中, (x_i, y_i) 为被移动的网格点的坐标, (x_i, y_i) 为共享 (x_i, y_i) 的点的的所有三角形单元的顶点坐标, n 为共享该店的三角形定点个数, w 为松弛因子。

对于图 2.12, 优化后的网格见图 3.2:

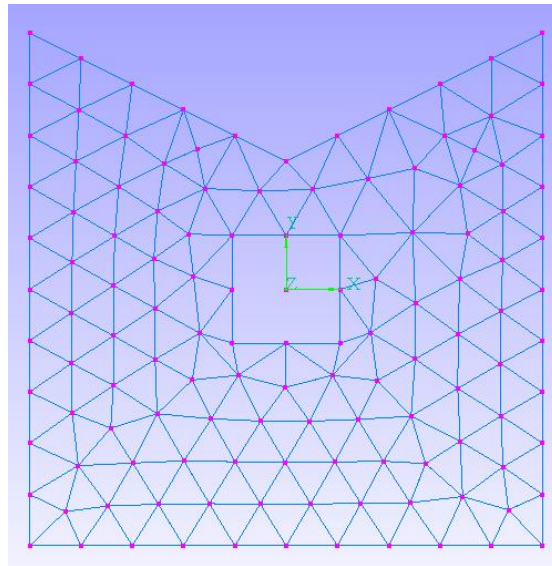


图 3.2 优化后的网格

至此，在保证网格质量的前提下，生成规模可控的非结构网格已经基本实现。在下一章，将进行结果分析。



4.结果分析

将预先给定的网格规模 N 同最终生成的网格规模 N' 差的绝对值在预先给定网格规模 N 中所占的比中定义为网格规模误差 a 。 a 值越小, 最终生成的网格规模同预先给定的规模越接近, 即本文中的方法对网格规模的控制效果越好。计算公式如下:

$$a = |N' - N| / N \quad (4.1)$$

鉴于本文目标是生成大小相同的正三角形单元, 将网格质量参数规定为三角形单元短边与长边之比 d 。 d 越接近于 1, 单元越接近于正三角形, 质量越好。文献[2]给出 d 的参考值为 0.605。本文定义了最差单元质量和平均网格质量, 其中, 最差单元质量指的是所有单元中 d 的最小值 d_{\min} , 平均网格质量指的是所有单元 d 的平均值 d_{aver} 。这两个参数分别从局部与整体两个方面描述了网格质量。

下面将分析影响网格规模误差和网格质量的两个因素: 不同的预先给定网格规模; 求解域边界复杂性。

4.1 不同的预先给定网格规模;

以简化的 DORNIER A-5 AIRFOIL 求解域为例 (见图 4.1), 改变预先给定的网格规模, 分析其对最终网格规模的误差和网格质量的影响。如图所示, 矩形边界作为远场, 内部封闭曲线为翼型边界, 连接翼型和远场的连线的作用是将这个多连通域分割成单连通域。

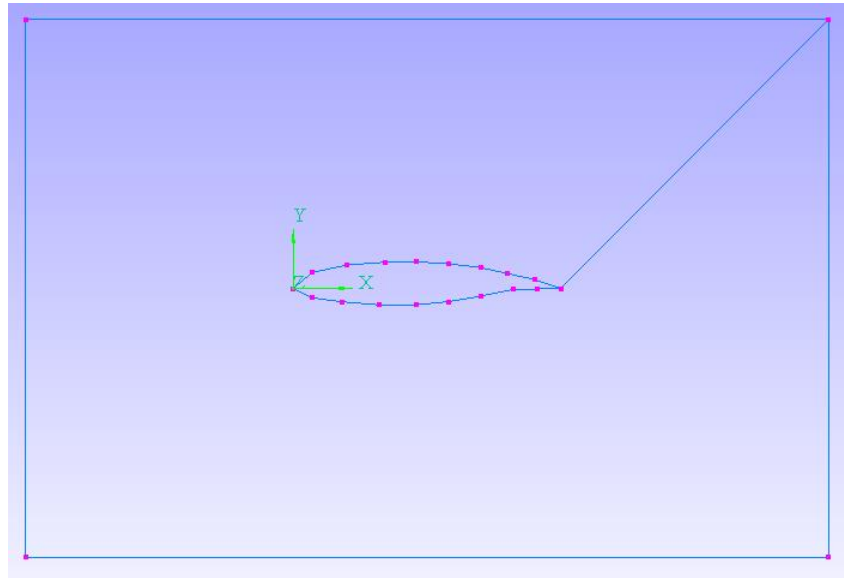


图 4.1 简化的 DORNIER A-5 AIRFOIL 求解域

改变预先给定的网格规模(100 至 5000), 最终生成的网格如下(图 4.2—图 4.11):

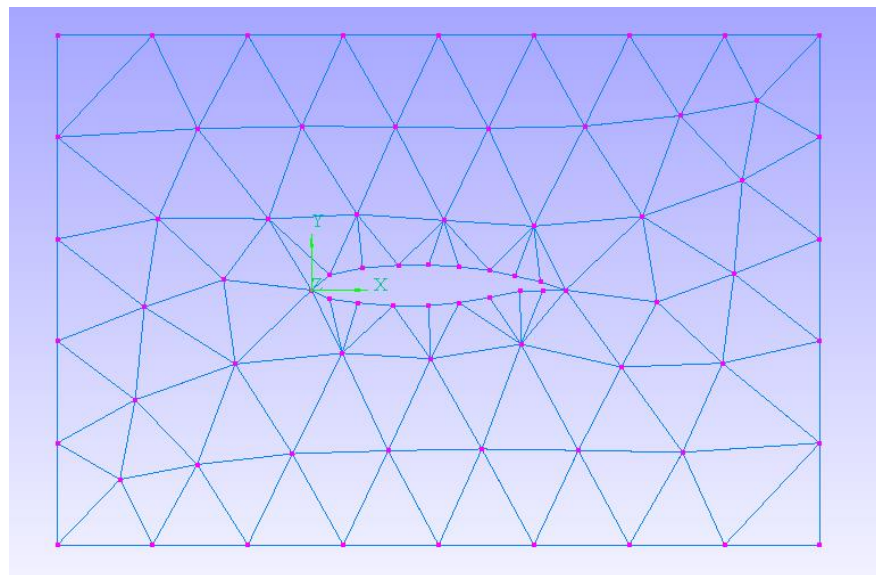


图 4.2 预先给定网格规模为 100

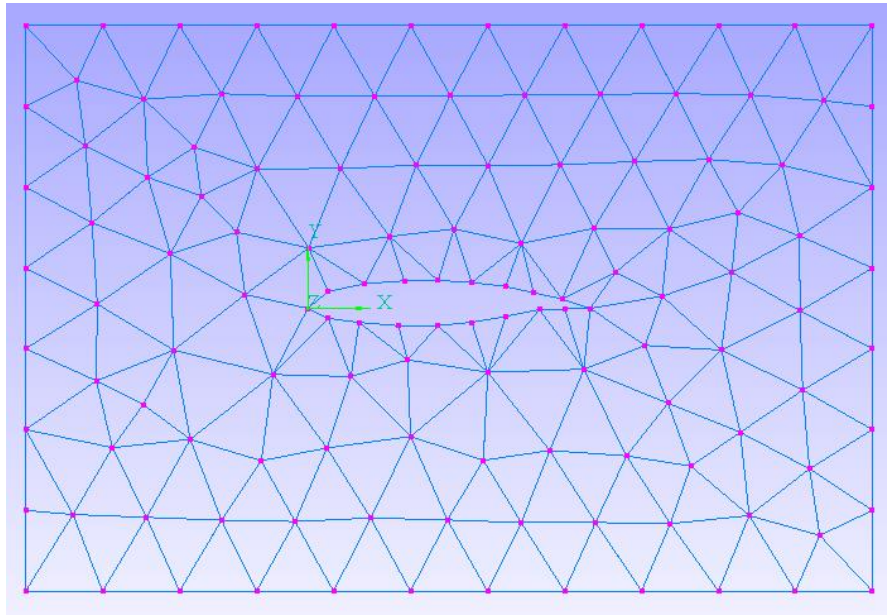


图 4.3 预先给定规模 200

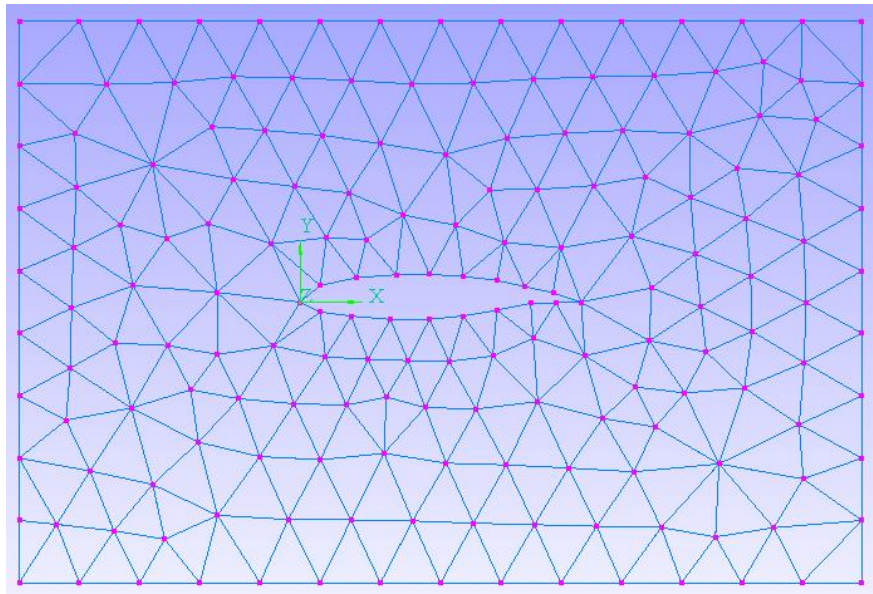


图 4.4 预先给定规模 300

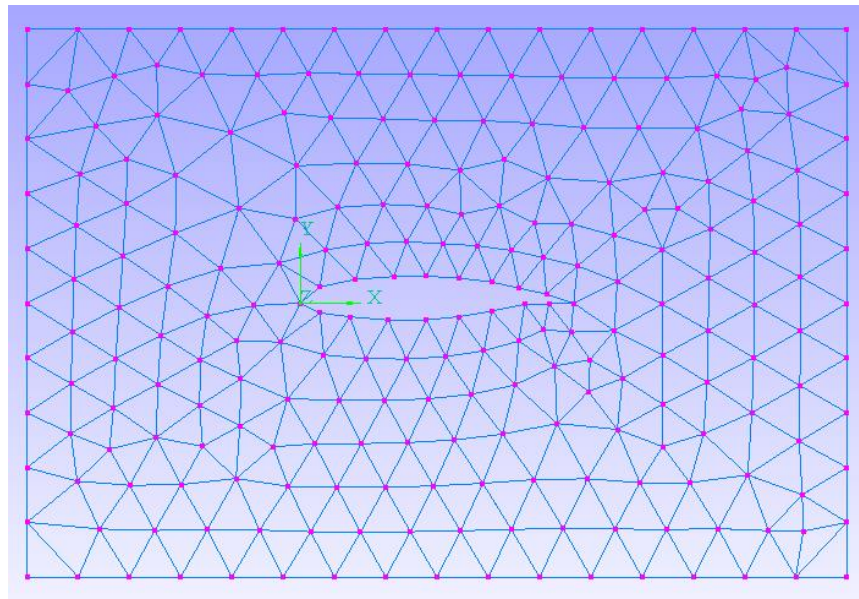


图 4.5 预先给定规模 400

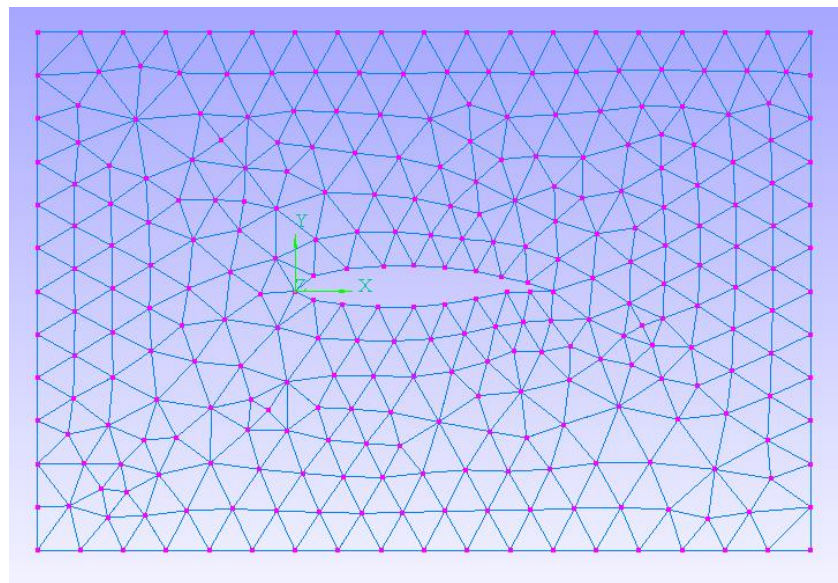


图 4.6 预先给定网格规模 500

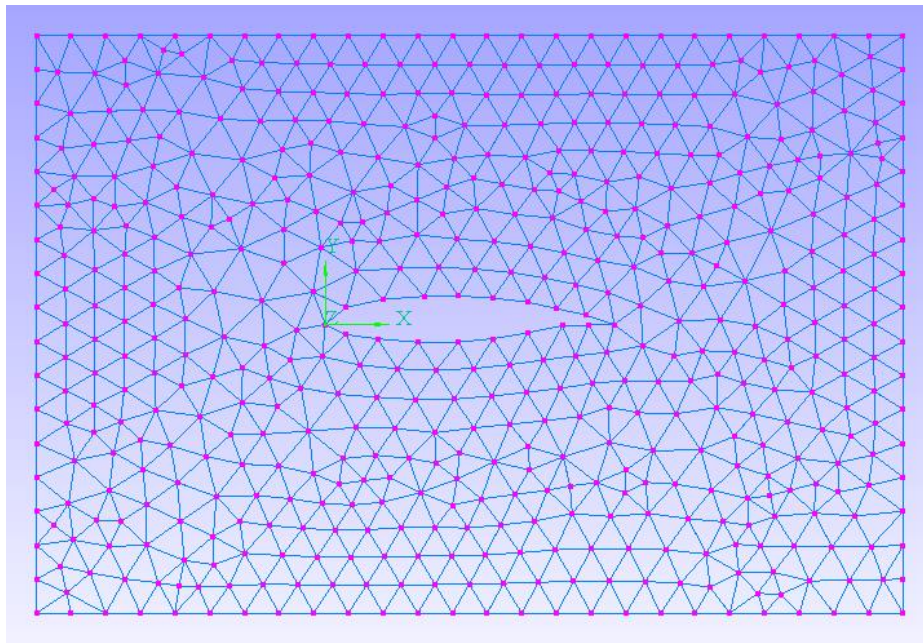


图 4.7 预先给定网格规模为 1000

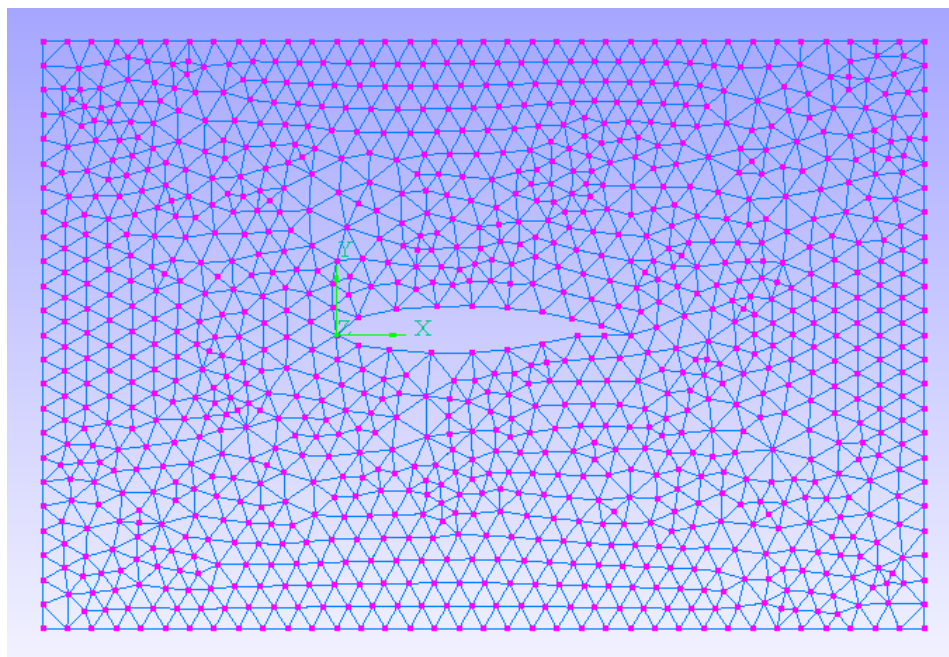


图 4.8 预先给定规模为 2000

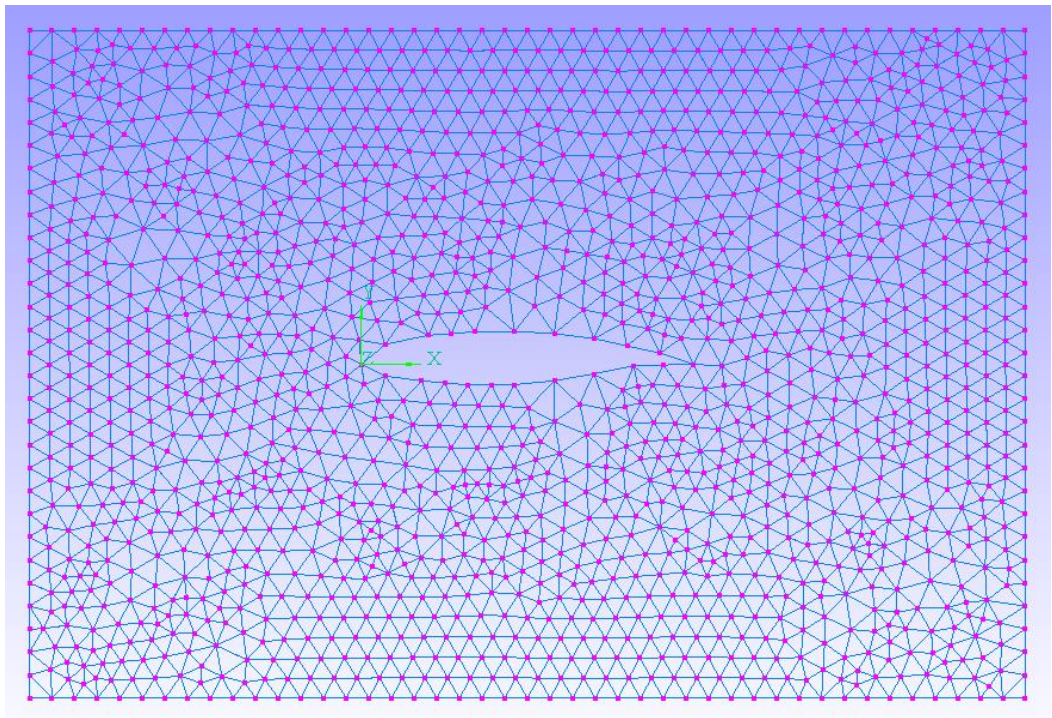


图 4.9 预先给定规模为 3000

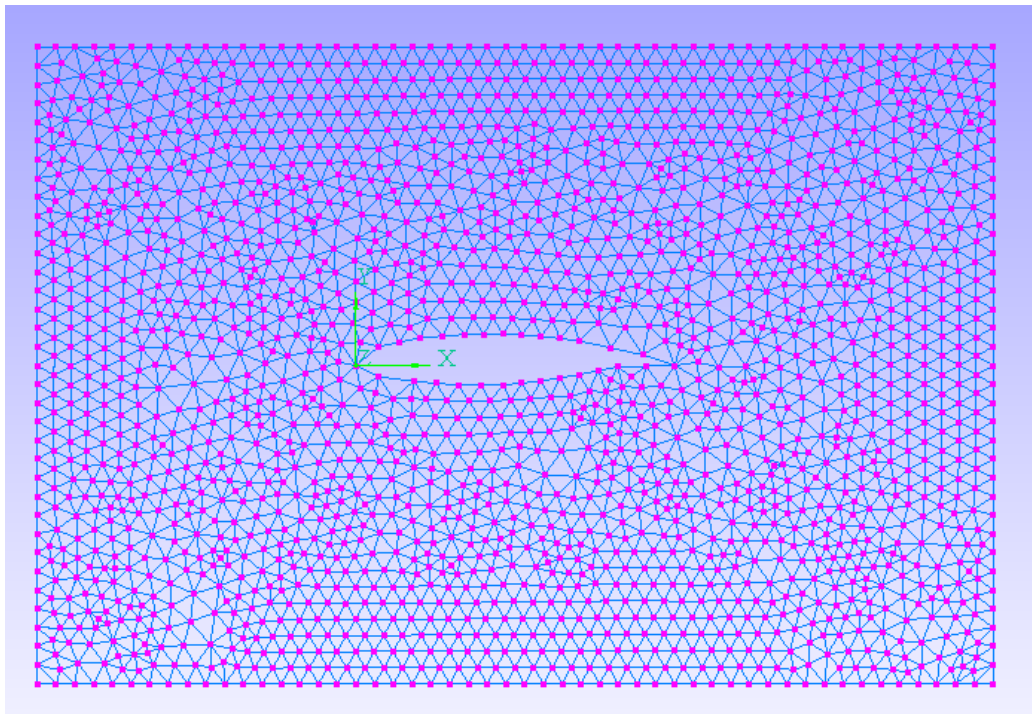


图 4.10 预先给定规模为 4000

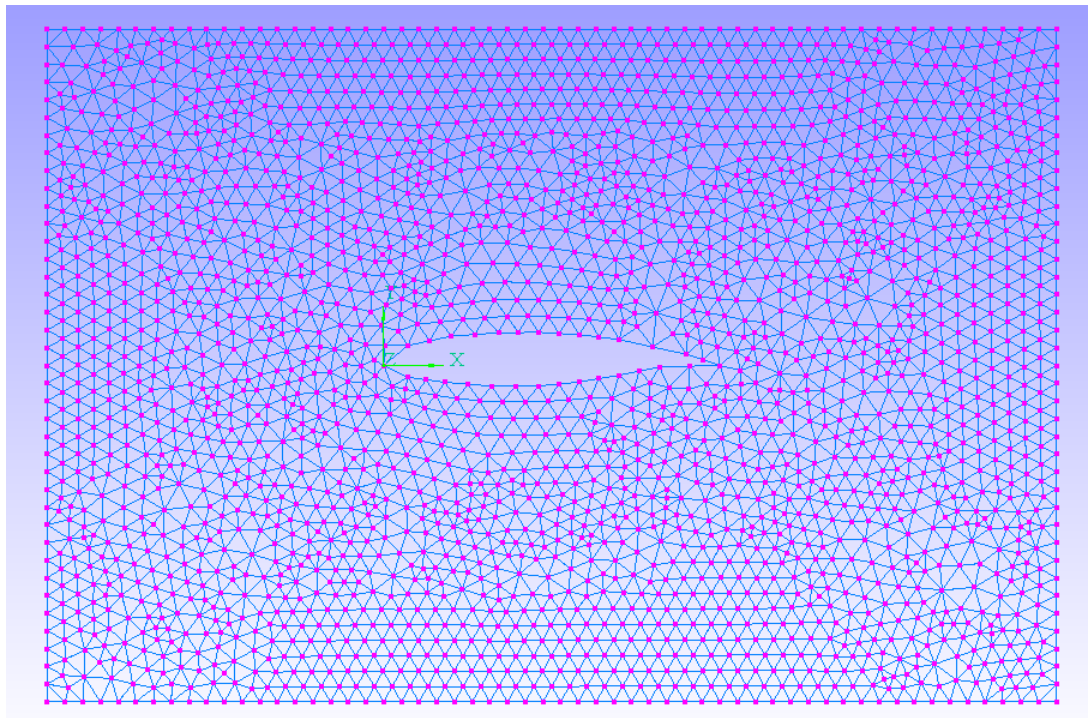


图 4.11 预先给定网格规模为 5000



生成的网格参数如下所示（见表 4.1）：

预先设定 网格规模	100	200	300	400	500	1000	2000	3000	4000	5000
最终生成 网格规模	108	202	296	408	510	976	1670	2901	3898	4826
网格规模 误差	0.08	0.01	0.0075	0.02	0.02	0.024	0.0165	0.033	0.025	0.035
最小的最 短边/最长 边	0.286	0.29	0.389	0.44	0.456	0.47	0.488	0.5	0.47	0.482
平均最短 边/最长边	0.773	0.82	0.88	0.88	0.857	0.858	0.85	0.86	0.86	0.86
理想单元 边长	0.369	0.26	0.213	0.184	0.165	0.117	0.082	0.067	0.067	0.0522

表 4.1 不同给定规模下的网格参数

4.1.1 网格规模误差

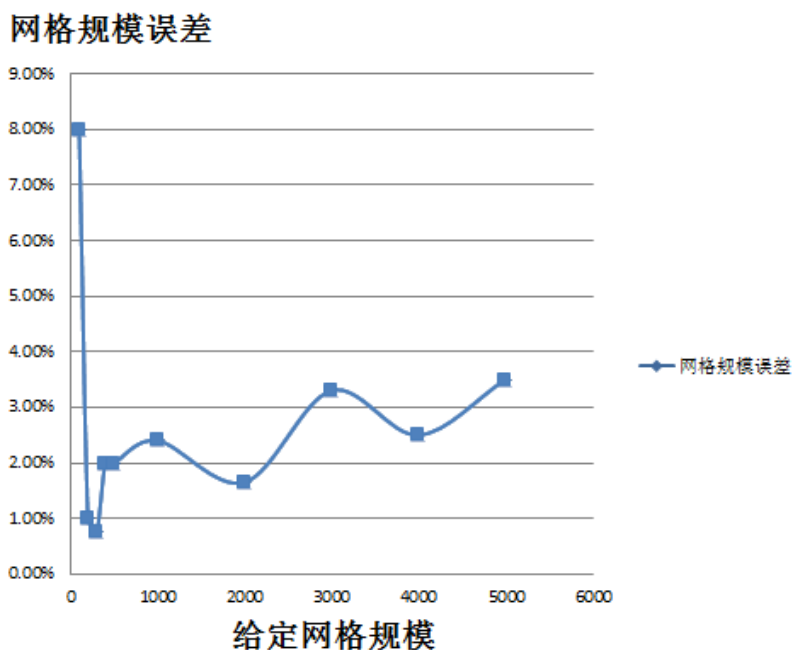


图 4.12 网格规模误差

如上图 4.12 所示, 相同的求解域内, 随着预先给定规模的增大, 网格规模控制误差从 8% 迅速下跌至 1%, 而后稳定在 3%-4%, 说明本算法在控制网格规模方面效果很好。之所以在预先给定网格规模为 100 时网格规模误差较大, 是因为此时对应的理想单元边长远大于翼型边界两个相邻节点之间的距离, 故翼型表面网格偏离理想单元较大, 网格规模误差较大。随着预先给定的网格规模的增大, 理想单元边长逐渐减小, 同翼型边界两相邻节点之间的距离 n ($n=1,2,3,\dots$) 等分后相近, 生成的网格单元同理想单元面积较接近, 因此网格规模误差较小。

对网格规模的控制得益于本文的布点方式。在布点过程中始终保证生成的单元面积接近于理想单元, 主要体现在两个阶段: 第一阶段只生成理想单元, 第二阶段将非理想单元按照面积分类处理, 生成接近理想的单元: 面积在 1.5 至 3 倍理想单元的单元一分为二, 而面积大于三倍理想单元的单元分为三份, 生成三个面积相等的单元。在第二阶段, 反复插入节点指导区域内所有三角形面积都小于 1.5 倍的理想单元。尽管该方法对于非理想单元的面积控制比较粗糙, 网格规模误差无法收敛于 0, 但依然能实现对网格规模的控制。

4.1.2 网格质量

先讨论最差单元质量，再讨论平均网格质量。

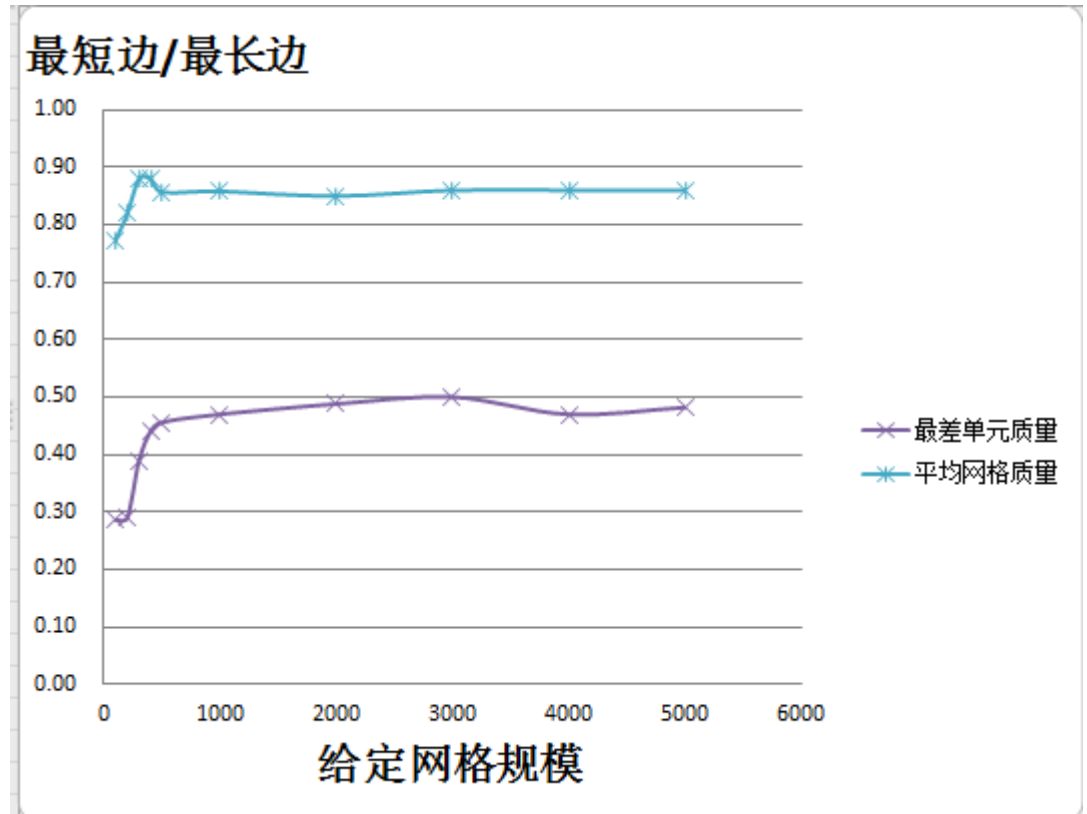


图 4.13 不同给定规模下的网格质量

对于最差单元质量，随着预先给定网格规模的增大， d_{\min} 从 0.3 迅速增大，而后稳定在 0.5 附近。显然，生成的网格中存在较差的单元，同网格规模误差相似，边界处网格节点之间的距离同 b 的差距会造成网格中存在较差单元，见图 4.2。

对于平均网格质量，随着预先给定的网格规模的增大， d_{aver} 从 0.77 逐渐增加，最终稳定在 0.86 附近，平均网格质量较好。

4.2 不规则边界

改变内外边界的凹凸情况，如求解域 a,b,c,d，预先给定的网格规模均为 400。生成的网格如图所示：

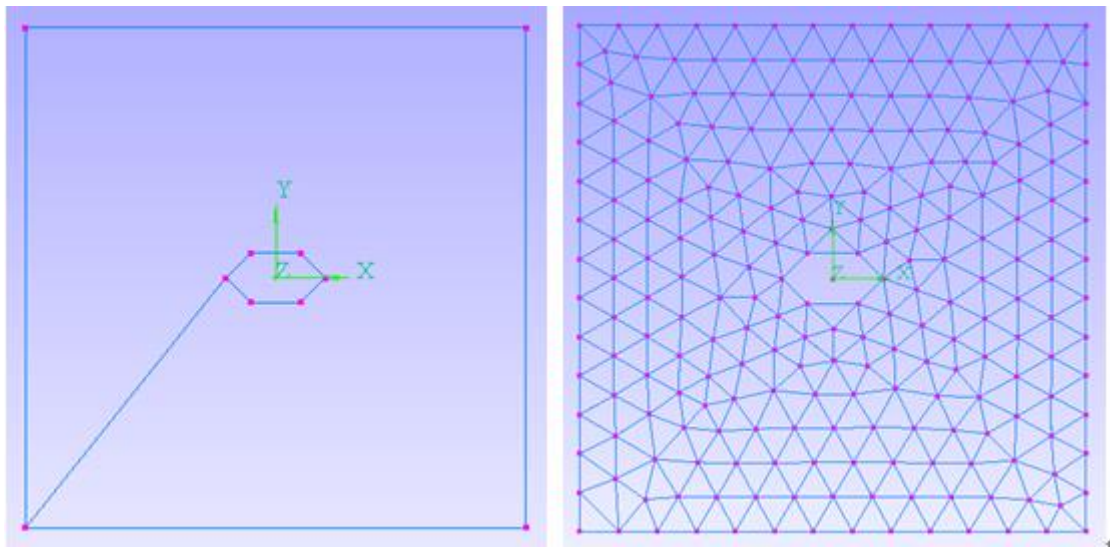


图 4.14 求解域 a 及网格

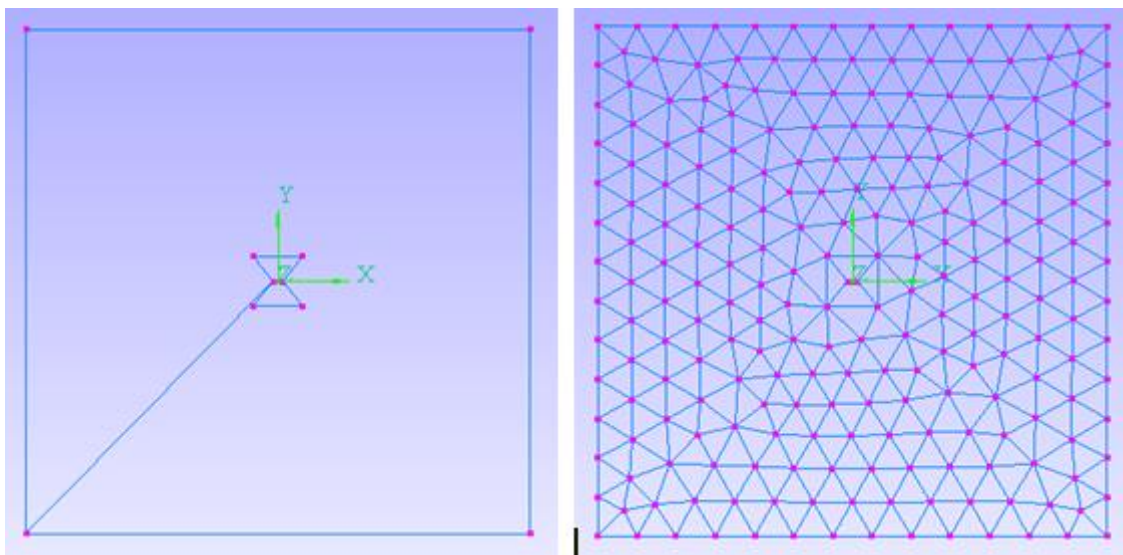


图 4.15 求解域 b 及网格

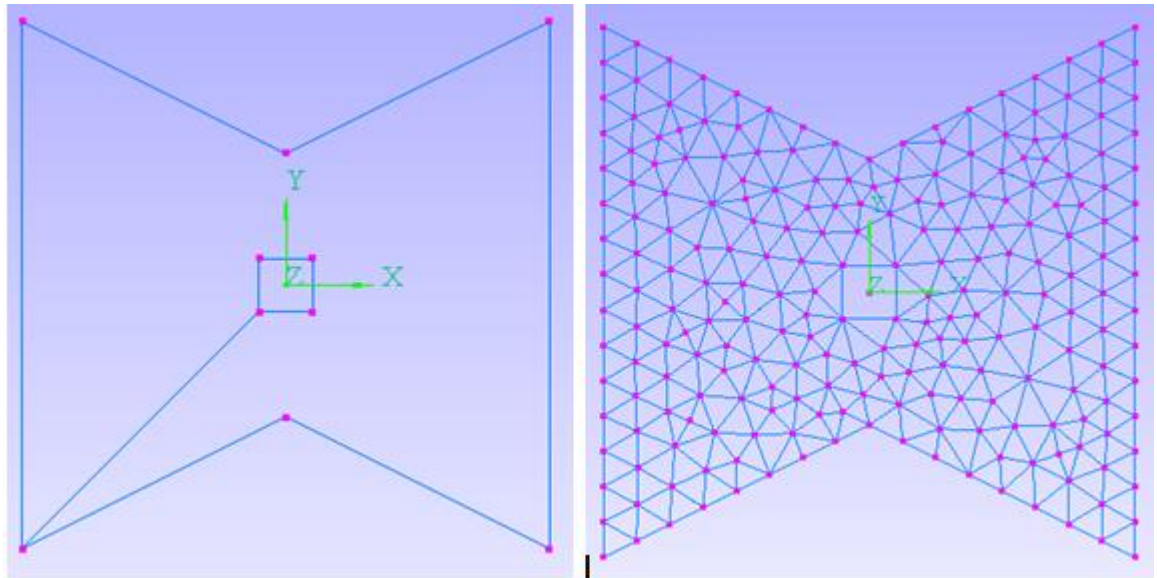


图 4.16 求解域 c 及网格

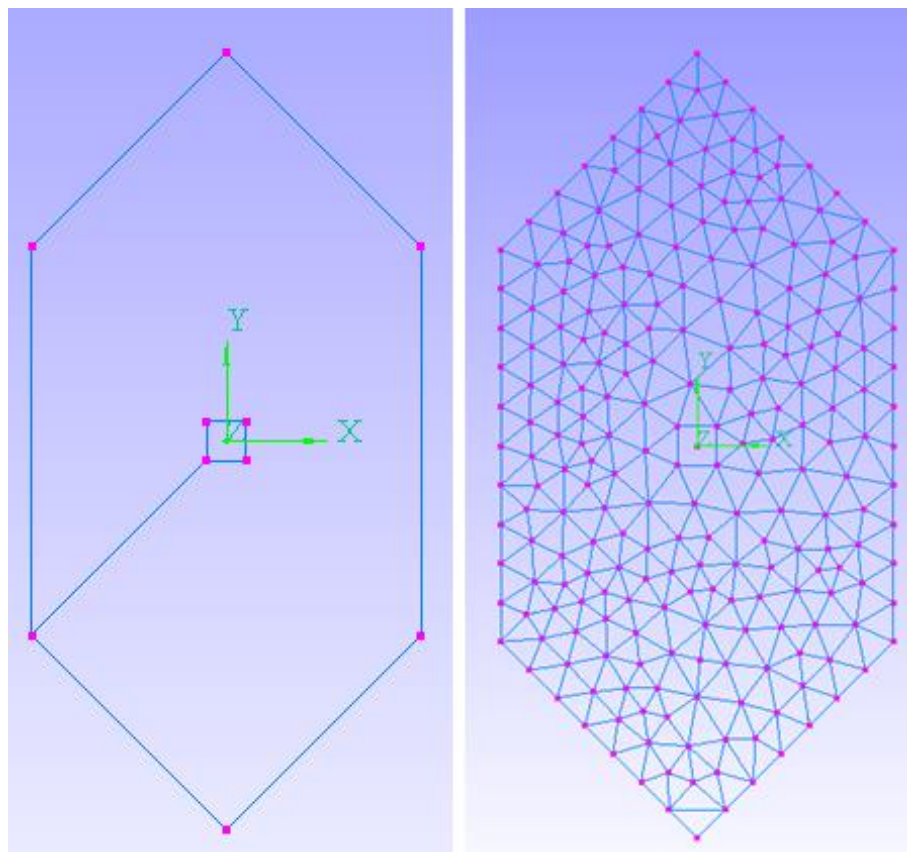


图 4.17 求解域 d 及网格



求解域及相应网格参数:

求解域	a	b	c	d
求解域面积	394	397.6	296	596
预先设定网格规模	400	400	400	400
最终生成网格规模	404	406	390	416
网格规模误差	0.01	0.015	0.025	0.04
理想单元边长	1.5	1.5	1.3	1.86
最小的最短边/最长边 d_{\min}	0.48	0.64	0.4	0.52
平均最短边/最长边 d_{aver}	0.91	0.92	0.83	0.81

表 4.2 不同求解域及网格参数

由此可见, 对于不同的复杂边界的求解域, 此方法在控制网格规模方面做得很好, 而网格中虽然存在少量较差单元, 但平均网格质量较好。故该方法对于含有复杂边界的求解域同样适用。



5. 结论及展望

5.1 结论

本方法有许多优势，如下所述：

(1) 网格规模控制得很好。主要得益于插入节点过程中保证了新生成的单元面积同理想单元面积接近，这样，最终网格单元的平均面积同预先给定值相近，故最终单元数量同预先规定的值也相近，网格规模误差较小。

(2) 网格中存在少量质量较差的单元，但平均网格质量较好。

同时，本方法上存在一些不足，如下所述：

(1) 本方法只能生成大小近似相同的网格单元，但实际工程应用中，考虑到为提高计算精度，求解域相应位置应进行网格加密。故本方法同实际工程应用还存在一定距离。

(2) 求解域初始边界节点之间的距离 L 同计算求得理想单元边长 b 比值对最终生成的网格质量影响很大。如果 L/b 远小于 1，则该处附近网格质量较差。见图 4.2 翼型表面的网格。

(3) 本方法能处理单连通域和双连通域，但对于其余的多连通域的网格划分就无能为力了，需要对算法进行额外处理。

5.2 展望

本文通过在求解域内生成大小近似相同的网格单元，证实了通过控制单元面积分布律来实现在保证网格质量的前提下，控制网格规模的理念。为了生成可用于数值计算的网格，还需要按照如下思路进行调整：

根据实际的物理求解域特征以及给定的网格规模，求得求解域内单元面积分布律。引入结构化背景网格^[6]，通过单元面积分布律求得节点特征参数，然后再前沿推进过程中，网格间距从存储在背景网格中的当地节点特征参数获得，这样就能保证生成的单元符合面积分布律，辅助以适当的优化，同样能保证网格质量和规模。



致 谢

本次毕业设计已经结束，在不长的课题进程中，我得到了太多的帮助和关心。本篇论文完全的凝聚着帮助过我的老师和同学的心血和智慧，我在此对曾经帮助指导过我的老师，同学表示由衷的感谢。

感谢岳明老师在毕业设计期间给了我悉心的指导和耐心的讲解。老师对于工作的一丝不苟，对于学术严肃认真，对于学生平易近人的精神和作风给了我很大的触动，严谨务实的治学态度和诲人不倦的精神更是让我发自内心的钦佩。在他们身上我看到了当代科学工作者和当代教育者真正的理念和精神。

另外，特别感谢胡文通同学在整个毕业设计编程过程中对我的指导帮助，他的缜密的思维、丰富的创造力和扎实的学识给我带来的益处贯穿了我整个的毕业设计编程过程，也让我从他身上学到了很多自己欠缺和亟需充实的程序方面的东西，在毕设过程中，帮助我解决了程序中的很多问题，以及如何调试程序等等，对于今后的学习研究工作，有很大的帮助。

本次毕业设计我受益匪浅，学会了很多，理解了很多，再次对以上诸位深表感谢。



参考文献

- [1]聂玉峰, and 刘莹. "非结构网格布点方法研究进展." *计算机工程与应用* 44, no. 32 (2008): 35-40.
- [2]陶文铨. "近代计算传热学进展."
- [3]Zhang, Hanzhou, and Andrei V. Smirnov. "Node placement for triangular mesh generation by Monte Carlo simulation." *International Journal for numerical methods in engineering* 64, no. 7 (2005): 973-989.
- [4]周培德. *计算几何: 算法分析与设计*. 清华大学出版社, 2000.
- [5]陈炎, 曹树良, 梁开洪, and 祝宝山. "结合前沿推进的 Delaunay 三角化网格生成及应用." *计算物理* 26, no. 4 (2009): 527-533.
- [6]Pirzadeh, S. "Unstructured grid generation by advancing front method using structured background grids." In *Thirteenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, pp. 285-289. Springer Berlin Heidelberg, 1993.