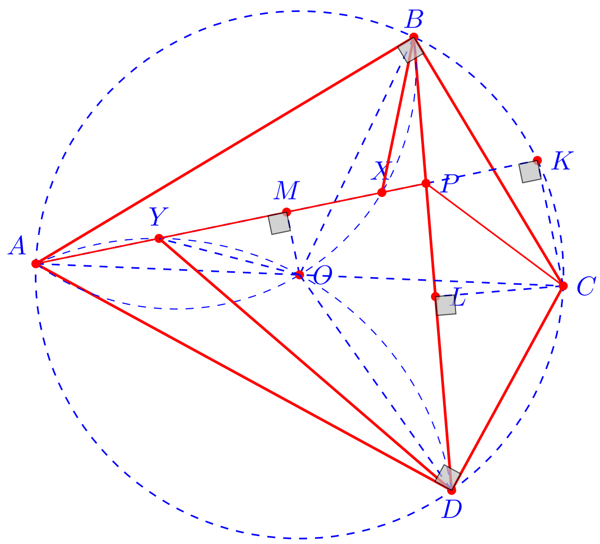
2022 年全国中学生数学奥林匹克竞赛(预赛)
暨2022年全国高中数学联合竞赛
加试(A卷)参考答案

2022-10

一．(本题满分 40 分) 如图, 在凸四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, 对角线 BD 上一点 P 满足 $\angle APB = 2\angle CPD$, 线段 AP 上两点 X, Y 满足 $\angle AXB = 2\angle ADB$, $\angle AYD = 2\angle ABD$. 证明: $BD = 2XY$.



证明: 注意 $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, 取 AC 的中点 O, 则 O 为凸四边形 $ABCD$ 的外心. 显然 P, B 在 AC 的同侧, 否则 $\angle APB \le \angle CPD < 2\angle CPD$, 不合题意.

根据条件, 可知

$$\angle AXB = 2\angle ADB = \angle AOB, \quad \angle AYD = 2\angle ABD = \angle AOD,$$

分别得到 A, O, X, B 四点共圆, A, Y, O, D 四点共圆.

因此 $\angle OXA = \angle OBA = \angle CAB = \angle CDB$, $\angle OYP, \angle ODA = \angle CAD = \angle CBD$, 所以 $\triangle OXY \sim \triangle CDB$.

设 $OM \perp AP$ 于点 M, $CK \perp AP$ 于点 K, $CL \perp BD$ 于点 L.

由 O 为 AC 的中点, 得 $CK = 2OM$.

由于 $\angle KPL = \angle APB = 2\angle CPD$, 即有 PC 平分 $\angle KPL$, 故 $CK = CL$.

考虑到 OM, CL 是相似三角形 $\triangle OXY$, $\triangle CDB$ 的对应边 XY, DB 上的高, 从而

$$\frac{XY}{BD} = \frac{OM}{CL} = \frac{OM}{CK} = \frac{1}{2},$$

即有 $BD = 2XY$.

二．(本题满分 40 分) 设整数 n $(n > 1)$ 恰有 k 个互不相同的素因子, 记 n 的所有正约数之和为 $\sigma(n)$. 证明: $\sigma(n) \mid (2n-k)!$.

证法1. 设 $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ 为 n 的标准分解.

记 $m_i = 1 + p_i + \cdots + p_i^{\alpha_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$, 则 $\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} m_i$.

我们证明对于 $i=1,2,\cdots,k$, 有

$$2n-k \geq km_i. \tag{1}$$

事实上, 对于 $i=1,2,\cdots,k$,

$$\begin{aligned} m_i &= p_i^{\alpha_i}\left(1+\frac{1}{p_i}+\cdots+\frac{1}{p_i^{\alpha_i}}\right) \leq p_i^{\alpha_i}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{\alpha_i}}\right) \\ &= p_i^{\alpha_i}\left(2-\frac{1}{2^{\alpha_i}}\right) \leq 2p_i^{\alpha_i}-1. \end{aligned}$$

所以,

$$m_i+1 \leq 2p_i^{\alpha_i} = \frac{2n}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} p_j^{\alpha_j}} \leq \frac{2n}{2^{k-1}} \leq \frac{2n}{k},$$

最后一步是因为 $2^{k-1} \geq 1+\binom{k-1}{1} = k$, $(k\geq 2)$ 以及 $2^0 \geq 1$. 故 (1) 成立.

由 (1), 对于每个 $i=1,2,\cdots,k$, 在 $1,2,\cdots,2n-k$ 中至少有 k 个 m_i 的倍数. 从而 $1,2,\cdots,2n-k$ 中可找到两两不同的正整数 $t_1,t_2,\cdots,t_k$, 它们分别是 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 的倍数. 因此 $\sigma(n)=\prod\limits_{i=1}^{k} m_i$ 整除 $(2n-k)!$.

证法2. 设 $n=\prod\limits_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ 为 n 的标准分解.

记 $m_i = 1+p_i+\cdots+p_i^{\alpha_i}$, $(i=1,2,\cdots,k)$, 则 $\sigma(n)=\prod\limits_{i=1}^{k} m_i$.

令 $S_j=\sum\limits_{i=1}^{j} m_i$, $(j=1,2,\cdots,k)$, $S_0=0$. 我们证明以下两个结论:

(1) $\sigma(n) \mid S_k!$;

(2) $S_k \leq 2n-k$.

结论 (1) 的证明: 对于 $i=1,2,\cdots,k$, 连续 m_i 个整数 $S_{i-1}+1$, $S_{i-1}+2$, $\cdots$, S_i 中必存在 m_i 的倍数, 故 $\dfrac{(S_{i-1}+1)(S_{i-1}+2)\cdots S_i}{m_i} \in \mathbb{Z}$.

从而 $\prod\limits_{i=1}^{k} \dfrac{(S_{i-1}+1)(S_{i-1}+2)\cdots S_i}{m_i} \in \mathbb{Z}$, 这等价于 $\sigma(n) \mid S_k!$.

结论 (2) 的证明: 对 $i=1,2,\cdots,k$, 有

$$\begin{aligned} m_i &= p_i^{\alpha_i}\left(1+\frac{1}{p_i}+\cdots+\frac{1}{p_i^{\alpha_i}}\right) \leq p_i^{\alpha_i}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{\alpha_i}}\right) \\ &= p_i^{\alpha_i}\left(2-\frac{1}{2^{\alpha_i}}\right) \leq 2p_i^{\alpha_i}-1. \end{aligned} \tag{2}$$

记 $\lambda_i = p_i^{\alpha_i}$, $(i=1,2,\cdots,k)$, 则 $\lambda_i \geq 2$. 反复使用 "若 $a,b\geq 2$, 则 $ab \geq a+b$", 可得

$$n=\prod_{i=1}^{k}\lambda_i \geq \sum_{i=1}^{k}\lambda_i,$$

结合 (2) 得

$$S_k=\sum_{i=1}^{k} m_i \leq \sum_{i=1}^{k}(2\lambda_i-1) = 2\sum_{i=1}^{k}\lambda_i - k \leq 2n-k.$$

由结论 (1), (2), 原题得证.

三. (本题满分 50 分) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 是非负整数, 同时满足以下条件:

(1) 存在正整数 $k \geq 100$, 使得 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, 而当 $i > k$ 时, $a_i = 0$;

(2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 100$;

(3) $a_1 + 2a_2 + \cdots + 100a_{100=2022}$.

求 $a_1 + 2^2a_2 + \cdots + 100^2a_{100}$ 的最小可能值.

解法1. 当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{18} = 0$, $a_{19} = 19$, $a_{20} = 40$, $a_{21} = 41$, $a_{22} = a_{23} = \cdots = a_{100} = 0$, $k = 21$时, 符合题设三个条件, 此时

$$\sum_{i=1}^{100} i^2 a_i = 19^2 + 20^2 \times 40 + 21^2 \times 41 = 40940.$$

下面证明这是最小可能值.

先证 $k \geq 21$, 否则, 若 $k \leq 20$, 则 $\sum_{i=1}^{100} ia_i = \sum_{i=1}^{k} ia_i \leq \sum_{i=1}^{k} 20a_i \leq 2000$, 这与 条件 (3) 矛盾.

根据条件 (2), (3), 有

$$\sum_{i=1}^{100} i^2 a_i = \sum_{i=1}^{100} (i-20)^2 a_i + 40\sum_{i=1}^{100} ia_i - 400\sum_{i=1}^{100} a_i = \sum_{i=1}^{100} (i-20)^2 a_i + 40880.$$

当 $a_{20} \leq 40$ 时,

$$\sum_{i=1}^{100} (i-20)^2 a_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 20}}^{100} (i-20)^2 a_i \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 20}}^{100} a_i = 100 - a_{20} \geq 60.$$

故

$$\sum_{i=1}^{100} i^2 a_i \geq 40940.$$

当 $a_{20} \geq 41$ 时, 由 $k \geq 21$ 及条件 (1) 可知 $a_{21} \geq 41$, 故

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{100} i^2 a_i &= \sum_{i=1}^{100} (i-19)(i-20)a_i + 39\sum_{i=1}^{100} ia_i - 380\sum_{i=1}^{100} a_i \\
&= \sum_{i=1}^{100} (i-19)(i-20)a_i + 40858 \\
&\geq (21-19)(21-20)a_{21} + 40858 \geq 40940.
\end{aligned}$$

综上, 所求最小值为 40940.

解法2. 对于满足题目条件的非负整数 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$, 对应地取 100 个正整数 $x_1, x_2, \cdots, x_{100} \in \{1, 2, \cdots, 100\}$, 其中恰有 a_1 个 1, a_2 个 2, $\cdots$, a_{100} 个 100, (条件 (2) 保证恰好是 100 个数). 条件 (1), (3) 分别转化为以下条件 (A), (B):

(A) 存在正整数 $k \leq 100$, $x_1, x_2, \cdots, x_{100}$ 中不含大于 k 的数, 且 1 的个数, 2 的个数, $\cdots$, k 的个数依次(非严格地) 递增;

(B) $\sum_{j=1}^{100} x_j = \sum_{i=1}^{100} ia_i = 2022 =: 100\mu$, 即 $x_1, x_2, \cdots, x_{100}$ 的平均值为 $\mu = 20.22$.

注意到 $\sum_{i=1}^{100} i^2 a_i = \sum_{j=1}^{100} x_j^2$, 故题目转化为: 100 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_{100} \in \{1, 2, \cdots, 100\}$ 满足条件 (A) 和 (B), 求 $\sum_{j=1}^{100} x_j^2$ 的最小值.

当 $x_1, x_2, \cdots, x_{100}$ 取 19 个 19, 40 个 20, 41 个 21 时, $\sum_{j=1}^{100} x_j^2 = 40940$.

下面证明 $\sum\limits_{j=1}^{100} x_j^2$ 的值至少为 40940.

由于

$$\sum_{j=1}^{100} x_j^2=\sum_{j=1}^{100}(x_j-\mu)^2-100\mu^2+2\mu\sum_{j=1}^{100}x_j=100\mu^2+\sum_{j=1}^{100}(x_j-\mu)^2,$$

故转化为考虑 $\sum\limits_{j=1}^{100}(x_j-\mu)^2$ 的最小值.

由 $\mu=20.22$ 知, 存在 $x_j\geq 21$, 也存在 $x_j\leq 20$, 设 $x_1,x_2,\cdots,x_{100}$ 中有 a 个 $x_j\geq 21$, b 个 $x_j=20$ 及 c 个 $x_j\leq 19$. 由条件 (A) 可知 $a\geq b$.

我们放宽条件 (A) 至条件 (A’): $a\geq b$. 在条件 (A’), (B) 下, 证明最小值仍是在 19 个 19, 40 个 20, 41 个 21 时取到.

由于满足 (A’), (B) 的$x_1,x_2,\cdots,x_{100}$ 的取法只有有限种, 选取平方和最小的一组 $x_1,x_2,\cdots,x_{100}$.

若 $c\geq 19$, 注意到 $a+b+c=100$ 及 $a\geq b$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{100}(x_j-\mu)^2 &\geq 0.78^2a+0.22^2b+1.22^2c\\ &\geq 0.78^2\cdot\left\lceil\frac{100-c}{2}\right\rceil+0.22^2\cdot\left\lfloor\frac{100-c}{2}\right\rfloor+1.22^2c\\ &\geq 0.78^2\times 41+0.22^2\times 40+1.22^2\times 19\\ &=55.16.\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{j=1}^{100}x_j^2\geq 100\mu^2+55.16=40940.$$

若 $c\leq 18$, 则 $a+b\geq 82$.

此时有 $c>0$, 因为若 $c=0$, 则 x_j 的平均值不小于 20.5, 与条件 (B) 不符.

亦有 $b>0$. 否则, 假如 $b=0$, 则由 $a\geq 82$ 及 $c>0$ 知, 可取一个 $x_i<20$ 和一个 $x_j>20$, 替换为 x_i+1 和 x_j-1, 平均值不变, 但 $(x_i+1)^2+(x_j-1)^2<x_i^2+x_j^2$, 平方和变小, a 至多减少 1, b 至多增加 2, 条件 (A’), (B) 仍满足, 与 $x_1,x_2,\cdots,x_{100}$ 使得平方和最小矛盾.

又假如存在一个 $x_i\leq 18$, 则由 $b>0$ 知, 可取一个 $x_j=20$, 将 x_i,x_j 替换为 x_i+1 和 x_j-1, 类似可知平均值不变, 平方和减小, 且 b 减少 1, 条件 (A’), (B) 仍满足, 与 $x_1,x_2,\cdots,x_{100}$ 使得平方和最小矛盾.

所以 c 个 $x_j\leq 19$ 都等于 19. 但此时

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{100}(x_j-\mu) &\geq 0.78a-0.22b-1.22c\\ &\geq 0.78\cdot\left\lceil\frac{100-c}{2}\right\rceil-0.22\cdot\left\lceil\frac{100-c}{2}\right\rceil-1.22c\\ &\geq 0.78\times 41-0.22\times 41-1.22\times 18>0,\end{aligned}$$

与条件 (B) 矛盾.

所以当且仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_{100}$ 取 19 个 19, 40 个 20, 41 个 21 时, $\sum\limits_{j=1}^{100}(x_j-\mu)^2$ 取得最小值, 相应地, $\sum\limits_{i=1}^{100}i^2a_i=\sum\limits_{j=1}^{100}x_j^2$ 取到最小值 40940.

四. (本题满分 50 分) 求具有下述性质的最小正整数 t: 将 100×100 的方格纸的每个小方格染为某一种颜色, 若每一种颜色的小方格数目均不超过 104, 则存在一个 $1\times t$ 或 $t\times 1$ 的矩形, 其中 t 个小方格含有至少三种不同颜色.

解: $t_{\min}=12$.

将方格纸划分为 100 个 10×10 的正方形, 每个正方形中 100 个小方格染同一种颜色, 不同的正方形染不同的颜色, 这样的染色方法满足题目条件, 且易知任意 1×11 或 11×1 的矩形中至多含有两种颜色的小方格. 因此 $t\geq 12$.

下面证明 $t=12$ 为最小值, 需要以下引理.

引理: 将 1×100 的方格表 X 的每个小方格染成某种颜色, 如果以下两个条件之一成立, 则存在一个 1×12 的矩形, 其中含有至少三种颜色.

(1) X 中至少有 11 中颜色;

(2) X 中恰好有 10 中颜色, 且每种颜色恰染了 10 个小方格.

引理的证明: 用反证法, 假设结论不成立.

取每种颜色的小方格最右边的那个, 从左往右位于第 $x_1<x_2<\cdots<x_k$ 格, 分别染 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 色, 则对于 $2\le i<k$, 有 $x_i-x_{i-1}\ge 11$. 这是因为若 $x_i-x_{i-1}\le 10$, 则在第 x_{i-1} 格至第 x_i+1 格 (不超过 12 格) 中至少含有三种不同颜色 (第 x_{i-1} 格为 c_{i-1} 色, 第 x_i 格为 c_i 色, 第 x_i+1 格一定不同于 c_{i-1}, c_i 色), 与假设不符.

若条件 (1) 成立, 则 $k\ge 11$, 于是 $x_{10}\ge x_1+9\times 11\ge 100$, $x_{11}>100$, 矛盾. 因此在条件 (1) 下结论成立.

若条件 (2) 成立, 考虑第 x_1+1 格至第 x_1+11 格, 因每种颜色的方格至多 10 个, 故这 11 个方格至少含有两种颜色, 且均不同于 c_1 色, 则从第 x_1 至 x_1+11 格中至少含有三种颜色, 与条件 (2) 不符. 因此在条件 (2) 下结论也成立.

引理得证.

回到原问题, 设 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 为出现的所有颜色.

对于 $1\le i\le k$, 记 s_i 为含有 c_i 色的小方格的个数, u_i 为含有 c_i 色小方格的行数, v_i 为含有 c_i 色小方格的列数. 由条件知 $s_i\le 104$. 又显然 $u_iv_i\ge s_i$, 等号成立当且仅当有 c_i 色小方格的行与列交叉位置上都是 c_i 色小方格.

下面证明: $u_i+v_i\ge\dfrac{s_i}{5}$, 等号成立当且仅当 $u_i=v_i=10$, $s_i=100$.

若 $u_i+v_i\ge 21$, 则由 $s_i\le 104$ 知 $u_i+v_i>\dfrac{s_i}{5}$; 若 $u_i+v_i\le 20$, 则

$$u_i+v_i\ge\frac{(u_i+v_i)^2}{20}\ge\frac{u_iv_i}{5}\ge\frac{s_i}{5},$$

等号成立当且仅当 $u_i=v_i=10$, $s_i=100$.

于是 $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(u_i+v_i)\ge\sum_{i=1}^{k}\frac{s_i}{5}=2000$.

若 $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(u_i+v_i)>2000$, 由抽屉原理知, 存在一行或一列至少含有 11 种颜色的小方格.

若 $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(u_i+v_i)=2000$, 则由等号成立的条件, 可知每种颜色恰染 100 格, 且是 10 行与 10 列交叉位置, 因此每一行每一列中恰有 10 种颜色的方格, 每种颜色的方格恰有 10 个.

由引理可知, 这两种情况都导致存在 1×12 或 12×1 的矩形含有至少三种颜色的小方格.

综上所述, 所求最小的 t 为 12.