加试(A卷)参考答案

July 20, 2023

二. (本题满分 40 分) 设整数 n $(n>1)$ 恰有 k 个互不相同的素因子, 记 n 的所有正约数之和为 $\sigma(n)$. 证明: $\sigma(n) \mid (2n-k)!$.

证法1. 设 $n=\prod\limits_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ 为 n 的标准分解.

记 $m_i = 1+p_i+\cdots+p_i^{\alpha_i}$ $(i=1,2,\cdots,k)$, 则 $\sigma(n)=\prod\limits_{i=1}^{k} m_i$.

我们证明对于 $i=1,2,\cdots,k$, 有

$$2n-k \geq km_i. \tag{1}$$

事实上, 对于 $i=1,2,\cdots,k$,

$$\begin{aligned} m_i &= p_i^{\alpha_i}\left(1+\frac{1}{p_i}+\cdots+\frac{1}{p_i^{\alpha_i}}\right) \leq p_i^{\alpha_i}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{\alpha_i}}\right) \\ &= p_i^{\alpha_i}\left(2-\frac{1}{2^{\alpha_i}}\right) \leq 2p_i^{\alpha_i}-1. \end{aligned}$$

所以,

$$m_i+1 \leq 2p_i^{\alpha_i} = \frac{2n}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} p_j^{\alpha_j}} \leq \frac{2n}{2^{k-1}} \leq \frac{2n}{k},$$

最后一步是因为 $2^{k-1} \geq 1+\binom{k-1}{1} = k$, $(k\geq 2)$ 以及 $2^0 \geq 1$. 故 (1) 成立.

由 (1), 对于每个 $i=1,2,\cdots,k$, 在 $1,2,\cdots,2n-k$ 中至少有 k 个 m_i 的倍数. 从而 $1,2,\cdots,2n-k$ 中可找到两两不同的正整数 $t_1,t_2,\cdots,t_k$, 它们分别是 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 的倍数. 因此 $\sigma(n)=\prod\limits_{i=1}^{k} m_i$ 整除 $(2n-k)!$.

证法2. 设 $n=\prod\limits_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ 为 n 的标准分解.

记 $m_i = 1+p_i+\cdots+p_i^{\alpha_i}$, $(i=1,2,\cdots,k)$, 则 $\sigma(n)=\prod\limits_{i=1}^{k} m_i$.

令 $S_j=\sum\limits_{i=1}^{j} m_i$, $(j=1,2,\cdots,k)$, $S_0=0$. 我们证明以下两个结论:

(1) $\sigma(n) \mid S_k!$;

(2) $S_k \leq 2n-k$.

结论 (1) 的证明: 对于 $i=1,2,\cdots,k$, 连续 m_i 个整数 $S_{i-1}+1$, $S_{i-1}+2$, $\cdots$, S_i 中必存在 m_i 的倍数, 故 $\dfrac{(S_{i-1}+1)(S_{i-1}+2)\cdots S_i}{m_i} \in \mathbb{Z}$.

从而 $\prod\limits_{i=1}^{k} \dfrac{(S_{i-1}+1)(S_{i-1}+2)\cdots S_i}{m_i} \in \mathbb{Z}$, 这等价于 $\sigma(n) \mid S_k!$.

结论 (2) 的证明: 对 $i=1,2,\cdots,k$, 有

$$\begin{aligned} m_i &= p_i^{\alpha_i}\left(1+\frac{1}{p_i}+\cdots+\frac{1}{p_i^{\alpha_i}}\right) \le p_i^{\alpha_i}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{\alpha_i}}\right) \\ &= p_i^{\alpha_i}\left(2-\frac{1}{2^{\alpha_i}}\right) \le 2p_i^{\alpha_i}-1. \end{aligned} \tag{2}$$

记 $\lambda_i = p_i^{\alpha_i}$, ($i=1,2,\cdots,k$), 则 $\lambda_i \ge 2$. 反复使用 "若 $a,b \ge 2$, 则 $ab \ge a+b$", 可得

$$n=\prod_{i=1}^{k}\lambda_i \ge \sum_{i=1}^{k}\lambda_i,$$

结合 (2) 得

$$S_k=\sum_{i=1}^{k}m_i \le \sum_{i=1}^{k}(2\lambda_i-1) = 2\sum_{i=1}^{k}\lambda_i - k \le 2n-k.$$

由结论 (1), (2), 原题得证.