Product spaces, Identification spaces

从已有空间构造新的空间. which properties of the old spaces are inherited by the new ones?

Def. 设X、Y为拓扑空间, 定义

$$\Delta=\{U\times V\subseteq X\times Y \mid U\text{为}X\text{中开集}, V\text{为}Y\text{中开集}\}$$

Thm 4.1. collection Δ 满足thm 1.9的假设, 因此是$X\times Y$上的拓扑基.

Def. 称由Δ生成的拓扑$\mathcal{T}_{X\times Y}$为乘积拓扑, 得到的空间为乘积空间. Δ中的元素称为basic open sets.

例 4.2. 作图: $E^1\times E^1$, $E^1\times[0,1]$, $[0,1]\times[0,1]$, $E^1\times S^1$, $S^1\times S^1$, 对每个图给出一些basic open sets和一些general open sets.

Def. 函数$p_1: X\times Y\to X$和$p_2: X\times Y\to Y$定义为$p_1(x,y)=x$, $p_2(x,y)=y$. 称为projections.

Thm 4.3. projections是连续满射.

Thm 4.4. projections是开映射.

Thm 4.5. Projections 将闭集映为闭集.

Thm 4.6. 函数$f: Z\to X\times Y$连续$\Leftrightarrow$复合函数$p_1\circ f: Z\to X$与$p_2\circ f: Z\to Y$均连续.

Thm 4.7. 定义映射$D: X\to X\times X$, $x\mapsto(x,x)$. 则$D(x)$是连续映射.

Def. 上述函数D称为diagonal map.

Thm 4.8. 设X是Hausdorff空间$\Leftrightarrow$ $D(X)$为$X\times X$中的闭集.

Thm 4.9. 乘积空间$X\times Y$是连通空间$\Leftrightarrow$ X和Y均连通.

Pf. 取$Z_{x,y}=(x\times Y)\cup(X\times y)$. 用Thm 3.15.

例 4.10. 考虑$E^1\times E^1$, 以下哪些是连通的.

1. 坐标均为有理数的点集.
2. 坐标中至少有一个是有理数的点集.
3. 坐标中仅有一个为有理数的点集.
4. 坐标均为无理数的点集.

Lem 4.11. (Tube Lemma). 设 $X\times Y$ 为乘积空间，Y 为紧空间．若 N 为 $X\times Y$ 中开集，且 $x_0\times Y\subseteq N$
则 X 中存在开集 W，使 $x_0\in W$ 且满足 $W\times Y\subseteq N$.

Def. 形如 $W\times Y$ 的集合，$x_0\in W$，称为是关于 $x_0\times Y$ 的管道 (tube).

Pf. Y 与空间 $x_0\times Y$ 同胚，后者 endowed with the subspace topology.
同胚由 $f(y)=(x_0,y)$ 给出．
由于 Y 是紧空间，所以 $x_0\times Y$ 为 $X\times Y$ 中的紧子空间．
由于 N 为 $X\times Y$ 中开集，由定义，它是 $X\times Y$ 中拓扑基的并集，因此也覆盖 $x_0\times Y$.
由于 $x_0\times Y$ 的紧性，有有限子覆盖：

$$x_0\times Y\subseteq (U_1\times V_1)\cup(U_2\times V_2)\cup\cdots\cup(U_n\times V_n).$$

假设每个 $U_i\times V_i$ 与 $x_0\times Y$ 交集不空．取 $W=U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_n$．为开集．
$\{U_i\times V_i\}_{i=1}^n$ 覆盖 $W\times Y$，从而 $W\times Y\subseteq N$.

Thm 4.12. 若 X 和 Y 为紧空间，则 $X\times Y$ 也是紧空间．

Pf 设 $\mathcal{A}$ 为 $X\times Y$ 的开覆盖．对于任意的 $x_0\in X$，用有限子覆盖 $\{A_1,\cdots,A_m\}$ 覆盖 $x_0\times Y$.
应用 Tube 引理，取 $N=A_1\cup\cdots\cup A_m$ 有开集 W_{x_0} 存在
重复以上过程，$\forall x\in X$，有开集 W_x 覆盖 X.
由于 X 紧，故有有限多个管道 $W_i\times Y$ 覆盖 $X\times Y$.

Def. X 是一个拓扑空间．X 的一个 partition 是一个 collection $\mathcal{P}=\{P_\alpha\}$，$\mathcal{P}$ 是 X 的非空子集族
两两不交，且 $\bigcup P_\alpha=X$.

Def. 给定空间 X 和 X 的一个分划 $\mathcal{P}$，按以下方式得到粘贴空间 Y. (identification space).
其中 Y 中的点为 $\mathcal{P}$ 中的元素．要定义 Y 中开集．设 $\pi: X\to Y$ 映 x 为 $\mathcal{P}$ 中含有 x 的元素．
称 O 在 Y 中开 $\iff$ $\pi^{-1}(O)$ 在 X 中开．
以上得到的拓扑称为 Y 的 identification topology. π 称为 identification map.

例 4.13. 设 $X=\{a,b,c\}$，$\mathcal{T}=\{\phi,\{a\},\{a,b\},X\}$，$\mathcal{P}=\{\{a,b\},\{c\}\}$．$Y$ 是粘贴空间．
列出 Y 中开集．

例4.14. 设$X=\mathbb{R}^1$, $\mathcal{T}=\mathcal{E}^1$, $\mathcal{P}=\{\{1\},\{2\},\mathbb{R}^1\setminus\{1,2\}\}$, Y为粘贴空间.
列出Y中开集.

Thm 4.15. 设X为Hausdorff空间, $\mathcal{P}$为任意分划, 则得到的粘贴空间仍是Hausdorff空间.

Thm 4.16. 设X为连通空间, $\mathcal{P}$为任意分划, 则得到的粘贴空间仍是连通的.

例4.17. 设$X=[0,1]\times[0,1]$. 对以下自部分画出Y的图像并给出开集的表示.

(1). $\mathcal{P}$为以下两种子集构成.

(a). $\{(x,y)\}$, $\forall 0<x<1$, $0\leq y\leq 1$.

(b). $\{(0,y),(1,y)\}$, $\forall 0\leq y\leq 1$.

(2). $\mathcal{P}$为以下两种子集构成.

(a). $\{(x,y)\}$, $\forall 0<x<1$, $0\leq y\leq 1$.

(b) $\{(0,y),(1,1-y)\}$, $\forall 0\leq y\leq 1$.

(3) $\mathcal{P}$由以下四种子集构成:

(a). $\{(x,y)\}$, $0<x<1$, $0<y<1$.

(b). $\{(0,y),(1,y)\}$, $0<y<1$.

(c) $\{(x,0),(x,1)\}$, $0<x<1$.

(d). $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

(4) $\mathcal{P}$由以下四种子集构成.

(a). $\{(x,y)\}$, $0<x<1$, $0<y<1$.

(b). $\{(0,y),(1,1-y)\}$, $0<y<1$.

(c). $\{(x,0),(x,1)\}$, $0<x<1$.

(d). $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

(5) $\mathcal{P}$由三种子集构成.

(a). $\{(x,y)\}$, $0<x<1$, $0<y<1$.

(b). $\{(0,y),(1,1-y)\}$, $0\leq y\leq 1$.

(c). $\{(x,0),(1-x,1)\}$, $0<x<1$.

例4.18. 设$X=B^n$. 当$n=1,2$时, 对以下每种情况, 画出Y的图像. 当$n=3,4,\dots$时会发生什么?

(1). $\mathcal{P}$由以下两种集合组成.

(a) $\{\vec{x}\}$, $\forall|\vec{x}|<1$.

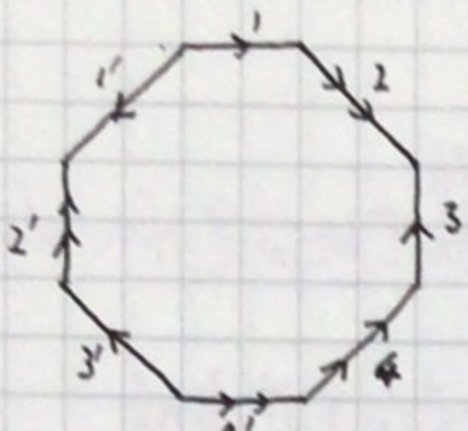
(b). $\{\vec{x}\mid|\vec{x}|=1\}$.

(2). $\mathcal{P}$由以下两种集合组成

(a) $\{\vec{x}\}$, $\forall|\vec{x}|<1$.

(b). $\{\vec{x},-\vec{x}\}$, $\forall|\vec{x}|=1$

例4.19. 下图的粘贴空间是什么?



Def. 给定两个集合A.B. 定义A,B的不交并为$A \uplus B$.为A,B的regular union: 即若一个点既在A中又在B中,它在$A \uplus B$中出现两次. 如$\{a,b,c\} \uplus \{b,c,d\} = \{a,b,c,b,c,d\}$.

Def. 给定两个空间X和Y, A为X的子集, 映射$f: A \to Y$形成$X \uplus Y$的一个分划P. P由以下三种集合为元素:

(1). $\{x\}$, $\forall x \in X \setminus A$.   (2). $\{y\}$, $\forall y \in Y \setminus f(A)$.

(3). $\{a, f(a)\}$, $\forall a \in A$.

设Z为分划P对应的粘贴空间, 并记Z为$X \cup_f Y$, 则称映射f为attaching map.

例4.20. 对以下每种情况给出 $X \cup_f Y$.

(1). $X = Y = [0,1]$, $A = \{0,1\}$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

(2). $X = Y = [0,1]$, $A = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $f(a) = a$.

(3). $X = Y = S^1 \times [0,1]$, $A = \{(s,0)\} \cup \{(s,1)\}$, $\forall s \in S^1$, $f(a) = a$.

例4.21. 对以下每种情况, 给出 $X \cup_f Y$.

(1). $X = Y = B^{n+1}$, $A = S^n$ 为X的边界. $f(a) = a$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

(2). $X = Y = B^2 \times S^1$, $A = \{(x,y) \in B^2 \times S^1 : |x| = 1\}$. (注: $A = S^1 \times S^1$). $f: A \to Y$, $(x,y) \mapsto (x,y)$.

(3). $X = Y = B^2 \times S^1$, $A = \{(x,y) \in B^2 \times S^1 : |x| = 1\}$ (注: $A = S^1 \times S^1$). $f: A \to Y$, $(x,y) \mapsto (y,x)$.

(4). X = Möbius带, $Y = B^2$. $A = S^1$为X的边界. $f: A \to S^1$(为Y的边界) 为任何同胚映射.

至此, in the term you have undoubtedly been asked "what's Topology?"

Give a one paragraph cocktail party answer.