问题. Rudin. Ex. 14. (Hardy-ineq.) $1 < p < \infty$, $f \in L^p((0,\infty))$, $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $(0 < x < \infty)$. 则

1. $\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.
2. 等号成立当且仅当$f = 0$, $a.e.$.
3. 假定$\{a_n\}$是正数序列, 当$1 < p < \infty$时, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right).$$

问题. $1 \le p \le \infty$, g可测, 若$\forall f \in L^p$, 有$fg \in L^1$, 证明$g \in L^{p'}$.

问题. 序列$\{f_n\}$在L^1中紧, 在L^q中有界, 则对于任意的$p \in [1, q)$, $\{f_n\}$在L^p中紧.

问题. 构造一个测度μ, 使$L^1(\mu)$的对偶空间不是$L^\infty(\mu)$.

问题. (related to Saks theorem *)证明或否定以下命题, 若

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{in } L^2,$$

则

$$\frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}{n} \to f \quad \text{in } L^2.$$