导数

1、拉格朗日中值定理与洛必达法则

导数是解决函数最值，零点等问题的强力工具，学习了课内的导数定义，求导法则，导数与单调性的关系等知识后，还将补充两大常用导数的定理：

Lagrange 中值定理 对于在$\left[a,b\right]$上连续，在$\left(a,b\right)$内可导的函数 f ，必存在$\lambda\in(a,b)$使 $f(b)-f(a)=f'(\lambda)(b-a)$

例 定义 $f(x)=(a+1)\ln x+ax^2+1$，当$a\le -2$，证明：$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\ge 4\left|x_1-x_2\right|$

证明：当$x>0$， $f'(x)=(a+1)/x+2ax$， $\left|f'(x)\right|\ge 2\sqrt{(a+1)2a}\ge 4$

由 Lagrange 中值定理存在$\lambda\in(x_1,x_2)$使得$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|f'(\lambda)\right|\left|x_1-x_2\right|\ge 4\left|x_1-x_2\right|$

练习 1 对于 $f(x)=\dfrac{1-\ln x}{x},x\ge e^2$，对于$x_1>x_2\ge e^2$，恒有$\dfrac{\left|f(x_1)-f(x_2)\right|}{\left|x_1-x_2\right|}>\dfrac{k}{x_1x_2}$

求k 的取值范围

练习 2 证明对于正整数$m>n>1$，$\dfrac{\sqrt[n]{m}}{\sqrt[m]{n}}>\dfrac{m}{n}$

所谓洛必达法则，是用来处理极限的，处理清楚极限问题有助于了解函数在端点的取值

洛必达法则 对于可导函数 f,g，若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$(或$\infty$)，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$(或$\infty$)，（其中$a$也可以取$\infty$），$\lim\limits_{x\to a}g(x)\ne 0$，且$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在，那么$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

例 直接应用洛必达法则可得如下常用极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}，\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0，\ \lim_{x\to 0}x\ln x=0，\ \lim_{x\to\pi/2}\frac{x-\pi/2}{\cos x}=-1$$

练习 3 计算如下极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$，$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$

练习 4 讨论函数 $f(x)=x\cos x-\dfrac{a}{x}\sin x-\sin x$ 在$\left(-k\pi,0\right)\cup\left(0,k\pi\right)$的零点个数（其中$k$是正整数，$a$为非 0 实数）

练习 5 给定 $f(x)=e^x-1-x-ax^2,(x\ge 0)$，若恒有 $f\ge 0$ 求a 的取值范围

类似地，对于 $g(x)=\ln(x+1)+b(x^2-x),(x\ge 0)$，恒有$g\ge 0$，求$b$ 的取值范围

练习 6 对于函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$，若它有两个零点，求 a 的取值范围

2、极值点偏移

极值点偏移是一类问题的代称，说的是给一个对称的条件，去证一个不等式，这个不等式描述了某种偏移的现象，先看如下例题

例 $f(x)=2\ln x+x+x^2$，若对于正实数 x_1,x_2 满足 $f(x_1)+f(x_2)=4$，证明：$x_1+x_2\geq 2$

证明：$f(x_1)+f(x_2)=2\ln x_1x_2-2x_1x_2+(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2=4$

结合不等式 $x-1\geq \ln x,(x>0)$ 知

$4=2\ln x_1x_2-2x_1x_2+(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2\leq -2+(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2$

即 $(x_1+x_2-2)(x_1+x_2+3)\geq 0$，由 $x_1,x_2>0$ 证毕

这题使用了不等式 $x-1\geq \ln x,(x>0)$，把 x_1+x_2 放在了一个不等式中，最终实现了证明

类似的不等式还有很多，需要灵活掌握，如 $e^x\geq x+1$，$\dfrac{2}{a+b}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\sqrt{ab}$

练习 7 函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^{x-1}}$，若存在互异的 x_1,x_2 使得 $f(x_1)=f(x_2)$，证明：$f'(\dfrac{x_1+x_2}{2})<0$

练习 8（2017 湖南）对于 $f(x)=\ln x-2017x,x>0$ 的两个零点 a,b，证明 $ab>e^2$

练习 9 函数 $f(x)=a-\dfrac{1}{x}-\ln x$ 若函数有两个（互异）零点 x_1,x_2，证明：

$2<x_1+x_2<3e^{a-1}-1$

练习 10 条件和练习 6 一样，若函数有两个（互异）零点 x_1,x_2，证明：$x_1+x_2<2$

3、导数与数列不等式

导数能用来处理数列不等式，常用的技巧是先用导数证明一个不等式，再多次使用它得到数列不等式

例 求最小的整数 k 使得对一切正整数 n，$k>(1+\dfrac{1}{2})(1+\dfrac{1}{2^2})\cdots(1+\dfrac{1}{2^n})$

解：由于 $\ln x<x-1,(x>1)$，代入 $x=1+\dfrac{1}{2^j}$ 求和得

$\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}>\ln(1+\dfrac{1}{2})(1+\dfrac{1}{2^2})\cdots(1+\dfrac{1}{2^n})$，左式小于 1，从而得到

$e>(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\cdots(1+\frac{1}{2^n})$，显然当$n$足够大$(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\cdots(1+\frac{1}{2^n})\geq 2$，从而$k=3$

注：最后一个不等式用到当$a_i>0,(1+a_1)\cdots(1+a_n)>1+a_1+\cdots+a_n$

练习 10 给定函数 $f(x)=\ln x+\frac{2}{x+1}$，1）试比较 f 与 1 的大小

2）证明：$\ln(n+1)>\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n+1}$

练习 11 证明不等式：$\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^n<\frac{e}{e-1}$

练习 12 对于 $f(x)=\sin x$

1)若 $f(x)+1\geq ax+\cos x$ 在$[0,\pi]$上恒成立，求实数a的取值范围

2)证明：$f(\frac{\pi}{2n+1})+f(\frac{2\pi}{2n+1})+\cdots+f(\frac{(n+1)\pi}{2n+1})>\frac{3\sqrt{2}(n+1)}{4(2n+1)}$

练习 13 对于正整数n，证明：$(1+1\times 2)(1+2\times 3)\cdots(1+n(n+1)>e^{2n-5/2}$

练习 14 这里给出一个$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$也即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$的初等证明：

1）对于 $x\in(0,\pi/2)$，建立不等式$\sin x<x<\tan x$

2）证明：$\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{x+\pi}{2}}\right]$，以及$1=\frac{2}{4^n}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}},(n\geq 1)$

3）在 1）中取$x=\frac{2k+1}{2^{n+1}}\pi$对$k=0,1,\cdots,2^{n-1}-1$求和再取极限