数学分析 - 梅加强

August 8, 2022

梅加强的大名在我上本科的时候就已经听说了, 现在去读他写的书到第二章的时候突然感受到他被奉为巨佬的原因, 不同于国内大多数数学分析教科书惯有的教学顺序, 这本书先讲掉了定积分再引进的导数, 不得不说国内这么干的, 这是我见过的第一本(虽然我也没读过几本国内大学自行出版的教材, 好在北大, 中科大的等等都大概翻过). 写这一小段文字只是突发感慨, 因为在读此之前确实也见过别的教科书这么干, 比如柯朗的《微积分和数学分析引论》也是先引入的积分再引入的导数, 这种与原来按部就班的学习形成对比, 微分和积分是实数完备性发展出来的两条支线, 最后在微积分基本定理它们融合了.

1 数列极限

定义 1. 给定序列$\{a_n\}$, 实数$A \in \mathbb{R}$, 如果

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), s.t. \forall n > N, |a_n - A| < \epsilon,$$

就称$a_n \to A$, $n \to \infty$. 反面表述序列$a_n \not\to A$:

$$\exists \epsilon > 0, s.t. \forall N = N(\epsilon), \exists n > N, |a_n - A| \geq \epsilon.$$

如果

$$\forall A > 0, \exists N, s.t. \forall n > N, a_n > A,$$

则称$a_n \to +\infty$. 如果

$$\forall A < 0, \exists N, s.t. \forall n > N, a_n < A,$$

则称$a_n \to -\infty$. 如果

$$\forall A > 0, \exists N, s.t. \forall n > N, |a_n| > A,$$

则称$a_n \to \infty$.

性质 (极限的性质) 1. 序列极限如果存在, 必然唯一.

2. 序列极限收敛于有限实数, 必然有界. (这个性质可以弱化, 比如允许序列前几项中有∞出现, 这时本条的序列极限性质可以表述为, 从某项开始序列有界)

3. 保序性, 当$a_n \to A$, $b_n \to B$, $a_n \geq b_n$, 则$A \geq B$. 不等式$a_n \geq b_n$可以换成$a_n > b_n$.

1.1 求极限的方法

求极限没有通用方法, 不要有能学到通用方法的任何期待. 我们所能做的只有从最简单的方法到最复杂的方法进行逐个尝试.

1.1.1 $\epsilon - N$法

也就是定义法, 这个方法要求事先知道所求极限为何, 然后套用这一框架. 方法比较基本, 不再举例.

1.1.2 夹逼原理

这也是一个求解框架, 找到满足$a_n \leq b_n \leq c_n$, 且$a_n \to A$, $c_n \to A$的上下界来求解b_n的极限.

1.1.3 单调有界原理

主要用于求解抽象型极限问题.

例2.2.3 设$a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$, $n \geq 1$, 求a_n的极限.

求解递推公式的极限问题常用不动点法先找到极限是什么. 也就是求解$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$, 得到$x = \pm 1$.

注意到$a_1 > 0$, 所以数列的每一项$a_n > 0$. 并计算

$$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2a_n}(a_n - 1)^2 \geq 0 \Longrightarrow a_{n+1} \geq 1, \quad \forall n \geq 1.$$

这表明当$n \geq 2$时, $\frac{1}{a_n} \leq 1 \leq a_n$, 所以

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \leq a_n.$$

序列$\{a_n\}$从第二项起单调递减, 有下界1. 递推方程的正不动点只有$x = 1$, 所以$a_n \to 1$.

事实上, 对于递推公式型极限问题也可以尝试求解它的通项公式, 比如

$$\frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1} + 1} = \left(\frac{a_n - 1}{a_n + 1}\right)^2.$$

1.1.4 重要极限

e相关

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 \leq \left(\frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

$$\left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n = \left(\frac{n^2}{n^2 - 1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2 - 1} > 1 + \frac{1}{n} \Longrightarrow \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Bernoulli不等式

$$x \geq -1 \Longrightarrow (1 + x)^n \geq 1 + nx,$$

等号当且仅当$x = 0$取到. 推广形式

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

其中$x_k \geq 0$. 注意, 这里给出的两种Bernoulli不等式的前提条件不同, 后者不能是$x_k \geq -1$, 因为$(1 - x)(1 + x) = 1 - x^2 \leq 1$.

Euler常数

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

例2.2.7 求

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right).$$

1. 单调上升有上界.
2. $H_{2n} - H_n = \ln 2n - \ln n + o(1)$.
3. $$\lim_{n \to \infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$
4. Euler求和公式
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \ln\frac{2n}{n+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n}\right) - \int_1^n \frac{\langle x\rangle}{(n+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Stirling公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad \theta_n \in (0, 1).$$

1.1.5 上下极限

这种方法也常用于求解抽象型序列极限问题.

序列收敛的一个充要条件是, 序列的上下极限相等.

定义

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right), \quad \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$$

命题2.2.4 1. 存在N_0, 当$n > N_0$时, $a_n \geq b_n$, 则

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \geq \liminf_{n\to\infty} b_n, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

2.

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

例2.2.12 设序列(a_n), $a_n \geq 0$, 满足$a_{m+n} \leq a_m + a_n$, $\forall m, n \geq 1$. 证明$\left(\frac{a_n}{n}\right)$收敛.

证明: 设$n > m$, 则$n = mk + l$, 其中$0 \leq l \leq m - 1$.

对于任意固定的m, 有

$$a_n = a_{mk+l} \leq ka_m + a_l \Longrightarrow \frac{a_n}{n} \leq \frac{ka_m}{km + l} + \frac{a_l}{n}.$$

不等式两边同时取上极限

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_m}{m}.$$

所以

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \liminf_{m\to\infty} \frac{a_m}{m}.$$

1.1.6 Cauchy收敛准则

定义 序列(a_n), 如果$\forall \epsilon > 0$, $\exists N = N(\epsilon)$, s.t. $\forall m, n > N$, $|a_m - a_n| < \epsilon$, 则称(a_n)为Cauchy列.

其它表述: $\forall \epsilon > 0$, $\exists N = N(\epsilon)$, s.t. $\forall n > N$, $\forall p > 0$, $|a_{n+p} - a_n| < \epsilon$.

反面描述: $\exists \epsilon_0 > 0$, s.t. $\forall N$, $\exists m_0, n_0 > N$, 使得$|a_{m_0} - a_{n_0}| \geq \epsilon_0$.

Cauchy列均有解. (这里仍然可以允许序列的前几项可以取∞, 此时Cauchy除了开始的有限项外是有界序列).

序列(a_n)收敛当且仅当(a_n)是Cauchy列.

习题2 设序列(a_n)满足

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n+p} - a_n| = 0, \quad \forall p \geq 1.$$

问(a_n)是否是Cauchy列?

$a_n = H_n$就是反例.

1.1.7 Stolz公式

定理2.4.2 设序列(x_n), (y_n), 其中y_n单调上升趋向∞, 若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A.$$

注: 和洛必达法则的情况一样, 当

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

不存在时,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

仍可能存在.

定理2.4.3 设(y_n)单调下降趋向于0, $(x_n)\to 0$, 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=A,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=A.$$

注 条件$(x_n)\to 0$是必要的, 比如$x_n\equiv C$是一个矛盾.

例2.1.15 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=A.$$

这个例子有多种证法, 使用Stolz公式只需一步.

例2.4.3 设$x_1\in(0,1)$, $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$, $\forall n\ge 1$. 证明$nx_n\to 1$, $n\to\infty$.

证明: 单调收敛证明$x_{n+1}<x_n$. 假设极限为x, 则$x=x(1-x)$, 解的$x=0$. 所以$x_n\to 0$, $n\to\infty$.
从递推公式得到

$$\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}=\frac{1}{1-x_n}\to 1,\quad n\to\infty.$$

由Stolz公式

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^{-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{x_n^{-1}-x_{n-1}^{-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{1-x_{n-1}}}=1.$$

不用Stolz公式的证法 和上面一样, x_n单调收敛到0, 且有$x_{n+1}^{-1}-x_n^{-1}=\dfrac{1}{1-x_n}\to 1$, $n\to\infty$. 则

$$\frac{1}{nx_n}=\frac{x_n^{-1}}{n}=\frac{\left(x_n^{-1}-x_{n-1}^{-1}\right)+\left(x_{n-1}^{-1}-x_{n-2}^{-1}\right)+\cdots+\left(x_2^{-1}-x_1^{-1}\right)+x_1^{-1}}{n}\to\lim_{n\to\infty}\left(x_n^{-1}-x_{n-1}^{-1}\right)=1.$$

上面最后一步用到了例2.1.15.

习题9 设$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=A$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=A.$$

Stolz公式不是万能的, 比如

习题15 设

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A,\quad\lim_{n\to\infty}b_n=B,$$

则

$$\frac{1}{n}\left(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1\right)=AB.$$

证明: 设$a_n=A+\alpha_n$, $b_n=B+\beta_n$, 则问题不妨在$A=B=0$时证明即可. 其实

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(AB+A\beta_{n+1-k}+B\alpha_k+\alpha_k\beta_{n+1-k}\right)\\&=AB+\frac{A}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_k+\frac{B}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_{n+1-k}\\&=AB+A\cdot o(1)+B\cdot o(1)+M\cdot o(1)=AB+o(1).\end{aligned}$$

上式最后用到收敛序列有界的结论.

2 连续函数

2.1 函数的极限

设$x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $(x_0-\delta, x_0+\delta)$称为x_0的开邻域.
$(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$称为$x_0$的去心开邻域.

定义3.1.1 设$f(x)$定义在x_0的某个去心开邻域上, 若$\exists A \in \mathbb{R}$, s.t. $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\epsilon, x_0) \in (0, \delta_0)$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$时, 有

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

则称$f(x)$在x_0处有极限A, 记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \text{ or } f(x) \to A, \ x \to x_0.$$

注: 去心邻域说明$f(x)$在$x = x_0$处可能没有定义.
可以类似的定义左右极限.

命题3.1.1 f在x_0处有极限的充要条件是f在x_0的左右极限存在且相等.

命题3.1.2 (夹逼原理) 设在x_0的一个空心领域内有

$$f_1(x) \le f(x) \le f_2(x).$$

若f_1, f_2在x_0处的极限存在且等于A, 则$f(x)$在x_0处极限为A.

命题3.1.3 (极限唯一性) 函数极限存在必然唯一.
$\epsilon - \delta$语言是证明函数极限的最简单框架, 其难点仅在于对不等式的掌握情况, 比如重要极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

对应不等式

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

同样类似地给出涉及无穷大与无穷远时的函数极限的定义.

2.2 函数极限的性质

定理3.1.5 (Heine, 归结原则) 设f定义在x_0的某个去心领域上, f在x_0处极限为A的充要条件是$\forall x_n \to x_0$, $(n \to \infty)$, 且$x_n \neq x_0$, $(\forall n)$, 均有

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

证明: $\Longrightarrow$: 是容易的; $\Longleftarrow$: 用反证法, 则

$$\exists \epsilon_0 > 0, \ s.t. \ \forall \delta > 0, \ \exists x_\delta, \ s.t. \ 0 < |x_\delta - x_0| < \delta,$$

但$|f(x_\delta) - A| \ge \epsilon_0$. 取$\delta = \dfrac{1}{n}$, 构造子列$(x_n) \to x_0$, 但$|f(x_n) - A| \ge \epsilon_0$. 矛盾.
Heine定理可改述为: $f(x)$在x_0处有极限当且仅当, $\forall x_n \to x_0$, $(x_n \neq x_0)$, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$存在.

定理3.1.6 (Cauchy准则) 设f在x_0的空心领域上有定义, 则f在x_0处有极限, iff, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. 当$0 < |x' - x_0| < \delta$, $0 < |x'' - x_0| < \delta$时, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

注: 对于无穷远处极限有限时, Cauchy准则仍然成立.
给出Cauchy准则的否定表述.

定理3.1.7 (单调有界原理) 设f定义在$(x_0 - \delta, x_0)$上, 若f单调上升有上界, 或f单调下降有下界, 则f在x_0有左极限.

定理3.1.8 (1). (局部有界原理) 若f在x_0处有有限极限, 则f在x_0的某空心领域内有界.

(2). (保序性)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim_{x\to x_0} g(x)=B,\ f(x)\ge g(x),\Longrightarrow A\ge B.$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim_{x\to x_0} g(x)=B,\ A>B,\Longrightarrow \exists U_{x_0}^{\circ}\ s.t.\ f(x)>g(x),\ \forall x\in U_{x_0}^{\circ}.$$

(3). (四则运算)

定理3.1.9 (复合函数极限) 设$f(y)\to A$, $y\to y_0$; $g(x)\to y_0$, $x\to x_0$, 且$\exists U_{x_0}^{\circ}$, s.t. $\forall x\in U_{x_0}^{\circ}$, $g(x)\ne y_0$, 则$f(g(x))\to A$, $x\to x_0$.

这个定理说明极限定义中去心领域的重要性, 定理中$y_0\notin g(U_{x_0}^{\circ})$不可以弱化为: 存在收敛于$x_0$的序列$(x_n)$, 使得$g(x_n)\ne y_0$, $\forall n$. 比如

$$f(y)=\begin{cases}1, & y\ne 0,\\ 0, & y=0,\end{cases}\quad g(x)\equiv 0,\ y_0=0.$$

当f在y_0处连续时, 这个去心领域的条件又可以去掉, 这说明研究连续函数是有价值的.

2.3 无穷小量与无穷大量的阶

定义3.2.1 (无穷小量与无穷大量) 若函数f在x_0处的极限是0, 则称f在$x\to x_0$时为无穷小量, 记为$f(x)=o(1)$, $(x\to x_0)$; 若$x\to x_0$时, $|f|\to+\infty$, 则称f在$x\to x_0$时为无穷大量.

在无穷远处也可以定义无穷小量和无穷大量, 数列也可以定义无穷小量和无穷大量.

定理3.2.1 (等价代换) 设$x\to x_0$时, $f\sim f_1$, $g\sim g_1$, 若$\dfrac{f_1}{g_1}$在x_0处有极限, 则$\dfrac{f}{g}$在x_0处有极限, 且极限相等.

几个常用的等价代换:

$$\tan x\sim\sin x\sim x\sim e^x-1\sim\ln(1+x).$$

无穷小量的性质: 习题4. 设$f(x)=o(1)$, $(x\to x_0)$, 证明, 当$x\to x_0$时, 有

(1) $o(f(x))+o(f(x))=o(f(x))$.

(2) $o(cf(x))=o(f(x))$, 其中c是常数.

(3) $g(x)\cdot o(f(x))=o(f(x)g(x))$, 其中$g(x)$是有界函数.

(4) $[o(f(x))]^k=o\left(f^k(x)\right)$.

2.4 连续函数

用来刻画连续变化的量

定义3.3.1 (连续性) 若f在x_0的某领域上有定义, 且f在x_0处的极限是$f(x_0)$, 则称f在点x_0处连续, x_0称为f的连续点. 类似地可以定义左右连续. 在定义域上每一点都连续的函数称为连续函数.

f在x_0处下半连续: $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当$|x-x_0|<\delta$时, 总有$f(x)>f(x_0)-\epsilon$.

f在x_0处上半连续: $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当$|x-x_0|<\delta$时, 总有$f(x)<f(x_0)+\epsilon$.

连续函数的基本性质: (1). 保持四则运算;

(2). 若f,g连续, 则$\max\{f,g\}$和$\min\{f,g\}$均连续.

定理3.3.2 (复合函数连续性) 设f在y_0处连续, $g(x)\to y_0$, $x\to x_0$, 则

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)=f(y_0).$$

当g在x_0处连续时, $f(g(x))$在x_0处连续.

定义3.3.2 设x_0是$f(x)$的间断点, 如果$f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$均存在且有限, 则称x_0是第一类间断点, 否则, 称为第二类间断点. 按照左右极限不相等和相等来区分跳跃间断点和可去间断点.

命题3.3.3 设$f(x)$在$[a,b]$上单调, $x_0\in(a,b)$是$f(x)$的间断点, 则x_0是跳跃间断点.

命题3.3.4 设$f(x)$定义在区间I上的单调函数, 则$f(x)$的间断点至多可数.

证明: 间断点x与开区间$(f(x_0-0),f(x_0+0))$一一对应且至多可数.

命题3.3.5 若$f(x)$定义在区间I上严格单调, 则$f(x)$连续当且仅当$f(I)$也是区间.

证明: $\Longrightarrow$: 用介值定理. $\Longleftarrow$: 反证法, 则有x_0使得$(f(x_0-0),f(x_0+0))$不在区间$f(I)$内, 矛盾.

推论3.3.6 定义在区间I上的严格单调连续函数$f(x)$一定可逆, 且其逆严格单调连续.

2.5 闭区间上连续函数的性质

依赖实数系的基本性质

定理3.4.1 (有界性定理) 设$f\in C[a,b]$, 则f在$[a,b]$上有界.

证法一: 反证法, 取$|f(x_n)|\geq n$, 由聚点定理$\Longrightarrow x_{n_k}\to x_0\in[a,b]$, f连续使得$f(x_{n_k})\to f(x_0)$有界, 矛盾.

证法二: 连续点x处有领域$U_x(\delta_x)$, 使得其上$|f-f(x)|\leq 1$, 这样的(U_x)形成$[a,b]$的覆盖, 用有限覆盖定理.

定理3.4.2 (最值定理) 设$f(x)\in C[a,b]$, 则$f(x)$在$[a,b]$上取到最值.

证法一: f有界, $[a,b]$闭, 所以逼近上确界的点列$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$, 再由f连续得到最值点.

证法二: 反证法, 设$f<M:=\sup f$, 构造$F(y)=\dfrac{1}{M-f(y)}\in C[a,b]$, 同样有界$F(y)<K$, $K>0$, 则$\dfrac{1}{M-f(y)}<K$得出

$$\sup_x f(x)=M>f(y)+\frac{1}{K}\Longrightarrow \sup_x f(x)\geq \sup_y f(y)+\frac{1}{K}>\sup_x f(x).$$

一般区间上连续函数最值判别法:

命题5.1.3 设$f\in C(\mathbb{R})$, 且

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\ (或-\infty).$$

则f在$\mathbb{R}$上达到最小(大)值.

定理3.4.3 (零点定理, Bolzano) 设$f\in C[a,b]$, $f(a)f(b)<0$, 则存在$\xi\in(a,b)$, s.t. $f(\xi)=0$.

证法一: 区间二分法+区间套定理.

证法二: 用连续函数的保号性, 构造

$$A=\{x\in[a,b]:f(x)<0\},$$

取$\xi=\sup A$, 则有$x_n\in A$, $x_n\to\xi$, $f(x_n)<0$, 所以$f(\xi)\leq 0$. 反之, 在(ξ,b)上$f\geq 0$, 取$x_n\downarrow\xi$, 则$f(x_n)\geq 0\Longrightarrow f(\xi)=0$.

定理3.4.4 (介值定理) 设$f\in C[a,b]$, μ严格介于$f(a)$与$f(b)$之间, 则存在$\xi\in(a,b)$, s.t. $f(\xi)=\mu$.

推论3.4.5 设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数, 则$f([a,b])=[m,M]$, 其中m,M是f在$[a,b]$上的最小值, 最大值.

推论3.4.6 设区间I上, $f(x)\in C(I)$, 则$f(I)$是区间. (可以退化为单点集)

注: 区间I可以无界, 可以是开集.

推论3.4.7 设$f(x)$是区间I上的连续函数, 则$f(x)$可逆的充要条件是$f(x)$严格单调.

2.6 一致连续性

定义3.4.1 (一致连续) 设$f(x)$定义在区间I上, 若$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$, s.t. 当$x_1, x_2 \in I$, $|x_1 - x_2| < \delta$时, 有$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$, 则称$f(x)$在$I$中一致连续.

否定表述: $f(x)$在I中不一致连续: $\exists \epsilon_0 > 0$, 以及(a_n), $(b_n) \subseteq I$, 且$a_n - b_n \to 0$, $(n \to \infty)$. 有$|f(a_n) - f(b_n)| \geq \epsilon_0$.

定理3.4.9 (Cantor定理) 闭区间上, 连续函数一致连续.

证法一: (反证), $\exists \epsilon_0 > 0$, (a_n), $(b_n) \subseteq [a, b]$, $a_n - b_n \to 0$, $n \to \infty$, 且$|f(a_n) - f(b_n)| \geq \epsilon_0$. 用聚点定理取$(b_n)$的收敛子列$b_{n_k} \to x_0 \in [a, b]$, 则$a_{n_k} \to x_0$, 取极限.

证法二: 用连续性构造有限覆盖开集.

定义3.4.2 (振幅, 连续性模) 设$f(x)$在x_0的开邻域内有定义, 称

$$\omega_f(x_0, r) = \sup \{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in B_{x_0}(r)\}, \quad r > 0.$$

为f在$(x_0 - r, x_0 + r)$上的振幅, 显然, $\omega_f(x_0, r)$关于$r \to 0+$递减, 故

$$\omega_f(x_0) = \lim_{r \to 0+} \omega_f(x_0, r)$$

存在, (不一定有限). 称为f在点x_0处的振幅.

注: 定义提到的是两种振幅, 分别表征函数f在"区间"上和在"一点"上的振幅.

命题3.4.10 $f(x)$在x_0处连续的充要条件是$\omega_f(x_0) = 0$.

命题3.4.11 $f(x)$在I中一致连续的充要条件是

$$\lim_{r \to 0+} \omega_f(r) = 0,$$

其中

$$\omega_f(r) = \sup \{|f(x') - f(x'')| : \forall x', x'' \in I, \ |x' - x''| \leq r\}.$$

2.7 连续函数的积分

积分定义: 设$f \in C[a, b]$, 直线$x = a$, $x = b$, $y = 0$与曲线$f(x)$的图像在平面上所围成图形的面积用$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$来表示, 称为$f$在$[a, b]$上的积分.

命题3.5.1 设$f \in C[a, b]$, $f_n(x)$是分段线性函数, 是将$[a, b]$进行n等分, 分点$x_i = a + \frac{i}{n}(b - a)$, 在$x \in [x_{i-1}, x_i]$时

$$f_n(x) = l_i(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}).$$

则$\forall \epsilon > 0$, $\exists N = N(\epsilon)$, 当$n > N$时,

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

即$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. 进而

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \frac{b - a}{n} \\ &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i.\end{aligned}$$

积分的基本性质 约定$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(1) (线性性) $f, g \in C[a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 若$|f(x)| \le M$, $\forall x \in [a,b]$, 则

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le M(b-a).$$

(3) (保序性) 若$f \ge g$, $f, g \in C[a,b]$, 则$\int_a^b f \ge \int_a^b g$. 特别地,

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(4) (区间可加性) 设$f \in C(I)$, $a, b, c \in I$, 则

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(5) 若$f(x) \in C[a,b]$, 非负, 则$\int_a^b f(x) \ge 0$, 等号仅当$f \equiv 0$时取到.

例3.5.4 设$f \in C[a,b]$, $c \in [a,b]$, 定义$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in [a,b]$, 则F是Lipschitz函数.

证明:

$$|F(x_2) - F(x_1)| \le M \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}t.$$

命题3.5.2 (积分中值定理) 设$f, g \in C[a,b]$, 若g不变号, 则$\exists \xi \in [a,b]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: 用连续函数介值定理.

例3.5.10 设$f \in C[0,a]$, 定义

$$f_0(x) = f(x), \quad f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

证明: 存在$\xi = \xi_{n,x} \in [0,x]$, s.t. $f_n(x) = f(\xi)\dfrac{x^n}{n!}$.

证明:

$$m\frac{x^n}{n!} \le \int_0^x f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \le M\frac{x^n}{n!},$$

用介值定理.

例3.5.12 求连续函数f满足

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

证明: 此题的条件可以弱化为f是可积函数. 取积分

$$\int_0^y f(x+t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^y f(x)\,\mathrm{d}t + \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t,$$

所以

$$\int_0^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t = yf(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t.$$

交换x, y的位置即得$yf(x) = xf(y)$, 再取$y = 1$.

例3.5.15 设$f \in C[a,b]$, g是周期为T的连续函数, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.8 作业

3. 设$b, \alpha > 0$, 求积分$\displaystyle\int_0^b x^\alpha\,\mathrm{d}x$, 利用积分计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}.$$

8. 设$f \in C[a,b]$, 如果对于任意的$g \in \{g \in C[a,b] : g(a) = g(b) = 0\}$, 均有$\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则$f \equiv 0$.

此题类比变分基本定理.

9. 设$f \in C[a,b]$, 如果对于任意的$g \in \left\{g \in C[a,b] : \displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0\right\}$, 均有$\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则$f = C$为常函数.

提示: 设f的平均值为C, 考虑$g = f - C$和g^2的积分.

12. 设$f \in C[a,b]$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{1/n} = \max_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

14. 设$f, g \in C[a,b]$, 且$f, g > 0$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_a^b f^{n+1}(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f^n(x)g(x)\,\mathrm{d}x} = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

17. 设$f(x) \in C[0,+\infty)$严格单调递增, 则

$$F(x) = \begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, & x > 0,\\ f(0), & x = 0\end{cases}$$

也是严格单调递增连续函数.

18. 设$f(x) \in C[a,b]$, $f > 0$, 则

$$\lim_{r\to 0+}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^r(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/r} = \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

并用Hölder不等式说明上式左端关于r单调递增.

3 微分及其逆运算

3.1 可导与可微

研究函数的局部性质

定义4.1.1 (导数) 设f在x_0附近有定义, 如果极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在且有限, 则称f在x_0处可导, 极限称为f在x_0处的导数, 记为$f'(x_0)$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

用$\epsilon-\delta$语言表述.

命题4.1.1 设f在x_0处可导, 则f在x_0处连续.

命题4.1.2 (导数的运算法则) 设f,g在x处可导, 则fg也在x处可导; 对于任意的常数α,β, $\alpha f+\beta g$也在x处可导. 且

(1). $(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$, (线性性);

(2). $(fg)'=f'g+fg'$. (导性).

推论4.1.3 设f,g在x_0处可导, $g(x_0)\neq 0$, 则$\dfrac{f}{g}$在x_0处也可导, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

可以用导数表述曲线在一点处的切线和法线, 事实上仅仅是用导数给出了切线和法线的定义, 属于先有导数的概念才有的切线和法线的概念.

定义4.1.2 (微分) 设f在点x_0附近有定义, 如果存在常数A, 使得

$$f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+o(x-x_0),$$

则称f在x_0处可微, 线性映射$x\mapsto Ax$称为f在x_0处的微分, 记为$df(x_0)$.

命题4.1.4 设f在x_0附近有定义, 则f在x_0处可导当且仅当f在x_0处可微, 且微分的斜率就是导数$f'(x_0)$.

可导对应函数在一点差商存在极限, 可微对应函数的局部线性化, 产生线性变换的主项. f在x处的微分是一个斜率为$f'(x)$的线性映射, 当x变化时, 线性映射也变化, 即$x\mapsto df(x)$是一个新的映射, 记为df, 称为f的外微分或全微分.

x的全微分dx把任意点x映为x处的恒等映射.

因为$df(x)$和dx都是线性变换, 所以有$df=f'(x)dx$.

把形如fdx的表达式(f为函数)称为1次微分形式.

可以把微分运算看做升维运算, 把x和dx看做两个独立的变量, dx就是Δx, 它与x的选取无关. df把单变量函数f映射为二元函数$df(x)=f'(x)dx$.

命题4.1.5 (链式法则) 设g在x_0处可导, f在$g(x_0)$处可导, 则复合函数$f\circ g=f(g)$在x_0处可导, 且

$$(f(g))'(x_0)=f'(g(x_0))\,g'(x_0).$$

证明依赖于下式

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(x_0))+f'(g(x_0))(g(x)-g(x_0))+o(g(x)-g(x_0)) \\ &= f(g(x_0))+f'(g(x_0))\,g'(x_0)(x-x_0)+f'(g(x_0))\,o(x-x_0)+o(x-x_0) \\ &= f(g(x_0))+f'(g(x_0))\,g'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0) \end{aligned}$$

命题4.1.6 (反函数求导法则) 设f在x_0附近有定义, 且反函数为g. 若f在x_0处可导, 且导数非零, 则g在$y_0=f(x_0)$处可导, 且

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

这个定理并没有要求f在x_0附近每点上都连续. 导数$f'(x_0)\neq 0$的条件不能省掉, 否则考虑$f(x)=x^3$.

命题4.1.8 设f,g可微, 则

(1) $d(\alpha f+\beta g)=\alpha df+\beta dg$, 其中$\alpha,\beta$为常数;

(2) $d(fg)=gdf+fdg$;

(3) $d(f/g)=\dfrac{gdf-fdg}{g^2}$, 其中$g\neq 0$.

命题4.1.9 设f,g均可微, 且复合函数$f(g)$有定义, 则

$$d(f(g))=f'(g)dg.$$

3.2 高阶导数

本节没有太多复杂的知识点, 仅做一些结论的罗列.

定义4.2.1 (高阶导数) 设f在x_0附近可导, 如果导数f'在x_0处仍可导, 则称f在x_0处2阶可导. 记为

$$f''(x_0) = (f')'(x_0),$$

并称为f在x_0处的2阶导数.

一般地, 如果f在x_0附近n $(n \geq 1)$ 阶可导, 且n阶导函数$f^{(n)}$在x_0处可导, 则称f在x_0处$n+1$阶可导, 记为

$$f^{(n+1)}(x_0) = \left(f^{(n)}\right)'(x_0),$$

称为f的$n+1$阶导数.

注: f的2阶导数要求f'在x_0附近有定义, 也就是对于x_0附近的x能够计算$f'(x)$的值. 另有一种用差分方法定义的二阶导数, 比如

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

它避免了计算$f'(x)$, 而且允许一阶导数不存在, 而仅存在二阶导数. 一般用于推广导数的概念.

定义4.2.2 若f在区间I上的每点都n阶可导, 则称f在I中n阶可导; 如果f可导, 且导函数f'连续, 则称f(1阶)连续可导, 记为$f \in C^1(I)$; 一般n阶连续可导记为$f \in C^n(I)$. 如果f有任意阶导数, 则称f是光滑的, 记为$f \in C^\infty(I)$.

例4.2.3 可微函数的导函数不一定连续.

尽管导函数连续性丧失, 但仍有介值定理成立, 也就是Darboux介值定理.

例4.2.4 设$k = 1, 2, \cdots$, 则函数

$$f(x) = \begin{cases} x^{2k+1} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

有$f \in C^k \setminus C^{k+1}$.

例4.2.5 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$$

是光滑函数.

命题4.2.1 设f, g均为n阶可导函数, 则

(1) $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(2) (Leibniz)

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

3.3 不定积分

命题4.3.1 设f为区间I上的可微函数, 则$f' = 0$当且仅当$f = C$.

此定理使用中值定理证明最为简洁, 书中使用的方法可以归为极端原理.

定义4.3.1 (原函数) 方程$F'(x) = f(x)$的一个可微解F称为函数f的一个原函数.

定义4.3.2 (不定积分) 设函数f在区间I上有原函数, 用记号$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$表示$f$的原函数的一般表达式, 则

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad x \in I,$$

其中C为常数.

定理4.3.2 (Newton-Leibniz) 区间I中的连续函数都有原函数. 设f连续, $a \in I$, 则

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in I$$

是f的一个原函数.

需要注意Darboux介值定理, 将来会遇到有间断点的可积函数, 其变限积分在间断点处不可微, 所以不能形成一般非连续函数的原函数.

此定理称为微积分基本定理, 它有其它形式:

设$f \in C(I)$, F为f的任一原函数, 则存在常数C, 使得, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt + C$, 所以

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F\,|_a^b\,.$$

另有一种表述是当G连续可微时,

$$\int_a^b G'(x)dx = G(b) - G(a) = G\,|_a^b\,.$$

上式对于C^1函数总是对的, 但需要注意Volterra函数, 它在定义的区间上处处可导, 且导函数有界, 但导函数不可定积分.

命题4.3.3 (不定积分的线性性质) 设f, g在区间I上均有原函数, 则

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx,$$

其中α, β为常数.

命题4.3.4 设f的原函数为F, 若f可逆, 且$g = f^{-1}$, 则

$$\int g(x)dx = xg(x) - F(g(x)) + C.$$

3.4 积分的计算

命题4.4.1 (换元积分法, 变量替换法) 设$f(u)$是区间J上有定义的函数, $u = \phi(x)$是区间I中的可微函数, 且$\phi(I) \subset J$.

(1) 设f在J上的原函数是F, 则$F(\phi)$是$f(\phi)\phi'$在区间I上的原函数, 即

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(u)du + C = F(\phi(x)) + C;$$

(2) 设ϕ可逆, 且其逆可微, $\phi(I) = J$. 如果$f(\phi(x))\phi'(x)$有原函数G, 则f有原函数$G(\phi^{-1}(u))$, 即

$$\int f(u)du = G(\phi^{-1}(u)) + C.$$

命题4.4.2 (分部积分法) 设$u(x), v(x)$在区间I中可微, 若$u'(x)v(x)$有原函数, 则$u(x)v'(x)$也有原函数, 且

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

例4.4.10 设$a \neq 0$, 求不定积分$I = \displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$和$J = \displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$.

例4.4.18 求不定积分

$$\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}dx, \qquad 0 < r < 1.$$

不能用初等函数表述的不定积分:

$$e^{\pm x^2}, \sin(x^2), \cos(x^2), \frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}, \sqrt{1-k^2\sin^2 x}, \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}, \ (0 < k < 1).$$

3.5 作业

19. 设$a_{ij}(x)$均为可导函数, 求行列式函数$\det\left(a_{ij}(x)\right)_{n\times n}$的导数.

20. Riemann函数$R(x)$处处不可导.

11. 通过对 $(1-x)^n$ 求导并利用二项式定理证明等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k k^m = \begin{cases} 0, & m=0,1,\cdots,n-1, \\ (-1)^n n!, & m=n. \end{cases}$$

10. 求不定积分的递推公式 ($a\neq 0$):

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

11. 设$a,b>0$, 求不定积分的递推公式:

$$I_{mn} = \int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}.$$

7. 设f在$(0,+\infty)$上可导, 且

$$2f(x)=f(x^2), \quad \forall x>0.$$

证明$f(x)=c\ln x$.

hint: 设$g(x)=f(\mathrm{e}^x)$. 题目条件可以弱化为f仅在$x=1$处可导.

$$g(x)=\frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x/2^n}x = g'(0)x$$

可导性不能省去, 否则考虑$\max\{0, c\ln x\}$作为函数的另一个解.

3.6 简单的微分方程

例4.5.4 微分方程能够解出通解的表达式通常和朗斯基行列式有关.

4 微分中值定理和Taylor展开

4.1 函数极值

定义5.1.1 (极值点) 设f定义在I上, $x_0\in I$, 若存在$\delta>0$, s.t.

$$f(x)\geq f(x_0), \qquad \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap I,$$

则称x_0是f在I上的极小值点, $f(x_0)$称为极小值.

若$x_0\in I$, 且$\forall x\in I$, $f(x)\geq f(x_0)$, 则称x_0是f在区间I上的最小值点, $f(x_0)$称为函数f在区间I上的最小值.

定理5.1.1 (Fermat定理) 设x_0是f在I上的极值点, 且x_0是内点, 若f在x_0处可导, 则$f'(x_0)=0$.

注: 由于极值点定义是在$(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap I$上给出的, 所以以上定理要加上$x_0$是内点.

证明: 使用极限的保号性, 判断

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

的符号.

满足$f'(x_0)=0$的点称为f的驻点, 临界点.

若$f'(x_0)\geq 0$, 则$\exists\delta>0$, s.t. $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, 有$(x-x_0)(f(x)-f(x_0))\geq 0$, 但$f$在$x_0$附近不单调.

定理5.1.2 (Darboux) 设f为$[a,b]$上的可导函数, 则f'可以取到$f'_+(a)$和$f'_-(b)$之间的任意值.

证明: 设k介于$f'_+(a)$与$f'_-(b)$之间, 定义$g(x)=f(x)-kx$, 则

$$g'_+(a)g'_-(b)=(f'_+(a)-k)(f'_-(b)-k)\le 0.$$

若上式等于零, 命题显然. 若上式小于零, 不妨设$g'_+(a)>0$, 此时$x=a$不是最大值点; 并有$g'_-(b)<0$, 此时$x=b$不是最大值点.

从而$g(x)$只能在$[a,b]$内取到最大值, 由Fermat定理, 存在$\xi\in(a,b)$, s.t. $g'(\xi)=0$.

注: 导函数有介值定理, 但导函数可以不连续, 比如$x^2\sin\dfrac{1}{x}$, $x\in[-\pi,\pi]$.

Darboux定理说明, 若g'在任何点处不为零, 则g'不变号.

Darboux定理的使用条件必须是区间内每点处可导.

例5.3.4 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上二阶可导, 若f有界, 证明: $\exists\xi\in\mathbb{R}$, s.t. $f''(\xi)=0$.

证明: (反证法), $\forall x\in\mathbb{R}$, $f''(x)\neq 0$, 由Darboux定理, f''不变号, 从而f'单调.

不妨设f'单调上升, 取$x_0\in\mathbb{R}$, $f'(x_0)\neq 0$. 因为

$$f'(x_0)>0\Longrightarrow f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x}f'(t)\,\mathrm{d}t\ge f'(x_0)(x-x_0)\to+\infty,\quad x\to+\infty,$$

与f有界矛盾; 而且

$$f'(x_0)<0\Longrightarrow f(x_0)-f(x)=\int_{x}^{x_0}f'(t)\,\mathrm{d}t\le f'(x_0)(x_0-x)\to-\infty,\quad x\to-\infty,$$

也与f有界矛盾.

4.2 微分中值定理

定理5.2.1 (Rolle) 设$f\in C[a,b]$, 在(a,b)上可微, 且$f(a)=f(b)$, 则存在$\xi\in(a,b)$, s.t. $f'(\xi)=0$.

定理5.2.2 (Lagrange) 设$f\in C[a,b]$, 在(a,b)上可微, 则存在$\xi\in(a,b)$, s.t.

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

证明是构造性的, 对

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$

使用Rolle定理.

定理5.2.3 (Cauchy) 设$f,g\in C[a,b]$, 在(a,b)上可微, 且$\forall x\in(a,b)$, $g'(x)\neq 0$, 则

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证明: $(g(a)\neq g(b))$, 对

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))\right]$$

用Rolle定理.

几何意义: 定义参数曲线$\vec{r}(t)=(g(t),f(t))$, $A=\vec{r}(a)$, $B=\vec{r}(b)$. 则$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$表示直线$\ell_{AB}$的斜率. Cauchy定理指出, $\exists\xi$使得$\vec{r}(\xi)$处的切线方向$\vec{r}'(\xi)\parallel\ell_{AB}$, 而$\vec{r}'(\xi)=(g'(\xi),f'(\xi))$, 有

$$k_{AB}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

注: 由于$\forall x\in(a,b)$, $g'(x)\neq 0$, 由Darboux介值定理$g'(x)$不变号, $g(x)$其实是单调可逆的, 这可以给出另一种证法:

取$A=g(a)$, $B=g(b)$, 不妨设$A<B$, 则$f(g^{-1}(y))\in C[A,B]$, 由复合函数求导与反函数求导法则

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f(g^{-1}(B))-f(g^{-1}(A))}{B-A}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g^{-1}(x))\mid_{x=\zeta}=f'(g^{-1}(\zeta))\cdot\frac{1}{g'(g^{-1}(\zeta))}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

其中$g(\xi)=\zeta\in[A,B]$.

例5.2.4 设$f(x)\in C[a,b]$, 在(a,b)二阶可导, 若$f(a)=f(b)=0$, 则对于任意的$c\in[a,b]$, 存在$\xi\in(a,b)$, s.t.

$$f(c)=\frac{f''(\xi)}{2}(c-a)(c-b).$$

证: (K值法) 设K满足$f(c)=K(c-a)(c-b)$. 则$f(x)-K(x-a)(x-b)$有三个零点a,b,c. 故存在$\xi\in(a,b)$, s.t. $f''(\xi)-2K=0$.

证法二: 构造

$$F(x)=f(x)-\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)$$

也有三个零点a,b,c.

注: Lagrange插值公式 经过$(x_i,f(x_i))_{i=1}^n$的$n-1$次多项式有如下形式

$$p_{n-1}(x)=\sum_{i=1}^n\prod_{j\neq i}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}f(x_i).$$

用K值法证明:

$$f(x)-p_{n-1}(x)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)\prod_{i=1}^n(x-x_i),\quad \xi\in(a,b).$$

例5.2.5 证明Legendre (勒让德)多项式$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$在$(-1,1)$上有$n$个不同实根, 其中$n\geq 1$.

证明: 多项式$\left(x^2-1\right)^n$的直到$n-1$次导数总有± 1作为其零点, 用Rolle定理, 在每次求导时会多出现一个零点.

4.3 单调函数

命题5.3.2 设$f\in C[a,b]$, 在(a,b)上可微, 则f单调当且仅当f'不变号.

证明: $\Longrightarrow$: 用极限的保号性; $\Longleftarrow$: 用Lagrange中值定理.

命题5.3.3 (反函数定理) 设f为区间I上的可微函数, 若$f'\neq 0$, $\forall x\in I$. 则f可逆且反函数可微.

证明: 用反证法+Lagrange定理, f是单射, 从而可逆, 由f连续得到f单调. 并且

$$\left(f^{-1}(y)\right)'=\frac{1}{f'(x)}.$$

命题5.3.4 设$\delta>0$, $f\in C(x_0-\delta,x_0+\delta)$, 在$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$上可微, 若

$$f'(x)\leq 0,\ x\in(x_0-\delta,x_0);\quad f'(x)\geq 0,\ x\in(x_0,x_0+\delta).$$

则x_0为f的极小值点. 反之为极大值点.

命题5.3.5 设f在内点x_0处二阶可导, 且$f'(x_0)=0$, 则若$f''(x_0)>0$, 则x_0为f的(严格)极小值点.

证明: 有高阶导数的定义要求$f'(x)$在x_0附近可计算, 再由极限保号性, $\exists\delta$使得

$$x\in(x_0-\delta,x_0)\text{时},\ f'(x)<0,$$

$$x\in(x_0,x_0+\delta)\text{时},\ f'(x)>0.$$

例5.3.4 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上二阶可导, 若f有界, 证明: $\exists\xi\in\mathbb{R}$, s.t. $f''(\xi)=0$.

证明: (反证法) 对于任意的$x\in\mathbb{R}$, $f''(x)\neq 0$. 由Darboux定理, 有f''不变号, 所以f'单调, 不妨设f'单调上升, 取$x_0\in\mathbb{R}$, $f'(x_0)\neq 0$.

当$f'(x_0)>0$时, $f(x)-f(x_0)=\displaystyle\int_{x_0}^{x}f'(t)\,\mathrm{d}t\geq f'(x_0)(x-x_0)\to+\infty$, $x\to+\infty$. 与f有界矛盾.

当$f'(x_0)<0$时, $f(x_0)-f(x)=\displaystyle\int_{x}^{x_0}f'(t)\,\mathrm{d}t\leq f'(x_0)(x_0-x)\to-\infty$, $x\to-\infty$. 与f有界矛盾.

4.4 凸函数

定义5.4.1 (凸函数) 设f在I上有定义, 若$\forall a,b\in I$, $a<b$, 有

$$f(x)\leq l(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),\quad \forall x\in[a,b].$$

则称f为I中的凸函数; 相应的给出凹函数的定义. 若上式取严格不等号, 则对应严格凸函数.

定义中的不等式可以等价地写成

$$f(ta+(1-t)b)\leq tf(a)+(1-t)f(b),\qquad \forall t\in(0,1).$$

例5.4.1 用凸函数证明Young不等式.

证明: e^x是凸函数, $p>1$, 且$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则

$$ab=e^{\ln ab}=e^{\frac{1}{p}\ln a^p+\frac{1}{q}\ln b^q}\leq\frac{1}{p}e^{\ln a^p}+\frac{1}{q}e^{\ln b^q}=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

定理5.4.1 (Jensen不等式) 设f是定义在I上的函数, 则f凸当且仅当$\forall x_i\in I$, $\lambda_i\geq 0$, $(i=1,2,\cdots,n)$, 且$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i).$$

对比习题3.3的13题.

13: 若f没有第二类间断点, 且$\forall x,y\in(a,b)$均有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2},$$

则$f\in C(a,b)$, 由此可证f在(a,b)上是凸的.

这要依赖f的连续性和实数的完备性, 比如考虑证明$f\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)\leq\dfrac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$. 但下面的证明更精巧.

命题5.4.3 设$f\in C(I)$, 则f凸当且仅当$\forall x_1<x_2\in I$, 有$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

证明: 取$a,b\in I$, 证明$f(x)$在(a,b)上位于$l(x)=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$之下即可.

$$g(x):=f(x)-l(x)\quad x\in[a,b]\Longrightarrow g(x)\in C[a,b].$$

取$M=\displaystyle\max_{x\in[a,b]}g(x)=g(x_0)$, 则当$x_0$靠近$a$时, $x_0\leq\dfrac{a+b}{2}$, $2x_0-a\in[a,b]$. 所以

$$M=g(x_0)=g\left(\frac{a+(2x_0-a)}{2}\right)\leq\frac{g(a)+g(2x_0-a)}{2}\leq M,$$

等号成立, 故$M=g(a)=0$.

推论5.4.4 设f在I上凸, 若f在I内达到最大值, 则f为常数.

证明: 设f在x_0达到最大值, 则$\forall a,b\in I$, $\exists t\in(0,1)$, s.t.

$$x_0=ta+(1-t)b\Longrightarrow f(x_0)=\max f\le tf(a)+(1-t)f(b)\le\max f.$$

等号成立. $f(x_0)=f(a)=f(b)$.

命题 5.4.2 (连续性) 设f在I中凸, 若$[a,b]\subseteq I$, $a,b\in I^\circ$, 则$f\in \mathrm{Lip}[a,b]$, 从而连续.

证明: 取$[a,b]\subseteq[a',b']\subseteq I$, $a',b'\in I^\circ$. 注意使用

$$\left(\frac{f(a)-f(a')}{a-a'}\le\right)\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le\frac{f(b)-f(y)}{b-y}\le\frac{f(b')-f(b)}{b'-b}.$$

命题5.4.5 (导数性质) 设f在I中凸, x为I的内点, 则f在x处左右导数存在, 且

$$f'_-(x)\le f'_+(x).$$

证明: 使用单调有界函数的极限存在. 设$x_0<x_1<x_2$, 证明: $k_{01}\le k_{02}\le k_{12}$.

命题3.3.4 设$f(x)$是定义在区间I上的单调函数, 则f的间断点至多可数.
由上面的命题, 凸函数的不可微点至多可数.

命题5.4.6 设f在I上可微, 则
(1) f凸当且仅当f'单调上升.
(2) f凸当且仅当, $\forall x_0,x\in I$, 有$f(x)\ge f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

证明: (1) $\Longrightarrow$: 同前; $\Longleftarrow$: 用中值定理.

$$a<x<b\Longrightarrow\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi_1)\le f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\Longrightarrow f\text{ 凸}.$$

(2) $\Longrightarrow$:

$$x>x_0\Longrightarrow f'(x_0)\le\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0};$$

$$x<x_0\Longrightarrow f'(x_0)\ge\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x};$$

$\Longleftarrow$:

$$a<x<b\Longrightarrow\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\le f'(x)\le\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\Longrightarrow f(x)\le\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$$

且$x=\lambda a+(1-\lambda)b$.

命题5.4.7 设$f\in C(I)$, 若f'_-存在且单调上升, 则f是凸函数.

证明: 设$x_0\in I$, 记$L(x)=f'_-(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, $g(x)=f(x)-L(x)$.
则$g'_-(x)=f'_-(x)-f'_-(x_0)$.

$$\Longrightarrow\begin{cases}x\le x_0\Longrightarrow g'_-(x)\le 0\Longrightarrow g(x)\ge g(x_0),\ x\to x_0^-\Longrightarrow g(x)\searrow,\ x\to x_0^-.\\ x\ge x_0\Longrightarrow g'_-(x)\ge 0\Longrightarrow g(x)\nearrow,\ x\to x_0^+.\end{cases}$$

所以$\min g=g(x_0)=0$. 所以$f(x)\ge L(x)=f'_-(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, $x\in I$.

设$x_i\in I$, $\lambda_i\ge0$, $\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i=1$, 记$x_0\in\sum\limits_{i=1}^n\lambda_ix_i$, 所以

$$\sum_{i=1}^n\lambda_if(x_i)\ge f'_-(x_0)\sum_{i=1}^n\lambda_i(x_i-x_0)+f(x_0)\sum_{i=1}^n\lambda_i=f(x_0).$$

命题5.4.8 若f在I中二阶可导, 则f凸当且仅当$f''\ge0$.

4.5 函数作图

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$, 则称$x=x_0$为$f$的垂直渐近线.

若

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0 \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0,$$

则称$y=ax+b$为f在无穷远处的渐近线.

4.6 L'Hôpital法则

定理5.6.1 (L'Hôpital法则) 设f,g在(a,b)中可导, 且$g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$, 又设

$$\lim_{x\to a+} f(x)=0=\lim_{x\to a+} g(x),$$

若极限

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ 存在(或为}\infty).$$

则

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

定理5.6.2 (L'Hôpital法则) 设f,g在(a,b)中可导, 且$g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$, 又设

$$\lim_{x\to a+} g(x)=\infty,$$

若极限

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

存在, (或为∞), 则

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l.$$

证明: 只证明$l<\infty$的情况, $\forall\epsilon>0$, $\exists\eta>0$, s.t.

$$l-\frac{\epsilon}{2}<\frac{f'(x)}{g'(x)}<l+\frac{\epsilon}{2},\qquad \forall x\in(a,a+\eta).$$

取$c=a+\eta$, 由Cauchy中值定理, $\exists\xi\in(x,c)$, s.t.

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\Longrightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\frac{f(c)}{g(x)}-\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\cdot\frac{g(c)}{g(x)},\quad \xi\in(x,c)\subseteq(a,a+\eta).$$

由 $\lim\limits_{x\to a+} g(x)=\infty$, 故存在$\delta<\eta$, s.t.

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\epsilon,\qquad \forall x\in(a,a+\delta).$$

例5.6.4 设f在$(a,+\infty)$上可微.

(1). 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot f'(x)=1$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

(2). 若存在$\alpha>0$, s.t.

$$\lim_{x\to+\infty}(\alpha\cdot f(x)+x\cdot f'(x))=\beta,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\beta}{\alpha}.$$

证明: (1). 当$x \to +\infty$, $\ln x \to +\infty$, 则

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = 1 \Longrightarrow f(x) \to +\infty, \ (x \to +\infty).$$

(2). 当$\alpha > 0$时, $x^\alpha \to +\infty$, $(x \to +\infty)$, 则

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha f(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1} f(x) + x^\alpha f'(x)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

4.7 Taylor展开

(1). 若$f(x)$在x_0处连续, 则

$$f(x) - f(x_0) = o(1).$$

(2). 若$f(x)$在x_0处可微, 则

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = o(x - x_0), \quad (x \to x_0).$$

注意, 这里f在x_0处可微, 但没说在x_0附近可微, 不能用L'Hôpital法则.

(3). 若$f(x)$在x_0处二阶可微, 则

$$f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 \right] = o\left((x - x_0)^2\right), \quad (x \to x_0).$$

定理5.7.1 (带Peano余项的Taylor公式) 设f在x_0处n阶可导, 则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad (x \to x_0).$$

证明: (归纳法+中值定理) 记

$$R_n(x) = f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right],$$

则

$$\frac{R_{k+1}(x)}{(x - x_0)^{k+1}} \to \frac{R'_{k+1}(x)}{(k+1)(x - x_0)^k} = \frac{o((x - x_0)^n)}{(k+1)(x - x_0)^k} = o(1).$$

定理5.7.2 (Taylor) 设f在(a,b)上$n+1$阶可导, $x_0, x \in (a,b)$. 则存在$\xi, \zeta \in (x, x_0)$或(x_0, x), s.t. Taylor展开的余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

称为Lagrange余项, 以及

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\zeta)(x - \zeta)^n (x - x_0),$$

称为Cauchy余项.

证明: 取

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k, \quad t \in (a,b).$$

对t求导, 得到

$$F'(t) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n.$$

所以

$$F(x) - F(x_0) = R_n(x).$$

Cauchy余项: 用Lagrange中值定理, $\exists \zeta = x_0 + \theta(x - x_0)$, $(0 < \theta < 1)$, s.t.

$$R_n(x) = F'(\zeta)(x - x_0).$$

Lagrange余项: 用Cauchy微分中值定理, $\exists\xi = x_0 + \eta(x - x_0)$, $(0 < \eta < 1)$, s.t.

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}.$$

上面的证明给出Taylor展开的积分余项公式

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n \,\mathrm{d}t.$$

应用 证明:

$$\int_0^1 (1 - t^2)^n \,\mathrm{d}t = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

证明: 设$f(x) = (1 + x)^{2n+1}$, $f(x)$在$x = 0$处Taylor展开:

$$(1 + x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} x^k + \int_0^x \frac{(2n+1)!}{n!}(1 + t)^n (x - t)^n \,\mathrm{d}t,$$

令$x = 1$, 所以

$$\int_0^1 (1 - t^2)^n \,\mathrm{d}t = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

这个积分可以换元法求解:

$$\int_0^1 (1 - t^2)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{2n+2}{2}\right).$$

定理5.7.4 (Taylor系数的唯一性) 设f在x_0处n阶可导, 且

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad (x \to x_0),$$

则

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \cdots, n.$$

证明: 给出Taylor展开的Peano余项表示, 两者作差比阶.

命题5.7.5 设$f(x)$在$x = 0$处的Taylor展开为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则

(1). $f(-x)$的Taylor展开为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n$;

(2). $f(x^k)$的Taylor展开为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn}$, 其中$k \in \mathbb{N}_+$;

(3). $x^k f(x)$的Taylor展开为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n}$, 其中$k \in \mathbb{N}_+$;

(4). $f'(x)$的Taylor展开为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$;

(5). $\displaystyle\int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t$的Taylor展开为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$;

(6). 如果$g(x)$在$x = 0$处的Taylor展开为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, 则$\lambda f(x) + \mu g(x)$的Taylor展开为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) x^n$, 其中$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\ln(1 - x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}\right) - \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} \,\mathrm{d}t.$$

$$\arctan x = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1 + t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{i}}{2} \ln \frac{1 - \mathrm{i}x}{1 + \mathrm{i}x}.$$

例5.7.5 Taylor展开收敛, 但不收敛到函数本身的例子.

定义

$$\phi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x>0.\end{cases}$$

在$x=0$处展开的Taylor级数恒为0.

4.8 Taylor公式和微分学的应用

Thm. 5.8.1 (函数极值的判断) 设f在x_0处n阶可导, 且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0,$$

则

(1). n为偶数, 若$f^{(n)}(x_0)<0$, 则x_0为极大值点; 若$f^{(n)}(x_0)>0$, 则x_0为极小值点.

(2). n为奇数时, x_0不是极值点.

Thm. 5.8.2 (Jensen不等式的余项) 设$f\in C[a,b]$, 在(a,b)上二阶可导. 当$x_i\in[a,b]$, $(1\le i\le n)$时, $\exists\xi\in(a,b)$, s.t.

$$f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i\right)-\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)=-\frac{1}{2}f''(\xi)\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j(x_i-x_j)^2,$$

其中$\lambda_i\ge 0$, $\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i=1$.

证明: 记

$$\overline{x}=\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i\in[a,b].$$

则

$$f(x_i)=f(\overline{x})+f'(x)(x_i-\overline{x})+\frac{1}{2}f''(\xi_i)(x_i-\overline{x})^2,\quad \xi_i\in(a,b).$$

所以

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)=f(\overline{x})+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(\xi_i)\lambda_i(x_i-\overline{x})^2.$$

而

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\lambda_i\lambda_j(x_i-x_j)^2.$$

所以

$$\frac{m}{4}\sum_{i,j=1}^n\lambda_i\lambda_j(x_i-x_j)^2\le\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)-f(\overline{x})\le\frac{M}{4}\sum_{i,j=1}^n\lambda_i\lambda_j(x_i-x_j)^2.$$

用Darboux定理.

用于求极限

例5.8.1 求

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right].$$

解:

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\quad(x\to\infty),$$

所以

$$x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}+o(1)\to\frac{1}{2}(x\to\infty).$$

例5.8.2 设f在0附近二阶可导, 且$|f''| \le M$, $f(0)=0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2}f'(0).$$

解:

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right)=f(0)+f'(0)\frac{k}{n^2}+R_{k,n},$$

其中

$$|R_{k,n}|=\frac{1}{2}\left|f''\left(\xi_{k,n}\right)\right|\left(\frac{k}{n^2}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}M\frac{k^2}{n^4},$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)&=f'(0)\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}R_{k,n}\\&=f'(0)\frac{n+1}{2n}+o(1)\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

Stirling公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}},\quad 0<\theta_n<1.$$

4.9 作业

8. 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上可微, 且$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=B$. 证明, 如果$A\neq B$, 则任给$\theta\in(0,1)$, 都有$\xi\in\mathbb{R}$, 使得

$$f'(\xi)=\theta A+(1-\theta)B.$$

9. 设$f(x)$在区间I中n阶可微, $x_1,x_2,\cdots,x_k$为I中的点. 证明存在$\xi\in I$, s.t.

$$\frac{1}{k}\left(f^{(n)}(x_1)+f^{(n)}(x_2)+\cdots+f^{(n)}(x_k)\right)=f^{(n)}(\xi).$$

10. 设$f(x)$在区间I中可微, $x_0\in I$. 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$存在, 则$f'(x)$在$x_0$处连续.

11. 设$f(x)$在(a,b)中可微, 如果$f'(x)$为单调函数, 则$f'(x)$在(a,b)中连续.

3. 设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导, 且$f(a)=f(b)=0$, $f'_+(a)f'_-(b)>0$. 证明: 存在$\xi\in(a,b)$, s.t. $f''(\xi)=0$.

6. 设$f(x)$为$[a,b]$上的三阶可导函数, 且$f(a)=f'(a)=f(b)=0$, 证明, 对于任意的$c\in[a,b]$, 存在$\xi\in(a,b)$, s.t.

$$f(c)=\frac{f'''(\xi)}{6}(c-a)^2(c-b).$$

8. 设$f(x)$在区间$[a,b]$上可导, 且存在$M>0$, 使得

$$|f'(x)|\le M,\quad \forall x\in[a,b].$$

证明:

$$\left|f(x)-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|\le\frac{M}{2}(b-a),\quad\forall x\in[a,b].$$

10. 设f在(a,b)上可微, 且$a<x_i\le y_i<b$, $i=1,2,\cdots,n$. 证明: 存在$\xi\in(a,b)$, s.t.

$$\sum_{i=1}^{n}[f(y_i)-f(x_i)]=f'(\xi)\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i).$$

11. 设f在$[a,+\infty)$上可微, 且

$$f(a)=0,\quad |f'(x)|\le|f(x)|,\quad\forall x\in[a,+\infty).$$

证明: $f\equiv 0$.

提示考虑$A=\{x\in[a,+\infty):f(x)=0\}$和$\sup A$.

11. 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上二阶可导, 若

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{|x|}=0,$$

则存在$\xi \in \mathbb{R}$, 使得$f''(\xi)=0$.

12. 设$f(0)=0$, $f'(x)$严格单调递增, 则$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上也严格单调递增.

11. 证明, 定义在$\mathbb{R}$上的有界凸函数是常数函数.

12. 设$f(x)\in C(I)$, 若$\forall x_0\in I$, $\exists \delta>0$, s.t. $f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$上凸, 则$f(x)$在I中凸.

13. 设f为区间I上的凸函数, x_0为I的内点. 若$f'_-(x_0)\le k\le f'_+(x_0)$, 则

$$f(x)\ge k(x-x_0)+f(x_0),\quad \forall x\in I.$$

并证明Jensen不等式.

15. 设$f\in C[a,b]$凸, 证明Hadamard不等式

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

16. (Schwarz symmetric derivative, Riemann derivative) 设$f\in C(\mathbb{R})$, 若$\forall x\in\mathbb{R}$, 均有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=0,$$

证明$f(x)$为线性函数.

连续性是必要的, 否则考虑符号函数. 这个极限不能被改善成

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}=0,$$

这只需要改变符号函数在0点处的值为1, 使其在0点处右连续.

提示: 证明$\forall \epsilon>0$, $f(x)+\epsilon x^2$是凸的, $f(x)-\epsilon x^2$是凹的, $f(x)$在$[a,b]$上位于直线$[f(a)+\epsilon a^2, f(b)+\epsilon b^2]$与直线$[f(a)-\epsilon a^2, f(b)-\epsilon b^2]$之间.

6. 是否存在$\mathbb{R}$上的凸函数, 使得$f(0)<0$, 且

$$\lim_{|x|\to+\infty}(f(x)-|x|)=0\ ?$$

5. 设f在点x_0处2阶可导, 且$f''(x_0)\ne 0$. 由微分中值定理, 当h充分小时, 存在$\theta=\theta(h)$, $(0<\theta<1)$, s.t.

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0+\theta h)h,$$

证明:

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}.$$

7. 设$f(x)$在$(a,+\infty)$中可微, 且

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=l,$$

证明:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=l.$$

9. 设$f''(x_0)$存在, $f'(x_0)\ne 0$, 求极限

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-\frac{1}{f'(x_0)(x-x_0)}\right].$$

10. 设$a_1\in(0,\pi)$, $a_{n+1}=\sin a_n$, $(n\ge 1)$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n=\sqrt{3}.$$

2. 设 $f(x)$ 是 x 的 n 次多项式, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的Taylor展开的 Peano 余项 $R_n(x)$ 恒为零. (提示: 考虑其它余项公式.)

10. 设 $f(x),g(x)$ 在 $(-1,1)$ 中无限次可微, 且

$$\left|f^{(n)}(x)-g^{(n)}(x)\right|\le n!|x|,\quad \forall x\in(-1,1), n=0,1,2,\cdots.$$

证明 $f(x)=g(x)$.

12. 设 f 在 x_0 附近可以表示为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k\left(x-x_0\right)^k+o\left(\left(x-x_0\right)^n\right) \quad\left(x \rightarrow x_0\right),$$

则 $f(x)$ 是否在 x_0 处 n 阶可导?

13. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f'(a)=f'(b)=0$. 证明, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

4. 设 $f(x)$ 在 x_0 的一个开邻域内 $n+1$ 次连续可微, 且 $f^{(n+1)}\left(x_0\right) \neq 0$, 其 Taylor 公式为

$$f\left(x_0+h\right)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right) h+\cdots+\frac{1}{n!} f^{(n)}\left(x_0+\theta h\right) h^n,$$

其中 $0<\theta<1$. 证明 $\lim\limits_{h \rightarrow 0} \theta=\dfrac{1}{n+1}$.

8. 设 $a_1 \in \mathbb{R}, a_{n+1}=\arctan a_n(n \geqslant 1)$. 求极限 $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} n a_n^2$.

10. 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导, 且

$$M_0=\sup_{x \in \mathbb{R}}|f(x)|<\infty, \quad M_2=\sup_{x \in \mathbb{R}}|f''(x)|<\infty.$$

证明 $M_1=\sup\limits_{x \in \mathbb{R}}|f'(x)|<\infty$, 且 $M_1^2 \leqslant 2 M_0 \cdot M_2$. (提示: 考虑 $f(x \pm h)$ 的 Taylor 展开.)

5 Riemann积分

5.1 Riemann可积

设定义在$[a,b]$区间上的函数$f(x)$, 将$[a,b]$分割为

$$\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

近似第i个小梯形的面积为$f(\xi_i)\Delta x_i$, 其中$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. 用$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$表示曲边梯形ABCD的面积的近似值, 称为$f$在$[a,b]$上的Riemann和. 若

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在, 其中$\|\pi\|=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$为分割的模. 则记为$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

定义6.1.1 (Riemann积分) 设f定义在$[a,b]$上, 若存在$I\in\mathbb{R}$, s.t. $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$, 对任何分割π, 只要$\|\pi\|<\delta$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\epsilon, \quad \forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i],\ i=1,2,\cdots,n,$$

则称f在$[a,b]$上Riemann可积或可积, I为f在$[a,b]$上的(定)积分, 记为

$$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

其中f称为被积函数, $[a,b]$称为积分区间, a,b分别称为积分下限与积分上限.

定理6.1.1 (可积的必要条件) 若f在$[a,b]$上可积, 则f在$[a,b]$上有界, 反之不然.

有界函数未必可积: Dirichlet函数$D(x)$, 对于任意的分割$\xi_i \in [x_{i-1},x_i]\setminus\mathbb{Q}$, 积分和为$0$; 当$\xi_i \in [x_{i-1},x_i]\cap\mathbb{Q}$时, 积分和为$1$. 所以$D(x)$的积分和没有极限.

对于分割

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

记

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),$$

令

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i, \quad s = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i,$$

称S是f关于π的Darboux上和, 简称上和, 记为$S(\pi)$或$S(\pi,f)$. s称为Darboux下和, 简称下和, 记为$s(\pi)$或$s(\pi,f)$.

称

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

为f在$[x_{i-1},x_i]$上的振幅. 则

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \Delta x_i.$$

引理6.1.2 设分割π'是从π添加k个分点得到的, 则

$$S(\pi) \geqslant S(\pi') \geqslant S(\pi) - (M-m)k\|\pi\|,$$
$$s(\pi) \leqslant s(\pi') \leqslant s(\pi) + (M-m)k\|\pi\|.$$

即, 对于给定的分割, 增加分点时下和不减, 上和不增.

证明: 只需要对$k=1$进行即可.

推论6.1.3 对于任何两个分割π_1和π_2, 有

$$s(\pi_1) \le S(\pi_2).$$

定理6.1.4 (Darboux)

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} S(\pi) = \inf_{\pi} S(\pi), \quad \lim_{\|\pi\|\to 0} s(\pi) = \sup_{\pi} s(\pi).$$

称$\inf\limits_{\pi} S(\pi)$为f在$[a,b]$上的上积分, $\sup\limits_{\pi} s(\pi)$为f在$[a,b]$上的下积分.

定理6.1.5 (可积的充要条件) 设f在$[a,b]$上有界, 则以下命题等价:

(1) f在$[a,b]$上Riemann可积.

(2) f在$[a,b]$上的上积分和下积分相等.

(3)

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \Delta x_i = 0.$$

(4) $\forall \epsilon > 0$, 存在$[a,b]$的分割π, s.t.

$$S(\pi) - s(\pi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \Delta x_i < \epsilon.$$

推论6.1.6 (1) 设$[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$, 如果$f$在$[a,b]$上可积, 则$f$在$[\alpha,\beta]$上也可积.

(2) 设$c \in (a,b)$, 若f在$[a,c]$及$[c,b]$上都可积, 则f在$[a,b]$上可积.

例6.1.1 设f,g在$[a,b]$上均可积, 则fg在$[a,b]$上也可积.

注意,

$$\begin{aligned}
\omega_i(fg) &= \sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]} \left|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')\right| \\
&= \sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]} \left|f(x')g(x') - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') - f(x'')g(x'')\right| \\
&\leqslant \sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]} \left[\left|f(x')\right|\left|g(x') - g(x'')\right| + \left|g(x'')\right|\left|f(x') - f(x'')\right|\right] \\
&\leqslant K\left(\omega_i(g) + \omega_i(f)\right),
\end{aligned}$$

并用前面的定理6.1.5 (3).

定理6.1.7 (可积函数类) (1) 若$f\in C[a,b]$, 则f在$[a,b]$上可积;

(2) 若有界函数f只在$[a,b]$上有限个点处不连续, 则f可积;

(3) 若f在$[a,b]$上单调, 则f可积.

证明: (2) 主要依赖以下不等式

$$\begin{aligned}
S(\pi) - s(\pi) &\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + 2M\sum_{i=1}^{N} 2\rho \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2M\cdot 2N\rho < \varepsilon.
\end{aligned}$$

(3) 主要依赖以下不等式

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \omega_i\cdot\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)\cdot\Delta x_i \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)\cdot\|\pi\| \\
&= \left(f(x_n) - f(x_0)\right)\|\pi\| \\
&= \left(f(b) - f(a)\right)\|\pi\| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

设f为$[a,b]$上定义的函数, 若存在$[a,b]$上的分割

$$\pi: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

使得f在每个小区间(x_{i-1},x_i)上均为常数, 则称f为阶梯函数.

推论6.1.8 阶梯函数均为可积函数.

定理6.1.9 (Riemann) 设f在$[a,b]$上有界, 则f可积的充要条件是$\forall\epsilon,\eta>0$, 存在$[a,b]$的分割π, s.t.

$$\sum_{\omega_i\geq\eta}\Delta x_i < \epsilon.$$

例6.1.3 设$f\in C[a,b]$, ϕ在$[\alpha,\beta]$上可积, $\phi([\alpha,\beta])\subseteq[a,b]$. 则$f\circ\phi$在$[\alpha,\beta]$上仍可积.

证明: f 在 $[a,b]$ 上一致连续. $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $x,y\in[a,b]$, $|x-y|<\delta$ 时, $|f(x)-f(y)|<\dfrac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}$. 因为 ϕ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, 则存在 $[\alpha,\beta]$ 的分割 $\pi:\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta$, 使得

$$\sum_{\omega_i(\phi)\geqslant\delta}\Delta t_i < \frac{\varepsilon}{4K+1},$$

其中 $K=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$. 于是

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\omega_i(f\circ\varphi)\cdot\Delta t_i &= \sum_{\omega_i(\phi)\geqslant\delta}\omega_i(f\circ\varphi)\cdot\Delta t_i + \sum_{\omega_i(\phi)<\delta}\omega_i(f\circ\varphi)\cdot\Delta t_i \\
&\leqslant 2K\cdot\sum_{\omega_i(\phi)\geqslant\delta}\Delta t_i + \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}\cdot\sum_{\omega_i(\phi)<\delta}\Delta t_i \\
&\leqslant 2K\cdot\frac{\varepsilon}{4K+1} + \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}\cdot(\beta-\alpha) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

两个可积函数的复合不可积的例子:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}\quad g(x)=R(x)\Longrightarrow f\circ g(x)=D(x).$$

可积函数复合连续函数不可积的例子:

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

设A为$[0,1]$上有正测度的类Cantor集, (a_i,b_i), $(i\in\mathbb{N}_+)$为A的邻接区间.

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 1-\frac{1}{2}(b_i-c_i)+\left|x-\frac{1}{2}(a_i+b_i)\right|, & x\in(a_i,b_i),\ i\in\mathbb{N}_+.\end{cases}$$

则

$$f\circ g(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\in[0,1]\setminus A.\end{cases}$$

定理6.1.10 (Lebsegue) 有界函数f在$[a,b]$上Riemann可积的充要条件是它的不连续点集D_f为零测集. 其中$D_f=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_{\frac{1}{n}}$, 而

$$D_\delta=\{x\in[a,b]:\omega(f,x)\geq\delta\},\quad \omega(f,x)=\lim_{r\to 0^+}\sup\{|f(x_1)-f(x_2)|:x_1,x_2\in(x-r,x+r)\cap[a,b]\}.$$

5.2 定积分的性质

线性性质, 积分区间可加性, 保号性, 绝对值不等式.

定理6.2.3 (积分第一中值定理) 设 f,g 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $g(x)$ 不变号, 则存在 μ, $\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)\leqslant\mu\leqslant\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\cdot\int_a^b g(x)dx.$$

引理 6.2.4. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 令

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad x\in[a,b],$$

则 F 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

注: 尽管这个变限积分常被用来和Newton-Leibnitz公式混用来求定积分, 但是这并不表示F是f的原函数. 根据导函数的介值定理, 如果F是f的原函数, 则f不能有间断点, 这对于可积函数f是条件不足的.

定理 6.2.5 (积分第二中值定理). 设 f 在 $[a,b]$ 上可积.

(1) 如果 g 在 $[a,b]$ 上单调递减, 且 $g(x)\geqslant 0$, $\forall x\in[a,b]$, 则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\cdot\int_a^\xi f(x)dx.$$

(2) 如果 g 在 $[a,b]$ 上单调递增, 且 $g(x)\geqslant 0$, $\forall x\in[a,b]$, 则存在 $\eta\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)\cdot\int_\eta^b f(x)dx.$$

(3) 一般地, 如果 g 为 $[a,b]$ 上的单调函数, 则存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\cdot\int_a^\zeta f(x)dx+g(b)\cdot\int_\zeta^b f(x)dx.$$

例 6.2.2.

设 $\beta \geqslant 0, b > a > 0$, 证明

$$\left|\int_a^b e^{-\beta x}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leqslant \frac{2}{a}.$$

证明. 对 $g(x) = \dfrac{e^{-\beta x}}{x}$, $f(x) = \sin x$ 用积分第二中值公式, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b e^{-\beta x}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{e^{-\beta a}}{a}\cdot\int_a^{\xi}\sin x dx = \frac{e^{-\beta a}}{a}(\cos a - \cos\xi)$$

这说明

$$\left|\int_a^b e^{-\beta x}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leqslant 2\frac{e^{-\beta a}}{a} \leqslant \frac{2}{a}.$$

例 6.2.3. 证明 $\lim\limits_{A\to\infty}\displaystyle\int_0^A \frac{\sin x}{x}dx$ 存在.

证明. 在上例中取 $\beta = 0$, 则当 $B > A > 0$ 时, 有

$$\left|\int_0^B \frac{\sin x}{x}dx - \int_0^A \frac{\sin x}{x}dx\right| = \left|\int_A^B \frac{\sin x}{x}dx\right| \leqslant \frac{2}{A} \to 0 \quad (A\to\infty),$$

例3.5.15 设$f \in C[a, b]$, g是周期为T的连续函数, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 6.2.6 (Riemann-Lebesgue). 设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的可积函数, 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx = 0, \quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = 0.$$

证明. 以第一个极限为例. 因为 f 可积, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 的分割

$$\pi : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f)\Delta x_i < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

又因为 f 有界, 故存在 K, 使得 $|f(x)| \leqslant K, \forall x \in [a, b]$. 于是当 $\lambda > \dfrac{4nK}{\varepsilon}$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx\right| &= \left|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\sin\lambda x dx\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x) - f(x_{i-1})]\sin\lambda x dx + \sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})\sin\lambda x dx\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x) - f(x_{i-1})|\,dx + \sum_{i=1}^n|f(x_{i-1})|\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sin\lambda x dx\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \omega_i(f)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n K\frac{1}{\lambda}|\cos\lambda x_{i-1} - \cos\lambda x_i| \\
&< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{2nK}{\lambda} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

5.3 微积分基本公式

定理 6.3.1 (微积分基本定理). 设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 且在 $x_0\in[a,b]$ 处连续, 则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 x_0 处可导, 且

$$F'(x_0)=f(x_0).$$

这个定理说明变限积分是函数f的原函数的条件是f在$[a,b]$上连续, 而不能有第一类间断点. 但第二类间断点是可以有的.

定理 6.3.3 (Newton-Leibniz 公式). 设 F 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $F'=f$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

(此式又写为 $\int_a^b F'(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)|_a^b$)

注: 可微函数的导函数不一定是可积的, 如函数

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上可微. 进一步还可以构造导函数有界但不可积的例子.

例 6.3.2. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续可微, $f(a)=0$, 则

$$\int_a^b f^2(x)dx\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b\left[f'(x)\right]^2dx.$$

证明:

$$\begin{aligned}f^2(x)=(f(x)-f(a))^2&=\left[\int_a^x f'(t)dt\right]^2\\ &\leqslant\int_a^x\left[f'(t)\right]^2dt\int_a^x 1^2dt\quad(\text{Cauchy}-\text{Schwarz})\\ &\leqslant(x-a)\int_a^b\left[f'(t)\right]^2dt.\end{aligned}$$

5.4 作业

6. 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的非负可积函数, 且 $\int_0^1 f(x)dx=0$. 证明, 任给 $\varepsilon>0$, 均存在子区间 $[\alpha,\beta]$, 使得 $f(x)<\varepsilon$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且存在常数 $C>0$, 使得 $|f(x)|\geqslant C(a\leqslant x\leqslant b)$. 证 明 $\frac{1}{f}$ 在 $[a,b]$ 上也是可积的.

11. 设 $f(x)>0$ 为 $[a,b]$ 上的可积函数, 证明 $\int_a^b f(x)dx>0$.

2. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上定义的函数. 如果 $f^2(x)$ 可积, 则 $|f(x)|$ 也可积.

6. 设 $f(x)\geqslant 0$ 在 $[a,b]$ 上可积, $\lambda\in\mathbb{R}$, 则

$$\left(\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx\right)^2\leqslant\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2.$$

(提示: $f=\sqrt{f}\cdot\sqrt{f}$, 用Cauchy-Schwarz不等式.)

9. 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}n\int_0^1 x^nf(x)dx=f(1)$. (提示: nx^n 在 $[0,1]$ 上积分趋于 1 , 在 $[0,\delta]$ 上很小, 如果 $0<\delta<1$.)

11. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可积函数, 则任给 $\varepsilon>0$, 存在连续函数 $g(x)$, 使得 $\inf f\leqslant g(x)\leqslant\sup f$, 且

$$\int_a^b|f(x)-g(x)|dx<\varepsilon.$$

12. 设 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上可积, 设 $[a,b]\subset(c,d)$, 则

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx=0.$$

6 不等式

例3.5.13 (Young不等式) 设 f 是 $[0,+\infty)$ 中的单调递增连续函数, $f(0)=0$, $f^{-1}(y)$ 表示 f 的反函数, 则当 $a,b>0$ 时

$$ab\leqslant\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy,$$

等号成立当且仅当 $b=f(a)$.

例 3.5.14 (Hölder 不等式). 设 f,g 为 $[a,b]$ 上非负连续函数, $p>1, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx\leqslant\left[\int_a^b f^p(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_a^b g^q(x)dx\right]^{\frac{1}{q}},$$

等号成立当且仅当 $f^p=cg^q$ 或 $cf^p=g^q, c$ 为常数.

应用重积分证明不等式的经典例子.

14. 设 $f(x),g(x)$ 为 $[a,b]$ 上同时单调递减或同时单调递增函数, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx.$$