现代分析试题

October 3, 2022

问题 1. 设$\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\cdots,\mathcal{E}_n$为$(X,\mathscr{A},\mu)$中的可测子集族, 其中每个$\mathcal{E}_i$都是$\pi$-系(即有限交封闭). 假设对于任意的$A_1\in\mathcal{E}_1,\cdots,A_n\in\mathcal{E}_n$有

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\mu\left(A_i\right).$$

证明, 对于任意的$B_1\in\sigma\left(\mathcal{E}_1\right),\cdots,B_n\in\sigma\left(\mathcal{E}_n\right)$有

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{n}B_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\mu\left(B_i\right).$$

问题 2. 设$1\le p<\infty$, $\{f_n\}_1^\infty$是$L^p\left(\Omega,\mu\right)$中序列, Ω为$\mathbb{R}^d$中有界集, μ为Lebesgue测度, f为可测函数, $f_n\to f$ $a.e.$且对于任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta_\varepsilon>0$, 使得对于任意的可测集E, 只要$\mu\left(E\right)\le\delta_\varepsilon$, 便有

$$\int_E\left|f_n\right|^p\,\mathrm{d}\mu\le\varepsilon,\quad\forall n.$$

证明f_n在L^p中收敛于f.

问题 3. 设$K\in L^1\left(\left[0,1\right]^2\right)$, 若对于任意的$f\in C_{[0,1]}$, 有

$$\int_{[0,1]}K\left(x,y\right)f\left(y\right)\,\mathrm{d}y=0,\ a.e.\ x\in\left[0,1\right].$$

证明$K\left(x,y\right)=0,\ a.e.$

问题 4. 在$[0,1]$上构造一个连续函数序列f_n, 使得$0\le f_n\le1$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1f_n\left(x\right)\,\mathrm{d}x=0,$$

但对于任何$x\in[0,1]$, $\{f_n\left(x\right)\}$都不收敛.

问题 5. 证明:

1. 设$f\in L^1\left(0,1\right)$, g是周期为1的连续函数, 证明

   $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1f\left(x\right)g\left(nx\right)\,\mathrm{d}x=\int_0^1f\,\mathrm{d}x\int_0^1g\,\mathrm{d}x,$$

   并给出Riemann-Lebesgue引理, 及

   $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1f\left(x\right)\left|\sin\left(nx\right)\right|\,\mathrm{d}x,\quad\lim_{n\to\infty}\int_0^1f\left(x\right)\sin^2\left(nx\right)\,\mathrm{d}x$$

   的值.

2. 设$\{n_k\}$为递增正整数序列, E是$(-\pi,\pi)$中使序列$\{\sin n_kx\}$收敛的x的点集. 证明E是Lebesgue零测集.