现代分析试题

December 17, 2019

问题 1. 设$\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\cdots,\mathcal{E}_n$为$(X,\mathscr{A},\mu)$中的可测子集族, μ为概率测度, 其中每个$\mathcal{E}_i$都是π-系(即有限交封闭). 假设对于任意的$\mathcal{A}\subset\{1,2,\cdots,n\}$, $A_i\in\mathcal{E}_i$, $i\in\mathcal{A}$有

$$\mu\left(\bigcap_{i\in\mathcal{A}}A_i\right)=\prod_{i\in\mathcal{A}}\mu\left(A_i\right).$$

证明, 对于任意的$B_1\in\sigma\left(\mathcal{E}_1\right),\cdots,B_n\in\sigma\left(\mathcal{E}_n\right)$有

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{n}B_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\mu\left(B_i\right).$$

Proof. 定义

$$\mathcal{G}_1\coloneqq\left\{E\in\sigma\left(\mathcal{E}_1\right):\mu\left(E\cap\left(\cap_iA_i\right)\right)=\mu\left(E\right)\prod_{i\geq 2}\mu\left(A_i\right),\forall A_i\in\mathcal{E}_i,\ i\geq 2\right\}.$$

则显然有$\mathcal{G}_1\subset\sigma\left(\mathcal{E}_1\right)$, 下证$\mathcal{G}_1\supset\sigma\left(\mathcal{E}_1\right)$, 由$\mathcal{E}_1$是$\pi$类, 故只需证$\mathcal{G}_1$是$\lambda$类, 即可.

(1). 显然$\Omega\in\mathcal{G}_1$;

(2). 若$E,F\in\mathcal{G}_1$且$E\supset F$, 则

$$\begin{aligned}\mu\left(\left(E\setminus F\right)\cap\left(\cap_{i\geq 2}A_i\right)\right)&=\mu\left[\left(E\cap\left(\cap_{i\geq 2}A_i\right)\right)\setminus\left(F\cap\left(\cap_{i\geq 2}A_i\right)\right)\right]\\&=\mu\left(E\cap\left(\cap_{i\geq 2}A_i\right)\right)-\mu\left(F\cap\left(\cap_{i\geq 2}A_i\right)\right)\\&=\left[\mu\left(E\right)-\mu\left(F\right)\right]\prod_{i\geq 2}\mu\left(A_i\right)\\&=\mu\left(E\setminus F\right)\prod_{i\geq 2}\mu\left(A_i\right).\end{aligned}$$

即$E\setminus F\in\mathcal{G}_1$.

(3). $\{F_j\}$为$\mathcal{G}_1$中的单调上升集列, 则

$$\begin{aligned}\mu\left(\left(\cup_{j=1}^{\infty}F_j\right)\cap\left(\cap_{i\geq 2}A_i\right)\right)&=\mu\left[\cup_{j=1}^{\infty}\left(F_j\cap\left(\cap_{i\geq 2}A_i\right)\right)\right]\\&=\lim_{j\to\infty}\mu\left(F_j\cap\left(\cap_{i\geq 2}A_i\right)\right)\\&=\lim_{j\to\infty}\mu\left(F_j\right)\prod_{i\geq 2}\mu\left(A_i\right)\\&=\mu\left(\cup_jF_j\right)\prod_{i\geq 2}\mu\left(A_i\right).\end{aligned}$$

即$\cup_jF_j\in\mathcal{G}_1$. 故$\mathcal{G}_1$为$\lambda$类, 于是$\forall B_1\in\sigma\left(\mathcal{E}_1\right)$, $B_i\in\mathcal{E}_i$, $i\geq 2$, 均有

$$\mu\left(\cap_{i=1}^{n}B_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\mu\left(B_i\right).$$

即$\sigma(\mathcal{E}_1), \mathcal{E}_2, \cdots, \mathcal{E}_n$相互独立, 同样构造$\mathcal{G}_2$如下

$$\mathcal{G}_2 \coloneqq \left\{ E \in \sigma(\mathcal{E}_2) : \mu(E \cap B_1 \cap (\cap_{i \geq 3} A_i)) = \mu(E)\, \mu(B_1) \prod_{i \geq 3} \mu(A_i),\ \forall B_1 \in \sigma(\mathcal{E}_1),\ A_i \in \mathcal{E}_i,\ i \geq 3 \right\}.$$

则同上可证$\sigma(\mathcal{E}_1), \sigma(\mathcal{E}_2), \mathcal{E}_3, \cdots, \mathcal{E}_n$相互独立, 如此下去, 由于$n$有限, 在有限次这样的过程可得$\sigma(\mathcal{E}_1)$, $\sigma(\mathcal{E}_2)$, $\cdots$, $\sigma(\mathcal{E}_n)$相互独立, 即得所要结论.

注: 有同学使用$\mathcal{E}$中的元素单调逼近$\Lambda(\mathcal{E})$中的元素, 其实$\mathcal{E}$中的元素可能无法逼近出$\Lambda(\mathcal{E})$中的元素, 如$\mathcal{E}$为$\mathbb{R}^2$中所有开方体, 而$[-2,2]^2 \setminus [-1,1]^2$不能由$\mathcal{E}$中元素单调逼近, 而只能由其中元素的并来逼近. □

问题 2. 设$1 \leq p < \infty$, $\{f_n\}_1^\infty$是$L^p(\Omega, m)$中序列, Ω为$\mathbb{R}^d$中有界集, m为Lebesgue测度, f为可测函数, $f_n \to f$ *a.e.*且对于任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta_\varepsilon > 0$, 使得对于任意的可测集E, 只要$m(E) \leq \delta_\varepsilon$, 便有

$$\int_E |f_n|^p \,\mathrm{d}m \leq \varepsilon, \quad \forall n.$$

证明f_n在L^p中收敛于f.

Proof. 由$f_n \to f$ *a.e.*, 所以由Fatou引理$\|f\|_p \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\| < \infty$. 所以$f \in L^p$.

由$f_n \to f$ *a.e.*, 且$m(\Omega) < \infty$, 使用Egoroff定理有$\forall \varepsilon > 0$, $\exists E \subset \Omega$, 使得$m(E) < \varepsilon$且在E^c上$f_n \rightrightarrows f$. 所以对于任意的$\varepsilon > 0$, 存在$N > 0$使得$\forall n > N$, $x \in E^c$有$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon^{1/p}$.

由题意以及$f \in L^p$知, 对于任意的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得只要$m(E) < \delta$, 便有$\int_E |f_n|^p \,\mathrm{d}m < \varepsilon$, $\forall n$, 且$\int_E |f|^p \,\mathrm{d}m < \varepsilon$(此处也可以使用Fatou引理得到$f$的控制). 所以

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f_n - f|^p \,\mathrm{d}m &= \int_E |f_n - f|^p \,\mathrm{d}m + \int_{E^c} |f_n - f|^p \,\mathrm{d}m \\
&\leq \int_E |f_n - f|^p \,\mathrm{d}m + \int_{E^c} \varepsilon \,\mathrm{d}m \\
&\leq 2^{p-1} \int_E |f_n|^p + |f|^p \,\mathrm{d}m + C\varepsilon \\
&\leq C\varepsilon.
\end{aligned}$$

由ε的任意性, f_n在L^p中收敛于f. □

问题 3. 设$K \in L^1\left([0,1]^2\right)$, 若对于任意的$f \in C([0,1])$, 有

$$\int_0^1 K(x,y) f(y) \,\mathrm{d}y = 0,\ a.e.\ x \in [0,1].$$

证明$K(x,y) = 0,\ a.e.$

Proof. 1. 由

$$\widehat{K}(\xi) = \int_0^1 \int_0^1 K(x,y)\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(\xi_1 x + \xi_2 y)} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = 0,$$

所以$K = 0,\ a.e.$. 因为$K \in L^1$, $\widehat{K} \equiv 0 \in L^1$, 所以$K = \left(\widehat{K}\right)^\vee = 0,\ a.e.$.

2. 由积分绝对连续性, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得$m(E) < \delta$时,

$$\int_E 2|K(x,y)| \,\mathrm{d}m < \varepsilon.$$

由$\mathrm{sgn} K(x,y) \in L^1\left([0,1]^2\right)$, 由Lusin定理, $\exists f \in C\left([0,1]^2\right)$使得$\mu(\{f \neq \mathrm{sgn} K\}) < \delta$且$|f| \leq 1$. 由$f(x,\cdot)$连续, 故

$$\int_0^1 \int_0^1 K(x,y) f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = 0.$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 |K(x,y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\int_0^1 K(x,y)(\mathrm{sgn}K-f)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\{f\neq \mathrm{sgn}K\}} K(x,y)(\mathrm{sgn}K-f)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &\le \int_{\{f\neq \mathrm{sgn}K\}} 2|K|\,\mathrm{d}m<\varepsilon.\end{aligned}$$

再由ε的任意性, $\|K\|_1=0$, 所以$K(x,y)=0,\ a.e.$.

3. $\forall F\in C\left([0,1]^2\right)$, 则$\forall x$有$F(x,\cdot)\in C([0,1])$, 故$\int_0^1 K(x,y)F(x,y)\,\mathrm{d}y=0$, 故

$$\int_0^1\int_0^1 F(x,y)K(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=0.$$

由$F,K\in L^1\left([0,1]^2\right)$, 及Fubini定理有$\int_{[0,1]^2}K\cdot F=0$. 取$F=\phi_n\in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, 使$\phi_n*K\to K\ \text{ in } L^1\left([0,1]^2\right)$. 又$\phi_n*K=0$, 故$K=0,\ a.e.$. □

问题 4. 在$[0,1]$上构造一个连续函数序列f_n, 使得$0\le f_n\le 1$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

但对于任何$x\in[0,1]$, $\{f_n(x)\}$都不收敛.

Proof. todo. □

问题 5. 证明:

1. 设$f\in L^1(0,1)$, g是周期为1的连续函数, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f\,\mathrm{d}x\int_0^1 g\,\mathrm{d}x,$$

   并给出Riemann-Lebesgue引理, 及

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x,\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\sin^2(nx)\,\mathrm{d}x$$

   的值.

2. 设$\{n_k\}$为递增正整数序列, E是$(-\pi,\pi)$中使序列$\{\sin n_kx\}$收敛的x的点集. 证明E是Lebesgue零测集.

Proof. (1). 由

$$\int_0^1 f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x=\int_0^n f\left(\frac{x}{n}\right)g(x)\,\mathrm{d}\frac{x}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_i^{i+1} f\left(\frac{x}{n}\right)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

若$f\in C[0,1]$, 则

$$\int_0^1 f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{x+i}{n}\right)g(x)\,\mathrm{d}x\to\int_0^1\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}tg(x)\,\mathrm{d}x\quad n\to\infty.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

若$f\in L^1[0,1]\setminus C[0,1]$, 则由$\widetilde{f}\in C[0,1]$, 使得$\forall\varepsilon>0$, $\int_0^1\left|\widetilde{f}-f\right|\mathrm{d}x<\varepsilon$. 从而

$$\int_0^1\left(\widetilde{f}-f\right)g(nx)\,\mathrm{d}x\le\|g\|_\infty\cdot\left\|\widetilde{f}-f\right\|_1\le\|g\|_\infty\cdot\varepsilon.$$

即有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1\widetilde{f}g(nx)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 fg(nx)\,\mathrm{d}x\right|\le\|g\|_\infty\varepsilon.$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\widetilde{f}g(nx)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

所以

$$\left|\int_0^1\widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}t\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\left|\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right|\left\|\widetilde{f}-f\right\|_1\le\varepsilon\left|\int_0^1 g\,\mathrm{d}x\right|.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1 fg(nx)\,\mathrm{d}x-\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\varepsilon\|g\|_\infty+\varepsilon\left|\int_0^1 g\,\mathrm{d}x\right|.$$

由ε的任意性,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

同理

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)|\sin nx|\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\sin^2 nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

类似可证:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x,\quad\forall f\in L^1[a,b],$$

其中g是周期为T的连续函数.

(2). 设$E=\{x:\sin(n_kx)\text{有极限}\}$, 定义$f(x)=\lim_{k\to\infty}\sin n_kx\cdot\chi_E(x)$, 则$f\in L^1$. 故

$$0=\lim_{k\to\infty}\int_0^\pi f(x)\sin n_kx=\lim_{k\to\infty}\int_E f(x)\sin n_kx=\int_E f^2(x)\,\mathrm{d}x\Longrightarrow f(x)=0\ a.e.$$

即$m(E)=0$.

注: E中使$\sin n_kx$有非零极限的点集是零测集, 同时使$\sin n_kx$取极限为零的点集可证得也是零测集. □

问题 6. 设$f\in L^2(\mathbb{R}^N)$且$E,F\subset\mathbb{R}^N$为有限Lebesgue测度, $\widehat{f}$为f的Fourier变换, 则

1. 存在$\eta\in(0,1)$, 使得

$$\left\|\chi_E\left(\chi_F\widehat{f}\right)^\vee\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\le\eta\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

   当且仅当, 存在$C_1\ge 0$有

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2\le C_1\left(\|f\|_{L^2(E^c)}^2+\left\|\widehat{f}\right\|_{L^2(F^c)}^2\right).$$

2. 证明

$$\left\|\widehat{f}\right\|_{L^2}=\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\le C\left(\|f\|_{L^2(E^c)}+\left\|\widehat{f}\right\|_{L^2(F^c)}\right),$$

   其中$C=C(N,E,F)$. 特别的, 若f和$\widehat{f}$都有紧支集, 则$f\equiv 0$.

Proof. 1. 必要性: 即$\exists\eta\in(0,1)$, 使得

$$\left\|\chi_E\left(\chi_F\widehat{f}\right)^\vee\right\|_{L^2}\leq\eta\left\|f\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

可推出$\exists C_1\geq 0$有

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\leq C_1\left(\|f\|^2_{L^2(E^c)}+\left\|\widehat{f}\right\|^2_{L^2(F^c)}\right).$$

(1). 若spt$\left(\widehat{f_1}\right)\subset F$, 则$\left(\chi_F\widehat{f_1}\right)^\vee=f_1$, 此时

$$\begin{aligned}\|f_1\|_{2,\mathbb{R}^N}&\leq\|\chi_E f_1\|_{2,\mathbb{R}^N}+\|\chi_{E^c}f_1\|_{2,\mathbb{R}^N}\\&=\left\|\chi_E\left(\chi_F\widehat{f_1}\right)^\vee\right\|_{2,\mathbb{R}^N}+\|\chi_{E^c}f_1\|_{2,\mathbb{R}^N}\\&\leq\eta\|f_1\|_{2,\mathbb{R}^N}+\|\chi_{E^c}f_1\|_{2,\mathbb{R}^N}.\end{aligned}$$

即

$$\|f_1\|_{2,\mathbb{R}^N}\leq\frac{1}{1-\eta}\|\chi_{E^c}f_1\|_{2,\mathbb{R}^N}=\frac{1}{1-\eta}\|f_1\|_{2,E^c}.$$

(2). 由于spt$\left(\chi_F\widehat{f}\right)\subset F$, 则

$$\begin{aligned}\|f\|_{2,\mathbb{R}^N}&=\left\|\widehat{f}\right\|_{2,\mathbb{R}^N}\\&\leq\left\|\chi_F\widehat{f}\right\|_{2,\mathbb{R}^N}+\left\|\chi_{F^c}\widehat{f}\right\|_{2,\mathbb{R}^N}\\&\leq\frac{1}{1-\eta}\left\|\left(\chi_F\widehat{f}\right)^\vee\right\|_{2,E^c}+\left\|\chi_{F^c}\widehat{f}\right\|_{2,\mathbb{R}^N}\\&\leq\frac{1}{1-\eta}\|f\|_{2,E^c}+\frac{1}{1-\eta}\left\|\left(\chi_{F^c}\widehat{f}\right)^\vee\right\|_{2,E^c}+\left\|\chi_{F^c}\widehat{f}\right\|_{2,\mathbb{R}^N}\\&\leq\frac{1}{1-\eta}\|f\|_{2,E^c}+\left(1+\frac{1}{1-\eta}\right)\left\|\chi_{F^c}\widehat{f}\right\|_{2,\mathbb{R}^N}\\&\leq\frac{1}{1-\eta}\|f\|_{2,E^c}+\left(1+\frac{1}{1-\eta}\right)\left\|\widehat{f}\right\|_{2,F^c}.\end{aligned}$$

所以$\exists C_1\geq 0$, 使得$\|f\|_{2,\mathbb{R}^N}\leq C_1\left(\|f\|_{2,E^c}+\left\|\widehat{f}\right\|_{2,F^c}\right)$.

充分性: 即$\exists C_1\geq 0$有

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\leq C_1\left(\|f\|^2_{L^2(E^c)}+\left\|\widehat{f}\right\|^2_{L^2(F^c)}\right).$$

可推出$\exists\eta\in(0,1)$, 使得

$$\left\|\chi_E\left(\chi_F\widehat{f}\right)^\vee\right\|_{L^2}\leq\eta\left\|f\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

因为

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{2,E}+\|f\|^2_{2,F}&=2\|f\|^2_{2,\mathbb{R}^N}-\|f\|^2_{2,E^c}-\left\|\widehat{f}\right\|^2_{2,F^c}\\&\leq\left(2-\frac{1}{C_1}\right)\|f\|^2_{2,\mathbb{R}^N}.\end{aligned}$$

若spt$\left(\widehat{f_2}\right)\subset F$, 则$\left\|\chi_F\widehat{f_2}\right\|^2_{2,\mathbb{R}^N}=\left\|\widehat{f_2}\right\|^2_{2,\mathbb{R}^N}=\|f_2\|_2^2$. 所以$\|f_2\|^2_{2,E}\leq\left(1-\frac{1}{C_1}\right)\|f_2\|_2^2$, 即

$$\frac{1}{C_1}\|f_2\|_2^2\leq\|f_2\|^2_{2,E^c}\leq\|f_2\|_2^2$$

, 从而$\frac{1}{C_1}<1$.

由$\operatorname{spt}\left(\chi_F\widehat{f}\right)\subset F$, 故

$$\left\|\left(\chi_F\widehat{f}\right)^{\vee}\right\|_2^2=\left\|\chi_E\left(\chi_F\widehat{f}\right)^{\vee}\right\|_2^2+\left\|\chi_{E^c}\left(\chi_F\widehat{f}\right)^{\vee}\right\|_2^2\geq\left\|\chi_E\left(\chi_F\widehat{f}\right)^{\vee}\right\|_2^2+\frac{1}{C_1}\left\|\chi_F\widehat{f}\right\|_2^2.$$

所以

$$\left\|\chi_E\left(\chi_F\widehat{f}\right)^{\vee}\right\|_2^2\leq\left(1-\frac{1}{C_1}\right)\left\|\left(\chi_F\widehat{f}\right)^{\vee}\right\|_2^2=\left(1-\frac{1}{C_1}\right)\left\|\chi_F\widehat{f}\right\|_2^2\leq\left(1-\frac{1}{C_1}\right)\left\|\widehat{f}\right\|_2^2=\left(1-\frac{1}{C_1}\right)\|f\|_2^2,$$

即得.

2. 考虑$L^2\to L^2$的线性算子: $T[f]=\chi_E\left(\chi_F\widehat{f}\right)^{\vee}$, 则

$$T[f](x)=\int_{\mathbb{R}^N}\chi_E(x)\left(\chi_F(x-y)\right)^{\vee}f(y)\,\mathrm{d}y,$$

从而

$$\|Tf\|_2=\left\|\chi_E\left(\chi_F\widehat{f}\right)^{\vee}\right\|_2\leq\left\|\left(\chi_F\widehat{f}\right)^{\vee}\right\|_2=\left\|\chi_F\widehat{f}\right\|_2\leq\|f\|_2.$$

故$\|T\|\leq 1$. 另外

$$\|T\|\leq\sqrt{|E|\cdot|F|}=:\sigma<+\infty.$$

令

$$A_\lambda:=\left\{f\in L^2\left(\mathbb{R}^N\right):T[f]=\lambda f\right\}.$$

则$\dim A_\lambda\leq\frac{\sigma^2}{\lambda^2}$, 设$\{f_k\}_{k=1}^n$为$A_\lambda$中的一组标准正交基, 由

$$T[f]=\int_{\mathbb{R}^N}\chi_E(x)\int_{\mathbb{R}^N}\chi_F\widehat{f}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi\cdot x}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x,\xi)\,\widehat{f}.$$

由Bessel不等式, $\int_{\mathbb{R}^N}K(x,y)\,f_k(x)\,\mathrm{d}x=\lambda f_k(y)$且$\int_{\mathbb{R}^N}f_j(y)\,\overline{f_k(y)}\,\mathrm{d}y=\delta_{jk}$, 有

$$m\lambda^2=\sum_{k=1}^m\left|\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}K(x,y)\,f_k(x)\,\overline{f_k(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|^2\leq\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}|K(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sigma^2.$$

用反证法, 若$\|T\|=1$, 则$\exists f\in L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$, $\operatorname{spt}f\subset E$, $\operatorname{spt}\widehat{f}\subset F$, 令$S_0=\operatorname{spt}f$, $S_1=S_0\cup(S_0-y_0)$, $S_{k+1}=S_k\cup(S_0-y_k)$, 其中$\{y_k\}$使$|S_k|<|S_{k+1}|<|S_k|+2^{-k}$. 令$f_k(x)=f(x+y_k)$, 则$\{f_k\}$线性无关且$\operatorname{spt}f_k\subset S_\infty:=\bigcup_{j=0}^\infty S_j$. 又$\operatorname{spt}\widehat{f_k}\subset F$, $\forall k>0$. 令$E=S_\infty$, 则$\dim(A_1)=\infty$矛盾.

故$\|T\|<1$, 即$\left\|\chi_E\left(\chi_F\widehat{f}\right)^{\vee}\right\|_2^2\leq\eta\|f\|_2^2$, 再由1. 即得. $\square$