

数学分析 - 梅加强

August 21, 2022

梅加强的大名在我上本科的时候就已经听说了, 现在去读他写的书到第二章的时候突然感受到他被奉为巨佬的原因, 不同于国内大多数数学分析教科书惯有的教学顺序, 这本书先讲掉了定积分再引进的导数, 不得不说国内这么干的, 这是我见过的第一本(虽然我也没读过几本国内大学自行出版的教材, 好在北大, 中科大的等等都大概翻过). 写这一小段文字只是突发感慨, 因为在读此之前确实也见过别的教科书这么干, 比如柯朗的《微积分和数学分析引论》也是先引入的积分再引入的导数, 这种与原来按部就班的学习形成对比, 微分和积分是实数完备性发展出来的两条支线, 最后在微积分基本定理它们融合了.

1 数列极限

定义 1. 给定序列 $\{a_n\}$, 实数 $A \in \mathbb{R}$, 如果

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), s.t. \forall n > N, |a_n - A| < \epsilon,$$

就称 $a_n \rightarrow A, n \rightarrow \infty$. 反面表述序列 $a_n \not\rightarrow A$:

$$\exists \epsilon > 0, s.t. \forall N = N(\epsilon), \exists n > N, |a_n - A| \geq \epsilon.$$

如果

$$\forall A > 0, \exists N, s.t. \forall n > N, a_n > A,$$

则称 $a_n \rightarrow +\infty$. 如果

$$\forall A < 0, \exists N, s.t. \forall n > N, a_n < A,$$

则称 $a_n \rightarrow -\infty$. 如果

$$\forall A > 0, \exists N, s.t. \forall n > N, |a_n| > A,$$

则称 $a_n \rightarrow \infty$.

性质 (极限的性质) 1. 序列极限如果存在, 必然唯一.

2. 序列极限收敛于有限实数, 必然有界. (这个性质可以弱化, 比如允许序列前几项中有 ∞ 出现, 这时本条的序列极限性质可以表述为, 从某项开始序列有界)

3. 保序性, 当 $a_n \rightarrow A, b_n \rightarrow B, a_n \geq b_n$, 则 $A \geq B$. 不等式 $a_n \geq b_n$ 可以换成 $a_n > b_n$.

1.1 求极限的方法

求极限没有通用方法, 不要有能学到通用方法的任何期待. 我们所能做的只有从最简单的方法到最复杂的方法进行逐个尝试.

1.1.1 $\epsilon - N$ 法

也就是定义法, 这个方法要求事先知道所求极限为何, 然后套用这一框架. 方法比较基本, 不再举例.

1.1.2 夹逼原理

这也是一个求解框架, 找到满足 $a_n \leq b_n \leq c_n$, 且 $a_n \rightarrow A, c_n \rightarrow A$ 的上下界来求解 b_n 的极限.

1.1.3 单调有界原理

主要用于求解抽象型极限问题.

例2.2.3 设 $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)$, $n \geq 1$, 求 a_n 的极限.

求解递推公式的极限问题常用不动点法先找到极限是什么. 也就是求解 $x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$, 得到 $x = \pm 1$.

注意到 $a_1 > 0$, 所以数列的每一项 $a_n > 0$. 并计算

$$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2a_n} (a_n - 1)^2 \geq 0 \implies a_{n+1} \geq 1, \quad \forall n \geq 1.$$

这表明当 $n \geq 2$ 时, $\frac{1}{a_n} \leq 1 \leq a_n$, 所以

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) \leq a_n.$$

序列 $\{a_n\}$ 从第二项起单调递减, 有下界 1. 递推方程的正不动点只有 $x = 1$, 所以 $a_n \rightarrow 1$.

事实上, 对于递推公式型极限问题也可以尝试求解它的通项公式, 比如

$$\frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1} + 1} = \left(\frac{a_n - 1}{a_n + 1} \right)^2.$$

1.1.4 重要极限

e 相关

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 \leq \left(\frac{n(1 + \frac{1}{n}) + 1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

$$\left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n = \left(\frac{n^2}{n^2 - 1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2 - 1} > 1 + \frac{1}{n} \implies \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Bernoulli 不等式

$$x \geq -1 \implies (1+x)^n \geq 1+nx,$$

等号当且仅当 $x = 0$ 取到. 推广形式

$$\prod_{k=1}^n (1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n x_k,$$

其中 $x_k \geq 0$. 注意, 这里给出的两种 Bernoulli 不等式的前提条件不同, 后者不能是 $x_k \geq -1$, 因为 $(1-x)(1+x) = 1-x^2 \leq 1$.

Euler 常数

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

例2.2.7 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \right).$$

1. 单调上升有上界.
2. $H_{2n} - H_n = \ln 2n - \ln n + o(1)$.
- 3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx.$$

4. Euler 求和公式

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \ln \frac{2n}{n+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n} \right) - \int_1^n \frac{\langle x \rangle}{(n+x)^2} dx.$$

Stirling 公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad \theta_n \in (0, 1).$$

1.1.5 上下极限

这种方法也常用于求解抽象型序列极限问题.

序列收敛的一个充要条件是, 序列的上下极限相等.

定义

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} a_k \right), \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq n} a_k \right)$$

命题2.2.4 1. 存在 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, $a_n \geq b_n$, 则

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

2.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

例2.2.12 设序列 (a_n) , $a_n \geq 0$, 满足 $a_{m+n} \leq a_m + a_n$, $\forall m, n \geq 1$. 证明 $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ 收敛.

证明: 设 $n > m$, 则 $n = mk + l$, 其中 $0 \leq l \leq m - 1$.

对于任意固定的 m , 有

$$a_n = a_{mk+l} \leq ka_m + a_l \implies \frac{a_n}{n} \leq \frac{ka_m}{km+l} + \frac{a_l}{n}.$$

不等式两边同时取上极限

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_m}{m}.$$

所以

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{m}.$$

1.1.6 Cauchy收敛准则

定义 序列 (a_n) , 如果 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N = N(\epsilon)$, s.t. $\forall m, n > N$, $|a_m - a_n| < \epsilon$, 则称 (a_n) 为Cauchy列.

其它表述: $\forall \epsilon > 0$, $\exists N = N(\epsilon)$, s.t. $\forall n > N$, $\forall p > 0$, $|a_{n+p} - a_n| < \epsilon$.

反面描述: $\exists \epsilon_0 > 0$, s.t. $\forall N$, $\exists m_0, n_0 > N$, 使得 $|a_{m_0} - a_{n_0}| \geq \epsilon_0$.

Cauchy列均有解. (这里仍然可以允许序列的前几项可以取 ∞ , 此时Cauchy除了开始的有限项外是有界序列).

序列 (a_n) 收敛当且仅当 (a_n) 是Cauchy列.

习题2 设序列 (a_n) 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+p} - a_n| = 0, \quad \forall p \geq 1.$$

问 (a_n) 是否是Cauchy列?

$a_n = H_n$ 就是反例.

1.1.7 Stolz公式

定理2.4.2 设序列 (x_n) , (y_n) , 其中 y_n 单调上升趋向 ∞ , 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = A.$$

注: 和洛必达法则的情况一样, 当

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

不存在时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$$

仍可能存在.

定理2.4.3 设 (y_n) 单调下降趋向于0, $(x_n) \rightarrow 0$, 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = A.$$

注 条件 $(x_n) \rightarrow 0$ 是必要的, 比如 $x_n \equiv C$ 是一个矛盾.

例2.1.15 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = A.$$

这个例子有多种证法, 使用Stolz公式只需一步.

例2.4.3 设 $x_1 \in (0, 1)$, $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, $\forall n \geq 1$. 证明 $nx_n \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$.

证明: 单调收敛证明 $x_{n+1} < x_n$. 假设极限为 x , 则 $x = x(1 - x)$, 解的 $x = 0$. 所以 $x_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. 从递推公式得到

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{1 - x_n} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

由Stolz公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x_n^{-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - (n-1)}{x_n^{-1} - x_{n-1}^{-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{1-x_n} - \frac{1}{1-x_{n-1}}} = 1.$$

不用Stolz公式的证法 和上面一样, x_n 单调收敛到0, 且有 $x_{n+1}^{-1} - x_n^{-1} = \frac{1}{1-x_n} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. 则

$$\frac{1}{nx_n} = \frac{x_n^{-1}}{n} = \frac{(x_n^{-1} - x_{n-1}^{-1}) + (x_{n-1}^{-1} - x_{n-2}^{-1}) + \cdots + (x_2^{-1} - x_1^{-1}) + x_1^{-1}}{n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{-1} - x_{n-1}^{-1}) = 1.$$

上面最后一步用到了例2.1.15.

习题9 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = A$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = A.$$

Stolz公式不是万能的, 比如

习题15 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B,$$

则

$$\frac{1}{n} (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1) = AB.$$

证明: 设 $a_n = A + \alpha_n$, $b_n = B + \beta_n$, 则问题不妨在 $A = B = 0$ 时证明即可. 其实

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (AB + A\beta_{n+1-k} + B\alpha_k + \alpha_k \beta_{n+1-k}) \\ &= AB + \frac{A}{n} \sum_{k=1}^n \beta_k + \frac{B}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_{n+1-k} \\ &= AB + A \cdot o(1) + B \cdot o(1) + M \cdot o(1) = AB + o(1). \end{aligned}$$

上式最后用到收敛序列有界的结论.

2 连续函数

2.1 函数的极限

设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为 x_0 的开邻域.

$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 称为 x_0 的去心开邻域.

定义3.1.1 设 $f(x)$ 定义在 x_0 的某个去心开邻域上, 若 $\exists A \in \mathbb{R}$, s.t. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon, x_0) \in (0, \delta_0)$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处有极限 A , 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \text{ or } f(x) \rightarrow A, x \rightarrow x_0.$$

注: 去心邻域说明 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可能没有定义.
可以类似的定义左右极限.

命题3.1.1 f 在 x_0 处有极限的充要条件是 f 在 x_0 的左右极限存在且相等.

命题3.1.2 (夹逼原理) 设在 x_0 的一个空心邻域内有

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x).$$

若 f_1, f_2 在 x_0 处的极限存在且等于 A , 则 $f(x)$ 在 x_0 处极限为 A .

命题3.1.3 (极限唯一性) 函数极限存在必然唯一.

$\epsilon - \delta$ 语言是证明函数极限的最简单框架, 其难点仅在于对不等式的掌握情况, 比如重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

对应不等式

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

同样类似地给出涉及无穷大与无穷远时的函数极限的定义.

2.2 函数极限的性质

定理3.1.5 (Heine, 归结原则) 设 f 定义在 x_0 的某个去心邻域上, f 在 x_0 处极限为 A 的充要条件是 $\forall x_n \rightarrow x_0$, $(n \rightarrow \infty)$, 且 $x_n \neq x_0$, $(\forall n)$, 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

证明: \Rightarrow : 是容易的; \Leftarrow : 用反证法, 则

$$\exists \epsilon_0 > 0, \text{ s.t. } \forall \delta > 0, \exists x_\delta, \text{ s.t. } 0 < |x_\delta - x_0| < \delta,$$

但 $|f(x_\delta) - A| \geq \epsilon_0$. 取 $\delta = \frac{1}{n}$, 构造子列 $(x_n) \rightarrow x_0$, 但 $|f(x_n) - A| \geq \epsilon_0$. 矛盾.

Heine定理可改述为: $f(x)$ 在 x_0 处有极限当且仅当, $\forall x_n \rightarrow x_0$, $(x_n \neq x_0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 存在.

定理3.1.6 (Cauchy准则) 设 f 在 x_0 的空心邻域上有定义, 则 f 在 x_0 处有极限, iff, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t. 当 $0 < |x' - x_0| < \delta, 0 < |x'' - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

注: 对于无穷远处极限有限时, Cauchy准则仍然成立.
给出Cauchy准则的否定表述.

定理3.1.7 (单调有界原理) 设 f 定义在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 上, 若 f 单调上升有上界, 或 f 单调下降有下界, 则 f 在 x_0 有左极限.

定理3.1.8 (1). (局部有界原理) 若 f 在 x_0 处有有限极限, 则 f 在 x_0 的某空心领域内有界.

(2). (保序性)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B, f(x) \geq g(x), \implies A \geq B.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B, A > B, \implies \exists U_{x_0}^\circ \text{ s.t. } f(x) > g(x), \forall x \in U_{x_0}^\circ.$$

(3). (四则运算)

定理3.1.9 (复合函数极限) 设 $f(y) \rightarrow A, y \rightarrow y_0; g(x) \rightarrow y_0, x \rightarrow x_0$, 且 $\exists U_{x_0}^\circ$, s.t. $\forall x \in U_{x_0}^\circ, g(x) \neq y_0$, 则 $f(g(x)) \rightarrow A, x \rightarrow x_0$.

这个定理说明极限定义中去心领域的重要性, 定理中 $y_0 \notin g(U_{x_0}^\circ)$ 不可以弱化为: 存在收敛于 x_0 的序列 (x_n) , 使得 $g(x_n) \neq y_0, \forall n$. 比如

$$f(y) = \begin{cases} 1, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases} \quad g(x) \equiv 0, y_0 = 0.$$

当 f 在 y_0 处连续时, 这个去心领域的条件又可以去掉, 这说明研究连续函数是有价值的.

2.3 无穷小量与无穷大量的阶

定义3.2.1 (无穷小量与无穷大量) 若函数 f 在 x_0 处的极限是0, 则称 f 在 $x \rightarrow x_0$ 时为无穷小量, 记为 $f(x) = o(1)$, ($x \rightarrow x_0$); 若 $x \rightarrow x_0$ 时, $|f| \rightarrow +\infty$, 则称 f 在 $x \rightarrow x_0$ 时为无穷大量.

在无穷远处也可以定义无穷小量和无穷大量, 数列也可以定义无穷小量和无穷大量.

定理3.2.1 (等价代换) 设 $x \rightarrow x_0$ 时, $f \sim f_1, g \sim g_1$, 若 $\frac{f_1}{g_1}$ 在 x_0 处有极限, 则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处有极限, 且极限相等.

几个常用的等价代换:

$$\tan x \sim \sin x \sim x \sim e^x - 1 \sim \ln(1 + x).$$

无穷小量的性质: 习题4. 设 $f(x) = o(1), (x \rightarrow x_0)$, 证明, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 有

- (1) $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$.
- (2) $o(cf(x)) = o(f(x))$, 其中 c 是常数.
- (3) $g(x) \cdot o(f(x)) = o(f(x)g(x))$, 其中 $g(x)$ 是有界函数.
- (4) $[o(f(x))]^k = o(f^k(x))$.

2.4 连续函数

用来刻画连续变化的量

定义3.3.1 (连续性) 若 f 在 x_0 的某领域上有定义, 且 f 在 x_0 处的极限是 $f(x_0)$, 则称 f 在点 x_0 处连续, x_0 称为 f 的连续点. 类似地可以定义左右连续. 在定义域上每一点都连续的函数称为连续函数.

f 在 x_0 处下半连续: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 总有 $f(x) > f(x_0) - \epsilon$.

f 在 x_0 处上半连续: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 总有 $f(x) < f(x_0) + \epsilon$.

连续函数的基本性质: (1). 保持四则运算;

(2). 若 f, g 连续, 则 $\max\{f, g\}$ 和 $\min\{f, g\}$ 均连续.

定理3.3.2 (复合函数连续性) 设 f 在 y_0 处连续, $g(x) \rightarrow y_0, x \rightarrow x_0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(y_0).$$

当 g 在 x_0 处连续时, $f(g(x))$ 在 x_0 处连续.

定义3.3.2 设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点, 如果 $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ 均存在且有限, 则称 x_0 是第一类间断点, 否则, 称为第二类间断点. 按照左右极限不相等和相等来区分跳跃间断点和可去间断点.

命题3.3.3 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调, $x_0 \in (a, b)$ 是 $f(x)$ 的间断点, 则 x_0 是跳跃间断点.

命题3.3.4 设 $f(x)$ 定义在区间 I 上的单调函数, 则 $f(x)$ 的间断点至多可数.

证明： 间断点 x 与开区间 $(f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$ 一一对应且至多可数.

命题3.3.5 若 $f(x)$ 定义在区间 I 上严格单调, 则 $f(x)$ 连续当且仅当 $f(I)$ 也是区间.

证明: \Rightarrow : 用介值定理. \Leftarrow : 反证法, 则有 x_0 使得 $(f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$ 不在区间 $f(I)$ 内, 矛盾.

推论3.3.6 定义在区间 I 上的严格单调连续函数 $f(x)$ 一定可逆, 且其逆严格单调连续.

2.5 闭区间上连续函数的性质

依赖实数系的基本性质

定理3.4.1 (有界性定理) 设 $f \in C[a, b]$, 则 f 在 $[a, b]$ 上有界.

证法一: 反证法, 取 $|f(x_n)| \geq n$, 由聚点定理 $\Rightarrow x_{n_k} \rightarrow x_0 \in [a, b]$, f 连续使得 $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$ 有界, 矛盾.

证法二: 连续点 x 处有邻域 $U_x(\delta_x)$, 使得其上 $|f - f(x)| \leq 1$, 这样的 (U_x) 形成 $[a, b]$ 的覆盖, 用有限覆盖定理.

定理3.4.2 (最值定理) 设 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上取到最值.

证法一: f 有界, $[a, b]$ 闭, 所以逼近上确界的点列 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 再由 f 连续得到最值点.

证法二: 反证法, 设 $f < M := \sup f$, 构造 $F(y) = \frac{1}{M - f(y)} \in C[a, b]$, 同样有界 $F(y) < K, K > 0$, 则 $\frac{1}{M - f(y)} < K$ 得出

$$\sup_x f(x) = M > f(y) + \frac{1}{K} \Rightarrow \sup_x f(x) \geq \sup_y f(y) + \frac{1}{K} > \sup_x f(x).$$

一般区间上连续函数最值判别法:

命题5.1.3 设 $f \in C(\mathbb{R})$, 且

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ (或 } -\infty \text{)}.$$

则 f 在 \mathbb{R} 上达到最小(大)值.

定理3.4.3 (零点定理, Bolzano) 设 $f \in C[a, b], f(a)f(b) < 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, s.t. $f(\xi) = 0$.

证法一: 区间二分法+区间套定理.

证法二: 用连续函数的保号性, 构造

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\},$$

取 $\xi = \sup A$, 则有 $x_n \in A, x_n \rightarrow \xi, f(x_n) < 0$, 所以 $f(\xi) \leq 0$. 反之, 在 (ξ, b) 上 $f \geq 0$, 取 $x_n \downarrow \xi$, 则 $f(x_n) \geq 0 \Rightarrow f(\xi) = 0$.

定理3.4.4 (介值定理) 设 $f \in C[a, b], \mu$ 严格介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间, 则存在 $\xi \in (a, b)$, s.t. $f(\xi) = \mu$.

推论3.4.5 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 则 $f([a, b]) = [m, M]$, 其中 m, M 是 f 在 $[a, b]$ 上的最小值, 最大值.

推论3.4.6 设区间 I 上, $f(x) \in C(I)$, 则 $f(I)$ 是区间. (可以退化为单点集)

注: 区间 I 可以无界, 可以是开集.

推论3.4.7 设 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数, 则 $f(x)$ 可逆的充要条件是 $f(x)$ 严格单调.

2.6 一致连续性

定义3.4.1 (一致连续) 设 $f(x)$ 定义在区间 I 上, 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$, s.t. 当 $x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$, 则称 $f(x)$ 在 I 中一致连续.

否定表述: $f(x)$ 在 I 中不一致连续: $\exists \epsilon_0 > 0$, 以及 $(a_n), (b_n) \subseteq I$, 且 $a_n - b_n \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$. 有 $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \epsilon_0$.

定理3.4.9 (Cantor定理) 闭区间上, 连续函数一致连续.

证法一: (反证), $\exists \epsilon_0 > 0, (a_n), (b_n) \subseteq [a, b], a_n - b_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, 且 $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \epsilon_0$. 用聚点定理取 (b_n) 的收敛子列 $b_{n_k} \rightarrow x_0 \in [a, b]$, 则 $a_{n_k} \rightarrow x_0$, 取极限.

证法二: 用连续性构造有限覆盖开集.

定义3.4.2 (振幅, 连续性模) 设 $f(x)$ 在 x_0 的开邻域内有定义, 称

$$\omega_f(x_0, r) = \sup \{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in B_{x_0}(r)\}, \quad r > 0.$$

为 f 在 $(x_0 - r, x_0 + r)$ 上的振幅, 显然, $\omega_f(x_0, r)$ 关于 $r \rightarrow 0+$ 递减, 故

$$\omega_f(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0+} \omega_f(x_0, r)$$

存在, (不一定有限). 称为 f 在点 x_0 处的振幅.

注: 定义提到的是两种振幅, 分别表征函数 f 在"区间"上和"一点"上的振幅.

命题3.4.10 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充要条件是 $\omega_f(x_0) = 0$.

命题3.4.11 $f(x)$ 在 I 中一致连续的充要条件是

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \omega_f(r) = 0,$$

其中

$$\omega_f(r) = \sup \{|f(x') - f(x'')| : \forall x', x'' \in I, |x' - x''| \leq r\}.$$

2.7 连续函数的积分

积分定义: 设 $f \in C[a, b]$, 直线 $x = a, x = b, y = 0$ 与曲线 $f(x)$ 的图像在平面上所围成图形的面积用 $\int_a^b f(x) dx$ 来表示, 称为 f 在 $[a, b]$ 上的积分.

命题3.5.1 设 $f \in C[a, b]$, $f_n(x)$ 是分段线性函数, 是将 $[a, b]$ 进行 n 等分, 分点 $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$, 在 $x \in [x_{i-1}, x_i]$ 时

$$f_n(x) = l_i(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}).$$

则 $\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon)$, 当 $n > N$ 时,

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

即 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$. 进而

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i. \end{aligned}$$

积分的基本性质 约定 $\int_a^a f(x) dx = 0$, $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.

(1) (线性性) $f, g \in C[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 则

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

(2) 若 $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$, 则

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b-a).$$

(3) (保序性) 若 $f \geq g$, $f, g \in C[a, b]$, 则 $\int_a^b f \geq \int_a^b g$. 特别地,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

(4) (区间可加性) 设 $f \in C(I)$, $a, b, c \in I$, 则

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

(5) 若 $f(x) \in C[a, b]$, 非负, 则 $\int_a^b f(x) \geq 0$, 等号仅当 $f \equiv 0$ 时取到.

例3.5.4 设 $f \in C[a, b]$, $c \in [a, b]$, 定义 $F(x) = \int_c^x f(t) dt$, $x \in [a, b]$, 则 F 是 Lipschitz 函数.

证明:

$$|F(x_2) - F(x_1)| \leq M \int_{x_1}^{x_2} dt.$$

命题3.5.2 (积分中值定理) 设 $f, g \in C[a, b]$, 若 g 不变号, 则 $\exists \xi \in [a, b]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

证明: 用连续函数介值定理.

例3.5.10 设 $f \in C[0, a]$, 定义

$$f_0(x) = f(x), \quad f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

证明: 存在 $\xi = \xi_{n,x} \in [0, x]$, s.t. $f_n(x) = f(\xi) \frac{x^n}{n!}$.

证明:

$$m \frac{x^n}{n!} \leq \int_0^x f_{n-1}(t) dt \leq M \frac{x^n}{n!},$$

用介值定理.

例3.5.12 求连续函数 f 满足

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

证明: 此题的条件可以弱化为 f 是可积函数. 取积分

$$\int_0^y f(x+t) dt = \int_x^{x+y} f(t) dt = \int_0^y f(x) dt + \int_0^y f(t) dt,$$

所以

$$\int_0^{x+y} f(t) dt = yf(x) + \int_0^x f(t) dt + \int_0^y f(t) dt.$$

交换 x, y 的位置即得 $yf(x) = xf(y)$, 再取 $y = 1$.

例3.5.15 设 $f \in C[a, b]$, g 是周期为 T 的连续函数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)g(nx) \, dx = \frac{1}{T} \int_a^b f(x) \, dx \int_0^T g(x) \, dx.$$

2.8 作业

3. 设 $b, \alpha > 0$, 求积分 $\int_0^b x^\alpha \, dx$, 利用积分计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}.$$

8. 设 $f \in C[a, b]$, 如果对于任意的 $g \in \{g \in C[a, b] : g(a) = g(b) = 0\}$, 均有 $\int_a^b f(x)g(x) \, dx = 0$, 则 $f \equiv 0$.

此题类比变分基本定理.

9. 设 $f \in C[a, b]$, 如果对于任意的 $g \in \left\{g \in C[a, b] : \int_a^b g(x) \, dx = 0\right\}$, 均有 $\int_a^b f(x)g(x) \, dx = 0$, 则 $f = C$ 为常函数.

提示: 设 f 的平均值为 C , 考虑 $g = f - C$ 和 g^2 的积分.

12. 设 $f \in C[a, b]$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^n \, dx \right)^{1/n} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

14. 设 $f, g \in C[a, b]$, 且 $f, g > 0$, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_a^b f^{n+1}(x)g(x) \, dx}{\int_a^b f^n(x)g(x) \, dx} = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

17. 设 $f(x) \in C[0, +\infty)$ 严格单调递增, 则

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt, & x > 0, \\ f(0), & x = 0 \end{cases}$$

也是严格单调递增连续函数.

18. 设 $f(x) \in C[a, b]$, $f > 0$, 则

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f^r(x) \, dx \right)^{1/r} = \exp \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) \, dx \right),$$

并用Hölder不等式说明上式左端关于 r 单调递增.

3 微分及其逆运算

3.1 可导与可微

研究函数的局部性质

定义4.1.1 (导数) 设 f 在 x_0 附近有定义, 如果极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在且有限, 则称 f 在 x_0 处可导, 极限称为 f 在 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$.

用 $\epsilon - \delta$ 语言表述.

命题4.1.1 设 f 在 x_0 处可导, 则 f 在 x_0 处连续.

命题4.1.2 (导数的运算法则) 设 f, g 在 x 处可导, 则 fg 也在 x 处可导; 对于任意的常数 α, β , $\alpha f + \beta g$ 也在 x 处可导. 且

- (1). $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$, (线性性);
- (2). $(fg)' = f'g + fg'$. (导性).

推论4.1.3 设 f, g 在 x_0 处可导, $g(x_0) \neq 0$, 则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处也可导, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

可以用导数表述曲线在一点处的切线和法线, 事实上仅仅是用导数给出了切线和法线的定义, 属于先有导数的概念才有的切线和法线的概念.

定义4.1.2 (微分) 设 f 在点 x_0 附近有定义, 如果存在常数 A , 使得

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0),$$

则称 f 在 x_0 处可微, 线性映射 $x \mapsto Ax$ 称为 f 在 x_0 处的微分, 记为 $df(x_0)$.

命题4.1.4 设 f 在 x_0 附近有定义, 则 f 在 x_0 处可导当且仅当 f 在 x_0 处可微, 且微分的斜率就是导数 $f'(x_0)$.

可导对应函数在一点差商存在极限, 可微对应函数的局部线性化, 产生线性变换的主项. f 在 x 处的微分是一个斜率为 $f'(x)$ 的线性映射, 当 x 变化时, 线性映射也变化, 即 $x \mapsto df(x)$ 是一个新的映射, 记为 df , 称为 f 的外微分或全微分.

x 的全微分 dx 把任意点 x 映为 x 处的恒等映射.

因为 $df(x)$ 和 dx 都是线性变换, 所以有 $df = f'(x)dx$.

把形如 $f dx$ 的表达式(f 为函数)称为1次微分形式.

可以把微分运算看做升维运算, 把 x 和 dx 看做两个独立的变量, dx 就是 Δx , 它与 x 的选取无关. df 把单变量函数 f 映射为二元函数 $df(x) = f'(x)dx$.

命题4.1.5 (链式法则) 设 g 在 x_0 处可导, f 在 $g(x_0)$ 处可导, 则复合函数 $f \circ g = f(g)$ 在 x_0 处可导, 且

$$(f(g))'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

证明依赖于下式

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + o(g(x) - g(x_0)) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + f'(g(x_0))o(x - x_0) + o(x - x_0) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \end{aligned}$$

命题4.1.6 (反函数求导法则) 设 f 在 x_0 附近有定义, 且反函数为 g . 若 f 在 x_0 处可导, 且导数非零, 则 g 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导, 且

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

这个定理并没有要求 f 在 x_0 附近每点上都连续. 导数 $f'(x_0) \neq 0$ 的条件不能省掉, 否则考虑 $f(x) = x^3$.

命题4.1.8 设 f, g 可微, 则

- (1) $d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$, 其中 α, β 为常数;
- (2) $d(fg) = gdf + fdg$;
- (3) $d(f/g) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$, 其中 $g \neq 0$.

命题4.1.9 设 f, g 均可微, 且复合函数 $f(g)$ 有定义, 则

$$d(f(g)) = f'(g)dg.$$

3.2 高阶导数

本节没有太多复杂的知识, 仅做一些结论的罗列.

定义4.2.1 (高阶导数) 设 f 在 x_0 附近可导, 如果导数 f' 在 x_0 处仍可导, 则称 f 在 x_0 处2阶可导. 记为

$$f''(x_0) = (f')'(x_0),$$

并称为 f 在 x_0 处的2阶导数.

一般地, 如果 f 在 x_0 附近 n ($n \geq 1$) 阶可导, 且 n 阶导函数 $f^{(n)}$ 在 x_0 处可导, 则称 f 在 x_0 处 $n+1$ 阶可导, 记为

$$f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'(x_0),$$

称为 f 的 $n+1$ 阶导数.

注: f 的2阶导数要求 f' 在 x_0 附近有定义, 也就是对于 x_0 附近的 x 能够计算 $f'(x)$ 的值. 另有一种用差分方法定义的二阶导数, 比如

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

它避免了计算 $f'(x)$, 而且允许一阶导数不存在, 而仅存在二阶导数. 一般用于推广导数的概念.

定义4.2.2 若 f 在区间 I 上的每点都 n 阶可导, 则称 f 在 I 中 n 阶可导; 如果 f 可导, 且导函数 f' 连续, 则称 f (1阶)连续可导, 记为 $f \in C^1(I)$; 一般 n 阶连续可导记为 $f \in C^n(I)$. 如果 f 有任意阶导数, 则称 f 是光滑的, 记为 $f \in C^\infty(I)$.

例4.2.3 可微函数的导函数不一定连续.

尽管导函数连续性丧失, 但仍有介值定理成立, 也就是Darboux介值定理.

例4.2.4 设 $k = 1, 2, \dots$, 则函数

$$f(x) = \begin{cases} x^{2k+1} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

有 $f \in C^k \setminus C^{k+1}$.

例4.2.5 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$$

是光滑函数.

命题4.2.1 设 f, g 均为 n 阶可导函数, 则

- (1) $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$
- (2) (Leibniz)

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

3.3 不定积分

命题4.3.1 设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' = 0$ 当且仅当 $f = C$.

此定理使用中值定理证明最为简洁, 书中使用的方法可以归为极端原理.

定义4.3.1 (原函数) 方程 $F'(x) = f(x)$ 的一个可微解 F 称为函数 f 的一个原函数.

定义4.3.2 (不定积分) 设函数 f 在区间 I 上有原函数, 用记号 $\int f(x) dx$ 表示 f 的原函数的一般表达式, 则

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad x \in I,$$

其中 C 为常数.

定理4.3.2 (Newton-Leibniz) 区间 I 中的连续函数都有原函数. 设 f 连续, $a \in I$, 则

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in I$$

是 f 的一个原函数.

需要注意Darboux介值定理, 将来会遇到有间断点的可积函数, 其变限积分在间断点处不可微, 所以不能形成一般非连续函数的原函数.

此定理称为微积分基本定理, 它有其它形式:

设 $f \in C(I)$, F 为 f 的任一原函数, 则存在常数 C , 使得, $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$, 所以

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F|_a^b.$$

另有一种表述是当 G 连续可微时,

$$\int_a^b G'(x)dx = G(b) - G(a) = G|_a^b.$$

上式对于 C^1 函数总是对的, 但需要注意Volterra函数, 它在定义的区间上处处可导, 且导函数有界, 但导函数不可定积分.

命题4.3.3 (不定积分的线性性质) 设 f, g 在区间 I 上均有原函数, 则

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx,$$

其中 α, β 为常数.

命题4.3.4 设 f 的原函数为 F , 若 f 可逆, 且 $g = f^{-1}$, 则

$$\int g(x)dx = xg(x) - F(g(x)) + C.$$

3.4 积分的计算

命题4.4.1 (换元积分法, 变量替换法) 设 $f(u)$ 是区间 J 上有定义的函数, $u = \phi(x)$ 是区间 I 中的可微函数, 且 $\phi(I) \subset J$.

(1) 设 f 在 J 上的原函数是 F , 则 $F(\phi)$ 是 $f(\phi)\phi'$ 在区间 I 上的原函数, 即

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(u)du + C = F(\phi(x)) + C;$$

(2) 设 ϕ 可逆, 且其逆可微, $\phi(I) = J$. 如果 $f(\phi(x))\phi'(x)$ 有原函数 G , 则 f 有原函数 $G(\phi^{-1}(u))$, 即

$$\int f(u)du = G(\phi^{-1}(u)) + C.$$

命题4.4.2 (分部积分法) 设 $u(x), v(x)$ 在区间 I 中可微, 若 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $u(x)v'(x)$ 也有原函数, 且

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

例4.4.10 设 $a \neq 0$, 求不定积分 $I = \int e^{ax} \cos bx dx$ 和 $J = \int e^{ax} \sin bx dx$.

例4.4.18 求不定积分

$$\int \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} dx, \quad 0 < r < 1.$$

不能用初等函数表述的不定积分:

$$e^{\pm x^2}, \sin(x^2), \cos(x^2), \frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}, \sqrt{1-k^2 \sin^2 x}, \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}, (0 < k < 1).$$

3.5 作业

19. 设 $a_{ij}(x)$ 均为可导函数, 求行列式函数 $\det(a_{ij}(x))_{n \times n}$ 的导数.
20. Riemann函数 $R(x)$ 处处不可导.
11. 通过对 $(1-x)^n$ 求导并利用二项式定理证明等式

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k k^m = \begin{cases} 0, & m = 0, 1, \dots, n-1, \\ (-1)^n n!, & m = n. \end{cases}$$

10. 求不定积分的递推公式 ($a \neq 0$):

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

11. 设 $a, b > 0$, 求不定积分的递推公式:

$$I_{mn} = \int \frac{dx}{(x+a)^m (x+b)^n}.$$

7. 设 f 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 且

$$2f(x) = f(x^2), \quad \forall x > 0.$$

证明 $f(x) = c \ln x$.

hint: 设 $g(x) = f(e^x)$. 题目条件可以弱化为 f 仅在 $x = 1$ 处可导.

$$g(x) = \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x/2^n} = g'(0)x$$

可导性不能省去, 否则考虑 $\max\{0, c \ln x\}$ 作为函数的另一个解.

3.6 简单的微分方程

例4.5.4 微分方程能够解出通解的表达式通常和朗斯基行列式有关.

4 微分中值定理和Taylor展开

4.1 函数极值

定义5.1.1 (极值点) 设 f 定义在 I 上, $x_0 \in I$, 若存在 $\delta > 0$, s.t.

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I,$$

则称 x_0 是 f 在 I 上的极小值点, $f(x_0)$ 称为极小值.

若 $x_0 \in I$, 且 $\forall x \in I, f(x) \geq f(x_0)$, 则称 x_0 是 f 在区间 I 上的最小值点, $f(x_0)$ 称为函数 f 在区间 I 上的最小值.

定理5.1.1 (Fermat定理) 设 x_0 是 f 在 I 上的极值点, 且 x_0 是内点, 若 f 在 x_0 处可导, 则 $f'(x_0) = 0$.

注: 由于极值点定义是在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$ 上给出的, 所以以上定理要加上 x_0 是内点.

证明: 使用极限的保号性, 判断

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

的符号.

满足 $f'(x_0) = 0$ 的点称为 f 的驻点, 临界点.

若 $f'(x_0) \geq 0$, 则 $\exists \delta > 0$, s.t. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 有 $(x - x_0)(f(x) - f(x_0)) \geq 0$, 但 f 在 x_0 附近不单调.

定理5.1.2 (Darboux) 设 f 为 $[a, b]$ 上的可导函数, 则 f' 可以取到 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 之间的任意值.

证明: 设 k 介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间, 定义 $g(x) = f(x) - kx$, 则

$$g'_+(a)g'_-(b) = (f'_+(a) - k)(f'_-(b) - k) \leq 0.$$

若上式等于零, 命题显然. 若上式小于零, 不妨设 $g'_+(a) > 0$, 此时 $x = a$ 不是最大值点; 并有 $g'_-(b) < 0$, 此时 $x = b$ 不是最大值点.

从而 $g(x)$ 只能在 $[a, b]$ 内取到最大值, 由Fermat定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, s.t. $g'(\xi) = 0$.

注: 导函数有介值定理, 但导函数可以不连续, 比如 $x^2 \sin \frac{1}{x}$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Darboux定理说明, 若 g' 在任何点处不为零, 则 g' 不变号.

Darboux定理的使用条件必须是区间内每点处可导.

例5.3.4 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上二阶可导, 若 f 有界, 证明: $\exists \xi \in \mathbb{R}$, s.t. $f''(\xi) = 0$.

证明: (反证法), $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \neq 0$, 由Darboux定理, f'' 不变号, 从而 f' 单调.

不妨设 f' 单调上升, 取 $x_0 \in \mathbb{R}$, $f'(x_0) \neq 0$. 因为

$$f'(x_0) > 0 \implies f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt \geq f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow +\infty,$$

与 f 有界矛盾; 而且

$$f'(x_0) < 0 \implies f(x_0) - f(x) = \int_x^{x_0} f'(t) dt \leq f'(x_0)(x_0 - x) \rightarrow -\infty, \quad x \rightarrow -\infty,$$

也与 f 有界矛盾.

4.2 微分中值定理

定理5.2.1 (Rolle) 设 $f \in C[a, b]$, 在 (a, b) 上可微, 且 $f(a) = f(b)$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, s.t. $f'(\xi) = 0$.

定理5.2.2 (Lagrange) 设 $f \in C[a, b]$, 在 (a, b) 上可微, 则存在 $\xi \in (a, b)$, s.t.

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

证明是构造性的, 对

$$F(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

使用Rolle定理.

定理5.2.3 (Cauchy) 设 $f, g \in C[a, b]$, 在 (a, b) 上可微, 且 $\forall x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$, 则

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证明: ($g(a) \neq g(b)$), 对

$$F(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) \right]$$

用Rolle定理.

几何意义: 定义参数曲线 $\vec{r}(t) = (g(t), f(t))$, $A = \vec{r}(a)$, $B = \vec{r}(b)$. 则 $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ 表示直线 ℓ_{AB} 的斜率.

Cauchy定理指出, $\exists \xi$ 使得 $\vec{r}(\xi)$ 处的切线方向 $\vec{r}'(\xi) \parallel \ell_{AB}$, 而 $\vec{r}'(\xi) = (g'(\xi), f'(\xi))$, 有

$$k_{AB} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

注：由于 $\forall x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$, 由Darboux介值定理 $g'(x)$ 不变号, $g(x)$ 其实是单调可逆的, 这可以给出另一种证法:

取 $A = g(a)$, $B = g(b)$, 不妨设 $A < B$, 则 $f(g^{-1}(y)) \in C[A, B]$, 由复合函数求导与反函数求导法则

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(g^{-1}(B)) - f(g^{-1}(A))}{B - A} = \frac{d}{dx} f(g^{-1}(x)) \big|_{x=\zeta} = f'(g^{-1}(\zeta)) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(\zeta))} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

其中 $g(\xi) = \zeta \in [A, B]$.

例5.2.4 设 $f(x) \in C[a, b]$, 在 (a, b) 二阶可导, 若 $f(a) = f(b) = 0$, 则对于任意的 $c \in [a, b]$, 存在 $\xi \in (a, b)$, s.t.

$$f(c) = \frac{f''(\xi)}{2}(c-a)(c-b).$$

证: (K值法) 设 K 满足 $f(c) = K(c-a)(c-b)$. 则 $f(x) - K(x-a)(x-b)$ 有三个零点 a, b, c . 故存在 $\xi \in (a, b)$, s.t. $f''(\xi) - 2K = 0$.

证法二: 构造

$$F(x) = f(x) - \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)$$

也有三个零点 a, b, c .

注: Lagrange插值公式 经过 $(x_i, f(x_i))_{i=1}^n$ 的 $n-1$ 次多项式有如下形式

$$p_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} f(x_i).$$

用K值法证明:

$$f(x) - p_{n-1}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \prod_{i=1}^n (x-x_i), \quad \xi \in (a, b).$$

例5.2.5 证明Legendre (勒让德)多项式 $\frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$ 在 $(-1, 1)$ 上有 n 个不同实根, 其中 $n \geq 1$.

证明: 多项式 $(x^2-1)^n$ 的直到 $n-1$ 次导数总有 ± 1 作为其零点, 用Rolle定理, 在每次求导时会多出现一个零点.

4.3 单调函数

命题5.3.2 设 $f \in C[a, b]$, 在 (a, b) 上可微, 则 f 单调当且仅当 f' 不变号.

证明: \Rightarrow : 用极限的保号性; \Leftarrow : 用Lagrange中值定理.

命题5.3.3 (反函数定理) 设 f 为区间 I 上的可微函数, 若 $f' \neq 0, \forall x \in I$. 则 f 可逆且反函数可微.

证明: 用反证法+Lagrange定理, f 是单射, 从而可逆, 由 f 连续得到 f 单调. 并且

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}.$$

命题5.3.4 设 $\delta > 0, f \in C(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 在 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 上可微, 若

$$f'(x) \leq 0, x \in (x_0 - \delta, x_0); \quad f'(x) \geq 0, x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

则 x_0 为 f 的极小值点. 反之为极大值点.

命题5.3.5 设 f 在内点 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0$, 则若 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 为 f 的(严格)极小值点.

证明: 有高阶导数的定义要求 $f'(x)$ 在 x_0 附近可计算, 再由极限保号性, $\exists \delta$ 使得

$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ 时, } f'(x) < 0,$$

$$x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ 时, } f'(x) > 0.$$

例5.3.4 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上二阶可导, 若 f 有界, 证明: $\exists \xi \in \mathbb{R}$, s.t. $f''(\xi) = 0$.

证明: (反证法) 对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \neq 0$. 由Darboux定理, 有 f'' 不变号, 所以 f' 单调, 不妨设 f' 单调上升, 取 $x_0 \in \mathbb{R}$, $f'(x_0) \neq 0$.

当 $f'(x_0) > 0$ 时, $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt \geq f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow +\infty, x \rightarrow +\infty$. 与 f 有界矛盾.

当 $f'(x_0) < 0$ 时, $f(x_0) - f(x) = \int_x^{x_0} f'(t) dt \leq f'(x_0)(x_0 - x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow -\infty$. 与 f 有界矛盾.

4.4 凸函数

定义5.4.1 (凸函数) 设 f 在 I 上有定义, 若 $\forall a, b \in I, a < b$, 有

$$f(x) \leq l(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad \forall x \in [a, b].$$

则称 f 为 I 中的凸函数; 相应的给出凹函数的定义. 若上式取严格不等号, 则对应严格凸函数.

定义中的不等式可以等价地写成

$$f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b), \quad \forall t \in (0, 1).$$

例5.4.1 用凸函数证明Young不等式.

证明: e^x 是凸函数, $p > 1$, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则

$$ab = e^{\ln ab} = e^{\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q} \leq \frac{1}{p} e^{\ln a^p} + \frac{1}{q} e^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

定理5.4.1 (Jensen不等式) 设 f 是定义在 I 上的函数, 则 f 凸当且仅当 $\forall x_i \in I, \lambda_i \geq 0, (i = 1, 2, \dots, n)$, 且 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

对比习题3.3的13题.

13: 若 f 没有第二类间断点, 且 $\forall x, y \in (a, b)$ 均有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2},$$

则 $f \in C(a, b)$, 由此可证 f 在 (a, b) 上是凸的.

这要依赖 f 的连续性和实数的完备性, 比如考虑证明 $f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leq \frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3}$. 但下面的证明更精巧.

命题5.4.3 设 $f \in C(I)$, 则 f 凸当且仅当 $\forall x_1 < x_2 \in I$, 有 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

证明: 取 $a, b \in I$, 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 上位于 $l(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ 之下即可.

$$g(x) := f(x) - l(x) \quad x \in [a, b] \implies g(x) \in C[a, b].$$

取 $M = \max_{x \in [a, b]} g(x) = g(x_0)$, 则当 x_0 靠近 a 时, $x_0 \leq \frac{a+b}{2}$, $2x_0 - a \in [a, b]$. 所以

$$M = g(x_0) = g\left(\frac{a + (2x_0 - a)}{2}\right) \leq \frac{g(a) + g(2x_0 - a)}{2} \leq M,$$

等号成立, 故 $M = g(a) = 0$.

推论5.4.4 设 f 在 I 上凸, 若 f 在 I 内达到最大值, 则 f 为常数.

证明: 设 f 在 x_0 达到最大值, 则 $\forall a, b \in I, \exists t \in (0, 1)$, s.t.

$$x_0 = ta + (1-t)b \implies f(x_0) = \max f \leq tf(a) + (1-t)f(b) \leq \max f.$$

等号成立. $f(x_0) = f(a) = f(b)$.

命题 5.4.2 (连续性) 设 f 在 I 中凸, 若 $[a, b] \subseteq I, a, b \in I^\circ$, 则 $f \in \text{Lip}[a, b]$, 从而连续.

证明: 取 $[a, b] \subseteq [a', b'] \subseteq I, a', b' \in I^\circ$. 注意使用

$$\left(\frac{f(a) - f(a')}{a - a'} \leq \right) \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(b) - f(y)}{b - y} \leq \frac{f(b') - f(b)}{b' - b}.$$

命题 5.4.5 (导数性质) 设 f 在 I 中凸, x 为 I 的内点, 则 f 在 x 处左右导数存在, 且

$$f'_-(x) \leq f'_+(x).$$

证明: 使用单调有界函数的极限存在. 设 $x_0 < x_1 < x_2$, 证明: $k_{01} \leq k_{02} \leq k_{12}$.

命题 3.3.4 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的单调函数, 则 f 的间断点至多可数.

由上面的命题, 凸函数的不可微点至多可数.

命题 5.4.6 设 f 在 I 上可微, 则

(1) f 凸当且仅当 f' 单调上升.

(2) f 凸当且仅当, $\forall x_0, x \in I$, 有 $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

证明: (1) \implies : 同前; \impliedby : 用中值定理.

$$a < x < b \implies \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \implies f \text{ 凸}.$$

(2) \implies :

$$x > x_0 \implies f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

$$x < x_0 \implies f'(x_0) \geq \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x};$$

\impliedby :

$$a < x < b \implies \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq f'(x) \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \implies f(x) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

且 $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$.

命题 5.4.7 设 $f \in C(I)$, 若 f'_- 存在且单调上升, 则 f 是凸函数.

证明: 设 $x_0 \in I$, 记 $L(x) = f'_-(x_0)(x - x_0) + f(x_0), g(x) = f(x) - L(x)$.

则 $g'_-(x) = f'_-(x) - f'_-(x_0)$.

$$\implies \begin{cases} x \leq x_0 \implies g'_-(x) \leq 0 \implies g(x) \geq g(x_0), & x \rightarrow x_0^- \implies g(x) \searrow, & x \rightarrow x_0^- \\ x \geq x_0 \implies g'_-(x) \geq 0 \implies g(x) \nearrow, & x \rightarrow x_0^+ \end{cases}$$

所以 $\min g = g(x_0) = 0$. 所以 $f(x) \geq L(x) = f'_-(x_0)(x - x_0) + f(x_0), x \in I$.

设 $x_i \in I, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, 记 $x_0 \in \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, 所以

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \geq f'_-(x_0) \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - x_0) + f(x_0) \sum_{i=1}^n \lambda_i = f(x_0).$$

命题 5.4.8 若 f 在 I 中二阶可导, 则 f 凸当且仅当 $f'' \geq 0$.

4.5 函数作图

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 则称 $x = x_0$ 为 f 的垂直渐近线.
若

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0,$$

则称 $y = ax + b$ 为 f 在无穷远处的渐近线.

4.6 L'Hôpital法则

定理5.6.1 (L'Hôpital法则) 设 f, g 在 (a, b) 中可导, 且 $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, 又设

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x),$$

若极限

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ 存在 (或为 } \infty \text{).}$$

则

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

定理5.6.2 (L'Hôpital法则) 设 f, g 在 (a, b) 中可导, 且 $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, 又设

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty,$$

若极限

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

存在, (或为 ∞), 则

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

证明: 只证明 $l < \infty$ 的情况, $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$, s.t.

$$l - \frac{\epsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall x \in (a, a + \eta).$$

取 $c = a + \eta$, 由Cauchy中值定理, $\exists \xi \in (x, c)$, s.t.

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \implies \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(c)}{g(x)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{g(c)}{g(x)}, \quad \xi \in (x, c) \subseteq (a, a + \eta).$$

由 $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$, 故存在 $\delta < \eta$, s.t.

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \epsilon, \quad \forall x \in (a, a + \delta).$$

例5.6.4 设 f 在 $(a, +\infty)$ 上可微.

(1). 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot f'(x) = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(2). 若存在 $\alpha > 0$, s.t.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha \cdot f(x) + x \cdot f'(x)) = \beta,$$

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\beta}{\alpha}.$$

证明: (1). 当 $x \rightarrow +\infty$, $\ln x \rightarrow +\infty$, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = 1 \implies f(x) \rightarrow +\infty, (x \rightarrow +\infty).$$

(2). 当 $\alpha > 0$ 时, $x^\alpha \rightarrow +\infty$, $(x \rightarrow +\infty)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha f(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1} f(x) + x^\alpha f'(x)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

4.7 Taylor展开

(1). 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则

$$f(x) - f(x_0) = o(1).$$

(2). 若 $f(x)$ 在 x_0 处可微, 则

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = o(x - x_0), \quad (x \rightarrow x_0).$$

注意, 这里 f 在 x_0 处可微, 但没说在 x_0 附近可微, 不能用L'Hôpital法则.

(3). 若 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可微, 则

$$f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 \right] = o((x - x_0)^2), \quad (x \rightarrow x_0).$$

定理5.7.1 (带Peano余项的Taylor公式) 设 f 在 x_0 处 n 阶可导, 则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad (x \rightarrow x_0).$$

证明: (归纳法+中值定理) 记

$$R_n(x) = f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right],$$

则

$$\frac{R_{k+1}(x)}{(x - x_0)^{k+1}} \rightarrow \frac{R'_{k+1}(x)}{(k+1)(x - x_0)^k} = \frac{o((x - x_0)^k)}{(k+1)(x - x_0)^k} = o(1).$$

定理5.7.2 (Taylor) 设 f 在 (a, b) 上 $n+1$ 阶可导, $x_0, x \in (a, b)$. 则存在 $\xi, \zeta \in (x, x_0)$ 或 (x_0, x) , s.t. Taylor展开的余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

称为Lagrange余项, 以及

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\zeta) (x - \zeta)^n (x - x_0),$$

称为Cauchy余项.

证明: 取

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k, \quad t \in (a, b).$$

对 t 求导, 得到

$$F'(t) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t) (x - t)^n.$$

所以

$$F(x) - F(x_0) = R_n(x).$$

Cauchy余项: 用Lagrange中值定理, $\exists \zeta = x_0 + \theta(x - x_0)$, $(0 < \theta < 1)$, s.t.

$$R_n(x) = F'(\zeta)(x - x_0).$$

Lagrange余项: 用Cauchy微分中值定理, $\exists \xi = x_0 + \eta(x - x_0)$, $(0 < \eta < 1)$, s.t.

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}.$$

上面的证明给出Taylor展开的积分余项公式

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt.$$

应用 证明:

$$\int_0^1 (1 - t^2)^n dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

证明: 设 $f(x) = (1+x)^{2n+1}$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处Taylor展开:

$$(1+x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x \frac{(2n+1)!}{n!} (1+t)^n (x-t)^n dt,$$

令 $x=1$, 所以

$$\int_0^1 (1 - t^2)^n dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

这个积分可以换元法求解:

$$\int_0^1 (1 - t^2)^n dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{2n+2}{2}\right).$$

定理5.7.4 (Taylor系数的唯一性) 设 f 在 x_0 处 n 阶可导, 且

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad (x \rightarrow x_0),$$

则

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

证明: 给出Taylor展开的Peano余项表示, 两者作差比阶.

命题5.7.5 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的Taylor展开为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则

(1). $f(-x)$ 的Taylor展开为 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n$;

(2). $f(x^k)$ 的Taylor展开为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn}$, 其中 $k \in \mathbb{N}_+$;

(3). $x^k f(x)$ 的Taylor展开为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n}$, 其中 $k \in \mathbb{N}_+$;

(4). $f'(x)$ 的Taylor展开为 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$;

(5). $\int_0^x f(t) dt$ 的Taylor展开为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$;

(6). 如果 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的Taylor展开为 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, 则 $\lambda f(x) + \mu g(x)$ 的Taylor展开为 $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) x^n$, 其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}\right) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

$$\arctan x = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt = \frac{i}{2} \ln \frac{1-ix}{1+ix}.$$

例5.7.5 Taylor展开收敛, 但不收敛到函数本身的例子.

定义

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0. \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处展开的Taylor级数恒为0.

4.8 Taylor公式和微分学的应用

Thm. 5.8.1 (函数极值的判断) 设 f 在 x_0 处 n 阶可导, 且

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

则

- (1). n 为偶数, 若 $f^{(n)}(x_0) < 0$, 则 x_0 为极大值点; 若 $f^{(n)}(x_0) > 0$, 则 x_0 为极小值点.
- (2). n 为奇数时, x_0 不是极值点.

Thm. 5.8.2 (Jensen不等式的余项) 设 $f \in C[a, b]$, 在 (a, b) 上二阶可导. 当 $x_i \in [a, b]$, $(1 \leq i \leq n)$ 时, $\exists \xi \in (a, b)$, s.t.

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) - \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) = -\frac{1}{2} f''(\xi) \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j (x_i - x_j)^2,$$

其中 $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

证明: 记

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in [a, b].$$

则

$$f(x_i) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x_i - \bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\xi_i)(x_i - \bar{x})^2, \quad \xi_i \in (a, b).$$

所以

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) = f(\bar{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) \lambda_i (x_i - \bar{x})^2.$$

而

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j (x_i - x_j)^2.$$

所以

$$\frac{m}{4} \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j (x_i - x_j)^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) - f(\bar{x}) \leq \frac{M}{4} \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j (x_i - x_j)^2.$$

用Darboux定理.

用于求极限

例5.8.1 求

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right].$$

解:

$$\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (x \rightarrow \infty),$$

所以

$$x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} + o(1) \rightarrow \frac{1}{2} (x \rightarrow \infty).$$

例5.8.2 设 f 在0附近二阶可导, 且 $|f''| \leq M$, $f(0) = 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2} f'(0).$$

解:

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f(0) + f'(0) \frac{k}{n^2} + R_{k,n},$$

其中

$$|R_{k,n}| = \frac{1}{2} |f''(\xi_{k,n})| \left(\frac{k}{n^2}\right)^2 \leq \frac{1}{2} M \frac{k^2}{n^4},$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) &= f'(0) \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n R_{k,n} \\ &= f'(0) \frac{n+1}{2n} + o(1) \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

Stirling公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad 0 < \theta_n < 1.$$

4.9 作业

8. 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上可微, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = B$. 证明, 如果 $A \neq B$, 则任给 $\theta \in (0, 1)$, 都有 $\xi \in \mathbb{R}$, 使得

$$f'(\xi) = \theta A + (1 - \theta)B.$$

9. 设 $f(x)$ 在区间 I 中 n 阶可微, x_1, x_2, \dots, x_k 为 I 中的点. 证明存在 $\xi \in I$, s.t.

$$\frac{1}{k} (f^{(n)}(x_1) + f^{(n)}(x_2) + \dots + f^{(n)}(x_k)) = f^{(n)}(\xi).$$

10. 设 $f(x)$ 在区间 I 中可微, $x_0 \in I$. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在, 则 $f'(x)$ 在 x_0 处连续.

11. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 中可微, 如果 $f'(x)$ 为单调函数, 则 $f'(x)$ 在 (a, b) 中连续.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, $f'_+(a)f'_-(b) > 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, s.t. $f''(\xi) = 0$.

6. 设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的三阶可导函数, 且 $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$, 证明, 对于任意的 $c \in [a, b]$, 存在 $\xi \in (a, b)$, s.t.

$$f(c) = \frac{f'''(\xi)}{6} (c-a)^2 (c-b).$$

8. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可导, 且存在 $M > 0$, 使得

$$|f'(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, b].$$

证明:

$$\left| f(x) - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \leq \frac{M}{2} (b-a), \quad \forall x \in [a, b].$$

10. 设 f 在 (a, b) 上可微, 且 $a < x_i \leq y_i < b$, $i = 1, 2, \dots, n$. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, s.t.

$$\sum_{i=1}^n [f(y_i) - f(x_i)] = f'(\xi) \sum_{i=1}^n (y_i - x_i).$$

11. 设 f 在 $[a, +\infty)$ 上可微, 且

$$f(a) = 0, \quad |f'(x)| \leq |f(x)|, \quad \forall x \in [a, +\infty).$$

证明: $f \equiv 0$.

提示考虑 $A = \{x \in [a, +\infty) : f(x) = 0\}$ 和 $\sup A$.

11. 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上二阶可导, 若

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{|x|} = 0,$$

则存在 $\xi \in \mathbb{R}$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

用Darboux定理

12. 设 $f(0) = 0$, $f'(x)$ 严格单调递增, 则 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上也严格单调递增.

11. 证明, 定义在 \mathbb{R} 上的有界凸函数是常数函数.

12. 设 $f(x) \in C(I)$, 若 $\forall x_0 \in I$, $\exists \delta > 0$, s.t. $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上凸, 则 $f(x)$ 在 I 中凸.

13. 设 f 为区间 I 上的凸函数, x_0 为 I 的内点. 若 $f'_-(x_0) \leq k \leq f'_+(x_0)$, 则

$$f(x) \geq k(x - x_0) + f(x_0), \quad \forall x \in I.$$

并证明Jensen不等式.

15. 设 $f \in C[a, b]$ 凸, 证明Hadamard不等式

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

16. (Schwarz symmetric derivative, Riemann derivative) 设 $f \in C(\mathbb{R})$, 若 $\forall x \in \mathbb{R}$, 均有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = 0,$$

证明 $f(x)$ 为线性函数.

连续性是必要的, 否则考虑符号函数. 这个极限不能被改善成

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} = 0,$$

这只需要改变符号函数在0点处的值为1, 使其在0点处右连续.

提示: 证明 $\forall \epsilon > 0$, $f(x) + \epsilon x^2$ 是凸的, $f(x) - \epsilon x^2$ 是凹的, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上位于直线 $[f(a) + \epsilon a^2, f(b) + \epsilon b^2]$ 与直线 $[f(a) - \epsilon a^2, f(b) - \epsilon b^2]$ 之间.

6. 是否存在 \mathbb{R} 上的凸函数, 使得 $f(0) < 0$, 且

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f(x) - |x|) = 0 ?$$

5. 设 f 在点 x_0 处2阶可导, 且 $f''(x_0) \neq 0$. 由微分中值定理, 当 h 充分小时, 存在 $\theta = \theta(h)$, $(0 < \theta < 1)$, s.t.

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta h)h,$$

证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}.$$

7. 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 中可微, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + f'(x)] = l,$$

证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

9. 设 $f''(x_0)$ 存在, $f'(x_0) \neq 0$, 求极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)(x - x_0)} \right].$$

10. 设 $a_1 \in (0, \pi)$, $a_{n+1} = \sin a_n$, $(n \geq 1)$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} a_n = \sqrt{3}.$$

2. 设 $f(x)$ 是 x 的 n 次多项式, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的Taylor展开的Peano余项 $R_n(x)$ 恒为零. (提示: 考虑其它余项公式.)

10. 设 $f(x), g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 中无限次可微, 且

$$|f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)| \leq n!|x|, \quad \forall x \in (-1, 1), n = 0, 1, 2, \dots$$

证明 $f(x) = g(x)$.

12. 设 f 在 x_0 附近可以表示为

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad (x \rightarrow x_0),$$

则 $f(x)$ 是否在 x_0 处 n 阶可导?

13. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$. 证明, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

4. 设 $f(x)$ 在 x_0 的一个开邻域内 $n+1$ 次连续可微, 且 $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, 其 Taylor 公式为

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h) h^n,$$

其中 $0 < \theta < 1$. 证明 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}$.

8. 设 $a_1 \in \mathbb{R}, a_{n+1} = \arctan a_n (n \geq 1)$. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n^2$.

10. 设 f 在 \mathbb{R} 上二阶可导, 且

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty, \quad M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)| < \infty.$$

证明 $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| < \infty$, 且 $M_1^2 \leq 2M_0 \cdot M_2$. (提示: 考虑 $f(x \pm h)$ 的 Taylor 展开.)

5 Riemann积分

5.1 Riemann可积

设定义在 $[a, b]$ 区间上的函数 $f(x)$, 将 $[a, b]$ 分割为

$$\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

近似第 i 个小梯形的面积为 $f(\xi_i) \Delta x_i$, 其中 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. 用 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 表示曲边梯形 ABCD 的面积近似值, 称为 f 在 $[a, b]$ 上的 Riemann 和. 若

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

存在, 其中 $\|\pi\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$ 为分割的模. 则记为 $\int_a^b f(x) dx$.

定义 6.1.1 (Riemann 积分) 设 f 定义在 $[a, b]$ 上, 若存在 $I \in \mathbb{R}$, s.t. $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对任何分割 π , 只要 $\|\pi\| < \delta$, 就有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \epsilon, \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则称 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积或可积, I 为 f 在 $[a, b]$ 上的 (定) 积分, 记为

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

其中 f 称为被积函数, $[a, b]$ 称为积分区间, a, b 分别称为积分下限与积分上限.

定理6.1.1 (可积的必要条件) 若 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则 f 在 $[a, b]$ 上有界, 反之不然.

有界函数未必可积: Dirichlet函数 $D(x)$, 对于任意的分割 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \setminus \mathbb{Q}$, 积分和为0; 当 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \cap \mathbb{Q}$ 时, 积分和为1. 所以 $D(x)$ 的积分和没有极限.

对于分割

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

记

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

令

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i, \quad s = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i,$$

称 S 是 f 关于 π 的Darboux上和, 简称上和, 记为 $S(\pi)$ 或 $S(\pi, f)$. s 称为Darboux下和, 简称下和, 记为 $s(\pi)$ 或 $s(\pi, f)$. 称

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

为 f 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅. 则

$$S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i.$$

引理6.1.2 设分割 π' 是从 π 添加 k 个分点得到的, 则

$$\begin{aligned} S(\pi) &\geq S(\pi') \geq S(\pi) - (M - m)k\|\pi\|, \\ s(\pi) &\leq s(\pi') \leq s(\pi) + (M - m)k\|\pi\|. \end{aligned}$$

即, 对于给定的分割, 增加分点时下和不减, 上和不减.

证明: 只需要对 $k = 1$ 进行即可.

推论6.1.3 对于任何两个分割 π_1 和 π_2 , 有

$$s(\pi_1) \leq S(\pi_2).$$

定理6.1.4 (Darboux)

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} S(\pi) = \inf_{\pi} S(\pi), \quad \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} s(\pi) = \sup_{\pi} s(\pi).$$

称 $\inf_{\pi} S(\pi)$ 为 f 在 $[a, b]$ 上的上积分, $\sup_{\pi} s(\pi)$ 为 f 在 $[a, b]$ 上的下积分.

定理6.1.5 (可积的充要条件) 设 f 在 $[a, b]$ 上有界, 则以下命题等价:

- (1) f 在 $[a, b]$ 上Riemann可积.
- (2) f 在 $[a, b]$ 上的上积分和下积分相等.
- (3)

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i = 0.$$

- (4) $\forall \epsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 的分割 π , s.t.

$$S(\pi) - s(\pi) = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i < \epsilon.$$

推论6.1.6 (1) 设 $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$, 如果 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则 f 在 $[\alpha, \beta]$ 上也可积.

- (2) 设 $c \in (a, b)$, 若 f 在 $[a, c]$ 及 $[c, b]$ 上都可积, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积.

例6.1.1 设 f, g 在 $[a, b]$ 上均可积, 则 fg 在 $[a, b]$ 上也可积.

注意,

$$\begin{aligned}\omega_i(fg) &= \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| \\ &= \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x')g(x') - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') - f(x'')g(x'')| \\ &\leq \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} [|f(x')| |g(x') - g(x'')| + |g(x'')| |f(x') - f(x'')|] \\ &\leq K(\omega_i(g) + \omega_i(f)),\end{aligned}$$

并用前面的定理6.1.5 (3).

定理6.1.7 (可积函数类) (1) 若 $f \in C[a, b]$, 则 f 在 $[a, b]$ 上可积;

(2) 若有界函数 f 只在 $[a, b]$ 上有限个点处不连续, 则 f 可积;

(3) 若 f 在 $[a, b]$ 上单调, 则 f 可积.

证明: (2) 主要依赖以下不等式

$$\begin{aligned}S(\pi) - s(\pi) &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + 2M \sum_{i=1}^N 2\rho \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot 2N\rho < \varepsilon.\end{aligned}$$

(3) 主要依赖以下不等式

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \Delta x_i \\ &\leq \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \|\pi\| \\ &= (f(x_n) - f(x_0)) \|\pi\| \\ &= (f(b) - f(a)) \|\pi\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

设 f 为 $[a, b]$ 上定义的函数, 若存在 $[a, b]$ 上的分割

$$\pi : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

使得 f 在每个小区间 (x_{i-1}, x_i) 上均为常数, 则称 f 为阶梯函数.

推论6.1.8 阶梯函数均为可积函数.

定理6.1.9 (Riemann) 设 f 在 $[a, b]$ 上有界, 则 f 可积的充要条件是 $\forall \epsilon, \eta > 0$, 存在 $[a, b]$ 的分割 π , s.t.

$$\sum_{\omega_i \geq \eta} \Delta x_i < \epsilon.$$

例6.1.3 设 $f \in C[a, b]$, ϕ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可积, $\phi([\alpha, \beta]) \subseteq [a, b]$. 则 $f \circ \phi$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上仍可积.

证明: f 在 $[a, b]$ 上一致连续. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x, y \in [a, b], |x - y| < \delta$ 时, $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)}$. 因为 ϕ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可积, 则存在 $[\alpha, \beta]$ 的分割 $\pi : \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta$, 使得

$$\sum_{\omega_i(\phi) \geq \delta} \Delta t_i < \frac{\varepsilon}{4K + 1},$$

其中 $K = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \omega_i(f \circ \phi) \cdot \Delta t_i &= \sum_{\omega_i(\phi) \geq \delta} \omega_i(f \circ \phi) \cdot \Delta t_i + \sum_{\omega_i(\phi) < \delta} \omega_i(f \circ \phi) \cdot \Delta t_i \\ &\leq 2K \cdot \sum_{\omega_i(\phi) \geq \delta} \Delta t_i + \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \cdot \sum_{\omega_i(\phi) < \delta} \Delta t_i \\ &\leq 2K \cdot \frac{\varepsilon}{4K + 1} + \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \cdot (\beta - \alpha) < \varepsilon.\end{aligned}$$

两个可积函数的复合不可积的例子:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad g(x) = R(x) \implies f \circ g(x) = D(x).$$

可积函数复合连续函数不可积的例子:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

设 A 为 $[0, 1]$ 上有正测度的类Cantor集, (a_i, b_i) , $(i \in \mathbb{N}_+)$ 为 A 的邻接区间.

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 1 - \frac{1}{2}(b_i - c_i) + \left| x - \frac{1}{2}(a_i + b_i) \right|, & x \in (a_i, b_i), i \in \mathbb{N}_+. \end{cases}$$

则

$$f \circ g(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus A. \end{cases}$$

定理6.1.10 (Lebsegue) 有界函数 f 在 $[a, b]$ 上Riemann可积的充要条件是它的不连续点集 D_f 为零测集. 其

中 $D_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}}$, 而

$$D_\delta = \{x \in [a, b] : \omega(f, x) \geq \delta\}, \quad \omega(f, x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sup \{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in (x-r, x+r) \cap [a, b]\}.$$

5.2 定积分的性质

线性性质, 积分区间可加性, 保号性, 绝对值不等式.

定理6.2.3 (积分第一中值定理) 设 f, g 在 $[a, b]$ 上可积, 且 $g(x)$ 不变号, 则存在 μ , $\inf_{x \in [a, b]} f(x) \leq \mu \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \cdot \int_a^b g(x)dx.$$

引理 6.2.4. 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 令

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b],$$

则 F 是 $[a, b]$ 上的连续函数.

注: 尽管这个变限积分常被用来和Newton-Leibnitz公式混用来求定积分, 但是这并不表示 F 是 f 的原函数. 根据导函数的介值定理, 如果 F 是 f 的原函数, 则 f 不能有间断点, 这对于可积函数 f 是条件不足的.

定理 6.2.5 (积分第二中值定理). 设 f 在 $[a, b]$ 上可积.

(1) 如果 g 在 $[a, b]$ 上单调递减, 且 $g(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, 则存在 $\xi \in [a, b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \cdot \int_a^\xi f(x)dx.$$

(2) 如果 g 在 $[a, b]$ 上单调递增, 且 $g(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, 则存在 $\eta \in [a, b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \cdot \int_\eta^b f(x)dx.$$

(3) 一般地, 如果 g 为 $[a, b]$ 上的单调函数, 则存在 $\zeta \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \cdot \int_a^\zeta f(x)dx + g(b) \cdot \int_\zeta^b f(x)dx.$$

例 6.2.2.

设 $\beta \geq 0, b > a > 0$, 证明

$$\left| \int_a^b e^{-\beta x} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{a}.$$

证明. 对 $g(x) = \frac{e^{-\beta x}}{x}$, $f(x) = \sin x$ 用积分第二中值公式, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b e^{-\beta x} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{e^{-\beta a}}{a} \cdot \int_a^\xi \sin x dx = \frac{e^{-\beta a}}{a} (\cos a - \cos \xi)$$

这说明

$$\left| \int_a^b e^{-\beta x} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq 2 \frac{e^{-\beta a}}{a} \leq \frac{2}{a}.$$

例 6.2.3. 证明 $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx$ 存在.

证明. 在上例中取 $\beta = 0$, 则当 $B > A > 0$ 时, 有

$$\left| \int_0^B \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx \right| = \left| \int_A^B \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{A} \rightarrow 0 \quad (A \rightarrow \infty),$$

例 3.5.15 设 $f \in C[a, b]$, g 是周期为 T 的连续函数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) g(nx) dx = \frac{1}{T} \int_a^b f(x) dx \int_0^T g(x) dx.$$

例 6.2.6 (Riemann-Lebesgue) 设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的可积函数, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = 0.$$

证明. 以第一个极限为例. 因为 f 可积, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 的分割

$$\pi : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

又因为 f 有界, 故存在 K , 使得 $|f(x)| \leq K, \forall x \in [a, b]$. 于是当 $\lambda > \frac{4nK}{\varepsilon}$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \sin \lambda x dx \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_{i-1})] \sin \lambda x dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1}) \sin \lambda x dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_{i-1})| dx + \sum_{i=1}^n |f(x_{i-1})| \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin \lambda x dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n K \frac{1}{\lambda} |\cos \lambda x_{i-1} - \cos \lambda x_i| \\ &< \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{2nK}{\lambda} < \varepsilon. \end{aligned}$$

5.3 微积分基本公式

定理 6.3.1 (微积分基本定理). 设 f 在 $[a, b]$ 上可积, 且在 $x_0 \in [a, b]$ 处连续, 则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 x_0 处可导, 且

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

这个定理说明变限积分是函数 f 的原函数的条件是 f 在 $[a, b]$ 上连续, 而不能有第一类间断点. 但第二类间断点是可以有的.

定理 6.3.3 (Newton-Leibniz 公式). 设 F 在 $[a, b]$ 上可微, 且 $F' = f$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

(此式又写为 $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$)

注: 可微函数的导函数不一定是可积的, 如函数

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 $[0, 1]$ 上可微. 进一步还可以构造导函数有界但不可积的例子.

例 6.3.2. 设 f 在 $[a, b]$ 上连续可微, $f(a) = 0$, 则

$$\int_a^b f^2(x)dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

证明:

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f(x) - f(a))^2 = \left[\int_a^x f'(t)dt \right]^2 \\ &\leq \int_a^x [f'(t)]^2 dt \int_a^x 1^2 dt \quad (\text{Cauchy - Schwarz}) \\ &\leq (x-a) \int_a^b [f'(t)]^2 dt. \end{aligned}$$

5.4 定积分的近似计算

不等式1 设 f 可微, 且 $|f'(x)| \leq M$, 则

$$\left| \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \right| \leq \frac{M}{4}(b-a)^2.$$

证明:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \right| &= \left| \int_a^b \left(f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) dx \right| = \left| \int_a^b f'(\xi) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f'(\xi)| \left| x - \frac{a+b}{2} \right| dx \leq M \int_a^b \left| x - \frac{a+b}{2} \right| dx \\ &= \frac{M}{4}(b-a)^2. \end{aligned}$$

不等式2 设 f 二阶可微, 且 $|f''(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$. 则

$$\left| \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \right| \leq \frac{1}{24} M(b-a)^3.$$

证明: 用Taylor展开

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2,$$

两边积分, 得

$$\int_a^b f(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx,$$

所以

$$\left|\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\right| \leq \frac{1}{2}M \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{24}M(b-a)^3.$$

注: 使用带积分型余项的Taylor公式

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \int_{\frac{a+b}{2}}^x \frac{f''(t)}{1!}\left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt.$$

两边同时积分得到

$$\int_a^b f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \int_a^b \int_{\frac{a+b}{2}}^x f''(t)\left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt dx,$$

后者可以通过交换积分次序化简为

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{\frac{a+b}{2}}^x f''(t)\left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt dx &= \int_a^b f''(t)\left(t - \frac{a+b}{2}\right) \min\{t-a, b-t\} dt \\ &= -\int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a) \cdot f''(t)\left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-t) \cdot f''(t)\left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt \\ &= -\int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)\left(t - \frac{a+b}{2}\right)(f''(t) + f''(a+b-t)) dt. \end{aligned}$$

所以有下面的恒等式

$$\int_a^b f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) - \int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)\left(t - \frac{a+b}{2}\right)(f''(t) + f''(a+b-t)) dt.$$

而

$$\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)\left(t - \frac{a+b}{2}\right)(f''(t) + f''(a+b-t)) dt\right| \leq 2M \left|\int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)\left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt\right| = \frac{M}{24}(b-a)^3.$$

不等式3 设 $f \in C[a, b]$, 若 f 二阶可微, 且 $|f''(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$, 则

$$\left|\int_a^b f(x) dx - \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a)\right| \leq \frac{M}{12}(b-a)^3.$$

证明:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= (x-a)f(x) \Big|_a^b - \int_a^b (x-a)f'(x) dx \\ &= (b-a)f(b) + \int_a^b (x-b)(f'(x) + (x-a)f''(x)) dx \\ &= (b-a)f(b) + (x-b)f(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) dx + \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x) dx \\ &= (b-a)(f(b) + f(a)) - \int_a^b f(x) dx + \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x) dx, \end{aligned}$$

所以

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \right| = \frac{1}{2} \left| \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x) dx \right| \leq \frac{M}{12}(b-a)^3.$$

上面的等式的一些应用, 取 $a = n$, $b = n+1$, 则有

$$\int_n^{n+1} f(t) dt = \frac{f(n)+f(n+1)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x)f''(x+n) dx.$$

对 n 做累和,

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(t) dt + \frac{f(1)+f(n)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x) \sum_{k=1}^{n-1} f''(x+n) dx.$$

当取 $f(x) = \frac{1}{x}$ 时, 得到

$$H_n = \ln n + \frac{n+1}{2n} + \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(x+n)^3} dx = \ln n + O(1).$$

当取 $f(x) = \ln x$ 时, 得到

$$\ln n! = \ln \left(\sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \right) + 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(x+n)^2} dx = \ln \left(\sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \right) + O(1),$$

所以极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n} = C.$$

注: 若 $f(x) \in C^4[a, b]$, 则

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) = \frac{1}{24} \int_a^b f^{(4)}(x)(x-a)^2(x-b)^2 dx - \frac{1}{12}(b-a)^2 [f'(b) - f'(a)].$$

关于习题3 是否存在常数 C , 使得对于满足条件 $|f'''(x)| \leq M$ 的任意函数 f 有如下估计:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \right| \leq CM(b-a)^4.$$

解: 条件存在. 不等式相当于

$$\frac{1}{2} \left| \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x) dx \right| \leq CM(b-a)^4.$$

由于 $|f'''| \leq M$, 所以 $-M(x-a) \leq f''(x) - f''(a) \leq M(x-a)$. 所以

$$\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x) dx \leq \int_a^b (x-a)(x-b)(f''(a) - M(x-a)) dx = \frac{M}{12}(b-a)^4 - \frac{f''(a)}{6}(b-a)^3,$$

$$\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x) dx \geq \int_a^b (x-a)(x-b)(f''(a) + M(x-a)) dx = -\frac{M}{12}(b-a)^4 - \frac{f''(a)}{6}(b-a)^3.$$

当 $f''(a) = 0$ 时, 上面的 C 存在, 而一般情况的 f , 上面的 C 是不存在的.

当问题加上对于任意的 $a, b \in D_f$ 时, 常数 C 也是不存在的. 这相当于对于任意的 a, b ,

$$\frac{1}{2} \left| \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x) dx \right| \leq CM(b-a)^4.$$

由介值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, s.t.

$$|f''(\xi)| (b-a)^3 \leq CM(b-a)^4.$$

令 $b \rightarrow a^+$, 得到 $f''(a) \equiv 0$, 也与 f 的任意性矛盾.

5.5 作业

6. 设 $f(x)$ 为 $[0, 1]$ 上的非负可积函数, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$. 证明, 任给 $\varepsilon > 0$, 均存在子区间 $[\alpha, \beta]$, 使得 $f(x) < \varepsilon, \forall x \in [\alpha, \beta]$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且存在常数 $C > 0$, 使得 $|f(x)| \geq C(a \leq x \leq b)$. 证明 $\frac{1}{f}$ 在 $[a, b]$ 上也是可积的.

11. 设 $f(x) > 0$ 为 $[a, b]$ 上的可积函数, 证明 $\int_a^b f(x)dx > 0$.

2. 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上定义的函数. 如果 $f^2(x)$ 可积, 则 $|f(x)|$ 也可积.

6. 设 $f(x) \geq 0$ 在 $[a, b]$ 上可积, $\lambda \in \mathbb{R}$, 则

$$\left(\int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \right)^2 + \left(\int_a^b f(x) \sin \lambda x dx \right)^2 \leq \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2.$$

(提示: $f = \sqrt{f} \cdot \sqrt{f}$, 用Cauchy-Schwarz不等式.)

9. 设 $f(x)$ 为 $[0, 1]$ 上的连续函数, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1)$. (提示: nx^n 在 $[0, 1]$ 上积分趋于 1, 在 $[0, \delta]$ 上很小, 如果 $0 < \delta < 1$.)

11. 设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的可积函数, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在连续函数 $g(x)$, 使得 $\inf f \leq g(x) \leq \sup f$, 且

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

12. 设 $f(x)$ 在 $[c, d]$ 上可积, 设 $[a, b] \subset (c, d)$, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

6 定积分的应用和推广

6.1 定积分的应用

曲线的长度 设 $I = [\alpha, \beta]$, 映射 $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t)), t \in I$.

如果 $x(t), y(t)$ 为连续函数, 则称 σ 为 \mathbb{R}^2 上的连续曲线.

如果 $x(t), y(t) \in C^1$, 则称 σ 为 C^1 曲线.

定义 σ 的长度为

$$L(\sigma) = \int_{\alpha}^{\beta} [(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{1/2} dt.$$

例7.1.1. 求摆线

$$(x(t), y(t)) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)), \quad a > 0.$$

一拱的长度.

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} [(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{1/2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} a [(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t]^{1/2} dt \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8a. \end{aligned}$$

简单图形的面积

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

当 f 变号时, 上式称为代数面积和.

设平面曲线 σ 的极坐标方程为 $r = r(\theta), r(\theta) \in C[\alpha, \beta]$,

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta.$$

设曲线 σ 上的点满足 $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$.

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt.$$

7 不等式

例3.5.13 (Young不等式) 设 f 是 $[0, +\infty)$ 中的单调递增连续函数, $f(0) = 0$, $f^{-1}(y)$ 表示 f 的反函数, 则当 $a, b > 0$ 时

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy,$$

等号成立当且仅当 $b = f(a)$.

例 3.5.14 (Hölder 不等式). 设 f, g 为 $[a, b]$ 上非负连续函数, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left[\int_a^b f^p(x)dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b g^q(x)dx \right]^{\frac{1}{q}},$$

等号成立当且仅当 $f^p = cg^q$ 或 $cf^p = g^q$, c 为常数.

应用重积分证明不等式的经典例子.

14. 设 $f(x), g(x)$ 为 $[a, b]$ 上同时单调递减或同时单调递增函数, 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx.$$