函数的上、下半连续性

定义

设函数$f(x)$在集合E上有定义，$x_0\in E$为E的聚点，$f(x)$在x_0处连续$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$x\in E$，$|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x_0)-f(x)|<\varepsilon$.

Def. 设$f(x)$在x_0及其附近有定义，称$f(x)$在x_0处上半连续，如果$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$x\in E$，$|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)<f(x_0)+\varepsilon$.

称$f(x)$在x_0处下半连续，如果$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$x\in E$，$|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)>f(x_0)-\varepsilon$.

(否定表述)

Cor. $f(x)$在x_0及其附近有定义，则$f(x)$在x_0处连续的充要条件是，$f(x)$在x_0处既上半连续又下半连续.

例：Riemann函数，在无理点处既上半连续又下半连续

在有理点处上半连续，但不下半连续.(除整点)

上、下半连续的等价描述

Thm1. 设$f(x)$在集合E上有定义，x_0为E的聚点，$x_0\in E$. 则以下命题等价：

(1). $f(x)$在x_0处上半连续.

(2). $\limsup\limits_{x\to x_0} f(x)\le f(x_0)$

(3). $\forall\{x_n\}$：$x_n\in E$，$x_n\to x_0$，必有$\limsup\limits_{n\to\infty} f(x_n)\le f(x_0)$.

Pf. (1)$\Rightarrow$(2). 从定义中两边同时取上极限. (3)$\Rightarrow$(1) 用反证法.

Thm2. 设E为闭集，$f(x)$在E上有定义，则$f(x)$在E中上半连续的充要条件是：$\forall c\in\mathbb{R}$，集合

$$F(c):=\{x\in E: f(x)\ge c\}$$

为闭集.

Pf: $\Rightarrow$ $\forall x_n\in F(c)$，$x_n\to x_0$. 由E闭$\Rightarrow x_0\in E$.

由$x_n\in F(c)$知$f(x_n)\ge c$. $\Rightarrow\limsup\limits_{n\to\infty} f(x_n)\ge c$. 由$f(x)$上半连续. $f(x_0)\overset{(\text{Thm1.})}{\ge}\limsup\limits_{n\to\infty} f(x_n)\ge c$.

故$x_0\in F(c)$.

$\Leftarrow$ 反证. $\exists x_0\in E$. $f(x)$在x_0不上半连续，即$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall\delta_n=\frac{1}{n}$，$\exists x_n\in E$，$|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$.

但$f(x_n)\ge f(x_0)+\varepsilon_0$.

取$c\in\mathbb{R}$，s.t. $f(x_0)+\varepsilon_0>c>f(x_0)$，则$x_n\in F(c)$，而$x_0\notin F(c)$矛盾.

上下半连续的性质

运算性质

Thm 3. (1) 若在 $[a,b]$ 上函数 $f(x)$, $g(x)$ 上(下)半连续，则 $f(x)+g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也上(下)半连续.

(2) 若在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 上(下)半连续，则 $-f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为下(上)半连续.

(3) 若在 $[a,b]$ 上，函数 $f(x)$ 及 $g(x)>0$ (<0)，且上(下)半连续，则 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上上半连续

若 $f(x)>0$ 上(下)半连续，$g(x)<0$ 为下(上)半连续，则 $f(x)g(x)$ 下(上)半连续.

(4) 若在 $[a,b]$ 上，$f(x)>0$ 上(下)半连续，则 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上为下(上)半连续.

(保号性)

上半连续函数有局部保负性，即：若 $f(x)$ 在 x_0 处上半连续，$f(x_0)<0$，则 $\exists\delta>0$，s.t. $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时有 $f(x)<0$. 同样，下半连续函数有局部保正性.

Thm 4. 有界闭区间上的上半连续函数 $f(x)$ 必有上界，且达到上确界.

Pf: ① 反证. 若 $f(x)$ 无界，则 $\exists x_n\in[a,b]$, s.t. $f(x_n)>n$.

取子列 $\{x_{n_k}\}\to x_0$，则 $\limsup\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\infty$ 与 $\limsup\limits_{n\to\infty} f(x_n)\le f(x_0)$ 矛盾.

② 设 $\sup f(x)=M<+\infty$. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 达不到上确界，则

$\forall x\in[a,b]$, $f(x)<M$. $M-f(x)>0$. 故 $\frac{1}{M-f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上上半连续. (Thm 3).

由 ①，$\exists M'>0$. 使 $\forall x\in[a,b]$ 有 $\frac{1}{M-f(x)}<M'$. 即 $f(x)<M-\frac{1}{M'}$ 与 $M=\sup f(x)$ 矛盾.

Pf2. 用有限覆盖定理.

Cor. 设 X 为紧集，$f(x)$ 上半连续，则 f 在 X 上有最大值.

Thm 5. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内半连续，则必存在内闭区间 $[\alpha,\beta]\subseteq(a,b)$，使 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有界.

Pf. 不妨设 $f(x)$ 在 (a,b) 内下半连续. 用反证法. 设 $\forall[\alpha,\beta]\subseteq(a,b)$. $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上皆无界.

1. $\exists x_1\in(a,b)$ 使 $f(x_1)>1$. 由 $f(x)$ 下半连续，则 $\exists\delta_1>0$，使在 $\Delta_1=[x_1-\delta_1,x_1+\delta_1]\subseteq(a,b)$ 上 $\delta_1<\frac{1}{2}$

$\forall x\in\Delta_1$ 有 $f(x)>1$.

2. 由于 $f(x)$ 在 Δ_1 上无界. 故 $\exists x_2\in\Delta_1$ s.t. $f(x_2)>2$. 由下半连续性，$\exists\delta_2>0$ ($\delta_2<\frac{1}{2^2}$) s.t.

$\forall x\in\Delta_2=[x_2-\delta_2,x_2+\delta_2]\subseteq\Delta_1$ 时，有 $f(x)>2$.

3. 如此下去有 $\Delta_1\supseteq\Delta_2\supseteq\cdots$ 由区间套定理，$\exists\xi\in\Delta_n$ $(\forall n)$，使 $f(\xi)=+\infty$. 矛盾.

上下半连续的性质

运算性质

Thm 3. (1) 若在 $[a,b]$ 上函数 $f(x), g(x)$ 上(下)半连续，则 $f(x)+g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也上(下)半连续.

(2) 若在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 上(下)半连续，则 $-f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为下(上)半连续.

(3) 若在 $[a,b]$ 上，函数 $f(x)$ 及 $g(x)>0$ (<0)，且上(下)半连续，则 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上上半连续.

若 $f(x)>0$ 上(下)半连续，$g(x)<0$ 为下(上)半连续，则 $f(x)g(x)$ 下(上)半连续.

(4) 若在 $[a,b]$ 上，$f(x)>0$ 上(下)半连续，则 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上为下(上)半连续.

(保号性)

上半连续函数有局部保负性，即：若 $f(x)$ 在 x_0 处上半连续，$f(x_0)<0$，则 $\exists\delta>0$, s.t. $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 时，有 $f(x)<0$. 同样，下半连续函数有局部保正性.

Thm 4. 有界闭区间上的上半连续函数 $f(x)$ 必有上界，且达到上确界.

Pf: ① 反证. 若 $f(x)$ 无界，则 $\exists x_n\in[a,b]$, s.t. $f(x_n)>n$.

取子列 $\{x_{n_k}\}\to x_0$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\sup f(x_{n_k})=\infty$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup f(x_n)\le f(x_0)$ 矛盾.

② 设 $\sup f(x)=M<+\infty$. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 达不到上确界，则

$\forall x\in[a,b]$, $f(x)<M$. $M-f(x)>0$. 故 $\frac{1}{M-f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上上半连续. (Thm 3).

由①，$\exists M'>0$. 使 $\forall x\in[a,b]$ 有 $\frac{1}{M-f(x)}<M'$. 即 $f(x)<M-\frac{1}{M'}$ 与 $M=\sup f(x)$ 矛盾.

Pf2. 用有限覆盖定理.

Cor. 设 X 为紧集，$f(x)$ 上半连续，则 f 在 X 上有最大值.

Thm 5. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内半连续，则必存在内闭区间 $[\alpha,\beta]\subseteq(a,b)$，使 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有界.

Pf. 不妨设 $f(x)$ 在 (a,b) 内下半连续. 用反证法. 设 $\forall[\alpha,\beta]\subseteq(a,b)$. $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上都无界.

1. $\exists x_1\in(a,b)$ 使 $f(x_1)>1$. 由 $f(x)$ 下半连续，则 $\exists \underset{\delta_1<\frac{1}{2}}{\delta_1>0}$. 使在 $\Delta_1=[x_1-\delta, x_1+\delta]\subseteq(a,b)$ 上 $\forall x\in\Delta_1$ 有 $f(x)>1$.

2. 由于 $f(x)$ 在 Δ_1 上无界. 故 $\exists x_2\in\Delta_1$ s.t. $f(x_2)>2$. 由下半连续性，$\exists \delta_2\overset{\delta_2<\frac{1}{2^2}}{>}0$. s.t. $\forall x\in\Delta_2=[x_2-\delta_2, x_2+\delta_2]\subseteq\Delta_1$ 时，有 $f(x)>2$.

3. 如此除有 $\Delta_1\supseteq\Delta_2\supseteq\cdots$ 由区间套定理，$\exists\xi\in\Delta_n$ $(\forall n)$，使 $f(\xi)=+\infty$. 矛盾.

$\star$ Thm 6.（保半连续性）. 设函数 $f_n(x)$ 在 E 上有定义，且上半连续，$f_n(x)\downarrow f(x)$，即

$$f_1(x)\geq f_2(x)\geq\cdots\geq f_n(x)\geq\cdots,\quad \forall x\in E.$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$. 则 $f(x)$ 在 E 上上半连续.

Pf. 1. $\forall x_0\in E$. 由 $f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$. 故，$\forall\varepsilon>0,\ \exists N>0$, s.t. $\forall n>N$. $f_n(x_0)<f(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}$

2. 固定 n. 因 $f_n(x)$ 在 E 上上半连续，$\exists\delta>0$. 当 $x\in E$, $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f_n(x)<f_n(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}$

3. 由 $f_n(x)\downarrow f(x)$. $f(x)\leq f_n(x)$，故 $f(x)<f_n(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}<f(x_0)+\varepsilon$.

即 $f(x)$ 在 E 上上半连续.

Thm 7.（反问题）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，且上半连续，则存在一个递减连续函数序列

$$f_1(x)\geq f_2(x)\geq\cdots\geq f_n(x)\geq\cdots$$

使 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$. 即，上半连续函数总可以由连续函数从上方逼近.

Pf. 1. 构造 $\{f_n(x)\}$.

固定 n,x. 函数 $-n|y-x|$ 是 y 的连续函数，故上半连续.

由 $f(y)$ 上半连续，由 Thm 3. 知 $f(y)-n|y-x|$ 是 y 的上半连续函数.

由 Thm 4. $f(y)-n|y-x|$ 在 $[a,b]$ 上有界，并达到上确界. 即

$\exists x^*=x^*(n,x)\in[a,b]$. s.t. $f(x^*)-n|x^*-x|=\max\limits_{y\in[a,b]}\{f(y)-n|y-x|\}=:f_n(x)$.

2. $\{f_n(x)\}$ 连续

$$f_n(x)=f(x^*)-n|x^*-x|\geq f(y)-n|y-x|,\quad\forall y\in[a,b]$$

$$\Rightarrow f_n(x)\geq f(x^*(n,x'))-n|x^*(n,x')-x|$$
$$\geq f(x^*(n,x'))-n|x^*(n,x')-x'|-n|x'-x|=f_n(x')-n|x'-x|$$

$\Rightarrow f_n(x')-f_n(x)\leq n|x'-x|$, $\forall x,x'\in[a,b]$.

$\Rightarrow |f_n(x')-f_n(x)|\leq n|x'-x|$.

3. $f_n\downarrow$

设 $m>n$. 则 $\cancel{f_n(x)\geq f_m(x)}$ $f_n(x)\geq f(x^*(m,x))-n|x^*(m,x)-x|$.

$$\geq f(x^*(m,x))-m|x^*(m,x)-x|=f_m(x).$$

4. $\{f_n(x)\}$ 下有界.

$\forall x$ 固定 由 $f_n(x)\geq f(y)-n|y-x|$, $\forall y\in[a,b]\Rightarrow f_n(x)\geq f(x)$.

5. 由3.4. $g(x):=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\geq f(x)$.

6. 证 $g(x)\leq f(x)$.

由 $f(x)$ 上半连续，故 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, 当 $x'\in[a,b]$, $|x'-x|<\delta$ 时有 $f(x')<f(x)+\varepsilon$.

又由 $f(x)$ 上半连续，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有上界. 下证对固定的 x, 当 $n\to\infty$ 时, $x^*(n,x)\to x$.

用反证法. 由 $f_n(x)=f(x^*(n,x))-n|x^*(n,x)-x|$. 若 $x^*(n,x)\not\to x$, 则 $\exists x$ 的邻域 $(x-\delta_0, x+\delta_0)$

使 $x^*(n_k,x)$ 在此邻域外.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上界为 M. 则

$$f_{n_k}(x)=f(x^*(n_k,x))-n_k|x^*(n_k,x)-x|\leq M-n_k\delta\to-\infty$$

与 $f_n(x)\to g(x)$, $n\to\infty$ 矛盾.

故 $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时. $|x-x^*(n,x)|<\delta$. 由上半连续性, $f(x^*(n,x))<f(x)+\varepsilon$.

故 $f_n(x)=f(x^*(n,x))-n|x^*(n,x)-x|\leq f(x^*(n,x))<f(x)+\varepsilon$.

令 $n\to\infty$, 有, $g(x)\leq f(x)+\varepsilon$. 由 $\varepsilon>0$ 的任意性. $g(x)\leq f(x)$.