经典极大原理

从 Laplace 算子推广到形如：

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^{i}(x)D_{i}u + c(x)u,\quad a^{ij}=a^{ji},\quad x=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega\subseteq\mathbb{R}^{n\geq 2}$$

的线性椭圆型微分算子。

Def: 若 $[a^{ij}(x)]$ 是正定阵，称 L 在 $x\in\Omega$ 处是椭圆型算子。即若 $\lambda(x)$, $\Lambda(x)$ 分别记为矩阵 $[a^{ij}(x)]$ 的最小特征根与最大特征根，则

$$0<\lambda(x)|\xi|^2\leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j\leq\Lambda(x)|\xi|^2,\quad\forall\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.$$

若在 Ω 中 $\lambda>0$，则称 L 在 Ω 中是椭圆型算子。

若对某个常数 λ_0 有 $\lambda\geq\lambda_0>0$，则称 L 在 Ω 中是严格椭圆型算子。

若 Λ/λ 在 Ω 中有界，则称 L 在 Ω 中是一致椭圆型算子。

e.g. 算子 $D_{11}+x_1D_{22}$ 在半平面 $x_1>0$ 中是椭圆型算子，但不是一致椭圆型算子。

而在形如 $(\alpha,\beta)\times\mathbb{R}$ $(0<\alpha<\beta<\infty)$ 的条状区中是一致椭圆型算子。

关于椭圆型算子的额外限制：

- $\dfrac{|b^i(x)|}{\lambda(x)}\leq const<\infty,\quad i=1,2,\cdots,n,\quad x\in\Omega$

- 不妨假设 $\lambda=1$，不然考虑算子 $L'=\lambda^{-1}L$ 即可，从而上式表明 b^i 是有界量。

  若 L 还是一致椭圆的，也可以认为 a^{ij} 是有界的。

- 若 a^{ij}, $b^i\in C(\Omega)$，则 $\forall\Omega'\subset\subset\Omega$，$L$ 在 Ω' 中是一致椭圆型算子，且 b^i 在 Ω' 中有界。

- 极大原理是二阶椭圆方程的一个重要特征，它不能用来区分高阶方程和方程系统。

  equations of higher order, systems of equations.

- 在大多数应用中，极大原理给出点态估计，导出更确切的理论。

弱极大原理

Thm 3.1. L是有界区域 Ω上的椭圆型算子，假设

$$Lu \geq 0 \ (\leq 0) \quad in\ \Omega \qquad c=0 \quad in\ \Omega$$

其中$u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\bar{\Omega})$，则$u$在$\bar{\Omega}$中的最大(最小)值在$\partial\Omega$上达到，即

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \qquad \left(\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u\right)$$

· 当$\frac{|b^i|}{\lambda}$在Ω中是局部有界的，以上结论仍然成立.

· 当$u \notin C(\bar{\Omega})$时，以上结论可改为

$$\sup_{\Omega} u = \limsup_{x\to\partial\Omega} u(x) \qquad \left(\inf_{\Omega} u = \liminf_{x\to\partial\Omega} u(x)\right)$$

Pf: 1. 若在Ω中$Lu>0$，则有强极大值原理：反证 $x_0 = \arg\max_{\Omega} u$，则.

$$\left.\begin{array}{l} Du(x_0)=0,\ D^2u(x_0)\ 非正定 \\ [a^{ij}(x_0)]\ (半)正定 \end{array}\right\} \Rightarrow Lu(x_0) = a^{ij}(x_0)D_{ij}u(x_0) \leq 0.\ 与 Lu>0 矛盾.$$

2. $$\left.\begin{array}{l} \frac{|b^i|}{\lambda} \leq b_0 = constant \\ a^{11} \geq \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ \gamma 充分大\ s.t.\ Le^{\gamma x_1} > 0.$$

$\Rightarrow$在Ω中，$\forall \varepsilon>0$，$L(u+\varepsilon e^{\gamma x_1})>0 \Rightarrow \sup_{\Omega}(u+\varepsilon e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial\Omega}(u+\varepsilon e^{\gamma x_1})$

令$\varepsilon\to 0$即可.

注：以上定理的条件可减弱为，$[a^{ij}]$是半正定阵，且存在k s.t $\frac{|b^k|}{a^{kk}}$局部有界.

Def: (Solution, subsolution, supsolution).

在Ω中满足$Lu=0$ $(\geq 0, \leq 0)$的u是方程$Lu=0$ in Ω的一个 Solution (Subsolution, Supsolution)

当L是Laplace算子，以上定义分别对应 harmonic (subharmonic, supharmonic).

以下假设在Ω中，$c\le 0$，在$\Omega^+\subset\Omega$中 $u>0$

若在Ω中$Lu\ge 0$，则在Ω^+中$L_0 u = a^{ij}D_{ij}u+b^iD_iu\ge -cu\ge 0$。由极大原理，$\sup\limits_{\Omega^+}u=\sup\limits_{\partial\Omega^+}u$，从而$u$在$\partial\Omega$上取到最大值。

注：这里要求$\Omega^+\ne\phi$，否则此段有误。

记$u^+=\max(u,0)$，$u^-=\min(u,0)$

Cor3.2. L：有界区域Ω上的椭圆型算子，假设在Ω中有

$Lu\ge 0\ (\le 0)$ $\qquad c\le 0$，$u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$

则

$$\sup_{\Omega}u\le\sup_{\partial\Omega}u^+\qquad\left(\inf_{\Omega}u\ge\inf_{\partial\Omega}u^-\right)$$

若在Ω中$Lu=0$，则$\sup\limits_{\Omega}|u|=\sup\limits_{\partial\Omega}|u|$

注：以上推论中$c\le 0$不能减弱为$c>0$的情况，如$\sin\sqrt{k}x$满足$\begin{cases}\Delta u+ku=0 & in\ [0,\frac{\pi}{\sqrt{k}}]\\ u=0 & on\ \partial[0,\frac{\pi}{\sqrt{k}}]\end{cases}$

· 弱极值原理的应用：解的唯一性和连续性对边值的依赖。

· 由Cor3.2可立即得出算子L的经典Dirichlet问题解的唯一性/比较原理。

Thm 3.3. 设L在Ω中是椭圆型算子，且在Ω中有$c\le 0$，设$u,v\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$，且

$$\begin{cases}Lu=Lv & in\ \Omega\\ u=v & on\ \partial\Omega\end{cases}$$

则 $u=v$ in Ω

若$\begin{cases}Lu\ge Lv & in\ \Omega\\ u\le v & on\ \partial\Omega\end{cases}$ 则 $u\le v$ in Ω.

3.2. 强极值原理

局部一致椭圆算子，边界点引理 (boundary point lemma).

区域 Ω 称为是在 $x_0 \in \partial\Omega$ 处符合内球条件的，若存在球 $B \subset \Omega$，$x_0 \in \partial B$（即 Ω^c 在点 $x_0 \in \partial\Omega$ 处满足外球性质）.

Lemma 3.4. 假设 L 是一致椭圆型算子，$c=0$，$Lu \geq 0$ in Ω，$x_0 \in \partial\Omega$ s.t.

(i) u 在 x_0 处连续

(ii) $u(x_0) > u(x)$，$\forall x \in \Omega$

(iii) $\partial\Omega$ 在 x_0 处满足内球条件

则 u 在 x_0 处的外法向梯度，若存在，则有

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

$\left.\begin{array}{l}\text{若 } c \leq 0\text{，}\frac{c}{\lambda}\text{ 有界，则 } u(x_0) \geq 0 \text{ 时} \\ \text{不论 } c \text{ 的符号如何，}\frac{c}{\lambda}\text{ 有界，} u(x_0)=0\end{array}\right\} \Rightarrow$ 和上述相同的结论.

Pf: 因 Ω 在 x_0 处满足