构造基本群.

设X为拓扑空间. 取$p\in X$为基点, 考虑X内以p为基点的环道全体.
相对于$\{0,1\}$的同伦是一个等价关系, 称这些等价类为同伦类, 环道α的同伦类记作$\langle\alpha\rangle$.
环道的乘积诱导了同伦类的乘积:

$$\langle\alpha\rangle\cdot\langle\beta\rangle=\langle\alpha\cdot\beta\rangle.$$

上式是良定的: 若 $\alpha'\underset{F}{\simeq}\alpha$ rel $\{0,1\}$, $\beta'\underset{G}{\simeq}\beta$ rel $\{0,1\}$.
则

$$\alpha'\cdot\beta'\underset{H}{\simeq}\alpha\cdot\beta \text{ rel }\{0,1\}.$$

其中, $H(s,t)=\begin{cases}F(2s,t), & 0\le s\le\frac{1}{2}\\ G(2s-1,t), & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}$

由焊接引理, H连续. 因此 $\langle\alpha'\rangle\cdot\langle\beta'\rangle=\langle\alpha\rangle\cdot\langle\beta\rangle$.

Thm. 5.5. X内以p为基点的环道同伦类全体在乘积 $\langle\alpha\rangle\cdot\langle\beta\rangle=\langle\alpha\cdot\beta\rangle$ 运算下构成一个群.

Pf. 乘法是可结合的: $\langle\alpha\cdot\beta\rangle\cdot\langle\gamma\rangle=\langle\alpha\rangle\cdot\langle\beta\cdot\gamma\rangle$, $\forall$以p为基点的环道α,β,γ成立. 即 $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)\simeq(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$ rel p.
易知 $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=(\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma))\circ f$, 其中 f:

$$f(s)=\begin{cases}2s, & 0\le s\le\frac{1}{4},\\ s+\frac{1}{4}, & \frac{1}{4}\le s\le\frac{1}{2},\\ \frac{s+1}{2}, & \frac{1}{2}\le s\le 1.\end{cases}$$

由于I是凸集, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 则 $f\simeq Id_I$ rel $\{0,1\}$.
由引理5.4.

$$\begin{aligned}(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma&=(\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma))\circ f\\&\simeq(\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma))\circ Id_I \text{ rel }\{0,1\}\\&=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)\end{aligned}$$

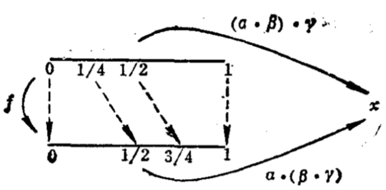

图 5.4

在点p处的常值环道e的同伦类$\langle e\rangle$, 称为单位元素.
则 $\langle e\rangle\cdot\langle\alpha\rangle=\langle\alpha\rangle=\langle\alpha\rangle\cdot\langle e\rangle$ 对任意以p为基点的环道α成立.
其中 $e\cdot\alpha=\alpha\circ f$, $f:I\to I$,

$$f(s)=\begin{cases}0, & 0\le s\le\frac{1}{2},\\ 2s-1, & \frac{1}{2}\le s\le 1,\end{cases}$$

因此 $e\cdot\alpha=\alpha\circ f\simeq\alpha\circ Id_I$ rel $\{0,1\}=\alpha$
定义同伦类$\langle\alpha\rangle$的逆为$\langle\alpha^{-1}\rangle$, $\alpha^{-1}(s)=\alpha(1-s)$, $0\le s\le 1$.
逆的定义是有意义的, 若 $\alpha\underset{F}{\simeq}\beta$ rel $\{0,1\}$, 则 $\alpha^{-1}\underset{G}{\simeq}\beta^{-1}$ rel $\{0,1\}$. 其中

$$G(s,t)=F(1-s,t).$$

证 $\langle\alpha\rangle\cdot\langle\alpha^{-1}\rangle=\langle e\rangle$;
由于 $\alpha\cdot\alpha^{-1}=\alpha\circ f$. 这里 $f:I\to I$,

$$f(s)=\begin{cases}2s, & 0\le s\le\frac{1}{2},\\ 2-2s, & \frac{1}{2}\le s\le 1.\end{cases}$$

由于 $f(0)=f(1)=0$, 故 $f\simeq g$ rel $\{0,1\}$, 其中 $g(s)\equiv 0$, $0\le s\le 1$.
因此 $\alpha\cdot\alpha^{-1}=\alpha\circ f\simeq\alpha\circ g$ rel $\{0,1\}=\alpha(0)=e$.
同理可证 $\langle\alpha^{-1}\rangle\cdot\langle\alpha\rangle=\langle e\rangle$.

在Thm 5.5中所构造的群, 叫作X基于点p的基本群, 记作$\pi_1(X,p)$.
以p为基点的任何环道必然落在X的含有p点的道路连通分支内.
故只需考虑道路连通空间.
在同构意义下, 基本群与基点的选择无关, 将道路连通空间的基本群记为$\pi_1(X)$.

Thm 5.6. 若X为道路连通空间, 则$\forall p,q\in X$ $\pi_1(X,p)$同构于$\pi_1(X,q)$.

> 在空间内两条道路γ,σ, 若有$\gamma(1)=\sigma(0)$, 则由乘积公式
>
> $$\gamma\cdot\sigma(s)=\begin{cases}\gamma(2s), & 0\le s\le\frac{1}{2},\\ \sigma(2s-1), & \frac{1}{2}\le s\le 1.\end{cases}$$
>
> 得到一个新的道路.
> 环道有以下性质:
> (a). 若 $\gamma\simeq\gamma'$ rel $\{0,1\}$, $\sigma\simeq\sigma'$ rel $\{0,1\}$, 则
>
> $$\gamma\cdot\sigma\simeq\gamma'\cdot\sigma' \text{ rel }\{0,1\}.$$
>
> (b). 若 γ,σ,δ 为任意三条道路, 满足
>
> $$\gamma(1)=\sigma(0),\quad \sigma(1)=\delta(0).$$
>
> 则有 $(\gamma\cdot\sigma)\cdot\delta\simeq\gamma\cdot(\sigma\cdot\delta)$ rel $\{0,1\}$.
> (c). 若道路γ^{-1}定义为$\gamma^{-1}(s)=\gamma(1-s)$, 则 $\gamma\cdot\gamma^{-1}\simeq\gamma(0)$, rel $\{0,1\}$.
> $\gamma^{-1}\cdot\gamma\simeq\gamma(1)$ rel $\{0,1\}$.

Pf. 因为X是道路连通的. 取γ为以p为起点, q为终点的道路.
若α是基于p的环道, 则$(\gamma^{-1}\cdot\alpha)\cdot\gamma$是一条基于$q$的环道, 定义

$$\begin{aligned}\pi_1(X,p)&\xrightarrow{\gamma_*}\pi_1(X,q)\\ \langle\alpha\rangle&\longmapsto\langle\gamma^{-1}\cdot\alpha\cdot\gamma\rangle\end{aligned}$$

由上面环道的性质(a), (b), (c), γ_*是良定的. 是一个同态. 且有逆同态$(\gamma^{-1})_*$. 因此γ_*是一个同构. □

每个道路连通拓扑空间对应一个群.

对于两个空间之间的连续映射, 对应相应群之间的同态.

设$f:X\to Y$连续. 设p为X内的基点, Y内选$q=f(p)$为基点.
对于X内任何以p为基点的环道α, 复合映射$f\circ\alpha$是Y内以q为基点的一条环道.
由引理5.4, 将两个同伦环道与f复合, 得到Y内两条同伦环道. 因此定义

$$\begin{aligned}f_*:\pi_1(X,p)&\to\pi_1(Y,q).\\ \langle\alpha\rangle&\longmapsto\langle f\circ\alpha\rangle.\end{aligned}$$

由于

$$f\circ(\alpha\cdot\beta)=(f\circ\alpha)\cdot(f\circ\beta). \Leftrightarrow f_*(\alpha\cdot\beta)=f_*(\alpha)\cdot f_*(\beta)$$

于是f_*为同态, 称f_*为f所诱导的同态.

Thm 5.7. 对于复合映射 $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$, 有

$$(g\circ f)_*=g_*\circ f_*.$$

注. Thm 5.7完全精确的表述是指出基点.
取基点 $p\in X$, $q=f(p)\in Y$, $r=g(q)\in Z$,

$$(g\circ f)_*:\pi_1(X,p)\to\pi_1(Z,r)$$

是复合同态

$$\pi_1(X,p)\xrightarrow{f_*}\pi_1(Y,q)\xrightarrow{g_*}\pi_1(Z,r).$$

当$h:X\to Y$同胚时, 由Thm 5.7.及

$$X\xrightarrow{h}Y\xrightarrow{h^{-1}}X,\quad Y\xrightarrow{h^{-1}}X\xrightarrow{h}Y,$$

有

$$h_*^{-1}\circ h_*=(Id_X)_*:\pi_1(X,p)\to\pi_1(X,p).$$
$$h_*\circ h_*^{-1}=(Id_Y)_*:\pi_1(Y,h(p))\to\pi_1(Y,h(p)).$$

由于恒等映射诱导出恒等同态, 故

$$h_*:\pi_1(X,p)\to\pi_1(Y,h(p)).$$

是同构. 所以, 同胚的道路连通空间有同构的基本群.