井函数自5上下半连续性 井井定义 设函数fin在绿金E上有定义,XoEE的展点、fixx在Xo处连续的HE20,3820,当XEE, 1x-x0/<801, 59 H(x0)-fox/< E Def. 设fix)在X。及其外近有定义、新fix)在X。处上手连续、如果 VE>0,38>0,当XEE, 1x-x1 < 8 At, & fox < fox > +8 练fcm在水处下半连续, 女中果 U € > 0, 38 > 0, 当x ∈ E, |x-x\_0| < 8 时, 有fcx> f(x\_0) - €. Cor. for在水及其科质有定义、则for在水处连续的发要系件是,for在水处既上半连续又对连续 例: Riemann函数,在无理点处就上半连续又下半连续 在有理点处上链线,但不对连续(除整点). 井井上,下半连续成等价描述

Than 1. 设fan在集金E上有定义、X.为E自与聚立、X.EE. 别以不完遇重价:

(1). f(x)在x,处上半连续.

(2). Com sup f(x) < f(x.)

B). YEAR,: X, EE, X, > Xo, 1x 5 (im sup f(xn) = f(xo).

Pf. (1) ⇒(2). 从建义中西达同时取上极限. (3)⇒(1)用反话法.

Through Exilia fon在E上有定义,则fon在E中上推缓的经要系件是:VceR,集合 F(c) := {x & E: f(x) > c}

为油生

0

10

Pf: > YNEF(c), Yn > Xo, 由Eil > Xo EE.

由 xn E F(e) {2 f(xn) > c. > 6msup f(xn) > C. 由f(x) 上半達美, f(xo) > 6msup f(xn) > C. \$ 2 xo E F(c).

を気で、ヨXoEE、fin在Xo不上手達线、即目をo>o、Von=カ、ヨXn∈E、1×n-Xolくか、 12 f (x,) > f (x,) + ε.

取CER, s.f. f(xo)+Eo>c>f(xo), 別 xn EF(c), 而Xo & F(c) 矛信.

井井,上下半述线的地质.

Thm 3. (1) 若在[0.6],上,函数fix),是的上(1) 推线,则fix+3cm在[0.6]上也上(下)推线

- (2)· 若在[a,5]上午的上下)\*连续,则一年的在[a,6]上为下(上)\*连续.
- 图· 若在[9.5]上, 函数f(x)及300>0(<0),且上(下)\*连续,则f(x)f(x)在[9.6]让上链线.
- 梅若fxx>0上(下)半连续,多的<0分下(上)半连续,则产的3的下(上)半连续.
- (4) 芸在[9.6]上,f(x)>0上(下)半连续,则去在[9.6]上为下(上)彩连续,

(集等性).

上半连续函数有局部保外性,即,若fun在从处上半连续,fun <0,以到36 xo, sit xe(x-6 xots) 时,有fun <0. 同样,下产连续函数有局部保正性.

Thm.4. 有界闭区间上的上半连续函数《必有上界,且达到上石研界.

Pf: D. 反记. 若fcxx元界, 只日×nE[a,b], s.t. fcxm>n.

到331 (×nx3 → xo, x) (大知 f(xnx) = のよい知 f(xnx) = f(xn) 矛盾.

② in supfor=M<+0. 若f(x)在[9,6]进不到上石庙界、又)

VX∈[a,b], fix><M. M-fix>0, は 1/m 在[a,b]上上半连续.(水3).

由 ①. 3 M' > O. 埃 YXE E Q. 6 ) 有 一 (M) 是P f con < M- 前 与 M = supfin 多信.

PF2. 用有限覆盖定理.

Cov. 设义为紧架,fan上半连续,只一个在X上有最大值。

Thm. 5. 若函数f(x)在(a,b)的丰连续,则必存在的闭区询[d,P] = (a,b),使f(x)在[d,P]上辨. 肝. 分好设f(x)在(a,b)的下继线,用负证任,设∀Q,P] = (a,b). f(x)在[d,P]上存无界.

- 1. ヨメ, E(a,b)使f(x)>1. 由f(x)下推復、別ヨら、つ、使在 Δ1=[x,-1,x,+1] = (a,b)上 V×ED,有f(x)>1.
- 2. 由于fm在山上无界、故目XEA, stf(Xx)>2.由了学连续性,目影为。st. VXEA工=[X2-82, X2+62] SA, 对, 有f(X)>2.
- 3. 如此作有山三山三· 由区间套定理, 目3 E An (Yn),使于(3)=+10.矛盾,

井井. 上. 下半述经每5.10度 ### 這餐性质. Thm3. (1) 若在[a,b],上函数f(xx), f(xx), f(xx) +连续, 宋) f(xx) + g(xx) 在[a,b]上也上(下) 挂线. (2). 若在[19.5]上午(1)半连续,则一斤的在[19.6]上为下(上) \*连续. 图, 若在19.51上, 函数fax)及3cx)>O(<0),且上(万半连续,则fax)发(x)在[9.6]上上链绕. 梅若f(x) >0上(下)半连续,身的<0为下(上)半连续,则f(x)分的下(上)半连续. (4) 若在[a.6]上,f(x) > 0上(下)半连续,则长在[a.6]上为下(上) 粘连线. (43 1/4) 时,有 f(x) < 0 同样,下连续函数有局部保证性. Thm. 4. 有界闭区间上的上半连续函数必有上零,且达到上石有界. Pf: D. 反记. 若f(x)元界, アリヨメn E [a,b], s.t. f(xn)>n. 到2331 {×nk3→×0. アリ ( sup f (×nk) = 00 f ( sup f (×nk) = fcx a) 矛盾. ② ig sup foo = M <+ 0. 若f(x)在[a,b]进不到上石角界. 里) VX∈[a,b], fix><M. M-fix>0, 故 1/1xxx 在[a,b]上上半连续. (Thm3). 由 ①, 3 M'>0. 续 ∀x E ta, b] 有 1 (x) < M'. 是P f(x) < M- + 与 与 M = supfin 多信. PF2. 用有限覆盖定理. Cov. 设义为紧张,fan上半连续,则f在X上有最大值. Thm. 5. 若函数f(x)在(a,b)的丰连续,则从存在的词区词[Q,B] =(a,b),使f(x)在[2,B]上帮 件. 引好设f(x)在(q.b)的下维线,用反证信,设∀Q,用至(q.b). f(x)在[2,月上在无界 1. ヨX, E(a,b)徒f(x)>1. 由f(x)下羊连续. 別ヨ&,>o. 使在ム,=[x,-&,x,+f] =(a,b)上 VXED, & fax)>1. 2. 由于f(x)在△, 上无界. 故 ∃ X, €△, 5·1· f(x) >2. 由7年连续性, ∃ 8, 70. 5·1· V X € Δ = [X2 - δ2, X2 + δ2] ⊆ Δ, Ht. A f(x) > 2. 3. 如此下东有山三山之···由区间套定理, 33 E An. Un), 使 f(3)=+10. 矛盾.

军下4m6.(军半连续性).设函数fa(x)在日上有定义,且上半连续, fa(x) 1+(x), 即 f,(x) > f2(x) 3 ... 7 fn(x) 3 .... VXEE. 且 Lon fixo = fixo. 则 fixo在 E上上半连续. Pf. 1. YX. EE, & f(x0) = lim f. (x0). \$2. YE>0, 3N > 0, s.t. Vn>N. f.(x0) < f(x0) + & 2. 固定 n. 因facoa在E上上羊连续, IS >0. 多XEE, IX-Xol< 8时, 有faco<fa(Xo)+是. 即广心在巨上上连续。 The 7 (自)经)设于(m)在[a,b]上有定义,且上半连续,则存在一个建场连续函数序列 f, (x) > f\_2(x) > ... > f, (x) > 使你fix = fix).即上半连续函数总可以由连续函数从上方逼近. 叶.1 核选 (face). 国定n.x. 函数-n/y-x/是y的连续函数, 故上半连线. 由于147上半连线,由下1473.加于147-1724的上半连线函数. 由Thm 4. fcm-nly-xl在[a,b]上有界,并达到上编界. 引 3x = x\*(n,x) [[a,b], s.t. f(x\*) - n |x\*-x| = max {f(x) - n | y-x|} = : f\_n(x). 2. {fam} 连续

f, (x) = f(x\*)-n|x\*-x| > f(4)-n|y-x| Vye[a,6]

=> fn(x) > f(x\*(n, x')) - n |x\*(n, x')-x|

3 f(x\*(n.x9)-n|x\*(n.x1)-x1-n|x1-x1=fn(x1)-n|x1-x1

=) f, (x') - f, (x) < n | x'-x), \( \forall x, \( x' \in [a, b] \).

=> |fn(x') - fn(x) = n | x'-x |.

3. fn 1

igm>n. 8 for (x) f (x\*(m,x)) - n | x\*(m,x) -x|

3 f (x \*(m,x)) - m | x \*(m,x)-x | = fm(x)

4. [fnx) 下有界

V×@固定由fn(x) > f(y)-n|y-x1, Vy∈[ab] → f(x)>f(x).

5. = 3.4. g(x) := (f) f(x) > f(x). 6. 42 g(x) ≤ f(x) 由fix)上本连续, \$ VE>0, 38>0, 当X'E[a,b], 1X'-X1<8时有fix)<fix)<fi>(n)+E. 又由fco 上午连续,故fco在[a,6]上有上界. 不记时国定的x,当力》时,从(n,x)→x. 用台记it 由fn(x)=f(x\*(n,x))-n|x\*(n,x)-x|. 若水(n,x) +x, 只) =x公文建设(x-So, x+So) 使x\*(nk,x)在此创致外,每 设fw在[a,6]上自乡上界为M. Z. fnk(x) = f(x\*(nk,x)) - nk(x\*(nk,x)-x < M-nk8 -> -00 5 fn (x) -8 (x), n= 3/4. なるヨハフロ、カリンN时、1×-×\*(n.x)くる、由上半连线/生、千(x\*(n.x))く千(x)+E. # fn (x) = f(x\*(n,x))- n |x\*(n,x)-x| = f(x\*(n,x)) < f(x) + E. 至カラの、有、の(x)をfox)を、由モンの自ら「主意」は、ののをf(x).