现代分析试题

October 4, 2022

问题 1. 设$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \cdots, \mathcal{E}_n$为$(X, \mathscr{A}, \mu)$中的可测子集族, 其中每个$\mathcal{E}_i$都是$\pi$-系(即有限交封闭). 假设对于任意的$A_1 \in \mathcal{E}_1, \cdots, A_n \in \mathcal{E}_n$有

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mu\left(A_i\right).$$

证明, 对于任意的$B_1 \in \sigma\left(\mathcal{E}_1\right), \cdots, B_n \in \sigma\left(\mathcal{E}_n\right)$有

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mu\left(B_i\right).$$

问题 2. 设$1 \le p < \infty$, $\{f_n\}_1^{\infty}$是$L^p(\Omega, \mu)$中序列, Ω为$\mathbb{R}^d$中有界集, μ为Lebesgue测度, f为可测函数, $f_n \to f$ *a.e.*且对于任意$\varepsilon > 0$, 存在$\delta_\varepsilon > 0$, 使得对于任意的可测集E, 只要$\mu(E) \le \delta_\varepsilon$, 便有

$$\int_E \left|f_n\right|^p \, \mathrm{d}\mu \le \varepsilon, \quad \forall n.$$

证明f_n在L^p中收敛于f.

问题 3. 设$K \in L^1\left([0,1]^2\right)$, 若对于任意的$f \in C_{[0,1]}$, 有

$$\int_{[0,1]} K(x, y) f(y) \, \mathrm{d}y = 0, \ a.e. \ x \in [0,1].$$

证明$K(x, y) = 0, \ a.e.$

问题 4. 在$[0,1]$上构造一个连续函数序列f_n, 使得$0 \le f_n \le 1$, 且

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x) \, \mathrm{d}x = 0,$$

但对于任何$x \in [0,1]$, $\{f_n(x)\}$都不收敛.

问题 5. 证明:

1. 设$f \in L^1(0,1)$, g是周期为1的连续函数, 证明

   $$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(x) g(nx) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 f \, \mathrm{d}x \int_0^1 g \, \mathrm{d}x,$$

   并给出Riemann-Lebesgue引理, 及

   $$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(x) \left|\sin(nx)\right| \, \mathrm{d}x, \quad \lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(x) \sin^2(nx) \, \mathrm{d}x$$

   的值.

2. 设$\{n_k\}$为递增正整数序列, E是$(-\pi, \pi)$中使序列$\{\sin n_k x\}$收敛的x的点集. 证明E是Lebesgue零测集.