问题. 若$\mathscr{M}$是由$\mathscr{E}$生成的σ代数, 则$\mathscr{M}$是由$\mathscr{F}$生成的σ代数的并集, 其中$\mathscr{F}$取遍$\mathscr{E}$的所有可数子集.

问题. 设$\mathcal{F}$是Ω上的一个σ代数, $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty)$是其上的测度. 取$E \subset \Omega$, 令$\mathcal{F}_E := \sigma(\mathcal{F} \cup \{E\})$. 证明: 存在$\mathcal{F}_E$上的测度$\nu$, 使得$\forall A \in \mathcal{F}$有$\nu(A) = \mu(A)$.

pf: 取集合 $\{G \in \mathcal{F} : G \subset E\}$, 设

$$a = \sup_{\substack{K \subset E \\ K \in \mathcal{F}}} \mu(K) < \mu(\Omega) < +\infty.$$

取 $\mathcal{F}$中序列K_n, $K_n \subset E$, 使得 $\mu(K_n) \to a$, 则$\bigcup_{k=1}^n E_k \subset E$ 是单调上升集列, 且

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \leq \sup_{\substack{K \subset E \\ K \in \mathcal{F}}} \mu(K),$$

且由μ的下半连续性知,

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\right) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sup_{\substack{K \subset E \\ K \in \mathcal{F}}} \mu(K),$$

且$\bigcup_{k=1}^\infty E_k \in \mathcal{F}$, 记$G = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$. 另外可证 $\mathcal{F}_E = \{(A \cap E) \cup (B \cap E^c) : A, B \in \mathcal{F}\}$, $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$, 有限交封闭:

$$((A_1 \cap E) \cup (B_1 \cap E^c)) \cap ((A_2 \cap E) \cup (B_2 \cap E^c)) = [(A_1 \cap A_2) \cap E] \cup [(B_1 \cap B_2) \cap E^c].$$

可数并封闭:

$$\cup_i [(A_i \cap E) \cup (B_i \cap E^c)] = [(\cup_i A_i) \cap E] \cup [(\cup_i B_i) \cap E^c].$$

在$\mathcal{F}_E$上定义$\nu[(A \cap E) \cup (B \cap E^c)] = \mu(A \cap K) + \mu(B \cap K^c)$, 则$\nu$可数可加性由$\mu$的可数可积性证得.

注: ν不存在良定义问题, 因为 $(A \cap E) \cup (B \cap E^c)$ 的集合表示是唯一的.

问题. 设$(X, \mathcal{M}, \mu)$是测度空间, 则σ有限测度μ是半有限测度. 其中称μ是半有限测度(simifinite), 如果对于每个$E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) = \infty$, 都存在$F \in \mathcal{M}$使得$F \subset E$且$0 < \mu(F) < \infty$.

问题. 设$(X_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$是测度空间, $\{X_n\}$两两不交, 定义测度空间$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$,

$$\mathcal{A} = \{E \subset X : E \cap X_n \in \mathcal{A}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}\}, \qquad \mu(E) = \sum_{n=1}^\infty \mu_n(E \cap X_n).$$

如果所有μ_n均是σ有限的, 证明μ也是σ有限的.