基本群

同伦映射.

空间X内的一个环道是指一个满足$\alpha(0)=\alpha(1)$的连续映射$\alpha: I\to X$,
并说环道α是以$\alpha(0)$为基点的.

若α与β是以X的同一点为基点的两个环道,定义乘积$\alpha\cdot\beta$为如下环道

$$\alpha\cdot\beta(s)=\begin{cases}\alpha(2s), & 0\le s\le\frac{1}{2}\\ \beta(2s-1), & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases}$$

注. 这个乘法不能在基于某点的环道集合上给出群结构.
这个乘法不满足结合律.

让两个环道等同,如果其中一个可以连续形变为第二个,且在形变过程中,基点保持不变.

若$f,g: X\to Y$为连续映射,把f连续地形变到g叫作一个同伦.

定义5.1. 设$f,g: X\to Y$为连续映射,若存在连续映射$F: X\times I\to Y$,使得

$$F(x,0)=f(x),\quad F(x,1)=g(x),\quad \forall x\in X,$$

则称f同伦于g.

连续映射F叫作从f到g的同伦,或伦移. 记作$f\underset{F}{\simeq}g$.

若f与g在X的某个子集A上相同,从f到g的同伦F满足

$$F(a,t)=f(a),\quad \forall a\in A,\ t\in I.$$

则称相对于A,f同伦于g,记为$f\underset{F}{\simeq}g\ \mathrm{rel}\ A$.

同伦的例子.

1. 设C为欧氏空间内的凸集,$f,g: X\to C$为连续映射,其中X是任意拓扑空间. $\forall x\in X$,连续$f(x)$与$g(x)$的线段包含在C内. 定义

$$F: X\times I\to C\qquad (x,t)\mapsto(1-t)f(x)+tg(x).$$

若f与g在X的某一子集A上相同,则这个同伦是一个相对于A的同伦.
同伦F叫作一个直线同伦.

2. 设$f,g: X\to S^n$为连续映射,且$\forall x\in X$,$f(x)$与$g(x)$永不为对径点.
取S^n为E^{n+1}的单位球面,且把f,g看作映入E^{n+1}的映射,则有一个从f到g的直线同伦. 由于$f(x)$与$g(x)$不是对径点,它们的连结线段不通过原点. 可以定义$F: X\times I\to S^n$为

$$F(x,t)=\frac{(1-t)f(x)+tg(x)}{\|(1-t)f(x)+tg(x)\|}.$$

这个映射是从f到g的同伦.

3. 设S^1为复平面上的单位圆周. 考虑S^1上的环道α,β,都以点1为基点.

$$\alpha(s)=\begin{cases}e^{4\pi is}, & 0\le s\le\frac{1}{2},\\ e^{4\pi i(2s-1)}, & \frac{1}{2}\le s\le\frac{3}{4},\\ e^{8\pi i(1-s)}, & \frac{3}{4}\le s\le 1,\end{cases}$$

$$\beta(s)=e^{2\pi is},\qquad 0\le s\le 1.$$

定义相对于$\{0,1\}$的从α到β的同伦F. 连续性由粘接引理4.6保证.

$$F(s,t)=\begin{cases}e^{\frac{4\pi is}{t+1}}, & 0\le s\le\frac{t+1}{2},\\ e^{4\pi i(2s-1-t)}, & \frac{t+1}{2}\le s\le\frac{t+3}{4},\\ e^{8\pi i(1-s)}, & \frac{t+3}{4}\le s\le 1.\end{cases}$$

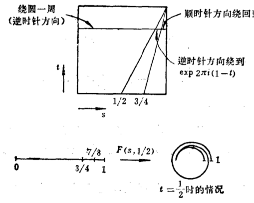

图 5.3

引理5.2. 在从X到Y的全体连续映射集合上,关系同伦是一个等价关系.

Pf. 设f,g,h是从X到Y的连续映射.

$\forall f$,总有$f\underset{F}{\simeq}f$,这里$F(x,t)=f(x)$. 关系是自反的.

若$f\underset{F}{\simeq}g$,则$g\underset{G}{\simeq}f$,这里$G(x,t)=F(x,1-t)$,关系是对称的.

若$f\underset{F}{\simeq}g$,$g\underset{G}{\simeq}h$,则$f\underset{H}{\simeq}h$,这里

$$H(x,t)=\begin{cases}F(x,2t), & 0\le t\le\frac{1}{2},\\ G(x,2t-1), & \frac{1}{2}\le t\le 1.\end{cases}$$

所以关系是可迁的.

引理5.3. 在从X到Y,且在X的子集A上相同的连续映射全体所成的集合上,关系"相对于X的子集A同伦"是一个等价关系.

引理5.4. 同伦映射的复合仍然相互同伦.

Pf. 设有连续映射

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & Y \arrow[r, "h"] & Z \end{tikzcd}$$

若$f\underset{F}{\simeq}g\ \mathrm{rel}\ A$,则$hf\underset{hF}{\simeq}hg\ \mathrm{rel}\ A$.

若已知连续映射

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & Z \end{tikzcd}$$

若对于Y的子集B,有$g\underset{G}{\simeq}h\ \mathrm{rel}\ B$,则同伦

$$F(x,t)=G(f(x),t)$$

有$gf\underset{F}{\simeq}hf\ \mathrm{rel}\ f^{-1}B$.