Def. 3.4.1. 一个集合 $P\subseteq\mathbb{R}$ 是完全集(完备集). 如果 P 是没有孤立点的闭集.

Thm 3.4.3. 非空完全集必是不可数集.

Pf: 设 P 是非空完全集. 则它必是无穷集. 若 P 是可数完全集.

设

$$P=\{x_1, x_2, \cdots\}$$

将构造紧集 K_n 的嵌套序列. $K_n\subseteq P$ 满足 $x_1\notin K_2$, $x_2\notin K_3\cdots$

由于存在 $x\in\bigcap K_n\subseteq P$. 而 x 必不在 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 中, 这使得 P 的可数排列不包含 P 中的点 x. 从而矛盾.

下面构造这样的 K_n.

取 I_1 是包含 x_1 的有界闭区间. 且 x_1 不是 I_1 的端点.

由于 x_1 不是 P 的孤立点. 故在 I_1 内有 $y_2\in P$, $y_2\neq x_1$.

取以 y_2 为中心的闭区间 $I_2\subseteq I_1$. 且使 $x_1\notin I_2$.

如此构造下去有闭区间套 I_n 满足

(1). $I_{n+1}\subseteq I_n$.

(2) $x_n\notin I_{n+1}$.

(3) $I_n\cap P\neq\emptyset$.

于是取 $K_n=I_n\cap P$, 由于 I_n 是紧集. P 是闭集. 所以 K_n 是紧集

Thm 3.4.2. Cantor 集是完全集.

Pf. Cantor 集 $C=\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$. 其中 C_n 是有限个闭区间之并.

C_n 是闭集. $\Rightarrow$ C 是闭集

只需证 C 中没有孤立点.

任取 $x\in C$. 需构造 $(x_n)\subseteq C$ 使. $x_n\neq x$. $x_n\to x$ 即可.

由于 $x\in C_1$. 则存在 $x_1\in C\cap C_1$ 满足 $x_1\neq x$ 且 $|x-x_1|\leq\frac{1}{3}$.

一般地. $\forall n\in\mathbb{N}$. 存在 $x_n\in C\cap C_n$, $x_n\neq x$. 使 $|x-x_n|\leq\frac{1}{3^n}$.

由于 C_n 的端点总在 C 中. 可取以上构造的 x_n 位于 C_n 的区间端点. 于是有 $x_n\neq x$. $(x_n)\subseteq C$. 满足 $x_n\to x$.

Thm 3.4.6. 一个集合 $E\subseteq\mathbb{R}$ 是连通集 $\Leftrightarrow$ 对于所有不交非空集 A,B 满足 $E=A\cup B$,

总存在收敛序列 $(x_n)\to x$, 使得 x_n 含于 A,B 之一, 而 x 含于另一集合内.

Pf: $\Rightarrow$ 设 E 是连通集, $E=A\cup B$. A,B 非空, 不交

由于 E 是连通集, A 和 B 不是可分离的. 故 $\overline{A}\cap B$, $A\cap\overline{B}$ 之一不空.

假设 $x\in\overline{A}\cap B$. 则 $x\in B$, $x\in\overline{A}$.

因 A,B 不交, 故 $x\notin A$. 故 x 是 A 的极限点. 故有 A 中收敛序列 (x_n)

使 $x_n\to x$.

$\Leftarrow$: 假设 $E\subseteq\mathbb{R}$ 不连通, 只需找到两个非空不交集 A,B 满足 $E=A\cup B$

并且不可能收敛序列 $(x_n)\to x$, 使 (x_n) 包含于 A 或 B, x 包含于另一个

集合.

由于 E 不连通, 存在可分离的点集 A,B 使 $E=A\cup B$.

假设 $(x_n)\subseteq A$, $x_n\to x$. 则 $x\in\overline{A}$. 但 由于 $\overline{A}\cap B=\phi$. $\Rightarrow x\notin B$.

同理, 对于 $(x_n)\subseteq B$, $x_n\to x$, 可得 $x\in\overline{B}$, $x\notin A$. (矛盾).

Thm 3.9.7. 一个集合 $E \subseteq \mathbb{R}$ 是连通集 $\Leftrightarrow$ 只要 $a, b \in E$, $a < c < b$, 就有 $c \in E$.

Pf: ① 假设 E 连通, 设 $a, b \in E$, $a < c < b$. 取

$$A = (-\infty, c) \cap E. \qquad B = (c, +\infty) \cap E.$$

因 $a \in A$, $b \in B$, 以上集合均不空, 且任一个不含有另一个的极限点

若 $E = A \cup B$, 则必有 E 不连通, 矛盾. 所以必然有 $A \cup B$ 不包含 E 的元素, 它只可能是 c, 故 $c \in E$.

② 假设 E 是一个区间, 只要 $a, b \in E$, 且 $a < c < b$ 就有 $c \in E$.

由连通集的刻画定理 Thm 3.4.6.

设 $E = A \cup B$, 其中 A, B 非空不交, 只需证其中一个集合的极限点包含在另一个集合中.

取 $a_0 \in A$, $b_0 \in B$, $a_0 < b_0$. 由于 E 是区间, 区间 $I_0 = [a_0, b_0] \subseteq E$.

对 I_0 二分, 中点必在 A, B 之一内, 取 $I_1 = [a_1, b_1]$ 是其中一个满足 $a_1 \in A$, $b_1 \in B$ 的半区间. 如此递归构造下去, 得到区间套 $I_n = [a_n, b_n]$.

其中 $a_n \in A$, $b_n \in B$, 且有 $b_n - a_n \to 0$.

由区间套定理, 存在

$$x \in \bigcap_n I_n$$

则 $\lim_n a_n = \lim b_n = x$, 而 $x \in E$. ~~属于 $A \cup B$~~ 于是 x 必属于 A, B 之一

这便使其中一个集合存在极限点在另一个集合内, 即得.

Ex.3.4.10. 设 $\{r_1, r_2, r_3, \cdots\}$ 是有理数序列. $\forall n\in\mathbb{N}$. $\varepsilon_n=\frac{1}{2^n}$, 定义

$$O=\bigcup_{n=1}^{\infty} V_{\varepsilon_n}(r_n). \qquad F=O^c.$$

(a). 判断 F 是否闭. 非空仅包含无理数.

(b). F 是否包含非空开区间? F 是否全不连通?

(c). 是否可能证明 F 是完全集? 若不能, 能否修改上述条构造使 F 成为~~包含~~仅包含无理数的非空完全集?

Pf. (a). F 闭. 因 O 开. O 测度有限 故 F 非空.

~~F 非空的不使用测度~~

O 包含所有有理数. ⇒ F 仅包含无理数.

(b). ~~[illegible]~~ 任何开区间内均存在有理数. ⇒ F 不包含任何非空开区间.

F 是全不连通的. ~~[illegible]~~ 因 $\forall$ ~~[illegible]~~ $a,b \in F$. 存在有理数 c, 使

$$F=A\cup B. \quad A=F\cap(-\infty,c). \quad B=F\cap(c,+\infty).$$

(c). 不能确定 F 中是否有孤立点.

存在仅包含无理数的完全集.

记 $\mathbb{Q}=\{r_1, r_2, r_3, \cdots\}$. ~~$\varepsilon_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$~~

为方便起见, 记 $\varepsilon=0$ 时. $V_\varepsilon(x)=\phi$

取 $\varepsilon_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 然后递归定义 ε_n 如下:

$$\varepsilon_n=\min\left\{\frac{\sqrt{2}}{2^n}, \frac{d_n}{2}\right\}, \quad d_n=\inf_{x\in O_{n-1}} |x-r_n|. \quad O_{n-1}=\bigcup_{k=1}^{n-1} V_{\varepsilon_k}(r_k). \ n\ge 2.$$

若 $\cancel{x_n}$ $d_n=0$，由于 ε_n 非零时总是无理数 所以此时，只能 $r_n \in O_{n-1}$

若 $d_n>0$，则定义的 ε_n 使

$$\overline{V_{\varepsilon_n}(r_n)} \cap \overline{V_{\varepsilon_m}(r_m)} = \phi, \quad \forall 1 \le m < n.$$

取 $O=\bigcup_{n=1}^{\infty} V_{\varepsilon_n}(r_n)$ 为开集，包含所有有理数点. F定义为 O^c.

是无理数集内的闭子集.

以下反证F无孤立点. 设 $x \in F$ 是F中的孤立点.

则有 $\varepsilon_0>0$，使 $(x-\varepsilon_0, x)$ 与 $(x, x+\varepsilon_0)$ 均包含于O.

由O是由其连通分支的开集构造而来，所以 $\exists n', m'$ 使

$$(x-\varepsilon_0, x) \subseteq V_{\varepsilon_{n'}}(r_{n'}), \quad (x, x+\varepsilon_0) \subseteq V_{\varepsilon_{m'}}(r_{m'}).$$

而这与 $\overline{V_{\varepsilon_{n'}}(r_{n'})} \cap \overline{V_{\varepsilon_{m'}}(r_{m'})} = \phi$ 矛盾.