Contents

Chapter 1

高中笔记8

1.1 读书笔记

康托尔: 德, 数学家, 集合论的创造人, 他证明了一条直线上的点和一个平面上的点一一对应, 也能和空间中的点一一对应. 因此1cm长的线段内的点与太平洋面上的点以及整个地球内部的点都“一样多". 他对这类“无穷集合"问题发表了一系列文章, 通过严格证明得出了许多惊人的结论.

罗素悖论: 又称理发师悖论: 某村只有一人会理发, 且该村的人都需要理发, 理发师约定, 给且只给村中自己不给自己理发的人理发, 试问: 理发师给不给自己理发.

阿贝尔: 椭圆函数论的创始人之一, 发现了椭圆函数的加法定理, 双周期性. 在交换群, 二项级数的严格理论, 级数求和等有巨大贡献, 还有阿贝尔积分, 阿贝尔积分方程, 阿贝尔函数, 阿贝尔级数, 阿贝尔部分和公式, 阿贝尔收敛判别法, 阿贝尔可和性.

分形: 龙的曲线是由一个等腰直角三角形开始的, 以该等腰直角三角形的直角边为斜边作另外的等腰直角三角形, 如此往后, 并将其斜边删除掉即可.

群论: 伽罗瓦是第一个使用群并系统地研究群的数学家. 他19岁时, 用群的思想解决了五次方程的问题. 逐渐开创了一个新的数学分支–抽象代数学. 它包括群论, 环论, 域论, 布尔代数等.

说谎者悖论: 公元前4世纪, 希腊哲学家也提出:“我现在正在说的这句话是谎话". 另外公元前6世纪, 古希腊克里特岛的哲学家伊壁门尼德斯断言:“所有克里特人所说的每一句话都是谎话."

干下去还有50%成功的希望, 不干便是100%的失败.

$A = x + y + z$(A:成功, x: 艰苦的劳动, y: 正确的方法, z: 少说空话)–爱因斯坦的公式.

埃托色尼的筛法提的求小于给定数N的所有素数的方法: 先从3写出所有小于N的奇数, 再从中划去$3, 5, 7, 11\cdots$的倍数.

球体填充问题: 把一大堆乒乓球倒进一个箱内, 倒至最后还剩几个, 使箱内乒乓球数目最多. 称为球体填充问题, 亦称开普勒猜想.

查: 吴文俊的“吴示性类", “吴示嵌类".

药剂师的砝码: 将300g药粉分成100g和200g各一份, 可是天平只有30g和35g两个砝码, 只需分两次即可, 分两步: 一, 将30g砝码放一盘上, 把300g药粉倒在两个盘上, 使之平衡, 于是, 一盘药粉为165g, 另一盘135g; 第二步将35g砝码, 从135g药粉中称出35g$\cdots$.

罗氏几何的公理系统与欧氏几何公理不同之处是: 平行公理: “用直线外一点, 至少可做两条直线与已知直线平行"来代替, 这引出了一连串和欧氏几何内容不同的新的几何命题.

1.2 球面几何

定义 1.2.1: 大圆

一个过球心的平面在球面上的截线叫做球面上的一个大圆.

定义 1.2.2: 球面二面角

球面上任两个大圆都相交于对顶的两点, 一对对顶点与连接它们的两条大圆弧(半个大圆弧)围成的图形称为球面二面角(梭形).

定义 1.2.3: 球面角

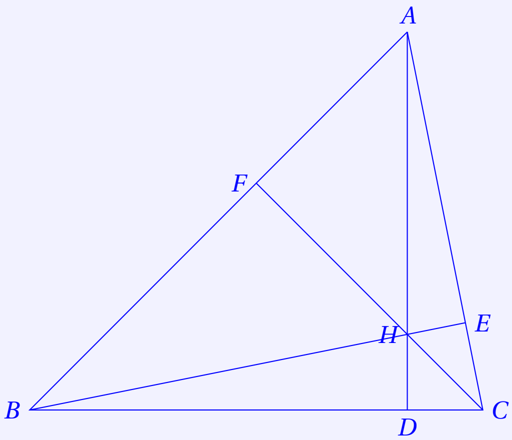
球面上一点及过该点的任意两条大圆弧所构成的图形称为球面角, 这两条大圆弧的切线间的夹角即为该球面角的大小.

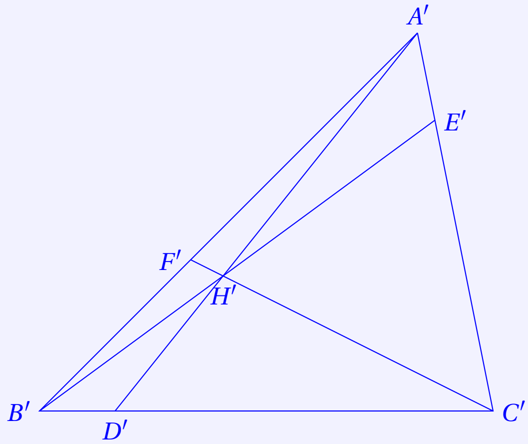
定义 1.2.4: 球面三角形

在半径为R的球面上相距小于πR的给定三点A,B,C唯一地确定了三条小于半圆的大圆圆弧$\overset{\frown}{AB},\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{CA}$.

定义 1.2.5: 伴垂心

如下左图是$\triangle ABC$的垂心的定义，如下右图与$\triangle ABC$全等，若$B'D'=CD$，$C'E'=AE$，$AF=B'F'$，则$\triangle A'B'C'$中的三线共点H'为$\triangle A'B'C'$的伴垂心.





定理 1.2.1: 球面三角形余弦定理

对于任给半径为R的球面三角形$\triangle ABC$，其三边a,b,c和三角$\angle A,\angle B,\angle C$之间恒满足:

$$\cos\frac{a}{R^2}=\cos\frac{c}{R^2}\cos\frac{b}{R^2}+\sin\frac{b}{R^2}\sin\frac{c}{R^2}\cos\angle A,$$
$$\cos\frac{b}{R^2}=\cos\frac{a}{R^2}\cos\frac{c}{R^2}+\sin\frac{c}{R^2}\sin\frac{a}{R^2}\cos\angle B,$$
$$\cos\frac{c}{R^2}=\cos\frac{b}{R^2}\cos\frac{a}{R^2}+\sin\frac{a}{R^2}\sin\frac{b}{R^2}\cos\angle C.$$

定理 1.2.2: 球面三角形正弦定理

条件同上，有$\frac{\sin\angle A}{\sin\frac{a}{R^2}}=\frac{\sin\angle B}{\sin\frac{b}{R^2}}=\frac{\sin\angle C}{\sin\frac{c}{R^2}}$.

1.3 不等式集

问题 1.3.1

已知$0 \le a_k \le 1(k=1,2,\cdots,2002)$, 记$a_{2003}=a_1$, $a_{2004}=a_2$, 求$\sum_{k=1}^{2002}(a_k-a_{k+1}\cdot a_{k+2})$的最大值.

解.
$$\sum_{k=1}^{2002}(a_k-a_{k+1}\cdot a_{k+2})=\sum_{k=1}^{2002}(a_k-a_k a_{k+1})=\sum_{k=1}^{2002}a_k(1-a_{k+1}).$$
Cauchy不等式, 上式右端不超过
$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{2002}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{2002}(1-a_{k+1})^2\right)} \le \frac{\sum a_k^2+\sum(1-a_{k+1})^2}{2}=\frac{\sum a_k^2+\sum(1-a_k)^2}{2}=\frac{\sum(2a_k^2-2a_k+1)}{2}.$$
因为$2a_k^2-2a_k+1\le 1$, 所以原式不超过$\frac{1}{2}\sum 1=1001$, 当$a_k=0$或1时取等号, 即当$a_1=a_3=a_5=\cdots=a_{2001}=1$且$a_2=a_4=\cdots=a_{2002}=0$时取等号. □

解. 由$0\le a_k\le 1$, 得$(1-a_k)(1-a_{k+1})=1-(a_k+a_{k+1})+a_k a_{k+1}\ge 0(k=1,2,\cdots,2002)$, 所以$1\ge a_k+a_{k+1}-a_k a_{k+1}\ge a_k+a_{k+1}-2a_k a_{k+1}$, 从而$2002\ge\sum_{k=1}^{2002}(a_k+a_{k+1}-2a_k a_{k+1})=2\sum(a_k-a_{k+1}a_{k+2})$, 即$\sum(a_k-a_{k+1}a_{k+2})\le 1001$. □

问题 1.3.2

求函数$y=x+\sqrt{x(2-x)}$的最值及此时x的值.

解. 显然$x\in[0,2]$, 所以可设$x=2\sin^2\theta(\theta\in\mathbb{R})$, 运用$|a\sin\theta+b\cos\theta|\le\sqrt{a^2+b^2}$即可. □

问题 1.3.3

设n是给定的正整数, $n\ge 13$, 对n个给定的实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$, 记$|a_i-a_j|(1\le i<j\le n)$有最小值m, 求在$\sum_{i=1}^n a_i^2=1$的条件下, m的最大值.

解. 不妨设$a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$, 于是$a_2-a_1\ge m, a_3-a_2\ge m,\cdots,a_n-a_{n-1}\ge m$, $a_j-a_i\ge(j-i)m(1\le i<j\le n)$.
$$\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2\ge m^2\times\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)^2=m^2\sum_{k=1}^{n-1}k(2k+1)(k+1)=\frac{m^2}{12}\cdot n^2(n^2-1).$$
另一方面, $\sum_{i=1}^n a_i^2=1$可得
$$\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2=n-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\le n.$$
故$n\ge\frac{m^2}{12}n^2(n^2-1)$, 所以$m\le\sqrt{\frac{12}{n^2(n^2-1)}}$, 当且仅当$\sum_{i=1}^n a_i=0$, 且$a_1,a_2,\cdots,a_n$成等差数列时取等号. □

问题 1.3.4

若$x,y,z>0$且$x^2+y^2+z^2=1$, 则$S=\frac{(z+1)^2}{2xyz}$取最小值时, x的值是多少?

解. $\sqrt{\sqrt{2}-1}$. □

引理 1.3.1

设$T\ge 0$, $x,y,z\ge 0$, 则$T\ge\sum x$的充要条件为:
$$(T^2-\sum x^2)^2-8\prod x\cdot T-4\sum y^2z^2\ge 0 \tag{1.1}$$
$$T^2\ge\sum x^2. \tag{1.2}$$

解. 若$T\ge\sum x$, 则1.2式明显成立, 且

$$(T+\sum x)(T^2-\sum x^2+2\sum yz)-8\prod x\ge 2\sum x\cdot 4\sum yz-8\prod x\ge 0.$$

根据

$$(T^2-\sum x^2)^2-8\prod x\cdot T-4\sum y^2z^2=(T-\sum x)\left[(T+\sum x)(T^2-\sum x^2+2\sum yz)-8\prod x\right] \tag{1.3}$$

知1.1式成立. 若1.1, 1.2式成立, 则

$$(T+\sum x)(T^2-\sum x^2+2\sum yz)-8\prod x\ge(\sqrt{\sum x^2}+\sum x)\cdot 2\sum yz-8\prod x\ge(\sqrt{3}+3)(\prod x)^{\frac{1}{3}}\cdot 6(\prod x)^{\frac{2}{3}}-8\prod x\ge 0.$$

根据1.3式知$T\ge\sum x$. □

由引理即得

定理 1.3.1

设$T\ge 0$, $x,y,z\ge 0$, 记$f=(T^2-\sum x^2)^2-8\prod x\cdot T-4\sum y^2z^2$, 则

(i) 若$f\ge 0$, $\sum x^2\le T^2$, 则$\sum x\le T$;

(ii) 若$f\le 0$, 则$\sum x\ge T$.

问题 1.3.5

$$\sum\cos\frac{A}{2}\le 2+\frac{s}{4R}+\frac{9\sqrt{3}-16}{4R}r.$$

解. 设$m=\frac{s}{4R}$, $n=\frac{r}{2R}$. 则$\sum\cos^2\frac{A}{2}=2+n$, $\prod\cos\frac{A}{2}=\frac{m}{2}$. 进而

$$\sum\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}=\frac{1}{4}(4+4n+m^2+n^2).$$

令$T=2+\frac{m}{2}+\frac{9\sqrt{3}-16}{2}n$, $x=\cos\frac{A}{2}$, $y=\cos\frac{B}{2}$, $z=\cos\frac{C}{2}$, 用定理1.3.1中结论(i). □

问题 1.3.6

设实数a,b,c,d, 满足$a^2+b^2+c^2+d^2=5$, 求$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2$的最大值.

解. 设$f=(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2=15-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+\lambda(a^2+b^2+c^2+d^2-5)$, 所以$f_a=-2(b+c+d)+2a\lambda$, $f_b=-2(a+c+d)+2b\lambda$, $f_c=-2(a+b+d)+2c\lambda$, $f_d=-2(a+c+d)+2b\lambda$, $f_\lambda=a^2+b^2+c^2+d^2-5$, 令$f_a=f_b=f_c=f_d=f_\lambda=0$, 解得$\lambda=-1$或$a=b=c=d$. 当$\lambda=-1$时, $a+b+c+d=0$得$f=20$. 当$a=b=c=d$时, $f=0$, 所以$f_{\max}=20$. □

问题 1.3.7

如果$x>0$, $y>0$, $z>0$且$x^2+y^2+z^2=1$, 求$\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}$的最小值.

解. 设$\frac{yz}{x}=a$, $\frac{xz}{y}-b$, $\frac{xy}{z}=c$, 则 $ab+bc+ca=1$, 所以$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca=1$, 所以$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\ge 3$, 另外令$f=a+b+c+\lambda(ab+bc+ca-1)$, 令 $f_a=1+(b+c)\lambda=0$, $f_b=1+(a+c)\lambda=0$, $f_c=1+(a+b)\lambda=0$, 所以 $a=b=c$时最小. □

问题 1.3.8

设$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$满足$a_0=\frac{1}{2}$, $a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n}a_k^2$, $k=0,1,2,\cdots,n-1$, 其中n是一个给定的正整数, 试证: $1-\frac{1}{n}<a_n<1$.

解. $a_n > a_{n-1} > a_{n-2} > \cdots > a_2 > a_1 > a_0 = \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{n+a_k} < \frac{1}{n} \Longrightarrow \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} < 1,$$
$$\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{n+a_k} > \frac{1}{n+1} \Longrightarrow \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} > \frac{n}{n+1}.$$

□

问题 1.3.9

当$a>1$时, 若不等式$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} > \frac{7}{12}\left[\log_{a+1} x - \log_a x + 1\right]$对于不小于2的正整数$n$恒成立, 求$x$的取值范围.

解. $a_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$递增, x的取值范围为$(1,+\infty)$. □

问题 1.3.10

实数集$\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 满足以下条件:

(1) $a_1 = a_n = 0$.

(2) 对$1 \le k \le n-1$, 有$a_k = c + \sum_{i=k}^{n-1} a_{i-k}(a_i + a_{i+1})$.

证明: $c \le \frac{1}{4n}$.

解. 定义$S_k = \sum_{i=0}^{k} a_i (k = 0,1,2,\cdots,n)$, 则

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k-1} &= nc + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=k}^{n-1} a_{i-k}(a_i + a_{i+1}) \\
&= nc + \sum_{i=0}^{n-1}(a_i + a_{i+1}) \cdot \sum_{k=0}^{i} a_{i-k} \\
&= nc + \sum_{i=0}^{n-1}(a_i + a_{i+1}) \sum_{t=0}^{i} a_t, (t = i-k) \\
&= nc + \sum_{i=0}^{n-1}(a_i + a_{i+1}) \cdot S_i \\
&= nc + [S_1 S_0 + (S_2 - S_0)S_1 + (S_3 - S_1)S_2 + \cdots + (S_n - S_{n-2})S_{n-1}]
\end{aligned}$$

即$S_n^2 - S_n + nc = 0$, $\Delta \ge 0 \Longrightarrow c \le \frac{1}{4n}$. □

问题 1.3.11

若关于x的不等式$\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt{x^2+ax+5}+1) \cdot \log_5(x^2+ax+6) + \frac{1}{\log_3 a} \ge 0$, 求$a$的取值范围.

解. 令$u = x^2+ax+5$, $\frac{\log_3(\sqrt{u}+1)}{-\log_3 a} \cdot \log_5(u+1) + \frac{1}{\log_3 a} \ge 0$. 因为$f(4)=1$, 所以$a=2$. □

问题 1.3.12

设$a_1, a_2, \cdots, a_{2002} > 0$且$\sum \frac{1}{2+a_i} = \frac{1}{2}$, 求$\prod a_i$的最小值.

解. 令$x_i=\frac{2}{2+a_i}$, 则$\sum x_i=1$, 则$a_i=2\cdot\frac{1-x_i}{x_i}$, 因为

$$\begin{aligned}\prod a_i&=2^{2002}\prod\frac{1-x_i}{x_i}\\&=2^{2002}\cdot\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{2002}}\prod(x_1+x_2+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_{2002})\\&\geq 2^{2002}\cdot\frac{1}{x_ix_2\cdots x_{2002}}\cdot 2001^{2002}\cdot\prod\sqrt[2001]{x_1x_2\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_{2002}}\\&=4002^{2002}.\end{aligned}$$

□

问题 1.3.13

求最小的正数λ, 使得对任意正整数n, a_i和b_i, $b_i\in[1,2](i=1,2,\cdots,n)$, 且$\sum_{i=1}^n a_i^2=\sum b_i^2$, 都有$\sum\frac{a_i^3}{b_i}\leq\lambda\cdot\sum a_i^2$.

解. 对任意$c_i,b_i\in[1,2]$, 有$\frac{1}{2}\leq\frac{c_i}{b_i}\leq 2$, 即$\frac{1}{2}b_i\leq c_i\leq 2b_i$, 从而$\left(\frac{1}{2}b_i-c_i\right)(2b_i-c_i)\leq 0$, 即$c_i^2+b_i^2\leq\frac{5}{2}c_ib_i$, 两边对$i$从1到$n$求和, 得$\sum c_i^2+\sum b_i^2\leq\frac{5}{2}\sum c_ib_i$, 设$a_i,b_i\in\left[1,\frac{2}{3}\right]$, 因$a_i^2=\frac{a_i^{\frac{3}{2}}}{b_i^{\frac{1}{2}}}\cdot a_i^{\frac{1}{2}}\cdot b_i^{\frac{1}{2}}$. 又

$$\frac{1}{2}\leq\frac{\frac{a_i^{\frac{3}{2}}}{b_i^{\frac{1}{2}}}}{a_i^{\frac{1}{2}}\cdot b_i^{\frac{1}{2}}}\leq 2.$$

故有$\frac{5}{2}\sum a_i^2\geq\sum\frac{a_i^3}{b_i}+\sum a_ib_i\geq\sum\frac{a_i^3}{b_i}+\frac{2}{5}(\sum a_i^2+\sum b_i^2)=\sum\frac{a_i^3}{b_i}+\frac{4}{5}\sum a_i^2$, 即$\sum\frac{a_i^3}{b_i}\leq\frac{17}{10}\sum a_i^2$, 当$n=2$, $a_1=1$, $a_2=2$, $b_1=2$, $b_2=1$时取等号. □

问题 1.3.14

已知: $x,y,z\in\mathbb{R}^*$, 有$xyz=1$且满足$x(1+z)>1$, $y(1+x)>1$, $z(1+y)>1$, 求证: $2(x+y+z)\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+3$.

解. 令$x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, $z=\frac{c}{a}$, 则$a+c>b$, $a+b>c$, $b+c>a$, 要证$2(x+y+z)\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+3$, 只需证

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+3\Longleftrightarrow 2(a^2c+b^2a+c^2b)\geq b^2c+c^2a+a^2b+3abc.$$

因为

$$(a+b-c)(b-c)^2\geq 0,\quad (b+c-a)(c-a)^2\geq 0,\quad (c+a-b)(a-b)^2\geq 0$$

展开相加, 即得. □

问题 1.3.15

已知正整数$n\geq 2$, 若对同时满足条件:

(1) $a_1a_2\cdots a_n=b_1b_2\cdots b_n$;

(2) $\sum_{1\leq i<j\leq n}|a_i-a_j|\leq\sum_{1\leq i<j\leq n}|b_i-b_j|$的任意正数$a_1,\cdots,a_n$与$b_1,\cdots,b_n$, 总有$\sum_{i=1}^n a_i\leq\lambda\sum_{i=1}^n b_i$. 试求正数$\lambda$的最小值.

解. 一方面, 取$(a_1,\cdots,a_n)=(1,1,\cdots,(1+x)x^{n-1})$, $(b_1,\cdots,b_n)=(1+x,x,x,\cdots,x)$, 满足(1)与(2), 此时$\lambda\geq\frac{\sum a_i}{\sum b_i}=\frac{n-1+x^{n-1}+x^n}{1+nx}$, 令$x\to 0$, 则$\lambda\geq n-1$.

以下证明$\lambda=n-1$时, 不等式成立.

不妨设$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$, $b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_n$, $n=2$时, 显然成立.

设$n\geq 3$,

(1) 若$a_1\leq\frac{n-1}{n}b_1$, 则$\sum a_i\leq na_1\leq(n-1)b_1\leq(n-1)\sum b_i$.

(2) 若$a_1 > \frac{n-1}{n}b_1$, 则

$$\begin{aligned}2(b_2+\cdots+b_n) &\geq 2(n-1)\cdot(b_2\cdots b_n)^{\frac{1}{n-1}} = 2(n-1)\left(\frac{a_1}{b_1}a_2\cdots a_n\right)^{\frac{1}{n-1}}\\ &\geq 2(n-1)\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{\frac{1}{n-1}}\cdot a_n > 2(n-1)\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\cdot a_n\\ &\geq na_n.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}(n-1)\sum b_i &= (n-1)b_1+(n-3)\sum_{i=2}^{n}b_i+2\sum_{i=2}^{n}b_i\\ &\geq (n-1)b_1+(n-3)\sum_{i=2}^{n}b_i+na_n \geq [(n-1)b_1+(n-3)b_2+\cdots-(n-1)b_n]+na_n\\ &= \sum_{1\leq i<j\leq n}|b_i-b_j|+na_n \geq \sum_{1\leq i<j\leq n}|a_i-a_j|+na_n\\ &= [(n-1)a_1+(n-3)a_2+\cdots-(n-1)a_n]+na_n\\ &\geq (n-1)a_1+a_n \geq a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n.\end{aligned}$$

□

问题 1.3.16: 1998年上海市高中数学竞赛

设非零多项式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, $g(x)=c_{n+1}x^{n+1}+c_nx^n+\cdots+c_0$, 满足$g(x)=(x+r)f(x)$, 其中$r$为一实数, 设$a=\max(|a_n|,|a_{n-1}|,\cdots,|a_0|)$, $c=\max(|c_{n+1}|,|c_n|,\cdots,|c_0|)$, 求证: $\frac{a}{c}\leq n+1$.

解. 设$|r|\leq 1$, 由$\sum_{i=0}^{n+1}c_ix^i=(x+r)\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=a_nx^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}(ra_i+a_{i-1})x^i+ra_0$. 故

$$\begin{cases}c_{n+1}=a_n\\ c_n=ra_n+a_{n-1}\\ \cdots\\ c_1=ra_1+a_0\\ c_0=ra_0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}a_n=c_{n+1}\\ a_{n-1}=-rc_{n+1}+c_n\\ a_{n-2}=(-r)^2c_{n+1}+(-r)c_n+c_{n-1}\\ \cdots\\ a_0=(-r)^nc_{n+1}+(-r)^{n-1}c_n+\cdots+c_1,\end{cases}$$

故$|a|=|a_i|=|(-r)^{n-i}c_{n+1}+\cdots+c_{i+1}|\leq|c_{n+1}|+\cdots+|c_{i+1}|\leq(n-i+1)c\leq(n+1)c$.

如果$|r|>1$, 令$x=\frac{1}{x}$, 代入$g(x)=(x+r)f(x)$, 则转化为上述情形, 仍有$a\leq(n+1)c$.

另外

$$|a|=|a_i|\leq|r|^{n-i}|c_{n+1}|+\cdots+|c_{i+1}|\leq(|r^n|+|r^{n-1}|+\cdots+1)c\leq\frac{|r|^{n+1}-1}{|r|-1}c$$

而

$$\frac{|r|^{n+1}-1}{|r|-1}\leq n+1 \Longleftrightarrow |r|^{n+1}\geq n|r|-n+|r| \Longleftrightarrow |r|^n+\frac{n}{|r|}\geq n+1 \Longleftrightarrow |r|^n+\frac{1}{|r|}+\cdots+\frac{1}{|r|}\geq n+1$$

($|r|=0$时, 命题显然成立). □

问题 1.3.17

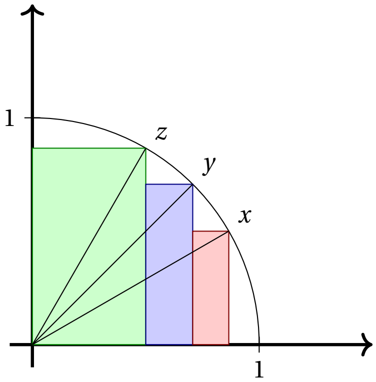
若$a,b,c\in\mathbb{R}$, 且$5a^4+4b^4+6c^4=90$, 求$5a^3+2b^3+3c^3$的最大值.

解. 只需考虑$a,b,c\in\mathbb{R}^*$. 因$a^3=\frac{1}{2}(a\cdot a\cdot a\cdot 2)\leq\frac{1}{8}(a^4+a^4+a^4+2^4)=\frac{3}{8}a^4+2$, 同理$b^3\leq\frac{3}{4}b^4+\frac{1}{4}$, $c^3\leq\frac{3}{4}c^4+\frac{1}{4}$, 所以所求最大值为45. □

问题 1.3.18

若x,y,z为实数, $0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$, 证明: $\frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z$.

解. 原不等式等价于证明$\frac{\pi}{4} > \sin x(\cos x - \cos y) + \sin y(\cos y - \cos z) + \sin z \cos z$. 如图所示

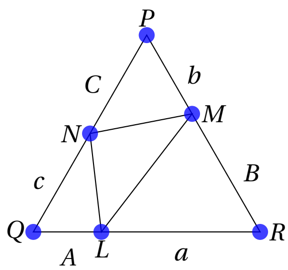


□

问题 1.3.19: 1987年第21届全苏MO

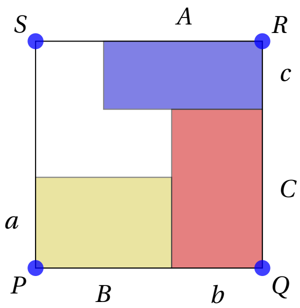
正数a, b, c, A, B, C满足条件$a + A = b + B = c + C = k$, 求证: $aB + bC + cA < k^2$.

解. 主试委员会给出的解答是$k^3 = (a + A)(b + B)(c + C)$, 利用放缩的技巧给出证明, 北京四中的袁峰同学给出了如下构造性证明. 如图: $S_{\triangle LRM} + S_{\triangle PNM} + S_{\triangle QLN} < S_{\triangle PQR}$, 化简即得.



□

解. 如图:



□

问题 1.3.20: 第31届IMO预选题

设集合$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \{1, 2, \cdots, n\}$, 求证:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n-1}{n} \le \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

解. 设$b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}$是$a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$的一个排列, 且$b_1 < b_2 < \cdots < b_{n-1}$, $c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$是$a_2, a_3, \cdots, a_n$的一个排列, 且$c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1}$, 则

$$\frac{1}{c_1} > \frac{1}{c_2} > \cdots > \frac{1}{c_{n-1}}.$$

且$b_1\ge 1,\ b_2\ge 2,\cdots,b_{n-1}\ge n-1,\ c_1\le 2,c_2\le 3,\cdots,c_{n-1}\le n$, 由排序不等式得:

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\ge\frac{b_1}{c_1}+\frac{b_2}{c_2}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{c_{n-1}}\ge\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}.$$

这是南斯拉夫提给第31届IMO的一道试题, 原证法是利用加强命题的手法, 用数学归纳法给出证明. 一则加强命题很难想到, 二则归纳法证明要对足标进行讨论, 比较麻烦. 在当年国家集训队里姚建钢同学(第35届IMO金牌得主)的证法, 更是干脆, 漂亮, 出人意料. □

解. 易证

$$\prod_{k=1}^{n-1}(a_k+1)\ge\prod_{k=1}^{n}a_k,$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{a_{k+1}}+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)&=\frac{1}{a_1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k+1}{a_{k+1}}\\&\ge n\sqrt[n]{\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(a_k+1)}{\prod_{k=1}^{n}a_k}}\ge n\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{k+1}\end{aligned}$$

□

问题 1.3.21: 第24届IMO

设a,b,c分别为一个三角形的三边之长, 求证:

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0.$$

并指出等号成立的条件.

解. 原联邦德国选手伯恩哈德·里普只用了一个等式:

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)=a(b-c)^2(b+c-a)+b(a-b)(a-c)(a+b-c)$$

由轮换对称性, 不妨设$a\ge b,c$, 即得欲证不等式成立, 而且显然等号成立的充要条件是$a=b=c$.

里普的证法新颖, 巧妙, 简洁, 与主试委员会提供的参考答案不同, 他因此获得了该届的特别奖. □

问题 1.3.22: 1980年芬兰, 英国, 匈牙利, 瑞典四国联赛

设数列$a_0,a_1,\cdots,a_n$满足$a_0=\frac{1}{2}$及$a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n}a_k^2(k=0,1,2,\cdots,n-1)$, 其中$n$是一个给定的正整数, 试证:

$$1-\frac{1}{n}<a_n<1.$$

解. 该题是该次竞赛得分率最低的一道试题, 主试委员会所给出的解法也相当繁琐, 前后共用了四次归纳法, 译成中文后有4000多字, 中国科技大学自志东先生对此题采用了大胆的处理方法, 加强命题, 出奇制胜给出一个简洁的证明.

由于$a_1=a_0+\frac{1}{n}a_0^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}=\frac{2n+1}{4n}$, 所以

$$\frac{n+1}{2n+1}<a_1<\frac{n}{2n-1}.$$

我们来用归纳法证: 对于一切$1\le k\le n$, 都有

$$\frac{n+1}{2n-k+2}<a_k<\frac{n}{2n-k}.\tag{1.4}$$

假设(1.4)对于$k<n$成立, 则

$$a_{k+1}=a_k\left(1+\frac{1}{n}a_k\right)<\frac{n}{2n-k}\left(1+\frac{1}{2n-k}\right)=\frac{n(2n-k+1)}{(2n-k)^2}<\frac{n}{2n-(k+1)}.$$

所以

$$\begin{aligned}a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n}a_k^2&>\frac{n+1}{2n-k+2}+\frac{(n+1)^2}{n(2n-k+2)^2}\\&>\frac{n+1}{2n-(k+1)+2}\end{aligned}$$

于是(1.4)式对于一切$1\le k\le n$均成立, 特别在$k=n$时,

$$1-\frac{1}{n}<\frac{n+1}{n+2}<a_n<\frac{n}{n}=1.$$

说明 这里所证的不等式(1.4)式比题目所要证明的不等式强, 却收到了事半功倍之效, 下面给出一种直接了当的证明. □

解. 由已知,

$$\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}=\frac{1}{n+a_{k-1}},$$

从而$a_n>a_{n-1}>\cdots>a_1>a_0=\frac{1}{2}$. 所以

$$\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}<\frac{1}{n},\quad k=1,2,\cdots,n.$$

累加得$\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}>\frac{n}{n+1}$, 所以$\frac{1}{a_n}<2-\frac{n}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}$. □

问题 1.3.23

已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbb{R}$, 对于任意实数m,n均有$f(m+n)=f(m)+f(n)-1$, 且$f\left(\frac{1}{2}\right)=2$, 当$x>-\frac{1}{2}$时, 恒有$f(x)>0$, 求证: $f(x)$单调递增.

解. 证明: 令$x_1>x_2$, 所以

$$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)-1=f\left(\left(x_1-x_2-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)-1=f\left(x_1-x_2-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)-1-1=f\left(x_1-x_2-\frac{1}{2}\right)$$

因为$x_1-x_2-\frac{1}{2}>-\frac{1}{2}$, 所以$f\left(x_1-x_2-\frac{1}{2}\right)>0$, 所以$f(x_1)>f(x_2)$, 得证. □

问题 1.3.24

已知: 正数x,y,z均小于1且$x+y+z=2$, $w=xy+yz+zx$, 求w的取值范围.

解. 易得$w\le\frac{4}{3}$, 令$x(1-x)=a^2$, $y(1-y)=b^2$, $z(1-z)=c^2$, 因为

$$w=xy+z(2-z)=xz+y(2-y)=yz+x(2-x)$$

所以

$$3w=w+2\times2-x^2-y^2-z^2=w+4+a^2+b^2+c^2-2$$

所以$2w=2+a^2+b^2+c^2\ge2$, 即$w\ge1$. 仅当$a,b,c=0$时取$w=1$, 但$a,b,c\ne0$, 所以$w>1$. □

问题 1.3.25

已知$\frac{a^2+b^2}{4}+c^2=1$, 求$a+b+c$的最大值.

解.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2=&a^2+b^2+c^2+2bc+2ab+2ac\\\le&a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+\left(\frac{b^2}{4}+4c^2\right)+\left(\frac{a^2}{4}+4c^2\right)\\=&9\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right)=9.\end{aligned}$$

□

问题 1.3.26

已知$a, b > 0$, $a + b = 1$, 证明: $\frac{3}{2} < \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} \le \frac{8}{5}$.

解. 原式等价于证明:

$$\begin{aligned} 15(a^2+1)(b^2+1) < 10(a^2+b^2+2) \le 16(a^2+1)(b^2+1) &\Longleftrightarrow 15a^2b^2+5a^2+5b^2-5 < 0 \le 16a^2b^2+6a^2+6b^2-4 \\ &\Longleftrightarrow 3a^2b^2+a^2+b^2-1 < 0 \le 8a^2b^2+3a^2+3b^2-2. \end{aligned}$$

因$a+b=1$, 所以$a^2+b^2-1=-2ab$. 所以上式等价于

$$3a^2b^2-2ab < 0 \le 8a^2b^2-6ab+1.$$

又由$a^2+b^2+2ab=1 \ge 4ab$, 所以$0 < ab \le \frac{1}{4}$, 所以上式成立. □

解. 令$a=\sin^2\theta, b=\cos^2\theta$, $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1} &= \frac{1}{1+\sin^4\theta}+\frac{1}{1+\cos^4\theta} \\ &= \frac{4}{5-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta}+\frac{4}{5+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta} \\ &= \frac{16(11+\cos 4\theta)}{(11+\cos 4\theta)^2-8(11+\cos 4\theta)+80} \\ &= \frac{16y}{y^2-8y+80} = \frac{16}{y+\frac{80}{y}-8} \end{aligned}$$

因$0<\theta<\frac{\pi}{2}$, 所以$0<4\theta<2\pi$. 所以$10<y\le 12$, 并有$\frac{3}{2}<\frac{16}{y+\frac{80}{y}-8}\le\frac{8}{5}$. □

问题 1.3.27

已知数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$满足: $b_n = a_n - a_{n+2}$, $c_n = a_n + 2a_{n+1} + 3a_{n+2}$, $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 若$\{c_n\}$为等差数列且$b_n \le b_{n+1}$, 证明: $b_n = b_{n+1}$.

解. 由于$a_n - a_{n+2} = b_n \le b_{n+1} \le b_{n+2} = a_{n+2} - a_{n+4}$, 所以$2a_{n+2} \ge a_n + a_{n+4}$. 因为$2c_{n+1} = c_n + c_{n+2}$, 所以$4a_{n+3} = a_n + 3a_{n+4} \le 2a_{n+2} + 2a_{n+4}$, 所以$2a_{n+3} \le a_{n+2} + a_{n+4}$. 所以$a_{n+3} - a_{n+2} \le a_{n+4} - a_{n+3} \le a_{n+5} - a_{n+4}$, 所以$a_{n+3} - a_{n+5} \le a_{n+2} - a_{n+4}$, 所以$b_{n+3} \le b_{n+2} \le b_{n+3}$, 所以$b_{n+3} = b_{n+2}$, $(n \ge 1)$. 所以$b_3 = b_4 = b_5 = \cdots = -2d = a_3 - a_5 = a_4 - a_6 = a_5 - a_7$, 所以

$$\begin{aligned} 4a_5 - 3a_6 = a_2 \le a_3 - a_5 + a_4 &\Longrightarrow 5a_5 \le a_3 + a_4 + 3a_6 \\ &\Longrightarrow 5(a_3+2d) \le a_3 + a_4 + 3(a_4+2d) \\ &\Longrightarrow 2a_3 \le 2a_4 - 2d = 2a_4 + a_3 - a_5 \\ &\Longrightarrow a_3 + a_5 \le 2a_4. \end{aligned}$$

因$a_3 + a_5 \ge 2a_4$, 所以$a_2 = a_3 - a_5 + a_4$, 同理$a_1 = a_2 - a_4 + a_3$, 即$b_1 = b_2 = b_3 = \cdots$.

两个正数a, b的和一定时, 它们的积

$$ab = \frac{1}{4}\left((a+b)^2 - (a-b)^2\right) \tag{1.5}$$

随着差$|a-b|$的增大而减小; 其平方和

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}\left((a+b)^2 + (a-b)^2\right) \tag{1.6}$$

随着差$|a-b|$的增大而增大. □

问题 1.3.28

已知$\triangle ABC$的三边, a, b, c成等比数列, 则$\sin B + \cos B$的取值范围为____.

解. 命题等价于$a+b>c$, $a+c>b$, $b+c>a$, $b^2=ac$,

$$b^2=ac=a^2+c^2-2ac\cos B\geq 2ac-2ac\cos B,$$

所以$\cos B\geq\frac{1}{2}$, $0<B\leq 60°$, 由$\frac{1}{2}\leq\cos B<1$及$0<\sin B\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以

$$\frac{1}{2}<\cos B+\sin B<\frac{\sqrt{3}}{2}+1, \tag{1.7}$$

另一方面, $\sin B+\cos B=\sqrt{2}\sin(B+45°)$, 而$45°<B+45°<105°$, 故

$$1<\sin B+\cos B\leq\sqrt{2}. \tag{1.8}$$

综合(1.7), (1.8)有$1<\sin B+\cos B\leq\sqrt{2}$. □

问题 1.3.29

设a,b,c是直角$\triangle ABC$的三边长, c为斜边, 求使不等式

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\geq kabc$$

恒成立的k的最大值.

解. $a>0, b>0, c>0$, $c^2=a^2+b^2$, 所以

$$\begin{aligned}LHS&=(a^2+b^2)c+a\left(b^2+\frac{c^2}{2}\right)+b\left(\frac{c^2}{2}+a^2\right)+\frac{c}{2}\cdot c(a+b)\\&\geq 2abc+\sqrt{2}abc+\sqrt{2}abc+\frac{c}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot 2\sqrt{ab}\\&\geq(2+2\sqrt{2})abc+c\cdot\sqrt{2ab}\cdot\sqrt{ab}=(2+3\sqrt{2})abc,\end{aligned}$$

仅当$a=b$时上式取等号.

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 5+3\sqrt{2}.$$

□

问题 1.3.30

设x_1是方程$\sqrt{3}\sin x-3\cos x=2a-1$的最大负根, x_2是方程$2\cos^2 x-2\sin^2 x=a$的最小正根, 求使不等式$|x_1|\leq x_2$成立的实数a的取值范围.

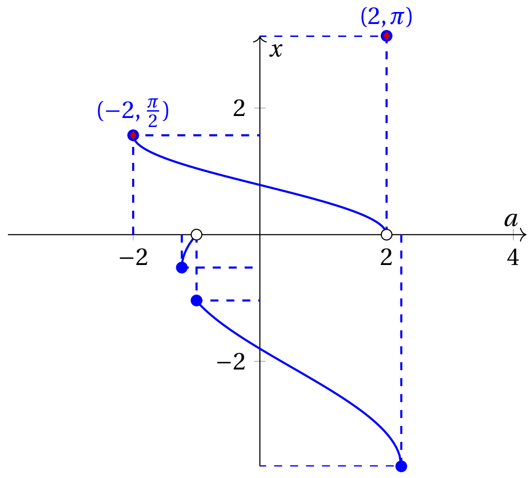
解. 方程$\sqrt{3}\sin x-3\cos x=2a-1$等价于$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2a-1}{2\sqrt{3}}$, 从而得到$-1\leq\frac{2a-1}{2\sqrt{3}}\leq 1$. 解得$\frac{1}{2}-\sqrt{3}\leq a\leq\frac{1}{2}+\sqrt{3}$, 而且

$$x_1=\begin{cases}\frac{\pi}{3}+\arcsin\frac{2a-1}{2\sqrt{3}}, & \left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}\leq a<-1\right)\\ -\frac{2\pi}{3}-\arcsin\frac{2a-1}{2\sqrt{3}}, & \left(-1\leq a\leq\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)\end{cases}$$

其图像如图, 位于a轴下方, 方程$2\cos^2 x-2\sin^2 x=a$等价于$\cos 2x=\frac{a}{2}$, 其中$-1\leq\frac{a}{2}\leq 1$, 所以$-2\leq a\leq 2$, 解得

$$x_2=\begin{cases}\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{2}, & (-2<a\leq 2)\\ \pi, & (a=2).\end{cases}$$

其图像如图, 它位于a轴上方, 比较两个函数的图像, 不难看出$|x_1|\leq x_2$的充要条件是$\frac{1}{2}-\sqrt{3}\leq a\leq -1$或$a=2$.



□

问题 1.3.31

函数$y=\sqrt{8x-x^2}-\sqrt{14x-x^2-48}$的最大值为$\underline{2\sqrt{3}}$, 最小值为$\underline{0}$.

解. x的定义域为$6\le x\le 8$, 而

$$f(x)=\frac{6\sqrt{8-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-6}}$$

在$[6,8]$上递减. □

问题 1.3.32

已知$a,b,c,d\in\mathbb{R}$, 满足$a+b+c+d=3$, $a^2+2b^2+3c^2+6d^2=5$, 则a的最小值与最大值的和是$\underline{3}$.

解.

$$5-a^2=2b^2+3c^2+6d^2=\frac{1}{6}(3+2+1)(2b^2+3c^2+6d^2)\ge(b+c+d)^2=(3-a)^2.$$

□

问题 1.3.33

用$\delta(S)$表示非零整数集S中所有元素的和, 设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{11}\}$是正整数集, 且$a_1<a_2<\cdots<a_{11}$, 若对每个正整数$n\le 1500$, 存在$A$的子集$S$, 使得$\delta(S)=n$, 求满足上述要求的$a_{10}$的最小值.

解. 令$S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$, $(1\le k\le 11)$, 若$a_k>S_{k-1}+1$, 则不存在$S\subset A$, 使$\delta(S)=S_{k-1}+1$, 所以$S_k=S_{k-1}+a_k\le 2S_{k-1}+1$. 又由题设得$S_1=a_1=1$, 于是由归纳法易得$S_k\le 2^k-1$, $(1\le k\le m)$. 若$S_{10}<750$, 则$a_{11}\le 750$, (否则750无法用$\delta(S)$表出), $S_{11}=S_{10}+a_{11}<1500$, 所以$S_{10}\ge 750$. 又$S_8\le 2^8-1=255$, 所以$2a_{10}\ge a_9+a_{10}=S_{10}-S_8\ge 495$, $a_{10}\ge 248$, 另一方面, 令$A=\{1,2,4,8,16,32,64,128,247,248,750\}$合题意. □

问题 1.3.34

$a,b,c>0$, $l^2=a^2+b^2+c^2$, 证明: $(l^4-a^4)(l^4-b^4)(l^4-c^4)\ge 512a^4b^4c^4$.

解.

$$\begin{aligned}LHS&=(l^2+a^2)(l^2+b^2)(l^2+c^2)(l^2-a^2)(l^2-b^2)(l^2-c^2)\\&=(2a^2+b^2+c^2)(a^2+2b^2+c^2)(a^2+b^2+2c^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)\\&\ge 4\sqrt[4]{a^4b^2c^2}\cdot 4\sqrt[4]{a^2b^4c^2}\cdot 4\sqrt[4]{a^2b^2c^4}\cdot 2\sqrt{b^2c^2}\cdot 2\sqrt{c^2a^2}\cdot 2\sqrt{a^2b^2}\\&=RHS.\end{aligned}$$

□

解. 问题等价于证明

$$\left(\frac{l^4}{a^4}-1\right)\left(\frac{l^4}{b^4}-1\right)\left(\frac{l^4}{c^4}-1\right)\geq 512$$

设$x=\frac{a^2}{l^2}$, $y=\frac{b^2}{l^2}$, $z=\frac{c^2}{l^2}$, 则$x+y+z=1$, 所以上式等价于证明

$$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\geq 512.$$

因

$$\frac{1}{x^2}-1=\frac{(1-x)(1+x)}{x^2}=\frac{(y+z)(x+y+z+x)}{x^2}\geq\frac{2\sqrt{yz}(2x+2\sqrt{yz})}{x^2}\geq\frac{2\sqrt{yz}\cdot 4\sqrt{x\sqrt{yz}}}{x^2}=\frac{8\sqrt[4]{x^2y^3z^3}}{x^2}.$$

等号当且仅当$x=y=z$时取得, 同理$\frac{1}{y^2}-1\geq 8\frac{\sqrt[4]{x^3y^2z^3}}{y^2}$, $\frac{1}{z^2}-1\geq 8\frac{\sqrt[4]{x^3y^3z^2}}{z^2}$, 以上三式相乘即得. □

问题 1.3.35

在锐角$\triangle ABC$中, $a<b<c$, 记$P=\frac{a+b+c}{2}$, $Q=a\cos C+b\cos B+c\cos A$, 则$P,Q$的关系是?

解.

$$\begin{aligned}
P-Q&=\frac{a+b+c}{2}-b-b\cos B\\
&=\frac{a+b+c}{2}-b\left(1+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)\\
&=\frac{a+b+c}{2}-b\cdot\frac{(a+c-b)(a+c-b)}{2ac}\\
&=\frac{1}{2}(a+b+c)\left(1-\frac{b(a+c-b)}{2ac}\right)\\
&=\frac{1}{2}(a+b+c)\left(\frac{b^2-ab-bc+ac}{ac}\right)\\
&=\frac{1}{2ac}(a+b+c)(b-c)(b-a)<0
\end{aligned}$$

另外$a<b<c$有$\cos C<\cos B<\cos A$, 根据排序不等式,

$$\begin{aligned}
a\cos C+b\cos B+c\cos A&>a\cos B+b\cos C+c\cos A\\
a\cos C+b\cos B+c\cos A&>a\cos C+b\cos A+c\cos B.
\end{aligned}$$

相加得$2(a\cos C+b\cos B+c\cos A)>a+b+c$. □

问题 1.3.36

设$x,y\in\mathbb{R}^+$, $x+y=3952$, 则( ).

A. $x^{1949}\cdot y^{2003}\geq 1949^{1949}\cdot 2003^{2003}$.

B. $x^{1949}\cdot y^{2003}\leq 1949^{1949}\cdot 2003^{2003}$.

C. $y^{1949}\cdot x^{2003}\geq 1949^{1949}\cdot 2003^{2003}$.

D. 以上都不对.

解. 由于$x+y=3952$, 所以

$$1949+2003=\sum_{i=1}^{1949}\frac{x}{1949}+\sum_{i=1}^{2003}\frac{y}{2003}\geq(1949+2003)\sqrt[3952]{\left(\frac{x}{1949}\right)^{1949}\cdot\left(\frac{y}{2003}\right)^{2003}}$$

所以$\sqrt[3952]{\left(\frac{x}{1949}\right)^{1949}\cdot\left(\frac{y}{2003}\right)^{2003}}\leq 1$. □

问题 1.3.37

设x,y是不相等的正数, n,m是正整数, 且$n>m$, 令$a=\sqrt[m]{x^m+y^m}$, $b=\sqrt[n]{x^n+y^n}$, 则a与b的大小关系为$\underline{a>b}$.

解.

$$\begin{aligned}a>b &\Longleftrightarrow (x^m+y^m)^{m+1}>(x^{m+1}+y^{m+1})^m\\ &\Longleftrightarrow (x^m+y^m)^m>\frac{(x^{m+1}+y^{m+1})^m}{x^m+y^m}=\left(\frac{x^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}+\frac{y^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}\right)^m\\ &\Longleftrightarrow x^m+y^m>\frac{x^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}+\frac{y^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}\end{aligned}$$

因$x^m=\frac{x^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m}}>\frac{x^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}$, 同理$y^m=\frac{y^{m+1}}{\sqrt[m]{y^m}}>\frac{y^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}$, 所以不等式成立, 由幂平均不等式可知$2b>a$. □

问题 1.3.38

已知$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, 且$\sin\frac{\alpha}{2}=a\cos\beta$, 当$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$时, 求$a$的取值范围.

解. 显然$a=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}>0$, 因为$-\frac{\beta}{2}<\frac{1}{2}\alpha<\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}$, 所以$\sin\frac{\alpha}{2}<\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)$. 所以

$$a<\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2\left(\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)}\geq\frac{1}{2},$$

其中等号取不到, 所以$a\leq\frac{1}{2}$. □

问题 1.3.39

设$b_1,b_2,\cdots,b_n$是正数$a_1,a_2,\cdots,a_n$的一个排列, 证明$\sum_{k=1}^n\frac{a_k}{b_k}\geq n$.

解. 不妨设$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$, 因$a_k\in\mathbb{R}^+$, 所以$\frac{1}{a_1}\leq\frac{1}{a_2}\leq\cdots\leq\frac{1}{a_n}$, 又$\frac{1}{b_1},\frac{1}{b_2},\cdots,\frac{1}{b_n}$是$\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\cdots,\frac{1}{a_n}$的一个排列, 于是$n=\sum_{k=1}^n a_k\cdot\frac{1}{a_k}\leq\sum_{k=1}^n a_k\cdot\frac{1}{b_k}$, 另外

$$\sum_{k=1}^n\frac{a_k}{b_k}\geq n\sqrt[n]{\frac{a_1a_2\cdots a_n}{b_1b_2\cdots b_n}}=n.$$

□

问题 1.3.40

若$x,y,z,w>0$, 且$x+y+z+w=70$, 求函数$\mu=\sqrt[4]{2(x+1)}+\sqrt[4]{16(y+2)}+\sqrt[4]{54(z+3)}+\sqrt[4]{128(w+4)}$的最大值.

解.

$$\mu\leq\frac{1}{4}\left(\left(\frac{x+1}{4}+2+2+2\right)+\left(\frac{y+2}{4}+4+4+4\right)+\left(\frac{z+3}{4}+6+6+6\right)+\left(\frac{w+4}{4}+8+8+8\right)\right)=20$$

所以

$$\left(\frac{\mu}{\sqrt[4]{2}}\right)^2=\left(\sum\sqrt[4]{i^3(x_i+i)}\right)^2\leq\left(\sum\sqrt{i^2}\right)\left(\sum\sqrt{i(x_i+i)}\right)=10\sum\sqrt{i(x_i+i)}\leq10\sqrt{\sum i\sum(x_i+i)}=400\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

所以$\mu\leq20$. □

问题 1.3.41

若$A=a\sin^2x+b\cos^2x$, $B=a\cos^2x+b\sin^2x$, $(a,b\in\mathbb{R})$, 证明$m=AB$, $n=ab$, $P=A^2+B^2$, $Q=a^2+b^2$满足$m+Q\geq P+n$.

解. $AB=ab+\sin^2x\cos^2x(a-b)^2$, 所以$AB-ab=(a-b)^2\sin^2x\cos^2x\geq 0$, 而$(A+B)^2=(a+b)^2$, 所以$A^2+B^2\leq a^2+b^2$, 又因为$m\geq n$, $P\leq Q$, 所以$P+n\leq m+Q$. □

问题 1.3.42

已知$x,y,z\in\mathbb{R}^+$, 且满足$xyz(x+y+z)=1$, 求$t=(x+y)(x+z)$的最小值.

解. $x^2+xy+xz=\frac{1}{yz}$, 所以$t=yz+\frac{1}{yz}\geq 2$, 当$y=z=1$, $x=\sqrt{2}-1$时取等号. □

问题 1.3.43

如果$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, $(n\in\mathbb{N})$, 证明: 对于任意的$n\geq 2$, 都有$a_n^2>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)$.

解. 用数学归纳法, 简证

$$a_{n+1}^2=\left(a_n+\frac{1}{n+1}\right)^2=a_n^2+\frac{2a_n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}>a_n^2+\frac{2a_{n+1}}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}>2\sum_{k=2}^{n+1}\frac{a_k}{k}-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

由此应给结论加强为$a_n^2>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)+\frac{1}{n}$. 所以

$$a_{n+1}^2=a_n^2+\frac{2a_{n+1}}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}>2\sum_{k=2}^{n+1}\frac{a_k}{k}+\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)^2}=2\sum_{k=2}^{n+1}\frac{a_k}{k}+\frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2}>2\sum\frac{a_k}{k}+\frac{n^2+n}{n(n+1)^2}=RHS$$

成立. □

解. 裂项, 放缩法

$$a_n^2=\sum_{k=2}^{n}(a_k^2-a_{k-1}^2)+a_1^2=\sum_{k=2}^{n}\frac{2a_k-\frac{1}{k}}{k}+1=2\sum\frac{a_k}{k}+1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}>2\sum\frac{a_k}{k}+1-\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=2\sum\frac{a_k}{k}+\frac{1}{n}.$$

□

问题 1.3.44

若$n\in\mathbb{N}$, $n>1$, 求证: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}>\frac{4}{7}$.

解. 因$n=2$时上式成立, 记$f(n)=LHS$. 因为$f(n)-f(n-1)=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}>0$, $(n\geq 3)$, 所以$f(n)$递增, 所以$f(n)>\frac{4}{7}$. □

解. 用数学归纳法, 加强命题为$f(n)>\frac{4}{7}+\frac{n}{3n+1}-\frac{17}{42}$. □

解.

$$2n+f(n)=2+\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{2n}{2n-1}+\frac{2n-1}{2n}=\frac{5}{2}+\frac{25}{12}+\cdots\geq\frac{55}{12}+2n-4=2n+\frac{7}{12}>\frac{4}{7}+2n,\quad(n\geq 3).$$

□

解.

$$f(n)=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1+n}^{2n}\frac{1}{k}$$

由均值不等式有$\frac{(n+1)+(n+2)+\cdots+2n}{n}>\frac{n}{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}}$, 所以$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{n^2}{n(3n+1)}$, 又因为$n\in\mathbb{N}_+$, $n>1$, 所以$3n+1\leq 3n+\frac{n}{2}=\frac{7n}{2}$, 所以$\frac{2n}{3n+1}\geq\frac{4}{7}$, 得证. □

问题 1.3.45

已知α,β为锐角, 且$\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta}+\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}=1$, 求$\alpha+\beta$.

解.
$$LHS=(\sin^2\beta+\cos^2\beta)\left(\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta}+\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}\right)\ge(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2=1$$

当且仅当$\frac{\cos^4\alpha}{\sin^4\beta}=\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\beta}$时, 即$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$时取等号. 这等价于$\cos(\alpha+\beta)=0$, 即$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. □

问题 1.3.46

设a,d为非负实数, b,c为正实数, 且$b+c\ge a+d$, 求$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}$的最小值.

解. 因为$b+c\ge a+d$, 所以$b+c\ge\frac{1}{2}(a+b+c+d)$, 由$b+c\ge a+d$, 不妨设$b\ge c$, $a\ge d$, $a+b\ge c+d$, 所以$\frac{1}{c+d}\ge\frac{1}{a+b}$, 因此

$$\begin{aligned}\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}&=\frac{b+c}{c+d}-c\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)\\&\ge\frac{1}{2}\frac{a+b+c+d}{c+d}-(c+d)\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{c+d}+\frac{c+d}{a+b}-\frac{1}{2}\\&\ge2\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\\&=\sqrt{2}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

当且仅当$\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{c+d}=\frac{c+d}{a+b}$时, 取等号, 此处要以$q\cdot\frac{a+b}{c+d}\cdot c+da+b$为常数去联想. □

问题 1.3.47

设$f(x)=x^2+px+q$, $p,q\in\mathbb{R}$, 若$|f(x)|$在$x\in[-1,1]$上的最大值M, 求M的最小值.

解. 设$M=\max_{-1\le x\le1}|f(x)|$, 则$M\ge|f(1)|=|1+p+q|$,
$$M\ge|f(-1)|=|1-p+q|,\quad M\ge|f(0)|=|q|,$$
则$4M\ge|1+p+q|+|1-p+q|+2|-q|\ge|(1+p+q)+2(-q)+(1-p+q)|=2$, 故$M\ge\frac{1}{2}$. □

问题 1.3.48

若$5x_1+6x_2-7x_3+4x_4=1$, 求$3x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+x_4^2$的最小值.

解. 用Cauchy不等式
$$\left(\frac{25}{3}+18+\frac{49}{5}+16\right)\left(3x_1^2+2x_2^2+5(-x_3)^2+x_4^2\right)\ge(5x_1+6x_2-7x_3+4x_4)^2=1,$$
即$\frac{782}{15}\left(3x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+x_4^2\right)\ge1$. □

问题 1.3.49

设$x,y,z\ge0$且$xy+yz+zx=1$, 若$A=x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)$, 求$A$的最大值.

解.

$$\begin{aligned}A&=x+y+z-xy^2-xz^2-yz^2-yx^2-zx^2-zy^2+xyz(yz+zx+xy)\\&=x+y+z-xy(y+x)-zx(z+x)-yz(y+z)+xyz\\&=x+y+z-(xy+zx+yz)(x+y+z)+3xyz+xyz\\&=4xyz\end{aligned}$$

因为$xy+yz+zx=1\ge3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$, 所以$A\le\frac{4\sqrt{3}}{9}$. □

问题 1.3.50

设a,b,c,d是满足$ab+bc+cd+da=1$的正实数, 求证:

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\ge\frac{1}{3}.$$

解. 令$R=a+b+c+d$, 则

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{36R}+\frac{R}{48}\ge\frac{a}{4},\quad a+b+c+d\ge 2\sqrt{(a+c)(b+d)}=2.$$

所以

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{36R}+\frac{R}{48}\right)+\sum_{cyc}a\ge\sum_{cyc}\frac{a}{4}+2$$

化简即得. □

解. 这是一个轮换对称式, 令$a=b=c=d=\frac{1}{2}$, 此条件确实使不等式成立, 此时$\frac{a^3}{b+c+d}=\frac{b^3}{a+c+d}=\frac{c^3}{a+b+d}=\frac{d^3}{a+b+c}=\frac{1}{12}$, 因为

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{a(b+c+d)}{9}\ge\frac{2}{3}a^2,$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{a^3}{b+c+d}&\ge 23(a^2+b^2+c^2+d^2)-\frac{2}{9}(ab+bc+cd+ad+ac+bd)\\&=\frac{5}{9}(a^2+b^2+c^2+d^2)-\frac{2}{9}(ab+bc+cd+da)+\frac{1}{9}(a^2+c^2-2ac+b^2+d^2-2bd)\\&\ge\frac{5}{9}(a^2+b^2+c^2+d^2)-\frac{2}{9}(ab+bc+cd+da)\\&\ge\frac{5}{9}(ab+bc+cd+da)-\frac{2}{9}(ab+bc+cd+da)\\&=\frac{1}{3}(ab+bc+cd+da)=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

□

问题 1.3.51

函数$f(x)=\left|x^2-a\right|$在区间$[-1,1]$内的最大值$M(a)$的最小值为$\underline{\frac{1}{2}}$.

解. 显然$M(a)=\max\{|a|,|1-a|\}=\max\{|a|,|a-1|\}$, 画图即可. □

问题 1.3.52

求方程$x^2-2x\sin\frac{\pi x}{2}+1=0$的所有实数根.

解. 对于$x^2+a(x)x+b(x)=0$, 同二次方程求根公式有

$$\left(x+\frac{a(x)}{2}\right)^2=\frac{a^2(x)}{4}-b(x)\ge 0$$

即$\Delta=a^2(x)-4b(x)\ge 0$, 于是此题为$\{x:x=\pm1\}$. □

问题 1.3.53

设x,y,z,w是不全为0的实数, 且满足$xy+2yz+zw\le A(x^2+y^2+z^2+w^2)$, 求$A$的最小值.

解. 引进参数$\alpha,\beta,\gamma>0$, 则$\frac{\alpha}{2}x^2+\frac{y^2}{2\alpha}\geq xy$, $\beta y^2+\frac{z^2}{\beta}\geq 2yz$, $\frac{\gamma z^2}{2}+\frac{w^2}{2\gamma}\geq zw$, 将以上三式相加得

$$\frac{\alpha}{2}x^2+\left(\frac{1}{2\alpha}+\beta\right)y^2+\left(\frac{1}{\beta}+\frac{\gamma}{2}\right)z^2+\frac{w^2}{2\gamma}\geq xy+2yz+zw$$

令$\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2\alpha}+\beta=\frac{1}{\beta}+\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2\gamma}$, 所以$\alpha=\sqrt{2}+1$, 于是

$$xy+2yz+zw\leq\frac{1+\sqrt{2}}{2}(x^2+y^2+z^2+w^2),$$

当且仅当$x=w=1$, $y=z=\sqrt{2}+1$时, 上式等号成立, 所以A的最小值为$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ □

问题 1.3.54

已知$a,b,c\in\mathbb{R}^+$, 求$\frac{(a+1)^3}{b}+\frac{(b+1)^3}{c}+\frac{(c+1)^3}{a}$的最小值.

解.

$$\sum_{cyc}\left(\lambda b+\mu+\frac{(a+1)^3}{b}\right)\geq\sum_{cyc}\left(3\sqrt[3]{\lambda\mu}(a+1)\right).$$

令$\lambda=3\sqrt[3]{\lambda\mu}$, $3\lambda a=3\mu=\frac{(a+1)^3}{b}=\frac{(b+1)^3}{c}=\frac{(c+1)^3}{a}$, 解得$\lambda=\frac{27}{2}$, $\mu=\frac{27}{4}$, 所以$\frac{27}{2}b+\frac{27}{4}+\frac{(a+1)^3}{b}\geq\frac{27}{2}(a+1)$, 于是$\sum\geq\frac{81}{4}=3\sqrt[3]{\lambda\mu}\times3-3\mu$. □

问题 1.3.55

已知α,β,γ是钝角三角形的三个内角, 求$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$的最小值.

解. 由$f(x)=\frac{1}{x^2}$在$[0,\pi)$上的凸性, 由$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}\geq\frac{2}{x_1x_2}\geq\frac{2}{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}$, 已知$f(x)$为下凸函数, 有$f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)\geq 3f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)$, 即$\sum\limits_{cyc}\frac{1}{\alpha^2}\geq\frac{3}{\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^2}=\frac{27}{\pi^2}$. □

问题 1.3.56

设$x,y,z\in\mathbb{R}^+$, 且$x^4+y^4+z^4=1$, 求$u=\sum\limits_{cyc}\frac{x^3}{1-x^8}$的最小值.

解.

$$\begin{aligned}u&=\sum_{cyc}\frac{x^3}{1-x^8}=\sum_{cyc}\frac{x^4}{x(1-x^8)}\\&=\sum_{cyc}\frac{x^4}{\sqrt[8]{\frac{1}{8}\cdot 8x^8(1-x^8)^8}}\\&\geq\sum_{cyc}\frac{x^4}{\sqrt[8]{\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^9}}\\&=\frac{1}{\sqrt[8]{\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^9}}=\frac{9}{8}\cdot\sqrt[4]{3}.\end{aligned}$$

□

问题 1.3.57

给定正数$a_1<a_2<\cdots<a_n$, $b_1,b_2,\cdots,b_n$是它的一个排列, 则____使得乘积$\prod_{i=1}^n\left(a_i+\frac{1}{b_i}\right)$取最大值.

解. $a>b>0$, $c>d>0$时易得$\left(a+\frac{1}{c}\right)\left(b+\frac{1}{d}\right)>\left(a+\frac{1}{d}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)$. □

问题 1.3.58

设n为自然数, $x, y \in \mathbb{R}^+$, 且$x+y=2$, 求$3+\frac{1}{1+x^n}+\frac{1}{y^n}$的最小值.

解. 方法一: 用幂平均不等式和调和平均不等式 □

解. $\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$, 所以$xy \le 1$, $x^n y^n \le 1$, 因为

$$3+\frac{1}{1+x^n}+\frac{1}{1+y^n}=\frac{1+x^n+y^n+1}{1+x^n+y^n+x^n y^n}+3 \ge \frac{1+x^n+y^n+x^n y^n}{1+x^n+y^n+x^n y^n}+3=4.$$

□

问题 1.3.59

若一个序列$a_0, a_1, \cdots$它的每一项均为正数, $a_0=1$, 并且$a_n-a_{n+1}=a_{n+2}(n=0,1,2,\cdots)$, 则这样的序列有几个?

解. 用叠加$a_0-a_n=a_2+\cdots+a_{n+1}>na_{n+1}$, 所以$a_0>(n+1)a_{n+1}$, 所以$a_{n+1}<\frac{1}{n+1}$, 所以$a_n \to 0(n \to +\infty)$. 易得

$$a_n=A\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n(1-A)$$

因为$A \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \to 0$, $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \to \pm\infty$, 所以$1-A=0 \Longrightarrow A=1$, 于是$a_n$唯一. □

问题 1.3.60

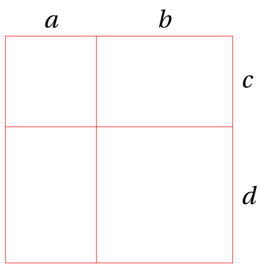
求函数$y=x+3+\sqrt{-3x^2+6x+12}$的值域.

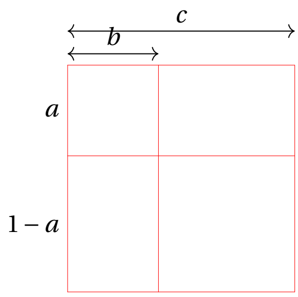
解. 令$x=1+\sqrt{5}\sin\alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以$y=\sqrt{5}\sin\alpha+\sqrt{15}\cos\alpha+4=2\sqrt{5}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+4$, 进而得到$y \in [4-2\sqrt{5}, 4+2\sqrt{5}]$. □

问题 1.3.61

长方形的一边长为1, 设它被两条互相垂直的直线分成四个小长方形, 其中三个的面积不小于1, 第四个的面积不小于2, 求长方形的另一边至少要多长?

解. 如下左图,





由题意:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ ac \ge 1 \\ ad \ge 1 \\ cb \ge 1 \\ bd \ge 1 \end{cases}$$

要求$c+d$的最小值, 由题设, $(c+d)(a+b)=ac+bd+ad+bc \ge 1+2+2\sqrt{acbd} \ge 3+2\sqrt{2}$, 当且仅当$a=\sqrt{2}-1$, $b=2-\sqrt{2}$, $c=\sqrt{2}+1, d=2+\sqrt{2}$时等号成立.

最后再如上右图,

$$\begin{cases}(1-a)b\geq 2\\ ab\geq 1\\ a(c-b)\geq 1\\ (1-a)(c-b)\geq 1\end{cases}$$

令$(1-a)b=2+x^2$, $ab=1+y^2$, $x,y\in\mathbb{R}$, 则$a=\frac{1+y^2}{3+x^2+y^2}$, $b=3+x^2+y^2$, 所以从上式第三个式子得出

$$c\geq\frac{(y^2+2)(x^2+y^2+3)}{y^2+1},\tag{1.9}$$

从上式第四个式子得出

$$c\geq\frac{(x^2+3)(x^2+y^2+3)}{x^2+2},\tag{1.10}$$

因为(1.9)式不小于$3+2\sqrt{2}$, (1.10)式不小于4. 所以$c\geq 3+2\sqrt{2}$, 当$x^2=0$, $y^2=\sqrt{2}-1$时取$c=3+2\sqrt{2}$这一等号. □

问题 1.3.62

边长为a,b,c的三角形, 其面积为$\frac{1}{4}$, 外接圆半径是1, 若$S=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, $t=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, 求$S$与$t$的大小关系.

解. 易得: $abc=1$, 所以$t=ab+bc+ca$,

$$t^2=(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq(\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a})^2=S^2.$$

□

问题 1.3.63

非负实数a,b,c满足$a+b+c=1$, 求$(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2$的最小值.

解. 令$f(x)=(1-x^2)^2$, $x\in[0,1]$, 问题实际上是求当$a+b+c=1$时, $f(a)+f(b)+f(c)$的最小值, $f''(x)=12x^2-4$, 所以$x\in\left[0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$时, f上凸; $x\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right]$时, f下凸, 现在a,b,c中至多有一个数在区间$\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right]$中, 必有两个数在$\left[0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, 通过调整将一个数变为0时, $f(a)+f(b)+f(c)$变小, 不妨设$c=0$, 则

$$\begin{aligned}(1-a^2)^2+(1-b^2)^2&=2-2(a^2+b^2)+a^4+b^4\\&=2-2(1-2ab)+(a^2+b^2)^2-2a^2b^2\\&=1+2a^2b^2\geq 1\end{aligned}$$

所以$f(a)+f(b)+f(c)\geq 2$. □

问题 1.3.64

设正整数数列a_1,a_2,a_3,a_4等比, 公比$r\notin\mathbb{Z}$, 且$r\geq 1$, 求a_4的最小值.

解. r为有理数, 令$r=q/p$, $(q>p\geq 2)$, $a_4=a_1r^3=\frac{a_1q^3}{p^3}$, 因为$a_4\in\mathbb{Z}$, 所以$p^3\mid a_1$, 所以$a_1=kp^3(k\in\mathbb{N}_+)$, $a_4=kq^3$, $q>p\geq 2$, 所以$k=1$, $q=3$. □

问题 1.3.65

设关于x的方程$a^3=\sqrt[4]{2+x}-\sqrt{7-x}$有实根, 求$a$的取值范围为$[-\sqrt[3]{3},\sqrt[6]{3}]$.

解. 用函数单调性. □

问题 1.3.66

设$a,b>0$, 满足$\frac{1}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1$, 求$a+b+\frac{b}{a}$的最小值.

解. 由均值不等式, $\frac{1}{a^2}+\frac{3}{b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^2}\geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{a^2b^6}}>0$, 再由已知, 则有$ab^3\geq 16$, 而$a+b+\frac{b}{a}=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+\frac{b}{a}\geq 5\sqrt[5]{\frac{ab^3}{16}}\geq 5$, 当且仅当$a=b=2$时取等号. □

问题 1.3.67

求函数$y=\sqrt{4x-1}+\sqrt{2-x}$的值域.

解. 令$m=\sqrt{4x-1}$, $n=\sqrt{2-x}$, 则$m^2+4n^2=7$, $y=m+n$, 利用椭圆参数方程求解. □

问题 1.3.68

已知a,b,c,d为非负实数, 且$ab+bc+cd+da=1$, 求$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}$的最小值.

解. 设$S=\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}$, 则

$$[a(b+c+d)+b(c+d+a)+c(d+a+b)+d(a+b+c)]S\geq(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

又

$$[a(b+c+d)+b(c+d+a)+c(d+a+b)+d(a+b+c)]\leq 3(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

所以$S\geq\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2+d^2)\geq\frac{1}{3}(ab+bc+cd+da)=\frac{1}{3}$. □

问题 1.3.69

设$a=\lg z+\lg[x(yz)^{-1}+1]$, $b=\lg x^{-1}+\lg(xyz+1)$, $c=\lg y+\lg[(xyz)^{-1}+1]$, 记$a,b,c$中最大数为$m$, 求$m$的最小值.

解. $a=\lg(xy^{-1}+z)$, $b=\lg(yz+x^{-1})$, $c=\lg[(xz)^{-1}+y]$, 设N为$xy^{-1}+z$, $yz+x^{-1}$, $(xz)^{-1}+y$中最大的, 则$M=\lg N$, 因为$x,y,z\in\mathbb{R}^+$, 所以$N^2\geq(xy^{-1}+z)[(xz)^{-1}+y]=[(yz)^{-1}+yz]+\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq 2+2=4$, 所以$N\geq 2$, 当且仅当$x=y=z=1$时取等号, 所以$M=\lg N=\lg 2$. □

问题 1.3.70

在三角形ABC中设$\cot A+\cot B+\cot C=\sqrt{3}$, 判断$\triangle ABC$的形状.

解. 因为$A+B+C=\pi$, $\cot A=-\cot(B+C)=\frac{\cot B\cot C-1}{\cot B+\cot C}$, 所以原条件可以化为

$$-\frac{\cot B\cot C-1}{\cot B+\cot C}+\cot B+\cot C=\sqrt{3},$$

整理得

$$\cot^2 B+(\cot C-\sqrt{3})\cot B+(\cot^2 C-\sqrt{3}\cot C+1)=0,$$

因为$\cot B\in\mathbb{R}$, 所以$\Delta\geq 0$, 但是$\Delta=(\cot C-\sqrt{3})^2-4(\cot^2 C-\sqrt{3}\cot C+1)=-(\sqrt{3}\cot C-1)^2\leq 0$, 所以$\sqrt{3}\cot C-1=0$, $C=60°$. □

解. 因为$(\cot A+\cot B+\cot C)^2=(\sqrt{3})^2$, 所以$\cot^2 A+\cot^2 B+\cot^2 C+2(\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A)=3$, 但是$A+B+C=\pi$, 所以$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$, 两边同乘$\cot A\cot B\cot C$得, $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$, 将此式代入前式得:$\cot^2 A+\cot^2 B+\cot^2 C-1=0$, 所以$\cot^2 A+\cot^2 B+\cot^2 C=(\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A)$, 即$\cot A=\cot B=\cot C$. □

问题 1.3.71

设二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$, $(a>0$且$b\neq 0)$, 已知$|b|\leq a$, $|f(0)|\leq 1$, $|f(-1)|\leq 1$, $|f(1)|\leq 1$, 当$|x|\leq 1$时, 证明: $|f(x)|\leq\frac{5}{4}$.

解. 易得$|b|\le 1$, 而$|2b|=|(a+b+c)-(a-b+c)|\le|f(1)|+|f(-1)|\le 2$. 由于$|b|\le a$, 所以$\left|\frac{b}{a}\right|\le 1$, $\left|-\frac{b}{2a}\right|\le\frac{1}{2}<1$, 又$|c|=|f(0)|\le 1$, $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=c-\frac{b^2}{4a}$, 所以$\left|f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right|\le|c|+\left|\frac{b^2}{4a}\right|=|c|+\frac{1}{4}\left|\frac{b}{a}\right|\cdot|b|\le\frac{5}{4}$, 而$f(x)$得图像开口向上, 且$|x|\le 1$, $|f(x)|$的最大值应在$x=1$, $x=-1$或$x=-\frac{b}{2a}$处取得, 且$|f(1)|\le 1$, $|f(-1)|\le 1$, $\left|f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right|\le\frac{5}{4}$, 从而$|f(x)|\le\frac{5}{4}$. □

解. 注意到, $a=\frac{f(1)+f(-1)}{2}-f(0)$, $b=\frac{f(1)-f(-1)}{2}$, $c=f(0)$. 所以

$$\left|f(x)\right|=\left|f(1)-\frac{x^2+x}{2}+f(-1)\cdot\frac{x^2-x}{2}+f(0)(1-x^2)\right|\le\frac{|x|(x+1)}{2}+\frac{|x|(1-x)}{2}+(1-x^2)=|x|+1-|x|^2\le\frac{5}{4}.$$

□

问题 1.3.72

已知数列$\{a_n\}$, 其中$a_1=1$, $a_2=\frac{1}{a_1}+a_1,\cdots,a_n=\frac{1}{a_{n-1}}+a_{n-1}$, 证明: $\sqrt{2n-1}\le a_n\le\sqrt{3n-2}$.

解. 显然$1=a_1<a_2<\cdots<a_n$, 由于$(a_k)^2=\left(\frac{1}{a_{k-1}}\right)^2+a_{k-1}^2+2$, 所以

$$a_{k-1}^2+2<a_k^2<a_{k-1}^2+3\Longrightarrow 2(n-1)+\sum_{k=2}^n a_{k-1}^2<\sum_{k=2}^n a_k^2<3(n-1)+\sum_{k=2}^n a_{k-1}^2\Longrightarrow 2n-1<a_n^2<3n-2.$$

□

两个正数a,b的和一定时, 它们的积$ab=\frac{1}{4}[(a+b)^2-(a-b)^2]$随着差$|a-b|$的增大而减小; 其平方和$a^2+b^2=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(a-b)^2]$随着差$|a-b|$的增大而增大.

局部调整法(叫局部扰动法)也是解决最值问题的一种行之有效的方法, 尤其是离散变量最值问题常常需要用这种方法. 其基本思路是: 对于问题所涉及的多个变量, 先对少数变量进行调整, 其它变量暂时不变, 从而化难为易, 取得问题在局部上的进展, 经过若干次这样的局部上的调整, 不断缩小范围, 最终得到问题的圆满解决. 利用局部调整法求值的过程中, 常常需要用上一段的基本结论.

当然, 局部调整法也可用于解决其它数学问题(如存在性问题等).

几何不等式: 由于三角形总有内切圆存在, 因而它的三条边总可以表示为$a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x(x,y,z>0)$; 反之若三个正数a,b,c可以表示为上述形式, 则a,b,c一定是某个三角形的三边, 并且相应的三角形的其它元素(如外接圆半径, 内切圆半径, 面积等)也可以通过上述变换用x,y,z表示, 有关三角形的一些不等式都可以化为x,y,z的代数不等式.

问题 1.3.73

设$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 证明:

$$\frac{\sin^{2005}\alpha}{\sin^{2003}\beta}+\frac{\cos^{2005}\alpha}{\cos^{2003}\beta}\ge 1+2003[1-\cos(\alpha-\beta)]$$

当且仅当$\alpha=\beta$时等号成立.

解. 令$A=2003$, 原不等式等价于

$$\frac{\sin^{A+2}\alpha}{\sin^A\beta}+\frac{\cos^{A+2}\alpha}{\cos^A\beta}\ge 1+A-A\cos\alpha\cos\beta-A\sin\alpha\sin\beta.$$

因为$\sin\alpha\sin\beta+\cdots+\sin\alpha\sin\beta+\frac{\sin^{A+2}\alpha}{\sin^A\beta}\ge(A+1)\sqrt[A+1]{\sin^{2A+2}\alpha}=(A+1)\sin^2\alpha$, 其中$\sin\alpha\sin\beta$有$A$个. 原不等式得证. □

问题 1.3.74

定义在$x>0$上的函数$f(x)$满足:

1. 存在$a>1$使得$f(a)\ne 0$;
2. 对于任意的$b\in\mathbb{R}$, 有$f(x^b)=bf(x)$.

求证: 对于任意的$x>2$有$f(x-1)f(x+1)<[f(x)]^2$.

解. 先证$f(1)=0$, 再利用第二个条件证明$f(x)$在$x>1$时不变号. 令$x=\mathrm{e}^t$, 则$f\left(\mathrm{e}^{b_1}\right)+f\left(\mathrm{e}^{b_2}\right)=f\left(\mathrm{e}^{b_1+b_2}\right)$. 所以

$$f(x-1)f(x+1)\le\left(\frac{f(x-1)+f(x+1)}{2}\right)^2=\left(\frac{f(x^2-1)}{2}\right)^2$$

再证$f(x)$在$x>1$时为增函数便得. □

问题 1.3.75

设平面上的凸n边形$A_1A_2A_3\cdots A_n$的各边依次为$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$, 其面积为Δ_n, 试证:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\ge 4\Delta_n\tan\frac{\pi}{n}$$

等号成立当且仅当n边形$A_1A_2A_3\cdots A_n$为正多边形.

解. 均值不等式$\sum_{i=1}^n a_i^2\ge\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2$当且仅当$a_1=a_i(2\le i\le n)$时等号成立, 令$\sum_{i=1}^n a_i=l$, 以$l$为周长的正$n$边形面积$\Delta_{\text{正}}=\frac{l^2}{4n}\cot\frac{\pi}{n}$, 所以$l^2=4n\Delta_{\text{正}}\tan\frac{\pi}{n}$, 用等周定理知$\Delta_{\text{正}}\ge\Delta_n$, 有$\sum_{i=1}^n a_i^2\ge\frac{l^2}{n}\ge4\Delta_n\tan\frac{\pi}{n}$, 等号成立当且仅当$n$边形为正$n$边形时成立.

另外, 我们可得到其它结论, 如: 设此凸n边形的被覆盖的最小的圆半径为R, 则

$$2\Delta_n\le\frac{R}{2}\sum\sqrt{a_i^2+a_{i+1}^2-2a_ia_{i+1}\cos A_{i+1}}$$

其中$a_{n+1}=a_1$, $A_{n+1}=A_1$,

$$2R\le\sum\sqrt{\frac{a_i^2+a_{i+1}^2-2a_ia_{i+1}\cos A_{i+1}}{\sin^2 A_{i+1}}}$$

所以

$$2\Delta_n\le\frac{1}{4}\sum\frac{\sqrt{a_i^2+a_{i+1}^2-2a_ia_{i+1}\cos A_{i+1}}}{\sin A_{i+1}}\sum\sqrt{a_i^2+a_{i+1}^2-2a_ia_{i+1}\cos A_{i+1}}.$$

□

问题 1.3.76

求证:

$$|a|+|b|\le\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}+\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\le\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

解. 后者用平方平均不等式易得. 下面证明前者, 令$z_1=a\cos\theta+\mathrm{i}b\sin\theta$, $z_2=a\sin\theta+\mathrm{i}b\cos\theta$, $u=|z_1|+|z_2|$, 则

$$\begin{aligned}u^2&=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1|\cdot|z_2|\\&=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta+a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta+\left|(a^2-b^2)\sin2\theta+2ab\mathrm{i}\right|\\&=a^2+b^2+\sqrt{(a^2-b^2)^2\sin^22\theta+4a^2b^2}\\&\le a^2+b^2+\sqrt{(a^2+b^2)^2}\\&=2(a^2+b^2)\end{aligned}$$

又因为$u^2=a^2+b^2+\sqrt{(a^2-b^2)^2\sin^22\theta+4a^2b^2}\ge a^2+b^2+\sqrt{4a^2b^2}=(|a|+|b|)^2$, 即$u\ge|a|+|b|$. 左边不等式还可以通过分析法解得, 通过去根号. □

问题 1.3.77

设$x,y,z\in\mathbb{R}^+$, 求证

$$\sum_{cyc}\frac{x^2}{y^2+z^2+yz}\ge1.$$

解.

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc}\frac{x^2}{y^2+z^2+yz} &\geq \sum_{cyc}\frac{x^2}{y^2+z^2+\frac{y^2+z^2}{2}}\\
&=\sum_{cyc}\frac{2x^2}{3(y^2+z^2)}\\
&=\frac{2}{3}\sum_{cyc}\frac{x^2}{y^2+z^2}\\
&=\frac{2}{3}\left[\sum_{cyc}\left(\frac{x^2}{y^2+z^2}+1\right)-3\right]\\
&=\frac{2}{3}(x^2+y^2+z^2)\sum_{cyc}\frac{1}{y^2+z^2}-2\\
&=\frac{1}{3}\left(\sum_{cyc}x^2+y^2\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{x^2+y^2}\right)-2\\
&\geq\frac{1}{3}\left(\sum 1\right)^2-2=1.
\end{aligned}$$

□

解. 不妨设$x\geq y\geq z\geq 0$, 所以$x^2\geq y^2\geq z^2\geq 0$, $xy\geq xz\geq yz$.

$$x^2+y^2+xy\geq x^2+z^2+xz\geq y^2+z^2+yz.$$

用排序不等式

$$\sum_{cyc}\frac{x^2}{y^2+z^2+yz}\geq\sum_{cyc}\frac{z^2}{y^2+z^2+yz}\geq\sum_{cyc}\frac{y^2}{y^2+z^2+yz}\geq\sum_{cyc}\frac{yz}{y^2+z^2+yz},$$

由此不等式组生成3个不等式, 相加即得. □

问题 1.3.78

已知$a,b\in\mathbb{R}^+$, $n\in\mathbb{N}_+$, 且$\frac{\sin^4\alpha}{a^n}+\frac{\cos^4\alpha}{b^n}=\frac{1}{a^n+b^n}$, 求证:

$$\frac{\sin^8\alpha}{a^{3n}}+\frac{\cos^8\alpha}{b^{3n}}=\frac{1}{(a^n+b^n)^3}.$$

解. 用Cauchy不等式,

$$(a^n+b^n)\left(\frac{\sin^8\alpha}{a^{3n}}+\frac{\cos^8\alpha}{b^{3n}}\right)\geq\left(\frac{\sin^4\alpha}{a^n}+\frac{\cos^4\alpha}{b^n}\right)^2=\frac{1}{(a^n+b^n)^2},$$

当且仅当$\frac{a^n}{\sin^2\alpha}=\frac{b^n}{\cos^2\alpha}$时等号成立, 又

$$(a^n+b^n)\left(\frac{\sin^4\alpha}{a^n}+\frac{\cos^4\alpha}{b^n}\right)\geq(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=1,$$

即$\frac{\sin^4\alpha}{a^n}+\frac{\cos^4\alpha}{b^n}\geq\frac{1}{a^n+b^n}$, 等号成立, 则$\frac{a^n}{\sin^2\alpha}=\frac{b^n}{\cos^2\alpha}$. □

问题 1.3.79

设$x_1,x_2,\cdots,x_n>0$, $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$, $n\geq 2$, 且$n\in\mathbb{N}_+$, 求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geq\frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}.$$

解.

$$\begin{aligned}
LHS &= \sum \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} - \sum \sqrt{1-x_i} \\
&\geq \frac{n^2}{\sum \sqrt{1-x_i}} - \sum \sqrt{1-x_i} \\
&\geq \frac{n^2}{(\sum 1)^{1/2} (\sum (1-x_i))^{1/2}} - \left(\sum 1\right)^{1/2} \left(\sum (1-x_i)\right)^{1/2} \\
&= \frac{n^2}{\sqrt{n(n-1)}} - \sqrt{n(n-1)} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \\
&\geq \frac{\sum \sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}
\end{aligned}$$

□

解.

$$\begin{aligned}
\left[\left[\left(\sum (1-x_i)\right)^{1/2} \left(\sum \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\right)^1\right]^{2/3}\right]^{3/2} &= \left[\left(\sum (1-x_i)\right)^{1/3} \left(\sum \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\right)^{2/3}\right]^{3/2} \text{(Holder不等式)} \\
&\geq \left[\sum (1-x_i)^{1/3} \cdot \left(\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\right)^{2/3}\right]^{3/2} \\
&= \left(\sum x_i^{2/3}\right)^{3/2} \text{(幂平均不等式)} \\
&\geq n^{3/2} \cdot \frac{\sum x_i}{n} = \sqrt{n} \geq \sum \sqrt{x_i}
\end{aligned}$$

□

解. 不妨设$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, 显然

$$\frac{1}{\sqrt{1-x_1}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x_2}} \leq \cdots \leq \frac{1}{\sqrt{1-x_n}},$$

利用Chebyshev不等式和幂平均不等式有

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} &\geq \frac{1}{n} \left(\sum x_i\right) \cdot \left(\sum \frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} \geq \left[\frac{1}{n} \sum \left(\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right)^{-2}\right]^{-1/2} \\
&= \left[\frac{1}{n} \sum (1-x_i)\right]^{-1/2} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.
\end{aligned}$$

由Cauchy不等式得

$$\sum \sqrt{x_i} \leq \sqrt{\sum 1} \sqrt{\sum x_i} = \sqrt{n}$$

所以

$$\sum \frac{x_i}{1-x_i} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}} \geq \frac{\sum \sqrt{x_i}}{n-1}.$$

□

问题 **1.3.80**

设$a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^+$, 且满足$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 1$, 求证:

$$\frac{a_1 a_2 \cdots a_n [1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)]}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}}.$$

解. 令$\sum a_i = A$, 则

$$1-a_i=1-A+a_1+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_n \geq n\sqrt[n]{(1-A)a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n}.$$

所以

$$\prod(1-a_i)\geq n(1-A)\sqrt[n]{\left(\prod a_i\right)^{n-1}}.$$

因为$A\geq n\sqrt[n]{\prod a_i}$, 所以

$$A\cdot\prod(1-a_i)\geq n^{n+1}(1-A)\prod a_i$$

所以

$$\frac{(\prod a_i)(1-A)}{A\cdot\prod(1-a_i)}\leq\frac{1}{n^{n+1}}\qquad(n\geq 2)$$

最后说明一下$n=1$时的情况成立便可. □

解. 设$a_{n+1}=1-\sum a_i$, 所以$a_{n+1}>0$, 所以$\sum_{i=1}^{n+1}a_i=1$, 不等式变为

$$n^{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}a_i\leq\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_i)$$

对于每一个$i(i=1,2,\cdots,n+1)$, 由均值不等式有

$$1-a_i=a_1+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_{n+1}\geq n\sqrt[n]{a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_{n+1}}=n\sqrt[n]{\frac{1}{a_i}\prod_{k=1}^{n+1}a_k},$$

所以$\prod_{k=1}^{n+1}(1-a_k)\geq n^{n+1}\prod_{k=1}^{n}a_k$. 如果$n\geq 2$, 等号成立. 当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时成立, 即$a_i=\frac{1}{n+1}$, 若$n=1$时, 对$a_1\in(0,1)$等式均成立. □

问题 1.3.81

固定正整数$n\geq 2$, n个非负实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$满足$\sum_{i=1}^{n}x_i=1$, 试求

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^5-x_i^4)$$

的最大值和最小值.

解. 因为$x_i^5\leq x_i^4$, 所以$\sum_{i=1}^{n}(x_i^5-x_i^4)\leq 0$, 令$x_1=1$, $x_2=\cdots=x_n=0$即得等号. 令$f(x)=x^5-x^4$, $f''(x)=20x^3-12x^2$, 所以f在$[0,\frac{3}{5}]$上是上凸函数, 在$[\frac{3}{5},1]$上是下凸函数, 将落在$[0,\frac{3}{5}]$中两数保持和不变向两边"拉", 可使$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$变小, 调整到最后$x_1,x_2,\cdots,x_n$中有$(n-2)$个0, 另外两数记为a,b, 则

$$\sum f(x_i)\geq(n-2)f(0)+f(a)+f(b)=f(a)+f(b)=-ab(a^3+b^3)=-ab(a+b)(a^2+b^2-ab)=-ab(1-3ab).$$

而$0\leq ab\leq 1/4$, 于是当$ab=1/6$时, 取最小值$-1/12$, 此时$a,b=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1/3}\right)$. 所以$\sum f(x_i)$的最小值为$-1/12$. □

问题 1.3.82

设$x_1,x_2,\cdots,x_{1997}$是实数, 满足下述条件:

1. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\leq x_i\leq\sqrt{3}$, $i=1,2,\cdots,1997$;
2. $x_1+x_2+\cdots+x_{1997}=-318\sqrt{3}$.

确定$\sum_{i=1}^{1997}x_i^{12}$的最大值.

解. 设$f(x)=x^{12}$, 则$f''(x)=132x^{10}\geq 0$, 于是$f(x)$在$\left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right]$上是下凸的, 当$x_i,x_j\in\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right)$时, 保持其和不变, 向两边"拉", 可使$\sum_{i=1}^{1999}x_i^{12}$增加, 于是最终将调整到至多一个数落在区间$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right)$内, 设有$a$个$-\frac{1}{\sqrt{3}}$, b个$\sqrt{3}$, 另一个数记为c, $a+b=1996$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}\leq c\leq\sqrt{3}$, 则$-\frac{1}{\sqrt{3}}a+\sqrt{3}b+c=-318\sqrt{3}$, $-a+3b+\sqrt{3}c=-954$. 于是$4b=1042-c\sqrt{3}$, $1039\leq 4b\leq 1043$, 所以$b=260$, $a=1736$, $c=2/\sqrt{3}$. 于是$\sum_{i=1}^{1997}x_i^{12}$的最大值为$a\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{12}+b\left(\sqrt{3}\right)^{12}+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{12}=189548$. □

问题 1.3.83

m个互不相同的正偶数与n个互不相同的正奇数的总和为2000, 对于所有的这样的m与n, 问$3m+4n$的最大值是多少? 证明你的结论.

解. $2000=(2+4+\cdots+2m)+[1+3+\cdots+(2n-1)]+a\geq m(m+1)+n^2$. 所以$m,n$满足$\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2\leq 2000\frac{1}{4}$, 由Cauchy不等式有

$$3m+4n=3\left(m+\frac{1}{2}\right)+4n-\frac{3}{2}\leq 5\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2}-\frac{3}{2}\leq 5\sqrt{2000\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}\leq 222,$$

又因为$m,n\in\mathbb{N}$, 所以$(3m+4n)_{\max}=222$, 其中$m=26$, $n=36$. □

问题 1.3.84

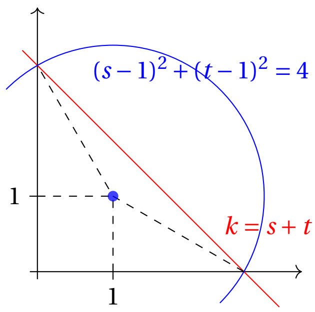
设实数x,y, 满足: $x\geq 1$, $y\geq 1$. $(\log_a x)^2+(\log_a y)^2=\log_a(ax^2)+\log_a(ay^2)$, $(a>1)$, 当a在$(1,+\infty)$范围内变化时, 求$\log_a(xy)$的取值范围.

解. 令$\log_a x=s$, $\log_a y=t$, 因为$a>1$, $x\geq 1$, $y\geq 1$, 所以$s\geq 0$, $t\geq 0$. 所以已知条件中的等式等价于$(s-1)^2+(t-1)^2=4$, 令

$$\begin{cases} s=1+2\cos\alpha \\ t=1+2\sin\alpha \end{cases}\implies\begin{cases}\cos\alpha\geq -\frac{1}{2}\\ \sin\alpha\geq -\frac{1}{2}\end{cases}$$

所以$\alpha\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]\bigcup\left[\frac{11\pi}{6},2\pi\right)$, 所以$k=s+t=\log_a(xy)=2+2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, 所以$k_{\max}=2+2\sqrt{2}$, $k_{\min}=1+\sqrt{3}$. □

解. 如图, 令$\log_a x=s$, $\log_a y=t$, 因$a>1$, $x\geq 1$, $y\geq 1$, 所以$s\geq 0$, $t\geq 0$, 则等式等价于$(s-1)^2+(t-1)^2=4$, $k=s+t$, k为直线$k=s+t$在s轴上的截距, 所以$k_{\max}=2+2\sqrt{2}$, $k_{\min}=1+\sqrt{3}$.



□

问题 1.3.85

设a,b,c,d是4个不同的实数, 使得$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=4$, 且$ac=bd$, 试求$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}$的最大值.

解. 设$x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, 因$ac=bd$, 得$\frac{c}{d}=\frac{b}{a}=\frac{1}{x}$, $\frac{d}{a}=\frac{c}{b}=\frac{1}{y}$, 问题转化为约束条件$x\neq 1$, $y\neq 1$, $x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4$下, 求$xy+\frac{y}{x}+\frac{1}{xy}+\frac{x}{y}$的最大值, 又设$x+\frac{1}{x}=e$, $y+\frac{1}{y}=f$, 则$ef=xy+\frac{y}{x}+\frac{1}{xy}+\frac{x}{y}$.

当$t>0$时, $t+\frac{1}{t}\geq 2$; 当$t<0$时, $t+\frac{1}{t}\leq -2$. 由$x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4$, 知$x,y$不同号, (否则有$x=y=1$).

不妨设, $x>0$, $y<0$, 则$f\leq -2$, $e=4-f\geq 6$, $ef\leq -12$, 当且仅当$y=-1$, $x=3\pm 2\sqrt{2}$时等号成立. 特别地, 当$a=3+2\sqrt{3}=-d$, $b=-c=1$时, 等号成立, 为-12. □

问题 1.3.86

设$a_i\in\mathbb{R}^+$, $(i=1,2,\cdots,n)$, $\sum_{i=1}^n a_i=1$, 求

$$S=\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\cdots+a_n}+\frac{a_2}{1+a_1+a_3+\cdots+a_n}+\cdots+\frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}$$

的最小值.

解. $S=\frac{a_1}{2-a_1}+\frac{a_2}{2-a_2}+\cdots+\frac{a_n}{2-a_n}$, 关于$a_1,a_2,\cdots,a_n$对称, 不妨设$1>a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n>0$, 则$2-a_1\leq 2-a_2\leq\cdots\leq 2-a_n$,

$$\frac{1}{2-a_1}\geq\frac{1}{2-a_2}\geq\cdots\geq\frac{1}{2-a_n}>0,$$

由基本不等式有

$$S+n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2-a_k}\geq\frac{n^2}{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(2-a_k)}=\frac{2n^2}{2n-1},$$

所以$S\geq\frac{n}{2n-1}$. □

解. 用切比雪夫不等式有

$$S\geq\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{2-a_1}+\cdots+\frac{1}{2-a_n}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2-a_1}+\cdots+\frac{1}{2-a_n}\right),$$

由Cauchy不等式有

$$\sum_{k=1}^{n}(2-a_k)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2-a_k}\geq n^2,$$

而$\sum_{k=1}^{n}(2-a_k)=2n-1$, 所以$S\geq\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{2n-1}=\frac{n}{2n-1}$, 当且仅当$a_1=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$时, 取等号. □

问题 1.3.87

已知函数$f(x)=ax^2+bx+c$对于一切$x\in[-1,1]$, 都有$\left|f(x)\right|\leq 1$, 设

$$g(x)=\left|acx^4+b(a+c)x^3+\left(a^2+b^2+c^2\right)x^2+b(a+c)x+ac\right|,\quad x\in[-1,1],$$

求函数$g(x)$的最大值.

解. $g(x)=\left|ax^2+bx+c\right|\cdot\left|cx^2+bx+a\right|$, 设$h(x)=cx^2+bx+a$, $x\in[-1,1]$, 则$|h(1)|=\left|f(1)\right|\leq 1$, $|h(-1)|=\left|f(-1)\right|\leq 1$, $\left|f(0)\right|=|c|\leq 1$. 若$h(x)$在$[-1,1]$上严格单调, 由$|h(1)|\leq 1$, $|h(-1)|\leq 1$知, 对于一切$x\in[-1,1]$, 有$|h(x)|\leq 1$, 故$g(x)\leq\left|f(x)\right|\leq 1$.

若$h(x)$在$[-1,1]$上不严格单调, 仍有两种情况:

(1) $h(x)=a$(常数), 即$b=c=0$, 此时, $\left|f(1)\right|=|a|\leq 1$, $g(x)=a^2|x|^2\leq 1$;

(2) $h(x)$是二次函数, 即$c\neq 0$, 如果扩展为定义在$\mathbb{R}$上, 则$h(x)=cx^2+bx+a$的图像顶点为$(x_0,h(x_0))$, 则当$h(x)$在$[-1,1]$上不单调时, $x_0\in(-1,1)$, 不妨设$x_0\in(-1,0]$, 则$h(x)$可写成$h(x)=c(x-x_0)^2+h(x_0)$, $x\in[-1,1]$, 所以$h(-1)=c(-1-x_0)^2+h(x_0)$, 所以$|h(x_0)|=\left|h(-1)-c(1+x_0)^2\right|\leq|h(-1)|+|c|\cdot(1+x_0)^2$. 因$x_0\in(-1,0]$, 所以$0<1+x_0\leq 1$, $(1+x_0)^2\leq 1$, 可见$|h(x_0)|\leq 1+|c|\leq 2$.

因$h(x)$在$[-1,x_0]$或$[x_0,1]$上均严格单调, 故由$|h(x_0)|\leq 2$, $|h(1)|\leq 1$, $|h(-1)|\leq 1$, 知对于任意的$x\in[-1,1]$, 均有$|h(x)|\leq 2$, 所以

$$g(x)\leq\left|f(x)\right|\cdot|h(x)|\leq 1\times 2=2,$$

另一方面, 取$f(x)=2x^2-1$, $x\in[-1,1]$, $h(x)=-x^2+2$, $x\in[-1,1]$, 即

$$g(x)=\left|-2x^4+5x^2-2\right|,\quad x\in[-1,1].$$

则可知$g(0)=2$, 所以$g(x)$的最大值为2. 另外

$$\begin{aligned}|h(x)|&=\left|cx^2+bx+a\right|=\left|-ax^2+bx-c+(c+a)\left(x^2-1\right)\right|\\&\leq\left|a\left(-x^2\right)+b(-x)+c\right|+|c+a|\cdot\left|x^2-1\right|\\&\leq 1+\left|\frac{a+b+c}{2}+\frac{a-b+c}{2}\right|\cdot\left|x^2-1\right|\\&\leq 1+\left|\frac{f(1)}{2}+\frac{f(-1)}{2}\right|\leq 1+1=2.\end{aligned}$$

□

问题 1.3.88

已知$x_i\in\mathbb{R}$, $(i=1,2,\cdots,n)$, $(n\geq 2)$, 且

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=0,\qquad\sum|x_i|=1.$$

求证:

$$\left|\sum\frac{x_i}{i}\right|\leq\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}.$$

解.
$$\left|\sum \frac{x_i}{i}\right| \le \frac{1}{2}-\frac{1}{2n} \Longleftrightarrow -\frac{1}{2}+\frac{1}{2n} \le \sum \frac{x_i}{i} \le \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}.$$
由题设x_i中有正有负, 设$x_{k_1},\cdots,x_{k_l}$为正数, $x_{k_{l+1}},\cdots,x_{k_n}$为非正数, 则
$$\sum x_i = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{l} x_{k_i} = -\sum_{i=l+1}^{n} x_{k_i},$$
又由$\sum |x_i| = 1$得$\sum_{i=1}^{l} x_{k_i} = \frac{1}{2}, \sum_{i=l+1}^{n} x_{k_i} = -\frac{1}{2}$. 所以
$$\sum \frac{x_i}{i} = \sum_{i=1}^{l} \frac{x_{k_i}}{k_i} - \sum_{i=l+1}^{n} \frac{\left|x_{k_i}\right|}{k_i} \le \sum_{i=1}^{l} x_{k_i} - \frac{1}{n}\sum_{i=l+1}^{n} \left|x_{k_i}\right| = \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$$
且
$$\sum \frac{x_i}{i} \ge \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} x_k - \sum_{i=l+1}^{n} \left|x_{k_i}\right| = \frac{1}{2n}-\frac{1}{2},\cdots$$
□

解. 归纳法, 设$n=k\ge 2$成立时, 当$n=k+1$时, 设$X_1,X_2,\cdots,X_{k+1}$为$x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}$的从大到小的排列, 因为
$$\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \cdots > \frac{1}{k} > \frac{1}{k+1},$$
所以, 由排序不等式
$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{x_i}{i} \le \sum_{i=1}^{k+1} \frac{X_i}{i}.$$
(若X_i中只有一个正值, 则至少有两个非正值, 取X_i的相反数得X_i'同样进行上述排列, 则可得至少两个非正值, 即总可假设X_i中的最后两向是非正值. 目标如下)
$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{X_i}{i} = \frac{X_1}{1}+\cdots+\frac{X_k+X_{k+1}}{k}-\frac{X_{k+1}}{k(k+1)}.$$
因$X_1+\cdots+X_{k+1}=0, |X_1|+\cdots+|X_{k+1}| = |X_1|+\cdots+|X_k+X_{k+1}| = 1$, 所以
$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{X_i}{i} \le \frac{1}{2}-\frac{1}{2k}-\frac{X_{k+1}}{k(k+1)} \le \frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k(k+1)} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2(k+1)},$$
同样方式可得
$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{x_i}{i} \ge \frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{2},$$
其中$n=2$时不等式易证... □

问题 1.3.89

定义在自然数N上的函数
$$f(n) = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1},$$
求证: $f(n) > 1$.

解. $f(n) > f(n-1) > \cdots > f(1) > 1$, 即$f(n)$为增数列. □

解. 因为$(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n+1) = (2n+1)^2$, 设
$$\begin{aligned} f(t) &= (2n+1)^2 t^2 - 2(2n+1)t + f(n) \\ &= \left(\sqrt{n+1}t-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^2+\left(\sqrt{n+2}t-\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)^2+\cdots+\left(\sqrt{3n+1}t-\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\right)^2 \end{aligned}$$
因$(2n+1)^2 > 0$, $f(t) > 0$恒成立, 所以
$$\Delta = 4(2n+1)^2 - 4f(n)(2n+1)^2 < 0,\cdots$$
□

解. 由以上证明是Cauchy不等式的证明过程: 由Cauchy不等式

$$[(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n+1)]\,f(n)\geq(1+1+\cdots+1)^2=(2n+1)^2,$$

所以$f(n)\geq 1$不可取得等号. □

问题 1.3.90

已知数列$\{a_n\}$中, $a_1=3$且$na_{n+1}=(n+2)\,a_n+n$, $(n\in\mathbb{N})$, 证明: 当$n>1$时, 下列不等式

$$\frac{7}{12}-\frac{1}{2\,(n+1)}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}<\frac{2}{3}-\frac{1}{2n+1}$$

成立.

解. 设

$$n\,(a_{n+1}+an+b)=(n+2)\,(a_n+an+b-a)$$

所以$a=1$, $b=1$, 所以$n\,(a_{n+1}+n+1)=(n+2)\,(a_n+n)$, 可得$\{a_n+n\}$的通项为$a_n=2n^2+n$, 另外令

$$n\left(a_{n+1}+an^2+bn+c\right)=(n+2)\left(a_n+an^2-2an+a+bn-b+c\right)$$

令$a=1$得$b=4$, $c=3$, 所以$a_{n+1}+(n+1)\,(n+3)=b_{n+1}$有$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n+2}{n}$, $a_n=2n^2+n$, 所以

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{a_n}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right),$$

所以

$$\frac{7}{12}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{a_1}+\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)<\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2n+1}.$$

□

解. 因$na_{n+1}=(n+2)\,a_n+n$等价于$\frac{a_{n+1}-1}{(n+1)(n+2)}=\frac{a_n}{n(n+1)}$, 令$c_n=\frac{a_n}{n(n+1)}$, 有$c_{n+1}-c_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$, $c_1=\frac{3}{2}$, 所以

$$\frac{a_n}{n\,(n+1)}=c_n=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}(c_{k+1}-c_k)=2-\frac{1}{n+1},$$

所以$a_n=n\,(2n+1)$... □

解. 若$g(n)-g(n+1)<b_n<f(n)-f(n+1)$, 则$g(1)-g(n+1)<\sum b_i<f(1)-f(n+1)$, 于是要证

$$\frac{7}{12}-\frac{1}{2\,(n+1)}<\sum\frac{1}{a_i}<\frac{2}{3}-\frac{1}{2n+1},$$

则可试证

$$\frac{1}{2n}-\frac{1}{2\,(n+1)}<\frac{1}{a_n}<\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1},\cdots$$

□

问题 1.3.91

若$x_i\in\mathbb{R}^+$, $(i=1,2,\cdots,n)$, $\sum x_i=1$, $x_{n+1}=x_1$, $n>6$, 求证:

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+x_{i+1}}>n!.$$

解. $\prod\frac{1}{x_i+x_{i+1}}=\frac{1}{\prod(x_i+x_{i+1})}\geq\frac{1}{\left(\frac{\sum(x_i+x_{i+1})}{n}\right)^n}=\left(\frac{n}{2}\right)^n$, 于是只需证$\left(\frac{n}{2}\right)^n>n!$, 因$2\cdot(n-2)<\left(\frac{n}{2}\right)^2$; $3\cdot(n-3)\leq\left(\frac{n}{2}\right)^2$, ..., $(n-2)\cdot 2\leq\left(\frac{n}{2}\right)^2$, 所以$[(n-2)!]^2\leq\left(\frac{n}{2}\right)^{(n-3)\times 2}$, 所以$(n-2)!\leq\left(\frac{n}{2}\right)^{n-3}$, 而$(n-1)\,n\leq\left(\frac{n}{2}\right)^3$, 即$8n-8\leq n^2$, 即$(n-4)^2\geq 8$, 因$n\geq 7$, 所以$(n-4)^2\geq 9>8$, 所以$(n-2)!\,(n-1)\,n=n!\leq\left(\frac{n}{2}\right)^n$. □

解. $\prod \geq \left(\frac{n}{2}\right)^n$同以上证法, 用数学归纳法.

(1) 当$n=7$时, $7!\cdot 2^7=3^2\cdot 2^{11}\cdot 5\cdot 7=\left(3\cdot 2^4\right)\left(5\cdot 2^3\right)\left(3\cdot 2^4\cdot 7\right)<7^2\cdot 7^2\cdot 7^2\cdot 7=7^7$成立.

(2) 当$n=k\geq 7$有$2^k k!<k^k$成立, 则$(k+1)!2^{k+1}=k!2^k(k+1)\cdot 2<k^2(k+1)\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=(k+1)^{k+1}$, 所以命题对于$n=k+1$时也成立... □

问题 1.3.92

试求下面表达式的最大值:

$$||\cdots||x_1-x_2|-x_3|-\cdots-|-x_{2002}|,$$

其中$x_1,x_2,\cdots,x_{2002}$是由1到2002的不同自然数.

解. 用$\max\{a_1,\cdots,a_n\}$表示$a_1,\cdots,a_n$这n个数中的最大数. 易见, 对于任何非负整数x,y, 有$|x-y|\leq\max\{x,y\}$, 又由于$\max\{\max\{x,y\},z\}=$ $\max\{x,y,z\}$, 所以$||x-y|-z|\leq\max\{x,y,z\}$, 依此类推, 可得原式不超过$\max\{x_1,\cdots,x_n\}$, 从而题设表达式的值不会超过$\max\{x_1,x_2,\cdots,x_{20}$ 2002, 另一方面容易看出, 题设式子的奇偶性与数

$$x_1+x_2+\cdots+x_{2002}=2003\cdot 1001$$

的奇偶性相同, 是奇数, 所以题设式子的值不会为偶数2002, 又

$$\begin{aligned}&||||\cdots|||2-4|-5|-3|-\cdots-(4k+2)|-(4k+4)|-(4k+5)|-(4k+3)|-\cdots\\&\qquad -1998|-2000|-2001|-1999|-2002|-1|=2001.\end{aligned}$$

综上所述, 可知所求的最大值为2001. □

问题 1.3.93

已知数列$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$, 满足$a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=a_n^2+a_n$, 则求

$$S=\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_{100}+1}$$

的整数部分.

解.

$$\frac{1}{a_n+1}=\frac{a_n}{a_n(a_n+1)}=\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_n^2}{a_{n+1}\cdot a_n}=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}},$$

所以$S=2-\frac{1}{a_{101}}$, 由$a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{3}{4}$, $a_3=\frac{21}{16}$, 知$a_3>1$, 所以$a_{101}>a_{100}>\cdots>a_3>1$, 所以$0<\frac{1}{a_{101}}<1$, $[S]=1$. □

问题 1.3.94

求最大的实数λ, 使得当实系数多项式$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$的所有根都是非负实数时, 只要$x\geq\min\{\text{三个根}\}$, 就有$f(x)\geq\lambda(x-a)^3$, 并且问上式中等号何时成立?

解. 设$f(x)$的三个根为α,β,γ, 并设$0\leq\alpha\leq\beta\leq\gamma$, 则有$x-a=x+\alpha+\beta+\gamma$, $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$,

(1). $0\leq x\leq\alpha$时, 因$-f(x)=(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)$, 则由A-G不等式,

$$-f(x)\leq\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma-3x}{3}\right)^3\leq\left(\frac{x+\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3,$$

即$f(x)\geq-\frac{1}{27}(x+\alpha+\beta+\gamma)^3=-\frac{1}{27}(x-a)^3$, 上式等式成立的充要条件是

$$\begin{cases}\alpha-x=\beta-x=\gamma-x\\ \alpha+\beta+\gamma-3x=x+\alpha+\beta+\gamma\end{cases}$$

即$x=0$, $\alpha=\beta=\gamma$.

(2). 当$\beta\leq x\leq\gamma$时, 因

$$-f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(\gamma-x)\leq\left(\frac{x+\gamma-\alpha-\beta}{3}\right)^3\leq\left(\frac{x+\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3=\left(\frac{x-a}{3}\right)^3.$$

则$f(x) \geq -\frac{1}{27}(x-a)^3$, 易知上式等号成立的充要条件为

$$\begin{cases} x-\alpha = x-\beta = \gamma - x \\ \alpha = \beta = 0. \end{cases}$$

即$\alpha=\beta=0, \gamma=2x$.

(3). 当$\alpha \leq x \leq \beta$或$x>\gamma$时, $f(x)>0 \geq -\frac{1}{27}(x-a)^3$, 综上可得所求的$\lambda=-\frac{1}{27}$, 且等号成立的充要条件是$x=0$, $\alpha=\beta=\gamma$或$\alpha=\beta=0, \gamma=2x$. 不过若$\alpha=\beta=\gamma=0$时, $\lambda=1$, 这一点S10P50未注意到. □

问题 1.3.95

已知数列$\{a_n\}$中, $a_1=\frac{1}{2}$, 且

$$a_n = \frac{1}{3n-1}\left(a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_{n-2}a_2 + a_{n-1}a_1\right),$$

求证: $a_{n+1}<a_n$.

解. 用数学归纳法, 设$a_k<a_{k-1}<\cdots<a_1$, 则

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{1}{3k+2}\sum_{i=1}^{k} a_i a_{k+1-i} \leq \frac{1}{3k+2}\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i a_{k-i} + \frac{1}{2}a_k\right) \\ &= \frac{3k-1}{3k+2}a_k + \frac{1}{3k+2}\times\frac{1}{2}a_k = \frac{6k}{2(3k+2)}a_k < a_k. \end{aligned}$$

□

问题 1.3.96

设$a_1,\cdots,a_n (n\geq 3)$是n个正整数, 把它们按顺序放在圆周上, 且满足每一个数去除相邻两数之和都是正整数, 令

$$S_n = \frac{a_1+a_3}{a_2} + \frac{a_2+a_4}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}+a_1}{a_n} + \frac{a_n+a_2}{a_1},$$

求证: $2n \leq S_n < 3n$.

解. 不等式左边可用A-G不等式得出, 对于$S_n<3n$用归纳法.

(1) 当$n=3$时, $S_3=\frac{a_1+a_3}{a_2}+\frac{a_2+a_1}{a_3}+\frac{a_3+a_2}{a_1}$, 不妨设$a_3\geq a_2\geq a_1$. 所以$a_3=a_1+a_2$或$2a_3=a_1+a_2$.

若$a_3=a_1+a_2$, 则$S_3=\frac{2a_1}{a_2}+1+1+1+1+\frac{2a_2}{a_1}$, 而$a_2 \mid 2a_1$, $a_1 \mid 2a_2$, $a_2\geq a_1$, 所以$a_2=2a_1$或$a_2=a_1$或$2a_2=a_1$, 所以$S_3=7$或$8<9$.

若$2a_3=a_1+a_2$, 同样有$S_3<9$.

(2) 若$n=k$时成立, 则$n=k+1$时, 设a_{k+1}最大, $a_1=\min\{a_1,a_k\}$, 即$a_{k+1}\geq a_k\geq a_1$, 则$2a_{k+1}\geq a_1+a_k$, 所以

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{a_1+a_3}{a_2}+\frac{a_2+a_4}{a_3}+\cdots+\frac{a_{k+1}+a_2}{a_1} \\ &< \frac{a_1+a_3}{a_2}+\frac{a_2+a_4}{a_3}+\cdots+\frac{a_{k-1}+a_1}{a_k}+1+1+1+\frac{a_k+a_2}{a_1} \\ &= 3+S_k \quad (a_{k+1}=a_1+a_k); \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{a_1+a_3}{a_2}+\frac{a_2+a_4}{a_3}+\cdots+\frac{a_{k+1}+a_2}{a_1} \\ &< \frac{a_1+a_3}{a_2}+\cdots+\frac{a_{k-1}+\frac{1}{2}a_1}{a_k}+\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}a_k+a_2}{a_1} \\ &= 3+S_k \quad (2a_{k+1}=a_1+a_k). \end{aligned}$$

所以$S_{k+1}\leq 3+S_k$可得$S_{k+1}\leq S_3+3(k-2)<3(k+1)$. □

问题 1.3.97

$\triangle ABC$的$\angle A, \angle B, \angle C$的平分线分别交$\triangle ABC$的外接圆于点$A_1, B_1, C_1$, 记$m=AA_1+BB_1+CC_1$, $n=AB+BC+CA$, 则( ).
A. $m\geq n$; B. $m>n$; C. $m=n$; D. 不确定m,n之间的大小.

解. 托勒密定理有$AA_1\cdot BC=AB\cdot A_1C+AC\cdot A_1B$, $A_1B=A_1C$, $AB+AC>BC$, 所以

$$2AA_1=\frac{(AB+AC)\cdot 2A_1B}{BC}>AB+AC.$$

同理$2BB_1>AB+BC$, $2CC_1>CA+CB$, 三式相加即得.

另外$A_1C=A_1B$, 所以$2A_1C>BC$, 内心为I, 则$IB+IC>BC$. 所以

$$2A_1C+IB+IC>2BC, 2A_1B+IB+IC>2BC$$
$$2IB_1+IC+IA>2AC, IA+2IC_1+IB>2AB,$$

相加即得. □

问题 1.3.98

Rt$\triangle ABC$中, D为BC中点, $E\in AB$, $F\in AC$, 则$C_{\triangle DEF}>BC$.

解. 做$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{BA}$, 所以$DF=NF$, $ED=EM$, $MN=BC$. 所以

$$C_{\triangle DEF}=DE+DF+EF=NF+FE+EM>MN=BC.$$

□

问题 1.3.99

若直线$y=x\lg(ac)+m$和$y=x\lg(bc)+n$, $(a,b,c>0)$相互垂直, 求$\frac{a}{b}$的取值范围.

解. 易知$\lg(ac)\cdot\lg(bc)=-1$, 所以

$$\lg^2 c+\left(\lg a+\lg b\right)\lg c+\lg a\lg b+1=0.$$

于是由$\Delta\geq 0$可得$\lg^2\frac{a}{b}\geq 4$...

事实上$(a,b,c>0)$是多余的, 我们只需用下列方法便可得知: 令$\frac{a}{b}=t$, 显然a,b,c三者同号, 则因$\lg(ac)\lg(bc)=-1$. 所以$\lg(bct)\lg(bc)=-1$, 所以$\lg^2(bc)+\lg t\lg(bc)+1=0$. 所以由$\Delta\geq 0$可得$\lg^2 t\geq 4$. □

问题 1.3.100

给定$n+1(n\geq 2)$个正实数$x_0,x_1,\cdots,x_n$, 求证:

$$\frac{x_1}{2\left(x_0^2+x_1^2\right)}+\frac{x_2}{3\left(x_0^2+x_1^2+x_2^2\right)}+\cdots+\frac{x_n}{(n+1)\left(x_0^2+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)}<\frac{1}{x_0}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{(k+1)\sum_{j=0}^{k}x_j^2}<\frac{1}{x_0}.$$

解.

$$\frac{x_i}{(i+1)\left(x_0^2+\cdots+x_i^2\right)}\leq\frac{x_i}{(x_0+\cdots+x_i)^2}<\frac{x_i}{(x_0+\cdots+x_{i-1})(x_0+\cdots+x_i)}=\frac{1}{x_0+\cdots+x_{i-1}}-\frac{1}{x_0+\cdots+x_i}.$$

□

问题 1.3.101: 优超不等式

设两组实数$x_1,\cdots,x_n$和$y_1,\cdots,y_n$满足条件:
(i) $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n$; $y_1 \ge y_2 \ge \cdots \ge y_n$;
(ii)

$$\begin{gathered} x_1 \ge y_1 \\ x_1 + x_2 \ge y_1 + y_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \ge y_1 + y_2 + \cdots + y_n. \end{gathered}$$

则对任意凸函数$f(x)$, 都有如下的不等式成立:

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \ge f\left(y_1\right)+f\left(y_2\right)+\cdots+f\left(y_n\right).$$

若$f(x)$为凹函数, 其他条件不变, 则上式不等号反向.

问题 1.3.102: 康托洛维奇不等式

若$a_i>0$, $(i=1,2,\cdots,n)$且$\sum_{i=1}^n a_i=1$, 又$0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i}\right) \le \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}.$$

解. 因$0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$, 所以$(\lambda_1-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_n)\ge 0$, 即

$$\lambda_i \le (\lambda_1+\lambda_n)-\frac{\lambda_1\lambda_n}{\lambda_i},$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i &\le \sum_{i=1}^n \left[(\lambda_1+\lambda_n)-\frac{\lambda_1\lambda_n}{\lambda_i}\right] a_i \\ &= (\lambda_1+\lambda_n)-\lambda_1\lambda_n\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i}. \end{aligned}$$

即$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \le (\lambda_1+\lambda_n)-\lambda_1\lambda_n\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i}$, 所以

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i}\right) &\le \left[(\lambda_1+\lambda_n)-\lambda_1\lambda_n\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i}\right]\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i} \\ &= -\lambda_1\lambda_n\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i}-\frac{\lambda_1+\lambda_n}{2\lambda_1\lambda_n}\right)^2+\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n} \\ &\le \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}. \end{aligned}$$

□

问题 1.3.103: 用琴生不等式证明A-G不等式

设$a_i\in\mathbb{R}^+(i=1,2,\cdots,n)$, 求证:

$$\frac{1}{n}\sum a_i \ge \sqrt[n]{\prod a_i},$$

当$a_1=\cdots=a_n$时取等号.

解. 设$y=\ln x$, 因$y'=\frac{1}{x}$, $y''=-\frac{1}{x^2}<0$, 所以y为上凸函数. 所以

$$\frac{1}{n}\sum \ln a_i \le \ln\frac{\sum a_i}{n}.$$

即得. □

问题 1.3.104: Cauchy不等式推导调和平均≤算术平均

$$\frac{n}{\sum \frac{1}{a_i}} \le \frac{\sum a_i}{n}, \qquad (a_i > 0).$$

解. 因$\sum a_i \sum \frac{1}{a_i} \ge \Bigg(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n个1}\Bigg)^2 = n^2$, 由此不等式得到$\sum_{i=1}^n \frac{a_i a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}} \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i$, 其中$a_{n+1} = a_1$. □

问题 1.3.105: 贝努利不等式

设$1+x>0$, $x\ne 0$, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$, 求证: $(1+x)^n > 1+nx$.

解. 因$x\ne 0$, $1+x>0$, 由均值不等式

$$(1+x)^n + n - 1 = (1+x)^n + 1 + 1 + \cdots + 1 > n\cdot\sqrt[n]{(1+x)^n\cdot 1\cdot 1\cdots 1} = n(1+x).$$

所以$(1+x)^n > 1+nx$, (可用归纳法) □

注: 贝努利一般式为$(1+x)^\alpha > 1+\alpha x$, $\alpha<0$或$\alpha>1$.

问题 1.3.106: Abel不等式

设$a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $(i=1,2,\cdots,n)$, $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n \ge 0$.

$$S_k = \sum_{i=1}^k a_i \quad (k=1,2,\cdots,n),$$

又记$M = \max_{1\le k\le n} S_k$, $m = \min_{1\le k\le n} S_k$, 求证:

$$mb_1 \le \sum_{k=1}^n a_i b_i \le Mb_1.$$

解. 由Abel恒等式及b_i的单调性, 得

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} S_i(b_i - b_{i+1}) + S_n b_n \le M\left(\sum_{i=1}^{n-1}(b_i - b_{i+1}) + b_n\right) = Mb_1,$$

同理可证第一个不等式. □

问题 1.3.107: 钟凯莱不等式

设$a_1,\cdots,a_n$和$b_1,\cdots,b_n$都是正数, 且$b_1 > b_2 > \cdots > b_n$, 若对所有的$k=1,2,\cdots,n$有

$$\sum_{i=1}^k b_i \le \sum_{i=1}^k a_i,$$

则

$$\sum_{j=1}^n b_j^2 \le \sum_{j=1}^n a_j^2.$$

解. 由Abel恒等变换公式

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} b_j^2 &= b_n \sum_{j=1}^{n} b_j + \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{j} b_k\right)(b_j - b_{j+1}) \\ &\le b_n \sum_{j=1}^{n} b_j + \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{j} a_k\right)(b_j - b_{j+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \le \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)^{1/2}. \quad \text{Cauchy不等式}\end{aligned}$$

即得. □

问题 1.3.108: W. Janous猜想

设$x, y, z \in \mathbb{R}^+$, 求证: $\frac{z^2-x^2}{x+y} + \frac{x^2-y^2}{y+z} + \frac{y^2-z^2}{z+x} \ge 0$.

解. 原不等式等价于

$$\frac{z^2}{x+y} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{x^2}{y+z} \ge \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x},$$

用排序不等式. □

解. 令$y+z=a$, $z+x=b$, $x+y=c$, 则$a, b, c > 0$. 所以原式等价于

$$\begin{aligned}&\frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} + \frac{cb}{a} \ge a+b+c \\ &\frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} \ge 2a, \\ &\frac{bc}{c} + \frac{cb}{a} \ge 2b, \cdots\end{aligned}$$

此结论可推广为: 若$x, y, z > 0$, 求证:

$$\frac{y\left(y^2-x^2\right)}{z+x} + \frac{z\left(z^2-y^2\right)}{x+y} + \frac{x\left(x^2-z^2\right)}{y+z} \ge 0.$$

用排序不等式可得. □

问题 1.3.109: 闵可夫斯基不等式

求证: 对于任意实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$及$y_1, y_2, \cdots, y_n$有

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

当且仅当$x_1, x_2, \cdots, x_n$与$y_1, y_2, \cdots, y_n$对应成比例时取到.

解. 原式当且仅当

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2 \le \sum x_k^2 + 2\sqrt{\sum x_k^2 \sum y_k^2} + \sum y_k^2,$$

而

$$\sum x_k y_k \le \left(\sum x_k^2\right)^{1/2}\left(\sum y_k^2\right)^{1/2},$$

所以不等式成立. □

问题 1.3.110: 幂平均不等式

若$\alpha > \beta > 0$, $a_i \in \mathbb{R}^+$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则

$$\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} \ge \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n}\right)^{1/\beta}.$$

解. 令$x_i=a_i^{\beta}$, 则$a_i=x_i^{1/\beta}$, 原不等式等价于

$$\frac{1}{n}\sum x_k^{\alpha/\beta}\geq\left(\frac{1}{n}\sum x_k\right)^{\alpha/\beta},$$

因为$\alpha>\beta>0$, 所以$\frac{\alpha}{\beta}>1$, $f(x)=x^p$, $(p>1)$是$(0,+\infty)$上的凸函数, 故由琴生不等式知上式成立, 从而命题成立. □

问题 1.3.111: 赫尔德(Hölder)不等式

设$a_i,b_i\in\mathbb{R}^+$, $(i=1,2,\cdots,n)$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta=1$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}b_i^{\beta}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^{\beta}.$$

解. 令$A=\sum_{i=1}^{n}a_i$, $B=\sum_{i=1}^{n}b_i$, 则

$$A^{-\alpha}B^{-\beta}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}b_i^{\beta}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_i}{B}\right)^{\beta},\quad\alpha+\beta=1.$$

因$f(x)=\ln x$, $(x>0)$是上凸函数, 所以

$$\begin{aligned}\alpha\ln\frac{a_i}{A}+\beta\ln\frac{b_i}{B}&=\frac{\alpha\ln\frac{a_i}{A}+\beta\ln\frac{b_i}{B}}{\alpha+\beta}\qquad\because\alpha+\beta=1\\&\leq\ln\frac{\alpha\frac{a_i}{A}+\beta\frac{b_i}{B}}{\alpha+\beta}=\ln\left(\alpha\frac{a_i}{A}+\beta\frac{b_i}{B}\right)\end{aligned}$$

所以$\left(\frac{a_i}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_i}{B}\right)^{\beta}\leq\alpha\frac{a_i}{A}+\beta\frac{b_i}{B}$, 两边取$\sum_{i=1}^{n}$有

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_i}{B}\right)^{\beta}\leq\frac{\alpha}{A}\sum a_i+\frac{\beta}{B}\sum b_i=\alpha+\beta=1.$$

□

问题 1.3.112

Hölder不等式推出Cauchy不等式.

解. 令$\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, 代入Hölder不等式, 并令$x_i^2=a_i$, $y_i^2=b_i$, 即得. □

问题 1.3.113

优超不等式推出钟开莱不等式.

解. 取$f(x)=x^2$, 则$f(x)$为下凸函数, 用钟开莱不等式中的符号, 因为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\succ(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 所以$\sum f(a_k)\geq\sum f(b_k)$. □

问题 1.3.114

优超不等式推出琴生不等式.

解. 设$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}b_k$, $b_1=b_2=\cdots=b_n=\frac{1}{n}\sum a_i$, 不妨设$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$, 则$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\succ(b_1,b_2,\cdots,b_n)$. 若$f(x)$是$[a,b]$或$(a,b)$内的下凸函数, 则对于$[a,b]$或$(a,b)$中任意$n$个数$a_1,a_2,\cdots,a_n$有

$$\frac{1}{n}\sum f(a_k)\geq f\left(\frac{1}{n}\sum a_k\right),$$

当且仅当$x_1=\cdots=x_n$时取等号. 若$f(x)$为上凸函数, 命题反号. □

问题 1.3.115

求所有正整数$a_1, a_2, \cdots, a_n$, 使得

$$\frac{99}{100}=\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

其中$a_0=1$,

$$\left(a_{k+1}-1\right) a_{k-1} \geq a_k^2\left(a_k-1\right), \quad k=1,2,\cdots,n.$$

(S24P53).

解. 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$是满足条件的正整数, 由归纳法原理$a_{k+1}>a_k$, $a_{k+1} \geq 2$, $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$, 所以

$$\left(a_{k+1}-1\right) a_{k-1} \geq a_k^2\left(a_k-1\right) \Longleftrightarrow \frac{a_{k-1}}{a_k\left(a_k-1\right)} \geq \frac{a_k}{a_{k+1}-1},$$

即

$$a_{k-1}\left(\frac{1}{a_k-1}-\frac{1}{a_k}\right) \geq \frac{a_k}{a_{k+1}-1}.$$

即

$$\frac{a_{k-1}}{a_k} \leq \frac{a_{k-1}}{a_k-1}-\frac{a_k}{a_{k+1}-1}$$

对于$k=i+1, i+2, \cdots, n$求和得:

$$\sum_{k=i+1}^n \frac{a_{k-1}}{a_k} \leq \frac{a_i}{a_{i+1}-1}-\frac{a_n}{a_{n+1}-1}<\frac{a_i}{a_{i+1}-1},$$

当$i=0$时, 有$\frac{1}{a_1} \leq \frac{99}{100}<\frac{1}{a_1-1} \Longleftrightarrow a_1=2$.
当$i=1$时, 有$\frac{a_1}{a_2} \leq \frac{99}{100}-\frac{1}{a_1}<\frac{a_1}{a_2-1} \Longleftrightarrow a_2=5$.
当$i=2$时, 有$\frac{a_2}{a_3} \leq \frac{99}{100}-\frac{1}{a_1}-\frac{a_1}{a_2} \leq \frac{a_2}{a_3-1} \Longleftrightarrow a_3=56$.
同理, $i=3$时, 有$a_4=78400$. 又$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{5}{56}+\frac{56}{78400}=\frac{99}{100}$, 故方程有唯一解$a_1=2$, $a_2=5$, $a_3=56$, $a_4=78400$. □

问题 1.3.116: (2002年, 全国卷) S14, P182

设数列$\{a_n\}$满足

$$a_{n+1}=a_n^2-n a_n+1, \qquad n \in \mathbb{N}_+,$$

当$a_1 \geq 3$时, 求证: $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 有

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+a_k} \leq \frac{1}{2}.$$

解. 令$b_n=a_n+1$, 则$b_1 \geq 4$, $b_{n+1}=b_n^2-(n+2) b_n+3+n$, 可归纳证明

$$b_n \geq 2^{n+1}.$$

□

问题 1.3.117

已知$a, b, c \in \mathbb{R}$, $f(x)=a x^2+b x+c$, $g(x)=a x+b$, 当$-1 \leq x \leq 1$时, $|f(x)| \leq 1$. 证明: 当$|x| \leq 1$时, $|g(x)| \leq 2$.

解. 设$g(x)=f(x_1)+\mu f(x_2)=a x+b$, 所以$\mu=-1$, $x_1=\frac{x+1}{2}$, $x_2=\frac{x-1}{2}$, 所以

$$|g(x)|=\left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f\left(\frac{x-1}{2}\right)\right| \leq\left|f\left(\frac{x-1}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{x-1}{2}\right)\right| \leq 2.$$

□

问题 1.3.118

在$\triangle ABC$内任取一点, 求证:
(1) $\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=1$.
(2) 若AB为三角形中最长边, 则$PD+PE+PF<AB$.

解. 证明中的(1)用共边定理即得.

(2): 先证$AB > AD$, $AB > BE$, $AB > CF$, $\max(BC, AC) \le AB$, 设$\frac{PD}{AD} = k$, $\frac{PE}{BE} = n$, $\frac{PF}{CF} = m$, 则$k+m+n=1$, $PD = kAD$, $PE = n\cdot BE$, $PF = m\cdot CF$. 所以

$$PD+PE+PF < kAB+nAB+mAB.$$

□

问题 1.3.119

设非负实数x_1, x_2, x_3, x_4, x_5满足$\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{1+x_i}=1$, 求证: $\sum\frac{x_i}{4+x_i^2}\le 1$. (S8 P121, 3)

解.

$$\begin{aligned}\sum\frac{x_i}{4+x_i^2} &= \sum\frac{1}{\frac{4}{x_i}+\frac{x_i}{4}+\frac{3x_i}{4}} \le \sum\frac{1}{2+\frac{3x_i}{4}}\\ &= \sum\frac{4}{3x_i+8} = \frac{4}{3}\sum\frac{1}{x_i+8/3}\\ &= \frac{4}{3}\sum\frac{\frac{1}{x_i+1}}{1+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x_i+1}}.\end{aligned}$$

因为$\frac{1}{x_i+1}>0$, 令$y=\frac{x}{1+\frac{5}{3}x}$, 易知$y''<0$, 所以

$$\frac{1}{5}\left(\frac{4}{3}\sum\frac{\frac{1}{x_i+1}}{1+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x_i+1}}\right)\le\frac{4}{3}\frac{\frac{1}{5}\sum\frac{1}{1+x_i}}{1+\frac{5}{3}\times\frac{1}{5}\sum\frac{1}{1+x_i}}=\frac{4}{3}\times\frac{\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{5}$$

即得. □

注: 若已知$x_1, x_2, \cdots, x_t$非负, 且$\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{1+x_i}=1$, 求$\sum\frac{x_i}{4+x_i^2}$的最大值, 用上述方法时, 知当$t=4,5,6,7,8,9$时

$$\sum\frac{x_i}{4+x_i^2}\le\frac{t(t-1)}{t^2-2t+5},$$

当$x_1=\cdots=x_t=t-1$时取等.

$t=3$时, 在第一步用均值不等式放缩时便把x_i全部消去, 此时,

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i}{4+x_i^2}\le\frac{3}{4}.$$

当$x_1=x_2=x_3=2$时取等号,

$t=2$时, 因为$\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{1+x_i}=1=\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}$, 所以设$x_1=\frac{1}{x_2}=t$, 所以

$$\begin{aligned}\sum^{2}\frac{x_i}{4+x_i^2} &= \frac{x_1}{4+x_1^2}+\frac{x_2}{4+x_2^2}=\frac{4x_1+4x_2+x_1+x_2}{16+1+4x_1^2+4x_2^2}\\ &= \frac{5\left(t+\frac{1}{t}\right)}{17+4\left(t^2+\frac{1}{t}\right)}=\frac{5\left(t+\frac{1}{t}\right)}{9+4\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}\\ \left(令t+\frac{1}{t}=s\ge 2\right) &= \frac{5s}{9+4s^2}=\frac{5}{\frac{9}{s}+4s}\le\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

当$s=2$时取等号.

问题 1.3.120: (06. 浙江)

$x_n>0$, $x_n^2+x_n=3x_{n+1}^2+2x_{n+1}$, $x_1=1$, 则

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\le x_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

解. 因为$x_n^2+x_n>2\left(x_{n+1}^2+2x_{n+1}\right)$, 所以$x_n^2+x_n\le\frac{1}{2^{n-1}}\left(x_1^2+x_1\right)=\frac{1}{2^{n-2}}$, $(n\ge1)$; 所以$x_n\le\frac{1}{2^{n-2}}$. 因$x_n^2+x_n<(2x_{n+1})^2+(2x_{n+1})$, 所以$(x_n-2x_{n+1})(x_n+2x_{n+1}+1)<0$. 所以$x_{n+1}\ge\frac{1}{2}x_n$, 所以$x_n\ge\frac{1}{2^{n-1}}x_1=\frac{1}{2^{n-1}}$. □

问题 1.3.121

已知$\frac{b+c}{a}=1$, 求证: $b^2+4ac\ge0$.

解. 构造$ax^2-bx-c=0$, $(a\ne0)$, 因为有实根$x=1$, 所以$\Delta=b^2+4ac\ge0$. □

解. 因为$a=b+c$, 所以$b^2+4ac=b^2+4c(b+c)=(b+2c)^2\ge0$. □

问题 1.3.122

$\triangle ABC$三边为a,b,c, $m\in\mathbb{R}^+$, 证: $\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$.

解. 当$\frac{a}{b}<1$时, 用$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$,
$$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{a}{a+b+m}+\frac{b}{a+b+m}=\frac{a+b}{a+b+m}>\frac{c}{c+m}.$$
□

问题 1.3.123

已知: $x,y,z<1$的正数, 取$x,y,z,1-x,1-y,1-z$中的最大者, 设为x, 则$1-z\le x$, $z<1$, 从而
$$x\left(1-y\right)+y\left(1-z\right)+z\left(1-x\right)<x\left(1-y\right)+yx+1\cdot(1-x)=1.$$

问题 1.3.124

已知: $a<0$, $b\le0$, $c>0$, $\sqrt{b^2-4ac}=b^2-2ac$, 求$\sqrt{b^2-4ac}$的最小值.

解. 因为$\sqrt{b^2-4ac}$的最小值为$\sqrt{b^2-4ac}=b^2-2ac$的最小值, 其中$b^2\ge0$, $-2ac>0$, 所以b^2-2ac的最小值是$b=0$时, 此时$\sqrt{-4ac}=-2ac$, 所以$ac=-1$或0, 所以$\sqrt{b^2-4ac}\ge\sqrt{-4ac}=\sqrt{4}=2$. □

问题 1.3.125

已知$t\in\mathbb{R}$, 证$t^4-t+\frac{1}{2}>0$.

解. $t^4-t+\frac{1}{2}=\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2>0$恒成立. □

Chapter 2

高中数学

2.1 旧版笔记

问题 2.1.1

设集合$A=\{2,0,1,3\}$, 集合$B=\{x\mid -x\in A, 2-x^2\notin A\}$. 则集合$B$中所有元素的和为$\underline{-5}$.

问题 2.1.2

在平面直角坐标系xOy中, 点A,B在抛物线$y^2=4x$上, 满足$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$, F是抛物线的焦点. 则$S_{\triangle OFA}\cdot S_{\triangle OFB}=2$.

问题 2.1.3

在$\triangle ABC$中, 已知$\sin A=10\sin B\sin C$, $\cos A=10\cos B\cos C$, 则$\tan A$的值为$\underline{11}$.

解. 由于$\sin A-\cos A=10(\sin B\sin C-\cos B\cos C)=-10\cos A$, 所以$\tan A=11$. □

问题 2.1.4

已知正三棱锥$P-ABC$底面边长为1, 高为$\sqrt{2}$, 则其内切球半径为$\underline{\frac{\sqrt{2}}{6}}$.

问题 2.1.5

设a,b为实数, 函数$f(x)=ax+b$满足: 对任意$x\in[0,1]$, 有$|f(x)|\le 1$, 则ab的最大值为$\underline{\frac{1}{4}}$.

解. 易知$a=f(1)-f(0)$, $b=f(0)$, 则

$$ab=f(0)\cdot(f(1)-f(0))=-\left(f(0)-\frac{1}{2}f(1)\right)^2+\frac{1}{4}(f(1))^2\le\frac{1}{4}(f(1))^2\le\frac{1}{4}.$$

当$2f(0)=f(1)=\pm1$, 即$a=b=\pm\frac{1}{2}$时, $ab=\frac{1}{4}$. 故ab的最大值为$\frac{1}{4}$. □

问题 2.1.6

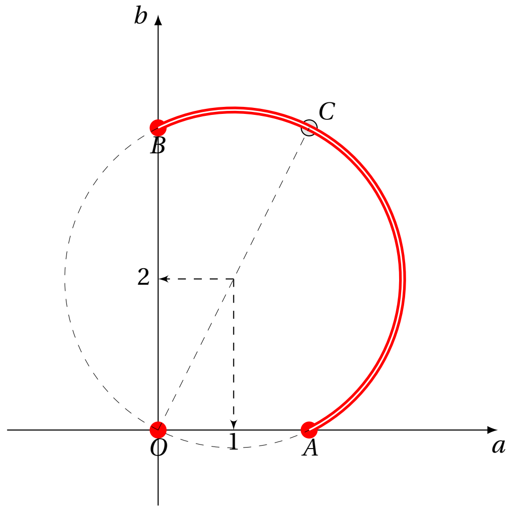
从$1,2,\cdots,20$中任取5个不同的数, 其中至少有两个是相邻数的概率为$\underline{\frac{232}{323}}$.

解. 设$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$取自$1,2,\cdots,20$, 若a_1,a_2,a_3,a_4,a_5互不相邻, 则$1\le a_1<a_2-1<a_3-2<a_4-3<a_5-4\le16$, 由此知从$1,2,\cdots,20$中取5个互不相邻的数的选法与从$1,2,\cdots,16$中取5个不同的数的选法相同, 即$\binom{16}{5}$种. 所以, 从$1,2,\cdots,20$中任取5个不同的数, 其中至少有两个是相邻的概率为$\frac{\binom{20}{5}-\binom{16}{5}}{\binom{20}{5}}$. □

问题 2.1.7

若实数x,y满足$x-4\sqrt{y}=2\sqrt{x-y}$, 则x的取值范围是$\underline{\{0\}\cup[4,20]}$.

解. 令$\sqrt{y}=a$, $\sqrt{x-y}=b$, $(a,b\geq 0)$, 此时$x=y+(x-y)=a^2+b^2$, 且条件中等式化为$a^2+b^2-4a=2b$, 从而a,b满足方程$(a-2)^2+(b-1)^2=5$, $(a,b\geq 0)$. 如图所示, 在aOb平面内, 点(a,b)的轨迹是以$(1,2)$为圆心, $\sqrt{5}$为半径的圆在$a,b\geq 0$的部分, 即点O与弧$\overset{\frown}{ACB}$的并集. 因此$\sqrt{a^2+b^2}\in\{0\}\cup\left[2,2\sqrt{5}\right]$, 从而$x=a^2+b^2\in\{0\}\cup[4,20]$.



□

问题 2.1.8

已知数列$\{a_n\}$共有9项, 其中$a_1=a_9=1$, 且对每个$i\in\{1,2,\cdots,8\}$, 均有$\frac{a_{i+1}}{a_i}\in\left\{2,1,-\frac{1}{2}\right\}$, 则这样的数列的个数为$\underline{491}$.

问题 2.1.9

给定正数数列x_n满足$S_n\geq 2S_{n-1}$, $n=2,3,\cdots$, 这里$S_n=x_1+\cdots+x_n$. 证明: 存在常数$C>0$, 使得$x_n\geq C\cdot 2^n$, $n=1,2,\cdots$.

解. 用数学归纳法证明: $x_n\geq\frac{1}{4}x_1\cdot 2^n$, $n=1,2,\cdots$. □

问题 2.1.10

在平面直角坐标系xOy中, 椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $(a>b>0)$, A_1,A_2分别为椭圆的左右顶点, F_1,F_2分别为椭圆的左右焦点, P为椭圆上不同于A_1和A_2的任意一点. 若平面中两个点Q,R满足$QA_1\perp PA_1$, $QA_2\perp PA_2$, $RF_1\perp PF_1$, $RF_2\perp PF_2$, 试确定线段QR的长度与b的大小关系, 并给出证明.

解. $|QR|\geq b$, 等号成立当且仅当$P(0,\pm b)$. □

问题 2.1.11

求所有的正实数对(a,b), 使得函数$f(x)=ax^2+b$满足: 对任意实数x,y, 有$f(xy)+f(x+y)\geq f(x)f(y)$.

解.
$$(ax^2y^2+b)+(a(x+y)^2+b)\geq(ax^2+b)(ay^2+b). \tag{2.1}$$
当$y=0$时, 有$(1-b)ax^2+b(2-b)\geq 0$. 此时$1-b\geq 0$.

在(2.1)中令$y=-x$, 得$g(x):=(a-a^2)x^4-2abx^2+(2b-b^2)\geq 0$, 则$a-a^2\neq 0$. 于是

$$g(x)=(a-a^2)\left(x^2-\frac{b}{1-a}\right)^2+\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geq 0$$

对一切实数x成立, 从而必有$a-a^2>0$. 因为$\frac{b}{1-a}>0$, 根据$g\left(\sqrt{\frac{b}{1-a}}\right)=\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geq 0$. 所以$a,b$满足$0<b\leq 1$, $0<a<1$, $2a+n\leq 2$.

下面要证充分性. 利用$x^2+y^2\geq -2xy$, 而不是$x^2+y^2\geq 2xy$. □

问题 2.1.12

如图, AB是圆ω的一条弦, P为弧AB内一点, E,F为线段AB上两点, 满足$AE=EF=FB$. 连接PE,PF并延长, 与圆ω分别相交于点C,D. 求证: $EF\cdot CD=AC\cdot BD$.

问题 2.1.13

给定正整数 u,v, 数列 $\{a_n\}$ 定义如下: $a_1=u+v$. 对整数 $m\geq 1$,

$$\begin{cases} a_{2n}=a_n+u, \\ a_{2n+1}=a_n+v. \end{cases}$$

记 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $(m=1,2,\cdots)$. 证明: 数列 $\{S_n\}$ 中有无穷多项是完全平方数.

解. 对于正整数 n, 有

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}-1} &= a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+\left(a_{2^{n+1}-2}+a_{2^{n+1}-1}\right) \\ &= u+v+(a_1+u+a_1+v)+(a_2+u+a_2+v)+\cdots+(a_{2^n-1}+u+a_{2^n-1}+v) \\ &= 2^n(u+v)+2S_{2^n-1}, \end{aligned}$$

所以

$$S_{2^n-1}=(u+v)n\cdot 2^{n-1}.$$

设 $u+v=2^k\cdot q$, 其中 k 是非负整数, q 是奇数. 取 $n=q\cdot l^2$, 其中 l 为满足 $l\equiv k-1 (\bmod 2)$ 的任意正整数, 此时 $S_{2^n-1}=q^2l^2\cdot 2^{k-1+q\cdot l^2}$, 注意到 q 是奇数, 故

$$k-1+q\cdot l^2\equiv k-1+l^2\equiv k-1+(k-1)^2=k(k-1)\equiv 0 \pmod 2.$$

所以, S_{2^n-1} 是完全平方数. 由于 l 有无穷多个, 故数列 $\{S_n\}$ 中有无穷多项是完全平方数. □

问题 2.1.14

一次考试共有 m 道试题, n 个学生参加, 其中 $m,n\geq 2$ 为给定的整数. 每道题的得分规则是: 若该题恰有 x 个学生没有答对, 则每个答对该题的学生得 x 分, 未答对的学生得零分. 每个学生的总分为其 m 道题的得分总和. 将所有学生总分从高到低排列为 $p_1\geq p_2\geq\cdots\geq p_n$, 求 p_1+p_n 的最大可能值.

解. 设第 m 道题的第 n 个学生的得分为 a_{mn}, 第 m 道题有 s_m 人做对. 则

$$p_n=\sum_{i=1}^{m}a_{\text{in}} \tag{2.2}$$

和

$$\sum_{i=1}^{n}a_{mi}=s_m(n-s_m) \tag{2.3}$$

因为 $p_1 \ge p_2 \ge \cdots \ge p_n$, 所以 $p_1 \le \sum_{i=1}^m (n-s_i) = mn - \sum_{i=1}^m s_i$. (2.2) 和 (2.3) 可得 $\sum_{j=1}^n p_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^m s_i(n-s_i)$

$$\begin{aligned}
p_1 + p_n &\le \frac{1}{n-1}\left(p_1 + p_2 + \cdots + p_n + (n-2)p_1\right) \\
&\le \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^m s_i(n-s_i) + \frac{n-2}{n-1}\left(mn - \sum_{i=1}^m s_i\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(2\sum_{i=1}^m s_i - \sum_{i=1}^m s_i^2\right) + \frac{mn(n-2)}{n-1} \\
&\le \frac{1}{n-1}\left(2\sum_{i=1}^m s_i - \frac{1}{m}\left(\sum_i^m s_i\right)^2\right) + \frac{mn(n-2)}{n-1} \\
&= \frac{-1}{m(n-1)}\left(\sum_{i=1}^m s_i - m\right)^2 + m(n-1) \\
&\le m(n-1)
\end{aligned}$$

在只有一个学生答对了全部问题, 其它 $(n-1)$ 个学生全部答错时, $p_1 + p_n$ 可取到最大值 $m(n-1)$. □

问题 2.1.15

设n,k为大于l的整数, $n < 2^k$, 证明: 存在$2k$个不被n整除的整数, 若将它们任意分成两组, 则总有一组有若干个数的和被n整除.

问题 2.1.16

正系数一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有实根, 证:
(1) $\max\{a,b,c\} \ge \frac{4}{9}(a+b+c)$,
(2) $\min\{a,b,c\} \le \frac{1}{4}(a+b+c)$.

解. 令 $a+b+c = t > 0$.
(1) 若 $b \ge \frac{4}{9}t$, 结论显然成立.
若 $b < \frac{4}{9}t$, 则

$$\because \Delta \ge 0 \Longrightarrow ac \le \frac{1}{4}b^2 < \frac{4}{81}t^2 \tag{2.4}$$

又 $a + c = t - b > t - \frac{4}{9}t = \frac{5}{9}t$, 即 $c > \frac{5}{9}t - a$, 由 (2.4) $\Longrightarrow \frac{4}{81}t^2 > ac > a\left(\frac{5}{9}t - a\right)$, 即 $a^2 - \frac{5}{9}ta + \frac{4}{81}t^2 > 0 \Longrightarrow a < \frac{1}{9}t$ 或 $a > \frac{4}{9}t$.
若 $a > \frac{4}{9}t, \cdots$, 若 $a < \frac{1}{9}t$ 则 $c > \frac{5}{9}t - a > \frac{4}{9}t \cdots$.
(2) 若 $a \le \frac{1}{4}t \cdots$, 若 $a > \frac{1}{4}t, \because \Delta \ge 0 \Longrightarrow b^2 \ge 4ac > ct$, 即

$$b > \sqrt{ct} \tag{2.5}$$

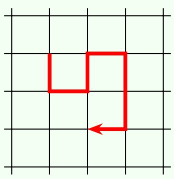
又 $b + c = t - a < \frac{3}{4}t$, 即

$$b < \frac{3}{4}t - c \tag{2.6}$$

由 (2.5), (2.6), 得 $\frac{3}{4}t - c > \sqrt{ct}$, 即 $\left(\sqrt{c} + \frac{3}{2}\sqrt{t}\right)\left(\sqrt{c} - \frac{1}{2}\sqrt{t}\right) < 0$. $\because \sqrt{c} + \frac{3}{2}\sqrt{t} > 0$, $\therefore \sqrt{c} - \frac{1}{2}\sqrt{t} < 0$. $\therefore c < \frac{1}{4}t \cdots$. □

问题 2.1.17

在一张 $(n \times n$ 的)方格纸上画出一个每边有 11 个格子的方框, 掷硬币来决定谁先开始, 开始者用铅笔沿着方框内一个小方格的格子的一条边画一条线, 第二人接着线的一端在添上一条线, 照此进行. 两人轮流画线条, 直至其中一人把对方困死而获胜为止; 这也就是线条发生重合, 或者无法再添加新的线条.



问题 2.1.18

设a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3为互不相同的正整数, 满足

$$\left[(n+1)a_1^n+na_2^n+(n-1)a_3^n\right] \mid \left[(n+1)b_1^n+nb_2^n+(n-1)b_3^n\right]$$

对任何正整数n成立, 求证: 存在正整数k, 使得$b_i=ka_i$, $(i=1,2,3)$.

2.2 2016年中科大入学数学考试

问题 2.2.1

在四面体$ABCD$中, $AD=BD=CD$, $AB=BC=CA=1$. 若二面角$A-BC-D$等于$75°$, 求二面角$A-BD-C$的余弦值.

解. 用空间余弦定理. 答案是: $\frac{3\sqrt{3}-2}{8}$. □

问题 2.2.2

设m,n非负整数, 证明$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$是整数.

解. 记所讨论的数为$f(m,n)$, 对m归纳证明$f(m+1,n)=4f(m,n)-f(m,n+1)$. □

问题 2.2.3

设正数a,b,c满足$ab+bc+ca=1$. 求$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$的取值范围.

解. 联想到$\triangle ABC$中, $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$, 所以可取$a=\cot A$, $\sum\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\sum\cos A$, 用琴生不等式证明$\sum\cos A\le\frac{3}{2}$. 另一方面, $\sum\cos A=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}>1$. 故所求取值范围为$(1,\frac{3}{2}]$. □

问题 2.2.4

正项数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$, $f(a_n)=a_{n+1}(n>1)$, 其中$f(x)=\mathrm{e}^x-\cos x$, 求证: 存在正整数K使得$\sum\limits_{k=1}^{K}a_k>2016$.

解. 函数$f(x)$的一次导数为正, 数列$\{a_n\}$是递增数列. □

2.3 初中代数题

问题 2.3.1

设a是实数, 试确定多项式$x^4-2ax^2-x+a^2-a$的实根的个数.

解. 把多项式看作a的多项式, 因式分解得$(x^2-x-a)(x^2+x-a+1)$. □

问题 2.3.2

设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{C}[x]$, $a_n\ne0$, α 是 $f(x)$ 任一根, 则

$$|\alpha|<1+\max_{0\le k\le n-1}\left|\frac{a_k}{a_n}\right|.$$

解. 反证法, 由

$$\left|\alpha^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}\alpha^{n-1}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}\alpha+\frac{a_0}{a_n}\right|\geq|\alpha|^n-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\cdot|\alpha|^{n-1}-\cdots-\left|\frac{a_1}{a_n}\right|\cdot|\alpha|+\left|\frac{a_0}{a_n}\right|\geq 1.$$

□

解. 只证$|\alpha|>1$时的情况, 记$M=\max_{0\leq k\leq n-1}\left|\frac{a_k}{a_n}\right|$. 由$a_0+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}=-a_n\alpha^n$得

$$|\alpha|^n=\left|\frac{a_0}{a_n}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\alpha^{n-1}\right|\leq M(1+|\alpha|+\cdots+|\alpha|^{n-1})<M\frac{|\alpha|^n}{|\alpha|-1}.$$

□

问题 2.3.3

设$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$中, $0<a_0<a_1<\cdots<a_{n-1}<a_n$. 则$f(x)$的根的模均大于1.

解. 反证法, 设$|\alpha|\leq 1$是$xf(x)-f(x)=a_0x^{n+1}+(a_1-a_0)x^n+\cdots+(a_n-a_{n-1})x-a_n$的零点. 所以

$$|a_n|=|a_0\alpha^{n+1}+(a_1-a_0)\alpha^n+\cdots+(a_n-a_{n-1})\alpha|\leq a_0|\alpha|^{n+1}+(a_1-a_0)|\alpha|^n+\cdots\leq a_n.$$

等号当且仅当$\alpha=1$时取到. 这不可能. □

问题 2.3.4

设多项式$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\in\mathbb{Z}[x]$, 且满足

(i) $0<a_0<a_1<\cdots<a_{n-1}<a_n$;

(ii) $a_n=p^m$, 这里p是一个素数(m是正整数), 且$p\nmid a_{n-1}$.

证明: $f(x)$在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 反证法, $f=gh$. $g=b_0x^r+\cdots+b_r$, $h=c_0x^s+\cdots+c_s$. 则由条件不妨设$p\nmid b_r$, $|c_s|=p^m$, $|b_r|=1$. 由2.3.3可知, f的根的模均大于1, 所以g的根$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$的模均大于1. $\left|g(0)\right|=|b_r|=|b_0||\alpha_1|\cdots|\alpha_r|>|b_0|\geq 1$, 与$|b_r|=1$矛盾. □

问题 2.3.5

设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+p\in\mathbb{Z}[x]$, $a_n\neq 0$, p是素数, 且

$$|a_1|+\cdots+|a_n|<p,$$

证明: $f(x)$在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 反证, $f=gh$, f的根的模均大于1, 若$|g(0)|=1$, 则其实线性分解的模大于1. 矛盾. □

问题 2.3.6

设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$是一个整系数多项式, $a_n\neq 0$. 记

$$M=\max_{0\leq i\leq n-1}\left|\frac{a_i}{a_n}\right|.$$

若有一个整数$m\geq M+2$, 使$|f(m)|$为素数, 则$f(x)$在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 反证, $f=gh$, 由2.3.2知, 当$\left|g(m)\right|=1$时, $\left|g(m)\right|$的实线性分解的每项都大于1而导致矛盾. □

问题 2.3.7

判别$x^5+4x^4+2x^3+3x^2-x+5$在$\mathbb{Q}$上是否可约.

解. 让$x+6$代替x化简得$x^5+34x^4+458x^3+3063x^2+10187x+13499$, 由于13499是素数, 由2.3.4即得. □

解. 待定系数法分解为二次多项式与三次多项式的乘积. □

解. 用2.3.5. □

问题 2.3.8

设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$, 其中$0\le a_i\le 9(i=0,1,\cdots,n)$, 且$a_n\ne 0$. 如$\alpha$是$f(x)$的一个复根, 则 $\mathrm{Re}(\alpha)\le 0$或$|\alpha|<4$.

解. 若$\mathrm{Re}(\alpha)\le 0$或$|\alpha|\le 1$, 则无需证明. 对于$\mathrm{Re}(\alpha)>0$且$|\alpha|>1$, 有$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\alpha}\right)>0$, 故从

$$0=\left|\frac{f(\alpha)}{\alpha^n}\right|\ge\left|a_0+\frac{a_1}{\alpha}\right|-\frac{a_2}{|\alpha|^2}-\cdots-\frac{a_n}{|\alpha|^n}\ge\mathrm{Re}\left(a_0+\frac{a_1}{\alpha}\right)-\frac{9}{|\alpha|^2}-\cdots-\frac{9}{|\alpha|^n}>1-\frac{9}{|\alpha|^2-|\alpha|}.$$

可得. □

问题 2.3.9

设$f(x)$是n次整系数多项式$(n\ge 1)$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是其全部复根. 若存在整数k, $k>1+\mathrm{Re}(\alpha_j)$, $(j=1,\cdots,n)$, 使$|f(k)|$是素数, 则$f(x)$在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 反证, $f=gh$, 对g进行$\mathbb{R}[x]$上的标准分解, 则有$\left|g(k)\right|>1$, 同理$|h(k)|>1$. 与$f(k)$素矛盾. □

问题 2.3.10: http://tieba.baidu.com/p/4811340691

求证: $148<\sum\limits_{n=1}^{1000}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<150$.

解. 由R-S积分,

$$\sum_{n=1}^{1000}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=\int_{1^-}^{1000^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}[x]=\int_{1^-}^{1000^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x-\int_{1^-}^{1000^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}\{x\}=148.5-\frac{1}{3}\int_{1^-}^{1000^+}\frac{\{x\}}{x^{4/3}}\,\mathrm{d}x-\left.\frac{\{x\}}{\sqrt[3]{x}}\right|_{1^-}^{1000^+}.$$

求极限后得到

$$\sum_{n=1}^{1000}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=149.5-\frac{1}{3}\int_{1}^{1000}\frac{\{x\}}{x^{4/3}}\,\mathrm{d}x.$$

上式小于150是显然的, 然后利用$\{x\}<1$, 得到$\sum\limits_{n=1}^{1000}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>148.6$.

贴吧答案: 先证放缩公式:

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right)<\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)$$

由中值定理可证上式. □

问题 2.3.11: http://tieba.baidu.com/p/4932376161

求

$$\sum_{k=1}^{2014}\left[\frac{-3+\sqrt{8k+1}}{4}\right]$$

解. 令$t=\frac{-3+\sqrt{8k+1}}{4}$, 则$k=2t^2+3t+1$. 所以$\frac{-3+\sqrt{8k+1}}{4}=n$当且仅当$2n^2+3n+1\le k<2(n+1)^2+3(n+1)+1$, $n\in\mathbb{N}$. 另一方面$2\times30^2+3\times30+1=1891$, $2\times31^2+3\times31+1=2016$. 所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2014}\left[\frac{-3+\sqrt{8k+1}}{4}\right]&=\sum_{n=1}^{31}n[2(n+1)^2+3(n+1)+1-(2n^2+3n+1)]-30\\&=\sum_{n=1}^{31}(4n^2+50n)-30\\&=4(1^2+2^2+\cdots+30^2)+5(1+2+3+\cdots+30)-30=40115.\end{aligned}$$

□

2.4 全国高中数学联赛

问题 2.4.1: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

求函数$f(x,y)=\max\{|x-y|,|x+y|,|x-2|\}$的最小值.

问题 2.4.2

设n,a,b是整数, $n>0$且$a\neq b$, 若$n\mid(a^n-b^n)$, 则$n\mid\frac{a^n-b^n}{a-b}$.

解. 设$p^\alpha\|n$, 只需证$p^\alpha\mid\frac{a^n-b^n}{a-b}$. 记$t=a-b$, 如果$p\nmid t$, 则$(p^\alpha,t)=1$, 于是$p^\alpha\mid\frac{a^n-b^n}{a-b}$. 若$p\mid t$, 由二项式定理有

$$\frac{a^n-b^n}{t}=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}b^{n-i}t^{i-1}.$$

设$p^\beta\|i$, 则易知$\beta\le i-1$. 因此$\binom{n}{i}t^{i-1}=\frac{n}{i}\binom{n-1}{i-1}t^{i-1}$中所含的$p$的幂次至少是$\alpha$, 即上式右边每一项均被$p^\alpha$整除. □

问题 2.4.3: 2016年全国高中数学联赛四川预赛

已知a,b,c为正实数, 求证:

$$abc\ge\frac{a+b+c}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\ge(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

解. 先证左边, 左边等价于$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\ge abc(a+b+c)$, 而这等价于$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$.

再证右边, 右边等价于$a+b+c\ge(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$. 不妨设$a=\max\{a,b,c\}$, 则只需考虑$b+c-a>0$的情况, 令$a=y+z$, 上式等价于$2(x+y+z)\ge 8xyz\left(\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right)$. 即

$$\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}\ge\frac{4}{(y+z)^2}+\frac{4}{(z+x)^2}+\frac{4}{(x+y)^2}.$$

最后用均值不等式. □

问题 2.4.4: 2009年全国高中数学联赛加试

证明:

$$-1<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n\le\frac{1}{2},\quad n=1,2,\cdots.$$

解. 利用不等式$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$, $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n$, 则$x_{n+1}<x_n<\cdots<x_1=\frac{1}{2}$. 在由$\ln n=\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$, $x_n>-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}>-1$. □

问题 2.4.5

设集合$S_k=\{A_k\mid k\in\mathbb{N}_+\}$, 其中$A_k=\frac{2^{2^{k+1}}+1}{7^{7^k}+1}$, 求: $S_1,\cdots,S_{2015}$中任取两个数都是素数的概率.

解. 用恒等式$\frac{x^7+1}{x+1}=(x+1)^6-7x(x^2+x+1)^2$, 当$x=7^{2m-1}$时, $(x+1)^6-7x(x^2+x+1)^2$有平方差公式. □

问题 2.4.6: IMO预选题

证明: 对于任意正有理数r, 都存在正整数a,b,c,d满足$r=\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$.

解. 用恒等式$\frac{(x+y)^2+(2x-y)^2}{(x+y)^2+(2y-x)^2}=\frac{x}{y}$, $\frac{x}{y}\in\left(\frac{1}{2},2\right)$. 推广见15.0.43. □

问题 2.4.7: Titu problem from book

设x_n表示如下含有素数2的幂指数

$$\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{2^n}{n}.$$

求证: $x_{2^n}\geq 2^n-n+1$.

解. 用恒等式$\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{2^n}{n}=\frac{2^n}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}$. 由Lucas定理$\binom{2^n-1}{k}\equiv 1 \pmod 2, 0\leq k\leq 2^n-1$. 故$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n-1}{k}} \pmod 2$意义下是$2^n$个奇数相加, 所以一定是偶数. 那么$\frac{2^n}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}$的和含有的2的指数至少为$2^n-n+1$, 故有$x_{2^n}\geq 2^n-n+1$. □

问题 2.4.8: 匈牙利征解

设$P(x)$为次数不超过$2n$的多项式, 求证:

$$|P(n)|\leq(2\sqrt{n}-1)\max(|P(0)|,|P(1)|,\cdots,|P(n-1)|,|P(n+1)|,\cdots,|P(2n)|).$$

解. 用差分公式, 当$m\geq 2n$时有, $\Delta^m P(0)=(E-I)^m P(0)=0$, E为移位算子$EP(x)=P(x+1)$, I为恒等算子, 得到

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}P(k)=0.$$

令$m=2n$. 并用绝对值的三角不等式可证命题. 其中需要用归纳法证明

$$\binom{2n}{n}\geq\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}.$$

□

2.5 数学竞赛

问题 2.5.1: Law of Tangents

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}.$$

问题 2.5.2

求

$$(x+1)^x+(x+2)^x=(x+3)^x$$

的实解.

解. 只能$x>-1$, 令$f(x)=\left(1-\frac{2}{x+3}\right)^x+\left(1-\frac{1}{x+3}\right)^x-1$,

$$f'(x)=\cdots(\text{用}\ln(1-x)<-x)<-\frac{2}{(x+1)(x+3)}\left(1-\frac{2}{x+3}\right)^x-\frac{2}{(x+2)(x+3)}\left(1-\frac{1}{x+3}\right)^x<0,$$

在$x>-1$时, $f(x)$单调递减, 而$f(2)=0$, 所以x只有实解$x=2$. □

问题 2.5.3

求满足如下恒等式的所有实函数$f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(f(x))f(y)-xy=f(x)+f(f(y))-1. \tag{2.7}$$

解. 让x,y互换, 则有$f(f(y))f(x)-xy=f(y)+f(f(x))-1$. 将(2.7)式两边同时乘以$f(x)$与前式相加化简得

$$(f(x)f(f(x))-1)f(y)=xy(f(x)+1)+f^2(x)-f(x)+f(f(x))-1.$$

若存在x使$f(x)f(f(x))-1\neq 0$, 则$f(y)=ay+b$, 代入2.7知a,b无解; 若对于任意的x都有$f(x)f(f(x))=1$, 则

$$0=xy(f(x)+1)+f^2(x)-f(x)+f(f(x))-1.$$

于是对于y的系数, 在$x\neq 0$时$f(x)=-1$, 这与上式矛盾. □

问题 2.5.4: 2005年中国西部数学奥林匹克

已知$\alpha^{2005}+\beta^{2005}$可以表示成以$\alpha+\beta,\alpha\beta$为变元的二元多项式, 求这个多项式的系数之和.

解. 让$(\sigma_1,\sigma_2)=(\alpha+\beta,\alpha\beta)$, 用牛顿等幂公式, 并令$\sigma_1=\sigma_2=1$得结果为1. □

问题 2.5.5: 2005年中国西部数学奥林匹克

设正实数a,b,c满足$a+b+c=1$. 证明:

$$10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)\geq 1.$$

解. 令$S_k=a^k+b^k+c^k(k\in\mathbb{N}_+)$, $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(a+b+c,ab+bc+ca,abc)$. 用牛顿等幂公式, $S_3=1-3\sigma_2+3\sigma_3$, $S_5=1-5\sigma_2+5\sigma_3+5\sigma_2^2-5\sigma_2\sigma_3$, 原式等价于 $(\sigma_2-\sigma_3)(1-3\sigma_2)\geq 0$. 其中$1-3\sigma_2=\sigma_1^2-3\sigma_2\geq 0$. □

问题 2.5.6: 2006年全国高中数学联赛

解方程组

$$\begin{cases} x-y+z-w=2,\\ x^2-y^2+z^2-w^2=6,\\ x^3-y^3+z^3-w^3=20,\\ x^4-y^4+z^4-w^4=66. \end{cases}$$

解. 令$a_n=x^n+z^n$, $b_n=y^n+w^n(n\in\mathbb{N}_+)$. 由牛顿等幂公式, $a_3=\frac{1}{2}a_1(3a_2-a_1^2)$, $a_4=\frac{1}{2}(2a_1^2a_2-a_1^4+a_2^2)$, $b_3=\frac{1}{2}b_1(3b_2-b_1^2)$, $b_4=\frac{1}{2}(2b_1^2b_2-b_1^4+b_2^2)$. 解得$a_1=4$, $a_2=10$, $b_1=2$, $b_2=4$. 故原方程有4个解, $(x,y,z,w)=(1,2,3,0),(1,0,3,2),(3,2,1,0),(3,0,1,2)$. □

问题 2.5.7: 25届IMO

求一对正整数a,b满足:

1. $7\nmid ab(a+b)$;
2. $7^7\mid((a+b)^7-a^7-b^7)$.

解. 令$(x,y,z)=(a+b,-a,-b)$, $S_n=x^n+y^n+z^n$, $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(0,xy+yz+zx,xyz)=(0,-a^2-ab-b^2,ab(a+b))$. 由牛顿等幂公式, $S_7=7\sigma_2^2\sigma_3=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$. 由(1), (2)知$7^3\mid a^2+ab+b^2$. 取$a^2+ab+b^2=7^3\geq 3ab$, 则有$ab\leq 114$. 解出一个$(a,b)=(18,1),(1,18)$. □

问题 2.5.8

求$\cos^5\frac{\pi}{9}+\cos^5\frac{5\pi}{9}+\cos^5\frac{7\pi}{9}$的值.

解. 令$(x_1,x_2,x_3)=(\cos\pi/9,\cos5\pi/9,\cos7\pi/9)$, 则$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(\sum x_i,\sum x_ix_j,x_1x_2x_3)=(0,-3/4,1/8)$, 最后用牛顿等幂公式得$\frac{15}{32}$. □

问题 2.5.9

解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=n,\\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=n,\\ \cdots,\\ x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n=n. \end{cases}$$

解. 由牛顿等幂公式, $S_n=\sum x_i^n$, $S_1=S_2=\cdots=S_n=n$, 得 $\sigma_1-\sigma_2+\cdots+(-1)^{n-2}\sigma_{n-1}+(-1)^{n-1}\sigma_n=1$. 从而$x_1,\cdots,x_n$中必有一个是1. 不妨让$x_n=1$. 于是对剩下的$(n-1)$个方程重复以上过程得$x_{n-1}=1$, 如此下去知, $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$. □

问题 2.5.10

已知实数x,y,z,w满足$x+y+z+w=x^7+y^7+z^7+w^7=0$. 求

$$f=w(w+x)(w+y)(w+z).$$

解. $S_n=w^n+x^n+y^n+z^n$, $(n\in\mathbb{N}_+)$, 由牛顿等幂公式有$S_7=7(\sigma_2^2-\sigma_4)\sigma_3$, 所以$\sigma_4=\sigma_2^2$或$\sigma_3=0$.
若$\sigma_4=\sigma_2^2$, 则$S_4=-2\sigma_2^2\le 0$, 得$x=y=z=w=f=0$.
若$\sigma_3=0$, 则x,y,z,w是$t^4+\sigma_2t^2+\sigma_4=0$的四个实根, w比为x,y,z之一的相反数, 故$f=0$. □

问题 2.5.11

求方程组

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^3+y^3+z^3=-18. \end{cases}$$

的整数解(x,y,z).

解. 由牛顿等幂公式得$xyz=-6$. 故$(x,y,z)=(1,2,-3)$, $(2,1,-3)$, $(1,-3,2)$, $(2,-3,1)$, $(-3,1,2)$, $(-3,2,1)$. □

问题 2.5.12: 第9届美国数学奥林匹克

定义

$$f_n=x^n\sin nA+y^n\sin nB+z^n\sin nC \quad (n\in\mathbb{N}_+),$$

其中$\angle A,\angle B,\angle C\in\mathbb{R}$, 且$\angle A+\angle B+\angle C=k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$, 如果$f_1=f_2=0$, 求证$f_n=0$对于一切$n\in\mathbb{N}_+$成立.

解. 令$(\alpha,\beta,\gamma)=(xe^{iA},ye^{iB},ze^{iC})$, $S_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$, $(n\in\mathbb{N})$, 则$\mathrm{Im}(S_n)=f_n$. 补充定义$S_0=3$, 由于$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(\alpha+\beta+\gamma,\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,\alpha\beta\gamma)\in\mathbb{R}^3$, 所以$S_1,S_2\in\mathbb{R}$. 由牛顿等幂公式得$S_n\in\mathbb{R}$, 即得. □

问题 2.5.13: https://artofproblemsolving.com/community/c6h6319p534870

For three sequences $(x_n),(y_n),(z_n)$ with positive starting elements x_1,y_1,z_1 we have the following formula:

$$x_{n+1}=y_n+\frac{1}{z_n},\quad y_{n+1}=z_n+\frac{1}{x_n},\quad z_{n+1}=x_n+\frac{1}{y_n},\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

a). Prove that none of the three sequences is bounded from above.
b). At least one of the numbers x_{200},y_{200},z_{200} is greater than 20.

解. a). 反证法, 并用单调收敛定理, 由于$x_{n+1}+y_{n+1}+z_{n+1}=x_n+y_n+z_n+\frac{1}{x_n}+\frac{1}{y_n}+\frac{1}{z_n}$, 由H-A不等式,

$$x_{n+1}+y_{n+1}+z_{n+1}\ge x_n+y_n+z_n+\frac{9}{x_n+y_n+z_n}\ge x_n+y_n+z_n, \tag{2.8}$$

所以数列$(x_n+y_n+z_n)$不减, 若命题不成立, 则$\lim_{n\to\infty}x_n+y_n+z_n$存在, 对(2.8)取极限得$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n+y_n+z_n}=0$, 这与数列$(x_n+y_n+z_n)$非负不减矛盾.

b). 证明可以借助微分方程的解作为思路引导, 若令(2.8)中$T_n:=x_n+y_n+z_n$, 则有$T_{n+1}\ge T_n+\frac{9}{T_n}$. 若将此不等式看成等式, 则为$T_{n+1}=T_n+\frac{9}{T_n}$, 考虑到递推公式和微分方程的关系:

$$T_n\leftrightarrow f(n)\Longleftrightarrow n\leftrightarrow x,\ T\leftrightarrow f;$$

$$\frac{T_{n+1}-T_n}{1}=\frac{9}{T_n}\leftrightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{9}{y}.$$

而上式右边有解$\mathrm{d}y^2=\mathrm{d}(9x)\leftrightarrow y=3\sqrt{x}$, 和微分方程解法相似, 并注意到$y^2\leftrightarrow T_n^2$, $\mathrm{d}y^2\leftrightarrow T_{n+1}^2-T_n^2$, 所以有如下尝试:

$$T_{n+1}^2-T_n^2=(T_{n+1}+T_n)(T_{n+1}-T_n)\geq 2T_n\frac{9}{T_n}=18.$$

又利用A-G不等式, 易得$T_2\geq 6$, 所以$T_n^2\geq 18n$, 所以$T_{200}^2\geq 60^2$. 最后用抽屉原理(或叫鸽洞原理)即可. □

问题 2.5.14

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$. for $i\geq 3$, $a_{i+1}=a_i-a_{i-1}+\frac{a_i^2}{a_{i-2}}$. prove that, a_i is a positive integer and is not divisible by 4.

解. 用归纳法证明: $a_{n-2}\mid a_n$, 并归纳证明: $a_{4n+1}\equiv 1\pmod 4$, $a_{4n+2}\equiv 2\pmod 4$, $a_{4n+3}\equiv 3\pmod 4$和$a_{4n}\equiv 2\pmod 8$. □

问题 2.5.15: 2002年CMO

平面上的全体有理点可分成3个两两不相交的集合, 满足下述两个条件:
(1) 在以每个有理点为圆心的任一圆内一定包含3个点分别属于这3个集合.
(2) 在任何一条直线上都不可能有三个点分别属于这3个集合.

解. 任一有理点均可唯一地写成$\left(\frac{u}{w},\frac{v}{w}\right)$的形式, 这里$u,v,w$都是整数, 且$(u,v,w)=1$, 记$A=\left\{\left(\frac{u}{w},\frac{v}{w}\right):2\nmid u\right\}$, $B=\left\{\left(\frac{u}{w},\frac{v}{w}\right):2\mid u,2\nmid v\right\}$, $C=\left\{\left(\frac{u}{w},\frac{v}{w}\right):2|u,2|v\right\}$, 下面证明这3个集合满足本题条件(1)和(2).

该平面上的直线方程为$ax+by+c=0$, 如果其上有两个不同有理点(x_1,y_1)和(x_2,y_2), 则有$\begin{cases}ax_1+by_1+c=0\\ax_2+by_2+c=0\end{cases}$, 如果$c=0$, 则可取$a,b$为有理数. 如果$c\neq 0$, 则可取$c=1$, 则可从上面的联立方程组中求出$a$和$b$的值, 当然都是有理数, 再通分可使$a,b,c$都是整数, 且满足$(a,b,c)=1$, 令有理点$\left(\frac{u}{w},\frac{v}{w}\right)$在直线$l:ax+by+c=0$上, 则有$au+bv+cw=0$.

(1) 先证集合A,B,C满足条件(2), 分以下3种情形讨论:
情形1: $2\nmid c$, 若$2|u,2|v$, 则由(1)知$2\mid cw$, 从而$2\mid w$, 这与$(u,v,w)=1$矛盾, 所以集合中C的点都不能在直线l上.
情形2: $2|c,2|b$, 由(1)得$2\mid au$, 又因$(a,b,c)=1$, 故$2\nmid a$, 所以$2\mid u$, 这表明集合A中的点不在直线l上.
情形3: $2\mid c,2\nmid b$, 若$2\nmid v$, 则$2\nmid au$, 从而$2\nmid u$, 从而集合B中的点都不能在直线l上.
综上所述, A,B,C这3个集合满 足条件(2).

(2) 再证集合A,B,C满足条件(1), 设D是以有理点$\left(\frac{u_0}{w_0},\frac{v_0}{w_0}\right)$为圆心, 以$r$为半径的圆取正整数$k$, 使得$2^k>\max\left\{w_0,\frac{1}{r}(|u_0|+|v_0|+1)\right\}$, 我们具体构造三个点分别属于集合$A,B,C$, 它们是

$$\left(\frac{u_0\cdot 2^k+1}{w_0\cdot 2^k},\frac{v_0\cdot 2^k}{w_0\cdot 2^k}\right)\in A,\left(\frac{u_0\cdot 2^k}{w_0\cdot 2^k},\frac{v_0\cdot 2^k+1}{w_0\cdot 2^k}\right)\in B,\left(\frac{u_0\cdot 2^k}{u_0\left(2^k+1\right)},\frac{v_0\cdot 2^k}{w_0\left(2^k+1\right)}\right)\in C,$$

它们都在$\odot O$内部, 值的注意的是: 在上述3点中, u,v,w不一定互质, 但由于$2^k>w_0$, 故约分不改变分子的奇偶性, 这表明条件(1)成立. □

Chapter 3

集合的运算

问题 3.0.1

证明n个集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$经过并, 交, 差三种运算, 最多能生成2^{2^n-1}个互不相同的集合; 并且确实有n个集合, 它们经过并, 交, 差三种运算恰能生成2^{2^n-1}个互不相同的集合.

解. 这是个编码问题, 考虑$\bigcap_{i=1}^n A_i^{t_k(i)}$, 其中对于指定的$k$, $A_i^{t_k(i)}$表示A_i或A_i^c之一, 且所有的$t_k(i)$不能都表示补集的意思, 于是这样的k最多有2^n-1个, 这生成2^n-1个两两不交的能通过补码生成每个A_i的集合. 然后问题就简单了. □

Chapter 4

抽象代数

定理 4.0.1

同类置换有相同的循环结构.

解. $P,Q,T\in S_n$且$Q=TPT^{-1}$, Q,P属同类, 则Q,P有相同的循环结构.
$P(v)=(1^{v_1}2^{v_2}\cdots m^{v_m})$, $P=C_1C_2\cdots C_r$, $r=\sum_i v_i$, $n=\sum_i iv_i$. $Q=TPT^{-1}=\prod_i TC_iT^{-1}=\prod_i C_i'$.
T是一一映射, $(C_i')_i$两两不交, 因$(C_i)_i$两两不交, C_i'与C_i同阶, 所以$Q(v)=P(v)$. □

问题 4.0.1

在环R中, 对于任意的$x\in R$, 都存在$n\in\mathbb{N}_+$, 使得$x=x^{n+1}$, 证明: 对于任意的$y\in R$, $yx^n=x^ny$.

解. 先证x^n是幂等的, $(x^n)^2=x^n$.
再证, 若$ab=0$, 则$ba=(ba)^{\tilde{n}+1}=b(ab)^{\tilde{n}}a=0$.
再证, $x=x^{n+1}$, 则$yx^n=yx^{2n}$, 所以$(y-yx^n)x^n=0$, 所以$x^n(y-yx^n)=0$, 即$x^ny=x^nyx^n$.
最后, 同上面的做法, 由$x^ny=x^{2n}y$, 有$yx^n=x^nyx^n$, 所以$x^ny=yx^n$. □

问题 4.0.2: AMM, E.C.Johnsen, D.L. Outcalt and Adil Yaqub, An Elementary Commutativity Theorem For Rings, Vol. 75, No. 3, 288-289

有幺元的非结合环R中, 若对于任意的$x,y\in R$, 有$(xy)^2=x^2y^2$, 则R是交换环.

解. 由$(xy)^2=x^2y^2$, $(x(y+1))^2=x^2y^2+2x^2y+x^2$, 而$(x(y+1))^2=(xy+x)^2=(xy)^2+(xy)x+x(xy)+x^2$, 所以$xyx+xxy+2x^2y$, 将$x+1$代换$x$的位置, 有$xyx+yx+xxy=2x^2y+xy$, 即得$xy=yx$.

注. 含幺性不可省, $R=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix}\middle|a,b\in\mathbb{Z}\right\}$, 或$\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}\le\mathrm{GF}(2)$ 有左幺元.

注2. $(xy)^k=x^ky^k$在$k>2$时有反例, $k\ge3$固定, p素且满足: k奇时, $p\mid k$, k偶时, $p\mid\frac{k}{2}$.

$$R=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&d\\0&0&a\end{pmatrix}:a,b,cd\in\mathrm{GF}(p)\right\}\le\mathrm{GF}(p),$$

这里的R不可交换. □

问题 4.0.3

R是含幺环, 若对于任意的$x,y\in R$, 存在$m,n\in\mathbb{N}$, 使得$x^{m+1}y^{n+1}=x^myxy^n$, 则R是交换环.

解. $x^m(xy-yx)y^n=0$, $x^l(xy-yx)(y+1)^k=0$, 定义$r=\max\{m,l\}$, 则

$$x^r(xy-yx)y^n=0,\ x^r(xy-yx)(y+1)^k=0,\ (y,y+1)=1\Longrightarrow(y^n,(y+1)^k)=1.$$

所以$(y^{2n-1},(y+1)^ky^{n-1})=y^{n-1}$, 所以存在$A(y),B(y)$使得$Ay^{2n-1}+B(y+1)^ky^{n-1}=y^{n-1}$, 所以$x^r(xy-yx)y^{n-1}=0$, 注意到红色部分的$y^n$得到了降次, 所以存在$s$满足$x^s(xy-yx)=0$.
再设$(x+1)^t(xy-yx)=0$, 同样辗转相除得到$xy-yx=0$, 即R可交换. □

4.1 群的定义问题集(MA2008)

问题 4.1.1

Prove that the set

$$G = \left\{3^k/2^{2k}; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

forms a group with respect to multiplication. You may assume that multiplication is associative.

问题 4.1.2

Consider the following group of congruence classes of integers modulo 14 with respect to multiplication:

$$G = \{[1]_{14}, [3]_{14}, [5]_{14}, [9]_{14}, [11]_{14}, [13]_{14}\}$$

Given that $[1]_{14}$ is the identity of the group, find (a) the order of $[13]_{14}$, (b) the order of $[3]_{14}$, (c) the inverse of $[9]_{14}$.

问题 4.1.3

Suppose that G is a group, $x \in G$ is an element of order 3 and $y \in G$ is an element of order N. Prove that

$$\left(x^2yx\right)^N = 1$$

问题 4.1.4

Let $G = \left\{1, a, a^2, b, b^2, ab, ab^2, a^2b, a^2b^2\right\}$ be a group where $a^3 = b^3 = 1$ and $ab = ba$. (a) Find $\langle b^2 \rangle$, the subgroup of G generated by b^2. (b) It is given that $H = \left\{1, ab, a^2b^2\right\}$ is a subgroup of G. Find the distinct right cosets of H.

问题 4.1.5

Suppose G is an abelian group with its binary operation written as multiplication. Show that the mapping $\theta : G \to G$ defined by $g\theta = g^{-1}$ is a homomorphism.

问题 4.1.6

Prove that the set of vectors

$$\left\{\begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$$

is a vector subspace of $\mathbb{R}^3$. Calculate a basis and the dimension of this subspace.

问题 4.1.7

Reduce the matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ to row-echelon form. Give a basis for the row-space of A.

问题 4.1.8

Prove that the following vector subspaces V and W of $\mathbb{R}^3$ are equal:

$$V = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right), \quad W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}\right)$$

问题 4.1.9

Explain carefully which of the following functions define homomorphisms of vector spaces:
(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ defined by $f(a)=a+1$,
(b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ defined by $f\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=a+b$,
(c) $f:\mathscr{P}_2\to\mathscr{P}_5$ defined by $f\left(a+bx+cx^2\right)=\left(1-3x^2+7x^3\right)\left(a+bx+cx^2\right)$.

问题 4.1.10

State the rank-nullity theorem for a homomorphism of finite-dimensional vector spaces. For any linear map $f: M_{2\times 2}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^2$, prove there are at least two linearly independent matrices $A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ which satisfy $f(A)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

问题 4.1.11

(a) Suppose G is a finite group and g is an element of G. Define the terms i. order of G, ii. order of g.
(b) Use Lagrange's theorem to prove the following. If G is a finite group and $g\in G$ then the order of g divides the order of G.
(c) Now suppose that G is an abelian group and let

$$H_k=\left\{x\in G: x^k=1_G\right\}$$

where k is a positive integer. Show that H_k is a subgroup of G.
(d) Let G be the group with the following operation table.

	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b	b^2	ab^2	a^2b^2	a^3b^2
1	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b	b^2	ab^2	a^2b^2	a^3b^2
a	a	a^2	a^3	1	ab	a^2b	a^3b	b	ab^2	a^2b^2	a^3b^2	b^2
a^2	a^2	a^3	1	a	a^2b	a^3b	b	ab	a^2b^2	a^3b^2	b^2	ab^2
a^3	a^3	1	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b	a^3b^2	b^2	ab^2	a^2b^2
b	b	ab^2	a^2b	a^3b^2	b^2	a	a^2b^2	a^3	1	ab	a^2	a^3b
ab	ab	a^2b^2	a^3b	b^2	ab^2	a^2	a^3b^2	1	a	a^2b	a^3	b
a^2b	a^2b	a^3b^2	b	ab^2	a^2b^2	a^3	b^2	a	a^2	a^3b	1	ab
a^3b	a^3b	b^2	ab	a^2b^2	a^3b^2	1	ab^2	a^2	a^3	b	a	a^2b
b^2	b^2	ab	a^2b^2	a^3b	1	ab^2	a^2	a^3b^2	b	a	a^2b	a^3
ab^2	ab^2	a^2b	a^3b^2	b	a	a^2b^2	a^3	b^2	ab	a^2	a^3b	1
a^2b^2	a^2b^2	a^3b	b^2	ab	a^2	a^3b^2	1	ab^2	a^2b	a^3	b	a
a^3b^2	a^3b^2	b	ab^2	a^2b	a^3	b^2	a	a^2b^2	a^3b	1	ab	a^2

i. Write down the elements of $H_4=\left\{x\in G: x^4=1_G\right\}$.
ii. Is H_k always a subgroup of G, even if G is not abelian? Explain your answer.

解. $H_4=\{1,a,a^2,a^3,b,ab,a^3b,ab^2,a^3b^2\}$. 其中$(ab)^4=(a^2)^2=1$, $(a^3b)^4=(a^2)^2=1$, $(ab^2)^4=(a^2)^2=1$, $(a^3b^2)^4=a^2=1$. □

问题 4.1.12

(a) Suppose that

$$G = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$$

where

$$a^4 = 1, \quad a^2 = b^2, \quad ba = a^3b$$

and

$$G' = \{1, c, c^2, c^3, d, cd, c^2d, c^3d\}$$

where

$$c^4 = d^2 = 1 \text{ and } dc = cd.$$

Construct a non-trivial homomorphism $\theta : G \to G'$. Find the image and kernel of your homomorphism.
(b) Consider the linear map $f : \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_2$ defined by

$$f\left(a + bx + cx^2\right) = (a+b) + (2b+c)x + 3cx^2.$$

Find three eigenvectors of f which form a basis $\mathscr{B}$ of $\mathscr{P}_2$. Write down the following matrices and the relation between them:
- The change of basis matrix P, from $\mathscr{B}$ to the standard basis $\{1, x, x^2\}$.
- The matrix C which represents f with respect to the standard basis.
- The matrix D which represents f with respect to the basis $\mathscr{B}$.

问题 4.1.13

Consider the function

$$f : \mathscr{P}_2 \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

defined by

$$f\left(a + bx + cx^2\right) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ a-c & b+c \end{pmatrix}$$

(a) Prove that the nullspace of f has dimension one, and give a basis $\{v\}$ for it.
(b) Prove that the matrices $f(x)$ and $f\left(x^2\right)$ form a basis for the image of f.
(c) Find the matrix A which represents the linear map f with respect to the standard bases for $\mathscr{P}_2$ and $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Using part (b), write down a basis for the column-space of this matrix.
(d) Extend the set $\left\{f(x), f\left(x^2\right)\right\}$ to a basis $\mathscr{B}$ for $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Write down:
i. the change of basis matrix P from the basis $\mathscr{B}$ to the standard basis for $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$,
ii. The change of basis matrix Q from the basis $\left\{v, x, x^2\right\}$, where v is the polynomial you gave in part (a), to the standard basis for $\mathscr{P}_2$. Show that

$$AQ = P\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chapter 5

矩阵论

5.1 矩阵迭代法

研究对象: $Ax=b$, 求x. 设$A=B-C$, 其中B非奇异, 则$Ax=b \Longleftrightarrow Bx=b+Cx$. 其迭代形式为

$$Bx^{(k+1)}=Cx^{(k)}+b, \quad k=0,1,2,\cdots$$

若$Ax=b$有解, 则其解也满足$Bx=Cx+b$, 从而

$$B(x^{(k+1)}-x)=C(x^{(k)}-x)$$

即$x^{(k+1)}-x=L(x^{(k)}-x)$, $L=B^{-1}C$, 从而$(x^{(k)}-x)=L^k(x^{(0)}-x)$, 所以要使迭代式收敛, 则需要

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)}-x=0,$$

即$\lim_{k\to\infty} L^k=0$.

设L的特征根为$l_1,l_2,\cdots,l_n$且有可逆阵T使$L=T\cdot \mathrm{diag}(l_1,l_2,\cdots,l_n)\cdot T^{-1}$. 所以

$$L^{(k)}\to 0, k\to\infty \Longleftrightarrow |l_i|<1, i=1,2,\cdots,n \Longleftrightarrow \|L\|<1, \|L\|=\max_i\{|l_i|\}$$

设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{pmatrix},$$
$$E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0\\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0\end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ 0 & 0 & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

则$A=D-E-F$.

定理 5.1.1: Gauss-Seidel迭代

$$\begin{cases} B=D-E\\ C=F\end{cases} \Longrightarrow (D-E)x^{(k+1)}=Fx^{(k)}+b \Longrightarrow x^{(k+1)}=D^{-1}\left[Ex^{(k+1)}+Fx^{(k)}+b\right].$$

定理 5.1.2: Jacobi迭代

$$\begin{cases} B=D\\ C=E+F\end{cases} \Longrightarrow x^{(k+1)}=B^{-1}(Cx^{(k)}+b)=D^{-1}\left[(E+F)x^{(k)}+b\right].$$

定理 5.1.3: Newton-Ralphson迭代

函数$f(z)=0$的根可以根据迭代$z_{k+1}=z_k-\frac{f(z_k)}{f'(z_k)}$, $k=0,1,2,\cdots$.

设$f(z)=a-z^{-1}$有根a^{-1}, $f'=z^{-2}$, 则$z_{k+1}=z_k(2-az_k)$且可以期望$\lim_{k\to\infty}z_k=a^{-1}$. 对于线性方程$Ax=b$, 可以考虑用此方法解得“$A^{-1}$", 尽管$A$可能不是方阵. 给定初始矩阵$x_0$, 则有迭代$x_{k+1}=x_k(2I-Ax_k)$, $k=0,1,2,\cdots$, 并期望$\lim_{k\to\infty}x_k=A^{-1}$. 定义“误差"矩阵$E_k=I-Ax_k$, 则

$$E_{k+1}=I-Ax_{k+1}=I-Ax_k(2I-Ax_k)=I-(I-E_k)(2I-(I-E_k))=E_k^2$$

若E_0的所有特征根的模均小于1, 则必有$\lim_{k\to\infty}E_0^k=0$. 最后x_kb逼近方程$Ax=b$的解.

Chapter 6

数学分析

6.1 极限

问题 6.1.1

设函数$\varphi(x)$可导, 且满足$\varphi(0)=0$, 又设$\varphi'(x)$单调减少.

1. 证明: 对$x\in(0,1)$, 有$\varphi(1)x<\varphi(x)<\varphi'(0)x$.
2. 若$\varphi(1)\geq 0$, $\varphi'(0)\leq 1$, 任取$x_0\in(0,1)$, 令$x_n=\varphi(x_{n-1})$, $(n=1,2,\cdots)$. 证明: $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求该极限值.

解. 对于任意的$x\in[0,1]$,在$[0,x]$上用拉格朗日定理,

$$\varphi(x)-\varphi(0)=\varphi'(\xi_1)x<\varphi'(0)x$$

在$[x,1]$上用拉格朗日定理

$$\varphi(1)-\varphi(x)=\varphi'(\xi_2)(1-x)<\varphi'(\xi_1)(1-x)=\varphi'(\xi_1)-\varphi(x)$$

所以$\varphi(1)x<\varphi'(\xi_1)x=\varphi(x)$. □

问题 6.1.2: https://www.zhihu.com/question/636352059

已知实数列$\{x_n\}$使得$3x_n-x_{n-1}$收敛, 证明x_n收敛.

解. 由问题6.5.10, 设

$$\limsup x_n=\overline{X},\quad \liminf x_n=\underline{X}.$$

则$+\infty\geq\overline{X}\geq\underline{X}\geq-\infty$. 如果设$\lim(3x_n-x_{n-1})=L$. 取上面的数列$(x_n,y_n)$对为原问题中的$(3x_n,-x_{n-1})$代入上面的不等式, 得到

$$3\underline{X}-\overline{X}\leq L\leq 3\underline{X}-\underline{X}\leq L\leq 3\overline{X}-\underline{X},$$

这说明$\underline{X}=\frac{L}{2}$. 当取上面的数列$(x_n,y_n)$对为原问题中的$(-x_{n-1},3x_n)$时, 则得到

$$-\overline{X}+3\underline{X}\leq L\leq -\overline{X}+3\overline{X}\leq L\leq -\underline{X}+3\overline{X},$$

这说明$\overline{X}=\frac{L}{2}$. 所以问题中的数列x_n的上下极限相等且有限. □

6.2 导数

问题 6.2.1

函数$f(x)\in C[0,1]$, 在$(0,1)$上可微, 对于任意的$x\in(0,1)$, $\left|xf'(x)-f(x)+f(x)\right|<Mx^2$, 问$f'(0)$的存在性.

解. 不妨设$f(0)=0$, 定义$h(x)=\frac{f(x)}{x}(0<x<1)$, 即证$\lim_{x\to 0}h(x)$存在, 则$\left|x^2h'(x)\right|<Mx^2$, 所以$\left|h'(x)\right|<M$, 所以若$\{x_n\}\to 0$, 则有

$$|h(x_m)-h(x_n)|=\left|h'\xi(x_m-x_n)\right|<M|x_m-x_n|<\varepsilon.$$

所以$\{h(x_n)\}$是Cauchy列, 从而$\lim_{x\to 0}h(x)$存在. □

问题 6.2.2

构造有界单调函数$f(x)$使得对于任意的$x\in\mathbb{R}$, $f'(x)$存在, 且$\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)\neq 0$.

解. 取$a_n=1-2^{-n}$, $(n\in\mathbb{N})$, $f(n)=a_n$, $f\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(a_n+a_{n+1})$, 且$f'(n)=0$, $f'\left(n+\frac{1}{2}\right)=1$, 将其它点处可微连接$f(n)$这些离散点, 知$\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)$不存在, 从而不为0. □

6.3 积分

问题 6.3.1

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\log\left(\frac{2x^2+2x+1}{2x^2-2x+1}\right)}{x}\,dx$$

解. $4\pi\operatorname{arccot}(\sqrt{\phi})$. □

问题 6.3.2

设函数$f(x)$在$[a,b]$上有连续的导数, 且$f(a)=0$, 证明

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\le\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

解. 令$F(b)=RHS-LHS$,证$F'(b)\ge 0$即可. □

问题 6.3.3

设函数$f(x)$在$[0,1]$上有二阶连续的导数, 证明:

1. 对任意$\xi\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$和$\eta\in\left(\frac{3}{4},1\right)$有
$$\left|f'(x)\right|<2\left|f(\xi)-f(\eta)\right|+\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x\quad x\in[0,1]$$
2. 当$f(0)=f(1)=0$及$f(x)\neq 0$, $(x\in(0,1))$时有
$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\ge 4.$$

解. 用中值定理,

$$\begin{aligned}\left|f'(x)\right|-2\left|f(\xi)-f(\eta)\right|&=\left|f'(x)\right|-2\left|f'(\theta)\right|(-\xi+\eta)\\&\le\left|f'(x)\right|-\left|f'(\theta)\right|\\&\le\left|f'(x)-f'(\theta)\right|=\left|\int_\theta^x f''(t)\mathrm{d}t\right|\\&\le\int_0^1\left|f''(t)\right|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

最后取$f(x_0)=\max_{x\in[0,1]}f(x)$, 则

$$f(x_0)=f'(\xi_1)x_0=f'(\xi_2)(x_0-1),$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|\frac{f''}{f}\right|\mathrm{d}x &\geq \frac{1}{|f(x_0)|}\mathrm{d}x\\ &\geq \frac{1}{|f(x_0)|}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2}f''\,\mathrm{d}x\right|\\ &= \frac{1}{|f(x_0)|}\left|f'(\xi_2)-f'(\xi_1)\right|\\ &= \frac{1}{x_0}+\frac{1}{1-x_0}\geq 4.\end{aligned}$$

□

问题 6.3.4

设函数$f(x)$在$[-\frac{1}{a},a]$上连续(其中$a>0$), 且$f(x)\geq 0$, $\int_{-\frac{1}{a}}^{a}xf(x)\,\mathrm{d}x=0$, 求证: $\int_{-\frac{1}{a}}^{a}x^2f(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_{-\frac{1}{a}}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 因$(a-x)\left(x+\frac{1}{a}\right)\geq 0$, 对$(a-x)\left(x+\frac{1}{a}\right)f(x)\geq 0$两边同时积分. □

问题 6.3.5

设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=1$. 求证:

1. 存在$\xi\in[0,1]$, 使得$|f(\xi)|\geq 4$;
2. 存在$\eta\in[0,1]$, 使得$\left|f(\eta)\right|=4$.

解. 用反证法,

$$1=\left|\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\cdot\left|f\right|\,\mathrm{d}x\leq 1.$$

等号取不到, 否则,

$$\int_0^1\left(4-\left|f\right|\right)\left|x-\frac{1}{2}\right|\,\mathrm{d}x=0.$$

□

问题 6.3.6

求$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta}$.

解. $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2+2\sin^2(\theta-\frac{\pi}{4})}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}=2\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+2t^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$ □

解.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta} &= \frac{1}{2}\int_0^{4\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3-\sin t}\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3-\sin t}\\ &= \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3-\sin t}+\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3+\sin t}\\ &= 2\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{3-\sin x}+2\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x}\\ &= 12\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{9-\sin^2 x}\\ &= 12\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\tan x}{8\tan^2 x+9}\\ &= \frac{12}{6\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\tan x\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.\end{aligned}$$

□

解.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta}&=\frac{1}{2}\int_0^{4\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3\sin\theta}\\&=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin\theta}\\&=\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z\left(3-\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)}\\&=2\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+6\mathrm{i}z-1}\\&=2\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{(z-(-3+2\sqrt{2})\mathrm{i})(z-(-3-2\sqrt{2})\mathrm{i})}\\&=2\cdot 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}(f(z))\big|_{z=(-3+2\sqrt{2})\mathrm{i}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.\end{aligned}$$

□

解.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta}&=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\tan\theta}{3\tan^2\theta-2\tan\theta+3}\\&=\int_0^{\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi}+\int_{\pi}^{3\pi/2}+\int_{3\pi/2}^{2\pi}=\cdots\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^{\pi/2}=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\theta}{3t^2-2t+3}=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{3}\right)}{\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{8}}\arctan\left(\frac{3\left(t-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{8}}\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

其它三个同理. 所以$\sum=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 4\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$. □

问题 6.3.7

求

$$\int_0^{\pi/4}\frac{(\cot x-1)^{p-1}}{\sin^2 x}\ln\tan x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{p}\csc p\pi,\ (-1<p<0).$$

解. 令$u=\cot x-1$, 原式等价于

$$\int_0^{+\infty}u^{p-1}\ln(u+1)\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{p}\csc p\pi,$$

而

$$\int_0^{\infty}u^{p-1}\ln(u+1)\,\mathrm{d}u=\int_0^{\infty}u^{p-1}\int_1^{1+u}\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u$$

交换积分次序, 用Beta函数 □

6.4 级数

问题 6.4.1

证明

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}=0$$

无实根.

解. 设$-y<0$, 则$y>0$, 所以$1-y+\frac{y^2}{2!}-\frac{y^3}{3!}+\cdots+\frac{y^{2n}}{(2n)!}>\mathrm{e}^{-y}>0$. □

问题 6.4.2: F.F.Abi=Khuzam and A.B.Boghossian, Some recent geometric inequalities, AMM Vol 96(1989), No. 7:576-589

函数$f(x)=\cot x-\frac{1}{x}$, 则$f^{(k)}(x)<0, 0<x<\pi, k\in\mathbb{N}$.

解.

$$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k\pi+x}-\frac{1}{k\pi-x}\right),\quad x\in(0,\pi).$$

将真分式展开有

$$f(x)=-2x\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{2k},\ x\in(0,\pi),\quad c_k=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^{2k+2}},\ (k\in\mathbb{N}).$$

□

问题 6.4.3

对$n\in\mathbb{N}_+$, 确定$(0,1)$的子集, 使在此子集上$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n(\ln x\ln(1-x))<0$.

解.

$$f'(x)=(\ln x\ln(1-x))'=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{m-1}-x^{m-1}}{m},$$

当n是偶数时, 所有项都是负的, 当n是奇数时, 仅当$1-x<x$即$x>\frac{1}{2}$时, $f^{(n)}(x)$时负的. □

问题 6.4.4

已知$S_n=\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^i}{i}$, 证明$\lim_{n\to\infty}S_n$存在并求其值.

解. 因$S_{n+1}=\frac{n+2}{2(n+1)}(S_n+1)$, 所以

$$S_{n+2}-S_{n+1}=\frac{(n+2)^2(S_{n+1}-S_n)-S_{n+1}-1}{2(n+1)(n+2)},$$

$S_4-S_3=0$, 当$n\geq 3$时, S_n不增, 所以$S=\lim_{n\to\infty}S_n$存在, 所以$S=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2(n+1)}(S+1)$, 得$S=1$. □

6.5 其他

问题 6.5.1

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)=0.$$

解. 用$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. □

问题 6.5.2

证明:

$$0<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n}.$$

解. 先证: $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调上升且有界. $(1\cdot x_n\le\left(\frac{1+n(1+1/n)}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1})$, 则

$$\begin{aligned}x_n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=1+1+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\cdots\\&=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\&<2+\frac{1}{2\cdot1}+\frac{1}{3\cdot2}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}=3.\end{aligned}$$

再证$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$单调下降且有界. (用$(1+x)^n>1+nx$, $x>-1$证单调性).

由$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n$, $x_n<\mathrm{e}<y_n$, (这可以证得$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$).

故$\mathrm{e}-x_n<y_n-x_n=\frac{x_n}{n}<\frac{3}{n}$. □

问题 6.5.3

证明不等式

$$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

解. 用$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$及归纳法. □

问题 6.5.4

设$a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$及$a^{[0]}=1$, 证明:

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a^{[n-m]}b^{[m]}.$$

并由此推出牛顿二项式公式.

问题 6.5.5

证明不等式

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\quad(n>1).$$

解. 用均值不等式. □

解. 用伯努利不等式证$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>2$, $(n\in\mathbb{N}_+)$. □

问题 6.5.6

设$p_n(n\in\mathbb{N}_+)$为趋于正无穷的任意数列, 而$q_n(n\in\mathbb{N}_+)$为趋于负无穷的任意数列$(p_n,q_n\notin[-1,0])$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\mathrm{e}.$$

解. 注意$[x]\le x<[x]+1$. □

问题 6.5.7

已知$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}.$$

并推出

$$\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n},$$

其中$0<\theta_n<1$.

问题 6.5.8

证明: e是无理数.

解. 用反证法及6.5.7有, 对于任意的n, $n!n\cdot\mathrm{e}$不是整数. □

问题 6.5.9

证明不等式:

(a) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, $(n\in\mathbb{N}_+)$;

(b) $1+\alpha<\mathrm{e}^\alpha$, $(\alpha\neq 0,\alpha\in\mathbb{R})$.

解.

(a) 原式等价于$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$;

(b) $\alpha>-1$时, 用伯努利不等式, $\mathrm{e}^\alpha>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha n}>1+\alpha$.

□

问题 6.5.10

证明: (在以下各极限均存在的情况下)

(a) $\liminf_{n\to\infty}x_n+\liminf_{n\to\infty}y_n\le\liminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\le\liminf_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n$;

(b) $\liminf_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n\le\limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)\le\limsup_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n$.

解. 用$\liminf_{n\to\infty}x_n=-\limsup_{n\to\infty}(-x_n)$. □

问题 6.5.11

证明: 若$\lim_{n\to\infty}x_n$存在, 则对于任何数列$y_n(n\in\mathbb{N}_+)$, $\limsup_{n\to\infty}y_n$有限且有:

(a) $\limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n$;

(b) $\limsup_{n\to\infty}x_ny_n=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\limsup_{n\to\infty}y_n$, $(x_n\ge 0)$.

解. 用6.5.10. □

问题 6.5.12

证明: 若对于某数列$x_n(n\in\mathbb{N}_+)$, 无论数列$y_n(n\in\mathbb{N}_+)$如何选取, 以下两个等式中都至少有一个成立:

(a) $\limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\limsup_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n$.

(b) $\limsup_{n\to\infty}(x_ny_n)=\limsup_{n\to\infty}x_n\cdot\limsup_{n\to\infty}y_n$, $(x_n\ge 0)$.

则数列x_n收敛或发散于正无穷.

问题 6.5.13

证明: 若$x_n > 0(n \in \mathbb{N}_+)$及

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \cdot \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 1.$$

则数列x_n是收敛的.

问题 6.5.14

证明: 若数列$x_n(n \in \mathbb{N}_+)$有界, 且

$$\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0.$$

则此数列的子列极限充满于下极限和上极限

$$l = \liminf_{n\to\infty} x_n \text{ 和 } L = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

之间.

问题 6.5.15

证明: 若$x_n > 0(n \in \mathbb{N}_+)$且$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$存在, 则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

解. 用结论: 若$\{x_n\} \to x$, $x_n > 0$, 则$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n = x$. □

问题 6.5.16

证明: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}$.

解. 用6.5.15. □

问题 6.5.17: 数a和b的算术几何平均值

证明: 由下列各式

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

确定的数列x_n和$y_n(n \in \mathbb{N}_+)$有共同的极限.

$$\mu(a,b) = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

解. 用幂平均不等式, $\sqrt{x_{n+1} + y_{n+1}} = \frac{\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n}}{\sqrt{2}} \le \sqrt{x_n + y_n}$. 即$\{y_n\}$单调有界, 从而有极限, 从而$x_n = 2y_{n+1} - y_n$有相同的极限. □

问题 6.5.18

设

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad (|x| \ge 2),$$

求$f(x)$.

解. $x^2 - 2$, $(|x| \ge \frac{5}{2})$. □

问题 6.5.19

证明: 若

(1) 函数$f(x)$定义于区域$x>a$;

(2) $f(x)$在每一个有限区间$a<x<b$内是有界的;

(3) 对于某一个整数n, 存在有限的或无穷的极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=l,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{l}{n+1}.$$

能否用**Cauchy**定理**17.1.8**证明它.

问题 6.5.20

利用定理

定理 6.5.1

设

$$\lim_{x\to 0}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=1,$$

其中$\psi(x)>0$, 再设当$n\to\infty$时$\alpha_{mn}\rightrightarrows 0(m=1,2,\cdots,n)$, 换言之, 对于任意$\varepsilon>0$, 存在正整数$N(\varepsilon)$, 当$m=1,2,\cdots,n$且$n>N(\varepsilon)$时, $0<|\alpha_{mn}|<\varepsilon$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}[\phi(\alpha_{1n})+\phi(\alpha_{2n})+\cdots+\phi(\alpha_{mn})]=\lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\cdots+\psi(\alpha_{mn})],$$

此处同时还要假设上式右端的极限存在.

求:

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(\sqrt[n]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(\sin\frac{ka}{n^2}\right)$;

(3) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right)$, $(a>0)$;

(4) $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$;

(5) $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$.

问题 6.5.21

设函数$f(x)$在区间$(x_0,+\infty)$上连续并有界. 证明: 对于任何数T, 可求得数列$x_n\to+\infty$, 使

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0.$$

问题 6.5.22

证明: 在有限区间(a,b)上有定义且连续的函数$f(x)$, 可用连续的方法延拓到闭区间$[a,b]$上, 其充分必要条件是函数$f(x)$在区间(a,b)上一致连续.

问题 6.5.23

x_n满足$x_n^n+x_n-1=0, 0<x_n<1$, 求$\lim_{n\to\infty} x_n$.

解. $y=x^n+x-1$则有$y'>0$, $y|_{x=0}=-1<0$, $y|_{x=1}=1>0$.
x_n是x^n+x-1的唯一零点. 由于
$$x_n^{n+1}+x_n-1=(x_n-1)(1-x_n)<0$$
及y的单调性, 知x_{n+1}在x_n与1之间, 故$\{x_n\}$单调有界. 反证$\{x_n\}$的极限$A=1$, 否则$0\le A<1$矛盾. □

解. $y^x+y-1=0$是隐函数, 确定$y=f(x)$, $x_n=f(n)$, 求导
$$y'=-y^x\cdot\frac{\ln y}{\left(1+\frac{x}{y}\cdot y^x\right)}$$
当$x\ge 1$时, $y'>0$, y单调增加, 以下同上. □

问题 6.5.24

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$都收敛, 则以下不成立的是?
A. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$收敛; B.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$收敛;
C. $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛; D. $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$发散.

问题 6.5.25

设$f(x,y)$与$\varphi(x,y)$均为可微函数, 且$\varphi_y'(x,y)\neq 0$. 已知(x_0,y_0)是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的一个极值点, 下列选项正确的是(D)
(A) 若$f_x'(x_0,y_0)=0$, 则$f_y'(x_0,y_0)=0$; (B) 若$f_x'(x_0,y_0)=0$, 则$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$;
(C) 若$f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则$f_y'(x_0,y_0)=0$; (D) 若$f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

问题 6.5.26

$$\frac{\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,\mathrm{d}t}{\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t}=\sqrt{2}$$

解. 用Beta函数. □

问题 6.5.27: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

计算$I=\int_{\pi/8}^{3\pi/8}\frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}\,\mathrm{d}x$.

问题 6.5.28: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设$\varphi(x)$在$(-\infty,0]$可导, 且函数
$$f(x)=\begin{cases}\int_x^0\frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t, & x<0,\\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(2x)^n+x^{2n}}, & x\ge 0.\end{cases}$$
在点$x=0$可导, 求$\varphi(0)$, $\varphi'(0^-)$, 并讨论$f'(x)$的存在性.

问题 6.5.29: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

已知函数$f(x)$与$g(x)$满足$f'(x)=g(x)$, $g'(x)=2\mathrm{e}^x-f(x)$, 且$f(0)=0$, 求
$$\int_0^{\pi}\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x.$$

问题 6.5.30: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设y_1和y_2是方程$y''+p(x)y'+2e^x y=0$的两个线性无关解, 而且$y_2=(y_1)^2$. 若有$p(0)>0$, 求$p(x)$及此方程的通解.

问题 6.5.31: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设$f(x)$在$[-\frac{1}{a},a]$$(a>0)$上非负可积, 且$\int_{-1/a}^{a}xf(x)\,\mathrm{d}x=0$. 求证:

$$\int_{-1/a}^{a}x^2f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_{-1/a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

解. 分$0<a\le 1$和$a>1$两种情况讨论. □

问题 6.5.32: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设在点$x=0$的某邻域U内, $f(x)$可展成泰勒级数, 且对任意正整数n, 皆有

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}.$$

证明: 在U内, 恒有$f(x)=x^2$.

问题 6.5.33: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x^2+y^2}$, 证明: $\lim_{x\to+\infty}y(x)$和$\lim_{x\to-\infty}y(x)$都存在.

解. 用单调有界定理. □

问题 6.5.34: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$的收敛域与和函数.

问题 6.5.35: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{(n+i+1)^2}+\frac{1}{(n+i+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+i+i)^2}\right).$$

解. 用重积分得$\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$. □

问题 6.5.36

设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\subset C_{[a,b]}$, 且$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$, 则$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 因$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in[a,b]$, 所以$f\in C_{[a,b]}$且$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当$n>N$时, $\forall x\in[a,b]$均有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. $f(x),f_n(x)$连续必可积, 有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|<(b-a)\varepsilon.$$

其实当$a\le x\le b$时, 有$\left|\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|<(b-a)\varepsilon$对$x$一致成立, 所以$\int_a^x f_n(x)\,\mathrm{d}t\rightrightarrows\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. □

问题 6.5.37

$f_n(x)$在$[a,b]$上都有连续导数, 且$f_n(x)\to f(x)$, $f_n'(x)\rightrightarrows g(x)$, 则$f'(x)=g(x)$, 即$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)$.

解. 因$f_n' \rightrightarrows g$, 所以g连续, 可积, 由6.5.36, $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t = f(x)-f(a)$, 所以$f'(x)=g(x)$. 其实$f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$在$[a,b]$上也一致收敛.

若6.5.36和$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$的前$n$项部分和, 就有函数项级数的相应命题.

(1). 若$[a,b]$上$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$中每项$u_k$均连续, 且$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \rightrightarrows f(x)$, 则$f(x)\in C_{[a,b]}$且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2). 若$[a,b]$上, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$的每项都有连续导数$u_k'(x)$且$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \rightrightarrows g(x)$, 而$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \to f(x)$. 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x).$$

□

问题 6.5.38

举反例:

(1) 积分的极限不等于极限的积分的函数列.

(2) 导数的极限不等于极限的导数的函数列.

解. (1). 在$[0,1]$上极限函数为0, 但f_n在$[0,\frac{1}{n}]$上面积为1的脉冲函数.

(2). $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$, $x\in[-1,1]$. □

问题 6.5.39: http://math.stackexchange.com/questions/2143014

证明: 对于任意的$\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|\frac{\alpha-n}{\alpha+n}\right|$发散.

问题 6.5.40: http://math.stackexchange.com/questions/472007

判断$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{\sin n}{n+10\sin n}$的敛散性.

解. 其实, 若$f(n)$是有界函数, 且级数$\sum_{n=1}^{n}\frac{f(n)}{n}$收敛, a是使任意的n都有$n+af(n)\neq 0$, 则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n+af(n)}$.

这是因为

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{f(n)}{n+af(n)} = \sum_{n=1}^{m}\frac{f(n)}{n} + \sum_{n=1}^{m}\frac{-af^2(n)}{n(n+af(n))}$$

后一个和式用比较判别法. □

问题 6.5.41: http://math.stackexchange.com/questions/273559

判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n)}{n}$的敛散性.

解. 比较判别法, $[k\pi+\frac{\pi}{6},(k+1)\pi-\frac{\pi}{6}]$中总有至少一个整数.

或用$\sum\frac{\sin^2(n)}{n}=\sum\frac{1}{2n}-\sum\frac{\cos(2n)}{2n}$, 前者发散, 后者用Dirichlet判别法. □

问题 6.5.42: http://math.stackexchange.com/questions/991652

证明$\int_0^1\left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right|\mathrm{d}x$发散.

解. 变量替换, 积分化为$\int_1^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$, 然后在子区间$(k\pi,(k+1)\pi)$上求下界. □

问题 6.5.43: http://math.stackexchange.com/questions/620449

证明: 求$p \in \mathbb{R}$, 使积分$\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$发散.

解. $p \geq -1$. □

问题 6.5.44: http://math.stackexchange.com/questions/596511

计算
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

解. 用Frullani积分. 结果为log2. 或用重积分: $\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x} = x\int_1^2 \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. 这里给出Frullani积分证明过程的做法.

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{2a}^{2b} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\int_a^b - \int_{2a}^{2b}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\int_a^{2a} - \int_b^{2b}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \to \log(2)-0, \quad a\to 0, b\to\infty\end{aligned}$$

上式最后一步用$\mathrm{e}^{-2c}\log(2) \leq \int_c^{2c}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \leq \mathrm{e}^{-c}\log(2)$. □

问题 6.5.45: http://math.stackexchange.com/questions/590774

已知$a>b>0$, 求$\lim_{t\to 0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)$.

解. 注意到$\Gamma(t) = a^t\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-as}}{s^{1-t}}\,\mathrm{d}s$, 所以
$$\lim_{t\to 0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$$
然后用Frullani积分算得$\log\frac{a}{b}$. □

问题 6.5.46: http://math.stackexchange.com/questions/590774

已知$a>b>0$, 求$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$.

解. 可以用Frullani积分. 这里用含参积分求导的方法, 定义$I(t) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-tx}}{x}\,\mathrm{d}x$, 被积函数记为$f(x,t)$, 由$f(x,t)$和$f_t(x,t)$在定义域均连续, $I(t)$关于t收敛且$\int_0^\infty f_t(x,t)\,\mathrm{d}x$关于$t$一致收敛, 则满足积分号下求导条件, 所以$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{a}$, $I = -\log t$. □

解.
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^\infty \frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_\epsilon^\infty \frac{\exp(-ax)}{x}dx - \int_\epsilon^\infty \frac{\exp(-bx)}{x}dx\right] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{a\epsilon}^\infty \frac{\exp(-t)}{t}dt - \int_{b\epsilon}^\infty \frac{\exp(-t)}{t}dt\right] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{\exp(-t)}{t}dt = \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b \frac{\exp(-\epsilon u)}{u}du\end{aligned}$$
最后的被积函数一致收敛到$\frac{1}{u}$. □

解. 用Laplace变换, $F(s) = \int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 则
$$F(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}e^{-sx}dx \implies F'(s) = -\int_0^\infty (e^{-bx}-e^{-ax})e^{-sx}dx.$$
计算最后一个积分, 然后求积分并令$s\to 0$, 其中积分出来的积分常数用极限$\lim_{s\to\infty}F(s)=0$计算. □

问题 6.5.47: http://math.stackexchange.com/questions/164400

求$\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-xt}}{x}\,dx=\log t$, 其中$t>0$.

解. 让$u=e^{-x}$, 得

$$\int_0^1 \frac{u^{t-1}-1}{\log u}\,du=\int_0^1\int_1^t u^{s-1}\,ds\,du=\int_1^t\int_0^1 u^{s-1}\,du\,ds=\log t.$$

□

解. 同6.5.46的解法一. □

解. 用重积分求解, $I(t)=\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-xt}}{x}\,dx=\int_0^\infty\int_1^t e^{-xs}\,ds\,dx$. 这里验证积分次序可交换, 则

$$LHS=\int_1^t\int_0^\infty e^{-xs}\,dx\,ds=\ln t.$$

□

解. 用Laplace变换, $g(s)=L[f(x)]=L\left[\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\right]$, 则$-g'(s)=L[xf(x)]=\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}$. 所以$g(s)=\log\frac{s+b}{s+a}+c$, 由于$g(\infty)=0$, 所以$c=0$. 从而

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}e^{-sx}\,dx=\log\frac{s+b}{s+a}.$$

令$s=0$即可. □

解. 用Laplace变换, $L[1]=\int_0^\infty e^{-st}\,dt=\frac{1}{s}$, 则

$$LHS=\int_0^\infty\int_0^\infty (e^{-x}-e^{-xt})e^{-xs}\,ds\,dx=\int_0^\infty\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+t}\right)=\ln\frac{s+1}{s+t}\Big|_0^\infty=\ln t$$

□

问题 6.5.48

求积分

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left|\sin^2 x-a\right|\,dx.$$

解. 当$a\le 0$时, 设$a=-t$,

$$\begin{aligned}
I(a)&=\int_0^{\pi/2}\ln\left(t+\sin^2 x\right)dx\\
&=\int_0^{\pi/2}\left[\ln\left(\sin^2 x\right)+\int_0^t\frac{1}{s+\sin^2 x}\,ds\right]dx\\
&=-\pi\ln 2+\int_0^t\int_0^{\pi/2}\frac{1}{s+\sin^2 x}\,dx\,ds\\
&=-\pi\ln 2+\frac{\pi}{2}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{s(1+s)}}\,ds\\
&=-\pi\ln 2+\pi\operatorname{arctanh}\sqrt{\frac{-a}{1-a}}.
\end{aligned}$$

当$a\ge 1$时, 取$a=t+1$, 同上面的解法

$$\begin{aligned}
I(a)&=\int_0^{\pi/2}\ln\left(t+\cos^2 x\right)dx\\
&=\int_0^{\pi/2}\left[\ln\cos^2 x+\int_0^t\frac{1}{s+\cos^2 x}\,ds\right]dx\\
&=-\pi\ln 2+\pi\cdot\operatorname{arctanh}\sqrt{\frac{t}{1+t}}=-\pi\ln 2+\pi\cdot\operatorname{arctanh}\sqrt{\frac{a-1}{a}}.
\end{aligned}$$

当$0<a<1$时,

$$I(a)=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\ln\left|a-\sin^2 x\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\ln\left|\frac{1-2a}{2}-\frac{\cos 2x}{2}\right|\mathrm{d}x.$$

令$\cos 2\alpha=2a-1$, 则

$$I(a)=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\ln\left|\frac{\cos 2\alpha+\cos 2x}{2}\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\ln\left|\cos(x+\alpha)\cos(x-\alpha)\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\ln|\cos x|\,\mathrm{d}x=-\pi\ln 2.$$

□

问题 6.5.49: http://tieba.baidu.com/p/2686576086

设$f(x)$在实轴$\mathbb{R}$上有二阶导数, 且满足方程

$$2f(x)+f''(x)=-xf'(x).$$

求证$f(x)$和$f'(x)$都在$\mathbb{R}$上有界.

解. 构造$L=f^2+\frac{1}{2}f'^2$, 研究L'. 方程可改成$f''(x)+\frac{x}{2}f'(x)+f(x)=0$. □

问题 6.5.50: http://tieba.baidu.com/p/3846349760

证明: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

解. 由于$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 且$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调增加, 则$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$, 于是$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, 从而$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)>\ln n$, 即得. □

问题 6.5.51: http://tieba.baidu.com/p/4931607145

设$f(x)$在$[a,b]$上可导, $f'(x)$在$[a,b]$上可积. 令

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\cdot\frac{b-a}{n}\right)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

试证

$$\lim_{n\to\infty}nA_n=\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)].$$

解. 令$x_i=a+i\cdot\frac{b-a}{n}$, 则

$$\begin{aligned}nA_n&=n\left[\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n}-\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\&=n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x\\&=n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

在$[x_{i-1},x_i]$上, (x_i-x)保号, 而$g(x)=\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}$连续(补充定义$g(x_i)=f'(x_i)$). 由积分第一中值定理知, 存在$\eta_i\in(x_{i-1},x_i)$, 使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x=g(\eta_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x.$$

再由Lagrange中值定理, 以上$g(\eta_i)=\frac{f(x_i)-f(\eta_i)}{\eta_i-x}=f'(\xi_i)$, $(\xi_i\in(\eta_i,x_i)\subset(x_{i-1},x_i))$. 于是

$$\begin{aligned}nA_n&=n\sum_{i=1}^{n}f'(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x=\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})^2\\&=\frac{n}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n}f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\\&\to\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)),\text{当}n\to\infty.\end{aligned}$$

□

问题 6.5.52

$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{64}\sqrt[4]{2}\pi.$

问题 6.5.53

求证:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8}$$

解. 让$f(y) = \int_0^\infty \frac{\sin^3 yx}{x^3}\,\mathrm{d}x$, 判断积分号下可求导, 有

$$f''(y) = \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{-\sin yx + 3\sin 3yx}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}\operatorname{sign} y.$$

□

解. 用$\sum_{k=1}^\infty \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2}$, 由

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\sin^3(kx)}{k^3} = \frac{9\sin(3kx) - 3\sin(kx)}{4k}.$$

则

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{9\sin(3kx) - 3\sin(kx)}{4k} = \frac{3\pi}{4} - 3x.$$

积分后得:

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\sin^3(kx)}{k^3} = \frac{3\pi}{8}x^2 - \frac{1}{2}x^3.$$

取$x = \frac{1}{n}$后两边同乘n^2得

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n} = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2n}.$$

而广义 Riemann 和显示

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^\infty \frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n} = \int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

广义 Riemann 和成立的条件是 $\sum_{k=0}^\infty \sup_{x\in[k,k+1]}|f'(x)| < \infty$? 这不等式蕴含 $\int_0^\infty |f'|\,\mathrm{d}x < +\infty$, $f' \in L^1(0,\infty)$. □

解. 用 Parseval 定理

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(s)G(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中$F(s) = \mathscr{F}[f]$, $G(s) = \mathscr{F}[g]$, $\mathscr{F}[f] = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\,\mathrm{d}x$. 若$f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 则

$$F(s) = \begin{cases} \pi, & |s| \le 1 \\ 0, & |s| > 1, \end{cases}$$

若$g(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$, 则

$$G(s) = \begin{cases} \pi\left(1 - \frac{|s|}{2}\right), |s| \le 2 \\ 0, |s| > 2, \end{cases}$$

所以$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^1 \pi^2\left(1 - \frac{|s|}{2}\right)\mathrm{d}s = \frac{3\pi}{4}$. 即$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8}$. □

解. 用 Laplace 变换 $F(s) = \mathscr{L}[f] = \int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 对于$f(x) = \frac{\sin^3 x}{x^3}$有

$$F(s) = \frac{\pi s^2}{8} + \frac{3\pi}{8} - \frac{3(s^2-1)}{8}\arctan s + \frac{s^2-9}{8}\arctan\frac{s}{3} + \frac{3s}{8}\ln\frac{s^2+1}{s^2+9}.$$

□

解. 用 Laplace 恒等式

$$\int_0^\infty F(u)g(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty f(u)G(u)\,\mathrm{d}u, F(s)=\mathscr{L}[f(t)], G(s)=\mathscr{L}[g(t)].$$

让 $G(u)=\frac{1}{u^3}$ 得 $g(u)=\frac{u^2}{2}$, 让 $f(u)=\sin^3 u$ 得 $F(u)=\frac{6}{(u^2+1)(u^2+9)}$, 则

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{6}{2}\int_0^\infty \frac{u^2}{(u^2+1)(u^2+9)}\,\mathrm{d}u = \frac{3\pi}{8}.$$

□

解. 留数定理, 由 $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin(3x)}{4}$ 得 $\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4x^3}\mathrm{d}x$. 围道 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$, $\gamma_1=[r,R]$, γ_2 是以 $(0,0)$ 为心 R 为径的上半圆, $\gamma_3=[-R,-r]$, γ_4 为以 $(0,0)$ 为心 r 为径的上半圆, γ 取逆时针方向为正方向. 取 $f(z)=\frac{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}z}}{z^3}$, 则 f 在 γ 内解析, 由 Cauchy-Goursat 公式

$$\oint_\gamma f(z)=0, \tag{6.1}$$

并用 Laurent 展开或留数定理得

$$\int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z = -\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}, \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}}\int_{\gamma_1\cup\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x.$$

代入6.1即得. □

问题 6.5.54

设函数$f:(a,b)\to\mathbb{R}$连续可微, 又设对于任意的$x,y\in(a,b)$, 存在唯一的$z\in(a,b)$使得$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(z)$. 证明: $f(x)$严格凸或严格凹.

解. 反证法, 构造λ的函数

$$\Lambda(\lambda) = f(\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta) - \lambda f(\alpha) - (1-\lambda)f(\beta), \quad \lambda\in(0,1)$$

若结论不真, 则存在$\alpha,\beta\in(a,b)$使$\Lambda(\lambda)$在$(0,1)$的某两点异号, 由于f连续, 所以存在$\lambda_0\in(0,1)$使$\Lambda(\lambda_0)=0$.

设$\gamma=\lambda_0\alpha+(1-\lambda_0)\beta$, 则$\gamma\in(\alpha,\beta)\subset(a,b)$且 $\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$. 再由拉格朗日中值定理得出矛盾. □

问题 6.5.55

设函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上无限可微, 且:

a) 存在$L>0$, 使得对于任意的$x\in\mathbb{R}$及$n\in\mathbb{N}$有$|f^{(n)}(x)|\le L$.

b) $f\left(\frac{1}{n}\right)=0$, 对所有$n=1,2,3\cdots$.

求证: $f(x)\equiv 0$.

解. 由f在$\mathbb{R}$上无限次可微, 且由a)知f有在$x=0$处的Taylor展开

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots.$$

设N是使$f^{(N)}(0)\neq 0$的最小者, 取正整数$M>1$使$|f^{(N)}(0)|>\frac{L}{M-1}$. 则

$$\begin{aligned}
0=\left|f\left(\frac{1}{M}\right)\right| &= \left|f^{(N)}(0)\frac{x^N}{N!}+f^{(N+1)}(0)\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}+\cdots\right| \\
&\ge |f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-L\left(\frac{1}{(N+1)!M^{N+1}}+\frac{1}{(N+2)!M^{N+2}}+\cdots\right) \\
&\ge |f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-L\left(\frac{1}{N!M^{N+1}}+\frac{1}{N!M^{N+2}}+\cdots\right) \\
&= |f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-\frac{L}{N!}\frac{1}{M^{N+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{M}} \\
&= \left(|f^{(N)}(0)|-\frac{L}{M-1}\right)\frac{1}{N!M^N}>0.
\end{aligned}$$

这导致矛盾, 即所有$f^{(n)}(0)=0$, $f(x)\equiv 0$. □

Chapter 7

数学分析 - 梅加强

梅加强的大名在我上本科的时候就已经听说了, 现在去读他写的书到第二章的时候突然感受到他被奉为巨佬的原因, 不同于国内大多数数学分析教科书惯有的教学顺序, 这本书先讲掉了定积分再引进的导数, 不得不说国内这么干的, 这是我见过的第一本(虽然我也没读过几本国内大学自行出版的教材, 好在北大, 中科大的等等都大概翻过). 写这一小段文字只是突发感慨, 因为在读此之前确实也见过别的教科书这么干, 比如柯朗的《微积分和数学分析引论》也是先引入的积分再引入的导数, 这种与原来按部就班的学习形成对比, 微分和积分是实数完备性发展出来的两条支线, 最后在微积分基本定理它们融合了.

7.1 NULL

7.2 数列极限

定义 7.2.1

给定序列$\{a_n\}$, 实数$A \in \mathbb{R}$, 如果

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), s.t. \forall n > N, |a_n - A| < \epsilon,$$

就称$a_n \to A$, $n \to \infty$. 反面表述序列$a_n \not\to A$:

$$\exists \epsilon > 0, s.t. \forall N = N(\epsilon), \exists n > N, |a_n - A| \geq \epsilon.$$

如果

$$\forall A > 0, \exists N, s.t. \forall n > N, a_n > A,$$

则称$a_n \to +\infty$. 如果

$$\forall A < 0, \exists N, s.t. \forall n > N, a_n < A,$$

则称$a_n \to -\infty$. 如果

$$\forall A > 0, \exists N, s.t. \forall n > N, |a_n| > A,$$

则称$a_n \to \infty$.

性质 (极限的性质)　1. 序列极限如果存在, 必然唯一.

2. 序列极限收敛于有限实数, 必然有界. (这个性质可以弱化, 比如允许序列前几项中有∞出现, 这时本条的序列极限性质可以表述为, 从某项开始序列有界)

3. 保序性, 当$a_n \to A$, $b_n \to B$, $a_n \geq b_n$, 则$A \geq B$. 不等式$a_n \geq b_n$可以换成$a_n > b_n$.

7.2.1 求极限的方法

求极限没有通用方法, 不要有能学到通用方法的任何期待. 我们所能做的只有从最简单的方法到最复杂的方法进行逐个尝试.

$\epsilon - N$法

也就是定义法, 这个方法要求事先知道所求极限为何, 然后套用这一框架. 方法比较基本, 不再举例.

夹逼原理

这也是一个求解框架, 找到满足$a_n \le b_n \le c_n$, 且$a_n \to A$, $c_n \to A$的上下界来求解b_n的极限.

单调有界原理

主要用于求解抽象型极限问题.

例**2.2.3** 设$a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$, $n \ge 1$, 求a_n的极限.

求解递推公式的极限问题常用不动点法先找到极限是什么. 也就是求解$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$, 得到$x = \pm 1$.

注意到$a_1 > 0$, 所以数列的每一项$a_n > 0$. 并计算

$$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2a_n}(a_n - 1)^2 \ge 0 \Longrightarrow a_{n+1} \ge 1, \quad \forall n \ge 1.$$

这表明当$n \ge 2$时, $\frac{1}{a_n} \le 1 \le a_n$, 所以

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \le a_n.$$

序列$\{a_n\}$从第二项起单调递减, 有下界1. 递推方程的正不动点只有$x = 1$, 所以$a_n \to 1$.

事实上, 对于递推公式型极限问题也可以尝试求解它的通项公式, 比如

$$\frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1} + 1} = \left(\frac{a_n - 1}{a_n + 1}\right)^2.$$

重要极限

e相关

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \forall n \ge 1.$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 \le \left(\frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

$$\left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n = \left(\frac{n^2}{n^2 - 1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2 - 1} > 1 + \frac{1}{n} \Longrightarrow \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Bernoulli不等式

$$x \ge -1 \Longrightarrow (1 + x)^n \ge 1 + nx,$$

等号当且仅当$x = 0$取到. 推广形式

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \ge 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

其中$x_k \ge 0$. 注意, 这里给出的两种Bernoulli不等式的前提条件不同, 后者不能是$x_k \ge -1$, 因为$(1 - x)(1 + x) = 1 - x^2 \le 1$.

Euler常数

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

例**2.2.7** 求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right).$$

1. 单调上升有上界.
2. $H_{2n} - H_n = \ln 2n - \ln n + o(1)$.
3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

4. Euler求和公式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \ln\frac{2n}{n+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n}\right) - \int_1^n \frac{\langle x\rangle}{(n+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Stirling公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad \theta_n \in (0,1).$$

上下极限

这种方法也常用于求解抽象型序列极限问题.

序列收敛的一个充要条件是, 序列的上下极限相等.

定义

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\ge n} a_k\right), \quad \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\ge n} a_k\right)$$

命题**2.2.4** 1. 存在N_0, 当$n > N_0$时, $a_n \ge b_n$, 则

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \ge \liminf_{n\to\infty} b_n, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

2.

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

例**2.2.12** 设序列(a_n), $a_n \ge 0$, 满足$a_{m+n} \le a_m + a_n$, $\forall m, n \ge 1$. 证明$\left(\frac{a_n}{n}\right)$收敛.

证明: 设$n > m$, 则$n = mk + l$, 其中$0 \le l \le m-1$.

对于任意固定的m, 有

$$a_n = a_{mk+l} \le k a_m + a_l \Longrightarrow \frac{a_n}{n} \le \frac{k a_m}{km+l} + \frac{a_l}{n}.$$

不等式两边同时取上极限

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \le \frac{a_m}{m}.$$

所以

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \le \liminf_{m\to\infty} \frac{a_m}{m}.$$

Cauchy收敛准则

定义 序列(a_n), 如果$\forall \epsilon > 0$, $\exists N = N(\epsilon)$, s.t. $\forall m, n > N$, $|a_m - a_n| < \epsilon$, 则称(a_n)为Cauchy列.

其它表述: $\forall \epsilon > 0$, $\exists N = N(\epsilon)$, s.t. $\forall n > N$, $\forall p > 0$, $\left|a_{n+p} - a_n\right| < \epsilon$.

反面描述: $\exists \epsilon_0 > 0$, s.t. $\forall N$, $\exists m_0, n_0 > N$, 使得$\left|a_{m_0} - a_{n_0}\right| \ge \epsilon_0$.

Cauchy列均有解. (这里仍然可以允许序列的前几项可以取∞, 此时Cauchy除了开始的有限项外是有界序列).

序列(a_n)收敛当且仅当(a_n)是Cauchy列.

习题**2** 设序列(a_n)满足

$$\lim_{n\to\infty}\left|a_{n+p} - a_n\right| = 0, \quad \forall p \ge 1.$$

问(a_n)是否是Cauchy列?

$a_n = H_n$就是反例.

Stolz公式

定理**2.4.2** 设序列(x_n), (y_n), 其中y_n单调上升趋向∞, 若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A.$$

注: 和洛必达法则的情况一样, 当

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$$

不存在时,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$$

仍可能存在.

定理**2.4.3** 设(y_n)单调下降趋向于0, $(x_n)\to 0$, 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=A,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=A.$$

注 条件$(x_n)\to 0$是必要的, 比如$x_n\equiv C$是一个矛盾.

例**2.1.15** 设$\lim_{n\to\infty}a_n=A$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=A.$$

这个例子有多种证法, 使用Stolz公式只需一步.

例**2.4.3** 设$x_1\in(0,1)$, $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$, $\forall n\ge 1$. 证明$nx_n\to 1$, $n\to\infty$.

证明**:** 单调收敛证明$x_{n+1}<x_n$. 假设极限为x, 则$x=x(1-x)$, 解的$x=0$. 所以$x_n\to 0$, $n\to\infty$.
从递推公式得到

$$\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}=\frac{1}{1-x_n}\to 1,\quad n\to\infty.$$

由Stolz公式

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^{-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{x_n^{-1}-x_{n-1}^{-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{1-x_{n-1}}}=1.$$

不用**Stolz**公式的证法 和上面一样, x_n单调收敛到0, 且有$x_{n+1}^{-1}-x_n^{-1}=\frac{1}{1-x_n}\to 1$, $n\to\infty$. 则

$$\frac{1}{nx_n}=\frac{x_n^{-1}}{n}=\frac{\left(x_n^{-1}-x_{n-1}^{-1}\right)+\left(x_{n-1}^{-1}-x_{n-2}^{-1}\right)+\cdots+\left(x_2^{-1}-x_1^{-1}\right)+x_1^{-1}}{n}\to\lim_{n\to\infty}\left(x_n^{-1}-x_{n-1}^{-1}\right)=1.$$

上面最后一步用到了例2.1.15.

习题**2** 设 $\lim_{n\to\infty}n(a_n-A)=B, k$ 为正整数, 则

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_1+2^ka_2+\cdots+n^ka_n}{n^{k+1}}-\frac{A}{k+1}\right)=\frac{B}{k}+\frac{A}{2}.$$

pf.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)(a_1+\cdots+n^k a_n)-n^{k+1}A}{(k+1)n^k} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)\left((n+1)^k a_{n+1}\right)-\left((n+1)^{k+1}-n^{k+1}\right)A}{(k+1)\left((n+1)^k-n^k\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)\left[n^k+\binom{k}{1}n^{k-1}+o\left(n^{k-1}\right)\right]a_{n+1}-\left(\binom{k+1}{1}n^k+\binom{k+1}{2}n^{k-1}+o(n^{k-1})\right)A}{(k+1)\left(\binom{k}{1}n^{k-1}+o(n^{k-1})\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)\left[n+\binom{k}{1}+o(1)\right]a_{n+1}-\left(\binom{k+1}{1}n+\binom{k+1}{2}+o(1)\right)A}{(k+1)\left(\binom{k}{1}+o(1)\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\boldsymbol{(k+1)}\,(n+\boldsymbol{k}+o(1))\,\boldsymbol{a_{n+1}}-\left((k+1)n+\frac{k(k+1)}{2}+o(1)\right)A}{(k+1)\,(k+o(1))} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\,(a_{n+1}-A)}{k+o(1)}-\frac{\frac{k(k+1)}{2}A}{(k+1)(k+o(1))}+\frac{\boldsymbol{k(k+1)a_{n+1}}+o(1)\cdot(a_{n+1}-A)}{(k+1)(k+o(1))}\right) \\
&= \frac{B}{k}-\frac{A}{2}+A
\end{aligned}$$

其中

$$\lim_{n\to\infty}n(a_n-A)=B\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=A+\lim_{n\to\infty}(a_n-A)=A+\lim_{n\to\infty}\frac{n(a_n-A)}{n}=A+\lim_{n\to\infty}\frac{B}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{n(a_n-A)-B}{n}=A+0+0$$

习题**6** 设 $a_1=1, a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2a_n}$, 证明 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=1$, (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-n}{\ln n}=\frac{1}{4}$.

pf. (2) 由Stolz公式

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-n}{\ln n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2-a_n^2-1}{\ln(n+1)-\ln n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2-a_n^2-1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}
\end{aligned}$$

这启发我们去简化$a_{n+1}^2-a_n^2$项, 由递推公式

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2a_n}\Longrightarrow a_{n+1}^2-a_n^2=\frac{a_{n+1}+a_n}{2a_n}=\frac{a_n+\frac{1}{2a_n}+a_n}{2a_n}=1+\frac{1}{4a_n^2}\Longrightarrow a_{n+1}^2-a_n^2-1=\frac{1}{4a_n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2-a_n^2-1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4a_n^2}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n^2}=\frac{1}{4}.$$

习题**8** 设 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+2}-a_n)=A$, 证明 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{A}{2}$, (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{n}=0$.

pf. (1) 用stolz公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}-a_n}{(n+2)-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}-a_n}{2}=\frac{A}{2}.$$

(2) 用stolz公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+3}-a_{n+1}-(a_{n+2}-a_n)}{(n+2)-n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+3}-a_{n+1}}{2}-\frac{a_{n+2}-a_n}{2}\right)=\frac{A}{2}-\frac{A}{2}=0.$$

若y_n单调上升趋于无穷, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+k}-x_n}{y_{n+k}-y_n}=A,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=A.$$

习题**9** 设$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=A$, 则
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=A.$$

Stolz公式不是万能的, 比如

习题**15** 设
$$\lim_{n\to\infty}a_n=A,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=B,$$
则
$$\frac{1}{n}(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)=AB.$$

证明**:** 设$a_n=A+\alpha_n$, $b_n=B+\beta_n$, 则问题不妨在$A=B=0$时证明即可. 其实
$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(AB+A\beta_{n+1-k}+B\alpha_k+\alpha_k\beta_{n+1-k}\right)\\&=AB+\frac{A}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_k+\frac{B}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_{n+1-k}\\&=AB+A\cdot o(1)+B\cdot o(1)+M\cdot o(1)=AB+o(1).\end{aligned}$$
上式最后用到收敛序列有界的结论.

7.3 连续函数

7.3.1 函数的极限

设$x_0\in\mathbb{R}$, $\delta>0$, $(x_0-\delta,x_0+\delta)$称为x_0的开邻域.

$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$称为$x_0$的去心开邻域.

定义**3.1.1** 设$f(x)$定义在x_0的某个去心开邻域上, 若$\exists A\in\mathbb{R}$, s.t. $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\epsilon,x_0)\in(0,\delta_0)$, 当$0<|x-x_0|<\delta$时, 有
$$\left|f(x)-A\right|<\epsilon.$$
则称$f(x)$在x_0处有极限A, 记为
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,\ \text{or}\ f(x)\to A,\ x\to x_0.$$

注**:** 去心邻域说明$f(x)$在$x=x_0$处可能没有定义.

可以类似的定义左右极限.

命题**3.1.1** f在x_0处有极限的充要条件是f在x_0的左右极限存在且相等.

命题**3.1.2** (夹逼原理) 设在x_0的一个空心领域内有
$$f_1(x)\le f(x)\le f_2(x).$$
若f_1, f_2在x_0处的极限存在且等于A, 则$f(x)$在x_0处极限为A.

命题**3.1.3** (极限唯一性) 函数极限存在必然唯一.

$\epsilon-\delta$语言是证明函数极限的最简单框架, 其难点仅在于对不等式的掌握情况, 比如重要极限
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$
对应不等式
$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

同样类似地给出涉及无穷大与无穷远时的函数极限的定义.

习题**12** 设 f, g 为两个周期函数, 如果 $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$, 则 $f=g$.

注: f,g的周期比可能是无理数, 所以$f-g$可能不是周期函数.

pf. 设f的周期为T, g的周期为S. 则

$$\begin{aligned}
f(x)-g(x) &= f(x+nT)-g(x+nS)\\
&= f(x+nT)-g(x+nT)\\
&\quad + g(x+nT+nS)-f(x+nS+nT)\\
&\quad + f(x+nS)-g(x+nS)\\
&= \lim_{n\to\infty} f(x+nT)-g(x+nT)\\
&\quad + \lim_{n\to\infty} g(x+nT+nS)-f(x+nS+nT)\\
&\quad + \lim_{n\to\infty} f(x+nS)-g(x+nS)\\
&= 0+0+0.
\end{aligned}$$

习题**13** 设 $\lim_{x\to0} f(x)=0, \lim_{x\to0}\frac{1}{x}[f(2x)-f(x)]=0$, 证明 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$.

pf. $\forall\epsilon>0, \exists X>0$, s.t. $\forall x>X$, $\left|f(x)\right|<\epsilon$, 且

$$\left|f(2x)-f(x)\right|\le\epsilon x.$$

所以

$$\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|\le\epsilon x.$$

令$n\to\infty$即可.

7.3.2 函数极限的性质

定理3.1.5 (Heine, 归结原则**)** 设f定义在x_0的某个去心领域上, f在x_0处极限为A的充要条件是$\forall x_n\to x_0$, $(n\to\infty)$, 且$x_n\neq x_0$, $(\forall n)$, 均有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

证明**:** $\Longrightarrow$: 是容易的; $\Longleftarrow$: 用反证法, 则

$$\exists\epsilon_0>0,\ s.t.\ \forall\delta>0,\ \exists x_\delta,\ s.t.\ 0<|x_\delta-x_0|<\delta,$$

但$\left|f(x_\delta)-A\right|\ge\epsilon_0$. 取$\delta=\frac{1}{n}$, 构造子列$(x_n)\to x_0$, 但$\left|f(x_n)-A\right|\ge\epsilon_0$. 矛盾.

Heine定理可改述为: $f(x)$在x_0处有极限当且仅当, $\forall x_n\to x_0$, $(x_n\neq x_0)$, $\lim_{n\to\infty}f(x_n)$存在.

定理3.1.6 (Cauchy准则**)** 设f在x_0的空心领域上有定义, 则f在x_0处有极限, iff, $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$, s.t. 当$0<\left|x'-x_0\right|<\delta$, $0<\left|x''-x_0\right|<\delta$时, 有

$$\left|f(x')-f(x'')\right|<\epsilon.$$

注**:** 对于无穷远处极限有限时, Cauchy准则仍然成立.

给出Cauchy准则的否定表述.

定理3.1.7 (单调有界原理) 设f定义在$(x_0-\delta,x_0)$上, 若f单调上升有上界, 或f单调下降有下界, 则f在x_0有左极限.

定理3.1.8 (1). (局部有界原理) 若f在x_0处有有限极限, 则f在x_0的某空心领域内有界.

(2). (保序性)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim_{x\to x_0} g(x)=B,\ f(x)\ge g(x),\Longrightarrow A\ge B.$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim_{x\to x_0} g(x)=B,\ A>B,\Longrightarrow \exists U_{x_0}^\circ\ s.t.\ f(x)>g(x),\ \forall x\in U_{x_0}^\circ.$$

(3). (四则运算)

定理3.1.9 (复合函数极限) 设$f(y)\to A$, $y\to y_0$; $g(x)\to y_0$, $x\to x_0$, 且$\exists U_{x_0}^{\circ}$, s.t. $\forall x\in U_{x_0}^{\circ}$, $g(x)\neq y_0$, 则$f(g(x))\to A$, $x\to x_0$.

这个定理说明极限定义中去心领域的重要性, 定理中$y_0\notin g(U_{x_0}^{\circ})$不可以弱化为: 存在收敛于$x_0$的序列$(x_n)$, 使得$g(x_n)\neq y_0, \forall n$. 比如

$$f(y)=\begin{cases}1, & y\neq 0,\\ 0, & y=0,\end{cases}\quad g(x)\equiv 0,\ y_0=0.$$

当f在y_0处连续时, 这个去心领域的条件又可以去掉, 这说明研究连续函数是有价值的.

7.3.3 无穷小量与无穷大量的阶

定义3.2.1 (无穷小量与无穷大量) 若函数f在x_0处的极限是0, 则称f在$x\to x_0$时为无穷小量, 记为$f(x)=o(1)$, $(x\to x_0)$; 若$x\to x_0$时, $|f|\to+\infty$, 则称f在$x\to x_0$时为无穷大量.

在无穷远处也可以定义无穷小量和无穷大量, 数列也可以定义无穷小量和无穷大量.

定理3.2.1 (等价代换) 设$x\to x_0$时, $f\sim f_1$, $g\sim g_1$, 若$\frac{f_1}{g_1}$在x_0处有极限, 则$\frac{f}{g}$在x_0处有极限, 且极限相等.

几个常用的等价代换:

$$\tan x\sim\sin x\sim x\sim e^x-1\sim\ln(1+x).$$

无穷小量的性质: 习题4. 设$f(x)=o(1)$, $(x\to x_0)$, 证明, 当$x\to x_0$时, 有

(1) $o(f(x))+o(f(x))=o(f(x))$.

(2) $o(cf(x))=o(f(x))$, 其中c是常数.

(3) $g(x)\cdot o(f(x))=o(f(x)g(x))$, 其中$g(x)$是有界函数.

(4) $[o(f(x))]^k=o\left(f^k(x)\right)$.

7.3.4 连续函数

用来刻画连续变化的量

定义3.3.1 (连续性) 若f在x_0的某领域上有定义, 且f在x_0处的极限是$f(x_0)$, 则称f在点x_0处连续, x_0称为f的连续点. 类似地可以定义左右连续. 在定义域上每一点都连续的函数称为连续函数.

f在x_0处下半连续: $\forall\epsilon>0, \exists\delta>0$, 当$|x-x_0|<\delta$时, 总有$f(x)>f(x_0)-\epsilon$.

f在x_0处上半连续: $\forall\epsilon>0, \exists\delta>0$, 当$|x-x_0|<\delta$时, 总有$f(x)<f(x_0)+\epsilon$.

连续函数的基本性质: (1). 保持四则运算;

(2). 若f,g连续, 则$\max\{f,g\}$和$\min\{f,g\}$均连续.

定理3.3.2 (复合函数连续性) 设f在y_0处连续, $g(x)\to y_0$, $x\to x_0$, 则

$$\lim_{x\to x_0}f(g(x))=f\left(\lim_{x\to x_0}g(x)\right)=f(y_0).$$

当g在x_0处连续时, $f(g(x))$在x_0处连续.

定义3.3.2 设x_0是$f(x)$的间断点, 如果$f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$均存在且有限, 则称x_0是第一类间断点, 否则, 称为第二类间断点. 按照左右极限不相等和相等来区分跳跃间断点和可去间断点.

命题3.3.3 设$f(x)$在$[a,b]$上单调, $x_0\in(a,b)$是$f(x)$的间断点, 则x_0是跳跃间断点.

命题3.3.4 设$f(x)$定义在区间I上的单调函数, 则$f(x)$的间断点至多可数.

证明: 间断点x与开区间$\left(f(x_0-0),f(x_0+0)\right)$一一对应且至多可数.

命题3.3.5 若$f(x)$定义在区间I上严格单调, 则$f(x)$连续当且仅当$f(I)$也是区间.

证明: $\Longrightarrow$: 用介值定理. $\Longleftarrow$: 反证法, 则有x_0使得$\left(f(x_0-0),f(x_0+0)\right)$不在区间$f(I)$内, 矛盾.

推论3.3.6 定义在区间I上的严格单调连续函数$f(x)$一定可逆, 且其逆严格单调连续.

7.3.5 闭区间上连续函数的性质

依赖实数系的基本性质

定理3.4.1 (有界性定理) 设$f \in C[a,b]$, 则f在$[a,b]$上有界.

证法一: 反证法, 取$\left|f(x_n)\right| \geq n$, 由聚点定理$\Longrightarrow x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$, f连续使得$f(x_{n_k}) \to f(x_0)$有界, 矛盾.

证法二: 连续点x处有领域$U_x(\delta_x)$, 使得其上$\left|f - f(x)\right| \leq 1$, 这样的$(U_x)$形成$[a,b]$的覆盖, 用有限覆盖定理.

定理3.4.2 (最值定理) 设$f(x) \in C[a,b]$, 则$f(x)$在$[a,b]$上取到最值.

证法一: f有界, $[a,b]$闭, 所以逼近上确界的点列$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$, 再由f连续得到最值点.

证法二: 反证法, 设$f < M := \sup f$, 构造$F(y) = \frac{1}{M-f(y)} \in C[a,b]$, 同样有界$F(y) < K$, $K > 0$, 则$\frac{1}{M-f(y)} < K$得出

$$\sup_x f(x) = M > f(y) + \frac{1}{K} \Longrightarrow \sup_x f(x) \geq \sup_y f(y) + \frac{1}{K} > \sup_x f(x).$$

一般区间上连续函数最值判别法:

命题5.1.3 设$f \in C(\mathbb{R})$, 且

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\ (\text{或} -\infty).$$

则f在$\mathbb{R}$上达到最小(大)值.

定理3.4.3 (零点定理, Bolzano) 设$f \in C[a,b]$, $f(a)f(b) < 0$, 则存在$\xi \in (a,b)$, s.t. $f(\xi) = 0$.

证法一: 区间二分法+区间套定理.

证法二: 用连续函数的保号性, 构造

$$A = \left\{x \in [a,b] : f(x) < 0\right\},$$

取$\xi = \sup A$, 则有$x_n \in A$, $x_n \to \xi$, $f(x_n) < 0$, 所以$f(\xi) \leq 0$. 反之, 在(ξ, b)上$f \geq 0$, 取$x_n \downarrow \xi$, 则$f(x_n) \geq 0 \Longrightarrow f(\xi) = 0$.

定理3.4.4 (介值定理) 设$f \in C[a,b]$, μ严格介于$f(a)$与$f(b)$之间, 则存在$\xi \in (a,b)$, s.t. $f(\xi) = \mu$.

推论3.4.5 设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数, 则$f([a,b]) = [m,M]$, 其中m, M是f在$[a,b]$上的最小值, 最大值.

推论3.4.6 设区间I上, $f(x) \in C(I)$, 则$f(I)$是区间. (可以退化为单点集)

注: 区间I可以无界, 可以是开集.

推论3.4.7 设$f(x)$是区间I上的连续函数, 则$f(x)$可逆的充要条件是$f(x)$严格单调.

7.3.6 一致连续性

定义3.4.1 (一致连续) 设$f(x)$定义在区间I上, 若$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$, s.t. 当$x_1, x_2 \in I$, $|x_1 - x_2| < \delta$时, 有$\left|f(x_1) - f(x_2)\right| < \epsilon$, 则称$f(x)$在$I$中一致连续.

否定表述: $f(x)$在I中不一致连续: $\exists \epsilon_0 > 0$, 以及(a_n), $(b_n) \subseteq I$, 且$a_n - b_n \to 0$, $(n \to \infty)$. 有$\left|f(a_n) - f(b_n)\right| \geq \epsilon_0$.

定理3.4.9 (Cantor定理) 闭区间上, 连续函数一致连续.

证法一: (反证), $\exists \epsilon_0 > 0$, (a_n), $(b_n) \subseteq [a,b]$, $a_n - b_n \to 0$, $n \to \infty$, 且$\left|f(a_n) - f(b_n)\right| \geq \epsilon_0$. 用聚点定理取$(b_n)$的收敛子列$b_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$, 则$a_{n_k} \to x_0$, 取极限.

证法二: 用连续性构造有限覆盖开集.

定义3.4.2 (振幅, 连续性模) 设$f(x)$在x_0的开邻域内有定义, 称

$$\omega_f(x_0,r)=\sup\left\{\left|f(x')-f(x'')\right|:x',x''\in B_{x_0}(r)\right\},\quad r>0.$$

为f在(x_0-r,x_0+r)上的振幅, 显然, $\omega_f(x_0,r)$关于$r\to 0+$递减, 故

$$\omega_f(x_0)=\lim_{r\to 0+}\omega_f(x_0,r)$$

存在, (不一定有限). 称为f在点x_0处的振幅.

注: 定义提到的是两种振幅, 分别表征函数f在"区间"上和在"一点"上的振幅.

命题3.4.10 $f(x)$在x_0处连续的充要条件是$\omega_f(x_0)=0$.

命题3.4.11 $f(x)$在I中一致连续的充要条件是

$$\lim_{r\to 0+}\omega_f(r)=0,$$

其中

$$\omega_f(r)=\sup\left\{\left|f(x')-f(x'')\right|:\forall x',x''\in I,\ \left|x'-x''\right|\le r\right\}.$$

7.3.7 连续函数的积分

积分定义: 设$f\in C[a,b]$, 直线$x=a$, $x=b$, $y=0$与曲线$f(x)$的图像在平面上所围成图形的面积用$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$来表示, 称为$f$在$[a,b]$上的积分.

命题3.5.1 设$f\in C[a,b]$, $f_n(x)$是分段线性函数, 是将$[a,b]$进行n等分, 分点$x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)$, 在$x\in[x_{i-1},x_i]$时

$$f_n(x)=l_i(x)=f(x_{i-1})+\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}(x-x_{i-1}).$$

则$\forall\epsilon>0$, $\exists N=N(\epsilon)$, 当$n>N$时,

$$\left|f(x)-f_n(x)\right|<\epsilon,\quad \forall x\in[a,b].$$

即$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$. 进而

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{1}{2}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\cdot\frac{b-a}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i.\end{aligned}$$

积分的基本性质 约定$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$, $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(1) (线性性) $f,g\in C[a,b]$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 则

$$\int_a^b\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 若$\left|f(x)\right|\le M$, $\forall x\in[a,b]$, 则

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le M(b-a).$$

(3) (保序性) 若$f\ge g$, $f,g\in C[a,b]$, 则$\int_a^b f\ge\int_a^b g$. 特别地,

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b\left|f(x)\right|\mathrm{d}x.$$

(4) (区间可加性) 设$f\in C(I)$, $a,b,c\in I$, 则

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(5) 若$f(x)\in C[a,b]$, 非负, 则$\int_a^b f(x)\ge 0$, 等号仅当$f\equiv 0$时取到.

例**3.5.4** 设$f\in C[a,b]$, $c\in[a,b]$, 定义$F(x)=\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $x\in[a,b]$, 则F是Lipschitz函数.

证明**:**

$$|F(x_2)-F(x_1)|\le M\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}t.$$

命题**3.5.2** **(**积分中值定理**)** 设$f,g\in C[a,b]$, 若g不变号, 则$\exists\xi\in[a,b]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明**:** 用连续函数介值定理.

例**3.5.10** 设$f\in C[0,a]$, 定义

$$f_0(x)=f(x),\quad f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t,\quad n=1,2,\cdots.$$

证明: 存在$\xi=\xi_{n,x}\in[0,x]$, s.t. $f_n(x)=f(\xi)\frac{x^n}{n!}$.

证明**:**

$$m\frac{x^n}{n!}\le\int_0^x f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t\le M\frac{x^n}{n!},$$

用介值定理.

例**3.5.12** 求连续函数f满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\qquad\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

证明**:** 此题的条件可以弱化为f是可积函数. 取积分

$$\int_0^y f(x+t)\,\mathrm{d}t=\int_x^{x+y}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}t+\int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t,$$

所以

$$\int_0^{x+y}f(t)\,\mathrm{d}t=yf(x)+\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t.$$

交换x,y的位置即得$yf(x)=xf(y)$, 再取$y=1$.

例**3.5.15** 设$f\in C[a,b]$, g是周期为T的连续函数, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x.$$

7.3.8 作业

16. 设 $0<a<b$, $a_1=a$, $b_1=b$.
 (1) 如果 $a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$, $b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$, 则 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛于同一极限.
 (2) 如果 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$, $b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$, 则 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛于同一极限.
 pf. (1). 因为$a_1,b_1>0$, 由$a_n,b_n>0$可以得到,

$$a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}>0,\ b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}>0.$$

即由归纳法, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$均是正数数列.
 由均值不等式,

$$a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\le\frac{a_n+b_n}{2}=b_{n+1},\quad n\ge1.$$

又由$a_1=a<b=b_1$, 故对于任意的$n\in\mathbb{N}$, 有$a_n\le b_n$. 于是

$$b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\le\frac{b_n+b_n}{2}=b_n,$$

知$\{b_n\}$单调递减; 同理, 由

$$a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\geq\sqrt{a_na_n}=a_n,$$

知$\{a_n\}$单调上升. 于是

$$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n\leq b_n\leq b_{n-1}\leq\cdots\leq b_1.$$

这说明$\{a_n\}$是单调上升的有界序列, 上界是b_1; $\{b_n\}$是单调下降的有界序列, 下界是a_1.

由于单调有界序列必然收敛, 可设$a_n\to a$, $b_n\to b$, $(n\to\infty)$. 对$b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$两边同时取极限$\lim_{n\to\infty}$得到

$$b=\frac{a+b}{2}\Longleftrightarrow a=b.$$

即$\{a_n\}$和$\{b_n\}$收敛于同一极限.

13. 设 $f(x)$ 是 (a,b) 中定义的无第二类间断点的函数, 如果对任意的两点 $x,\ y\in(a,b)$, 均有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(x)+f(y)],$$

则 f 为 (a,b) 中的连续函数.

pf. 用反证法, 若$f(x)$在(a,b)上不连续, 则存在$x_0\in(a,b)$, 使得f在x_0处为第一类间断点(因为f没有第二类间断点).

若f在x_0处为跳跃间断点, 则$f(x_0-0)$和$f(x_0+0)$均存在且不相等, 不妨设$f(x_0-0)<f(x_0+0)$, 取$\epsilon<\frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{4}$, 则存在$\delta>0$, 使得对于任何$x\in(x_0-\delta,x_0)$,

$$f(x_0-0)-\epsilon<f(x)<f(x_0-0)+\epsilon;$$

且对于任何$y\in(x_0,x_0+\delta)$,

$$f(x_0+0)+\epsilon>f(y)>f(x_0+0)-\epsilon.$$

特别的

$$f\left(x_0+\frac{\delta}{8}\right)=f\left(\frac{x_0-\frac{\delta}{4}+x_0+\frac{\delta}{2}}{2}\right)>f(x_0+0)-\epsilon>\frac{3f(x_0+0)+f(x_0-0)}{4}.$$

而

$$\frac{1}{2}\left(f\left(x_0-\frac{\delta}{4}\right)+f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)\right)<\frac{1}{2}\left(f(x_0-0)+\epsilon+f(x_0+0)+\epsilon\right)\leq\frac{3f(x_0+0)+f(x_0-0)}{4},$$

这与

$$f\left(\frac{x_0-\frac{\delta}{4}+x_0+\frac{\delta}{2}}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\left(f\left(x_0-\frac{\delta}{4}\right)+f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)\right)$$

矛盾.

若f在x_0处是跳跃间断点, 则$f(x_0\pm0)$均存在且不等于$f(x_0)$. 取$x=x_0-t$, $y=x_0+t$, 并令$t\to0$, 则

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=f(x_0)\leq\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2}\to\lim_{x\to x_0}f(x),\qquad t\to0.$$

即$f(x_0)<\lim_{x\to x_0}f(x)$. 取$x=x_0$, $y=x_0+t$, 并令$t\to0+$, 则

$$f\left(\frac{t}{2}+x_0\right)=f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x_0)+f(x_0+t)}{2}\Longrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)\leq\frac{f(x_0)+\lim_{x\to x_0}f(x)}{2}\Longrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)\leq f(x_0).$$

又矛盾.

15. 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 如果对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$ 均有 $f(x+y)=f(x)f(y)$, 则要么 f 恒为零, 要么存在常数 $a>0$, 使得 $f(x)=a^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

pf. 若f不恒为零, 则由于f连续, f在$\mathbb{R}$上保持符号. 不然则由连续函数的介值定理, 存在x_0使得$f(x_0)=0$, 则对于任意的$x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=f(x_0)f(x-x_0)\equiv0.$$

与f不恒为零矛盾.

f不能恒为负值, 不然$f(2x)=f(x)^2\Longrightarrow f(2x)>0$导致$f$在$\mathbb{R}$上不再保持符号, 与上述推导矛盾. 所以$f$在$\mathbb{R}$恒为正.

取$g(x)=\ln f(x)$, 由于f的连续性, $g(x)$也是$\mathbb{R}$上的连续函数. 并有

$$g(x+y)=\ln f(x+y)=\ln\left(f(x)f(y)\right)=\ln f(x)+\ln f(y)=g(x)+g(y).$$

由于g连续, 所以$g(x)=g(1)x$. 令$c=g(1)$, $a=f(1)>0$, 即有$\ln f(x)=cx=x\ln f(1)=\ln a^x$, $f(x)=a^x$. (14题的结论是经典结论, 任何时候都可以直接拿来用)

1. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 中连续, 且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$, 则 f 在 $[a,+\infty)$ 中有界, 且最大值和最小值中的一个必定能被 f 达到.

pf1. 考虑函数

$$g(t) := \sup_{x\ge t} f(x),$$

则$g(t)$是$[a,+\infty)$上连续的递减函数. 且

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \limsup_{x\to\infty} f(x) = \alpha.$$

所以$g(t)\ge\alpha$.

如果存在t使得$g(t)>\alpha$, 也即$\sup_{x\ge t} f(x)>\alpha$, 取$\epsilon<\sup_{x\ge t} f(x)-\alpha$, 则有$X>t$, s.t. $\forall x>X$,

$$\left|f(x)-\alpha\right|<\epsilon \Longrightarrow f(x)<\alpha+\epsilon \Longrightarrow \sup_{x>X} f(x)\le\alpha+\epsilon<\sup_{x\ge t} f(x),$$

这说明$f(x)$在$[t,\infty)$上的上确界不可能在$[X,\infty)$上取到, 即

$$\sup_{x\ge t} f(x)=\sup_{t\le x\le X} f(x) \Longrightarrow \sup_{x\ge a} f(x)=\sup_{a\le x\le X} f(x)$$

即$f(x)$在$[a,X]$上存在最大值, 也即$f(x)$在$[a,\infty)$上存在最大值.

若对于任何t, $g(t)=\alpha$. 也即

$$\sup_{x\ge t} f(x)=\alpha, \quad \forall t\ge a.$$

当$f(x)$不为常数时, 则必然有$f(x_0)<\alpha$. 取$\epsilon<\alpha-f(x_0)$, 则有$X>x_0$, s.t. $\forall x>X$

$$\left|f(x)-\alpha\right|<\epsilon \Longrightarrow f(x)>\alpha-\epsilon>f(x_0).$$

所以$f(x)$必然在$[a,X]$中取到最小值.

pf2. $f(x)$在$[a,\infty)$不恒为常数.

因为$f(x)\to\alpha$, $x\to\infty$, 则有点列$\{x_n\}$, 使得$f(x_n)\to\alpha$, $f(x_1)\ne\alpha$(因为f不恒为常数).

因为$f(x_1)\ne\alpha$, 则取$\epsilon<\left|f(x_1)-\alpha\right|$, 有$X>x_1$, s.t. $\forall x>X$,

$$\left|f(x)-\alpha\right|<\epsilon<\left|f(x_1)-\alpha\right|,$$

这意味着在$[a,X]$内存在点x_1的函数值$f(x_1)$远离$(\alpha-\epsilon,\alpha+\epsilon)$.

当$f(x_1)$>α时, $f(x)$在$[a,X]$上存在最大值$M\ge f(x_1)$, 而在(X,∞), $f(x)\le\alpha+\epsilon<f(x_1)\le M$. 最大值存在性得证.

当$f(x_1)$<α时, $f(x)$在$[a,X]$上存在最小值$m\le f(x_1)$, 而在(X,∞), $f(x)\ge\alpha-\epsilon>f(x_1)\ge m$. 最小值存在性得证.

3. 设$b,\alpha>0$, 求积分$\int_0^b x^\alpha\,\mathrm{d}x$, 利用积分计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}.$$

8. 设$f\in C[a,b]$, 如果对于任意的$g\in\{g\in C[a,b]: g(a)=g(b)=0\}$, 均有$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0$, 则$f\equiv 0$.

此题类比变分基本定理.

9. 设$f\in C[a,b]$, 如果对于任意的$g\in\left\{g\in C[a,b]: \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=0\right\}$, 均有$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0$, 则$f=C$为常函数.

提示: 设f的平均值为C, 考虑$g=f-C$和g^2的积分.

12. 设$f\in C[a,b]$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b \left|f(x)\right|^n\,\mathrm{d}x\right)^{1/n}=\max_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|.$$

14. 设$f,g\in C[a,b]$, 且$f,g>0$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_a^b f^{n+1}(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f^n(x)g(x)\,\mathrm{d}x}=\max_{x\in[a,b]} f(x).$$

17. 设$f(x)\in C[0,+\infty)$严格单调递增, 则

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, & x>0,\\ f(0), & x=0\end{cases}$$

也是严格单调递增连续函数.

18. 设$f(x)\in C[a,b]$, $f>0$, 则

$$\lim_{r\to0+}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^r(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/r}=\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

并用Hölder不等式说明上式左端关于r单调递增.

7.4 微分及其逆运算

7.4.1 可导与可微

研究函数的局部性质

定义**4.1.1** (导数) 设f在x_0附近有定义, 如果极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在且有限, 则称f在x_0处可导, 极限称为f在x_0处的导数, 记为$f'(x_0)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

用$\epsilon-\delta$语言表述.

命题**4.1.1** 设f在x_0处可导, 则f在x_0处连续.

命题**4.1.2** (导数的运算法则) 设f,g在x处可导, 则fg也在x处可导; 对于任意的常数α,β, $\alpha f+\beta g$也在x处可导. 且

(1). $(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$, (线性性);

(2). $(fg)'=f'g+fg'$. (导性).

推论**4.1.3** 设f,g在x_0处可导, $g(x_0)\neq 0$, 则$\frac{f}{g}$在x_0处也可导, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

可以用导数表述曲线在一点处的切线和法线, 事实上仅仅是用导数给出了切线和法线的定义, 属于先有导数的概念才有的切线和法线的概念.

定义**4.1.2** (微分) 设f在点x_0附近有定义, 如果存在常数A, 使得

$$f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+o(x-x_0),$$

则称f在x_0处可微, 线性映射$x\mapsto Ax$称为f在x_0处的微分, 记为$df(x_0)$.

命题**4.1.4** 设f在x_0附近有定义, 则f在x_0处可导当且仅当f在x_0处可微, 且微分的斜率就是导数$f'(x_0)$.

可导对应函数在一点差商存在极限, 可微对应函数的局部线性化, 产生线性变换的主项. f在x处的微分是一个斜率为$f'(x)$的线性映射, 当x变化时, 线性映射也变化, 即$x\mapsto df(x)$是一个新的映射, 记为df, 称为f的外微分或全微分.

x的全微分dx把任意点x映为x处的恒等映射.

因为$df(x)$和dx都是线性变换, 所以有$df=f'(x)dx$.

把形如fdx的表达式(f为函数)称为1次微分形式.

可以把微分运算看做升维运算, 把x和dx看做两个独立的变量, dx就是Δx, 它与x的选取无关. df把单变量函数f映射为二元函数$df(x)=f'(x)dx$.

命题**4.1.5** (链式法则) 设g在x_0处可导, f在$g(x_0)$处可导, 则复合函数$f\circ g=f(g)$在x_0处可导, 且

$$\big(f(g)\big)'(x_0)=f'\big(g(x_0)\big)g'(x_0).$$

证明依赖于下式

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f\left(g(x_0)\right)+f'\left(g(x_0)\right)\left(g(x)-g(x_0)\right)+o\left(g(x)-g(x_0)\right)\\ &= f\left(g(x_0)\right)+f'\left(g(x_0)\right)g'(x_0)(x-x_0)+f'\left(g(x_0)\right)o(x-x_0)+o(x-x_0)\\ &= f\left(g(x_0)\right)+f'\left(g(x_0)\right)g'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\end{aligned}$$

命题**4.1.6** (反函数求导法则) 设f在x_0附近有定义, 且反函数为g. 若f在x_0处可导, 且导数非零, 则g在$y_0=f(x_0)$处可导, 且

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

这个定理并没有要求f在x_0附近每点上都连续. 导数$f'(x_0)\neq 0$的条件不能省掉, 否则考虑$f(x)=x^3$.

命题4.1.8 设f,g可微, 则

(1) $d(\alpha f+\beta g)=\alpha df+\beta dg$, 其中$\alpha,\beta$为常数;

(2) $d(fg)=gdf+fdg$;

(3) $d(f/g)=\frac{gdf-fdg}{g^2}$, 其中$g\neq 0$.

命题4.1.9 设f,g均可微, 且复合函数$f(g)$有定义, 则

$$d\big(f(g)\big)=f'(g)dg.$$

7.4.2 高阶导数

本节没有太多复杂的知识点, 仅做一些结论的罗列.

定义4.2.1 (高阶导数) 设f在x_0附近可导, 如果导数f'在x_0处仍可导, 则称f在x_0处2阶可导. 记为

$$f''(x_0)=(f')'(x_0),$$

并称为f在x_0处的2阶导数.

一般地, 如果f在x_0附近n $(n\geq 1)$ 阶可导, 且n阶导函数$f^{(n)}$在x_0处可导, 则称f在x_0处$n+1$阶可导, 记为

$$f^{(n+1)}(x_0)=\left(f^{(n)}\right)'(x_0),$$

称为f的$n+1$阶导数.

注: f的2阶导数要求f'在x_0附近有定义, 也就是对于x_0附近的x能够计算$f'(x)$的值. 另有一种用差分方法定义的二阶导数, 比如

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

它避免了计算$f'(x)$, 而且允许一阶导数不存在, 而仅存在二阶导数. 一般用于推广导数的概念.

定义4.2.2 若f在区间I上的每点都n阶可导, 则称f在I中n阶可导; 如果f可导, 且导函数f'连续, 则称f(1阶)连续可导, 记为$f\in C^1(I)$; 一般n阶连续可导记为$f\in C^n(I)$. 如果f有任意阶导数, 则称f是光滑的, 记为$f\in C^\infty(I)$.

例4.2.3 可微函数的导函数不一定连续.

尽管导函数连续性丧失, 但仍有介值定理成立, 也就是Darboux介值定理.

例4.2.4 设$k=1,2,\cdots$, 则函数

$$f(x)=\begin{cases}x^{2k+1}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

有$f\in C^k\setminus C^{k+1}$.

例4.2.5 证明函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ e^{-\frac{1}{x}}, & x>0\end{cases}$$

是光滑函数.

命题4.2.1 设f,g均为n阶可导函数, 则

(1) $(\alpha f+\beta g)^{(n)}=\alpha f^{(n)}+\beta g^{(n)}$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$;

(2) (Leibniz)

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}.$$

7.4.3 不定积分

命题4.3.1 设f为区间I上的可微函数, 则$f'=0$当且仅当$f=C$.

此定理使用中值定理证明最为简洁, 书中使用的方法可以归为极端原理.

定义**4.3.1** (原函数) 方程$F'(x)=f(x)$的一个可微解F称为函数f的一个原函数.

定义**4.3.2** (不定积分) 设函数f在区间I上有原函数, 用记号$\int f(x)\,\mathrm{d}x$表示f的原函数的一般表达式, 则

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \quad x\in I,$$

其中C为常数.

定理**4.3.2 (Newton-Leibniz)** 区间I中的连续函数都有原函数. 设f连续, $a\in I$, 则

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x\in I$$

是f的一个原函数.

需要注意Darboux介值定理, 将来会遇到有间断点的可积函数, 其变限积分在间断点处不可微, 所以不能形成一般非连续函数的原函数.

此定理称为微积分基本定理, 它有其它形式:

设$f\in C(I)$, F为f的任一原函数, 则存在常数C, 使得, $F(x)=\int_a^x f(t)dt+C$, 所以

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F\,|_a^b\,.$$

另有一种表述是当G连续可微时,

$$\int_a^b G'(x)dx = G(b)-G(a) = G\,|_a^b\,.$$

上式对于C^1函数总是对的, 但需要注意Volterra函数, 它在定义的区间上处处可导, 且导函数有界, 但导函数不可定积分.

命题**4.3.3** (不定积分的线性性质) 设f,g在区间I上均有原函数, 则

$$\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx,$$

其中α,β为常数.

命题**4.3.4** 设f的原函数为F, 若f可逆, 且$g=f^{-1}$, 则

$$\int g(x)dx = xg(x)-F(g(x))+C.$$

7.4.4 积分的计算

命题**4.4.1** (换元积分法**,** 变量替换法) 设$f(u)$是区间J上有定义的函数, $u=\phi(x)$是区间I中的可微函数, 且$\phi(I)\subset J$.

(1) 设f在J上的原函数是F, 则$F(\phi)$是$f(\phi)\phi'$在区间I上的原函数, 即

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(u)du + C = F(\phi(x))+C;$$

(2) 设ϕ可逆, 且其逆可微, $\phi(I)=J$. 如果$f(\phi(x))\phi'(x)$有原函数G, 则f有原函数$G(\phi^{-1}(u))$, 即

$$\int f(u)du = G(\phi^{-1}(u))+C.$$

命题**4.4.2** (分部积分法) 设$u(x),v(x)$在区间I中可微, 若$u'(x)v(x)$有原函数, 则$u(x)v'(x)$也有原函数, 且

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx.$$

例**4.4.10** 设$a\neq 0$, 求不定积分$I=\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$和$J=\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$.

例**4.4.18** 求不定积分

$$\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx, \qquad 0<r<1.$$

不能用初等函数表述的不定积分:

$$e^{\pm x^2}, \sin(x^2), \cos(x^2), \frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}, \sqrt{1-k^2\sin^2 x}, \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}, \ (0<k<1).$$

7.4.5 作业

19. 设$a_{ij}(x)$均为可导函数, 求行列式函数$\det\left(a_{ij}(x)\right)_{n\times n}$的导数.

20. Riemann函数$R(x)$处处不可导.

11. 通过对 $(1-x)^n$ 求导并利用二项式定理证明等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k k^m = \begin{cases} 0, & m=0,1,\cdots,n-1, \\ (-1)^n n!, & m=n. \end{cases}$$

10. 求不定积分的递推公式 $(a\neq 0)$:

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

11. 设$a,b>0$, 求不定积分的递推公式:

$$I_{mn} = \int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}.$$

7. 设f在$(0,+\infty)$上可导, 且

$$2f(x)=f(x^2), \quad \forall x>0.$$

证明$f(x)=c\ln x$.

hint: 设$g(x)=f(\mathrm{e}^x)$. 题目条件可以弱化为f仅在$x=1$处可导.

$$g(x)=\frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x/2^n}x=g'(0)x$$

可导性不能省去, 否则考虑$\max\{0,c\ln x\}$作为函数的另一个解.

7.4.6 简单的微分方程

例4.5.4 微分方程能够解出通解的表达式通常和朗斯基行列式有关.

7.5 微分中值定理和**Taylor**展开

7.5.1 函数极值

定义**5.1.1** (极值点) 设f定义在I上, $x_0\in I$, 若存在$\delta>0$, s.t.

$$f(x)\geq f(x_0), \qquad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap I,$$

则称x_0是f在I上的极小值点, $f(x_0)$称为极小值.

若$x_0\in I$, 且$\forall x\in I$, $f(x)\geq f(x_0)$, 则称x_0是f在区间I上的最小值点, $f(x_0)$称为函数f在区间I上的最小值.

定理**5.1.1 (Fermat**定理**)** 设x_0是f在I上的极值点, 且x_0是内点, 若f在x_0处可导, 则$f'(x_0)=0$.

注**:** 由于极值点定义是在$(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap I$上给出的, 所以以上定理要加上$x_0$是内点.

证明**:** 使用极限的保号性, 判断

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

的符号.

满足$f'(x_0)=0$的点称为f的驻点, 临界点.

若$f'(x_0)\geq 0$, 则$\exists\delta>0$, s.t. $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, 有$(x-x_0)(f(x)-f(x_0))\geq 0$, 但$f$在$x_0$附近不单调.

定理5.1.2 (Darboux) 设f为$[a,b]$上的可导函数, 则f'可以取到$f'_+(a)$和$f'_-(b)$之间的任意值.

证明: 设k介于$f'_+(a)$与$f'_-(b)$之间, 定义$g(x)=f(x)-kx$, 则

$$g'_+(a)g'_-(b)=(f'_+(a)-k)(f'_-(b)-k)\le 0.$$

若上式等于零, 命题显然. 若上式小于零, 不妨设$g'_+(a)>0$, 此时$x=a$不是最大值点; 并有$g'_-(b)<0$, 此时$x=b$不是最大值点.

从而$g(x)$只能在$[a,b]$内取到最大值, 由Fermat定理, 存在$\xi\in(a,b)$, s.t. $g'(\xi)=0$.

注: 导函数有介值定理, 但导函数可以不连续, 比如$x^2\sin\frac{1}{x}$, $x\in[-\pi,\pi]$.

Darboux定理说明, 若g'在任何点处不为零, 则g'不变号.

Darboux定理的使用条件必须是区间内每点处可导.

例5.3.4 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上二阶可导, 若f有界, 证明: $\exists\xi\in\mathbb{R}$, s.t. $f''(\xi)=0$.

证明: (反证法), $\forall x\in\mathbb{R}$, $f''(x)\neq 0$, 由Darboux定理, f''不变号, 从而f'单调.

不妨设f'单调上升, 取$x_0\in\mathbb{R}$, $f'(x_0)\neq 0$. 因为

$$f'(x_0)>0\Longrightarrow f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x}f'(t)\,\mathrm{d}t\ge f'(x_0)(x-x_0)\to+\infty,\quad x\to+\infty,$$

与f有界矛盾; 而且

$$f'(x_0)<0\Longrightarrow f(x_0)-f(x)=\int_{x}^{x_0}f'(t)\,\mathrm{d}t\le f'(x_0)(x_0-x)\to-\infty,\quad x\to-\infty,$$

也与f有界矛盾.

7.5.2 微分中值定理

定理5.2.1 (Rolle) 设$f\in C[a,b]$, 在(a,b)上可微, 且$f(a)=f(b)$, 则存在$\xi\in(a,b)$, s.t. $f'(\xi)=0$.

定理5.2.2 (Lagrange) 设$f\in C[a,b]$, 在(a,b)上可微, 则存在$\xi\in(a,b)$, s.t.

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

证明是构造性的, 对

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$

使用Rolle定理.

定理5.2.3 (Cauchy) 设$f,g\in C[a,b]$, 在(a,b)上可微, 且$\forall x\in(a,b)$, $g'(x)\neq 0$, 则

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证明: $(g(a)\neq g(b))$, 对

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))\right]$$

用Rolle定理.

几何意义: 定义参数曲线$\overrightarrow{r}(t)=(g(t),f(t))$, $A=\overrightarrow{r}(a)$, $B=\overrightarrow{r}(b)$. 则$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$表示直线$\ell_{AB}$的斜率. Cauchy定理指出, $\exists\xi$使得$\overrightarrow{r}(\xi)$处的切线方向$\overrightarrow{r}'(\xi)\parallel\ell_{AB}$, 而$\overrightarrow{r}'(\xi)=(g'(\xi),f'(\xi))$, 有

$$k_{AB}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

注: 由于$\forall x\in(a,b)$, $g'(x)\neq 0$, 由Darboux介值定理$g'(x)$不变号, $g(x)$其实是单调可逆的, 这可以给出另一种证法:
取$A=g(a)$, $B=g(b)$, 不妨设$A<B$, 则$f(g^{-1}(y))\in C[A,B]$, 由复合函数求导与反函数求导法则

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f(g^{-1}(B))-f(g^{-1}(A))}{B-A}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g^{-1}(x))\mid_{x=\zeta}=f'(g^{-1}(\zeta))\cdot\frac{1}{g'(g^{-1}(\zeta))}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

其中$g(\xi)=\zeta\in[A,B]$.

例**5.2.4** 设$f(x)\in C[a,b]$, 在(a,b)二阶可导, 若$f(a)=f(b)=0$, 则对于任意的$c\in[a,b]$, 存在$\xi\in(a,b)$, s.t.

$$f(c)=\frac{f''(\xi)}{2}(c-a)(c-b).$$

证**: (K**值法**)** 设K满足$f(c)=K(c-a)(c-b)$. 则$f(x)-K(x-a)(x-b)$有三个零点a,b,c. 故存在$\xi\in(a,b)$, s.t. $f''(\xi)-2K=0$.

证法二**:** 构造

$$F(x)=f(x)-\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)$$

也有三个零点a,b,c.

注**: Lagrange**插值公式 经过$\left(x_i,f(x_i)\right)_{i=1}^n$的$n-1$次多项式有如下形式

$$p_{n-1}(x)=\sum_{i=1}^n\prod_{j\neq i}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}f(x_i).$$

用K值法证明:

$$f(x)-p_{n-1}(x)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)\prod_{i=1}^n(x-x_i),\quad \xi\in(a,b).$$

例**5.2.5** 证明Legendre (勒让德)多项式$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$在$(-1,1)$上有$n$个不同实根, 其中$n\geq 1$.

证明**:** 多项式$\left(x^2-1\right)^n$的直到$n-1$次导数总有±1作为其零点, 用Rolle定理, 在每次求导时会多出现一个零点.

7.5.3 单调函数

命题**5.3.2** 设$f\in C[a,b]$, 在(a,b)上可微, 则f单调当且仅当f'不变号.

证明**:** $\Longrightarrow$: 用极限的保号性; $\Longleftarrow$: 用Lagrange中值定理.

命题**5.3.3 (**反函数定理**)** 设f为区间I上的可微函数, 若$f'\neq 0$, $\forall x\in I$. 则f可逆且反函数可微.

证明**:** 用反证法+Lagrange定理, f是单射, 从而可逆, 由f连续得到f单调. 并且

$$\left(f^{-1}(y)\right)'=\frac{1}{f'(x)}.$$

命题**5.3.4** 设$\delta>0$, $f\in C(x_0-\delta,x_0+\delta)$, 在$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$上可微, 若

$$f'(x)\leq 0,\ x\in(x_0-\delta,x_0);\quad f'(x)\geq 0,\ x\in(x_0,x_0+\delta).$$

则x_0为f的极小值点. 反之为极大值点.

命题**5.3.5** 设f在内点x_0处二阶可导, 且$f'(x_0)=0$, 则若$f''(x_0)>0$, 则x_0为f的(严格)极小值点.

证明**:** 有高阶导数的定义要求$f'(x)$在x_0附近可计算, 再由极限保号性, $\exists\delta$使得

$$x\in(x_0-\delta,x_0)\text{时},\ f'(x)<0,$$

$$x\in(x_0,x_0+\delta)\text{时},\ f'(x)>0.$$

例**5.3.4** 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上二阶可导, 若f有界, 证明: $\exists\xi\in\mathbb{R}$, s.t. $f''(\xi)=0$.

证明**:** (反证法) 对于任意的$x\in\mathbb{R}$, $f''(x)\neq 0$. 由Darboux定理, 有f''不变号, 所以f'单调, 不妨设f'单调上升, 取$x_0\in\mathbb{R}$, $f'(x_0)\neq 0$.
当$f'(x_0)>0$时, $f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^x f'(t)\,\mathrm{d}t\geq f'(x_0)(x-x_0)\to+\infty$, $x\to+\infty$. 与f有界矛盾.
当$f'(x_0)<0$时, $f(x_0)-f(x)=\int_x^{x_0} f'(t)\,\mathrm{d}t\leq f'(x_0)(x_0-x)\to-\infty$, $x\to-\infty$. 与f有界矛盾.

7.5.4 凸函数

定义**5.4.1 (**凸函数**)** 设f在I上有定义, 若$\forall a,b\in I$, $a<b$, 有

$$f(x)\leq l(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),\quad \forall x\in[a,b].$$

则称f为I中的凸函数; 相应的给出凹函数的定义. 若上式取严格不等号, 则对应严格凸函数.
定义中的不等式可以等价地写成

$$f(ta+(1-t)b)\leq tf(a)+(1-t)f(b),\qquad \forall t\in(0,1).$$

例**5.4.1** 用凸函数证明Young不等式.

证明**:** e^x是凸函数, $p>1$, 且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则

$$ab=e^{\ln ab}=e^{\frac{1}{p}\ln a^p+\frac{1}{q}\ln b^q}\leq\frac{1}{p}e^{\ln a^p}+\frac{1}{q}e^{\ln b^q}=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

定理**5.4.1 (Jensen**不等式**)** 设f是定义在I上的函数, 则f凸当且仅当$\forall x_i\in I$, $\lambda_i\geq 0$, $(i=1,2,\cdots,n)$, 且$\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i\right)\leq\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i).$$

对比习题3.3的13题.
13: 若f没有第二类间断点, 且$\forall x,y\in(a,b)$均有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2},$$

则$f\in C(a,b)$, 由此可证f在(a,b)上是凸的.
这要依赖f的连续性和实数的完备性, 比如考虑证明$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$. 但下面的证明更精巧.

命题**5.4.3** 设$f\in C(I)$, 则f凸当且仅当$\forall x_1<x_2\in I$, 有$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

证明**:** 取$a,b\in I$, 证明$f(x)$在(a,b)上位于$l(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$之下即可.

$$g(x):=f(x)-l(x)\quad x\in[a,b]\Longrightarrow g(x)\in C[a,b].$$

取$M=\max_{x\in[a,b]}g(x)=g(x_0)$, 则当$x_0$靠近$a$时, $x_0\leq\frac{a+b}{2}$, $2x_0-a\in[a,b]$. 所以

$$M=g(x_0)=g\left(\frac{a+(2x_0-a)}{2}\right)\leq\frac{g(a)+g(2x_0-a)}{2}\leq M,$$

等号成立, 故$M=g(a)=0$.

推论**5.4.4** 设f在I上凸, 若f在I内达到最大值, 则f为常数.

证明**:** 设f在x_0达到最大值, 则$\forall a,b\in I$, $\exists t\in(0,1)$, s.t.

$$x_0=ta+(1-t)b\Longrightarrow f(x_0)=\max f\leq tf(a)+(1-t)f(b)\leq\max f.$$

等号成立. $f(x_0)=f(a)=f(b)$.

命题 **5.4.2** (连续性) 设f在I中凸, 若$[a,b]\subseteq I$, $a,b\in I^\circ$, 则$f\in \mathrm{Lip}[a,b]$, 从而连续.

证明: 取$[a,b]\subseteq[a',b']\subseteq I$, $a',b'\in I^\circ$. 注意使用

$$\left(\frac{f(a)-f(a')}{a-a'}\le\right)\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le\frac{f(b)-f(y)}{b-y}\le\frac{f(b')-f(b)}{b'-b}.$$

命题**5.4.5** (导数性质) 设f在I中凸, x为I的内点, 则f在x处左右导数存在, 且

$$f'_-(x)\le f'_+(x).$$

证明: 使用单调有界函数的极限存在. 设$x_0<x_1<x_2$, 证明: $k_{01}\le k_{02}\le k_{12}$.

命题**3.3.4** 设$f(x)$是定义在区间I上的单调函数, 则f的间断点至多可数.
由上面的命题, 凸函数的不可微点至多可数.

命题**5.4.6** 设f在I上可微, 则
(1) f凸当且仅当f'单调上升.
(2) f凸当且仅当, $\forall x_0,x\in I$, 有$f(x)\ge f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

证明: (1) $\Longrightarrow$: 同前; $\Longleftarrow$: 用中值定理.

$$a<x<b\Longrightarrow\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi_1)\le f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\Longrightarrow f\text{ 凸}.$$

(2) $\Longrightarrow$:

$$x>x_0\Longrightarrow f'(x_0)\le\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0};$$

$$x<x_0\Longrightarrow f'(x_0)\ge\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x};$$

$\Longleftarrow$:

$$a<x<b\Longrightarrow\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\le f'(x)\le\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\Longrightarrow f(x)\le\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$$

且$x=\lambda a+(1-\lambda)b$.

命题**5.4.7** 设$f\in C(I)$, 若f'_-存在且单调上升, 则f是凸函数.

证明: 设$x_0\in I$, 记$L(x)=f'_-(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, $g(x)=f(x)-L(x)$.
则$g'_-(x)=f'_-(x)-f'_-(x_0)$.

$$\Longrightarrow\begin{cases}x\le x_0\Longrightarrow g'_-(x)\le 0\Longrightarrow g(x)\ge g(x_0),\ x\to x_0^-\Longrightarrow g(x)\searrow,\ x\to x_0^-.\\ x\ge x_0\Longrightarrow g'_-(x)\ge 0\Longrightarrow g(x)\nearrow,\ x\to x_0^+.\end{cases}$$

所以$\min g=g(x_0)=0$. 所以$f(x)\ge L(x)=f'_-(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, $x\in I$.
设$x_i\in I$, $\lambda_i\ge 0$, $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$, 记$x_0\in\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i$, 所以

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)\ge f'_-(x_0)\sum_{i=1}^n\lambda_i(x_i-x_0)+f(x_0)\sum_{i=1}^n\lambda_i=f(x_0).$$

命题**5.4.8** 若f在I中二阶可导, 则f凸当且仅当$f''\ge 0$.

7.5.5 函数作图

若$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$或$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$, 则称$x=x_0$为$f$的垂直渐近线.
若

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0\text{ 或 }\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0,$$

则称$y=ax+b$为f在无穷远处的渐近线.

7.5.6 L'Hôpital法则

定理**5.6.1 (L'Hôpital**法则) 设f, g在(a,b)中可导, 且$g'(x)\neq 0, \forall x\in(a,b)$, 又设

$$\lim_{x\to a+} f(x)=0=\lim_{x\to a+} g(x),$$

若极限

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \text{存在(或为}\infty).$$

则

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

定理**5.6.2 (L'Hôpital**法则) 设f, g在(a,b)中可导, 且$g'(x)\neq 0, \forall x\in(a,b)$, 又设

$$\lim_{x\to a+} g(x)=\infty,$$

若极限

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

存在, (或为∞), 则

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l.$$

证明**:** 只证明$l<\infty$的情况, $\forall\epsilon>0, \exists\eta>0$, s.t.

$$l-\frac{\epsilon}{2}<\frac{f'(x)}{g'(x)}<l+\frac{\epsilon}{2},\qquad \forall x\in(a,a+\eta).$$

取$c=a+\eta$, 由Cauchy中值定理, $\exists\xi\in(x,c)$, s.t.

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\Longrightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\frac{f(c)}{g(x)}-\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\cdot\frac{g(c)}{g(x)},\quad \xi\in(x,c)\subseteq(a,a+\eta).$$

由$\lim_{x\to a+} g(x)=\infty$, 故存在$\delta<\eta$, s.t.

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\epsilon,\qquad \forall x\in(a,a+\delta).$$

注: 当$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在时, $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}$仍然可能存在. 比如求

$$\lim_{x\to 0+}\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

用L'Hôpital法则有如下过程:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0+}\cos\frac{1}{x}$$

不存在, 但是做变量替换$s=\frac{1}{t}, y=\frac{1}{x}$之后,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{y\to+\infty} y\int_y^\infty\frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s=y\cdot\left(\frac{1}{2}\int_y^{y+\pi}\frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_{y+\pi}^\infty\frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_y^\infty\frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s\right).$$

显然, $\int_y^{y+\pi}\frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s=O\left(\frac{1}{y^2}\right)$. 而

$$\int_{y+\pi}^\infty\frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s+\int_y^\infty\frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s=\int_y^\infty\cos s\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{(s+\pi)^2}\right)\mathrm{d}s=\int_y^\infty\cos s\left(\frac{2s\pi+\pi^2}{s^2(s+\pi)^2}\right)\mathrm{d}s=O\left(\frac{1}{y^2}\right).$$

所以应当有

$$\lim_{y\to+\infty} y\int_y^\infty\frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s=0.$$

或者对上式用分部积分

$$\int_y^\infty \frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{\sin s}{s^2}\Big|_y^\infty + \int_y^\infty \frac{2\sin s}{s^3}\,\mathrm{d}s = -\frac{\sin y}{y^2} + O\left(\int_y^\infty \frac{2}{s^3}\,\mathrm{d}s\right) = O\left(\frac{1}{y^2}\right).$$

再或者用Riemann-Lebesgue引理

$$\lim_{y\to+\infty} y\int_y^\infty \frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s = \lim_{y\to+\infty}\int_1^\infty \frac{\cos yt}{t^2}\,\mathrm{d}t = 0.$$

再或者在计算导数前按以下过程分部积分将积分改写为

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^x \cos\left(t^{-1}\right)dt &= -\int_\varepsilon^x t^2 d\sin\left(t^{-1}\right)\\ &= -x^2\sin\left(x^{-1}\right)+\varepsilon^2\sin\left(\varepsilon^{-1}\right)+2\int_\varepsilon^x t\sin\left(t^{-1}\right)dt\\ &\xrightarrow{\varepsilon\to 0} -x^2\sin\left(x^{-1}\right)+2\int_0^x t\sin\left(t^{-1}\right)dt.\end{aligned}$$

例**5.6.4** 设f在$(a,+\infty)$上可微.

(1). 若$\lim_{x\to+\infty} x\cdot f'(x)=1$, 则$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

(2). 若存在$\alpha>0$, s.t.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\alpha\cdot f(x)+x\cdot f'(x)\right)=\beta,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\beta}{\alpha}.$$

证明**:** (1). 当$x\to+\infty$, $\ln x\to+\infty$, 则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{\frac{1}{x}}=1\Longrightarrow f(x)\to+\infty,\ (x\to+\infty).$$

(2). 当$\alpha>0$时, $x^\alpha\to+\infty$, $(x\to+\infty)$, 则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha f(x)}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}f(x)+x^\alpha f'(x)}{\alpha x^{\alpha-1}}=\frac{\beta}{\alpha}.$$

7.5.7 Taylor展开

(1). 若$f(x)$在x_0处连续, 则

$$f(x)-f(x_0)=o(1).$$

(2). 若$f(x)$在x_0处可微, 则

$$f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\right]=o(x-x_0),\quad (x\to x_0).$$

注意, 这里f在x_0处可微, 但没说在x_0附近可微, 不能用L'Hôpital法则.

(3). 若$f(x)$在x_0处二阶可微, 则

$$f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2\right]=o\left((x-x_0)^2\right),\quad (x\to x_0).$$

定理**5.7.1 (**带**Peano**余项的**Taylor**公式**)** 设f在x_0处n阶可导, 则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),\quad (x\to x_0).$$

证明**:** (归纳法+中值定理) 记

$$R_n(x)=f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right],$$

则

$$\frac{R_{k+1}(x)}{(x-x_0)^{k+1}}\to\frac{R'_{k+1}(x)}{(k+1)(x-x_0)^k}=\frac{o((x-x_0)^k)}{(k+1)(x-x_0)^k}=o(1).$$

定理5.7.2 (Taylor) 设f在(a,b)上$n+1$阶可导, $x_0, x\in(a,b)$. 则存在$\xi,\zeta\in(x,x_0)$或(x_0,x), s.t. Taylor展开的余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

称为Lagrange余项, 以及

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\zeta)(x-\zeta)^n(x-x_0),$$

称为Cauchy余项.

证明**:** 取

$$F(t)=f(t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,\quad t\in(a,b).$$

对t求导, 得到

$$F'(t)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n.$$

所以

$$F(x)-F(x_0)=R_n(x).$$

Cauchy余项: 用Lagrange中值定理, $\exists\zeta=x_0+\theta(x-x_0)$, $(0<\theta<1)$, s.t.

$$R_n(x)=F'(\zeta)(x-x_0).$$

Lagrange余项: 用Cauchy微分中值定理, $\exists\xi=x_0+\eta(x-x_0)$, $(0<\eta<1)$, s.t.

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}.$$

上面的证明给出Taylor展开的积分余项公式

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

应用 证明:

$$\int_0^1(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

证明**:** 设$f(x)=(1+x)^{2n+1}$, $f(x)$在$x=0$处Taylor展开:

$$(1+x)^{2n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}x^k+\frac{1}{n!}\int_0^x\frac{(2n+1)!}{n!}(1+t)^n(x-t)^n\,\mathrm{d}t,$$

令$x=1$, 所以

$$\int_0^1(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

这个积分可以换元法求解:

$$\int_0^1(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{2n+2}{2}\right).$$

定理5.7.4 (Taylor系数的唯一性) 设f在x_0处n阶可导, 且

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\quad(x\to x_0),$$

则

$$a_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0),\quad k=0,1,\cdots,n.$$

证明**:** 给出Taylor展开的Peano余项表示, 两者作差比阶.

命题**5.7.5** 设$f(x)$在$x=0$处的Taylor展开为$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则

(1). $f(-x)$的Taylor展开为$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^n$;
(2). $f(x^k)$的Taylor展开为$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn}$, 其中$k\in\mathbb{N}_+$;
(3). $x^k f(x)$的Taylor展开为$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n}$, 其中$k\in\mathbb{N}_+$;
(4). $f'(x)$的Taylor展开为$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$;
(5). $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$的Taylor展开为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$;
(6). 如果$g(x)$在$x=0$处的Taylor展开为$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, 则$\lambda f(x)+\mu g(x)$的Taylor展开为$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)x^n$, 其中$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

$$\ln(1-x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}\right)-\int_0^x\frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

$$\arctan x=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)+(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{i}}{2}\ln\frac{1-\mathrm{i}x}{1+\mathrm{i}x}.$$

例**5.7.5** Taylor展开收敛, 但不收敛到函数本身的例子.

定义

$$\phi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x>0.\end{cases}$$

在$x=0$处展开的Taylor级数恒为0.

7.5.8 Taylor公式和微分学的应用

Thm. 5.8.1 (函数极值的判断) 设f在x_0处n阶可导, 且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\ne 0,$$

则

(1). n为偶数, 若$f^{(n)}(x_0)<0$, 则x_0为极大值点; 若$f^{(n)}(x_0)>0$, 则x_0为极小值点.
(2). n为奇数时, x_0不是极值点.

Thm. 5.8.2 (Jensen不等式的余项) 设$f\in C[a,b]$, 在(a,b)上二阶可导. 当$x_i\in[a,b]$, $(1\le i\le n)$时, $\exists\xi\in(a,b)$, s.t.

$$f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i\right)-\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)=-\frac{1}{2}f''(\xi)\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j(x_i-x_j)^2,$$

其中$\lambda_i\ge 0$, $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$.

证明**:** 记

$$\overline{x}=\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i\in[a,b].$$

则

$$f(x_i)=f(\overline{x})+f'(x)(x_i-\overline{x})+\frac{1}{2}f''(\xi_i)(x_i-\overline{x})^2,\quad \xi_i\in(a,b).$$

所以

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)=f(\overline{x})+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(\xi_i)\lambda_i(x_i-\overline{x})^2.$$

而

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\lambda_i\lambda_j(x_i-x_j)^2.$$

所以

$$\frac{m}{4}\sum_{i,j=1}^n\lambda_i\lambda_j(x_i-x_j)^2\le\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)-f(\overline{x})\le\frac{M}{4}\sum_{i,j=1}^n\lambda_i\lambda_j(x_i-x_j)^2.$$

用Darboux定理.

用于求极限

例**5.8.1** 求

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right].$$

解**:**

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\quad(x\to\infty),$$

所以

$$x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}+o(1)\to\frac{1}{2}(x\to\infty).$$

例**5.8.2** 设f在0附近二阶可导, 且$|f''|\le M$, $f(0)=0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2}f'(0).$$

解**:**

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right)=f(0)+f'(0)\frac{k}{n^2}+R_{k,n},$$

其中

$$\left|R_{k,n}\right|=\frac{1}{2}\left|f''\left(\xi_{k,n}\right)\right|\left(\frac{k}{n^2}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}M\frac{k^2}{n^4},$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)&=f'(0)\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}R_{k,n}\\&=f'(0)\frac{n+1}{2n}+o(1)\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

Stirling公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}},\quad 0<\theta_n<1.$$

7.5.9 作业

8. 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上可微, 且$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=A$, $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=B$. 证明, 如果$A\neq B$, 则任给$\theta\in(0,1)$, 都有$\xi\in\mathbb{R}$, 使得

$$f'(\xi)=\theta A+(1-\theta)B.$$

9. 设$f(x)$在区间I中n阶可微, $x_1,x_2,\cdots,x_k$为I中的点. 证明存在$\xi\in I$, s.t.

$$\frac{1}{k}\left(f^{(n)}(x_1)+f^{(n)}(x_2)+\cdots+f^{(n)}(x_k)\right)=f^{(n)}(\xi).$$

10. 设$f(x)$在区间I中可微, $x_0\in I$. 如果$\lim_{x\to x_0}f'(x)$存在, 则$f'(x)$在x_0处连续.
11. 设$f(x)$在(a,b)中可微, 如果$f'(x)$为单调函数, 则$f'(x)$在(a,b)中连续.
3. 设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导, 且$f(a)=f(b)=0$, $f'_+(a)f'_-(b)>0$. 证明: 存在$\xi\in(a,b)$, s.t. $f''(\xi)=0$.
6. 设$f(x)$为$[a,b]$上的三阶可导函数, 且$f(a)=f'(a)=f(b)=0$, 证明, 对于任意的$c\in[a,b]$, 存在$\xi\in(a,b)$, s.t.

$$f(c)=\frac{f'''(\xi)}{6}(c-a)^2(c-b).$$

8. 设$f(x)$在区间$[a,b]$上可导, 且存在$M>0$, 使得

$$\left|f'(x)\right|\le M,\quad\forall x\in[a,b].$$

证明:

$$\left|f(x)-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|\le\frac{M}{2}(b-a),\quad\forall x\in[a,b].$$

10. 设f在(a,b)上可微, 且$a<x_i\le y_i<b$, $i=1,2,\cdots,n$. 证明: 存在$\xi\in(a,b)$, s.t.

$$\sum_{i=1}^{n}[f(y_i)-f(x_i)]=f'(\xi)\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i).$$

11. 设f在$[a,+\infty)$上可微, 且

$$f(a)=0,\quad \left|f'(x)\right|\le\left|f(x)\right|,\quad \forall x\in[a,+\infty).$$

证明: $f\equiv 0$.

提示考虑$A=\{x\in[a,+\infty):f(x)=0\}$和$\sup A$.

11. 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上二阶可导, 若

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{|x|}=0,$$

则存在$\xi\in\mathbb{R}$, 使得$f''(\xi)=0$.

用Darboux定理

12. 设$f(0)=0$, $f'(x)$严格单调递增, 则$\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上也严格单调递增.

11. 证明, 定义在$\mathbb{R}$上的有界凸函数是常数函数.

12. 设$f(x)\in C(I)$, 若$\forall x_0\in I$, $\exists\delta>0$, s.t. $f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$上凸, 则$f(x)$在I中凸.

13. 设f为区间I上的凸函数, x_0为I的内点. 若$f'_-(x_0)\le k\le f'_+(x_0)$, 则

$$f(x)\ge k(x-x_0)+f(x_0),\quad \forall x\in I.$$

并证明Jensen不等式.

15. 设$f\in C[a,b]$凸, 证明Hadamard不等式

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

16. (Schwarz symmetric derivative, Riemann derivative) 设$f\in C(\mathbb{R})$, 若$\forall x\in\mathbb{R}$, 均有

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=0,$$

证明$f(x)$为线性函数.

连续性是必要的, 否则考虑符号函数. 这个极限不能被改善成

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}=0,$$

这只需要改变符号函数在0点处的值为1, 使其在0点处右连续.

提示: 证明$\forall\epsilon>0$, $f(x)+\epsilon x^2$是凸的, $f(x)-\epsilon x^2$是凹的, $f(x)$在$[a,b]$上位于直线$[f(a)+\epsilon a^2,f(b)+\epsilon b^2]$与直线$[f(a)-\epsilon a^2,f(b)-\epsilon b^2]$之间.

6. 是否存在$\mathbb{R}$上的凸函数, 使得$f(0)<0$, 且

$$\lim_{|x|\to+\infty}(f(x)-|x|)=0\,?$$

5. 设f在点x_0处2阶可导, 且$f''(x_0)\ne0$. 由微分中值定理, 当h充分小时, 存在$\theta=\theta(h)$, $(0<\theta<1)$, s.t.

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0+\theta h)h,$$

证明:

$$\lim_{h\to0}\theta=\frac{1}{2}.$$

7. 设$f(x)$在$(a,+\infty)$中可微, 且

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+f'(x)\right]=l,$$

证明:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=l.$$

9. 设$f''(x_0)$存在, $f'(x_0)\ne0$, 求极限

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-\frac{1}{f'(x_0)(x-x_0)}\right].$$

10. 设$a_1 \in (0,\pi)$, $a_{n+1} = \sin a_n$, $(n \geq 1)$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} a_n = \sqrt{3}.$$

2. 设 $f(x)$ 是 x 的 n 次多项式, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的Taylor展开的 Peano 余项 $R_n(x)$ 恒为零. (提示: 考虑其它余项公式.)

10. 设 $f(x), g(x)$ 在 $(-1,1)$ 中无限次可微, 且

$$\left|f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)\right| \leq n!|x|, \quad \forall x \in (-1,1), n = 0,1,2,\cdots.$$

证明 $f(x) = g(x)$.

12. 设 f 在 x_0 附近可以表示为

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o\big((x - x_0)^n\big) \quad (x \to x_0),$$

则 $f(x)$ 是否在 x_0 处 n 阶可导?

13. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$. 证明, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\left|f''(\xi)\right| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b) - f(a)|.$$

4. 设 $f(x)$ 在 x_0 的一个开邻域内 $n+1$ 次连续可微, 且 $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, 其 Taylor 公式为

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) h + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h) h^n,$$

其中 $0 < \theta < 1$. 证明 $\lim_{h\to 0} \theta = \frac{1}{n+1}$.

8. 设 $a_1 \in \mathbb{R}, a_{n+1} = \arctan a_n (n \geqslant 1)$. 求极限 $\lim_{n\to\infty} n a_n^2$.

10. 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导, 且

$$M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty, \quad M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f''(x)\right| < \infty.$$

证明 $M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f'(x)\right| < \infty$, 且 $M_1^2 \leqslant 2M_0 \cdot M_2$. (提示: 考虑 $f(x \pm h)$ 的 Taylor 展开.)

7.6 Riemann积分

7.6.1 Riemann可积

设定义在$[a,b]$区间上的函数$f(x)$, 将$[a,b]$分割为

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

近似第i个小梯形的面积为$f(\xi_i)\Delta x_i$, 其中$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. 用$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$表示曲边梯形ABCD的面积的近似值, 称为$f$在$[a,b]$上的Riemann和. 若

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在, 其中$\|\pi\| = \max_{1\leq i\leq n}\{\Delta x_i\}$为分割的模. 则记为$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

定义6.1.1 (Riemann积分) 设f定义在$[a,b]$上, 若存在$I \in \mathbb{R}$, s.t. $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 对任何分割π, 只要$\|\pi\| < \delta$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \epsilon, \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1,2,\cdots,n,$$

则称f在$[a,b]$上Riemann可积或可积, I为f在$[a,b]$上的(定)积分, 记为

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

其中f称为被积函数, $[a,b]$称为积分区间, a, b分别称为积分下限与积分上限.

定理6.1.1 (可积的必要条件) 若f在$[a,b]$上可积, 则f在$[a,b]$上有界, 反之不然.

有界函数未必可积: Dirichlet函数$D(x)$, 对于任意的分割$\xi_i \in [x_{i-1},x_i]\setminus\mathbb{Q}$, 积分和为0; 当$\xi_i \in [x_{i-1},x_i]\cap\mathbb{Q}$时, 积分和为1. 所以$D(x)$的积分和没有极限.

对于分割

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

记

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),$$

令

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i, \quad s = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i,$$

称S是f关于π的Darboux上和, 简称上和, 记为$S(\pi)$或$S(\pi, f)$. s称为Darboux下和, 简称下和, 记为$s(\pi)$或$s(\pi, f)$.

称

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

为f在$[x_{i-1},x_i]$上的振幅. 则

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \Delta x_i.$$

引理6.1.2 设分割π'是从π添加k个分点得到的, 则

$$S(\pi) \geqslant S\left(\pi'\right) \geqslant S(\pi) - (M-m)k\|\pi\|,$$
$$s(\pi) \leqslant s\left(\pi'\right) \leqslant s(\pi) + (M-m)k\|\pi\|.$$

即, 对于给定的分割, 增加分点时下和不减, 上和不增.

证明**:** 只需要对$k=1$进行即可.

推论6.1.3 对于任何两个分割π_1和π_2, 有

$$s(\pi_1) \le S(\pi_2).$$

定理6.1.4 (Darboux)

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} S(\pi) = \inf_{\pi} S(\pi), \quad \lim_{\|\pi\|\to 0} s(\pi) = \sup_{\pi} s(\pi).$$

称$\inf_\pi S(\pi)$为f在$[a,b]$上的上积分, $\sup_\pi s(\pi)$为f在$[a,b]$上的下积分.

定理6.1.5 (可积的充要条件) 设f在$[a,b]$上有界, 则以下命题等价:

(1) f在$[a,b]$上Riemann可积.

(2) f在$[a,b]$上的上积分和下积分相等.

(3)

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \Delta x_i = 0.$$

(4) $\forall \epsilon > 0$, 存在$[a,b]$的分割π, s.t.

$$S(\pi) - s(\pi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \Delta x_i < \epsilon.$$

推论6.1.6 (1) 设$[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$, 如果$f$在$[a,b]$上可积, 则$f$在$[\alpha,\beta]$上也可积.

(2) 设$c\in(a,b)$, 若f在$[a,c]$及$[c,b]$上都可积, 则f在$[a,b]$上可积.

例**6.1.1** 设f,g在$[a,b]$上均可积, 则fg在$[a,b]$上也可积.

注意,

$$\begin{aligned}
\omega_i(fg) &= \sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}\left|f\left(x'\right)g\left(x'\right)-f\left(x''\right)g\left(x''\right)\right| \\
&= \sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}\left|f\left(x'\right)g\left(x'\right)-f\left(x'\right)g\left(x''\right)+f\left(x'\right)g\left(x''\right)-f\left(x''\right)g\left(x''\right)\right| \\
&\leqslant \sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}\left[\left|f\left(x'\right)\right|\left|g\left(x'\right)-g\left(x''\right)\right|+\left|g\left(x''\right)\right|\left|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)\right|\right] \\
&\leqslant K\left(\omega_i(g)+\omega_i(f)\right),
\end{aligned}$$

并用前面的定理6.1.5 (3).

定理**6.1.7** **(**可积函数类**)** (1) 若$f\in C[a,b]$, 则f在$[a,b]$上可积;

(2) 若有界函数f只在$[a,b]$上有限个点处不连续, 则f可积;

(3) 若f在$[a,b]$上单调, 则f可积.

证明**:** (2) 主要依赖以下不等式

$$\begin{aligned}
S(\pi)-s(\pi) &\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+2M\sum_{i=1}^{N}2\rho \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+2M\cdot 2N\rho<\varepsilon.
\end{aligned}$$

(3) 主要依赖以下不等式

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\omega_i\cdot\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n}\left(f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)\right)\cdot\Delta x_i \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)\right)\cdot\|\pi\| \\
&= \left(f\left(x_n\right)-f\left(x_0\right)\right)\|\pi\| \\
&= (f(b)-f(a))\|\pi\|<\varepsilon.
\end{aligned}$$

设f为$[a,b]$上定义的函数, 若存在$[a,b]$上的分割

$$\pi: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

使得f在每个小区间(x_{i-1},x_i)上均为常数, 则称f为阶梯函数.

推论**6.1.8** 阶梯函数均为可积函数.

定理**6.1.9 (Riemann)** 设f在$[a,b]$上有界, 则f可积的充要条件是$\forall\epsilon,\eta>0$, 存在$[a,b]$的分割π, s.t.

$$\sum_{\omega_i\geq\eta}\Delta x_i<\epsilon.$$

例**6.1.3** 设$f\in C[a,b]$, ϕ在$[\alpha,\beta]$上可积, $\phi([\alpha,\beta])\subseteq[a,b]$. 则$f\circ\phi$在$[\alpha,\beta]$上仍可积.

证明**:** f 在 $[a,b]$ 上一致连续. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $x,y\in[a,b]$, $|x-y|<\delta$ 时, $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}$. 因为 ϕ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, 则存在 $[\alpha,\beta]$ 的分割 $\pi:\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta$, 使得

$$\sum_{\omega_i(\phi)\geqslant\delta}\Delta t_i<\frac{\varepsilon}{4K+1},$$

其中 $K=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$. 于是

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\omega_i(f\circ\varphi)\cdot\Delta t_i &= \sum_{\omega_i(\phi)\geqslant\delta}\omega_i(f\circ\varphi)\cdot\Delta t_i+\sum_{\omega_i(\phi)<\delta}\omega_i(f\circ\varphi)\cdot\Delta t_i \\
&\leqslant 2K\cdot\sum_{\omega_i(\phi)\geqslant\delta}\Delta t_i+\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}\cdot\sum_{\omega_i(\phi)<\delta}\Delta t_i \\
&\leqslant 2K\cdot\frac{\varepsilon}{4K+1}+\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}\cdot(\beta-\alpha)<\varepsilon.
\end{aligned}$$

两个可积函数的复合不可积的例子:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}\quad g(x)=R(x)\Longrightarrow f\circ g(x)=D(x).$$

可积函数复合连续函数不可积的例子:

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

设A为$[0,1]$上有正测度的类Cantor集, (a_i,b_i), $(i\in\mathbb{N}_+)$为A的邻接区间.

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 1-\frac{1}{2}(b_i-c_i)+\left|x-\frac{1}{2}(a_i+b_i)\right|, & x\in(a_i,b_i),\ i\in\mathbb{N}_+.\end{cases}$$

则

$$f\circ g(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\in[0,1]\setminus A.\end{cases}$$

定理**6.1.10 (Lebsegue)** 有界函数f在$[a,b]$上Riemann可积的充要条件是它的不连续点集D_f为零测集. 其中$D_f=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_{\frac{1}{n}}$, 而

$$D_\delta=\left\{x\in[a,b]:\omega(f,x)\ge\delta\right\},\quad \omega(f,x)=\lim_{r\to0^+}\sup\left\{\left|f(x_1)-f(x_2)\right|:x_1,x_2\in(x-r,x+r)\cap[a,b]\right\}.$$

7.6.2 定积分的性质

线性性质, 积分区间可加性, 保号性, 绝对值不等式.

定理**6.2.3** (积分第一中值定理) 设 f,g 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $g(x)$ 不变号, 则存在 μ, $\inf_{x\in[a,b]}f(x)\leqslant\mu\leqslant\sup_{x\in[a,b]}f(x)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\cdot\int_a^b g(x)dx.$$

引理 **6.2.4.** 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 令

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad x\in[a,b],$$

则 F 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

注: 尽管这个变限积分常被用来和Newton-Leibnitz公式混用来求定积分, 但是这并不表示F是f的原函数. 根据导函数的介值定理, 如果F是f的原函数, 则f不能有间断点, 这对于可积函数f是条件不足的.

定理 **6.2.5 (**积分第二中值定理**).** 设 f 在 $[a,b]$ 上可积.

(1) 如果 g 在 $[a,b]$ 上单调递减, 且 $g(x)\geqslant 0$, $\forall x\in[a,b]$, 则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\cdot\int_a^\xi f(x)dx.$$

(2) 如果 g 在 $[a,b]$ 上单调递增, 且 $g(x)\geqslant 0$, $\forall x\in[a,b]$, 则存在 $\eta\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)\cdot\int_\eta^b f(x)dx.$$

(3) 一般地, 如果 g 为 $[a,b]$ 上的单调函数, 则存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\cdot\int_a^\zeta f(x)dx+g(b)\cdot\int_\zeta^b f(x)dx.$$

例 **6.2.2.**

设 $\beta \geqslant 0, b > a > 0$, 证明

$$\left|\int_a^b e^{-\beta x}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leqslant \frac{2}{a}.$$

证明. 对 $g(x) = \frac{e^{-\beta x}}{x}$, $f(x) = \sin x$ 用积分第二中值公式, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b e^{-\beta x}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{e^{-\beta a}}{a}\cdot\int_a^\xi \sin x dx = \frac{e^{-\beta a}}{a}(\cos a - \cos\xi)$$

这说明

$$\left|\int_a^b e^{-\beta x}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leqslant 2\frac{e^{-\beta a}}{a} \leqslant \frac{2}{a}.$$

例 **6.2.3.** 证明 $\lim_{A\to\infty}\int_0^A \frac{\sin x}{x}dx$ 存在.

证明. 在上例中取 $\beta = 0$, 则当 $B > A > 0$ 时, 有

$$\left|\int_0^B \frac{\sin x}{x}dx - \int_0^A \frac{\sin x}{x}dx\right| = \left|\int_A^B \frac{\sin x}{x}dx\right| \leqslant \frac{2}{A} \to 0 \quad (A\to\infty),$$

例**3.5.15** 设$f \in C[a,b]$, g是周期为T的连续函数, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 **6.2.6 (Riemann-Lebesgue)** 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可积函数, 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx = 0, \quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = 0.$$

证明. 以第一个极限为例. 因为 f 可积, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a,b]$ 的分割

$$\pi : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f)\Delta x_i < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

又因为 f 有界, 故存在 K, 使得 $|f(x)| \leqslant K$, $\forall x \in [a,b]$. 于是当 $\lambda > \frac{4nK}{\varepsilon}$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx\right| &= \left|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\sin\lambda x dx\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[f(x) - f(x_{i-1})\right]\sin\lambda x dx + \sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})\sin\lambda x dx\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|f(x) - f(x_{i-1})\right|dx + \sum_{i=1}^n\left|f(x_{i-1})\right|\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sin\lambda x dx\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \omega_i(f)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n K\frac{1}{\lambda}|\cos\lambda x_{i-1} - \cos\lambda x_i| \\
&< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{2nK}{\lambda} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

7.6.3 微积分基本公式

定理 **6.3.1 (**微积分基本定理**).** 设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 且在 $x_0 \in [a,b]$ 处连续, 则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 x_0 处可导, 且

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

这个定理说明变限积分是函数f的原函数的条件是f在$[a,b]$上连续, 而不能有第一类间断点. 但第二类间断点是可以有的.

定理 6.3.3 (Newton-Leibniz 公式). 设 F 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $F'=f$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

(此式又写为 $\int_a^b F'(x)dx = F(b)-F(a) = F(x)|_a^b$)

注: 可微函数的导函数不一定是可积的, 如函数

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上可微. 进一步还可以构造导函数有界但不可积的例子.

例 **6.3.2.** 设 f 在 $[a,b]$ 上连续可微, $f(a)=0$, 则

$$\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b \left[f'(x)\right]^2 dx.$$

证明**:**

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f(x)-f(a))^2 = \left[\int_a^x f'(t)dt\right]^2\\ &\leqslant \int_a^x \left[f'(t)\right]^2 dt \int_a^x 1^2 dt \quad (\text{Cauchy}-\text{Schwarz})\\ &\leqslant (x-a)\int_a^b \left[f'(t)\right]^2 dt. \end{aligned}$$

7.6.4 定积分的近似计算

不等式**1** 设f可微, 且$\left|f'(x)\right|\le M$, 则

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\right| \le \frac{M}{4}(b-a)^2.$$

证明**:**

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\right| &= \left|\int_a^b \left(f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)dx\right| = \left|\int_a^b f'(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx\right|\\ &\leqslant \int_a^b \left|f'(\xi)\right|\left|x-\frac{a+b}{2}\right|dx \leqslant M\int_a^b \left|x-\frac{a+b}{2}\right|dx\\ &= \frac{M}{4}(b-a)^2. \end{aligned}$$

不等式**2** 设f二阶可微, 且$\left|f''(x)\right|\le M$, $\forall x\in[a,b]$. 则

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\right| \le \frac{1}{24}M(b-a)^3.$$

证明**:** 用Taylor展开

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

两边积分, 得

$$\int_a^b f(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx,$$

所以

$$\left|\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\right| \leqslant \frac{1}{2}M\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{24}M(b-a)^3.$$

注: 使用带积分型余项的Taylor公式

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\int_{\frac{a+b}{2}}^{x}\frac{f''(t)}{1!}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t.$$

两边同时积分得到

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\int_a^b\int_{\frac{a+b}{2}}^{x}f''(t)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x,$$

后者可以通过交换积分次序化简为

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_{\frac{a+b}{2}}^{x}f''(t)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x&=\int_a^b f''(t)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\min\{t-a,b-t\}\,\mathrm{d}t\\&=-\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)\cdot f''(t)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-t)\cdot f''(t)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t\\&=-\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)(f''(t)+f''(a+b-t))\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

所以有下面的恒等式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)-\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)(f''(t)+f''(a+b-t))\,\mathrm{d}t.$$

而

$$\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)(f''(t)+f''(a+b-t))\,\mathrm{d}t\right|\le 2M\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t\right|=\frac{M}{24}(b-a)^3.$$

不等式3 设$f\in C[a,b]$, 若f二阶可微, 且$\left|f''(x)\right|\le M,\ \forall x\in[a,b]$, 则

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\right|\le\frac{M}{12}(b-a)^3.$$

证明:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x&=(x-a)f(x)\,|_a^b-\int_a^b(x-a)f'(x)\,\mathrm{d}(x-b)\\&=(b-a)f(b)+\int_a^b(x-b)\left(f'(x)+(x-a)f''(x)\right)\\&=(b-a)f(b)+(x-b)f(x)\,|_a^b-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x\\&=(b-a)(f(b)+f(a))-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\right|=\frac{1}{2}\left|\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{M}{12}(b-a)^3.$$

上面的等式的一些应用, 取$a=n,\ b=n+1$, 则有

$$\int_n^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{f(n)+f(n+1)}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x+n)\,\mathrm{d}x.$$

对n做累和,

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)=\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{f(1)+f(n)}{2}+\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)\sum_{k=1}^{n-1}f''(x+n)\,\mathrm{d}x.$$

当取$f(x)=\frac{1}{x}$时, 得到

$$H_n=\ln n+\frac{n+1}{2n}+\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{(x+n)^3}\,\mathrm{d}x=\ln n+O(1).$$

当取$f(x)=\ln x$时, 得到

$$\ln n! = \ln\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) + 1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(x+n)^2}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) + O(1),$$

所以极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = C.$$

注: 若$f(x)\in C^4[a,b]$, 则

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) = \frac{1}{24}\int_a^b f^{(4)}(x)(x-a)^2(x-b)^2dx - \frac{1}{12}(b-a)^2\left[f'(b)-f'(a)\right].$$

关于习题**3** 是否存在常数 C, 使得对于满足条件 $\left|f'''(x)\right| \leqslant M$ 的任意函数 f 有如下估计:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\right| \leqslant CM(b-a)^4.$$

解: 条件存在. 不等式相当于

$$\frac{1}{2}\left|\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq CM(b-a)^4.$$

由于$\left|f'''\right| \leq M$, 所以$-M(x-a) \leq f''(x)-f''(a) \leq M(x-a)$. 所以

$$\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b (x-a)(x-b)(f''(a)-M(x-a))\,\mathrm{d}x = \frac{M}{12}(b-a)^4 - \frac{f''(a)}{6}(b-a)^3,$$

$$\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b (x-a)(x-b)(f''(a)+M(x-a))\,\mathrm{d}x = -\frac{M}{12}(b-a)^4 - \frac{f''(a)}{6}(b-a)^3.$$

当$f''(a)=0$时, 上面的C存在, 而一般情况的f, 上面的C是不存在的.

当问题加上对于任意的$a,b\in D_f$时, 常数C也是不存在的. 这相当于对于任意的a,b,

$$\frac{1}{2}\left|\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq CM(b-a)^4.$$

由介值定理, 存在$\xi\in(a,b)$, s.t.

$$\left|f''(\xi)\right|(b-a)^3 \leq CM(b-a)^4.$$

令$b\to a^+$, 得到$f''(a)\equiv 0$, 也与f的任意性矛盾.

7.6.5 作业

6. 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的非负可积函数, 且 $\int_0^1 f(x)dx=0$. 证明, 任给 $\varepsilon>0$, 均存在子区间 $[\alpha,\beta]$, 使得 $f(x)<\varepsilon$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且存在常数 $C>0$, 使得 $|f(x)|\geqslant C(a\leqslant x\leqslant b)$. 证 明 $\frac{1}{f}$ 在 $[a,b]$ 上也是可积的.

11. 设 $f(x)>0$ 为 $[a,b]$ 上的可积函数, 证明 $\int_a^b f(x)dx>0$.

2. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上定义的函数. 如果 $f^2(x)$ 可积, 则 $|f(x)|$ 也可积.

6. 设 $f(x)\geqslant 0$ 在 $[a,b]$ 上可积, $\lambda\in\mathbb{R}$, 则

$$\left(\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx\right)^2 \leqslant \left[\int_a^b f(x)dx\right]^2.$$

(提示: $f=\sqrt{f}\cdot\sqrt{f}$, 用Cauchy-Schwarz不等式.)

9. 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数, 则 $\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1)$. (提示: nx^n 在 $[0,1]$ 上积分趋于 1 , 在 $[0,\delta]$ 上很小, 如果 $0<\delta<1$.)

11. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可积函数, 则任给 $\varepsilon>0$, 存在连续函数 $g(x)$, 使得 $\inf f\leqslant g(x)\leqslant \sup f$, 且

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx<\varepsilon.$$

12. 设 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上可积, 设 $[a,b]\subset(c,d)$, 则

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx = 0.$$

7.7 定积分的应用和推广

7.7.1 定积分的应用

曲线的长度　设$I=[\alpha,\beta]$, 映射$\sigma: I\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto\big(x(t),y(t)\big)$, $t\in I$.
如果$x(t)$, $y(t)$为连续函数, 则称σ为$\mathbb{R}^2$上的连续曲线.
如果$x(t)$, $y(t)\in C^1$, 则称σ为C^1曲线.
定义σ的长度为

$$L(\sigma)=\int_\alpha^\beta\left[\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2\right]^{1/2}\mathrm{d}t.$$

例**7.1.1.**　求摆线

$$\big(x(t),y(t)\big)=\left(a(t-\sin t),a(1-\cos t)\right),\quad a>0.$$

一拱的长度.

$$\begin{aligned} l&=\int_0^{2\pi}\left[\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2\right]^{\frac12}dt\\ &=\int_0^{2\pi}a\left[(1-\cos t)^2+\sin^2 t\right]^{\frac12}dt\\ &=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=8a. \end{aligned}$$

简单图形的面积

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

当f变号时, 上式称为代数面积和.
设平面曲线σ的极坐标方程为$r=r(\theta)$, $r(\theta)\in C[\alpha,\beta]$,

$$S=\frac12\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta.$$

设曲线σ上的点满足$\sigma(t)=\big(x(t),y(t)\big)$, $t\in[\alpha,\beta]$. 则σ, $x=a$, $x=b$和$y=0$围成的曲边梯形的面积为

$$S=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.$$

面积公式也可以改写成

$$S=\frac12\left|\int_\alpha^\beta\left[y(t)x'(t)-y'(t)x(t)\right]\right|\mathrm{d}t.$$

旋转曲面的面积　设σ为平面曲线$\sigma(t)=(x(t),y(t))$, $t\in[\alpha,\beta]$, $y(t)\ge 0$. σ绕x轴旋转所得曲面的面积为

$$S=\int_\alpha^\beta 2\pi y(t)\left[\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2\right]^{\frac12}dt.$$

简单立体的体积　(1) 平行截面之间的立体体积
设Ω是$\mathbb{R}^3$中的一块立体区域, 夹在平面$x=a$和$x=b$, $(a<b)$ 之间. 记$S(x)$为$x\in[a,b]$处垂直于x轴的平面截Ω的截面面积函数. 如果$S(x)\in C[a,b]$, 则Ω的体积为

$$V=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 旋转体体积
设$f\in C[a,b]$,

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid x\in[a,b],y\in[-\left|f(x)\right|,\left|f(x)\right|],|z|\le\sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

则

$$V(\Omega)=\int_a^b\pi f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

7.7.2 广义积分

定义 7.2.1 (无穷积分). 设 $a\in\mathbb{R}$, 定义在 $[a,+\infty)$ 中的函数 f 如果在任何有限区间 $[a,A]$ 上都是 Riemann 可积的, 且极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$$

存在 (且有限), 则称无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 存在或收敛, 记为

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$$

否则就称无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 不存在或发散.

类似的，我们可以定义无穷积分$\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$和$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. 如果极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^A f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在, 它和上面定义的无穷积分是不等价的, 称为Cauchy主值积分, 记为

$$(V.P.)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x:=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

无穷积分的**Cauchy**准则 $f(x)$在$[a,+\infty)$上的积分收敛, 当且仅当, 对于任意的$\epsilon>0$, 存在$M=M(\epsilon)$, 使得对于任何$B>A>M$时, 有

$$\left|\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\epsilon.$$

例7.2.1 无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$, $(p\in\mathbb{R})$ 仅在$p>1$时收敛.

例7.2.2 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan x\,|_{-\infty}^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$

定义7.2.2 (瑕积分) 设函数f在任何区间$[a',b]$, $(a<a'<b)$ 上均Riemann可积, 如果极限

$$\lim_{a'\to a+}\int_{a'}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在且有限, 则称瑕积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$存在或收敛, 记为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{a'\to a+}\int_{a'}^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

否则称瑕积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{a'\to a+}\int_{a'}^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

否则称瑕积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$不存在或发散.

如果f在a附近无界, 则f在$[a,b]$上不是Riemann可积的, 称a为f的瑕点.

无穷积分和瑕积分统称为广义积分, 也称为反常积分.

例7.2.3 瑕积分$\int_0^1\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$仅在$p<1$时收敛.

运算法则: 分部积分, 变量替换, 积分区间可加性, 线性性质.

例7.2.5 $\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x=\lim_{\epsilon\to0+}\int_\epsilon^1\ln x\,\mathrm{d}x=\lim_{\epsilon\to0+}(x\ln x-x)\,|_\epsilon^1=-1.$

例**7.2.6** 求Fresnel积分$\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_1^{+\infty}\cos\left(x^2\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt.$$

$$\begin{aligned}\left|\int_A^B\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt\right|&=\left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right|_A^B+\frac{1}{2}\int_A^B\frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}dt\,|\\&\leqslant\frac{1}{\sqrt{A}}+\frac{1}{\sqrt{B}}+\frac{1}{2}\int_A^B t^{-\frac{3}{2}}dt=\frac{2}{\sqrt{A}}\to 0\quad(B>A\to+\infty).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\cos t\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx^2}\cos t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2}\tan^{1/2}t\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{3/2}{2},\frac{1/2}{2}\right)=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)}{\Gamma(1)}\\&=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.\end{aligned}$$

其中

$$\int\mathrm{e}^{-tx^2}\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-tx^2}\left(-\cos t\cdot x^2+\sin t\right)}{1+x^4},$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}.$$

综上, 并类似的证明

$$\int_{\mathbb{R}}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\qquad\int_{\mathbb{R}}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

作业

7. 设 $f(x)>0$, 如果 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上广义可积, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx>0$.
  在$[a,A]$上, $f(x)$的不连续点集是零测集, 存在不连续点集的至多可数个开区间$\{I_i\}$, 使得

$$\sum|I_i|\le\epsilon.$$

因$A-a>\epsilon$, 所以存在连续点, 设为x_0, 则存在$\delta>0$, 使得任何$|x-x_0|<\delta$, $f(x)>0$, 与$\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x=0$矛盾.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上广义可积, 如果 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 中一致连续, 则

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

(提示: 先用 Cauchy 准则和中值定理找收敛子列.) 对于任何$\epsilon>0$, 存在$\delta>0$, 只要$\left|x-y\right|<\delta$, 就有$\left|f(x)-f(y)\right|<\epsilon$. 又对于这样小的$\epsilon$, 存在$M>0$, s.t. 对于任何$A>M$,

$$\left|\int_A^{A+\delta}f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\epsilon.$$

则存在$\xi\in(A,A+\delta)$, 使得

$$\left|f(\xi)\right|<\epsilon.$$

所以对于任何$x\in(A,A+\delta)$, 有

$$\left|f(x)\right|\le\left|f(\xi)\right|+\left|f(x)-f(\xi)\right|\le\epsilon+\epsilon$$

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上广义可积, 如果 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 中可导, 且导函数 $f'(x)$ 有界, 则 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. (提示: 用上一题.)

11. 举例说明, 当无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 且 $f(x)$ 为正连续函数时, 无穷积分 $\int_a^{+\infty}f^2(x)dx$ 不一定收敛.

磨光函数

$$\sum_{k=1}^{n} n\chi_{[n,n+1/n^3]}(x)$$

12. 举例说明, 当无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 且 $f(x)$ 为正连续函数时, 不一定有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

比如图形类似于下式的函数

$$\sum_{k=1}^{\infty} n\chi_{[n,n+1/n]}$$

7.7.3 广义积分的收敛判别法

Thm 7.3.1. 设 $f \geqslant 0$, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛当且仅当

$$F(A)=\int_a^A f(x)dx$$

是 $A\in[a,+\infty)$ 的有界函数; 对瑕积分有完全类似的结果.

定理 **7.3.2.** (比较判别法) 设 $0\leqslant f\leqslant Mg, M>0$ 为常数, 则当无穷积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时, 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛; 当无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散时, 无穷积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 也发散; 瑕积分有完全类似的结果.

M的求法 求$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

$0<l<\infty$时, $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$同收敛.

$l=0$时, $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$收敛可以推出$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛. 注: $0\le f\le Mg$不可省, 否则取$f(x)=\left|\frac{\sin x}{x\ln x}\right|$, $g(x)=\frac{\sin x}{x}$.

$l=+\infty$时, $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$发散, 则$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$发散.

Cauchy判别法 将f与x^{-p}比较, (无穷积分) (瑕积分有类似结论)

1. 若$p>1$, 且存在$c>0$, s.t. $0\le f(x)\le\frac{c}{x^p}$, $(\forall x\ge x_0)$, 则$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛.
2. 若$p\le 1$, 且存在$c>0$, s.t. $f(x)\ge\frac{c}{x^p}$, $(\forall x\ge x_0)$, 则$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$发散.

设$\lim_{x\to\infty} x^p f(x)=l$.

3. 若$p>1$, $0\le l<+\infty$, 则$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛.
4. 若$p\le 1$, $0<l\le+\infty$, 则$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$发散.

例**7.3.3** 判断$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+\ln x)}\,\mathrm{d}x$的敛散性.

对于一般函数f, 定义

$$f^+(x)=\max\{0,f(x)\},\quad f^-(x)=\max\{0,-f(x)\}.$$

若$\int f^\pm$收敛, 则f收敛. (绝对收敛)

若$\int f$收敛, 但$\int|f|$发散. (条件收敛)

例**7.3.5** 判断$\int_1^{+\infty}\cos x^p\,\mathrm{d}x$, $(p>1)$, 的敛散性.

$$\int_1^{\infty}\cos t\cdot t^{\frac{1}{p}-1}\,\mathrm{d}t,$$

取$B>A\gg 1$, 则

$$\left|\int_A^B\frac{\cos t}{t^{1-\frac{1}{p}}}\,\mathrm{d}t\right|=\left|\frac{1}{A^{1-1/p}}\int_A^{\xi}\cos t\,\mathrm{d}t+\frac{1}{B^{1-1/p}}\int_{\xi}^{B}\cos t\,\mathrm{d}t\right|\le\frac{4}{A^{1-1/p}}\to 0,\quad A\to+\infty.$$

但

$$\left|\cos x^p\right|\ge\cos^2 x^p=\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x^p\right),$$

反证$\int|\cos x^p|$不收敛.

定理 7.3.3 **(Dirichlet).** 设 $F(A)=\int_a^A f(x)dx$ 在 $[a,+\infty)$ 中有界, 函数 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 中单调, 且 $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

pf. $|F(A)|\le C, \forall A\ge a$. 所以

$$\left|\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le 2C,\quad \forall A,B\ge a.$$

$g(x)=o(1)$, $x\to+\infty$. 所以$\forall\epsilon>0, \exists M>0$, s.t. $\forall x>M$, $\left|g(x)\right|\le\frac{\epsilon}{4C}$.

$$\begin{aligned}\left|\int_A^B f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|g(A)\int_A^\xi f(x)\,\mathrm{d}x+g(B)\int_\xi^B f(x)\,\mathrm{d}x\right|\\ &\le \frac{\epsilon}{4C}\cdot 2C\cdot 2=\epsilon.\end{aligned}$$

例**7.3.6.** 判断积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$, $(0<p<2)$ 的敛散性.

pf. $\frac{\sin x}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-1}}$, $(x\to 0+)$. 所以$\int_0^1\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$与$\int_0^1 x^{1-p}\,\mathrm{d}x$同敛散, $(p<2)$.

$\int_1^A\sin x\,\mathrm{d}x$有界, $\frac{1}{x^p}\searrow 0$, 由Dirichlet判别法, $\int_1^\infty\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$收敛.

$0<p\le 1$时, $\int_1^\infty\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\mathrm{d}x$发散.

$1<p<2$时, $\int_1^\infty\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\mathrm{d}x$收敛.

定理 **7.3.4 (Abel).** 如果广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 函数 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 中单调有界, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 也收敛.

pf. g有界, 所以$\left|g(x)\right|\le c$, $\forall x\in[a,+\infty)$.

$\int f$收敛, 所以$\forall\epsilon>0$, $\exists M>0$, s.t. $\forall B>A>M$, $\left|\int_A^B f(x)dx\right|\le\frac{\epsilon}{2c}$.

$$\begin{aligned}\left|\int_A^B f(x)g(x)dx\right| &= \left|g(A)\int_A^\xi f(x)dx+g(B)\int_\xi^B f(x)dx\right|\\ &\leqslant c\left|\int_A^\xi f(x)dx\right|+c\left|\int_\xi^B f(x)dx\right|\\ &\leqslant c\frac{\epsilon}{2c}+c\frac{\epsilon}{2c}=\epsilon.\end{aligned}$$

例**7.3.7** 设 $a\geqslant 0$, 研究积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx$ 的敛散性.

pf. $e^{-ax}\searrow 0$, $\int_0^A\frac{\sin x}{x}$有界, 由Dirichlet判别法, $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}$收敛.

$e^{-ax}\searrow$有界, $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}$收敛, 由Abel判别法, $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}$收敛.

作业

5. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 中连续, 如果 $\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛, 则 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 绝对收敛. (提示: 用Cauchy不等式.)

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,A](A<\infty)$ 上均可积. 如果 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛, 且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$, 证明 $L=0$, 且 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 也收敛.

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 中单调递减, 且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 证明 $\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0$. (提示: 在区间 $[A/2,A]$ 上估计积分.)

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 中单调递减趋于零, 且 $\int_a^{+\infty}\sqrt{f(x)/x}dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛. (提示: 利用上题, 比较被积函数.)

pf. 取$\epsilon=1/2$, 则存在$X>a$, s.t. $\forall x>X$,

$$\frac{x}{2}\cdot\sqrt{\frac{f(x)}{x}}<\int_{x/2}^x\sqrt{\frac{f(t)}{t}}dt<\epsilon=\frac{1}{2},$$

即$\sqrt{xf(x)}<1$. 所以$f(x)<\sqrt{\frac{f(x)}{x}}$, $\forall x>X$.

9. 设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 如果 $x\to+\infty$ 时 $xf(x)$ 单调递减趋于零, 则

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)\ln x=0.$$

pf. 对于任意的$\epsilon>0$, 因为$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛, 则存在$M>\max(0,a)$, s.t. 对于任意的$x>M$, 有

$$xf(x)\int_{\sqrt{x}}^x\frac{1}{t}dt\le\int_{\sqrt{x}}^x tf(t)\cdot\frac{1}{t}dt=\int_{\sqrt{x}}^x f(t)dt<\frac{\epsilon}{2}.$$

即$xf(x)\ln x<\epsilon$.

10. 设 $f(x)>0$ 在 $[0,+\infty)$ 中连续, 且 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{f(x)}$ 收敛, 证明

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda}f(x)dx=+\infty.$$

pf. Cauchy不等式:

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{f(x)}\int_0^{\lambda}f(x)dx\ge\left(\int_0^{\lambda}dx\right)^2=\lambda^2.$$

11. 研究广义积分

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}dx\quad(p,q\in\mathbb{R})$$

的敛散性.

pf. $p>1$收敛, $p<1$发散.

$p=1$, $q>1$时收敛; $p=1$, $q\le1$时发散.

7.7.4 广义积分的例子

例**7.4.1** 求

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx dx,\qquad(a>0).$$

pf. 原函数可求

$$F(x)=-\frac{a\sin bx+b\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax},$$

$$I=F(\infty)-F(0)=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

令$b=n$, $a=1$,

$$\int_0^{\infty}e^{-x}\sin nx dx=\frac{n}{n^2+1},$$

所以

$$\int_0^{\infty}e^{-x}\frac{\sin nx}{n}dx=\frac{1}{n^2+1},$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}&=\int_0^{\infty}e^{-x}\left\langle\frac{\pi-x}{2}\right\rangle dx\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}e^{-x}\frac{\pi-(x-2k\pi)}{2}dx\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}e^{-(x+2k\pi)}\frac{\pi-x}{2}dx\\&=\int_0^{2\pi}\frac{e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}e^{-x}\frac{\pi-x}{2}dx\\&=\frac{1}{2}\frac{e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\cdot\left((\pi-1)+e^{-2\pi}(\pi+1)\right)=\frac{\pi\coth\pi-1}{2}.\end{aligned}$$

例**7.4.2** 求

$$I=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx,\qquad(0<r<1).$$

pf. 令$t=\tan\frac{x}{2}$, 则

$$I=\int_{\mathbb{R}}\frac{2(1-r^2)}{(1-r)^2+(1+r)^2t^2}dt=2\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}=2\pi.$$

另外注意

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}r^{|n|}e^{inx}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}.$$

例**7.4.3** 求

$$I=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^4}\,dx.$$

pf. $\alpha>1$. 取$x^{\alpha/2}=\tan t$, 则$x=(\tan t)^{2/\alpha}$.

$$I=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^{\alpha}}\,dx=\int_0^{\pi/2}\frac{2}{\alpha}(\tan t)^{2/\alpha-1}\,dt=\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{\alpha},1-\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\pi}{\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}}.$$

例**7.4.5** 求

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\,dx\qquad(n\geqslant 1).$$

pf. 令$x=\tan t$,

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^{\alpha}}\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^{2\alpha-2}t\,dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{2\alpha-1}{2}\right).$$

当$\alpha=n$时, $I=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$.

例**7.4.8** 求

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.$$

pf. 注意$\sin^2 nx-\sin^2(n-1)x=\sin x\cdot\sin[(2n-1)x]$, 则

$$\frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{\sin x}.$$

又注意

$$\sin(2n-1)x-\sin(2n-3)x=2\sin x\cos[2(n-1)x],$$
$$\sin(2n-1)x=2\sin x\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\cos 2kx\right),$$

所以

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2k-1)x}{\sin x}\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi/2}1+2\sum_{j=1}^{k-1}\cos 2jx\,dx=n\cdot\frac{\pi}{2}.$$

最后由Riemann Lebesgue引理

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx\\&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nx}{nx^2}\,dx\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nx}{n\sin^2 x}\,dx+\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nx}{n}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx\right)\\&=\frac{\pi}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

也可以不用Riemann Lebesgue引理, 需要用夹逼原理, 使用不等式

$$x-\frac{x^3}{3!}\leq\sin x\leq x,\qquad\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

则

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nx}{x^2}\,dx\leq\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\,dx=\frac{\pi}{2}\leq\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nx}{\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)^2}\,dx\\\leq\frac{1}{n}\int_0^{\delta}\frac{\sin^2 nx}{x^2}\left(1-\frac{\delta^2}{6}\right)^{-2}dx+\frac{1}{n}\int_{\delta}^{\pi/2}\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{(\pi/2)^2}{6}\right)^{-2}dx\qquad\forall\delta>0.\end{aligned}$$

由于

$$\frac{\pi}{2} \geq \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{x^2} dx \geq \left(1-\frac{\delta^2}{6}\right)^2 \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\int_\delta^{\pi/2} \frac{1}{x^2}\left(1-\frac{\pi^2}{24}\right)^{-2} dx\right], \qquad \forall \delta > 0.$$

所以

$$\frac{\pi}{2} \geq I \geq \left(1-\frac{\delta^2}{6}\right)^{-2} \frac{\pi}{2}, \qquad \forall \delta > 0.$$

同上面类似的过程有Dirichlet积分

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{(2n-1)\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{x} dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x} dx + \int_0^{\pi/2} \sin(2n-1)x \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) dx\right] = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

例**7.4.9.** 求Euler积分

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x dx.$$

pf.

$$\begin{aligned}I \xlongequal{x=2t} 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin 2t dt &= 2\int_0^{\pi/4} \ln 2 + \ln\sin t + \ln\cos t dt \\ &= 2\ln 2 \cdot \frac{\pi}{4} + 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin t dt + 2\int_0^{\pi/4} \ln\cos t dt \\ &= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I.\end{aligned}$$

所以$I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

7.7.5 作业

8. (Frullani积分)设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且对任意 $c>0$, 积分 $\int_c^{+\infty} \frac{f(x)}{x}$ 收敛, 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = f(0)\ln\frac{\beta}{\alpha}, \quad (\alpha, \beta > 0).$$

9. (Frullani积分) 设 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数, 如果对于任意 $b>a>0$, 积分 $\int_a^b \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛, 且

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = L, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = M,$$

则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = (L-M)\ln\frac{\beta}{\alpha}, \quad (\alpha, \beta > 0).$$

pf.

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^M \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx &= \int_{\alpha\epsilon}^{\alpha M} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{\beta\epsilon}^{\beta M} \frac{f(x)}{x} dx \\ &= \int_{\alpha\epsilon}^{\beta\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{\alpha M}^{\beta M} \frac{f(x)}{x} dx \qquad (\alpha < \beta) \\ &= \int_{\alpha\epsilon}^{\beta\epsilon} \frac{f(0) + o(1)}{x} dx - \int_{\alpha M}^{\beta M} \frac{f(\infty) + o(1)}{x} dx \\ &= L\ln\frac{\beta}{\alpha} - M\ln\frac{\beta}{\alpha}.\end{aligned}$$

9.5 如果f在$(0,+\infty)$上连续, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$存在, 且$\int_0^1 \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x$收敛, 则有

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} \mathrm{d}x = -f(+\infty)\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

10. 计算下列积分 $(a,b>0)$:
(1) $\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x^2}$;
(2) $\int_0^{+\infty}\frac{b\sin ax-a\sin bx}{x^2}dx$.
pf. (1) 注意到

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{e^x+1-1}{e^{2x}-1}-\frac{1}{2x}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{e^{2x}-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}\right).$$

如令$f(x)=\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}$, 则由Frullani积分,

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x^2}=f(0+)\ln 2=-\frac{1}{2}\ln 2.$$

7.8 数项级数

7.8.1 级数收敛与发散的概念

无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

其中

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+\cdots+a_n$$

称为级数的第n个部分和.

级数收敛的必要条件**:** 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则通项 $a_n\to 0,(n\to\infty)$. (否定表述)

级数收敛的**Cauchy**准则**:** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\epsilon)$, 当 $n>N$ 时

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}\right|<\varepsilon,\quad \forall p\geqslant 1.$$

(否定表述)

例 **8.1.2.** 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的敛散性.

例 **8.1.3.** 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的敛散性 (调和级数).

例 **8.1.4.** 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$ 的敛散性.
pf.

$$\sin(n+1)=\sin n\cdot\cos 1+\cos n\cdot\sin 1\Longrightarrow\cos n\to 0,\ n\to\infty$$

这与

$$\sin^2 n+\cos^2 n=1$$

矛盾.

例 **8.1.5.** 设 $q>0$, 则当 $q<1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ 收敛; $q\geqslant 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ 发散(几何级数).

Thm8.1.1 (1) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda a_n+\mu b_n\right)$ 也收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda a_n+\mu b_n\right)=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\mu\sum_{n=1}^{\infty}b_n,\quad(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$
(2) 级数的敛散性与其有限项的值无关.
3. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和为 S_n. 如果 $S_{2n}\to S$, 且 $a_n\to 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.
条件$a_n\to 0$不能舍去, 比如$1-1+1-1+1-1+\cdots$.
4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|$ 收敛, 则数列 $\{a_n\}$ 收敛. (提示: 用 Cauchy 准则.)
5. 设数列 na_n 收敛, 且级数 $\sum_{n=2}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也是收敛的.
6. 证明, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 也收敛. (提示: 用平均值不等式.)
8. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为发散级数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\min\{a_n,1\}$ 也发散.
hint: 反证法, 比Cauchy收敛准则的否定表述更好写证明过程.

7.8.2 正项级数收敛与发散的判别法

基本判别法　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow \{S_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow \{S_n\}$ 有上界.

定理 8.2.1 (比较判别法**).**　设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数, 如果存在常数 $M>0$, 使得

$$a_n \leqslant Mb_n, \quad \forall n \geqslant 1.$$

则 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

例 **8.2.3.**　判别 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$ 的敛散性.

解. 根据 Taylor 展开,

$$0 < \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] / \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故原级数收敛.

Cauchy判别法或根值判别法　如果n充分大时, $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

例 **8.2.4.**　设 $p \in \mathbb{R}$, 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{p}{n}\right)^{n^2}$ 的敛散性.

解. 因为

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1-\frac{p}{n}\right)^n \to e^{-p},$$

故 $p>0$ 时原级数收敛; $p<0$ 时级数发散. 显然, $p=0$ 时级数也发散.

d'Alembert判别法或比值判别法　如果n充分大时, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

例 **8.2.5.**　设 $x>0$, 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ 的敛散性.

解. 因为

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{x}{e},$$

故 $0<x<e$ 时级数收敛; $x>e$ 时级数发散. $x=e$ 时,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e/\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 1,$$

故此时级数也发散.

定理 8.2.2 (积分判别法**).**　设 $f(x)$ 是定义在 $[1,+\infty)$ 上的非负单调递减函数, 记 $a_n = f(n)$, $(n \geqslant 1)$. 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性与广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 的敛散性相同.

证明. 令

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt, \quad \forall x \geqslant 1.$$

因为 f 为单调递减函数, 故当 $n \leqslant x \leqslant n+1$ 时

$$a_{n+1} = f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n) = a_n,$$

这说明

$$a_{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant a_n,$$

从而有

$$S_n \leqslant a_1 + F(n), \quad F(n) \leqslant S_{n-1}.$$

其中 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 为级数的部分和. 因为 S_n 及 $F(n)$ 关于 n 都是单调递增的, 二者同时有界或无界, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 同敛散.

例 **8.2.6.** 设 $s \in \mathbb{R}$, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 的敛散性.

定理 **8.2.3 (Kummer).** 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数, 如果 n 充分大时

(1) $\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \geqslant \lambda > 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) $\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \leqslant 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

pf. (1) 条件可改写为

$$a_{n+1} \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right), \quad \forall n \geqslant N.$$

这说明当 $n \geqslant N$ 时

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_N + \sum_{k=N}^{n} a_{k+1} \\ &\leqslant S_N + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=N}^{n}\left(\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) \\ &= S_N + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) \\ &\leqslant S_N + \frac{1}{\lambda}\frac{a_N}{b_N} \end{aligned}$$

即 $\{S_n\}$ 有上界, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 由

$$\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \leqslant 0$$

可知

$$\frac{a_n}{b_n} \leqslant \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}},$$

即 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 关于 n 单调递增, 从而 $a_n \geqslant \frac{a_1}{b_1} b_n$, 因此由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

Kummer判别法推**d'Alembert**判别法 取$b_n = 1$, 则当n充分大, 有$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$时, 有

$$\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \geq \frac{1}{q} - 1 > 0,$$

所以由Kummer判别法有$\sum a_n$收敛. 当n充分大满足$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$时, 有

$$\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \leq 1 - 1 = 0,$$

再由Kummer判别法和$\sum 1$发散, 知$\sum a_n$发散.

Kummer判别法证明**Raabe**判别法 取$b_n = \frac{1}{n}$, 当n充分大时, 如果有$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq \mu > 1$, 则

$$\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \geq n\left(1 + \frac{\mu}{n}\right) - (n+1) = \mu - 1 > 0,$$

由Kummer判别法, $\sum a_n$收敛.

当n充分大时, 如果有$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, 则

$$\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \leq n\left(1 + \frac{1}{n}\right) - (n+1) = 0,$$

由Kummer判别法以及$\sum \frac{1}{n}$是发散的, 所以$\sum a_n$也发散.

Kummer判别法推出Gauss判别法 取$b_n=\frac{1}{n\ln n}$, 当$n>N$充分大时, 如果有$\theta>1$使得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\theta}{n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

则

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}&=n\ln n\left(1+\frac{\theta}{n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)-(n+1)\ln(n+1)\\&=(n+1)\ln n+(\theta-1)\ln n+o(1)-n\ln(n+1)-\ln(n+1)\\&=(\theta-1)\ln n+o(1)-(n+1)\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&\geq(\theta-1)\ln N>0\end{aligned}$$

所以$\sum a_n$收敛; 当$n>N$充分大时, 如果有$\theta\leq1$使得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\theta}{n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

则

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}&=n\ln n\left(1+\frac{\theta}{n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)-(n+1)\ln(n+1)\\&=(n+1)\ln n+(\theta-1)\ln n+o(1)-n\ln(n+1)-\ln(n+1)\\&=(\theta-1)\ln n+o(1)-(n+1)\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&\leq0\end{aligned}$$

由Kummer判别法以及$\sum\frac{1}{n\ln n}$发散, 所以$\sum a_n$也发散.

例 **8.2.8.** 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}$, $(\alpha>0)$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^s\cdot\frac{1}{2n+1}$.

例 **8.2.9 (Cauchy 凝聚判别法).** 设 a_n 单调递减趋于零. 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛当且仅当 $\sum_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}$ 收敛.

6. 设 $a_n>0$, $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 证明

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 总是收敛的;

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 收敛当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

$$\sum\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^2}\leq\sum\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}};$$

$$\sum\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}\leq\frac{1}{\sqrt{a_1}}\sum a_n;$$

$$\sum\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}=\sum\left(\sqrt{S_n}-\frac{S_{n-1}}{\sqrt{S_n}}\right)\geq\sum\left(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}\right)$$

7. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 试用积分判别法证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_n}$ 也发散, 其中 S_n 为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和.

hint1: 取$\epsilon=\frac{1}{2}$, 则对于任何n, 存在$m>n$, s.t. $S_{m+1}>2S_n$. 则

$$\sum_{k=n}^{m}\frac{a_{k+1}}{S_k}\geq\sum_{k=n}^{m}\frac{a_{k+1}}{S_{k+1}}\geq\frac{\sum_{k=n}^{m}a_{k+1}}{S_{m+1}}=\frac{S_{m+1}-S_n}{S_{m+1}}\geq\frac{1}{2}=\epsilon,$$

由Cauchy收敛判别法即得.

hint2:

$$\frac{a_{n+1}}{S_n}=\frac{S_{n+1}-S_n}{S_n}\geq\int_{S_n}^{S_{n+1}}\frac{dx}{x}.$$

8. 判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$;
(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}\quad(p>0,q>0)$;
(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$;
(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2})\cdots(a+\sqrt{n})}(a>0)$.
9. 设 $a_n>0, S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 证明
(1) 当 $\alpha>1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 总是收敛的;
(2) 当 $\alpha\leqslant 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.
(1) hint: $\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^{\alpha}}\le\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{dx}{x^{\alpha}}, (\alpha>1)$.
(2) hint: 如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 类似第7题的证明.
10. 设 $a_n>0$ 关于 n 单调递增. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛当且仅当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right);$$

Sapagof 判别法**:** 设正数数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 发散。

上述断言等价于: 单调递增数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 同敛散.

由此可以得到: 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 n 项部分和为 S_n, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 同敛散.

设 $p>1$, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 n 项部分和为 S_n, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$ 始终是收敛的.

11. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{\alpha_n}{n\ln n}.$$

如果 n 充分大时 $\alpha_n\geqslant\mu>1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收玫; 如果 n 充分大时 $\alpha_n\leqslant 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. 这个结果称为 Bertrand 判别法.

hint: 取$b_n=\frac{1}{n\ln n}$, 则

$$\frac{1}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}=\alpha_n-1+o(1).$$

然后用Kummer判别法.

17. 设 $a_n>0, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 也收敛.
hint: 将a_n递增重排.
以上收敛判别法列表也可以参考:
https://en.wikipedia.org/wiki/Convergence_tests
至今, 这些收敛判别法全部失效的正项级数是存在的, 比如Flint Hills级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\sin^2 n}$$

它的收敛性涉及到π的无理测度的大小, 见
https://math.stackexchange.com/questions/162573

7.8.3 一般级数收敛与发散判别法

级数是正负交替出现的称为交错级数

定理 **8.3.1 (Leibniz).** 设 a_n 单调递减趋于 0 , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.
pf. 使用Cauchy收敛准则.

$$\begin{aligned}S_{n+p}-S_n&=(-1)^n\cdot a_{n+1}+(-1)^{n+1}a_{n+2}+\cdots+(-1)^{n+p-1}a_{n+p}\\&=(-1)^n\left[a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+3}-a_{n+4}+\cdots+(-1)^{p-1}a_{n+p}\right].\end{aligned}$$

因此当 $p=2k-1$ 时,

$$\begin{aligned}(-1)^n\left(S_{n+p}-S_n\right)&=a_{n+1}-(a_{n+2}-a_{n+3})-(a_{n+4}-a_{n+5})-\cdots\leqslant a_{n+1},\\(-1)^n\left(S_{n+p}-S_n\right)&=(a_{n+1}-a_{n+2})+(a_{n+3}-a_{n+4})+\cdots+a_{n+2k-1}\\&\geqslant 0\end{aligned}$$

这说明

$$\left|S_{n+p}-S_n\right|\leqslant a_{n+1}\to 0,\quad(n\to\infty).$$

当 $p=2k$ 时, 类似地可证上式仍成立. 因此原级数收敛.

例 **8.3.1.** 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛.

引理 **8.3.2** (分部求和). 设 $\{a_k\},\{b_k\}$ 为数列, 则

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k)+\sum_{k=m}^{n-1} b_k(a_{k+1}-a_k)=a_nb_n-a_mb_m.$$

推论 **8.3.3 (Abel** 变换**).** 设 $a_i,b_i(i\geqslant 1)$ 为两组实数, 如果约定 $b_0=0$, 记

$$B_0=0, B_k=b_1+b_2+\cdots+b_k \quad (k\geqslant 1),$$

则有

$$\sum_{i=m+1}^{n} a_ib_i=\sum_{i=m+1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})B_i+a_nB_n-a_{m+1}B_m, \quad \forall m\geqslant 0.$$

推论 **8.3.4 (Abel** 引理**).** 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为单调数列, 且 $|B_i|\leqslant M$, $(i\geqslant 1)$, 则

$$\left|\sum_{i=m+1}^{n} a_ib_i\right|\leqslant 2M(|a_n|+|a_{m+1}|), \quad \forall m\geqslant 0.$$

定理 **8.3.5 (Dirichlet).** 设数列 $\{a_n\}$ 单调趋于 0 , 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和有界, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 收敛.

证明**.** 由假设, 存在 $M>0$ 使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i\right|\leqslant M, \quad \forall n\geqslant 1.$$

由 Abel 变换及其推论,

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_ib_i\right|\leqslant 2M\left(|a_{n+1}|+\left|a_{n+p}\right|\right)\leqslant 4M|a_{n+1}|\to 0.$$

由 Cauchy 准则知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 收敛.

定理 **8.3.6 (Abel).** 如果 $\{a_n\}$ 为单调有界数列, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 收敛.

证明**.** $\{a_n\}$ 单调有界意味着极限 $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ 存在. 于是 $\{a_n-a\}$ 单调趋于 0 . 由 Dirichlet 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a)b_n$ 收敛. 从而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a)b_n+\sum_{n=1}^{\infty} a\cdot b_n$$

也收敛.

例 **8.3.3.** 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$ 的敛散性.

解. $a_n=\frac{1}{n}$ 单调递减趋于 $0, b_n=\sin nx$. 利用公式

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin kx=\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x$$

得

$$\sum_{k=1}^{n} b_n=\begin{cases}0, & x=2k\pi,\\ \frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}, & x\neq 2k\pi.\end{cases}$$

即 b_n 的部分和总是有界的. 故由 Dirichlet 判别法知, 原级数收敛.

定义 **8.3.1** (绝对收敛). 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛 (此时, 由于

$$\left|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}\right|\leqslant|a_{n+1}|+\cdots+\left|a_{n+p}\right|\to 0,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的确为收敛级数). 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

例 **8.3.5.** 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, $(x\in\mathbb{R})$, 的敛散性.

解. 令 $a_n=\frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n}\to|x|$. 故 $|x|<1$ 时原级数绝对收敛; 而 $|x|>1$ 时显然发散. $x=1$ 时级数条件收敛; $x=-1$ 时级数发散.

作业

6. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛, $\{b_n\}$ 为有界数列, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 也是绝对收敛的.

6'. 证明或否定: 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, $\{b_n\}$ 为有界数列, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 也是收敛的.

7. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$ 是否也收敛? 证明你的结论.
比如

$$a_n=\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{\sqrt[3]{n}}.$$

8. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|$ 收敛且 a_n 极限为零, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和有界, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛. (提示: Abel 求和.)

9. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 也收敛. (用Abel求和)

10. 设 $\{a_n\}$ 单调递减趋于零. 证明下面的级数是收敛的:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

用9.

11. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0.$$

考虑把a_n用部分和S_n表示的问题. 或者使用$\epsilon-N$法+Abel变换.
本题不能使用Stolz公式, 因为有反例如下:

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{m^2}, & n=m^2;\\ \frac{1}{n^3}, & n\neq m^2.\end{cases}$$

12. 设 $a_n>0$, na_n 单调趋于 0, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 证明 $n\ln n\cdot a_n\to 0$.
类比下题:

9. 设 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 如果 $x\to+\infty$ 时 $xf(x)$ 单调递减趋于零, 则

$$\lim_{x\to+\infty}xf(x)\ln x=0.$$

pf. 对于任意的$\epsilon>0$, 因为$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛, 则存在$M>\max(0,a)$, s.t. 对于任意的$x>M$, 有

$$xf(x)\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{1}{t}dt\le\int_{\sqrt{x}}^{x}tf(t)\cdot\frac{1}{t}dt=\int_{\sqrt{x}}^{x}f(t)dt<\frac{\epsilon}{2}.$$

即$xf(x)\ln x<\epsilon$.

7.8.4 数项级数的进一步讨论

级数求和与求极限的可交换性

定义 **8.4.1 (级数的一致收敛).** 一列收敛级数 $\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}=A_i$ 关于 i 一致收敛是指, 任给 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}-A_i\right|<\varepsilon,\quad\forall i\geqslant 1.$$

当且仅当有Cauchy准则: $\forall\epsilon>0,\exists N$, 当$m,n>N$时,

$$\left|\sum_{j=n}^{m}a_{ij}\right|<\varepsilon,\quad\forall i\geqslant 1.$$

给出级数一致收敛的否定表述.

定理 8.4.1. 设一列级数 $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = A_i$ 关于 i 一致收敛, 如果 $\lim_{i\to\infty} a_{ij} = a_j$ $(j \geqslant 1)$, 则极限 $\lim_{i\to\infty} A_i$ 存在, 级数 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ 收敛, 且

$$\lim_{i\to\infty} A_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$$

或改写为

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{i\to\infty} a_{ij}.$$

pf: 1. $\sum_{j\geq 1} a_j$收敛

证明. 由一致收敛的定义, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0, 当 $n \geqslant N_0$ 时,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} - A_i\right| < \frac{1}{4}\varepsilon, \quad \forall i \geqslant 1.$$

因此, 当 $m > n \geqslant N_0$ 时

$$\left|\sum_{j=n+1}^{m} a_{ij}\right| \leqslant \left|\sum_{j=1}^{m} a_{ij} - A_i\right| + \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} - A_i\right| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall i \geqslant 1.$$

在上式中令 $i \to \infty$, 得

$$\left|\sum_{j=n+1}^{m} a_j\right| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon,$$

由 Cauchy 准则即知级数 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ 收敛, 且在上式中令 $m \to \infty$ 可得

$$\left|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j\right| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall n \geqslant N_0$$

2. 证$\lim_{i\to\infty} A_i = \sum_{j\geq 1} a_j$.

对于 $j = 1, 2, \cdots, N_0$, 因为 $a_{ij} \to a_j$, 故存在 N, 当 $i > N$ 时,

$$|a_{ij} - a_j| < \frac{\varepsilon}{4N_0}, \quad j = 1, 2, \cdots, N_0.$$

因此, 当 $i > N$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|A_i - \sum_{i=1}^{\infty} a_j\right| &\leqslant \left|A_i - \sum_{j=1}^{N_0} a_{ij}\right| + \left|\sum_{j=1}^{N_0} a_{ij} - \sum_{j=1}^{N_0} a_j\right| + \left|\sum_{j=N_0+1}^{\infty} a_j\right| \\ &< \frac{1}{4}\varepsilon + N_0\frac{\varepsilon}{4N_0} + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon\end{aligned}$$

这说明 $\{A_i\}$ 的极限存在且极限为 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

推论 8.4.2. (控制收敛定理) 设 $\lim_{i\to\infty} a_{ij} = a_j (j \geqslant 1)$, $|a_{ij}| \leqslant b_j (i \geqslant 1)$, 且 $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ 收敛(控制级数), 则级数 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ 收敛, 且

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{i\to\infty} a_{ij} = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}.$$

证明. 由 $a_{ij} \to a_j$, 且 $|a_{ij}| \leqslant b_j$ 知 $|a_j| \leqslant b_j$, $j = 1, 2, \cdots$. 因为级数 $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ 收敛, 故级数 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ 绝对收敛. 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时,

$$0 \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j < \varepsilon.$$

此时, 对任意 $i \geqslant 1$, 有

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} - \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right| = \left|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{ij}\right| \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j < \varepsilon,$$

从而级数 $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ 关于 i 是一致收敛的. 由上一定理知本推论结论成立.

推论 8.4.3. (Fubini) 设 $\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|\leqslant A_j(j\geqslant 1)$, 且 $\sum_{j=1}^{\infty}A_j$ 收敛, 则对任意 $i\geqslant 1$, 级数 $\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}$ 收敛, 且

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}.$$

证明. 1. 首先, 由题设知, $|a_{ij}|\leqslant A_j$, $j=1,2,\cdots$. 这说明, 对任意 $i\geqslant 1$, 级数 $\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}$ 是绝对收敛的.

2. 因为

$$\left|\sum_{i=1}^{k}a_{ij}\right|\leqslant\sum_{i=1}^{k}|a_{ij}|\leqslant A_j,\quad j\geqslant 1.$$

故$(\sum_{i=1}^{k}a_{ij})_{kj}$满足上一推论, 有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}&=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\\&=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}a_{ij}\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}a_{ij}\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}.\end{aligned}$$

这就证明了本推论.

上述推论的条件中$\sum_{i\geq 1}|a_{ij}|$的绝对值不能省去, 比如设

$$a_{ij}=\begin{cases}\frac{1}{2^{j-i}}, & j>i;\\ -1, & i=j;\\ 0, & j<i.\end{cases}$$

也即

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \cdots\\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \cdots\\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}.$$

则

$$\sum_{i\geq 1}a_{ij}=-\frac{1}{2^{j-1}},\qquad \sum_{j\geq 1}a_{ij}\equiv 0\implies 0=\sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1}a_{ij}\neq\sum_{j\geq 1}\sum_{i\geq 1}a_{ij}=-2.$$

例 8.4.1. 设 $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|$ 收敛, 记 $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n$, $x\in[-1,1]$. 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}a_n\zeta(n),$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann-Zeta 函数.

证明.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|a_n|}{m^n}\leq\frac{1}{m^2}\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\Longrightarrow\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|a_n|}{m^n}\leq\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m^2}\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\right)<+\infty.$$

由Fubini定理, $\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_n}{m^n}$收敛, 且

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_n}{m^n}&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{m^n}=\sum_{m=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{m}\right)\\&=\sum_{n=2}^{\infty}a_n\zeta(n).\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\zeta(n)=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{m^n}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{m^n}\cdot\frac{1}{2^n}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^2m^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2m}}$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}\right)=\ln 2.$$

级数的乘积

设$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=0}^{\infty}b_n$之积为$\sum_{n=0}^{\infty}c_n$, 称为Cauchy乘积

$$c_n=\sum_{i+j=n}a_ib_j,\qquad n\ge 0.$$

定理 **8.4.4 (Cauchy).** 如果 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ 绝对收敛, 则它们的乘积级数也绝对收敛, 且

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right).$$

定理 **8.4.5 (Mertens).** 如果 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ 收敛, 且至少其中一个级数绝对收敛, 则它们的乘积级数也收敛, 且

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right).$$

证明**.** 不妨设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 绝对收敛. 分别记

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k,\quad B_n=\sum_{k=0}^{n}b_k,\quad C_n=\sum_{k=0}^{n}c_k.$$

则 $A_n\to A$, $B_n\to B$, 而

$$C_n=\sum_{i+j\leqslant n}a_ib_j=a_0B_n+a_1B_{n-1}+\cdots+a_nB_0=A_nB+\delta_n,$$

其中

$$\delta_n=a_0(B_n-B)+a_1(B_{n-1}-B)+\cdots+a_n(B_0-B).$$

我们只要证明 $\delta_n\to 0$ 即可. 因为 $B_n\to B$, 故 $\{B_n\}$ 关于 n 有界, 从而存在 K, 使得

$$|B_n-B|\leqslant K,\quad \forall n\geqslant 0.$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 绝对收敛, 故任给 $\varepsilon>0$, 存在 N_0, 当 $n>N_0$ 时

$$\left|a_{N_0+1}\right|+\cdots+|a_n|<\frac{\varepsilon}{2K+1}.$$

记 $L=|a_0|+|a_1|+\cdots+\left|a_{N_0}\right|$. 由于 $B_n-B\to 0$, 故存在 N_1, 当 $n>N_1$ 时

$$|B_n-B|<\frac{\varepsilon}{2L+1}.$$

从而当 $n>N_0+N_1$ 时, 有

$$\begin{aligned}|\delta_n|&\leqslant\sum_{k=0}^{N_0}|a_k||B_{n-k}-B|+\left(\left|a_{N_0+1}\right|+\cdots+|a_n|\right)K\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2L+1}\left(|a_0|+|a_1|+\cdots+\left|a_{N_0}\right|\right)+\frac{\varepsilon}{2K+1}K\\&=\frac{\varepsilon}{2L+1}L+\frac{\varepsilon}{2K+1}K\\&<\varepsilon\end{aligned}$$

这说明 $\delta_n\to 0$, 因而 $C_n=A_nB+\delta_n\to AB$.

注. 定理中的绝对收敛的条件不能去掉, 反例就是将 a_n 和 b_n 均取为交错级数 $(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$, 此时所得乘积级数是发散的. 但是, 如果乘积级数仍然收敛, 则其和等于两个级数和的乘积. 为了说明这一点, 需要下面的引理.

引理 **8.4.6 (Abel).** 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = C$ 收敛, 令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in [0,1),$$

则 $\lim_{x\to 1^-} f(x) = C$.

证明**.** 级数收敛表明 $\{c_n\}$ 有界, 因此当 $x \in [0,1)$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 绝对收敛. 记

$$C_{-1} = 0, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k, \quad n \geqslant 0.$$

则有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} c_k x^k &= \sum_{k=0}^{n} (C_k - C_{k-1})\, x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_k x^k - x \sum_{k=0}^{n-1} C_k x^k \\
&= C_n x^n + (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} C_k x^k \\
&= C_n x^n + C\left(1 - x^n\right) + (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} (C_k - C)\, x^k.
\end{aligned}$$

在上式中令 $n \to \infty$ 就得到

$$f(x) = C + (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (C_k - C)\, x^k.$$

因为 $C_k - C \to 0$, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $k > N$ 时

$$|C_k - C| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

令 $M = \sum_{k=0}^{N} |C_k - C|$, 则有估计

$$|f(x) - C| \leqslant M(1-x) + (1-x) \sum_{k=N+1} \frac{1}{2}\varepsilon x^k \leqslant M(1-x) + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

因此, 当 $0 < 1 - x < \frac{\varepsilon}{2M+1}$ 时,

$$|f(x) - C| \leqslant M \frac{\varepsilon}{2M+1} + \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

这说明 $\lim_{x\to 1^-} f(x) = C$.

定理 **8.4.7 (Abel).** 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 以及它们的乘积 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 均收敛, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

证明. 当 $x \in [0,1)$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 绝对收敛, 它们的乘积级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. 根据 Cauchy 定理, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right).$$

令 $x \to 1^-$, 由上述 Abel 引理即得欲证结论.

乘积级数

将$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$称为无穷乘积, 记部分乘积$P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k$, $(n \geq 1)$. 当$\lim_{n\to\infty} P_n$有限且非零时, 称无穷乘积收敛, 否则称它发散.

命题 **8.4.8.** 设 $p_n > 0, \forall n \geqslant 1$. 则

(1) 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛当且仅当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛, 且

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n};$$

(2) 记 $p_n = 1 + a_n$. 如果 n 充分大时 $a_n > 0$ (或 $a_n < 0$), 则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛当且仅当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(3) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 均收敛, 则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 也收敛.

证明. (1) 是显然的. (2) 只要利用

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1$$

以及数项级数的比较判别法即可.

(3) 则是利用 (a_n 不为零时)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[a_n-\ln(1+a_n)]}{a_n^2}=\frac{1}{2}$$

以及(1).

级数重排

定理 8.4.9 (Riemann). 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为条件收敛的级数, 则可以将它重排为一个收敛级数, 使得重排后的级数和为任意指定的实数.

例. 求证:

$$\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\cdots=\ln\left(2\sqrt{2}\right).$$

这说明

$$\begin{aligned}\ln 2 &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\cdots+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\cdots\\ &\cancel{=}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\cdots\\ &=\ln\left(2\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

Chapter 8

实变函数

问题 8.0.1

构造一个从$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$到$\mathbb{R}$的单射.

解. This is slightly more complicated. If you understand why $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ and $2^{\mathbb{N}}$ have the same cardinality, it's enough to observe that the map defined above had range $2^{\mathbb{N}}$; if you haven't seen that yet, then here's a straightforward (if somewhat unnatural) injection: given $\alpha = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, let $f(\alpha)$ be the real with binary expansion

$$0.0\ldots010\ldots010\ldots01\ldots$$

where the ith block of zeroes has length $a_i + 1$. □

问题 8.0.2

设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$是$E = [a,b]$上实函数列, 满足: $f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_n(x) \le \cdots$, 且$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in E$. 求证: 对任意$c \in \mathbb{R}$,

(I) $E(f(x) > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c)$.

(II) $E(f(x) \le c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) \le c)$.

解. (I). 对于任意的$x_0 \in E(f(x) > c)$, 有$f(x_0) > c$且$x_0 \in E$, 因为$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, 所以存在$n_0$, 使得$f_{n_0}(x_0) > c$, 故$x_0 \in E(f_{n_0}(x_0) < c)$, 于是$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c)$. 反之, 若$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c)$, 则存在$n_0$, 使得$f_{n_0}(x_0) > c$且$x_0 \in E$, 由单调性, $f(x_0) \ge f_{n_0}(x_0) > c$. 故$x_0 \in E(f(x) > c)$, 得证.

(II). 对(I)式取基本集$E = [a,b]$上的补集. □

问题 8.0.3

设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$为一列集合, 定义

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \{x : x\text{属于}A_n(n\ge 1)\text{中的无穷多个}\};$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \{x : x\text{至多不属于}A_n(n\ge 1)\text{中的有限个}\};$$

试证:

(I) $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

(II) $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.

解. (I). 由定义

$$\begin{aligned}
x\in\limsup_{n\to\infty}A_n &\Longleftrightarrow x\text{属于}A_n(n\geq 1)\text{中的无穷多个}\\
&\Longleftrightarrow \forall n\geq 1,\text{总有}k_n\geq n\text{使}x\in A_k\\
&\Longleftrightarrow \forall n\geq 1,\text{有}x\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\\
&\Longleftrightarrow x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k.
\end{aligned}$$

(II).

$$\begin{aligned}
x\in\liminf_{n\to\infty}A_n &\Longleftrightarrow \exists n_0\text{使}x\in A_k(k\geq n)\\
&\Longleftrightarrow \exists n_0\text{使}x\in\bigcap_{k=n_0}^{\infty}A_k\\
&\Longleftrightarrow x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.
\end{aligned}$$

□

问题 8.0.4

(I) 若$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$, 则$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$.

(II) 若$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$, 则$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$.

解. (I) 由条件, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$单调上升, 有$\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=A_n(\forall n\geq 1)$, 于是$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\supset\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$. 即$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\liminf_{n\to\infty}A_n\supset\limsup_{n\to\infty}A_n\supset\liminf_{n\to\infty}A_n$.

(II). 用对偶律. □

问题 8.0.5

设$A\subset\mathbb{R}$且被开区间集$G=\{I_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$所覆盖, 证明存在$G$的可列子集$G^*$覆盖$A$.

解. 对于任意的$x\in A$, 由条件存在$I_x\in G$, $x\in I_x$, 因为x为I_x的内点, 则有x的邻域$V_\delta(x)\subset I_x$且$V_\delta(x)$的端点均为有理数. 于是$\{V_\delta(x):x\in A\}$覆盖A且至多可列. 不妨设$\{V_\delta(x):x\in A\}=\{V_1,V_2,\cdots,V_n,\cdots\}$, 而由$V_n$的构造可在$G$中找到对应的$I_n$. 于是$G^*=\{I_1,I_2,\cdots,I_n,\cdots\}$即为所求. □

问题 8.0.6

E_n是$\mathbb{R}$上单调降的可测集列, 对于任意的$n\in\mathbb{N}$, 均有$E_{n+1}\supset E_n$, 且$m(E_1)<+\infty$, 则$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\lim_{n\to\infty}m(E_n)$.

解. 让$E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$, $F_k=E_k-E_{k+1}$, 则$E_1-E=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$, 且$F_k$两两不交, 则

$$m(E_1)-m(E)=m(E_1-E)=\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k-E_{k+1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(mE_k-mE_{k+1})=mE_1-\lim_{n\to\infty}mE_n.$$

所以$\lim_{n\to\infty}mE_n=m(E)$. 其中$m(E_1)<+\infty$不能省, 如取$E_n=(-n,n)^c$. □

问题 8.0.7: 等测覆盖定理

证明: 对任意集合$A\subset\mathbb{R}$恒有G_δ型集G, 使$G\supset A$且$mG=m^*A$

解. 任取$\varepsilon_n=\frac{1}{n}$, 由外测度定义及下确界定义知, 必有开区间集列$\{I_k^{(n)}:k=1,2,\cdots\}$满足

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k^{(n)}\text{且}\sum_{k=1}^{\infty}m(I_k^{(n)})<m^*A+\frac{1}{n}.$$

令$G_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k^{(n)}$, $G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$, 则由外测度次可列可加性, $m(G_n)\le\sum_{k=1}^{\infty}m(I_k^{(n)})<m^*(A)+\frac{1}{n}$. 显然$G_n$为开集. G为G_δ型集, 且$A\subset G\subset G_n$, $(n=1,2,\cdots)$. 故有

$$m^*(A)\le m^*G\le m^*G_n<m^*(A)+\frac{1}{n}.$$

于是$mG=m^*G=m^*A$. □

问题 8.0.8: 等测核心定理

证明: 若A为有界(有界可去掉)可测集, 必有F_σ型集F, 使$F\subset A$且$mF=mA$.

解. 存在$E=[\alpha,\beta]\supset A$, 设$S=E-A$, 由8.0.7, 存在$G_\delta$型集$G$使$G\supset S$, $m^*S=mG$, $G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$, G_n开, 令$F_n=E-G_n$, 则F_n闭, 令$F=E\cap G^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\cap G_n^c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, 故$F$为$F_\sigma$型集, 且$F=E\cap G^c=E-G\subset E-S\subset A$, 及

$$mF=m(E\cap G^c)=m(E-G)\ge mE-mG=mE-m^*S=mE-m^*(E-A)=m_*A=mA, F\subset A\Rightarrow mF\le mA.$$

所以$mF=mA$. □

问题 8.0.9

设E可测, $mE<+\infty$, 证明: $\forall\varepsilon>0$, 有闭集F使$F\subset E$且$m(E-F)<\varepsilon$.

解. 由等测核心定理, 存在$F\in F_\sigma$型集, 使$F\subset E$且$mE=mF$, 设$F=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$, F_k闭, 记$S_n=\bigcup_{k=1}^{n}F_k$, 则S_n闭且$S_n\subset E$, 由S_n单调且$F=\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_n$, 所以$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$使得当$n>N$时, 有$mE-mS_n<\varepsilon$, 而$S_n\subset E$, $mS_n<+\infty$得证. □

问题 8.0.10

设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$是可测集$E$上定义的可测函数列, 证明$\sup_n f_n(x)$与$\inf_n f_n(x)$都是$E$上可测函数.

解. 其实$E(\sup_n f_n(x)>c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n(x)>c)$, 只证$LHS\subset RHS$. 若$x_0\in LHS$, 则$\sup_n f_n(x_0)>c$, 记$\varepsilon=\sup_n f_n(x_0)-c$, 则对于任意的$\delta\in(0,\varepsilon)$, 存在$N$使得$f_N(x_0)>\sup_n f_n(x_0)-\delta>c$, 所以$x_0\in\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n(x)>c)$. □

问题 8.0.11

设$mE\ne0$, f在E上可积, 若对任何有界可测函数$\varphi(x)$, 都有$\int_E f\varphi\,\mathrm{d}x=0$, 则$f=0$, $a.e.E$.

解. 取$\varphi(x)=(\chi_{E(f\ge0)}-\chi_{E(f<0)})(x)$, 则$0=\int_E f\varphi\,\mathrm{d}x=\int_E|f|\,\mathrm{d}x$, 即得. □

问题 8.0.12

设$mE<+\infty$, $f(x)$在E上可积, E_n单调上升可测, $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f\,\mathrm{d}x=\int_E f\,\mathrm{d}x.$$

解. 因E_n可测, 所以E可测, 令$F_1=E_1$, $F_2=E_2-E_1,\cdots,F_n=E_n-E_{n-1},\cdots$, 则$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, 且对任意$i\ne j$, $F_i\cap F_j=\emptyset$. 于是

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\cup F_n}f\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{F_n}f\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{F_k}f\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{\cup_{k=1}^{n}F_k}f\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f\,\mathrm{d}x.$$

□

问题 8.0.13

证明:

$$(L)\int_0^1\frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(p+k)^2},\quad(p>-1).$$

解. 让$f(x)=\frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{p+n-1}\ln\frac{1}{x}$, 用Levi定理, $(L)\int_0^1 f\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(L)\int_0^1 x^{p+n-1}\ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. □

问题 8.0.14

试证, 当f在$(a,+\infty)$上有界, 非负, (R)可积时, 则f在$(a,+\infty)$上(L)可积, 且

$$(L)\int_{(0,+\infty)} f\,\mathrm{d}x=(R)\int_a^{\infty} f\,\mathrm{d}x.$$

解. 由f有界(R)可积, 对任一有限区间(a,A)有$(L)\int_{(a,A)} f\,\mathrm{d}x=(R)\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$. 于是

$$(L)\int_{(a,+\infty)} f\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to\infty}(L)\int_{(a,A)} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to\infty}(R)\int_a^A f\,\mathrm{d}x=(R)\int_a^{\infty} f\,\mathrm{d}x<+\infty,$$

即得. □

问题 8.0.15

$f,|f|$在$(a,+\infty)$上有界, (R)可积, 则f在$(a,+\infty)$上(L)可积, 且

$$(L)\int_{(a,+\infty)} f\,\mathrm{d}x=(R)\int_a^{\infty} f\,\mathrm{d}x.$$

解. 由8.0.14知, $|f|$在$(a,+\infty)$上(R)可积, 有$|f|$在$(a,+\infty)$上(L)可积, 且积分值相等, 于是(取$E=(a,+\infty)$)

$$(L)\int_E f^+\,\mathrm{d}x\le(L)\int_E |f|\,\mathrm{d}x=(R)\int_E |f|\,\mathrm{d}x<+\infty.$$

同理$(L)\int_E f^-\,\mathrm{d}x<+\infty$. 则$f^+,f^-$的$(L)$积分和$(R)$积分相等. 从而$f$的$(L)$积分和$(R)$积分相等.

反例, $|f|$在E上(R)可积不可省, 否则考虑$\frac{\sin x}{x}$在$(0,+\infty)$上(R)可积, 但

$$(L)\int_{(0,+\infty)}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x=(R)\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x=+\infty.$$

从而$\frac{\sin x}{x}$在$(0,+\infty)$上必(L)不可积. □

Chapter 9

泛函分析

问题 9.0.1

设$X=\{f(z): f$在$|z|<1$内解析, 且在$|z|\le 1$上连续$\}$, 令

$$d(f,g)=\max_{|z|=1}|f(z)-g(z)|,\quad f,g\in X.$$

求证: (X,d)是度量空间.

解. 正则性: $d(f,g)=0 \Longleftrightarrow \max_{|z|=1}|f(z)-g(z)|=0$, 而由最大模原理对于任意的$|z|\le 1$, 有$|f(z)-g(z)|\le \max_{|z|=1}|f(z)-g(z)|=0$, 所以$f\equiv g, \forall |z|\le 1$. □

问题 9.0.2

求证: $l^1 \subsetneqq l^p \subsetneqq l^q \subsetneqq c \subsetneqq l^\infty$, $(1<p<q<+\infty)$.

问题 9.0.3

求证: $C[a,b] \subsetneqq L^\infty[a,b] \subsetneqq L^p[a,b] \subsetneqq L^q[a,b] \subsetneqq L[a,b]$, $(1<q<p<+\infty)$.

问题 9.0.4

$x,y\in\mathbb{R}^n$或l^1, $x=(\xi_i)$, $y=(\eta_i)$,

$$d_p(x,y)=\left(\sum|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{1/p}.$$

则$d_p(x,y)\ge d_q(x,y)$, $\forall 1\le p\le q<+\infty$.

问题 9.0.5

设$X(n)=\{P(D)=p_nD^n+p_{n-1}D^{n-1}+\cdots+p_1D+p_0: p_n,\cdots,p_0\in\mathbb{R}\}$, 其中$D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 令

$$d(P(D),Q(D))=\sum_{i=0}^{n}|p_i-q_i|$$

其中$Q(D)=\sum_{i=0}^{n}q_iD^i$, $D^0=1$, 求证: $(X(n),d)$是度量空间.

问题 9.0.6

求证: 若$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$满足

(I) $\rho(x,x) = 0, \forall x \in X, \rho(x,y) > 0, \forall x \neq y$.

(II) $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(y,z), \forall x,y,z \in X$.

则(X,ρ)是度量空间.

问题 9.0.7

求证: 度量空间中的闭球,

$$V[x_0,r] = \{x \in X : d(x,x_0) \le r\}, r > 0, x_0 \in X$$

总是闭集, 球面$S(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0) = r\}$也是闭集, 试问: 是否恒有$V[x_0,r] = \overline{V(x_0,r)}$, 及$V[x_0,r] - V(x_0,r) = S(x_0,r) \neq \emptyset$?

解. 通常的离散拓扑, 取$r = 1$. □

问题 9.0.8

设$A \subset (X,d)$, 令$F(x) = d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y)$, 求证: $F : X \to \mathbb{R}$是连续泛函且一致连续.

解. 设$x_1,x_2 \in X$, 由$d(x_1,A) \le d(x_1,x_2) + d(x_2,A) \implies |F(x_1) - F(x_2)| \le d(x_1,x_2)$, 于是$F(x)$是$X$上 Lipschitz 连续的, 从而一致连续. □

问题 9.0.9

求证: $K : C[a,b] \to C[a,b]$, $x(t) \mapsto \int_a^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$一致连续.

解. $\|Kx - Ky\|_C = \max_{t\in[a,b]} \left|\int_a^t (x(\tau) - y(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right| \le (b-a)\|x-y\|_C$. □

问题 9.0.10

设E_1, E_2为赋范空间X的子集, 则

(1) 若E_1紧, E_2闭, 则$E_1 + E_2$闭.

(2) E_1, E_2闭, 则$E_1 + E_2$不一定闭.

解.

(1) 设$z \in \overline{E_1 + E_2}$, 则有$z_n \to z$, $z_n = x_n + y_n$, $x_n \in E_1$, $y_n \in E_2$, $x_{n_k} \to x \in E_1$, 故$y_{n_k} = z_{n_k} - x_{n_k} \to z - x \in \overline{E_2} = E_2$, $x \in E_1$, 所以$z = x + (z-x) \in E_1 + E_2$, 所以$\overline{E_1 + E_2} \subset E_1 + E_2$.

(2) $E_1 = \left\{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, $E_2 = \{-n : n \in \mathbb{N}\}$, 对于任意的$p, n \ge 1$,

$$p + \frac{1}{n+p} = \left(n + p + \frac{1}{n+p}\right) + (-n) \in E_1 + E_2 \implies p \in \overline{E_1 + E_2},$$

若$p \in E_1 + E_2$, 则$p = \left(n + \frac{1}{n}\right) + (-m)$, 于是$n(m+p-n) = 1$, 当$n = 1$, $m = 2 - p$时才可能成立, $p \ge 2$时, $p \notin E_1 + E_2$, 不闭.

□

问题 9.0.11

设E_1, E_2是赋范空间X的子集, E_1紧, E_2闭, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, 证存在$r > 0$使得$(E_1 + U(0,r)) \cap E_2 = \emptyset$, $U(0,r) = \{x \in X : \|x\| < r\}$.

解. 令$g(x)=d(x,E_2)$, $(x\in X)$. 因E_1紧, 则E_1上存在$x_1\in E_1$使得$g(x_1)\le g(x)$, $(x\in E_1)$. 则$x_1\notin E_2$.

由E_2闭, 所以$d(x_1,E_2)>0$, 所以$g(x_1)>0$, 设$0<r<g(x_1)$, $x\in(E_1+U(0,r))\cap E_2$, 于是$x\in E_2$且$x=y+z$, $y\in E_1$, $z\in U(0,r)$, 所以$g(y)=d(y,E_2)\le d(y,x)=\|x-y\|=\|z\|<r<g(x_1)$, 而$y\in E_1$与$g(x_1)\le g(y)$矛盾. □

问题 9.0.12

BV$[a,b]$是$[a,b]$上所有有界变差函数的集合, $x\in \mathrm{BV}[a,b]$, 令$\|x\|=|x(a)|+V(x)$, 则$\|\cdot\|$是BV$[a,b]$上的范数.

解. $x\in\mathrm{BV}[a,b]$, $k\in K$, K是BV$[a,b]$所在的数域, 若$P=(t_0,\cdots,t_n)$是$[a,b]$的任一划分,

$$S(kx,P)=\sum|kx(t_i)-kx(t_{i+1})|=|k|\cdot S(x,P)\le|k|\cdot V(x).$$

所以$V(kx)\le|k|\,V(x)$, 即$\|kx\|\le|k|\,\|x\|$.

当$k\neq0$时, $\|x\|=\|\frac{1}{k}\cdot kx\|\le\left|\frac{1}{k}\right|\cdot\|kx\|\le\left|\frac{1}{k}\right|\cdot|k|\cdot\|x\|=\|x\|$, 故$\|kx\|=|k|\cdot\|x\|$.

$k=0$时, 显然. □

问题 9.0.13

求证: 度量空间(X,d)中互不相交的闭集A,B, 必有互不相交的开集G,V使得$A\subset G$, $B\subset V$.

解. $A\subset B^c$故$x\in A$必有$\delta_x>0$使$V(x,\delta_x)\subset B^c$, 所以$A\subset\bigcup_{x\in A}V(x,\delta_x)\subset B^c$, 故

$$A\subset\bigcup_{x\in A}V(x,\frac{1}{2}\delta_x)\subset\overline{\bigcup_{x\in A}V(x,\frac{1}{2}\delta_x)}\subset\bigcup_{x\in A}V(x,\delta_x)\subset B^c$$

令$G=\bigcup_{x\in A}V(x,\frac{1}{2}\delta_x)$, $V=\left(\bigcup_{x\in A}V(x,\frac{1}{2}\delta_x)\right)^c$. □

解. $F(x)=d(x,A)$是连续泛函, 令$G=\{x\in X;d(x,A)<d(x,B)\}$, 则$G=G^{-1}((-\infty,0))$, 其中$G(x)=d(x,A)-d(x,B)$是$X$上的连续泛函, 从而$G$开且$A\subset G$. 同理$B\subset V=\{x\in X:d(x,B)<d(x,A)\}$开于$X$. □

问题 9.0.14

设$Y=\{f;f:(X,d)\to\mathbb{R}$为有界连续泛函$\}$, 令

$$\rho(f,g)=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|,$$

设x_0为X中固定点, 令$G:X\to(Y,\rho)$, $y\mapsto d(x,y)-d(x,x_0)$, 求证: $G:(X,d)\to(G(x),\rho)$是等距映射.

解. 先证$G(X)$是(Y,ρ)的子空间, 然后证$\rho(G(y),G(z))=d(y,z)$. □

问题 9.0.15

设$A,M\subset(X,d)$, 求证: A在M中稠密, 即$\overline{A}\supset M$的充要条件为如下任何一条成立:

(I) $\forall x\in M$的任一邻域$V_\varepsilon(x)$有$A\cap V_\varepsilon(x)\neq\emptyset$.

(II) $\forall x\in M$, 存在$\{y_n\}\subset A$, 使$y_n\to x$.

(III) 若A在B中稠密, 且B在M中稠密.

解. (I). 若$x\in M$, $\forall\varepsilon>0$, $A\cap V_\varepsilon(x)\neq\emptyset$, 必有$x\in\overline{A}$, 即$M\subset\overline{A}$.

(II). 因$x\in\overline{A}\iff\exists y_n\in A$, 使得$y_n\to x$, 故若$\forall x\in M$, $\exists y_n\in A$使得$y_n\to x$, 则$x\in\overline{A}$.

(III). 因A在B中稠密, 故$\overline{A}\supset B$, B在M中稠密, 故$\overline{B}\supset M$, 从而$\overline{A}\supset M$. □

问题 9.0.16

求证: $l^p(1\le p<+\infty)$是可分的.

解. 首先$\mathbb{R}^n$是可分的, 稠子集为$\mathbb{Q}^n=\{r=(r_1,\cdots,r_n):r_i\in\mathbb{Q},i=1,\cdots n\}$, 令

$$M=\{r=(r_1,\cdots,r_n,0,0,\cdots):n\in\mathbb{N},r_i\in\mathbb{Q},i=1,2,\cdots,n\},$$

则M是l^p的可列子集, 然后证$\overline{M}=l^p$. □

问题 9.0.17

求证: l^∞是不可分的.

解. 令$K=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots):x_i$或为0或为1$\}$, 则$K$不可数且$K$中人两个不同元素$x\neq y$, 有$d_\infty(x,y)=1$, 若$l^\infty$可分且其稠子集为$B$, B可数, 作集类

$$\left\{V\left(x,\frac{1}{3}\right):x\in K\right\}.$$

则它为不可列集, 且两两不交, 但对于任意的$x\in K$必有$B\cap V\left(x,\frac{1}{3}\right)\neq\emptyset$, 从而$B$不可数, 矛盾. □

问题 9.0.18

设(X,d)是离散度量空间, 求证: 任一映射$F:(X,d)\to(Y,\rho)$都是一致连续的.

问题 9.0.19

设(X,d)为度量空间, $Y=\{f;f:X\to\mathbb{R}\}$为 Lipschitz 连续泛函$\}$, 即

$$f\in Y\Longleftrightarrow \text{存在常数}k\text{使}|f(x)-f(y)|\le kd(x,y),\forall x,y\in X.$$

(I) Y是线性空间.

(II) 问$\sigma(f,g)=\inf\{k:|f(x)-g(x)-f(y)+g(y)|\le kd(x,y),\forall x,y\in X\}$是否为$Y$上的度量?

(III) 设$Y_0=\{f:f\in Y,f(x_0)=0\}$, 其中$x_0$为$X$中定点, 问$\sigma$是否为$Y_0$上的度量.

解. (II). $\sigma(f,g)=0$未必有$f=g$, 设$f\in Y$, 令$g=f(x)+c$(c非零常数), 则$g\in Y$但$\sigma(f,g)=0$, 因此σ不是Y上的度量(称为Y上的拟度量).

(III). 因

$$\sigma(f,g)=\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-g(x)-f(y)+g(y)|}{d(x,y)},$$

故$\sigma(f,g)=0\Longleftrightarrow f(x)-g(x)=f(y)-g(y)=f(x_0)-g(x_0)$, 对于任意的$x,y\in X$成立, 即$f(x)\equiv g(x)$, 对于任意的$x\in X$, 即$f=g$, 从而易得$\sigma$是$Y_0$上的度量. □

问题 9.0.20

设$f_n,f\in C[a,b]$且$d(f_n,f)\to0$, $t_n\in[a,b]$, $t_n\to t_0$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}f_n(t_n)=f(t_0).$$

问题 9.0.21

设$f:X\to X$连续, (X,d)为度量空间, 设$X\times X$中度量为

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=d(x_1,x_2)+d(y_1,y_2),\quad (x_i,y_i)\in X\times X.$$

定义$X\times X$的对角线集为

$$\Delta=\{(x,x):x\in X\},$$

令

$$g:\Delta\to\mathrm{Graph}(f),\quad (x,x)\mapsto(x,f(x)).$$

求证: g连续, 可逆, g^{-1}也连续.

解. $x_n, x \in X$, 因$(x_n, x_n) \to (x, x) \iff d(x_n, x) \to 0$, 所以由$f: X \to X$连续, 故$(x_n, x_n) \to (x, x)$时, $d(x_n, x) \to 0$, 从而$d(f(x_n), f(x)) \to 0$, 从而

$$d((x_n, f(x_n)), (x, f(x))) = d(x_n, x) + d(f(x_n), f(x)) \to 0$$

所以g连续. 然后证g是双射, 所以可逆.

$$g^{-1}: \mathrm{Graph}(f) \to \Delta, \quad (x, f(x)) \mapsto (x, x),$$

于是

$$(x_n, f(x_n)) \to (x, f(x)) \iff d((x_n, f(x_n)), (x, f(x))) \to 0 \iff d(x_n, x) \to 0 \text{ 且 } d(f(x_n), f(x)) \to 0 \implies (x_n, x_n) \to (x, x)$$

所以g^{-1}连续. □

问题 9.0.22

求证: 同胚映射$F: (X, d) \to (Y, \rho)$, 若(X, d)可分, 则(Y, ρ)可分.

问题 9.0.23

设 Hilbert 立方体 $A = \{x = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots) : |\xi_n| \le \frac{1}{n}, \forall n\}$, 求证$A$闭于$l^2$.

解. 显然$A \subset l^2$, 设$x_0 \in \overline{A}$, 则存在$x_k = \left(\xi_i^{(k)}\right) \in A$使得$d(x_k, x_0) \to 0$, 即$\forall i$, $\left|\xi_i^{(k)} - \xi_i^{(0)}\right| \to 0$, 从而$\left|\xi_i^{(0)}\right| \le \frac{1}{i}$, 于是$x_0 \in A$. 其实, A闭于$l^p (1 < p \le +\infty)$. □

问题 9.0.24: http://math.stackexchange.com/questions/1087885

定义: 设(S, ρ)是一距离空间, $T: S \to S$, 若存在$\beta \in (0, 1)$使对于任意$x, y \in S$, 有$\rho(Tx, Ty) \le \beta \rho(x, y)$称$T$为压缩映射.

定理 9.0.1: Blackwell's 压缩映射的充分条件

让$X \subset \mathbb{R}^l$, $B(X)$是带有上确界范数的有界函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 的全体组成的空间, 让 $T: B(X) \to B(X)$ 满足

1) (单调性), $f, g \in B(X)$ 且若 $f \le g, \forall x \in X$ 则 $Tf \le Tg, \forall x \in X$.

2) (discounting) 存在 $\beta \in (0, 1)$ 使 $\forall f \in B(X)$, $a \ge 0$, $x \in X$ 有 $[T(f + a)](x) \le (Tf)(x) + \beta a$, 其中 $(f + a)(x) := f(x) + a$.

则 T 是模 β 的压缩映射.

解. 若 $f \le g, \forall x \in X$, 则 $\forall f, g \in B(X)$, $f \le g + \|f - g\|$, 从而

$$Tf \le T(g + \|f - g\|) \le Tg + \beta \|f - g\|.$$

交换 f, g的位置, 从而有 $\|Tf - Tg\| \le \beta \|f - g\|$. □

问题 9.0.25: http://math.stackexchange.com/questions/1125691

让 $A = (a_{ij})$ 为一 $n \times n$ 实矩阵, $b \in \mathbb{R}^n$, 并有 $\|A - I\|_2 < 1$, 证明映射 $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x - Ax + b$ 是压缩映射, 其中距离定义为普通 Euclid 距离.

解. $Tx = b - (A - I)x$, 所以 $Tx - Ty = (A - I)(y - x)$, 又因为 $\|A - I\|_2 < 1$, 所以存在 $\alpha \in (0, 1)$ 使 $\|A - I\|_2 \le \alpha < 1$,

$$\|Tx - Ty\| \le \|A - I\|_2 \cdot \|y - x\| < \alpha \|y - x\|.$$

所以 T 是压缩映射. □

问题 9.0.26: http://math.stackexchange.com/questions/1124660

让(S, ρ)为一紧距离空间, 映射$T: S \to S$使对于任意$x \ne y$, 有$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)$. 证明: $\phi(x) = \rho(x, Tx)$连续, 且T有唯一不动点.

解. 因$|\rho(x, Tx) - \rho(y, Ty)| \le \rho(x, y) + \rho(Tx, Ty) < 2\rho(x, y)$, 所以$\phi(x)$连续. 任取$x \in S$, 构造点列$\{T^n x\}$, 并利用$S$的紧性. 唯一性用反证法. □

Chapter 10

复变函数

问题 10.0.1: http://math.stackexchange.com/questions/294383

求$\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

解. 留数法. 首先

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{x-\sinh x}{x^2\sinh x}\,\mathrm{d}x.$$

被积函数记为$f(x)$, $f(x)$是奇函数, 故

$$LHS=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-\sinh x}{x^2\sinh x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left(\frac{x-\sinh x}{x^2\sinh x},in\pi\right)=-\frac{\ln 2}{2}.$$

另见15.0.42. □

问题 10.0.2

设2×2矩阵$A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & \bar{a}\end{pmatrix}$, 其中$b\in\mathbb{R}$, 且$|a|^2+b^2=1$. 试计算$A^n$.

解. 设$a=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha\cos\beta$, $b=\sin\alpha\beta$, 于是

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & -\mathrm{i}\cos\beta\end{pmatrix},\quad A=\cos\alpha E+\sin\alpha I, E^2=E, EI=IE=I, I^2=-E.$$

所以I是2×2矩阵中的虚单位. 所以用二项式定理可得

$$A^n=\cos n\alpha E+\sin n\alpha I.$$

□

问题 10.0.3

区域D内单叶解析函数$f(z)$的导数必不为零.

Chapter 11

初等数论

问题 11.0.1

求所有的多项式$f(x)$, 满足$f(x^2+1)=f^2(x)+1$, 且$f(0)=0$.

解. 求导并让$x=0$. □

解. 定义数列$\{x_n\}$为$x_0=0$, $x_{n+1}=x_n^2+1$, 则$f(x)-x=0$有无穷多个根$\{x_n\}$. □

问题 11.0.2

设$f(x)\in\mathbb{R}[x]$, 如果对任意实数x有$f(x)\geq 0$, 则$f(x)$是两个实系数多项式的平方和.

解. 由于$f=\prod_{b,c}\left[(x-b)^2+c\right]$和$(x^2+y^2)(z^2+w^2)=(xz-yw)^2+(xw+yz)^2$. □

问题 11.0.3

证明多项式$x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-\cdots-2nx+(2n+1)$没有实根.

解. 当$x\leq 0$时, $f(x)=x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-\cdots-2nx+(2n+1)>0$; 若$x>0$, $(1+x)f(x)=f(x)+xf(x)=x\frac{x^{2n+1}+1}{x+1}+2n+1>0$, 所以对$x>0$时亦有$f(x)>0$. □

问题 11.0.4

设$f(x)$是一个整系数多项式, 首项系数为1, 且$f(0)\neq 0$. 若$f(x)$仅有一个单根α使得$|\alpha|\geq 1$, 则$f(x)$在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 反证, $f=gh$, 设$h(\alpha)=0$, 则$|g(0)|\geq 1$是其根的模之积, 又小于1, 矛盾. □

问题 11.0.5

设$a_1,\cdots,a_n$是互不相同的整数, 证明: 多项式

$$(x-a_1)\cdots(x-a_n)-1$$

在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 反证, $f=gh$, 因$f(a_i)=-1$, 知$g(a_i)+h(a_i)=0$, 由次数限制而导致矛盾. □

问题 11.0.6

给定$2n$个互不相同的复数$a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$, 将其按下列规则填入$n\times n$方格中: 第$i$行第$j$列相交处方格内填$a_i+b_j$, $(i,j=1,\cdots,n)$, 证明: 若各列数乘积相等, 则各行数的积也相等.

解. 设各列的积都为c, 则$f(x)=(x+a_1)\cdots(x+a_n)-c$, 有$n$个根$b_1,\cdots,b_n$. 所以$f(x)=\prod_j(x-b_j)$, 所以$f(-a_i)=(-1)^n\prod_j(a_i+b_j)=-c$, 即$\prod_j(a_i+b_j)=(-1)^{n+1}c$, $(\forall i)$. □

问题 11.0.7

设a,b,c为整数, $abc\neq 0$, 求证:

$$[(a,b),(b,c),(c,a)]=([a,b],[b,c],[c,a]).$$

问题 11.0.8

设$\{F_n\}$是符合$F_1=F_2=1$的裴波那契数列, 若$(m,n)=d$, 则$(F_m,F_n)=F_d$; 反之, 若$(F_m,F_n)=F_d$, 则$d=(m,n)$或$d=1$, $(m,n)=2$或$d=2$, $(m,n)=1$.

解. 先证$F_q=F_kF_{q-k+1}+F_{k-1}F_{q-k}$, 后证$m=nq+r$, $q\geq 0, 1\leq r\leq n-1$时, $(F_m,F_n)=(F_n,F_r)$, 即$(F_m,F_n)=F_{(m,n)}$, 于是$F_d=F_{(m,n)}$的解即为结论的三种情况. □

问题 11.0.9

当a,b满足什么条件时, $3\mid n(an+1)(bn+1)$对任意n成立.

解. 根据同余理论, 只需让n分别取1,2,3分别代入上式, 可得$3\mid ab+1$, 即$ab\equiv 2 \pmod 3$ □

问题 11.0.10

a,b正整数, $d=(a,b)$, 证$S=\{ma+nb\}$, $(m,n$遍历正整数)包含d的大于ab的所有倍数.

解. 设$t>ab$是d的倍数且$ax+by=t$, 由Bézout等式, 左式有解$x=x_0+br$, $y=y_0-ar$, 调整r使$0<x<b$, 得$-\frac{x_0}{b}<r<\frac{b-x_0}{b}$, 于是$y=y_0-ar>y_0-a\frac{b-x_0}{b}=\frac{t-ab}{b}>0$. □

问题 11.0.11

$4k-1$形素数无穷.

解. 反证: $p_1,p_2,\cdots,p_r$为r个有限$4k-1$形素数, 考虑$p_1^2p_2^2\cdots p_r^2-1$的因子中必有$4k-1$形素因子. 另外也可考虑$4p_1p_2\cdots p_r-1$. □

问题 11.0.12

$6k-1$形素数无穷.

解. 想法同上, 考虑$6p_1p_2\cdots p_r-1$中必有$6k-1$形素数, 却不是$p_1,p_2,\cdots p_r$中的一个. □

问题 11.0.13

$4k+1$形素数无穷.

解. $4(p_1p_2\cdots p_r)^2+1$的素因子均可写成$4k+1$形素数, 但不是$p_1,\cdots,p_r$中的任一个. □

问题 11.0.14

假设自然数N有形如$4n-1$的因子, 则N必有形如$4n-1$的素因子.

问题 11.0.15

对每个素数$p=4n-1$和整数a, p^2不可能整除a^2+1.

解. 反证, 若$p^2\mid a^2+1$, $a^2\equiv -1 \pmod{p^2}$, 说明a的阶等于4. a可以看成群$\mathbb{Z}_{p^2}^*$中的元素, 由Euler定理, 群$\mathbb{Z}_{p^2}^*$的阶为$p(p-1)=2(4n-1)(2n-1)$. 在由Cauchy定理, 群中元素的阶必整除群的阶, 所以有$4\mid 2(4n-1)(2n-1)$. 矛盾. □

问题 11.0.16

证明a^2+1没有$4n-1$的因子, a,n是任何正整数.

解. 假设自然数$N=a^2+1$有形如$4n-1$形因子, 则由问题11.0.14知N必有形如$4n-1$的素因子, 记为p. 而N可以写成两个整数的平方和($N=a^2+1^2$), 所以由问题15.0.44知N的素因子分解中p出现次数为偶数. 从而必有p^2整除$N=a^2+1$, 与问题11.0.15矛盾. 所以N不可能有形如$4n-1$的因子. □

问题 11.0.17

a,b正整数, $a+b=57$, $[a,b]=680$, 求a,b.

解. 用$(a,b)[a,b]=ab=(a+b,b)[a,b]$, 所以$(57,b)\cdot 680=ab$, 然后$57=3\times 19$, 分四种情况讨论$(57,b)$的值, 并计算出$ab$的值联合$a+b$的值用Vieta定理. □

问题 11.0.18

$a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $a-c\mid ab+cd$, 则$a-c\mid ad+bc$.

问题 11.0.19

$a,b\in\mathbb{Z}$且$\frac{b+1}{a}+\frac{a+1}{b}\in\mathbb{Z}$, 则$(a,b)\le\sqrt{a+b}$.

问题 11.0.20

a,b为大于1的正整数, $(a,b)=1$, 则有唯一一对整数r,s使得$ar-bs=1$, 且$0<r<b$, $0<s<a$.

问题 11.0.21

q-进表示n中. $n=\sum_{i=0}^{k}a_iq^i$, 有$a_i=\left[\frac{n}{q^i}\right]-q\left[\frac{n}{q^{i+1}}\right]$.

问题 11.0.22

$p^{\alpha_p}\parallel n!$, 则$\alpha_p=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]$, 设$n=\sum_{i=0}^{k}a_iq^i$, 则$a_i=\left[\frac{n}{q^i}\right]-q\left[\frac{n}{q^{i+1}}\right]$. 而$S_p(n)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i=(n+\alpha_p)-q\alpha_p$, 所以$\alpha_p=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]=\frac{n-S_p(n)}{p-1}$. 其中$S_p(n)$为$n$的$p$-进展开的各个数字值之和.

问题 11.0.23

若2^m+1是素数, 则m是2的幂, 从而是Fermat数F_n.
$a,m>1$, a^m-1是素数, 则$a=2$且m是素数. 从而是梅森Mersenne数.

问题 11.0.24: 偶完全数

$\sigma(n)=2n$则称n是完全数, 证明偶完全数形如$2^k(2^{k+1}-1)$.

解. σ是积性函数, 设$n=2^p\cdot q$, 则$(2^{p+1}-1)\sigma(q)=2^{p+1}q$, 即$\frac{q}{\sigma(q)}=\frac{2^{p+1}-1}{2^{p+1}}$且$2^{p+1}-1\mid q$. 设$q=(2^{p+1}-1)k$.

(1). 若$2^{p+1}-1$是合数, q的最小质因子$p_1<2^{p+1}-1$, 所以$q=p_1^{\alpha_1}w$. 这与$\frac{q}{\sigma(q)}=\frac{p_1^{\alpha_1}w}{\sum_i p^i f(w)}<\frac{p_1}{p_1+1}<\frac{2^{p+1}-1}{2^{p+1}}$.

(2). 若$2^{p+1}-1$是素数, 若$k=1$, 命题显然成立. 否则$q=(2^{p+1}-1)^{\alpha}w$.

- 若$w=1$, $\alpha>1$, $\frac{q}{\sigma(q)}=\frac{(2^{p+1}-1)^{\alpha}}{\sum_i(2^{p+1}-1)^i}<\frac{2^{p+1}-1}{2^{p+1}}$. 这导致矛盾.
- 若$w>1$, 则$\frac{q}{\sigma(q)}=\frac{(2^{p+1}-1)^{\alpha}}{\sum_i(2^{p+1}-1)^i}\frac{w}{\sigma(w)}<\frac{2^{p+1}-1}{2^{p+1}}$, 又矛盾.

故$w=1$, $\alpha=1$. □

问题 11.0.25

若$m>2$, 则$\varphi(m)$是偶数.

解. 由Euler公式, $(-1)^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod m$. □

解. 若i与m互素, 则$m-i$与m也互素, 所以与m互素的数总是成对出现. 若有$i=m-i$, 这表明m是i的倍数, 则i不可能是与m互素的$\varphi(m)$个数的任一个. □

问题 11.0.26

设$a,b\in\mathbb{Z}$, 且p为素数, 若$a^p\equiv b^p \pmod p$, 则$a^p\equiv b^p \pmod{p^2}$.

解. Fermat定理$a\equiv b \pmod{()p}$, 所以$a\equiv b \pmod p$, 于是可设$a=b+mp$, 并用二项式定理证得. □

问题 11.0.27

设p是素数, $k\in\mathbb{N}_+$, 则

- $p|\binom{p}{k}$, $k=1,\cdots,p-1$.
- $\binom{p-1}{k}\equiv(-1)^k \pmod p$, $k=0,\cdots,p-1$.
- $\binom{k}{p}\equiv\left[\frac{k}{p}\right] \pmod p$.

解.

- $p|k\binom{p}{k}=p\binom{p-1}{k-1}$, $(k,p)=1$.
- $\binom{p}{k}-\binom{p-1}{k}=\binom{p-1}{k-1}\Longrightarrow\binom{p-1}{k}\equiv-\binom{p-1}{k-1} \pmod p$, 用归纳法.
- $\binom{k}{p}=\frac{k(k-1)\cdots(k-p+1)}{p!}$, $k,k-1,\cdots,k-p+1$中必有p的倍数, 设为$k-i$,
  则$\binom{k}{p}=\frac{k-i}{p}\cdot\frac{k(k-1)\cdots(k-p+1)}{(k-i)(p-1)!}=\left[\frac{k}{p}\right]\frac{k(k-1)\cdots(k-p+1)}{k-i}\cdot\frac{1}{(p-1)!}\equiv\left[\frac{k}{p}\right]\frac{-1}{-1} \pmod p$.
  最后一步用Wilson公式.

□

问题 11.0.28

素数$p\ge 5$, 则$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(p-1)^2}\equiv 0 \pmod p$.

解. $1,2,\cdots,p-1$是模p的缩系. 所以$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{p-1}$也是模$p$的缩系. 故对$p\ge 5$有

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{1}{k}\right)^2\equiv\sum_{k=1}^{p-1}k^2=\frac{(p-1)p(2p-1)}{6}\equiv 0 \pmod p.$$

□

解. $\frac{1}{1},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{p-1}$是模$p$的缩系, 对任意$a$, $p\nmid a$, $\frac{a}{1},\frac{a}{2},\cdots,\frac{a}{p-1}$也是模$p$的缩系. 故

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left(a\cdot\frac{1}{k}\right)^2\equiv\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{1}{k}\right)^2 \pmod p\Longrightarrow(a^2-1)\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{1}{k}\right)^2\equiv 0 \pmod p.$$

对$p\ge 5$可取a满足$p\nmid a$且$p\nmid a^2-1$即得. □

问题 11.0.29

若 $p>3$, 证明
$$p^2 \mid (p-1)!\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right).$$

解. 用11.0.28, 知
$$\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i(p-i)} \equiv \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{2}{i(p-i)} \equiv 0 \pmod p.$$
从而
$$(p-1)!\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i} \equiv (p-1)!\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{p}{(p-i)i} \equiv 0 \pmod {p^2}.$$
□

解. 设
$$(x-1)(x-2)\cdots(x-p+1) = x^{p-1}-s_1x^{p-2}+\cdots+s_{p-1}, \tag{11.1}$$
其中 $s_{p-1}=(p-1)!$, $s_{p-2}=(p-1)!\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right)$. 因
$$s_1x^{p-2}+\cdots+s_{p-2}x = (x-1)(x-2)\cdots(x-p+1)-x^{p-1}+1 \equiv 0 \pmod p$$
有 $p-1$ 个根, 所以 $s_1,\cdots,s_{p-2}$ 都是 p 的倍数. 对11.1中取 $x=p$ 有
$$p^{p-2}-s_1p^{p-3}+\cdots+s_{p-3}p-s_{p-2}=0.$$
所以 $p^2\mid s_{p-2}$. □

问题 11.0.30

n是偶数, $a_1,\cdots,a_n$与$b_1,\cdots,b_n$都是模n的完系, 证$a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n$不是模n的完系.

解. 反证法, $\sum a_i \equiv \frac{n(n-1)}{2} \equiv \sum b_i \pmod n$, 若$a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n$是模$n$的完系. 则$\sum(a_i+b_i)\equiv\frac{n(n-1)}{2}$, 于是$n(n-1)\equiv\frac{n(n-1)}{2} \pmod n$, 由于$n(n-1)\equiv 0 \pmod n$, 故$\frac{n(n-1)}{2}\equiv 0 \pmod n$, 即$n|\frac{n(n-1)}{2}$, 但$(n,n-1)=1$, 所以$n|\frac{n}{2}$不可能. □

问题 11.0.31

设a,b为正整数, n是正整数, 证明
$$n! \mid b^{n-1}a(a+b)\cdots(a+(n-1)b).$$

解. 只需证对任意的素数p, 若$p^\alpha \| n!$, 则$p^\alpha \mid b^{n-1}a(a+b)\cdots(a+(n-1)b)$.

(1). 若$p\mid b$, 则由于$\alpha=\sum_{i\geq 1}\left[\frac{n}{p^i}\right]<\frac{n}{p-1}\leq n$, 所以$p^\alpha|b^{n-1}$.

(2). 若$p\nmid b$, 则$(p,b)=1$, 从而有$b_1b\equiv 1 \pmod p$, 于是
$$b_1^n a(a+b)\cdots(a+(n-1)b) \equiv ab_1(ab_1+1)\cdots(ab_1+n-1) \pmod p.$$
由于$n!\mid ab_1(ab_1+1)\cdots(ab_1+n-1)$, 所以$p^\alpha\mid ab_1(ab_1+1)\cdots(ab_1+n-1)$. □

问题 11.0.32

设p是一个奇素数, 证明

- $1^2\cdot 3^2\cdots(p-2)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p$;
- $2^2\cdot 4^2\cdots(p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p$.

解. 用Wilson公式, 注意到$k\equiv-(p-k) \pmod p$. □

问题 11.0.33

求所有有理数k, 使得$0 \le k \le \frac{1}{2}$, 且$\cos k\pi$是有理数.

解. k有三个值, $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$使$\cos k\pi$为有理数, 设$\cos\theta = \frac{p}{q}$, $q \ge 3$, $p < q$, 且p与q互素, 那么$\cos 2\theta = \frac{2p^2-q^2}{q^2}$, 其分子分母的公因子必整除$2p^2$及$q^2$, 故$2p^2 - q^2$与$q^2$的最大公因数是1或2. 于是当$\frac{2p^2-q^2}{q^2}$写成最简形式时, 其分母至少是$\frac{q^2}{2} > q$, 因此$\cos 2\theta \ne \cos\theta$. 且$\cos 2\theta$, $\cos 4\theta$, ... 都是有理数, 且其分母组成一个递增序列. 设$\theta = 2^i\left(\frac{u}{v}\right)\pi$, u, v是互素奇数, 由v是奇数, 存在正整数$w > |i|$, 使$v \mid (2^w - 1)$, 故$2^{2w-i+1}\theta - 2^{w-i+1}\theta = \frac{2^w-1}{v}2^w u(2\pi)$, 从而$\cos\left(2^{2w-i+1}\theta\right) = \cos\left(2^{w-i+1}\theta\right)$. 由前面所证得, 当$\theta = 2^i\left(\frac{u}{v}\right)\pi$时, $\cos\theta$不能是分母超过2的有理数. □

问题 11.0.34

证明: 不存在正整数a, b, c, 使得$a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2$.

解. 模4下讨论奇偶性, 无穷递降法. □

问题 11.0.35: 21届IMO

$\frac{m}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$, 其中$m, n$都是正整数, 证明: $1979 \mid m$.

解.
$$\frac{m}{n} = \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \cdots + \frac{1}{1319} = 1979 \times \left(\frac{1}{600 \times 1319} + \cdots + \frac{1}{661 \times 1318} + \cdots + \frac{1}{989 \times 990}\right) = \frac{1979k}{660 \times \cdots \times 1319}.$$
其中k是整数, 1979是素数. □

问题 11.0.36: 39届IMO, T4

已知a, b是正整数, 且$\left(ab^2 + b + 7\right) \mid \left(a^2b + a + b\right)$, 求$a, b$.

解. $\left(ab^2 + b + 7\right) \mid a\left(ab^2 + b + 7\right) - b\left(a^2b + a + b\right) = 7a - b^2$.

(1) 若$7a = b^2$, $(a, b) = \left(7k^2, 7k\right)$, $(k \in \mathbb{N})$.

(2) 若$7a > b^2$, 则$7a - b^2 \ge ab^2 + b + 7$, 所以$7 > b^2$,..., $(a, b) = (11, 1), (49, 1)$.

(3) $7a < b^2$, 则$b^2 - 7a \ge ab^2 + b + 7 > b^2$... □

问题 11.0.37

若$n^2 + 15n + 42$是一完全平方数, 求n.

解. $n \ge 8$时, $(n+7)^2 < n^2 + 15n + 42 < (n+8)^2$, $n < -22$时, $(n+8)^2 < n^2 + 15n + 42 < (n+7)^2$. $n = -13, -22, -2, 7$. □

问题 11.0.38

求不定方程

$$(a^2-b)(a+b^2)=(a+b)^2$$

的所有正整数解.

问题 11.0.39

设a,b,c,d为正整数, $ab=cd$. 证明: $a^4+b^4+c^4+d^4$不是素数.

解. 由$ab=cd$, 不妨设$a=us,b=vt,c=vs,d=ut$, 则

$$a^4+b^4+c^4+d^4=(u^4+v^4)(s^4+t^4)$$

不是素数. □

问题 11.0.40

设$n > 1$是奇数, 若n的分解$n = uv$, 其中$0 < u - v \le 4\sqrt[4]{n}$, 证明: n的这种分解是唯一的.

Chapter 12

解析数论

12.1 山东大学2014年博士研究生入学考试解析数论基础试题

问题 12.1.1: 20%

设$\zeta(s)$为Riemann-zeta函数, 证明函数方程:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

问题 12.1.2: 20%

设$\psi(x)=\sum_{n\le x}\Lambda(n)$.

(1) 证明: 对于充分大的$x>0$, 成立渐近公式

$$\psi(x)=x+O\left(xe^{-c\left(\frac{\log x}{\log\log x}\right)^{\frac{3}{5}}}\right),$$

其中$c>0$为绝对常数.

(2) 证明: 在Riemann假设下, 上述余项能够改进到$x^{\frac{1}{2}}\log^2 x$.

问题 12.1.3: 20%

设$(l,k)=l$, $1\le l\le k$. 定义

$$\psi(x;k,l)=\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l \pmod k}}\Lambda(n),\quad \pi(x;k,l)=\sum_{\substack{p\le x\\ p\equiv l \pmod k}}1.$$

证明Siegel-Walfisz定理: 对于任意的$A\ge 1$以及$k\le\log^A x$, 成立

$$\psi(x;k,l)=\frac{x}{\varphi(k)}+O\left(xe^{-c\sqrt{\log x}}\right),$$
$$\pi(x;k,l)=\frac{1}{\varphi(k)}\int_2^x\frac{\mathrm{d}u}{\log u}+O\left(xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\log x}}\right),$$

其中$c=c(A)>0$为绝对常数.

问题 12.1.4: 20%

设$\alpha \in (0,1)$. 又设

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad |\theta| \le 1.$$

证明:

$$\sum_{n \le N} \Lambda(n) e(\alpha n) \ll \left(Nq^{-\frac{1}{2}} + N^{\frac{4}{5}} + N^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}\right) \log^4 N.$$

问题 12.1.5: 20%

证明: 三素数定理. (即: 存在常数N_0, 使得对任意的奇数$N > N_0$都能表示成三个素数之和.)

Chapter 13

Inequality

13.1 Elementary Inequality

问题 13.1.1

求证:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right) > \sqrt[3]{4}.$$

解. 先证$\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{1}{3m-2}\right) > \sqrt[3]{3n-2}$. □

问题 13.1.2

设$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+1$有$n$个实根, 且系数$a_1,\cdots,a_{n-1}$都是非负的. 证明$f(2)\ge 3^n$.

问题 13.1.3

设$a,b,c\in\mathbb{R}_+$, $a+b+c=1$. 证明

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\le\frac{27}{10}. \tag{13.1}$$

解. 证函数$\frac{1}{1+1+x^2}$在$x\in(0,1)$上满足$\frac{1}{1+x^2}\le\frac{27}{25}-\frac{27}{50}x$. □

解. 让$a=\frac{1}{yz}$, 有$\sum\limits_{cyc}\frac{1}{1+y^2z^2}\ge\frac{3}{10}$, 于是

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc}\frac{1}{1+y^2z^2}\ge\frac{3}{10}\\
\Leftrightarrow&27+17\sum_{cyc}x^2y^2+7x^2y^2z^2\sum_{cyc}x^2\ge 3x^4y^4z^4\\
\Leftrightarrow&27+17\left(\sum_{cyc}xy\right)^2-34x^2y^2z^2+4x^4y^4z^4-14x^2y^2z^2\sum_{cyc}xy\ge 0
\end{aligned}$$

$$17\left(\frac{1}{\sqrt{27x^2y^2z^2}}-\sqrt{27}\right)^2+\frac{14}{6}\left[x^2y^2z^2-3\sum_{cyc}xy\right]^2+4\left[\frac{1}{9}x^4y^4z^4-\left(\sum_{cyc}xy\right)^2\right]+16\left(\frac{1}{27}x^4y^4z^4-27\right)\ge 0. \tag{13.2}$$

上式显然成立. 当$x=y=z=\sqrt{3}$时, 不等式中的等号成立. □

问题 13.1.4: Ho Joo Lee

a,b,c是三个正实数, 证明:

$$a+b+c\le\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}.$$

解. 不等式等价于$\sum\limits_{cyc}\frac{(a-c)(a-b)}{b+c}\ge 0$, 用Shur不等式17.7.1即得. □

问题 13.1.5

设正实数a,b,c的和为3. 证明:
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{3}{2a^2+bc}+\frac{3}{2b^2+ac}+\frac{3}{2c^2+ab}.$$

解. 不等式等价于$\sum\limits_{cyc}\frac{(a-c)(a-b)}{2a^3+abc}\ge 0$, 用Shur不等式17.7.1即得. □

问题 13.1.6

设正实数a,b,c满足$a+b+c=1$. 证明:
$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\le 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right).$$

解. 设$a=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$, 即证
$$\sum_{cyc}\frac{1+a}{1-a}=\sum_{cyc}\frac{1+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}=3+2\sum_{cyc}\frac{\cot\frac{A}{2}}{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}\le 2\sum_{cyc}\frac{\cot\frac{B}{2}}{\cot\frac{A}{2}}.$$
于是
$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{\cot\frac{B}{2}}{\cot\frac{A}{2}}-\sum_{cyc}\frac{\cot\frac{A}{2}}{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}&=\sum_{cyc}\frac{\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2}\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)}\\&=\frac{1}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}\sum_{cyc}\frac{\left(\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\right)^2}{\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)}\\&\ge\frac{1}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}\frac{\left(\sum\limits_{cyc}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\right)^2}{\sum\limits_{cyc}\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\sum\limits_{cyc}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}\right)^2\\&=\frac{1}{2}\sum_{cyc}\tan\frac{A}{2}\ge\frac{3}{2}.\end{aligned}$$
□

问题 13.1.7: Italian Winter Camp 2007

设a,b,c为三角形的三条边长, 证明:
$$\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}\le 3.$$

解.
$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\left(1-\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\right)\ge 0&\Longleftrightarrow\sum_{cyc}\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\ge 0\\&\Longleftrightarrow\sum_{cyc}\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{c(a+b-c)}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a+b-c})}\ge 0\\&\Longleftrightarrow\sum_{cyc}\frac{(c-a)(c-b)}{S_c}\ge 0.\end{aligned}$$

其中

$$S_c=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a+b-c})(\sqrt{ab}+\sqrt{c(a+b-c)}),$$

不妨设$b\ge c$, 则

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\ge\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}$$
$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a+b-c}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{c+a-b}$$
$$\sqrt{ab}+\sqrt{c(a+b-c)}\ge\sqrt{ca}+\sqrt{b(c+a-b)}.$$

所以$S_c\ge S_b$, 由Schur不等式推论17.7.1即得. □

问题 13.1.8: APMO 2007

正实数x,y,z满足$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$. 证明:

$$\frac{x^2+yz}{x\sqrt{2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{y\sqrt{2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{z\sqrt{2(x+y)}}\ge 1.$$

解. 先用幂平均不等式证明$\sum\limits_{cyc}\sqrt{x+y}\ge\sqrt{2}$, 原不等式等价于$\sum\limits_{cyc}\frac{x^2+yz}{x\sqrt{y+z}}\ge\sum\limits_{cyc}\sqrt{x+y}\ge\sqrt{2}$. 而不等式左边部分又等价于证明$\sum\limits_{cyc}\frac{(x-y)(x-z)}{x\sqrt{y+z}}\ge 0$. 当$x\ge y\ge z$时, 有$y\sqrt{x+z}\ge z\sqrt{x+y}$, 利用Schur不等式推论17.7.1即得. □

问题 13.1.9

设a,b,c为正实数, 证明:

$$\frac{a^2+2bc}{(b+c)^2}+\frac{b^2+2ac}{(a+c)^2}+\frac{c^2+2ab}{(a+b)^2}\ge\frac{9}{4}.$$

解. 原不等式等价于

$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)+(ab+bc+ca)}{(b+c)^2}\ge\frac{9}{4}.$$

即证

$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)^2}\ge 0,\quad \sum_{cyc}\frac{ab+bc+ca}{(b+c)^2}\ge\frac{9}{4}.$$

前者用Shur不等式, 后者是著名的Iran 96不等式. □

问题 13.1.10: Nguyen Van Thach

设a,b,c为正实数, 证明:

$$\sqrt{\frac{a^3+abc}{(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3+abc}{(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3+abc}{(a+b)^3}}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

解. 注意到

$$\sqrt{\frac{a^3+abc}{(b+c)^3}}-\frac{a}{b+c}=\frac{\sqrt{a}(a-b)(a-c)}{(b+c)\sqrt{b+c}(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{a(b+c)})}.$$

所以原不等式等价于证明$\sum\limits_{cyc}S_a(a-b)(b-c)$, 其中

$$S_a=\frac{\sqrt{a}}{(b+c)\sqrt{b+c}(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{a(b+c)})}.$$

不妨设$a\ge b\ge c$, 则由$\sqrt{\frac{a}{b+c}}\ge\sqrt{\frac{b}{c+a}}$, $(b+c)\sqrt{a^2+bc}\le(a+c)\sqrt{b^2+ac}$, $(b+c)\sqrt{a(b+c)}\le(a+c)\sqrt{b(a+c)}$. 知$S_a\ge S_b$. 根据Shur不等式的推论17.7.1即得证明. □

问题 13.1.11

设a,b,c,k为正实数, 证明:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a+k}{b+k}+\frac{b+k}{c+k}+\frac{c+k}{a+k}.$$

解. 不妨设$c=\min(a,b,c)$, 并注意

$$LHS-3=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-1\right)=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)(b-c)}{ac}.$$

□

问题 13.1.12

设a,b,c为正实数, 若$k\geq\max(a^2,b^2,c^2)$, 证明:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a^2+k}{b^2+k}+\frac{b^2+k}{c^2+k}+\frac{c^2+k}{a^2+k}.$$

解. 同13.1.11不妨设$c=\min(a,b,c)$, 只需证:

$$\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)(b-c)}{ac}\geq\frac{(a-b)^2(a+b)^2}{(a^2+k)(b^2+k)}+\frac{(a-c)(b-c)(a+c)(b+c)}{(a^2+k)(c^2+k)}.$$

所以只需由$k\geq\max(a^2,b^2,c^2)$来证:

$$\begin{cases}(a^2+k)(b^2+k)\geq ab(a+b)^2\\(a^2+k)(c^2+k)\geq ac(a+c)(b+c).\end{cases}$$

不等式的弱化见13.1.13. □

问题 13.1.13

设a,b,c为正实数, 若$k\geq\max(ab,bc,ca)$, 证明:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a^2+k}{b^2+k}+\frac{b^2+k}{c^2+k}+\frac{c^2+k}{a^2+k}.$$

解. 证法同13.1.12, 但更弱. □

问题 13.1.14

设a,b,c为正实数, 证明:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{8(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geq 11.$$

解. 由恒等式$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)(b-c)}{ac}$, 不妨设$c=\min(a,b,c)$. 原不等式可化为:

$$\frac{(a-b)^2(a+b)^2}{a^2b^2}+\frac{(c-a)(c-b)(c+a)(c+b)}{a^2c^2}-\frac{8(a-b)^2+8(c-a)(c-b)}{a^2+b^2+c^2}\geq 0.$$

易证$\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}\geq\frac{8}{a^2+b^2+c^2}$. 而

$$\frac{(c+a)(c+b)}{a^2c^2}\geq\frac{8}{a^2+b^2+c^2}\iff(a+c)(c+b)(a^2+b^2+c^2)\geq(a+c)2c(a^2+c^2)\geq 4c^2(a^2+c^2)$$

所以只需证$a\geq c$时最后的不等式. □

问题 13.1.15: 2006年CMO

实数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2}$, $a_{k+1}=-a_k+\frac{1}{2-a_k}$, $k\in\mathbb{N}$, 证明:

$$\left(\frac{n}{2\sum_{i=1}^{n}a_i}-1\right)^n\le\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\right)^n\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}-1\right).$$

解. 先用$y=-x+\frac{1}{2-x}$归纳证明$0<a_n\le\frac{1}{2}$. 则原命题等价于证明:

$$\left(\frac{n}{\sum a_i}\right)^n\left(\frac{n}{2\sum a_i}-1\right)^n\le\prod\left(\frac{1}{a_i}-1\right).$$

对函数$y=\ln\left(\frac{1}{x}-1\right)$用Jensen不等式, 有$\left(\frac{n}{\sum a_i}-1\right)^n\le\prod\left(\frac{1}{a_i}-1\right)$. 另外, 用Cauchy不等式证

$$\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)=\sum\frac{1}{a_i+a_{i+1}}-n\ge\frac{n^2}{2\sum a_i}-n,$$

所以

$$\frac{n}{\sum a_i}-1=\frac{\sum(1-a_i)}{\sum a_i}\ge\frac{1}{\sum a_i}\left(\frac{n^2}{2\sum a_i}-n\right).$$

□

13.2 Combinatorics

问题 13.2.1

证明

$$\left(\binom{m}{m}a_m+\binom{m+1}{m}a_{m+1}+\cdots+\binom{n}{m}a_n\right)^2\ge\left(\binom{m-1}{n-1}a_{m-1}+\binom{m}{m-1}a_m+\cdots+\binom{n}{m-1}a_n\right)$$
$$\cdot\left(\binom{m+1}{m+1}a_{m+1}+\binom{m+2}{m+1}a_{m+2}+\cdots+\binom{n}{m+1}a_n\right),$$

其中$a_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$, 且

$$a_1\le a_2\le\cdots\le a_n,\quad 0<m<n,\quad m,n\in\mathbb{N}_+.$$

解. 若$\{a_n\}$是常数列, 只要证$\left(\sum_{i=m}^{n}\binom{i}{m}\right)^2\ge\sum_{k=m-1}^{n}\binom{k}{m-1}\sum_{k=m+1}^{n}\binom{k}{m+1}$, 这等价于证$\left(\binom{n+1}{m+1}\right)^2\ge\binom{n+1}{m}\binom{n+1}{m+2}\Longleftrightarrow\frac{1}{(m+1)(n-m)}\ge\frac{1}{(n-m+1)(m+2)}\Leftarrow$ $n+2\ge0$, ...

设调整若干项相等, 即$a_1=\cdots=a_{i-1}=t$, $a_i=\cdots=a_n=k$, $(k>t)$, 则

$$\left(t\sum_{j=m}^{i-1}\binom{j}{m}+k\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{m}\right)^2\ge\left(t\sum_{j=m+1}^{i-1}\binom{j}{m+1}+k\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{m+1}\right)\left(t\sum_{j=m+1}^{i-1}\binom{j}{m-1}+k\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{m-1}\right)$$
$$\Longleftrightarrow\left(t\binom{i}{m+1}+k\binom{n+1}{m+1}\right)^2\ge\left(t\binom{i}{m+2}+k\binom{n+1}{m+2}\right)\cdot\left(t\binom{i}{m}+k\binom{n+1}{m}\right)$$
$$\Longleftrightarrow\left(\left(\binom{i}{m+1}\right)^2-\binom{i}{m+2}\binom{i}{m}\right)t^2-2tk\left[\binom{i}{m+1}\binom{n+1}{m+1}-\left(\binom{i}{m}\binom{n+1}{m+2}+\binom{i}{m+2}\binom{n+1}{m}\right)\right]$$
$$+\left[\left(\binom{n+1}{m+1}\right)^2-\binom{n+1}{m+2}\binom{n+1}{m}\right]k^2\ge0.$$

因$\left(\binom{i}{m+1}\right)^2-\binom{i}{m+2}\binom{i}{m}\ge0$, $\left(\binom{n+1}{m+1}\right)^2-\binom{n+1}{m+2}\binom{n+1}{m}\ge0$, 但$\binom{i}{m+1}\binom{n+1}{m+1}-\left(\binom{i}{m}\binom{i}{m+2}+\binom{i}{m+2}\binom{n+1}{m}\right)$的符号不一定.

□

13.3 Analysis

问题 13.3.1

求证积分形式的Holder不等式与Minkowski不等式.

$$\|x(t)y(t)\|_1 \le \|x(t)\|_p \cdot \|y(t)\|_q,$$

其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p>1$且$x\in L^p[a,b]$, $y\in L^q[a,b]$;

$$\|x\pm y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p,$$

其中$p\ge 1$, $x(t), y(t)\in L^p[a,b]$.

解. (1). 若$\|x(t)\|_p=0$或$\|y(t)\|_q=0$, 则$x(t)y(t)=0, a.e.x\in[a,b]$, 不等式显然. 否则令$A=\frac{|x(t)|}{\|x(t)\|_p}$, $B=\frac{|y(t)|}{\|y(t)\|_q}$. 由Young不等式$AB\le \frac{A^p}{p}+\frac{B^q}{q}$, 两边积分即得.

(2). 若$p=1$, 则用绝对值的三角不等式. 若$p>1$,

$$\begin{aligned}
\|x\pm y\|_p^p &\le \||x\pm y|^{p-1}\cdot(|x|+|y|)\|_1 = \||x|\cdot|x\pm y|^{p-1}\|_1 + \||y|\cdot|x\pm y|^{p-1}\|_1 \\
&\le \|x\|_p\cdot\||x\pm y|^{p-1}\|_q + \|y\|_p\cdot\||x\pm y|^{p-1}\|_q \\
&= (\|x\|_p+\|y\|_p)\cdot\|x\pm y\|_{(p-1)q}^{p-1} = (\|x\|_p+\|y\|_p)\cdot\|x\pm y\|_p^{p-1}.
\end{aligned}$$

即得. □

Chapter 14

神奇的反例

问题 14.0.1

试指出无限维欧式空间中正交变换不一定是满射变换. 从而不一定有逆变换.

解. 考虑$\mathbb{R}[x]$(内积为多项式对应系数乘积的和)中的

$$Tf(x) = xf(x).$$

□

问题 14.0.2

举例说明: $\lim_{x\to a}\phi(x) = A$, $\lim_{x\to A}\psi(x) = B$, 但$\lim_{x\to a}\psi(\phi(x)) \neq B$.

解.

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, (p,q\in\mathbb{Z}, (p,q)=1) \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \qquad \psi(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \qquad a = 0.$$

□

问题 14.0.3: http://math.stackexchange.com/questions/2190498

给出如下论断的反例.
存在$x_0 \in [a,b]$使函数项级数的和函数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$收敛到$f(x)$, 在$[a,b]$上$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$收敛到$g(x)$. 则$f' = g$

解. 定义$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$为

$$f_n(x) = n(n+1)(n+2)\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right).$$

则f_n在$[0,1)$上点态收敛到0, 且$f_n(1) = n$. 其导数$f_n'(x) = n(n+1)(n+2)x^n(1-x)$, 在$[0,1]$上逐点收敛到0. □

问题 14.0.4: http://math.stackexchange.com/questions/294383

给出一个积分号下不能求导的例子.

解. 令$F(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-sx}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$, 则

$$F''(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-sx}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\psi'\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s\right) - \frac{1}{2s}$$

积分一次, $F'(s)$的常数项不能确定是有限值, 且积分两次后的特解使$F(0) = \frac{\log\pi}{2}$与正确的$F(0) = -\frac{\log 2}{2}$不同. □

问题 14.0.5: http://math.stackexchange.com/questions/494145

给出一个不能逐项求导的收敛级数.

解. 定义$u_k(x)$为

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

则$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = 0$. 若逐项求导则有

$$\sum_{k=1}^{n} u_k'(x) = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

其和在$x=0$处发散 □

Chapter 15

未知的问题与解答

未知 15.0.1

已知$a,b\in\mathbb{R}^+$且$\frac{\sin^4\alpha}{a^n}+\frac{\cos^4\alpha}{b^n}=\frac{1}{a^n+b^n}$, 求证: $\frac{\sin^8\alpha}{a^{3n}}+\frac{\cos^8\alpha}{b^{3n}}=\frac{1}{(a^n+b^n)^3}$.

未知 15.0.2

记$d(f)$为多项式$f(x)$的最大实根与最小实根的距离. 设n大于等于2, 求最大实数C, 使得对任意所有根都是实数的n次多项式, 都有$d(f')\ge Cd(f)$.

未知 15.0.3

证明: 对于任意的自然数n,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i(i+1)(i+2)(i+3)}}{i^2(i+1)^2}<2.$$

解. 第一项保留, 第二项放缩为$k\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$. 其中$k$是某个带根号的数. □

解.

$$\frac{\sqrt{(n+2)(n+3)}}{n(n+1)\sqrt{n^2+n}}<\frac{n+7/2}{\left(n-\frac{1}{4}\right)\left(n+\frac{3}{4}\right)\left(n+\frac{7}{4}\right)}$$

则有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{(k+2)(k+3)}}{k(k+1)\sqrt{k^2+k}}<\frac{32n(n+2)}{(4n+3)(4n+7)}$$

□

未知 15.0.4

Use the method of Frobenius to obtain two linearly independent series solutions about the regular singular point $x=0$. Write out the solution in open form for at least 7 terms.

$$2xy''-y'+2y=0.$$

未知 15.0.5: 2014-05-25

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i}{k}\right)^2\le(1+\sqrt{2})^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

解.

$$A=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}\end{pmatrix}$$

证明$\|A\|_2 \le \sqrt{2}+1$. □

未知 15.0.6: 2014-05-24

设p_n是第n个素数; $a_n=\sum_{i=1}^n p_i$. 则$[a_n, a_{n+1}]$中至少有一个平方数.

未知 15.0.7: 2015-05-23

对于任意的拓扑空间X, $\mathbb{R}$与$X\times X$不同胚.

未知 15.0.8: 2015-05-23

平方和因子定理.
$(a,b)=1$, 则素数$p=4k+3\nmid(a^2+b^2)$.

未知 15.0.9: 2014-05-23

$$\left\{\begin{array}{l} a,b\not\in\mathbb{Z};\\ \mathrm{Re}(c+d-a-b)>1. \end{array}\right. \implies \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(d+n)}=\frac{\pi^2}{\sin(\pi a)\sin(\pi b)}\cdot\frac{\Gamma(c+d-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)\Gamma(c-b)\Gamma(d-b)}.$$

未知 15.0.10: Enestrom-Kakeya定理

$$\left.\begin{array}{l} a_0\ge a_1\ge\cdots\ge a_n>0,\\ p(z):=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0 \end{array}\right\}\implies p=0\text{的根在开单位圆外}.$$

解. 对$(1-z)p(z)$用反证法/直接证明. □

未知 15.0.11: 2014-05-21

$$\left.\begin{array}{l} a_n>0\\ b_n>0 \end{array}\right\}\implies \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n(a_i+b_i)}\ge\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n b_i}.$$

未知 15.0.12: 2014-05-21

$$\begin{array}{l} \lim_{\beta\to\infty}F\left(1,\beta,1;\frac{z}{\beta}\right)=\mathrm{e}^z;\\ \lim_{\alpha\to\infty}F\left(\alpha,\alpha,\frac{1}{2};\frac{z^2}{4\alpha^2}\right);\\ F\left(\frac{n}{2},-\frac{n}{2},\frac{1}{2};\sin^2 x\right)=\cos nx. \end{array}$$

未知 15.0.13: 2014-05-21

$$\left.\begin{array}{l} x_0\in(a,b).\\ \text{迭代公式}f_1(x_n)=f_2(x_{n-1})\\ f_1(\xi)=f_2(\xi)\\ \left|\frac{f_2'(y)}{f_1'(x)}\right|\le q<1,(a<x,y<b) \end{array}\right\}\implies x_n\to\xi, n\to\infty.$$

未知 15.0.14: 2014-05-20

$\forall n,\ a_n > 0, \sum_{i=1}^n a_i \geq \sqrt{n}$, 则$\forall n$,

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 > \frac{1}{4}\sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

未知 15.0.15: 2014-05-20

关于x的方程$x^2 - 2\arcsin(\cos x) + a^2 = 0$有唯一解, 求$a$.

未知 15.0.16: 2014-05-19

$$\left.\begin{array}{l} f\text{定义域:}\mathbb{R} \\ f^2(x) \leq 2x^2 f\left(\frac{x}{2}\right) \\ A = \{a \mid f(a) > a^2\} \neq \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow A\text{是无限集}.$$

未知 15.0.17: 2014-05-18

$$\left.\begin{array}{l} M_1 = \{x^2 + Ax + B \mid x \in \mathbb{Z}\} \\ M_2 = \{2x^2 + 2x + C \mid x \in \mathbb{Z}\} \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall A, B \in \mathbb{Z},\ \exists C \in \mathbb{Z} \ni M_1 \cap M_2 = \emptyset.$$

未知 15.0.18: 2014-05-18

$$(0,1) \not\subseteq \bigcup_{\frac{p}{q} \in (0,1)\cap\mathbb{Q}} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{4q^2}, \frac{p}{q} + \frac{1}{4q^2}\right).$$

未知 15.0.19

设数列$\{x_n\}$满足条件

$$0 \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n \quad (m, n \in \mathbb{N}_+),$$

证明: $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$存在.

未知 15.0.20

设$x_n \geq 0$且$y_n \geq 0$, $(n \in \mathbb{N}_+)$, 证明: (在以下各极限均存在的情况下)

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \cdot \liminf_{n\to\infty} y_n \leq \liminf_{n\to\infty}(x_n y_n) \leq \liminf_{n\to\infty} x_n \cdot \limsup_{n\to\infty} y_n \leq \limsup_{n\to\infty}(x_n y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \cdot \limsup_{n\to\infty} y_n$$

未知 15.0.21

已知$x, y, z \in \mathbb{R}$, 且$x + y + z = 0$.

1. 求证:
$$6(x^3 + y^3 + z^3)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^3.$$
2. 求最佳常数λ, μ, 使得:
$$\lambda(x^6 + y^6 + z^6) \leq (x^2 + y^2 + z^2)^3 \leq \mu(x^6 + y^6 + z^6).$$

未知 15.0.22

证明对于任意的$x > -1$, 有$\mathrm{e}^x - \ln(x+1) - 2x > 0$

解. 先证$1+\frac{x}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}}-\ln(1+x)-2x>0$. □

解. 用 Taylor 公式. □

未知 15.0.23

证明: $\nabla\times\nabla\times A=\nabla(\nabla\cdot A)-\nabla^2 A$.

未知 15.0.24: 印度, 巴斯卡拉

当$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时, 有$\sin x\approx\frac{16x(\pi-x)}{5\pi^2-4x(\pi-x)}$.

未知 15.0.25: 柏拉图体, 正多面体

未知 15.0.26: 阿基米德体, 半正多面体

未知 15.0.27

置换$P(v)$的循环结构为$(v)=(1^{v_1}2^{v_2}\cdots m^{v_m})$, 在$S_n$群中属于与$P(v)$共轭的置换数目为

$$N(P)=\frac{n!}{\prod_i(i^{v_i}v_i!)}$$

未知 15.0.28

正整数列(v_i)满足$\sum_i i\,v_i=n$, 则$\prod_i i^{v_i}v_i!\mid n!$

未知 15.0.29

设$f(x)\in C[0,+\infty)$, 且对任何非负实数a, 有

$$\lim_{x\to\infty}(f(x+a)-f(x))=0.$$

证明: 存在$g(x)\in C[0,+\infty)$和$h(x)\in C^1[0,+\infty)$, 使得: $f(x)=g(x)+h(x)$, 且满足

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=0,\quad \lim_{x\to\infty}h'(x)=0.$$

未知 15.0.30

设p是奇素数, 将$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}$写成最简分数$A_p/B_p$.

(a) 求$A_p \pmod p$的值.

(b) 给出$A_p \pmod{p^2}$的值.

未知 15.0.31

设m是正整数, $a_1, a_2, \cdots, a_{\phi(m)}$是1与$m$之间且与$m$互素的整数, 记

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{\phi(m)}}$$

的最简分数为A_m/B_m.

(a) 求$A_m \pmod m$的值.

(b) 求$A_m \pmod{m^2}$的值.

未知 15.0.32: Hardy-Ramanujan asymptotic

整数n的分划函数$p(n)$有如下渐近公式

$$p(n)\sim\frac{1}{4n\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\pi\sqrt{2n/3}}.$$

未知 15.0.33: Fubini's Theorem

未知 15.0.34: Tonelli's Theorem

未知 15.0.35: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设函数$f(x,y)$在闭圆域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2, R>0\}$上有连续偏导数, 而且$f\left(\frac{R}{2},0\right)=f\left(0,\frac{R}{2}\right)$. 证明: 在$D$的内部至少存在两点$(x_1,y_1)$和$(x_2,y_2)$, 使

$$x_i f_y'(x_i,y_i)-y_i f_x'(x_i,y_i)=0, i=1,2.$$

未知 15.0.36: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设在$[a,b]$上, $f''(x)\neq 0$, $f(a)=f(b)=0$, 且有$x_0\in(a,b)$, 使$y_0=f(x_0)>0$, $f'(x_0)=0$. 证明:

(1) 存在$x_1\in(a,x_0)$及$x_2\in(x_0,b)$, 使$f(x_1)=f(x_2)=\frac{y_0}{2}$;

(2) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x<y_0(x_2-x_1)$.

未知 15.0.37

已知对于任意的$a_1, a_2, \cdots, a_n\in[p,q]$, $p>0$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\le n^2+\frac{k(p-q)^2}{4pq},$$

其中,

$$k=\begin{cases} n^2-1, & n\text{ 是奇数;}\\ n^2, & n\text{ 是偶数.}\end{cases}$$

未知 15.0.38: http://math.stackexchange.com/questions/66473

a Fourier series $\sum c_n e^{2\pi i n x}$ to be k-fold termwise differentiable is for the Fourier coefficients to be “appropriately small" in the following sense: if

$$\sum |c_n| \cdot |n|^k < \infty$$

holds for some k, then then function represented by the Fourier series will be k-times differentiable, and will be differentiable termwise. If this holds for all k, then the function is smooth.

未知 15.0.39: http://math.stackexchange.com/questions/1992808

已知$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$存在有限,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

能否逐项求导?

未知 15.0.40: http://math.stackexchange.com/questions/420878

John B. Conway’s ’Function of one complex variable’, Proposition 2.5.

未知 15.0.41: http://math.stackexchange.com/questions/1922228

定理 15.0.1

f_n在区域D上序列解析(sequence analytic), 若f_n在D的任一紧子集上一致收敛, 则f_n在D上解析

于是

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

在$\mathbb{C}$上解析.

推论 15.0.1

若幂级数在z_0为圆心, R为半径的圆盘上收敛, 则幂级数在其收敛域内的任一子集上一致收敛.

定理 15.0.2

f_n是区域D上的序列, 若$\sum f_n$在D上收敛, 且在D内任一紧子集上一致收敛, 则$\sum f_n$在D上解析且可逐项求导.

未知 15.0.42: http://math.stackexchange.com/questions/294383

求$\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\,dx$.

解. 重积分法, 利用Laplace变换: $\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x^2}$.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x&=\int_0^\infty\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^\infty t\int_0^\infty\frac{2x\mathrm{e}^{-x}-1+\mathrm{e}^{-2x}}{1-\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^\infty t\int_0^\infty(2x\mathrm{e}^{-x}-1+\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{e}^{-xt}\sum_{n=0}^\infty\mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^\infty t\sum_{n=1}^\infty\left(-\frac{1}{2n+t}+\frac{2}{(2n+t+1)^2}+\frac{1}{2n+t+2}\right)\mathrm{d}t+\log2-1\\&=\frac{1}{2}\int_0^\infty\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{2n}{2n+t}+\frac{2t}{(2n+t+1)^2}-\frac{2(n+1)}{2n+t+2}\right)\mathrm{d}t+\log2-1\\&=\log2-1-\sum_{n=1}^\infty\left(1+n\ln n+\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)-(n+1)\ln(n+1)\right)=-\frac{1}{2}\ln2.\end{aligned}$$

另外留数法见10.0.1. □

未知 15.0.43

对于任意给定的正奇数n, 对于任意正有理数r, 都存在正整数a,b,c,d满足$r=\frac{a^n+b^n}{c^n+d^n}$. 强化版见2.4.6.

未知 15.0.44

一个自然数N可以写成两个整数的平方和当且仅当N的素因子分解中每个可以写成$4n-1$的素数出现次数为偶数.

解. 抽象代数有证明, 主要工具是环理论. □

未知 15.0.45

Fermat数$F_n=2^{2^n}+1$, $n\geq5$时是否有素数? 未发现素数.
1801年Gauss证明: 正N边形可尺规作图当且仅当$N=2^e p_1\cdots p_s$, p_i是Fermat素数.

未知 15.0.46

设a,b为正整数且$(a,b)=1$. 证明对于给定的$n>ab-a-b$, 方程$ax+by=n$有非负整数解, 且$n=ab-a-b$时没有非负整数解.

未知 15.0.47: http://math.stackexchange.com/questions/428663/closed-form-of-sum-limits-i-1n-k1-i-or-asymptotic-equivalent-when-n-to#

$$\sum_{i=1}^n k^{\frac{1}{i}}=n+\ln(k)\ln(n)+\gamma\ln(k)+\sum_{r=2}^\infty\frac{\zeta(r)\ln(k)^r}{r!}+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

未知 15.0.48: http://tieba.baidu.com/p/4819379251

求所有符合条件的x,y,z.

$$x+y+z=x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3.$$

未知 15.0.49: 陈计的不等式

设$x,y,z\in\mathbb{R}^+$. 求证:

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right)\geq\frac{9}{4}.$$

解. 因为

$$4\sum_{cyc} yz\left(\sum_{cyc}(x+y)^2(z+x)^2\right)-9\prod_{cyc}(y+z)^2$$
$$=\sum_{cyc} yz(y-z)^2(4y^2+7yz+4z^2)+\frac{xyz}{x+y+z}\sum_{cyc}(y-z)^2(2yz+(y+z-x)^2)\geq 0.$$

□

未知 15.0.50: http://tieba.baidu.com/p/4005256822 18届东令营第3题 2003CMO3

设$x_i\in\mathbb{R}^+(i=1,2,\cdots,n)$且$x_1x_2\cdots x_n=1$, n给定$(n\geq 1)$. 求最小正数λ使得

$$\lambda\geq\sum_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{1+2x_i}}$$

恒成立.

未知 15.0.51: http://tieba.baidu.com/p/4811340691

设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是正实数, 求证:

$$x_1^3+\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^3\leq\frac{27}{8}(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3).$$

解. 由Holder不等式$(a_i,b_i,c_i\geq 0)$

$$(a_1^3+\cdots+a_n^3)(b_1^3+\cdots+b_n^3)(c_1^3+\cdots+c_n^3)\geq(a_1b_1c_1+\cdots+a_nb_nc_n)^3$$

得

$$\left(\sum_{j=1}^k\left(j-\frac{1}{2}\right)^{2/3}x_j^3\right)\left(\sum_{j=1}^k\frac{1}{\left(j-\frac{1}{2}\right)^{1/3}}\right)^2\geq\left(\sum_{j=1}^k x_j\right)^3.$$

两边同时除以k^3, 求和有

$$\sum_{k=1}^n\left(\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}\right)^3\leq\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^3}\left(\sum_{i=1}^k\frac{1}{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{1/3}}\right)^2\left(\sum_{j=1}^k\left(j-\frac{1}{2}\right)^{2/3}x_j^3\right)=\sum_{j=1}^n\sum_{k=j}^n\left(j-\frac{1}{2}\right)^{2/3}x_j^3\frac{1}{k^3}\left(\sum_{i=1}^k\frac{1}{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{1/3}}\right)^2$$

由于

$$\sum_{k=j}^n\frac{1}{k^3}\left(\sum_{i=1}^k\frac{1}{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{1/3}}\right)^2<\sum_{k=j}^n\frac{1}{k^3}\left(\int_0^k\frac{1}{x^{1/3}}\mathrm{d}x\right)^2=\sum_{k=j}^n\frac{9}{4k^{5/3}}<\int_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\frac{9}{4x^{5/3}}\mathrm{d}x<\frac{27}{8\left(j-\frac{1}{2}\right)^{2/3}}.$$

所以

$$\sum_{k=1}^n\left(\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}\right)^3<\frac{27}{8}\sum_{k=1}^n x_j^3$$

□

未知 15.0.52: http://tieba.baidu.com/p/4740384715

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{5}}}{1+\frac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{1+\frac{\mathrm{e}^{-4\pi}}{1+\frac{\mathrm{e}^{-6\pi}}{1+\cdots}}}}.$$

未知 15.0.53

设a,b,c是三角形的三边长, 证明:

$$4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq 9+\frac{a^2+c^2}{c^2+b^2}+\frac{c^2+b^2}{b^2+a^2}+\frac{b^2+a^2}{a^2+c^2}.$$

未知 15.0.54: http://tieba.baidu.com/p/4850101496

1. 有界闭区间$[a,b]$上函数$f(x)$满足对任意$x,y\in[a,b]$, $\lambda\in(0,1)$都有$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$. 求证$f(x)$在$[a,b]$上有界.
2. 设$f(x)$在0附近有2阶连续导数, 且$f''(0)\neq 0$.
(1) 求证$|x|$充分小时, 对任意这样的x, 存在唯一$\theta\in(0,1)$使得$f(x)=f(0)+f'(\theta x)x$.
(2) 求$\lim\limits_{x\to 0}\theta$.

解. 2.(2) $f'(\theta x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$, 所以$\frac{f'(\theta x)-f'(0)}{x}=\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}$, 两边令$x\to 0$, 右侧用罗比达法则. $\lim\limits_{x\to 0}\theta=\frac{1}{2}$ □

未知 15.0.55: http://tieba.baidu.com/p/4849247837

已知关于x的方程$x^3-4x^2+6x+c=0$有三个实根r,s,t, 且

$$\frac{1}{r^2+s^2}+\frac{1}{s^2+t^2}+\frac{1}{t^2+r^2}=1,$$

求正数c的值.

未知 15.0.56: http://tieba.baidu.com/p/4850318851

试举出反例: 函数$f(x)$在$x=x_0$处可导与如下几个式子存在不等价:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h},\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0+h)}{h},\quad \lim_{n\to\infty}n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x0)\right]$$

未知 15.0.57: http://tieba.baidu.com/p/4846868296

三角形ABC中, 求证:

$$\prod_{cyc}\cos A\le\frac{1}{8}\cot\frac{\pi^3}{27}\tan(ABC)\le\prod_{cyc}\sin\frac{A}{2}.$$

Chapter 16

拓扑

问题 16.0.1

证明: A'为闭集.

解. $(A')' \subset A'$, 从而A'为闭集. □

问题 16.0.2

设$A \subset \mathbb{R}$, 求证:

(I) A°是A的最大开子集.

(II) A^-是含A的最小闭集.

解. (I). $\bigcup\{G : G$开且$G \subset A\} = E$, 因A°开且$A^\circ \subset A$, 所以$A^\circ \subset E$, 若$x \in E$, 则有G开, $x \in G \subset A$. 所以存在x的开邻域$U(x) \subset G \subset A$, 所以$x \in A^\circ$, 所以$E \subset A^\circ$, 于是$E = A^\circ$.

(II). $\bigcap\{F : F$闭且$F \supset A\} = E$. 因A^-闭且$A^- \supset A$, 所以$A^- \supset E$. 另外若F闭且$F \supset A$, 则$F = F^- \supset A^-$, 所以$A^- \subset E$, 于是$A^- = E$. □

问题 16.0.3

G是$\mathbb{R}$中开集, $G \cap A = \emptyset$, 求证: $G \cap A^- = \emptyset$.

解. G^c闭且$A \subset G^c$, 所以$A^- \subset G^c$, 从而$G \cap A^- = \emptyset$. □

问题 16.0.4

求证:

(I) $\mathbb{R}$中闭集必为可列开集的交.

(II) $\mathbb{R}$中开集闭为可列闭集的并.

解. (I). 设A闭于$\mathbb{R}$. $A_n = \bigcup_{x \in A} V_{\frac{1}{n}}(x)$, $(n = 1, 2, \cdots)$, 则$A \subset \bigcap_{n=1}^\infty A_n$. 用反证法证$A \supset \bigcap_{n=1}^\infty A_n$, 取$x_0 \in \bigcap_{n=1}^\infty A_n$, $x_0 \notin A$. 由A闭. 存在n_0使得$V_{\frac{1}{n_0}}(x_0) \cap A = \emptyset$. 所以$x_0 \notin A_{n_0}$, 矛盾.

(II). 由(I), G开于$\mathbb{R}$, 则G^c闭于$\mathbb{R}$... □

问题 16.0.5

$A \subset \mathbb{R}$, 求证: $A - A'$至多可列.

解. (好像有问题)由聚点定理, $x \in A - A'$等价于存在$\varepsilon_x > 0$使得$A \cap (V_{\varepsilon_x}(x) - \{x\}) = \emptyset$, 且当$x, y \in A - A'$, $x \neq y$时, 应有$V_{\varepsilon_x}(x) \cap V_{\varepsilon_y}(y) = \emptyset$. 反之亦是. 记

$$G = \{V_{\varepsilon_x}(x) : x \in A - A'\},$$

则$G \sim A - A'$且G至多可列. □

问题 16.0.6

设开集族$\mathscr{F} = \{G : G为\mathbb{R}中开集\}$, 证明: 存在$\{G_\lambda\}_{\lambda=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$且有

$$\cup\{G \in \mathscr{F}\} = \cup\{G_\lambda : \lambda \in \mathbb{N}_+\}$$

解. 证明同8.0.5. □

问题 16.0.7

证明:

(1) $\mathbb{R}$上闭区间$[a,b]$不能表成两不相交非空闭集的并集.

(2) $\mathbb{R}$上开区间(a,b)不能表成两不相交非空开集的并集.

解. (1). 反证. $[a,b] = F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, F_1, F_2非空, 则$\exists x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$, 使得$|x_1 - x_2| = d(F_1, F_2) > 0$, 取$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \in [a,b]$, 不妨$x \in F_1$, 则$d(F_1, F_2) \le |x - x_2| = \frac{1}{2}d(F_1, F_2)$, 矛盾.

(2). 反证. $(a,b) = G_1 \cup G_2$, G_1, G_2非空开, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, 取$a_1 \in G_1$, $b_1 \in G_2$, $a_1 < b_1$, 作$F_1 = [a_1, b_1] - G_1$, $F_2 = [a_1, b_1] - G_2$, 则F_1, F_2非空闭, 且$F_1 \cup F_2 = [a_1, b_1]$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, 与(1)矛盾. □

问题 16.0.8

设(X,ρ)是度量空间, 映射$T : X \to X$满足$\rho(Tx, Ty) < \rho(x,y) (\forall x \ne y)$并已知$T$有不动点. 求证不动点唯一.

问题 16.0.9

设T是度量空间上的压缩映射, 求证T是连续的.

问题 16.0.10

$X = [0,1) \subset \mathbb{R}$, $\mathscr{T} = \{\emptyset\} \cup \{[0,\alpha) : 0 < \alpha \le 1\}$, 求证: $(X, \mathscr{T})$是拓扑空间.

问题 16.0.11

设$\mathscr{C}$是X的一个子集类, 记

$$\chi_c = \cap\{\chi : \mathscr{C} \subset \chi, \chi是X的拓扑\}.$$

求证: χ_c是X的拓扑, 且它是使$\mathscr{C}$中成员都成为开集的X的最弱拓扑.

问题 16.0.12

设$A \subset (X,\chi)$, 求证: A°是开集, 且是包含于A的最大开集; A^-是闭集且是包含A的最小闭集.

问题 16.0.13

$A, B \subset (X,\chi)$, 求证: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

解. 用$A \subset B$得$\overline{A} \subset \overline{B}$, 证$\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$, 另一方面, $\overline{A}, \overline{B}$均是闭集, $\overline{A} \cup \overline{B}$闭, 所以$A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, 从而$\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. □

解. 用$(A \cup B)' = A' \cup B'$. □

问题 16.0.14

求证: Hausdorff空间中任一单点集闭.

解. $(X,\mathscr{X})$是Hausdorff空间, $x_0\in X$, $\forall x(\in X)\neq x_0$, G_x为x的不含x_0的开邻域, 则$\{x_0\}^c=\cup_{x\neq x_0}G_x$. □

解. 由分离性, $\forall x(\in X)\neq x_0$, $x\notin\{x_0\}'$, 所以$\overline{\{x_0\}}=\{x_0\}$. □

问题 16.0.15

求证: $(X,\mathscr{X})$是Hausdorff空间的充要条件是X的任一单点集$\{x\}$是x的全体邻域的交.

解. 必要性用16.0.14, 由$\bigcap_{G\in\mathscr{X}}G\subset\bigcap_{G\in\mathscr{X}}\overline{G}$, 所以$\forall x\in X$, x的一切闭邻域的交也是$\{x\}$, $\forall y(\neq x)\in X$, 有x的闭邻域$V(x)$, $y\notin V(x)$, 即$y\in V^c(x)$, 于是有x的邻域$V(x)$及y的邻域$V^c(x)$使$V(x)\cap V^c(x)=\emptyset$, 从而$(X,\mathscr{X})$是Hausdorff空间. □

问题 16.0.16

求证: Hausdorff空间中的子集A的导集A'必是闭集.

解. 若$x_0\in(A')'$, 则x_0的任何开邻域$V(x_0)$有$y\in A'\cap(V(x_0)-\{x_0\})\neq\emptyset$. 由分离性及$V(x_0)$开, 存在$y$的邻域$G_y$使$y\in G_y\subset V(x_0)-\{x_0\}$, 而$\emptyset\neq A\cap(G_y-\{y\})\subset A\cap(V(x_0)-\{x_0\})$, 即$x_0\in A'$. □

解. 若$x_0\notin A'$, 则有x_0开邻域$V(x_0)$使$A\cap(V(x_0)-\{x_0\})=\emptyset$. 由$\{x_0\}$闭和空间分离性16.0.14, 知$V(x_0)-\{x_0\}$开, 从而$\forall x\in V(x_0)-\{x_0\}$, $x\notin A'$, 所以$V(x_0)\cap A'=\emptyset$, 从而A'^c开. □

问题 16.0.17

X,Y都是拓扑空间, $F:X\to Y$, 求证: F连续的充要条件是$\forall A\subset X$有$F(\overline{A})\subset\overline{F(A)}$.

解. 必要性: 用$A\subset F^{-1}(F(A))\subset F^{-1}(\overline{F(A)})$闭.
充分性: B在Y中闭, 由$F(F^{-1}(B))\subset B$, 所以

$$F(\overline{F^{-1}(B)})\subset\overline{F(F^{-1}(B))}\subset B\Longrightarrow\overline{F^{-1}(B)}\subset F^{-1}(B)\text{闭}.$$

即得. □

问题 16.0.18

X,Y都是拓扑空间, $F:X\to Y$, 求证: F连续的充要条件是$\forall B\subset Y$有$\overline{F^{-1}(B)}\subset F^{-1}(\overline{B})$.

解. 只证充分性, Y中闭集B, 有$\overline{F^{-1}(B)}\subset F^{-1}(B)$, 即闭集原像闭, 故$F$连续. □

问题 16.0.19

$\mathscr{X},\mathscr{Y}$是X上两个拓扑, 且$\mathscr{X}\subset\mathscr{Y}$, 求证: 若$A$在$(X,\mathscr{X})$中闭, 则$A$在$(X,\mathscr{Y})$中闭, 即弱闭集必为强闭集.

问题 16.0.20

设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 为 X 上的两个拓扑, 求证: $\mathscr{Y}\subset\mathscr{X}$ 的充要条件是恒等映射 $I:(X,\mathscr{X})\to(X,\mathscr{Y})$连续.

问题 16.0.21

若 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 X 上两个拓扑, 且 $\mathscr{X}\subset\mathscr{Y}$, 求证: 若 A 为 $(X,\mathscr{Y})$ 中紧集, 则 A 必为 $(X,\mathscr{X})$ 中紧集, 即强紧集必为紧集.

问题 16.0.22

设 $X=A\cup B$ 且 A,B 闭于 $(X,\mathscr{X})$, 若 $f:A\to(Y,\mathscr{Y})$ 与 $g:B\to(Y,\mathscr{Y})$ 都连续, 且 $f|_{A\cap B}=g|_{A\cap B}$, 求证 f,g 是同一连续映射 $h:(X,\mathscr{X})\to(Y,\mathscr{Y})$ 在 A,B 上的限制.

解. 令 $h: X \to Y$,

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in A^c \end{cases}$$

所以只需证 h 连续, 即证 $\forall D \subset X$ 有 $h(\overline{D}) \subset \overline{h(D)}$. 因

$$\begin{aligned} h(\overline{D}) &= h(\overline{(D\cap A)\cup(D\cap B)}) = h(\overline{(D\cap A)}\cup\overline{(D\cap B)}) \\ &\subset f(\overline{D\cap A})\cup g(\overline{D\cap B}) \subset \overline{f(D\cap A)}\cup\overline{g(D\cap B)} \\ &= \overline{f(D\cap A)\cup g(D\cap B)} = \overline{h(D\cap A)\cup h(D\cap B)} \\ &= \overline{h((D\cap A)\cup(D\cap B))} = \overline{h(D)} \end{aligned}$$

即得.

同样, 把 A, B 改成都为 X 中开集, 命题仍成立. 反之, 若 A, B 都不是闭(或开)集, 有如下反例 $X = Y = \mathbb{R}$且赋予普通拓扑. 设$A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $f(x) = 0, \forall x \in A$, $g(x) = 1, \forall x \in B$. □

问题 16.0.23

定义 $F: (X, \mathscr{X}) \to (Y, \mathscr{Y})$, 若$\forall G \in \mathscr{X}$, $F(G) \in \mathscr{Y}$, 称 F 为开映射. 求证:

(1) $F: (X, \mathscr{X}) \to (Y, \mathscr{Y})$为开映射的充要条件是$\forall x \in X$对任一$x$的邻域$V(x)$都有$F(V(x))$为$F(x)$的邻域.

(2) 可逆映射F是同胚映射的充要条件是F是连续开映射.

解. 只证(1)的充分性. $\forall x \in G$, 则$F(G)$为$F(x)$的邻域, 因而有开集$V_x \in \mathscr{Y}$, 使$F(x) \in V_x \subset F(G)$. 于是$F(G) = \bigcup_{x\in G} V_x$开于$Y$. □

问题 16.0.24

设$(X, \mathscr{X})$, $(Y, \mathscr{Y})$都是Hausdorff空间, $F: X \to Y$是可逆开映射, 求证:

(1) 若$(y_n) \subset Y$且$\lim_{n\to\infty} y_n = y \in Y$, 则$\lim_{n\to\infty} F^{-1}(y_n) = F^{-1}(y)$.

(2) B在$(Y, \mathscr{Y})$中紧, 则$F^{-1}(B)$在$(X, \mathscr{X})$中紧.

问题 16.0.25

设 $(X, \mathscr{X})$是Hausdorff空间, A 在 X 中紧, 求证:

(1) A 在 X 中闭.

(2) A 的闭子集 B 紧.

(3) 一族紧集的交仍紧.

(4) 有限紧集的并仍紧.

解. (1). $\forall x \notin A$, 由分离性, $\forall y \in A$, 有$x \in V_y(x)$, $y \in V_y$ 使 $V_y \cap V_y(x) = \emptyset$. $A \subset \bigcup_{y\in A} V_y$ 有有限子覆盖 $\mathscr{F}$, $A \subset \bigcup_{y\in\mathscr{F}} V_y$, 从而$\bigcup_{y\in\mathscr{F}} V_y(x)$是$X$在$A^c$中的开邻域.

(2). 由(1)知A闭, 所以B闭于X, B^c和B的开覆盖组成A的开覆盖.

(3). 紧集在Hausdorff空间中闭, 然后用(2).

(4). 同(3), 有限紧集的并是闭集. □

问题 16.0.26

求证: 紧空间 $(X, \mathscr{X})$ 中任一无限子集 A 必有聚点, 即 A 无限必 $A' \neq \emptyset$.

解. 反证 $A' = \emptyset$, $\forall x \in X$, 有 $V(x)$ 使 $A \cap (V(x) = \{x\}) = \emptyset$. $\{V(x) : x \in X\}$ 是 X 的开覆盖, 有有限子覆盖 $\mathscr{F}$ 使 $\bigcup_{x\in\mathscr{F}} V(x) \supset X$. 而 $\bigcup_{x\in\mathscr{F}} (V(x) - \{x\}) \cap A = \emptyset$, 所以 A 有限. □

问题 16.0.27

若紧空间 $(X,\mathscr{X})$ 中点列 $\{x_n\}$ 只有唯一聚点 x, 且对于任意的$i\neq j$, $x_i\neq x_j$, 求证: $\{x_n\}$必收敛于 x.

解. 只需证 $(A\cap V(x))_A^c$是有限集, 其中$A=\{x_n\}$, 由问题16.0.26及反证法. $(A\cap V(x))_A^c$无限必有异于 x 的聚点, 故矛盾. □

问题 16.0.28

设 $\mathscr{B}$ 是 X 的一族子集, $\widetilde{\mathscr{B}}$是由$\emptyset$及$\mathscr{B}$的成员可能作出的一切并集组成的子集类, 求证: $\widetilde{\mathscr{B}}$为X的拓扑的充要条件是$\mathscr{B}$满足:

(1) $X=\bigcup\limits_{B\in\mathscr{B}} B$.

(2) $\forall B_1,B_2\in\mathscr{B}$及$\forall x\in B_1\cap B_2$, 必有$B_3\in\mathscr{B}$使得$x\in B_3\subset B_1\cap B_2$.

问题 16.0.29

设$\mathscr{B}$为$(X,\mathscr{X})$中一个子集类, $\mathscr{B}$是X的一族子集, $\widetilde{\mathscr{B}}$是$\emptyset$及$\mathscr{B}$的成员可能做出的一切并组成的集类, 求证: $\widetilde{\mathscr{B}}=\mathscr{X}$的充分必要条件是$\mathscr{B}$满足

(1) $\forall A\in\mathscr{X}$及$\forall a\in A$, $\exists B\in\mathscr{B}$, 使得 $a\in B\subset A$.

(2) $\forall B\in\mathscr{B}$及$\forall b\in B$, $\exists A\in\mathscr{X}$, 使得 $b\in A\subset B$.

解. 必要性: (1)等价于$\mathscr{X}\subset\widetilde{\mathscr{B}}$, (2)等价于$\widetilde{\mathscr{B}}\subset\mathscr{X}$. □

问题 16.0.30

设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$连续, 令$d(x,y)=|f(x)-f(y)|$, $x,y\in\mathbb{R}$. 求证: d是$\mathbb{R}$上的度量的充要条件是f严格单调.

问题 16.0.31

设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是单射, 则$d(x,y)=|f(x)-f(y)|$, $x,y\in\mathbb{R}$为$\mathbb{R}$上度量, 反之亦然.

问题 16.0.32

设$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n|\xi_n-\eta_n|$, $x=\{\xi_n\}$, $y=\{\eta_n\}\in l^{\infty}$且$\mu_n>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$收敛. 求证: d也是l^{∞}上的度量.

解. 先证$d:l^{\infty}\times l^{\infty}\to\mathbb{R}$. □

问题 16.0.33

设(X,d)为度量空间, 令$\rho(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, 求证: (X,ρ)也是度量空间.

问题 16.0.34

设$f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$严格增, 且$f(0)=0$, $f(u+v)\leq f(u)+f(v)$, $(u,v\in[0,+\infty))$. 求证: 当(X,d)为度量空间时, $\rho(x,y)=f(d(x,y))$也是X上的度量.

问题 16.0.35: Newton法

f是定义在$[a,b]$上的二次连续可微的实值函数, $\hat{x}\in(a,b)$, 使得$f(\hat{x})=0$, $f'(\hat{x})\neq 0$. 求证存在$\hat{x}$的邻域$U(\hat{x})$, 使得$\forall x_0\in U(\hat{x})$迭代序列

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\quad(n\in\mathbb{N})$$

是收敛的, 并且$\lim_{n\to\infty}x_n=\hat{x}$.

问题 16.0.36

试找出T^n是压缩映射, 但T不是压缩映射的反例.

问题 16.0.37

设M是$\mathbb{R}^n$中的有界闭集, 映射$T: M \to M$满足

$$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y) \quad (\forall x, y \in M, x \neq y).$$

求证T在M中存在唯一不动点. 并举反例说明M的有界闭不能省去.

问题 16.0.38

对于积分方程$x(t)-\lambda\int_0^1 \mathrm{e}^{t-s}\,\mathrm{d}s=y(t)$为一给定函数, λ为常数, $|\lambda|<1$, 求证存在唯一解$x(t)\in[0,1]$.

问题 **16.0.39**

设S为一切复数列$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$组成的集合, 在$S$中定义距离为

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|},$$

其中$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$. 求证: S为一个完备的距离空间.

问题 16.0.40

记F是只有有限项不为零的实数列全体, 在F上引进距离

$$\rho(x, y) = \sup_{k \geq 1} |\xi_k - \eta_k|,$$

其中$x = \{\xi_k\}$, $y = \{\eta_k\} \in F$. 求证(F, ρ)不完备, 并指出它的完备化空间.

问题 16.0.41

设M是$C[a,b]$中的有界集, 求证集合

$$\widetilde{M}=\left\{F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \middle| f\in M\right\}$$

是列紧集.

问题 16.0.42

求证$\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$在$C[0,\pi]$中不是列紧的.

问题 16.0.43

空间S中集合A的列紧性条件. A在S中是列紧的, 当且仅当对于任何$n \in \mathbb{N}$, $\exists C_n > 0$, 使得对于任意的$\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in A$的点的第$n$个坐标的数集是有界的, 即$|\xi_n| \le C_n (n \in \mathbb{N}_+)$.

问题 16.0.44

设(X,ρ)是距离空间, M是X中的列紧集, 若映射$T: X\to M$满足

$$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y) \quad (\forall x, y \in X, x \neq y),$$

求证T在X上存在唯一的不动点.

问题 16.0.45

设(M,ρ)是一个紧距离空间, 又$E\subset C(M)$, E中函数一致有界并满足:

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leq c\rho(t_1,t_2)^{\alpha}$$

其中$x\in E$, $t_1,t_2\in M$, 其中$0<\alpha\leq 1$, $c>0$, 求证E在$C(M)$中是列紧集.

问题 16.0.46

在$C^1[a,b]$中令

$$\|x\|_1=\left(\int_a^b(|x(t)|^2+|x'(t)|^2)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\qquad\forall x\in C^1[a,b]$$

(1) 求证$\|\cdot\|_1$是$C^1[a,b]$上的范数;

(2) $(C^1[a,b],\|\cdot\|_1)$是否完备?

Chapter 17

定理集

定理 17.0.1: 勾股定理

若$(\alpha,\beta)=0$, 则
$$\left|\alpha+\beta\right|^2=|\alpha|^2+\left|\beta\right|^2.$$
进一步的, 若向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$两两正交, 则
$$|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m|^2=|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+\cdots+|\alpha_m|^2.$$

定理 17.0.2

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$两两正交, 则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关.

定理 17.0.3: 标准正交基的存在性

在任何有限维欧式空间中, 都有标准正交基. 有限维欧式空间V中的任何非零正交向量组都可以扩充为V的一个正交基.

定理 17.0.4

两个有限维欧式空间同构的充要条件是它们的维数相同.
任何n维欧式空间都与欧式空间$\mathbb{R}^n$同构.

定理 17.0.5

若欧式空间V的子空间$V_1,V_2,\cdots,V_s$两两正交, 则它们的和是直和.
反之, 子空间的和为直和时, 子空间之间不一定正交.

定理 17.0.6

设W是欧式空间V的子空间. 则$W^\perp=\{\gamma\mid\gamma\in V,\gamma\perp W\}$是$V$的子空间; 当$W$是有限维时, $V=W\oplus W^\perp$, $(W^\perp)^\perp=W$.
V_1,V_2是欧式空间V(不一定有限维)的两个子空间. 证明:
$$(V_1+V_2)^\perp=V_1^\perp\bigcap V_2^\perp.$$

定理 17.0.7

设T是n维欧式空间V的一个线性变换. 则T是正交变换的充要条件是, T把标准正交基变成标准正交基.

定理 17.0.8

设$s_1, s_2, \cdots, s_n$是n维欧式空间V的一个标准正交基, A是一个n阶实方阵, 且$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (s_1, s_2, \cdots, s_n)A$. 则$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$是标准正交基的充要条件是, A为正交方阵.

定理 17.0.9

设T是n维欧式空间V的一个线性变换. 则T是正交变换的充要条件是, T在标准正交基下的矩阵是正交矩阵.
有限维欧式空间V的正交变换有逆变换, 而且是V到V的同构映射.
其中充分性部分, 标准正交性的条件不可省去.

定理 17.0.10

实数域上有限维空间(不要求是欧式空间)的每一个线性变换, 都有一维或二维的不变子空间.

解. 证明分实特征根和复特征根两种情况, 复的情况对特征向量分离实虚部, 得到不变子空间的基. □

定理 17.0.11

设T是有限维欧式空间V的一个正交变换. 若子空间W对T不变, 则$W^{\perp}$对T也不变.
设T是有限维欧式空间V的一个正交变换, 则V可分解成对T不变的一维或二维子空间的直和.

定理 17.0.12

欧式空间中正交变换的特征值为± 1.
正交方阵的特征根的模为1.

定理 17.0.13

设T是二维欧式空间V的一个正交变换, 且无特征值, 则T在标准正交基下的矩阵具有形状

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

定理 17.0.14

设T是n维欧式空间V的一个正交变换, 则存在标准正交基, 使T在此基下的矩阵成下面形状:

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& S_1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& S_r \end{pmatrix}$$

其中

$$S_i = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, \cdots, r.$$

对于任何n阶正交方阵A, 都存在正交方阵U, 使$U^{-1}AU$为上面方阵的形式.

定理 17.0.15

设T是n维欧式空间V的一个线性变换. 则T是对称变换的充要条件是, T在标准正交基下的矩阵为对称方阵.

定理 17.0.16

实对称方阵的特征根全是实数.

定理 17.0.17

设T是n维欧式空间V的对称变换, 则T的属于不同特征值的特征向量相互正交.

定理 17.0.18

设T是n维欧式空间V的一个对称变换, W是对T不变的非零子空间, 则W中有关于T的特征向量.
如果α是它的一个特征向量, 则与α正交的全体向量是T的$n-1$维不变子空间.
对V的每个对称变换T, 都存在标准正交基, 使T在此基下的矩阵为对角矩阵.
对每个实对称方阵A, 都存在正交方阵U, 使$U^{-1}AU$为对角矩阵.
任何实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$$

都可经过正交线性代换$X = UY$化成

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

实对称方阵A是正定的充要条件是, A的特征根全是正的.

17.1 数学分析

17.1.1 常用的

Formulas for the Remainder Term in Taylor Series

对于任意阶可导的函数f, 可以考虑它的Taylor级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Taylor级数中的前n阶部分和称为函数f在点a处的n次Taylor多项式

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

记

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

其中$R_n(x)$称为Taylor级数的余项.

定理 17.1.1: 积分型余项

若$a \in I$为开区间, $f \in C^{n+1}(I)$, 则

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

解. 这个定理的数学归纳法证明是容易的, 略. 另一种证法使用Newton-Leibniz公式, 把$R_n(x)$看成x与a的二元函数$R_n(x,a)$, 然后对a求导. 得到

$$\frac{\mathrm{d}R_n(x,a)}{\mathrm{d}a} = -\left(f'(a) + f''(a)(x-a) - f'(a) + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\right) = -\frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

因为$R_n(x,x)=0$, 所以

$$R_n(x,a)=R_n(x,x)+\int_x^a \frac{\mathrm{d}R_n(x,a)}{\mathrm{d}a}\,\mathrm{d}a=\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

□

定理 17.1.2: Weighted Mean Value Theorem for Integrals

若$f,g\in C[a,b]$, 且g在$[a,b]$上不变号, 则存在$c\in[a,b]$使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 17.1.3: Lagrange型余项

设I为开区间, 若$f\in C^{n+1}(I)$, $a,x\in I$, 则在a和x之间存在c使得

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

17.1.2 不常用的

用**Bolzano-Weierstrass**定理直接证明连续函数的有界性定理

定理**3.4.1** (有界性定理)　设$f\in C[a,b]$, 则f在$[a,b]$上有界.

证法一:　反证法, 取$|f(x_n)|\geq n$, 由聚点定理$\Longrightarrow x_{n_k}\to x_0\in[a,b]$, f连续使得$f(x_{n_k})\to f(x_0)$有界, 矛盾.

证法二:　连续点x处有领域$U_x(\delta_x)$, 使得其上$|f-f(x)|\leq 1$, 这样的(U_x)形成$[a,b]$的覆盖, 用有限覆盖定理.

定理 17.1.4

如果可分空间X中的任何序列有收敛子列, 则X上的任何连续实值映射都是有界的.

解. 只证明f有上界的情况.

设$(x_n)_n$为空间X的稠子集, $f:X\to\mathbb{R}$为连续映射.

构造序列$(k_n)_n$: 对于任意的n, 序列$(x_n)_n$的前n项必然存在$k\leq n$满足$f(x_k)=\max\left(f(x_1),\cdots,f(x_n)\right)$. 将这样的$k$记为$k_n$.

按照上面的构造, 对于任何n都有

$$f\left(x_{k_n}\right)\geq\max\left(f(x_1),\cdots,f(x_n)\right).$$

所以$\left(f\left(x_{k_n}\right)\right)_n$是关于$n$的递增数列.

构造子列$(z_n)_n$: 按照定理的条件, 序列$\left(x_{k_n}\right)_n$有收敛子列, 记为$(z_n)_n$, 并设$z_n\to z$, $n\to\infty$.

因为$(z_n)_n\subseteq\left(x_{k_n}\right)_n$, 所以对于任意的$k_i$, 有充分大的角标$j$, 比如$j>k_i$, 使$z_j$对应的$x_{k_n}$的角标比$x_{k_i}$的大, 从而由$\left(f\left(x_{k_n}\right)\right)_n$的单调性, 有$f(z_j)\geq f\left(x_{k_i}\right)$. 由于$(z_n)_n$是收敛序列, f是连续函数, 所以存在$m>0$, 使得对于任意的n, 有$f(z_n)\leq f(z)+m$.

最后, 对于任意的$x\in X$. 由f的连续性, 以及$(x_n)_n$在X中稠密, 所以存在x_i满足$f(x)\leq f(x_i)+1$.

综合以上所有结论,

$$f(x)\leq f(x_i)+1\leq\max\left(f(x_1),\cdots,f(x_i)\right)+1\leq f\left(x_{k_i}\right)+1\leq f(z_j)+1<f(z)+m+1.$$

所以f有上界. □

Cesàro and Abel Summability

考虑序列$\{a_n\}_{n\geq 0}$, 它的部分和记为

$$s_n=a_0+\cdots+a_n.$$

有时, 序列$\{s_n\}$不收敛, 所以这里从另一个角度来研究部分和. 注意当a_n收敛时, $\frac{s_n}{n}$也收敛, 并与a_n的极限一致, 不要将此性质与序列的Cesàro和混淆, 注意区分$\frac{s_n}{n}$和σ_n表达式上的不同. 定义$\{a_n\}$的Cesàro和如下

$$\sigma_n=\frac{1}{n}(s_0+\cdots+s_{n-1}).$$

这和对于不收敛的序列$\{a_n\}$可能是收敛的. 对于任意的$r \in [0,1)$, 可以考虑加权得到Abel和

$$A(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k,$$

当$\lim_{r\to 1} A(r)$存在且有限时, 称这个极限为序列$\{a_n\}$的Abel极限. Abel求和公式变换上式有

$$\sum_{k=0}^{N} a_k r^k = (1-r)\sum_{k=0}^{N} s_k r^k + s_N r^{N+1}.$$

当$N \to +\infty$, 有$s_N r^{N+1} \to 0$时. Abel和不是别的, 就是序列s_k的带权$(1-r)r^k$的和.

性质: 部分和序列收敛蕴含Cesàro和收敛, Cesàro和收敛蕴含Abel和收敛.

证明: 1. 证明主要是对下面的和式拆分进行描述说明, 其中$s_n \to s$, $n \to +\infty$.

$$\sigma_n - s = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}(s_k - s) + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n-1}(s_k - s).$$

2. 当$r < 1$时, 容易得到

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k = (1-r)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} k\sigma_k r^{k-1}, \qquad r \in (0,1).$$

设$\sigma_n \to s$, $n \to +\infty$. 注意下式的分解

$$(1-r)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} k\sigma_k r^{k-1} - s = (1-r)^2 \sum_{k=1}^{N-1} kr^{k-1}(\sigma_k - s) + (1-r)^2 \sum_{k=N}^{+\infty} kr^{k-1}(\sigma_k - s).$$

序列不收敛, 但**Cesàro**和收敛的例子

$$1-1+1-1+1-1+\cdots.$$

Cesàro和不收敛但**Abel**和收敛的例子

$$1-2+3-4+5-6+\cdots.$$

1897年, Tauber给出了Abel和收敛可以推出原序列收敛的一个充分条件.

定理 17.1.5: Tauber, 1897

设序列$\{a_k\}$为复数列, 假设

$$A(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k$$

对于任意的$r \in (0,1)$收敛. 若$A(r) \to A$, $r \to 1^-$. 且$ka_k = o(1)$, 则有

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = A.$$

解. 因为$\sum a_k r^k \to A$, $r \to 1^-$, 只需证

$$\sum_{k=0}^{N} a_k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \to 0$$

沿着$r = 1 - \frac{1}{N}$, $N \to +\infty$成立即可. 对于任意的$\epsilon > 0$, 存在K使得, 只要$k > K$, 就有$|ka_k| > \epsilon$. 于是记

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} a_k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k &= \sum_{k=0}^{K} a_k\left(1-r^k\right) + \sum_{k=K+1}^{N} a_k\left(1-r^k\right) - \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k r^k \\ &= I_1 + I_2 + I_3.\end{aligned}$$

显然, 当$N\to+\infty$时有$I_1\to 0$. 对于I_2, 有

$$\begin{aligned}|I_2| &\le (1-r)\sum_{k=K+1}^{N}|a_k|\left(1+\cdots+r^{k-1}\right)\\ &\le (1-r)\sum_{k=K+1}^{N}|ka_k|\\ &\le (1-r)N\epsilon\le\epsilon,\end{aligned}$$

注意上式中的r是沿着$1-\frac{1}{N}$趋向于1. 对于I_3, 有

$$|I_3|\le\sum_{k=N+1}^{+\infty}|ka_k|\frac{r^k}{k}<\frac{\epsilon}{N+1}\sum_{k=0}^{+\infty}r^k<\epsilon.$$

□

Littlewood, 1911年将上面定理的$o(1)$弱化为$\mathcal{O}(1)$. Tauberian定理一般用来从级数的Abel可和性推出实可和性.

Remark: 对于正项级数, 以上三种收敛是互相等价的. 事实上, s_n是递增的必有极限, (极限可能是$+\infty$), 从而Cesàro和与Abel和有相同的极限.

定理 17.1.6: 关于有界, 无界的充分条件

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$存在, 则$\exists\delta>0$, 当$-\delta<x-x_0<0$时, $f(x)$有界; 对$x\to x_0^+$, $x\to x_0$有类似结论.
(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在, 则存在$X>0$, 当$|x|>X$时, $f(x)$有界. $x\to\pm\infty$有类似结论.
(3) $f(x)\in C[a,b]$, 则$f(x)$在$[a,b]$上有界.
(4) $f(x)$在集U上有最大(小)值, 则$f(x)$在U上有上(下)界.
(5) 有界函数间的和, 积运算封闭.
(6) $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\infty$, 则$f(x)$在□的空心邻域内无界. □可为$x_0, x_0^-, x_0^+, \infty, \pm\infty$.

定理 17.1.7: Stolz定理

证明: 若

(a) $y_{n+1}>y_n(n\in\mathbb{N}_+)$;

(b) $\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty$;

(c) $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$存在.

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

定理 17.1.8: Cauchy定理

若函数$f(x)$定义于区间$(a,+\infty)$, 并且在每一个有限区间(a,b)内是有界的, 则

(a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$;

(b) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^{1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}$, $(f(x)\ge C>0)$,

假定等是右端的极限都存在且可为$\pm\infty$.

问题: 对于上下极限是否仍有类似结论?.

定理 17.1.9

假设$f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, 每个在$[a,b]$上均可积, 且$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $n\to\infty$. 则$f(x)$可积, 且

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}x.$$

解. 类似6.5.36 □

定理 17.1.10: (一致收敛级数)逐项积分

$u_k:[a,b]\to\mathbb{R}$, 对每个$k\in\mathbb{N}_+$均可积, $\sum_{k=1}^\infty u_k(x)$在$[a,b]$上一致收敛. 则$f(x)=\sum_{k=1}^\infty u_k(x)$可积, 且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^\infty\int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

解. 让$S_n(x)=\sum_{k=1}^n u_k(x)$并用17.1.9 □

定理 17.1.11: 逐项微分

设$u_k:[a,b]\to\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}_+$, 每项均有连续导数(端点处单边可微), 若有:

(i) $\sum_{k=1}^\infty u_k(x_0)$在某些点$x_0\in[a,b]$收敛.

(ii) $\sum_{k=1}^\infty u_k'(x)$在$[a,b]$上一致收敛到$f(x)$.

则

(1) $\sum_{k=1}^\infty u_k(x)$在$[a,b]$上收敛且和函数$F(x)=\sum_{k=1}^\infty u_k(x)$在$[a,b]$上可微且$F'(x)=f(x)$.

(2) $\sum_{k=1}^\infty u_k(x)\rightrightarrows F(x)$.

解. (1). u_k'连续($k\in\mathbb{N}_+$), $\sum_{k=1}^\infty u_k'\rightrightarrows f$, 则$f\in C[a,b]$, 所以$f$在$[a,b]$上可积. 让$x\in[a,b]$, 对$u_k'$和$f$在区间$[x_0,x]$上使用17.1.10, (或$[x,x_0]$, 如果$x<x_0$), 则有

$$\sum_{k=1}^\infty\int_{x_0}^x u_k'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{x_0}^x f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n(u_k(x)-u_k(x_0)).$$

由假设(i), $\sum_{k=1}^\infty u_k(x_0)$收敛, 所以级数$F(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n u_k(x)$对任意$x\in[a,b]$均收敛, 所以$F:[a,b]\to\mathbb{R}$是良定义的, 于是$F(x)-F(x_0)=\int_{x_0}^x f(x)\,\mathrm{d}x$, 由$f$连续, 两边求导, 便有$F'(x)=f(x)$.

(2). Cauchy判别法, 取$\varepsilon>0$, 则$\exists N_1$使任意$n\ge m\ge N_1$有

$$\left|\sum_{k=m}^n u_k(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

存在N_2使任意$n\ge m\ge N_2$有

$$\left|\sum_{k=m}^n u_k'(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)},\quad x\in[a,b]$$

故可取$N=\max\{N_1,N_2\}$, $g(x)=\sum_{k=m}^n u_k(x)$, 则$g(x)-g(x_0)=g'(\xi)(x-x_0)$. 于是

$$|g(x)|\le|g(x_0)|+|g(x)-g(x_0)|\le\frac{\varepsilon}{2}+|g'(\xi)|\cdot|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a)=\varepsilon.$$

故由Cauchy判别法, $\sum_{k=1}^\infty u_k(x)$一致收敛. □

定理 17.1.12: 求导与极限的交换

函数列$f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}_+$, 在$[a,b]$上连续可微, $f_n(x)\to f(x)$, $x\in[a,b]$. $f_n'(x)\rightrightarrows\varphi(x)$, $x\in[a,b]$, 则f可微且$f'(x)=\varphi(x)$, 从而$f_n\rightrightarrows f$.

解. 取$u_1=f_1$, $u_n=f_n-f_{n-1}$, $n>1$, 并用17.1.11. □

17.2 实变函数论

定理 17.2.1: the Cantor-Schröder-Bernstein theorem

Claim: A given set X and its power set $\mathscr{P}(X)$ can never be in bijection.

解. By contradiction. Let f be any function from X to $\mathscr{P}(X)$. It suffices to prove f cannot be surjective.

That means that some member of $\mathscr{P}(X)$, i.e. some subset of X, is not in the image of f. Consider the set:

$$T = \{x \in X : x \notin f(x)\}.$$

For every x in X, either x is in T or it is not.

If x is in T, then by definition of T, x is not in $f(x)$, so the set T can not be the set $f(x)$ (because $x \in T$ but $x \notin f(x)$).

On the other hand, if x is not in T, then by definition of T, x is in $f(x)$, so again the set T can not be the set $f(x)$.

We just proved that T is NOT $f(x)$ for any x, and so f is not surjective. $\square$

17.3 微分方程

定理 17.3.1: 伯努力方程

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)y + q(x)y^n$, 其中$p(x)$, $q(x)$是所考虑区域上的连续函数, $n(\neq 0,1)$是常数.

解.

(1) 当$n > 0$时, $y = 0$是方程的解.

(2) 当$y \neq 0$时, 两边同除以y^n, 令$z = y^{1-n}$, 即得一阶线性方程.

□

定理 17.3.2

设$y_1(x)$和$y_2(x)$是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关解, 齐次边值问题

$$\begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0; \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0; \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

存在非平凡解(即不恒等于零的解)当且仅当

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) & \alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) \\ \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) & \alpha_2 y_2'(b) + \beta_2 y_2'(b) \end{vmatrix} = 0$$

17.4 泛函分析

定理 17.4.1: Arzela-Ascoli定理

设$\{f_n\}$是$[0,1]$上一致有界, 等度连续函数族, 则存在某一子序列$\{f_{n(i)}\}$在$[0,1]$上一致收敛.

定理 17.4.2: Hahn-Banach, $\mathbb{R}-version$

设$\mathscr{X}$是定义在$\mathbb{R}$上的向量空间, $q:\mathscr{X}\to\mathbb{R}$是拟半范数. 若给定线性子空间$\mathscr{Y}\subset\mathscr{X}$和其上的线性映射$\phi:\mathscr{Y}\to\mathbb{R}$, 使得

$$\phi(y)\le q(y),\forall y\in\mathscr{Y}.$$

则存在线性映射$\varphi:\mathscr{X}\to\mathbb{R}$满足

(i) $\varphi|_{\mathscr{Y}}=\phi$;

(ii) $\varphi(x)\le q(x)$, $\forall x\in\mathscr{X}$.

解. 先证$\mathscr{X}/\mathscr{Y}=1$的情况. 即有$x_0\in\mathscr{X}$使得

$$\mathscr{X}=\{y+sx_0:y\in\mathscr{Y},s\in\mathbb{R}\}.$$

于是只需找到$\alpha\in\mathbb{R}$使得映射$\varphi(y+sx_0)=\phi(y)+s\alpha$, $\forall y\in\mathscr{Y}$, $s\in\mathbb{R}$满足条件(ii), 于是$s>0$时有

$$\alpha\le q(z+x_0)-\phi(z),\forall z\in\mathscr{Y},z=s^{-1}y,s>0$$

对于$s<0$时有

$$\alpha\ge\phi(w)-q(w-x_0),\forall w\in\mathscr{Y},w=t^{-1}y,s<0$$

然而$\phi(w)-q(w-x_0)\le q(z+x_0)-\phi(z)$, $\forall w,z\in\mathscr{Y}$恒成立. 然后用Zorn引理. □

未知 17.4.1: Hahn-Banach定理, $\mathbb{C}$-version

设$\mathscr{X}$是复数域$\mathbb{C}$上的向量空间, $q:\mathscr{X}\to\mathbb{R}$是$\mathscr{X}$上的拟半范数, 给定线性子空间$\mathscr{Y}\subset\mathscr{X}$和$\mathscr{Y}$上的线性映射$\phi:\mathscr{Y}\to\mathbb{C}$使得

$$\mathrm{Re}\phi(y)\le q(y),\quad\forall y\in\mathscr{Y}.$$

则存在线性映射$\psi:\mathscr{X}\to\mathbb{C}$满足:

(i) $\psi|_{\mathscr{Y}}=\phi$;

(ii) $\mathrm{Re}\psi(x)\le q(x)$, $\forall x\in\mathscr{X}$.

解. 设$\phi_1=\mathrm{Re}\phi$, 因ϕ_1是$(\mathscr{Y},\mathbb{R})$上的线性映射且被拟半范数q控制, 则由$\mathbb{R}$-Hahn Banach定理, ϕ_1可延拓到$(\mathscr{X},\mathbb{R})$上的实线性映射ψ_1且满足

(i') $\psi_1|_{\mathscr{Y}}=\phi_1$;

(ii') $\psi_1(x)\le q(x)$, $\forall x\in\mathscr{X}$.

但注意这里用的是实的Hahn Banach定理, 所延拓的ψ_1是针对实向量空间$(\mathscr{X},\mathbb{R})$的, 要得到复向量空间的ψ_1, 则在$(\mathscr{Y},\mathbb{C})$上考虑$\psi_1(y)=\phi_1(y)$, 但新定义的ψ_1是实域上的线性映射, 而不是复域上的线性映射, 显然所求线性映射ψ的实部$\mathrm{Re}\psi$在实线性空间中也满足以上两条件. 若取$\mathrm{Re}\psi=\psi_1$, 则ψ在实的情况已满足条件(ii). 而$\mathrm{Im}\psi(y)=\mathrm{Re}(-\mathrm{i}\psi(y))=\mathrm{Re}\psi(-\mathrm{i}y)=\psi_1(-\mathrm{i}y)$, 于是$\psi(y)=\psi_1(y)+\mathrm{i}\psi_1(-\mathrm{i}y)$, 要证$\psi|_{\mathscr{Y}}=\phi$, 只需证$\mathrm{Im}\psi(y)=\mathrm{Im}\phi(y)$, $\forall y\in\mathscr{Y}$, 然而

$$\mathrm{Im}\phi(y)=\mathrm{Re}(-\mathrm{i}\phi(y))=\mathrm{Re}(\phi(-\mathrm{i}y))=\phi_1(-\mathrm{i}y)=\psi_1(-\mathrm{i}y)=\mathrm{Im}\psi(y).$$

最后证明线性映射$\psi(x)=\psi_1(x)+\mathrm{i}\psi_1(-\mathrm{i}x)$在复域上满足(ii), 注意这里的$\psi_1(-\mathrm{i}x)$是怎么定义的? □

17.5 拓扑

定理 17.5.1: 杨忠道定理

证明: 拓扑空间中的每一子集的导集为闭集的充分必要条件是此空间中的每一个单点集的导集为闭集.

解. 只证充分性. 设拓扑空间X的每一个单点集的导集为闭集, 任意$A\subset X$, 设$x\in d(d(A))$, 对x的任意开邻域U, 有$U\cap(d(A)\setminus\{x\})\neq\varnothing$, 因$d(\{x\})$是闭集, 且$x\notin d(\{x\})$, 令$V=U\setminus d(\{x\})$, V是x的开邻域, 从而有

$$y\in V\cap(d(A)\setminus\{x\}).$$

由$y\in V$, $y\notin d(\{x\})$, 且$y\neq x$, 于是存在$W\in\mathscr{U}_y$, 使得$x\notin W$, 因$V\in\mathscr{U}_y$, 令$K=W\cap V$, $K\in\mathscr{U}_y$, 由$y\in d(A)$, 存在$z\in K\cap(A\setminus\{y\})\neq\varnothing$. 由$z\in K\subset W$, $z\neq x$, 因此$z\in U\cap(A\setminus\{x\})$, 故$U\cap(A\setminus\{x\})\neq\varnothing$, 即$x\in d(A)$, 所以$d(d(A))\subset d(A)$, $d(A)$为闭集. □

17.6 数论

定理 17.6.1: 恒等定理

设$f(x),g(x)\in D[x]$, 若有无穷多个$\alpha\in D$使$f(\alpha)=g(\alpha)$, 则$f(x)=g(x)$.

定理 17.6.2: 拉格朗日定理

设$f(x)$是整系数多项式, 模p的次数为n, 则同余方程

$$f(x)\equiv 0 \pmod p \tag{17.1}$$

至多有n个互不相同的解.

解. $n=1$时结论显然成立, 对n归纳. 假设$n-1$时已正确, 当f的次数是n时, 若同余方程无解, 则无需证明. 若$x=a$是一个解, 用$(x-a)$除$f(x)$得$f(x)=g(x)(x-a)+A$, $(A\in\mathbb{Z})$, 若同余方程(17.1)除$x\equiv a \pmod p$外无解, 则证毕, 否则设$x=b$是(17.1)的另一个解, 且$a\not\equiv b \pmod p$, 则

$$0\equiv f(b)=g(b)(b-a)+A \pmod p, \text{又由} 0\equiv f(a)=g(a)(a-a)+A=A \pmod p.$$

所以$g(b)\equiv 0 \pmod p$, 这表明(17.1)的解除$x\equiv a \pmod p$之外, 其余的解均是$g(x)\equiv 0 \pmod p$的解, 但$g(x)$模p的次数显然是$n-1$, 由归纳假设, $g(x)\equiv 0 \pmod p$, 至多有$n-1$个互不同余的解, 从而同余方程(17.1)至多有n个解. □

定理 17.6.3: 整系数多项式的有理根

$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0\in\mathbb{Z}[x]$, $n\geq 1$, $a_na_0\neq 0$且$(a_n,\cdots,a_0)=1$, 若$\frac{b}{c}$是$f(x)$的一个有理根$(b,c)=1$, 则$c\mid a_n$, $b\mid a_0$.
特别地, 首项系数为± 1的整系数多项式的有理根必是整数.

解. 由$f\left(\frac{b}{c}\right)=0$, 得$a_nb^n+\cdots+a_1bc^{n-1}+a_0c^n=0$, 所以$a_0\mid b$, $a_n\mid c$.
一种证明有理数是整数的证明途径: 证复数是整数, 先证其是有理数, 且找到作为零点的首一多项式. □

定理 17.6.4: Gauss引理

$\mathbb{Z}[x]$中两个本原多项式的乘积仍是一个本原多项式.

解. 反证法, $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$, $g(x)=b_mx^m+\cdots+b_0$, 若$f(x)g(x)$不是本原多项式, 则有素数p整除$f(x)g(x)$的所有系数. 设r是a_i不被p整除的最小角标, s是b_i不被p整除的最小角标, 则$f(x)g(x)$的x^{r+s}项系数不能被p整除. □

定理 17.6.5: 艾森斯坦判别法

设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$是一个整系数多项式, 其中$n\geq 1$. 若存在一个素数p, 使得$p\nmid a_n$, $p\mid a_i(i=0,1,\cdots,n-1)$, 但$p^2\nmid a_0$, 则$f(x)$在$\mathbb{Z}$上不可约.

定理 17.6.6: 科恩定理

设$p=\overline{a_n\cdots a_1a_0}$是一个十进制素数, $0\le a_i\le 9(i=0,1,\cdots,n)$, $a_n\neq 0$. 则多项式

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0.$$

在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 先用2.3.8, 再用2.3.9. □

定理 17.6.7

Every nonzero integer can be written as a product of primes.

解. Assume that there is an integer that cannot be written as a product of primes. Let N be the smallest positive integer with this property. Since N cannot itself be prime we must have $N=mn$, where $1<m,n<N$. However, since m and n are positive and smaller than N they must each be a product of primes. But then so is $N=mn$. This is a contradiction.

The proof can be given in a more positive way by using mathematical induction. It is enough to prove the result for all positive integers. 2 is a prime. Suppose that $2<N$ and that we have proved the result for all numbers m such that $2\le m<N$. We wish to show that N is a product of primes. If N is a prime, there is nothing to do. If N is not a prime, then $N=mn$, where $2\le m,n<N$. By induction both m and n are products of primes and thus so is N. □

定理 17.6.8: m进(m-adic)表示

正整数$m\ge 2$, $\forall a\in\mathbb{N}_+$, 有表示$a=a_0+a_1m+\cdots+a_sm^s$.

定理 17.6.9: Bézout's identity(贝祖等式)

任意两整数$a,b(b\neq 0)$的正最大公因子$d=(a,b)$唯一存在, 而且存在整数u,v使得$ua+vb=d$, u,v称为Bézout系数, Bézout系数不唯一, 若设$a'=\frac{a}{d}$, $b'=\frac{b}{d}$, 则恰有两系数对满足$|u|<|b'|$, $|v|<|a'|$.

解. 若$a>b$, $a=bq+r$, 则$(a,b)=(r,b)$, 于是由碾转相除法的逆过程可得u,v. □

解. 不用碾转相除法. $M=\{ax+by\mid x,y\in\mathbb{Z}\}$, d是M中的最小正整数(自然数良序性). 则若$d=ax_0+by_0$知$(a,b)\mid d$, 所以只需证$d\mid(a,b)$. 若$d\nmid a$, 取$a=dq+r$, 则$r=a\hat{x}_0+b\hat{y}_0<d$与$d$的选取矛盾. □

推论 17.6.1

a,b互素等价于: 存在整数u,v使$ua+vb=1$.
$a,b\in\mathbb{Z}$, 则:

$$\begin{aligned}(a,b)=d&\Rightarrow\{am+bn\mid m,n\in\mathbb{Z}\}=\{dk\mid k\in\mathbb{Z}\}\\&\Rightarrow a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=d\mathbb{Z}\\&\Rightarrow(a,b)=(d)\end{aligned}$$

推论 17.6.2: Bézout等式

任s个非零整数$a_1,\cdots,a_s$的最大公因子$d=(a_1,\cdots,a_s)$存在唯一, 且$(a_1,\cdots,a_{s-1},a_s)=((a_1,\cdots,a_{s-1}),a_s)$, 且存在整数$u_1,\cdots,u_s$使, $u_1a_1+\cdots+u_sa_s=d$.

定理 17.6.10

$v_p(n)$使使得$p^k\|n$的整数k. 则

$$v_p(n!)=\sum_k\left[\frac{n}{p^k}\right].$$

定理 17.6.11: 威尔逊定理

p是素数, 则有$(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

解. 当$p=2$时, 命题显然. 若$p \geq 3$, 由于对每个与p互素的a在模p下均有逆a^{-1}. 故可得$1,2,\cdots,p-1$的每个与其逆配对, 而特别的当$a=a^{-1}$时是例外. 此时对应$a^2 \equiv 1 \pmod p$有解$a=1$或$a=p-1$, 而$2,\cdots,p-2$可两两配对使积为1. 所以$(p-1)! \equiv 1\cdot(p-1) \equiv -1 \pmod p$. □

解. 用 Euler 恒等式

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}i^n=\begin{cases}0, n<m\\(-1)^n n!, n=m\end{cases}$$

取$m=n=p-1$, 当 $p>2$ 时及 Fermat 小定理有

$$(-1)^{p-1}\cdot(p-1)! \equiv \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\binom{p-1}{i}i^{p-1} \equiv \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\binom{p-1}{i} \equiv -1 \pmod p.$$

□

解. 当 $p \geq 3$ 时, 由 Fermat 小定理 $p-2$ 次同余方程

$$f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-p+1)-x^{p-1}+1 \equiv 0 \pmod p$$

有 $p-1$ 个不同得解, 所以 $f(x)$ 的系数模 p 余零, 所以常数项 $(p-1)!+1 \equiv 0 \pmod p$. □

17.7 不等式

定理 17.7.1: Generalized Schur Inequality

设六个非负实数a,b,c,x,y,z满足(a,b,c)和(x,y,z)均单调, 则

$$\sum_{cyc}x(a-b)(b-c) \geq 0.$$

解. 不妨设$a \geq b \geq c$, 分$x \geq y \geq z$与$x \leq y \leq z$两种情况分别讨论. □

推论 17.7.1

记$S=\sum_{cyc}x(a-b)(a-c)$. 下面几条条件的任何一个均可证明$S \geq 0$.

(1) 当$a \geq b \geq c \geq 0$, $x \geq y \geq 0$且$z \geq 0$时.

(2) 当$a \geq b \geq c \geq 0$, $z \geq y \geq 0$且$x \geq 0$时.

(3) 当$a \geq b \geq c \geq 0$, 且$ax \geq by \geq 0$或者$by \geq cz \geq 0$时.

解. (1)和(2)显然, 对于(3)有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{abc}(x(a-b)(a-c)+y(b-a)(b-c)+z(c-a)(c-b))\\&=ax\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+by\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+cz\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right).\end{aligned}$$

便转化为前面的两种情况了. □

定理 17.7.2: Cauchy不等式

对于欧式空间中任意向量α,β都有

$$|(\alpha,\beta)| \le |\alpha||\beta|.$$

而且即当α与β线性相关时等号成立.

定理 17.7.3: 三角形不等式

对欧式空间中任意向量α,β有

$$|\alpha+\beta| \le |\alpha| + \left|\beta\right|.$$

对欧式空间中任意向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$都有

$$|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m| \le |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_m|.$$

17.8 MSE

定理 17.8.1: MSE5

Theorem (JHC) $r = \sqrt{n}$ is integral if rational, for $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$

解. Put $\mathrm{r} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, least $\mathrm{B} > 0. \sqrt{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{n}}{\sqrt{\mathrm{n}}} \Rightarrow \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{nB}}{\mathrm{A}}$. Taking fractional parts yields $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{A}}$ for $0 \le \mathrm{b} < \mathrm{B}$. But $\mathrm{B} \nmid \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{b} \ne 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ contra B least. QED □

定理 17.8.2: MSE5

Theorem (WGD) $\mathrm{r} = \sqrt{\mathrm{n}}$ is integral if rational, for $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$

解. Put $\mathrm{r} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, least $\mathrm{B} > 0. \sqrt{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{n}}{\sqrt{\mathrm{n}}} \Rightarrow \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{nB}}{\mathrm{A}} \Rightarrow \mathrm{B} \mid \mathrm{A}$ by this key result: □

定理 17.8.3: MSE5

Unique Fractionization The least denominator B of a fraction divides every denominator.

解. $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}} \Rightarrow \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}$. Taking fractional parts $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{A}}$ where $0 \le \mathrm{b} < \mathrm{B}$. But $\mathrm{B} \nmid \mathrm{D} \Rightarrow \mathrm{b} \ne 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ contra leastness of B. Thus $\mathrm{B} \mid \mathrm{D}$ as claimed QED □

Chapter 18

定义集

18.1 初等数论

定义 18.1.1: 模p同余

若两多项式$f(x)$与$g(x)$同次幂系数均关于模p同余, 则称$f(x)$和$g(x)$对模p同余或模p恒等.

$$f(x) \equiv g(x) \pmod p.$$

定义 18.1.2: 多项式模p的次数

若$f(x)$的系数不全被p整除, 其中系数不被p整除的最高幂次称为$f(x)$模p的次数.

定义 18.1.3: 容度, 本原多项式

设$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, 且$f(x) \neq 0$, 将$a_0, a_1, \cdots, a_n$的最大公约数$(a_0, a_1, \cdots, a_n)$, 称为$f(x)$的容度.
容度为1的多项式称为本原多项式.

18.2 高等代数

定义 18.2.1: 欧式空间

设V是实数域$\mathbb{R}$上的一个线性空间. 如果V中存在一个二元运算$(\cdot,\cdot): V^2 \to \mathbb{R}$, 且满足

1. $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$,
2. $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$, $(k \in \mathbb{R})$,
3. $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = (\alpha_1, \beta) + (\alpha_2, \beta)$,
4. 当$\alpha \neq \theta$时, $(\alpha, \alpha) > 0$,

则称在V上定义了一个内积, 并把V叫做一个欧式空间. 在欧式空间中, 常把实数(α, β)叫做向量α与β的内积.

定义 18.2.2

称非负实数$\sqrt{(\alpha, \alpha)}$为向量α的长, 并用$|\alpha|$表示, 即

$$|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}.$$

设α, β为两个非零向量, 称实数$\varphi = \arccos \frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$为向量$\alpha$与$\beta$的夹角, 亦即

$$\cos\varphi = \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}.$$

定义 18.2.3: 正交

如果欧式空间中两个向量α与β的内积等于零, 即$(\alpha,\beta)=0$, 则称α与β正交.

定义 18.2.4

设V是n维欧式空间. 如果V的基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$中每两个向量都正交, 则称此基为正交基. 如果正交基中每个向量的长都是1, 则称该基为标准正交基.

定义 18.2.5: 欧式空间的同构映射

设V和V'是两个欧式空间, 如果φ是线性空间V到V'的一个同构映射, 而且对V中任意向量α,β都有

$$(\alpha,\beta)=(\varphi(\alpha),\varphi(\beta)),$$

则称φ是欧式空间V到V'的一个同构映射.
如果欧式空间V到V'存在同构映射, 则称欧式空间V与V'同构.

定义 18.2.6: Gram矩阵

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为欧式空间的一组向量, 则称实对称方阵

$$G=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}$$

为这组向量的Gram矩阵. G满秩当且仅当$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关.

定义 18.2.7: 正交

设W是欧式空间V的子空间. 如果V中向量α与W中每个向量都正交, 则称α与W正交, 记为$(\alpha,W)=0$或$\alpha\perp W$.
如果子空间V_1中每个向量与子空间V_2中每个向量都正交, 则称子空间V_1与V_2正交, 记为$(V_1,V_2)=0$或$V_1\perp V_2$.

定义 18.2.8

设W和W'是欧式空间V(不一定是有限维)的两个子空间. 如果

$$V=W+W' \quad 且 \quad W\perp W',$$

则称W'为子空间W的正交补.

定义 18.2.9: 正交变换

设T是欧式空间V的一个线性变换, 如果T保持V中任何向量的长都不变, 亦即对V中任意的α都有

$$(T\alpha,T\alpha)=(\alpha,\alpha),$$

则称T是V的一个正交变换.
设T是欧式空间V的线性变换. 则T为正交变换的充要条件是, T保持向量的内积不变, 即对V中任意向量α,β都有

$$(T\alpha,T\beta)=(\alpha,\beta).$$

定义 18.2.10

设A是一个实n阶方阵. 如果$AA'=E$, 则称A为正交方阵. 正交方阵A中的行向量是欧式空间$\mathbb{R}^n$中的一个标准正交基.

定义 18.2.11

设T是n维欧式空间V的一个正交变换, 且在某标准正交基下的方阵为A. 若$|A| = 1$, 则称为旋转或第一类的; 若$|A| = -1$, 则称T为第二类的.

定义 18.2.12

设T是欧式空间V的一个线性变换, 如果对V中任意向量α, β都有

$$(T\alpha, \beta) = (\alpha, T\beta),$$

则称T是V的一个对称变换.

18.3 数学分析

定义 18.3.1: 数学分析习题集

- 分析引论
    1. 实数
    2. 数列理论
    3. 函数的概念
    4. 函数图像表示法
    5. 函数的极限
    6. 符号$\mathcal{O}$
    7. 函数连续性
    8. 反函数, 用参数形式表示的函数
    9. 函数的一致连续性
    10. 函数方程

定义 18.3.2: 分析引论

- 实数
    - 数学归纳法
    - 分割→实数
    - 绝对值(模)→三角不等式, 开区间, 半开区间, 闭区间
    - 上, 下确界的定义
    - 绝对误差, 相对误差→精确数字
- 数列理论
    - 数列极限的概念
    - 收敛, 发散, 无穷小量, 无穷极限
    - 极限存在的判别法
        - 夹逼定理
        - 单调有界
        - Cauchy准则
    - 数列极限的基本定理
        - 保序性
        - 唯一性

    * 保加, 减, 乘, 除(分母不为0)运算
    * Stolz公式
  - 极限点, 上下极限, 运算和不等式
  - 重要极限
    * $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
    * $\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \log n)$
- 函数的概念
  - (单值)函数的定义, 定义域(存在域), 值域
  - 反函数
  - (严格)单调
  - 复合函数
- 函数的图像表示, 函数的零点
- 函数的极限
  - 函数的有界性, 上确界, 下确界, 振幅
  - 函数在某一点的极限, (与数列极限的关系)
  - 重要极限
    * $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
    * $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
  - Cauchy准则(函数极限存在的充要条件)
  - 单侧极限, 左右极限
  - 无穷极限, $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Longleftrightarrow \forall E > 0, \exists\delta = \delta(E) > 0, \ni \forall 0 < |x-a| < \delta(E)$, 均有$\left|f(x)\right| > E$.
  - 子列极限, 下极限, 上极限
- 函数的连续性
  - (点)连续
  - 间断点
    * 第一类间断点
      · 可去间断点
      · 跳跃间断点
    * 第二类间断点(无穷型间断点)
  - 左右连续
  - (点)连续, 保加, 减, 乘, 除(分母不为0)
  - 复合函数的连续
  - 初等函数的连续
  - 基本定理
    * 闭区间上连续函数有界
    * 闭区间上连续函数达到上下确界(Weierstrass定理)
    * 闭区间上连续函数定义在$(\alpha,\beta)\subset[a,b]$, f取到$f(\alpha)$, $f(\beta)$之间的所有值(Cauchy定理)
    * 闭区间上连续函数的零点定理
- 反函数
  - 反函数的存在性和连续性
  - 单值连续分支
  - 参数形式表示的函数的连续性
- 函数的一致连续性
  - 一致连续性的定义
  - Cantor定理

18.4 微分方程

定义 18.4.1: 标准形式下的边值问题

二阶线性微分方程: $y''+P(x)y'+Q(x)y=\phi(x)$, $P(x),Q(x),\phi(x)\in C[a,b]$在满足边界条件:

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a)+\beta_1 y'(a)=\gamma_1, & \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2\in\mathbb{R}, \\ \alpha_2 y(b)+\beta_2 y'(b)=\gamma_2, & \alpha_1^2+\beta_1^2\neq 0, \alpha_2^2+\beta_2^2\neq 0. \end{cases}$$

的问题称为标准形式下的边值问题. 边值问题是齐次的, 若$\phi(x)\equiv 0$, $\gamma_1=\gamma_2=0$. 否则称为非齐次的.

定义 18.4.2: 更一般的齐次边值问题

更一般的齐次边值问题是有如下形式的问题

$$\begin{cases} y''+P(x,\lambda)y'+Q(x,\lambda)y=0; \\ \alpha_1 y(a)+\beta_1 y'(a)=0; \\ \alpha_2 y(b)+\beta_2 y'(b)=0 \end{cases}$$

18.5 泛函分析

定义 18.5.1: 紧算子

设 X 是 Banach 空间, 若线性算子 T 把每一有界集映成列紧集, 则称线性算子 T 为紧算子.

定义 18.5.2: Banach空间中的凸集

设 X 是 Banach 空间, 集合 $K\subset X$称为是凸的, 若 $(1-t)K+tK\subset K$, $(0\le t\le 1)$.

定义 18.5.3: 拟半范数, 半范数

设$\mathbb{K}$是$\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$, $\mathscr{X}$是域$\mathbb{K}$上的向量空间.

A. 映射$q:\mathscr{X}\to\mathbb{R}$称为拟半范数, 如果

(i) $q(x+y)\le q(x)+q(y)$, 对于任意$x,y\in\mathscr{X}$.

(ii) $q(tx)=tq(x)$, 对任意的$x\in\mathscr{X}$和$t\in\mathbb{R}$, $t\ge 0$.

B. 映射$q:\mathscr{X}\to\mathbb{R}$称为是半范数, 如果上面的两个条件中(ii)改为

(ii') $q(\lambda x)=|\lambda|q(x)$, 对任意$x\in\mathscr{X}$和$\lambda\in\mathbb{K}$.

注: 若$q:\mathscr{X}\to\mathbb{R}$是半范数, 则对于任意的$x\in\mathscr{X}$, $q(x\ge 0)$. (因$2q(x)=q(x)+q(-x)\ge q(0)=0$).

Chapter 19

tex笔记

19.1 使用频率较低的符号列表

特殊符号表

```
\begin{center}
 \begin{tabular}{|c|c|c|c|c|}
   \hline
   $\hbar$ & $\imath$ & $\jmath$ & $\ell$ & $\Im$\\
   \hline
   $\wp$ & $\mho$ & $\prime$ & $\Box$ & $\Diamond$\\
   \hline
   $\bot$ & $\top$ & $\surd$ & $\diamondsuit$ & $\heartsuit$\\
   \hline
   $\clubsuit$ & $\spadesuit$ & $\neg$ & $\lnot$ & $\flat$\\
   \hline
   $\natural$ & $\sharp$ & \dag & \ddag & \S\\
   \hline
   \P & \copyright & \pounds & \textregistered & \\
   \hline
 \end{tabular}
\end{center}
```

$\hbar$	$\imath$	$\jmath$	ℓ	$\Im$
$\wp$	$\mho$	$\prime$	$\Box$	$\Diamond$
$\bot$	$\top$	$\surd$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$
$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\neg$	$\lnot$	$\flat$
$\natural$	$\sharp$	†	‡	§
¶	©	£	®	

19.2 itemize enumerate

列表

```
\begin{enumerate}
\item This is an example of \ldots
\item \ldots the usual enumeration.
\begin{enumerate}[a)]
  \item And this is a \ldots
  \item \ldots couple of \ldots
\end{enumerate}
  \item
  \begin{enumerate}[-- i --]
  \item \ldots examples of \ldots
  \item \ldots custom-tailored \ldots
  \item \ldots enumerations.
  \newcounter{enumii_saved}
  \setcounter{enumii_saved}{\value{enumii}}
  \end{enumerate}
  Some general comments
  \begin{enumerate}[-- i --]
  \setcounter{enumii}{\value{enumii_saved}}
  % 如果要换另一个条列式项目，但编号接续，使用\newcounter{enumii_saved}来操作
  \item My next point.
  \setcounter{enumii}{7}
  % 使用setcounter{enumii}{数字}来指定编号号码
  \item My eighth point.
  \end{enumerate}
\end{enumerate}
```

1. This is an example of ...
2. ... the usual enumeration.
   a) And this is a ...
   b) ... couple of ...
3. – i – ... examples of ...
   – ii – ... custom-tailored ...
   – iii – ... enumerations.

   Some general comments

   – iv – My next point.
   – viii – My eighth point.

19.3 tikz

画图

```
\begin{tikzcd}
  A \arrow[rd] \arrow[r, "\phi"] & B \\
  & C
\end{tikzcd}
\begin{tikzcd}
  A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, red]
  & B \arrow[d, "\psi" red] \\
  C \arrow[r, red, "\eta" blue]
  & D
\end{tikzcd}
\begin{tikzcd}
  A \arrow[r, "\phi" near start, "\psi"', "\eta" near end] & B
\end{tikzcd}
\begin{tikzcd}
  T
  \arrow[drr, bend left, "x"]
  \arrow[ddr, bend right, "y"]
  \arrow[dr, dotted, "{(x,y)}" description] & & \\
  & X \times_Z Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"]
  & X \arrow[d, "f"] \\
  & Y \arrow[r, "g"]
  & Z
\end{tikzcd}\\
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
  & \pi_1(U_1) \ar[dr] \ar[drr, "j_1", bend left=20]
  &
  &[1.5em] \\
  \pi_1(U_1\cap U_2) \ar[ur, "i_1"] \ar[dr, "i_2"']
  &
  & \pi_1(U_1) \ast_{ \pi_1(U_1\cap U_2)} \pi_1(U_2) \ar[r, dashed, "\simeq"]
  & \pi_1(X) \\
  & \pi_1(U_2) \ar[ur]\ar[urr, "j_2"', bend right=20]
  &
  &
\end{tikzcd}
\begin{tikzcd}
  X \arrow[r, hook] \arrow[dr, dashrightarrow]
  & \bar{X} \arrow[d]\\
  & Y
\end{tikzcd}
```

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rd] \arrow[r, "\phi"] & B \\ & C \end{tikzcd} \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, red] & B \arrow[d, "\psi" red] \\ C \arrow[r, red, "\eta" blue] & D \end{tikzcd} \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi" near start, "\psi"', "\eta" near end] & B \end{tikzcd} \begin{tikzcd} T \arrow[drr, bend left, "x"] \arrow[ddr, bend right, "y"] \arrow[dr, dotted, "{(x,y)}" description] & & \\ & X \times_Z Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] & \pi_1(U_1) \ar[dr] \ar[drr, "j_1", bend left=20] & &[1.5em] \\ \pi_1(U_1\cap U_2) \ar[ur, "i_1"] \ar[dr, "i_2"'] & & \pi_1(U_1) \ast_{ \pi_1(U_1\cap U_2)} \pi_1(U_2) \ar[r, dashed, "\simeq"] & \pi_1(X) \\ & \pi_1(U_2) \ar[ur]\ar[urr, "j_2"', bend right=20] & & \end{tikzcd} \begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, dashrightarrow] & \bar{X} \arrow[d]\\ & Y \end{tikzcd}$$

画图

```
\begin{tikzcd}
  A \arrow[r, tail, two heads, dashed] & B
\end{tikzcd}
\begin{tikzcd}
  A \arrow{d} \arrow{r}[near start]{\phi}[near end]{\psi}
  & B \arrow[red]{d}{\xi} \\
  C \arrow[red]{r}[blue]{\eta}
  & D
\end{tikzcd}
\begin{tikzcd}[column sep=small]
        & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
  B \arrow{rr} &
             & C
\end{tikzcd}
\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
  & B \arrow[dd] \\
  A \arrow[ur] \arrow[dr] &
  \\
  & C
\end{tikzcd}
% in preamble
\tikzcdset{
  arrow style=tikz,
  diagrams={>={Straight Barb[scale=0.8]}}
}
% in document body
\begin{tikzcd}
  A \arrow[r, tail] \arrow[rd] & B \arrow[d, two heads]\\
  & D
\end{tikzcd}
```

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, two heads, dashed] & B \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A \arrow{d} \arrow{r}[near start]{\phi}[near end]{\psi} & B \arrow[red]{d}{\xi} \\ C \arrow[red]{r}[blue]{\eta} & D \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ B \arrow{rr} & & C \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[row sep=tiny] & B \arrow[dd] \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & C \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[rd] & B \arrow[d, two heads] \\ & D \end{tikzcd}$$

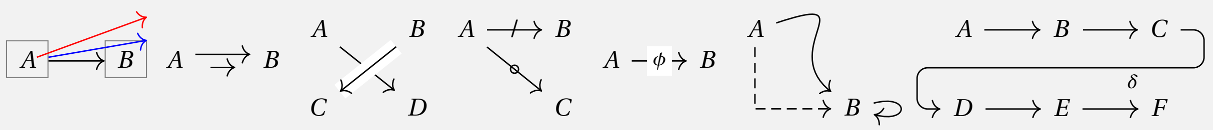
画图

```
\begin{tikzcd}
  A \arrow[to=Z, red] \arrow[to=2-2, blue]
  & B \\
  |[alias=Z]| C
  & D
  \arrow[from=ul, to=1-2, purple]
\end{tikzcd}
\begin{tikzcd}[column sep=scriptsize]
  A \arrow[dr] \arrow[rr, ""{name=U, below, draw=red}]{}
  & & B \arrow[dl] \\
  & C \arrow[Rightarrow, from=U, "\psi"]
\end{tikzcd}
\begin{tikzcd}
  A \arrow[r, bend left=50, ""{name=U, below, draw=red}]
  \arrow[r, bend right=50, ""{name=D, draw=red}]
  & B
  \arrow[Rightarrow, from=U, to=D]
\end{tikzcd}
\begin{tikzcd}
  A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start]
  & B \arrow[d] \\
  C \arrow[r]
  & D
\end{tikzcd}
\begin{tikzcd}
  A \arrow[r, red, shift left=1.5ex] \arrow[r]
  \arrow[dr, blue, shift right=1.5ex] \arrow[dr]
  & B \arrow[d, purple, shift left=1.5ex] \arrow[d]\\
  & C
\end{tikzcd}
\begin{tikzcd}
  A \arrow[r]
  & B \arrow[r, shift left]
  \arrow[r, shift right]
  & C \arrow[r]
  \arrow[r, shift left=2]
  \arrow[r, shift right=2]
  & \cdots
\end{tikzcd}
\begin{tikzcd}
  A \arrow[r, yshift=0.7ex] \arrow[r, yshift=-0.7ex]
  & B \arrow[d, xshift=0.7ex] \arrow[d, xshift=-0.7ex] \\
  & C
\end{tikzcd}
```

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, purple] \arrow[d, red] \arrow[dr, blue] & B \\ C & D \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[column sep=scriptsize] A \arrow[dr] \arrow[rr, ""{name=U, below, draw=red}] & & B \arrow[dl] \\ & C \arrow[Rightarrow, from=U, "\psi"] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left=50, ""{name=U, below, draw=red}] \arrow[r, bend right=50, ""{name=D, draw=red}] & B \arrow[Rightarrow, from=U, to=D] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, red, shift left=1.5ex] \arrow[r] \arrow[dr, blue, shift right=1.5ex] \arrow[dr] & B \arrow[d, purple, shift left=1.5ex] \arrow[d] \\ & C \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r] & B \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & C \arrow[r] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, shift right=2] & \cdots \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, yshift=0.7ex] \arrow[r, yshift=-0.7ex] & B \arrow[d, xshift=0.7ex] \arrow[d, xshift=-0.7ex] \\ & C \end{tikzcd}$$

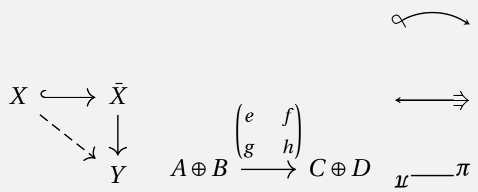
画图

```
  \begin{tikzcd}[cells={nodes={draw=gray}}]
    A \arrow[r, black]
\arrow[r, blue, end anchor=north east]
      \arrow[r,
red, start anchor={[xshift=-1ex]},
end anchor={[yshift=2ex]north east}]
    & B
  \end{tikzcd}
  \begin{tikzcd}
    A \arrow[r, shift left]
\ar[r, shorten=2mm, shift right]
    & B
  \end{tikzcd}
  \begin{tikzcd}
    A \arrow[dr] & B \arrow[dl, crossing over] \\
    C
  & D
  \end{tikzcd}
  \begin{tikzcd}
    A \arrow[r, "/" marking]
\arrow[rd, "\circ" marking]
    & B \\
    & C
  \end{tikzcd}
  \begin{tikzcd}
    A \arrow[r, "\phi" description] & B
  \end{tikzcd}
  \begin{tikzcd}
    A \arrow[dr, controls={+(1.5,0.5) and +(-1,0.8)}]
    \arrow[dr, dashed, to path=|- (\tikztotarget)]
    & \\
    & B \arrow[loop right]
  \end{tikzcd}
  \begin{tikzcd}
    A \arrow[r]
& B \arrow[r]
    \arrow[d, phantom, ""{coordinate, name=Z}]
    & C \arrow[dll,
"\delta",
    rounded corners,
    to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east)
      |- (Z) [near end]\tikztonodes
      -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west)
      -- (\tikztotarget)}] \\
    D \arrow[r]
& E \arrow[r]
  & F
  \end{tikzcd}
```



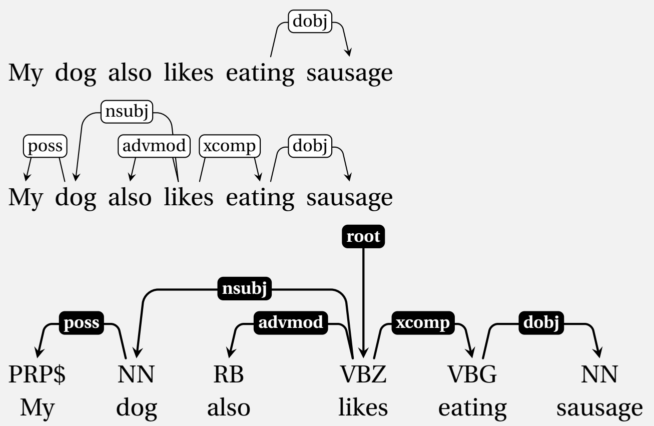
画图

```
\begin{tikzpicture}[commutative diagrams/every diagram]
  \matrix[matrix of math nodes, name=m, commutative diagrams/every cell] {
    X & \bar X \\
    & Y
    \\};
  \path[commutative diagrams/.cd, every arrow, every label]
  (m-1-1) edge[commutative diagrams/hook] (m-1-2)
  edge[commutative diagrams/dashed] (m-2-2)
  (m-1-2) edge (m-2-2);
\end{tikzpicture}
\begin{tikzcd}[ampersand replacement=\&]
  A \oplus B \ar[r, "{\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}}"]
  \& C \oplus D
\end{tikzcd}
\tikzset{
  math to/.tip={Glyph[glyph math command=rightarrow]},
  loop/.tip={Glyph[glyph math command=looparrowleft, swap]},
  weird/.tip={Glyph[glyph math command=Rrightarrow, glyph length=1.5ex]},
  pi/.tip={Glyph[glyph math command=pi, glyph length=1.5ex, glyph axis=0pt]},
}
\begin{tikzpicture}[line width=rule_thickness]
  \draw[loop-math to, bend left] (0,2) to (1,2);
  \draw[math to-weird] (0,1) to (1,1);
  \draw[pi-pi] (0,0) to (1,0);
\end{tikzpicture}
```



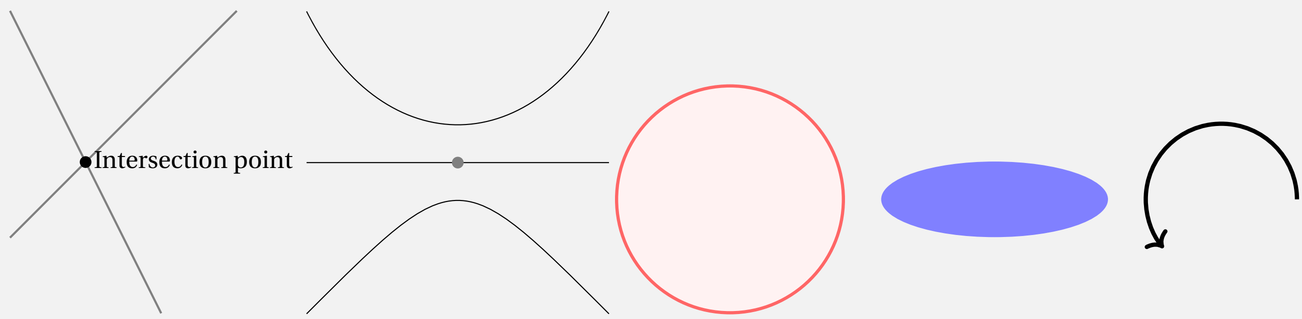
画图

```
\begin{dependency}
  \begin{deptext}
    My \& dog \& also \& likes \& eating \& sausage \\
  \end{deptext}
  \depedge{5}{6}{dobj}
\end{dependency}\\
\begin{dependency}
  \begin{deptext}
    My \& dog \& also \& likes \& eating \& sausage \\
  \end{deptext}
  \depedge{2}{1}{poss}
  \depedge{4}{2}{nsubj}
  \depedge{4}{3}{advmod}
  \depedge{4}{5}{xcomp}
  \depedge{5}{6}{dobj}
\end{dependency}\\
\begin{dependency}[theme=night]
  \begin{deptext}[column sep=.5cm, row sep=.1ex]
    PRP\$ \& NN \& RB \&[.5cm] VBZ \& VBG \& NN \\
    My \& dog \& also \& likes \& eating \& sausage \\
  \end{deptext}
  \deproot{4}{root}
  \depedge{2}{1}{poss}
  \depedge{4}{2}{nsubj}
  \depedge{4}{3}{advmod}
  \depedge{4}{5}{xcomp}
  \depedge{5}{6}{dobj}
\end{dependency}
```



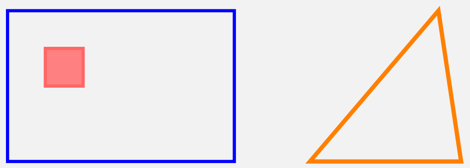
画图

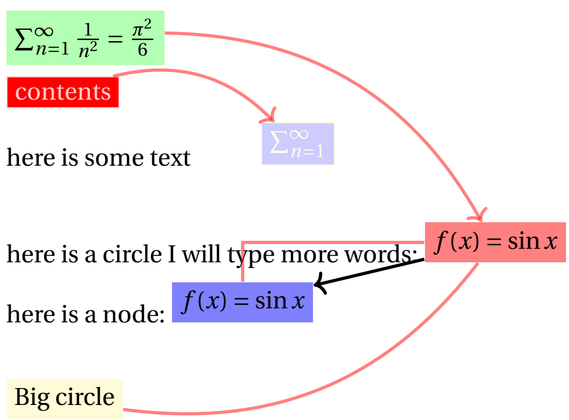
```
\begin{tikzpicture}
 \draw[gray, thick] (-1,2) -- (1,-2);
 \draw[gray, thick] (-1,-1) -- (2,2);
 \filldraw[black] (0,0) circle (2pt) node[anchor=west] {Intersection point};
\end{tikzpicture}
\begin{tikzpicture}
  \draw (-2,0) -- (2,0);
  \filldraw [gray] (0,0) circle (2pt);
  \draw (-2,-2) .. controls (0,0) .. (2,-2);
  \draw (-2,2) .. controls (-1,0) and (1,0) .. (2,2);
\end{tikzpicture}
\begin{tikzpicture}
  \filldraw[color=red!60, fill=red!5, very thick](-1,0) circle (1.5);
  \fill[blue!50] (2.5,0) ellipse (1.5 and 0.5);
  \draw[ultra thick, ->] (6.5,0) arc (0:220:1);
\end{tikzpicture}
```



画图

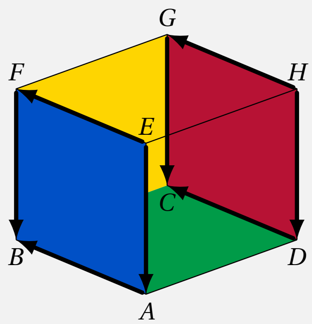
```
\begin{tikzpicture}
  \filldraw[color=red!60, fill=red!50, very thick](1,1) rectangle (0.5,1.5);
  \draw[blue, very thick] (0,0)rectangle (3,2);
  \draw[orange, ultra thick] (4,0) -- (6,0) -- (5.7,2) -- cycle;
\end{tikzpicture}
```





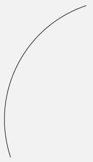
270226

```
\definecolor{myred}{RGB}{183,18,52}
\definecolor{myyellow}{RGB}{254,213,1}
\definecolor{myblue}{RGB}{0,80,198}
\definecolor{mygreen}{RGB}{0,155,72}
\begin{tikzpicture}[
  line join=round,
  y={(-0.86cm,0.36cm)},x={(1cm,0.36cm)}, z={(0cm,1cm)},
  arr/.style={-latex,ultra thick,line cap=round,shorten <= 1.5pt}
]
\def\Side{2}
\coordinate (A1) at (0,0,0);
\coordinate (A2) at (0,\Side,0);
\coordinate (A3) at (\Side,\Side,0);
\coordinate (A4) at (\Side,0,0);
\coordinate (B1) at (0,0,\Side);
\coordinate (B2) at (0,\Side,\Side);
\coordinate (B3) at (\Side,\Side,\Side);
\coordinate (B4) at (\Side,0,\Side);

\fill[myyellow] (A2) -- (A3) -- (B3) -- (B2) -- cycle;
\fill[mygreen]  (A2) -- (A3) -- (A4) -- (A1) -- cycle;
\fill[myred](A3) -- (B3) -- (B4) -- (A4) -- cycle;
\fill[myblue]   (A1) -- (A2) -- (B2) -- (B1) -- cycle;

\draw (A2) -- (A1) -- (A4);
\draw (B2) -- (B1) -- (B4) -- (B3) -- cycle;
\draw (A1) -- (B1);
\draw (A2) -- (B2);
\draw (A4) -- (B4);

\draw[thin] (A3) -- (B3);
\draw[thin] (A3) -- (A4);

\path[arr]
  (A1) edge (A2)
  (B2) edge (A2)
  (B1) edge (B2)
  (B1) edge (A1)
  (B4) edge (A4)
  (B3) edge (A3)
  (B4) edge (B3)
  (A4) edge (A3);

\node[below] at (A1) {$A$};
\node[below] at (A2) {$B$};
\node[below] at (A3) {$C$};
\node[below] at (A4) {$D$};
\node[above] at (B1) {$E$};
\node[above] at (B2) {$F$};
\node[above] at (B3) {$G$};
\node[above] at (B4) {$H$};
\end{tikzpicture}
```



根据三点画弧

```
\begin{tikzpicture}
  \tkzDefPoint(1,2){A}
  \tkzDefPoint(3,4){B}
  \tkzDefPoint(2,4){C}
  \tkzCircumCenter(A,B,C)\tkzGetPoint{O}
  \tkzDrawArc(O,C)(A)
\end{tikzpicture}
```



字体

```
$\mathscr{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$\\
$\mathbb{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$\\
$\mathcal{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$\\
$\mathfrak{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$
```

$\mathscr{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$
$\mathbb{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$
$\mathcal{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$
$\mathfrak{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$

19.4 pstricks

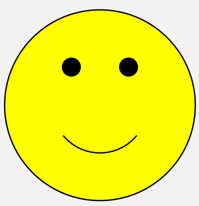
this is black. this is darkgray. this is gray. this is lightgray.

this is red. this is green. this is blue. this is cyan. this is magenta. this is yellow.

19.5 asymptote

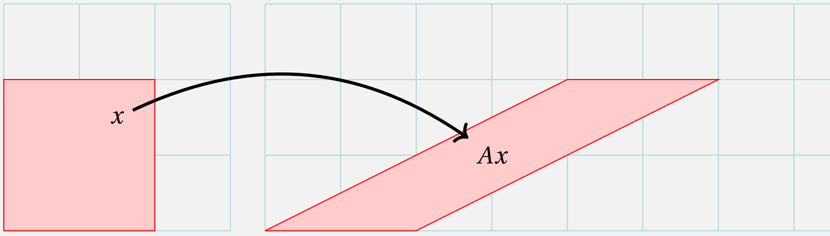
Asymptote

```
\begin{asy}
  include graph;
  size(1inch);
  filldraw(circle((0,0),1),yellow,black);
  fill(circle((-.3,.4),.1),black);
  fill(circle((.3,.4),.1),black);
  draw(arc((0,0),.5,-140,-40));
\end{asy}
```



Transform

```
\begin{center}
  \begin{tikzpicture}[remember picture]
    \draw[help lines] (0,0) grid (3,3);
    \draw[red,fill=red!20] (0,0)--(2,0)--(2,2)--(0,2)--(0,0);
    \node (n3) at (1.5,1.5) {$x$};
  \end{tikzpicture}
  \hspace{3mm}
  \begin{tikzpicture}[remember picture]
    \draw[help lines] (0,0) grid (7.5,3);
    \draw[red,fill=red!20] (0,0)--(2,0)--(6,2)--(4,2)--(0,0);
    \node (n2) at (3,1) {$Ax$};
  \end{tikzpicture}
  \begin{tikzpicture}[remember picture,overlay]
    \draw[overlay,->,very thick] (n3) to[bend left] (n2);
  \end{tikzpicture}
\end{center}
```



Chapter 20

PDE-NSE-Boussinesq

20.1 journals with url

Journal of Mathematical Physics

20.2 Boussinesq system

20.2.1 [T1997Inf]

定理 20.2.1: The Uniform Gronwall Lemma, ([T1997Inf], p. 91)

Let g, h, y, be three positive locally integrable functions on $(t_0, +\infty)$ such that y' is locally integrable on $(t_0, +\infty)$, and which satisfy

$$\boxed{\frac{dy}{dt} \le gy + h \quad \text{for} \quad t \ge t_0}$$

$$\boxed{\int_t^{t+r} g(s)ds \le a_1, \quad \int_t^{t+r} h(s)ds \le a_2, \quad \int_t^{t+r} y(s)ds \le a_3 \text{ for } t \ge t_0}$$

where r, a_1, a_2, a_3, are positive constants. Then

$$\boxed{y(t+r) \le \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right) \exp(a_1), \quad \forall t \ge t_0}$$

20.2.2 [HKZ2013on]

2d Boussinesq方程的正则性, global适定性, with zero diffusivity, positive viscosity, 在开光滑bdd区域Ω.

$\boxed{\Omega \subseteq \mathbb{R}^2}$: smooth, bdd, connected open set.

$\boxed{H = \{u \in L^2(\Omega) : \operatorname{div} u = 0, u \cdot n = 0 \text{ on } \partial\Omega\}}$, n是区域Ω的单位外法向量.

$\boxed{V = \{u \in H_0^1(\Omega) : \operatorname{div} u = 0\}}$.

$A : D(A) \to H$: the Stokes operator. $\boxed{D(A) = H^2 \cap V}$,

$\boxed{A := -\mathbb{P}\Delta}$, $\mathbb{P}$: the Leray projector in $L^2(\Omega) \to H$.

$\boxed{B(u, w) := \mathbb{P}(u \cdot \nabla w)}$, $\forall u, w \in V$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u\cdot\nabla u + \nabla p = \rho e_2, \\ \nabla\cdot u = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\cdot\nabla\rho = 0, & x\in\Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ \big(u(0),\rho(0)\big) = \big(u_0,\rho_0\big). \end{cases}$$

定理 20.2.2: [HKZ2013on]

Assume that $u_0 \in H^2(\Omega)\cap V$ and $\rho_0 \in H^1(\Omega)$ with $\|u_0\|_{H^2} \le M_0$ and $\|\rho_0\|_{H^1} \le M_1$, where $M_0, M_1 > 0$ are arbitrary. Then there exists a unique global solution (u,ρ) such that

$$\boxed{u \in L^\infty\big([0,\infty), H^2(\Omega)\big) \cap L^2_{\text{loc}}\big([0,\infty), H^3(\Omega)\big)}$$

and

$$\boxed{\rho \in L^\infty\big([0,\infty), H^1(\Omega)\big).}$$

Moreover, for every $T > 0$ we have

$$\boxed{\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \le C(M_0, M_1, T)}$$

and

$$\boxed{\|\rho(t)\|_{H^1(\Omega)} \le C(M_0, M_1, T)}$$

for $t \in [0,T]$.

三步: A priori bounds, the construction of solutions, uniqueness.
方法: Uniform Gronwall Lemma, the Brezis-Gallouet inequality.
$\langle u_t + Au + B(u,u) = \mathbb{P}(\rho e_2), u\rangle \Longrightarrow u \in L^\infty(L^2),\ \nabla u \in L^2_{loc}(L^2)$.
$\langle u_t + Au + B(u,u) = \mathbb{P}(\rho e_2), Au\rangle \Longrightarrow \nabla u \in L^\infty(L^2),\ \ Au \in L^2_{loc}(L^2)$.
$\langle u_t + Au + B(u,u) = \mathbb{P}(\rho e_2), A^2u\rangle \Longrightarrow Au \in L^\infty_{loc}L^2,\ \nabla\rho \in L^\infty_{loc}(L^2),\ \ A^{3/2}u \in L^2_{loc}(L^2)$ with Brezis-Gallouet ineq. and Lemma 2.3.
在唯一性的证明中: using $\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} + Au + B(u,u^1) + B(u^2,u) = \mathbb{P}(\rho e_2), Au\right\rangle$ and $\left\langle \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\cdot\nabla\rho^1 + u^2\cdot\nabla\rho = 0, \rho\right\rangle$, and

$$\begin{aligned} \left|\langle B(u,u^1), Au\rangle\right| &\lesssim \|Au\|_2\|B(u,u^1)\|_2 \\ &\lesssim \|Au\|_2\|u\cdot\nabla u^1\|_2 \\ &\lesssim \|Au\|_2\|u\|_\infty\|A^{1/2}u^1\|_2 \\ &\lesssim \|Au\|_2\|u\|_2^{1/2}\|Au\|_2^{1/2}\|A^{1/2}u^1\|_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|\langle B(u^2,u), Au\rangle\right| &\lesssim \|B(u^2,u)\|_2\|Au\|_2 \\ &\lesssim \|\mathbb{P}(u^2\cdot\nabla u)\|_2\|Au\|_2 \\ &\lesssim \|u^2\|_\infty\|\nabla u\|_2\|Au\|_2 \\ &\lesssim \|u^2\|_2^{1/2}\|Au^2\|_2^{1/2}\|u\|_2^{1/2}\|Au\|_2^{1/2}\|Au\|_2. \end{aligned}$$

引理 20.2.1: [HKZ2013on]

For $u, v \in D(A)$, we have

$$\|\nabla B(u,v)\|_{L^2} \lesssim \|u\|_2^{1/4}\|Au\|_2^{3/4}\|v\|_2^{1/4}\|Av\|_2^{3/4} + \|u\|_2^{1/2}\|Au\|_2^{1/2}\|Av\|_2.$$

Leray decomposition: $\mathbb{P}v = v - \nabla(p+q)$, $v \in H^1(\Omega)$.

$$\boxed{\begin{cases} \Delta p = \operatorname{div} v & \text{in } \Omega, \\ p = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \implies \|\nabla p\|_{H^1} \lesssim \|v\|_{H^1}.}$$

$$\boxed{\begin{cases} \Delta q = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial q}{\partial n} = (v - \nabla p) \cdot n & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \implies \|q\|_{H^2} \lesssim \|v - \nabla p\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}.}$$

so $\|\nabla \mathbb{P} v\|_2 \lesssim \|v\|_{H^1}$. then use Gagliardo-Nirenberg inequality.

定理 20.2.3: [HKZ2013on]

Assume that $\Omega = \mathbb{T}^2$ (periodic boundary conditions) or $\Omega = \mathbb{R}^2$. Assume that $u_0 \in H^2(\Omega)$ is divergence-free and that $\rho_0 \in H^1(\Omega)$ with $\|u_0\|_{H^2} \le M_0$ and $\|\rho_0\|_{H^1} \le M_1$, where $M_0, M_1 > 0$ are arbitrary. Then there exists a unique global solution (u, ρ) such that

$$\boxed{u \in L^\infty\left([0,\infty), H^2(\Omega)\right) \cap L^2_{\text{loc}}\left([0,\infty), H^3(\Omega)\right)}$$

and

$$\boxed{\rho \in L^\infty\left([0,\infty), H^1(\Omega)\right).}$$

Moreover, we have

$$\boxed{\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \le C(M_0, M_1, T)}$$

and

$$\boxed{\|\rho(t)\|_{H^1(\Omega)} \le C(M_0, M_1, T)}$$

for all $t \le T$, where $T > 0$ is arbitrary.

Chapter 21

Harmonic Analysis

21.1 Lorentz space

21.1.1 非对角线Marcinkiewicz插值定理

定义 21.1.1

称算子T是拟线性的, 如果T满足:

$$\left|T(\lambda f)\right| = |\lambda|\cdot\left|T(f)\right| \text{ and } \left|T(f+g)\right| \le K(\left|T(f)\right| + \left|T(g)\right|,$$

其中$K>0$, $\lambda\in\mathbb{C}$. 一般情况认为$K\ge 1$.

定理 21.1.1

设$0<r\le\infty$, $0<p_0\ne p_1\le\infty$, $0<q_0\ne q_1\le\infty$, (X,μ)和(Y,ν)是两个测度空间. 设T是定义在$L^{p_0}(X)+L^{p_1}(X)$上取值在Y上的可测函数的拟线性算子或是定义在X上的简单函数取值在Y上的可测函数的线性算子. 若对于某个$M_0, M_1<\infty$, 有以下估计:

$$\|T(\chi_A)\|_{L^{q_0,\infty}} \le M_0\mu(A)^{1/p_0},$$
$$\|T(\chi_A)\|_{L^{q_1,\infty}} \le M_1\mu(A)^{1/p_1},$$

对于X上的可测子集A: $\mu(A)<\infty$成立. 设对于固定的$0<\theta<1$有

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad\text{and}\quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

则存在常数M, 与K, p_0, p_1, q_0, q_1, M_0, M_1, r和θ有关, 使得对于所有$f\in D(T)\cap L^{p,r}(X)$有

$$\|T(f)\|_{L^{p,r}} \le M\|f\|_{L^{p,r}}.$$

Chapter 22

math.stackexchange.com

问题: 1. What Does it Really Mean to Have Different Kinds of Infinities?

1 What Does it Really Mean to Have Different Kinds of Infinities?
Can someone explain to me how there can be different kinds of infinities?
I was reading The man who loved only numbers by Paul Hoffman and came across the concept of countable and uncountable infinities, but they're only words to me.
Any help would be appreciated.

解答

Suppose no one ever taught you the names for ordinary numbers. Then suppose that you and I agreed that we would trade one bushel of corn for each of my sheep. But there's a problem, we don't know how to count the bushels or the sheep! So what do we do?
We form a bijection between the two sets. That's just fancy language for saying you pair things up by putting one bushel next to each of the sheep. When we're done we swap. We've just proved that the number of sheep is the same as the number of bushels without actually counting.
We can try doing the same thing with infinite sets. So suppose you have the set of positive integers and I have the set of rational numbers and you want to trade me one positive integer for each of my rationals. Can you do so in a way that gets all of my rational numbers?
Perhaps surprisingly the answer is yes! You make the rational numbers into a big square grid with the numerator and denominators as the two coordinates. Then you start placing your bushels along diagonals of increasing size, see wikipedia.
This says that the rational numbers are countable that is you can find a clever way to count them off in the above fashion.
The remarkable fact is that for the real numbers there's no way at all to count them off in this way. No matter how clever you are you won't be able to scam me out of all of my real numbers by placing a natural number next to each of them. The proof of that is Cantor's clever diagonal argument.

评论

Fantastic answer! – Allain Lalonde
I like this so far, but maybe add a bit on uncountable to distinguish the difference. – BBischof
That's a really good answer, thanks :D – fbstj
Why can't lecturers at Uni explain things in this way? – Sachin Kainth
In the case of positives and rationals how you match them? How diagonals become bushels . Can u explain more on that figure – user5507
+1 for fancy language – Tyler Langan
Wow, great way to explain it. – Abhimanyu Pallavi Sudhir
One bushel of corn for each sheep is a little too generous for me. :P – BlackAdder
OMG I love the bushels and the sheep. Very great way to explain it. – Brian Cheung
I assume with positive numbers you mean positive integers . Because, after all, π is a positive number as well. – celtschk

解答

How there can be different kinds of infinities?
This is very simple to see. This is because of:
Claim: A given set X and its power set $P(X)$ can never be in bijection.
Proof: By contradiction. Let f be any function from X to $P(X)$. It suffices to prove f cannot be surjective. That means that some member of $P(X)$ i.e., some subset of S, is not in the image of f. Consider the set:
$T = \{x \in X : x \notin f(x)\}$.
For every x in X , either x is in T or not. If x is in T, then by definition of T, x is not in $f(x)$, so T is not equal to $f(x)$. On the other hand, if s is not in T, then by definition of T, x is in $f(x)$, so again T is not equal to $f(x)$. Q.E.D.
Thus take any infinite set you like. Then take its power set, its power set, and so on. You get an infinite sequence of sets of increasing cardinality(Here I am skipping a little; but a use of the Schroeder-Bernstein theorem will fix things).
Hilbert's Hotel is a classic demonstration.

解答

Hilbert's Hotel is a classic demonstration.

评论

A really good book on the subject was written by David Wallace Foster, Everything and More: A Compact History of Infinity – FordBuchanan
David Foster Wallace. (RIP :-( ) – Jason S

解答

A **countably infinite** set is a set for which you can list the elements $a_1, a_2, a_3, \ldots$
For example, the set of all integers is countably infinite since I can list its elements as follows:
$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$
So is the set of rational numbers, but this is more difficult to see. Let's start with the positive rationals. Can you see the pattern in this listing?
$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \ldots$
(Hint: Add the numerator and denominator to see a different pattern.)
This listing has lots of repeats, e.g. $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}$ and $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}$. That's ok since I can condense the listing by skipping over any repeats.
$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \ldots$
Let's write q_n for the n-th element of this list. Then $0, q_1, -q_1, q_2, -q_2, q_3, -q_3, \ldots$ is a listing of all rational numbers.
A **countable set** is a set which is either finite or countably infinite; an **uncountable set** is a set which is not countable. Thus, an uncountable set is an infinite set which has no listing of all of its elements (as in the definition of countably infinite set).
An example of an uncountable set is the set of all real numbers. To see this, you can use the **diagonal method**. Ask another question to see how this works...

解答

You can see that there are infinitely many natural numbers $1, 2, 3, \ldots$, and infinitely many real numbers, such as $0, 1, \pi$, etc. But are these two infinities the same?
Well, suppose you have two sets of objects, e.g. people and horses, and you want to know if the number of objects in one set is the same as in the other. The simplest way is to find a way of corresponding the objects one-to-one. For instance, if you see a parade of people riding horses, you will know that there are as many people as there are horses, because there is such a one-to-one correspondence.
We say that a set with infinitely many things is "countable", if we can find a one-to-one correspondence between the things in this set and the natural numbers.
E.g., the integers are countable: $1 \leftrightarrow 0$, $2 \leftrightarrow -1$, $3 \leftrightarrow 1$, $4 \leftrightarrow -2$, $5 \leftrightarrow 2$, etc, gives such a correspondence.
However, the set of real numbers is NOT countable! This was proven for the first time by Georg Cantor. Here is a proof using the so-called diagonal argument.

解答

Infinity is an overloaded term that can mean many things.
One common non-mathematical use of infinity is to refer to everything in the universe. This is **not** what mathematicians mean when they say infinity. That would be a kin to the set of all sets, which is a paradoxical concept that is not part of mathematical discourse.
Mathematicians will use infinity as a way to represent a process that continues indefinitely. This is a kin to saying “take the limit as n goes to infinity", which is close to saying “continue this process indefinitely."
Infinity is also use infinity to talk about size. All sets are either infinite or finite.
The story doesn't stop there. There is something fundamentally different about sets like the points on a line, where there are no holes, and sets like the integers where there are holes. They are both infinite but one seems denser than the other.
That's where whole countable uncountable thing comes in. Infinite sets have a size, but it is not a number in the traditional sense. Its more like “relative size". Bijections are how we determine size for infinite sets, which are explained well on this page, so I won't repeat the explanation.
A more in-depth, but still understandable explanation is given in Computability and Logic by George Boolos.

解答

The basic concept is thus:

- A 'countable' infinity is one where you can give each item in the set an integer and 'count' them (even though there are an infinite number of them)
- An 'uncountable' infinity defies this. You cannot assign an integer to each item in the set because you will miss items.

The key to seeing this is using the 'diagonal slash' argument as originally put forward by Cantor. With a countable infinity, you can create a list of all the items in the set and assign each one a different natural number. This can be done with the naturals (obviously) and the complete range of integers (including negative numbers) and even the rational numbers (so including fractions). It cannot be done with the reals due to the diagonal slash argument:

1. Create your list of all real numbers and assign each one an integer
2. Create a real number with the rule that the first digit after the decimal point is different from the first digit of your first number, the second digit is different from the second digit of your second number, and so on for all digits
3. Try and place this number in your list of all numbers. it can't be the first number, or the second or the third and so on down the list.
4. Reductio Ad Absurdium, your number does not exist in your countable list of all real numbers and must be added on to create a new list. The same process can then be done again to show the list still isn't complete.

This shows a difference between two obviously infinite sets and leads to the somewhat scary conclusion that there are (at least) 2 different forms of infinity.

Chapter 23

语录

在我年轻的时候，我听从建议去读庞加莱，希尔伯特，克莱因以及胡尔维茨等的著作，并从中获益．而我自己对布拉须凯，嘉当和霍普夫的著作更为熟悉，其实这也是中国的传统：在中国我们被教导要读孔夫子，韩愈的散文以及杜甫的诗歌，我真诚地希望这套全集不要成为书架上的摆设，而是在年轻数学家的手里被翻烂掉．

有人主张依靠直观去进行数学教学，我却认为再没有比这种数学教学方法更为荒谬和更为有害的了，每一个数学教师都应当不遗余力地教会学生去思考而不依赖于直观感觉．
--柯勒里吉

数学不是规律的发现者，因为它不是归纳．数学也不是理论的缔造者，因为他不是假说．但数学却是规律和理论的裁判和主宰者．因为规律和假说都要向数学表明自己的主张，然后等待数学的裁判．如果没有数学上的认可，则规律不能起作用，理论也不能解释．
--Peirce, Benjamin

有些教师试图用记忆规则和发展机械程式的方法讲授数学．他们是拙劣的教员，这种教学方法也是不值得提倡的．无论谁，他如果只学习处方而又没有真正弄懂他所学的东西，那他就不能正确地使用这些处方
-- A. Renyi

Chapter 24

GTM 120. weakly differentiable functions

24.1 Riew

A Borel measure μ with the properties that each subset of $\mathbb{R}^n$ is contained within a Borel set of equal μ measure and that $\mu(K) < \infty$ for each compact set $K \subset \mathbb{R}^n$ is called a Radon measure.

24.2 Questions

1. **recall the defination of Holder space $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ for any open set $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.**

2. **prove that $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ is a Banach space.**

3. **define Lebesgure measurable set using outer Lebesgue measure.**

4. **the defination of Borel set in $\mathbb{R}^n$.**

5. **if $|\cdot|$ is the outer Lebesgure measure, then for any $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $d(A, B) > 0$ implies $|A \cup B| = |A| + |B|$.**

6. **using the above conclusion, prove that for any closed set in $\mathbb{R}^n$ is measurable, so any Borel set is measurable.**

Bibliography

[PH] The Man Who Loved Only Numbers, The Story of Paul Erdos and The Search for Mathematical Truth; Paul Hoffman; 1999.

[YN] 数域的上同调; 尤尔根·诺伊基希, 亚历山大[德], 哈尔滨工业大学.

[TH] Holder不等式及其应用; 田景峰, 哈明虎, 清华大学.

[HKZ2013on] Hu, W., Kukavica, I., Ziane, M.: On the regularity for the Boussinesq equations in a bounded domain, J. Math. Phys. 54(8), 081507, 10 (2013)

[T1997Inf] R. Temam, Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Applied Mathematical Sciences Vol. 68 (Springer, 1997).

[MJQ] 梅加强. 数学分析[M]. 高等教育出版社, 2011.