练习 1 (Titu Andreescu, Problem 10728, AMM, (1999, 04, pp.362), (2001, 04, pp. 372); Vietnamese TST 2005)**.** 请按下面的顺序求出所有满足

$$f(x^3+y^3+z^3)=f(x)^3+f(y)^3+f(z)^3, \qquad x,y,z\in\mathbb{Z} \tag{1}$$

的函数 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$.

1. $f(0)=0$, $f(1)\in\{0,\pm1\}$, $f(2)=2f(1)$, $f(3)=3f(1)$;
2. 证明: $f(4)=4f(1)$;
3. f 是奇函数;
4. 证明: 对于任意的 $x\in\mathbb{Z}$, 有
$$f(2x+1)^3=f(2x-1)^3+f(x+4)^3-f(x-4)^3-f(1)-f(5)^3.$$
5. 证明: 对于任意的 $x\in\mathbb{Z}$, 有
$$f(2x+2)^3=f(2x-2)^3+f(x+8)^3-f(x-8)^3-f(2)^3-f(10)^3.$$
6. 若整数 $n>3$, 则 n^3 可以写成五个绝对值小于 n 的立方数之和;[1]
7. $f(n)=nf(1)$.
8. 求所有满足题目条件的函数 $f(x)$.

练习 2 (AOPS)**.** 请按下面的顺序求出所有满足

$$f(x^3+y^3+z^3)=f(x)^3+f(y)^3+f(z)^3, \qquad x,y,z\in\mathbb{R}$$

的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

1. $f(0)\in\left\{0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$;
2. 设 $a\in\left\{0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, 定义函数 $g(x)=f(x)-a$, 证明:
$$g(x+y)=g(x)+g(y), \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$
3. 证明: $\forall r\in\mathbb{Q}$, $x\in\mathbb{R}$, 有
$$g(rx)=rg(x).$$
4. 若函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 满足
$$g(x+y)=g(x)+g(y), \qquad \forall x,y\in\mathbb{R},$$
且 g 在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上不变号, 证明:
$$g(x)=xg(1), \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

[1]证明恒等式

$$\begin{aligned}(2k+1)^3&=(2k-1)^3+(k+4)^3-(k-4)^3-5^3-1^3,\\ (2k)^3&=(2k-4)^3+(k+7)^3-(k-9)^3-10^3-2^3.\end{aligned}$$

5. 设 $a \in \left\{0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, $r \in \mathbb{Q}$, 证明

$$g\left((x+r)^3\right) + a = (g(x+r)+a)^3 + 2a^3, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

并将其展开为变量 r 的多项式方程.

练习 3. 求出所有满足

$$f\left(a^3+b^3+c^3\right) = f\left(a^3\right) + f\left(b^3\right) + f\left(c^3\right), \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$$

的函数 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

Hint:

1. 设 $f(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$, 求 c 的所有可能值;
2. 设 $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, 求 c 的所有可能值;

问题. 求所有满足

$$f\left(v^3+w^3+x^3+y^3+z^3\right) = f\left(v^3+w^3\right) + f\left(x^3+y^3+z^3\right), \quad \forall v, w, x, y, z \in \mathbb{Z}$$

的函数 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

Hint:

1. 证明: $f(x^3+y^3) = f(x^3) + f(y^3)$.
2. 证明: f 是奇函数.
3. 证明: $f(u^3+v^3+w^3+x^3+y^3) = f(u^3) + f(v^3+w^3+x^3+y^3)$, $\forall u, v, w, x, y \in \mathbb{Z}$. (注意: 四立方数之和不一定是一个立方数, 所以不能用前一个小结论来证明)
4. 验证: $(k+1)^3 + (k-1)^3 - k^3 - k^3 = 6k$, 并证明: $f\left(x^3 \pm 6k\right) = f\left(x^3\right) \pm f\left(6k\right)$.
5. 设 $S = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = nf(1)\}$, $\{1, 2, \cdots, N\} \subseteq S$, $\{6, 12, 18, \cdots, M\} \subseteq S$, 则对于任意的不超过 $N+M$ 的立方数 u^3, 都有 $u^3 \in S$.
6. 设 $\{1, 2, \cdots, N^3\} \subseteq S$, 其中 $N \geq 5$, 证明 $\left\{1, 2, \cdots, (N+1)^3\right\} \subseteq S$.

猜想. 给定整数 m, n, 求满足

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^m\right) = \sum_{k=1}^{n} f^m\left(x_k\right), \qquad \forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{Z},$$

的所有可能的函数 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

猜想. 在练习 1 中, 如果条件 (1) 中的等式要求 x, y, z 互不相同, 能否求出所有的函数 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$?