Contents

1 抽象代数 **3**

2 矩阵论 **5**
2.1 矩阵迭代法 . . . 5

3 数学分析 **7**
3.1 极限 . . . 7
3.2 导数 . . . 7
3.3 积分 . . . 8
3.4 级数 . . . 10
3.5 其他 . . . 11

4 实变函数 **31**

5 泛函分析 **35**

6 复变函数 **41**

7 Inequality **43**
7.1 Elementary Inequality . . . 43
7.2 Combinatorics . . . 46
7.3 Analysis . . . 47

8 神奇的反例 **49**

9 未知的问题与解答 **51**

10 拓扑 **61**

11 定理集 **79**
11.1 数学分析 . . . 81
11.2 微分方程 . . . 84
11.3 泛函分析 . . . 85
11.4 拓扑 . . . 86
11.5 数论 . . . 86
11.6 不等式 . . . 88

12 定义集 **91**
12.1 初等数论 . . . 91
12.2 高等代数 . . . 91
12.3 数学分析 . . . 93
12.4 微分方程 . . . 95
12.5 泛函分析 . . . 95

13 math.stackexchange.com **97**

14 GTM 120. weakly differentiable functions **101**
14.1 Riew . . . 101
14.2 Questions . . . 101

Chapter 1

抽象代数

定理 1.0.1

同类置换有相同的循环结构.

解. $P, Q, T \in S_n$且$Q = TPT^{-1}$, Q, P属同类, 则Q, P有相同的循环结构.
$P(v) = (1^{v_1} 2^{v_2} \cdots m^{v_m})$, $P = C_1 C_2 \cdots C_r$, $r = \sum_i v_i$, $n = \sum_i i v_i$. $Q = TPT^{-1} = \prod_i TC_iT^{-1} = \prod_i C_i'$.
T是一一映射, $(C_i')_i$两两不交, 因$(C_i)_i$两两不交, C_i'与C_i同阶, 所以$Q(v) = P(v)$. □

问题 1.0.1

在环R中, 对于任意的$x \in R$, 都存在$n \in \mathbb{N}_+$, 使得$x = x^{n+1}$, 证明: 对于任意的$y \in R$, $yx^n = x^n y$.

解. 先证x^n是幂等的, $(x^n)^2 = x^n$.
再证, 若$ab = 0$, 则$ba = (ba)^{\tilde{n}+1} = b(ab)^{\tilde{n}} a = 0$.
再证, $x = x^{n+1}$, 则$yx^n = yx^{2n}$, 所以$(y - yx^n)x^n = 0$, 所以$x^n(y - yx^n) = 0$, 即$x^n y = x^n yx^n$.
最后, 同上面的做法, 由$x^n y = x^{2n} y$, 有$yx^n = x^n yx^n$, 所以$x^n y = yx^n$. □

问题 1.0.2: AMM, E.C.Johnsen, D.L. Outcalt and Adil Yaqub, An Elementary Commutativity Theorem For Rings, Vol. 75, No. 3, 288-289

有幺元的非结合环R中, 若对于任意的$x, y \in R$, 有$(xy)^2 = x^2 y^2$, 则R是交换环.

解. 由$(xy)^2 = x^2 y^2$, $(x(y+1))^2 = x^2y^2 + 2x^2y + x^2$, 而$(x(y+1))^2 = (xy+x)^2 = (xy)^2 + (xy)x + x(xy) + x^2$, 所以$xyx + xxy + 2x^2 y$, 将$x+1$代换$x$的位置, 有$xyx + yx + xxy = 2x^2y + xy$, 即得$xy = yx$.

注. 含幺性不可省, $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{Z} \right\}$, 或$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \le \mathrm{GF}(2)$ 有左幺元.

注2. $(xy)^k = x^k y^k$在$k > 2$时有反例, $k \ge 3$固定, p素且满足: k奇时, $p \mid k$, k偶时, $p \mid \frac{k}{2}$.

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, cd \in \mathrm{GF}(p) \right\} \le \mathrm{GF}(p),$$

这里的R不可交换. □

问题 1.0.3

R是含幺环, 若对于任意的$x, y \in R$, 存在$m, n \in \mathbb{N}$, 使得$x^{m+1} y^{n+1} = x^m yxy^n$, 则$R$是交换环.

解. $x^m(xy-yx)y^n=0$, $x^l(xy-yx)(y+1)^k=0$, 定义$r=\max\{m,l\}$, 则

$$x^r(xy-yx)y^n=0,\ x^r(xy-yx)(y+1)^k=0,\ (y,y+1)=1\Longrightarrow(y^n,(y+1)^k)=1.$$

所以$(y^{2n-1},(y+1)^ky^{n-1})=y^{n-1}$, 所以存在$A(y),B(y)$使得$Ay^{2n-1}+B(y+1)^ky^{n-1}=y^{n-1}$, 所以$x^r(xy-yx)y^{n-1}=0$, 注意到红色部分的$y^n$得到了降次, 所以存在$s$满足$x^s(xy-yx)=0$.

再设$(x+1)^t(xy-yx)=0$, 同样辗转相除得到$xy-yx=0$, 即R可交换. □

Chapter 2

矩阵论

2.1 矩阵迭代法

研究对象: $Ax=b$, 求x. 设$A=B-C$, 其中B非奇异, 则$Ax=b \Longleftrightarrow Bx=b+Cx$. 其迭代形式为

$$Bx^{(k+1)}=Cx^{(k)}+b, \quad k=0,1,2,\cdots$$

若$Ax=b$有解, 则其解也满足$Bx=Cx+b$, 从而

$$B(x^{(k+1)}-x)=C(x^{(k)}-x)$$

即$x^{(k+1)}-x=L(x^{(k)}-x)$, $L=B^{-1}C$, 从而$(x^{(k)}-x)=L^k(x^{(0)}-x)$, 所以要使迭代式收敛, 则需要

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)}-x=0,$$

即$\lim_{k\to\infty} L^k=0$.

设L的特征根为$l_1,l_2,\cdots,l_n$且有可逆阵T使$L=T\cdot \operatorname{diag}(l_1,l_2,\cdots,l_n)\cdot T^{-1}$. 所以

$$L^{(k)}\to 0, k\to\infty \Longleftrightarrow |l_i|<1, i=1,2,\cdots,n \Longleftrightarrow \|L\|<1, \|L\|=\max_i\{|l_i|\}$$

设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

则$A=D-E-F$.

定理 2.1.1: Gauss-Seidel迭代

$$\begin{cases} B=D-E \\ C=F \end{cases} \Longrightarrow (D-E)x^{(k+1)}=Fx^{(k)}+b \Longrightarrow x^{(k+1)}=D^{-1}\left[Ex^{(k+1)}+Fx^{(k)}+b\right].$$

定理 2.1.2: Jacobi迭代

$$\begin{cases} B=D \\ C=E+F \end{cases} \Longrightarrow x^{(k+1)}=B^{-1}(Cx^{(k)}+b)=D^{-1}\left[(E+F)x^{(k)}+b\right].$$

定理 2.1.3: Newton-Ralphson迭代

函数$f(z)=0$的根可以根据迭代$z_{k+1}=z_k-\frac{f(z_k)}{f'(z_k)}$, $k=0,1,2,\cdots$.

设$f(z)=a-z^{-1}$有根a^{-1}, $f'=z^{-2}$, 则$z_{k+1}=z_k(2-az_k)$且可以期望$\lim_{k\to\infty} z_k=a^{-1}$. 对于线性方程$Ax=b$, 可以考虑用此方法解得“$A^{-1}$”, 尽管$A$可能不是方阵. 给定初始矩阵$x_0$, 则有迭代$x_{k+1}=x_k(2I-Ax_k)$, $k=0,1,2,\cdots$, 并期望$\lim_{k\to\infty} x_k=A^{-1}$. 定义“误差”矩阵$E_k=I-Ax_k$, 则

$$E_{k+1}=I-Ax_{k+1}=I-Ax_k(2I-Ax_k)=I-(I-E_k)(2I-(I-E_k))=E_k^2$$

若E_0的所有特征根的模均小于1, 则必有$\lim_{k\to\infty} E_0^k=0$. 最后$x_kb$逼近方程$Ax=b$的解.

Chapter 3

数学分析

3.1 极限

问题 3.1.1

设函数$\varphi(x)$可导, 且满足$\varphi(0)=0$, 又设$\varphi'(x)$单调减少.

1. 证明: 对$x\in(0,1)$, 有$\varphi(1)x<\varphi(x)<\varphi'(0)x$.
2. 若$\varphi(1)\geq 0$, $\varphi'(0)\leq 1$, 任取$x_0\in(0,1)$, 令$x_n=\varphi(x_{n-1})$, $(n=1,2,\cdots)$. 证明: $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求该极限值.

解. 对于任意的$x\in[0,1]$,在$[0,x]$上用拉格朗日定理,

$$\varphi(x)-\varphi(0)=\varphi'(\xi_1)x<\varphi'(0)x$$

在$[x,1]$上用拉格朗日定理

$$\varphi(1)-\varphi(x)=\varphi'(\xi_2)(1-x)<\varphi'(\xi_1)(1-x)=\varphi'(\xi_1)-\varphi(x)$$

所以$\varphi(1)x<\varphi'(\xi_1)x=\varphi(x)$. □

3.2 导数

问题 3.2.1

函数$f(x)\in C[0,1]$, 在$(0,1)$上可微, 对于任意的$x\in(0,1)$, $|xf'(x)-f(x)+f(x)|<Mx^2$, 问$f'(0)$的存在性.

解. 不妨设$f(0)=0$, 定义$h(x)=\frac{f(x)}{x}(0<x<1)$, 即证$\lim_{x\to 0}h(x)$存在, 则$\left|x^2h'(x)\right|<Mx^2$, 所以$|h'(x)|<M$, 所以若$\{x_n\}\to 0$, 则有

$$|h(x_m)-h(x_n)|=|h'\xi(x_m-x_n)|<M\left|x_m-x_n\right|<\varepsilon.$$

所以$\{h(x_n)\}$是Cauchy列, 从而$\lim_{x\to 0}h(x)$存在. □

问题 3.2.2

构造有界单调函数$f(x)$使得对于任意的$x\in\mathbb{R}$, $f'(x)$存在, 且$\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)\neq 0$.

解. 取$a_n=1-2^{-n}$, $(n\in\mathbb{N})$, $f(n)=a_n$, $f\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(a_n+a_{n+1})$, 且$f'(n)=0$, $f'\left(n+\frac{1}{2}\right)=1$, 将其它点处可微连接$f(n)$这些离散点, 知$\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)$不存在, 从而不为0. □

3.3 积分

问题 3.3.1

设函数$f(x)$在$[a,b]$上有连续的导数, 且$f(a)=0$, 证明

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

解. 令$F(b)=RHS-LHS$,证$F'(b)\ge 0$即可. □

问题 3.3.2

设函数$f(x)$在$[0,1]$上有二阶连续的导数, 证明:

1. 对任意$\xi\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$和$\eta\in\left(\frac{3}{4},1\right)$有

$$|f'(x)|<2\,|f(\xi)-f(\eta)|+\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x \quad x\in[0,1]$$

2. 当$f(0)=f(1)=0$及$f(x)\neq 0$, $(x\in(0,1))$时有

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\ge 4.$$

解. 用中值定理,

$$\begin{aligned}|f'(x)|-2\,|f(\xi)-f(\eta)| &= |f'(x)|-2\,|f'(\theta)|\,(-\xi+\eta)\\ &\le |f'(x)|-|f'(\theta)|\\ &\le |f'(x)-f'(\theta)| = \left|\int_\theta^x f''(t)\mathrm{d}t\right|\\ &\le \int_0^1 |f''(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

最后取$f(x_0)=\max_{x\in[0,1]}f(x)$, 则

$$f(x_0)=f'(\xi_1)x_0=f'(\xi_2)(x_0-1),$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|\frac{f''}{f}\right|\mathrm{d}x &\ge \frac{1}{|f(x_0)|}\,\mathrm{d}x\\ &\ge \frac{1}{|f(x_0)|}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f''\,\mathrm{d}x\right|\\ &= \frac{1}{|f(x_0)|}\,|f'(\xi_2)-f'(\xi_1)|\\ &= \frac{1}{x_0}+\frac{1}{1-x_0}\ge 4.\end{aligned}$$

□

问题 3.3.3

设函数$f(x)$在$\left[-\frac{1}{a},a\right]$上连续(其中$a>0$), 且$f(x)\ge 0$, $\int_{-\frac{1}{a}}^a xf(x)\,\mathrm{d}x=0$, 求证: $\int_{-\frac{1}{a}}^a x^2 f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_{-\frac{1}{a}}^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 因$(a-x)\left(x+\frac{1}{a}\right)\ge 0$, 对$(a-x)\left(x+\frac{1}{a}\right)f(x)\ge 0$两边同时积分. □

问题 3.3.4

设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = 1$. 求证:

1. 存在$\xi \in [0,1]$, 使得$|f(\xi)| \geq 4$;
2. 存在$\eta \in [0,1]$, 使得$|f(\eta)| = 4$.

解. 用反证法,

$$1 = \left|\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| \cdot |f|\,\mathrm{d}x \leq 1.$$

等号取不到, 否则,

$$\int_0^1 (4 - |f|) \left|x - \frac{1}{2}\right|\,\mathrm{d}x = 0.$$

□

问题 3.3.5

求$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta}$.

解. $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2+2\sin^2\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta} = 2\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+2t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$ □

解.

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta} &= \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \frac{\mathrm{d}t}{3-\sin t} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{3-\sin t} \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{3-\sin t} + \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{3+\sin t} \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{3-\sin x} + 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x} \\
&= 12\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{9-\sin^2 x} \\
&= 12\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\tan x}{8\tan^2 x + 9} \\
&= \frac{12}{6\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\tan x\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.
\end{aligned}$$

□

解.

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta} &= \frac{1}{2}\int_0^{4\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3\sin\theta}\\
&= \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin\theta}\\
&= \oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z\left(3-\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)}\\
&= 2\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+6\mathrm{i}z-1}\\
&= 2\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{(z-(-3+2\sqrt{2})\mathrm{i})(z-(-3-2\sqrt{2})\mathrm{i})}\\
&= 2\cdot 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}(f(z))\big|_{z=(-3+2\sqrt{2})\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.
\end{aligned}$$

□

解.

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta} &= \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\tan\theta}{3\tan^2\theta-2\tan\theta+3}\\
&= \int_0^{\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi}+\int_{\pi}^{3\pi/2}+\int_{3\pi/2}^{2\pi} = \cdots
\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^{\pi/2} = \int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\theta}{3t^2-2t+3} = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{3}\right)}{\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{8}}\arctan\left(\frac{3\left(t-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{8}}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

其它三个同理. 所以$\sum = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 4\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$. □

问题 3.3.6

求

$$\int_0^{\pi/4}\frac{(\cot x-1)^{p-1}}{\sin^2 x}\ln\tan x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{p}\csc p\pi,\ (-1<p<0).$$

解. 令$u=\cot x-1$, 原式等价于

$$\int_0^{+\infty}u^{p-1}\ln(u+1)\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{p}\csc p\pi,$$

而

$$\int_0^{\infty}u^{p-1}\ln(u+1)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\infty}u^{p-1}\int_1^{1+u}\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u$$

交换积分次序, 用Beta函数 □

3.4 级数

问题 3.4.1

证明

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}=0$$

无实根.

解. 设$-y<0$, 则$y>0$, 所以$1-y+\frac{y^2}{2!}-\frac{y^3}{3!}+\cdots+\frac{y^{2n}}{(2n)!}>\mathrm{e}^{-y}>0$. □

问题 3.4.2: F.F.Abi=Khuzam and A.B.Boghossian, Some recent geometric inequalities, AMM Vol 96(1989), No. 7:576-589

函数$f(x)=\cot x-\frac{1}{x}$, 则$f^{(k)}(x)<0$, $0<x<\pi$, $k\in\mathbb{N}$.

解.

$$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k\pi+x}-\frac{1}{k\pi-x}\right),\quad x\in(0,\pi).$$

将真分式展开有

$$f(x)=-2x\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{2k},\ x\in(0,\pi),\quad c_k=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^{2k+2}},\ (k\in\mathbb{N}).$$

□

问题 3.4.3

对$n\in\mathbb{N}_+$, 确定$(0,1)$的子集, 使在此子集上$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n(\ln x\ln(1-x))<0$.

解.

$$f'(x)=(\ln x\ln(1-x))'=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{m-1}-x^{m-1}}{m},$$

当n是偶数时, 所有项都是负的, 当n是奇数时, 仅当$1-x<x$即$x>\frac{1}{2}$时, $f^{(n)}(x)$时负的. □

问题 3.4.4

已知$S_n=\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^i}{i}$, 证明$\lim_{n\to\infty}S_n$存在并求其值.

解. 因$S_{n+1}=\frac{n+2}{2(n+1)}(S_n+1)$, 所以

$$S_{n+2}-S_{n+1}=\frac{(n+2)^2(S_{n+1}-S_n)-S_{n+1}-1}{2(n+1)(n+2)},$$

$S_4-S_3=0$, 当$n\geq 3$时, S_n不增, 所以$S=\lim_{n\to\infty}S_n$存在, 所以$S=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2(n+1)}(S+1)$, 得$S=1$. □

3.5 其他

问题 3.5.1

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)=0.$$

解. 用$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. □

问题 3.5.2

证明:

$$0<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n}.$$

解. 先证: $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调上升且有界. $\left(1\cdot x_n\leq\left(\frac{1+n(1+1/n)}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}\right)$, 则

$$\begin{aligned}x_n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=1+1+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\cdots\\&=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\&<2+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}=3.\end{aligned}$$

再证$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$单调下降且有界. (用$(1+x)^n>1+nx$, $x>-1$证单调性).

由$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n$, $x_n<\mathrm{e}<y_n$, (这可以证得$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$).

故$\mathrm{e}-x_n<y_n-x_n=\frac{x_n}{n}<\frac{3}{n}$. □

问题 3.5.3

证明不等式

$$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

解. 用$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$及归纳法. □

问题 3.5.4

设$a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$及$a^{[0]}=1$, 证明:

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a^{[n-m]}b^{[m]}.$$

并由此推出牛顿二项式公式.

问题 3.5.5

证明不等式

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\quad(n>1).$$

解. 用均值不等式. □

解. 用伯努利不等式证$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>2$, $(n\in\mathbb{N}_+)$. □

问题 3.5.6

设$p_n(n\in\mathbb{N}_+)$为趋于正无穷的任意数列, 而$q_n(n\in\mathbb{N}_+)$为趋于负无穷的任意数列($p_n,q_n\notin[-1,0]$), 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\mathrm{e}.$$

解. 注意$[x]\leq x<[x]+1$. □

问题 3.5.7

已知$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}.$$

并推出

$$\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n},$$

其中$0<\theta_n<1$.

问题 3.5.8

证明: e是无理数.

解. 用反证法及3.5.7有, 对于任意的n, $n!n\cdot\mathrm{e}$不是整数. □

问题 3.5.9

证明不等式:

(a) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, $(n\in\mathbb{N}_+)$;

(b) $1+\alpha<\mathrm{e}^\alpha$, $(\alpha\neq 0,\alpha\in\mathbb{R})$.

解.

(a) 原式等价于$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$;

(b) $\alpha>-1$时, 用伯努利不等式, $\mathrm{e}^\alpha>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha n}>1+\alpha$.

□

问题 3.5.10

证明: (在以下各极限均存在的情况下)

(a) $\liminf_{n\to\infty}x_n+\liminf_{n\to\infty}y_n\leq\liminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leq\liminf_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n$;

(b) $\liminf_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n\leq\limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leq\limsup_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n$.

解. 用$\liminf_{n\to\infty}x_n=-\limsup_{n\to\infty}(-x_n)$. □

问题 3.5.11

证明: 若$\lim_{n\to\infty}x_n$存在, 则对于任何数列$y_n(n\in\mathbb{N}_+)$, $\limsup_{n\to\infty}y_n$有限且有:

(a) $\limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n$;

(b) $\limsup_{n\to\infty}x_ny_n=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\limsup_{n\to\infty}y_n$, $(x_n\geq 0)$.

解. 用3.5.10. □

问题 3.5.12

证明: 若对于某数列$x_n(n\in\mathbb{N}_+)$, 无论数列$y_n(n\in\mathbb{N}_+)$如何选取, 以下两个等式中都至少有一个成立:

(a) $\limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\limsup_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n$.

(b) $\limsup_{n\to\infty}(x_ny_n)=\limsup_{n\to\infty}x_n\cdot\limsup_{n\to\infty}y_n$, $(x_n\geq 0)$.

则数列x_n收敛或发散于正无穷.

问题 3.5.13

证明: 若$x_n>0(n\in\mathbb{N}_+)$及

$$\limsup_{n\to\infty}x_n\cdot\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=1.$$

则数列x_n是收敛的.

问题 3.5.14

证明: 若数列$x_n(n\in\mathbb{N}_+)$有界, 且

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0.$$

则此数列的子列极限充满于下极限和上极限

$$l=\liminf_{n\to\infty}x_n \text{ 和 } L=\limsup_{n\to\infty}x_n$$

之间.

问题 3.5.15

证明: 若$x_n>0(n\in\mathbb{N}_+)$且$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$存在, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

解. 用结论: 若$\{x_n\}\to x$, $x_n>0$, 则$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n=x$. □

问题 3.5.16

证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$.

解. 用3.5.15. □

问题 3.5.17: 数a和b的算术几何平均值

证明: 由下列各式

$$x_1=a,\quad y_1=b,\quad x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n},\quad y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2},$$

确定的数列x_n和$y_n(n\in\mathbb{N}_+)$有共同的极限.

$$\mu(a,b)=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n.$$

解. 用幂平均不等式, $\sqrt{x_{n+1}+y_{n+1}}=\frac{\sqrt{x_n}+\sqrt{y_n}}{\sqrt{2}}\leq\sqrt{x_n+y_n}$. 即$\{y_n\}$单调有界, 从而有极限, 从而$x_n=2y_{n+1}-y_n$有相同的极限. □

问题 3.5.18

设

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}\quad (|x|\geq 2),$$

求$f(x)$.

解. x^2-2, $(|x|\geq \frac{5}{2})$. □

问题 3.5.19

证明: 若

(1) 函数$f(x)$定义于区域$x>a$;

(2) $f(x)$在每一个有限区间$a<x<b$内是有界的;

(3) 对于某一个整数n, 存在有限的或无穷的极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=l,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{l}{n+1}.$$

能否用Cauchy定理11.1.3证明它.

问题 3.5.20

利用定理

定理 3.5.1

设

$$\lim_{x\to 0}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=1,$$

其中$\psi(x)>0$, 再设当$n\to\infty$时$\alpha_{mn}\rightrightarrows 0(m=1,2,\cdots,n)$, 换言之, 对于任意$\varepsilon>0$, 存在正整数$N(\varepsilon)$, 当$m=1,2,\cdots,n$且$n>N(\varepsilon)$时, $0<|\alpha_{mn}|<\varepsilon$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}[\phi(\alpha_{1n})+\phi(\alpha_{2n})+\cdots+\phi(\alpha_{mn})]=\lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\cdots+\psi(\alpha_{mn})],$$

此处同时还要假设上式右端的极限存在.

求:

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[n]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{ka}{n^2}\right)$;

(3) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right)$, $(a>0)$;

(4) $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$;

(5) $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$.

问题 3.5.21

设函数$f(x)$在区间$(x_0,+\infty)$上连续并有界. 证明: 对于任何数T, 可求得数列$x_n\to+\infty$, 使

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0.$$

问题 3.5.22

证明: 在有限区间(a,b)上有定义且连续的函数$f(x)$, 可用连续的方法延拓到闭区间$[a,b]$上, 其充分必要条件是函数$f(x)$在区间(a,b)上一致连续.

问题 3.5.23

x_n满足$x_n^n+x_n-1=0$, $0<x_n<1$, 求$\lim_{n\to\infty}x_n$.

解. $y=x^n+x-1$则有$y'>0$, $y|_{x=0}=-1<0$, $y|_{x=1}=1>0$.
x_n是x^n+x-1的唯一零点. 由于

$$x_n^{n+1}+x_n-1=(x_n-1)(1-x_n)<0$$

及y的单调性, 知x_{n+1}在x_n与1之间, 故$\{x_n\}$单调有界. 反证$\{x_n\}$的极限$A=1$, 否则$0\leq A<1$矛盾. □

解. $y^x+y-1=0$是隐函数, 确定$y=f(x)$, $x_n=f(n)$, 求导

$$y'=-y^x\cdot\frac{\ln y}{\left(1+\frac{x}{y}\cdot y^x\right)}$$

当$x\geq 1$时, $y'>0$, y单调增加, 以下同上. □

问题 3.5.24

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$都收敛, 则以下不成立的是?
A. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$收敛; B.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$收敛;
C. $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛; D. $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$发散.

问题 3.5.25

设$f(x,y)$与$\varphi(x,y)$均为可微函数, 且$\varphi_y'(x,y)\neq 0$. 已知(x_0,y_0)是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的一个极值点, 下列选项正确的是(D)
(A) 若$f_x'(x_0,y_0)=0$, 则$f_y'(x_0,y_0)=0$; (B) 若$f_x'(x_0,y_0)=0$, 则$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$;
(C) 若$f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则$f_y'(x_0,y_0)=0$; (D) 若$f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

问题 3.5.26

$$\frac{\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,\mathrm{d}t}{\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t}=\sqrt{2}$$

解. 用Beta函数. □

问题 3.5.27: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

计算$I=\int_{\pi/8}^{3\pi/8}\frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}\,\mathrm{d}x$.

问题 3.5.28: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设$\varphi(x)$在$(-\infty,0]$可导, 且函数

$$f(x)=\begin{cases}\int_x^0 \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t, & x<0,\\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(2x)^n+x^{2n}}, & x\geq 0.\end{cases}$$

在点$x=0$可导, 求$\varphi(0)$, $\varphi'(0^-)$, 并讨论$f'(x)$的存在性.

问题 3.5.29: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

已知函数$f(x)$与$g(x)$满足$f'(x)=g(x)$, $g'(x)=2\mathrm{e}^x-f(x)$, 且$f(0)=0$, 求

$$\int_0^\pi\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x.$$

问题 3.5.30: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设y_1和y_2是方程$y''+p(x)y'+2\mathrm{e}^x y=0$的两个线性无关解, 而且$y_2=(y_1)^2$. 若有$p(0)>0$, 求$p(x)$及此方程的通解.

问题 3.5.31: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设$f(x)$在$\left[-\frac{1}{a},a\right](a>0)$上非负可积, 且$\int_{-1/a}^a xf(x)\,\mathrm{d}x=0$. 求证:

$$\int_{-1/a}^a x^2 f(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_{-1/a}^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

解. 分$0<a\leq 1$和$a>1$两种情况讨论. □

问题 3.5.32: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设在点$x=0$的某邻域U内, $f(x)$可展成泰勒级数, 且对任意正整数n, 皆有

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}.$$

证明: 在U内, 恒有$f(x)=x^2$.

问题 3.5.33: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x^2+y^2}$, 证明: $\lim_{x\to+\infty}y(x)$和$\lim_{x\to-\infty}y(x)$都存在.

解. 用单调有界定理. □

问题 3.5.34: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

求幂级数$\sum_{n=1}^\infty\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$的收敛域与和函数.

问题 3.5.35: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{(n+i+1)^2}+\frac{1}{(n+i+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+i+i)^2}\right).$$

解. 用重积分得$\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$. □

问题 3.5.36

设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\subset C_{[a,b]}$, 且$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$, 则$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 因$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in[a,b]$, 所以$f\in C_{[a,b]}$且$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当$n>N$时, $\forall x\in[a,b]$均有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. $f(x),f_n(x)$连续必可积, 有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|<(b-a)\varepsilon.$$

其实当$a\le x\le b$时, 有$\left|\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|<(b-a)\varepsilon$对$x$一致成立, 所以$\int_a^x f_n(x)\,\mathrm{d}t\rightrightarrows\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. □

问题 3.5.37

$f_n(x)$在$[a,b]$上都有连续导数, 且$f_n(x)\to f(x)$, $f_n'(x)\rightrightarrows g(x)$, 则$f'(x)=g(x)$, 即$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\lim_{n\to\infty}f_n(x))=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)$.

解. 因$f_n'\rightrightarrows g$, 所以g连续, 可积, 由3.5.55, $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$, 所以$f'(x)=g(x)$. 其实$f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$在$[a,b]$上也一致收敛.

若3.5.55和本问题中的$f_n(x)$视为函数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$的前$n$项部分和, 就有函数项级数的相应命题.

(1). 若$[a,b]$上$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$中每项$u_k$均连续, 且$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\rightrightarrows f(x)$, 则$f(x)\in C_{[a,b]}$且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2). 若$[a,b]$上, $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$的每项都有连续导数$u_k'(x)$且$\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(x)\rightrightarrows g(x)$, 而$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\to f(x)$. 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(x).$$

□

问题 3.5.38

举反例:

(1) 积分的极限不等于极限的积分的函数列.

(2) 导数的极限不等于极限的导数的函数列.

解. (1). 在$[0,1]$上极限函数为0, 但f_n在$\left[0,\frac{1}{n}\right]$上面积为1的脉冲函数.

(2). $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$, $x\in[-1,1]$. □

问题 3.5.39: http://math.stackexchange.com/questions/2143014

证明: 对于任意的$\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|\frac{\alpha-n}{\alpha+n}\right|$发散.

问题 3.5.40: http://math.stackexchange.com/questions/472007

判断$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{\sin n}{n+10\sin n}$的敛散性.

解. 其实, 若$f(n)$是有界函数, 且级数$\sum_{n=1}^{n}\frac{f(n)}{n}$收敛, a是使任意的n都有$n+af(n)\neq 0$, 则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n+af(n)}$.
这是因为

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{f(n)}{n+af(n)}=\sum_{n=1}^{m}\frac{f(n)}{n}+\sum_{n=1}^{m}\frac{-af^2(n)}{n(n+af(n))}$$

后一个和式用比较判别法. □

问题 3.5.41: http://math.stackexchange.com/questions/273559

判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n)}{n}$的敛散性.

解. 比较判别法, $[k\pi+\frac{\pi}{6},(k+1)\pi-\frac{\pi}{6}]$中总有至少一个整数.
或用$\sum\frac{\sin^2(n)}{n}=\sum\frac{1}{2n}-\sum\frac{\cos(2n)}{2n}$, 前者发散, 后者用Dirichlet判别法. □

问题 3.5.42: http://math.stackexchange.com/questions/991652

证明$\int_0^1\left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right|\,\mathrm{d}x$发散.

解. 变量替换, 积分化为$\int_1^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$, 然后在子区间$(k\pi,(k+1)\pi)$上求下界. □

问题 3.5.43: http://math.stackexchange.com/questions/620449

证明: 求$p\in\mathbb{R}$, 使积分$\int_0^{\infty}\frac{x^p}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$发散.

解. $p\geq -1$. □

问题 3.5.44: http://math.stackexchange.com/questions/596511

计算

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

解. 用Frullani积分. 结果为$\log 2$. 或用重积分: $\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}=x\int_1^2\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. 这里给出Frullani积分证明过程的做法.

$$\begin{aligned}\int_a^b\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x&=\int_a^b\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{2a}^{2b}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\left(\int_a^b-\int_{2a}^{2b}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\left(\int_a^{2a}-\int_b^{2b}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\to\log(2)-0,\quad a\to 0,b\to\infty\end{aligned}$$

上式最后一步用$\mathrm{e}^{-2c}\log(2)\leq\int_c^{2c}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\leq\mathrm{e}^{-c}\log(2)$. □

问题 3.5.45: http://math.stackexchange.com/questions/590774

已知$a>b>0$, 求$\lim_{t\to 0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)$.

解. 注意到$\Gamma(t)=a^t\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-as}}{s^{1-t}}\,\mathrm{d}s$, 所以

$$\lim_{t\to0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$$

然后用Frullani积分算得$\log\frac{a}{b}$. □

问题 3.5.46: http://math.stackexchange.com/questions/590774

已知$a>b>0$, 求$\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$.

解. 可以用Frullani积分. 这里用含参积分求导的方法, 定义$I(t)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-tx}}{x}\,\mathrm{d}x$, 被积函数记为$f(x,t)$, 由$f(x,t)$和$f_t(x,t)$在定义域均连续, $I(t)$关于t收敛且$\int_0^\infty f_t(x,t)\,\mathrm{d}x$关于$t$一致收敛, 则满足积分号下求导条件, 所以$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{a}$, $I=-\log t$. □

解.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx&=\lim_{\epsilon\to0}\int_\epsilon^\infty\frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx\\
&=\lim_{\epsilon\to0}\left[\int_\epsilon^\infty\frac{\exp(-ax)}{x}dx-\int_\epsilon^\infty\frac{\exp(-bx)}{x}dx\right]\\
&=\lim_{\epsilon\to0}\left[\int_{a\epsilon}^\infty\frac{\exp(-t)}{t}dt-\int_{b\epsilon}^\infty\frac{\exp(-t)}{t}dt\right]\\
&=\lim_{\epsilon\to0}\int_{a\epsilon}^{b\epsilon}\frac{\exp(-t)}{t}dt=\lim_{\epsilon\to0}\int_a^b\frac{\exp(-\epsilon u)}{u}du
\end{aligned}$$

最后的被积函数一致收敛到$\frac{1}{u}$. □

解. 用Laplace变换, $F(s)=\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 则

$$F(s)=\int_0^\infty\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}e^{-sx}dx\implies F'(s)=-\int_0^\infty(e^{-bx}-e^{-ax})e^{-sx}dx.$$

计算最后一个积分, 然后求积分并令$s\to0$, 其中积分出来的积分常数用极限$\lim_{s\to\infty}F(s)=0$计算. □

问题 3.5.47: http://math.stackexchange.com/questions/164400

求$\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}x=\log t$, 其中$t>0$.

解. 让$u=\mathrm{e}^{-x}$, 得

$$\int_0^1\frac{u^{t-1}-1}{\log u}\,\mathrm{d}u=\int_0^1\int_1^t u^{s-1}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u=\int_1^t\int_0^1 u^{s-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s=\log t.$$

□

解. 同3.5.65的解法一. □

解. 用重积分求解, $I(t)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\int_1^t\mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x$. 这里验证积分次序可交换, 则

$$LHS=\int_1^t\int_0^\infty\mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s=\ln t.$$

□

解. 用Laplace变换, $g(s)=L[f(x)]=L\left[\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\right]$, 则$-g'(s)=L[xf(x)]=\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}$. 所以$g(s)=\log\frac{s+b}{s+a}+c$, 由于$g(\infty)=0$, 所以$c=0$. 从而

$$\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x=\log\frac{s+b}{s+a}.$$

令$s=0$即可. □

解. 用Laplace变换, $L[1]=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{s}$, 则

$$LHS=\int_0^\infty\int_0^\infty(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt})\mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+t}\right)=\ln\frac{s+1}{s+t}\Big|_0^\infty=\ln t$$

□

问题 3.5.48: http://tieba.baidu.com/p/2686576086

设$f(x)$在实轴$\mathbb{R}$上有二阶导数, 且满足方程

$$2f(x)+f''(x)=-xf'(x).$$

求证$f(x)$和$f'(x)$都在$\mathbb{R}$上有界.

解. 构造$L=f^2+\frac{1}{2}f'^2$, 研究L'. 方程可改成$f''(x)+\frac{x}{2}f'(x)+f(x)=0$. □

问题 3.5.49: http://tieba.baidu.com/p/3846349760

证明: $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}$发散.

解. 由于$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 且$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调增加, 则$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$, 于是$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, 从而$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)>\ln n$, 即得. □

问题 3.5.50: http://tieba.baidu.com/p/4931607145

设$f(x)$在$[a,b]$上可导, $f'(x)$在$[a,b]$上可积. 令

$$A_n=\sum_{i=1}^n f\left(a+i\cdot\frac{b-a}{n}\right)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

试证

$$\lim_{n\to\infty}nA_n=\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)].$$

解. 令$x_i=a+i\cdot\frac{b-a}{n}$, 则

$$\begin{aligned}nA_n&=n\left[\sum_{i=1}^n f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n}-\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\&=n\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x\\&=n\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

在$[x_{i-1},x_i]$上, (x_i-x)保号, 而$g(x)=\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}$连续(补充定义$g(x_i)=f'(x_i)$). 由积分第一中值定理知, 存在$\eta_i\in(x_{i-1},x_i)$, 使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x=g(\eta_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x.$$

再由Lagrange中值定理, 以上$g(\eta_i)=\frac{f(x_i)-f(\eta_i)}{\eta_i-x}=f'(\xi_i)$, $(\xi_i\in(\eta_i,x_i)\subset(x_{i-1},x_i))$. 于是

$$\begin{aligned} nA_n &= n\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x=\frac{n}{2}\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})^2\\ &=\frac{n}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\\ &\to\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)),\text{当}n\to\infty. \end{aligned}$$

□

问题 3.5.51

$\int_0^1\frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{64}\sqrt[4]{2}\pi$.

问题 3.5.52

求证:

$$\int_0^\infty\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{8}$$

解. 让$f(y)=\int_0^\infty\frac{\sin^3 yx}{x^3}\,\mathrm{d}x$, 判断积分号下可求导, 有

$$f''(y)=\frac{3}{4}\int_0^\infty\frac{-\sin yx+3\sin 3yx}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}\mathrm{sign}y.$$

□

解. 用$\sum_{k=1}^\infty\frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi-x}{2}$, 由

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\sin^3(kx)}{k^3}=\frac{9\sin(3kx)-3\sin(kx)}{4k}.$$

则

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{9\sin(3kx)-3\sin(kx)}{4k}=\frac{3\pi}{4}-3x.$$

积分后得:

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{\sin^3(kx)}{k^3}=\frac{3\pi}{8}x^2-\frac{1}{2}x^3.$$

取$x=\frac{1}{n}$后两边同乘n^2得

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n}=\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{2n}.$$

而广义 Riemann 和显示

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^\infty\frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n}=\int_0^\infty\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

广义 Riemann 和成立的条件是 $\sum_{k=0}^\infty\sup_{x\in[k,k+1]}|f'(x)|<\infty$? 这不等式蕴含 $\int_0^\infty|f'|\,\mathrm{d}x<+\infty$, $f'\in L^1(0,\infty)$. □

解. 用 Parseval 定理

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(s)G(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中$F(s)=\mathcal{F}[f]$, $G(s)=\mathcal{F}[g]$, $\mathcal{F}[f]=\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\,\mathrm{d}x$. 若$f(x)=\frac{\sin x}{x}$, 则

$$F(s)=\begin{cases}\pi, & |s|\le 1\\ 0, & |s|>1,\end{cases}$$

若$g(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$, 则

$$G(s)=\begin{cases}\pi\left(1-\dfrac{|s|}{2}\right),|s|\le 2\\ 0,|s|>2,\end{cases}$$

所以$\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\pi^2\left(1-\frac{|s|}{2}\right)\mathrm{d}s=\frac{3\pi}{4}$. 即$\int_0^\infty\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{8}$. □

解. 用 Laplace 变换 $F(s)=\mathcal{L}[f]=\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 对于$f(x)=\frac{\sin^3 x}{x^3}$有

$$F(s)=\frac{\pi s^2}{8}+\frac{3\pi}{8}-\frac{3(s^2-1)}{8}\arctan s+\frac{s^2-9}{8}\arctan\frac{s}{3}+\frac{3s}{8}\ln\frac{s^2+1}{s^2+9}.$$

□

解. 用 Laplace 恒等式

$$\int_0^\infty F(u)g(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^\infty f(u)G(u)\,\mathrm{d}u, F(s)=\mathcal{L}[f(t)],G(s)=\mathcal{L}[g(t)].$$

让 $G(u)=\frac{1}{u^3}$ 得 $g(u)=\frac{u^2}{2}$, 让 $f(u)=\sin^3 u$ 得 $F(u)=\frac{6}{(u^2+1)(u^2+9)}$, 则

$$\int_0^\infty\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{6}{2}\int_0^\infty\frac{u^2}{(u^2+1)(u^2+9)}\,\mathrm{d}u=\frac{3\pi}{8}.$$

□

解. 留数定理, 由 $\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4}$ 得 $\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4x^3}\,\mathrm{d}x$. 围道 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$, $\gamma_1=[r,R]$, γ_2 是以 $(0,0)$ 为心 R 为径的上半圆, $\gamma_3=[-R,-r]$, γ_4 为以 $(0,0)$ 为心 r 为径的上半圆, γ 取逆时针方向为正方向. 取 $f(z)=\frac{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}z}}{z^3}$, 则 f 在 γ 内解析, 由 Cauchy-Goursat 公式

$$\oint_\gamma f(z)=0,\tag{3.1}$$

并用 Laurent 展开或留数定理得

$$\int_{\gamma_4}f(z)\,\mathrm{d}z=-\frac{3\pi\mathrm{i}}{4},\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2}f(z)\,\mathrm{d}z=0,\lim_{\substack{r\to0\\R\to\infty}}\int_{\gamma_1\cup\gamma_3}f(z)\,\mathrm{d}z=2\mathrm{i}\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x.$$

代入3.2即得. □

问题 3.5.53

设函数$f:(a,b)\to\mathbb{R}$连续可微, 又设对于任意的$x,y\in(a,b)$, 存在唯一的$z\in(a,b)$使得$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(z)$. 证明: $f(x)$严格凸或严格凹.

解. 反证法, 构造λ的函数

$$\Lambda(\lambda)=f(\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta)-\lambda f(\alpha)-(1-\lambda)f(\beta),\quad\lambda\in(0,1)$$

若结论不真, 则存在$\alpha,\beta\in(a,b)$使$\Lambda(\lambda)$在$(0,1)$的某两点异号, 由于f连续, 所以存在$\lambda_0\in(0,1)$使$\Lambda(\lambda_0)=0$.

设$\gamma=\lambda_0\alpha+(1-\lambda_0)\beta$, 则$\gamma\in(\alpha,\beta)\subset(a,b)$且 $\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$. 再由拉格朗日中值定理得出矛盾. □

问题 3.5.54

设函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上无限可微, 且:

a) 存在$L>0$, 使得对于任意的$x\in\mathbb{R}$及$n\in\mathbb{N}$有$|f^{(n)}(x)|\le L$.

b) $f\left(\frac{1}{n}\right)=0$, 对所有$n=1,2,3\cdots$.

求证: $f(x)\equiv 0$.

解. 由f在$\mathbb{R}$上无限次可微, 且由a)知f有在$x=0$处的Taylor展开

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots.$$

设N是使$f^{(N)}(0)\ne 0$的最小者, 取正整数$M>1$使$|f^{(N)}(0)|>\frac{L}{M-1}$. 则

$$\begin{aligned}
0=\left|f\left(\frac{1}{M}\right)\right| &= \left|f^{(N)}(0)\frac{x^N}{N!}+f^{(N+1)}(0)\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}+\cdots\right|\\
&\ge |f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-L\left(\frac{1}{(N+1)!M^{N+1}}+\frac{1}{(N+2)!M^{N+2}}+\cdots\right)\\
&\ge |f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-L\left(\frac{1}{N!M^{N+1}}+\frac{1}{N!M^{N+2}}+\cdots\right)\\
&= |f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-\frac{L}{N!}\frac{1}{M^{N+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{M}}\\
&= \left(|f^{(N)}(0)|-\frac{L}{M-1}\right)\frac{1}{N!M^N}>0.
\end{aligned}$$

这导致矛盾, 即所有$f^{(n)}(0)=0$, $f(x)\equiv 0$. □

问题 3.5.55

设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\subset C_{[a,b]}$, 且$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$, 则$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 因$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in[a,b]$, 所以$f\in C_{[a,b]}$且$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当$n>N$时, $\forall x\in[a,b]$均有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. $f(x),f_n(x)$连续必可积, 有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|<(b-a)\varepsilon.$$

其实当$a\le x\le b$时, 有$\left|\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|<(b-a)\varepsilon$对$x$一致成立, 所以$\int_a^x f_n(x)\,\mathrm{d}t\rightrightarrows\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. □

问题 3.5.56

$f_n(x)$在$[a,b]$上都有连续导数, 且$f_n(x)\to f(x)$, $f_n'(x)\rightrightarrows g(x)$, 则$f'(x)=g(x)$, 即$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)$.

解. 因$f_n'\rightrightarrows g$, 所以g连续, 可积, 由3.5.55, $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$, 所以$f'(x)=g(x)$. 其实$f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$在$[a,b]$上也一致收敛.

若3.5.55和本问题中的$f_n(x)$视为函数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$的前$n$项部分和, 就有函数项级数的相应命题.

(1). 若$[a,b]$上$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$中每项$u_k$均连续, 且$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\rightrightarrows f(x)$, 则$f(x)\in C_{[a,b]}$且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2). 若$[a,b]$上, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$的每项都有连续导数$u_k'(x)$且$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \rightrightarrows g(x)$, 而$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \to f(x)$. 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x).$$

□

问题 3.5.57

举反例:

(1) 积分的极限不等于极限的积分的函数列.

(2) 导数的极限不等于极限的导数的函数列.

解. (1). 在$[0,1]$上极限函数为0, 但f_n在$\left[0,\frac{1}{n}\right]$上面积为1的脉冲函数.
(2). $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$, $x \in [-1,1]$. □

问题 3.5.58: http://math.stackexchange.com/questions/2143014

证明: 对于任意的$\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left|\frac{\alpha-n}{\alpha+n}\right|$发散.

问题 3.5.59: http://math.stackexchange.com/questions/472007

判断$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n+10\sin n}$的敛散性.

解. 其实, 若$f(n)$是有界函数, 且级数$\sum_{n=1}^{n} \frac{f(n)}{n}$收敛, a是使任意的n都有$n+af(n) \neq 0$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n+af(n)}$.
这是因为

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{f(n)}{n+af(n)} = \sum_{n=1}^{m} \frac{f(n)}{n} + \sum_{n=1}^{m} \frac{-af^2(n)}{n(n+af(n))}$$

后一个和式用比较判别法. □

问题 3.5.60: http://math.stackexchange.com/questions/273559

判断$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n}$的敛散性.

解. 比较判别法, $[k\pi+\frac{\pi}{6},(k+1)\pi-\frac{\pi}{6}]$中总有至少一个整数.
或用$\sum \frac{\sin^2(n)}{n} = \sum \frac{1}{2n} - \sum \frac{\cos(2n)}{2n}$, 前者发散, 后者用Dirichlet判别法. □

问题 3.5.61: http://math.stackexchange.com/questions/991652

证明$\int_0^1 \left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right| \,\mathrm{d}x$发散.

解. 变量替换, 积分化为$\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} \,\mathrm{d}x$, 然后在子区间$(k\pi,(k+1)\pi)$上求下界. □

问题 3.5.62: http://math.stackexchange.com/questions/620449

证明: 求$p \in \mathbb{R}$, 使积分$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x^p} \,\mathrm{d}x$发散.

解. $p \geq -1$. □

问题 3.5.63: http://math.stackexchange.com/questions/596511

计算

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

解. 用Frullani积分. 结果为$\log 2$. 或用重积分: $\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}=x\int_1^2 \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. 这里给出Frullani积分证明过程的做法.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{2a}^{2b}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\\
&=\left(\int_a^b-\int_{2a}^{2b}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\\
&=\left(\int_a^{2a}-\int_b^{2b}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\to\log(2)-0,\quad a\to 0, b\to\infty
\end{aligned}$$

上式最后一步用$\mathrm{e}^{-2c}\log(2)\le\int_c^{2c}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\le\mathrm{e}^{-c}\log(2)$. □

问题 3.5.64: http://math.stackexchange.com/questions/590774

已知$a>b>0$, 求$\lim_{t\to 0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)$.

解. 注意到$\Gamma(t)=a^t\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-as}}{s^{1-t}}\,\mathrm{d}s$, 所以

$$\lim_{t\to 0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$$

然后用Frullani积分算得$\log\frac{a}{b}$. □

问题 3.5.65: http://math.stackexchange.com/questions/590774

已知$a>b>0$, 求$\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$.

解. 可以用Frullani积分. 这里用含参积分求导的方法, 定义$I(t)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-tx}}{x}\,\mathrm{d}x$, 被积函数记为$f(x,t)$, 由$f(x,t)$和$f_t(x,t)$在定义域均连续, $I(t)$关于t收敛且$\int_0^\infty f_t(x,t)\,\mathrm{d}x$关于$t$一致收敛, 则满足积分号下求导条件, 所以$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{a}$, $I=-\log t$. □

解.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^\infty\frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_\epsilon^\infty\frac{\exp(-ax)}{x}dx-\int_\epsilon^\infty\frac{\exp(-bx)}{x}dx\right]\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{a\epsilon}^\infty\frac{\exp(-t)}{t}dt-\int_{b\epsilon}^\infty\frac{\exp(-t)}{t}dt\right]\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{a\epsilon}^{b\epsilon}\frac{\exp(-t)}{t}dt=\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b\frac{\exp(-\epsilon u)}{u}du
\end{aligned}$$

最后的被积函数一致收敛到$\frac{1}{u}$. □

解. 用Laplace变换, $F(s)=\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 则

$$F(s)=\int_0^\infty\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}e^{-sx}dx\implies F'(s)=-\int_0^\infty(e^{-bx}-e^{-ax})e^{-sx}dx.$$

计算最后一个积分, 然后求积分并令$s\to 0$, 其中积分出来的积分常数用极限$\lim_{s\to\infty}F(s)=0$计算. □

问题 3.5.66: http://math.stackexchange.com/questions/164400

求$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}x=\log t$, 其中$t>0$.

解. 让$u=\mathrm{e}^{-x}$, 得

$$\int_0^1 \frac{u^{t-1}-1}{\log u}\,\mathrm{d}u=\int_0^1\int_1^t u^{s-1}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u=\int_1^t\int_0^1 u^{s-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s=\log t.$$

□

解. 同3.5.65的解法一. □

解. 用重积分求解, $I(t)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\int_1^t \mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x$. 这里验证积分次序可交换, 则

$$LHS=\int_1^t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s=\ln t.$$

□

解. 用Laplace变换, $g(s)=L[f(x)]=L\left[\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\right]$, 则$-g'(s)=L[xf(x)]=\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}$. 所以$g(s)=\log\frac{s+b}{s+a}+c$, 由于$g(\infty)=0$, 所以$c=0$. 从而

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x=\log\frac{s+b}{s+a}.$$

令$s=0$即可. □

解. 用Laplace变换, $L[1]=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{s}$, 则

$$LHS=\int_0^\infty\int_0^\infty(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt})\mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+t}\right)=\ln\frac{s+1}{s+t}\bigg|_0^\infty=\ln t$$

□

问题 3.5.67: http://tieba.baidu.com/p/2686576086

设$f(x)$在实轴$\mathbb{R}$上有二阶导数, 且满足方程

$$2f(x)+f''(x)=-xf'(x).$$

求证$f(x)$和$f'(x)$都在$\mathbb{R}$上有界.

解. 构造$L=f^2+\frac{1}{2}f'^2$, 研究L'. 方程可改成$f''(x)+\frac{x}{2}f'(x)+f(x)=0$. □

问题 3.5.68: http://tieba.baidu.com/p/3846349760

证明: $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}$发散.

解. 由于$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 且$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调增加, 则$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$, 于是$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, 从而$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)>\ln n$, 即得. □

问题 3.5.69: http://tieba.baidu.com/p/4931607145

设$f(x)$在$[a,b]$上可导, $f'(x)$在$[a,b]$上可积. 令

$$A_n=\sum_{i=1}^n f\left(a+i\cdot\frac{b-a}{n}\right)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

试证

$$\lim_{n\to\infty} nA_n=\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)].$$

解. 令$x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$, 则

$$\begin{aligned}
nA_n &= n\left[\sum_{i=1}^n f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n} - \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x\right] \\
&= n\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x \\
&= n\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

在$[x_{i-1}, x_i]$上, $(x_i - x)$保号, 而$g(x) = \frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}$连续(补充定义$g(x_i) = f'(x_i)$). 由积分第一中值定理知, 存在$\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$, 使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x = g(\eta_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x.$$

再由Lagrange中值定理, 以上$g(\eta_i) = \frac{f(x_i)-f(\eta_i)}{\eta_i-x} = f'(\xi_i)$, $(\xi_i \in (\eta_i, x_i) \subset (x_{i-1}, x_i))$. 于是

$$\begin{aligned}
nA_n &= n\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x = \frac{n}{2}\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})^2 \\
&= \frac{n}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) \\
&\to \frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)), \text{当} n\to\infty.
\end{aligned}$$

□

问题 3.5.70

$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{64}\sqrt[4]{2}\pi.$

问题 3.5.71

求证:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8}$$

解. 让$f(y) = \int_0^\infty \frac{\sin^3 yx}{x^3}\,\mathrm{d}x$, 判断积分号下可求导, 有

$$f''(y) = \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{-\sin yx + 3\sin 3yx}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}\mathrm{sign}y.$$

□

解. 用$\sum_{k=1}^\infty \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi-x}{2}$, 由

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\sin^3(kx)}{k^3} = \frac{9\sin(3kx)-3\sin(kx)}{4k}.$$

则

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{9\sin(3kx)-3\sin(kx)}{4k} = \frac{3\pi}{4} - 3x.$$

积分后得:

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\sin^3(kx)}{k^3} = \frac{3\pi}{8}x^2 - \frac{1}{2}x^3.$$

取$x=\frac{1}{n}$后两边同乘n^2得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n}=\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{2n}.$$

而广义 Riemann 和显示

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n}=\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

广义 Riemann 和成立的条件是 $\sum_{k=0}^{\infty}\sup_{x\in[k,k+1]}|f'(x)|<\infty$? 这不等式蕴含 $\int_0^\infty|f'|\,\mathrm{d}x<+\infty$, $f'\in L^1(0,\infty)$. □

解. 用 Parseval 定理

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(s)G(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中$F(s)=\mathcal{F}[f]$, $G(s)=\mathcal{F}[g]$, $\mathcal{F}[f]=\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\,\mathrm{d}x$. 若$f(x)=\frac{\sin x}{x}$, 则

$$F(s)=\begin{cases}\pi, & |s|\le 1\\ 0, & |s|>1,\end{cases}$$

若$g(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$, 则

$$G(s)=\begin{cases}\pi\left(1-\dfrac{|s|}{2}\right), |s|\le 2\\ 0, |s|>2,\end{cases}$$

所以$\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\pi^2\left(1-\frac{|s|}{2}\right)\mathrm{d}s=\frac{3\pi}{4}$. 即$\int_0^\infty\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{8}$. □

解. 用 Laplace 变换 $F(s)=\mathcal{L}[f]=\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 对于$f(x)=\frac{\sin^3 x}{x^3}$有

$$F(s)=\frac{\pi s^2}{8}+\frac{3\pi}{8}-\frac{3(s^2-1)}{8}\arctan s+\frac{s^2-9}{8}\arctan\frac{s}{3}+\frac{3s}{8}\ln\frac{s^2+1}{s^2+9}.$$

□

解. 用 Laplace 恒等式

$$\int_0^\infty F(u)g(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^\infty f(u)G(u)\,\mathrm{d}u, F(s)=\mathcal{L}[f(t)], G(s)=\mathcal{L}[g(t)].$$

让 $G(u)=\frac{1}{u^3}$ 得 $g(u)=\frac{u^2}{2}$, 让 $f(u)=\sin^3 u$ 得 $F(u)=\frac{6}{(u^2+1)(u^2+9)}$, 则

$$\int_0^\infty\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{6}{2}\int_0^\infty\frac{u^2}{(u^2+1)(u^2+9)}\,\mathrm{d}u=\frac{3\pi}{8}.$$

□

解. 留数定理, 由 $\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4}$ 得 $\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4x^3}\,\mathrm{d}x$. 围道 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$, $\gamma_1=[r,R]$, γ_2 是以 $(0,0)$ 为心 R 为径的上半圆, $\gamma_3=[-R,-r]$, γ_4 为以 $(0,0)$ 为心 r 为径的上半圆, γ 取逆时针方向为正方向. 取 $f(z)=\frac{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}z}}{z^3}$, 则 f 在 γ 内解析, 由 Cauchy-Goursat 公式

$$\oint_\gamma f(z)=0, \tag{3.2}$$

并用 Laurent 展开或留数定理得

$$\int_{\gamma_4}f(z)\,\mathrm{d}z=-\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}, \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2}f(z)\,\mathrm{d}z=0,\ \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}}\int_{\gamma_1\cup\gamma_3}f(z)\,\mathrm{d}z=2\mathrm{i}\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x.$$

代入3.2即得. □

问题 3.5.72

设函数$f:(a,b)\to\mathbb{R}$连续可微, 又设对于任意的$x,y\in(a,b)$, 存在唯一的$z\in(a,b)$使得$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(z)$. 证明: $f(x)$严格凸或严格凹.

解. 反证法, 构造λ的函数

$$\Lambda(\lambda) = f(\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta) - \lambda f(\alpha) - (1-\lambda)f(\beta), \quad \lambda \in (0,1)$$

若结论不真, 则存在$\alpha, \beta \in (a,b)$使$\Lambda(\lambda)$在$(0,1)$的某两点异号, 由于f连续, 所以存在$\lambda_0 \in (0,1)$使$\Lambda(\lambda_0) = 0$.

设$\gamma = \lambda_0\alpha + (1-\lambda_0)\beta$, 则$\gamma \in (\alpha, \beta) \subset (a,b)$且 $\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha} = \frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$. 再由拉格朗日中值定理得出矛盾. □

问题 3.5.73

设函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上无限可微, 且:

a) 存在$L > 0$, 使得对于任意的$x \in \mathbb{R}$及$n \in \mathbb{N}$有$|f^{(n)}(x)| \leq L$.

b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, 对所有$n = 1, 2, 3 \cdots$.

求证: $f(x) \equiv 0$.

解. 由f在$\mathbb{R}$上无限次可微, 且由a)知f有在$x = 0$处的Taylor展开

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots.$$

设N是使$f^{(N)}(0) \neq 0$的最小者, 取正整数$M > 1$使$|f^{(N)}(0)| > \frac{L}{M-1}$. 则

$$\begin{aligned} 0 = \left|f\left(\frac{1}{M}\right)\right| &= \left|f^{(N)}(0)\frac{x^N}{N!} + f^{(N+1)}(0)\frac{x^{N+1}}{(N+1)!} + \cdots\right| \\ &\geq |f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N} - L\left(\frac{1}{(N+1)!M^{N+1}} + \frac{1}{(N+2)!M^{N+2}} + \cdots\right) \\ &\geq |f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N} - L\left(\frac{1}{N!M^{N+1}} + \frac{1}{N!M^{N+2}} + \cdots\right) \\ &= |f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N} - \frac{L}{N!}\frac{1}{M^{N+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{M}} \\ &= \left(|f^{(N)}(0)| - \frac{L}{M-1}\right)\frac{1}{N!M^N} > 0. \end{aligned}$$

这导致矛盾, 即所有$f^{(n)}(0) = 0$, $f(x) \equiv 0$. □

Chapter 4

实变函数

问题 4.0.1

构造一个从$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$到$\mathbb{R}$的单射.

解. This is slightly more complicated. If you understand why $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ and $2^{\mathbb{N}}$ have the same cardinality, it's enough to observe that the map defined above had range $2^{\mathbb{N}}$; if you haven't seen that yet, then here's a straightforward (if somewhat unnatural) injection: given $\alpha = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, let $f(\alpha)$ be the real with binary expansion

$$0.0\ldots010\ldots010\ldots01\ldots$$

where the ith block of zeroes has length $a_i + 1$. □

问题 4.0.2

设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$是$E=[a,b]$上实函数列, 满足: $f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_n(x) \le \cdots$, 且$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in E$. 求证: 对任意$c \in \mathbb{R}$,

(I) $E(f(x) > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c)$.

(II) $E(f(x) \le c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) \le c)$.

解. (I). 对于任意的$x_0 \in E(f(x) > c)$, 有$f(x_0) > c$且$x_0 \in E$, 因为$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, 所以存在$n_0$, 使得$f_{n_0}(x_0) > c$, 故$x_0 \in E(f_{n_0}(x_0) < c)$, 于是$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c)$. 反之, 若$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c)$, 则存在$n_0$, 使得$f_{n_0}(x_0) > c$且$x_0 \in E$, 由单调性, $f(x_0) \ge f_{n_0}(x_0) > c$. 故$x_0 \in E(f(x) > c)$, 得证.

(II). 对(I)式取基本集$E = [a,b]$上的补集. □

问题 4.0.3

设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$为一列集合, 定义

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \{x : x\text{属于}A_n(n \ge 1)\text{中的无穷多个}\};$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \{x : x\text{至多不属于}A_n(n \ge 1)\text{中的有限个}\};$$

试证:

(I) $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

(II) $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.

解. (I). 由定义

$$\begin{aligned}x\in\limsup_{n\to\infty}A_n &\iff x\text{属于}A_n(n\geq 1)\text{中的无穷多个}\\ &\iff \forall n\geq 1,\text{总有}k_n\geq n\text{使}x\in A_k\\ &\iff \forall n\geq 1,\text{有}x\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\\ &\iff x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k.\end{aligned}$$

(II).

$$\begin{aligned}x\in\liminf_{n\to\infty}A_n &\iff \exists n_0\text{使}x\in A_k(k\geq n)\\ &\iff \exists n_0\text{使}x\in\bigcap_{k=n_0}^{\infty}A_k\\ &\iff x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.\end{aligned}$$

□

问题 4.0.4

(I) 若$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$, 则$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$.

(II) 若$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$, 则$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$.

解. (I) 由条件, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$单调上升, 有$\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=A_n(\forall n\geq 1)$, 于是$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\supset\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$. 即$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\liminf_{n\to\infty}A_n\supset\limsup_{n\to\infty}A_n\supset\liminf_{n\to\infty}A_n$.

(II). 用对偶律. □

问题 4.0.5

设$A\subset\mathbb{R}$且被开区间集$G=\{I_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$所覆盖, 证明存在$G$的可列子集$G^*$覆盖$A$.

解. 对于任意的$x\in A$, 由条件存在$I_x\in G$, $x\in I_x$, 因为x为I_x的内点, 则有x的邻域$V_\delta(x)\subset I_x$且$V_\delta(x)$的端点均为有理数. 于是$\{V_\delta(x):x\in A\}$覆盖A且至多可列. 不妨设$\{V_\delta(x):x\in A\}=\{V_1,V_2,\cdots,V_n,\cdots\}$, 而由$V_n$的构造可在$G$中找到对应的$I_n$. 于是$G^*=\{I_1,I_2,\cdots,I_n,\cdots\}$即为所求. □

问题 4.0.6

E_n是$\mathbb{R}$上单调降的可测集列, 对于任意的$n\in\mathbb{N}$, 均有$E_{n+1}\supset E_n$, 且$m(E_1)<+\infty$, 则$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\lim_{n\to\infty}m(E_n)$.

解. 让$E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$, $F_k=E_k-E_{k+1}$, 则$E_1-E=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$, 且$F_k$两两不交, 则

$$m(E_1)-m(E)=m(E_1-E)=\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k-E_{k+1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(mE_k-mE_{k+1})=mE_1-\lim_{n\to\infty}mE_n.$$

所以$\lim_{n\to\infty}mE_n=m(E)$. 其中$m(E_1)<+\infty$不能省, 如取$E_n=(-n,n)^c$. □

问题 4.0.7: 等测覆盖定理

证明: 对任意集合$A\subset\mathbb{R}$恒有G_δ型集G, 使$G\supset A$且$mG=m^*A$

解. 任取$\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, 由外测度定义及下确界定义知, 必有开区间集列$\{I_k^{(n)}: k=1,2,\cdots\}$满足

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{(n)} \text{且} \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k^{(n)}) < m^*A + \frac{1}{n}.$$

令$G_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{(n)}$, $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, 则由外测度次可列可加性, $m(G_n) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k^{(n)}) < m^*(A) + \frac{1}{n}$. 显然$G_n$为开集. G为G_δ型集, 且$A \subset G \subset G_n$, $(n=1,2,\cdots)$. 故有

$$m^*(A) \le m^*G \le m^*G_n < m^*(A) + \frac{1}{n}.$$

于是$mG = m^*G = m^*A$. □

问题 4.0.8: 等测核心定理

证明: 若A为有界(有界可去掉)可测集, 必有F_σ型集F, 使$F \subset A$且$mF = mA$.

解. 存在$E = [\alpha, \beta] \supset A$, 设$S = E - A$, 由4.0.7, 存在$G_\delta$型集$G$使$G \supset S$, $m^*S = mG$, $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, G_n开, 令$F_n = E - G_n$, 则F_n闭, 令$F = E \cap G^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E \cap G_n^c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, 故$F$为$F_\sigma$型集, 且$F = E \cap G^c = E - G \subset E - S \subset A$, 及

$$mF = m(E \cap G^c) = m(E - G) \ge mE - mG = mE - m^*S = mE - m^*(E - A) = m_*A = mA, F \subset A \Rightarrow mF \le mA.$$

所以$mF = mA$. □

问题 4.0.9

设E可测, $mE < +\infty$, 证明: $\forall \varepsilon > 0$, 有闭集F使$F \subset E$且$m(E - F) < \varepsilon$.

解. 由等测核心定理, 存在$F \in F_\sigma$型集, 使$F \subset E$且$mE = mF$, 设$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, F_k闭, 记$S_n = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$, 则$S_n$闭且$S_n \subset E$, 由$S_n$单调且$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n$, 所以$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$使得当$n > N$时, 有$mE - mS_n < \varepsilon$, 而$S_n \subset E$, $mS_n < +\infty$得证. □

问题 4.0.10

设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$是可测集$E$上定义的可测函数列, 证明$\sup_n f_n(x)$与$\inf_n f_n(x)$都是$E$上可测函数.

解. 其实$E(\sup_n f_n(x) > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c)$, 只证$LHS \subset RHS$. 若$x_0 \in LHS$, 则$\sup_n f_n(x_0) > c$, 记$\varepsilon = \sup_n f_n(x_0) - c$, 则对于任意的$\delta \in (0, \varepsilon)$, 存在$N$使得$f_N(x_0) > \sup_n f_n(x_0) - \delta > c$, 所以$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c)$. □

问题 4.0.11

设$mE \ne 0$, f在E上可积, 若对任何有界可测函数$\varphi(x)$, 都有$\int_E f\varphi \, dx = 0$, 则$f = 0, a.e.E$.

解. 取$\varphi(x) = (\chi_{E(f \ge 0)} - \chi_{E(f<0)})(x)$, 则$0 = \int_E f\varphi \, dx = \int_E |f| \, dx$, 即得. □

问题 4.0.12

设$mE < +\infty$, $f(x)$在E上可积, E_n单调上升可测, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f \, dx = \int_E f \, dx.$$

解. 因E_n可测, 所以E可测, 令$F_1 = E_1$, $F_2 = E_2 - E_1, \cdots, F_n = E_n - E_{n-1}, \cdots$, 则$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, 且对任意$i \neq j$, $F_i \cap F_j = \emptyset$. 于是

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\cup F_n} f\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{F_n} f\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{F_k} f\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{\cup_{k=1}^{n} F_k} f\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f\,\mathrm{d}x.$$

□

问题 4.0.13

证明:

$$(L)\int_0^1 \frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(p+k)^2}, \quad (p > -1).$$

解. 让$f(x) = \frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{p+n-1}\ln\frac{1}{x}$, 用Levi定理, $(L)\int_0^1 f\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}(L)\int_0^1 x^{p+n-1}\ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. □

问题 4.0.14

试证, 当f在$(a,+\infty)$上有界, 非负, (R)可积时, 则f在$(a,+\infty)$上(L)可积, 且

$$(L)\int_{(0,+\infty)} f\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^{\infty} f\,\mathrm{d}x.$$

解. 由f有界(R)可积, 对任一有限区间(a,A)有$(L)\int_{(a,A)} f\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$. 于是

$$(L)\int_{(a,+\infty)} f\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty}(L)\int_{(a,A)} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty}(R)\int_a^A f\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^{\infty} f\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

即得. □

问题 4.0.15

$f, |f|$在$(a,+\infty)$上有界, (R)可积, 则f在$(a,+\infty)$上(L)可积, 且

$$(L)\int_{(a,+\infty)} f\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^{\infty} f\,\mathrm{d}x.$$

解. 由4.0.14知, $|f|$在$(a,+\infty)$上(R)可积, 有$|f|$在$(a,+\infty)$上(L)可积, 且积分值相等, 于是(取$E = (a,+\infty)$)

$$(L)\int_E f^+\,\mathrm{d}x \le (L)\int_E |f|\,\mathrm{d}x = (R)\int_E |f|\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

同理$(L)\int_E f^-\,\mathrm{d}x < +\infty$. 则$f^+, f^-$的$(L)$积分和$(R)$积分相等. 从而$f$的$(L)$积分和$(R)$积分相等.

反例, $|f|$在E上(R)可积不可省, 否则考虑$\frac{\sin x}{x}$在$(0,+\infty)$上(R)可积, 但

$$(L)\int_{(0,+\infty)}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x = (R)\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x = +\infty.$$

从而$\frac{\sin x}{x}$在$(0,+\infty)$上必(L)不可积. □

Chapter 5

泛函分析

问题 5.0.1

设$X = \{f(z) : f$在$|z| < 1$内解析, 且在$|z| \le 1$上连续$\}$, 令

$$d(f,g) = \max_{|z|=1} |f(z) - g(z)|, \quad f, g \in X.$$

求证: (X, d)是度量空间.

解. 正则性: $d(f,g) = 0 \iff \max_{|z|=1} |f(z)-g(z)| = 0$, 而由最大模原理对于任意的$|z| \le 1$, 有$|f(z)-g(z)| \le \max_{|z|=1} |f(z)-g(z)| = 0$, 所以$f \equiv g, \forall |z| \le 1$. □

问题 5.0.2

求证: $l^1 \subsetneqq l^p \subsetneqq l^q \subsetneqq c \subsetneqq l^\infty$, $(1 < p < q < +\infty)$.

问题 5.0.3

求证: $C[a,b] \subsetneqq L^\infty[a,b] \subsetneqq L^p[a,b] \subsetneqq L^q[a,b] \subsetneqq L[a,b]$, $(1 < q < p < +\infty)$.

问题 5.0.4

$x, y \in \mathbb{R}^n$或l^1, $x = (\xi_i)$, $y = (\eta_i)$,

$$d_p(x,y) = \left(\sum |\xi_i - \eta_i|^p\right)^{1/p}.$$

则$d_p(x,y) \ge d_q(x,y)$, $\forall 1 \le p \le q < +\infty$.

问题 5.0.5

设$X(n) = \{P(D) = p_n D^n + p_{n-1} D^{n-1} + \cdots + p_1 D + p_0 : p_n, \cdots, p_0 \in \mathbb{R}\}$, 其中$D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 令

$$d(P(D), Q(D)) = \sum_{i=0}^{n} |p_i - q_i|$$

其中$Q(D) = \sum_{i=0}^{n} q_i D^i$, $D^0 = 1$, 求证: $(X(n), d)$是度量空间.

问题 5.0.6

求证: 若$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$满足

(I) $\rho(x,x) = 0$, $\forall x \in X$, $\rho(x,y) > 0$, $\forall x \neq y$.

(II) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$, $\forall x,y,z \in X$.

则(X,ρ)是度量空间.

问题 5.0.7

求证: 度量空间中的闭球,

$$V[x_0,r] = \{x \in X : d(x,x_0) \leq r\}, r > 0, x_0 \in X$$

总是闭集, 球面$S(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0) = r\}$也是闭集, 试问: 是否恒有$V[x_0,r] = \overline{V(x_0,r)}$, 及$V[x_0,r] - V(x_0,r) = S(x_0,r) \neq \emptyset$?

解. 通常的离散拓扑, 取$r = 1$. □

问题 5.0.8

设$A \subset (X,d)$, 令$F(x) = d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y)$, 求证: $F : X \to \mathbb{R}$是连续泛函且一致连续.

解. 设$x_1, x_2 \in X$, 由$d(x_1,A) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,A) \implies |F(x_1) - F(x_2)| \leq d(x_1,x_2)$, 于是$F(x)$是$X$上 Lipschitz 连续的, 从而一致连续. □

问题 5.0.9

求证: $K : C[a,b] \to C[a,b]$, $x(t) \mapsto \int_a^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$一致连续.

解. $\|Kx - Ky\|_C = \max_{t \in [a,b]} \left| \int_a^t (x(\tau) - y(\tau))\,\mathrm{d}\tau \right| \leq (b-a)\|x-y\|_C$. □

问题 5.0.10

设E_1, E_2为赋范空间X的子集, 则

(1) 若E_1紧, E_2闭, 则$E_1 + E_2$闭.

(2) E_1, E_2闭, 则$E_1 + E_2$不一定闭.

解.

(1) 设$z \in \overline{E_1 + E_2}$, 则有$z_n \to z$, $z_n = x_n + y_n$, $x_n \in E_1$, $y_n \in E_2$, $x_{n_k} \to x \in E_1$, 故$y_{n_k} = z_{n_k} - x_{n_k} \to z - x \in \overline{E_2} = E_2$, $x \in E_1$, 所以$z = x + (z - x) \in E_1 + E_2$, 所以$\overline{E_1 + E_2} \subset E_1 + E_2$.

(2) $E_1 = \left\{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, $E_2 = \{-n : n \in \mathbb{N}\}$, 对于任意的$p, n \geq 1$,

$$p + \frac{1}{n+p} = \left(n + p + \frac{1}{n+p}\right) + (-n) \in E_1 + E_2 \implies p \in \overline{E_1 + E_2},$$

若$p \in E_1 + E_2$, 则$p = \left(n + \frac{1}{n}\right) + (-m)$, 于是$n(m + p - n) = 1$, 当$n = 1$, $m = 2 - p$时才可能成立, $p \geq 2$时, $p \notin E_1 + E_2$, 不闭.

□

问题 5.0.11

设E_1, E_2是赋范空间X的子集, E_1紧, E_2闭, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, 证存在$r > 0$使得$(E_1 + U(0,r)) \cap E_2 = \emptyset$, $U(0,r) = \{x \in X : \|x\| < r\}$.

解. 令$g(x) = d(x, E_2)$, $(x \in X)$. 因E_1紧, 则E_1上存在$x_1 \in E_1$使得$g(x_1) \le g(x)$, $(x \in E_1)$. 则$x_1 \notin E_2$.

由E_2闭, 所以$d(x_1, E_2) > 0$, 所以$g(x_1) > 0$, 设$0 < r < g(x_1)$, $x \in (E_1 + U(0,r)) \cap E_2$, 于是$x \in E_2$且$x = y + z$, $y \in E_1$, $z \in U(0,r)$, 所以$g(y) = d(y, E_2) \le d(y, x) = \|x - y\| = \|z\| < r < g(x_1)$, 而$y \in E_1$与$g(x_1) \le g(y)$矛盾. □

问题 5.0.12

BV$[a,b]$是$[a,b]$上所有有界变差函数的集合, $x \in \mathrm{BV}[a,b]$, 令$\|x\| = |x(a)| + V(x)$, 则$\|\cdot\|$是BV$[a,b]$上的范数.

解. $x \in \mathrm{BV}[a,b]$, $k \in K$, K是BV$[a,b]$所在的数域, 若$P = (t_0, \cdots, t_n)$是$[a,b]$的任一划分,

$$S(kx, P) = \sum |kx(t_i) - kx(t_{i+1})| = |k| \cdot S(x, P) \le |k| \cdot V(x).$$

所以$V(kx) \le |k|\, V(x)$, 即$\|kx\| \le |k|\, \|x\|$.

当$k \neq 0$时, $\|x\| = \|\frac{1}{k} \cdot kx\| \le \left|\frac{1}{k}\right| \cdot \|kx\| \le \left|\frac{1}{k}\right| \cdot |k| \cdot \|x\| = \|x\|$, 故$\|kx\| = |k| \cdot \|x\|$.

$k = 0$时, 显然. □

问题 5.0.13

求证: 度量空间(X,d)中互不相交的闭集A, B, 必有互不相交的开集G, V使得$A \subset G$, $B \subset V$.

解. $A \subset B^c$故$x \in A$必有$\delta_x > 0$使$V(x, \delta_x) \subset B^c$, 所以$A \subset \bigcup_{x \in A} V(x, \delta_x) \subset B^c$, 故

$$A \subset \bigcup_{x \in A} V(x, \frac{1}{2}\delta_x) \subset \overline{\bigcup_{x \in A} V(x, \frac{1}{2}\delta_x)} \subset \bigcup_{x \in A} V(x, \delta_x) \subset B^c$$

令$G = \bigcup_{x \in A} V(x, \frac{1}{2}\delta_x)$, $V = \left(\bigcup_{x \in A} V(x, \frac{1}{2}\delta_x)\right)^c$. □

解. $F(x) = d(x, A)$是连续泛函, 令$G = \{x \in X; d(x,A) < d(x,B)\}$, 则$G = G^{-1}((-\infty, 0))$, 其中$G(x) = d(x,A) - d(x,B)$是$X$上的连续泛函, 从而$G$开且$A \subset G$. 同理$B \subset V = \{x \in X : d(x,B) < d(x,A)\}$开于$X$. □

问题 5.0.14

设$Y = \{f; f : (X,d) \to \mathbb{R}$为有界连续泛函$\}$, 令

$$\rho(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|,$$

设x_0为X中固定点, 令$G : X \to (Y, \rho)$, $y \mapsto d(x,y) - d(x,x_0)$, 求证: $G : (X,d) \to (G(x), \rho)$是等距映射.

解. 先证$G(X)$是(Y,ρ)的子空间, 然后证$\rho(G(y), G(z)) = d(y,z)$. □

问题 5.0.15

设$A, M \subset (X,d)$, 求证: A在M中稠密, 即$\overline{A} \supset M$的充要条件为如下任何一条成立:

(I) $\forall x \in M$的任一邻域$V_\varepsilon(x)$有$A \cap V_\varepsilon(x) \neq \emptyset$.

(II) $\forall x \in M$, 存在$\{y_n\} \subset A$, 使$y_n \to x$.

(III) 若A在B中稠密, 且B在M中稠密.

解. (I). 若$x \in M$, $\forall \varepsilon > 0$, $A \cap V_\varepsilon(x) \neq \emptyset$, 必有$x \in \overline{A}$, 即$M \subset \overline{A}$.
(II). 因$x \in \overline{A} \iff \exists y_n \in A$, 使得$y_n \to x$, 故若$\forall x \in M$, $\exists y_n \in A$使得$y_n \to x$, 则$x \in \overline{A}$.
(III). 因A在B中稠密, 故$\overline{A} \supset B$, B在M中稠密, 故$\overline{B} \supset M$, 从而$\overline{A} \supset M$. □

问题 5.0.16

求证: $l^p(1 \leq p < +\infty)$是可分的.

解. 首先$\mathbb{R}^n$是可分的, 稠子集为$\mathbb{Q}^n = \{r = (r_1, \cdots, r_n) : r_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \cdots n\}$, 令

$$M = \{r = (r_1, \cdots, r_n, 0, 0, \cdots) : n \in \mathbb{N}, r_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2, \cdots, n\},$$

则M是l^p的可列子集, 然后证$\overline{M} = l^p$. □

问题 5.0.17

求证: l^∞是不可分的.

解. 令$K = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) : x_i$或为0或为1$\}$, 则$K$不可数且$K$中人两个不同元素$x \neq y$, 有$d_\infty(x, y) = 1$, 若$l^\infty$可分且其稠子集为$B$, B可数, 作集类

$$\left\{V\left(x, \frac{1}{3}\right) : x \in K\right\}.$$

则它为不可列集, 且两两不交, 但对于任意的$x \in K$必有$B \cap V\left(x, \frac{1}{3}\right) \neq \emptyset$, 从而$B$不可数, 矛盾. □

问题 5.0.18

设(X, d)是离散度量空间, 求证: 任一映射$F : (X, d) \to (Y, \rho)$都是一致连续的.

问题 5.0.19

设(X, d)为度量空间, $Y = \{f; f : X \to \mathbb{R}\}$为 Lipschitz 连续泛函}, 即

$$f \in Y \iff \text{存在常数}k\text{使}|f(x) - f(y)| \leq kd(x, y), \forall x, y \in X.$$

(I) Y是线性空间.

(II) 问$\sigma(f, g) = \inf\{k : |f(x) - g(x) - f(y) + g(y)| \leq kd(x, y), \forall x, y \in X\}$是否为$Y$上的度量?

(III) 设$Y_0 = \{f : f \in Y, f(x_0) = 0\}$, 其中$x_0$为$X$中定点, 问$\sigma$是否为$Y_0$上的度量.

解. (II). $\sigma(f, g) = 0$未必有$f = g$, 设$f \in Y$, 令$g = f(x) + c$(c非零常数), 则$g \in Y$但$\sigma(f, g) = 0$, 因此σ不是Y上的度量(称为Y上的拟度量).
(III). 因

$$\sigma(f, g) = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - g(x) - f(y) + g(y)|}{d(x, y)},$$

故$\sigma(f, g) = 0 \iff f(x) - g(x) = f(y) - g(y) = f(x_0) - g(x_0)$, 对于任意的$x, y \in X$成立, 即$f(x) \equiv g(x)$, 对于任意的$x \in X$, 即$f = g$, 从而易得$\sigma$是$Y_0$上的度量. □

问题 5.0.20

设$f_n, f \in C[a, b]$且$d(f_n, f) \to 0$, $t_n \in [a, b]$, $t_n \to t_0$, 求证:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(t_n) = f(t_0).$$

问题 5.0.21

设$f: X \to X$连续, (X,d)为度量空间, 设$X \times X$中度量为

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d(x_1,x_2) + d(y_1,y_2), \quad (x_i,y_i) \in X \times X.$$

定义$X \times X$的对角线集为

$$\Delta = \{(x,x) : x \in X\},$$

令

$$g : \Delta \to \mathrm{Graph}(f), \quad (x,x) \mapsto (x, f(x)).$$

求证: g连续, 可逆, g^{-1}也连续.

解. $x_n, x \in X$, 因$(x_n,x_n) \to (x,x) \iff d(x_n,x) \to 0$, 所以由$f: X \to X$连续, 故$(x_n,x_n) \to (x,x)$时, $d(x_n,x) \to 0$, 从而$d(f(x_n),f(x)) \to 0$, 从而

$$d((x_n,f(x_n)),(x,f(x))) = d(x_n,x) + d(f(x_n),f(x)) \to 0$$

所以g连续. 然后证g是双射, 所以可逆.

$$g^{-1} : \mathrm{Graph}(f) \to \Delta, \quad (x,f(x)) \mapsto (x,x),$$

于是

$$(x_n,f(x_n)) \to (x,f(x)) \iff d((x_n,f(x_n)),(x,f(x))) \to 0 \iff d(x_n,x) \to 0 \text{ 且 } d(f(x_n),f(x)) \to 0 \implies (x_n,x_n) \to (x,x)$$

所以g^{-1}连续. □

问题 5.0.22

求证: 同胚映射$F : (X,d) \to (Y,\rho)$, 若(X,d)可分, 则(Y,ρ)可分.

问题 5.0.23

设 Hilbert 立方体 $A = \{x = (\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots) : |\xi_n| \le \frac{1}{n}, \forall n\}$, 求证$A$闭于$l^2$.

解. 显然$A \subset l^2$, 设$x_0 \in \overline{A}$, 则存在$x_k = \left(\xi_i^{(k)}\right) \in A$使得$d(x_k,x_0) \to 0$, 即$\forall i$, $\left|\xi_i^{(k)} - \xi_i^{(0)}\right| \to 0$, 从而$\left|\xi_i^{(0)}\right| \le \frac{1}{i}$, 于是$x_0 \in A$. 其实, A闭于$l^p (1 < p \le +\infty)$. □

问题 5.0.24: http://math.stackexchange.com/questions/1087885

定义: 设(S,ρ)是一距离空间, $T : S \to S$, 若存在$\beta \in (0,1)$使对于任意$x,y \in S$, 有$\rho(Tx,Ty) \le \beta\rho(x,y)$称$T$为压缩映射.

定理 5.0.1: Blackwell's 压缩映射的充分条件

让$X \subset \mathbb{R}^l$, $B(X)$是带有上确界范数的有界函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 的全体组成的空间, 让 $T : B(X) \to B(X)$ 满足

1) (单调性), $f, g \in B(X)$ 且若 $f \le g$, $\forall x \in X$ 则 $Tf \le Tg$, $\forall x \in X$.
2) (discounting) 存在 $\beta \in (0,1)$ 使 $\forall f \in B(X)$, $a \ge 0$, $x \in X$ 有 $[T(f+a)](x) \le (Tf)(x) + \beta a$, 其中 $(f+a)(x) := f(x) + a$.

则 T 是模 β 的压缩映射.

解. 若 $f \le g$, $\forall x \in X$, 则 $\forall f, g \in B(X)$, $f \le g + \|f-g\|$, 从而

$$Tf \le T(g + \|f-g\|) \le Tg + \beta\|f-g\|.$$

交换 f, g的位置, 从而有 $\|Tf - Tg\| \le \beta\|f-g\|$. □

问题 5.0.25: http://math.stackexchange.com/questions/1125691

让 $A=(a_{ij})$ 为一 $n\times n$ 实矩阵, $b\in\mathbb{R}^n$, 并有 $\|A-I\|_2<1$, 证明映射 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $x\mapsto x-Ax+b$ 是压缩映射, 其中距离定义为普通 Euclid 距离.

解. $Tx=b-(A-I)x$, 所以 $Tx-Ty=(A-I)(y-x)$, 又因为 $\|A-I\|_2<1$, 所以存在 $\alpha\in(0,1)$ 使 $\|A-I\|_2\leq\alpha<1$,

$$\|Tx-Ty\|\leq\|A-I\|_2\cdot\|y-x\|<\alpha\|y-x\|.$$

所以 T 是压缩映射. □

问题 5.0.26: http://math.stackexchange.com/questions/1124660

让(S,ρ)为一紧距离空间, 映射$T:S\to S$使对于任意$x\neq y$, 有$\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)$. 证明: $\phi(x)=\rho(x,Tx)$连续, 且T有唯一不动点.

解. 因$|\rho(x,Tx)-\rho(y,Ty)|\leq\rho(x,y)+\rho(Tx,Ty)<2\rho(x,y)$, 所以$\phi(x)$连续. 任取$x\in S$, 构造点列$\{T^nx\}$, 并利用$S$的紧性. 唯一性用反证法. □

Chapter 6

复变函数

问题 6.0.1: http://math.stackexchange.com/questions/294383

求$\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\,dx$.

解. 留数法. 首先

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{x-\sinh x}{x^2\sinh x}\,dx.$$

被积函数记为$f(x)$, $f(x)$是奇函数, 故

$$LHS=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-\sinh x}{x^2\sinh x}\,dx=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}2\pi i\mathrm{Res}\left(\frac{x-\sinh x}{x^2\sinh x},in\pi\right)=-\frac{\ln 2}{2}.$$

另见9.0.40. □

问题 6.0.2

设2×2矩阵$A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$, 其中$b\in\mathbb{R}$, 且$|a|^2+b^2=1$. 试计算$A^n$.

解. 设$a=\cos\alpha+i\sin\alpha\cos\beta$, $b=\sin\alpha\beta$, 于是

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}i\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & -i\cos\beta\end{pmatrix},\quad A=\cos\alpha E+\sin\alpha I, E^2=E, EI=IE=I, I^2=-E.$$

所以I是2×2矩阵中的虚单位. 所以用二项式定理可得

$$A^n=\cos n\alpha E+\sin n\alpha I.$$

□

问题 6.0.3

区域D内单叶解析函数$f(z)$的导数必不为零.

Chapter 7

Inequality

7.1 Elementary Inequality

问题 7.1.1

求证:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)>\sqrt[3]{4}.$$

解. 先证$\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{1}{3m-2}\right)>\sqrt[3]{3n-2}$. □

问题 7.1.2

设$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+1$有$n$个实根, 且系数$a_1,\cdots,a_{n-1}$都是非负的. 证明$f(2)\geq 3^n$.

问题 7.1.3: Ho Joo Lee

a,b,c是三个正实数, 证明:

$$a+b+c\leq\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}.$$

解. 不等式等价于$\sum\limits_{cyc}\frac{(a-c)(a-b)}{b+c}\geq 0$, 用Shur不等式11.6.1即得. □

问题 7.1.4

设正实数a,b,c的和为3. 证明:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{3}{2a^2+bc}+\frac{3}{2b^2+ac}+\frac{3}{2c^2+ab}.$$

解. 不等式等价于$\sum\limits_{cyc}\frac{(a-c)(a-b)}{2a^3+abc}\geq 0$, 用Shur不等式11.6.1即得. □

问题 7.1.5: Italian Winter Camp 2007

设a,b,c为三角形的三条边长, 证明:

$$\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}\leq 3.$$

解.

$$\sum_{cyc}\left(1-\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\right)\geq 0 \iff \sum_{cyc}\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\geq 0$$
$$\iff \sum_{cyc}\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{c(a+b-c)}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a+b-c})}\geq 0$$
$$\iff \sum_{cyc}\frac{(c-a)(c-b)}{S_c}\geq 0.$$

其中

$$S_c=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a+b-c})(\sqrt{ab}+\sqrt{c(a+b-c)}),$$

不妨设$b\geq c$, 则

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\geq\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}$$
$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a+b-c}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{c+a-b}$$
$$\sqrt{ab}+\sqrt{c(a+b-c)}\geq\sqrt{ca}+\sqrt{b(c+a-b)}.$$

所以$S_c\geq S_b$, 由Schur不等式推论11.6.1即得. □

问题 7.1.6: APMO 2007

正实数x,y,z满足$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$. 证明:

$$\frac{x^2+yz}{x\sqrt{2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{y\sqrt{2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{z\sqrt{2(x+y)}}\geq 1.$$

解. 先用幂平均不等式证明$\sum_{cyc}\sqrt{x+y}\geq\sqrt{2}$, 原不等式等价于$\sum_{cyc}\frac{x^2+yz}{x\sqrt{y+z}}\geq\sum_{cyc}\sqrt{x+y}\geq\sqrt{2}$. 而不等式左边部分又等价于证明$\sum_{cyc}\frac{(x-y)(x-z)}{x\sqrt{y+z}}\geq 0$. 当$x\geq y\geq z$时, 有$y\sqrt{x+z}\geq z\sqrt{x+y}$, 利用Schur不等式推论11.6.1即得. □

问题 7.1.7

设a,b,c为正实数, 证明:

$$\frac{a^2+2bc}{(b+c)^2}+\frac{b^2+2ac}{(a+c)^2}+\frac{c^2+2ab}{(a+b)^2}\geq\frac{9}{4}.$$

解. 原不等式等价于

$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)+(ab+bc+ca)}{(b+c)^2}\geq\frac{9}{4}.$$

即证

$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)^2}\geq 0,\quad \sum_{cyc}\frac{ab+bc+ca}{(b+c)^2}\geq\frac{9}{4}.$$

前者用Shur不等式, 后者是著名的Iran 96不等式. □

问题 7.1.8: Nguyen Van Thach

设a,b,c为正实数, 证明:

$$\sqrt{\frac{a^3+abc}{(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3+abc}{(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3+abc}{(a+b)^3}}\geq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

解. 注意到

$$\sqrt{\frac{a^3+abc}{(b+c)^3}}-\frac{a}{b+c}=\frac{\sqrt{a}(a-b)(a-c)}{(b+c)\sqrt{b+c}(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{a(b+c)})}.$$

所以原不等式等价于证明$\sum\limits_{cyc} S_a(a-b)(b-c)$, 其中

$$S_a=\frac{\sqrt{a}}{(b+c)\sqrt{b+c}(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{a(b+c)})}.$$

不妨设$a\ge b\ge c$, 则由$\sqrt{\frac{a}{b+c}}\ge\sqrt{\frac{b}{c+a}}$, $(b+c)\sqrt{a^2+bc}\le(a+c)\sqrt{b^2+ac}$, $(b+c)\sqrt{a(b+c)}\le(a+c)\sqrt{b(a+c)}$. 知$S_a\ge S_b$. 根据Shur不等式的推论11.6.1即得证明. □

问题 7.1.9

设a,b,c,k为正实数, 证明:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a+k}{b+k}+\frac{b+k}{c+k}+\frac{c+k}{a+k}.$$

解. 不妨设$c=\min(a,b,c)$, 并注意

$$LHS-3=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-1\right)=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)(b-c)}{ac}.$$

□

问题 7.1.10

设a,b,c为正实数, 若$k\ge\max(a^2,b^2,c^2)$, 证明:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a^2+k}{b^2+k}+\frac{b^2+k}{c^2+k}+\frac{c^2+k}{a^2+k}.$$

解. 同7.1.9不妨设$c=\min(a,b,c)$, 只需证:

$$\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)(b-c)}{ac}\ge\frac{(a-b)^2(a+b)^2}{(a^2+k)(b^2+k)}+\frac{(a-c)(b-c)(a+c)(b+c)}{(a^2+k)(c^2+k)}.$$

所以只需由$k\ge\max(a^2,b^2,c^2)$来证:

$$\begin{cases}(a^2+k)(b^2+k)\ge ab(a+b)^2\\(a^2+k)(c^2+k)\ge ac(a+c)(b+c).\end{cases}$$

不等式的弱化见7.1.11. □

问题 7.1.11

设a,b,c为正实数, 若$k\ge\max(ab,bc,ca)$, 证明:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a^2+k}{b^2+k}+\frac{b^2+k}{c^2+k}+\frac{c^2+k}{a^2+k}.$$

解. 证法同7.1.10, 但更弱. □

问题 7.1.12

设a,b,c为正实数, 证明:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{8(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\ge 11.$$

解. 由恒等式$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)(b-c)}{ac}$, 不妨设$c=\min(a,b,c)$. 原不等式可化为:

$$\frac{(a-b)^2(a+b)^2}{a^2b^2}+\frac{(c-a)(c-b)(c+a)(c+b)}{a^2c^2}-\frac{8(a-b)^2+8(c-a)(c-b)}{a^2+b^2+c^2}\geq 0.$$

易证$\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}\geq\frac{8}{a^2+b^2+c^2}$. 而

$$\frac{(c+a)(c+b)}{a^2c^2}\geq\frac{8}{a^2+b^2+c^2}\iff(a+c)(c+b)(a^2+b^2+c^2)\geq(a+c)2c(a^2+c^2)\geq 4c^2(a^2+c^2)$$

所以只需证$a\geq c$时最后的不等式. □

问题 7.1.13: 2006年CMO

实数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2}$, $a_{k+1}=-a_k+\frac{1}{2-a_k}$, $k\in\mathbb{N}$, 证明:

$$\left(\frac{n}{2\sum_{i=1}^n a_i}-1\right)^n\leq\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}\right)^n\prod_{i=1}^n\left(\frac{1}{a_i}-1\right).$$

解. 先用$y=-x+\frac{1}{2-x}$归纳证明$0<a_n\leq\frac{1}{2}$. 则原命题等价于证明:

$$\left(\frac{n}{\sum a_i}\right)^n\left(\frac{n}{2\sum a_i}-1\right)^n\leq\prod\left(\frac{1}{a_i}-1\right).$$

对函数$y=\ln\left(\frac{1}{x}-1\right)$用Jensen不等式, 有$\left(\frac{n}{\sum a_i}-1\right)^n\leq\prod\left(\frac{1}{a_i}-1\right)$. 另外, 用Cauchy不等式证

$$\sum_{i=1}^n(1-a_i)=\sum\frac{1}{a_i+a_{i+1}}-n\geq\frac{n^2}{2\sum a_i}-n,$$

所以

$$\frac{n}{\sum a_i}-1=\frac{\sum(1-a_i)}{\sum a_i}\geq\frac{1}{\sum a_i}\left(\frac{n^2}{2\sum a_i}-n\right).$$

□

7.2 Combinatorics

问题 7.2.1

证明

$$\left(\binom{m}{m}a_m+\binom{m+1}{m}a_{m+1}+\cdots+\binom{n}{m}a_n\right)^2\geq\left(\binom{m-1}{n-1}a_{m-1}+\binom{m}{m-1}a_m+\cdots+\binom{n}{m-1}a_n\right)$$
$$\cdot\left(\binom{m+1}{m+1}a_{m+1}+\binom{m+2}{m+1}a_{m+2}+\cdots+\binom{n}{m+1}a_n\right),$$

其中$a_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$, 且

$$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n,\quad 0<m<n,\quad m,n\in\mathbb{N}_+.$$

解. 若$\{a_n\}$是常数列, 只要证$\left(\sum_{i=m}^n\binom{i}{m}\right)^2\geq\sum_{k=m-1}^n\binom{k}{m-1}\sum_{k=m+1}^n\binom{k}{m+1}$, 这等价于证$\left(\binom{n+1}{m+1}\right)^2\geq\binom{n+1}{m}\binom{n+1}{m+2}\iff\frac{1}{(m+1)(n-m)}\geq\frac{1}{(n-m+1)(m+2)}\iff n+2\geq 0$, ...

设调整若干项相等, 即$a_1=\cdots=a_{i-1}=t$, $a_i=\cdots=a_n=k$, $(k>t)$, 则

$$\left(t\sum_{j=m}^{i-1}\binom{j}{m}+k\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{m}\right)^2\geq\left(t\sum_{j=m+1}^{i-1}\binom{j}{m+1}+k\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{m+1}\right)\left(t\sum_{j=m+1}^{i-1}\binom{j}{m-1}+k\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{m-1}\right)$$

$$\iff\left(t\binom{i}{m+1}+k\binom{n+1}{m+1}\right)^2\geq\left(t\binom{i}{m+2}+k\binom{n+1}{m+2}\right)\cdot\left(t\binom{i}{m}+k\binom{n+1}{m}\right)$$

$$\iff\left(\left(\binom{i}{m+1}\right)^2-\binom{i}{m+2}\binom{i}{m}\right)t^2-2tk\left[\binom{i}{m+1}\binom{n+1}{m+1}-\left(\binom{i}{m}\binom{n+1}{m+2}+\binom{i}{m+2}\binom{n+1}{m}\right)\right]$$
$$+\left[\left(\binom{n+1}{m+1}\right)^2-\binom{n+1}{m+2}\binom{n+1}{m}\right]k^2\geq 0.$$

因$\left(\binom{i}{m+1}\right)^2-\binom{i}{m+2}\binom{i}{m}\geq 0$, $\left(\binom{n+1}{m+1}\right)^2-\binom{n+1}{m+2}\binom{n+1}{m}\geq 0$, 但$\binom{i}{m+1}\binom{n+1}{m+1}-\left(\binom{i}{m}\binom{i}{m+2}+\binom{i}{m+2}\binom{n+1}{m}\right)$的符号不一定. □

7.3 Analysis

问题 7.3.1

求证积分形式的Holder不等式与Minkowski不等式.

$$\|x(t)y(t)\|_1\leq\|x(t)\|_p\cdot\|y(t)\|_q,$$

其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p>1$且$x\in L^p[a,b]$, $y\in L^q[a,b]$;

$$\|x\pm y\|_p\leq\|x\|_p+\|y\|_p,$$

其中$p\geq 1$, $x(t),y(t)\in L^p[a,b]$.

解. (1). 若$\|x(t)\|_p=0$或$\|y(t)\|_q=0$, 则$x(t)y(t)=0, a.e. x\in[a,b]$, 不等式显然. 否则令$A=\frac{|x(t)|}{\|x(t)\|_p}$, $B=\frac{|y(t)|}{\|y(t)\|_q}$. 由Young不等式$AB\leq\frac{A^p}{p}+\frac{B^q}{q}$, 两边积分即得.

(2). 若$p=1$, 则用绝对值的三角不等式. 若$p>1$,

$$\begin{aligned}\|x\pm y\|_p^p&\leq\||x\pm y|^{p-1}\cdot(|x|+|y|)\|_1=\||x|\cdot|x\pm y|^{p-1}\|_1+\||y|\cdot|x\pm y|^{p-1}\|_1\\&\leq\|x\|_p\cdot\||x\pm y|^{p-1}\|_q+\|y\|_p\cdot\||x\pm y|^{p-1}\|_q\\&=(\|x\|_p+\|y\|_p)\cdot\|x\pm y\|_{(p-1)q}^{p-1}=(\|x\|_p+\|y\|_p)\cdot\|x\pm y\|_p^{p-1}.\end{aligned}$$

即得. □

Chapter 8

神奇的反例

问题 8.0.1

试指出无限维欧式空间中正交变换不一定是满射变换. 从而不一定有逆变换.

解. 考虑$\mathbb{R}[x]$(内积为多项式对应系数乘积的和)中的

$$Tf(x) = xf(x).$$

□

问题 8.0.2

举例说明: $\lim_{x\to a}\phi(x) = A$, $\lim_{x\to A}\psi(x) = B$, 但$\lim_{x\to a}\psi(\phi(x)) \neq B$.

解.

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, (p, q \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1) \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \qquad \psi(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \qquad a = 0.$$

□

问题 8.0.3: http://math.stackexchange.com/questions/2190498

给出如下论断的反例.
存在$x_0 \in [a, b]$使函数项级数的和函数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$收敛到$f(x)$, 在$[a, b]$上$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$收敛到$g(x)$. 则$f' = g$

解. 定义$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$为

$$f_n(x) = n(n+1)(n+2)\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right).$$

则f_n在$[0, 1)$上点态收敛到0, 且$f_n(1) = n$. 其导数$f_n'(x) = n(n+1)(n+2)x^n(1-x)$, 在$[0, 1]$上逐点收敛到0. □

问题 8.0.4: http://math.stackexchange.com/questions/294383

给出一个积分号下不能求导的例子.

解. 令$F(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-sx}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$, 则

$$F''(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-sx}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\psi'\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s\right) - \frac{1}{2s}$$

积分一次, $F'(s)$的常数项不能确定是有限值, 且积分两次后的特解使$F(0) = \frac{\log \pi}{2}$与正确的$F(0) = -\frac{\log 2}{2}$不同. □

问题 8.0.5: http://math.stackexchange.com/questions/494145

给出一个不能逐项求导的收敛级数.

解. 定义$u_k(x)$为

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

则$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = 0$. 若逐项求导则有

$$\sum_{k=1}^{n} u_k'(x) = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

其和在$x=0$处发散 $\square$

Chapter 9

未知的问题与解答

未知 9.0.1

证明: 对于任意的自然数n,
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i(i+1)(i+2)(i+3)}}{i^2(i+1)^2}<2.$$

解. 第一项保留, 第二项放缩为$k\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$. 其中$k$是某个带根号的数. □

解.
$$\frac{\sqrt{(n+2)(n+3)}}{n(n+1)\sqrt{n^2+n}}<\frac{n+7/2}{\left(n-\frac{1}{4}\right)\left(n+\frac{3}{4}\right)\left(n+\frac{7}{4}\right)}$$
则有
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{(k+2)(k+3)}}{k(k+1)\sqrt{k^2+k}}<\frac{32n(n+2)}{(4n+3)(4n+7)}$$
□

未知 9.0.2

Use the method of Frobenius to obtain two linearly independent series solutions about the regular singular point $x=0$. Write out the solution in open form for at least 7 terms.
$$2xy''-y'+2y=0.$$

未知 9.0.3: 2014-05-25

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i}{k}\right)^2\le(1+\sqrt{2})^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

解.
$$A=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}\end{pmatrix}$$
证明$\|A\|_2\le\sqrt{2}+1$. □

未知 9.0.4: 2014-05-24

设p_n是第n个素数; $a_n=\sum_{i=1}^n p_i$. 则$[a_n,a_{n+1}]$中至少有一个平方数.

未知 9.0.5: 2015-05-23

对于任意的拓扑空间X, $\mathbb{R}$与$X\times X$不同胚.

未知 9.0.6: 2015-05-23

平方和因子定理.
$(a,b)=1$, 则素数$p=4k+3\nmid(a^2+b^2)$.

未知 9.0.7: 2014-05-23

$$\left\{\begin{array}{l} a,b\notin\mathbb{Z};\\ \mathrm{Re}(c+d-a-b)>1. \end{array}\right. \implies \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(d+n)}=\frac{\pi^2}{\sin(\pi a)\sin(\pi b)}\cdot\frac{\Gamma(c+d-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)\Gamma(c-b)\Gamma(d-b)}.$$

未知 9.0.8: Enestrom-Kakeya定理

$$\left.\begin{array}{l} a_0\ge a_1\ge\cdots\ge a_n>0,\\ p(z):=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0 \end{array}\right\}\implies p=0\text{的根在开单位圆外}.$$

解. 对$(1-z)p(z)$用反证法/直接证明. □

未知 9.0.9: 2014-05-21

$$\left.\begin{array}{l} a_n>0\\ b_n>0 \end{array}\right\}\implies \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n(a_i+b_i)}\ge\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n b_i}.$$

未知 9.0.10: 2014-05-21

$$\begin{array}{l} \lim_{\beta\to\infty}F\left(1,\beta,1;\frac{z}{\beta}\right)=\mathrm{e}^z;\\ \lim_{\alpha\to\infty}F\left(\alpha,\alpha,\frac{1}{2};\frac{z^2}{4\alpha^2}\right);\\ F\left(\frac{n}{2},-\frac{n}{2},\frac{1}{2};\sin^2x\right)=\cos nx. \end{array}$$

未知 9.0.11: 2014-05-21

$$\left.\begin{array}{l} x_0\in(a,b).\\ \text{迭代公式}f_1(x_n)=f_2(x_{n-1})\\ f_1(\xi)=f_2(\xi)\\ \left|\frac{f_2'(y)}{f_1'(x)}\right|\le q<1,(a<x,y<b) \end{array}\right\}\implies x_n\to\xi,n\to\infty.$$

未知 9.0.12: 2014-05-20

$\forall n$, $a_n>0$,$\sum_{i=1}^n a_i\ge\sqrt{n}$, 则$\forall n$,

$$\sum_{i=1}^n a_i^2>\frac{1}{4}\sum_{j=1}^n\frac{1}{j}.$$

未知 9.0.13: 2014-05-20

关于x的方程$x^2 - 2\arcsin(\cos x) + a^2 = 0$有唯一解, 求$a$.

未知 9.0.14: 2014-05-19

$$\left.\begin{array}{l} f\text{定义域:}\mathbb{R} \\ f^2(x) \leq 2x^2 f\left(\frac{x}{2}\right) \\ A = \{a \mid f(a) > a^2\} \neq \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow A\text{是无限集.}$$

未知 9.0.15: 2014-05-18

$$\left.\begin{array}{l} M_1 = \{x^2 + Ax + B \mid x \in \mathbb{Z}\} \\ M_2 = \{2x^2 + 2x + C \mid x \in \mathbb{Z}\} \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall A, B \in \mathbb{Z},\ \exists C \in \mathbb{Z} \ni M_1 \cap M_2 = \emptyset.$$

未知 9.0.16: 2014-05-18

$$(0,1) \not\subseteq \bigcup_{\frac{p}{q} \in (0,1)\cap\mathbb{Q}} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{4q^2}, \frac{p}{q} + \frac{1}{4q^2}\right).$$

未知 9.0.17

设数列$\{x_n\}$满足条件

$$0 \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n \quad (m, n \in \mathbb{N}_+),$$

证明: $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$存在.

未知 9.0.18

设$x_n \geq 0$且$y_n \geq 0$, $(n \in \mathbb{N}_+)$, 证明: (在以下各极限均存在的情况下)

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \cdot \liminf_{n\to\infty} y_n \leq \liminf_{n\to\infty}(x_n y_n) \leq \liminf_{n\to\infty} x_n \cdot \limsup_{n\to\infty} y_n \leq \limsup_{n\to\infty}(x_n y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \cdot \limsup_{n\to\infty} y_n$$

未知 9.0.19

已知$x, y, z \in \mathbb{R}$, 且$x + y + z = 0$.

1. 求证:
$$6(x^3 + y^3 + z^3)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^3.$$
2. 求最佳常数λ, μ, 使得:
$$\lambda(x^6 + y^6 + z^6) \leq (x^2 + y^2 + z^2)^3 \leq \mu(x^6 + y^6 + z^6).$$

未知 9.0.20

证明对于任意的$x > -1$, 有$\mathrm{e}^x - \ln(x+1) - 2x > 0$

解. 先证$1 + \frac{x}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12}} - \ln(1+x) - 2x > 0$. □

解. 用 Taylor 公式. □

未知 9.0.21

证明: $\nabla \times \nabla \times A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$.

未知 9.0.22: 印度, 巴斯卡拉

当$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$时, 有$\sin x \approx \frac{16x(\pi - x)}{5\pi^2 - 4x(\pi - x)}$.

未知 9.0.23: 柏拉图体, 正多面体

未知 9.0.24: 阿基米德体, 半正多面体

未知 9.0.25

置换$P(\nu)$的循环结构为$(\nu) = (1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \cdots m^{\nu_m})$, 在$S_n$群中属于与$P(\nu)$共轭的置换数目为

$$N(P) = \frac{n!}{\prod_i (i^{\nu_i} \nu_i!)}$$

未知 9.0.26

正整数列(v_i)满足$\sum_i i v_i = n$, 则$\prod_i i^{v_i} v_i! \mid n!$

未知 9.0.27

设$f(x) \in C[0, +\infty)$, 且对任何非负实数a, 有

$$\lim_{x \to \infty} (f(x+a) - f(x)) = 0.$$

证明: 存在$g(x) \in C[0, +\infty)$和$h(x) \in C^1[0, +\infty)$, 使得: $f(x) = g(x) + h(x)$, 且满足

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} h'(x) = 0.$$

未知 9.0.28

设p是奇素数, 将$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}$写成最简分数$A_p/B_p$.

(a) 求$A_p \pmod p$的值.

(b) 给出$A_p \pmod{p^2}$的值.

未知 9.0.29

设m是正整数, $a_1, a_2, \cdots, a_{\phi(m)}$是1与$m$之间且与$m$互素的整数, 记

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{\phi(m)}}$$

的最简分数为A_m/B_m.

(a) 求$A_m \pmod m$的值.

(b) 求$A_m \pmod{m^2}$的值.

未知 9.0.30: Hardy-Ramanujan asymptotic

整数n的分划函数$p(n)$有如下渐近公式

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \mathrm{e}^{\pi\sqrt{2n/3}}.$$

未知 9.0.31: Fubini's Theorem

未知 9.0.32: Tonelli's Theorem

未知 9.0.33: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设函数$f(x,y)$在闭圆域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2, R>0\}$上有连续偏导数, 而且$f\left(\frac{R}{2},0\right)=f\left(0,\frac{R}{2}\right)$. 证明: 在$D$的内部至少存在两点$(x_1,y_1)$和$(x_2,y_2)$, 使

$$x_i f_y'(x_i,y_i) - y_i f_x'(x_i,y_i) = 0, i=1,2.$$

未知 9.0.34: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设在$[a,b]$上, $f''(x)\ne 0$, $f(a)=f(b)=0$, 且有$x_0\in(a,b)$, 使$y_0=f(x_0)>0$, $f'(x_0)=0$. 证明:

(1) 存在$x_1\in(a,x_0)$及$x_2\in(x_0,b)$, 使$f(x_1)=f(x_2)=\frac{y_0}{2}$;

(2) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < y_0(x_2-x_1)$.

未知 9.0.35

已知对于任意的$a_1,a_2,\cdots,a_n\in[p,q]$, $p>0$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \le n^2 + \frac{k(p-q)^2}{4pq},$$

其中,

$$k=\begin{cases} n^2-1, & n \text{ 是奇数;} \\ n^2, & n \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

未知 9.0.36: http://math.stackexchange.com/questions/66473

a Fourier series $\sum c_n \mathrm{e}^{2\pi i n x}$ to be k-fold termwise differentiable is for the Fourier coefficients to be "appropriately small" in the following sense: if

$$\sum |c_n|\cdot|n|^k < \infty$$

holds for some k, then then function represented by the Fourier series will be k-times differentiable, and will be differentiable termwise. If this holds for all k, then the function is smooth.

未知 9.0.37: http://math.stackexchange.com/questions/1992808

已知$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$存在有限,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)$$

能否逐项求导?

未知 9.0.38: http://math.stackexchange.com/questions/420878

John B. Conway's 'Function of one complex variable', Proposition 2.5.

未知 9.0.39: http://math.stackexchange.com/questions/1922228

定理 9.0.1

f_n在区域D上序列解析(sequence analytic), 若f_n在D的任一紧子集上一致收敛, 则f_n在D上解析

于是

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

在$\mathbb{C}$上解析.

推论 9.0.1

若幂级数在z_0为圆心, R为半径的圆盘上收敛, 则幂级数在其收敛域内的任一子集上一致收敛.

定理 9.0.2

f_n是区域D上的序列, 若$\sum f_n$在D上收敛, 且在D内任一紧子集上一致收敛, 则$\sum f_n$在D上解析且可逐项求导.

未知 9.0.40: http://math.stackexchange.com/questions/294383

求$\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

解. 重积分法, 利用Laplace变换: $\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x^2}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty t\int_0^\infty\frac{2x\mathrm{e}^{-x}-1+\mathrm{e}^{-2x}}{1-\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty t\int_0^\infty(2x\mathrm{e}^{-x}-1+\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{e}^{-xt}\sum_{n=0}^\infty\mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty t\sum_{n=1}^\infty\left(-\frac{1}{2n+t}+\frac{2}{(2n+t+1)^2}+\frac{1}{2n+t+2}\right)\mathrm{d}t+\log 2-1\\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{2n}{2n+t}+\frac{2t}{(2n+t+1)^2}-\frac{2(n+1)}{2n+t+2}\right)\mathrm{d}t+\log 2-1\\
&= \log 2-1-\sum_{n=1}^\infty\left(1+n\ln n+\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)-(n+1)\ln(n+1)\right)=-\frac{1}{2}\ln 2.
\end{aligned}$$

另外留数法见6.0.1. □

未知 9.0.41

对于任意给定的正奇数n, 对于任意正有理数r, 都存在正整数a,b,c,d满足$r=\frac{a^n+b^n}{c^n+d^n}$. 强化版见??.

未知 9.0.42

一个自然数N可以写成两个整数的平方和当且仅当N的素因子分解中每个可以写成$4n-1$的素数出现次数为偶数.

解. 抽象代数有证明, 主要工具是环理论. □

未知 9.0.43

Fermat数$F_n=2^{2^n}+1$, $n\geq 5$时是否有素数? 未发现素数.
1801年Gauss证明: 正N边形可尺规作图当且仅当$N=2^e p_1\cdots p_s$, p_i是Fermat素数.

未知 9.0.44

设a,b为正整数且$(a,b)=1$. 证明对于给定的$n>ab-a-b$, 方程$ax+by=n$有非负整数解, 且$n=ab-a-b$时没有非负整数解.

未知 9.0.45: http://math.stackexchange.com/questions/428663/closed-form-of-sum-limits-i-1n-k1-i-or-asymptotic-equivalent-when-n-to#

$$\sum_{i=1}^{n} k^{\frac{1}{i}} = n+\ln(k)\ln(n)+\gamma\ln(k)+\sum_{r=2}^{\infty}\frac{\zeta(r)\ln(k)^r}{r!}+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

未知 9.0.46: http://tieba.baidu.com/p/4819379251

求所有符合条件的x,y,z.

$$x+y+z=x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3.$$

未知 9.0.47: 陈计的不等式

设$x,y,z\in\mathbb{R}^+$. 求证:

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right)\geq\frac{9}{4}.$$

解. 因为

$$\begin{aligned}&4\sum_{cyc}yz\left(\sum_{cyc}(x+y)^2(z+x)^2\right)-9\prod_{cyc}(y+z)^2\\&=\sum_{cyc}yz(y-z)^2(4y^2+7yz+4z^2)+\frac{xyz}{x+y+z}\sum_{cyc}(y-z)^2(2yz+(y+z-x)^2)\geq 0.\end{aligned}$$

□

未知 9.0.48: http://tieba.baidu.com/p/4005256822 18届东令营第3题 2003CMO3

设$x_i\in\mathbb{R}^+(i=1,2,\cdots,n)$且$x_1x_2\cdots x_n=1$, n给定$(n\geq 1)$. 求最小正数λ使得

$$\lambda\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+2x_i}}$$

恒成立.

未知 9.0.49: http://tieba.baidu.com/p/4811340691

设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是正实数, 求证:

$$x_1^3+\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^3\le\frac{27}{8}(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3).$$

解. 由Holder不等式$(a_i,b_i,c_i\ge 0)$

$$(a_1^3+\cdots+a_n^3)(b_1^3+\cdots+b_n^3)(c_1^3+\cdots+c_n^3)\ge(a_1b_1c_1+\cdots+a_nb_nc_n)^3$$

得

$$\left(\sum_{j=1}^{k}\left(j-\frac{1}{2}\right)^{2/3}x_j^3\right)\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\left(j-\frac{1}{2}\right)^{1/3}}\right)^2\ge\left(\sum_{j=1}^{k}x_j\right)^3.$$

两边同时除以k^3, 求和有

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}\right)^3\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{1/3}}\right)^2\left(\sum_{j=1}^{k}\left(j-\frac{1}{2}\right)^{2/3}x_j^3\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}\left(j-\frac{1}{2}\right)^{2/3}x_j^3\frac{1}{k^3}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{1/3}}\right)^2$$

由于

$$\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k^3}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{1/3}}\right)^2<\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k^3}\left(\int_0^k\frac{1}{x^{1/3}}\,\mathrm{d}x\right)^2=\sum_{k=j}^{n}\frac{9}{4k^{5/3}}<\int_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\frac{9}{4x^{5/3}}\,\mathrm{d}x<\frac{27}{8\left(j-\frac{1}{2}\right)^{2/3}}.$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}\right)^3<\frac{27}{8}\sum_{k=1}^{n}x_j^3$$

□

未知 9.0.50: http://tieba.baidu.com/p/4740384715

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{5}}}{1+\frac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{1+\frac{\mathrm{e}^{-4\pi}}{1+\frac{\mathrm{e}^{-6\pi}}{1+\cdots}}}}.$$

未知 9.0.51

设a,b,c是三角形的三边长, 证明:

$$4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge 9+\frac{a^2+c^2}{c^2+b^2}+\frac{c^2+b^2}{b^2+a^2}+\frac{b^2+a^2}{a^2+c^2}.$$

未知 9.0.52: http://tieba.baidu.com/p/4850101496

1. 有界闭区间$[a,b]$上函数$f(x)$满足对任意$x,y\in[a,b]$, $\lambda\in(0,1)$都有$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$. 求证$f(x)$在$[a,b]$上有界.
2. 设$f(x)$在0附近有2阶连续导数, 且$f''(0)\ne 0$.
(1) 求证$|x|$充分小时, 对任意这样的x, 存在唯一$\theta\in(0,1)$使得$f(x)=f(0)+f'(\theta x)x$.
(2) 求$\lim\limits_{x\to 0}\theta$.

解. 2.(2) $f'(\theta x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$, 所以$\frac{f'(\theta x)-f'(0)}{x}=\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}$, 两边令$x\to 0$, 右侧用罗比达法则. $\lim\limits_{x\to 0}\theta=\frac{1}{2}$ □

未知 9.0.53: http://tieba.baidu.com/p/4849247837

已知关于x的方程$x^3-4x^2+6x+c=0$有三个实根r,s,t, 且

$$\frac{1}{r^2+s^2}+\frac{1}{s^2+t^2}+\frac{1}{t^2+r^2}=1,$$

求正数c的值.

未知 9.0.54: http://tieba.baidu.com/p/4850318851

试举出反例: 函数$f(x)$在$x=x_0$处可导与如下几个式子存在不等价:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h},\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0+h)}{h},\quad \lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x0)\right]$$

未知 9.0.55: http://tieba.baidu.com/p/4846868296

三角形ABC中, 求证:

$$\prod_{cyc}\cos A\le\frac{1}{8}\cot\frac{\pi^3}{27}\tan(ABC)\le\prod_{cyc}\sin\frac{A}{2}.$$

Chapter 10

拓扑

问题 10.0.1

证明: A'为闭集.

解. $(A')' \subset A'$, 从而A'为闭集. $\square$

问题 10.0.2

设$A \subset \mathbb{R}$, 求证:

(I) A°是A的最大开子集.

(II) A^-是含A的最小闭集.

解. (I). $\bigcup\{G : G$开且$G \subset A\} = E$, 因A°开且$A^\circ \subset A$, 所以$A^\circ \subset E$, 若$x \in E$, 则有G开, $x \in G \subset A$. 所以存在x的开邻域$U(x) \subset G \subset A$, 所以$x \in A^\circ$, 所以$E \subset A^\circ$, 于是$E = A^\circ$.

(II). $\bigcap\{F : F$闭且$F \supset A\} = E$. 因A^-闭且$A^- \supset A$, 所以$A^- \supset E$. 另外若F闭且$F \supset A$, 则$F = F^- \supset A^-$, 所以$A^- \subset E$, 于是$A^- = E$. $\square$

问题 10.0.3

G是$\mathbb{R}$中开集, $G \cap A = \emptyset$, 求证: $G \cap A^- = \emptyset$.

解. G^c闭且$A \subset G^c$, 所以$A^- \subset G^c$, 从而$G \cap A^- = \emptyset$. $\square$

问题 10.0.4

求证:

(I) $\mathbb{R}$中闭集必为可列开集的交.

(II) $\mathbb{R}$中开集闭为可列闭集的并.

解. (I). 设A闭于$\mathbb{R}$. $A_n = \bigcup_{x\in A} V_{\frac{1}{n}}(x)$, $(n = 1, 2, \cdots)$, 则$A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. 用反证法证$A \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 取$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $x_0 \notin A$. 由A闭. 存在n_0使得$V_{\frac{1}{n_0}}(x_0) \cap A = \emptyset$. 所以$x_0 \notin A_{n_0}$, 矛盾.

(II). 由(I), G开于$\mathbb{R}$, 则G^c闭于$\mathbb{R}$... $\square$

问题 10.0.5

$A \subset \mathbb{R}$, 求证: $A - A'$至多可列.

解. (好像有问题)由聚点定理, $x\in A-A'$等价于存在$\varepsilon_x>0$使得$A\cap(V_{\varepsilon_x}(x)-\{x\})=\emptyset$, 且当$x,y\in A-A'$, $x\neq y$时, 应有$V_{\varepsilon_x}(x)\cap V_{\varepsilon_y}(y)=\emptyset$. 反之亦是. 记

$$G=\{V_{\varepsilon_x}(x):x\in A-A'\},$$

则$G\sim A-A'$且G至多可列. □

问题 10.0.6

设开集族$\mathscr{F}=\{G:G为\mathbb{R}中开集\}$, 证明: 存在$\{G_\lambda\}_{\lambda=1}^{\infty}\subset\mathscr{F}$且有

$$\cup\{G\in\mathscr{F}\}=\cup\{G_\lambda:\lambda\in\mathbb{N}_+\}$$

解. 证明同4.0.5. □

问题 10.0.7

证明:

(1) $\mathbb{R}$上闭区间$[a,b]$不能表成两不相交非空闭集的并集.

(2) $\mathbb{R}$上开区间(a,b)不能表成两不相交非空开集的并集.

解. (1). 反证. $[a,b]=F_1\cup F_2$, $F_1\cap F_2=\emptyset$, F_1,F_2非空, 则$\exists x_1\in F_1$, $x_2\in F_2$, 使得$|x_1-x_2|=d(F_1,F_2)>0$, 取$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)\in[a,b]$, 不妨$x\in F_1$, 则$d(F_1,F_2)\le|x-x_2|=\frac{1}{2}d(F_1,F_2)$, 矛盾.

(2). 反证. $(a,b)=G_1\cup G_2$, G_1,G_2非空开, $G_1\cap G_2=\emptyset$, 取$a_1\in G_1$, $b_1\in G_2$, $a_1<b_1$, 作$F_1=[a_1,b_1]-G_1$, $F_2=[a_1,b_1]-G_2$, 则F_1,F_2非空闭, 且$F_1\cup F_2=[a_1,b_1]$, $F_1\cap F_2=\emptyset$, 与(1)矛盾. □

问题 10.0.8

设(X,ρ)是度量空间, 映射$T:X\to X$满足$\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)(\forall x\neq y)$并已知$T$有不动点. 求证不动点唯一.

问题 10.0.9

设T是度量空间上的压缩映射, 求证T是连续的.

问题 10.0.10

$X=[0,1)\subset\mathbb{R}$, $\mathscr{T}=\{\emptyset\}\cup\{[0,\alpha):0<\alpha\le1\}$, 求证: $(X,\mathscr{T})$是拓扑空间.

问题 10.0.11

设$\mathscr{C}$是X的一个子集类, 记

$$\chi_c=\cap\{\chi:\mathscr{C}\subset\chi,\chi是X的拓扑\}.$$

求证: χ_c是X的拓扑, 且它是使$\mathscr{C}$中成员都成为开集的X的最弱拓扑.

问题 10.0.12

设$A\subset(X,\chi)$, 求证: A°是开集, 且是包含于A的最大开集; A^-是闭集且是包含A的最小闭集.

问题 10.0.13

$A,B\subset(X,\chi)$, 求证: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

解. 用$A\subset B$得$\overline{A}\subset\overline{B}$, 证$\overline{A\cup B}\supset\overline{A}\cup\overline{B}$, 另一方面, $\overline{A},\overline{B}$均是闭集, $\overline{A}\cup\overline{B}$闭, 所以$A\cup B\subset\overline{A}\cup\overline{B}$, 从而$\overline{A\cup B}\subset\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$. □

解. 用$(A\cup B)'=A'\cup B'$. □

问题 10.0.14

求证: Hausdorff空间中任一单点集闭.

解. $(X,\mathscr{X})$是Hausdorff空间, $x_0\in X$, $\forall x(\in X)\neq x_0$, G_x为x的不含x_0的开邻域, 则$\{x_0\}^c=\cup_{x\neq x_0}G_x$. □

解. 由分离性, $\forall x(\in X)\neq x_0$, $x\notin\{x_0\}'$, 所以$\overline{\{x_0\}}=\{x_0\}$. □

问题 10.0.15

求证: $(X,\mathscr{X})$是Hausdorff空间的充要条件是X的任一单点集$\{x\}$是x的全体邻域的交.

解. 必要性用10.0.14, 由$\bigcap_{G\in\mathscr{X}}G\subset\bigcap_{G\in\mathscr{X}}\overline{G}$, 所以$\forall x\in X$, x的一切闭邻域的交也是$\{x\}$, $\forall y(\neq x)\in X$, 有x的闭邻域$V(x)$, $y\notin V(x)$, 即$y\in V^c(x)$, 于是有x的邻域$V(x)$及y的邻域$V^c(x)$使$V(x)\cap V^c(x)=\emptyset$, 从而$(X,\mathscr{X})$是Hausdorff空间. □

问题 10.0.16

求证: Hausdorff空间中的子集A的导集A'必是闭集.

解. 若$x_0\in(A')'$, 则x_0的任何开邻域$V(x_0)$有$y\in A'\cap(V(x_0)-\{x_0\})\neq\emptyset$. 由分离性及$V(x_0)$开, 存在$y$的邻域$G_y$使$y\in G_y\subset V(x_0)-\{x_0\}$, 而$\emptyset\neq A\cap(G_y-\{y\})\subset A\cap(V(x_0)-\{x_0\})$, 即$x_0\in A'$. □

解. 若$x_0\notin A'$, 则有x_0开邻域$V(x_0)$使$A\cap(V(x_0)-\{x_0\})=\emptyset$. 由$\{x_0\}$闭和空间分离性10.0.14, 知$V(x_0)-\{x_0\}$开, 从而$\forall x\in V(x_0)-\{x_0\}$, $x\notin A'$, 所以$V(x_0)\cap A'=\emptyset$, 从而A'^c开. □

问题 10.0.17

X,Y都是拓扑空间, $F:X\to Y$, 求证: F连续的充要条件是$\forall A\subset X$有$F(\overline{A})\subset\overline{F(A)}$.

解. 必要性: 用$A\subset F^{-1}(F(A))\subset F^{-1}(\overline{F(A)})$闭.
充分性: B在Y中闭, 由$F(F^{-1}(B))\subset B$, 所以

$$F(\overline{F^{-1}(B)})\subset\overline{F(F^{-1}(B))}\subset B\Longrightarrow\overline{F^{-1}(B)}\subset F^{-1}(B)\text{闭}.$$

即得. □

问题 10.0.18

X,Y都是拓扑空间, $F:X\to Y$, 求证: F连续的充要条件是$\forall B\subset Y$有$\overline{F^{-1}(B)}\subset F^{-1}(\overline{B})$.

解. 只证充分性, Y中闭集B, 有$\overline{F^{-1}(B)}\subset F^{-1}(B)$, 即闭集原像闭, 故$F$连续. □

问题 10.0.19

$\mathscr{X},\mathscr{Y}$是X上两个拓扑, 且$\mathscr{X}\subset\mathscr{Y}$, 求证: 若$A$在$(X,\mathscr{X})$中闭, 则$A$在$(X,\mathscr{Y})$中闭, 即弱闭集必为强闭集.

问题 10.0.20

设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 为 X 上的两个拓扑, 求证: $\mathscr{Y}\subset\mathscr{X}$ 的充要条件是恒等映射 $I:(X,\mathscr{X})\to(X,\mathscr{Y})$连续.

问题 10.0.21

若 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 X 上两个拓扑, 且 $\mathscr{X}\subset\mathscr{Y}$, 求证: 若 A 为 $(X,\mathscr{Y})$ 中紧集, 则 A 必为 $(X,\mathscr{X})$ 中紧集, 即强紧集必为紧集.

问题 10.0.22

设 $X=A\cup B$ 且 A,B 闭于 $(X,\mathscr{X})$, 若 $f:A\to(Y,\mathscr{Y})$ 与 $g:B\to(Y,\mathscr{Y})$ 都连续, 且 $f|_{A\cap B}=g|_{A\cap B}$, 求证 f,g 是同一连续映射 $h:(X,\mathscr{X})\to(Y,\mathscr{Y})$ 在 A,B 上的限制.

解. 令 $h:X\to Y$,

$$h(x)=\begin{cases}f(x), & x\in A\\ g(x), & x\in A^c\end{cases}$$

所以只需证 h 连续, 即证 $\forall D\subset X$ 有 $h(\overline{D})\subset\overline{h(D)}$. 因

$$\begin{aligned}h(\overline{D})&=h(\overline{(D\cap A)\cup(D\cap B)})=h((\overline{D\cap A})\cup(\overline{D\cap B}))\\&\subset f(\overline{D\cap A})\cup g(\overline{D\cap B})\subset\overline{f(D\cap A)}\cup\overline{g(D\cap B)}\\&=\overline{f(D\cap A)\cup g(D\cap B)}=\overline{h(D\cap A)\cup h(D\cap B)}\\&=\overline{h((D\cap A)\cup(D\cap B))}=\overline{h(D)}\end{aligned}$$

即得.

同样, 把 A,B 改成都为 X 中开集, 命题仍成立. 反之, 若 A,B 都不是闭(或开)集, 有如下反例 $X=Y=\mathbb{R}$且赋予普通拓扑. 设$A=\mathbb{Q}$, $B=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $f(x)=0,\forall x\in A$, $g(x)=1,\forall x\in B$. □

问题 10.0.23

定义 $F:(X,\mathscr{X})\to(Y,\mathscr{Y})$, 若$\forall G\in\mathscr{X}$, $F(G)\in\mathscr{Y}$, 称 F 为开映射. 求证:

(1) $F:(X,\mathscr{X})\to(Y,\mathscr{Y})$为开映射的充要条件是$\forall x\in X$对任一$x$的邻域$V(x)$都有$F(V(x))$为$F(x)$的邻域.

(2) 可逆映射F是同胚映射的充要条件是F是连续开映射.

解. 只证(1)的充分性. $\forall x\in G$, 则$F(G)$为$F(x)$的邻域, 因而有开集$V_x\in\mathscr{Y}$, 使$F(x)\in V_x\subset F(G)$. 于是$F(G)=\bigcup_{x\in G}V_x$开于Y. □

问题 10.0.24

设$(X,\mathscr{X})$, $(Y,\mathscr{Y})$都是Hausdorff空间, $F:X\to Y$是可逆开映射, 求证:

(1) 若$(y_n)\subset Y$且$\lim_{n\to\infty}y_n=y\in Y$, 则$\lim_{n\to\infty}F^{-1}(y_n)=F^{-1}(y)$.

(2) B在$(Y,\mathscr{Y})$中紧, 则$F^{-1}(B)$在$(X,\mathscr{X})$中紧.

问题 10.0.25

设 $(X,\mathscr{X})$是Hausdorff空间, A 在 X 中紧, 求证:

(1) A 在 X 中闭.

(2) A 的闭子集 B 紧.

(3) 一族紧集的交仍紧.

(4) 有限紧集的并仍紧.

解. (1). $\forall x \notin A$, 由分离性, $\forall y \in A$, 有$x \in V_y(x)$, $y \in V_y$ 使 $V_y \cap V_y(x) = \emptyset$. $A \subset \bigcup_{y\in A} V_y$ 有有限子覆盖 $\mathscr{F}$, $A \subset \bigcup_{y\in\mathscr{F}} V_y$, 从而$\bigcup_{y\in\mathscr{F}} V_y(x)$是$X$在$A^c$中的开邻域.

(2). 由(1)知A闭, 所以B闭于X, B^c和B的开覆盖组成A的开覆盖.

(3). 紧集在Hausdorff空间中闭, 然后用(2).

(4). 同(3), 有限紧集的并是闭集. □

问题 10.0.26

求证: 紧空间 $(X, \mathscr{X})$ 中任一无限子集 A 必有聚点, 即 A 无限必 $A' \neq \emptyset$.

解. 反证 $A' = \emptyset$, $\forall x \in X$, 有 $V(x)$ 使 $A \cap (V(x) = \{x\}) = \emptyset$. $\{V(x) : x \in X\}$ 是 X 的开覆盖, 有有限子覆盖 $\mathscr{F}$ 使 $\bigcup_{x\in\mathscr{F}} V(x) \supset X$. 而 $\bigcup_{x\in\mathscr{F}} (V(x) - \{x\}) \cap A = \emptyset$, 所以 A 有限. □

问题 10.0.27

若紧空间 $(X, \mathscr{X})$ 中点列 $\{x_n\}$ 只有唯一聚点 x, 且对于任意的$i \neq j$, $x_i \neq x_j$, 求证: $\{x_n\}$必收敛于 x.

解. 只需证 $(A \cap V(x))^c_A$是有限集, 其中$A = \{x_n\}$, 由问题10.0.26及反证法. $(A \cap V(x))^c_A$无限必有异于 x 的聚点, 故矛盾. □

问题 10.0.28

设 $\mathscr{B}$ 是 X 的一族子集, $\widetilde{\mathscr{B}}$是由$\emptyset$及$\mathscr{B}$的成员可能作出的一切并集组成的子集类, 求证: $\widetilde{\mathscr{B}}$为X的拓扑的充要条件是$\mathscr{B}$满足:

(1) $X = \bigcup\limits_{B\in\mathscr{B}} B$.

(2) $\forall B_1, B_2 \in \mathscr{B}$及$\forall x \in B_1 \cap B_2$, 必有$B_3 \in \mathscr{B}$使得$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

问题 10.0.29

设$\mathscr{B}$为$(X, \mathscr{X})$中一个子集类, $\mathscr{B}$是X的一族子集, $\widetilde{\mathscr{B}}$是$\emptyset$及$\mathscr{B}$的成员可能做出的一切并组成的集类, 求证: $\widetilde{\mathscr{B}} = \mathscr{X}$的充分必要条件是$\mathscr{B}$满足

(1) $\forall A \in \mathscr{X}$及$\forall a \in A$, $\exists B \in \mathscr{B}$, 使得 $a \in B \subset A$.

(2) $\forall B \in \mathscr{B}$及$\forall b \in B$, $\exists A \in \mathscr{X}$, 使得 $b \in A \subset B$.

解. 必要性: (1)等价于$\mathscr{X} \subset \widetilde{\mathscr{B}}$, (2)等价于$\widetilde{\mathscr{B}} \subset \mathscr{X}$. □

问题 10.0.30

设$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$连续, 令$d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, $x, y \in \mathbb{R}$. 求证: d是$\mathbb{R}$上的度量的充要条件是f严格单调.

问题 10.0.31

设$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是单射, 则$d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, $x, y \in \mathbb{R}$为$\mathbb{R}$上度量, 反之亦然.

问题 10.0.32

设$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n |\xi_n - \eta_n|$, $x = \{\xi_n\}$, $y = \{\eta_n\} \in l^\infty$且$\mu_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$收敛. 求证: d也是l^∞上的度量.

解. 先证$d : l^\infty \times l^\infty \to \mathbb{R}$. □

问题 10.0.33

设(X,d)为度量空间, 令$\rho(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, 求证: (X,ρ)也是度量空间.

问题 10.0.34

设$f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$严格增, 且$f(0)=0$, $f(u+v)\le f(u)+f(v)$, $(u,v\in[0,+\infty))$. 求证: 当(X,d)为度量空间时, $\rho(x,y)=f(d(x,y))$也是X上的度量.

问题 10.0.35: Newton法

f是定义在$[a,b]$上的二次连续可微的实值函数, $\hat{x} \in (a,b)$, 使得$f(\hat{x}) = 0$, $f'(\hat{x}) \neq 0$. 求证存在$\hat{x}$的邻域$U(\hat{x})$, 使得$\forall x_0 \in U(\hat{x})$迭代序列

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n \in \mathbb{N})$$

是收敛的, 并且$\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$.

问题 10.0.36

试找出T^n是压缩映射, 但T不是压缩映射的反例.

问题 10.0.37

设M是$\mathbb{R}^n$中的有界闭集, 映射$T: M \to M$满足

$$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y) \quad (\forall x, y \in M, x \neq y).$$

求证T在M中存在唯一不动点. 并举反例说明M的有界闭不能省去.

问题 10.0.38

对于积分方程$x(t) - \lambda \int_0^1 \mathrm{e}^{t-s} \, \mathrm{d}s = y(t)$为一给定函数, λ为常数, $|\lambda| < 1$, 求证存在唯一解$x(t) \in [0, 1]$.

问题 10.0.39

设S为一切复数列$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots)$组成的集合, 在$S$中定义距离为

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|},$$

其中$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots)$. 求证: S为一个完备的距离空间.

问题 10.0.40

记F是只有有限项不为零的实数列全体, 在F上引进距离

$$\rho(x,y)=\sup_{k\geq 1}|\xi_k-\eta_k|,$$

其中$x=\{\xi_k\}$, $y=\{\eta_k\}\in F$. 求证(F,ρ)不完备, 并指出它的完备化空间.

问题 10.0.41

设M是$C[a,b]$中的有界集, 求证集合

$$\widetilde{M} = \left\{ F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t | f \in M \right\}$$

是列紧集.

问题 10.0.42

求证$\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$在$C[0,\pi]$中不是列紧的.

问题 10.0.43

空间S中集合A的列紧性条件. A在S中是列紧的, 当且仅当对于任何$n \in \mathbb{N}$, $\exists C_n > 0$, 使得对于任意的$\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in A$的点的第$n$个坐标的数集是有界的, 即$|\xi_n| \le C_n (n \in \mathbb{N}_+)$.

问题 10.0.44

设(X,ρ)是距离空间, M是X中的列紧集, 若映射$T: X \to M$满足

$$\rho(Tx,Ty) < \rho(x,y) \quad (\forall x,y \in X, x \neq y),$$

求证T在X上存在唯一的不动点.

问题 10.0.45

设(M,ρ)是一个紧距离空间, 又$E\subset C(M)$, E中函数一致有界并满足:

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leq c\rho(t_1,t_2)^{\alpha}$$

其中$x\in E$, $t_1,t_2\in M$, 其中$0<\alpha\leq 1$, $c>0$, 求证E在$C(M)$中是列紧集.

问题 10.0.46

在$C^1[a,b]$中令

$$\|x\|_1=\left(\int_a^b (|x(t)|^2+|x'(t)|^2)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall x\in C^1[a,b]$$

(1) 求证$\|\cdot\|_1$是$C^1[a,b]$上的范数;

(2) $(C^1[a,b],\|\cdot\|_1)$是否完备?

Chapter 11

定理集

定理 11.0.1: 勾股定理

若$(\alpha, \beta) = 0$, 则
$$|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 .$$
进一步的, 若向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$两两正交, 则
$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m|^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_m|^2.$$

定理 11.0.2

若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$两两正交, 则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关.

定理 11.0.3: 标准正交基的存在性

在任何有限维欧式空间中, 都有标准正交基. 有限维欧式空间V中的任何非零正交向量组都可以扩充为V的一个正交基.

定理 11.0.4

两个有限维欧式空间同构的充要条件是它们的维数相同.
任何n维欧式空间都与欧式空间$\mathbb{R}^n$同构.

定理 11.0.5

若欧式空间V的子空间$V_1, V_2, \cdots, V_s$两两正交, 则它们的和是直和.
反之, 子空间的和为直和时, 子空间之间不一定正交.

定理 11.0.6

设W是欧式空间V的子空间. 则$W^\perp = \{\gamma \mid \gamma \in V, \gamma \perp W\}$是$V$的子空间; 当$W$是有限维时, $V = W \oplus W^\perp$, $(W^\perp)^\perp = W$.
V_1, V_2是欧式空间V(不一定有限维)的两个子空间. 证明:
$$(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \bigcap V_2^\perp.$$

定理 11.0.7

设T是n维欧式空间V的一个线性变换. 则T是正交变换的充要条件是, T把标准正交基变成标准正交基.

定理 11.0.8

设$s_1, s_2, \cdots, s_n$是n维欧式空间V的一个标准正交基, A是一个n阶实方阵, 且$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (s_1, s_2, \cdots, s_n)A$. 则$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$是标准正交基的充要条件是, A为正交方阵.

定理 11.0.9

设T是n维欧式空间V的一个线性变换. 则T是正交变换的充要条件是, T在标准正交基下的矩阵是正交矩阵.
有限维欧式空间V的正交变换有逆变换, 而且是V到V的同构映射.
其中充分性部分, 标准正交性的条件不可省去.

定理 11.0.10

实数域上有限维空间(不要求是欧式空间)的每一个线性变换, 都有一维或二维的不变子空间.

解. 证明分实特征根和复特征根两种情况, 复的情况对特征向量分离实虚部, 得到不变子空间的基. □

定理 11.0.11

设T是有限维欧式空间V的一个正交变换. 若子空间W对T不变, 则$W^{\perp}$对T也不变.
设T是有限维欧式空间V的一个正交变换, 则V可分解成对T不变的一维或二维子空间的直和.

定理 11.0.12

欧式空间中正交变换的特征值为± 1.
正交方阵的特征根的模为1.

定理 11.0.13

设T是二维欧式空间V的一个正交变换, 且无特征值, 则T在标准正交基下的矩阵具有形状

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

定理 11.0.14

设T是n维欧式空间V的一个正交变换, 则存在标准正交基, 使T在此基下的矩阵成下面形状:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & S_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & S_r \end{pmatrix}$$

其中

$$S_i = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, \cdots, r.$$

对于任何n阶正交方阵A, 都存在正交方阵U, 使$U^{-1}AU$为上面方阵的形式.

定理 11.0.15

设T是n维欧式空间V的一个线性变换. 则T是对称变换的充要条件是, T在标准正交基下的矩阵为对称方阵.

定理 11.0.16

实对称方阵的特征根全是实数.

定理 11.0.17

设T是n维欧式空间V的对称变换, 则T的属于不同特征值的特征向量相互正交.

定理 11.0.18

设T是n维欧式空间V的一个对称变换, W是对T不变的非零子空间, 则W中有关于T的特征向量.
如果α是它的一个特征向量, 则与α正交的全体向量是T的$n-1$维不变子空间.
对V的每个对称变换T, 都存在标准正交基, 使T在此基下的矩阵为对角矩阵.
对每个实对称方阵A, 都存在正交方阵U, 使$U^{-1}AU$为对角矩阵.
任何实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$$

都可经过正交线性代换$X=UY$化成

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

实对称方阵A是正定的充要条件是, A的特征根全是正的.

11.1 数学分析

定理 11.1.1: 关于有界, 无界的充分条件

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$存在, 则$\exists\delta>0$, 当$-\delta<x-x_0<0$时, $f(x)$有界; 对$x\to x_0^+$, $x\to x_0$有类似结论.
(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在, 则存在$X>0$, 当$|x|>X$时, $f(x)$有界. $x\to\pm\infty$有类似结论.
(3) $f(x)\in C[a,b]$, 则$f(x)$在$[a,b]$上有界.
(4) $f(x)$在集U上有最大(小)值, 则$f(x)$在U上有上(下)界.
(5) 有界函数间的和, 积运算封闭.
(6) $\lim\limits_{x\to\Box}f(x)=\infty$, 则$f(x)$在$\Box$的空心邻域内无界. $\Box$可为$x_0,x_0^-,x_0^+,\infty,\pm\infty$.

定理 11.1.2: Stolz定理

证明: 若

(a) $y_{n+1}>y_n(n\in\mathbb{N}_+)$;

(b) $\lim_{n\to\infty}y_n=+\infty$;

(c) $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$存在.

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

定理 11.1.3: Cauchy定理

若函数$f(x)$定义于区间$(a,+\infty)$, 并且在每一个有限区间(a,b)内是有界的, 则

(a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$;

(b) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^{1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}$, $(f(x)\geq C>0)$,

假定等是右端的极限都存在且可为$\pm\infty$.

问题: 对于上下极限是否仍有类似结论?.

定理 11.1.4

假设$f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, 每个在$[a,b]$上均可积, 且$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $n\to\infty$. 则$f(x)$可积, 且

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}x.$$

解. 类似3.5.55 □

定理 11.1.5: (一致收敛级数)逐项积分

$u_k:[a,b]\to\mathbb{R}$, 对每个$k\in\mathbb{N}_+$均可积, $\sum_{k=1}^\infty u_k(x)$在$[a,b]$上一致收敛. 则$f(x)=\sum_{k=1}^\infty u_k(x)$可积, 且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^\infty\int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

解. 让$S_n(x)=\sum_{k=1}^n u_k(x)$并用11.1.4 □

定理 11.1.6: 逐项微分

设$u_k:[a,b]\to\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}_+$, 每项均有连续导数(端点处单边可微), 若有:

(i) $\sum_{k=1}^\infty u_k(x_0)$在某些点$x_0\in[a,b]$收敛.

(ii) $\sum_{k=1}^\infty u_k'(x)$在$[a,b]$上一致收敛到$f(x)$.

则

(1) $\sum_{k=1}^\infty u_k(x)$在$[a,b]$上收敛且和函数$F(x)=\sum_{k=1}^\infty u_k(x)$在$[a,b]$上可微且$F'(x)=f(x)$.

(2) $\sum_{k=1}^\infty u_k(x)\rightrightarrows F(x)$.

解. (1). u_k'连续$(k\in\mathbb{N}_+)$, $\sum_{k=1}^\infty u_k'\rightrightarrows f$, 则$f\in C[a,b]$, 所以$f$在$[a,b]$上可积. 让$x\in[a,b]$, 对$u_k'$和$f$在区间$[x_0,x]$上使用11.1.5, (或$[x,x_0]$, 如果$x<x_0$), 则有

$$\sum_{k=1}^\infty\int_{x_0}^x u_k'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{x_0}^x f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n(u_k(x)-u_k(x_0)).$$

由假设(i), $\sum_{k=1}^\infty u_k(x_0)$收敛, 所以级数$F(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n u_k(x)$对任意$x\in[a,b]$均收敛, 所以$F:[a,b]\to\mathbb{R}$是良定义的, 于是$F(x)-F(x_0)=\int_{x_0}^x f(x)\,\mathrm{d}x$, 由$f$连续, 两边求导, 便有$F'(x)=f(x)$.

(2). Cauchy判别法, 取$\varepsilon>0$, 则$\exists N_1$使任意$n\geq m\geq N_1$有

$$\left|\sum_{k=m}^n u_k(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

存在N_2使任意$n \geq m \geq N_2$有

$$\left|\sum_{k=m}^{n} u_k'(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad x \in [a,b]$$

故可取$N = \max\{N_1, N_2\}$, $g(x) = \sum_{k=m}^{n} u_k(x)$, 则$g(x) - g(x_0) = g'(\xi)(x - x_0)$. 于是

$$|g(x)| \leq |g(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |g'(\xi)| \cdot |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

故由Cauchy判别法, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$一致收敛. □

定理 11.1.7: 求导与极限的交换

函数列$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_+$, 在$[a,b]$上连续可微, $f_n(x) \to f(x)$, $x \in [a,b]$. $f_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$, $x \in [a,b]$, 则f可微且$f'(x) = \varphi(x)$, 从而$f_n \rightrightarrows f$.

解. 取$u_1 = f_1$, $u_n = f_n - f_{n-1}$, $n > 1$, 并用11.1.6. □

11.2 微分方程

定理 11.2.1: 伯努力方程

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)y + q(x)y^n$, 其中$p(x)$, $q(x)$是所考虑区域上的连续函数, $n(\neq 0, 1)$是常数.

解.

(1) 当$n > 0$时, $y = 0$是方程的解.

(2) 当$y \neq 0$时, 两边同除以y^n, 令$z = y^{1-n}$, 即得一阶线性方程.

□

定理 11.2.2

设$y_1(x)$和$y_2(x)$是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关解, 齐次边值问题

$$\begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0; \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0; \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

存在非平凡解(即不恒等于零的解)当且仅当

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) & \alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) \\ \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) & \alpha_2 y_2'(b) + \beta_2 y_2'(b) \end{vmatrix} = 0$$

11.3 泛函分析

定理 11.3.1: Arzela-Ascoli定理

设$\{f_n\}$是$[0,1]$上一致有界, 等度连续函数族, 则存在某一子序列$\{f_{n(i)}\}$在$[0,1]$上一致收敛.

定理 11.3.2: Hahn-Banach, $\mathbb{R}-version$

设$\mathcal{X}$是定义在$\mathbb{R}$上的向量空间, $q:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$是拟半范数. 若给定线性子空间$\mathcal{Y}\subset\mathcal{X}$和其上的线性映射$\phi:\mathcal{Y}\to\mathbb{R}$, 使得

$$\phi(y)\le q(y),\forall y\in\mathcal{Y}.$$

则存在线性映射$\varphi:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$满足

(i) $\varphi\mid_{\mathcal{Y}}=\phi$;

(ii) $\varphi(x)\le q(x)$, $\forall x\in\mathcal{X}$.

解. 先证$\mathcal{X}/\mathcal{Y}=1$的情况. 即有$x_0\in\mathcal{X}$使得

$$\mathcal{X}=\{y+sx_0:y\in\mathcal{Y},s\in\mathbb{R}\}.$$

于是只需找到$\alpha\in\mathbb{R}$使得映射$\varphi(y+sx_0)=\phi(y)+s\alpha$, $\forall y\in\mathcal{Y}$, $s\in\mathbb{R}$满足条件(ii), 于是$s>0$时有

$$\alpha\le q(z+x_0)-\phi(z),\forall z\in\mathcal{Y},z=s^{-1}y,s>0$$

对于$s<0$时有

$$\alpha\ge\phi(w)-q(w-x_0),\forall w\in\mathcal{Y},w=t^{-1}y,s<0$$

然而$\phi(w)-q(w-x_0)\le q(z+x_0)-\phi(z)$, $\forall w,z\in\mathcal{Y}$恒成立. 然后用Zorn引理. □

未知 11.3.1: Hahn-Banach定理, $\mathbb{C}$-version

设$\mathcal{X}$是复数域$\mathbb{C}$上的向量空间, $q:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$是$\mathcal{X}$上的拟半范数, 给定线性子空间$\mathcal{Y}\subset\mathcal{X}$和$\mathcal{Y}$上的线性映射$\phi:\mathcal{Y}\to\mathbb{C}$使得

$$\mathrm{Re}\phi(y)\le q(y),\quad\forall y\in\mathcal{Y}.$$

则存在线性映射$\psi:\mathcal{X}\to\mathbb{C}$满足:

(i) $\psi\mid_{\mathcal{Y}}=\phi$;

(ii) $\mathrm{Re}\psi(x)\le q(x)$, $\forall x\in\mathcal{X}$.

解. 设$\phi_1=\mathrm{Re}\phi$, 因ϕ_1是$(\mathcal{Y},\mathbb{R})$上的线性映射且被拟半范数q控制, 则由$\mathbb{R}$-Hahn Banach定理, ϕ_1可延拓到$(\mathcal{X},\mathbb{R})$上的实线性映射ψ_1且满足

(i') $\psi_1\mid_{\mathcal{Y}}=\phi_1$;

(ii') $\psi_1(x)\le q(x)$, $\forall x\in\mathcal{X}$.

但注意这里用的是实的Hahn Banach定理, 所延拓的ψ_1是针对实向量空间$(\mathcal{X},\mathbb{R})$的, 要得到复向量空间的ψ_1, 则在$(\mathcal{Y},\mathbb{C})$上考虑$\psi_1(y)=\phi_1(y)$, 但新定义的ψ_1是实域上的线性映射, 而不是复域上的线性映射, 显然所求线性映射ψ的实部$\mathrm{Re}\psi$在实线性空间中也满足以上两条件. 若取$\mathrm{Re}\psi=\psi_1$, 则ψ在实的情况已满足条件(ii). 而$\mathrm{Im}\psi(y)=\mathrm{Re}(-\mathrm{i}\psi(y))=\mathrm{Re}\psi(-\mathrm{i}y)=\psi_1(-\mathrm{i}y)$, 于是$\psi(y)=\psi_1(y)+\mathrm{i}\psi_1(-\mathrm{i}y)$, 要证$\psi\mid_{\mathcal{Y}}=\phi$, 只需证$\mathrm{Im}\psi(y)=\mathrm{Im}\phi(y)$, $\forall y\in\mathcal{Y}$, 然而

$$\mathrm{Im}\phi(y)=\mathrm{Re}(-\mathrm{i}\phi(y))=\mathrm{Re}(\phi(-\mathrm{i}y))=\phi_1(-\mathrm{i}y)=\psi_1(-\mathrm{i}y)=\mathrm{Im}\psi(y).$$

最后证明线性映射$\psi(x)=\psi_1(x)+\mathrm{i}\psi_1(-\mathrm{i}x)$在复域上满足(ii), 注意这里的$\psi_1(-\mathrm{i}x)$是怎么定义的? □

11.4 拓扑

定理 11.4.1: 杨忠道定理

证明: 拓扑空间中的每一子集的导集为闭集的充分必要条件是此空间中的每一个单点集的导集为闭集.

解. 只证充分性. 设拓扑空间X的每一个单点集的导集为闭集, 任意$A \subset X$, 设$x \in d(d(A))$, 对x的任意开邻域U, 有$U \cap (d(A) \setminus \{x\}) \neq \varnothing$, 因$d(\{x\})$是闭集, 且$x \notin d(\{x\})$, 令$V = U \setminus d(\{x\})$, V是x的开邻域, 从而有

$$y \in V \cap (d(A) \setminus \{x\}).$$

由$y \in V$, $y \notin d(\{x\})$, 且$y \neq x$, 于是存在$W \in \mathscr{U}_y$, 使得$x \notin W$, 因$V \in \mathscr{U}_y$, 令$K = W \cap V$, $K \in \mathscr{U}_y$, 由$y \in d(A)$, 存在$z \in K \cap (A \setminus \{y\}) \neq \varnothing$. 由$z \in K \subset W$, $z \neq x$, 因此$z \in U \cap (A \setminus \{x\})$, 故$U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$, 即$x \in d(A)$, 所以$d(d(A)) \subset d(A)$, $d(A)$为闭集. □

11.5 数论

定理 11.5.1: 恒等定理

设$f(x), g(x) \in D[x]$, 若有无穷多个$\alpha \in D$使$f(\alpha) = g(\alpha)$, 则$f(x) = g(x)$.

定理 11.5.2: 拉格朗日定理

设$f(x)$是整系数多项式, 模p的次数为n, 则同余方程

$$f(x) \equiv 0 \pmod p \tag{11.1}$$

至多有n个互不相同的解.

解. $n = 1$时结论显然成立, 对n归纳. 假设$n-1$时已正确, 当f的次数是n时, 若同余方程无解, 则无需证明. 若$x = a$是一个解, 用$(x-a)$除$f(x)$得$f(x) = g(x)(x-a) + A$, $(A \in \mathbb{Z})$, 若同余方程(11.1)除$x \equiv a \pmod p$外无解, 则证毕, 否则设$x = b$是(11.1)的另一个解, 且$a \not\equiv b \pmod p$, 则

$$0 \equiv f(b) = g(b)(b-a) + A \pmod p, \text{又由} 0 \equiv f(a) = g(a)(a-a) + A = A \pmod p.$$

所以$g(b) \equiv 0 \pmod p$, 这表明(11.1)的解除$x \equiv a \pmod p$之外, 其余的解均是$g(x) \equiv 0 \pmod p$的解, 但$g(x)$模p的次数显然是$n-1$, 由归纳假设, $g(x) \equiv 0 \pmod p$, 至多有$n-1$个互不同余的解, 从而同余方程(11.1)至多有n个解. □

定理 11.5.3: 整系数多项式的有理根

$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, $n \geq 1$, $a_n a_0 \neq 0$且$(a_n, \cdots, a_0) = 1$, 若$\frac{b}{c}$是$f(x)$的一个有理根$(b, c) = 1$, 则$c \mid a_n$, $b \mid a_0$. 特别地, 首项系数为± 1的整系数多项式的有理根必是整数.

解. 由$f\left(\frac{b}{c}\right) = 0$, 得$a_n b^n + \cdots + a_1 b c^{n-1} + a_0 c^n = 0$, 所以$a_0 \mid b$, $a_n \mid c$.
一种证明有理数是整数的证明途径: 证复数是整数, 先证其是有理数, 且找到作为零点的首一多项式. □

定理 11.5.4: Gauss引理

$\mathbb{Z}[x]$中两个本原多项式的乘积仍是一个本原多项式.

解. 反证法, $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$, 若$f(x)g(x)$不是本原多项式, 则有素数$p$整除$f(x)g(x)$的所有系数. 设$r$是$a_i$不被$p$整除的最小角标, s是b_i不被p整除的最小角标, 则$f(x)g(x)$的x^{r+s}项系数不能被p整除. □

定理 11.5.5: 艾森斯坦判别法

设$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$是一个整系数多项式, 其中$n \geq 1$. 若存在一个素数$p$, 使得$p \nmid a_n$, $p \mid a_i (i = 0, 1, \cdots, n-1)$, 但$p^2 \nmid a_0$, 则$f(x)$在$\mathbb{Z}$上不可约.

定理 11.5.6: 科恩定理

设$p = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}$是一个十进制素数, $0 \leq a_i \leq 9 (i = 0, 1, \cdots, n)$, $a_n \neq 0$. 则多项式

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 先用**??**, 再用**??**. □

定理 11.5.7

Every nonzero integer can be written as a product of primes.

解. Assume that there is an integer that cannot be written as a product of primes. Let N be the smallest positive integer with this property. Since N cannot itself be prime we must have $N = mn$, where $1 < m, n < N$. However, since m and n are positive and smaller than N they must each be a product of primes. But then so is $N = mn$. This is a contradiction.

The proof can be given in a more positive way by using mathematical induction. It is enough to prove the result for all positive integers. 2 is a prime. Suppose that $2 < N$ and that we have proved the result for all numbers m such that $2 \leq m < N$. We wish to show that N is a product of primes. If N is a prime, there is nothing to do. If N is not a prime, then $N = mn$, where $2 \leq m, n < N$. By induction both m and n are products of primes and thus so is N. □

定理 11.5.8: m进(m-adic)表示

正整数$m \geq 2$, $\forall a \in \mathbb{N}_+$, 有表示$a = a_0 + a_1 m + \cdots + a_s m^s$.

定理 11.5.9: Bézout's identity(贝祖等式)

任意两整数$a, b (b \neq 0)$的正最大公因子$d = (a, b)$唯一存在, 而且存在整数u, v使得$ua + vb = d$, u, v称为Bézout系数, Bézout系数不唯一, 若设$a' = \frac{a}{d}$, $b' = \frac{b}{d}$, 则恰有两系数对满足$|u| < |b'|$, $|v| < |a'|$.

解. 若$a > b$, $a = bq + r$, 则$(a, b) = (r, b)$, 于是由碾转相除法的逆过程可得u, v. □

解. 不用碾转相除法. $M = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$, d是M中的最小正整数(自然数良序性). 则若$d = ax_0 + by_0$知$(a, b) \mid d$, 所以只需证$d \mid (a, b)$. 若$d \nmid a$, 取$a = dq + r$, 则$r = a\hat{x_0} + b\hat{y_0} < d$与$d$的选取矛盾. □

推论 11.5.1

a, b互素等价于: 存在整数u, v使$ua + vb = 1$.
$a, b \in \mathbb{Z}$, 则:

$$\begin{aligned}(a, b) = d &\Rightarrow \{am + bn \mid m, n \in \mathbb{Z}\} = \{dk \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &\Rightarrow a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z} \\ &\Rightarrow (a, b) = (d)\end{aligned}$$

推论 11.5.2: Bézout等式

任s个非零整数$a_1, \cdots, a_s$的最大公因子$d = (a_1, \cdots, a_s)$存在唯一, 且$(a_1, \cdots, a_{s-1}, a_s) = ((a_1, \cdots, a_{s-1}), a_s)$, 且存在整数$u_1, \cdots, u_s$使, $u_1 a_1 + \cdots + u_s a_s = d$.

定理 11.5.10

$v_p(n)$使使得$p^k\|n$的整数k. 则

$$v_p(n!)=\sum_k\left[\frac{n}{p^k}\right].$$

定理 11.5.11: 威尔逊定理

p是素数, 则有$(p-1)!\equiv -1 \pmod p$.

解. 当$p=2$时, 命题显然. 若$p\geq 3$, 由于对每个与p互素的a在模p下均有逆a^{-1}. 故可得$1,2,\cdots,p-1$的每个与其逆配对, 而特别的当$a=a^{-1}$时是例外. 此时对应$a^2\equiv 1 \pmod p$有解$a=1$或$a=p-1$, 而$2,\cdots,p-2$可两两配对使积为1. 所以$(p-1)!\equiv 1\cdot(p-1)\equiv -1 \pmod p$. □

解. 用 Euler 恒等式

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}i^n=\begin{cases}0, n<m\\(-1)^n n!, n=m\end{cases}$$

取$m=n=p-1$, 当 $p>2$ 时及 Fermat 小定理有

$$(-1)^{p-1}\cdot(p-1)!\equiv\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\binom{p-1}{i}i^{p-1}\equiv\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\binom{p-1}{i}\equiv -1 \pmod p.$$

□

解. 当 $p\geq 3$ 时, 由 Fermat 小定理 $p-2$ 次同余方程

$$f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-p+1)-x^{p-1}+1\equiv 0 \pmod p$$

有 $p-1$ 个不同得解, 所以 $f(x)$ 的系数模 p 余零, 所以常数项 $(p-1)!+1\equiv 0 \pmod p$. □

11.6 不等式

定理 11.6.1: Generalized Schur Inequality

设六个非负实数a,b,c,x,y,z满足(a,b,c)和(x,y,z)均单调, 则

$$\sum_{cyc}x(a-b)(b-c)\geq 0.$$

解. 不妨设$a\geq b\geq c$, 分$x\geq y\geq z$与$x\leq y\leq z$两种情况分别讨论. □

推论 11.6.1

记$S=\sum_{cyc}x(a-b)(a-c)$. 下面几条条件的任何一个均可证明$S\geq 0$.

(1) 当$a\geq b\geq c\geq 0$, $x\geq y\geq 0$且$z\geq 0$时.

(2) 当$a\geq b\geq c\geq 0$, $z\geq y\geq 0$且$x\geq 0$时.

(3) 当$a\geq b\geq c\geq 0$, 且$ax\geq by\geq 0$或者$by\geq cz\geq 0$时.

解. (1)和(2)显然, 对于(3)有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{abc}(x(a-b)(a-c)+y(b-a)(b-c)+z(c-a)(c-b))\\&=ax\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+by\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+cz\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right).\end{aligned}$$

便转化为前面的两种情况了. □

定理 11.6.2: Cauchy不等式

对于欧式空间中任意向量α,β都有

$$|(\alpha,\beta)|\leq|\alpha||\beta|.$$

而且即当α与β线性相关时等号成立.

定理 11.6.3: 三角形不等式

对欧式空间中任意向量α,β有

$$|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|\,.$$

对欧式空间中任意向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$都有

$$|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m|\leq|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_m|\,.$$

Chapter 12

定义集

12.1 初等数论

定义 12.1.1: 模p同余

若两多项式$f(x)$与$g(x)$同次幂系数均关于模p同余, 则称$f(x)$和$g(x)$对模p同余或模p恒等.

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{p}.$$

定义 12.1.2: 多项式模p的次数

若$f(x)$的系数不全被p整除, 其中系数不被p整除的最高幂次称为$f(x)$模p的次数.

定义 12.1.3: 容度, 本原多项式

设$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, 且$f(x) \neq 0$, 将$a_0, a_1, \cdots, a_n$的最大公约数$(a_0, a_1, \cdots, a_n)$, 称为$f(x)$的容度. 容度为1的多项式称为本原多项式.

12.2 高等代数

定义 12.2.1: 欧式空间

设V是实数域$\mathbb{R}$上的一个线性空间. 如果V中存在一个二元运算$(\cdot, \cdot) : V^2 \to \mathbb{R}$, 且满足

1. $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$,
2. $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$, $(k \in \mathbb{R})$,
3. $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = (\alpha_1, \beta) + (\alpha_2, \beta)$,
4. 当$\alpha \neq \theta$时, $(\alpha, \alpha) > 0$,

则称在V上定义了一个内积, 并把V叫做一个欧式空间. 在欧式空间中, 常把实数(α, β)叫做向量α与β的内积.

定义 12.2.2

称非负实数$\sqrt{(\alpha, \alpha)}$为向量α的长, 并用$|\alpha|$表示, 即

$$|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}.$$

设α,β为两个非零向量, 称实数$\varphi=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$为向量$\alpha$与$\beta$的夹角, 亦即

$$\cos\varphi=\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}.$$

定义 12.2.3: 正交

如果欧式空间中两个向量α与β的内积等于零, 即$(\alpha,\beta)=0$, 则称α与β正交.

定义 12.2.4

设V是n维欧式空间. 如果V的基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$中每两个向量都正交, 则称此基为正交基. 如果正交基中每个向量的长都是1, 则称该基为标准正交基.

定义 12.2.5: 欧式空间的同构映射

设V和V'是两个欧式空间, 如果φ是线性空间V到V'的一个同构映射, 而且对V中任意向量α,β都有

$$(\alpha,\beta)=(\varphi(\alpha),\varphi(\beta)),$$

则称φ是欧式空间V到V'的一个同构映射.
如果欧式空间V到V'存在同构映射, 则称欧式空间V与V'同构.

定义 12.2.6: Gram矩阵

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为欧式空间的一组向量, 则称实对称方阵

$$G=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1)&(\alpha_1,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_1,\alpha_n)\\(\alpha_2,\alpha_1)&(\alpha_2,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_2,\alpha_n)\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(\alpha_n,\alpha_1)&(\alpha_n,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}$$

为这组向量的Gram矩阵. G满秩当且仅当$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关.

定义 12.2.7: 正交

设W是欧式空间V的子空间. 如果V中向量α与W中每个向量都正交, 则称α与W正交, 记为$(\alpha,W)=0$或$\alpha\perp W$.
如果子空间V_1中每个向量与子空间V_2中每个向量都正交, 则称子空间V_1与V_2正交, 记为$(V_1,V_2)=0$或$V_1\perp V_2$.

定义 12.2.8

设W和W'是欧式空间V(不一定是有限维)的两个子空间. 如果

$$V=W+W'\quad 且\quad W\perp W',$$

则称W'为子空间W的正交补.

定义 12.2.9: 正交变换

设T是欧式空间V的一个线性变换, 如果T保持V中任何向量的长都不变, 亦即对V中任意的α都有

$$(T\alpha,T\alpha)=(\alpha,\alpha),$$

则称T是V的一个正交变换.

设T是欧式空间V的线性变换. 则T为正交变换的充要条件是, T保持向量的内积不变, 即对V中任意向量α,β都有

$$(T\alpha, T\beta) = (\alpha, \beta).$$

定义 12.2.10

设A是一个实n阶方阵. 如果$AA' = E$, 则称A为正交方阵. 正交方阵A中的行向量是欧式空间$\mathbb{R}^n$中的一个标准正交基.

定义 12.2.11

设T是n维欧式空间V的一个正交变换, 且在某标准正交基下的方阵为A. 若$|A| = 1$, 则称为旋转或第一类的; 若$|A| = -1$, 则称T为第二类的.

定义 12.2.12

设T是欧式空间V的一个线性变换, 如果对V中任意向量α,β都有

$$(T\alpha, \beta) = (\alpha, T\beta),$$

则称T是V的一个对称变换.

12.3 数学分析

定义 12.3.1: 数学分析习题集

- 分析引论
  1. 实数
  2. 数列理论
  3. 函数的概念
  4. 函数图像表示法
  5. 函数的极限
  6. 符号$\mathscr{O}$
  7. 函数连续性
  8. 反函数, 用参数形式表示的函数
  9. 函数的一致连续性
  10. 函数方程

定义 12.3.2: 分析引论

- 实数
  - 数学归纳法
  - 分割→实数
  - 绝对值(模)→三角不等式, 开区间, 半开区间, 闭区间
  - 上, 下确界的定义
  - 绝对误差, 相对误差→精确数字
- 数列理论
  - 数列极限的概念

- 收敛, 发散, 无穷小量, 无穷极限
- 极限存在的判别法
  * 夹逼定理
  * 单调有界
  * Cauchy准则
- 数列极限的基本定理
  * 保序性
  * 唯一性
  * 保加, 减, 乘, 除(分母不为0)运算
  * Stolz公式
- 极限点, 上下极限, 运算和不等式
- 重要极限
  * $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
  * $\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \log n)$

• 函数的概念
- (单值)函数的定义, 定义域(存在域), 值域
- 反函数
- (严格)单调
- 复合函数

• 函数的图像表示, 函数的零点

• 函数的极限
- 函数的有界性, 上确界, 下确界, 振幅
- 函数在某一点的极限, (与数列极限的关系)
- 重要极限
  * $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
  * $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$
- Cauchy准则(函数极限存在的充要条件)
- 单侧极限, 左右极限
- 无穷极限, $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \iff \forall E > 0, \exists \delta = \delta(E) > 0, \ni \forall 0 < |x-a| < \delta(E)$, 均有$|f(x)| > E$.
- 子列极限, 下极限, 上极限

• 函数的连续性
- (点)连续
- 间断点
  * 第一类间断点
    · 可去间断点
    · 跳跃间断点
  * 第二类间断点(无穷型间断点)
- 左右连续
- (点)连续, 保加, 减, 乘, 除(分母不为0)
- 复合函数的连续
- 初等函数的连续
- 基本定理
  * 闭区间上连续函数有界

    * 闭区间上连续函数达到上下确界(Weierstrass定理)
    * 闭区间上连续函数定义在$(\alpha, \beta) \subset [a, b]$, f取到$f(\alpha)$, $f(\beta)$之间的所有值(Cauchy定理)
    * 闭区间上连续函数的零点定理

- 反函数
  - 反函数的存在性和连续性
  - 单值连续分支
  - 参数形式表示的函数的连续性
- 函数的一致连续性
  - 一致连续性的定义
  - Cantor定理

12.4 微分方程

定义 12.4.1: 标准形式下的边值问题

二阶线性微分方程: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = \phi(x)$, $P(x), Q(x), \phi(x) \in C[a, b]$在满足边界条件:

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1, & \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2, & \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0, \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0. \end{cases}$$

的问题称为标准形式下的边值问题. 边值问题是齐次的, 若$\phi(x) \equiv 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. 否则称为非齐次的.

定义 12.4.2: 更一般的齐次边值问题

更一般的齐次边值问题是有如下形式的问题

$$\begin{cases} y'' + P(x, \lambda)y' + Q(x, \lambda)y = 0; \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0; \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

12.5 泛函分析

定义 12.5.1: 紧算子

设 X 是 Banach 空间, 若线性算子 T 把每一有界集映成列紧集, 则称线性算子 T 为紧算子.

定义 12.5.2: Banach空间中的凸集

设 X 是 Banach 空间, 集合 $K \subset X$称为是凸的, 若 $(1-t)K + tK \subset K$, $(0 \leq t \leq 1)$.

定义 12.5.3: 拟半范数, 半范数

设$\mathbb{K}$是$\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$, $\mathcal{X}$是域$\mathbb{K}$上的向量空间.

A. 映射$q : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$称为拟半范数, 如果

(i) $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$, 对于任意$x, y \in \mathcal{X}$.

(ii) $q(tx) = tq(x)$, 对任意的$x \in \mathcal{X}$和$t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

B. 映射$q : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$称为是半范数, 如果上面的两个条件中(ii)改为

(ii') $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$, 对任意$x \in \mathcal{X}$和$\lambda \in \mathbb{K}$.

注: 若$q : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$是半范数, 则对于任意的$x \in \mathcal{X}$, $q(x \geq 0)$. (因$2q(x) = q(x) + q(-x) \geq q(0) = 0$).

Chapter 13

math.stackexchange.com

问题: 1. What Does it Really Mean to Have Different Kinds of Infinities?

1 What Does it Really Mean to Have Different Kinds of Infinities?
Can someone explain to me how there can be different kinds of infinities?
I was reading The man who loved only numbers by Paul Hoffman and came across the concept of countable and uncountable infinities, but they're only words to me.
Any help would be appreciated.

解答

Suppose no one ever taught you the names for ordinary numbers. Then suppose that you and I agreed that we would trade one bushel of corn for each of my sheep. But there's a problem, we don't know how to count the bushels or the sheep! So what do we do?
We form a bijection between the two sets. That's just fancy language for saying you pair things up by putting one bushel next to each of the sheep. When we're done we swap. We've just proved that the number of sheep is the same as the number of bushels without actually counting.
We can try doing the same thing with infinite sets. So suppose you have the set of positive integers and I have the set of rational numbers and you want to trade me one positive integer for each of my rationals. Can you do so in a way that gets all of my rational numbers?
Perhaps surprisingly the answer is yes! You make the rational numbers into a big square grid with the numerator and denominators as the two coordinates. Then you start placing your bushels along diagonals of increasing size, see wikipedia.
This says that the rational numbers are countable that is you can find a clever way to count them off in the above fashion.
The remarkable fact is that for the real numbers there's no way at all to count them off in this way. No matter how clever you are you won't be able to scam me out of all of my real numbers by placing a natural number next to each of them. The proof of that is Cantor's clever diagonal argument.

评论

Fantastic answer! – Allain Lalonde
I like this so far, but maybe add a bit on uncountable to distinguish the difference. – BBischof
That's a really good answer, thanks :D – fbstj
Why can't lecturers at Uni explain things in this way? – Sachin Kainth
In the case of positives and rationals how you match them? How diagonals become bushels . Can u explain more on that figure – user5507
+1 for fancy language – Tyler Langan
Wow, great way to explain it. – Abhimanyu Pallavi Sudhir
One bushel of corn for each sheep is a little too generous for me. :P – BlackAdder
OMG I love the bushels and the sheep. Very great way to explain it. – Brian Cheung
I assume with positive numbers you mean positive integers . Because, after all, π is a positive number as well. – celtschk

解答

How there can be different kinds of infinities?
This is very simple to see. This is because of:
Claim: A given set X and its power set $P(X)$ can never be in bijection.
Proof: By contradiction. Let f be any function from X to $P(X)$. It suffices to prove f cannot be surjective. That means that some member of $P(X)$ i.e., some subset of S, is not in the image of f. Consider the set:
$T = \{x \in X : x \notin f(x)\}$.
For every x in X , either x is in T or not. If x is in T, then by definition of T, x is not in $f(x)$, so T is not equal to $f(x)$. On the other hand, if s is not in T, then by definition of T, x is in $f(x)$, so again T is not equal to $f(x)$. Q.E.D.
Thus take any infinite set you like. Then take its power set, its power set, and so on. You get an infinite sequence of sets of increasing cardinality(Here I am skipping a little; but a use of the Schroeder-Bernstein theorem will fix things).
Hilbert's Hotel is a classic demonstration.

解答

Hilbert's Hotel is a classic demonstration.

评论

A really good book on the subject was written by David Wallace Foster, Everything and More: A Compact History of Infinity – FordBuchanan
David Foster Wallace. (RIP :-( ) – Jason S

解答

A **countably infinite** set is a set for which you can list the elements $a_1, a_2, a_3, ...$
For example, the set of all integers is countably infinite since I can list its elements as follows:
$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...$
So is the set of rational numbers, but this is more difficult to see. Let's start with the positive rationals. Can you see the pattern in this listing?
$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \cdots$
(Hint: Add the numerator and denominator to see a different pattern.)
This listing has lots of repeats, e.g. $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}$ and $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}$. That's ok since I can condense the listing by skipping over any repeats.
$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \cdots$
Let's write q_n for the n-th element of this list. Then $0, q_1, -q_1, q_2, -q_2, q_3, -q_3, ...$ is a listing of all rational numbers.
A **countable set** is a set which is either finite or countably infinite; an **uncountable set** is a set which is not countable.
Thus, an uncountable set is an infinite set which has no listing of all of its elements (as in the definition of countably infinite set).
An example of an uncountable set is the set of all real numbers. To see this, you can use the **diagonal method**. Ask another question to see how this works...

解答

You can see that there are infinitely many natural numbers $1, 2, 3, \ldots$, and infinitely many real numbers, such as $0, 1, \pi$, etc. But are these two infinities the same?
Well, suppose you have two sets of objects, e.g. people and horses, and you want to know if the number of objects in one set is the same as in the other. The simplest way is to find a way of corresponding the objects one-to-one. For instance, if you see a parade of people riding horses, you will know that there are as many people as there are horses, because there is such a one-to-one correspondence.
We say that a set with infinitely many things is "countable", if we can find a one-to-one correspondence between the things in this set and the natural numbers.
E.g., the integers are countable: $1 \leftrightarrow 0$, $2 \leftrightarrow -1$, $3 \leftrightarrow 1$, $4 \leftrightarrow -2$, $5 \leftrightarrow 2$, etc, gives such a correspondence.
However, the set of real numbers is NOT countable! This was proven for the first time by Georg Cantor. Here is a proof using the so-called diagonal argument.

解答

Infinity is an overloaded term that can mean many things.
One common non-mathematical use of infinity is to refer to everything in the universe. This is **not** what mathematicians mean when they say infinity. That would be a kin to the set of all sets, which is a paradoxical concept that is not part of mathematical discourse.
Mathematicians will use infinity as a way to represent a process that continues indefinitely. This is a kin to saying "take the limit as n goes to infinity", which is close to saying "continue this process indefinitely."
Infinity is also use infinity to talk about size. All sets are either infinite or finite.
The story doesn't stop there. There is something fundamentally different about sets like the points on a line, where there are no holes, and sets like the integers where there are holes. They are both infinite but one seems denser than the other.
That's where whole countable uncountable thing comes in. Infinite sets have a size, but it is not a number in the traditional sense. Its more like "relative size". Bijections are how we determine size for infinite sets, which are explained well on this page, so I won't repeat the explanation.
A more in-depth, but still understandable explanation is given in Computability and Logic by George Boolos.

解答

The basic concept is thus:

- A 'countable' infinity is one where you can give each item in the set an integer and 'count' them (even though there are an infinite number of them)
- An 'uncountable' infinity defies this. You cannot assign an integer to each item in the set because you will miss items.

The key to seeing this is using the 'diagonal slash' argument as originally put forward by Cantor. With a countable infinity, you can create a list of all the items in the set and assign each one a different natural number. This can be done with the naturals (obviously) and the complete range of integers (including negative numbers) and even the rational numbers (so including fractions). It cannot be done with the reals due to the diagonal slash argument:

1. Create your list of all real numbers and assign each one an integer
2. Create a real number with the rule that the first digit after the decimal point is different from the first digit of your first number, the second digit is different from the second digit of your second number, and so on for all digits
3. Try and place this number in your list of all numbers. it can't be the first number, or the second or the third and so on down the list.
4. Reductio Ad Absurdium, your number does not exist in your countable list of all real numbers and must be added on to create a new list. The same process can then be done again to show the list still isn't complete.

This shows a difference between two obviously infinite sets and leads to the somewhat scary conclusion that there are (at least) 2 different forms of infinity.

Chapter 14

GTM 120. weakly differentiable functions

14.1 Riew

A Borel measure μ with the properties that each subset of $\mathbb{R}^n$ is contained within a Borel set of equal μ measure and that $\mu(K) < \infty$ for each compact set $K \subset \mathbb{R}^n$ is called a Radon measure.

14.2 Questions

1. recall the defination of Holder space $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ for any open set $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

2. prove that $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ is a Banach space.

3. define Lebesgure measurable set using outer Lebesgue measure.

4. the defination of Borel set in $\mathbb{R}^n$.

5. if $|\cdot|$ is the outer Lebesgure measure, then for any $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $d(A, B) > 0$ implies $|A \cup B| = |A| + |B|$.

6. using the above conclusion, prove that for any closed set in $\mathbb{R}^n$ is measurable, so any Borel set is measurable.