Contents

Chapter 1

数学分析

1.1 极限

问题 1.1.1

设函数$\varphi(x)$可导, 且满足$\varphi(0)=0$, 又设$\varphi'(x)$单调减少.

1. 证明: 对$x\in(0,1)$, 有$\varphi(1)x<\varphi(x)<\varphi'(0)x$.
2. 若$\varphi(1)\geq 0$, $\varphi'(0)\leq 1$, 任取$x_0\in(0,1)$, 令$x_n=\varphi(x_{n-1})$, $(n=1,2,\cdots)$. 证明: $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求该极限值.

解. 对于任意的$x\in[0,1]$,在$[0,x]$上用拉格朗日定理,

$$\varphi(x)-\varphi(0)=\varphi'(\xi_1)x<\varphi'(0)x$$

在$[x,1]$上用拉格朗日定理

$$\varphi(1)-\varphi(x)=\varphi'(\xi_2)(1-x)<\varphi'(\xi_1)(1-x)=\varphi'(\xi_1)-\varphi(x)$$

所以$\varphi(1)x<\varphi'(\xi_1)x=\varphi(x)$. □

问题 1.1.2: https://www.zhihu.com/question/636352059

已知实数列$\{x_n\}$使得$3x_n-x_{n-1}$收敛, 证明x_n收敛.

解. 由问题1.5.10, 设

$$\limsup x_n=\overline{X},\quad \liminf x_n=\underline{X}.$$

则$+\infty\geq\overline{X}\geq\underline{X}\geq-\infty$. 如果设$\lim(3x_n-x_{n-1})=L$. 取上面的数列$\big(x_n,y_n\big)$对为原问题中的$(3x_n,-x_{n-1})$代入上面的不等式, 得到

$$3\underline{X}-\overline{X}\leq L\leq 3\underline{X}-\underline{X}\leq L\leq 3\overline{X}-\underline{X},$$

这说明$\underline{X}=\frac{L}{2}$. 当取上面的数列$\big(x_n,y_n\big)$对为原问题中的$(-x_{n-1},3x_n)$时, 则得到

$$-\overline{X}+3\underline{X}\leq L\leq -\overline{X}+3\overline{X}\leq L\leq -\underline{X}+3\overline{X},$$

这说明$\overline{X}=\frac{L}{2}$. 所以问题中的数列x_n的上下极限相等且有限. □

1.2 导数

问题 1.2.1

函数$f(x)\in C[0,1]$, 在$(0,1)$上可微, 对于任意的$x\in(0,1)$, $\left|xf'(x)-f(x)+f(x)\right|<Mx^2$, 问$f'(0)$的存在性.

解. 不妨设$f(0)=0$, 定义$h(x)=\frac{f(x)}{x}(0<x<1)$, 即证$\lim_{x\to 0}h(x)$存在, 则$\left|x^2h'(x)\right|<Mx^2$, 所以$\left|h'(x)\right|<M$, 所以若$\{x_n\}\to 0$, 则有

$$|h(x_m)-h(x_n)|=\left|h'\xi(x_m-x_n)\right|<M|x_m-x_n|<\varepsilon.$$

所以$\{h(x_n)\}$是Cauchy列, 从而$\lim_{x\to 0}h(x)$存在. □

问题 1.2.2

构造有界单调函数$f(x)$使得对于任意的$x\in\mathbb{R}$, $f'(x)$存在, 且$\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)\neq 0$.

解. 取$a_n=1-2^{-n}$, $(n\in\mathbb{N})$, $f(n)=a_n$, $f\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(a_n+a_{n+1})$, 且$f'(n)=0$, $f'\left(n+\frac{1}{2}\right)=1$, 将其它点处可微连接$f(n)$这些离散点, 知$\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)$不存在, 从而不为0. □

1.3 积分

问题 1.3.1

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\log\left(\frac{2x^2+2x+1}{2x^2-2x+1}\right)}{x}\,dx$$

解. $4\pi\operatorname{arccot}(\sqrt{\phi})$. □

问题 1.3.2

设函数$f(x)$在$[a,b]$上有连续的导数, 且$f(a)=0$, 证明

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leq\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

解. 令$F(b)=RHS-LHS$,证$F'(b)\geq 0$即可. □

问题 1.3.3

设函数$f(x)$在$[0,1]$上有二阶连续的导数, 证明:

1. 对任意$\xi\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$和$\eta\in\left(\frac{3}{4},1\right)$有
$$\left|f'(x)\right|<2\left|f(\xi)-f(\eta)\right|+\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x\quad x\in[0,1]$$
2. 当$f(0)=f(1)=0$及$f(x)\neq 0$, $(x\in(0,1))$时有
$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geq 4.$$

解. 用中值定理,

$$\begin{aligned}\left|f'(x)\right|-2\left|f(\xi)-f(\eta)\right|&=\left|f'(x)\right|-2\left|f'(\theta)\right|(-\xi+\eta)\\&\leq\left|f'(x)\right|-\left|f'(\theta)\right|\\&\leq\left|f'(x)-f'(\theta)\right|=\left|\int_\theta^x f''(t)\mathrm{d}t\right|\\&\leq\int_0^1\left|f''(t)\right|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

最后取$f(x_0)=\max_{x\in[0,1]}f(x)$, 则

$$f(x_0)=f'(\xi_1)x_0=f'(\xi_2)(x_0-1),$$

1

所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|\frac{f''}{f}\right| \mathrm{d}x &\geq \frac{1}{|f(x_0)|} \mathrm{d}x \\ &\geq \frac{1}{|f(x_0)|}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f'' \mathrm{d}x\right| \\ &= \frac{1}{|f(x_0)|}\left|f'(\xi_2)-f'(\xi_1)\right| \\ &= \frac{1}{x_0}+\frac{1}{1-x_0} \geq 4.\end{aligned}$$

□

问题 1.3.4

设函数$f(x)$在$[-\frac{1}{a}, a]$上连续(其中$a>0$), 且$f(x)\geq 0$, $\int_{-\frac{1}{a}}^{a} xf(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 求证: $\int_{-\frac{1}{a}}^{a} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{-\frac{1}{a}}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 因$(a-x)\left(x+\frac{1}{a}\right)\geq 0$, 对$(a-x)\left(x+\frac{1}{a}\right)f(x)\geq 0$两边同时积分. □

问题 1.3.5

设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=1$. 求证:

1. 存在$\xi\in[0,1]$, 使得$|f(\xi)|\geq 4$;
2. 存在$\eta\in[0,1]$, 使得$\left|f(\eta)\right|=4$.

解. 用反证法,

$$1=\left|\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\cdot\left|f\right|\,\mathrm{d}x \leq 1.$$

等号取不到, 否则,

$$\int_0^1 \left(4-|f|\right)\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x = 0.$$

□

问题 1.3.6

求$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta}$.

解. $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta} = \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2+2\sin^2(\theta-\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta} = 2\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta} = 2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+2t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$ □

2

解.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta}&=\frac{1}{2}\int_0^{4\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3-\sin t}\\&=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3-\sin t}\\&=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3-\sin t}+\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3+\sin t}\\&=2\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{3-\sin x}+2\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x}\\&=12\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{9-\sin^2 x}\\&=12\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\tan x}{8\tan^2 x+9}\\&=\frac{12}{6\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\tan x\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.\end{aligned}$$

□

解.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta}&=\frac{1}{2}\int_0^{4\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3\sin\theta}\\&=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin\theta}\\&=\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z\left(3-\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)}\\&=2\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+6\mathrm{i}z-1}\\&=2\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{(z-(-3+2\sqrt{2})\mathrm{i})(z-(-3-2\sqrt{2})\mathrm{i})}\\&=2\cdot 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f(z))\big|_{z=(-3+2\sqrt{2})\mathrm{i}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.\end{aligned}$$

□

解.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta}&=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\tan\theta}{3\tan^2\theta-2\tan\theta+3}\\&=\int_0^{\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi}+\int_{\pi}^{3\pi/2}+\int_{3\pi/2}^{2\pi}=\cdots\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^{\pi/2}=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\theta}{3t^2-2t+3}=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{3}\right)}{\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{8}}\arctan\left(\frac{3\left(t-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{8}}\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

其它三个同理. 所以$\sum=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 4\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$. □

问题 1.3.7

求

$$\int_0^{\pi/4}\frac{(\cot x-1)^{p-1}}{\sin^2 x}\ln\tan x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{p}\csc p\pi,\ (-1<p<0).$$

3

解. 令$u=\cot x-1$, 原式等价于

$$\int_0^{+\infty} u^{p-1}\ln(u+1)\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{p}\csc p\pi,$$

而

$$\int_0^{\infty} u^{p-1}\ln(u+1)\,\mathrm{d}u=\int_0^{\infty} u^{p-1}\int_1^{1+u}\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u$$

交换积分次序, 用Beta函数 □

1.4 级数

问题 1.4.1

证明

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}=0$$

无实根.

解. 设$-y<0$, 则$y>0$, 所以$1-y+\frac{y^2}{2!}-\frac{y^3}{3!}+\cdots+\frac{y^{2n}}{(2n)!}>\mathrm{e}^{-y}>0$. □

问题 1.4.2: F.F.Abi=Khuzam and A.B.Boghossian, Some recent geometric inequalities, AMM Vol 96(1989), No. 7:576-589

函数$f(x)=\cot x-\frac{1}{x}$, 则$f^{(k)}(x)<0, 0<x<\pi, k\in\mathbb{N}$.

解.

$$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k\pi+x}-\frac{1}{k\pi-x}\right),\quad x\in(0,\pi).$$

将真分式展开有

$$f(x)=-2x\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^{2k},\ x\in(0,\pi),\quad c_k=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^{2k+2}},\ (k\in\mathbb{N}).$$

□

问题 1.4.3

对$n\in\mathbb{N}_+$, 确定$(0,1)$的子集, 使在此子集上$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n(\ln x\ln(1-x))<0$.

解.

$$f'(x)=(\ln x\ln(1-x))'=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{m-1}-x^{m-1}}{m},$$

当n是偶数时, 所有项都是负的, 当n是奇数时, 仅当$1-x<x$即$x>\frac{1}{2}$时, $f^{(n)}(x)$时负的. □

问题 1.4.4

已知$S_n=\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^i}{i}$, 证明$\lim_{n\to\infty}S_n$存在并求其值.

解. 因$S_{n+1}=\frac{n+2}{2(n+1)}(S_n+1)$, 所以

$$S_{n+2}-S_{n+1}=\frac{(n+2)^2(S_{n+1}-S_n)-S_{n+1}-1}{2(n+1)(n+2)},$$

$S_4-S_3=0$, 当$n\geq 3$时, S_n不增, 所以$S=\lim_{n\to\infty}S_n$存在, 所以$S=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2(n+1)}(S+1)$, 得$S=1$. □

4

1.5 其他

问题 1.5.1

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)=0.$$

解. 用$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. □

问题 1.5.2

证明:

$$0<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n}.$$

解. 先证: $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调上升且有界. ($1\cdot x_n\le\left(\frac{1+n(1+1/n)}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}$), 则

$$\begin{aligned}x_n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=1+1+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\cdots\\&=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\&<2+\frac{1}{2\cdot1}+\frac{1}{3\cdot2}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}=3.\end{aligned}$$

再证$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$单调下降且有界. (用$(1+x)^n>1+nx$, $x>-1$证单调性).

由$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n$, $x_n<\mathrm{e}<y_n$, (这可以证得$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$).

故$\mathrm{e}-x_n<y_n-x_n=\frac{x_n}{n}<\frac{3}{n}$. □

问题 1.5.3

证明不等式

$$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

解. 用$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$及归纳法. □

问题 1.5.4

设$a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$及$a^{[0]}=1$, 证明:

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a^{[n-m]}b^{[m]}.$$

并由此推出牛顿二项式公式.

问题 1.5.5

证明不等式

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\quad(n>1).$$

解. 用均值不等式. □

5

解. 用伯努利不等式证$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>2,\ (n\in\mathbb{N}_+)$. □

问题 1.5.6

设$p_n(n\in\mathbb{N}_+)$为趋于正无穷的任意数列, 而$q_n(n\in\mathbb{N}_+)$为趋于负无穷的任意数列$(p_n,q_n\notin[-1,0])$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\mathrm{e}.$$

解. 注意$[x]\le x<[x]+1$. □

问题 1.5.7

已知$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}.$$

并推出

$$\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n},$$

其中$0<\theta_n<1$.

问题 1.5.8

证明: e是无理数.

解. 用反证法及1.5.7有, 对于任意的n, $n!n\cdot\mathrm{e}$不是整数. □

问题 1.5.9

证明不等式:

(a) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},\ (n\in\mathbb{N}_+)$;

(b) $1+\alpha<\mathrm{e}^\alpha,\ (\alpha\ne0,\alpha\in\mathbb{R})$.

解.

(a) 原式等价于$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$;

(b) $\alpha>-1$时, 用伯努利不等式, $\mathrm{e}^\alpha>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha n}>1+\alpha$.

□

问题 1.5.10

证明: (在以下各极限均存在的情况下)

(a) $\liminf_{n\to\infty}x_n+\liminf_{n\to\infty}y_n\le\liminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\le\liminf_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n$;

(b) $\liminf_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n\le\limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)\le\limsup_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n$.

解. 用$\liminf_{n\to\infty}x_n=-\limsup_{n\to\infty}(-x_n)$. □

6

问题 1.5.11

证明: 若$\lim_{n\to\infty} x_n$存在, 则对于任何数列$y_n(n\in\mathbb{N}_+)$, $\limsup_{n\to\infty} y_n$有限且有:

(a) $\limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty} x_n+\limsup_{n\to\infty} y_n$;

(b) $\limsup_{n\to\infty} x_n y_n=\lim_{n\to\infty} x_n\cdot\limsup_{n\to\infty} y_n$, $(x_n\ge 0)$.

解. 用1.5.10. □

问题 1.5.12

证明: 若对于某数列$x_n(n\in\mathbb{N}_+)$, 无论数列$y_n(n\in\mathbb{N}_+)$如何选取, 以下两个等式中都至少有一个成立:

(a) $\limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\limsup_{n\to\infty} x_n+\limsup_{n\to\infty} y_n$.

(b) $\limsup_{n\to\infty}(x_n y_n)=\limsup_{n\to\infty} x_n\cdot\limsup_{n\to\infty} y_n$, $(x_n\ge 0)$.

则数列x_n收敛或发散于正无穷.

问题 1.5.13

证明: 若$x_n>0(n\in\mathbb{N}_+)$及

$$\limsup_{n\to\infty} x_n\cdot\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=1.$$

则数列x_n是收敛的.

问题 1.5.14

证明: 若数列$x_n(n\in\mathbb{N}_+)$有界, 且

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0.$$

则此数列的子列极限充满于下极限和上极限

$$l=\liminf_{n\to\infty} x_n \text{ 和 } L=\limsup_{n\to\infty} x_n$$

之间.

问题 1.5.15

证明: 若$x_n>0(n\in\mathbb{N}_+)$且$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$存在, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

解. 用结论: 若$\{x_n\}\to x$, $x_n>0$, 则$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n=x$. □

问题 1.5.16

证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$.

解. 用1.5.15. □

7

问题 1.5.17: 数a和b的算术几何平均值

证明: 由下列各式

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

确定的数列x_n和$y_n (n \in \mathbb{N}_+)$有共同的极限.

$$\mu(a, b) = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

解. 用幂平均不等式, $\sqrt{x_{n+1} + y_{n+1}} = \frac{\sqrt{x_n}+\sqrt{y_n}}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{x_n + y_n}$. 即$\{y_n\}$单调有界, 从而有极限, 从而$x_n = 2y_{n+1} - y_n$有相同的极限. □

问题 1.5.18

设

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad (|x| \geq 2),$$

求$f(x)$.

解. $x^2 - 2, (|x| \geq \frac{5}{2})$. □

问题 1.5.19

证明: 若

(1) 函数$f(x)$定义于区域$x > a$;

(2) $f(x)$在每一个有限区间$a < x < b$内是有界的;

(3) 对于某一个整数n, 存在有限的或无穷的极限

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} = l,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{l}{n+1}.$$

能否用**Cauchy**定理**??**证明它**.**

8

问题 1.5.20

利用定理

定理 1.5.1

设
$$\lim_{x\to 0}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=1,$$
其中$\psi(x)>0$, 再设当$n\to\infty$时$\alpha_{mn}\rightrightarrows 0(m=1,2,\cdots,n)$, 换言之, 对于任意$\varepsilon>0$, 存在正整数$N(\varepsilon)$, 当$m=1,2,\cdots,n$且$n>N(\varepsilon)$时, $0<|\alpha_{mn}|<\varepsilon$. 证明:
$$\lim_{n\to\infty}[\phi(\alpha_{1n})+\phi(\alpha_{2n})+\cdots+\phi(\alpha_{mn})]=\lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\cdots+\psi(\alpha_{mn})],$$
此处同时还要假设上式右端的极限存在.

求:

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[n]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{ka}{n^2}\right)$;

(3) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right)$, $(a>0)$;

(4) $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$;

(5) $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$.

问题 1.5.21

设函数$f(x)$在区间$(x_0,+\infty)$上连续并有界. 证明: 对于任何数T, 可求得数列$x_n\to+\infty$, 使
$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0.$$

问题 1.5.22

证明: 在有限区间(a,b)上有定义且连续的函数$f(x)$, 可用连续的方法延拓到闭区间$[a,b]$上, 其充分必要条件是函数$f(x)$在区间(a,b)上一致连续.

问题 1.5.23

x_n满足$x_n^n+x_n-1=0$, $0<x_n<1$, 求$\lim_{n\to\infty}x_n$.

解. $y=x^n+x-1$则有$y'>0$, $y|_{x=0}=-1<0$, $y|_{x=1}=1>0$.
x_n是x^n+x-1的唯一零点. 由于
$$x_n^{n+1}+x_n-1=(x_n-1)(1-x_n)<0$$
及y的单调性, 知x_{n+1}在x_n与1之间, 故$\{x_n\}$单调有界. 反证$\{x_n\}$的极限$A=1$, 否则$0\le A<1$矛盾. □

解. $y^x+y-1=0$是隐函数, 确定$y=f(x)$, $x_n=f(n)$, 求导
$$y'=-y^x\cdot\frac{\ln y}{\left(1+\frac{x}{y}\cdot y^x\right)}$$
当$x\ge 1$时, $y'>0$, y单调增加, 以下同上. □

9

问题 1.5.24

若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$都收敛, 则以下不成立的是?

A. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$收敛; B.$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$收敛;

C. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛; D. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$发散.

问题 1.5.25

设$f(x,y)$与$\varphi(x,y)$均为可微函数, 且$\varphi_y'(x,y)\neq 0$. 已知(x_0,y_0)是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的一个极值点, 下列选项正确的是(D)

(A) 若$f_x'(x_0,y_0)=0$, 则$f_y'(x_0,y_0)=0$; (B) 若$f_x'(x_0,y_0)=0$, 则$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$;

(C) 若$f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则$f_y'(x_0,y_0)=0$; (D) 若$f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

问题 1.5.26

$$\frac{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t}=\sqrt{2}$$

解. 用Beta函数. □

问题 1.5.27: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

计算$I=\int_{\pi/8}^{3\pi/8}\frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}\,\mathrm{d}x$.

问题 1.5.28: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设$\varphi(x)$在$(-\infty,0]$可导, 且函数

$$f(x)=\begin{cases}\int_x^0 \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t, & x<0,\\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(2x)^n+x^{2n}}, & x\geq 0.\end{cases}$$

在点$x=0$可导, 求$\varphi(0)$, $\varphi'(0^-)$, 并讨论$f'(x)$的存在性.

问题 1.5.29: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

已知函数$f(x)$与$g(x)$满足$f'(x)=g(x)$, $g'(x)=2\mathrm{e}^x-f(x)$, 且$f(0)=0$, 求

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x.$$

问题 1.5.30: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设y_1和y_2是方程$y''+p(x)y'+2\mathrm{e}^x y=0$的两个线性无关解, 而且$y_2=(y_1)^2$. 若有$p(0)>0$, 求$p(x)$及此方程的通解.

问题 1.5.31: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设$f(x)$在$[-\frac{1}{a},a]$$(a>0)$上非负可积, 且$\int_{-1/a}^{a} xf(x)\,\mathrm{d}x=0$. 求证:

$$\int_{-1/a}^{a} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_{-1/a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

解. 分$0<a\leq 1$和$a>1$两种情况讨论. □

问题 1.5.32: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设在点$x=0$的某邻域U内, $f(x)$可展成泰勒级数, 且对任意正整数n, 皆有

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}.$$

证明: 在U内, 恒有$f(x)=x^2$.

问题 1.5.33: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x^2+y^2}$, 证明: $\lim_{x\to+\infty}y(x)$和$\lim_{x\to-\infty}y(x)$都存在.

解. 用单调有界定理. □

问题 1.5.34: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$的收敛域与和函数.

问题 1.5.35: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{(n+i+1)^2}+\frac{1}{(n+i+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+i+i)^2}\right).$$

解. 用重积分得$\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$. □

问题 1.5.36

设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\subset C_{[a,b]}$, 且$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$, 则$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 因$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in[a,b]$, 所以$f\in C_{[a,b]}$且$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当$n>N$时, $\forall x\in[a,b]$均有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. $f(x),f_n(x)$连续必可积, 有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|<(b-a)\varepsilon.$$

其实当$a\le x\le b$时, 有$\left|\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|<(b-a)\varepsilon$对$x$一致成立, 所以$\int_a^x f_n(x)\,\mathrm{d}t\rightrightarrows\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. □

问题 1.5.37

$f_n(x)$在$[a,b]$上都有连续导数, 且$f_n(x)\to f(x)$, $f_n'(x)\rightrightarrows g(x)$, 则$f'(x)=g(x)$, 即$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)$.

解. 因$f_n'\rightrightarrows g$, 所以g连续, 可积, 由1.5.36, $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$, 所以$f'(x)=g(x)$. 其实$f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$在$[a,b]$上也一致收敛.

若1.5.36和$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$的前$n$项部分和, 就有函数项级数的相应命题.

(1). 若$[a,b]$上$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$中每项$u_k$均连续, 且$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\rightrightarrows f(x)$, 则$f(x)\in C_{[a,b]}$且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2). 若$[a,b]$上, $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$的每项都有连续导数$u_k'(x)$且$\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(x)\rightrightarrows g(x)$, 而$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\to f(x)$. 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(x).$$

11

□

问题 1.5.38

举反例:

(1) 积分的极限不等于极限的积分的函数列.

(2) 导数的极限不等于极限的导数的函数列.

解. (1). 在$[0,1]$上极限函数为0, 但f_n在$[0,\frac{1}{n}]$上面积为1的脉冲函数.
(2). $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$, $x\in[-1,1]$. □

问题 1.5.39: http://math.stackexchange.com/questions/2143014

证明: 对于任意的$\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|\frac{\alpha-n}{\alpha+n}\right|$发散.

问题 1.5.40: http://math.stackexchange.com/questions/472007

判断$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{\sin n}{n+10\sin n}$的敛散性.

解. 其实, 若$f(n)$是有界函数, 且级数$\sum_{n=1}^{n}\frac{f(n)}{n}$收敛, a是使任意的n都有$n+af(n)\neq 0$, 则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n+af(n)}$.
这是因为

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{f(n)}{n+af(n)}=\sum_{n=1}^{m}\frac{f(n)}{n}+\sum_{n=1}^{m}\frac{-af^2(n)}{n(n+af(n))}$$

后一个和式用比较判别法. □

问题 1.5.41: http://math.stackexchange.com/questions/273559

判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n)}{n}$的敛散性.

解. 比较判别法, $[k\pi+\frac{\pi}{6},(k+1)\pi-\frac{\pi}{6}]$中总有至少一个整数.
或用$\sum\frac{\sin^2(n)}{n}=\sum\frac{1}{2n}-\sum\frac{\cos(2n)}{2n}$, 前者发散, 后者用Dirichlet判别法. □

问题 1.5.42: http://math.stackexchange.com/questions/991652

证明$\int_0^1\left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right|\,\mathrm{d}x$发散.

解. 变量替换, 积分化为$\int_1^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$, 然后在子区间$(k\pi,(k+1)\pi)$上求下界. □

问题 1.5.43: http://math.stackexchange.com/questions/620449

证明: 求$p\in\mathbb{R}$, 使积分$\int_0^{\infty}\frac{x^p}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$发散.

解. $p\geq -1$. □

问题 1.5.44: http://math.stackexchange.com/questions/596511

计算

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

12

解. 用Frullani积分. 结果为log2. 或用重积分: $\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}=x\int_1^2\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. 这里给出Frullani积分证明过程的做法.

$$\begin{aligned}\int_a^b\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x&=\int_a^b\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{2a}^{2b}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\left(\int_a^b-\int_{2a}^{2b}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\left(\int_a^{2a}-\int_b^{2b}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\to\log(2)-0,\quad a\to0,b\to\infty\end{aligned}$$

上式最后一步用$\mathrm{e}^{-2c}\log(2)\le\int_c^{2c}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\le\mathrm{e}^{-c}\log(2)$. □

问题 1.5.45: http://math.stackexchange.com/questions/590774

已知$a>b>0$, 求$\lim_{t\to0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)$.

解. 注意到$\Gamma(t)=a^t\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-as}}{s^{1-t}}\,\mathrm{d}s$, 所以

$$\lim_{t\to0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$$

然后用Frullani积分算得$\log\frac{a}{b}$. □

问题 1.5.46: http://math.stackexchange.com/questions/590774

已知$a>b>0$, 求$\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$.

解. 可以用Frullani积分. 这里用含参积分求导的方法, 定义$I(t)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-tx}}{x}\,\mathrm{d}x$, 被积函数记为$f(x,t)$, 由$f(x,t)$和$f_t(x,t)$在定义域均连续, $I(t)$关于t收敛且$\int_0^\infty f_t(x,t)\,\mathrm{d}x$关于$t$一致收敛, 则满足积分号下求导条件, 所以$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{a}$, $I=-\log t$. □

解.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx&=\lim_{\epsilon\to0}\int_\epsilon^\infty\frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx\\&=\lim_{\epsilon\to0}\left[\int_\epsilon^\infty\frac{\exp(-ax)}{x}dx-\int_\epsilon^\infty\frac{\exp(-bx)}{x}dx\right]\\&=\lim_{\epsilon\to0}\left[\int_{a\epsilon}^\infty\frac{\exp(-t)}{t}dt-\int_{b\epsilon}^\infty\frac{\exp(-t)}{t}dt\right]\\&=\lim_{\epsilon\to0}\int_{a\epsilon}^{b\epsilon}\frac{\exp(-t)}{t}dt=\lim_{\epsilon\to0}\int_a^b\frac{\exp(-\epsilon u)}{u}du\end{aligned}$$

最后的被积函数一致收敛到$\frac{1}{u}$. □

解. 用Laplace变换, $F(s)=\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 则

$$F(s)=\int_0^\infty\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}e^{-sx}dx\implies F'(s)=-\int_0^\infty(e^{-bx}-e^{-ax})e^{-sx}dx.$$

计算最后一个积分, 然后求积分并令$s\to0$, 其中积分出来的积分常数用极限$\lim_{s\to\infty}F(s)=0$计算. □

问题 1.5.47: http://math.stackexchange.com/questions/164400

求$\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}x=\log t$, 其中$t>0$.

解. 让$u=\mathrm{e}^{-x}$, 得

$$\int_0^1\frac{u^{t-1}-1}{\log u}\,\mathrm{d}u=\int_0^1\int_1^t u^{s-1}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u=\int_1^t\int_0^1 u^{s-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s=\log t.$$

□

13

解. 同1.5.46的解法一. □

解. 用重积分求解, $I(t)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\int_1^t \mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x$. 这里验证积分次序可交换, 则

$$LHS=\int_1^t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s=\ln t.$$

□

解. 用Laplace变换, $g(s)=L[f(x)]=L\left[\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\right]$, 则$-g'(s)=L[xf(x)]=\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}$. 所以$g(s)=\log\frac{s+b}{s+a}+c$, 由于$g(\infty)=0$, 所以$c=0$. 从而

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x=\log\frac{s+b}{s+a}.$$

令$s=0$即可. □

解. 用Laplace变换, $L[1]=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{s}$, 则

$$LHS=\int_0^\infty\int_0^\infty(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt})\mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+t}\right)=\ln\frac{s+1}{s+t}\Big|_0^\infty=\ln t$$

□

问题 1.5.48

求积分

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left|\sin^2 x-a\right|\,\mathrm{d}x.$$

解. 当$a\le 0$时, 设$a=-t$,

$$\begin{aligned}
I(a)&=\int_0^{\pi/2}\ln\left(t+\sin^2 x\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\pi/2}\left[\ln\left(\sin^2 x\right)+\int_0^t\frac{1}{s+\sin^2 x}\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}x\\
&=-\pi\ln 2+\int_0^t\int_0^{\pi/2}\frac{1}{s+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s\\
&=-\pi\ln 2+\frac{\pi}{2}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{s(1+s)}}\,\mathrm{d}s\\
&=-\pi\ln 2+\pi\,\mathrm{arctanh}\sqrt{\frac{-a}{1-a}}.
\end{aligned}$$

当$a\ge 1$时, 取$a=t+1$, 同上面的解法

$$\begin{aligned}
I(a)&=\int_0^{\pi/2}\ln\left(t+\cos^2 x\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\pi/2}\left[\ln\cos^2 x+\int_0^t\frac{1}{s+\cos^2 x}\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}x\\
&=-\pi\ln 2+\pi\cdot\mathrm{arctanh}\sqrt{\frac{t}{1+t}}=-\pi\ln 2+\pi\cdot\mathrm{arctanh}\sqrt{\frac{a-1}{a}}.
\end{aligned}$$

当$0<a<1$时,

$$I(a)=\frac14\int_0^{2\pi}\ln\left|a-\sin^2 x\right|\,\mathrm{d}x=\frac14\int_0^{2\pi}\ln\left|\frac{1-2a}{2}-\frac{\cos 2x}{2}\right|\,\mathrm{d}x.$$

令$\cos 2\alpha=2a-1$, 则

$$I(a)=\frac14\int_0^{2\pi}\ln\left|\frac{\cos 2\alpha+\cos 2x}{2}\right|\,\mathrm{d}x=\frac14\int_0^{2\pi}\ln\left|\cos(x+\alpha)\cos(x-\alpha)\right|\,\mathrm{d}x=\frac12\int_0^{2\pi}\ln|\cos x|\,\mathrm{d}x=-\pi\ln 2.$$

□

14

问题 1.5.49: http://tieba.baidu.com/p/2686576086

设$f(x)$在实轴$\mathbb{R}$上有二阶导数, 且满足方程

$$2f(x)+f''(x)=-xf'(x).$$

求证$f(x)$和$f'(x)$都在$\mathbb{R}$上有界.

解. 构造$L=f^2+\frac{1}{2}f'^2$, 研究L'. 方程可改成$f''(x)+\frac{x}{2}f'(x)+f(x)=0$. □

问题 1.5.50: http://tieba.baidu.com/p/3846349760

证明: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

解. 由于$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 且$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调增加, 则$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$, 于是$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, 从而$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)>\ln n$, 即得. □

问题 1.5.51: http://tieba.baidu.com/p/4931607145

设$f(x)$在$[a,b]$上可导, $f'(x)$在$[a,b]$上可积. 令

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\cdot\frac{b-a}{n}\right)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

试证

$$\lim_{n\to\infty}nA_n=\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)].$$

解. 令$x_i=a+i\cdot\frac{b-a}{n}$, 则

$$\begin{aligned}nA_n&=n\left[\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n}-\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\&=n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x\\&=n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

在$[x_{i-1},x_i]$上, (x_i-x)保号, 而$g(x)=\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}$连续(补充定义$g(x_i)=f'(x_i)$). 由积分第一中值定理知, 存在$\eta_i\in(x_{i-1},x_i)$, 使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x=g(\eta_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x.$$

再由Lagrange中值定理, 以上$g(\eta_i)=\frac{f(x_i)-f(\eta_i)}{\eta_i-x}=f'(\xi_i)$, $(\xi_i\in(\eta_i,x_i)\subset(x_{i-1},x_i))$. 于是

$$\begin{aligned}nA_n&=n\sum_{i=1}^{n}f'(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x=\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})^2\\&=\frac{n}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n}f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\\&\to\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)),\text{当}n\to\infty.\end{aligned}$$

□

问题 1.5.52

$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{64}\sqrt[4]{2}\pi.$

问题 1.5.53

求证:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8}$$

解. 让$f(y)=\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 yx}{x^3}\,\mathrm{d}x$, 判断积分号下可求导, 有

$$f''(y) = \frac{3}{4}\int_0^{\infty}\frac{-\sin yx + 3\sin 3yx}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}\operatorname{sign} y.$$

□

解. 用$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi-x}{2}$, 由

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\sin^3(kx)}{k^3} = \frac{9\sin(3kx)-3\sin(kx)}{4k}.$$

则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9\sin(3kx)-3\sin(kx)}{4k} = \frac{3\pi}{4}-3x.$$

积分后得:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^3(kx)}{k^3} = \frac{3\pi}{8}x^2-\frac{1}{2}x^3.$$

取$x=\frac{1}{n}$后两边同乘n^2得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n} = \frac{3\pi}{8}-\frac{1}{2n}.$$

而广义 Riemann 和显示

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n} = \int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

广义 Riemann 和成立的条件是 $\sum_{k=0}^{\infty}\sup_{x\in[k,k+1]}|f'(x)|<\infty$? 这不等式蕴含 $\int_0^{\infty}|f'|\,\mathrm{d}x<+\infty$, $f'\in L^1(0,\infty)$. □

解. 用 Parseval 定理

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(s)G(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中$F(s)=\mathscr{F}[f]$, $G(s)=\mathscr{F}[g]$, $\mathscr{F}[f]=\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\,\mathrm{d}x$. 若$f(x)=\frac{\sin x}{x}$, 则

$$F(s)=\begin{cases}\pi, & |s|\le 1\\ 0, & |s|>1,\end{cases}$$

若$g(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$, 则

$$G(s)=\begin{cases}\pi\left(1-\dfrac{|s|}{2}\right), |s|\le 2\\ 0, |s|>2,\end{cases}$$

所以$\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\pi^2\left(1-\frac{|s|}{2}\right)\mathrm{d}s = \frac{3\pi}{4}$. 即$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{8}$. □

解. 用 Laplace 变换 $F(s)=\mathscr{L}[f]=\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 对于$f(x)=\frac{\sin^3 x}{x^3}$有

$$F(s)=\frac{\pi s^2}{8}+\frac{3\pi}{8}-\frac{3(s^2-1)}{8}\arctan s+\frac{s^2-9}{8}\arctan\frac{s}{3}+\frac{3s}{8}\ln\frac{s^2+1}{s^2+9}.$$

□

16

解. 用 Laplace 恒等式

$$\int_0^\infty F(u)g(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^\infty f(u)G(u)\,\mathrm{d}u, F(s)=\mathscr{L}[f(t)], G(s)=\mathscr{L}[g(t)].$$

让 $G(u)=\frac{1}{u^3}$ 得 $g(u)=\frac{u^2}{2}$, 让 $f(u)=\sin^3 u$ 得 $F(u)=\frac{6}{(u^2+1)(u^2+9)}$, 则

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{6}{2}\int_0^\infty \frac{u^2}{(u^2+1)(u^2+9)}\,\mathrm{d}u=\frac{3\pi}{8}.$$

□

解. 留数定理, 由 $\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4}$ 得 $\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4x^3}\,\mathrm{d}x$. 围道 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$, $\gamma_1=[r,R]$, γ_2 是以 $(0,0)$ 为心 R 为径的上半圆, $\gamma_3=[-R,-r]$, γ_4 为以 $(0,0)$ 为心 r 为径的上半圆, γ 取逆时针方向为正方向. 取 $f(z)=\frac{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}z}}{z^3}$, 则 f 在 γ 内解析, 由 Cauchy-Goursat 公式

$$\oint_\gamma f(z)=0, \tag{1.1}$$

并用 Laurent 展开或留数定理得

$$\int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z=-\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}, \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z=0, \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}}\int_{\gamma_1\cup\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z=2\mathrm{i}\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x.$$

代入1.1即得. □

问题 1.5.54

设函数$f:(a,b)\to\mathbb{R}$连续可微, 又设对于任意的$x,y\in(a,b)$, 存在唯一的$z\in(a,b)$使得$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(z)$. 证明: $f(x)$严格凸或严格凹.

解. 反证法, 构造λ的函数

$$\Lambda(\lambda)=f(\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta)-\lambda f(\alpha)-(1-\lambda)f(\beta),\quad \lambda\in(0,1)$$

若结论不真, 则存在$\alpha,\beta\in(a,b)$使$\Lambda(\lambda)$在$(0,1)$的某两点异号, 由于f连续, 所以存在$\lambda_0\in(0,1)$使$\Lambda(\lambda_0)=0$.

设$\gamma=\lambda_0\alpha+(1-\lambda_0)\beta$, 则$\gamma\in(\alpha,\beta)\subset(a,b)$且 $\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$. 再由拉格朗日中值定理得出矛盾. □

17

问题 1.5.55

设函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上无限可微, 且:

a) 存在$L>0$, 使得对于任意的$x\in\mathbb{R}$及$n\in\mathbb{N}$有$|f^{(n)}(x)|\le L$.

b) $f\left(\frac{1}{n}\right)=0$, 对所有$n=1,2,3\cdots$.

求证: $f(x)\equiv 0$.

解. 由f在$\mathbb{R}$上无限次可微, 且由a)知f有在$x=0$处的Taylor展开

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots.$$

设N是使$f^{(N)}(0)\neq 0$的最小者, 取正整数$M>1$使$|f^{(N)}(0)|>\frac{L}{M-1}$. 则

$$\begin{aligned}
0=\left|f\left(\frac{1}{M}\right)\right|&=\left|f^{(N)}(0)\frac{x^N}{N!}+f^{(N+1)}(0)\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}+\cdots\right|\\
&\ge|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-L\left(\frac{1}{(N+1)!M^{N+1}}+\frac{1}{(N+2)!M^{N+2}}+\cdots\right)\\
&\ge|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-L\left(\frac{1}{N!M^{N+1}}+\frac{1}{N!M^{N+2}}+\cdots\right)\\
&=|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-\frac{L}{N!}\frac{1}{M^{N+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{M}}\\
&=\left(|f^{(N)}(0)|-\frac{L}{M-1}\right)\frac{1}{N!M^N}>0.
\end{aligned}$$

这导致矛盾, 即所有$f^{(n)}(0)=0$, $f(x)\equiv 0$. □

18

19

Chapter 2

数学分析 - 梅加强

梅加强的大名在我上本科的时候就已经听说了, 现在去读他写的书到第二章的时候突然感受到他被奉为巨佬的原因, 不同于国内大多数数学分析教科书惯有的教学顺序, 这本书先讲掉了定积分再引进的导数, 不得不说国内这么干的, 这是我见过的第一本(虽然我也没读过几本国内大学自行出版的教材, 好在北大, 中科大的等等都大概翻过). 写这一小段文字只是突发感慨, 因为在读此之前确实也见过别的教科书这么干, 比如柯朗的《微积分和数学分析引论》也是先引入的积分再引入的导数, 这种与原来按部就班的学习形成对比, 微分和积分是实数完备性发展出来的两条支线, 最后在微积分基本定理它们融合了.

2.1 NULL

2.2 数列极限

定义 2.2.1

给定序列$\{a_n\}$, 实数$A \in \mathbb{R}$, 如果

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), s.t. \forall n > N, |a_n - A| < \epsilon,$$

就称$a_n \to A$, $n \to \infty$. 反面表述序列$a_n \not\to A$:

$$\exists \epsilon > 0, s.t. \forall N = N(\epsilon), \exists n > N, |a_n - A| \geq \epsilon.$$

如果

$$\forall A > 0, \exists N, s.t. \forall n > N, a_n > A,$$

则称$a_n \to +\infty$. 如果

$$\forall A < 0, \exists N, s.t. \forall n > N, a_n < A,$$

则称$a_n \to -\infty$. 如果

$$\forall A > 0, \exists N, s.t. \forall n > N, |a_n| > A,$$

则称$a_n \to \infty$.

性质 (极限的性质) 1. 序列极限如果存在, 必然唯一.

2. 序列极限收敛于有限实数, 必然有界. (这个性质可以弱化, 比如允许序列前几项中有∞出现, 这时本条的序列极限性质可以表述为, 从某项开始序列有界)

3. 保序性, 当$a_n \to A$, $b_n \to B$, $a_n \geq b_n$, 则$A \geq B$. 不等式$a_n \geq b_n$可以换成$a_n > b_n$.

2.2.1 求极限的方法

求极限没有通用方法, 不要有能学到通用方法的任何期待. 我们所能做的只有从最简单的方法到最复杂的方法进行逐个尝试.

$\epsilon - N$法

也就是定义法, 这个方法要求事先知道所求极限为何, 然后套用这一框架. 方法比较基本, 不再举例.

夹逼原理

这也是一个求解框架, 找到满足$a_n \le b_n \le c_n$, 且$a_n \to A$, $c_n \to A$的上下界来求解b_n的极限.

单调有界原理

主要用于求解抽象型极限问题.

例**2.2.3** 设$a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$, $n \ge 1$, 求a_n的极限.

求解递推公式的极限问题常用不动点法先找到极限是什么. 也就是求解$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$, 得到$x = \pm 1$.

注意到$a_1 > 0$, 所以数列的每一项$a_n > 0$. 并计算

$$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2a_n}(a_n - 1)^2 \ge 0 \Longrightarrow a_{n+1} \ge 1, \quad \forall n \ge 1.$$

这表明当$n \ge 2$时, $\frac{1}{a_n} \le 1 \le a_n$, 所以

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \le a_n.$$

序列$\{a_n\}$从第二项起单调递减, 有下界1. 递推方程的正不动点只有$x = 1$, 所以$a_n \to 1$.

事实上, 对于递推公式型极限问题也可以尝试求解它的通项公式, 比如

$$\frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1} + 1} = \left(\frac{a_n - 1}{a_n + 1}\right)^2.$$

重要极限

e相关

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \forall n \ge 1.$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 \le \left(\frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

$$\left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n = \left(\frac{n^2}{n^2 - 1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2 - 1} > 1 + \frac{1}{n} \Longrightarrow \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Bernoulli不等式

$$x \ge -1 \Longrightarrow (1 + x)^n \ge 1 + nx,$$

等号当且仅当$x = 0$取到. 推广形式

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \ge 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

其中$x_k \ge 0$. 注意, 这里给出的两种Bernoulli不等式的前提条件不同, 后者不能是$x_k \ge -1$, 因为$(1 - x)(1 + x) = 1 - x^2 \le 1$.

Euler常数

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

例**2.2.7** 求

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right).$$

1. 单调上升有上界.
2. $H_{2n} - H_n = \ln 2n - \ln n + o(1)$.
3.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1 + x}\,\mathrm{d}x.$$

4. Euler求和公式

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln \frac{2n}{n+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n}\right) - \int_1^n \frac{\langle x \rangle}{(n+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

21

Stirling公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad \theta_n \in (0,1).$$

上下极限

这种方法也常用于求解抽象型序列极限问题.

序列收敛的一个充要条件是, 序列的上下极限相等.

定义

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right), \quad \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$$

命题**2.2.4** 1. 存在N_0, 当$n > N_0$时, $a_n \geq b_n$, 则

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \geq \liminf_{n\to\infty} b_n, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

2.

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

例**2.2.12** 设序列(a_n), $a_n \geq 0$, 满足$a_{m+n} \leq a_m + a_n$, $\forall m, n \geq 1$. 证明$\left(\frac{a_n}{n}\right)$收敛.

证明: 设$n > m$, 则$n = mk + l$, 其中$0 \leq l \leq m-1$.

对于任意固定的m, 有

$$a_n = a_{mk+l} \leq k a_m + a_l \Longrightarrow \frac{a_n}{n} \leq \frac{k a_m}{km+l} + \frac{a_l}{n}.$$

不等式两边同时取上极限

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_m}{m}.$$

所以

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \liminf_{m\to\infty} \frac{a_m}{m}.$$

Cauchy收敛准则

定义 序列(a_n), 如果$\forall \epsilon > 0$, $\exists N = N(\epsilon)$, s.t. $\forall m, n > N$, $|a_m - a_n| < \epsilon$, 则称(a_n)为Cauchy列.

其它表述: $\forall \epsilon > 0$, $\exists N = N(\epsilon)$, s.t. $\forall n > N$, $\forall p > 0$, $\left|a_{n+p} - a_n\right| < \epsilon$.

反面描述: $\exists \epsilon_0 > 0$, s.t. $\forall N$, $\exists m_0, n_0 > N$, 使得$\left|a_{m_0} - a_{n_0}\right| \geq \epsilon_0$.

Cauchy列均有解. (这里仍然可以允许序列的前几项可以取∞, 此时Cauchy除了开始的有限项外是有界序列).

序列(a_n)收敛当且仅当(a_n)是Cauchy列.

习题**2** 设序列(a_n)满足

$$\lim_{n\to\infty}\left|a_{n+p} - a_n\right| = 0, \quad \forall p \geq 1.$$

问(a_n)是否是Cauchy列?

$a_n = H_n$就是反例.

Stolz公式

定理**2.4.2** 设序列(x_n), (y_n), 其中y_n单调上升趋向∞, 若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A.$$

22

注**:** 和洛必达法则的情况一样, 当

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$$

不存在时,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$$

仍可能存在.

定理**2.4.3** 设(y_n)单调下降趋向于0, $(x_n)\to 0$, 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=A,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=A.$$

注 条件$(x_n)\to 0$是必要的, 比如$x_n\equiv C$是一个矛盾.

例**2.1.15** 设$\lim_{n\to\infty}a_n=A$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=A.$$

这个例子有多种证法, 使用Stolz公式只需一步.

例**2.4.3** 设$x_1\in(0,1)$, $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$, $\forall n\geq 1$. 证明$nx_n\to 1$, $n\to\infty$.

证明**:** 单调收敛证明$x_{n+1}<x_n$. 假设极限为x, 则$x=x(1-x)$, 解的$x=0$. 所以$x_n\to 0$, $n\to\infty$.

从递推公式得到

$$\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}=\frac{1}{1-x_n}\to 1,\quad n\to\infty.$$

由Stolz公式

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^{-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{x_n^{-1}-x_{n-1}^{-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{1-x_{n-1}}}=1.$$

不用**Stolz**公式的证法 和上面一样, x_n单调收敛到0, 且有$x_{n+1}^{-1}-x_n^{-1}=\frac{1}{1-x_n}\to 1$, $n\to\infty$. 则

$$\frac{1}{nx_n}=\frac{x_n^{-1}}{n}=\frac{\left(x_n^{-1}-x_{n-1}^{-1}\right)+\left(x_{n-1}^{-1}-x_{n-2}^{-1}\right)+\cdots+\left(x_2^{-1}-x_1^{-1}\right)+x_1^{-1}}{n}\to\lim_{n\to\infty}\left(x_n^{-1}-x_{n-1}^{-1}\right)=1.$$

上面最后一步用到了例2.1.15.

习题**2** 设 $\lim_{n\to\infty}n\,(a_n-A)=B, k$ 为正整数, 则

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_1+2^ka_2+\cdots+n^ka_n}{n^{k+1}}-\frac{A}{k+1}\right)=\frac{B}{k}+\frac{A}{2}.$$

pf.

23

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)(a_1+\cdots+n^k a_n)-n^{k+1}A}{(k+1)n^k} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)\left((n+1)^k a_{n+1}\right)-\left((n+1)^{k+1}-n^{k+1}\right)A}{(k+1)\left((n+1)^k-n^k\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)\left[n^k+\binom{k}{1}n^{k-1}+o\left(n^{k-1}\right)\right]a_{n+1}-\left(\binom{k+1}{1}n^k+\binom{k+1}{2}n^{k-1}+o(n^{k-1})\right)A}{(k+1)\left(\binom{k}{1}n^{k-1}+o(n^{k-1})\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)\left[n+\binom{k}{1}+o(1)\right]a_{n+1}-\left(\binom{k+1}{1}n+\binom{k+1}{2}+o(1)\right)A}{(k+1)\left(\binom{k}{1}+o(1)\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\boldsymbol{(k+1)}\,(n+\boldsymbol{k}+o(1))\,\boldsymbol{a_{n+1}}-\left((k+1)n+\frac{k(k+1)}{2}+o(1)\right)A}{(k+1)\,(k+o(1))}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\,(a_{n+1}-A)}{k+o(1)}-\frac{\frac{k(k+1)}{2}A}{(k+1)(k+o(1))}+\frac{\boldsymbol{k(k+1)a_{n+1}}+o(1)\cdot(a_{n+1}-A)}{(k+1)(k+o(1))}\right)\\
&= \frac{B}{k}-\frac{A}{2}+A
\end{aligned}
$$

其中

$$\lim_{n\to\infty}n(a_n-A)=B\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=A+\lim_{n\to\infty}(a_n-A)=A+\lim_{n\to\infty}\frac{n(a_n-A)}{n}=A+\lim_{n\to\infty}\frac{B}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{n(a_n-A)-B}{n}=A+0+0$$

习题**6** 设 $a_1=1, a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2a_n}$, 证明 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=1$, (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-n}{\ln n}=\frac{1}{4}$.

pf. (2) 由Stolz公式

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-n}{\ln n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2-a_n^2-1}{\ln(n+1)-\ln n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2-a_n^2-1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}
\end{aligned}
$$

这启发我们去简化$a_{n+1}^2-a_n^2$项, 由递推公式

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2a_n}\Longrightarrow a_{n+1}^2-a_n^2=\frac{a_{n+1}+a_n}{2a_n}=\frac{a_n+\frac{1}{2a_n}+a_n}{2a_n}=1+\frac{1}{4a_n^2}\Longrightarrow a_{n+1}^2-a_n^2-1=\frac{1}{4a_n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2-a_n^2-1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4a_n^2}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n^2}=\frac{1}{4}.$$

习题**8** 设 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+2}-a_n)=A$, 证明 (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{A}{2}$, (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{n}=0$.

pf. (1) 用stolz公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}-a_n}{(n+2)-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}-a_n}{2}=\frac{A}{2}.$$

(2) 用stolz公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+3}-a_{n+1}-(a_{n+2}-a_n)}{(n+2)-n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+3}-a_{n+1}}{2}-\frac{a_{n+2}-a_n}{2}\right)=\frac{A}{2}-\frac{A}{2}=0.$$

若y_n单调上升趋于无穷, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+k}-x_n}{y_{n+k}-y_n}=A,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=A.$$

24

习题**9** 设$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=A$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=A.$$

Stolz公式不是万能的, 比如

习题**15** 设

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=B,$$

则

$$\frac{1}{n}(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)=AB.$$

证明**:** 设$a_n=A+\alpha_n$, $b_n=B+\beta_n$, 则问题不妨在$A=B=0$时证明即可. 其实

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(AB+A\beta_{n+1-k}+B\alpha_k+\alpha_k\beta_{n+1-k}\right)\\&=AB+\frac{A}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_k+\frac{B}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_{n+1-k}\\&=AB+A\cdot o(1)+B\cdot o(1)+M\cdot o(1)=AB+o(1).\end{aligned}$$

上式最后用到收敛序列有界的结论.

2.3 连续函数

2.3.1 函数的极限

设$x_0\in\mathbb{R}$, $\delta>0$, $(x_0-\delta,x_0+\delta)$称为x_0的开邻域.
$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$称为$x_0$的去心开邻域.

定义**3.1.1** 设$f(x)$定义在x_0的某个去心开邻域上, 若$\exists A\in\mathbb{R}$, s.t. $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\epsilon,x_0)\in(0,\delta_0)$, 当$0<|x-x_0|<\delta$时, 有

$$\left|f(x)-A\right|<\epsilon.$$

则称$f(x)$在x_0处有极限A, 记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,\ \text{or}\ f(x)\to A,\ x\to x_0.$$

注**:** 去心邻域说明$f(x)$在$x=x_0$处可能没有定义.
可以类似的定义左右极限.

命题**3.1.1** f在x_0处有极限的充要条件是f在x_0的左右极限存在且相等.

命题**3.1.2** (夹逼原理) 设在x_0的一个空心领域内有

$$f_1(x)\le f(x)\le f_2(x).$$

若f_1, f_2在x_0处的极限存在且等于A, 则$f(x)$在x_0处极限为A.

命题**3.1.3** (极限唯一性) 函数极限存在必然唯一.
$\epsilon-\delta$语言是证明函数极限的最简单框架, 其难点仅在于对不等式的掌握情况, 比如重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

对应不等式

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

同样类似地给出涉及无穷大与无穷远时的函数极限的定义.

25

习题**12** 设 f,g 为两个周期函数, 如果 $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$, 则 $f=g$.
注: f,g的周期比可能是无理数, 所以$f-g$可能不是周期函数.
pf. 设f的周期为T, g的周期为S. 则

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= f(x+nT)-g(x+nS) \\ &= f(x+nT)-g(x+nT) \\ &\quad + g(x+nT+nS)-f(x+nS+nT) \\ &\quad + f(x+nS)-g(x+nS) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x+nT)-g(x+nT) \\ &\quad + \lim_{n\to\infty} g(x+nT+nS)-f(x+nS+nT) \\ &\quad + \lim_{n\to\infty} f(x+nS)-g(x+nS) \\ &= 0+0+0. \end{aligned}$$

习题**13** 设 $\lim_{x\to0}f(x)=0, \lim_{x\to0}\frac{1}{x}[f(2x)-f(x)]=0$, 证明 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$.
pf. $\forall\epsilon>0, \exists X>0$, s.t. $\forall x>X$, $\left|f(x)\right|<\epsilon$, 且

$$\left|f(2x)-f(x)\right|\le\epsilon x.$$

所以

$$\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|\le\epsilon x.$$

令$n\to\infty$即可.

2.3.2 函数极限的性质

定理3.1.5 (Heine, 归结原则**)** 设f定义在x_0的某个去心领域上, f在x_0处极限为A的充要条件是$\forall x_n\to x_0$, $(n\to\infty)$, 且$x_n\ne x_0$, $(\forall n)$, 均有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

证明**:** $\Longrightarrow$: 是容易的; $\Longleftarrow$: 用反证法, 则

$$\exists\epsilon_0>0,\ s.t.\ \forall\delta>0,\ \exists x_\delta,\ s.t.\ 0<|x_\delta-x_0|<\delta,$$

但$\left|f(x_\delta)-A\right|\ge\epsilon_0$. 取$\delta=\frac{1}{n}$, 构造子列$(x_n)\to x_0$, 但$\left|f(x_n)-A\right|\ge\epsilon_0$. 矛盾.
Heine定理可改述为: $f(x)$在x_0处有极限当且仅当, $\forall x_n\to x_0$, $(x_n\ne x_0)$, $\lim_{n\to\infty}f(x_n)$存在.

定理3.1.6 (Cauchy准则**)** 设f在x_0的空心领域上有定义, 则f在x_0处有极限, iff, $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$, s.t. 当$0<\left|x'-x_0\right|<\delta$, $0<\left|x''-x_0\right|<\delta$时, 有

$$\left|f(x')-f(x'')\right|<\epsilon.$$

注**:** 对于无穷远处极限有限时, Cauchy准则仍然成立.
给出Cauchy准则的否定表述.

定理3.1.7 (单调有界原理) 设f定义在$(x_0-\delta,x_0)$上, 若f单调上升有上界, 或f单调下降有下界, 则f在x_0有左极限.

定理3.1.8 (1). (局部有界原理) 若f在x_0处有有限极限, 则f在x_0的某空心领域内有界.
(2). (保序性)

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,\ \lim_{x\to x_0}g(x)=B,\ f(x)\ge g(x),\Longrightarrow A\ge B.$$
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,\ \lim_{x\to x_0}g(x)=B,\ A>B,\Longrightarrow\exists U^\circ_{x_0}\ s.t.\ f(x)>g(x),\ \forall x\in U^\circ_{x_0}.$$

(3). (四则运算)

26

定理3.1.9 (复合函数极限) 设$f(y)\to A$, $y\to y_0$; $g(x)\to y_0$, $x\to x_0$, 且$\exists U^\circ_{x_0}$, s.t. $\forall x\in U^\circ_{x_0}$, $g(x)\neq y_0$, 则$f(g(x))\to A$, $x\to x_0$.

这个定理说明极限定义中去心领域的重要性, 定理中$y_0\notin g(U^\circ_{x_0})$不可以弱化为: 存在收敛于$x_0$的序列$(x_n)$, 使得$g(x_n)\neq y_0$, $\forall n$. 比如

$$f(y)=\begin{cases}1, & y\neq 0,\\ 0, & y=0,\end{cases}\quad g(x)\equiv 0,\ y_0=0.$$

当f在y_0处连续时, 这个去心领域的条件又可以去掉, 这说明研究连续函数是有价值的.

2.3.3 无穷小量与无穷大量的阶

定义3.2.1 (无穷小量与无穷大量) 若函数f在x_0处的极限是0, 则称f在$x\to x_0$时为无穷小量, 记为$f(x)=o(1)$, $(x\to x_0)$; 若$x\to x_0$时, $|f|\to+\infty$, 则称f在$x\to x_0$时为无穷大量.

在无穷远处也可以定义无穷小量和无穷大量, 数列也可以定义无穷小量和无穷大量.

定理3.2.1 (等价代换) 设$x\to x_0$时, $f\sim f_1$, $g\sim g_1$, 若$\frac{f_1}{g_1}$在x_0处有极限, 则$\frac{f}{g}$在x_0处有极限, 且极限相等.

几个常用的等价代换:

$$\tan x\sim\sin x\sim x\sim e^x-1\sim\ln(1+x).$$

无穷小量的性质: 习题4. 设$f(x)=o(1)$, $(x\to x_0)$, 证明, 当$x\to x_0$时, 有

(1) $o(f(x))+o(f(x))=o(f(x))$.
(2) $o(cf(x))=o(f(x))$, 其中c是常数.
(3) $g(x)\cdot o(f(x))=o(f(x)g(x))$, 其中$g(x)$是有界函数.
(4) $[o(f(x))]^k=o\left(f^k(x)\right)$.

2.3.4 连续函数

用来刻画连续变化的量

定义3.3.1 (连续性) 若f在x_0的某领域上有定义, 且f在x_0处的极限是$f(x_0)$, 则称f在点x_0处连续, x_0称为f的连续点. 类似地可以定义左右连续. 在定义域上每一点都连续的函数称为连续函数.

f在x_0处下半连续: $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, 当$|x-x_0|<\delta$时, 总有$f(x)>f(x_0)-\epsilon$.

f在x_0处上半连续: $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, 当$|x-x_0|<\delta$时, 总有$f(x)<f(x_0)+\epsilon$.

连续函数的基本性质: (1). 保持四则运算;

(2). 若f,g连续, 则$\max\{f,g\}$和$\min\{f,g\}$均连续.

定理3.3.2 (复合函数连续性) 设f在y_0处连续, $g(x)\to y_0$, $x\to x_0$, 则

$$\lim_{x\to x_0}f(g(x))=f\left(\lim_{x\to x_0}g(x)\right)=f(y_0).$$

当g在x_0处连续时, $f(g(x))$在x_0处连续.

定义3.3.2 设x_0是$f(x)$的间断点, 如果$f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$均存在且有限, 则称x_0是第一类间断点, 否则, 称为第二类间断点. 按照左右极限不相等和相等来区分跳跃间断点和可去间断点.

命题3.3.3 设$f(x)$在$[a,b]$上单调, $x_0\in(a,b)$是$f(x)$的间断点, 则x_0是跳跃间断点.

命题3.3.4 设$f(x)$定义在区间I上的单调函数, 则$f(x)$的间断点至多可数.

证明: 间断点x与开区间$\left(f(x_0-0),f(x_0+0)\right)$一一对应且至多可数.

命题3.3.5 若$f(x)$定义在区间I上严格单调, 则$f(x)$连续当且仅当$f(I)$也是区间.

证明: $\Longrightarrow$: 用介值定理. $\Longleftarrow$: 反证法, 则有x_0使得$\left(f(x_0-0),f(x_0+0)\right)$不在区间$f(I)$内, 矛盾.

27

推论**3.3.6** 定义在区间I上的严格单调连续函数$f(x)$一定可逆, 且其逆严格单调连续.

2.3.5 闭区间上连续函数的性质

依赖实数系的基本性质

定理**3.4.1 (**有界性定理**)** 设$f \in C[a,b]$, 则f在$[a,b]$上有界.

证法一**:** 反证法, 取$\left|f(x_n)\right| \geq n$, 由聚点定理$\Longrightarrow x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$, f连续使得$f(x_{n_k}) \to f(x_0)$有界, 矛盾.

证法二**:** 连续点x处有领域$U_x(\delta_x)$, 使得其上$\left|f - f(x)\right| \leq 1$, 这样的$(U_x)$形成$[a,b]$的覆盖, 用有限覆盖定理.

定理**3.4.2 (**最值定理**)** 设$f(x) \in C[a,b]$, 则$f(x)$在$[a,b]$上取到最值.

证法一**:** f有界, $[a,b]$闭, 所以逼近上确界的点列$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$, 再由f连续得到最值点.

证法二**:** 反证法, 设$f < M := \sup f$, 构造$F(y) = \frac{1}{M-f(y)} \in C[a,b]$, 同样有界$F(y) < K$, $K > 0$, 则$\frac{1}{M-f(y)} < K$得出

$$\sup_x f(x) = M > f(y) + \frac{1}{K} \Longrightarrow \sup_x f(x) \geq \sup_y f(y) + \frac{1}{K} > \sup_x f(x).$$

一般区间上连续函数最值判别法:

命题**5.1.3** 设$f \in C(\mathbb{R})$, 且

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ (或} -\infty).$$

则f在$\mathbb{R}$上达到最小(大)值.

定理**3.4.3 (**零点定理**, Bolzano)** 设$f \in C[a,b]$, $f(a)f(b) < 0$, 则存在$\xi \in (a,b)$, s.t. $f(\xi) = 0$.

证法一**:** 区间二分法+区间套定理.

证法二**:** 用连续函数的保号性, 构造

$$A = \left\{x \in [a,b] : f(x) < 0\right\},$$

取$\xi = \sup A$, 则有$x_n \in A$, $x_n \to \xi$, $f(x_n) < 0$, 所以$f(\xi) \leq 0$. 反之, 在(ξ,b)上$f \geq 0$, 取$x_n \downarrow \xi$, 则$f(x_n) \geq 0 \Longrightarrow f(\xi) = 0$.

定理**3.4.4 (**介值定理**)** 设$f \in C[a,b]$, μ严格介于$f(a)$与$f(b)$之间, 则存在$\xi \in (a,b)$, s.t. $f(\xi) = \mu$.

推论**3.4.5** 设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数, 则$f([a,b]) = [m,M]$, 其中m,M是f在$[a,b]$上的最小值, 最大值.

推论**3.4.6** 设区间I上, $f(x) \in C(I)$, 则$f(I)$是区间. (可以退化为单点集)

注**:** 区间I可以无界, 可以是开集.

推论**3.4.7** 设$f(x)$是区间I上的连续函数, 则$f(x)$可逆的充要条件是$f(x)$严格单调.

2.3.6 一致连续性

定义**3.4.1 (**一致连续**)** 设$f(x)$定义在区间I上, 若$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$, s.t. 当$x_1, x_2 \in I$, $|x_1 - x_2| < \delta$时, 有$\left|f(x_1) - f(x_2)\right| < \epsilon$, 则称$f(x)$在$I$中一致连续.

否定表述: $f(x)$在I中不一致连续: $\exists \epsilon_0 > 0$, 以及(a_n), $(b_n) \subseteq I$, 且$a_n - b_n \to 0$, $(n \to \infty)$. 有$\left|f(a_n) - f(b_n)\right| \geq \epsilon_0$.

定理**3.4.9 (Cantor**定理**)** 闭区间上, 连续函数一致连续.

28

证法一: (反证), $\exists\epsilon_0>0$, (a_n), $(b_n)\subseteq[a,b]$, $a_n-b_n\to 0$, $n\to\infty$, 且$\left|f(a_n)-f(b_n)\right|\ge\epsilon_0$. 用聚点定理取$(b_n)$的收敛子列$b_{n_k}\to x_0\in[a,b]$, 则$a_{n_k}\to x_0$, 取极限.

证法二: 用连续性构造有限覆盖开集.

定义3.4.2 (振幅, 连续性模) 设$f(x)$在x_0的开邻域内有定义, 称

$$\omega_f(x_0,r)=\sup\left\{\left|f(x')-f(x'')\right|: x',x''\in B_{x_0}(r)\right\},\quad r>0.$$

为f在(x_0-r,x_0+r)上的振幅, 显然, $\omega_f(x_0,r)$关于$r\to 0+$递减, 故

$$\omega_f(x_0)=\lim_{r\to 0+}\omega_f(x_0,r)$$

存在, (不一定有限). 称为f在点x_0处的振幅.

注: 定义提到的是两种振幅, 分别表征函数f在"区间"上和在"一点"上的振幅.

命题3.4.10 $f(x)$在x_0处连续的充要条件是$\omega_f(x_0)=0$.

命题3.4.11 $f(x)$在I中一致连续的充要条件是

$$\lim_{r\to 0+}\omega_f(r)=0,$$

其中

$$\omega_f(r)=\sup\left\{\left|f(x')-f(x'')\right|:\forall x',x''\in I,\ \left|x'-x''\right|\le r\right\}.$$

2.3.7 连续函数的积分

积分定义: 设$f\in C[a,b]$, 直线$x=a$, $x=b$, $y=0$与曲线$f(x)$的图像在平面上所围成图形的面积用$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$来表示, 称为$f$在$[a,b]$上的积分.

命题3.5.1 设$f\in C[a,b]$, $f_n(x)$是分段线性函数, 是将$[a,b]$进行n等分, 分点$x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)$, 在$x\in[x_{i-1},x_i]$时

$$f_n(x)=l_i(x)=f(x_{i-1})+\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}(x-x_{i-1}).$$

则$\forall\epsilon>0$, $\exists N=N(\epsilon)$, 当$n>N$时,

$$\left|f(x)-f_n(x)\right|<\epsilon,\quad \forall x\in[a,b].$$

即$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$. 进而

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{1}{2}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\cdot\frac{b-a}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i.\end{aligned}$$

积分的基本性质 约定$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$, $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(1) (线性性) $f,g\in C[a,b]$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 则

$$\int_a^b\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 若$\left|f(x)\right|\le M$, $\forall x\in[a,b]$, 则

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le M(b-a).$$

29

(3) (保序性) 若$f \geq g$, $f, g \in C[a,b]$, 则$\int_a^b f \geq \int_a^b g$. 特别地,

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right|\,\mathrm{d}x.$$

(4) (区间可加性) 设$f \in C(I)$, $a, b, c \in I$, 则

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(5) 若$f(x) \in C[a,b]$, 非负, 则$\int_a^b f(x) \geq 0$, 等号仅当$f \equiv 0$时取到.

例**3.5.4** 设$f \in C[a,b]$, $c \in [a,b]$, 定义$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in [a,b]$, 则F是Lipschitz函数.

证明**:**

$$|F(x_2) - F(x_1)| \leq M\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}t.$$

命题**3.5.2 (**积分中值定理**)** 设$f, g \in C[a,b]$, 若g不变号, 则$\exists \xi \in [a,b]$, s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明**:** 用连续函数介值定理.

例**3.5.10** 设$f \in C[0,a]$, 定义

$$f_0(x) = f(x), \quad f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

证明: 存在$\xi = \xi_{n,x} \in [0,x]$, s.t. $f_n(x) = f(\xi)\frac{x^n}{n!}$.

证明**:**

$$m\frac{x^n}{n!} \leq \int_0^x f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \leq M\frac{x^n}{n!},$$

用介值定理.

例**3.5.12** 求连续函数f满足

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

证明**:** 此题的条件可以弱化为f是可积函数. 取积分

$$\int_0^y f(x+t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^y f(x)\,\mathrm{d}t + \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t,$$

所以

$$\int_0^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t = yf(x) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t.$$

交换x, y的位置即得$yf(x) = xf(y)$, 再取$y = 1$.

例**3.5.15** 设$f \in C[a,b]$, g是周期为T的连续函数, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.3.8 作业

16. 设 $0 < a < b$, $a_1 = a$, $b_1 = b$.

(1) 如果 $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, 则 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛于同一极限.

(2) 如果 $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$, 则 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛于同一极限.

pf. (1). 因为$a_1, b_1 > 0$, 由$a_n, b_n > 0$可以得到,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} > 0,\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} > 0.$$

即由归纳法, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$均是正数数列.

由均值不等式,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \le \frac{a_n + b_n}{2} = b_{n+1}, \quad n \ge 1.$$

又由$a_1 = a < b = b_1$, 故对于任意的$n \in \mathbb{N}$, 有$a_n \le b_n$. 于是

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \le \frac{b_n + b_n}{2} = b_n,$$

知$\{b_n\}$单调递减; 同理, 由

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \ge \sqrt{a_n a_n} = a_n,$$

知$\{a_n\}$单调上升. 于是

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le b_n \le b_{n-1} \le \cdots \le b_1.$$

这说明$\{a_n\}$是单调上升的有界序列, 上界是b_1; $\{b_n\}$是单调下降的有界序列, 下界是a_1.

由于单调有界序列必然收敛, 可设$a_n \to a$, $b_n \to b$, $(n \to \infty)$. 对$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$两边同时取极限$\lim_{n\to\infty}$得到

$$b = \frac{a+b}{2} \Longleftrightarrow a = b.$$

即$\{a_n\}$和$\{b_n\}$收敛于同一极限.

13. 设 $f(x)$ 是 (a,b) 中定义的无第二类间断点的函数, 如果对任意的两点 $x, y \in (a,b)$, 均有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(x) + f(y)],$$

则 f 为 (a,b) 中的连续函数.

pf. 用反证法, 若$f(x)$在(a,b)上不连续, 则存在$x_0 \in (a,b)$, 使得f在x_0处为第一类间断点(因为f没有第二类间断点).

若f在x_0处为跳跃间断点, 则$f(x_0-0)$和$f(x_0+0)$均存在且不相等, 不妨设$f(x_0-0) < f(x_0+0)$, 取$\epsilon < \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{4}$, 则存在$\delta > 0$, 使得对于任何$x \in (x_0 - \delta, x_0)$,

$$f(x_0 - 0) - \epsilon < f(x) < f(x_0 - 0) + \epsilon;$$

且对于任何$y \in (x_0, x_0 + \delta)$,

$$f(x_0 + 0) + \epsilon > f(y) > f(x_0 + 0) - \epsilon.$$

特别的

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{8}\right) = f\left(\frac{x_0 - \frac{\delta}{4} + x_0 + \frac{\delta}{2}}{2}\right) > f(x_0 + 0) - \epsilon > \frac{3f(x_0+0) + f(x_0-0)}{4}.$$

而

$$\frac{1}{2}\left(f\left(x_0 - \frac{\delta}{4}\right) + f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right)\right) < \frac{1}{2}\left(f(x_0-0) + \epsilon + f(x_0+0) + \epsilon\right) \le \frac{3f(x_0+0) + f(x_0-0)}{4},$$

这与

$$f\left(\frac{x_0 - \frac{\delta}{4} + x_0 + \frac{\delta}{2}}{2}\right) \le \frac{1}{2}\left(f\left(x_0 - \frac{\delta}{4}\right) + f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right)\right)$$

矛盾.

若f在x_0处是跳跃间断点, 则$f(x_0 \pm 0)$均存在且不等于$f(x_0)$. 取$x = x_0 - t$, $y = x_0 + t$, 并令$t \to 0$, 则

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x_0) \le \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{2} \to \lim_{x \to x_0} f(x), \qquad t \to 0.$$

31

即$f(x_0)<\lim_{x\to x_0}f(x)$. 取$x=x_0$, $y=x_0+t$, 并令$t\to 0+$, 则

$$f\left(\frac{t}{2}+x_0\right)=f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x_0)+f(x_0+t)}{2}\Longrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)\le\frac{f(x_0)+\lim_{x\to x_0}f(x)}{2}\Longrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)\le f(x_0).$$

又矛盾.

15. 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 如果对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$ 均有 $f(x+y)=f(x)f(y)$, 则要么 f 恒为零, 要么存在常数 $a>0$, 使得 $f(x)=a^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

pf. 若f不恒为零, 则由于f连续, f在$\mathbb{R}$上保持符号. 不然则由连续函数的介值定理, 存在x_0使得$f(x_0)=0$, 则对于任意的$x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=f(x_0)f(x-x_0)\equiv 0.$$

与f不恒为零矛盾.

f不能恒为负值, 不然$f(2x)=f(x)^2\Longrightarrow f(2x)>0$导致$f$在$\mathbb{R}$上不再保持符号, 与上述推导矛盾. 所以$f$在$\mathbb{R}$恒为正.

取$g(x)=\ln f(x)$, 由于f的连续性, $g(x)$也是$\mathbb{R}$上的连续函数. 并有

$$g(x+y)=\ln f(x+y)=\ln\big(f(x)f(y)\big)=\ln f(x)+\ln f(y)=g(x)+g(y).$$

由于g连续, 所以$g(x)=g(1)x$. 令$c=g(1)$, $a=f(1)>0$, 即有$\ln f(x)=cx=x\ln f(1)=\ln a^x$, $f(x)=a^x$. (14题的结论是经典结论, 任何时候都可以直接拿来用)

1. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 中连续, 且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$, 则 f 在 $[a,+\infty)$ 中有界, 且最大值和最小值中的一个必定能被 f 达到.

pf1. 考虑函数

$$g(t):=\sup_{x\ge t}f(x),$$

则$g(t)$是$[a,+\infty)$上连续的递减函数. 且

$$\lim_{t\to\infty}g(t)=\limsup_{x\to\infty}f(x)=\alpha.$$

所以$g(t)\ge\alpha$.

如果存在t使得$g(t)>\alpha$, 也即$\sup_{x\ge t}f(x)>\alpha$, 取$\epsilon<\sup_{x\ge t}f(x)-\alpha$, 则有$X>t$, s.t. $\forall x>X$,

$$\left|f(x)-\alpha\right|<\epsilon\Longrightarrow f(x)<\alpha+\epsilon\Longrightarrow\sup_{x>X}f(x)\le\alpha+\epsilon<\sup_{x\ge t}f(x),$$

这说明$f(x)$在$[t,\infty)$上的上确界不可能在$[X,\infty)$上取到, 即

$$\sup_{x\ge t}f(x)=\sup_{t\le x\le X}f(x)\Longrightarrow\sup_{x\ge a}f(x)=\sup_{a\le x\le X}f(x)$$

即$f(x)$在$[a,X]$上存在最大值, 也即$f(x)$在$[a,\infty)$上存在最大值.

若对于任何t, $g(t)=\alpha$. 也即

$$\sup_{x\ge t}f(x)=\alpha,\quad\forall t\ge a.$$

当$f(x)$不为常数时, 则必然有$f(x_0)<\alpha$. 取$\epsilon<\alpha-f(x_0)$, 则有$X>x_0$, s.t. $\forall x>X$

$$\left|f(x)-\alpha\right|<\epsilon\Longrightarrow f(x)>\alpha-\epsilon>f(x_0).$$

所以$f(x)$必然在$[a,X]$中取到最小值.

pf2. $f(x)$在$[a,\infty)$不恒为常数.

因为$f(x)\to\alpha$, $x\to\infty$, 则有点列$\{x_n\}$, 使得$f(x_n)\to\alpha$, $f(x_1)\ne\alpha$(因为f不恒为常数).

因为$f(x_1)\ne\alpha$, 则取$\epsilon<\left|f(x_1)-\alpha\right|$, 有$X>x_1$, s.t. $\forall x>X$,

$$\left|f(x)-\alpha\right|<\epsilon<\left|f(x_1)-\alpha\right|,$$

这意味着在$[a,X]$内存在点x_1的函数值$f(x_1)$远离$(\alpha-\epsilon,\alpha+\epsilon)$.

当$f(x_1)>\alpha$时, $f(x)$在$[a,X]$上存在最大值$M\ge f(x_1)$, 而在(X,∞), $f(x)\le\alpha+\epsilon<f(x_1)\le M$. 最大值存在性得证.

当$f(x_1)<\alpha$时, $f(x)$在$[a,X]$上存在最小值$m\le f(x_1)$, 而在(X,∞), $f(x)\ge\alpha-\epsilon>f(x_1)\ge m$. 最小值存在性得证.

3. 设$b,\alpha>0$, 求积分$\int_0^b x^\alpha\,\mathrm{d}x$, 利用积分计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}.$$

32

8. 设$f\in C[a,b]$, 如果对于任意的$g\in\{g\in C[a,b]:g(a)=g(b)=0\}$, 均有$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0$, 则$f\equiv 0$.
此题类比变分基本定理.
9. 设$f\in C[a,b]$, 如果对于任意的$g\in\left\{g\in C[a,b]:\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=0\right\}$, 均有$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0$, 则$f=C$为常函数.
提示: 设f的平均值为C, 考虑$g=f-C$和g^2的积分.
12. 设$f\in C[a,b]$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b \left|f(x)\right|^n \mathrm{d}x\right)^{1/n}=\max_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|.$$

14. 设$f,g\in C[a,b]$, 且$f,g>0$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_a^b f^{n+1}(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f^n(x)g(x)\,\mathrm{d}x}=\max_{x\in[a,b]}f(x).$$

17. 设$f(x)\in C[0,+\infty)$严格单调递增, 则

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, & x>0,\\ f(0), & x=0\end{cases}$$

也是严格单调递增连续函数.
18. 设$f(x)\in C[a,b]$, $f>0$, 则

$$\lim_{r\to 0+}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^r(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/r}=\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

并用Hölder不等式说明上式左端关于r单调递增.

2.4 微分及其逆运算

2.4.1 可导与可微

研究函数的局部性质

定义4.1.1 (导数) 设f在x_0附近有定义, 如果极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在且有限, 则称f在x_0处可导, 极限称为f在x_0处的导数, 记为$f'(x_0)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.
用$\epsilon-\delta$语言表述.

命题4.1.1 设f在x_0处可导, 则f在x_0处连续.

命题4.1.2 (导数的运算法则) 设f,g在x处可导, 则fg也在x处可导; 对于任意的常数α,β, $\alpha f+\beta g$也在x处可导. 且
(1). $(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$, (线性性);
(2). $(fg)'=f'g+fg'$. (导性).

推论4.1.3 设f,g在x_0处可导, $g(x_0)\neq 0$, 则$\frac{f}{g}$在x_0处也可导, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

可以用导数表述曲线在一点处的切线和法线, 事实上仅仅是用导数给出了切线和法线的定义, 属于先有导数的概念才有的切线和法线的概念.

定义4.1.2 (微分) 设f在点x_0附近有定义, 如果存在常数A, 使得

$$f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+o(x-x_0),$$

则称f在x_0处可微, 线性映射$x\mapsto Ax$称为f在x_0处的微分, 记为$df(x_0)$.

33

命题**4.1.4** 设f在x_0附近有定义, 则f在x_0处可导当且仅当f在x_0处可微, 且微分的斜率就是导数$f'(x_0)$.

可导对应函数在一点差商存在极限, 可微对应函数的局部线性化, 产生线性变换的主项. f在x处的微分是一个斜率为$f'(x)$的线性映射, 当x变化时, 线性映射也变化, 即$x\mapsto df(x)$是一个新的映射, 记为df, 称为f的外微分或全微分.

x的全微分dx把任意点x映为x处的恒等映射.

因为$df(x)$和dx都是线性变换, 所以有$df=f'(x)dx$.

把形如fdx的表达式(f为函数)称为1次微分形式.

可以把微分运算看做升维运算, 把x和dx看做两个独立的变量, dx就是Δx, 它与x的选取无关. df把单变量函数f映射为二元函数$df(x)=f'(x)dx$.

命题**4.1.5** (链式法则) 设g在x_0处可导, f在$g(x_0)$处可导, 则复合函数$f\circ g=f(g)$在x_0处可导, 且

$$\left(f(g)\right)'(x_0)=f'\left(g(x_0)\right)g'(x_0).$$

证明依赖于下式

$$\begin{aligned}f(g(x))&=f\left(g\left(x_0\right)\right)+f'\left(g\left(x_0\right)\right)\left(g(x)-g\left(x_0\right)\right)+o\left(g(x)-g\left(x_0\right)\right)\\&=f\left(g\left(x_0\right)\right)+f'\left(g\left(x_0\right)\right)g'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+f'\left(g\left(x_0\right)\right)o\left(x-x_0\right)+o\left(x-x_0\right)\\&=f\left(g\left(x_0\right)\right)+f'\left(g\left(x_0\right)\right)g'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+o\left(x-x_0\right)\end{aligned}$$

命题**4.1.6** (反函数求导法则) 设f在x_0附近有定义, 且反函数为g. 若f在x_0处可导, 且导数非零, 则g在$y_0=f(x_0)$处可导, 且

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

这个定理并没有要求f在x_0附近每点上都连续. 导数$f'(x_0)\neq 0$的条件不能省掉, 否则考虑$f(x)=x^3$.

命题**4.1.8** 设f,g可微, 则

(1) $d(\alpha f+\beta g)=\alpha df+\beta dg$, 其中$\alpha,\beta$为常数;

(2) $d(fg)=gdf+fdg$;

(3) $d(f/g)=\frac{gdf-fdg}{g^2}$, 其中$g\neq 0$.

命题**4.1.9** 设f,g均可微, 且复合函数$f(g)$有定义, 则

$$d\left(f(g)\right)=f'(g)dg.$$

2.4.2 高阶导数

本节没有太多复杂的知识点, 仅做一些结论的罗列.

定义**4.2.1** (高阶导数) 设f在x_0附近可导, 如果导数f'在x_0处仍可导, 则称f在x_0处2阶可导. 记为

$$f''(x_0)=(f')'(x_0),$$

并称为f在x_0处的2阶导数.

一般地, 如果f在x_0附近n $(n\geq 1)$ 阶可导, 且n阶导函数$f^{(n)}$在x_0处可导, 则称f在x_0处$n+1$阶可导, 记为

$$f^{(n+1)}(x_0)=\left(f^{(n)}\right)'(x_0),$$

称为f的$n+1$阶导数.

注**:** f的2阶导数要求f'在x_0附近有定义, 也就是对于x_0附近的x能够计算$f'(x)$的值. 另有一种用差分方法定义的二阶导数, 比如

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

它避免了计算$f'(x)$, 而且允许一阶导数不存在, 而仅存在二阶导数. 一般用于推广导数的概念.

定义**4.2.2** 若f在区间I上的每点都n阶可导, 则称f在I中n阶可导; 如果f可导, 且导函数f'连续, 则称f(1阶)连续可导, 记为$f\in C^1(I)$; 一般n阶连续可导记为$f\in C^n(I)$. 如果f有任意阶导数, 则称f是光滑的, 记为$f\in C^\infty(I)$.

34

例**4.2.3** 可微函数的导函数不一定连续.

尽管导函数连续性丧失, 但仍有介值定理成立, 也就是Darboux介值定理.

例**4.2.4** 设$k=1,2,\cdots$, 则函数

$$f(x)=\begin{cases} x^{2k+1}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

有$f\in C^k\setminus C^{k+1}$.

例**4.2.5** 证明函数

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0\\ e^{-\frac{1}{x}}, & x>0\end{cases}$$

是光滑函数.

命题**4.2.1** 设f,g均为n阶可导函数, 则

(1) $(\alpha f+\beta g)^{(n)}=\alpha f^{(n)}+\beta g^{(n)}$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$;

(2) (Leibniz)

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)}.$$

2.4.3 不定积分

命题**4.3.1** 设f为区间I上的可微函数, 则$f'=0$当且仅当$f=C$.

此定理使用中值定理证明最为简洁, 书中使用的方法可以归为极端原理.

定义**4.3.1 (**原函数**)** 方程$F'(x)=f(x)$的一个可微解F称为函数f的一个原函数.

定义**4.3.2 (**不定积分**)** 设函数f在区间I上有原函数, 用记号$\int f(x)\,\mathrm{d}x$表示f的原函数的一般表达式, 则

$$\int f(x)dx=F(x)+C,\quad x\in I,$$

其中C为常数.

定理**4.3.2 (Newton-Leibniz)** 区间I中的连续函数都有原函数. 设f连续, $a\in I$, 则

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad x\in I$$

是f的一个原函数.

需要注意Darboux介值定理, 将来会遇到有间断点的可积函数, 其变限积分在间断点处不可微, 所以不能形成一般非连续函数的原函数.

此定理称为微积分基本定理, 它有其它形式:

设$f\in C(I)$, F为f的任一原函数, 则存在常数C, 使得, $F(x)=\int_a^x f(t)dt+C$, 所以

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F\,|_a^b\,.$$

另有一种表述是当G连续可微时,

$$\int_a^b G'(x)dx=G(b)-G(a)=G\,|_a^b\,.$$

上式对于C^1函数总是对的, 但需要注意Volterra函数, 它在定义的区间上处处可导, 且导函数有界, 但导函数不可定积分.

35

命题**4.3.3** (不定积分的线性性质) 设f,g在区间I上均有原函数, 则

$$\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx,$$

其中α,β为常数.

命题**4.3.4** 设f的原函数为F, 若f可逆, 且$g=f^{-1}$, 则

$$\int g(x)dx=xg(x)-F(g(x))+C.$$

2.4.4 积分的计算

命题**4.4.1** (换元积分法**,** 变量替换法) 设$f(u)$是区间J上有定义的函数, $u=\phi(x)$是区间I中的可微函数, 且$\phi(I)\subset J$.

(1) 设f在J上的原函数是F, 则$F(\phi)$是$f(\phi)\phi'$在区间I上的原函数, 即

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx=\int f(u)du+C=F(\phi(x))+C;$$

(2) 设ϕ可逆, 且其逆可微, $\phi(I)=J$. 如果$f(\phi(x))\phi'(x)$有原函数G, 则f有原函数$G(\phi^{-1}(u))$, 即

$$\int f(u)du=G(\phi^{-1}(u))+C.$$

命题**4.4.2** (分部积分法) 设$u(x),v(x)$在区间I中可微, 若$u'(x)v(x)$有原函数, 则$u(x)v'(x)$也有原函数, 且

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx.$$

例**4.4.10** 设$a\neq 0$, 求不定积分$I=\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$和$J=\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$.

例**4.4.18** 求不定积分

$$\int\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx,\qquad 0<r<1.$$

不能用初等函数表述的不定积分:

$$e^{\pm x^2},\sin(x^2),\cos(x^2),\frac{\sin x}{x},\frac{\cos x}{x},\sqrt{1-k^2\sin^2 x},\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}},\ (0<k<1).$$

2.4.5 作业

19. 设$a_{ij}(x)$均为可导函数, 求行列式函数$\det\left(a_{ij}(x)\right)_{n\times n}$的导数.

20. Riemann函数$R(x)$处处不可导.

11. 通过对 $(1-x)^n$ 求导并利用二项式定理证明等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k k^m=\begin{cases}0, & m=0,1,\cdots,n-1,\\(-1)^n n!, & m=n.\end{cases}$$

10. 求不定积分的递推公式 $(a\neq 0)$:

$$I_n=\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

11. 设$a,b>0$, 求不定积分的递推公式:

$$I_{mn}=\int\frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}.$$

7. 设f在$(0,+\infty)$上可导, 且

$$2f(x)=f(x^2),\quad \forall x>0.$$

证明$f(x)=c\ln x$.

36 hint: 设$g(x)=f(\mathrm{e}^x)$. 题目条件可以弱化为f仅在$x=1$处可导.

$$g(x)=\frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x/2^n}x=g'(0)x$$

可导性不能省去, 否则考虑$\max\{0,c\ln x\}$作为函数的另一个解.

2.4.6 简单的微分方程

例4.5.4 微分方程能够解出通解的表达式通常和朗斯基行列式有关.

2.5 微分中值定理和Taylor展开

2.5.1 函数极值

定义**5.1.1** (极值点) 设f定义在I上, $x_0\in I$, 若存在$\delta>0$, s.t.

$$f(x)\geq f(x_0),\qquad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap I,$$

则称x_0是f在I上的极小值点, $f(x_0)$称为极小值.

若$x_0\in I$, 且$\forall x\in I$, $f(x)\geq f(x_0)$, 则称x_0是f在区间I上的最小值点, $f(x_0)$称为函数f在区间I上的最小值.

定理**5.1.1 (Fermat**定理**)** 设x_0是f在I上的极值点, 且x_0是内点, 若f在x_0处可导, 则$f'(x_0)=0$.

注**:** 由于极值点定义是在$(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap I$上给出的, 所以以上定理要加上$x_0$是内点.

证明**:** 使用极限的保号性, 判断

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

的符号.

满足$f'(x_0)=0$的点称为f的驻点, 临界点.

若$f'(x_0)\geq 0$, 则$\exists\delta>0$, s.t. $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, 有$(x-x_0)(f(x)-f(x_0))\geq 0$, 但$f$在$x_0$附近不单调.

定理**5.1.2 (Darboux)** 设f为$[a,b]$上的可导函数, 则f'可以取到$f'_+(a)$和$f'_-(b)$之间的任意值.

证明**:** 设k介于$f'_+(a)$与$f'_-(b)$之间, 定义$g(x)=f(x)-kx$, 则

$$g'_+(a)g'_-(b)=(f'_+(a)-k)(f'_-(b)-k)\leq 0.$$

若上式等于零, 命题显然. 若上式小于零, 不妨设$g'_+(a)>0$, 此时$x=a$不是最大值点; 并有$g'_-(b)<0$, 此时$x=b$不是最大值点.

从而$g(x)$只能在$[a,b]$内取到最大值, 由Fermat定理, 存在$\xi\in(a,b)$, s.t. $g'(\xi)=0$.

注**:** 导函数有介值定理, 但导函数可以不连续, 比如$x^2\sin\frac{1}{x}$, $x\in[-\pi,\pi]$.

Darboux定理说明, 若g'在任何点处不为零, 则g'不变号.

Darboux定理的使用条件必须是区间内每点处可导.

例**5.3.4** 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上二阶可导, 若f有界, 证明: $\exists\xi\in\mathbb{R}$, s.t. $f''(\xi)=0$.

证明**:** (反证法), $\forall x\in\mathbb{R}$, $f''(x)\neq 0$, 由Darboux定理, f''不变号, 从而f'单调.

不妨设f'单调上升, 取$x_0\in\mathbb{R}$, $f'(x_0)\neq 0$. 因为

$$f'(x_0)>0\Longrightarrow f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x}f'(t)\,\mathrm{d}t\geq f'(x_0)(x-x_0)\to+\infty,\quad x\to+\infty,$$

与f有界矛盾; 而且

$$f'(x_0)<0\Longrightarrow f(x_0)-f(x)=\int_{x}^{x_0}f'(t)\,\mathrm{d}t\leq f'(x_0)(x_0-x)\to-\infty,\quad x\to-\infty,$$

也与f有界矛盾.

37

2.5.2 微分中值定理

定理**5.2.1 (Rolle)** 设$f\in C[a,b]$, 在(a,b)上可微, 且$f(a)=f(b)$, 则存在$\xi\in(a,b)$, s.t. $f'(\xi)=0$.

定理**5.2.2 (Lagrange)** 设$f\in C[a,b]$, 在(a,b)上可微, 则存在$\xi\in(a,b)$, s.t.

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

证明是构造性的, 对

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$

使用Rolle定理.

定理**5.2.3 (Cauchy)** 设$f,g\in C[a,b]$, 在(a,b)上可微, 且$\forall x\in(a,b)$, $g'(x)\neq 0$, 则

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证明**:** $(g(a)\neq g(b))$, 对

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))\right]$$

用Rolle定理.

几何意义**:** 定义参数曲线$\overrightarrow{r}(t)=(g(t),f(t))$, $A=\overrightarrow{r}(a)$, $B=\overrightarrow{r}(b)$. 则$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$表示直线$\ell_{AB}$的斜率. Cauchy定理指出, $\exists\xi$使得$\overrightarrow{r}(\xi)$处的切线方向$\overrightarrow{r}'(\xi)\parallel\ell_{AB}$, 而$\overrightarrow{r}'(\xi)=(g'(\xi),f'(\xi))$, 有

$$k_{AB}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

注**:** 由于$\forall x\in(a,b)$, $g'(x)\neq 0$, 由Darboux介值定理$g'(x)$不变号, $g(x)$其实是单调可逆的, 这可以给出另一种证法:

取$A=g(a)$, $B=g(b)$, 不妨设$A<B$, 则$f(g^{-1}(y))\in C[A,B]$, 由复合函数求导与反函数求导法则

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f(g^{-1}(B))-f(g^{-1}(A))}{B-A}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g^{-1}(x))\,|_{x=\zeta}=f'(g^{-1}(\zeta))\cdot\frac{1}{g'(g^{-1}(\zeta))}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

其中$g(\xi)=\zeta\in[A,B]$.

例**5.2.4** 设$f(x)\in C[a,b]$, 在(a,b)二阶可导, 若$f(a)=f(b)=0$, 则对于任意的$c\in[a,b]$, 存在$\xi\in(a,b)$, s.t.

$$f(c)=\frac{f''(\xi)}{2}(c-a)(c-b).$$

证**: (K**值法**)** 设K满足$f(c)=K(c-a)(c-b)$. 则$f(x)-K(x-a)(x-b)$有三个零点a,b,c. 故存在$\xi\in(a,b)$, s.t. $f''(\xi)-2K=0$.

证法二**:** 构造

$$F(x)=f(x)-\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)$$

也有三个零点a,b,c.

注**: Lagrange**插值公式 经过$\left(x_i,f(x_i)\right)_{i=1}^n$的$n-1$次多项式有如下形式

$$p_{n-1}(x)=\sum_{i=1}^n\prod_{j\neq i}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}f(x_i).$$

用K值法证明:

$$f(x)-p_{n-1}(x)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)\prod_{i=1}^n(x-x_i),\quad \xi\in(a,b).$$

38

例**5.2.5** 证明Legendre (勒让德)多项式$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$在$(-1,1)$上有$n$个不同实根, 其中$n \ge 1$.

证明**:** 多项式$\left(x^2-1\right)^n$的直到$n-1$次导数总有± 1作为其零点, 用Rolle定理, 在每次求导时会多出现一个零点.

2.5.3 单调函数

命题**5.3.2** 设$f \in C[a,b]$, 在(a,b)上可微, 则f单调当且仅当f'不变号.

证明**:** $\Longrightarrow$: 用极限的保号性; $\Longleftarrow$: 用Lagrange中值定理.

命题**5.3.3** (反函数定理) 设f为区间I上的可微函数, 若$f' \ne 0$, $\forall x \in I$. 则f可逆且反函数可微.

证明**:** 用反证法+Lagrange定理, f是单射, 从而可逆, 由f连续得到f单调. 并且

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}.$$

命题**5.3.4** 设$\delta > 0$, $f \in C(x_0-\delta, x_0+\delta)$, 在$(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$上可微, 若

$$f'(x) \le 0,\ x \in (x_0-\delta, x_0); \quad f'(x) \ge 0,\ x \in (x_0, x_0+\delta).$$

则x_0为f的极小值点. 反之为极大值点.

命题**5.3.5** 设f在内点x_0处二阶可导, 且$f'(x_0)=0$, 则若$f''(x_0)>0$, 则x_0为f的(严格)极小值点.

证明**:** 有高阶导数的定义要求$f'(x)$在x_0附近可计算, 再由极限保号性, $\exists \delta$使得

$$x \in (x_0-\delta, x_0)\text{时},\ f'(x) < 0,$$

$$x \in (x_0, x_0+\delta)\text{时},\ f'(x) > 0.$$

例**5.3.4** 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上二阶可导, 若f有界, 证明: $\exists \xi \in \mathbb{R}$, s.t. $f''(\xi)=0$.

证明**:** (反证法) 对于任意的$x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \ne 0$. 由Darboux定理, 有f''不变号, 所以f'单调, 不妨设f'单调上升, 取$x_0 \in \mathbb{R}$, $f'(x_0) \ne 0$.
　当$f'(x_0) > 0$时, $f(x)-f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t \ge f'(x_0)(x-x_0) \to +\infty$, $x \to +\infty$. 与f有界矛盾.
　当$f'(x_0) < 0$时, $f(x_0)-f(x) = \int_{x}^{x_0} f'(t)\,\mathrm{d}t \le f'(x_0)(x_0-x) \to -\infty$, $x \to -\infty$. 与f有界矛盾.

2.5.4 凸函数

定义**5.4.1** (凸函数) 设f在I上有定义, 若$\forall a,b \in I$, $a<b$, 有

$$f(x) \le l(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), \quad \forall x \in [a,b].$$

则称f为I中的凸函数; 相应的给出凹函数的定义. 若上式取严格不等号, 则对应严格凸函数.
　定义中的不等式可以等价地写成

$$f(ta+(1-t)b) \le tf(a)+(1-t)f(b), \qquad \forall t \in (0,1).$$

例**5.4.1** 用凸函数证明Young不等式.

证明**:** e^x是凸函数, $p>1$, 且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则

$$ab = e^{\ln ab} = e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q} \le \frac{1}{p}e^{\ln a^p} + \frac{1}{q}e^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

39

定理5.4.1 (Jensen不等式) 设f是定义在I上的函数, 则f凸当且仅当$\forall x_i \in I$, $\lambda_i \geq 0$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 且$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

对比习题3.3的13题.
13: 若f没有第二类间断点, 且$\forall x, y \in (a, b)$均有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

则$f \in C(a, b)$, 由此可证f在(a, b)上是凸的.
这要依赖f的连续性和实数的完备性, 比如考虑证明$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$. 但下面的证明更精巧.

命题5.4.3 设$f \in C(I)$, 则f凸当且仅当$\forall x_1 < x_2 \in I$, 有$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

证明**:** 取$a, b \in I$, 证明$f(x)$在(a, b)上位于$l(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$之下即可.

$$g(x) := f(x) - l(x) \quad x \in [a, b] \Longrightarrow g(x) \in C[a, b].$$

取$M = \max_{x\in[a,b]} g(x) = g(x_0)$, 则当$x_0$靠近$a$时, $x_0 \leq \frac{a+b}{2}$, $2x_0 - a \in [a, b]$. 所以

$$M = g(x_0) = g\left(\frac{a + (2x_0 - a)}{2}\right) \leq \frac{g(a) + g(2x_0 - a)}{2} \leq M,$$

等号成立, 故$M = g(a) = 0$.

推论5.4.4 设f在I上凸, 若f在I内达到最大值, 则f为常数.

证明**:** 设f在x_0达到最大值, 则$\forall a, b \in I$, $\exists t \in (0, 1)$, s.t.

$$x_0 = ta + (1-t)b \Longrightarrow f(x_0) = \max f \leq tf(a) + (1-t)f(b) \leq \max f.$$

等号成立. $f(x_0) = f(a) = f(b)$.

命题 5.4.2 (连续性) 设f在I中凸, 若$[a, b] \subseteq I$, $a, b \in I^\circ$, 则$f \in \mathrm{Lip}[a, b]$, 从而连续.

证明**:** 取$[a, b] \subseteq [a', b'] \subseteq I$, $a', b' \in I^\circ$. 注意使用

$$\left(\frac{f(a) - f(a')}{a - a'} \leq\right) \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(b) - f(y)}{b - y} \leq \frac{f(b') - f(b)}{b' - b}.$$

命题5.4.5 (导数性质) 设f在I中凸, x为I的内点, 则f在x处左右导数存在, 且

$$f'_-(x) \leq f'_+(x).$$

证明**:** 使用单调有界函数的极限存在. 设$x_0 < x_1 < x_2$, 证明: $k_{01} \leq k_{02} \leq k_{12}$.

命题3.3.4 设$f(x)$是定义在区间I上的单调函数, 则f的间断点至多可数.
由上面的命题, 凸函数的不可微点至多可数.

命题5.4.6 设f在I上可微, 则
(1) f凸当且仅当f'单调上升.
(2) f凸当且仅当, $\forall x_0, x \in I$, 有$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

证明**:** (1) $\Longrightarrow$: 同前; $\Longleftarrow$: 用中值定理.

$$a<x<b \Longrightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi_1)\le f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\Longrightarrow f\text{ 凸}.$$

(2) $\Longrightarrow$:

$$x>x_0 \Longrightarrow f'(x_0)\le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0};$$

$$x<x_0 \Longrightarrow f'(x_0)\ge \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x};$$

$\Longleftarrow$:

$$a<x<b \Longrightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\le f'(x)\le \frac{f(b)-f(x)}{b-x}\Longrightarrow f(x)\le \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$$

且$x=\lambda a+(1-\lambda)b$.

命题**5.4.7** 设$f\in C(I)$, 若f'_-存在且单调上升, 则f是凸函数.

证明**:** 设$x_0\in I$, 记$L(x)=f'_-(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, $g(x)=f(x)-L(x)$.
则$g'_-(x)=f'_-(x)-f'_-(x_0)$.

$$\Longrightarrow \begin{cases} x\le x_0 \Longrightarrow g'_-(x)\le 0 \Longrightarrow g(x)\ge g(x_0),\ x\to x_0^- \Longrightarrow g(x)\searrow,\ x\to x_0^-.\\ x\ge x_0 \Longrightarrow g'_-(x)\ge 0 \Longrightarrow g(x)\nearrow,\ x\to x_0^+.\end{cases}$$

所以$\min g=g(x_0)=0$. 所以$f(x)\ge L(x)=f'_-(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, $x\in I$.
设$x_i\in I$, $\lambda_i\ge 0$, $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$, 记$x_0\in\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i$, 所以

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i)\ge f'_-(x_0)\sum_{i=1}^n\lambda_i(x_i-x_0)+f(x_0)\sum_{i=1}^n\lambda_i=f(x_0).$$

命题**5.4.8** 若f在I中二阶可导, 则f凸当且仅当$f''\ge 0$.

2.5.5 函数作图

若$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$或$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$, 则称$x=x_0$为$f$的垂直渐近线.
若

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0 \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0,$$

则称$y=ax+b$为f在无穷远处的渐近线.

2.5.6 L'Hôpital法则

定理**5.6.1 (L'Hôpital**法则**)** 设f,g在(a,b)中可导, 且$g'(x)\ne 0$, $\forall x\in(a,b)$, 又设

$$\lim_{x\to a+}f(x)=0=\lim_{x\to a+}g(x),$$

若极限

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}\text{ 存在(或为}\infty).$$

则

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

41

定理5.6.2 (L'Hôpital法则) 设f,g在(a,b)中可导, 且$g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$, 又设

$$\lim_{x\to a+} g(x)=\infty,$$

若极限

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

存在, (或为∞), 则

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l.$$

证明: 只证明$l<\infty$的情况, $\forall\epsilon>0$, $\exists\eta>0$, s.t.

$$l-\frac{\epsilon}{2}<\frac{f'(x)}{g'(x)}<l+\frac{\epsilon}{2},\qquad \forall x\in(a,a+\eta).$$

取$c=a+\eta$, 由Cauchy中值定理, $\exists\xi\in(x,c)$, s.t.

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\Longrightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\frac{f(c)}{g(x)}-\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\cdot\frac{g(c)}{g(x)},\quad \xi\in(x,c)\subseteq(a,a+\eta).$$

由$\lim_{x\to a+}g(x)=\infty$, 故存在$\delta<\eta$, s.t.

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\epsilon,\qquad \forall x\in(a,a+\delta).$$

注: 当$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在时, $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}$仍然可能存在. 比如求

$$\lim_{x\to 0+}\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

用L'Hôpital法则有如下过程:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0+}\cos\frac{1}{x}$$

不存在, 但是做变量替换$s=\frac{1}{t}$, $y=\frac{1}{x}$之后,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{y\to+\infty}y\int_y^\infty\frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s=y\cdot\left(\frac{1}{2}\int_y^{y+\pi}\frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_{y+\pi}^\infty\frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_y^\infty\frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s\right).$$

显然, $\int_y^{y+\pi}\frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s=O\left(\frac{1}{y^2}\right)$. 而

$$\int_{y+\pi}^\infty\frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s+\int_y^\infty\frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s=\int_y^\infty\cos s\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{(s+\pi)^2}\right)\mathrm{d}s=\int_y^\infty\cos s\left(\frac{2s\pi+\pi^2}{s^2(s+\pi)^2}\right)\mathrm{d}s=O\left(\frac{1}{y^2}\right).$$

所以应当有

$$\lim_{y\to+\infty}y\int_y^\infty\frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s=0.$$

或者对上式用分部积分

$$\int_y^\infty\frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s=\frac{\sin s}{s^2}\Big|_y^\infty+\int_y^\infty\frac{2\sin s}{s^3}\,\mathrm{d}s=-\frac{\sin y}{y^2}+O\left(\int_y^\infty\frac{2}{s^3}\,\mathrm{d}s\right)=O\left(\frac{1}{y^2}\right).$$

再或者用Riemann-Lebesgue引理

$$\lim_{y\to+\infty}y\int_y^\infty\frac{\cos s}{s^2}\,\mathrm{d}s=\lim_{y\to+\infty}\int_1^\infty\frac{\cos yt}{t^2}\,\mathrm{d}t=0.$$

再或者在计算导数前按以下过程分部积分将积分改写为

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^x\cos\left(t^{-1}\right)dt&=-\int_\varepsilon^x t^2\,d\sin\left(t^{-1}\right)\\&=-x^2\sin\left(x^{-1}\right)+\varepsilon^2\sin\left(\varepsilon^{-1}\right)+2\int_\varepsilon^x t\sin\left(t^{-1}\right)dt\\&\xrightarrow{\varepsilon\to 0}-x^2\sin\left(x^{-1}\right)+2\int_0^x t\sin\left(t^{-1}\right)dt.\end{aligned}$$

42

例**5.6.4**　设f在$(a,+\infty)$上可微.

(1). 若$\lim_{x\to+\infty} x\cdot f'(x)=1$, 则$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

(2). 若存在$\alpha>0$, s.t.

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\alpha\cdot f(x)+x\cdot f'(x)\big)=\beta,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\beta}{\alpha}.$$

证明**:**　(1). 当$x\to+\infty$, $\ln x\to+\infty$, 则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{\frac{1}{x}}=1\Longrightarrow f(x)\to+\infty,\ (x\to+\infty).$$

(2). 当$\alpha>0$时, $x^\alpha\to+\infty$, $(x\to+\infty)$, 则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha f(x)}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}f(x)+x^\alpha f'(x)}{\alpha x^{\alpha-1}}=\frac{\beta}{\alpha}.$$

2.5.7　Taylor展开

(1). 若$f(x)$在x_0处连续, 则

$$f(x)-f(x_0)=o(1).$$

(2). 若$f(x)$在x_0处可微, 则

$$f(x)-\big[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\big]=o(x-x_0),\quad (x\to x_0).$$

注意, 这里f在x_0处可微, 但没说在x_0附近可微, 不能用L'Hôpital法则.

(3). 若$f(x)$在x_0处二阶可微, 则

$$f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2\right]=o\big((x-x_0)^2\big),\quad (x\to x_0).$$

定理**5.7.1 (**带**Peano**余项的**Taylor**公式**)**　设f在x_0处n阶可导, 则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),\quad (x\to x_0).$$

证明**:**　(归纳法+中值定理) 记

$$R_n(x)=f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right],$$

则

$$\frac{R_{k+1}(x)}{(x-x_0)^{k+1}}\to\frac{R'_{k+1}(x)}{(k+1)(x-x_0)^k}=\frac{o((x-x_0)^k)}{(k+1)(x-x_0)^k}=o(1).$$

定理**5.7.2 (Taylor)**　设f在(a,b)上$n+1$阶可导, $x_0,x\in(a,b)$. 则存在$\xi,\zeta\in(x,x_0)$或(x_0,x), s.t. Taylor展开的余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

称为Lagrange余项, 以及

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\zeta)(x-\zeta)^n(x-x_0),$$

称为Cauchy余项.

43

证明: 取

$$F(t)=f(t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,\quad t\in(a,b).$$

对t求导, 得到

$$F'(t)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n.$$

所以

$$F(x)-F(x_0)=R_n(x).$$

Cauchy余项: 用Lagrange中值定理, $\exists\zeta=x_0+\theta(x-x_0)$, $(0<\theta<1)$, s.t.

$$R_n(x)=F'(\zeta)(x-x_0).$$

Lagrange余项: 用Cauchy微分中值定理, $\exists\xi=x_0+\eta(x-x_0)$, $(0<\eta<1)$, s.t.

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}.$$

上面的证明给出Taylor展开的积分余项公式

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

应用 证明:

$$\int_0^1(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

证明: 设$f(x)=(1+x)^{2n+1}$, $f(x)$在$x=0$处Taylor展开:

$$(1+x)^{2n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}x^k+\frac{1}{n!}\int_0^x\frac{(2n+1)!}{n!}(1+t)^n(x-t)^n\,\mathrm{d}t,$$

令$x=1$, 所以

$$\int_0^1(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

这个积分可以换元法求解:

$$\int_0^1(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{2n+2}{2}\right).$$

定理**5.7.4 (Taylor**系数的唯一性**)** 设f在x_0处n阶可导, 且

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\quad(x\to x_0),$$

则

$$a_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0),\quad k=0,1,\cdots,n.$$

证明: 给出Taylor展开的Peano余项表示, 两者作差比阶.

44

命题**5.7.5** 设$f(x)$在$x=0$处的Taylor展开为$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则

(1). $f(-x)$的Taylor展开为$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^n$;
(2). $f(x^k)$的Taylor展开为$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn}$, 其中$k\in\mathbb{N}_+$;
(3). $x^k f(x)$的Taylor展开为$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n}$, 其中$k\in\mathbb{N}_+$;
(4). $f'(x)$的Taylor展开为$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$;
(5). $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$的Taylor展开为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$;
(6). 如果$g(x)$在$x=0$处的Taylor展开为$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, 则$\lambda f(x)+\mu g(x)$的Taylor展开为$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)x^n$, 其中$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

$$\ln(1-x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}\right)-\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

$$\arctan x=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)+(-1)^n\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{i}}{2}\ln\frac{1-\mathrm{i}x}{1+\mathrm{i}x}.$$

例**5.7.5** Taylor展开收敛, 但不收敛到函数本身的例子.

定义

$$\phi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x>0.\end{cases}$$

在$x=0$处展开的Taylor级数恒为0.

2.5.8 Taylor公式和微分学的应用

Thm. 5.8.1 (函数极值的判断) 设f在x_0处n阶可导, 且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\ne 0,$$

则

(1). n为偶数, 若$f^{(n)}(x_0)<0$, 则x_0为极大值点; 若$f^{(n)}(x_0)>0$, 则x_0为极小值点.
(2). n为奇数时, x_0不是极值点.

Thm. 5.8.2 (Jensen不等式的余项) 设$f\in C[a,b]$, 在(a,b)上二阶可导. 当$x_i\in[a,b]$, $(1\le i\le n)$时, $\exists\xi\in(a,b)$, s.t.

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)-\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)=-\frac{1}{2}f''(\xi)\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j(x_i-x_j)^2,$$

其中$\lambda_i\ge 0$, $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$.

证明**:** 记

$$\overline{x}=\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\in[a,b].$$

则

$$f(x_i)=f(\overline{x})+f'(x)(x_i-\overline{x})+\frac{1}{2}f''(\xi_i)(x_i-\overline{x})^2,\quad \xi_i\in(a,b).$$

所以

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)=f(\overline{x})+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(\xi_i)\lambda_i(x_i-\overline{x})^2.$$

而

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \lambda_i\lambda_j(x_i-x_j)^2.$$

所以

$$\frac{m}{4}\sum_{i,j=1}^n \lambda_i\lambda_j(x_i-x_j)^2\le\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)-f(\overline{x})\le\frac{M}{4}\sum_{i,j=1}^n \lambda_i\lambda_j(x_i-x_j)^2.$$

用Darboux定理.

用于求极限

45

例**5.8.1** 求
$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right].$$

解**:**
$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\quad(x\to\infty),$$
所以
$$x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}+o(1)\to\frac{1}{2}(x\to\infty).$$

例**5.8.2** 设f在0附近二阶可导, 且$|f''|\le M$, $f(0)=0$, 则
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2}f'(0).$$

解**:**
$$f\left(\frac{k}{n^2}\right)=f(0)+f'(0)\frac{k}{n^2}+R_{k,n},$$
其中
$$\left|R_{k,n}\right|=\frac{1}{2}\left|f''\left(\xi_{k,n}\right)\right|\left(\frac{k}{n^2}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}M\frac{k^2}{n^4},$$
所以
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)&=f'(0)\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}R_{k,n}\\&=f'(0)\frac{n+1}{2n}+o(1)\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

Stirling公式
$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}},\quad 0<\theta_n<1.$$

2.5.9 作业

8. 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上可微, 且$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=A$, $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=B$. 证明, 如果$A\ne B$, 则任给$\theta\in(0,1)$, 都有$\xi\in\mathbb{R}$, 使得
$$f'(\xi)=\theta A+(1-\theta)B.$$

9. 设$f(x)$在区间I中n阶可微, $x_1,x_2,\cdots,x_k$为I中的点. 证明存在$\xi\in I$, s.t.
$$\frac{1}{k}\left(f^{(n)}(x_1)+f^{(n)}(x_2)+\cdots+f^{(n)}(x_k)\right)=f^{(n)}(\xi).$$

10. 设$f(x)$在区间I中可微, $x_0\in I$. 如果$\lim_{x\to x_0}f'(x)$存在, 则$f'(x)$在x_0处连续.
11. 设$f(x)$在(a,b)中可微, 如果$f'(x)$为单调函数, 则$f'(x)$在(a,b)中连续.
3. 设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导, 且$f(a)=f(b)=0$, $f'_+(a)f'_-(b)>0$. 证明: 存在$\xi\in(a,b)$, s.t. $f''(\xi)=0$.
6. 设$f(x)$为$[a,b]$上的三阶可导函数, 且$f(a)=f'(a)=f(b)=0$, 证明, 对于任意的$c\in[a,b]$, 存在$\xi\in(a,b)$, s.t.
$$f(c)=\frac{f'''(\xi)}{6}(c-a)^2(c-b).$$

8. 设$f(x)$在区间$[a,b]$上可导, 且存在$M>0$, 使得
$$\left|f'(x)\right|\le M,\quad\forall x\in[a,b].$$

证明:
$$\left|f(x)-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|\le\frac{M}{2}(b-a),\quad\forall x\in[a,b].$$

46

10. 设f在(a,b)上可微, 且$a<x_i\le y_i<b$, $i=1,2,\cdots,n$. 证明: 存在$\xi\in(a,b)$, s.t.

$$\sum_{i=1}^{n}[f(y_i)-f(x_i)]=f'(\xi)\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i).$$

11. 设f在$[a,+\infty)$上可微, 且

$$f(a)=0,\quad \left|f'(x)\right|\le\left|f(x)\right|,\quad \forall x\in[a,+\infty).$$

证明: $f\equiv 0$.

提示考虑$A=\left\{x\in[a,+\infty):f(x)=0\right\}$和$\sup A$.

11. 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上二阶可导, 若

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{|x|}=0,$$

则存在$\xi\in\mathbb{R}$, 使得$f''(\xi)=0$.

用Darboux定理

12. 设$f(0)=0$, $f'(x)$严格单调递增, 则$\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上也严格单调递增.

11. 证明, 定义在$\mathbb{R}$上的有界凸函数是常数函数.

12. 设$f(x)\in C(I)$, 若$\forall x_0\in I$, $\exists\delta>0$, s.t. $f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$上凸, 则$f(x)$在I中凸.

13. 设f为区间I上的凸函数, x_0为I的内点. 若$f'_-(x_0)\le k\le f'_+(x_0)$, 则

$$f(x)\ge k(x-x_0)+f(x_0),\quad \forall x\in I.$$

并证明Jensen不等式.

15. 设$f\in C[a,b]$凸, 证明Hadamard不等式

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

16. (Schwarz symmetric derivative, Riemann derivative) 设$f\in C(\mathbb{R})$, 若$\forall x\in\mathbb{R}$, 均有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=0,$$

证明$f(x)$为线性函数.

连续性是必要的, 否则考虑符号函数. 这个极限不能被改善成

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}=0,$$

这只需要改变符号函数在0点处的值为1, 使其在0点处右连续.

提示: 证明$\forall\epsilon>0$, $f(x)+\epsilon x^2$是凸的, $f(x)-\epsilon x^2$是凹的, $f(x)$在$[a,b]$上位于直线$[f(a)+\epsilon a^2, f(b)+\epsilon b^2]$与直线$[f(a)-\epsilon a^2, f(b)-\epsilon b^2]$之间.

6. 是否存在$\mathbb{R}$上的凸函数, 使得$f(0)<0$, 且

$$\lim_{|x|\to+\infty}(f(x)-|x|)=0\,?$$

5. 设f在点x_0处2阶可导, 且$f''(x_0)\ne 0$. 由微分中值定理, 当h充分小时, 存在$\theta=\theta(h)$, $(0<\theta<1)$, s.t.

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0+\theta h)h,$$

证明:

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}.$$

7. 设$f(x)$在$(a,+\infty)$中可微, 且

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+f'(x)\right]=l,$$

证明:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=l.$$

9. 设$f''(x_0)$存在, $f'(x_0)\ne 0$, 求极限

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-\frac{1}{f'(x_0)(x-x_0)}\right].$$

47

10. 设$a_1\in(0,\pi)$, $a_{n+1}=\sin a_n$, $(n\geq 1)$. 证明:
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n=\sqrt{3}.$$

2. 设 $f(x)$ 是 x 的 n 次多项式, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的Taylor展开的 Peano 余项 $R_n(x)$ 恒为零. (提示: 考虑其它余项公式.)

10. 设 $f(x),g(x)$ 在 $(-1,1)$ 中无限次可微, 且
$$\left|f^{(n)}(x)-g^{(n)}(x)\right|\leq n!|x|,\quad \forall x\in(-1,1), n=0,1,2,\cdots.$$
证明 $f(x)=g(x)$.

12. 设 f 在 x_0 附近可以表示为
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\left(x-x_0\right)^k+o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)\quad\left(x\to x_0\right),$$
则 $f(x)$ 是否在 x_0 处 n 阶可导?

13. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f'(a)=f'(b)=0$. 证明, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得
$$\left|f''(\xi)\right|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

4. 设 $f(x)$ 在 x_0 的一个开邻域内 $n+1$ 次连续可微, 且 $f^{(n+1)}\left(x_0\right)\neq 0$, 其 Taylor 公式为
$$f\left(x_0+h\right)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)h+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}\left(x_0+\theta h\right)h^n,$$
其中 $0<\theta<1$. 证明 $\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$.

8. 设 $a_1\in\mathbb{R}, a_{n+1}=\arctan a_n(n\geqslant 1)$. 求极限 $\lim_{n\to\infty}na_n^2$.

10. 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导, 且
$$M_0=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|<\infty,\quad M_2=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f''(x)\right|<\infty.$$
证明 $M_1=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f'(x)\right|<\infty$, 且 $M_1^2\leqslant 2M_0\cdot M_2$. (提示: 考虑 $f(x\pm h)$ 的 Taylor 展开.)

2.6 Riemann积分

2.6.1 Riemann可积

设定义在$[a,b]$区间上的函数$f(x)$, 将$[a,b]$分割为
$$\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$
近似第i个小梯形的面积为$f(\xi_i)\Delta x_i$, 其中$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. 用$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$表示曲边梯形ABCD的面积的近似值, 称为$f$在$[a,b]$上的Riemann和. 若
$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$
存在, 其中$\|\pi\|=\max_{1\leq i\leq n}\{\Delta x_i\}$为分割的模. 则记为$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

定义6.1.1 (Riemann积分) 设f定义在$[a,b]$上, 若存在$I\in\mathbb{R}$, s.t. $\forall\epsilon>0, \exists\delta>0$, 对任何分割$\pi$, 只要$\|\pi\|<\delta$, 就有
$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\epsilon,\quad\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i],\ i=1,2,\cdots,n,$$
则称f在$[a,b]$上Riemann可积或可积, I为f在$[a,b]$上的(定)积分, 记为
$$I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$
其中f称为被积函数, $[a,b]$称为积分区间, a,b分别称为积分下限与积分上限.

48

定理**6.1.1** (可积的必要条件) 若f在$[a,b]$上可积, 则f在$[a,b]$上有界, 反之不然.

有界函数未必可积: Dirichlet函数$D(x)$, 对于任意的分割$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \setminus \mathbb{Q}$, 积分和为0; 当$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \cap \mathbb{Q}$时, 积分和为1. 所以$D(x)$的积分和没有极限.

对于分割

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

记

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

令

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i, \quad s = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i,$$

称S是f关于π的Darboux上和, 简称上和, 记为$S(\pi)$或$S(\pi, f)$. s称为Darboux下和, 简称下和, 记为$s(\pi)$或$s(\pi, f)$.

称

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

为f在$[x_{i-1}, x_i]$上的振幅. 则

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \Delta x_i.$$

引理**6.1.2** 设分割π'是从π添加k个分点得到的, 则

$$\begin{aligned} S(\pi) \geqslant S\left(\pi'\right) \geqslant S(\pi) - (M - m) k \|\pi\|, \\ s(\pi) \leqslant s\left(\pi'\right) \leqslant s(\pi) + (M - m) k \|\pi\|. \end{aligned}$$

即, 对于给定的分割, 增加分点时下和不减, 上和不增.

证明**:** 只需要对$k = 1$进行即可.

推论**6.1.3** 对于任何两个分割π_1和π_2, 有

$$s(\pi_1) \leq S(\pi_2).$$

定理**6.1.4 (Darboux)**

$$\lim_{\|\pi\| \to 0} S(\pi) = \inf_{\pi} S(\pi), \quad \lim_{\|\pi\| \to 0} s(\pi) = \sup_{\pi} s(\pi).$$

称$\inf_\pi S(\pi)$为f在$[a,b]$上的上积分, $\sup_\pi s(\pi)$为f在$[a,b]$上的下积分.

定理**6.1.5** (可积的充要条件) 设f在$[a,b]$上有界, 则以下命题等价:

(1) f在$[a,b]$上Riemann可积.

(2) f在$[a,b]$上的上积分和下积分相等.

(3)

$$\lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \Delta x_i = 0.$$

(4) $\forall \epsilon > 0$, 存在$[a,b]$的分割π, s.t.

$$S(\pi) - s(\pi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \Delta x_i < \epsilon.$$

推论**6.1.6** (1) 设$[\alpha, \beta] \subseteq [a,b]$, 如果$f$在$[a,b]$上可积, 则$f$在$[\alpha, \beta]$上也可积.

(2) 设$c \in (a,b)$, 若f在$[a,c]$及$[c,b]$上都可积, 则f在$[a,b]$上可积.

49

例**6.1.1** 设f,g在$[a,b]$上均可积, 则fg在$[a,b]$上也可积.

注意,

$$\begin{aligned}\omega_i(fg) &= \sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]} \left|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')\right| \\ &= \sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]} \left|f(x')g(x')-f(x')g(x'')+f(x')g(x'')-f(x'')g(x'')\right| \\ &\leqslant \sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]} \left[\left|f(x')\right|\left|g(x')-g(x'')\right|+\left|g(x'')\right|\left|f(x')-f(x'')\right|\right] \\ &\leqslant K\left(\omega_i(g)+\omega_i(f)\right),\end{aligned}$$

并用前面的定理6.1.5 (3).

定理**6.1.7** (可积函数类) (1) 若$f\in C[a,b]$, 则f在$[a,b]$上可积;

(2) 若有界函数f只在$[a,b]$上有限个点处不连续, 则f可积;

(3) 若f在$[a,b]$上单调, 则f可积.

证明**:** (2) 主要依赖以下不等式

$$\begin{aligned}S(\pi)-s(\pi) &\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+2M\sum_{i=1}^{N}2\rho \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+2M\cdot 2N\rho<\varepsilon.\end{aligned}$$

(3) 主要依赖以下不等式

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\cdot\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)\cdot\Delta x_i \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)\cdot\|\pi\| \\ &= \left(f(x_n)-f(x_0)\right)\|\pi\| \\ &= (f(b)-f(a))\|\pi\|<\varepsilon.\end{aligned}$$

设f为$[a,b]$上定义的函数, 若存在$[a,b]$上的分割

$$\pi: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

使得f在每个小区间(x_{i-1},x_i)上均为常数, 则称f为阶梯函数.

推论**6.1.8** 阶梯函数均为可积函数.

定理**6.1.9 (Riemann)** 设f在$[a,b]$上有界, 则f可积的充要条件是$\forall\epsilon,\eta>0$, 存在$[a,b]$的分割π, s.t.

$$\sum_{\omega_i\geq\eta}\Delta x_i<\epsilon.$$

例**6.1.3** 设$f\in C[a,b]$, ϕ在$[\alpha,\beta]$上可积, $\phi([\alpha,\beta])\subseteq[a,b]$. 则$f\circ\phi$在$[\alpha,\beta]$上仍可积.

证明**:** f 在 $[a,b]$ 上一致连续. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $x,y\in[a,b]$, $|x-y|<\delta$ 时, $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}$. 因为 ϕ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, 则存在 $[\alpha,\beta]$ 的分割 $\pi:\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta$, 使得

$$\sum_{\omega_i(\phi)\geqslant\delta}\Delta t_i<\frac{\varepsilon}{4K+1},$$

其中 $K=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\omega_i(f\circ\varphi)\cdot\Delta t_i &= \sum_{\omega_i(\phi)\geqslant\delta}\omega_i(f\circ\varphi)\cdot\Delta t_i+\sum_{\omega_i(\phi)<\delta}\omega_i(f\circ\varphi)\cdot\Delta t_i \\ &\leqslant 2K\cdot\sum_{\omega_i(\phi)\geqslant\delta}\Delta t_i+\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}\cdot\sum_{\omega_i(\phi)<\delta}\Delta t_i \\ &\leqslant 2K\cdot\frac{\varepsilon}{4K+1}+\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}\cdot(\beta-\alpha)<\varepsilon.\end{aligned}$$

两个可积函数的复合不可积的例子:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}\quad g(x)=R(x)\Longrightarrow f\circ g(x)=D(x).$$

可积函数复合连续函数不可积的例子:

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

设A为$[0,1]$上有正测度的类Cantor集, (a_i,b_i), $(i\in\mathbb{N}_+)$为A的邻接区间.

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 1-\frac{1}{2}(b_i-c_i)+\left|x-\frac{1}{2}(a_i+b_i)\right|, & x\in(a_i,b_i),\ i\in\mathbb{N}_+.\end{cases}$$

则

$$f\circ g(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\in[0,1]\setminus A.\end{cases}$$

定理**6.1.10 (Lebsegue)** 有界函数f在$[a,b]$上Riemann可积的充要条件是它的不连续点集D_f为零测集. 其中$D_f=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_{\frac{1}{n}}$, 而

$$D_\delta=\{x\in[a,b]:\omega(f,x)\ge\delta\},\quad \omega(f,x)=\lim_{r\to 0^+}\sup\{|f(x_1)-f(x_2)|:x_1,x_2\in(x-r,x+r)\cap[a,b]\}.$$

2.6.2 定积分的性质

线性性质, 积分区间可加性, 保号性, 绝对值不等式.

定理**6.2.3** (积分第一中值定理) 设 f,g 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $g(x)$ 不变号, 则存在 μ, $\inf_{x\in[a,b]}f(x)\leqslant\mu\leqslant\sup_{x\in[a,b]}f(x)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\cdot\int_a^b g(x)dx.$$

引理 **6.2.4.** 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 令

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad x\in[a,b],$$

则 F 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

注: 尽管这个变限积分常被用来和Newton-Leibnitz公式混用来求定积分, 但是这并不表示F是f的原函数. 根据导函数的介值定理, 如果F是f的原函数, 则f不能有间断点, 这对于可积函数f是条件不足的.

定理 **6.2.5** (积分第二中值定理**).** 设 f 在 $[a,b]$ 上可积.

(1) 如果 g 在 $[a,b]$ 上单调递减, 且 $g(x)\geqslant 0$, $\forall x\in[a,b]$, 则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\cdot\int_a^\xi f(x)dx.$$

(2) 如果 g 在 $[a,b]$ 上单调递增, 且 $g(x)\geqslant 0$, $\forall x\in[a,b]$, 则存在 $\eta\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)\cdot\int_\eta^b f(x)dx.$$

(3) 一般地, 如果 g 为 $[a,b]$ 上的单调函数, 则存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\cdot\int_a^\zeta f(x)dx+g(b)\cdot\int_\zeta^b f(x)dx.$$

例 **6.2.2.**

51

设 $\beta \geqslant 0, b > a > 0$, 证明

$$\left|\int_a^b e^{-\beta x}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leqslant \frac{2}{a}.$$

证明. 对 $g(x) = \frac{e^{-\beta x}}{x}$, $f(x) = \sin x$ 用积分第二中值公式, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b e^{-\beta x}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{e^{-\beta a}}{a}\cdot\int_a^\xi \sin x dx = \frac{e^{-\beta a}}{a}(\cos a - \cos\xi)$$

这说明

$$\left|\int_a^b e^{-\beta x}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leqslant 2\frac{e^{-\beta a}}{a} \leqslant \frac{2}{a}.$$

例 **6.2.3.** 证明 $\lim_{A\to\infty}\int_0^A \frac{\sin x}{x}dx$ 存在.

证明. 在上例中取 $\beta = 0$, 则当 $B > A > 0$ 时, 有

$$\left|\int_0^B \frac{\sin x}{x}dx - \int_0^A \frac{\sin x}{x}dx\right| = \left|\int_A^B \frac{\sin x}{x}dx\right| \leqslant \frac{2}{A} \to 0 \quad (A\to\infty),$$

例**3.5.15** 设$f\in C[a,b]$, g是周期为T的连续函数, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 **6.2.6 (Riemann-Lebesgue)** 设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的可积函数, 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx = 0, \quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = 0.$$

证明. 以第一个极限为例. 因为 f 可积, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 的分割

$$\pi : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f)\Delta x_i < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

又因为 f 有界, 故存在 K, 使得 $|f(x)| \leqslant K$, $\forall x \in [a, b]$. 于是当 $\lambda > \frac{4nK}{\varepsilon}$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx\right| &= \left|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\sin\lambda x dx\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[f(x) - f(x_{i-1})\right]\sin\lambda x dx + \sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})\sin\lambda x dx\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|f(x) - f(x_{i-1})\right|dx + \sum_{i=1}^n\left|f(x_{i-1})\right|\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sin\lambda x dx\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \omega_i(f)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n K\frac{1}{\lambda}|\cos\lambda x_{i-1} - \cos\lambda x_i| \\
&< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{2nK}{\lambda} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

2.6.3 微积分基本公式

定理 **6.3.1 (微积分基本定理).** 设 f 在 $[a, b]$ 上可积, 且在 $x_0 \in [a, b]$ 处连续, 则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 x_0 处可导, 且

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

这个定理说明变限积分是函数f的原函数的条件是f在$[a,b]$上连续, 而不能有第一类间断点. 但第二类间断点是可以有的.

52

定理 **6.3.3 (Newton-Leibniz** 公式**).** 设 F 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $F'=f$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

(此式又写为 $\int_a^b F'(x)dx = F(b)-F(a) = F(x)|_a^b$)

注: 可微函数的导函数不一定是可积的, 如函数

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上可微. 进一步还可以构造导函数有界但不可积的例子.

例 **6.3.2.** 设 f 在 $[a,b]$ 上连续可微, $f(a)=0$, 则

$$\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b \left[f'(x)\right]^2 dx.$$

证明**:**

$$\begin{aligned} f^2(x) = (f(x)-f(a))^2 &= \left[\int_a^x f'(t)dt\right]^2\\ &\leqslant \int_a^x \left[f'(t)\right]^2 dt \int_a^x 1^2 dt \quad (\text{Cauchy}-\text{Schwarz})\\ &\leqslant (x-a)\int_a^b \left[f'(t)\right]^2 dt. \end{aligned}$$

2.6.4 定积分的近似计算

不等式**1** 设f可微, 且$\left|f'(x)\right|\le M$, 则

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\right| \le \frac{M}{4}(b-a)^2.$$

证明**:**

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\right| &= \left|\int_a^b \left(f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)dx\right| = \left|\int_a^b f'(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx\right|\\ &\leqslant \int_a^b \left|f'(\xi)\right|\left|x-\frac{a+b}{2}\right|dx \leqslant M\int_a^b \left|x-\frac{a+b}{2}\right|dx\\ &= \frac{M}{4}(b-a)^2. \end{aligned}$$

不等式**2** 设f二阶可微, 且$\left|f''(x)\right|\le M$, $\forall x\in[a,b]$. 则

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\right| \le \frac{1}{24}M(b-a)^3.$$

证明**:** 用Taylor展开

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

两边积分, 得

$$\int_a^b f(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx,$$

所以

$$\left|\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\right| \leqslant \frac{1}{2}M\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{24}M(b-a)^3.$$

53

注: 使用带积分型余项的Taylor公式

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\int_{\frac{a+b}{2}}^{x}\frac{f''(t)}{1!}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t.$$

两边同时积分得到

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\int_a^b\int_{\frac{a+b}{2}}^{x}f''(t)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x,$$

后者可以通过交换积分次序化简为

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_{\frac{a+b}{2}}^{x}f''(t)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x&=\int_a^b f''(t)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\min\{t-a,b-t\}\,\mathrm{d}t\\&=-\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)\cdot f''(t)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-t)\cdot f''(t)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t\\&=-\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)(f''(t)+f''(a+b-t))\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

所以有下面的恒等式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)-\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)(f''(t)+f''(a+b-t))\,\mathrm{d}t.$$

而

$$\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)(f''(t)+f''(a+b-t))\,\mathrm{d}t\right|\le 2M\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t\right|=\frac{M}{24}(b-a)^3.$$

不等式**3** 设$f\in C[a,b]$, 若f二阶可微, 且$\left|f''(x)\right|\le M,\ \forall x\in[a,b]$, 则

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\right|\le\frac{M}{12}(b-a)^3.$$

证明**:**

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x&=(x-a)f(x)\mid_a^b-\int_a^b(x-a)f'(x)\,\mathrm{d}(x-b)\\&=(b-a)f(b)+\int_a^b(x-b)\left(f'(x)+(x-a)f''(x)\right)\\&=(b-a)f(b)+(x-b)f(x)\mid_a^b-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x\\&=(b-a)(f(b)+f(a))-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\right|=\frac{1}{2}\left|\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{M}{12}(b-a)^3.$$

上面的等式的一些应用, 取$a=n,\ b=n+1$, 则有

$$\int_n^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{f(n)+f(n+1)}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x+n)\,\mathrm{d}x.$$

对n做累和,

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)=\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{f(1)+f(n)}{2}+\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)\sum_{k=1}^{n-1}f''(x+n)\,\mathrm{d}x.$$

54

当取$f(x)=\frac{1}{x}$时, 得到

$$H_n=\ln n+\frac{n+1}{2n}+\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{(x+n)^3}\,\mathrm{d}x=\ln n+O(1).$$

当取$f(x)=\ln x$时, 得到

$$\ln n!=\ln\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)+1-\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(x+n)^2}\,\mathrm{d}x=\ln\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)+O(1),$$

所以极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=C.$$

注: 若$f(x)\in C^4[a,b]$, 则

$$\int_a^b f(x)dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)=\frac{1}{24}\int_a^b f^{(4)}(x)(x-a)^2(x-b)^2dx-\frac{1}{12}(b-a)^2\left[f'(b)-f'(a)\right].$$

关于习题**3** 是否存在常数 C, 使得对于满足条件 $\left|f'''(x)\right|\leqslant M$ 的任意函数 f 有如下估计:

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\right|\leqslant CM(b-a)^4.$$

解: 条件存在. 不等式相当于

$$\frac{1}{2}\left|\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x\right|\le CM(b-a)^4.$$

由于$\left|f'''\right|\le M$, 所以$-M(x-a)\le f''(x)-f''(a)\le M(x-a)$. 所以

$$\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b (x-a)(x-b)(f''(a)-M(x-a))\,\mathrm{d}x=\frac{M}{12}(b-a)^4-\frac{f''(a)}{6}(b-a)^3,$$

$$\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x\ge\int_a^b (x-a)(x-b)(f''(a)+M(x-a))\,\mathrm{d}x=-\frac{M}{12}(b-a)^4-\frac{f''(a)}{6}(b-a)^3.$$

当$f''(a)=0$时, 上面的C存在, 而一般情况的f, 上面的C是不存在的.

当问题加上对于任意的$a,b\in D_f$时, 常数C也是不存在的. 这相当于对于任意的a,b,

$$\frac{1}{2}\left|\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x\right|\le CM(b-a)^4.$$

由介值定理, 存在$\xi\in(a,b)$, s.t.

$$\left|f''(\xi)\right|(b-a)^3\le CM(b-a)^4.$$

令$b\to a^+$, 得到$f''(a)\equiv 0$, 也与f的任意性矛盾.

2.6.5 作业

6. 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的非负可积函数, 且 $\int_0^1 f(x)dx=0$. 证明, 任给 $\varepsilon>0$, 均存在子区间 $[\alpha,\beta]$, 使得 $f(x)<\varepsilon$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且存在常数 $C>0$, 使得 $|f(x)|\geqslant C(a\leqslant x\leqslant b)$. 证 明 $\frac{1}{f}$ 在 $[a,b]$ 上也是可积的.

11. 设 $f(x)>0$ 为 $[a,b]$ 上的可积函数, 证明 $\int_a^b f(x)dx>0$.

2. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上定义的函数. 如果 $f^2(x)$ 可积, 则 $|f(x)|$ 也可积.

6. 设 $f(x)\geqslant 0$ 在 $[a,b]$ 上可积, $\lambda\in\mathbb{R}$, 则

$$\left(\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx\right)^2\leqslant\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2.$$

(提示: $f=\sqrt{f}\cdot\sqrt{f}$, 用Cauchy-Schwarz不等式.)

9. 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数, 则 $\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx=f(1)$. (提示: nx^n 在 $[0,1]$ 上积分趋于 1 , 在 $[0,\delta]$ 上很小, 如果 $0<\delta<1$.)

11. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可积函数, 则任给 $\varepsilon>0$, 存在连续函数 $g(x)$, 使得 $\inf f\leqslant g(x)\leqslant\sup f$, 且

$$\int_a^b|f(x)-g(x)|dx<\varepsilon.$$

12. 设 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上可积, 设 $[a,b]\subset(c,d)$, 则

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx=0.$$

2.7 定积分的应用和推广

2.7.1 定积分的应用

曲线的长度　设$I=[\alpha,\beta]$, 映射$\sigma:I\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto\big(x(t),y(t)\big)$, $t\in I$.

如果$x(t)$, $y(t)$为连续函数, 则称σ为$\mathbb{R}^2$上的连续曲线.

如果$x(t)$, $y(t)\in C^1$, 则称σ为C^1曲线.

定义σ的长度为

$$L(\sigma)=\int_\alpha^\beta\left[\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2\right]^{1/2}\mathrm{d}t.$$

例**7.1.1.**　求摆线

$$\big(x(t),y(t)\big)=(a(t-\sin t),a(1-\cos t)),\quad a>0.$$

一拱的长度.

$$\begin{aligned}l&=\int_0^{2\pi}\left[\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2\right]^{\frac12}dt\\&=\int_0^{2\pi}a\left[(1-\cos t)^2+\sin^2 t\right]^{\frac12}dt\\&=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=8a.\end{aligned}$$

简单图形的面积

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

当f变号时, 上式称为代数面积和.

设平面曲线σ的极坐标方程为$r=r(\theta)$, $r(\theta)\in C[\alpha,\beta]$,

$$S=\frac12\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta.$$

设曲线σ上的点满足$\sigma(t)=\big(x(t),y(t)\big)$, $t\in[\alpha,\beta]$. 则σ, $x=a$, $x=b$和$y=0$围成的曲边梯形的面积为

$$S=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.$$

面积公式也可以改写成

$$S=\frac12\left|\int_\alpha^\beta\left[y(t)x'(t)-y'(t)x(t)\right]\right|\mathrm{d}t.$$

旋转曲面的面积　设σ为平面曲线$\sigma(t)=(x(t),y(t))$, $t\in[\alpha,\beta]$, $y(t)\geq 0$. σ绕x轴旋转所得曲面的面积为

$$S=\int_\alpha^\beta 2\pi y(t)\left[\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2\right]^{\frac12}dt.$$

56

简单立体的体积　(1) 平行截面之间的立体体积

设Ω是$\mathbb{R}^3$中的一块立体区域, 夹在平面$x=a$和$x=b$, $(a<b)$ 之间. 记$S(x)$为$x\in[a,b]$处垂直于x轴的平面截Ω的截面面积函数. 如果$S(x)\in C[a,b]$, 则Ω的体积为

$$V=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 旋转体体积

设$f\in C[a,b]$,

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid x\in[a,b],y\in[-\left|f(x)\right|,\left|f(x)\right|],|z|\le\sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

则

$$V(\Omega)=\int_a^b \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.7.2　广义积分

定义 7.2.1 (无穷积分).　设 $a\in\mathbb{R}$, 定义在 $[a,+\infty)$ 中的函数 f 如果在任何有限区间 $[a,A]$ 上都是 Riemann 可积的, 且极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$$

存在 (且有限), 则称无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 存在或收敛, 记为

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$$

否则就称无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 不存在或发散.

类似的，我们可以定义无穷积分$\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x$和$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$. 如果极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^A f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在, 它和上面定义的无穷积分是不等价的, 称为Cauchy主值积分, 记为

$$(V.P.)\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x:=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

无穷积分的**Cauchy**准则　$f(x)$在$[a,+\infty)$上的积分收敛, 当且仅当, 对于任意的$\epsilon>0$, 存在$M=M(\epsilon)$, 使得对于任何$B>A>M$时, 有

$$\left|\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\epsilon.$$

例**7.2.1**　无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$, $(p\in\mathbb{R})$ 仅在$p>1$时收敛.

例**7.2.2**　$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan x\,|_{-\infty}^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$

定义**7.2.2** (瑕积分)　设函数f在任何区间$[a',b]$, $(a<a'<b)$ 上均Riemann可积, 如果极限

$$\lim_{a'\to a+}\int_{a'}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在且有限, 则称瑕积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$存在或收敛, 记为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{a'\to a+}\int_{a'}^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

否则称瑕积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{a'\to a+}\int_{a'}^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

否则称瑕积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$不存在或发散.

如果f在a附近无界, 则f在$[a,b]$上不是Riemann可积的, 称a为f的瑕点.

无穷积分和瑕积分统称为广义积分, 也称为反常积分.

57

例**7.2.3** 瑕积分$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$仅在$p<1$时收敛.

运算法则: 分部积分, 变量替换, 积分区间可加性, 线性性质.

例**7.2.5** $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0+}(x\ln x - x)\,|_\epsilon^1 = -1.$

例**7.2.6** 求Fresnel积分$\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_1^{+\infty}\cos\left(x^2\right)dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt.$$

$$\begin{aligned}\left|\int_A^B \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt\right| &= \left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right|_A^B + \frac{1}{2}\int_A^B \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}dt\,| \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{A}}+\frac{1}{\sqrt{B}}+\frac{1}{2}\int_A^B t^{-\frac{3}{2}}dt = \frac{2}{\sqrt{A}} \to 0 \quad (B>A\to+\infty).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\cos t\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx^2}\cos t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2}\tan^{1/2}t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{3/2}{2},\frac{1/2}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)}{\Gamma(1)} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.\end{aligned}$$

其中

$$\int \mathrm{e}^{-tx^2}\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-tx^2}\left(-\cos t\cdot x^2+\sin t\right)}{1+x^4},$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}.$$

综上, 并类似的证明

$$\int_{\mathbb{R}}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \int_{\mathbb{R}}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

作业

7. 设 $f(x)>0$, 如果 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上广义可积, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx>0$.

在$[a,A]$上, $f(x)$的不连续点集是零测集, 存在不连续点集的至多可数个开区间$\{I_i\}$, 使得

$$\sum|I_i|\le\epsilon.$$

因$A-a>\epsilon$, 所以存在连续点, 设为x_0, 则存在$\delta>0$, 使得任何$|x-x_0|<\delta$, $f(x)>0$, 与$\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x=0$矛盾.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上广义可积, 如果 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 中一致连续, 则

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

(提示: 先用 Cauchy 准则和中值定理找收敛子列.) 对于任何$\epsilon>0$, 存在$\delta>0$, 只要$\left|x-y\right|<\delta$, 就有$\left|f(x)-f(y)\right|<\epsilon$. 又对于这样小的$\epsilon$, 存在$M>0$, s.t. 对于任何$A>M$,

$$\left|\int_A^{A+\delta}f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\epsilon.$$

58

则存在$\xi \in (A, A+\delta)$, 使得

$$\left|f(\xi)\right| < \epsilon.$$

所以对于任何$x \in (A, A+\delta)$, 有

$$\left|f(x)\right| \le \left|f(\xi)\right| + \left|f(x) - f(\xi)\right| \le \epsilon + \epsilon$$

9. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上广义可积, 如果 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 中可导, 且导函数 $f'(x)$ 有界, 则 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. (提示: 用上一题.)
11. 举例说明, 当无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 且 $f(x)$ 为正连续函数时, 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$ 不一定收敛.
磨光函数

$$\sum_{k=1}^{n} n\chi_{[n, n+1/n^3]}(x)$$

12. 举例说明, 当无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 且 $f(x)$ 为正连续函数时, 不一定有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

比如图形类似于下式的函数

$$\sum_{k=1}^{\infty} n\chi_{[n, n+1/n]}$$

2.7.3 广义积分的收敛判别法

Thm 7.3.1. 设 $f \geqslant 0$, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛当且仅当

$$F(A) = \int_a^A f(x)dx$$

是 $A \in [a, +\infty)$ 的有界函数; 对瑕积分有完全类似的结果.

定理 **7.3.2.** (比较判别法) 设 $0 \leqslant f \leqslant Mg, M > 0$ 为常数, 则当无穷积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时, 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛; 当无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散时, 无穷积分 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 也发散; 瑕积分有完全类似的结果.

M的求法 求$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.
$0 < l < \infty$时, $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$同收敛.
$l = 0$时, $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$收敛可以推出$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛. 注: $0 \le f \le Mg$不可省, 否则取$f(x) = \left|\frac{\sin x}{x\ln x}\right|$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$.
$l = +\infty$时, $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$发散, 则$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$发散.

Cauchy判别法 将f与x^{-p}比较, (无穷积分) (瑕积分有类似结论)
1. 若$p > 1$, 且存在$c > 0$, s.t. $0 \le f(x) \le \frac{c}{x^p}$, $(\forall x \ge x_0)$, 则$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛.
2. 若$p \le 1$, 且存在$c > 0$, s.t. $f(x) \ge \frac{c}{x^p}$, $(\forall x \ge x_0)$, 则$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$发散.
设$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = l$.
3. 若$p > 1$, $0 \le l < +\infty$, 则$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛.
4. 若$p \le 1$, $0 < l \le +\infty$, 则$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$发散.

例**7.3.3** 判断$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+\ln x)}\,\mathrm{d}x$的敛散性.
对于一般函数f, 定义

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\}, \quad f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}.$$

若$\int f^\pm$收敛, 则f收敛. (绝对收敛)
若$\int f$收敛, 但$\int |f|$发散. (条件收敛)

59

例**7.3.5** 判断$\int_1^{+\infty}\cos x^p\,\mathrm{d}x$, $(p>1)$, 的敛散性.

$$\int_1^{\infty}\cos t\cdot t^{\frac{1}{p}-1}\,\mathrm{d}t,$$

取$B>A\gg 1$, 则

$$\left|\int_A^B\frac{\cos t}{t^{1-\frac{1}{p}}}\,\mathrm{d}t\right|=\left|\frac{1}{A^{1-1/p}}\int_A^{\xi}\cos t\,\mathrm{d}t+\frac{1}{B^{1-1/p}}\int_{\xi}^{B}\cos t\,\mathrm{d}t\right|\le\frac{4}{A^{1-1/p}}\to 0,\quad A\to+\infty.$$

但

$$\left|\cos x^p\right|\ge\cos^2x^p=\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x^p\right),$$

反证$\int|\cos x^p|$不收敛.

定理 7.3.3 **(Dirichlet).** 设 $F(A)=\int_a^A f(x)dx$ 在 $[a,+\infty)$ 中有界, 函数 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 中单调, 且 $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$, 则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 收敛.

pf. $|F(A)|\le C$, $\forall A\ge a$. 所以

$$\left|\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le 2C,\quad\forall A,B\ge a.$$

$g(x)=o(1)$, $x\to+\infty$. 所以$\forall\epsilon>0$, $\exists M>0$, s.t. $\forall x>M$, $\left|g(x)\right|\le\frac{\epsilon}{4C}$.

$$\begin{aligned}\left|\int_A^B f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|&=\left|g(A)\int_A^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x+g(B)\int_{\xi}^{B}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\\&\le\frac{\epsilon}{4C}\cdot 2C\cdot 2=\epsilon.\end{aligned}$$

例**7.3.6.** 判断积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$, $(0<p<2)$ 的敛散性.

pf. $\frac{\sin x}{x^p}\sim\frac{1}{x^{p-1}}$, $(x\to 0+)$. 所以$\int_0^1\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$与$\int_0^1 x^{1-p}\,\mathrm{d}x$同敛散, $(p<2)$.

$\int_1^A\sin x\,\mathrm{d}x$有界, $\frac{1}{x^p}\searrow 0$, 由Dirichlet判别法, $\int_1^{\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$收敛.

$0<p\le 1$时, $\int_1^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\mathrm{d}x$发散.

$1<p<2$时, $\int_1^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\mathrm{d}x$收敛.

定理 **7.3.4 (Abel).** 如果广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 函数 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 中单调有界, 则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 也收敛.

pf. g有界, 所以$\left|g(x)\right|\le c$, $\forall x\in[a,+\infty)$.

$\int f$收敛, 所以$\forall\epsilon$>0, $\exists M>0$, s.t. $\forall B>A>M$, $\left|\int_A^B f(x)dx\right|\le\frac{\epsilon}{2c}$.

$$\begin{aligned}\left|\int_A^B f(x)g(x)dx\right|&=\left|g(A)\int_A^{\xi}f(x)dx+g(B)\int_{\xi}^{B}f(x)dx\right|\\&\leqslant c\left|\int_A^{\xi}f(x)dx\right|+c\left|\int_{\xi}^{B}f(x)dx\right|\\&\leqslant c\frac{\epsilon}{2c}+c\frac{\epsilon}{2c}=\epsilon.\end{aligned}$$

例**7.3.7** 设 $a\geqslant 0$, 研究积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx$ 的敛散性.

pf. $e^{-ax}\searrow 0$, $\int_0^A\frac{\sin x}{x}$有界, 由Dirichlet判别法, $\int_0^{\infty}e^{-ax}\frac{\sin x}{x}$收敛.

$e^{-ax}\searrow$有界, $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}$收敛, 由Abel判别法, $\int_0^{\infty}e^{-ax}\frac{\sin x}{x}$收敛.

作业

5. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 中连续, 如果 $\int_1^{+\infty}f^2(x)dx$ 收敛, 则 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 绝对收敛. (提示: 用Cauchy不等式.)
6. 设 $f(x)$ 在 $[a,A](A<\infty)$ 上均可积. 如果 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛, 且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$, 证明 $L=0$, 且 $\int_a^{+\infty}f^2(x)dx$ 也收敛.
7. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 中单调递减, 且 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 证明 $\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0$. (提示: 在区间 $[A/2,A]$ 上估计积分.)
8. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 中单调递减趋于零, 且 $\int_a^{+\infty}\sqrt{f(x)/x}dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛. (提示: 利用上题, 比较被积函数.)

60 pf. 取$\epsilon=1/2$, 则存在$X>a$, s.t. $\forall x>X$,

$$\frac{x}{2}\cdot\sqrt{\frac{f(x)}{x}}<\int_{x/2}^{x}\sqrt{\frac{f(t)}{t}}dt<\epsilon=\frac{1}{2},$$

即$\sqrt{xf(x)}<1$. 所以$f(x)<\sqrt{\frac{f(x)}{x}}$, $\forall x>X$.

9. 设 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛, 如果 $x\to+\infty$ 时 $xf(x)$ 单调递减趋于零, 则

$$\lim_{x\to+\infty}xf(x)\ln x=0.$$

pf. 对于任意的$\epsilon>0$, 因为$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛, 则存在$M>\max(0,a)$, s.t. 对于任意的$x>M$, 有

$$xf(x)\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{1}{t}dt\le\int_{\sqrt{x}}^{x}tf(t)\cdot\frac{1}{t}dt=\int_{\sqrt{x}}^{x}f(t)dt<\frac{\epsilon}{2}.$$

即$xf(x)\ln x<\epsilon$.

10. 设 $f(x)>0$ 在 $[0,+\infty)$ 中连续, 且 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{f(x)}$ 收敛, 证明

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda}f(x)dx=+\infty.$$

pf. Cauchy不等式:

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{f(x)}\int_0^{\lambda}f(x)dx\ge\left(\int_0^{\lambda}dx\right)^2=\lambda^2.$$

11. 研究广义积分

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}dx\quad(p,q\in\mathbb{R})$$

的敛散性.

pf. $p>1$收敛, $p<1$发散.

$p=1$, $q>1$时收敛; $p=1$, $q\le1$时发散.

2.7.4 广义积分的例子

例**7.4.1** 求

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx dx,\qquad(a>0).$$

pf. 原函数可求

$$F(x)=-\frac{a\sin bx+b\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax},$$

$$I=F(\infty)-F(0)=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

令$b=n$, $a=1$,

$$\int_0^{\infty}e^{-x}\sin nx dx=\frac{n}{n^2+1},$$

所以

$$\int_0^{\infty}e^{-x}\frac{\sin nx}{n}dx=\frac{1}{n^2+1},$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}&=\int_0^{\infty}e^{-x}\left\langle\frac{\pi-x}{2}\right\rangle dx\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}e^{-x}\frac{\pi-(x-2k\pi)}{2}dx\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}e^{-(x+2k\pi)}\frac{\pi-x}{2}dx\\&=\int_0^{2\pi}\frac{e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}e^{-x}\frac{\pi-x}{2}dx\\&=\frac{1}{2}\frac{e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\cdot\left((\pi-1)+e^{-2\pi}(\pi+1)\right)=\frac{\pi\coth\pi-1}{2}.\end{aligned}$$

61

例**7.4.2** 求

$$I=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx,\qquad (0<r<1).$$

pf. 令$t=\tan\frac{x}{2}$, 则

$$I=\int_{\mathbb{R}}\frac{2(1-r^2)}{(1-r)^2+(1+r)^2t^2}dt=2\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)|_{-\infty}^{\infty}=2\pi.$$

另外注意

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}r^{|n|}e^{inx}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}.$$

例**7.4.3** 求

$$I=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^4}dx.$$

pf. $\alpha>1$. 取$x^{\alpha/2}=\tan t$, 则$x=(\tan t)^{2/\alpha}$.

$$I=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^{\alpha}}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{2}{\alpha}(\tan t)^{2/\alpha-1}dt=\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{\alpha},1-\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\pi}{\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}}.$$

例**7.4.5** 求

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}dx\qquad (n\geqslant 1).$$

pf. 令$x=\tan t$,

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^{\alpha}}dx=\int_0^{\pi/2}\cos^{2\alpha-2}t\,dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{2\alpha-1}{2}\right).$$

当$\alpha=n$时, $I=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$.

例**7.4.8** 求

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx.$$

pf. 注意$\sin^2 nx-\sin^2(n-1)x=\sin x\cdot\sin[(2n-1)x]$, 则

$$\frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{\sin x}.$$

又注意

$$\sin(2n-1)x-\sin(2n-3)x=2\sin x\cos[2(n-1)x],$$
$$\sin(2n-1)x=2\sin x\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\cos 2kx\right),$$

所以

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2k-1)x}{\sin x}dx=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi/2}1+2\sum_{j=1}^{k-1}\cos 2jx dx=n\cdot\frac{\pi}{2}.$$

最后由Riemann Lebesgue引理

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx\\&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nx}{nx^2}dx\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nx}{n\sin^2 x}dx+\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nx}{n}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx\right)\\&=\frac{\pi}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

62

也可以不用Riemann Lebesgue引理, 需要用夹逼原理, 使用不等式

$$x-\frac{x^3}{3!}\le \sin x\le x,\qquad \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

则

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nx}{x^2}dx\le\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\le\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nx}{\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)^2}dx\\ \le\frac{1}{n}\int_0^{\delta}\frac{\sin^2 nx}{x^2}\left(1-\frac{\delta^2}{6}\right)^{-2}dx+\frac{1}{n}\int_\delta^{\pi/2}\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{(\pi/2)^2}{6}\right)^{-2}dx\qquad\forall\delta>0.\end{aligned}$$

由于

$$\frac{\pi}{2}\ge\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nx}{x^2}dx\ge\left(1-\frac{\delta^2}{6}\right)^2\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\int_\delta^{\pi/2}\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{\pi^2}{24}\right)^{-2}dx\right],\qquad\forall\delta>0.$$

所以

$$\frac{\pi}{2}\ge I\ge\left(1-\frac{\delta^2}{6}\right)^{-2}\frac{\pi}{2},\qquad\forall\delta>0.$$

同上面类似的过程有Dirichlet积分

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{(2n-1)\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\\&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n-1)x}{x}dx\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}dx+\int_0^{\pi/2}\sin(2n-1)x\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)dx\right]=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

例**7.4.9.** 求Euler积分

$$I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x dx.$$

pf.

$$\begin{aligned}I\xlongequal{x=2t}2\int_0^{\pi/4}\ln\sin 2t dt=2\int_0^{\pi/4}\ln 2+\ln\sin t+\ln\cos t dt\\&=2\ln 2\cdot\frac{\pi}{4}+2\int_0^{\pi/4}\ln\sin t dt+2\int_0^{\pi/4}\ln\cos t dt\\&=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I.\end{aligned}$$

所以$I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

2.7.5 作业

8. (Frullani积分)设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且对任意 $c>0$, 积分 $\int_c^{+\infty}\frac{f(x)}{x}$ 收敛, 则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx=f(0)\ln\frac{\beta}{\alpha},\quad(\alpha,\beta>0).$$

9. (Frullani积分) 设 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数, 如果对于任意 $b>a>0$, 积分 $\int_a^b\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛, 且

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=L,\quad\lim_{x\to+\infty}f(x)=M,$$

则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx=(L-M)\ln\frac{\beta}{\alpha},\quad(\alpha,\beta>0).$$

63

pf.

$$\begin{aligned}\int_{\epsilon}^{M}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}dx &= \int_{\alpha\epsilon}^{\alpha M}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{\beta\epsilon}^{\beta M}\frac{f(x)}{x}dx\\ &= \int_{\alpha\epsilon}^{\beta\epsilon}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{\alpha M}^{\beta M}\frac{f(x)}{x}dx \qquad (\alpha<\beta)\\ &= \int_{\alpha\epsilon}^{\beta\epsilon}\frac{f(0)+o(1)}{x}dx-\int_{\alpha M}^{\beta M}\frac{f(\infty)+o(1)}{x}dx\\ &= L\ln\frac{\beta}{\alpha}-M\ln\frac{\beta}{\alpha}.\end{aligned}$$

9.5 如果f在(0,+∞)上连续, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=f(+\infty)$存在, 且$\int_0^1\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$收敛, 则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}\mathrm{d}x=-f(+\infty)\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

10. 计算下列积分 $(a,b>0)$:
(1) $\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x^2}$;
(2) $\int_0^{+\infty}\frac{b\sin ax-a\sin bx}{x^2}dx$.
pf. (1) 注意到

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{e^x+1-1}{e^{2x}-1}-\frac{1}{2x}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{e^{2x}-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}\right).$$

如令$f(x)=\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}$, 则由Frullani积分,

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x^2}=f(0+)\ln 2=-\frac{1}{2}\ln 2.$$

2.8 数项级数

2.8.1 级数收敛与发散的概念

无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

其中

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+\cdots+a_n$$

称为级数的第n个部分和.

级数收敛的必要条件**:** 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则通项 $a_n\to 0,(n\to\infty)$. (否定表述)

级数收敛的**Cauchy**准则**:** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\epsilon)$, 当 $n>N$ 时

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}\right|<\varepsilon,\quad \forall p\geqslant 1.$$

(否定表述)

例 **8.1.2.** 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的敛散性.

例 **8.1.3.** 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的敛散性 (调和级数).

例 **8.1.4.** 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$ 的敛散性.
pf.

$$\sin(n+1)=\sin n\cdot\cos 1+\cos n\cdot\sin 1\Longrightarrow\cos n\to 0,\ n\to\infty$$

这与

$$\sin^2 n+\cos^2 n=1$$

矛盾.

64

例 **8.1.5.** 设 $q>0$, 则当 $q<1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 收敛; $q\geqslant 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 发散(几何级数).

Thm8.1.1 (1) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)$ 也收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)=\lambda\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\mu\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$

(2) 级数的敛散性与其有限项的值无关.

3. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和为 S_n. 如果 $S_{2n}\to S$, 且 $a_n\to 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.
条件$a_n\to 0$不能舍去, 比如$1-1+1-1+1-1+\cdots$.
4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|$ 收敛, 则数列 $\{a_n\}$ 收敛. (提示: 用 Cauchy 准则.)
5. 设数列 na_n 收敛, 且级数 $\sum_{n=2}^{\infty} n(a_n-a_{n-1})$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也是收敛的.
6. 证明, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 也收敛. (提示: 用平均值不等式.)
8. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为发散级数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\min\{a_n,1\}$ 也发散.
hint: 反证法, 比Cauchy收敛准则的否定表述更好写证明过程.

2.8.2 正项级数收敛与发散的判别法

基本判别法 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow\{S_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow\{S_n\}$ 有上界.

定理 **8.2.1 (**比较判别法**).** 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数, 如果存在常数 $M>0$, 使得

$$a_n\leqslant Mb_n,\quad \forall n\geqslant 1.$$

则 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

例 **8.2.3.** 判别 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$ 的敛散性.

解. 根据 Taylor 展开,

$$0<\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]/\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 故原级数收敛.

Cauchy判别法或根值判别法 如果n充分大时, $\sqrt[n]{a_n}\leq q<1$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

例 **8.2.4.** 设 $p\in\mathbb{R}$, 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{p}{n}\right)^{n^2}$ 的敛散性.

解. 因为

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(1-\frac{p}{n}\right)^n\to e^{-p},$$

故 $p>0$ 时原级数收敛; $p<0$ 时级数发散. 显然, $p=0$ 时级数也发散.

d'Alembert判别法或比值判别法 如果n充分大时, $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q<1$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

例 **8.2.5.** 设 $x>0$, 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ 的敛散性.

解. 因为

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\frac{x}{e},$$

故 $0<x<e$ 时级数收敛; $x>e$ 时级数发散. $x=e$ 时,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=e/\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geqslant 1,$$

故此时级数也发散.

65

定理 **8.2.2** (积分判别法**)**. 设 $f(x)$ 是定义在 $[1,+\infty)$ 上的非负单调递减函数, 记 $a_n = f(n)$, $(n \geqslant 1)$. 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性与广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 的敛散性相同.

证明. 令

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt, \quad \forall x \geqslant 1.$$

因为 f 为单调递减函数, 故当 $n \leqslant x \leqslant n+1$ 时

$$a_{n+1} = f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n) = a_n,$$

这说明

$$a_{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant a_n,$$

从而有

$$S_n \leqslant a_1 + F(n), \quad F(n) \leqslant S_{n-1}.$$

其中 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 为级数的部分和. 因为 S_n 及 $F(n)$ 关于 n 都是单调递增的, 二者同时有界或无界, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 同敛散.

例 **8.2.6.** 设 $s \in \mathbb{R}$, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 的敛散性.

定理 **8.2.3 (Kummer).** 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数, 如果 n 充分大时

(1) $\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \geqslant \lambda > 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) $\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \leqslant 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

pf. (1) 条件可改写为

$$a_{n+1} \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right), \quad \forall n \geqslant N.$$

这说明当 $n \geqslant N$ 时

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_N + \sum_{k=N}^{n} a_{k+1} \\ &\leqslant S_N + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=N}^{n}\left(\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) \\ &= S_N + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) \\ &\leqslant S_N + \frac{1}{\lambda}\frac{a_N}{b_N} \end{aligned}$$

即 $\{S_n\}$ 有上界, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 由

$$\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \leqslant 0$$

可知

$$\frac{a_n}{b_n} \leqslant \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}},$$

即 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 关于 n 单调递增, 从而 $a_n \geqslant \frac{a_1}{b_1} b_n$, 因此由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

Kummer判别法推**d'Alembert**判别法 取$b_n = 1$, 则当n充分大, 有$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$时, 有

$$\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \geq \frac{1}{q} - 1 > 0,$$

所以由Kummer判别法有$\sum a_n$收敛. 当n充分大满足$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$时, 有

$$\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \leq 1 - 1 = 0,$$

再由Kummer判别法和$\sum 1$发散, 知$\sum a_n$发散.

66

Kummer判别法证明Raabe判别法 取$b_n=\frac{1}{n}$, 当n充分大时, 如果有$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geq\mu>1$, 则

$$\frac{1}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}\geq n\left(1+\frac{\mu}{n}\right)-(n+1)=\mu-1>0,$$

由Kummer判别法, $\sum a_n$收敛.

当n充分大时, 如果有$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leq 1$, 则

$$\frac{1}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}\leq n\left(1+\frac{1}{n}\right)-(n+1)=0,$$

由Kummer判别法以及$\sum\frac{1}{n}$是发散的, 所以$\sum a_n$也发散.

Kummer判别法推出Gauss判别法 取$b_n=\frac{1}{n\ln n}$, 当$n>N$充分大时, 如果有$\theta>1$使得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\theta}{n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

则

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}&=n\ln n\left(1+\frac{\theta}{n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)-(n+1)\ln(n+1)\\&=(n+1)\ln n+(\theta-1)\ln n+o(1)-n\ln(n+1)-\ln(n+1)\\&=(\theta-1)\ln n+o(1)-(n+1)\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&\geq(\theta-1)\ln N>0\end{aligned}$$

所以$\sum a_n$收敛; 当$n>N$充分大时, 如果有$\theta\leq 1$使得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\theta}{n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

则

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}&=n\ln n\left(1+\frac{\theta}{n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)-(n+1)\ln(n+1)\\&=(n+1)\ln n+(\theta-1)\ln n+o(1)-n\ln(n+1)-\ln(n+1)\\&=(\theta-1)\ln n+o(1)-(n+1)\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&\leq 0\end{aligned}$$

由Kummer判别法以及$\sum\frac{1}{n\ln n}$发散, 所以$\sum a_n$也发散.

例 **8.2.8.** 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}$, $(\alpha>0)$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^s\cdot\frac{1}{2n+1}$.

例 **8.2.9 (Cauchy 凝聚判别法).** 设 a_n 单调递减趋于零. 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛当且仅当 $\sum_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}$ 收敛.

6. 设 $a_n>0$, $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 证明

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 总是收敛的;

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 收敛当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

$$\sum\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^2}\leq\sum\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}};$$

$$\sum\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}\leq\frac{1}{\sqrt{a_1}}\sum a_n;$$

67

$$\sum \frac{a_n}{\sqrt{S_n}} = \sum \left(\sqrt{S_n} - \frac{S_{n-1}}{\sqrt{S_n}} \right) \geq \sum \left(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} \right)$$

7. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 试用积分判别法证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n}$ 也发散, 其中 S_n 为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和.

hint1: 取$\epsilon = \frac{1}{2}$, 则对于任何n, 存在$m > n$, s.t. $S_{m+1} > 2S_n$. 则

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{a_{k+1}}{S_k} \geq \sum_{k=n}^{m} \frac{a_{k+1}}{S_{k+1}} \geq \frac{\sum_{k=n}^{m} a_{k+1}}{S_{m+1}} = \frac{S_{m+1} - S_n}{S_{m+1}} \geq \frac{1}{2} = \epsilon,$$

由Cauchy收敛判别法即得.

hint2:

$$\frac{a_{n+1}}{S_n} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n} \geq \int_{S_n}^{S_{n+1}} \frac{dx}{x}.$$

8. 判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q} \quad (p > 0, q > 0)$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2})\cdots(a+\sqrt{n})} (a > 0)$.

9. 设 $a_n > 0, S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 证明

(1) 当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 总是收敛的;

(2) 当 $\alpha \leqslant 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(1) hint: $\frac{a_n}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dx}{x^\alpha}$, $(\alpha > 1)$.

(2) hint: 如果$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 类似第7题的证明.

10. 设 $a_n > 0$ 关于 n 单调递增. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛当且仅当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$ 收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right);$$

Sapagof 判别法: 设正数数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 发散。

上述断言等价于: 单调递增数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 同敛散.

由此可以得到: 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项部分和为 S_n, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 同敛散.

设 $p > 1$, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项部分和为 S_n, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ 始终是收敛的.

11. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\alpha_n}{n \ln n}.$$

如果 n 充分大时 $\alpha_n \geqslant \mu > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收玫; 如果 n 充分大时 $\alpha_n \leqslant 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 这个结果称为 Bertrand 判别法.

hint: 取$b_n = \frac{1}{n \ln n}$, 则

$$\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} = \alpha_n - 1 + o(1).$$

然后用Kummer判别法.

17. 设 $a_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ 也收敛.

hint: 将a_n递增重排.

以上收敛判别法列表也可以参考:

https://en.wikipedia.org/wiki/Convergence_tests

至今, 这些收敛判别法全部失效的正项级数是存在的, 比如Flint Hills级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}$$

它的收敛性涉及到π的无理测度的大小, 见

https://math.stackexchange.com/questions/162573

68

2.8.3 一般级数收敛与发散判别法

级数是正负交替出现的称为交错级数

定理 **8.3.1 (Leibniz).** 设 a_n 单调递减趋于 0 , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.
pf. 使用Cauchy收敛准则.

$$\begin{aligned} S_{n+p}-S_n &= (-1)^n\cdot a_{n+1}+(-1)^{n+1}a_{n+2}+\cdots+(-1)^{n+p-1}a_{n+p} \\ &= (-1)^n\left[a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+3}-a_{n+4}+\cdots+(-1)^{p-1}a_{n+p}\right]. \end{aligned}$$

因此当 $p=2k-1$ 时,

$$\begin{aligned} (-1)^n\left(S_{n+p}-S_n\right) &= a_{n+1}-(a_{n+2}-a_{n+3})-(a_{n+4}-a_{n+5})-\cdots\leqslant a_{n+1}, \\ (-1)^n\left(S_{n+p}-S_n\right) &= (a_{n+1}-a_{n+2})+(a_{n+3}-a_{n+4})+\cdots+a_{n+2k-1} \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

这说明

$$\left|S_{n+p}-S_n\right|\leqslant a_{n+1}\to 0,\quad (n\to\infty).$$

当 $p=2k$ 时, 类似地可证上式仍成立. 因此原级数收敛.

例 **8.3.1.** 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛.

引理 **8.3.2 (分部求和).** 设 $\{a_k\},\{b_k\}$ 为数列, 则

$$\sum_{k=m}^{n-1}a_{k+1}(b_{k+1}-b_k)+\sum_{k=m}^{n-1}b_k(a_{k+1}-a_k)=a_nb_n-a_mb_m.$$

推论 **8.3.3 (Abel 变换).** 设 $a_i,b_i(i\geqslant 1)$ 为两组实数, 如果约定 $b_0=0$, 记

$$B_0=0,B_k=b_1+b_2+\cdots+b_k\quad (k\geqslant 1),$$

则有

$$\sum_{i=m+1}^{n}a_ib_i=\sum_{i=m+1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})B_i+a_nB_n-a_{m+1}B_m,\quad \forall m\geqslant 0.$$

推论 **8.3.4 (Abel 引理).** 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为单调数列, 且 $|B_i|\leqslant M,(i\geqslant 1)$, 则

$$\left|\sum_{i=m+1}^{n}a_ib_i\right|\leqslant 2M(|a_n|+|a_{m+1}|),\quad \forall m\geqslant 0.$$

定理 **8.3.5 (Dirichlet).** 设数列 $\{a_n\}$ 单调趋于 0 , 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和有界, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

证明**.** 由假设, 存在 $M>0$ 使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n}b_i\right|\leqslant M,\quad \forall n\geqslant 1.$$

由 Abel 变换及其推论,

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_ib_i\right|\leqslant 2M\left(|a_{n+1}|+\left|a_{n+p}\right|\right)\leqslant 4M|a_{n+1}|\to 0.$$

由 Cauchy 准则知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

定理 **8.3.6 (Abel).** 如果 $\{a_n\}$ 为单调有界数列, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

69

证明. $\{a_n\}$ 单调有界意味着极限 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 存在. 于是 $\{a_n - a\}$ 单调趋于 0 . 由 Dirichlet 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a)\,b_n$ 收敛. 从而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a)\,b_n + \sum_{n=1}^{\infty} a\cdot b_n$$

也收敛.

例 **8.3.3.** 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$ 的敛散性.

解. $a_n = \frac{1}{n}$ 单调递减趋于 $0, b_n = \sin nx$. 利用公式

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin kx = \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x$$

得

$$\sum_{k=1}^{n} b_n = \begin{cases} 0, & x = 2k\pi, \\ \frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}, & x \neq 2k\pi. \end{cases}$$

即 b_n 的部分和总是有界的. 故由 Dirichlet 判别法知, 原级数收敛.

定义 **8.3.1 (**绝对收敛**).** 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛 (此时, 由于

$$\left|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}\right| \leqslant |a_{n+1}|+\cdots+\left|a_{n+p}\right| \to 0,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的确为收敛级数). 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

例 **8.3.5.** 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, $(x\in\mathbb{R})$, 的敛散性.

解. 令 $a_n = \frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n}\to|x|$. 故 $|x|<1$ 时原级数绝对收敛; 而 $|x|>1$ 时显然发散. $x=1$ 时级数条件收敛; $x=-1$ 时级数发散.

作业

6. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, $\{b_n\}$ 为有界数列, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 也是绝对收敛的.

6'. 证明或否定: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\{b_n\}$ 为有界数列, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 也是收敛的.

7. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 是否也收敛? 证明你的结论.

比如

$$a_n = \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{\sqrt[3]{n}}.$$

8. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|$ 收敛且 a_n 极限为零, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和有界, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. (提示: Abel 求和.)

9. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 也收敛. (用Abel求和)

10. 设 $\{a_n\}$ 单调递减趋于零. 证明下面的级数是收敛的:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

用9.

11. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n} = 0.$$

考虑把a_n用部分和S_n表示的问题. 或者使用$\epsilon - N$法+Abel变换.

本题不能使用Stolz公式, 因为有反例如下:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{m^2}, & n = m^2; \\ \frac{1}{n^3}, & n \neq m^2. \end{cases}$$

12. 设 $a_n > 0, na_n$ 单调趋于 $0, \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明 $n\ln n\cdot a_n \to 0$.

类比下题:

70 9. 设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 如果 $x\to+\infty$ 时 $xf(x)$ 单调递减趋于零, 则

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)\ln x = 0.$$

pf. 对于任意的$\epsilon>0$, 因为$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛, 则存在$M>\max(0,a)$, s.t. 对于任意的$x>M$, 有

$$xf(x)\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{1}{t}dt \le \int_{\sqrt{x}}^{x} tf(t)\cdot\frac{1}{t}dt = \int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)dt < \frac{\epsilon}{2}.$$

即$xf(x)\ln x<\epsilon$.

2.8.4 数项级数的进一步讨论

级数求和与求极限的可交换性

定义 8.4.1 (级数的一致收敛). 一列收敛级数 $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}=A_i$ 关于 i 一致收敛是指, 任给 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}-A_i\right|<\varepsilon,\quad \forall i\geqslant 1.$$

当且仅当有Cauchy准则: $\forall\epsilon>0, \exists N$, 当$m,n>N$时,

$$\left|\sum_{j=n}^{m} a_{ij}\right|<\varepsilon,\quad \forall i\geqslant 1.$$

给出级数一致收敛的否定表述.

定理 8.4.1. 设一列级数 $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}=A_i$ 关于 i 一致收敛, 如果 $\lim_{i\to\infty} a_{ij}=a_j$ $(j\geqslant 1)$, 则极限 $\lim_{i\to\infty} A_i$ 存在, 级数 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ 收敛, 且

$$\lim_{i\to\infty} A_i=\sum_{j=1}^{\infty} a_j$$

或改写为

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}\lim_{i\to\infty} a_{ij}.$$

pf: 1. $\sum_{j\geq 1} a_j$收敛

证明. 由一致收敛的定义, 任给 $\varepsilon>0$, 存在 N_0, 当 $n\geqslant N_0$ 时,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}-A_i\right|<\frac{1}{4}\varepsilon,\quad \forall i\geqslant 1.$$

因此, 当 $m>n\geqslant N_0$ 时

$$\left|\sum_{j=n+1}^{m} a_{ij}\right|\leqslant\left|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}-A_i\right|+\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}-A_i\right|<\frac{1}{2}\varepsilon,\quad \forall i\geqslant 1.$$

在上式中令 $i\to\infty$, 得

$$\left|\sum_{j=n+1}^{m} a_j\right|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon,$$

由 Cauchy 准则即知级数 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ 收敛, 且在上式中令 $m\to\infty$ 可得

$$\left|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j\right|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon,\quad \forall n\geqslant N_0$$

2. 证$\lim_{i\to\infty} A_i=\sum_{j\geq 1} a_j$.

对于 $j=1,2,\cdots,N_0$, 因为 $a_{ij}\to a_j$, 故存在 N, 当 $i>N$ 时,

$$\left|a_{ij}-a_j\right|<\frac{\varepsilon}{4N_0},\quad j=1,2,\cdots,N_0.$$

71

因此, 当 $i > N$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|A_i - \sum_{i=1}^{\infty} a_j\right| &\leqslant \left|A_i - \sum_{j=1}^{N_0} a_{ij}\right| + \left|\sum_{j=1}^{N_0} a_{ij} - \sum_{j=1}^{N_0} a_j\right| + \left|\sum_{j=N_0+1}^{\infty} a_j\right| \\ &< \frac{1}{4}\varepsilon + N_0\frac{\varepsilon}{4N_0} + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon\end{aligned}$$

这说明 $\{A_i\}$ 的极限存在且极限为 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

推论 8.4.2. **(控制收敛定理)** 设 $\lim_{i\to\infty} a_{ij} = a_j (j \geqslant 1)$, $|a_{ij}| \leqslant b_j (i \geqslant 1)$, 且 $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ 收敛(控制级数), 则级数 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ 收敛, 且

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{i\to\infty} a_{ij} = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}.$$

证明. 由 $a_{ij} \to a_j$, 且 $|a_{ij}| \leqslant b_j$ 知 $|a_j| \leqslant b_j$, $j = 1, 2, \cdots$. 因为级数 $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ 收敛, 故级数 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ 绝对收敛. 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时,

$$0 \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j < \varepsilon.$$

此时, 对任意 $i \geqslant 1$, 有

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} - \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right| = \left|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_{ij}\right| \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j < \varepsilon,$$

从而级数 $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ 关于 i 是一致收敛的. 由上一定理知本推论结论成立.

推论 8.4.3. **(Fubini)** 设 $\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| \leqslant A_j (j \geqslant 1)$, 且 $\sum_{j=1}^{\infty} A_j$ 收敛, 则对任意 $i \geqslant 1$, 级数 $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ 收敛, 且

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

证明. 1. 首先, 由题设知, $|a_{ij}| \leqslant A_j$, $j = 1, 2, \cdots$. 这说明, 对任意 $i \geqslant 1$, 级数 $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ 是绝对收敛的.

2. 因为

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a_{ij}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |a_{ij}| \leqslant A_j, \quad j \geqslant 1.$$

故$(\sum_{i=1}^{k} a_{ij})_{kj}$满足上一推论, 有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} &= \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \\ &= \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} a_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k} a_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.\end{aligned}$$

这就证明了本推论.

上述推论的条件中$\sum_{i\geq 1} |a_{ij}|$的绝对值不能省去, 比如设

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2^{j-i}}, & j > i; \\ -1, & i = j; \\ 0, & j < i. \end{cases}$$

72

也即

$$\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \cdots\\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \cdots\\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}.$$

则

$$\sum_{i\geq 1}a_{ij}=-\frac{1}{2^{j-1}},\qquad \sum_{j\geq 1}a_{ij}\equiv 0 \implies 0=\sum_{i\geq 1}\sum_{j\geq 1}a_{ij}\neq\sum_{j\geq 1}\sum_{i\geq 1}a_{ij}=-2.$$

例 **8.4.1.** 设 $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|$ 收敛, 记 $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n$, $x\in[-1,1]$. 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}a_n\zeta(n),$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann-Zeta 函数.

证明**.**

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|a_n|}{m^n}\leq\frac{1}{m^2}\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\Longrightarrow\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|a_n|}{m^n}\leq\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m^2}\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\right)<+\infty.$$

由Fubini定理, $\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_n}{m^n}$ 收敛, 且

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_n}{m^n}&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{m^n}=\sum_{m=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{m}\right)\\&=\sum_{n=2}^{\infty}a_n\zeta(n).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\zeta(n)&=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{m^n}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{m^n}\cdot\frac{1}{2^n}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^2m^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2m}}\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}\right)=\ln 2.\end{aligned}$$

级数的乘积

设$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=0}^{\infty}b_n$之积为$\sum_{n=0}^{\infty}c_n$, 称为Cauchy乘积

$$c_n=\sum_{i+j=n}a_ib_j,\qquad n\geq 0.$$

定理 **8.4.4 (Cauchy).** 如果 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ 绝对收敛, 则它们的乘积级数也绝对收敛, 且

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right).$$

定理 **8.4.5 (Mertens).** 如果 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ 收敛, 且至少其中一个级数绝对收敛, 则它们的乘积级数也收敛, 且

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right).$$

73

证明. 不妨设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 分别记

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k.$$

则 $A_n \to A$, $B_n \to B$, 而

$$C_n = \sum_{i+j\leqslant n} a_i b_j = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0 = A_n B + \delta_n,$$

其中

$$\delta_n = a_0 (B_n - B) + a_1 (B_{n-1} - B) + \cdots + a_n (B_0 - B).$$

我们只要证明 $\delta_n \to 0$ 即可. 因为 $B_n \to B$, 故 $\{B_n\}$ 关于 n 有界, 从而存在 K, 使得

$$|B_n - B| \leqslant K, \quad \forall n \geqslant 0.$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0, 当 $n > N_0$ 时

$$\left|a_{N_0+1}\right| + \cdots + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2K+1}.$$

记 $L = |a_0| + |a_1| + \cdots + \left|a_{N_0}\right|$. 由于 $B_n - B \to 0$, 故存在 N_1, 当 $n > N_1$ 时

$$|B_n - B| < \frac{\varepsilon}{2L+1}.$$

从而当 $n > N_0 + N_1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
|\delta_n| &\leqslant \sum_{k=0}^{N_0} |a_k| \, |B_{n-k} - B| + \left(\left|a_{N_0+1}\right| + \cdots + |a_n|\right) K \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2L+1} \left(|a_0| + |a_1| + \cdots + \left|a_{N_0}\right|\right) + \frac{\varepsilon}{2K+1} K \\
&= \frac{\varepsilon}{2L+1} L + \frac{\varepsilon}{2K+1} K \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

这说明 $\delta_n \to 0$, 因而 $C_n = A_n B + \delta_n \to AB$.

注. 定理中的绝对收敛的条件不能去掉, 反例就是将 a_n 和 b_n 均取为交错级数 $(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$, 此时所得乘积级数是发散的.

但是, 如果乘积级数仍然收敛, 则其和等于两个级数和的乘积. 为了说明这一点, 需要下面的引理.

引理 **8.4.6 (Abel).** 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = C$ 收敛, 令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in [0,1),$$

则 $\lim_{x\to 1^-} f(x) = C$.

证明. 级数收敛表明 $\{c_n\}$ 有界, 因此当 $x \in [0,1)$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 绝对收敛. 记

$$C_{-1} = 0, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k, \quad n \geqslant 0.$$

则有

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} c_k x^k &= \sum_{k=0}^{n} (C_k - C_{k-1}) x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_k x^k - x \sum_{k=0}^{n-1} C_k x^k \\
&= C_n x^n + (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} C_k x^k \\
&= C_n x^n + C\left(1 - x^n\right) + (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} (C_k - C) x^k.
\end{aligned}$$

74

在上式中令 $n\to\infty$ 就得到

$$f(x)=C+(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}(C_k-C)\,x^k.$$

因为 $C_k-C\to 0$, 故任给 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $k>N$ 时

$$|C_k-C|<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

令 $M=\sum_{k=0}^{N}|C_k-C|$, 则有估计

$$|f(x)-C|\leqslant M(1-x)+(1-x)\sum_{k=N+1}\frac{1}{2}\varepsilon x^k\leqslant M(1-x)+\frac{1}{2}\varepsilon.$$

因此, 当 $0<1-x<\frac{\varepsilon}{2M+1}$ 时,

$$|f(x)-C|\leqslant M\frac{\varepsilon}{2M+1}+\frac{1}{2}\varepsilon<\varepsilon.$$

这说明 $\lim_{x\to 1^-}f(x)=C$.

定理 **8.4.7 (Abel).** 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ 以及它们的乘积 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ 均收敛, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right).$$

证明. 当 $x\in[0,1)$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 绝对收敛, 它们的乘积级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$. 根据 Cauchy 定理, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right).$$

令 $x\to 1^-$, 由上述 Abel 引理即得欲证结论.

乘积级数

将$\prod_{n=1}^{\infty}p_n$称为无穷乘积, 记部分乘积$P_n=\prod_{k=1}^{n}p_k$, $(n\geq 1)$. 当$\lim_{n\to\infty}P_n$有限且非零时, 称无穷乘积收敛, 否则称它发散.

命题 **8.4.8.** 设 $p_n>0,\forall n\geqslant 1$. 则

(1) 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ 收敛当且仅当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 收敛, 且

$$\prod_{n=1}^{\infty}p_n=e^{\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n};$$

(2) 记 $p_n=1+a_n$. 如果 n 充分大时 $a_n>0$ (或 $a_n<0$), 则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ 收敛当且仅当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(3) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 均收敛, 则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 也收敛.

证明**.** (1) 是显然的. (2) 只要利用

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1$$

以及数项级数的比较判别法即可.

(3) 则是利用 (a_n 不为零时)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[a_n-\ln(1+a_n)]}{a_n^2}=\frac{1}{2}$$

以及(1).

级数重排

定理 **8.4.9 (Riemann).** 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为条件收敛的级数, 则可以将它重排为一个收敛级数, 使得重排后的级数和为任意指定的实数.

75

例. 求证:

$$\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\cdots=\ln\left(2\sqrt{2}\right).$$

这说明

$$\begin{aligned}\ln 2 &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\cdots+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\cdots\\ &\cancel{=}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\cdots\\ &=\ln\left(2\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

Bibliography

[PH] The Man Who Loved Only Numbers, The Story of Paul Erdos and The Search for Mathematical Truth; Paul Hoffman; 1999.

[YN] 数域的上同调; 尤尔根·诺伊基希, 亚历山大[德], 哈尔滨工业大学.

[TH] Holder不等式及其应用; 田景峰, 哈明虎, 清华大学.

[HKZ2013on] Hu, W., Kukavica, I., Ziane, M.: On the regularity for the Boussinesq equations in a bounded domain, J. Math. Phys. 54(8), 081507, 10 (2013)

[T1997Inf] R. Temam, Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Applied Mathematical Sciences Vol. 68 (Springer, 1997).

[MJQ] 梅加强. 数学分析[M]. 高等教育出版社, 2011.