# 数学笔记

Larry Eppes

Abstract. 本笔记大部分资料来源于网络, 包括但不限于: 数学博士论坛, Crux Mathematicorum杂志, 中等数学杂志. 为了节约时间, 只对个人认为的所有疑难问题给出解答, 并且解答尽可能精炼, 以达到可以作出更多的笔记, 并看到更多不同的解题方法和解题思想. 同时, 在编辑过程中用到的不常见的定理, 或有趣的小定理都单独列在其中一章, 另外在做笔记时个人的一些进一步猜想和推导导出了一些自编问题也单独放在一个章节, 但可能不会放答案. 因个人能力所限, 对于一些高手来说不免有出现类似"这么简单的问题, 你为什么解答的这么详细..."或"这个问题还有别的方法..."等问题.

# Contents

CHAPTER 1

# 考研试题集

## 1.1. 1999年浙江大学研究生数学分析试题及必要的简答

问题 1.1.1. 求极限$\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt[n]{n}-1)}{\ln n}$.

解答. 1.

问题 1.1.2. 在$xy$平面上求一点, 使它到三条直线$x=0$, $y=0$及$x+2y-16=0$的距离平方和最小.

解答. $\frac{128}{5}$.

问题 1.1.3. 计算二重积分$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中$D$由曲线$x^2+y^2=x+y$所围成的区域.

解答. $\frac{\pi}{8}$.

问题 1.1.4. 设$f(x)$在$x>0$时连续, $f(1)=3$, 并且

$$\int_1^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t = x\int_1^y f(t)\,\mathrm{d}t + y\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad (x>0, y>0),$$

试求函数$f(x)$.

解答. $f(x)=3(1+\ln x)$.

问题 1.1.5. 设函数$f(t)$在$(a,b)$连续, 若有数列$x_n\to a$, $y_n\to a(x_n,y_n\in(a,b))$使$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A$及$\lim_{n\to\infty}f(y_n)=B$, 则对$A,B$之间的任意数$\mu$, 可找到数列$x_n\to a$, 使得$\lim_{n\to\infty}f(z_n)=\mu$.

设$0\le a_k<1$, $k=1,2,\cdots,n$, 令$s_n=\sum_{k=1}^n a_k$, 证明不等式

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{1-a_k} \ge \frac{ns_n}{n-s_n}.$$

解答. 一种方法是用琴生不等式. 另一种方法将$\frac{1}{1-a_k}$展开成幂级数, 有绝对收敛性交换求和次序, 并对内层有限和用幂平均不等式.

问题 1.1.6. 设函数$f$在$[a,b]$上连续, 且$f>0$, 记$f_{\nu n}=f(a+\nu\delta_n)$, $\delta_n=\frac{b-a}{n}$, 试证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\cdots f_{nn}} = \exp\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x\right\}$$

并利用上述等式证明下式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)\,\mathrm{d}x = 2\ln r, \quad (r>1).$$

解答. 注意$\left|1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right|^2=1-2r\cos x+r^2$, 再用

$$|x^n-r^n| = \prod_{1\le k\le n}\left|x-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right|.$$

问题 1.1.7. 从调和级数$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$中去掉所有分母的十进表示中含数码9的项, 证明由此所得余下的级数必定是收敛的.

解答. 估计所有分母中不含9且位数为$m$的倒数和的上限为$\left(\frac{9}{10}\right)^{m-1}H_8$.

注. **据说这个收敛级数收敛的值是可以求出来的.**

## 1.2. 1999年复旦大学常微分方程考研试题

问题 1.2.1. 求微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}+x=\mathrm{e}^t$$

的通解.

解答. $(c_1t+c_2)\mathrm{e}^t+\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t$.

问题 1.2.2. 设

$$\begin{pmatrix}\phi_1(t)\\ \phi_2(t)\end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix}\psi_1(t)\\ \psi_2(t)\end{pmatrix}$$

是方程组

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11}(t) & p_{12}(t)\\ p_{21}(t) & p_{22}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

的两个解, 其中$p_{11}(t)$, $p_{12}(t)$, $p_{21}(t)$, $p_{22}(t)$是定义在实数轴$\mathbb{R}$上的连续函数, 用$W(t)$表示下列行列式:

$$W(t):=\begin{vmatrix}\phi_1(t) & \psi_1(t)\\ \phi_2(t) & \psi_2(t)\end{vmatrix}.$$

试证明Liouville公式, 即证明下列等式

$$W(t)=W(0)\exp\left(\int_0^t(p_{11}(s)+p_{22}(s))\,\mathrm{d}s\right)$$

对任何$t\in\mathbb{R}$成立.

解答. 证明用$W'(t)=(p_{11}+p_{22})W(t)$, 及一阶常微分方程初值问题解的存在唯一性定理.

问题 1.2.3. 设$u(t)$和$v(t)$是区间$[a,b]$上的连续函数, 且当$t\in[a,b]$时,

$$v(t)\geq 0,\quad u(t)\leq u_0+\int_a^t u(s)v(s)\,\mathrm{d}s.$$

试利用逐次逼近法证明不等式

$$u(t)\leq u_0\exp\left(\int_a^t v(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

对任何$t\in[a,b]$成立.

解答. 设$V(t)=\int_a^t v(s)\,\mathrm{d}s$, 用分布积分法迭代, $u_0(t)\equiv u_0$, $u_n(t)\leq u_0\left(1+V(t)+\frac{V^2(t)}{2!}+\cdots+\frac{V^n(t)}{n!}\right)$, 用归纳法证明:

$$\begin{aligned}u_{n+1}(t)&\leq u_0+\int_a^t u(s)v(s)\,\mathrm{d}s\\ &=u_0+\int_a^t u_0\left(1+V(s)+\frac{V^2(s)}{2!}+\cdots+\frac{V^n(s)}{n!}\right)\mathrm{d}V(s)\\ &=u_0\left(1+V(t)+\frac{V^2(t)}{2!}+\cdots+\frac{V^{n+1}(t)}{(n+1)!}\right)\end{aligned}$$

最后令$n\to\infty$.

问题 1.2.4. 设$\phi(t,p)$为初值问题

$$\frac{dx}{dt}=F(x),\qquad x(0)=p$$

的解, 其中$F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是连续可微的. 假定对任何$p\in\mathbb{R}^n$, 解$\phi(t,p)$关于$t$的存在区间均为$(-\infty,+\infty)$.

(1) 证明下列等式

$$\phi(t+s,p)=\phi(t,\phi(s,p))$$

对任何$s,t\in\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{R}^n$成立.

(2) 讨论解$\phi(t,p)$关于$(t,p)$的连续性.

解答. 若对于给定的$p_0 \in \mathbb{R}^n$成立着

$$\|\phi(k, p_0) - p_0\| < 1, \quad (k = 1, 2, 3, \cdots),$$

证明$\phi(t, p_0)$作为$t$的函数在$t \in [0, +\infty)$上是有界的.

第一问, 一阶线性微分方程组的解的存在唯一性定理的条件是在$f$满足Lipschitz条件, 对于开区域$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$上需要考虑闭立方体$\Gamma = [-T, T] \times [-R, R]^n$, 则由$f$的连续可微条件保证了$f$对$x$满足Lipschitz条件(中值定理). 固定$p$和$s$, 证明$\phi(t+s, p)$和$\phi(t, \phi(s, p))$都是初值问题

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \qquad x(0) = \phi(s, p)$$

的解, 所以微分方程在$\Gamma$的某个子区域$G$上存在唯一解. 最后因为解可以延拓到任意给定的$s, t, p$处(这里延拓可能出现的问题在于$t$无法延拓到无穷远, 但这可以通过反证法否定, 因为如果$t$只能延拓到某个$t_0$, 则$f$必然在某个有限位置$p_0$附近趋向于无穷, 然而这与$f$在$p_0$闭邻域内有界矛盾), 所以命题在整个区域上成立.

第二问参考张芷芬的微分方程定性理论中的定理1.4.

第三问使用第一问的结论,

$$\begin{aligned}\|\phi(t, p_0)\| &\le \|\phi(t, p_0) - \phi([t], p_0)\| + \|\phi([t], p_0) - p_0\| + \|p_0\| \\ &\le \|\phi([t], \phi(\{t\}, p_0)) - \phi(\{t\}, p_0) + \phi(\{t\}, p_0)\| + \|\phi([t], p_0) - p_0 + p_0\| + 1 + \|p_0\| \\ &\le 1 + \|\phi(\{t\}, p_0)\| + 1 + \|p_0\| + 1 + \|p_0\| \\ &\le M\end{aligned}$$

最后一步利用第二问$\phi(t, p_0)$在$t \in [0, 1]$上的连续性, 因为Cantor定理保证了$\phi(t, p_0)$在$t \in [0, 1]$上的一致连续性, 从而是有界的.

问题 1.2.5. 考虑方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x^2 = f(t).$$

解答. 考虑Fourier变换或Laplace变换, 及其适用条件.

## 1.3. 2010年南京大学数学分析考研试题简答

问题 1.3.1. 设$a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$说明$\{a_n\}$的收敛性, 并求极限.

解答. 一种方法是证明$|a_{n+1} - a_n| \le \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}|$, 然后用压缩映射原理的思想证明收敛; 另一种方法是证明$\{a_n\}$是单调增加有上界2. 极限为$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

问题 1.3.2. 确定$a, b$的值, 使

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \to +\infty.$$

解答. 用$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$. 换底数为e用幂级数展开, $a = -\frac{\mathrm{e}}{2}$, $b = \frac{11\mathrm{e}}{24}$.

问题 1.3.3. 计算积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

解答. 使用分布积分法, 将积分转化为

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

上面的积分是用变量替换$x \to \pi/2 - x$求解.

问题 1.3.4. 计算

$$\iint_\Sigma \frac{x}{r^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中$\Sigma = \{(x, y, z) : |x| + |y| + |z| = 1\}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 方向向外.

解答. 使用散度定理(又称空间Green定理, Gauss公式), 定理的条件在原点$(0,0,0)$不满足, 所以考虑挖去原点为心$\varepsilon$为半径的球$\Omega_\varepsilon=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le\varepsilon^2\}$, 则$\Sigma$内$\partial\Omega_\varepsilon$外的部分总有$\sum\limits_{cyc}\partial_x\frac{x}{r^3}=0$恒成立, 所以

$$\iint_\Sigma=\iint_{\Sigma-\partial\Omega_\varepsilon}+\iint_{\partial\Omega_\varepsilon}=\iiint_{\Sigma^\circ-\Omega_\varepsilon}0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{\partial\Omega_\varepsilon}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

而上式对上式右边重积分再用一次散度定理, 便有

$$\iint_{\partial\Omega_\varepsilon}=\iiint_{\Omega_\varepsilon}3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=4\pi\varepsilon^3,$$

所以最后的结果为$4\pi$.

问题 1.3.5. 设正项级数$\sum_{n=1}^\infty a_n$收敛, 证明级数

$$\sum_{n=1}^\infty\sqrt[n]{a_na_{n+1}\cdots a_{2n-1}}$$

收敛.

解答. 用均值不等式

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty\sqrt[n]{a_na_{n+1}\cdots a_{2n-1}}&\le\sum_n\frac{a_n+\cdots+a_{2n-1}}{n}\\&=\sum_n\frac{1}{n}\sum_{n\le j\le 2n-1}a_j\\&\le\sum_j\sum_{\frac{j+1}{2}\le n\le j}\frac{a_j}{n}\\&\le M\sum_j a_j\end{aligned}$$

其中最后一步是因为$\sum_{n\in[(j+1)/2,j]}\frac{1}{n}$一致有界, 这个一致有界性可以用积分不等式得到.

问题 1.3.6. 设$f(x)$在$[0,\pi]$上连续, 且在$x=0$处可导, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi f(x)\left(\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0).$$

解答. 使用Riemann引理,

$$\int_0^\pi f(x)\left(\cdot\right)\mathrm{d}x=\int_0^\pi\frac{f(x)-f(0)}{2\sin\frac{x}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\,\mathrm{d}x+\int_0^\pi f(0)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$$

上式左端$\frac{f(x)-f(0)}{2\sin\frac{x}{2}}\in L[0,\pi]$符合Riemann引理的条件, 后者为$\frac{\pi}{2}f(0)$.

问题 1.3.7. 映射$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$二阶连续可微, 且$\mathrm{Hesse}(f)\ge I_n$, $I_n$为$n$阶单位方阵, 证明: $\nabla f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$可逆, 且逆映射光滑, 其中$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$为$f$的梯度.

解答. 设$F=\nabla f$, 因为$f\in C^2\left(\mathbb{R}^n\right)$, 所以$F\in C^1\left(\mathbb{R}^n\right)$, 所以$JF=Hesse(f)$, 由$JF\ge I_n$, 所以对于任意的$x\in\mathbb{R}^n$, $x^TJFx\ge x^Tx$, 所以$JF$是正定矩阵, 从而可逆, 有反函数定理, $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是可逆映射, 且可逆映射也是连续可微的.

问题 1.3.8. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在一个可数集之外可导, 且导数非负, 证明$f(a)\le f(b)$.

解答. 类似实变函数里的证明.

问题 1.3.9. 设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导, $f(a)=f(b)=0$, 证明: 存在$\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{f''(\xi)}{12}(a-b)^3.$$

解答. **方法一:** 这里使用像证明"带有积分余项的Taylor公式"那样的方式产生$f$的二阶导数, 也就是用积分和分部积分法产生导数. 可以得到

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{(b-a)^2}{2}f'(b)+\int_a^b f''(x)\frac{(x-a)^2}{2}\,\mathrm{d}(x-a)\\ &= \frac{(b-a)^2}{2}f'(a)-\int_a^b f''(x)\frac{(b-x)^2}{2}\,\mathrm{d}(b-x)\\ &= \frac{(b-a)^2}{2}\cdot\frac{f'(a)-f'(b)}{2}+\int_a^b f''(x)\left(\frac{(x-a)^2}{4}+\frac{(b-x)^2}{4}\right)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{(b-a)^2}{4}\cdot\int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b f''(x)\left(\frac{(x-a)^2}{4}+\frac{(b-x)^2}{4}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

所以要证的等式相当于证明

$$\frac{f''(\xi)}{6}(a-b)^3=\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x,$$

最后用达布定理有$\xi\in(a,b)$使得$\inf f''(x)<f''(\xi)<\sup f''(x)$, 并注意

$$\frac{(a-b)^3}{6}=\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x.$$

**方法二:** 先证一个引理: 设$f(x)$在$[a,b]$三阶可导, 则存在$\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi).$$

证明对$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(x-a)[f'(x)+f'(a)]$, $G(x)=-\frac{1}{2}(x-a)^3$使用Cauchy中值定理.
利用这个引理对$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$使用引理及可证得.

## 1.4. 2010年华中师范大学高等代数考研试题

问题 1.4.1. 设$\mathbb{F}$是任意数域, $p(x)\in\mathbb{F}[x]$. 证明: $p(x)$是不可约多项式当且仅当$p(x)$是素多项式.

问题 1.4.2. (1) 设$A$是$n$阶方阵, $E$是单位矩阵, $k\neq 0$. 证明: $A^2=kA$当且仅当$\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(A-kE)=n$.
(2) 证明: 任意方阵可以表示为满秩矩阵和幂等矩阵的乘积.

问题 1.4.3. 设$\mathbb{R}$表示实数域, $V=M_3(\mathbb{R})$表示所有$3\times3$实矩阵构成的向量空间. 对给定的$A\in M_3(\mathbb{R})$, 定义$V$上的线性变换$T_A:V\to V$为

$$T_A(B)=AB-BA,\ \text{对任意的}B\in M_3(\mathbb{R}).$$

设$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 求$T_A$的特征值和相应的特征子空间, 并求此时$T_A$的极小多项式.

问题 1.4.4. 设有三元实二次型

$$f(x,y,z)=x^2+3y^2+z^2+4xz.$$

并设$x,y,z$满足$x^2+y^2+z^2=1$. 试求$f$的最大值和最小值, 并求当$x,y,z$取什么值时, $f$分别达到最大值和最小值.

问题 1.4.5. 设$\mathbb{R}$是实数域, $V=\mathcal{C}^1([0,1])$是闭区间$[0,1]$上的实连续可微函数的集合. $V$在函数的加法和数乘函数的运算下是一个向量空间.
(1) 证明函数$f(x)=\cos x$, $g(x)=2x$, $h(x)=\mathrm{e}^x$在$V$中线性无关.
(2) 任意给定$n>0$, 在$V$中找出$n+1$个线性无关的元素, 并证明你的结论.
(3) 对某个$m$, 是否有$V$和$\mathbb{R}^m$同构, 如果是, 给出证明; 如果不是, 说明理由.

问题 1.4.6. (1) 设$A$和$B$均为$n$阶复方阵, 证明: $A$与$B$相似当且仅当作为$\lambda$-矩阵, 有$\lambda E-A$等价于$\lambda E-B$.
(2) 设$A,B$都是3阶幂零矩阵, 证明: $A$相似于$B$当且仅当$A$与$B$有相同的极小多项式.
(3) 试说明上述结论(2)对4阶幂零矩阵是否成立, 为什么?

CHAPTER 2

# 小定理

命题 2.0.1. $n\times n$的矩阵$M$, 其中的元素都是正实数, 则$M$必有正特征根.

Proof. 定义$S=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|=1\}$, 映射$f:S\to S,\boldsymbol{v}\mapsto\frac{M\boldsymbol{v}}{|M\boldsymbol{v}|}$, 则$f$是良定义的, 即$f$的像确实在$S$中, 这时应为$M$将正坐标仍映为正坐标. 因为$S$是闭的连通集, 由Brouwer不动点定理, $f$在$S$上存在不动点$\boldsymbol{v}\in S$使得$f(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}$, 另外取$\lambda=|M\boldsymbol{v}|>0$, 即可证得. □

命题 2.0.2. 对于任意的$x,y,z\in\mathbb{R}$, 有

$$|x+y|+|y+z|+|z+x|\leq|x+y+z|+|x|+|y|+|z|.$$

**这是*Hlawka*不等式在实数范围内的结论.**

Proof. 设$a=x+y$, $b=x+z$, $c=y+z$. 则不等式等价于

$$2\left(|a|+|b|+|c|\right)\leq|a+b+c|+|a+b-c|+|a-b+c|+|-a+b+c|.$$

令$f(a,b,c)=|a+b+c|+|a+b-c|+|a-b+c|+|-a+b+c|$. 则容易验证$f$对于每一个变量都是偶函数, 所以$f(a,b,c)=f(|a|,|b|,|c|)$. 故可以假设$a,b,c$在上述不等式中均是非负的, 于是只需证明

$$2\left(a+b+c\right)\leq|a+b+c|+|a+b-c|+|a-b+c|+|-a+b+c|$$

这由三角不等式所保证. □

Proof. (**证明适用于复数和内积空间**)两边同时平方得

$$\sum_{cyc}\left(|x\left(x+y+z\right)|+|yz|\right)\geq\sum_{cyc}|\left(x+y\right)\left(x+z\right)|,$$

然后使用三角不等式

$$|x\left(x+y+z\right)|+|yz|\geq|x\left(x+y+z\right)+yz|=|\left(x+y\right)\left(x+z\right)|.$$

□

Proof. 使用Popoviciu不等式, 对于凸函数$f$有

$$f(x)+f(y)+f(z)+3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\geq2\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{x+z}{2}\right)+f\left(\frac{y+z}{2}\right)\right).$$

并注意$f(x)=|x|$是凸函数. □

Proof. 注意恒等式

$$\begin{gathered}\left(|a|+|b|+|c|-|b+c|-|a+c|-|a+b|+|a+b+c|\right)\left(|a|+|b|+|c|+|a+b+c|\right)\\=\left(|b|+|c|-|b+c|\right)\left(|a|-|b+c|+|a+b+c|\right)\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}\left(|a|+|b|+|c|-|b+c|-|a+c|-|a+b|+|a+b+c|\right)\left(|a|+|b|+|c|+|a+b+c|\right)\\=\left(|b|+|c|-|b+c|\right)\left(|a|-|b+c|+|a+b+c|\right)\\+\left(|c|+|a|-|c+a|\right)\left(|b|-|c+a|+|a+b+c|\right)\\+\left(|a|+|b|-|a+b|\right)\left(|c|-|a+b|+|a+b+c|\right)\end{aligned}.$$

□

Proof. 几何证明. □

CHAPTER 3

# 自编题

问题 3.0.1. 如果

$$x^k + \binom{n}{1}x^{k-1} + \binom{n}{2}x^{k-2} + \cdots + \binom{n}{k} = 0$$

的所有根$a_1, a_2, \cdots, a_k$满足

$$\begin{aligned} a_1 + \cdots + a_k &= n \\ a_1^2 + \cdots + a_k^2 &= n \\ &\cdots\cdots \\ a_1^k + \cdots + a_k^k &= n. \end{aligned}$$

问题 3.0.2. 在三角形$ABC$中有

$$\sqrt[3]{\frac{\prod\limits_{cyc} a^2}{\prod\limits_{cyc}(a+b-c)}} \geq \frac{\sum\limits_{cyc} a}{3},$$

并且

$$\sqrt[3]{\prod_{cyc}\cos\frac{A}{2}} \geq \frac{\sum\limits_{cyc}\sin A}{3}.$$

解答. 对(4.6.8)做轮换$\frac{b+c}{2} \to a$. 然后用正弦定理证明第二式. 另外用琴生不等式有

$$\prod_{cyc}\cos\frac{A}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}, \quad \sum_{cyc}\sin A \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

CHAPTER 4

# 阅读记录

## 4.1. 论文

### 4.1.1. MIA.

4.1.1.1. *An Inequality in the Complex Domain, Catalin Tigaeru.*

定理 4.1.1. 对于任意复数$z_1, z_2$, 有

$$|1+z_1|+|1+z_2|+|1+z_1z_2| \geq |z_1|+|z_2|.$$

证明上面定理时, 论文中使用了下面几个引理:

引理 4.1.2. 设$\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$且$\cos\alpha \cdot \cos\beta \leq 0$. 则

$$\cos\alpha+\cos\beta+|\sin(\alpha+\beta)| \geq 0.$$

引理 4.1.3. 设复数$z_1 = a(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$, $z_2 = b(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)$满足条件$1 + 2b\cos\beta < 0$. 如果$a \leq 1 + (1 - ab)^2$, 则

$$|1+z_1|+|1+z_2|+|1+z_1z_2| \geq |z_1|+|z_2|.$$

引理 4.1.4. 设复数$z_1 = a(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$, $z_2 = b(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)$满足条件

$$ab<1, a \geq 1, 1 \geq b > \frac{1}{2},$$
$$\alpha, \beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right],$$
$$1+2b\cos\beta < 0,$$
$$\cos\alpha < -\frac{1+(1-ab)^2}{a}.$$

则

$$|1+z_1z_2| \geq \sqrt{2+3(1-ab)^2} \geq \sqrt{2}.$$

推论 4.1.5. 设$z$是任意复数, 则

$$\left|1+z^2\right| \geq 2\left(|z|-|1+z|\right).$$

推论 4.1.6. 设$z_1, z_2, \cdots, z_n$是$n$个任意复数, 则

$$\sum_{k=1}^{n}|1+z_k| + \frac{1}{n-1}\sum_{1\leq i<j\leq n}|1+z_iz_j| \geq \sum_{k=1}^{n}|z_k|.$$

MSE网站相关问题: Q1975274

## 4.2. 书籍

### 4.2.1. Analytic Inequalities, D. S. Mitrinovic, Springer-Verlag, 1970.

## 4.3. 小技巧

连续使用分部积分的便于记忆的又不会出错的方法..

## 4.4. cut the knot

问题 4.4.1. 对于任意的$a, b, c > 0$, 有

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2} \leq a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}.$$

解答. 设$\omega = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, 记$x = a$, $y = b\omega$, $z = c\omega^2$. 则由Hlawka不等式有

$$|x+y|+|y+z|+|z+x| \leq |x|+|y|+|z|+|x+y+z|.$$

## 4.5. MSE

问题 4.5.1. 求

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \,\mathrm{d}x.$$

解答.

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \frac{d}{dn}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \,dx = \frac{d^2}{dn^2}\left(-\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \,dx\right) = \frac{2\pi^2 \sin(\pi n)}{n} - \frac{4\sin(\pi n)}{n^3} + \frac{4\pi\cos(\pi n)}{n^2}.$$

问题 4.5.2. 根据Riemann和计算Cauchy留数公式的问题.

### 4.5.1. Legendre Polynomials.

Legendre多项式满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n(x)\right\} + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

而且$P_n(1) = 1$, $\deg P_n = n$.

Rodrigue公式:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n.$$

生成函数:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

递推公式:

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) = (2n+1)\,xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

正交性:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}.$$

Associated Legendre多项式:

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}P_\ell^{(m)}(x),$$

其中$f^{(m)}$是函数$f$的$m$次导数.

Example:Integration of Associated Legendre Polynomial.

Legendre多项式在零点处的和.

## 4.6. Crux Mathematicorum

问题 4.6.1. 设$a, b, c$是三角形角$A, B, C$的对边长. 证明对于任意的$k \le 1$,

$$\sum_{cyc}\frac{a^k}{A} \ge \frac{3}{\pi}\sum_{cyc} a^k.$$

解答. **证法一:** 当$0 < k \le 1$时, $\frac{\sin^k x}{x}$是不增函数, 用Tchebyshev不等式

$$\left(\frac{\sin^k A}{A} + \frac{\sin^k B}{B} + \frac{\sin^k C}{C}\right)(A+B+C) \ge 3\left(\sin^k A + \sin^k B + \sin^k C\right).$$

当$k \le 0$时, $A \le B \le C$有

$$\frac{a^k}{A} \ge \frac{b^k}{B} \ge \frac{c^k}{C},$$

再用一次Tchebyshev不等式即可.

**证法二:** 不妨设$a \ge b \ge c$, 则$A \ge B \ge C$, 令

$$f(k) = \frac{a^k/A + b^k/B + c^k/C}{a^k + b^k + c^k},$$

则

$$f'(k) = -\sum \frac{a^k b^k (A-B)(\log a - \log b)}{AB}\left(\sum a^k\right)^{-2} \le 0,$$

并利用$f(1) \ge 3/\pi$.

问题的一个推广: 设$k$和$l$均为实数, 则

1.

$$\sum \frac{a^k}{A^l} \geq \left(\frac{3}{\pi}\right)^l \sum a^k,$$

对于如下情况都成立

- $0 \leq k \leq l \leq 1$,
- $k \leq 0 \leq l$,
- $k \geq 0$且$l \leq -1$.

2.

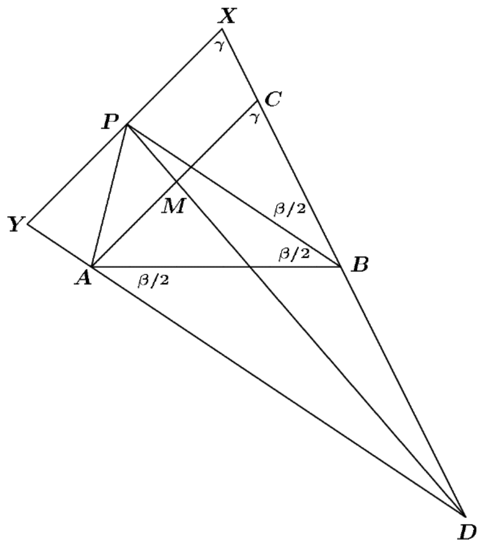
$$\sum \frac{a^k}{A^l} \leq \left(\frac{3}{\pi}\right)^l \sum a^k,$$

其中$k \leq 0$且$-1 \leq l \leq 0$.

问题 4.6.2. 三角形$ABC$的内心是$I$. 设$P, Q$分别是$A$在$BI$, $CI$上的垂足. 证明:

$$\frac{AP}{BI} + \frac{AQ}{CI} = \cot \frac{A}{2}.$$

问题 4.6.3. 三角形$ABC$, $CB$延长线上有一点$D$满足$BD = AB$, $M$为$AC$的中点, $\angle ABC$的角平分线交$DM$于点$P$, 证明$\angle BAP = \angle ACB$.




解答. 过$P$做$AC$的平行线, 则$P$是$XY$的中点, $B$是$XD$的中点, $XB = AB$, $\triangle ABP \cong \triangle XBP$.

问题 4.6.4. 数字111能用多少种方法表示成三个等比数列的和.

解答. 分类讨论, 如果公比可以为零, 则有17个, 但如果公比不能取零则有16个.

问题 4.6.5. 求所有的$\lambda$使

$$2(x^3 + y^3 + z^3) + 3(1 + 3\lambda)xyz \geq (1 + \lambda)(x + y + z)(yz + zx + xy)$$

对所有正实数$x, y, z$恒成立.

解答. 取$x = y = z$, $z = 0$, 得$\lambda \leq 1$. (对于正实数$x, y, z$, 可考虑$z \to 0^+$)
当取$\lambda = 1$时, 便是Schur不等式

$$\sum_{cyc} x^n (x - y)(x - z) \geq 0$$

在$n = 1$时的情形. 最后, 证

$$(1 + \lambda)(x + y + z)(yz + zx + xy) - 3(1 + 3\lambda)xyz$$

关于$\lambda$是单调的, 在$\lambda = 1$时取到最大.

问题 4.6.6. 一个四边形的边长顺次为$a, b, c, d$且面积为$F$, 证明

$$2a^2+5b^2+8c^2-d^2 \geq 4F.$$

并且等号何时成立?

解答. 对于固定的边长$a, b, c, d$凸四边形有更大的面积, 所以只考虑凸的情况. 不妨设$AC = 1$, $A(0, 0)$, $B(p, q)$, $C(1, 0)$, $D(r, s)$, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $q < 0$, $s > 0$, 则

$$2a^2+5b^2 \geq 7q^2+10/7,$$

等号在$p = 5/7$时取得,

$$8c^2-d^2 \geq 7s^2-8/7,$$

等号在$r = 8/7$时取得, 故原不等式左边$LHS \geq 2(|q|+|s|)$等号在$|q| = |s| = 1/7$时取得, 而$2(|q|+|s|) = 4F$.

问题 4.6.7. 不等腰三角形$ABC$三边长$a, b, c$. $D_1, E_1$分别在$AB$, $CA$上且满足$BD_1 = CE_1 = a$. $D_2, E_2$分别在$CB$, $AB$上且$CD_2 = AE_2 = b$. 证明: $D_1E_1 \parallel D_2E_2$.

解答. 连接$D_2E_1$交$AB$于$S$, 则$\triangle SBC \cong \triangle SE_1C$, 故$CS$是$\angle C$平分线,

$$\frac{D_1S}{SE_2} = \frac{BD_1-BS}{AE_2-AS} = \frac{a-BS}{b-AS} = \frac{a}{b},$$

这是因为$BS/AS = a/b$. 又因

$$\frac{E_1S}{SD_2} = \frac{CE_1}{CD_2} = \frac{a}{b} = \frac{D_1S}{SE_2},$$

故$D_1E_1 \parallel D_2E_2$.

问题 4.6.8. 证明

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2}{abc}},$$

其中$a, b, c > 0$. 等号当且仅当$a = b = c$时成立.

解答. 由均值不等式$\sum\limits_{sym} a^2b \geq 6abc$, 故$9\sum\limits_{sym} a^2b+18abc \geq 8\sum\limits_{sym} a^2b+24abc$, 即

$$9\prod_{cyc}(a+b) \geq 8\sum_{cyc} a\sum_{cyc} ab = 4\sum_{cyc} a\sum_{cyc} a(b+c),$$

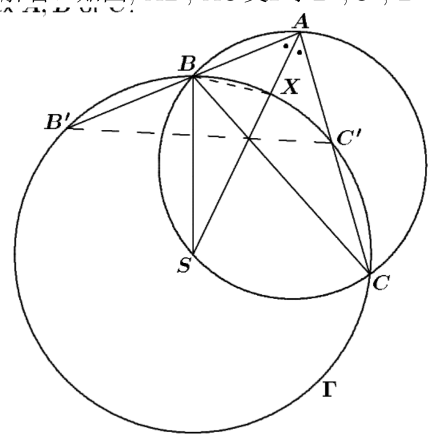
再用均值不等式, 有

$$\frac{3}{4}\prod_{cyc}(a+b) \geq \sum_{cyc} a\frac{\sum\limits_{cyc} a(b+c)}{3} \geq \sum_{cyc} a\sqrt[3]{\prod_{cyc} a(b+c)}$$

即得. 在(3.0.2)中有部分推广.

问题 4.6.9. 已知不等边三角形$ABC$和通过其中两顶点的圆$\Gamma$, 这个圆还经过$\triangle ABC$的内心, 试用不带刻度得直尺找出三角形的内心.

解答. 如图, $AB$, $AC$交$\Gamma$于$B', C'$, $B'C'$交$BC$于$M$, $AM$与$\Gamma$交于$X$即为三角形的内心.



证明: 做$\triangle ABC$的外接圆, 若$X$为内心, 则$AX$交外接圆于$S$有$SB = SX = SC$, $S$为$\Gamma$的圆心. 故当$B, C$两点做$AS$的镜像得到$B'C'$, 必有$B'C'$交$BC$于$\angle A$的平分线上.

问题 4.6.10. 是否存在满足如下三条的函数$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,
(1) $f(1996) = 1$;
(2) 对于任意的素数$p$, 每一个素数都在序列

$$f(p), f(2p), \cdots, f(kp), \cdots$$

中出现无穷多次;
(3) 对于任意的$n \in \mathbb{N}$, $f(f(n)) = 1$.

解答. **解一:** 函数存在:

$$f(x) = \begin{cases} p_i & \text{如果条件*成立,} \\ 1 & \text{其它,} \end{cases}$$

其中*是指: 如果$x$的素因子分解$x = \prod p_i^{e_i}$存在某个幂$e_i > 2$, 且对于任何$j \neq i$都有$e_i > e_j$, 则$f(x) = p_i$.
**解二:** 函数

$$f(x) = \begin{cases} q_{b(n)} & \text{如果} m = p^n, \text{其中} p \text{是素数且} n \geq 2, \\ 1 & \text{其它情况.} \end{cases}$$

其中$b(n)$表示数字$n$的二进表示中数字1出现的次数, $q_n$为第$n$个素数.

问题 4.6.11. 找一个十进制四位数$\overline{abcd}$, $(a \neq 0)$, 使

$$\overline{abcd} = a^a + b^b + c^c + d^d.$$

解答. 分类讨论, 结果为3435.
一个推广方向是将四位数推广到任意位数的情况.

CHAPTER 5

# 中等数学竞赛

## 5.1. 数学竞赛吧

问题 5.1.1. 已知$a, b, c \in \mathbb{R}^{+}$, $abc = 1$, 求证:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2 + bc} \leq \frac{3}{2}.$$

## 5.2. 中国国家队选拔考试

### 5.2.1. 1993年第8届IMO中国国家队选拔考试.

问题 5.2.1. 设有空间中若干个点, 其中任何四点都不共面, 某些点对间有线段相连, 这样构成一个图. 如果最少要用$n$种颜色给这些点染色, 使每点都染上种颜色之一, 才能使得任何两个同色点之间都没有线段相连, 则称这个图是$n$色图. 求证: 对于任意的$n \in \mathbb{N}$, 都存在一个不含三角形的色图.

问题 5.2.2. 在坐标平面上给定点集

$$S = \{(x, y) \mid x = 1, 2, \cdots, 1993,\ y = 1, 2, 3, 4\},$$

已知$T \subset S$且$T$中任何4点都不是某个正方形的4个顶点, 求$|T|$的最大值.

问题 5.2.3. 对素数$p \geq 3$, 定义

$$F(p) = \sum_{k=1}^{(p-1)/2} k^{120}, \quad f(p) = \frac{1}{2} - \left\{ \frac{F(p)}{p} \right\},$$

求$f(p)$的值. 这里$\{x\} = x - [x]$表示$x$的小数部分.

问题 5.2.4. 试求方程

$$2x^4 + 1 = y^2$$

的一切整数解.

问题 5.2.5. $\triangle ABC$的$\angle A$的平分线交外接圆于点$D$, 内心为$I$, 边$BC$的中点为$M$, $P$是点$I$关于点$M$的对称点(设点$P$在圆内), 延长$DP$交外接圆于点$N$. 求证: 在$AN$, $BN$, $CN$这三条线段中, 必有一条线段的长等于另两条线段的长度之和.

问题 5.2.6. 已给大于1的自然数$n$, 设$a, b, c, d$是自然数且满足$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 1$, $a + c \leq n$, 求$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$的最大值.

## 5.3. Balkan数学竞赛

### 5.3.1. 1993年第10届巴尔干(Balkan)数学奥林匹克竞赛.

问题 5.3.1. 设$a, b, c, d, e, f$是实数, 并且满足

$$a + b + c + d + e + f = 10,$$

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 + (d-1)^2 + (e-1)^2 + (f-1)^2 = 6.$$

求$f$的最大可能值.

问题 5.3.2. 一个自然数的十进制表示$\overline{a_N a_{N-1} \cdots a_1 a_0}$称为是单调的, 如果$a_N \leq a_{N-1} \leq \cdots \leq a_0$. 求不超过1993位数字的单调数的总数.

问题 5.3.3. 圆$C_1, C_2$的圆心分别为$O_1, O_2$, 且外切于点$\Gamma$. 圆$C$与$C_1$切于点$A$, 与$C_2$切于点$B$, 且$O_1, O_2$位于圆$C$内. 过$\Gamma$的$C_1, C_2$的共切线交圆$C$于点$K$和$L$. 若$D$是线段$KL$的中点, 证明: $\angle O_1 O O_2 = \angle ADB$.

问题 5.3.4. 设$p$是素数, $m \geq 2$是一个整数. 证明方程

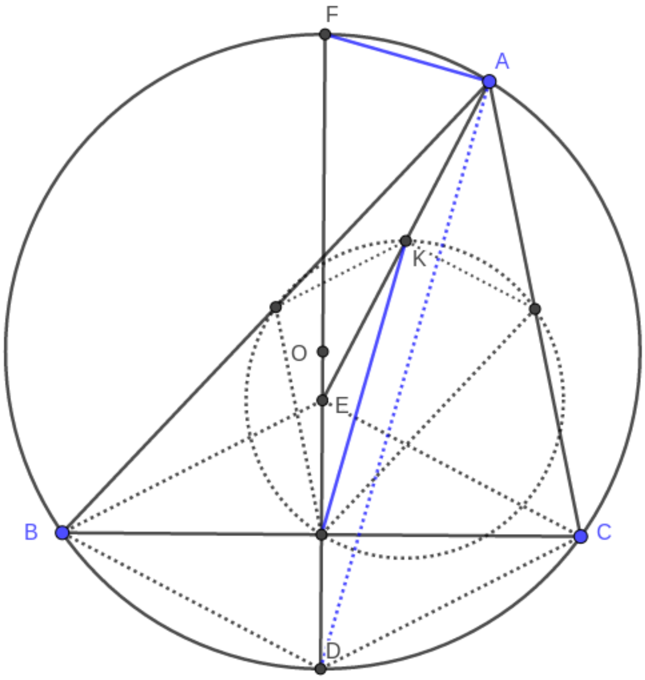
$$\frac{x^p + y^p}{2} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^m$$

有正整数解$(x, y) \neq (1, 1)$当且仅当$m = p$.

**5.3.2. 1999年第16届巴尔干(Balkan)数学奥林匹克竞赛.**

问题 5.3.5. 设$D$是锐角三角形$ABC$外接圆的劣弧$BC$上的中点. 点$D$关于线段$BC$和外接圆圆心的对称点分别为$E$和$F$. $K$为$EA$的中点.

(1) 证明过三角形$ABC$三边中点的圆通过点$K$.
(2) 证明点$K$和$BC$中点的连线与$AF$垂直.




解答.

问题 5.3.6. 设$p > 2$为素数, 且$3 \mid p-2$. 考虑集合

$$S = \{y^2 - x^3 - 1 \mid x, y \in \mathbb{Z}, 0 \leq x, y \leq p-1\}.$$

证明$S$中最多有$p-1$个元素能被$p$整除.

解答. **引理1.** 设素数$p$满足$3 \mid p-2$, 则$x^3 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$只有一个解$x \equiv -1 \pmod{p}$.

因为$3 \mid p-2$, 所以$p$具有$6m+5$的形式. 将方程分解因式, 有$(x+1)(x^2 + (p-1)x + 1) \equiv 0 \pmod{p}$, 当$x \not\equiv -1 \pmod{p}$时, 只需说明$x^2 + (p-1)x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$无解即可, 即$\left(x + \frac{p-1}{2}\right)^2 \equiv \frac{p-3}{2} \cdot \frac{p+1}{2} \pmod{p}$无解, 用勒让得符号及二次互反律

$$\left(\frac{\frac{p-3}{2} \cdot \frac{p+1}{2}}{p}\right) = \left(\frac{-3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p}{3}\right) (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{3-1}{2}} = \left(\frac{6m+5}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1.$$

所以$\left(x + \frac{p-1}{2}\right)^2 \equiv \frac{p-3}{2}\frac{p+1}{2} \pmod{p}$无解.

**引理2.** 设素数$p$满足$3 \mid p-2$, 则$\varphi : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, $x \mapsto x^3 + 1$是双射.

设$\mathbb{Z}_p$的原根为$a$, 由Euler公式$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, 所以$\left(a^{-\frac{p-2}{3}}\right)^3 \equiv a \pmod{p}$, 这说明方程$x^3 \equiv a \pmod{p}$有解, 记$x_0 = a^{-\frac{p-2}{3}}$.

任取$b \in \mathbb{Z}_p$, 当$b \neq 0$时, 有自然数$n \in \mathbb{N}$使得$b = a^n = (x^n)^3$; 当$b = 0$时, 显然$0^3 \equiv 0 \pmod{p}$. 由$b$的任意性, 这说明映射$f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, $x \mapsto x^3$是映上的满射. 再取双射$g : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, $x \mapsto x+1$, 则$\varphi = g \circ f$即为所求的双射.

**问题的证明.** 在集合$S$中考虑那些能被$p$整除的数, 当$y=0$时, 由引理1知$p \mid x^3+1$在$0 \le x \le p-1$中只有一个解$x = p-1$; 反之当$x = p-1$时, 使$y^2 - x^3 - 1 \equiv 0 \pmod p$的解也只有$y = 0$. 所以除了$(x,y)=(p-1,0)$外只需考虑$0 \le x \le p-2$, $1 \le y \le p-1$.

由引理2知映射$\varphi$只是$\mathbb{Z}_p$的一个置换, 置换不改变二次剩余的数量, 而且$\varphi(p-1)=0$, 所以

$$\{0^3+1, 1^3+1, \cdots, (p-2)^3+1\} = \mathbb{Z}_p^*.$$

其中有$\frac{p-1}{2}$个二次剩余, $\frac{p-1}{2}$个二次非剩余. 要使$p \mid y^2 - x^3 - 1$, 则必须有$y^2 \equiv x^3+1 \pmod p$, 满足$y^2 \equiv x^3+1 \pmod p$的二元组$(x_0,y_0)$使$\varphi(x_0) = x_0^3+1$是模$p$的二次剩余. 而且对于固定的$x$, 满足$y^2 \equiv x^3+1 \pmod p$的$y$最多有两个, 且成对出现(如果$y_0$满足$y^2 \equiv x^3+1$, 则$p-y_0$也满足). 所以此时$S$中符合条件的二元组$(x,y)$个数不超过模$p$的二次剩余数的两倍, 即$2\cdot\frac{p-1}{2} = p-1$个. 最后注意到丢番图方程$y^2 = x^3+1$有两个非负平凡解$(x,y)=(1,0),(2,3)$, 而这两个平凡解都满足本段条件$0 \le x \le p-2$, $1 \le y \le p-1$, 所以能被$p$整除的不同的$y^2-x^3-1$最多有$p-2$个.

所以$S$中最多有$1+p-2=p-1$个元素能被$p$整除.

问题 5.3.7. 设$M,N,P$为锐角三角形$ABC$的重心$G$分别在边$AB,BC,CA$上的正交投影. 证明:

$$\frac{4}{27} < \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} \le \frac{1}{4}.$$

解答. 如图所示, 证明将不加说明的使用如下公式,

$$GM = \frac{1}{3}h_a, GN = \frac{1}{3}h_b, GP = \frac{1}{3}h_c;$$

$$S_{MNP} = \frac{1}{18}\left(h_ah_b\sin C + h_bh_c\sin A + h_ch_a\sin B\right);$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{6}\sum_{cyc} ab\sin C;$$

于是

$$\begin{aligned}
S_{MNP} &= \frac{1}{18}\sum_{cyc} h_ah_b\sin C = \frac{1}{18}\sum_{cyc}\frac{2S_{ABC}}{a}\frac{2S_{ABC}}{b}\sin C \\
&= \frac{2S_{ABC}}{9}S_{ABC}\sum_{cyc}\frac{\sin C}{ab} \\
&= \frac{2S_{ABC}}{9}\frac{1}{6}\left(\sum_{cyc} ab\sin C\right)\left(\sum_{cyc}\frac{\sin C}{ab}\right) \\
&\ge \frac{S_{ABC}}{27}\left(\sum_{cyc}\sin C\right)^2 > \frac{4S_{ABC}}{27}.
\end{aligned}$$

最后一个不等式用逐步调整法证明. 另一方面

$$\begin{aligned}
S_{MNP} &= \frac{2S_{ABC}}{9}S_{ABC}\sum_{cyc}\frac{\sin C}{ab} = \frac{2S_{ABC}}{9}\sum_{cyc}\frac{S_{ABC}\sin C}{ab} \\
&= \frac{2S_{ABC}}{9}\sum_{cyc}\frac{\sin^2 C}{2} \\
&= \frac{S_{ABC}}{9}\left(2 + 2\cos A\cos B\cos C\right) \\
&\le \frac{S_{ABC}}{9}\left(2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{S_{ABC}}{4}.
\end{aligned}$$

最后一步对$f(x) = \ln\cos x$用琴生不等式有

$$\prod_{cyc}\cos A \le \frac{1}{8}.$$

问题 5.3.8. 设非负整数$0 \le x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots$, 对于任意的$k \ge 0$, 序列中不超过$k$的项的个数有限并记为$y_k$. 证明对于任意的正整数$m, n$,

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j \ge (n+1)(m+1).$$

解答. 当有某个$x_i > m$时, 则有$\sum_{j=0}^{m} y_j < n+1$. 这时有

$$\sum_{i=0}^{n} x_i \ge 0 \cdot y_0 + 1 \cdot (y_1 - y_0) + \cdots + m(y_m - y_{m-1}) + (n+1-y_m)(m+1)$$

所以有

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_i \ge \sum_{k=1}^{m} k(y_k - y_{k-1}) + (n+1)(m+1) - (m+1)y_m + \sum_{j=0}^{m} y_j = (n+1)(m+1).$$

当所有的$x_i \le m$时, 根据前面的情况, 在要考虑的数列$x_1, x_2, \cdots, x_n$后面补充添加$x'_{n+1}$, 且$x'_{n+1} = m+1$, 并在之后的计算中视$x_{n+1}$就是$x'_{n+1}$. 于是二元组$(n+1, m)$刚好符合前面一段的情况, 即存在$x_{n+1} > m$, 所以有同样的结论

$$\sum_{i=0}^{n+1} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j \ge (n+2)(m+1)$$

分别计算人为添加的项和原有的项, 则有

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j + (m+1) \ge (n+2)(m+1)$$

化简即得所要证的不等式.

**说明1:** 此不等式类似积分不等式中证明Young-不等式的面积法, 只是条件稍有不适用, 所以不能使用R-S积分证明此不等式. 设$y = \varphi(x)$是$[0, a]$上严格递增的连续函数, 则比较面积有

$$ab \le \int_0^a \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b \varphi^{-1}(y)\,\mathrm{d}y, \qquad a, b \ge 0,$$

**说明2:** 既然此不等式类似于Young-不等式, 所以应当有类似反函数的结论: $x_{y_i} \ge i+1$, $y_{x_i} \ge i+1$, 但用这一性质证明定理比较麻烦.

## 5.4. Irish数学竞赛

### 5.4.1. 1993年第六届Irish MO, Paper 1.

问题 5.4.1. 实数$\alpha, \beta$满足方程

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 17 = 0,$$
$$\beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta + 11 = 0.$$

求$\alpha + \beta$.

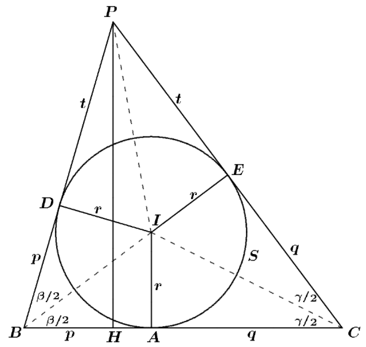
解答. 将问题转化为$x^3 + px$的形式, 也就是通过平移消去平方项, 得到

$$(\alpha + \beta - 2)\left[(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 1)(\beta - 1) + (\beta - 1)^2 + 2\right] = 0.$$

第二项是正值.

问题 5.4.2. 称自然数$n$是"好的", 如果对于某个$k \ge 2$和自然数$a_1, a_2, \cdots, a_k$使得$n$能表示成$a_1 + a_2 + \cdots + a_k$和$a_1 a_2 \cdots a_k$, 而且这样的表示对于$n$是唯一的. 例如, 10是"好的", 因为$10 = 5+2+1+1+1 = 5 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1$且只有这一种表示. 用素数表示无哦有"好的"自然数.

问题 5.4.3. 直线$l$与圆$S$相切于$A$点, 点$B$和$C$在$l$上且分布在$A$点的两侧, $B, C$向$S$做切线, 交于点$P$. 如果$B, C$在$l$上移动时保持$|AB| \cdot |AC|$不变, 求点$P$的轨迹.




解答. 如图$|AB| = p$, $|AC| = q$, $pq = k^2$为一个常数. 计算$\angle EIP = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$. 所以$t = \frac{(p+q)r^2}{pq-r^2}$. 所以

$$S_{\triangle BCP} = r(p + q + t) = r\frac{k^2(p + q)}{k^2 - r^2} = \frac{1}{2}(p + q)PH,$$

即$PH = \frac{2k^2r}{k^2-r}$是常数, 所以$P$的轨迹是平行于$BC$的直线.

问题 5.4.4. 设$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$为实数, 其中$n \geq 1$, 设$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$满足$|f(0)| = f(1)$且函数$f$的每一个根$\alpha$均是实数且满足$0 < \alpha < 1$. 证明$f$的所有根的积不超过$1/2^n$.

解答. 设$f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$, 则$\prod(1 - \alpha_i) = \prod \alpha_i$, 用均值不等式

$$\left(\prod \alpha_i\right)^2 = \prod \alpha_i(1 - \alpha_i) \leq \prod \left(\frac{\alpha_i + (1 - \alpha_i)}{2}\right)^2.$$

问题 5.4.5. 设非零复数$z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, \alpha$满足

(1) $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$为包含原点0的凸无边形$\boldsymbol{Q}$的顶点, 且
(2) $\alpha z_1, \alpha z_2, \alpha z_3, \alpha z_4, \alpha z_5$均在$\boldsymbol{Q}$内.

如果$\alpha = p + \mathrm{i}q$, $p, q \in \mathbb{R}$, 证明$p^2 + q^2 \leq 1$且

$$p + q\tan(\pi/5) \leq 1.$$

### 5.4.2. 1993年第六届Irish MO, Paper 2.

问题 5.4.6. 给定五个格点$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$中必有两个格点连成的线段内有另一个格点.

解答. 根据格点每一个坐标的奇偶性, 可分为4类, 现有5个点, 必有两个点对应坐标的奇偶性相同.

问题 5.4.7. 设$a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$为$2n$个实数, 其中$a_1, a_2, \cdots, a_n$两两不同, 如果$\alpha \in \mathbb{R}$使得

$$\prod_j (a_i + b_j) = \alpha, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$

证明存在实数$\beta$使得

$$\prod_i (a_i + b_j) = \beta, \quad \forall j = 1, 2, \cdots, n.$$

问题 5.4.8. 设$0 < x < \pi$, 证明对于任何自然数$n$,

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} > 0.$$

解答. 用数学归纳法, $S_n(x) = LHS$, $n = 1$时容易验证, $S_n'(x) = \frac{\sin 2nx}{2\sin x} = 0$的根在集合

$$\left\{\frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \cdots, \frac{(2n-1)\pi}{2n}\right\}$$

中, 而且每一个都使$S_n(x)$大于零.

## 5.5. 国内数学竞赛

### 5.5.1. 1999年河南省高中数学竞赛(高二)-简版.

问题 5.5.1. 化简$\frac{\sqrt{1-2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}}{\cos 20^\circ-\sqrt{1-\cos^2 160^\circ}}$.

解答. 1.

问题 5.5.2. 设$P_1P_2$是抛物线$x^2=y$的一条弦, 如果$P_1P_2$的垂直平分线的方程是$y=-x+3$, 求弦$P_1P_2$所在的直线方程.

解答. $y=x+2$.

问题 5.5.3. 四面体$S-ABC$中, 三组对棱分别相等, 依次为$\sqrt{34}$, $\sqrt{41}$, 5, 求此四面体的体积.

解答. 20.

问题 5.5.4. 已知复数$z$满足$z^3=27$. 求$z^5+3z^4+2242$的值.

解答. 1999或2728.

问题 5.5.5. 设$S_n$为等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和, $S_9=18$, $a_{n-4}=30(n>9)$, $S_n=336$. 求$n$的值.

解答. $n=21$.

问题 5.5.6. 设$0<x<\pi$, 求函数$y=\frac{2-\cos x}{\sin x}$的最小值.

解答. $\sqrt{3}$.

问题 5.5.7. 已知$\sin\frac{\alpha}{2}-2\cos\frac{\alpha}{2}=1$. 求$\frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha-\cos\alpha}$的值.

解答. $\frac{3}{4}$或0.

问题 5.5.8. 求函数$y=\frac{1}{(x-1)(2x-1)}$的值域.

解答. $\{y\mid y\le 8$或$y>0\}$.

问题 5.5.9. 已知数列$\{a_n\}$中, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_na_{n+1}a_{n+2}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$, 且$a_{n+1}a_{n+2}\neq 1$. 求$S_{1999}=\sum_{n=1}^{1999}a_n$的值.

解答. 3997.

问题 5.5.10. 已知复数$z\neq 0$. 给出命题:

(1) $z+\overline{z}=0$;
(2) $z^2=-a^2(a\in\mathbb{R}, a\neq 0)$;
(3) $z^2=\overline{z}^2$;
(4) $|a+z|=|z-a|(a\in\mathbb{R}, a\neq 0)$.

以上命题中为$z$是纯虚数的充分必要条件的是?

解答. 2. (此处怀疑中等数学2000年第1期中的答案有误, 1中$z$可能为0, 4中$z$也可能为0, 从而都不是纯虚数)

问题 5.5.11. 已知$[x]$表示不超过$x$的最大整数. 求方程

$$3^{2x}-[10\times 3^{x+1}]+\sqrt{3^{2x}-[10\times 3^{x+1}]+82}=-80$$

的解的个数.

解答. 2.

问题 5.5.12. 设$x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}^+$, $a=\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{y_1y_2}$, $b=\sqrt{(x_1+y_1)(x_2+y_2)}$. 求$a,b$的大小关系.

解答. $a\le b$.

问题 5.5.13. 求证:

$$\tan 70^\circ=\tan 20^\circ+2\tan 40^\circ+4\tan 10^\circ.$$

问题 5.5.14. 直线$y=kx+m$与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$及其渐近线交于$A,B,C,D$四点. 求证: $|AC|=|BD|$.

解答. 提示: 证明$AB$的中点横坐标等于$CD$的中点横坐标.

问题 5.5.15. 设常数$a>1>b>0$. 则当$a,b$满足什么关系时, $\lg(a^x-b^x)>0$的解集为$(1,+\infty)$?

解答. $a=b+1$.

问题 5.5.16. 整数列$\{a_n\}(n\in\mathbb{N})$满足: $a_1=2$, $a_2=7$, 且有

$$-\frac{1}{2}<a_{n+1}-\frac{a_n^2}{a_{n-1}}\leq\frac{1}{2}.$$

求证: 当$n\geq 2$时, $a_n$为奇数.

解答. 提示: 证明$a_{n+1}=3a_n+2a_{n-1}$.

**5.5.2. 1999年全国高中数学联赛广西赛区初赛(高三).**

问题 5.5.17. 在等比数列$\{a_n\}$中, 记$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 已知$a_5=2S_4+3$, $a_6=2S_5+3$. 求此数列的公比$q$.

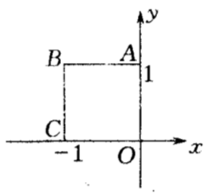
解答. $q=3$.

问题 5.5.18. 设四棱锥$P-ABCD$的底面不是平行四边形. 现用某平面去截此四棱锥, 得到截面四边形$A_1B_1C_1D_1$, 设集合$S=\{$四边形$A_1B_1C_1D_1$是平行四边形$\}$. 证明$S$是无穷集合.

问题 5.5.19. 圆柱底面的直径为$4R$, 高为$42R$. 它能装半径为$R$的球的个数最多为多少?

解答. 58. 注意圆柱的底层恰能放两个球, 然后装法为左右两个一层, 前后两个一层, 交叉向上依次放置.

问题 5.5.20. 如图, 已知函数$y=2x^2$在$[a,b](a<b)$上的值域为$[0,2]$. 则点$(a,b)$的轨迹为图中的?




解答. 线段$AB$和$BC$.

问题 5.5.21. 已知集合$A_n=\{x\mid 2^n<x<2^{n+1},且x=7m+1,n,m\in\mathbb{N}\}$. 求$A_6$中各元素的和.

解答. 891.

问题 5.5.22. 设$(5\sqrt{2}+7)^{2n+1}(n\in\mathbb{N})$的整数部分和小数部分分别是$I$和$F$. 求$F(I+F)$的值.

解答. 1.

问题 5.5.23. 设$[\tan x]$表示不超过实数$\tan x$的最大整数, 求方程$[\tan x]=2\cos^2 x$的解.

解答. $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$.

问题 5.5.24. 已知$ax^2-1999x+b>0$的解集是$\{x\mid -3<x<-1\}$. 求不等式$ax^2+1999x+b>0$的解集.

解答. $\{x\mid 1<x<3\}$.

问题 5.5.25. 已知一平面与一正立方体的12条棱的夹角均是$\theta$. 求$\cos\theta$的值.

解答. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

问题 5.5.26. 设$f(x)=\log_2\frac{1+2^x+3^xa}{3}$, 其中$a\in\mathbb{R}$. 如果当$x\in(-\infty,1]$时$f(x)$有意义, 求$a$的取值范围.

解答. $a>-\frac{3}{4}$.

问题 5.5.27. 已知复数列$z_0,z_1,\cdots,z_n,\cdots$满足$z_0=0$, $z_1=1$, $z_{n+1}-z_n=\alpha(z_n-a_{n-1})$, $\alpha=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$, $n=1,2,\cdots$. 求在圆$|z|=10$的内部所含有的$z_n$的个数.

解答. 5.

问题 5.5.28. 设集合$A = \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$, $\{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$是$A$的一族非空子集构成的集合, 且当$i \neq j$时, $B_i \cap B_j$至多有两个元素. 求$k$的最大值.

解答. 175. 用逐步调整法, 所有集合可以替换为最多三个元素的集合. 而$\binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} = 175$.

问题 5.5.29. 对每一实数对$x, y$, 函数$f(t)$满足$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy + 1$. 若$f(-2) = -2$, 试求满足$f(a) = a$的整数$a$的个数.

解答. 2个.

问题 5.5.30. 在$\triangle ABC$中是否存在一点$P$, 使得过点$P$的任意直线都将$\triangle ABC$分成面积相等的两部分? 为什么?

解答. 不存在.

问题 5.5.31. 某县位于沙漠地带, 人与自然长期进行顽强的斗争, 到1998年底全县的绿化率已达到30%. 从1999年开始, 每年将出现这样的局面, 即原有沙漠面积的16%将被绿化, 与此同时, 由于各种原因, 原有绿化面积的4%又被沙化.

(1) 设全县面积为1, 1998年底绿化总面积为$a_1 = \frac{3}{10}$, 经过$n$年后绿化总面积为$a_{n+1}$. 求证: $a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + \frac{4}{25}$.
(2) 至少需要多少年的努力, 才能使全县的绿化率超过60%? (年取整数, $\lg 2 = 0.3010$).

解答. 2.至少5年.

# Bibliography

[1] 中等数学杂志.
[2] Crux mathematicorum.
[3] 数学博士论坛.