一个因为算错导致的不必要麻烦

April 21, 2025

Abstract

本来以为有什么计算问题, 但仔细 check 了一下后发现, 是第一种方法某处算错了个符号, 实际上并没有两种解法的不一致性问题. 如果我将来翻到这个文档, 就不用继续看下去了, 特此在摘要出提醒自己.

已知 $y'' + (x + \mathrm{e}^{2y})(y')^3 = 0$, 则方程的通解为_______.

解. 解出 x 为

$$x = -\mathrm{e}^{2y} - \frac{y''}{(y')^3}.$$

将 x 看成 y 的函数, 对上式两边同时取 y 的导数, 有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} &= -2\mathrm{e}^{2y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{y''}{(y')^3}\right) \\
&= -2\mathrm{e}^{2y} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y''}{(y')^3}\right) \\
&= -2\mathrm{e}^{2y} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{y'''\cancelto{(y')}{(y')^3} - y'' \cdot 3\cancelto{1}{(y')^2} \cdot y''}{\cancelto{(y')^4}{(y')^6}} \\
&= -2\mathrm{e}^{2y} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{y' \cdot y''' - 3(y'')^2}{(y')^4}
\end{aligned}$$

回到方程, 对 x 求导可得

$$\begin{aligned}
y''' &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x + \mathrm{e}^{2y})(y')^3\right] \\
&= -(1 + 2y' \cdot \mathrm{e}^{2y})(y')^3 - 3(x + \mathrm{e}^{2y})(y')^2\, y'' \\
&= -(1 + 2y' \cdot \mathrm{e}^{2y})(y')^3 + 3(x + \mathrm{e}^{2y})^2 (y')^5,
\end{aligned}$$

代入上式, 化简得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} &= -2\mathrm{e}^{2y} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{y'\cdot\left(-(1+2y'\cdot\mathrm{e}^{2y})\,(y')^3+3(x+\mathrm{e}^{2y})^2\,(y')^5\right)+3\left((x+\mathrm{e}^{2y})\,(y')^3\right)^2}{(y')^4}\\
&= -2\mathrm{e}^{2y} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\left(-(1+2y'\cdot\mathrm{e}^{2y})\,(y')^4+3(x+\mathrm{e}^{2y})^2\,(y')^6\right)+3(x+\mathrm{e}^{2y})^2\,(y')^6}{(y')^4}\\
&= -2\mathrm{e}^{2y} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\cdot\left(-(1+2y'\cdot\mathrm{e}^{2y})+3(x+\mathrm{e}^{2y})^2\,(y')^2+3(x+\mathrm{e}^{2y})^2\,(y')^2\right)\\
&= \cancel{-2\mathrm{e}^{2y}} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\cdot(1\cancel{+2y'\cdot\mathrm{e}^{2y}}) - 6\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\cdot(x+\mathrm{e}^{2y})^2\,(y')^2\,,
\end{aligned}$$

注意到, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\cdot y' = 1$, 所以上式左右两边可以化简为

$$(x+\mathrm{e}^{2y})^2 y' = 0.$$

最后这个方程已经非常好解了, 可以预见到方程的解有一个任意常数, 当然也可以考虑上分母为零($y'=0$)的特殊情况.

现在略去进一步的求解转向另一种解法:

仍然将 x 看成 y 的函数, 则有

$$y' = \frac{1}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}y},$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x'_y}\right) = y'\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{x'_y}\right) = \frac{1}{x'_y}\cdot\left(\frac{-x''_y}{\left(x'_y\right)^2}\right) = -\frac{x''_y}{\left(x'_y\right)^3},$$

代入原微分方程有

$$-\frac{x''_y}{\left(x'_y\right)^3} + (x+\mathrm{e}^{2y})\left(\frac{1}{x'_y}\right)^3 = 0.$$

化简为

$$x''_y = x + \mathrm{e}^{2y},$$

其对应的齐次方程通解为 $\widetilde{x} = \widetilde{x}(y) = C_1\mathrm{e}^{y} + C_2\mathrm{e}^{-y}$, 其特解为 $x_0 = x_0(y) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2y}$, 因此上面微分方程的所有解为

$$x = \widetilde{x} + x_0 = C_1\mathrm{e}^{y} + C_2\mathrm{e}^{-y} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2y}.$$

可以看到这后一种解才是正确的, 但为什么前面的解法会出现漏解现象?