2022 年中国科学技术大学少年班复试

2024 年 8 月 15 日

1. 求最小的正整数 n, 使得存在一个实部和虚部都是正数的 z 满足 $z^n = z^{-n}$.

2. (1) 已知 T_1, T_2 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的周期, a, b 为正整数, 证明 $aT_1 + bT_2$ 为 $f(x)$ 的周期.

(2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, 证明任意的正有理数都是 $f(x)$ 的周期.

(3) 已知函数 $f(x)$ 以任意的正有理数为周期, 且 $\left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \left|x - y\right|$ 恒成立, 证明: f 是常数函数.

3. 记 $g(x) = x^2 - k$, $h(x) = g\left(g(x)\right)$, k 为整数.

(1) 写出 $h(x)$ 的表达式;

(2) 求集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) = x\}$;

(3) 已知函数 $f : A \to A$ 满足 $f\left(f(x)\right) = g(x)$, 证明: f 既是单射也是满射;

(4) 是否存在函数 $s(x)$ 使得 $s(s(x)) = x^2 - 2$? 并证明你的结论.

4. 记 $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 为三次单位根, 集合 $X = \left\{x + y\omega \mid x, y \in \mathbb{Z}\right\}$.

1. 设 $f(x)$ 是实系数多项式, 证明: 存在实数 a, b 使得 $f(\omega) = a + b\omega$.

2. 第 1 小题中的 a, b 是否唯一? 为什么?

3. 对于 $x, y \in \mathbb{Z}$, 记 $N(x + y\omega) = x^2 - xy + y^2$.

   (a) 求所有 $\alpha \in X$ 使得 $N(\alpha) = 1$.

   (b) 证明: $N(\alpha) \geqslant 0$ 对于任意的 $\alpha \in X$ 成立, 并求所有 $\alpha \in X$ 使得 $N(\alpha) = 0$.

   (c) 对任意的 $\alpha, \beta \in X$, $\beta \neq 0$, 证明: $\gamma, \delta \in X$ 使得 $\alpha = \gamma\beta + \delta$, 且 $N(\beta) > N(\delta)$.

4. 对于任意的 $\alpha, \beta \in X$, 证明: 存在 $\delta \in X$ 使得下列两个条件成立:

   (a) 存在 $u, v \in X$ 使得 $\delta = \alpha u + \beta v$;

   (b) 存在 $\gamma_1, \gamma_2 \in X$ 使得 $\alpha = \gamma_1\delta$, $\beta = \gamma_2\delta$.