1 Biot-Savart law

定理 1. *(Biot-Savart law)* 设$w \neq \nabla \times u = \mathrm{Curl} u$, $u = (u_1, u_2)$, $\mathrm{div} u = 0$, $u = u(x, y)$, 则

$$u = \nabla^{\perp}(\Delta^{-1})w, \qquad \nabla^{\perp} = (-\partial_2, \partial_1).$$

2 Banach-Alaoglu定理

定理 2. 设X为某个可分*Banach*空间Z的对偶空间, 即$X = Z^*$, 则X中的弱*拓扑中的任何有界子集M准紧, 即M中的任何序列有弱*收敛子列.

Proof. 设$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$为X中的有界序列, 因Z可分, 存在序列$\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$在Z中稠密.

注意到, 由$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$的有界性

$$|\langle x_k, z_j\rangle| \leq \|x_k\|_X \cdot \|z_j\|_Z \leq c \cdot \|z_j\|.$$

故, 对于固定的j, 序列$b_k = \langle x_k, z_j\rangle$为有界实数列, 从而有收敛子列.

现在递归的取子列Λ_n满足:

$$\mathbb{N} \supseteq \Lambda_1 \supseteq \Lambda_2 \supseteq \Lambda_3 \supseteq \cdots$$

使

$$\langle x_k, z_j\rangle \to a_j, \qquad k \in \Lambda_j,\ k \to \infty.$$

从Λ_n中取出第n个元素构成指标集Λ, 则$\forall j \in \mathbb{N}$有

$$\langle x_k, z_j\rangle \to a_j, \qquad k \in \Lambda,\ k \to \infty.$$

在$\mathrm{span}\,\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$上定义线性泛函

$$x(z_j) := a_j, \qquad x\left(\sum_{j=1}^{N} c_j z_j\right) := \sum_{j=1}^{N} c_j a_j,$$

则对于$z = \sum_{j=1}^{N} c_j z_j$, 有

$$x(z) = \sum_{j=1}^{N} c_j a_j = \lim_{k\to\infty, k\in\Lambda} \sum_{j=1}^{N} c_j \langle x_k, z_j\rangle = \lim_{k\to\infty, k\in\Lambda} \left\langle x_k, \sum_{j=1}^{N} c_j z_j \right\rangle = \lim_{k\to\infty, k\in\Lambda} \langle x_k, z\rangle.$$

从而$|x(z)| \leq c\,\|z\|$, 即x是有界线性泛函.

由于$\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$在Z中稠密, 故x可延拓为Z上的有解线性泛函, 即$x \in Z^* = X$.

现在, 对于任何$z \in Z$, 记$\langle x, z\rangle = x(z)$, 从而有$\|x\| \leq c$.

以下证明$x_k \overset{*}{\rightharpoonup} x$: 取$z \in Z$, 由$\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$在$Z$中稠密, 则存在指标集$I \subseteq \mathbb{N}$, 使得

$$\|z - z_j\| \to 0, \quad j \in I,\ j \to \infty.$$

并考虑

$$\begin{aligned}
|\langle x_k - x, z\rangle| &= |\langle x_k - x, z - z_j\rangle + \langle x_k - x, z_j\rangle| \\
&\leq \|x_k - x\| \cdot \|z - z_j\| + |\langle x_k - x, z_j\rangle| \\
&\leq 2c \cdot \|z - z_j\| + |\langle x_k - x, z_j\rangle|.
\end{aligned}$$

先固定j, 让$k \in \Lambda$, 且$k \to \infty$, 则

$$\limsup_{k\to\infty, k\in\Lambda} |\langle x_k - x, z\rangle| \leq 2c \cdot \|z - z_j\|.$$

再让$j \to \infty$, $j \in I$, 则有

$$\limsup_{k\to\infty, k\in\Lambda} |\langle x_k - x, z\rangle| = 0.$$

即

$$\lim_{k\to\infty, k\in\Lambda} \langle x_k, z\rangle = \langle x, z\rangle, \qquad \forall z \in Z.$$

□

3 L^0, 依测度收敛, 一致可积, Vitali收敛定理, de la Vallée-Poussin判别法

3.1 可测空间

设$\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$, 带有序拓扑, $\overline{\mathbb{R}}$上有Borel σ-代数.

若$E\subseteq\overline{\mathbb{R}}$, 则$E\in\mathscr{B}_{\overline{R}}$当且仅当$E\setminus\{-\infty,\infty\}\in\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

定理 3. 设(Ω,Σ)为可测空间, 若(f_j)为一列可测函数, $f_j:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$, 则对于任意的$k\in\mathbb{N}$,

$$g_k(x)=\sup_{j\geq k}f_j(x),\qquad h_k(x)=\inf_{j\geq k}f_j(x)$$

为$\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$的可测函数, 且

$$g(x)=\limsup_{j\to\infty}f_j(x),\qquad h(x)=\liminf_{j\to\infty}f_j(x)$$

为$\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$的可测函数.

Proof. 设$a\in\mathbb{R}$, 则

$$\left\{x:\sup_{j\geq k}f_j(x)>a\right\}=\bigcup_{j=k}^{\infty}f_j^{-1}(a,\infty].$$

即依次证明:

$$\bigcup_{j=k}^{\infty}f_j^{-1}(a,\infty]\subseteq\left\{x:\sup_{j\geq k}f_j(x)>a\right\};$$

$$y\notin\bigcup_{j\geq k}^{\infty}f_j^{-1}(a,\infty]\Longrightarrow y\notin\left\{x:\sup_{j\geq k}f_j(x)>a\right\}.$$

故有$g_k^{-1}(a,\infty]\in\Sigma$, 注意$\mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$是由集族

$$\{(a,\infty]:a\in\mathbb{R}\}$$

生成的.

注意到

$$h_k(x)=-\sup_{j\geq k}(-f_j(x)),$$

故$h_k(x)$也可测.

由于

$$g(x)=\inf_{k\geq 1}g_k(x),\quad h(x)=\sup_{k\geq 1}h_k(x).$$

而g_k,h_k可测, 故g,h可测. □

3.2 依测度收敛

设(Ω,Σ,μ)为概率空间, $L^0(\mu)$为所有$\Omega\to\mathbb{C}$的可测函数的等价类形成的集族, 其中$\mathbb{C}$有Borel σ-代数. 两个函数f和g等价, 若

$$\mu\{x\in\Omega:f(x)\neq g(x)\}=0.$$

则$L^0(\mu)$是一个向量空间, 对于$f,g\in L^0(\mu)$, 定义

$$\rho(f,g)=\int_{\Omega}\frac{|f-g|}{1+|f-g|}\,\mathrm{d}\mu$$

是$L^0(\mu)$上的度量. 在此度量下, $L^0(\mu)$形成一个拓扑向量空间, 有ρ诱导的拓扑称为依测度收敛拓扑.

定理 4. 假设$(f_n)\subseteq L^0(\mu)$, 在依测度收敛拓扑意义下, $f_n\to 0$, 当且仅当, 对于任意的$\epsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\{x\in\Omega:|f_n|\geq\epsilon\}\right)=0.$$

Proof. $\Longrightarrow$: 对于任意固定的$\epsilon > 0$, 取

$$A_n = \{x \in \Omega : |f_n(x)| \geq \epsilon\} = \left\{x \in \Omega : \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|} \geq \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\right\},$$

则

$$\int_\Omega \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\chi_{A_n}\,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \frac{|f_n|}{1+|f_n|}\,\mathrm{d}\mu = \rho(f_n, 0).$$

即

$$\mu(A_n) \leq \frac{1+\epsilon}{\epsilon}\rho(f_n, 0) \to 0, \quad n \to \infty.$$

$\Longleftarrow$: 设$\epsilon > 0$, 假设$\mu(A_n) \to 0$, $n \to \infty$. 则有n_ϵ, 使得对于任意的$n \geq n_\epsilon$有$\mu(A_n) < \epsilon$, 从而

$$\begin{aligned}\rho(f_n, 0) &= \int_{A_n} \frac{|f_n|}{1+|f_n|}\,\mathrm{d}\mu + \int_{\Omega\setminus A_n} \frac{|f_n|}{1+|f_n|}\,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \int_{A_n} 1\,\mathrm{d}\mu + \int_{\Omega\setminus A_n} \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \epsilon + \frac{\epsilon}{1+\epsilon} < 2\epsilon.\end{aligned}$$

故在依测度收敛拓扑意义下, $f_n \to 0$. □

定理 5. 假设$(f_n) \subseteq L^0(\mu)$, 有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \to 0, \quad a.e.\ x \in \Omega.$$

则在依测度收敛意义下, $f_n \to 0$.

Proof. 对于任意固定的$\epsilon > 0$, 取任意的$\eta > 0$. 由Egorov定理, 存在$E \in \Sigma$, $\mu(E) < \eta$, 使得在$\Omega \setminus E$上有

$$f_n \rightrightarrows 0, \quad n \to \infty.$$

故存在n_0, 使得对于任意的$n \geq n_0$, $\forall x \in \Omega \setminus E$, 有$|f_n(x)| < \epsilon$, 从而对于任意的$n \geq n_0$, 有

$$\begin{aligned}\mu\left(\{x \in \Omega : |f_n| \geq \epsilon\}\right) &\leq \mu(E) + \mu\left(\{x \in \Omega \setminus E : |f_n| \geq \epsilon\}\right) \\ &= \mu(E) < \eta.\end{aligned}$$

□

Proof. 用DCT以及定理 2. □

定理 6. 若$(f_n) \subseteq L^1(\mu)$, 有$f_n \to 0\ in\ L^1(\mu)$, 则f_n依测度收敛于0.

Proof. 设$\epsilon > 0$,

$$A_n = \{x \in \Omega : |f_n| \geq \epsilon\},$$

则Chebyshev不等式有

$$\mu(A_n) \leq \frac{1}{\epsilon}\|f_n\|_1 \to 0, \quad n \to \infty.$$

□

定理 7. 设$(f_n) \subseteq L^0(\Omega)$, $f_n \overset{\text{m}}{\rightrightarrows} 0$, 则有子列$(f_{n_k})$几乎处处收敛于$0$.

Proof. 对于任意的$k \in \mathbb{N}$, 取n_k使得对于任意的$n \geq n_k$, 有

$$\mu\left(\left\{x \in \Omega : |f_n| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) < \frac{1}{2^n}.$$

取

$$E_k = \left\{x \in \Omega : |f_{n_k}| \geq \frac{1}{k}\right\},$$

则$\mu(E_k) < \dfrac{1}{2^k}$, 取

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=k}^{\infty} E_m = \limsup_{k\to\infty} E_k,$$

则
$$\mu(E) \le \mu\left(\bigcup_{m=k}^{\infty} E_k\right) \le \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots = 2^{1-k}, \quad \forall k.$$
即$\mu(E) = 0$.

若$x \in \Omega \setminus E$, 则$x \in \cup_{k=1}^{\infty} \cap_{m=k}^{\infty} E_m^c$, 故有$k_0$, 使得$x \in \cap_{m=k_0}^{\infty} E_m^c$, 即当$m \ge k_0$时, $x \notin E_m$, 即
$$|f_{n_m}(x)| < \frac{1}{m}, \qquad f_{n_m}(x) \to 0, \quad m \to \infty.$$

(f_{n_k})即为所求的子列. □

下面证明ρ是完备度量, 即$L^0(\mu)$在此度量下是一个F-空间.

定理 8. ρ是$L^0(\mu)$上的完备度量, 即依测度基本列有依测度收敛子列.

Proof. 假设$(f_n) \subseteq L^0(\mu)$为Cauchy序列.

则有子列$(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, 使得对于任意的$l \ge k$满足$\rho\left(f_{n_k}, f_{n_l}\right) < \dfrac{1}{k}$.

仍记子列为$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 则有$\forall m \ge n$, $\rho(f_m, f_n) < \dfrac{1}{n}$.

取
$$\begin{aligned} A_{k,m}(\epsilon) &= \{x \in \Omega : |f_k(x) - f_m(x)| \ge \epsilon\} \\ &= \left\{x \in \Omega : \frac{|f_k - f_m|}{1 + |f_k - f_m|} \ge \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\right\}, \end{aligned}$$
则
$$\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\chi_{A_{k,m}(\epsilon)} \le \frac{|f_k - f_m|}{1 + |f_k - f_m|}.$$
即, 当$m \ge k$时,
$$\mu(A_{k,m}(\epsilon)) \le \frac{1+\epsilon}{\epsilon}\int_\Omega \frac{|f_k - f_m|}{1 + |f_k - f_m|}\,\mathrm{d}\mu = \frac{1+\epsilon}{\epsilon}\rho(f_k, f_m) < \frac{1+\epsilon}{\epsilon}\frac{1}{k}.$$
取$\epsilon_n = \dfrac{1}{2^n}$, 确定$k_n$, 使得对于任意的$m \ge k_n$有
$$\mu\left(A_{k,m}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) < \frac{1+\epsilon_n}{\epsilon_n}\cdot\frac{1}{k_n} \le \frac{1}{2^n}.$$
取$g_n = f_{k_n}$, 让
$$E_n = \left\{x \in \Omega : |g_{n+1}(x) - g_n(x)| \ge \frac{1}{2^n}\right\}, \quad F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k.$$
则
$$\mu(F_n) \le \sum_{k=n}^{\infty}\mu(E_k) < \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 2^{1-n}.$$
故$F = \cap_{n=1}^{\infty} F_n$, 满足$\mu(F) = 0$.

当$x \notin F$时, 则存在n, 使得对于任意的$r > n$, $x \notin E_r$. 即对于任意的$r \ge n$,
$$|g_{r+1}(x) - g_r(x)| < \frac{1}{2^r}.$$
故可定义$g : \Omega \to \mathbb{C}$如下
$$g(x) = \chi_{\Omega\setminus F}(x)\limsup_{k\to\infty} g_k(x), \qquad x \in \Omega.$$
则$g(x) \in L^0(\Omega)$, (由定理 1).

对于$x \notin F_k$, 有$x \notin F$. 从而$g_k(x) \to g(x)$, $k \to \infty$. □

Proof. 对于任意的$\epsilon > 0$, 取k使得$2^{1-k} \le \epsilon$, 则对于$x \notin F_k$, $j \ge k$, 有
$$\begin{aligned} |g_j(x) - g(x)| &\le |g_j(x) - g_l(x)| + |g_l(x) - g(x)| \qquad l > j \\ &\le 2^{1-j} + 0 \qquad l \to \infty. \\ &\le 2^{1-k}. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\mu\left(\{x\in\Omega:|g_k(x)-g(x)|\geq\epsilon\}\right)&\leq\mu(F_k)+\mu\left(\{x\in\Omega\setminus F_k:|g_k(x)-g(x)|\geq\epsilon\}\right)\\&\leq 2^{1-k}+\mu(\emptyset)\\&\leq\epsilon.\end{aligned}$$

故$g_k\xrightarrow{\mathrm{m}}g$. □

3.3 一致可积性

设(Ω,Σ,μ)为概率空间, $L^1(\mu)$中的子集$\mathscr{F}$称为是一致可积的, 若对于任意的$\epsilon>0$, 存在$\delta>0$, s.t. $\forall E\in\Sigma$满足$\mu(E)\leq\delta$, 且$\forall f\in\mathscr{F}$, 有

$$\int_E|f|\,\mathrm{d}\mu\leq\epsilon.$$

也即, 称$\mathscr{F}$是一致可积的, 如果

$$\lim_{\mu(E)\to 0}\sup_{f\in\mathscr{F}}\int_E|f|\,\mathrm{d}\mu=0.$$

定理 9. *假设$\mathscr{F}$是$L^1(\mu)$中的有界子集, 则以下命题等价:*
1). $\mathscr{F}$是一致可积的.
2).

$$\lim_{C\to\infty}\sup_{f\in\mathscr{F}}\int_{\{|f|>C\}}|f|\,\mathrm{d}\mu=0.$$

Proof. 1)$\Longrightarrow$2). 取

$$K=\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f\|_{L^1}<\infty.$$

$\mathscr{F}$一致可积, 由Chebyshev不等式, 有

$$\mu\left(\{|f|>M\}\right)\leq\frac{\|f\|_{L^1}}{M}\leq\frac{K}{M}.$$

由于

$$\lim_{M\to\infty}\mu\left(\{|f|>M\}\right)=0.$$

$\mathscr{F}$一致可积. 即得.

2)$\Longrightarrow$1). 假设

$$\lim_{M\to\infty}\sup_{f\in\mathscr{F}}\int_{\{|f|>M\}}|f|\,\mathrm{d}\mu=0.$$

对于$E\in\Sigma$, $f\in\mathscr{F}$. 当$M>0$时,

$$\begin{aligned}\int_E|f|\,\mathrm{d}\mu&=\int_{E\cap\{|f|\leq M\}}|f|\,\mathrm{d}\mu+\int_{E\cap\{|f|>M\}}|f|\,\mathrm{d}\mu\\&\leq M\mu(E)+\sup_{f\in\mathscr{F}}\int_{\{|f|>M\}}|f|\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

故

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\int_E|f|\,\mathrm{d}\mu\leq M\mu(E)+\sup_{f\in\mathscr{F}}\int_{\{|f|>M\}}|f|\,\mathrm{d}\mu.$$

对于任意的$\epsilon>0$, 则有M使得

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\int_{\{|f|>M\}}|f|\,\mathrm{d}\mu<\frac{\epsilon}{2},$$

再取$\delta=\dfrac{\epsilon}{2M}$, 则对于任意的$E\in\Sigma$, 满足$\mu(E)\leq\delta$, 有

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\int_E|f|\,\mathrm{d}\mu\leq\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,$$

即$\mathscr{F}$一致可积. □

定理 10. *(Lebesgue积分的绝对连续性). 假设$f \in L^1(\mu)$, 于是$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t. $\forall E \in \Sigma$, 并满足$\mu(E) \leq \delta$, 总有*

$$\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu \leq \epsilon.$$

Proof. 定义

$$g_n(x) = \min\{|f(x)|, n\}, \quad x \in \Omega, n \in \mathbb{N}.$$

则$g_n(x) \nearrow |f|$, 由单调收敛定理

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

则$\forall \epsilon > 0$, $\exists N$, 使得

$$0 \leq \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu - \int_\Omega g_N \, \mathrm{d}\mu \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

取$\delta = \frac{\epsilon}{2N}$, $\forall E \in \Sigma$, 只要$\mu(E) \leq \delta$, 便有

$$\begin{aligned}\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu &= \int_E (|f| - g_N) \, \mathrm{d}\mu + \int_E g_N \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + N \cdot \frac{\epsilon}{2N} = \epsilon.\end{aligned}$$

□

定理 11. *(Vitali收敛定理) 假设$f \in L^0(\mu)$, $(f_n) \subseteq L^1(\mu)$, 则以下命题等价*
(1). (f_n)一致可积, (f_n)在$L^1(\mu)$中有界, $f_n \overset{m}{\rightrightarrows} f$.
(2). $f \in L^1(\mu)$, $f_n \to f$ in $L^1(\mu)$.

Proof. (1)$\Longrightarrow$(2):
(a): 由$f_n \overset{m}{\rightrightarrows} f$, 故有子列$f_{n_k} \to f$, a.e. x.
取

$$K = \sup_{k\geq 1} \|f_{n_k}\|_{L^1} < \infty.$$

由Fatou引理,

$$\|f\|_{L^1} \leq \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k}\|_{L^1} \leq K.$$

故$|f| \in L^1(\mu)$, 由$f \in L^0(\mu)$, 所以$f \in L^1(\mu)$.
(b): 以下证明(f_n)的任何子列(g_n)有收敛子列, 即有子列$g_{n_k} \to f$ in $L^1(\mu)$.
注: 一般, 拓扑空间中的序列收敛于x, iff, 它的任何子列有收敛子列收敛于x.
由$f_n \overset{m}{\rightrightarrows} f$, 故$g_n \overset{m}{\rightrightarrows} f$, 故有子列$g_{n_k} \to f$ a.e. x.
所以$\forall \epsilon > 0$, 由(f_n)一致可积, 故$\exists \delta > 0$, s.t. $\forall E \in \Sigma$满足$\mu(E) \leq \delta$, 便有

$$\int_E |g_{n_k}| \, \mathrm{d}\mu \leq \epsilon, \quad \forall k.$$

由Fatou引理

$$\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \|\chi_E g_{n_k}\|_{L^1} \leq \epsilon.$$

由于$g_{n_k} \to f$ a.e. x. 根据Egorov定理, $\exists E \in \Sigma$, $\mu(E) \leq \delta$, 使得$g_{n_k} \rightrightarrows f$ on E^c. 故$\exists k_0$, 使得当$k > k_0$, $\forall x \in E^c$, 有

$$|g_{n_k}(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

故

$$\begin{aligned}\int_\Omega |g_{n_k} - f| \, \mathrm{d}\mu &= \int_E |g_{n_k} - f| \, \mathrm{d}\mu + \int_{E^c} |g_{n_k} - f| \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \int_E |g_{n_k}| \, \mathrm{d}\mu + \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu + \epsilon \cdot \mu(E^c) \\ &\leq \epsilon + \epsilon + \epsilon.\end{aligned}$$

即得.
(2)$\Longrightarrow$(1): 因$f_n \to f$ in $L^1(\mu)$, 故(f_n)在$L^1(\mu)$中有界, 同时$f_n \overset{m}{\rightrightarrows} f$.
下证一致可积性.

$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_f > 0$, s.t. $\forall E \in \Sigma$, $\mu(E) \le \delta_f$, 有Lebesgue积分的绝对连续性

$$\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu \le \epsilon.$$

由$f_n \to f$ in $L^1(\mu)$, 故有n_0, s.t. $\forall n > n_0$,

$$\|f_n - f\|_{L^1} \le \epsilon.$$

对于$1 \le n \le n_0$, 有$\delta_{f_n} > 0$, s.t. $\forall E \in \Sigma$, $\mu(E) \le \delta_{f_n}$, 有

$$\int_E |f_n| \, \mathrm{d}\mu \le \epsilon.$$

于是只要$\delta = \min\{\delta_f, \delta_{f_1}, \cdots, \delta_{f_{n_0}}\}$, 则$\forall E \in \Sigma$, $\mu(E) < \delta$, 便有

$$\int_E |f_n| \, \mathrm{d}\mu \le \epsilon, \qquad 1 \le n \le n_0;$$

$$\begin{aligned} \int_E |f_n| \, \mathrm{d}\mu &\le \int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu + \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu \\ &\le \epsilon + \epsilon, \qquad n > n_0. \end{aligned}$$

□

定理 12. *(de la Vallée-Poussin判别法)* 假设$\mathscr{F} \subseteq L^1(\mu)$, $\mathscr{F}$是有界的一致可积的充要条件是存在凸, 连续, 不减函数$G : [0, \infty) \to [0, \infty)$满足

$$\lim_{t \to \infty} \frac{G(t)}{t} = \infty, \qquad \sup_{f \in \mathscr{F}} \int_\Omega G(|f(x)|) \, \mathrm{d}\mu(x) < \infty.$$

Proof. $\Longleftarrow$: 设

$$\sup_{f \in \mathscr{F}} \int_\Omega G(|f(x)|) \, \mathrm{d}\mu(x) \le M < \infty.$$

对于$\epsilon > 0$, $\exists C$, s.t. $t \ge C$使得$\dfrac{G(t)}{t} \ge \dfrac{M}{\epsilon}$;

故对于$f \in \mathscr{F}$, 若$x \in \Omega$, $|f(x)| \ge C$, 则

$$\frac{G(|f(x)|)}{|f(x)|} \ge \frac{M}{\epsilon},$$

即$|f(x)| \le \dfrac{\epsilon}{M} G(|f(x)|)$, 于是

$$\int_{\{|f| \ge C\}} |f| \, \mathrm{d}\mu \le \int_{\{|f| \ge C\}} \frac{\epsilon}{M} G(|f(x)|) \, \mathrm{d}\mu(x) \le \frac{\epsilon}{M} \cdot M = \epsilon.$$

由定理 7, 即得.

$\Longrightarrow$: 对于$f \in \mathscr{F}$, $j \ge 1$, 取

$$\mu_j(f) = \mu(\{x \in \Omega : |f(x) > j|\}), \qquad \{x \in \Omega : |f(x)| > j\} \in \Sigma.$$

由于$\mathscr{F}$有界, 一致可积, 则存在严格增加正整数C_n, 使得$\forall n$,

$$\sup_{f \in \mathscr{F}} \int_{\{|f| > C_n\}} |f| \, \mathrm{d}\mu \le 2^{-n}.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{\{|f| > C_n\}} |f| \, \mathrm{d}\mu &= \sum_{j = C_n}^{\infty} \int_{\{j < |f| \le j+1\}} |f| \, \mathrm{d}\mu \\ &\ge \sum_{j = C_n}^{\infty} j \left(\mu_j(f) - \mu_{j+1}(f)\right) \\ &= \sum_{j = C_n}^{\infty} \mu_j(f). \end{aligned}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=C_n}^{\infty}\mu_j(f)\le\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\{|f|>C_n\}}|f|\,\mathrm{d}\mu\le\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}=1.$$

定义

$$\alpha_n=\begin{cases}0, & n<C_1;\\ \max\{k:C_k\le n\}, & n\ge C_1,\end{cases}$$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\chi_{(n,n+1]}(t),\quad 0\le t<\infty,$$

$$G(t)=\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s,\quad 0\le t<\infty.$$

则G非负不减, 且凸, 也就是

$$G'(t_1)(t_2-t_1)=g(t_1)(t_2-t_1)\le G(t_2)-G(t_1),\qquad \forall 0\le t_1\le t_2<\infty,$$

且

$$g\left(\frac{t}{2}\right)\left(t-\frac{t}{2}\right)\le G(t)-G\left(\frac{t}{2}\right)\le G(t)\Longrightarrow\frac{G(t)}{t}\ge\frac{g\left(\frac{t}{2}\right)}{2}\to\infty,\quad t\to\infty.$$

由于$f\in\mathscr{F}$,$G(0)=G(1)=0$, $\forall n\ge 1$,

$$G(n+1)\le g(1)+g(2)+\cdots+g(n+1)=\alpha_1+\cdots+\alpha_n.$$

故

$$\begin{aligned}\int_\Omega G(|f(x)|)\,\mathrm{d}\mu(x)&=\int_{\{|f|=0\}}G(|f(x)|)\,\mathrm{d}\mu(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\{n<|f|\le n+1\}}G(|f(x)|)\,\mathrm{d}\mu(x)\\&\le\sum_{n=0}^{\infty}G(n+1)\left(\mu_n(f)-\mu_{n+1}(f)\right)\\&\le\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu_n(f)-\mu_{n+1}(f)\right)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(f)\,\alpha_n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=C_n}^{\infty}\mu_j(f)\le 1.\end{aligned}$$

□

4 弱L^p空间

定理 13. *(弱L^p空间)* 设$u:\mathbb{T}^d\to\mathbb{R}$为可测函数. 对于任意的$1\le p<\infty$,

$$|\!|\!|u|\!|\!|_{M^p}^p=\sup_{\lambda>0}\left\{\lambda^p\left|\left\{x\in\mathbb{T}^d:|u(x)|>\lambda\right\}\right|\right\},$$

定义

$$M^p(\mathbb{T}^d):=\left\{u:\mathbb{T}^d\to\mathbb{R}\mid |\!|\!|u|\!|\!|_{M^p}<\infty\right\},\qquad 1\le p<\infty.$$

$$M^\infty(\mathbb{T}^d):=L^\infty(\mathbb{T}^d),\qquad p=\infty.$$

问题 1. $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_{M^p}$不满足次可加性的例.

5 一致可加性

引理 1. *(一致可积的充要条件)* 设$(\phi_i)_{i\in I} \subseteq L^1(\mathbb{T}^d)$有界, 则$(\phi_i)_{i\in I}$一致可积, *iff*, 对于任意的$r \in [1,\infty]$, $\epsilon > 0$, 存在$(g_i^1)_{i\in I} \subseteq L^1(\mathbb{T}^d)$, $(g_i^2)_{i\in I} \subseteq L^r(\mathbb{T}^d)$, 常数$C_\epsilon > 0$, 使得

$$\phi_i = g_i^1 + g_i^2, \quad \sup_{i\in I} \|g_i^1\|_{L^1} \leq \epsilon, \quad \sup_{i\in I} \|g_i^2\|_{L^r} \leq C_\epsilon.$$

Proof. $\Longrightarrow$: 由$\phi_i \in L^1(\mathbb{T}^d)$有界, 记

$$\sup_i \|\phi_i\|_{L^1} \leq C,$$

则对于任意的$\epsilon > 0$, $\delta > 0$. 记

$$A_\delta^i := \left\{x \in \mathbb{T}^d : |\phi_i(x)| > \frac{C}{\delta}\right\},$$

则有

$$\frac{\delta}{C}\|\phi_i\|_{L^1} = \frac{\delta}{C}\int_{\mathbb{T}^d} |\phi_i| \,\mathrm{d}x > \frac{\delta}{C}\int_{A_\delta^i} |\phi_i| \,\mathrm{d}x > \int_{A_\delta^i} 1 \,\mathrm{d}x = \left|A_\delta^i\right|.$$

故

$$\sup_i \left|A_\delta^i\right| \leq \sup_i \frac{\delta}{C}\|\phi_i\|_{L^1} \leq \delta.$$

由(ϕ_i)一致可积, 取$\delta(\epsilon)$使$\sup_i \int_{A_\delta^i} |\phi_i| \,\mathrm{d}x \leq \epsilon$. 取

$$g_i^1 := \phi_i \chi_{A_\delta^i} \Longrightarrow \sup_i \|g_i^1\|_{L^1} \leq \epsilon.$$

取

$$g_i^2 := \phi_i(1 - \chi_{A_\delta^i}) \Longrightarrow \|g_i^2\| \leq \left(\int_{(A_\delta^i)^c} \left(\frac{C}{\delta}\right)^r \,\mathrm{d}x\right)^{1/r} \leq \frac{C}{\delta(\epsilon)} \cdot \left|\mathbb{T}^d\right|^{1/r} \leq C_\epsilon.$$

$\Longleftarrow$: 已知对于任意的$r \in [1,\infty]$, $\epsilon > 0$, 有分解$\phi_i = g_i^1 + g_i^2$, $i \in I$.

$$\|g_i^1\|_{L^1} \leq \frac{\epsilon}{2}, \qquad \|g_i^2\|_{L^r} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

取$\delta = \left(\frac{\epsilon}{2C_\epsilon}\right)^{r'}$, 则对于任意的$A \subseteq \mathbb{T}^d$, 使$|A| \leq \delta$, 有

$$\begin{aligned}
\|\phi_i\|_{L^1(A)} &= \int_A |\phi_i| \,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_A |g_i^1| \,\mathrm{d}x + \int_A |g_i^2| \,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \|g_i^2\|_{L^r(A)} \cdot \|1\|_{L^{r'}(A)} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + C_\epsilon \cdot \left(\frac{\epsilon}{2C_\epsilon}\right)^{r' \cdot \frac{1}{r'}} = \epsilon.
\end{aligned}$$

□

6 对流耗散方程中的结论

定义 1. (对流耗散方程的分布解) 设$b \in L^1\left((0,T); L^p(\mathbb{T}^d)\right)$是div-free向量场, $u_0 \in L^q(\mathbb{T}^d)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$. 函数$u \in L^\infty\left((0,T); L^q(\mathbb{T}^d)\right)$是方程

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div}(bu) = \Delta u & \text{in } (0,T) \times \mathbb{T}^d, \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) & \text{in } \mathbb{T}^d. \end{cases}$$

的分布解, 若对于任意的$\phi \in C_c^\infty\left([0,T) \times \mathbb{T}^d\right)$有

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} u\left(\partial_t \phi + b \cdot \nabla\phi + \Delta\phi\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{T}^d} u_0 \phi(0,\cdot) \,\mathrm{d}x = 0.$$

定义 2. 设$b \in L^1\left((0,T);L^2(\mathbb{T}^d)\right)$为div-free向量场, $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^d)$, 称函数$u \in L^\infty\left((0,T);L^2(\mathbb{T}^d)\right)$是方程

$$\begin{cases}\partial_t u + \operatorname{div}(bu) = \Delta u & \text{in } (0,T)\times\mathbb{T}^d,\\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) & \text{in } \mathbb{T}^d.\end{cases}$$

的抛物解(parabolic solution), 如果u是上述方程的分布解, 且$u \in L^2\left((0,T);H^1(\mathbb{T}^d)\right)$.

命题 1. 设$b \in L^1\left((0,T);L^p(\mathbb{T}^d)\right)$是*div-free*向量场, $u_0 \in L^q(\mathbb{T}^d)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \le 1$. 则方程

$$\begin{cases}\partial_t u + \operatorname{div}(bu) = \Delta u & \textit{in } (0,T)\times\mathbb{T}^d,\\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) & \textit{in } \mathbb{T}^d,\end{cases}$$

有分布解$u \in L^\infty\left((0,T);L^q(\mathbb{T}^d)\right)$.

Proof. (1). 设$\left(\rho^\delta\right)_\delta$为磨光核, 定义$b^\delta = b * \rho^\delta$, $u_0^\delta = u_0 * \rho^\delta$, 考虑逼近问题

$$\begin{cases}\partial_t u^\delta + \operatorname{div}(b^\delta u^\delta) = \Delta u^\delta\\ u^\delta(0,\cdot) = u_0^\delta(\cdot)\end{cases}$$

这是带有光滑系数, 光滑初值的抛物方程, 有唯一光滑解u^δ. (参考Evans的PDE).

(2). 下证$u^\delta \in L^\infty\left((0,T);L^q(\mathbb{T}^d)\right)$有界. 在以上方程两边同时乘以$\beta'(u^\delta)$, 其中$\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为光滑凸函数, 关于空间积分, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{T}^d}\beta\left(u^\delta(t,x)\right)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{T}^d}\beta''\left(u^\delta(t,x)\right)\cdot\left|\nabla u^\delta(t,x)\right|^2\,\mathrm{d}x \le 0.$$

关于t积分

$$\int_{\mathbb{T}^d}\beta\left(u^\delta(t,x)\right)\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{T}^d}\beta\left(u_0^\delta(x)\right)\,\mathrm{d}x.$$

u^δ在$\mathbb{T}^d$上有界, 取$\beta \rightrightarrows |s|^q$, 且$\beta$光滑, 凸, 在$u^\delta$的值域为最小定义域上一致收敛于$|s|^q$是做得到的. 其中$1<q<\infty$, 有

$$\left\|u^\delta(t,\cdot)\right\|_{L^q(\mathbb{T}^d)} \le \left\|u_0^\delta\right\|_{L^q(\mathbb{T}^d)} \le \|u_0\|_{L^q(\mathbb{T}^d)}.$$

(3). $q>1$时, 由标准的紧性论证, 有$\left(u^\delta\right)_\delta$的子列弱*收敛于$u \in L^\infty\left((0,T);L^q(\mathbb{T}^d)\right)$. 由于方程是线性方程, u是所有方程的分布解.

(4). $q=\infty$时, 估计

$$\left\|u^\delta(t,\cdot)\right\|_{L^q(\mathbb{T}^d)} \le \|u_0\|_{L^q(\mathbb{T}^d)},$$

对于所有的$\delta>0$, $q<\infty$仍成立, 令$q\to\infty$即可.

(5). $q=1$时, 在$L^\infty\left((0,T);L^1(\mathbb{T}^d)\right)$中的紧性由$\left(u^\delta\right)_\delta$的一致可积性判别法给出. 如Dunford-Pettis, de la Vallée-Poussin判别法. □

命题 2. 设$b \in L^1\left((0,T);L^2(\mathbb{T}^d)\right)$为*div-free*向量场, $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^d)$, 则至少存在一个抛物解.

Proof. 同命题 1 的证明, 考虑逼近问题

$$\begin{cases}\partial_t u^\delta + \operatorname{div}(b^\delta u^\delta) = \Delta u^\delta\\ u^\delta(0,\cdot) = u_0^\delta(\cdot)\end{cases}$$

取$\beta(s) = \frac{s^2}{2}$, 取$(0,t)$上的时间积分, 有

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^d}\left|u^\delta(t,x)\right|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}\left|\nabla u^\delta(s,x)\right|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^d}\left|u_0^\delta(x)\right|^2\,\mathrm{d}x.$$

故$\nabla u^\delta \rightharpoonup w$ in $L^2\left((0,T);L^2(\mathbb{T}^d)\right)$, 而$u^\delta \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $L^\infty\left((0,T);L^2(\mathbb{T}^d)\right)$.

从而$\nabla u = w$, 即$u^\delta \rightharpoonup u$ in L^2H^1. □

注意: $\left(u^\delta\right)_\delta$满足以下先验估计:

(E1).

$$\sup_{t\in(0,T)}\left\|u^\delta\right\|_{L^q} \le C\|u_0\|_{L^q}, \qquad \text{if } u_0 \in L^q(\mathbb{T}^d).$$

(E2).

$$\int_0^T\left|\nabla u^\delta(t,\cdot)\right|_{L^2}\,\mathrm{d}t \le C|u_0|_{L^2}, \qquad \text{if } u_0 \in L^2(\mathbb{T}^d).$$