Contents

1 高中笔记8 **3**
- 1.1 读书笔记 . . . 3
- 1.2 球面几何 . . . 3
- 1.3 不等式集 . . . 5

2 高中数学 **47**
- 2.1 2016年中科大入学数学考试 . . . 47
- 2.2 初中代数题 . . . 47
- 2.3 全国高中数学联赛 . . . 50
- 2.4 数学竞赛 . . . 52

3 AOPS **55**
- 3.1 IMO . . . 55
  - 3.1.1 2018 . . . 55
- 3.2 2003 . . . 56
  - 3.2.1 02 . . . 56
  - 3.2.2 03 . . . 58
  - 3.2.3 05 . . . 59
  - 3.2.4 06 . . . 60
  - 3.2.5 07 . . . 61
  - 3.2.6 08 . . . 63
  - 3.2.7 09 . . . 65

4 抽象代数 **69**

5 矩阵论 **71**
- 5.1 矩阵迭代法 . . . 71

6 数学分析 **73**
- 6.1 极限 . . . 73
- 6.2 导数 . . . 73
- 6.3 积分 . . . 74
- 6.4 级数 . . . 76
- 6.5 其他 . . . 77

7 实变函数 **97**

8 泛函分析 **101**

9 复变函数 **107**

10 初等数论 **109**

11 解析数论 **119**
- 11.1 山东大学2014年博士研究生入学考试解析数论基础试题 . . . 119

12 Inequality **121**
12.1 Elementary Inequality . . . 121
12.2 Combinatorics . . . 124
12.3 Analysis . . . 125

13 神奇的反例 **127**

14 未知的问题与解答 **129**

15 拓扑 **139**

16 定理集 **157**
16.1 数学分析 . . . 159
16.2 微分方程 . . . 162
16.3 泛函分析 . . . 163
16.4 拓扑 . . . 164
16.5 数论 . . . 164
16.6 不等式 . . . 166

17 定义集 **169**
17.1 初等数论 . . . 169
17.2 高等代数 . . . 169
17.3 数学分析 . . . 171
17.4 微分方程 . . . 173
17.5 泛函分析 . . . 173

18 tex笔记 **175**
18.1 使用频率较低的符号列表 . . . 175
18.2 itemize enumerate . . . 176
18.3 tikz . . . 177

19 math.stackexchange.com **181**

20 语录 **185**

21 GTM 120. weakly differentiable functions **187**
21.1 Riew . . . 187
21.2 Questions . . . 187

Chapter 1

高中笔记8

1.1 读书笔记

康托尔: 德, 数学家, 集合论的创造人, 他证明了一条直线上的点和一个平面上的点一一对应, 也能和空间中的点一一对应. 因此1cm长的线段内的点与太平洋面上的点以及整个地球内部的点都"一样多". 他对这类"无穷集合"问题发表了一系列文章, 通过严格证明得出了许多惊人的结论.

罗素悖论: 又称理发师悖论: 某村只有一人会理发, 且该村的人都需要理发, 理发师约定, 给且只给村中自己不给自己理发的人理发, 试问: 理发师给不给自己理发.

阿贝尔: 椭圆函数论的创始人之一, 发现了椭圆函数的加法定理, 双周期性. 在交换群, 二项级数的严格理论, 级数求和等有巨大贡献, 还有阿贝尔积分, 阿贝尔积分方程, 阿贝尔函数, 阿贝尔级数, 阿贝尔部分和公式, 阿贝尔收敛判别法, 阿贝尔可和性.

分形: 龙的曲线是由一个等腰直角三角形开始的, 以该等腰直角三角形的直角边为斜边作另外的等腰直角三角形, 如此往后, 并将其斜边删除掉即可.

群论: 伽罗瓦是第一个使用群并系统地研究群的数学家. 他19岁时, 用群的思想解决了五次方程的问题. 逐渐开创了一个新的数学分支–抽象代数学. 它包括群论, 环论, 域论, 布尔代数等.

说谎者悖论: 公元前4世纪, 希腊哲学家也提出:"我现在正在说的这句话是谎话". 另外公元前6世纪, 古希腊克里特岛的哲学家伊壁门尼德斯断言:"所有克里特人所说的每一句话都是谎话."

干下去还有50%成功的希望, 不干便是100%的失败.

$A=x+y+z$(A:成功, x: 艰苦的劳动, y: 正确的方法, z: 少说空话)–爱因斯坦的公式.

埃托色尼的筛法提的求小于给定数N的所有素数的方法: 先从3写出所有小于N的奇数, 再从中划去$3,5,7,11\cdots$的倍数.

球体填充问题: 把一大堆乒乓球倒进一个箱内, 倒至最后还剩几个, 使箱内乒乓球数目最多. 称为球体填充问题, 亦称开普勒猜想.

查: 吴文俊的"吴示性类", "吴示嵌类".

药剂师的砝码: 将300g药粉分成100g和200g各一份, 可是天平只有30g和35g两个砝码, 只需分两次即可, 分两步: 一, 将30g砝码放一盘上, 把300g药粉倒在两个盘上, 使之平衡, 于是, 一盘药粉为165g, 另一盘135g; 第二步将35g砝码, 从135g药粉中称出35g$\cdots$.

罗氏几何的公理系统与欧氏几何公理不同之处是: 平行公理: "用直线外一点, 至少可做两条直线与已知直线平行"来代替, 这引出了一连串和欧氏几何内容不同的新的几何命题.

1.2 球面几何

定义 1.2.1: 大圆

一个过球心的平面在球面上的截线叫做球面上的一个大圆.

定义 1.2.2: 球面二面角

球面上任两个大圆都相交于对顶的两点, 一对对顶点与连接它们的两条大圆弧(半个大圆弧)围成的图形称为球面二面角(梭形).

定义 1.2.3: 球面角

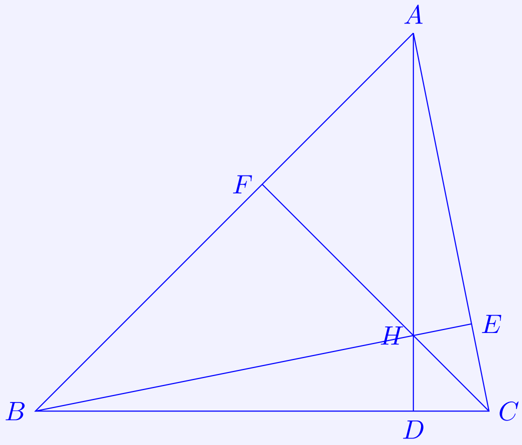
球面上一点及过该点的任意两条大圆弧所构成的图形称为球面角, 这两条大圆弧的切线间的夹角即为该球面角的大小.

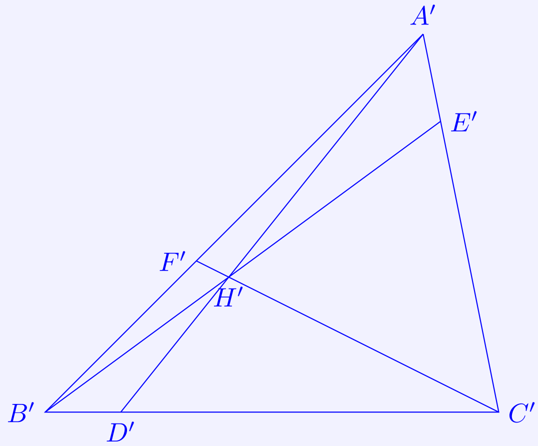
定义 1.2.4: 球面三角形

在半径为R的球面上相距小于πR的给定三点A, B, C唯一地确定了三条小于半圆的大圆圆弧$\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$.

定义 1.2.5: 伴垂心

如下左图是$\triangle ABC$的垂心的定义, 如下右图与$\triangle ABC$全等, 若$B'D' = CD$, $C'E' = AE$, $AF = B'F'$, 则$\triangle A'B'C'$中的三线共点H'为$\triangle A'B'C'$的伴垂心.





定理 1.2.1: 球面三角形余弦定理

对于任给半径为R的球面三角形$\triangle ABC$, 其三边a, b, c和三角$\angle A, \angle B, \angle C$之间恒满足:

$$\cos\frac{a}{R^2} = \cos\frac{c}{R^2}\cos\frac{b}{R^2} + \sin\frac{b}{R^2}\sin\frac{c}{R^2}\cos\angle A,$$
$$\cos\frac{b}{R^2} = \cos\frac{a}{R^2}\cos\frac{c}{R^2} + \sin\frac{c}{R^2}\sin\frac{a}{R^2}\cos\angle B,$$
$$\cos\frac{c}{R^2} = \cos\frac{b}{R^2}\cos\frac{a}{R^2} + \sin\frac{a}{R^2}\sin\frac{b}{R^2}\cos\angle C.$$

定理 1.2.2: 球面三角形正弦定理

条件同上, 有$\frac{\sin\angle A}{\sin\frac{a}{R^2}} = \frac{\sin\angle B}{\sin\frac{b}{R^2}} = \frac{\sin\angle C}{\sin\frac{c}{R^2}}$.

1.3 不等式集

问题 1.3.1

已知$0\le a_k\le 1(k=1,2,\cdots,2002)$, 记$a_{2003}=a_1$, $a_{2004}=a_2$, 求$\sum_{k=1}^{2002}(a_k-a_{k+1}\cdot a_{k+2})$的最大值.

解.
$$\sum_{k=1}^{2002}(a_k-a_{k+1}\cdot a_{k+2})=\sum_{k=1}^{2002}(a_k-a_ka_{k+1})=\sum_{k=1}^{2002}a_k(1-a_{k+1}).$$
Cauchy不等式, 上式右端不超过
$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{2002}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{2002}(1-a_{k+1})^2\right)}\le\frac{\sum a_k^2+\sum(1-a_{k+1})^2}{2}=\frac{\sum a_k^2+\sum(1-a_k)^2}{2}=\frac{\sum(2a_k^2-2a_k+1)}{2}.$$
因为$2a_k^2-2a_k+1\le 1$, 所以原式不超过$\frac{1}{2}\sum 1=1001$, 当$a_k=0$或1时取等号, 即当$a_1=a_3=a_5=\cdots=a_{2001}=1$且$a_2=a_4=\cdots=a_{2002}=0$时取等号. □

解. 由$0\le a_k\le 1$, 得$(1-a_k)(1-a_{k+1})=1-(a_k+a_{k+1})+a_ka_{k+1}\ge 0(k=1,2,\cdots,2002)$, 所以$1\ge a_k+a_{k+1}-a_ka_{k+1}\ge a_k+a_{k+1}-2a_ka_{k+1}$, 从而$2002\ge\sum_{k=1}^{2002}(a_k+a_{k+1}-2a_ka_{k+1})=2\sum(a_k-a_{k+1}a_{k+2})$, 即$\sum(a_k-a_{k+1}a_{k+2})\le 1001$. □

问题 1.3.2

求函数$y=x+\sqrt{x(2-x)}$的最值及此时x的值.

解. 显然$x\in[0,2]$, 所以可设$x=2\sin^2\theta(\theta\in\mathbb{R})$, 运用$|a\sin\theta+b\cos\theta|\le\sqrt{a^2+b^2}$即可. □

问题 1.3.3

设n是给定的正整数, $n\ge 13$, 对n个给定的实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$, 记$|a_i-a_j|(1\le i<j\le n)$有最小值m, 求在$\sum_{i=1}^n a_i^2=1$的条件下, m的最大值.

解. 不妨设$a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$, 于是$a_2-a_1\ge m, a_3-a_2\ge m,\cdots,a_n-a_{n-1}\ge m$, $a_j-a_i\ge(j-i)m(1\le i<j\le n)$.
$$\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2\ge m^2\times\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)^2=m^2\sum_{k=1}^{n-1}k(2k+1)(k+1)=\frac{m^2}{12}\cdot n^2(n^2-1).$$
另一方面, $\sum_{i=1}^n a_i^2=1$可得
$$\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2=n-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\le n.$$
故$n\ge\frac{m^2}{12}n^2(n^2-1)$, 所以$m\le\sqrt{\frac{12}{n^2(n^2-1)}}$, 当且仅当$\sum_{i=1}^n a_i=0$, 且$a_1,a_2,\cdots,a_n$成等差数列时取等号. □

问题 1.3.4

若$x,y,z>0$且$x^2+y^2+z^2=1$, 则$S=\frac{(z+1)^2}{2xyz}$取最小值时, x的值是多少?

解. $\sqrt{\sqrt{2}-1}$. □

引理 1.3.1

设$T\geq 0$, $x,y,z\geq 0$, 则$T\geq\sum x$的充要条件为:

$$(T^2-\sum x^2)^2-8\prod x\cdot T-4\sum y^2z^2\geq 0 \tag{1.1}$$
$$T^2\geq\sum x^2. \tag{1.2}$$

解. 若$T\geq\sum x$, 则1.2式明显成立, 且

$$(T+\sum x)(T^2-\sum x^2+2\sum yz)-8\prod x\geq 2\sum x\cdot 4\sum yz-8\prod x\geq 0.$$

根据

$$(T^2-\sum x^2)^2-8\prod x\cdot T-4\sum y^2z^2=(T-\sum x)\left[(T+\sum x)(T^2-\sum x^2+2\sum yz)-8\prod x\right] \tag{1.3}$$

知1.1式成立. 若1.1, 1.2式成立, 则

$$(T+\sum x)(T^2-\sum x^2+2\sum yz)-8\prod x\geq(\sqrt{\sum x^2}+\sum x)\cdot 2\sum yz-8\prod x\geq(\sqrt{3}+3)(\prod x)^{\frac{1}{3}}\cdot 6(\prod x)^{\frac{2}{3}}-8\prod x\geq 0.$$

根据1.3式知$T\geq\sum x$. □

由引理即得

定理 1.3.1

设$T\geq 0$, $x,y,z\geq 0$, 记$f=(T^2-\sum x^2)^2-8\prod x\cdot T-4\sum y^2z^2$, 则

(i) 若$f\geq 0$, $\sum x^2\leq T^2$, 则$\sum x\leq T$;

(ii) 若$f\leq 0$, 则$\sum x\geq T$.

问题 1.3.5

$$\sum\cos\frac{A}{2}\leq 2+\frac{s}{4R}+\frac{9\sqrt{3}-16}{4R}r.$$

解. 设$m=\frac{s}{4R}$, $n=\frac{r}{2R}$. 则$\sum\cos^2\frac{A}{2}=2+n$, $\prod\cos\frac{A}{2}=\frac{m}{2}$. 进而

$$\sum\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}=\frac{1}{4}(4+4n+m^2+n^2).$$

令$T=2+\frac{m}{2}+\frac{9\sqrt{3}-16}{2}n$, $x=\cos\frac{A}{2}$, $y=\cos\frac{B}{2}$, $z=\cos\frac{C}{2}$, 用定理1.3.1中结论(i). □

问题 1.3.6

设实数a,b,c,d, 满足$a^2+b^2+c^2+d^2=5$, 求$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2$的最大值.

解. 设$f=(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2=15-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+\lambda(a^2+b^2+c^2+d^2-5)$, 所以$f_a=-2(b+c+d)+2a\lambda$, $f_b=-2(a+c+d)+2b\lambda$, $f_c=-2(a+b+d)+2c\lambda$, $f_d=-2(a+c+d)+2b\lambda$, $f_\lambda=a^2+b^2+c^2+d^2-5$, 令$f_a=f_b=f_c=f_d=f_\lambda=0$, 解得$\lambda=-1$或$a=b=c=d$. 当$\lambda=-1$时, $a+b+c+d=0$得$f=20$. 当$a=b=c=d$时, $f=0$, 所以$f_{\max}=20$. □

问题 1.3.7

如果$x>0$, $y>0$, $z>0$且$x^2+y^2+z^2=1$, 求$\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}$的最小值.

解. 设$\frac{yz}{x}=a$, $\frac{xz}{y}-b$, $\frac{xy}{z}=c$, 则$ab+bc+ca=1$, 所以$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca=1$, 所以$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\ge 3$, 另外令$f=a+b+c+\lambda(ab+bc+ca-1)$, 令 $f_a=1+(b+c)\lambda=0$, $f_b=1+(a+c)\lambda=0$, $f_c=1+(a+b)\lambda=0$, 所以$a=b=c$时最小. □

问题 1.3.8

设$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$满足$a_0=\frac{1}{2}$, $a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n}a_k^2$, $k=0,1,2,\cdots,n-1$, 其中n是一个给定的正整数, 试证: $1-\frac{1}{n}<a_n<1$.

解. $a_n>a_{n-1}>a_{n-2}>\cdots>a_2>a_1>a_0=\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}=\frac{1}{n+a_k}<\frac{1}{n}\Longrightarrow\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}<1,$$
$$\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}=\frac{1}{n+a_k}>\frac{1}{n+1}\Longrightarrow\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}>\frac{n}{n+1}.$$

□

问题 1.3.9

当$a>1$时, 若不等式$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{7}{12}\left[\log_{a+1}x-\log_a x+1\right]$对于不小于2的正整数$n$恒成立, 求$x$的取值范围.

解. $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$递增, x的取值范围为$(1,+\infty)$. □

问题 1.3.10

实数集$\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, 满足以下条件:

(1) $a_1=a_n=0$.

(2) 对$1\le k\le n-1$, 有$a_k=c+\sum_{i=k}^{n-1}a_{i-k}(a_i+a_{i+1})$.

证明: $c\le\frac{1}{4n}$.

解. 定义$S_k=\sum_{i=0}^{k}a_i(k=0,1,2,\cdots,n)$, 则

$$\begin{aligned}
S_n&=\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{n-1}a_{k-1}=nc+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=k}^{n-1}a_{i-k}(a_i+a_{i+1})\\
&=nc+\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+a_{i+1})\cdot\sum_{k=0}^{i}a_{i-k}\\
&=nc+\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+a_{i+1})\sum_{t=0}^{i}a_t,(t=i-k)\\
&=nc+\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+a_{i+1})\cdot S_i\\
&=nc+[S_1S_0+(S_2-S_0)S_1+(S_3-S_1)S_2+\cdots+(S_n-S_{n-2})S_{n-1}]
\end{aligned}$$

即$S_n^2-S_n+nc=0$, $\Delta\ge 0\Longrightarrow c\le\frac{1}{4n}$. □

问题 1.3.11

若关于x的不等式$\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+\frac{1}{\log_3 a}\ge 0$, 求$a$的取值范围.

解. 令$u=x^2+ax+5$, $\frac{\log_3(\sqrt{u}+1)}{-\log_3 a}\cdot\log_5(u+1)+\frac{1}{\log_3 a}\geq 0$. 因为$f(4)=1$, 所以$a=2$. □

问题 1.3.12

设$a_1,a_2,\cdots,a_{2002}>0$且$\sum\frac{1}{2+a_i}=\frac{1}{2}$, 求$\prod a_i$的最小值.

解. 令$x_i=\frac{2}{2+a_i}$, 则$\sum x_i=1$, 则$a_i=2\cdot\frac{1-x_i}{x_i}$, 因为

$$\begin{aligned}\prod a_i&=2^{2002}\prod\frac{1-x_i}{x_i}\\&=2^{2002}\cdot\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{2002}}\prod(x_1+x_2+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_{2002})\\&\geq 2^{2002}\cdot\frac{1}{x_ix_2\cdots x_{2002}}\cdot 2001^{2002}\cdot\prod\sqrt[2001]{x_1x_2\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_{2002}}\\&=4002^{2002}.\end{aligned}$$

□

问题 1.3.13

求最小的正数λ, 使得对任意正整数n, a_i和b_i, $b_i\in[1,2](i=1,2,\cdots,n)$, 且$\sum_{i=1}^n a_i^2=\sum b_i^2$, 都有$\sum\frac{a_i^3}{b_i}\leq\lambda\cdot\sum a_i^2$.

解. 对任意$c_i,b_i\in[1,2]$, 有$\frac{1}{2}\leq\frac{c_i}{b_i}\leq 2$, 即$\frac{1}{2}b_i\leq c_i\leq 2b_i$, 从而$\left(\frac{1}{2}b_i-c_i\right)(2b_i-c_i)\leq 0$, 即$c_i^2+b_i^2\leq\frac{5}{2}c_ib_i$, 两边对$i$从1到$n$求和, 得$\sum c_i^2+\sum b_i^2\leq\frac{5}{2}\sum c_ib_i$, 设$a_i,b_i\in\left[1,\frac{2}{3}\right]$, 因$a_i^2=\frac{a_i^{\frac{3}{2}}}{b_i^{\frac{1}{2}}}\cdot a_i^{\frac{1}{2}}\cdot b_i^{\frac{1}{2}}$. 又

$$\frac{1}{2}\leq\frac{\frac{a_i^{\frac{3}{2}}}{b_i^{\frac{1}{2}}}}{a_i^{\frac{1}{2}}\cdot b_i^{\frac{1}{2}}}\leq 2.$$

故有$\frac{5}{2}\sum a_i^2\geq\sum\frac{a_i^3}{b_i}+\sum a_ib_i\geq\sum\frac{a_i^3}{b_i}+\frac{2}{5}(\sum a_i^2+\sum b_i^2)=\sum\frac{a_i^3}{b_i}+\frac{4}{5}\sum a_i^2$, 即$\sum\frac{a_i^3}{b_i}\leq\frac{17}{10}\sum a_i^2$, 当$n=2$, $a_1=1$, $a_2=2$, $b_1=2$, $b_2=1$时取等号. □

问题 1.3.14

已知: $x,y,z\in\mathbb{R}^*$, 有$xyz=1$且满足$x(1+z)>1$, $y(1+x)>1$, $z(1+y)>1$, 求证: $2(x+y+z)\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+3$.

解. 令$x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, $z=\frac{c}{a}$, 则$a+c>b$, $a+b>c$, $b+c>a$, 要证$2(x+y+z)\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+3$, 只需证

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+3\Longleftrightarrow 2(a^2c+b^2a+c^2b)\geq b^2c+c^2a+a^2b+3abc.$$

因为

$$(a+b-c)(b-c)^2\geq 0,\quad(b+c-a)(c-a)^2\geq 0,\quad(c+a-b)(a-b)^2\geq 0$$

展开相加, 即得. □

问题 1.3.15

已知正整数$n\geq 2$, 若对同时满足条件:

(1) $a_1a_2\cdots a_n=b_1b_2\cdots b_n$;

(2) $\sum_{1\leq i<j\leq n}|a_i-a_j|\leq\sum_{1\leq i<j\leq n}|b_i-b_j|$的任意正数$a_1,\cdots,a_n$与$b_1,\cdots,b_n$, 总有$\sum_{i=1}^n a_i\leq\lambda\sum_{i=1}^n b_i$. 试求正数$\lambda$的最小值.

解. 一方面, 取$(a_1,\cdots,a_n)=(1,1,\cdots,(1+x)x^{n-1})$, $(b_1,\cdots,b_n)=(1+x,x,x,\cdots,x)$, 满足(1)与(2), 此时$\lambda\ge\frac{\sum a_i}{\sum b_i}=\frac{n-1+x^{n-1}+x^n}{1+nx}$, 令$x\to0$, 则$\lambda\ge n-1$.

以下证明$\lambda=n-1$时, 不等式成立.

不妨设$a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n$, $b_1\ge b_2\ge\cdots\ge b_n$, $n=2$时, 显然成立.

设$n\ge3$,

(1) 若$a_1\le\frac{n-1}{n}b_1$, 则$\sum a_i\le na_1\le(n-1)b_1\le(n-1)\sum b_i$.

(2) 若$a_1>\frac{n-1}{n}b_1$, 则

$$\begin{aligned}2(b_2+\cdots+b_n)&\ge2(n-1)\cdot(b_2\cdots b_n)^{\frac{1}{n-1}}=2(n-1)\left(\frac{a_1}{b_1}a_2\cdots a_n\right)^{\frac{1}{n-1}}\\&\ge2(n-1)\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{\frac{1}{n-1}}\cdot a_n>2(n-1)\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\cdot a_n\\&\ge na_n.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}(n-1)\sum b_i&=(n-1)b_1+(n-3)\sum_{i=2}^n b_i+2\sum_{i=2}^n b_i\\&\ge(n-1)b_1+(n-3)\sum_{i=2}^n b_i+na_n\ge[(n-1)b_1+(n-3)b_2+\cdots-(n-1)b_n]+na_n\\&=\sum_{1\le i<j\le n}|b_i-b_j|+na_n\ge\sum_{1\le i<j\le n}|a_i-a_j|+na_n\\&=[(n-1)a_1+(n-3)a_2+\cdots-(n-1)a_n]+na_n\\&\ge(n-1)a_1+a_n\ge a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n.\end{aligned}$$

□

问题 1.3.16: 1998年上海市高中数学竞赛

设非零多项式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, $g(x)=c_{n+1}x^{n+1}+c_nx^n+\cdots+c_0$, 满足$g(x)=(x+r)f(x)$, 其中$r$为一实数, 设$a=\max(|a_n|,|a_{n-1}|,\cdots,|a_0|)$, $c=\max(|c_{n+1}|,|c_n|,\cdots,|c_0|)$, 求证: $\frac{a}{c}\le n+1$.

解. 设$|r|\le1$, 由$\sum_{i=0}^{n+1}c_ix^i=(x+r)\sum_{i=0}^n a_ix^i=a_nx^{n+1}+\sum_{i=1}^n(ra_i+a_{i-1})x^i+ra_0$. 故

$$\begin{cases}c_{n+1}=a_n\\c_n=ra_n+a_{n-1}\\\cdots\\c_1=ra_1+a_0\\c_0=ra_0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a_n=c_{n+1}\\a_{n-1}=-rc_{n+1}+c_n\\a_{n-2}=(-r)^2c_{n+1}+(-r)c_n+c_{n-1}\\\cdots\\a_0=(-r)^nc_{n+1}+(-r)^{n-1}c_n+\cdots+c_1,\end{cases}$$

故$|a|=|a_i|=|(-r)^{n-i}c_{n+1}+\cdots+c_{i+1}|\le|c_{n+1}|+\cdots+|c_{i+1}|\le(n-i+1)c\le(n+1)c$.

如果$|r|>1$, 令$x=\frac{1}{x}$, 代入$g(x)=(x+r)f(x)$, 则转化为上述情形, 仍有$a\le(n+1)c$.

另外

$$|a|=|a_i|\le|r|^{n-i}|c_{n+1}|+\cdots+|c_{i+1}|\le(|r^n|+|r^{n-1}|+\cdots+1)c\le\frac{|r|^{n+1}-1}{|r|-1}c$$

而

$$\frac{|r|^{n+1}-1}{|r|-1}\le n+1\Longleftrightarrow|r|^{n+1}\ge n|r|-n+|r|\Longleftrightarrow|r|^n+\frac{n}{|r|}\ge n+1\Longleftrightarrow|r|^n+\frac{1}{|r|}+\cdots+\frac{1}{|r|}\ge n+1$$

($|r|=0$时, 命题显然成立). □

问题 1.3.17

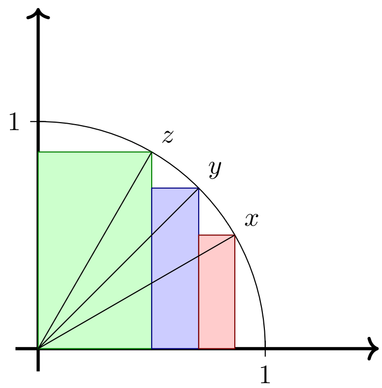
若$a,b,c\in\mathbb{R}$, 且$5a^4+4b^4+6c^4=90$, 求$5a^3+2b^3+3c^3$的最大值.

解. 只需考虑$a,b,c\in\mathbb{R}^*$. 因$a^3=\frac{1}{2}(a\cdot a\cdot a\cdot 2)\le\frac{1}{8}(a^4+a^4+a^4+2^4)=\frac{3}{8}a^4+2$, 同理$b^3\le\frac{3}{4}b^4+\frac{1}{4}$, $c^3\le\frac{3}{4}c^4+\frac{1}{4}$, 所以所求最大值为45. □

问题 1.3.18

若x,y,z为实数, $0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$, 证明: $\frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z$.

解. 原不等式等价于证明$\frac{\pi}{4}>\sin x(\cos x-\cos y)+\sin y(\cos y-\cos z)+\sin z\cos z$. 如图所示



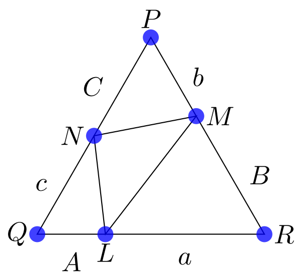
□

问题 1.3.19: 1987年第21届全苏MO

正数a,b,c,A,B,C满足条件$a+A=b+B=c+C=k$, 求证: $aB+bC+cA<k^2$.

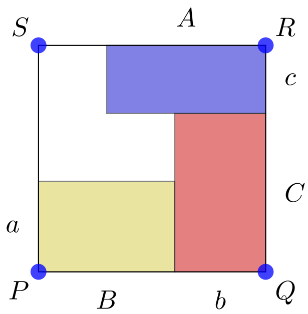
解. 主试委员会给出的解答是$k^3=(a+A)(b+B)(c+C)$, 利用放缩的技巧给出证明, 北京四中的袁峰同学给出了如下构造性证明.

如图: $S_{\triangle LRM}+S_{\triangle PNM}+S_{\triangle QLN}<S_{\triangle PQR}$, 化简即得.



□

解. 如图:



□

问题 1.3.20: 第31届IMO预选题

设集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}=\{1,2,\cdots,n\}$, 求证:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}\leq\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

解. 设$b_1,b_2,\cdots,b_{n-1}$是$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$的一个排列, 且$b_1<b_2<\cdots<b_{n-1}$, $c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}$是$a_2,a_3,\cdots,a_n$的一个排列, 且$c_1<c_2<\cdots<c_{n-1}$, 则

$$\frac{1}{c_1}>\frac{1}{c_2}>\cdots>\frac{1}{c_{n-1}}.$$

且$b_1\geq 1$, $b_2\geq 2$, $\cdots,b_{n-1}\geq n-1$, $c_1\leq 2,c_2\leq 3,\cdots,c_{n-1}\leq n$, 由排序不等式得:

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\geq\frac{b_1}{c_1}+\frac{b_2}{c_2}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{c_{n-1}}\geq\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}.$$

这是南斯拉夫提给第31届IMO的一道试题, 原证法是利用加强命题的手法, 用数学归纳法给出证明. 一则加强命题很难想到, 二则归纳法证明要对足标进行讨论, 比较麻烦. 在当年国家集训队里姚建钢同学(第35届IMO金牌得主)的证法, 更是干脆, 漂亮, 出人意料. □

解. 易证

$$\prod_{k=1}^{n-1}(a_k+1)\geq\prod_{k=1}^{n}a_k,$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{a_{k+1}}+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)&=\frac{1}{a_1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k+1}{a_{k+1}}\\&\geq n\sqrt[n]{\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(a_k+1)}{\prod_{k=1}^{n}a_k}}\geq n\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{k+1}\end{aligned}$$

□

问题 1.3.21: 第24届IMO

设a,b,c分别为一个三角形的三边之长, 求证:

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0.$$

并指出等号成立的条件.

解. 原联邦德国选手伯恩哈德·里普只用了一个等式:

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)=a(b-c)^2(b+c-a)+b(a-b)(a-c)(a+b-c)$$

由轮换对称性, 不妨设$a\geq b,c$, 即得欲证不等式成立, 而且显然等号成立的充要条件是$a=b=c$.

里普的证法新颖, 巧妙, 简洁, 与主试委员会提供的参考答案不同, 他因此获得了该届的特别奖. □

问题 1.3.22: 1980年芬兰, 英国, 匈牙利, 瑞典四国联赛

设数列$a_0,a_1,\cdots,a_n$满足$a_0=\frac{1}{2}$及$a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n}a_k^2(k=0,1,2,\cdots,n-1)$, 其中$n$是一个给定的正整数, 试证:

$$1-\frac{1}{n}<a_n<1.$$

解. 该题是该次竞赛得分率最低的一道试题, 主试委员会所给出的解法也相当繁琐, 前后共用了四次归纳法, 译成中文后有4000多字, 中国科技大学白志东先生对此题采用了大胆的处理方法, 加强命题, 出奇制胜给出一个简洁的证明.

由于$a_1 = a_0 + \frac{1}{n}a_0^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} = \frac{2n+1}{4n}$, 所以

$$\frac{n+1}{2n+1} < a_1 < \frac{n}{2n-1}.$$

我们来用归纳法证: 对于一切$1 \le k \le n$, 都有

$$\frac{n+1}{2n-k+2} < a_k < \frac{n}{2n-k}. \tag{1.4}$$

假设(1.4)对于$k < n$成立, 则

$$a_{k+1} = a_k\left(1+\frac{1}{n}a_k\right) < \frac{n}{2n-k}\left(1+\frac{1}{2n-k}\right) = \frac{n(2n-k+1)}{(2n-k)^2} < \frac{n}{2n-(k+1)}.$$

所以

$$\begin{aligned} a_{k+1} = a_k + \frac{1}{n}a_k^2 &> \frac{n+1}{2n-k+2} + \frac{(n+1)^2}{n(2n-k+2)^2} \\ &> \frac{n+1}{2n-(k+1)+2} \end{aligned}$$

于是(1.4)式对于一切$1 \le k \le n$均成立, 特别在$k = n$时,

$$1 - \frac{1}{n} < \frac{n+1}{n+2} < a_n < \frac{n}{n} = 1.$$

说明 这里所证的不等式(1.4)式比题目所要证明的不等式强, 却收到了事半功倍之效, 下面给出一种直接了当的证明. □

解. 由已知,

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{1}{n+a_{k-1}},$$

从而$a_n > a_{n-1} > \cdots > a_1 > a_0 = \frac{1}{2}$. 所以

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} < \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

累加得$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} > \frac{n}{n+1}$, 所以$\frac{1}{a_n} < 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$. □

问题 1.3.23

已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbb{R}$, 对于任意实数m, n均有$f(m+n) = f(m) + f(n) - 1$, 且$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, 当$x > -\frac{1}{2}$时, 恒有$f(x) > 0$, 求证: $f(x)$单调递增.

解. 证明: 令$x_1 > x_2$, 所以

$$f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) - 1 = f\left(\left(x_1 - x_2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) - 1 = f\left(x_1 - x_2 - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) - 1 - 1 = f\left(x_1 - x_2 - \frac{1}{2}\right)$$

因为$x_1 - x_2 - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$, 所以$f\left(x_1 - x_2 - \frac{1}{2}\right) > 0$, 所以$f(x_1) > f(x_2)$, 得证. □

问题 1.3.24

已知: 正数x, y, z均小于1且$x + y + z = 2$, $w = xy + yz + zx$, 求w的取值范围.

解. 易得$w\le\frac{4}{3}$, 令$x(1-x)=a^2$, $y(1-y)=b^2$, $z(1-z)=c^2$, 因为

$$w=xy+z(2-z)=xz+y(2-y)=yz+x(2-x)$$

所以

$$3w=w+2\times 2-x^2-y^2-z^2=w+4+a^2+b^2+c^2-2$$

所以$2w=2+a^2+b^2+c^2\ge 2$, 即$w\ge 1$. 仅当$a,b,c=0$时取$w=1$, 但$a,b,c\ne 0$, 所以$w>1$. □

问题 1.3.25

已知$\frac{a^2+b^2}{4}+c^2=1$, 求$a+b+c$的最大值.

解.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2=&a^2+b^2+c^2+2bc+2ab+2ac\\ \le&a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+\left(\frac{b^2}{4}+4c^2\right)+\left(\frac{a^2}{4}+4c^2\right)\\ =&9\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right)=9.\end{aligned}$$

□

问题 1.3.26

已知$a,b>0$, $a+b=1$, 证明: $\frac{3}{2}<\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\le\frac{8}{5}$.

解. 原式等价于证明:

$$\begin{aligned}15(a^2+1)(b^2+1)<10(a^2+b^2+2)\le 16(a^2+1)(b^2+1)&\iff 15a^2b^2+5a^2+5b^2-5<0\le 16a^2b^2+6a^2+6b^2-4\\ &\iff 3a^2b^2+a^2+b^2-1<0\le 8a^2b^2+3a^2+3b^2-2.\end{aligned}$$

因$a+b=1$, 所以$a^2+b^2-1=-2ab$. 所以上式等价于

$$3a^2b^2-2ab<0\le 8a^2b^2-6ab+1.$$

又由$a^2+b^2+2ab=1\ge 4ab$, 所以$0<ab\le\frac{1}{4}$, 所以上式成立. □

解. 令$a=\sin^2\theta, b=\cos^2\theta$, $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$, 所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}&=\frac{1}{1+\sin^4\theta}+\frac{1}{1+\cos^4\theta}\\ &=\frac{4}{5-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta}+\frac{4}{5+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta}\\ &=\frac{16(11+\cos 4\theta)}{(11+\cos 4\theta)^2-8(11+\cos 4\theta)+80}\\ &=\frac{16y}{y^2-8y+80}=\frac{16}{y+\frac{80}{y}-8}\end{aligned}$$

因$0<\theta<\frac{\pi}{2}$, 所以$0<4\theta<2\pi$. 所以$10<y\le 12$, 并有$\frac{3}{2}<\frac{16}{y+\frac{80}{y}-8}\le\frac{8}{5}$. □

问题 1.3.27

已知数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$满足: $b_n=a_n-a_{n+2}$, $c_n=a_n+2a_{n+1}+3a_{n+2}$, $(n=1,2,3,\cdots)$, 若$\{c_n\}$为等差数列且$b_n\le b_{n+1}$, 证明: $b_n=b_{n+1}$.

解. 由于$a_n - a_{n+2} = b_n \le b_{n+1} \le b_{n+2} = a_{n+2} - a_{n+4}$, 所以$2a_{n+2} \ge a_n + a_{n+4}$. 因为$2c_{n+1} = c_n + c_{n+2}$, 所以$4a_{n+3} = a_n + 3a_{n+4} \le 2a_{n+2} + 2a_{n+4}$, 所以$2a_{n+3} \le a_{n+2} + a_{n+4}$. 所以$a_{n+3} - a_{n+2} \le a_{n+4} - a_{n+3} \le a_{n+5} - a_{n+4}$, 所以$a_{n+3} - a_{n+5} \le a_{n+2} - a_{n+4}$, 所以$b_{n+3} \le b_{n+2} \le b_{n+3}$, 所以$b_{n+3} = b_{n+2}$, $(n \ge 1)$. 所以$b_3 = b_4 = b_5 = \cdots = -2d = a_3 - a_5 = a_4 - a_6 = a_5 - a_7$, 所以

$$\begin{aligned} 4a_5 - 3a_6 = a_2 \le a_3 - a_5 + a_4 &\Longrightarrow 5a_5 \le a_3 + a_4 + 3a_6 \\ &\Longrightarrow 5(a_3 + 2d) \le a_3 + a_4 + 3(a_4 + 2d) \\ &\Longrightarrow 2a_3 \le 2a_4 - 2d = 2a_4 + a_3 - a_5 \\ &\Longrightarrow a_3 + a_5 \le 2a_4. \end{aligned}$$

因$a_3 + a_5 \ge 2a_4$, 所以$a_2 = a_3 - a_5 + a_4$, 同理$a_1 = a_2 - a_4 + a_3$, 即$b_1 = b_2 = b_3 = \cdots$.

两个正数a, b的和一定时, 它们的积

$$ab = \frac{1}{4}\left((a+b)^2 - (a-b)^2\right) \tag{1.5}$$

随着差$|a-b|$的增大而减小; 其平方和

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}\left((a+b)^2 + (a-b)^2\right) \tag{1.6}$$

随着差$|a-b|$的增大而增大. □

问题 1.3.28

已知$\triangle ABC$的三边, a, b, c成等比数列, 则$\sin B + \cos B$的取值范围为____.

解. 命题等价于$a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$, $b^2 = ac$,

$$b^2 = ac = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \ge 2ac - 2ac\cos B,$$

所以$\cos B \ge \frac{1}{2}$, $0 < B \le 60°$, 由$\frac{1}{2} \le \cos B < 1$及$0 < \sin B \le \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以

$$\frac{1}{2} < \cos B + \sin B < \frac{\sqrt{3}}{2} + 1, \tag{1.7}$$

另一方面, $\sin B + \cos B = \sqrt{2}\sin(B + 45°)$, 而$45° < B + 45° < 105°$, 故

$$1 < \sin B + \cos B \le \sqrt{2}. \tag{1.8}$$

综合(1.7), (1.8)有$1 < \sin B + \cos B \le \sqrt{2}$. □

问题 1.3.29

设a, b, c是直角$\triangle ABC$的三边长, c为斜边, 求使不等式

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \ge kabc$$

恒成立的k的最大值.

解. $a > 0, b > 0, c > 0$, $c^2 = a^2 + b^2$, 所以

$$\begin{aligned} LHS &= (a^2 + b^2)c + a\left(b^2 + \frac{c^2}{2}\right) + b\left(\frac{c^2}{2} + a^2\right) + \frac{c}{2}\cdot c(a+b) \\ &\ge 2abc + \sqrt{2}abc + \sqrt{2}abc + \frac{c}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot 2\sqrt{ab} \\ &\ge (2 + 2\sqrt{2})abc + c\cdot\sqrt{2ab}\cdot\sqrt{ab} = (2 + 3\sqrt{2})abc, \end{aligned}$$

仅当$a = b$时上式取等号.

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge 5 + 3\sqrt{2}.$$

□

问题 1.3.30

设x_1是方程$\sqrt{3}\sin x-3\cos x=2a-1$的最大负根, x_2是方程$2\cos^2 x-2\sin^2 x=a$的最小正根, 求使不等式$|x_1|\le x_2$成立的实数a的取值范围.

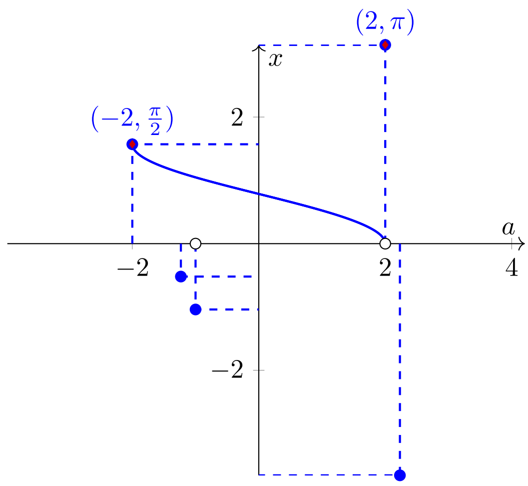
解. 方程$\sqrt{3}\sin x-3\cos x=2a-1$等价于$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2a-1}{2\sqrt{3}}$, 从而得到$-1\le\frac{2a-1}{2\sqrt{3}}\le 1$. 解得$\frac{1}{2}-\sqrt{3}\le a\le\frac{1}{2}+\sqrt{3}$, 而且

$$x_1=\begin{cases}\frac{\pi}{3}+\arcsin\frac{2a-1}{2\sqrt{3}}, & \left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}\le a<-1\right)\\ -\frac{2\pi}{3}-\arcsin\frac{2a-1}{2\sqrt{3}}, & \left(-1\le a\le\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)\end{cases}$$

其图像如图, 位于a轴下方, 方程$2\cos^2 x-2\sin^2 x=a$等价于$\cos 2x=\frac{a}{2}$, 其中$-1\le\frac{a}{2}\le 1$, 所以$-2\le a\le 2$, 解得

$$x_2=\begin{cases}\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{2}, & (-2<a\le 2)\\ \pi, & (a=2).\end{cases}$$

其图像如图, 它位于a轴上方, 比较两个函数的图像, 不难看出$|x_1|\le x_2$的充要条件是$\frac{1}{2}-\sqrt{3}\le a\le -1$或$a=2$.



□

问题 1.3.31

函数$y=\sqrt{8x-x^2}-\sqrt{14x-x^2-48}$的最大值为$\underline{2\sqrt{3}}$, 最小值为$\underline{0}$.

解. x的定义域为$6\le x\le 8$, 而

$$f(x)=\frac{6\sqrt{8-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-6}}$$

在$[6,8]$上递减. □

问题 1.3.32

已知$a,b,c,d\in\mathbb{R}$, 满足$a+b+c+d=3$, $a^2+2b^2+3c^2+6d^2=5$, 则a的最小值与最大值的和是$\underline{3}$.

解.

$$5-a^2=2b^2+3c^2+6d^2=\frac{1}{6}(3+2+1)(2b^2+3c^2+6d^2)\ge(b+c+d)^2=(3-a)^2.$$

□

问题 1.3.33

用$\delta(S)$表示非零整数集S中所有元素的和, 设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{11}\}$是正整数集, 且$a_1<a_2<\cdots<a_{11}$, 若对每个正整数$n\le 1500$, 存在$A$的子集$S$, 使得$\delta(S)=n$, 求满足上述要求的$a_{10}$的最小值.

解. 令$S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$, $(1\le k\le 11)$, 若$a_k>S_{k-1}+1$, 则不存在$S\subset A$, 使$\delta(S)=S_{k-1}+1$, 所以$S_k=S_{k-1}+a_k\le 2S_{k-1}+1$. 又由题设得$S_1=a_1=1$, 于是由归纳法易得$S_k\le 2^k-1$, $(1\le k\le m)$. 若$S_{10}<750$, 则$a_{11}\le 750$, (否则750无法用$\delta(S)$表出), $S_{11}=S_{10}+a_{11}<1500$, 所以$S_{10}\ge 750$. 又$S_8\le 2^8-1=255$, 所以$2a_{10}\ge a_9+a_{10}=S_{10}-S_8\ge 495$, $a_{10}\ge 248$, 另一方面, 令$A=\{1,2,4,8,16,32,64,128,247,248,750\}$合题意. □

问题 1.3.34

$a,b,c>0$, $l^2=a^2+b^2+c^2$, 证明: $(l^4-a^4)(l^4-b^4)(l^4-c^4)\ge 512a^4b^4c^4$.

解.

$$\begin{aligned}LHS&=(l^2+a^2)(l^2+b^2)(l^2+c^2)(l^2-a^2)(l^2-b^2)(l^2-c^2)\\&=(2a^2+b^2+c^2)(a^2+2b^2+c^2)(a^2+b^2+2c^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)\\&\ge 4\sqrt[4]{a^4b^2c^2}\cdot 4\sqrt[4]{a^2b^4c^2}\cdot 4\sqrt[4]{a^2b^2c^4}\cdot 2\sqrt{b^2c^2}\cdot 2\sqrt{c^2a^2}\cdot 2\sqrt{a^2b^2}\\&=RHS.\end{aligned}$$

□

解. 问题等价于证明

$$\left(\frac{l^4}{a^4}-1\right)\left(\frac{l^4}{b^4}-1\right)\left(\frac{l^4}{c^4}-1\right)\ge 512$$

设$x=\frac{a^2}{l^2}$, $y=\frac{b^2}{l^2}$, $z=\frac{c^2}{l^2}$, 则$x+y+z=1$, 所以上式等价于证明

$$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\ge 512.$$

因

$$\frac{1}{x^2}-1=\frac{(1-x)(1+x)}{x^2}=\frac{(y+z)(x+y+z+x)}{x^2}\ge\frac{2\sqrt{yz}(2x+2\sqrt{yz})}{x^2}\ge\frac{2\sqrt{yz}\cdot 4\sqrt{x\sqrt{yz}}}{x^2}=\frac{8\sqrt[4]{x^2y^3z^3}}{x^2}.$$

等号当且仅当$x=y=z$时取得, 同理$\frac{1}{y^2}-1\ge 8\frac{\sqrt[4]{x^3y^2z^3}}{y^2}$, $\frac{1}{z^2}-1\ge 8\frac{\sqrt[4]{x^3y^3z^2}}{z^2}$, 以上三式相乘即得. □

问题 1.3.35

在锐角$\triangle ABC$中, $a<b<c$, 记$P=\frac{a+b+c}{2}$, $Q=a\cos C+b\cos B+c\cos A$, 则$P,Q$的关系是?

解.

$$\begin{aligned}P-Q&=\frac{a+b+c}{2}-b-b\cos B\\&=\frac{a+b+c}{2}-b\left(1+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)\\&=\frac{a+b+c}{2}-b\cdot\frac{(a+c-b)(a+c-b)}{2ac}\\&=\frac{1}{2}(a+b+c)\left(1-\frac{b(a+c-b)}{2ac}\right)\\&=\frac{1}{2}(a+b+c)\left(\frac{b^2-ab-bc+ac}{ac}\right)\\&=\frac{1}{2ac}(a+b+c)(b-c)(b-a)<0\end{aligned}$$

另外$a<b<c$有$\cos C<\cos B<\cos A$, 根据排序不等式,

$$\begin{aligned}a\cos C+b\cos B+c\cos A&>a\cos B+b\cos C+c\cos A\\ a\cos C+b\cos B+c\cos A&>a\cos C+b\cos A+c\cos B.\end{aligned}$$

相加得$2(a\cos C+b\cos B+c\cos A)>a+b+c$. □

问题 1.3.36

设$x,y\in\mathbb{R}^+$, $x+y=3952$, 则(　　).

A. $x^{1949}\cdot y^{2003}\geq 1949^{1949}\cdot 2003^{2003}$.

B. $x^{1949}\cdot y^{2003}\leq 1949^{1949}\cdot 2003^{2003}$.

C. $y^{1949}\cdot x^{2003}\geq 1949^{1949}\cdot 2003^{2003}$.

D. 以上都不对.

解. 由于$x+y=3952$, 所以

$$1949+2003=\sum_{i=1}^{1949}\frac{x}{1949}+\sum_{i=1}^{2003}\frac{y}{2003}\geq(1949+2003)\sqrt[3952]{\left(\frac{x}{1949}\right)^{1949}\cdot\left(\frac{y}{2003}\right)^{2003}}$$

所以 $\sqrt[3952]{\left(\frac{x}{1949}\right)^{1949}\cdot\left(\frac{y}{2003}\right)^{2003}}\leq 1$. □

问题 1.3.37

设x,y是不相等的正数, n,m是正整数, 且$n>m$, 令$a=\sqrt[m]{x^m+y^m}$, $b=\sqrt[n]{x^n+y^n}$, 则a与b的大小关系为$\underline{a>b}$.

解.

$$\begin{aligned}a>b&\iff(x^m+y^m)^{m+1}>(x^{m+1}+y^{m+1})^m\\ &\iff(x^m+y^m)^m>\frac{(x^{m+1}+y^{m+1})^m}{x^m+y^m}=\left(\frac{x^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}+\frac{y^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}\right)^m\\ &\iff x^m+y^m>\frac{x^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}+\frac{y^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}\end{aligned}$$

因$x^m=\frac{x^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m}}>\frac{x^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}$, 同理$y^m=\frac{y^{m+1}}{\sqrt[m]{y^m}}>\frac{y^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}$, 所以不等式成立, 由幂平均不等式可知$2b>a$. □

问题 1.3.38

已知$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, 且$\sin\frac{\alpha}{2}=a\cos\beta$, 当$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$时, 求$a$的取值范围.

解. 显然$a=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}>0$, 因为$-\frac{\beta}{2}<\frac{1}{2}\alpha<\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}$, 所以$\sin\frac{\alpha}{2}<\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)$. 所以

$$a<\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2\left(\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)}\geq\frac{1}{2},$$

其中等号取不到, 所以$a\leq\frac{1}{2}$. □

问题 1.3.39

设$b_1,b_2,\cdots,b_n$是正数$a_1,a_2,\cdots,a_n$的一个排列, 证明$\sum_{k=1}^n\frac{a_k}{b_k}\geq n$.

解. 不妨设$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, 因$a_k \in \mathbb{R}^+$, 所以$\frac{1}{a_1} \leq \frac{1}{a_2} \leq \cdots \leq \frac{1}{a_n}$, 又$\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}$是$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}$的一个排列, 于是$n = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \frac{1}{a_k} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \frac{1}{b_k}$, 另外

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} \geq n\sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{b_1 b_2 \cdots b_n}} = n.$$

□

问题 1.3.40

若$x, y, z, w > 0$, 且$x + y + z + w = 70$, 求函数$\mu = \sqrt[4]{2(x+1)} + \sqrt[4]{16(y+2)} + \sqrt[4]{54(z+3)} + \sqrt[4]{128(w+4)}$的最大值.

解.

$$\mu \leq \frac{1}{4}\left(\left(\frac{x+1}{4} + 2 + 2 + 2\right) + \left(\frac{y+2}{4} + 4 + 4 + 4\right) + \left(\frac{z+3}{4} + 6 + 6 + 6\right) + \left(\frac{w+4}{4} + 8 + 8 + 8\right)\right) = 20$$

所以

$$\left(\frac{\mu}{\sqrt[4]{2}}\right)^2 = \left(\sum \sqrt[4]{i^3(x_i+i)}\right)^2 \leq \left(\sum \sqrt{i^2}\right)\left(\sum \sqrt{i(x_i+i)}\right) = 10\sum \sqrt{i(x_i+i)} \leq 10\sqrt{\sum i \sum (x_i+i)} = 400 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

所以$\mu \leq 20$. □

问题 1.3.41

若$A = a\sin^2 x + b\cos^2 x$, $B = a\cos^2 x + b\sin^2 x$, $(a, b \in \mathbb{R})$, 证明$m = AB, n = ab$, $P = A^2 + B^2$, $Q = a^2 + b^2$满足$m + Q \geq P + n$.

解. $AB = ab + \sin^2 x\cos^2 x(a-b)^2$, 所以$AB - ab = (a-b)^2\sin^2 x\cos^2 x \geq 0$, 而$(A+B)^2 = (a+b)^2$, 所以$A^2 + B^2 \leq a^2 + b^2$, 又因为$m \geq n$, $P \leq Q$, 所以$P + n \leq m + Q$. □

问题 1.3.42

已知$x, y, z \in \mathbb{R}^+$, 且满足$xyz(x+y+z) = 1$, 求$t = (x+y)(x+z)$的最小值.

解. $x^2 + xy + xz = \frac{1}{yz}$, 所以$t = yz + \frac{1}{yz} \geq 2$, 当$y = z = 1$, $x = \sqrt{2} - 1$时取等号. □

问题 1.3.43

如果$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $(n \in \mathbb{N})$, 证明: 对于任意的$n \geq 2$, 都有$a_n^2 > 2\left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n}\right)$.

解. 用数学归纳法, 简证

$$a_{n+1}^2 = \left(a_n + \frac{1}{n+1}\right)^2 = a_n^2 + \frac{2a_n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} > a_n^2 + \frac{2a_{n+1}}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} > 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{a_k}{k} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

由此应给结论加强为$a_n^2 > 2\left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n}\right) + \frac{1}{n}$. 所以

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + \frac{2a_{n+1}}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} > 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{a_k}{k} + \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} = 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{a_k}{k} + \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} > 2\sum \frac{a_k}{k} + \frac{n^2+n}{n(n+1)^2} = RHS$$

成立. □

解. 裂项, 放缩法

$$a_n^2=\sum_{k=2}^{n}(a_k^2-a_{k-1}^2)+a_1^2=\sum_{k=2}^{n}\frac{2a_k-\frac{1}{k}}{k}+1=2\sum\frac{a_k}{k}+1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}>2\sum\frac{a_k}{k}+1-\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=2\sum\frac{a_k}{k}+\frac{1}{n}.$$

□

问题 1.3.44

若$n\in\mathbb{N}$, $n>1$, 求证: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}>\frac{4}{7}$.

解. 因$n=2$时上式成立, 记$f(n)=LHS$. 因为$f(n)-f(n-1)=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}>0$, $(n\geq 3)$, 所以$f(n)$递增, 所以$f(n)>\frac{4}{7}$. □

解. 用数学归纳法, 加强命题为$f(n)>\frac{4}{7}+\frac{n}{3n+1}-\frac{17}{42}$. □

解.

$$2n+f(n)=2+\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{2n}{2n-1}+\frac{2n-1}{2n}=\frac{5}{2}+\frac{25}{12}+\cdots\geq\frac{55}{12}+2n-4=2n+\frac{7}{12}>\frac{4}{7}+2n,\quad(n\geq 3).$$

□

解.

$$f(n)=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1+n}^{2n}\frac{1}{k}$$

由均值不等式有$\frac{(n+1)+(n+2)+\cdots+2n}{n}>\frac{n}{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}}$, 所以$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{n^2}{n(3n+1)}$, 又因为$n\in\mathbb{N}_+$, $n>1$, 所以$3n+1\leq 3n+\frac{n}{2}=\frac{7n}{2}$, 所以$\frac{2n}{3n+1}\geq\frac{4}{7}$, 得证. □

问题 1.3.45

已知α,β为锐角, 且$\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta}+\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}=1$, 求$\alpha+\beta$.

解.

$$LHS=(\sin^2\beta+\cos^2\beta)\left(\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta}+\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}\right)\geq(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2=1$$

当且仅当$\frac{\cos^4\alpha}{\sin^4\beta}=\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\beta}$时, 即$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$时取等号. 这等价于$\cos(\alpha+\beta)=0$, 即$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. □

问题 1.3.46

设a,d为非负实数, b,c为正实数, 且$b+c\geq a+d$, 求$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}$的最小值.

解. 因为$b+c\geq a+d$, 所以$b+c\geq\frac{1}{2}(a+b+c+d)$, 由$b+c\geq a+d$, 不妨设$b\geq c$, $a\geq d$, $a+b\geq c+d$, 所以$\frac{1}{c+d}\geq\frac{1}{a+b}$, 因此

$$\begin{aligned}\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}&=\frac{b+c}{c+d}-c\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)\\&\geq\frac{1}{2}\frac{a+b+c+d}{c+d}-(c+d)\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{c+d}+\frac{c+d}{a+b}-\frac{1}{2}\\&\geq 2\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\\&=\sqrt{2}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

当且仅当$\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{c+d}=\frac{c+d}{a+b}$时, 取等号, 此处要以$q\cdot\frac{a+b}{c+d}\cdot c+da+b$为常数去联想. □

问题 1.3.47

设$f(x)=x^2+px+q$, $p,q\in\mathbb{R}$, 若$|f(x)|$在$x\in[-1,1]$上的最大值M, 求M的最小值.

解. 设$M=\max_{-1\le x\le 1}|f(x)|$, 则$M\ge|f(1)|=|1+p+q|$,

$$M\ge|f(-1)|=|1-p+q|,\quad M\ge|f(0)|=|q|,$$

则$4M\ge|1+p+q|+|1-p+q|+2|-q|\ge|(1+p+q)+2(-q)+(1-p+q)|=2$, 故$M\ge\frac{1}{2}$. □

问题 1.3.48

若$5x_1+6x_2-7x_3+4x_4=1$, 求$3x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+x_4^2$的最小值.

解. 用Cauchy不等式

$$\left(\frac{25}{3}+18+\frac{49}{5}+16\right)\left(3x_1^2+2x_2^2+5(-x_3)^2+x_4^2\right)\ge(5x_1+6x_2-7x_3+4x_4)^2=1,$$

即$\frac{782}{15}\left(3x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+x_4^2\right)\ge 1$. □

问题 1.3.49

设$x,y,z\ge 0$且$xy+yz+zx=1$, 若$A=x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)$, 求$A$的最大值.

解.

$$\begin{aligned}A&=x+y+z-xy^2-xz^2-yz^2-yx^2-zx^2-zy^2+xyz(yz+zx+xy)\\&=x+y+z-xy(y+x)-zx(z+x)-yz(y+z)+xyz\\&=x+y+z-(xy+zx+yz)(x+y+z)+3xyz+xyz\\&=4xyz\end{aligned}$$

因为$xy+yz+zx=1\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$, 所以$A\le\frac{4\sqrt{3}}{9}$. □

问题 1.3.50

设a,b,c,d是满足$ab+bc+cd+da=1$的正实数, 求证:

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\ge\frac{1}{3}.$$

解. 令$R=a+b+c+d$, 则

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{36R}+\frac{R}{48}\ge\frac{a}{4},\quad a+b+c+d\ge 2\sqrt{(a+c)(b+d)}=2.$$

所以

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{36R}+\frac{R}{48}\right)+\sum_{cyc}a\ge\sum_{cyc}\frac{a}{4}+2$$

化简即得. □

解. 这是一个轮换对称式, 令$a=b=c=d=\frac{1}{2}$, 此条件确实使不等式成立, 此时$\frac{a^3}{b+c+d}=\frac{b^3}{a+c+d}=\frac{c^3}{a+b+d}=\frac{d^3}{a+b+c}=\frac{1}{12}$, 因为

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{a(b+c+d)}{9}\geq\frac{2}{3}a^2,$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{a^3}{b+c+d}&\geq 23(a^2+b^2+c^2+d^2)-\frac{2}{9}(ab+bc+cd+ad+ac+bd)\\&=\frac{5}{9}(a^2+b^2+c^2+d^2)-\frac{2}{9}(ab+bc+cd+da)+\frac{1}{9}(a^2+c^2-2ac+b^2+d^2-2bd)\\&\geq\frac{5}{9}(a^2+b^2+c^2+d^2)-\frac{2}{9}(ab+bc+cd+da)\\&\geq\frac{5}{9}(ab+bc+cd+da)-\frac{2}{9}(ab+bc+cd+da)\\&=\frac{1}{3}(ab+bc+cd+da)=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

□

问题 1.3.51

函数$f(x)=\left|x^2-a\right|$在区间$[-1,1]$内的最大值$M(a)$的最小值为$\underline{\frac{1}{2}}$.

解. 显然$M(a)=\max\{|a|,|1-a|\}=\max\{|a|,|a-1|\}$, 画图即可. □

问题 1.3.52

求方程$x^2-2x\sin\frac{\pi x}{2}+1=0$的所有实数根.

解. 对于$x^2+a(x)x+b(x)=0$, 同二次方程求根公式有

$$\left(x+\frac{a(x)}{2}\right)^2=\frac{a^2(x)}{4}-b(x)\geq 0$$

即$\Delta=a^2(x)-4b(x)\geq 0$, 于是此题为$\{x:x=\pm 1\}$. □

问题 1.3.53

设x,y,z,w是不全为0的实数, 且满足$xy+2yz+zw\leq A(x^2+y^2+z^2+w^2)$, 求$A$的最小值.

解. 引进参数$\alpha,\beta,\gamma>0$, 则$\frac{\alpha}{2}x^2+\frac{y^2}{2\alpha}\geq xy$, $\beta y^2+\frac{z^2}{\beta}\geq 2yz$, $\frac{\gamma z^2}{2}+\frac{w^2}{2\gamma}\geq zw$, 将以上三式相加得

$$\frac{\alpha}{2}x^2+\left(\frac{1}{2\alpha}+\beta\right)y^2+\left(\frac{1}{\beta}+\frac{\gamma}{2}\right)z^2+\frac{w^2}{2\gamma}\geq xy+2yz+zw$$

令$\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2\alpha}+\beta=\frac{1}{\beta}+\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2\gamma}$, 所以$\alpha=\sqrt{2}+1$, 于是

$$xy+2yz+zw\leq\frac{1+\sqrt{2}}{2}(x^2+y^2+z^2+w^2),$$

当且仅当$x=w=1$, $y=z=\sqrt{2}+1$时, 上式等号成立, 所以A的最小值为$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ □

问题 1.3.54

已知$a,b,c\in\mathbb{R}^+$, 求$\frac{(a+1)^3}{b}+\frac{(b+1)^3}{c}+\frac{(c+1)^3}{a}$的最小值.

解.

$$\sum_{cyc}\left(\lambda b+\mu+\frac{(a+1)^3}{b}\right)\geq\sum_{cyc}\left(3\sqrt[3]{\lambda\mu}(a+1)\right).$$

令$\lambda=3\sqrt[3]{\lambda\mu}$, $3\lambda a=3\mu=\frac{(a+1)^3}{b}=\frac{(b+1)^3}{c}=\frac{(c+1)^3}{a}$, 解得$\lambda=\frac{27}{2}$, $\mu=\frac{27}{4}$, 所以$\frac{27}{2}b+\frac{27}{4}+\frac{(a+1)^3}{b}\geq\frac{27}{2}(a+1)$, 于是$\sum\geq\frac{81}{4}=3\sqrt[3]{\lambda\mu}\times 3-3\mu$. □

问题 1.3.55

已知α,β,γ是钝角三角形的三个内角, 求$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$的最小值.

解. 由$f(x)=\frac{1}{x^2}$在$[0,\pi)$上的凸性, 由$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}\geq\frac{2}{x_1x_2}\geq\frac{2}{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}$, 已知$f(x)$为下凸函数, 有$f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)\geq 3f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)$, 即$\sum\limits_{cyc}\frac{1}{\alpha^2}\geq\frac{3}{\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^2}=\frac{27}{\pi^2}$. □

问题 1.3.56

设$x,y,z\in\mathbb{R}^+$, 且$x^4+y^4+z^4=1$, 求$u=\sum\limits_{cyc}\frac{x^3}{1-x^8}$的最小值.

解.

$$\begin{aligned}u&=\sum_{cyc}\frac{x^3}{1-x^8}=\sum_{cyc}\frac{x^4}{x(1-x^8)}\\&=\sum_{cyc}\frac{x^4}{\sqrt[8]{\frac{1}{8}\cdot 8x^8(1-x^8)^8}}\\&\geq\sum_{cyc}\frac{x^4}{\sqrt[8]{\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^9}}\\&=\frac{1}{\sqrt[8]{\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^9}}=\frac{9}{8}\cdot\sqrt[4]{3}.\end{aligned}$$

□

问题 1.3.57

给定正数$a_1<a_2<\cdots<a_n$, $b_1,b_2,\cdots,b_n$是它的一个排列, 则____使得乘积$\prod_{i=1}^n\left(a_i+\frac{1}{b_i}\right)$取最大值.

解. $a>b>0$, $c>d>0$时易得$\left(a+\frac{1}{c}\right)\left(b+\frac{1}{d}\right)>\left(a+\frac{1}{d}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)$. □

问题 1.3.58

设n为自然数, $x,y\in\mathbb{R}^+$, 且$x+y=2$, 求$3+\frac{1}{1+x^n}+\frac{1}{y^n}$的最小值.

解. 方法一: 用幂平均不等式和调和平均不等式 □

解. $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$, 所以$xy\leq 1$, $x^ny^n\leq 1$, 因为

$$3+\frac{1}{1+x^n}+\frac{1}{1+y^n}=\frac{1+x^n+y^n+1}{1+x^n+y^n+x^ny^n}+3\geq\frac{1+x^n+y^n+x^ny^n}{1+x^n+y^n+x^ny^n}+3=4.$$

□

问题 1.3.59

若一个序列$a_0, a_1, \cdots$它的每一项均为正数, $a_0 = 1$, 并且$a_n - a_{n+1} = a_{n+2}(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 则这样的序列有几个?

解. 用叠加$a_0 - a_n = a_2 + \cdots + a_{n+1} > na_{n+1}$, 所以$a_0 > (n+1)a_{n+1}$, 所以$a_{n+1} < \frac{1}{n+1}$, 所以$a_n \to 0(n \to +\infty)$. 易得

$$a_n = A\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n (1-A)$$

因为$A \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \to 0$, $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \to \pm\infty$, 所以$1 - A = 0 \Longrightarrow A = 1$, 于是$a_n$唯一. □

问题 1.3.60

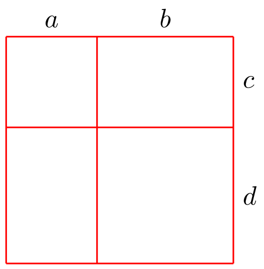
求函数$y = x + 3 + \sqrt{-3x^2 + 6x + 12}$的值域.

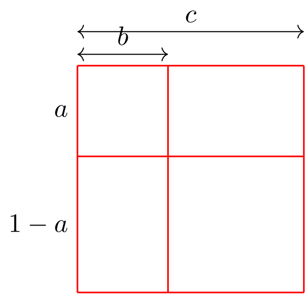
解. 令$x = 1 + \sqrt{5}\sin\alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以$y = \sqrt{5}\sin\alpha + \sqrt{15}\cos\alpha + 4 = 2\sqrt{5}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + 4$, 进而得到$y \in [4 - 2\sqrt{5}, 4 + 2\sqrt{5}]$. □

问题 1.3.61

长方形的一边长为1, 设它被两条互相垂直的直线分成四个小长方形, 其中三个的面积不小于1, 第四个的面积不小于2, 求长方形的另一边至少要多长?

解. 如下左图,





由题意:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ ac \geq 1 \\ ad \geq 1 \\ cb \geq 1 \\ bd \geq 1 \end{cases}$$

要求$c + d$的最小值, 由题设, $(c+d)(a+b) = ac + bd + ad + bc \geq 1 + 2 + 2\sqrt{acbd} \geq 3 + 2\sqrt{2}$, 当且仅当$a = \sqrt{2} - 1$, $b = 2 - \sqrt{2}$, $c = \sqrt{2} + 1, d = 2 + \sqrt{2}$时等号成立.

最后再如上右图,

$$\begin{cases} (1-a)b \geq 2 \\ ab \geq 1 \\ a(c-b) \geq 1 \\ (1-a)(c-b) \geq 1 \end{cases}$$

令$(1-a)b = 2 + x^2$, $ab = 1 + y^2$, $x, y \in \mathbb{R}$, 则$a = \frac{1+y^2}{3+x^2+y^2}$, $b = 3 + x^2 + y^2$, 所以从上式第三个式子得出

$$c \geq \frac{(y^2+2)(x^2+y^2+3)}{y^2+1}, \tag{1.9}$$

从上式第四个式子得出

$$c \geq \frac{(x^2+3)(x^2+y^2+3)}{x^2+2}, \tag{1.10}$$

因为(1.9)式不小于$3+2\sqrt{2}$, (1.10)式不小于4. 所以$c \geq 3+2\sqrt{2}$, 当$x^2=0$, $y^2=\sqrt{2}-1$时取$c=3+2\sqrt{2}$这一等号. □

问题 1.3.62

边长为a,b,c的三角形, 其面积为$\frac{1}{4}$, 外接圆半径是1, 若$S=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, $t=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, 求$S$与$t$的大小关系.

解. 易得: $abc=1$, 所以$t=ab+bc+ca$,

$$t^2=(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq (\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a})^2=S^2.$$

□

问题 1.3.63

非负实数a,b,c满足$a+b+c=1$, 求$(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2$的最小值.

解. 令$f(x)=(1-x^2)^2$, $x\in[0,1]$, 问题实际上是求当$a+b+c=1$时, $f(a)+f(b)+f(c)$的最小值, $f''(x)=12x^2-4$, 所以$x\in\left[0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$时, f上凸; $x\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right]$时, f下凸, 现在a,b,c中至多有一个数在区间$\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right]$中, 必有两个数在$\left[0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, 通过调整将一个数变为0时, $f(a)+f(b)+f(c)$变小, 不妨设$c=0$, 则

$$\begin{aligned}(1-a^2)^2+(1-b^2)^2 &= 2-2(a^2+b^2)+a^4+b^4\\ &= 2-2(1-2ab)+(a^2+b^2)^2-2a^2b^2\\ &= 1+2a^2b^2 \geq 1\end{aligned}$$

所以$f(a)+f(b)+f(c)\geq 2$. □

问题 1.3.64

设正整数数列a_1, a_2, a_3, a_4等比, 公比$r\notin\mathbb{Z}$, 且$r\geq 1$, 求a_4的最小值.

解. r为有理数, 令$r=q/p$, $(q>p\geq 2)$, $a_4=a_1r^3=\frac{a_1q^3}{p^3}$, 因为$a_4\in\mathbb{Z}$, 所以$p^3\mid a_1$, 所以$a_1=kp^3(k\in\mathbb{N}_+)$, $a_4=kq^3$, $q>p\geq 2$, 所以$k=1$, $q=3$. □

问题 1.3.65

设关于x的方程$a^3=\sqrt[4]{2+x}-\sqrt{7-x}$有实根, 求$a$的取值范围为$[-\sqrt[3]{3},\sqrt[6]{3}]$.

解. 用函数单调性. □

问题 1.3.66

设$a,b>0$, 满足$\frac{1}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1$, 求$a+b+\frac{b}{a}$的最小值.

解. 由均值不等式, $\frac{1}{a^2}+\frac{3}{b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^2}\geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{a^2b^6}}>0$, 再由已知, 则有$ab^3\geq 16$, 而$a+b+\frac{b}{a}=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+\frac{b}{a}\geq 5\sqrt[5]{\frac{ab^3}{16}}\geq 5$, 当且仅当$a=b=2$时取等号. □

问题 1.3.67

求函数$y=\sqrt{4x-1}+\sqrt{2-x}$的值域.

解. 令$m=\sqrt{4x-1}$, $n=\sqrt{2-x}$, 则$m^2+4n^2=7$, $y=m+n$, 利用椭圆参数方程求解. □

问题 1.3.68

已知a,b,c,d为非负实数, 且$ab+bc+cd+da=1$, 求$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}$的最小值.

解. 设$S=\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}$, 则

$$[a(b+c+d)+b(c+d+a)+c(d+a+b)+d(a+b+c)]S\geq(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

又

$$[a(b+c+d)+b(c+d+a)+c(d+a+b)+d(a+b+c)]\leq 3(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

所以$S\geq\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2+d^2)\geq\frac{1}{3}(ab+bc+cd+da)=\frac{1}{3}$. □

问题 1.3.69

设$a=\lg z+\lg[x(yz)^{-1}+1]$, $b=\lg x^{-1}+\lg(xyz+1)$, $c=\lg y+\lg[(xyz)^{-1}+1]$, 记$a,b,c$中最大数为$m$, 求$m$的最小值.

解. $a=\lg(xy^{-1}+z)$, $b=\lg(yz+x^{-1})$, $c=\lg[(xz)^{-1}+y]$, 设N为$xy^{-1}+z$, $yz+x^{-1}$, $(xz)^{-1}+y$中最大的, 则$M=\lg N$, 因为$x,y,z\in\mathbb{R}^+$, 所以$N^2\geq(xy^{-1}+z)[(xz)^{-1}+y]=[(yz)^{-1}+yz]+\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq 2+2=4$, 所以$N\geq 2$, 当且仅当$x=y=z=1$时取等号, 所以$M=\lg N=\lg 2$. □

问题 1.3.70

在三角形ABC中设$\cot A+\cot B+\cot C=\sqrt{3}$, 判断$\triangle ABC$的形状.

解. 因为$A+B+C=\pi$, $\cot A=-\cot(B+C)=\frac{\cot B\cot C-1}{\cot B+\cot C}$, 所以原条件可以化为

$$-\frac{\cot B\cot C-1}{\cot B+\cot C}+\cot B+\cot C=\sqrt{3},$$

整理得

$$\cot^2 B+(\cot C-\sqrt{3})\cot B+(\cot^2 C-\sqrt{3}\cot C+1)=0,$$

因为$\cot B\in\mathbb{R}$, 所以$\Delta\geq 0$, 但是$\Delta=(\cot C-\sqrt{3})^2-4(\cot^2 C-\sqrt{3}\cot C+1)=-(\sqrt{3}\cot C-1)^2\leq 0$, 所以$\sqrt{3}\cot C-1=0$, $C=60^\circ$. □

解. 因为$(\cot A+\cot B+\cot C)^2=(\sqrt{3})^2$, 所以$\cot^2 A+\cot^2 B+\cot^2 C+2(\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A)=3$, 但是$A+B+C=\pi$, 所以$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$, 两边同乘$\cot A\cot B\cot C$得, $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$, 将此式代入前式得:$\cot^2 A+\cot^2 B+\cot^2 C-1=0$, 所以$\cot^2 A+\cot^2 B+\cot^2 C=(\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A)$, 即$\cot A=\cot B=\cot C$. □

问题 1.3.71

设二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$, $(a>0$且$b\neq 0)$, 已知$|b|\leq a$, $|f(0)|\leq 1$, $|f(-1)|\leq 1$, $|f(1)|\leq 1$, 当$|x|\leq 1$时, 证明: $|f(x)|\leq\frac{5}{4}$.

解. 易得$|b|\leq 1$, 而$|2b|=|(a+b+c)-(a-b+c)|\leq|f(1)|+|f(-1)|\leq 2$. 由于$|b|\leq a$, 所以$\left|\frac{b}{a}\right|\leq 1$, $\left|-\frac{b}{2a}\right|\leq\frac{1}{2}<1$, 又$|c|=|f(0)|\leq 1$, $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=c-\frac{b^2}{4a}$, 所以$\left|f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right|\leq|c|+\left|\frac{b^2}{4a}\right|=|c|+\frac{1}{4}\left|\frac{b}{a}\right|\cdot|b|\leq\frac{5}{4}$, 而$f(x)$得图像开口向上, 且$|x|\leq 1$, $|f(x)|$的最大值应在$x=1$, $x=-1$或$x=-\frac{b}{2a}$处取得, 且$|f(1)|\leq 1$, $|f(-1)|\leq 1$, $\left|f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right|\leq\frac{5}{4}$, 从而$|f(x)|\leq\frac{5}{4}$. □

解. 注意到, $a=\frac{f(1)+f(-1)}{2}-f(0)$, $b=\frac{f(1)-f(-1)}{2}$, $c=f(0)$. 所以

$$|f(x)|=\left|f(1)-\frac{x^2+x}{2}+f(-1)\cdot\frac{x^2-x}{2}+f(0)(1-x^2)\right|\leq\frac{|x|(x+1)}{2}+\frac{|x|(1-x)}{2}+(1-x^2)=|x|+1-|x|^2\leq\frac{5}{4}.$$

□

问题 1.3.72

已知数列$\{a_n\}$, 其中$a_1=1$, $a_2=\frac{1}{a_1}+a_1$, $\cdots$, $a_n=\frac{1}{a_{n-1}}+a_{n-1}$, 证明: $\sqrt{2n-1}\leq a_n\leq\sqrt{3n-2}$.

解. 显然$1=a_1<a_2<\cdots<a_n$, 由于$(a_k)^2=\left(\frac{1}{a_{k-1}}\right)^2+a_{k-1}^2+2$, 所以

$$a_{k-1}^2+2<a_k^2<a_{k-1}^2+3\Longrightarrow 2(n-1)+\sum_{k=2}^{n}a_{k-1}^2<\sum_{k=2}^{n}a_k^2<3(n-1)+\sum_{k=2}^{n}a_{k-1}^2\Longrightarrow 2n-1<a_n^2<3n-2.$$

□

两个正数a,b的和一定时, 它们的积$ab=\frac{1}{4}[(a+b)^2-(a-b)^2]$随着差$|a-b|$的增大而减小; 其平方和$a^2+b^2=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(a-b)^2]$随着差$|a-b|$的增大而增大.

局部调整法(叫局部扰动法)也是解决最值问题的一种行之有效的方法, 尤其是离散变量最值问题常常需要用这种方法. 其基本思路是: 对于问题所涉及的多个变量, 先对少数变量进行调整, 其它变量暂时不变, 从而化难为易, 取得问题在局部上的进展, 经过若干次这样的局部上的调整, 不断缩小范围, 最终得到问题的圆满解决. 利用局部调整法求值的过程中, 常常需要用上一段的基本结论.

当然, 局部调整法也可用于解决其它数学问题(如存在性问题等).

几何不等式: 由于三角形总有内切圆存在, 因而它的三条边总可以表示为$a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x(x,y,z>0)$; 反之若三个正数a,b,c可以表示为上述形式, 则a,b,c一定是某个三角形的三边, 并且相应的三角形的其它元素(如外接圆半径, 内切圆半径, 面积等)也可以通过上述变换用x,y,z表示, 有关三角形的一些不等式都可以化为x,y,z的代数不等式.

问题 1.3.73

设$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 证明:

$$\frac{\sin^{2005}\alpha}{\sin^{2003}\beta}+\frac{\cos^{2005}\alpha}{\cos^{2003}\beta}\geq 1+2003[1-\cos(\alpha-\beta)]$$

当且仅当$\alpha=\beta$时等号成立.

解. 令$A=2003$, 原不等式等价于

$$\frac{\sin^{A+2}\alpha}{\sin^{A}\beta}+\frac{\cos^{A+2}\alpha}{\cos^{A}\beta}\geq 1+A-A\cos\alpha\cos\beta-A\sin\alpha\sin\beta.$$

因为$\sin\alpha\sin\beta+\cdots+\sin\alpha\sin\beta+\frac{\sin^{A+2}\alpha}{\sin^{A}\beta}\geq(A+1)\sqrt[A+1]{\sin^{2A+2}\alpha}=(A+1)\sin^2\alpha$, 其中$\sin\alpha\sin\beta$有$A$个. 原不等式得证. □

问题 1.3.74

定义在$x>0$上的函数$f(x)$满足:

1. 存在$a>1$使得$f(a)\neq 0$;
2. 对于任意的$b\in\mathbb{R}$, 有$f(x^b)=bf(x)$.

求证: 对于任意的$x>2$有$f(x-1)f(x+1)<[f(x)]^2$.

解. 先证$f(1)=0$, 再利用第二个条件证明$f(x)$在$x>1$时不变号. 令$x=\mathrm{e}^t$, 则$f\left(\mathrm{e}^{b_1}\right)+f\left(\mathrm{e}^{b_2}\right)=f\left(\mathrm{e}^{b_1+b_2}\right)$. 所以

$$f(x-1)f(x+1)\leq\left(\frac{f(x-1)+f(x+1)}{2}\right)^2=\left(\frac{f(x^2-1)}{2}\right)^2$$

再证$f(x)$在$x>1$时为增函数便得. □

问题 1.3.75

设平面上的凸n边形$A_1A_2A_3\cdots A_n$的各边依次为$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$, 其面积为Δ_n, 试证:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq 4\Delta_n \tan\frac{\pi}{n}$$

等号成立当且仅当n边形$A_1A_2A_3\cdots A_n$为正多边形.

解. 均值不等式$\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2$当且仅当$a_1 = a_i(2\leq i\leq n)$时等号成立, 令$\sum_{i=1}^n a_i = l$, 以$l$为周长的正$n$边形面积$\Delta_{\text{正}} = \frac{l^2}{4n}\cot\frac{\pi}{n}$, 所以$l^2 = 4n\Delta_{\text{正}}\tan\frac{\pi}{n}$, 用等周定理知$\Delta_{\text{正}} \geq \Delta_n$, 有$\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \frac{l^2}{n} \geq 4\Delta_n\tan\frac{\pi}{n}$, 等号成立当且仅当$n$边形为正$n$边形时成立.

另外, 我们可得到其它结论, 如: 设此凸n边形的被覆盖的最小的圆半径为R, 则

$$2\Delta_n \leq \frac{R}{2}\sum\sqrt{a_i^2+a_{i+1}^2-2a_ia_{i+1}\cos A_{i+1}}$$

其中$a_{n+1}=a_1$, $A_{n+1}=A_1$,

$$2R \leq \sum\sqrt{\frac{a_i^2+a_{i+1}^2-2a_ia_{i+1}\cos A_{i+1}}{\sin^2 A_{i+1}}}$$

所以

$$2\Delta_n \leq \frac{1}{4}\sum\frac{\sqrt{a_i^2+a_{i+1}^2-2a_ia_{i+1}\cos A_{i+1}}}{\sin A_{i+1}}\sum\sqrt{a_i^2+a_{i+1}^2-2a_ia_{i+1}\cos A_{i+1}}.$$

□

问题 1.3.76

求证:

$$|a|+|b| \leq \sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}+\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta} \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

解. 后者用平方平均不等式易得. 下面证明前者, 令$z_1 = a\cos\theta + \mathrm{i}b\sin\theta$, $z_2 = a\sin\theta+\mathrm{i}b\cos\theta$, $u=|z_1|+|z_2|$, 则

$$\begin{aligned}
u^2 &= |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1|\cdot|z_2| \\
&= a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta+a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta+\left|(a^2-b^2)\sin 2\theta+2ab\mathrm{i}\right| \\
&= a^2+b^2+\sqrt{(a^2-b^2)^2\sin^2 2\theta+4a^2b^2} \\
&\leq a^2+b^2+\sqrt{(a^2+b^2)^2} \\
&= 2(a^2+b^2)
\end{aligned}$$

又因为$u^2 = a^2+b^2+\sqrt{(a^2-b^2)^2\sin^2 2\theta+4a^2b^2} \geq a^2+b^2+\sqrt{4a^2b^2} = (|a|+|b|)^2$, 即$u\geq |a|+|b|$. 左边不等式还可以通过分析法解得, 通过去根号. □

问题 1.3.77

设$x,y,z\in\mathbb{R}^+$, 求证

$$\sum_{cyc}\frac{x^2}{y^2+z^2+yz} \geq 1.$$

解.

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc}\frac{x^2}{y^2+z^2+yz} &\geq \sum_{cyc}\frac{x^2}{y^2+z^2+\frac{y^2+z^2}{2}}\\
&=\sum_{cyc}\frac{2x^2}{3(y^2+z^2)}\\
&=\frac{2}{3}\sum_{cyc}\frac{x^2}{y^2+z^2}\\
&=\frac{2}{3}\left[\sum_{cyc}\left(\frac{x^2}{y^2+z^2}+1\right)-3\right]\\
&=\frac{2}{3}(x^2+y^2+z^2)\sum_{cyc}\frac{1}{y^2+z^2}-2\\
&=\frac{1}{3}\left(\sum_{cyc}x^2+y^2\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{x^2+y^2}\right)-2\\
&\geq\frac{1}{3}\left(\sum 1\right)^2-2=1.
\end{aligned}$$

□

解. 不妨设$x\geq y\geq z\geq 0$, 所以$x^2\geq y^2\geq z^2\geq 0$, $xy\geq xz\geq yz$.

$$x^2+y^2+xy\geq x^2+z^2+xz\geq y^2+z^2+yz.$$

用排序不等式

$$\sum_{cyc}\frac{x^2}{y^2+z^2+yz}\geq\sum_{cyc}\frac{z^2}{y^2+z^2+yz}\geq\sum_{cyc}\frac{y^2}{y^2+z^2+yz}\geq\sum_{cyc}\frac{yz}{y^2+z^2+yz},$$

由此不等式组生成3个不等式, 相加即得. □

问题 1.3.78

已知$a,b\in\mathbb{R}^+$, $n\in\mathbb{N}_+$, 且$\frac{\sin^4\alpha}{a^n}+\frac{\cos^4\alpha}{b^n}=\frac{1}{a^n+b^n}$, 求证:

$$\frac{\sin^8\alpha}{a^{3n}}+\frac{\cos^8\alpha}{b^{3n}}=\frac{1}{(a^n+b^n)^3}.$$

解. 用Cauchy不等式,

$$(a^n+b^n)\left(\frac{\sin^8\alpha}{a^{3n}}+\frac{\cos^8\alpha}{b^{3n}}\right)\geq\left(\frac{\sin^4\alpha}{a^n}+\frac{\cos^4\alpha}{b^n}\right)^2=\frac{1}{(a^n+b^n)^2},$$

当且仅当$\frac{a^n}{\sin^2\alpha}=\frac{b^n}{\cos^2\alpha}$时等号成立, 又

$$(a^n+b^n)\left(\frac{\sin^4\alpha}{a^n}+\frac{\cos^4\alpha}{b^n}\right)\geq(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=1,$$

即$\frac{\sin^4\alpha}{a^n}+\frac{\cos^4\alpha}{b^n}\geq\frac{1}{a^n+b^n}$, 等号成立, 则$\frac{a^n}{\sin^2\alpha}=\frac{b^n}{\cos^2\alpha}$. □

问题 1.3.79

设$x_1,x_2,\cdots,x_n>0$, $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$, $n\geq 2$, 且$n\in\mathbb{N}_+$, 求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geq\frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}.$$

解.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} - \sum \sqrt{1-x_i} \\ &\geq \frac{n^2}{\sum \sqrt{1-x_i}} - \sum \sqrt{1-x_i} \\ &\geq \frac{n^2}{\left(\sum 1\right)^{1/2} \left(\sum (1-x_i)\right)^{1/2}} - \left(\sum 1\right)^{1/2} \left(\sum (1-x_i)\right)^{1/2} \\ &= \frac{n^2}{\sqrt{n(n-1)}} - \sqrt{n(n-1)} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \\ &\geq \frac{\sum \sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}} \end{aligned}$$

□

解.

$$\begin{aligned} \left[\left[\left(\sum (1-x_i)\right)^{1/2} \left(\sum \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\right)^{1}\right]^{2/3}\right]^{3/2} &= \left[\left(\sum (1-x_i)\right)^{1/3} \left(\sum \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\right)^{2/3}\right]^{3/2} \text{(Holder不等式)} \\ &\geq \left[\sum (1-x_i)^{1/3} \cdot \left(\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\right)^{2/3}\right]^{3/2} \\ &= \left(\sum x_i^{2/3}\right)^{3/2} \text{(幂平均不等式)} \\ &\geq n^{3/2} \cdot \frac{\sum x_i}{n} = \sqrt{n} \geq \sum \sqrt{x_i} \end{aligned}$$

□

解. 不妨设$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, 显然

$$\frac{1}{\sqrt{1-x_1}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x_2}} \leq \cdots \leq \frac{1}{\sqrt{1-x_n}},$$

利用Chebyshev不等式和幂平均不等式有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{1}{n} \left(\sum x_i\right) \cdot \left(\sum \frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right) = \frac{1}{n} \sum \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} \geq \left[\frac{1}{n} \sum \left(\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right)^{-2}\right]^{-1/2} = \left[\frac{1}{n} \sum (1-x_i)\right]^{-1/2} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

由Cauchy不等式得

$$\sum \sqrt{x_i} \leq \sqrt{\sum 1} \sqrt{\sum x_i} = \sqrt{n}$$

所以

$$\sum \frac{x_i}{1-x_i} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}} \geq \frac{\sum \sqrt{x_i}}{n-1}.$$

□

问题 1.3.80

设$a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^+$, 且满足$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 1$, 求证:

$$\frac{a_1 a_2 \cdots a_n [1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)]}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}}.$$

解. 令$\sum a_i = A$, 则

$$1 - a_i = 1 - A + a_1 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n \geq n \sqrt[n]{(1-A) a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n}.$$

所以

$$\prod(1-a_i)\geq n(1-A)\sqrt[n]{\left(\prod a_i\right)^{n-1}}.$$

因为$A\geq n\sqrt[n]{\prod a_i}$, 所以

$$A\cdot\prod(1-a_i)\geq n^{n+1}(1-A)\prod a_i$$

所以

$$\frac{\left(\prod a_i\right)(1-A)}{A\cdot\prod(1-a_i)}\leq\frac{1}{n^{n+1}}\qquad(n\geq 2)$$

最后说明一下$n=1$时的情况成立便可. □

解. 设$a_{n+1}=1-\sum a_i$, 所以$a_{n+1}>0$, 所以$\sum_{i=1}^{n+1}a_i=1$, 不等式变为

$$n^{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}a_i\leq\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_i)$$

对于每一个$i(i=1,2,\cdots,n+1)$, 由均值不等式有

$$1-a_i=a_1+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_{n+1}\geq n\sqrt[n]{a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_{n+1}}=n\sqrt[n]{\frac{1}{a_i}\prod_{k=1}^{n+1}a_k},$$

所以$\prod_{k=1}^{n+1}(1-a_k)\geq n^{n+1}\prod_{k=1}^{n}a_k$. 如果$n\geq 2$, 等号成立. 当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时成立, 即$a_i=\frac{1}{n+1}$, 若$n=1$时, 对$a_1\in(0,1)$等式均成立. □

问题 1.3.81

固定正整数$n\geq 2$, n个非负实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$满足$\sum_{i=1}^{n}x_i=1$, 试求

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^5-x_i^4)$$

的最大值和最小值.

解. 因为$x_i^5\leq x_i^4$, 所以$\sum_{i=1}^{n}(x_i^5-x_i^4)\leq 0$, 令$x_1=1$, $x_2=\cdots=x_n=0$即得等号. 令$f(x)=x^5-x^4$, $f''(x)=20x^3-12x^2$, 所以f在$[0,\frac{3}{5}]$上是上凸函数, 在$[\frac{3}{5},1]$上是下凸函数, 将落在$[0,\frac{3}{5}]$中两数保持和不变向两边“拉”, 可使$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$变小, 调整到最后$x_1,x_2,\cdots,x_n$中有$(n-2)$个0, 另外两数记为a,b, 则

$$\sum f(x_i)\geq(n-2)f(0)+f(a)+f(b)=f(a)+f(b)=-ab(a^3+b^3)=-ab(a+b)(a^2+b^2-ab)=-ab(1-3ab).$$

而$0\leq ab\leq 1/4$, 于是当$ab=1/6$时, 取最小值$-1/12$, 此时$a,b=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1/3}\right)$. 所以$\sum f(x_i)$的最小值为$-1/12$. □

问题 1.3.82

设$x_1,x_2,\cdots,x_{1997}$是实数, 满足下述条件:

1. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\leq x_i\leq\sqrt{3}$, $i=1,2,\cdots,1997$;
2. $x_1+x_2+\cdots+x_{1997}=-318\sqrt{3}$.

确定$\sum_{i=1}^{1997}x_i^{12}$的最大值.

解. 设$f(x)=x^{12}$, 则$f''(x)=132x^{10}\geq 0$, 于是$f(x)$在$\left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right]$上是下凸的, 当$x_i,x_j\in\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right)$时, 保持其和不变, 向两边“拉”, 可使$\sum_{i=1}^{1999}x_i^{12}$增加, 于是最终将调整到至多一个数落在区间$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right)$内, 设有$a$个$-\frac{1}{\sqrt{3}}$, b个$\sqrt{3}$, 另一个数记为c, $a+b=1996$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}\leq c\leq\sqrt{3}$, 则$-\frac{1}{\sqrt{3}}a+\sqrt{3}b+c=-318\sqrt{3}$, $-a+3b+\sqrt{3}c=-954$. 于是$4b=1042-c\sqrt{3}$, $1039\leq 4b\leq 1043$, 所以$b=260$, $a=1736$, $c=2/\sqrt{3}$. 于是$\sum_{i=1}^{1997}x_i^{12}$的最大值为$a\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{12}+b\left(\sqrt{3}\right)^{12}+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{12}=189548$. □

问题 1.3.83

m个互不相同的正偶数与n个互不相同的正奇数的总和为2000, 对于所有的这样的m与n, 问$3m+4n$的最大值是多少? 证明你的结论.

解. $2000=(2+4+\cdots+2m)+[1+3+\cdots+(2n-1)]+a\geq m(m+1)+n^2$. 所以$m,n$满足$\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2\leq 2000\frac{1}{4}$, 由Cauchy不等式有

$$3m+4n=3\left(m+\frac{1}{2}\right)+4n-\frac{3}{2}\leq 5\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2}-\frac{3}{2}\leq 5\sqrt{2000\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}\leq 222,$$

又因为$m,n\in\mathbb{N}$, 所以$(3m+4n)_{\max}=222$, 其中$m=26$, $n=36$. □

问题 1.3.84

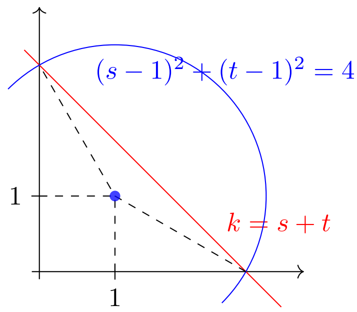
设实数x,y, 满足: $x\geq 1$, $y\geq 1$. $(\log_a x)^2+(\log_a y)^2=\log_a\left(ax^2\right)+\log_a\left(ay^2\right)$, $(a>1)$, 当a在$(1,+\infty)$范围内变化时, 求$\log_a(xy)$的取值范围.

解. 令$\log_a x=s$, $\log_a y=t$, 因为$a>1$, $x\geq 1$, $y\geq 1$, 所以$s\geq 0$, $t\geq 0$. 所以已知条件中的等式等价于$(s-1)^2+(t-1)^2=4$, 令

$$\begin{cases}s=1+2\cos\alpha\\ t=1+2\sin\alpha\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\cos\alpha\geq-\frac{1}{2}\\ \sin\alpha\geq-\frac{1}{2}\end{cases}$$

所以$\alpha\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]\bigcup\left[\frac{11\pi}{6},2\pi\right)$, 所以$k=s+t=\log_a(xy)=2+2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, 所以$k_{\max}=2+2\sqrt{2}$, $k_{\min}=1+\sqrt{3}$. □

解. 如图, 令$\log_a x=s$, $\log_a y=t$, 因$a>1$, $x\geq 1$, $y\geq 1$, 所以$s\geq 0$, $t\geq 0$, 则等式等价于$(s-1)^2+(t-1)^2=4$, $k=s+t$, k为直线$k=s+t$在s轴上的截距, 所以$k_{\max}=2+2\sqrt{2}$, $k_{\min}=1+\sqrt{3}$.



□

问题 1.3.85

设a,b,c,d是4个不同的实数, 使得$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=4$, 且$ac=bd$, 试求$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}+\frac{d}{b}$的最大值.

解. 设$x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, 因$ac=bd$, 得$\frac{c}{d}=\frac{b}{a}=\frac{1}{x}$, $\frac{d}{a}=\frac{c}{b}=\frac{1}{y}$, 问题转化为约束条件$x\neq 1$, $y\neq 1$, $x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4$下, 求$xy+\frac{y}{x}+\frac{1}{xy}+\frac{x}{y}$的最大值, 又设$x+\frac{1}{x}=e$, $y+\frac{1}{y}=f$, 则$ef=xy+\frac{y}{x}+\frac{1}{xy}+\frac{x}{y}$.

当$t>0$时, $t+\frac{1}{t}\geq 2$; 当$t<0$时, $t+\frac{1}{t}\leq-2$. 由$x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4$, 知$x,y$不同号, (否则有$x=y=1$).

不妨设, $x>0$, $y<0$, 则$f\leq-2$, $e=4-f\geq 6$, $ef\leq-12$, 当且仅当$y=-1$, $x=3\pm 2\sqrt{2}$时等号成立. 特别地, 当$a=3+2\sqrt{3}=-d$, $b=-c=1$时, 等号成立, 为-12. □

问题 1.3.86

设$a_i \in \mathbb{R}^+$, $(i=1,2,\cdots,n)$, $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, 求

$$S = \frac{a_1}{1+a_2+a_3+\cdots+a_n} + \frac{a_2}{1+a_1+a_3+\cdots+a_n} + \cdots + \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}$$

的最小值.

解. $S = \frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{2-a_n}$, 关于$a_1, a_2, \cdots, a_n$对称, 不妨设$1 > a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$, 则$2-a_1 \leq 2-a_2 \leq \cdots \leq 2-a_n$,

$$\frac{1}{2-a_1} \geq \frac{1}{2-a_2} \geq \cdots \geq \frac{1}{2-a_n} > 0,$$

由基本不等式有

$$S + n = \sum_{k=1}^n \frac{2}{2-a_k} \geq \frac{n^2}{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n (2-a_k)} = \frac{2n^2}{2n-1},$$

所以$S \geq \frac{n}{2n-1}$. □

解. 用切比雪夫不等式有

$$S \geq \frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{2-a_1}+\cdots+\frac{1}{2-a_n}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2-a_1}+\cdots+\frac{1}{2-a_n}\right),$$

由Cauchy不等式有

$$\sum_{k=1}^n (2-a_k) \sum_{k=1}^n \frac{1}{2-a_k} \geq n^2,$$

而$\sum_{k=1}^n (2-a_k) = 2n-1$, 所以$S \geq \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{2n-1} = \frac{n}{2n-1}$, 当且仅当$a_1 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$时, 取等号. □

问题 1.3.87

已知函数$f(x) = ax^2 + bx + c$对于一切$x \in [-1,1]$, 都有$|f(x)| \leq 1$, 设

$$g(x) = \left|acx^4 + b(a+c)x^3 + \left(a^2+b^2+c^2\right)x^2 + b(a+c)x + ac\right|, \quad x \in [-1,1],$$

求函数$g(x)$的最大值.

解. $g(x) = \left|ax^2+bx+c\right| \cdot \left|cx^2+bx+a\right|$, 设$h(x) = cx^2+bx+a$, $x \in [-1,1]$, 则$|h(1)| = |f(1)| \leq 1$, $|h(-1)| = |f(-1)| \leq 1$, $|f(0)| = |c| \leq 1$. 若$h(x)$在$[-1,1]$上严格单调, 由$|h(1)| \leq 1$, $|h(-1)| \leq 1$知, 对于一切$x \in [-1,1]$, 有$|h(x)| \leq 1$, 故$g(x) \leq |f(x)| \leq 1$.

若$h(x)$在$[-1,1]$上不严格单调, 仍有两种情况:

(1) $h(x) = a$(常数), 即$b = c = 0$, 此时, $|f(1)| = |a| \leq 1$, $g(x) = a^2|x|^2 \leq 1$;

(2) $h(x)$是二次函数, 即$c \neq 0$, 如果扩展为定义在$\mathbb{R}$上, 则$h(x) = cx^2+bx+a$的图像顶点为$(x_0, h(x_0))$, 则当$h(x)$在$[-1,1]$上不单调时, $x_0 \in (-1,1)$, 不妨设$x_0 \in (-1,0]$, 则$h(x)$可写成$h(x) = c(x-x_0)^2 + h(x_0)$, $x \in [-1,1]$, 所以$h(-1) = c(-1-x_0)^2 + h(x_0)$, 所以$|h(x_0)| = \left|h(-1) - c(1+x_0)^2\right| \leq |h(-1)| + |c| \cdot (1+x_0)^2$. 因$x_0 \in (-1,0]$, 所以$0 < 1+x_0 \leq 1$, $(1+x_0)^2 \leq 1$, 可见$|h(x_0)| \leq 1 + |c| \leq 2$.

因$h(x)$在$[-1,x_0]$或$[x_0,1]$上均严格单调, 故由$|h(x_0)| \leq 2$, $|h(1)| \leq 1$, $|h(-1)| \leq 1$, 知对于任意的$x \in [-1,1]$, 均有$|h(x)| \leq 2$, 所以

$$g(x) \leq |f(x)| \cdot |h(x)| \leq 1 \times 2 = 2,$$

另一方面, 取$f(x) = 2x^2 - 1$, $x \in [-1,1]$, $h(x) = -x^2 + 2$, $x \in [-1,1]$, 即

$$g(x) = \left|-2x^4 + 5x^2 - 2\right|, \quad x \in [-1,1].$$

则可知$g(0)=2$, 所以$g(x)$的最大值为2. 另外

$$\begin{aligned}|h(x)| = \left|cx^2+bx+a\right| &= \left|-ax^2+bx-c+(c+a)\left(x^2-1\right)\right| \\ &\le \left|a\left(-x^2\right)+b(-x)+c\right|+|c+a|\cdot\left|x^2-1\right| \\ &\le 1+\left|\frac{a+b+c}{2}+\frac{a-b+c}{2}\right|\cdot\left|x^2-1\right| \\ &\le 1+\left|\frac{f(1)}{2}+\frac{f(-1)}{2}\right|\le 1+1=2.\end{aligned}$$

□

问题 1.3.88

已知$x_i\in\mathbb{R}$, $(i=1,2,\cdots,n)$, $(n\ge 2)$, 且

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \qquad \sum |x_i| = 1.$$

求证:

$$\left|\sum \frac{x_i}{i}\right| \le \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}.$$

解.

$$\left|\sum \frac{x_i}{i}\right| \le \frac{1}{2}-\frac{1}{2n} \iff -\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\le \sum\frac{x_i}{i}\le \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}.$$

由题设x_i中有正有负, 设$x_{k_1},\cdots,x_{k_l}$为正数, $x_{k_{l+1}},\cdots,x_{k_n}$为非正数, 则

$$\sum x_i = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{l} x_{k_i} = -\sum_{i=l+1}^{n} x_{k_i},$$

又由$\sum|x_i|=1$得$\sum_{i=1}^{l} x_{k_i}=\frac{1}{2}$, $\sum_{i=l+1}^{n} x_{k_i}=-\frac{1}{2}$. 所以

$$\sum\frac{x_i}{i} = \sum_{i=1}^{l}\frac{x_{k_i}}{k_i}-\sum_{i=l+1}^{n}\frac{|x_{k_i}|}{k_i}\le \sum_{i=1}^{l} x_{k_i}-\frac{1}{n}\sum_{i=l+1}^{n}|x_{k_i}| = \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$$

且

$$\sum\frac{x_i}{i}\ge \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l}x_k-\sum_{i=l+1}^{n}|x_{k_i}| = \frac{1}{2n}-\frac{1}{2},\cdots$$

□

解. 归纳法, 设$n=k\ge 2$成立时, 当$n=k+1$时, 设$X_1,X_2,\cdots,X_{k+1}$为$x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}$的从大到小的排列, 因为

$$\frac{1}{1}>\frac{1}{2}>\cdots>\frac{1}{k}>\frac{1}{k+1},$$

所以, 由排序不等式

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{x_i}{i}\le\sum_{i=1}^{k+1}\frac{X_i}{i}.$$

(若X_i中只有一个正值, 则至少有两个非正值, 取X_i的相反数得X_i'同样进行上述排列, 则可得至少两个非正值, 即总可假设X_i中的最后两向是非正值. 目标如下)

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{X_i}{i} = \frac{X_1}{1}+\cdots+\frac{X_k+X_{k+1}}{k}-\frac{X_{k+1}}{k(k+1)}.$$

因$X_1+\cdots+X_{k+1}=0$, $|X_1|+\cdots+|X_{k+1}|=|X_1|+\cdots+|X_k+X_{k+1}|=1$, 所以

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{X_i}{i}\le\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}-\frac{X_{k+1}}{k(k+1)}\le\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k(k+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(k+1)},$$

同样方式可得

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{x_i}{i}\ge\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{2},$$

其中$n=2$时不等式易证... □

问题 1.3.89

定义在自然数N上的函数

$$f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1},$$

求证: $f(n)>1$.

解. $f(n)>f(n-1)>\cdots>f(1)>1$, 即$f(n)$为增数列. □

解. 因为$(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n+1)=(2n+1)^2$, 设

$$\begin{aligned}f(t)&=(2n+1)^2t^2-2(2n+1)t+f(n)\\&=\left(\sqrt{n+1}t-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^2+\left(\sqrt{n+2}t-\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)^2+\cdots+\left(\sqrt{3n+1}t-\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\right)^2\end{aligned}$$

因$(2n+1)^2>0$, $f(t)>0$恒成立, 所以

$$\Delta=4(2n+1)^2-4f(n)(2n+1)^2<0,\cdots$$

□

解. 由以上证明是Cauchy不等式的证明过程: 由Cauchy不等式

$$[(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n+1)]f(n)\ge(1+1+\cdots+1)^2=(2n+1)^2,$$

所以$f(n)\ge1$不可取得等号. □

问题 1.3.90

已知数列$\{a_n\}$中, $a_1=3$且$na_{n+1}=(n+2)a_n+n$, $(n\in\mathbb{N})$, 证明: 当$n>1$时, 下列不等式

$$\frac{7}{12}-\frac{1}{2(n+1)}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}<\frac{2}{3}-\frac{1}{2n+1}$$

成立.

解. 设

$$n(a_{n+1}+an+b)=(n+2)(a_n+an+b-a)$$

所以$a=1$, $b=1$, 所以$n(a_{n+1}+n+1)=(n+2)(a_n+n)$, 可得$\{a_n+n\}$的通项为$a_n=2n^2+n$, 另外令

$$n\left(a_{n+1}+an^2+bn+c\right)=(n+2)\left(a_n+an^2-2an+a+bn-b+c\right)$$

令$a=1$得$b=4$, $c=3$, 所以$a_{n+1}+(n+1)(n+3)=b_{n+1}$有$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n+2}{n}$, $a_n=2n^2+n$, 所以

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{a_n}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right),$$

所以

$$\frac{7}{12}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{a_1}+\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)<\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2n+1}.$$

□

解. 因$na_{n+1}=(n+2)\,a_n+n$等价于$\frac{a_{n+1}-1}{(n+1)(n+2)}=\frac{a_n}{n(n+1)}$, 令$c_n=\frac{a_n}{n(n+1)}$, 有$c_{n+1}-c_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$, $c_1=\frac{3}{2}$, 所以

$$\frac{a_n}{n\,(n+1)}=c_n=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}(c_{k+1}-c_k)=2-\frac{1}{n+1},$$

所以$a_n=n\,(2n+1)$... □

解. 若$g\,(n)-g\,(n+1)<b_n<f\,(n)-f\,(n+1)$, 则$g\,(1)-g\,(n+1)<\sum b_i<f\,(1)-f\,(n+1)$, 于是要证

$$\frac{7}{12}-\frac{1}{2\,(n+1)}<\sum\frac{1}{a_i}<\frac{2}{3}-\frac{1}{2n+1},$$

则可试证

$$\frac{1}{2n}-\frac{1}{2\,(n+1)}<\frac{1}{a_n}<\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1},\ldots$$

□

问题 1.3.91

若$x_i\in\mathbb{R}^+$, $(i=1,2,\cdots,n)$, $\sum x_i=1$, $x_{n+1}=x_1$, $n>6$, 求证:

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+x_{i+1}}>n!.$$

解. $\prod\frac{1}{x_i+x_{i+1}}=\frac{1}{\prod(x_i+x_{i+1})}\geq\frac{1}{\left(\frac{\sum(x_i+x_{i+1})}{n}\right)^n}=\left(\frac{n}{2}\right)^n$, 于是只需证$\left(\frac{n}{2}\right)^n>n!$, 因$2\cdot(n-2)<\left(\frac{n}{2}\right)^2$; $3\cdot(n-3)\leq\left(\frac{n}{2}\right)^2$, ..., $(n-2)\cdot 2\leq\left(\frac{n}{2}\right)^2$, 所以$[(n-2)!]^2\leq\left(\frac{n}{2}\right)^{(n-3)\times 2}$, 所以$(n-2)!\leq\left(\frac{n}{2}\right)^{n-3}$, 而$(n-1)\,n\leq\left(\frac{n}{2}\right)^3$, 即$8n-8\leq n^2$, 即$(n-4)^2\geq 8$, 因$n\geq 7$, 所以$(n-4)^2\geq 9>8$, 所以$(n-2)!\,(n-1)\,n=n!\leq\left(\frac{n}{2}\right)^n$. □

解. $\prod\geq\left(\frac{n}{2}\right)^n$同以上证法, 用数学归纳法.

(1) 当$n=7$时, $7!\cdot 2^7=3^2\cdot 2^{11}\cdot 5\cdot 7=\left(3\cdot 2^4\right)\left(5\cdot 2^3\right)\left(3\cdot 2^4\cdot 7\right)<7^2\cdot 7^2\cdot 7^2\cdot 7=7^7$成立.

(2) 当$n=k\geq 7$有$2^k k!<k^k$成立, 则$(k+1)!2^{k+1}=k!2^k\,(k+1)\cdot 2<k^2\,(k+1)\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=(k+1)^{k+1}$, 所以命题对于$n=k+1$时也成立... □

问题 1.3.92

试求下面表达式的最大值:

$$||\cdots||x_1-x_2|-x_3|-\cdots-|-x_{2002}|,$$

其中$x_1,x_2,\cdots,x_{2002}$是由1到2002的不同自然数.

解. 用$\max\{a_1,\cdots,a_n\}$表示$a_1,\cdots,a_n$这n个数中的最大数. 易见, 对于任何非负整数x,y, 有$|x-y|\leq\max\{x,y\}$, 又由于$\max\{\max\{x,y\},z\}=\max\{x,y,z\}$, 所以$||x-y|-z|\leq\max\{x,y,z\}$, 依此类推, 可得原式不超过$\max\{x_1,\cdots,x_n\}$, 从而题设表达式的值不会超过$\max\{x_1,x_2,\cdots,x_{2002}\}=2002$, 另一方面容易看出, 题设式子的奇偶性与数

$$x_1+x_2+\cdots+x_{2002}=2003\cdot 1001$$

的奇偶性相同, 是奇数, 所以题设式子的值不会为偶数2002, 又

$$\begin{aligned}||||\cdots|||2-4|-5|-3|-\cdots-(4k+2)|-(4k+4)|-(4k+5)|-(4k+3)|-\cdots\\ -1998|-2000|-2001|-1999|-2002|-1|=2001.\end{aligned}$$

综上所述, 可知所求的最大值为2001. □

问题 1.3.93

已知数列$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, 满足$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$, 则求

$$S = \frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \cdots + \frac{1}{a_{100}+1}$$

的整数部分.

解.

$$\frac{1}{a_n+1} = \frac{a_n}{a_n(a_n+1)} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_n^2}{a_{n+1}\cdot a_n} = \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}},$$

所以$S = 2 - \frac{1}{a_{101}}$, 由$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{21}{16}$, 知$a_3 > 1$, 所以$a_{101} > a_{100} > \cdots > a_3 > 1$, 所以$0 < \frac{1}{a_{101}} < 1$, $[S] = 1$. □

问题 1.3.94

求最大的实数λ, 使得当实系数多项式$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$的所有根都是非负实数时, 只要$x \geq \min\{三个根\}$, 就有$f(x) \geq \lambda (x-a)^3$, 并且问上式中等号何时成立?

解. 设$f(x)$的三个根为α, β, γ, 并设$0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma$, 则有$x - a = x + \alpha + \beta + \gamma$, $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$,

(1). $0 \leq x \leq \alpha$时, 因$-f(x) = (\alpha - x)(\beta - x)(\gamma - x)$, 则由A-G不等式,

$$-f(x) \leq \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma-3x}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{x+\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3,$$

即$f(x) \geq -\frac{1}{27}(x+\alpha+\beta+\gamma)^3 = -\frac{1}{27}(x-a)^3$, 上式等式成立的充要条件是

$$\begin{cases} \alpha - x = \beta - x = \gamma - x \\ \alpha + \beta + \gamma - 3x = x + \alpha + \beta + \gamma \end{cases}$$

即$x = 0$, $\alpha = \beta = \gamma$.

(2). 当$\beta \leq x \leq \gamma$时, 因

$$-f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(\gamma-x) \leq \left(\frac{x+\gamma-\alpha-\beta}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{x+\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3 = \left(\frac{x-a}{3}\right)^3.$$

则$f(x) \geq -\frac{1}{27}(x-a)^3$, 易知上式等号成立的充要条件为

$$\begin{cases} x - \alpha = x - \beta = \gamma - x \\ \alpha = \beta = 0. \end{cases}$$

即$\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 2x$.

(3). 当$\alpha \leq x \leq \beta$或$x > \gamma$时, $f(x) > 0 \geq -\frac{1}{27}(x-a)^3$, 综上可得所求的$\lambda = -\frac{1}{27}$, 且等号成立的充要条件是$x = 0$, $\alpha = \beta = \gamma$或$\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 2x$. 不过若$\alpha = \beta = \gamma = 0$时, $\lambda = 1$, 这一点S10P50未注意到. □

问题 1.3.95

已知数列$\{a_n\}$中, $a_1 = \frac{1}{2}$, 且

$$a_n = \frac{1}{3n-1}(a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_{n-2} a_2 + a_{n-1} a_1),$$

求证: $a_{n+1} < a_n$.

解. 用数学归纳法, 设$a_k < a_{k-1} < \cdots < a_1$, 则

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{1}{3k+2}\sum_{i=1}^{k} a_i a_{k+1-i} \le \frac{1}{3k+2}\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i a_{k-i} + \frac{1}{2}a_k\right) \\ &= \frac{3k-1}{3k+2}a_k + \frac{1}{3k+2}\times\frac{1}{2}a_k = \frac{6k}{2(3k+2)}a_k < a_k. \end{aligned}$$

□

问题 1.3.96

设$a_1, \cdots, a_n (n \ge 3)$是$n$个正整数, 把它们按顺序放在圆周上, 且满足每一个数去除相邻两数之和都是正整数, 令

$$S_n = \frac{a_1+a_3}{a_2} + \frac{a_2+a_4}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}+a_1}{a_n} + \frac{a_n+a_2}{a_1},$$

求证: $2n \le S_n < 3n$.

解. 不等式左边可用A-G不等式得出, 对于$S_n < 3n$用归纳法.

(1) 当$n = 3$时, $S_3 = \frac{a_1+a_3}{a_2} + \frac{a_2+a_1}{a_3} + \frac{a_3+a_2}{a_1}$, 不妨设$a_3 \ge a_2 \ge a_1$. 所以$a_3 = a_1 + a_2$或$2a_3 = a_1 + a_2$.

若$a_3 = a_1 + a_2$, 则$S_3 = \frac{2a_1}{a_2} + 1 + 1 + 1 + \frac{2a_2}{a_1}$, 而$a_2 \mid 2a_1$, $a_1 \mid 2a_2$, $a_2 \ge a_1$, 所以$a_2 = 2a_1$或$a_2 = a_1$或$2a_2 = a_1$, 所以$S_3 = 7$或$8 < 9$.

若$2a_3 = a_1 + a_2$, 同样有$S_3 < 9$.

(2) 若$n = k$时成立, 则$n = k+1$时, 设a_{k+1}最大, $a_1 = \min\{a_1, a_k\}$, 即$a_{k+1} \ge a_k \ge a_1$, 则$2a_{k+1} \ge a_1 + a_k$, 所以

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{a_1+a_3}{a_2} + \frac{a_2+a_4}{a_3} + \cdots + \frac{a_{k+1}+a_2}{a_1} \\ &< \frac{a_1+a_3}{a_2} + \frac{a_2+a_4}{a_3} + \cdots + \frac{a_{k-1}+a_1}{a_k} + 1 + 1 + 1 + \frac{a_k+a_2}{a_1} \\ &= 3 + S_k \quad (a_{k+1} = a_1 + a_k); \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{a_1+a_3}{a_2} + \frac{a_2+a_4}{a_3} + \cdots + \frac{a_{k+1}+a_2}{a_1} \\ &< \frac{a_1+a_3}{a_2} + \cdots + \frac{a_{k-1}+\frac{1}{2}a_1}{a_k} + \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}a_k+a_2}{a_1} \\ &= 3 + S_k \quad (2a_{k+1} = a_1 + a_k). \end{aligned}$$

所以$S_{k+1} \le 3 + S_k$可得$S_{k+1} \le S_3 + 3(k-2) < 3(k+1)$. □

问题 1.3.97

$\triangle ABC$的$\angle A, \angle B, \angle C$的平分线分别交$\triangle ABC$的外接圆于点$A_1, B_1, C_1$, 记$m = AA_1+BB_1+CC_1$, $n = AB+BC+CA$, 则( ).

A. $m \ge n$; B. $m > n$; C. $m = n$; D. 不确定m, n之间的大小.

解. 托勒密定理有$AA_1 \cdot BC = AB \cdot A_1C + AC \cdot A_1B$, $A_1B = A_1C$, $AB + AC > BC$, 所以

$$2AA_1 = \frac{(AB+AC)\cdot 2A_1B}{BC} > AB + AC.$$

同理$2BB_1 > AB + BC$, $2CC_1 > CA + CB$, 三式相加即得.

另外$A_1C = A_1B$, 所以$2A_1C > BC$, 内心为I, 则$IB + IC > BC$. 所以

$$\begin{aligned} 2A_1C + IB + IC > 2BC, 2A_1B + IB + IC > 2BC \\ 2IB_1 + IC + IA > 2AC, IA + 2IC_1 + IB > 2AB, \end{aligned}$$

相加即得. □

问题 1.3.98

Rt$\triangle ABC$中, D为BC中点, $E \in AB$, $F \in AC$, 则$C_{\triangle DEF} > BC$.

解. 做$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{BA}$, 所以$DF = NF$, $ED = EM$, $MN = BC$. 所以

$$C_{\triangle DEF} = DE + DF + EF = NF + FE + EM > MN = BC.$$

□

问题 1.3.99

若直线$y = x\lg(ac) + m$和$y = x\lg(bc) + n$, $(a, b, c > 0)$相互垂直, 求$\frac{a}{b}$的取值范围.

解. 易知$\lg(ac)\cdot\lg(bc) = -1$, 所以

$$\lg^2 c + (\lg a + \lg b)\lg c + \lg a \lg b + 1 = 0.$$

于是由$\Delta \geq 0$可得$\lg^2 \frac{a}{b} \geq 4$...

事实上$(a, b, c > 0)$是多余的, 我们只需用下列方法便可得知: 令$\frac{a}{b} = t$, 显然a, b, c三者同号, 则因$\lg(ac)\lg(bc) = -1$. 所以$\lg(bct)\lg(bc) = -1$, 所以$\lg^2(bc) + \lg t \lg(bc) + 1 = 0$. 所以由$\Delta \geq 0$可得$\lg^2 t \geq 4$. □

问题 1.3.100

给定$n+1 (n \geq 2)$个正实数$x_0, x_1, \cdots, x_n$, 求证:

$$\frac{x_1}{2(x_0^2 + x_1^2)} + \frac{x_2}{3(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)} + \cdots + \frac{x_n}{(n+1)(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)} < \frac{1}{x_0}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(k+1)\sum_{j=0}^{k} x_j^2} < \frac{1}{x_0}.$$

解.

$$\frac{x_i}{(i+1)(x_0^2 + \cdots + x_i^2)} \leq \frac{x_i}{(x_0 + \cdots + x_i)^2} < \frac{x_i}{(x_0 + \cdots + x_{i-1})(x_0 + \cdots + x_i)} = \frac{1}{x_0 + \cdots + x_{i-1}} - \frac{1}{x_0 + \cdots + x_i}.$$

□

问题 1.3.101: 优超不等式

设两组实数$x_1, \cdots, x_n$和$y_1, \cdots, y_n$满足条件:
(i) $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$; $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$;
(ii)

$$\begin{gathered} x_1 \geq y_1 \\ x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq y_1 + y_2 + \cdots + y_n. \end{gathered}$$

则对任意凸函数$f(x)$, 都有如下的不等式成立:

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n).$$

若$f(x)$为凹函数, 其他条件不变, 则上式不等号反向.

问题 1.3.102: 康托洛维奇不等式

若$a_i > 0$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$且$\sum_{i=1}^n a_i = 1$, 又$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i}\right) \le \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}.$$

解. 因$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$, 所以$(\lambda_1 - \lambda_i)(\lambda_i - \lambda_n) \ge 0$, 即

$$\lambda_i \le (\lambda_1 + \lambda_n) - \frac{\lambda_1\lambda_n}{\lambda_i},$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i &\le \sum_{i=1}^n \left[(\lambda_1+\lambda_n) - \frac{\lambda_1\lambda_n}{\lambda_i}\right] a_i \\ &= (\lambda_1+\lambda_n) - \lambda_1\lambda_n \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i}.\end{aligned}$$

即$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \le (\lambda_1+\lambda_n) - \lambda_1\lambda_n \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i}$, 所以

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i}\right) &\le \left[(\lambda_1+\lambda_n) - \lambda_1\lambda_n \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i}\right] \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i} \\ &= -\lambda_1\lambda_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i} - \frac{\lambda_1+\lambda_n}{2\lambda_1\lambda_n}\right)^2 + \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n} \\ &\le \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}.\end{aligned}$$

□

问题 1.3.103: 用琴生不等式证明A-G不等式

设$a_i \in \mathbb{R}^+ (i = 1, 2, \cdots, n)$, 求证:

$$\frac{1}{n}\sum a_i \ge \sqrt[n]{\prod a_i},$$

当$a_1 = \cdots = a_n$时取等号.

解. 设$y = \ln x$, 因$y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2} < 0$, 所以y为上凸函数. 所以

$$\frac{1}{n}\sum \ln a_i \le \ln \frac{\sum a_i}{n}.$$

即得. □

问题 1.3.104: Cauchy不等式推导调和平均≤算术平均

$$\frac{n}{\sum \frac{1}{a_i}} \le \frac{\sum a_i}{n}, \qquad (a_i > 0).$$

解. 因$\sum a_i \sum \frac{1}{a_i} \ge \left(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n个1}\right)^2 = n^2$, 由此不等式得到$\sum_{i=1}^n \frac{a_i a_{i+1}}{a_i + a_{i+1}} \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i$, 其中$a_{n+1} = a_1$. □

问题 1.3.105: 贝努利不等式

设$1+x>0$, $x\neq 0$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, 求证: $(1+x)^n>1+nx$.

解. 因$x\neq 0$, $1+x>0$, 由均值不等式

$$(1+x)^n+n-1=(1+x)^n+1+1+\cdots+1>n\cdot\sqrt[n]{(1+x)^n\cdot 1\cdot 1\cdots 1}=n(1+x).$$

所以$(1+x)^n>1+nx$, (可用归纳法) □

注: 贝努利一般式为$(1+x)^\alpha>1+\alpha x$, $\alpha<0$或$\alpha>1$.

问题 1.3.106: Abel不等式

设$a_i, b_i\in\mathbb{R}$, $(i=1,2,\cdots,n)$, $b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_n\geq 0$.

$$S_k=\sum_{i=1}^k a_i \quad (k=1,2,\cdots,n),$$

又记$M=\max_{1\leq k\leq n} S_k$, $m=\min_{1\leq k\leq n} S_k$, 求证:

$$mb_1\leq\sum_{k=1}^n a_ib_i\leq Mb_1.$$

解. 由Abel恒等式及b_i的单调性, 得

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i=\sum_{i=1}^{n-1} S_i(b_i-b_{i+1})+S_nb_n\leq M\left(\sum_{i=1}^{n-1}(b_i-b_{i+1})+b_n\right)=Mb_1,$$

同理可证第一个不等式. □

问题 1.3.107: 钟凯莱不等式

设$a_1,\cdots,a_n$和$b_1,\cdots,b_n$都是正数, 且$b_1>b_2>\cdots>b_n$, 若对所有的$k=1,2,\cdots,n$有

$$\sum_{i=1}^k b_i\leq\sum_{i=1}^k a_i,$$

则

$$\sum_{j=1}^n b_j^2\leq\sum_{j=1}^n a_j^2.$$

解. 由Abel恒等变换公式

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n b_j^2&=b_n\sum_{j=1}^n b_j+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{k=1}^j b_k\right)(b_j-b_{j+1})\\&\leq b_n\sum_{j=1}^n b_j+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{k=1}^j a_k\right)(b_j-b_{j+1})\\&=\sum_{j=1}^n a_jb_j\leq\left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right)^{1/2}. \quad \text{Cauchy不等式}\end{aligned}$$

即得. □

问题 1.3.108: W. Janous猜想

设$x,y,z\in\mathbb{R}^+$, 求证: $\frac{z^2-x^2}{x+y}+\frac{x^2-y^2}{y+z}+\frac{y^2-z^2}{z+x}\geq 0$.

解. 原不等式等价于

$$\frac{z^2}{x+y}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{x^2}{y+z}\geq\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x},$$

用排序不等式. □

解. 令$y+z=a$, $z+x=b$, $x+y=c$, 则$a,b,c>0$. 所以原式等价于

$$\begin{aligned}&\frac{ac}{b}+\frac{ba}{c}+\frac{cb}{a}\geq a+b+c\\&\frac{ac}{b}+\frac{ba}{c}\geq 2a,\\&\frac{bc}{c}+\frac{cb}{a}\geq 2b,\cdots\end{aligned}$$

此结论可推广为: 若$x,y,z>0$, 求证:

$$\frac{y\left(y^2-x^2\right)}{z+x}+\frac{z\left(z^2-y^2\right)}{x+y}+\frac{x\left(x^2-z^2\right)}{y+z}\geq 0.$$

用排序不等式可得. □

问题 1.3.109: 闵可夫斯基不等式

求证: 对于任意实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$及$y_1,y_2,\cdots,y_n$有

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k+y_k\right)^2}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}y_k^2}$$

当且仅当$x_1,x_2,\cdots,x_n$与$y_1,y_2,\cdots,y_n$对应成比例时取到.

解. 原式当且仅当

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k+y_k\right)^2\leq\sum x_k^2+2\sqrt{\sum x_k^2\sum y_k^2}+\sum y_k^2,$$

而

$$\sum x_ky_k\leq\left(\sum x_k^2\right)^{1/2}\left(\sum y_k^2\right)^{1/2},$$

所以不等式成立. □

问题 1.3.110: 幂平均不等式

若$\alpha>\beta>0$, $a_i\in\mathbb{R}^+$, $(i=1,2,\cdots,n)$, 则

$$\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}\geq\left(\frac{a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta}{n}\right)^{1/\beta}.$$

解. 令$x_i=a_i^\beta$, 则$a_i=x_i^{1/\beta}$, 原不等式等价于

$$\frac{1}{n}\sum x_k^{\alpha/\beta}\geq\left(\frac{1}{n}\sum x_k\right)^{\alpha/\beta},$$

因为$\alpha>\beta>0$, 所以$\frac{\alpha}{\beta}>1$, $f\left(x\right)=x^p$, $(p>1)$是$(0,+\infty)$上的凸函数, 故由琴生不等式知上式成立, 从而命题成立. □

问题 1.3.111: 赫尔德(Hölder)不等式

设$a_i, b_i \in \mathbb{R}^+$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} b_i^{\beta} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{\beta}.$$

解. 令$A = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $B = \sum_{i=1}^{n} b_i$, 则

$$A^{-\alpha} B^{-\beta} \sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} b_i^{\beta} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{A}\right)^{\alpha} \left(\frac{b_i}{B}\right)^{\beta}, \quad \alpha + \beta = 1.$$

因$f(x) = \ln x$, $(x > 0)$是上凸函数, 所以

$$\begin{aligned} \alpha \ln \frac{a_i}{A} + \beta \ln \frac{b_i}{B} &= \frac{\alpha \ln \frac{a_i}{A} + \beta \ln \frac{b_i}{B}}{\alpha + \beta} \qquad \because \alpha + \beta = 1 \\ &\leq \ln \frac{\alpha \frac{a_i}{A} + \beta \frac{b_i}{B}}{\alpha + \beta} = \ln \left(\alpha \frac{a_i}{A} + \beta \frac{b_i}{B}\right) \end{aligned}$$

所以$\left(\frac{a_i}{A}\right)^{\alpha} \left(\frac{b_i}{B}\right)^{\beta} \leq \alpha \frac{a_i}{A} + \beta \frac{b_i}{B}$, 两边取$\sum_{i=1}^{n}$有

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{A}\right)^{\alpha} \left(\frac{b_i}{B}\right)^{\beta} \leq \frac{\alpha}{A} \sum a_i + \frac{\beta}{B} \sum b_i = \alpha + \beta = 1.$$

□

问题 1.3.112

Hölder不等式推出Cauchy不等式.

解. 令$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, 代入Hölder不等式, 并令$x_i^2 = a_i$, $y_i^2 = b_i$, 即得. □

问题 1.3.113

优超不等式推出钟开莱不等式.

解. 取$f(x) = x^2$, 则$f(x)$为下凸函数, 用钟开莱不等式中的符号, 因为$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \succ (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 所以$\sum f(a_k) \geq \sum f(b_k)$. □

问题 1.3.114

优超不等式推出琴生不等式.

解. 设$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$, $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = \frac{1}{n} \sum a_i$, 不妨设$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, 则$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \succ (b_1, b_2, \cdots, b_n)$. 若$f(x)$是$[a, b]$或$(a, b)$内的下凸函数, 则对于$[a, b]$或$(a, b)$中任意$n$个数$a_1, a_2, \cdots, a_n$有

$$\frac{1}{n} \sum f(a_k) \geq f\left(\frac{1}{n} \sum a_k\right),$$

当且仅当$x_1 = \cdots = x_n$时取等号. 若$f(x)$为上凸函数, 命题反号. □

问题 1.3.115

求所有正整数$a_1, a_2, \cdots, a_n$, 使得
$$\frac{99}{100} = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n},$$
其中$a_0 = 1$,
$$(a_{k+1} - 1) a_{k-1} \geq a_k^2 (a_k - 1), \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$
(S24P53).

解. 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$是满足条件的正整数, 由归纳法原理$a_{k+1} > a_k$, $a_{k+1} \geq 2$, $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$, 所以
$$(a_{k+1} - 1) a_{k-1} \geq a_k^2 (a_k - 1) \iff \frac{a_{k-1}}{a_k (a_k - 1)} \geq \frac{a_k}{a_{k+1} - 1},$$
即
$$a_{k-1} \left(\frac{1}{a_k - 1} - \frac{1}{a_k} \right) \geq \frac{a_k}{a_{k+1} - 1}.$$
即
$$\frac{a_{k-1}}{a_k} \leq \frac{a_{k-1}}{a_k - 1} - \frac{a_k}{a_{k+1} - 1}$$
对于$k = i+1, i+2, \cdots, n$求和得:
$$\sum_{k=i+1}^{n} \frac{a_{k-1}}{a_k} \leq \frac{a_i}{a_{i+1} - 1} - \frac{a_n}{a_{n+1} - 1} < \frac{a_i}{a_{i+1} - 1},$$
当$i = 0$时, 有$\frac{1}{a_1} \leq \frac{99}{100} < \frac{1}{a_1 - 1} \iff a_1 = 2$.
当$i = 1$时, 有$\frac{a_1}{a_2} \leq \frac{99}{100} - \frac{1}{a_1} < \frac{a_1}{a_2 - 1} \iff a_2 = 5$.
当$i = 2$时, 有$\frac{a_2}{a_3} \leq \frac{99}{100} - \frac{1}{a_1} - \frac{a_1}{a_2} \leq \frac{a_2}{a_3 - 1} \iff a_3 = 56$.
同理, $i = 3$时, 有$a_4 = 78400$. 又$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{5}{56} + \frac{56}{78400} = \frac{99}{100}$, 故方程有唯一解$a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 56$, $a_4 = 78400$. □

问题 1.3.116: (2002年, 全国卷) S14, P182

设数列$\{a_n\}$满足
$$a_{n+1} = a_n^2 - n a_n + 1, \qquad n \in \mathbb{N}_+,$$
当$a_1 \geq 3$时, 求证: $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 有
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + a_k} \leq \frac{1}{2}.$$

解. 令$b_n = a_n + 1$, 则$b_1 \geq 4$, $b_{n+1} = b_n^2 - (n+2) b_n + 3 + n$, 可归纳证明
$$b_n \geq 2^{n+1}.$$
□

问题 1.3.117

已知$a, b, c \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = ax + b$, 当$-1 \leq x \leq 1$时, $|f(x)| \leq 1$. 证明: 当$|x| \leq 1$时, $|g(x)| \leq 2$.

解. 设$g(x) = f(x_1) + \mu f(x_2) = ax + b$, 所以$\mu = -1$, $x_1 = \frac{x+1}{2}$, $x_2 = \frac{x-1}{2}$, 所以
$$|g(x)| = \left| f\left(\frac{x+1}{2} \right) - f\left(\frac{x-1}{2} \right) \right| \leq \left| f\left(\frac{x-1}{2} \right) \right| + \left| f\left(\frac{x-1}{2} \right) \right| \leq 2.$$
□

问题 1.3.118

在$\triangle ABC$内任取一点, 求证:
(1) $\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=1$.
(2) 若AB为三角形中最长边, 则$PD+PE+PF<AB$.

解. 证明中的(1)用共边定理即得.

(2): 先证$AB>AD$, $AB>BE$, $AB>CF$, $\max(BC,AC)\le AB$, 设$\frac{PD}{AD}=k$, $\frac{PE}{BE}=n$, $\frac{PF}{CF}=m$, 则$k+m+n=1$, $PD=kAD$, $PE=n\cdot BE$, $PF=m\cdot CF$. 所以

$$PD+PE+PF<kAB+nAB+mAB.$$

□

问题 1.3.119

设非负实数x_1,x_2,x_3,x_4,x_5满足$\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{1+x_i}=1$, 求证: $\sum\frac{x_i}{4+x_i^2}\le 1$. (S8 P121, 3)

解.

$$\begin{aligned}\sum\frac{x_i}{4+x_i^2}&=\sum\frac{1}{\frac{4}{x_i}+\frac{x_i}{4}+\frac{3x_i}{4}}\le\sum\frac{1}{2+\frac{3x_i}{4}}\\&=\sum\frac{4}{3x_i+8}=\frac{4}{3}\sum\frac{1}{x_i+8/3}\\&=\frac{4}{3}\sum\frac{\frac{1}{x_i+1}}{1+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x_i+1}}.\end{aligned}$$

因为$\frac{1}{x_i+1}>0$, 令$y=\frac{x}{1+\frac{5}{3}x}$, 易知$y''<0$, 所以

$$\frac{1}{5}\left(\frac{4}{3}\sum\frac{\frac{1}{x_i+1}}{1+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x_i+1}}\right)\le\frac{4}{3}\frac{\frac{1}{5}\sum\frac{1}{1+x_i}}{1+\frac{5}{3}\times\frac{1}{5}\sum\frac{1}{1+x_i}}=\frac{4}{3}\times\frac{\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{5}$$

即得. □

注: 若已知$x_1,x_2,\cdots,x_t$非负, 且$\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{1+x_i}=1$, 求$\sum\frac{x_i}{4+x_i^2}$的最大值, 用上述方法时, 知当$t=4,5,6,7,8,9$时

$$\sum\frac{x_i}{4+x_i^2}\le\frac{t(t-1)}{t^2-2t+5},$$

当$x_1=\cdots=x_t=t-1$时取等.

$t=3$时, 在第一步用均值不等式放缩时便把x_i全部消去, 此时,

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i}{4+x_i^2}\le\frac{3}{4}.$$

当$x_1=x_2=x_3=2$时取等号,

$t=2$时, 因为$\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{1+x_i}=1=\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}$, 所以设$x_1=\frac{1}{x_2}=t$, 所以

$$\begin{aligned}\sum^{2}\frac{x_i}{4+x_i^2}&=\frac{x_1}{4+x_1^2}+\frac{x_2}{4+x_2^2}=\frac{4x_1+4x_2+x_1+x_2}{16+1+4x_1^2+4x_2^2}\\&=\frac{5\left(t+\frac{1}{t}\right)}{17+4\left(t^2+\frac{1}{t}\right)}=\frac{5\left(t+\frac{1}{t}\right)}{9+4\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}\\\left(令t+\frac{1}{t}=s\ge 2\right)&=\frac{5s}{9+4s^2}=\frac{5}{\frac{9}{s}+4s}\le\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

当$s=2$时取等号.

问题 1.3.120: (06. 浙江)

$x_n > 0$, $x_n^2 + x_n = 3x_{n+1}^2 + 2x_{n+1}$, $x_1 = 1$, 则

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

解. 因为$x_n^2 + x_n > 2\left(x_{n+1}^2 + 2x_{n+1}\right)$, 所以$x_n^2 + x_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}\left(x_1^2 + x_1\right) = \frac{1}{2^{n-2}}$, $(n \geq 1)$; 所以$x_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$. 因$x_n^2 + x_n < (2x_{n+1})^2 + (2x_{n+1})$, 所以$(x_n - 2x_{n+1})(x_n + 2x_{n+1} + 1) < 0$. 所以$x_{n+1} \geq \frac{1}{2}x_n$, 所以$x_n \geq \frac{1}{2^{n-1}}x_1 = \frac{1}{2^{n-1}}$. □

问题 1.3.121

已知$\frac{b+c}{a} = 1$, 求证: $b^2 + 4ac \geq 0$.

解. 构造$ax^2 - bx - c = 0$, $(a \neq 0)$, 因为有实根$x = 1$, 所以$\Delta = b^2 + 4ac \geq 0$. □

解. 因为$a = b + c$, 所以$b^2 + 4ac = b^2 + 4c(b + c) = (b + 2c)^2 \geq 0$. □

问题 1.3.122

$\triangle ABC$三边为a, b, c, $m \in \mathbb{R}^+$, 证: $\frac{a}{a+m} + \frac{b}{b+m} > \frac{c}{c+m}$.

解. 当$\frac{a}{b} < 1$时, 用$\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$,

$$\frac{a}{a+m} + \frac{b}{b+m} > \frac{a}{a+b+m} + \frac{b}{a+b+m} = \frac{a+b}{a+b+m} > \frac{c}{c+m}.$$

□

问题 1.3.123

已知: $x, y, z < 1$的正数, 取$x, y, z, 1-x, 1-y, 1-z$中的最大者, 设为x, 则$1 - z \leq x$, $z < 1$, 从而

$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) < x(1-y) + yx + 1 \cdot (1-x) = 1.$$

问题 1.3.124

已知: $a < 0$, $b \leq 0$, $c > 0$, $\sqrt{b^2 - 4ac} = b^2 - 2ac$, 求$\sqrt{b^2 - 4ac}$的最小值.

解. 因为$\sqrt{b^2 - 4ac}$的最小值为$\sqrt{b^2 - 4ac} = b^2 - 2ac$的最小值, 其中$b^2 \geq 0$, $-2ac > 0$, 所以$b^2 - 2ac$的最小值是$b = 0$时, 此时$\sqrt{-4ac} = -2ac$, 所以$ac = -1$或0, 所以$\sqrt{b^2 - 4ac} \geq \sqrt{-4ac} = \sqrt{4} = 2$. □

问题 1.3.125

已知$t \in \mathbb{R}$, 证$t^4 - t + \frac{1}{2} > 0$.

解. $t^4 - t + \frac{1}{2} = \left(t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 > 0$恒成立. □

Chapter 2

高中数学

2.1 2016年中科大入学数学考试

问题 2.1.1

在四面体$ABCD$中, $AD = BD = CD$, $AB = BC = CA = 1$. 若二面角$A - BC - D$等于$75°$, 求二面角$A - BD - C$的余弦值.

解. 用空间余弦定理. 答案是: $\frac{3\sqrt{3}-2}{8}$. $\square$

问题 2.1.2

设m, n非负整数, 证明$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$是整数.

解. 记所讨论的数为$f(m, n)$, 对m归纳证明$f(m+1, n) = 4f(m, n) - f(m, n+1)$. $\square$

问题 2.1.3

设正数a, b, c满足$ab + bc + ca = 1$. 求$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$的取值范围.

解. 联想到$\triangle ABC$中, $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$, 所以可取$a = \cot A$, $\sum \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \sum \cos A$, 用琴生不等式证明$\sum \cos A \le \frac{3}{2}$. 另一方面, $\sum \cos A = 1 + 4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} > 1$. 故所求取值范围为$(1, \frac{3}{2}]$. $\square$

问题 2.1.4

正项数列$\{a_n\}$满足$a_1 = 1$, $f(a_n) = a_{n+1} (n > 1)$, 其中$f(x) = \mathrm{e}^x - \cos x$, 求证: 存在正整数$K$使得$\sum\limits_{k=1}^{K} a_k > 2016$.

解. 函数$f(x)$的一次导数为正, 数列$\{a_n\}$是递增数列. $\square$

2.2 初中代数题

问题 2.2.1

设a是实数, 试确定多项式$x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a$的实根的个数.

解. 把多项式看作a的多项式, 因式分解得$(x^2 - x - a)(x^2 + x - a + 1)$. $\square$

问题 2.2.2

设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{C}[x]$, $a_n\neq 0$, α 是 $f(x)$ 任一根, 则

$$|\alpha|<1+\max_{0\le k\le n-1}\left|\frac{a_k}{a_n}\right|.$$

解. 反证法, 由

$$\left|\alpha^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}\alpha^{n-1}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}\alpha+\frac{a_0}{a_n}\right|\ge|\alpha|^n-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\cdot|\alpha|^{n-1}-\cdots-\left|\frac{a_1}{a_n}\right|\cdot|\alpha|+\left|\frac{a_0}{a_n}\right|\ge 1.$$

□

解. 只证$|\alpha|>1$时的情况, 记$M=\max_{0\le k\le n-1}\left|\frac{a_k}{a_n}\right|$. 由$a_0+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}=-a_n\alpha^n$得

$$|\alpha|^n=\left|\frac{a_0}{a_n}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\alpha^{n-1}\right|\le M(1+|\alpha|+\cdots+|\alpha|^{n-1})<M\frac{|\alpha|^n}{|\alpha|-1}.$$

□

问题 2.2.3

设$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$中, $0<a_0<a_1<\cdots<a_{n-1}<a_n$. 则$f(x)$的根的模均大于1.

解. 反证法, 设$|\alpha|\le 1$是$xf(x)-f(x)=a_0x^{n+1}+(a_1-a_0)x^n+\cdots+(a_n-a_{n-1})x-a_n$的零点. 所以

$$|a_n|=|a_0\alpha^{n+1}+(a_1-a_0)\alpha^n+\cdots+(a_n-a_{n-1})\alpha|\le a_0|\alpha|^{n+1}+(a_1-a_0)|\alpha|^n+\cdots\le a_n.$$

等号当且仅当$\alpha=1$时取到. 这不可能. □

问题 2.2.4

设多项式$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\in\mathbb{Z}[x]$, 且满足

(i) $0<a_0<a_1<\cdots<a_{n-1}<a_n$;

(ii) $a_n=p^m$, 这里p是一个素数(m是正整数), 且$p\nmid a_{n-1}$.

证明: $f(x)$在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 反证法, $f=gh$. $g=b_0x^r+\cdots+b_r$, $h=c_0x^s+\cdots+c_s$. 则由条件不妨设$p\nmid b_r$, $|c_s|=p^m$, $|b_r|=1$. 由2.2.3可知, f的根的模均大于1, 所以g的根$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$的模均大于1. $|g(0)|=|b_r|=|b_0|\,|\alpha_1|\cdots|\alpha_r|>|b_0|\ge 1$, 与$|b_r|=1$矛盾. □

问题 2.2.5

设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+p\in\mathbb{Z}[x]$, $a_n\neq 0$, p是素数, 且

$$|a_1|+\cdots+|a_n|<p,$$

证明: $f(x)$在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 反证, $f=gh$, f的根的模均大于1, 若$|g(0)|=1$, 则其实线性分解的模大于1. 矛盾. □

问题 2.2.6

设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$是一个整系数多项式, $a_n\neq 0$. 记

$$M=\max_{0\le i\le n-1}\left|\frac{a_i}{a_n}\right|.$$

若有一个整数$m\ge M+2$, 使$|f(m)|$为素数, 则$f(x)$在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 反证, $f=gh$, 由2.2.2知, 当$|g(m)|=1$时, $|g(m)|$的实线性分解的每项都大于1而导致矛盾. □

问题 2.2.7

判别$x^5+4x^4+2x^3+3x^2-x+5$在$\mathbb{Q}$上是否可约.

解. 让$x+6$代替x化简得$x^5+34x^4+458x^3+3063x^2+10187x+13499$, 由于13499是素数, 由2.2.4即得. □

解. 待定系数法分解为二次多项式与三次多项式的乘积. □

解. 用2.2.5. □

问题 2.2.8

设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$, 其中$0\le a_i\le 9(i=0,1,\cdots,n)$, 且$a_n\neq 0$. 如$\alpha$是$f(x)$的一个复根, 则$\operatorname{Re}(\alpha)\le 0$或$|\alpha|<4$.

解. 若$\operatorname{Re}(\alpha)\le 0$或$|\alpha|\le 1$, 则无需证明. 对于$\operatorname{Re}(\alpha)>0$且$|\alpha|>1$, 有$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\alpha}\right)>0$, 故从

$$0=\left|\frac{f(\alpha)}{\alpha^n}\right|\ge\left|a_0+\frac{a_1}{\alpha}\right|-\frac{a_2}{|\alpha|^2}-\cdots-\frac{a_n}{|\alpha|^n}\ge\operatorname{Re}\left(a_0+\frac{a_1}{\alpha}\right)-\frac{9}{|\alpha|^2}-\cdots-\frac{9}{|\alpha|^n}>1-\frac{9}{|\alpha|^2-|\alpha|}.$$

可得. □

问题 2.2.9

设$f(x)$是n次整系数多项式($n\ge 1$), $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是其全部复根. 若存在整数k, $k>1+\operatorname{Re}(\alpha_j)$, $(j=1,\cdots,n)$, 使$|f(k)|$是素数, 则$f(x)$在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 反证, $f=gh$, 对g进行$\mathbb{R}[x]$上的标准分解, 则有$|g(k)|>1$, 同理$|h(k)|>1$. 与$f(k)$素矛盾. □

问题 2.2.10: http://tieba.baidu.com/p/4811340691

求证: $148<\sum\limits_{n=1}^{1000}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<150$.

解. 由R-S积分,

$$\sum_{n=1}^{1000}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=\int_{1^-}^{1000^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}[x]=\int_{1^-}^{1000^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x-\int_{1^-}^{1000^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}\{x\}=148.5-\frac{1}{3}\int_{1^-}^{1000^+}\frac{\{x\}}{x^{4/3}}\,\mathrm{d}x-\left.\frac{\{x\}}{\sqrt[3]{x}}\right|_{1^-}^{1000^+}.$$

求极限后得到

$$\sum_{n=1}^{1000}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=149.5-\frac{1}{3}\int_{1}^{1000}\frac{\{x\}}{x^{4/3}}\,\mathrm{d}x.$$

上式小于150是显然的, 然后利用$\{x\}<1$, 得到$\sum\limits_{n=1}^{1000}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>148.6$.

贴吧答案: 先证放缩公式:

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right)<\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)$$

由中值定理可证上式. □

问题 2.2.11: http://tieba.baidu.com/p/4932376161

求

$$\sum_{k=1}^{2014}\left[\frac{-3+\sqrt{8k+1}}{4}\right]$$

解. 令$t=\frac{-3+\sqrt{8k+1}}{4}$, 则$k=2t^2+3t+1$. 所以$\frac{-3+\sqrt{8k+1}}{4}=n$当且仅当$2n^2+3n+1\le k<2(n+1)^2+3(n+1)+1$, $n\in\mathbb{N}$. 另一方面$2\times 30^2+3\times 30+1=1891$, $2\times 31^2+3\times 31+1=2016$. 所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2014}\left[\frac{-3+\sqrt{8k+1}}{4}\right]&=\sum_{n=1}^{31}n[2(n+1)^2+3(n+1)+1-(2n^2+3n+1)]-30\\&=\sum_{n=1}^{31}(4n^2+50n)-30\\&=4(1^2+2^2+\cdots+30^2)+5(1+2+3+\cdots+30)-30=40115.\end{aligned}$$

□

2.3 全国高中数学联赛

问题 2.3.1: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

求函数$f(x,y)=\max\{|x-y|,|x+y|,|x-2|\}$的最小值.

问题 2.3.2

设n,a,b是整数, $n>0$且$a\ne b$, 若$n\mid(a^n-b^n)$, 则$n\mid\frac{a^n-b^n}{a-b}$.

解. 设$p^\alpha\|n$, 只需证$p^\alpha\mid\frac{a^n-b^n}{a-b}$. 记$t=a-b$, 如果$p\nmid t$, 则$(p^\alpha,t)=1$, 于是$p^\alpha\mid\frac{a^n-b^n}{a-b}$. 若$p\mid t$, 由二项式定理有

$$\frac{a^n-b^n}{t}=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}b^{n-i}t^{i-1}.$$

设$p^\beta\|i$, 则易知$\beta\le i-1$. 因此$\binom{n}{i}t^{i-1}=\frac{n}{i}\binom{n-1}{i-1}t^{i-1}$中所含的$p$的幂次至少是$\alpha$, 即上式右边每一项均被$p^\alpha$整除. □

问题 2.3.3: 2016年全国高中数学联赛四川预赛

已知a,b,c为正实数, 求证:

$$abc\ge\frac{a+b+c}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\ge(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

解. 先证左边, 左边等价于$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\ge abc(a+b+c)$, 而这等价于$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$.

再证右边, 右边等价于$a+b+c\ge(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$. 不妨设$a=\max\{a,b,c\}$, 则只需考虑$b+c-a>0$的情况, 令$a=y+z$, 上式等价于$2(x+y+z)\ge 8xyz\left(\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right)$. 即

$$\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}\ge\frac{4}{(y+z)^2}+\frac{4}{(z+x)^2}+\frac{4}{(x+y)^2}.$$

最后用均值不等式. □

问题 2.3.4: 2009年全国高中数学联赛加试

证明:

$$-1<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n\le\frac{1}{2},\quad n=1,2,\cdots.$$

解. 利用不等式$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$, $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n$, 则$x_{n+1}<x_n<\cdots<x_1=\frac{1}{2}$. 在由$\ln n=\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$, $x_n>-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}>-1$. □

问题 2.3.5

设集合$S_k=\{A_k\mid k\in\mathbb{N}_+\}$, 其中$A_k=\frac{2^{2^{k+1}}+1}{7^{7^k}+1}$, 求: $S_1,\cdots,S_{2015}$中任取两个数都是素数的概率.

解. 用恒等式$\frac{x^7+1}{x+1}=(x+1)^6-7x(x^2+x+1)^2$, 当$x=7^{2m-1}$时, $(x+1)^6-7x(x^2+x+1)^2$有平方差公式. □

问题 2.3.6: IMO预选题

证明: 对于任意正有理数r, 都存在正整数a,b,c,d满足$r=\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$.

解. 用恒等式$\frac{(x+y)^2+(2x-y)^2}{(x+y)^2+(2y-x)^2}=\frac{x}{y}$, $\frac{x}{y}\in\left(\frac{1}{2},2\right)$. 推广见14.0.41. □

问题 2.3.7: Titu problem from book

设x_n表示如下含有素数2的幂指数

$$\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{2^n}{n}.$$

求证: $x_{2^n}\ge 2^n-n+1$.

解. 用恒等式$\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{2^n}{n}=\frac{2^n}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}$. 由Lucas定理$\binom{2^n-1}{k}\equiv 1 \pmod 2$, $0\le k\le 2^n-1$. 故$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n-1}{k}} \pmod 2$意义下是$2^n$个奇数相加, 所以一定是偶数. 那么$\frac{2^n}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}$的和含有的2的指数至少为$2^n-n+1$, 故有$x_{2^n}\ge 2^n-n+1$. □

问题 2.3.8: 匈牙利征解

设$P(x)$为次数不超过$2n$的多项式, 求证:

$$|P(n)|\le(2\sqrt{n}-1)\max(|P(0)|,|P(1)|,\cdots,|P(n-1)|,|P(n+1)|,\cdots,|P(2n)|).$$

解. 用差分公式, 当$m\ge 2n$时有, $\Delta^m P(0)=(E-I)^m P(0)=0$, E为移位算子$EP(x)=P(x+1)$, I为恒等算子, 得到

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}P(k)=0.$$

令$m=2n$. 并用绝对值的三角不等式可证命题. 其中需要用归纳法证明

$$\binom{2n}{n}\ge\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}.$$

□

2.4 数学竞赛

问题 2.4.1: Law of Tangents

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}.$$

问题 2.4.2

求

$$(x+1)^x+(x+2)^x=(x+3)^x$$

的实解.

解. 只能$x>-1$, 令$f(x)=\left(1-\frac{2}{x+3}\right)^x+\left(1-\frac{1}{x+3}\right)^x-1$,

$$f'(x)=\cdots(\text{用}\ln(1-x)<-x)<-\frac{2}{(x+1)(x+3)}\left(1-\frac{2}{x+3}\right)^x-\frac{2}{(x+2)(x+3)}\left(1-\frac{1}{x+3}\right)^x<0,$$

在$x>-1$时, $f(x)$单调递减, 而$f(2)=0$, 所以x只有实解$x=2$. □

问题 2.4.3

求满足如下恒等式的所有实函数$f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(f(x))f(y)-xy=f(x)+f(f(y))-1. \tag{2.1}$$

解. 让x,y互换, 则有$f(f(y))f(x)-xy=f(y)+f(f(x))-1$. 将2.1式两边同时乘以$f(x)$与前式相加化简得

$$(f(x)f(f(x))-1)f(y)=xy(f(x)+1)+f^2(x)-f(x)+f(f(x))-1.$$

若存在x使$f(x)f(f(x))-1\neq 0$, 则$f(y)=ay+b$, 代入2.1知a,b无解; 若对于任意的x都有$f(x)f(f(x))=1$, 则

$$0=xy(f(x)+1)+f^2(x)-f(x)+f(f(x))-1.$$

于是对于y的系数, 在$x\neq 0$时$f(x)=-1$, 这与上式矛盾. □

问题 2.4.4: 2005年中国西部数学奥林匹克

已知$\alpha^{2005}+\beta^{2005}$可以表示成以$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$为变元的二元多项式, 求这个多项式的系数之和.

解. 让$(\sigma_1,\sigma_2)=(\alpha+\beta,\alpha\beta)$, 用牛顿等幂公式, 并令$\sigma_1=\sigma_2=1$得结果为1. □

问题 2.4.5: 2005年中国西部数学奥林匹克

设正实数a,b,c满足$a+b+c=1$. 证明:

$$10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)\geq 1.$$

解. 令$S_k=a^k+b^k+c^k(k\in\mathbb{N}_+)$, $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(a+b+c,ab+bc+ca,abc)$. 用牛顿等幂公式, $S_3=1-3\sigma_2+3\sigma_3$, $S_5=1-5\sigma_2+5\sigma_3+5\sigma_2^2-5\sigma_2\sigma_3$, 原式等价于 $(\sigma_2-\sigma_3)(1-3\sigma_2)\geq 0$. 其中$1-3\sigma_2=\sigma_1^2-3\sigma_2\geq 0$. □

问题 2.4.6: 2006年全国高中数学联赛

解方程组

$$\begin{cases} x-y+z-w=2, \\ x^2-y^2+z^2-w^2=6, \\ x^3-y^3+z^3-w^3=20, \\ x^4-y^4+z^4-w^4=66. \end{cases}$$

解. 令$a_n=x^n+z^n$, $b_n=y^n+w^n(n\in\mathbb{N}_+)$. 由牛顿等幂公式, $a_3=\frac{1}{2}a_1(3a_2-a_1^2)$, $a_4=\frac{1}{2}(2a_1^2a_2-a_1^4+a_2^2)$, $b_3=\frac{1}{2}b_1(3b_2-b_1^2)$, $b_4=\frac{1}{2}(2b_1^2b_2-b_1^4+b_2^2)$. 解得$a_1=4$, $a_2=10$, $b_1=2$, $b_2=4$. 故原方程有4个解, $(x,y,z,w)=(1,2,3,0)$, $(1,0,3,2)$, $(3,2,1,0)$, $(3,0,1,2)$. □

问题 2.4.7: 25届IMO

求一对正整数a,b满足:

1. $7\nmid ab(a+b)$;
2. $7^7\mid((a+b)^7-a^7-b^7)$.

解. 令$(x,y,z)=(a+b,-a,-b)$, $S_n=x^n+y^n+z^n$, $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(0,xy+yz+zx,xyz)=(0,-a^2-ab-b^2,ab(a+b))$. 由牛顿等幂公式, $S_7=7\sigma_2^2\sigma_3=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$. 由(1), (2)知$7^3\mid a^2+ab+b^2$. 取$a^2+ab+b^2=7^3\geq 3ab$, 则有$ab\leq 114$. 解出一个$(a,b)=(18,1),(1,18)$. □

问题 2.4.8

求$\cos^5\frac{\pi}{9}+\cos^5\frac{5\pi}{9}+\cos^5\frac{7\pi}{9}$的值.

解. 令$(x_1,x_2,x_3)=(\cos\pi/9,\cos 5\pi/9,\cos 7\pi/9)$, 则$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(\sum x_i,\sum x_ix_j,x_1x_2x_3)=(0,-3/4,1/8)$, 最后用牛顿等幂公式得$\frac{15}{32}$. □

问题 2.4.9

解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=n, \\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=n, \\ \cdots, \\ x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n=n. \end{cases}$$

解. 由牛顿等幂公式, $S_n=\sum x_i^n$, $S_1=S_2=\cdots=S_n=n$, 得 $\sigma_1-\sigma_2+\cdots+(-1)^{n-2}\sigma_{n-1}+(-1)^{n-1}\sigma_n=1$. 从而$x_1,\cdots,x_n$中必有一个是1. 不妨让$x_n=1$. 于是对剩下的$(n-1)$个方程重复以上过程得$x_{n-1}=1$, 如此下去知, $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$. □

问题 2.4.10

已知实数x,y,z,w满足$x+y+z+w=x^7+y^7+z^7+w^7=0$. 求

$$f=w(w+x)(w+y)(w+z).$$

解. $S_n=w^n+x^n+y^n+z^n$, $(n\in\mathbb{N}_+)$, 由牛顿等幂公式有$S_7=7(\sigma_2^2-\sigma_4)\sigma_3$, 所以$\sigma_4=\sigma_2^2$或$\sigma_3=0$.

若$\sigma_4=\sigma_2^2$, 则$S_4=-2\sigma_2^2\leq 0$, 得$x=y=z=w=f=0$.

若$\sigma_3=0$, 则x,y,z,w是$t^4+\sigma_2t^2+\sigma_4=0$的四个实根, w比为x,y,z之一的相反数, 故$f=0$. □

问题 2.4.11

求方程组

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^3+y^3+z^3=-18. \end{cases}$$

的整数解(x,y,z).

解. 由牛顿等幂公式得$xyz=-6$. 故$(x,y,z)=(1,2,-3)$, $(2,1,-3)$, $(1,-3,2)$, $(2,-3,1)$, $(-3,1,2)$, $(-3,2,1)$. □

问题 2.4.12: 第9届美国数学奥林匹克

定义

$$f_n=x^n\sin nA+y^n\sin nB+z^n\sin nC \quad (n\in\mathbb{N}_+),$$

其中$\angle A,\angle B,\angle C\in\mathbb{R}$, 且$\angle A+\angle B+\angle C=k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$, 如果$f_1=f_2=0$, 求证$f_n=0$对于一切$n\in\mathbb{N}_+$成立.

解. 令$(\alpha,\beta,\gamma)=(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}A},y\mathrm{e}^{\mathrm{i}B},z\mathrm{e}^{\mathrm{i}C})$, $S_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$, $(n\in\mathbb{N})$, 则$\mathrm{Im}(S_n)=f_n$. 补充定义$S_0=3$, 由于$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(\alpha+\beta+\gamma,\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,\alpha\beta\gamma)\in\mathbb{R}^3$, 所以$S_1,S_2\in\mathbb{R}$. 由牛顿等幂公式得$S_n\in\mathbb{R}$, 即得. □

Chapter 3

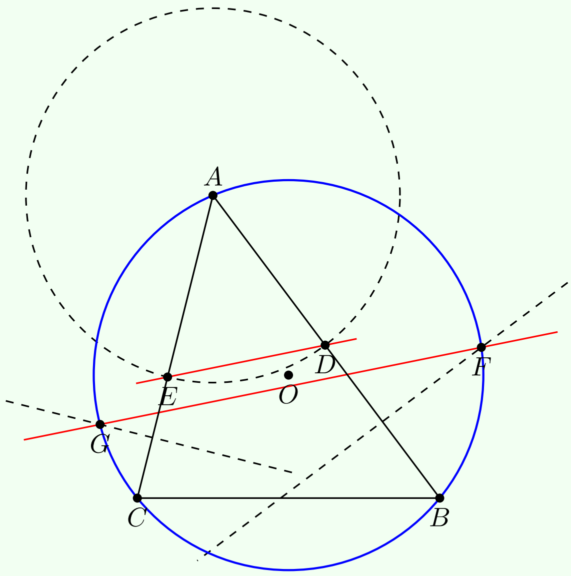
AOPS

3.1 IMO

3.1.1 2018

问题 3.1.1

Let Γ be the circumcircle of acute triangle ABC. Points D and E are on segments AB and AC respectively such that $AD = AE$. The perpendicular bisectors of BD and CE intersect minor arcs AB and AC of Γ at points F and G respectively. Prove that lines DE and FG are either parallel or they are the same line.



问题 3.1.2

Find all integers $n \geq 3$ for which there exist real numbers $a_1, a_2, \dots a_{n+2}$ satisfying $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ and

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2},$$

for $i = 1, 2, \dots, n$.

问题 3.1.3

An anti-Pascal triangle is an equilateral triangular array of numbers such that, except for the numbers in the bottom row, each number is the absolute value of the difference of the two numbers immediately below it. For example, the following is an anti-Pascal triangle with four rows which contains every integer from 1 to 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Does there exist an anti-Pascal triangle with 2018 rows which contains every integer from 1 to $1+2+3+\cdots+2018$?

问题 3.1.4

A site is any point (x, y) in the plane such that x and y are both positive integers less than or equal to 20.
Initially, each of the 400 sites is unoccupied. Amy and Ben take turns placing stones with Amy going first. On her turn, Amy places a new red stone on an unoccupied site such that the distance between any two sites occupied by red stones is not equal to $\sqrt{5}$. On his turn, Ben places a new blue stone on any unoccupied site. (A site occupied by a blue stone is allowed to be at any distance from any other occupied site.) They stop as soon as a player cannot place a stone.
Find the greatest K such that Amy can ensure that she places at least K red stones, no matter how Ben places his blue stones.

问题 3.1.5

Let a_1, a_2, ... be an infinite sequence of positive integers. Suppose that there is an integer $N > 1$ such that, for each $n \geq N$, the number

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

is an integer. Prove that there is a positive integer M such that $a_m = a_{m+1}$ for all $m \geq M$.

问题 3.1.6

A convex quadrilateral $ABCD$ satisfies $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Point X lies inside $ABCD$ so that

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{and} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Prove that $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.

3.2 2003

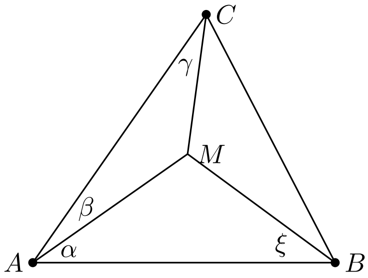
3.2.1 02

问题 3.2.1: USAMO 1996, Problem 5

Let ABC be a triangle, and M an interior point such that $\angle MAB = 10°$, $\angle MBA = 20°$, $\angle MAC = 40°$ and $\angle MCA = 30°$. Prove that the triangle is isosceles.

解. 设$\angle MCB = x$, 用Ceva角元公式.

根据AOPS中的问题, 进行推广研究有下面的结论, 现在研究, 当角度$\alpha, \beta, \gamma, \xi$均给定时, 三角形$\triangle ABC$是等腰三角形的条件.



当$AC = AB$时, 由正弦定理有$\sin\gamma\sin(\alpha+\xi) = \sin(\beta+\gamma)\sin\xi$.

当$AC = BC$时, 同样有$\sin(\beta+\gamma)\sin(\alpha+\beta-\xi) = \sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma+\xi)$; 当$AB = BC$时, 有$\sin(\alpha+\xi)\sin(\alpha+\beta-\gamma) = \sin(\alpha+\beta+\gamma+\xi)\sin\alpha$.

$\triangle ABC$是等腰三角形的充要条件是$(AB-AC)(AB-BC)(AC-BC) = 0$成立. 所以有

$$\begin{gathered}(\sin\gamma\sin(\alpha+\xi) - \sin(\beta+\gamma)\sin\xi)\left(\sin(\beta+\gamma)\sin(\alpha+\beta-\xi) - \sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma+\xi)\right)\\ \cdot\left(\sin(\alpha+\xi)\sin(\alpha+\beta-\gamma) - \sin(\alpha+\beta+\gamma+\xi)\sin\alpha\right) = 0.\end{gathered}$$

□

问题 3.2.2: Russian olympiad

Let A and B be two sets such that $A \cup B = \{1, 2, .., 2n\}$ and $|A| = |B| = n$. Let $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ and $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ with $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ and $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$. Prove that $|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n| = n^2$.

解. 问题和答案在此

问题可以推广, 当A, B是不交的元素个数相同的数积, $S = A \cup B$, 且仍记$|S| = 2n$, a_i, b_i的增减性条件保持, 则上面的要证的等式等于S中较大的n项和与较小的n项和之差. □

3.2.2 03

问题 3.2.3: Indian olympiad 2003

consider triangle acute angled ABC . let BE and CF be cevians with E and F on AC and AB resp intersecting in P. join EF and AP. denote the intersection of AP and EF by D. draw perpendicular on CB from D and denote the intersction of the perpendicular by K. Prove that KD bisects $\angle EKF$.

问题 3.2.4: IMO Shortlist 1997, Q7

The lengths of the sides of a convex hexagon $ABCDEF$ satisfy $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Prove that:

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}.$$

问题 3.2.5: Iran 1999

Let ABC be a triangle, and let w be a circle passing through A and C. Sides AB and BC meet w again at D and E, respectively. Let q be the incircle of the circular triangle EBD, i. e. the circle which touches the segments BD and BE and internally touches the circle w. Suppose the circle q touches the arc DE at M. Prove that the line MI is the angle bisector of the angle AMC, where I is the incenter of triangle ABC.

3.2.3 05

3.2.4 06

问题 3.2.6: NZ IMO 2003 Team

Show that given a directed graph with n nodes, where n is even, such that: vertex 1 is joined to vertex 2, vertex 2 is joined to vertex 3 and vertex 4, vertex 3 is joined to vertex 5 and vertex 6, ..., vertex $(n/2)$ joined to vertex $n-1$ and vertex n, vertex $(n/2)+1$ joined again to vertex 1 and vertex 2, ..., vertex n joined to vertex $n-1$ [for each k with $1 \le k \le n$, the vertex k is joined to the vertices $2k$ and $2k-1 \bmod n$] we can always find an Euler tour of the graph going along the edges in the right direction.

3.2.5 07

问题 3.2.7

We are given n vertices (unjoined). How many trees can we form by joining them? A tree is a graph without cycles.

问题 3.2.8

Let ABC be a triangle. Prove that: $R\sqrt{2pabc} \leq abc$.

问题 3.2.9: IMO ShortList 2003, combinatorics problem 1

Let A be a 101-element subset of the set $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$. Prove that there exist numbers t_1, $t_2, \ldots, t_{100}$ in S such that the sets

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, 100$$

are pairwise disjoint.

问题 3.2.10: IMO ShortList 2003, number theory problem 3

Determine all pairs of positive integers (a, b) such that

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

is a positive integer.

问题 3.2.11: IMO ShortList 2003, geometry problem 6

Each pair of opposite sides of a convex hexagon has the following property: the distance between their midpoints is equal to $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ times the sum of their lengths. Prove that all the angles of the hexagon are equal.

问题 3.2.12: IMO ShortList 2003, geometry problem 1

Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral. Let P, Q, R be the feet of the perpendiculars from D to the lines BC, CA, AB, respectively. Show that $PQ = QR$ if and only if the bisectors of $\angle ABC$ and $\angle ADC$ are concurrent with AC.

问题 3.2.13: IMO ShortList 2003, algebra problem 4

Let n be a positive integer and let $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ be real numbers. Prove that

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|\right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2.$$

Show that the equality holds if and only if $x_1, \ldots, x_n$ is an arithmetic sequence.

问题 3.2.14: IMO ShortList 2003, number theory problem 6

Let p be a prime number. Prove that there exists a prime number q such that for every integer n, the number $n^p - p$ is not divisible by q.

问题 3.2.15

Prove that in every triangle ABC with sides a, b, c we have

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}\max\left\{\frac{m_a}{h_a}, \frac{m_b}{h_b}, \frac{m_c}{h_c}\right\}$$

where S is the area of $\triangle ABC$ and m_a, m_b, m_c and h_a, h_b, h_c are the medians and altitudes of the triangle corresponding to the sides a, b, c respectively.

问题 3.2.16

Please mail names of greatest mathematical geniuses whose performance are sensational at IMOs.

问题 3.2.17: Japan MO 1997, problem #2

Prove that
$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}$
for any positive real numbers a, b, c.

问题 3.2.18

Let N be a point on the longest side AC of a triangle ABC. The perpendicular bisectors of AN and NC intersect AB and BC respectively in K and M. Prove that the circumcenter O of $\triangle ABC$ lies on the circumcircle of triangle KBM.

问题 3.2.19: IMO Shortlist 1997, Q4

An $n \times n$ matrix whose entries come from the set $S=\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ is called a silver matrix if, for each $i=1, 2, \ldots, n$, the i-th row and the i-th column together contain all elements of S. Show that:
(a) there is no silver matrix for $n=1997$;
(b) silver matrices exist for infinitely many values of n.

3.2.6 08

问题 3.2.20: IMO Shortlist 2001, C1

What is the largest number of subsequences of the form $n, n+1, n+2$ that a sequence of 2001 positive integers can have? For example, the sequence 1, 2, 2, 3, 3 of 5 terms has 4 such subsequences.

问题 3.2.21

a and b are positive coprime integers. A subset S of the non-negative integers is called admissible if 0 belongs to S and whenever k belongs to S, so do $k+a$ and $k+b$. Find $f(a,b)$, the number of admissible sets.

问题 3.2.22: IMO Shortlist 1999, C3

A chameleon repeatedly rests and then catches a fly. The first rest is for a period of 1 minute. The rest before catching the fly $2n$ is the same as the rest before catching fly n. The rest before catching fly $2n+1$ is 1 minute more than the rest before catching fly $2n$.
How many flies does the chameleon catch before his first rest of 9 minutes? How many minutes (in total) does the chameleon rest before catching fly 98? How many flies has the chameleon caught after 1999 total minutes of rest?

问题 3.2.23: IMO Shortlist 1999, C6

Every integer is colored red, blue, green or yellow. m and n are distinct odd integers such that $m+n$ is not zero. Show that we can find two integers a and b with the same color such that $a-b=m$, n, $m+n$, or $m-n$.

问题 3.2.24: IMO Shortlist 1994, C6

Two players play alternatively on an infinite square grid. The first player puts a X in an empty cell and the second player puts a O in an empty cell. The first player wins if he gets 11 adjacent Xs in a line, horizontally, vertically or diagonally. Show that the second player can always prevent the first player from winning.

问题 3.2.25

Lagrangia posted this problem a day or two ago and asked for some ideas :
A (2k+1) x (2k+1) chessboard in coloured in white and black in the usual way such that the four corners are black. For which k is it possible to cover some squares on the table with trominoes (L-shaped figures made up from 3 squares) such that all the black squares are covered ? For these values of k , what is the minimal number of trominoes ?
I have a solution but I will post it tonight because I don't have time now.Anybody else solved it?

问题 3.2.26: CMO (Canada MO) 1999, problem 5

Let x, y, and z be non-negative real numbers satisfying $x+y+z=1$. Show that

$$x^2y + y^2z + z^2x \le \frac{4}{27}$$

and find when equality occurs.

问题 3.2.27

Prove that in any choice of $n+1$ numbers from $\{1, 2, .., 2n\}$, there exist 2, a and b, so that $a \mid b$.

问题 3.2.28

Let E be a finite set of point(in the plane), no 3 of them colinear, no 4 of them concyclic. An unordered pair of points A,B is called a good pair iff there exists a disk which contains only A and B but no other point. Let f(E) be the number of good pair in E. -¿Prove that if E has 1003 points, then 2003¡= f(E) ¡=3003

问题 3.2.29: Romanian selection test 2002

Let $n \geq 4$ be an integer, and let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be positive real numbers such that

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1.$$

Prove that the following inequality takes place

$$\frac{a_1}{a_2^2+1} + \cdots + \frac{a_n}{a_1^2+1} \geq \frac{4}{5}\left(a_1\sqrt{a_1} + \cdots + a_n\sqrt{a_n}\right)^2.$$

问题 3.2.30: IMO Shortlist 2000, Problem G1

In the plane we are given two circles intersecting at X and Y. Prove that there exist four points with the following property:
(P) For every circle touching the two given circles at A and B, and meeting the line XY at C and D, each of the lines AC, AD, BC, BD passes through one of these points.

问题 3.2.31

Let $A = \{1, 2, 3, \ldots, 6003\}$. Let B be a subset of A such that $|B| = 4002$. Prove that B has a subset C which satisfies: (i) $|C| = 2001$; (ii) If you arrange the 2001 elements of C in increasing order, then you get 2001 numbers which are even and odd in turn, i.e., even, odd, even, odd, ... or odd, even, odd, even, ...

问题 3.2.32

Consider a circle with a radius of 16 cm. 650 points inside this circle are given. A ring is the part of the plane that's included between two concentric circles of radius 2 cm and 3 cm respectively. Show that a ring can be placed such that at least 10 of the 650 given points are covered by this ring.

问题 3.2.33

Does there exist a function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that

$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n)$$

for all $n \geq 2$?

问题 3.2.34: IMO 1994, Problem 5, IMO Shortlist 1994, A3

Let S be the set of all real numbers strictly greater than 1. Find all functions $f : S \to S$ satisfying the two conditions:
(a) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ for all x, y in S;
(b) $\frac{f(x)}{x}$ is strictly increasing on each of the two intervals $-1 < x < 0$ and $0 < x$.

问题 3.2.35

Each vertex of a regular 1997-gon is labeled with an integer, such that the sum of the integers is 1. Starting at some vertex, we write down the labels of the vertices reading counterclockwise around the polygon. Can we always choose the starting vertex so that the sum of the first k integers written down is positive for $k = 1, ..., 1997$?

3.2.7 09

问题 3.2.36

An infinite arithmetic progression whose terms are positive integers contains the square of an integer and the cube of an integer. Show that it contains the sixth power of an integer.

问题 3.2.37

Let S = 1, 2, 3, ..., 1982. Determine the maximum number of elements of a set A such that : (1) A is a subset of S ; (2) There do not exist numbers x, y, z in A such that xy = z.

问题 3.2.38: IMO Shortlist 1997, Q22

Does there exist functions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $f(g(x)) = x^2$ and $g(f(x)) = x^k$ for all real numbers x
a) if $k = 3$?
b) if $k = 4$?

问题 3.2.39

On a blackboard we have the numbers $1, 2, 3, \ldots, 2001$. An operation is this: we erase a and b and we replace them with one number, $\frac{ab}{a+b+1}$. After 2000 operations, we are left with one number k. What is k?

问题 3.2.40

(by positive i mean zero or more)
consider the equation a*x+b*y=c with a,b,c positive and a and b coprime
it can easily be proven that if c¿a*b-a-b , positive solutions x and y can be found for the equation
but for some reason i can't seem to prove this fact :
exactly half of the integers :1,2,3,4,......a*b-a-b has positive solutions
some experiment suggest that k has positive solutions iff (a*b-a-b)-k has none
but how to prove that problem? anyone? plz help me?

问题 3.2.41

A recurrence relation is defined like that:

(1) $a_1 = 1$;

(2) $a_n + 1 = 1/16 \times (1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n})$, and $n \in N$

Determine the explicit formula and prove that it is correct !

问题 3.2.42

Let $n \in N$ and $M_n = 1, 2, 3, \ldots, n$. A subset T of M_n is called 'cool' if no element of T is smaller than the number of elements of T. The number of cool subsets of M_n is denoted by $f(n)$.
Determine a formula for $f(n)$. In particular calculate $f(32)$!

问题 3.2.43

The two mathematicians Lagrangia and Galois :D play the following game: They select and take from the set 0,1,2,3,...,1024 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1 numbers away alternately. Lagrangia starts and takes 512 numbers away, then Galois 256 numbers etc. Finally there are two remaining numbers a,b (a¡b). Galois pays Lagrangia the following amount of money: abs(b-a). Lagrangia wants to obtain as much money as possible. And vice versa Galois wants to loose at least money as possible.
Exlain how much money Lagrangia can earn at most ! Assume that they all try their best.

问题 3.2.44

Feuerbach's theorem: Prove that in any triangle, the inscribed circle and the 3 exinscribed circles are tangent to Euler's circle.

问题 3.2.45: Bundeswettbewerb Mathematik 1988, stage 2, problem 4

Provided the equation $xyz = p^n(x + y + z)$ where $p \geq 3$ is a prime and $n \in \mathbb{N}$. Prove that the equation has at least $3n+3$ different solutions (x, y, z) with natural numbers x, y, z and $x < y < z$. Prove the same for $p > 3$ being an odd integer.

问题 3.2.46

Prove that:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n}{2k}\right)^2 - 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \binom{2n}{2k+1}\right)^2 = 1$$

$\binom{a}{b}$ denotes the binomial coefficient, $\frac{a!}{b!(a-b)!}$

问题 3.2.47: IMO Shortlist 2000, Problem N2

For a positive integer n, let $d(n)$ be the number of all positive divisors of n. Find all positive integers n such that $d(n)^3 = 4n$.

问题 3.2.48

Let a, b, c be positive real numbers with $abc = 1$. Prove that

$$\sum_{cyc}(a + bc) \leq 3 + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$$

问题 3.2.49

Suppose that each of the n guests at a party acquaited with exactly 8 other guests. Furthermore, suppose that each pair of guests who are acquainted with each other have four acquaintances in common at the party, and each pair of guests who are not acquainted have only two acquaintances in common. What are the possible values of n ?

问题 3.2.50: USAMO 1997/5; also: ineq E2.37 in Book: Inegalitati; Authors:L.Panaitopol,V. Bandila,M.Lascu

Prove that, for all positive real numbers a, b, c, the inequality

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$

holds.

问题 3.2.51: IMO 1996 Shortlist

Suppose that $a, b, c > 0$ such that $abc = 1$. Prove that

$$\frac{ab}{ab + a^5 + b^5} + \frac{bc}{bc + b^5 + c^5} + \frac{ca}{ca + c^5 + a^5} \leq 1.$$

问题 3.2.52

A nice one : Let n be a positive integer. Ann writes down n different positive integers. Then Ivo deletes some numbers (possibly none, but not all). He puts + or - signs in front of each of the remaining numbers and sums them up. If the result is divisible by 2003, Ivo wins. Otherwise Ann wins. For which values of n Ivo has a winning strategy ? For which values of n Ann has a winning strategy ?

问题 3.2.53

The sequence $\{u_n\}$ with n being a positive integer is given by the recurrence
(1) $u_0 = 0$ (2) $U_{2n} = u_n$ (3) $u_{2n+1} = 1 - u_n$
a.) Determine u_{2002} and b.) and u_m with $m = (2^p - 1)^2$ and p a natural number !

问题 3.2.54: JBMO 2002, Problem 4

问题 3.2.55

Show that

$$\frac{1+a^2}{1+b+c^2} + \frac{1+b^2}{1+c+a^2} + \frac{1+c^2}{1+a+b^2} \geq 2$$

for reals $a, b, c \geq -1$.

问题 3.2.56

There are n girls and n boys at the party. Participants who belong to the same sex do not know each other. Moreover, there cannot be found two girls who know the same two boys. At most how many acquaintances can be among the participants of the party ?
a.) n = 5 b.) n = 7

Chapter 4

抽象代数

定理 4.0.1

同类置换有相同的循环结构.

解. $P,Q,T\in S_n$且$Q=TPT^{-1}$, Q,P属同类, 则Q,P有相同的循环结构.
$P(v)=(1^{v_1}2^{v_2}\cdots m^{v_m})$, $P=C_1C_2\cdots C_r$, $r=\sum_i v_i$, $n=\sum_i iv_i$. $Q=TPT^{-1}=\prod_i TC_iT^{-1}=\prod_i C_i'$.
T是一一映射, $(C_i')_i$两两不交, 因$(C_i)_i$两两不交, C_i'与C_i同阶, 所以$Q(v)=P(v)$. □

问题 4.0.1

在环R中, 对于任意的$x\in R$, 都存在$n\in\mathbb{N}_+$, 使得$x=x^{n+1}$, 证明: 对于任意的$y\in R$, $yx^n=x^ny$.

解. 先证x^n是幂等的, $(x^n)^2=x^n$.
再证, 若$ab=0$, 则$ba=(ba)^{\tilde{n}+1}=b(ab)^{\tilde{n}}a=0$.
再证, $x=x^{n+1}$, 则$yx^n=yx^{2n}$, 所以$(y-yx^n)x^n=0$, 所以$x^n(y-yx^n)=0$, 即$x^ny=x^nyx^n$.
最后, 同上面的做法, 由$x^ny=x^{2n}y$, 有$yx^n=x^nyx^n$, 所以$x^ny=yx^n$. □

问题 4.0.2: AMM, E.C.Johnsen, D.L. Outcalt and Adil Yaqub, An Elementary Commutativity Theorem For Rings, Vol. 75, No. 3, 288-289

有幺元的非结合环R中, 若对于任意的$x,y\in R$, 有$(xy)^2=x^2y^2$, 则R是交换环.

解. 由$(xy)^2=x^2y^2$, $(x(y+1))^2=x^2y^2+2x^2y+x^2$, 而$(x(y+1))^2=(xy+x)^2=(xy)^2+(xy)x+x(xy)+x^2$, 所以$xyx+xxy+2x^2y$, 将$x+1$代换$x$的位置, 有$xyx+yx+xxy=2x^2y+xy$, 即得$xy=yx$.

注. 含幺性不可省, $R=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix}|a,b\in\mathbb{Z}\right\}$, 或$\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}\leq \mathrm{GF}(2)$ 有左幺元.

注2. $(xy)^k=x^ky^k$在$k>2$时有反例, $k\geq 3$固定, p素且满足: k奇时, $p\mid k$, k偶时, $p\mid \frac{k}{2}$.

$$R=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&d\\0&0&a\end{pmatrix}:a,b,cd\in\mathrm{GF}(p)\right\}\leq \mathrm{GF}(p),$$

这里的R不可交换. □

问题 4.0.3

R是含幺环, 若对于任意的$x,y\in R$, 存在$m,n\in\mathbb{N}$, 使得$x^{m+1}y^{n+1}=x^myxy^n$, 则R是交换环.

解. $x^m(xy-yx)y^n=0$, $x^l(xy-yx)(y+1)^k=0$, 定义$r=\max\{m,l\}$, 则

$$x^r(xy-yx)y^n=0,\ x^r(xy-yx)(y+1)^k=0,\ (y,y+1)=1\Longrightarrow(y^n,(y+1)^k)=1.$$

所以$(y^{2n-1},(y+1)^ky^{n-1})=y^{n-1}$, 所以存在$A(y),B(y)$使得$Ay^{2n-1}+B(y+1)^ky^{n-1}=y^{n-1}$, 所以$x^r(xy-yx)y^{n-1}=0$, 注意到红色部分的$y^n$得到了降次, 所以存在$s$满足$x^s(xy-yx)=0$.

再设$(x+1)^t(xy-yx)=0$, 同样辗转相除得到$xy-yx=0$, 即R可交换. □

Chapter 5

矩阵论

5.1 矩阵迭代法

研究对象: $Ax=b$, 求x. 设$A=B-C$, 其中B非奇异, 则$Ax=b \Longleftrightarrow Bx=b+Cx$. 其迭代形式为

$$Bx^{(k+1)}=Cx^{(k)}+b, \quad k=0,1,2,\cdots$$

若$Ax=b$有解, 则其解也满足$Bx=Cx+b$, 从而

$$B(x^{(k+1)}-x)=C(x^{(k)}-x)$$

即$x^{(k+1)}-x=L(x^{(k)}-x)$, $L=B^{-1}C$, 从而$(x^{(k)}-x)=L^k(x^{(0)}-x)$, 所以要使迭代式收敛, 则需要

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)}-x=0,$$

即$\lim_{k\to\infty} L^k=0$.

设L的特征根为$l_1,l_2,\cdots,l_n$且有可逆阵T使$L=T\cdot \operatorname{diag}(l_1,l_2,\cdots,l_n)\cdot T^{-1}$. 所以

$$L^{(k)}\to 0, k\to\infty \Longleftrightarrow |l_i|<1, i=1,2,\cdots,n \Longleftrightarrow \|L\|<1, \|L\|=\max_i\{|l_i|\}$$

设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

则$A=D-E-F$.

定理 5.1.1: Gauss-Seidel迭代

$$\begin{cases} B=D-E \\ C=F \end{cases} \Longrightarrow (D-E)x^{(k+1)}=Fx^{(k)}+b \Longrightarrow x^{(k+1)}=D^{-1}\left[Ex^{(k+1)}+Fx^{(k)}+b\right].$$

定理 5.1.2: Jacobi迭代

$$\begin{cases} B=D \\ C=E+F \end{cases} \Longrightarrow x^{(k+1)}=B^{-1}(Cx^{(k)}+b)=D^{-1}\left[(E+F)x^{(k)}+b\right].$$

定理 5.1.3: Newton-Ralphson迭代

函数$f(z)=0$的根可以根据迭代$z_{k+1}=z_k-\frac{f(z_k)}{f'(z_k)}$, $k=0,1,2,\cdots$.

设$f(z)=a-z^{-1}$有根a^{-1}, $f'=z^{-2}$, 则$z_{k+1}=z_k(2-az_k)$且可以期望$\lim_{k\to\infty} z_k=a^{-1}$. 对于线性方程$Ax=b$, 可以考虑用此方法解得"$A^{-1}$", 尽管$A$可能不是方阵. 给定初始矩阵$x_0$, 则有迭代$x_{k+1}=x_k(2I-Ax_k)$, $k=0,1,2,\cdots$, 并期望$\lim_{k\to\infty} x_k=A^{-1}$. 定义"误差"矩阵$E_k=I-Ax_k$, 则

$$E_{k+1}=I-Ax_{k+1}=I-Ax_k(2I-Ax_k)=I-(I-E_k)(2I-(I-E_k))=E_k^2$$

若E_0的所有特征根的模均小于1, 则必有$\lim_{k\to\infty} E_0^k=0$. 最后$x_kb$逼近方程$Ax=b$的解.

Chapter 6

数学分析

6.1 极限

问题 6.1.1

设函数$\varphi(x)$可导, 且满足$\varphi(0)=0$, 又设$\varphi'(x)$单调减少.

1. 证明: 对$x\in(0,1)$, 有$\varphi(1)x<\varphi(x)<\varphi'(0)x$.
2. 若$\varphi(1)\geq 0$, $\varphi'(0)\leq 1$, 任取$x_0\in(0,1)$, 令$x_n=\varphi(x_{n-1})$, $(n=1,2,\cdots)$. 证明: $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求该极限值.

解. 对于任意的$x\in[0,1]$,在$[0,x]$上用拉格朗日定理,

$$\varphi(x)-\varphi(0)=\varphi'(\xi_1)x<\varphi'(0)x$$

在$[x,1]$上用拉格朗日定理

$$\varphi(1)-\varphi(x)=\varphi'(\xi_2)(1-x)<\varphi'(\xi_1)(1-x)=\varphi'(\xi_1)-\varphi(x)$$

所以$\varphi(1)x<\varphi'(\xi_1)x=\varphi(x)$. □

6.2 导数

问题 6.2.1

函数$f(x)\in C[0,1]$, 在$(0,1)$上可微, 对于任意的$x\in(0,1)$, $|xf'(x)-f(x)+f(x)|<Mx^2$, 问$f'(0)$的存在性.

解. 不妨设$f(0)=0$, 定义$h(x)=\frac{f(x)}{x}(0<x<1)$, 即证$\lim_{x\to 0}h(x)$存在, 则$\left|x^2h'(x)\right|<Mx^2$, 所以$|h'(x)|<M$, 所以若$\{x_n\}\to 0$, 则有

$$|h(x_m)-h(x_n)|=|h'\xi(x_m-x_n)|<M\left|x_m-x_n\right|<\varepsilon.$$

所以$\{h(x_n)\}$是Cauchy列, 从而$\lim_{x\to 0}h(x)$存在. □

问题 6.2.2

构造有界单调函数$f(x)$使得对于任意的$x\in\mathbb{R}$, $f'(x)$存在, 且$\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)\neq 0$.

解. 取$a_n=1-2^{-n}$, $(n\in\mathbb{N})$, $f(n)=a_n$, $f\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(a_n+a_{n+1}\right)$, 且$f'(n)=0$, $f'\left(n+\frac{1}{2}\right)=1$, 将其它点处可微连接$f(n)$这些离散点, 知$\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)$不存在, 从而不为0. □

6.3 积分

问题 6.3.1

设函数$f(x)$在$[a,b]$上有连续的导数, 且$f(a)=0$, 证明

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

解. 令$F(b)=RHS-LHS$,证$F'(b)\geq 0$即可. □

问题 6.3.2

设函数$f(x)$在$[0,1]$上有二阶连续的导数, 证明:

1. 对任意$\xi\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$和$\eta\in\left(\frac{3}{4},1\right)$有

$$|f'(x)|<2\,|f(\xi)-f(\eta)|+\int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x \quad x\in[0,1]$$

2. 当$f(0)=f(1)=0$及$f(x)\neq 0$, $(x\in(0,1))$时有

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x \geq 4.$$

解. 用中值定理,

$$\begin{aligned}
|f'(x)|-2\,|f(\xi)-f(\eta)| &= |f'(x)|-2\,|f'(\theta)|\,(-\xi+\eta)\\
&\leq |f'(x)|-|f'(\theta)|\\
&\leq |f'(x)-f'(\theta)| = \left|\int_\theta^x f''(t)\mathrm{d}t\right|\\
&\leq \int_0^1 |f''(t)|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

最后取$f(x_0)=\max_{x\in[0,1]} f(x)$, 则

$$f(x_0)=f'(\xi_1)x_0=f'(\xi_2)(x_0-1),$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left|\frac{f''}{f}\right|\mathrm{d}x &\geq \frac{1}{|f(x_0)|}\,\mathrm{d}x\\
&\geq \frac{1}{|f(x_0)|}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f''\,\mathrm{d}x\right|\\
&= \frac{1}{|f(x_0)|}\,|f'(\xi_2)-f'(\xi_1)|\\
&= \frac{1}{x_0}+\frac{1}{1-x_0}\geq 4.
\end{aligned}$$

□

问题 6.3.3

设函数$f(x)$在$\left[-\frac{1}{a},a\right]$上连续(其中$a>0$), 且$f(x)\geq 0$, $\int_{-\frac{1}{a}}^a xf(x)\,\mathrm{d}x=0$, 求证: $\int_{-\frac{1}{a}}^a x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{-\frac{1}{a}}^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 因$(a-x)\left(x+\frac{1}{a}\right)\geq 0$, 对$(a-x)\left(x+\frac{1}{a}\right)f(x)\geq 0$两边同时积分. □

问题 6.3.4

设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=1$. 求证:

1. 存在$\xi\in[0,1]$, 使得$|f(\xi)|\geq 4$;
2. 存在$\eta\in[0,1]$, 使得$|f(\eta)|=4$.

解. 用反证法,

$$1=\left|\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\cdot|f|\,\mathrm{d}x\leq 1.$$

等号取不到, 否则,

$$\int_0^1(4-|f|)\left|x-\frac{1}{2}\right|\,\mathrm{d}x=0.$$

□

问题 6.3.5

求$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta}$.

解. $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2+2\sin^2\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}=2\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+2t^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$ □

解.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta}&=\frac{1}{2}\int_0^{4\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3-\sin t}\\&=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3-\sin t}\\&=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3-\sin t}+\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3+\sin t}\\&=2\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{3-\sin x}+2\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x}\\&=12\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{9-\sin^2 x}\\&=12\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\tan x}{8\tan^2 x+9}\\&=\frac{12}{6\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\tan x\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.\end{aligned}$$

□

解.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta}&=\frac{1}{2}\int_0^{4\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3\sin\theta}\\&=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin\theta}\\&=\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z\left(3-\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)}\\&=2\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+6\mathrm{i}z-1}\\&=2\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{(z-(-3+2\sqrt{2})\mathrm{i})(z-(-3-2\sqrt{2})\mathrm{i})}\\&=2\cdot 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}(f(z))\big|_{z=(-3+2\sqrt{2})\mathrm{i}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.\end{aligned}$$

□

解.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta}&=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\tan\theta}{3\tan^2\theta-2\tan\theta+3}\\&=\int_0^{\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi}+\int_{\pi}^{3\pi/2}+\int_{3\pi/2}^{2\pi}=\cdots\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^{\pi/2}=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\theta}{3t^2-2t+3}=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{3}\right)}{\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{8}}\arctan\left(\frac{3\left(t-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{8}}\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

其它三个同理. 所以$\sum=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 4\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$. □

问题 6.3.6

求

$$\int_0^{\pi/4}\frac{(\cot x-1)^{p-1}}{\sin^2 x}\ln\tan x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{p}\csc p\pi,\ (-1<p<0).$$

解. 令$u=\cot x-1$, 原式等价于

$$\int_0^{+\infty}u^{p-1}\ln(u+1)\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{p}\csc p\pi,$$

而

$$\int_0^{\infty}u^{p-1}\ln(u+1)\,\mathrm{d}u=\int_0^{\infty}u^{p-1}\int_1^{1+u}\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u$$

交换积分次序, 用Beta函数 □

6.4 级数

问题 6.4.1

证明

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}=0$$

无实根.

解. 设$-y<0$, 则$y>0$, 所以$1-y+\frac{y^2}{2!}-\frac{y^3}{3!}+\cdots+\frac{y^{2n}}{(2n)!}>\mathrm{e}^{-y}>0$. □

问题 6.4.2: F.F.Abi=Khuzam and A.B.Boghossian, Some recent geometric inequalities, AMM Vol 96(1989), No. 7:576-589

函数$f(x)=\cot x-\frac{1}{x}$, 则$f^{(k)}(x)<0$, $0<x<\pi$, $k\in\mathbb{N}$.

解.

$$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k\pi+x}-\frac{1}{k\pi-x}\right),\quad x\in(0,\pi).$$

将真分式展开有

$$f(x)=-2x\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{2k},\ x\in(0,\pi),\quad c_k=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^{2k+2}},\ (k\in\mathbb{N}).$$

□

问题 6.4.3

对$n\in\mathbb{N}_+$, 确定$(0,1)$的子集, 使在此子集上$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n(\ln x\ln(1-x))<0$.

解.

$$f'(x)=(\ln x\ln(1-x))'=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{m-1}-x^{m-1}}{m},$$

当n是偶数时, 所有项都是负的, 当n是奇数时, 仅当$1-x<x$即$x>\frac{1}{2}$时, $f^{(n)}(x)$时负的. □

问题 6.4.4

已知$S_n=\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^i}{i}$, 证明$\lim_{n\to\infty}S_n$存在并求其值.

解. 因$S_{n+1}=\frac{n+2}{2(n+1)}(S_n+1)$, 所以

$$S_{n+2}-S_{n+1}=\frac{(n+2)^2(S_{n+1}-S_n)-S_{n+1}-1}{2(n+1)(n+2)},$$

$S_4-S_3=0$, 当$n\geq 3$时, S_n不增, 所以$S=\lim_{n\to\infty}S_n$存在, 所以$S=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2(n+1)}(S+1)$, 得$S=1$. □

6.5 其他

问题 6.5.1

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)=0.$$

解. 用$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. □

问题 6.5.2

证明:

$$0<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n}.$$

解. 先证: $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调上升且有界. $(1\cdot x_n\le\left(\frac{1+n(1+1/n)}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1})$, 则

$$\begin{aligned}x_n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=1+1+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\cdots\\&=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\&<2+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}=3.\end{aligned}$$

再证$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$单调下降且有界. (用$(1+x)^n>1+nx$, $x>-1$证单调性).

由$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n$, $x_n<\mathrm{e}<y_n$, (这可以证得$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$).

故$\mathrm{e}-x_n<y_n-x_n=\frac{x_n}{n}<\frac{3}{n}$. □

问题 6.5.3

证明不等式

$$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

解. 用$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$及归纳法. □

问题 6.5.4

设$a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$及$a^{[0]}=1$, 证明:

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a^{[n-m]}b^{[m]}.$$

并由此推出牛顿二项式公式.

问题 6.5.5

证明不等式

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\quad(n>1).$$

解. 用均值不等式. □

解. 用伯努利不等式证$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>2$, $(n\in\mathbb{N}_+)$. □

问题 6.5.6

设$p_n(n\in\mathbb{N}_+)$为趋于正无穷的任意数列, 而$q_n(n\in\mathbb{N}_+)$为趋于负无穷的任意数列($p_n,q_n\notin[-1,0]$), 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\mathrm{e}.$$

解. 注意$[x]\le x<[x]+1$. □

问题 6.5.7

已知$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}.$$

并推出

$$\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n},$$

其中$0<\theta_n<1$.

问题 6.5.8

证明: e是无理数.

解. 用反证法及6.5.7有, 对于任意的n, $n!n\cdot\mathrm{e}$不是整数. □

问题 6.5.9

证明不等式:

(a) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, $(n\in\mathbb{N}_+)$;

(b) $1+\alpha<\mathrm{e}^\alpha$, $(\alpha\neq 0,\alpha\in\mathbb{R})$.

解.

(a) 原式等价于$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$;

(b) $\alpha>-1$时, 用伯努利不等式, $\mathrm{e}^\alpha>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha n}>1+\alpha$.

□

问题 6.5.10

证明: (在以下各极限军存在的情况下)

(a) $\liminf_{n\to\infty}x_n+\liminf_{n\to\infty}y_n\leq\liminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leq\liminf_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n$;

(b) $\liminf_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n\leq\limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leq\limsup_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n$.

解. 用$\liminf_{n\to\infty}x_n=-\limsup_{n\to\infty}(-x_n)$. □

问题 6.5.11

证明: 若$\lim_{n\to\infty}x_n$存在, 则对于任何数列$y_n(n\in\mathbb{N}_+)$, $\limsup_{n\to\infty}y_n$有限且有:

(a) $\limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n$;

(b) $\limsup_{n\to\infty}x_ny_n=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\limsup_{n\to\infty}y_n$, $(x_n\geq 0)$.

解. 用6.5.10. □

问题 6.5.12

证明: 若对于某数列$x_n(n \in \mathbb{N}_+)$, 无论数列$y_n(n \in \mathbb{N}_+)$如何选取, 以下两个等式中都至少有一个成立:

(a) $\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$.

(b) $\limsup_{n\to\infty}(x_n y_n) = \limsup_{n\to\infty} x_n \cdot \limsup_{n\to\infty} y_n$, $(x_n \geq 0)$.

则数列x_n收敛或发散于正无穷.

问题 6.5.13

证明: 若$x_n > 0(n \in \mathbb{N}_+)$及

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \cdot \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 1.$$

则数列x_n是收敛的.

问题 6.5.14

证明: 若数列$x_n(n \in \mathbb{N}_+)$有界, 且

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

则此数列的子列极限充满于下极限和上极限

$$l = \liminf_{n\to\infty} x_n \text{ 和 } L = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

之间.

问题 6.5.15

证明: 若$x_n > 0(n \in \mathbb{N}_+)$且$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$存在, 则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

解. 用结论: 若$\{x_n\} \to x$, $x_n > 0$, 则$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n = x$. □

问题 6.5.16

证明: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}$.

解. 用6.5.15. □

问题 6.5.17: 数a和b的算术几何平均值

证明: 由下列各式

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

确定的数列x_n和$y_n(n \in \mathbb{N}_+)$有共同的极限.

$$\mu(a, b) = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

解. 用幂平均不等式, $\sqrt{x_{n+1} + y_{n+1}} = \frac{\sqrt{x_n}+\sqrt{y_n}}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{x_n + y_n}$. 即$\{y_n\}$单调有界, 从而有极限, 从而$x_n = 2y_{n+1} - y_n$有相同的极限. □

问题 6.5.18

设

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}\quad (|x|\geq 2),$$

求$f(x)$.

解. x^2-2, $(|x|\geq \frac{5}{2})$. □

问题 6.5.19

证明: 若

(1) 函数$f(x)$定义于区域$x>a$;

(2) $f(x)$在每一个有限区间$a<x<b$内是有界的;

(3) 对于某一个整数n, 存在有限的或无穷的极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=l,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{l}{n+1}.$$

能否用Cauchy定理16.1.3证明它.

问题 6.5.20

利用定理

定理 6.5.1

设

$$\lim_{x\to 0}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=1,$$

其中$\psi(x)>0$, 再设当$n\to\infty$时$\alpha_{mn}\rightrightarrows 0(m=1,2,\cdots,n)$, 换言之, 对于任意$\varepsilon>0$, 存在正整数$N(\varepsilon)$, 当$m=1,2,\cdots,n$且$n>N(\varepsilon)$时, $0<|\alpha_{mn}|<\varepsilon$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}[\phi(\alpha_{1n})+\phi(\alpha_{2n})+\cdots+\phi(\alpha_{mn})]=\lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\cdots+\psi(\alpha_{mn})],$$

此处同时还要假设上式右端的极限存在.

求:

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[n]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{ka}{n^2}\right)$;

(3) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right)$, $(a>0)$;

(4) $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$;

(5) $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$.

问题 6.5.21

设函数$f(x)$在区间$(x_0,+\infty)$上连续并有界. 证明: 对于任何数T, 可求得数列$x_n\to+\infty$, 使

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0.$$

问题 6.5.22

证明: 在有限区间(a,b)上有定义且连续的函数$f(x)$, 可用连续的方法延拓到闭区间$[a,b]$上, 其充分必要条件是函数$f(x)$在区间(a,b)上一致连续.

问题 6.5.23

x_n满足$x_n^n+x_n-1=0$, $0<x_n<1$, 求$\lim_{n\to\infty}x_n$.

解. $y=x^n+x-1$则有$y'>0$, $y|_{x=0}=-1<0$, $y|_{x=1}=1>0$.
x_n是x^n+x-1的唯一零点. 由于

$$x_n^{n+1}+x_n-1=(x_n-1)(1-x_n)<0$$

及y的单调性, 知x_{n+1}在x_n与1之间, 故$\{x_n\}$单调有界. 反证$\{x_n\}$的极限$A=1$, 否则$0\le A<1$矛盾. □

解. $y^x+y-1=0$是隐函数, 确定$y=f(x)$, $x_n=f(n)$, 求导

$$y'=-y^x\cdot\frac{\ln y}{\left(1+\frac{x}{y}\cdot y^x\right)}$$

当$x\ge1$时, $y'>0$, y单调增加, 以下同上. □

问题 6.5.24

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$都收敛, 则以下不成立的是?
A. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$收敛; B.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$收敛;
C. $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛; D. $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$发散.

问题 6.5.25

设$f(x,y)$与$\varphi(x,y)$均为可微函数, 且$\varphi_y'(x,y)\neq0$. 已知(x_0,y_0)是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的一个极值点, 下列选项正确的是(D)
(A) 若$f_x'(x_0,y_0)=0$, 则$f_y'(x_0,y_0)=0$; (B) 若$f_x'(x_0,y_0)=0$, 则$f_y'(x_0,y_0)\neq0$;
(C) 若$f_x'(x_0,y_0)\neq0$, 则$f_y'(x_0,y_0)=0$; (D) 若$f_x'(x_0,y_0)\neq0$, 则$f_y'(x_0,y_0)\neq0$.

问题 6.5.26

$$\frac{\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,\mathrm{d}t}{\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t}=\sqrt{2}$$

解. 用Beta函数. □

问题 6.5.27: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

计算$I=\int_{\pi/8}^{3\pi/8}\frac{\sin^2x}{x(\pi-2x)}\,\mathrm{d}x$.

问题 6.5.28: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设$\varphi(x)$在$(-\infty,0]$可导, 且函数

$$f(x)=\begin{cases}\int_x^0 \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t, & x<0,\\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(2x)^n+x^{2n}}, & x\geq 0.\end{cases}$$

在点$x=0$可导, 求$\varphi(0)$, $\varphi'(0^-)$, 并讨论$f'(x)$的存在性.

问题 6.5.29: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

已知函数$f(x)$与$g(x)$满足$f'(x)=g(x)$, $g'(x)=2\mathrm{e}^x-f(x)$, 且$f(0)=0$, 求

$$\int_0^\pi\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x.$$

问题 6.5.30: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设y_1和y_2是方程$y''+p(x)y'+2\mathrm{e}^xy=0$的两个线性无关解, 而且$y_2=(y_1)^2$. 若有$p(0)>0$, 求$p(x)$及此方程的通解.

问题 6.5.31: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设$f(x)$在$\left[-\frac{1}{a},a\right](a>0)$上非负可积, 且$\int_{-1/a}^a xf(x)\,\mathrm{d}x=0$. 求证:

$$\int_{-1/a}^a x^2f(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_{-1/a}^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

解. 分$0<a\leq 1$和$a>1$两种情况讨论. □

问题 6.5.32: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设在点$x=0$的某邻域U内, $f(x)$可展成泰勒级数, 且对任意正整数n, 皆有

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}.$$

证明: 在U内, 恒有$f(x)=x^2$.

问题 6.5.33: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x^2+y^2}$, 证明: $\lim_{x\to+\infty}y(x)$和$\lim_{x\to-\infty}y(x)$都存在.

解. 用单调有界定理. □

问题 6.5.34: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

求幂级数$\sum_{n=1}^\infty\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$的收敛域与和函数.

问题 6.5.35: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{(n+i+1)^2}+\frac{1}{(n+i+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+i+i)^2}\right).$$

解. 用重积分得$\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$. □

问题 6.5.36

设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\subset C_{[a,b]}$, 且$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$, 则$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 因$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in[a,b]$, 所以$f\in C_{[a,b]}$且$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当$n>N$时, $\forall x\in[a,b]$均有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. $f(x), f_n(x)$连续必可积, 有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|<(b-a)\varepsilon.$$

其实当$a\le x\le b$时, 有$\left|\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|<(b-a)\varepsilon$对$x$一致成立, 所以$\int_a^x f_n(x)\,\mathrm{d}t\rightrightarrows\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. □

问题 6.5.37

$f_n(x)$在$[a,b]$上都有连续导数, 且$f_n(x)\to f(x)$, $f_n'(x)\rightrightarrows g(x)$, 则$f'(x)=g(x)$, 即$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)$.

解. 因$f_n'\rightrightarrows g$, 所以g连续, 可积, 由6.5.55, $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$, 所以$f'(x)=g(x)$. 其实$f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$在$[a,b]$上也一致收敛.

若6.5.55和本问题中的$f_n(x)$视为函数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$的前$n$项部分和, 就有函数项级数的相应命题.

(1). 若$[a,b]$上$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$中每项$u_k$均连续, 且$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\rightrightarrows f(x)$, 则$f(x)\in C_{[a,b]}$且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2). 若$[a,b]$上, $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$的每项都有连续导数$u_k'(x)$且$\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(x)\rightrightarrows g(x)$, 而$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\to f(x)$. 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(x).$$

□

问题 6.5.38

举反例:

(1) 积分的极限不等于极限的积分的函数列.

(2) 导数的极限不等于极限的导数的函数列.

解. (1). 在$[0,1]$上极限函数为0, 但f_n在$\left[0,\frac{1}{n}\right]$上面积为1的脉冲函数.

(2). $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$, $x\in[-1,1]$. □

问题 6.5.39: http://math.stackexchange.com/questions/2143014

证明: 对于任意的$\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|\frac{\alpha-n}{\alpha+n}\right|$发散.

问题 6.5.40: http://math.stackexchange.com/questions/472007

判断$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{\sin n}{n+10\sin n}$的敛散性.

解. 其实, 若$f(n)$是有界函数, 且级数$\sum_{n=1}^{n}\frac{f(n)}{n}$收敛, a是使任意的n都有$n+af(n)\neq 0$, 则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n+af(n)}$.

这是因为

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{f(n)}{n+af(n)}=\sum_{n=1}^{m}\frac{f(n)}{n}+\sum_{n=1}^{m}\frac{-af^2(n)}{n(n+af(n))}$$

后一个和式用比较判别法. □

问题 6.5.41: http://math.stackexchange.com/questions/273559

判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n)}{n}$的敛散性.

解. 比较判别法, $[k\pi+\frac{\pi}{6},(k+1)\pi-\frac{\pi}{6}]$中总有至少一个整数.

或用$\sum\frac{\sin^2(n)}{n}=\sum\frac{1}{2n}-\sum\frac{\cos(2n)}{2n}$, 前者发散, 后者用Dirichlet判别法. □

问题 6.5.42: http://math.stackexchange.com/questions/991652

证明$\int_0^1\left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right|\,\mathrm{d}x$发散.

解. 变量替换, 积分化为$\int_1^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$, 然后在子区间$(k\pi,(k+1)\pi)$上求下界. □

问题 6.5.43: http://math.stackexchange.com/questions/620449

证明: 求$p\in\mathbb{R}$, 使积分$\int_0^{\infty}\frac{x^p}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$发散.

解. $p\geq -1$. □

问题 6.5.44: http://math.stackexchange.com/questions/596511

计算

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

解. 用Frullani积分. 结果为$\log 2$. 或用重积分: $\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}=x\int_1^2\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. 这里给出Frullani积分证明过程的做法.

$$\begin{aligned}\int_a^b\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x&=\int_a^b\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{2a}^{2b}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\left(\int_a^b-\int_{2a}^{2b}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\left(\int_a^{2a}-\int_b^{2b}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\to\log(2)-0,\quad a\to 0,b\to\infty\end{aligned}$$

上式最后一步用$\mathrm{e}^{-2c}\log(2)\leq\int_c^{2c}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\leq\mathrm{e}^{-c}\log(2)$. □

问题 6.5.45: http://math.stackexchange.com/questions/590774

已知$a>b>0$, 求$\lim_{t\to 0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)$.

解. 注意到$\Gamma(t)=a^t\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-as}}{s^{1-t}}\,\mathrm{d}s$, 所以

$$\lim_{t\to 0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$$

然后用Frullani积分算得$\log\frac{a}{b}$. □

问题 6.5.46: http://math.stackexchange.com/questions/590774

已知$a>b>0$, 求$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$.

解. 可以用Frullani积分. 这里用含参积分求导的方法, 定义$I(t)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-tx}}{x}\,\mathrm{d}x$, 被积函数记为$f(x,t)$, 由$f(x,t)$和$f_t(x,t)$在定义域均连续, $I(t)$关于t收敛且$\int_0^\infty f_t(x,t)\,\mathrm{d}x$关于$t$一致收敛, 则满足积分号下求导条件, 所以$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{a}$, $I=-\log t$. □

解.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^\infty \frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_\epsilon^\infty \frac{\exp(-ax)}{x}dx-\int_\epsilon^\infty \frac{\exp(-bx)}{x}dx\right]\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{a\epsilon}^\infty \frac{\exp(-t)}{t}dt-\int_{b\epsilon}^\infty \frac{\exp(-t)}{t}dt\right]\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{\exp(-t)}{t}dt=\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b \frac{\exp(-\epsilon u)}{u}du\end{aligned}$$

最后的被积函数一致收敛到$\frac{1}{u}$. □

解. 用Laplace变换, $F(s)=\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 则

$$F(s)=\int_0^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}e^{-sx}dx \implies F'(s)=-\int_0^\infty (e^{-bx}-e^{-ax})e^{-sx}dx.$$

计算最后一个积分, 然后求积分并令$s\to 0$, 其中积分出来的积分常数用极限$\lim_{s\to\infty}F(s)=0$计算. □

问题 6.5.47: http://math.stackexchange.com/questions/164400

求$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}x=\log t$, 其中$t>0$.

解. 让$u=\mathrm{e}^{-x}$, 得

$$\int_0^1 \frac{u^{t-1}-1}{\log u}\,\mathrm{d}u=\int_0^1\int_1^t u^{s-1}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u=\int_1^t\int_0^1 u^{s-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s=\log t.$$

□

解. 同6.5.65的解法一. □

解. 用重积分求解, $I(t)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\int_1^t \mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x$. 这里验证积分次序可交换, 则

$$LHS=\int_1^t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s=\ln t.$$

□

解. 用Laplace变换, $g(s)=L[f(x)]=L\left[\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\right]$, 则$-g'(s)=L[xf(x)]=\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}$. 所以$g(s)=\log\frac{s+b}{s+a}+c$, 由于$g(\infty)=0$, 所以$c=0$. 从而

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x=\log\frac{s+b}{s+a}.$$

令$s=0$即可. □

解. 用Laplace变换, $L[1]=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{s}$, 则

$$LHS=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt})\mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+t}\right)=\ln\frac{s+1}{s+t}\Big|_0^{\infty}=\ln t$$

□

问题 6.5.48: http://tieba.baidu.com/p/2686576086

设$f(x)$在实轴$\mathbb{R}$上有二阶导数, 且满足方程

$$2f(x)+f''(x)=-xf'(x).$$

求证$f(x)$和$f'(x)$都在$\mathbb{R}$上有界.

解. 构造$L=f^2+\frac{1}{2}f'^2$, 研究L'. 方程可改成$f''(x)+\frac{x}{2}f'(x)+f(x)=0$. □

问题 6.5.49: http://tieba.baidu.com/p/3846349760

证明: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

解. 由于$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 且$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调增加, 则$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$, 于是$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, 从而$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)>\ln n$, 即得. □

问题 6.5.50: http://tieba.baidu.com/p/4931607145

设$f(x)$在$[a,b]$上可导, $f'(x)$在$[a,b]$上可积. 令

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\cdot\frac{b-a}{n}\right)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

试证

$$\lim_{n\to\infty}nA_n=\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)].$$

解. 令$x_i=a+i\cdot\frac{b-a}{n}$, 则

$$\begin{aligned}nA_n&=n\left[\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n}-\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\&=n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x\\&=n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

在$[x_{i-1},x_i]$上, (x_i-x)保号, 而$g(x)=\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}$连续(补充定义$g(x_i)=f'(x_i)$). 由积分第一中值定理知, 存在$\eta_i\in(x_{i-1},x_i)$, 使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x=g(\eta_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x.$$

再由Lagrange中值定理, 以上$g(\eta_i)=\frac{f(x_i)-f(\eta_i)}{\eta_i-x}=f'(\xi_i)$, $(\xi_i\in(\eta_i,x_i)\subset(x_{i-1},x_i))$. 于是

$$\begin{aligned}nA_n&=n\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x=\frac{n}{2}\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})^2\\&=\frac{n}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\\&\to\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)),\text{当}n\to\infty.\end{aligned}$$

□

问题 6.5.51

$\int_0^1\frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{64}\sqrt[4]{2}\pi$.

问题 6.5.52

求证:

$$\int_0^\infty\frac{\sin^3x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{8}$$

解. 让$f(y)=\int_0^\infty\frac{\sin^3yx}{x^3}\,\mathrm{d}x$, 判断积分号下可求导, 有

$$f''(y)=\frac{3}{4}\int_0^\infty\frac{-\sin yx+3\sin 3yx}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}\mathrm{sign}y.$$

□

解. 用$\sum_{k=1}^\infty\frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi-x}{2}$, 由

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\sin^3(kx)}{k^3}=\frac{9\sin(3kx)-3\sin(kx)}{4k}.$$

则

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{9\sin(3kx)-3\sin(kx)}{4k}=\frac{3\pi}{4}-3x.$$

积分后得:

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{\sin^3(kx)}{k^3}=\frac{3\pi}{8}x^2-\frac{1}{2}x^3.$$

取$x=\frac{1}{n}$后两边同乘n^2得

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n}=\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{2n}.$$

而广义 Riemann 和显示

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^\infty\frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n}=\int_0^\infty\frac{\sin^3x}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

广义 Riemann 和成立的条件是 $\sum_{k=0}^\infty\sup_{x\in[k,k+1]}|f'(x)|<\infty$? 这不等式蕴含 $\int_0^\infty|f'|\,\mathrm{d}x<+\infty$, $f'\in L^1(0,\infty)$. □

解. 用 Parseval 定理

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(s)G(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中$F(s)=\mathcal{F}[f]$, $G(s)=\mathcal{F}[g]$, $\mathcal{F}[f]=\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\,\mathrm{d}x$. 若$f(x)=\frac{\sin x}{x}$, 则

$$F(s)=\begin{cases}\pi, & |s|\le 1\\ 0, & |s|>1,\end{cases}$$

若$g(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$, 则

$$G(s)=\begin{cases}\pi\left(1-\dfrac{|s|}{2}\right),|s|\le 2\\ 0,|s|>2,\end{cases}$$

所以$\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\pi^2\left(1-\frac{|s|}{2}\right)\mathrm{d}s=\frac{3\pi}{4}$. 即$\int_0^\infty\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{8}$. □

解. 用 Laplace 变换 $F(s)=\mathcal{L}[f]=\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 对于$f(x)=\frac{\sin^3 x}{x^3}$有

$$F(s)=\frac{\pi s^2}{8}+\frac{3\pi}{8}-\frac{3(s^2-1)}{8}\arctan s+\frac{s^2-9}{8}\arctan\frac{s}{3}+\frac{3s}{8}\ln\frac{s^2+1}{s^2+9}.$$

□

解. 用 Laplace 恒等式

$$\int_0^\infty F(u)g(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^\infty f(u)G(u)\,\mathrm{d}u, F(s)=\mathcal{L}[f(t)],G(s)=\mathcal{L}[g(t)].$$

让 $G(u)=\frac{1}{u^3}$ 得 $g(u)=\frac{u^2}{2}$, 让 $f(u)=\sin^3 u$ 得 $F(u)=\frac{6}{(u^2+1)(u^2+9)}$, 则

$$\int_0^\infty\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{6}{2}\int_0^\infty\frac{u^2}{(u^2+1)(u^2+9)}\,\mathrm{d}u=\frac{3\pi}{8}.$$

□

解. 留数定理, 由 $\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4}$ 得 $\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4x^3}\,\mathrm{d}x$. 围道 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$, $\gamma_1=[r,R]$, γ_2 是以 $(0,0)$ 为心 R 为径的上半圆, $\gamma_3=[-R,-r]$, γ_4 为以 $(0,0)$ 为心 r 为径的上半圆, γ 取逆时针方向为正方向. 取 $f(z)=\frac{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}z}}{z^3}$, 则 f 在 γ 内解析, 由 Cauchy-Goursat 公式

$$\oint_\gamma f(z)=0, \tag{6.1}$$

并用 Laurent 展开或留数定理得

$$\int_{\gamma_4}f(z)\,\mathrm{d}z=-\frac{3\pi\mathrm{i}}{4},\ \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2}f(z)\,\mathrm{d}z=0,\ \lim_{\substack{r\to0\\R\to\infty}}\int_{\gamma_1\cup\gamma_3}f(z)\,\mathrm{d}z=2\mathrm{i}\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x.$$

代入6.2即得. □

问题 6.5.53

设函数$f:(a,b)\to\mathbb{R}$连续可微, 又设对于任意的$x,y\in(a,b)$, 存在唯一的$z\in(a,b)$使得$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(z)$. 证明: $f(x)$严格凸或严格凹.

解. 反证法, 构造λ的函数

$$\Lambda(\lambda)=f(\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta)-\lambda f(\alpha)-(1-\lambda)f(\beta),\quad \lambda\in(0,1)$$

若结论不真, 则存在$\alpha,\beta\in(a,b)$使$\Lambda(\lambda)$在$(0,1)$的某两点异号, 由于f连续, 所以存在$\lambda_0\in(0,1)$使$\Lambda(\lambda_0)=0$.

设$\gamma=\lambda_0\alpha+(1-\lambda_0)\beta$, 则$\gamma\in(\alpha,\beta)\subset(a,b)$且 $\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$. 再由拉格朗日中值定理得出矛盾. □

问题 6.5.54

设函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上无限可微, 且:

a) 存在$L>0$, 使得对于任意的$x\in\mathbb{R}$及$n\in\mathbb{N}$有$|f^{(n)}(x)|\le L$.

b) $f\left(\frac{1}{n}\right)=0$, 对所有$n=1,2,3\cdots$.

求证: $f(x)\equiv 0$.

解. 由f在$\mathbb{R}$上无限次可微, 且由a)知f有在$x=0$处的Taylor展开

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots.$$

设N是使$f^{(N)}(0)\neq 0$的最小者, 取正整数$M>1$使$|f^{(N)}(0)|>\frac{L}{M-1}$. 则

$$\begin{aligned}0=\left|f\left(\frac{1}{M}\right)\right|&=\left|f^{(N)}(0)\frac{x^N}{N!}+f^{(N+1)}(0)\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}+\cdots\right|\\&\ge|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-L\left(\frac{1}{(N+1)!M^{N+1}}+\frac{1}{(N+2)!M^{N+2}}+\cdots\right)\\&\ge|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-L\left(\frac{1}{N!M^{N+1}}+\frac{1}{N!M^{N+2}}+\cdots\right)\\&=|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-\frac{L}{N!}\frac{1}{M^{N+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{M}}\\&=\left(|f^{(N)}(0)|-\frac{L}{M-1}\right)\frac{1}{N!M^N}>0.\end{aligned}$$

这导致矛盾, 即所有$f^{(n)}(0)=0$, $f(x)\equiv 0$. □

问题 6.5.55

设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\subset C_{[a,b]}$, 且$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$, 则$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 因$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in[a,b]$, 所以$f\in C_{[a,b]}$且$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当$n>N$时, $\forall x\in[a,b]$均有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. $f(x),f_n(x)$连续必可积, 有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|<(b-a)\varepsilon.$$

其实当$a\le x\le b$时, 有$\left|\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|<(b-a)\varepsilon$对$x$一致成立, 所以$\int_a^x f_n(x)\,\mathrm{d}t\rightrightarrows\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. □

问题 6.5.56

$f_n(x)$在$[a,b]$上都有连续导数, 且$f_n(x)\to f(x)$, $f_n'(x)\rightrightarrows g(x)$, 则$f'(x)=g(x)$, 即$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)$.

解. 因$f_n'\rightrightarrows g$, 所以g连续, 可积, 由6.5.55, $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$, 所以$f'(x)=g(x)$. 其实$f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$在$[a,b]$上也一致收敛.

若6.5.55和本问题中的$f_n(x)$视为函数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$的前$n$项部分和, 就有函数项级数的相应命题.

(1). 若$[a,b]$上$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$中每项$u_k$均连续, 且$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\rightrightarrows f(x)$, 则$f(x)\in C_{[a,b]}$且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2). 若$[a,b]$上, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$的每项都有连续导数$u_k'(x)$且$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \rightrightarrows g(x)$, 而$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \to f(x)$. 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x).$$

□

问题 6.5.57

举反例:

(1) 积分的极限不等于极限的积分的函数列.

(2) 导数的极限不等于极限的导数的函数列.

解. (1). 在$[0,1]$上极限函数为0, 但f_n在$\left[0,\frac{1}{n}\right]$上面积为1的脉冲函数.
(2). $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$, $x\in[-1,1]$. □

问题 6.5.58: http://math.stackexchange.com/questions/2143014

证明: 对于任意的$\alpha \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left|\frac{\alpha-n}{\alpha+n}\right|$发散.

问题 6.5.59: http://math.stackexchange.com/questions/472007

判断$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n+10\sin n}$的敛散性.

解. 其实, 若$f(n)$是有界函数, 且级数$\sum_{n=1}^{n} \frac{f(n)}{n}$收敛, a是使任意的n都有$n+af(n)\neq 0$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n+af(n)}$.
这是因为

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{f(n)}{n+af(n)} = \sum_{n=1}^{m} \frac{f(n)}{n} + \sum_{n=1}^{m} \frac{-af^2(n)}{n(n+af(n))}$$

后一个和式用比较判别法. □

问题 6.5.60: http://math.stackexchange.com/questions/273559

判断$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n}$的敛散性.

解. 比较判别法, $[k\pi+\frac{\pi}{6},(k+1)\pi-\frac{\pi}{6}]$中总有至少一个整数.
或用$\sum \frac{\sin^2(n)}{n} = \sum \frac{1}{2n} - \sum \frac{\cos(2n)}{2n}$, 前者发散, 后者用Dirichlet判别法. □

问题 6.5.61: http://math.stackexchange.com/questions/991652

证明$\int_0^1 \left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right| \mathrm{d}x$发散.

解. 变量替换, 积分化为$\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$, 然后在子区间$(k\pi,(k+1)\pi)$上求下界. □

问题 6.5.62: http://math.stackexchange.com/questions/620449

证明: 求$p\in\mathbb{R}$, 使积分$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$发散.

解. $p\geq -1$. □

问题 6.5.63: http://math.stackexchange.com/questions/596511

计算

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

解. 用Frullani积分. 结果为$\log 2$. 或用重积分: $\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}=x\int_1^2 \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. 这里给出Frullani积分证明过程的做法.

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{2a}^{2b} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\int_a^b - \int_{2a}^{2b}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\int_a^{2a} - \int_b^{2b}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \to \log(2)-0, \quad a\to 0, b\to\infty\end{aligned}$$

上式最后一步用$\mathrm{e}^{-2c}\log(2)\le \int_c^{2c}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \le \mathrm{e}^{-c}\log(2)$. □

问题 6.5.64: http://math.stackexchange.com/questions/590774

已知$a>b>0$, 求$\lim_{t\to 0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)$.

解. 注意到$\Gamma(t)=a^t\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-as}}{s^{1-t}}\,\mathrm{d}s$, 所以

$$\lim_{t\to 0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$$

然后用Frullani积分算得$\log\frac{a}{b}$. □

问题 6.5.65: http://math.stackexchange.com/questions/590774

已知$a>b>0$, 求$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$.

解. 可以用Frullani积分. 这里用含参积分求导的方法, 定义$I(t)=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-tx}}{x}\,\mathrm{d}x$, 被积函数记为$f(x,t)$, 由$f(x,t)$和$f_t(x,t)$在定义域均连续, $I(t)$关于t收敛且$\int_0^{\infty}f_t(x,t)\,\mathrm{d}x$关于$t$一致收敛, 则满足积分号下求导条件, 所以$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{a}$, $I=-\log t$. □

解.

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\exp(-ax)}{x}dx-\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\exp(-bx)}{x}dx\right] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{a\epsilon}^{\infty}\frac{\exp(-t)}{t}dt-\int_{b\epsilon}^{\infty}\frac{\exp(-t)}{t}dt\right] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a\epsilon}^{b\epsilon}\frac{\exp(-t)}{t}dt=\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b\frac{\exp(-\epsilon u)}{u}du\end{aligned}$$

最后的被积函数一致收敛到$\frac{1}{u}$. □

解. 用Laplace变换, $F(s)=\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 则

$$F(s)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}e^{-sx}dx \implies F'(s)=-\int_0^{\infty}(e^{-bx}-e^{-ax})e^{-sx}dx.$$

计算最后一个积分, 然后求积分并令$s\to 0$, 其中积分出来的积分常数用极限$\lim_{s\to\infty}F(s)=0$计算. □

问题 6.5.66: http://math.stackexchange.com/questions/164400

求$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}x=\log t$, 其中$t>0$.

解. 让$u=\mathrm{e}^{-x}$, 得

$$\int_0^1 \frac{u^{t-1}-1}{\log u}\,\mathrm{d}u=\int_0^1\int_1^t u^{s-1}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u=\int_1^t\int_0^1 u^{s-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s=\log t.$$

□

解. 同6.5.65的解法一. □

解. 用重积分求解, $I(t)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\int_1^t \mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x$. 这里验证积分次序可交换, 则

$$LHS=\int_1^t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s=\ln t.$$

□

解. 用Laplace变换, $g(s)=L[f(x)]=L\left[\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\right]$, 则$-g'(s)=L[xf(x)]=\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}$. 所以$g(s)=\log\frac{s+b}{s+a}+c$, 由于$g(\infty)=0$, 所以$c=0$. 从而

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x=\log\frac{s+b}{s+a}.$$

令$s=0$即可. □

解. 用Laplace变换, $L[1]=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{s}$, 则

$$LHS=\int_0^\infty\int_0^\infty(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt})\mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+t}\right)=\ln\frac{s+1}{s+t}\Big|_0^\infty=\ln t$$

□

问题 6.5.67: http://tieba.baidu.com/p/2686576086

设$f(x)$在实轴$\mathbb{R}$上有二阶导数, 且满足方程

$$2f(x)+f''(x)=-xf'(x).$$

求证$f(x)$和$f'(x)$都在$\mathbb{R}$上有界.

解. 构造$L=f^2+\frac{1}{2}f'^2$, 研究L'. 方程可改成$f''(x)+\frac{x}{2}f'(x)+f(x)=0$. □

问题 6.5.68: http://tieba.baidu.com/p/3846349760

证明: $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}$发散.

解. 由于$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 且$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调增加, 则$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$, 于是$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, 从而$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)>\ln n$, 即得. □

问题 6.5.69: http://tieba.baidu.com/p/4931607145

设$f(x)$在$[a,b]$上可导, $f'(x)$在$[a,b]$上可积. 令

$$A_n=\sum_{i=1}^n f\left(a+i\cdot\frac{b-a}{n}\right)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

试证

$$\lim_{n\to\infty} nA_n=\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)].$$

解. 令$x_i = a + i\cdot\frac{b-a}{n}$, 则

$$
\begin{aligned}
nA_n &= n\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n} - \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\
&= n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x\\
&= n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

在$[x_{i-1},x_i]$上, (x_i-x)保号, 而$g(x)=\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}$连续(补充定义$g(x_i)=f'(x_i)$). 由积分第一中值定理知, 存在$\eta_i\in(x_{i-1},x_i)$, 使得

$$
\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x = g(\eta_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x.
$$

再由Lagrange中值定理, 以上$g(\eta_i)=\frac{f(x_i)-f(\eta_i)}{\eta_i-x}=f'(\xi_i)$, $(\xi_i\in(\eta_i,x_i)\subset(x_{i-1},x_i))$. 于是

$$
\begin{aligned}
nA_n &= n\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x = \frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})^2\\
&= \frac{n}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\\
&\to \frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)), \text{当} n\to\infty.
\end{aligned}
$$

□

问题 6.5.70

$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{64}\sqrt[4]{2}\pi.$

问题 6.5.71

求证:

$$
\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8}
$$

解. 让$f(y)=\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 yx}{x^3}\,\mathrm{d}x$, 判断积分号下可求导, 有

$$
f''(y) = \frac{3}{4}\int_0^{\infty}\frac{-\sin yx + 3\sin 3yx}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}\mathrm{sign}y.
$$

□

解. 用$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi-x}{2}$, 由

$$
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\sin^3(kx)}{k^3} = \frac{9\sin(3kx)-3\sin(kx)}{4k}.
$$

则

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9\sin(3kx)-3\sin(kx)}{4k} = \frac{3\pi}{4}-3x.
$$

积分后得:

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^3(kx)}{k^3} = \frac{3\pi}{8}x^2-\frac{1}{2}x^3.
$$

取$x=\frac{1}{n}$后两边同乘n^2得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n}=\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{2n}.$$

而广义 Riemann 和显示

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n}=\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

广义 Riemann 和成立的条件是 $\sum_{k=0}^{\infty}\sup_{x\in[k,k+1]}|f'(x)|<\infty$? 这不等式蕴含 $\int_0^{\infty}|f'|\,\mathrm{d}x<+\infty$, $f'\in L^1(0,\infty)$. □

解. 用 Parseval 定理

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(s)G(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中$F(s)=\mathcal{F}[f]$, $G(s)=\mathcal{F}[g]$, $\mathcal{F}[f]=\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\,\mathrm{d}x$. 若$f(x)=\frac{\sin x}{x}$, 则

$$F(s)=\begin{cases}\pi, & |s|\le 1\\ 0, & |s|>1,\end{cases}$$

若$g(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$, 则

$$G(s)=\begin{cases}\pi\left(1-\dfrac{|s|}{2}\right), |s|\le 2\\ 0, |s|>2,\end{cases}$$

所以$\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\pi^2\left(1-\frac{|s|}{2}\right)\,\mathrm{d}s=\frac{3\pi}{4}$. 即$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{8}$. □

解. 用 Laplace 变换 $F(s)=\mathcal{L}[f]=\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 对于$f(x)=\frac{\sin^3 x}{x^3}$有

$$F(s)=\frac{\pi s^2}{8}+\frac{3\pi}{8}-\frac{3(s^2-1)}{8}\arctan s+\frac{s^2-9}{8}\arctan\frac{s}{3}+\frac{3s}{8}\ln\frac{s^2+1}{s^2+9}.$$

□

解. 用 Laplace 恒等式

$$\int_0^{\infty}F(u)g(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^{\infty}f(u)G(u)\,\mathrm{d}u, F(s)=\mathcal{L}[f(t)], G(s)=\mathcal{L}[g(t)].$$

让 $G(u)=\frac{1}{u^3}$ 得 $g(u)=\frac{u^2}{2}$, 让 $f(u)=\sin^3 u$ 得 $F(u)=\frac{6}{(u^2+1)(u^2+9)}$, 则

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{6}{2}\int_0^{\infty}\frac{u^2}{(u^2+1)(u^2+9)}\,\mathrm{d}u=\frac{3\pi}{8}.$$

□

解. 留数定理, 由 $\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4}$ 得 $\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4x^3}\,\mathrm{d}x$. 围道 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$, $\gamma_1=[r,R]$, γ_2 是以 $(0,0)$ 为心 R 为径的上半圆, $\gamma_3=[-R,-r]$, γ_4 为以 $(0,0)$ 为心 r 为径的上半圆, γ 取逆时针方向为正方向. 取 $f(z)=\frac{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}z}}{z^3}$, 则 f 在 γ 内解析, 由 Cauchy-Goursat 公式

$$\oint_{\gamma}f(z)=0, \tag{6.2}$$

并用 Laurent 展开或留数定理得

$$\int_{\gamma_4}f(z)\,\mathrm{d}z=-\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}, \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2}f(z)\,\mathrm{d}z=0, \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}}\int_{\gamma_1\cup\gamma_3}f(z)\,\mathrm{d}z=2\mathrm{i}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\,\mathrm{d}x.$$

代入6.2即得. □

问题 6.5.72

设函数$f:(a,b)\to\mathbb{R}$连续可微, 又设对于任意的$x,y\in(a,b)$, 存在唯一的$z\in(a,b)$使得$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(z)$. 证明: $f(x)$严格凸或严格凹.

解. 反证法, 构造λ的函数

$$\Lambda(\lambda)=f(\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta)-\lambda f(\alpha)-(1-\lambda)f(\beta),\quad \lambda\in(0,1)$$

若结论不真, 则存在$\alpha,\beta\in(a,b)$使$\Lambda(\lambda)$在$(0,1)$的某两点异号, 由于f连续, 所以存在$\lambda_0\in(0,1)$使$\Lambda(\lambda_0)=0$.

设$\gamma=\lambda_0\alpha+(1-\lambda_0)\beta$, 则$\gamma\in(\alpha,\beta)\subset(a,b)$且$\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$. 再由拉格朗日中值定理得出矛盾. □

问题 6.5.73

设函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上无限可微, 且:

a) 存在$L>0$, 使得对于任意的$x\in\mathbb{R}$及$n\in\mathbb{N}$有$|f^{(n)}(x)|\le L$.

b) $f\left(\frac{1}{n}\right)=0$, 对所有$n=1,2,3\cdots$.

求证: $f(x)\equiv 0$.

解. 由f在$\mathbb{R}$上无限次可微, 且由a)知f有在$x=0$处的Taylor展开

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots.$$

设N是使$f^{(N)}(0)\neq 0$的最小者, 取正整数$M>1$使$|f^{(N)}(0)|>\frac{L}{M-1}$. 则

$$\begin{aligned}
0=\left|f\left(\frac{1}{M}\right)\right|&=\left|f^{(N)}(0)\frac{x^N}{N!}+f^{(N+1)}(0)\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}+\cdots\right|\\
&\ge|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-L\left(\frac{1}{(N+1)!M^{N+1}}+\frac{1}{(N+2)!M^{N+2}}+\cdots\right)\\
&\ge|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-L\left(\frac{1}{N!M^{N+1}}+\frac{1}{N!M^{N+2}}+\cdots\right)\\
&=|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-\frac{L}{N!}\frac{1}{M^{N+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{M}}\\
&=\left(|f^{(N)}(0)|-\frac{L}{M-1}\right)\frac{1}{N!M^N}>0.
\end{aligned}$$

这导致矛盾, 即所有$f^{(n)}(0)=0$, $f(x)\equiv 0$. □

Chapter 7

实变函数

问题 7.0.1

构造一个从$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$到$\mathbb{R}$的单射.

解. This is slightly more complicated. If you understand why $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ and $2^{\mathbb{N}}$ have the same cardinality, it's enough to observe that the map defined above had range $2^{\mathbb{N}}$; if you haven't seen that yet, then here's a straightforward (if somewhat unnatural) injection: given $\alpha = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, let $f(\alpha)$ be the real with binary expansion

$$0.0\ldots010\ldots010\ldots01\ldots$$

where the ith block of zeroes has length $a_i + 1$. □

问题 7.0.2

设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$是$E=[a,b]$上实函数列, 满足: $f_1(x)\le f_2(x)\le\cdots\le f_n(x)\le\cdots$, 且$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$, $\forall x\in E$. 求证: 对任意$c\in\mathbb{R}$,

(I) $E(f(x)>c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n(x)>c)$.

(II) $E(f(x)\le c)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f_n(x)\le c)$.

解. (I). 对于任意的$x_0\in E(f(x)>c)$, 有$f(x_0)>c$且$x_0\in E$, 因为$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)=f(x_0)$, 所以存在$n_0$, 使得$f_{n_0}(x_0)>c$, 故$x_0\in E(f_{n_0}(x_0)<c)$, 于是$x_0\in\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n(x)>c)$. 反之, 若$x_0\in\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n(x)>c)$, 则存在$n_0$, 使得$f_{n_0}(x_0)>c$且$x_0\in E$, 由单调性, $f(x_0)\ge f_{n_0}(x_0)>c$. 故$x_0\in E(f(x)>c)$, 得证.

(II). 对(I)式取基本集$E=[a,b]$上的补集. □

问题 7.0.3

设$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$为一列集合, 定义

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \{x : x\text{属于}A_n(n\ge 1)\text{中的无穷多个}\};$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \{x : x\text{至多不属于}A_n(n\ge 1)\text{中的有限个}\};$$

试证:

(I) $\limsup_{n\to\infty} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$.

(II) $\liminf_{n\to\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$.

解. (I). 由定义

$$
\begin{aligned}
x\in\limsup_{n\to\infty}A_n &\iff x\text{属于}A_n(n\geq 1)\text{中的无穷多个}\\
&\iff \forall n\geq 1,\text{总有}k_n\geq n\text{使}x\in A_k\\
&\iff \forall n\geq 1,\text{有}x\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\\
&\iff x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k.
\end{aligned}
$$

(II).

$$
\begin{aligned}
x\in\liminf_{n\to\infty}A_n &\iff \exists n_0\text{使}x\in A_k(k\geq n)\\
&\iff \exists n_0\text{使}x\in\bigcap_{k=n_0}^{\infty}A_k\\
&\iff x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.
\end{aligned}
$$

□

问题 7.0.4

(I) 若$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$, 则$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$.

(II) 若$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$, 则$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$.

解. (I) 由条件, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$单调上升, 有$\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=A_n(\forall n\geq 1)$, 于是$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\supset\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$. 即$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\liminf_{n\to\infty}A_n\supset\limsup_{n\to\infty}A_n\supset\liminf_{n\to\infty}A_n$.

(II). 用对偶律. □

问题 7.0.5

设$A\subset\mathbb{R}$且被开区间集$G=\{I_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$所覆盖, 证明存在$G$的可列子集$G^*$覆盖$A$.

解. 对于任意的$x\in A$, 由条件存在$I_x\in G$, $x\in I_x$, 因为x为I_x的内点, 则有x的邻域$V_\delta(x)\subset I_x$且$V_\delta(x)$的端点均为有理数. 于是$\{V_\delta(x):x\in A\}$覆盖A且至多可列. 不妨设$\{V_\delta(x):x\in A\}=\{V_1,V_2,\cdots,V_n,\cdots\}$, 而由$V_n$的构造可在$G$中找到对应的$I_n$. 于是$G^*=\{I_1,I_2,\cdots,I_n,\cdots\}$即为所求. □

问题 7.0.6

E_n是$\mathbb{R}$上单调降的可测集列, 对于任意的$n\in\mathbb{N}$, 均有$E_{n+1}\supset E_n$, 且$m(E_1)<+\infty$, 则$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\lim_{n\to\infty}m(E_n)$.

解. 让$E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$, $F_k=E_k-E_{k+1}$, 则$E_1-E=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$, 且$F_k$两两不交, 则

$$
m(E_1)-m(E)=m(E_1-E)=\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k-E_{k+1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(mE_k-mE_{k+1})=mE_1-\lim_{n\to\infty}mE_n.
$$

所以$\lim_{n\to\infty}mE_n=m(E)$. 其中$m(E_1)<+\infty$不能省, 如取$E_n=(-n,n)^c$. □

问题 7.0.7: 等测覆盖定理

证明: 对任意集合$A\subset\mathbb{R}$恒有G_δ型集G, 使$G\supset A$且$mG=m^*A$

解. 任取$\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, 由外测度定义及下确界定义知, 必有开区间集列$\{I_k^{(n)} : k = 1, 2, \cdots\}$满足

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{(n)} \text{且} \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k^{(n)}) < m^* A + \frac{1}{n}.$$

令$G_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{(n)}$, $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, 则由外测度次可列可加性, $m(G_n) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k^{(n)}) < m^*(A) + \frac{1}{n}$. 显然$G_n$为开集. G为G_δ型集, 且$A \subset G \subset G_n$, $(n = 1, 2, \cdots)$. 故有

$$m^*(A) \le m^* G \le m^* G_n < m^*(A) + \frac{1}{n}.$$

于是$mG = m^* G = m^* A$. □

问题 7.0.8: 等测核心定理

证明: 若A为有界(有界可去掉)可测集, 必有F_σ型集F, 使$F \subset A$且$mF = mA$.

解. 存在$E = [\alpha, \beta] \supset A$, 设$S = E - A$, 由7.0.7, 存在$G_\delta$型集$G$使$G \supset S$, $m^* S = mG$, $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, G_n开, 令$F_n = E - G_n$, 则F_n闭, 令$F = E \cap G^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap G_n^c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, 故$F$为$F_\sigma$型集, 且$F = E \cap G^c = E - G \subset E - S \subset A$, 及

$$mF = m(E \cap G^c) = m(E - G) \ge mE - mG = mE - m^* S = mE - m^*(E - A) = m_* A = mA, F \subset A \Rightarrow mF \le mA.$$

所以$mF = mA$. □

问题 7.0.9

设E可测, $mE < +\infty$, 证明: $\forall \varepsilon > 0$, 有闭集F使$F \subset E$且$m(E - F) < \varepsilon$.

解. 由等测核心定理, 存在$F \in F_\sigma$型集, 使$F \subset E$且$mE = mF$, 设$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, F_k闭, 记$S_n = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$, 则$S_n$闭且$S_n \subset E$, 由$S_n$单调且$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n$, 所以$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$使得当$n > N$时, 有$mE - mS_n < \varepsilon$, 而$S_n \subset E$, $mS_n < +\infty$得证. □

问题 7.0.10

设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$是可测集$E$上定义的可测函数列, 证明$\sup_n f_n(x)$与$\inf_n f_n(x)$都是$E$上可测函数.

解. 其实$E(\sup_n f_n(x) > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c)$, 只证$LHS \subset RHS$. 若$x_0 \in LHS$, 则$\sup_n f_n(x_0) > c$, 记$\varepsilon = \sup_n f_n(x_0) - c$, 则对于任意的$\delta \in (0, \varepsilon)$, 存在$N$使得$f_N(x_0) > \sup_n f_n(x_0) - \delta > c$, 所以$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c)$. □

问题 7.0.11

设$mE \neq 0$, f在E上可积, 若对任何有界可测函数$\varphi(x)$, 都有$\int_E f\varphi \,\mathrm{d}x = 0$, 则$f = 0, a.e.E$.

解. 取$\varphi(x) = (\chi_{E(f\ge 0)} - \chi_{E(f<0)})(x)$, 则$0 = \int_E f\varphi \,\mathrm{d}x = \int_E |f| \,\mathrm{d}x$, 即得. □

问题 7.0.12

设$mE < +\infty$, $f(x)$在E上可积, E_n单调上升可测, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f \,\mathrm{d}x = \int_E f \,\mathrm{d}x.$$

解. 因E_n可测, 所以E可测, 令$F_1 = E_1$, $F_2 = E_2 - E_1, \cdots, F_n = E_n - E_{n-1}, \cdots$, 则$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, 且对任意$i \neq j$, $F_i \cap F_j = \emptyset$. 于是

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\cup F_n} f\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{F_n} f\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{F_k} f\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{\cup_{k=1}^{n} F_k} f\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\,\mathrm{d}x.$$

□

问题 7.0.13

证明:

$$(L)\int_0^1 \frac{x^p}{1-x} \ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p+k)^2}, \quad (p > -1).$$

解. 让$f(x) = \frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{p+n-1} \ln\frac{1}{x}$, 用Levi定理, $(L)\int_0^1 f\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} (L)\int_0^1 x^{p+n-1}\ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. □

问题 7.0.14

试证, 当f在$(a, +\infty)$上有界, 非负, (R)可积时, 则f在$(a, +\infty)$上(L)可积, 且

$$(L)\int_{(0,+\infty)} f\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^{\infty} f\,\mathrm{d}x.$$

解. 由f有界(R)可积, 对任一有限区间(a, A)有$(L)\int_{(a,A)} f\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$. 于是

$$(L)\int_{(a,+\infty)} f\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} (L)\int_{(a,A)} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} (R)\int_a^A f\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^{\infty} f\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

即得. □

问题 7.0.15

$f, |f|$在$(a, +\infty)$上有界, (R)可积, 则f在$(a, +\infty)$上(L)可积, 且

$$(L)\int_{(a,+\infty)} f\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^{\infty} f\,\mathrm{d}x.$$

解. 由7.0.14知, $|f|$在$(a, +\infty)$上(R)可积, 有$|f|$在$(a, +\infty)$上(L)可积, 且积分值相等, 于是(取$E = (a, +\infty)$)

$$(L)\int_E f^+\,\mathrm{d}x \le (L)\int_E |f|\,\mathrm{d}x = (R)\int_E |f|\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

同理$(L)\int_E f^-\,\mathrm{d}x < +\infty$. 则$f^+, f^-$的$(L)$积分和$(R)$积分相等. 从而$f$的$(L)$积分和$(R)$积分相等.

反例, $|f|$在E上(R)可积不可省, 否则考虑$\frac{\sin x}{x}$在$(0, +\infty)$上(R)可积, 但

$$(L)\int_{(0,+\infty)} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,\mathrm{d}x = (R)\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

从而$\frac{\sin x}{x}$在$(0, +\infty)$上必(L)不可积. □

Chapter 8

泛函分析

问题 8.0.1

设$X = \{f(z) : f$在$|z| < 1$内解析, 且在$|z| \leq 1$上连续$\}$, 令

$$d(f, g) = \max_{|z|=1} |f(z) - g(z)|, \quad f, g \in X.$$

求证: (X, d)是度量空间.

解. 正则性: $d(f, g) = 0 \Longleftrightarrow \max_{|z|=1} |f(z) - g(z)| = 0$, 而由最大模原理对于任意的$|z| \leq 1$, 有$|f(z) - g(z)| \leq \max_{|z|=1} |f(z) - g(z)| = 0$, 所以$f \equiv g, \forall |z| \leq 1$. □

问题 8.0.2

求证: $l^1 \subsetneqq l^p \subsetneqq l^q \subsetneqq c \subsetneqq l^\infty$, $(1 < p < q < +\infty)$.

问题 8.0.3

求证: $C[a, b] \subsetneqq L^\infty[a, b] \subsetneqq L^p[a, b] \subsetneqq L^q[a, b] \subsetneqq L[a, b]$, $(1 < q < p < +\infty)$.

问题 8.0.4

$x, y \in \mathbb{R}^n$或l^1, $x = (\xi_i)$, $y = (\eta_i)$,

$$d_p(x, y) = \left(\sum |\xi_i - \eta_i|^p\right)^{1/p}.$$

则$d_p(x, y) \geq d_q(x, y)$, $\forall 1 \leq p \leq q < +\infty$.

问题 8.0.5

设$X(n) = \{P(D) = p_n D^n + p_{n-1} D^{n-1} + \cdots + p_1 D + p_0 : p_n, \cdots, p_0 \in \mathbb{R}\}$, 其中$D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 令

$$d(P(D), Q(D)) = \sum_{i=0}^{n} |p_i - q_i|$$

其中$Q(D) = \sum_{i=0}^n q_i D^i$, $D^0 = 1$, 求证: $(X(n), d)$是度量空间.

问题 8.0.6

求证: 若$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$满足

(I) $\rho(x,x) = 0$, $\forall x \in X$, $\rho(x,y) > 0$, $\forall x \neq y$.

(II) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$, $\forall x,y,z \in X$.

则(X,ρ)是度量空间.

问题 8.0.7

求证: 度量空间中的闭球,
$$V[x_0,r] = \{x \in X : d(x,x_0) \leq r\}, r > 0, x_0 \in X$$
总是闭集, 球面$S(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0) = r\}$也是闭集, 试问: 是否恒有$V[x_0,r] = \overline{V(x_0,r)}$, 及$V[x_0,r] - V(x_0,r) = S(x_0,r) \neq \emptyset$?

解. 通常的离散拓扑, 取$r = 1$. □

问题 8.0.8

设$A \subset (X,d)$, 令$F(x) = d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y)$, 求证: $F : X \to \mathbb{R}$是连续泛函且一致连续.

解. 设$x_1, x_2 \in X$, 由$d(x_1,A) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,A) \implies |F(x_1) - F(x_2)| \leq d(x_1,x_2)$, 于是$F(x)$是$X$上 Lipschitz 连续的, 从而一致连续. □

问题 8.0.9

求证: $K : C[a,b] \to C[a,b]$, $x(t) \mapsto \int_a^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$一致连续.

解. $\|Kx - Ky\|_C = \max_{t\in[a,b]} \left|\int_a^t (x(\tau) - y(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right| \leq (b-a)\|x - y\|_C$. □

问题 8.0.10

设E_1, E_2为赋范空间X的子集, 则

(1) 若E_1紧, E_2闭, 则$E_1 + E_2$闭.

(2) E_1, E_2闭, 则$E_1 + E_2$不一定闭.

解.

(1) 设$z \in \overline{E_1 + E_2}$, 则有$z_n \to z$, $z_n = x_n + y_n$, $x_n \in E_1$, $y_n \in E_2$, $x_{n_k} \to x \in E_1$, 故$y_{n_k} = z_{n_k} - x_{n_k} \to z - x \in \overline{E_2} = E_2$, $x \in E_1$, 所以$z = x + (z - x) \in E_1 + E_2$, 所以$\overline{E_1 + E_2} \subset E_1 + E_2$.

(2) $E_1 = \left\{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, $E_2 = \{-n : n \in \mathbb{N}\}$, 对于任意的$p, n \geq 1$,
$$p + \frac{1}{n+p} = \left(n + p + \frac{1}{n+p}\right) + (-n) \in E_1 + E_2 \implies p \in \overline{E_1 + E_2},$$
若$p \in E_1 + E_2$, 则$p = \left(n + \frac{1}{n}\right) + (-m)$, 于是$n(m + p - n) = 1$, 当$n = 1$, $m = 2 - p$时才可能成立, $p \geq 2$时, $p \notin E_1 + E_2$, 不闭.

□

问题 8.0.11

设E_1, E_2是赋范空间X的子集, E_1紧, E_2闭, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, 证存在$r > 0$使得$(E_1 + U(0,r)) \cap E_2 = \emptyset$, $U(0,r) = \{x \in X : \|x\| < r\}$.

解. 令$g(x) = d(x, E_2)$, $(x \in X)$. 因E_1紧, 则E_1上存在$x_1 \in E_1$使得$g(x_1) \le g(x)$, $(x \in E_1)$. 则$x_1 \notin E_2$.

由E_2闭, 所以$d(x_1, E_2) > 0$, 所以$g(x_1) > 0$, 设$0 < r < g(x_1)$, $x \in (E_1 + U(0,r)) \cap E_2$, 于是$x \in E_2$且$x = y + z$, $y \in E_1$, $z \in U(0,r)$, 所以$g(y) = d(y, E_2) \le d(y, x) = \|x - y\| = \|z\| < r < g(x_1)$, 而$y \in E_1$与$g(x_1) \le g(y)$矛盾. □

问题 8.0.12

$\mathrm{BV}[a,b]$是$[a,b]$上所有有界变差函数的集合, $x \in \mathrm{BV}[a,b]$, 令$\|x\| = |x(a)| + V(x)$, 则$\|\cdot\|$是$\mathrm{BV}[a,b]$上的范数.

解. $x \in \mathrm{BV}[a,b]$, $k \in K$, K是$\mathrm{BV}[a,b]$所在的数域, 若$P = (t_0, \cdots, t_n)$是$[a,b]$的任一划分,

$$S(kx, P) = \sum |kx(t_i) - kx(t_{i+1})| = |k| \cdot S(x, P) \le |k| \cdot V(x).$$

所以$V(kx) \le |k|\, V(x)$, 即$\|kx\| \le |k|\, \|x\|$.

当$k \neq 0$时, $\|x\| = \|\frac{1}{k} \cdot kx\| \le \left|\frac{1}{k}\right| \cdot \|kx\| \le \left|\frac{1}{k}\right| \cdot |k| \cdot \|x\| = \|x\|$, 故$\|kx\| = |k| \cdot \|x\|$.

$k = 0$时, 显然. □

问题 8.0.13

求证: 度量空间(X, d)中互不相交的闭集A, B, 必有互不相交的开集G, V使得$A \subset G$, $B \subset V$.

解. $A \subset B^c$故$x \in A$必有$\delta_x > 0$使$V(x, \delta_x) \subset B^c$, 所以$A \subset \bigcup_{x \in A} V(x, \delta_x) \subset B^c$, 故

$$A \subset \bigcup_{x \in A} V(x, \frac{1}{2}\delta_x) \subset \overline{\bigcup_{x \in A} V(x, \frac{1}{2}\delta_x)} \subset \bigcup_{x \in A} V(x, \delta_x) \subset B^c$$

令$G = \bigcup_{x \in A} V(x, \frac{1}{2}\delta_x)$, $V = \left(\bigcup_{x \in A} V(x, \frac{1}{2}\delta_x)\right)^c$. □

解. $F(x) = d(x, A)$是连续泛函, 令$G = \{x \in X; d(x, A) < d(x, B)\}$, 则$G = G^{-1}((-\infty, 0))$, 其中$G(x) = d(x, A) - d(x, B)$是$X$上的连续泛函, 从而$G$开且$A \subset G$. 同理$B \subset V = \{x \in X : d(x, B) < d(x, A)\}$开于$X$. □

问题 8.0.14

设$Y = \{f; f : (X, d) \to \mathbb{R}$为有界连续泛函$\}$, 令

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|,$$

设x_0为X中固定点, 令$G : X \to (Y, \rho)$, $y \mapsto d(x, y) - d(x, x_0)$, 求证: $G : (X, d) \to (G(x), \rho)$是等距映射.

解. 先证$G(X)$是(Y, ρ)的子空间, 然后证$\rho(G(y), G(z)) = d(y, z)$. □

问题 8.0.15

设$A, M \subset (X, d)$, 求证: A在M中稠密, 即$\overline{A} \supset M$的充要条件为如下任何一条成立:

(I) $\forall x \in M$的任一邻域$V_\varepsilon(x)$有$A \cap V_\varepsilon(x) \neq \emptyset$.

(II) $\forall x \in M$, 存在$\{y_n\} \subset A$, 使$y_n \to x$.

(III) 若A在B中稠密, 且B在M中稠密.

解. (I). 若$x \in M$, $\forall \varepsilon > 0$, $A \cap V_\varepsilon(x) \neq \emptyset$, 必有$x \in \overline{A}$, 即$M \subset \overline{A}$.
(II). 因$x \in \overline{A} \iff \exists y_n \in A$, 使得$y_n \to x$, 故若$\forall x \in M$, $\exists y_n \in A$使得$y_n \to x$, 则$x \in \overline{A}$.
(III). 因A在B中稠密, 故$\overline{A} \supset B$, B在M中稠密, 故$\overline{B} \supset M$, 从而$\overline{A} \supset M$. □

问题 8.0.16

求证: $l^p (1 \leq p < +\infty)$是可分的.

解. 首先$\mathbb{R}^n$是可分的, 稠子集为$\mathbb{Q}^n = \{r = (r_1, \cdots, r_n) : r_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \cdots n\}$, 令

$$M = \{r = (r_1, \cdots, r_n, 0, 0, \cdots) : n \in \mathbb{N}, r_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2, \cdots, n\},$$

则M是l^p的可列子集, 然后证$\overline{M} = l^p$. □

问题 8.0.17

求证: l^∞是不可分的.

解. 令$K = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) : x_i$或为0或为1$\}$, 则$K$不可数且$K$中人两个不同元素$x \neq y$, 有$d_\infty(x, y) = 1$, 若$l^\infty$可分且其稠子集为$B$, B可数, 作集类

$$\left\{ V\left(x, \frac{1}{3}\right) : x \in K \right\}.$$

则它为不可列集, 且两两不交, 但对于任意的$x \in K$必有$B \cap V\left(x, \frac{1}{3}\right) \neq \emptyset$, 从而$B$不可数, 矛盾. □

问题 8.0.18

设(X, d)是离散度量空间, 求证: 任一映射$F : (X, d) \to (Y, \rho)$都是一致连续的.

问题 8.0.19

设(X, d)为度量空间, $Y = \{f; f : X \to \mathbb{R}\}$为 Lipschitz 连续泛函$\}$, 即

$$f \in Y \iff \text{存在常数}k\text{使}|f(x) - f(y)| \leq k d(x, y), \forall x, y \in X.$$

(I) Y是线性空间.

(II) 问$\sigma(f, g) = \inf\{k : |f(x) - g(x) - f(y) + g(y)| \leq k d(x, y), \forall x, y \in X\}$是否为$Y$上的度量?

(III) 设$Y_0 = \{f : f \in Y, f(x_0) = 0\}$, 其中$x_0$为$X$中定点, 问$\sigma$是否为$Y_0$上的度量.

解. (II). $\sigma(f, g) = 0$未必有$f = g$, 设$f \in Y$, 令$g = f(x) + c$(c非零常数), 则$g \in Y$但$\sigma(f, g) = 0$, 因此σ不是Y上的度量(称为Y上的拟度量).
(III). 因

$$\sigma(f, g) = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - g(x) - f(y) + g(y)|}{d(x, y)},$$

故$\sigma(f, g) = 0 \iff f(x) - g(x) = f(y) - g(y) = f(x_0) - g(x_0)$, 对于任意的$x, y \in X$成立, 即$f(x) \equiv g(x)$, 对于任意的$x \in X$, 即$f = g$, 从而易得$\sigma$是$Y_0$上的度量. □

问题 8.0.20

设$f_n, f \in C[a, b]$且$d(f_n, f) \to 0$, $t_n \in [a, b]$, $t_n \to t_0$, 求证:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(t_n) = f(t_0).$$

问题 8.0.21

设$f:X\to X$连续, (X,d)为度量空间, 设$X\times X$中度量为

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=d(x_1,x_2)+d(y_1,y_2),\quad (x_i,y_i)\in X\times X.$$

定义$X\times X$的对角线集为

$$\Delta=\{(x,x):x\in X\},$$

令

$$g:\Delta\to \mathrm{Graph}(f),\quad (x,x)\mapsto (x,f(x)).$$

求证: g连续, 可逆, g^{-1}也连续.

解. $x_n,x\in X$, 因$(x_n,x_n)\to(x,x)\iff d(x_n,x)\to 0$, 所以由$f:X\to X$连续, 故$(x_n,x_n)\to(x,x)$时, $d(x_n,x)\to 0$, 从而$d(f(x_n),f(x))\to 0$, 从而

$$d((x_n,f(x_n)),(x,f(x)))=d(x_n,x)+d(f(x_n),f(x))\to 0$$

所以g连续. 然后证g是双射, 所以可逆.

$$g^{-1}:\mathrm{Graph}(f)\to\Delta,\quad (x,f(x))\mapsto(x,x),$$

于是

$$(x_n,f(x_n))\to(x,f(x))\iff d((x_n,f(x_n)),(x,f(x)))\to 0\iff d(x_n,x)\to 0\text{ 且 }d(f(x_n),f(x))\to 0\implies (x_n,x_n)\to(x,x)$$

所以g^{-1}连续. □

问题 8.0.22

求证: 同胚映射$F:(X,d)\to(Y,\rho)$, 若(X,d)可分, 则(Y,ρ)可分.

问题 8.0.23

设 Hilbert 立方体 $A=\{x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots):|\xi_n|\le\frac{1}{n},\forall n\}$, 求证$A$闭于$l^2$.

解. 显然$A\subset l^2$, 设$x_0\in\overline{A}$, 则存在$x_k=\left(\xi_i^{(k)}\right)\in A$使得$d(x_k,x_0)\to 0$, 即$\forall i$, $\left|\xi_i^{(k)}-\xi_i^{(0)}\right|\to 0$, 从而$\left|\xi_i^{(0)}\right|\le\frac{1}{i}$, 于是$x_0\in A$. 其实, A闭于$l^p(1<p\le+\infty)$. □

问题 8.0.24: http://math.stackexchange.com/questions/1087885

定义: 设(S,ρ)是一距离空间, $T:S\to S$, 若存在$\beta\in(0,1)$使对于任意$x,y\in S$, 有$\rho(Tx,Ty)\le\beta\rho(x,y)$称$T$为压缩映射.

定理 8.0.1: Blackwell's 压缩映射的充分条件

让$X\subset\mathbb{R}^l$, $B(X)$是带有上确界范数的有界函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 的全体组成的空间, 让 $T:B(X)\to B(X)$ 满足

1) (单调性), $f,g\in B(X)$ 且若 $f\le g$, $\forall x\in X$ 则 $Tf\le Tg$, $\forall x\in X$.

2) (discounting) 存在 $\beta\in(0,1)$ 使 $\forall f\in B(X)$, $a\ge 0$, $x\in X$ 有 $[T(f+a)](x)\le(Tf)(x)+\beta a$, 其中 $(f+a)(x):=f(x)+a$.

则 T 是模 β 的压缩映射.

解. 若 $f\le g$, $\forall x\in X$, 则 $\forall f,g\in B(X)$, $f\le g+\|f-g\|$, 从而

$$Tf\le T(g+\|f-g\|)\le Tg+\beta\|f-g\|.$$

交换 f,g的位置, 从而有 $\|Tf-Tg\|\le\beta\|f-g\|$. □

问题 8.0.25: http://math.stackexchange.com/questions/1125691

让 $A=(a_{ij})$ 为一 $n\times n$ 实矩阵, $b\in\mathbb{R}^n$, 并有 $\|A-I\|_2<1$, 证明映射 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $x\mapsto x-Ax+b$ 是压缩映射, 其中距离定义为普通 Euclid 距离.

解. $Tx=b-(A-I)x$, 所以 $Tx-Ty=(A-I)(y-x)$, 又因为 $\|A-I\|_2<1$, 所以存在 $\alpha\in(0,1)$ 使 $\|A-I\|_2\leq\alpha<1$,

$$\|Tx-Ty\|\leq\|A-I\|_2\cdot\|y-x\|<\alpha\|y-x\|.$$

所以 T 是压缩映射. □

问题 8.0.26: http://math.stackexchange.com/questions/1124660

让(S,ρ)为一紧距离空间, 映射$T:S\to S$使对于任意$x\neq y$, 有$\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)$. 证明: $\phi(x)=\rho(x,Tx)$连续, 且T有唯一不动点.

解. 因$|\rho(x,Tx)-\rho(y,Ty)|\leq\rho(x,y)+\rho(Tx,Ty)<2\rho(x,y)$, 所以$\phi(x)$连续. 任取$x\in S$, 构造点列$\{T^nx\}$, 并利用$S$的紧性. 唯一性用反证法. □

Chapter 9

复变函数

问题 9.0.1: http://math.stackexchange.com/questions/294383

求$\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

解. 留数法. 首先

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{x-\sinh x}{x^2\sinh x}\,\mathrm{d}x.$$

被积函数记为$f(x)$, $f(x)$是奇函数, 故

$$LHS=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-\sinh x}{x^2\sinh x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left(\frac{x-\sinh x}{x^2\sinh x},in\pi\right)=-\frac{\ln 2}{2}.$$

另见14.0.40. □

问题 9.0.2

设2×2矩阵$A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$, 其中$b\in\mathbb{R}$, 且$|a|^2+b^2=1$. 试计算$A^n$.

解. 设$a=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha\cos\beta$, $b=\sin\alpha\beta$, 于是

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & -\mathrm{i}\cos\beta\end{pmatrix},\quad A=\cos\alpha E+\sin\alpha I, E^2=E, EI=IE=I, I^2=-E.$$

所以I是2×2矩阵中的虚单位. 所以用二项式定理可得

$$A^n=\cos n\alpha E+\sin n\alpha I.$$

□

问题 9.0.3

区域D内单叶解析函数$f(z)$的导数必不为零.

Chapter 10

初等数论

问题 10.0.1

求所有的多项式$f(x)$, 满足$f(x^2+1)=f^2(x)+1$, 且$f(0)=0$.

解. 求导并让$x=0$. □

解. 定义数列$\{x_n\}$为$x_0=0$, $x_{n+1}=x_n^2+1$, 则$f(x)-x=0$有无穷多个根$\{x_n\}$. □

问题 10.0.2

设$f(x)\in\mathbb{R}[x]$, 如果对任意实数x有$f(x)\geq 0$, 则$f(x)$是两个实系数多项式的平方和.

解. 由于$f=\prod_{b,c}\left[(x-b)^2+c\right]$和$(x^2+y^2)(z^2+w^2)=(xz-yw)^2+(xw+yz)^2$. □

问题 10.0.3

证明多项式$x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-\cdots-2nx+(2n+1)$没有实根.

解. 当$x\leq 0$时, $f(x)=x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-\cdots-2nx+(2n+1)>0$; 若$x>0$, $(1+x)f(x)=f(x)+xf(x)=x\frac{x^{2n+1}+1}{x+1}+2n+1>0$, 所以对$x>0$时亦有$f(x)>0$. □

问题 10.0.4

设$f(x)$是一个整系数多项式, 首项系数为1, 且$f(0)\neq 0$. 若$f(x)$仅有一个单根α使得$|\alpha|\geq 1$, 则$f(x)$在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 反证, $f=gh$, 设$h(\alpha)=0$, 则$|g(0)|\geq 1$是其根的模之积, 又小于1, 矛盾. □

问题 10.0.5

设$a_1,\cdots,a_n$是互不相同的整数, 证明: 多项式

$$(x-a_1)\cdots(x-a_n)-1$$

在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 反证, $f=gh$, 因$f(a_i)=-1$, 知$g(a_i)+h(a_i)=0$, 由次数限制而导致矛盾. □

问题 10.0.6

给定$2n$个互不相同的复数$a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$, 将其按下列规则填入$n\times n$方格中: 第$i$行第$j$列相交处方格内填$a_i+b_j$, $(i,j=1,\cdots,n)$, 证明: 若各列数乘积相等, 则各行数的积也相等.

解. 设各列的积都为c, 则$f(x)=(x+a_1)\cdots(x+a_n)-c$, 有$n$个根$b_1,\cdots,b_n$. 所以$f(x)=\prod_j(x-b_j)$, 所以$f(-a_i)=(-1)^n\prod_j(a_i+b_j)=-c$, 即$\prod_j(a_i+b_j)=(-1)^{n+1}c$, $(\forall i)$. □

问题 10.0.7

设a,b,c为整数, $abc\neq 0$, 求证:

$$[(a,b),(b,c),(c,a)]=([a,b],[b,c],[c,a]).$$

问题 10.0.8

设$\{F_n\}$是符合$F_1=F_2=1$的裴波那契数列, 若$(m,n)=d$, 则$(F_m,F_n)=F_d$; 反之, 若$(F_m,F_n)=F_d$, 则$d=(m,n)$或$d=1$, $(m,n)=2$或$d=2$, $(m,n)=1$.

解. 先证$F_q=F_kF_{q-k+1}+F_{k-1}F_{q-k}$, 后证$m=nq+r$, $q\geq 0$, $1\leq r\leq n-1$时, $(F_m,F_n)=(F_n,F_r)$, 即$(F_m,F_n)=F_{(m,n)}$, 于是$F_d=F_{(m,n)}$的解即为结论的三种情况. □

问题 10.0.9

当a,b满足什么条件时, $3\mid n(an+1)(bn+1)$对任意n成立.

解. 根据同余理论, 只需让n分别取$1,2,3$分别代入上式, 可得$3\mid ab+1$, 即$ab\equiv 2\pmod 3$ □

问题 10.0.10

a,b正整数, $d=(a,b)$, 证$S=\{ma+nb\}$, (m,n遍历正整数)包含d的大于ab的所有倍数.

解. 设$t>ab$是d的倍数且$ax+by=t$, 由Bézout等式, 左式有解$x=x_0+br$, $y=y_0-ar$, 调整r使$0<x<b$, 得$-\frac{x_0}{b}<r<\frac{b-x_0}{b}$, 于是$y=y_0-ar>y_0-a\frac{b-x_0}{b}=\frac{t-ab}{b}>0$. □

问题 10.0.11

$4k-1$形素数无穷.

解. 反证: $p_1,p_2,\cdots,p_r$为r个有限$4k-1$形素数, 考虑$p_1^2p_2^2\cdots p_r^2-1$的因子中必有$4k-1$形素因子. 另外也可考虑$4p_1p_2\cdots p_r-1$. □

问题 10.0.12

$6k-1$形素数无穷.

解. 想法同上, 考虑$6p_1p_2\cdots p_r-1$中必有$6k-1$形素数, 却不是$p_1,p_2,\cdots p_r$中的一个. □

问题 10.0.13

$4k+1$形素数无穷.

解. $4(p_1p_2\cdots p_r)^2+1$的素因子均可写成$4k+1$形素数, 但不是$p_1,\cdots,p_r$中的任一个. □

问题 10.0.14

假设自然数N有形如$4n-1$的因子, 则N必有形如$4n-1$的素因子.

问题 10.0.15

对每个素数$p=4n-1$和整数a, p^2不可能整除a^2+1.

解. 反证, 若$p^2\mid a^2+1$, $a^2\equiv -1 \pmod{p^2}$, 说明a的阶等于4. a可以看成群$\mathbb{Z}_{p^2}^*$中的元素, 由Euler定理, 群$\mathbb{Z}_{p^2}^*$的阶为$p(p-1)=2(4n-1)(2n-1)$. 在由Cauchy定理, 群中元素的阶必整除群的阶, 所以有$4\mid 2(4n-1)(2n-1)$. 矛盾. □

问题 10.0.16

证明a^2+1没有$4n-1$的因子, a,n是任何正整数.

解. 假设自然数$N=a^2+1$有形如$4n-1$形因子, 则由问题10.0.14知N必有形如$4n-1$的素因子, 记为p. 而N可以写成两个整数的平方和($N=a^2+1^2$), 所以由问题14.0.42知N的素因子分解中p出现次数为偶数. 从而必有p^2整除$N=a^2+1$, 与问题10.0.15矛盾. 所以N不可能有形如$4n-1$的因子. □

问题 10.0.17

a,b正整数, $a+b=57$, $[a,b]=680$, 求a,b.

解. 用$(a,b)[a,b]=ab=(a+b,b)[a,b]$, 所以$(57,b)\cdot 680=ab$, 然后$57=3\times 19$, 分四种情况讨论$(57,b)$的值, 并计算出$ab$的值联合$a+b$的值用Vieta定理. □

问题 10.0.18

$a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $a-c\mid ab+cd$, 则$a-c\mid ad+bc$.

问题 10.0.19

$a,b\in\mathbb{Z}$且$\frac{b+1}{a}+\frac{a+1}{b}\in\mathbb{Z}$, 则$(a,b)\le\sqrt{a+b}$.

问题 10.0.20

a,b为大于1的正整数, $(a,b)=1$, 则有唯一一对整数r,s使得$ar-bs=1$, 且$0<r<b$, $0<s<a$.

问题 10.0.21

q-进表示n中. $n=\sum_{i=0}^k a_iq^i$, 有$a_i=\left[\frac{n}{q^i}\right]-q\left[\frac{n}{q^{i+1}}\right]$.

问题 10.0.22

$p^{\alpha_p}\| n!$, 则$\alpha_p=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]$, 设$n=\sum_{i=0}^k a_iq^i$, 则$a_i=\left[\frac{n}{q^i}\right]-q\left[\frac{n}{q^{i+1}}\right]$. 而$S_p(n)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i=(n+\alpha_p)-q\alpha_p$, 所以$\alpha_p=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]=\frac{n-S_p(n)}{p-1}$. 其中$S_p(n)$为$n$的$p$-进展开的各个数字值之和.

问题 10.0.23

若2^m+1是素数, 则m是2的幂, 从而是Fermat数F_n.
$a, m>1$, a^m-1是素数, 则$a=2$且m是素数. 从而是梅森Mersenne数.

问题 10.0.24: 偶完全数

$\sigma(n)=2n$则称n是完全数, 证明偶完全数形如$2^k(2^{k+1}-1)$.

解. σ是积性函数, 设$n=2^p\cdot q$, 则$(2^{p+1}-1)\sigma(q)=2^{p+1}q$, 即$\frac{q}{\sigma(q)}=\frac{2^{p+1}-1}{2^{p+1}}$且$2^{p+1}-1\mid q$. 设$q=(2^{p+1}-1)k$.

(1). 若$2^{p+1}-1$是合数, q的最小质因子$p_1<2^{p+1}-1$, 所以$q=p_1^{\alpha_1}w$. 这与$\frac{q}{\sigma(q)}=\frac{p_1^{\alpha_1}w}{\sum_i p^i f(w)}<\frac{p_1}{p_1+1}<\frac{2^{p+1}-1}{2^{p+1}}$.

(2). 若$2^{p+1}-1$是素数, 若$k=1$, 命题显然成立. 否则$q=(2^{p+1}-1)^\alpha w$.

- 若$w=1$, $\alpha>1$, $\frac{q}{\sigma(q)}=\frac{(2^{p+1}-1)^\alpha}{\sum_i(2^{p+1}-1)^i}<\frac{2^{p+1}-1}{2^{p+1}}$. 这导致矛盾.
- 若$w>1$, 则$\frac{q}{\sigma(q)}=\frac{(2^{p+1}-1)^\alpha}{\sum_i(2^{p+1}-1)^i}\frac{w}{\sigma(w)}<\frac{2^{p+1}-1}{2^{p+1}}$, 又矛盾.

故$w=1$, $\alpha=1$. □

问题 10.0.25

若$m>2$, 则$\varphi(m)$是偶数.

解. 由Euler公式, $(-1)^{\varphi(m)}\equiv 1\pmod m$. □

解. 若i与m互素, 则$m-i$与m也互素, 所以与m互素的数总是成对出现. 若有$i=m-i$, 这表明m是i的倍数, 则i不可能是与m互素的$\varphi(m)$个数的任一个. □

问题 10.0.26

设$a,b\in\mathbb{Z}$, 且p为素数, 若$a^p\equiv b^p\pmod p$, 则$a^p\equiv b^p\pmod{p^2}$.

解. Fermat定理$a\equiv b\pmod{()p}$, 所以$a\equiv b\pmod p$, 于是可设$a=b+mp$, 并用二项式定理证得. □

问题 10.0.27

设p是素数, $k\in\mathbb{N}_+$, 则

- $p|\binom{p}{k}$, $k=1,\cdots,p-1$.
- $\binom{p-1}{k}\equiv(-1)^k\pmod p$, $k=0,\cdots,p-1$.
- $\binom{k}{p}\equiv\left[\frac{k}{p}\right]\pmod p$.

解.

- $p|k\binom{p}{k}=p\binom{p-1}{k-1}$, $(k,p)=1$.
- $\binom{p}{k}-\binom{p-1}{k}=\binom{p-1}{k-1}\Longrightarrow\binom{p-1}{k}\equiv-\binom{p-1}{k-1}\pmod p$, 用归纳法.
- $\binom{k}{p}=\frac{k(k-1)\cdots(k-p+1)}{p!}$, $k,k-1,\cdots,k-p+1$中必有p的倍数, 设为$k-i$,
  则$\binom{k}{p}=\frac{k-i}{p}\cdot\frac{k(k-1)\cdots(k-p+1)}{(k-i)(p-1)!}=\left[\frac{k}{p}\right]\frac{k(k-1)\cdots(k-p+1)}{k-i}\cdot\frac{1}{(p-1)!}\equiv\left[\frac{k}{p}\right]\frac{-1}{-1}\pmod p$.
  最后一步用Wilson公式.

□

问题 10.0.28

素数$p \geq 5$, 则$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(p-1)^2} \equiv 0 \pmod p$.

解. $1,2,\cdots,p-1$是模p的缩系. 所以$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{p-1}$也是模$p$的缩系. 故对$p \geq 5$有

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{1}{k}\right)^2 \equiv \sum_{k=1}^{p-1} k^2 = \frac{(p-1)p(2p-1)}{6} \equiv 0 \pmod p.$$

□

解. $\frac{1}{1},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{p-1}$是模$p$的缩系, 对任意$a$, $p \nmid a$, $\frac{a}{1},\frac{a}{2},\cdots,\frac{a}{p-1}$也是模$p$的缩系. 故

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left(a\cdot\frac{1}{k}\right)^2 \equiv \sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{1}{k}\right)^2 \pmod p \Longrightarrow (a^2-1)\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{1}{k}\right)^2 \equiv 0 \pmod p.$$

对$p \geq 5$可取a满足$p \nmid a$且$p \nmid a^2-1$即得. □

问题 10.0.29

若 $p>3$, 证明

$$p^2 \mid (p-1)!\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right).$$

解. 用10.0.28, 知

$$\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i(p-i)} \equiv \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{2}{i(p-i)} \equiv 0 \pmod p.$$

从而

$$(p-1)!\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i} \equiv (p-1)!\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{p}{(p-i)i} \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

□

解. 设

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-p+1) = x^{p-1}-s_1x^{p-2}+\cdots+s_{p-1}, \tag{10.1}$$

其中 $s_{p-1}=(p-1)!$, $s_{p-2}=(p-1)!\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right)$. 因

$$s_1x^{p-2}+\cdots+s_{p-2}x = (x-1)(x-2)\cdots(x-p+1)-x^{p-1}+1 \equiv 0 \pmod p$$

有 $p-1$ 个根, 所以 $s_1,\cdots,s_{p-2}$ 都是 p 的倍数. 对10.1中取 $x=p$ 有

$$p^{p-2}-s_1p^{p-3}+\cdots+s_{p-3}p-s_{p-2}=0.$$

所以 $p^2 \mid s_{p-2}$. □

问题 10.0.30

n是偶数, $a_1,\cdots,a_n$与$b_1,\cdots,b_n$都是模n的完系, 证$a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n$不是模n的完系.

解. 反证法, $\sum a_i \equiv \frac{n(n-1)}{2} \equiv \sum b_i \pmod n$, 若$a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n$是模$n$的完系. 则$\sum(a_i+b_i) \equiv \frac{n(n-1)}{2}$, 于是$n(n-1) \equiv \frac{n(n-1)}{2} \pmod n$, 由于$n(n-1) \equiv 0 \pmod n$, 故$\frac{n(n-1)}{2} \equiv 0 \pmod n$, 即$n | \frac{n(n-1)}{2}$, 但$(n,n-1)=1$, 所以$n|\frac{n}{2}$不可能. □

问题 10.0.31

设a,b为正整数, n是正整数, 证明
$$n!\mid b^{n-1}a(a+b)\cdots(a+(n-1)b).$$

解. 只需证对任意的素数p, 若$p^\alpha\| n!$, 则$p^\alpha\mid b^{n-1}a(a+b)\cdots(a+(n-1)b)$.

(1). 若$p\mid b$, 则由于$\alpha=\sum_{i\geq 1}\left[\frac{n}{p^i}\right]<\frac{n}{p-1}\leq n$, 所以$p^\alpha|b^{n-1}$.

(2). 若$p\nmid b$, 则$(p,b)=1$, 从而有$b_1b\equiv 1 \pmod p$, 于是
$$b_1^na(a+b)\cdots(a+(n-1)b)\equiv ab_1(ab_1+1)\cdots(ab_1+n-1)\pmod p.$$
由于$n!\mid ab_1(ab_1+1)\cdots(ab_1+n-1)$, 所以$p^\alpha\mid ab_1(ab_1+1)\cdots(ab_1+n-1)$. □

问题 10.0.32

设p是一个奇素数, 证明

- $1^2\cdot 3^2\cdots(p-2)^2\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}\pmod p$;
- $2^2\cdot 4^2\cdots(p-1)^2\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}\pmod p$.

解. 用Wilson公式, 注意到$k\equiv-(p-k)\pmod p$. □

问题 10.0.33

求所有有理数k, 使得$0\leq k\leq\frac{1}{2}$, 且$\cos k\pi$是有理数.

解. k有三个值, $0,\frac{1}{3},\frac{1}{2}$使$\cos k\pi$为有理数, 设$\cos\theta=\frac{p}{q}$, $q\geq 3$, $p<q$, 且p与q互素, 那么$\cos 2\theta=\frac{2p^2-q^2}{q^2}$, 其分子分母的公因子必整除$2p^2$及$q^2$, 故$2p^2-q^2$与$q^2$的最大公因数是1或2. 于是当$\frac{2p^2-q^2}{q^2}$写成最简形式时, 其分母至少是$\frac{q^2}{2}>q$, 因此$\cos 2\theta\neq\cos\theta$. 且$\cos 2\theta$, $\cos 4\theta$, ... 都是有理数, 且其分母组成一个递增序列. 设$\theta=2^i\left(\frac{u}{v}\right)\pi$, u,v是互素奇数, 由v是奇数, 存在正整数$w>|i|$, 使$v\mid(2^w-1)$, 故$2^{2w-i+1}\theta-2^{w-i+1}\theta=\frac{2^w-1}{v}2^wu\,(2\pi)$, 从而$\cos\left(2^{2w-i+1}\theta\right)=\cos\left(2^{w-i+1}\theta\right)$. 由前面所证得, 当$\theta=2^i\left(\frac{u}{v}\right)\pi$时, $\cos\theta$不能是分母超过2的有理数. □

问题 10.0.34

证明: 不存在正整数a,b,c, 使得$a^2+b^2+c^2=a^2b^2$.

解. 模4下讨论奇偶性, 无穷递降法. □

问题 10.0.35: 21届IMO

$\frac{m}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$, 其中$m,n$都是正整数, 证明: $1979\mid m$.

解.
$$\frac{m}{n}=\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\cdots+\frac{1}{1319}=1979\times\left(\frac{1}{600\times 1319}+\cdots+\frac{1}{661\times 1318}+\cdots+\frac{1}{989\times 990}\right)=\frac{1979k}{660\times\cdots\times 1319}.$$
其中k是整数, 1979是素数. □

问题 10.0.36: 39届IMO, T4

已知a,b是正整数, 且$\left(ab^2+b+7\right)\mid\left(a^2b+a+b\right)$, 求$a,b$.

解. $\left(ab^2+b+7\right) \mid a\left(ab^2+b+7\right)-b\left(a^2b+a+b\right)=7a-b^2$.

(1) 若$7a=b^2$, $(a,b)=\left(7k^2,7k\right)$, $(k\in\mathbb{N})$.

(2) 若$7a>b^2$, 则$7a-b^2\geq ab^2+b+7$, 所以$7>b^2$,..., $(a,b)=(11,1)$, $(49,1)$.

(3) $7a<b^2$, 则$b^2-7a\geq ab^2+b+7>b^2$... □

问题 10.0.37

若$n^2+15n+42$是一完全平方数, 求n.

解. $n\geq 8$时, $(n+7)^2<n^2+15n+42<(n+8)^2$, $n<-22$时, $(n+8)^2<n^2+15n+42<(n+7)^2$. $n=-13$, -22, -2, 7. □

问题 10.0.38

求不定方程

$$(a^2 - b)(a + b^2) = (a + b)^2$$

的所有正整数解.

问题 10.0.39

设a, b, c, d为正整数, $ab = cd$. 证明: $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$不是素数.

解. 由$ab = cd$, 不妨设$a = us, b = vt, c = vs, d = ut$, 则

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = (u^4 + v^4)(s^4 + t^4)$$

不是素数. □

问题 10.0.40

设$n > 1$是奇数, 若n的分解$n = uv$, 其中$0 < u - v \le 4\sqrt[4]{n}$, 证明: n的这种分解是唯一的.

Chapter 11

解析数论

11.1 山东大学2014年博士研究生入学考试解析数论基础试题

问题 11.1.1: 20%

设$\zeta(s)$为Riemann-zeta函数, 证明函数方程:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

问题 11.1.2: 20%

设$\psi(x)=\sum_{n\le x}\Lambda(n)$.

(1) 证明: 对于充分大的$x>0$, 成立渐近公式

$$\psi(x)=x+O\left(xe^{-c\left(\frac{\log x}{\log\log x}\right)^{\frac{3}{5}}}\right),$$

其中$c>0$为绝对常数.

(2) 证明: 在Riemann假设下, 上述余项能够改进到$x^{\frac{1}{2}}\log^2 x$.

问题 11.1.3: 20%

设$(l,k)=l$, $1\le l\le k$. 定义

$$\psi(x;k,l)=\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l \pmod k}}\Lambda(n),\quad \pi(x;k,l)=\sum_{\substack{p\le x\\ p\equiv l \pmod k}}1.$$

证明Siegel-Walfisz定理: 对于任意的$A\ge 1$以及$k\le\log^A x$, 成立

$$\psi(x;k,l)=\frac{x}{\varphi(k)}+O\left(xe^{-c\sqrt{\log x}}\right),$$
$$\pi(x;k,l)=\frac{1}{\varphi(k)}\int_2^x\frac{\mathrm{d}u}{\log u}+O\left(xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\log x}}\right),$$

其中$c=c(A)>0$为绝对常数.

问题 11.1.4: 20%

设$\alpha \in (0,1)$. 又设

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad |\theta| \le 1.$$

证明:

$$\sum_{n \le N} \Lambda(n) e(\alpha n) \ll \left(N q^{-\frac{1}{2}} + N^{\frac{4}{5}} + N^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} \right) \log^4 N.$$

问题 11.1.5: 20%

证明: 三素数定理. (即: 存在常数N_0, 使得对任意的奇数$N > N_0$都能表示成三个素数之和.)

Chapter 12

Inequality

12.1 Elementary Inequality

问题 12.1.1

求证:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right) > \sqrt[3]{4}.$$

解. 先证$\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{1}{3m-2}\right) > \sqrt[3]{3n-2}$. □

问题 12.1.2

设$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + 1$有$n$个实根, 且系数$a_1, \cdots, a_{n-1}$都是非负的. 证明$f(2) \geq 3^n$.

问题 12.1.3: Ho Joo Lee

a, b, c是三个正实数, 证明:

$$a+b+c \leq \frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b}.$$

解. 不等式等价于$\sum\limits_{cyc}\frac{(a-c)(a-b)}{b+c} \geq 0$, 用Shur不等式16.6.1即得. □

问题 12.1.4

设正实数a, b, c的和为3. 证明:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{3}{2a^2+bc} + \frac{3}{2b^2+ac} + \frac{3}{2c^2+ab}.$$

解. 不等式等价于$\sum\limits_{cyc}\frac{(a-c)(a-b)}{2a^3+abc} \geq 0$, 用Shur不等式16.6.1即得. □

问题 12.1.5: Italian Winter Camp 2007

设a, b, c为三角形的三条边长, 证明:

$$\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}} \leq 3.$$

解.

$$\sum_{cyc}\left(1-\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\right)\ge 0 \Longleftrightarrow \sum_{cyc}\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\ge 0$$
$$\Longleftrightarrow \sum_{cyc}\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{c(a+b-c)}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a+b-c})}\ge 0$$
$$\Longleftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(c-a)(c-b)}{S_c}\ge 0.$$

其中

$$S_c=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a+b-c})(\sqrt{ab}+\sqrt{c(a+b-c)}),$$

不妨设$b\ge c$, 则

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\ge\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}$$
$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a+b-c}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{c+a-b}$$
$$\sqrt{ab}+\sqrt{c(a+b-c)}\ge\sqrt{ca}+\sqrt{b(c+a-b)}.$$

所以$S_c\ge S_b$, 由Schur不等式推论16.6.1即得. □

问题 12.1.6: APMO 2007

正实数x,y,z满足$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$. 证明:

$$\frac{x^2+yz}{x\sqrt{2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{y\sqrt{2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{z\sqrt{2(x+y)}}\ge 1.$$

解. 先用幂平均不等式证明$\sum_{cyc}\sqrt{x+y}\ge\sqrt{2}$, 原不等式等价于$\sum_{cyc}\frac{x^2+yz}{x\sqrt{y+z}}\ge\sum_{cyc}\sqrt{x+y}\ge\sqrt{2}$. 而不等式左边部分又等价于证明$\sum_{cyc}\frac{(x-y)(x-z)}{x\sqrt{y+z}}\ge 0$. 当$x\ge y\ge z$时, 有$y\sqrt{x+z}\ge z\sqrt{x+y}$, 利用Schur不等式推论16.6.1即得. □

问题 12.1.7

设a,b,c为正实数, 证明:

$$\frac{a^2+2bc}{(b+c)^2}+\frac{b^2+2ac}{(a+c)^2}+\frac{c^2+2ab}{(a+b)^2}\ge\frac{9}{4}.$$

解. 原不等式等价于

$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)+(ab+bc+ca)}{(b+c)^2}\ge\frac{9}{4}.$$

即证

$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)^2}\ge 0,\quad \sum_{cyc}\frac{ab+bc+ca}{(b+c)^2}\ge\frac{9}{4}.$$

前者用Shur不等式, 后者是著名的Iran 96不等式. □

问题 12.1.8: Nguyen Van Thach

设a,b,c为正实数, 证明:

$$\sqrt{\frac{a^3+abc}{(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3+abc}{(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3+abc}{(a+b)^3}}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

解. 注意到
$$\sqrt{\frac{a^3+abc}{(b+c)^3}}-\frac{a}{b+c}=\frac{\sqrt{a}(a-b)(a-c)}{(b+c)\sqrt{b+c}(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{a(b+c)})}.$$
所以原不等式等价于证明$\sum_{cyc} S_a(a-b)(b-c)$, 其中
$$S_a=\frac{\sqrt{a}}{(b+c)\sqrt{b+c}(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{a(b+c)})}.$$
不妨设$a\geq b\geq c$, 则由$\sqrt{\frac{a}{b+c}}\geq\sqrt{\frac{b}{c+a}}$, $(b+c)\sqrt{a^2+bc}\leq(a+c)\sqrt{b^2+ac}$, $(b+c)\sqrt{a(b+c)}\leq(a+c)\sqrt{b(a+c)}$. 知$S_a\geq S_b$. 根据Shur不等式的推论16.6.1即得证明. □

问题 12.1.9

设a,b,c,k为正实数, 证明:
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a+k}{b+k}+\frac{b+k}{c+k}+\frac{c+k}{a+k}.$$

解. 不妨设$c=\min(a,b,c)$, 并注意
$$LHS-3=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-1\right)=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)(b-c)}{ac}.$$
□

问题 12.1.10

设a,b,c为正实数, 若$k\geq\max(a^2,b^2,c^2)$, 证明:
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a^2+k}{b^2+k}+\frac{b^2+k}{c^2+k}+\frac{c^2+k}{a^2+k}.$$

解. 同12.1.9不妨设$c=\min(a,b,c)$, 只需证:
$$\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)(b-c)}{ac}\geq\frac{(a-b)^2(a+b)^2}{(a^2+k)(b^2+k)}+\frac{(a-c)(b-c)(a+c)(b+c)}{(a^2+k)(c^2+k)}.$$
所以只需由$k\geq\max(a^2,b^2,c^2)$来证:
$$\begin{cases}(a^2+k)(b^2+k)\geq ab(a+b)^2\\(a^2+k)(c^2+k)\geq ac(a+c)(b+c).\end{cases}$$
不等式的弱化见12.1.10. □

问题 12.1.11

设a,b,c为正实数, 若$k\geq\max(ab,bc,ca)$, 证明:
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a^2+k}{b^2+k}+\frac{b^2+k}{c^2+k}+\frac{c^2+k}{a^2+k}.$$

解. 证法同12.1.10, 但更弱. □

问题 12.1.12

设a,b,c为正实数, 证明:
$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{8(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geq 11.$$

解. 由恒等式$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)(b-c)}{ac}$, 不妨设$c=\min(a,b,c)$. 原不等式可化为:

$$\frac{(a-b)^2(a+b)^2}{a^2b^2}+\frac{(c-a)(c-b)(c+a)(c+b)}{a^2c^2}-\frac{8(a-b)^2+8(c-a)(c-b)}{a^2+b^2+c^2}\geq 0.$$

易证$\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}\geq\frac{8}{a^2+b^2+c^2}$. 而

$$\frac{(c+a)(c+b)}{a^2c^2}\geq\frac{8}{a^2+b^2+c^2}\iff(a+c)(c+b)(a^2+b^2+c^2)\geq(a+c)2c(a^2+c^2)\geq 4c^2(a^2+c^2)$$

所以只需证$a\geq c$时最后的不等式. □

问题 12.1.13: 2006年CMO

实数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2}$, $a_{k+1}=-a_k+\frac{1}{2-a_k}$, $k\in\mathbb{N}$, 证明:

$$\left(\frac{n}{2\sum_{i=1}^n a_i}-1\right)^n\leq\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}\right)^n\prod_{i=1}^n\left(\frac{1}{a_i}-1\right).$$

解. 先用$y=-x+\frac{1}{2-x}$归纳证明$0<a_n\leq\frac{1}{2}$. 则原命题等价于证明:

$$\left(\frac{n}{\sum a_i}\right)^n\left(\frac{n}{2\sum a_i}-1\right)^n\leq\prod\left(\frac{1}{a_i}-1\right).$$

对函数$y=\ln\left(\frac{1}{x}-1\right)$用Jensen不等式, 有$\left(\frac{n}{\sum a_i}-1\right)^n\leq\prod\left(\frac{1}{a_i}-1\right)$. 另外, 用Cauchy不等式证

$$\sum_{i=1}^n(1-a_i)=\sum\frac{1}{a_i+a_{i+1}}-n\geq\frac{n^2}{2\sum a_i}-n,$$

所以

$$\frac{n}{\sum a_i}-1=\frac{\sum(1-a_i)}{\sum a_i}\geq\frac{1}{\sum a_i}\left(\frac{n^2}{2\sum a_i}-n\right).$$

□

12.2 Combinatorics

问题 12.2.1

证明

$$\left(\binom{m}{m}a_m+\binom{m+1}{m}a_{m+1}+\cdots+\binom{n}{m}a_n\right)^2\geq\left(\binom{m-1}{n-1}a_{m-1}+\binom{m}{m-1}a_m+\cdots+\binom{n}{m-1}a_n\right)\cdot\left(\binom{m+1}{m+1}a_{m+1}+\binom{m+2}{m+1}a_{m+2}+\cdots+\binom{n}{m+1}a_n\right),$$

其中$a_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$, 且

$$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n,\quad 0<m<n,\quad m,n\in\mathbb{N}_+.$$

解. 若$\{a_n\}$是常数列, 只要证$\left(\sum_{i=m}^n\binom{i}{m}\right)^2\geq\sum_{k=m-1}^n\binom{k}{m-1}\sum_{k=m+1}^n\binom{k}{m+1}$, 这等价于证$\left(\binom{n+1}{m+1}\right)^2\geq\binom{n+1}{m}\binom{n+1}{m+2}\iff\frac{1}{(m+1)(n-m)}\geq\frac{1}{(n-m+1)(m+2)}\iff n+2\geq 0$, ...

设调整若干项相等, 即$a_1=\cdots=a_{i-1}=t$, $a_i=\cdots=a_n=k$, $(k>t)$, 则

$$\left(t\sum_{j=m}^{i-1}\binom{j}{m}+k\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{m}\right)^2\geq\left(t\sum_{j=m+1}^{i-1}\binom{j}{m+1}+k\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{m+1}\right)\left(t\sum_{j=m+1}^{i-1}\binom{j}{m-1}+k\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{m-1}\right)$$
$$\iff\left(t\binom{i}{m+1}+k\binom{n+1}{m+1}\right)^2\geq\left(t\binom{i}{m+2}+k\binom{n+1}{m+2}\right)\cdot\left(t\binom{i}{m}+k\binom{n+1}{m}\right)$$
$$\iff\left(\left(\binom{i}{m+1}\right)^2-\binom{i}{m+2}\binom{i}{m}\right)t^2-2tk\left[\binom{i}{m+1}\binom{n+1}{m+1}-\left(\binom{i}{m}\binom{n+1}{m+2}+\binom{i}{m+2}\binom{n+1}{m}\right)\right]$$
$$+\left[\left(\binom{n+1}{m+1}\right)^2-\binom{n+1}{m+2}\binom{n+1}{m}\right]k^2\geq 0.$$

因$\left(\binom{i}{m+1}\right)^2-\binom{i}{m+2}\binom{i}{m}\geq 0$, $\left(\binom{n+1}{m+1}\right)^2-\binom{n+1}{m+2}\binom{n+1}{m}\geq 0$, 但$\binom{i}{m+1}\binom{n+1}{m+1}-\left(\binom{i}{m}\binom{i}{m+2}+\binom{i}{m+2}\binom{n+1}{m}\right)$的符号不一定. □

12.3 Analysis

问题 12.3.1

求证积分形式的Holder不等式与Minkowski不等式.

$$\|x(t)y(t)\|_1\leq\|x(t)\|_p\cdot\|y(t)\|_q,$$

其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p>1$且$x\in L^p[a,b]$, $y\in L^q[a,b]$;

$$\|x\pm y\|_p\leq\|x\|_p+\|y\|_p,$$

其中$p\geq 1$, $x(t),y(t)\in L^p[a,b]$.

解. (1). 若$\|x(t)\|_p=0$或$\|y(t)\|_q=0$, 则$x(t)y(t)=0, a.e. x\in[a,b]$, 不等式显然. 否则令$A=\frac{|x(t)|}{\|x(t)\|_p}$, $B=\frac{|y(t)|}{\|y(t)\|_q}$. 由Young不等式$AB\leq\frac{A^p}{p}+\frac{B^q}{q}$, 两边积分即得.

(2). 若$p=1$, 则用绝对值的三角不等式. 若$p>1$,

$$\begin{aligned}\|x\pm y\|_p^p&\leq\||x\pm y|^{p-1}\cdot(|x|+|y|)\|_1=\||x|\cdot|x\pm y|^{p-1}\|_1+\||y|\cdot|x\pm y|^{p-1}\|_1\\&\leq\|x\|_p\cdot\||x\pm y|^{p-1}\|_q+\|y\|_p\cdot\||x\pm y|^{p-1}\|_q\\&=(\|x\|_p+\|y\|_p)\cdot\|x\pm y\|_{(p-1)q}^{p-1}=(\|x\|_p+\|y\|_p)\cdot\|x\pm y\|_p^{p-1}.\end{aligned}$$

即得. □

Chapter 13

神奇的反例

问题 13.0.1

试指出无限维欧式空间中正交变换不一定是满射变换. 从而不一定有逆变换.

解. 考虑$\mathbb{R}[x]$(内积为多项式对应系数乘积的和)中的

$$Tf(x) = xf(x).$$

□

问题 13.0.2

举例说明: $\lim_{x\to a}\phi(x) = A$, $\lim_{x\to A}\psi(x) = B$, 但$\lim_{x\to a}\psi(\phi(x)) \neq B$.

解.

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, (p, q \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1) \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \qquad \psi(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \qquad a = 0.$$

□

问题 13.0.3: http://math.stackexchange.com/questions/2190498

给出如下论断的反例.
存在$x_0 \in [a, b]$使函数项级数的和函数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$收敛到$f(x)$, 在$[a, b]$上$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$收敛到$g(x)$. 则$f' = g$

解. 定义$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$为

$$f_n(x) = n(n+1)(n+2)\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right).$$

则f_n在$[0, 1)$上点态收敛到0, 且$f_n(1) = n$. 其导数$f_n'(x) = n(n+1)(n+2)x^n(1-x)$, 在$[0, 1]$上逐点收敛到0. □

问题 13.0.4: http://math.stackexchange.com/questions/294383

给出一个积分号下不能求导的例子.

解. 令$F(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-sx}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$, 则

$$F''(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-sx}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\psi'\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s\right) - \frac{1}{2s}$$

积分一次, $F'(s)$的常数项不能确定是有限值, 且积分两次后的特解使$F(0) = \frac{\log \pi}{2}$与正确的$F(0) = -\frac{\log 2}{2}$不同. □

问题 13.0.5: http://math.stackexchange.com/questions/494145

给出一个不能逐项求导的收敛级数.

解. 定义$u_k(x)$为

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

则$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = 0$. 若逐项求导则有

$$\sum_{k=1}^{n} u_k'(x) = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

其和在$x=0$处发散 □

Chapter 14

未知的问题与解答

未知 14.0.1

证明：对于任意的自然数n,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i(i+1)(i+2)(i+3)}}{i^2(i+1)^2}<2.$$

解. 第一项保留，第二项放缩为$k\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$. 其中$k$是某个带根号的数. □

解.

$$\frac{\sqrt{(n+2)(n+3)}}{n(n+1)\sqrt{n^2+n}}<\frac{n+7/2}{\left(n-\frac{1}{4}\right)\left(n+\frac{3}{4}\right)\left(n+\frac{7}{4}\right)}$$

则有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{(k+2)(k+3)}}{k(k+1)\sqrt{k^2+k}}<\frac{32n(n+2)}{(4n+3)(4n+7)}$$

□

未知 14.0.2

Use the method of Frobenius to obtain two linearly independent series solutions about the regular singular point $x=0$. Write out the solution in open form for at least 7 terms.

$$2xy''-y'+2y=0.$$

未知 14.0.3: 2014-05-25

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i}{k}\right)^2\leq(1+\sqrt{2})^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

解.

$$A=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}\end{pmatrix}$$

证明$\|A\|_2\leq\sqrt{2}+1$. □

未知 14.0.4: 2014-05-24

设p_n是第n个素数; $a_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$. 则$[a_n, a_{n+1}]$中至少有一个平方数.

未知 14.0.5: 2015-05-23

对于任意的拓扑空间X, $\mathbb{R}$与$X \times X$不同胚.

未知 14.0.6: 2015-05-23

平方和因子定理.
$(a, b) = 1$, 则素数$p = 4k + 3 \nmid (a^2 + b^2)$.

未知 14.0.7: 2014-05-23

$$\left\{\begin{array}{l} a, b \notin \mathbb{Z}; \\ \mathrm{Re}(c + d - a - b) > 1. \end{array}\right. \implies \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(d+n)} = \frac{\pi^2}{\sin(\pi a)\sin(\pi b)} \cdot \frac{\Gamma(c+d-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)\Gamma(c-b)\Gamma(d-b)}.$$

未知 14.0.8: Enestrom-Kakeya定理

$$\left.\begin{array}{l} a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n > 0, \\ p(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 \end{array}\right\} \implies p = 0\text{的根在开单位圆外}.$$

解. 对$(1 - z)p(z)$用反证法/直接证明. □

未知 14.0.9: 2014-05-21

$$\left.\begin{array}{l} a_n > 0 \\ b_n > 0 \end{array}\right\} \implies \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i)} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i}.$$

未知 14.0.10: 2014-05-21

$$\begin{array}{l} \lim_{\beta\to\infty} F\left(1, \beta, 1; \frac{z}{\beta}\right) = \mathrm{e}^z; \\ \lim_{\alpha\to\infty} F\left(\alpha, \alpha, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{4\alpha^2}\right); \\ F\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}; \sin^2 x\right) = \cos nx. \end{array}$$

未知 14.0.11: 2014-05-21

$$\left.\begin{array}{l} x_0 \in (a, b). \\ \text{迭代公式} f_1(x_n) = f_2(x_{n-1}) \\ f_1(\xi) = f_2(\xi) \\ \left|\frac{f_2'(y)}{f_1'(x)}\right| \leq q < 1, (a < x, y < b) \end{array}\right\} \implies x_n \to \xi, n \to \infty.$$

未知 14.0.12: 2014-05-20

$\forall n$, $a_n > 0$,$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt{n}$, 则$\forall n$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}.$$

未知 14.0.13: 2014-05-20

关于x的方程$x^2 - 2\arcsin(\cos x) + a^2 = 0$有唯一解, 求$a$.

未知 14.0.14: 2014-05-19

$$\left.\begin{array}{l} f\text{定义域:}\mathbb{R} \\ f^2(x) \le 2x^2 f\left(\frac{x}{2}\right) \\ A = \{a \mid f(a) > a^2\} \ne \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow A\text{是无限集.}$$

未知 14.0.15: 2014-05-18

$$\left.\begin{array}{l} M_1 = \{x^2 + Ax + B \mid x \in \mathbb{Z}\} \\ M_2 = \{2x^2 + 2x + C \mid x \in \mathbb{Z}\} \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall A, B \in \mathbb{Z},\ \exists C \in \mathbb{Z} \ni M_1 \cap M_2 = \emptyset.$$

未知 14.0.16: 2014-05-18

$$(0,1) \not\subseteq \bigcup_{\frac{p}{q} \in (0,1)\cap\mathbb{Q}} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{4q^2}, \frac{p}{q} + \frac{1}{4q^2}\right).$$

未知 14.0.17

设数列$\{x_n\}$满足条件

$$0 \le x_{m+n} \le x_m + x_n \quad (m, n \in \mathbb{N}_+),$$

证明: $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$存在.

未知 14.0.18

设$x_n \ge 0$且$y_n \ge 0$, $(n \in \mathbb{N}_+)$, 证明: (在以下各极限均存在的情况下)

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \cdot \liminf_{n\to\infty} y_n \le \liminf_{n\to\infty}(x_n y_n) \le \liminf_{n\to\infty} x_n \cdot \limsup_{n\to\infty} y_n \le \limsup_{n\to\infty}(x_n y_n) \le \limsup_{n\to\infty} x_n \cdot \limsup_{n\to\infty} y_n$$

未知 14.0.19

已知$x, y, z \in \mathbb{R}$, 且$x + y + z = 0$.

1. 求证:
$$6(x^3 + y^3 + z^3)^2 \le (x^2 + y^2 + z^2)^3.$$
2. 求最佳常数λ, μ, 使得:
$$\lambda(x^6 + y^6 + z^6) \le (x^2 + y^2 + z^2)^3 \le \mu(x^6 + y^6 + z^6).$$

未知 14.0.20

证明对于任意的$x > -1$, 有$\mathrm{e}^x - \ln(x+1) - 2x > 0$

解. 先证$1 + \frac{x}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12}} - \ln(1+x) - 2x > 0$. □

解. 用 Taylor 公式. □

未知 14.0.21

证明: $\nabla\times\nabla\times A=\nabla(\nabla\cdot A)-\nabla^2 A$.

未知 14.0.22: 印度, 巴斯卡拉

当$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时, 有$\sin x\approx\frac{16x(\pi-x)}{5\pi^2-4x(\pi-x)}$.

未知 14.0.23: 柏拉图体, 正多面体

未知 14.0.24: 阿基米德体, 半正多面体

未知 14.0.25

置换$P(\nu)$的循环结构为$(\nu)=(1^{\nu_1}2^{\nu_2}\cdots m^{\nu_m})$, 在$S_n$群中属于与$P(\nu)$共轭的置换数目为

$$N(P)=\frac{n!}{\prod_i(i^{\nu_i}\nu_i!)}$$

未知 14.0.26

正整数列(v_i)满足$\sum_i iv_i=n$, 则$\prod_i i^{v_i}v_i!\mid n!$

未知 14.0.27

设$f(x)\in C[0,+\infty)$, 且对任何非负实数a, 有

$$\lim_{x\to\infty}(f(x+a)-f(x))=0.$$

证明: 存在$g(x)\in C[0,+\infty)$和$h(x)\in C^1[0,+\infty)$, 使得: $f(x)=g(x)+h(x)$, 且满足

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=0,\quad \lim_{x\to\infty}h'(x)=0.$$

未知 14.0.28

设p是奇素数, 将$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}$写成最简分数$A_p/B_p$.

(a) 求$A_p\pmod p$的值.

(b) 给出$A_p\pmod{p^2}$的值.

未知 14.0.29

设m是正整数, $a_1,a_2,\cdots,a_{\phi(m)}$是1与$m$之间且与$m$互素的整数, 记

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{\phi(m)}}$$

的最简分数为A_m/B_m.

(a) 求$A_m\pmod m$的值.

(b) 求$A_m\pmod{m^2}$的值.

未知 14.0.30: Hardy-Ramanujan asymptotic

整数n的分划函数$p(n)$有如下渐近公式

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \mathrm{e}^{\pi\sqrt{2n/3}}.$$

未知 14.0.31: Fubini's Theorem

未知 14.0.32: Tonelli's Theorem

未知 14.0.33: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设函数$f(x,y)$在闭圆域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2, R>0\}$上有连续偏导数, 而且$f\left(\frac{R}{2},0\right)=f\left(0,\frac{R}{2}\right)$. 证明: 在$D$的内部至少存在两点$(x_1,y_1)$和$(x_2,y_2)$, 使

$$x_i f_y'(x_i,y_i) - y_i f_x'(x_i,y_i) = 0, i=1,2.$$

未知 14.0.34: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设在$[a,b]$上, $f''(x)\neq 0$, $f(a)=f(b)=0$, 且有$x_0\in(a,b)$, 使$y_0=f(x_0)>0$, $f'(x_0)=0$. 证明:

(1) 存在$x_1\in(a,x_0)$及$x_2\in(x_0,b)$, 使$f(x_1)=f(x_2)=\frac{y_0}{2}$;

(2) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < y_0(x_2-x_1)$.

未知 14.0.35

已知对于任意的$a_1,a_2,\cdots,a_n\in[p,q]$, $p>0$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \le n^2 + \frac{k(p-q)^2}{4pq},$$

其中,

$$k=\begin{cases} n^2-1, & n \text{ 是奇数;} \\ n^2, & n \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

未知 14.0.36: http://math.stackexchange.com/questions/66473

a Fourier series $\sum c_n \mathrm{e}^{2\pi i n x}$ to be k-fold termwise differentiable is for the Fourier coefficients to be "appropriately small" in the following sense: if

$$\sum |c_n|\cdot|n|^k < \infty$$

holds for some k, then then function represented by the Fourier series will be k-times differentiable, and will be differentiable termwise. If this holds for all k, then the function is smooth.

未知 14.0.37: http://math.stackexchange.com/questions/1992808

已知$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$存在有限,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)$$

能否逐项求导?

未知 14.0.38: http://math.stackexchange.com/questions/420878

John B. Conway's 'Function of one complex variable', Proposition 2.5.

未知 14.0.39: http://math.stackexchange.com/questions/1922228

定理 14.0.1

f_n在区域D上序列解析(sequence analytic), 若f_n在D的任一紧子集上一致收敛, 则f_n在D上解析

于是

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

在$\mathbb{C}$上解析.

推论 14.0.1

若幂级数在z_0为圆心, R为半径的圆盘上收敛, 则幂级数在其收敛域内的任一子集上一致收敛.

定理 14.0.2

f_n是区域D上的序列, 若$\sum f_n$在D上收敛, 且在D内任一紧子集上一致收敛, 则$\sum f_n$在D上解析且可逐项求导.

未知 14.0.40: http://math.stackexchange.com/questions/294383

求$\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

解. 重积分法, 利用Laplace变换: $\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x^2}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty t\int_0^\infty\frac{2x\mathrm{e}^{-x}-1+\mathrm{e}^{-2x}}{1-\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty t\int_0^\infty(2x\mathrm{e}^{-x}-1+\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{e}^{-xt}\sum_{n=0}^\infty\mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty t\sum_{n=1}^\infty\left(-\frac{1}{2n+t}+\frac{2}{(2n+t+1)^2}+\frac{1}{2n+t+2}\right)\mathrm{d}t+\log 2-1\\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{2n}{2n+t}+\frac{2t}{(2n+t+1)^2}-\frac{2(n+1)}{2n+t+2}\right)\mathrm{d}t+\log 2-1\\
&= \log 2-1-\sum_{n=1}^\infty\left(1+n\ln n+\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)-(n+1)\ln(n+1)\right)=-\frac{1}{2}\ln 2.
\end{aligned}$$

另外留数法见9.0.1. □

未知 14.0.41

对于任意给定的正奇数n, 对于任意正有理数r, 都存在正整数a,b,c,d满足$r=\frac{a^n+b^n}{c^n+d^n}$. 强化版见2.3.6.

未知 14.0.42

一个自然数N可以写成两个整数的平方和当且仅当N的素因子分解中每个可以写成$4n-1$的素数出现次数为偶数.

解. 抽象代数有证明, 主要工具是环理论. □

未知 14.0.43

Fermat数$F_n=2^{2^n}+1$, $n\geq 5$时是否有素数? 未发现素数.
1801年Gauss证明: 正N边形可尺规作图当且仅当$N=2^e p_1\cdots p_s$, p_i是Fermat素数.

未知 14.0.44

设a,b为正整数且$(a,b)=1$. 证明对于给定的$n>ab-a-b$, 方程$ax+by=n$有非负整数解, 且$n=ab-a-b$时没有非负整数解.

未知 14.0.45: http://math.stackexchange.com/questions/428663/closed-form-of-sum-limits-i-1n-k1-i-or-asymptotic-equivalent-when-n-to#

$$\sum_{i=1}^{n}k^{\frac{1}{i}}=n+\ln(k)\ln(n)+\gamma\ln(k)+\sum_{r=2}^{\infty}\frac{\zeta(r)\ln(k)^r}{r!}+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

未知 14.0.46: http://tieba.baidu.com/p/4819379251

求所有符合条件的x,y,z.

$$x+y+z=x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3.$$

未知 14.0.47: 陈计的不等式

设$x,y,z\in\mathbb{R}^+$. 求证:

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right)\geq\frac{9}{4}.$$

解. 因为

$$\begin{aligned}&4\sum_{cyc}yz\left(\sum_{cyc}(x+y)^2(z+x)^2\right)-9\prod_{cyc}(y+z)^2\\&=\sum_{cyc}yz(y-z)^2(4y^2+7yz+4z^2)+\frac{xyz}{x+y+z}\sum_{cyc}(y-z)^2(2yz+(y+z-x)^2)\geq 0.\end{aligned}$$

□

未知 14.0.48: http://tieba.baidu.com/p/4005256822 18届东令营第3题 2003CMO3

设$x_i\in\mathbb{R}^+(i=1,2,\cdots,n)$且$x_1x_2\cdots x_n=1$, n给定$(n\geq 1)$. 求最小正数λ使得

$$\lambda\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+2x_i}}$$

恒成立.

未知 14.0.49: http://tieba.baidu.com/p/4811340691

设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是正实数, 求证:

$$x_1^3+\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^3\le\frac{27}{8}(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3).$$

解. 由Holder不等式$(a_i,b_i,c_i\ge 0)$

$$(a_1^3+\cdots+a_n^3)(b_1^3+\cdots+b_n^3)(c_1^3+\cdots+c_n^3)\ge(a_1b_1c_1+\cdots+a_nb_nc_n)^3$$

得

$$\left(\sum_{j=1}^k\left(j-\frac{1}{2}\right)^{2/3}x_j^3\right)\left(\sum_{j=1}^k\frac{1}{\left(j-\frac{1}{2}\right)^{1/3}}\right)^2\ge\left(\sum_{j=1}^k x_j\right)^3.$$

两边同时除以k^3, 求和有

$$\sum_{k=1}^n\left(\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}\right)^3\le\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^3}\left(\sum_{i=1}^k\frac{1}{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{1/3}}\right)^2\left(\sum_{j=1}^k\left(j-\frac{1}{2}\right)^{2/3}x_j^3\right)=\sum_{j=1}^n\sum_{k=j}^n\left(j-\frac{1}{2}\right)^{2/3}x_j^3\frac{1}{k^3}\left(\sum_{i=1}^k\frac{1}{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{1/3}}\right)^2$$

由于

$$\sum_{k=j}^n\frac{1}{k^3}\left(\sum_{i=1}^k\frac{1}{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{1/3}}\right)^2<\sum_{k=j}^n\frac{1}{k^3}\left(\int_0^k\frac{1}{x^{1/3}}\,\mathrm{d}x\right)^2=\sum_{k=j}^n\frac{9}{4k^{5/3}}<\int_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\frac{9}{4x^{5/3}}\,\mathrm{d}x<\frac{27}{8\left(j-\frac{1}{2}\right)^{2/3}}.$$

所以

$$\sum_{k=1}^n\left(\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}\right)^3<\frac{27}{8}\sum_{k=1}^n x_j^3$$

□

未知 14.0.50: http://tieba.baidu.com/p/4740384715

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{5}}}{1+\frac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{1+\frac{\mathrm{e}^{-4\pi}}{1+\frac{\mathrm{e}^{-6\pi}}{1+\cdots}}}}.$$

未知 14.0.51

设a,b,c是三角形的三边长, 证明:

$$4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge 9+\frac{a^2+c^2}{c^2+b^2}+\frac{c^2+b^2}{b^2+a^2}+\frac{b^2+a^2}{a^2+c^2}.$$

未知 14.0.52: http://tieba.baidu.com/p/4850101496

1. 有界闭区间$[a,b]$上函数$f(x)$满足对任意$x,y\in[a,b]$, $\lambda\in(0,1)$都有$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$. 求证$f(x)$在$[a,b]$上有界.
2. 设$f(x)$在0附近有2阶连续导数, 且$f''(0)\ne 0$.
(1) 求证$|x|$充分小时, 对任意这样的x, 存在唯一$\theta\in(0,1)$使得$f(x)=f(0)+f'(\theta x)x$.
(2) 求$\lim\limits_{x\to 0}\theta$.

解. 2.(2) $f'(\theta x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$, 所以$\frac{f'(\theta x)-f'(0)}{x}=\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}$, 两边令$x\to 0$, 右侧用罗比达法则. $\lim\limits_{x\to 0}\theta=\frac{1}{2}$ □

未知 14.0.53: http://tieba.baidu.com/p/4849247837

已知关于x的方程$x^3-4x^2+6x+c=0$有三个实根r,s,t, 且

$$\frac{1}{r^2+s^2}+\frac{1}{s^2+t^2}+\frac{1}{t^2+r^2}=1,$$

求正数c的值.

未知 14.0.54: http://tieba.baidu.com/p/4850318851

试举出反例: 函数$f(x)$在$x=x_0$处可导与如下几个式子存在不等价:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h},\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0+h)}{h},\quad \lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x0)\right]$$

未知 14.0.55: http://tieba.baidu.com/p/4846868296

三角形ABC中, 求证:

$$\prod_{cyc}\cos A\le\frac{1}{8}\cot\frac{\pi^3}{27}\tan(ABC)\le\prod_{cyc}\sin\frac{A}{2}.$$

Chapter 15

拓扑

问题 15.0.1

证明: A'为闭集.

解. $(A')' \subset A'$, 从而A'为闭集. □

问题 15.0.2

设$A \subset \mathbb{R}$, 求证:

(I) A°是A的最大开子集.

(II) A^-是含A的最小闭集.

解. (I). $\bigcup\{G : G$开且$G \subset A\} = E$, 因A°开且$A^\circ \subset A$, 所以$A^\circ \subset E$, 若$x \in E$, 则有G开, $x \in G \subset A$. 所以存在x的开邻域$U(x) \subset G \subset A$, 所以$x \in A^\circ$, 所以$E \subset A^\circ$, 于是$E = A^\circ$.

(II). $\bigcap\{F : F$闭且$F \supset A\} = E$. 因A^-闭且$A^- \supset A$, 所以$A^- \supset E$. 另外若F闭且$F \supset A$, 则$F = F^- \supset A^-$, 所以$A^- \subset E$, 于是$A^- = E$. □

问题 15.0.3

G是$\mathbb{R}$中开集, $G \cap A = \emptyset$, 求证: $G \cap A^- = \emptyset$.

解. G^c闭且$A \subset G^c$, 所以$A^- \subset G^c$, 从而$G \cap A^- = \emptyset$. □

问题 15.0.4

求证:

(I) $\mathbb{R}$中闭集必为可列开集的交.

(II) $\mathbb{R}$中开集闭为可列闭集的并.

解. (I). 设A闭于$\mathbb{R}$. $A_n = \bigcup_{x\in A} V_{\frac{1}{n}}(x)$, $(n = 1, 2, \cdots)$, 则$A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. 用反证法证$A \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 取$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $x_0 \notin A$. 由A闭. 存在n_0使得$V_{\frac{1}{n_0}}(x_0) \cap A = \emptyset$. 所以$x_0 \notin A_{n_0}$, 矛盾.

(II). 由(I), G开于$\mathbb{R}$, 则G^c闭于$\mathbb{R}$... □

问题 15.0.5

$A \subset \mathbb{R}$, 求证: $A - A'$至多可列.

解. (好像有问题)由聚点定理, $x \in A - A'$等价于存在$\varepsilon_x > 0$使得$A \cap (V_{\varepsilon_x}(x) - \{x\}) = \emptyset$, 且当$x, y \in A - A'$, $x \neq y$时, 应有$V_{\varepsilon_x}(x) \cap V_{\varepsilon_y}(y) = \emptyset$. 反之亦是. 记
$$G = \{V_{\varepsilon_x}(x) : x \in A - A'\},$$
则$G \sim A - A'$且G至多可列. □

问题 15.0.6

设开集族$\mathscr{F} = \{G : G$为$\mathbb{R}$中开集$\}$, 证明: 存在$\{G_\lambda\}_{\lambda=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$且有
$$\cup\{G \in \mathscr{F}\} = \cup\{G_\lambda : \lambda \in \mathbb{N}_+\}$$

解. 证明同7.0.5. □

问题 15.0.7

证明:

(1) $\mathbb{R}$上闭区间$[a, b]$不能表成两不相交非空闭集的并集.

(2) $\mathbb{R}$上开区间(a, b)不能表成两不相交非空开集的并集.

解. (1). 反证. $[a, b] = F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, F_1, F_2非空, 则$\exists x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$, 使得$|x_1 - x_2| = d(F_1, F_2) > 0$, 取$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \in [a, b]$, 不妨$x \in F_1$, 则$d(F_1, F_2) \leq |x - x_2| = \frac{1}{2}d(F_1, F_2)$, 矛盾.

(2). 反证. $(a, b) = G_1 \cup G_2$, G_1, G_2非空开, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, 取$a_1 \in G_1$, $b_1 \in G_2$, $a_1 < b_1$, 作$F_1 = [a_1, b_1] - G_1$, $F_2 = [a_1, b_1] - G_2$, 则F_1, F_2非空闭, 且$F_1 \cup F_2 = [a_1, b_1]$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, 与(1)矛盾. □

问题 15.0.8

设(X, ρ)是度量空间, 映射$T : X \to X$满足$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y) (\forall x \neq y)$并已知$T$有不动点. 求证不动点唯一.

问题 15.0.9

设T是度量空间上的压缩映射, 求证T是连续的.

问题 15.0.10

$X = [0, 1) \subset \mathbb{R}$, $\mathscr{T} = \{\emptyset\} \cup \{[0, \alpha) : 0 < \alpha \leq 1\}$, 求证: $(X, \mathscr{T})$是拓扑空间.

问题 15.0.11

设$\mathscr{C}$是X的一个子集类, 记
$$\chi_c = \cap\{\chi : \mathscr{C} \subset \chi, \chi\text{是}X\text{的拓扑}\}.$$
求证: χ_c是X的拓扑, 且它是使$\mathscr{C}$中成员都成为开集的X的最弱拓扑.

问题 15.0.12

设$A \subset (X, \chi)$, 求证: A°是开集, 且是包含于A的最大开集; A^{-}是闭集且是包含A的最小闭集.

问题 15.0.13

$A, B \subset (X, \chi)$, 求证: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

解. 用$A \subset B$得$\overline{A} \subset \overline{B}$, 证$\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$, 另一方面, $\overline{A}, \overline{B}$均是闭集, $\overline{A} \cup \overline{B}$闭, 所以$A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, 从而$\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. □

解. 用$(A\cup B)'=A'\cup B'$. □

问题 15.0.14

求证: Hausdorff空间中任一单点集闭.

解. $(X,\mathscr{X})$是Hausdorff空间, $x_0\in X$, $\forall x(\in X)\neq x_0$, G_x为x的不含x_0的开邻域, 则$\{x_0\}^c=\cup_{x\neq x_0}G_x$. □

解. 由分离性, $\forall x(\in X)\neq x_0$, $x\notin\{x_0\}'$, 所以$\overline{\{x_0\}}=\{x_0\}$. □

问题 15.0.15

求证: $(X,\mathscr{X})$是Hausdorff空间的充要条件是X的任一单点集$\{x\}$是x的全体邻域的交.

解. 必要性用15.0.14, 由$\bigcap_{G\in\mathscr{X}}G\subset\bigcap_{G\in\mathscr{X}}\overline{G}$, 所以$\forall x\in X$, x的一切闭邻域的交也是$\{x\}$, $\forall y(\neq x)\in X$, 有x的闭邻域$V(x)$, $y\notin V(x)$, 即$y\in V^c(x)$, 于是有x的邻域$V(x)$及y的邻域$V^c(x)$使$V(x)\cap V^c(x)=\emptyset$, 从而$(X,\mathscr{X})$是Hausdorff空间. □

问题 15.0.16

求证: Hausdorff空间中的子集A的导集A'必是闭集.

解. 若$x_0\in(A')'$, 则x_0的任何开邻域$V(x_0)$有$y\in A'\cap(V(x_0)-\{x_0\})\neq\emptyset$. 由分离性及$V(x_0)$开, 存在$y$的邻域$G_y$使$y\in G_y\subset V(x_0)-\{x_0\}$, 而$\emptyset\neq A\cap(G_y-\{y\})\subset A\cap(V(x_0)-\{x_0\})$, 即$x_0\in A'$. □

解. 若$x_0\notin A'$, 则有x_0开邻域$V(x_0)$使$A\cap(V(x_0)-\{x_0\})=\emptyset$. 由$\{x_0\}$闭和空间分离性15.0.14, 知$V(x_0)-\{x_0\}$开, 从而$\forall x\in V(x_0)-\{x_0\}$, $x\notin A'$, 所以$V(x_0)\cap A'=\emptyset$, 从而A'^c开. □

问题 15.0.17

X,Y都是拓扑空间, $F:X\to Y$, 求证: F连续的充要条件是$\forall A\subset X$有$F(\overline{A})\subset\overline{F(A)}$.

解. 必要性: 用$A\subset F^{-1}(F(A))\subset F^{-1}(\overline{F(A)})$闭.
充分性: B在Y中闭, 由$F(F^{-1}(B))\subset B$, 所以

$$F(\overline{F^{-1}(B)})\subset\overline{F(F^{-1}(B))}\subset B\Longrightarrow\overline{F^{-1}(B)}\subset F^{-1}(B)\text{闭}.$$

即得. □

问题 15.0.18

X,Y都是拓扑空间, $F:X\to Y$, 求证: F连续的充要条件是$\forall B\subset Y$有$\overline{F^{-1}(B)}\subset F^{-1}(\overline{B})$.

解. 只证充分性, Y中闭集B, 有$\overline{F^{-1}(B)}\subset F^{-1}(B)$, 即闭集原像闭, 故$F$连续. □

问题 15.0.19

$\mathscr{X},\mathscr{Y}$是X上两个拓扑, 且$\mathscr{X}\subset\mathscr{Y}$, 求证: 若$A$在$(X,\mathscr{X})$中闭, 则$A$在$(X,\mathscr{Y})$中闭, 即弱闭集必为强闭集.

问题 15.0.20

设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 为 X 上的两个拓扑, 求证: $\mathscr{Y}\subset\mathscr{X}$ 的充要条件是恒等映射 $I:(X,\mathscr{X})\to(X,\mathscr{Y})$连续.

问题 15.0.21

若 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 X 上两个拓扑, 且 $\mathscr{X}\subset\mathscr{Y}$, 求证: 若 A 为 $(X,\mathscr{Y})$ 中紧集, 则 A 必为 $(X,\mathscr{X})$ 中紧集, 即强紧集必为紧集.

问题 15.0.22

设 $X=A\cup B$ 且 A,B 闭于 $(X,\mathscr{X})$, 若 $f:A\to(Y,\mathscr{Y})$ 与 $g:B\to(Y,\mathscr{Y})$ 都连续, 且 $f|_{A\cap B}=g|_{A\cap B}$, 求证 f,g 是同一连续映射 $h:(X,\mathscr{X})\to(Y,\mathscr{Y})$ 在 A,B 上的限制.

解. 令 $h:X\to Y$,

$$h(x)=\begin{cases}f(x), & x\in A\\ g(x), & x\in A^c\end{cases}$$

所以只需证 h 连续, 即证 $\forall D\subset X$ 有 $h(\overline{D})\subset\overline{h(D)}$. 因

$$\begin{aligned}h(\overline{D})&=h(\overline{(D\cap A)\cup(D\cap B)})=h((\overline{D\cap A})\cup(\overline{D\cap B}))\\&\subset f(\overline{D\cap A})\cup g(\overline{D\cap B})\subset\overline{f(D\cap A)}\cup\overline{g(D\cap B)}\\&=\overline{f(D\cap A)\cup g(D\cap B)}=\overline{h(D\cap A)\cup h(D\cap B)}\\&=\overline{h((D\cap A)\cup(D\cap B))}=\overline{h(D)}\end{aligned}$$

即得.

同样, 把 A,B 改成都为 X 中开集, 命题仍成立. 反之, 若 A,B 都不是闭(或开)集, 有如下反例 $X=Y=\mathbb{R}$且赋予普通拓扑. 设$A=\mathbb{Q}$, $B=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $f(x)=0,\forall x\in A$, $g(x)=1,\forall x\in B$. □

问题 15.0.23

定义 $F:(X,\mathscr{X})\to(Y,\mathscr{Y})$, 若$\forall G\in\mathscr{X}$, $F(G)\in\mathscr{Y}$, 称 F 为开映射. 求证:

(1) $F:(X,\mathscr{X})\to(Y,\mathscr{Y})$为开映射的充要条件是$\forall x\in X$对任一$x$的邻域$V(x)$都有$F(V(x))$为$F(x)$的邻域.

(2) 可逆映射F是同胚映射的充要条件是F是连续开映射.

解. 只证(1)的充分性. $\forall x\in G$, 则$F(G)$为$F(x)$的邻域, 因而有开集$V_x\in\mathscr{Y}$, 使$F(x)\in V_x\subset F(G)$. 于是$F(G)=\bigcup_{x\in G}V_x$开于Y. □

问题 15.0.24

设$(X,\mathscr{X})$, $(Y,\mathscr{Y})$都是Hausdorff空间, $F:X\to Y$是可逆开映射, 求证:

(1) 若$(y_n)\subset Y$且$\lim_{n\to\infty}y_n=y\in Y$, 则$\lim_{n\to\infty}F^{-1}(y_n)=F^{-1}(y)$.

(2) B在$(Y,\mathscr{Y})$中紧, 则$F^{-1}(B)$在$(X,\mathscr{X})$中紧.

问题 15.0.25

设 $(X,\mathscr{X})$是Hausdorff空间, A 在 X 中紧, 求证:

(1) A 在 X 中闭.

(2) A 的闭子集 B 紧.

(3) 一族紧集的交仍紧.

(4) 有限紧集的并仍紧.

解. (1). $\forall x \notin A$, 由分离性, $\forall y \in A$, 有$x \in V_y(x)$, $y \in V_y$ 使 $V_y \cap V_y(x) = \emptyset$. $A \subset \bigcup_{y\in A} V_y$ 有有限子覆盖 $\mathscr{F}$, $A \subset \bigcup_{y\in\mathscr{F}} V_y$, 从而$\bigcup_{y\in\mathscr{F}} V_y(x)$是$X$在$A^c$中的开邻域.

(2). 由(1)知A闭, 所以B闭于X, B^c和B的开覆盖组成A的开覆盖.

(3). 紧集在Hausdorff空间中闭, 然后用(2).

(4). 同(3), 有限紧集的并是闭集. □

问题 15.0.26

求证: 紧空间 $(X, \mathscr{X})$ 中任一无限子集 A 必有聚点, 即 A 无限必 $A' \neq \emptyset$.

解. 反证 $A' = \emptyset$, $\forall x \in X$, 有 $V(x)$ 使 $A \cap (V(x) = \{x\}) = \emptyset$. $\{V(x) : x \in X\}$ 是 X 的开覆盖, 有有限子覆盖 $\mathscr{F}$ 使 $\bigcup_{x\in\mathscr{F}} V(x) \supset X$. 而 $\bigcup_{x\in\mathscr{F}}(V(x) - \{x\}) \cap A = \emptyset$, 所以 A 有限. □

问题 15.0.27

若紧空间 $(X, \mathscr{X})$ 中点列 $\{x_n\}$ 只有唯一聚点 x, 且对于任意的$i \neq j$, $x_i \neq x_j$, 求证: $\{x_n\}$必收敛于 x.

解. 只需证 $(A \cap V(x))^c_A$是有限集, 其中$A = \{x_n\}$, 由问题15.0.26及反证法. $(A \cap V(x))^c_A$无限必有异于 x 的聚点, 故矛盾. □

问题 15.0.28

设 $\mathscr{B}$ 是 X 的一族子集, $\widetilde{\mathscr{B}}$是由$\emptyset$及$\mathscr{B}$的成员可能作出的一切并集组成的子集类, 求证: $\widetilde{\mathscr{B}}$为X的拓扑的充要条件是$\mathscr{B}$满足:

(1) $X = \bigcup\limits_{B\in\mathscr{B}} B$.

(2) $\forall B_1, B_2 \in \mathscr{B}$及$\forall x \in B_1 \cap B_2$, 必有$B_3 \in \mathscr{B}$使得$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

问题 15.0.29

设$\mathscr{B}$为$(X, \mathscr{X})$中一个子集类, $\mathscr{B}$是X的一族子集, $\widetilde{\mathscr{B}}$是$\emptyset$及$\mathscr{B}$的成员可能做出的一切并组成的集类, 求证: $\widetilde{\mathscr{B}} = \mathscr{X}$的充分必要条件是$\mathscr{B}$满足

(1) $\forall A \in \mathscr{X}$及$\forall a \in A$, $\exists B \in \mathscr{B}$, 使得 $a \in B \subset A$.

(2) $\forall B \in \mathscr{B}$及$\forall b \in B$, $\exists A \in \mathscr{X}$, 使得 $b \in A \subset B$.

解. 必要性: (1)等价于$\mathscr{X} \subset \widetilde{\mathscr{B}}$, (2)等价于$\widetilde{\mathscr{B}} \subset \mathscr{X}$. □

问题 15.0.30

设$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$连续, 令$d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, $x, y \in \mathbb{R}$. 求证: d是$\mathbb{R}$上的度量的充要条件是f严格单调.

问题 15.0.31

设$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是单射, 则$d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, $x, y \in \mathbb{R}$为$\mathbb{R}$上度量, 反之亦然.

问题 15.0.32

设$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n|\xi_n - \eta_n|$, $x = \{\xi_n\}$, $y = \{\eta_n\} \in l^\infty$且$\mu_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$收敛. 求证: d也是l^∞上的度量.

解. 先证$d : l^\infty \times l^\infty \to \mathbb{R}$. □

问题 15.0.33

设(X,d)为度量空间, 令$\rho(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, 求证: (X,ρ)也是度量空间.

问题 15.0.34

设$f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$严格增, 且$f(0)=0$, $f(u+v)\le f(u)+f(v)$, $(u,v\in[0,+\infty))$. 求证: 当(X,d)为度量空间时, $\rho(x,y)=f(d(x,y))$也是X上的度量.

问题 15.0.35: Newton法

f是定义在$[a,b]$上的二次连续可微的实值函数, $\hat{x} \in (a,b)$, 使得$f(\hat{x}) = 0$, $f'(\hat{x}) \neq 0$. 求证存在$\hat{x}$的邻域$U(\hat{x})$, 使得$\forall x_0 \in U(\hat{x})$迭代序列

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n \in \mathbb{N})$$

是收敛的, 并且$\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$.

问题 15.0.36

试找出T^n是压缩映射, 但T不是压缩映射的反例.

问题 15.0.37

设M是$\mathbb{R}^n$中的有界闭集, 映射$T: M \to M$满足

$$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y) \quad (\forall x, y \in M, x \neq y).$$

求证T在M中存在唯一不动点. 并举反例说明M的有界闭不能省去.

问题 15.0.38

对于积分方程$x(t) - \lambda \int_0^1 \mathrm{e}^{t-s}\,\mathrm{d}s = y(t)$为一给定函数, λ为常数, $|\lambda| < 1$, 求证存在唯一解$x(t) \in [0, 1]$.

问题 15.0.39

设S为一切复数列$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots)$组成的集合, 在$S$中定义距离为

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|},$$

其中$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots)$. 求证: S为一个完备的距离空间.

问题 15.0.40

记F是只有有限项不为零的实数列全体, 在F上引进距离

$$\rho(x,y)=\sup_{k\geq 1}|\xi_k-\eta_k|,$$

其中$x=\{\xi_k\}$, $y=\{\eta_k\}\in F$. 求证(F,ρ)不完备, 并指出它的完备化空间.

问题 15.0.41

设M是$C[a,b]$中的有界集, 求证集合

$$\widetilde{M}=\left\{F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t | f\in M\right\}$$

是列紧集.

问题 15.0.42

求证$\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$在$C[0,\pi]$中不是列紧的.

问题 15.0.43

空间S中集合A的列紧性条件. A在S中是列紧的, 当且仅当对于任何$n \in \mathbb{N}$, $\exists C_n > 0$, 使得对于任意的$\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in A$的点的第$n$个坐标的数集是有界的, 即$|\xi_n| \leq C_n (n \in \mathbb{N}_+)$.

问题 15.0.44

设(X,ρ)是距离空间, M是X中的列紧集, 若映射$T: X \to M$满足

$$\rho(Tx,Ty) < \rho(x,y) \quad (\forall x, y \in X, x \neq y),$$

求证T在X上存在唯一的不动点.

问题 15.0.45

设(M,ρ)是一个紧距离空间, 又$E\subset C(M)$, E中函数一致有界并满足:

$$|x(t_1)-x(t_2)|\le c\rho(t_1,t_2)^\alpha$$

其中$x\in E$, $t_1,t_2\in M$, 其中$0<\alpha\le 1$, $c>0$, 求证E在$C(M)$中是列紧集.

问题 15.0.46

在$C^1[a,b]$中令

$$\|x\|_1 = \left(\int_a^b (|x(t)|^2 + |x'(t)|^2) \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall x \in C^1[a,b]$$

(1) 求证$\|\cdot\|_1$是$C^1[a,b]$上的范数;

(2) $(C^1[a,b], \|\cdot\|_1)$是否完备?

Chapter 16

定理集

定理 16.0.1: 勾股定理

若$(\alpha,\beta)=0$, 则
$$|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2.$$
进一步的, 若向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$两两正交, 则
$$|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m|^2=|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+\cdots+|\alpha_m|^2.$$

定理 16.0.2

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$两两正交, 则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关.

定理 16.0.3: 标准正交基的存在性

在任何有限维欧式空间中, 都有标准正交基. 有限维欧式空间V中的任何非零正交向量组都可以扩充为V的一个正交基.

定理 16.0.4

两个有限维欧式空间同构的充要条件是它们的维数相同.
任何n维欧式空间都与欧式空间$\mathbb{R}^n$同构.

定理 16.0.5

若欧式空间V的子空间$V_1,V_2,\cdots,V_s$两两正交, 则它们的和是直和.
反之, 子空间的和为直和时, 子空间之间不一定正交.

定理 16.0.6

设W是欧式空间V的子空间. 则$W^\perp=\{\gamma\mid\gamma\in V,\gamma\perp W\}$是$V$的子空间; 当$W$是有限维时, $V=W\oplus W^\perp$, $(W^\perp)^\perp=W$.
V_1,V_2是欧式空间V(不一定有限维)的两个子空间. 证明:
$$(V_1+V_2)^\perp=V_1^\perp\bigcap V_2^\perp.$$

定理 16.0.7

设T是n维欧式空间V的一个线性变换. 则T是正交变换的充要条件是, T把标准正交基变成标准正交基.

定理 16.0.8

设$s_1, s_2, \cdots, s_n$是n维欧式空间V的一个标准正交基, A是一个n阶实方阵, 且$(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) = (s_1, s_2, \cdots, s_n)A$. 则$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$是标准正交基的充要条件是, A为正交方阵.

定理 16.0.9

设T是n维欧式空间V的一个线性变换. 则T是正交变换的充要条件是, T在标准正交基下的矩阵是正交矩阵.
有限维欧式空间V的正交变换有逆变换, 而且是V到V的同构映射.
其中充分性部分, 标准正交性的条件不可省去.

定理 16.0.10

实数域上有限维空间(不要求是欧式空间)的每一个线性变换, 都有一维或二维的不变子空间.

解. 证明分实特征根和复特征根两种情况, 复的情况对特征向量分离实虚部, 得到不变子空间的基. □

定理 16.0.11

设T是有限维欧式空间V的一个正交变换. 若子空间W对T不变, 则$W^\perp$对T也不变.
设T是有限维欧式空间V的一个正交变换, 则V可分解成对T不变的一维或二维子空间的直和.

定理 16.0.12

欧式空间中正交变换的特征值为± 1.
正交方阵的特征根的模为1.

定理 16.0.13

设T是二维欧式空间V的一个正交变换, 且无特征值, 则T在标准正交基下的矩阵具有形状

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

定理 16.0.14

设T是n维欧式空间V的一个正交变换, 则存在标准正交基, 使T在此基下的矩阵成下面形状:

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& S_1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& S_r \end{pmatrix}$$

其中

$$S_i = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, \cdots, r.$$

对于任何n阶正交方阵A, 都存在正交方阵U, 使$U^{-1}AU$为上面方阵的形式.

定理 16.0.15

设T是n维欧式空间V的一个线性变换. 则T是对称变换的充要条件是, T在标准正交基下的矩阵为对称方阵.

定理 16.0.16

实对称方阵的特征根全是实数.

定理 16.0.17

设T是n维欧式空间V的对称变换, 则T的属于不同特征值的特征向量相互正交.

定理 16.0.18

设T是n维欧式空间V的一个对称变换, W是对T不变的非零子空间, 则W中有关于T的特征向量.
如果α是它的一个特征向量, 则与α正交的全体向量是T的$n-1$维不变子空间.
对V的每个对称变换T, 都存在标准正交基, 使T在此基下的矩阵为对角矩阵.
对每个实对称方阵A, 都存在正交方阵U, 使$U^{-1}AU$为对角矩阵.
任何实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$$

都可经过正交线性代换$X = UY$化成

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

实对称方阵A是正定的充要条件是, A的特征根全是正的.

16.1 数学分析

定理 16.1.1: 关于有界, 无界的充分条件

(1) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$存在, 则$\exists \delta > 0$, 当$-\delta < x - x_0 < 0$时, $f(x)$有界; 对$x \to x_0^+$, $x \to x_0$有类似结论.
(2) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$存在, 则存在$X > 0$, 当$|x| > X$时, $f(x)$有界. $x \to \pm\infty$有类似结论.
(3) $f(x) \in C[a, b]$, 则$f(x)$在$[a, b]$上有界.
(4) $f(x)$在集U上有最大(小)值, 则$f(x)$在U上有上(下)界.
(5) 有界函数间的和, 积运算封闭.
(6) $\lim\limits_{x \to \square} f(x) = \infty$, 则$f(x)$在$\square$的空心邻域内无界. $\square$可为$x_0, x_0^-, x_0^+, \infty, \pm\infty$.

定理 16.1.2: Stolz定理

证明: 若

(a) $y_{n+1} > y_n (n \in \mathbb{N}_+)$;

(b) $\lim_{n \to \infty} y_n = +\infty$;

(c) $\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$存在.

则

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

定理 16.1.3: Cauchy定理

若函数$f(x)$定义于区间$(a,+\infty)$, 并且在每一个有限区间(a,b)内是有界的, 则

(a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$;

(b) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^{1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}$, $(f(x)\geq C>0)$,

假定等是右端的极限都存在且可为$\pm\infty$.

问题: 对于上下极限是否仍有类似结论?.

定理 16.1.4

假设$f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, 每个在$[a,b]$上均可积, 且$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $n\to\infty$. 则$f(x)$可积, 且

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}x.$$

解. 类似6.5.55 □

定理 16.1.5: (一致收敛级数)逐项积分

$u_k:[a,b]\to\mathbb{R}$, 对每个$k\in\mathbb{N}_+$均可积, $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$在$[a,b]$上一致收敛. 则$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$可积, 且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

解. 让$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$并用16.1.4 □

定理 16.1.6: 逐项微分

设$u_k:[a,b]\to\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}_+$, 每项均有连续导数(端点处单边可微), 若有:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x_0)$在某些点$x_0\in[a,b]$收敛.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(x)$在$[a,b]$上一致收敛到$f(x)$.

则

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$在$[a,b]$上收敛且和函数$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$在$[a,b]$上可微且$F'(x)=f(x)$.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\rightrightarrows F(x)$.

解. (1). u_k'连续$(k\in\mathbb{N}_+)$, $\sum_{k=1}^{\infty}u_k'\rightrightarrows f$, 则$f\in C[a,b]$, 所以$f$在$[a,b]$上可积. 让$x\in[a,b]$, 对$u_k'$和$f$在区间$[x_0,x]$上使用16.1.5, (或$[x,x_0]$, 如果$x<x_0$), 则有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}u_k'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(u_k(x)-u_k(x_0)).$$

由假设(i), $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x_0)$收敛, 所以级数$F(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$对任意$x\in[a,b]$均收敛, 所以$F:[a,b]\to\mathbb{R}$是良定义的, 于是$F(x)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x}f(x)\,\mathrm{d}x$, 由$f$连续, 两边求导, 便有$F'(x)=f(x)$.

(2). Cauchy判别法, 取$\varepsilon>0$, 则$\exists N_1$使任意$n\geq m\geq N_1$有

$$\left|\sum_{k=m}^{n}u_k(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

存在N_2使任意$n \geq m \geq N_2$有

$$\left|\sum_{k=m}^{n} u_k'(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad x \in [a,b]$$

故可取$N = \max\{N_1, N_2\}$, $g(x) = \sum_{k=m}^{n} u_k(x)$, 则$g(x) - g(x_0) = g'(\xi)(x - x_0)$. 于是

$$|g(x)| \leq |g(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |g'(\xi)| \cdot |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

故由Cauchy判别法, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$一致收敛. □

定理 16.1.7: 求导与极限的交换

函数列$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_+$, 在$[a,b]$上连续可微, $f_n(x) \to f(x)$, $x \in [a,b]$. $f_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$, $x \in [a,b]$, 则f可微且$f'(x) = \varphi(x)$, 从而$f_n \rightrightarrows f$.

解. 取$u_1 = f_1$, $u_n = f_n - f_{n-1}$, $n > 1$, 并用16.1.6. □

16.2 微分方程

定理 16.2.1: 伯努力方程

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)y + q(x)y^n$, 其中$p(x)$, $q(x)$是所考虑区域上的连续函数, $n(\neq 0, 1)$是常数.

解.

(1) 当$n > 0$时, $y = 0$是方程的解.

(2) 当$y \neq 0$时, 两边同除以y^n, 令$z = y^{1-n}$, 即得一阶线性方程.

□

定理 16.2.2

设$y_1(x)$和$y_2(x)$是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关解, 齐次边值问题

$$\begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0; \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0; \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

存在非平凡解(即不恒等于零的解)当且仅当

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) & \alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) \\ \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) & \alpha_2 y_2'(b) + \beta_2 y_2'(b) \end{vmatrix} = 0$$

16.3 泛函分析

定理 16.3.1: Arzela-Ascoli定理

设$\{f_n\}$是$[0,1]$上一致有界, 等度连续函数族, 则存在某一子序列$\{f_{n(i)}\}$在$[0,1]$上一致收敛.

定理 16.3.2: Hahn-Banach, $\mathbb{R}-version$

设$\mathcal{X}$是定义在$\mathbb{R}$上的向量空间, $q:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$是拟半范数. 若给定线性子空间$\mathcal{Y}\subset\mathcal{X}$和其上的线性映射$\phi:\mathcal{Y}\to\mathbb{R}$, 使得

$$\phi(y)\leq q(y),\forall y\in\mathcal{Y}.$$

则存在线性映射$\varphi:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$满足

(i) $\varphi\mid_{\mathcal{Y}}=\phi$;

(ii) $\varphi(x)\leq q(x)$, $\forall x\in\mathcal{X}$.

解. 先证$\mathcal{X}/\mathcal{Y}=1$的情况. 即有$x_0\in\mathcal{X}$使得

$$\mathcal{X}=\{y+sx_0:y\in\mathcal{Y},s\in\mathbb{R}\}.$$

于是只需找到$\alpha\in\mathbb{R}$使得映射$\varphi(y+sx_0)=\phi(y)+s\alpha$, $\forall y\in\mathcal{Y}$, $s\in\mathbb{R}$满足条件(ii), 于是$s>0$时有

$$\alpha\leq q(z+x_0)-\phi(z),\forall z\in\mathcal{Y},z=s^{-1}y,s>0$$

对于$s<0$时有

$$\alpha\geq\phi(w)-q(w-x_0),\forall w\in\mathcal{Y},w=t^{-1}y,s<0$$

然而$\phi(w)-q(w-x_0)\leq q(z+x_0)-\phi(z)$, $\forall w,z\in\mathcal{Y}$恒成立. 然后用Zorn引理. □

未知 16.3.1: Hahn-Banach定理, $\mathbb{C}$-version

设$\mathcal{X}$是复数域$\mathbb{C}$上的向量空间, $q:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$是$\mathcal{X}$上的拟半范数, 给定线性子空间$\mathcal{Y}\subset\mathcal{X}$和$\mathcal{Y}$上的线性映射$\phi:\mathcal{Y}\to\mathbb{C}$使得

$$\mathrm{Re}\phi(y)\leq q(y),\quad\forall y\in\mathcal{Y}.$$

则存在线性映射$\psi:\mathcal{X}\to\mathbb{C}$满足:

(i) $\psi\mid_{\mathcal{Y}}=\phi$;

(ii) $\mathrm{Re}\psi(x)\leq q(x)$, $\forall x\in\mathcal{X}$.

解. 设$\phi_1=\mathrm{Re}\phi$, 因ϕ_1是$(\mathcal{Y},\mathbb{R})$上的线性映射且被拟半范数q控制, 则由$\mathbb{R}$-Hahn Banach定理, ϕ_1可延拓到$(\mathcal{X},\mathbb{R})$上的实线性映射ψ_1且满足

(i') $\psi_1\mid_{\mathcal{Y}}=\phi_1$;

(ii') $\psi_1(x)\leq q(x)$, $\forall x\in\mathcal{X}$.

但注意这里用的是实的Hahn Banach定理, 所延拓的ψ_1是针对实向量空间$(\mathcal{X},\mathbb{R})$的, 要得到复向量空间的ψ_1, 则在$(\mathcal{Y},\mathbb{C})$上考虑$\psi_1(y)=\phi_1(y)$, 但新定义的ψ_1是实域上的线性映射, 而不是复域上的线性映射, 显然所求线性映射ψ的实部$\mathrm{Re}\psi$在实线性空间中也满足以上两条件. 若取$\mathrm{Re}\psi=\psi_1$, 则ψ在实的情况已满足条件(ii). 而$\mathrm{Im}\psi(y)=\mathrm{Re}(-\mathrm{i}\psi(y))=\mathrm{Re}\psi(-\mathrm{i}y)=\psi_1(-\mathrm{i}y)$, 于是$\psi(y)=\psi_1(y)+\mathrm{i}\psi_1(-\mathrm{i}y)$, 要证$\psi\mid_{\mathcal{Y}}=\phi$, 只需证$\mathrm{Im}\psi(y)=\mathrm{Im}\phi(y)$, $\forall y\in\mathcal{Y}$, 然而

$$\mathrm{Im}\phi(y)=\mathrm{Re}(-\mathrm{i}\phi(y))=\mathrm{Re}(\phi(-\mathrm{i}y))=\phi_1(-\mathrm{i}y)=\psi_1(-\mathrm{i}y)=\mathrm{Im}\psi(y).$$

最后证明线性映射$\psi(x)=\psi_1(x)+\mathrm{i}\psi_1(-\mathrm{i}x)$在复域上满足(ii), 注意这里的$\psi_1(-\mathrm{i}x)$是怎么定义的? □

16.4 拓扑

定理 16.4.1: 杨忠道定理

证明: 拓扑空间中的每一子集的导集为闭集的充分必要条件是此空间中的每一个单点集的导集为闭集.

解. 只证充分性. 设拓扑空间X的每一个单点集的导集为闭集, 任意$A \subset X$, 设$x \in d(d(A))$, 对x的任意开邻域U, 有$U \cap (d(A) \setminus \{x\}) \neq \varnothing$, 因$d(\{x\})$是闭集, 且$x \notin d(\{x\})$, 令$V = U \setminus d(\{x\})$, V是x的开邻域, 从而有

$$y \in V \cap (d(A) \setminus \{x\}).$$

由$y \in V$, $y \notin d(\{x\})$, 且$y \neq x$, 于是存在$W \in \mathscr{U}_y$, 使得$x \notin W$, 因$V \in \mathscr{U}_y$, 令$K = W \cap V$, $K \in \mathscr{U}_y$, 由$y \in d(A)$, 存在$z \in K \cap (A \setminus \{y\}) \neq \varnothing$. 由$z \in K \subset W$, $z \neq x$, 因此$z \in U \cap (A \setminus \{x\})$, 故$U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$, 即$x \in d(A)$, 所以$d(d(A)) \subset d(A)$, $d(A)$为闭集. □

16.5 数论

定理 16.5.1: 恒等定理

设$f(x), g(x) \in D[x]$, 若有无穷多个$\alpha \in D$使$f(\alpha) = g(\alpha)$, 则$f(x) = g(x)$.

定理 16.5.2: 拉格朗日定理

设$f(x)$是整系数多项式, 模p的次数为n, 则同余方程

$$f(x) \equiv 0 \pmod p \tag{16.1}$$

至多有n个互不相同的解.

解. $n = 1$时结论显然成立, 对n归纳. 假设$n-1$时已正确, 当f的次数是n时, 若同余方程无解, 则无需证明. 若$x = a$是一个解, 用$(x-a)$除$f(x)$得$f(x) = g(x)(x-a) + A$, $(A \in \mathbb{Z})$, 若同余方程(16.1)除$x \equiv a \pmod p$外无解, 则证毕, 否则设$x = b$是(16.1)的另一个解, 且$a \not\equiv b \pmod p$, 则

$$0 \equiv f(b) = g(b)(b-a) + A \pmod p, \text{又由} 0 \equiv f(a) = g(a)(a-a) + A = A \pmod p.$$

所以$g(b) \equiv 0 \pmod p$, 这表明(16.1)的解除$x \equiv a \pmod p$之外, 其余的解均是$g(x) \equiv 0 \pmod p$的解, 但$g(x)$模p的次数显然是$n-1$, 由归纳假设, $g(x) \equiv 0 \pmod p$, 至多有$n-1$个互不同余的解, 从而同余方程(16.1)至多有n个解. □

定理 16.5.3: 整系数多项式的有理根

$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, $n \geq 1$, $a_n a_0 \neq 0$且$(a_n, \cdots, a_0) = 1$, 若$\frac{b}{c}$是$f(x)$的一个有理根$(b, c) = 1$, 则$c \mid a_n$, $b \mid a_0$. 特别地, 首项系数为± 1的整系数多项式的有理根必是整数.

解. 由$f\left(\frac{b}{c}\right) = 0$, 得$a_n b^n + \cdots + a_1 b c^{n-1} + a_0 c^n = 0$, 所以$a_0 \mid b$, $a_n \mid c$.
一种证明有理数是整数的证明途径: 证复数是整数, 先证其是有理数, 且找到作为零点的首一多项式. □

定理 16.5.4: Gauss引理

$\mathbb{Z}[x]$中两个本原多项式的乘积仍是一个本原多项式.

解. 反证法, $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$, 若$f(x)g(x)$不是本原多项式, 则有素数$p$整除$f(x)g(x)$的所有系数. 设$r$是$a_i$不被$p$整除的最小角标, s是b_i不被p整除的最小角标, 则$f(x)g(x)$的x^{r+s}项系数不能被p整除. □

定理 16.5.5: 艾森斯坦判别法

设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$是一个整系数多项式, 其中$n\geq 1$. 若存在一个素数p, 使得$p\nmid a_n$, $p\mid a_i(i=0,1,\cdots,n-1)$, 但$p^2\nmid a_0$, 则$f(x)$在$\mathbb{Z}$上不可约.

定理 16.5.6: 科恩定理

设$p=\overline{a_n\cdots a_1a_0}$是一个十进制素数, $0\leq a_i\leq 9(i=0,1,\cdots,n)$, $a_n\neq 0$. 则多项式

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0.$$

在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 先用2.2.8, 再用2.2.9. □

定理 16.5.7

Every nonzero integer can be written as a product of primes.

解. Assume that there is an integer that cannot be written as a product of primes. Let N be the smallest positive integer with this property. Since N cannot itself be prime we must have $N=mn$, where $1<m,n<N$. However, since m and n are positive and smaller than N they must each be a product of primes. But then so is $N=mn$. This is a contradiction.

The proof can be given in a more positive way by using mathematical induction. It is enough to prove the result for all positive integers. 2 is a prime. Suppose that $2<N$ and that we have proved the result for all numbers m such that $2\leq m<N$. We wish to show that N is a product of primes. If N is a prime, there is nothing to do. If N is not a prime, then $N=mn$, where $2\leq m,n<N$. By induction both m and n are products of primes and thus so is N. □

定理 16.5.8: m进(m-adic)表示

正整数$m\geq 2$, $\forall a\in\mathbb{N}_+$, 有表示$a=a_0+a_1m+\cdots+a_sm^s$.

定理 16.5.9: Bézout's identity(贝祖等式)

任意两整数$a,b(b\neq 0)$的正最大公因子$d=(a,b)$唯一存在, 而且存在整数u,v使得$ua+vb=d$, u,v称为Bézout系数, Bézout系数不唯一, 若设$a'=\frac{a}{d}$, $b'=\frac{b}{d}$, 则恰有两系数对满足$|u|<|b'|$, $|v|<|a'|$.

解. 若$a>b$, $a=bq+r$, 则$(a,b)=(r,b)$, 于是由碾转相除法的逆过程可得u,v. □

解. 不用碾转相除法. $M=\{ax+by\mid x,y\in\mathbb{Z}\}$, d是M中的最小正整数(自然数良序性). 则若$d=ax_0+by_0$知$(a,b)\mid d$, 所以只需证$d\mid(a,b)$. 若$d\nmid a$, 取$a=dq+r$, 则$r=a\hat{x_0}+b\hat{y_0}<d$与$d$的选取矛盾. □

推论 16.5.1

a,b互素等价于: 存在整数u,v使$ua+vb=1$.
$a,b\in\mathbb{Z}$, 则:

$$\begin{aligned}(a,b)=d&\Rightarrow\{am+bn\mid m,n\in\mathbb{Z}\}=\{dk\mid k\in\mathbb{Z}\}\\&\Rightarrow a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=d\mathbb{Z}\\&\Rightarrow(a,b)=(d)\end{aligned}$$

推论 16.5.2: Bézout等式

任s个非零整数$a_1,\cdots,a_s$的最大公因子$d=(a_1,\cdots,a_s)$存在唯一, 且$(a_1,\cdots,a_{s-1},a_s)=((a_1,\cdots,a_{s-1}),a_s)$, 且存在整数$u_1,\cdots,u_s$使, $u_1a_1+\cdots+u_sa_s=d$.

定理 16.5.10

$v_p(n)$使使得$p^k\|n$的整数k. 则

$$v_p(n!) = \sum_k \left[\frac{n}{p^k}\right].$$

定理 16.5.11: 威尔逊定理

p是素数, 则有$(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

解. 当$p=2$时, 命题显然. 若$p\geq 3$, 由于对每个与p互素的a在模p下均有逆a^{-1}. 故可得$1,2,\cdots,p-1$的每个与其逆配对, 而特别的当$a=a^{-1}$时是例外. 此时对应$a^2\equiv 1 \pmod p$有解$a=1$或$a=p-1$, 而$2,\cdots,p-2$可两两配对使积为1. 所以$(p-1)!\equiv 1\cdot(p-1)\equiv -1 \pmod p$. □

解. 用 Euler 恒等式

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}i^n = \begin{cases}0, n<m\\(-1)^n n!, n=m\end{cases}$$

取$m=n=p-1$, 当 $p>2$ 时及 Fermat 小定理有

$$(-1)^{p-1}\cdot(p-1)! \equiv \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\binom{p-1}{i}i^{p-1} \equiv \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\binom{p-1}{i} \equiv -1 \pmod p.$$

□

解. 当 $p\geq 3$ 时, 由 Fermat 小定理 $p-2$ 次同余方程

$$f(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-p+1) - x^{p-1} + 1 \equiv 0 \pmod p$$

有 $p-1$ 个不同得解, 所以 $f(x)$ 的系数模 p 余零, 所以常数项 $(p-1)!+1\equiv 0 \pmod p$. □

16.6 不等式

定理 16.6.1: Generalized Schur Inequality

设六个非负实数a,b,c,x,y,z满足(a,b,c)和(x,y,z)均单调, 则

$$\sum_{cyc} x(a-b)(b-c) \geq 0.$$

解. 不妨设$a\geq b\geq c$, 分$x\geq y\geq z$与$x\leq y\leq z$两种情况分别讨论. □

推论 16.6.1

记$S=\sum_{cyc} x(a-b)(a-c)$. 下面几条条件的任何一个均可证明$S\geq 0$.

(1) 当$a\geq b\geq c\geq 0$, $x\geq y\geq 0$且$z\geq 0$时.

(2) 当$a\geq b\geq c\geq 0$, $z\geq y\geq 0$且$x\geq 0$时.

(3) 当$a\geq b\geq c\geq 0$, 且$ax\geq by\geq 0$或者$by\geq cz\geq 0$时.

解. (1)和(2)显然, 对于(3)有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{abc}(x(a-b)(a-c)+y(b-a)(b-c)+z(c-a)(c-b))\\&=ax\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+by\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+cz\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right).\end{aligned}$$

便转化为前面的两种情况了. □

定理 16.6.2: Cauchy不等式

对于欧式空间中任意向量α,β都有

$$|(\alpha,\beta)|\le|\alpha||\beta|.$$

而且即当α与β线性相关时等号成立.

定理 16.6.3: 三角形不等式

对欧式空间中任意向量α,β有

$$|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|.$$

对欧式空间中任意向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$都有

$$|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m|\le|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_m|.$$

Chapter 17

定义集

17.1 初等数论

定义 17.1.1: 模p同余

若两多项式$f(x)$与$g(x)$同次幂系数均关于模p同余, 则称$f(x)$和$g(x)$对模p同余或模p恒等.

$$f(x) \equiv g(x) \pmod p.$$

定义 17.1.2: 多项式模p的次数

若$f(x)$的系数不全被p整除, 其中系数不被p整除的最高幂次称为$f(x)$模p的次数.

定义 17.1.3: 容度, 本原多项式

设$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, 且$f(x) \neq 0$, 将$a_0, a_1, \cdots, a_n$的最大公约数$(a_0, a_1, \cdots, a_n)$, 称为$f(x)$的容度. 容度为1的多项式称为本原多项式.

17.2 高等代数

定义 17.2.1: 欧式空间

设V是实数域$\mathbb{R}$上的一个线性空间. 如果V中存在一个二元运算$(\cdot, \cdot) : V^2 \to \mathbb{R}$, 且满足

1. $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$,
2. $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$, $(k \in \mathbb{R})$,
3. $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = (\alpha_1, \beta) + (\alpha_2, \beta)$,
4. 当$\alpha \neq \theta$时, $(\alpha, \alpha) > 0$,

则称在V上定义了一个内积, 并把V叫做一个欧式空间. 在欧式空间中, 常把实数(α, β)叫做向量α与β的内积.

定义 17.2.2

称非负实数$\sqrt{(\alpha, \alpha)}$为向量α的长, 并用$|\alpha|$表示, 即

$$|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}.$$

设α,β为两个非零向量, 称实数$\varphi=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$为向量$\alpha$与$\beta$的夹角, 亦即

$$\cos\varphi=\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}.$$

定义 17.2.3: 正交

如果欧式空间中两个向量α与β的内积等于零, 即$(\alpha,\beta)=0$, 则称α与β正交.

定义 17.2.4

设V是n维欧式空间. 如果V的基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$中每两个向量都正交, 则称此基为正交基. 如果正交基中每个向量的长都是1, 则称该基为标准正交基.

定义 17.2.5: 欧式空间的同构映射

设V和V'是两个欧式空间, 如果φ是线性空间V到V'的一个同构映射, 而且对V中任意向量α,β都有

$$(\alpha,\beta)=(\varphi(\alpha),\varphi(\beta)),$$

则称φ是欧式空间V到V'的一个同构映射.
如果欧式空间V到V'存在同构映射, 则称欧式空间V与V'同构.

定义 17.2.6: Gram矩阵

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为欧式空间的一组向量, 则称实对称方阵

$$G=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}$$

为这组向量的Gram矩阵. G满秩当且仅当$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关.

定义 17.2.7: 正交

设W是欧式空间V的子空间. 如果V中向量α与W中每个向量都正交, 则称α与W正交, 记为$(\alpha,W)=0$或$\alpha\perp W$.
如果子空间V_1中每个向量与子空间V_2中每个向量都正交, 则称子空间V_1与V_2正交, 记为$(V_1,V_2)=0$或$V_1\perp V_2$.

定义 17.2.8

设W和W'是欧式空间V(不一定是有限维)的两个子空间. 如果

$$V=W+W'\quad 且\quad W\perp W',$$

则称W'为子空间W的正交补.

定义 17.2.9: 正交变换

设T是欧式空间V的一个线性变换, 如果T保持V中任何向量的长都不变, 亦即对V中任意的α都有

$$(T\alpha,T\alpha)=(\alpha,\alpha),$$

则称T是V的一个正交变换.

设T是欧式空间V的线性变换. 则T为正交变换的充要条件是, T保持向量的内积不变, 即对V中任意向量α, β都有

$$(T\alpha, T\beta) = (\alpha, \beta).$$

定义 17.2.10

设A是一个实n阶方阵. 如果$AA' = E$, 则称A为正交方阵. 正交方阵A中的行向量是欧式空间$\mathbb{R}^n$中的一个标准正交基.

定义 17.2.11

设T是n维欧式空间V的一个正交变换, 且在某标准正交基下的方阵为A. 若$|A| = 1$, 则称为旋转或第一类的; 若$|A| = -1$, 则称T为第二类的.

定义 17.2.12

设T是欧式空间V的一个线性变换, 如果对V中任意向量α, β都有

$$(T\alpha, \beta) = (\alpha, T\beta),$$

则称T是V的一个对称变换.

17.3 数学分析

定义 17.3.1: 数学分析习题集

- 分析引论
  1. 实数
  2. 数列理论
  3. 函数的概念
  4. 函数图像表示法
  5. 函数的极限
  6. 符号$\mathscr{O}$
  7. 函数连续性
  8. 反函数, 用参数形式表示的函数
  9. 函数的一致连续性
  10. 函数方程

定义 17.3.2: 分析引论

- 实数
  - 数学归纳法
  - 分割→实数
  - 绝对值(模)→三角不等式, 开区间, 半开区间, 闭区间
  - 上, 下确界的定义
  - 绝对误差, 相对误差→精确数字
- 数列理论
  - 数列极限的概念

- 收敛, 发散, 无穷小量, 无穷极限
- 极限存在的判别法
  * 夹逼定理
  * 单调有界
  * Cauchy准则
- 数列极限的基本定理
  * 保序性
  * 唯一性
  * 保加, 减, 乘, 除(分母不为0)运算
  * Stolz公式
- 极限点, 上下极限, 运算和不等式
- 重要极限
  * $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
  * $\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \log n)$

- 函数的概念
  - (单值)函数的定义, 定义域(存在域), 值域
  - 反函数
  - (严格)单调
  - 复合函数
- 函数的图像表示, 函数的零点
- 函数的极限
  - 函数的有界性, 上确界, 下确界, 振幅
  - 函数在某一点的极限, (与数列极限的关系)
  - 重要极限
    * $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
    * $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$
  - Cauchy准则(函数极限存在的充要条件)
  - 单侧极限, 左右极限
  - 无穷极限, $\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Longleftrightarrow \forall E > 0, \exists\delta = \delta(E) > 0, \ni \forall 0 < |x-a| < \delta(E)$, 均有$|f(x)| > E$.
  - 子列极限, 下极限, 上极限
- 函数的连续性
  - (点)连续
  - 间断点
    * 第一类间断点
      · 可去间断点
      · 跳跃间断点
    * 第二类间断点(无穷型间断点)
  - 左右连续
  - (点)连续, 保加, 减, 乘, 除(分母不为0)
  - 复合函数的连续
  - 初等函数的连续
  - 基本定理
    * 闭区间上连续函数有界

-
    -
        * 闭区间上连续函数达到上下确界(Weierstrass定理)
        * 闭区间上连续函数定义在$(\alpha,\beta)\subset[a,b]$, f取到$f(\alpha)$, $f(\beta)$之间的所有值(Cauchy定理)
        * 闭区间上连续函数的零点定理

- 反函数
    - 反函数的存在性和连续性
    - 单值连续分支
    - 参数形式表示的函数的连续性
- 函数的一致连续性
    - 一致连续性的定义
    - Cantor定理

17.4 微分方程

定义 17.4.1: 标准形式下的边值问题

二阶线性微分方程: $y''+P(x)y'+Q(x)y=\phi(x)$, $P(x),Q(x),\phi(x)\in C[a,b]$在满足边界条件:

$$\begin{cases}\alpha_1 y(a)+\beta_1 y'(a)=\gamma_1, & \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2\in\mathbb{R},\\ \alpha_2 y(b)+\beta_2 y'(b)=\gamma_2, & \alpha_1^2+\beta_1^2\neq 0,\alpha_2^2+\beta_2^2\neq 0.\end{cases}$$

的问题称为标准形式下的边值问题. 边值问题是齐次的, 若$\phi(x)\equiv 0$, $\gamma_1=\gamma_2=0$. 否则称为非齐次的.

定义 17.4.2: 更一般的齐次边值问题

更一般的齐次边值问题是有如下形式的问题

$$\begin{cases}y''+P(x,\lambda)y'+Q(x,\lambda)y=0;\\ \alpha_1 y(a)+\beta_1 y'(a)=0;\\ \alpha_2 y(b)+\beta_2 y'(b)=0\end{cases}$$

17.5 泛函分析

定义 17.5.1: 紧算子

设 X 是 Banach 空间, 若线性算子 T 把每一有界集映成列紧集, 则称线性算子 T 为紧算子.

定义 17.5.2: Banach空间中的凸集

设 X 是 Banach 空间, 集合 $K\subset X$称为是凸的, 若 $(1-t)K+tK\subset K$, $(0\leq t\leq 1)$.

定义 17.5.3: 拟半范数, 半范数

设$\mathbb{K}$是$\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$, $\mathcal{X}$是域$\mathbb{K}$上的向量空间.

A. 映射$q:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$称为拟半范数, 如果

(i) $q(x+y)\leq q(x)+q(y)$, 对于任意$x,y\in\mathcal{X}$.

(ii) $q(tx)=tq(x)$, 对任意的$x\in\mathcal{X}$和$t\in\mathbb{R}$, $t\geq 0$.

B. 映射$q:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$称为是半范数, 如果上面的两个条件中(ii)改为

(ii') $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$, 对任意$x \in \mathcal{X}$和$\lambda \in \mathbb{K}$.

注: 若$q : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$是半范数, 则对于任意的$x \in \mathcal{X}$, $q(x \geq 0)$. (因$2q(x) = q(x) + q(-x) \geq q(0) = 0$).

Chapter 18

tex笔记

18.1 使用频率较低的符号列表

特殊符号表

```
\begin{center}
 \begin{tabular}{|c|c|c|c|c|}
   \hline
   $\hbar$ & $\imath$ & $\jmath$ & $\ell$ & $\Im$\\
   \hline
   $\wp$ & $\mho$ & $\prime$ & $\Box$ & $\Diamond$\\
   \hline
   $\bot$ & $\top$ & $\surd$ & $\diamondsuit$ & $\heartsuit$\\
   \hline
   $\clubsuit$ & $\spadesuit$ & $\neg$ & $\lnot$ & $\flat$\\
   \hline
   $\natural$ & $\sharp$ & \dag & \ddag & \S\\
   \hline
   \P & \copyright & \pounds & \textregistered & \\
   \hline
 \end{tabular}
\end{center}
```

$\hbar$	$\imath$	$\jmath$	ℓ	$\Im$
$\wp$	$\mho$	$\prime$	$\Box$	$\Diamond$
$\bot$	$\top$	$\surd$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$
$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\neg$	$\lnot$	$\flat$
$\natural$	$\sharp$	†	‡	§
¶	©	£	®	

18.2 itemize enumerate

列表

```
\begin{enumerate}
\item This is an example of \ldots
\item \ldots the usual enumeration.
\begin{enumerate}[a)]
  \item And this is a \ldots
  \item \ldots couple of \ldots
\end{enumerate}
  \item
  \begin{enumerate}[-- i --]
  \item \ldots examples of \ldots
  \item \ldots custom-tailored \ldots
  \item \ldots enumerations.
  \newcounter{enumii_saved}
  \setcounter{enumii_saved}{\value{enumii}}
  \end{enumerate}
  Some general comments
  \begin{enumerate}[-- i --]
  \setcounter{enumii}{\value{enumii_saved}}
  % 如果要换另一个条列式项目，但编号接续，使用\newcounter{enumii_saved}来操作
  \item My next point.
  \setcounter{enumii}{7}
  % 使用setcounter{enumii}{数字}来指定编号号码
  \item My eighth point.
  \end{enumerate}
\end{enumerate}
```

1. This is an example of . . .
2. . . . the usual enumeration.
   a) And this is a . . .
   b) . . . couple of . . .
3. – i – . . . examples of . . .
   – ii – . . . custom-tailored . . .
   – iii – . . . enumerations.

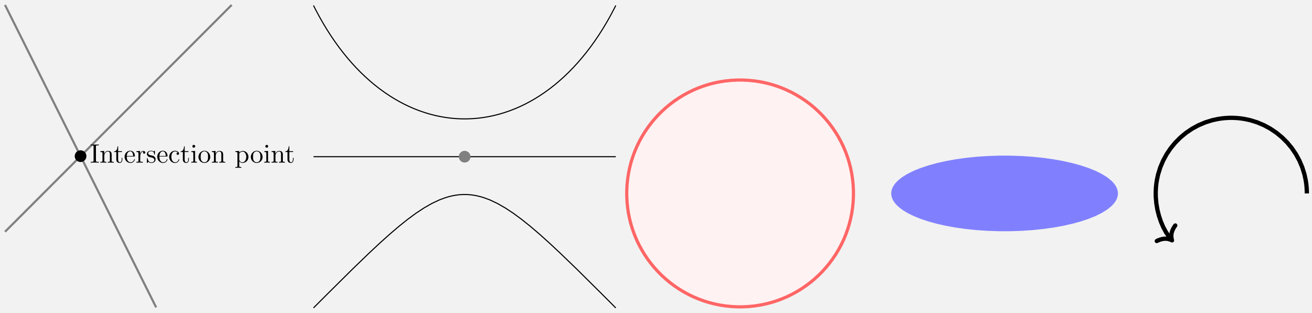
   Some general comments

   – iv – My next point.
   – viii – My eighth point.

18.3 tikz

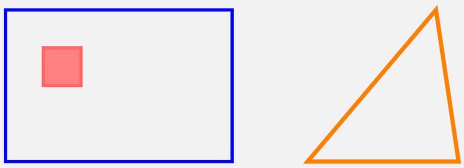
画图

```
\begin{tikzpicture}
 \draw[gray, thick] (-1,2) -- (1,-2);
 \draw[gray, thick] (-1,-1) -- (2,2);
 \filldraw[black] (0,0) circle (2pt) node[anchor=west] {Intersection point};
\end{tikzpicture}
\begin{tikzpicture}
  \draw (-2,0) -- (2,0);
  \filldraw [gray] (0,0) circle (2pt);
  \draw (-2,-2) .. controls (0,0) .. (2,-2);
  \draw (-2,2) .. controls (-1,0) and (1,0) .. (2,2);
\end{tikzpicture}
\begin{tikzpicture}
  \filldraw[color=red!60, fill=red!5, very thick](-1,0) circle (1.5);
  \fill[blue!50] (2.5,0) ellipse (1.5 and 0.5);
  \draw[ultra thick, ->] (6.5,0) arc (0:220:1);
\end{tikzpicture}
```



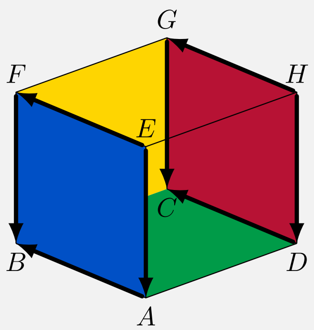
画图

```
\begin{tikzpicture}
  \filldraw[color=red!60, fill=red!50, very thick](1,1) rectangle (0.5,1.5);
  \draw[blue, very thick] (0,0)rectangle (3,2);
  \draw[orange, ultra thick] (4,0) -- (6,0) -- (5.7,2) -- cycle;
\end{tikzpicture}
```



270226

```
\definecolor{myred}{RGB}{183,18,52}
\definecolor{myyellow}{RGB}{254,213,1}
\definecolor{myblue}{RGB}{0,80,198}
\definecolor{mygreen}{RGB}{0,155,72}
\begin{tikzpicture}[
  line join=round,
  y={(-0.86cm,0.36cm)},x={(1cm,0.36cm)}, z={(0cm,1cm)},
  arr/.style={-latex,ultra thick,line cap=round,shorten <= 1.5pt}
]
\def\Side{2}
\coordinate (A1) at (0,0,0);
\coordinate (A2) at (0,\Side,0);
\coordinate (A3) at (\Side,\Side,0);
\coordinate (A4) at (\Side,0,0);
\coordinate (B1) at (0,0,\Side);
\coordinate (B2) at (0,\Side,\Side);
\coordinate (B3) at (\Side,\Side,\Side);
\coordinate (B4) at (\Side,0,\Side);

\fill[myyellow] (A2) -- (A3) -- (B3) -- (B2) -- cycle;
\fill[mygreen]  (A2) -- (A3) -- (A4) -- (A1) -- cycle;
\fill[myred](A3) -- (B3) -- (B4) -- (A4) -- cycle;
\fill[myblue]   (A1) -- (A2) -- (B2) -- (B1) -- cycle;

\draw (A2) -- (A1) -- (A4);
\draw (B2) -- (B1) -- (B4) -- (B3) -- cycle;
\draw (A1) -- (B1);
\draw (A2) -- (B2);
\draw (A4) -- (B4);

\draw[thin] (A3) -- (B3);
\draw[thin] (A3) -- (A4);

\path[arr]
  (A1) edge (A2)
  (B2) edge (A2)
  (B1) edge (B2)
  (B1) edge (A1)
  (B4) edge (A4)
  (B3) edge (A3)
  (B4) edge (B3)
  (A4) edge (A3);

\node[below] at (A1) {$A$};
\node[below] at (A2) {$B$};
\node[below] at (A3) {$C$};
\node[below] at (A4) {$D$};
\node[above] at (B1) {$E$};
\node[above] at (B2) {$F$};
\node[above] at (B3) {$G$};
\node[above] at (B4) {$H$};
\end{tikzpicture}
```



根据三点画弧

```
\begin{tikzpicture}
  \tkzDefPoint(1,2){A}
  \tkzDefPoint(3,4){B}
  \tkzDefPoint(2,4){C}
  \tkzCircumCenter(A,B,C)\tkzGetPoint{O}
  \tkzDrawArc(O,C)(A)
\end{tikzpicture}
```

字体

```
$\mathscr{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$\\
$\mathbb{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$\\
$\mathcal{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$\\
$\mathfrak{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$
```

$\mathscr{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$
$\mathbb{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$
$\mathcal{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$
$\mathfrak{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$

Chapter 19

math.stackexchange.com

问题: 1. What Does it Really Mean to Have Different Kinds of Infinities?

1 What Does it Really Mean to Have Different Kinds of Infinities?
Can someone explain to me how there can be different kinds of infinities?
I was reading The man who loved only numbers by Paul Hoffman and came across the concept of countable and uncountable infinities, but they're only words to me.
Any help would be appreciated.

解答

Suppose no one ever taught you the names for ordinary numbers. Then suppose that you and I agreed that we would trade one bushel of corn for each of my sheep. But there's a problem, we don't know how to count the bushels or the sheep! So what do we do?
We form a bijection between the two sets. That's just fancy language for saying you pair things up by putting one bushel next to each of the sheep. When we're done we swap. We've just proved that the number of sheep is the same as the number of bushels without actually counting.
We can try doing the same thing with infinite sets. So suppose you have the set of positive integers and I have the set of rational numbers and you want to trade me one positive integer for each of my rationals. Can you do so in a way that gets all of my rational numbers?
Perhaps surprisingly the answer is yes! You make the rational numbers into a big square grid with the numerator and denominators as the two coordinates. Then you start placing your bushels along diagonals of increasing size, see wikipedia.
This says that the rational numbers are countable that is you can find a clever way to count them off in the above fashion.
The remarkable fact is that for the real numbers there's no way at all to count them off in this way. No matter how clever you are you won't be able to scam me out of all of my real numbers by placing a natural number next to each of them. The proof of that is Cantor's clever diagonal argument.

评论

Fantastic answer! – Allain Lalonde
I like this so far, but maybe add a bit on uncountable to distinguish the difference. – BBischof
That's a really good answer, thanks :D – fbstj
Why can't lecturers at Uni explain things in this way? – Sachin Kainth
In the case of positives and rationals how you match them? How diagonals become bushels . Can u explain more on that figure – user5507
+1 for fancy language – Tyler Langan
Wow, great way to explain it. – Abhimanyu Pallavi Sudhir
One bushel of corn for each sheep is a little too generous for me. :P – BlackAdder
OMG I love the bushels and the sheep. Very great way to explain it. – Brian Cheung
I assume with positive numbers you mean positive integers . Because, after all, π is a positive number as well. – celtschk

解答

How there can be different kinds of infinities?
This is very simple to see. This is because of:
Claim: A given set X and its power set $P(X)$ can never be in bijection.
Proof: By contradiction. Let f be any function from X to $P(X)$. It suffices to prove f cannot be surjective. That means that some member of $P(X)$ i.e., some subset of S, is not in the image of f. Consider the set:
$T = \{x \in X : x \notin f(x)\}$.
For every x in X , either x is in T or not. If x is in T, then by definition of T, x is not in $f(x)$, so T is not equal to $f(x)$. On the other hand, if s is not in T, then by definition of T, x is in $f(x)$, so again T is not equal to $f(x)$. Q.E.D.
Thus take any infinite set you like. Then take its power set, its power set, and so on. You get an infinite sequence of sets of increasing cardinality(Here I am skipping a little; but a use of the Schroeder-Bernstein theorem will fix things).
Hilbert's Hotel is a classic demonstration.

解答

Hilbert's Hotel is a classic demonstration.

评论

A really good book on the subject was written by David Wallace Foster, Everything and More: A Compact History of Infinity – FordBuchanan
David Foster Wallace. (RIP :-( ) – Jason S

解答

A **countably infinite** set is a set for which you can list the elements $a_1, a_2, a_3, ...$
For example, the set of all integers is countably infinite since I can list its elements as follows:
$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...$
So is the set of rational numbers, but this is more difficult to see. Let's start with the positive rationals. Can you see the pattern in this listing?
$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \cdots$
(Hint: Add the numerator and denominator to see a different pattern.)
This listing has lots of repeats, e.g. $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}$ and $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}$. That's ok since I can condense the listing by skipping over any repeats.
$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \cdots$
Let's write q_n for the n-th element of this list. Then $0, q_1, -q_1, q_2, -q_2, q_3, -q_3, ...$ is a listing of all rational numbers.
A **countable set** is a set which is either finite or countably infinite; an **uncountable set** is a set which is not countable.
Thus, an uncountable set is an infinite set which has no listing of all of its elements (as in the definition of countably infinite set).
An example of an uncountable set is the set of all real numbers. To see this, you can use the **diagonal method**. Ask another question to see how this works...

解答

You can see that there are infinitely many natural numbers $1, 2, 3, \ldots$, and infinitely many real numbers, such as $0, 1, \pi$, etc. But are these two infinities the same?
Well, suppose you have two sets of objects, e.g. people and horses, and you want to know if the number of objects in one set is the same as in the other. The simplest way is to find a way of corresponding the objects one-to-one. For instance, if you see a parade of people riding horses, you will know that there are as many people as there are horses, because there is such a one-to-one correspondence.
We say that a set with infinitely many things is "countable", if we can find a one-to-one correspondence between the things in this set and the natural numbers.
E.g., the integers are countable: $1 \leftrightarrow 0$, $2 \leftrightarrow -1$, $3 \leftrightarrow 1$, $4 \leftrightarrow -2$, $5 \leftrightarrow 2$, etc, gives such a correspondence.
However, the set of real numbers is NOT countable! This was proven for the first time by Georg Cantor. Here is a proof using the so-called diagonal argument.

解答

Infinity is an overloaded term that can mean many things.
One common non-mathematical use of infinity is to refer to everything in the universe. This is **not** what mathematicians mean when they say infinity. That would be a kin to the set of all sets, which is a paradoxical concept that is not part of mathematical discourse.
Mathematicians will use infinity as a way to represent a process that continues indefinitely. This is a kin to saying "take the limit as n goes to infinity", which is close to saying "continue this process indefinitely."
Infinity is also use infinity to talk about size. All sets are either infinite or finite.
The story doesn't stop there. There is something fundamentally different about sets like the points on a line, where there are no holes, and sets like the integers where there are holes. They are both infinite but one seems denser than the other.
That's where whole countable uncountable thing comes in. Infinite sets have a size, but it is not a number in the traditional sense. Its more like "relative size". Bijections are how we determine size for infinite sets, which are explained well on this page, so I won't repeat the explanation.
A more in-depth, but still understandable explanation is given in Computability and Logic by George Boolos.

解答

The basic concept is thus:

- A 'countable' infinity is one where you can give each item in the set an integer and 'count' them (even though there are an infinite number of them)
- An 'uncountable' infinity defies this. You cannot assign an integer to each item in the set because you will miss items.

The key to seeing this is using the 'diagonal slash' argument as originally put forward by Cantor. With a countable infinity, you can create a list of all the items in the set and assign each one a different natural number. This can be done with the naturals (obviously) and the complete range of integers (including negative numbers) and even the rational numbers (so including fractions). It cannot be done with the reals due to the diagonal slash argument:

1. Create your list of all real numbers and assign each one an integer
2. Create a real number with the rule that the first digit after the decimal point is different from the first digit of your first number, the second digit is different from the second digit of your second number, and so on for all digits
3. Try and place this number in your list of all numbers. it can't be the first number, or the second or the third and so on down the list.
4. Reductio Ad Absurdium, your number does not exist in your countable list of all real numbers and must be added on to create a new list. The same process can then be done again to show the list still isn't complete.

This shows a difference between two obviously infinite sets and leads to the somewhat scary conclusion that there are (at least) 2 different forms of infinity.

Chapter 20

语录

在我年轻的时候，我听从建议去读庞加莱，希尔伯特，克莱因以及胡尔维茨等的著作，并从中获益．而我自己对布拉须凯，嘉当和霍普夫的著作更为熟悉，其实这也是中国的传统：在中国我们被教导要读孔夫子，韩愈的散文以及杜甫的诗歌，我真诚地希望这套全集不要成为书架上的摆设，而是在年轻数学家的手里被翻烂掉．

有人主张依靠直观去进行数学教学，我却认为再没有比这种数学教学方法更为荒谬和更为有害的了，每一个数学教师都应当不遗余力地教会学生去思考而不依赖于直观感觉．
--柯勒里吉

数学不是规律的发现者，因为它不是归纳．数学也不是理论的缔造者，因为他不是假说．但数学却是规律和理论的裁判和主宰者．因为规律和假说都要向数学表明自己的主张，然后等待数学的裁判．如果没有数学上的认可，则规律不能起作用，理论也不能解释．
--Peirce，Benjamin

Chapter 21

GTM 120. weakly differentiable functions

21.1 Riew

A Borel measure μ with the properties that each subset of $\mathbb{R}^n$ is contained within a Borel set of equal μ measure and that $\mu(K) < \infty$ for each compact set $K \subset \mathbb{R}^n$ is called a Radon measure.

21.2 Questions

1. recall the defination of Holder space $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ for any open set $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

2. prove that $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ is a Banach space.

3. define Lebesgure measurable set using outer Lebesgue measure.

4. the defination of Borel set in $\mathbb{R}^n$.

5. if $|\cdot|$ is the outer Lebesgure measure, then for any $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $d(A, B) > 0$ implies $|A \cup B| = |A| + |B|$.

6. using the above conclusion, prove that for any closed set in $\mathbb{R}^n$ is measurable, so any Borel set is measurable.

Bibliography

[PH] The Man Who Loved Only Numbers, The Story of Paul Erdos and The Search for Mathematical Truth; Paul Hoffman; 1999.

[YN] 数域的上同调; 尤尔根·诺伊基希, 亚历山大[德], 哈尔滨工业大学.

[TH] Holder不等式及其应用; 田景峰, 哈明虎, 清华大学.