

# 目录

第一章 中等数学	5
1.1 1990 年第一期	5
1.2 根据考点划分	9
1.2.1 代数	9
1.2.2 三角函数	9
1.2.3 向量	10
1.2.4 复数	10
1.2.5 圆锥曲线	10
1.2.6 几何	10
1.2.7 不等式	11
1.3 归纳法	17
1.4 鸽洞原理	18
1.5 反证法	18
1.6 逐步调整法	18
1.7 观点	19
1.8 杂谈与碎片	19
第二章 数学分析	21
2.1 极限	21
2.2 导数	21
2.3 积分	22
2.4 级数	25
2.5 其他	26
第三章 数学分析 - 梅加强	41
3.1 NULL	41
3.2 数列极限	41
3.2.1 求极限的方法	42
3.3 连续函数	46
3.3.1 函数的极限	46
3.3.2 函数极限的性质	47
3.3.3 无穷小量与无穷大量的阶	48
3.3.4 连续函数	49
3.3.5 闭区间上连续函数的性质	49

3.3.6	一致连续性	50
3.3.7	连续函数的积分	51
3.3.8	作业	53
3.4	微分及其逆运算	55
3.4.1	可导与可微	55
3.4.2	高阶导数	57
3.4.3	不定积分	58
3.4.4	积分的计算	58
3.4.5	作业	59
3.4.6	简单的微分方程	59
3.5	微分中值定理和Taylor展开	59
3.5.1	函数极值	59
3.5.2	微分中值定理	60
3.5.3	单调函数	61
3.5.4	凸函数	62
3.5.5	函数作图	64
3.5.6	L'Hôpital法则	64
3.5.7	Taylor展开	66
3.5.8	Taylor公式和微分学的应用	68
3.5.9	作业	69
3.6	Riemann积分	72
3.6.1	Riemann可积	72
3.6.2	定积分的性质	75
3.6.3	微积分基本公式	76
3.6.4	定积分的近似计算	77
3.6.5	作业	79
3.7	定积分的应用和推广	80
3.7.1	定积分的应用	80
3.7.2	广义积分	81
3.7.3	广义积分的收敛判别法	83
3.7.4	广义积分的例子	85
3.7.5	作业	88
3.8	数项级数	89
3.8.1	级数收敛与发散的概念	89
3.8.2	正项级数收敛与发散的判别法	90
3.8.3	一般级数收敛与发散判别法	94
3.8.4	数项级数的进一步讨论	96
第四章	定理集	103
4.1	高中数学竞赛	103
4.2	高等代数	103
4.3	数学分析	106
4.3.1	常用的	106

目录	3
4.3.2 不常用的	107
4.4 实变函数论	112
4.5 微分方程	113
4.6 泛函分析	114
4.7 拓扑	115
4.8 数论	115
4.9 不等式	118
4.10 MSE	118
第五章 <b>TODOList</b>	<b>121</b>



# 第一章 中等数学

在本章中将罗列《中等数学》杂志的所有好的问题列表,这里“好”的意思是问题表述符合竞赛难度并且问题表述无误.当然整本杂志也存在问题本身是对的,但解答错误的情况,而这时将会在列出问题时给出纠正后的解答,(当然这种情况并不多见).由于将解答正确的回答一并抄下并不是本章的目的,而且也没有抄的必要,所以这里的问题基本都没有解答,如果需要解答过程,则可以在本项目某个目录的角落找到当期杂志的相应问题参考解答.另外,由于《中等数学》杂志中一篇文章中可能会涵盖多个问题,所以在建立问题列表的时候做了些许偷懒,一个问题所在的期刊和文章名字只在这篇文章中第一个被摘录的问题里给出,而后续问题将省略详细的问题信息,所以在检索问题的位置时,需要往前查找第一个遇到的带有期刊信息的问题,然后搜索相应的杂志页.

## 1.1 1990 年第一期

### 问题 1.1.1: 初中数学竞赛中的逻辑推理问题

某参观团根据下列约束条件,从  $A, B, C, D, E$  五个地方选定参观地点:

- (1). 若去  $A$  地,也必须去  $B$  地;
- (2).  $D, E$  两地至少去一地;
- (3).  $B, C$  两地只去一地;
- (4).  $C, D$  两地都去或都不去;
- (5). 若去  $E$  地,  $A, D$  两地也必须去.

请你说明理由,该参观团最多去哪几个地方?

解. 最多去  $C, D$  两个地方.

□

### 问题 1.1.2

有甲、乙、丙、丁四位歌手参加比赛,其中有一位歌手获奖,有人走访了这四位歌手.

甲说:“我获奖了.”

乙说:“甲没有获奖,丙也没有获奖.”

丙说:“是甲获奖或者是乙获奖.”

丁说:“是乙获奖.”

这四位歌手的话中,有两句是对的.请问:到底是哪位歌手获奖?

解. 甲获奖.

□

## 问题 1.1.3

某刑事案件的六个嫌疑分子  $A, B, C, D, E, F$  交待了以下材料:

$A$ :  $B$  与  $F$  做案;

$B$ :  $D$  与  $A$  做案;

$C$ :  $B$  与  $E$  做案;

$D$ :  $A$  与  $C$  做案;

$E$ :  $F$  与  $A$  做案.

司法人员根据充分的证据确信此案是两个人合作的, 且有四人各说对了一个罪犯的名字, 一个说的全不对. 问谁是最烦?

解.  $A$  与  $E$ .

□

## 问题 1.1.4: 上海市 87 年初中数学竞赛题

某学校举办数学竞赛, 甲、乙、丙、丁、戊五位同学取得前五名. 发奖前, 老师让他们猜一猜各人的名次排列情况.

甲说: 乙第三名, 丙第五名;

乙说: 戊第四名, 丁第五名;

丙说: 甲第一名, 戊第四名;

丁说: 丙第一名, 乙第二名;

戊说: 甲第三名, 丁第四名.

老师说, 每个名次都有人猜对, 则获得第四名的是谁?

解. 戊

□

## 问题 1.1.5

求一个四位数, 它的 4 倍恰好等于其逆序数.

解. 2178.

□

## 问题 1.1.6: IMO 19-2

在一个实数的有限数列中, 任何 7 个连续项之和都是负数, 而任何 11 个连续项之和都是正数. 试问, 这样一个数列最多能包括多少项?

解. 16. 本题已被推广到任意可能的数字  $m$  和  $n$ , 结果为  $m + n - (m, n)$ .

□

## 问题 1.1.7

甲、乙、丙三人分别在三所大学, 学的是数学、物理、化学三个专业. 现在知道: 甲不在  $E$  大学, 乙不在  $F$  大学; 在  $E$  大学的不是学物理, 在  $F$  大学的是学数学; 乙不是学化学. 那么, 丙上的是哪个大学? 学的什么专业?

解. 丙在  $E$  大学学化学.

□

## 问题 1.1.8

有 50 个女学生, 她们的裙子是红颜色或黄颜色, 上衣是花的或白的. 若有 14 人是穿的花上衣红裙子, 31 人穿黄裙子, 18 人穿白上衣. 问穿白上衣黄裙子的有多少人?

解. 13.

□

## 问题 1.1.9

$A, B, C$  三人中有两种人: 一种人只说真话, 一种人句句撒谎.  $A$  说  $B, C$  都是撒谎的;  $B$  坚决否认;  $C$  说  $B$  确实撒谎. 问  $A, B, C$  中有几人说真话?

解. 1 人.

□

## 问题 1.1.10: IMO 5-6

五个学生  $A, B, C, D, E$  参加一次竞赛. 有人猜测这次竞赛结果的名次是  $ABCDE$ , 结果没有猜中任何一个名次, 也没有猜中任何一个学生的名次紧接在谁的后面.

另一人猜测竞赛结果的名次是  $DAECB$ , 结果猜中了两个名次, 也猜对了两个学生的名次紧接在谁后面. 问这次竞赛结果的名次是什么?

解.  $EDACB$ .

□

## 问题 1.1.11: 最小数原理与存在性命题, 第 26 届波兰数学竞赛

已知实数列  $\{a_k\}$ , ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) 具有下列性质: 存在自然数  $n$ , 满足

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$$

及  $a_{n+k} = a_k$ , ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ). 证明: 存在自然数  $N$ , 使当  $k = 0, 1, 2, \dots$  时满足不等式

$$a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_{N+k} \geq 0.$$

## 问题 1.1.12: 1987 年加拿大数学竞赛

在一块平地上有  $n$  个人, 每个人到其它人的距离均不相同, 每人手中都有一把水枪, 当发出信号时, 每人用水枪击中距离他最近的人.

当  $n$  为奇数时, 证明至少有一个人身上是干的;

当  $n$  为偶数时, 请问这个结论是否正确?

## 问题 1.1.13: 匈牙利数学竞赛

设  $P$  是正  $n$  边形的一个内点. 证明: 该  $n$  边形存在两个顶点  $A$  和  $B$ . 使得

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot 180^\circ \leq \angle APB < 180^\circ.$$

**问题 1.1.14: 1988 年加拿大数学竞赛**

设  $S$  为平面上的一个有限点集 (点数  $\geq 5$ ), 其中若干点涂上红色, 其余的点涂上蓝色. 设任何三个或三个以上的同色的点不共线. 求证: 存在一个三角形, 使得

- (1) 它的三个顶点涂有相同的颜色;
- (2) 这三角形至少有一条边上不包含另一种色的点.

**问题 1.1.15: 第 22 届波兰数学竞赛**

求最大的整数  $A$ , 使对于由 1 到 100 的全部自然数的任一排列, 其中都有 10 个位置相邻的数, 其和大于或等于  $A$ .

**问题 1.1.16**

有  $n$  个男生,  $m$  个女生 ( $n, m \geq 2$ ), 每个男生至少与一女生彼此相识, 每个女生不全认识  $n$  个男生.

证明: 他们当中必有二个男生与两个女生, 其中每个男生恰好认识其中一女生, 其中每个女生恰好认识其中一男生.

**问题 1.1.17**

已知  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是实数,  $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$  均是正整数. 令

$$a = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n},$$

$$b = \frac{b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

求证: 在  $x_1, x_2, \dots, x_n$  中, 必存在两数  $x_i, x_j$ , 使下列不等式成立:

$$|a - b| \leq |a - x_i| \leq |x_i - x_j|.$$

**问题 1.1.18**

平面上放了有限多个圆, 假设它们所盖住的面积为 1 (它们可能是彼此相交的).

试证: 一定可以从这组圆中去掉若干个圆, 使得剩下的圆互不相交, 而且它们所盖住的面积不小于  $\frac{1}{9}$ .

**问题 1.1.19: Sylvester-Gallai 定理**

设  $S$  是平面上不全共线的有限点集, 试证: 一定存在一条直线恰好通过  $S$  中的两个点.

**问题 1.1.20**

在平面上给出某个点集  $M$ , 使得由  $M$  中每个点都是集  $M$  中某两点连结线段的中点. 证明: 集合  $M$  一定包含无穷多个点.

**问题 1.1.21**

证明方程  $x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$  不存在正整数解.



## 问题 1.1.22

给定  $mn+1$  个正整数

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{mn+1}$$

证明: 存在  $m+1$  个数使它们中没有一个数能被另一数整除, 或者存在  $n+1$  个数, 使得依大小排成序列, 除最前面的一个数之外, 每个数都能被它前面的数整除.

## 问题 1.1.23: 关于“素数无限性”的证明, Euler

任意两个 Fermat 数都没有公因数

## 问题 1.1.24

任意两个 Mersenne 数都没有公因数.

## 1.2 根据考点划分

## 1.2.1 代数

## 问题 1.2.1: 90 - 1, p. 21

求  $(\sqrt{x}+2)^{2n+1}$  的展开式中  $x$  的整数次幂的各项系数之和.

## 问题 1.2.2: 90 - 1, p. 21

设  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A = (\sqrt{7}+2)^{2n+1}$ ,  $B$  为  $A$  的小数部分, 即  $B = A - [A]$ , 求证:  $AB = 3^{2n+1}$ .

## 问题 1.2.3: 90 - 1, p. 37

设  $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_N$  是  $k$  进制数, 其中  $\alpha_i, i = 1, 2, \cdots, N, N, k$  均为非负整数, 且  $0 \leq \alpha_i \leq k-1, k \geq 2, n \geq 2$ . 记  $A_{k,N} = \{\alpha | \alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_N\}$ . 映射  $B: A_{k,N} \rightarrow A_{k,N-1}$  定义为:  $\forall \alpha \in A_{k,N}, \beta = B(\alpha) = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{N-1}$ , 其中  $\beta_i = \min(\alpha_i, \alpha_{i+1}), i = 1, 2, \cdots, N-1$ . 记

$$f(k, N) = \sum_{\substack{\alpha \in A_{k,N} \\ B(\alpha) = \beta}} \prod_{i=1}^{N-1} (\beta_i + 1),$$

表示对  $A_{k,N}$  中所有元素  $\alpha$  关于其像  $\beta$  的各位数字加 1 之积求和.

证明:

$$1. f(k, 2) = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1).$$

$$2. f(k, 3) = \frac{1}{5} f(k, 2)(2k^2 + 2k + 1).$$

## 1.2.2 三角函数

## 问题 1.2.4: 90 - 1, p. 21

化简  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta)$ .

## 1.2.3 向量

## 问题 1.2.5: 90 - 1, p. 22

对于任意的向量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , 有

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}.$$

## 1.2.4 复数

## 问题 1.2.6: 90 - 1, p. 21

计算:

$$A = C_n^0 \cos x + C_n^1 \cos 2x + \cdots + C_n^n \cos(n+1)x = \left(2 \cos \frac{x}{2}\right)^n \cdot \cos\left(\frac{n+2}{2}x\right),$$

$$B = C_n^0 \sin x + C_n^1 \sin 2x + \cdots + C_n^n \sin(n+1)x = \left(2 \cos \frac{x}{2}\right)^n \cdot \sin\left(\frac{n+2}{2}x\right).$$

## 1.2.5 圆锥曲线

## 问题 1.2.7: 90 - 1, p. 31

抛物线的顶点在原点, 焦点  $F$  是圆  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  的圆心, 过点  $F$  且斜率为 2 的直线与抛物线交于  $A, D$ , 与圆交于  $B, C$ . 求  $|AB| + |CD|$ .

## 问题 1.2.8: 90 - 1, p. 32

$F_1, F_2$  是椭圆的两个焦点,  $P$  是椭圆上任一点,  $PF_1, PF_2$  分别交椭圆于  $M, N$ . 求证:  $\frac{|PF_1|}{|F_1M|} + \frac{|PF_2|}{|F_2N|}$  为定值.

## 问题 1.2.9: 90 - 1, p. 32

设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上两动点  $P, Q$  在中心张直角, 即  $\angle POQ = \frac{\pi}{2}$ . 试求  $\frac{1}{|OP|} + \frac{1}{|OQ|}$  的最大值及最小值.

## 1.2.6 几何

## 证明题

## 问题 1.2.10: 90 - 1, p. 37

以  $\triangle ABC$  的三边为斜边分别向形内方向做等腰直角三角形  $BCA_1, CAB_1, ABC_1$ . 求证:  $A_1, B_1, C_1$  三点共线的充要条件是  $\cot A + \cot B + \cot C = 2$ .

## 问题 1.2.11: 90 - 1, p. 38

平面上有两个其对应边不平行的同向相似  $n$  ( $n \geq 3$ ) 边形  $A_1A_2 \cdots A_n$  与  $B_1B_2 \cdots B_n$  (不一定是凸的). 设  $A_iA_{i+1}$  与  $B_iB_{i+1}$  (所在直线) 交于点  $C_i$ , 过三点  $A_i, B_i, C_i$  的圆为  $\odot O_i$  ( $i = 1, 2, \cdots, n, A_{n+1} \equiv A_1, B_{n+1} \equiv B_1$ ). 试证, 这  $n$  个圆共点.

## 借助几何求解的问题

## 问题 1.2.12: 90 - 1, p. 23

已知  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ , 且满足  $x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25$ ,  $\frac{y^2}{3} + z^2 = 9$ ,  $z^2 + zx + x^2 = 16$ , 求  $xy + 2yz + 3zx$  的值.

## 1.2.7 不等式

## 最值问题

## 问题 1.2.13: 90 - 1, p. 26

如果自然数  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  满足  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$ , 那么  $x_5$  的最大值是多少?

## 问题 1.2.14: 90 - 1, p. 27

如果自然数  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  满足  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ , 那么  $x_n$  的最大值是多少?

## 问题 1.2.15: 90 - 1, p. 27

如果自然数  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  满足  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ , 那么  $x_n$  的最大值是多少?

## 数列不等式

## 问题 1.2.16: 90 - 1, p. 38

对每个正实数  $a_1$ , 按下列方式构造数列  $a_1, a_2, \dots$ , 其中  $a_{n+1} = a_1 + \frac{n}{a_n}$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ). 试求出所有使数列单调增加的  $a_1$ .

## 代数不等式

## 问题 1.2.17: 90 - 1, p. 37

已知正数  $m_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $p \geq 2$  且  $p$  为正实数, 并满足

$$\frac{1}{1+m_1^p} + \frac{1}{1+m_2^p} + \dots + \frac{1}{1+m_n^p} = 1.$$

求证:  $m_1 m_2 m_3 \dots m_n \geq (n-1)^{n/p}$ .

解. 设  $x_i = \frac{1}{1+m_i^p}$ , 则有  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ . 解出

$$m_i^p = \frac{1-x_i}{x_i} = \frac{\sum_{j \neq i} x_j}{x_i} \geq \frac{(n-1)(\prod_{j \neq i} x_j)^{\frac{1}{n-1}}}{x_i},$$

上面的不等式为均值不等式, 所以

$$\prod_{i=1}^n m_i^p \geq (n-1)^n.$$

**问题 1.2.18: 90 - 1, p. 38, 89 - 2, p. 28**

设  $x, y, z, w \in \mathbb{R}^+$ , 角  $\alpha, \beta, \gamma, \theta$  满足

$$\alpha + \beta + \gamma + \theta = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

则

$$x \sin \alpha + y \sin \beta + z \sin \gamma + w \sin \theta \leq \sqrt{\frac{(xy + zw)(xz + yw)(xw + yz)}{xyzw}},$$

当且仅当  $x \cos \alpha = y \cos \beta = z \cos \gamma = w \cos \theta$  时取等号.

**几何不等式****问题 1.2.19: 88 - 1, p. 23**

设  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , 则有

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

当且仅当  $\alpha = \beta = \gamma$  时等号成立.

**问题 1.2.20: 88 - 1, p. 23, Vasic**

设  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ,  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ , 则有

$$x \sin \alpha + y \sin \beta + z \sin \gamma \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \right),$$

当且仅当  $x = y = z$ , 且  $\alpha = \beta = \gamma$  时取等号.

**问题 1.2.21: 88 - 1, p. 23, Klamkin**

设  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ,  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ , 则有

$$x \sin \alpha + y \sin \beta + z \sin \gamma \leq \frac{yz + zx + zy}{2} \sqrt{\frac{x + y + z}{xyz}},$$

当且仅当  $x = y = z$ , 且  $\alpha = \beta = \gamma$  时取等号.

**问题 1.2.22: [ZYC], p. 48**

如果  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ,  $A + B + C = \pi$ , 则

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2yz \cos A + 2zx \cos B + 2xy \cos C,$$

当且仅当

$$\begin{cases} x = y \cos C + z \cos B, \\ y \sin C = z \sin B \end{cases}$$

时取等号.

## 问题 1.2.23: 88 - 1, p. 23

设  $x_1, x_2, x_3$  是任意实数,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是任意实数, 且  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = (2k+1)\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ), 则有

$$\sum_{cyc} x_2 x_3 \cos \alpha_1 \leq \frac{1}{2} \sum_{cyc} x_1^2,$$

当且仅当  $x_2 x_3 \sin \alpha_1 = x_3 x_1 \sin \alpha_2 = x_1 x_2 \sin \alpha_3$  时取等号.

## 问题 1.2.24: 88 - 1, p. 23

若  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}^+$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是任意实数, 且  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = (2k+1)\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ),  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$ , 则

$$\sum_{cyc} \frac{x_2 x_3 \cos \alpha_1}{\sin \theta_1} \leq \sum_{cyc} \frac{x_2^2 + x_3^2}{2} \cot \theta_1,$$

当且仅当  $\frac{x_2 x_3 \sin \alpha_1}{\sin \theta_1} = \frac{x_3 x_1 \sin \alpha_2}{\sin \theta_2} = \frac{x_1 x_2 \sin \alpha_3}{\sin \theta_3}$  时取等号.

## 问题 1.2.25: 88 - 1, p. 23

设  $x, y, z$  是使  $xyz > 0$  的任意实数,  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}^+$ , 且  $\alpha + \beta + \gamma = n\pi$ , ( $n \in \mathbb{Z}$ ), 则有

$$\sum_{cyc} x \sin \alpha \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda + \mu + \nu}{\lambda \mu \nu}} \sum_{cyc} \frac{\lambda y z}{x},$$

当且仅当

$$\begin{cases} \frac{x}{\lambda} \sin \alpha = \frac{y}{\mu} \sin \beta = \frac{z}{\nu} \sin \gamma, \\ x \cos \alpha = y \cos \beta = z \cos \gamma \end{cases}$$

时取等号.

## 问题 1.2.26: 88 - 1, p. 23

对于任意的  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  满足  $\alpha + \beta + \gamma = n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , 则对于任意的  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}^+$  有不等式

$$|\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma| \leq 2(\lambda \cos^2 \alpha + \mu \cos^2 \beta + \nu \cos^2 \gamma) \cdot \sqrt{\frac{\lambda + \mu + \nu}{\lambda \mu \nu}},$$

当且仅当  $\frac{\tan \alpha}{\lambda} = \frac{\tan \beta}{\mu} = \frac{\tan \gamma}{\nu}$  时取等号.

## 问题 1.2.27: 88 - 1, p. 23

设  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}^+$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ , 且  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , 则有

$$\sqrt{\lambda \mu \nu (\lambda + \mu + \nu)} \leq \sum_{cyc} \frac{\lambda(\mu + \nu)}{2} \cot \alpha,$$

当且仅当  $\lambda \cot \alpha = \mu \cot \beta = \nu \cot \gamma$  时取等号.

**问题 1.2.28: 88 - 1, p. 23**

设  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}^+$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ , 且  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , 则有

$$\sum_{cyc} \frac{\lambda + \mu}{2} \cot \gamma \geq \sqrt{\sum_{cyc} \lambda \mu},$$

当且仅当  $\lambda \tan \alpha = \mu \tan \beta = \nu \tan \gamma$  时取等号.

**问题 1.2.29: 88 - 1, p. 23**

设  $a, b, c$  是三角形三边长,  $S$  为其面积,  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ , 且  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , 则有

$$\sum_{cyc} a \cot \alpha \geq \sqrt{4\sqrt{3}S},$$

当且仅当  $a = b = c$ , 且  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$  时取等号.

**问题 1.2.30: 88 - 1, p. 23**

设  $a, b, c$  是三角形三边长,  $S$  为其面积,  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}^+$ , 则有

$$\left( \sum_{cyc} \lambda a \right)^2 \geq 4\sqrt{3}S \left( \sum_{cyc} \lambda \mu \right),$$

当且仅当  $a = b = c$ , 且  $\lambda = \mu = \nu$  时取等号.

**问题 1.2.31: 88 - 1, p. 23**

设三角形  $ABC$  及  $A'B'C'$  的边长分别为  $a, b, c$  及  $a', b', c'$ , 面积分别为  $S, S'$ , 则有

$$\sum_{cyc} a'(-a + b + c) \geq \sqrt{24SS'},$$

当且仅当  $\triangle ABC$  及  $\triangle A'B'C'$  均是正三角形时取等号.

**问题 1.2.32: 88 - 1, p. 23**

设  $a, b, c$  及  $S$  分别表示三角形三边长及面积,  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}^+$ , 则有

$$\sum_{cyc} \lambda a^2 \geq 4S \sqrt{\sum_{cyc} \lambda \mu},$$

当且仅当  $\frac{a^2}{\mu + \nu} = \frac{b^2}{\lambda + \nu} = \frac{c^2}{\lambda + \mu}$  时取等号.

## 问题 1.2.33: 88 - 1, p. 23

设点  $P$  是  $\triangle ABC$  内任意一点,  $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}^+$ , 则

$$\sum_{cyc} \lambda \cdot PA^2 \geq \sqrt{\frac{\lambda\mu\nu}{\lambda+\mu+\nu}} \cdot 4S,$$

其中  $S$  为  $\triangle ABC$  的面积, 等号当且仅当

$$\begin{cases} \frac{\cos \angle BPC}{PA} = \frac{\cos \angle CPA}{PB} = \frac{\cos \angle APB}{PC}, \\ \lambda \cot \angle BPC = \mu \cot \angle CPA = \nu \cot \angle APB \end{cases}$$

时取到.

## 问题 1.2.34: 88 - 1, p. 23, Daniel Pedoe 不等式

设三角形  $ABC$  与  $A'B'C'$  的三条边分别为  $a, b, c$  与  $a', b', c'$ , 面积分别为  $S, S'$ , 则有

$$\sum_{cyc} a'^2 (-a^2 + b^2 + c^2) \geq 16SS',$$

当且仅当  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  时取等号.

## 问题 1.2.35: 90 - 1, p. 21, Weitzenbok 不等式

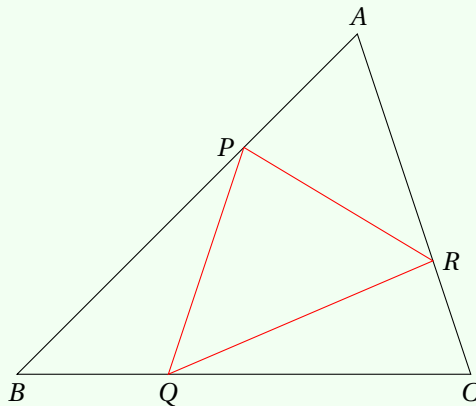
设  $\triangle ABC$  的边和面积分别为  $a, b, c$  和  $\Delta$ , 则  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\Delta$ .

## 问题 1.2.36: 88 - 1, p. 23, TODO

设  $\triangle ABC$  内任意一点  $P$  向各边或其延长线作垂线, 设  $\triangle ABC$  和所得垂足三角形的面积分别为  $S, S'$ , 则有  $S \geq 4S'$ , 当且仅当  $P$  是  $\triangle ABC$  的外心时取等号.

## 问题 1.2.37: 90 - 1, p. 28, 88 年全国高中数学竞赛

如图,  $P, Q, R$  将  $\triangle ABC$  的周长三等分, 且  $P, Q \in AB$ . 求证  $S_{\triangle PQR} > \frac{2}{9} S_{\triangle ABC}$ .







## 1.3 归纳法

## 问题 1.3.1: 90 - 1, p. 38

桌面上放有 2025 枚硬币, 其中有的正面朝上, 有的正面朝下, 今有 2025 人依次按如下方法翻转硬币: 第一人翻转其中的一枚, 第二人翻转其中的二枚,  $\dots$ , 第  $i$  人翻转其中的  $i$  枚,  $\dots$ , 第 2025 人则将 2025 枚硬币全部翻转.

证明: (1) 不论硬币最初的正反面分布情况如何, 他们总可采取适当的步骤, 使得 2025 人都翻过之后, 恰使所有硬币朝同一方向.

(2) 硬币最后的统一朝向只依赖于初始分布, 而与具体的翻币方案无关.

## 问题 1.3.2: 90 - 2, p. 1

设  $0 < a < 1$ , 定义  $a_1 = 1 + a$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + a$ , ( $n \geq 1$ ). 证明: 对一切  $n$  有  $a_n > 1$ .

## 问题 1.3.3: 90 - 2, p. 1

设  $a, b, c$  是方程  $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$  的根.

(1) 证明:  $a, b, c$  互不相等;

(2) 证明:  $\frac{a^{1987}-b^{1987}}{a-b} + \frac{b^{1987}-c^{1987}}{b-c} + \frac{c^{1987}-a^{1987}}{c-a}$  是整数.

## 问题 1.3.4: 90 - 2, p. 1

设  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ , 求证:  $\frac{1}{p} < S_p + S_q - S_{pq} \leq 1$ , ( $p, q$  是正整数, 且  $p \geq 2, q \geq 1$ ).

## 问题 1.3.5: 90 - 2, p. 1

设函数  $f$  对一切自然数  $n$  有定义, 且

(1)  $f(n)$  是整数;

(2)  $f(2) = 2$ ;

(3)  $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$ , 对一切自然数  $m$  和  $n$  成立;

(4)  $f(m) > f(n)$ , 当  $m > n$ .

试证:  $f(n) = n$ .

## 问题 1.3.6: 90 - 2, p. 1

已知实数列  $a_0, a_1, a_2, \dots$  满足  $a_{i-1} + a_{i+1} = 2a_i$ . 求证: 对任何自然数  $n$ .

$$P(x) = a_0 C_n^0 (1-x)^n + a_1 C_n^1 x(1-x)^{n-1} + a_2 C_n^2 x^2(1-x)^{n-2} + \dots + a_{n-1} C_n^{n-1} x^{n-1}(1-x) + a_n C_n^n x^n$$

是一个不超过一次的多项式.

## 问题 1.3.7: 90 - 2, p. 1

设  $n$  是正整数,  $k$  是不小于 2 的整数. 试证:  $n^k$  可表示成  $n$  个相继奇数和.

问题 1.3.8: 90 - 2, p. 1

设  $f(x)$  是  $x$  的一个  $n$  次多项式, 如果对满足  $0 \leq k \leq n$  的整数  $k, f(k)$  都取整数值, 那么对任意的整数  $m, f(m)$  也取整数值.

1.4 鸽洞原理

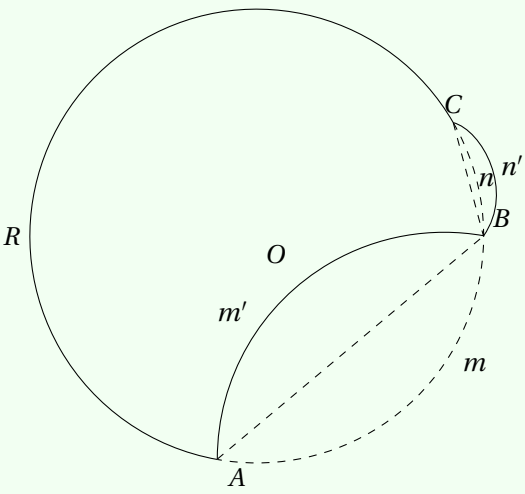
问题 1.4.1: 90 - 1, p. 38

从  $1, 2, 3, \dots, 2024, 2025$  中任意选取  $k$  个数, 使得在所选的  $k$  个数中一定可以找到能构成一个三角形边长的三个数. 试问满足上述条件的  $k$  的最小值是多少? 并说明理由.

1.5 反证法

问题 1.5.1: 90 - 1, p. 37

试证, 如下图构造的空间曲线  $\Gamma$  的任意五等分点组都不在同一球面上. 曲线  $\Gamma$  的构造: 做  $\odot O$ , 设  $\odot O$  的周长为  $l$ ; 在  $\odot O$  上取  $\widehat{AmB}$ , 使得  $\frac{1}{5}l < l(\widehat{AmB}) < \frac{2}{5}l$ , 并以  $AB$  为轴将  $\widehat{AmB}$  旋转  $180^\circ$  得  $\widehat{Am'B}$ ; 在  $\odot O$  上取  $\widehat{BnC}$ , 使  $l(\widehat{AmB}) + l(\widehat{BnC}) < \frac{2}{5}l$ , 并以  $BC$  为轴将  $\widehat{BnC}$  旋转  $\theta^\circ, (0^\circ < \theta^\circ < 180^\circ)$  得  $\widehat{Bn'C}$ . 由  $\widehat{Am'B}, \widehat{Bn'C}, \widehat{CRA}$  组成的曲线便是空间曲线  $\Gamma$ .



1.6 逐步调整法

问题 1.6.1: 90 - 1, p. 24

空间中有 1989 个点, 其中任何三点不共线. 把它们分成点数各不相同的 30 组, 在任何三个不同的组中各取一点为顶点作三角形. 问: 要使这种三角形的总数最大, 各组的点数应为多少?

## 1.7 观点

G. Polya 在《数学的发现》一书中告诉我们, 当读者解出一道题的时候, 要趁热打铁对自己提出许多有用的问题, 比如: 这个题与书上的什么概念相联系? 是什么样的联系? 解题的关键何在? 此题属于什么类型?

学生是思维的主题, 教师只不过是从旁提供一些启示.

学习的关键在于主动性, 学习要有研究的精神.

数学家哈尔莫斯 (P. Halmos) 曾说, “问题是数学的心脏”. 解决数学问题, 既是数学家的基本活动, 也是学校数学教育的基本构成.

## 1.8 杂谈与碎片

Kiefer 优选法也就是 0.618 法.



## 第二章 数学分析

### 2.1 极限

#### 问题 2.1.1

设函数 $\varphi(x)$ 可导, 且满足 $\varphi(0) = 0$ , 又设 $\varphi'(x)$ 单调减少.

1. 证明: 对 $x \in (0, 1)$ , 有 $\varphi(1)x < \varphi(x) < \varphi'(0)x$ .
2. 若 $\varphi(1) \geq 0$ ,  $\varphi'(0) \leq 1$ , 任取 $x_0 \in (0, 1)$ , 令 $x_n = \varphi(x_{n-1})$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ). 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求该极限值.

解. 对于任意的 $x \in [0, 1]$ , 在 $[0, x]$ 上用拉格朗日定理,

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \varphi'(\xi_1)x < \varphi'(0)x$$

在 $[x, 1]$ 上用拉格朗日定理

$$\varphi(1) - \varphi(x) = \varphi'(\xi_2)(1-x) < \varphi'(\xi_1)(1-x) = \varphi'(\xi_1) - \varphi(x)$$

所以 $\varphi(1)x < \varphi'(\xi_1)x = \varphi(x)$ . □

#### 问题 2.1.2: <https://www.zhihu.com/question/636352059>

已知实数列 $\{x_n\}$ 使得 $3x_n - x_{n-1}$ 收敛, 证明 $x_n$ 收敛.

解. 由问题2.5.10, 设

$$\limsup x_n = \overline{X}, \quad \liminf x_n = \underline{X}.$$

则 $+\infty \geq \overline{X} \geq \underline{X} \geq -\infty$ . 如果设 $\lim(3x_n - x_{n-1}) = L$ . 取上面的数列 $(x_n, y_n)$ 对为原问题中的 $(3x_n, -x_{n-1})$ 代入上面的不等式, 得到

$$3\underline{X} - \overline{X} \leq L \leq 3\underline{X} - \underline{X} \leq L \leq 3\overline{X} - \underline{X},$$

这说明 $\underline{X} = \frac{L}{2}$ . 当取上面的数列 $(x_n, y_n)$ 对为原问题中的 $(-x_{n-1}, 3x_n)$ 时, 则得到

$$-\overline{X} + 3\underline{X} \leq L \leq -\overline{X} + 3\overline{X} \leq L \leq -\underline{X} + 3\overline{X},$$

这说明 $\overline{X} = \frac{L}{2}$ . 所以问题中的数列 $x_n$ 的上下极限相等且有限. □

### 2.2 导数

#### 问题 2.2.1

函数 $f(x) \in C[0, 1]$ , 在 $(0, 1)$ 上可微, 对于任意的 $x \in (0, 1)$ ,  $|xf'(x) - f(x) + f(0)| < Mx^2$ , 问 $f'(0)$ 的存在性.

解. 不妨设  $f(0) = 0$ , 定义  $h(x) = \frac{f(x)}{x}$  ( $0 < x < 1$ ), 即证  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  存在, 则  $|x^2 h'(x)| < Mx^2$ , 所以  $|h'(x)| < M$ , 所以若  $\{x_n\} \rightarrow 0$ , 则有

$$|h(x_m) - h(x_n)| = |h' \xi (x_m - x_n)| < M|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

所以  $\{h(x_n)\}$  是 Cauchy 列, 从而  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  存在. □

### 问题 2.2.2

构造有界单调函数  $f(x)$  使得对于任意的  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x)$  存在, 且  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) \neq 0$ .

解. 取  $a_n = 1 - 2^{-n}$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $f(n) = a_n$ ,  $f(n + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$ , 且  $f'(n) = 0$ ,  $f'(n + \frac{1}{2}) = 1$ , 将其它点处可微连接  $f(n)$  这些离散点, 知  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x)$  不存在, 从而不为 0. □

## 2.3 积分

### 问题 2.3.1

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} \log\left(\frac{2x^2+2x+1}{2x^2-2x+1}\right)}{x} dx$$

解.  $4\pi \operatorname{arccot}(\sqrt{\phi})$ . □

### 问题 2.3.2

设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有连续的导数, 且  $f(a) = 0$ , 证明

$$\int_a^b f^2(x) dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

解. 令  $F(b) = RHS - LHS$ , 证  $F'(b) \geq 0$  即可. □

### 问题 2.3.3

设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有二阶连续的导数, 证明:

1. 对任意  $\xi \in (0, \frac{1}{4})$  和  $\eta \in (\frac{3}{4}, 1)$  有

$$|f'(x)| < 2|f(\xi) - f(\eta)| + \int_0^1 |f''(x)| dx \quad x \in [0, 1]$$

2. 当  $f(0) = f(1) = 0$  及  $f(x) \neq 0$ , ( $x \in (0, 1)$ ) 时有

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq 4.$$

解. 用中值定理,

$$\begin{aligned} |f'(x)| - 2|f(\xi) - f(\eta)| &= |f'(x)| - 2|f'(\theta)|(-\xi + \eta) \\ &\leq |f'(x)| - |f'(\theta)| \\ &\leq |f'(x) - f'(\theta)| = \left| \int_{\theta}^x f''(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |f''(t)| dt \end{aligned}$$

最后取  $f(x_0) = \max_{x \in [0,1]} f(x)$ , 则

$$f(x_0) = f'(\xi_1)x_0 = f'(\xi_2)(x_0 - 1),$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \frac{f''}{f} \right| dx &\geq \frac{1}{|f(x_0)|} dx \\ &\geq \frac{1}{|f(x_0)|} \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f'' dx \right| \\ &= \frac{1}{|f(x_0)|} |f'(\xi_2) - f'(\xi_1)| \\ &= \frac{1}{x_0} + \frac{1}{1-x_0} \geq 4. \end{aligned}$$

□

#### 问题 2.3.4

设函数  $f(x)$  在  $[-\frac{1}{a}, a]$  上连续 (其中  $a > 0$ ), 且  $f(x) \geq 0$ ,  $\int_{-\frac{1}{a}}^a x f(x) dx = 0$ , 求证:  $\int_{-\frac{1}{a}}^a x^2 f(x) dx \leq \int_{-\frac{1}{a}}^a f(x) dx$ .

解. 因  $(a-x)(x+\frac{1}{a}) \geq 0$ , 对  $(a-x)(x+\frac{1}{a})f(x) \geq 0$  两边同时积分.

□

#### 问题 2.3.5

设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续,  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ ,  $\int_0^1 x f(x) dx = 1$ . 求证:

1. 存在  $\xi \in [0, 1]$ , 使得  $|f(\xi)| \geq 4$ ;
2. 存在  $\eta \in [0, 1]$ , 使得  $|f(\eta)| = 4$ .

解. 用反证法,

$$1 = \left| \int_0^1 \left( x - \frac{1}{2} \right) f(x) dx \right| \leq \int_0^1 \left| x - \frac{1}{2} \right| \cdot |f| dx \leq 1.$$

等号取不到, 否则,

$$\int_0^1 (4 - |f|) \left| x - \frac{1}{2} \right| dx = 0.$$

□

#### 问题 2.3.6

求  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - \sin 2\theta}$ .

解.  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - \sin 2\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + 2\sin^2(\theta - \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} = 2 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + 2t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$ .

□

解.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - \sin 2\theta} &= \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \frac{dt}{3 - \sin t} \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \sin t} \\
 &= \int_0^{\pi} \frac{dt}{3 - \sin t} + \int_0^{\pi} \frac{dt}{3 + \sin t} \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 - \sin x} + 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \sin x} \\
 &= 12 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{9 - \sin^2 x} \\
 &= 12 \int_0^{\pi/2} \frac{d \tan x}{8 \tan^2 x + 9} \\
 &= \frac{12}{6\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \tan x \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi.
 \end{aligned}$$

□

解.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - \sin 2\theta} &= \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \frac{d\theta}{3 \sin \theta} \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - \sin \theta} \\
 &= \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left( 3 - \frac{z-z^{-1}}{2i} \right)} \\
 &= 2 \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 6iz - 1} \\
 &= 2 \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z - (-3 + 2\sqrt{2})i)(z - (-3 - 2\sqrt{2})i)} \\
 &= 2 \cdot 2\pi i \operatorname{Res}(f(z)) \Big|_{z=(-3+2\sqrt{2})i} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi.
 \end{aligned}$$

□

解.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - \sin 2\theta} &= \int_0^{2\pi} \frac{d \tan \theta}{3 \tan^2 \theta - 2 \tan \theta + 3} \\
 &= \int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi} + \int_{\pi}^{3\pi/2} + \int_{3\pi/2}^{2\pi} = \dots
 \end{aligned}$$

于是

$$\int_0^{\pi/2} = \int_0^{\infty} \frac{d\theta}{3t^2 - 2t + 3} = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} \frac{d(t - \frac{1}{3})}{(t - \frac{1}{3})^2 + \frac{8}{9}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{8}} \arctan \left( \frac{3(t - \frac{1}{3})}{\sqrt{8}} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\sqrt{2}}{4} \right).$$

其它三个同理. 所以  $\Sigma = \frac{\sqrt{2}}{4} (\frac{\pi}{2} \cdot 4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$ .

□

### 问题 2.3.7

求

$$\int_0^{\pi/4} \frac{(\cot x - 1)^{p-1}}{\sin^2 x} \ln \tan x \, dx = -\frac{\pi}{p} \csc p\pi, \quad (-1 < p < 0).$$



解. 令  $u = \cot x - 1$ , 原式等价于

$$\int_0^{+\infty} u^{p-1} \ln(u+1) du = \frac{\pi}{p} \csc p\pi,$$

而

$$\int_0^{\infty} u^{p-1} \ln(u+1) du = \int_0^{\infty} u^{p-1} \int_1^{1+u} \frac{1}{y} dy du$$

交换积分次序, 用 Beta 函数. □

### 问题 2.3.8

求反常积分

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-2x} \tanh \frac{x}{2}}{x \cosh x} dx.$$

解. 令  $x = 2t$ , 则

$$I = \int_0^{\infty} \frac{2e^{-2t} (e^{2t} - 1)^2}{t (e^{8t} - 1)} dt.$$

引入含参积分

$$F(a) = \int_0^{\infty} \frac{2e^{at} (e^{2t} - 1)^2}{t (e^{8t} - 1)} dt,$$

则有

$$\begin{aligned} F'(a) &= \int_0^{\infty} \frac{2e^{(a-4)t} (1 - e^{-2t})^2}{1 - e^{-8t}} dt \\ &= \int_0^{\infty} 2e^{(a-4)t} (1 - e^{-2t})^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-8nt} dt \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n + \frac{-a+4}{8}} - \frac{2}{n + \frac{-a+6}{8}} + \frac{1}{n + \frac{-a+8}{8}} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( 2\psi\left(\frac{-a+6}{8}\right) - \psi\left(\frac{-a+4}{8}\right) - \psi\left(\frac{-a+8}{8}\right) \right), \end{aligned}$$

其中,  $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$  为 digamma 函数. 因此

$$\begin{aligned} I &= F(-2) = F(-2) - F(-\infty) \\ &= \int_{-\infty}^{-2} F'(a) da = 2 \ln \left( \frac{\Gamma\left(\frac{-a+4}{8}\right) \Gamma\left(\frac{-a+8}{8}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{-a+6}{8}\right)} \right) \Big|_{-\infty}^{-2} \\ &= 2 \ln \left( \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \right) = 2 \ln \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

□

## 2.4 级数

### 问题 2.4.1

证明

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 0$$

无实根.

解. 设  $-y < 0$ , 则  $y > 0$ , 所以  $1 - y + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!} + \cdots + \frac{y^{2n}}{(2n)!} > e^{-y} > 0$ . □

问题 2.4.2: F.F.Abi-Khuzam and A.B.Boghossian, Some recent geometric inequalities, AMM Vol 96(1989), No. 7:576-

589

函数  $f(x) = \cot x - \frac{1}{x}$ , 则  $f^{(k)}(x) < 0, 0 < x < \pi, k \in \mathbb{N}$ .

解.

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k\pi + x} - \frac{1}{k\pi - x} \right), \quad x \in (0, \pi).$$

将真分式展开有

$$f(x) = -2x \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{2k}, \quad x \in (0, \pi), \quad c_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^{2k+2}}, \quad (k \in \mathbb{N}).$$

□

问题 2.4.3

对  $n \in \mathbb{N}_+$ , 确定  $(0, 1)$  的子集, 使在此子集上  $\left(\frac{d}{dx}\right)^n (\ln x \ln(1-x)) < 0$ .

解.

$$f'(x) = (\ln x \ln(1-x))' = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{m-1} - x^{m-1}}{m},$$

当  $n$  是偶数时, 所有项都是负的, 当  $n$  是奇数时, 仅当  $1-x < x$  即  $x > \frac{1}{2}$  时,  $f^{(n)}(x)$  是负的.

□

问题 2.4.4

已知  $S_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{i=1}^n \frac{2^i}{i}$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  存在并求其值.

解. 因  $S_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} (S_n + 1)$ , 所以

$$S_{n+2} - S_{n+1} = \frac{(n+2)^2(S_{n+1} - S_n) - S_{n+1} - 1}{2(n+1)(n+2)},$$

$S_4 - S_3 = 0$ , 当  $n \geq 3$  时,  $S_n$  不减, 所以  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  存在, 所以  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2(n+1)} (S + 1)$ , 得  $S = 1$ .

□

## 2.5 其他

问题 2.5.1

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) = 0.$$

解. 用  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ .

□

问题 2.5.2

证明:

$$0 < e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n < \frac{3}{n}.$$

解. 先证:  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  单调上升且有界. ( $1 \cdot x_n \leq \left(\frac{1+n(1+1/n)}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1}$ ), 则

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \cdots \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &< 2 + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} = 3. \end{aligned}$$

再证  $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  单调下降且有界. (用  $(1+x)^n > 1+nx$ ,  $x > -1$  证单调性).

由  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ ,  $x_n < e < y_n$ , (这可以证得  $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ ).

故  $e - x_n < y_n - x_n = \frac{x_n}{n} < \frac{3}{n}$ . □

### 问题 2.5.3

证明不等式

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

解. 用  $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$  及归纳法. □

### 问题 2.5.4

设  $a^{[n]} = a(a-h) \cdots [a - (n-1)h]$  及  $a^{[0]} = 1$ , 证明:

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{[n-m]} b^{[m]}.$$

并由此推出牛顿二项式公式.

### 问题 2.5.5

证明不等式

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (n > 1).$$

解. 用均值不等式. □

解. 用伯努利不等式证  $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 2$ , ( $n \in \mathbb{N}_+$ ). □

### 问题 2.5.6

设  $p_n (n \in \mathbb{N}_+)$  为趋于正无穷的任意数列, 而  $q_n (n \in \mathbb{N}_+)$  为趋于负无穷的任意数列 ( $p_n, q_n \notin [-1, 0]$ ), 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

解. 注意  $[x] \leq x < [x] + 1$ . □

## 问题 2.5.7

已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ , 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) = e.$$

并推出

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n},$$

其中  $0 < \theta_n < 1$ .

## 问题 2.5.8

证明:  $e$  是无理数.

解. 用反证法及 2.5.7 有, 对于任意的  $n$ ,  $n!n \cdot e$  不是整数. □

## 问题 2.5.9

证明不等式:

(a)  $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N}_+);$

(b)  $1 + \alpha < e^\alpha, (\alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}).$

解.

(a) 原式等价于  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1};$

(b)  $\alpha > -1$  时, 用伯努利不等式,  $e^\alpha > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha n} > 1 + \alpha.$  □

## 问题 2.5.10

证明: (在以下各极限均存在的情况下)

(a)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n;$

(b)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n.$

解. 用  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\limsup_{n \rightarrow \infty} (-x_n).$  □

## 问题 2.5.11

证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 则对于任何数列  $y_n (n \in \mathbb{N}_+)$ ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$  有限且有:

(a)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n;$

(b)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n, (x_n \geq 0).$

解. 用 2.5.10. □

## 问题 2.5.12

证明: 若对于某数列  $x_n (n \in \mathbb{N}_+)$ , 无论数列  $y_n (n \in \mathbb{N}_+)$  如何选取, 以下两个等式中至少有一个成立:

$$(a) \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

$$(b) \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n, (x_n \geq 0).$$

则数列  $x_n$  收敛或发散于正无穷.

## 问题 2.5.13

证明: 若  $x_n > 0 (n \in \mathbb{N}_+)$  及

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 1.$$

则数列  $x_n$  是收敛的.

## 问题 2.5.14

证明: 若数列  $x_n (n \in \mathbb{N}_+)$  有界, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0.$$

则此数列的子列极限充满于下极限和上极限

$$l = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ 和 } L = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

之间.

## 问题 2.5.15

证明: 若  $x_n > 0 (n \in \mathbb{N}_+)$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$  存在, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

解. 用结论: 若  $\{x_n\} \rightarrow x, x_n > 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . □

## 问题 2.5.16

证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ .

解. 用 2.5.15. □

问题 2.5.17: 数  $a$  和  $b$  的算术几何平均值

证明: 由下列各式

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

确定的数列  $x_n$  和  $y_n (n \in \mathbb{N}_+)$  有共同的极限.

$$\mu(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

解. 用幂平均不等式,  $\sqrt{x_{n+1} + y_{n+1}} = \frac{\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n}}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{x_n + y_n}$ . 即  $\{y_n\}$  单调有界, 从而有极限, 从而  $x_n = 2y_{n+1} - y_n$  有相同的极限.  $\square$

### 问题 2.5.18

设

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad (|x| \geq 2),$$

求  $f(x)$ .

解.  $x^2 - 2, (|x| \geq \frac{5}{2})$ .  $\square$

### 问题 2.5.19

证明: 若

- (1) 函数  $f(x)$  定义于区域  $x > a$ ;
- (2)  $f(x)$  在每一个有限区间  $a < x < b$  内是有界的;
- (3) 对于某一个整数  $n$ , 存在有限的或无穷的极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} = l,$$

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{l}{n+1}.$$

能否用Cauchy定理4.3.8证明它.

## 问题 2.5.20

利用定理

## 定理 2.5.1

设

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} = 1,$$

其中  $\psi(x) > 0$ , 再设当  $n \rightarrow \infty$  时  $\alpha_{mn} \Rightarrow 0 (m = 1, 2, \dots, n)$ , 换言之, 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N(\varepsilon)$ , 当  $m = 1, 2, \dots, n$  且  $n > N(\varepsilon)$  时,  $0 < |\alpha_{mn}| < \varepsilon$ . 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\phi(\alpha_{1n}) + \phi(\alpha_{2n}) + \dots + \phi(\alpha_{nn})] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\psi(\alpha_{1n}) + \psi(\alpha_{2n}) + \dots + \psi(\alpha_{nn})],$$

此处同时还要假设上式右端的极限存在.

求:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \sqrt[n]{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \sin \frac{ka}{n^2} \right);$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( a^{\frac{k}{n^2}} - 1 \right), (a > 0);$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{k}{n^2} \right);$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}}.$$

## 问题 2.5.21

设函数  $f(x)$  在区间  $(x_0, +\infty)$  上连续并有界. 证明: 对于任何数  $T$ , 可求得数列  $x_n \rightarrow +\infty$ , 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0.$$

## 问题 2.5.22

证明: 在有限区间  $(a, b)$  上有定义且连续的函数  $f(x)$ , 可用连续的方法延拓到闭区间  $[a, b]$  上, 其充分必要条件是函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  上一致连续.

## 问题 2.5.23

$x_n$  满足  $x_n^n + x_n - 1 = 0, 0 < x_n < 1$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

解.  $y = x^n + x - 1$  则有  $y' > 0, y|_{x=0} = -1 < 0, y|_{x=1} = 1 > 0$ .

$x_n$  是  $x^n + x - 1$  的唯一零点. 由于

$$x_n^{n+1} + x_n - 1 = (x_n - 1)(1 - x_n) < 0$$

及  $y$  的单调性, 知  $x_{n+1}$  在  $x_n$  与 1 之间, 故  $\{x_n\}$  单调有界. 反证  $\{x_n\}$  的极限  $A = 1$ , 否则  $0 \leq A < 1$  矛盾.

□

解.  $y^x + y - 1 = 0$  是隐函数, 确定  $y = f(x)$ ,  $x_n = f(n)$ , 求导

$$y' = -y^x \cdot \frac{\ln y}{\left(1 + \frac{x}{y} \cdot y^x\right)}$$

当  $x \geq 1$  时,  $y' > 0$ ,  $y$  单调增加, 以下同上. □

#### 问题 2.5.24

若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$  都收敛, 则以下不成立的是?

- A.  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$  收敛;      B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$  收敛;  
C.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛;      D.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  发散.

#### 问题 2.5.25

设  $f(x, y)$  与  $\varphi(x, y)$  均为可微函数, 且  $\varphi'_y(x, y) \neq 0$ . 已知  $(x_0, y_0)$  是  $f(x, y)$  在约束条件  $\varphi(x, y) = 0$  下的一个极值点, 下列选项正确的是 (D)

- (A) 若  $f'_x(x_0, y_0) = 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) = 0$ ;    (B) 若  $f'_x(x_0, y_0) = 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ ;  
(C) 若  $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) = 0$ ;    (D) 若  $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ , 则  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

#### 问题 2.5.26

$$\frac{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt}{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt} = \sqrt{2}$$

解. 用 Beta 函数. □

#### 问题 2.5.27: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

计算  $I = \int_{\pi/8}^{3\pi/8} \frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)} dx$ .

#### 问题 2.5.28: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设  $\varphi(x)$  在  $(-\infty, 0]$  可导, 且函数

$$f(x) = \begin{cases} \int_x^0 \frac{\varphi(t)}{t} dt, & x < 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(2x)^n + x^{2n}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

在点  $x = 0$  可导, 求  $\varphi(0)$ ,  $\varphi'(0^-)$ , 并讨论  $f'(x)$  的存在性.

#### 问题 2.5.29: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

已知函数  $f(x)$  与  $g(x)$  满足  $f'(x) = g(x)$ ,  $g'(x) = 2e^x - f(x)$ , 且  $f(0) = 0$ , 求

$$\int_0^\pi \left( \frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2} \right) dx.$$

#### 问题 2.5.30: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设  $y_1$  和  $y_2$  是方程  $y'' + p(x)y' + 2e^x y = 0$  的两个线性无关解, 而且  $y_2 = (y_1)^2$ . 若有  $p(0) > 0$ , 求  $p(x)$  及此方程的通解.



**问题 2.5.31:** 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设  $f(x)$  在  $[-\frac{1}{a}, a]$  ( $a > 0$ ) 上非负可积, 且  $\int_{-1/a}^a x f(x) dx = 0$ . 求证:

$$\int_{-1/a}^a x^2 f(x) dx \leq \int_{-1/a}^a f(x) dx.$$

解. 分  $0 < a \leq 1$  和  $a > 1$  两种情况讨论. □

**问题 2.5.32:** 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设在点  $x = 0$  的某邻域  $U$  内,  $f(x)$  可展成泰勒级数, 且对任意正整数  $n$ , 皆有

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}.$$

证明: 在  $U$  内, 恒有  $f(x) = x^2$ .

**问题 2.5.33:** 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ , 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$  都存在.

解. 用单调有界定理. □

**问题 2.5.34:** 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$  的收敛域与和函数.

**问题 2.5.35:** 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{(n+i+1)^2} + \frac{1}{(n+i+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+i+i)^2} \right).$$

解. 用重积分得  $\ln \frac{2}{\sqrt{3}}$ . □

**问题 2.5.36**

设  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset C_{[a,b]}$ , 且  $f_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $f(x)$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ .

解. 因  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , 所以  $f \in C_{[a,b]}$  且  $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ , 当  $n > N$  时,  $\forall x \in [a, b]$  均有  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .  $f(x), f_n(x)$  连续必可积, 有

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| < (b-a)\varepsilon.$$

其实当  $a \leq x \leq b$  时, 有  $|\int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt| < (b-a)\varepsilon$  对  $x$  一致成立, 所以  $\int_a^x f_n(x) dt \Rightarrow \int_a^x f(t) dt$ . □

**问题 2.5.37**

$f_n(x)$  在  $[a, b]$  上都有连续导数, 且  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ,  $f'_n(x) \Rightarrow g(x)$ , 则  $f'(x) = g(x)$ , 即  $\frac{d}{dx} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$ .

解. 因  $f'_n \Rightarrow g$ , 所以  $g$  连续, 可积, 由 2.5.36,  $\int_a^x g(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt = f(x) - f(a)$ , 所以  $f'(x) = g(x)$ . 其实  $f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt$  在  $[a, b]$  上也一致收敛.

若2.5.36和 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 的前 $n$ 项部分和,就有函数项级数的相应命题.

(1). 若 $[a, b]$ 上 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 中每项 $u_k$ 均连续, 且 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \Rightarrow f(x)$ , 则 $f(x) \in C_{[a, b]}$ 且

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

(2). 若 $[a, b]$ 上,  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ 的每项都有连续导数 $u'_k(x)$ 且 $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x) \Rightarrow g(x)$ , 而 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \rightarrow f(x)$ . 则

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x).$$

□

### 问题 2.5.38

举反例:

- (1) 积分的极限不等于极限的积分的函数列.
- (2) 导数的极限不等于极限的导数的函数列.

解. (1). 在 $[0, 1]$ 上极限函数为0, 但 $f_n$ 在 $[0, \frac{1}{n}]$ 上面积为1的脉冲函数.

$$(2). f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, x \in [-1, 1].$$

□

### 问题 2.5.39: <http://math.stackexchange.com/questions/2143014>

证明: 对于任意的 $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left| \frac{\alpha-n}{\alpha+n} \right|$ 发散.

### 问题 2.5.40: <http://math.stackexchange.com/questions/472007>

判断 $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n+10 \sin n}$ 的敛散性.

解. 其实, 若 $f(n)$ 是有界函数, 且级数 $\sum_{n=1}^n \frac{f(n)}{n}$ 收敛,  $a$ 是使任意的 $n$ 都有 $n+af(n) \neq 0$ , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n+af(n)}$ .

这是因为

$$\sum_{n=1}^m \frac{f(n)}{n+af(n)} = \sum_{n=1}^m \frac{f(n)}{n} + \sum_{n=1}^m \frac{-af^2(n)}{n(n+af(n))}$$

后一个和式用比较判别法.

□

### 问题 2.5.41: <http://math.stackexchange.com/questions/273559>

判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n}$ 的敛散性.

解. 比较判别法,  $[k\pi + \frac{\pi}{6}, (k+1)\pi - \frac{\pi}{6}]$ 中总有至少一个整数.

或用 $\sum \frac{\sin^2(n)}{n} = \sum \frac{1}{2n} - \sum \frac{\cos(2n)}{2n}$ , 前者发散, 后者用Dirichlet判别法.

□

### 问题 2.5.42: <http://math.stackexchange.com/questions/991652>

证明 $\int_0^1 \left| \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right| dx$ 发散.

解. 变量替换, 积分化为 $\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ , 然后在子区间 $(k\pi, (k+1)\pi)$ 上求下界.

□

问题 2.5.43: <http://math.stackexchange.com/questions/620449>

证明: 求  $p \in \mathbb{R}$ , 使积分  $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^p} dx$  发散.

解.  $p \geq -1$ . □

问题 2.5.44: <http://math.stackexchange.com/questions/596511>

计算

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx$$

解. 用Frullani积分. 结果为  $\log 2$ . 或用重积分:  $e^{-x} - e^{-2x} = x \int_1^2 e^{-xt} dt$ . 这里给出Frullani积分证明过程的做法.

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx &= \int_a^b \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_{2a}^{2b} \frac{e^{-x}}{x} dx \\ &= \left( \int_a^b - \int_{2a}^{2b} \right) \frac{e^{-x}}{x} dx \\ &= \left( \int_a^{2a} - \int_b^{2b} \right) \frac{e^{-x}}{x} dx \rightarrow \log(2) - 0, \quad a \rightarrow 0, b \rightarrow \infty \end{aligned}$$

上式最后一步用  $e^{-2c} \log(2) \leq \int_c^{2c} \frac{e^{-x}}{x} dx \leq e^{-c} \log(2)$ . □

问题 2.5.45: <http://math.stackexchange.com/questions/590774>

已知  $a > b > 0$ , 求  $\lim_{t \rightarrow 0^+} (a^{-t} - b^{-t}) \Gamma(t)$ .

解. 注意到  $\Gamma(t) = a^t \int_0^\infty \frac{e^{-as}}{s^{1-t}} ds$ , 所以

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (a^{-t} - b^{-t}) \Gamma(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$$

然后用Frullani积分算得  $\log \frac{a}{b}$ . □

问题 2.5.46: <http://math.stackexchange.com/questions/590774>

已知  $a > b > 0$ , 求  $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ .

解. 可以用Frullani积分. 这里用含参积分求导的方法, 定义  $I(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x} dx$ , 被积函数记为  $f(x, t)$ , 由  $f(x, t)$  和  $f_t(x, t)$  在定义域均连续,  $I(t)$  关于  $t$  收敛且  $\int_0^\infty f_t(x, t) dx$  关于  $t$  一致收敛, 则满足积分号下求导条件, 所以  $\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{a}$ ,  $I = -\log t$ . □

解.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\exp(-ax) - \exp(-bx)}{x} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^\infty \frac{\exp(-ax) - \exp(-bx)}{x} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_\epsilon^\infty \frac{\exp(-ax)}{x} dx - \int_\epsilon^\infty \frac{\exp(-bx)}{x} dx \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{a\epsilon}^\infty \frac{\exp(-t)}{t} dt - \int_{b\epsilon}^\infty \frac{\exp(-t)}{t} dt \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{\exp(-t)}{t} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^b \frac{\exp(-\epsilon u)}{u} du \end{aligned}$$

最后的被积函数一致收敛到  $\frac{1}{u}$ . □

解. 用Laplace变换,  $F(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx} dx$ , 则

$$F(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} e^{-sx} dx \implies F'(s) = - \int_0^\infty (e^{-bx} - e^{-ax}) e^{-sx} dx.$$

计算最后一个积分, 然后求积分并令  $s \rightarrow 0$ , 其中积分出来的积分常数用极限  $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$  计算. □

**问题 2.5.47:** <http://math.stackexchange.com/questions/164400>

求  $\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} dx = \log t$ , 其中  $t > 0$ .

解. 让  $u = e^{-x}$ , 得

$$\int_0^1 \frac{u^{t-1} - 1}{\log u} du = \int_0^1 \int_1^t u^{s-1} ds du = \int_1^t \int_0^1 u^{s-1} du ds = \log t.$$

解. 同2.5.46的解法一. □

解. 用重积分求解,  $I(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} dx = \int_0^\infty \int_1^t e^{-xs} ds dx$ . 这里验证积分次序可交换, 则

$$LHS = \int_1^t \int_0^\infty e^{-xs} dx ds = \ln t.$$

解. 用Laplace变换,  $g(s) = L[f(x)] = L\left[\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\right]$ , 则  $-g'(s) = L[xf(x)] = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}$ . 所以  $g(s) = \log \frac{s+b}{s+a} + c$ , 由于  $g(\infty) = 0$ , 所以  $c = 0$ . 从而

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} e^{-sx} dx = \log \frac{s+b}{s+a}.$$

令  $s = 0$  即可. □

解. 用Laplace变换,  $L[1] = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}$ , 则

$$LHS = \int_0^\infty \int_0^\infty (e^{-x} - e^{-xt}) e^{-xs} ds dx = \int_0^\infty \left( \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+t} \right) ds = \ln \frac{s+1}{s+t} \Big|_0^\infty = \ln t$$

**问题 2.5.48**

求积分

$$I(a) = \int_0^{\pi/2} \ln |\sin^2 x - a| dx.$$

解. 当  $a \leq 0$  时, 设  $a = -t$ ,

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^{\pi/2} \ln(t + \sin^2 x) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[ \ln(\sin^2 x) + \int_0^t \frac{1}{s + \sin^2 x} ds \right] dx \\ &= -\pi \ln 2 + \int_0^t \int_0^{\pi/2} \frac{1}{s + \sin^2 x} dx ds \\ &= -\pi \ln 2 + \frac{\pi}{2} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s(1+s)}} ds \\ &= -\pi \ln 2 + \pi \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{-a}{1-a}}. \end{aligned}$$

当  $a \geq 1$  时, 取  $a = t + 1$ , 同上面的解法

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^{\pi/2} \ln(t + \cos^2 x) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[ \ln \cos^2 x + \int_0^t \frac{1}{s + \cos^2 x} ds \right] dx \\ &= -\pi \ln 2 + \pi \cdot \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{t}{1+t}} = -\pi \ln 2 + \pi \cdot \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{a-1}{a}}. \end{aligned}$$

当  $0 < a < 1$  时,

$$I(a) = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \ln |a - \sin^2 x| dx = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \ln \left| \frac{1-2a}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \right| dx.$$

令  $\cos 2\alpha = 2a - 1$ , 则

$$I(a) = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \ln \left| \frac{\cos 2\alpha + \cos 2x}{2} \right| dx = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \ln |\cos(x+\alpha) \cos(x-\alpha)| dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln |\cos x| dx = -\pi \ln 2.$$

□

**问题 2.5.49:** <http://tieba.baidu.com/p/2686576086>

设  $f(x)$  在实轴  $\mathbb{R}$  上有二阶导数, 且满足方程

$$2f(x) + f''(x) = -xf'(x).$$

求证  $f(x)$  和  $f'(x)$  都在  $\mathbb{R}$  上有界.

解. 构造  $L = f^2 + \frac{1}{2}f'^2$ , 研究  $L'$ . 方程可改成  $f''(x) + \frac{x}{2}f'(x) + f(x) = 0$ .

□

**问题 2.5.50:** <http://tieba.baidu.com/p/3846349760>

证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散.

解. 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ , 且  $(1 + \frac{1}{n})^n$  单调增加, 则  $(1 + \frac{1}{n})^n < e$ , 于是  $\ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ , 从而  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(n+1) > \ln n$ , 即得.

□

**问题 2.5.51:** <http://tieba.baidu.com/p/4931607145>

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导,  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上可积. 令

$$A_n = \sum_{i=1}^n f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(x) dx.$$

试证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nA_n = \frac{b-a}{2} [f(b) - f(a)].$$

解. 令  $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ , 则

$$\begin{aligned} nA_n &= n \left[ \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n} - \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \right] \\ &= n \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x_i) - f(x)] dx \\ &= n \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f(x_i) - f(x)}{x_i - x} (x_i - x) dx. \end{aligned}$$

在  $[x_{i-1}, x_i]$  上,  $(x_i - x)$  保号, 而  $g(x) = \frac{f(x_i) - f(x)}{x_i - x}$  连续 (补充定义  $g(x_i) = f'(x_i)$ ). 由积分第一中值定理知, 存在  $\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ , 使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f(x_i) - f(x)}{x_i - x} (x_i - x) dx = g(\eta_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x) dx.$$

再由 Lagrange 中值定理, 以上  $g(\eta_i) = \frac{f(x_i) - f(\eta_i)}{\eta_i - x} = f'(\xi_i)$ ,  $(\xi_i \in (\eta_i, x_i) \subset (x_{i-1}, x_i))$ . 于是

$$\begin{aligned} nA_n &= n \sum_{i=1}^n f'(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x) dx = \frac{n}{2} \sum_{i=1}^n f'(\xi_i) (x_i - x_{i-1})^2 \\ &= \frac{n}{2} \cdot \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f'(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n f'(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) \\ &\rightarrow \frac{b-a}{2} \int_a^b f'(x) dx = \frac{b-a}{2} (f(b) - f(a)), \text{ 当 } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

### 问题 2.5.52

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3} dx = \frac{3}{64} \sqrt[4]{2} \pi.$$

### 问题 2.5.53

求证:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{3\pi}{8}$$

解. 让  $f(y) = \int_0^\infty \frac{\sin^3 yx}{x^3} dx$ , 判断积分号下可求导, 有

$$f''(y) = \frac{3}{4} \int_0^\infty \frac{-\sin yx + 3\sin 3yx}{x} dx = \frac{3\pi}{4} \operatorname{sign} y.$$

□

解. 用  $\sum_{k=1}^\infty \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi-x}{2}$ , 由

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\sin^3(kx)}{k^3} = \frac{9\sin(3kx) - 3\sin(kx)}{4k}.$$

则

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{9\sin(3kx) - 3\sin(kx)}{4k} = \frac{3\pi}{4} - 3x.$$

积分后得:

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\sin^3(kx)}{k^3} = \frac{3\pi}{8} x^2 - \frac{1}{2} x^3.$$

取  $x = \frac{1}{n}$  后两边同乘  $n^2$  得

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\sin^3 \frac{k}{n}}{(k/n)^3} \frac{1}{n} = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2n}.$$

而广义 Riemann 和显示

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^\infty \frac{\sin^3 \frac{k}{n}}{(k/n)^3} \frac{1}{n} = \int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3} dx.$$

广义 Riemann 和成立的条件是  $\sum_{k=0}^\infty \sup_{x \in [k, k+1]} |f'(x)| < \infty$ ? 这不等式蕴含  $\int_0^\infty |f'| dx < +\infty$ ,  $f' \in L^1(0, \infty)$ .

□

解. 用 Parseval 定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)G(s)ds,$$

其中  $F(s) = \mathcal{F}[f]$ ,  $G(s) = \mathcal{F}[g]$ ,  $\mathcal{F}[f] = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{isx}dx$ . 若  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ , 则

$$F(s) = \begin{cases} \pi, & |s| \leq 1 \\ 0, & |s| > 1, \end{cases}$$

若  $g(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$ , 则

$$G(s) = \begin{cases} \pi \left(1 - \frac{|s|}{2}\right), & |s| \leq 2 \\ 0, & |s| > 2, \end{cases}$$

所以  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \pi^2 \left(1 - \frac{|s|}{2}\right) ds = \frac{3\pi}{4}$ . 即  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{3\pi}{8}$ . □

解. 用 Laplace 变换  $F(s) = \mathcal{L}[f] = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}dx$ , 对于  $f(x) = \frac{\sin^3 x}{x^3}$  有

$$F(s) = \frac{\pi s^2}{8} + \frac{3\pi}{8} - \frac{3(s^2-1)}{8} \arctan s + \frac{s^2-9}{8} \arctan \frac{s}{3} + \frac{3s}{8} \ln \frac{s^2+1}{s^2+9}.$$

□

解. 用 Laplace 恒等式

$$\int_0^{\infty} F(u)g(u)du = \int_0^{\infty} f(u)G(u)du, F(s) = \mathcal{L}[f(t)], G(s) = \mathcal{L}[g(t)].$$

让  $G(u) = \frac{1}{u^3}$  得  $g(u) = \frac{u^2}{2}$ , 让  $f(u) = \sin^3 u$  得  $F(u) = \frac{6}{(u^2+1)(u^2+9)}$ , 则

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{6}{2} \int_0^{\infty} \frac{u^2}{(u^2+1)(u^2+9)} du = \frac{3\pi}{8}.$$

□

解. 留数定理, 由  $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin(3x)}{4}$  得  $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{3\sin x - \sin(3x)}{4x^3} dx$ . 围道  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ ,  $\gamma_1 = [r, R]$ ,  $\gamma_2$  是以  $(0,0)$  为心  $R$  为径的上半圆,  $\gamma_3 = [-R, -r]$ ,  $\gamma_4$  为以  $(0,0)$  为心  $r$  为径的上半圆,  $\gamma$  取逆时针方向为正方向. 取  $f(z) = \frac{3e^{iz} - e^{3iz}}{z^3}$ , 则  $f$  在  $\gamma$  内解析, 由 Cauchy-Goursat 公式

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0, \quad (2.1)$$

并用 Laurent 展开或留数定理得

$$\int_{\gamma_4} f(z) dz = -\frac{3\pi i}{4}, \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0, \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_3} f(z) dz = 2i \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx.$$

代入 2.1 即得. □

#### 问题 2.5.54

设函数  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  连续可微, 又设对于任意的  $x, y \in (a, b)$ , 存在唯一的  $z \in (a, b)$  使得  $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(z)$ . 证明:  $f(x)$  严格凸或严格凹.

解. 反证法, 构造  $\lambda$  的函数

$$\Lambda(\lambda) = f(\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta) - \lambda f(\alpha) - (1-\lambda)f(\beta), \quad \lambda \in (0, 1)$$

若结论不真, 则存在  $\alpha, \beta \in (a, b)$  使  $\Lambda(\lambda)$  在  $(0, 1)$  的某两点异号, 由于  $f$  连续, 所以存在  $\lambda_0 \in (0, 1)$  使  $\Lambda(\lambda_0) = 0$ .

设  $\gamma = \lambda_0\alpha + (1-\lambda_0)\beta$ , 则  $\gamma \in (\alpha, \beta) \subset (a, b)$  且  $\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha} = \frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$ . 再由拉格朗日中值定理得出矛盾. □

## 问题 2.5.55

设函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上无限可微, 且:

a) 存在  $L > 0$ , 使得对于任意的  $x \in \mathbb{R}$  及  $n \in \mathbb{N}$  有  $|f^{(n)}(x)| \leq L$ .

b)  $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ , 对所有  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

求证:  $f(x) \equiv 0$ .

解. 由  $f$  在  $\mathbb{R}$  上无限次可微, 且由 a) 知  $f$  有在  $x = 0$  处的 Taylor 展开

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots.$$

设  $N$  是使  $f^{(N)}(0) \neq 0$  的最小者, 取正整数  $M > 1$  使  $|f^{(N)}(0)| > \frac{L}{M-1}$ . 则

$$\begin{aligned} 0 &= \left| f\left(\frac{1}{M}\right) \right| = \left| f^{(N)}(0) \frac{x^N}{N!} + f^{(N+1)}(0) \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} + \dots \right| \\ &\geq |f^{(N)}(0)| \frac{1}{N!M^N} - L \left( \frac{1}{(N+1)!M^{N+1}} + \frac{1}{(N+2)!M^{N+2}} + \dots \right) \\ &\geq |f^{(N)}(0)| \frac{1}{N!M^N} - L \left( \frac{1}{N!M^{N+1}} + \frac{1}{N!M^{N+2}} + \dots \right) \\ &= |f^{(N)}(0)| \frac{1}{N!M^N} - \frac{L}{N!} \frac{1}{M^{N+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{M}} \\ &= \left( |f^{(N)}(0)| - \frac{L}{M-1} \right) \frac{1}{N!M^N} > 0. \end{aligned}$$

这导致矛盾, 即所有  $f^{(n)}(0) = 0$ ,  $f(x) \equiv 0$ . □



## 第三章 数学分析 - 梅加强

梅加强的大名在我上本科的时候就已经听说了, 现在去读他写的书到第二章的时候突然感受到他被奉为巨佬的原因, 不同于国内大多数数学分析教科书惯有的教学顺序, 这本书先讲掉了定积分再引进的导数, 不得不说国内这么干的, 这是我见过的第一本(虽然我也没读过几本国内大学自行出版的教材, 好在北大, 中科大的等等都大概翻过). 写这一小段文字只是突发感慨, 因为在读此之前确实也见过别的教科书这么干, 比如柯朗的《微积分和数学分析引论》也是先引入的积分再引入的导数, 这种与原来按部就班的学习形成对比, 微分和积分是实数完备性发展出来的两条支线, 最后在微积分基本定理它们融合了.

### 3.1 NULL

### 3.2 数列极限

#### 定义 3.2.1

给定序列  $\{a_n\}$ , 实数  $A \in \mathbb{R}$ , 如果

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), s.t. \forall n > N, |a_n - A| < \epsilon,$$

就称  $a_n \rightarrow A, n \rightarrow \infty$ . 反面表述序列  $a_n \not\rightarrow A$ :

$$\exists \epsilon > 0, s.t. \forall N = N(\epsilon), \exists n > N, |a_n - A| \geq \epsilon.$$

如果

$$\forall A > 0, \exists N, s.t. \forall n > N, a_n > A,$$

则称  $a_n \rightarrow +\infty$ . 如果

$$\forall A < 0, \exists N, s.t. \forall n > N, a_n < A,$$

则称  $a_n \rightarrow -\infty$ . 如果

$$\forall A > 0, \exists N, s.t. \forall n > N, |a_n| > A,$$

则称  $a_n \rightarrow \infty$ .

**性质 (极限的性质)** 1. 序列极限如果存在, 必然唯一.

2. 序列极限收敛于有限实数, 必然有界. (这个性质可以弱化, 比如允许序列前几项中有  $\infty$  出现, 这时本条的序列极限性质可以表述为, 从某项开始序列有界)

3. 保序性, 当  $a_n \rightarrow A, b_n \rightarrow B, a_n \geq b_n$ , 则  $A \geq B$ . 不等式  $a_n \geq b_n$  可以换成  $a_n > b_n$ .

### 3.2.1 求极限的方法

求极限没有通用方法, 不要有能学到通用方法的任何期待. 我们所能做的只有从最简单的方法到最复杂的方法进行逐个尝试.

#### $\epsilon - N$ 法

也就是定义法, 这个方法要求事先知道所求极限为何, 然后套用这一框架. 方法比较基本, 不再举例.

#### 夹逼原理

这也是一个求解框架, 找到满足  $a_n \leq b_n \leq c_n$ , 且  $a_n \rightarrow A$ ,  $c_n \rightarrow A$  的上下界来求解  $b_n$  的极限.

#### 单调有界原理

主要用于求解抽象型极限问题.

**例2.2.3** 设  $a_1 > 0$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right)$ ,  $n \geq 1$ , 求  $a_n$  的极限.

求解递推公式的极限问题常用不动点法先找到极限是什么. 也就是求解  $x = \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{x} \right)$ , 得到  $x = \pm 1$ .

注意到  $a_1 > 0$ , 所以数列的每一项  $a_n > 0$ . 并计算

$$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2a_n} (a_n - 1)^2 \geq 0 \implies a_{n+1} \geq 1, \quad \forall n \geq 1.$$

这表明当  $n \geq 2$  时,  $\frac{1}{a_n} \leq 1 \leq a_n$ , 所以

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right) \leq a_n.$$

序列  $\{a_n\}$  从第二项起单调递减, 有下界1. 递推方程的正不动点只有  $x = 1$ , 所以  $a_n \rightarrow 1$ .

事实上, 对于递推公式型极限问题也可以尝试求解它的通项公式, 比如

$$\frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1} + 1} = \left( \frac{a_n - 1}{a_n + 1} \right)^2.$$

#### 重要极限

##### $e$ 相关

$$\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n < \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} < e < \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+2} < \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

$$\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot 1 \leq \left( \frac{n(1 + \frac{1}{n}) + 1}{n+1} \right)^{n+1} = \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1},$$

$$\left( \frac{1 + \frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \left( \frac{n^2}{n^2 - 1} \right)^n = \left( 1 + \frac{1}{n^2 - 1} \right)^n > 1 + \frac{n}{n^2 - 1} > 1 + \frac{1}{n} \implies \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right)^n > \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}.$$

##### Bernoulli不等式

$$x \geq -1 \implies (1+x)^n \geq 1+nx,$$

等号当且仅当  $x = 0$  取到. 推广形式

$$\prod_{k=1}^n (1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n x_k,$$

其中  $x_k \geq 0$ . 注意, 这里给出的两种Bernoulli不等式的前提条件不同, 后者不能是  $x_k \geq -1$ , 因为  $(1-x)(1+x) = 1-x^2 \leq 1$ .

**Euler常数**

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

**例2.2.7 求**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \right).$$

1. 单调上升有上界.

2.  $H_{2n} - H_n = \ln 2n - \ln n + o(1)$ .

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx.$$

4. Euler求和公式

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \ln \frac{2n}{n+1} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n} \right) - \int_1^n \frac{\langle x \rangle}{(n+x)^2} dx.$$

**Stirling公式**

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad \theta_n \in (0, 1).$$

**上下极限**

这种方法也常用于求解抽象型序列极限问题.

序列收敛的一个充要条件是, 序列的上下极限相等.

定义

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{k \geq n} a_k \right), \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \inf_{k \geq n} a_k \right)$$

**命题2.2.4** 1. 存在  $N_0$ , 当  $n > N_0$  时,  $a_n \geq b_n$ , 则

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

2.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

**例2.2.12** 设序列  $(a_n)$ ,  $a_n \geq 0$ , 满足  $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ ,  $\forall m, n \geq 1$ . 证明  $(\frac{a_n}{n})$  收敛.

证明: 设  $n > m$ , 则  $n = mk + l$ , 其中  $0 \leq l \leq m-1$ .

对于任意固定的  $m$ , 有

$$a_n = a_{mk+l} \leq ka_m + a_l \implies \frac{a_n}{n} \leq \frac{ka_m}{km+l} + \frac{a_l}{n}.$$

不等式两边同时取上极限

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_m}{m}.$$

所以

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{m}.$$

**Cauchy收敛准则**

**定义** 序列 $(a_n)$ , 如果 $\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), \text{ s.t. } \forall m, n > N, |a_m - a_n| < \epsilon$ , 则称 $(a_n)$ 为Cauchy列.

其它表述:  $\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), \text{ s.t. } \forall n > N, \forall p > 0, |a_{n+p} - a_n| < \epsilon$ .

反面描述:  $\exists \epsilon_0 > 0, \text{ s.t. } \forall N, \exists m_0, n_0 > N$ , 使得 $|a_{m_0} - a_{n_0}| \geq \epsilon_0$ .

Cauchy列均有解. (这里仍然可以允许序列的前几项可以取 $\infty$ , 此时Cauchy除了开始的有限项外是有界序列).

序列 $(a_n)$ 收敛当且仅当 $(a_n)$ 是Cauchy列.

**习题2** 设序列 $(a_n)$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+p} - a_n| = 0, \quad \forall p \geq 1.$$

问 $(a_n)$ 是否是Cauchy列?

$a_n = H_n$ 就是反例.

**Stolz公式**

**定理2.4.2** 设序列 $(x_n), (y_n)$ , 其中 $y_n$ 单调上升趋向 $\infty$ , 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = A.$$

**注:** 和洛必达法则的情况一样, 当

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

不存在时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$$

仍可能存在.

**定理2.4.3** 设 $(y_n)$ 单调下降趋向于0,  $(x_n) \rightarrow 0$ , 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = A.$$

**注** 条件 $(x_n) \rightarrow 0$ 是必要的, 比如 $x_n \equiv C$ 是一个矛盾.

**例2.1.15** 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = A.$$

这个例子有多种证法, 使用Stolz公式只需一步.

**例2.4.3** 设 $x_1 \in (0, 1), x_{n+1} = x_n(1 - x_n), \forall n \geq 1$ . 证明 $nx_n \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ .

**证明:** 单调收敛证明  $x_{n+1} < x_n$ . 假设极限为  $x$ , 则  $x = x(1-x)$ , 解的  $x = 0$ . 所以  $x_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .

从递推公式得到

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{1-x_n} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

由Stolz公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x_n^{-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - (n-1)}{x_n^{-1} - x_{n-1}^{-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{1-x_n}} = 1.$$

**不用Stolz公式的证法** 和上面一样,  $x_n$  单调收敛到0, 且有  $x_{n+1}^{-1} - x_n^{-1} = \frac{1}{1-x_n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ . 则

$$\frac{1}{n x_n} = \frac{x_n^{-1}}{n} = \frac{(x_n^{-1} - x_{n-1}^{-1}) + (x_{n-1}^{-1} - x_{n-2}^{-1}) + \cdots + (x_2^{-1} - x_1^{-1}) + x_1^{-1}}{n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{-1} - x_{n-1}^{-1}) = 1.$$

上面最后一步用到了例2.1.15.

**习题2** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - A) = B, k$  为正整数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_1 + 2^k a_2 + \cdots + n^k a_n}{n^{k+1}} - \frac{A}{k+1} \right) = \frac{B}{k} + \frac{A}{2}.$$

pf.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k+1)(a_1 + \cdots + n^k a_n) - n^{k+1} A}{(k+1)n^k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k+1)((n+1)^k a_{n+1}) - ((n+1)^{k+1} - n^{k+1}) A}{(k+1)((n+1)^k - n^k)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k+1)[n^k + \binom{k}{1} n^{k-1} + o(n^{k-1})] a_{n+1} - ((\binom{k+1}{1} n^k + \binom{k+1}{2} n^{k-1} + o(n^{k-1})) A}{(k+1)(\binom{k}{1} n^{k-1} + o(n^{k-1}))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k+1)[n + \binom{k}{1} + o(1)] a_{n+1} - ((\binom{k+1}{1} n + \binom{k+1}{2} + o(1)) A}{(k+1)(\binom{k}{1} + o(1))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k+1)(n + k + o(1)) a_{n+1} - ((k+1)n + \frac{k(k+1)}{2} + o(1)) A}{(k+1)(k + o(1))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n(a_{n+1} - A)}{k + o(1)} - \frac{\frac{k(k+1)}{2} A}{(k+1)(k + o(1))} + \frac{k(k+1)a_{n+1} + o(1) \cdot (a_{n+1} - A)}{(k+1)(k + o(1))} \right) \\ &= \frac{B}{k} - \frac{A}{2} + A \end{aligned}$$

其中

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - A) = B \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A + \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - A) = A + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(a_n - A)}{n} = A + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(a_n - A) - B}{n} = A + 0 + 0$$

**习题6** 设  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n}$ , 证明 (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 1$ , (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 - n}{\ln n} = \frac{1}{4}$ .

pf. (2) 由Stolz公式

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 - n}{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2 - 1}{\ln(n+1) - \ln n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2 - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

这启发我们去简化  $a_{n+1}^2 - a_n^2$  项, 由递推公式

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2a_n} \implies a_{n+1}^2 - a_n^2 = \frac{a_{n+1} + a_n}{2a_n} = \frac{a_n + \frac{1}{2a_n} + a_n}{2a_n} = 1 + \frac{1}{4a_n^2} \implies a_{n+1}^2 - a_n^2 - 1 = \frac{1}{4a_n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2 - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4a_n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_n^2} = \frac{1}{4}.$$

**习题8** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+2} - a_n) = A$ , 证明 (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{A}{2}$ , (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{n} = 0$ .

pf. (1) 用stolz公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2} - a_n}{(n+2) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2} - a_n}{2} = \frac{A}{2}.$$

(2) 用stolz公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+3} - a_{n+1} - (a_{n+2} - a_n)}{(n+2) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_{n+3} - a_{n+1}}{2} - \frac{a_{n+2} - a_n}{2} \right) = \frac{A}{2} - \frac{A}{2} = 0.$$

若  $y_n$  单调上升趋于无穷, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+k} - x_n}{y_{n+k} - y_n} = A,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = A.$$

**习题9** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = A$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = A.$$

Stolz公式不是万能的, 比如

**习题15** 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B,$$

则

$$\frac{1}{n} (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1) = AB.$$

**证明:** 设  $a_n = A + \alpha_n$ ,  $b_n = B + \beta_n$ , 则问题不妨在  $A = B = 0$  时证明即可. 其实

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (AB + A\beta_{n+1-k} + B\alpha_k + \alpha_k \beta_{n+1-k}) \\ &= AB + \frac{A}{n} \sum_{k=1}^n \beta_k + \frac{B}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_{n+1-k} \\ &= AB + A \cdot o(1) + B \cdot o(1) + M \cdot o(1) = AB + o(1). \end{aligned}$$

上式最后用到收敛序列有界的结论.

## 3.3 连续函数

### 3.3.1 函数的极限

设  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$ ,  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  称为  $x_0$  的开邻域.

$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$  称为  $x_0$  的去心开邻域.

**定义3.1.1** 设  $f(x)$  定义在  $x_0$  的某个去心开邻域上, 若  $\exists A \in \mathbb{R}$ , s.t.  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta = \delta(\epsilon, x_0) \in (0, \delta_0)$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

则称  $f(x)$  在  $x_0$  处有极限  $A$ , 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \text{ or } f(x) \rightarrow A, x \rightarrow x_0.$$

注: 去心邻域说明 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可能没有定义.  
可以类似的定义左右极限.

**命题3.1.1**  $f$ 在 $x_0$ 处有极限的充要条件是 $f$ 在 $x_0$ 的左右极限存在且相等.

**命题3.1.2 (夹逼原理)** 设在 $x_0$ 的一个空心领域内有

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x).$$

若 $f_1, f_2$ 在 $x_0$ 处的极限存在且等于 $A$ , 则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处极限为 $A$ .

**命题3.1.3 (极限唯一性)** 函数极限存在必然唯一.

$\epsilon - \delta$ 语言是证明函数极限的最简单框架, 其难点仅在于对不等式的掌握情况, 比如重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

对应不等式

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

同样类似地给出涉及无穷大与无穷远时的函数极限的定义.

**习题12** 设 $f, g$ 为两个周期函数, 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ , 则 $f = g$ .

注:  $f, g$ 的周期比可能是无理数, 所以 $f - g$ 可能不是周期函数.

pf. 设 $f$ 的周期为 $T$ ,  $g$ 的周期为 $S$ . 则

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= f(x + nT) - g(x + nS) \\ &= f(x + nT) - g(x + nT) \\ &\quad + g(x + nT + nS) - f(x + nS + nT) \\ &\quad + f(x + nS) - g(x + nS) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x + nT) - g(x + nT) \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x + nT + nS) - f(x + nS + nT) \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} f(x + nS) - g(x + nS) \\ &= 0 + 0 + 0. \end{aligned}$$

**习题13** 设 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [f(2x) - f(x)] = 0$ , 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

pf.  $\forall \epsilon > 0, \exists X > 0$ , s.t.  $\forall x > X, |f(x)| < \epsilon$ , 且

$$|f(2x) - f(x)| \leq \epsilon x.$$

所以

$$\left| f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| \leq \epsilon x.$$

令 $n \rightarrow \infty$ 即可.

### 3.3.2 函数极限的性质

**定理3.1.5 (Heine, 归结原则)** 设 $f$ 定义在 $x_0$ 的某个去心邻域上,  $f$ 在 $x_0$ 处极限为 $A$ 的充要条件是 $\forall x_n \rightarrow x_0, (n \rightarrow \infty)$ , 且 $x_n \neq x_0, (\forall n)$ , 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

证明:  $\Rightarrow$ : 是容易的;  $\Leftarrow$ : 用反证法, 则

$$\exists \epsilon_0 > 0, \text{ s.t. } \forall \delta > 0, \exists x_\delta, \text{ s.t. } 0 < |x_\delta - x_0| < \delta,$$

但  $|f(x_\delta) - A| \geq \epsilon_0$ . 取  $\delta = \frac{1}{n}$ , 构造子列  $(x_n) \rightarrow x_0$ , 但  $|f(x_n) - A| \geq \epsilon_0$ . 矛盾.

Heine定理可改述为:  $f(x)$  在  $x_0$  处有极限当且仅当,  $\forall x_n \rightarrow x_0, (x_n \neq x_0), \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  存在.

**定理3.1.6 (Cauchy准则)** 设  $f$  在  $x_0$  的空心领域上有定义, 则  $f$  在  $x_0$  处有极限, iff,  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } \text{当 } 0 < |x' - x_0| < \delta, 0 < |x'' - x_0| < \delta \text{ 时, 有}$

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

注: 对于无穷远处极限有限时, Cauchy准则仍然成立.

给出Cauchy准则的否定表述.

**定理3.1.7 (单调有界原理)** 设  $f$  定义在  $(x_0 - \delta, x_0)$  上, 若  $f$  单调上升有上界, 或  $f$  单调下降有下界, 则  $f$  在  $x_0$  有左极限.

**定理3.1.8** (1). (局部有界原理) 若  $f$  在  $x_0$  处有有限极限, 则  $f$  在  $x_0$  的某空心领域内有界.

(2). (保序性)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B, f(x) \geq g(x), \implies A \geq B.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B, A > B, \implies \exists U_{x_0}^\circ \text{ s.t. } f(x) > g(x), \forall x \in U_{x_0}^\circ.$$

(3). (四则运算)

**定理3.1.9 (复合函数极限)** 设  $f(y) \rightarrow A, y \rightarrow y_0; g(x) \rightarrow y_0, x \rightarrow x_0$ , 且  $\exists U_{x_0}^\circ, \text{ s.t. } \forall x \in U_{x_0}^\circ, g(x) \neq y_0$ , 则  $f(g(x)) \rightarrow A, x \rightarrow x_0$ .

这个定理说明极限定义中去心领域的重要性, 定理中  $y_0 \notin g(U_{x_0}^\circ)$  不可以弱化为: 存在收敛于  $x_0$  的序列  $(x_n)$ , 使得  $g(x_n) \neq y_0, \forall n$ . 比如

$$f(y) = \begin{cases} 1, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases} \quad g(x) \equiv 0, y_0 = 0.$$

当  $f$  在  $y_0$  处连续时, 这个去心领域的条件又可以去掉, 这说明研究连续函数是有价值的.

### 3.3.3 无穷小量与无穷大量的阶

**定义3.2.1 (无穷小量与无穷大量)** 若函数  $f$  在  $x_0$  处的极限是0, 则称  $f$  在  $x \rightarrow x_0$  时为无穷小量, 记为  $f(x) = o(1), (x \rightarrow x_0)$ ; 若  $x \rightarrow x_0$  时,  $|f| \rightarrow +\infty$ , 则称  $f$  在  $x \rightarrow x_0$  时为无穷大量.

在无穷远处也可以定义无穷小量和无穷大量, 数列也可以定义无穷小量和无穷大量.

**定理3.2.1 (等价代换)** 设  $x \rightarrow x_0$  时,  $f \sim f_1, g \sim g_1$ , 若  $\frac{f}{g_1}$  在  $x_0$  处有极限, 则  $\frac{f}{g}$  在  $x_0$  处有极限, 且极限相等.

几个常用的等价代换:

$$\tan x \sim \sin x \sim x \sim e^x - 1 \sim \ln(1 + x).$$

**无穷小量的性质:** 习题4. 设  $f(x) = o(1), (x \rightarrow x_0)$ , 证明, 当  $x \rightarrow x_0$  时, 有

$$(1) o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x)).$$

$$(2) o(cf(x)) = o(f(x)), \text{ 其中 } c \text{ 是常数.}$$

$$(3) g(x) \cdot o(f(x)) = o(f(x)g(x)), \text{ 其中 } g(x) \text{ 是有界函数.}$$

$$(4) [o(f(x))]^k = o(f^k(x)).$$



## 3.3.4 连续函数

用来刻画连续变化的量

**定义3.3.1 (连续性)** 若 $f$ 在 $x_0$ 的某领域上有定义, 且 $f$ 在 $x_0$ 处的极限是 $f(x_0)$ , 则称 $f$ 在点 $x_0$ 处连续,  $x_0$ 称为 $f$ 的连续点. 类似地可以定义左右连续. 在定义域上每一点都连续的函数称为连续函数.

$f$ 在 $x_0$ 处下半连续:  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 总有 $f(x) > f(x_0) - \epsilon$ .

$f$ 在 $x_0$ 处上半连续:  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 总有 $f(x) < f(x_0) + \epsilon$ .

**连续函数的基本性质:** (1). 保持四则运算;

(2). 若 $f, g$ 连续, 则 $\max\{f, g\}$ 和 $\min\{f, g\}$ 均连续.

**定理3.3.2 (复合函数连续性)** 设 $f$ 在 $y_0$ 处连续,  $g(x) \rightarrow y_0, x \rightarrow x_0$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(y_0).$$

当 $g$ 在 $x_0$ 处连续时,  $f(g(x))$ 在 $x_0$ 处连续.

**定义3.3.2** 设 $x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点, 如果 $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ 均存在且有限, 则称 $x_0$ 是第一类间断点, 否则, 称为第二类间断点. 按照左右极限不相等和相等来区分跳跃间断点和可去间断点.

**命题3.3.3** 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调,  $x_0 \in (a, b)$ 是 $f(x)$ 的间断点, 则 $x_0$ 是跳跃间断点.

**命题3.3.4** 设 $f(x)$ 定义在区间 $I$ 上的单调函数, 则 $f(x)$ 的间断点至多可数.

**证明:** 间断点 $x$ 与开区间 $(f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$ 一一对应且至多可数.

**命题3.3.5** 若 $f(x)$ 定义在区间 $I$ 上严格单调, 则 $f(x)$ 连续当且仅当 $f(I)$ 也是区间.

**证明:**  $\Rightarrow$ : 用介值定理.  $\Leftarrow$ : 反证法, 则有 $x_0$ 使得 $(f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$ 不在区间 $f(I)$ 内, 矛盾.

**推论3.3.6** 定义在区间 $I$ 上的严格单调连续函数 $f(x)$ 一定可逆, 且其逆严格单调连续.

## 3.3.5 闭区间上连续函数的性质

依赖实数系的基本性质

**定理3.4.1 (有界性定理)** 设 $f \in C[a, b]$ , 则 $f$ 在 $[a, b]$ 上有界.

**证法一:** 反证法, 取 $|f(x_n)| \geq n$ , 由聚点定理 $\Rightarrow x_{n_k} \rightarrow x_0 \in [a, b]$ ,  $f$ 连续使得 $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$ 有界, 矛盾.

**证法二:** 连续点 $x$ 处有领域 $U_x(\delta_x)$ , 使得其上 $|f - f(x)| \leq 1$ , 这样的 $(U_x)$ 形成 $[a, b]$ 的覆盖, 用有限覆盖定理.

**定理3.4.2 (最值定理)** 设 $f(x) \in C[a, b]$ , 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上取到最值.

**证法一:**  $f$ 有界,  $[a, b]$ 闭, 所以逼近上确界的点列 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ , 再由 $f$ 连续得到最值点.

**证法二：** 反证法, 设  $f < M := \sup f$ , 构造  $F(y) = \frac{1}{M-f(y)} \in C[a, b]$ , 同样有界  $F(y) < K, K > 0$ , 则  $\frac{1}{M-f(y)} < K$  得出

$$\sup_x f(x) = M > f(y) + \frac{1}{K} \implies \sup_x f(x) \geq \sup_y f(y) + \frac{1}{K} > \sup_x f(x).$$

一般区间上连续函数最值判别法:

**命题5.1.3** 设  $f \in C(\mathbb{R})$ , 且

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ (或 } -\infty \text{)}.$$

则  $f$  在  $\mathbb{R}$  上达到最小(大)值.

**定理3.4.3 (零点定理, Bolzano)** 设  $f \in C[a, b]$ ,  $f(a)f(b) < 0$ , 则存在  $\xi \in (a, b)$ , s.t.  $f(\xi) = 0$ .

**证法一：** 区间二分法+区间套定理.

**证法二：** 用连续函数的保号性, 构造

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\},$$

取  $\xi = \sup A$ , 则有  $x_n \in A, x_n \rightarrow \xi, f(x_n) < 0$ , 所以  $f(\xi) \leq 0$ . 反之, 在  $(\xi, b)$  上  $f \geq 0$ , 取  $x_n \downarrow \xi$ , 则  $f(x_n) \geq 0 \implies f(\xi) = 0$ .

**定理3.4.4 (介值定理)** 设  $f \in C[a, b]$ ,  $\mu$  严格介于  $f(a)$  与  $f(b)$  之间, 则存在  $\xi \in (a, b)$ , s.t.  $f(\xi) = \mu$ .

**推论3.4.5** 设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的连续函数, 则  $f([a, b]) = [m, M]$ , 其中  $m, M$  是  $f$  在  $[a, b]$  上的最小值, 最大值.

**推论3.4.6** 设区间  $I$  上,  $f(x) \in C(I)$ , 则  $f(I)$  是区间. (可以退化为单点集)

**注：** 区间  $I$  可以无界, 可以是开集.

**推论3.4.7** 设  $f(x)$  是区间  $I$  上的连续函数, 则  $f(x)$  可逆的充要条件是  $f(x)$  严格单调.

### 3.3.6 一致连续性

**定义3.4.1 (一致连续)** 设  $f(x)$  定义在区间  $I$  上, 若  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ , s.t. 当  $x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| < \delta$  时, 有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ , 则称  $f(x)$  在  $I$  中一致连续.

否定表述:  $f(x)$  在  $I$  中不一致连续:  $\exists \epsilon_0 > 0$ , 以及  $(a_n), (b_n) \subseteq I$ , 且  $a_n - b_n \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$ . 有  $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \epsilon_0$ .

**定理3.4.9 (Cantor定理)** 闭区间上, 连续函数一致连续.

**证法一：** (反证),  $\exists \epsilon_0 > 0, (a_n), (b_n) \subseteq [a, b], a_n - b_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , 且  $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \epsilon_0$ . 用聚点定理取  $(b_n)$  的收敛子列  $b_{n_k} \rightarrow x_0 \in [a, b]$ , 则  $a_{n_k} \rightarrow x_0$ , 取极限.

**证法二：** 用连续性构造有限覆盖开集.

**定义3.4.2 (振幅, 连续性模)** 设  $f(x)$  在  $x_0$  的开邻域内有定义, 称

$$\omega_f(x_0, r) = \sup \{ |f(x') - f(x'')| : x', x'' \in B_{x_0}(r) \}, \quad r > 0.$$

为  $f$  在  $(x_0 - r, x_0 + r)$  上的振幅, 显然,  $\omega_f(x_0, r)$  关于  $r \rightarrow 0+$  递减, 故

$$\omega_f(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0+} \omega_f(x_0, r)$$

存在, (不一定有限). 称为  $f$  在点  $x_0$  处的振幅.

注: 定义提到的是两种振幅, 分别表征函数  $f$  在"区间"上和"一点"上的振幅.

**命题3.4.10**  $f(x)$  在  $x_0$  处连续的充要条件是  $\omega_f(x_0) = 0$ .

**命题3.4.11**  $f(x)$  在  $I$  中一致连续的充要条件是

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \omega_f(r) = 0,$$

其中

$$\omega_f(r) = \sup \{ |f(x') - f(x'')| : \forall x', x'' \in I, |x' - x''| \leq r \}.$$

### 3.3.7 连续函数的积分

**积分定义:** 设  $f \in C[a, b]$ , 直线  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$  与曲线  $f(x)$  的图像在平面上所围成图形的面积用  $\int_a^b f(x) dx$  来表示, 称为  $f$  在  $[a, b]$  上的积分.

**命题3.5.1** 设  $f \in C[a, b]$ ,  $f_n(x)$  是分段线性函数, 是将  $[a, b]$  进行  $n$  等分, 分点  $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ , 在  $x \in [x_{i-1}, x_i]$  时

$$f_n(x) = l_i(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}).$$

则  $\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon)$ , 当  $n > N$  时,

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

即  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ . 进而

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i. \end{aligned}$$

**积分的基本性质** 约定  $\int_a^a f(x) dx = 0$ ,  $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ .

(1) (线性性)  $f, g \in C[a, b]$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , 则

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

(2) 若  $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$ , 则

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b-a).$$

(3) (保序性) 若  $f \geq g, f, g \in C[a, b]$ , 则  $\int_a^b f \geq \int_a^b g$ . 特别地,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

(4) (区间可加性) 设  $f \in C(I)$ ,  $a, b, c \in I$ , 则

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

(5) 若  $f(x) \in C[a, b]$ , 非负, 则  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ , 等号仅当  $f \equiv 0$  时取到.

**例3.5.4** 设  $f \in C[a, b]$ ,  $c \in [a, b]$ , 定义  $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ ,  $x \in [a, b]$ , 则  $F$  是 Lipschitz 函数.

**证明:**

$$|F(x_2) - F(x_1)| \leq M \int_{x_1}^{x_2} dt.$$

**命题3.5.2 (积分中值定理)** 设  $f, g \in C[a, b]$ , 若  $g$  不变号, 则  $\exists \xi \in [a, b]$ , s.t.

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

**证明:** 用连续函数介值定理.

**例3.5.10** 设  $f \in C[0, a]$ , 定义

$$f_0(x) = f(x), \quad f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots.$$

**证明:** 存在  $\xi = \xi_{n,x} \in [0, x]$ , s.t.  $f_n(x) = f(\xi) \frac{x^n}{n!}$ .

**证明:**

$$m \frac{x^n}{n!} \leq \int_0^x f_{n-1}(t) dt \leq M \frac{x^n}{n!},$$

用介值定理.

**例3.5.12** 求连续函数  $f$  满足

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

**证明:** 此题的条件可以弱化为  $f$  是可积函数. 取积分

$$\int_0^y f(x+t) dt = \int_x^{x+y} f(t) dt = \int_0^y f(x) dt + \int_0^y f(t) dt,$$

所以

$$\int_0^{x+y} f(t) dt = yf(x) + \int_0^x f(t) dt + \int_0^y f(t) dt.$$

交换  $x, y$  的位置即得  $yf(x) = xf(y)$ , 再取  $y = 1$ .

**例3.5.15** 设  $f \in C[a, b]$ ,  $g$  是周期为  $T$  的连续函数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)g(nx) dx = \frac{1}{T} \int_a^b f(x) dx \int_0^T g(x) dx.$$

## 3.3.8 作业

16. 设  $0 < a < b$ ,  $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$ .

(1) 如果  $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ ,  $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ , 则  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  收敛于同一极限.

(2) 如果  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ ,  $b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$ , 则  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  收敛于同一极限.

pf. (1). 因为  $a_1, b_1 > 0$ , 由  $a_n, b_n > 0$  可以得到,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} > 0, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} > 0.$$

即由归纳法,  $\{a_n\}, \{b_n\}$  均是正数数列.

由均值不等式,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2} = b_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

又由  $a_1 = a < b = b_1$ , 故对于任意的  $n \in \mathbb{N}$ , 有  $a_n \leq b_n$ . 于是

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{b_n + b_n}{2} = b_n,$$

知  $\{b_n\}$  单调递减; 同理, 由

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{a_n a_n} = a_n,$$

知  $\{a_n\}$  单调上升. 于是

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_1.$$

这说明  $\{a_n\}$  是单调上升的有界序列, 上界是  $b_1$ ;  $\{b_n\}$  是单调下降的有界序列, 下界是  $a_1$ .

由于单调有界序列必然收敛, 可设  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$ , ( $n \rightarrow \infty$ ). 对  $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  两边同时取极限  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  得到

$$b = \frac{a + b}{2} \iff a = b.$$

即  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  收敛于同一极限.

13. 设  $f(x)$  是  $(a, b)$  中定义的第二类间断点的函数, 如果对任意的两点  $x, y \in (a, b)$ , 均有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x) + f(y)],$$

则  $f$  为  $(a, b)$  中的连续函数.

pf. 用反证法, 若  $f(x)$  在  $(a, b)$  上不连续, 则存在  $x_0 \in (a, b)$ , 使得  $f$  在  $x_0$  处为第一类间断点(因为  $f$  没有第二类间断点).

若  $f$  在  $x_0$  处为跳跃间断点, 则  $f(x_0 - 0)$  和  $f(x_0 + 0)$  均存在且不相等, 不妨设  $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$ , 取  $\epsilon < \frac{f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)}{4}$ , 则存在  $\delta > 0$ , 使得对于任何  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ,

$$f(x_0 - 0) - \epsilon < f(x) < f(x_0 - 0) + \epsilon;$$

且对于任何  $y \in (x_0, x_0 + \delta)$ ,

$$f(x_0 + 0) + \epsilon > f(y) > f(x_0 + 0) - \epsilon.$$

特别的

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{8}\right) = f\left(\frac{x_0 - \frac{\delta}{4} + x_0 + \frac{\delta}{2}}{2}\right) > f(x_0 + 0) - \epsilon > \frac{3f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{4}.$$

而

$$\frac{1}{2}\left(f\left(x_0 - \frac{\delta}{4}\right) + f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right)\right) < \frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + \epsilon + f(x_0 + 0) + \epsilon) \leq \frac{3f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{4},$$

这与

$$f\left(\frac{x_0 - \frac{\delta}{4} + x_0 + \frac{\delta}{2}}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f\left(x_0 - \frac{\delta}{4}\right) + f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right)\right)$$

矛盾.

若  $f$  在  $x_0$  处是跳跃间断点, 则  $f(x_0 \pm 0)$  均存在且不等于  $f(x_0)$ . 取  $x = x_0 - t$ ,  $y = x_0 + t$ , 并令  $t \rightarrow 0$ , 则

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x_0) \leq \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad t \rightarrow 0.$$

即  $f(x_0) < \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . 取  $x = x_0$ ,  $y = x_0 + t$ , 并令  $t \rightarrow 0+$ , 则

$$f\left(\frac{t}{2} + x_0\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x_0) + f(x_0+t)}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \frac{f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

又矛盾.

15. 设  $f$  为  $\mathbb{R}$  上的连续函数, 如果对任意的  $x, y \in \mathbb{R}$  均有  $f(x+y) = f(x)f(y)$ , 则要么  $f$  恒为零, 要么存在常数  $a > 0$ , 使得  $f(x) = a^x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

pf. 若  $f$  不恒为零, 则由于  $f$  连续,  $f$  在  $\mathbb{R}$  上保持符号. 不然则由连续函数的介值定理, 存在  $x_0$  使得  $f(x_0) = 0$ , 则对于任意的  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = f(x_0)f(x-x_0) \equiv 0.$$

与  $f$  不恒为零矛盾.

$f$  不能恒为负值, 不然  $f(2x) = f(x)^2 \Rightarrow f(2x) > 0$  导致  $f$  在  $\mathbb{R}$  上不再保持符号, 与上述推导矛盾. 所以  $f$  在  $\mathbb{R}$  恒为正.

取  $g(x) = \ln f(x)$ , 由于  $f$  的连续性,  $g(x)$  也是  $\mathbb{R}$  上的连续函数. 并有

$$g(x+y) = \ln f(x+y) = \ln(f(x)f(y)) = \ln f(x) + \ln f(y) = g(x) + g(y).$$

由于  $g$  连续, 所以  $g(x) = g(1)x$ . 令  $c = g(1)$ ,  $a = f(1) > 0$ , 即有  $\ln f(x) = cx = x \ln f(1) = \ln a^x$ ,  $f(x) = a^x$ . (14题的结论是经典结论, 任何时候都可以直接拿来用)

1. 设  $f$  在  $[a, +\infty)$  中连续, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 则  $f$  在  $[a, +\infty)$  中有界, 且最大值和最小值中的一个必定能被  $f$  达到.

pf1. 考虑函数

$$g(t) := \sup_{x \geq t} f(x),$$

则  $g(t)$  是  $[a, +\infty)$  上连续的递减函数. 且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha.$$

所以  $g(t) \geq \alpha$ .

如果存在  $t$  使得  $g(t) > \alpha$ , 也即  $\sup_{x \geq t} f(x) > \alpha$ , 取  $\epsilon < \sup_{x \geq t} f(x) - \alpha$ , 则有  $X > t$ , s.t.  $\forall x > X$ ,

$$|f(x) - \alpha| < \epsilon \Rightarrow f(x) < \alpha + \epsilon \Rightarrow \sup_{x > X} f(x) \leq \alpha + \epsilon < \sup_{x \geq t} f(x),$$

这说明  $f(x)$  在  $[t, \infty)$  上的上确界不可能在  $[X, \infty)$  上取到, 即

$$\sup_{x \geq t} f(x) = \sup_{t \leq x \leq X} f(x) \Rightarrow \sup_{x \geq a} f(x) = \sup_{a \leq x \leq X} f(x)$$

即  $f(x)$  在  $[a, X]$  上存在最大值, 也即  $f(x)$  在  $[a, \infty)$  上存在最大值.

若对于任何  $t$ ,  $g(t) = \alpha$ . 也即

$$\sup_{x \geq t} f(x) = \alpha, \quad \forall t \geq a.$$

当  $f(x)$  不为常数时, 则必然有  $f(x_0) < \alpha$ . 取  $\epsilon < \alpha - f(x_0)$ , 则有  $X > x_0$ , s.t.  $\forall x > X$

$$|f(x) - \alpha| < \epsilon \Rightarrow f(x) > \alpha - \epsilon > f(x_0).$$

所以  $f(x)$  必然在  $[a, X]$  中取到最小值.

pf2.  $f(x)$  在  $[a, \infty)$  不恒为常数.

因为  $f(x) \rightarrow \alpha, x \rightarrow \infty$ , 则有点列  $\{x_n\}$ , 使得  $f(x_n) \rightarrow \alpha, f(x_1) \neq \alpha$  (因为  $f$  不恒为常数).

因为  $f(x_1) \neq \alpha$ , 则取  $\epsilon < |f(x_1) - \alpha|$ , 有  $X > x_1$ , s.t.  $\forall x > X$ ,

$$|f(x) - \alpha| < \epsilon < |f(x_1) - \alpha|,$$

这意味着在  $[a, X]$  内存在点  $x_1$  的函数值  $f(x_1)$  远离  $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ .

当  $f(x_1) > \alpha$  时,  $f(x)$  在  $[a, X]$  上存在最大值  $M \geq f(x_1)$ , 而在  $(X, \infty)$ ,  $f(x) \leq \alpha + \epsilon < f(x_1) \leq M$ . 最大值存在性得证.

当  $f(x_1) < \alpha$  时,  $f(x)$  在  $[a, X]$  上存在最小值  $m \leq f(x_1)$ , 而在  $(X, \infty)$ ,  $f(x) \geq \alpha - \epsilon > f(x_1) \geq m$ . 最小值存在性得证.

3. 设  $b, \alpha > 0$ , 求积分  $\int_0^b x^\alpha dx$ , 利用积分计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}.$$

8. 设  $f \in C[a, b]$ , 如果对于任意的  $g \in \{g \in C[a, b] : g(a) = g(b) = 0\}$ , 均有  $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$ , 则  $f \equiv 0$ .

此题类比变分基本定理.

9. 设  $f \in C[a, b]$ , 如果对于任意的  $g \in \{g \in C[a, b] : \int_a^b g(x) dx = 0\}$ , 均有  $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$ , 则  $f = C$  为常函数.

提示: 设  $f$  的平均值为  $C$ , 考虑  $g = f - C$  和  $g^2$  的积分.

12. 设  $f \in C[a, b]$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b |f(x)|^n dx \right)^{1/n} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

14. 设  $f, g \in C[a, b]$ , 且  $f, g > 0$ , 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_a^b f^{n+1}(x)g(x) dx}{\int_a^b f^n(x)g(x) dx} = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

17. 设  $f(x) \in C[0, +\infty)$  严格单调递增, 则

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, & x > 0, \\ f(0), & x = 0 \end{cases}$$

也是严格单调递增连续函数.

18. 设  $f(x) \in C[a, b]$ ,  $f > 0$ , 则

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f^r(x) dx \right)^{1/r} = \exp \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx \right),$$

并用 Hölder 不等式说明上式左端关于  $r$  单调递增.

## 3.4 微分及其逆运算

### 3.4.1 可导与可微

研究函数的局部性质

定义 4.1.1 (导数) 设  $f$  在  $x_0$  附近有定义, 如果极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在且有限, 则称  $f$  在  $x_0$  处可导, 极限称为  $f$  在  $x_0$  处的导数, 记为  $f'(x_0)$ ,  $\frac{df}{dx}(x_0)$ .

用  $\epsilon - \delta$  语言表述.

**命题4.1.1** 设 $f$ 在 $x_0$ 处可导, 则 $f$ 在 $x_0$ 处连续.

**命题4.1.2 (导数的运算法则)** 设 $f, g$ 在 $x$ 处可导, 则 $fg$ 也在 $x$ 处可导; 对于任意的常数 $\alpha, \beta$ ,  $\alpha f + \beta g$ 也在 $x$ 处可导. 且

(1).  $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ , (线性性);

(2).  $(fg)' = f'g + fg'$ . (导性).

**推论4.1.3** 设 $f, g$ 在 $x_0$ 处可导,  $g(x_0) \neq 0$ , 则 $\frac{f}{g}$ 在 $x_0$ 处也可导, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

可以用导数表述曲线在一点处的切线和法线, 事实上仅仅是用导数给出了切线和法线的定义, 属于先有导数的概念才有的切线和法线的概念.

**定义4.1.2 (微分)** 设 $f$ 在点 $x_0$ 附近有定义, 如果存在常数 $A$ , 使得

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0),$$

则称 $f$ 在 $x_0$ 处可微, 线性映射 $x \mapsto Ax$ 称为 $f$ 在 $x_0$ 处的微分, 记为 $df(x_0)$ .

**命题4.1.4** 设 $f$ 在 $x_0$ 附近有定义, 则 $f$ 在 $x_0$ 处可导当且仅当 $f$ 在 $x_0$ 处可微, 且微分的斜率就是导数 $f'(x_0)$ .

可导对应函数在一点差商存在极限, 可微对应函数的局部线性化, 产生线性变换的主项.  $f$ 在 $x$ 处的微分是一个斜率为 $f'(x)$ 的线性映射, 当 $x$ 变化时, 线性映射也变化, 即 $x \mapsto df(x)$ 是一个新的映射, 记为 $df$ , 称为 $f$ 的外微分或全微分.

$x$ 的全微分 $dx$ 把任意点 $x$ 映为 $x$ 处的恒等映射.

因为 $df(x)$ 和 $dx$ 都是线性变换, 所以有 $df = f'(x)dx$ .

把形如 $f dx$ 的表达式( $f$ 为函数)称为1次微分形式.

可以把微分运算看做升维运算, 把 $x$ 和 $dx$ 看做两个独立的变量,  $dx$ 就是 $\Delta x$ , 它与 $x$ 的选取无关.  $df$ 把单变量函数 $f$ 映射为二元函数 $df(x) = f'(x)dx$ .

**命题4.1.5 (链式法则)** 设 $g$ 在 $x_0$ 处可导,  $f$ 在 $g(x_0)$ 处可导, 则复合函数 $f \circ g = f(g)$ 在 $x_0$ 处可导, 且

$$(f(g))'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

证明依赖于下式

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + o(g(x) - g(x_0)) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + f'(g(x_0))o(x - x_0) + o(x - x_0) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \end{aligned}$$

**命题4.1.6 (反函数求导法则)** 设 $f$ 在 $x_0$ 附近有定义, 且反函数为 $g$ . 若 $f$ 在 $x_0$ 处可导, 且导数非零, 则 $g$ 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导, 且

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

这个定理并没有要求 $f$ 在 $x_0$ 附近每点上都连续. 导数 $f'(x_0) \neq 0$ 的条件不能省掉, 否则考虑 $f(x) = x^3$ .

**命题4.1.8** 设 $f, g$ 可微, 则

(1)  $d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$ , 其中 $\alpha, \beta$ 为常数;

(2)  $d(fg) = gdf + fdg$ ;

(3)  $d(f/g) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$ , 其中 $g \neq 0$ .



**命题4.1.9** 设 $f, g$ 均可微, 且复合函数 $f(g)$ 有定义, 则

$$d(f(g)) = f'(g)dg.$$

### 3.4.2 高阶导数

本节没有太多复杂的知识点, 仅做一些结论的罗列.

**定义4.2.1 (高阶导数)** 设 $f$ 在 $x_0$ 附近可导, 如果导数 $f'$ 在 $x_0$ 处仍可导, 则称 $f$ 在 $x_0$ 处2阶可导. 记为

$$f''(x_0) = (f')'(x_0),$$

并称为 $f$ 在 $x_0$ 处的2阶导数.

一般地, 如果 $f$ 在 $x_0$ 附近 $n$  ( $n \geq 1$ ) 阶可导, 且 $n$ 阶导函数 $f^{(n)}$ 在 $x_0$ 处可导, 则称 $f$ 在 $x_0$ 处 $n+1$ 阶可导, 记为

$$f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'(x_0),$$

称为 $f$ 的 $n+1$ 阶导数.

**注:**  $f$ 的2阶导数要求 $f'$ 在 $x_0$ 附近有定义, 也就是对于 $x_0$ 附近的 $x$ 能够计算 $f'(x)$ 的值. 另有一种用差分方法定义的二阶导数, 比如

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

它避免了计算 $f'(x)$ , 而且允许一阶导数不存在, 而仅存在二阶导数. 一般用于推广导数的概念.

**定义4.2.2** 若 $f$ 在区间 $I$ 上的每点都 $n$ 阶可导, 则称 $f$ 在 $I$ 中 $n$ 阶可导; 如果 $f$ 可导, 且导函数 $f'$ 连续, 则称 $f$ (1阶)连续可导, 记为 $f \in C^1(I)$ ; 一般 $n$ 阶连续可导记为 $f \in C^n(I)$ . 如果 $f$ 有任意阶导数, 则称 $f$ 是光滑的, 记为 $f \in C^\infty(I)$ .

**例4.2.3** 可微函数的导函数不一定连续.

尽管导函数连续性丧失, 但仍有介值定理成立, 也就是Darboux介值定理.

**例4.2.4** 设 $k = 1, 2, \dots$ , 则函数

$$f(x) = \begin{cases} x^{2k+1} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

有 $f \in C^k \setminus C^{k+1}$ .

**例4.2.5** 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$$

是光滑函数.

**命题4.2.1** 设 $f, g$ 均为 $n$ 阶可导函数, 则

$$(1) (\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

(2) (Leibniz)

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

### 3.4.3 不定积分

**命题4.3.1** 设 $f$ 为区间 $I$ 上的可微函数, 则 $f' = 0$ 当且仅当 $f = C$ .

此定理使用中值定理证明最为简洁, 书中使用的方法可以归为极端原理.

**定义4.3.1 (原函数)** 方程 $F'(x) = f(x)$ 的一个可微解 $F$ 称为函数 $f$ 的一个原函数.

**定义4.3.2 (不定积分)** 设函数 $f$ 在区间 $I$ 上有原函数, 用记号 $\int f(x) dx$ 表示 $f$ 的原函数的一般表达式, 则

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad x \in I,$$

其中 $C$ 为常数.

**定理4.3.2 (Newton-Leibniz)** 区间 $I$ 中的连续函数都有原函数. 设 $f$ 连续,  $a \in I$ , 则

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in I$$

是 $f$ 的一个原函数.

需要注意Darboux介值定理, 将来会遇到有间断点的可积函数, 其变限积分在间断点处不可微, 所以不能形成一般非连续函数的原函数.

此定理称为微积分基本定理, 它有其它形式:

设 $f \in C(I)$ ,  $F$ 为 $f$ 的任一原函数, 则存在常数 $C$ , 使得,  $F(x) = \int_a^x f(t) dt + C$ , 所以

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F|_a^b.$$

另有一种表述是当 $G$ 连续可微时,

$$\int_a^b G'(x) dx = G(b) - G(a) = G|_a^b.$$

上式对于 $C^1$ 函数总是对的, 但需要注意Volterra函数, 它在定义的区间上处处可导, 且导函数有界, 但导函数不可定积分.

**命题4.3.3 (不定积分的线性性质)** 设 $f, g$ 在区间 $I$ 上均有原函数, 则

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx,$$

其中 $\alpha, \beta$ 为常数.

**命题4.3.4** 设 $f$ 的原函数为 $F$ , 若 $f$ 可逆, 且 $g = f^{-1}$ , 则

$$\int g(x) dx = xg(x) - F(g(x)) + C.$$

### 3.4.4 积分的计算

**命题4.4.1 (换元积分法, 变量替换法)** 设 $f(u)$ 是区间 $J$ 上有定义的函数,  $u = \phi(x)$ 是区间 $I$ 中的可微函数, 且 $\phi(I) \subset J$ .

(1) 设 $f$ 在 $J$ 上的原函数是 $F$ , 则 $F(\phi)$ 是 $f(\phi)\phi'$ 在区间 $I$ 上的原函数, 即

$$\int f(\phi(x))\phi'(x) dx = \int f(u) du + C = F(\phi(x)) + C;$$

(2) 设 $\phi$ 可逆, 且其逆可微,  $\phi(I) = J$ . 如果 $f(\phi(x))\phi'(x)$ 有原函数 $G$ , 则 $f$ 有原函数 $G(\phi^{-1}(u))$ , 即

$$\int f(u) du = G(\phi^{-1}(u)) + C.$$

**命题4.4.2 (分部积分法)** 设 $u(x), v(x)$ 在区间 $I$ 中可微, 若 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $u(x)v'(x)$ 也有原函数, 且

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

**例4.4.10** 设 $a \neq 0$ , 求不定积分 $I = \int e^{ax} \cos bx dx$ 和 $J = \int e^{ax} \sin bx dx$ .

**例4.4.18** 求不定积分

$$\int \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} dx, \quad 0 < r < 1.$$

不能用初等函数表述的不定积分:

$$e^{\pm x^2}, \sin(x^2), \cos(x^2), \frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}, \sqrt{1-k^2 \sin^2 x}, \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}, \quad (0 < k < 1).$$

### 3.4.5 作业

19. 设 $a_{ij}(x)$ 均为可导函数, 求行列式函数 $\det(a_{ij}(x))_{n \times n}$ 的导数.

20. Riemann函数 $R(x)$ 处处不可导.

11. 通过对 $(1-x)^n$ 求导并利用二项式定理证明等式

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k k^m = \begin{cases} 0, & m = 0, 1, \dots, n-1, \\ (-1)^n n!, & m = n. \end{cases}$$

10. 求不定积分的递推公式 ( $a \neq 0$ ):

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

11. 设 $a, b > 0$ , 求不定积分的递推公式:

$$I_{mn} = \int \frac{dx}{(x+a)^m (x+b)^n}.$$

7. 设 $f$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 且

$$2f(x) = f(x^2), \quad \forall x > 0.$$

证明 $f(x) = c \ln x$ .

hint: 设 $g(x) = f(e^x)$ . 题目条件可以弱化为 $f$ 仅在 $x=1$ 处可导.

$$g(x) = \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x/2^n} x = g'(0)x$$

可导性不能省去, 否则考虑 $\max\{0, c \ln x\}$ 作为函数的另一个解.

### 3.4.6 简单的微分方程

例4.5.4 微分方程能够解出通解的表达式通常和朗斯基行列式有关.

## 3.5 微分中值定理和Taylor展开

### 3.5.1 函数极值

**定义5.1.1 (极值点)** 设 $f$ 定义在 $I$ 上,  $x_0 \in I$ , 若存在 $\delta > 0$ , s.t.

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I,$$

则称 $x_0$ 是 $f$ 在 $I$ 上的极小值点,  $f(x_0)$ 称为极小值.

若 $x_0 \in I$ , 且 $\forall x \in I, f(x) \geq f(x_0)$ , 则称 $x_0$ 是 $f$ 在区间 $I$ 上的最小值点,  $f(x_0)$ 称为函数 $f$ 在区间 $I$ 上的最小值.

**定理5.1.1 (Fermat定理)** 设 $x_0$ 是 $f$ 在 $I$ 上的极值点, 且 $x_0$ 是内点, 若 $f$ 在 $x_0$ 处可导, 则 $f'(x_0) = 0$ .

**注:** 由于极值点定义是在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$ 上给出的, 所以以上定理要加上 $x_0$ 是内点.

**证明:** 使用极限的保号性, 判断

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

的符号.

满足 $f'(x_0) = 0$ 的点称为 $f$ 的驻点, 临界点.

若 $f'(x_0) \geq 0$ , 则 $\exists \delta > 0$ , s.t.  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , 有 $(x - x_0)(f(x) - f(x_0)) \geq 0$ , 但 $f$ 在 $x_0$ 附近不单调.

**定理5.1.2 (Darboux)** 设 $f$ 为 $[a, b]$ 上的可导函数, 则 $f'$ 可以取到 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 之间的任意值.

**证明:** 设 $k$ 介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间, 定义 $g(x) = f(x) - kx$ , 则

$$g'_+(a)g'_-(b) = (f'_+(a) - k)(f'_-(b) - k) \leq 0.$$

若上式等于零, 命题显然. 若上式小于零, 不妨设 $g'_+(a) > 0$ , 此时 $x = a$ 不是最大值点; 并有 $g'_-(b) < 0$ , 此时 $x = b$ 不是最大值点.

从而 $g(x)$ 只能在 $[a, b]$ 内取到最大值, 由Fermat定理, 存在 $\xi \in (a, b)$ , s.t.  $g'(\xi) = 0$ .

**注:** 导函数有介值定理, 但导函数可以不连续, 比如 $x^2 \sin \frac{1}{x}$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ .

Darboux定理说明, 若 $g'$ 在任何点处不为零, 则 $g'$ 不变号.

Darboux定理的使用条件必须是区间内每点处可导.

**例5.3.4** 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导, 若 $f$ 有界, 证明:  $\exists \xi \in \mathbb{R}$ , s.t.  $f''(\xi) = 0$ .

**证明:** (反证法),  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f''(x) \neq 0$ , 由Darboux定理,  $f''$ 不变号, 从而 $f'$ 单调.

不妨设 $f'$ 单调上升, 取 $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x_0) \neq 0$ . 因为

$$f'(x_0) > 0 \implies f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt \geq f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow +\infty,$$

与 $f$ 有界矛盾; 而且

$$f'(x_0) < 0 \implies f(x_0) - f(x) = \int_x^{x_0} f'(t) dt \leq f'(x_0)(x_0 - x) \rightarrow -\infty, \quad x \rightarrow -\infty,$$

也与 $f$ 有界矛盾.

### 3.5.2 微分中值定理

**定理5.2.1 (Rolle)** 设 $f \in C[a, b]$ , 在 $(a, b)$ 上可微, 且 $f(a) = f(b)$ , 则存在 $\xi \in (a, b)$ , s.t.  $f'(\xi) = 0$ .

**定理5.2.2 (Lagrange)** 设 $f \in C[a, b]$ , 在 $(a, b)$ 上可微, 则存在 $\xi \in (a, b)$ , s.t.

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

证明是构造性的, 对

$$F(x) = f(x) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

使用Rolle定理.

**定理5.2.3 (Cauchy)** 设  $f, g \in C[a, b]$ , 在  $(a, b)$  上可微, 且  $\forall x \in (a, b), g'(x) \neq 0$ , 则

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

**证明:** ( $g(a) \neq g(b)$ ), 对

$$F(x) = f(x) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)) \right]$$

用Rolle定理.

**几何意义:** 定义参数曲线  $\vec{r}(t) = (g(t), f(t))$ ,  $A = \vec{r}(a)$ ,  $B = \vec{r}(b)$ . 则  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$  表示直线  $\ell_{AB}$  的斜率. Cauchy定理指出,  $\exists \xi$  使得  $\vec{r}'(\xi)$  处的切线方向  $\vec{r}'(\xi) \parallel \ell_{AB}$ , 而  $\vec{r}'(\xi) = (g'(\xi), f'(\xi))$ , 有

$$k_{AB} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

**注:** 由于  $\forall x \in (a, b), g'(x) \neq 0$ , 由Darboux介值定理  $g'(x)$  不变号,  $g(x)$  其实是单调可逆的, 这可以给出另一种证法:

取  $A = g(a)$ ,  $B = g(b)$ , 不妨设  $A < B$ , 则  $f(g^{-1}(y)) \in C[A, B]$ , 由复合函数求导与反函数求导法则

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(g^{-1}(B)) - f(g^{-1}(A))}{B - A} = \frac{d}{dx} f(g^{-1}(x)) \big|_{x=\zeta} = f'(g^{-1}(\zeta)) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(\zeta))} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

其中  $g(\xi) = \zeta \in [A, B]$ .

**例5.2.4** 设  $f(x) \in C[a, b]$ , 在  $(a, b)$  二阶可导, 若  $f(a) = f(b) = 0$ , 则对于任意的  $c \in [a, b]$ , 存在  $\xi \in (a, b)$ , s.t.

$$f(c) = \frac{f''(\xi)}{2} (c-a)(c-b).$$

**证: (K值法)** 设  $K$  满足  $f(c) = K(c-a)(c-b)$ . 则  $f(x) - K(x-a)(x-b)$  有三个零点  $a, b, c$ . 故存在  $\xi \in (a, b)$ , s.t.  $f''(\xi) - 2K = 0$ .

**证法二:** 构造

$$F(x) = f(x) - \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} (x-a)(x-b)$$

也有三个零点  $a, b, c$ .

**注: Lagrange插值公式** 经过  $(x_i, f(x_i))_{i=1}^n$  的  $n-1$  次多项式有如下形式

$$p_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} f(x_i).$$

用K值法证明:

$$f(x) - p_{n-1}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \prod_{i=1}^n (x-x_i), \quad \xi \in (a, b).$$

**例5.2.5** 证明Legendre (勒让德) 多项式  $\frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$  在  $(-1, 1)$  上有  $n$  个不同实根, 其中  $n \geq 1$ .

**证明:** 多项式  $(x^2-1)^n$  的直到  $n-1$  次导数总有  $\pm 1$  作为其零点, 用Rolle定理, 在每次求导时会多出现一个零点.

### 3.5.3 单调函数

**命题5.3.2** 设  $f \in C[a, b]$ , 在  $(a, b)$  上可微, 则  $f$  单调当且仅当  $f'$  不变号.

**证明:**  $\Rightarrow$ : 用极限的保号性;  $\Leftarrow$ : 用Lagrange中值定理.

**命题5.3.3 (反函数定理)** 设 $f$ 为区间 $I$ 上的可微函数, 若 $f' \neq 0, \forall x \in I$ . 则 $f$ 可逆且反函数可微.

**证明:** 用反证法+Lagrange定理,  $f$ 是单射, 从而可逆, 由 $f$ 连续得到 $f$ 单调. 并且

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}.$$

**命题5.3.4** 设 $\delta > 0, f \in C(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , 在 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 上可微, 若

$$f'(x) \leq 0, x \in (x_0 - \delta, x_0); \quad f'(x) \geq 0, x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

则 $x_0$ 为 $f$ 的极小值点. 反之为极大值点.

**命题5.3.5** 设 $f$ 在内点 $x_0$ 处二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0$ , 则若 $f''(x_0) > 0$ , 则 $x_0$ 为 $f$ 的(严格)极小值点.

**证明:** 有高阶导数的定义要求 $f'(x)$ 在 $x_0$ 附近可计算, 再由极限保号性,  $\exists \delta$ 使得

$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ 时, } f'(x) < 0,$$

$$x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ 时, } f'(x) > 0.$$

**例5.3.4** 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导, 若 $f$ 有界, 证明:  $\exists \xi \in \mathbb{R}, \text{ s.t. } f''(\xi) = 0$ .

**证明: (反证法)** 对于任意的 $x \in \mathbb{R}, f''(x) \neq 0$ . 由Darboux定理, 有 $f''$ 不变号, 所以 $f'$ 单调, 不妨设 $f'$ 单调上升, 取 $x_0 \in \mathbb{R}, f'(x_0) \neq 0$ .

当 $f'(x_0) > 0$ 时,  $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt \geq f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow +\infty, x \rightarrow +\infty$ . 与 $f$ 有界矛盾.

当 $f'(x_0) < 0$ 时,  $f(x_0) - f(x) = \int_x^{x_0} f'(t) dt \leq f'(x_0)(x_0 - x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow -\infty$ . 与 $f$ 有界矛盾.

### 3.5.4 凸函数

**定义5.4.1 (凸函数)** 设 $f$ 在 $I$ 上有定义, 若 $\forall a, b \in I, a < b$ , 有

$$f(x) \leq l(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad \forall x \in [a, b].$$

则称 $f$ 为 $I$ 中的凸函数; 相应的给出凹函数的定义. 若上式取严格不等号, 则对应严格凸函数.

定义中的不等式可以等价地写成

$$f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b), \quad \forall t \in (0, 1).$$

**例5.4.1** 用凸函数证明Young不等式.

**证明:**  $e^x$ 是凸函数,  $p > 1$ , 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 则

$$ab = e^{\ln ab} = e^{\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q} \leq \frac{1}{p} e^{\ln a^p} + \frac{1}{q} e^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**定理5.4.1 (Jensen不等式)** 设 $f$ 是定义在 $I$ 上的函数, 则 $f$ 凸当且仅当 $\forall x_i \in I, \lambda_i \geq 0, (i = 1, 2, \dots, n)$ , 且 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

对比习题3.3的13题.

13: 若 $f$ 没有第二类间断点, 且 $\forall x, y \in (a, b)$ 均有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

则 $f \in C(a, b)$ , 由此可证 $f$ 在 $(a, b)$ 上是凸的.

这要依赖 $f$ 的连续性和实数的完备性, 比如考虑证明 $f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$ . 但下面的证明更精巧.

**命题5.4.3** 设 $f \in C(I)$ , 则 $f$ 凸当且仅当 $\forall x_1 < x_2 \in I$ , 有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ .

**证明:** 取 $a, b \in I$ , 证明 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 上位于 $l(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 之下即可.

$$g(x) := f(x) - l(x) \quad x \in [a, b] \implies g(x) \in C[a, b].$$

取 $M = \max_{x \in [a, b]} g(x) = g(x_0)$ , 则当 $x_0$ 靠近 $a$ 时,  $x_0 \leq \frac{a+b}{2}$ ,  $2x_0 - a \in [a, b]$ . 所以

$$M = g(x_0) = g\left(\frac{a+(2x_0-a)}{2}\right) \leq \frac{g(a)+g(2x_0-a)}{2} \leq M,$$

等号成立, 故 $M = g(a) = 0$ .

**推论5.4.4** 设 $f$ 在 $I$ 上凸, 若 $f$ 在 $I$ 内达到最大值, 则 $f$ 为常数.

**证明:** 设 $f$ 在 $x_0$ 达到最大值, 则 $\forall a, b \in I, \exists t \in (0, 1)$ , s.t.

$$x_0 = ta + (1-t)b \implies f(x_0) = \max f \leq tf(a) + (1-t)f(b) \leq \max f.$$

等号成立.  $f(x_0) = f(a) = f(b)$ .

**命题 5.4.2 (连续性)** 设 $f$ 在 $I$ 中凸, 若 $[a, b] \subseteq I, a, b \in I^\circ$ , 则 $f \in \text{Lip}[a, b]$ , 从而连续.

**证明:** 取 $[a, b] \subseteq [a', b'] \subseteq I, a', b' \in I^\circ$ . 注意使用

$$\left(\frac{f(a)-f(a')}{a-a'} \leq\right) \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(b)-f(y)}{b-y} \leq \frac{f(b')-f(b)}{b'-b}.$$

**命题5.4.5 (导数性质)** 设 $f$ 在 $I$ 中凸,  $x$ 为 $I$ 的内点, 则 $f$ 在 $x$ 处左右导数存在, 且

$$f'_-(x) \leq f'_+(x).$$

**证明:** 使用单调有界函数的极限存在. 设 $x_0 < x_1 < x_2$ , 证明:  $k_{01} \leq k_{02} \leq k_{12}$ .

**命题3.3.4** 设 $f(x)$ 是定义在区间 $I$ 上的单调函数, 则 $f$ 的间断点至多可数.

由上面的命题, 凸函数的不可微点至多可数.

**命题5.4.6** 设 $f$ 在 $I$ 上可微, 则

(1)  $f$ 凸当且仅当 $f'$ 单调上升.

(2)  $f$ 凸当且仅当,  $\forall x_0, x \in I$ , 有 $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ .

**证明:** (1)  $\Rightarrow$ : 同前;  $\Leftarrow$ : 用中值定理.

$$a < x < b \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \Rightarrow f \text{ 凸}.$$

(2)  $\Rightarrow$ :

$$x > x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

$$x < x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x};$$

$\Leftarrow$ :

$$a < x < b \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq f'(x) \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \Rightarrow f(x) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

且 $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$ .

**命题5.4.7** 设 $f \in C(I)$ , 若 $f'_-$ 存在且单调上升, 则 $f$ 是凸函数.

**证明:** 设 $x_0 \in I$ , 记 $L(x) = f'_-(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ,  $g(x) = f(x) - L(x)$ .

则 $g'_-(x) = f'_-(x) - f'_-(x_0)$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq x_0 \Rightarrow g'_-(x) \leq 0 \Rightarrow g(x) \geq g(x_0), & x \rightarrow x_0^- \Rightarrow g(x) \searrow, & x \rightarrow x_0^- \\ x \geq x_0 \Rightarrow g'_-(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) \nearrow, & x \rightarrow x_0^+ \end{cases}$$

所以 $\min g = g(x_0) = 0$ . 所以 $f(x) \geq L(x) = f'_-(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ,  $x \in I$ .

设 $x_i \in I$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , 记 $x_0 \in \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ , 所以

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \geq f'_-(x_0) \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - x_0) + f(x_0) \sum_{i=1}^n \lambda_i = f(x_0).$$

**命题5.4.8** 若 $f$ 在 $I$ 中二阶可导, 则 $f$ 凸当且仅当 $f'' \geq 0$ .

### 3.5.5 函数作图

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ , 则称 $x = x_0$ 为 $f$ 的垂直渐近线.

若

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0,$$

则称 $y = ax + b$ 为 $f$ 在无穷远处的渐近线.

### 3.5.6 L'Hôpital法则

**定理5.6.1 (L'Hôpital法则)** 设 $f, g$ 在 $(a, b)$ 中可导, 且 $g'(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in (a, b)$ , 又设

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x),$$

若极限

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ 存在(或为}\infty\text{)}.$$



则

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**定理5.6.2 (L'Hôpital法则)** 设  $f, g$  在  $(a, b)$  中可导, 且  $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ , 又设

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty,$$

若极限

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

存在, (或为  $\infty$ ), 则

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

**证明:** 只证明  $l < \infty$  的情况,  $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ , s.t.

$$l - \frac{\epsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall x \in (a, a + \eta).$$

取  $c = a + \eta$ , 由Cauchy中值定理,  $\exists \xi \in (x, c)$ , s.t.

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(c)}{g(x)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{g(c)}{g(x)}, \quad \xi \in (x, c) \subseteq (a, a + \eta).$$

由  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$ , 故存在  $\delta < \eta$ , s.t.

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \epsilon, \quad \forall x \in (a, a + \delta).$$

注: 当  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  不存在时,  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$  仍然可能存在. 比如求

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x \cos \frac{1}{t} dt.$$

用L'Hôpital法则有如下过程:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos \frac{1}{t} dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x}$$

不存在, 但是做变量替换  $s = \frac{1}{t}, y = \frac{1}{x}$  之后,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos \frac{1}{t} dt}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} y \int_y^\infty \frac{\cos s}{s^2} ds = y \cdot \left( \frac{1}{2} \int_y^{y+\pi} \frac{\cos s}{s^2} ds + \frac{1}{2} \int_{y+\pi}^\infty \frac{\cos s}{s^2} ds + \frac{1}{2} \int_y^\infty \frac{\cos s}{s^2} ds \right).$$

显然,  $\int_y^{y+\pi} \frac{\cos s}{s^2} ds = O\left(\frac{1}{y^2}\right)$ . 而

$$\int_{y+\pi}^\infty \frac{\cos s}{s^2} ds + \int_y^\infty \frac{\cos s}{s^2} ds = \int_y^\infty \cos s \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{(s+\pi)^2} \right) ds = \int_y^\infty \cos s \left( \frac{2s\pi + \pi^2}{s^2(s+\pi)^2} \right) ds = O\left(\frac{1}{y^2}\right).$$

所以应当有

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} y \int_y^\infty \frac{\cos s}{s^2} ds = 0.$$

或者对上式用分部积分

$$\int_y^\infty \frac{\cos s}{s^2} ds = \frac{\sin s}{s^2} \Big|_y^\infty + \int_y^\infty \frac{2 \sin s}{s^3} ds = -\frac{\sin y}{y^2} + O\left(\int_y^\infty \frac{2}{s^3} ds\right) = O\left(\frac{1}{y^2}\right).$$

再或者用Riemann-Lebesgue引理

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} y \int_y^\infty \frac{\cos s}{s^2} ds = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^\infty \frac{\cos yt}{t^2} dt = 0.$$

再或者在计算导数前按以下过程分部积分将积分改写为

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^x \cos(t^{-1}) dt &= -\int_{\varepsilon}^x t^2 d\sin(t^{-1}) \\ &= -x^2 \sin(x^{-1}) + \varepsilon^2 \sin(\varepsilon^{-1}) + 2 \int_{\varepsilon}^x t \sin(t^{-1}) dt \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -x^2 \sin(x^{-1}) + 2 \int_0^x t \sin(t^{-1}) dt.\end{aligned}$$

**例5.6.4** 设  $f$  在  $(a, +\infty)$  上可微.

(1). 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot f'(x) = 1$ , 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

(2). 若存在  $\alpha > 0$ , s.t.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha \cdot f(x) + x \cdot f'(x)) = \beta,$$

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\beta}{\alpha}.$$

**证明:** (1). 当  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\ln x \rightarrow +\infty$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = 1 \implies f(x) \rightarrow +\infty, (x \rightarrow +\infty).$$

(2). 当  $\alpha > 0$  时,  $x^\alpha \rightarrow +\infty$ ,  $(x \rightarrow +\infty)$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha f(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1} f(x) + x^\alpha f'(x)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

### 3.5.7 Taylor展开

(1). 若  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 则

$$f(x) - f(x_0) = o(1).$$

(2). 若  $f(x)$  在  $x_0$  处可微, 则

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = o(x - x_0), \quad (x \rightarrow x_0).$$

注意, 这里  $f$  在  $x_0$  处可微, 但没说在  $x_0$  附近可微, 不能用 L'Hôpital 法则.

(3). 若  $f(x)$  在  $x_0$  处二阶可微, 则

$$f(x) - \left[ f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 \right] = o((x - x_0)^2), \quad (x \rightarrow x_0).$$

**定理5.7.1 (带Peano余项的Taylor公式)** 设  $f$  在  $x_0$  处  $n$  阶可导, 则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad (x \rightarrow x_0).$$

**证明:** (归纳法+中值定理) 记

$$R_n(x) = f(x) - \left[ f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right],$$

则

$$\frac{R_{k+1}(x)}{(x - x_0)^{k+1}} \rightarrow \frac{R'_{k+1}(x)}{(k+1)(x - x_0)^k} = \frac{o((x - x_0)^k)}{(k+1)(x - x_0)^k} = o(1).$$

**定理5.7.2 (Taylor)** 设 $f$ 在 $(a, b)$ 上 $n+1$ 阶可导,  $x_0, x \in (a, b)$ . 则存在 $\xi, \zeta \in (x, x_0)$ 或 $(x_0, x)$ , s.t. Taylor展开的余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1},$$

称为Lagrange余项, 以及

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\zeta) (x-\zeta)^n (x-x_0),$$

称为Cauchy余项.

**证明:** 取

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k, \quad t \in (a, b).$$

对 $t$ 求导, 得到

$$F'(t) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t) (x-t)^n.$$

所以

$$F(x) - F(x_0) = R_n(x).$$

Cauchy余项: 用Lagrange中值定理,  $\exists \zeta = x_0 + \theta(x-x_0)$ ,  $(0 < \theta < 1)$ , s.t.

$$R_n(x) = F'(\zeta)(x-x_0).$$

Lagrange余项: 用Cauchy微分中值定理,  $\exists \xi = x_0 + \eta(x-x_0)$ ,  $(0 < \eta < 1)$ , s.t.

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}.$$

上面的证明给出Taylor展开的积分余项公式

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt.$$

**应用 证明:**

$$\int_0^1 (1-t^2)^n dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

**证明:** 设 $f(x) = (1+x)^{2n+1}$ ,  $f(x)$ 在 $x=0$ 处Taylor展开:

$$(1+x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x \frac{(2n+1)!}{n!} (1+t)^n (x-t)^n dt,$$

令 $x=1$ , 所以

$$\int_0^1 (1-t^2)^n dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

这个积分可以换元法求解:

$$\int_0^1 (1-t^2)^n dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{2n+2}{2}\right).$$

**定理5.7.4 (Taylor系数的唯一性)** 设 $f$ 在 $x_0$ 处 $n$ 阶可导, 且

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \quad (x \rightarrow x_0),$$

则

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

**证明:** 给出Taylor展开的Peano余项表示, 两者作差比阶.

**命题5.7.5** 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的Taylor展开为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 则

- (1).  $f(-x)$ 的Taylor展开为 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n$ ;
- (2).  $f(x^k)$ 的Taylor展开为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn}$ , 其中 $k \in \mathbb{N}_+$ ;
- (3).  $x^k f(x)$ 的Taylor展开为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n}$ , 其中 $k \in \mathbb{N}_+$ ;
- (4).  $f'(x)$ 的Taylor展开为 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ ;
- (5).  $\int_0^x f(t) dt$ 的Taylor展开为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ;
- (6). 如果 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的Taylor展开为 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ , 则 $\lambda f(x) + \mu g(x)$ 的Taylor展开为 $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) x^n$ , 其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

$$\ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}\right) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

$$\arctan x = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt = \frac{i}{2} \ln \frac{1-ix}{1+ix}.$$

**例5.7.5** Taylor展开收敛, 但不收敛到函数本身的例子.

定义

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0. \end{cases}$$

在 $x=0$ 处展开的Taylor级数恒为0.

### 3.5.8 Taylor公式和微分学的应用

**Thm. 5.8.1** (函数极值的判断) 设 $f$ 在 $x_0$ 处 $n$ 阶可导, 且

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

则

- (1).  $n$ 为偶数, 若 $f^{(n)}(x_0) < 0$ , 则 $x_0$ 为极大值点; 若 $f^{(n)}(x_0) > 0$ , 则 $x_0$ 为极小值点.
- (2).  $n$ 为奇数时,  $x_0$ 不是极值点.

**Thm. 5.8.2 (Jensen不等式的余项)** 设 $f \in C[a, b]$ , 在 $(a, b)$ 上二阶可导. 当 $x_i \in [a, b]$ ,  $(1 \leq i \leq n)$ 时,  $\exists \xi \in (a, b)$ , s.t.

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) - \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) = -\frac{1}{2} f''(\xi) \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j (x_i - x_j)^2,$$

其中 $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ .

**证明:** 记

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in [a, b].$$

则

$$f(x_i) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x_i - \bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\xi_i)(x_i - \bar{x})^2, \quad \xi_i \in (a, b).$$

所以

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) = f(\bar{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) \lambda_i (x_i - \bar{x})^2.$$

而

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j (x_i - x_j)^2.$$

所以

$$\frac{m}{4} \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j (x_i - x_j)^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) - f(\bar{x}) \leq \frac{M}{4} \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j (x_i - x_j)^2.$$

用Darboux定理.

用于求极限

**例5.8.1** 求

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right].$$

解:

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o \left( \frac{1}{x^2} \right) \quad (x \rightarrow \infty),$$

所以

$$x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} + o(1) \rightarrow \frac{1}{2} (x \rightarrow \infty).$$

**例5.8.2** 设 $f$ 在0附近二阶可导, 且 $|f''| \leq M$ ,  $f(0) = 0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f \left( \frac{k}{n^2} \right) = \frac{1}{2} f'(0).$$

解:

$$f \left( \frac{k}{n^2} \right) = f(0) + f'(0) \frac{k}{n^2} + R_{k,n},$$

其中

$$|R_{k,n}| = \frac{1}{2} |f''(\xi_{k,n})| \left( \frac{k}{n^2} \right)^2 \leq \frac{1}{2} M \frac{k^2}{n^4},$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f \left( \frac{k}{n^2} \right) &= f'(0) \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n R_{k,n} \\ &= f'(0) \frac{n+1}{2n} + o(1) \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

**Stirling公式**

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad 0 < \theta_n < 1.$$

### 3.5.9 作业

8. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = B$ . 证明, 如果 $A \neq B$ , 则任给 $\theta \in (0, 1)$ , 都有 $\xi \in \mathbb{R}$ , 使得

$$f'(\xi) = \theta A + (1 - \theta) B.$$

9. 设 $f(x)$ 在区间 $I$ 中 $n$ 阶可微,  $x_1, x_2, \dots, x_k$ 为 $I$ 中的点. 证明存在 $\xi \in I$ , s.t.

$$\frac{1}{k} (f^{(n)}(x_1) + f^{(n)}(x_2) + \dots + f^{(n)}(x_k)) = f^{(n)}(\xi).$$

10. 设 $f(x)$ 在区间 $I$ 中可微,  $x_0 \in I$ . 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在, 则 $f'(x)$ 在 $x_0$ 处连续.

11. 设 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 中可微, 如果 $f'(x)$ 为单调函数, 则 $f'(x)$ 在 $(a, b)$ 中连续.

3. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导, 且  $f(a) = f(b) = 0$ ,  $f'_+(a)f'_-(b) > 0$ . 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , s.t.  $f''(\xi) = 0$ .
6. 设  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的三阶可导函数, 且  $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$ , 证明, 对于任意的  $c \in [a, b]$ , 存在  $\xi \in (a, b)$ , s.t.

$$f(c) = \frac{f'''(\xi)}{6}(c-a)^2(c-b).$$

8. 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上可导, 且存在  $M > 0$ , 使得

$$|f'(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, b].$$

证明:

$$\left| f(x) - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \leq \frac{M}{2}(b-a), \quad \forall x \in [a, b].$$

10. 设  $f$  在  $(a, b)$  上可微, 且  $a < x_i \leq y_i < b$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , s.t.

$$\sum_{i=1}^n [f(y_i) - f(x_i)] = f'(\xi) \sum_{i=1}^n (y_i - x_i).$$

11. 设  $f$  在  $[a, +\infty)$  上可微, 且

$$f(a) = 0, \quad |f'(x)| \leq |f(x)|, \quad \forall x \in [a, +\infty).$$

证明:  $f \equiv 0$ .

提示考虑  $A = \{x \in [a, +\infty) : f(x) = 0\}$  和  $\sup A$ .

11. 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上二阶可导, 若

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{|x|} = 0,$$

则存在  $\xi \in \mathbb{R}$ , 使得  $f''(\xi) = 0$ .

用 Darboux 定理

12. 设  $f(0) = 0$ ,  $f'(x)$  严格单调递增, 则  $\frac{f(x)}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上也严格单调递增.
11. 证明, 定义在  $\mathbb{R}$  上的有界凸函数是常数函数.
12. 设  $f(x) \in C(I)$ , 若  $\forall x_0 \in I$ ,  $\exists \delta > 0$ , s.t.  $f(x)$  在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  上凸, 则  $f(x)$  在  $I$  中凸.
13. 设  $f$  为区间  $I$  上的凸函数,  $x_0$  为  $I$  的内点. 若  $f'_-(x_0) \leq k \leq f'_+(x_0)$ , 则

$$f(x) \geq k(x - x_0) + f(x_0), \quad \forall x \in I.$$

并证明 Jensen 不等式.

15. 设  $f \in C[a, b]$  凸, 证明 Hadamard 不等式

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

16. (Schwarz symmetric derivative, Riemann derivative) 设  $f \in C(\mathbb{R})$ , 若  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 均有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = 0,$$

证明  $f(x)$  为线性函数.

连续性是必要的, 否则考虑符号函数. 这个极限不能被改善成

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} = 0,$$

这只需要改变符号函数在 0 点处的值为 1, 使其在 0 点处右连续.

提示: 证明  $\forall \epsilon > 0$ ,  $f(x) + \epsilon x^2$  是凸的,  $f(x) - \epsilon x^2$  是凹的,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上位于直线  $[f(a) + \epsilon a^2, f(b) + \epsilon b^2]$  与直线  $[f(a) - \epsilon a^2, f(b) - \epsilon b^2]$  之间.

6. 是否存在 $\mathbb{R}$ 上的凸函数, 使得 $f(0) < 0$ , 且

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f(x) - |x|) = 0?$$

5. 设 $f$ 在点 $x_0$ 处2阶可导, 且 $f''(x_0) \neq 0$ . 由微分中值定理, 当 $h$ 充分小时, 存在 $\theta = \theta(h)$ , ( $0 < \theta < 1$ ), s.t.

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta h)h,$$

证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}.$$

7. 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 中可微, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + f'(x)] = l,$$

证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

9. 设 $f''(x_0)$ 存在,  $f'(x_0) \neq 0$ , 求极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{1}{f(x) - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)(x - x_0)} \right].$$

10. 设 $a_1 \in (0, \pi)$ ,  $a_{n+1} = \sin a_n$ , ( $n \geq 1$ ). 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} a_n = \sqrt{3}.$$

2. 设 $f(x)$ 是 $x$ 的 $n$ 次多项式, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的Taylor展开的Peano余项 $R_n(x)$ 恒为零. (提示: 考虑其它余项公式.)

10. 设 $f(x), g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 中无限次可微, 且

$$|f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)| \leq n!|x|, \quad \forall x \in (-1, 1), n = 0, 1, 2, \dots.$$

证明  $f(x) = g(x)$ .

12. 设 $f$ 在 $x_0$ 附近可以表示为

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad (x \rightarrow x_0),$$

则 $f(x)$ 是否在 $x_0$ 处 $n$ 阶可导?

13. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$ . 证明, 存在 $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

4. 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 的一个开邻域内 $n+1$ 次连续可微, 且 $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ , 其Taylor公式为

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h) h^n,$$

其中 $0 < \theta < 1$ . 证明  $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}$ .

8. 设 $a_1 \in \mathbb{R}$ ,  $a_{n+1} = \arctan a_n$  ( $n \geq 1$ ). 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n^2$ .

10. 设 $f$ 在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导, 且

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty, \quad M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)| < \infty.$$

证明  $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| < \infty$ , 且  $M_1^2 \leq 2M_0 \cdot M_2$ . (提示: 考虑 $f(x \pm h)$ 的Taylor展开.)

## 3.6 Riemann积分

### 3.6.1 Riemann可积

设定义在 $[a, b]$ 区间上的函数 $f(x)$ , 将 $[a, b]$ 分割为

$$\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

近似第 $i$ 个小梯形的面积为 $f(\xi_i)\Delta x_i$ , 其中 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . 用 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 表示曲边梯形ABCD的面积近似值, 称为 $f$ 在 $[a, b]$ 上的Riemann和. 若

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在, 其中 $\|\pi\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$ 为分割的模. 则记为 $\int_a^b f(x) dx$ .

**定义6.1.1 (Riemann积分)** 设 $f$ 定义在 $[a, b]$ 上, 若存在 $I \in \mathbb{R}$ , s.t.  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 对任何分割 $\pi$ , 只要 $\|\pi\| < \delta$ , 就有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \epsilon, \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \cdots, n,$$

则称 $f$ 在 $[a, b]$ 上Riemann可积或可积,  $I$ 为 $f$ 在 $[a, b]$ 上的(定)积分, 记为

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

其中 $f$ 称为被积函数,  $[a, b]$ 称为积分区间,  $a, b$ 分别称为积分下限与积分上限.

**定理6.1.1 (可积的必要条件)** 若 $f$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $f$ 在 $[a, b]$ 上有界, 反之不然.

有界函数未必可积: Dirichlet函数 $D(x)$ , 对于任意的分割 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \setminus \mathbb{Q}$ , 积分和为0; 当 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \cap \mathbb{Q}$ 时, 积分和为1. 所以 $D(x)$ 的积分和没有极限.

对于分割

$$\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

记

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

令

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i, \quad s = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i,$$

称 $S$ 是 $f$ 关于 $\pi$ 的Darboux上和, 简称上和, 记为 $S(\pi)$ 或 $S(\pi, f)$ .  $s$ 称为Darboux下和, 简称下和, 记为 $s(\pi)$ 或 $s(\pi, f)$ .

称

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

为 $f$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅. 则

$$S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i.$$

**引理6.1.2** 设分割 $\pi'$ 是从 $\pi$ 添加 $k$ 个分点得到的, 则

$$S(\pi) \geq S(\pi') \geq S(\pi) - (M - m)k\|\pi\|,$$

$$s(\pi) \leq s(\pi') \leq s(\pi) + (M - m)k\|\pi\|.$$

即, 对于给定的分割, 增加分点时下和不减, 上和不增.



**证明:** 只需要对  $k=1$  进行即可.

**推论6.1.3** 对于任何两个分割  $\pi_1$  和  $\pi_2$ , 有

$$s(\pi_1) \leq S(\pi_2).$$

**定理6.1.4 (Darboux)**

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} S(\pi) = \inf_{\pi} S(\pi), \quad \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} s(\pi) = \sup_{\pi} s(\pi).$$

称  $\inf_{\pi} S(\pi)$  为  $f$  在  $[a, b]$  上的上积分,  $\sup_{\pi} s(\pi)$  为  $f$  在  $[a, b]$  上的下积分.

**定理6.1.5 (可积的充要条件)** 设  $f$  在  $[a, b]$  上有界, 则以下命题等价:

- (1)  $f$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积.
- (2)  $f$  在  $[a, b]$  上的上积分和下积分相等.
- (3)

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i = 0.$$

- (4)  $\forall \epsilon > 0$ , 存在  $[a, b]$  的分割  $\pi$ , s.t.

$$S(\pi) - s(\pi) = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i < \epsilon.$$

**推论6.1.6** (1) 设  $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ , 如果  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $f$  在  $[\alpha, \beta]$  上也可积.

- (2) 设  $c \in (a, b)$ , 若  $f$  在  $[a, c]$  及  $[c, b]$  上都可积, 则  $f$  在  $[a, b]$  上可积.

**例6.1.1** 设  $f, g$  在  $[a, b]$  上均可积, 则  $fg$  在  $[a, b]$  上也可积.

注意,

$$\begin{aligned} \omega_i(fg) &= \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| \\ &= \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x')g(x') - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') - f(x'')g(x'')| \\ &\leq \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} [|f(x')||g(x') - g(x'')| + |g(x'')||f(x') - f(x'')|] \\ &\leq K(\omega_i(g) + \omega_i(f)), \end{aligned}$$

并用前面的定理6.1.5 (3).

**定理6.1.7 (可积函数类)** (1) 若  $f \in C[a, b]$ , 则  $f$  在  $[a, b]$  上可积;

- (2) 若有界函数  $f$  只在  $[a, b]$  上有限个点处不连续, 则  $f$  可积;
- (3) 若  $f$  在  $[a, b]$  上单调, 则  $f$  可积.

**证明:** (2) 主要依赖以下不等式

$$\begin{aligned} S(\pi) - s(\pi) &\leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) + 2M \sum_{i=1}^N 2\rho \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + 2M \cdot 2N\rho < \epsilon. \end{aligned}$$

(3) 主要依赖以下不等式

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \Delta x_i \\ &\leq \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \|\pi\| \\ &= (f(x_n) - f(x_0)) \|\pi\| \\ &= (f(b) - f(a)) \|\pi\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

设  $f$  为  $[a, b]$  上定义的函数, 若存在  $[a, b]$  上的分割

$$\pi: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

使得  $f$  在每个小区间  $(x_{i-1}, x_i)$  上均为常数, 则称  $f$  为阶梯函数.

**推论6.1.8** 阶梯函数均为可积函数.

**定理6.1.9 (Riemann)** 设  $f$  在  $[a, b]$  上有界, 则  $f$  可积的充要条件是  $\forall \varepsilon, \eta > 0$ , 存在  $[a, b]$  的分割  $\pi$ , s.t.

$$\sum_{\omega_i \geq \eta} \Delta x_i < \varepsilon.$$

**例6.1.3** 设  $f \in C[a, b]$ ,  $\phi$  在  $[\alpha, \beta]$  上可积,  $\phi([\alpha, \beta]) \subseteq [a, b]$ . 则  $f \circ \phi$  在  $[\alpha, \beta]$  上仍可积.

**证明:**  $f$  在  $[a, b]$  上一致连续.  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $x, y \in [a, b], |x - y| < \delta$  时,  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)}$ . 因为  $\phi$  在  $[\alpha, \beta]$  上可积, 则存在  $[\alpha, \beta]$  的分割  $\pi: \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta$ , 使得

$$\sum_{\omega_i(\phi) \geq \delta} \Delta t_i < \frac{\varepsilon}{4K + 1},$$

其中  $K = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ . 于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \omega_i(f \circ \phi) \cdot \Delta t_i &= \sum_{\omega_i(\phi) \geq \delta} \omega_i(f \circ \phi) \cdot \Delta t_i + \sum_{\omega_i(\phi) < \delta} \omega_i(f \circ \phi) \cdot \Delta t_i \\ &\leq 2K \cdot \sum_{\omega_i(\phi) \geq \delta} \Delta t_i + \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \cdot \sum_{\omega_i(\phi) < \delta} \Delta t_i \\ &\leq 2K \cdot \frac{\varepsilon}{4K + 1} + \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \cdot (\beta - \alpha) < \varepsilon.\end{aligned}$$

两个可积函数的复合不可积的例子:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad g(x) = R(x) \implies f \circ g(x) = D(x).$$

可积函数复合连续函数不可积的例子:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

设  $A$  为  $[0, 1]$  上有正测度的类Cantor集,  $(a_i, b_i), (i \in \mathbb{N}_+)$  为  $A$  的邻接区间.

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 1 - \frac{1}{2}(b_i - c_i) + |x - \frac{1}{2}(a_i + b_i)|, & x \in (a_i, b_i), i \in \mathbb{N}_+. \end{cases}$$

则

$$f \circ g(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus A. \end{cases}$$

**定理6.1.10 (Lebsegue)** 有界函数  $f$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积的充要条件是它的不连续点集  $D_f$  为零测集. 其中  $D_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}}$ , 而

$$D_{\delta} = \{x \in [a, b] : \omega(f, x) \geq \delta\}, \quad \omega(f, x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sup \{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in (x-r, x+r) \cap [a, b]\}.$$

### 3.6.2 定积分的性质

线性性质, 积分区间可加性, 保号性, 绝对值不等式.

**定理6.2.3 (积分第一中值定理)** 设  $f, g$  在  $[a, b]$  上可积, 且  $g(x)$  不变号, 则存在  $\mu$ ,  $\inf_{x \in [a, b]} f(x) \leq \mu \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \cdot \int_a^b g(x)dx.$$

**引理 6.2.4.** 如果  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 令

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b],$$

则  $F$  是  $[a, b]$  上的连续函数.

注: 尽管这个变限积分常被用来和 Newton-Leibnitz 公式混用来求定积分, 但是这并不表示  $F$  是  $f$  的原函数. 根据导函数的介值定理, 如果  $F$  是  $f$  的原函数, 则  $f$  不能有间断点, 这对于可积函数  $f$  是条件不足的.

**定理 6.2.5 (积分第二中值定理).** 设  $f$  在  $[a, b]$  上可积.

(1) 如果  $g$  在  $[a, b]$  上单调递减, 且  $g(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ , 则存在  $\xi \in [a, b]$  使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \cdot \int_a^{\xi} f(x)dx.$$

(2) 如果  $g$  在  $[a, b]$  上单调递增, 且  $g(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ , 则存在  $\eta \in [a, b]$  使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \cdot \int_{\eta}^b f(x)dx.$$

(3) 一般地, 如果  $g$  为  $[a, b]$  上的单调函数, 则存在  $\zeta \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \cdot \int_a^{\zeta} f(x)dx + g(b) \cdot \int_{\zeta}^b f(x)dx.$$

**例 6.2.2.**

设  $\beta \geq 0, b > a > 0$ , 证明

$$\left| \int_a^b e^{-\beta x} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{a}.$$

**证明.** 对  $g(x) = \frac{e^{-\beta x}}{x}, f(x) = \sin x$  用积分第二中值公式, 存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b e^{-\beta x} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{e^{-\beta a}}{a} \cdot \int_a^{\xi} \sin x dx = \frac{e^{-\beta a}}{a} (\cos a - \cos \xi)$$

这说明

$$\left| \int_a^b e^{-\beta x} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq 2 \frac{e^{-\beta a}}{a} \leq \frac{2}{a}.$$

**例 6.2.3.** 证明  $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx$  存在.

**证明.** 在上例中取  $\beta = 0$ , 则当  $B > A > 0$  时, 有

$$\left| \int_0^B \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx \right| = \left| \int_A^B \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{A} \rightarrow 0 \quad (A \rightarrow \infty),$$

**例 3.5.15** 设  $f \in C[a, b]$ ,  $g$  是周期为  $T$  的连续函数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) g(nx) dx = \frac{1}{T} \int_a^b f(x) dx \int_0^T g(x) dx.$$

**例 6.2.6 (Riemann-Lebesgue)** 设  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的可积函数, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = 0.$$

**证明.** 以第一个极限为例. 因为  $f$  可积, 故任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $[a, b]$  的分割

$$\pi: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

又因为  $f$  有界, 故存在  $K$ , 使得  $|f(x)| \leq K, \forall x \in [a, b]$ . 于是当  $\lambda > \frac{4nK}{\varepsilon}$  时, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \sin \lambda x dx \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_{i-1})] \sin \lambda x dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1}) \sin \lambda x dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_{i-1})| dx + \sum_{i=1}^n |f(x_{i-1})| \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin \lambda x dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n K \frac{1}{\lambda} |\cos \lambda x_{i-1} - \cos \lambda x_i| \\ &< \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{2nK}{\lambda} < \varepsilon. \end{aligned}$$

### 3.6.3 微积分基本公式

**定理 6.3.1 (微积分基本定理).** 设  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 且在  $x_0 \in [a, b]$  处连续, 则  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  在  $x_0$  处可导, 且

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

这个定理说明变限积分是函数  $f$  的原函数的条件是  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 而不能有第一类间断点. 但第二类间断点是可以有的.

**定理 6.3.3 (Newton-Leibniz 公式).** 设  $F$  在  $[a, b]$  上可微, 且  $F' = f$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

(此式又写为  $\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$ )

注: 可微函数的导函数不一定是可积的, 如函数

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在  $[0, 1]$  上可微. 进一步还可以构造导函数有界但不可积的例子.

**例 6.3.2.** 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续可微,  $f(a) = 0$ , 则

$$\int_a^b f^2(x) dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

**证明:**

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f(x) - f(a))^2 = \left[ \int_a^x f'(t) dt \right]^2 \\ &\leq \int_a^x [f'(t)]^2 dt \int_a^x 1^2 dt \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &\leq (x-a) \int_a^b [f'(t)]^2 dt. \end{aligned}$$

### 3.6.4 定积分的近似计算

**不等式1** 设  $f$  可微, 且  $|f'(x)| \leq M$ , 则

$$\left| \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \right| \leq \frac{M}{4}(b-a)^2.$$

**证明:**

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \right| &= \left| \int_a^b \left( f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) dx \right| = \left| \int_a^b f'(\xi) \left( x - \frac{a+b}{2} \right) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f'(\xi)| \left| x - \frac{a+b}{2} \right| dx \leq M \int_a^b \left| x - \frac{a+b}{2} \right| dx \\ &= \frac{M}{4}(b-a)^2. \end{aligned}$$

**不等式2** 设  $f$  二阶可微, 且  $|f''(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$ . 则

$$\left| \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \right| \leq \frac{1}{24} M(b-a)^3.$$

**证明:** 用Taylor展开

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2,$$

两边积分, 得

$$\int_a^b f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx,$$

所以

$$\left| \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \right| \leq \frac{1}{2} M \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{24} M(b-a)^3.$$

注: 使用带积分余项的Taylor公式

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \int_{\frac{a+b}{2}}^x \frac{f''(t)}{1!} \left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt.$$

两边同时积分得到

$$\int_a^b f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \int_a^b \int_{\frac{a+b}{2}}^x f''(t) \left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt dx,$$

后者可以通过交换积分次序化简为

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{\frac{a+b}{2}}^x f''(t) \left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt dx &= \int_a^b f''(t) \left(t - \frac{a+b}{2}\right) \min\{t-a, b-t\} dt \\ &= -\int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a) \cdot f''(t) \left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-t) \cdot f''(t) \left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt \\ &= -\int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a) \left(t - \frac{a+b}{2}\right) (f''(t) + f''(a+b-t)) dt. \end{aligned}$$

所以有下面的恒等式

$$\int_a^b f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) - \int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a) \left(t - \frac{a+b}{2}\right) (f''(t) + f''(a+b-t)) dt.$$

而

$$\left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a) \left(t - \frac{a+b}{2}\right) (f''(t) + f''(a+b-t)) dt \right| \leq 2M \left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a) \left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt \right| = \frac{M}{24} (b-a)^3.$$

**不等式3** 设  $f \in C[a, b]$ , 若  $f$  二阶可微, 且  $|f''(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$ , 则

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{f(a) + f(b)}{2} (b-a) \right| \leq \frac{M}{12} (b-a)^3.$$

证明:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= (x-a)f(x) \Big|_a^b - \int_a^b (x-a)f'(x) dx \\ &= (b-a)f(b) + \int_a^b (x-b)(f'(x) + (x-a)f''(x)) dx \\ &= (b-a)f(b) + (x-b)f(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) dx + \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x) dx \\ &= (b-a)(f(b) + f(a)) - \int_a^b f(x) dx + \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x) dx, \end{aligned}$$

所以

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{f(a) + f(b)}{2} (b-a) \right| = \frac{1}{2} \left| \int_a^b (x-a)(x-b)f''(x) dx \right| \leq \frac{M}{12} (b-a)^3.$$

上面的等式的一些应用, 取  $a = n, b = n+1$ , 则有

$$\int_n^{n+1} f(t) dt = \frac{f(n) + f(n+1)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x)f''(x+n) dx.$$

对  $n$  做累和,

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(t) dt + \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x) \sum_{k=1}^{n-1} f''(x+n) dx.$$

当取  $f(x) = \frac{1}{x}$  时, 得到

$$H_n = \ln n + \frac{n+1}{2n} + \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(x+n)^3} dx = \ln n + O(1).$$

当取  $f(x) = \ln x$  时, 得到

$$\ln n! = \ln \left( \sqrt{n} \left( \frac{n}{e} \right)^n \right) + 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(x+n)^2} dx = \ln \left( \sqrt{n} \left( \frac{n}{e} \right)^n \right) + O(1),$$

所以极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{n} \left( \frac{n}{e} \right)^n} = C.$$

注: 若  $f(x) \in C^4[a, b]$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{f(a) + f(b)}{2} (b-a) = \frac{1}{24} \int_a^b f^{(4)}(x) (x-a)^2 (x-b)^2 dx - \frac{1}{12} (b-a)^2 [f'(b) - f'(a)].$$

关于习题3 是否存在常数  $C$ , 使得对于满足条件  $|f'''(x)| \leq M$  的任意函数  $f$  有如下估计:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{f(a) + f(b)}{2} (b-a) \right| \leq CM(b-a)^4.$$

解: 条件存在. 不等式相当于

$$\frac{1}{2} \left| \int_a^b (x-a)(x-b) f''(x) dx \right| \leq CM(b-a)^4.$$

由于  $|f'''| \leq M$ , 所以  $-M(x-a) \leq f''(x) - f''(a) \leq M(x-a)$ . 所以

$$\int_a^b (x-a)(x-b) f''(x) dx \leq \int_a^b (x-a)(x-b) (f''(a) - M(x-a)) dx = \frac{M}{12} (b-a)^4 - \frac{f''(a)}{6} (b-a)^3,$$

$$\int_a^b (x-a)(x-b) f''(x) dx \geq \int_a^b (x-a)(x-b) (f''(a) + M(x-a)) dx = -\frac{M}{12} (b-a)^4 - \frac{f''(a)}{6} (b-a)^3.$$

当  $f''(a) = 0$  时, 上面的  $C$  存在, 而一般情况的  $f$ , 上面的  $C$  是不存在的.

当问题加上对于任意的  $a, b \in D_f$  时, 常数  $C$  也是不存在的. 这相当于对于任意的  $a, b$ ,

$$\frac{1}{2} \left| \int_a^b (x-a)(x-b) f''(x) dx \right| \leq CM(b-a)^4.$$

由介值定理, 存在  $\xi \in (a, b)$ , s.t.

$$|f''(\xi)| (b-a)^3 \leq CM(b-a)^4.$$

令  $b \rightarrow a^+$ , 得到  $f''(a) \equiv 0$ , 也与  $f$  的任意性矛盾.

### 3.6.5 作业

6. 设  $f(x)$  为  $[0, 1]$  上的非负可积函数, 且  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ . 证明, 任给  $\varepsilon > 0$ , 均存在子区间  $[\alpha, \beta]$ , 使得  $f(x) < \varepsilon, \forall x \in [\alpha, \beta]$ .
8. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 且存在常数  $C > 0$ , 使得  $|f(x)| \geq C (a \leq x \leq b)$ . 证明  $\frac{1}{f}$  在  $[a, b]$  上也是可积的.
11. 设  $f(x) > 0$  为  $[a, b]$  上的可积函数, 证明  $\int_a^b f(x) dx > 0$ .
2. 设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上定义的函数. 如果  $f^2(x)$  可积, 则  $|f(x)|$  也可积.
6. 设  $f(x) \geq 0$  在  $[a, b]$  上可积,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 则

$$\left( \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \right)^2 + \left( \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx \right)^2 \leq \left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2.$$

(提示:  $f = \sqrt{f} \cdot \sqrt{f}$ , 用Cauchy-Schwarz不等式.)

9. 设  $f(x)$  为  $[0, 1]$  上的连续函数, 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1)$ . (提示:  $nx^n$  在  $[0, 1]$  上积分趋于 1, 在  $[0, \delta]$  上很小, 如果  $0 < \delta < 1$ .)

11. 设  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的可积函数, 则任给  $\varepsilon > 0$ , 存在连续函数  $g(x)$ , 使得  $\inf f \leq g(x) \leq \sup f$ , 且

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

12. 设  $f(x)$  在  $[c, d]$  上可积, 设  $[a, b] \subset (c, d)$ , 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

## 3.7 定积分的应用和推广

### 3.7.1 定积分的应用

**曲线的长度** 设  $I = [\alpha, \beta]$ , 映射  $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t)), t \in I$ .

如果  $x(t), y(t)$  为连续函数, 则称  $\sigma$  为  $\mathbb{R}^2$  上的连续曲线.

如果  $x(t), y(t) \in C^1$ , 则称  $\sigma$  为  $C^1$  曲线.

定义  $\sigma$  的长度为

$$L(\sigma) = \int_a^\beta \left[ (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \right]^{1/2} dt.$$

**例7.1.1. 求摆线**

$$(x(t), y(t)) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)), \quad a > 0.$$

一拱的长度.

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \left[ (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \right]^{1/2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} a \left[ (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t \right]^{1/2} dt \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8a. \end{aligned}$$

**简单图形的面积**

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

当  $f$  变号时, 上式称为代数面积和.

设平面曲线  $\sigma$  的极坐标方程为  $r = r(\theta), r(\theta) \in C[\alpha, \beta]$ ,

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\theta) d\theta.$$

设曲线  $\sigma$  上的点满足  $\sigma(t) = (x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]$ . 则  $\sigma, x = a, x = b$  和  $y = 0$  围成的曲边梯形的面积为

$$S = \int_\alpha^\beta y(t) x'(t) dt.$$

面积公式也可以改写成

$$S = \frac{1}{2} \left| \int_\alpha^\beta [y(t)x'(t) - y'(t)x(t)] dt \right|.$$

**旋转曲面的面积** 设  $\sigma$  为平面曲线  $\sigma(t) = (x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta], y(t) \geq 0$ .  $\sigma$  绕  $x$  轴旋转所得曲面的面积为

$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi y(t) \left[ (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \right]^{1/2} dt.$$



**简单立体的体积** (1) 平行截面之间的立体体积

设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一块立体区域, 夹在平面 $x=a$ 和 $x=b$ , ( $a < b$ ) 之间. 记 $S(x)$ 为 $x \in [a, b]$ 处垂直于 $x$ 轴的平面截 $\Omega$ 的截面面积函数. 如果 $S(x) \in C[a, b]$ , 则 $\Omega$ 的体积为

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

## (2) 旋转体体积

设 $f \in C[a, b]$ ,

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid x \in [a, b], y \in [-|f(x)|, |f(x)|], |z| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

则

$$V(\Omega) = \int_a^b \pi f^2(x) dx.$$

**3.7.2 广义积分**

**定义 7.2.1 (无穷积分).** 设 $a \in \mathbb{R}$ , 定义在 $[a, +\infty)$ 中的函数 $f$ 如果在任何有限区间 $[a, A]$ 上都是 Riemann 可积的, 且极限

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

存在 (且有限), 则称无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 存在或收敛, 记为

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

否则就称无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 不存在或发散.

类似的, 我们可以定义无穷积分 $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ . 如果极限

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx$$

存在, 它和上面定义的无穷积分是不等价的, 称为Cauchy主值积分, 记为

$$(V.P.) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx.$$

**无穷积分的Cauchy准则**  $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的积分收敛, 当且仅当, 对于任意的 $\epsilon > 0$ , 存在 $M = M(\epsilon)$ , 使得对于任何 $B > A > M$ 时, 有

$$\left| \int_A^B f(x) dx \right| < \epsilon.$$

**例 7.2.1** 无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ , ( $p \in \mathbb{R}$ ) 仅在 $p > 1$ 时收敛.

**例 7.2.2**  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ .

**定义 7.2.2 (瑕积分)** 设函数 $f$ 在任何区间 $[a', b]$ , ( $a < a' < b$ ) 上均Riemann可积, 如果极限

$$\lim_{a' \rightarrow a+} \int_{a'}^b f(x) dx$$

存在且有限, 则称瑕积分 $\int_a^b f(x) dx$ 存在或收敛, 记为

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{a' \rightarrow a+} \int_{a'}^b f(x) dx,$$

否则称瑕积分

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{a' \rightarrow a+} \int_{a'}^b f(x) dx,$$

否则称瑕积分  $\int_a^b f(x) dx$  不存在或发散.

如果  $f$  在  $a$  附近无界, 则  $f$  在  $[a, b]$  上不是 Riemann 可积的, 称  $a$  为  $f$  的瑕点.

无穷积分和瑕积分统称为广义积分, 也称为反常积分.

**例7.2.3** 瑕积分  $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$  仅在  $p < 1$  时收敛.

运算法则: 分部积分, 变量替换, 积分区间可加性, 线性性质.

**例7.2.5**  $\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{\epsilon}^1 \ln x dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (x \ln x - x) \Big|_{\epsilon}^1 = -1.$

**例7.2.6** 求 Fresnel 积分  $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ .

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt. \\ \left| \int_A^B \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt \right| &= \left| \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \Big|_A^B + \frac{1}{2} \int_A^B \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{1}{\sqrt{B}} + \frac{1}{2} \int_A^B t^{-\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{A}} \rightarrow 0 \quad (B > A \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \cos t \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \cos t dt dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} \tan^{1/2} t dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)}{\Gamma(1)} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}. \end{aligned}$$

其中

$$\int e^{-tx^2} \cos t dt = \frac{e^{-tx^2} (-\cos t \cdot x^2 + \sin t)}{1+x^4},$$

所以

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}.$$

综上, 并类似的证明

$$\int_{\mathbb{R}} \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int_{\mathbb{R}} \sin(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

作业

7. 设  $f(x) > 0$ , 如果  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上广义可积, 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx > 0$ .

在  $[a, A]$  上,  $f(x)$  的不连续点集是零测集, 存在不连续点集的至多可数个开区间  $\{I_i\}$ , 使得

$$\sum |I_i| \leq \epsilon.$$

因  $A - a > \epsilon$ , 所以存在连续点, 设为  $x_0$ , 则存在  $\delta > 0$ , 使得任何  $|x - x_0| < \delta$ ,  $f(x) > 0$ , 与  $\int_a^A f(x) dx = 0$  矛盾.

8. 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上广义可积, 如果  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  中一致连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

(提示: 先用 Cauchy 准则和中值定理找收敛子列.) 对于任何  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 只要  $|x - y| < \delta$ , 就有  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ . 又对于这样小的  $\epsilon$ , 存在  $M > 0$ , s.t. 对于任何  $A > M$ ,

$$\left| \int_A^{A+\delta} f(x) dx \right| < \epsilon.$$

则存在  $\xi \in (A, A + \delta)$ , 使得

$$|f(\xi)| < \epsilon.$$

所以对于任何  $x \in (A, A + \delta)$ , 有

$$|f(x)| \leq |f(\xi)| + |f(x) - f(\xi)| \leq \epsilon + \epsilon$$

9. 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上广义可积, 如果  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  中可导, 且导函数  $f'(x)$  有界, 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . (提示: 用上一题.)

11. 举例说明, 当无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 且  $f(x)$  为正连续函数时, 无穷积分  $\int_a^{+\infty} f^2(x) dx$  不一定收敛. 磨光函数

$$\sum_{k=1}^n n \chi_{[n, n+1/n^3]}(x)$$

12. 举例说明, 当无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 且  $f(x)$  为正连续函数时, 不一定有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

比如图形类似于下式的函数

$$\sum_{k=1}^{\infty} n \chi_{[n, n+1/n]}(x)$$

### 3.7.3 广义积分的收敛判别法

**Thm 7.3.1.** 设  $f \geq 0$ , 则无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛当且仅当

$$F(A) = \int_a^A f(x) dx$$

是  $A \in [a, +\infty)$  的有界函数; 对瑕积分有完全类似的结果.

**定理 7.3.2. (比较判别法)** 设  $0 \leq f \leq Mg$ ,  $M > 0$  为常数, 则当无穷积分  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  收敛时, 无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  也收敛; 当无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散时, 无穷积分  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  也发散; 瑕积分有完全类似的结果.

**M 的求法** 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ .

$0 < l < \infty$  时,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  与  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  同收敛.

$l = 0$  时,  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  收敛可以推出  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛. 注:  $0 \leq f \leq Mg$  不可省, 否则取  $f(x) = \left| \frac{\sin x}{x \ln x} \right|$ ,  $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ .

$l = +\infty$  时,  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  发散, 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散.

**Cauchy 判别法** 将  $f$  与  $x^{-p}$  比较, (无穷积分) (瑕积分有类似结论)

1. 若  $p > 1$ , 且存在  $c > 0$ , s.t.  $0 \leq f(x) \leq \frac{c}{x^p}$ , ( $\forall x \geq x_0$ ), 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛.

2. 若  $p \leq 1$ , 且存在  $c > 0$ , s.t.  $f(x) \geq \frac{c}{x^p}$ , ( $\forall x \geq x_0$ ), 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散.

设  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p f(x) = l$ .

3. 若  $p > 1$ ,  $0 \leq l < +\infty$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛.

4. 若  $p \leq 1$ ,  $0 < l \leq +\infty$ , 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散.

**例7.3.3** 判断  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$  的敛散性.

对于一般函数  $f$ , 定义

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\}, \quad f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}.$$

若  $f^\pm$  收敛, 则  $f$  收敛. (绝对收敛)

若  $f$  收敛, 但  $\int |f|$  发散. (条件收敛)

**例7.3.5** 判断  $\int_1^{+\infty} \cos x^p dx$ , ( $p > 1$ ), 的敛散性.

$$\int_1^\infty \cos t \cdot t^{\frac{1}{p}-1} dt,$$

取  $B > A \gg 1$ , 则

$$\left| \int_A^B \frac{\cos t}{t^{1-\frac{1}{p}}} dt \right| = \left| \frac{1}{A^{1-1/p}} \int_A^\xi \cos t dt + \frac{1}{B^{1-1/p}} \int_\xi^B \cos t dt \right| \leq \frac{4}{A^{1-1/p}} \rightarrow 0, \quad A \rightarrow +\infty.$$

但

$$|\cos x^p| \geq \cos^2 x^p = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x^p),$$

反证  $\int |\cos x^p|$  不收敛.

**定理 7.3.3 (Dirichlet).** 设  $F(A) = \int_a^A f(x) dx$  在  $[a, +\infty)$  中有界, 函数  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  中单调, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ , 则积分  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$  收敛.

pf.  $|F(A)| \leq C, \forall A \geq a$ . 所以

$$\left| \int_A^B f(x) dx \right| \leq 2C, \quad \forall A, B \geq a.$$

$g(x) = o(1), x \rightarrow +\infty$ . 所以  $\forall \epsilon > 0, \exists M > 0$ , s.t.  $\forall x > M, |g(x)| \leq \frac{\epsilon}{4C}$ .

$$\begin{aligned} \left| \int_A^B f(x)g(x) dx \right| &= \left| g(A) \int_A^\xi f(x) dx + g(B) \int_\xi^B f(x) dx \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{4C} \cdot 2C \cdot 2 = \epsilon. \end{aligned}$$

**例7.3.6.** 判断积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ , ( $0 < p < 2$ ) 的敛散性.

pf.  $\frac{\sin x}{x^p} \sim \frac{1}{x^{p-1}}, (x \rightarrow 0+)$ . 所以  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx$  与  $\int_0^1 x^{1-p} dx$  同敛散, ( $p < 2$ ).

$\int_1^A \sin x dx$  有界,  $\frac{1}{x^p} \searrow 0$ , 由 Dirichlet 判别法,  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx$  收敛.

$0 < p \leq 1$  时,  $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| dx$  发散.

$1 < p < 2$  时,  $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| dx$  收敛.

**定理 7.3.4 (Abel).** 如果广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 函数  $g(x)$  在  $[a, +\infty)$  中单调有界, 则积分  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$  也收敛.

pf.  $g$  有界, 所以  $|g(x)| \leq c, \forall x \in [a, +\infty)$ .

$\int f$  收敛, 所以  $\forall \epsilon > 0, \exists M > 0$ , s.t.  $\forall B > A > M, \left| \int_A^B f(x) dx \right| \leq \frac{\epsilon}{2c}$ .

$$\begin{aligned} \left| \int_A^B f(x)g(x) dx \right| &= \left| g(A) \int_A^\xi f(x) dx + g(B) \int_\xi^B f(x) dx \right| \\ &\leq c \left| \int_A^\xi f(x) dx \right| + c \left| \int_\xi^B f(x) dx \right| \\ &\leq c \frac{\epsilon}{2c} + c \frac{\epsilon}{2c} = \epsilon. \end{aligned}$$

**例7.3.7** 设  $a \geq 0$ , 研究积分  $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$  的敛散性.

pf.  $e^{-ax} \searrow 0$ ,  $\int_0^A \frac{\sin x}{x}$  有界, 由Dirichlet判别法,  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$  收敛.

$e^{-ax} \searrow$  有界,  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}$  收敛, 由Abel判别法,  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$  收敛.

### 作业

5. 设  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  中连续, 如果  $\int_1^{+\infty} f^2(x) dx$  收敛, 则  $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$  绝对收敛. (提示: 用Cauchy不等式.)

6. 设  $f(x)$  在  $[a, A]$  ( $A < \infty$ ) 上均可积. 如果  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  收敛, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ , 证明  $L = 0$ , 且  $\int_a^{+\infty} f^2(x) dx$  也收敛.

7. 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  中单调递减, 且  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$ . (提示: 在区间  $[A/2, A]$  上估计积分.)

8. 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  中单调递减趋于零, 且  $\int_a^{+\infty} \sqrt{f(x)/x} dx$  收敛, 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  也收敛. (提示: 利用上题, 比较被积函数.)

pf. 取  $\epsilon = 1/2$ , 则存在  $X > a$ , s.t.  $\forall x > X$ ,

$$\frac{x}{2} \cdot \sqrt{\frac{f(x)}{x}} < \int_{x/2}^x \sqrt{\frac{f(t)}{t}} dt < \epsilon = \frac{1}{2},$$

即  $\sqrt{xf(x)} < 1$ . 所以  $f(x) < \frac{1}{x}$ ,  $\forall x > X$ .

9. 设  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 如果  $x \rightarrow +\infty$  时  $xf(x)$  单调递减趋于零, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) \ln x = 0.$$

pf. 对于任意的  $\epsilon > 0$ , 因为  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 则存在  $M > \max(0, a)$ , s.t. 对于任意的  $x > M$ , 有

$$xf(x) \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{t} dt \leq \int_{\sqrt{x}}^x tf(t) \cdot \frac{1}{t} dt = \int_{\sqrt{x}}^x f(t) dt < \frac{\epsilon}{2}.$$

即  $xf(x) \ln x < \epsilon$ .

10. 设  $f(x) > 0$  在  $[0, +\infty)$  中连续, 且  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$  收敛, 证明

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) dx = +\infty.$$

pf. Cauchy不等式:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{f(x)} \int_0^{\lambda} f(x) dx \geq \left( \int_0^{\lambda} dx \right)^2 = \lambda^2.$$

11. 研究广义积分

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} \quad (p, q \in \mathbb{R})$$

的敛散性.

pf.  $p > 1$  收敛,  $p < 1$  发散.

$p = 1$ ,  $q > 1$  时收敛;  $p = 1$ ,  $q \leq 1$  时发散.

### 3.7.4 广义积分的例子

**例7.4.1** 求

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx, \quad (a > 0).$$

pf. 原函数可求

$$F(x) = -\frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax},$$

$$I = F(\infty) - F(0) = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

令  $b = n, a = 1,$

$$\int_0^\infty e^{-x} \sin nx dx = \frac{n}{n^2 + 1},$$

所以

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin nx}{n} dx = \frac{1}{n^2 + 1},$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2 + 1} &= \int_0^\infty e^{-x} \left\langle \frac{\pi - x}{2} \right\rangle dx \\ &= \sum_{k=0}^\infty \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} e^{-x} \frac{\pi - (x - 2k\pi)}{2} dx \\ &= \sum_{k=0}^\infty \int_0^{2\pi} e^{-(x+2k\pi)} \frac{\pi - x}{2} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^\pi}{e^\pi - e^{-\pi}} e^{-x} \frac{\pi - x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^\pi}{e^\pi - e^{-\pi}} \cdot ((\pi - 1) + e^{-2\pi}(\pi + 1)) = \frac{\pi \coth \pi - 1}{2}. \end{aligned}$$

例7.4.2 求

$$I = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} dx, \quad (0 < r < 1).$$

pf. 令  $t = \tan \frac{x}{2}$ , 则

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{2(1 - r^2)}{(1 - r)^2 + (1 + r)^2 t^2} dt = 2 \arctan \left( \frac{1 + r}{1 - r} t \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2\pi.$$

另外注意

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{inx} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2}.$$

例7.4.3 求

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{1 + x^4} dx.$$

pf.  $\alpha > 1$ . 取  $x^{\alpha/2} = \tan t$ , 则  $x = (\tan t)^{2/\alpha}$ .

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{1 + x^\alpha} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\alpha} (\tan t)^{2/\alpha - 1} dt = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{\alpha}, 1 - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{\alpha \sin \frac{\pi}{\alpha}}.$$

例7.4.5 求

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^n} dx \quad (n \geq 1).$$

pf. 令  $x = \tan t$ ,

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1 + x^2)^\alpha} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-2} t dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{2\alpha-1}{2}\right).$$

当  $\alpha = n$  时,  $I = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$ .

例7.4.8 求

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

pf. 注意  $\sin^2 nx - \sin^2(n-1)x = \sin x \cdot \sin[(2n-1)x]$ , 则

$$\frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)x}{\sin x}.$$

又注意

$$\sin(2n-1)x - \sin(2n-3)x = 2\sin x \cos[2(n-1)x],$$

$$\sin(2n-1)x = 2\sin x \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos 2kx \right),$$

所以

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} dx = \sum_{k=1}^n \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2k-1)x}{\sin x} dx = \sum_{k=1}^n \int_0^{\pi/2} 1 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \cos 2jx dx = n \cdot \frac{\pi}{2}.$$

最后由Riemann Lebesgue引理

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{nx^2} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{n \sin^2 x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{n} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx \right) \\ &= \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

也可以不用Riemann Lebesgue引理, 需要用夹逼原理, 使用不等式

$$x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

则

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{x^2} dx &\leq \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2} dx \\ &\leq \frac{1}{n} \int_0^{\delta} \frac{\sin^2 nx}{x^2} \left(1 - \frac{\delta^2}{6}\right)^{-2} dx + \frac{1}{n} \int_{\delta}^{\pi/2} \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{(\pi/2)^2}{6}\right)^{-2} dx \quad \forall \delta > 0. \end{aligned}$$

由于

$$\frac{\pi}{2} \geq \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{x^2} dx \geq \left(1 - \frac{\delta^2}{6}\right)^2 \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} \int_{\delta}^{\pi/2} \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{\pi^2}{24}\right)^{-2} dx \right], \quad \forall \delta > 0.$$

所以

$$\frac{\pi}{2} \geq I \geq \left(1 - \frac{\delta^2}{6}\right)^{-2} \frac{\pi}{2}, \quad \forall \delta > 0.$$

同上面类似的过程有Dirichlet积分

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{(2n-1)\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{x} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x} dx + \int_0^{\pi/2} \sin(2n-1)x \cdot \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) dx \right] = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

例7.4.9. 求Euler积分

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx.$$

pf.

$$\begin{aligned} I &\stackrel{x=2t}{=} 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin 2t dt = 2 \int_0^{\pi/4} \ln 2 + \ln \sin t + \ln \cos t dt \\ &= 2 \ln 2 \cdot \frac{\pi}{4} + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin t dt + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \cos t dt \\ &= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I. \end{aligned}$$

所以  $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ .

### 3.7.5 作业

8. (Frullani积分) 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 且对任意  $c > 0$ , 积分  $\int_c^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$  收敛, 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = f(0) \ln \frac{\beta}{\alpha}, \quad (\alpha, \beta > 0).$$

9. (Frullani积分) 设  $f(x)$  是定义在  $(0, +\infty)$  上的函数, 如果对于任意  $b > a > 0$ , 积分  $\int_a^b \frac{f(x)}{x} dx$  收敛, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = M,$$

则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = (L - M) \ln \frac{\beta}{\alpha}, \quad (\alpha, \beta > 0).$$

pf.

$$\begin{aligned} \int_\epsilon^M \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx &= \int_{\alpha\epsilon}^{\alpha M} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{\beta\epsilon}^{\beta M} \frac{f(x)}{x} dx \\ &= \int_{\alpha\epsilon}^{\beta\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{\alpha M}^{\beta M} \frac{f(x)}{x} dx \quad (\alpha < \beta) \\ &= \int_{\alpha\epsilon}^{\beta\epsilon} \frac{f(0) + o(1)}{x} dx - \int_{\alpha M}^{\beta M} \frac{f(\infty) + o(1)}{x} dx \\ &= L \ln \frac{\beta}{\alpha} - M \ln \frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

9.5 如果  $f$  在  $(0, +\infty)$  上连续,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty)$  存在, 且  $\int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx$  收敛, 则有

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = -f(+\infty) \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

10. 计算下列积分 ( $a, b > 0$ ):

(1)  $\int_0^{+\infty} \left( \frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right) \frac{dx}{x^2};$

(2)  $\int_0^{+\infty} \frac{b \sin ax - a \sin bx}{x^2} dx.$

pf. (1) 注意到

$$\frac{1}{x^2} \left( \frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{x} \left( \frac{e^x + 1 - 1}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{2x} \right) = \frac{1}{x} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} \right).$$

如令  $f(x) = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}$ , 则由Frullani积分,

$$\int_0^{+\infty} \left( \frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right) \frac{dx}{x^2} = f(0+) \ln 2 = -\frac{1}{2} \ln 2.$$



## 3.8 数项级数

### 3.8.1 级数收敛与发散的概念

无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

其中

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \cdots + a_n$$

称为级数的第 $n$ 个部分和.

**级数收敛的必要条件:** 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则通项  $a_n \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$ . (否定表述)

**级数收敛的Cauchy准则:**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛  $\iff$  任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N = N(\varepsilon)$ , 当  $n > N$  时

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon, \quad \forall p \geq 1.$$

(否定表述)

**例 8.1.2.** 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  的敛散性.

**例 8.1.3.** 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  的敛散性 (调和级数).

**例 8.1.4.** 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$  的敛散性.

pf.

$$\sin(n+1) = \sin n \cdot \cos 1 + \cos n \cdot \sin 1 \implies \cos n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

这与

$$\sin^2 n + \cos^2 n = 1$$

矛盾.

**例 8.1.5.** 设  $q > 0$ , 则当  $q < 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  收敛;  $q \geq 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  发散(几何级数).

**Thm 8.1.1** (1) 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  均收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$  也收敛, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ,  $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

(2) 级数的敛散性与其有限项的值无关.

3. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的部分和为  $S_n$ . 如果  $S_{2n} \rightarrow S$ , 且  $a_n \rightarrow 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

条件  $a_n \rightarrow 0$  不能舍去, 比如  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ .

4. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$  收敛, 则数列  $\{a_n\}$  收敛. (提示: 用 Cauchy 准则.)

5. 设数列  $na_n$  收敛, 且级数  $\sum_{n=2}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$  收敛, 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也是收敛的.

6. 证明, 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$  也收敛. (提示: 用平均值不等式.)

8. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为发散级数, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, 1\}$  也发散.

hint: 反证法, 比 Cauchy 收敛准则的否定表述更好写证明过程.

### 3.8.2 正项级数收敛与发散的判别法

**基本判别法**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛  $\iff \{S_n\}$  收敛  $\iff \{S_n\}$  有上界.

**定理 8.2.1 (比较判别法).** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  为正项级数, 如果存在常数  $M > 0$ , 使得

$$a_n \leq M b_n, \quad \forall n \geq 1.$$

则 (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛时  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛; (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散时  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  也发散.

**例 8.2.3.** 判别  $\sum_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n})]$  的敛散性.

解. 根据 Taylor 展开,

$$0 < \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] / \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2},$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 故原级数收敛.

**Cauchy判别法或根值判别法** 如果  $n$  充分大时,  $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

**例 8.2.4.** 设  $p \in \mathbb{R}$ , 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{p}{n}\right)^{n^2}$  的敛散性.

解. 因为

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \frac{p}{n}\right)^n \rightarrow e^{-p},$$

故  $p > 0$  时原级数收敛;  $p < 0$  时级数发散. 显然,  $p = 0$  时级数也发散.

**d'Alembert判别法或比值判别法** 如果  $n$  充分大时,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

**例 8.2.5.** 设  $x > 0$ , 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$  的敛散性.

解. 因为

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{x}{e},$$

故  $0 < x < e$  时级数收敛;  $x > e$  时级数发散.  $x = e$  时,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e / \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1,$$

故此时级数也发散.

**定理 8.2.2 (积分判别法).** 设  $f(x)$  是定义在  $[1, +\infty)$  上的非负单调递减函数, 记  $a_n = f(n)$ , ( $n \geq 1$ ). 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的敛散性与广义积分  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  的敛散性相同.

证明. 令

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt, \quad \forall x \geq 1.$$

因为  $f$  为单调递减函数, 故当  $n \leq x \leq n+1$  时

$$a_{n+1} = f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) = a_n,$$

这说明

$$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq a_n,$$

从而有

$$S_n \leq a_1 + F(n), \quad F(n) \leq S_{n-1}.$$

其中  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  为级数的部分和. 因为  $S_n$  及  $F(n)$  关于  $n$  都是单调递增的, 二者同时有界或无界, 即  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  同敛散.

**例 8.2.6.** 设  $s \in \mathbb{R}$ , 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  的敛散性.

**定理 8.2.3 (Kummer).** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  为正项级数, 如果  $n$  充分大时

- (1)  $\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \geq \lambda > 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;  
 (2)  $\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \leq 0$  且  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

pf. (1) 条件可改写为

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{\lambda} \left( \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right), \quad \forall n \geq N.$$

这说明当  $n \geq N$  时

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_N + \sum_{k=N}^n a_{k+1} \\ &\leq S_N + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=N}^n \left( \frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \right) \\ &= S_N + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) \\ &\leq S_N + \frac{1}{\lambda} \frac{a_N}{b_N} \end{aligned}$$

即  $\{S_n\}$  有上界, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

(2) 由

$$\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \leq 0$$

可知

$$\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}},$$

即  $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$  关于  $n$  单调递增, 从而  $a_n \geq \frac{a_1}{b_1} b_n$ , 因此由  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散知  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也发散.

**Kummer判别法推d'Alembert判别法** 取  $b_n = 1$ , 则当  $n$  充分大, 有  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$  时, 有

$$\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \geq \frac{1}{q} - 1 > 0,$$

所以由Kummer判别法有  $\sum a_n$  收敛. 当  $n$  充分大满足  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$  时, 有

$$\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \leq 1 - 1 = 0,$$

再由Kummer判别法和  $\sum 1$  发散, 知  $\sum a_n$  发散.

**Kummer判别法证明Raabe判别法** 取  $b_n = \frac{1}{n}$ , 当  $n$  充分大时, 如果有  $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq \mu > 1$ , 则

$$\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \geq n\left(1 + \frac{\mu}{n}\right) - (n+1) = \mu - 1 > 0,$$

由Kummer判别法,  $\sum a_n$  收敛.

当  $n$  充分大时, 如果有  $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$ , 则

$$\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \leq n\left(1 + \frac{1}{n}\right) - (n+1) = 0,$$

由Kummer判别法以及  $\sum \frac{1}{n}$  是发散的, 所以  $\sum a_n$  也发散.

**Kummer判别法推出Gauss判别法** 取  $b_n = \frac{1}{n \ln n}$ , 当  $n > N$  充分大时, 如果有  $\theta > 1$  使得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\theta}{n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right).$$

则

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} &= n \ln n \left(1 + \frac{\theta}{n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right) - (n+1) \ln(n+1) \\ &= (n+1) \ln n + (\theta-1) \ln n + o(1) - n \ln(n+1) - \ln(n+1) \\ &= (\theta-1) \ln n + o(1) - (n+1) \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\geq (\theta-1) \ln N > 0 \end{aligned}$$

所以  $\sum a_n$  收敛; 当  $n > N$  充分大时, 如果有  $\theta \leq 1$  使得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\theta}{n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right).$$

则

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} &= n \ln n \left(1 + \frac{\theta}{n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right) - (n+1) \ln(n+1) \\ &= (n+1) \ln n + (\theta-1) \ln n + o(1) - n \ln(n+1) - \ln(n+1) \\ &= (\theta-1) \ln n + o(1) - (n+1) \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

由Kummer判别法以及  $\sum \frac{1}{n \ln n}$  发散, 所以  $\sum a_n$  也发散.

**例 8.2.8.** 判别下列级数的敛散性:

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}, (\alpha > 0);$
- (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{2n+1}.$

**例 8.2.9 (Cauchy 凝聚判别法).** 设  $a_n$  单调递减趋于零. 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛当且仅当  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$  收敛.

6. 设  $a_n > 0$ ,  $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ , 证明

- (1) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$  总是收敛的;
- (2) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$  收敛当且仅当  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

$$\sum \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^2} \leq \sum \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}};$$

$$\sum \frac{a_n}{\sqrt{S_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{a_1}} \sum a_n;$$

$$\sum \frac{a_n}{\sqrt{S_n}} = \sum \left( \sqrt{S_n} - \frac{S_{n-1}}{\sqrt{S_n}} \right) \geq \sum \left( \sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} \right)$$

7. 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 试用积分判别法证明  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n}$  也发散, 其中  $S_n$  为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的部分和.

hint1: 取  $\epsilon = \frac{1}{2}$ , 则对于任何  $n$ , 存在  $m > n$ , s.t.  $S_{m+1} > 2S_n$ . 则

$$\sum_{k=n}^m \frac{a_{k+1}}{S_k} \geq \sum_{k=n}^m \frac{a_{k+1}}{S_{k+1}} \geq \frac{\sum_{k=n}^m a_{k+1}}{S_{m+1}} = \frac{S_{m+1} - S_n}{S_{m+1}} \geq \frac{1}{2} = \epsilon,$$

由Cauchy收敛判别法即得.

hint2:

$$\frac{a_{n+1}}{S_n} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n} \geq \int_{S_n}^{S_{n+1}} \frac{dx}{x}.$$

8. 判断下列级数的敛散性:

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}};$

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q} \quad (p > 0, q > 0);$

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!};$

(4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2})\cdots(a+\sqrt{n})} \quad (a > 0).$

9. 设  $a_n > 0, S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ , 证明

(1) 当  $\alpha > 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$  总是收敛的;

(2) 当  $\alpha \leq 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$  收敛当且仅当  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

(1) hint:  $\frac{a_n}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dx}{x^\alpha}, (\alpha > 1).$

(2) hint: 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 类似第7题的证明.

10. 设  $a_n > 0$  关于  $n$  单调递增. 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$  收敛当且仅当级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$  收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right);$$

**Sapagof 判别法:** 设正数数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  单调递减, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  的充要条件是  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$  发散.

上述断言等价于: 单调递增数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  与级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$  同敛散.

由此可以得到: 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的前  $n$  项部分和为  $S_n$ , 那么级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$  同敛散.

设  $p > 1$ , 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的前  $n$  项部分和为  $S_n$ , 那么级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$  始终是收敛的.

11. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为正项级数, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\alpha_n}{n \ln n}.$$

如果  $n$  充分大时  $\alpha_n \geq \mu > 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛; 如果  $n$  充分大时  $\alpha_n \leq 1$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散. 这个结果称为 **Bertrand 判别法**.

hint: 取  $b_n = \frac{1}{n \ln n}$ , 则

$$\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} = \alpha_n - 1 + o(1).$$

然后用Kummer判别法.

17. 设  $a_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$  收敛. 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$  也收敛.

hint: 将  $a_n$  递增重排.

以上收敛判别法列表也可以参考:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Convergence\\_tests](https://en.wikipedia.org/wiki/Convergence_tests)

至今, 这些收敛判别法全部失效的正项级数是存在的, 比如Flint Hills级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}$$

它的收敛性涉及到 $\pi$ 的无理测度的大小, 见

<https://math.stackexchange.com/questions/162573>

### 3.8.3 一般级数收敛与发散判别法

级数是正负交替出现的称为交错级数

**定理 8.3.1 (Leibniz).** 设  $a_n$  单调递减趋于 0, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  收敛.

pf. 使用Cauchy收敛准则.

$$\begin{aligned} S_{n+p} - S_n &= (-1)^n \cdot a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \cdots + (-1)^{n+p-1} a_{n+p} \\ &= (-1)^n [a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + (-1)^{p-1} a_{n+p}]. \end{aligned}$$

因此当  $p = 2k - 1$  时,

$$\begin{aligned} (-1)^n (S_{n+p} - S_n) &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots \leq a_{n+1}, \\ (-1)^n (S_{n+p} - S_n) &= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + a_{n+2k-1} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

这说明

$$|S_{n+p} - S_n| \leq a_{n+1} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty).$$

当  $p = 2k$  时, 类似地可证上式仍成立. 因此原级数收敛.

**例 8.3.1.** 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$  收敛.

**引理 8.3.2 (分部求和).** 设  $\{a_k\}, \{b_k\}$  为数列, 则

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1} (b_{k+1} - b_k) + \sum_{k=m}^{n-1} b_k (a_{k+1} - a_k) = a_n b_n - a_m b_m.$$

**推论 8.3.3 (Abel 变换).** 设  $a_i, b_i (i \geq 1)$  为两组实数, 如果约定  $b_0 = 0$ , 记

$$B_0 = 0, B_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k \quad (k \geq 1),$$

则有

$$\sum_{i=m+1}^n a_i b_i = \sum_{i=m+1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_n B_n - a_{m+1} B_m, \quad \forall m \geq 0.$$

**推论 8.3.4 (Abel 引理).** 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为单调数列, 且  $|B_i| \leq M, (i \geq 1)$ , 则

$$\left| \sum_{i=m+1}^n a_i b_i \right| \leq 2M (|a_n| + |a_{m+1}|), \quad \forall m \geq 0.$$

**定理 8.3.5 (Dirichlet).** 设数列  $\{a_n\}$  单调趋于 0, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  的部分和有界, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

**证明.** 由假设, 存在  $M > 0$  使得

$$\left| \sum_{i=1}^n b_i \right| \leq M, \quad \forall n \geq 1.$$

由 Abel 变换及其推论,

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i \right| \leq 2M(|a_{n+1}| + |a_{n+p}|) \leq 4M|a_{n+1}| \rightarrow 0.$$

由 Cauchy 准则知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

**定理 8.3.6 (Abel).** 如果  $\{a_n\}$  为单调有界数列,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

**证明.**  $\{a_n\}$  单调有界意味着极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  存在. 于是  $\{a_n - a\}$  单调趋于 0. 由 Dirichlet 判别法,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n$  收敛. 从而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n + \sum_{n=1}^{\infty} a \cdot b_n$$

也收敛.

**例 8.3.3.** 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx$  的敛散性.

解.  $a_n = \frac{1}{n}$  单调递减趋于 0,  $b_n = \sin nx$ . 利用公式

$$2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin kx = \cos \left( k - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) x$$

得

$$\sum_{k=1}^n b_n = \begin{cases} 0, & x = 2k\pi, \\ \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}, & x \neq 2k\pi. \end{cases}$$

即  $b_n$  的部分和总是有界的. 故由 Dirichlet 判别法知, 原级数收敛.

**定义 8.3.1 (绝对收敛).** 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛 (此时, 由于

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| \rightarrow 0,$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的确为收敛级数). 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛而  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  发散, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛.

**例 8.3.5.** 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ , ( $x \in \mathbb{R}$ ), 的敛散性.

**解.** 令  $a_n = \frac{|x|^n}{n}$ , 则  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow |x|$ . 故  $|x| < 1$  时原级数绝对收敛; 而  $|x| > 1$  时显然发散.  $x = 1$  时级数条件收敛;  $x = -1$  时级数发散.

### 作业

6. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛,  $\{b_n\}$  为有界数列, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  也是绝对收敛的.

6'. 证明或否定: 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛,  $\{b_n\}$  为有界数列, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  也是收敛的.

7. 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$  是否也收敛? 证明你的结论.

比如

$$a_n = \frac{\cos \frac{n\pi}{3}}{\sqrt[3]{n}}.$$

8. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$  收敛且  $a_n$  极限为零, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  的部分和有界, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛. (提示: Abel 求和.)

9. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$  收敛, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  也收敛. (用Abel求和)

10. 设  $\{a_n\}$  单调递减趋于零. 证明下面的级数是收敛的:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

用9.

11. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0.$$

考虑把  $a_n$  用部分和  $S_n$  表示的问题. 或者使用  $\epsilon - N$  法+Abel变换.

本题不能使用Stolz公式, 因为有反例如下:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{m^2}, & n = m^2; \\ \frac{1}{n^3}, & n \neq m^2. \end{cases}$$

12. 设  $a_n > 0, na_n$  单调趋于 0,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛. 证明  $n \ln n \cdot a_n \rightarrow 0$ .

类比下题:

9. 设  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 如果  $x \rightarrow +\infty$  时  $xf(x)$  单调递减趋于零, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) \ln x = 0.$$

pf. 对于任意的  $\epsilon > 0$ , 因为  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 则存在  $M > \max(0, a)$ , s.t. 对于任意的  $x > M$ , 有

$$xf(x) \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{t} dt \leq \int_{\sqrt{x}}^x tf(t) \cdot \frac{1}{t} dt = \int_{\sqrt{x}}^x f(t) dt < \frac{\epsilon}{2}.$$

即  $xf(x) \ln x < \epsilon$ .

### 3.8.4 数项级数的进一步讨论

级数求和与求极限的可交换性

定义 8.4.1 (级数的一致收敛). 一系列收敛级数  $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = A_i$  关于  $i$  一致收敛是指, 任给  $\epsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时,

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} - A_i \right| < \epsilon, \quad \forall i \geq 1.$$

当且仅当有Cauchy准则:  $\forall \epsilon > 0, \exists N$ , 当  $m, n > N$  时,

$$\left| \sum_{j=n}^m a_{ij} \right| < \epsilon, \quad \forall i \geq 1.$$

给出级数一致收敛的否定表述.

定理 8.4.1. 设一系列级数  $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = A_i$  关于  $i$  一致收敛, 如果  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_{ij} = a_j$  ( $j \geq 1$ ), 则极限  $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i$  存在, 级数  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  收敛, 且

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$$

或改写为

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{i \rightarrow \infty} a_{ij}.$$

pf: 1.  $\sum_{j \geq 1} a_j$  收敛



证明. 由一致收敛的定义, 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_0$ , 当  $n \geq N_0$  时,

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} - A_i \right| < \frac{1}{4}\varepsilon, \quad \forall i \geq 1.$$

因此, 当  $m > n \geq N_0$  时

$$\left| \sum_{j=n+1}^m a_{ij} \right| \leq \left| \sum_{j=1}^m a_{ij} - A_i \right| + \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} - A_i \right| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall i \geq 1.$$

在上式中令  $i \rightarrow \infty$ , 得

$$\left| \sum_{j=n+1}^m a_j \right| \leq \frac{1}{2}\varepsilon,$$

由 Cauchy 准则即知级数  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  收敛, 且在上式中令  $m \rightarrow \infty$  可得

$$\left| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j \right| \leq \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall n \geq N_0$$

2. 证  $\lim_{i \rightarrow \infty} A_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ .

对于  $j = 1, 2, \dots, N_0$ , 因为  $a_{ij} \rightarrow a_j$ , 故存在  $N$ , 当  $i > N$  时,

$$|a_{ij} - a_j| < \frac{\varepsilon}{4N_0}, \quad j = 1, 2, \dots, N_0.$$

因此, 当  $i > N$  时, 有

$$\begin{aligned} \left| A_i - \sum_{j=1}^{\infty} a_j \right| &\leq \left| A_i - \sum_{j=1}^{N_0} a_{ij} \right| + \left| \sum_{j=1}^{N_0} a_{ij} - \sum_{j=1}^{N_0} a_j \right| + \left| \sum_{j=N_0+1}^{\infty} a_j \right| \\ &< \frac{1}{4}\varepsilon + N_0 \frac{\varepsilon}{4N_0} + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

这说明  $\{A_i\}$  的极限存在且极限为  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ .

**推论 8.4.2. (控制收敛定理)** 设  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_{ij} = a_j (j \geq 1)$ ,  $|a_{ij}| \leq b_j (i \geq 1)$ , 且  $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$  收敛(控制级数), 则级数  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  收敛, 且

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{i \rightarrow \infty} a_{ij} = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}.$$

**证明.** 由  $a_{ij} \rightarrow a_j$ , 且  $|a_{ij}| \leq b_j$  知  $|a_j| \leq b_j, j = 1, 2, \dots$ . 因为级数  $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$  收敛, 故级数  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  绝对收敛. 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $n > N$  时,

$$0 \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j < \varepsilon.$$

此时, 对任意  $i \geq 1$ , 有

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} - \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right| = \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{ij} \right| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j < \varepsilon,$$

从而级数  $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$  关于  $i$  是一致收敛的. 由上一定理知本推论结论成立.

**推论 8.4.3. (Fubini)** 设  $\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| \leq A_j (j \geq 1)$ , 且  $\sum_{j=1}^{\infty} A_j$  收敛, 则对任意  $i \geq 1$ , 级数  $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$  收敛, 且

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

**证明.** 1. 首先, 由题设知,  $|a_{ij}| \leq A_j, j = 1, 2, \dots$ . 这说明, 对任意  $i \geq 1$ , 级数  $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$  是绝对收敛的.

2. 因为

$$\left| \sum_{i=1}^k a_{ij} \right| \leq \sum_{i=1}^k |a_{ij}| \leq A_j, \quad j \geq 1.$$

故  $(\sum_{i=1}^k a_{ij})_{kj}$  满足上一推论, 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k a_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k a_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}. \end{aligned}$$

这就证明了本推论.

上述推论的条件中  $\sum_{i \geq 1} |a_{ij}|$  的绝对值不能省去, 比如设

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2^{j-i}}, & j > i; \\ -1, & i = j; \\ 0, & j < i. \end{cases}$$

也即

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \cdots \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

则

$$\sum_{i \geq 1} a_{ij} = -\frac{1}{2^{j-1}}, \quad \sum_{j \geq 1} a_{ij} \equiv 0 \implies 0 = \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} a_{ij} \neq \sum_{j \geq 1} \sum_{i \geq 1} a_{ij} = -2.$$

**例 8.4.1.** 设  $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|$  收敛, 记  $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n, x \in [-1, 1]$ . 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \zeta(n),$$

其中  $\zeta(s)$  是 Riemann-Zeta 函数.

**证明.**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|}{m^n} \leq \frac{1}{m^2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \implies \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n|}{m^n} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{m^2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \right) < +\infty.$$

由Fubini定理,  $\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_n}{m^n}$  收敛, 且

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_n}{m^n} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{m^n} = \sum_{m=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{m}\right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n \zeta(n). \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \zeta(n) &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{m^n} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{m^n} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^2 m^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2m}} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} \right) = \ln 2.\end{aligned}$$

### 级数的乘积

设  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  之积为  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ , 称为Cauchy乘积

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j, \quad n \geq 0.$$

**定理 8.4.4 (Cauchy).** 如果  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  绝对收敛, 则它们的乘积级数也绝对收敛, 且

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

**定理 8.4.5 (Mertens).** 如果  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  收敛, 且至少其中一个级数绝对收敛, 则它们的乘积级数也收敛, 且

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

**证明.** 不妨设  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  绝对收敛. 分别记

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^n c_k.$$

则  $A_n \rightarrow A, B_n \rightarrow B$ , 而

$$C_n = \sum_{i+j \leq n} a_i b_j = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0 = A_n B + \delta_n,$$

其中

$$\delta_n = a_0 (B_n - B) + a_1 (B_{n-1} - B) + \cdots + a_n (B_0 - B).$$

我们只要证明  $\delta_n \rightarrow 0$  即可. 因为  $B_n \rightarrow B$ , 故  $\{B_n\}$  关于  $n$  有界, 从而存在  $K$ , 使得

$$|B_n - B| \leq K, \quad \forall n \geq 0.$$

由于  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  绝对收敛, 故任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_0$ , 当  $n > N_0$  时

$$|a_{N_0+1}| + \cdots + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2K+1}.$$

记  $L = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{N_0}|$ . 由于  $B_n - B \rightarrow 0$ , 故存在  $N_1$ , 当  $n > N_1$  时

$$|B_n - B| < \frac{\varepsilon}{2L+1}.$$

从而当  $n > N_0 + N_1$  时, 有

$$\begin{aligned}|\delta_n| &\leq \sum_{k=0}^{N_0} |a_k| |B_{n-k} - B| + (|a_{N_0+1}| + \cdots + |a_n|) K \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2L+1} (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{N_0}|) + \frac{\varepsilon}{2K+1} K \\ &= \frac{\varepsilon}{2L+1} L + \frac{\varepsilon}{2K+1} K \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

这说明  $\delta_n \rightarrow 0$ , 因而  $C_n = A_n B + \delta_n \rightarrow AB$ .

注. 定理中的绝对收敛的条件不能去掉, 反例就是将  $a_n$  和  $b_n$  均取为交错级数  $(-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ , 此时所得乘积级数是发散的.

但是, 如果乘积级数仍然收敛, 则其和等于两个级数和的乘积. 为了说明这一点, 需要下面的引理.

**引理 8.4.6 (Abel).** 设级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = C$  收敛, 令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in [0, 1),$$

则  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = C$ .

**证明.** 级数收敛表明  $\{c_n\}$  有界, 因此当  $x \in [0, 1)$  时,  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  绝对收敛. 记

$$C_{-1} = 0, \quad C_n = \sum_{k=0}^n c_k, \quad n \geq 0.$$

则有

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n c_k x^k &= \sum_{k=0}^n (C_k - C_{k-1}) x^k \\ &= \sum_{k=0}^n C_k x^k - x \sum_{k=0}^{n-1} C_k x^k \\ &= C_n x^n + (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} C_k x^k \\ &= C_n x^n + C(1-x^n) + (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} (C_k - C) x^k. \end{aligned}$$

在上式中令  $n \rightarrow \infty$  就得到

$$f(x) = C + (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (C_k - C) x^k.$$

因为  $C_k - C \rightarrow 0$ , 故任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N$ , 当  $k > N$  时

$$|C_k - C| < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

令  $M = \sum_{k=0}^N |C_k - C|$ , 则有估计

$$|f(x) - C| \leq M(1-x) + (1-x) \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2} \varepsilon x^k \leq M(1-x) + \frac{1}{2} \varepsilon.$$

因此, 当  $0 < 1-x < \frac{\varepsilon}{2M+1}$  时,

$$|f(x) - C| \leq M \frac{\varepsilon}{2M+1} + \frac{1}{2} \varepsilon < \varepsilon.$$

这说明  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = C$ .

**定理 8.4.7 (Abel).** 设级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  以及它们的乘积  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  均收敛, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

**证明.** 当  $x \in [0, 1)$  时, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  和  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  绝对收敛, 它们的乘积级数为  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ . 根据 Cauchy 定理, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right).$$

令  $x \rightarrow 1^-$ , 由上述 Abel 引理即得欲证结论.

## 乘积级数

将  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$  称为无穷乘积, 记部分乘积  $P_n = \prod_{k=1}^n p_k$ , ( $n \geq 1$ ). 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$  有限且非零时, 称无穷乘积收敛, 否则称它发散.

**命题 8.4.8.** 设  $p_n > 0, \forall n \geq 1$ . 则

(1) 无穷乘积  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$  收敛当且仅当级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$  收敛, 且

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n};$$

(2) 记  $p_n = 1 + a_n$ . 如果  $n$  充分大时  $a_n > 0$  (或  $a_n < 0$ ), 则无穷乘积  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$  收敛当且仅当级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

(3) 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  均收敛, 则无穷乘积  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  也收敛.

**证明.** (1) 是显然的. (2) 只要利用

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = 1$$

以及数项级数的比较判别法即可.

(3) 则是利用 ( $a_n$  不为零时)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[a_n - \ln(1 + a_n)]}{a_n^2} = \frac{1}{2}$$

以及(1).

## 级数重排

**定理 8.4.9 (Riemann).** 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为条件收敛的级数, 则可以将它重排为一个收敛级数, 使得重排后的级数和为任意指定的实数.

**例.** 求证:

$$\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \cdots = \ln(2\sqrt{2}).$$

这说明

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \cdots + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \cdots \\ &\asymp \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \cdots \\ &= \ln(2\sqrt{2}). \end{aligned}$$



## 第四章 定理集

### 4.1 高中数学竞赛

#### 定理 4.1.1: 勾股定理

若  $(\alpha, \beta) = 0$ , 则

$$|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2.$$

进一步的, 若向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  两两正交, 则

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m|^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_m|^2.$$

#### 定理 4.1.2: 三复数共线

复数  $z_1, z_2, z_3$  共线当且仅当

$$\det \begin{pmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

#### 定理 4.1.3: 最小数原理

设  $N$  是全体自然数组成的集合,  $M$  是  $N$  的一个非空子集, 则  $M$  中必有最小数.

##### 推论 4.1.1

设  $\mathbb{R}$  是全体实数组成的集合,  $T$  是  $\mathbb{R}$  的有限非空子集, 则  $T$  中必有最小数和最大数.

### 4.2 高等代数

#### 定理 4.2.1

若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  两两正交, 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关.

#### 定理 4.2.2: 标准正交基的存在性

在任何有限维欧式空间中, 都有标准正交基. 有限维欧式空间  $V$  中的任何非零正交向量组都可以扩充为  $V$  的一个正交基.

**定理 4.2.3**

两个有限维欧式空间同构的充要条件是它们的维数相同.  
任何  $n$  维欧式空间都与欧式空间  $\mathbb{R}^n$  同构.

**定理 4.2.4**

若欧式空间  $V$  的子空间  $V_1, V_2, \dots, V_s$  两两正交, 则它们的和是直和.  
反之, 子空间的和为直和时, 子空间之间不一定正交.

**定理 4.2.5**

设  $W$  是欧式空间  $V$  的子空间. 则  $W^\perp = \{\gamma \mid \gamma \in V, \gamma \perp W\}$  是  $V$  的子空间; 当  $W$  是有限维时,  $V = W \oplus W^\perp$ ,  $(W^\perp)^\perp = W$ .  
 $V_1, V_2$  是欧式空间  $V$  (不一定有限维) 的两个子空间. 证明:

$$(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp.$$

**定理 4.2.6**

设  $T$  是  $n$  维欧式空间  $V$  的一个线性变换. 则  $T$  是正交变换的充要条件是,  $T$  把标准正交基变成标准正交基.

**定理 4.2.7**

设  $s_1, s_2, \dots, s_n$  是  $n$  维欧式空间  $V$  的一个标准正交基,  $A$  是一个  $n$  阶实方阵, 且  $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (s_1, s_2, \dots, s_n)A$ . 则  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  是标准正交基的充要条件是,  $A$  为正交方阵.

**定理 4.2.8**

设  $T$  是  $n$  维欧式空间  $V$  的一个线性变换. 则  $T$  是正交变换的充要条件是,  $T$  在标准正交基下的矩阵是正交矩阵.  
有限维欧式空间  $V$  的正交变换有逆变换, 而且是  $V$  到  $V$  的同构映射.  
其中充分性部分, 标准正交性的条件不可省去.

**定理 4.2.9**

实数域上有限维空间 (不要求是欧式空间) 的每一个线性变换, 都有一维或二维的不变子空间.

解. 证明分实特征根和复特征根两种情况, 复的情况对特征向量分离实虚部, 得到不变子空间的基. □

**定理 4.2.10**

设  $T$  是有限维欧式空间  $V$  的一个正交变换. 若子空间  $W$  对  $T$  不变, 则  $W^\perp$  对  $T$  也不变.  
设  $T$  是有限维欧式空间  $V$  的一个正交变换, 则  $V$  可分解成对  $T$  不变的一维或二维子空间的直和.

**定理 4.2.11**

欧式空间中正交变换的特征值为  $\pm 1$ .  
正交方阵的特征根的模为 1.



## 定理 4.2.12

设  $T$  是二维欧氏空间  $V$  的一个正交变换, 且无特征值, 则  $T$  在标准正交基下的矩阵具有形状

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

## 定理 4.2.13

设  $T$  是  $n$  维欧氏空间  $V$  的一个正交变换, 则存在标准正交基, 使  $T$  在此基下的矩阵成下面形状:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & S_1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & S_r \end{pmatrix}$$

其中

$$S_i = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

对于任何  $n$  阶正交方阵  $A$ , 都存在正交方阵  $U$ , 使  $U^{-1}AU$  为上面方阵的形式.

## 定理 4.2.14

设  $T$  是  $n$  维欧氏空间  $V$  的一个线性变换. 则  $T$  是对称变换的充要条件是,  $T$  在标准正交基下的矩阵为对称方阵.

## 定理 4.2.15

实对称方阵的特征根全是实数.

## 定理 4.2.16

设  $T$  是  $n$  维欧氏空间  $V$  的对称变换, 则  $T$  的属于不同特征值的特征向量相互正交.

**定理 4.2.17**

设  $T$  是  $n$  维欧氏空间  $V$  的一个对称变换,  $W$  是对  $T$  不变的非零子空间, 则  $W$  中有关于  $T$  的特征向量.

如果  $\alpha$  是它的一个特征向量, 则与  $\alpha$  正交的全体向量是  $T$  的  $n-1$  维不变子空间.

对  $V$  的每个对称变换  $T$ , 都存在标准正交基, 使  $T$  在此基下的矩阵为对角矩阵.

对每个实对称方阵  $A$ , 都存在正交方阵  $U$ , 使  $U^{-1}AU$  为对角矩阵.

任何实二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX$$

都可经过正交线性代换  $X = UY$  化成

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

实对称方阵  $A$  是正定的充要条件是,  $A$  的特征根全是正的.

## 4.3 数学分析

### 4.3.1 常用的

#### Formulas for the Remainder Term in Taylor Series

对于任意阶可导的函数  $f$ , 可以考虑它的 Taylor 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Taylor 级数中的前  $n$  阶部分和称为函数  $f$  在点  $a$  处的  $n$  次 Taylor 多项式

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

记

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

其中  $R_n(x)$  称为 Taylor 级数的余项.

**定理 4.3.1: 积分型余项**

若  $a \in I$  为开区间,  $f \in C^{n+1}(I)$ , 则

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

解. 这个定理的数学归纳法证明是容易的, 略. 另一种证法使用 Newton-Leibniz 公式, 把  $R_n(x)$  看成  $x$  与  $a$  的二元函数  $R_n(x, a)$ , 然后对  $a$  求导. 得到

$$\frac{dR_n(x, a)}{da} = - \left( f'(a) + f''(a)(x-a) - f'(a) + \dots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!} (x-a)^n - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} \right) = - \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

因为  $R_n(x, x) = 0$ , 所以

$$R_n(x, a) = R_n(x, x) + \int_x^a \frac{dR_n(x, a)}{da} da = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt.$$

□

**定理 4.3.2: Weighted Mean Value Theorem for Integrals**

若  $f, g \in C[a, b]$ , 且  $g$  在  $[a, b]$  上不变号, 则存在  $c \in [a, b]$  使得

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

**定理 4.3.3: Lagrange 型余项**

设  $I$  为开区间, 若  $f \in C^{n+1}(I)$ ,  $a, x \in I$ , 则在  $a$  和  $x$  之间存在  $c$  使得

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

**4.3.2 不常用的**

用 **Bolzano-Weierstrass** 定理直接证明连续函数的有界性定理

**定理 3.4.1 (有界性定理)** 设  $f \in C[a, b]$ , 则  $f$  在  $[a, b]$  上有界.

**证法一:** 反证法, 取  $|f(x_n)| \geq n$ , 由聚点定理  $\Rightarrow x_{n_k} \rightarrow x_0 \in [a, b]$ ,  $f$  连续使得  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$  有界, 矛盾.

**证法二:** 连续点  $x$  处有邻域  $U_x(\delta_x)$ , 使得其上  $|f - f(x)| \leq 1$ , 这样的  $(U_x)$  形成  $[a, b]$  的覆盖, 用有限覆盖定理.

**定理 4.3.4**

如果可分空间  $X$  中的任何序列有收敛子列, 则  $X$  上的任何连续实值映射都是有界的.

解. 只证明  $f$  有上界的情况.

设  $(x_n)_n$  为空间  $X$  的稠子集,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  为连续映射.

构造序列  $(k_n)_n$ : 对于任意的  $n$ , 序列  $(x_n)_n$  的前  $n$  项必然存在  $k \leq n$  满足  $f(x_k) = \max\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ . 将这样的  $k$  记为  $k_n$ .

按照上面的构造, 对于任何  $n$  都有

$$f(x_{k_n}) \geq \max\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}.$$

所以  $(f(x_{k_n}))_n$  是关于  $n$  的递增数列.

构造子列  $(z_n)_n$ : 按照定理的条件, 序列  $(x_{k_n})_n$  有收敛子列, 记为  $(z_n)_n$ , 并设  $z_n \rightarrow z, n \rightarrow \infty$ .

因为  $(z_n)_n \subseteq (x_{k_n})_n$ , 所以对于任意的  $k_i$ , 有充分大的角标  $j$ , 比如  $j > k_i$ , 使  $z_j$  对应的  $x_{k_n}$  的角标比  $x_{k_i}$  的大, 从而由  $(f(x_{k_n}))_n$  的单调性, 有  $f(z_j) \geq f(x_{k_i})$ . 由于  $(z_n)_n$  是收敛序列,  $f$  是连续函数, 所以存在  $m > 0$ , 使得对于任意的  $n$ , 有  $f(z_n) \leq f(z) + m$ .

最后, 对于任意的  $x \in X$ . 由  $f$  的连续性, 以及  $(x_n)_n$  在  $X$  中稠密, 所以存在  $x_i$  满足  $f(x) \leq f(x_i) + 1$ .

综合以上所有结论,

$$f(x) \leq f(x_i) + 1 \leq \max\{f(x_1), \dots, f(x_i)\} + 1 \leq f(x_{k_i}) + 1 \leq f(z_j) + 1 < f(z) + m + 1.$$

所以  $f$  有上界.

□

### Cesàro and Abel Summability

考虑序列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$ , 它的部分和记为

$$s_n = a_0 + \cdots + a_n.$$

有时, 序列  $\{s_n\}$  不收敛, 所以这里从另一个角度来研究部分和. 注意当  $a_n$  收敛时,  $\frac{s_n}{n}$  也收敛, 并与  $a_n$  的极限一致, 不要将此性质与序列的 Cesàro 和混淆, 注意区分  $\frac{s_n}{n}$  和  $\sigma_n$  表达式上的不同. 定义  $\{a_n\}$  的 Cesàro 和如下

$$\sigma_n = \frac{1}{n}(s_0 + \cdots + s_{n-1}).$$

这和对于不收敛的序列  $\{a_n\}$  可能是收敛的. 对于任意的  $r \in [0, 1)$ , 可以考虑加权得到 Abel 和

$$A(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k,$$

当  $\lim_{r \rightarrow 1^-} A(r)$  存在且有限时, 称这个极限为序列  $\{a_n\}$  的 Abel 极限. Abel 求和公式变换上式有

$$\sum_{k=0}^N a_k r^k = (1-r) \sum_{k=0}^N s_k r^k + s_N r^{N+1}.$$

当  $N \rightarrow +\infty$ , 有  $s_N r^{N+1} \rightarrow 0$  时. Abel 和不是别的, 就是序列  $s_k$  的带权  $(1-r)r^k$  的和.

**性质:** 部分和序列收敛蕴含 Cesàro 和收敛, Cesàro 和收敛蕴含 Abel 和收敛.

**证明:** 1. 证明主要是对下面的和式拆分进行描述说明, 其中  $s_n \rightarrow s, n \rightarrow +\infty$ .

$$\sigma_n - s = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} (s_k - s) + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^{n-1} (s_k - s).$$

2. 当  $r < 1$  时, 容易得到

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k = (1-r)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} k \sigma_k r^{k-1}, \quad r \in (0, 1).$$

设  $\sigma_n \rightarrow s, n \rightarrow +\infty$ . 注意下式的分解

$$(1-r)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} k \sigma_k r^{k-1} - s = (1-r)^2 \sum_{k=1}^{N-1} k r^{k-1} (\sigma_k - s) + (1-r)^2 \sum_{k=N}^{+\infty} k r^{k-1} (\sigma_k - s).$$

序列不收敛, 但 Cesàro 和收敛的例子

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots.$$

Cesàro 和不收敛但 Abel 和收敛的例子

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots.$$

1897 年, Tauber 给出了 Abel 和收敛可以推出原序列收敛的一个充分条件.

#### 定理 4.3.5: Tauber, 1897

设序列  $\{a_k\}$  为复数列, 假设

$$A(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k$$

对于任意的  $r \in (0, 1)$  收敛. 若  $A(r) \rightarrow A, r \rightarrow 1^-$ . 且  $ka_k = o(1)$ , 则有

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = A.$$

解. 因为  $\sum a_k r^k \rightarrow A, r \rightarrow 1^-$ , 只需证

$$\sum_{k=0}^N a_k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \rightarrow 0$$

沿着  $r = 1 - \frac{1}{N}, N \rightarrow +\infty$  成立即可. 对于任意的  $\epsilon > 0$ , 存在  $K$  使得, 只要  $k > K$ , 就有  $|ka_k| > \epsilon$ . 于是记

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N a_k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k &= \sum_{k=0}^K a_k (1 - r^k) + \sum_{k=K+1}^N a_k (1 - r^k) - \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k r^k \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

显然, 当  $N \rightarrow +\infty$  时有  $I_1 \rightarrow 0$ . 对于  $I_2$ , 有

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq (1-r) \sum_{k=K+1}^N |a_k| (1 + \cdots + r^{k-1}) \\ &\leq (1-r) \sum_{k=K+1}^N |ka_k| \\ &\leq (1-r) N \epsilon \leq \epsilon, \end{aligned}$$

注意上式中的  $r$  是沿着  $1 - \frac{1}{N}$  趋向于 1. 对于  $I_3$ , 有

$$|I_3| \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} |ka_k| \frac{r^k}{k} < \frac{\epsilon}{N+1} \sum_{k=0}^{+\infty} r^k < \epsilon.$$

□

Littlewood, 1911 年将上面定理的  $o(1)$  弱化为  $\mathcal{O}(1)$ . Tauberian 定理一般用来从级数的 Abel 可和性推出实可和性.

**Remark:** 对于正项级数, 以上三种收敛是互相等价的. 事实上,  $s_n$  是递增的必有极限, (极限可能是  $+\infty$ ), 从而 Cesàro 和与 Abel 和有相同的极限.

#### 定理 4.3.6: 关于有界, 无界的充分条件

- (1)  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  存在, 则  $\exists \delta > 0$ , 当  $-\delta < x - x_0 < 0$  时,  $f(x)$  有界; 对  $x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow x_0$  有类似结论.
- (2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  存在, 则存在  $X > 0$ , 当  $|x| > X$  时,  $f(x)$  有界.  $x \rightarrow \pm\infty$  有类似结论.
- (3)  $f(x) \in C[a, b]$ , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界.
- (4)  $f(x)$  在集  $U$  上有最大(小)值, 则  $f(x)$  在  $U$  上有上(下)界.
- (5) 有界函数间的和, 积运算封闭.
- (6)  $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = \infty$ , 则  $f(x)$  在  $\square$  的空心邻域内无界.  $\square$  可为  $x_0, x_0^-, x_0^+, \infty, \pm\infty$ .

#### 定理 4.3.7: Stolz 定理

证明: 若

- (a)  $y_{n+1} > y_n (n \in \mathbb{N}_+)$ ;
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ ;
- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$  存在.

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

**定理 4.3.8: Cauchy 定理**

若函数  $f(x)$  定义于区间  $(a, +\infty)$ , 并且在每一个有限区间  $(a, b)$  内是有界的, 则

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)];$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}, (f(x) \geq C > 0),$$

假定等是右端的极限都存在且可为  $\pm\infty$ .

**问题: 对于上下极限是否仍有类似结论?**

**定理 4.3.9**

假设  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , 每个在  $[a, b]$  上均可积, 且  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ ,  $n \rightarrow \infty$ . 则  $f(x)$  可积, 且

$$\int_a^b f \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, dx.$$

解. 类似 2.5.36

□

**定理 4.3.10: (一致收敛级数) 逐项积分**

$u_k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , 对每个  $k \in \mathbb{N}_+$  均可积,  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛. 则  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  可积, 且

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) \, dx.$$

解. 让  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$  并用 4.3.9

□

**定理 4.3.11: 逐项微分**

设  $u_k: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ , 每项均有连续导数 (端点处单边可微), 若有:

(i)  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$  在某些点  $x_0 \in [a, b]$  收敛.

(ii)  $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛到  $f(x)$ .

则

(1)  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  在  $[a, b]$  上收敛且和函数  $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  在  $[a, b]$  上可微且  $F'(x) = f(x)$ .

(2)  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \Rightarrow F(x)$ .

解. (1).  $u'_k$  连续 ( $k \in \mathbb{N}_+$ ),  $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k \Rightarrow f$ , 则  $f \in C[a, b]$ , 所以  $f$  在  $[a, b]$  上可积. 让  $x \in [a, b]$ , 对  $u'_k$  和  $f$  在区间  $[x_0, x]$  上使用 4.3.10, (或  $[x, x_0]$ , 如果  $x < x_0$ ), 则有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u'_k(x) \, dx = \int_{x_0}^x f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (u_k(x) - u_k(x_0)).$$

由假设 (i),  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$  收敛, 所以级数  $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k(x)$  对任意  $x \in [a, b]$  均收敛, 所以  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  是良定义的, 于是  $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(x) \, dx$ , 由  $f$  连续, 两边求导, 便有  $F'(x) = f(x)$ .

(2). Cauchy 判别法, 取  $\varepsilon > 0$ , 则  $\exists N_1$  使任意  $n \geq m \geq N_1$  有

$$\left| \sum_{k=m}^n u_k(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

存在  $N_2$  使任意  $n \geq m \geq N_2$  有

$$\left| \sum_{k=m}^n u'_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad x \in [a, b]$$

故可取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ ,  $g(x) = \sum_{k=m}^n u_k(x)$ , 则  $g(x) - g(x_0) = g'(\xi)(x - x_0)$ . 于是

$$|g(x)| \leq |g(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |g'(\xi)| \cdot |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

故由 Cauchy 判别法,  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  一致收敛. □

#### 定理 4.3.12: 求导与极限的交换

函数列  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ , 在  $[a, b]$  上连续可微,  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ .  $f'_n(x) \Rightarrow \varphi(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , 则  $f$  可微且  $f'(x) = \varphi(x)$ , 从而  $f_n \Rightarrow f$ .

解. 取  $u_1 = f_1$ ,  $u_n = f_n - f_{n-1}$ ,  $n > 1$ , 并用 4.3.11. □

#### 定理 4.3.13

若  $a_n \geq 0$ , 且级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  不减, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$  同敛散。

## 4.4 实变函数论

### 定理 4.4.1: the Cantor-Schröder-Bernstein theorem

Claim: A given set  $X$  and its power set  $\mathcal{P}(X)$  can never be in bijection.

解. By contradiction. Let  $f$  be any function from  $X$  to  $\mathcal{P}(X)$ . It suffices to prove  $f$  cannot be surjective.

That means that some member of  $\mathcal{P}(X)$ , i.e. some subset of  $X$ , is not in the image of  $f$ . Consider the set:

$$T = \{x \in X : x \notin f(x)\}.$$

For every  $x$  in  $X$ , either  $x$  is in  $T$  or it is not.

If  $x$  is in  $T$ , then by definition of  $T$ ,  $x$  is not in  $f(x)$ , so the set  $T$  can not be the set  $f(x)$  (because  $x \in T$  but  $x \notin f(x)$ ).

On the other hand, if  $x$  is not in  $T$ , then by definition of  $T$ ,  $x$  is in  $f(x)$ , so again the set  $T$  can not be the set  $f(x)$ .

We just proved that  $T$  is NOT  $f(x)$  for any  $x$ , and so  $f$  is not surjective. □



## 4.5 微分方程

## 定理 4.5.1: 伯努力方程

$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^n$ , 其中  $p(x), q(x)$  是所考虑区域上的连续函数,  $n (\neq 0, 1)$  是常数.

解.

- (1) 当  $n > 0$  时,  $y = 0$  是方程的解.
- (2) 当  $y \neq 0$  时, 两边同除以  $y^n$ , 令  $z = y^{1-n}$ , 即得一阶线性方程.

□

## 定理 4.5.2

设  $y_1(x)$  和  $y_2(x)$  是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个线性无关解, 齐次边值问题

$$\begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0; \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0; \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

存在非平凡解 (即不恒等于零的解) 当且仅当

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) & \alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) \\ \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) & \alpha_2 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b) \end{vmatrix} = 0$$

## 4.6 泛函分析

### 定理 4.6.1: Arzela-Ascoli 定理

设  $\{f_n\}$  是  $[0, 1]$  上一致有界, 等度连续函数族, 则存在某一子序列  $\{f_{n(i)}\}$  在  $[0, 1]$  上一致收敛.

### 定理 4.6.2: Hahn-Banach, $\mathbb{R}$ -version

设  $\mathcal{X}$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的向量空间,  $q: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  是拟半范数. 若给定线性子空间  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$  和其上的线性映射  $\phi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ , 使得

$$\phi(y) \leq q(y), \forall y \in \mathcal{Y}.$$

则存在线性映射  $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  满足

$$(i) \quad \varphi|_{\mathcal{Y}} = \phi;$$

$$(ii) \quad \varphi(x) \leq q(x), \forall x \in \mathcal{X}.$$

解. 先证  $\mathcal{X}/\mathcal{Y} = 1$  的情况. 即有  $x_0 \in \mathcal{X}$  使得

$$\mathcal{X} = \{y + sx_0 : y \in \mathcal{Y}, s \in \mathbb{R}\}.$$

于是只需找到  $\alpha \in \mathbb{R}$  使得映射  $\varphi(y + sx_0) = \phi(y) + s\alpha, \forall y \in \mathcal{Y}, s \in \mathbb{R}$  满足条件 (ii), 于是  $s > 0$  时有

$$\alpha \leq q(z + x_0) - \phi(z), \forall z \in \mathcal{Y}, z = s^{-1}y, s > 0$$

对于  $s < 0$  时有

$$\alpha \geq \phi(w) - q(w - x_0), \forall w \in \mathcal{Y}, w = t^{-1}y, s < 0$$

然而  $\phi(w) - q(w - x_0) \leq q(z + x_0) - \phi(z), \forall w, z \in \mathcal{Y}$  恒成立. 然后用 Zorn 引理. □

### 未知 4.6.1: Hahn-Banach 定理, $\mathbb{C}$ -version

设  $\mathcal{X}$  是复数域  $\mathbb{C}$  上的向量空间,  $q: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  是  $\mathcal{X}$  上的拟半范数, 给定线性子空间  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$  和  $\mathcal{Y}$  上的线性映射  $\phi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{C}$  使得

$$\operatorname{Re} \phi(y) \leq q(y), \quad \forall y \in \mathcal{Y}.$$

则存在线性映射  $\psi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$  满足:

$$(i) \quad \psi|_{\mathcal{Y}} = \phi;$$

$$(ii) \quad \operatorname{Re} \psi(x) \leq q(x), \forall x \in \mathcal{X}.$$

解. 设  $\phi_1 = \operatorname{Re} \phi$ , 因  $\phi_1$  是  $(\mathcal{Y}, \mathbb{R})$  上的线性映射且被拟半范数  $q$  控制, 则由  $\mathbb{R}$ -Hahn Banach 定理,  $\phi_1$  可延拓到  $(\mathcal{X}, \mathbb{R})$  上的实线性映射  $\psi_1$  且满足

$$(i') \quad \psi_1|_{\mathcal{Y}} = \phi_1;$$

$$(ii') \quad \psi_1(x) \leq q(x), \forall x \in \mathcal{X}.$$

但注意这里用的是实的 Hahn Banach 定理, 所延拓的  $\psi_1$  是针对实向量空间  $(\mathcal{X}, \mathbb{R})$  的, 要得到复向量空间的  $\psi_1$ , 则在  $(\mathcal{Y}, \mathbb{C})$  上考虑  $\psi_1(y) = \phi_1(y)$ , 但新定义的  $\psi_1$  是实域上的线性映射, 而不是复域上的线性映射, 显然所求线性映射  $\psi$  的实

部  $\operatorname{Re}\psi$  在实线性空间中也满足以上两条件. 若取  $\operatorname{Re}\psi = \psi_1$ , 则  $\psi$  在实的情况已满足条件 (ii). 而  $\operatorname{Im}\psi(y) = \operatorname{Re}(-i\psi(y)) = \operatorname{Re}\psi(-iy) = \psi_1(-iy)$ , 于是  $\psi(y) = \psi_1(y) + i\psi_1(-iy)$ , 要证  $\psi|_{\mathcal{Y}} = \phi$ , 只需证  $\operatorname{Im}\psi(y) = \operatorname{Im}\phi(y), \forall y \in \mathcal{Y}$ , 然而

$$\operatorname{Im}\phi(y) = \operatorname{Re}(-i\phi(y)) = \operatorname{Re}(\phi(-iy)) = \phi_1(-iy) = \psi_1(-iy) = \operatorname{Im}\psi(y).$$

最后证明线性映射  $\psi(x) = \psi_1(x) + i\psi_1(-ix)$  在复域上满足 (ii), 注意这里的  $\psi_1(-ix)$  是怎么定义的? □

## 4.7 拓扑

### 定理 4.7.1: 杨忠道定理

证明: 拓扑空间中的每一子集的导集为闭集的充分必要条件是此空间中的每一个单点集的导集为闭集.

解. 只证充分性. 设拓扑空间  $X$  的每一个单点集的导集为闭集, 任意  $A \subset X$ , 设  $x \in d(d(A))$ , 对  $x$  的任意开邻域  $U$ , 有  $U \cap (d(A) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ , 因  $d(\{x\})$  是闭集, 且  $x \notin d(\{x\})$ , 令  $V = U \setminus d(\{x\})$ ,  $V$  是  $x$  的开邻域, 从而有

$$y \in V \cap (d(A) \setminus \{x\}).$$

由  $y \in V$ ,  $y \notin d(\{x\})$ , 且  $y \neq x$ , 于是存在  $W \in \mathcal{U}_y$ , 使得  $x \notin W$ , 因  $V \in \mathcal{U}_y$ , 令  $K = W \cap V$ ,  $K \in \mathcal{U}_y$ , 由  $y \in d(A)$ , 存在  $z \in K \cap (A \setminus \{y\}) \neq \emptyset$ . 由  $z \in K \subset W$ ,  $z \neq x$ , 因此  $z \in U \cap (A \setminus \{x\})$ , 故  $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ , 即  $x \in d(A)$ , 所以  $d(d(A)) \subset d(A)$ ,  $d(A)$  为闭集. □

## 4.8 数论

### 定理 4.8.1: 恒等定理

设  $f(x), g(x) \in D[x]$ , 若有无穷多个  $\alpha \in D$  使  $f(\alpha) = g(\alpha)$ , 则  $f(x) = g(x)$ .

### 定理 4.8.2: 拉格朗日定理

设  $f(x)$  是整系数多项式, 模  $p$  的次数为  $n$ , 则同余方程

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p} \quad (4.1)$$

至多有  $n$  个互不相同的解.

解.  $n=1$  时结论显然成立, 对  $n$  归纳. 假设  $n-1$  时已正确, 当  $f$  的次数是  $n$  时, 若同余方程无解, 则无需证明. 若  $x=a$  是一个解, 用  $(x-a)$  除  $f(x)$  得  $f(x) = g(x)(x-a) + A$ , ( $A \in \mathbb{Z}$ ), 若同余方程 (4.1) 除  $x \equiv a \pmod{p}$  外无解, 则证毕, 否则设  $x=b$  是 (4.1) 的另一个解, 且  $a \not\equiv b \pmod{p}$ , 则

$$0 \equiv f(b) = g(b)(b-a) + A \pmod{p}, \text{ 又由 } 0 \equiv f(a) = g(a)(a-a) + A = A \pmod{p}.$$

所以  $g(b) \equiv 0 \pmod{p}$ , 这表明 (4.1) 的解除  $x \equiv a \pmod{p}$  之外, 其余的解均是  $g(x) \equiv 0 \pmod{p}$  的解, 但  $g(x)$  模  $p$  的次数显然是  $n-1$ , 由归纳假设,  $g(x) \equiv 0 \pmod{p}$ , 至多有  $n-1$  个互不同余的解, 从而同余方程 (4.1) 至多有  $n$  个解. □

### 定理 4.8.3: 整系数多项式的有理根

$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ ,  $n \geq 1$ ,  $a_n a_0 \neq 0$  且  $(a_n, \cdots, a_0) = 1$ , 若  $\frac{b}{c}$  是  $f(x)$  的一个有理根 ( $b, c = 1$ ), 则  $c \mid a_n, b \mid a_0$ . 特别地, 首项系数为  $\pm 1$  的整系数多项式的有理根必是整数.

解. 由  $f(\frac{b}{c}) = 0$ , 得  $a_nb^n + \cdots + a_1bc^{n-1} + a_0c^n = 0$ , 所以  $a_0 \mid b, a_n \mid c$ .

一种证明有理数是整数的证明途径: 证复数是整数, 先证其是有理数, 且找到作为零点的首一多项式.  $\square$

#### 定理 4.8.4: Gauss 引理

$\mathbb{Z}[x]$  中两个本原多项式的乘积仍是一个本原多项式.

解. 反证法,  $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_0, g(x) = b_mx^m + \cdots + b_0$ , 若  $f(x)g(x)$  不是本原多项式, 则有素数  $p$  整除  $f(x)g(x)$  的所有系数. 设  $r$  是  $a_i$  不被  $p$  整除的最小角标,  $s$  是  $b_i$  不被  $p$  整除的最小角标, 则  $f(x)g(x)$  的  $x^{r+s}$  项系数不能被  $p$  整除.  $\square$

#### 定理 4.8.5: 艾森斯坦判别法

设  $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_0$  是一个整系数多项式, 其中  $n \geq 1$ . 若存在一个素数  $p$ , 使得  $p \nmid a_n, p \mid a_i (i = 0, 1, \cdots, n-1)$ , 但  $p^2 \nmid a_0$ , 则  $f(x)$  在  $\mathbb{Z}$  上不可约.

#### 定理 4.8.6: 科恩定理

设  $p = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}$  是一个十进制素数,  $0 \leq a_i \leq 9 (i = 0, 1, \cdots, n), a_n \neq 0$ . 则多项式

$$f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0.$$

在  $\mathbb{Z}$  上不可约.

解. 先用 ??, 再用 ??.

#### 定理 4.8.7

Every nonzero integer can be written as a product of primes.

解. Assume that there is an integer that cannot be written as a product of primes. Let  $N$  be the smallest positive integer with this property. Since  $N$  cannot itself be prime we must have  $N = mn$ , where  $1 < m, n < N$ . However, since  $m$  and  $n$  are positive and smaller than  $N$  they must each be a product of primes. But then so is  $N = mn$ . This is a contradiction.

The proof can be given in a more positive way by using mathematical induction. It is enough to prove the result for all positive integers. 2 is a prime. Suppose that  $2 < N$  and that we have proved the result for all numbers  $m$  such that  $2 \leq m < N$ . We wish to show that  $N$  is a product of primes. If  $N$  is a prime, there is nothing to do. If  $N$  is not a prime, then  $N = mn$ , where  $2 \leq m, n < N$ . By induction both  $m$  and  $n$  are products of primes and thus so is  $N$ .  $\square$

#### 定理 4.8.8: $m$ 进 (m-adic) 表示

正整数  $m \geq 2, \forall a \in \mathbb{N}_+$ , 有表示  $a = a_0 + a_1m + \cdots + a_sm^s$ .

#### 定理 4.8.9: Bézout's identity (贝祖等式)

任意两整数  $a, b (b \neq 0)$  的正最大公因子  $d = (a, b)$  唯一存在, 而且存在整数  $u, v$  使得  $ua + vb = d$ ,  $u, v$  称为 Bézout 系数, Bézout 系数不唯一, 若设  $a' = \frac{a}{d}, b' = \frac{b}{d}$ , 则恰有两系数对满足  $|u| < |b'|, |v| < |a'|$ .

解. 若  $a > b, a = bq + r$ , 则  $(a, b) = (r, b)$ , 于是由辗转相除法的逆过程可得  $u, v$ .  $\square$

解. 不用辗转相除法.  $M = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ ,  $d$  是  $M$  中的最小正整数 (自然数良序性). 则若  $d = ax_0 + by_0$  知  $(a, b) \mid d$ , 所以

只需证  $d \mid (a, b)$ . 若  $d \nmid a$ , 取  $a = dq + r$ , 则  $r = a\hat{x}_0 + b\hat{y}_0 < d$  与  $d$  的选取矛盾.  $\square$

#### 推论 4.8.1

$a, b$  互素等价于: 存在整数  $u, v$  使  $ua + vb = 1$ .

$a, b \in \mathbb{Z}$ , 则:

$$\begin{aligned}(a, b) = d &\Rightarrow \{am + bn \mid m, n \in \mathbb{Z}\} = \{dk \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &\Rightarrow a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z} \\ &\Rightarrow (a, b) = (d)\end{aligned}$$

#### 推论 4.8.2: Bézout 等式

任  $s$  个非零整数  $a_1, \dots, a_s$  的最大公因子  $d = (a_1, \dots, a_s)$  存在唯一, 且  $(a_1, \dots, a_{s-1}, a_s) = ((a_1, \dots, a_{s-1}), a_s)$ , 且存在整数  $u_1, \dots, u_s$  使,  $u_1 a_1 + \dots + u_s a_s = d$ .

#### 定理 4.8.10

$v_p(n)$  是使得  $p^k \parallel n$  的整数  $k$ . 则

$$v_p(n!) = \sum_k \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

#### 定理 4.8.11: 威尔逊定理

$p$  是素数, 则有  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ .

解. 当  $p=2$  时, 命题显然. 若  $p \geq 3$ , 由于对每个与  $p$  互素的  $a$  在模  $p$  下均有逆  $a^{-1}$ . 故可得  $1, 2, \dots, p-1$  的每个与其逆配对, 而特别的当  $a = a^{-1}$  时是例外. 此时对应  $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$  有解  $a=1$  或  $a=p-1$ , 而  $2, \dots, p-2$  可两两配对使积为 1. 所以  $(p-1)! \equiv 1 \cdot (p-1) \equiv -1 \pmod{p}$ .  $\square$

解. 用 Euler 恒等式

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} i^n = \begin{cases} 0, & n < m \\ (-1)^n n!, & n = m \end{cases}$$

取  $m = n = p-1$ , 当  $p > 2$  时及 Fermat 小定理有

$$(-1)^{p-1} \cdot (p-1)! \equiv \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \binom{p-1}{i} i^{p-1} \equiv \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \binom{p-1}{i} \equiv -1 \pmod{p}.$$

$\square$

解. 当  $p \geq 3$  时, 由 Fermat 小定理  $p-2$  次同余方程

$$f(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-p+1) - x^{p-1} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

有  $p-1$  个不同得解, 所以  $f(x)$  的系数模  $p$  余零, 所以常数项  $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ .  $\square$

## 4.9 不等式

### 定理 4.9.1: Generalized Schur Inequality

设六个非负实数  $a, b, c, x, y, z$  满足  $(a, b, c)$  和  $(x, y, z)$  均单调, 则

$$\sum_{cyc} x(a-b)(b-c) \geq 0.$$

解. 不妨设  $a \geq b \geq c$ , 分  $x \geq y \geq z$  与  $x \leq y \leq z$  两种情况分别讨论. □

### 推论 4.9.1

记  $S = \sum_{cyc} x(a-b)(a-c)$ . 下面几条条件的任何一个均可证明  $S \geq 0$ .

- (1) 当  $a \geq b \geq c \geq 0, x \geq y \geq 0$  且  $z \geq 0$  时.
- (2) 当  $a \geq b \geq c \geq 0, z \geq y \geq 0$  且  $x \geq 0$  时.
- (3) 当  $a \geq b \geq c \geq 0$ , 且  $ax \geq by \geq 0$  或者  $by \geq cz \geq 0$  时.

解. (1) 和 (2) 显然, 对于 (3) 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{abc}(x(a-b)(a-c) + y(b-a)(b-c) + z(c-a)(c-b)) \\ &= ax\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + by\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + cz\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right). \end{aligned}$$

便转化为前面的两种情况了. □

### 定理 4.9.2: Cauchy 不等式

对于欧式空间中任意向量  $\alpha, \beta$  都有

$$|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha||\beta|.$$

而且即当  $\alpha$  与  $\beta$  线性相关时等号成立.

### 定理 4.9.3: 三角形不等式

对欧式空间中任意向量  $\alpha, \beta$  有

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

对欧式空间中任意向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  都有

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_m|.$$

## 4.10 MSE

### 定理 4.10.1: MSE5

Theorem (JHC)  $r = \sqrt{n}$  is integral if rational, for  $n \in \mathbb{N}$

解. Put  $r = \frac{A}{B}$ , least  $B > 0$ .  $\sqrt{n} = \frac{n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{nB}{A}$ . Taking fractional parts yields  $\frac{b}{B} = \frac{a}{A}$  for  $0 \leq b < B$ . But  $B \nmid A \Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{a}{b}$  contra  $B$  least. QED  $\square$

#### 定理 4.10.2: MSE5

Theorem (WGD)  $r = \sqrt{n}$  is integral if rational, for  $n \in \mathbb{N}$

解. Put  $r = \frac{A}{B}$ , least  $B > 0$ .  $\sqrt{n} = \frac{n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{nB}{A} \Rightarrow B \mid A$  by this key result:  $\square$

#### 定理 4.10.3: MSE5

Unique Fractionization The least denominator  $B$  of a fraction divides every denominator.

解.  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow \frac{D}{B} = \frac{C}{A}$ . Taking fractional parts  $\frac{b}{B} = \frac{a}{A}$  where  $0 \leq b < B$ . But  $B \nmid D \Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{a}{b}$  contra leastness of  $B$ . Thus  $B \mid D$  as claimed QED  $\square$





## 第五章 TODOList

这里列举没有找到的文献

- G·波利亚的《数学与猜想》，目前只有第一卷的电子版.
- G·波利亚的《数学的呃发现》.
- G·波利亚的《数学与猜想》.



## 参考文献

- [PH] The Man Who Loved Only Numbers, The Story of Paul Erdos and The Search for Mathematical Truth; Paul Hoffman; 1999.
- [YN] 数域的上同调; 尤尔根·诺伊基希, 亚历山大[德], 哈尔滨工业大学.
- [TH] Holder不等式及其应用; 田景峰, 哈明虎, 清华大学.
- [HKZ2013on] Hu, W., Kukavica, I., Ziane, M.: On the regularity for the Boussinesq equations in a bounded domain, J. Math. Phys. 54(8), 081507, 10 (2013)
- [T1997Inf] R. Temam, Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Applied Mathematical Sciences Vol. 68 (Springer, 1997).
- [MJQ] 梅加强. 数学分析[M]. 高等教育出版社, 2011.
- [ZYC] 张运筹. 三角不等式及应用[M]. 上海教育出版社.