紧算子

May 23, 2022

紧算子是一种特殊的线性算子.
为什么研究紧算子?
一个主要原因是, 紧算子可以用有限秩算子(finite rank operator)逼近, 便于对算子方程的解做数值逼近.

命题 1. 若H是无穷维*Hilbert*空间, 算子$A \in CL(H)$, 且$\|A\| < 1$, 则对于任何$y \in H$, 存在唯一的$x \in H$满足

$$(I - A)x = y.$$

这个解x可以由*Neumann*级数

$$x = (I - A)^{-1}y = (I + A + A^2 + \cdots)y$$

给出.

上面的解有两种缺点:
1. 计算A^n是不现实的.
2. 级数收敛速度不理想.

1 紧算子

定义 1. (紧算子) 设X, Y是赋范空间, 线性变换$T : X \to Y$称为是紧算子, 若对于任何有界序列$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, 序列$(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$有收敛子列.

记从X到Y的所有紧算子形成集合为$K(X, Y)$.

定理 1. 设X, Y是赋范空间, $T : X \to Y$是线性变换, 则以下命题等价:
(1). T是紧的.
(2). $\overline{T(B)}$是紧的, 其中B是X中的单位球, 即

$$B \coloneqq \{x \in X : \|x\| \le 1\}.$$

Proof. (1)$\Longrightarrow$(2). 也就是证$\overline{T(B)}$中的序列$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$有收敛子列.
(2)$\Longrightarrow$(1). 即证X中有界序列(x_n), 使$(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$有收敛子列. □

2 紧算子集$K(X, Y)$

推论 1. $K(X, Y) \subseteq CL(X, Y)$.

Proof. 紧算子将X中的单位球映为Y中的紧集, 从而是Y中的有界集, 即这紧算子是有界算子, 线性有界算子是连续的. □

例 1. 不是所有连续线性变换都是紧的.

解答. 设X为任一无穷维内积空间, 比如l^2. 其上的恒等算子$I \in CL(X)$不是紧算子.
因为I映X中正交基$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$的像没有收敛子列.

定义 2. 称算子T是有限秩算子(finite rank operator), 如果它的值域$\mathrm{ran}(T)$是有限维向量空间.

定理 2. 设X是赋范空间, Y是内积空间, 若$T \in CL(X, Y)$使$\mathrm{ran}(T)$是有限维的, 则T是紧算子.

Proof. 设有界序列$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, $u_1, \cdots, u_m$为$\mathrm{ran}(T)$的正交基.
则$(\langle Tx_n, u_l\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$对于任何$l$有界, 类似聚点定理的证明. □

例 2. $L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) = CL(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) = K(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$.

解答. 若$A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, 则$T_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $x \mapsto Ax$满足$T_A \in CL(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$, 且因为$\mathrm{ran}T_A \subseteq \mathbb{C}^m$, T_A是有限秩的. 故T_A是紧算子.

特别地, 恒等算子$I : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$是紧算子.

定理 3. $K(X, Y)$是$CL(X, Y)$的子空间, 其中X, Y均为赋范空间.

Proof. 1. 0是紧算子, 因为对于任何有界序列$(x_n) \subseteq X$, $(0x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$是收敛的.

2. 若T, S均是紧算子, 设$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$有界, 则$(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$有子列$(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$收敛.
$(Sx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$有子列$(Sx_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$收敛.
故子列$\left((T + S)x_{n_{k_l}}\right)_{l\in\mathbb{N}}$收敛, 即说明$T + S$是紧算子.

3. 若T是紧算子, $\alpha \in \mathbb{K}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$为有界序列, 则$(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$有收敛子列$(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.
因此$((\alpha T)x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (\alpha(Tx_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$收敛, 故$\alpha T$是紧算子. □

定理 4. 设X是赋范空间, Y是*Banach*空间, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K(X, Y)$在赋范空间$CL(X, Y)$中收敛于$T \in CL(X, Y)$. 则$T$是紧算子, 即$T \in K(X, Y)$, $K(X, Y)$是$CL(X, Y)$的闭线性子空间.

Proof. 1. 设$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$是X中有界序列, 则由$(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K(X, Y)$, 知
$(T_1x_n)_{n\in\mathbb{N}}$有收敛子列$\left(T_1x_n^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$;
$\left(T_2x_n^{(1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$有收敛子列$\left(T_2x_n^{(2)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$;
...
考虑序列x_1, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(2)}$, $\cdots$, 则

$$\left\{x_{k+1}^{(k)}, x_{k+2}^{(k+1)}, x_{k+3}^{(k+2)}, \cdots\right\} \text{ 是序列 } \left\{x_{k+1}^{(k)}, x_{k+2}^{(k)}, x_{k+3}^{(k)}, \cdots\right\} \text{ 的子列.}$$

因$\left(T_kx_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$收敛, 从而$\left(T_kx_{k+n+1}^{(k+n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$也收敛, 即$\left(T_kx_{n+1}^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$收敛.

2. 对于任意的$m, n \in \mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned}
\left\|Tx_{n+1}^{(n)} - Tx_{m+1}^{(m)}\right\| &\le \left\|Tx_{n+1}^{(n)} - T_kx_{n+1}^{(n)}\right\| + \left\|T_kx_{n+1}^{(n)} - T_kx_{m+1}^{(m)}\right\| + \left\|T_kx_{m+1}^{(m)} - Tx_{m+1}^{(m)}\right\| \\
&\le \|T - T_k\| \cdot \left\|x_{n+1}^{(n)}\right\| + \left\|T_kx_{n+1}^{(n)} - T_kx_{m+1}^{(m)}\right\| + \|T_k - T\| \cdot \left\|x_{m+1}^{(m)}\right\| \\
&\to 0, \qquad m, n \to \infty.
\end{aligned}$$

故$\left(Tx_{n+1}^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$在$Y$中是Cauchy列, 由$Y$是Banach空间, 它在$Y$中收敛.

由$\left(Tx_{n+1}^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$是$(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$的子列, 故$T$是紧算子. □

推论 2. 设X是赋范空间, Y是*Hilbert*空间, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq CL(X, Y)$是有限秩算子, 且在$CL(X, Y)$中收敛于$T$, 则$T$是紧算子.

例 3. (什么时候l^2中的对角算子是紧算子)

设$X, Y = l^2$, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$在域$\mathbb{K}$中有界, $\Lambda \in CL(l^2)$定义为

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots).$$

则$\|\Lambda\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|$, 下面证明$\Lambda$是紧算子当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

解答. $\Longleftarrow$: 取$n \in \mathbb{N}$, 算子$\Lambda_n = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n, 0, \cdots) \in CL(l^2)$, 则$\Lambda_n$是有限秩算子, $\mathrm{ran}\Lambda_n \subseteq \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$.
从而Λ_n是紧算子, 而

$$\|\Lambda - \Lambda_n\| = \|\mathrm{diag}(0, \cdots, 0, \lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \cdots)\| = \sup_{k:k>n} |\lambda_k| \to 0, \quad n \to \infty.$$

即Λ是紧算子序列$(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$的强极限(一致极限, uniform limit), 故Λ是紧算子.

$\Longrightarrow$: 反证, 设Λ是紧算子, 但存在$\epsilon > 0$, 使对于任意的$N \in \mathbb{N}$, 存在$n > N$使得$|\lambda_n| \ge \epsilon$.
取$N = 1$, 则存在$n_1 > 1$, 使得$|\lambda_{n_1}| \ge \epsilon$.
取$N = n_1$, 则存在$n_2 > n_1$, 使得$|\lambda_{n_2}| \ge \epsilon$.
...
则有$(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$的子列$(\lambda_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, 使$|\lambda_{n_k}| \ge \epsilon$, 对于任何$k \in \mathbb{N}$. 于是$(\Lambda e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (\lambda_{n_k}e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$没有收敛子列.
与Λ是紧算子矛盾.

练习 1. (Hilbert Schmidt算子是紧算子)

设H是Hilbert空间, 有标准正交基$\{u_1, u_2, u_3, \cdots\}$.

设$T \in CL(H)$是Hilbert-Schmidt算子, 即满足$\sum_{n=1}^{\infty} \|Tu_n\|^2 < +\infty$.

(1) 若$m \in \mathbb{N}$, 则定义$T_m : H \to H$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{m} \langle x, u_n \rangle Tu_n$. 则$T_m \in CL(H)$且满足

$$\|(T - T_m)x\|^2 \leq \|x\|^2 \sum_{n=m+1}^{\infty} \|Tu_n\|^2 .$$

这是因为$x = \sum_n \langle x, u_n \rangle u_n$, $Tx = \sum_n \langle x, u_n \rangle Tu_n$.

(2) 证明每个Hilbert-Schmidt算子T是紧算子.

Hint: T是有限秩算子序列$(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$的强极限.

练习 2. 设H是Hilbert空间, $x_0, y_0 \in H$给定, 定义$x_0 \otimes y_0 : H \to H$, $x \mapsto \langle x, y_0 \rangle x_0$.

(1) 证明$x_0 \otimes y_0 \in CL(H)$, 且$\|x_0 \otimes y_0\| \leq \|x_0\| \cdot \|y_0\|$.

(2) $x_0 \otimes y_0$是否为紧算子.

(3) 设$A, B \in CL(H)$, 证明$A(x_0 \otimes y_0)B = (Ax_0) \otimes (B^* y_0)$.

定义 3. (代数中的理想)

代数R中的理想I是R的一个子集, 且满足:

(I1). $0 \in I$.

(I2). 若$a, b \in I$, 则$a + b \in I$.

(I3). 若$a \in I$, $r \in R$, 则$ar \in I$且$ra \in I$.

定理 5. 设H是*Hilbert*空间, 则

(1). 若$T \in K(H)$是紧算子, $S \in CL(H)$, 则TS是紧算子.

(2). 若$T \in CL(H)$是紧算子, 则T^*是紧算子.

(3). 若$T \in CL(H)$是紧算子, $S \in CL(H)$, 则ST是紧算子.

即$K(H)$是$CL(H)$的闭理想.

Proof. (2). 用(1)知, TT^*是紧算子, 并注意以下不等式

$$\begin{aligned} 0 \leq \|T^* x_m - T^* x_n\|^2 &= \langle TT^*(x_m - x_n), (x_m - x_n) \rangle \\ &\leq \|TT^*(x_m - x_n)\| \cdot \|x_m - x_n\| . \end{aligned}$$

(3).

$$\left.\begin{array}{r} T\text{紧} \xrightarrow{(2)} T^*\text{紧} \\ S \in K(H) \longrightarrow S^* \in CL(H) \end{array}\right\} \xrightarrow{(1)} T^*S^*\text{紧} \xrightarrow{(2)} (T^*S^*)^* = S^{**}T^{**} = ST\text{紧}.$$

□

例 4. (无穷维Hilbert空间中的紧算子不可逆)

设H是无穷维Hilbert空间, $T \in K(H)$, 若$T \in CL(H)$可逆, 则$T^{-1} \in CL(H)$, 由定理5知

$$I = TT^{-1} \in K(H).$$

但I在H中并不是紧算子, 矛盾.

练习 3. 设$T \in CL(H)$, H是无穷维Hilbert空间.

(1). 举例H和T, 使得T^2是H上的紧算子, 但T不是紧算子.

(2). 证明: 若T是自伴的, T^2是紧算子, 则T是紧算子. (Hint: 才用定理5中(2)的证明.)

练习 4. 设H是无穷维Hilbert空间, $S, T \in CL(H)$, 判断以下命题是否正确:

(1). 若S, T均是紧算子, 则$S + T$是紧算子. √

(2). 若$S + T$紧, 则S或T紧. ×

(3). 若S或T紧, 则ST紧. √

(4). 若ST紧, 则S紧或T紧. ×

练习 5. 设H是Hilbert空间, $A \in CL(H)$, 定义$\Lambda \in CL(CL(H))$: $CL(H) \to CL(H)$, $T \mapsto A^*T + TA$. 证明$CL(H)$的子空间$K(H)$是Λ-不变子空间, 即$\Lambda K(H) \subseteq K(H)$.

Hint: 用定理5

3 紧算子的逼近

考虑方程$(I-K)x=y$, 其中K是Hilbert空间H上给定的算子, $y\in H$给定, 求$x\in H$的问题.

用有限秩算子逼近, 设K_0与K接近, y_0与y很接近, 求x_0的问题$(I-K_0)x=y_0$是容易的.

下面估计$\|x-x_0\|$的大小.

定理 6. 设H是*Hilbert*空间, $K\in CL(H)$使$I-K$在$CL(H)$中可逆, $K_0\in CL(H)$满足

$$\epsilon := \left\|(K-K_0)(I-K)^{-1}\right\|.$$

则对于任意的$y,y_0\in H$, 存在唯一的$x,x_0\in H$满足:

(a). $(I-K)x=y$;

(b). $(I-K_0)x_0=y_0$;

(c). $\|x-x_0\|\le \frac{\left\|(I-K)^{-1}\right\|}{1-\epsilon}(\epsilon\|y\|+\|y-y_0\|)$.

Proof. 由$\left\|(K-K_0)(I-K)^{-1}\right\|<1$, Neumann级数定理给出$I+(K-K_0)(I-K)^{-1}$可逆, 故

$$I-K_0=I-K+K-K_0=\left(I+(K-K_0)(I-K)^{-1}\right)(I-K)$$

可逆, 从而

$$\left\|(I-K_0)^{-1}\right\|\le\frac{\left\|(I-K)^{-1}\right\|}{1-\left\|(K-K_0)(I-K)^{-1}\right\|}=\frac{\left\|(I-K)^{-1}\right\|}{1-\epsilon}.$$

由

$$(I-K)^{-1}-(I-K_0)^{-1}=(I-K_0)^{-1}(K-K_0)(I-K)^{-1}$$

有

$$\left\|(I-K)^{-1}-(I-K_0)^{-1}\right\|\le\frac{\left\|(I-K)^{-1}\right\|}{1-\epsilon}\cdot\epsilon,$$

故(a), (b)解得$x,x_0\in H$存在唯一, 且

$$x-x_0=\left((I-K)^{-1}-(I-K_0)^{-1}\right)y+(I-K_0)^{-1}(y-y_0)$$

有

$$\|x-x_0\|\le\frac{\epsilon\left\|(I-K)^{-1}\right\|}{1-\epsilon}\cdot\|y\|+\frac{\left\|(I-K)^{-1}\right\|}{1-\epsilon}\cdot\|y-y_0\|$$

即得. □

定理 7. *(Galerkin逼近)*

设H是*Hilbert*空间, K是H上的紧算子, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$为有限秩投影算子$(P_n^2=P_n=P_n^*\in CL(H))$, 且$P_n$强收敛于$I$, 即对于任意的$x\in H$, $\lim_{n\to\infty}P_nx=x$, 则$P_nKP_n\to K$ *in* $CL(H)$.

Proof. 以此证明:

(1). $P_nK\to K$ in $CL(H)$, (投影逼近)(projection approximation)

(2). $KP_n\to K$ in $CL(H)$, (sloan approximation)

(3). $P_nKP_n\to K$ in $CL(H)$. (Galerkin逼近)

(1): 注意

$$\|P_nx\|^2=\langle P_nx,P_nx\rangle\le\|P_nx\|\cdot\|x\|\Longrightarrow\|P_n\|\le 1.$$

反证$P_nK\not\to K$ in $CL(H)$, 则$\exists\epsilon>0$, s.t. $\forall N\in\mathbb{N}$, $\exists n>N$, s.t. $\|P_nK-K\|>\epsilon$.

从而有$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, 使$\|x_{n_k}\|\le 1$, $\|(P_{n_k}K-K)x_{n_k}\|>\epsilon$, 由$K$紧, 取$Kx_{n_{k_l}}\to y$ in H. 故

$$\begin{aligned}\epsilon<\left\|(P_{n_k}K-K)x_{n_{k_l}}\right\|&=\left\|\left(P_{n_{k_l}}-I\right)y+\left(P_{n_{k_l}}-I\right)\left(Kx_{n_{k_l}}-y\right)\right\|\\&\le\left\|\left(P_{n_{k_l}}-I\right)y\right\|+\left\|P_{n_{k_l}}-I\right\|\cdot\left\|Kx_{n_{k_l}}-y\right\|\to 0.\end{aligned}$$

矛盾.

(2): 因K是紧算子, 故K^*紧, 由(1), $P_n^*K^*=P_nK^*\to K^*$ in $CL(H)$. 从而

$$\|KP_n-K\|=\left\|(KP_n-K)^*\right\|=\|P_nK^*-K^*\|\to 0,\qquad n\to\infty.$$

(3):

$$\begin{aligned}\|P_nKP_n-K\|&=\|P_n(KP_n-K)+P_nK-K\|\\&\le\|P_n\|\cdot\|KP_n-K\|+\|P_nK-K\|\to 0.\end{aligned}$$

□

4 紧算子的谱定理

定理 8. *(紧自伴算子的谱定理)*

设H是*Hilbert*空间, $T = T^* \in K(H)$有有限秩, 则存在正交特征向量u_n, $n \in \mathbb{N}$与相应的特征向量λ_n, $n \in \mathbb{N}$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, 且对于任意的$x \in H$, 有

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, u_n \rangle u_n.$$

先证几个引理.

引理 1. 若$T = T^* \in CL(H)$, 则

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| .$$

Proof. 设$M := \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$, 则易证$M \le \|T\|$. 下证$\|T\| \le M$.

注意

$$\begin{aligned}\langle T(x+y), x+y\rangle &= \langle Tx, x\rangle + 2\mathrm{Re}\,\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, y\rangle \\ \langle T(x-y), x-y\rangle &= \langle Tx, x\rangle - 2\mathrm{Re}\,\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, y\rangle\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}4\mathrm{Re}\,\langle Tx, y\rangle &= \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle \\ &\le M\|x+y\|^2 + M\|x-y\|^2 \\ &= 2M\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).\end{aligned}$$

取$\theta \in \mathbb{R}$, 用$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}y$代替$y$使

$$\mathrm{Re}\,\langle Tx, y\rangle = \langle Tx, y\rangle \le \frac{M}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

当$Tx = 0$, 或$x = 0$时, $\|Tx\| \le M \cdot \|x\|$, 显然成立.

当$Tx \ne 0$, 且$x \ne 0$时, 则取$y := \dfrac{\|x\|}{\|Tx\|}Tx$, 有

$$\|Tx\| \cdot \|x\| \le M \cdot \|x\|^2 \Longrightarrow \|T\| \le M.$$

特别地, 当T是紧算子时, 存在$x \in H$, $\|x\| = 1$使

$$|\langle Tx, x\rangle| = \|T\| = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle .$$

□

引理 2. 若H是非平凡*Hilbert*空间, $T = T^* \in K(H)$. 则$\|T\|$或$-\|T\|$之一为T的特征值.

Proof. 不妨设$T \ne 0$. 由于T是自伴的, 故$\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$, 取$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\|x_n\| = 1$, 不妨证$\langle Tx_n, x_n\rangle \to \lambda = \|T\|$, $n \to \infty$. 则

$$\begin{aligned}0 \le \|Tx_n - \lambda x_n\|^2 &= \|Tx_n\|^2 - 2\lambda\langle Tx_n, x_n\rangle + \lambda^2 \\ &\le \|T\| - 2\lambda\langle Tx_n, x_n\rangle + \lambda^2 \to 0, \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

故$Tx_n - \lambda x_n \to 0$, 由T紧, $Tx_{n_k} \to y$, 则$x_{n_k} \to \dfrac{y}{\lambda}$, 再由$T$连续,

$$y = \lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = T\frac{y}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}Ty.$$

而

$$\|y\| = \lim_{k\to\infty} \|\lambda x_{n_k}\| = \lambda \ne 0.$$

□

引理 3. 设H是*Hilbert*空间, $T = T^* \in CL(H)$, Y是H中T-不变闭子空间, 则

(1). $Y^\perp$*也是*T*-不变子空间;*

(2). T*在Hilbert空间*$Y^\perp$*上的限制*$T|_{Y^\perp} : Y^\perp \to Y^\perp$*也是自伴的;*

(3). *若*T*是紧的, 则*$T|_{Y^\perp}$*也紧.*

Proof. (1). 对于任意的$z \in Y^\perp$, 有$Tz \in Y^\perp$.

(2). $Y^\perp$是Hilbert空间中的闭子空间, 也是Hilbert空间.

(1)推出$Y^\perp$是T-不变子空间, 所以$T|_{Y^\perp}$是良定的.

最后由T自伴推出$T|_{Y^\perp}$自伴.

(3). 设$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y^\perp$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$有界, $(Tz_{n_k}) \subseteq Y^\perp$收敛于$z \in H$.

由$Y^\perp$是H的闭子空间, 所以$z \in Y^\perp$. □

Proof. (谱定理的证明)

设$H := H$, $T_1 := T$.

则引理2推出存在λ_1, u_1, s.t. $|\lambda_1| = \|T_1\|$, $\|u_1\| = 1$, $T_1 u_1 = \lambda_1 u_1$.

取$H_2 := (\text{span}\,\{u_1\})^\perp$为$H_1$的闭子空间, 是$T$-不变子空间, 让$T_2 = T|_{H_2}$, 则$T_2$是紧自伴的.

故存在λ_2, u_2, s.t. $|\lambda_2| = \|T_2\|$, $\|u_2\| = 1$, $T_2 u_2 = \lambda_2 u_2$且

$$|\lambda_2| = |\langle T_2 u_2, u_2\rangle| = \langle Tu_2, u_2\rangle \le \|T\| = |\lambda_1|.$$

综上, $\{u_1, u_2\}$是正交的, 且$Tu_1 = \lambda_1 u_1$, $Tu_2 = \lambda_2 u_2$.

取$H_3 := (\text{span}\,\{u_1, u_2\})^\perp$为$H_2$的闭子空间, 是$T$-不变子空间, 让$T_3 = T|_{H_3}$, 则$T_3$是紧自伴的.

故存在λ_3, u_3, s.t. $|\lambda_3| = \|T_3\|$, $\|u_3\| = 1$, $T_3 u_3 = \lambda_3 u_3$, 且

$$|\lambda_3| = |\langle T_3 u_3, u_3\rangle| = |\langle T_2 u_3, u_3\rangle| \le \|T_2\| = |\lambda_2|.$$

如此下去, 有$H_n := (\text{span}\,\{u_1, \cdots, u_{n-1}\})^\perp$, $H_n \ne 0$, 否则对于任何$x \in H$,

$$x - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x, u_k\rangle u_k \in H_n = \{0\}.$$

故

$$Tx = \sum_{k=1}^{n-1} \langle x, u_k\rangle Tu_k, \qquad \forall x \in H.$$

与T是无穷秩算子矛盾.

下面证明$|\lambda_n| \to 0$, $n \to \infty$. 否则

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| =: \epsilon > 0,$$

则取$n \ne m$时

$$\|Tu_n - Tu_m\|^2 = \|\lambda_n u_n - \lambda_m u_m\|^2 = \lambda_n^2 + \lambda_m^2 \ge 2\epsilon^2,$$

与T是紧算子矛盾.

最后证

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, u_k\rangle u_k, \qquad \forall x \in H.$$

即, 对于任意的x, $x - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \langle x, u_k\rangle u_k \in H_n$与不等式

$$\begin{aligned}
\left\| Tx - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \langle x, u_k\rangle u_k \right\| &= \left\| T\left(x - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x, u_k\rangle u_k \right) \right\| \\
&\le \|T_n\| \cdot \left\| x - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x, u_k\rangle u_k \right\| \\
&\le |\lambda_n| \cdot \|x\| \to 0, \qquad n \to \infty.
\end{aligned}$$

□

练习 6. 设H是无穷维Hilbert空间, $T = T^* \in K(H)$是双射, 则T的特征向量形成H中的一组基.

Proof. 只需证T是无穷秩的, 用线性相关性和双射反证, 然后用紧自伴算子的谱定理. □

练习 7. 设H是Hilbert空间, 设$T = T^* \in K(H)$有无穷秩, 且是正算子, 即

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0, \qquad \forall x \in H.$$

证明T有平方根, 即算子$\sqrt{T} \in CL(H)$使$\left(\sqrt{T}\right)^2 = T$.

Proof. 用谱定理, T的所有特征根$\lambda_n \geq 0$, 构造算子$S : H \to H$, 满足对于任意的$x \in H$, 有

$$Sx \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \langle x, u_n\rangle u_n,$$

则$S^2 = T$. □