# Chapter 1

# 高中笔记8

## 1.1 读书笔记

康托尔: 德, 数学家, 集合论的创造人, 他证明了一条直线上的点和一个平面上的点一一对应, 也能和空间中的点一一对应. 因此1cm长的线段内的点与太平洋面上的点以及整个地球内部的点都"一样多". 他对这类"无穷集合"问题发表了一系列文章, 通过严格证明得出了许多惊人的结论.

罗素悖论: 又称理发师悖论: 某村只有一人会理发, 且该村的人都需要理发, 理发师约定, 给且只给村中自己不给自己理发的人理发, 试问: 理发师给不给自己理发.

阿贝尔: 椭圆函数论的创始人之一, 发现了椭圆函数的加法定理, 双周期性. 在交换群, 二项级数的严格理论, 级数求和等有巨大贡献, 还有阿贝尔积分, 阿贝尔积分方程, 阿贝尔函数, 阿贝尔级数, 阿贝尔部分和公式, 阿贝尔收敛判别法, 阿贝尔可和性.

分形: 龙的曲线是由一个等腰直角三角形开始的, 以该等腰直角三角形的直角边为斜边作另外的等腰直角三角形, 如此往后, 并将其斜边删除掉即可.

群论: 伽罗瓦是第一个使用群并系统地研究群的数学家. 他19岁时, 用群的思想解决了五次方程的问题. 逐渐开创了一个新的数学分支–抽象代数学. 它包括群论, 环论, 域论, 布尔代数等.

说谎者悖论: 公元前4世纪, 希腊哲学家也提出:"我现在正在说的这句话是谎话". 另外公元前6世纪, 古希腊克里特岛的哲学家伊壁门尼德斯断言:"所有克里特人所说的每一句话都是谎话."

干下去还有50%成功的希望, 不干便是100%的失败.

$A = x + y + z$($A$:成功, $x$: 艰苦的劳动, $y$: 正确的方法, $z$: 少说空话)–爱因斯坦的公式.

埃托色尼的筛法提的求小于给定数$N$的所有素数的方法: 先从3写出所有小于$N$的奇数, 再从中划去$3, 5, 7, 11\cdots$的倍数.

球体填充问题: 把一大堆乒乓球倒进一个箱内, 倒至最后还剩几个, 使箱内乒乓球数目最多. 称为球体填充问题, 亦称开普勒猜想.

查: 吴文俊的"吴示性类", "吴示嵌类".

药剂师的砝码: 将300g药粉分成100g和200g各一份, 可是天平只有30g和35g两个砝码, 只需分两次即可, 分两步: 一, 将30g砝码放一盘上, 把300g药粉倒在两个盘上, 使之平衡, 于是, 一盘药粉为165g, 另一盘135g; 第二步将35g砝码, 从135g药粉中称出35g$\cdots$.

罗氏几何的公理系统与欧氏几何公理不同之处是: 平行公理: "用直线外一点, 至少可做两条直线与已知直线平行"来代替, 这引出了一连串和欧氏几何内容不同的新的几何命题.

## 1.2 球面几何

**定义 1.2.1: 大圆**

一个过球心的平面在球面上的截线叫做球面上的一个大圆.

**定义 1.2.2: 球面二面角**

球面上任两个大圆都相交于对顶的两点, 一对对顶点与连接它们的两条大圆弧(半个大圆弧)围成的图形称为球面二面角(梭形).

**定义 1.2.3: 球面角**

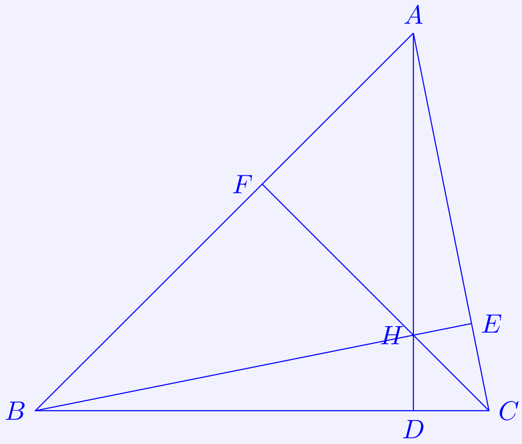
球面上一点及过该点的任意两条大圆弧所构成的图形称为球面角, 这两条大圆弧的切线间的夹角即为该球面角的大小.

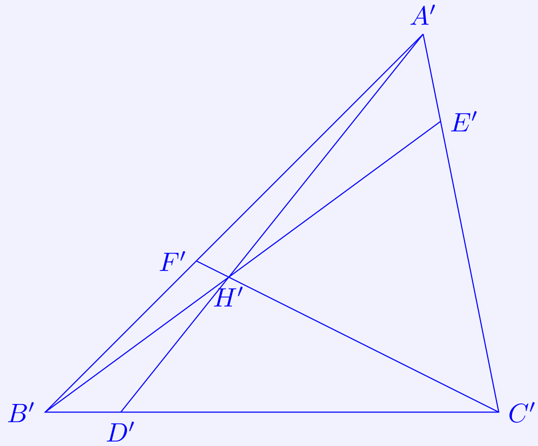
**定义 1.2.4: 球面三角形**

在半径为$R$的球面上相距小于$\pi R$的给定三点$A, B, C$唯一地确定了三条小于半圆的大圆圆弧$\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$.

**定义 1.2.5: 伴垂心**

如下左图是$\triangle ABC$的垂心的定义, 如下右图与$\triangle ABC$全等, 若$B'D' = CD$, $C'E' = AE$, $AF = B'F'$, 则$\triangle A'B'C'$中的三线共点$H'$为$\triangle A'B'C'$的伴垂心.




**定理 1.2.1: 球面三角形余弦定理**

对于任给半径为$R$的球面三角形$\triangle ABC$, 其三边$a, b, c$和三角$\angle A, \angle B, \angle C$之间恒满足:

$$\cos\frac{a}{R^2} = \cos\frac{c}{R^2}\cos\frac{b}{R^2} + \sin\frac{b}{R^2}\sin\frac{c}{R^2}\cos\angle A,$$
$$\cos\frac{b}{R^2} = \cos\frac{a}{R^2}\cos\frac{c}{R^2} + \sin\frac{c}{R^2}\sin\frac{a}{R^2}\cos\angle B,$$
$$\cos\frac{c}{R^2} = \cos\frac{b}{R^2}\cos\frac{a}{R^2} + \sin\frac{a}{R^2}\sin\frac{b}{R^2}\cos\angle C.$$

**定理 1.2.2: 球面三角形正弦定理**

条件同上, 有$\frac{\sin\angle A}{\sin\frac{a}{R^2}} = \frac{\sin\angle B}{\sin\frac{b}{R^2}} = \frac{\sin\angle C}{\sin\frac{c}{R^2}}$.

## 1.3 不等式集

**问题 1.3.1**

已知$0 \le a_k \le 1 (k = 1, 2, \cdots, 2002)$, 记$a_{2003} = a_1$, $a_{2004} = a_2$, 求$\sum_{k=1}^{2002}(a_k - a_{k+1}\cdot a_{k+2})$的最大值.

解.

$$\sum_{k=1}^{2002}(a_k - a_{k+1}\cdot a_{k+2}) = \sum_{k=1}^{2002}(a_k - a_k a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{2002} a_k(1 - a_{k+1}).$$

Cauchy不等式, 上式右端不超过

$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{2002}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{2002}(1-a_{k+1})^2\right)}\le\frac{\sum a_k^2+\sum(1-a_{k+1})^2}{2}=\frac{\sum a_k^2+\sum(1-a_k)^2}{2}=\frac{\sum(2a_k^2-2a_k+1)}{2}.$$

因为$2a_k^2-2a_k+1\le 1$, 所以原式不超过$\frac{1}{2}\sum 1=1001$, 当$a_k=0$或1时取等号, 即当$a_1=a_3=a_5=\cdots=a_{2001}=1$且$a_2=a_4=\cdots=a_{2002}=0$时取等号. □

解. 由$0\le a_k\le 1$, 得$(1-a_k)(1-a_{k+1})=1-(a_k+a_{k+1})+a_ka_{k+1}\ge 0(k=1,2,\cdots,2002)$, 所以$1\ge a_k+a_{k+1}-a_ka_{k+1}\ge a_k+a_{k+1}-2a_ka_{k+1}$, 从而$2002\ge\sum_{k=1}^{2002}(a_k+a_{k+1}-2a_ka_{k+1})=2\sum(a_k-a_{k+1}a_{k+2})$, 即$\sum(a_k-a_{k+1}a_{k+2})\le 1001$. □

**问题 1.3.2**

求函数$y=x+\sqrt{x(2-x)}$的最值及此时$x$的值.

解. 显然$x\in[0,2]$, 所以可设$x=2\sin^2\theta(\theta\in\mathbb{R})$, 运用$|a\sin\theta+b\cos\theta|\le\sqrt{a^2+b^2}$即可. □

**问题 1.3.3**

设$n$是给定的正整数, $n\ge 13$, 对$n$个给定的实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$, 记$|a_i-a_j|(1\le i<j\le n)$有最小值$m$, 求在$\sum_{i=1}^n a_i^2=1$的条件下, $m$的最大值.

解. 不妨设$a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$, 于是$a_2-a_1\ge m,a_3-a_2\ge m,\cdots,a_n-a_{n-1}\ge m$, $a_j-a_i\ge(j-i)m(1\le i<j\le n)$.

$$\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2\ge m^2\times\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)^2=m^2\sum_{k=1}^{n-1}k(2k+1)(k+1)=\frac{m^2}{12}\cdot n^2(n^2-1).$$

另一方面, $\sum_{i=1}^n a_i^2=1$可得

$$\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2=n-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\le n.$$

故$n\ge\frac{m^2}{12}n^2(n^2-1)$, 所以$m\le\sqrt{\frac{12}{n^2(n^2-1)}}$, 当且仅当$\sum_{i=1}^n a_i=0$, 且$a_1,a_2,\cdots,a_n$成等差数列时取等号. □

**问题 1.3.4**

若$x,y,z>0$且$x^2+y^2+z^2=1$, 则$S=\frac{(z+1)^2}{2xyz}$取最小值时, $x$的值是多少?

解. $\sqrt{\sqrt{2}-1}$. □

**引理 1.3.1**

设$T\ge 0$, $x,y,z\ge 0$, 则$T\ge\sum x$的充要条件为:

$$(T^2-\sum x^2)^2-8\prod x\cdot T-4\sum y^2z^2\ge 0 \tag{1.1}$$
$$T^2\ge\sum x^2. \tag{1.2}$$

解. 若$T\ge\sum x$, 则1.2式明显成立, 且

$$(T+\sum x)(T^2-\sum x^2+2\sum yz)-8\prod x\ge 2\sum x\cdot 4\sum yz-8\prod x\ge 0.$$

根据

$$(T^2-\sum x^2)^2-8\prod x\cdot T-4\sum y^2z^2=(T-\sum x)\left[(T+\sum x)(T^2-\sum x^2+2\sum yz)-8\prod x\right] \tag{1.3}$$

知1.1式成立. 若1.1, 1.2式成立, 则

$$(T+\sum x)(T^2-\sum x^2+2\sum yz)-8\prod x \geq (\sqrt{\sum x^2}+\sum x)\cdot 2\sum yz-8\prod x \geq (\sqrt{3}+3)(\prod x)^{\frac{1}{3}}\cdot 6(\prod x)^{\frac{2}{3}}-8\prod x \geq 0.$$

根据1.3式知$T\geq \sum x$. □

由引理即得

**定理 1.3.1**

设$T\geq 0$, $x,y,z\geq 0$, 记$f=(T^2-\sum x^2)^2-8\prod x\cdot T-4\sum y^2z^2$, 则

(i) 若$f\geq 0$, $\sum x^2\leq T^2$, 则$\sum x\leq T$;

(ii) 若$f\leq 0$, 则$\sum x\geq T$.

**问题 1.3.5**

$$\sum \cos\frac{A}{2}\leq 2+\frac{s}{4R}+\frac{9\sqrt{3}-16}{4R}r.$$

解. 设$m=\frac{s}{4R}$, $n=\frac{r}{2R}$. 则$\sum \cos^2\frac{A}{2}=2+n$, $\prod \cos\frac{A}{2}=\frac{m}{2}$. 进而

$$\sum \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}=\frac{1}{4}(4+4n+m^2+n^2).$$

令$T=2+\frac{m}{2}+\frac{9\sqrt{3}-16}{2}n$, $x=\cos\frac{A}{2}$, $y=\cos\frac{B}{2}$, $z=\cos\frac{C}{2}$, 用定理1.3.1中结论(i). □

**问题 1.3.6**

设实数$a,b,c,d$, 满足$a^2+b^2+c^2+d^2=5$, 求$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2$的最大值.

解. 设$f=(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2=15-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+\lambda(a^2+b^2+c^2+d^2-5)$, 所以$f_a=-2(b+c+d)+2a\lambda$, $f_b=-2(a+c+d)+2b\lambda$, $f_c=-2(a+b+d)+2c\lambda$, $f_d=-2(a+c+d)+2b\lambda$, $f_\lambda=a^2+b^2+c^2+d^2-5$, 令$f_a=f_b=f_c=f_d=f_\lambda=0$, 解得$\lambda=-1$或$a=b=c=d$. 当$\lambda=-1$时, $a+b+c+d=0$得$f=20$. 当$a=b=c=d$时, $f=0$, 所以$f_{\max}=20$. □

**问题 1.3.7**

如果$x>0$, $y>0$, $z>0$且$x^2+y^2+z^2=1$, 求$\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}$的最小值.

解. 设$\frac{yz}{x}=a$, $\frac{xz}{y}-b$, $\frac{xy}{z}=c$, 则 $ab+bc+ca=1$, 所以$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca=1$, 所以$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\geq 3$, 另外令$f=a+b+c+\lambda(ab+bc+ca-1)$, 令 $f_a=1+(b+c)\lambda=0$, $f_b=1+(a+c)\lambda=0$, $f_c=1+(a+b)\lambda=0$, 所以$a=b=c$时最小. □

**问题 1.3.8**

设$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$满足$a_0=\frac{1}{2}$, $a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n}a_k^2$, $k=0,1,2,\cdots,n-1$, 其中$n$是一个给定的正整数, 试证: $1-\frac{1}{n}<a_n<1$.

解. $a_n>a_{n-1}>a_{n-2}>\cdots>a_2>a_1>a_0=\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}=\frac{1}{n+a_k}<\frac{1}{n}\implies\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}<1,$$
$$\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}=\frac{1}{n+a_k}>\frac{1}{n+1}\implies\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}>\frac{n}{n+1}.$$

□

**问题 1.3.9**

当$a>1$时, 若不等式$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{7}{12}\left[\log_{a+1}x-\log_a x+1\right]$对于不小于2的正整数$n$恒成立, 求$x$的取值范围.

解. $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$递增, $x$的取值范围为$(1,+\infty)$. □

**问题 1.3.10**

实数集$\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, 满足以下条件:

(1) $a_1=a_n=0$.

(2) 对$1\le k\le n-1$, 有$a_k=c+\sum_{i=k}^{n-1}a_{i-k}(a_i+a_{i+1})$.

证明: $c\le\frac{1}{4n}$.

解. 定义$S_k=\sum_{i=0}^{k}a_i(k=0,1,2,\cdots,n)$, 则

$$\begin{aligned}
S_n&=\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{n-1}a_{k-1}=nc+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=k}^{n-1}a_{i-k}(a_i+a_{i+1})\\
&=nc+\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+a_{i+1})\cdot\sum_{k=0}^{i}a_{i-k}\\
&=nc+\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+a_{i+1})\sum_{t=0}^{i}a_t,(t=i-k)\\
&=nc+\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+a_{i+1})\cdot S_i\\
&=nc+[S_1S_0+(S_2-S_0)S_1+(S_3-S_1)S_2+\cdots+(S_n-S_{n-2})S_{n-1}]
\end{aligned}$$

即$S_n^2-S_n+nc=0$, $\Delta\ge0\Longrightarrow c\le\frac{1}{4n}$. □

**问题 1.3.11**

若关于$x$的不等式$\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+\frac{1}{\log_3 a}\ge0$, 求$a$的取值范围.

解. 令$u=x^2+ax+5$, $\frac{\log_3(\sqrt{u}+1)}{-\log_3 a}\cdot\log_5(u+1)+\frac{1}{\log_3 a}\ge0$. 因为$f(4)=1$, 所以$a=2$. □

**问题 1.3.12**

设$a_1,a_2,\cdots,a_{2002}>0$且$\sum\frac{1}{2+a_i}=\frac{1}{2}$, 求$\prod a_i$的最小值.

解. 令$x_i=\frac{2}{2+a_i}$, 则$\sum x_i=1$, 则$a_i=2\cdot\frac{1-x_i}{x_i}$, 因为

$$\begin{aligned}
\prod a_i&=2^{2002}\prod\frac{1-x_i}{x_i}\\
&=2^{2002}\cdot\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{2002}}\prod(x_1+x_2+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_{2002})\\
&\ge2^{2002}\cdot\frac{1}{x_ix_2\cdots x_{2002}}\cdot2001^{2002}\cdot\prod\sqrt[2001]{x_1x_2\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_{2002}}\\
&=4002^{2002}.
\end{aligned}$$

□

**问题 1.3.13**

求最小的正数$\lambda$, 使得对任意正整数$n$, $a_i$和$b_i$, $b_i\in[1,2](i=1,2,\cdots,n)$, 且$\sum_{i=1}^n a_i^2=\sum b_i^2$, 都有$\sum\frac{a_i^3}{b_i}\le\lambda\cdot\sum a_i^2$.

解. 对任意$c_i,b_i\in[1,2]$, 有$\frac{1}{2}\le\frac{c_i}{b_i}\le 2$, 即$\frac{1}{2}b_i\le c_i\le 2b_i$, 从而$\left(\frac{1}{2}b_i-c_i\right)(2b_i-c_i)\le 0$, 即$c_i^2+b_i^2\le\frac{5}{2}c_ib_i$, 两边对$i$从1到$n$求和, 得$\sum c_i^2+\sum b_i^2\le\frac{5}{2}\sum c_ib_i$, 设$a_i,b_i\in\left[1,\frac{2}{3}\right]$, 因$a_i^2=\frac{a_i^{\frac{3}{2}}}{b_i^{\frac{1}{2}}}\cdot a_i^{\frac{1}{2}}\cdot b_i^{\frac{1}{2}}$. 又

$$\frac{1}{2}\le\frac{\frac{a_i^{\frac{3}{2}}}{b_i^{\frac{1}{2}}}}{a_i^{\frac{1}{2}}\cdot b_i^{\frac{1}{2}}}\le 2.$$

故有$\frac{5}{2}\sum a_i^2\ge\sum\frac{a_i^3}{b_i}+\sum a_ib_i\ge\sum\frac{a_i^3}{b_i}+\frac{2}{5}(\sum a_i^2+\sum b_i^2)=\sum\frac{a_i^3}{b_i}+\frac{4}{5}\sum a_i^2$, 即$\sum\frac{a_i^3}{b_i}\le\frac{17}{10}\sum a_i^2$, 当$n=2$, $a_1=1$, $a_2=2$, $b_1=2$, $b_2=1$时取等号. □

**问题 1.3.14**

已知: $x,y,z\in\mathbb{R}^*$, 有$xyz=1$且满足$x(1+z)>1$, $y(1+x)>1$, $z(1+y)>1$, 求证: $2(x+y+z)\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+3$.

解. 令$x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, $z=\frac{c}{a}$, 则$a+c>b$, $a+b>c$, $b+c>a$, 要证$2(x+y+z)\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+3$, 只需证

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+3\Longleftrightarrow 2(a^2c+b^2a+c^2b)\ge b^2c+c^2a+a^2b+3abc.$$

因为

$$(a+b-c)(b-c)^2\ge 0,\quad (b+c-a)(c-a)^2\ge 0,\quad (c+a-b)(a-b)^2\ge 0$$

展开相加, 即得. □

**问题 1.3.15**

已知正整数$n\ge 2$, 若对同时满足条件:

(1) $a_1a_2\cdots a_n=b_1b_2\cdots b_n$;

(2) $\sum_{1\le i<j\le n}|a_i-a_j|\le\sum_{1\le i<j\le n}|b_i-b_j|$的任意正数$a_1,\cdots,a_n$与$b_1,\cdots,b_n$, 总有$\sum_{i=1}^n a_i\le\lambda\sum_{i=1}^n b_i$. 试求正数$\lambda$的最小值.

解. 一方面, 取$(a_1,\cdots,a_n)=(1,1,\cdots,(1+x)x^{n-1})$, $(b_1,\cdots,b_n)=(1+x,x,x,\cdots,x)$, 满足(1)与(2), 此时$\lambda\ge\frac{\sum a_i}{\sum b_i}=\frac{n-1+x^{n-1}+x^n}{1+nx}$, 令$x\to 0$, 则$\lambda\ge n-1$.

以下证明$\lambda=n-1$时, 不等式成立.

不妨设$a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n$, $b_1\ge b_2\ge\cdots\ge b_n$, $n=2$时, 显然成立.

设$n\ge 3$,

(1) 若$a_1\le\frac{n-1}{n}b_1$, 则$\sum a_i\le na_1\le(n-1)b_1\le(n-1)\sum b_i$.

(2) 若$a_1>\frac{n-1}{n}b_1$, 则

$$\begin{aligned}2(b_2+\cdots+b_n)&\ge 2(n-1)\cdot(b_2\cdots b_n)^{\frac{1}{n-1}}=2(n-1)\left(\frac{a_1}{b_1}a_2\cdots a_n\right)^{\frac{1}{n-1}}\\&\ge 2(n-1)\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{\frac{1}{n-1}}\cdot a_n>2(n-1)\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\cdot a_n\\&\ge na_n.\end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
(n-1)\sum b_i &= (n-1)b_1+(n-3)\sum_{i=2}^{n} b_i+2\sum_{i=2}^{n} b_i \\
&\geq (n-1)b_1+(n-3)\sum_{i=2}^{n} b_i+na_n \geq [(n-1)b_1+(n-3)b_2+\cdots-(n-1)b_n]+na_n \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq n}|b_i-b_j|+na_n \geq \sum_{1\leq i<j\leq n}|a_i-a_j|+na_n \\
&= [(n-1)a_1+(n-3)a_2+\cdots-(n-1)a_n]+na_n \\
&\geq (n-1)a_1+a_n \geq a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n.
\end{aligned}
$$

□

**问题 1.3.16: 1998年上海市高中数学竞赛**

设非零多项式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, $g(x)=c_{n+1}x^{n+1}+c_nx^n+\cdots+c_0$, 满足$g(x)=(x+r)f(x)$, 其中$r$为一实数, 设$a=\max(|a_n|,|a_{n-1}|,\cdots,|a_0|)$, $c=\max(|c_{n+1}|,|c_n|,\cdots,|c_0|)$, 求证: $\frac{a}{c}\leq n+1$.

解. 设$|r|\leq 1$, 由$\sum_{i=0}^{n+1}c_ix^i=(x+r)\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=a_nx^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}(ra_i+a_{i-1})x^i+ra_0$. 故

$$
\begin{cases}
c_{n+1}=a_n\\
c_n=ra_n+a_{n-1}\\
\cdots\\
c_1=ra_1+a_0\\
c_0=ra_0
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{cases}
a_n=c_{n+1}\\
a_{n-1}=-rc_{n+1}+c_n\\
a_{n-2}=(-r)^2c_{n+1}+(-r)c_n+c_{n-1}\\
\cdots\\
a_0=(-r)^nc_{n+1}+(-r)^{n-1}c_n+\cdots+c_1,
\end{cases}
$$

故$|a|=|a_i|=|(-r)^{n-i}c_{n+1}+\cdots+c_{i+1}|\leq|c_{n+1}|+\cdots+|c_{i+1}|\leq(n-i+1)c\leq(n+1)c$.

如果$|r|>1$, 令$x=\frac{1}{x}$, 代入$g(x)=(x+r)f(x)$, 则转化为上述情形, 仍有$a\leq(n+1)c$.

另外

$$|a|=|a_i|\leq|r|^{n-i}|c_{n+1}|+\cdots+|c_{i+1}|\leq(|r^n|+|r^{n-1}|+\cdots+1)c\leq\frac{|r|^{n+1}-1}{|r|-1}c$$

而

$$\frac{|r|^{n+1}-1}{|r|-1}\leq n+1 \Longleftrightarrow |r|^{n+1}\geq n|r|-n+|r| \Longleftrightarrow |r|^n+\frac{n}{|r|}\geq n+1 \Longleftrightarrow |r|^n+\frac{1}{|r|}+\cdots+\frac{1}{|r|}\geq n+1$$

($|r|=0$时, 命题显然成立). □

**问题 1.3.17**

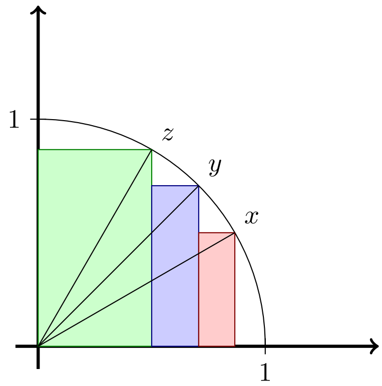
若$a,b,c\in\mathbb{R}$, 且$5a^4+4b^4+6c^4=90$, 求$5a^3+2b^3+3c^3$的最大值.

解. 只需考虑$a,b,c\in\mathbb{R}^*$. 因$a^3=\frac{1}{2}(a\cdot a\cdot a\cdot 2)\leq\frac{1}{8}(a^4+a^4+a^4+2^4)=\frac{3}{8}a^4+2$, 同理$b^3\leq\frac{3}{4}b^4+\frac{1}{4}$, $c^3\leq\frac{3}{4}c^4+\frac{1}{4}$, 所以所求最大值为45. □

**问题 1.3.18**

若$x,y,z$为实数, $0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$, 证明: $\frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z$.

解. 原不等式等价于证明$\frac{\pi}{4}>\sin x(\cos x-\cos y)+\sin y(\cos y-\cos z)+\sin z\cos z$. 如图所示



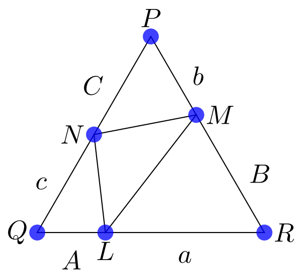

□

**问题 1.3.19: 1987年第21届全苏MO**

正数$a, b, c, A, B, C$满足条件$a + A = b + B = c + C = k$, 求证: $aB + bC + cA < k^2$.

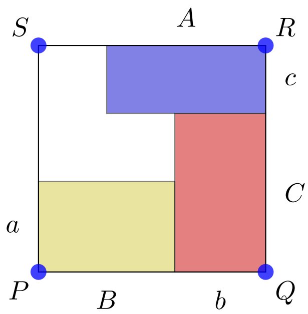
解. 主试委员会给出的解答是$k^3 = (a + A)(b + B)(c + C)$, 利用放缩的技巧给出证明, 北京四中的袁峰同学给出了如下构造性证明.

如图: $S_{\triangle LRM} + S_{\triangle PNM} + S_{\triangle QLN} < S_{\triangle PQR}$, 化简即得.




□

解. 如图:




□

**问题 1.3.20: 第31届IMO预选题**

设集合$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \{1, 2, \cdots, n\}$, 求证:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n-1}{n} \leq \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

解. 设$b_1,b_2,\cdots,b_{n-1}$是$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$的一个排列, 且$b_1<b_2<\cdots<b_{n-1}$, $c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}$是$a_2,a_3,\cdots,a_n$的一个排列, 且$c_1<c_2<\cdots<c_{n-1}$, 则

$$\frac{1}{c_1}>\frac{1}{c_2}>\cdots>\frac{1}{c_{n-1}}.$$

且$b_1\ge 1$, $b_2\ge 2$, $\cdots,b_{n-1}\ge n-1$, $c_1\le 2,c_2\le 3,\cdots,c_{n-1}\le n$, 由排序不等式得:

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\ge\frac{b_1}{c_1}+\frac{b_2}{c_2}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{c_{n-1}}\ge\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}.$$

这是南斯拉夫提给第31届IMO的一道试题, 原证法是利用加强命题的手法, 用数学归纳法给出证明. 一则加强命题很难想到, 二则归纳法证明要对足标进行讨论, 比较麻烦. 在当年国家集训队里姚建钢同学(第35届IMO金牌得主)的证法, 更是干脆, 漂亮, 出人意料. □

解. 易证

$$\prod_{k=1}^{n-1}(a_k+1)\ge\prod_{k=1}^{n}a_k,$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{a_{k+1}}+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)&=\frac{1}{a_1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k+1}{a_{k+1}}\\&\ge n\sqrt[n]{\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(a_k+1)}{\prod_{k=1}^{n}a_k}}\ge n\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{k+1}\end{aligned}$$

□

**问题 1.3.21: 第24届IMO**

设$a,b,c$分别为一个三角形的三边之长, 求证:

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0.$$

并指出等号成立的条件.

解. 原联邦德国选手伯恩哈德·里普只用了一个等式:

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)=a(b-c)^2(b+c-a)+b(a-b)(a-c)(a+b-c)$$

由轮换对称性, 不妨设$a\ge b,c$, 即得欲证不等式成立, 而且显然等号成立的充要条件是$a=b=c$.

里普的证法新颖, 巧妙, 简洁, 与主试委员会提供的参考答案不同, 他因此获得了该届的特别奖. □

**问题 1.3.22: 1980年芬兰, 英国, 匈牙利, 瑞典四国联赛**

设数列$a_0,a_1,\cdots,a_n$满足$a_0=\frac{1}{2}$及$a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n}a_k^2(k=0,1,2,\cdots,n-1)$, 其中$n$是一个给定的正整数, 试证:

$$1-\frac{1}{n}<a_n<1.$$

解. 该题是该次竞赛得分率最低的一道试题, 主试委员会所给出的解法也相当繁琐, 前后共用了四次归纳法, 译成中文后有4000多字, 中国科技大学白志东先生对此题采用了大胆的处理方法, 加强命题, 出奇制胜给出一个简洁的证明.

由于$a_1=a_0+\frac{1}{n}a_0^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}=\frac{2n+1}{4n}$, 所以

$$\frac{n+1}{2n+1}<a_1<\frac{n}{2n-1}.$$

我们来用归纳法证: 对于一切$1 \le k \le n$, 都有

$$\frac{n+1}{2n-k+2} < a_k < \frac{n}{2n-k}. \tag{1.4}$$

假设(1.4)对于$k < n$成立, 则

$$a_{k+1} = a_k\left(1+\frac{1}{n}a_k\right) < \frac{n}{2n-k}\left(1+\frac{1}{2n-k}\right) = \frac{n(2n-k+1)}{(2n-k)^2} < \frac{n}{2n-(k+1)}.$$

所以

$$\begin{aligned} a_{k+1} = a_k + \frac{1}{n}a_k^2 &> \frac{n+1}{2n-k+2} + \frac{(n+1)^2}{n(2n-k+2)^2} \\ &> \frac{n+1}{2n-(k+1)+2} \end{aligned}$$

于是(1.4)式对于一切$1 \le k \le n$均成立, 特别在$k = n$时,

$$1-\frac{1}{n} < \frac{n+1}{n+2} < a_n < \frac{n}{n} = 1.$$

**说明** 这里所证的不等式(1.4)式比题目所要证明的不等式强, 却收到了事半功倍之效, 下面给出一种直接了当的证明. □

解. 由已知,

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{1}{n+a_{k-1}},$$

从而$a_n > a_{n-1} > \cdots > a_1 > a_0 = \frac{1}{2}$. 所以

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} < \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

累加得$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} > \frac{n}{n+1}$, 所以$\frac{1}{a_n} < 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$. □

**问题 1.3.23**

已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbb{R}$, 对于任意实数$m, n$均有$f(m+n) = f(m) + f(n) - 1$, 且$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, 当$x > -\frac{1}{2}$时, 恒有$f(x) > 0$, 求证: $f(x)$单调递增.

解. 证明: 令$x_1 > x_2$, 所以

$$f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) - 1 = f\left(\left(x_1 - x_2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) - 1 = f\left(x_1 - x_2 - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) - 1 - 1 = f\left(x_1 - x_2 - \frac{1}{2}\right)$$

因为$x_1 - x_2 - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$, 所以$f\left(x_1 - x_2 - \frac{1}{2}\right) > 0$, 所以$f(x_1) > f(x_2)$, 得证. □

**问题 1.3.24**

已知: 正数$x, y, z$均小于1且$x+y+z = 2$, $w = xy + yz + zx$, 求$w$的取值范围.

解. 易得$w \le \frac{4}{3}$, 令$x(1-x) = a^2$, $y(1-y) = b^2$, $z(1-z) = c^2$, 因为

$$w = xy + z(2-z) = xz + y(2-y) = yz + x(2-x)$$

所以

$$3w = w + 2 \times 2 - x^2 - y^2 - z^2 = w + 4 + a^2 + b^2 + c^2 - 2$$

所以$2w = 2 + a^2 + b^2 + c^2 \ge 2$, 即$w \ge 1$. 仅当$a, b, c = 0$时取$w = 1$, 但$a, b, c \ne 0$, 所以$w > 1$. □

**问题 1.3.25**

已知$\frac{a^2+b^2}{4}+c^2=1$, 求$a+b+c$的最大值.

解.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2=&a^2+b^2+c^2+2bc+2ab+2ac\\ \le&a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+\left(\frac{b^2}{4}+4c^2\right)+\left(\frac{a^2}{4}+4c^2\right)\\ =&9\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right)=9.\end{aligned}$$

□

**问题 1.3.26**

已知$a,b>0$, $a+b=1$, 证明: $\frac{3}{2}<\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\le\frac{8}{5}$.

解. 原式等价于证明:

$$\begin{aligned}15(a^2+1)(b^2+1)<10(a^2+b^2+2)\le16(a^2+1)(b^2+1)&\iff 15a^2b^2+5a^2+5b^2-5<0\le16a^2b^2+6a^2+6b^2-4\\ &\iff 3a^2b^2+a^2+b^2-1<0\le8a^2b^2+3a^2+3b^2-2.\end{aligned}$$

因$a+b=1$, 所以$a^2+b^2-1=-2ab$. 所以上式等价于

$$3a^2b^2-2ab<0\le8a^2b^2-6ab+1.$$

又由$a^2+b^2+2ab=1\ge4ab$, 所以$0<ab\le\frac{1}{4}$, 所以上式成立. □

解. 令$a=\sin^2\theta,b=\cos^2\theta$, $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$, 所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}&=\frac{1}{1+\sin^4\theta}+\frac{1}{1+\cos^4\theta}\\ &=\frac{4}{5-2\cos2\theta+\cos^2 2\theta}+\frac{4}{5+2\cos2\theta+\cos^2 2\theta}\\ &=\frac{16(11+\cos4\theta)}{(11+\cos4\theta)^2-8(11+\cos4\theta)+80}\\ &=\frac{16y}{y^2-8y+80}=\frac{16}{y+\frac{80}{y}-8}\end{aligned}$$

因$0<\theta<\frac{\pi}{2}$, 所以$0<4\theta<2\pi$. 所以$10<y\le12$, 并有$\frac{3}{2}<\frac{16}{y+\frac{80}{y}-8}\le\frac{8}{5}$. □

**问题 1.3.27**

已知数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$满足: $b_n=a_n-a_{n+2}$, $c_n=a_n+2a_{n+1}+3a_{n+2}$, $(n=1,2,3,\cdots)$, 若$\{c_n\}$为等差数列且$b_n\le b_{n+1}$, 证明: $b_n=b_{n+1}$.

解. 由于$a_n-a_{n+2}=b_n\le b_{n+1}\le b_{n+2}=a_{n+2}-a_{n+4}$, 所以$2a_{n+2}\ge a_n+a_{n+4}$. 因为$2c_{n+1}=c_n+c_{n+2}$, 所以$4a_{n+3}=a_n+3a_{n+4}\le2a_{n+2}+2a_{n+4}$, 所以$2a_{n+3}\le a_{n+2}+a_{n+4}$. 所以$a_{n+3}-a_{n+2}\le a_{n+4}-a_{n+3}\le a_{n+5}-a_{n+4}$, 所以$a_{n+3}-a_{n+5}\le a_{n+2}-a_{n+4}$, 所以$b_{n+3}\le b_{n+2}\le b_{n+3}$, 所以$b_{n+3}=b_{n+2}$, $(n\ge1)$. 所以$b_3=b_4=b_5=\cdots=-2d=a_3-a_5=a_4-a_6=a_5-a_7$, 所以

$$\begin{aligned}4a_5-3a_6=a_2\le a_3-a_5+a_4&\implies 5a_5\le a_3+a_4+3a_6\\ &\implies 5(a_3+2d)\le a_3+a_4+3(a_4+2d)\\ &\implies 2a_3\le2a_4-2d=2a_4+a_3-a_5\\ &\implies a_3+a_5\le2a_4.\end{aligned}$$

因$a_3+a_5\geq 2a_4$, 所以$a_2=a_3-a_5+a_4$, 同理$a_1=a_2-a_4+a_3$, 即$b_1=b_2=b_3=\cdots$.

两个正数$a,b$的和一定时, 它们的积

$$ab=\frac{1}{4}\left((a+b)^2-(a-b)^2\right) \tag{1.5}$$

随着差$|a-b|$的增大而减小; 其平方和

$$a^2+b^2=\frac{1}{2}\left((a+b)^2+(a-b)^2\right) \tag{1.6}$$

随着差$|a-b|$的增大而增大. □

**问题 1.3.28**

已知$\triangle ABC$的三边, $a,b,c$成等比数列, 则$\sin B+\cos B$的取值范围为____.

解. 命题等价于$a+b>c$, $a+c>b$, $b+c>a$, $b^2=ac$,

$$b^2=ac=a^2+c^2-2ac\cos B\geq 2ac-2ac\cos B,$$

所以$\cos B\geq\frac{1}{2}$, $0<B\leq 60^\circ$, 由$\frac{1}{2}\leq\cos B<1$及$0<\sin B\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以

$$\frac{1}{2}<\cos B+\sin B<\frac{\sqrt{3}}{2}+1, \tag{1.7}$$

另一方面, $\sin B+\cos B=\sqrt{2}\sin(B+45^\circ)$, 而$45^\circ<B+45^\circ<105^\circ$, 故

$$1<\sin B+\cos B\leq\sqrt{2}. \tag{1.8}$$

综合(1.7), (1.8)有$1<\sin B+\cos B\leq\sqrt{2}$. □

**问题 1.3.29**

设$a,b,c$是直角$\triangle ABC$的三边长, $c$为斜边, 求使不等式

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\geq kabc$$

恒成立的$k$的最大值.

解. $a>0,b>0,c>0$, $c^2=a^2+b^2$, 所以

$$\begin{aligned}LHS&=(a^2+b^2)c+a\left(b^2+\frac{c^2}{2}\right)+b\left(\frac{c^2}{2}+a^2\right)+\frac{c}{2}\cdot c(a+b)\\&\geq 2abc+\sqrt{2}abc+\sqrt{2}abc+\frac{c}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot 2\sqrt{ab}\\&\geq(2+2\sqrt{2})abc+c\cdot\sqrt{2ab}\cdot\sqrt{ab}=(2+3\sqrt{2})abc,\end{aligned}$$

仅当$a=b$时上式取等号.

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 5+3\sqrt{2}.$$

□

**问题 1.3.30**

设$x_1$是方程$\sqrt{3}\sin x-3\cos x=2a-1$的最大负根, $x_2$是方程$2\cos^2 x-2\sin^2 x=a$的最小正根, 求使不等式$|x_1|\leq x_2$成立的实数$a$的取值范围.

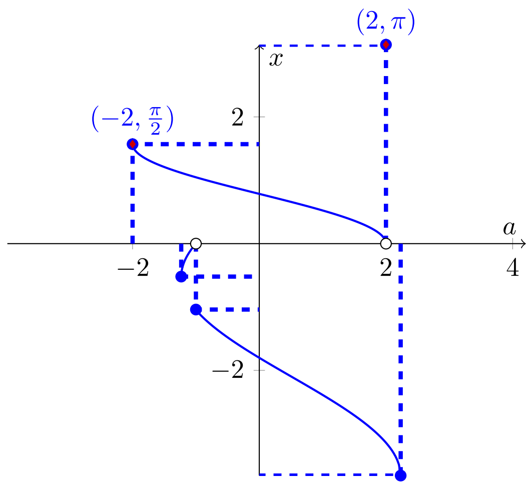
解. 方程$\sqrt{3}\sin x - 3\cos x = 2a-1$等价于$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2a-1}{2\sqrt{3}}$, 从而得到$-1 \le \frac{2a-1}{2\sqrt{3}} \le 1$. 解得$\frac{1}{2}-\sqrt{3} \le a \le \frac{1}{2}+\sqrt{3}$, 而且

$$x_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + \arcsin\frac{2a-1}{2\sqrt{3}}, & \left(\frac{1}{2}-\sqrt{3} \le a < -1\right) \\ -\frac{2\pi}{3} - \arcsin\frac{2a-1}{2\sqrt{3}}, & \left(-1 \le a \le \frac{1}{2}+\sqrt{3}\right) \end{cases}$$

其图像如图, 位于$a$轴下方, 方程$2\cos^2 x - 2\sin^2 x = a$等价于$\cos 2x = \frac{a}{2}$, 其中$-1 \le \frac{a}{2} \le 1$, 所以$-2 \le a \le 2$, 解得

$$x_2 = \begin{cases} \frac{1}{2}\arccos\frac{a}{2}, & (-2 < a \le 2) \\ \pi, & (a = 2). \end{cases}$$

其图像如图, 它位于$a$轴上方, 比较两个函数的图像, 不难看出$|x_1| \le x_2$的充要条件是$\frac{1}{2}-\sqrt{3} \le a \le -1$或$a = 2$.




□

**问题 1.3.31**

函数$y = \sqrt{8x-x^2} - \sqrt{14x-x^2-48}$的最大值为$\underline{2\sqrt{3}}$, 最小值为$\underline{0}$.

解. $x$的定义域为$6 \le x \le 8$, 而

$$f(x) = \frac{6\sqrt{8-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-6}}$$

在$[6,8]$上递减. □

**问题 1.3.32**

已知$a,b,c,d \in \mathbb{R}$, 满足$a+b+c+d=3$, $a^2+2b^2+3c^2+6d^2=5$, 则$a$的最小值与最大值的和是$\underline{3}$.

解.

$$5-a^2 = 2b^2+3c^2+6d^2 = \frac{1}{6}(3+2+1)(2b^2+3c^2+6d^2) \ge (b+c+d)^2 = (3-a)^2.$$

□

**问题 1.3.33**

用$\delta(S)$表示非零整数集$S$中所有元素的和, 设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{11}\}$是正整数集, 且$a_1<a_2<\cdots<a_{11}$, 若对每个正整数$n \le 1500$, 存在$A$的子集$S$, 使得$\delta(S)=n$, 求满足上述要求的$a_{10}$的最小值.

解. 令$S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, $(1 \le k \le 11)$, 若$a_k > S_{k-1} + 1$, 则不存在$S \subset A$, 使$\delta(S) = S_{k-1} + 1$, 所以$S_k = S_{k-1} + a_k \le 2S_{k-1} + 1$. 又由题设得$S_1 = a_1 = 1$, 于是由归纳法易得$S_k \le 2^k - 1$, $(1 \le k \le m)$. 若$S_{10} < 750$, 则$a_{11} \le 750$, (否则750无法用$\delta(S)$表出), $S_{11} = S_{10} + a_{11} < 1500$, 所以$S_{10} \ge 750$. 又$S_8 \le 2^8 - 1 = 255$, 所以$2a_{10} \ge a_9 + a_{10} = S_{10} - S_8 \ge 495$, $a_{10} \ge 248$, 另一方面, 令$A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 247, 248, 750\}$合题意. □

**问题 1.3.34**

$a, b, c > 0$, $l^2 = a^2 + b^2 + c^2$, 证明: $(l^4 - a^4)(l^4 - b^4)(l^4 - c^4) \ge 512a^4b^4c^4$.

解.

$$\begin{aligned}
LHS &= (l^2 + a^2)(l^2 + b^2)(l^2 + c^2)(l^2 - a^2)(l^2 - b^2)(l^2 - c^2) \\
&= (2a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + 2b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + 2c^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)(a^2 + b^2) \\
&\ge 4\sqrt[4]{a^4b^2c^2} \cdot 4\sqrt[4]{a^2b^4c^2} \cdot 4\sqrt[4]{a^2b^2c^4} \cdot 2\sqrt{b^2c^2} \cdot 2\sqrt{c^2a^2} \cdot 2\sqrt{a^2b^2} \\
&= RHS.
\end{aligned}$$

□

解. 问题等价于证明

$$\left(\frac{l^4}{a^4} - 1\right)\left(\frac{l^4}{b^4} - 1\right)\left(\frac{l^4}{c^4} - 1\right) \ge 512$$

设$x = \frac{a^2}{l^2}$, $y = \frac{b^2}{l^2}$, $z = \frac{c^2}{l^2}$, 则$x + y + z = 1$, 所以上式等价于证明

$$\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(\frac{1}{y^2} - 1\right)\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) \ge 512.$$

因

$$\frac{1}{x^2} - 1 = \frac{(1-x)(1+x)}{x^2} = \frac{(y+z)(x+y+z+x)}{x^2} \ge \frac{2\sqrt{yz}(2x + 2\sqrt{yz})}{x^2} \ge \frac{2\sqrt{yz} \cdot 4\sqrt{x\sqrt{yz}}}{x^2} = \frac{8\sqrt[4]{x^2y^3z^3}}{x^2}.$$

等号当且仅当$x = y = z$时取得, 同理$\frac{1}{y^2} - 1 \ge 8\frac{\sqrt[4]{x^3y^2z^3}}{y^2}$, $\frac{1}{z^2} - 1 \ge 8\frac{\sqrt[4]{x^3y^3z^2}}{z^2}$, 以上三式相乘即得. □

**问题 1.3.35**

在锐角$\triangle ABC$中, $a < b < c$, 记$P = \frac{a+b+c}{2}$, $Q = a\cos C + b\cos B + c\cos A$, 则$P, Q$的关系是?

解.

$$\begin{aligned}
P - Q &= \frac{a+b+c}{2} - b - b\cos B \\
&= \frac{a+b+c}{2} - b\left(1 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \\
&= \frac{a+b+c}{2} - b \cdot \frac{(a+c-b)(a+c-b)}{2ac} \\
&= \frac{1}{2}(a+b+c)\left(1 - \frac{b(a+c-b)}{2ac}\right) \\
&= \frac{1}{2}(a+b+c)\left(\frac{b^2 - ab - bc + ac}{ac}\right) \\
&= \frac{1}{2ac}(a+b+c)(b-c)(b-a) < 0
\end{aligned}$$

另外$a < b < c$有$\cos C < \cos B < \cos A$, 根据排序不等式,

$$\begin{aligned}
a\cos C + b\cos B + c\cos A &> a\cos B + b\cos C + c\cos A \\
a\cos C + b\cos B + c\cos A &> a\cos C + b\cos A + c\cos B.
\end{aligned}$$

相加得$2(a\cos C + b\cos B + c\cos A) > a + b + c$. □

**问题 1.3.36**

设$x, y \in \mathbb{R}^+$, $x+y=3952$, 则(　　).

A. $x^{1949}\cdot y^{2003} \geq 1949^{1949}\cdot 2003^{2003}$.

B. $x^{19492003} \leq 1949^{1949}\cdot 2003^{2003}$.

C. $y^{19492003} \geq 1949^{1949}\cdot 2003^{2003}$.

D. 以上都不对.

解. 由于$x+y=3952$, 所以

$$1949+2003=\sum_{i=1}^{1949}\frac{x}{1949}+\sum_{i=1}^{2003}\frac{y}{2003} \geq (1949+2003)\sqrt[3952]{\left(\frac{x}{1949}\right)^{1949}\cdot\left(\frac{y}{2003}\right)^{2003}}$$

所以 $\sqrt[3952]{\left(\frac{x}{1949}\right)^{1949}\cdot\left(\frac{y}{2003}\right)^{2003}} \leq 1$. □

**问题 1.3.37**

设$x, y$是不相等的正数, $n, m$是正整数, 且$n>m$, 令$a=\sqrt[m]{x^m+y^m}$, $b=\sqrt[n]{x^n+y^n}$, 则$a$与$b$的大小关系为$\underline{a>b}$.

解.

$$\begin{aligned}
a>b &\Longleftrightarrow (x^m+y^m)^{m+1} > (x^{m+1}+y^{m+1})^m \\
&\Longleftrightarrow (x^m+y^m)^m > \frac{(x^{m+1}+y^{m+1})^m}{x^m+y^m} = \left(\frac{x^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}+\frac{y^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}\right)^m \\
&\Longleftrightarrow x^m+y^m > \frac{x^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}+\frac{y^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}
\end{aligned}$$

因$x^m=\frac{x^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m}} > \frac{x^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}$, 同理$y^m=\frac{y^{m+1}}{\sqrt[m]{y^m}} > \frac{y^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}$, 所以不等式成立, 由幂平均不等式可知$2b>a$. □

**问题 1.3.38**

已知$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, 且$\sin\frac{\alpha}{2}=a\cos\beta$, 当$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$时, 求$a$的取值范围.

解. 显然$a=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}>0$, 因为$-\frac{\beta}{2}<\frac{1}{2}\alpha<\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}$, 所以$\sin\frac{\alpha}{2}<\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)$. 所以

$$a<\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2\left(\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)} \geq \frac{1}{2},$$

其中等号取不到, 所以$a\leq\frac{1}{2}$. □

**问题 1.3.39**

设$b_1, b_2, \cdots, b_n$是正数$a_1, a_2, \cdots, a_n$的一个排列, 证明$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}\geq n$.

解. 不妨设$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$, 因$a_k\in\mathbb{R}^+$, 所以$\frac{1}{a_1}\leq\frac{1}{a_2}\leq\cdots\leq\frac{1}{a_n}$, 又$\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}$是$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}$的一个排列, 于是$n=\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\frac{1}{a_k}\leq\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\frac{1}{b_k}$, 另外

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}\geq n\sqrt[n]{\frac{a_1a_2\cdots a_n}{b_1b_2\cdots b_n}}=n.$$

□

**问题 1.3.40**

若$x, y, z, w > 0$, 且$x + y + z + w = 70$, 求函数$\mu = \sqrt[4]{2(x+1)} + \sqrt[4]{16(y+2)} + \sqrt[4]{54(z+3)} + \sqrt[4]{128(w+4)}$的最大值.

解.

$$\mu \leq \frac{1}{4}\left(\left(\frac{x+1}{4}+2+2+2\right)+\left(\frac{y+2}{4}+4+4+4\right)+\left(\frac{z+3}{4}+6+6+6\right)+\left(\frac{w+4}{4}+8+8+8\right)\right)=20$$

所以

$$\left(\frac{\mu}{\sqrt[4]{2}}\right)^2=\left(\sum\sqrt[4]{i^3(x_i+i)}\right)^2\leq\left(\sum\sqrt{i^2}\right)\left(\sum\sqrt{i(x_i+i)}\right)=10\sum\sqrt{i(x_i+i)}\leq 10\sqrt{\sum i\sum(x_i+i)}=400\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

所以$\mu \leq 20$. □

**问题 1.3.41**

若$A = a\sin^2 x + b\cos^2 x$, $B = a\cos^2 x + b\sin^2 x$, $(a, b \in \mathbb{R})$, 证明$m = AB, n = ab$, $P = A^2 + B^2$, $Q = a^2 + b^2$满足$m + Q \geq P + n$.

解. $AB = ab + \sin^2 x\cos^2 x(a-b)^2$, 所以$AB - ab = (a-b)^2\sin^2 x\cos^2 x \geq 0$, 而$(A+B)^2 = (a+b)^2$, 所以$A^2 + B^2 \leq a^2 + b^2$, 又因为$m \geq n$, $P \leq Q$, 所以$P + n \leq m + Q$. □

**问题 1.3.42**

已知$x, y, z \in \mathbb{R}^+$, 且满足$xyz(x+y+z) = 1$, 求$t = (x+y)(x+z)$的最小值.

解. $x^2 + xy + xz = \frac{1}{yz}$, 所以$t = yz + \frac{1}{yz} \geq 2$, 当$y = z = 1$, $x = \sqrt{2} - 1$时取等号. □

**问题 1.3.43**

如果$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, $(n \in \mathbb{N})$, 证明: 对于任意的$n \geq 2$, 都有$a_n^2 > 2\left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n}\right)$.

解. 用数学归纳法, 简证

$$a_{n+1}^2=\left(a_n+\frac{1}{n+1}\right)^2=a_n^2+\frac{2a_n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}>a_n^2+\frac{2a_{n+1}}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}>2\sum_{k=2}^{n+1}\frac{a_k}{k}-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

由此应给结论加强为$a_n^2 > 2\left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n}\right) + \frac{1}{n}$. 所以

$$a_{n+1}^2=a_n^2+\frac{2a_{n+1}}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}>2\sum_{k=2}^{n+1}\frac{a_k}{k}+\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)^2}=2\sum_{k=2}^{n+1}\frac{a_k}{k}+\frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2}>2\sum\frac{a_k}{k}+\frac{n^2+n}{n(n+1)^2}=RHS$$

成立. □

解. 裂项, 放缩法

$$a_n^2=\sum_{k=2}^{n}(a_k^2-a_{k-1}^2)+a_1^2=\sum_{k=2}^{n}\frac{2a_k-\frac{1}{k}}{k}+1=2\sum\frac{a_k}{k}+1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}>2\sum\frac{a_k}{k}+1-\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=2\sum\frac{a_k}{k}+\frac{1}{n}.$$

□

# Chapter 2

# 数学分析

## 2.1 极限

**问题 2.1.1**

设函数$\varphi(x)$可导, 且满足$\varphi(0)=0$, 又设$\varphi'(x)$单调减少.

1. 证明: 对$x\in(0,1)$, 有$\varphi(1)x<\varphi(x)<\varphi'(0)x$.
2. 若$\varphi(1)\geq 0$, $\varphi'(0)\leq 1$, 任取$x_0\in(0,1)$, 令$x_n=\varphi(x_{n-1})$, $(n=1,2,\cdots)$. 证明: $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求该极限值.

解. 对于任意的$x\in[0,1]$,在$[0,x]$上用拉格朗日定理,

$$\varphi(x)-\varphi(0)=\varphi'(\xi_1)x<\varphi'(0)x$$

在$[x,1]$上用拉格朗日定理

$$\varphi(1)-\varphi(x)=\varphi'(\xi_2)(1-x)<\varphi'(\xi_1)(1-x)=\varphi'(\xi_1)-\varphi(x)$$

所以$\varphi(1)x<\varphi'(\xi_1)x=\varphi(x)$. □

## 2.2 导数

**问题 2.2.1**

函数$f(x)\in C[0,1]$, 在$(0,1)$上可微, 对于任意的$x\in(0,1)$, $|xf'(x)-f(x)+f(x)|<Mx^2$, 问$f'(0)$的存在性.

解. 不妨设$f(0)=0$, 定义$h(x)=\frac{f(x)}{x}(0<x<1)$, 即证$\lim_{x\to 0}h(x)$存在, 则$\left|x^2h'(x)\right|<Mx^2$, 所以$|h'(x)|<M$, 所以若$\{x_n\}\to 0$, 则有

$$|h(x_m)-h(x_n)|=|h'\xi(x_m-x_n)|<M\,|x_m-x_n|<\varepsilon.$$

所以$\{h(x_n)\}$是Cauchy列, 从而$\lim_{x\to 0}h(x)$存在. □

**问题 2.2.2**

构造有界单调函数$f(x)$使得对于任意的$x\in\mathbb{R}$, $f'(x)$存在, 且$\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)\neq 0$.

解. 取$a_n=1-2^{-n}$, $(n\in\mathbb{N})$, $f(n)=a_n$, $f\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(a_n+a_{n+1}\right)$, 且$f'(n)=0$, $f'\left(n+\frac{1}{2}\right)=1$, 将其它点处可微连接$f(n)$这些离散点, 知$\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)$不存在, 从而不为0. □

## 2.3 积分

**问题 2.3.1**

设函数$f(x)$在$[a,b]$上有连续的导数, 且$f(a)=0$, 证明

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

解. 令$F(b)=RHS-LHS$,证$F'(b)\ge 0$即可. □

**问题 2.3.2**

设函数$f(x)$在$[0,1]$上有二阶连续的导数, 证明:

1. 对任意$\xi\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$和$\eta\in\left(\frac{3}{4},1\right)$有

$$|f'(x)|<2\,|f(\xi)-f(\eta)|+\int_0^1 |f''(x)|\,\mathrm{d}x \quad x\in[0,1]$$

2. 当$f(0)=f(1)=0$及$f(x)\neq 0$, $(x\in(0,1))$时有

$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x \ge 4.$$

解. 用中值定理,

$$\begin{aligned}|f'(x)|-2\,|f(\xi)-f(\eta)| &= |f'(x)|-2\,|f'(\theta)|\,(-\xi+\eta)\\ &\le |f'(x)|-|f'(\theta)|\\ &\le |f'(x)-f'(\theta)| = \left|\int_\theta^x f''(t)\mathrm{d}t\right|\\ &\le \int_0^1 |f''(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

最后取$f(x_0)=\max_{x\in[0,1]} f(x)$, 则

$$f(x_0)=f'(\xi_1)x_0=f'(\xi_2)(x_0-1),$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|\frac{f''}{f}\right|\mathrm{d}x &\ge \frac{1}{|f(x_0)|}\,\mathrm{d}x\\ &\ge \frac{1}{|f(x_0)|}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f''\,\mathrm{d}x\right|\\ &= \frac{1}{|f(x_0)|}\,|f'(\xi_2)-f'(\xi_1)|\\ &= \frac{1}{x_0}+\frac{1}{1-x_0}\ge 4.\end{aligned}$$

□

**问题 2.3.3**

设函数$f(x)$在$\left[-\frac{1}{a},a\right]$上连续(其中$a>0$), 且$f(x)\ge 0$, $\int_{-\frac{1}{a}}^{a} xf(x)\,\mathrm{d}x=0$, 求证: $\int_{-\frac{1}{a}}^{a} x^2f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_{-\frac{1}{a}}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 因$(a-x)\left(x+\frac{1}{a}\right)\ge 0$, 对$(a-x)\left(x+\frac{1}{a}\right)f(x)\ge 0$两边同时积分. □

**问题 2.3.4**

设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=1$. 求证:

1. 存在$\xi\in[0,1]$, 使得$|f(\xi)|\geq 4$;
2. 存在$\eta\in[0,1]$, 使得$|f(\eta)|=4$.

解. 用反证法,

$$1=\left|\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\cdot|f|\,\mathrm{d}x\leq 1.$$

等号取不到, 否则,

$$\int_0^1(4-|f|)\left|x-\frac{1}{2}\right|\,\mathrm{d}x=0.$$

□

**问题 2.3.5**

求$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta}$.

解. $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2+2\sin^2\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}=2\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+2t^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$ □

解.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta}&=\frac{1}{2}\int_0^{4\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3-\sin t}\\&=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3-\sin t}\\&=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3-\sin t}+\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{3+\sin t}\\&=2\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{3-\sin x}+2\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{3+\sin x}\\&=12\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{9-\sin^2 x}\\&=12\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\tan x}{8\tan^2 x+9}\\&=\frac{12}{6\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\tan x\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.\end{aligned}$$

□

解.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta} &= \frac{1}{2}\int_0^{4\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3\sin\theta}\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin\theta}\\ &= \oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z\left(3-\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)}\\ &= 2\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+6\mathrm{i}z-1}\\ &= 2\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{(z-(-3+2\sqrt{2})\mathrm{i})(z-(-3-2\sqrt{2})\mathrm{i})}\\ &= 2\cdot 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}(f(z))\big|_{z=(-3+2\sqrt{2})\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.\end{aligned}$$

□

解.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{3-\sin 2\theta} &= \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\tan\theta}{3\tan^2\theta-2\tan\theta+3}\\ &= \int_0^{\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi}+\int_{\pi}^{3\pi/2}+\int_{3\pi/2}^{2\pi}=\cdots\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^{\pi/2} = \int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\theta}{3t^2-2t+3} = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{3}\right)}{\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{8}}\arctan\left(\frac{3\left(t-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{8}}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

其它三个同理. 所以$\sum = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 4\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$. □

**问题 2.3.6**

求

$$\int_0^{\pi/4}\frac{(\cot x-1)^{p-1}}{\sin^2 x}\ln\tan x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{p}\csc p\pi,\ (-1<p<0).$$

解. 令$u=\cot x-1$, 原式等价于

$$\int_0^{+\infty}u^{p-1}\ln(u+1)\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{p}\csc p\pi,$$

而

$$\int_0^{\infty}u^{p-1}\ln(u+1)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\infty}u^{p-1}\int_1^{1+u}\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}u$$

交换积分次序, 用Beta函数 □

## 2.4 级数

**问题 2.4.1**

证明

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}=0$$

无实根.

解. 设$-y<0$, 则$y>0$, 所以$1-y+\frac{y^2}{2!}-\frac{y^3}{3!}+\cdots+\frac{y^{2n}}{(2n)!}>\mathrm{e}^{-y}>0$. □

**问题 2.4.2: F.F.Abi=Khuzam and A.B.Boghossian, Some recent geometric inequalities, AMM Vol 96(1989), No. 7:576-589**

函数$f(x)=\cot x-\frac{1}{x}$, 则$f^{(k)}(x)<0,\ 0<x<\pi,\ k\in\mathbb{N}$.

解.

$$\cot x=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k\pi+x}-\frac{1}{k\pi-x}\right),\quad x\in(0,\pi).$$

将真分式展开有

$$f(x)=-2x\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{2k},\ x\in(0,\pi),\quad c_k=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^{2k+2}},\ (k\in\mathbb{N}).$$

□

**问题 2.4.3**

对$n\in\mathbb{N}_+$, 确定$(0,1)$的子集, 使在此子集上$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n(\ln x\ln(1-x))<0$.

解.

$$f'(x)=(\ln x\ln(1-x))'=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{m-1}-x^{m-1}}{m},$$

当$n$是偶数时, 所有项都是负的, 当$n$是奇数时, 仅当$1-x<x$即$x>\frac{1}{2}$时, $f^{(n)}(x)$时负的. □

**问题 2.4.4**

已知$S_n=\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^i}{i}$, 证明$\lim_{n\to\infty}S_n$存在并求其值.

解. 因$S_{n+1}=\frac{n+2}{2(n+1)}(S_n+1)$, 所以

$$S_{n+2}-S_{n+1}=\frac{(n+2)^2(S_{n+1}-S_n)-S_{n+1}-1}{2(n+1)(n+2)},$$

$S_4-S_3=0$, 当$n\geq 3$时, $S_n$不增, 所以$S=\lim_{n\to\infty}S_n$存在, 所以$S=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2(n+1)}(S+1)$, 得$S=1$. □

## 2.5 其他

**问题 2.5.1**

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)=0.$$

解. 用$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. □

**问题 2.5.2**

证明:

$$0<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n}.$$

解. 先证: $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调上升且有界. $(1\cdot x_n\le\left(\frac{1+n(1+1/n)}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1})$, 则

$$\begin{aligned}x_n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=1+1+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\cdots\\&=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\&<2+\frac{1}{2\cdot1}+\frac{1}{3\cdot2}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}=3.\end{aligned}$$

再证$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$单调下降且有界. (用$(1+x)^n>1+nx$, $x>-1$证单调性).

由$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n$, $x_n<\mathrm{e}<y_n$, (这可以证得$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$).

故$\mathrm{e}-x_n<y_n-x_n=\frac{x_n}{n}<\frac{3}{n}$. □

**问题 2.5.3**

证明不等式

$$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

解. 用$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$及归纳法. □

**问题 2.5.4**

设$a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$及$a^{[0]}=1$, 证明:

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a^{[n-m]}b^{[m]}.$$

并由此推出牛顿二项式公式.

**问题 2.5.5**

证明不等式

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\quad(n>1).$$

解. 用均值不等式. □

解. 用伯努利不等式证$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>2$, $(n\in\mathbb{N}_+)$. □

**问题 2.5.6**

设$p_n(n\in\mathbb{N}_+)$为趋于正无穷的任意数列, 而$q_n(n\in\mathbb{N}_+)$为趋于负无穷的任意数列($p_n,q_n\notin[-1,0]$), 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\mathrm{e}.$$

解. 注意$[x]\le x<[x]+1$. □

**问题 2.5.7**

已知$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}.$$

并推出

$$\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n},$$

其中$0<\theta_n<1$.

**问题 2.5.8**

证明: e是无理数.

解. 用反证法及2.5.7有, 对于任意的$n$, $n!n\cdot\mathrm{e}$不是整数. □

**问题 2.5.9**

证明不等式:

(a) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, $(n\in\mathbb{N}_+)$;

(b) $1+\alpha<\mathrm{e}^\alpha$, $(\alpha\neq 0,\alpha\in\mathbb{R})$.

解.

(a) 原式等价于$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$;

(b) $\alpha>-1$时, 用伯努利不等式, $\mathrm{e}^\alpha>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha n}>1+\alpha$.

□

**问题 2.5.10**

证明: (在以下各极限军存在的情况下)

(a) $\liminf_{n\to\infty}x_n+\liminf_{n\to\infty}y_n\leq\liminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leq\liminf_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n$;

(b) $\liminf_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n\leq\limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leq\limsup_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n$.

解. 用$\liminf_{n\to\infty}x_n=-\limsup_{n\to\infty}(-x_n)$. □

**问题 2.5.11**

证明: 若$\lim_{n\to\infty}x_n$存在, 则对于任何数列$y_n(n\in\mathbb{N}_+)$, $\limsup_{n\to\infty}y_n$有限且有:

(a) $\limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n$;

(b) $\limsup_{n\to\infty}x_ny_n=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\limsup_{n\to\infty}y_n$, $(x_n\geq 0)$.

解. 用2.5.10. □

**问题 2.5.12**

证明: 若对于某数列$x_n(n\in\mathbb{N}_+)$, 无论数列$y_n(n\in\mathbb{N}_+)$如何选取, 以下两个等式中都至少有一个成立:

(a) $\limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\limsup_{n\to\infty}x_n+\limsup_{n\to\infty}y_n$.

(b) $\limsup_{n\to\infty}(x_ny_n)=\limsup_{n\to\infty}x_n\cdot\limsup_{n\to\infty}y_n$, $(x_n\geq 0)$.

则数列$x_n$收敛或发散于正无穷.

**问题 2.5.13**

证明: 若$x_n>0(n\in\mathbb{N}_+)$及

$$\limsup_{n\to\infty}x_n\cdot\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=1.$$

则数列$x_n$是收敛的.

**问题 2.5.14**

证明: 若数列$x_n(n\in\mathbb{N}_+)$有界, 且

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0.$$

则此数列的子列极限充满于下极限和上极限

$$l=\liminf_{n\to\infty}x_n \text{ 和 } L=\limsup_{n\to\infty}x_n$$

之间.

**问题 2.5.15**

证明: 若$x_n>0(n\in\mathbb{N}_+)$且$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$存在, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

解. 用结论: 若$\{x_n\}\to x$, $x_n>0$, 则$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n=x$. □

**问题 2.5.16**

证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$.

解. 用2.5.15. □

**问题 2.5.17: 数$a$和$b$的算术几何平均值**

证明: 由下列各式

$$x_1=a,\quad y_1=b,\quad x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n},\quad y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2},$$

确定的数列$x_n$和$y_n(n\in\mathbb{N}_+)$有共同的极限.

$$\mu(a,b)=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n.$$

解. 用幂平均不等式, $\sqrt{x_{n+1}+y_{n+1}}=\frac{\sqrt{x_n}+\sqrt{y_n}}{\sqrt{2}}\leq\sqrt{x_n+y_n}$. 即$\{y_n\}$单调有界, 从而有极限, 从而$x_n=2y_{n+1}-y_n$有相同的极限. □

**问题 2.5.18**

设

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}\quad(|x|\geq 2),$$

求$f(x)$.

解. $x^2-2$, ($|x|\geq\frac{5}{2}$). □

**问题 2.5.19**

证明: 若

(1) 函数$f(x)$定义于区域$x>a$;

(2) $f(x)$在每一个有限区间$a<x<b$内是有界的;

(3) 对于某一个整数$n$, 存在有限的或无穷的极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=l,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{l}{n+1}.$$

**能否用Cauchy定理??证明它.**

**问题 2.5.20**

利用定理

**定理 2.5.1**

设

$$\lim_{x\to 0}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=1,$$

其中$\psi(x)>0$, 再设当$n\to\infty$时$\alpha_{mn}\rightrightarrows 0(m=1,2,\cdots,n)$, 换言之, 对于任意$\varepsilon>0$, 存在正整数$N(\varepsilon)$, 当$m=1,2,\cdots,n$且$n>N(\varepsilon)$时, $0<|\alpha_{mn}|<\varepsilon$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}[\phi(\alpha_{1n})+\phi(\alpha_{2n})+\cdots+\phi(\alpha_{mn})]=\lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\cdots+\psi(\alpha_{mn})],$$

此处同时还要假设上式右端的极限存在.

求:

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[n]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{ka}{n^2}\right)$;

(3) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right)$, $(a>0)$;

(4) $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$;

(5) $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$.

**问题 2.5.21**

设函数$f(x)$在区间$(x_0,+\infty)$上连续并有界. 证明: 对于任何数$T$, 可求得数列$x_n\to+\infty$, 使

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0.$$

**问题 2.5.22**

证明: 在有限区间$(a,b)$上有定义且连续的函数$f(x)$, 可用连续的方法延拓到闭区间$[a,b]$上, 其充分必要条件是函数$f(x)$在区间$(a,b)$上一致连续.

**问题 2.5.23**

$x_n$满足$x_n^n+x_n-1=0$, $0<x_n<1$, 求$\lim_{n\to\infty}x_n$.

解. $y=x^n+x-1$则有$y'>0$, $y|_{x=0}=-1<0$, $y|_{x=1}=1>0$.
$x_n$是$x^n+x-1$的唯一零点. 由于

$$x_n^{n+1}+x_n-1=(x_n-1)(1-x_n)<0$$

及$y$的单调性, 知$x_{n+1}$在$x_n$与1之间, 故$\{x_n\}$单调有界. 反证$\{x_n\}$的极限$A=1$, 否则$0\le A<1$矛盾. □

解. $y^x+y-1=0$是隐函数, 确定$y=f(x)$, $x_n=f(n)$, 求导

$$y'=-y^x\cdot\frac{\ln y}{\left(1+\frac{x}{y}\cdot y^x\right)}$$

当$x\ge 1$时, $y'>0$, $y$单调增加, 以下同上. □

**问题 2.5.24**

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$都收敛, 则以下不成立的是?
A. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$收敛; B.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$收敛;
C. $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛; D. $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$发散.

**问题 2.5.25**

设$f(x,y)$与$\varphi(x,y)$均为可微函数, 且$\varphi_y'(x,y)\neq 0$. 已知$(x_0,y_0)$是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的一个极值点, 下列选项正确的是(D)
(A) 若$f_x'(x_0,y_0)=0$, 则$f_y'(x_0,y_0)=0$; (B) 若$f_x'(x_0,y_0)=0$, 则$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$;
(C) 若$f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则$f_y'(x_0,y_0)=0$; (D) 若$f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

**问题 2.5.26**

$$\frac{\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,\mathrm{d}t}{\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t}=\sqrt{2}$$

解. 用Beta函数. □

**问题 2.5.27: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛**

计算$I=\int_{\pi/8}^{3\pi/8}\frac{\sin^2x}{x(\pi-2x)}\,\mathrm{d}x$.

**问题 2.5.28: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛**

设$\varphi(x)$在$(-\infty,0]$可导, 且函数

$$f(x)=\begin{cases}\int_x^0\frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t, & x<0,\\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(2x)^n+x^{2n}}, & x\geq 0.\end{cases}$$

在点$x=0$可导, 求$\varphi(0)$, $\varphi'(0^-)$, 并讨论$f'(x)$的存在性.

**问题 2.5.29: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛**

已知函数$f(x)$与$g(x)$满足$f'(x)=g(x)$, $g'(x)=2\mathrm{e}^x-f(x)$, 且$f(0)=0$, 求

$$\int_0^\pi\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x.$$

**问题 2.5.30: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛**

设$y_1$和$y_2$是方程$y''+p(x)y'+2\mathrm{e}^xy=0$的两个线性无关解, 而且$y_2=(y_1)^2$. 若有$p(0)>0$, 求$p(x)$及此方程的通解.

**问题 2.5.31: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛**

设$f(x)$在$\left[-\frac{1}{a},a\right](a>0)$上非负可积, 且$\int_{-1/a}^a xf(x)\,\mathrm{d}x=0$. 求证:

$$\int_{-1/a}^a x^2f(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_{-1/a}^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

解. 分$0<a\leq 1$和$a>1$两种情况讨论. □

**问题 2.5.32: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛**

设在点$x=0$的某邻域$U$内, $f(x)$可展成泰勒级数, 且对任意正整数$n$, 皆有

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}.$$

证明: 在$U$内, 恒有$f(x)=x^2$.

**问题 2.5.33: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛**

设$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x^2+y^2}$, 证明: $\lim_{x\to+\infty}y(x)$和$\lim_{x\to-\infty}y(x)$都存在.

解. 用单调有界定理. □

**问题 2.5.34: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛**

求幂级数$\sum_{n=1}^\infty\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$的收敛域与和函数.

**问题 2.5.35: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛**

求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{(n+i+1)^2}+\frac{1}{(n+i+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+i+i)^2}\right).$$

解. 用重积分得$\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$. □

**问题 2.5.36**

设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\subset C_{[a,b]}$, 且$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$, 则$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 因$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in[a,b]$, 所以$f\in C_{[a,b]}$且$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当$n>N$时, $\forall x\in[a,b]$均有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. $f(x),f_n(x)$连续必可积, 有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|<(b-a)\varepsilon.$$

其实当$a\le x\le b$时, 有$\left|\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|<(b-a)\varepsilon$对$x$一致成立, 所以$\int_a^x f_n(x)\,\mathrm{d}t\rightrightarrows\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. □

**问题 2.5.37**

$f_n(x)$在$[a,b]$上都有连续导数, 且$f_n(x)\to f(x)$, $f_n'(x)\rightrightarrows g(x)$, 则$f'(x)=g(x)$, 即$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)$.

解. 因$f_n'\rightrightarrows g$, 所以$g$连续, 可积, 由2.5.55, $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$, 所以$f'(x)=g(x)$. 其实$f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$在$[a,b]$上也一致收敛.

若2.5.55和本问题中的$f_n(x)$视为函数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$的前$n$项部分和, 就有函数项级数的相应命题.

(1). 若$[a,b]$上$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$中每项$u_k$均连续, 且$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\rightrightarrows f(x)$, 则$f(x)\in C_{[a,b]}$且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2). 若$[a,b]$上, $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$的每项都有连续导数$u_k'(x)$且$\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(x)\rightrightarrows g(x)$, 而$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\to f(x)$. 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(x).$$

□

**问题 2.5.38**

举反例:

(1) 积分的极限不等于极限的积分的函数列.

(2) 导数的极限不等于极限的导数的函数列.

解. (1). 在$[0,1]$上极限函数为0, 但$f_n$在$\left[0,\frac{1}{n}\right]$上面积为1的脉冲函数.

(2). $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$, $x\in[-1,1]$. □

**问题 2.5.39: http://math.stackexchange.com/questions/2143014**

证明: 对于任意的$\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|\frac{\alpha-n}{\alpha+n}\right|$发散.

**问题 2.5.40: http://math.stackexchange.com/questions/472007**

判断$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{\sin n}{n+10\sin n}$的敛散性.

解. 其实, 若$f(n)$是有界函数, 且级数$\sum_{n=1}^{n}\frac{f(n)}{n}$收敛, $a$是使任意的$n$都有$n+af(n)\neq 0$, 则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n+af(n)}$.

这是因为

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{f(n)}{n+af(n)}=\sum_{n=1}^{m}\frac{f(n)}{n}+\sum_{n=1}^{m}\frac{-af^2(n)}{n(n+af(n))}$$

后一个和式用比较判别法. □

**问题 2.5.41: http://math.stackexchange.com/questions/273559**

判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n)}{n}$的敛散性.

解. 比较判别法, $[k\pi+\frac{\pi}{6},(k+1)\pi-\frac{\pi}{6}]$中总有至少一个整数.

或用$\sum\frac{\sin^2(n)}{n}=\sum\frac{1}{2n}-\sum\frac{\cos(2n)}{2n}$, 前者发散, 后者用Dirichlet判别法. □

**问题 2.5.42: http://math.stackexchange.com/questions/991652**

证明$\int_0^1\left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right|\,\mathrm{d}x$发散.

解. 变量替换, 积分化为$\int_1^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$, 然后在子区间$(k\pi,(k+1)\pi)$上求下界. □

**问题 2.5.43: http://math.stackexchange.com/questions/620449**

证明: 求$p\in\mathbb{R}$, 使积分$\int_0^{\infty}\frac{x^p}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$发散.

解. $p\geq -1$. □

**问题 2.5.44: http://math.stackexchange.com/questions/596511**

计算

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

解. 用Frullani积分. 结果为$\log 2$. 或用重积分: $\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}=x\int_1^2\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. 这里给出Frullani积分证明过程的做法.

$$\begin{aligned}\int_a^b\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x&=\int_a^b\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{2a}^{2b}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\left(\int_a^b-\int_{2a}^{2b}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\left(\int_a^{2a}-\int_b^{2b}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\to\log(2)-0,\quad a\to 0,b\to\infty\end{aligned}$$

上式最后一步用$\mathrm{e}^{-2c}\log(2)\leq\int_c^{2c}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\leq\mathrm{e}^{-c}\log(2)$. □

**问题 2.5.45: http://math.stackexchange.com/questions/590774**

已知$a>b>0$, 求$\lim_{t\to 0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)$.

解. 注意到$\Gamma(t)=a^t\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-as}}{s^{1-t}}\,\mathrm{d}s$, 所以

$$\lim_{t\to0+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$$

然后用Frullani积分算得$\log\frac{a}{b}$. □

**问题 2.5.46: http://math.stackexchange.com/questions/590774**

已知$a>b>0$, 求$\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$.

解. 可以用Frullani积分. 这里用含参积分求导的方法, 定义$I(t)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-tx}}{x}\,\mathrm{d}x$, 被积函数记为$f(x,t)$, 由$f(x,t)$和$f_t(x,t)$在定义域均连续, $I(t)$关于$t$收敛且$\int_0^\infty f_t(x,t)\,\mathrm{d}x$关于$t$一致收敛, 则满足积分号下求导条件, 所以$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{a}$, $I=-\log t$. □

解.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx&=\lim_{\epsilon\to0}\int_\epsilon^\infty\frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx\\&=\lim_{\epsilon\to0}\left[\int_\epsilon^\infty\frac{\exp(-ax)}{x}dx-\int_\epsilon^\infty\frac{\exp(-bx)}{x}dx\right]\\&=\lim_{\epsilon\to0}\left[\int_{a\epsilon}^\infty\frac{\exp(-t)}{t}dt-\int_{b\epsilon}^\infty\frac{\exp(-t)}{t}dt\right]\\&=\lim_{\epsilon\to0}\int_{a\epsilon}^{b\epsilon}\frac{\exp(-t)}{t}dt=\lim_{\epsilon\to0}\int_a^b\frac{\exp(-\epsilon u)}{u}du\end{aligned}$$

最后的被积函数一致收敛到$\frac{1}{u}$. □

解. 用Laplace变换, $F(s)=\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 则

$$F(s)=\int_0^\infty\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}e^{-sx}dx\implies F'(s)=-\int_0^\infty(e^{-bx}-e^{-ax})e^{-sx}dx.$$

计算最后一个积分, 然后求积分并令$s\to0$, 其中积分出来的积分常数用极限$\lim_{s\to\infty}F(s)=0$计算. □

**问题 2.5.47: http://math.stackexchange.com/questions/164400**

求$\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}x=\log t$, 其中$t>0$.

解. 让$u=\mathrm{e}^{-x}$, 得

$$\int_0^1\frac{u^{t-1}-1}{\log u}\,\mathrm{d}u=\int_0^1\int_1^t u^{s-1}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u=\int_1^t\int_0^1 u^{s-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s=\log t.$$

□

解. 同2.5.65的解法一. □

解. 用重积分求解, $I(t)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\int_1^t\mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x$. 这里验证积分次序可交换, 则

$$LHS=\int_1^t\int_0^\infty\mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s=\ln t.$$

□

解. 用Laplace变换, $g(s)=L[f(x)]=L\left[\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\right]$, 则$-g'(s)=L[xf(x)]=\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}$. 所以$g(s)=\log\frac{s+b}{s+a}+c$, 由于$g(\infty)=0$, 所以$c=0$. 从而

$$\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x=\log\frac{s+b}{s+a}.$$

令$s=0$即可. □

解. 用Laplace变换, $L[1]=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{s}$, 则

$$LHS=\int_0^\infty\int_0^\infty(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt})\mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+t}\right)=\ln\frac{s+1}{s+t}\Big|_0^\infty=\ln t$$

□

**问题 2.5.48: http://tieba.baidu.com/p/2686576086**

设$f(x)$在实轴$\mathbb{R}$上有二阶导数, 且满足方程

$$2f(x)+f''(x)=-xf'(x).$$

求证$f(x)$和$f'(x)$都在$\mathbb{R}$上有界.

解. 构造$L=f^2+\frac{1}{2}f'^2$, 研究$L'$. 方程可改成$f''(x)+\frac{x}{2}f'(x)+f(x)=0$. □

**问题 2.5.49: http://tieba.baidu.com/p/3846349760**

证明: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

解. 由于$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 且$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调增加, 则$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$, 于是$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, 从而$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)>\ln n$, 即得. □

**问题 2.5.50: http://tieba.baidu.com/p/4931607145**

设$f(x)$在$[a,b]$上可导, $f'(x)$在$[a,b]$上可积. 令

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\cdot\frac{b-a}{n}\right)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

试证

$$\lim_{n\to\infty}nA_n=\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)].$$

解. 令$x_i=a+i\cdot\frac{b-a}{n}$, 则

$$\begin{aligned}nA_n&=n\left[\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n}-\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\&=n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x\\&=n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

在$[x_{i-1},x_i]$上, $(x_i-x)$保号, 而$g(x)=\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}$连续(补充定义$g(x_i)=f'(x_i)$). 由积分第一中值定理知, 存在$\eta_i\in(x_{i-1},x_i)$, 使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x=g(\eta_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x.$$

再由Lagrange中值定理, 以上$g(\eta_i)=\frac{f(x_i)-f(\eta_i)}{\eta_i-x}=f'(\xi_i)$, $(\xi_i\in(\eta_i,x_i)\subset(x_{i-1},x_i))$. 于是

$$\begin{aligned}
nA_n&=n\sum_{i=1}^{n}f'(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x=\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})^2\\
&=\frac{n}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n}f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\\
&\to\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)),\text{当}n\to\infty.
\end{aligned}$$

□

**问题 2.5.51**

$\int_0^1\frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{64}\sqrt[4]{2}\pi$.

**问题 2.5.52**

求证:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{8}$$

解. 让$f(y)=\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 yx}{x^3}\,\mathrm{d}x$, 判断积分号下可求导, 有

$$f''(y)=\frac{3}{4}\int_0^{\infty}\frac{-\sin yx+3\sin 3yx}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}\mathrm{sign}y.$$

□

解. 用$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi-x}{2}$, 由

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\sin^3(kx)}{k^3}=\frac{9\sin(3kx)-3\sin(kx)}{4k}.$$

则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9\sin(3kx)-3\sin(kx)}{4k}=\frac{3\pi}{4}-3x.$$

积分后得:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^3(kx)}{k^3}=\frac{3\pi}{8}x^2-\frac{1}{2}x^3.$$

取$x=\frac{1}{n}$后两边同乘$n^2$得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n}=\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{2n}.$$

而广义 Riemann 和显示

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n}=\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

广义 Riemann 和成立的条件是 $\sum_{k=0}^{\infty}\sup_{x\in[k,k+1]}|f'(x)|<\infty$? 这不等式蕴含 $\int_0^{\infty}|f'|\,\mathrm{d}x<+\infty$, $f'\in L^1(0,\infty)$. □

解. 用 Parseval 定理

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(s)G(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中$F(s)=\mathcal{F}[f]$, $G(s)=\mathcal{F}[g]$, $\mathcal{F}[f]=\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\,\mathrm{d}x$. 若$f(x)=\frac{\sin x}{x}$, 则

$$F(s)=\begin{cases}\pi, & |s|\le 1\\ 0, & |s|>1,\end{cases}$$

若$g(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$, 则

$$G(s)=\begin{cases}\pi\left(1-\dfrac{|s|}{2}\right),|s|\le 2\\ 0,|s|>2,\end{cases}$$

所以$\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\pi^2\left(1-\frac{|s|}{2}\right)\mathrm{d}s=\frac{3\pi}{4}$. 即$\int_0^\infty\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{8}$. □

解. 用 Laplace 变换 $F(s)=\mathcal{L}[f]=\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 对于$f(x)=\frac{\sin^3 x}{x^3}$有

$$F(s)=\frac{\pi s^2}{8}+\frac{3\pi}{8}-\frac{3(s^2-1)}{8}\arctan s+\frac{s^2-9}{8}\arctan\frac{s}{3}+\frac{3s}{8}\ln\frac{s^2+1}{s^2+9}.$$

□

解. 用 Laplace 恒等式

$$\int_0^\infty F(u)g(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^\infty f(u)G(u)\,\mathrm{d}u, F(s)=\mathcal{L}[f(t)], G(s)=\mathcal{L}[g(t)].$$

让 $G(u)=\frac{1}{u^3}$ 得 $g(u)=\frac{u^2}{2}$, 让 $f(u)=\sin^3 u$ 得 $F(u)=\frac{6}{(u^2+1)(u^2+9)}$, 则

$$\int_0^\infty\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{6}{2}\int_0^\infty\frac{u^2}{(u^2+1)(u^2+9)}\,\mathrm{d}u=\frac{3\pi}{8}.$$

□

解. 留数定理, 由 $\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4}$ 得 $\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4x^3}\,\mathrm{d}x$. 围道 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$, $\gamma_1=[r,R]$, $\gamma_2$ 是以 $(0,0)$ 为心 $R$ 为径的上半圆, $\gamma_3=[-R,-r]$, $\gamma_4$ 为以 $(0,0)$ 为心 $r$ 为径的上半圆, $\gamma$ 取逆时针方向为正方向. 取 $f(z)=\frac{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}z}}{z^3}$, 则 $f$ 在 $\gamma$ 内解析, 由 Cauchy-Goursat 公式

$$\oint_\gamma f(z)=0, \tag{2.1}$$

并用 Laurent 展开或留数定理得

$$\int_{\gamma_4}f(z)\,\mathrm{d}z=-\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}, \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2}f(z)\,\mathrm{d}z=0, \lim_{\substack{r\to0\\R\to\infty}}\int_{\gamma_1\cup\gamma_3}f(z)\,\mathrm{d}z=2\mathrm{i}\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x.$$

代入2.2即得. □

**问题 2.5.53**

设函数$f:(a,b)\to\mathbb{R}$连续可微, 又设对于任意的$x,y\in(a,b)$, 存在唯一的$z\in(a,b)$使得$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(z)$. 证明: $f(x)$严格凸或严格凹.

解. 反证法, 构造$\lambda$的函数

$$\Lambda(\lambda)=f(\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta)-\lambda f(\alpha)-(1-\lambda)f(\beta),\quad \lambda\in(0,1)$$

若结论不真, 则存在$\alpha,\beta\in(a,b)$使$\Lambda(\lambda)$在$(0,1)$的某两点异号, 由于$f$连续, 所以存在$\lambda_0\in(0,1)$使$\Lambda(\lambda_0)=0$.

设$\gamma=\lambda_0\alpha+(1-\lambda_0)\beta$, 则$\gamma\in(\alpha,\beta)\subset(a,b)$且 $\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$. 再由拉格朗日中值定理得出矛盾. □

**问题 2.5.54**

设函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上无限可微, 且:

a) 存在$L>0$, 使得对于任意的$x\in\mathbb{R}$及$n\in\mathbb{N}$有$|f^{(n)}(x)|\le L$.

b) $f\left(\frac{1}{n}\right)=0$, 对所有$n=1,2,3\cdots$.

求证: $f(x)\equiv 0$.

解. 由$f$在$\mathbb{R}$上无限次可微, 且由a)知$f$有在$x=0$处的Taylor展开

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots.$$

设$N$是使$f^{(N)}(0)\neq 0$的最小者, 取正整数$M>1$使$|f^{(N)}(0)|>\frac{L}{M-1}$. 则

$$\begin{aligned}0=\left|f\left(\frac{1}{M}\right)\right|&=\left|f^{(N)}(0)\frac{x^N}{N!}+f^{(N+1)}(0)\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}+\cdots\right|\\&\ge|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-L\left(\frac{1}{(N+1)!M^{N+1}}+\frac{1}{(N+2)!M^{N+2}}+\cdots\right)\\&\ge|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-L\left(\frac{1}{N!M^{N+1}}+\frac{1}{N!M^{N+2}}+\cdots\right)\\&=|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-\frac{L}{N!}\frac{1}{M^{N+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{M}}\\&=\left(|f^{(N)}(0)|-\frac{L}{M-1}\right)\frac{1}{N!M^N}>0.\end{aligned}$$

这导致矛盾, 即所有$f^{(n)}(0)=0$, $f(x)\equiv 0$. □

**问题 2.5.55**

设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\subset C_{[a,b]}$, 且$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$, 则$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 因$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in[a,b]$, 所以$f\in C_{[a,b]}$且$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当$n>N$时, $\forall x\in[a,b]$均有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. $f(x),f_n(x)$连续必可积, 有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|<(b-a)\varepsilon.$$

其实当$a\le x\le b$时, 有$\left|\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|<(b-a)\varepsilon$对$x$一致成立, 所以$\int_a^x f_n(x)\,\mathrm{d}t\rightrightarrows\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. □

**问题 2.5.56**

$f_n(x)$在$[a,b]$上都有连续导数, 且$f_n(x)\to f(x)$, $f_n'(x)\rightrightarrows g(x)$, 则$f'(x)=g(x)$, 即$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)$.

解. 因$f_n'\rightrightarrows g$, 所以$g$连续, 可积, 由2.5.55, $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$, 所以$f'(x)=g(x)$. 其实$f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$在$[a,b]$上也一致收敛.

若2.5.55和本问题中的$f_n(x)$视为函数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$的前$n$项部分和, 就有函数项级数的相应命题.

(1). 若$[a,b]$上$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$中每项$u_k$均连续, 且$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\rightrightarrows f(x)$, 则$f(x)\in C_{[a,b]}$且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2). 若$[a,b]$上, $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$的每项都有连续导数$u_k'(x)$且$\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(x)\rightrightarrows g(x)$, 而$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\to f(x)$. 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(x).$$

□

**问题 2.5.57**

举反例:

(1) 积分的极限不等于极限的积分的函数列.

(2) 导数的极限不等于极限的导数的函数列.

解. (1). 在$[0,1]$上极限函数为0, 但$f_n$在$\left[0,\frac{1}{n}\right]$上面积为1的脉冲函数.
(2). $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$, $x\in[-1,1]$. □

**问题 2.5.58: http://math.stackexchange.com/questions/2143014**

证明: 对于任意的$\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|\frac{\alpha-n}{\alpha+n}\right|$发散.

**问题 2.5.59: http://math.stackexchange.com/questions/472007**

判断$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{\sin n}{n+10\sin n}$的敛散性.

解. 其实, 若$f(n)$是有界函数, 且级数$\sum_{n=1}^{n}\frac{f(n)}{n}$收敛, $a$是使任意的$n$都有$n+af(n)\neq 0$, 则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n+af(n)}$.
这是因为

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{f(n)}{n+af(n)}=\sum_{n=1}^{m}\frac{f(n)}{n}+\sum_{n=1}^{m}\frac{-af^2(n)}{n(n+af(n))}$$

后一个和式用比较判别法. □

**问题 2.5.60: http://math.stackexchange.com/questions/273559**

判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n)}{n}$的敛散性.

解. 比较判别法, $[k\pi+\frac{\pi}{6},(k+1)\pi-\frac{\pi}{6}]$中总有至少一个整数.
或用$\sum\frac{\sin^2(n)}{n}=\sum\frac{1}{2n}-\sum\frac{\cos(2n)}{2n}$, 前者发散, 后者用Dirichlet判别法. □

**问题 2.5.61: http://math.stackexchange.com/questions/991652**

证明$\int_0^1\left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right|\,\mathrm{d}x$发散.

解. 变量替换, 积分化为$\int_1^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$, 然后在子区间$(k\pi,(k+1)\pi)$上求下界. □

**问题 2.5.62: http://math.stackexchange.com/questions/620449**

证明: 求$p\in\mathbb{R}$, 使积分$\int_0^{\infty}\frac{x^p}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$发散.

解. $p\geq -1$. □

**问题 2.5.63: http://math.stackexchange.com/questions/596511**

计算
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

解. 用Frullani积分. 结果为$\log 2$. 或用重积分: $\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}=x\int_1^2 \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. 这里给出Frullani积分证明过程的做法.

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{2a}^{2b}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \left(\int_a^b-\int_{2a}^{2b}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \left(\int_a^{2a}-\int_b^{2b}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\to\log(2)-0,\quad a\to 0,b\to\infty\end{aligned}$$

上式最后一步用$\mathrm{e}^{-2c}\log(2)\le\int_c^{2c}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\le\mathrm{e}^{-c}\log(2)$. □

**问题 2.5.64: http://math.stackexchange.com/questions/590774**

已知$a>b>0$, 求$\lim_{t\to0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)$.

解. 注意到$\Gamma(t)=a^t\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-as}}{s^{1-t}}\,\mathrm{d}s$, 所以

$$\lim_{t\to0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$$

然后用Frullani积分算得$\log\frac{a}{b}$. □

**问题 2.5.65: http://math.stackexchange.com/questions/590774**

已知$a>b>0$, 求$\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$.

解. 可以用Frullani积分. 这里用含参积分求导的方法, 定义$I(t)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-tx}}{x}\,\mathrm{d}x$, 被积函数记为$f(x,t)$, 由$f(x,t)$和$f_t(x,t)$在定义域均连续, $I(t)$关于$t$收敛且$\int_0^\infty f_t(x,t)\,\mathrm{d}x$关于$t$一致收敛, 则满足积分号下求导条件, 所以$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{a}$, $I=-\log t$. □

解.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx &= \lim_{\epsilon\to0}\int_\epsilon^\infty\frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx\\ &= \lim_{\epsilon\to0}\left[\int_\epsilon^\infty\frac{\exp(-ax)}{x}dx-\int_\epsilon^\infty\frac{\exp(-bx)}{x}dx\right]\\ &= \lim_{\epsilon\to0}\left[\int_{a\epsilon}^\infty\frac{\exp(-t)}{t}dt-\int_{b\epsilon}^\infty\frac{\exp(-t)}{t}dt\right]\\ &= \lim_{\epsilon\to0}\int_{a\epsilon}^{b\epsilon}\frac{\exp(-t)}{t}dt=\lim_{\epsilon\to0}\int_a^b\frac{\exp(-\epsilon u)}{u}du\end{aligned}$$

最后的被积函数一致收敛到$\frac{1}{u}$. □

解. 用Laplace变换, $F(s)=\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 则

$$F(s)=\int_0^\infty\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}e^{-sx}dx\implies F'(s)=-\int_0^\infty(e^{-bx}-e^{-ax})e^{-sx}dx.$$

计算最后一个积分, 然后求积分并令$s\to0$, 其中积分出来的积分常数用极限$\lim_{s\to\infty}F(s)=0$计算. □

**问题 2.5.66: http://math.stackexchange.com/questions/164400**

求$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}x=\log t$, 其中$t>0$.

解. 让$u=\mathrm{e}^{-x}$, 得

$$\int_0^1 \frac{u^{t-1}-1}{\log u}\,\mathrm{d}u=\int_0^1\int_1^t u^{s-1}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u=\int_1^t\int_0^1 u^{s-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s=\log t.$$

□

解. 同2.5.65的解法一. □

解. 用重积分求解, $I(t)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\int_1^t \mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x$. 这里验证积分次序可交换, 则

$$LHS=\int_1^t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s=\ln t.$$

□

解. 用Laplace变换, $g(s)=L[f(x)]=L\left[\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\right]$, 则$-g'(s)=L[xf(x)]=\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}$. 所以$g(s)=\log\frac{s+b}{s+a}+c$, 由于$g(\infty)=0$, 所以$c=0$. 从而

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x=\log\frac{s+b}{s+a}.$$

令$s=0$即可. □

解. 用Laplace变换, $L[1]=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{s}$, 则

$$LHS=\int_0^\infty\int_0^\infty(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt})\mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+t}\right)=\ln\frac{s+1}{s+t}\Big|_0^\infty=\ln t$$

□

**问题 2.5.67: http://tieba.baidu.com/p/2686576086**

设$f(x)$在实轴$\mathbb{R}$上有二阶导数, 且满足方程

$$2f(x)+f''(x)=-xf'(x).$$

求证$f(x)$和$f'(x)$都在$\mathbb{R}$上有界.

解. 构造$L=f^2+\frac{1}{2}f'^2$, 研究$L'$. 方程可改成$f''(x)+\frac{x}{2}f'(x)+f(x)=0$. □

**问题 2.5.68: http://tieba.baidu.com/p/3846349760**

证明: $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}$发散.

解. 由于$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 且$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调增加, 则$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$, 于是$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, 从而$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)>\ln n$, 即得. □

**问题 2.5.69: http://tieba.baidu.com/p/4931607145**

设$f(x)$在$[a,b]$上可导, $f'(x)$在$[a,b]$上可积. 令

$$A_n=\sum_{i=1}^n f\left(a+i\cdot\frac{b-a}{n}\right)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

试证

$$\lim_{n\to\infty}nA_n=\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)].$$

解. 令$x_i=a+i\cdot\frac{b-a}{n}$, 则

$$\begin{aligned}
nA_n&=n\left[\sum_{i=1}^n f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n}-\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\
&=n\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x\\
&=n\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

在$[x_{i-1},x_i]$上, $(x_i-x)$保号, 而$g(x)=\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}$连续(补充定义$g(x_i)=f'(x_i)$). 由积分第一中值定理知, 存在$\eta_i\in(x_{i-1},x_i)$, 使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x=g(\eta_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x.$$

再由Lagrange中值定理, 以上$g(\eta_i)=\frac{f(x_i)-f(\eta_i)}{\eta_i-x}=f'(\xi_i)$, $(\xi_i\in(\eta_i,x_i)\subset(x_{i-1},x_i))$. 于是

$$\begin{aligned}
nA_n&=n\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x=\frac{n}{2}\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})^2\\
&=\frac{n}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\\
&\to\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)),\text{当}n\to\infty.
\end{aligned}$$

□

**问题 2.5.70**

$\int_0^1\frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{64}\sqrt[4]{2}\pi$.

**问题 2.5.71**

求证:

$$\int_0^\infty\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{8}$$

解. 让$f(y)=\int_0^\infty\frac{\sin^3 yx}{x^3}\,\mathrm{d}x$, 判断积分号下可求导, 有

$$f''(y)=\frac{3}{4}\int_0^\infty\frac{-\sin yx+3\sin 3yx}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}\mathrm{sign}y.$$

□

解. 用$\sum_{k=1}^\infty\frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi-x}{2}$, 由

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\sin^3(kx)}{k^3}=\frac{9\sin(3kx)-3\sin(kx)}{4k}.$$

则

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{9\sin(3kx)-3\sin(kx)}{4k}=\frac{3\pi}{4}-3x.$$

积分后得:

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{\sin^3(kx)}{k^3}=\frac{3\pi}{8}x^2-\frac{1}{2}x^3.$$

取$x=\frac{1}{n}$后两边同乘$n^2$得
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n}=\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{2n}.$$
而广义 Riemann 和显示
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n}=\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$
广义 Riemann 和成立的条件是 $\sum_{k=0}^{\infty}\sup_{x\in[k,k+1]}|f'(x)|<\infty$? 这不等式蕴含 $\int_0^{\infty}|f'|\,\mathrm{d}x<+\infty$, $f'\in L^1(0,\infty)$. □

解. 用 Parseval 定理
$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(s)G(s)\,\mathrm{d}s,$$
其中$F(s)=\mathcal{F}[f]$, $G(s)=\mathcal{F}[g]$, $\mathcal{F}[f]=\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\,\mathrm{d}x$. 若$f(x)=\frac{\sin x}{x}$, 则
$$F(s)=\begin{cases}\pi, & |s|\le 1\\ 0, & |s|>1,\end{cases}$$
若$g(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$, 则
$$G(s)=\begin{cases}\pi\left(1-\dfrac{|s|}{2}\right), |s|\le 2\\ 0, |s|>2,\end{cases}$$
所以$\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\pi^2\left(1-\frac{|s|}{2}\right)\mathrm{d}s=\frac{3\pi}{4}$. 即$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{8}$. □

解. 用 Laplace 变换 $F(s)=\mathcal{L}[f]=\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 对于$f(x)=\frac{\sin^3 x}{x^3}$有
$$F(s)=\frac{\pi s^2}{8}+\frac{3\pi}{8}-\frac{3(s^2-1)}{8}\arctan s+\frac{s^2-9}{8}\arctan\frac{s}{3}+\frac{3s}{8}\ln\frac{s^2+1}{s^2+9}.$$
□

解. 用 Laplace 恒等式
$$\int_0^{\infty}F(u)g(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^{\infty}f(u)G(u)\,\mathrm{d}u, F(s)=\mathcal{L}[f(t)], G(s)=\mathcal{L}[g(t)].$$
让 $G(u)=\frac{1}{u^3}$ 得 $g(u)=\frac{u^2}{2}$, 让 $f(u)=\sin^3 u$ 得 $F(u)=\frac{6}{(u^2+1)(u^2+9)}$, 则
$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{6}{2}\int_0^{\infty}\frac{u^2}{(u^2+1)(u^2+9)}\,\mathrm{d}u=\frac{3\pi}{8}.$$
□

解. 留数定理, 由 $\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4}$ 得 $\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4x^3}\,\mathrm{d}x$. 围道 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$, $\gamma_1=[r,R]$, $\gamma_2$ 是以 $(0,0)$ 为心 $R$ 为径的上半圆, $\gamma_3=[-R,-r]$, $\gamma_4$ 为以 $(0,0)$ 为心 $r$ 为径的上半圆, $\gamma$ 取逆时针方向为正方向. 取 $f(z)=\frac{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}z}}{z^3}$, 则 $f$ 在 $\gamma$ 内解析, 由 Cauchy-Goursat 公式
$$\oint_{\gamma}f(z)=0, \tag{2.2}$$
并用 Laurent 展开或留数定理得
$$\int_{\gamma_4}f(z)\,\mathrm{d}z=-\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}, \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2}f(z)\,\mathrm{d}z=0, \lim_{\substack{r\to0\\R\to\infty}}\int_{\gamma_1\cup\gamma_3}f(z)\,\mathrm{d}z=2\mathrm{i}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x.$$
代入2.2即得. □

**问题 2.5.72**

设函数$f:(a,b)\to\mathbb{R}$连续可微, 又设对于任意的$x,y\in(a,b)$, 存在唯一的$z\in(a,b)$使得$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(z)$. 证明: $f(x)$严格凸或严格凹.

解. 反证法, 构造$\lambda$的函数

$$\Lambda(\lambda)=f(\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta)-\lambda f(\alpha)-(1-\lambda)f(\beta),\quad \lambda\in(0,1)$$

若结论不真, 则存在$\alpha,\beta\in(a,b)$使$\Lambda(\lambda)$在$(0,1)$的某两点异号, 由于$f$连续, 所以存在$\lambda_0\in(0,1)$使$\Lambda(\lambda_0)=0$.

设$\gamma=\lambda_0\alpha+(1-\lambda_0)\beta$, 则$\gamma\in(\alpha,\beta)\subset(a,b)$且$\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$. 再由拉格朗日中值定理得出矛盾. □

**问题 2.5.73**

设函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上无限可微, 且:

a) 存在$L>0$, 使得对于任意的$x\in\mathbb{R}$及$n\in\mathbb{N}$有$|f^{(n)}(x)|\le L$.

b) $f\left(\frac{1}{n}\right)=0$, 对所有$n=1,2,3\cdots$.

求证: $f(x)\equiv 0$.

解. 由$f$在$\mathbb{R}$上无限次可微, 且由a)知$f$有在$x=0$处的Taylor展开

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots.$$

设$N$是使$f^{(N)}(0)\ne 0$的最小者, 取正整数$M>1$使$|f^{(N)}(0)|>\frac{L}{M-1}$. 则

$$\begin{aligned}0=\left|f\left(\frac{1}{M}\right)\right|&=\left|f^{(N)}(0)\frac{x^N}{N!}+f^{(N+1)}(0)\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}+\cdots\right|\\&\ge|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-L\left(\frac{1}{(N+1)!M^{N+1}}+\frac{1}{(N+2)!M^{N+2}}+\cdots\right)\\&\ge|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-L\left(\frac{1}{N!M^{N+1}}+\frac{1}{N!M^{N+2}}+\cdots\right)\\&=|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-\frac{L}{N!}\frac{1}{M^{N+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{M}}\\&=\left(|f^{(N)}(0)|-\frac{L}{M-1}\right)\frac{1}{N!M^N}>0.\end{aligned}$$

这导致矛盾, 即所有$f^{(n)}(0)=0$, $f(x)\equiv 0$. □