Contents

Chapter 1

高中笔记8

1.1 读书笔记

康托尔: 德, 数学家, 集合论的创造人, 他证明了一条直线上的点和一个平面上的点一一对应, 也能和空间中的点一一对应. 因此1cm长的线段内的点与太平洋面上的点以及整个地球内部的点都"一样多". 他对这类"无穷集合"问题发表了一系列文章, 通过严格证明得出了许多惊人的结论.

罗素悖论: 又称理发师悖论: 某村只有一人会理发, 且该村的人都需要理发, 理发师约定, 给且只给村中自己不给自己理发的人理发, 试问: 理发师给不给自己理发.

阿贝尔: 椭圆函数论的创始人之一, 发现了椭圆函数的加法定理, 双周期性. 在交换群, 二项级数的严格理论, 级数求和等有巨大贡献, 还有阿贝尔积分, 阿贝尔积分方程, 阿贝尔函数, 阿贝尔级数, 阿贝尔部分和公式, 阿贝尔收敛判别法, 阿贝尔可和性.

分形: 龙的曲线是由一个等腰直角三角形开始的, 以该等腰直角三角形的直角边为斜边作另外的等腰直角三角形, 如此往后, 并将其斜边删除掉即可.

群论: 伽罗瓦是第一个使用群并系统地研究群的数学家. 他19岁时, 用群的思想解决了五次方程的问题. 逐渐开创了一个新的数学分支–抽象代数学. 它包括群论, 环论, 域论, 布尔代数等.

说谎者悖论: 公元前4世纪, 希腊哲学家也提出:"我现在正在说的这句话是谎话". 另外公元前6世纪, 古希腊克里特岛的哲学家伊壁门尼德斯断言:"所有克里特人所说的每一句话都是谎话."

干下去还有50%成功的希望, 不干便是100%的失败.

$A = x + y + z$(A:成功, x: 艰苦的劳动, y: 正确的方法, z: 少说空话)–爱因斯坦的公式.

埃托色尼的筛法提的求小于给定数N的所有素数的方法: 先从3写出所有小于N的奇数, 再从中划去$3, 5, 7, 11 \cdots$的倍数.

球体填充问题: 把一大堆乒乓球倒进一个箱内, 倒至最后还剩几个, 使箱内乒乓球数目最多. 称为球体填充问题, 亦称开普勒猜想.

查: 吴文俊的"吴示性类", "吴示嵌类".

药剂师的砝码: 将300g药粉分成100g和200g各一份, 可是天平只有30g和35g两个砝码, 只需分两次即可, 分两步: 一, 将30g砝码放一盘上, 把300g药粉倒在两个盘上, 使之平衡, 于是, 一盘药粉为165g, 另一盘135g; 第二步将35g砝码, 从135g药粉中称出35g$\cdots$.

罗氏几何的公理系统与欧氏几何公理不同之处是: 平行公理: "用直线外一点, 至少可做两条直线与已知直线平行"来代替, 这引出了一连串和欧氏几何内容不同的新的几何命题.

1.2 球面几何

定义 1.2.1: 大圆

一个过球心的平面在球面上的截线叫做球面上的一个大圆.

定义 1.2.2: 球面二面角

球面上任两个大圆都相交于对顶的两点, 一对对顶点与连接它们的两条大圆弧(半个大圆弧)围成的图形称为球面二面角(梭形).

定义 1.2.3: 球面角

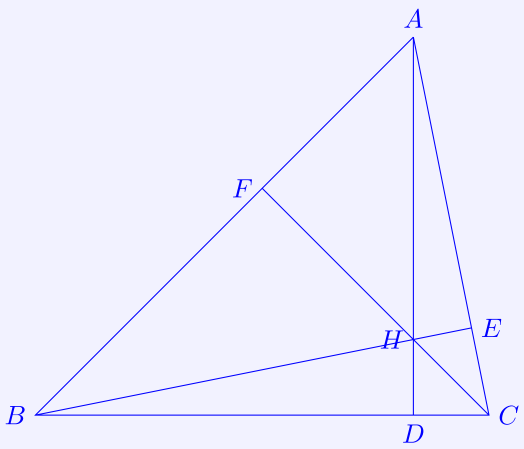
球面上一点及过该点的任意两条大圆弧所构成的图形称为球面角, 这两条大圆弧的切线间的夹角即为该球面角的大小.

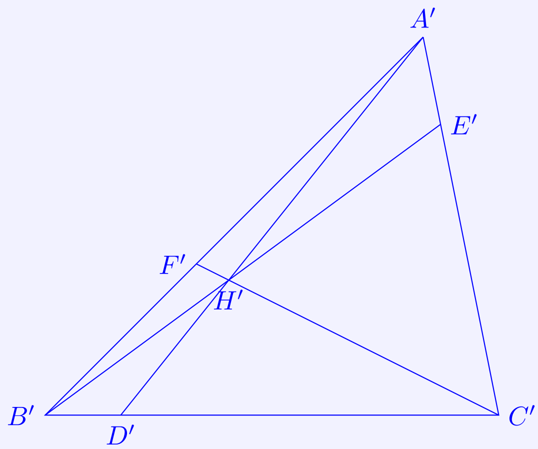
定义 1.2.4: 球面三角形

在半径为R的球面上相距小于πR的给定三点A, B, C唯一地确定了三条小于半圆的大圆圆弧$\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$.

定义 1.2.5: 伴垂心

如下左图是$\triangle ABC$的垂心的定义, 如下右图与$\triangle ABC$全等, 若$B'D' = CD$, $C'E' = AE$, $AF = B'F'$, 则$\triangle A'B'C'$中的三线共点H'为$\triangle A'B'C'$的伴垂心.





定理 1.2.1: 球面三角形余弦定理

对于任给半径为R的球面三角形$\triangle ABC$, 其三边a, b, c和三角$\angle A, \angle B, \angle C$之间恒满足:

$$\cos\frac{a}{R^2} = \cos\frac{c}{R^2}\cos\frac{b}{R^2} + \sin\frac{b}{R^2}\sin\frac{c}{R^2}\cos\angle A,$$
$$\cos\frac{b}{R^2} = \cos\frac{a}{R^2}\cos\frac{c}{R^2} + \sin\frac{c}{R^2}\sin\frac{a}{R^2}\cos\angle B,$$
$$\cos\frac{c}{R^2} = \cos\frac{b}{R^2}\cos\frac{a}{R^2} + \sin\frac{a}{R^2}\sin\frac{b}{R^2}\cos\angle C.$$

定理 1.2.2: 球面三角形正弦定理

条件同上, 有$\frac{\sin\angle A}{\sin\frac{a}{R^2}} = \frac{\sin\angle B}{\sin\frac{b}{R^2}} = \frac{\sin\angle C}{\sin\frac{c}{R^2}}$.

1.3 不等式集

问题 1.3.1

已知$0 \le a_k \le 1(k=1,2,\cdots,2002)$, 记$a_{2003}=a_1$, $a_{2004}=a_2$, 求$\sum_{k=1}^{2002}(a_k - a_{k+1}\cdot a_{k+2})$的最大值.

解.
$$\sum_{k=1}^{2002}(a_k - a_{k+1}\cdot a_{k+2}) = \sum_{k=1}^{2002}(a_k - a_k a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{2002} a_k(1-a_{k+1}).$$
Cauchy不等式, 上式右端不超过
$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{2002} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{2002}(1-a_{k+1})^2\right)} \le \frac{\sum a_k^2 + \sum(1-a_{k+1})^2}{2} = \frac{\sum a_k^2 + \sum(1-a_k)^2}{2} = \frac{\sum(2a_k^2 - 2a_k + 1)}{2}.$$
因为$2a_k^2 - 2a_k + 1 \le 1$, 所以原式不超过$\frac{1}{2}\sum 1 = 1001$, 当$a_k = 0$或1时取等号, 即当$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{2001} = 1$且$a_2 = a_4 = \cdots = a_{2002} = 0$时取等号. □

解. 由$0 \le a_k \le 1$, 得$(1-a_k)(1-a_{k+1}) = 1-(a_k + a_{k+1}) + a_k a_{k+1} \ge 0(k=1,2,\cdots,2002)$, 所以$1 \ge a_k + a_{k+1} - a_k a_{k+1} \ge a_k + a_{k+1} - 2a_k a_{k+1}$, 从而$2002 \ge \sum_{k=1}^{2002}(a_k + a_{k+1} - 2a_k a_{k+1}) = 2\sum(a_k - a_{k+1}a_{k+2})$, 即$\sum(a_k - a_{k+1}a_{k+2}) \le 1001$. □

问题 1.3.2

求函数$y = x + \sqrt{x(2-x)}$的最值及此时x的值.

解. 显然$x \in [0,2]$, 所以可设$x = 2\sin^2\theta(\theta \in \mathbb{R})$, 运用$|a\sin\theta + b\cos\theta| \le \sqrt{a^2+b^2}$即可. □

问题 1.3.3

设n是给定的正整数, $n \ge 13$, 对n个给定的实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$, 记$|a_i - a_j|(1 \le i < j \le n)$有最小值$m$, 求在$\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$的条件下, m的最大值.

解. 不妨设$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$, 于是$a_2 - a_1 \ge m, a_3 - a_2 \ge m, \cdots, a_n - a_{n-1} \ge m$, $a_j - a_i \ge (j-i)m(1 \le i < j \le n)$.
$$\sum_{1 \le i < j \le n}(a_i - a_j)^2 \ge m^2 \times \sum_{1 \le i < j \le n}(j-i)^2 = m^2\sum_{k=1}^{n-1}k(2k+1)(k+1) = \frac{m^2}{12}\cdot n^2(n^2-1).$$
另一方面, $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$可得
$$\sum_{1 \le i < j \le n}(a_i - a_j)^2 = n - \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \le n.$$
故$n \ge \frac{m^2}{12}n^2(n^2-1)$, 所以$m \le \sqrt{\frac{12}{n^2(n^2-1)}}$, 当且仅当$\sum_{i=1}^n a_i = 0$, 且$a_1, a_2, \cdots, a_n$成等差数列时取等号. □

问题 1.3.4

若$x, y, z > 0$且$x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 则$S = \frac{(z+1)^2}{2xyz}$取最小值时, x的值是多少?

解. $\sqrt{\sqrt{2}-1}$. □

引理 1.3.1

设$T \geq 0$, $x, y, z \geq 0$, 则$T \geq \sum x$的充要条件为:

$$(T^2 - \sum x^2)^2 - 8\prod x \cdot T - 4\sum y^2z^2 \geq 0 \tag{1.1}$$
$$T^2 \geq \sum x^2. \tag{1.2}$$

解. 若$T \geq \sum x$, 则1.2式明显成立, 且

$$(T + \sum x)(T^2 - \sum x^2 + 2\sum yz) - 8\prod x \geq 2\sum x \cdot 4\sum yz - 8\prod x \geq 0.$$

根据

$$(T^2 - \sum x^2)^2 - 8\prod x \cdot T - 4\sum y^2z^2 = (T - \sum x)\left[(T + \sum x)(T^2 - \sum x^2 + 2\sum yz) - 8\prod x\right] \tag{1.3}$$

知1.1式成立. 若1.1, 1.2式成立, 则

$$(T+\sum x)(T^2-\sum x^2+2\sum yz)-8\prod x \geq (\sqrt{\sum x^2}+\sum x)\cdot 2\sum yz-8\prod x \geq (\sqrt{3}+3)(\prod x)^{\frac{1}{3}}\cdot 6(\prod x)^{\frac{2}{3}}-8\prod x \geq 0.$$

根据1.3式知$T \geq \sum x$. □

由引理即得

定理 1.3.1

设$T \geq 0$, $x, y, z \geq 0$, 记$f = (T^2 - \sum x^2)^2 - 8\prod x \cdot T - 4\sum y^2z^2$, 则

(i) 若$f \geq 0$, $\sum x^2 \leq T^2$, 则$\sum x \leq T$;

(ii) 若$f \leq 0$, 则$\sum x \geq T$.

问题 1.3.5

$$\sum \cos\frac{A}{2} \leq 2 + \frac{s}{4R} + \frac{9\sqrt{3} - 16}{4R}r.$$

解. 设$m = \frac{s}{4R}$, $n = \frac{r}{2R}$. 则$\sum \cos^2\frac{A}{2} = 2 + n$, $\prod \cos\frac{A}{2} = \frac{m}{2}$. 进而

$$\sum \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2} = \frac{1}{4}(4 + 4n + m^2 + n^2).$$

令$T = 2 + \frac{m}{2} + \frac{9\sqrt{3}-16}{2}n$, $x = \cos\frac{A}{2}$, $y = \cos\frac{B}{2}$, $z = \cos\frac{C}{2}$, 用定理1.3.1中结论(i). □

问题 1.3.6

设实数a, b, c, d, 满足$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 5$, 求$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2$的最大值.

解. 设$f = (a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2 = 15-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+\lambda(a^2+b^2+c^2+d^2-5)$, 所以$f_a = -2(b+c+d)+2a\lambda$, $f_b = -2(a+c+d)+2b\lambda$, $f_c = -2(a+b+d)+2c\lambda$, $f_d = -2(a+c+d)+2b\lambda$, $f_\lambda = a^2+b^2+c^2+d^2-5$, 令$f_a = f_b = f_c = f_d = f_\lambda = 0$, 解得$\lambda = -1$或$a = b = c = d$. 当$\lambda = -1$时, $a+b+c+d = 0$得$f = 20$. 当$a = b = c = d$时, $f = 0$, 所以$f_{\max} = 20$. □

问题 1.3.7

如果$x > 0$, $y > 0$, $z > 0$且$x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 求$\frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{xy}{z}$的最小值.

解. 设$\frac{yz}{x}=a$, $\frac{xz}{y}-b$, $\frac{xy}{z}=c$, 则$ab+bc+ca=1$, 所以$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca=1$, 所以$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\geq 3$, 另外令$f=a+b+c+\lambda(ab+bc+ca-1)$, 令 $f_a=1+(b+c)\lambda=0$, $f_b=1+(a+c)\lambda=0$, $f_c=1+(a+b)\lambda=0$, 所以$a=b=c$时最小. □

问题 1.3.8

设$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$满足$a_0=\frac{1}{2}$, $a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n}a_k^2$, $k=0,1,2,\cdots,n-1$, 其中n是一个给定的正整数, 试证: $1-\frac{1}{n}<a_n<1$.

解. $a_n>a_{n-1}>a_{n-2}>\cdots>a_2>a_1>a_0=\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}=\frac{1}{n+a_k}<\frac{1}{n}\Longrightarrow\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}<1,$$
$$\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}=\frac{1}{n+a_k}>\frac{1}{n+1}\Longrightarrow\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}>\frac{n}{n+1}.$$

□

问题 1.3.9

当$a>1$时, 若不等式$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{7}{12}\left[\log_{a+1}x-\log_a x+1\right]$对于不小于2的正整数$n$恒成立, 求$x$的取值范围.

解. $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$递增, x的取值范围为$(1,+\infty)$. □

问题 1.3.10

实数集$\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, 满足以下条件:

(1) $a_1=a_n=0$.

(2) 对$1\leq k\leq n-1$, 有$a_k=c+\sum_{i=k}^{n-1}a_{i-k}(a_i+a_{i+1})$.

证明: $c\leq\frac{1}{4n}$.

解. 定义$S_k=\sum_{i=0}^{k}a_i(k=0,1,2,\cdots,n)$, 则

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{n-1}a_{k-1}=nc+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=k}^{n-1}a_{i-k}(a_i+a_{i+1})\\&=nc+\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+a_{i+1})\cdot\sum_{k=0}^{i}a_{i-k}\\&=nc+\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+a_{i+1})\sum_{t=0}^{i}a_t,(t=i-k)\\&=nc+\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+a_{i+1})\cdot S_i\\&=nc+[S_1S_0+(S_2-S_0)S_1+(S_3-S_1)S_2+\cdots+(S_n-S_{n-2})S_{n-1}]\end{aligned}$$

即$S_n^2-S_n+nc=0$, $\Delta\geq 0\Longrightarrow c\leq\frac{1}{4n}$. □

问题 1.3.11

若关于x的不等式$\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+\frac{1}{\log_3 a}\geq 0$, 求$a$的取值范围.

解. 令$u=x^2+ax+5$, $\frac{\log_3(\sqrt{u}+1)}{-\log_3 a}\cdot\log_5(u+1)+\frac{1}{\log_3 a}\geq 0$. 因为$f(4)=1$, 所以$a=2$. □

问题 1.3.12

设$a_1,a_2,\cdots,a_{2002}>0$且$\sum\frac{1}{2+a_i}=\frac{1}{2}$, 求$\prod a_i$的最小值.

解. 令$x_i=\frac{2}{2+a_i}$, 则$\sum x_i=1$, 则$a_i=2\cdot\frac{1-x_i}{x_i}$, 因为

$$\begin{aligned}\prod a_i&=2^{2002}\prod\frac{1-x_i}{x_i}\\&=2^{2002}\cdot\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{2002}}\prod(x_1+x_2+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_{2002})\\&\geq 2^{2002}\cdot\frac{1}{x_ix_2\cdots x_{2002}}\cdot 2001^{2002}\cdot\prod\sqrt[2001]{x_1x_2\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_{2002}}\\&=4002^{2002}.\end{aligned}$$

□

问题 1.3.13

求最小的正数λ, 使得对任意正整数n, a_i和b_i, $b_i\in[1,2](i=1,2,\cdots,n)$, 且$\sum_{i=1}^n a_i^2=\sum b_i^2$, 都有$\sum\frac{a_i^3}{b_i}\leq\lambda\cdot\sum a_i^2$.

解. 对任意$c_i,b_i\in[1,2]$, 有$\frac{1}{2}\leq\frac{c_i}{b_i}\leq 2$, 即$\frac{1}{2}b_i\leq c_i\leq 2b_i$, 从而$\left(\frac{1}{2}b_i-c_i\right)(2b_i-c_i)\leq 0$, 即$c_i^2+b_i^2\leq\frac{5}{2}c_ib_i$, 两边对$i$从1到$n$求和, 得$\sum c_i^2+\sum b_i^2\leq\frac{5}{2}\sum c_ib_i$, 设$a_i,b_i\in\left[1,\frac{2}{3}\right]$, 因$a_i^2=\frac{a_i^{\frac{3}{2}}}{b_i^{\frac{1}{2}}}\cdot a_i^{\frac{1}{2}}\cdot b_i^{\frac{1}{2}}$. 又

$$\frac{1}{2}\leq\frac{\frac{a_i^{\frac{3}{2}}}{b_i^{\frac{1}{2}}}}{a_i^{\frac{1}{2}}\cdot b_i^{\frac{1}{2}}}\leq 2.$$

故有$\frac{5}{2}\sum a_i^2\geq\sum\frac{a_i^3}{b_i}+\sum a_ib_i\geq\sum\frac{a_i^3}{b_i}+\frac{2}{5}(\sum a_i^2+\sum b_i^2)=\sum\frac{a_i^3}{b_i}+\frac{4}{5}\sum a_i^2$, 即$\sum\frac{a_i^3}{b_i}\leq\frac{17}{10}\sum a_i^2$, 当$n=2$, $a_1=1$, $a_2=2$, $b_1=2$, $b_2=1$时取等号. □

问题 1.3.14

已知: $x,y,z\in\mathbb{R}^*$, 有$xyz=1$且满足$x(1+z)>1$, $y(1+x)>1$, $z(1+y)>1$, 求证: $2(x+y+z)\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+3$.

解. 令$x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, $z=\frac{c}{a}$, 则$a+c>b$, $a+b>c$, $b+c>a$, 要证$2(x+y+z)\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+3$, 只需证

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+3\Longleftrightarrow 2(a^2c+b^2a+c^2b)\geq b^2c+c^2a+a^2b+3abc.$$

因为

$$(a+b-c)(b-c)^2\geq 0,\quad(b+c-a)(c-a)^2\geq 0,\quad(c+a-b)(a-b)^2\geq 0$$

展开相加, 即得. □

问题 1.3.15

已知正整数$n\geq 2$, 若对同时满足条件:

(1) $a_1a_2\cdots a_n=b_1b_2\cdots b_n$;

(2) $\sum_{1\leq i<j\leq n}|a_i-a_j|\leq\sum_{1\leq i<j\leq n}|b_i-b_j|$的任意正数$a_1,\cdots,a_n$与$b_1,\cdots,b_n$, 总有$\sum_{i=1}^n a_i\leq\lambda\sum_{i=1}^n b_i$. 试求正数$\lambda$的最小值.

解. 一方面, 取$(a_1,\cdots,a_n)=(1,1,\cdots,(1+x)x^{n-1})$, $(b_1,\cdots,b_n)=(1+x,x,x,\cdots,x)$, 满足(1)与(2), 此时$\lambda\ge\frac{\sum a_i}{\sum b_i}=\frac{n-1+x^{n-1}+x^n}{1+nx}$, 令$x\to 0$, 则$\lambda\ge n-1$.

以下证明$\lambda=n-1$时, 不等式成立.

不妨设$a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n$, $b_1\ge b_2\ge\cdots\ge b_n$, $n=2$时, 显然成立.

设$n\ge 3$,

(1) 若$a_1\le\frac{n-1}{n}b_1$, 则$\sum a_i\le na_1\le(n-1)b_1\le(n-1)\sum b_i$.

(2) 若$a_1>\frac{n-1}{n}b_1$, 则

$$\begin{aligned}2(b_2+\cdots+b_n)&\ge 2(n-1)\cdot(b_2\cdots b_n)^{\frac{1}{n-1}}=2(n-1)\left(\frac{a_1}{b_1}a_2\cdots a_n\right)^{\frac{1}{n-1}}\\&\ge 2(n-1)\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{\frac{1}{n-1}}\cdot a_n>2(n-1)\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\cdot a_n\\&\ge na_n.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}(n-1)\sum b_i&=(n-1)b_1+(n-3)\sum_{i=2}^n b_i+2\sum_{i=2}^n b_i\\&\ge(n-1)b_1+(n-3)\sum_{i=2}^n b_i+na_n\ge[(n-1)b_1+(n-3)b_2+\cdots-(n-1)b_n]+na_n\\&=\sum_{1\le i<j\le n}|b_i-b_j|+na_n\ge\sum_{1\le i<j\le n}|a_i-a_j|+na_n\\&=[(n-1)a_1+(n-3)a_2+\cdots-(n-1)a_n]+na_n\\&\ge(n-1)a_1+a_n\ge a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n.\end{aligned}$$

□

问题 1.3.16: 1998年上海市高中数学竞赛

设非零多项式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, $g(x)=c_{n+1}x^{n+1}+c_nx^n+\cdots+c_0$, 满足$g(x)=(x+r)f(x)$, 其中$r$为一实数, 设$a=\max(|a_n|,|a_{n-1}|,\cdots,|a_0|)$, $c=\max(|c_{n+1}|,|c_n|,\cdots,|c_0|)$, 求证: $\frac{a}{c}\le n+1$.

解. 设$|r|\le 1$, 由$\sum_{i=0}^{n+1}c_ix^i=(x+r)\sum_{i=0}^n a_ix^i=a_nx^{n+1}+\sum_{i=1}^n(ra_i+a_{i-1})x^i+ra_0$. 故

$$\begin{cases}c_{n+1}=a_n\\c_n=ra_n+a_{n-1}\\\cdots\\c_1=ra_1+a_0\\c_0=ra_0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a_n=c_{n+1}\\a_{n-1}=-rc_{n+1}+c_n\\a_{n-2}=(-r)^2c_{n+1}+(-r)c_n+c_{n-1}\\\cdots\\a_0=(-r)^nc_{n+1}+(-r)^{n-1}c_n+\cdots+c_1,\end{cases}$$

故$|a|=|a_i|=|(-r)^{n-i}c_{n+1}+\cdots+c_{i+1}|\le|c_{n+1}|+\cdots+|c_{i+1}|\le(n-i+1)c\le(n+1)c$.

如果$|r|>1$, 令$x=\frac{1}{x}$, 代入$g(x)=(x+r)f(x)$, 则转化为上述情形, 仍有$a\le(n+1)c$.

另外

$$|a|=|a_i|\le|r|^{n-i}|c_{n+1}|+\cdots+|c_{i+1}|\le(|r^n|+|r^{n-1}|+\cdots+1)c\le\frac{|r|^{n+1}-1}{|r|-1}c$$

而

$$\frac{|r|^{n+1}-1}{|r|-1}\le n+1\Longleftrightarrow|r|^{n+1}\ge n|r|-n+|r|\Longleftrightarrow|r|^n+\frac{n}{|r|}\ge n+1\Longleftrightarrow|r|^n+\frac{1}{|r|}+\cdots+\frac{1}{|r|}\ge n+1$$

($|r|=0$时, 命题显然成立). □

问题 1.3.17

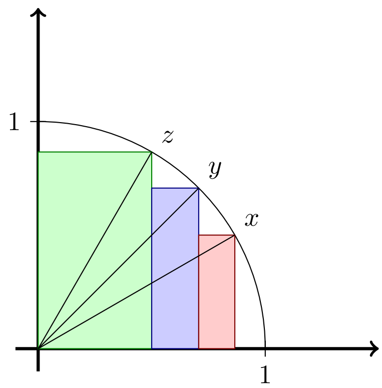
若$a,b,c\in\mathbb{R}$, 且$5a^4+4b^4+6c^4=90$, 求$5a^3+2b^3+3c^3$的最大值.

解. 只需考虑$a,b,c\in\mathbb{R}^*$. 因$a^3=\frac{1}{2}(a\cdot a\cdot a\cdot 2)\le\frac{1}{8}(a^4+a^4+a^4+2^4)=\frac{3}{8}a^4+2$, 同理$b^3\le\frac{3}{4}b^4+\frac{1}{4}$, $c^3\le\frac{3}{4}c^4+\frac{1}{4}$, 所以所求最大值为45. □

问题 1.3.18

若x,y,z为实数, $0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$, 证明: $\frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z$.

解. 原不等式等价于证明$\frac{\pi}{4}>\sin x(\cos x-\cos y)+\sin y(\cos y-\cos z)+\sin z\cos z$. 如图所示



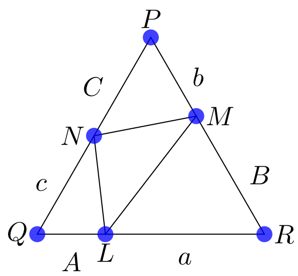
□

问题 1.3.19: 1987年第21届全苏MO

正数a,b,c,A,B,C满足条件$a+A=b+B=c+C=k$, 求证: $aB+bC+cA<k^2$.

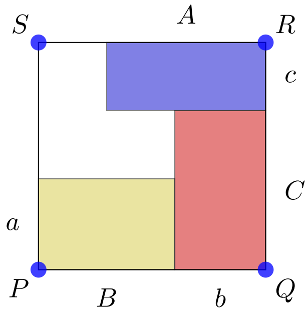
解. 主试委员会给出的解答是$k^3=(a+A)(b+B)(c+C)$, 利用放缩的技巧给出证明, 北京四中的袁峰同学给出了如下构造性证明.

如图: $S_{\triangle LRM}+S_{\triangle PNM}+S_{\triangle QLN}<S_{\triangle PQR}$, 化简即得.



□

解. 如图:



□

问题 1.3.20: 第31届IMO预选题

设集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}=\{1,2,\cdots,n\}$, 求证:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}\le\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

解. 设$b_1,b_2,\cdots,b_{n-1}$是$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$的一个排列, 且$b_1<b_2<\cdots<b_{n-1}$, $c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}$是$a_2,a_3,\cdots,a_n$的一个排列, 且$c_1<c_2<\cdots<c_{n-1}$, 则

$$\frac{1}{c_1}>\frac{1}{c_2}>\cdots>\frac{1}{c_{n-1}}.$$

且$b_1\ge 1$, $b_2\ge 2$, $\cdots,b_{n-1}\ge n-1$, $c_1\le 2,c_2\le 3,\cdots,c_{n-1}\le n$, 由排序不等式得:

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\ge\frac{b_1}{c_1}+\frac{b_2}{c_2}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{c_{n-1}}\ge\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}.$$

这是南斯拉夫提给第31届IMO的一道试题, 原证法是利用加强命题的手法, 用数学归纳法给出证明. 一则加强命题很难想到, 二则归纳法证明要对足标进行讨论, 比较麻烦. 在当年国家集训队里姚建钢同学(第35届IMO金牌得主)的证法, 更是干脆, 漂亮, 出人意料. □

解. 易证

$$\prod_{k=1}^{n-1}(a_k+1)\ge\prod_{k=1}^{n}a_k,$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{a_{k+1}}+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)&=\frac{1}{a_1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k+1}{a_{k+1}}\\&\ge n\sqrt[n]{\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(a_k+1)}{\prod_{k=1}^{n}a_k}}\ge n\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{k+1}\end{aligned}$$

□

问题 1.3.21: 第24届IMO

设a,b,c分别为一个三角形的三边之长, 求证:

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0.$$

并指出等号成立的条件.

解. 原联邦德国选手伯恩哈德·里普只用了一个等式:

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)=a(b-c)^2(b+c-a)+b(a-b)(a-c)(a+b-c)$$

由轮换对称性, 不妨设$a\ge b,c$, 即得欲证不等式成立, 而且显然等号成立的充要条件是$a=b=c$.

里普的证法新颖, 巧妙, 简洁, 与主试委员会提供的参考答案不同, 他因此获得了该届的特别奖. □

问题 1.3.22: 1980年芬兰, 英国, 匈牙利, 瑞典四国联赛

设数列$a_0,a_1,\cdots,a_n$满足$a_0=\frac{1}{2}$及$a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n}a_k^2(k=0,1,2,\cdots,n-1)$, 其中$n$是一个给定的正整数, 试证:

$$1-\frac{1}{n}<a_n<1.$$

解. 该题是该次竞赛得分率最低的一道试题, 主试委员会所给出的解法也相当繁琐, 前后共用了四次归纳法, 译成中文后有4000多字, 中国科技大学白志东先生对此题采用了大胆的处理方法, 加强命题, 出奇制胜给出一个简洁的证明.

由于$a_1 = a_0 + \frac{1}{n}a_0^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} = \frac{2n+1}{4n}$, 所以

$$\frac{n+1}{2n+1} < a_1 < \frac{n}{2n-1}.$$

我们来用归纳法证: 对于一切$1 \le k \le n$, 都有

$$\frac{n+1}{2n-k+2} < a_k < \frac{n}{2n-k}. \tag{1.4}$$

假设(1.4)对于$k < n$成立, 则

$$a_{k+1} = a_k\left(1 + \frac{1}{n}a_k\right) < \frac{n}{2n-k}\left(1 + \frac{1}{2n-k}\right) = \frac{n(2n-k+1)}{(2n-k)^2} < \frac{n}{2n-(k+1)}.$$

所以

$$\begin{aligned} a_{k+1} = a_k + \frac{1}{n}a_k^2 &> \frac{n+1}{2n-k+2} + \frac{(n+1)^2}{n(2n-k+2)^2} \\ &> \frac{n+1}{2n-(k+1)+2} \end{aligned}$$

于是(1.4)式对于一切$1 \le k \le n$均成立, 特别在$k = n$时,

$$1 - \frac{1}{n} < \frac{n+1}{n+2} < a_n < \frac{n}{n} = 1.$$

说明 这里所证的不等式(1.4)式比题目所要证明的不等式强, 却收到了事半功倍之效, 下面给出一种直接了当的证明. □

解. 由已知,

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{1}{n + a_{k-1}},$$

从而$a_n > a_{n-1} > \cdots > a_1 > a_0 = \frac{1}{2}$. 所以

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} < \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

累加得$\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} > \frac{n}{n+1}$, 所以$\frac{1}{a_n} < 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$. □

问题 1.3.23

已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbb{R}$, 对于任意实数m, n均有$f(m+n) = f(m) + f(n) - 1$, 且$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, 当$x > -\frac{1}{2}$时, 恒有$f(x) > 0$, 求证: $f(x)$单调递增.

解. 证明: 令$x_1 > x_2$, 所以

$$f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) - 1 = f\left(\left(x_1 - x_2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) - 1 = f\left(x_1 - x_2 - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) - 1 - 1 = f\left(x_1 - x_2 - \frac{1}{2}\right)$$

因为$x_1 - x_2 - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$, 所以$f\left(x_1 - x_2 - \frac{1}{2}\right) > 0$, 所以$f(x_1) > f(x_2)$, 得证. □

问题 1.3.24

已知: 正数x, y, z均小于1且$x + y + z = 2$, $w = xy + yz + zx$, 求w的取值范围.

解. 易得$w \leq \frac{4}{3}$, 令$x(1-x)=a^2$, $y(1-y)=b^2$, $z(1-z)=c^2$, 因为

$$w = xy + z(2-z) = xz + y(2-y) = yz + x(2-x)$$

所以

$$3w = w + 2\times 2 - x^2 - y^2 - z^2 = w + 4 + a^2 + b^2 + c^2 - 2$$

所以$2w = 2 + a^2 + b^2 + c^2 \geq 2$, 即$w \geq 1$. 仅当$a, b, c = 0$时取$w = 1$, 但$a, b, c \neq 0$, 所以$w > 1$. □

问题 1.3.25

已知$\frac{a^2+b^2}{4} + c^2 = 1$, 求$a+b+c$的最大值.

解.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 =& a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ab + 2ac \\ \leq& a^2 + b^2 + c^2 + (a^2+b^2) + \left(\frac{b^2}{4} + 4c^2\right) + \left(\frac{a^2}{4} + 4c^2\right) \\ =& 9\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right) = 9.\end{aligned}$$

□

问题 1.3.26

已知$a, b > 0$, $a + b = 1$, 证明: $\frac{3}{2} < \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} \leq \frac{8}{5}$.

解. 原式等价于证明:

$$\begin{aligned}15(a^2+1)(b^2+1) < 10(a^2+b^2+2) \leq 16(a^2+1)(b^2+1) &\iff 15a^2b^2 + 5a^2 + 5b^2 - 5 < 0 \leq 16a^2b^2 + 6a^2 + 6b^2 - 4 \\ &\iff 3a^2b^2 + a^2 + b^2 - 1 < 0 \leq 8a^2b^2 + 3a^2 + 3b^2 - 2.\end{aligned}$$

因$a+b=1$, 所以$a^2+b^2-1 = -2ab$. 所以上式等价于

$$3a^2b^2 - 2ab < 0 \leq 8a^2b^2 - 6ab + 1.$$

又由$a^2 + b^2 + 2ab = 1 \geq 4ab$, 所以$0 < ab \leq \frac{1}{4}$, 所以上式成立. □

解. 令$a = \sin^2\theta, b = \cos^2\theta$, $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$, 所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} &= \frac{1}{1+\sin^4\theta} + \frac{1}{1+\cos^4\theta} \\ &= \frac{4}{5 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta} + \frac{4}{5 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta} \\ &= \frac{16(11+\cos 4\theta)}{(11+\cos 4\theta)^2 - 8(11+\cos 4\theta) + 80} \\ &= \frac{16y}{y^2 - 8y + 80} = \frac{16}{y + \frac{80}{y} - 8}\end{aligned}$$

因$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 所以$0 < 4\theta < 2\pi$. 所以$10 < y \leq 12$, 并有$\frac{3}{2} < \frac{16}{y+\frac{80}{y}-8} \leq \frac{8}{5}$. □

问题 1.3.27

已知数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$满足: $b_n = a_n - a_{n+2}$, $c_n = a_n + 2a_{n+1} + 3a_{n+2}$, $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 若$\{c_n\}$为等差数列且$b_n \leq b_{n+1}$, 证明: $b_n = b_{n+1}$.

解. 由于$a_n - a_{n+2} = b_n \le b_{n+1} \le b_{n+2} = a_{n+2} - a_{n+4}$, 所以$2a_{n+2} \ge a_n + a_{n+4}$. 因为$2c_{n+1} = c_n + c_{n+2}$, 所以$4a_{n+3} = a_n + 3a_{n+4} \le 2a_{n+2} + 2a_{n+4}$, 所以$2a_{n+3} \le a_{n+2} + a_{n+4}$. 所以$a_{n+3} - a_{n+2} \le a_{n+4} - a_{n+3} \le a_{n+5} - a_{n+4}$, 所以$a_{n+3} - a_{n+5} \le a_{n+2} - a_{n+4}$, 所以$b_{n+3} \le b_{n+2} \le b_{n+3}$, 所以$b_{n+3} = b_{n+2}$, $(n \ge 1)$. 所以$b_3 = b_4 = b_5 = \cdots = -2d = a_3 - a_5 = a_4 - a_6 = a_5 - a_7$, 所以

$$\begin{aligned}
4a_5 - 3a_6 = a_2 \le a_3 - a_5 + a_4 &\Longrightarrow 5a_5 \le a_3 + a_4 + 3a_6\\
&\Longrightarrow 5(a_3 + 2d) \le a_3 + a_4 + 3(a_4 + 2d)\\
&\Longrightarrow 2a_3 \le 2a_4 - 2d = 2a_4 + a_3 - a_5\\
&\Longrightarrow a_3 + a_5 \le 2a_4.
\end{aligned}$$

因$a_3 + a_5 \ge 2a_4$, 所以$a_2 = a_3 - a_5 + a_4$, 同理$a_1 = a_2 - a_4 + a_3$, 即$b_1 = b_2 = b_3 = \cdots$.

两个正数a, b的和一定时, 它们的积

$$ab = \frac{1}{4}\left((a+b)^2 - (a-b)^2\right) \tag{1.5}$$

随着差$|a-b|$的增大而减小; 其平方和

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}\left((a+b)^2 + (a-b)^2\right) \tag{1.6}$$

随着差$|a-b|$的增大而增大. □

问题 1.3.28

已知$\triangle ABC$的三边, a, b, c成等比数列, 则$\sin B + \cos B$的取值范围为____.

解. 命题等价于$a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$, $b^2 = ac$,

$$b^2 = ac = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \ge 2ac - 2ac\cos B,$$

所以$\cos B \ge \frac{1}{2}$, $0 < B \le 60°$, 由$\frac{1}{2} \le \cos B < 1$及$0 < \sin B \le \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以

$$\frac{1}{2} < \cos B + \sin B < \frac{\sqrt{3}}{2} + 1, \tag{1.7}$$

另一方面, $\sin B + \cos B = \sqrt{2}\sin(B + 45°)$, 而$45° < B + 45° < 105°$, 故

$$1 < \sin B + \cos B \le \sqrt{2}. \tag{1.8}$$

综合(1.7), (1.8)有$1 < \sin B + \cos B \le \sqrt{2}$. □

问题 1.3.29

设a, b, c是直角$\triangle ABC$的三边长, c为斜边, 求使不等式

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \ge kabc$$

恒成立的k的最大值.

解. $a > 0, b > 0, c > 0$, $c^2 = a^2 + b^2$, 所以

$$\begin{aligned}
LHS &= (a^2+b^2)c + a\left(b^2 + \frac{c^2}{2}\right) + b\left(\frac{c^2}{2} + a^2\right) + \frac{c}{2}\cdot c(a+b)\\
&\ge 2abc + \sqrt{2}abc + \sqrt{2}abc + \frac{c}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot 2\sqrt{ab}\\
&\ge (2 + 2\sqrt{2})abc + c\cdot\sqrt{2ab}\cdot\sqrt{ab} = (2 + 3\sqrt{2})abc,
\end{aligned}$$

仅当$a = b$时上式取等号.

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge 5 + 3\sqrt{2}.$$

□

问题 1.3.30

设x_1是方程$\sqrt{3}\sin x-3\cos x=2a-1$的最大负根, x_2是方程$2\cos^2 x-2\sin^2 x=a$的最小正根, 求使不等式$|x_1|\le x_2$成立的实数a的取值范围.

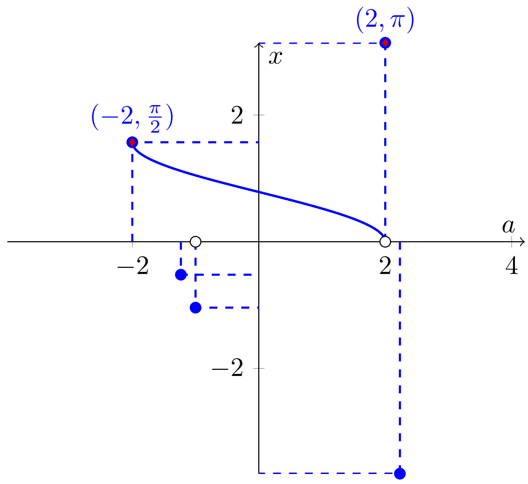
解. 方程$\sqrt{3}\sin x-3\cos x=2a-1$等价于$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2a-1}{2\sqrt{3}}$, 从而得到$-1\le\frac{2a-1}{2\sqrt{3}}\le 1$. 解得$\frac{1}{2}-\sqrt{3}\le a\le\frac{1}{2}+\sqrt{3}$, 而且

$$x_1=\begin{cases}\frac{\pi}{3}+\arcsin\frac{2a-1}{2\sqrt{3}}, & \left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}\le a<-1\right)\\ -\frac{2\pi}{3}-\arcsin\frac{2a-1}{2\sqrt{3}}, & \left(-1\le a\le\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)\end{cases}$$

其图像如图, 位于a轴下方, 方程$2\cos^2 x-2\sin^2 x=a$等价于$\cos 2x=\frac{a}{2}$, 其中$-1\le\frac{a}{2}\le 1$, 所以$-2\le a\le 2$, 解得

$$x_2=\begin{cases}\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{2}, & (-2<a\le 2)\\ \pi, & (a=2).\end{cases}$$

其图像如图, 它位于a轴上方, 比较两个函数的图像, 不难看出$|x_1|\le x_2$的充要条件是$\frac{1}{2}-\sqrt{3}\le a\le -1$或$a=2$.



□

问题 1.3.31

函数$y=\sqrt{8x-x^2}-\sqrt{14x-x^2-48}$的最大值为$\underline{2\sqrt{3}}$, 最小值为$\underline{0}$.

解. x的定义域为$6\le x\le 8$, 而

$$f(x)=\frac{6\sqrt{8-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-6}}$$

在$[6,8]$上递减. □

问题 1.3.32

已知$a,b,c,d\in\mathbb{R}$, 满足$a+b+c+d=3$, $a^2+2b^2+3c^2+6d^2=5$, 则a的最小值与最大值的和是$\underline{3}$.

解.

$$5-a^2=2b^2+3c^2+6d^2=\frac{1}{6}(3+2+1)(2b^2+3c^2+6d^2)\ge(b+c+d)^2=(3-a)^2.$$

□

问题 1.3.33

用$\delta(S)$表示非零整数集S中所有元素的和, 设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{11}\}$是正整数集, 且$a_1<a_2<\cdots<a_{11}$, 若对每个正整数$n\le 1500$, 存在$A$的子集$S$, 使得$\delta(S)=n$, 求满足上述要求的$a_{10}$的最小值.

解. 令$S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$, $(1\le k\le 11)$, 若$a_k>S_{k-1}+1$, 则不存在$S\subset A$, 使$\delta(S)=S_{k-1}+1$, 所以$S_k=S_{k-1}+a_k\le 2S_{k-1}+1$. 又由题设得$S_1=a_1=1$, 于是由归纳法易得$S_k\le 2^k-1$, $(1\le k\le m)$. 若$S_{10}<750$, 则$a_{11}\le 750$, (否则750无法用$\delta(S)$表出), $S_{11}=S_{10}+a_{11}<1500$, 所以$S_{10}\ge 750$. 又$S_8\le 2^8-1=255$, 所以$2a_{10}\ge a_9+a_{10}=S_{10}-S_8\ge 495$, $a_{10}\ge 248$, 另一方面, 令$A=\{1,2,4,8,16,32,64,128,247,248,750\}$合题意. □

问题 1.3.34

$a,b,c>0$, $l^2=a^2+b^2+c^2$, 证明: $(l^4-a^4)(l^4-b^4)(l^4-c^4)\ge 512a^4b^4c^4$.

解.

$$\begin{aligned}
LHS&=(l^2+a^2)(l^2+b^2)(l^2+c^2)(l^2-a^2)(l^2-b^2)(l^2-c^2)\\
&=(2a^2+b^2+c^2)(a^2+2b^2+c^2)(a^2+b^2+2c^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)\\
&\ge 4\sqrt[4]{a^4b^2c^2}\cdot 4\sqrt[4]{a^2b^4c^2}\cdot 4\sqrt[4]{a^2b^2c^4}\cdot 2\sqrt{b^2c^2}\cdot 2\sqrt{c^2a^2}\cdot 2\sqrt{a^2b^2}\\
&=RHS.
\end{aligned}$$

□

解. 问题等价于证明

$$\left(\frac{l^4}{a^4}-1\right)\left(\frac{l^4}{b^4}-1\right)\left(\frac{l^4}{c^4}-1\right)\ge 512$$

设$x=\frac{a^2}{l^2}$, $y=\frac{b^2}{l^2}$, $z=\frac{c^2}{l^2}$, 则$x+y+z=1$, 所以上式等价于证明

$$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\ge 512.$$

因

$$\frac{1}{x^2}-1=\frac{(1-x)(1+x)}{x^2}=\frac{(y+z)(x+y+z+x)}{x^2}\ge\frac{2\sqrt{yz}(2x+2\sqrt{yz})}{x^2}\ge\frac{2\sqrt{yz}\cdot 4\sqrt{x\sqrt{yz}}}{x^2}=\frac{8\sqrt[4]{x^2y^3z^3}}{x^2}.$$

等号当且仅当$x=y=z$时取得, 同理$\frac{1}{y^2}-1\ge 8\frac{\sqrt[4]{x^3y^2z^3}}{y^2}$, $\frac{1}{z^2}-1\ge 8\frac{\sqrt[4]{x^3y^3z^2}}{z^2}$, 以上三式相乘即得. □

问题 1.3.35

在锐角$\triangle ABC$中, $a<b<c$, 记$P=\frac{a+b+c}{2}$, $Q=a\cos C+b\cos B+c\cos A$, 则$P,Q$的关系是?

解.

$$\begin{aligned}
P-Q&=\frac{a+b+c}{2}-b-b\cos B\\
&=\frac{a+b+c}{2}-b\left(1+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)\\
&=\frac{a+b+c}{2}-b\cdot\frac{(a+c-b)(a+c-b)}{2ac}\\
&=\frac{1}{2}(a+b+c)\left(1-\frac{b(a+c-b)}{2ac}\right)\\
&=\frac{1}{2}(a+b+c)\left(\frac{b^2-ab-bc+ac}{ac}\right)\\
&=\frac{1}{2ac}(a+b+c)(b-c)(b-a)<0
\end{aligned}$$

另外$a<b<c$有$\cos C<\cos B<\cos A$, 根据排序不等式,

$$\begin{aligned}a\cos C+b\cos B+c\cos A &> a\cos B+b\cos C+c\cos A\\ a\cos C+b\cos B+c\cos A &> a\cos C+b\cos A+c\cos B.\end{aligned}$$

相加得$2(a\cos C+b\cos B+c\cos A)>a+b+c$. □

问题 1.3.36

设$x,y\in\mathbb{R}^+$, $x+y=3952$, 则(　　).

A. $x^{1949}\cdot y^{2003}\geq 1949^{1949}\cdot 2003^{2003}$.

B. $x^{1949}\cdot y^{2003}\leq 1949^{1949}\cdot 2003^{2003}$.

C. $y^{1949}\cdot x^{2003}\geq 1949^{1949}\cdot 2003^{2003}$.

D. 以上都不对.

解. 由于$x+y=3952$, 所以

$$1949+2003=\sum_{i=1}^{1949}\frac{x}{1949}+\sum_{i=1}^{2003}\frac{y}{2003}\geq(1949+2003)\sqrt[3952]{\left(\frac{x}{1949}\right)^{1949}\cdot\left(\frac{y}{2003}\right)^{2003}}$$

所以$\sqrt[3952]{\left(\frac{x}{1949}\right)^{1949}\cdot\left(\frac{y}{2003}\right)^{2003}}\leq 1$. □

问题 1.3.37

设x,y是不相等的正数, n,m是正整数, 且$n>m$, 令$a=\sqrt[m]{x^m+y^m}$, $b=\sqrt[n]{x^n+y^n}$, 则a与b的大小关系为$\underline{a>b}$.

解.

$$\begin{aligned}a>b &\iff (x^m+y^m)^{m+1}>(x^{m+1}+y^{m+1})^m\\ &\iff (x^m+y^m)^m>\frac{(x^{m+1}+y^{m+1})^m}{x^m+y^m}=\left(\frac{x^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}+\frac{y^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}\right)^m\\ &\iff x^m+y^m>\frac{x^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}+\frac{y^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}\end{aligned}$$

因$x^m=\frac{x^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m}}>\frac{x^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}$, 同理$y^m=\frac{y^{m+1}}{\sqrt[m]{y^m}}>\frac{y^{m+1}}{\sqrt[m]{x^m+y^m}}$, 所以不等式成立, 由幂平均不等式可知$2b>a$. □

问题 1.3.38

已知$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, 且$\sin\frac{\alpha}{2}=a\cos\beta$, 当$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$时, 求$a$的取值范围.

解. 显然$a=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}>0$, 因为$-\frac{\beta}{2}<\frac{1}{2}\alpha<\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}$, 所以$\sin\frac{\alpha}{2}<\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)$. 所以

$$a<\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2\left(\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)}\geq\frac{1}{2},$$

其中等号取不到, 所以$a\leq\frac{1}{2}$. □

问题 1.3.39

设$b_1,b_2,\cdots,b_n$是正数$a_1,a_2,\cdots,a_n$的一个排列, 证明$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}\geq n$.

解. 不妨设$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, 因$a_k \in \mathbb{R}^+$, 所以$\frac{1}{a_1} \leq \frac{1}{a_2} \leq \cdots \leq \frac{1}{a_n}$, 又$\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \cdots, \frac{1}{b_n}$是$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}$的一个排列, 于是$n = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \frac{1}{a_k} \leq \sum_{k=1}^n a_k \cdot \frac{1}{b_k}$, 另外

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k} \geq n \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{b_1 b_2 \cdots b_n}} = n.$$

□

问题 1.3.40

若$x, y, z, w > 0$, 且$x + y + z + w = 70$, 求函数$\mu = \sqrt[4]{2(x+1)} + \sqrt[4]{16(y+2)} + \sqrt[4]{54(z+3)} + \sqrt[4]{128(w+4)}$的最大值.

解.

$$\mu \leq \frac{1}{4}\left(\left(\frac{x+1}{4} + 2 + 2 + 2\right) + \left(\frac{y+2}{4} + 4 + 4 + 4\right) + \left(\frac{z+3}{4} + 6 + 6 + 6\right) + \left(\frac{w+4}{4} + 8 + 8 + 8\right)\right) = 20$$

所以

$$\left(\frac{\mu}{\sqrt[4]{2}}\right)^2 = \left(\sum \sqrt[4]{i^3(x_i+i)}\right)^2 \leq \left(\sum \sqrt{i^2}\right)\left(\sum \sqrt{i(x_i+i)}\right) = 10 \sum \sqrt{i(x_i+i)} \leq 10 \sqrt{\sum i \sum (x_i+i)} = 400 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

所以$\mu \leq 20$. □

问题 1.3.41

若$A = a\sin^2 x + b\cos^2 x$, $B = a\cos^2 x + b\sin^2 x$, $(a, b \in \mathbb{R})$, 证明$m = AB, n = ab$, $P = A^2 + B^2$, $Q = a^2 + b^2$满足$m + Q \geq P + n$.

解. $AB = ab + \sin^2 x \cos^2 x (a-b)^2$, 所以$AB - ab = (a-b)^2 \sin^2 x \cos^2 x \geq 0$, 而$(A+B)^2 = (a+b)^2$, 所以$A^2 + B^2 \leq a^2 + b^2$, 又因为$m \geq n$, $P \leq Q$, 所以$P + n \leq m + Q$. □

问题 1.3.42

已知$x, y, z \in \mathbb{R}^+$, 且满足$xyz(x+y+z) = 1$, 求$t = (x+y)(x+z)$的最小值.

解. $x^2 + xy + xz = \frac{1}{yz}$, 所以$t = yz + \frac{1}{yz} \geq 2$, 当$y = z = 1$, $x = \sqrt{2} - 1$时取等号. □

问题 1.3.43

如果$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $(n \in \mathbb{N})$, 证明: 对于任意的$n \geq 2$, 都有$a_n^2 > 2\left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n}\right)$.

解. 用数学归纳法, 简证

$$a_{n+1}^2 = \left(a_n + \frac{1}{n+1}\right)^2 = a_n^2 + \frac{2a_n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} > a_n^2 + \frac{2a_{n+1}}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} > 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{a_k}{k} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

由此应给结论加强为$a_n^2 > 2\left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n}\right) + \frac{1}{n}$. 所以

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + \frac{2a_{n+1}}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} > 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{a_k}{k} + \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} = 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{a_k}{k} + \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} > 2\sum \frac{a_k}{k} + \frac{n^2+n}{n(n+1)^2} = RHS$$

成立. □

解. 裂项, 放缩法

$$a_n^2=\sum_{k=2}^{n}(a_k^2-a_{k-1}^2)+a_1^2=\sum_{k=2}^{n}\frac{2a_k-\frac{1}{k}}{k}+1=2\sum\frac{a_k}{k}+1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}>2\sum\frac{a_k}{k}+1-\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=2\sum\frac{a_k}{k}+\frac{1}{n}.$$

□

问题 1.3.44

若$n\in\mathbb{N}$, $n>1$, 求证: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}>\frac{4}{7}$.

解. 因$n=2$时上式成立, 记$f(n)=LHS$. 因为$f(n)-f(n-1)=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}>0$, $(n\geq 3)$, 所以$f(n)$递增, 所以$f(n)>\frac{4}{7}$. □

解. 用数学归纳法, 加强命题为$f(n)>\frac{4}{7}+\frac{n}{3n+1}-\frac{17}{42}$. □

解.

$$2n+f(n)=2+\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{2n}{2n-1}+\frac{2n-1}{2n}=\frac{5}{2}+\frac{25}{12}+\cdots\geq\frac{55}{12}+2n-4=2n+\frac{7}{12}>\frac{4}{7}+2n,\quad(n\geq 3).$$

□

解.

$$f(n)=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1+n}^{2n}\frac{1}{k}$$

由均值不等式有$\frac{(n+1)+(n+2)+\cdots+2n}{n}>\frac{n}{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}}$, 所以$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{n^2}{n(3n+1)}$, 又因为$n\in\mathbb{N}_+$, $n>1$, 所以$3n+1\leq 3n+\frac{n}{2}=\frac{7n}{2}$, 所以$\frac{2n}{3n+1}\geq\frac{4}{7}$, 得证. □

问题 1.3.45

已知α,β为锐角, 且$\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta}+\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}=1$, 求$\alpha+\beta$.

解.

$$LHS=(\sin^2\beta+\cos^2\beta)\left(\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta}+\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta}\right)\geq(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2=1$$

当且仅当$\frac{\cos^4\alpha}{\sin^4\beta}=\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\beta}$时, 即$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$时取等号. 这等价于$\cos(\alpha+\beta)=0$, 即$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. □

问题 1.3.46

设a,d为非负实数, b,c为正实数, 且$b+c\geq a+d$, 求$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}$的最小值.

解. 因为$b+c\geq a+d$, 所以$b+c\geq\frac{1}{2}(a+b+c+d)$, 由$b+c\geq a+d$, 不妨设$b\geq c$, $a\geq d$, $a+b\geq c+d$, 所以$\frac{1}{c+d}\geq\frac{1}{a+b}$, 因此

$$\begin{aligned}\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}&=\frac{b+c}{c+d}-c\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)\\&\geq\frac{1}{2}\frac{a+b+c+d}{c+d}-(c+d)\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{c+d}+\frac{c+d}{a+b}-\frac{1}{2}\\&\geq 2\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\\&=\sqrt{2}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

当且仅当$\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{c+d}=\frac{c+d}{a+b}$时, 取等号, 此处要以$q\cdot\frac{a+b}{c+d}\cdot c+da+b$为常数去联想. □

问题 1.3.47

设$f(x)=x^2+px+q$, $p,q\in\mathbb{R}$, 若$|f(x)|$在$x\in[-1,1]$上的最大值M, 求M的最小值.

解. 设$M=\max_{-1\le x\le 1}|f(x)|$, 则$M\ge|f(1)|=|1+p+q|$,

$$M\ge|f(-1)|=|1-p+q|,\quad M\ge|f(0)|=|q|,$$

则$4M\ge|1+p+q|+|1-p+q|+2|-q|\ge|(1+p+q)+2(-q)+(1-p+q)|=2$, 故$M\ge\frac{1}{2}$. □

问题 1.3.48

若$5x_1+6x_2-7x_3+4x_4=1$, 求$3x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+x_4^2$的最小值.

解. 用Cauchy不等式

$$\left(\frac{25}{3}+18+\frac{49}{5}+16\right)\left(3x_1^2+2x_2^2+5(-x_3)^2+x_4^2\right)\ge(5x_1+6x_2-7x_3+4x_4)^2=1,$$

即$\frac{782}{15}\left(3x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+x_4^2\right)\ge 1$. □

问题 1.3.49

设$x,y,z\ge 0$且$xy+yz+zx=1$, 若$A=x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)$, 求$A$的最大值.

解.

$$\begin{aligned}A&=x+y+z-xy^2-xz^2-yz^2-yx^2-zx^2-zy^2+xyz(yz+zx+xy)\\&=x+y+z-xy(y+x)-zx(z+x)-yz(y+z)+xyz\\&=x+y+z-(xy+zx+yz)(x+y+z)+3xyz+xyz\\&=4xyz\end{aligned}$$

因为$xy+yz+zx=1\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$, 所以$A\le\frac{4\sqrt{3}}{9}$. □

问题 1.3.50

设a,b,c,d是满足$ab+bc+cd+da=1$的正实数, 求证:

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\ge\frac{1}{3}.$$

解. 令$R=a+b+c+d$, 则

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{36R}+\frac{R}{48}\ge\frac{a}{4},\quad a+b+c+d\ge 2\sqrt{(a+c)(b+d)}=2.$$

所以

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{36R}+\frac{R}{48}\right)+\sum_{cyc}a\ge\sum_{cyc}\frac{a}{4}+2$$

化简即得. □

解. 这是一个轮换对称式, 令$a=b=c=d=\frac{1}{2}$, 此条件确实使不等式成立, 此时$\frac{a^3}{b+c+d}=\frac{b^3}{a+c+d}=\frac{c^3}{a+b+d}=\frac{d^3}{a+b+c}=\frac{1}{12}$, 因为

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{a(b+c+d)}{9}\geq\frac{2}{3}a^2,$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{a^3}{b+c+d}&\geq 23(a^2+b^2+c^2+d^2)-\frac{2}{9}(ab+bc+cd+ad+ac+bd)\\&=\frac{5}{9}(a^2+b^2+c^2+d^2)-\frac{2}{9}(ab+bc+cd+da)+\frac{1}{9}(a^2+c^2-2ac+b^2+d^2-2bd)\\&\geq\frac{5}{9}(a^2+b^2+c^2+d^2)-\frac{2}{9}(ab+bc+cd+da)\\&\geq\frac{5}{9}(ab+bc+cd+da)-\frac{2}{9}(ab+bc+cd+da)\\&=\frac{1}{3}(ab+bc+cd+da)=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

□

问题 1.3.51

函数$f(x)=\left|x^2-a\right|$在区间$[-1,1]$内的最大值$M(a)$的最小值为$\underline{\frac{1}{2}}$.

解. 显然$M(a)=\max\{|a|,|1-a|\}=\max\{|a|,|a-1|\}$, 画图即可. □

问题 1.3.52

求方程$x^2-2x\sin\frac{\pi x}{2}+1=0$的所有实数根.

解. 对于$x^2+a(x)x+b(x)=0$, 同二次方程求根公式有

$$\left(x+\frac{a(x)}{2}\right)^2=\frac{a^2(x)}{4}-b(x)\geq 0$$

即$\Delta=a^2(x)-4b(x)\geq 0$, 于是此题为$\{x:x=\pm1\}$. □

问题 1.3.53

设x,y,z,w是不全为0的实数, 且满足$xy+2yz+zw\leq A(x^2+y^2+z^2+w^2)$, 求$A$的最小值.

解. 引进参数$\alpha,\beta,\gamma>0$, 则$\frac{\alpha}{2}x^2+\frac{y^2}{2\alpha}\geq xy$, $\beta y^2+\frac{z^2}{\beta}\geq 2yz$, $\frac{\gamma z^2}{2}+\frac{w^2}{2\gamma}\geq zw$, 将以上三式相加得

$$\frac{\alpha}{2}x^2+\left(\frac{1}{2\alpha}+\beta\right)y^2+\left(\frac{1}{\beta}+\frac{\gamma}{2}\right)z^2+\frac{w^2}{2\gamma}\geq xy+2yz+zw$$

令$\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2\alpha}+\beta=\frac{1}{\beta}+\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2\gamma}$, 所以$\alpha=\sqrt{2}+1$, 于是

$$xy+2yz+zw\leq\frac{1+\sqrt{2}}{2}(x^2+y^2+z^2+w^2),$$

当且仅当$x=w=1$, $y=z=\sqrt{2}+1$时, 上式等号成立, 所以A的最小值为$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ □

问题 1.3.54

已知$a,b,c\in\mathbb{R}^+$, 求$\frac{(a+1)^3}{b}+\frac{(b+1)^3}{c}+\frac{(c+1)^3}{a}$的最小值.

解.

$$\sum_{cyc}\left(\lambda b+\mu+\frac{(a+1)^3}{b}\right)\geq\sum_{cyc}\left(3\sqrt[3]{\lambda\mu}(a+1)\right).$$

令$\lambda=3\sqrt[3]{\lambda\mu}$, $3\lambda a=3\mu=\frac{(a+1)^3}{b}=\frac{(b+1)^3}{c}=\frac{(c+1)^3}{a}$, 解得$\lambda=\frac{27}{2}$, $\mu=\frac{27}{4}$, 所以$\frac{27}{2}b+\frac{27}{4}+\frac{(a+1)^3}{b}\geq\frac{27}{2}(a+1)$, 于是$\sum\geq\frac{81}{4}=3\sqrt[3]{\lambda\mu}\times 3-3\mu$. □

问题 1.3.55

已知α,β,γ是钝角三角形的三个内角, 求$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$的最小值.

解. 由$f(x)=\frac{1}{x^2}$在$[0,\pi)$上的凸性, 由$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}\geq\frac{2}{x_1x_2}\geq\frac{2}{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}$, 已知$f(x)$为下凸函数, 有$f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)\geq 3f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)$, 即$\sum_{cyc}\frac{1}{\alpha^2}\geq\frac{3}{\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^2}=\frac{27}{\pi^2}$. □

问题 1.3.56

设$x,y,z\in\mathbb{R}^+$, 且$x^4+y^4+z^4=1$, 求$u=\sum_{cyc}\frac{x^3}{1-x^8}$的最小值.

解.

$$\begin{aligned}u&=\sum_{cyc}\frac{x^3}{1-x^8}=\sum_{cyc}\frac{x^4}{x(1-x^8)}\\&=\sum_{cyc}\frac{x^4}{\sqrt[8]{\frac{1}{8}\cdot 8x^8(1-x^8)^8}}\\&\geq\sum_{cyc}\frac{x^4}{\sqrt[8]{\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^9}}\\&=\frac{1}{\sqrt[8]{\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^9}}=\frac{9}{8}\cdot\sqrt[4]{3}.\end{aligned}$$

□

问题 1.3.57

给定正数$a_1<a_2<\cdots<a_n$, $b_1,b_2,\cdots,b_n$是它的一个排列, 则____使得乘积$\prod_{i=1}^n\left(a_i+\frac{1}{b_i}\right)$取最大值.

解. $a>b>0$, $c>d>0$时易得$\left(a+\frac{1}{c}\right)\left(b+\frac{1}{d}\right)>\left(a+\frac{1}{d}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)$. □

问题 1.3.58

设n为自然数, $x,y\in\mathbb{R}^+$, 且$x+y=2$, 求$3+\frac{1}{1+x^n}+\frac{1}{y^n}$的最小值.

解. 方法一: 用幂平均不等式和调和平均不等式 □

解. $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$, 所以$xy\leq 1$, $x^ny^n\leq 1$, 因为

$$3+\frac{1}{1+x^n}+\frac{1}{1+y^n}=\frac{1+x^n+y^n+1}{1+x^n+y^n+x^ny^n}+3\geq\frac{1+x^n+y^n+x^ny^n}{1+x^n+y^n+x^ny^n}+3=4.$$

□

问题 1.3.59

若一个序列$a_0, a_1, \cdots$它的每一项均为正数, $a_0 = 1$, 并且$a_n - a_{n+1} = a_{n+2} (n = 0, 1, 2, \cdots)$, 则这样的序列有几个?

解. 用叠加$a_0 - a_n = a_2 + \cdots + a_{n+1} > na_{n+1}$, 所以$a_0 > (n+1)a_{n+1}$, 所以$a_{n+1} < \frac{1}{n+1}$, 所以$a_n \to 0 (n \to +\infty)$. 易得

$$a_n = A\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n (1-A)$$

因为$A \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \to 0$, $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \to \pm\infty$, 所以$1 - A = 0 \implies A = 1$, 于是$a_n$唯一. □

问题 1.3.60

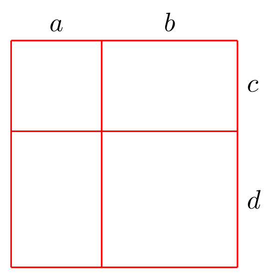
求函数$y = x + 3 + \sqrt{-3x^2 + 6x + 12}$的值域.

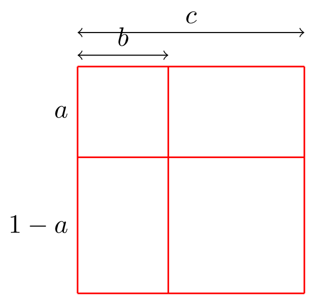
解. 令$x = 1 + \sqrt{5}\sin\alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以$y = \sqrt{5}\sin\alpha + \sqrt{15}\cos\alpha + 4 = 2\sqrt{5}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + 4$, 进而得到$y \in [4 - 2\sqrt{5}, 4 + 2\sqrt{5}]$. □

问题 1.3.61

长方形的一边长为1, 设它被两条互相垂直的直线分成四个小长方形, 其中三个的面积不小于1, 第四个的面积不小于2, 求长方形的另一边至少要多长?

解. 如下左图,





由题意:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ ac \geq 1 \\ ad \geq 1 \\ cb \geq 1 \\ bd \geq 1 \end{cases}$$

要求$c + d$的最小值, 由题设, $(c+d)(a+b) = ac + bd + ad + bc \geq 1 + 2 + 2\sqrt{acbd} \geq 3 + 2\sqrt{2}$, 当且仅当$a = \sqrt{2} - 1$, $b = 2 - \sqrt{2}$, $c = \sqrt{2} + 1, d = 2 + \sqrt{2}$时等号成立.

最后再如上右图,

$$\begin{cases} (1-a)b \geq 2 \\ ab \geq 1 \\ a(c-b) \geq 1 \\ (1-a)(c-b) \geq 1 \end{cases}$$

令$(1-a)b = 2 + x^2$, $ab = 1 + y^2$, $x, y \in \mathbb{R}$, 则$a = \frac{1+y^2}{3+x^2+y^2}$, $b = 3 + x^2 + y^2$, 所以从上式第三个式子得出

$$c \geq \frac{(y^2+2)(x^2+y^2+3)}{y^2+1}, \tag{1.9}$$

从上式第四个式子得出

$$c \geq \frac{(x^2+3)(x^2+y^2+3)}{x^2+2}, \tag{1.10}$$

因为(1.9)式不小于$3+2\sqrt{2}$, (1.10)式不小于4. 所以$c \geq 3+2\sqrt{2}$, 当$x^2=0$, $y^2=\sqrt{2}-1$时取$c=3+2\sqrt{2}$这一等号. □

问题 1.3.62

边长为a,b,c的三角形, 其面积为$\frac{1}{4}$, 外接圆半径是1, 若$S=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, $t=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, 求$S$与$t$的大小关系.

解. 易得: $abc=1$, 所以$t=ab+bc+ca$,

$$t^2=(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq (\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a})^2=S^2.$$

□

问题 1.3.63

非负实数a,b,c满足$a+b+c=1$, 求$(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2$的最小值.

解. 令$f(x)=(1-x^2)^2$, $x\in[0,1]$, 问题实际上是求当$a+b+c=1$时, $f(a)+f(b)+f(c)$的最小值, $f''(x)=12x^2-4$, 所以$x\in\left[0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$时, f上凸; $x\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right]$时, f下凸, 现在a,b,c中至多有一个数在区间$\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right]$中, 必有两个数在$\left[0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, 通过调整将一个数变为0时, $f(a)+f(b)+f(c)$变小, 不妨设$c=0$, 则

$$\begin{aligned}(1-a^2)^2+(1-b^2)^2&=2-2(a^2+b^2)+a^4+b^4\\&=2-2(1-2ab)+(a^2+b^2)^2-2a^2b^2\\&=1+2a^2b^2\geq 1\end{aligned}$$

所以$f(a)+f(b)+f(c)\geq 2$. □

问题 1.3.64

设正整数数列a_1, a_2, a_3, a_4等比, 公比$r\notin\mathbb{Z}$, 且$r\geq 1$, 求a_4的最小值.

解. r为有理数, 令$r=q/p$, $(q>p\geq 2)$, $a_4=a_1r^3=\frac{a_1q^3}{p^3}$, 因为$a_4\in\mathbb{Z}$, 所以$p^3\mid a_1$, 所以$a_1=kp^3(k\in\mathbb{N}_+)$, $a_4=kq^3$, $q>p\geq 2$, 所以$k=1$, $q=3$. □

问题 1.3.65

设关于x的方程$a^3=\sqrt[4]{2+x}-\sqrt{7-x}$有实根, 求$a$的取值范围为$[-\sqrt[3]{3},\sqrt[6]{3}]$.

解. 用函数单调性. □

问题 1.3.66

设$a,b>0$, 满足$\frac{1}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1$, 求$a+b+\frac{b}{a}$的最小值.

解. 由均值不等式, $\frac{1}{a^2}+\frac{3}{b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^2}\geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{a^2b^6}}>0$, 再由已知, 则有$ab^3\geq 16$, 而$a+b+\frac{b}{a}=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+\frac{b}{a}\geq 5\sqrt[5]{\frac{ab^3}{16}}\geq 5$, 当且仅当$a=b=2$时取等号. □

问题 1.3.67

求函数$y=\sqrt{4x-1}+\sqrt{2-x}$的值域.

解. 令$m=\sqrt{4x-1}$, $n=\sqrt{2-x}$, 则$m^2+4n^2=7$, $y=m+n$, 利用椭圆参数方程求解. □

问题 1.3.68

已知a,b,c,d为非负实数, 且$ab+bc+cd+da=1$, 求$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}$的最小值.

解. 设$S=\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}$, 则

$$[a(b+c+d)+b(c+d+a)+c(d+a+b)+d(a+b+c)]S\geq(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

又

$$[a(b+c+d)+b(c+d+a)+c(d+a+b)+d(a+b+c)]\leq 3(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

所以$S\geq\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2+d^2)\geq\frac{1}{3}(ab+bc+cd+da)=\frac{1}{3}$. □

问题 1.3.69

设$a=\lg z+\lg[x(yz)^{-1}+1]$, $b=\lg x^{-1}+\lg(xyz+1)$, $c=\lg y+\lg[(xyz)^{-1}+1]$, 记$a,b,c$中最大数为$m$, 求$m$的最小值.

解. $a=\lg(xy^{-1}+z)$, $b=\lg(yz+x^{-1})$, $c=\lg[(xz)^{-1}+y]$, 设N为$xy^{-1}+z$, $yz+x^{-1}$, $(xz)^{-1}+y$中最大的, 则$M=\lg N$, 因为$x,y,z\in\mathbb{R}^+$, 所以$N^2\geq(xy^{-1}+z)[(xz)^{-1}+y]=[(yz)^{-1}+yz]+\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq 2+2=4$, 所以$N\geq 2$, 当且仅当$x=y=z=1$时取等号, 所以$M=\lg N=\lg 2$. □

问题 1.3.70

在三角形ABC中设$\cot A+\cot B+\cot C=\sqrt{3}$, 判断$\triangle ABC$的形状.

解. 因为$A+B+C=\pi$, $\cot A=-\cot(B+C)=\frac{\cot B\cot C-1}{\cot B+\cot C}$, 所以原条件可以化为

$$-\frac{\cot B\cot C-1}{\cot B+\cot C}+\cot B+\cot C=\sqrt{3},$$

整理得

$$\cot^2 B+(\cot C-\sqrt{3})\cot B+(\cot^2 C-\sqrt{3}\cot C+1)=0,$$

因为$\cot B\in\mathbb{R}$, 所以$\Delta\geq 0$, 但是$\Delta=(\cot C-\sqrt{3})^2-4(\cot^2 C-\sqrt{3}\cot C+1)=-(\sqrt{3}\cot C-1)^2\leq 0$, 所以$\sqrt{3}\cot C-1=0$, $C=60^\circ$. □

解. 因为$(\cot A+\cot B+\cot C)^2=(\sqrt{3})^2$, 所以$\cot^2 A+\cot^2 B+\cot^2 C+2(\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A)=3$, 但是$A+B+C=\pi$, 所以$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$, 两边同乘$\cot A\cot B\cot C$得, $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$, 将此式代入前式得:$\cot^2 A+\cot^2 B+\cot^2 C-1=0$, 所以$\cot^2 A+\cot^2 B+\cot^2 C=(\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A)$, 即$\cot A=\cot B=\cot C$. □

问题 1.3.71

设二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$, $(a>0$且$b\neq 0)$, 已知$|b|\leq a$, $|f(0)|\leq 1$, $|f(-1)|\leq 1$, $|f(1)|\leq 1$, 当$|x|\leq 1$时, 证明: $|f(x)|\leq\frac{5}{4}$.

解. 易得$|b|\leq 1$, 而$|2b|=|(a+b+c)-(a-b+c)|\leq|f(1)|+|f(-1)|\leq 2$. 由于$|b|\leq a$, 所以$\left|\frac{b}{a}\right|\leq 1$, $\left|-\frac{b}{2a}\right|\leq\frac{1}{2}<1$, 又$|c|=|f(0)|\leq 1$, $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=c-\frac{b^2}{4a}$, 所以$\left|f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right|\leq|c|+\left|\frac{b^2}{4a}\right|=|c|+\frac{1}{4}\left|\frac{b}{a}\right|\cdot|b|\leq\frac{5}{4}$, 而$f(x)$得图像开口向上, 且$|x|\leq 1$, $|f(x)|$的最大值应在$x=1$, $x=-1$或$x=-\frac{b}{2a}$处取得, 且$|f(1)|\leq 1$, $|f(-1)|\leq 1$, $\left|f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right|\leq\frac{5}{4}$, 从而$|f(x)|\leq\frac{5}{4}$. □

解. 注意到, $a=\frac{f(1)+f(-1)}{2}-f(0)$, $b=\frac{f(1)-f(-1)}{2}$, $c=f(0)$. 所以

$$|f(x)|=\left|f(1)-\frac{x^2+x}{2}+f(-1)\cdot\frac{x^2-x}{2}+f(0)(1-x^2)\right|\le\frac{|x|(x+1)}{2}+\frac{|x|(1-x)}{2}+(1-x^2)=|x|+1-|x|^2\le\frac{5}{4}.$$

□

问题 1.3.72

已知数列$\{a_n\}$, 其中$a_1=1$, $a_2=\frac{1}{a_1}+a_1$, $\cdots$, $a_n=\frac{1}{a_{n-1}}+a_{n-1}$, 证明: $\sqrt{2n-1}\le a_n\le\sqrt{3n-2}$.

解. 显然$1=a_1<a_2<\cdots<a_n$, 由于$(a_k)^2=\left(\frac{1}{a_{k-1}}\right)^2+a_{k-1}^2+2$, 所以

$$a_{k-1}^2+2<a_k^2<a_{k-1}^2+3\Longrightarrow 2(n-1)+\sum_{k=2}^n a_{k-1}^2<\sum_{k=2}^n a_k^2<3(n-1)+\sum_{k=2}^n a_{k-1}^2\Longrightarrow 2n-1<a_n^2<3n-2.$$

□

两个正数a,b的和一定时, 它们的积$ab=\frac{1}{4}[(a+b)^2-(a-b)^2]$随着差$|a-b|$的增大而减小; 其平方和$a^2+b^2=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(a-b)^2]$随着差$|a-b|$的增大而增大.

局部调整法(叫局部扰动法)也是解决最值问题的一种行之有效的方法, 尤其是离散变量最值问题常常需要用这种方法. 其基本思路是: 对于问题所涉及的多个变量, 先对少数变量进行调整, 其它变量暂时不变, 从而化难为易, 取得问题在局部上的进展, 经过若干次这样的局部上的调整, 不断缩小范围, 最终得到问题的圆满解决. 利用局部调整法求值的过程中, 常常需要用上一段的基本结论.

当然, 局部调整法也可用于解决其它数学问题(如存在性问题等).

几何不等式: 由于三角形总有内切圆存在, 因而它的三条边总可以表示为$a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x(x,y,z>0)$; 反之若三个正数a,b,c可以表示为上述形式, 则a,b,c一定是某个三角形的三边, 并且相应的三角形的其它元素(如外接圆半径, 内切圆半径, 面积等)也可以通过上述变换用x,y,z表示, 有关三角形的一些不等式都可以化为x,y,z的代数不等式.

问题 1.3.73

设$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 证明:

$$\frac{\sin^{2005}\alpha}{\sin^{2003}\beta}+\frac{\cos^{2005}\alpha}{\cos^{2003}\beta}\ge 1+2003[1-\cos(\alpha-\beta)]$$

当且仅当$\alpha=\beta$时等号成立.

解. 令$A=2003$, 原不等式等价于

$$\frac{\sin^{A+2}\alpha}{\sin^A\beta}+\frac{\cos^{A+2}\alpha}{\cos^A\beta}\ge 1+A-A\cos\alpha\cos\beta-A\sin\alpha\sin\beta.$$

因为$\sin\alpha\sin\beta+\cdots+\sin\alpha\sin\beta+\frac{\sin^{A+2}\alpha}{\sin^A\beta}\ge(A+1)\sqrt[A+1]{\sin^{2A+2}\alpha}=(A+1)\sin^2\alpha$, 其中$\sin\alpha\sin\beta$有$A$个. 原不等式得证. □

问题 1.3.74

定义在$x>0$上的函数$f(x)$满足:

1. 存在$a>1$使得$f(a)\neq 0$;
2. 对于任意的$b\in\mathbb{R}$, 有$f(x^b)=bf(x)$.

求证: 对于任意的$x>2$有$f(x-1)f(x+1)<[f(x)]^2$.

解. 先证$f(1)=0$, 再利用第二个条件证明$f(x)$在$x>1$时不变号. 令$x=\mathrm{e}^t$, 则$f\left(\mathrm{e}^{b_1}\right)+f\left(\mathrm{e}^{b_2}\right)=f\left(\mathrm{e}^{b_1+b_2}\right)$. 所以

$$f(x-1)f(x+1)\le\left(\frac{f(x-1)+f(x+1)}{2}\right)^2=\left(\frac{f(x^2-1)}{2}\right)^2$$

再证$f(x)$在$x>1$时为增函数便得. □

问题 1.3.75

设平面上的凸n边形$A_1A_2A_3\cdots A_n$的各边依次为$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，其面积为Δ_n，试证:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq 4\Delta_n \tan\frac{\pi}{n}$$

等号成立当且仅当n边形$A_1A_2A_3\cdots A_n$为正多边形.

解. 均值不等式$\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2$当且仅当$a_1 = a_i(2 \leq i \leq n)$时等号成立，令$\sum_{i=1}^n a_i = l$，以$l$为周长的正$n$边形面积$\Delta_{\text{正}} = \frac{l^2}{4n}\cot\frac{\pi}{n}$，所以$l^2 = 4n\Delta_{\text{正}}\tan\frac{\pi}{n}$，用等周定理知$\Delta_{\text{正}} \geq \Delta_n$，有$\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \frac{l^2}{n} \geq 4\Delta_n\tan\frac{\pi}{n}$，等号成立当且仅当$n$边形为正$n$边形时成立.

另外，我们可得到其它结论，如: 设此凸n边形的被覆盖的最小的圆半径为R，则

$$2\Delta_n \leq \frac{R}{2}\sum\sqrt{a_i^2+a_{i+1}^2-2a_ia_{i+1}\cos A_{i+1}}$$

其中$a_{n+1}=a_1$，$A_{n+1}=A_1$，

$$2R \leq \sum\sqrt{\frac{a_i^2+a_{i+1}^2-2a_ia_{i+1}\cos A_{i+1}}{\sin^2 A_{i+1}}}$$

所以

$$2\Delta_n \leq \frac{1}{4}\sum\frac{\sqrt{a_i^2+a_{i+1}^2-2a_ia_{i+1}\cos A_{i+1}}}{\sin A_{i+1}}\sum\sqrt{a_i^2+a_{i+1}^2-2a_ia_{i+1}\cos A_{i+1}}.$$

□

问题 1.3.76

求证:

$$|a|+|b| \leq \sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}+\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta} \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

解. 后者用平方平均不等式易得. 下面证明前者，令$z_1 = a\cos\theta + \mathrm{i}b\sin\theta$，$z_2 = a\sin\theta+\mathrm{i}b\cos\theta$，$u = |z_1|+|z_2|$，则

$$\begin{aligned}
u^2 &= |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1|\cdot|z_2| \\
&= a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta+a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta+\left|(a^2-b^2)\sin 2\theta+2ab\mathrm{i}\right| \\
&= a^2+b^2+\sqrt{(a^2-b^2)^2\sin^2 2\theta+4a^2b^2} \\
&\leq a^2+b^2+\sqrt{(a^2+b^2)^2} \\
&= 2(a^2+b^2)
\end{aligned}$$

又因为$u^2 = a^2+b^2+\sqrt{(a^2-b^2)^2\sin^2 2\theta+4a^2b^2} \geq a^2+b^2+\sqrt{4a^2b^2} = (|a|+|b|)^2$，即$u \geq |a|+|b|$. 左边不等式还可以通过分析法解得，通过去根号. □

问题 1.3.77

设$x,y,z\in\mathbb{R}^+$，求证

$$\sum_{cyc}\frac{x^2}{y^2+z^2+yz} \geq 1.$$

解.

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{x^2}{y^2+z^2+yz}&\geq\sum_{cyc}\frac{x^2}{y^2+z^2+\frac{y^2+z^2}{2}}\\&=\sum_{cyc}\frac{2x^2}{3(y^2+z^2)}\\&=\frac{2}{3}\sum_{cyc}\frac{x^2}{y^2+z^2}\\&=\frac{2}{3}\left[\sum_{cyc}\left(\frac{x^2}{y^2+z^2}+1\right)-3\right]\\&=\frac{2}{3}(x^2+y^2+z^2)\sum_{cyc}\frac{1}{y^2+z^2}-2\\&=\frac{1}{3}\left(\sum_{cyc}x^2+y^2\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{x^2+y^2}\right)-2\\&\geq\frac{1}{3}\left(\sum 1\right)^2-2=1.\end{aligned}$$

□

解. 不妨设$x\geq y\geq z\geq 0$, 所以$x^2\geq y^2\geq z^2\geq 0$, $xy\geq xz\geq yz$.

$$x^2+y^2+xy\geq x^2+z^2+xz\geq y^2+z^2+yz.$$

用排序不等式

$$\sum_{cyc}\frac{x^2}{y^2+z^2+yz}\geq\sum_{cyc}\frac{z^2}{y^2+z^2+yz}\geq\sum_{cyc}\frac{y^2}{y^2+z^2+yz}\geq\sum_{cyc}\frac{yz}{y^2+z^2+yz},$$

由此不等式组生成3个不等式, 相加即得. □

问题 1.3.78

已知$a,b\in\mathbb{R}^+$, $n\in\mathbb{N}_+$, 且$\frac{\sin^4\alpha}{a^n}+\frac{\cos^4\alpha}{b^n}=\frac{1}{a^n+b^n}$, 求证:

$$\frac{\sin^8\alpha}{a^{3n}}+\frac{\cos^8\alpha}{b^{3n}}=\frac{1}{(a^n+b^n)^3}.$$

解. 用Cauchy不等式,

$$(a^n+b^n)\left(\frac{\sin^8\alpha}{a^{3n}}+\frac{\cos^8\alpha}{b^{3n}}\right)\geq\left(\frac{\sin^4\alpha}{a^n}+\frac{\cos^4\alpha}{b^n}\right)^2=\frac{1}{(a^n+b^n)^2},$$

当且仅当$\frac{a^n}{\sin^2\alpha}=\frac{b^n}{\cos^2\alpha}$时等号成立, 又

$$(a^n+b^n)\left(\frac{\sin^4\alpha}{a^n}+\frac{\cos^4\alpha}{b^n}\right)\geq(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=1,$$

即$\frac{\sin^4\alpha}{a^n}+\frac{\cos^4\alpha}{b^n}\geq\frac{1}{a^n+b^n}$, 等号成立, 则$\frac{a^n}{\sin^2\alpha}=\frac{b^n}{\cos^2\alpha}$. □

问题 1.3.79

设$x_1,x_2,\cdots,x_n>0$, $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$, $n\geq 2$, 且$n\in\mathbb{N}_+$, 求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geq\frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}.$$

解.

$$\begin{aligned}
LHS &= \sum \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} - \sum \sqrt{1-x_i} \\
&\geq \frac{n^2}{\sum \sqrt{1-x_i}} - \sum \sqrt{1-x_i} \\
&\geq \frac{n^2}{\left(\sum 1\right)^{1/2}\left(\sum (1-x_i)\right)^{1/2}} - \left(\sum 1\right)^{1/2}\left(\sum (1-x_i)\right)^{1/2} \\
&= \frac{n^2}{\sqrt{n(n-1)}} - \sqrt{n(n-1)} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \\
&\geq \frac{\sum \sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}
\end{aligned}$$

□

解.

$$\begin{aligned}
\left[\left[\left(\sum(1-x_i)\right)^{1/2}\left(\sum \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\right)^{1}\right]^{2/3}\right]^{3/2} &= \left[\left(\sum(1-x_i)\right)^{1/3}\left(\sum \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\right)^{2/3}\right]^{3/2} (\text{Holder不等式}) \\
&\geq \left[\sum (1-x_i)^{1/3} \cdot \left(\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\right)^{2/3}\right]^{3/2} \\
&= \left(\sum x_i^{2/3}\right)^{3/2} (\text{幂平均不等式}) \\
&\geq n^{3/2} \cdot \frac{\sum x_i}{n} = \sqrt{n} \geq \sum \sqrt{x_i}
\end{aligned}$$

□

解. 不妨设$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, 显然

$$\frac{1}{\sqrt{1-x_1}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x_2}} \leq \cdots \leq \frac{1}{\sqrt{1-x_n}},$$

利用Chebyshev不等式和幂平均不等式有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{1}{n}\left(\sum x_i\right) \cdot \left(\sum \frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right) = \frac{1}{n}\sum \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} \geq \left[\frac{1}{n}\sum\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right)^{-2}\right]^{-1/2} = \left[\frac{1}{n}\sum(1-x_i)\right]^{-1/2} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

由Cauchy不等式得

$$\sum \sqrt{x_i} \leq \sqrt{\sum 1}\sqrt{\sum x_i} = \sqrt{n}$$

所以

$$\sum \frac{x_i}{1-x_i} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}} \geq \frac{\sum \sqrt{x_i}}{n-1}.$$

□

问题 1.3.80

设$a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^+$, 且满足$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 1$, 求证:

$$\frac{a_1 a_2 \cdots a_n [1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)]}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}}.$$

解. 令$\sum a_i = A$, 则

$$1 - a_i = 1 - A + a_1 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n \geq n\sqrt[n]{(1-A)a_1 \cdots a_{i-1}a_{i+1} \cdots a_n}.$$

所以

$$\prod(1-a_i)\geq n(1-A)\sqrt[n]{\left(\prod a_i\right)^{n-1}}.$$

因为$A\geq n\sqrt[n]{\prod a_i}$, 所以

$$A\cdot\prod(1-a_i)\geq n^{n+1}(1-A)\prod a_i$$

所以

$$\frac{\left(\prod a_i\right)(1-A)}{A\cdot\prod(1-a_i)}\leq\frac{1}{n^{n+1}}\qquad(n\geq 2)$$

最后说明一下$n=1$时的情况成立便可. □

解. 设$a_{n+1}=1-\sum a_i$, 所以$a_{n+1}>0$, 所以$\sum_{i=1}^{n+1}a_i=1$, 不等式变为

$$n^{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}a_i\leq\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_i)$$

对于每一个$i(i=1,2,\cdots,n+1)$, 由均值不等式有

$$1-a_i=a_1+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_{n+1}\geq n\sqrt[n]{a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_{n+1}}=n\sqrt[n]{\frac{1}{a_i}\prod_{k=1}^{n+1}a_k},$$

所以$\prod_{k=1}^{n+1}(1-a_k)\geq n^{n+1}\prod_{k=1}^{n}a_k$. 如果$n\geq 2$, 等号成立. 当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时成立, 即$a_i=\frac{1}{n+1}$, 若$n=1$时, 对$a_1\in(0,1)$等式均成立. □

问题 1.3.81

固定正整数$n\geq 2$, n个非负实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$满足$\sum_{i=1}^{n}x_i=1$, 试求

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^5-x_i^4)$$

的最大值和最小值.

解. 因为$x_i^5\leq x_i^4$, 所以$\sum_{i=1}^{n}(x_i^5-x_i^4)\leq 0$, 令$x_1=1$, $x_2=\cdots=x_n=0$即得等号. 令$f(x)=x^5-x^4$, $f''(x)=20x^3-12x^2$, 所以f在$[0,\frac{3}{5}]$上是上凸函数, 在$[\frac{3}{5},1]$上是下凸函数, 将落在$[0,\frac{3}{5}]$中两数保持和不变向两边"拉", 可使$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$变小, 调整到最后$x_1,x_2,\cdots,x_n$中有$(n-2)$个0, 另外两数记为a,b, 则

$$\sum f(x_i)\geq(n-2)f(0)+f(a)+f(b)=f(a)+f(b)=-ab(a^3+b^3)=-ab(a+b)(a^2+b^2-ab)=-ab(1-3ab).$$

而$0\leq ab\leq 1/4$, 于是当$ab=1/6$时, 取最小值$-1/12$, 此时$a,b=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1/3}\right)$. 所以$\sum f(x_i)$的最小值为$-1/12$. □

问题 1.3.82

设$x_1,x_2,\cdots,x_{1997}$是实数, 满足下述条件:

1. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\leq x_i\leq\sqrt{3}$, $i=1,2,\cdots,1997$;
2. $x_1+x_2+\cdots+x_{1997}=-318\sqrt{3}$.

确定$\sum_{i=1}^{1997}x_i^{12}$的最大值.

解. 设$f(x)=x^{12}$, 则$f''(x)=132x^{10}\geq 0$, 于是$f(x)$在$\left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right]$上是下凸的, 当$x_i,x_j\in\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right)$时, 保持其和不变, 向两边"拉", 可使$\sum_{i=1}^{1997}x_i^{12}$增加, 于是最终将调整到至多一个数落在区间$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right)$内, 设有$a$个$-\frac{1}{\sqrt{3}}$, b个$\sqrt{3}$, 另一个数记为c, $a+b=1996$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}\leq c\leq\sqrt{3}$, 则$-\frac{1}{\sqrt{3}}a+\sqrt{3}b+c=-318\sqrt{3}$, $-a+3b+\sqrt{3}c=-954$. 于是$4b=1042-c\sqrt{3}$, $1039\leq 4b\leq 1043$, 所以$b=260$, $a=1736$, $c=2/\sqrt{3}$. 于是$\sum_{i=1}^{1997}x_i^{12}$的最大值为$a\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{12}+b\left(\sqrt{3}\right)^{12}+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{12}=189548$. □

问题 1.3.83

m个互不相同的正偶数与n个互不相同的正奇数的总和为2000, 对于所有的这样的m与n, 问$3m+4n$的最大值是多少? 证明你的结论.

解. $2000 = (2+4+\cdots+2m)+[1+3+\cdots+(2n-1)]+a \geq m(m+1)+n^2$. 所以$m,n$满足$\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2 \leq 2000\frac{1}{4}$, 由Cauchy不等式有

$$3m+4n=3\left(m+\frac{1}{2}\right)+4n-\frac{3}{2} \leq 5\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2}-\frac{3}{2} \leq 5\sqrt{2000\frac{1}{4}}-\frac{3}{2} \leq 222,$$

又因为$m,n \in \mathbb{N}$, 所以$(3m+4n)_{\max}=222$, 其中$m=26$, $n=36$. □

问题 1.3.84

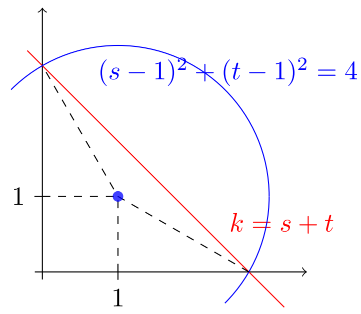
设实数x,y, 满足: $x \geq 1$, $y \geq 1$. $(\log_a x)^2+(\log_a y)^2=\log_a\left(ax^2\right)+\log_a\left(ay^2\right)$, $(a>1)$, 当a在$(1,+\infty)$范围内变化时, 求$\log_a(xy)$的取值范围.

解. 令$\log_a x=s$, $\log_a y=t$, 因为$a>1$, $x \geq 1$, $y \geq 1$, 所以$s \geq 0$, $t \geq 0$. 所以已知条件中的等式等价于$(s-1)^2+(t-1)^2=4$, 令

$$\begin{cases} s=1+2\cos\alpha \\ t=1+2\sin\alpha \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos\alpha \geq -\frac{1}{2} \\ \sin\alpha \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

所以$\alpha \in \left[0,\frac{2\pi}{3}\right] \bigcup \left[\frac{11\pi}{6},2\pi\right)$, 所以$k=s+t=\log_a(xy)=2+2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, 所以$k_{\max}=2+2\sqrt{2}$, $k_{\min}=1+\sqrt{3}$. □

解. 如图, 令$\log_a x=s$, $\log_a y=t$, 因$a>1$, $x \geq 1$, $y \geq 1$, 所以$s \geq 0$, $t \geq 0$, 则等式等价于$(s-1)^2+(t-1)^2=4$, $k=s+t$, k为直线$k=s+t$在s轴上的截距, 所以$k_{\max}=2+2\sqrt{2}$, $k_{\min}=1+\sqrt{3}$.



□

问题 1.3.85

设a,b,c,d是4个不同的实数, 使得$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=4$, 且$ac=bd$, 试求$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}+\frac{d}{b}$的最大值.

解. 设$x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, 因$ac=bd$, 得$\frac{c}{d}=\frac{b}{a}=\frac{1}{x}$, $\frac{d}{a}=\frac{c}{b}=\frac{1}{y}$, 问题转化为约束条件$x \neq 1$, $y \neq 1$, $x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4$下, 求$xy+\frac{y}{x}+\frac{1}{xy}+\frac{x}{y}$的最大值, 又设$x+\frac{1}{x}=e$, $y+\frac{1}{y}=f$, 则$ef=xy+\frac{y}{x}+\frac{1}{xy}+\frac{x}{y}$.

当$t>0$时, $t+\frac{1}{t} \geq 2$; 当$t<0$时, $t+\frac{1}{t} \leq -2$. 由$x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4$, 知$x,y$不同号, (否则有$x=y=1$).

不妨设, $x>0$, $y<0$, 则$f \leq -2$, $e=4-f \geq 6$, $ef \leq -12$, 当且仅当$y=-1$, $x=3 \pm 2\sqrt{2}$时等号成立. 特别地, 当$a=3+2\sqrt{3}=-d$, $b=-c=1$时, 等号成立, 为-12. □

问题 1.3.86

设$a_i \in \mathbb{R}^+$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, 求

$$S = \frac{a_1}{1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n} + \frac{a_2}{1 + a_1 + a_3 + \cdots + a_n} + \cdots + \frac{a_n}{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}$$

的最小值.

解. $S = \frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{2-a_n}$, 关于$a_1, a_2, \cdots, a_n$对称, 不妨设$1 > a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$, 则$2 - a_1 \leq 2 - a_2 \leq \cdots \leq 2 - a_n$,

$$\frac{1}{2 - a_1} \geq \frac{1}{2 - a_2} \geq \cdots \geq \frac{1}{2 - a_n} > 0,$$

由基本不等式有

$$S + n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2 - a_k} \geq \frac{n^2}{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (2 - a_k)} = \frac{2n^2}{2n - 1},$$

所以$S \geq \frac{n}{2n-1}$. □

解. 用切比雪夫不等式有

$$S \geq \frac{1}{n} (a_1 + \cdots + a_n) \left(\frac{1}{2 - a_1} + \cdots + \frac{1}{2 - a_n} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2 - a_1} + \cdots + \frac{1}{2 - a_n} \right),$$

由Cauchy不等式有

$$\sum_{k=1}^{n} (2 - a_k) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2 - a_k} \geq n^2,$$

而$\sum_{k=1}^{n} (2 - a_k) = 2n - 1$, 所以$S \geq \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{2n-1} = \frac{n}{2n-1}$, 当且仅当$a_1 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$时, 取等号. □

问题 1.3.87

已知函数$f(x) = ax^2 + bx + c$对于一切$x \in [-1, 1]$, 都有$|f(x)| \leq 1$, 设

$$g(x) = \left| acx^4 + b(a + c)x^3 + \left(a^2 + b^2 + c^2\right)x^2 + b(a + c)x + ac \right|, \quad x \in [-1, 1],$$

求函数$g(x)$的最大值.

解. $g(x) = \left|ax^2 + bx + c\right| \cdot \left|cx^2 + bx + a\right|$, 设$h(x) = cx^2 + bx + a$, $x \in [-1, 1]$, 则$|h(1)| = |f(1)| \leq 1$, $|h(-1)| = |f(-1)| \leq 1$, $|f(0)| = |c| \leq 1$. 若$h(x)$在$[-1, 1]$上严格单调, 由$|h(1)| \leq 1$, $|h(-1)| \leq 1$知, 对于一切$x \in [-1, 1]$, 有$|h(x)| \leq 1$, 故$g(x) \leq |f(x)| \leq 1$.

若$h(x)$在$[-1, 1]$上不严格单调, 仍有两种情况:

(1) $h(x) = a$(常数), 即$b = c = 0$, 此时, $|f(1)| = |a| \leq 1$, $g(x) = a^2 |x|^2 \leq 1$;

(2) $h(x)$是二次函数, 即$c \neq 0$, 如果扩展为定义在$\mathbb{R}$上, 则$h(x) = cx^2 + bx + a$的图像顶点为$(x_0, h(x_0))$, 则当$h(x)$在$[-1, 1]$上不单调时, $x_0 \in (-1, 1)$, 不妨设$x_0 \in (-1, 0]$, 则$h(x)$可写成$h(x) = c(x - x_0)^2 + h(x_0)$, $x \in [-1, 1]$, 所以$h(-1) = c(-1 - x_0)^2 + h(x_0)$, 所以$|h(x_0)| = \left|h(-1) - c(1 + x_0)^2\right| \leq |h(-1)| + |c| \cdot (1 + x_0)^2$. 因$x_0 \in (-1, 0]$, 所以$0 < 1 + x_0 \leq 1$, $(1 + x_0)^2 \leq 1$, 可见$|h(x_0)| \leq 1 + |c| \leq 2$.

因$h(x)$在$[-1, x_0]$或$[x_0, 1]$上均严格单调, 故由$|h(x_0)| \leq 2$, $|h(1)| \leq 1$, $|h(-1)| \leq 1$, 知对于任意的$x \in [-1, 1]$, 均有$|h(x)| \leq 2$, 所以

$$g(x) \leq |f(x)| \cdot |h(x)| \leq 1 \times 2 = 2,$$

另一方面, 取$f(x) = 2x^2 - 1$, $x \in [-1, 1]$, $h(x) = -x^2 + 2$, $x \in [-1, 1]$, 即

$$g(x) = \left|-2x^4 + 5x^2 - 2\right|, \quad x \in [-1, 1].$$

则可知$g(0)=2$, 所以$g(x)$的最大值为2. 另外

$$\begin{aligned}|h(x)|&=\left|cx^2+bx+a\right|=\left|-ax^2+bx-c+(c+a)\left(x^2-1\right)\right|\\&\le\left|a\left(-x^2\right)+b(-x)+c\right|+|c+a|\cdot\left|x^2-1\right|\\&\le 1+\left|\frac{a+b+c}{2}+\frac{a-b+c}{2}\right|\cdot\left|x^2-1\right|\\&\le 1+\left|\frac{f(1)}{2}+\frac{f(-1)}{2}\right|\le 1+1=2.\end{aligned}$$

□

问题 1.3.88

已知$x_i\in\mathbb{R}$, $(i=1,2,\cdots,n)$, $(n\ge 2)$, 且

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=0,\qquad \sum|x_i|=1.$$

求证:

$$\left|\sum\frac{x_i}{i}\right|\le\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}.$$

解.

$$\left|\sum\frac{x_i}{i}\right|\le\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\Longleftrightarrow-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\le\sum\frac{x_i}{i}\le\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}.$$

由题设x_i中有正有负, 设$x_{k_1},\cdots,x_{k_l}$为正数, $x_{k_{l+1}},\cdots,x_{k_n}$为非正数, 则

$$\sum x_i=0\Longrightarrow\sum_{i=1}^{l}x_{k_i}=-\sum_{i=l+1}^{n}x_{k_i},$$

又由$\sum|x_i|=1$得$\sum_{i=1}^{l}x_{k_i}=\frac{1}{2}$, $\sum_{i=l+1}^{n}x_{k_i}=-\frac{1}{2}$. 所以

$$\sum\frac{x_i}{i}=\sum_{i=1}^{l}\frac{x_{k_i}}{k_i}-\sum_{i=l+1}^{n}\frac{|x_{k_i}|}{k_i}\le\sum_{i=1}^{l}x_{k_i}-\frac{1}{n}\sum_{i=l+1}^{n}|x_{k_i}|=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$$

且

$$\sum\frac{x_i}{i}\ge\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l}x_k-\sum_{i=l+1}^{n}|x_{k_i}|=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2},\cdots$$

□

解. 归纳法, 设$n=k\ge 2$成立时, 当$n=k+1$时, 设$X_1,X_2,\cdots,X_{k+1}$为$x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}$的从大到小的排列, 因为

$$\frac{1}{1}>\frac{1}{2}>\cdots>\frac{1}{k}>\frac{1}{k+1},$$

所以, 由排序不等式

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{x_i}{i}\le\sum_{i=1}^{k+1}\frac{X_i}{i}.$$

(若X_i中只有一个正值, 则至少有两个非正值, 取X_i的相反数得X_i'同样进行上述排列, 则可得至少两个非正值, 即总可假设X_i中的最后两向是非正值. 目标如下)

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{X_i}{i}=\frac{X_1}{1}+\cdots+\frac{X_k+X_{k+1}}{k}-\frac{X_{k+1}}{k(k+1)}.$$

因$X_1+\cdots+X_{k+1}=0$, $|X_1|+\cdots+|X_{k+1}|=|X_1|+\cdots+|X_k+X_{k+1}|=1$, 所以

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{X_i}{i}\leq\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}-\frac{X_{k+1}}{k(k+1)}\leq\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k(k+1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(k+1)},$$

同样方式可得

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{x_i}{i}\geq\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{2},$$

其中$n=2$时不等式易证... □

问题 1.3.89

定义在自然数N上的函数

$$f(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1},$$

求证: $f(n)>1$.

解. $f(n)>f(n-1)>\cdots>f(1)>1$, 即$f(n)$为增数列. □

解. 因为$(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n+1)=(2n+1)^2$, 设

$$\begin{aligned}f(t)&=(2n+1)^2t^2-2(2n+1)t+f(n)\\&=\left(\sqrt{n+1}t-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^2+\left(\sqrt{n+2}t-\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)^2+\cdots+\left(\sqrt{3n+1}t-\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\right)^2\end{aligned}$$

因$(2n+1)^2>0$, $f(t)>0$恒成立, 所以

$$\Delta=4(2n+1)^2-4f(n)(2n+1)^2<0,\cdots$$

□

解. 由以上证明是Cauchy不等式的证明过程: 由Cauchy不等式

$$[(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n+1)]f(n)\geq(1+1+\cdots+1)^2=(2n+1)^2,$$

所以$f(n)\geq 1$不可取得等号. □

问题 1.3.90

已知数列$\{a_n\}$中, $a_1=3$且$na_{n+1}=(n+2)a_n+n$, $(n\in\mathbb{N})$, 证明: 当$n>1$时, 下列不等式

$$\frac{7}{12}-\frac{1}{2(n+1)}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}<\frac{2}{3}-\frac{1}{2n+1}$$

成立.

解. 设

$$n(a_{n+1}+an+b)=(n+2)(a_n+an+b-a)$$

所以$a=1$, $b=1$, 所以$n(a_{n+1}+n+1)=(n+2)(a_n+n)$, 可得$\{a_n+n\}$的通项为$a_n=2n^2+n$, 另外令

$$n\left(a_{n+1}+an^2+bn+c\right)=(n+2)\left(a_n+an^2-2an+a+bn-b+c\right)$$

令$a=1$得$b=4$, $c=3$, 所以$a_{n+1}+(n+1)(n+3)=b_{n+1}$有$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n+2}{n}$, $a_n=2n^2+n$, 所以

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{a_n}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right),$$

所以

$$\frac{7}{12}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{a_1}+\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)<\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2n+1}.$$

□

解. 因$na_{n+1}=(n+2)\,a_n+n$等价于$\frac{a_{n+1}-1}{(n+1)(n+2)}=\frac{a_n}{n(n+1)}$, 令$c_n=\frac{a_n}{n(n+1)}$, 有$c_{n+1}-c_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$, $c_1=\frac{3}{2}$, 所以

$$\frac{a_n}{n\,(n+1)}=c_n=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}(c_{k+1}-c_k)=2-\frac{1}{n+1},$$

所以$a_n=n\,(2n+1)$... □

解. 若$g\,(n)-g\,(n+1)<b_n<f\,(n)-f\,(n+1)$, 则$g\,(1)-g\,(n+1)<\sum b_i<f\,(1)-f\,(n+1)$, 于是要证

$$\frac{7}{12}-\frac{1}{2\,(n+1)}<\sum\frac{1}{a_i}<\frac{2}{3}-\frac{1}{2n+1},$$

则可试证

$$\frac{1}{2n}-\frac{1}{2\,(n+1)}<\frac{1}{a_n}<\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1},\ldots$$

□

问题 1.3.91

若$x_i\in\mathbb{R}^+$, $(i=1,2,\cdots,n)$, $\sum x_i=1$, $x_{n+1}=x_1$, $n>6$, 求证:

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+x_{i+1}}>n!.$$

解. $\prod\frac{1}{x_i+x_{i+1}}=\frac{1}{\prod(x_i+x_{i+1})}\geq\frac{1}{\left(\frac{\sum(x_i+x_{i+1})}{n}\right)^n}=\left(\frac{n}{2}\right)^n$, 于是只需证$\left(\frac{n}{2}\right)^n>n!$, 因$2\cdot(n-2)<\left(\frac{n}{2}\right)^2$; $3\cdot(n-3)\leq\left(\frac{n}{2}\right)^2$, ..., $(n-2)\cdot 2\leq\left(\frac{n}{2}\right)^2$, 所以$[(n-2)!]^2\leq\left(\frac{n}{2}\right)^{(n-3)\times 2}$, 所以$(n-2)!\leq\left(\frac{n}{2}\right)^{n-3}$, 而$(n-1)\,n\leq\left(\frac{n}{2}\right)^3$, 即$8n-8\leq n^2$, 即$(n-4)^2\geq 8$, 因$n\geq 7$, 所以$(n-4)^2\geq 9>8$, 所以$(n-2)!\,(n-1)\,n=n!\leq\left(\frac{n}{2}\right)^n$. □

解. $\prod\geq\left(\frac{n}{2}\right)^n$同以上证法, 用数学归纳法.

(1) 当$n=7$时, $7!\cdot 2^7=3^2\cdot 2^{11}\cdot 5\cdot 7=\left(3\cdot 2^4\right)\left(5\cdot 2^3\right)\left(3\cdot 2^4\cdot 7\right)<7^2\cdot 7^2\cdot 7^2\cdot 7=7^7$成立.

(2) 当$n=k\geq 7$有$2^k k!<k^k$成立, 则$(k+1)!2^{k+1}=k!2^k\,(k+1)\cdot 2<k^2\,(k+1)\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=(k+1)^{k+1}$, 所以命题对于$n=k+1$时也成立... □

问题 1.3.92

试求下面表达式的最大值:

$$||\cdots||x_1-x_2|-x_3|-\cdots-|-x_{2002}|,$$

其中$x_1,x_2,\cdots,x_{2002}$是由1到2002的不同自然数.

解. 用$\max\{a_1,\cdots,a_n\}$表示$a_1,\cdots,a_n$这n个数中的最大数. 易见, 对于任何非负整数x,y, 有$|x-y|\leq\max\{x,y\}$, 又由于$\max\{\max\{x,y\},z\}=\max\{x,y,z\}$, 所以$||x-y|-z|\leq\max\{x,y,z\}$, 依此类推, 可得原式不超过$\max\{x_1,\cdots,x_n\}$, 从而题设表达式的值不会超过$\max\{x_1,x_2,\cdots,x_{2002}\}=2002$, 另一方面容易看出, 题设式子的奇偶性与数

$$x_1+x_2+\cdots+x_{2002}=2003\cdot 1001$$

的奇偶性相同, 是奇数, 所以题设式子的值不会为偶数2002, 又

$$\begin{aligned}&||||\cdots|||2-4|-5|-3|-\cdots-(4k+2)|-(4k+4)|-(4k+5)|-(4k+3)|-\cdots\\&\qquad-1998|-2000|-2001|-1999|-2002|-1|=2001.\end{aligned}$$

综上所述, 可知所求的最大值为2001. □

问题 1.3.93

已知数列$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, 满足$a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=a_n^2+a_n$, 则求

$$S=\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_{100}+1}$$

的整数部分.

解.

$$\frac{1}{a_n+1}=\frac{a_n}{a_n\left(a_n+1\right)}=\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_n^2}{a_{n+1}\cdot a_n}=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}},$$

所以$S=2-\frac{1}{a_{101}}$, 由$a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{3}{4}$, $a_3=\frac{21}{16}$, 知$a_3>1$, 所以$a_{101}>a_{100}>\cdots>a_3>1$, 所以$0<\frac{1}{a_{101}}<1$, $[S]=1$. □

问题 1.3.94

求最大的实数λ, 使得当实系数多项式$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$的所有根都是非负实数时, 只要$x\geq\min\{三个根\}$, 就有$f(x)\geq\lambda(x-a)^3$, 并且问上式中等号何时成立?

解. 设$f(x)$的三个根为α,β,γ, 并设$0\leq\alpha\leq\beta\leq\gamma$, 则有$x-a=x+\alpha+\beta+\gamma$, $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$,

(1). $0\leq x\leq\alpha$时, 因$-f(x)=(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)$, 则由A-G不等式,

$$-f(x)\leq\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma-3x}{3}\right)^3\leq\left(\frac{x+\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3,$$

即$f(x)\geq-\frac{1}{27}(x+\alpha+\beta+\gamma)^3=-\frac{1}{27}(x-a)^3$, 上式等式成立的充要条件是

$$\begin{cases}\alpha-x=\beta-x=\gamma-x\\ \alpha+\beta+\gamma-3x=x+\alpha+\beta+\gamma\end{cases}$$

即$x=0$, $\alpha=\beta=\gamma$.

(2). 当$\beta\leq x\leq\gamma$时, 因

$$-f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(\gamma-x)\leq\left(\frac{x+\gamma-\alpha-\beta}{3}\right)^3\leq\left(\frac{x+\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3=\left(\frac{x-a}{3}\right)^3.$$

则$f(x)\geq-\frac{1}{27}(x-a)^3$, 易知上式等号成立的充要条件为

$$\begin{cases}x-\alpha=x-\beta=\gamma-x\\ \alpha=\beta=0.\end{cases}$$

即$\alpha=\beta=0$, $\gamma=2x$.

(3). 当$\alpha\leq x\leq\beta$或$x>\gamma$时, $f(x)>0\geq-\frac{1}{27}(x-a)^3$, 综上可得所求的$\lambda=-\frac{1}{27}$, 且等号成立的充要条件是$x=0$, $\alpha=\beta=\gamma$或$\alpha=\beta=0$, $\gamma=2x$. 不过若$\alpha=\beta=\gamma=0$时, $\lambda=1$, 这一点S10P50未注意到. □

问题 1.3.95

已知数列$\{a_n\}$中, $a_1=\frac{1}{2}$, 且

$$a_n=\frac{1}{3n-1}\left(a_1a_{n-1}+a_2a_{n-2}+\cdots+a_{n-2}a_2+a_{n-1}a_1\right),$$

求证: $a_{n+1}<a_n$.

解. 用数学归纳法, 设$a_k < a_{k-1} < \cdots < a_1$, 则

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{1}{3k+2}\sum_{i=1}^{k} a_i a_{k+1-i} \le \frac{1}{3k+2}\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i a_{k-i} + \frac{1}{2}a_k\right) \\ &= \frac{3k-1}{3k+2}a_k + \frac{1}{3k+2}\times\frac{1}{2}a_k = \frac{6k}{2(3k+2)}a_k < a_k. \end{aligned}$$

□

问题 1.3.96

设$a_1, \cdots, a_n (n \ge 3)$是$n$个正整数, 把它们按顺序放在圆周上, 且满足每一个数去除相邻两数之和都是正整数, 令

$$S_n = \frac{a_1+a_3}{a_2} + \frac{a_2+a_4}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}+a_1}{a_n} + \frac{a_n+a_2}{a_1},$$

求证: $2n \le S_n < 3n$.

解. 不等式左边可用A-G不等式得出, 对于$S_n < 3n$用归纳法.

(1) 当$n = 3$时, $S_3 = \frac{a_1+a_3}{a_2} + \frac{a_2+a_1}{a_3} + \frac{a_3+a_2}{a_1}$, 不妨设$a_3 \ge a_2 \ge a_1$. 所以$a_3 = a_1 + a_2$或$2a_3 = a_1 + a_2$.

若$a_3 = a_1 + a_2$, 则$S_3 = \frac{2a_1}{a_2} + 1 + 1 + 1 + \frac{2a_2}{a_1}$, 而$a_2 \mid 2a_1$, $a_1 \mid 2a_2$, $a_2 \ge a_1$, 所以$a_2 = 2a_1$或$a_2 = a_1$或$2a_2 = a_1$, 所以$S_3 = 7$或$8 < 9$.

若$2a_3 = a_1 + a_2$, 同样有$S_3 < 9$.

(2) 若$n = k$时成立, 则$n = k+1$时, 设a_{k+1}最大, $a_1 = \min\{a_1, a_k\}$, 即$a_{k+1} \ge a_k \ge a_1$, 则$2a_{k+1} \ge a_1 + a_k$, 所以

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{a_1+a_3}{a_2} + \frac{a_2+a_4}{a_3} + \cdots + \frac{a_{k+1}+a_2}{a_1} \\ &< \frac{a_1+a_3}{a_2} + \frac{a_2+a_4}{a_3} + \cdots + \frac{a_{k-1}+a_1}{a_k} + 1 + 1 + 1 + \frac{a_k+a_2}{a_1} \\ &= 3 + S_k \quad (a_{k+1} = a_1 + a_k); \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{a_1+a_3}{a_2} + \frac{a_2+a_4}{a_3} + \cdots + \frac{a_{k+1}+a_2}{a_1} \\ &< \frac{a_1+a_3}{a_2} + \cdots + \frac{a_{k-1}+\frac{1}{2}a_1}{a_k} + \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}a_k + a_2}{a_1} \\ &= 3 + S_k \quad (2a_{k+1} = a_1 + a_k). \end{aligned}$$

所以$S_{k+1} \le 3 + S_k$可得$S_{k+1} \le S_3 + 3(k-2) < 3(k+1)$. □

问题 1.3.97

$\triangle ABC$的$\angle A, \angle B, \angle C$的平分线分别交$\triangle ABC$的外接圆于点$A_1, B_1, C_1$, 记$m = AA_1 + BB_1 + CC_1$, $n = AB + BC + CA$, 则( ).

A. $m \ge n$; B. $m > n$; C. $m = n$; D. 不确定m, n之间的大小.

解. 托勒密定理有$AA_1 \cdot BC = AB \cdot A_1C + AC \cdot A_1B$, $A_1B = A_1C$, $AB + AC > BC$, 所以

$$2AA_1 = \frac{(AB+AC)\cdot 2A_1B}{BC} > AB + AC.$$

同理$2BB_1 > AB + BC$, $2CC_1 > CA + CB$, 三式相加即得.

另外$A_1C = A_1B$, 所以$2A_1C > BC$, 内心为I, 则$IB + IC > BC$. 所以

$$\begin{gathered} 2A_1C + IB + IC > 2BC, 2A_1B + IB + IC > 2BC \\ 2IB_1 + IC + IA > 2AC, IA + 2IC_1 + IB > 2AB, \end{gathered}$$

相加即得. □

问题 1.3.98

Rt$\triangle ABC$中, D为BC中点, $E\in AB$, $F\in AC$, 则$C_{\triangle DEF}>BC$.

解. 做$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{BA}$, 所以$DF=NF$, $ED=EM$, $MN=BC$. 所以

$$C_{\triangle DEF}=DE+DF+EF=NF+FE+EM>MN=BC.$$

□

问题 1.3.99

若直线$y=x\lg(ac)+m$和$y=x\lg(bc)+n$, $(a,b,c>0)$相互垂直, 求$\frac{a}{b}$的取值范围.

解. 易知$\lg(ac)\cdot\lg(bc)=-1$, 所以

$$\lg^2 c+(\lg a+\lg b)\lg c+\lg a\lg b+1=0.$$

于是由$\Delta\geq 0$可得$\lg^2\frac{a}{b}\geq 4$...

事实上$(a,b,c>0)$是多余的, 我们只需用下列方法便可得知: 令$\frac{a}{b}=t$, 显然a,b,c三者同号, 则因$\lg(ac)\lg(bc)=-1$. 所以$\lg(bct)\lg(bc)=-1$, 所以$\lg^2(bc)+\lg t\lg(bc)+1=0$. 所以由$\Delta\geq 0$可得$\lg^2 t\geq 4$. □

问题 1.3.100

给定$n+1(n\geq 2)$个正实数$x_0,x_1,\cdots,x_n$, 求证:

$$\frac{x_1}{2\left(x_0^2+x_1^2\right)}+\frac{x_2}{3\left(x_0^2+x_1^2+x_2^2\right)}+\cdots+\frac{x_n}{(n+1)\left(x_0^2+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)}<\frac{1}{x_0}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{(k+1)\sum_{j=0}^{k}x_j^2}<\frac{1}{x_0}.$$

解.

$$\frac{x_i}{(i+1)\left(x_0^2+\cdots+x_i^2\right)}\leq\frac{x_i}{\left(x_0+\cdots+x_i\right)^2}<\frac{x_i}{\left(x_0+\cdots+x_{i-1}\right)\left(x_0+\cdots+x_i\right)}=\frac{1}{x_0+\cdots+x_{i-1}}-\frac{1}{x_0+\cdots+x_i}.$$

□

问题 1.3.101: 优超不等式

设两组实数$x_1,\cdots,x_n$和$y_1,\cdots,y_n$满足条件:
(i) $x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n$; $y_1\geq y_2\geq\cdots\geq y_n$;
(ii)

$$\begin{gathered}x_1\geq y_1\\ x_1+x_2\geq y_1+y_2\\ \vdots\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\geq y_1+y_2+\cdots+y_n.\end{gathered}$$

则对任意凸函数$f(x)$, 都有如下的不等式成立:

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\geq f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(y_n).$$

若$f(x)$为凹函数, 其他条件不变, 则上式不等号反向.

问题 1.3.102: 康托洛维奇不等式

若$a_i > 0$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$且$\sum_{i=1}^n a_i = 1$, 又$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i}\right) \le \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}.$$

解. 因$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$, 所以$(\lambda_1 - \lambda_i)(\lambda_i - \lambda_n) \ge 0$, 即

$$\lambda_i \le (\lambda_1+\lambda_n) - \frac{\lambda_1\lambda_n}{\lambda_i},$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i &\le \sum_{i=1}^n \left[(\lambda_1+\lambda_n) - \frac{\lambda_1\lambda_n}{\lambda_i}\right] a_i \\ &= (\lambda_1+\lambda_n) - \lambda_1\lambda_n \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i}.\end{aligned}$$

即$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \le (\lambda_1+\lambda_n) - \lambda_1\lambda_n \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i}$, 所以

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i}\right) &\le \left[(\lambda_1+\lambda_n) - \lambda_1\lambda_n \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i}\right] \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i} \\ &= -\lambda_1\lambda_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda_i} - \frac{\lambda_1+\lambda_n}{2\lambda_1\lambda_n}\right)^2 + \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n} \\ &\le \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}.\end{aligned}$$

□

问题 1.3.103: 用琴生不等式证明A-G不等式

设$a_i \in \mathbb{R}^+ (i = 1, 2, \cdots, n)$, 求证:

$$\frac{1}{n}\sum a_i \ge \sqrt[n]{\prod a_i},$$

当$a_1 = \cdots = a_n$时取等号.

解. 设$y = \ln x$, 因$y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2} < 0$, 所以y为上凸函数. 所以

$$\frac{1}{n}\sum \ln a_i \le \ln \frac{\sum a_i}{n}.$$

即得. □

问题 1.3.104: Cauchy不等式推导调和平均≤算术平均

$$\frac{n}{\sum \frac{1}{a_i}} \le \frac{\sum a_i}{n}, \qquad (a_i > 0).$$

解. 因$\sum a_i \sum \frac{1}{a_i} \ge \left(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n个1}\right)^2 = n^2$, 由此不等式得到$\sum_{i=1}^n \frac{a_i a_{i+1}}{a_i + a_{i+1}} \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i$, 其中$a_{n+1} = a_1$. □

问题 1.3.105: 贝努利不等式

设$1+x>0$, $x\neq 0$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, 求证: $(1+x)^n>1+nx$.

解. 因$x\neq 0$, $1+x>0$, 由均值不等式

$$(1+x)^n+n-1=(1+x)^n+1+1+\cdots+1>n\cdot\sqrt[n]{(1+x)^n\cdot 1\cdot 1\cdots 1}=n\left(1+x\right).$$

所以$(1+x)^n>1+nx$, (可用归纳法) □

注: 贝努利一般式为$(1+x)^\alpha>1+\alpha x$, $\alpha<0$或$\alpha>1$.

问题 1.3.106: Abel不等式

设$a_i,b_i\in\mathbb{R}$, $(i=1,2,\cdots,n)$, $b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_n\geq 0$.

$$S_k=\sum_{i=1}^k a_i \quad (k=1,2,\cdots,n),$$

又记$M=\max_{1\leq k\leq n}S_k$, $m=\min_{1\leq k\leq n}S_k$, 求证:

$$mb_1\leq\sum_{k=1}^n a_ib_i\leq Mb_1.$$

解. 由Abel恒等式及b_i的单调性, 得

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i=\sum_{i=1}^{n-1}S_i\left(b_i-b_{i+1}\right)+S_nb_n\leq M\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(b_i-b_{i+1}\right)+b_n\right)=Mb_1,$$

同理可证第一个不等式. □

问题 1.3.107: 钟凯莱不等式

设$a_1,\cdots,a_n$和$b_1,\cdots,b_n$都是正数, 且$b_1>b_2>\cdots>b_n$, 若对所有的$k=1,2,\cdots,n$有

$$\sum_{i=1}^k b_i\leq\sum_{i=1}^k a_i,$$

则

$$\sum_{j=1}^n b_j^2\leq\sum_{j=1}^n a_j^2.$$

解. 由Abel恒等变换公式

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n b_j^2&=b_n\sum_{j=1}^n b_j+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{k=1}^j b_k\right)\left(b_j-b_{j+1}\right)\\&\leq b_n\sum_{j=1}^n b_j+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{k=1}^j a_k\right)\left(b_j-b_{j+1}\right)\\&=\sum_{j=1}^n a_jb_j\leq\left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right)^{1/2}. \quad \text{Cauchy不等式}\end{aligned}$$

即得. □

问题 1.3.108: W. Janous猜想

设$x,y,z\in\mathbb{R}^+$, 求证: $\frac{z^2-x^2}{x+y}+\frac{x^2-y^2}{y+z}+\frac{y^2-z^2}{z+x}\geq 0$.

解. 原不等式等价于

$$\frac{z^2}{x+y}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{x^2}{y+z}\geq\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x},$$

用排序不等式. □

解. 令$y+z=a$, $z+x=b$, $x+y=c$, 则$a,b,c>0$. 所以原式等价于

$$\begin{aligned}&\frac{ac}{b}+\frac{ba}{c}+\frac{cb}{a}\geq a+b+c\\&\frac{ac}{b}+\frac{ba}{c}\geq 2a,\\&\frac{bc}{c}+\frac{cb}{a}\geq 2b,\cdots\end{aligned}$$

此结论可推广为: 若$x,y,z>0$, 求证:

$$\frac{y\left(y^2-x^2\right)}{z+x}+\frac{z\left(z^2-y^2\right)}{x+y}+\frac{x\left(x^2-z^2\right)}{y+z}\geq 0.$$

用排序不等式可得. □

问题 1.3.109: 闵可夫斯基不等式

求证: 对于任意实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$及$y_1,y_2,\cdots,y_n$有

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}y_k^2}$$

当且仅当$x_1,x_2,\cdots,x_n$与$y_1,y_2,\cdots,y_n$对应成比例时取到.

解. 原式当且仅当

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2\leq\sum x_k^2+2\sqrt{\sum x_k^2\sum y_k^2}+\sum y_k^2,$$

而

$$\sum x_ky_k\leq\left(\sum x_k^2\right)^{1/2}\left(\sum y_k^2\right)^{1/2},$$

所以不等式成立. □

问题 1.3.110: 幂平均不等式

若$\alpha>\beta>0$, $a_i\in\mathbb{R}^+$, $(i=1,2,\cdots,n)$, 则

$$\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}\geq\left(\frac{a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta}{n}\right)^{1/\beta}.$$

解. 令$x_i=a_i^\beta$, 则$a_i=x_i^{1/\beta}$, 原不等式等价于

$$\frac{1}{n}\sum x_k^{\alpha/\beta}\geq\left(\frac{1}{n}\sum x_k\right)^{\alpha/\beta},$$

因为$\alpha>\beta>0$, 所以$\frac{\alpha}{\beta}>1$, $f(x)=x^p$, $(p>1)$是$(0,+\infty)$上的凸函数, 故由琴生不等式知上式成立, 从而命题成立. □

问题 1.3.111: 赫尔德(Hölder)不等式

设$a_i, b_i \in \mathbb{R}^+$, $(i=1,2,\cdots,n)$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta=1$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} b_i^{\beta} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{\beta}.$$

解. 令$A=\sum_{i=1}^{n} a_i$, $B=\sum_{i=1}^{n} b_i$, 则

$$A^{-\alpha}B^{-\beta}\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} b_i^{\beta}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_i}{B}\right)^{\beta},\quad \alpha+\beta=1.$$

因$f(x)=\ln x$, $(x>0)$是上凸函数, 所以

$$\begin{aligned}\alpha\ln\frac{a_i}{A}+\beta\ln\frac{b_i}{B}&=\frac{\alpha\ln\frac{a_i}{A}+\beta\ln\frac{b_i}{B}}{\alpha+\beta} \qquad \because \alpha+\beta=1\\ &\le \ln\frac{\alpha\frac{a_i}{A}+\beta\frac{b_i}{B}}{\alpha+\beta}=\ln\left(\alpha\frac{a_i}{A}+\beta\frac{b_i}{B}\right)\end{aligned}$$

所以$\left(\frac{a_i}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_i}{B}\right)^{\beta}\le\alpha\frac{a_i}{A}+\beta\frac{b_i}{B}$, 两边取$\sum_{i=1}^{n}$有

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_i}{B}\right)^{\beta}\le\frac{\alpha}{A}\sum a_i+\frac{\beta}{B}\sum b_i=\alpha+\beta=1.$$

□

问题 1.3.112

Hölder不等式推出Cauchy不等式.

解. 令$\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, 代入Hölder不等式, 并令$x_i^2=a_i$, $y_i^2=b_i$, 即得. □

问题 1.3.113

优超不等式推出钟开莱不等式.

解. 取$f(x)=x^2$, 则$f(x)$为下凸函数, 用钟开莱不等式中的符号, 因为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\succ(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 所以$\sum f(a_k)\ge\sum f(b_k)$. □

问题 1.3.114

优超不等式推出琴生不等式.

解. 设$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n} b_k$, $b_1=b_2=\cdots=b_n=\frac{1}{n}\sum a_i$, 不妨设$a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n$, 则$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\succ(b_1,b_2,\cdots,b_n)$. 若$f(x)$是$[a,b]$或$(a,b)$内的下凸函数, 则对于$[a,b]$或$(a,b)$中任意$n$个数$a_1,a_2,\cdots,a_n$有

$$\frac{1}{n}\sum f(a_k)\ge f\left(\frac{1}{n}\sum a_k\right),$$

当且仅当$x_1=\cdots=x_n$时取等号. 若$f(x)$为上凸函数, 命题反号. □

问题 1.3.115

求所有正整数$a_1, a_2, \cdots, a_n$, 使得
$$\frac{99}{100}=\frac{a_0}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n},$$
其中$a_0=1$,
$$\left(a_{k+1}-1\right)a_{k-1}\geq a_k^2\left(a_k-1\right),\quad k=1,2,\cdots,n.$$
(S24P53).

解. 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$是满足条件的正整数, 由归纳法原理$a_{k+1}>a_k$, $a_{k+1}\geq 2$, $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$, 所以
$$\left(a_{k+1}-1\right)a_{k-1}\geq a_k^2\left(a_k-1\right)\Longleftrightarrow\frac{a_{k-1}}{a_k\left(a_k-1\right)}\geq\frac{a_k}{a_{k+1}-1},$$
即
$$a_{k-1}\left(\frac{1}{a_k-1}-\frac{1}{a_k}\right)\geq\frac{a_k}{a_{k+1}-1}.$$
即
$$\frac{a_{k-1}}{a_k}\leq\frac{a_{k-1}}{a_k-1}-\frac{a_k}{a_{k+1}-1}$$
对于$k=i+1, i+2, \cdots, n$求和得:
$$\sum_{k=i+1}^{n}\frac{a_{k-1}}{a_k}\leq\frac{a_i}{a_{i+1}-1}-\frac{a_n}{a_{n+1}-1}<\frac{a_i}{a_{i+1}-1},$$
当$i=0$时, 有$\frac{1}{a_1}\leq\frac{99}{100}<\frac{1}{a_1-1}\Longleftrightarrow a_1=2$.
当$i=1$时, 有$\frac{a_1}{a_2}\leq\frac{99}{100}-\frac{1}{a_1}<\frac{a_1}{a_2-1}\Longleftrightarrow a_2=5$.
当$i=2$时, 有$\frac{a_2}{a_3}\leq\frac{99}{100}-\frac{1}{a_1}-\frac{a_1}{a_2}\leq\frac{a_2}{a_3-1}\Longleftrightarrow a_3=56$.
同理, $i=3$时, 有$a_4=78400$. 又$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{5}{56}+\frac{56}{78400}=\frac{99}{100}$, 故方程有唯一解$a_1=2$, $a_2=5$, $a_3=56$, $a_4=78400$. □

问题 1.3.116: (2002年, 全国卷) S14, P182

设数列$\{a_n\}$满足
$$a_{n+1}=a_n^2-na_n+1,\qquad n\in\mathbb{N}_+,$$
当$a_1\geq 3$时, 求证: $\forall n\in\mathbb{N}_+$, 有
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}\leq\frac{1}{2}.$$

解. 令$b_n=a_n+1$, 则$b_1\geq 4$, $b_{n+1}=b_n^2-(n+2)b_n+3+n$, 可归纳证明
$$b_n\geq 2^{n+1}.$$
□

问题 1.3.117

已知$a, b, c\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $g(x)=ax+b$, 当$-1\leq x\leq 1$时, $|f(x)|\leq 1$. 证明: 当$|x|\leq 1$时, $|g(x)|\leq 2$.

解. 设$g(x)=f(x_1)+\mu f(x_2)=ax+b$, 所以$\mu=-1$, $x_1=\frac{x+1}{2}$, $x_2=\frac{x-1}{2}$, 所以
$$|g(x)|=\left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f\left(\frac{x-1}{2}\right)\right|\leq\left|f\left(\frac{x-1}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{x-1}{2}\right)\right|\leq 2.$$
□

问题 1.3.118

在$\triangle ABC$内任取一点, 求证:
(1) $\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=1$.
(2) 若AB为三角形中最长边, 则$PD+PE+PF<AB$.

解. 证明中的(1)用共边定理即得.

(2): 先证$AB>AD$, $AB>BE$, $AB>CF$, $\max(BC,AC)\le AB$, 设$\frac{PD}{AD}=k$, $\frac{PE}{BE}=n$, $\frac{PF}{CF}=m$, 则$k+m+n=1$, $PD=kAD$, $PE=n\cdot BE$, $PF=m\cdot CF$. 所以

$$PD+PE+PF<kAB+nAB+mAB.$$

□

问题 1.3.119

设非负实数x_1,x_2,x_3,x_4,x_5满足$\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{1+x_i}=1$, 求证: $\sum\frac{x_i}{4+x_i^2}\le 1$. (S8 P121, 3)

解.

$$\begin{aligned}\sum\frac{x_i}{4+x_i^2}&=\sum\frac{1}{\frac{4}{x_i}+\frac{x_i}{4}+\frac{3x_i}{4}}\le\sum\frac{1}{2+\frac{3x_i}{4}}\\&=\sum\frac{4}{3x_i+8}=\frac{4}{3}\sum\frac{1}{x_i+8/3}\\&=\frac{4}{3}\sum\frac{\frac{1}{x_i+1}}{1+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x_i+1}}.\end{aligned}$$

因为$\frac{1}{x_i+1}>0$, 令$y=\frac{x}{1+\frac{5}{3}x}$, 易知$y''<0$, 所以

$$\frac{1}{5}\left(\frac{4}{3}\sum\frac{\frac{1}{x_i+1}}{1+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{x_i+1}}\right)\le\frac{4}{3}\frac{\frac{1}{5}\sum\frac{1}{1+x_i}}{1+\frac{5}{3}\times\frac{1}{5}\sum\frac{1}{1+x_i}}=\frac{4}{3}\times\frac{\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{5}$$

即得. □

注: 若已知$x_1,x_2,\cdots,x_t$非负, 且$\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{1+x_i}=1$, 求$\sum\frac{x_i}{4+x_i^2}$的最大值, 用上述方法时, 知当$t=4,5,6,7,8,9$时

$$\sum\frac{x_i}{4+x_i^2}\le\frac{t(t-1)}{t^2-2t+5},$$

当$x_1=\cdots=x_t=t-1$时取等.

$t=3$时, 在第一步用均值不等式放缩时便把x_i全部消去, 此时,

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i}{4+x_i^2}\le\frac{3}{4}.$$

当$x_1=x_2=x_3=2$时取等号,

$t=2$时, 因为$\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{1+x_i}=1=\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}$, 所以设$x_1=\frac{1}{x_2}=t$, 所以

$$\begin{aligned}\sum^{2}\frac{x_i}{4+x_i^2}&=\frac{x_1}{4+x_1^2}+\frac{x_2}{4+x_2^2}=\frac{4x_1+4x_2+x_1+x_2}{16+1+4x_1^2+4x_2^2}\\&=\frac{5\left(t+\frac{1}{t}\right)}{17+4\left(t^2+\frac{1}{t}\right)}=\frac{5\left(t+\frac{1}{t}\right)}{9+4\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}\\\left(\text{令}t+\frac{1}{t}=s\ge 2\right)&=\frac{5s}{9+4s^2}=\frac{5}{\frac{9}{s}+4s}\le\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

当$s=2$时取等号.

问题 1.3.120: (06. 浙江)

$x_n > 0$, $x_n^2 + x_n = 3x_{n+1}^2 + 2x_{n+1}$, $x_1 = 1$, 则

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

解. 因为$x_n^2 + x_n > 2\left(x_{n+1}^2 + 2x_{n+1}\right)$, 所以$x_n^2 + x_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}\left(x_1^2 + x_1\right) = \frac{1}{2^{n-2}}$, $(n \geq 1)$; 所以$x_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$. 因$x_n^2 + x_n < \left(2x_{n+1}\right)^2 + \left(2x_{n+1}\right)$, 所以$\left(x_n - 2x_{n+1}\right)\left(x_n + 2x_{n+1} + 1\right) < 0$. 所以$x_{n+1} \geq \frac{1}{2}x_n$, 所以$x_n \geq \frac{1}{2^{n-1}}x_1 = \frac{1}{2^{n-1}}$. □

问题 1.3.121

已知$\frac{b+c}{a} = 1$, 求证: $b^2 + 4ac \geq 0$.

解. 构造$ax^2 - bx - c = 0$, $(a \neq 0)$, 因为有实根$x = 1$, 所以$\Delta = b^2 + 4ac \geq 0$. □

解. 因为$a = b + c$, 所以$b^2 + 4ac = b^2 + 4c(b + c) = (b + 2c)^2 \geq 0$. □

问题 1.3.122

$\triangle ABC$三边为a, b, c, $m \in \mathbb{R}^+$, 证: $\frac{a}{a+m} + \frac{b}{b+m} > \frac{c}{c+m}$.

解. 当$\frac{a}{b} < 1$时, 用$\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$,

$$\frac{a}{a+m} + \frac{b}{b+m} > \frac{a}{a+b+m} + \frac{b}{a+b+m} = \frac{a+b}{a+b+m} > \frac{c}{c+m}.$$

□

问题 1.3.123

已知: $x, y, z < 1$的正数, 取$x, y, z, 1-x, 1-y, 1-z$中的最大者, 设为x, 则$1 - z \leq x$, $z < 1$, 从而

$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) < x(1-y) + yx + 1 \cdot (1-x) = 1.$$

问题 1.3.124

已知: $a < 0$, $b \leq 0$, $c > 0$, $\sqrt{b^2 - 4ac} = b^2 - 2ac$, 求$\sqrt{b^2 - 4ac}$的最小值.

解. 因为$\sqrt{b^2 - 4ac}$的最小值为$\sqrt{b^2 - 4ac} = b^2 - 2ac$的最小值, 其中$b^2 \geq 0$, $-2ac > 0$, 所以$b^2 - 2ac$的最小值是$b = 0$时, 此时$\sqrt{-4ac} = -2ac$, 所以$ac = -1$或0, 所以$\sqrt{b^2 - 4ac} \geq \sqrt{-4ac} = \sqrt{4} = 2$. □

问题 1.3.125

已知$t \in \mathbb{R}$, 证$t^4 - t + \frac{1}{2} > 0$.

解. $t^4 - t + \frac{1}{2} = \left(t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 > 0$恒成立. □