Chapter 1

高中笔记8

1.1 读书笔记

康托尔: 德, 数学家, 集合论的创造人, 他证明了一条直线上的点和一个平面上的点一一对应, 也能和空间中的点一一对应. 因此1cm长的线段内的点与太平洋面上的点以及整个地球内部的点都"一样多". 他对这类"无穷集合"问题发表了一系列文章, 通过严格证明得出了许多惊人的结论.

罗素悖论: 又称理发师悖论: 某村只有一人会理发, 且该村的人都需要理发, 理发师约定, 给且只给村中自己不给自己理发的人理发, 试问: 理发师给不给自己理发.

阿贝尔: 椭圆函数论的创始人之一, 发现了椭圆函数的加法定理, 双周期性. 在交换群, 二项级数的严格理论, 级数求和等有巨大贡献, 还有阿贝尔积分, 阿贝尔积分方程, 阿贝尔函数, 阿贝尔级数, 阿贝尔部分和公式, 阿贝尔收敛判别法, 阿贝尔可和性.

分形: 龙的曲线是由一个等腰直角三角形开始的, 以该等腰直角三角形的直角边为斜边作另外的等腰直角三角形, 如此往后, 并将其斜边删除掉即可.

群论: 伽罗瓦是第一个使用群并系统地研究群的数学家. 他19岁时, 用群的思想解决了五次方程的问题. 逐渐开创了一个新的数学分支–抽象代数学. 它包括群论, 环论, 域论, 布尔代数等.

说谎者悖论: 公元前4世纪, 希腊哲学家也提出:"我现在正在说的这句话是谎话". 另外公元前6世纪, 古希腊克里特岛的哲学家伊壁门尼德斯断言:"所有克里特人所说的每一句话都是谎话."

干下去还有50%成功的希望, 不干便是100%的失败.

$A = x + y + z$(A:成功, x: 艰苦的劳动, y: 正确的方法, z: 少说空话)–爱因斯坦的公式.

埃托色尼的筛法提的求小于给定数N的所有素数的方法: 先从3写出所有小于N的奇数, 再从中划去$3, 5, 7, 11 \cdots$的倍数.

球体填充问题: 把一大堆乒乓球倒进一个箱内, 倒至最后还剩几个, 使箱内乒乓球数目最多. 称为球体填充问题, 亦称开普勒猜想.

查: 吴文俊的"吴示性类", "吴示嵌类".

药剂师的砝码: 将300g药粉分成100g和200g各一份, 可是天平只有30g和35g两个砝码, 只需分两次即可, 分两步: 一, 将30g砝码放一盘上, 把300g药粉倒在两个盘上, 使之平衡, 于是, 一盘药粉为165g, 另一盘135g; 第二步将35g砝码, 从135g药粉中称出35g$\cdots$.

罗氏几何的公理系统与欧氏几何公理不同之处是: 平行公理: "用直线外一点, 至少可做两条直线与已知直线平行"来代替, 这引出了一连串和欧氏几何内容不同的新的几何命题.

1.2 球面几何

定义 1.2.1: 大圆

一个过球心的平面在球面上的截线叫做球面上的一个大圆.

定义 1.2.2: 球面二面角

球面上任两个大圆都相交于对顶的两点, 一对对顶点与连接它们的两条大圆弧(半个大圆弧)围成的图形称为球面二面角(梭形).

定义 1.2.3: 球面角

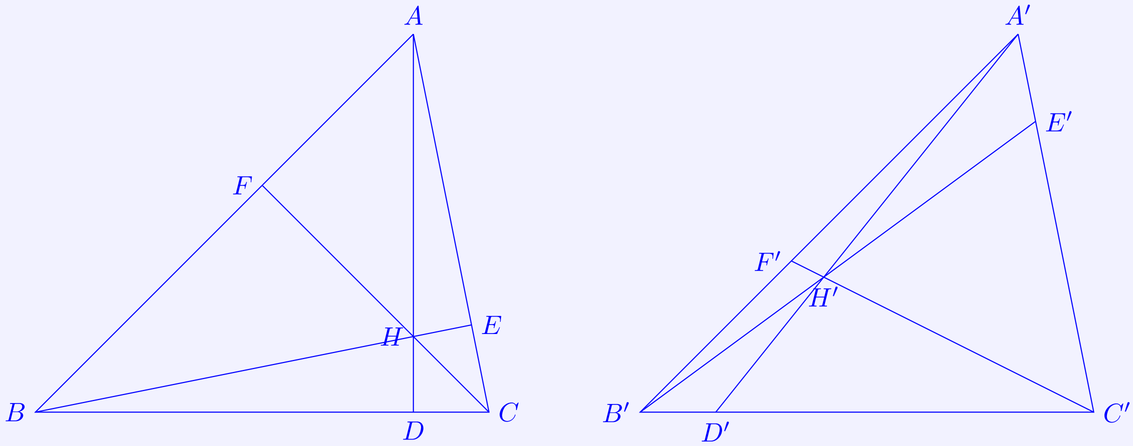
球面上一点及过该点的任意两条大圆弧所构成的图形称为球面角, 这两条大圆弧的切线间的夹角即为该球面角的大小.

定义 1.2.4: 球面三角形

在半径为R的球面上相距小于πR的给定三点A, B, C唯一地确定了三条小于半圆的大圆圆弧$\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$.

定义 1.2.5: 伴垂心

如下左图是$\triangle ABC$的垂心的定义, 如下右图与$\triangle ABC$全等, 若$B'D' = CD$, $C'E' = AE$, $AF = B'F'$, 则$\triangle A'B'C'$中的三线共点H'为$\triangle A'B'C'$的伴垂心.



定理 1.2.1: 球面三角形余弦定理

对于任给半径为R的球面三角形$\triangle ABC$, 其三边a, b, c和三角$\angle A, \angle B, \angle C$之间恒满足:

$$\cos\frac{a}{R^2} = \cos\frac{c}{R^2}\cos\frac{b}{R^2} + \sin\frac{b}{R^2}\sin\frac{c}{R^2}\cos\angle A,$$
$$\cos\frac{b}{R^2} = \cos\frac{a}{R^2}\cos\frac{c}{R^2} + \sin\frac{c}{R^2}\sin\frac{a}{R^2}\cos\angle B,$$
$$\cos\frac{c}{R^2} = \cos\frac{b}{R^2}\cos\frac{a}{R^2} + \sin\frac{a}{R^2}\sin\frac{b}{R^2}\cos\angle C.$$

定理 1.2.2: 球面三角形正弦定理

条件同上, 有$\frac{\sin\angle A}{\sin\frac{a}{R^2}} = \frac{\sin\angle B}{\sin\frac{b}{R^2}} = \frac{\sin\angle C}{\sin\frac{c}{R^2}}$.

1.3 不等式集

问题 1.3.1

已知$0 \le a_k \le 1 (k = 1, 2, \cdots, 2002)$, 记$a_{2003} = a_1$, $a_{2004} = a_2$, 求$\sum_{k=1}^{2002}(a_k - a_{k+1} \cdot a_{k+2})$的最大值.

解.

$$\sum_{k=1}^{2002}(a_k - a_{k+1} \cdot a_{k+2}) = \sum_{k=1}^{2002}(a_k - a_k a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{2002} a_k(1 - a_{k+1}).$$

Cauchy不等式, 上式右端不超过

$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{2002} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{2002}(1-a_{k+1})^2\right)} \le \frac{\sum a_k^2+\sum(1-a_{k+1})^2}{2} = \frac{\sum a_k^2+\sum(1-a_k)^2}{2} = \frac{\sum(2a_k^2-2a_k+1)}{2}.$$

因为$2a_k^2-2a_k+1\le 1$, 所以原式不超过$\frac{1}{2}\sum 1=1001$, 当$a_k=0$或1时取等号, 即当$a_1=a_3=a_5=\cdots=a_{2001}=1$且$a_2=a_4=\cdots=a_{2002}=0$时取等号. □

解. 由$0\le a_k\le 1$, 得$(1-a_k)(1-a_{k+1})=1-(a_k+a_{k+1})+a_ka_{k+1}\ge 0(k=1,2,\cdots,2002)$, 所以$1\ge a_k+a_{k+1}-a_ka_{k+1}\ge a_k+a_{k+1}-2a_ka_{k+1}$, 从而$2002\ge\sum_{k=1}^{2002}(a_k+a_{k+1}-2a_ka_{k+1})=2\sum(a_k-a_{k+1}a_{k+2})$, 即$\sum(a_k-a_{k+1}a_{k+2})\le 1001$. □

问题 1.3.2

求函数$y=x+\sqrt{x(2-x)}$的最值及此时x的值.

解. 显然$x\in[0,2]$, 所以可设$x=2\sin^2\theta(\theta\in\mathbb{R})$, 运用$|a\sin\theta+b\cos\theta|\le\sqrt{a^2+b^2}$即可. □

问题 1.3.3

设n是给定的正整数, $n\ge 13$, 对n个给定的实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$, 记$|a_i-a_j|(1\le i<j\le n)$有最小值m, 求在$\sum_{i=1}^n a_i^2=1$的条件下, m的最大值.

解. 不妨设$a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$, 于是$a_2-a_1\ge m, a_3-a_2\ge m,\cdots,a_n-a_{n-1}\ge m$, $a_j-a_i\ge(j-i)m(1\le i<j\le n)$.

$$\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2\ge m^2\times\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)^2=m^2\sum_{k=1}^{n-1}k(2k+1)(k+1)=\frac{m^2}{12}\cdot n^2(n^2-1).$$

另一方面, $\sum_{i=1}^n a_i^2=1$可得

$$\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2=n-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\le n.$$

故$n\ge\frac{m^2}{12}n^2(n^2-1)$, 所以$m\le\sqrt{\frac{12}{n^2(n^2-1)}}$, 当且仅当$\sum_{i=1}^n a_i=0$, 且$a_1,a_2,\cdots,a_n$成等差数列时取等号. □

问题 1.3.4

若$x,y,z>0$且$x^2+y^2+z^2=1$, 则$S=\frac{(z+1)^2}{2xyz}$取最小值时, x的值是多少?

解. $\sqrt{\sqrt{2}-1}$. □

引理 1.3.1

设$T\ge 0$, $x,y,z\ge 0$, 则$T\ge\sum x$的充要条件为:

$$(T^2-\sum x^2)^2-8\prod x\cdot T-4\sum y^2z^2\ge 0 \tag{1.1}$$
$$T^2\ge\sum x^2. \tag{1.2}$$

解. 若$T\ge\sum x$, 则1.2式明显成立, 且

$$(T+\sum x)(T^2-\sum x^2+2\sum yz)-8\prod x\ge 2\sum x\cdot 4\sum yz-8\prod x\ge 0.$$

根据

$$(T^2-\sum x^2)^2-8\prod x\cdot T-4\sum y^2z^2=(T-\sum x)\left[(T+\sum x)(T^2-\sum x^2+2\sum yz)-8\prod x\right] \tag{1.3}$$

知1.1式成立. 若1.1, 1.2式成立, 则

$$(T+\sum x)(T^2-\sum x^2+2\sum yz)-8\prod x \geq (\sqrt{\sum x^2}+\sum x)\cdot 2\sum yz-8\prod x \geq (\sqrt{3}+3)(\prod x)^{\frac{1}{3}}\cdot 6(\prod x)^{\frac{2}{3}}-8\prod x \geq 0.$$

根据1.3式知$T \geq \sum x$. □

由引理即得

定理 1.3.1

设$T \geq 0$, $x, y, z \geq 0$, 记$f = (T^2 - \sum x^2)^2 - 8\prod x \cdot T - 4\sum y^2z^2$, 则

(i) 若$f \geq 0$, $\sum x^2 \leq T^2$, 则$\sum x \leq T$;

(ii) 若$f \leq 0$, 则$\sum x \geq T$.

问题 1.3.5

$$\sum \cos\frac{A}{2} \leq 2 + \frac{s}{4R} + \frac{9\sqrt{3}-16}{4R}r.$$

解. 设$m = \frac{s}{4R}$, $n = \frac{r}{2R}$. 则$\sum \cos^2\frac{A}{2} = 2+n$, $\prod \cos\frac{A}{2} = \frac{m}{2}$. 进而

$$\sum \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2} = \frac{1}{4}(4+4n+m^2+n^2).$$

令$T = 2 + \frac{m}{2} + \frac{9\sqrt{3}-16}{2}n$, $x = \cos\frac{A}{2}$, $y = \cos\frac{B}{2}$, $z = \cos\frac{C}{2}$, 用定理1.3.1中结论(i). □

问题 1.3.6

设实数a, b, c, d, 满足$a^2+b^2+c^2+d^2 = 5$, 求$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2$的最大值.

解. 设$f = (a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2 = 15-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+\lambda(a^2+b^2+c^2+d^2-5)$, 所以$f_a = -2(b+c+d)+2a\lambda$, $f_b = -2(a+c+d)+2b\lambda$, $f_c = -2(a+b+d)+2c\lambda$, $f_d = -2(a+c+d)+2b\lambda$, $f_\lambda = a^2+b^2+c^2+d^2-5$, 令$f_a = f_b = f_c = f_d = f_\lambda = 0$, 解得$\lambda = -1$或$a = b = c = d$. 当$\lambda = -1$时, $a+b+c+d = 0$得$f = 20$. 当$a = b = c = d$时, $f = 0$, 所以$f_{\max} = 20$. □

问题 1.3.7

如果$x > 0$, $y > 0$, $z > 0$且$x^2+y^2+z^2 = 1$, 求$\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}$的最小值.

解. 设$\frac{yz}{x} = a$, $\frac{xz}{y} - b$, $\frac{xy}{z} = c$, 则 $ab+bc+ca = 1$, 所以$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca = 1$, 所以$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq 3$, 另外令$f = a+b+c+\lambda(ab+bc+ca-1)$, 令 $f_a = 1+(b+c)\lambda = 0$, $f_b = 1+(a+c)\lambda = 0$, $f_c = 1+(a+b)\lambda = 0$, 所以$a = b = c$时最小. □

问题 1.3.8

设$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$满足$a_0 = \frac{1}{2}$, $a_{k+1} = a_k + \frac{1}{n}a_k^2$, $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$, 其中n是一个给定的正整数, 试证: $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$.

解. $a_n > a_{n-1} > a_{n-2} > \cdots > a_2 > a_1 > a_0 = \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{n+a_k} < \frac{1}{n} \Longrightarrow \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} < 1,$$
$$\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{n+a_k} > \frac{1}{n+1} \Longrightarrow \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} > \frac{n}{n+1}.$$

□

问题 1.3.9

当$a>1$时, 若不等式$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{7}{12}\left[\log_{a+1}x-\log_{a}x+1\right]$对于不小于2的正整数$n$恒成立, 求$x$的取值范围.

解. $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$递增, x的取值范围为$(1,+\infty)$. □

问题 1.3.10

实数集$\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, 满足以下条件:

(1) $a_1=a_n=0$.

(2) 对$1\le k\le n-1$, 有$a_k=c+\sum_{i=k}^{n-1}a_{i-k}(a_i+a_{i+1})$.

证明: $c\le\frac{1}{4n}$.

解. 定义$S_k=\sum_{i=0}^{k}a_i(k=0,1,2,\cdots,n)$, 则

$$\begin{aligned}
S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{n-1}a_{k-1}&=nc+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=k}^{n-1}a_{i-k}(a_i+a_{i+1})\\
&=nc+\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+a_{i+1})\cdot\sum_{k=0}^{i}a_{i-k}\\
&=nc+\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+a_{i+1})\sum_{t=0}^{i}a_t,(t=i-k)\\
&=nc+\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+a_{i+1})\cdot S_i\\
&=nc+[S_1S_0+(S_2-S_0)S_1+(S_3-S_1)S_2+\cdots+(S_n-S_{n-2})S_{n-1}]
\end{aligned}$$

即$S_n^2-S_n+nc=0$, $\Delta\ge 0\Longrightarrow c\le\frac{1}{4n}$. □

问题 1.3.11

若关于x的不等式$\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+\frac{1}{\log_3 a}\ge 0$, 求$a$的取值范围.

解. 令$u=x^2+ax+5$, $\frac{\log_3(\sqrt{u}+1)}{-\log_3 a}\cdot\log_5(u+1)+\frac{1}{\log_3 a}\ge 0$. 因为$f(4)=1$, 所以$a=2$. □

问题 1.3.12

设$a_1,a_2,\cdots,a_{2002}>0$且$\sum\frac{1}{2+a_i}=\frac{1}{2}$, 求$\prod a_i$的最小值.

解. 令$x_i=\frac{2}{2+a_i}$, 则$\sum x_i=1$, 则$a_i=2\cdot\frac{1-x_i}{x_i}$, 因为

$$\begin{aligned}
\prod a_i&=2^{2002}\prod\frac{1-x_i}{x_i}\\
&=2^{2002}\cdot\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{2002}}\prod(x_1+x_2+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_{2002})\\
&\ge 2^{2002}\cdot\frac{1}{x_ix_2\cdots x_{2002}}\cdot 2001^{2002}\cdot\prod\sqrt[2001]{x_1x_2\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_{2002}}\\
&=4002^{2002}.
\end{aligned}$$

□

问题 1.3.13

求最小的正数λ, 使得对任意正整数n, a_i和b_i, $b_i \in [1,2] (i=1,2,\cdots,n)$, 且$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum b_i^2$, 都有$\sum \frac{a_i^3}{b_i} \le \lambda \cdot \sum a_i^2$.

解. 对任意$c_i, b_i \in [1,2]$, 有$\frac{1}{2} \le \frac{c_i}{b_i} \le 2$, 即$\frac{1}{2}b_i \le c_i \le 2b_i$, 从而$\left(\frac{1}{2}b_i - c_i\right)(2b_i - c_i) \le 0$, 即$c_i^2 + b_i^2 \le \frac{5}{2}c_i b_i$, 两边对$i$从1到$n$求和, 得$\sum c_i^2 + \sum b_i^2 \le \frac{5}{2}\sum c_i b_i$, 设$a_i, b_i \in \left[1, \frac{2}{3}\right]$, 因$a_i^2 = \frac{a_i^{\frac{3}{2}}}{b_i^{\frac{1}{2}}} \cdot a_i^{\frac{1}{2}} \cdot b_i^{\frac{1}{2}}$. 又

$$\frac{1}{2} \le \frac{\frac{a_i^{\frac{3}{2}}}{b_i^{\frac{1}{2}}}}{a_i^{\frac{1}{2}} \cdot b_i^{\frac{1}{2}}} \le 2.$$

故有$\frac{5}{2}\sum a_i^2 \ge \sum \frac{a_i^3}{b_i} + \sum a_i b_i \ge \sum \frac{a_i^3}{b_i} + \frac{2}{5}(\sum a_i^2 + \sum b_i^2) = \sum \frac{a_i^3}{b_i} + \frac{4}{5}\sum a_i^2$, 即$\sum \frac{a_i^3}{b_i} \le \frac{17}{10}\sum a_i^2$, 当$n=2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$时取等号. □

问题 1.3.14

已知: $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, 有$xyz = 1$且满足$x(1+z) > 1$, $y(1+x) > 1$, $z(1+y) > 1$, 求证: $2(x+y+z) \ge \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 3$.

解. 令$x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$, $z = \frac{c}{a}$, 则$a+c > b$, $a+b > c$, $b+c > a$, 要证$2(x+y+z) \ge \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 3$, 只需证

$$2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \ge \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + 3 \Longleftrightarrow 2(a^2c + b^2a + c^2b) \ge b^2c + c^2a + a^2b + 3abc.$$

因为

$$(a+b-c)(b-c)^2 \ge 0, \quad (b+c-a)(c-a)^2 \ge 0, \quad (c+a-b)(a-b)^2 \ge 0$$

展开相加, 即得. □

问题 1.3.15

已知正整数$n \ge 2$, 若对同时满足条件:

(1) $a_1 a_2 \cdots a_n = b_1 b_2 \cdots b_n$;

(2) $\sum_{1 \le i < j \le n} |a_i - a_j| \le \sum_{1 \le i < j \le n} |b_i - b_j|$的任意正数$a_1, \cdots, a_n$与$b_1, \cdots, b_n$, 总有$\sum_{i=1}^n a_i \le \lambda \sum_{i=1}^n b_i$. 试求正数$\lambda$的最小值.

解. 一方面, 取$(a_1, \cdots, a_n) = (1, 1, \cdots, (1+x)x^{n-1})$, $(b_1, \cdots, b_n) = (1+x, x, x, \cdots, x)$, 满足(1)与(2), 此时$\lambda \ge \frac{\sum a_i}{\sum b_i} = \frac{n-1+x^{n-1}+x^n}{1+nx}$, 令$x \to 0$, 则$\lambda \ge n-1$.

以下证明$\lambda = n-1$时, 不等式成立.

不妨设$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n$, $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n$, $n=2$时, 显然成立.

设$n \ge 3$,

(1) 若$a_1 \le \frac{n-1}{n}b_1$, 则$\sum a_i \le na_1 \le (n-1)b_1 \le (n-1)\sum b_i$.

(2) 若$a_1 > \frac{n-1}{n}b_1$, 则

$$\begin{aligned} 2(b_2 + \cdots + b_n) &\ge 2(n-1) \cdot (b_2 \cdots b_n)^{\frac{1}{n-1}} = 2(n-1)\left(\frac{a_1}{b_1}a_2 \cdots a_n\right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &\ge 2(n-1)\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot a_n > 2(n-1) \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot a_n \\ &\ge na_n. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}(n-1)\sum b_i &= (n-1)b_1+(n-3)\sum_{i=2}^{n} b_i+2\sum_{i=2}^{n} b_i\\ &\geq (n-1)b_1+(n-3)\sum_{i=2}^{n} b_i+na_n \geq [(n-1)b_1+(n-3)b_2+\cdots-(n-1)b_n]+na_n\\ &= \sum_{1\leq i<j\leq n}|b_i-b_j|+na_n \geq \sum_{1\leq i<j\leq n}|a_i-a_j|+na_n\\ &= [(n-1)a_1+(n-3)a_2+\cdots-(n-1)a_n]+na_n\\ &\geq (n-1)a_1+a_n \geq a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n.\end{aligned}$$

□

问题 1.3.16: 1998年上海市高中数学竞赛

设非零多项式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, $g(x)=c_{n+1}x^{n+1}+c_nx^n+\cdots+c_0$, 满足$g(x)=(x+r)f(x)$, 其中$r$为一实数, 设$a=\max(|a_n|,|a_{n-1}|,\cdots,|a_0|)$, $c=\max(|c_{n+1}|,|c_n|,\cdots,|c_0|)$, 求证: $\frac{a}{c}\leq n+1$.

解. 设$|r|\leq 1$, 由$\sum_{i=0}^{n+1} c_ix^i=(x+r)\sum_{i=0}^{n} a_ix^i=a_nx^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}(ra_i+a_{i-1})x^i+ra_0$. 故

$$\begin{cases} c_{n+1}=a_n\\ c_n=ra_n+a_{n-1}\\ \cdots\\ c_1=ra_1+a_0\\ c_0=ra_0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_n=c_{n+1}\\ a_{n-1}=-rc_{n+1}+c_n\\ a_{n-2}=(-r)^2c_{n+1}+(-r)c_n+c_{n-1}\\ \cdots\\ a_0=(-r)^nc_{n+1}+(-r)^{n-1}c_n+\cdots+c_1,\end{cases}$$

故$|a|=|a_i|=|(-r)^{n-i}c_{n+1}+\cdots+c_{i+1}|\leq|c_{n+1}|+\cdots+|c_{i+1}|\leq(n-i+1)c\leq(n+1)c$.

如果$|r|>1$, 令$x=\frac{1}{x}$, 代入$g(x)=(x+r)f(x)$, 则转化为上述情形, 仍有$a\leq(n+1)c$.

另外

$$|a|=|a_i|\leq|r|^{n-i}|c_{n+1}|+\cdots+|c_{i+1}|\leq(|r^n|+|r^{n-1}|+\cdots+1)c\leq\frac{|r|^{n+1}-1}{|r|-1}c$$

而

$$\frac{|r|^{n+1}-1}{|r|-1}\leq n+1 \Longleftrightarrow |r|^{n+1}\geq n|r|-n+|r| \Longleftrightarrow |r|^n+\frac{n}{|r|}\geq n+1 \Longleftrightarrow |r|^n+\frac{1}{|r|}+\cdots+\frac{1}{|r|}\geq n+1$$

($|r|=0$时, 命题显然成立). □

问题 1.3.17

若$a,b,c\in\mathbb{R}$, 且$5a^4+4b^4+6c^4=90$, 求$5a^3+2b^3+3c^3$的最大值.

解. 只需考虑$a,b,c\in\mathbb{R}^*$. 因$a^3=\frac{1}{2}(a\cdot a\cdot a\cdot 2)\leq\frac{1}{8}(a^4+a^4+a^4+2^4)=\frac{3}{8}a^4+2$, 同理$b^3\leq\frac{3}{4}b^4+\frac{1}{4}$, $c^3\leq\frac{3}{4}c^4+\frac{1}{4}$, 所以所求最大值为45. □

问题 1.3.18

若x,y,z为实数, $0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$, 证明: $\frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z$.

解. 原不等式等价于证明$\frac{\pi}{4}>\sin x(\cos x-\cos y)+\sin y(\cos y-\cos z)+\sin z\cos z$. □

Chapter 2

高中数学

2.1 2016年中科大入学数学考试

问题 2.1.1

在四面体$ABCD$中, $AD=BD=CD$, $AB=BC=CA=1$. 若二面角$A-BC-D$等于$75°$, 求二面角$A-BD-C$的余弦值.

解. 用空间余弦定理. 答案是: $\frac{3\sqrt{3}-2}{8}$. □

问题 2.1.2

设m,n非负整数, 证明$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$是整数.

解. 记所讨论的数为$f(m,n)$, 对m归纳证明$f(m+1,n)=4f(m,n)-f(m,n+1)$. □

问题 2.1.3

设正数a,b,c满足$ab+bc+ca=1$. 求$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$的取值范围.

解. 联想到$\triangle ABC$中, $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$, 所以可取$a=\cot A$, $\sum\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\sum\cos A$, 用琴生不等式证明 $\sum\cos A\le\frac{3}{2}$. 另一方面, $\sum\cos A=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}>1$. 故所求取值范围为$(1,\frac{3}{2}]$. □

问题 2.1.4

正项数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$, $f(a_n)=a_{n+1}(n>1)$, 其中$f(x)=\mathrm{e}^x-\cos x$, 求证: 存在正整数K使得 $\sum\limits_{k=1}^{K}a_k>2016$.

解. 函数$f(x)$的一次导数为正, 数列$\{a_n\}$是递增数列. □

2.2 初中代数题

问题 2.2.1

设a是实数, 试确定多项式$x^4-2ax^2-x+a^2-a$的实根的个数.

解. 把多项式看作a的多项式, 因式分解得$(x^2-x-a)(x^2+x-a+1)$. □

问题 2.2.2

设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{C}[x]$, $a_n\neq 0$, α 是 $f(x)$ 任一根, 则

$$|\alpha|<1+\max_{0\le k\le n-1}\left|\frac{a_k}{a_n}\right|.$$

解. 反证法, 由

$$\left|\alpha^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}\alpha^{n-1}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}\alpha+\frac{a_0}{a_n}\right|\ge|\alpha|^n-\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\cdot|\alpha|^{n-1}-\cdots-\left|\frac{a_1}{a_n}\right|\cdot|\alpha|+\left|\frac{a_0}{a_n}\right|\ge 1.$$

□

解. 只证$|\alpha|>1$时的情况, 记$M=\max_{0\le k\le n-1}\left|\frac{a_k}{a_n}\right|$. 由$a_0+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}=-a_n\alpha^n$得

$$|\alpha|^n=\left|\frac{a_0}{a_n}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\alpha^{n-1}\right|\le M(1+|\alpha|+\cdots+|\alpha|^{n-1})<M\frac{|\alpha|^n}{|\alpha|-1}.$$

□

问题 2.2.3

设$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$中, $0<a_0<a_1<\cdots<a_{n-1}<a_n$. 则$f(x)$的根的模均大于1.

解. 反证法, 设$|\alpha|\le 1$是$xf(x)-f(x)=a_0x^{n+1}+(a_1-a_0)x^n+\cdots+(a_n-a_{n-1})x-a_n$的零点. 所以

$$|a_n|=|a_0\alpha^{n+1}+(a_1-a_0)\alpha^n+\cdots+(a_n-a_{n-1})\alpha|\le a_0|\alpha|^{n+1}+(a_1-a_0)|\alpha|^n+\cdots\le a_n.$$

等号当且仅当$\alpha=1$时取到. 这不可能. □

问题 2.2.4

设多项式$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\in\mathbb{Z}[x]$, 且满足

(i) $0<a_0<a_1<\cdots<a_{n-1}<a_n$;

(ii) $a_n=p^m$, 这里p是一个素数(m是正整数), 且$p\nmid a_{n-1}$.

证明: $f(x)$在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 反证法, $f=gh$. $g=b_0x^r+\cdots+b_r$, $h=c_0x^s+\cdots+c_s$. 则由条件不妨设$p\nmid b_r$, $|c_s|=p^m$, $|b_r|=1$. 由2.2.3可知, f的根的模均大于1, 所以g的根$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$的模均大于1. $|g(0)|=|b_r|=|b_0|\,|\alpha_1|\cdots|\alpha_r|>|b_0|\ge 1$, 与$|b_r|=1$矛盾. □

问题 2.2.5

设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+p\in\mathbb{Z}[x]$, $a_n\neq 0$, p是素数, 且

$$|a_1|+\cdots+|a_n|<p,$$

证明: $f(x)$在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 反证, $f=gh$, f的根的模均大于1, 若$|g(0)|=1$, 则其实线性分解的模大于1. 矛盾. □

问题 2.2.6

设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$是一个整系数多项式, $a_n\neq 0$. 记

$$M=\max_{0\leq i\leq n-1}\left|\frac{a_i}{a_n}\right|.$$

若有一个整数$m\geq M+2$, 使$|f(m)|$为素数, 则$f(x)$在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 反证, $f=gh$, 由2.2.2知, 当$|g(m)|=1$时, $|g(m)|$的实线性分解的每项都大于1而导致矛盾. □

问题 2.2.7

判别$x^5+4x^4+2x^3+3x^2-x+5$在$\mathbb{Q}$上是否可约.

解. 让$x+6$代替x化简得$x^5+34x^4+458x^3+3063x^2+10187x+13499$, 由于13499是素数, 由2.2.4即得. □

解. 待定系数法分解为二次多项式与三次多项式的乘积. □

解. 用2.2.5. □

问题 2.2.8

设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$, 其中$0\leq a_i\leq 9(i=0,1,\cdots,n)$, 且$a_n\neq 0$. 如$\alpha$是$f(x)$的一个复根, 则$\mathrm{Re}(\alpha)\leq 0$或$|\alpha|<4$.

解. 若$\mathrm{Re}(\alpha)\leq 0$或$|\alpha|\leq 1$, 则无需证明. 对于$\mathrm{Re}(\alpha)>0$且$|\alpha|>1$, 有$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\alpha}\right)>0$, 故从

$$0=\left|\frac{f(\alpha)}{\alpha^n}\right|\geq\left|a_0+\frac{a_1}{\alpha}\right|-\frac{a_2}{|\alpha|^2}-\cdots-\frac{a_n}{|\alpha|^n}\geq\mathrm{Re}\left(a_0+\frac{a_1}{\alpha}\right)-\frac{9}{|\alpha|^2}-\cdots-\frac{9}{|\alpha|^n}>1-\frac{9}{|\alpha|^2-|\alpha|}.$$

可得. □

问题 2.2.9

设$f(x)$是n次整系数多项式$(n\geq 1)$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$是其全部复根. 若存在整数k, $k>1+\mathrm{Re}(\alpha_j)$, $(j=1,\cdots,n)$, 使$|f(k)|$是素数, 则$f(x)$在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 反证, $f=gh$, 对g进行$\mathbb{R}[x]$上的标准分解, 则有$|g(k)|>1$, 同理$|h(k)|>1$. 与$f(k)$素矛盾. □

问题 2.2.10: http://tieba.baidu.com/p/4811340691

求证: $148<\sum\limits_{n=1}^{1000}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<150$.

解. 由R-S积分,

$$\sum_{n=1}^{1000}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=\int_{1^-}^{1000^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}[x]=\int_{1^-}^{1000^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x-\int_{1^-}^{1000^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}\{x\}=148.5-\frac{1}{3}\int_{1^-}^{1000^+}\frac{\{x\}}{x^{4/3}}\,\mathrm{d}x-\left.\frac{\{x\}}{\sqrt[3]{x}}\right|_{1^-}^{1000^+}.$$

求极限后得到

$$\sum_{n=1}^{1000}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=149.5-\frac{1}{3}\int_1^{1000}\frac{\{x\}}{x^{4/3}}\,\mathrm{d}x.$$

上式小于150是显然的, 然后利用$\{x\}<1$, 得到$\sum\limits_{n=1}^{1000}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>148.6$.

贴吧答案: 先证放缩公式:

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right)<\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)$$

由中值定理可证上式. □

问题 2.2.11: http://tieba.baidu.com/p/4932376161

求

$$\sum_{k=1}^{2014}\left[\frac{-3+\sqrt{8k+1}}{4}\right]$$

解. 令$t=\frac{-3+\sqrt{8k+1}}{4}$, 则$k=2t^2+3t+1$. 所以$\frac{-3+\sqrt{8k+1}}{4}=n$当且仅当$2n^2+3n+1\le k<2(n+1)^2+3(n+1)+1$, $n\in\mathbb{N}$. 另一方面$2\times30^2+3\times30+1=1891$, $2\times31^2+3\times31+1=2016$. 所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2014}\left[\frac{-3+\sqrt{8k+1}}{4}\right]&=\sum_{n=1}^{31}n[2(n+1)^2+3(n+1)+1-(2n^2+3n+1)]-30\\&=\sum_{n=1}^{31}(4n^2+50n)-30\\&=4(1^2+2^2+\cdots+30^2)+5(1+2+3+\cdots+30)-30=40115.\end{aligned}$$

□

2.3 全国高中数学联赛

问题 2.3.1: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

求函数$f(x,y)=\max\{|x-y|,|x+y|,|x-2|\}$的最小值.

问题 2.3.2

设n,a,b是整数, $n>0$且$a\ne b$, 若$n\mid(a^n-b^n)$, 则$n\mid\frac{a^n-b^n}{a-b}$.

解. 设$p^\alpha\|n$, 只需证$p^\alpha\mid\frac{a^n-b^n}{a-b}$. 记$t=a-b$, 如果$p\nmid t$, 则$(p^\alpha,t)=1$, 于是$p^\alpha\mid\frac{a^n-b^n}{a-b}$. 若$p\mid t$, 由二项式定理有

$$\frac{a^n-b^n}{t}=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}b^{n-i}t^{i-1}.$$

设$p^\beta\|i$, 则易知$\beta\le i-1$. 因此$\binom{n}{i}t^{i-1}=\frac{n}{i}\binom{n-1}{i-1}t^{i-1}$中所含的$p$的幂次至少是$\alpha$, 即上式右边每一项均被$p^\alpha$整除. □

问题 2.3.3: 2016年全国高中数学联赛四川预赛

已知a,b,c为正实数, 求证:

$$abc\ge\frac{a+b+c}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\ge(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

解. 先证左边, 左边等价于$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\ge abc(a+b+c)$, 而这等价于$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$.

再证右边, 右边等价于$a+b+c\ge(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$. 不妨设$a=\max\{a,b,c\}$, 则只需考虑$b+c-a>0$的情况, 令$a=y+z$, 上式等价于$2(x+y+z)\ge8xyz\left(\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right)$. 即

$$\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}\ge\frac{4}{(y+z)^2}+\frac{4}{(z+x)^2}+\frac{4}{(x+y)^2}.$$

最后用均值不等式. □

问题 2.3.4: 2009年全国高中数学联赛加试

证明:
$$-1<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n\leq\frac{1}{2},\quad n=1,2,\cdots.$$

解. 利用不等式$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$, $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n$, 则$x_{n+1}<x_n<\cdots<x_1=\frac{1}{2}$. 在由$\ln n=\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$, $x_n>-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}>-1$. □

问题 2.3.5

设集合$S_k=\{A_k\mid k\in\mathbb{N}_+\}$, 其中$A_k=\frac{2^{2^{k+1}}+1}{7^{7^k}+1}$, 求: $S_1,\cdots,S_{2015}$中任取两个数都是素数的概率.

解. 用恒等式$\frac{x^7+1}{x+1}=(x+1)^6-7x(x^2+x+1)^2$, 当$x=7^{2m-1}$时, $(x+1)^6-7x(x^2+x+1)^2$有平方差公式. □

问题 2.3.6: IMO预选题

证明: 对于任意正有理数r, 都存在正整数a,b,c,d满足$r=\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$.

解. 用恒等式$\frac{(x+y)^2+(2x-y)^2}{(x+y)^2+(2y-x)^2}=\frac{x}{y}$, $\frac{x}{y}\in\left(\frac{1}{2},2\right)$. 推广见13.0.20. □

问题 2.3.7: Titu problem from book

设x_n表示如下含有素数2的幂指数
$$\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{2^n}{n}.$$
求证: $x_{2^n}\geq 2^n-n+1$.

解. 用恒等式$\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{2^n}{n}=\frac{2^n}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}$. 由Lucas定理$\binom{2^n-1}{k}\equiv 1\pmod 2$, $0\leq k\leq 2^n-1$. 故$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}\pmod 2$意义下是$2^n$个奇数相加, 所以一定是偶数. 那么$\frac{2^n}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}$的和含有的2的指数至少为$2^n-n+1$, 故有$x_{2^n}\geq 2^n-n+1$. □

问题 2.3.8: 匈牙利征解

设$P(x)$为次数不超过$2n$的多项式, 求证:
$$|P(n)|\leq(2\sqrt{n}-1)\max(|P(0)|,|P(1)|,\cdots,|P(n-1)|,|P(n+1)|,\cdots,|P(2n)|).$$

解. 用差分公式, 当$m\geq 2n$时有, $\Delta^m P(0)=(E-I)^m P(0)=0$, E为移位算子$EP(x)=P(x+1)$, I为恒等算子, 得到
$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}P(k)=0.$$
令$m=2n$. 并用绝对值的三角不等式可证命题. 其中需要用归纳法证明
$$\binom{2n}{n}\geq\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}}.$$
□

2.4 数学竞赛

问题 2.4.1

求满足如下恒等式的所有实函数$f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(f(x))f(y)-xy=f(x)+f(f(y))-1. \tag{2.1}$$

解. 让x,y互换, 则有$f(f(y))f(x)-xy=f(y)+f(f(x))-1$. 将2.1式两边同时乘以$f(x)$与前式相加化简得

$$(f(x)f(f(x))-1)f(y)=xy(f(x)+1)+f^2(x)-f(x)+f(f(x))-1.$$

若存在x使$f(x)f(f(x))-1\neq 0$, 则$f(y)=ay+b$, 代入2.1知a,b无解; 若对于任意的x都有$f(x)f(f(x))=1$, 则

$$0=xy(f(x)+1)+f^2(x)-f(x)+f(f(x))-1.$$

于是对于y的系数, 在$x\neq 0$时$f(x)=-1$, 这与上式矛盾. □

Chapter 3

AOPS

3.1 2003

3.1.1 02

问题 3.1.1: USAMO 1996, Problem 5

Let ABC be a triangle, and M an interior point such that $\angle MAB = 10°$, $\angle MBA = 20°$, $\angle MAC = 40°$ and $\angle MCA = 30°$. Prove that the triangle is isosceles.

问题 3.1.2: Russian olympiad

Let A and B be two sets such that $A \cup B = \{1, 2, .., 2n\}$ and $|A| = |B| = n$. Let $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ and $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ with $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ and $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$. Prove that $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| = n^2$.

3.1.2 03

问题 3.1.3: Indian olympiad 2003

consider triangle acute angled ABC . let BE and CF be cevians with E and F on AC and AB resp intersecting in P. join EF and AP. denote the intersection of AP and EF by D. draw perpendicular on CB from D and denote the intersction of the perpendicular by K. Prove that KD bisects $\angle EKF$.

问题 3.1.4: IMO Shortlist 1997, Q7

The lengths of the sides of a convex hexagon $ABCDEF$ satisfy $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Prove that:

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}.$$

问题 3.1.5: Iran 1999

Let ABC be a triangle, and let w be a circle passing through A and C. Sides AB and BC meet w again at D and E, respectively. Let q be the incircle of the circular triangle EBD, i. e. the circle which touches the segments BD and BE and internally touches the circle w. Suppose the circle q touches the arc DE at M. Prove that the line MI is the angle bisector of the angle AMC, where I is the incenter of triangle ABC.

3.1.3 05

3.1.4 06

问题 3.1.6: NZ IMO 2003 Team

Show that given a directed graph with n nodes, where n is even, such that: vertex 1 is joined to vertex 2, vertex 2 is joined to vertex 3 and vertex 4, vertex 3 is joined to vertex 5 and vertex 6, ..., vertex $(n/2)$ joined to vertex $n-1$ and vertex n, vertex $(n/2)+1$ joined again to vertex 1 and vertex 2, ..., vertex n joined to vertex $n-1$ [for each k with $1 \le k \le n$, the vertex k is joined to the vertices $2k$ and $2k-1 \bmod n$] we can always find an Euler tour of the graph going along the edges in the right direction.

3.1.5 07

问题 3.1.7

We are given n vertices (unjoined). How many trees can we form by joining them? A tree is a graph without cycles.

问题 3.1.8

Let ABC be a triangle. Prove that: $R\sqrt{2pabc} \leq abc$.

问题 3.1.9: IMO ShortList 2003, combinatorics problem 1

Let A be a 101-element subset of the set $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$. Prove that there exist numbers $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ in S such that the sets

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, 100$$

are pairwise disjoint.

问题 3.1.10: IMO ShortList 2003, number theory problem 3

Determine all pairs of positive integers (a, b) such that

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

is a positive integer.

问题 3.1.11: IMO ShortList 2003, geometry problem 6

Each pair of opposite sides of a convex hexagon has the following property: the distance between their midpoints is equal to $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ times the sum of their lengths. Prove that all the angles of the hexagon are equal.

问题 3.1.12: IMO ShortList 2003, geometry problem 1

Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral. Let P, Q, R be the feet of the perpendiculars from D to the lines BC, CA, AB, respectively. Show that $PQ = QR$ if and only if the bisectors of $\angle ABC$ and $\angle ADC$ are concurrent with AC.

问题 3.1.13: IMO ShortList 2003, algebra problem 4

Let n be a positive integer and let $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ be real numbers. Prove that

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|\right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2.$$

Show that the equality holds if and only if $x_1, \ldots, x_n$ is an arithmetic sequence.

问题 3.1.14: IMO ShortList 2003, number theory problem 6

Let p be a prime number. Prove that there exists a prime number q such that for every integer n, the number $n^p - p$ is not divisible by q.

问题 3.1.15

Prove that in every triangle ABC with sides a, b, c we have

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}\max\left\{\frac{m_a}{h_a}, \frac{m_b}{h_b}, \frac{m_c}{h_c}\right\}$$

where S is the area of $\triangle ABC$ and m_a, m_b, m_c and h_a, h_b, h_c are the medians and altitudes of the triangle corresponding to the sides a, b, c respectively.

问题 3.1.16

Please mail names of greatest mathematical geniuses whose performance are sensational at IMOs.

问题 3.1.17: Japan MO 1997, problem #2

Prove that
$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}$
for any positive real numbers a, b, c.

问题 3.1.18

Let N be a point on the longest side AC of a triangle ABC. The perpendicular bisectors of AN and NC intersect AB and BC respectively in K and M. Prove that the circumcenter O of $\triangle ABC$ lies on the circumcircle of triangle KBM.

问题 3.1.19: IMO Shortlist 1997, Q4

An $n\times n$ matrix whose entries come from the set $S=\{1,2,\ldots,2n-1\}$ is called a silver matrix if, for each $i=1,2,\ldots,n$, the i-th row and the i-th column together contain all elements of S. Show that:
(a) there is no silver matrix for $n=1997$;
(b) silver matrices exist for infinitely many values of n.

3.1.6 08

问题 3.1.20: IMO Shortlist 2001, C1

What is the largest number of subsequences of the form $n, n+1, n+2$ that a sequence of 2001 positive integers can have? For example, the sequence 1, 2, 2, 3, 3 of 5 terms has 4 such subsequences.

问题 3.1.21

a and b are positive coprime integers. A subset S of the non-negative integers is called admissible if 0 belongs to S and whenever k belongs to S, so do $k+a$ and $k+b$. Find $f(a,b)$, the number of admissible sets.

问题 3.1.22: IMO Shortlist 1999, C3

A chameleon repeatedly rests and then catches a fly. The first rest is for a period of 1 minute. The rest before catching the fly $2n$ is the same as the rest before catching fly n. The rest before catching fly $2n+1$ is 1 minute more than the rest before catching fly $2n$.
How many flies does the chameleon catch before his first rest of 9 minutes? How many minutes (in total) does the chameleon rest before catching fly 98? How many flies has the chameleon caught after 1999 total minutes of rest?

问题 3.1.23: IMO Shortlist 1999, C6

Every integer is colored red, blue, green or yellow. m and n are distinct odd integers such that $m+n$ is not zero. Show that we can find two integers a and b with the same color such that $a-b=m$, n, $m+n$, or $m-n$.

问题 3.1.24: IMO Shortlist 1994, C6

Two players play alternatively on an infinite square grid. The first player puts a X in an empty cell and the second player puts a O in an empty cell. The first player wins if he gets 11 adjacent Xs in a line, horizontally, vertically or diagonally. Show that the second player can always prevent the first player from winning.

问题 3.1.25

Lagrangia posted this problem a day or two ago and asked for some ideas :
A (2k+1) x (2k+1) chessboard in coloured in white and black in the usual way such that the four corners are black. For which k is it possible to cover some squares on the table with trominoes (L-shaped figures made up from 3 squares) such that all the black squares are covered ? For these values of k , what is the minimal number of trominoes ?
I have a solution but I will post it tonight because I don't have time now.Anybody else solved it?

问题 3.1.26: CMO (Canada MO) 1999, problem 5

Let x, y, and z be non-negative real numbers satisfying $x+y+z=1$. Show that

$$x^2y+y^2z+z^2x \leq \frac{4}{27}$$

and find when equality occurs.

问题 3.1.27

Prove that in any choice of $n+1$ numbers from $\{1,2,..,2n\}$, there exist 2, a and b, so that $a \mid b$.

问题 3.1.28

Let E be a finite set of point(in the plane), no 3 of them colinear, no 4 of them concyclic. An unordered pair of points A,B is called a good pair iff there exists a disk which contains only A and B but no other point. Let f(E) be the number of good pair in E. -¿Prove that if E has 1003 points, then 2003¡= f(E) ¡=3003

问题 3.1.29: Romanian selection test 2002

Let $n \geq 4$ be an integer, and let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be positive real numbers such that

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1.$$

Prove that the following inequality takes place

$$\frac{a_1}{a_2^2+1} + \cdots + \frac{a_n}{a_1^2+1} \geq \frac{4}{5}\left(a_1\sqrt{a_1} + \cdots + a_n\sqrt{a_n}\right)^2.$$

问题 3.1.30: IMO Shortlist 2000, Problem G1

In the plane we are given two circles intersecting at X and Y. Prove that there exist four points with the following property:
(P) For every circle touching the two given circles at A and B, and meeting the line XY at C and D, each of the lines AC, AD, BC, BD passes through one of these points.

问题 3.1.31

Let $A = \{1, 2, 3, \ldots, 6003\}$. Let B be a subset of A such that $|B| = 4002$. Prove that B has a subset C which satisfies: (i) $|C| = 2001$; (ii) If you arrange the 2001 elements of C in increasing order, then you get 2001 numbers which are even and odd in turn, i.e., even, odd, even, odd, ... or odd, even, odd, even, ...

问题 3.1.32

Consider a circle with a radius of 16 cm. 650 points inside this circle are given. A ring is the part of the plane that's included between two concentric circles of radius 2 cm and 3 cm respectively. Show that a ring can be placed such that at least 10 of the 650 given points are covered by this ring.

问题 3.1.33

Does there exist a function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that

$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n)$$

for all $n \geq 2$?

问题 3.1.34: IMO 1994, Problem 5, IMO Shortlist 1994, A3

Let S be the set of all real numbers strictly greater than 1. Find all functions $f : S \to S$ satisfying the two conditions:
(a) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ for all x, y in S;
(b) $\frac{f(x)}{x}$ is strictly increasing on each of the two intervals $-1 < x < 0$ and $0 < x$.

问题 3.1.35

Each vertex of a regular 1997-gon is labeled with an integer, such that the sum of the integers is 1. Starting at some vertex, we write down the labels of the vertices reading counterclockwise around the polygon. Can we always choose the starting vertex so that the sum of the first k integers written down is positive for $k = 1, ..., 1997$?

3.1.7 09

问题 3.1.36

An infinite arithmetic progression whose terms are positive integers contains the square of an integer and the cube of an integer. Show that it contains the sixth power of an integer.

问题 3.1.37

Let S = 1, 2, 3, ..., 1982. Determine the maximum number of elements of a set A such that : (1) A is a subset of S ; (2) There do not exist numbers x, y, z in A such that xy = z.

问题 3.1.38: IMO Shortlist 1997, Q22

Does there exist functions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $f(g(x)) = x^2$ and $g(f(x)) = x^k$ for all real numbers x
a) if $k = 3$?
b) if $k = 4$?

问题 3.1.39

On a blackboard we have the numbers $1, 2, 3, \ldots, 2001$. An operation is this: we erase a and b and we replace them with one number, $\frac{ab}{a+b+1}$. After 2000 operations, we are left with one number k. What is k?

问题 3.1.40

(by positive i mean zero or more)
consider the equation a*x+b*y=c with a,b,c positive and a and b coprime
it can easily be proven that if c¿a*b-a-b , positive solutions x and y can be found for the equation
but for some reason i can't seem to prove this fact :
exactly half of the integers :1,2,3,4,......a*b-a-b has positive solutions
some experiment suggest that k has positive solutions iff (a*b-a-b)-k has none
but how to prove that problem? anyone? plz help me?

问题 3.1.41

A recurrence relation is defined like that:

(1) $a_1 = 1$;

(2) $a_n + 1 = 1/16 \times (1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n})$, and $n \in N$

Determine the explicit formula and prove that it is correct !

问题 3.1.42

Let $n \in N$ and $M_n = 1, 2, 3, \ldots, n$. A subset T of M_n is called 'cool' if no element of T is smaller than the number of elements of T. The number of cool subsets of M_n is denoted by $f(n)$.
Determine a formula for $f(n)$. In particular calculate $f(32)$!

问题 3.1.43

The two mathematicians Lagrangia and Galois :D play the following game: They select and take from the set 0,1,2,3,...,1024 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1 numbers away alternately. Lagrangia starts and takes 512 numbers away, then Galois 256 numbers etc. Finally there are two remaining numbers a,b (a¡b). Galois pays Lagrangia the following amount of money: abs(b-a). Lagrangia wants to obtain as much money as possible. And vice versa Galois wants to loose at least money as possible.
Exlain how much money Lagrangia can earn at most ! Assume that they all try their best.

问题 3.1.44

Feuerbach's theorem: Prove that in any triangle, the inscribed circle and the 3 exinscribed circles are tangent to Euler's circle.

问题 3.1.45: Bundeswettbewerb Mathematik 1988, stage 2, problem 4

Provided the equation $xyz = p^n(x+y+z)$ where $p \geq 3$ is a prime and $n \in \mathbb{N}$. Prove that the equation has at least $3n+3$ different solutions (x,y,z) with natural numbers x,y,z and $x<y<z$. Prove the same for $p>3$ being an odd integer.

问题 3.1.46

Prove that:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{2n}{2k}\right)^2 - 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \binom{2n}{2k+1}\right)^2 = 1$$

$\binom{a}{b}$ denotes the binomial coefficient, $\frac{a!}{b!(a-b)!}$

问题 3.1.47: IMO Shortlist 2000, Problem N2

For a positive integer n, let $d(n)$ be the number of all positive divisors of n. Find all positive integers n such that $d(n)^3 = 4n$.

问题 3.1.48

Let a,b,c be positive real numbers with $abc=1$. Prove that

$$\sum_{cyc}(a+bc) \leq 3 + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$$

问题 3.1.49

Suppose that each of the n guests at a party acquaited with exactly 8 other guests. Furthermore, suppose that each pair of guests who are acquainted with each other have four acquaintances in common at the party, and each pair of guests who are not acquainted have only two acquaintances in common. What are the possible values of n ?

问题 3.1.50: USAMO 1997/5; also: ineq E2.37 in Book: Inegalitati; Authors:L.Panaitopol,V. Bandila,M.Lascu

Prove that, for all positive real numbers a, b, c, the inequality

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$$

holds.

问题 3.1.51: IMO 1996 Shortlist

Suppose that $a,b,c>0$ such that $abc=1$. Prove that

$$\frac{ab}{ab+a^5+b^5} + \frac{bc}{bc+b^5+c^5} + \frac{ca}{ca+c^5+a^5} \leq 1.$$

问题 3.1.52

A nice one : Let n be a positive integer. Ann writes down n different positive integers. Then Ivo deletes some numbers (possibly none, but not all). He puts + or - signs in front of each of the remaining numbers and sums them up. If the result is divisible by 2003, Ivo wins. Otherwise Ann wins. For which values of n Ivo has a winning strategy ? For which values of n Ann has a winning strategy ?

问题 3.1.53

The sequence $\{u_n\}$ with n being a positive integer is given by the recurrence
(1) $u_0 = 0$ (2) $U_{2n} = u_n$ (3) $u_{2n+1} = 1 - u_n$
a.) Determine u_{2002} and b.) and u_m with $m = (2^p - 1)^2$ and p a natural number !

问题 3.1.54: JBMO 2002, Problem 4

问题 3.1.55

Show that

$$\frac{1+a^2}{1+b+c^2} + \frac{1+b^2}{1+c+a^2} + \frac{1+c^2}{1+a+b^2} \geq 2$$

for reals $a, b, c \geq -1$.

问题 3.1.56

There are n girls and n boys at the party. Participants who belong to the same sex do not know each other. Moreover, there cannot be found two girls who know the same two boys. At most how many acquaintances can be among the participants of the party ?
a.) n = 5 b.) n = 7

Chapter 4

抽象代数

定理 4.0.1

同类置换有相同的循环结构.

解. $P,Q,T\in S_n$且$Q=TPT^{-1}$, Q,P属同类, 则Q,P有相同的循环结构.

$P(v)=(1^{v_1}2^{v_2}\cdots m^{v_m})$, $P=C_1C_2\cdots C_r$, $r=\sum_i v_i$, $n=\sum_i iv_i$. $Q=TPT^{-1}=\prod_i TC_iT^{-1}=\prod_i C_i'$.

T是一一映射, $(C_i')_i$两两不交, 因$(C_i)_i$两两不交, C_i'与C_i同阶, 所以$Q(v)=P(v)$. □

Chapter 5

矩阵论

5.1 矩阵迭代法

研究对象: $Ax=b$, 求x. 设$A=B-C$, 其中B非奇异, 则$Ax=b \Longleftrightarrow Bx=b+Cx$. 其迭代形式为

$$Bx^{(k+1)}=Cx^{(k)}+b,\quad k=0,1,2,\cdots$$

若$Ax=b$有解, 则其解也满足$Bx=Cx+b$, 从而

$$B(x^{(k+1)}-x)=C(x^{(k)}-x)$$

即$x^{(k+1)}-x=L(x^{(k)}-x)$, $L=B^{-1}C$, 从而$(x^{(k)}-x)=L^k(x^{(0)}-x)$, 所以要使迭代式收敛, 则需要

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)}-x=0,$$

即$\lim_{k\to\infty} L^k=0$.

设L的特征根为$l_1,l_2,\cdots,l_n$且有可逆阵T使$L=T\cdot\operatorname{diag}(l_1,l_2,\cdots,l_n)\cdot T^{-1}$. 所以

$$L^{(k)}\to 0, k\to\infty \Longleftrightarrow |l_i|<1, i=1,2,\cdots,n \Longleftrightarrow \|L\|<1, \|L\|=\max_i\{|l_i|\}$$

设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0\\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0\end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ 0 & 0 & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

则$A=D-E-F$.

定理 5.1.1: Gauss-Seidel迭代

$$\begin{cases} B=D-E\\ C=F\end{cases} \Longrightarrow (D-E)x^{(k+1)}=Fx^{(k)}+b \Longrightarrow x^{(k+1)}=D^{-1}\left[Ex^{(k+1)}+Fx^{(k)}+b\right].$$

定理 5.1.2: Jacobi迭代

$$\begin{cases} B=D\\ C=E+F\end{cases} \Longrightarrow x^{(k+1)}=B^{-1}(Cx^{(k)}+b)=D^{-1}\left[(E+F)x^{(k)}+b\right].$$

定理 5.1.3: Newton-Ralphson迭代

函数$f(z)=0$的根可以根据迭代$z_{k+1}=z_k-\frac{f(z_k)}{f'(z_k)}$, $k=0,1,2,\cdots$.

设$f(z)=a-z^{-1}$有根a^{-1}, $f'=z^{-2}$, 则$z_{k+1}=z_k(2-az_k)$且可以期望$\lim_{k\to\infty} z_k=a^{-1}$. 对于线性方程$Ax=b$, 可以考虑用此方法解得“$A^{-1}$”, 尽管$A$可能不是方阵. 给定初始矩阵$x_0$, 则有迭代$x_{k+1}=x_k(2I-Ax_k)$, $k=0,1,2,\cdots$, 并期望$\lim_{k\to\infty} x_k=A^{-1}$. 定义“误差”矩阵$E_k=I-Ax_k$, 则

$$E_{k+1}=I-Ax_{k+1}=I-Ax_k(2I-Ax_k)=I-(I-E_k)(2I-(I-E_k))=E_k^2$$

若E_0的所有特征根的模均小于1, 则必有$\lim_{k\to\infty} E_0^k=0$. 最后$x_kb$逼近方程$Ax=b$的解.

Chapter 6

数学分析

问题 6.0.1

x_n满足$x_n^n + x_n - 1 = 0$, $0 < x_n < 1$, 求$\lim_{n\to\infty} x_n$.

解. $y = x^n + x - 1$则有$y' > 0$, $y|_{x=0} = -1 < 0$, $y|_{x=1} = 1 > 0$.
x_n是$x^n + x - 1$的唯一零点. 由于

$$x_n^{n+1} + x_n - 1 = (x_n - 1)(1 - x_n) < 0$$

及y的单调性, 知x_{n+1}在x_n与1之间, 故$\{x_n\}$单调有界. 反证$\{x_n\}$的极限$A = 1$, 否则$0 \le A < 1$矛盾. □

解. $y^x + y - 1 = 0$是隐函数, 确定$y = f(x)$, $x_n = f(n)$, 求导

$$y' = -y^x \cdot \frac{\ln y}{\left(1 + \frac{x}{y} \cdot y^x\right)}$$

当$x \ge 1$时, $y' > 0$, y单调增加, 以下同上. □

问题 6.0.2

若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$都收敛, 则以下不成立的是?
A. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2$收敛; *B.*$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$收敛;
C. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛; *D.* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$发散.

问题 6.0.3

设$f(x,y)$与$\varphi(x,y)$均为可微函数, 且$\varphi_y'(x,y) \neq 0$. 已知(x_0,y_0)是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y) = 0$下的一个极值点, 下列选项正确的是(D)
(A) 若$f_x'(x_0,y_0) = 0$, 则$f_y'(x_0,y_0) = 0$; (B) 若$f_x'(x_0,y_0) = 0$, 则$f_y'(x_0,y_0) \neq 0$;
(C) 若$f_x'(x_0,y_0) \neq 0$, 则$f_y'(x_0,y_0) = 0$; (D) 若$f_x'(x_0,y_0) \neq 0$, 则$f_y'(x_0,y_0) \neq 0$.

问题 6.0.4

$$\frac{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t} = \sqrt{2}$$

解. 用Beta函数. □

问题 6.0.5: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

计算$I=\int_{\pi/8}^{3\pi/8}\frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}\,\mathrm{d}x$.

问题 6.0.6: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设$\varphi(x)$在$(-\infty,0]$可导, 且函数

$$f(x)=\begin{cases}\int_x^0\frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t, & x<0,\\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(2x)^n+x^{2n}}, & x\geq 0.\end{cases}$$

在点$x=0$可导, 求$\varphi(0)$, $\varphi'(0^-)$, 并讨论$f'(x)$的存在性.

问题 6.0.7: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

已知函数$f(x)$与$g(x)$满足$f'(x)=g(x)$, $g'(x)=2\mathrm{e}^x-f(x)$, 且$f(0)=0$, 求

$$\int_0^\pi\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x.$$

问题 6.0.8: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设y_1和y_2是方程$y''+p(x)y'+2\mathrm{e}^x y=0$的两个线性无关解, 而且$y_2=(y_1)^2$. 若有$p(0)>0$, 求$p(x)$及此方程的通解.

问题 6.0.9: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设$f(x)$在$\left[-\frac{1}{a},a\right](a>0)$上非负可积, 且$\int_{-1/a}^a xf(x)\,\mathrm{d}x=0$. 求证:

$$\int_{-1/a}^a x^2f(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_{-1/a}^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

解. 分$0<a\leq 1$和$a>1$两种情况讨论. □

问题 6.0.10: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设在点$x=0$的某邻域U内, $f(x)$可展成泰勒级数, 且对任意正整数n, 皆有

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}.$$

证明: 在U内, 恒有$f(x)=x^2$.

问题 6.0.11: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x^2+y^2}$, 证明: $\lim_{x\to+\infty}y(x)$和$\lim_{x\to-\infty}y(x)$都存在.

解. 用单调有界定理. □

问题 6.0.12: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

求幂级数$\sum_{n=1}^\infty\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$的收敛域与和函数.

问题 6.0.13: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{(n+i+1)^2}+\frac{1}{(n+i+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+i+i)^2}\right).$$

解. 用重积分得$\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$. □

问题 6.0.14

设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\subset C_{[a,b]}$, 且$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$, 则$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 因$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in[a,b]$, 所以$f\in C_{[a,b]}$且$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当$n>N$时, $\forall x\in[a,b]$均有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. $f(x),f_n(x)$连续必可积, 有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|<(b-a)\varepsilon.$$

其实当$a\le x\le b$时, 有$\left|\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|<(b-a)\varepsilon$对$x$一致成立, 所以$\int_a^x f_n(x)\,\mathrm{d}t\rightrightarrows\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. □

问题 6.0.15

$f_n(x)$在$[a,b]$上都有连续导数, 且$f_n(x)\to f(x)$, $f_n'(x)\rightrightarrows g(x)$, 则$f'(x)=g(x)$, 即$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\lim_{n\to\infty}f_n(x))=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)$.

解. 因$f_n'\rightrightarrows g$, 所以g连续, 可积, 由6.0.33, $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$, 所以$f'(x)=g(x)$. 其实$f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$在$[a,b]$上也一致收敛.

若6.0.33和本问题中的$f_n(x)$视为函数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$的前$n$项部分和, 就有函数项级数的相应命题.

(1). 若$[a,b]$上$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$中每项$u_k$均连续, 且$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\rightrightarrows f(x)$, 则$f(x)\in C_{[a,b]}$且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2). 若$[a,b]$上, $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$的每项都有连续导数$u_k'(x)$且$\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(x)\rightrightarrows g(x)$, 而$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\to f(x)$. 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\right)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(x).$$

□

问题 6.0.16

举反例:

(1) 积分的极限不等于极限的积分的函数列.

(2) 导数的极限不等于极限的导数的函数列.

解. (1). 在$[0,1]$上极限函数为0, 但f_n在$\left[0,\frac{1}{n}\right]$上面积为1的脉冲函数.

(2). $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$, $x\in[-1,1]$. □

问题 6.0.17: http://math.stackexchange.com/questions/2143014

证明：对于任意的$\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left|\frac{\alpha-n}{\alpha+n}\right|$发散.

问题 6.0.18: http://math.stackexchange.com/questions/472007

判断$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n+10\sin n}$的敛散性.

解. 其实，若$f(n)$是有界函数，且级数$\sum_{n=1}^{n} \frac{f(n)}{n}$收敛，$a$是使任意的$n$都有$n+af(n) \neq 0$，则$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n+af(n)}$.
这是因为

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{f(n)}{n+af(n)} = \sum_{n=1}^{m} \frac{f(n)}{n} + \sum_{n=1}^{m} \frac{-af^2(n)}{n(n+af(n))}$$

后一个和式用比较判别法. □

问题 6.0.19: http://math.stackexchange.com/questions/273559

判断$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n}$的敛散性.

解. 比较判别法，$[k\pi+\frac{\pi}{6},(k+1)\pi-\frac{\pi}{6}]$中总有至少一个整数.
或用$\sum \frac{\sin^2(n)}{n} = \sum \frac{1}{2n} - \sum \frac{\cos(2n)}{2n}$，前者发散，后者用Dirichlet判别法. □

问题 6.0.20: http://math.stackexchange.com/questions/991652

证明$\int_0^1 \left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right| \,\mathrm{d}x$发散.

解. 变量替换，积分化为$\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$，然后在子区间$(k\pi,(k+1)\pi)$上求下界. □

问题 6.0.21: http://math.stackexchange.com/questions/620449

证明：求$p \in \mathbb{R}$，使积分$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$发散.

解. $p \geq -1$. □

问题 6.0.22: http://math.stackexchange.com/questions/596511

计算

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

解. 用Frullani积分. 结果为$\log 2$. 或用重积分：$\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x} = x\int_1^2 \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. 这里给出Frullani积分证明过程的做法.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{2a}^{2b} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\int_a^b - \int_{2a}^{2b}\right) \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\int_a^{2a} - \int_b^{2b}\right) \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \to \log(2) - 0, \quad a \to 0, b \to \infty
\end{aligned}$$

上式最后一步用$\mathrm{e}^{-2c}\log(2) \leq \int_c^{2c} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \leq \mathrm{e}^{-c}\log(2)$. □

问题 6.0.23: http://math.stackexchange.com/questions/590774

已知$a>b>0$, 求$\lim_{t\to 0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)$.

解. 注意到$\Gamma(t)=a^t\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-as}}{s^{1-t}}\,\mathrm{d}s$, 所以

$$\lim_{t\to 0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$$

然后用Frullani积分算得$\log\frac{a}{b}$. □

问题 6.0.24: http://math.stackexchange.com/questions/590774

已知$a>b>0$, 求$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$.

解. 可以用Frullani积分. 这里用含参积分求导的方法, 定义$I(t)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-tx}}{x}\,\mathrm{d}x$, 被积函数记为$f(x,t)$, 由$f(x,t)$和$f_t(x,t)$在定义域均连续, $I(t)$关于t收敛且$\int_0^\infty f_t(x,t)\,\mathrm{d}x$关于$t$一致收敛, 则满足积分号下求导条件, 所以$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{a}$, $I=-\log t$. □

解.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^\infty \frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_\epsilon^\infty \frac{\exp(-ax)}{x}dx-\int_\epsilon^\infty \frac{\exp(-bx)}{x}dx\right]\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{a\epsilon}^\infty \frac{\exp(-t)}{t}dt-\int_{b\epsilon}^\infty \frac{\exp(-t)}{t}dt\right]\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{\exp(-t)}{t}dt=\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b \frac{\exp(-\epsilon u)}{u}du
\end{aligned}$$

最后的被积函数一致收敛到$\frac{1}{u}$. □

解. 用Laplace变换, $F(s)=\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 则

$$F(s)=\int_0^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}e^{-sx}dx \implies F'(s)=-\int_0^\infty (e^{-bx}-e^{-ax})e^{-sx}dx.$$

计算最后一个积分, 然后求积分并令$s\to 0$, 其中积分出来的积分常数用极限$\lim_{s\to\infty}F(s)=0$计算. □

问题 6.0.25: http://math.stackexchange.com/questions/164400

求$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}x=\log t$, 其中$t>0$.

解. 让$u=\mathrm{e}^{-x}$, 得

$$\int_0^1 \frac{u^{t-1}-1}{\log u}\,\mathrm{d}u=\int_0^1\int_1^t u^{s-1}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u=\int_1^t\int_0^1 u^{s-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s=\log t.$$

□

解. 同6.0.43的解法一. □

解. 用重积分求解, $I(t)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\int_1^t \mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x$. 这里验证积分次序可交换, 则

$$LHS=\int_1^t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s=\ln t.$$

□

解. 用Laplace变换, $g(s) = L[f(x)] = L\left[\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\right]$, 则$-g'(s) = L[xf(x)] = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}$. 所以$g(s) = \log\frac{s+b}{s+a} + c$, 由于$g(\infty) = 0$, 所以$c = 0$. 从而

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x = \log\frac{s+b}{s+a}.$$

令$s = 0$即可. □

解. 用Laplace变换, $L[1] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}$, 则

$$LHS = \int_0^\infty\int_0^\infty (\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-xt})\mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+t}\right) = \ln\frac{s+1}{s+t}\Big|_0^\infty = \ln t$$

□

问题 6.0.26: http://tieba.baidu.com/p/2686576086

设$f(x)$在实轴$\mathbb{R}$上有二阶导数, 且满足方程

$$2f(x) + f''(x) = -xf'(x).$$

求证$f(x)$和$f'(x)$都在$\mathbb{R}$上有界.

解. 构造$L = f^2 + \frac{1}{2}f'^2$, 研究$L'$. 方程可改成$f''(x) + \frac{x}{2}f'(x) + f(x) = 0$. □

问题 6.0.27: http://tieba.baidu.com/p/3846349760

证明: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$发散.

解. 由于$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$, 且$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调增加, 则$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}$, 于是$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, 从而$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) > \ln n$, 即得. □

问题 6.0.28: http://tieba.baidu.com/p/4931607145

设$f(x)$在$[a,b]$上可导, $f'(x)$在$[a,b]$上可积. 令

$$A_n = \sum_{i=1}^n f\left(a + i\cdot\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

试证

$$\lim_{n\to\infty} nA_n = \frac{b-a}{2}[f(b) - f(a)].$$

解. 令$x_i = a + i\cdot\frac{b-a}{n}$, 则

$$\begin{aligned} nA_n &= n\left[\sum_{i=1}^n f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n} - \sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x\right] \\ &= n\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x_i) - f(x)]\,\mathrm{d}x \\ &= n\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i - x}(x_i - x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

在$[x_{i-1}, x_i]$上, $(x_i - x)$保号, 而$g(x) = \frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}$连续(补充定义$g(x_i) = f'(x_i)$). 由积分第一中值定理知, 存在$\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$, 使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x = g(\eta_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i - x)\,\mathrm{d}x.$$

再由Lagrange中值定理, 以上$g(\eta_i)=\frac{f(x_i)-f(\eta_i)}{\eta_i-x}=f'(\xi_i)$, $(\xi_i\in(\eta_i,x_i)\subset(x_{i-1},x_i))$. 于是

$$\begin{aligned}
nA_n&=n\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x=\frac{n}{2}\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})^2\\
&=\frac{n}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\\
&\to\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)),\text{当}n\to\infty.
\end{aligned}$$

□

问题 6.0.29

$\int_0^1\frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{64}\sqrt[4]{2}\pi.$

问题 6.0.30

求证:

$$\int_0^\infty\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{8}$$

解. 让$f(y)=\int_0^\infty\frac{\sin^3 yx}{x^3}\,\mathrm{d}x$, 判断积分号下可求导, 有

$$f''(y)=\frac{3}{4}\int_0^\infty\frac{-\sin yx+3\sin 3yx}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}\mathrm{sign}y.$$

□

解. 用$\sum_{k=1}^\infty\frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi-x}{2}$, 由

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\sin^3(kx)}{k^3}=\frac{9\sin(3kx)-3\sin(kx)}{4k}.$$

则

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{9\sin(3kx)-3\sin(kx)}{4k}=\frac{3\pi}{4}-3x.$$

积分后得:

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{\sin^3(kx)}{k^3}=\frac{3\pi}{8}x^2-\frac{1}{2}x^3.$$

取$x=\frac{1}{n}$后两边同乘n^2得

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n}=\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{2n}.$$

而广义 Riemann 和显示

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^\infty\frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n}=\int_0^\infty\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

广义 Riemann 和成立的条件是 $\sum_{k=0}^\infty\sup_{x\in[k,k+1]}|f'(x)|<\infty$? 这不等式蕴含 $\int_0^\infty|f'|\,\mathrm{d}x<+\infty$, $f'\in L^1(0,\infty)$. □

解. 用 Parseval 定理

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(s)G(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中$F(s)=\mathcal{F}[f]$, $G(s)=\mathcal{F}[g]$, $\mathcal{F}[f]=\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\,\mathrm{d}x$. 若$f(x)=\frac{\sin x}{x}$, 则

$$F(s)=\begin{cases}\pi, & |s|\le 1\\ 0, & |s|>1,\end{cases}$$

若$g(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$, 则

$$G(s)=\begin{cases}\pi\left(1-\frac{|s|}{2}\right), |s|\le 2\\ 0, |s|>2,\end{cases}$$

所以$\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\pi^2\left(1-\frac{|s|}{2}\right)\mathrm{d}s=\frac{3\pi}{4}$. 即$\int_0^\infty\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{8}$. □

解. 用 Laplace 变换 $F(s)=\mathcal{L}[f]=\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 对于$f(x)=\frac{\sin^3 x}{x^3}$有

$$F(s)=\frac{\pi s^2}{8}+\frac{3\pi}{8}-\frac{3(s^2-1)}{8}\arctan s+\frac{s^2-9}{8}\arctan\frac{s}{3}+\frac{3s}{8}\ln\frac{s^2+1}{s^2+9}.$$

□

解. 用 Laplace 恒等式

$$\int_0^\infty F(u)g(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^\infty f(u)G(u)\,\mathrm{d}u, F(s)=\mathcal{L}[f(t)], G(s)=\mathcal{L}[g(t)].$$

让 $G(u)=\frac{1}{u^3}$ 得 $g(u)=\frac{u^2}{2}$, 让 $f(u)=\sin^3 u$ 得 $F(u)=\frac{6}{(u^2+1)(u^2+9)}$, 则

$$\int_0^\infty\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{6}{2}\int_0^\infty\frac{u^2}{(u^2+1)(u^2+9)}\,\mathrm{d}u=\frac{3\pi}{8}.$$

□

解. 留数定理, 由 $\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4}$ 得 $\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4x^3}\,\mathrm{d}x$. 围道 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$, $\gamma_1=[r,R]$, γ_2 是以 $(0,0)$ 为心 R 为径的上半圆, $\gamma_3=[-R,-r]$, γ_4 为以 $(0,0)$ 为心 r 为径的上半圆, γ 取逆时针方向为正方向. 取 $f(z)=\frac{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}z}}{z^3}$, 则 f 在 γ 内解析, 由 Cauchy-Goursat 公式

$$\oint_\gamma f(z)=0, \tag{6.1}$$

并用 Laurent 展开或留数定理得

$$\int_{\gamma_4}f(z)\,\mathrm{d}z=-\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}, \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2}f(z)\,\mathrm{d}z=0, \lim_{\substack{r\to0\\R\to\infty}}\int_{\gamma_1\cup\gamma_3}f(z)\,\mathrm{d}z=2\mathrm{i}\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x.$$

代入6.2即得. □

问题 6.0.31

设函数$f:(a,b)\to\mathbb{R}$连续可微, 又设对于任意的$x,y\in(a,b)$, 存在唯一的$z\in(a,b)$使得$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(z)$. 证明: $f(x)$严格凸或严格凹.

解. 反证法, 构造λ的函数

$$\Lambda(\lambda)=f(\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta)-\lambda f(\alpha)-(1-\lambda)f(\beta),\quad \lambda\in(0,1)$$

若结论不真, 则存在$\alpha,\beta\in(a,b)$使$\Lambda(\lambda)$在$(0,1)$的某两点异号, 由于f连续, 所以存在$\lambda_0\in(0,1)$使$\Lambda(\lambda_0)=0$.

设$\gamma=\lambda_0\alpha+(1-\lambda_0)\beta$, 则$\gamma\in(\alpha,\beta)\subset(a,b)$且 $\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$. 再由拉格朗日中值定理得出矛盾. □

问题 6.0.32

设函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上无限可微, 且:

a) 存在$L>0$, 使得对于任意的$x\in\mathbb{R}$及$n\in\mathbb{N}$有$|f^{(n)}(x)|\le L$.

b) $f\left(\frac{1}{n}\right)=0$, 对所有$n=1,2,3\cdots$.

求证: $f(x)\equiv 0$.

解. 由f在$\mathbb{R}$上无限次可微, 且由a)知f有在$x=0$处的Taylor展开

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots.$$

设N是使$f^{(N)}(0)\neq 0$的最小者, 取正整数$M>1$使$|f^{(N)}(0)|>\frac{L}{M-1}$. 则

$$\begin{aligned}0=\left|f\left(\frac{1}{M}\right)\right|&=\left|f^{(N)}(0)\frac{x^N}{N!}+f^{(N+1)}(0)\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}+\cdots\right|\\&\ge|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-L\left(\frac{1}{(N+1)!M^{N+1}}+\frac{1}{(N+2)!M^{N+2}}+\cdots\right)\\&\ge|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-L\left(\frac{1}{N!M^{N+1}}+\frac{1}{N!M^{N+2}}+\cdots\right)\\&=|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-\frac{L}{N!}\frac{1}{M^{N+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{M}}\\&=\left(|f^{(N)}(0)|-\frac{L}{M-1}\right)\frac{1}{N!M^N}>0.\end{aligned}$$

这导致矛盾, 即所有$f^{(n)}(0)=0$, $f(x)\equiv 0$. □

问题 6.0.33

设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\subset C_{[a,b]}$, 且$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$, 则$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 因$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in[a,b]$, 所以$f\in C_{[a,b]}$且$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当$n>N$时, $\forall x\in[a,b]$均有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. $f(x),f_n(x)$连续必可积, 有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|<(b-a)\varepsilon.$$

其实当$a\le x\le b$时, 有$\left|\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|<(b-a)\varepsilon$对$x$一致成立, 所以$\int_a^x f_n(x)\,\mathrm{d}t\rightrightarrows\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. □

问题 6.0.34

$f_n(x)$在$[a,b]$上都有连续导数, 且$f_n(x)\to f(x)$, $f_n'(x)\rightrightarrows g(x)$, 则$f'(x)=g(x)$, 即$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)$.

解. 因$f_n'\rightrightarrows g$, 所以g连续, 可积, 由6.0.33, $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$, 所以$f'(x)=g(x)$. 其实$f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$在$[a,b]$上也一致收敛.

若6.0.33和本问题中的$f_n(x)$视为函数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$的前$n$项部分和, 就有函数项级数的相应命题.

(1). 若$[a,b]$上$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$中每项$u_k$均连续, 且$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\rightrightarrows f(x)$, 则$f(x)\in C_{[a,b]}$且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2). 若$[a,b]$上, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$的每项都有连续导数$u_k'(x)$且$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \rightrightarrows g(x)$, 而$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \to f(x)$. 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x).$$

□

问题 6.0.35

举反例:

(1) 积分的极限不等于极限的积分的函数列.

(2) 导数的极限不等于极限的导数的函数列.

解. (1). 在$[0,1]$上极限函数为0, 但f_n在$\left[0,\frac{1}{n}\right]$上面积为1的脉冲函数.
(2). $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$, $x \in [-1,1]$. □

问题 6.0.36: http://math.stackexchange.com/questions/2143014

证明: 对于任意的$\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left|\frac{\alpha-n}{\alpha+n}\right|$发散.

问题 6.0.37: http://math.stackexchange.com/questions/472007

判断$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n+10\sin n}$的敛散性.

解. 其实, 若$f(n)$是有界函数, 且级数$\sum_{n=1}^{n} \frac{f(n)}{n}$收敛, a是使任意的n都有$n+af(n) \neq 0$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n+af(n)}$.
这是因为

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{f(n)}{n+af(n)} = \sum_{n=1}^{m} \frac{f(n)}{n} + \sum_{n=1}^{m} \frac{-af^2(n)}{n(n+af(n))}$$

后一个和式用比较判别法. □

问题 6.0.38: http://math.stackexchange.com/questions/273559

判断$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n}$的敛散性.

解. 比较判别法, $[k\pi+\frac{\pi}{6},(k+1)\pi-\frac{\pi}{6}]$中总有至少一个整数.
或用$\sum \frac{\sin^2(n)}{n} = \sum \frac{1}{2n} - \sum \frac{\cos(2n)}{2n}$, 前者发散, 后者用Dirichlet判别法. □

问题 6.0.39: http://math.stackexchange.com/questions/991652

证明$\int_0^1 \left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right| \,\mathrm{d}x$发散.

解. 变量替换, 积分化为$\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$, 然后在子区间$(k\pi,(k+1)\pi)$上求下界. □

问题 6.0.40: http://math.stackexchange.com/questions/620449

证明: 求$p \in \mathbb{R}$, 使积分$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$发散.

解. $p \geq -1$. □

问题 6.0.41: http://math.stackexchange.com/questions/596511

计算

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

解. 用Frullani积分. 结果为$\log 2$. 或用重积分: $\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}=x\int_1^2 \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. 这里给出Frullani积分证明过程的做法.

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{2a}^{2b}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\int_a^b - \int_{2a}^{2b}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\int_a^{2a} - \int_b^{2b}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \to \log(2)-0, \quad a\to 0, b\to\infty\end{aligned}$$

上式最后一步用$\mathrm{e}^{-2c}\log(2)\le\int_c^{2c}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\le \mathrm{e}^{-c}\log(2)$. □

问题 6.0.42: http://math.stackexchange.com/questions/590774

已知$a>b>0$, 求$\lim_{t\to 0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)$.

解. 注意到$\Gamma(t)=a^t\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-as}}{s^{1-t}}\,\mathrm{d}s$, 所以

$$\lim_{t\to 0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$$

然后用Frullani积分算得$\log\frac{a}{b}$. □

问题 6.0.43: http://math.stackexchange.com/questions/590774

已知$a>b>0$, 求$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$.

解. 可以用Frullani积分. 这里用含参积分求导的方法, 定义$I(t)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-tx}}{x}\,\mathrm{d}x$, 被积函数记为$f(x,t)$, 由$f(x,t)$和$f_t(x,t)$在定义域均连续, $I(t)$关于t收敛且$\int_0^\infty f_t(x,t)\,\mathrm{d}x$关于$t$一致收敛, 则满足积分号下求导条件, 所以$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{a}$, $I=-\log t$. □

解.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^\infty \frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_\epsilon^\infty \frac{\exp(-ax)}{x}dx - \int_\epsilon^\infty \frac{\exp(-bx)}{x}dx\right] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{a\epsilon}^\infty \frac{\exp(-t)}{t}dt - \int_{b\epsilon}^\infty \frac{\exp(-t)}{t}dt\right] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a\epsilon}^{b\epsilon}\frac{\exp(-t)}{t}dt = \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b \frac{\exp(-\epsilon u)}{u}du\end{aligned}$$

最后的被积函数一致收敛到$\frac{1}{u}$. □

解. 用Laplace变换, $F(s)=\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 则

$$F(s)=\int_0^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}e^{-sx}dx \implies F'(s)=-\int_0^\infty (e^{-bx}-e^{-ax})e^{-sx}dx.$$

计算最后一个积分, 然后求积分并令$s\to 0$, 其中积分出来的积分常数用极限$\lim_{s\to\infty}F(s)=0$计算. □

问题 6.0.44: http://math.stackexchange.com/questions/164400

求$\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-xt}}{x}\,dx=\log t$, 其中$t>0$.

解. 让$u=e^{-x}$, 得

$$\int_0^1 \frac{u^{t-1}-1}{\log u}\,du=\int_0^1\int_1^t u^{s-1}\,ds\,du=\int_1^t\int_0^1 u^{s-1}\,du\,ds=\log t.$$

□

解. 同6.0.43的解法一. □

解. 用重积分求解, $I(t)=\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-xt}}{x}\,dx=\int_0^\infty\int_1^t e^{-xs}\,ds\,dx$. 这里验证积分次序可交换, 则

$$LHS=\int_1^t\int_0^\infty e^{-xs}\,dx\,ds=\ln t.$$

□

解. 用Laplace变换, $g(s)=L[f(x)]=L\left[\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\right]$, 则$-g'(s)=L[xf(x)]=\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}$. 所以$g(s)=\log\frac{s+b}{s+a}+c$, 由于$g(\infty)=0$, 所以$c=0$. 从而

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}e^{-sx}\,dx=\log\frac{s+b}{s+a}.$$

令$s=0$即可. □

解. 用Laplace变换, $L[1]=\int_0^\infty e^{-st}\,dt=\frac{1}{s}$, 则

$$LHS=\int_0^\infty\int_0^\infty (e^{-x}-e^{-xt})e^{-xs}\,ds\,dx=\int_0^\infty\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+t}\right)=\ln\frac{s+1}{s+t}\Big|_0^\infty=\ln t$$

□

问题 6.0.45: http://tieba.baidu.com/p/2686576086

设$f(x)$在实轴$\mathbb{R}$上有二阶导数, 且满足方程

$$2f(x)+f''(x)=-xf'(x).$$

求证$f(x)$和$f'(x)$都在$\mathbb{R}$上有界.

解. 构造$L=f^2+\frac{1}{2}f'^2$, 研究L'. 方程可改成$f''(x)+\frac{x}{2}f'(x)+f(x)=0$. □

问题 6.0.46: http://tieba.baidu.com/p/3846349760

证明: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$发散.

解. 由于$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, 且$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调增加, 则$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$, 于是$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, 从而$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)>\ln n$, 即得. □

问题 6.0.47: http://tieba.baidu.com/p/4931607145

设$f(x)$在$[a,b]$上可导, $f'(x)$在$[a,b]$上可积. 令

$$A_n=\sum_{i=1}^n f\left(a+i\cdot\frac{b-a}{n}\right)-\int_a^b f(x)\,dx.$$

试证

$$\lim_{n\to\infty} nA_n=\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)].$$

解. 令$x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$, 则

$$\begin{aligned}
nA_n &= n\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n} - \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\
&= n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x\\
&= n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

在$[x_{i-1},x_i]$上, (x_i-x)保号, 而$g(x)=\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}$连续(补充定义$g(x_i)=f'(x_i)$). 由积分第一中值定理知, 存在$\eta_i\in(x_{i-1},x_i)$, 使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x = g(\eta_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x.$$

再由Lagrange中值定理, 以上$g(\eta_i)=\frac{f(x_i)-f(\eta_i)}{\eta_i-x}=f'(\xi_i)$, $(\xi_i\in(\eta_i,x_i)\subset(x_{i-1},x_i))$. 于是

$$\begin{aligned}
nA_n &= n\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x = \frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})^2\\
&= \frac{n}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\\
&\to \frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)), \text{当} n\to\infty.
\end{aligned}$$

□

问题 6.0.48

$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{64}\sqrt[4]{2}\pi.$

问题 6.0.49

求证:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8}$$

解. 让$f(y)=\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 yx}{x^3}\,\mathrm{d}x$, 判断积分号下可求导, 有

$$f''(y) = \frac{3}{4}\int_0^{\infty}\frac{-\sin yx + 3\sin 3yx}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}\mathrm{sign}y.$$

□

解. 用$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi-x}{2}$, 由

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\sin^3(kx)}{k^3} = \frac{9\sin(3kx)-3\sin(kx)}{4k}.$$

则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9\sin(3kx)-3\sin(kx)}{4k} = \frac{3\pi}{4} - 3x.$$

积分后得:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^3(kx)}{k^3} = \frac{3\pi}{8}x^2 - \frac{1}{2}x^3.$$

取$x=\frac{1}{n}$后两边同乘n^2得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n}=\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{2n}.$$

而广义 Riemann 和显示

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n}=\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

广义 Riemann 和成立的条件是 $\sum_{k=0}^{\infty}\sup_{x\in[k,k+1]}|f'(x)|<\infty$? 这不等式蕴含 $\int_0^{\infty}|f'|\,\mathrm{d}x<+\infty$, $f'\in L^1(0,\infty)$. □

解. 用 Parseval 定理

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(s)G(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中$F(s)=\mathcal{F}[f]$, $G(s)=\mathcal{F}[g]$, $\mathcal{F}[f]=\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\,\mathrm{d}x$. 若$f(x)=\frac{\sin x}{x}$, 则

$$F(s)=\begin{cases}\pi, & |s|\le 1\\ 0, & |s|>1,\end{cases}$$

若$g(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$, 则

$$G(s)=\begin{cases}\pi\left(1-\dfrac{|s|}{2}\right), |s|\le 2\\ 0, |s|>2,\end{cases}$$

所以$\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\pi^2\left(1-\frac{|s|}{2}\right)\mathrm{d}s=\frac{3\pi}{4}$. 即$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{8}$. □

解. 用 Laplace 变换 $F(s)=\mathcal{L}[f]=\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 对于$f(x)=\frac{\sin^3 x}{x^3}$有

$$F(s)=\frac{\pi s^2}{8}+\frac{3\pi}{8}-\frac{3(s^2-1)}{8}\arctan s+\frac{s^2-9}{8}\arctan\frac{s}{3}+\frac{3s}{8}\ln\frac{s^2+1}{s^2+9}.$$

□

解. 用 Laplace 恒等式

$$\int_0^{\infty}F(u)g(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^{\infty}f(u)G(u)\,\mathrm{d}u, F(s)=\mathcal{L}[f(t)], G(s)=\mathcal{L}[g(t)].$$

让 $G(u)=\frac{1}{u^3}$ 得 $g(u)=\frac{u^2}{2}$, 让 $f(u)=\sin^3 u$ 得 $F(u)=\frac{6}{(u^2+1)(u^2+9)}$, 则

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{6}{2}\int_0^{\infty}\frac{u^2}{(u^2+1)(u^2+9)}\,\mathrm{d}u=\frac{3\pi}{8}.$$

□

解. 留数定理, 由 $\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4}$ 得 $\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4x^3}\,\mathrm{d}x$. 围道 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$, $\gamma_1=[r,R]$, γ_2 是以 $(0,0)$ 为心 R 为径的上半圆, $\gamma_3=[-R,-r]$, γ_4 为以 $(0,0)$ 为心 r 为径的上半圆, γ 取逆时针方向为正方向. 取 $f(z)=\frac{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}z}}{z^3}$, 则 f 在 γ 内解析, 由 Cauchy-Goursat 公式

$$\oint_{\gamma}f(z)=0, \tag{6.2}$$

并用 Laurent 展开或留数定理得

$$\int_{\gamma_4}f(z)\,\mathrm{d}z=-\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}, \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2}f(z)\,\mathrm{d}z=0, \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}}\int_{\gamma_1\cup\gamma_3}f(z)\,\mathrm{d}z=2\mathrm{i}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x.$$

代入6.2即得. □

问题 6.0.50

设函数$f:(a,b)\to\mathbb{R}$连续可微, 又设对于任意的$x,y\in(a,b)$, 存在唯一的$z\in(a,b)$使得$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(z)$. 证明: $f(x)$严格凸或严格凹.

解. 反证法, 构造λ的函数

$$\Lambda(\lambda)=f(\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta)-\lambda f(\alpha)-(1-\lambda)f(\beta),\quad \lambda\in(0,1)$$

若结论不真, 则存在$\alpha,\beta\in(a,b)$使$\Lambda(\lambda)$在$(0,1)$的某两点异号, 由于f连续, 所以存在$\lambda_0\in(0,1)$使$\Lambda(\lambda_0)=0$.

设$\gamma=\lambda_0\alpha+(1-\lambda_0)\beta$, 则$\gamma\in(\alpha,\beta)\subset(a,b)$且$\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$. 再由拉格朗日中值定理得出矛盾. □

问题 6.0.51

设函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上无限可微, 且:

a) 存在$L>0$, 使得对于任意的$x\in\mathbb{R}$及$n\in\mathbb{N}$有$|f^{(n)}(x)|\leq L$.

b) $f\left(\frac{1}{n}\right)=0$, 对所有$n=1,2,3\cdots$.

求证: $f(x)\equiv 0$.

解. 由f在$\mathbb{R}$上无限次可微, 且由a)知f有在$x=0$处的Taylor展开

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots.$$

设N是使$f^{(N)}(0)\neq 0$的最小者, 取正整数$M>1$使$|f^{(N)}(0)|>\frac{L}{M-1}$. 则

$$\begin{aligned}
0=\left|f\left(\frac{1}{M}\right)\right|&=\left|f^{(N)}(0)\frac{x^N}{N!}+f^{(N+1)}(0)\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}+\cdots\right|\\
&\geq|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-L\left(\frac{1}{(N+1)!M^{N+1}}+\frac{1}{(N+2)!M^{N+2}}+\cdots\right)\\
&\geq|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-L\left(\frac{1}{N!M^{N+1}}+\frac{1}{N!M^{N+2}}+\cdots\right)\\
&=|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-\frac{L}{N!}\frac{1}{M^{N+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{M}}\\
&=\left(|f^{(N)}(0)|-\frac{L}{M-1}\right)\frac{1}{N!M^N}>0.
\end{aligned}$$

这导致矛盾, 即所有$f^{(n)}(0)=0$, $f(x)\equiv 0$. □

Chapter 7

实变函数

问题 7.0.1

构造一个从$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$到$\mathbb{R}$的单射.

解. This is slightly more complicated. If you understand why $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ and $2^{\mathbb{N}}$ have the same cardinality, it's enough to observe that the map defined above had range $2^{\mathbb{N}}$; if you haven't seen that yet, then here's a straightforward (if somewhat unnatural) injection: given $\alpha = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, let $f(\alpha)$ be the real with binary expansion

$$0.0\ldots010\ldots010\ldots01\ldots$$

where the ith block of zeroes has length $a_i + 1$. □

问题 7.0.2

设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$是$E=[a,b]$上实函数列, 满足: $f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_n(x) \le \cdots$, 且$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in E$. 求证: 对任意$c \in \mathbb{R}$,

(I) $E(f(x) > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c)$.

(II) $E(f(x) \le c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) \le c)$.

解. (I). 对于任意的$x_0 \in E(f(x) > c)$, 有$f(x_0) > c$且$x_0 \in E$, 因为$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, 所以存在$n_0$, 使得$f_{n_0}(x_0) > c$, 故$x_0 \in E(f_{n_0}(x_0) < c)$, 于是$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c)$. 反之, 若$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c)$, 则存在$n_0$, 使得$f_{n_0}(x_0) > c$且$x_0 \in E$, 由单调性, $f(x_0) \ge f_{n_0}(x_0) > c$. 故$x_0 \in E(f(x) > c)$, 得证.

(II). 对(I)式取基本集$E=[a,b]$上的补集. □

问题 7.0.3

设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$为一列集合, 定义

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \{x : x\text{属于}A_n (n \ge 1)\text{中的无穷多个}\};$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \{x : x\text{至多不属于}A_n (n \ge 1)\text{中的有限个}\};$$

试证:

(I) $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

(II) $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.

解. (I). 由定义

$$\begin{aligned}x\in\limsup_{n\to\infty}A_n &\iff x\text{属于}A_n(n\geq 1)\text{中的无穷多个}\\ &\iff \forall n\geq 1,\text{总有}k_n\geq n\text{使}x\in A_k\\ &\iff \forall n\geq 1,\text{有}x\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\\ &\iff x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k.\end{aligned}$$

(II).

$$\begin{aligned}x\in\liminf_{n\to\infty}A_n &\iff \exists n_0\text{使}x\in A_k(k\geq n)\\ &\iff \exists n_0\text{使}x\in\bigcap_{k=n_0}^{\infty}A_k\\ &\iff x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.\end{aligned}$$

□

问题 7.0.4

(I) 若$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$, 则$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$.

(II) 若$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$, 则$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$.

解. (I) 由条件, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$单调上升, 有$\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=A_n(\forall n\geq 1)$, 于是$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\supset\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$. 即$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\liminf_{n\to\infty}A_n\supset\limsup_{n\to\infty}A_n\supset\liminf_{n\to\infty}A_n$.

(II). 用对偶律. □

问题 7.0.5

设$A\subset\mathbb{R}$且被开区间集$G=\{I_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$所覆盖, 证明存在$G$的可列子集$G^*$覆盖$A$.

解. 对于任意的$x\in A$, 由条件存在$I_x\in G$, $x\in I_x$, 因为x为I_x的内点, 则有x的邻域$V_\delta(x)\subset I_x$且$V_\delta(x)$的端点均为有理数. 于是$\{V_\delta(x):x\in A\}$覆盖A且至多可列. 不妨设$\{V_\delta(x):x\in A\}=\{V_1,V_2,\cdots,V_n,\cdots\}$, 而由$V_n$的构造可在$G$中找到对应的$I_n$. 于是$G^*=\{I_1,I_2,\cdots,I_n,\cdots\}$即为所求. □

问题 7.0.6

E_n是$\mathbb{R}$上单调降的可测集列, 对于任意的$n\in\mathbb{N}$, 均有$E_{n+1}\supset E_n$, 且$m(E_1)<+\infty$, 则$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\lim_{n\to\infty}m(E_n)$.

解. 让$E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$, $F_k=E_k-E_{k+1}$, 则$E_1-E=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$, 且$F_k$两两不交, 则

$$m(E_1)-m(E)=m(E_1-E)=\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k-E_{k+1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(mE_k-mE_{k+1})=mE_1-\lim_{n\to\infty}mE_n.$$

所以$\lim_{n\to\infty}mE_n=m(E)$. 其中$m(E_1)<+\infty$不能省, 如取$E_n=(-n,n)^c$. □

问题 7.0.7: 等测覆盖定理

证明: 对任意集合$A\subset\mathbb{R}$恒有G_δ型集G, 使$G\supset A$且$mG=m^*A$

解. 任取$\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, 由外测度定义及下确界定义知, 必有开区间集列$\{I_k^{(n)} : k = 1, 2, \cdots\}$满足

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{(n)} \text{且} \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k^{(n)}) < m^*A + \frac{1}{n}.$$

令$G_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{(n)}$, $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, 则由外测度次可列可加性, $m(G_n) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k^{(n)}) < m^*(A) + \frac{1}{n}$. 显然$G_n$为开集. G为G_δ型集, 且$A \subset G \subset G_n$, $(n = 1, 2, \cdots)$. 故有

$$m^*(A) \le m^*G \le m^*G_n < m^*(A) + \frac{1}{n}.$$

于是$mG = m^*G = m^*A$. □

问题 7.0.8: 等测核心定理

证明: 若A为有界(有界可去掉)可测集, 必有F_σ型集F, 使$F \subset A$且$mF = mA$.

解. 存在$E = [\alpha, \beta] \supset A$, 设$S = E - A$, 由7.0.7, 存在$G_\delta$型集$G$使$G \supset S$, $m^*S = mG$, $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, G_n开, 令$F_n = E - G_n$, 则F_n闭, 令$F = E \cap G^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E \cap G_n^c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, 故$F$为$F_\sigma$型集, 且$F = E \cap G^c = E - G \subset E - S \subset A$, 及

$$mF = m(E \cap G^c) = m(E - G) \ge mE - mG = mE - m^*S = mE - m^*(E - A) = m_*A = mA, F \subset A \Rightarrow mF \le mA.$$

所以$mF = mA$. □

问题 7.0.9

设E可测, $mE < +\infty$, 证明: $\forall \varepsilon > 0$, 有闭集F使$F \subset E$且$m(E - F) < \varepsilon$.

解. 由等测核心定理, 存在$F \in F_\sigma$型集, 使$F \subset E$且$mE = mF$, 设$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, F_k闭, 记$S_n = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$, 则$S_n$闭且$S_n \subset E$, 由$S_n$单调且$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n$, 所以$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$使得当$n > N$时, 有$mE - mS_n < \varepsilon$, 而$S_n \subset E$, $mS_n < +\infty$得证. □

问题 7.0.10

设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$是可测集$E$上定义的可测函数列, 证明$\sup_n f_n(x)$与$\inf_n f_n(x)$都是$E$上可测函数.

解. 其实$E(\sup_n f_n(x) > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c)$, 只证$LHS \subset RHS$. 若$x_0 \in LHS$, 则$\sup_n f_n(x_0) > c$, 记$\varepsilon = \sup_n f_n(x_0) - c$, 则对于任意的$\delta \in (0, \varepsilon)$, 存在$N$使得$f_N(x_0) > \sup_n f_n(x_0) - \delta > c$, 所以$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c)$. □

问题 7.0.11

设$mE \ne 0$, f在E上可积, 若对任何有界可测函数$\varphi(x)$, 都有$\int_E f\varphi \,\mathrm{d}x = 0$, 则$f = 0, a.e.E$.

解. 取$\varphi(x) = (\chi_{E(f\ge 0)} - \chi_{E(f<0)})(x)$, 则$0 = \int_E f\varphi \,\mathrm{d}x = \int_E |f| \,\mathrm{d}x$, 即得. □

问题 7.0.12

设$mE < +\infty$, $f(x)$在E上可积, E_n单调上升可测, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f \,\mathrm{d}x = \int_E f \,\mathrm{d}x.$$

解. 因E_n可测, 所以E可测, 令$F_1 = E_1$, $F_2 = E_2 - E_1, \cdots, F_n = E_n - E_{n-1}, \cdots$, 则$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, 且对任意$i \neq j$, $F_i \cap F_j = \emptyset$. 于是

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\cup F_n} f\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{F_n} f\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{F_k} f\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{\cup_{k=1}^{n} F_k} f\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\,\mathrm{d}x.$$

□

问题 7.0.13

证明:

$$(L)\int_0^1 \frac{x^p}{1-x} \ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p+k)^2}, \quad (p > -1).$$

解. 让$f(x) = \frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{p+n-1}\ln\frac{1}{x}$, 用Levi定理, $(L)\int_0^1 f\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} (L)\int_0^1 x^{p+n-1}\ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. □

问题 7.0.14

试证, 当f在$(a, +\infty)$上有界, 非负, (R)可积时, 则f在$(a, +\infty)$上(L)可积, 且

$$(L)\int_{(0,+\infty)} f\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^{\infty} f\,\mathrm{d}x.$$

解. 由f有界(R)可积, 对任一有限区间(a, A)有$(L)\int_{(a,A)} f\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$. 于是

$$(L)\int_{(a,+\infty)} f\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} (L)\int_{(a,A)} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} (R)\int_a^A f\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^{\infty} f\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

即得. □

问题 7.0.15

$f, |f|$在$(a, +\infty)$上有界, (R)可积, 则f在$(a, +\infty)$上(L)可积, 且

$$(L)\int_{(a,+\infty)} f\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^{\infty} f\,\mathrm{d}x.$$

解. 由7.0.14知, $|f|$在$(a, +\infty)$上(R)可积, 有$|f|$在$(a, +\infty)$上(L)可积, 且积分值相等, 于是(取$E = (a, +\infty)$)

$$(L)\int_E f^+\,\mathrm{d}x \leq (L)\int_E |f|\,\mathrm{d}x = (R)\int_E |f|\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

同理$(L)\int_E f^-\,\mathrm{d}x < +\infty$. 则$f^+, f^-$的$(L)$积分和$(R)$积分相等. 从而$f$的$(L)$积分和$(R)$积分相等.

反例, $|f|$在E上(R)可积不可省, 否则考虑$\frac{\sin x}{x}$在$(0, +\infty)$上(R)可积, 但

$$(L)\int_{(0,+\infty)} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,\mathrm{d}x = (R)\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

从而$\frac{\sin x}{x}$在$(0, +\infty)$上必(L)不可积. □

Chapter 8

泛函分析

问题 8.0.1

设$X = \{f(z) : f$在$|z| < 1$内解析, 且在$|z| \leq 1$上连续$\}$, 令

$$d(f,g) = \max_{|z|=1} |f(z) - g(z)|, \quad f, g \in X.$$

求证: (X,d)是度量空间.

解. 正则性: $d(f,g) = 0 \iff \max_{|z|=1} |f(z)-g(z)| = 0$, 而由最大模原理对于任意的$|z| \leq 1$, 有$|f(z)-g(z)| \leq \max_{|z|=1} |f(z)-g(z)| = 0$, 所以$f \equiv g, \forall |z| \leq 1$. □

问题 8.0.2

求证: $l^1 \subsetneqq l^p \subsetneqq l^q \subsetneqq c \subsetneqq l^\infty$, $(1 < p < q < +\infty)$.

问题 8.0.3

求证: $C[a,b] \subsetneqq L^\infty[a,b] \subsetneqq L^p[a,b] \subsetneqq L^q[a,b] \subsetneqq L[a,b]$, $(1 < q < p < +\infty)$.

问题 8.0.4

$x, y \in \mathbb{R}^n$或l^1, $x = (\xi_i)$, $y = (\eta_i)$,

$$d_p(x,y) = \left(\sum |\xi_i - \eta_i|^p\right)^{1/p}.$$

则$d_p(x,y) \geq d_q(x,y)$, $\forall 1 \leq p \leq q < +\infty$.

问题 8.0.5

设$X(n) = \{P(D) = p_n D^n + p_{n-1} D^{n-1} + \cdots + p_1 D + p_0 : p_n, \cdots, p_0 \in \mathbb{R}\}$, 其中$D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 令

$$d(P(D), Q(D)) = \sum_{i=0}^{n} |p_i - q_i|$$

其中$Q(D) = \sum_{i=0}^{n} q_i D^i$, $D^0 = 1$, 求证: $(X(n), d)$是度量空间.

问题 8.0.6

求证: 若$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$满足

(I) $\rho(x,x) = 0,\ \forall x \in X,\ \rho(x,y) > 0,\ \forall x \neq y.$

(II) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z),\ \forall x,y,z \in X.$

则(X,ρ)是度量空间.

问题 8.0.7

求证: 度量空间中的闭球,

$$V[x_0,r] = \{x \in X : d(x,x_0) \leq r\}, r > 0, x_0 \in X$$

总是闭集, 球面$S(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0) = r\}$也是闭集, 试问: 是否恒有$V[x_0,r] = \overline{V(x_0,r)}$, 及$V[x_0,r] - V(x_0,r) = S(x_0,r) \neq \emptyset$?

解. 通常的离散拓扑, 取$r = 1$. □

问题 8.0.8

设$A \subset (X,d)$, 令$F(x) = d(x,A) = \inf_{y\in A} d(x,y)$, 求证: $F : X \to \mathbb{R}$是连续泛函且一致连续.

解. 设$x_1, x_2 \in X$, 由$d(x_1,A) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,A) \implies |F(x_1) - F(x_2)| \leq d(x_1,x_2)$, 于是$F(x)$是$X$上 Lipschitz 连续的, 从而一致连续. □

问题 8.0.9

求证: $K : C[a,b] \to C[a,b],\ x(t) \mapsto \int_a^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$一致连续.

解. $\|Kx - Ky\|_C = \max_{t\in[a,b]} \left|\int_a^t (x(\tau) - y(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right| \leq (b-a)\|x - y\|_C$. □

问题 8.0.10

求证: 度量空间(X,d)中互不相交的闭集A, B, 必有互不相交的开集G, V使得$A \subset G,\ B \subset V$.

解. $A \subset B^c$故$x \in A$必有$\delta_x > 0$使$V(x,\delta_x) \subset B^c$, 所以$A \subset \bigcup_{x\in A} V(x,\delta_x) \subset B^c$, 故

$$A \subset \bigcup_{x\in A} V(x,\frac{1}{2}\delta_x) \subset \overline{\bigcup_{x\in A} V(x,\frac{1}{2}\delta_x)} \subset \bigcup_{x\in A} V(x,\delta_x) \subset B^c$$

令$G = \bigcup_{x\in A} V(x,\frac{1}{2}\delta_x),\ V = \left(\bigcup_{x\in A} V(x,\frac{1}{2}\delta_x)\right)^c$. □

解. $F(x) = d(x,A)$是连续泛函, 令$G = \{x \in X; d(x,A) < d(x,B)\}$, 则$G = G^{-1}((-\infty,0))$, 其中$G(x) = d(x,A) - d(x,B)$是$X$上的连续泛函, 从而$G$开且$A \subset G$. 同理$B \subset V = \{x \in X : d(x,B) < d(x,A)\}$开于$X$. □

问题 8.0.11

设$Y = \{f; f : (X,d) \to \mathbb{R}$为有界连续泛函$\}$, 令

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|,$$

设x_0为X中固定点, 令$G : X \to (Y,\rho),\ y \mapsto d(x,y) - d(x,x_0)$, 求证: $G : (X,d) \to (G(x),\rho)$是等距映射.

解. 先证$G(X)$是(Y,ρ)的子空间, 然后证$\rho(G(y),G(z))=d(y,z)$. □

问题 8.0.12

设$A,M\subset (X,d)$, 求证: A在M中稠密, 即$\overline{A}\supset M$的充要条件为如下任何一条成立:

(I) $\forall x\in M$的任一邻域$V_\varepsilon(x)$有$A\cap V_\varepsilon(x)\neq\emptyset$.

(II) $\forall x\in M$, 存在$\{y_n\}\subset A$, 使$y_n\to x$.

(III) 若A在B中稠密, 且B在M中稠密.

解. (I). 若$x\in M$, $\forall\varepsilon>0$, $A\cap V_\varepsilon(x)\neq\emptyset$, 必有$x\in\overline{A}$, 即$M\subset\overline{A}$.
(II). 因$x\in\overline{A}\Longleftrightarrow\exists y_n\in A$, 使得$y_n\to x$, 故若$\forall x\in M$, $\exists y_n\in A$使得$y_n\to x$, 则$x\in\overline{A}$.
(III). 因A在B中稠密, 故$\overline{A}\supset B$, B在M中稠密, 故$\overline{B}\supset M$, 从而$\overline{A}\supset M$. □

问题 8.0.13

求证: $l^p(1\leq p<+\infty)$是可分的.

解. 首先$\mathbb{R}^n$是可分的, 稠子集为$\mathbb{Q}^n=\{r=(r_1,\cdots,r_n):r_i\in\mathbb{Q},i=1,\cdots n\}$, 令

$$M=\{r=(r_1,\cdots,r_n,0,0,\cdots):n\in\mathbb{N},r_i\in\mathbb{Q},i=1,2,\cdots,n\},$$

则M是l^p的可列子集, 然后证$\overline{M}=l^p$. □

问题 8.0.14

求证: l^∞是不可分的.

解. 令$K=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots):x_i$或为0或为1$\}$, 则$K$不可数且$K$中人两个不同元素$x\neq y$, 有$d_\infty(x,y)=1$, 若$l^\infty$可分且其稠子集为$B$, B可数, 作集类

$$\left\{V\left(x,\frac{1}{3}\right):x\in K\right\}.$$

则它为不可列集, 且两两不交, 但对于任意的$x\in K$必有$B\cap V\left(x,\frac{1}{3}\right)\neq\emptyset$, 从而$B$不可数, 矛盾. □

问题 8.0.15

设(X,d)是离散度量空间, 求证: 任一映射$F:(X,d)\to(Y,\rho)$都是一致连续的.

问题 8.0.16

设(X,d)为度量空间, $Y=\{f;f:X\to\mathbb{R}\}$为 Lipschitz 连续泛函$\}$, 即

$$f\in Y\Longleftrightarrow \text{存在常数}k\text{使}|f(x)-f(y)|\leq kd(x,y),\forall x,y\in X.$$

(I) Y是线性空间.

(II) 问$\sigma(f,g)=\inf\{k:|f(x)-g(x)-f(y)+g(y)|\leq kd(x,y),\forall x,y\in X\}$是否为$Y$上的度量?

(III) 设$Y_0=\{f:f\in Y,f(x_0)=0\}$, 其中$x_0$为$X$中定点, 问$\sigma$是否为$Y_0$上的度量.

解. (II). $\sigma(f,g)=0$未必有$f=g$, 设$f\in Y$, 令$g=f(x)+c$(c非零常数), 则$g\in Y$但$\sigma(f,g)=0$, 因此σ不是Y上的度量(称为Y上的拟度量).

(III). 因

$$\sigma(f,g)=\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-g(x)-f(y)+g(y)|}{d(x,y)},$$

故$\sigma(f,g)=0\iff f(x)-g(x)=f(y)-g(y)=f(x_0)-g(x_0)$, 对于任意的$x,y\in X$成立, 即$f(x)\equiv g(x)$, 对于任意的$x\in X$, 即$f=g$, 从而易得$\sigma$是$Y_0$上的度量. □

问题 8.0.17

设$f_n,f\in C[a,b]$且$d(f_n,f)\to 0$, $t_n\in[a,b]$, $t_n\to t_0$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}f_n(t_n)=f(t_0).$$

问题 8.0.18

设$f:X\to X$连续, (X,d)为度量空间, 设$X\times X$中度量为

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=d(x_1,x_2)+d(y_1,y_2),\quad (x_i,y_i)\in X\times X.$$

定义$X\times X$的对角线集为

$$\Delta=\{(x,x):x\in X\},$$

令

$$g:\Delta\to\mathrm{Graph}(f),\quad (x,x)\mapsto(x,f(x)).$$

求证: g连续, 可逆, g^{-1}也连续.

解. $x_n,x\in X$, 因$(x_n,x_n)\to(x,x)\iff d(x_n,x)\to 0$, 所以由$f:X\to X$连续, 故$(x_n,x_n)\to(x,x)$时, $d(x_n,x)\to 0$, 从而$d(f(x_n),f(x))\to 0$, 从而

$$d((x_n,f(x_n)),(x,f(x)))=d(x_n,x)+d(f(x_n),f(x))\to 0$$

所以g连续. 然后证g是双射, 所以可逆.

$$g^{-1}:\mathrm{Graph}(f)\to\Delta,\quad (x,f(x))\mapsto(x,x),$$

于是

$$(x_n,f(x_n))\to(x,f(x))\iff d((x_n,f(x_n)),(x,f(x)))\to 0\iff d(x_n,x)\to 0\text{ 且 }d(f(x_n),f(x))\to 0\implies(x_n,x_n)\to(x,x)$$

所以g^{-1}连续. □

问题 8.0.19

求证: 同胚映射$F:(X,d)\to(Y,\rho)$, 若(X,d)可分, 则(Y,ρ)可分.

问题 8.0.20

设 Hilbert 立方体 $A=\{x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots):|\xi_n|\le\frac{1}{n},\forall n\}$, 求证$A$闭于$l^2$.

解. 显然$A\subset l^2$, 设$x_0\in\overline{A}$, 则存在$x_k=\left(\xi_i^{(k)}\right)\in A$使得$d(x_k,x_0)\to 0$, 即$\forall i$, $\left|\xi_i^{(k)}-\xi_i^{(0)}\right|\to 0$, 从而$\left|\xi_i^{(0)}\right|\le\frac{1}{i}$, 于是$x_0\in A$. 其实, A闭于$l^p(1<p\le+\infty)$. □

问题 8.0.21: http://math.stackexchange.com/questions/1087885

定义: 设(S,ρ)是一距离空间, $T: S \to S$, 若存在$\beta \in (0,1)$使对于任意$x, y \in S$, 有$\rho(Tx, Ty) \le \beta\rho(x,y)$称$T$为压缩映射.

定理 8.0.1: Blackwell's 压缩映射的充分条件

让$X \subset \mathbb{R}^l$, $B(X)$是带有上确界范数的有界函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 的全体组成的空间, 让 $T: B(X) \to B(X)$ 满足

1) (单调性), $f, g \in B(X)$ 且若 $f \le g, \forall x \in X$ 则 $Tf \le Tg, \forall x \in X$.

2) (discounting) 存在 $\beta \in (0,1)$ 使 $\forall f \in B(X)$, $a \ge 0$, $x \in X$ 有 $[T(f+a)](x) \le (Tf)(x) + \beta a$, 其中 $(f+a)(x) := f(x) + a$.

则 T 是模 β 的压缩映射.

解. 若 $f \le g, \forall x \in X$, 则 $\forall f, g \in B(X)$, $f \le g + \|f-g\|$, 从而

$$Tf \le T(g + \|f-g\|) \le Tg + \beta\|f-g\|.$$

交换 f, g的位置, 从而有 $\|Tf - Tg\| \le \beta\|f-g\|$. □

问题 8.0.22: http://math.stackexchange.com/questions/1125691

让 $A = (a_{ij})$ 为一 $n \times n$ 实矩阵, $b \in \mathbb{R}^n$, 并有 $\|A - I\|_2 < 1$, 证明映射 $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x - Ax + b$ 是压缩映射, 其中距离定义为普通 Euclid 距离.

解. $Tx = b - (A-I)x$, 所以 $Tx - Ty = (A-I)(y-x)$, 又因为 $\|A-I\|_2 < 1$, 所以存在 $\alpha \in (0,1)$ 使 $\|A-I\|_2 \le \alpha < 1$,

$$\|Tx - Ty\| \le \|A-I\|_2 \cdot \|y-x\| < \alpha\|y-x\|.$$

所以 T 是压缩映射. □

问题 8.0.23: http://math.stackexchange.com/questions/1124660

让(S,ρ)为一紧距离空间, 映射$T: S \to S$使对于任意$x \neq y$, 有$\rho(Tx, Ty) < \rho(x,y)$. 证明: $\phi(x) = \rho(x, Tx)$连续, 且T有唯一不动点.

解. 因$|\rho(x,Tx) - \rho(y,Ty)| \le \rho(x,y) + \rho(Tx,Ty) < 2\rho(x,y)$, 所以$\phi(x)$连续. 任取$x \in S$, 构造点列$\{T^n x\}$, 并利用$S$的紧性. 唯一性用反证法. □

Chapter 9

复变函数

问题 9.0.1: http://math.stackexchange.com/questions/294383

求$\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

解. 留数法. 首先

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{x-\sinh x}{x^2\sinh x}\,\mathrm{d}x.$$

被积函数记为$f(x)$, $f(x)$是奇函数, 故

$$LHS=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-\sinh x}{x^2\sinh x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left(\frac{x-\sinh x}{x^2\sinh x},\mathrm{i}n\pi\right)=-\frac{\ln 2}{2}.$$

另见13.0.19. □

问题 9.0.2

区域D内单叶解析函数$f(z)$的导数必不为零.

Chapter 10

初等数论

问题 10.0.1

求所有的多项式$f(x)$, 满足$f(x^2+1)=f^2(x)+1$, 且$f(0)=0$.

解. 求导并让$x=0$. □

解. 定义数列$\{x_n\}$为$x_0=0$, $x_{n+1}=x_n^2+1$, 则$f(x)-x=0$有无穷多个根$\{x_n\}$. □

问题 10.0.2

设$f(x)\in\mathbb{R}[x]$, 如果对任意实数x有$f(x)\geq 0$, 则$f(x)$是两个实系数多项式的平方和.

解. 由于$f=\prod_{b,c}\left[(x-b)^2+c\right]$和$(x^2+y^2)(z^2+w^2)=(xz-yw)^2+(xw+yz)^2$. □

问题 10.0.3

证明多项式$x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-\cdots-2nx+(2n+1)$没有实根.

解. 当$x\leq 0$时, $f(x)=x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-\cdots-2nx+(2n+1)>0$; 若$x>0$, $(1+x)f(x)=f(x)+xf(x)=x\frac{x^{2n+1}+1}{x+1}+2n+1>0$, 所以对$x>0$时亦有$f(x)>0$. □

问题 10.0.4

设$f(x)$是一个整系数多项式, 首项系数为1, 且$f(0)\neq 0$. 若$f(x)$仅有一个单根α使得$|\alpha|\geq 1$, 则$f(x)$在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 反证, $f=gh$, 设$h(\alpha)=0$, 则$|g(0)|\geq 1$是其根的模之积, 又小于1, 矛盾. □

问题 10.0.5

设$a_1,\cdots,a_n$是互不相同的整数, 证明: 多项式

$$(x-a_1)\cdots(x-a_n)-1$$

在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 反证, $f=gh$, 因$f(a_i)=-1$, 知$g(a_i)+h(a_i)=0$, 由次数限制而导致矛盾. □

问题 10.0.6

给定$2n$个互不相同的复数$a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$, 将其按下列规则填入$n\times n$方格中: 第$i$行第$j$列相交处方格内填$a_i+b_j$, $(i,j=1,\cdots,n)$, 证明: 若各列数乘积相等, 则各行数的积也相等.

解. 设各列的积都为c, 则$f(x)=(x+a_1)\cdots(x+a_n)-c$, 有$n$个根$b_1,\cdots,b_n$. 所以$f(x)=\prod_j(x-b_j)$, 所以$f(-a_i)=(-1)^n\prod_j(a_i+b_j)=-c$, 即$\prod_j(a_i+b_j)=(-1)^{n+1}c$, $(\forall i)$. □

问题 10.0.7

设a,b,c为整数, $abc\neq 0$, 求证:

$$[(a,b),(b,c),(c,a)]=([a,b],[b,c],[c,a]).$$

问题 10.0.8

设$\{F_n\}$是符合$F_1=F_2=1$的裴波那契数列, 若$(m,n)=d$, 则$(F_m,F_n)=F_d$; 反之, 若$(F_m,F_n)=F_d$, 则$d=(m,n)$或$d=1$, $(m,n)=2$或$d=2$, $(m,n)=1$.

解. 先证$F_q=F_kF_{q-k+1}+F_{k-1}F_{q-k}$, 后证$m=nq+r$, $q\geq 0$, $1\leq r\leq n-1$时, $(F_m,F_n)=(F_n,F_r)$, 即$(F_m,F_n)=F_{(m,n)}$, 于是$F_d=F_{(m,n)}$的解即为结论的三种情况. □

问题 10.0.9

当a,b满足什么条件时, $3\mid n(an+1)(bn+1)$对任意n成立.

解. 根据同余理论, 只需让n分别取$1,2,3$分别代入上式, 可得$3\mid ab+1$, 即$ab\equiv 2 \pmod 3$ □

问题 10.0.10

a,b正整数, $d=(a,b)$, 证$S=\{ma+nb\}$, (m,n遍历正整数)包含d的大于ab的所有倍数.

解. 设$t>ab$是d的倍数且$ax+by=t$, 由Bézout等式, 左式有解$x=x_0+br$, $y=y_0-ar$, 调整r使$0<x<b$, 得$-\frac{x_0}{b}<r<\frac{b-x_0}{b}$, 于是$y=y_0-ar>y_0-a\frac{b-x_0}{b}=\frac{t-ab}{b}>0$. □

问题 10.0.11

$4k-1$形素数无穷.

解. 反证: $p_1,p_2,\cdots,p_r$为r个有限$4k-1$形素数, 考虑$p_1^2p_2^2\cdots p_r^2-1$的因子中必有$4k-1$形素因子. 另外也可考虑$4p_1p_2\cdots p_r-1$. □

问题 10.0.12

$6k-1$形素数无穷.

解. 想法同上, 考虑$6p_1p_2\cdots p_r-1$中必有$6k-1$形素数, 却不是$p_1,p_2,\cdots p_r$中的一个. □

问题 10.0.13

$4k+1$形素数无穷.

解. $4(p_1p_2\cdots p_r)^2+1$的素因子均可写成$4k+1$形素数, 但不是$p_1,\cdots,p_r$中的任一个. □

问题 10.0.14

假设自然数N有形如$4n-1$的因子, 则N必有形如$4n-1$的素因子.

问题 10.0.15

对每个素数$p=4n-1$和整数a, p^2不可能整除a^2+1.

解. 反证, 若$p^2\mid a^2+1$, $a^2\equiv -1\pmod{p^2}$, 说明a的阶等于4. a可以看成群$\mathbb{Z}_{p^2}^*$中的元素, 由Euler定理, 群$\mathbb{Z}_{p^2}^*$的阶为$p(p-1)=2(4n-1)(2n-1)$. 在由Cauchy定理, 群中元素的阶必整除群的阶, 所以有$4\mid 2(4n-1)(2n-1)$. 矛盾. □

问题 10.0.16

证明a^2+1没有$4n-1$的因子, a,n是任何正整数.

解. 假设自然数$N=a^2+1$有形如$4n-1$形因子, 则由问题10.0.14知N必有形如$4n-1$的素因子, 记为p. 而N可以写成两个整数的平方和($N=a^2+1^2$), 所以由问题13.0.21知N的素因子分解中p出现次数为偶数. 从而必有p^2整除$N=a^2+1$, 与问题10.0.15矛盾. 所以N不可能有形如$4n-1$的因子. □

问题 10.0.17

a,b正整数, $a+b=57$, $[a,b]=680$, 求a,b.

解. 用$(a,b)[a,b]=ab=(a+b,b)[a,b]$, 所以$(57,b)\cdot 680=ab$, 然后$57=3\times 19$, 分四种情况讨论$(57,b)$的值, 并计算出$ab$的值联合$a+b$的值用Vieta定理. □

问题 10.0.18

$a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $a-c\mid ab+cd$, 则$a-c\mid ad+bc$.

问题 10.0.19

$a,b\in\mathbb{Z}$且$\frac{b+1}{a}+\frac{a+1}{b}\in\mathbb{Z}$, 则$(a,b)\le\sqrt{a+b}$.

问题 10.0.20

a,b为大于1的正整数, $(a,b)=1$, 则有唯一一对整数r,s使得$ar-bs=1$, 且$0<r<b$, $0<s<a$.

问题 10.0.21

q-进表示n中. $n=\sum_{i=0}^k a_iq^i$, 有$a_i=\left[\frac{n}{q^i}\right]-q\left[\frac{n}{q^{i+1}}\right]$.

问题 10.0.22

$p^{\alpha_p}\|n!$, 则$\alpha_p=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]$, 设$n=\sum_{i=0}^k a_iq^i$, 则$a_i=\left[\frac{n}{q^i}\right]-q\left[\frac{n}{q^{i+1}}\right]$. 而$S_p(n)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i=(n+\alpha_p)-q\alpha_p$, 所以$\alpha_p=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]=\frac{n-S_p(n)}{p-1}$. 其中$S_p(n)$为$n$的$p$-进展开的各个数字值之和.

问题 10.0.23

若2^m+1是素数, 则m是2的幂, 从而是Fermat数F_n.
$a,m>1$, a^m-1是素数, 则$a=2$且m是素数. 从而是梅森Mersenne数.

问题 10.0.24: 偶完全数

$\sigma(n)=2n$则称n是完全数, 证明偶完全数形如$2^k(2^{k+1}-1)$.

解. σ是积性函数, 设$n=2^p\cdot q$, 则$(2^{p+1}-1)\sigma(q)=2^{p+1}q$, 即$\frac{q}{\sigma(q)}=\frac{2^{p+1}-1}{2^{p+1}}$且$2^{p+1}-1\mid q$. 设$q=(2^{p+1}-1)k$.
(1). 若$2^{p+1}-1$是合数, q的最小质因子$p_1<2^{p+1}-1$, 所以$q=p_1^{\alpha_1}w$. 这与$\frac{q}{\sigma(q)}=\frac{p_1^{\alpha_1}w}{\sum_i p^i f(w)}<\frac{p_1}{p_1+1}<\frac{2^{p+1}-1}{2^{p+1}}$.
(2). 若$2^{p+1}-1$是素数, 若$k=1$, 命题显然成立. 否则$q=(2^{p+1}-1)^\alpha w$.

- 若$w=1$, $\alpha>1$, $\frac{q}{\sigma(q)}=\frac{(2^{p+1}-1)^\alpha}{\sum_i(2^{p+1}-1)^i}<\frac{2^{p+1}-1}{2^{p+1}}$. 这导致矛盾.
- 若$w>1$, 则$\frac{q}{\sigma(q)}=\frac{(2^{p+1}-1)^\alpha}{\sum_i(2^{p+1}-1)^i}\frac{w}{\sigma(w)}<\frac{2^{p+1}-1}{2^{p+1}}$, 又矛盾.

故$w=1$, $\alpha=1$. □

问题 10.0.25

若$m>2$, 则$\varphi(m)$是偶数.

解. 由Euler公式, $(-1)^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod m$. □

解. 若i与m互素, 则$m-i$与m也互素, 所以与m互素的数总是成对出现. 若有$i=m-i$, 这表明m是i的倍数, 则i不可能是与m互素的$\varphi(m)$个数的任一个. □

问题 10.0.26

设$a,b\in\mathbb{Z}$, 且p为素数, 若$a^p\equiv b^p \pmod p$, 则$a^p\equiv b^p \pmod{p^2}$.

解. Fermat定理$a\equiv b \pmod{()p}$, 所以$a\equiv b \pmod p$, 于是可设$a=b+mp$, 并用二项式定理证得. □

问题 10.0.27

设p是素数, $k\in\mathbb{N}_+$, 则

- $p|\binom{p}{k}$, $k=1,\cdots,p-1$.
- $\binom{p-1}{k}\equiv(-1)^k \pmod p$, $k=0,\cdots,p-1$.
- $\binom{k}{p}\equiv\left[\frac{k}{p}\right] \pmod p$.

解.

- $p|k\binom{p}{k}=p\binom{p-1}{k-1}$, $(k,p)=1$.
- $\binom{p}{k}-\binom{p-1}{k}=\binom{p-1}{k-1}\implies\binom{p-1}{k}\equiv-\binom{p-1}{k-1} \pmod p$, 用归纳法.
- $\binom{k}{p}=\frac{k(k-1)\cdots(k-p+1)}{p!}$, $k,k-1,\cdots,k-p+1$中必有p的倍数, 设为$k-i$,
  则$\binom{k}{p}=\frac{k-i}{p}\cdot\frac{k(k-1)\cdots(k-p+1)}{(k-i)(p-1)!}=\left[\frac{k}{p}\right]\frac{k(k-1)\cdots(k-p+1)}{k-i}\cdot\frac{1}{(p-1)!}\equiv\left[\frac{k}{p}\right]\frac{-1}{-1} \pmod p$.
  最后一步用Wilson公式.

□

问题 10.0.28

素数$p\geq 5$, 则$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(p-1)^2}\equiv 0 \pmod p$.

解. $1,2,\cdots,p-1$是模p的缩系. 所以$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{p-1}$也是模$p$的缩系. 故对$p\geq 5$有

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{1}{k}\right)^2\equiv\sum_{k=1}^{p-1}k^2=\frac{(p-1)p(2p-1)}{6}\equiv 0 \pmod p.$$

□

解. $\frac{1}{1},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{p-1}$是模$p$的缩系, 对任意$a$, $p\nmid a$, $\frac{a}{1},\frac{a}{2},\cdots,\frac{a}{p-1}$也是模$p$的缩系. 故

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left(a\cdot\frac{1}{k}\right)^2\equiv\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{1}{k}\right)^2 \pmod p\Longrightarrow (a^2-1)\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{1}{k}\right)^2\equiv 0 \pmod p.$$

对$p\geq 5$可取a满足$p\nmid a$且$p\nmid a^2-1$即得. □

问题 10.0.29

若 $p>3$, 证明

$$p^2\mid (p-1)!\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right).$$

解. 用10.0.28, 知

$$\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i(p-i)}\equiv\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{2}{i(p-i)}\equiv 0 \pmod p.$$

从而

$$(p-1)!\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{i}\equiv (p-1)!\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{p}{(p-i)i}\equiv 0 \pmod{p^2}.$$

□

解. 设

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-p+1)=x^{p-1}-s_1x^{p-2}+\cdots+s_{p-1}, \tag{10.1}$$

其中 $s_{p-1}=(p-1)!$, $s_{p-2}=(p-1)!\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right)$. 因

$$s_1x^{p-2}+\cdots+s_{p-2}x=(x-1)(x-2)\cdots(x-p+1)-x^{p-1}+1\equiv 0 \pmod p$$

有 $p-1$ 个根, 所以 $s_1,\cdots,s_{p-2}$ 都是 p 的倍数. 对10.1中取 $x=p$ 有

$$p^{p-2}-s_1p^{p-3}+\cdots+s_{p-3}p-s_{p-2}=0.$$

所以 $p^2\mid s_{p-2}$. □

问题 10.0.30

n是偶数, $a_1,\cdots,a_n$与$b_1,\cdots,b_n$都是模n的完系, 证$a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n$不是模n的完系.

解. 反证法, $\sum a_i\equiv\frac{n(n-1)}{2}\equiv\sum b_i \pmod n$, 若$a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n$是模$n$的完系. 则$\sum(a_i+b_i)\equiv\frac{n(n-1)}{2}$, 于是$n(n-1)\equiv\frac{n(n-1)}{2} \pmod n$, 由于$n(n-1)\equiv 0 \pmod n$, 故$\frac{n(n-1)}{2}\equiv 0 \pmod n$, 即$n|\frac{n(n-1)}{2}$, 但$(n,n-1)=1$, 所以$n|\frac{n}{2}$不可能. □

问题 10.0.31

设a,b为正整数, n是正整数, 证明

$$n! \mid b^{n-1}a(a+b)\cdots(a+(n-1)b).$$

解. 只需证对任意的素数p, 若$p^\alpha \| n!$, 则$p^\alpha \mid b^{n-1}a(a+b)\cdots(a+(n-1)b)$.

(1). 若$p \mid b$, 则由于$\alpha = \sum_{i\geq 1}\left[\frac{n}{p^i}\right] < \frac{n}{p-1} \leq n$, 所以$p^\alpha | b^{n-1}$.

(2). 若$p \nmid b$, 则$(p,b)=1$, 从而有$b_1 b \equiv 1 \pmod p$, 于是

$$b_1^n a(a+b)\cdots(a+(n-1)b) \equiv ab_1(ab_1+1)\cdots(ab_1+n-1) \pmod p.$$

由于$n! \mid ab_1(ab_1+1)\cdots(ab_1+n-1)$, 所以$p^\alpha \mid ab_1(ab_1+1)\cdots(ab_1+n-1)$. □

问题 10.0.32

设p是一个奇素数, 证明

- $1^2\cdot 3^2\cdots(p-2)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p$;
- $2^2\cdot 4^2\cdots(p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p$.

解. 用Wilson公式, 注意到$k \equiv -(p-k) \pmod p$. □

问题 10.0.33

求不定方程

$$(a^2 - b)(a + b^2) = (a + b)^2$$

的所有正整数解.

问题 10.0.34

设a, b, c, d为正整数, $ab = cd$. 证明: $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$不是素数.

解. 由$ab = cd$, 不妨设$a = us, b = vt, c = vs, d = ut$, 则

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = (u^4 + v^4)(s^4 + t^4)$$

不是素数. □

问题 10.0.35

设$n>1$是奇数, 若n的分解$n=uv$, 其中$0<u-v\le 4\sqrt[4]{n}$, 证明: n的这种分解是唯一的.

Chapter 11

Inequality

11.1 Elementary Inequality

问题 11.1.1

设$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + 1$有$n$个实根, 且系数$a_1, \cdots, a_{n-1}$都是非负的. 证明$f(2) \geq 3^n$.

问题 11.1.2: Ho Joo Lee

a, b, c是三个正实数, 证明:

$$a + b + c \leq \frac{a^2 + bc}{b + c} + \frac{b^2 + ca}{c + a} + \frac{c^2 + ab}{a + b}.$$

解. 不等式等价于$\sum\limits_{cyc} \frac{(a-c)(a-b)}{b+c} \geq 0$, 用Shur不等式15.6.1即得. □

问题 11.1.3

设正实数a, b, c的和为3. 证明:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{2a^2 + bc} + \frac{3}{2b^2 + ac} + \frac{3}{2c^2 + ab}.$$

解. 不等式等价于$\sum\limits_{cyc} \frac{(a-c)(a-b)}{2a^3+abc} \geq 0$, 用Shur不等式15.6.1即得. □

问题 11.1.4: Italian Winter Camp 2007

设a, b, c为三角形的三条边长, 证明:

$$\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}} \leq 3.$$

解.

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc}\left(1 - \frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\right) \geq 0 &\iff \sum_{cyc} \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \geq 0 \\
&\iff \sum_{cyc} \frac{\sqrt{ab}-\sqrt{c(a+b-c)}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a+b-c})} \geq 0 \\
&\iff \sum_{cyc} \frac{(c-a)(c-b)}{S_c} \geq 0.
\end{aligned}$$

其中

$$S_c = (\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a+b-c})(\sqrt{ab}+\sqrt{c(a+b-c)}),$$

不妨设$b \geq c$, 则

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c} \geq \sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}$$
$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a+b-c} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{c+a-b}$$
$$\sqrt{ab}+\sqrt{c(a+b-c)} \geq \sqrt{ca}+\sqrt{b(c+a-b)}.$$

所以$S_c \geq S_b$, 由Schur不等式推论15.6.1即得. □

问题 11.1.5: APMO 2007

正实数x, y, z满足$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$. 证明:

$$\frac{x^2+yz}{x\sqrt{2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{y\sqrt{2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{z\sqrt{2(x+y)}} \geq 1.$$

解. 先用幂平均不等式证明$\sum_{cyc}\sqrt{x+y} \geq \sqrt{2}$, 原不等式等价于$\sum_{cyc}\frac{x^2+yz}{x\sqrt{y+z}} \geq \sum_{cyc}\sqrt{x+y} \geq \sqrt{2}$. 而不等式左边部分又等价于证明$\sum_{cyc}\frac{(x-y)(x-z)}{x\sqrt{y+z}} \geq 0$. 当$x \geq y \geq z$时, 有$y\sqrt{x+z} \geq z\sqrt{x+y}$, 利用Schur不等式推论15.6.1即得. □

问题 11.1.6

设a, b, c为正实数, 证明:

$$\frac{a^2+2bc}{(b+c)^2}+\frac{b^2+2ac}{(a+c)^2}+\frac{c^2+2ab}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4}.$$

解. 原不等式等价于

$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)+(ab+bc+ca)}{(b+c)^2} \geq \frac{9}{4}.$$

即证

$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)^2} \geq 0, \quad \sum_{cyc}\frac{ab+bc+ca}{(b+c)^2}.$$

前者用Shur不等式, 后者是著名的Iran 96不等式. □

问题 11.1.7: Nguyen Van Thach

设a, b, c为正实数, 证明:

$$\sqrt{\frac{a^3+abc}{(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3+abc}{(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3+abc}{(a+b)^3}} \geq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

解. 注意到

$$\sqrt{\frac{a^3+abc}{(b+c)^3}}-\frac{a}{b+c}=\frac{\sqrt{a}(a-b)(a-c)}{(b+c)\sqrt{b+c}(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{a(b+c)})}.$$

所以原不等式等价于证明$\sum_{cyc}S_a(a-b)(b-c)$, 其中

$$S_a=\frac{\sqrt{a}}{(b+c)\sqrt{b+c}(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{a(b+c)})}.$$

不妨设$a \geq b \geq c$, 则由$\sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \sqrt{\frac{b}{c+a}}$, $(b+c)\sqrt{a^2+bc} \leq (a+c)\sqrt{b^2+ac}$, $(b+c)\sqrt{a(b+c)} \leq (a+c)\sqrt{b(a+c)}$. 知$S_a \geq S_b$. 根据Shur不等式的推论15.6.1即得证明. □

问题 11.1.8

设a,b,c,k为正实数, 证明:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a+k}{b+k}+\frac{b+k}{c+k}+\frac{c+k}{a+k}.$$

解. 不妨设$c=\min(a,b,c)$, 并注意

$$LHS-3=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-1\right)=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)(b-c)}{ac}.$$

□

问题 11.1.9

设a,b,c为正实数, 若$k\geq\max(a^2,b^2,c^2)$, 证明:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a^2+k}{b^2+k}+\frac{b^2+k}{c^2+k}+\frac{c^2+k}{a^2+k}.$$

解. 同11.1.8不妨设$c=\min(a,b,c)$, 只需证:

$$\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)(b-c)}{ac}\geq\frac{(a-b)^2(a+b)^2}{(a^2+k)(b^2+k)}+\frac{(a-c)(b-c)(a+c)(b+c)}{(a^2+k)(c^2+k)}.$$

所以只需由$k\geq\max(a^2,b^2,c^2)$来证:

$$\begin{cases}(a^2+k)(b^2+k)\geq ab(a+b)^2\\(a^2+k)(c^2+k)\geq ac(a+c)(b+c).\end{cases}$$

不等式的弱化见11.1.9. □

问题 11.1.10

设a,b,c为正实数, 若$k\geq\max(ab,bc,ca)$, 证明:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a^2+k}{b^2+k}+\frac{b^2+k}{c^2+k}+\frac{c^2+k}{a^2+k}.$$

解. 证法同11.1.9, 但更弱. □

问题 11.1.11

设a,b,c为正实数, 证明:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{8(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geq 11.$$

解. 由恒等式$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)(b-c)}{ac}$, 不妨设$c=\min(a,b,c)$. 原不等式可化为:

$$\frac{(a-b)^2(a+b)^2}{a^2b^2}+\frac{(c-a)(c-b)(c+a)(c+b)}{a^2c^2}-\frac{8(a-b)^2+8(c-a)(c-b)}{a^2+b^2+c^2}\geq 0.$$

易证$\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}\geq\frac{8}{a^2+b^2+c^2}$. 而

$$\frac{(c+a)(c+b)}{a^2c^2}\geq\frac{8}{a^2+b^2+c^2}\Longleftrightarrow(a+c)(c+b)(a^2+b^2+c^2)\geq(a+c)2c(a^2+c^2)\geq 4c^2(a^2+c^2)$$

所以只需证$a\geq c$时最后的不等式. □

问题 11.1.12: 2006年CMO

实数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2}$, $a_{k+1}=-a_k+\frac{1}{2-a_k}$, $k\in\mathbb{N}$, 证明:

$$\left(\frac{n}{2\sum_{i=1}^n a_i}-1\right)^n\le\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}\right)^n\prod_{i=1}^n\left(\frac{1}{a_i}-1\right).$$

解. 先用$y=-x+\frac{1}{2-x}$归纳证明$0<a_n\le\frac{1}{2}$. 则原命题等价于证明:

$$\left(\frac{n}{\sum a_i}\right)^n\left(\frac{n}{2\sum a_i}-1\right)^n\le\prod\left(\frac{1}{a_i}-1\right).$$

对函数$y=\ln\left(\frac{1}{x}-1\right)$用Jensen不等式, 有$\left(\frac{n}{\sum a_i}-1\right)^n\le\prod\left(\frac{1}{a_i}-1\right)$. 另外, 用Cauchy不等式证

$$\sum_{i=1}^n(1-a_i)=\sum\frac{1}{a_i+a_{i+1}}-n\ge\frac{n^2}{2\sum a_i}-n,$$

所以

$$\frac{n}{\sum a_i}-1=\frac{\sum(1-a_i)}{\sum a_i}\ge\frac{1}{\sum a_i}\left(\frac{n^2}{2\sum a_i}-n\right).$$

□

11.2 Analysis

问题 11.2.1

求证积分形式的Holder不等式与Minkowski不等式.

$$\|x(t)y(t)\|_1\le\|x(t)\|_p\cdot\|y(t)\|_q,$$

其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p>1$且$x\in L^p[a,b]$, $y\in L^q[a,b]$;

$$\|x\pm y\|_p\le\|x\|_p+\|y\|_p,$$

其中$p\ge1$, $x(t),y(t)\in L^p[a,b]$.

解. (1). 若$\|x(t)\|_p=0$或$\|y(t)\|_q=0$, 则$x(t)y(t)=0, a.e. x\in[a,b]$, 不等式显然. 否则令$A=\frac{|x(t)|}{\|x(t)\|_p}$, $B=\frac{|y(t)|}{\|y(t)\|_q}$. 由Young不等式$AB\le\frac{A^p}{p}+\frac{B^q}{q}$, 两边积分即得.

(2). 若$p=1$, 则用绝对值的三角不等式. 若$p>1$,

$$\begin{aligned}\|x\pm y\|_p^p&\le\||x\pm y|^{p-1}\cdot(|x|+|y|)\|_1=\||x|\cdot|x\pm y|^{p-1}\|_1+\||y|\cdot|x\pm y|^{p-1}\|_1\\&\le\|x\|_p\cdot\||x\pm y|^{p-1}\|_q+\|y\|_p\cdot\||x\pm y|^{p-1}\|_q\\&=(\|x\|_p+\|y\|_p)\cdot\|x\pm y\|_{(p-1)q}^{p-1}=(\|x\|_p+\|y\|_p)\cdot\|x\pm y\|_p^{p-1}.\end{aligned}$$

即得. □

Chapter 12

神奇的反例

问题 12.0.1: http://math.stackexchange.com/questions/2190498

给出如下论断的反例.
存在$x_0 \in [a,b]$使函数项级数的和函数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$收敛到$f(x)$, 在$[a,b]$上$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$收敛到$g(x)$. 则$f' = g$

解. 定义$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$为

$$f_n(x) = n(n+1)(n+2)\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right).$$

则f_n在$[0,1)$上点态收敛到0, 且$f_n(1) = n$. 其导数$f_n'(x) = n(n+1)(n+2)x^n(1-x)$, 在$[0,1]$上逐点收敛到0. □

问题 12.0.2: http://math.stackexchange.com/questions/294383

给出一个积分号下不能求导的例子.

解. 令$F(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-sx}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$, 则

$$F''(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-sx}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\psi'\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s\right) - \frac{1}{2s}$$

积分一次, $F'(s)$的常数项不能确定是有限值, 且积分两次后的特解使$F(0) = \frac{\log \pi}{2}$与正确的$F(0) = -\frac{\log 2}{2}$不同. □

问题 12.0.3: http://math.stackexchange.com/questions/494145

给出一个不能逐项求导的收敛级数.

解. 定义$u_k(x)$为

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

则$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = 0$. 若逐项求导则有

$$\sum_{k=1}^{n} u_k'(x) = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

其和在$x = 0$处发散 □

Chapter 13

未知的问题与解答

未知 13.0.1: 印度, 巴斯卡拉

当$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$时, 有$\sin x \approx \frac{16x(\pi-x)}{5\pi^2-4x(\pi-x)}$.

未知 13.0.2: 柏拉图体, 正多面体

未知 13.0.3: 阿基米德体, 半正多面体

未知 13.0.4

置换$P(\nu)$的循环结构为$(\nu) = (1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \cdots m^{\nu_m})$, 在$S_n$群中属于与$P(\nu)$共轭的置换数目为

$$N(P) = \frac{n!}{\prod_i (i^{\nu_i} \nu_i!)}$$

未知 13.0.5

正整数列(v_i)满足$\sum_i iv_i = n$, 则$\prod_i i^{v_i} v_i! \mid n!$

未知 13.0.6

设$f(x) \in C[0, +\infty)$, 且对任何非负实数a, 有

$$\lim_{x\to\infty} (f(x+a) - f(x)) = 0.$$

证明: 存在$g(x) \in C[0, +\infty)$和$h(x) \in C^1[0, +\infty)$, 使得: $f(x) = g(x) + h(x)$, 且满足

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} h'(x) = 0.$$

未知 13.0.7

设p是奇素数, 将$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}$写成最简分数$A_p/B_p$.

(a) 求$A_p \pmod p$的值.

(b) 给出$A_p \pmod{p^2}$的值.

未知 13.0.8

设m是正整数, $a_1, a_2, \cdots, a_{\phi(m)}$是1与$m$之间且与$m$互素的整数, 记

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{\phi(m)}}$$

的最简分数为A_m/B_m.

(a) 求$A_m \pmod m$的值.

(b) 求$A_m \pmod{m^2}$的值.

未知 13.0.9: Hardy-Ramanujan asymptotic

整数n的分划函数$p(n)$有如下渐近公式

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \mathrm{e}^{\pi\sqrt{2n/3}}.$$

未知 13.0.10: Fubini's Theorem

未知 13.0.11: Tonelli's Theorem

未知 13.0.12: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设函数$f(x,y)$在闭圆域$D=\{(x,y)|x^2+y^2 \le R^2, R>0\}$上有连续偏导数, 而且$f\left(\frac{R}{2},0\right)=f\left(0,\frac{R}{2}\right)$. 证明: 在$D$的内部至少存在两点$(x_1,y_1)$和$(x_2,y_2)$, 使

$$x_i f_y'(x_i,y_i) - y_i f_x'(x_i,y_i) = 0, i=1,2.$$

未知 13.0.13: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设在$[a,b]$上, $f''(x) \neq 0$, $f(a)=f(b)=0$, 且有$x_0 \in (a,b)$, 使$y_0=f(x_0)>0$, $f'(x_0)=0$. 证明:

(1) 存在$x_1 \in (a,x_0)$及$x_2 \in (x_0,b)$, 使$f(x_1)=f(x_2)=\frac{y_0}{2}$;

(2) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < y_0(x_2-x_1)$.

未知 13.0.14

已知对于任意的$a_1,a_2,\cdots,a_n \in [p,q]$, $p>0$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \le n^2 + \frac{k(p-q)^2}{4pq},$$

其中,

$$k=\begin{cases} n^2-1, & n \text{ 是奇数;} \\ n^2, & n \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

未知 13.0.15: http://math.stackexchange.com/questions/66473

a Fourier series $\sum c_n e^{2\pi inx}$ to be k-fold termwise differentiable is for the Fourier coefficients to be "appropriately small" in the following sense: if

$$\sum |c_n| \cdot |n|^k < \infty$$

holds for some k, then then function represented by the Fourier series will be k-times differentiable, and will be differentiable termwise. If this holds for all k, then the function is smooth.

未知 13.0.16: http://math.stackexchange.com/questions/1992808

已知$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$存在有限,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

能否逐项求导?

未知 13.0.17: http://math.stackexchange.com/questions/420878

John B. Conway's 'Function of one complex variable', Proposition 2.5.

未知 13.0.18: http://math.stackexchange.com/questions/1922228

定理 13.0.1

f_n在区域D上序列解析(sequence analytic), 若f_n在D的任一紧子集上一致收敛, 则f_n在D上解析

于是

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

在$\mathbb{C}$上解析.

推论 13.0.1

若幂级数在z_0为圆心, R为半径的圆盘上收敛, 则幂级数在其收敛域内的任一子集上一致收敛.

定理 13.0.2

f_n是区域D上的序列, 若$\sum f_n$在D上收敛, 且在D内任一紧子集上一致收敛, 则$\sum f_n$在D上解析且可逐项求导.

未知 13.0.19: http://math.stackexchange.com/questions/294383

求$\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\,dx$.

解. 重积分法, 利用Laplace变换: $\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}$.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty t\int_0^\infty\frac{2x\mathrm{e}^{-x}-1+\mathrm{e}^{-2x}}{1-\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty t\int_0^\infty(2x\mathrm{e}^{-x}-1+\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{e}^{-xt}\sum_{n=0}^\infty\mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty t\sum_{n=1}^\infty\left(-\frac{1}{2n+t}+\frac{2}{(2n+t+1)^2}+\frac{1}{2n+t+2}\right)\mathrm{d}t+\log 2-1\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{2n}{2n+t}+\frac{2t}{(2n+t+1)^2}-\frac{2(n+1)}{2n+t+2}\right)\mathrm{d}t+\log 2-1\\ &= \log 2-1-\sum_{n=1}^\infty\left(1+n\ln n+\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)-(n+1)\ln(n+1)\right)=-\frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

另外留数法见9.0.1. □

未知 13.0.20

对于任意给定的正奇数n, 对于任意正有理数r, 都存在正整数a,b,c,d满足$r=\frac{a^n+b^n}{c^n+d^n}$. 强化版见2.3.6.

未知 13.0.21

一个自然数N可以写成两个整数的平方和当且仅当N的素因子分解中每个可以写成$4n-1$的素数出现次数为偶数.

解. 抽象代数有证明, 主要工具是环理论. □

未知 13.0.22

Fermat数$F_n=2^{2^n}+1$, $n\geq 5$时是否有素数? 未发现素数.
1801年Gauss证明: 正N边形可尺规作图当且仅当$N=2^e p_1\cdots p_s$, p_i是Fermat素数.

未知 13.0.23

设a,b为正整数且$(a,b)=1$. 证明对于给定的$n>ab-a-b$, 方程$ax+by=n$有非负整数解, 且$n=ab-a-b$时没有非负整数解.

未知 13.0.24: http://math.stackexchange.com/questions/428663/closed-form-of-sum-limits-i-1n-k1-i-or-asymptotic-equivalent-when-n-to#

$$\sum_{i=1}^n k^{\frac{1}{i}}=n+\ln(k)\ln(n)+\gamma\ln(k)+\sum_{r=2}^\infty\frac{\zeta(r)\ln(k)^r}{r!}+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

未知 13.0.25: http://tieba.baidu.com/p/4819379251

求所有符合条件的x,y,z.

$$x+y+z=x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3.$$

未知 13.0.26: 陈计的不等式

设$x, y, z \in \mathbb{R}^+$. 求证:

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right)\ge\frac{9}{4}.$$

解. 因为

$$\begin{aligned}&4\sum_{cyc}yz\left(\sum_{cyc}(x+y)^2(z+x)^2\right)-9\prod_{cyc}(y+z)^2\\&=\sum_{cyc}yz(y-z)^2(4y^2+7yz+4z^2)+\frac{xyz}{x+y+z}\sum_{cyc}(y-z)^2(2yz+(y+z-x)^2)\ge 0.\end{aligned}$$

□

未知 13.0.27: http://tieba.baidu.com/p/4005256822 18届东令营第3题 2003CMO3

设$x_i \in \mathbb{R}^+(i=1,2,\cdots,n)$且$x_1x_2\cdots x_n=1$, n给定$(n\ge 1)$. 求最小正数λ使得

$$\lambda \ge \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+2x_i}}$$

恒成立.

未知 13.0.28: http://tieba.baidu.com/p/4811340691

设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是正实数, 求证:

$$x_1^3+\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^3\le\frac{27}{8}(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3).$$

解. 由Holder不等式$(a_i, b_i, c_i \ge 0)$

$$(a_1^3+\cdots+a_n^3)(b_1^3+\cdots+b_n^3)(c_1^3+\cdots+c_n^3)\ge(a_1b_1c_1+\cdots+a_nb_nc_n)^3$$

得

$$\left(\sum_{j=1}^{k}\left(j-\frac{1}{2}\right)^{2/3}x_j^3\right)\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\left(j-\frac{1}{2}\right)^{1/3}}\right)^2\ge\left(\sum_{j=1}^{k}x_j\right)^3.$$

两边同时除以k^3, 求和有

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}\right)^3\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{1/3}}\right)^2\left(\sum_{j=1}^{k}\left(j-\frac{1}{2}\right)^{2/3}x_j^3\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}\left(j-\frac{1}{2}\right)^{2/3}x_j^3\frac{1}{k^3}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{1/3}}\right)^2$$

由于

$$\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k^3}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{1/3}}\right)^2<\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k^3}\left(\int_0^k\frac{1}{x^{1/3}}\,\mathrm{d}x\right)^2=\sum_{k=j}^{n}\frac{9}{4k^{5/3}}<\int_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\frac{9}{4x^{5/3}}\,\mathrm{d}x<\frac{27}{8\left(j-\frac{1}{2}\right)^{2/3}}.$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}\right)^3<\frac{27}{8}\sum_{k=1}^{n}x_j^3$$

□

未知 13.0.29: http://tieba.baidu.com/p/4740384715

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{5}}}{1+\frac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{1+\frac{\mathrm{e}^{-4\pi}}{1+\frac{\mathrm{e}^{-6\pi}}{1+\cdots}}}}.$$

未知 13.0.30

设a,b,c是三角形的三边长, 证明:

$$4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq 9+\frac{a^2+c^2}{c^2+b^2}+\frac{c^2+b^2}{b^2+a^2}+\frac{b^2+a^2}{a^2+c^2}.$$

未知 13.0.31: http://tieba.baidu.com/p/4850101496

1. 有界闭区间$[a,b]$上函数$f(x)$满足对任意$x,y\in[a,b]$, $\lambda\in(0,1)$都有$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$. 求证$f(x)$在$[a,b]$上有界.
2. 设$f(x)$在0附近有2阶连续导数, 且$f''(0)\neq 0$.
(1) 求证$|x|$充分小时, 对任意这样的x, 存在唯一$\theta\in(0,1)$使得$f(x)=f(0)+f'(\theta x)x$.
(2) 求$\lim\limits_{x\to 0}\theta$.

解. 2.(2) $f'(\theta x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$, 所以$\frac{f'(\theta x)-f'(0)}{x}=\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}$, 两边令$x\to 0$, 右侧用罗比达法则. $\lim\limits_{x\to 0}\theta=\frac{1}{2}$ □

未知 13.0.32: http://tieba.baidu.com/p/4849247837

已知关于x的方程$x^3-4x^2+6x+c=0$有三个实根r,s,t, 且

$$\frac{1}{r^2+s^2}+\frac{1}{s^2+t^2}+\frac{1}{t^2+r^2}=1,$$

求正数c的值.

未知 13.0.33: http://tieba.baidu.com/p/4850318851

试举出反例: 函数$f(x)$在$x=x_0$处可导与如下几个式子存在不等价:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h},\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0+h)}{h},\quad \lim_{n\to\infty}n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x0)\right]$$

未知 13.0.34: http://tieba.baidu.com/p/4846868296

三角形ABC中, 求证:

$$\prod_{cyc}\cos A\leq\frac{1}{8}\cot\frac{\pi^3}{27}\tan(ABC)\leq\prod_{cyc}\sin\frac{A}{2}.$$

Chapter 14

拓扑

问题 14.0.1

证明: A'为闭集.

解. $(A')' \subset A'$, 从而A'为闭集. □

问题 14.0.2

设$A \subset \mathbb{R}$, 求证:

(I) A°是A的最大开子集.

(II) A^-是含A的最小闭集.

解. (I). $\bigcup\{G : G开且G \subset A\} = E$, 因$A^\circ$开且$A^\circ \subset A$, 所以$A^\circ \subset E$, 若$x \in E$, 则有$G$开, $x \in G \subset A$. 所以存在x的开邻域$U(x) \subset G \subset A$, 所以$x \in A^\circ$, 所以$E \subset A^\circ$, 于是$E = A^\circ$.

(II). $\bigcap\{F : F闭且F \supset A\} = E$. 因$A^-$闭且$A^- \supset A$, 所以$A^- \supset E$. 另外若$F$闭且$F \supset A$, 则$F = F^- \supset A^-$, 所以$A^- \subset E$, 于是$A^- = E$. □

问题 14.0.3

G是$\mathbb{R}$中开集, $G \cap A = \emptyset$, 求证: $G \cap A^- = \emptyset$.

解. G^c闭且$A \subset G^c$, 所以$A^- \subset G^c$, 从而$G \cap A^- = \emptyset$. □

问题 14.0.4

求证:

(I) $\mathbb{R}$中闭集必为可列开集的交.

(II) $\mathbb{R}$中开集闭为可列闭集的并.

解. (I). 设A闭于$\mathbb{R}$. $A_n = \bigcup_{x \in A} V_{\frac{1}{n}}(x)$, $(n = 1, 2, \cdots)$, 则$A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. 用反证法证$A \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 取$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $x_0 \notin A$. 由A闭. 存在n_0使得$V_{\frac{1}{n_0}}(x_0) \cap A = \emptyset$. 所以$x_0 \notin A_{n_0}$, 矛盾.

(II). 由(I), G开于$\mathbb{R}$, 则G^c闭于$\mathbb{R}$... □

问题 14.0.5

$A \subset \mathbb{R}$, 求证: $A - A'$至多可列.

解. (好像有问题)由聚点定理, $x \in A - A'$等价于存在$\varepsilon_x > 0$使得$A \cap (V_{\varepsilon_x}(x) - \{x\}) = \emptyset$, 且当$x, y \in A - A'$, $x \neq y$时, 应有$V_{\varepsilon_x}(x) \cap V_{\varepsilon_y}(y) = \emptyset$. 反之亦是. 记
$$G = \{V_{\varepsilon_x}(x) : x \in A - A'\},$$
则$G \sim A - A'$且G至多可列. □

问题 14.0.6

设开集族$\mathscr{F} = \{G : G为\mathbb{R}中开集\}$, 证明: 存在$\{G_\lambda\}_{\lambda=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$且有
$$\cup\{G \in \mathscr{F}\} = \cup\{G_\lambda : \lambda \in \mathbb{N}_+\}$$

解. 证明同7.0.5. □

问题 14.0.7

证明:

(1) $\mathbb{R}$上闭区间$[a, b]$不能表成两不相交非空闭集的并集.

(2) $\mathbb{R}$上开区间(a, b)不能表成两不相交非空开集的并集.

解. (1). 反证. $[a, b] = F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, F_1, F_2非空, 则$\exists x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$, 使得$|x_1 - x_2| = d(F_1, F_2) > 0$, 取$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \in [a, b]$, 不妨$x \in F_1$, 则$d(F_1, F_2) \leq |x - x_2| = \frac{1}{2}d(F_1, F_2)$, 矛盾.

(2). 反证. $(a, b) = G_1 \cup G_2$, G_1, G_2非空开, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, 取$a_1 \in G_1$, $b_1 \in G_2$, $a_1 < b_1$, 作$F_1 = [a_1, b_1] - G_1$, $F_2 = [a_1, b_1] - G_2$, 则F_1, F_2非空闭, 且$F_1 \cup F_2 = [a_1, b_1]$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, 与(1)矛盾. □

问题 14.0.8

设(X, ρ)是度量空间, 映射$T : X \to X$满足$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y) (\forall x \neq y)$并已知$T$有不动点. 求证不动点唯一.

问题 14.0.9

设T是度量空间上的压缩映射, 求证T是连续的.

问题 14.0.10

$X = [0, 1) \subset \mathbb{R}$, $\mathscr{T} = \{\emptyset\} \cup \{[0, \alpha) : 0 < \alpha \leq 1\}$, 求证: $(X, \mathscr{T})$是拓扑空间.

问题 14.0.11

设$\mathscr{C}$是X的一个子集类, 记
$$\chi_c = \cap\{\chi : \mathscr{C} \subset \chi, \chi是X的拓扑\}.$$
求证: χ_c是X的拓扑, 且它是使$\mathscr{C}$中成员都成为开集的X的最弱拓扑.

问题 14.0.12

设$A \subset (X, \chi)$, 求证: A°是开集, 且是包含于A的最大开集; A^-是闭集且是包含A的最小闭集.

问题 14.0.13

$A, B \subset (X, \chi)$, 求证: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

解. 用$A \subset B$得$\overline{A} \subset \overline{B}$, 证$\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$, 另一方面, $\overline{A}, \overline{B}$均是闭集, $\overline{A} \cup \overline{B}$闭, 所以$A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, 从而$\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. □

解. 用$(A\cup B)'=A'\cup B'$. $\square$

问题 14.0.14

求证: Hausdorff空间中任一单点集闭.

解. $(X,\mathscr{X})$是Hausdorff空间, $x_0\in X$, $\forall x(\in X)\neq x_0$, G_x为x的不含x_0的开邻域, 则$\{x_0\}^c=\cup_{x\neq x_0}G_x$. $\square$

解. 由分离性, $\forall x(\in X)\neq x_0$, $x\notin\{x_0\}'$, 所以$\overline{\{x_0\}}=\{x_0\}$. $\square$

问题 14.0.15

求证: $(X,\mathscr{X})$是Hausdorff空间的充要条件是X的任一单点集$\{x\}$是x的全体邻域的交.

解. 必要性用14.0.14, 由$\bigcap_{G\in\mathscr{X}}G\subset\bigcap_{G\in\mathscr{X}}\overline{G}$, 所以$\forall x\in X$, x的一切闭邻域的交也是$\{x\}$, $\forall y(\neq x)\in X$, 有x的闭邻域$V(x)$, $y\notin V(x)$, 即$y\in V^c(x)$, 于是有x的邻域$V(x)$及y的邻域$V^c(x)$使$V(x)\cap V^c(x)=\emptyset$, 从而$(X,\mathscr{X})$是Hausdorff空间. $\square$

问题 14.0.16

求证: Hausdorff空间中的子集A的导集A'必是闭集.

解. 若$x_0\in(A')'$, 则x_0的任何开邻域$V(x_0)$有$y\in A'\cap(V(x_0)-\{x_0\})\neq\emptyset$. 由分离性及$V(x_0)$开, 存在$y$的邻域$G_y$使$y\in G_y\subset V(x_0)-\{x_0\}$, 而$\emptyset\neq A\cap(G_y-\{y\})\subset A\cap(V(x_0)-\{x_0\})$, 即$x_0\in A'$. $\square$

解. 若$x_0\notin A'$, 则有x_0开邻域$V(x_0)$使$A\cap(V(x_0)-\{x_0\})=\emptyset$. 由$\{x_0\}$闭和空间分离性14.0.14, 知$V(x_0)-\{x_0\}$开, 从而$\forall x\in V(x_0)-\{x_0\}$, $x\notin A'$, 所以$V(x_0)\cap A'=\emptyset$, 从而A'^c开. $\square$

问题 14.0.17

X,Y都是拓扑空间, $F:X\to Y$, 求证: F连续的充要条件是$\forall A\subset X$有$F(\overline{A})\subset\overline{F(A)}$.

解. 必要性: 用$A\subset F^{-1}(F(A))\subset F^{-1}(\overline{F(A)})$闭.
充分性: B在Y中闭, 由$F(F^{-1}(B))\subset B$, 所以

$$F(\overline{F^{-1}(B)})\subset\overline{F(F^{-1}(B))}\subset B\Longrightarrow\overline{F^{-1}(B)}\subset F^{-1}(B)\text{闭}.$$

即得. $\square$

问题 14.0.18

X,Y都是拓扑空间, $F:X\to Y$, 求证: F连续的充要条件是$\forall B\subset Y$有$\overline{F^{-1}(B)}\subset F^{-1}(\overline{B})$.

解. 只证充分性, Y中闭集B, 有$\overline{F^{-1}(B)}\subset F^{-1}(B)$, 即闭集原像闭, 故$F$连续. $\square$

问题 14.0.19

$\mathscr{X},\mathscr{Y}$是X上两个拓扑, 且$\mathscr{X}\subset\mathscr{Y}$, 求证: 若$A$在$(X,\mathscr{X})$中闭, 则$A$在$(X,\mathscr{Y})$中闭, 即弱闭集必为强闭集.

问题 14.0.20

设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 为 X 上的两个拓扑, 求证: $\mathscr{Y}\subset\mathscr{X}$ 的充要条件是恒等映射 $I:(X,\mathscr{X})\to(X,\mathscr{Y})$连续.

问题 14.0.21

若 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是 X 上两个拓扑, 且 $\mathscr{X}\subset\mathscr{Y}$, 求证: 若 A 为 $(X,\mathscr{Y})$ 中紧集, 则 A 必为 $(X,\mathscr{X})$ 中紧集, 即强紧集必为紧集.

问题 14.0.22

设 $X=A\cup B$ 且 A,B 闭于 $(X,\mathscr{X})$, 若 $f:A\to(Y,\mathscr{Y})$ 与 $g:B\to(Y,\mathscr{Y})$ 都连续, 且 $f|_{A\cap B}=g|_{A\cap B}$, 求证 f,g 是同一连续映射 $h:(X,\mathscr{X})\to(Y,\mathscr{Y})$ 在 A,B 上的限制.

解. 令 $h:X\to Y$,

$$h(x)=\begin{cases}f(x), & x\in A\\ g(x), & x\in A^c\end{cases}$$

所以只需证 h 连续, 即证 $\forall D\subset X$ 有 $h(\overline{D})\subset\overline{h(D)}$. 因

$$\begin{aligned}h(\overline{D})&=h(\overline{(D\cap A)\cup(D\cap B)})=h((\overline{D\cap A})\cup(\overline{D\cap B}))\\&\subset f(\overline{D\cap A})\cup g(\overline{D\cap B})\subset\overline{f(D\cap A)}\cup\overline{g(D\cap B)}\\&=\overline{f(D\cap A)\cup g(D\cap B)}=\overline{h(D\cap A)\cup h(D\cap B)}\\&=\overline{h((D\cap A)\cup(D\cap B))}=\overline{h(D)}\end{aligned}$$

即得.

同样, 把 A,B 改成都为 X 中开集, 命题仍成立. 反之, 若 A,B 都不是闭(或开)集, 有如下反例 $X=Y=\mathbb{R}$且赋予普通拓扑. 设$A=\mathbb{Q}$, $B=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $f(x)=0,\forall x\in A$, $g(x)=1,\forall x\in B$. □

问题 14.0.23

定义 $F:(X,\mathscr{X})\to(Y,\mathscr{Y})$, 若$\forall G\in\mathscr{X}$, $F(G)\in\mathscr{Y}$, 称 F 为开映射. 求证:

(1) $F:(X,\mathscr{X})\to(Y,\mathscr{Y})$为开映射的充要条件是$\forall x\in X$对任一$x$的邻域$V(x)$都有$F(V(x))$为$F(x)$的邻域.

(2) 可逆映射F是同胚映射的充要条件是F是连续开映射.

解. 只证(1)的充分性. $\forall x\in G$, 则$F(G)$为$F(x)$的邻域, 因而有开集$V_x\in\mathscr{Y}$, 使$F(x)\in V_x\subset F(G)$. 于是$F(G)=\bigcup_{x\in G}V_x$开于Y. □

问题 14.0.24

设$(X,\mathscr{X})$, $(Y,\mathscr{Y})$都是Hausdorff空间, $F:X\to Y$是可逆开映射, 求证:

(1) 若$(y_n)\subset Y$且$\lim_{n\to\infty}y_n=y\in Y$, 则$\lim_{n\to\infty}F^{-1}(y_n)=F^{-1}(y)$.

(2) B在$(Y,\mathscr{Y})$中紧, 则$F^{-1}(B)$在$(X,\mathscr{X})$中紧.

问题 14.0.25

设 $(X,\mathscr{X})$是Hausdorff空间, A 在 X 中紧, 求证:

(1) A 在 X 中闭.

(2) A 的闭子集 B 紧.

(3) 一族紧集的交仍紧.

(4) 有限紧集的并仍紧.

解. (1). $\forall x \notin A$, 由分离性, $\forall y \in A$, 有$x \in V_y(x)$, $y \in V_y$ 使 $V_y \cap V_y(x) = \emptyset$. $A \subset \bigcup_{y\in A} V_y$ 有有限子覆盖 $\mathscr{F}$, $A \subset \bigcup_{y\in\mathscr{F}} V_y$, 从而$\bigcup_{y\in\mathscr{F}} V_y(x)$是$X$在$A^c$中的开邻域.

(2). 由(1)知A闭, 所以B闭于X, B^c和B的开覆盖组成A的开覆盖.

(3). 紧集在Hausdorff空间中闭, 然后用(2).

(4). 同(3), 有限紧集的并是闭集. □

问题 14.0.26

求证: 紧空间 $(X, \mathscr{X})$ 中任一无限子集 A 必有聚点, 即 A 无限必 $A' \neq \emptyset$.

解. 反证 $A' = \emptyset$, $\forall x \in X$, 有 $V(x)$ 使 $A \cap (V(x) = \{x\}) = \emptyset$. $\{V(x) : x \in X\}$ 是 X 的开覆盖, 有有限子覆盖 $\mathscr{F}$ 使 $\bigcup_{x\in\mathscr{F}} V(x) \supset X$. 而 $\bigcup_{x\in\mathscr{F}}(V(x) - \{x\}) \cap A = \emptyset$, 所以 A 有限. □

问题 14.0.27

若紧空间 $(X, \mathscr{X})$ 中点列 $\{x_n\}$ 只有唯一聚点 x, 且对于任意的$i \neq j$, $x_i \neq x_j$, 求证: $\{x_n\}$必收敛于 x.

解. 只需证 $(A \cap V(x))^c_A$是有限集, 其中$A = \{x_n\}$, 由问题14.0.26及反证法. $(A \cap V(x))^c_A$无限必有异于 x 的聚点, 故矛盾. □

问题 14.0.28

设 $\mathscr{B}$ 是 X 的一族子集, $\widetilde{\mathscr{B}}$是由$\emptyset$及$\mathscr{B}$的成员可能作出的一切并集组成的子集类, 求证: $\widetilde{\mathscr{B}}$为X的拓扑的充要条件是$\mathscr{B}$满足:

(1) $X = \bigcup\limits_{B\in\mathscr{B}} B$.

(2) $\forall B_1, B_2 \in \mathscr{B}$及$\forall x \in B_1 \cap B_2$, 必有$B_3 \in \mathscr{B}$使得$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

问题 14.0.29

设$\mathscr{B}$为$(X, \mathscr{X})$中一个子集类, $\mathscr{B}$是X的一族子集, $\widetilde{\mathscr{B}}$是$\emptyset$及$\mathscr{B}$的成员可能做出的一切并组成的集类, 求证: $\widetilde{\mathscr{B}} = \mathscr{X}$的充分必要条件是$\mathscr{B}$满足

(1) $\forall A \in \mathscr{X}$及$\forall a \in A$, $\exists B \in \mathscr{B}$, 使得 $a \in B \subset A$.

(2) $\forall B \in \mathscr{B}$及$\forall b \in B$, $\exists A \in \mathscr{X}$, 使得 $b \in A \subset B$.

解. 必要性: (1)等价于$\mathscr{X} \subset \widetilde{\mathscr{B}}$, (2)等价于$\widetilde{\mathscr{B}} \subset \mathscr{X}$. □

问题 14.0.30

设$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$连续, 令$d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, $x, y \in \mathbb{R}$. 求证: d是$\mathbb{R}$上的度量的充要条件是f严格单调.

问题 14.0.31

设$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是单射, 则$d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, $x, y \in \mathbb{R}$为$\mathbb{R}$上度量, 反之亦然.

问题 14.0.32

设$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n|\xi_n - \eta_n|$, $x = \{\xi_n\}$, $y = \{\eta_n\} \in l^\infty$且$\mu_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$收敛. 求证: d也是l^∞上的度量.

解. 先证$d : l^\infty \times l^\infty \to \mathbb{R}$. □

问题 14.0.33

设(X,d)为度量空间, 令$\rho(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, 求证: (X,ρ)也是度量空间.

问题 14.0.34

设$f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$严格增, 且$f(0)=0$, $f(u+v)\le f(u)+f(v)$, $(u,v\in[0,+\infty))$. 求证: 当(X,d)为度量空间时, $\rho(x,y)=f(d(x,y))$也是X上的度量.

问题 14.0.35: Newton法

f是定义在$[a,b]$上的二次连续可微的实值函数, $\hat{x} \in (a,b)$, 使得$f(\hat{x}) = 0$, $f'(\hat{x}) \neq 0$. 求证存在$\hat{x}$的邻域$U(\hat{x})$, 使得$\forall x_0 \in U(\hat{x})$迭代序列

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n \in \mathbb{N})$$

是收敛的, 并且$\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$.

问题 14.0.36

试找出T^n是压缩映射, 但T不是压缩映射的反例.

问题 14.0.37

设M是$\mathbb{R}^n$中的有界闭集, 映射$T: M \to M$满足

$$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y) \quad (\forall x, y \in M, x \neq y).$$

求证T在M中存在唯一不动点. 并举反例说明M的有界闭不能省去.

问题 14.0.38

对于积分方程$x(t) - \lambda \int_0^1 \mathrm{e}^{t-s}\,\mathrm{d}s = y(t)$为一给定函数, λ为常数, $|\lambda| < 1$, 求证存在唯一解$x(t) \in [0,1]$.

问题 14.0.39

设S为一切复数列$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots)$组成的集合, 在$S$中定义距离为

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|},$$

其中$x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots)$. 求证: S为一个完备的距离空间.

问题 14.0.40

记F是只有有限项不为零的实数列全体, 在F上引进距离

$$\rho(x,y)=\sup_{k\geq 1}|\xi_k-\eta_k|,$$

其中$x=\{\xi_k\}$, $y=\{\eta_k\}\in F$. 求证(F,ρ)不完备, 并指出它的完备化空间.

问题 14.0.41

设M是$C[a,b]$中的有界集, 求证集合

$$\widetilde{M}=\left\{F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t | f\in M\right\}$$

是列紧集.

问题 14.0.42

求证$\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$在$C[0,\pi]$中不是列紧的.

问题 14.0.43

空间S中集合A的列紧性条件. A在S中是列紧的, 当且仅当对于任何$n \in \mathbb{N}$, $\exists C_n > 0$, 使得对于任意的$\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in A$的点的第$n$个坐标的数集是有界的, 即$|\xi_n| \le C_n (n \in \mathbb{N}_+)$.

问题 14.0.44

设(X,ρ)是距离空间, M是X中的列紧集, 若映射$T:X\to M$满足

$$\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)\quad(\forall x,y\in X,x\neq y),$$

求证T在X上存在唯一的不动点.

问题 14.0.45

设(M,ρ)是一个紧距离空间, 又$E\subset C(M)$, E中函数一致有界并满足:

$$|x(t_1)-x(t_2)|\le c\rho(t_1,t_2)^\alpha$$

其中$x\in E$, $t_1,t_2\in M$, 其中$0<\alpha\le 1$, $c>0$, 求证E在$C(M)$中是列紧集.

问题 14.0.46

在$C^1[a,b]$中令

$$\|x\|_1 = \left(\int_a^b (|x(t)|^2 + |x'(t)|^2)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall x \in C^1[a,b]$$

(1) 求证$\|\cdot\|_1$是$C^1[a,b]$上的范数;

(2) $(C^1[a,b], \|\cdot\|_1)$是否完备?

Chapter 15

定理集

15.1 数学分析

定理 15.1.1: 关于有界, 无界的充分条件

(1) $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$存在, 则$\exists\delta>0$, 当$-\delta<x-x_0<0$时, $f(x)$有界; 对$x\to x_0^+$, $x\to x_0$有类似结论.
(2) $\lim_{x\to\infty} f(x)$存在, 则存在$X>0$, 当$|x|>X$时, $f(x)$有界. $x\to\pm\infty$有类似结论.
(3) $f(x)\in C[a,b]$, 则$f(x)$在$[a,b]$上有界.
(4) $f(x)$在集U上有最大(小)值, 则$f(x)$在U上有上(下)界.
(5) 有界函数间的和, 积运算封闭.
(6) $\lim_{x\to\square} f(x)=\infty$, 则$f(x)$在$\square$的空心邻域内无界. $\square$可为$x_0, x_0^-, x_0^+, \infty, \pm\infty$.

定理 15.1.2

假设$f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, 每个在$[a,b]$上均可积, 且$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $n\to\infty$. 则$f(x)$可积, 且

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}x.$$

解. 类似6.0.33 □

定理 15.1.3: (一致收敛级数)逐项积分

$u_k:[a,b]\to\mathbb{R}$, 对每个$k\in\mathbb{N}_+$均可积, $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$在$[a,b]$上一致收敛. 则$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$可积, 且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

解. 让$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$并用15.1.2 □

定理 15.1.4: 逐项微分

设$u_k:[a,b]\to\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}_+$, 每项均有连续导数(端点处单边可微), 若有:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x_0)$在某些点$x_0\in[a,b]$收敛.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(x)$在$[a,b]$上一致收敛到$f(x)$.

则

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$在$[a,b]$上收敛且和函数$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$在$[a,b]$上可微且$F'(x)=f(x)$.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\rightrightarrows F(x)$.

解. (1). u_k'连续($k\in\mathbb{N}_+$), $\sum_{k=1}^{\infty}u_k'\rightrightarrows f$, 则$f\in C[a,b]$, 所以$f$在$[a,b]$上可积. 让$x\in[a,b]$, 对$u_k'$和$f$在区间$[x_0,x]$上使用15.1.3, (或$[x,x_0]$, 如果$x<x_0$), 则有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}u_k'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(u_k(x)-u_k(x_0)).$$

由假设(i), $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x_0)$收敛, 所以级数$F(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$对任意$x\in[a,b]$均收敛, 所以$F:[a,b]\to\mathbb{R}$是良定义的, 于是$F(x)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x}f(x)\,\mathrm{d}x$, 由$f$连续, 两边求导, 便有$F'(x)=f(x)$.

(2). Cauchy判别法, 取$\varepsilon>0$, 则$\exists N_1$使任意$n\geq m\geq N_1$有

$$\left|\sum_{k=m}^{n}u_k(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

存在N_2使任意$n\geq m\geq N_2$有

$$\left|\sum_{k=m}^{n}u_k'(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)},\quad x\in[a,b]$$

故可取$N=\max\{N_1,N_2\}$, $g(x)=\sum_{k=m}^{n}u_k(x)$, 则$g(x)-g(x_0)=g'(\xi)(x-x_0)$. 于是

$$|g(x)|\leq|g(x_0)|+|g(x)-g(x_0)|\leq\frac{\varepsilon}{2}+|g'(\xi)|\cdot|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a)=\varepsilon.$$

故由Cauchy判别法, $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$一致收敛. □

定理 15.1.5: 求导与极限的交换

函数列$f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}_+$, 在$[a,b]$上连续可微, $f_n(x)\to f(x)$, $x\in[a,b]$. $f_n'(x)\rightrightarrows\varphi(x)$, $x\in[a,b]$, 则f可微且$f'(x)=\varphi(x)$, 从而$f_n\rightrightarrows f$.

解. 取$u_1=f_1$, $u_n=f_n-f_{n-1}$, $n>1$, 并用15.1.4. □

15.2 微分方程

定理 15.2.1: 伯努力方程

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y+q(x)y^n$, 其中$p(x)$, $q(x)$是所考虑区域上的连续函数, $n(\neq 0,1)$是常数.

解.

(1) 当$n>0$时, $y=0$是方程的解.

(2) 当$y\neq 0$时, 两边同除以y^n, 令$z=y^{1-n}$, 即得一阶线性方程.

□

15.3 泛函分析

定理 15.3.1: Arzela-Ascoli定理

设$\{f_n\}$是$[0,1]$上一致有界, 等度连续函数族, 则存在某一子序列$\{f_{n(i)}\}$在$[0,1]$上一致收敛.

定理 15.3.2: Hahn-Banach, $\mathbb{R}-version$

设$\mathcal{X}$是定义在$\mathbb{R}$上的向量空间, $q:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$是拟半范数. 若给定线性子空间$\mathcal{Y}\subset\mathcal{X}$和其上的线性映射$\phi:\mathcal{Y}\to\mathbb{R}$, 使得

$$\phi(y)\le q(y),\forall y\in\mathcal{Y}.$$

则存在线性映射$\varphi:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$满足

(i) $\varphi\mid_{\mathcal{Y}}=\phi$;

(ii) $\varphi(x)\le q(x)$, $\forall x\in\mathcal{X}$.

解. 先证$\mathcal{X}/\mathcal{Y}=1$的情况. 即有$x_0\in\mathcal{X}$使得

$$\mathcal{X}=\{y+sx_0:y\in\mathcal{Y},s\in\mathbb{R}\}.$$

于是只需找到$\alpha\in\mathbb{R}$使得映射$\varphi(y+sx_0)=\phi(y)+s\alpha$, $\forall y\in\mathcal{Y}$, $s\in\mathbb{R}$满足条件(ii), 于是$s>0$时有

$$\alpha\le q(z+x_0)-\phi(z),\forall z\in\mathcal{Y},z=s^{-1}y,s>0$$

对于$s<0$时有

$$\alpha\ge\phi(w)-q(w-x_0),\forall w\in\mathcal{Y},w=t^{-1}y,s<0$$

然而$\phi(w)-q(w-x_0)\le q(z+x_0)-\phi(z)$, $\forall w,z\in\mathcal{Y}$恒成立. 然后用Zorn引理. □

未知 15.3.1: Hahn-Banach定理, $\mathbb{C}$-version

设$\mathcal{X}$是复数域$\mathbb{C}$上的向量空间, $q:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$是$\mathcal{X}$上的拟半范数, 给定线性子空间$\mathcal{Y}\subset\mathcal{X}$和$\mathcal{Y}$上的线性映射$\phi:\mathcal{Y}\to\mathbb{C}$使得

$$\mathrm{Re}\phi(y)\le q(y),\quad\forall y\in\mathcal{Y}.$$

则存在线性映射$\psi:\mathcal{X}\to\mathbb{C}$满足:

(i) $\psi\mid_{\mathcal{Y}}=\phi$;

(ii) $\mathrm{Re}\psi(x)\le q(x)$, $\forall x\in\mathcal{X}$.

解. 设$\phi_1=\mathrm{Re}\phi$, 因ϕ_1是$(\mathcal{Y},\mathbb{R})$上的线性映射且被拟半范数q控制, 则由$\mathbb{R}$-Hahn Banach定理, ϕ_1可延拓到$(\mathcal{X},\mathbb{R})$上的实线性映射ψ_1且满足

(i') $\psi_1\mid_{\mathcal{Y}}=\phi_1$;

(ii') $\psi_1(x)\le q(x)$, $\forall x\in\mathcal{X}$.

但注意这里用的是实的Hahn Banach定理, 所延拓的ψ_1是针对实向量空间$(\mathcal{X},\mathbb{R})$的, 要得到复向量空间的ψ_1, 则在$(\mathcal{Y},\mathbb{C})$上考虑$\psi_1(y)=\phi_1(y)$, 但新定义的ψ_1是实域上的线性映射, 而不是复域上的线性映射, 显然所求线性映射ψ的实部$\mathrm{Re}\psi$在实线性空间中也满足以上两条件. 若取$\mathrm{Re}\psi=\psi_1$, 则ψ在实的情况已满足条件(ii). 而$\mathrm{Im}\psi(y)=\mathrm{Re}(-\mathrm{i}\psi(y))=\mathrm{Re}\psi(-\mathrm{i}y)=\psi_1(-\mathrm{i}y)$, 于是$\psi(y)=\psi_1(y)+\mathrm{i}\psi_1(-\mathrm{i}y)$, 要证$\psi\mid_{\mathcal{Y}}=\phi$, 只需证$\mathrm{Im}\psi(y)=\mathrm{Im}\phi(y)$, $\forall y\in\mathcal{Y}$, 然而

$$\mathrm{Im}\phi(y)=\mathrm{Re}(-\mathrm{i}\phi(y))=\mathrm{Re}(\phi(-\mathrm{i}y))=\phi_1(-\mathrm{i}y)=\psi_1(-\mathrm{i}y)=\mathrm{Im}\psi(y).$$

最后证明线性映射$\psi(x)=\psi_1(x)+\mathrm{i}\psi_1(-\mathrm{i}x)$在复域上满足(ii), 注意这里的$\psi_1(-\mathrm{i}x)$是怎么定义的? □

15.4 拓扑

定理 15.4.1: 杨忠道定理

证明: 拓扑空间中的每一子集的导集为闭集的充分必要条件是此空间中的每一个单点集的导集为闭集.

解. 只证充分性. 设拓扑空间X的每一个单点集的导集为闭集, 任意$A\subset X$, 设$x\in d(d(A))$, 对x的任意开邻域U, 有$U\cap(d(A)\setminus\{x\})\neq\varnothing$, 因$d(\{x\})$是闭集, 且$x\notin d(\{x\})$, 令$V=U\setminus d(\{x\})$, V是x的开邻域, 从而有

$$y\in V\cap(d(A)\setminus\{x\}).$$

由$y\in V$, $y\notin d(\{x\})$, 且$y\neq x$, 于是存在$W\in\mathscr{U}_y$, 使得$x\notin W$, 因$V\in\mathscr{U}_y$, 令$K=W\cap V$, $K\in\mathscr{U}_y$, 由$y\in d(A)$, 存在$z\in K\cap(A\setminus\{y\})\neq\varnothing$. 由$z\in K\subset W$, $z\neq x$, 因此$z\in U\cap(A\setminus\{x\})$, 故$U\cap(A\setminus\{x\})\neq\varnothing$, 即$x\in d(A)$, 所以$d(d(A))\subset d(A)$, $d(A)$为闭集. □

15.5 数论

定理 15.5.1: 恒等定理

设$f(x),g(x)\in D[x]$, 若有无穷多个$\alpha\in D$使$f(\alpha)=g(\alpha)$, 则$f(x)=g(x)$.

定理 15.5.2: 拉格朗日定理

设$f(x)$是整系数多项式, 模p的次数为n, 则同余方程

$$f(x)\equiv 0\pmod p \tag{15.1}$$

至多有n个互不相同的解.

解. $n=1$时结论显然成立, 对n归纳. 假设$n-1$时已正确, 当f的次数是n时, 若同余方程无解, 则无需证明. 若$x=a$是一个解, 用$(x-a)$除$f(x)$得$f(x)=g(x)(x-a)+A$, $(A\in\mathbb{Z})$, 若同余方程(15.1)除$x\equiv a\pmod p$外无解, 则证毕, 否则设$x=b$是(15.1)的另一个解, 且$a\not\equiv b\pmod p$, 则

$$0\equiv f(b)=g(b)(b-a)+A\pmod p,\text{又由}0\equiv f(a)=g(a)(a-a)+A=A\pmod p.$$

所以$g(b)\equiv 0\pmod p$, 这表明(15.1)的解除$x\equiv a\pmod p$之外, 其余的解均是$g(x)\equiv 0\pmod p$的解, 但$g(x)$模p的次数显然是$n-1$, 由归纳假设, $g(x)\equiv 0\pmod p$, 至多有$n-1$个互不同余的解, 从而同余方程(15.1)至多有n个解. □

定理 15.5.3: 整系数多项式的有理根

$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0\in\mathbb{Z}[x]$, $n\geq 1$, $a_na_0\neq 0$且$(a_n,\cdots,a_0)=1$, 若$\frac{b}{c}$是$f(x)$的一个有理根$(b,c)=1$, 则$c\mid a_n$, $b\mid a_0$. 特别地, 首项系数为±1的整系数多项式的有理根必是整数.

解. 由$f\left(\frac{b}{c}\right)=0$, 得$a_nb^n+\cdots+a_1bc^{n-1}+a_0c^n=0$, 所以$a_0\mid b$, $a_n\mid c$.

一种证明有理数是整数的证明途径: 证复数是整数, 先证其是有理数, 且找到作为零点的首一多项式. □

定理 15.5.4: Gauss引理

$\mathbb{Z}[x]$中两个本原多项式的乘积仍是一个本原多项式.

解. 反证法, $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$, $g(x)=b_mx^m+\cdots+b_0$, 若$f(x)g(x)$不是本原多项式, 则有素数p整除$f(x)g(x)$的所有系数. 设r是a_i不被p整除的最小角标, s是b_i不被p整除的最小角标, 则$f(x)g(x)$的x^{r+s}项系数不能被p整除. □

定理 15.5.5: 艾森斯坦判别法

设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$是一个整系数多项式, 其中$n\geq 1$. 若存在一个素数p, 使得$p\nmid a_n$, $p\mid a_i(i=0,1,\cdots,n-1)$, 但$p^2\nmid a_0$, 则$f(x)$在$\mathbb{Z}$上不可约.

定理 15.5.6: 科恩定理

设$p=\overline{a_n\cdots a_1a_0}$是一个十进制素数, $0\leq a_i\leq 9(i=0,1,\cdots,n)$, $a_n\neq 0$. 则多项式

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0.$$

在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 先用2.2.8, 再用2.2.9. □

定理 15.5.7

Every nonzero integer can be written as a product of primes.

解. Assume that there is an integer that cannot be written as a product of primes. Let N be the smallest positive integer with this property. Since N cannot itself be prime we must have $N=mn$, where $1<m,n<N$. However, since m and n are positive and smaller than N they must each be a product of primes. But then so is $N=mn$. This is a contradiction.

The proof can be given in a more positive way by using mathematical induction. It is enough to prove the result for all positive integers. 2 is a prime. Suppose that $2<N$ and that we have proved the result for all numbers m such that $2\leq m<N$. We wish to show that N is a product of primes. If N is a prime, there is nothing to do. If N is not a prime, then $N=mn$, where $2\leq m,n<N$. By induction both m and n are products of primes and thus so is N. □

定理 15.5.8: m进(m-adic)表示

正整数$m\geq 2$, $\forall a\in\mathbb{N}_+$, 有表示$a=a_0+a_1m+\cdots+a_sm^s$.

定理 15.5.9: Bézout's identity(贝祖等式)

任意两整数$a,b(b\neq 0)$的正最大公因子$d=(a,b)$唯一存在, 而且存在整数u,v使得$ua+vb=d$, u,v称为Bézout系数, Bézout系数不唯一, 若设$a'=\frac{a}{d}$, $b'=\frac{b}{d}$, 则恰有两系数对满足$|u|<|b'|$, $|v|<|a'|$.

解. 若$a>b$, $a=bq+r$, 则$(a,b)=(r,b)$, 于是由碾转相除法的逆过程可得u,v. □

解. 不用碾转相除法. $M=\{ax+by\mid x,y\in\mathbb{Z}\}$, d是M中的最小正整数(自然数良序性). 则若$d=ax_0+by_0$知$(a,b)\mid d$, 所以只需证$d\mid(a,b)$. 若$d\nmid a$, 取$a=dq+r$, 则$r=a\hat{x_0}+b\hat{y_0}<d$与$d$的选取矛盾. □

推论 15.5.1

a,b互素等价于: 存在整数u,v使$ua+vb=1$.
$a,b\in\mathbb{Z}$, 则:

$$\begin{aligned}(a,b)=d&\Rightarrow\{am+bn\mid m,n\in\mathbb{Z}\}=\{dk\mid k\in\mathbb{Z}\}\\&\Rightarrow a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=d\mathbb{Z}\\&\Rightarrow(a,b)=(d)\end{aligned}$$

推论 15.5.2: Bézout等式

任s个非零整数$a_1,\cdots,a_s$的最大公因子$d=(a_1,\cdots,a_s)$存在唯一, 且$(a_1,\cdots,a_{s-1},a_s)=((a_1,\cdots,a_{s-1}),a_s)$, 且存在整数$u_1,\cdots,u_s$使, $u_1a_1+\cdots+u_sa_s=d$.

定理 15.5.10

$v_p(n)$使使得$p^k\|n$的整数k. 则

$$v_p(n!)=\sum_k\left[\frac{n}{p^k}\right].$$

定理 15.5.11: 威尔逊定理

p是素数, 则有$(p-1)!\equiv -1\pmod p$.

解. 当$p=2$时, 命题显然. 若$p\geq 3$, 由于对每个与p互素的a在模p下均有逆a^{-1}. 故可得$1,2,\cdots,p-1$的每个与其逆配对, 而特别的当$a=a^{-1}$时是例外. 此时对应$a^2\equiv 1\pmod p$有解$a=1$或$a=p-1$, 而$2,\cdots,p-2$可两两配对使积为1. 所以$(p-1)!\equiv 1\cdot(p-1)\equiv -1\pmod p$. □

解. 用 Euler 恒等式

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}i^n=\begin{cases}0, n<m\\(-1)^n n!, n=m\end{cases}$$

取$m=n=p-1$, 当 $p>2$ 时及 Fermat 小定理有

$$(-1)^{p-1}\cdot(p-1)!\equiv\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\binom{p-1}{i}i^{p-1}\equiv\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\binom{p-1}{i}\equiv -1\pmod p.$$

□

解. 当 $p\geq 3$ 时, 由 Fermat 小定理 $p-2$ 次同余方程

$$f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-p+1)-x^{p-1}+1\equiv 0\pmod p$$

有 $p-1$ 个不同得解, 所以 $f(x)$ 的系数模 p 余零, 所以常数项 $(p-1)!+1\equiv 0\pmod p$. □

15.6 不等式

定理 15.6.1: Generalized Schur Inequality

设六个非负实数a,b,c,x,y,z满足(a,b,c)和(x,y,z)均单调, 则

$$\sum_{cyc}x(a-b)(b-c)\geq 0.$$

解. 不妨设$a\geq b\geq c$, 分$x\geq y\geq z$与$x\leq y\leq z$两种情况分别讨论. □

推论 15.6.1

记$S=\sum\limits_{cyc}x(a-b)(a-c)$. 下面几条条件的任何一个均可证明$S\geq 0$.

(1) 当$a\geq b\geq c\geq 0$, $x\geq y\geq 0$且$z\geq 0$时.

(2) 当$a\geq b\geq c\geq 0$, $z\geq y\geq 0$且$x\geq 0$时.

(3) 当$a\geq b\geq c\geq 0$, 且$ax\geq by\geq 0$或者$by\geq cz\geq 0$时.

解. (1)和(2)显然, 对于(3)有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{abc}(x(a-b)(a-c)+y(b-a)(b-c)+z(c-a)(c-b))\\&\qquad=ax\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+by\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+cz\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right).\end{aligned}$$

便转化为前面的两种情况了. □

Chapter 16

定义集

16.1 初等数论

定义 16.1.1: 模p同余

若两多项式$f(x)$与$g(x)$同次幂系数均关于模p同余, 则称$f(x)$和$g(x)$对模p同余或模p恒等.

$$f(x) \equiv g(x) \pmod p.$$

定义 16.1.2: 多项式模p的次数

若$f(x)$的系数不全被p整除, 其中系数不被p整除的最高幂次称为$f(x)$模p的次数.

定义 16.1.3: 容度, 本原多项式

设$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, 且$f(x) \neq 0$, 将$a_0, a_1, \cdots, a_n$的最大公约数$(a_0, a_1, \cdots, a_n)$, 称为$f(x)$的容度. 容度为1的多项式称为本原多项式.

16.2 泛函分析

定义 16.2.1: 紧算子

设 X 是 Banach 空间, 若线性算子 T 把每一有界集映成列紧集, 则称线性算子 T 为紧算子.

定义 16.2.2: Banach空间中的凸集

设 X 是 Banach 空间, 集合 $K \subset X$称为是凸的, 若 $(1-t)K + tK \subset K$, $(0 \leq t \leq 1)$.

定义 16.2.3: 拟半范数, 半范数

设$\mathbb{K}$是$\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$, $\mathcal{X}$是域$\mathbb{K}$上的向量空间.

A. 映射$q:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$称为拟半范数, 如果

(i) $q(x+y)\le q(x)+q(y)$, 对于任意$x,y\in\mathcal{X}$.

(ii) $q(tx)=tq(x)$, 对任意的$x\in\mathcal{X}$和$t\in\mathbb{R}$, $t\ge 0$.

B. 映射$q:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$称为是半范数, 如果上面的两个条件中(ii)改为

(ii') $q(\lambda x)=|\lambda|q(x)$, 对任意$x\in\mathcal{X}$和$\lambda\in\mathbb{K}$.

注: 若$q:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$是半范数, 则对于任意的$x\in\mathcal{X}$, $q(x\ge 0)$. (因$2q(x)=q(x)+q(-x)\ge q(0)=0$).

Chapter 17

tex笔记

17.1 使用频率较低的符号列表

特殊符号表

```
\begin{center}
 \begin{tabular}{|c|c|c|c|c|}
   \hline
   $\hbar$ & $\imath$ & $\jmath$ & $\ell$ & $\Im$\\
   \hline
   $\wp$ & $\mho$ & $\prime$ & $\Box$ & $\Diamond$\\
   \hline
   $\bot$ & $\top$ & $\surd$ & $\diamondsuit$ & $\heartsuit$\\
   \hline
   $\clubsuit$ & $\spadesuit$ & $\neg$ & $\lnot$ & $\flat$\\
   \hline
   $\natural$ & $\sharp$ & \dag & \ddag & \S\\
   \hline
   \P & \copyright & \pounds & \textregistered & \\
   \hline
 \end{tabular}
\end{center}
```

$\hbar$	$\imath$	$\jmath$	ℓ	$\Im$
$\wp$	$\mho$	$\prime$	$\Box$	$\Diamond$
$\bot$	$\top$	$\surd$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$
$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\neg$	$\lnot$	$\flat$
$\natural$	$\sharp$	†	‡	§
¶	©	£	®	

17.2 itemize enumerate

列表

```
\begin{enumerate}
\item This is an example of \ldots
\item \ldots the usual enumeration.
\begin{enumerate}[a)]
  \item And this is a \ldots
  \item \ldots couple of \ldots
\end{enumerate}
  \item
  \begin{enumerate}[-- i --]
  \item \ldots examples of \ldots
  \item \ldots custom-tailored \ldots
  \item \ldots enumerations.
  \newcounter{enumii_saved}
  \setcounter{enumii_saved}{\value{enumii}}
  \end{enumerate}
  Some general comments
  \begin{enumerate}[-- i --]
  \setcounter{enumii}{\value{enumii_saved}}
  % 如果要换另一个条列式项目，但编号接续，使用\newcounter{enumii_saved}来操作
  \item My next point.
  \setcounter{enumii}{7}
  % 使用setcounter{enumii}{数字}来指定编号号码
  \item My eighth point.
  \end{enumerate}
\end{enumerate}
```

1. This is an example of . . .
2. . . . the usual enumeration.

   a) And this is a . . .
   b) . . . couple of . . .

3. – i – . . . examples of . . .
   – ii – . . . custom-tailored . . .
   – iii – . . . enumerations.

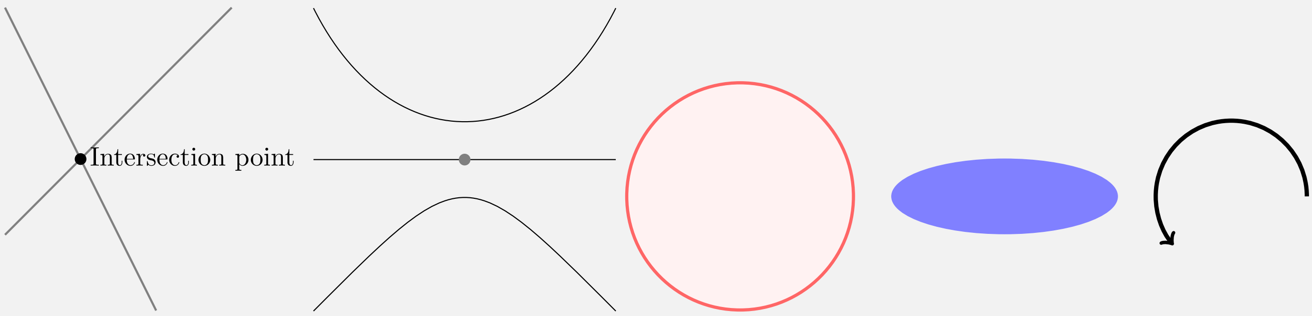
   Some general comments

   – iv – My next point.
   – viii – My eighth point.

17.3 tikz

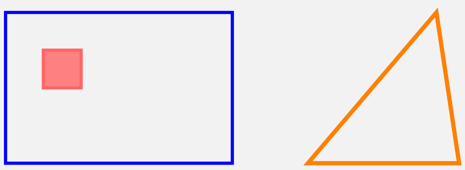
画图

```
\begin{tikzpicture}
 \draw[gray, thick] (-1,2) -- (1,-2);
 \draw[gray, thick] (-1,-1) -- (2,2);
 \filldraw[black] (0,0) circle (2pt) node[anchor=west] {Intersection point};
\end{tikzpicture}
\begin{tikzpicture}
  \draw (-2,0) -- (2,0);
  \filldraw [gray] (0,0) circle (2pt);
  \draw (-2,-2) .. controls (0,0) .. (2,-2);
  \draw (-2,2) .. controls (-1,0) and (1,0) .. (2,2);
\end{tikzpicture}
\begin{tikzpicture}
  \filldraw[color=red!60, fill=red!5, very thick](-1,0) circle (1.5);
  \fill[blue!50] (2.5,0) ellipse (1.5 and 0.5);
  \draw[ultra thick, ->] (6.5,0) arc (0:220:1);
\end{tikzpicture}
```



画图

```
\begin{tikzpicture}
  \filldraw[color=red!60, fill=red!50, very thick](1,1) rectangle (0.5,1.5);
  \draw[blue, very thick] (0,0)rectangle (3,2);
  \draw[orange, ultra thick] (4,0) -- (6,0) -- (5.7,2) -- cycle;
\end{tikzpicture}
```



字体

```
$\mathscr{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$\\
$\mathbb{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$\\
$\mathcal{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$\\
$\mathfrak{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$
```

$\mathscr{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$
$\mathbb{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$
$\mathcal{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$
$\mathfrak{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}$

Chapter 18

math.stackexchange.com

18.1 questions

1. What Does it Really Mean to Have Different Kinds of Infinities?

Can someone explain to me how there can be different kinds of infinities?

I was reading "The man who loved only numbers" by Paul Hoffman and came accross the concept of countable and uncountable infinities, but they're only words to me.

Any help would be appreciated[1].

Answers 1

Suppose no one ever taught you the names for ordinary numbers. Then suppose that you and I agreed that we would trade one bushel of corn for each of my sheep. But there's a problem, we don't know how to count the bushels or the sheep! So what do we do?

We form a "bijection" between the two sets. That's just fancy language for saying you pair things up by putting one bushel next to each of the sheep. When we're done we swap. We've just proved that the number of sheep is the same as the number of bushels without actually counting.

We can try doing the same thing with infinite sets. So suppose you have the set of positive integers and I have the set of rational numbers and you want to trade me one positive integer for each of my rationals. Can you do so in a way that gets all of my rational numbers?

Perhaps surprisingly the answer is yes! You make the rational numbers into a big square grid with the numerator and denominators as the two coordinates. Then you start placing your "bushels" along diagonals of increasing size, see wikipedia.

This says that the rational numbers are "countable" that is you can find a clever way to count them off in the above fashion.

The remarkable fact is that for the real numbers there's no way at all to count them off in this way. No matter how clever you are you won't be able to scam me out of all of my real numbers by placing a natural number next to each of them. The proof of that is Cantor's clever "diagonal argument."

I like this so far, but maybe add a bit on uncountable to distinguish the difference.

[1] 赏识, 感激

Chapter 19

语录

在我年轻的时候，我听从建议去读庞加莱，希尔伯特，克莱因以及胡尔维茨等的著作，并从中获益．而我自己对布拉须凯，嘉当和霍普夫的著作更为熟悉，其实这也是中国的传统：在中国我们被教导要读孔夫子，韩愈的散文以及杜甫的诗歌，我真诚地希望这套全集不要成为书架上的摆设，而是在年轻数学家的手里被翻烂掉．