Chapter 1

数学分析

问题 1.0.1

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)=0.$$

解. 用$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. □

问题 1.0.2

证明:

$$0<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n}.$$

解. 先证: $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调上升且有界. $\left(1\cdot x_n\leq\left(\frac{1+n(1+1/n)}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}\right)$, 则

$$\begin{aligned}x_n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=1+1+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\cdots\\&=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\&<2+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}=3.\end{aligned}$$

再证$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$单调下降且有界. (用$(1+x)^n>1+nx,\ x>-1$证单调性).

由$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n$, $x_n<\mathrm{e}<y_n$, (这可以证得$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$).

故$\mathrm{e}-x_n<y_n-x_n=\frac{x_n}{n}<\frac{3}{n}$. □

问题 1.0.3

证明不等式

$$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

解. 用$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$及归纳法. □

问题 1.0.4

设$a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$及$a^{[0]}=1$, 证明:

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a^{[n-m]}b^{[m]}.$$

并由此推出牛顿二项式公式.

问题 1.0.5

证明不等式

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (n>1).$$

解. 用均值不等式. □

解. 用伯努利不等式证$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>2$, $(n\in\mathbb{N}_+)$. □

问题 1.0.6

设$p_n(n\in\mathbb{N}_+)$为趋于正无穷的任意数列, 而$q_n(n\in\mathbb{N}_+)$为趋于负无穷的任意数列$(p_n,q_n\notin[-1,0])$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\mathrm{e}.$$

解. 用$[x]\le x<[x]+1$证明. □

问题 1.0.7

已知$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}.$$

并推出

$$\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n},$$

其中$0<\theta_n<1$.

问题 1.0.8

证明: e是无理数.

解. 用反证法及1.0.7有, 对于任意的n, $n!n\cdot\mathrm{e}$不是整数. □

问题 1.0.9

证明不等式:

(a) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, $(n\in\mathbb{N}_+)$;

(b) $1+\alpha<\mathrm{e}^\alpha$, $(\alpha\neq0,\alpha\in\mathbb{R})$.

解.

(a) 原式等价于$(1+\frac{1}{n})^n < \mathrm{e} < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$;

(b) $\alpha > -1$时, 用伯努利不等式, $\mathrm{e}^\alpha > (1+\frac{1}{n})^{\alpha n} > 1+\alpha$.

□

问题 1.0.10

证明: (在以下各极限军存在的情况下)

(a) $\liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n \le \liminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \liminf_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$;

(b) $\liminf_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n \le \limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$.

解. 用$\liminf_{n\to\infty} x_n = -\limsup_{n\to\infty}(-x_n)$. □

问题 1.0.11

证明: 若$\lim_{n\to\infty} x_n$存在, 则对于任何数列$y_n (n\in\mathbb{N}_+)$, $\limsup_{n\to\infty} y_n$有限且有:

(a) $\limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$;

(b) $\limsup_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \limsup_{n\to\infty} y_n$, $(x_n \ge 0)$.

解. 用1.0.10. □

问题 1.0.12

证明: 若对于某数列$x_n (n\in\mathbb{N}_+)$, 无论数列$y_n (n\in\mathbb{N}_+)$如何选取, 以下两个等式中都至少有一个成立:

(a) $\limsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$.

(b) $\limsup_{n\to\infty}(x_n y_n) = \limsup_{n\to\infty} x_n \cdot \limsup_{n\to\infty} y_n$, $(x_n \ge 0)$.

则数列x_n收敛或发散于正无穷.

问题 1.0.13

证明: 若$x_n > 0 (n\in\mathbb{N}_+)$及

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \cdot \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 1.$$

则数列x_n是收敛的.

问题 1.0.14

证明: 若数列$x_n (n\in\mathbb{N}_+)$有界, 且

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n) = 0.$$

则此数列的子列极限充满于下极限和上极限

$$l = \liminf_{n\to\infty} x_n \text{ 和 } L = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

之间.

问题 1.0.15

证明: 若$x_n > 0 (n \in \mathbb{N}_+)$且$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$存在, 则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

解. 用结论: 若$\{x_n\} \to x$, $x_n > 0$, 则$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n = x$. □

问题 1.0.16

证明: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}$.

解. 用1.0.15. □

问题 1.0.17: 数a和b的算术几何平均值

证明: 由下列各式

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

确定的数列x_n和$y_n (n \in \mathbb{N}_+)$有共同的极限.

$$\mu(a,b) = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

解. 用幂平均不等式, $\sqrt{x_{n+1} + y_{n+1}} = \frac{\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n}}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{x_n + y_n}$. 即$\{y_n\}$单调有界, 从而有极限, 从而$x_n = 2y_{n+1} - y_n$有相同的极限. □

问题 1.0.18

设

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad (|x| \geq 2),$$

求$f(x)$.

解. $x^2 - 2$, $(|x| \geq \frac{5}{2})$. □

问题 1.0.19

证明: 若

(1) 函数$f(x)$定义于区域$x > a$;

(2) $f(x)$在每一个有限区间$a < x < b$内是有界的;

(3) 对于某一个整数n, 存在有限的或无穷的极限

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} = l,$$

则

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{l}{n+1}.$$

能否用Cauchy定理5.1.3证明它.

问题 1.0.20

利用定理

定理 1.0.1

设

$$\lim_{x\to 0}\frac{\phi(x)}{\psi(x)}=1,$$

其中$\psi(x)>0$，再设当$n\to\infty$时$\alpha_{mn}\rightrightarrows 0(m=1,2,\cdots,n)$，换言之，对于任意$\varepsilon>0$，存在正整数$N(\varepsilon)$，当$m=1,2,\cdots,n$且$n>N(\varepsilon)$时，$0<|\alpha_{mn}|<\varepsilon$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}[\phi(\alpha_{1n})+\phi(\alpha_{2n})+\cdots+\phi(\alpha_{mn})]=\lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\cdots+\psi(\alpha_{mn})],$$

此处同时还要假设上式右端的极限存在.

求:

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[n]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{ka}{n^2}\right)$;

(3) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right)$, $(a>0)$;

(4) $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$;

(5) $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$.

问题 1.0.21

设函数$f(x)$在区间$(x_0,+\infty)$上连续并有界. 证明: 对于任何数T, 可求得数列$x_n\to+\infty$, 使

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0.$$

问题 1.0.22

证明: 在有限区间(a,b)上有定义且连续的函数$f(x)$，可用连续的方法延拓到闭区间$[a,b]$上，其充分必要条件是函数$f(x)$在区间(a,b)上一致连续.

问题 1.0.23

x_n满足$x_n^n+x_n-1=0$, $0<x_n<1$, 求$\lim_{n\to\infty}x_n$.

解. $y=x^n+x-1$则有$y'>0$, $y|_{x=0}=-1<0$, $y|_{x=1}=1>0$.
x_n是x^n+x-1的唯一零点. 由于

$$x_n^{n+1}+x_n-1=(x_n-1)(1-x_n)<0$$

及y的单调性, 知x_{n+1}在x_n与1之间, 故$\{x_n\}$单调有界. 反证$\{x_n\}$的极限$A=1$, 否则$0\le A<1$矛盾. □

解. $y^x+y-1=0$是隐函数, 确定$y=f(x)$, $x_n=f(n)$, 求导

$$y'=-y^x\cdot\frac{\ln y}{\left(1+\frac{x}{y}\cdot y^x\right)}$$

当$x\ge 1$时, $y'>0$, y单调增加, 以下同上. □

问题 1.0.24

若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$都收敛, 则以下不成立的是?
A. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$收敛; B.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$收敛;
C. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛; D. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$发散.

问题 1.0.25

设$f(x,y)$与$\varphi(x,y)$均为可微函数, 且$\varphi_y'(x,y)\neq 0$. 已知(x_0,y_0)是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的一个极值点, 下列选项正确的是(D)
(A) 若$f_x'(x_0,y_0)=0$, 则$f_y'(x_0,y_0)=0$; (B) 若$f_x'(x_0,y_0)=0$, 则$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$;
(C) 若$f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则$f_y'(x_0,y_0)=0$; (D) 若$f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则$f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

问题 1.0.26

$$\frac{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t}=\sqrt{2}$$

解. 用Beta函数. □

问题 1.0.27: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

计算$I=\int_{\pi/8}^{3\pi/8}\frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}\,\mathrm{d}x$.

问题 1.0.28: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设$\varphi(x)$在$(-\infty,0]$可导, 且函数

$$f(x)=\begin{cases}\int_x^0 \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t, & x<0,\\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(2x)^n+x^{2n}}, & x\geq 0.\end{cases}$$

在点$x=0$可导, 求$\varphi(0)$, $\varphi'(0^-)$, 并讨论$f'(x)$的存在性.

问题 1.0.29: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

已知函数$f(x)$与$g(x)$满足$f'(x)=g(x)$, $g'(x)=2\mathrm{e}^x-f(x)$, 且$f(0)=0$, 求

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x.$$

问题 1.0.30: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设y_1和y_2是方程$y''+p(x)y'+2\mathrm{e}^x y=0$的两个线性无关解, 而且$y_2=(y_1)^2$. 若有$p(0)>0$, 求$p(x)$及此方程的通解.

问题 1.0.31: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设$f(x)$在$\left[-\frac{1}{a},a\right](a>0)$上非负可积, 且$\int_{-1/a}^{a} xf(x)\,\mathrm{d}x=0$. 求证:

$$\int_{-1/a}^{a} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_{-1/a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

解. 分$0<a\leq 1$和$a>1$两种情况讨论. □

问题 1.0.32: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设在点$x=0$的某邻域U内, $f(x)$可展成泰勒级数, 且对任意正整数n, 皆有

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}.$$

证明: 在U内, 恒有$f(x)=x^2$.

问题 1.0.33: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

设$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x^2+y^2}$, 证明: $\lim_{x\to+\infty}y(x)$和$\lim_{x\to-\infty}y(x)$都存在.

解. 用单调有界定理. □

问题 1.0.34: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$的收敛域与和函数.

问题 1.0.35: 陕西省第七次大学生高等数学竞赛复赛

求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{(n+i+1)^2}+\frac{1}{(n+i+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+i+i)^2}\right).$$

解. 用重积分得$\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$. □

问题 1.0.36

设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\subset C_{[a,b]}$, 且$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$, 则$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 因$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in[a,b]$, 所以$f\in C_{[a,b]}$且$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当$n>N$时, $\forall x\in[a,b]$均有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. $f(x),f_n(x)$连续必可积, 有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|<(b-a)\varepsilon.$$

其实当$a\le x\le b$时, 有$\left|\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|<(b-a)\varepsilon$对$x$一致成立, 所以$\int_a^x f_n(x)\,\mathrm{d}t\rightrightarrows\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. □

问题 1.0.37

$f_n(x)$在$[a,b]$上都有连续导数, 且$f_n(x)\to f(x)$, $f_n'(x)\rightrightarrows g(x)$, 则$f'(x)=g(x)$, 即$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)$.

解. 因$f_n'\rightrightarrows g$, 所以g连续, 可积, 由1.0.55, $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$, 所以$f'(x)=g(x)$. 其实$f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$在$[a,b]$上也一致收敛.

若1.0.55和本问题中的$f_n(x)$视为函数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$的前$n$项部分和, 就有函数项级数的相应命题.

(1). 若$[a,b]$上$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$中每项$u_k$均连续, 且$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\rightrightarrows f(x)$, 则$f(x)\in C_{[a,b]}$且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2). 若$[a,b]$上, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$的每项都有连续导数$u_k'(x)$且$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \rightrightarrows g(x)$, 而$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \to f(x)$. 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x).$$

□

问题 1.0.38

举反例:

(1) 积分的极限不等于极限的积分的函数列.

(2) 导数的极限不等于极限的导数的函数列.

解. (1). 在$[0,1]$上极限函数为0, 但f_n在$\left[0,\frac{1}{n}\right]$上面积为1的脉冲函数.
(2). $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$, $x \in [-1,1]$. □

问题 1.0.39: http://math.stackexchange.com/questions/2143014

证明: 对于任意的$\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left|\frac{\alpha-n}{\alpha+n}\right|$发散.

问题 1.0.40: http://math.stackexchange.com/questions/472007

判断$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n+10\sin n}$的敛散性.

解. 其实, 若$f(n)$是有界函数, 且级数$\sum_{n=1}^{n} \frac{f(n)}{n}$收敛, a是使任意的n都有$n+af(n) \neq 0$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n+af(n)}$.
这是因为

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{f(n)}{n+af(n)} = \sum_{n=1}^{m} \frac{f(n)}{n} + \sum_{n=1}^{m} \frac{-af^2(n)}{n(n+af(n))}$$

后一个和式用比较判别法. □

问题 1.0.41: http://math.stackexchange.com/questions/273559

判断$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n}$的敛散性.

解. 比较判别法, $[k\pi+\frac{\pi}{6},(k+1)\pi-\frac{\pi}{6}]$中总有至少一个整数.
或用$\sum \frac{\sin^2(n)}{n} = \sum \frac{1}{2n} - \sum \frac{\cos(2n)}{2n}$, 前者发散, 后者用Dirichlet判别法. □

问题 1.0.42: http://math.stackexchange.com/questions/991652

证明$\int_0^1 \left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right| \mathrm{d}x$发散.

解. 变量替换, 积分化为$\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$, 然后在子区间$(k\pi,(k+1)\pi)$上求下界. □

问题 1.0.43: http://math.stackexchange.com/questions/620449

证明: 求$p \in \mathbb{R}$, 使积分$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$发散.

解. $p \geq -1$. □

问题 1.0.44: http://math.stackexchange.com/questions/596511

计算
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

解. 用Frullani积分. 结果为$\log 2$. 或用重积分: $\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}=x\int_1^2\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. 这里给出Frullani积分证明过程的做法.

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{2a}^{2b}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \left(\int_a^b-\int_{2a}^{2b}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \left(\int_a^{2a}-\int_b^{2b}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\to\log(2)-0,\quad a\to 0, b\to\infty\end{aligned}$$

上式最后一步用$\mathrm{e}^{-2c}\log(2)\le\int_c^{2c}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\le\mathrm{e}^{-c}\log(2)$. □

问题 1.0.45: http://math.stackexchange.com/questions/590774

已知$a>b>0$, 求$\lim_{t\to0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)$.

解. 注意到$\Gamma(t)=a^t\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-as}}{s^{1-t}}\,\mathrm{d}s$, 所以

$$\lim_{t\to0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$$

然后用Frullani积分算得$\log\frac{a}{b}$. □

问题 1.0.46: http://math.stackexchange.com/questions/590774

已知$a>b>0$, 求$\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$.

解. 可以用Frullani积分. 这里用含参积分求导的方法, 定义$I(t)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-tx}}{x}\,\mathrm{d}x$, 被积函数记为$f(x,t)$, 由$f(x,t)$和$f_t(x,t)$在定义域均连续, $I(t)$关于t收敛且$\int_0^\infty f_t(x,t)\,\mathrm{d}x$关于$t$一致收敛, 则满足积分号下求导条件, 所以$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{a}$, $I=-\log t$. □

解.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx &= \lim_{\epsilon\to0}\int_\epsilon^\infty\frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx\\ &= \lim_{\epsilon\to0}\left[\int_\epsilon^\infty\frac{\exp(-ax)}{x}dx-\int_\epsilon^\infty\frac{\exp(-bx)}{x}dx\right]\\ &= \lim_{\epsilon\to0}\left[\int_{a\epsilon}^\infty\frac{\exp(-t)}{t}dt-\int_{b\epsilon}^\infty\frac{\exp(-t)}{t}dt\right]\\ &= \lim_{\epsilon\to0}\int_{a\epsilon}^{b\epsilon}\frac{\exp(-t)}{t}dt=\lim_{\epsilon\to0}\int_a^b\frac{\exp(-\epsilon u)}{u}du\end{aligned}$$

最后的被积函数一致收敛到$\frac{1}{u}$. □

解. 用Laplace变换, $F(s)=\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 则

$$F(s)=\int_0^\infty\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}e^{-sx}dx\implies F'(s)=-\int_0^\infty(e^{-bx}-e^{-ax})e^{-sx}dx.$$

计算最后一个积分, 然后求积分并令$s\to0$, 其中积分出来的积分常数用极限$\lim_{s\to\infty}F(s)=0$计算. □

问题 1.0.47: http://math.stackexchange.com/questions/164400

求$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}x=\log t$, 其中$t>0$.

解. 让$u=\mathrm{e}^{-x}$, 得

$$\int_0^1 \frac{u^{t-1}-1}{\log u}\,\mathrm{d}u=\int_0^1\int_1^t u^{s-1}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u=\int_1^t\int_0^1 u^{s-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s=\log t.$$

□

解. 同1.0.65的解法一. □

解. 用重积分求解, $I(t)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\int_1^t \mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x$. 这里验证积分次序可交换, 则

$$LHS=\int_1^t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s=\ln t.$$

□

解. 用Laplace变换, $g(s)=L[f(x)]=L\left[\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\right]$, 则$-g'(s)=L[xf(x)]=\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}$. 所以$g(s)=\log\frac{s+b}{s+a}+c$, 由于$g(\infty)=0$, 所以$c=0$. 从而

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x=\log\frac{s+b}{s+a}.$$

令$s=0$即可. □

解. 用Laplace变换, $L[1]=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{s}$, 则

$$LHS=\int_0^\infty\int_0^\infty(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt})\mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+t}\right)=\ln\frac{s+1}{s+t}\Big|_0^\infty=\ln t$$

□

问题 1.0.48: http://tieba.baidu.com/p/2686576086

设$f(x)$在实轴$\mathbb{R}$上有二阶导数, 且满足方程

$$2f(x)+f''(x)=-xf'(x).$$

求证$f(x)$和$f'(x)$都在$\mathbb{R}$上有界.

解. 构造$L=f^2+\frac{1}{2}f'^2$, 研究L'. 方程可改成$f''(x)+\frac{x}{2}f'(x)+f(x)=0$. □

问题 1.0.49: http://tieba.baidu.com/p/3846349760

证明: $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}$发散.

解. 由于$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 且$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调增加, 则$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$, 于是$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, 从而$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)>\ln n$, 即得. □

问题 1.0.50: http://tieba.baidu.com/p/4931607145

设$f(x)$在$[a,b]$上可导, $f'(x)$在$[a,b]$上可积. 令

$$A_n=\sum_{i=1}^n f\left(a+i\cdot\frac{b-a}{n}\right)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

试证

$$\lim_{n\to\infty}nA_n=\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)].$$

解. 令$x_i = a + i\cdot\frac{b-a}{n}$, 则

$$\begin{aligned} nA_n &= n\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n} - \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x\right] \\ &= n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x \\ &= n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

在$[x_{i-1},x_i]$上, (x_i-x)保号, 而$g(x)=\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}$连续(补充定义$g(x_i)=f'(x_i)$). 由积分第一中值定理知, 存在$\eta_i\in(x_{i-1},x_i)$, 使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x = g(\eta_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x.$$

再由Lagrange中值定理, 以上$g(\eta_i)=\frac{f(x_i)-f(\eta_i)}{\eta_i-x}=f'(\xi_i)$, $(\xi_i\in(\eta_i,x_i)\subset(x_{i-1},x_i))$. 于是

$$\begin{aligned} nA_n &= n\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x = \frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})^2 \\ &= \frac{n}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) \\ &\to \frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)), \text{当} n\to\infty. \end{aligned}$$

□

问题 1.0.51

$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{64}\sqrt[4]{2}\pi.$

问题 1.0.52

求证:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8}$$

解. 让$f(y)=\int_0^\infty \frac{\sin^3 yx}{x^3}\,\mathrm{d}x$, 判断积分号下可求导, 有

$$f''(y) = \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{-\sin yx + 3\sin 3yx}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}\mathrm{sign}y.$$

□

解. 用$\sum_{k=1}^\infty \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi-x}{2}$, 由

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\sin^3(kx)}{k^3} = \frac{9\sin(3kx)-3\sin(kx)}{4k}.$$

则

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{9\sin(3kx)-3\sin(kx)}{4k} = \frac{3\pi}{4} - 3x.$$

积分后得:

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\sin^3(kx)}{k^3} = \frac{3\pi}{8}x^2 - \frac{1}{2}x^3.$$

取$x=\frac{1}{n}$后两边同乘n^2得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n}=\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{2n}.$$

而广义 Riemann 和显示

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n}=\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

广义 Riemann 和成立的条件是 $\sum_{k=0}^{\infty}\sup_{x\in[k,k+1]}|f'(x)|<\infty$? 这不等式蕴含 $\int_0^{\infty}|f'|\,\mathrm{d}x<+\infty$, $f'\in L^1(0,\infty)$. □

解. 用 Parseval 定理

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(s)G(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中$F(s)=\mathcal{F}[f]$, $G(s)=\mathcal{F}[g]$, $\mathcal{F}[f]=\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\,\mathrm{d}x$. 若$f(x)=\frac{\sin x}{x}$, 则

$$F(s)=\begin{cases}\pi, & |s|\le 1\\ 0, & |s|>1,\end{cases}$$

若$g(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$, 则

$$G(s)=\begin{cases}\pi\left(1-\frac{|s|}{2}\right), |s|\le 2\\ 0, |s|>2,\end{cases}$$

所以$\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\pi^2\left(1-\frac{|s|}{2}\right)\mathrm{d}s=\frac{3\pi}{4}$. 即$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{8}$. □

解. 用 Laplace 变换 $F(s)=\mathcal{L}[f]=\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 对于$f(x)=\frac{\sin^3 x}{x^3}$有

$$F(s)=\frac{\pi s^2}{8}+\frac{3\pi}{8}-\frac{3(s^2-1)}{8}\arctan s+\frac{s^2-9}{8}\arctan\frac{s}{3}+\frac{3s}{8}\ln\frac{s^2+1}{s^2+9}.$$

□

解. 用 Laplace 恒等式

$$\int_0^{\infty}F(u)g(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^{\infty}f(u)G(u)\,\mathrm{d}u, F(s)=\mathcal{L}[f(t)], G(s)=\mathcal{L}[g(t)].$$

让 $G(u)=\frac{1}{u^3}$ 得 $g(u)=\frac{u^2}{2}$, 让 $f(u)=\sin^3 u$ 得 $F(u)=\frac{6}{(u^2+1)(u^2+9)}$, 则

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{6}{2}\int_0^{\infty}\frac{u^2}{(u^2+1)(u^2+9)}\,\mathrm{d}u=\frac{3\pi}{8}.$$

□

解. 留数定理, 由 $\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4}$ 得 $\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4x^3}\,\mathrm{d}x$. 围道 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$, $\gamma_1=[r,R]$, γ_2 是以 $(0,0)$ 为心 R 为径的上半圆, $\gamma_3=[-R,-r]$, γ_4 为以 $(0,0)$ 为心 r 为径的上半圆, γ 取逆时针方向为正方向. 取 $f(z)=\frac{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}z}}{z^3}$, 则 f 在 γ 内解析, 由 Cauchy-Goursat 公式

$$\oint_{\gamma}f(z)=0, \tag{1.1}$$

并用 Laurent 展开或留数定理得

$$\int_{\gamma_4}f(z)\,\mathrm{d}z=-\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}, \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2}f(z)\,\mathrm{d}z=0, \lim_{\substack{r\to0\\R\to\infty}}\int_{\gamma_1\cup\gamma_3}f(z)\,\mathrm{d}z=2\mathrm{i}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\mathrm{d}x.$$

代入1.2即得. □

问题 1.0.53

设函数$f:(a,b)\to\mathbb{R}$连续可微, 又设对于任意的$x,y\in(a,b)$, 存在唯一的$z\in(a,b)$使得$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(z)$. 证明: $f(x)$严格凸或严格凹.

解. 反证法, 构造λ的函数

$$\Lambda(\lambda) = f(\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta) - \lambda f(\alpha) - (1-\lambda)f(\beta), \quad \lambda \in (0,1)$$

若结论不真, 则存在$\alpha, \beta \in (a,b)$使$\Lambda(\lambda)$在$(0,1)$的某两点异号, 由于f连续, 所以存在$\lambda_0 \in (0,1)$使$\Lambda(\lambda_0) = 0$.

设$\gamma = \lambda_0\alpha + (1-\lambda_0)\beta$, 则$\gamma \in (\alpha,\beta) \subset (a,b)$且 $\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha} = \frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$. 再由拉格朗日中值定理得出矛盾. □

问题 1.0.54

设函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上无限可微, 且:

a) 存在$L>0$, 使得对于任意的$x\in\mathbb{R}$及$n\in\mathbb{N}$有$|f^{(n)}(x)|\le L$.

b) $f\left(\frac{1}{n}\right)=0$, 对所有$n=1,2,3\cdots$.

求证: $f(x)\equiv 0$.

解. 由f在$\mathbb{R}$上无限次可微, 且由a)知f有在$x=0$处的Taylor展开

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots.$$

设N是使$f^{(N)}(0)\neq 0$的最小者, 取正整数$M>1$使$|f^{(N)}(0)|>\frac{L}{M-1}$. 则

$$\begin{aligned}0=\left|f\left(\frac{1}{M}\right)\right|&=\left|f^{(N)}(0)\frac{x^N}{N!}+f^{(N+1)}(0)\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}+\cdots\right|\\&\ge|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-L\left(\frac{1}{(N+1)!M^{N+1}}+\frac{1}{(N+2)!M^{N+2}}+\cdots\right)\\&\ge|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-L\left(\frac{1}{N!M^{N+1}}+\frac{1}{N!M^{N+2}}+\cdots\right)\\&=|f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-\frac{L}{N!}\frac{1}{M^{N+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{M}}\\&=\left(|f^{(N)}(0)|-\frac{L}{M-1}\right)\frac{1}{N!M^N}>0.\end{aligned}$$

这导致矛盾, 即所有$f^{(n)}(0)=0$, $f(x)\equiv 0$. □

问题 1.0.55

设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\subset C_{[a,b]}$, 且$f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$, 则$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 因$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in[a,b]$, 所以$f\in C_{[a,b]}$且$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当$n>N$时, $\forall x\in[a,b]$均有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. $f(x),f_n(x)$连续必可积, 有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|<(b-a)\varepsilon.$$

其实当$a\le x\le b$时, 有$\left|\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|<(b-a)\varepsilon$对$x$一致成立, 所以$\int_a^x f_n(x)\,\mathrm{d}t\rightrightarrows\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. □

问题 1.0.56

$f_n(x)$在$[a,b]$上都有连续导数, 且$f_n(x)\to f(x)$, $f_n'(x)\rightrightarrows g(x)$, 则$f'(x)=g(x)$, 即$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)$.

解. 因$f_n'\rightrightarrows g$, 所以g连续, 可积, 由1.0.55, $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$, 所以$f'(x)=g(x)$. 其实$f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$在$[a,b]$上也一致收敛.

若1.0.55和本问题中的$f_n(x)$视为函数项级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$的前$n$项部分和, 就有函数项级数的相应命题.

(1). 若$[a,b]$上$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$中每项$u_k$均连续, 且$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\rightrightarrows f(x)$, 则$f(x)\in C_{[a,b]}$且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2). 若$[a,b]$上, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$的每项都有连续导数$u_k'(x)$且$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \rightrightarrows g(x)$, 而$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \to f(x)$. 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x).$$

□

问题 1.0.57

举反例:

(1) 积分的极限不等于极限的积分的函数列.

(2) 导数的极限不等于极限的导数的函数列.

解. (1). 在$[0,1]$上极限函数为0, 但f_n在$\left[0,\frac{1}{n}\right]$上面积为1的脉冲函数.
(2). $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$, $x \in [-1,1]$. □

问题 1.0.58: http://math.stackexchange.com/questions/2143014

证明: 对于任意的$\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left|\frac{\alpha-n}{\alpha+n}\right|$发散.

问题 1.0.59: http://math.stackexchange.com/questions/472007

判断$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n+10\sin n}$的敛散性.

解. 其实, 若$f(n)$是有界函数, 且级数$\sum_{n=1}^{n} \frac{f(n)}{n}$收敛, a是使任意的n都有$n+af(n) \neq 0$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n+af(n)}$.
这是因为

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{f(n)}{n+af(n)} = \sum_{n=1}^{m} \frac{f(n)}{n} + \sum_{n=1}^{m} \frac{-af^2(n)}{n(n+af(n))}$$

后一个和式用比较判别法. □

问题 1.0.60: http://math.stackexchange.com/questions/273559

判断$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n}$的敛散性.

解. 比较判别法, $[k\pi+\frac{\pi}{6},(k+1)\pi-\frac{\pi}{6}]$中总有至少一个整数.
或用$\sum \frac{\sin^2(n)}{n} = \sum \frac{1}{2n} - \sum \frac{\cos(2n)}{2n}$, 前者发散, 后者用Dirichlet判别法. □

问题 1.0.61: http://math.stackexchange.com/questions/991652

证明$\int_0^1 \left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right| \mathrm{d}x$发散.

解. 变量替换, 积分化为$\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} \mathrm{d}x$, 然后在子区间$(k\pi,(k+1)\pi)$上求下界. □

问题 1.0.62: http://math.stackexchange.com/questions/620449

证明: 求$p \in \mathbb{R}$, 使积分$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x^p} \mathrm{d}x$发散.

解. $p \geq -1$. □

问题 1.0.63: http://math.stackexchange.com/questions/596511

计算
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

解. 用Frullani积分. 结果为$\log 2$. 或用重积分: $\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}=x\int_1^2 \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$. 这里给出Frullani积分证明过程的做法.

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{2a}^{2b}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\int_a^b - \int_{2a}^{2b}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\int_a^{2a} - \int_b^{2b}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x \to \log(2)-0, \quad a\to 0, b\to\infty\end{aligned}$$

上式最后一步用$\mathrm{e}^{-2c}\log(2)\le\int_c^{2c}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x\le \mathrm{e}^{-c}\log(2)$. □

问题 1.0.64: http://math.stackexchange.com/questions/590774

已知$a>b>0$, 求$\lim_{t\to 0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)$.

解. 注意到$\Gamma(t)=a^t\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-as}}{s^{1-t}}\,\mathrm{d}s$, 所以

$$\lim_{t\to 0^+}(a^{-t}-b^{-t})\Gamma(t)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$$

然后用Frullani积分算得$\log\frac{a}{b}$. □

问题 1.0.65: http://math.stackexchange.com/questions/590774

已知$a>b>0$, 求$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$.

解. 可以用Frullani积分. 这里用含参积分求导的方法, 定义$I(t)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-tx}}{x}\,\mathrm{d}x$, 被积函数记为$f(x,t)$, 由$f(x,t)$和$f_t(x,t)$在定义域均连续, $I(t)$关于t收敛且$\int_0^\infty f_t(x,t)\,\mathrm{d}x$关于$t$一致收敛, 则满足积分号下求导条件, 所以$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{a}$, $I=-\log t$. □

解.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^\infty \frac{\exp(-ax)-\exp(-bx)}{x}dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_\epsilon^\infty \frac{\exp(-ax)}{x}dx - \int_\epsilon^\infty \frac{\exp(-bx)}{x}dx\right] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{a\epsilon}^\infty \frac{\exp(-t)}{t}dt - \int_{b\epsilon}^\infty \frac{\exp(-t)}{t}dt\right] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a\epsilon}^{b\epsilon}\frac{\exp(-t)}{t}dt = \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b \frac{\exp(-\epsilon u)}{u}du\end{aligned}$$

最后的被积函数一致收敛到$\frac{1}{u}$. □

解. 用Laplace变换, $F(s)=\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 则

$$F(s)=\int_0^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}e^{-sx}dx \implies F'(s)=-\int_0^\infty (e^{-bx}-e^{-ax})e^{-sx}dx.$$

计算最后一个积分, 然后求积分并令$s\to 0$, 其中积分出来的积分常数用极限$\lim_{s\to\infty}F(s)=0$计算. □

问题 1.0.66: http://math.stackexchange.com/questions/164400

求$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}x = \log t$, 其中$t>0$.

解. 让$u=\mathrm{e}^{-x}$, 得

$$\int_0^1 \frac{u^{t-1}-1}{\log u}\,\mathrm{d}u = \int_0^1\int_1^t u^{s-1}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u = \int_1^t\int_0^1 u^{s-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s = \log t.$$

□

解. 同1.0.65的解法一. □

解. 用重积分求解, $I(t)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty\int_1^t \mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x$. 这里验证积分次序可交换, 则

$$LHS = \int_1^t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = \ln t.$$

□

解. 用Laplace变换, $g(s)=L[f(x)]=L\left[\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\right]$, 则$-g'(s)=L[xf(x)]=\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}$. 所以$g(s)=\log\frac{s+b}{s+a}+c$, 由于$g(\infty)=0$, 所以$c=0$. 从而

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x = \log\frac{s+b}{s+a}.$$

令$s=0$即可. □

解. 用Laplace变换, $L[1]=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{s}$, 则

$$LHS = \int_0^\infty\int_0^\infty (\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-xt})\mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+t}\right) = \ln\frac{s+1}{s+t}\Big|_0^\infty = \ln t$$

□

问题 1.0.67: http://tieba.baidu.com/p/2686576086

设$f(x)$在实轴$\mathbb{R}$上有二阶导数, 且满足方程

$$2f(x)+f''(x) = -xf'(x).$$

求证$f(x)$和$f'(x)$都在$\mathbb{R}$上有界.

解. 构造$L=f^2+\frac{1}{2}f'^2$, 研究L'. 方程可改成$f''(x)+\frac{x}{2}f'(x)+f(x)=0$. □

问题 1.0.68: http://tieba.baidu.com/p/3846349760

证明: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$发散.

解. 由于$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$, 且$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调增加, 则$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}$, 于是$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, 从而$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} > \ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) > \ln n$, 即得. □

问题 1.0.69: http://tieba.baidu.com/p/4931607145

设$f(x)$在$[a,b]$上可导, $f'(x)$在$[a,b]$上可积. 令

$$A_n = \sum_{i=1}^n f\left(a+i\cdot\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

试证

$$\lim_{n\to\infty} nA_n = \frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)].$$

解. 令$x_i = a + i\cdot\frac{b-a}{n}$, 则

$$\begin{aligned} nA_n &= n\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n} - \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x\right] \\ &= n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x_i)-f(x)]\,\mathrm{d}x \\ &= n\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

在$[x_{i-1},x_i]$上, (x_i-x)保号, 而$g(x)=\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}$连续(补充定义$g(x_i)=f'(x_i)$). 由积分第一中值定理知, 存在$\eta_i\in(x_{i-1},x_i)$, 使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}(x_i-x)\,\mathrm{d}x = g(\eta_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x.$$

再由Lagrange中值定理, 以上$g(\eta_i)=\frac{f(x_i)-f(\eta_i)}{\eta_i-x}=f'(\xi_i)$, $(\xi_i\in(\eta_i,x_i)\subset(x_{i-1},x_i))$. 于是

$$\begin{aligned} nA_n &= n\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)\,\mathrm{d}x = \frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})^2 \\ &= \frac{n}{2}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) \\ &\to \frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}(f(b)-f(a)), \text{当} n\to\infty. \end{aligned}$$

□

问题 1.0.70

$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{64}\sqrt[4]{2}\pi.$

问题 1.0.71

求证:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8}$$

解. 让$f(y)=\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 yx}{x^3}\,\mathrm{d}x$, 判断积分号下可求导, 有

$$f''(y) = \frac{3}{4}\int_0^{\infty}\frac{-\sin yx + 3\sin 3yx}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}\mathrm{sign}y.$$

□

解. 用$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi-x}{2}$, 由

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{\sin^3(kx)}{k^3} = \frac{9\sin(3kx)-3\sin(kx)}{4k}.$$

则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9\sin(3kx)-3\sin(kx)}{4k} = \frac{3\pi}{4} - 3x.$$

积分后得:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^3(kx)}{k^3} = \frac{3\pi}{8}x^2 - \frac{1}{2}x^3.$$

取$x=\frac{1}{n}$后两边同乘n^2得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n}=\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{2n}.$$

而广义 Riemann 和显示

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^3\frac{k}{n}}{(k/n)^3}\frac{1}{n}=\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

广义 Riemann 和成立的条件是 $\sum_{k=0}^{\infty}\sup_{x\in[k,k+1]}|f'(x)|<\infty$? 这不等式蕴含 $\int_0^{\infty}|f'|\,\mathrm{d}x<+\infty$, $f'\in L^1(0,\infty)$. □

解. 用 Parseval 定理

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(s)G(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中$F(s)=\mathcal{F}[f]$, $G(s)=\mathcal{F}[g]$, $\mathcal{F}[f]=\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\,\mathrm{d}x$. 若$f(x)=\frac{\sin x}{x}$, 则

$$F(s)=\begin{cases}\pi, & |s|\le 1\\ 0, & |s|>1,\end{cases}$$

若$g(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$, 则

$$G(s)=\begin{cases}\pi\left(1-\dfrac{|s|}{2}\right), |s|\le 2\\ 0, |s|>2,\end{cases}$$

所以$\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\pi^2\left(1-\frac{|s|}{2}\right)\,\mathrm{d}s=\frac{3\pi}{4}$. 即$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{8}$. □

解. 用 Laplace 变换 $F(s)=\mathcal{L}[f]=\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x$, 对于$f(x)=\frac{\sin^3 x}{x^3}$有

$$F(s)=\frac{\pi s^2}{8}+\frac{3\pi}{8}-\frac{3(s^2-1)}{8}\arctan s+\frac{s^2-9}{8}\arctan\frac{s}{3}+\frac{3s}{8}\ln\frac{s^2+1}{s^2+9}.$$

□

解. 用 Laplace 恒等式

$$\int_0^{\infty}F(u)g(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^{\infty}f(u)G(u)\,\mathrm{d}u, F(s)=\mathcal{L}[f(t)], G(s)=\mathcal{L}[g(t)].$$

让 $G(u)=\frac{1}{u^3}$ 得 $g(u)=\frac{u^2}{2}$, 让 $f(u)=\sin^3 u$ 得 $F(u)=\frac{6}{(u^2+1)(u^2+9)}$, 则

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{6}{2}\int_0^{\infty}\frac{u^2}{(u^2+1)(u^2+9)}\,\mathrm{d}u=\frac{3\pi}{8}.$$

□

解. 留数定理, 由 $\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4}$ 得 $\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4x^3}\,\mathrm{d}x$. 围道 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$, $\gamma_1=[r,R]$, γ_2 是以 $(0,0)$ 为心 R 为径的上半圆, $\gamma_3=[-R,-r]$, γ_4 为以 $(0,0)$ 为心 r 为径的上半圆, γ 取逆时针方向为正方向. 取 $f(z)=\frac{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}z}}{z^3}$, 则 f 在 γ 内解析, 由 Cauchy-Goursat 公式

$$\oint_{\gamma}f(z)=0, \tag{1.2}$$

并用 Laurent 展开或留数定理得

$$\int_{\gamma_4}f(z)\,\mathrm{d}z=-\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}, \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2}f(z)\,\mathrm{d}z=0, \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}}\int_{\gamma_1\cup\gamma_3}f(z)\,\mathrm{d}z=2\mathrm{i}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\,\mathrm{d}x.$$

代入1.2即得. □

问题 1.0.72

设函数$f:(a,b)\to\mathbb{R}$连续可微, 又设对于任意的$x,y\in(a,b)$, 存在唯一的$z\in(a,b)$使得$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(z)$. 证明: $f(x)$严格凸或严格凹.

解. 反证法, 构造λ的函数

$$\Lambda(\lambda)=f(\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta)-\lambda f(\alpha)-(1-\lambda)f(\beta),\quad \lambda\in(0,1)$$

若结论不真, 则存在$\alpha,\beta\in(a,b)$使$\Lambda(\lambda)$在$(0,1)$的某两点异号, 由于f连续, 所以存在$\lambda_0\in(0,1)$使$\Lambda(\lambda_0)=0$.

设$\gamma=\lambda_0\alpha+(1-\lambda_0)\beta$, 则$\gamma\in(\alpha,\beta)\subset(a,b)$且$\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}$. 再由拉格朗日中值定理得出矛盾. □

问题 1.0.73

设函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上无限可微, 且:

a) 存在$L>0$, 使得对于任意的$x\in\mathbb{R}$及$n\in\mathbb{N}$有$|f^{(n)}(x)|\le L$.

b) $f\left(\frac{1}{n}\right)=0$, 对所有$n=1,2,3\cdots$.

求证: $f(x)\equiv 0$.

解. 由f在$\mathbb{R}$上无限次可微, 且由a)知f有在$x=0$处的Taylor展开

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots.$$

设N是使$f^{(N)}(0)\ne 0$的最小者, 取正整数$M>1$使$|f^{(N)}(0)|>\frac{L}{M-1}$. 则

$$\begin{aligned}
0=\left|f\left(\frac{1}{M}\right)\right| &= \left|f^{(N)}(0)\frac{x^N}{N!}+f^{(N+1)}(0)\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}+\cdots\right| \\
&\ge |f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-L\left(\frac{1}{(N+1)!M^{N+1}}+\frac{1}{(N+2)!M^{N+2}}+\cdots\right) \\
&\ge |f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-L\left(\frac{1}{N!M^{N+1}}+\frac{1}{N!M^{N+2}}+\cdots\right) \\
&= |f^{(N)}(0)|\frac{1}{N!M^N}-\frac{L}{N!}\frac{1}{M^{N+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{M}} \\
&= \left(|f^{(N)}(0)|-\frac{L}{M-1}\right)\frac{1}{N!M^N}>0.
\end{aligned}$$

这导致矛盾, 即所有$f^{(n)}(0)=0$, $f(x)\equiv 0$. □

Chapter 2

实变函数

问题 2.0.1

构造一个从$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$到$\mathbb{R}$的单射.

解. This is slightly more complicated. If you understand why $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ and $2^{\mathbb{N}}$ have the same cardinality, it's enough to observe that the map defined above had range $2^{\mathbb{N}}$; if you haven't seen that yet, then here's a straightforward (if somewhat unnatural) injection: given $\alpha = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, let $f(\alpha)$ be the real with binary expansion

$$0.0\ldots010\ldots010\ldots01\ldots$$

where the ith block of zeroes has length $a_i + 1$. □

问题 2.0.2

设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$是$E=[a,b]$上实函数列, 满足: $f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_n(x) \le \cdots$, 且$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in E$. 求证: 对任意$c \in \mathbb{R}$,

(I) $E(f(x) > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c)$.

(II) $E(f(x) \le c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) \le c)$.

解. (I). 对于任意的$x_0 \in E(f(x) > c)$, 有$f(x_0) > c$且$x_0 \in E$, 因为$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, 所以存在$n_0$, 使得$f_{n_0}(x_0) > c$, 故$x_0 \in E(f_{n_0}(x_0) < c)$, 于是$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c)$. 反之, 若$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c)$, 则存在$n_0$, 使得$f_{n_0}(x_0) > c$且$x_0 \in E$, 由单调性, $f(x_0) \ge f_{n_0}(x_0) > c$. 故$x_0 \in E(f(x) > c)$, 得证.

(II). 对(I)式取基本集$E=[a,b]$上的补集. □

问题 2.0.3

设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$为一列集合, 定义

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \{x : x\text{属于}A_n (n \ge 1)\text{中的无穷多个}\};$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \{x : x\text{至多不属于}A_n (n \ge 1)\text{中的有限个}\};$$

试证:

(I) $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

(II) $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.

解. (I). 由定义

$$\begin{aligned}x\in\limsup_{n\to\infty}A_n &\iff x\text{属于}A_n(n\geq 1)\text{中的无穷多个}\\ &\iff \forall n\geq 1,\text{总有}k_n\geq n\text{使}x\in A_k\\ &\iff \forall n\geq 1,\text{有}x\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\\ &\iff x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k.\end{aligned}$$

(II).

$$\begin{aligned}x\in\liminf_{n\to\infty}A_n &\iff \exists n_0\text{使}x\in A_k(k\geq n)\\ &\iff \exists n_0\text{使}x\in\bigcap_{k=n_0}^{\infty}A_k\\ &\iff x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.\end{aligned}$$

□

问题 2.0.4

(I) 若$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$, 则$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$.

(II) 若$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$, 则$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$.

解. (I) 由条件, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$单调上升, 有$\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=A_n(\forall n\geq 1)$, 于是$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\supset\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$. 即$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\liminf_{n\to\infty}A_n\supset\limsup_{n\to\infty}A_n\supset\liminf_{n\to\infty}A_n$.

(II). 用对偶律. □

问题 2.0.5

设$A\subset\mathbb{R}$且被开区间集$G=\{I_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$所覆盖, 证明存在$G$的可列子集$G^*$覆盖$A$.

解. 对于任意的$x\in A$, 由条件存在$I_x\in G$, $x\in I_x$, 因为x为I_x的内点, 则有x的邻域$V_\delta(x)\subset I_x$且$V_\delta(x)$的端点均为有理数. 于是$\{V_\delta(x):x\in A\}$覆盖A且至多可列. 不妨设$\{V_\delta(x):x\in A\}=\{V_1,V_2,\cdots,V_n,\cdots\}$, 而由$V_n$的构造可在$G$中找到对应的$I_n$. 于是$G^*=\{I_1,I_2,\cdots,I_n,\cdots\}$即为所求. □

问题 2.0.6

E_n是$\mathbb{R}$上单调降的可测集列, 对于任意的$n\in\mathbb{N}$, 均有$E_{n+1}\supset E_n$, 且$m(E_1)<+\infty$, 则$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\lim_{n\to\infty}m(E_n)$.

解. 让$E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$, $F_k=E_k-E_{k+1}$, 则$E_1-E=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$, 且$F_k$两两不交, 则

$$m(E_1)-m(E)=m(E_1-E)=\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k-E_{k+1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(mE_k-mE_{k+1})=mE_1-\lim_{n\to\infty}mE_n.$$

所以$\lim_{n\to\infty}mE_n=m(E)$. 其中$m(E_1)<+\infty$不能省, 如取$E_n=(-n,n)^c$. □

问题 2.0.7: 等测覆盖定理

证明: 对任意集合$A\subset\mathbb{R}$恒有G_δ型集G, 使$G\supset A$且$mG=m^*A$

解. 任取$\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, 由外测度定义及下确界定义知, 必有开区间集列$\{I_k^{(n)} : k = 1, 2, \cdots\}$满足

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{(n)} \text{且} \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k^{(n)}) < m^*A + \frac{1}{n}.$$

令$G_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^{(n)}$, $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, 则由外测度次可列可加性, $m(G_n) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k^{(n)}) < m^*(A) + \frac{1}{n}$. 显然$G_n$为开集. G为G_δ型集, 且$A \subset G \subset G_n$, $(n = 1, 2, \cdots)$. 故有

$$m^*(A) \le m^*G \le m^*G_n < m^*(A) + \frac{1}{n}.$$

于是$mG = m^*G = m^*A$. □

问题 2.0.8: 等测核心定理

证明: 若A为有界(有界可去掉)可测集, 必有F_σ型集F, 使$F \subset A$且$mF = mA$.

解. 存在$E = [\alpha, \beta] \supset A$, 设$S = E - A$, 由2.0.7, 存在$G_\delta$型集$G$使$G \supset S$, $m^*S = mG$, $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, G_n开, 令$F_n = E - G_n$, 则F_n闭, 令$F = E \cap G^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E \cap G_n^c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, 故$F$为$F_\sigma$型集, 且$F = E \cap G^c = E - G \subset E - S \subset A$, 及

$$mF = m(E \cap G^c) = m(E - G) \ge mE - mG = mE - m^*S = mE - m^*(E - A) = m_*A = mA, F \subset A \Rightarrow mF \le mA.$$

所以$mF = mA$. □

问题 2.0.9

设E可测, $mE < +\infty$, 证明: $\forall \varepsilon > 0$, 有闭集F使$F \subset E$且$m(E - F) < \varepsilon$.

解. 由等测核心定理, 存在$F \in F_\sigma$型集, 使$F \subset E$且$mE = mF$, 设$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, F_k闭, 记$S_n = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$, 则$S_n$闭且$S_n \subset E$, 由$S_n$单调且$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n$, 所以$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$使得当$n > N$时, 有$mE - mS_n < \varepsilon$, 而$S_n \subset E$, $mS_n < +\infty$得证. □

问题 2.0.10

设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$是可测集$E$上定义的可测函数列, 证明$\sup_n f_n(x)$与$\inf_n f_n(x)$都是$E$上可测函数.

解. 其实$E(\sup_n f_n(x) > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c)$, 只证$LHS \subset RHS$. 若$x_0 \in LHS$, 则$\sup_n f_n(x_0) > c$, 记$\varepsilon = \sup_n f_n(x_0) - c$, 则对于任意的$\delta \in (0, \varepsilon)$, 存在$N$使得$f_N(x_0) > \sup_n f_n(x_0) - \delta > c$, 所以$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n(x) > c)$. □

问题 2.0.11

设$mE \ne 0$, f在E上可积, 若对任何有界可测函数$\varphi(x)$, 都有$\int_E f\varphi \,\mathrm{d}x = 0$, 则$f = 0, a.e. E$.

解. 取$\varphi(x) = (\chi_{E(f\ge0)} - \chi_{E(f<0)})(x)$, 则$0 = \int_E f\varphi \,\mathrm{d}x = \int_E |f| \,\mathrm{d}x$, 即得. □

问题 2.0.12

设$mE < +\infty$, $f(x)$在E上可积, E_n单调上升可测, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f \,\mathrm{d}x = \int_E f \,\mathrm{d}x.$$

解. 因E_n可测, 所以E可测, 令$F_1 = E_1$, $F_2 = E_2 - E_1, \cdots, F_n = E_n - E_{n-1}, \cdots$, 则$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, 且对任意$i \neq j$, $F_i \cap F_j = \emptyset$. 于是

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\cup F_n} f\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{F_n} f\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{F_k} f\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{\cup_{k=1}^{n}F_k} f\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f\,\mathrm{d}x.$$

□

问题 2.0.13

证明:

$$(L)\int_0^1 \frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(p+k)^2}, \quad (p > -1).$$

解. 让$f(x) = \frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{p+n-1}\ln\frac{1}{x}$, 用Levi定理, $(L)\int_0^1 f\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}(L)\int_0^1 x^{p+n-1}\ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. □

问题 2.0.14

试证, 当f在$(a,+\infty)$上有界, 非负, (R)可积时, 则f在$(a,+\infty)$上(L)可积, 且

$$(L)\int_{(0,+\infty)} f\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^{\infty} f\,\mathrm{d}x.$$

解. 由f有界(R)可积, 对任一有限区间(a,A)有$(L)\int_{(a,A)} f\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$. 于是

$$(L)\int_{(a,+\infty)} f\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty}(L)\int_{(a,A)} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty}(R)\int_a^A f\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^{\infty} f\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

即得. □

问题 2.0.15

$f, |f|$在$(a,+\infty)$上有界, (R)可积, 则f在$(a,+\infty)$上(L)可积, 且

$$(L)\int_{(a,+\infty)} f\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^{\infty} f\,\mathrm{d}x.$$

解. 由2.0.14知, $|f|$在$(a,+\infty)$上(R)可积, 有$|f|$在$(a,+\infty)$上(L)可积, 且积分值相等, 于是(取$E = (a,+\infty)$)

$$(L)\int_E f^+\,\mathrm{d}x \le (L)\int_E |f|\,\mathrm{d}x = (R)\int_E |f|\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

同理$(L)\int_E f^-\,\mathrm{d}x < +\infty$. 则$f^+, f^-$的$(L)$积分和$(R)$积分相等. 从而$f$的$(L)$积分和$(R)$积分相等.

反例, $|f|$在E上(R)可积不可省, 否则考虑$\frac{\sin x}{x}$在$(0,+\infty)$上(R)可积, 但

$$(L)\int_{(0,+\infty)}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x = (R)\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x = +\infty.$$

从而$\frac{\sin x}{x}$在$(0,+\infty)$上必(L)不可积. □

Chapter 3

泛函分析

问题 3.0.1

设$X = \{f(z) : f$在$|z| < 1$内解析, 且在$|z| \le 1$上连续$\}$, 令

$$d(f, g) = \max_{|z|=1} |f(z) - g(z)|, \quad f, g \in X.$$

求证: (X, d)是度量空间.

解. 正则性: $d(f, g) = 0 \Longleftrightarrow \max_{|z|=1} |f(z) - g(z)| = 0$, 而由最大模原理对于任意的$|z| \le 1$, 有$|f(z)-g(z)| \le \max_{|z|=1} |f(z)-g(z)| = 0$, 所以$f \equiv g, \forall |z| \le 1$. □

问题 3.0.2

求证: $l^1 \subsetneqq l^p \subsetneqq l^q \subsetneqq c \subsetneqq l^\infty$, $(1 < p < q < +\infty)$.

问题 3.0.3

求证: $C[a, b] \subsetneqq L^\infty[a, b] \subsetneqq L^p[a, b] \subsetneqq L^q[a, b] \subsetneqq L[a, b]$, $(1 < q < p < +\infty)$.

问题 3.0.4

$x, y \in \mathbb{R}^n$或l^1, $x = (\xi_i)$, $y = (\eta_i)$,

$$d_p(x, y) = \left(\sum |\xi_i - \eta_i|^p\right)^{1/p}.$$

则$d_p(x, y) \ge d_q(x, y)$, $\forall 1 \le p \le q < +\infty$.

问题 3.0.5

设$X(n) = \{P(D) = p_n D^n + p_{n-1} D^{n-1} + \cdots + p_1 D + p_0 : p_n, \cdots, p_0 \in \mathbb{R}\}$, 其中$D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 令

$$d(P(D), Q(D)) = \sum_{i=0}^{n} |p_i - q_i|$$

其中$Q(D) = \sum_{i=0}^{n} q_i D^i$, $D^0 = 1$, 求证: $(X(n), d)$是度量空间.

问题 3.0.6

求证: 若$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$满足

(I) $\rho(x,x) = 0$, $\forall x \in X$, $\rho(x,y) > 0$, $\forall x \neq y$.

(II) $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(y,z)$, $\forall x,y,z \in X$.

则(X,ρ)是度量空间.

问题 3.0.7

求证: 度量空间中的闭球,

$$V[x_0,r] = \{x \in X : d(x,x_0) \le r\}, r > 0, x_0 \in X$$

总是闭集, 球面$S(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0) = r\}$也是闭集, 试问: 是否恒有$V[x_0,r] = \overline{V(x_0,r)}$, 及$V[x_0,r] - V(x_0,r) = S(x_0,r) \neq \emptyset$?

解. 通常的离散拓扑, 取$r = 1$. □

问题 3.0.8

设$A \subset (X,d)$, 令$F(x) = d(x,A) = \inf_{y\in A} d(x,y)$, 求证: $F : X \to \mathbb{R}$是连续泛函且一致连续.

解. 设$x_1, x_2 \in X$, 由$d(x_1,A) \le d(x_1,x_2) + d(x_2,A) \implies |F(x_1) - F(x_2)| \le d(x_1,x_2)$, 于是$F(x)$是$X$上 Lipschitz 连续的, 从而一致连续. □

问题 3.0.9

求证: $K : C[a,b] \to C[a,b]$, $x(t) \mapsto \int_a^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$一致连续.

解. $\|Kx - Ky\|_C = \max_{t\in[a,b]} \left|\int_a^t (x(\tau) - y(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right| \le (b-a)\|x-y\|_C$. □

问题 3.0.10

求证: 度量空间(X,d)中互不相交的闭集A,B, 必有互不相交的开集G,V使得$A \subset G$, $B \subset V$.

解. $A \subset B^c$故$x \in A$必有$\delta_x > 0$使$V(x,\delta_x) \subset B^c$, 所以$A \subset \bigcup_{x\in A} V(x,\delta_x) \subset B^c$, 故

$$A \subset \bigcup_{x\in A} V(x,\frac{1}{2}\delta_x) \subset \overline{\bigcup_{x\in A} V(x,\frac{1}{2}\delta_x)} \subset \bigcup_{x\in A} V(x,\delta_x) \subset B^c$$

令$G = \bigcup_{x\in A} V(x,\frac{1}{2}\delta_x)$, $V = \left(\bigcup_{x\in A} V(x,\frac{1}{2}\delta_x)\right)^c$. □

解. $F(x) = d(x,A)$是连续泛函, 令$G = \{x \in X; d(x,A) < d(x,B)\}$, 则$G = G^{-1}((-\infty,0))$, 其中$G(x) = d(x,A) - d(x,B)$是$X$上的连续泛函, 从而$G$开且$A \subset G$. 同理$B \subset V = \{x \in X : d(x,B) < d(x,A)\}$开于$X$. □

问题 3.0.11

设$Y = \{f; f : (X,d) \to \mathbb{R}$为有界连续泛函$\}$, 令

$$\rho(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|,$$

设x_0为X中固定点, 令$G : X \to (Y,\rho)$, $y \mapsto d(x,y) - d(x,x_0)$, 求证: $G : (X,d) \to (G(x),\rho)$是等距映射.

解. 先证$G(X)$是(Y,ρ)的子空间, 然后证$\rho(G(y),G(z))=d(y,z)$. □

问题 3.0.12

设$A,M\subset(X,d)$, 求证: A在M中稠密, 即$\overline{A}\supset M$的充要条件为如下任何一条成立:

(I) $\forall x\in M$的任一邻域$V_\varepsilon(x)$有$A\cap V_\varepsilon(x)\neq\emptyset$.

(II) $\forall x\in M$, 存在$\{y_n\}\subset A$, 使$y_n\to x$.

(III) 若A在B中稠密, 且B在M中稠密.

解. (I). 若$x\in M$, $\forall\varepsilon>0$, $A\cap V_\varepsilon(x)\neq\emptyset$, 必有$x\in\overline{A}$, 即$M\subset\overline{A}$.
(II). 因$x\in\overline{A}\Longleftrightarrow\exists y_n\in A$, 使得$y_n\to x$, 故若$\forall x\in M$, $\exists y_n\in A$使得$y_n\to x$, 则$x\in\overline{A}$.
(III). 因A在B中稠密, 故$\overline{A}\supset B$, B在M中稠密, 故$\overline{B}\supset M$, 从而$\overline{A}\supset M$. □

问题 3.0.13

求证: $l^p(1\leq p<+\infty)$是可分的.

解. 首先$\mathbb{R}^n$是可分的, 稠子集为$\mathbb{Q}^n=\{r=(r_1,\cdots,r_n):r_i\in\mathbb{Q},i=1,\cdots n\}$, 令

$$M=\{r=(r_1,\cdots,r_n,0,0,\cdots):n\in\mathbb{N},r_i\in\mathbb{Q},i=1,2,\cdots,n\},$$

则M是l^p的可列子集, 然后证$\overline{M}=l^p$. □

问题 3.0.14

求证: l^∞是不可分的.

解. 令$K=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots):x_i$或为0或为1$\}$, 则$K$不可数且$K$中人两个不同元素$x\neq y$, 有$d_\infty(x,y)=1$, 若$l^\infty$可分且其稠子集为$B$, B可数, 作集类

$$\left\{V\left(x,\frac{1}{3}\right):x\in K\right\}.$$

则它为不可列集, 且两两不交, 但对于任意的$x\in K$必有$B\cap V\left(x,\frac{1}{3}\right)\neq\emptyset$, 从而$B$不可数, 矛盾. □

问题 3.0.15

设(X,d)是离散度量空间, 求证: 任一映射$F:(X,d)\to(Y,\rho)$都是一致连续的.

问题 3.0.16

设(X,d)为度量空间, $Y=\{f;f:X\to\mathbb{R}\}$为 Lipschitz 连续泛函$\}$, 即

$$f\in Y\Longleftrightarrow\text{存在常数}k\text{使}|f(x)-f(y)|\leq kd(x,y),\forall x,y\in X.$$

(I) Y是线性空间.

(II) 问$\sigma(f,g)=\inf\{k:|f(x)-g(x)-f(y)+g(y)|\leq kd(x,y),\forall x,y\in X\}$是否为$Y$上的度量?

(III) 设$Y_0=\{f:f\in Y,f(x_0)=0\}$, 其中$x_0$为$X$中定点, 问$\sigma$是否为$Y_0$上的度量.

解. (II). $\sigma(f,g)=0$未必有$f=g$, 设$f\in Y$, 令$g=f(x)+c$(c非零常数), 则$g\in Y$但$\sigma(f,g)=0$, 因此σ不是Y上的度量(称为Y上的拟度量).

(III). 因

$$\sigma(f,g)=\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-g(x)-f(y)+g(y)|}{d(x,y)},$$

故$\sigma(f,g)=0\iff f(x)-g(x)=f(y)-g(y)=f(x_0)-g(x_0)$, 对于任意的$x,y\in X$成立, 即$f(x)\equiv g(x)$, 对于任意的$x\in X$, 即$f=g$, 从而易得$\sigma$是$Y_0$上的度量. □

问题 3.0.17

设$f_n,f\in C[a,b]$且$d(f_n,f)\to 0$, $t_n\in[a,b]$, $t_n\to t_0$, 求证:

$$\lim_{n\to\infty}f_n(t_n)=f(t_0).$$

问题 3.0.18

设$f:X\to X$连续, (X,d)为度量空间, 设$X\times X$中度量为

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=d(x_1,x_2)+d(y_1,y_2),\quad (x_i,y_i)\in X\times X.$$

定义$X\times X$的对角线集为

$$\Delta=\{(x,x):x\in X\},$$

令

$$g:\Delta\to\mathrm{Graph}(f),\quad (x,x)\mapsto(x,f(x)).$$

求证: g连续, 可逆, g^{-1}也连续.

解. $x_n,x\in X$, 因$(x_n,x_n)\to(x,x)\iff d(x_n,x)\to 0$, 所以由$f:X\to X$连续, 故$(x_n,x_n)\to(x,x)$时, $d(x_n,x)\to 0$, 从而$d(f(x_n),f(x))\to 0$, 从而

$$d((x_n,f(x_n)),(x,f(x)))=d(x_n,x)+d(f(x_n),f(x))\to 0$$

所以g连续. 然后证g是双射, 所以可逆.

$$g^{-1}:\mathrm{Graph}(f)\to\Delta,\quad (x,f(x))\mapsto(x,x),$$

于是

$$(x_n,f(x_n))\to(x,f(x))\iff d((x_n,f(x_n)),(x,f(x)))\to 0\iff d(x_n,x)\to 0 \text{ 且 } d(f(x_n),f(x))\to 0\implies(x_n,x_n)\to(x,x)$$

所以g^{-1}连续. □

问题 3.0.19

求证: 同胚映射$F:(X,d)\to(Y,\rho)$, 若(X,d)可分, 则(Y,ρ)可分.

问题 3.0.20

设 Hilbert 立方体 $A=\{x=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots):|\xi_n|\le\frac{1}{n},\forall n\}$, 求证$A$闭于$l^2$.

解. 显然$A\subset l^2$, 设$x_0\in\overline{A}$, 则存在$x_k=\left(\xi_i^{(k)}\right)\in A$使得$d(x_k,x_0)\to 0$, 即$\forall i$, $\left|\xi_i^{(k)}-\xi_i^{(0)}\right|\to 0$, 从而$\left|\xi_i^{(0)}\right|\le\frac{1}{i}$, 于是$x_0\in A$. 其实, A闭于$l^p(1<p\le+\infty)$. □

问题 3.0.21: http://math.stackexchange.com/questions/1087885

定义: 设(S,ρ)是一距离空间, $T:S\to S$, 若存在$\beta\in(0,1)$使对于任意$x,y\in S$, 有$\rho(Tx,Ty)\le\beta\rho(x,y)$称$T$为压缩映射.

定理 3.0.1: Blackwell's 压缩映射的充分条件

让$X\subset\mathbb{R}^l$, $B(X)$是带有上确界范数的有界函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 的全体组成的空间, 让 $T:B(X)\to B(X)$ 满足

1) (单调性), $f,g\in B(X)$ 且若 $f\le g, \forall x\in X$ 则 $Tf\le Tg, \forall x\in X$.

2) (discounting) 存在 $\beta\in(0,1)$ 使 $\forall f\in B(X)$, $a\ge 0$, $x\in X$ 有 $[T(f+a)](x)\le(Tf)(x)+\beta a$, 其中 $(f+a)(x):=f(x)+a$.

则 T 是模 β 的压缩映射.

解. 若 $f\le g, \forall x\in X$, 则 $\forall f,g\in B(X)$, $f\le g+\|f-g\|$, 从而

$$Tf\le T(g+\|f-g\|)\le Tg+\beta\|f-g\|.$$

交换 f,g的位置, 从而有 $\|Tf-Tg\|\le\beta\|f-g\|$. □

问题 3.0.22: http://math.stackexchange.com/questions/1125691

让 $A=(a_{ij})$ 为一 $n\times n$ 实矩阵, $b\in\mathbb{R}^n$, 并有 $\|A-I\|_2<1$, 证明映射 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $x\mapsto x-Ax+b$ 是压缩映射, 其中距离定义为普通 Euclid 距离.

解. $Tx=b-(A-I)x$, 所以 $Tx-Ty=(A-I)(y-x)$, 又因为 $\|A-I\|_2<1$, 所以存在 $\alpha\in(0,1)$ 使 $\|A-I\|_2\le\alpha<1$,

$$\|Tx-Ty\|\le\|A-I\|_2\cdot\|y-x\|<\alpha\|y-x\|.$$

所以 T 是压缩映射. □

问题 3.0.23: http://math.stackexchange.com/questions/1124660

让(S,ρ)为一紧距离空间, 映射$T:S\to S$使对于任意$x\neq y$, 有$\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)$. 证明: $\phi(x)=\rho(x,Tx)$连续, 且T有唯一不动点.

解. 因$|\rho(x,Tx)-\rho(y,Ty)|\le\rho(x,y)+\rho(Tx,Ty)<2\rho(x,y)$, 所以$\phi(x)$连续. 任取$x\in S$, 构造点列$\{T^nx\}$, 并利用$S$的紧性. 唯一性用反证法. □

Chapter 4

神奇的反例

问题 4.0.1

举例说明: $\lim_{x\to a}\phi(x)=A$, $\lim_{x\to A}\psi(x)=B$, 但$\lim_{x\to a}\psi(\phi(x))\neq B$.

解.

$$\phi(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q},(p,q\in\mathbb{Z},(p,q)=1)\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}\qquad a=0.$$

□

问题 4.0.2: http://math.stackexchange.com/questions/2190498

给出如下论断的反例.
存在$x_0\in[a,b]$使函数项级数的和函数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$收敛到$f(x)$, 在$[a,b]$上$\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$收敛到$g(x)$. 则$f'=g$

解. 定义$f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$为

$$f_n(x)=n(n+1)(n+2)\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{n+2}}{n+2}\right).$$

则f_n在$[0,1)$上点态收敛到0, 且$f_n(1)=n$. 其导数$f_n'(x)=n(n+1)(n+2)x^n(1-x)$, 在$[0,1]$上逐点收敛到0. □

问题 4.0.3: http://math.stackexchange.com/questions/294383

给出一个积分号下不能求导的例子.

解. 令$F(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-sx}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$, 则

$$F''(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-sx}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\psi'\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s\right)-\frac{1}{2s}$$

积分一次, $F'(s)$的常数项不能确定是有限值, 且积分两次后的特解使$F(0)=\frac{\log\pi}{2}$与正确的$F(0)=-\frac{\log 2}{2}$不同. □

问题 4.0.4: http://math.stackexchange.com/questions/494145

给出一个不能逐项求导的收敛级数.

解. 定义$u_k(x)$为

$$\sum_{k=1}^{n}u_k(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$$

则$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = 0$. 若逐项求导则有

$$\sum_{k=1}^{n} u_k'(x) = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

其和在$x = 0$处发散 $\square$

Chapter 5

定理集

5.1 数学分析

定理 5.1.1: 关于有界, 无界的充分条件

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$存在, 则$\exists\delta>0$, 当$-\delta<x-x_0<0$时, $f(x)$有界; 对$x\to x_0^+$, $x\to x_0$有类似结论.
(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在, 则存在$X>0$, 当$|x|>X$时, $f(x)$有界. $x\to\pm\infty$有类似结论.
(3) $f(x)\in C[a,b]$, 则$f(x)$在$[a,b]$上有界.
(4) $f(x)$在集U上有最大(小)值, 则$f(x)$在U上有上(下)界.
(5) 有界函数间的和, 积运算封闭.
(6) $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=\infty$, 则$f(x)$在$\square$的空心邻域内无界. $\square$可为$x_0, x_0^-, x_0^+, \infty, \pm\infty$.

定理 5.1.2: Stolz定理

证明: 若

(a) $y_{n+1}>y_n (n\in\mathbb{N}_+)$;

(b) $\lim_{n\to\infty} y_n=+\infty$;

(c) $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$存在.

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

定理 5.1.3: Cauchy定理

若函数$f(x)$定义于区间$(a,+\infty)$, 并且在每一个有限区间(a,b)内是有界的, 则

(a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$;

(b) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^{1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}$, $(f(x)\geq C>0)$,

假定等是右端的极限都存在且可为$\pm\infty$.

问题: 对于上下极限是否仍有类似结论?.

定理 5.1.4

假设$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, 每个在$[a,b]$上均可积, 且$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $n \to \infty$. 则$f(x)$可积, 且

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, \mathrm{d}x.$$

解. 类似1.0.55 □

定理 5.1.5: (一致收敛级数)逐项积分

$u_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, 对每个$k \in \mathbb{N}_+$均可积, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$在$[a,b]$上一致收敛. 则$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$可积, 且

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) \, \mathrm{d}x.$$

解. 让$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$并用5.1.4 □

定理 5.1.6: 逐项微分

设$u_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_+$, 每项均有连续导数(端点处单边可微), 若有:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$在某些点$x_0 \in [a,b]$收敛.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$在$[a,b]$上一致收敛到$f(x)$.

则

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$在$[a,b]$上收敛且和函数$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$在$[a,b]$上可微且$F'(x) = f(x)$.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \rightrightarrows F(x)$.

解. (1). u_k'连续($k \in \mathbb{N}_+$), $\sum_{k=1}^{\infty} u_k' \rightrightarrows f$, 则$f \in C[a,b]$, 所以$f$在$[a,b]$上可积. 让$x \in [a,b]$, 对$u_k'$和$f$在区间$[x_0, x]$上使用5.1.5, (或$[x, x_0]$, 如果$x < x_0$), 则有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k'(x) \, \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (u_k(x) - u_k(x_0)).$$

由假设(i), $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$收敛, 所以级数$F(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$对任意$x \in [a,b]$均收敛, 所以$F : [a,b] \to \mathbb{R}$是良定义的, 于是$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x) \, \mathrm{d}x$, 由$f$连续, 两边求导, 便有$F'(x) = f(x)$.

(2). Cauchy判别法, 取$\varepsilon > 0$, 则$\exists N_1$使任意$n \ge m \ge N_1$有

$$\left| \sum_{k=m}^{n} u_k(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

存在N_2使任意$n \ge m \ge N_2$有

$$\left| \sum_{k=m}^{n} u_k'(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad x \in [a,b]$$

故可取$N = \max\{N_1, N_2\}$, $g(x) = \sum_{k=m}^{n} u_k(x)$, 则$g(x) - g(x_0) = g'(\xi)(x - x_0)$. 于是

$$|g(x)| \le |g(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{2} + |g'(\xi)| \cdot |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

故由Cauchy判别法, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$一致收敛. □

定理 5.1.7: 求导与极限的交换

函数列$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_+$, 在$[a,b]$上连续可微, $f_n(x) \to f(x)$, $x \in [a,b]$. $f_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$, $x \in [a,b]$, 则f可微且$f'(x) = \varphi(x)$, 从而$f_n \rightrightarrows f$.

解. 取$u_1 = f_1$, $u_n = f_n - f_{n-1}$, $n > 1$, 并用5.1.6. $\square$

5.2 微分方程

定理 5.2.1: 伯努力方程

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)y + q(x)y^n$, 其中$p(x)$, $q(x)$是所考虑区域上的连续函数, $n(\neq 0, 1)$是常数.

解.

(1) 当$n > 0$时, $y = 0$是方程的解.

(2) 当$y \neq 0$时, 两边同除以y^n, 令$z = y^{1-n}$, 即得一阶线性方程.

□

5.3 泛函分析

定理 5.3.1: Arzela-Ascoli定理

设$\{f_n\}$是$[0,1]$上一致有界, 等度连续函数族, 则存在某一子序列$\{f_{n(i)}\}$在$[0,1]$上一致收敛.

定理 5.3.2: Hahn-Banach, $\mathbb{R}-version$

设$\mathcal{X}$是定义在$\mathbb{R}$上的向量空间, $q:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$是拟半范数. 若给定线性子空间$\mathcal{Y}\subset\mathcal{X}$和其上的线性映射$\phi:\mathcal{Y}\to\mathbb{R}$, 使得

$$\phi(y)\le q(y),\forall y\in\mathcal{Y}.$$

则存在线性映射$\varphi:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$满足

(i) $\varphi\mid_{\mathcal{Y}}=\phi$;

(ii) $\varphi(x)\le q(x)$, $\forall x\in\mathcal{X}$.

解. 先证$\mathcal{X}/\mathcal{Y}=1$的情况. 即有$x_0\in\mathcal{X}$使得

$$\mathcal{X}=\{y+sx_0:y\in\mathcal{Y},s\in\mathbb{R}\}.$$

于是只需找到$\alpha\in\mathbb{R}$使得映射$\varphi(y+sx_0)=\phi(y)+s\alpha$, $\forall y\in\mathcal{Y}$, $s\in\mathbb{R}$满足条件(ii), 于是$s>0$时有

$$\alpha\le q(z+x_0)-\phi(z),\forall z\in\mathcal{Y},z=s^{-1}y,s>0$$

对于$s<0$时有

$$\alpha\ge\phi(w)-q(w-x_0),\forall w\in\mathcal{Y},w=t^{-1}y,s<0$$

然而$\phi(w)-q(w-x_0)\le q(z+x_0)-\phi(z)$, $\forall w,z\in\mathcal{Y}$恒成立. 然后用Zorn引理. □

未知 5.3.1: Hahn-Banach定理, $\mathbb{C}$-version

设$\mathcal{X}$是复数域$\mathbb{C}$上的向量空间, $q:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$是$\mathcal{X}$上的拟半范数, 给定线性子空间$\mathcal{Y}\subset\mathcal{X}$和$\mathcal{Y}$上的线性映射$\phi:\mathcal{Y}\to\mathbb{C}$使得

$$\mathrm{Re}\phi(y)\le q(y),\quad\forall y\in\mathcal{Y}.$$

则存在线性映射$\psi:\mathcal{X}\to\mathbb{C}$满足:

(i) $\psi\mid_{\mathcal{Y}}=\phi$;

(ii) $\mathrm{Re}\psi(x)\le q(x)$, $\forall x\in\mathcal{X}$.

解. 设$\phi_1=\mathrm{Re}\phi$, 因ϕ_1是$(\mathcal{Y},\mathbb{R})$上的线性映射且被拟半范数q控制, 则由$\mathbb{R}$-Hahn Banach定理, ϕ_1可延拓到$(\mathcal{X},\mathbb{R})$上的实线性映射ψ_1且满足

(i') $\psi_1\mid_{\mathcal{Y}}=\phi_1$;

(ii') $\psi_1(x)\le q(x)$, $\forall x\in\mathcal{X}$.

但注意这里用的是实的Hahn Banach定理, 所延拓的ψ_1是针对实向量空间$(\mathcal{X},\mathbb{R})$的, 要得到复向量空间的ψ_1, 则在$(\mathcal{Y},\mathbb{C})$上考虑$\psi_1(y)=\phi_1(y)$, 但新定义的ψ_1是实域上的线性映射, 而不是复域上的线性映射, 显然所求线性映射ψ的实部$\mathrm{Re}\psi$在实线性空间中也满足以上两条件. 若取$\mathrm{Re}\psi=\psi_1$, 则ψ在实的情况已满足条件(ii). 而$\mathrm{Im}\psi(y)=\mathrm{Re}(-\mathrm{i}\psi(y))=\mathrm{Re}\psi(-\mathrm{i}y)=\psi_1(-\mathrm{i}y)$, 于是$\psi(y)=\psi_1(y)+\mathrm{i}\psi_1(-\mathrm{i}y)$, 要证$\psi\mid_{\mathcal{Y}}=\phi$, 只需证$\mathrm{Im}\psi(y)=\mathrm{Im}\phi(y)$, $\forall y\in\mathcal{Y}$, 然而

$$\mathrm{Im}\phi(y)=\mathrm{Re}(-\mathrm{i}\phi(y))=\mathrm{Re}(\phi(-\mathrm{i}y))=\phi_1(-\mathrm{i}y)=\psi_1(-\mathrm{i}y)=\mathrm{Im}\psi(y).$$

最后证明线性映射$\psi(x)=\psi_1(x)+\mathrm{i}\psi_1(-\mathrm{i}x)$在复域上满足(ii), 注意这里的$\psi_1(-\mathrm{i}x)$是怎么定义的? □

5.4 拓扑

定理 5.4.1: 杨忠道定理

证明: 拓扑空间中的每一子集的导集为闭集的充分必要条件是此空间中的每一个单点集的导集为闭集.

解. 只证充分性. 设拓扑空间X的每一个单点集的导集为闭集, 任意$A\subset X$, 设$x\in d(d(A))$, 对x的任意开邻域U, 有$U\cap(d(A)\setminus\{x\})\neq\varnothing$, 因$d(\{x\})$是闭集, 且$x\notin d(\{x\})$, 令$V=U\setminus d(\{x\})$, V是x的开邻域, 从而有

$$y\in V\cap(d(A)\setminus\{x\}).$$

由$y\in V$, $y\notin d(\{x\})$, 且$y\neq x$, 于是存在$W\in\mathscr{U}_y$, 使得$x\notin W$, 因$V\in\mathscr{U}_y$, 令$K=W\cap V$, $K\in\mathscr{U}_y$, 由$y\in d(A)$, 存在$z\in K\cap(A\setminus\{y\})\neq\varnothing$. 由$z\in K\subset W$, $z\neq x$, 因此$z\in U\cap(A\setminus\{x\})$, 故$U\cap(A\setminus\{x\})\neq\varnothing$, 即$x\in d(A)$, 所以$d(d(A))\subset d(A)$, $d(A)$为闭集. □

5.5 数论

定理 5.5.1: 恒等定理

设$f(x),g(x)\in D[x]$, 若有无穷多个$\alpha\in D$使$f(\alpha)=g(\alpha)$, 则$f(x)=g(x)$.

定理 5.5.2: 拉格朗日定理

设$f(x)$是整系数多项式, 模p的次数为n, 则同余方程

$$f(x)\equiv 0 \pmod p \tag{5.1}$$

至多有n个互不相同的解.

解. $n=1$时结论显然成立, 对n归纳. 假设$n-1$时已正确, 当f的次数是n时, 若同余方程无解, 则无需证明. 若$x=a$是一个解, 用$(x-a)$除$f(x)$得$f(x)=g(x)(x-a)+A$, $(A\in\mathbb{Z})$, 若同余方程(5.1)除$x\equiv a \pmod p$外无解, 则证毕, 否则设$x=b$是(5.1)的另一个解, 且$a\not\equiv b \pmod p$, 则

$$0\equiv f(b)=g(b)(b-a)+A \pmod p, \text{又由}0\equiv f(a)=g(a)(a-a)+A=A \pmod p.$$

所以$g(b)\equiv 0 \pmod p$, 这表明(5.1)的解除$x\equiv a \pmod p$之外, 其余的解均是$g(x)\equiv 0 \pmod p$的解, 但$g(x)$模p的次数显然是$n-1$, 由归纳假设, $g(x)\equiv 0 \pmod p$, 至多有$n-1$个互不同余的解, 从而同余方程(5.1)至多有n个解. □

定理 5.5.3: 整系数多项式的有理根

$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0\in\mathbb{Z}[x]$, $n\geq 1$, $a_na_0\neq 0$且$(a_n,\cdots,a_0)=1$, 若$\frac{b}{c}$是$f(x)$的一个有理根$(b,c)=1$, 则$c\mid a_n$, $b\mid a_0$. 特别地, 首项系数为±1的整系数多项式的有理根必是整数.

解. 由$f\left(\frac{b}{c}\right)=0$, 得$a_nb^n+\cdots+a_1bc^{n-1}+a_0c^n=0$, 所以$a_0\mid b$, $a_n\mid c$.
一种证明有理数是整数的证明途径: 证复数是整数, 先证其是有理数, 且找到作为零点的首一多项式. □

定理 5.5.4: Gauss引理

$\mathbb{Z}[x]$中两个本原多项式的乘积仍是一个本原多项式.

解. 反证法, $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$, $g(x)=b_mx^m+\cdots+b_0$, 若$f(x)g(x)$不是本原多项式, 则有素数p整除$f(x)g(x)$的所有系数. 设r是a_i不被p整除的最小角标, s是b_i不被p整除的最小角标, 则$f(x)g(x)$的x^{r+s}项系数不能被p整除. □

定理 5.5.5: 艾森斯坦判别法

设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$是一个整系数多项式, 其中$n\geq 1$. 若存在一个素数p, 使得$p\nmid a_n$, $p\mid a_i(i=0,1,\cdots,n-1)$, 但$p^2\nmid a_0$, 则$f(x)$在$\mathbb{Z}$上不可约.

定理 5.5.6: 科恩定理

设$p=\overline{a_n\cdots a_1a_0}$是一个十进制素数, $0\leq a_i\leq 9(i=0,1,\cdots,n)$, $a_n\neq 0$. 则多项式

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0.$$

在$\mathbb{Z}$上不可约.

解. 先用**??**, 再用**??**. □

定理 5.5.7

Every nonzero integer can be written as a product of primes.

解. Assume that there is an integer that cannot be written as a product of primes. Let N be the smallest positive integer with this property. Since N cannot itself be prime we must have $N=mn$, where $1<m,n<N$. However, since m and n are positive and smaller than N they must each be a product of primes. But then so is $N=mn$. This is a contradiction.

The proof can be given in a more positive way by using mathematical induction. It is enough to prove the result for all positive integers. 2 is a prime. Suppose that $2<N$ and that we have proved the result for all numbers m such that $2\leq m<N$. We wish to show that N is a product of primes. If N is a prime, there is nothing to do. If N is not a prime, then $N=mn$, where $2\leq m,n<N$. By induction both m and n are products of primes and thus so is N. □

定理 5.5.8: m进(m-adic)表示

正整数$m\geq 2$, $\forall a\in\mathbb{N}_+$, 有表示$a=a_0+a_1m+\cdots+a_sm^s$.

定理 5.5.9: Bézout's identity(贝祖等式)

任意两整数$a,b(b\neq 0)$的正最大公因子$d=(a,b)$唯一存在, 而且存在整数u,v使得$ua+vb=d$, u,v称为Bézout系数, Bézout系数不唯一, 若设$a'=\frac{a}{d}$, $b'=\frac{b}{d}$, 则恰有两系数对满足$|u|<|b'|$, $|v|<|a'|$.

解. 若$a>b$, $a=bq+r$, 则$(a,b)=(r,b)$, 于是由碾转相除法的逆过程可得u,v. □

解. 不用碾转相除法. $M=\{ax+by\mid x,y\in\mathbb{Z}\}$, d是M中的最小正整数(自然数良序性). 则若$d=ax_0+by_0$知$(a,b)\mid d$, 所以只需证$d\mid(a,b)$. 若$d\nmid a$, 取$a=dq+r$, 则$r=a\hat{x_0}+b\hat{y_0}<d$与$d$的选取矛盾. □

推论 5.5.1

a,b互素等价于: 存在整数u,v使$ua+vb=1$.
$a,b\in\mathbb{Z}$, 则:

$$\begin{aligned}(a,b)=d&\Rightarrow\{am+bn\mid m,n\in\mathbb{Z}\}=\{dk\mid k\in\mathbb{Z}\}\\&\Rightarrow a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=d\mathbb{Z}\\&\Rightarrow(a,b)=(d)\end{aligned}$$

推论 5.5.2: Bézout等式

任s个非零整数$a_1,\cdots,a_s$的最大公因子$d=(a_1,\cdots,a_s)$存在唯一, 且$(a_1,\cdots,a_{s-1},a_s)=((a_1,\cdots,a_{s-1}),a_s)$, 且存在整数$u_1,\cdots,u_s$使, $u_1a_1+\cdots+u_sa_s=d$.

定理 5.5.10

$v_p(n)$使使得$p^k\|n$的整数k. 则

$$v_p(n!)=\sum_k\left[\frac{n}{p^k}\right].$$

定理 5.5.11: 威尔逊定理

p是素数, 则有$(p-1)!\equiv -1 \pmod p$.

解. 当$p=2$时, 命题显然. 若$p\geq 3$, 由于对每个与p互素的a在模p下均有逆a^{-1}. 故可得$1,2,\cdots,p-1$的每个与其逆配对, 而特别的当$a=a^{-1}$时是例外. 此时对应$a^2\equiv 1 \pmod p$有解$a=1$或$a=p-1$, 而$2,\cdots,p-2$可两两配对使积为1. 所以$(p-1)!\equiv 1\cdot(p-1)\equiv -1 \pmod p$. □

解. 用 Euler 恒等式

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}i^n=\begin{cases}0, n<m\\(-1)^n n!, n=m\end{cases}$$

取$m=n=p-1$, 当 $p>2$ 时及 Fermat 小定理有

$$(-1)^{p-1}\cdot(p-1)!\equiv\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\binom{p-1}{i}i^{p-1}\equiv\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i\binom{p-1}{i}\equiv -1 \pmod p.$$

□

解. 当 $p\geq 3$ 时, 由 Fermat 小定理 $p-2$ 次同余方程

$$f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-p+1)-x^{p-1}+1\equiv 0 \pmod p$$

有 $p-1$ 个不同得解, 所以 $f(x)$ 的系数模 p 余零, 所以常数项 $(p-1)!+1\equiv 0 \pmod p$. □

5.6 不等式

定理 5.6.1: Generalized Schur Inequality

设六个非负实数a,b,c,x,y,z满足(a,b,c)和(x,y,z)均单调, 则

$$\sum_{cyc}x(a-b)(b-c)\geq 0.$$

解. 不妨设$a\geq b\geq c$, 分$x\geq y\geq z$与$x\leq y\leq z$两种情况分别讨论. □

推论 5.6.1

记$S=\sum_{cyc}x(a-b)(a-c)$. 下面几条条件的任何一个均可证明$S\geq 0$.

(1) 当$a\geq b\geq c\geq 0$, $x\geq y\geq 0$且$z\geq 0$时.

(2) 当$a\geq b\geq c\geq 0$, $z\geq y\geq 0$且$x\geq 0$时.

(3) 当$a\geq b\geq c\geq 0$, 且$ax\geq by\geq 0$或者$by\geq cz\geq 0$时.

解. (1)和(2)显然, 对于(3)有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{abc}(x(a-b)(a-c)+y(b-a)(b-c)+z(c-a)(c-b))\\&\qquad=ax\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+by\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+cz\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right).\end{aligned}$$

便转化为前面的两种情况了. □

Chapter 6

定义集

6.1 初等数论

定义 6.1.1: 模p同余

若两多项式$f(x)$与$g(x)$同次幂系数均关于模p同余, 则称$f(x)$和$g(x)$对模p同余或模p恒等.

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{p}.$$

定义 6.1.2: 多项式模p的次数

若$f(x)$的系数不全被p整除, 其中系数不被p整除的最高幂次称为$f(x)$模p的次数.

定义 6.1.3: 容度, 本原多项式

设$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, 且$f(x) \neq 0$, 将$a_0, a_1, \cdots, a_n$的最大公约数$(a_0, a_1, \cdots, a_n)$, 称为$f(x)$的容度. 容度为1的多项式称为本原多项式.

6.2 泛函分析

定义 6.2.1: 紧算子

设 X 是 Banach 空间, 若线性算子 T 把每一有界集映成列紧集, 则称线性算子 T 为紧算子.

定义 6.2.2: Banach空间中的凸集

设 X 是 Banach 空间, 集合 $K \subset X$称为是凸的, 若 $(1-t)K + tK \subset K$, $(0 \leq t \leq 1)$.

定义 6.2.3: 拟半范数, 半范数

设$\mathbb{K}$是$\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$, $\mathcal{X}$是域$\mathbb{K}$上的向量空间.

A. 映射$q : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$称为拟半范数, 如果

(i) $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$, 对于任意$x, y \in \mathcal{X}$.
(ii) $q(tx) = tq(x)$, 对任意的$x \in \mathcal{X}$和$t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

B. 映射$q : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$称为是半范数, 如果上面的两个条件中(ii)改为

(ii') $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$, 对任意$x \in \mathcal{X}$和$\lambda \in \mathbb{K}$.

注: 若$q : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$是半范数, 则对于任意的$x \in \mathcal{X}$, $q(x \geq 0)$. (因$2q(x) = q(x) + q(-x) \geq q(0) = 0$).