



Corso di Fondamenti di Telecomunicazioni


3 - SEGNALI DIGITALI E A IMPULSI IN BANDA BASE

Prof. Giovanni Schembra
[parte 1]

1

Fondamenti di TLC - Prof. G. Schembra

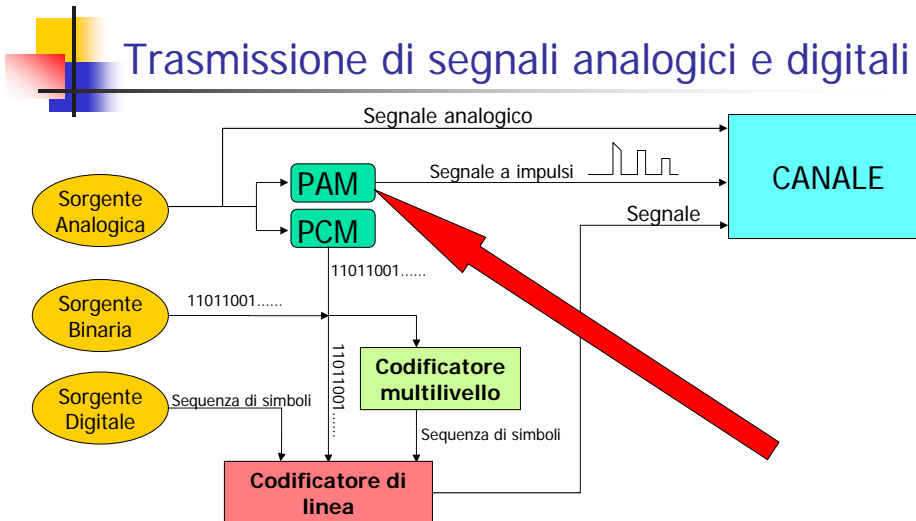
3 - Segnali digitali e a impulsi in banda base [parte 1]



Struttura della lezione

- **Codifica digitale dei segnali analogici**
 - Pulse-amplitude modulation (PAM)
 - Pulse-code modulation (PCM)
- **Segnali digitali binari e multilivello**
- **Codici di linea**
- **Spettro e banda dei segnali digitali**
- **Diagramma a occhio**
- **Riduzione dell'interferenza intersimbolica**

2



3

Pulse-Amplitude modulation (PAM)

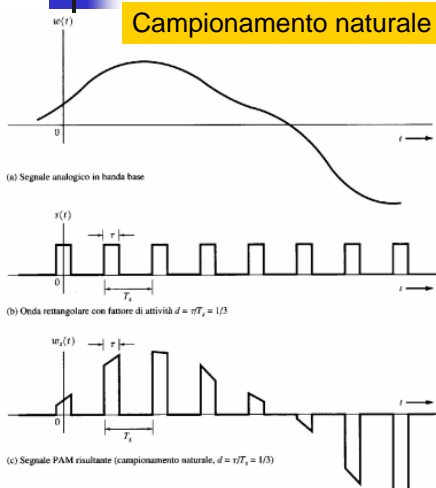
SEGNALE ANALOGICO → SEGNALE a IMPULSI di durata τ

- L'ampiezza di ogni impulso rappresenta l'informazione analogica
- Usando segnale impulsivo (con impulsi di durata finita), la **banda del segnale PAM** è più grande di quella del segnale di partenza;
- tuttavia i treni di impulsi sono di uso più pratico per i sistemi digitali

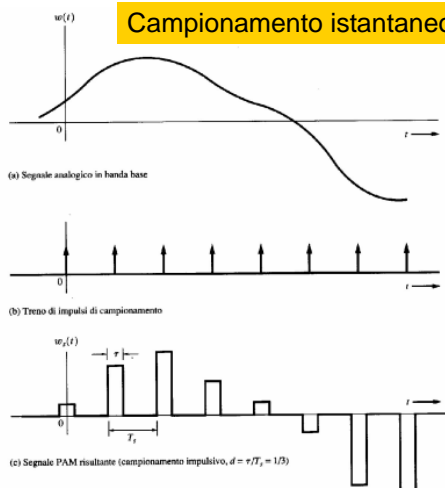
4

Campionamento naturale e campionamento istantaneo

Campionamento naturale



Campionamento istantaneo



Pulse-Amplitude modulation (PAM)

- Il campionamento avviene con frequenza:

$$f_s \geq 2B$$

Teorema di Nyquist

- Campionamento di tipo naturale:**
 - tramite una porta analogica
 - semplice da realizzare
 - utilizzato per la moltiplicazione a divisione di tempo
- Campionamento di tipo istantaneo:**
 - interpolazione con impulsi rettangolari
 - utilizzato per la conversione PCM



Campionamento naturale

- **Definizione:** se $w(t)$ è un segnale analogico con banda limitata a B Hz, il segnale PAM con **campionamento naturale** è:

$$w_s(t) = w(t) s(t)$$

dove:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - kT_s}{\tau}\right)$$

treno di impulsi ciascuno con durata τ

$$f_s = 1/T_s \geq 2B$$

frequenza di campionamento

- **Spettro di un segnale PAM con campionamento naturale**

$$W_s(f) = \mathcal{F}\{w_s(t)\} = d \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(nd) \cdot W(f - nf_s)$$

dove: $\omega_s = 2\pi f_s$

$W(f)$ Spettro forma d'onda originaria

$d = \tau/T_s$ Duty cycle

7



Spettro di un segnale PAM con campionamento naturale: dimostrazione

Dimostrazione. Calcolando la trasformata di Fourier di entrambi i membri dell'equazione (3-1) si ha

$$W_s(f) = W(f) * S(f) \quad (3-4)$$

D'altronde $s(t)$ può essere espanso in serie di Fourier come segue:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_s t} \quad (3-5a)$$

dove

$$c_n = d \frac{\sin n\pi d}{n\pi d} \quad (3-5b)$$

Poiché $s(t)$ è periodica, possiamo usare (2-109) per ottenerne lo spettro:

$$(2-109) \quad S(f) = \mathcal{F}[s(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f - nf_s) \quad (3-6)$$

cosicché la (3-4) diventa

$$W_s(f) = W(f) * \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f - nf_s) \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n W(f) * \delta(f - nf_s)$$

ovvero

$$W_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n W(f - nf_s) \quad (3-7)$$

che coincide con la (3-3) non appena sostituiamo la (3.5b).

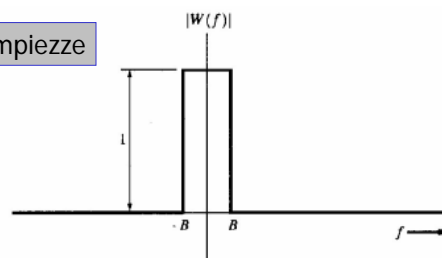
8

Esempio: campionamento naturale con duty-cycle $d=1/3$

- **Segnale di partenza:**
 - spettro rettangolare
- **Duty-cycle:** $d=1/3$
- **Frequenza di campionamento:** $f_s=4B$ [sovracampionato]

ESEMPIO

Spettro delle ampiezze



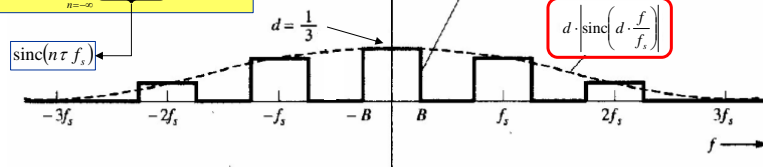
(a) Spettro di ampiezza del segnale analogico di ingresso

9

Esempio: campionamento naturale con duty-cycle $d=1/3$

ESEMPIO

$$W_s(f) = \mathfrak{T}\{w_s(t)\} = d \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(nd) \cdot W(f - nf_s)$$

(b) Spettro di ampiezza del segnale PAM (campionamento naturale) con $d = 1/3$ e $f_s = 4B$

- Lo spettro del segnale PAM viene replicato sui multipli della frequenza di campionamento
- Lo spettro del segnale PAM è nullo alle frequenze $\pm 3f_s, \pm 6f_s$, ecc.
- La banda del segnale PAM è molto più grande di quella del segnale di partenza

10

In ricezione

- Il segnale di origine può essere **recuperato esattamente**, a meno di una costante moltiplicativa da compensare con un amplificatore, filtrando il segnale PAM in un filtro passa-basso con frequenza di taglio

$$B < f_{\text{taglio}} < f_s - B$$

- Dato che tutti i segnali fisici hanno durata limitata, hanno banda illimitata

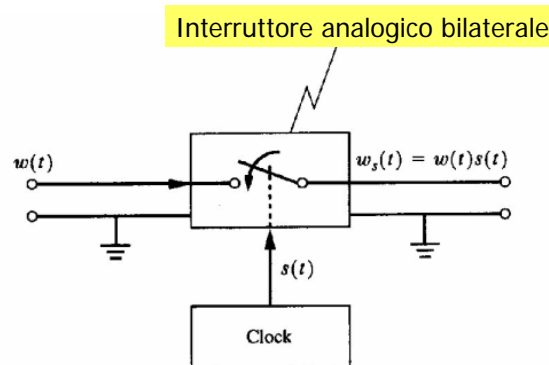


- Necessità di un filtro *anti-aliasing*

11

Realizzazione di campionamento naturale per la generazione di un segnale PAM

- Uso di una porta analogica**
 - ad esempio la porta bilaterale quadrupla 4016 in tecnologia CMOS



12

PAM con campionamento istantaneo e interpolazione con impulso rettangolare

- **Definizione:** se $w(t)$ è un segnale analogico con banda limitata a B Hz, il segnale PAM con **campionamento istantaneo** è:

$$w_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} w(kT_s)h(t-kT_s)$$

dove:

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \tau \leq T_s$$

impulso campionatore

$$f_s = 1/T_s \geq 2B$$

frequenza di campionamento

- **Teorema:**

- **Spettro di un segnale PAM con campionamento istantaneo e interpolazione con impulso rettangolare:**

$$W_s(f) = \mathcal{F}\{w_s(t)\} = d \operatorname{sinc}(\tau f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} W(f - kf_s)$$

13

Spettro di un segnale PAM con campionamento istantaneo: dimostrazione

$$w_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} w(kT_s)h(t-kT_s) \quad (3-8)$$

Dimostrazione. Lo spettro del segnale con campionamento istantaneo si trova calcolando la trasformata di Fourier della (3-8). Innanzitutto riscriviamo quest'ultima usando un'operazione di convoluzione:

$$\begin{aligned} w_s(t) &= \sum_k w(kT_s)h(t) * \delta(t - kT_s) \\ &= h(t) * \sum_k w(kT_s) \delta(t - kT_s) \end{aligned}$$

Dunque

$$w_s(t) = h(t) * \left[w(t) \sum_k \delta(t - kT_s) \right]$$

Calcoliamo ora la trasformata di Fourier

$$W_s(f) = H(f) \cdot \left[W(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_s) \right]$$

14

Spettro di un segnale PAM con campionamento istantaneo: dimostrazione

Sappiamo che il segnale pettine è periodico, e si può sviluppare in serie di Fourier su tutto l'asse temporale:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn2\pi f_s t}$$

$$c_n = \frac{1}{T_s}$$

Vedi dim. formula

$$c_n = f_0 H(n f_0)$$

nella lezione 2.2

Lo spettro è a righe, e il generico impulso di Dirac ha ampiezza pari al relativo c_n

$$\mathfrak{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(f - n f_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_s)$$

15

Spettro di un segnale PAM con campionamento istantaneo: dimostrazione

$$\mathfrak{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)\right\} = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_s)$$

$$W_s(f) = H(f) \cdot \left[W(f) * \mathfrak{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)\right\} \right]$$

Usando questa relazione nella (3-12) si ottiene

$$W_s(f) = H(f) \left[W(f) * \frac{1}{T_s} \sum_k \delta(f - k f_s) \right]$$

$$= \frac{1}{T_s} H(f) \left[\sum_k W(f) * \delta(f - k f_s) \right]$$

$$\Rightarrow W_s(f) = \mathfrak{T}\{w_s(t)\} = \frac{1}{T_s} H(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} W(f - k f_s)$$

dove:

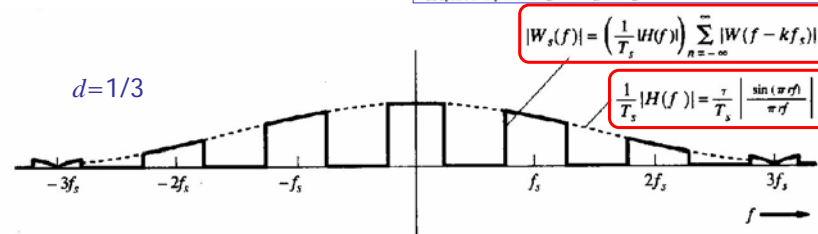
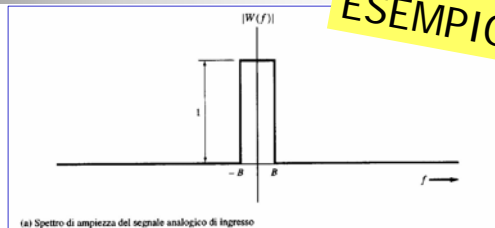
$$H(f) = \mathfrak{T}\{h(t)\} = \tau \text{sinc}(\tau f) \Rightarrow W_s(f) = \mathfrak{T}\{w_s(t)\} = d \text{sinc}(\tau f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} W(f - k f_s)$$

Spettro di un segnale PAM con campionamento istantaneo con duty-cycle $d=1/3$

ESEMPIO

$$W_s(f) = \mathcal{F}\{w_s(t)\} = \frac{1}{T_s} H(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} W(f - kf_s)$$

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \tau \operatorname{sinc}(\tau f)$$



(b) Spettro di ampiezza del segnale PAM (campionamento impulsivo), $\tau/T_s = 1/3$ e $f_s = 4B$

17

Segnale PAM con campionamento istantaneo: discussione

- Questo tipo di segnale PAM consiste in campioni istantanei
- Il segnale PAM a impulso rettangolare può essere generato dai circuiti elettronici "sample & hold"
- In ricezione:
 - è necessario utilizzare un filtro passa-basso per eliminare le repliche dello spettro, come per il campionamento naturale
 - tuttavia si ha in più una distorsione sul segnale causata da un effetto filtrante dell'impulso di campionamento $h(t)$ (distorsione d'apertura)
- La distorsione in ricezione può essere diminuita:
 - diminuendo la durata dell'impulso τ (l'apertura)
 - modificando la risposta in frequenza del filtro di ricostruzione; si utilizza in ricezione un filtro equalizzatore con risposta in frequenza pari a $1/H(f)$

18



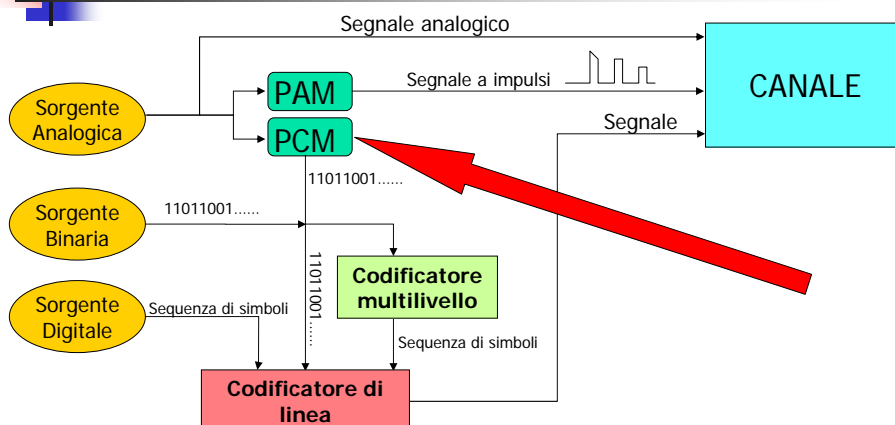
Applicazioni della modulazione PAM

- La trasmissione di un segnale PAM richiede un canale di comunicazione a larga banda, a causa della ridotta durata degli impulsi
- È meno robusto al rumore rispetto al segnale analogico
- Viene quindi utilizzato principalmente:
 - CAMPIONAMENTO NATURALE: per confinare il segnale analogico in intervalli temporali (time slot), in sistemi basati su **multiplazione a divisione di tempo (TDM)**
 - CAMPIONAMENTO ISTANTANEO: come primo passo per la conversione del segnale in PCM

19



Trasmissione di segnali analogici e digitali



20



Pulse-code modulation (PCM)



■ Definizione:

- la modulazione con codici a impulsi (pulse-code modulation - PCM) è un tipo particolare di **conversione analogico-digitale**
- l'informazione contenuta nel campione (istantaneo) di un segnale analogico viene rappresentata da una "**parola di codice**" digitale organizzata in un flusso di dati binari

■ Parole di codice

- sia n il numero di bit costituenti la singola parola di codice
- esistono $M=2^n$ parole di codice distinte; ciascuna rappresenta un diverso livello di ampiezza del segnale [**QUANTIZZAZIONE**]:
- l'esatto valore del segnale viene rimpiazzato dal più vicino degli M valori permessi

■ Altre tecniche di conversione analogico-digitale:

- Modulazione delta
- PCM differenziale (DPCM)

21



Vantaggi e svantaggi del digitale

■ Vantaggi del digitale:

- La circuiteria digitale è a basso costo
- I segnali digitali derivanti da sorgenti analogiche (audio, video, voce) possono essere multiplati con segnali dati e trasmessi su di un'unica rete digitale
- Indipendenza dalla dinamica (valore picco-picco) del segnale
- Nei sistemi di telefonia digitale a lunga distanza con ripetitori è possibile **rigenerare** i segnali digitali, eliminandone completamente i disturbi
- È possibile utilizzare delle tecniche di codifica di canale per proteggere i segnali dal rumore

■ Svantaggi del digitale:

- Necessità di maggiore banda rispetto ai segnali analogici

22



Ripetitori di segnale in cascata sul percorso sorgente-destinazione

- **Per segnali analogici:**
 - **Ripetitori lineari** (filtri e amplificatori)
 - I disturbi e le distorsioni si accumulano ripetitore per ripetitore
- **Per segnali digitali:**
 - **Ripetitori rigenerativi**
 - Interpretano la sequenza di bit ricevuta con un rivelatore a soglia, e la rigenerano
 - Se non ci sono stati errori nella rivelazione, riproducono una replica del segnale digitale originale senza aggiunta di disturbi
 - La spaziatura tra tali ripetitori (lunghezza della tratta) dipende dall'attenuazione del portante (cavo in rame, fibra ottica, radioonde), e dalla quantità di rumore di canale


23



Campionamento, quantizzazione e codifica

- **Tre fasi per la generazione del segnale PCM:**
 - **Fase 1: Campionamento**
 - genera un segnale PAM con impulso rettangolare a partire dal segnale analogico
 - **Fase 2: Quantizzazione**
 - il segnale PAM viene quantizzato **sostituendo** ai valori nel continuo dei valori tra gli M valori ammessi
 - quantizzazione:
 - **uniforme**: tutti i livelli di quantizzazione sono equidistanti
 - **non uniforme**: le ampiezze dei livelli di quantizzazione vengono scelte opportunamente a seconda del segnale da trasformare in digitale

24



Campionamento, quantizzazione e codifica

■ Fase 2: Quantizzazione


■ errore di quantizzazione:

- differenza tra il segnale analogico all'ingresso del quantizzatore, e quello all'uscita del quantizzatore;
- il **valore di picco** di questo errore è pari alla metà del passo di quantizzazione

$$err_{quant}^{(MAX)} = \pm \frac{\Delta}{2}$$

- campionando alla frequenza di Nyquist, e trascurando il rumore di canale, rimane ancora l'effetto di tale errore, detto **rumore di quantizzazione**

25



Campionamento, quantizzazione e codifica

■ Tre fasi per la generazione del segnale PCM:

■ Fase 3: Codifica

- Prende in ingresso il segnale PAM quantizzato ottenuto al passo precedente, e associa ad ogni valore del segnale quantizzato una parola di codice binaria
- Esempio: codifica Gray, che associa parole che differiscono di un solo bit a livelli di quantizzazione adiacenti, in modo che errori su un singolo bit non di segno causano errori minimi nell'ampiezza ricostruita

26

Campionamento, quantizzazione e codifica

- Esempio: codice Gray per un segnale con $V_{pp} = 16 \text{ V}$

TABELLA 3-1 CODICE GRAY A TRE BIT PER M = 8 LIVELLI

Campioni quantizzati di tensione	Parola di codice con codifica Gray (segnale PCM di uscita)
+8 V	110
+6 V	111
+4 V	101
+2 V	100
0 V	
-2 V	000
-4 V	001
-6 V	011
-8 V	010

Immagine speculare (a eccezione del bit di segno).

Esercizio: calcolare il codice Gray a 2 bit e a 4 bit

27

Altri tipi di codifica

- Esempio: 3 bit → 8 livelli

Codifica naturale	Codifica Gray	Codifica "complemento 2"
111	100	011
110	101	010
101	111	001
100	110	000
011	010	111
010	011	110
001	001	101
000	000	100

28



Rappresentazione in complemento a 2

Facoltativo

Rappresentazione in complemento a 2

Per rappresentare numeri interi negativi si usa la cosiddetta *rappresentazione in complemento a 2*. Ad esempio, supponiamo di avere a disposizione n bit. Se vogliamo rappresentare numeri interi senza segno, sappiamo che possiamo rappresentare numeri nell'intervallo $[0, 2^n - 1]$. Se invece vogliamo rappresentare anche numeri negativi, allora le configurazioni che hanno il bit più significativo uguale a zero, cioè $[0, 2^{n-1} - 1]$, rappresentano se stesse, mentre le configurazioni col bit più significativo uguale a uno, cioè $[2^{n-1}, 2^n - 1]$, rappresentano i numeri negativi che si ottengono traslando a sinistra l'intervallo di 2^n , cioè l'intervallo $[-2^{n-1}, -1]$. Per questo, nella rappresentazione in complemento a 2, il bit più significativo viene chiamato *bit di segno*.

Con 8 bit, ad esempio, possiamo rappresentare i numeri naturali nell'intervallo $[0, 2^8 - 1]$, cioè $[0, 255]$, oppure i numeri relativi nell'intervallo $[-2^7, 2^7 - 1]$, cioè $[-128, 127]$. Con 16 bit (2 byte)

29



Rappresentazione in complemento a 2

Facoltativo

Per ottenere la rappresentazione in complemento a 2 di un numero negativo:

“si parte dalla rappresentazione binaria del valore assoluto (che avrà il bit di segno = 0) e si prende il complemento a 1 di ciascun bit, quindi si aggiunge 1 al risultato”.

Es. (si supponga una parola di 8 bit):

$$\begin{array}{rcl}
 27_{10} & = & 00011011_2 \\
 \text{complemento a 1} & : & 11100100 \\
 & & + 1 \\
 & & \hline
 -27_{10} & = & 11100101_2
 \end{array}$$

30



Rappresentazione in complemento a 2

Facoltativo

Viceversa, se abbiamo una sequenza di 8 bit e sappiamo che essa rappresenta un numero intero con segno, con i numeri negativi rappresentati in complemento a 2, allora, per ottenere il numero rappresentato, cominciamo con l'esaminare il bit di segno. Se esso è zero, il numero rappresentato è non negativo e lo otteniamo con la normale conversione binario-decimale. Se invece il bit di segno è uno, allora sappiamo che si tratta di un numero negativo. Per ottenere il modulo del numero applichiamo l'algoritmo di sopra, cioè complementiamo tutti i bit e sommiamo 1 al risultato.

Per esempio, se il numero binario 11100101 è la rappresentazione in complemento a 2 di un numero, il valore assoluto del numero rappresentato si ottiene così:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{complemento a 1} & : & 00011010 \\
 & & + 1 \\
 & & \hline
 27_{10} & = & 00011011_2
 \end{array}$$

31



Decodifica del segnale PCM

■ In ricezione: DECODIFICA

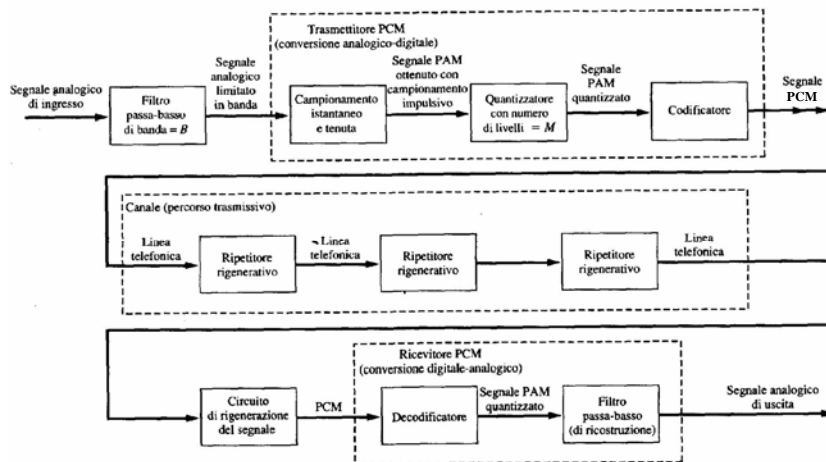
- si legge la tabella di codifica (es. codice Gray) al contrario per ottenere il segnale PAM a campionamento istantaneo di partenza
- il segnale PAM a campionamento istantaneo rappresenterà il segnale analogico di partenza, a meno dell'errore di quantizzazione



32



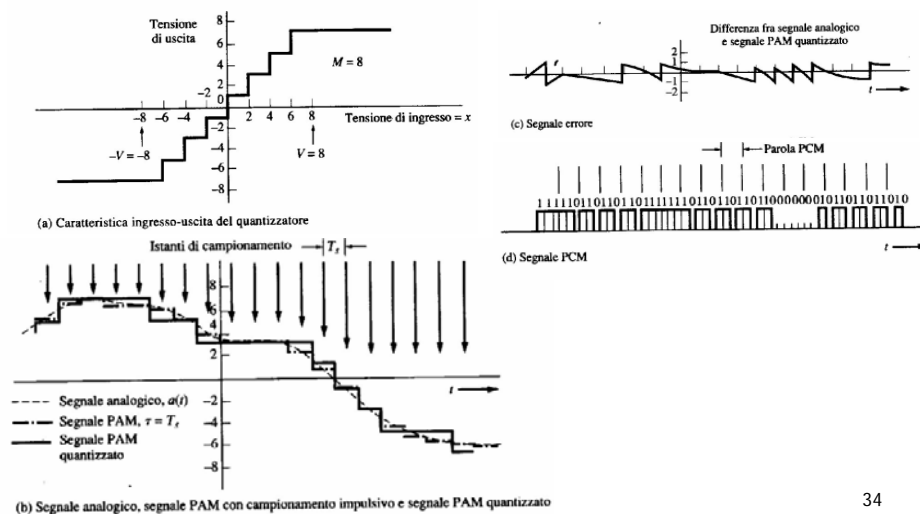
Sistema di trasmissione PCM



33



Andamento dei segnali nel sistema PCM



34



Occupazione di banda dei segnali PCM

- Per la PAM (che è una modulazione lineare) lo spettro può essere calcolato dallo spettro del segnale analogico
- Il PCM è una modulazione non-lineare del segnale analogico d'ingresso; quindi il suo spettro non è facilmente calcolabile
- La banda di un PCM dipende:
 - dalla banda del segnale analogico di partenza
 - dalla velocità di bit
 - dalla forma dell'impulso elementare usato per rappresentare i dati
 - dal codice di linea
- Cadenza di bit (bit-rate):

$$R = n f_s$$

dove n : numero di bit per parola di codice

f_s : frequenza di campionamento

Per evitare aliasing:

$$f_s \geq 2B$$

35



Occupazione di banda dei segnali PCM

- Si può dimostrare che, qualunque sia l'impulso di segnalazione e il codice di linea, la **banda per trasmettere un segnale PCM** è tale che:

$$B_{PCM} \geq \frac{1}{2} R = \frac{1}{2} n f_s$$

il valore minimo è ottenuto quando l'impulso associato ai dati binari è del tipo sinc(x)

IMPORTANTE: il valore reale dipenderà dalla scelta degli *impulsi* di segnalazione, e dal particolare *codice di linea* utilizzato

- Per impulsi rettangolari con codice di linea NRZ unipolare o NRZ polare dimostreremo che:

Banda al primo nullo

$$B_{PCM} = R = n f_s$$



Tabella seguente

36

Prestazioni di un sistema PCM con impulso rettangolare

TABELLA 3-2 PRESTAZIONI DI UN SISTEMA PCM CON QUANTIZZAZIONE UNIFORME E SENZA RUMORE TERMICO

Numero di livelli di quantizzazione usati, M	Lunghezza della parola di codice PCM, n (bit)	Banda del segnale PCM (misurata in corrispondenza del primo nullo)*
2	1	$2B$
4	2	$4B$
8	3	$6B$
16	4	$8B$
32	5	$10B$
64	6	$12B$
128	7	$14B$
256	8	$16B$
512	9	$18B$
1024	10	$20B$
2048	11	$22B$
4096	12	$24B$
8192	13	$26B$
16 384	14	$28B$
32 768	15	$30B$
65 536	16	$32B$

* B è la larghezza di banda del segnale analogico di ingresso.

Calcolata per:

- codice NRZ unipolare o polare
- impulso sagomato a impulso rettangolare
- frequenza di campionamento pari alla frequenza di Nyquist ($2B$)

37

Disturbi sul segnale PCM

■ Cause dei disturbi sul segnale PCM ricevuto a destinazione

- **distorsione da aliasing** introdotta se il segnale analogico d'ingresso non è adeguatamente limitato in banda e campionato con frequenza sufficientemente elevata
- **rumore di quantizzazione**: introdotto nel codificatore PCM a causa della quantizzazione su M livelli. SI NOTA NELLA RICOSTRUZIONE DEL SEGNALE
- **rumore di canale**
- **interferenza intersimbolica (ISI)** dovuta ad una risposta in frequenza inadeguata del canale

ISI: interferenza intersimbolica

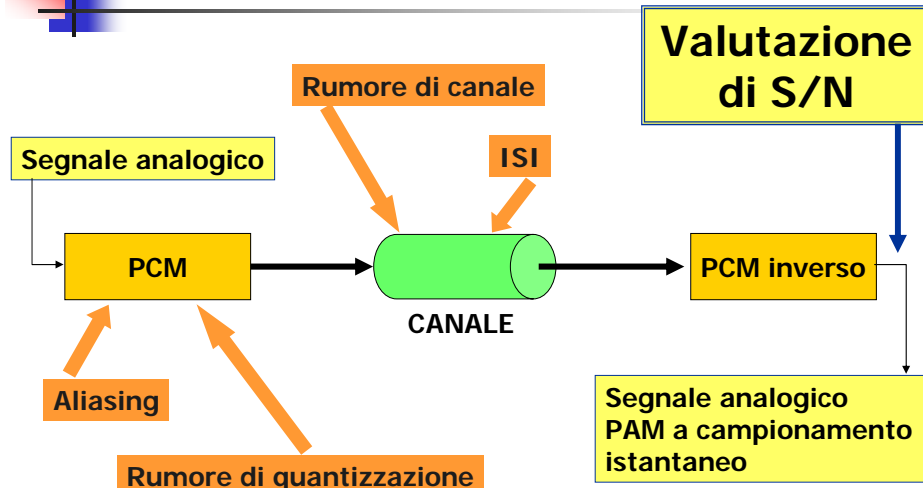
se la banda del segnale PCM viene ridotta, ad esempio per effetto di una non adeguata risposta in frequenza di un qualche apparato nel sistema, gli impulsi filtrati subiranno un allungamento temporale

ciascun impulso tenderà ad invadere intervalli adiacenti

Interferenza intersimbolica

38

Rapporto segnale-rumore in uscita al sistema PCM



39

Rapporto segnale-rumore in uscita al sistema PCM

Ipotesi:

- Campionamento effettuato con la frequenza di Nyquist → Nessun rumore di aliasing
- Utilizzo di un filtro di Nyquist a ricezione → Nessun ISI
- **Quantizzazione uniforme** e **distribuzione uniforme** del segnale su tutti i livelli

Si può dimostrare che:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk out}} = \frac{3M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e}$$

S/N tra la **potenza di picco** del segnale e la potenza media statistica totale di disturbo in uscita al sistema PCM

S/N tra la **potenza media** del segnale e la potenza media statistica totale di disturbo in uscita al sistema PCM

dove: P_e : probabilità di errore sul bit

- Nel caso in cui anche il rumore del canale sia trascurabile, abbiamo:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk out}} = 3M^2$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = M^2$$

→ Tabella

40

Rapporto segnale-rumore in dB

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10 \log_{10}(k M^2) = 10 \log_{10} k + 20 \log_{10} 2^n = \alpha + n 20 \log_{10} 2 = \alpha + 6.02n$$

$k \in \{1, 3\}$
 $\left(\frac{S}{N}\right)_{pk\ out} = 3M^2$
 $\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = M^2$
 $\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 6.02n + \alpha$ dove: $\alpha = \begin{cases} 4.77 & \text{per l'SNR di picco} \\ 0 & \text{per l'SNR medio} \end{cases}$

Regola dei 6 dB:

- Regola empirica per valutare le prestazioni di un sistema PCM
- Ipotesi:
 - non vi siano errori sui bit
 - rumore casuale: il segnale di ingresso sia sufficientemente ampio da spazzolare tutti i possibili livelli di quantizzazione
 - Quantizzazione uniforme e distribuzione uniforme del segnale su tutti i livelli

Aggiungendo un bit alla parola del segnale PCM, si migliora il rapporto segnale-rumore di 6 dB

41

Prestazioni di un sistema PCM con impulso rettangolare

TABELLA 3-2 PRESTAZIONI DI UN SISTEMA PCM CON QUANTIZZAZIONE UNIFORME E SENZA RUMORE TERMICO

Numero di livelli di quantizzazione usati, M	Lunghezza della parola di codice PCM, n (bit)	Banda del segnale PCM (misurata in corrispondenza del primo nullo)*	Rapporto Potenza segnale analogico ricevuto-Rumore di quantizzazione	
			$(S/N)_{pk\ out}$	$(S/N)_{out}$
2	1	2B	10.8	6.0
4	2	4B	16.8	12.0
8	3	6B	22.8	18.1
16	4	8B	28.9	24.1
32	5	10B	34.9	30.1
64	6	12B	40.9	36.1
128	7	14B	46.9	42.1
256	8	16B	52.9	48.2
512	9	18B	59.0	54.2
1024	10	20B	65.0	60.2
2048	11	22B	71.0	66.2
4096	12	24B	77.0	72.2
8192	13	26B	83.0	78.3
16 384	14	28B	89.1	84.3
32 768	15	30B	95.1	90.3
65 536	16	32B	101.1	96.3

* B è la larghezza di banda del segnale analogico di ingresso.

Calcolata per:

- codice NRZ unipolare o polare
- impulso sagomato a impulso rettangolare
- frequenza di campionamento pari alla frequenza di Nyquist (2B)

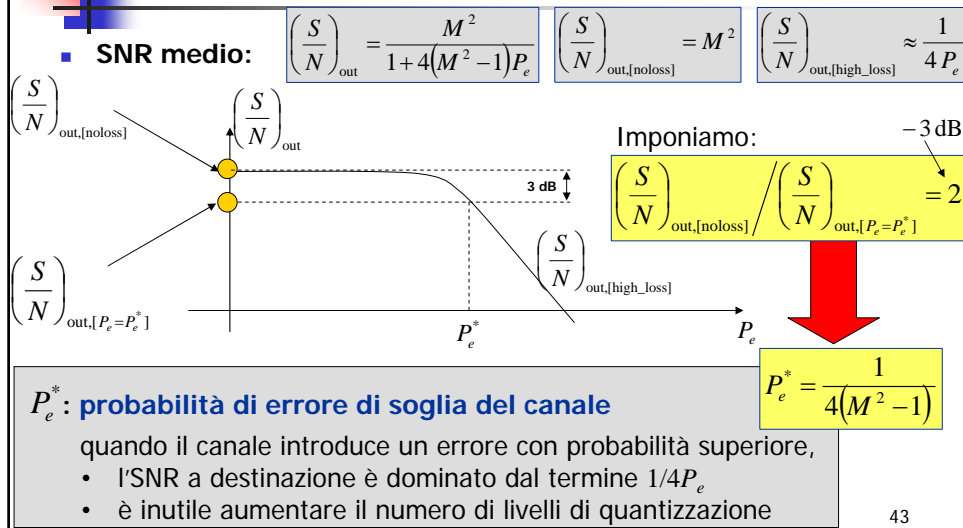
Calcolato per:

- rumore di aliasing nullo
- ISI nullo
- rumore sul canale nullo

Espresso in dB

42

Influenza della probabilità di errore di canale su SNR



Influenza della probabilità di errore di canale su SNR

■ Progettazione di un codificatore PCM

- non si conosce a-priori la probabilità di perdita del canale
- si suppone che il canale introduca un rumore non superiore a -3 dB, cioè abbia una probabilità di errore sul bit pari alla probabilità di errore di soglia
- si progetta il codificatore (scelta del numero di bit per parola di codice) in modo da avere un SNR in sorgente (prima del canale) pari al target SNR + 3 dB
- in questo modo a valle del canale si ha un SNR non inferiore a quello target

SNR per distribuzione qualunque del segnale

Ipotesi:

- Assenza di Aliasing, di rumore di canale e di ISI
- Quantizzazione uniforme

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB,pk}} = 6.02n + 4.77$$

Dimostrazione:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB,medio}} = 6.02n + 4.77 - 20 \log_{10} \frac{V_p}{x_{\text{eff}}}$$

Potenza di picco del segnale

$$P_s^{(\text{peak})} = V_p^2$$

Potenza media del segnale

$$P_s^{(\text{peak})} = x_{\text{eff}}^2 = \int_{-V_p}^{+V_p} x^2 f_s(x) dx$$

Potenza media del rumore

$$P_N = \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} N^2 f_N(N) dN = \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} N^2 \frac{1}{\Delta} dN =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{N^3}{3} \right]_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\Delta^3}{24} + \frac{\Delta^3}{24} \right) = \frac{\Delta^2}{12} \xrightarrow{\Delta = \frac{2V_p}{M}} \frac{4V_p^2}{12M^2} = \frac{V_p^2}{3M^2}$$

45

SNR per distribuzione qualunque del segnale

Potenza di picco del segnale

$$P_s^{(\text{peak})} = V_p^2$$

Potenza media del segnale

$$P_s^{(\text{peak})} = x_{\text{eff}}^2$$

Potenza media del rumore

$$P_N = \frac{V_p^2}{3M^2}$$

SNR di picco

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk}} = \frac{P_s^{(\text{peak})}}{P_N} = \frac{V_p^2}{\frac{V_p^2}{3M^2}} = 3M^2 \xrightarrow{\quad} \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB,pk}} = 6.02n + 4.77$$

SNR medio

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{medio}} = \frac{P_s^{(\text{media})}}{P_N} = \frac{x_{\text{eff}}^2}{\frac{V_p^2}{3M^2}} = 3M^2 \cdot \frac{x_{\text{eff}}^2}{V_p^2} \xrightarrow{\quad}$$

46

SNR per distribuzione qualunque del segnale sui livelli di quantizzazione

SNR medio

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{medio} = \frac{P_s^{(media)}}{P_N} = \frac{x_{eff}^2}{\frac{V_p^2}{3M^2}} = 3M^2 \cdot \frac{x_{eff}^2}{V_p^2} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB,medio} = 10 \log_{10} \left(3M^2 \cdot \frac{x_{eff}^2}{V_p^2} \right) = 20 \log_{10} \left(\sqrt{3}M \cdot \frac{x_{eff}}{V_p} \right) =$$

$$= 20 \log_{10} \left(\sqrt{3} \cdot 2^n \cdot \frac{x_{eff}}{V_p} \right) = 6.02n + 4.77 - 20 \log_{10} \left(\frac{V_p}{x_{eff}} \right)$$

NOTA: definiamo il **Fattore di Carico**: $\sigma_x = V_p / x_{eff}$

47

Fattore di carico per segnale a distribuzione uniforme

Esempio: distribuzione del segnale uniforme su tutti i livelli

- la funzione densità di probabilità del segnale è:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2V_p} & \forall x \in [-V_p, V_p] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- e quindi il quadrato del **valore efficace** del segnale è:

$$x_{eff}^2 = \int_{-V_p}^{+V_p} x^2 f(x) dx = \int_{-V_p}^{+V_p} x^2 \frac{1}{2V_p} dx = \frac{1}{2V_p} \frac{2V_p^3}{3} = \frac{1}{3} V_p^2$$

- da cui il **fattore di carico** del segnale è:

$$\sigma_x = \frac{V_p}{x_{eff}} = \frac{V_p}{V_p / \sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

NOTA: $20 \log_{10} \sigma_x = 20 \log_{10} \sqrt{3} = 4.77$

PS: non confondere la **distribuzione uniforme** del segnale con la **quantizzazione uniforme** del PCM

48



Esempio 3-1: progetto di un segnale PCM per un sistema telefonico

Un segnale telefonico analogico occupa all'incirca la banda da 300 a 3400 Hz (banda vocale o fonica). Volendo convertire tale segnale in formato PCM, dobbiamo per cominciare fissare una frequenza di campionamento. Il minimo valore è $2 \times 3.4 = 6.8\text{k}$ campioni/s.

Per poter usare un filtro anti-aliasing passa-basso di costo ragionevole, si deve fissare un'estensione ragionevole della banda di transizione, e quindi è necessario sovracampionare il segnale fino a 8000 campioni al secondo.

Questa è la frequenza di campionamento standard nei sistemi telefonici digitali in Europa e negli Stati Uniti. Rappresentando ogni campione con una parola di 8 bit otteniamo una velocità di bit pari a

$$\begin{aligned} R &= (f_s \text{ campioni/s}) (n \text{ bit/campione}) \\ &= (8\text{k} \text{ campioni/s}) (8 \text{ bit/campione}) = 64 \text{ kbit/s} \end{aligned} \quad (3-19)$$

49



Esempio 3-1: progetto di un segnale PCM per un sistema telefonico

Sempre secondo il teorema di dimensionalità, la banda minima necessaria a trasmettere questo segnale PCM binario è (3-15a)

$$(B)_{\min} = \frac{1}{2} R = 32 \text{ kHz} \quad (3-20)$$

Tale banda necessita dell'uso di un impulso tipo $(\sin x)/x$ nel segnale digitale binario. Usando al contrario impulsi rettangolari, la banda è in teoria infinita, e in pratica può essere quantificata nella banda al primo nullo:

$$B_{\text{PCM}} = R = 64 \text{ kHz} \quad (3-21)$$

La banda del segnale PCM è in questo caso pari a 64 kHz, quando la banda lorda (cioè considerando anche la zona di transizione del filtro anti-aliasing) del segnale telefonico analogico originale è pari a 4 kHz!

50

Esempio 3-1: progetto di un segnale PCM per un sistema telefonico

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk out}} = 3M^2$$

Usando la (3-17a), osserviamo che il SNR di picco è

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk out}} = 3(2^8)^2 = 52.9 \text{ dB} \quad (3-22)$$

L'aggiunta di un eventuale bit di parità non modifica naturalmente il rumore di quantizzazione. Il bit di parità è un tipo di codifica a protezione d'errore che può servire a diminuire il numero di errori provocati dal rumore di canale o dall'ISI. Nell'esempio, questi effetti sono stati comunque trascurati perché si è ipotizzato $P_e = 0$.

Un sistema di comunicazione digitale usa un segnale binario con impulso di tipo NRZ sagomato a coseno rialzato con fattore di rolloff 0.25 e con una velocità di bit di 64 kbit/s. Determiniamo la banda del segnale filtrato.

Dalla (3-74), la banda è $B = 40 \text{ kHz}$. Questa è inferiore a quella del segnale non filtrato, per il quale la banda al primo nullo è 64 kHz.

51

Applicazione del PCM a sistemi audio ad alta fedeltà

- Nei sistemi audio ad alta fedeltà, i segnali audio sono registrati in PCM
- Per avere un S/N medio di 90 dB [vedi tabella 3-2 precedente], necessitiamo di parole PCM di $n=15$ bit
- Se supponiamo che il segnale analogico abbia una banda $B=20 \text{ kHz}$ e se utilizziamo un codice di linea NRZ UNIPOLARE

Banda al primo nullo $\rightarrow B_{PCM} = 2 \cdot 20 \text{ kHz} \cdot 15 = 600 \text{ kHz}$

$B_{PCM} = R = n f_s$ $B_{PCM} \gg B$

- Anche se l'espansione di banda è notevole, raramente gli apparati analogici superano un S/N medio di 70 dB!!!

Il PCM utilizzato ad esempio per i compact disc (CD) audio

PCM a 16 bit con frequenza di campionamento 44.1 kHz

52



Formati audio più comuni

	CD Audio	DAT	G.721	A-law μ-law
Frequenza di campionamento (kHz)	44.1	48	8	8
Dimensione dei campioni (bits)	16	16	16/4	8
Quantizzazione	Lineare	Lineare	Lineare	Log
Numero di canali	2	2	1	1
Tasso dati per canale (1000 bit/sec)	705	708	32	64
Codifica	PCM	PCM	ADPCM	PCM
Qualità	Molto alta	Molto alta	Media	Telefono

53



Quantizzazione non uniforme

- **Proprietà dei segnali vocali analogici:**
 - **Distribuzione delle ampiezze non uniforme:** i valori vicini allo zero si presentano con maggiore probabilità rispetto a quelli agli estremi della dinamica permessa

Soluzione:

QUANTIZZAZIONE NON UNIFORME

Utilizzo di un passo di quantizzazione piccolo per valori dell'ampiezza vicini allo zero, e grande per valori maggiori

54



Quantizzazione non uniforme

Utilizzo di un passo di quantizzazione piccolo per valori dell'ampiezza vicini allo zero, e grande per valori maggiori

UNIFORME



NON UNIFORME



55



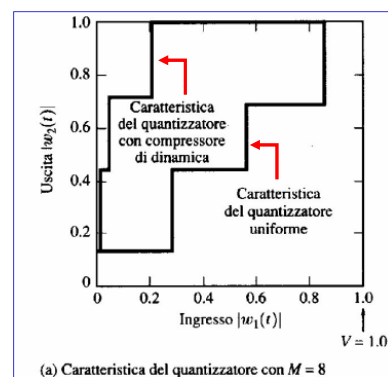
Tecnica equivalente (utilizzata nella pratica)

■ Definizione: Compressore

- dispositivo non lineare con amplificazione decrescente al crescere dell'ampiezza del segnale

■ Lo stesso risultato della quantizzazione non uniforme si ottiene:

- elaborando dapprima il segnale analogico con un compressore
- e poi codificando il segnale in uscita dal compressore con un circuito PCM standard a quantizzazione uniforme



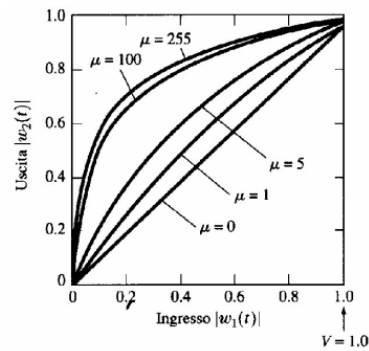
56



Compressione a legge μ

$$|w_2(t)| = \frac{\ln(1 + \mu \cdot |w_1(t)|)}{\ln(1 + \mu)}$$

- **dove:**
 - il segnale $w_1(t)$ è normalizzato al valore di picco nell'intervallo $(-1, +1)$
 - μ è un parametro positivo
- **Nota:**
 - $\mu=0$ corrisponde alla quantizzazione uniforme (amplificazione lineare)
 - Aumentando μ il grado di compressione aumenta (non-lineare)
 - Il valore $\mu=255$ è utilizzato nelle reti telefoniche nord-americane e giapponesi
 - In Europa si utilizza la legge di compressione A



(b) Caratteristica del compressore di dinamica μ -law

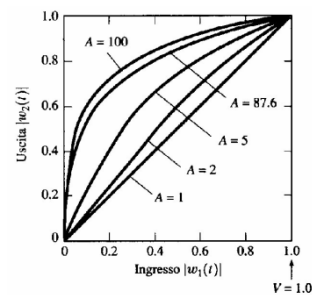
57



Compressione a legge A (in Europa)

$$|w_2(t)| = \begin{cases} \frac{A \cdot |w_1(t)|}{1 + \ln(A)} & 0 \leq |w_1(t)| \leq \frac{1}{A} \\ \frac{1 + \ln(A \cdot |w_1(t)|)}{1 + \ln(A)} & \frac{1}{A} < |w_1(t)| \leq 1 \end{cases}$$

- **dove:**
 - il segnale $w_1(t)$ è normalizzato al valore di picco nell'intervallo $(-1, +1)$
 - A è un parametro positivo



(c) - Caratteristica del compressore di dinamica A -law

58

Rapporto segnale-rumore in ricezione

- Il ricevitore deve effettuare l'operazione di espansione:
 - decompressione con una legge reciproca di quella in trasmissione
- L'operazione di companding (compressing/expanding) ha lo scopo di aumentare il rapporto segnale-rumore
- Si può dimostrare che:
 - per legge di quantizzazione μ , il rapporto segnale-rumore di picco è:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{pk} = \frac{3M^2}{\ln(1+\mu)^2 \cdot \left[\left(\frac{x_{eff}}{V_p}\right)^2 + \frac{4}{\mu} \int_0^1 x f(x) dx + \frac{1}{\mu^2} \right]}$$

Nota: rispetto alla quantizzazione uniforme è cambiata la potenza del rumore

V_p : valore massimo del quantizzatore
 x_{eff} : valore efficace del segnale analogico
 $f(x)$: funzione densità di probabilità del segnale analogico sui livelli

$$x_{eff}^2 = \int_{-V}^{+V} x^2 f(x) dx$$

V_p/x_{eff} : **fattore di carico**

59

Rapporto segnale-rumore in ricezione

In generale, l'SNR medio è:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB,medio}^{(Quant_Uniforme)} = 6.02n + 4.77 - 20\log_{10} \frac{V_p}{x_{eff}}$$

Legge A

$|x_{eff}| \rightarrow 0$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB,medio}^{(A)} = \left(\frac{S}{N}\right)_{dB,medio}^{(Quant_Uniforme)} + 20\log_{10} \frac{A}{1+\ln A} \text{ dB}$$

$|x_{eff}| \rightarrow V_p$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB,medio}^{(A)} = 6.02n + 4.77 - 20\log_{10}(1+\ln A) \text{ dB}$$

non dipende dalla distribuzione del segnale sui livelli

Legge μ

$|x_{eff}| \rightarrow 0$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB,medio}^{(\mu)} = \left(\frac{S}{N}\right)_{dB,medio}^{(Quant_Uniforme)} + 20\log_{10} \frac{\mu}{\ln(1+\mu)} \text{ dB}$$

$|x_{eff}| \rightarrow V_p$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB,medio}^{(\mu)} = 6.02n + 4.77 - 20\log_{10}(\ln(1+\mu)) \text{ dB}$$

non dipende dalla distribuzione del segnale sui livelli

60

SNR medio in ricezione: confronto *companding* vs. *non-companding*

CASO di PCM telefonico ($n=8$) e legge μ

Distribuzione $f(x)$ gaussiana del segnale

■ **NOTA: il rapporto segnale-rumore medio in ricezione**

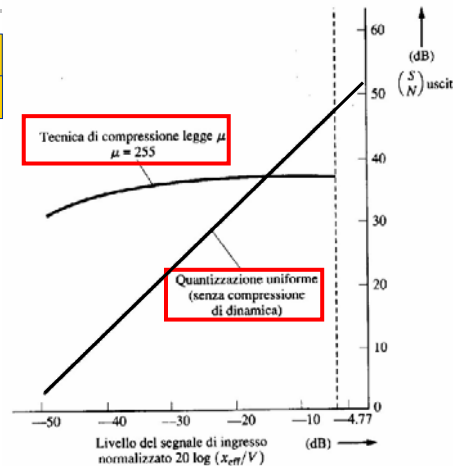
- dipende dal livello del segnale per la **quantizzazione uniforme**
- è relativamente insensibile al livello del segnale in caso di **companding**

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB, medio}^{(Quant_Uniforme)} = 6.02n + 4.77 - 20\log_{10} \frac{V_p}{x_{eff}}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB, medio}^{(\mu)} \approx 6.02n + 4.77 - 20\log_{10} (\ln(1 + \mu)) \text{ dB}$$

per $\mu=255$

$$4.77 - 20\log_{10} [\ln(1 + \mu)] = 4.77 - 14.878 = -10.11$$



61

Modem PCM V.90 - 56kbit/s

vedi www.v90.com

- I modem precedenti (V.34 e V.34 bis) assumevano che entrambi i sistemi remoti avessero accesso analogico
- La rete telefonica agiva pensando di trasmettere segnali vocali
- Dato il limite massimo teorico per la bitrate della rete telefonica analogica di 35 kbit/s, V.34 e V.34.bis permettevano una velocità di 28.8 e 33.6 kbit/s, rispettivamente
- Il modem per PC di tipo V.90:
 - assume che una delle due parti abbia accesso digitale e che, in particolare nel downstream (flusso verso l'host con accesso analogico) ci sia una sola tratta analogica



- Il downstream può avvenire a velocità fino a 56 kbit/s
- L'upstream (flusso dal client con accesso analogico) continua ad essere effettuato con standard V.34 a 33.6 kbit/s

62



Modem PCM V.90 - 56 kbit/s

■ Il modem per PC di tipo V.90:

- nella tratta downstream codifica, non modula come i modem precedenti
- usa un segnale analogico in banda base su doppino in rame
- il segnale viene pre-quantizzato con codificatore a legge A
- per non trasmettere livelli troppo vicini tra loro (alta vulnerabilità) vengono usati solo **64 livelli positivi** e **64 negativi** (solo 7 degli 8 bit della parola PCM) per una velocità di bit di 56 kbit/s
- il clock del modem dell'host viene sincronizzato con quello a 8 kHz del codificatore PCM di centrale, in modo da catturare i livelli di quantizzazione agli istanti corretti
- il rapporto segnale-rumore minimo per avere 56 kbit/s è 51.1 dB [formula di Shannon sulla capacità del canale]

$$C = 56 \text{ kbit/s}$$

$$B = 3.3 \text{ kHz}$$

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right)$$

B : larghezza di banda del canale in Hz

S/N : rapporto segnale - rumore (in scala lineare, e non in dB)
all'ingresso del ricevitore

$$S/N = 10 \log_{10} (2^{C/B} - 1) = 51.084$$

I dati trasmessi sono proprio i bit che identificano il livello di quantizzazione



Modem PCM V.90 - 56 kbit/s

■ Cause di riduzione di velocità di trasmissione:

- Rumore sulla tratta analogica tale che il **rapporto segnale-rumore è inferiore a 51.1 dB**
 - in tal caso il modem commuta automaticamente a velocità inferiori
- Connessione modem-modem con **almeno due tratte analogiche**:
 - il segnale analogico prodotto con modem V.90 non può essere inviato su di una linea telefonica commutata tradizionale (analogica) per traffico vocale per connessione diretta ad un altro modem, anche se V.90
 - in tal caso infatti il segnale del modem verrebbe RICONVERTITO in digitale da un codificatore PCM standard di centrale per segnali vocali, che non sarebbe sincronizzato con il clock del PCM originario
 - in tal caso il modem commuta su di un modo di funzionamento non PCM (V.34 a 28.8 kbit/s oppure V34bis a 33.6 kbit/s)