

# UDBUDS- OG EFTERSPØRGSELSKURVER

Lars Ravn-Jonsen, Susanne Stender og Wickie Bekker Lassen

1. marts 2020

Version 0.4

## 1. EFTERSPØRGSELSKURVE

---

Storebælt deler det danske elmarked i to; Øst og Vest, der begge er forbundet til det internationale marked. Vestdanmark er forbundet til bl.a. det tyske elmarked, men disse forbindelser har begrænset kapacitet, hvorfor hovedparten af strømmen skal produceres i Vestdanmark. I den første opgave skal du starte med at indlæse regnearket; `produktion.xlsx`, der indeholder produktions data for CHP (Combined Heat and Power, fx affaldsforbrænding), sol og vind opgjort time for time i perioden 1/12 – 13/12. Derudover, er der data for, hvor stort forbruget har været i samme periode. Regnearket her er defineret som området; `data`, der indeholder matrixen med tal, samt området; `kolonne`, der indeholder kolonneoverskrifter.

**Øvelse 1.** Plot kolonnen; forbrug, mod tiden som linje. Hvordan er kurven? Er der system i kurven?

Kolonne vind viser vindproduktion i Vestdanmark.

**Øvelse 2.** Plot vindproduktionen mod tiden som linje. Hvordan er kurven? Er der system i kurven?

Kolonnen CHP viser produktion fra lokale kraft-varme værker. Kombineret kraft varme værker er specielt udbredt i Danmark. Først udnyttedes energien i brændslet, det kan være kul, gas, olie, biobrændsel eller affald til at

producerer elektricitet. Derefter udnyttes overskudsvarmen fra elproduktionen i et fjernvarme net; dvs det sendes rundt i byen i rør til hus og bruges til varmt vand og opvarmning. Disse værker har stor udnyttelse af brændslet, og de har derfor prioritet i elproduktion. Ofte har disse varmegværker et varmelager så produktionen af el kan ske på tider hvor der er gode priser og varmen gemmes ca et døgn.

**Øvelse 3.** Plot produktionen fra lokale kraft-varme værker mod tiden som linje. Hvordan er kurven? Er der system i kurven?

Kolonne sol, viser produktion fra solceller.

**Øvelse 4.** Plot produktionen fra solceller mod tiden som linje. Hvordan er kurven? Er der system i kurven?

Nu har vi nogle produktions tal time for time: vind, sol og CHP. Vi ønsker nu at plotte dem akkumuleret dvs., som en sumfunktion. For at gøre det skal produktionerne lægges sammen.

**Øvelse 5.** Plot først CHP, plottes så (CHP + vind ) og endelig plottes (CHP + vind + sol). Plot også forbruget i samme diagram.

Forskellen mellem kurverne dvs. differencen mellem „vind+sol+CHP-kurven“ og „forbrugs-kurven“, skal da leveres af el fra et af de store kraftværker.

**Øvelse 6.** Udregn forskel mellem produktionen (CHP + vind + sol) og forbruget. Det er efterspørgslen efter el produceret af de store kraftværker. Plot denne efterspørgsel.

**Øvelse 7.** Beskriv kurven er den periodiske over dagen? Begrund dit svar.

## 2. UDBUDSKURVER OG PRODUCENTERS OMKOSTNING

---

Kraftværker producerer ikke med ens teknologier og har derfor forskellige omkostninger ved produktion. Produktionsomkostningerne kan deles op i faste og variable udgifter; hvor de faste udgifter er uafhængige af produktionsmængden. I nedenstående tabel 1 opsummeres de Vestdanske kraftværker, deres kapacitet (på i alt 2442 MW), hvilken teknologi

TABEL 1: Vstdanske kraftværker

	Kraftværk	Kapacitet MW	Teknologi	Variable omkostning kr/MWh
1	Enstedværket	38	Biomasse	243
2	Esbjergværket	407	Kul	112
3	Fynsværket I	406	Kul	124
4	Fynsværket II	34	Biomasse	210
5	GASTURBINE	250	Gasturbine	595
6	Herningværket	89	Biomasse	180
7	Nordjyllandsværket	411	Kul	106
8	Skærbækværket	427	Gas	361
9	Studstrupværket	380	Kul	109

der anvendes, samt hvilke omkostninger der er i kr./MWh. Data findes også i regnearket `kraftværk.xlsx`. Regnearket har defineret et område data der indeholder matrixen med tal og området `kolone` der indeholder kolonneoverskrifter.

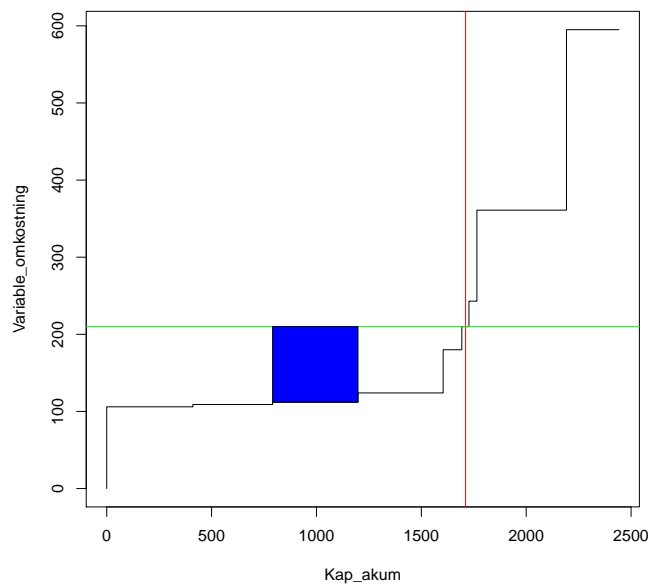
Den strøm, som værkerne producerer, sælges til elnettet til den markedspris, der er på det givne tidspunkt. Prisen varierer over tid, afhængig af, hvor meget el der produceres i vindturbiner, solceller og kraftvarmeværker, samt hvor meget strøm, der efterspørges af forbrugerne. Forskel på værkets variable omkostninger og den pris de får for den producerede el, kaldes dækningsbidraget, der går til at dække værkets faste udgifter og resten til overskud til ejeren.

**Øvelse 8.** Hvis prisen ligger på 250 kr./MWh, hvad er så dækningsbidraget for Fynsværket I (kul) ved el produktion? Hvad er den fra Fynsværket II (biomasse)?

Det forventes, at der kl 12.00 er en vindproduktion på 62 MW, en solcelleproduktion på 23 MW, og en lokal CHP (Combined Heat and Power, fx affaldsforbrænding) produktion på 227 MW. Samtidig er det forventede behov for elektricitet 2023 MW. Den elektricitet, der ikke er produceret af vind, sol og CHP skal produceres af kraftværkerne i tabel 1.

**Øvelse 9.** Hvor meget skal kraftværkerne producere totalt?

Når der fastsættes en pris vil alle kraftværker med variable omkostninger på eller under markedsprisen producere el; mens de, der har omkostninger større end prisen, ligger stille. For at finde ud af hvem, der skal producere hvor meget el, til hvilken pris, konstrueres en udbudskurve.



FIGUR 1: Ordnet omkostningskurve. Den røde linje er efterspørgslen og den grønne linje er prisen. Den blå figur illustrerer Ebjergværkets dækningsbidrag.

**Øvelse 10.** Lav et diagram med produktion i MW ad x-aksen og variable omkostninger på y-aksen. Opstil de forskellige producenter i voksende rækkefølge for variable omkostninger, og plot dem i diagrammet (hint: det bliver en trappe)

**Øvelse 11.** Plot nu efterspørgslen efter el fra spørgsmål 9 i samme diagram. (En lodret linje)

Der hvor efterspørgslen skærer denne ordnede omkostningskurven fastsætter markeds prisen (på y-aksen).

**Øvelse 12.** Hvad er prisen og hvilke kraftværker producerer el ved denne pris? — hvorfor?

**Øvelse 13.** Når prisen er som ovenfor, hvor meget producerer Esbjergværket, og hvor stort er dækningsbidraget per Mwh? Hvad er samlet dækningsbidrag, dvs for hele produktionen?

Som det ses er Esbjergværkets dækningsbidrag af samme størrelse som arealet af rektanglet mellem omkostningskurven og prisen, se figur 1. Arealet er det samme som integralet, så det samlede dækningsbidrag ( $DB$ ) for el produktionen kan beskrives ved:

$$DB = \int_0^D p - c(q) dq$$

Hvor  $q$  er produktionen (quantity),  $D$  efterspørgslen (demand),  $p$  prisen, og  $c(q)$  er de variable omkostninger (cost) organiseret som udbudskurve. For en trappe funktion som denne udbudskurve, bliver integralet det samme som summen (overvej hvorfor), og kan derfor beskrives ved:

$$DB = \int_0^D p - c(q) dq = \sum_{i=1}^5 (p - c_i) q_i$$

Hvor  $i$  er kraftværket og nummer 5 derfor er Herningværket efter rangeringen i opgave 3.  $c_i$  og  $q_i$  er henholdsvis variable omkostninger og produktion for værk  $i$ . (Værk 6 har okr i dækningsbidrag og det gør derfor ikke nogen forskel om det er med eller ej).

**Øvelse 14.** Find det samlede dækningsbidrag i kr./time fra kraftværkerne produktion ved at udregne integralet som vist i figur 2 vha en sum af „arealblokke“.

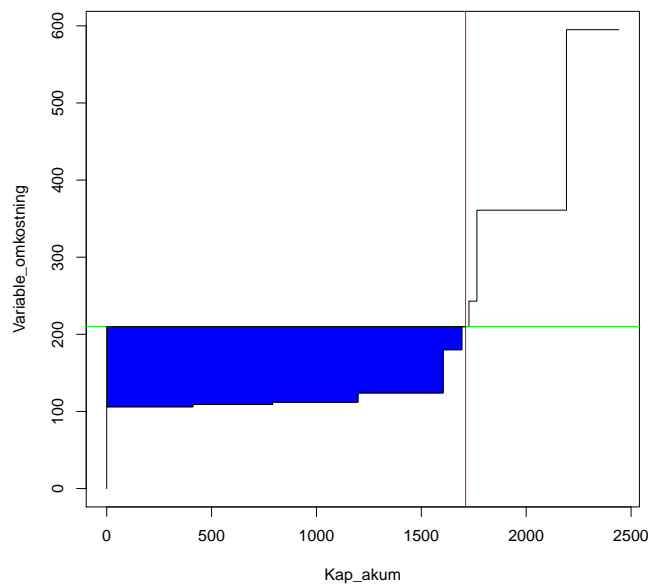
Som det ses af ovenstående, er denne ordnede omkostningskurven også en udbudskurve; det er sammenhængen mellem den mængde strøm, der vil være på markedet til en given pris. Det betyder også at når efterspørgslen (hvor meget strøm der skal produceres) er bestemt, fastsætter denne omkostnings- /udbudskurven prisen på markedet.

**Øvelse 15.** Lav en funktion der føre efterspørgsel  $D$  over i prisen  $p$  :  $\mathbb{R}_{\geq 0} \curvearrowright \mathbb{R}$ . Da omkostningskurven er en trappefunktion bliver udbudsfunktion det også (en diskontinuert function).

**Øvelse 16.** Tag nu den efterspørgsel der er beregnet ud fra data for vind, sol, CHP og forbrug i opgave 6 og find prisen til hver time.

**Øvelse 17.** Plot prisen mod tiden og plot efterspørgslen. Sammenhold de to kurver, hvornår er prisen høj? Hvor lav kan prisen blive?

Vi har senere brug for en kontinuert udbydsfunktion og vi skal derfor lave en tilnærmelse til trappefunktion. Som punkter tager vi alle de steder hvor trappen skifter retning.



FIGUR 2: Ordnet omkostningskurve. Den røde linje er efterspørgslen og den grønne linje er prisen. Den blå figur illustrerer det samlede dækningsbidrag.

**Øvelse 18.** Find et passende polynomium at tilnærme trappefunktionen med, argumenter hvorfor 3.grads måske passer og find/kommenter på  $R^2$  (forklaringsgraden).

**Øvelse 19.** Man kan bruge andre typer af funktioner til modeltilnærmelser, kom med eksempler på hvilke og forklar, samt argumenter for, hvad vi her bør bruge.

**Øvelse 20.** Udregn det tilnærmede dækningsbidrag ud fra polynomiet. Integralet skrives som:

$$DB = \int_0^D p - c(q) dq$$

**Øvelse 21.** Begrund hvorfor  $DB$  kan udregnes vha dette bestemte integral, hvad svarer  $p$  og  $c(q)$  til på fig 2. Hvorfor kan  $c(q)$  erstattes af det fundne 3. gradspolynomium, og hvilken betydning har konstanterne, den delvise integration, samt indsættelsen af grænser i opgaven?

**Øvelse 22.** Sammenhold resultat fra opgave 21 med dækningsbidraget fundet i opgave 14 og udregn afvigelse i %. Hvilke tal er det rette og hvilket er en tilnærmelse? Overvej validiteten ved de omtalte metoder, samt hvorledes der kan laves forbedringer med andre matematiske metoder.

### 3. ELASTIK UDBUD

---

Tage udgangspunkt i, at efterspørgslen med nuværende fastprissystem er 1711 (svar fra opgave 12), og lad os antage at; hvis der var en varierende pris over tid, vil efterspørgslen (på dette tidspunkt) være

$$p(D) = 1565 - 0.8D$$

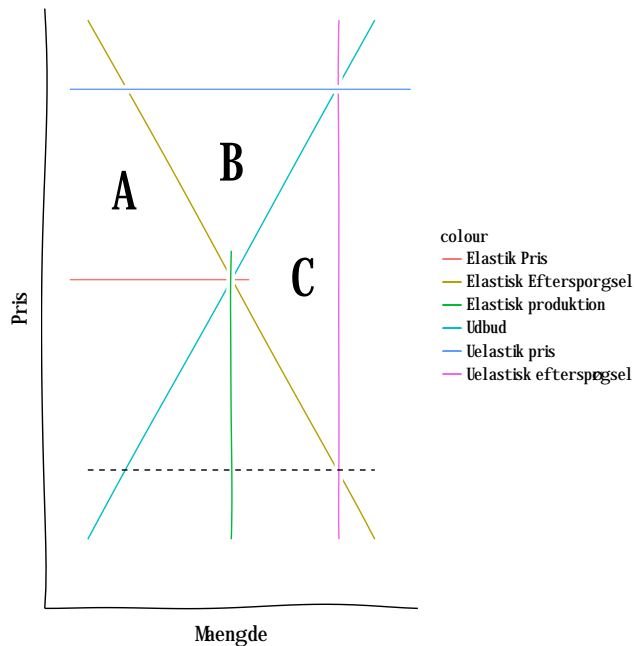
Denne efterspørgselsfunktion er et rent gæt; vi ved simpelthen ikke hvilken hældning kurven har, og hvad b-værdi den har, dvs. hvilken højde den ligger i. Nogle gange vil efterspørgslen være under det vi ser i dag, og nogle gange over. Hældningen vil være skråt nedad, men hvor stejlt vil afhænge af folks mulighed for, at flytte forbruget. For nu at få en kontinuert udbudskurve, bruger vi det tilnærmede 3. grads polynomium, som vi estimerede i ovenstående opgave 18:

$$p(S) = \text{poly}(3, S)$$

Vi har da følgende situation som beskrevet i notat 'Samfundsøkonomisk tab ved fastpris på elmarkedet' og vist i figur 3: Den lilla kurve er den uelastiske efterspørgsel og produktion, der skærer udbudskurven og giver den blå uelastiske pris, som bliver betalt af elselskaberne til elproducenterne. Forbrugerne betaler den pris, der er indikeret med den stiplede linje, til elselskaberne, og elselskaberne udjævner så forskellen i priser over tid, så forbrugeren har en fast pris. Hvis et frit marked havde etableret prisen, var prisen blevet lig med skæringen mellem den elastiske efterspørgsel og udbudskurven, og resultere i den røde pris, ved den grønne produktion. Som det fremgår af notatet er område C samfundøkonomisk tab.

**Øvelse 23.** Udregn det samfundsmæssige tab, arealet af figur C, når efterspørgslen er

$$p(D) = 1565 - 0.8D$$



FIGUR 3: Efterspørgsel med fastpris og markedspris. Situation hvor markedsbaseret efterspørgsels (elastisk) er lavere end fastpris efterspørgsel (uelastisk).

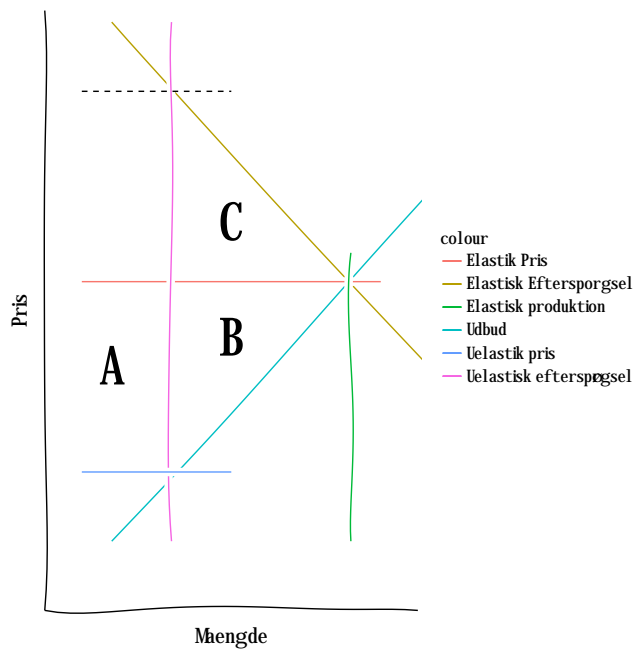
og udbudskurven som det tilnærmede polynomium og efterspørgslen under fast pris er 1711.

Ovenfor har vi undersøgt et fastprissystem overfor udbud og efterspørgsel, som normalt er styret af pris, og fandt, det samfundsøkonomisk tab, når efterspørgselskurven giver en pris, der er lavere end den faste pris. Nu antages at efterspørgsel kurven giver en højere pris end den faste. Antag fx at udbudskurven er givet ved

$$p(D) = 1750 - 0.8D$$

Situationen er nu som figur 4. Nu er prisen lav for producenterne, fordi efterspørgslen under fastprisen er lav (forbrugernes pris er der, hvor den uelastiske efterspørgsel, skærer den elastiske efterspørgsel, altså den stiplede linje). Som beskrevet i notatet er der for samfundet et tab i form af trekant B og C.





FIGUR 4: Fast pris efterspørgsel og markeds pris. Efterspørgselskurve højre end fast pris.

**Øvelse 24.** Udregn det samfundsmæssige tab (trekant BC), når efterspørgsen er

$$p(D) = 1750 - 0.8D$$

Og udbudskurven som det tilnærmende polynomium og efterspørgslen under fastpris er 1711